

Κίνηση σε μια διάσταση

Θεωρούμε κίνηση κατά μήκος μιας ευθύγραμμης διαδρομής. Η απόσταση x του κινούμενου σώματος από ένα σημείο του άξονα της κίνησης που παραμένει ακίνητο χρησιμοποιείται ως συντεταγμένη. Το πρόσημο του x υποδεικνύει το μέρος του άξονα που βρίσκεται το σώμα. Η εκλογή της θετικής φοράς του x -άξονα γίνεται αυθαίρετα.

Συχνά χρησιμοποιείται για την περιγραφή της κίνησης ένα γράφημα θέσης – χρόνου, ($x \rightarrow t$), το οποίο παριστάνει την κίνηση μιας σημειακής μάζας σε δύο διαστάσεις (άξονες). Ο οριζόντιος άξονας δείχνει τον χρόνο t , ο κατακόρυφος άξονας την θέση x (συντεταγμένη). Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι χρησιμοποιούμε μια συνάρτηση θέσης $x(t)$.

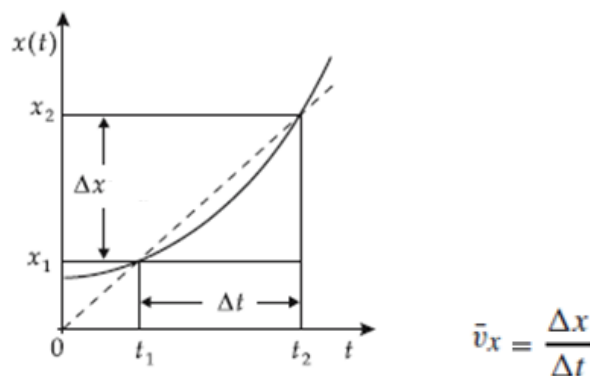
Ταχύτητα

Είναι μια ποσότητα που χαρακτηρίζει την κίνηση μιας σημειακής μάζας σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή. Συνήθως διακρίνουμε σε μέση ταχύτητα και σημειακή ταχύτητα.

Μέση Ταχύτητα

1. Ορισμός

Η μέση ταχύτητα \bar{v}_x ως προς ένα χρονικό διάστημα $\Delta t \neq 0$ δίδεται από το πηλίκο του τμήματος της διαδρομής Δx που διανύθηκε κατά την διάρκεια αυτού του διαστήματος προς το χρονικό διάστημα Δt που απαιτήθηκε



$$\text{μέση ταχύτητα} = \frac{\text{τμήμα διαδρομής}}{\text{χρονικό διάστημα}}$$

$\bar{v}_x = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$ $= \frac{x(t_1 + \Delta t) - x(t_1)}{(t_1 + \Delta t) - t_1}$ $= \frac{\Delta x}{\Delta t}$	Σύμβολο	Μονάδα	Ποσότητα
	\bar{v}_x	m/s	Μέση ταχύτητα
	x_1, x_2	m	Θέση τις στιγμές t_1, t_2
	$x(t)$	m	Συνάρτηση θέσης
	t_1, t_2	s	Αρχική και τελική χρονική στιγμή
	Δx	m	Τμήμα διαδρομής που καλύφθηκε
Δt	s	Χρονική διάρκεια	

2. Μονάδες

Η μονάδα της ταχύτητας είναι το μέτρο ανά δευτερόλεπτο, συμβολικά 1m/s . Ένα μέτρο ανά δευτερόλεπτο είναι η ταχύτητα ενός σώματος το οποίο καλύπτει 1 μέτρο σε 1 δευτερόλεπτο.

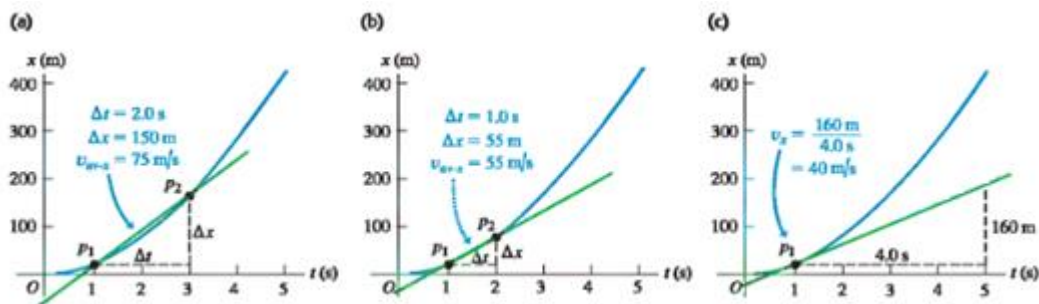
3. Παράδειγμα

Ένα σώμα που διανύει 120 m σε 30 s ταξιδεύει με μέση ταχύτητα $v_x = \frac{120\text{m}}{30\text{s}} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

4. Παρατήρηση

Η μέση ταχύτητα μπορεί να έχει θετικό ή αρνητικό πρόσημο ανάλογα με το αν η κίνηση γίνεται προς την θετική ή αρνητική φορά του άξονα. Η μέση ταχύτητα εξαρτάται γενικά από το χρονικό διάστημα εκτός της περίπτωσης της κίνησης με σταθερή ταχύτητα

Σχόλιο

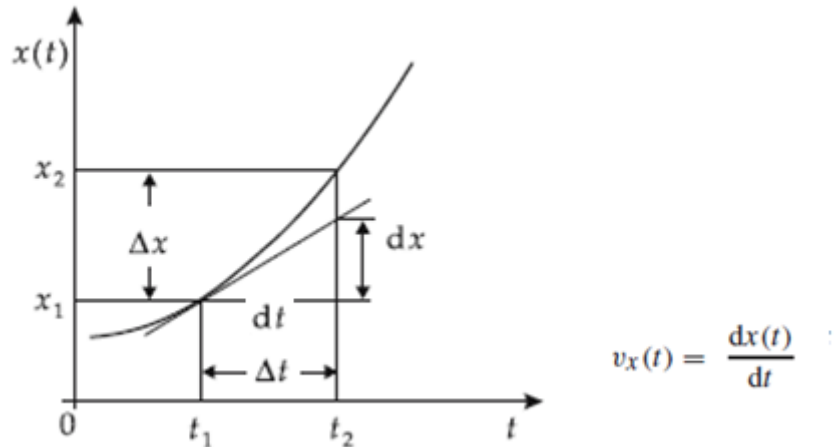


Εικόνα : Υπολογίζοντας την μέση ταχύτητα σε διαρκώς και μικρότερα διαστήματα χρόνου στα a), b), c) παρατηρούμε ότι η τιμή της τείνει προς μια τιμή την οποία λέμε στιγμιαία ταχύτητα αφού η χρονική διάρκεια «τέίνει να συμπέσει» αλλά ποτέ δεν συμπίπτει με μια στιγμή. Η στιγμιαία ταχύτητα σε κάθε δοσμένο σημείο ισούται με την κλίση της εφαπτομένης στο διάγραμμα θέσης - χρόνου

Στιγμαία ταχύτητα

1. Ορισμός

Είναι το όριο της μέσης ταχύτητας για χρονικά διαστήματα που τείνουν στο μηδέν.



στιγμαία ταχύτητα			
	Σύμβολο	Μονάδα	Ποσότητα
$v_x(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{d}{dt}x(t) = \frac{dx(t)}{dt}$	$v_x(t)$	m/s	Στιγμαία ταχύτητα
	$x(t)$	m	Θέση την στιγμή t
	Δt	s	Χρονική διάστημα
	Δx	m	Τμήμα διαδρομής που καλύφθηκε

2. Παρατήρηση

Η συνάρτηση $x(t)$ παριστάνει την συντεταγμένη θέσης x του κινούμενου σώματος κάποια χρονική στιγμή t . Στο διάγραμμα θέσης- χρόνου ($x \rightarrow t$) η στιγμιαία ταχύτητα v_x είναι η κλίση της εφαπτομένης της $x(t)$ την στιγμή t .

3. Παρατήρηση

- $v_x > 0$ $\Delta x > 0$ και $x(t+\Delta t) > x(t)$. Το σώμα κινείται προς την θετική φορά του άξονα
Η καμπύλη ($x \rightarrow t$) αυξάνει
- $v_x = 0$ $\Delta x = 0$ και $x(t+\Delta t) = x(t)$. Στο σύστημα συντεταγμένων το σώμα ηρεμεί
Η v_x εφάπτεται οριζόντια στην καμπύλη ($x \rightarrow t$)
- $v_x < 0$ $\Delta x < 0$ και $x(t+\Delta t) < x(t)$. Το σώμα κινείται προς την αρνητική φορά του άξονα
Η καμπύλη ($x \rightarrow t$) φθίνει

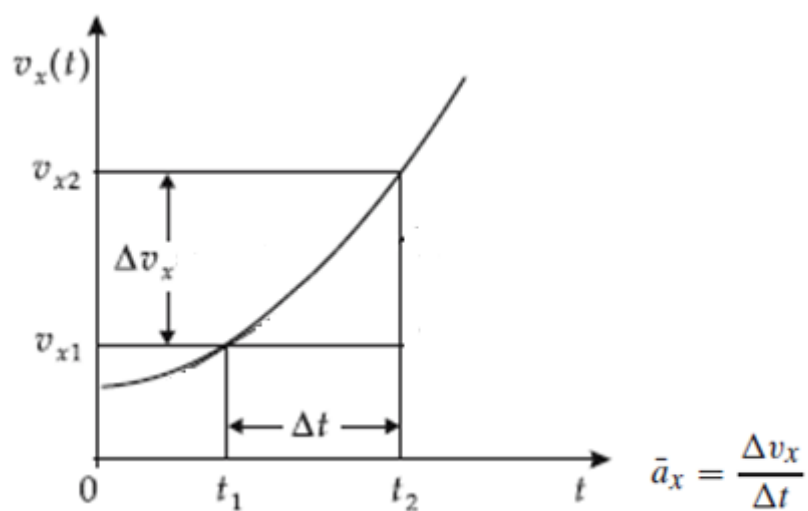
Επιτάχυνση

Αναφέρεται σε μια μη-ομαλή κίνηση δηλαδή μια κίνηση όπου η ταχύτητα μεταβάλλεται. Όπως και η ταχύτητα μπορεί να είναι θετική ή αρνητική. Για επιτάχυνση μιλάμε και όταν έχουμε αύξηση της ταχύτητας και όταν έχουμε μείωση της

Μέση Επιτάχυνση

1. Ορισμός

Η μέση επιτάχυνση \bar{a}_x ορίζεται ως το πηλίκο της μεταβολής της ταχύτητας Δv_x που συμβαίνει σε ένα χρονικό διάστημα Δt προς το χρονικό διάστημα Δt



$\text{μέση επιτάχυνση} = \frac{\text{μεταβολή της ταχύτητας}}{\text{χρονικό διάστημα}}$			
$\bar{a}_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{x2} - v_{x1}}{t_2 - t_1}$	Σύμβολο	Μονάδα	Ποσότητα
	\bar{a}_x	m/s^2	Μέση επιτάχυνση
	Δv_x	m/s	Μεταβολή της ταχύτητας
	Δt	s	Χρονική διάρκεια
	v_{x1}, v_{x2}	m/s	Αρχική και τελική ταχύτητα
t_1, t_2	s	Αρχικός και τελικός χρόνος	

2. Μονάδες

Η μονάδα της επιτάχυνσης στο S.I είναι μέτρα ανα δευτερόλεπτο στο τετράγωνο , m/s^2 . Η επιτάχυνση ενός σώματος είναι 1 m/s^2 αν η ταχύτητά του αυξάνεται (μειώνεται) κατά 1 m/s το δευτερόλεπτο.

3. Παρατήρηση

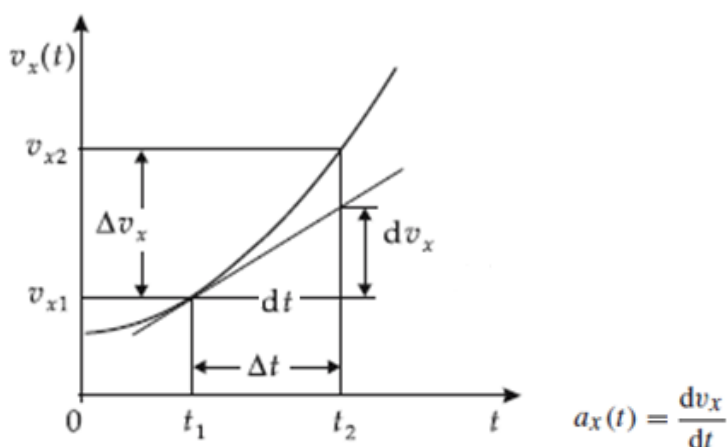
Αν έχουμε την μέση επιτάχυνση τότε για την τελική ταχύτητα ισχύει :

$$v_{x2} = v_{x1} + \bar{a}_x \cdot \Delta t.$$

Στιγμαία επιτάχυνση

1. Ορισμός

Ορίζεται ως το όριο της μέσης επιτάχυνσης όταν το χρονικό διάστημα τείνει στο μηδέν.



στιγμαία επιτάχυνση			
	Σύμβολο	Μονάδα	Ποσότητα
$a_x(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt} v_x(t)$	Δt	s	Χρονική διάστημα
	Δv_x	m/s	Μεταβολή ταχύτητας
	$a_x(t)$	m/s ²	Στιγμαία επιτάχυνση
	$v_x(t)$	m/s	Στιγμαία ταχύτητα

Παρατήρηση

Η στιγμιαία επιτάχυνση γραφικά παριστάνει την κλίση της εφαπτομένης σ' ένα διάγραμμα ταχύτητας -χρόνου, ($u \rightarrow t$).

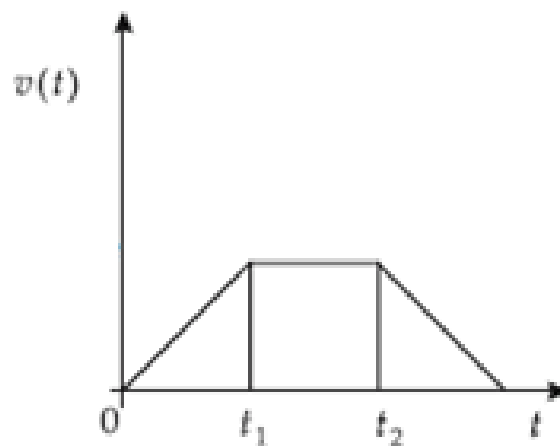
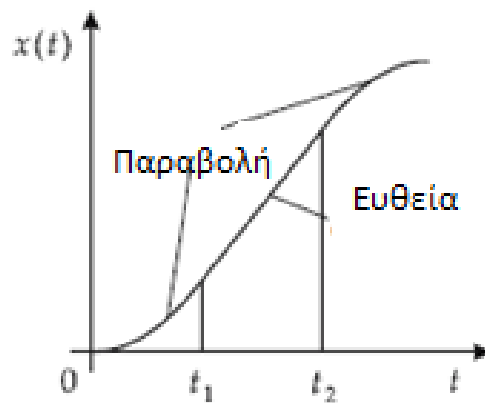
Παρατήρηση

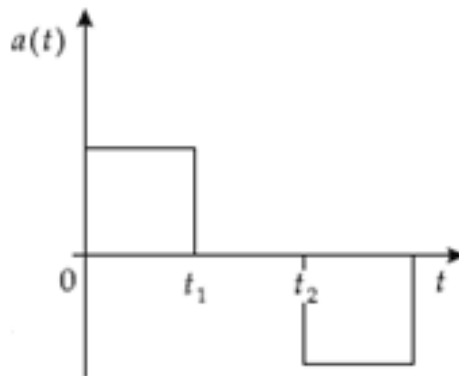
$a_x > 0$ $\Delta u_x > 0$ και επομένως $u_{x2} > u_{x1}$. Αν $u_{x1} > 0$ το σώμα κινείται με αυξανόμενη ταχύτητα. Η καμπύλη ($u \rightarrow t$) ανέρχεται

- $\alpha_x=0$ $\Delta u_x=0$ και επομένως $u_{x2}=u_{x1}$. Το σώμα δεν αλλάζει την ταχύτητά του
- $\alpha_x<0$ $\Delta u_x<0$ και επομένως $u_{x2}<u_{x1}$. Αν $u_{x1}>0$ το σώμα κινείται με φθίνουσα ταχύτητα. Η καμπύλη ($u \rightarrow t$) κατέρχεται

Παράδειγμα

Δίνεται το γράφημα θέσης –χρόνου. Να κατασκευαστούν τα διαγράμματα ταχύτητας-χρόνου και επιτάχυνσης –χρόνου και να δοθεί το είδος της κίνησης για κάθε ένα χρονικό διάστημα .





Εικόνα : Γραφήματα θέσης –χρόνου, ταχύτητας- χρόνου και επιτάχυνσης –χρόνου.

Παρατηρούμε ότι ξεκινώντας από την ηρεμία το σώμα αρχικά επιταχύνεται $(0, t_1)$, στην συνέχεια κινείται με σταθερή ταχύτητα (t_1, t_2) και επιβραδύνεται έως ότου σταματήσει (t_2, \dots)

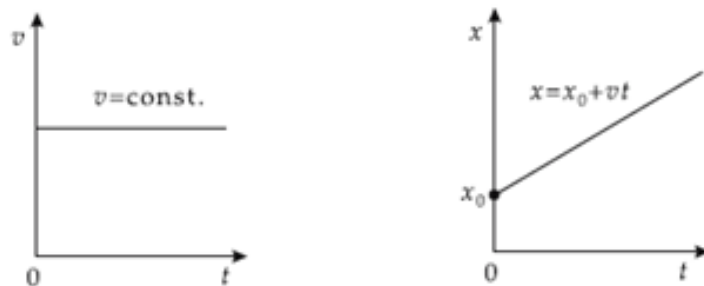
Απλή κίνηση σε μια διάσταση

Συζητώντας την κίνηση σε μια διάσταση συχνά παραλείπουμε τον δείκτη x και αρκετές φορές και τα διανυσματικά σύμβολα για τις ταχύτητες και επιταχύνσεις. Δεν πρέπει όμως να ξεχνάμε ότι παίρνουν θετικές και αρνητικές τιμές και επομένως αποτελούν συνιστώσες διανυσμάτων.

Ομαλή κίνηση

Είναι η κίνηση κατά την οποία το κινούμενο σώμα δεν αλλάζει την ταχύτητά του δηλαδή ισχύει $\bar{v}_x = v_x = \text{const}$

<i>Νόμοι της ομαλής κίνησης</i>			
	Σύμβολο	Μονάδα	Ποσότητα
$x(t) = x_0 + v_x t$	$x(t)$	m	Θέση την χρονική στιγμή t
$v_x(t) = v_x = v_0$	x_0	m	Αρχική θέση (σε χρόνο $t=0$)
$a_x(t) = 0$	v_x	m/s	Ταχύτητα ομαλής κίνησης
	v_0	m/s	Αρχική ταχύτητα
	t	s	Χρόνος

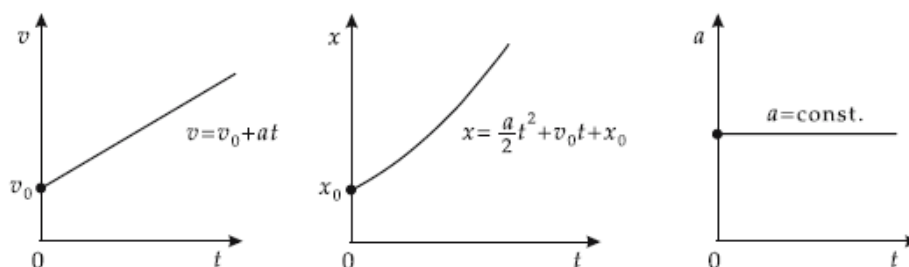


Εικόνα : Διαγράμματα ταχύτητας –χρόνου και θέσης –χρόνου στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση

Παρατήρηση : Ομαλή κίνηση έχουμε αν καμία δύναμη δεν ενεργεί στο κινούμενο σώμα.

Ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση

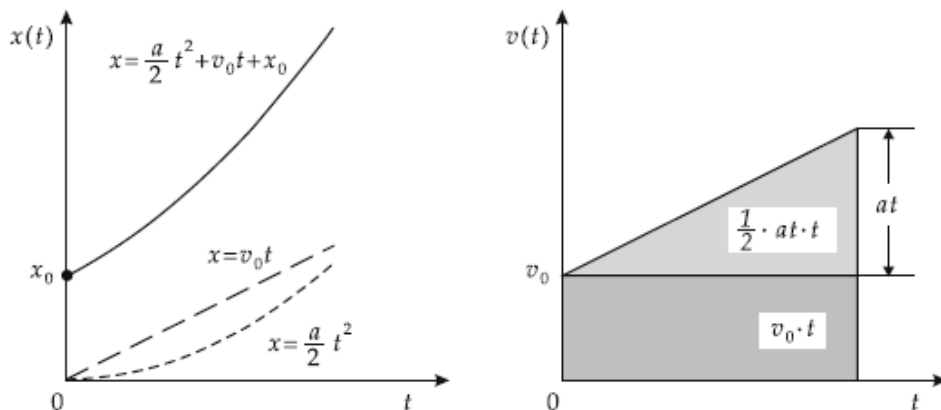
Είναι η κίνηση στην οποία η επιτάχυνση είναι σταθερή δηλ: $\bar{a}_x = a_x = const$



Εικόνα : Διαγράμματα ταχύτητας –χρόνου και θέσης –χρόνου και επιτάχυνσης χρόνου στην ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με αρχική ταχύτητα v_0

Παρατήρηση:

Χρησιμοποιώντας το διάγραμμα ταχύτητας –χρόνου μπορούμε να αποδείξουμε τον τύπο του διαστήματος όπως φαίνεται από τα ακόλουθα διαγράμματα



Εικόνα : Χρησιμοποιώντας το διάγραμμα ταχύτητας –χρόνου βρίσκουμε το x μέσω του αθροίσματος των εμβαδών του γραμμοσκιασμένου τριγώνου και του γραμμοσκιασμένου ορθογωνίου

Νόμοι της ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης			
	Σύμβολο	Μονάδα	Ποσότητα
$x(t) = \frac{a}{2}t^2 + v_0t + x_0$ $v_x(t) = at + v_0$ $a_x(t) = a = \text{const.}$	$x(t)$	m	Θέση την χρονική στιγμή t
	$v_x(t)$	m/s	Ταχύτητα την χρονική στιγμή t
	t	s	Χρόνος
	a_x, a	m/s ²	Επιτάχυνση
	v_0	m/s	Αρχική ταχύτητα
	x_0	m	Αρχική θέση

Παρατήρηση :

Για να έχουμε ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση θα πρέπει μια σταθερή δύναμη να δρά στο σώμα.

Παρατήρηση :

Α) Δοσμένων : της αρχικής ταχύτητας v_0 , της συνάρτησης θέσης $x(t)$, και της αρχικής θέσης x_0 για την ταχύτητα έχουμε :

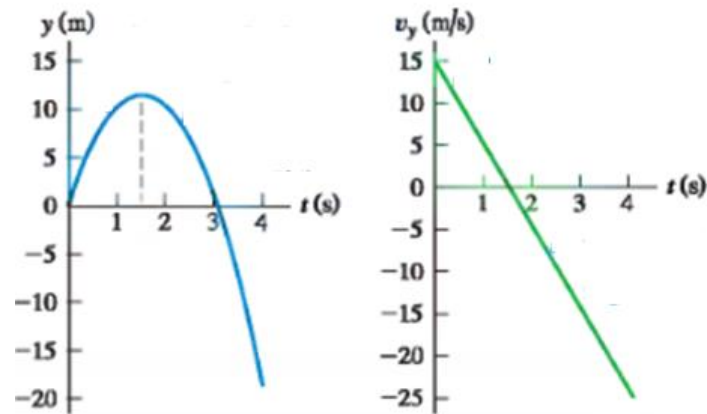
$$v_x(t) = \sqrt{v_0^2 + 2ax(t)}.$$

Β) Αν επιπρόσθετα το σώμα ξεκινά από την ηρεμία δηλ: $v_0 = 0, x_0 = 0$ τότε ισχύει :

$$v_x(t) = at = \sqrt{2ax(t)}, \quad x(t) = \frac{v_x(t)t}{2} = \frac{at^2}{2}.$$

Επιβράδυνση

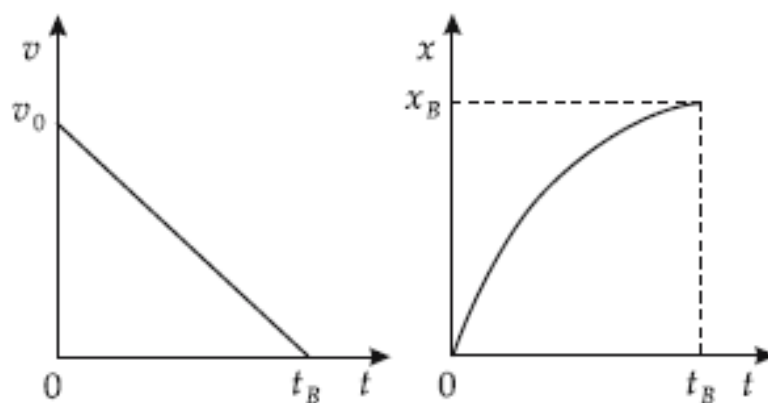
Η ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση αποτελεί ειδική περίπτωση της ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης. Κατά την διάρκεια της επιβράδυνσης η ταχύτητα και η επιτάχυνση έχουν αντίθετα πρόσημα επομένως το μέτρο της ταχύτητας μειώνεται π.χ έως ότι η στιγμιαία ταχύτητα γίνει μηδέν (αυτό δεν αποτελεί κανόνα).



Εικόνα : Γράφημα θέσης – χρόνου και ταχύτητας χρόνου για ένα σώμα που εκτοξεύθηκε κατακόρυφα προς τα πάνω και κάνει ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση. Για την κατακόρυφη επιβράδυνση ισχύει $a_y = g = 9,81 \text{ m/s}^2$ και η φορά της είναι αντίθετη από αυτήν της αρχικής ταχύτητας.

Το μέγιστο διάστημα, t_B που αντιστοιχεί στο να έρθει ένα κινούμενο σώμα σε ηρεμία μπορεί να προσδιοριστεί από την αρχική ταχύτητα και την επιβράδυνση του. Επίσης η αρχική ταχύτητα του μπορεί να προσδιοριστεί όταν γνωρίζουμε το μέγιστο διάστημα και την επιτάχυνση

ομαλά επιβραδυνόμενη			
	Σύμβολο	Μονάδα	Ποσότητα
$t_B = \frac{ v_0 }{ a } = -\frac{v_0}{a}$	s_B	m	Μέγιστο διάστημα
$s_B = \frac{v_0^2}{2 a }$	t_B	s	Χρόνος
$v_0 = \sqrt{2 a s_B}$	$ v_0 $	m/	Αρχική ταχύτητα (μέτρο)
	$ a $	m/	Επιβράδυνση



Εικόνα : Γράφημα ταχύτητας – χρόνου και απόστασης – χρόνου για μια ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση. Εδώ t_B και x_B είναι αντίστοιχα ο χρόνος που αντιστοιχεί στο μέγιστο διάστημα και το μέγιστο διάστημα ώπου το κινούμενο σώμα να βρεθεί σε ηρεμία

Παρατήρηση

Το να θεωρεί κανείς την επιβράδυνση ως ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση αποτελεί μια εξιδανίκευση. Στην πραγματικότητα το φρενάρισμα δεν είναι μια τέτοια ιδανική κίνηση.