ΕΣΠΑ 2007-13\Ε.Π. Ε&ΔΒΜ\Α.Π. 1-2-3
«ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ (Σχολείο 21ου αιώνα) – Νέο Πρόγραμμα Σπουδών , Οριζόντια Πράξη» MIS: 295450
Με συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης (Ε. Κ. Τ.)

Πρόγραμμα Σπουδών

Μαθηματικά στην Υποχρεωτική Εκπαίδευση

2011

ΕΣΠΑ 2007-13\Ε.Π. Ε&ΔΒΜ\Α.Π. 1-2-3
«ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ (Σχολείο 21ου αιώνα) – Νέο Πρόγραμμα Σπουδών , Οριζόντια Πράξη» MIS: 295450
Με συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης (Ε. Κ. Τ.)

Το παρόν έργο έχει παραχθεί από το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο στο πλαίσιο υλοποίησης της Πράξης «*ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ (Σχολείο 21ου αιώνα) – Νέο πρόγραμμα σπουδών, στους Άξονες Προτεραιότητας 1,2,3, -Οριζόντια Πράξη»,* με κωδικό MIS 295450 και ειδικότερα στο πλαίσιο του Υποέργου 1: «***Εκπόνηση Προγραμμάτων Σπουδών Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης και οδηγών για τον εκπαιδευτικό «Εργαλεία Διδακτικών Προσεγγίσεων***».

Επιστημονικό Πεδίο: **Μαθηματικά**

<u>Υπεύθυνη Επιστημονικού Πεδίου</u>:

Πόταρη Δέσποινα, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια Τμήματος Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αθηνών

<u>Εμπειρογνώμονες Εκπόνησης του Προγράμματος Σπουδών</u>

1. **Αθανασιάδης Ηλίας,** Αναπληρωτής Καθηγητής Π.Τ.Δ.Ε., Πανεπιστήμιο Αιγαίου
2. **Βρυώνης Κωνσταντίνος,** Εκπαιδευτικός Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης
3. **Βερύκιος Πέτρος,** Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης
4. **Γεωργιάδου – Καμπουρίδη Βαρβάρα,** Σχολικός Σύμβουλος Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης
5. **Γλένης Σπυρίδων,** Εκπαιδευτικός Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης
6. **Ζαχαριάδης Θεοδόσιος,** Αναπληρωτής Καθηγητής Τμήματος Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αθηνών
7. **Ζυμπίδης Δημήτριος,** Σχολικός Σύμβουλος Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης
8. **Θωμαΐδης Ιωάννης,** Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης
9. **Καλδρυμίδου Μαρία,** Καθηγήτρια Τμήματος Νηπιαγωγών, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
10. **Κασκαντάμης Μιχαήλ ,** Εκπαιδευτικός Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης
11. **Κασσώτη Όλγα,** Εκπαιδευτικός Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης

12. **Καφούση Σουλτάνα,** Αναπληρώτρια Καθηγήτρια Τμήματος Επιστημών Προσχολικής Αγωγής και Εκπαιδευτικού Σχεδιασμού του Πανεπιστημίου Αιγαίου
13. **Κλιάπης Πέτρος,** Σχολικός Σύμβουλος Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης
14. **Κλώθου Άννα,** Εκπαιδευτικός Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης
15. **Κολέζα Ευγενία,** Καθηγήτρια Π.Τ.Δ.Ε., Πανεπιστήμιο Πατρών
16. **Κυνηγός Χρόνης,** Καθηγητής Φ.Π.Ψ, Πανεπιστήμιο Αθηνών
17. **Λεμονίδης Χαράλαμπος,** Καθηγητής Π.Τ.Δ.Ε., Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας
18. **Μαρκόπουλος Χρήστος,** Λέκτορας, Π.Τ.Δ.Ε, Πανεπιστήμιο Πατρών
19. **Μεταξάς Νικόλαος,** Εκπαιδευτικός Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης
20. **Παγγέ Πολυξένη,** Καθηγήτρια Τμήματος Νηπιαγωγών, Πανεπιστημίου Ιωαννίνων
21. **Παπασταυρίδης Σταύρος,** Καθηγητής Τμήματος Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αθηνών
22. **Πετροπούλου Γεωργία,** Εκπαιδευτικός Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης
23. **Σακονίδης Χαράλαμπος,** Αναπληρωτής Καθηγητής Π.Τ.Δ.Ε., Δημοκρίτειο Πανεπιστήμιο Θράκης
24. **Σδρόλιας Κωνσταντίνος,** Εκπαιδευτικός Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης
25. **Σκούρας Αθανάσιος,** Σύμβουλος Π.Ι. για τη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση
26. **Σταματόπουλος Κωνσταντίνος,** Εκπαιδευτικός Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης
27. **Στουραΐτης Κωνσταντίνος,** Εκπαιδευτικός Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης
28. **Τζεκάκη Μαριάννα,** Καθηγήτρια Τμήματος Νηπιαγωγών, Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης
29. **Τριανταφυλλίδης Τριαντάφυλλος,** Αναπληρωτής Καθηγητής, Π.Τ.Δ.Ε., Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
30. **Τύπας Γεώργιος,** Σύμβουλος Π.Ι. για την Πρωτοβάθμια Εκπαίδευση
31. **Φακούδης Ευάγγελος,** Εκπαιδευτικός Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης
32. **Χριστοδούλου Ιφιγένεια,** Εκπαιδευτικός Προσχολικής Εκπαίδευσης
33. **Ψυχάρης Γεώργιος,** Λέκτορας Τμήματος Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αθηνών

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το νέο πρόγραμμα σπουδών για τα μαθηματικά που προτείνεται είναι αποτέλεσμα συλλογικής δουλειάς μελών μιας επιτροπής εμπειρογνωμόνων με εμπειρίες που πηγάζουν από την ερευνητική τους ενασχόληση με τα Μαθηματικά και τη Διδακτική των Μαθηματικών ή/και από την πολύχρονη διδασκαλία τους στη σχολική τάξη και στην αρχική και συνεχιζόμενη εκπαίδευση. Η διαφορετική οπτική, συχνά συμπληρωματική, των μελών της επιτροπής οδήγησε σε ένα πρόγραμμα που θεωρούμε ότι έχει από τη μια μεριά έναν επιστημονικό προσανατολισμό που στηρίζεται στη διεθνή έρευνα και εμπειρία σχετικά με τη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών και από την άλλη τη δυνατότητα να μπορεί να εφαρμοστεί στην πράξη. Το βασικό κίνητρο όλων των μελών της επιτροπής ήταν να συμβάλλουν στην αναβάθμιση της ποιότητας της μαθηματικής εκπαίδευσης στην υποχρεωτική εκπαίδευση στην Ελλάδα. Γνωρίζουμε όμως ότι το πρόγραμμα σπουδών είναι μόνο η αφετηρία για μια τέτοια αναβάθμιση και ελπίζουμε ότι ο συνδυασμός του με την ανάπτυξη κατάλληλου εκπαιδευτικού υλικού και παροχής συνεχούς εκπαίδευσης των εκπαιδευτικών να μπορέσει να κάνει πιο ουσιαστική και ενδιαφέρουσα τη μαθηματική εμπειρία των μαθητών. Το πρόγραμμα απευθύνεται άμεσα στον εκπαιδευτικό θεωρώντας τον ως επιστήμονα που σχεδιάζει τη διδασκαλία του, κάνει επιλογές τεκμηριωμένες και έχει μια συνολική εικόνα της μαθησιακής πορείας των μαθητών του.

Αναφορικά με τη δομή του κειμένου, αρχικά παρουσιάζονται οι βασικές αρχές του προγράμματος σπουδών όπου καθορίζονται οι στόχοι της διδασκαλίας και μάθησης των μαθηματικών καθώς και οι βασικές ικανότητες, δεξιότητες και διεργασίες που αναμένεται οι μαθητές να αποκτήσουν. Στη συνέχεια αναλύεται η δομή ανάπτυξης του προγράμματος εστιάζοντας στον τρόπο ανάπτυξης του περιεχομένου μέσα από τον καθορισμό τριών βασικών θεματικών αξόνων. Επίσης αναλύονται για κάθε βασική θεματική περιοχή η σημασία της, οι βασικές έννοιες και διεργασίες καθώς και η εξέλιξη τους στη διάρκεια της υποχρεωτικής εκπαίδευσης εστιάζοντας στις βασικές μεταβάσεις ανά ηλικιακό κύκλο. Στη δομή ανάπτυξης συμπεριλαμβάνεται η βασική φιλοσοφία ένταξης εργαλείων (χειραπτικών και ψηφιακών) στη διδασκαλία των μαθηματικών, των διδακτικών προσεγγίσεων (όπως της «δραστηριότητας» και της «συνθετικής εργασίας») καθώς και της διαδικασίας της αξιολόγησης. Ακολουθεί ανά τάξη πίνακας όπου παρουσιάζονται τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα, τα βασικά περιεχόμενα, οι ενδεικτικές δραστηριότητες και το προτεινόμενο εκπαιδευτικό υλικό για κάθε θεματικό άξονα. Οι ενδεικτικές δραστηριότητες συνοψίζονται σε πίνακα και αντιστοιχίζονται με τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα. Στο τέλος του κάθε ηλικιακού κύκλου παρουσιάζονται παραδείγματα συνθετικών εργασιών, μέρος των οποίων αξιοποιούν ψηφιακά εργαλεία. Τέλος δίνεται ένα παράδειγμα εργαλείου αξιολόγησης που μπορεί να χρησιμοποιηθεί «διαμορφωτικά» και «τελικά» και ακολουθεί ενδεικτική λίστα βιβλιογραφικών αναφορών που χρησιμοποιήθηκαν.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΑΡΧΕΣ ΤΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΣΠΟΥΔΩΝ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Κάθε προσπάθεια συγκρότησης ενός Προγράμματος Σπουδών για τα μαθηματικά βρίσκεται άμεσα αντιμέτωπη με μια σειρά από ερωτήματα που συχνά περιορίζονται στην επιλογή του περιεχομένου του: ποιες μαθηματικές γνώσεις είναι σημαντικό

να αναπτύξουν όλοι οι μελλοντικοί πολίτες; Ποια κριτήρια θα μπορούσαν να υιοθετηθούν για την επιλογή τους; Ποιες από τις γνώσεις που εμπεριέχονται στο ισχύον Πρόγραμμα Σπουδών χρειάζεται να εξαιρεθούν; Απαντήσεις σε αυτά και άλλα, ανάλογα ερωτήματα, παρά τη δυσκολία που παρουσιάζουν, προσδιορίζουν σε μεγάλο βαθμό την ταυτότητα της μαθηματικής εκπαίδευσης που επιχειρείται να αναπτυχθεί στις εκάστοτε κοινωνικές και πολιτισμικές συνθήκες. Η αποτύπωση των βασικών στοιχείων αυτής της ταυτότητας πρέπει να αναζητηθεί στα κεντρικά χαρακτηριστικά και στη δυναμική της νοητικής δράσης που είναι επιθυμητό να αναπτυχθεί από τους μαθητές σε σχέση με το μαθηματικό περιεχόμενο.
Τα μαθηματικά αποτελούν ένα ιδιαίτερο αντικείμενο μάθησης. Αναγνωρισμένα ως ένας από τους πλέον κρίσιμους τομείς του ανθρώπινου πολιτισμού, εξαιτίας του εξαιρετικά ισχυρού τρόπου ερμηνείας του κόσμου που προσφέρουν, με σημαντική συνεισφορά στην ανάπτυξη της ατομικής αλλά και της συλλογικής σκέψης παγκοσμίως, κατέχουν κεντρική θέση στα Προγράμματα Σπουδών της υποχρεωτικής εκπαίδευσης. Αυτό καθιστά την επιτυχημένη σχολική μαθητεία σε αυτά καθοριστικό παράγοντα της γνωστικής και, κατ' επέκταση, της ακαδημαϊκής ανάπτυξης και της επαγγελματικής ανέλιξης κάθε πολίτη. Ωστόσο, η αφαιρετική τους φύση, η αυστηρότητα και η πολυπλοκότητα των εμπλεκόμενων ιδεών και της οργάνωσής τους, καθώς και η προβληματική τους προσέγγιση στο σχολείο εμποδίζουν πολλούς μαθητές, συχνά αυτούς που ανήκουν σε ευάλωτες κοινωνικές ομάδες, να επιτύχουν στα μαθηματικά και να αναπτύξουν θετικά συναισθήματα για αυτά.

Ποια είναι, όμως, εκείνα τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά που καθιστούν τα μαθηματικά ένα τόσο ξεχωριστό αντικείμενο μάθησης και, κατά συνέπεια, και διδασκαλίας; Κατ' αρχήν, η ενεργή και εντατική εμπλοκή στην προσπάθεια επίλυσης ενός προβλήματος, ο ιδιαίτερος τρόπος μελέτης και επίλυσης προβλημάτων και ο επεξεργασμένος γλωσσικός και συμβολικός κώδικας έκφρασης των νοημάτων που χαρακτηρίζουν την αυθεντική μαθηματική δραστηριότητα. Το μαθηματικό περιεχόμενο προσφέρει απλώς το πλαίσιο για την ενεργοποίηση αυτών των στοιχείων και αποκτά σημασία στο βαθμό που συμβάλλει στην ισχυροποίησή τους προς την κατεύθυνση της επαν-ανακάλυψης της μαθηματικής γνώσης από τον μαθητευόμενο.

Η μαθηματική σκέψη προϋποθέτει την ικανότητα διαχείρισης των βασικών δομικών στοιχείων των μαθηματικών, όπως είναι οι έννοιες, οι ιδιότητές τους και οι τρόποι τεκμηρίωσης του μαθηματικού συλλογισμού, με τρόπο που να καθιστά φανερές τις σχέσεις των μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών μεταξύ τους, δηλαδή, τη θέση τους σε ένα δίκτυο ιδεών. Ένα τέτοιο δίκτυο δημιουργείται γύρω από μια «θεμελιώδη ιδέα». Για παράδειγμα, στην περίπτωση της πρόσθεσης ετερώνυμων κλασμάτων, η «θεμελιώδης ιδέα» είναι η έννοια των ισοδύναμων κλασμάτων, η οποία στηρίζεται σε μια άλλη «θεμελιώδη ιδέα», ότι, οι αριθμοί, διατηρώντας την αξία τους, μπορούν να αναπαρασταθούν με διάφορους τρόπους, ως κλάσματα, ως δεκαδικοί, ως ποσοστά κ.ά.

Η συνεκτικότητα και η συνοχή που χαρακτηρίζουν τη μαθηματική επιστήμη και συνεισφέρουν στην ισχύ και στο εύρος των εφαρμογών της οφείλεται σε αυτό ακριβώς το γεγονός, δηλαδή, ότι τα μαθηματικά είναι μια επιστήμη δομών, η κατανόηση των οποίων χαρακτηρίζει αυτό που ονομάζουμε μαθηματικό τρόπο σκέψης και συλλογισμού.

Οι σύγχρονες θεωρήσεις στο πεδίο της Μαθηματικής Εκπαίδευσης υποδεικνύουν ότι ένα σημερινό Πρόγραμμα Σπουδών για τα μαθηματικά οφείλει να αποθαρρύνει την έμφαση στην απλή γνώση και την εφαρμογή εννοιών και διαδικασιών, επενδύοντας στη μελέτη των συνδέσεων μεταξύ τους και στην ανάπτυξη μαθηματικών ικανοτήτων, στάσεων και πεποιθήσεων που θα βοηθήσουν τους μαθητές να αντιμετωπίσουν με αποτελεσματικό τρόπο προβλήματα μέσα στα μαθηματικά και μέσω των μαθηματικών. Μια τέτοια προσέγγιση αντανακλά την πορεία συγκρότησης της ίδιας της επιστήμης των μαθηματικών, δηλαδή, την προσπάθεια ερμηνείας και κατανόησης του κόσμου.

Στόχοι μάθησης και διδασκαλίας

Η αναζήτηση γενικών στόχων της μάθησης και της διδασκαλίας των μαθηματικών απασχόλησε και συνεχίζει να απασχολεί τους ερευνητές της Μαθηματικής Εκπαίδευσης. Μια σημαντική εξέλιξη σε αυτήν την κατεύθυνση υπήρξε η πρόταση του Winter (1975) (στο Wittmann, 2005) για την υιοθέτηση τέτοιων στόχων, που υπακούουν στις παρακάτω τρεις αρχές:

- Μετάβαση από τα «μαθηματικά – έτοιμο προϊόν» στη «μαθηματικοποίηση» και στις διαδικασίες που τη συγκροτούν: «διερεύνηση», «συλλογισμός» και «επικοινωνία».
- Αποδοχή, ως βασικής διδακτικής αρχής, της μάθησης μέσω ανακάλυψης.
- Ανάδειξη της συμπληρωματικότητας της “καθαρής” και της “εφαρμοσμένης” άποψης των μαθηματικών.

Οι παραπάνω αρχές ανέδειξαν μια από τις κυρίαρχες σήμερα στοχεύσεις των Προγραμμάτων Σπουδών για τα μαθηματικά, του *μαθηματικού γραμματισμού*. Πρόκειται για την ικανότητα κάποιου α) να αναλύει, να ερμηνεύει και να επεμβαίνει στο κοινωνικό του περιβάλλον, χρησιμοποιώντας ως εργαλείο τα μαθηματικά και β) να αναλύει και ερμηνεύει τον τρόπο που χρησιμοποιούνται τα μαθηματικά για τη λήψη αποφάσεων στο κοινωνικό περιβάλλον. Έτσι, ένα “μαθηματικά εγγράμματο” άτομο:

- Αντιλαμβάνεται ότι “οι μαθηματικές έννοιες, οι δομές και οι ιδέες έχουν εφευρεθεί ως εργαλεία για να οργανώσουν τα φαινόμενα του φυσικού, κοινωνικού και πνευματικού κόσμου” (Freudenthal, 1983),
- Διαθέτει την “ικανότητα να κατανοεί, να κρίνει, να δημιουργεί και να χρησιμοποιεί τα μαθηματικά σε μια ποικιλία ενδο- και εξω-μαθηματικών πλαισίων και καταστάσεων, στις οποίες τα μαθηματικά παίζουν ή θα μπορούσαν να παίξουν κάποιο ρόλο” (Niss, 1996, 2003)) και, έτσι, μπορεί να λειτουργήσει κριτικά σε μια δημοκρατική κοινωνία.

Μια δεύτερη κεντρική στόχευση που προκύπτει από τη σύγχρονη θέαση της μαθηματικής εκπαίδευσης είναι η ανάγκη διδασκαλίας *αξιοποιήσιμων μαθηματικών*, δηλαδή, μαθηματικών που βοηθούν το μαθητευόμενο να κατανοήσει και να οργανώσει αποτελεσματικά τόσο την πραγματικότητά του όσο και τα ίδια τα μαθηματικά. Σε αυτήν την κατεύθυνση, αποκτά ιδιαίτερη σημασία η σύνδεση της άτυπης με την τυπική γνώση των μαθηματικών, με τρόπο που να ενθαρρύνει την οικοδόμηση μιας διαλεκτικής σχέσης μεταξύ τους.

Συνοψίζοντας, τα σύγχρονα ερευνητικά δεδομένα αναγνωρίζουν την ανάγκη στόχευσης ενός Προγράμματος Σπουδών για τα μαθηματικά της υποχρεωτικής εκπαίδευσης στη μάθηση μαθηματικών που είναι χρήσιμα για όλους τους μαθητές και «παραμένουν μαθηματικά». Σε αυτήν την κατεύθυνση, κεντρική επιδίωξη της αντίστοιχης διδασκαλίας θα πρέπει να είναι η ανάδειξη των βασικών χαρακτηριστικών της μαθηματικής γνώσης: της γενίκευσης, της βεβαιότητας, της ακρίβειας και της συντομίας.

Στόχοι μάθησης στα μαθηματικά: ανάπτυξη βασικών ικανοτήτων

Η υποχρεωτική μαθηματική εκπαίδευση στοχεύει στη συγκρότηση σκεπτόμενων πολιτών, ορισμένοι από τους οποίους θα συνεχίσουν, ενδεχομένως, τη μελέτη των μαθηματικών σε υψηλότερα επίπεδα. Για την επιτυχία αυτού του στόχου στις σύγχρονες πολύπλοκες κοινωνικές, οικονομικές και πολιτισμικές συνθήκες, είναι αναγκαία η ανάπτυξη κάποιων, καταρχήν, *γενικών ικανοτήτων και δεξιοτήτων*, οι οποίες συνδέονται οριζοντίως με όλα τα γνωστικά αντικείμενα που εμφανίζονται στα Προγράμματα Σπουδών της υποχρεωτικής εκπαίδευσης και περιγράφονται, στη συνέχεια, συνοπτικά:

- Η ικανότητα *αποτελεσματικής χρήσης εργαλείων*, κοινωνικο-πολιτισμικών (γλώσσας, συμβόλων, κειμένων) και ψηφιακών. Τα διάφορα «εργαλεία» ενέχουν πολλαπλές ερμηνείες και είναι απαραίτητα για έναν ενεργό διάλογο με το περιβάλλον.
- Η ικανότητα *αλληλεπίδρασης και συνεργασίας σε ετερογενείς ομάδες*. Είναι σημαντικό για το άτομο να μπορεί να κατανοεί τη σκέψη και τη στάση των άλλων, να επιλύει συγκρούσεις, να διαχειρίζεται διαφορές και αντιφάσεις, να υπερβαίνει πολιτισμικές διαφορές, να εξισορροπεί μεταξύ της δέσμευσης για την ομάδα και της προσωπικής του αυτονομίας.
- Η ικανότητα *αυτόνομης και υπεύθυνης λειτουργίας*. Τα άτομα χρειάζεται να είναι σε θέση να λειτουργούν όχι μόνον στο πλαίσιο μιας ομάδας αλλά και αυτόνομα, να μπορούν να υπερασπίζονται τις απόψεις τους, να συνειδητοποιούν τα όρια και τις ανάγκες τους, να αναζητούν πληροφορίες και να αξιολογούν τις πηγές προέλευσής τους, να αξιολογούν τη μάθησή τους, να κατανοούν και να νοηματοδοτούν την εμπειρία τους (μεταγνώση).

Οι παραπάνω γενικές ικανότητες μπορούν να αναλυθούν σε επιμέρους ικανότητες και δεξιότητες, ιδιαίτερα σημαντικές για τον σύγχρονο πολίτη.

Ένας σκεπτόμενος, ενεργός πολίτης χρειάζεται να διαθέτει *ικανότητα λήψης αποφάσεων και επίλυσης προβλημάτων.* Για παράδειγμα, αν εξαιρέσουμε τα «σχολικά» προβλήματα που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στα μαθηματικά, όπου δίνονται όλες οι πληροφορίες για την επίλυσή τους και ο δρόμος προς τη λύση είναι συνήθως μονόδρομος, στην πραγματική ζωή, τα περισσότερα προβλήματα χαρακτηρίζονται από ασάφεια, έλλειψη δεδομένων, ή περίσσεια στοιχείων. Προκειμένου να επιλυθεί ένα τέτοιο πρόβλημα, πρέπει καταρχήν να κατανοηθεί.

Η *κατανόηση* ενός προβλήματος δεν είναι απλή διαδικασία, καθώς προϋποθέτει μια σειρά από σημαντικές δεξιότητες, όπως *διαχείρισης της πολυπλοκότητας* (αναγνώριση και ανάλυση κανονικοτήτων, εντοπισμός αναλογιών μεταξύ των γνωστών και νέων καταστάσεων), *διάκρισης* (αναγνώριση σχετικών και άσχετων στοιχείων σε σχέση με μια κατάσταση ή έναν στόχο) και *επιλογής* (επιλογή μεταξύ διάφορων ενδεχομένων σε σχέση με τον επιδιωκόμενο στόχο).

Αφού κατανοηθεί, το πραγματικό πρόβλημα πρέπει να μετατραπεί, στη συνέχεια, σε μαθηματικό πρόβλημα, προκειμένου να αναζητηθούν τα κατάλληλα εργαλεία (σύμβολα, αλγόριθμοι, τεχνολογικά εργαλεία) επίλυσής του. Αυτή η διαδικασία, γνωστή ως *μαθηματικοποίηση ή μοντελοποίηση*, συνιστά βασική ικανότητα που πρέπει να διαθέτει κάθε άτομο. Εφόσον βρεθεί η λύση, πρέπει να καταγραφεί και, συχνά, να δημοσιοποιηθεί. Επομένως, χρειάζεται μια γλώσσα επικοινωνίας των σκέψεων και των επιχειρημάτων πάνω στις οποίες στηρίχτηκε ο συλλογισμός επίλυσης. Η *ικανότητα επικοινωνίας*είναι θεμελιώδης τόσο για αυτόν που παρουσιάζει μια λύση όσο και για εκείνον που τη δέχεται. Βασικό της χαρακτηριστικό είναι ότι απαιτεί συχνά μετατροπή μιας μορφής αναπαράστασης σε μια άλλη (π.χ., από πίνακα σε διάγραμμα). Συνεπώς, η *ικανότητα έκφρασης με χρήση πολλαπλών αναπαραστάσεων* και (συμπληρωματικά) η *ικανότητα ανάλυσης και ερμηνείας δεδομένων* συνιστούν δυο σημαντικές ικανότητες που πρέπει να διαθέτει κάθε πολίτης.

Η συνεργασία διευκολύνει την επίλυση προβλημάτων. Όμως, για να ευδοκιμήσει, χρειάζεται οι ενδιαφερόμενοι να οικοδομήσουν οικειοθελώς ένα πλαίσιο εμπιστοσύνης και αλληλοκατανόησης. Η σύγχρονη βιβλιογραφία υποδεικνύει ότι οι κοινότητες πρακτικής που συγκροτούνται στη βάση αμοιβαίων σχέσεων εμπιστοσύνης χαρακτηρίζονται από δημιουργικότητα και καινοτομία (Wenger et al., 2002). Επομένως, η *ικανότητα συνεργασίας στο πλαίσιο μιας ομάδας* και η *ικανότητα επικοινωνίας και διατύπωσης συλλογισμών και επιχειρημάτων* αποτελούν σημαντικά εφόδια για κάθε άτομο σε όλη τη διάρκεια της ζωής του.

Οι ικανότητες που περιγράφηκαν παραπάνω μπορεί να θεωρηθούν ως «βασικές», καθώς αποτελούν ενοποίηση θεμελιωδών γνώσεων, δεξιοτήτων, δυνατοτήτων και στάσεων ενός ατόμου και έχουν ένα ευρύ πεδίο εφαρμογής. Αυτή η συνύπαρξη γνωστικών και συναισθηματικών χαρακτηριστικών είναι δυναμική, εξελίσσεται κατά τη διάρκεια της ζωής του ατόμου και του επιτρέπει να αντιμετωπίζει καταστάσεις με ετοιμότητα και αποτελεσματικότητα. Κεντρικός, λοιπόν, στόχος της εννιάχρονης μαθηματικής εκπαίδευσης θα πρέπει να είναι η προσφορά ευκαιριών στους μαθητές να αναπτύξουν τις συγκεκριμένες βασικές ικανότητες, ώστε να είναι σε θέση να λειτουργήσουν κριτικά και δημιουργικά μέσα στα μαθηματικά αλλά και έξω από αυτά, σε καθημερινές καταστάσεις των οποίων η αντιμετώπιση απαιτεί μαθηματικά εργαλεία.

Συνοψίζοντας, αν και η επιλογή των περιεχομένων είναι ένα κρίσιμο ζήτημα για τους σχεδιαστές των Προγραμμάτων Σπουδών για τα μαθηματικά, η στήριξη των μαθητών, για να αναπτύξουν τις βασικές ικανότητες και τα εργαλεία που θα τους βοηθήσουν να αποδώσουν νόημα και να κατανοήσουν σε βάθος τις «θεμελιώδεις ιδέες» που διατρέχουν όλο το Πρόγραμμα Σπουδών φαίνεται να συνιστά ζήτημα αιχμής, καθώς προσφέρει εκείνη την υποδομή που μπορεί να στηρίξει αποτελεσματικά τη διαπραγμάτευση και τη συγκρότηση του μαθηματικού νοήματος από αυτούς.

Στόχοι μάθησης στα μαθηματικά: ανάπτυξη μαθηματικής σκέψης

Είναι γενικά αποδεκτό ότι, βασική προϋπόθεση ανάπτυξης των βασικών ικανοτήτων που αναφέρθηκαν παραπάνω αποτελεί η διαμόρφωση *θετικής διάθεσης / στάσης / έξης απέναντι στη διαδικασία μάθησης των μαθηματικών*. Στη βιβλιογραφία αναφέρονται μια σειρά από χαρακτηριστικά και εκδηλώσεις τέτοιων στάσεων, όπως η περιέργεια, η δεκτικότητα σε νέες ιδέες, η φαντασία, η δημιουργική αμφισβήτηση, ο σκεπτικισμός. Γενικά, τα χαρακτηριστικά αυτά αποτελούν προϋπόθεση για την ανάπτυξη της μαθηματικής σκέψης που μπορεί να ειδωθεί με βάσει τις τρεις παρακάτω συνιστώσες της:

- *Δημιουργική σκέψη*: Ανοιχτός νους (σκέψη πέραν του προφανούς, περιορισμός προκαταλήψεων, διατύπωση υποθέσεων, αναγνώριση προοπτικής), περιέργεια (προϋπόθεση ενεργής εμπλοκής σε διαδικασία ανακάλυψης).
- *Αναστοχαστική σκέψη:* Μεταγνώση(ρύθμιση και αυτοέλεγχος νοητικής και φυσικής δράσης)
- *Κριτική σκέψη*: Προσπάθεια κατανόησης της κατάστασης (διερεύνηση και αξιολόγηση των διαθέσιμων στοιχείων, αναζήτηση σχέσεων μεταξύ των στοιχείων για την ενίσχυση της ενδεχόμενης θεωρίας, έλεγχος της θεωρίας για αντιπαραδείγματα και αντιφάσεις, αναζήτηση εναλλακτικών ερμηνειών), ανάπτυξη στρατηγικής δράσης / μεθόδου (διατύπωση σαφών στόχων και ανάπτυξη μιας υποθετικής διαδρομής επίτευξης τους) και επιφυλακτικότητα (διερεύνηση πέρα από τα δεδομένα, αναζήτηση ενδείξεων/αποδείξεων, μη άκριτη αποδοχή).

Στόχοι μάθησης στα μαθηματικά: ανάπτυξη ιδιαίτερων μαθηματικών διεργασιών

Εκτός των γνωστικών και των συναισθηματικών χαρακτηριστικών, η εργασία στην τάξη των μαθηματικών οφείλει να προσφέρει τους μαθητές τη δυνατότητα να αναπτύξουν μια σειρά από μεθοδολογικά χαρακτηριστικά που διέπουν τη διαδικασία συγκρότησης της μαθηματικής γνώσης. Σε αυτήν την κατεύθυνση, ένας πρώτος σημαντικός στόχος είναι η μαθητεία σε *διαδικασίες πειραματισμού, διερεύνησης, διατύπωσης και ελέγχου υποθέσεων*.

Ο πειραματισμός υπήρξε πάντα και συνεχίζει να συνιστά μια σημαντική μέθοδο μαθηματικής ανακάλυψης. Εντούτοις, πολύ συχνά αποκρύπτεται, στη λογική μιας παράδοσης που θέλει οι μαθηματικοί ερευνητές να παρουσιάζουν μόνο κομψά, πλήρως αναπτυγμένα και αυστηρά τεκμηριωμένα αποτελέσματα. Αυτή η αντίληψη μεταφέρεται και στις σχολικές τάξεις: αφενός, ο χρόνος που δίνεται στους μαθητές για διερεύνηση είναι συνήθως περιορισμένος, αφετέρου τα προϊόντα της διερευνητικής διαδικασίας δεν οργανώνονται με τέτοιο τρόπο, ώστε οι μαθητές να διαμορφώσουν ολοκληρωμένα σχήματα των μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών. Απλές ιδέες, όπως η συστηματική καταγραφή δεδομένων, η οργάνωσή τους σε πίνακα, οι δοκιμές με μικρούς αριθμούς, οι εναλλακτικές διατυπώσεις του προβλήματος κ.τ.λ. δεν αποτελούν μέρος της "κουλτούρας" των μαθητών κατά τη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων. Αντίθετα, ενθαρρύνονται να θυμηθούν στρατηγικές που έχουν εφαρμόσει με επιτυχία σε παρόμοιες καταστάσεις, ώστε να τις επαναλάβουν άκριτα.

Η *επίλυση προβλήματος* αποτελεί τον πυρήνα της διαδικασίας ανάπτυξης της μαθηματικής γνώσης και του μαθηματικού τρόπου σκέψης. Οι μαθητές μαθαίνουν καλύτερα, όταν τους δίνεται η ευκαιρία να διερευνήσουν οι ίδιοι μαθηματικές ιδέες μέσω επίλυσης προβλημάτων, καθώς η εμπλοκή τους στη συγκεκριμένη διαδικασία τούς βοηθά να "κατασκευάσουν" προοδευτικά τη μαθηματική τους γνώση, εμβαθύνοντας εννοιολογικά σε αυτήν και συνειδητοποιώντας τη λειτουργική της πτυχή αλλά και την πολιτισμική και ιστορική της διάσταση. Επομένως, η κατάλληλη επιλογή δραστηριοτήτων αποτελεί κομβικό σημείο για τη μάθηση των μαθηματικών. Αναγνωρίζοντας αυτόν τον κεντρικό ρόλο της διαδικασίας επίλυσης προβλήματος, η σχετική βιβλιογραφία προτείνει α) τη διδασκαλία των μαθηματικών μέσω της επίλυσης προβλήματος αλλά και για την επίλυση προβλημάτων και β) την ανάδειξη της επίλυσης προβλήματος σε κεντρικό στόχο του Προγράμματος Σπουδών για τα μαθηματικά, με έμφαση στις στρατηγικές επίλυσής του.

Σημαντική στιγμή κατά τη διαδικασία επίλυσης προβλημάτων και, γενικά, κατά την επεξεργασία μαθηματικών ερωτημάτων αποτελεί ο *αναστοχασμός*, μια διαδικασία που αφορά τη σκέψη του ατόμου σχετικά με την προηγούμενη δράση του και δεν ενεργοποιείται αυθόρμητα. Χαρακτηρίζει συνήθως τους "καλούς λύτες" προβλημάτων, γιατί μέσω αυτής έχουν τη δυνατότητα να ελέγξουν την ισχύ και το εύρος εφαρμογής των λύσεων που προτείνουν, και, ενδεχομένως, να αναθεωρήσουν τον τρόπο σκέψης τους. Μέσω κατάλληλων ερωτήσεων, ακόμα και πολύ μικροί μαθητές μπορούν να ασκηθούν στη χρήση της αναστοχαστικής διαδικασίας, η οποία απαιτεί χρόνο και τη διατύπωση ερωτήσεων που να αποτελούν έναυσμα για τη μεταγνωστική ανάπτυξη των μαθητών.

Τέλος, μια ακόμη σημαντική πτυχή των μαθηματικών συνδέεται με το ρόλο, τη σημασία και τη διαχείριση της φυσικής και της συμβολικής γλώσσας έκφρασης των μαθηματικών ιδεών. Μάλιστα, πολλοί ισχυρίζονται ότι τα μαθηματικά είναι μια γλώσσα, με τα δικά της σύμβολα και τους δικούς της ιδιαίτερους κώδικες επικοινωνίας.Οι μαθητές χρειάζεται να είναι σε θέση να *διαχειρίζονται αποτελεσματικά αυτή τη γλώσσα, όχι μόνον σε επίπεδο συμβόλων, αλλά κυρίως σε επίπεδο διατύπωσης λογικών σχέσεων και επιχειρημάτων*. Συγκεκριμένα, χρειάζεται να είναι σε θέση να δίνουν ακριβείς περιγραφές των βημάτων που ακολουθούν σε μια διαδικασία σκέψης, να διατυπώνουν επιχειρήματα και να τα εκφράζουν με σαφήνεια, ώστε να γίνονται κατανοητά από τους άλλους και, γενικότερα, να μπορούν να αποτυπώνουν τα αποτελέσματα της εργασίας τους τόσο στη φυσική γλώσσα όσο και με χρήση μαθηματικών συμβόλων αλλά και άλλων μέσων αναπαράστασης (π.χ., διαγράμματα, δυναμικά ψηφιακά δομήματα, κ.ά.). Η ικανότητα για επικοινωνία στα μαθηματικά και για τα μαθηματικά αποτελεί βασικό στόχο της μαθηματικής εκπαίδευσης.

Συνοψίζοντας όλα τα προηγούμενα, το τρέχον Πρόγραμμα Σπουδών για τα μαθηματικά, υιοθετώντας τόσο μια γνωστική όσο και μια κοινωνικοπολιτισμική θέαση των μαθηματικών, επιδιώκει, κυρίαρχα, οι μαθητές:

- να αποκτήσουν την ικανότητα διατύπωσης και επίλυσης προβλημάτων μέσα στα μαθηματικά και μέσω αυτών και
- να διαμορφώσουν μια θετική στάση απέναντι στα μαθηματικά, εκτιμώντας την κοινωνική και την αισθητική τους προοπτική αλλά και το ρόλο τους στην ανάπτυξη του ανθρώπινου πολιτισμού.

Η υλοποίηση των παραπάνω στόχων επιχειρείται να διασφαλιστεί μέσα από τέσσερις βασικές διεργασίες: α) του μαθηματικού συλλογισμού και της επιχειρηματολογίας, β) της δημιουργίας συνδέσεων/ δεσμών, γ) της επικοινωνίας μέσω της χρήσης εργαλείων, με βασικότερο τη φυσική γλώσσα, αλλά και τα σύμβολα, τις διάφορες μορφές αναπαράστασης, τα τεχνουργήματα και τα εργαλεία της τεχνολογίας και δ) της μεταγνωστικής ενημερότητας. Το περιεχόμενο και ο κεντρικός προσανατολισμός των τεσσάρων αυτών διεργασιών περιγράφονται στη συνέχεια.

Διεργασία συλλογισμού και επιχειρηματολογίας: Η διαδικασία του μαθηματικού συλλογισμού περιλαμβάνει τη διερεύνηση φαινομένων, τη διατύπωση και τον έλεγχο υποθέσεων και τη συγκρότηση τεκμηριωμένων επιχειρημάτων (μια μορφή των οποίων είναι η τυπική μαθηματική απόδειξη). Ο μαθηματικός συλλογισμός χρησιμοποιείται, προφανώς, κατά την επίλυση προβλημάτων αλλά η χρήση του είναι ευρύτερη. Αποτελεί τον κορμό της επικοινωνίας στην τάξη των μαθηματικών και συνεισφέρει ουσιαστικά στην κατανόησή τους. Ο δάσκαλος των μαθηματικών έχει χρέος να βοηθήσει τους μαθητές του να περάσουν από τις άτυπες διαισθητικές τους συλλογιστικές διαδικασίες σε πιο τυποποιημένες μορφές συλλογισμού. Για να το πετύχει χρειάζεται να έχει την ικανότητα να επιλέγει τις κατάλληλες ερωτήσεις που θα παροτρύνουν τους μαθητές να σκεφτούν σχετικά με θέματα που έως τότε θεωρούσαν προφανή (π.χ. σχετικά με το αν ο "πολλαπλασιασμός μεγαλώνει, ενώ η διαίρεση μικραίνει το αποτέλεσμα").

Διεργασία δημιουργίας συνδέσεων: Σημαντικό στοιχείο του μαθηματικού συλλογισμού και, γενικά, του μαθηματικού τρόπου σκέψης αποτελεί η ικανότητα δημιουργίας συνδέσεων. Οι μαθητές κατανοούν σε βάθος τα μαθηματικά, όταν συνειδητοποιούν τις σχέσεις μεταξύ μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών, όταν συνειδητοποιούν ότι τα μαθηματικά είναι μια επιστήμη που συγκροτείται στη βάση λογικών σχέσεων και δομών. Είναι σημαντικό το Πρόγραμμα Σπουδών να παρέχει ευκαιρίες στους μαθητές να δημιουργούν συνδέσεις μέσα στα μαθηματικά και μεταξύ των μαθηματικών και άλλων επιστημονικών περιοχών και του πραγματικού κόσμου.

*Διεργασία επικοινωνίας:*Οι μαθητές επικοινωνούν με διάφορους τρόπους (προφορικά, εικονικά, γραπτά), για διάφορους λόγους και για διαφορετικά ακροατήρια (συμμαθητές, δάσκαλοι, γονείς). Μέσω της επικοινωνίας μπορούν, όχι μόνο να εκφρασθούν αλλά και να αναστοχασθούν πάνω στον τρόπο σκέψης τους και τον τρόπο σκέψης των συνομιλητών τους. Η από κοινού δημιουργία νοήματος επιτρέπει τη συνεργασία, τη σε βάθος κατανόηση εννοιών και διαδικασιών, την αποσαφήνιση των ιδεών και την ανάλυση των επιχειρημάτων που ανταλλάσσονται.. Το Πρόγραμμα Σπουδών οφείλει να προσφέρει ευκαιρίες για επικοινωνία στους μαθητές, προβλέποντας σχετικές δραστηριότητες, όπου να δίνεται έμφαση στη σωστή χρήση της φυσικής και συμβολικής γλώσσας και στη σταδιακή απομάκρυνση από υποκειμενικές, άτυπες εκφράσεις για την περιγραφή μαθηματικών εννοιών, σχέσεων και διαδικασιών.

Διεργασία επιλογής και χρήσης εργαλείων: Η χρήση τεχνουργημάτων (artifacts), απτικών και ψηφιακών, και η σταδιακή μετατροπή τους σε νοητικά εργαλεία αποτελεί κοινή πρακτική στην ιστορία των μαθηματικών: άβακας, διαβήτης, κ.λπ.

αποτελούν την ενσωμάτωση αφηρημένων εννοιών, όπως ο αριθμός/ η αξία θέσης και ο κύκλος.

Είναι σαφές ότι η απλή παρουσία εργαλείων (π.χ., ψηφιακών) δεν διασφαλίζει την κατασκευή της γνώσης, καθώς πολλοί μαθητές δυσκολεύονται στη χρήση τους (ακόμα και σε απλές περιπτώσεις, όπως του διαβήτη ή του μοιρογνωμονίου), ενώ συχνά η λειτουργική τους ενσωμάτωση στη διαδικασία μάθησης αποδεικνύεται μια εξαιρετικά δύσκολη υπόθεση. Οι μαθητές χρειάζεται να ενθαρρυνθούν να ξεπεράσουν αυτές τις δυσκολίες, να αναπτύξουν την ικανότητα να επιλέγουν απτικά και ψηφιακά εργαλεία και στρατηγικές που θα τους επιτρέψουν να ασκήσουν αυθεντική μαθηματική δράση (όπως είναι η αποτελεσματική διατύπωση και διερεύνηση εικασιών και προβλημάτων, η κατάλληλη αναπαράσταση μιας μαθηματικής ιδέας και η μοντελοποίηση μιας κατάστασης). Τέλος, είναι σημαντικό να γνωρίζουν τη σχέση μεταξύ των διαφόρων συστημάτων αναπαράστασης (πχ. εικονικές, γεωμετρικές, συμβολικές κ.λ.π.), να αποκτήσουν σταδιακά την ικανότητα της μετάβασης από ένα σύστημα αναπαράστασης σε ένα άλλο και να επιλέγουν το εκάστοτε κατάλληλο σύστημα αναπαράστασης μιας κατάστασης.

Διεργασία μεταγνωστικής ενημερότητας:

Οι μεταγνωστικές διεργασίες περιλαμβάνουν το συνειδητό έλεγχο της μάθησης, το σχεδιασμό και την επιλογή στρατηγικών, την παρακολούθηση της ανάπτυξης της γνώσης, τη διόρθωση των λαθών, την ανάλυση της αποτελεσματικότητας των στρατηγικών και την αλλαγή των στρατηγικών όταν αυτό είναι απαραίτητο. Ένα άτομο διαθέτει μεταγνωστική ικανότητα όταν έχει συνείδηση της γνωστικής του διαδικασίας και μπορεί να ελέγχει, να ρυθμίζει και να αξιολογεί τον τρόπο σκέψης του (Borkowski, 1992; Brown, Bransford, Ferrara & Campione, 1983). Οι μεταγνωστικές διεργασίες επιτρέπουν ευελιξία στη σκέψη και δυνατότητα προσαρμογής σε νέες μη οικείες καταστάσεις.(Share & Dover 1987). Ο Schoenfeld (1987) αναφέρει ότι υπάρχουν τρεις τρόποι να μιλήσει κάποιος για τη μεταγνώση στο πλαίσιο της μάθησης των Μαθηματικών: πεποιθήσεις και διαισθήσεις (: *ποιές ιδέες σχετικά με τα Μαθηματικά υιοθετείς και πως αυτό επηρεάζει τον τρόπο που μαθαίνεις*;), γνώση των δικών μας διαδικασιών σκέψης (*πόσο αποτελεσματικός είσαι στην περιγραφή του τρόπου σκέψης σου*;) και αυτορύθμιση ή παρακολούθηση και έλεγχος (*πόσο καλά μπορείς να παρακολουθείς τον τρόπο σκέψης σου, για παράδειγμα όταν λύνεις ένα πρόβλημα*;).

Συνοψίζοντας, η μάθηση των μαθηματικών είναι μια διαρκής, σπειροειδής διαδικασία γενίκευσης και αφαίρεσης, η οποία υλοποιείται στο παρόν Πρόγραμμα Σπουδών μέσα από την προσπάθεια ανάπτυξης των γενικών και των ειδικών ικανοτήτων και διεργασιών κατά μήκος των τροχιών μάθησης που εξελίσσονται μέσα στη ίδια τάξη και από τάξη σε τάξη. Αυτή η όλο και πιο αφαιρετική πορεία συγκρότησης της μαθηματικής γνώσης σηματοδοτείται συχνά από γνωστικές συγκρούσεις που οδηγούν στην αναθεώρηση, τροποποίηση ή ανατροπή όσων ήδη γνωρίζει. Πράγματα που θεωρούταν δεδομένα σε κάποια φάση, τίθενται υπό αμφισβήτηση και γίνονται αντικείμενο συζήτησης και αναστοχασμού σε επόμενη φάση.

ΔΟΜΗ ΤΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ ΣΠΟΥΔΩΝ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Για την υποστήριξη των παραπάνω στόχων και τη δυνατότητα υλοποίησης τους στη σχολική τάξη η ομάδα των εμπειρογνωμόνων έκανε τις παρακάτω βασικές επιλογές στην ανάπτυξη του ΠΣ:

- Ανάπτυξη του περιεχομένου με βάση την έννοια της «τροχιάς μάθησης και διδασκαλίας ».
- Επιλογή και χρήση χειραπτικών και ψηφιακών εργαλείων ως μέσων διερεύνησης μαθηματικών ιδεών, ανάπτυξης στρατηγικών και επίλυσης προβλημάτων.
- Ανάδειξη της «μαθηματικής δραστηριότητας» ως τη βάση ανάπτυξης των γενικών και ειδικών ικανοτήτων και διεργασιών.
- Εισαγωγή της «συνθετικής εργασίας» ως ένα μέσο οριζόντιας διασύνδεσης των μαθηματικών με άλλα μαθησιακά διδακτικά αντικείμενα.
- Σχεδιασμός της αξιολόγησης δίνοντας έμφαση στο διαμορφωτικό της χαρακτήρα και τη σύνδεση της με τη διδασκαλία.

Στη συνέχεια αναλύονται οι παραπάνω επιλογές και παρουσιάζεται πώς αυτές αναδεικνύονται στο ΠΣ.

Τροχιές μάθησης και διδασκαλίας στα σχολικά μαθηματικά

Το πρόγραμμα αναπτύχθηκε σε τρεις ηλικιακούς κύκλους χρησιμοποιώντας ως βάση την ιδέα της μαθησιακής – διδακτικής τροχιάς. Ο πρώτος ηλικιακός κύκλος αφορά μαθητές του νηπιαγωγείου (5-6 χρονών), της Α΄ Δημοτικού (6-7 χρονών) και της Β΄Δημοτικού (7-8 χρονών). Ο δεύτερος ηλικιακός κύκλος περιλαμβάνει την ηλικιακή περίοδο από 8 έως 12 χρονών που αντιστοιχούν στις τάξεις Γ΄, Δ΄, Ε΄ και ΣΤ΄ Δημοτικού. Τέλος ο τρίτος κύκλος αφορά στην περίοδο φοίτησης των μαθητών στο Γυμνάσιο (12 – 15 χρονών).

Τα ερευνητικά δεδομένα στο πεδίο της Διδακτικής των Μαθηματικών καθιστούν σαφές ότι οι μαθητές ακολουθούν μια εξελικτική πορεία μάθησης και ανάπτυξης των μαθηματικών νοημάτων. Όταν οι εκπαιδευτικοί κατανοούν αυτήν την πορεία και τους βασικούς σταθμούς της και οργανώνουν τη δραστηριοποίηση των παιδιών με αναφορά σε αυτήν, είναι αυτονόητο ότι οικοδομούν περιβάλλοντα μάθησης της μαθηματικής γνώσης που μπορούν να στηρίξουν αποτελεσματικά την επιτυχή μαθητεία του μαθητή στα μαθηματικά (Clements & Sarama, 2009). Σε αυτήν την κατεύθυνση είναι εξαιρετικά σημαντική η έννοια της τροχιάς μάθησης και διδασκαλίας, καθώς προσφέρει απαντήσεις σε κρίσιμα διδακτικά ερωτήματα, όπως «ποιοι είναι οι εκάστοτε στόχοι μάθησης, ποια είναι η αφετηρία εκκίνησης, πως και που μετακινείσαι κάθε φορά και πως επιτυγχάνεις, τελικά, το στόχο μάθησης που είχε αρχικά τεθεί».

Μια Τροχιά Μάθησης και Διδασκαλίας (ΤΜΔ) αποτυπώνει μια συνολική θέαση της μαθησιακής εμπειρίας των μαθητών σε μια συγκεκριμένη θεματική του Προγράμματος Σπουδών των μαθηματικών και στοχεύει στη διαφάνεια και στην προσβασιμότητα στην αντίστοιχη εκπαιδευτική τους πορεία (Heuvel – Panhuizen, 2001). Στην πραγματικότητα, μια τέτοια τροχιά:

- Προσφέρει μια βάση για την άσκηση της διδακτικής πράξης

- Ορίζει σημαντικούς σταθμούς μάθησης (ενδιαμέσους και τελικούς) αλλά δε συνιστά μια προ-αποφασισμένη πορεία μάθησης
- Καθιστά φανερές τις διαφορές μάθησης μεταξύ μαθητών αλλά δεν περιγράφει μια ατομική πορεία μάθησης
- Συνιστά μια πηγή έμπνευσης για διδακτική δράση αλλά όχι έναν διδακτικό οδηγό
- Μπορεί να αποβεί εκπαιδευτικά ωφέλιμη αλλά δεν αποτελεί το μοναδικό τρόπο αναβάθμισης της ποιότητας της διδασκαλίας.

Κάθε ΤΔΕ συναπαρτίζεται από τρία μέρη: ένα *μαθηματικό στόχο* (πρόκειται για συστάδες εννοιών, δεξιοτήτων και ικανοτήτων που είναι μαθηματικά και μαθησιακά θεμελιώδεις), μια *διαδρομή* (επάλληλα, προοδευτικά αναπτυσσόμενα επίπεδα σκέψης που οδηγούν στην επίτευξη του στόχου που τέθηκε), κατά την οποία οι μαθητές αναπτύσσονται για να επιτύχουν το συγκεκριμένο στόχο και ένα σύνολο από *διδακτικές δραστηριότητες,* αντίστοιχες των *επιπέδων σκέψης* που διακρίνονται στη διαδρομή ή τη χαρακτηρίζουν, οι οποίες θα προσφέρουν την κατάλληλη υποστήριξη στους μαθητές για να αναπτύξουν ανώτερα επίπεδα σκέψης.

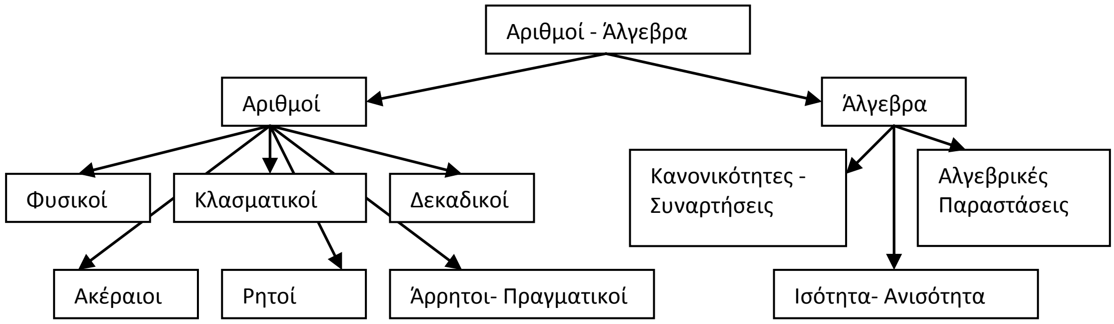
Σε μια προσπάθεια αποφυγής οποιαδήποτε σύγχυσης, είναι σημαντικό να τονιστεί ότι, μια ΤΜΔ δεν είναι μια γραμμική, βήμα-προς-βήμα περιγραφή πορείας, όπου κάθε βήμα συνδέεται αναγκαία με το επόμενο. Ούτε ένα μοναδικά ορισμένο μονοπάτι, καθώς καλείται να λάβει υπόψη του: τις ατομικές μαθησιακές πορείες, τις ασυνέχειες στη μαθησιακή διαδικασία (άλματα, οριοθετήσεις, υποτροπιάσεις), το γεγονός ότι πολλαπλές δεξιότητες και έννοιες αναπτύσσονται ταυτόχρονα στο πλαίσιο του ίδιου αντικειμένου μάθησης αλλά και εκτός αυτού και τις διαφορές μεταξύ της άτυπης και της τυπικής μάθησης.

Σε μια ΤΜΔ, αυτό που μαθαίνεται σε μια φάση επιτελείται σε ανώτερο επίπεδο στην αμέσως επόμενη, δηλαδή, η μαθησιακή διαδικασία εξελίσσεται σε επίπεδα. Καθώς ο μαθητής μετακινείται από επίπεδο σε επίπεδο, εργαζόμενος ατομικά ή συλλογικά, οι γνώσεις, οι δεξιότητες και οι ικανότητες που αναπτύσσει αποκτούν συνοχή. Τα επίπεδα προσφέρουν δυνατότητες οργάνωσης και ρύθμισης της διδασκαλίας, με στόχο την μετάβαση σε ανώτερα επίπεδα μάθησης. Θα πρέπει, ωστόσο, να διευκρινιστεί ότι τα επίπεδα δεν έχουν γενική ισχύ (επιτρέπουν την ανάδειξη των ιδιαιτεροτήτων στις μορφές μάθησης), ενώ δεν υπάρχει άμεση σύνδεση μεταξύ επιπέδων και των σταδίων νοητικής ανάπτυξης του μαθητή. Τέλος, είναι σημαντικό να επισημανθούν ορισμένοι περιορισμοί και δυσκολίες στην οργάνωση της διδασκαλίας με βάση τις ΤΜΔ. Καταρχήν, είναι σαφές ότι δεν είναι πάντοτε εύκολο να οριστούν με σαφήνεια και να οργανωθούν με αποτελεσματικό τρόπο οι ΤΜΔ η μια σε σχέση με την άλλη. Επιπλέον, κατά την εργασία της διδασκαλίας στη βάση των ΤΜΔ θα πρέπει να ληφθεί ιδιαίτερη μέριμνα ώστε:

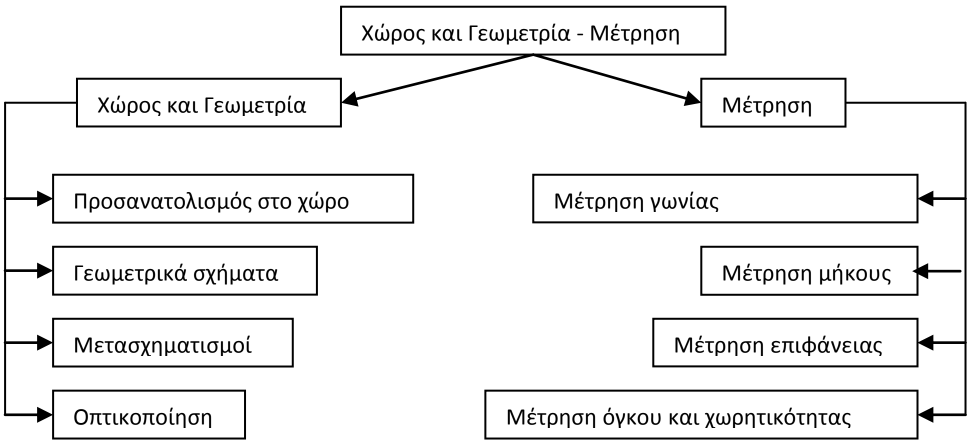
- Η εστίαση σε μια τροχιά να μην εμποδίζει τη θέαση των υπολοίπων
- Οι τροχιές να επιτρέπουν την συν-θέαση της γνωστικής, κοινωνικής και συναισθηματικής ανάπτυξης του μαθητή (αχώριστες αλλά όχι αδιάκριτες).
- Να είναι εμφανής ο τρόπος με τον οποίο οι τροχιές συσχετίζονται, διασταυρώνονται και ενοποιούνται.

Βασικά μαθηματικά περιεχόμενα

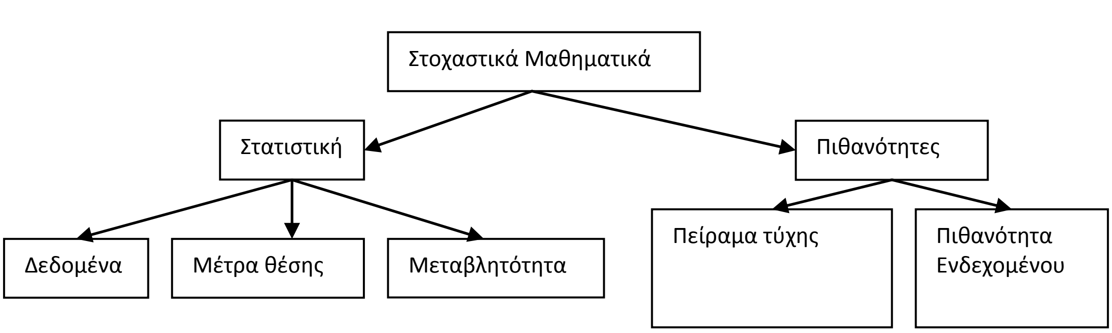
Οι βασικές θεματικές περιοχές γύρω από τις οποίες αναπτύσσονται τα περιεχόμενα και τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα είναι: Αριθμοί – Άλγεβρα, Χώρος και Γεωμετρία – Μετρήσεις και Στοχαστικά Μαθηματικά.. Στα σχήματα 1, 2 και 3 παρουσιάζονται τα βασικά μαθηματικά περιεχόμενα ανά κάθε θεματική περιοχή με βάση τα οποία αναπτύχθηκαν οι τροχιές.



Σχήμα 1. Βασικά μαθηματικά περιεχόμενα της θεματικής περιοχής Αριθμοί – Άλγεβρα



Σχήμα 2. Βασικά μαθηματικά περιεχόμενα της θεματικής περιοχής Χώρος και Γεωμετρία- Μέτρηση



Σχήμα 3. Βασικά μαθηματικά περιεχόμενα της θεματικής περιοχής Στοχαστικά Μαθηματικά

Παρουσιάζεται παρακάτω η σημασία και ο ρόλος των τριών βασικών θεματικών περιοχών στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών καθώς και τα κύρια συστατικά των μαθησιακών-διδακτικών τροχιών.

Αριθμοί και άλγεβρα

Από τη στιγμή της γέννησής τους τα παιδιά έρχονται αντιμέτωπα με μια πληθώρα από **αριθμητικά φαινόμενα**, τα οποία ελκύουν το ενδιαφέρον και την περιέργειά τους. Οι αριθμοί αντιπροσωπεύουν μια ανεξάντλητη και ερεθιστική πηγή ευκαιριών για ανακαλύψεις. Έτσι, η καθημερινότητά τους προσφέρει το πρώτο και πιο προκλητικό περιβάλλον για αλληλεπιδράσεις με νόημα και, επομένως, για την προώθηση της διαδικασίας μάθησης του αριθμού. Η διεύρυνση αυτού του πρώτου πεδίου 'αριθμητικής δράσης' με το σχολικό περιβάλλον διαμορφώνει νέους ορίζοντες μάθησης για τον αριθμό, καθώς με οργανωμένο, πλέον, τρόπο οι μαθητές οδηγούνται στη μετάβαση από την άτυπη αριθμητική γνώση στην τυπική, στη μύηση στο 'αριθμητικό/ μαθηματικό κεφάλαιο' του ανθρώπινου πολιτισμού. Προσκαλούνται, συγκεκριμένα, να γίνουν «ενάριθμοι» (numerate), να αναπτύξουν την *αίσθηση του αριθμού* (number sense): μια γενική κατανόηση του αριθμού και των πράξεων με αριθμούς, καθώς και την ικανότητα ευέλικτης αξιοποίησης αυτής της κατανόησης για τη συγκρότηση και διατύπωση μαθηματικών κρίσεων και την ανάπτυξη χρήσιμων στρατηγικών διαχείρισης των αριθμών και των πράξεων με αριθμούς.

Ένα εξαιρετικά μεγάλο μέρος της μαθηματικής εκπαίδευσης που προσφέρεται στην υποχρεωτική εκπαίδευση αφορά στη μελέτη διαφόρων αριθμητικών συνόλων. Παρόλα αυτά, οι σχετικές έρευνες καταγράφουν συνεχώς απογοητευτικά επίπεδα κατανόησης των αριθμητικών ιδεών. Οι λόγοι της περιορισμένης ανάπτυξης της αίσθησης του αριθμού αναζητούνται, κυρίως, στην αποτυχία της διδακτικής πράξης και της πολιτικής της μαθηματικής εκπαίδευσης να αναδείξει τα δομικά στοιχεία των αριθμητικών συνόλων που διδάσκονται στο σχολείο, στην υπέρμετρη έμφαση στη διαδικαστική παρά στην εννοιολογική κατανόηση των αριθμών, την αγνόηση της πλούσιας, άτυπης αριθμητικής γνώσης των μαθητών και στην απουσία ή στην αδυναμία υιοθέτησης λειτουργικών μηχανισμών παρακολούθησης και ανατροφοδότησης της μαθησιακής αλλά και της διδακτικής πορείας.

Η ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού από τους μαθητές κατέχει κεντρική θέση στο νέο Πρόγραμμα Σπουδών σε όλη την υποχρεωτική εκπαίδευση και οργανώθηκε με βάση τις παρακάτω κατευθυντήριες γραμμές:

- Τα αριθμητικά περιεχόμενα αναπτύσσονται σε όλες και τάξεις προοδευτικά και σε επάλληλα επίπεδα αφαίρεσης και γενίκευσης, προσφέροντας σε κάθε επίπεδο επαρκή χρόνο επεξεργασίας της εννοιολογικής και της διαδικαστικής μαθηματικής γνώσης που κρίνεται αναγκαία.
- Η οργάνωση της ανάπτυξης των αριθμητικών περιεχομένων γίνεται με βάση της σχετική βιβλιογραφία. Συγκεκριμένα, αποφάσεις ιεράρχησης, εμβάθυνσης, εστίασης, κ.ά. σχετικά με κάποιο συστατικό της επιδιωκόμενης μαθηματικής γνώσης στηρίχτηκαν σε αντίστοιχα ερευνητικά δεδομένα.

- Η ανάπτυξη του αριθμητικού περιεχομένου γίνεται με τρόπο που καθιστά δυνατή την παρακολούθησή της τόσο από το μαθητή όσο και από τον εκπαιδευτικό.

Με βάση τις παραπάνω κατευθύνσεις, υιοθετήθηκαν, τελικά, τροχιές ανάπτυξης της αίσθησης καθενός από τους φυσικούς, τους κλασματικούς, τους ακεραίους, τους ρητούς και, τέλος, τους πραγματικούς αριθμούς, οι οποίες επιμερίζονται στις παρακάτω υπο-τροχιές:

- Αναγνώριση και έκφραση του αριθμού, μέσω των διαφόρων αναπαραστάσεών του
- Σύγκριση και διάταξη του αριθμού
- Αναπαράσταση και διερεύνηση των πράξεων με αριθμούς
- Εκτέλεση/ υπολογισμός πράξεων και εκτίμηση του αποτελέσματος πράξεων
- Αξιοποίηση της εννοιολογικής και της διαδικαστικής αριθμητικής γνώσης για τη μοντελοποίηση καταστάσεων, την επίλυση προβλημάτων και την επικοινωνία με τους άλλους .

Για κάθε σύνολο αριθμών, οι παραπάνω τροχιές και υπο-τροχιές εξειδικεύονται ανά κύκλο και τάξη, καθιστώντας ορατή τόσο την εσωτερική (πρώτα αναπτύσσονται οι τροχιές εννοιολογικού χαρακτήρα και, στη συνέχεια, εκείνες που αφορούν στις εκτιμήσεις και στους υπολογισμούς) όσο και την εξωτερική τους δομή (οι κλασματικοί θεώνται ως επέκταση των φυσικών, οι ακέραιοι των κλασματικών, κ.τ.λ.).

Στη συνέχεια, παρουσιάζονται ορισμένα από τα κεντρικά ερευνητικά πορίσματα για καθένα από τα σύνολα αριθμών που περιλαμβάνονται στο Πρόγραμμα Σπουδών (φυσικοί, κλασματικοί /δεκαδικοί, ακέραιοι, ρητοί και, τέλος, πραγματικοί), σε μια προσπάθεια σκιαγράφησης του επιθυμητού προσανατολισμού της μαθηματικής εκπαίδευσης που αφορά στην ανάπτυξη της αίσθησης του αριθμού από τους μαθητές (περισσότερες βιβλιογραφικές λεπτομέρειες μπορεί να αναζητηθούν, για παράδειγμα, στα Σακονίδης (2001), Millett et al. (2004), de Walle (2005), Τζεκάκη (2008) και Κολέζα & Φακούδης (2009)).

(α) Φυσικοί αριθμοί: Παρά το γεγονός ότι οι φυσικοί αριθμοί καταλαμβάνουν μεγάλο μέρος του ΠΣ της υποχρεωτικής εκπαίδευσης, οι σχετικές έρευνες συνεχίζουν να καταγράφουν δυσκολίες των μαθητών στην ανάπτυξη της αίσθησης του φυσικού αριθμού, οι κυριότερες από τις οποίες παρουσιάζονται παρακάτω.

Κατανόηση της αξίας των ψηφίων: Αρκετοί μαθητές αδυνατούν να διαχειριστούν με σαφήνεια το θέμα της θεσιακής αξίας των ψηφίων, ακόμη και στην αρχή της φοίτησής τους στο Γυμνάσιο, γεγονός που ενδεχομένως να τους δυσκολεύει στην εκτέλεση πράξεων με φυσικούς αριθμούς. Η σχετική βιβλιογραφία προτείνει την αξιοποίηση δραστηριοτήτων που αναδεικνύουν δομικά και σημασιολογικά στοιχεία του δεκαδικού συστήματος γραφής και ανάγνωσης αριθμών από τις πρώτες κιόλας τάξεις του Δημοτικού Σχολείου.

Δομικές ιδιότητες των φυσικών αριθμών: Για να μπορέσει ο μαθητής να εκτιμήσει τις δομικές ιδιότητες των αριθμών, θα πρέπει να είναι σε θέση να αντιλαμβάνεται τους αριθμούς ως αυθύπαρκτες οντότητες, ανεξάρτητες από το πλαίσιο στο οποίο εμφανίζονται. Η έρευνα δείχνει ότι τα πρώτα βήματα προς αυτήν την κατεύθυνση εντοπίζονται από την ηλικία των 6 χρόνων. Ωστόσο, η γενίκευση αυτών των ιδιοτήτων δεν αναμένεται πριν την ηλικία των 9 χρόνων. Προς το τέλος της φοίτησής τους στο Δημοτικό Σχολείο οι μαθητές αναμένεται να είναι σε θέση τουλάχιστον να αναγνωρίζουν και να αποδέχονται τις παραπάνω ιδιότητες. Ωστόσο, αυτό δε συμβαίνει για όλους τους μαθητές.

Υπολογιστικές διαδικασίες (αλγόριθμοι εκτέλεσης μιας πράξης): Πολλοί ερευνητές σημειώνουν επικριτικά την έμφαση της διδασκαλίας στους αλγόριθμους εκτέλεσης των τεσσάρων πράξεων για δύο λόγους. Ο πρώτος σχετίζεται με τον κίνδυνο ταύτισης του αλγόριθμου με την έννοια της πράξης. Ο δεύτερος λόγος αφορά στη συμβολή αυτής της έμφασης στη διαμόρφωση της αντίληψης από τους μαθητές ότι οι συγκεκριμένοι αλγόριθμοι αποτελούν και τη μοναδική τους επιλογή στην εκτέλεση μιας πράξης. Επιπλέον, το γεγονός ότι οι αλγόριθμοι αυτοί διδάσκονται συνήθως ως ένα σύνολο κανόνων, χωρίς πάντοτε σαφή αιτιολογία και επεξήγηση και χωρίς να συνδέονται με την προηγούμενη αριθμητική γνώση των μαθητών, αντί να ενθαρρύνει την ουσιαστική κατανόηση του αριθμητικού συστήματος, ευνοεί την αντίληψη ότι τα μαθηματικά είναι μια συλλογή μυστηριωδών και αυθαίρετων, στην πλειοψηφία τους, κανόνων. Ως αποτέλεσμα, πολλοί μαθητές δυσκολεύονται να παρακολουθήσουν τη λογική αυτών των διαδικασιών και στην καλύτερη περίπτωση τις υιοθετούν με μηχανικό τρόπο, υπονομεύοντας τη περαιτέρω εξέλιξή τους στα μαθηματικά.

Επίλυση προβλημάτων με τις τέσσερις πράξεις (νόημα και δομή): Η πλειοψηφία των μαθητών ηλικίας 12 – 15 χρόνων μπορούν να επιλύσουν απλά προβλήματα που αφορούν σε μία από τις τέσσερις πράξεις. Ωστόσο, η έρευνα δείχνει ότι αυτό δεν συμβαίνει για πιο σύνθετα προβλήματα, κυρίως εξαιτίας της αδυναμίας πολλών μαθητών να κατανοήσουν και να αναπαραστήσουν τις σχέσεις που αποτυπώνονται στο σενάριο του προβλήματος, καθώς και της περιορισμένης κατανόησης των ίδιων των πράξεων. Η διδασκαλία καλείται να συμβάλλει στη βελτίωση της υπάρχουσας κατάστασης, παρέχοντας συνεχείς και ποικίλες εμπειρίες προβλημάτων και μεθοδολογίας επίλυσής τους από τους μαθητές.

(β) Κλασματικοί αριθμοί: Πολλοί μαθητές δυσκολεύονται στην κατανόηση και στον αποτελεσματικό χειρισμό των κλασμάτων, επειδή δεν αντιλαμβάνονται την αφηρημένη φύση τους, την ποικιλία των ερμηνειών τους, την ιδιαίτερη γλώσσα που χρησιμοποιείται στη μελέτη τους και τους αλγόριθμους που απαιτεί η αριθμητική τους.

Η έννοια του κλασματικού αριθμού: Στη βιβλιογραφία αναφέρονται τέσσερις διακριτές ερμηνείες του κλάσματος (ως μέρος εμβαδού κάποιου χωρίου, ως υποσύνολο ενός συνόλου, ως αποτέλεσμα διαίρεσης και ως σημείο της αριθμογραμμής), οι οποίες δυσκολεύουν πολλούς μαθητές, ακόμη και πέραν της υποχρεωτικής εκπαίδευσης. Οι δυσκολίες αυτές είναι μεγαλύτερες για την ερμηνεία του κλάσματος ως υποσυνόλου και ακόμη περισσότερο για αυτήν ως σημείου της αριθμογραμμής.

Ισοδυναμία Κλασμάτων: Οι επιδόσεις των μαθητών σε απλές ερωτήσεις ισοδυναμίας κλασμάτων εμφανίζονται σε ικανοποιητικά επίπεδα στην ερευνητική βιβλιογραφία. Ωστόσο, μειώνονται δραματικά σε συνθετότερες, σχετικές δραστηριότητες, ακόμη και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Αρκετοί ερευνητές υποστηρίζουν ότι η ερμηνεία του κλάσματος ως σημείου της αριθμογραμμής προσφέρεται περισσότερο για την αποτελεσματικότερη διδασκαλία της ισοδυναμίας κλασμάτων.

Πράξεις με κλασματικούς αριθμούς: Πολλοί μαθητές συναντούν δυσκολίες στις πράξεις με κλασματικούς αριθμούς, ακόμη και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Οι δυσκολίες αυτές συνδέονται τόσο με τις αντίστοιχες που αφορούν στις ερμηνείες του κλάσματος και στην ισοδυναμία κλασμάτων, όσο και με τους πολύπλοκους κανόνες που διέπουν τους αλγόριθμους εκτέλεσης των συγκεκριμένων πράξεων. Επειδή οι κανόνες αυτοί μαθαίνονται συνήθως «από μνήμης», άλλοτε χρησιμοποιούνται μηχανικά και άλλοτε παραποιούνται και εφαρμόζονται λανθασμένα.

(γ) Δεκαδικοί αριθμοί: Η διδασκαλία των δεκαδικών αριθμών ακολουθεί συνήθως τη διδασκαλία των κλασματικών αριθμών, καθώς τα δύο συστήματα αναπαράστασης εμφανίζονται να συνδέονται μεταξύ τους και η κατανόηση των κλασμάτων τίθεται ως προϋπόθεση για την κατανόηση των δεκαδικών αριθμών. Ωστόσο, μερικοί ερευνητές υποστηρίζουν πως δεν υπάρχουν κάποιοι ιδιαίτεροι λόγοι που να αποκλείουν την αντιστροφή της σειράς διδασκαλίας των δύο αυτών ενοτήτων.

Οι διαφορετικές ερμηνείες των δεκαδικών αριθμών: Η ποικιλότητα της ερμηνείας των δεκαδικών αριθμών φαίνεται να αποτελεί έναν από τους λόγους των δυσκολιών που αντιμετωπίζουν οι μαθητές με τους δεκαδικούς αριθμούς. Όπως ένα κλάσμα, έτσι και ένας δεκαδικός αριθμός μπορεί να ερμηνευτεί ως εμβαδόν χωρίου, υποσύνολο, αποτέλεσμα της πράξης της διαίρεσης και ως σημείο στην αριθμογραμμή.

Ο ρόλος της υποδιαστολής: Πολύ σημαντικές δυσκολίες φαίνεται να δημιουργεί στους μαθητές η υποδιαστολή, την οποία συχνά οι μαθητές ερμηνεύουν ως σημείο διαχωρισμού ανάμεσα σε δύο διαφορετικούς αριθμούς ή την αγνοούν.

Ισοδυναμία δεκαδικών αριθμών: Αρκετοί μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν ισοδυναμίες του τύπου 0,35 ή 3 δέκατα και 5 εκατοστά ή 35 εκατοστά ή 7 φορές τα 5 εκατοστά κτλ. Δεν είναι λίγες ακόμη οι φορές που δυσκολεύονται να κατανοήσουν ότι το 0 στο τέλος κάποιου δεκαδικού αριθμού δεν παίζει κάποιο ρόλο. Άλλοι, πάλι, μαθητές μπερδεύονται και διαγράφουν το μηδενικό, ακόμη και όταν αυτό βρίσκεται ανάμεσα σε δύο ψηφία.

Πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς: Δυσκολίες εμφανίζονται και στις τέσσερις πράξεις αλλά, ιδιαίτερα, στις πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης με δεκαδικούς αριθμούς, οι οποίες δεν είναι εύκολο να γίνουν αντιληπτές ως επαναλαμβανόμενη πρόσθεση και μοιρασιά αντίστοιχα, όπως στους φυσικούς αριθμούς. Για παράδειγμα, είναι πολύ δύσκολο για ένα μαθητή να αντιληφτεί τι σημαίνει «ο αριθμός 5,23 να επαναληφθεί 0,3 φορές». Επιπλέον, πολλά παιδιά μπορεί να δυσκολεύονται σε αυτές τις πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς, επειδή παραμένουν προσκολημμένα σε αντιλήψεις, όπως «ο πολλαπλασιασμός αυξάνει έναν αριθμό, ενώ η διαίρεση το μειώνει», που ισχύει πάντοτε στους φυσικούς, αλλά όχι στους δεκαδικούς αριθμούς.

(δ) Ακέραιοι αριθμοί: Η κατανόηση των ακεραίων αριθμών και των πράξεων με ακεραίους αριθμούς είναι σημαντική για τη μελέτη των αλγεβρικών ιδεών. Παρόλα αυτά, η σχετική έρευνα είναι πολύ περιορισμένη.

Γενικά, οι διδακτικές προσεγγίσεις που ακολουθούνται στη διδασκαλία των ακεραίων αριθμών μπορούν να ταξινομηθούν σε δύο κατηγορίες: σε αυτές που χειρίζονται τους ακεραίους ως αφηρημένες οντότητες και σε αυτές που χρησιμοποιούν συγκεκριμένα μοντέλα για να προσδώσουν νόημα στους ακεραίους και στις πράξεις με αυτούς. Τα πορίσματα των ερευνών και για τις δύο προσεγγίσεις δεν είναι ιδιαίτερα ενθαρρυντικά. Σήμερα επικρατεί η άποψη της αξιοποίησης πολλαπλών μοντέλων για τη διδασκαλία των πράξεων με ακεραίους αριθμούς, όπου οι τελευταίοι παρουσιάζονται ως συγκεκριμένα αντικείμενα ή οντότητες, οι οποίες κατασκευάζονται με τέτοιο τρόπο, ώστε οι θετικοί ακέραιοι να «ακυρώνουν» τους αρνητικούς. Παραδείγματα τέτοιων οντοτήτων και αντικειμένων είναι οι έννοιες της πίστωσης και του χρέους και μάρκες ή πούλια ή κάρτες μοναδιαίας αξίας και διαφορετικών χρωμάτων (π.χ. τα μαύρα (θετικοί) και κόκκινα πούλια (αρνητικοί) αντιστοίχως). Επίσης μια πρώτη διαισθητική αντιμετώπιση των ακεραίων εισάγεται από τις μικρές ηλικίες καθώς οι μικροί μαθητές χειρίζονται καθημερινές καταστάσεις που χρησιμοποιούν ακεραίους (π.χ. το θερμόμετρο, το ασανσέρ κ.λ.π.)

Αναφορικά με τις πράξεις, τα δεδομένα της έρευνας προτείνουν ότι η πρόσθεση με ακεραίους δεν παρουσιάζει ιδιαίτερα προβλήματα, ίσως γιατί μπορεί να μοντελοποιηθεί και να κατανοηθεί με σχετική ευκολία. Ο πολλαπλασιασμός είναι πιο δύσκολο να εξηγηθεί, αλλά οι κανόνες που τον διέπουν μπορούν να απομνημονευτούν και να εφαρμοστούν με ευκολία. Ωστόσο, η μοντελοποίηση της αφαίρεσης ακεραίων είναι πιο σύνθετη και οι κανόνες της μπορούν εύκολα να δημιουργήσουν σύγχυση και να εφαρμοστούν λανθασμένα.

Η έρευνα είναι πιο περιορισμένη αναφορικά με τους τρόπους που οι μαθητές της υποχρεωτικής εκπαίδευσης ανταποκρίνονται στις νοητικές διεργασίες που απαιτούνται για την επιτυχή ανάπτυξη των **ρητών** και των **πραγματικών** αριθμών, σε σύγκριση με τους υπόλοιπους αριθμούς, με αποτέλεσμα να μην είναι εύκολη η ανίχνευση συγκλίσεων ή ενός κεντρικού προσανατολισμού στα σχετικά ευρήματα.

Η **άλγεβρα** συνιστά μία από τις σπουδαιότερες αλλά και δυσκολότερες ενότητες των μαθηματικών από άποψη μάθησης αλλά και διδασκαλίας. Η αξία της βρίσκεται κυρίως σε δύο δυνατότητες που προσφέρει: (α) τη διαχείριση των μαθηματικών ιδεών με ακρίβεια και σαφήνεια και (β) την ευκολότερη και αποτελεσματικότερη επίλυση προβλημάτων, μαθηματικών και μη, κυρίως μέσω της μοντελοποίησης (για περισσότερες λεπτομέρειες, μπορείτε να συμβουλευτείτε κείμενα, όπως, Δραμαλίδης & Σακονίδης (2006), Kieran (2007) και Βερύκιος (2010)).

Στο πλαίσιο των σχολικών μαθηματικών η άλγεβρα παρουσιάζεται κατά κανόνα είτε ως γενικευμένη αριθμητική είτε ως η μελέτη του αριθμητικού συστήματος και της δομής του, η οποία ενδιαφέρεται μόνο για γενικευμένους αριθμούς, δηλαδή, για αντιπροσώπους κλάσεων αριθμών. Η συνήθης πρακτική που υιοθετείται, όταν εισάγεται μια αλγεβρική ιδέα, είναι η αναφορά στις προηγούμενες αριθμητικές εμπειρίες των μαθητών και ο λογικός συμπερασμός. Αμέσως μετά δίνεται στους μαθητές εκτεταμένη εξάσκηση στο χειρισμό συμβολικών αναπαραστάσεων της αλγεβρικής ιδέας με την εφαρμογή συγκεκριμένων κανόνων. Αυτή η προσέγγιση στηρίζεται στην αρχή ότι, εφόσον η αριθμητική και η άλγεβρα αφορούν αριθμούς και οι μαθητές είναι εξοικειωμένοι με τις ιδιότητες των αριθμών και τις πράξεις με αριθμούς, υπάρχουν πολύ λίγα πράγματα που χρειάζεται να προστεθούν. Ωστόσο, αυτό δεν είναι αλήθεια. Τα στοιχεία και οι κανόνες της άλγεβρας αποτελούν αφαιρέσεις των αντίστοιχων στοιχείων και κανόνων της αριθμητικής, δηλαδή αποτελούν αφαιρέσεις αφαιρέσεων και επομένως η κατανόησή τους έχει ιδιαίτερες απαιτήσεις.

Αρκετές έρευνες έχουν επικεντρώσει στις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην άλγεβρα. Ορισμένες από αυτές ασχολήθηκαν με τις δυσκολίες που συνδέονται με την εκτεταμένη χρήση αλγεβρικών συμβόλων που οδηγεί πολλούς μαθητές να ταυτίζουν την άλγεβρα με σύμβολα και συμβολικούς χειρισμούς. Μια άλλη πηγή προβλημάτων αποτελεί η γλώσσα (φυσική και συμβολική) που χρησιμοποιείται στην άλγεβρα. Εκφράσεις όπως "έστω α ένας τυχαίος θετικός αριθμός" δεν είναι εύκολο να γίνουν κατανοητές από τους μαθητές. Αυτό επιβαρύνεται από το γεγονός ότι οι ρυθμοί μάθησης που επιβάλλονται από το Πρόγραμμα Σπουδών είναι συχνά τόσο ταχείς, ώστε δε δίνεται χρόνος στους μαθητές να τις αφομοιώσουν.

Είναι σημαντικό, πριν την εισαγωγή των μαθητών στην άλγεβρα, να προηγηθεί ένα στάδιο προετοιμασίας τους, κατά τη διάρκεια του οποίου θα διαμορφωθεί το κατάλληλο υπόβαθρο για τη συστηματική στη συνέχεια μελέτη των αλγεβρικών ιδεών. Το στάδιο αυτό μπορεί και προτείνεται να ξεκινήσει από τις μικρές κιόλας τάξεις του Δημοτικού Σχολείου και αναμένεται να περιλαμβάνει θέματα όπως:

- Μελέτη (αναγνώριση, συμπλήρωση, περιγραφή, γενίκευση) κανονικοτήτων
- Αναγνώριση των σχέσεων μεταξύ διαφόρων αναπαραστάσεων (γλωσσικών, υλικών, εικονικών, συμβολικών) και μετάβαση από τη μία στην άλλη
- Επίλυση προβλημάτων του τύπου «βρες τον αριθμό που λείπει»
- Κατανόηση ιδιοτήτων αριθμών, όπως η αντιμεταθετικότητα
- Κατανόηση του συμβόλου σχέσης της ισότητας
- Επινόηση αλγορίθμων για την πραγματοποίηση μιας εργασίας
- Θέματα θεωρίας αριθμών, όπως πρώτοι αριθμοί, διαιρετότητα, κτλ
- Κατανόηση των λόγων, όπως στις κλίμακες και στους ρυθμούς μεταβολής
- Ερμηνεία και κατασκευή γραφικών παραστάσεων και τη χρήση τους για προβλέψεις
- Επινόηση τύπων για τον σύντομο υπολογισμό εμβαδών και όγκων

Η διδασκαλία της άλγεβρας ξεκινά, συνήθως, με τη μελέτη απλών αλγεβρικών παραστάσεων, στη συνέχεια επικεντρώνεται στους μετασχηματισμούς όλο και συνθετότερων αλγεβρικών παραστάσεων και στην επίλυση γραμμικών πρώτα και μεγαλύτερου βαθμού (κυρίως δευτέρου) στη συνέχεια εξισώσεων και καταλήγει στη μελέτη απλών, αρχικά, συναρτήσεων και πιο πολύπλοκων στη συνέχεια. Ωστόσο η παραπάνω αλληλουχία δεν υποστηρίζεται σήμερα από τη σύγχρονη ερευνητική βιβλιογραφία. Παρακάτω συζητώνται μερικές από τις βασικότερες δυσκολίες των μαθητών σε κάθε μια από αυτές τις ενότητες.

Αλγεβρικές παραστάσεις: Πολλές έρευνες έχουν εντοπίσει την περιορισμένη κατανόηση του τρόπου που χρησιμοποιούνται τα γράμματα στην άλγεβρα από τους μαθητές. Τα περισσότερα ευρήματα συγκλίνουν στο γεγονός ότι συχνά οι μαθητές ερμηνεύουν ένα γράμμα ως ένα όνομα ενός συγκεκριμένου αριθμού, δηλαδή ως συγκεκριμένο άγνωστο. Για παράδειγμα, πολλοί μαθητές πιστεύουν ότι οι εξισώσεις 5ν+14=89 και 5μ+14=89 έχουν διαφορετικές λύσεις.

Οι σχετικές μελέτες έδειξαν τη δεκαετία του 1980 κιόλας ότι, αν και η ερμηνεία του γράμματος που επιλέγουν οι μαθητές που φοιτούν στις τελευταίες τάξεις της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης και στο Γυμνάσιο εξαρτάται από τη φύση και την πολυπλοκότητα της ερώτησης, πολύ λίγοι από αυτούς είναι σε θέση να θεωρήσουν το γράμμα ως γενικευμένο αριθμό και ακόμη λιγότεροι μπορούν να το ερμηνεύσουν ως μεταβλητή.

Τα τελευταία χρόνια, η εισαγωγή των νέων τεχνολογιών στην εκπαίδευση διαμόρφωσε νέα δεδομένα και νέες συνθήκες εργασίας και μέσα στην τάξη των μαθηματικών. Σε ότι αφορά στην άλγεβρα, σχετικές έρευνες έδειξαν ότι ορισμένου τύπου συμβολικά υπολογιστικά περιβάλλοντα μπορούν να υποστηρίξουν τη μάθηση βασικών αλγεβρικών ιδεών από τους μαθητές. Τα παραπάνω φανερώνουν ότι η πλειοψηφία των μαθητών ηλικίας 12 – 15 χρόνων αντιμετωπίζουν σοβαρές δυσκολίες διαχείρισης αλγεβρικών παραστάσεων, εξαιτίας της περιορισμένης κατανόησης δομικών χαρακτηριστικών της αριθμητικής.

Εξισώσεις: Μια από τις πρώτες διαπιστώσεις του μεγάλου αριθμού ερευνών που έχουν ασχοληθεί με τις επιδόσεις μαθητών διαφόρων ηλικιών στις εξισώσεις αφορά στον τρόπο που αυτοί αντιλαμβάνονται το σύμβολο της ισότητας. Σύμφωνα με αυτές τις έρευνες, πολλοί μαθητές θεωρούν το «=» ως ένα σημάδι για «να κάνεις κάτι» και συχνά «να δώσεις την απάντηση, έναν αριθμό» και όχι ως το σύμβολο της ισοδυναμίας μεταξύ του δεξιού και του αριστερού μέλους της ισότητας. Ακόμη και μετά από αρκετά μαθήματα άλγεβρας, το σύμβολο της ισότητας δεν φαίνεται να γίνεται κατανοητό ως σύμβολο ισοδυναμίας.

Η επίλυση μιας εξίσωσης τώρα, προϋποθέτει την ικανότητα του μαθητή να χειρίζεται την εξίσωση ως αντικείμενο και πιο συγκεκριμένα να είναι σε θέση να εκτελεί την ίδια πράξη και στις δύο πλευρές της. Ωστόσο, αυτή η φορμαλιστική διαδικασία δεν είναι η πρώτη ούτε και η μόνη που διδάσκονται οι μαθητές στη διάρκεια της φοίτησής τους στην υποχρεωτική εκπαίδευση. Ανάμεσα σε αυτές, οι πλέον δημοφιλείς είναι εκείνες της μεταφοράς των όρων με ταυτόχρονη αλλαγή του πρόσημου και της εφαρμογής της ίδιας πράξης και στα δύο μέλη της εξίσωσης. Η τελευταία θεωρείται και η πλέον αποτελεσματική από άποψη μάθησης, καθώς επιτρέπει στους μαθητές να λειτουργούν με αλγεβρικό τρόπο (επικέντρωση στα δομικά στοιχεία του συστήματος αρίθμησης και χειρισμό των αλγεβρικών οντοτήτων ως αντικειμένων). Γενικά, τα αποτελέσματα αρκετών ερευνών φανερώνουν ότι οι άπειροι στην επίλυση γραμμικών εξισώσεων μαθητές έχουν περιορισμένη αντίληψη των προϋποθέσεων κάτω από τις οποίες ένας μετασχηματισμός μιας εξίσωσης είναι επιτρεπτός.

Η *επίλυση προβλημάτωνμε εξισώσεις* αποτελεί μία από τις δυσκολότερες δραστηριότητες της άλγεβρας για τους μαθητές της υποχρεωτικής εκπαίδευσης. Μέρος αυτής της δυσκολίας αποδίδεται στις εμπειρίες τους στο Δημοτικό Σχολείο, όπου σπάνια τους ζητιέται να γράψουν μια αριθμητική ισότητα. Συνήθως, τους δίνονται προτάσεις του τύπου 5+$\square$ = 12 με τη μορφή προβλημάτων, στα οποία οι μαθητές πρώτα λύνουν και μετά γράφουν την ισότητα ή γράφουν μια ισότητα απλώς για να αναπαραστήσουν τις πράξεις που εκτελούν, ώστε να βρουν τη λύση. Έτσι, όταν τους ζητιέται να σκεφτούν με αλγεβρικούς όρους, η σκέψη τους χρειάζεται να κάνει ένα μεγάλο άλμα, καθώς σε αυτήν την περίπτωση θα πρέπει να επικεντρωθεί στη δομή του προβλήματος παρά στις πράξεις που απαιτούνται για την επίλυσή του.

Γενικά, έχει παρατηρηθεί ότι οι μαθητές δυσκολεύονται ιδιαίτερα να εντοπίσουν τις ομοιότητες στη δομή μεταξύ προβλημάτων με εξισώσεις, τα οποία διαθέτουν διαφορετικά σενάρια. Συχνά αντικαθιστούν διάφορες τιμές στις εξισώσεις που κατασκευάζουν, για να διαπιστώσουν αν είναι σωστές, και, σε ορισμένες περιπτώσεις, χρησιμοποιούν πίνακες τιμών, για να εντοπίσουν τις σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών του προβλήματος. Πάντως, η πλειοψηφία των μαθητών του Γυμνασίου δυσκολεύονται να αναγνωρίσουν τις σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών ενός προβλήματος. Η μικρότερη διαφοροποίηση στο σενάριο ενός προβλήματος μπορεί να τους οδηγήσει σε αποτυχία σε ότι αφορά στην κατασκευή της εξίσωσης. Είναι, λοιπόν, αναγκαίο η σχετική διδασκαλία να επικεντρώσει σε αυτό το σημείο.

Συναρτήσεις: Η έννοια της συνάρτησης αποτελεί μία από τις δυσκολότερες μαθηματικές ιδέες για τους μαθητές. Στη βιβλιογραφία εντοπίζονται τρεις βασικές παράμετροι αυτής της δυσκολίας. Η πρώτη συνδέεται με τη συνθετότητα της έννοιας αλλά και με την ποικιλία των μαθηματικών νοημάτων που σχετίζονται με αυτήν, όπως μεταβλητή, συν-μεταβολή, σύνολο και άλλες. Η δεύτερη αφορά στο γεγονός ότι η έννοια της συνάρτησης ενυπάρχει στο μεγαλύτερο μέρος των μαθηματικών αλλά και των σχολικών μαθηματικών: οι τέσσερις πράξεις, η μέτρηση στη γεωμετρία, η επίλυση εξισώσεων και άλλες τεχνικές και αλγόριθμοι μπορούν να μελετηθούν από τη σκοπιά των συναρτήσεων. Αυτό δυσκολεύει ιδιαίτερα τη διαμόρφωση ενός ενιαίου και γενικά αποδεκτού πλαισίου μάθησης για την έννοια της συνάρτησης. Η τρίτη παράμετρος σχετίζεται με την αναγκαιότητα να αντιληφτούν οι μαθητές την έννοια της συνάρτησης σε ένα επίπεδο ως *διαδικασία* και σε ένα άλλο ως *αντικείμενο*.

Επιπλέον, η έρευνα δείχνει ότι οι περισσότεροι μαθητές της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης αντιλαμβάνονται τη συνάρτηση ως μια υπολογιστική διαδικασία και δυσκολεύονται να συσχετίσουν έναν τρόπο αναπαράστασής της με έναν άλλο. Είναι, λοιπόν, αναγκαίο η διδασκαλία να επικεντρωθεί σε αυτές τις αδυναμίες των μαθητών στην προσέγγιση της μελέτης μιας συνάρτησης και να υιοθετήσει πρακτικές που θα τους βοηθήσουν να τις ξεπεράσουν. Προς αυτήν την κατεύθυνση, οι νέες τεχνολογίες, σε συνδυασμό με την απαραίτητη υποστήριξη από έναν ικανό εκπαιδευτικό, γνώστη των παραπάνω αδυναμιών των μαθητών, φαίνεται να προσφέρουν μία ελπιδοφόρα εναλλακτική προσέγγιση.

Όσα προηγήθηκαν διαμορφώνουν το πλαίσιο αναφοράς που αξιοποιήθηκε για την οργάνωση της ανάπτυξης της αλγεβρικής σκέψης στο νέο Πρόγραμμα Σπουδών. Συγκεκριμένα, υπέδειξε τις κεντρικές τροχιές μάθησης και διδασκαλίας των αλγεβρικών ιδεών που υιοθετήθηκαν: κανονικότητες / συναρτήσεις, αλγεβρικές παραστάσεις, ισότητες/ ανισότητες. Επιπλέον, οδήγησε στις δυο βασικές κατευθύνσεις / προσανατολισμούς που, τελικά, υιοθετήθηκαν και διέπουν την ανάπτυξη των αλγεβρικών περιεχομένων:

- Την έμφαση στην αλγεβρική συλλογιστική που προτείνει η σύγχρονη βιβλιογραφία, δηλαδή, στην αναπαράσταση, στη γενίκευση και στην τυποποίηση καταστάσεων, καθώς και στην κανονικότητα.
- Την ανάπτυξη όλων των τροχιών που αφορούν στις αλγεβρικές γνώσεις σε όλες τους κύκλους της υποχρεωτικής εκπαίδευσης, δηλαδή, από το νηπιαγωγείο ως το Γυμνάσιο.

Χώρος και Γεωμετρία - Μέτρηση

Η ***Γεωμετρία*** αποτελεί ένα σημαντικό κεφάλαιο των Μαθηματικών που στην Ελλάδα έχει ένα βασικό ρόλο στα προγράμματα σπουδών και αποκτά τα τελευταία χρόνια μεγάλη σημασία στα προγράμματα σπουδών και άλλων χωρών. Η σημασία της διδασκαλίας της συνδέεται τόσο με τη χρησιμότητά της στην καθημερινή ζωή όσο και στα Μαθηματικά ή στις άλλες επιστήμες. Ένα πλήθος από χωρικές και γεωμετρικές γνώσεις είναι απαραίτητες για την αντίληψη καθημερινών καταστάσεων και προβλημάτων και πολλές δράσεις του ατόμου στηρίζονται σε αυτές (αντίληψη και διαχείριση φυσικών και τεχνητών αντικειμένων, έργων τέχνης, διαστάσεις της επιστήμης και της τεχνολογίας και πολλές μορφές μοντελοποίησης). Επίσης οι έννοιες και οι διαδικασίες της Γεωμετρίας στηρίζουν την προσέγγιση πολλών μαθηματικών εννοιών: αξιοποιούνται στην επίλυση προβλήματος με την δημιουργία κατάλληλων διαγραμμάτων, στηρίζουν τη δημιουργία νοερών εικόνων, την κατανόηση συμβόλων, την κατανόηση σχηματισμών για την απόδοση αριθμητικών σχέσεων, την γραμμή των αριθμών, γραφικές παραστάσεις ή άλλες μαθηματικές διαδικασίες που στηρίζονται σε δισδιάστατες ή τρισδιάστατες διατάξεις (πράξεις, υποδιαιρέσεις μονάδων, πίνακες, κ.ά). Τέλος, η δημιουργία και η επεξεργασία νοερών εικόνων και αναπαραστάσεων, η αντίληψη των δισδιάστατων και τρισδιάστατων καταστάσεων, η ευλυγισία στην αλλαγή οπτικών γωνιών και η χωρική μνήμη που καλλιεργούνται με την κατάλληλη διδασκαλία της Γεωμετρία έχουν μεγάλη σημασία για τον άνθρωπο και αποκτούν στα προγράμματα σπουδών τα τελευταία χρόνια την ίδια σημασία με την αντίληψη των αριθμών και των νοερών πράξεων (Clements, & Battista, 1992),.

Το περιεχόμενο της Γεωμετρίας που αναπτύσσεται στο Δημοτικό αποτελεί αυτό που θα ονομάζαμε *μη τυπική Γεωμετρία*. Μεταγενέστερα στο Γυμνάσιο οι μαθητές αρχίζουν να προσεγγίζουν τις χωρικές και γεωμετρικές έννοιες σε πιο γενικευμένο επίπεδο για να αξιοποιήσουν τη διαδικασία αυτή και στην κατανόηση της θεωρητικοποίησης γενικότερα στα Μαθηματικά.

Οι χωρικές και γεωμετρικές έννοιες, αν και θεωρούνται αρκετά απλές, λόγω της εποπτικής τους προσέγγισής και της καθημερινής εμπειρίας συνοδεύονται με παρανοήσεις που δεν επιτρέπουν την ουσιαστική ανάπτυξη κατανοήσεων που είναι απαραίτητες τόσο για την ανάπτυξη πιο τυπικών γεωμετρικών εννοιών όσο για την αντιμετώπιση προβλημάτων της καθημερινής ζωής. Ως συνέπεια, τα σύγχρονα προγράμματα σπουδών αντικαθιστούν τις απλοϊκές και χωρίς εμβάθυνση προσεγγίσεις με την ανάπτυξη αυτού που ονομάζεται *χωρικός*, *γεωμετρικός* και *οπτικοποιημένος* συλλογισμός (Clements, Sarama, 2000).

Ο *χωρικός συλλογισμός* είναι η διαδικασία με τη βοήθεια της οποίας σχηματίζουμε ιδέες για τις ιδιότητες και σχέσεις στο χώρο, τις αποδίδουμε με πραγματικές και νοερές εικόνες, τις διαχειριζόμαστε για την αντιμετώπιση πραγματικών ή θεωρητικών καταστάσεων. Περιλαμβάνει την αντίληψη, *κατανόηση και παράσταση θέσεων, αμοιβαίων σχέσεων, διευθύνσεων και διαδρομών μέσα στο χώρο* όπως και γενικότερα τη διαχείριση κάθε χωρικής πληροφορίας και των μετασχηματισμών της.

Ο *γεωμετρικός συλλογισμός* αφορά την οργάνωση και επεξεργασία του χώρου στη βάση του γεωμετρικού μοντέλου. Η ανάπτυξη της γεωμετρικής σκέψης, δεδομένου ότι καλείται να οδηγήσει στην θεωρητική Γεωμετρία, συνδέεται με τη μετάβαση από μια γενικότερη αντίληψη των γεωμετρικών μορφών με τις αισθήσεις και την εμπειρία (αισθησιο-κινητική) σε μια κατανόηση των γεωμετρικών σχημάτων με βάση τα στοιχεία τους, τις ιδιότητες και τις μεταξύ τους σχέσεις (αναλυτικο-συνθετική). Η πορεία που ακολουθείται διδακτικά είναι μια σύνδεση μεταξύ οπτικού, λεκτικού και αφηρημένου (Owens, & Outhred, L., 2006, Duval, 1998).

Η προσέγγιση των γεωμετρικών σχημάτων περιλαμβάνει τέσσερις κατηγορίες δράσεων: *αναγνώριση κατηγοριών σχημάτων, αναγνώριση των ιδιοτήτων των σχημάτων, αναγνώριση των ιδιοτήτων των κατηγοριών, κατασκευές-αναλύσεις/συνθέσεις σχημάτων*. Η δράσεις αυτές συμπληρώνονται με τους *μετασχηματισμούς* των σχημάτων που αφορούν μετατοπίσεις, στροφές, συμμετρίες και ομοιότητα.

Η ανάπτυξη τόσο του χωρικού όσο και του γεωμετρικού συλλογισμού συνδέονται στενά με την *οπτικοποίηση* ή *οπτικοποιημένη σκέψη*. Η οπτική πληροφορία που συλλέγεται από την επαφή με το χώρο και τα αντικείμενα μέσα σε αυτόν απεικονίζεται σε νοερές εικόνες, αρχικά απλές και στατικές και στη συνέχεια πιο σύνθετες και δυναμικές. Έτσι ο όρος *οπτικοποιημένη σκέψη* (μια σκέψη δηλαδή μέσω οπτικών εικόνων, Gutierez, 1996) αποδίδει την ικανότητα των μαθητών να ερμηνεύουν *διαφορετικές παραστάσεις* αντικειμένων ή καταστάσεων, ή να τις αντιλαμβάνονται από διαφορετικές οπτικές γωνίες, όπως επίσης να δημιουργούν νοερές εικόνες για αντικείμενα ή καταστάσεις που βρίσκονται έξω από το οπτικό τους πεδίο (για γεωμετρικές ή άλλες χωρικές πληροφορίες) και να τις επεξεργάζονται νοερά (πχ. περιστρέφουν νοερά ένα αντικείμενο).

Για τις γεωμετρικές έννοιες είναι απαραίτητο να αποσαφηνιστεί ότι αν και αποδίδονται σχηματικά στην ουσία αφορούν θεωρητικές έννοιες. Έτσι ένα τρίγωνο είναι το σχήμα που έχει ένα πραγματικό αντικείμενο, αλλά στην ουσία είναι ένα γεωμετρικό αντικείμενο που ορίζεται με βάση κάποιες ιδιότητες. Για τα θεωρητικά αυτά αντικείμενα χρησιμοποιούνται διάφορες μορφές παράστασής (σχέδια, σχήματα, λεκτική παρουσίαση, σύμβολα) που όλα αποδίδουν ένα *ιδεατό αντικείμενο*. Ως συνέπεια των παραπάνω η χρήση και επεξεργασία των σχημάτων στη μη τυπική Γεωμετρία των μικρότερων τάξεων με ανάλυση σε στοιχεία και σε μη στερεοτυπικές θέσεις επιδιώκει να οδηγήσει βαθμιαία τους μαθητές από την άμεση εποπτεία και την ολιστική προσέγγιση, στην αναγνώριση ιδιοτήτων, την μέτρηση και την διαχείριση των σχημάτων στη χρήση τους ως βάση για τους συλλογισμούς τους ή την επίλυση γεωμετρικών προβλημάτων (Mammana et al., 1998).

Οι κατασκευές με τη χρήση μιας ποικιλίας μέσων όπως και ψηφιακών εργαλείων, ο σχεδιασμός, και οι χαράξεις των γεωμετρικών σχημάτων βοηθάνε σημαντικά τους μαθητές στον εντοπισμό στοιχείων (σημείων, τμημάτων κλπ.) σχέσεων και ιδιοτήτων που αποτελούν ένα μέρος των γεωμετρικών γνώσεων που επιδιώκουμε να αναπτύξουμε ολοκληρώνοντας τη διδασκαλία πριν από την εισαγωγή στη θεωρητική Γεωμετρία στο Λύκειο. Αντίστοιχα οι αναλύσεις και συνθέσεις σχημάτων σε άλλα σχήματα και η αξιοποίηση των μετασχηματισμών αναπτύσσουν μια ευλυγισία στην προσέγγιση γεωμετρικών ιδιοτήτων και σχέσεων.

Η διδασκαλία της Γεωμετρίας δίνει μια καλή ευκαιρία για την προσέγγιση του συλλογισμού και της συστηματικής τεκμηρίωσης και της (άτυπης αρχικά) απόδειξης που διευκολύνει τους μαθητές να εισαχθούν στο Λύκειο στην γεωμετρική και γενικότερα στη μαθηματική απόδειξη. Οι διαδικασίες αυτές υποστηρίζονται από την ανάπτυξη της κατάλληλης γλώσσας και όρων που βοηθάνε τους μαθητές να διατυπώσουν ορισμούς και να παρουσιάσουν με συστηματικό τρόπο ιδιότητες και σχέσεις.

Αναφορικά με τη μέτρηση μεγεθών, οι διαδικασίες, οι τεχνικές και τα εργαλεία μέτρησης έχουν μεγάλη σημασία κι ενδιαφέρον για πολλές εφαρμογές της καθημερινής ζωής αλλά και διαστάσεις των Μαθηματικών. Η φαινομενικά απλή και οικεία διαδικασία ‘μέτρησης’ με τη χρήση μέσων (όπως μέτρο, χάρακας, μεζούρα κλπ.) οδήγησε τα παλαιότερα προγράμματα σπουδών στην καθυστερημένη και ελλιπή διδακτική εισαγωγή των μετρήσεων με αποτέλεσμα την αντιμετώπιση δυσκολιών από τους μαθητές σε μετρικά προβλήματα αλλά και υστερήσεις των ενηλίκων στην αντιμετώπιση καταστάσεων που απαιτούσαν συγκρίσεις ή μετρήσεις μεγεθών.

Σήμερα η διδασκαλία της μέτρησης επιδιώκει να ασκήσει τους μαθητές στην ουσιαστική κατανόηση και εφαρμογή της διαδικασίας μέτρησης (μαθηματικών μεγεθών) με τη χρήση τεχνικών και εργαλείων, αλλά και την ανάπτυξη δεξιοτήτων για ακριβείς υπολογισμούς και υπολογισμούς κατά προσέγγιση (Bragg, &Outhred, 2000).

Στο πρόγραμμα σπουδών προσεγγίζονται αρχικά οι *μετρικές έννοιες* δηλαδή οι ιδιότητες ή οι σχέσεις ανάμεσα σε αντικείμενα ή καταστάσεις του χώρου που σχετίζονται με τα μαθηματικά μεγέθη (γωνία, μήκος, επιφάνεια και όγκος). Στην συνέχεια οι μετρήσεις συνδέονται με τους τύπους των επιφανειών και των όγκων των επίπεδων και στερεών σχημάτων. Στις μικρές τάξεις εισάγεται στους μαθητές και η μέτρηση του χρόνου ενώ στις μεγαλύτερες τάξεις οι έννοιες της τριγωνομετρίας συνδέονται με την μέτρηση της γωνίας.

Η μέτρηση είναι μια διαδικασία που εισάγει την έννοια *του μεγέθους*, την έννοια της *μονάδας* όπως και την έννοια της *επανάληψης*, που είναι τα βασικά στοιχεία σε μία οποιαδήποτε μέτρηση (αυτών ή άλλων μεγεθών). Οι μαθητές προσεγγίζουν εννοιολογικά το *αμετάβλητο* του μεγέθους, τις *άμεσες και τις έμμεσες συγκρίσεις* μεγεθών όπως και τη *χρήση τυπικών και μη τυπικών μονάδων*.Η χρήση μονάδων κάνει απαραίτητη την εννοιολογική κατανόηση της *διαίρεσης* ενός μεγέθους σε ίσα μέρη, την *επανάληψη των μονάδων,* την καταμέτρηση των ίσων μερών και τη *σύνδεση της επανάληψης με ένα αριθμό* που αποδίδει το μέτρο του μεγέθους, στοιχεία αυτά αναπτύσσονται βαθμιαία στους μαθητές από τις μικρότερες τάξεις (Bragg, &Outhred, 2004).

Επιπλέον η προσέγγιση των τύπων των εμβαδών και των όγκων προϋποθέτουν τη *δόμηση του χώρου*, δηλαδή μια νοερή πράξη οργάνωσης του σε γραμμές, στήλες (ή και ύψη για τις τρεις διαστάσεις) που συνδέουν τις επικαλύψεις ή τα 'γεμίσματα' με τον πολλαπλασιαστικό υπολογισμό της επιφάνειας (και του όγκου) (Outhred, & Mitchelmore, 2000).

Σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν η διδασκαλία της μέτρησης επιδιώκει να διαχειριστεί με προσοχή τη σύνδεση *συνεχών χαρακτηριστικών* όπως είναι το μήκος, η επιφάνεια ή ο όγκος με *διακριτά τυπικά μεγέθη* που αποτελούν οι μονάδες και την αντιστοίχιση αυτής της *σύνδεσης με ένα αριθμό*. Η σύνδεση αυτή πραγματοποιείται βαθμιαία μέσα από πραγματικές καταστάσεις σύγκρισης, επικάλυψης, μέτρησης των επαναλήψεων, των επιστρώσεων ή των γεμισμάτων, όπως και η προσέγγιση των τύπων με τη δόμηση του χώρου (van den Heuvel-Panhuizen, & Buys, 2005).

Η χρήση των εργαλείων μέτρησης και η ανάπτυξη στρατηγικών εκτίμησης υποστηρίζουν τους μαθητές στην ουσιαστική κατανόηση των μεγεθών (Outhred, Mitchelmore, Mcphail, &Gould, 2003).

Στοχαστικά Μαθηματικά

Καθημερινά τα ΜΜΕ παρουσιάζουν στατιστικές πληροφορίες για ένα πλήθος ζητημάτων (οικονομία, ιατρική, κοινωνικά θέματα, πολιτική κ.λπ.), οι οποίες επηρεάζουν τη λήψη αποφάσεων στην προσωπική, επαγγελματική και κοινωνική μας ζωή. Ο βασικός σκοπός της διδασκαλίας των Στοχαστικών Μαθηματικών (Στατιστική, Πιθανότητες) στην Υποχρεωτική Εκπαίδευση είναι να αναπτύξει την ικανότητα του μαθητή-μελλοντικού πολίτη-να αξιολογεί κριτικά πληροφορίες, να εξάγει συμπεράσματα, να κάνει προβλέψεις και να λαμβάνει αποφάσεις κάτω από αβέβαιες συνθήκες. Η βασική διαφορά των Στοχαστικών Μαθηματικών από τις άλλες θεματικές περιοχές των Μαθηματικών είναι ότι μελετά προβλήματα που σχετίζονται με τη μεταβλητότητα δεδομένων, δηλαδή με την διαφορετικότητα που υπάρχει γύρω μας (π.χ. τα άτομα διαφέρουν, οι συνθήκες ενός πειράματος διαφέρουν) (Garfield & Ben-Zvi, 2007, 2008).

Το προτεινόμενο πρόγραμμα σπουδών παρέχει στους μαθητές τη δυνατότητα να θέτουν ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με δεδομένα, να συλλέγουν, να οργανώνουν και να αναπαριστούν τα σχετικά δεδομένα, να επιλέγουν κατάλληλες στατιστικές μεθόδους για να τα αναλύουν και να εξάγουν συμπεράσματα, να κάνουν προβλέψεις βασισμένοι σε δεδομένα. Η διδασκαλία της Στατιστικής μπορεί να απεγκλωβιστεί από την εκμάθηση εκτέλεσης αλγορίθμων και κατασκευής αναπαραστάσεων χωρίς νόημα και να εστιάσει στην ανάπτυξη της στατιστικής σκέψης των μαθητών μέσα από την πραγματοποίηση ερευνών, την κατανόηση των στατιστικών μεθόδων, τη σύνδεση των στατιστικών εννοιών, την ερμηνεία των στατιστικών αποτελεσμάτων, την παρατήρηση ομοιομορφιών, την παραγωγή συμπερασμάτων. Η διδασκαλία των Πιθανοτήτων μπορεί να δίνει την ευκαιρία στους μαθητές να πραγματοποιούν πειράματα τύχης και να αξιολογούν τη διαφορά ανάμεσα στις προβλέψεις τους και τα εμπειρικά αποτελέσματα που προκύπτουν κατά την πραγματοποίησή τους.

Η εισαγωγή των στοχαστικών Μαθηματικών από την προσχολική και πρώτη σχολική ηλικία αποτελεί ένα νέο στοιχείο στο πρόγραμμα σπουδών. Επιτρέπει τη σταδιακή ανάπτυξη της στοχαστικής σκέψης των μαθητών και μπορεί να εξασφαλίσει μία καλύτερη κατανόηση των στοχαστικών εννοιών στην πορεία της μαθηματικής τους εκπαίδευσης. Η αλλαγή αυτή έχει στηριχτεί σε πρόσφατες έρευνες στη διεθνή βιβλιογραφία (Franklin et al., 2005; Jones, 2005; Shaughnessy, 2007), οι οποίες υπογραμμίζουν πως τα παιδιά σε αυτήν την ηλικία ως 'μικροί ερευνητές'είναι σε θέση να διαχειριστούν προβλήματα Στοχαστικών Μαθηματικών. Ήδη, σύμφωνα με τα αναλυτικά προγράμματα Μαθηματικών πολλών χωρών, τα Στοχαστικά Μαθηματικά εντάσσονται από το Νηπιαγωγείο (ενδεικτικά NCTM, Αμερική, 2000, Common Curriculum Framework for K–9 Mathematics, Καναδάς, 2006, K-10 Scope & Sequence, Αυστραλία, 2007, Department for Education and Skills, Μεγάλη Βρετανία, 2010).

Στον πρώτο ηλικιακό κύκλο τα παιδιά με τη βοήθεια του εκπαιδευτικού διατυπώνουν ερωτήματα που προκαλούν το ενδιαφέρον τους και τα οποία περιορίζονται στον πληθυσμό της τάξης τους. Είναι σημαντικό να δοθεί η ευκαιρία στα παιδιά να συλλέξουν τα δικά τους δεδομένα και να τα οργανώσουν. Αναπαριστούν τα δεδομένα κατασκευάζοντας απλά διαγράμματα, χρησιμοποιώντας την ένα προς ένα αντιστοίχιση, παρατηρούν τις διαφορές των δεδομένων μεταξύ των ατόμων και τις συγκρίνουν με αυτές της ομάδας, διαβάζουν και συγκρίνουν πληροφορίες μεταξύ των δεδομένων. Επίσης, αρχίζουν να αντιλαμβάνονται ότι η πιθανότητα είναι ένα μέτρο της αβεβαιότητας και αναπτύσσουν άτυπα τη γλώσσα των πιθανοτήτων περιγράφοντας ένα ενδεχόμενο ως βέβαιο, αδύνατο, πιθανό, απίθανο. Συγκρίνουν ενδεχόμενα ως προς την πιθανότητα εμφάνισής τους, πραγματοποιούν απλά πειράματα τύχης, χαρακτηρίζουν ένα παιχνίδι τύχης ως δίκαιο ή άδικο, συνδυάζουν ή διατάσσουν μικρό αριθμό αντικειμένων.

Στο δεύτερο ηλικιακό κύκλο οι μαθητές διατυπώνουν τις δικές τους ερωτήσεις που δεν αφορούν μόνο στον πληθυσμό της τάξη τους, αλλά αρχίζουν να συγκρίνουν τη μεταβλητότητα των δεδομένων σε διαφορετικούς πληθυσμούς. Συλλέγουν δεδομένα (μέσω ερευνών ή πειραμάτων ή μετρήσεων) στην τάξη τους, στο σχολείο ή στην κοινότητα, κατασκευάζουν μια ποικιλία στατιστικών διαγραμμάτων καισυγκρίνουν την αποτελεσματικότητα διαφορετικών αναπαραστάσεων για την παρουσίαση μιας ομάδας δεδομένων. Μαθαίνουν να επιχειρηματολογούν για την επιλογή μιας μεθόδου συλλογής δεδομένων, αναλύουν δεδομένα χρησιμοποιώντας στατιστικές μεθόδους, εξάγουν συμπεράσματα και κάνουν προβλέψεις, αναγνωρίζοντας τους περιορισμούς των δεδομένων (δείγμα, πληθυσμός).Αρχίζουν να αποκτούν μια κατανόηση του τυχαίου μέσα από την εκτίμηση της πιθανότητας, πραγματοποιώντας πειράματα και αξιολογώντας εμπειρικά δεδομένα και εκφράζουν την πιθανότητα ενός ενδεχομένου με κλάσματα ή ποσοστά.

Στον τρίτο ηλικιακό κύκλο οι μαθητές διατυπώνουν ερωτήματα που αφορούν σε σχέσεις δεδομένων στον ίδιο πληθυσμό ή σε διαφορετικούς πληθυσμούς. Αρχίζουν να αναγνωρίζουν τη διαφορά μεταξύ των δειγμάτων, χαρακτηρίζοντας τα δείγματα ως τυχαία, αντιπροσωπευτικά ή μη αντιπροσωπευτικά και χρησιμοποιούν αυτούς τούς χαρακτηρισμούς για να αξιολογήσουν την ποιότητα των δεδομένων και να εξάγουν συμπεράσματα για τον πληθυσμό. Πραγματοποιούν ή προσομοιώνουν σύνθετα πειράματα τύχης και ελέγχουν τις προβλέψεις τους σε σχέση με τα αποτελέσματά τους. Υπολογίζουν την πιθανότητα ενδεχομένων, αξιοποιώντας γνώσεις συνδυαστικής.

Επιλογή και χρήση εργαλείων

Η απλή παρουσία εργαλείων (π.χ. χειραπτικών μοντέλων, τεχνολογικών εργαλείων, λογισμικού κ.λπ.) δεν διασφαλίζει την κατασκευή της γνώσης. Αφενός μεν πολλοί μαθητές εμφανίζουν δυσκολίες στη χρήση εργαλείων (ακόμα και σε απλές περιπτώσεις χρήσης π.χ. του διαβήτη ή του μοιρογνωμονίου), αφετέρου τα εργαλεία δεν ενσωματώνονται συνήθως λειτουργικά στη διαδικασία μάθησης. Οι μαθητές χρειάζεται να αποκτήσουν την ικανότητα να χρησιμοποιούν κατάλληλα χειραπτικά και ψηφιακά εργαλεία, και τις κατάλληλες υπολογιστικές στρατηγικές προκειμένου να εκτελούν συγκεκριμένες μαθηματικές δράσεις, να διερευνούν μαθηματικές ιδέες, και να επιλύουν προβλήματα. Με τα εργαλεία επεκτείνουν τις ικανότητές τους να διερευνούν και να αναλύουν μαθηματικές έννοιες, να εξερευνούν μαθηματικές κανονικότητες, να κατανοούν γεωμετρικές σχέσεις καλλιεργώντας ή αμφισβητώντας τη διαίσθησή τους.

Οι μαθητές κυρίως με τα χειραπτικά υλικά αναπαριστούν μαθηματικές ιδέες και σχέσεις και μοντελοποιούν καταστάσεις χρησιμοποιώντας συγκεκριμένα υλικά, εικόνες, διαγράμματα (π.χ. αριθμογραμμή), γραφήματα, πίνακες, σύμβολα. Η χρήση αναπαραστάσεων τους βοηθά να κατανοήσουν τις μαθηματικές έννοιες και σχέσεις, να επικοινωνήσουν τη σκέψη τους, να εκφράσουν επιχειρήματα, και να ερμηνεύσουν πραγματικές καταστάσεις. Τα ψηφιακά εργαλεία ενισχύουν αυτές τις συνδέσεις καθώς εμπεριέχουν διασυνδεδεμένες αναπαραστάσεις α) μαθηματικού φορμαλισμού, β) κειμενικού λόγου, γ) μαθηματικών αναπαραστάσεων – γραφικών, σχηματικών, πινάκων κλπ δ) προσομοιώσεων φαινομένων με μαθηματική συμπεριφορά – ιδιότητες.

Η αξιοποίηση των ψηφιακών τεχνολογιών υποστηρίζει την έμφαση που δίνεται στο ΠΣ στην εμπλοκή των μαθητών σε δραστηριότητες μαθηματικών συλλογισμών και επικοινωνίας. Για να είναι αυτό εφικτό είναι απαραίτητη η χρήση εξειδικευμένων λογισμικών για μαθηματική διερεύνηση και δράση και εργαλείων κοινωνικού λογισμικού για συλλογική διαπραγμάτευση και συνεργασία. Τα λογισμικά μαθηματικής δράσης και επικοινωνίας έχουν το ρόλο εργαλείων μαθηματικής έκφρασης στα χέρια των μαθητών πρώτιστα, θέτουν δε τα μαθηματικά στη διττή τους διάσταση, δηλαδή ως νοητικά εργαλεία για την ερμηνεία φαινομένων και πραγματικών καταστάσεων αλλά και ως αξία από μόνα τους. Χρησιμοποιούνται ως ψηφιακά εργαλεία για την ενίσχυση εμπλοκής με πραγματικά προβλήματα και μοντελοποίηση με στόχο την ανάπτυξη μαθηματικής σκέψης. Οι δραστηριότητες των μαθητών που ενισχύονται και εμπλουτίζονται με τα εργαλεία αυτά είναι η δημιουργία, το ‘μαστόρεμα’ ψηφιακών μαθηματικών αντικειμένων, σχέσεων και μοντέλων, η διερεύνηση, ο πειραματισμός με μαθηματικά αντικείμενα και σχέσεις. Ιδιαίτερη αξία έχουν η διαμεσολάβηση, η διαπραγμάτευση και η συνεργασία γύρω από αυτά τα ψηφιακά μαθηματικά αντικείμενα.

Τα ψηφιακά εργαλεία που προτείνονται στο ΠΣ οργανώνονται σε πέντε κατηγορίες ανάλογα με το είδος της μαθηματικής δραστηριότητας και τον τρόπο χρήσης της υφιστάμενης τεχνολογίας. Για την κάθε κατηγορία υπάρχει ικανή επιστημονική τεκμηρίωση της παιδαγωγικής αξίας χρήσης της από μαθητές διεθνώς. Στη συνέχεια επιλέγονται ρητά από ένα καλό εξελληνισμένο παράδειγμα λογισμικού από κάθε κατηγορία στο οποίο να έχουν απρόσκοπτη και ανέξοδη πρόσβαση όλοι οι μαθητές και αναφέρονται κι άλλες εναλλακτικές συμπληρωματικά. Αποφεύγεται δηλαδή η αντίληψη 'βιβλιοθήκης λογισμικών' όπου ο μαθητής 'εκτίθεται' σε επιφανειακή χρήση και σχέση με πολλά ετερόκλητα λογισμικά χωρίς να έχει την ευκαιρία να εμπλακεί σε μαθηματικές δραστηριότητες. Οι κατηγορίες είναι οι ακόλουθες:

- Μαθηματική έκφραση μέσω προγραμματισμού
- Δυναμικός χειρισμός γεωμετρικών αντικειμένων και σχέσεων
- Αλγεβρική διερεύνηση με αντίστοιχα συστήματα
- Διερεύνηση, πειραματισμός και επεξεργασία δεδομένων για στατιστική και πιθανότητες
- Πειραματισμός με ψηφιακά μοντέλα

Τα ψηφιακά εργαλεία έκφρασης χρησιμοποιούνται ως βασικό υλικό αναφοράς σε συνθετικές εργασίες και παράλληλα περιστασιακά στο πλαίσιο κατανόησης εννοιών, αναπαραστάσεων και των συνδέσεων μεταξύ αναπαραστάσεων (π.χ. πώς μετεξελίσσεται η δευτεροβάθμια καθώς αλλάζει η κάθε μια από τις παραμέτρους της)

Χρησιμοποιούνται και από τον εκπαιδευτικό κατά την παραδοσιακή μετωπική διδασκαλία (μέσω Διαδραστικού Πίνακα) ως μέσα εξήγησης εννοιών μέσω δυναμικού χειρισμού αντικειμένων και μοντέλων καθώς επίσης και για το σχεδιασμό και προετοιμασία μαθητικών δραστηριοτήτων αλλά και για ίδια μαθηματική διερεύνηση.

Στο πρόγραμμα σπουδών, τα ψηφιακά εργαλεία μαθηματικής έκφρασης αξιοποιούνται με συνδυασμό μεικτής και διακριτής παρέμβασης. Χρησιμοποιούνται δηλαδή ως **εργαλεία έκφρασης** σε βασικό υλικό αναφοράς σε συνθετικές εργασίες και παράλληλα επιλεκτικά με τη μορφή **μικρο-πειραμάτων** στο πλαίσιο κατανόησης εννοιών, αναπαραστάσεων και των συνδέσεων μεταξύ αναπαραστάσεων (π.χ. πώς μετεξελίσσεται η γραφική παράσταση της δευτεροβάθμιας συνάρτησης καθώς αλλάζει ο συντελεστής του x^2).

Μαθηματική δραστηριότητα

Η έννοια της δραστηριότητας είναι μια έννοια με διαφορετικές σημασίες τόσο στον ερευνητικό χώρο της Μαθηματικής Εκπαίδευσης όσο και στο πως αυτή ερμηνεύεται στην πράξη. Η δραστηριότητα χαρακτηρίζεται από ενεργή δράση των ατόμων στην οποία εμπλέκονται τα οποία έχουν ένα κίνητρο και ένα στόχο για να πραγματοποιήσουν, είναι συλλογική και συστημική και χαρακτηρίζεται από συνεχή μετασχηματισμό και αλλαγή (Leont'ev,1978). Κάτω από αυτή την οπτική η μαθηματική δραστηριότητα «προκαλείται» μέσα από το πρόγραμμα σπουδών καθώς προτείνονται καταστάσεις – προβλήματα που επιτρέπουν στο μαθητή να δράσει με κάποιο κίνητρο ατομικά και συλλογικά και αξιοποιώντας διαφορετικής μορφής εργαλεία να επιτύχει μια σειρά μαθηματικών στόχων και διεργασιών. Το είδος των καταστάσεων που προτείνονται στο ΠΣ αφορούν τη μοντελοποίηση μιας πραγματικής κατάστασης, την πραγματοποίηση ενός παιχνιδιού, τη μαθηματική διερεύνηση μέσα από τη χρήση εργαλείων και πηγών. Ο στόχος των καταστάσεων αυτών είναι η εμπλοκή των μαθητών στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών, στην απόκτηση και χρήση τεχνικών με ευελιξία, στην ανάπτυξη στρατηγικών επίλυσης προβλήματος, στη δημιουργία εννοιολογικών συνδέσεων, στη σύνδεση αναπαραστάσεων, στην ανάπτυξη μαθηματικού συλλογισμού καθώς και θετικής στάσης για τα μαθηματικά. Όπως όμως υποστηρίζεται από τη σχετική έρευνα (Henningsen & Stein, 1997) η μαθηματική δραστηριότητα στην οποία τελικά εμπλέκονται οι μαθητές δεν εξαρτάται μόνο από την κατάσταση – πρόβλημα που τίθεται στο ΠΣ και στο αντίστοιχο εκπαιδευτικό υλικό αλλά στη διαχείριση της στη σχολική τάξη. Συχνά μια «πλούσια» κατάσταση μπορεί να οδηγήσει σε μια «τετριμμένη» μαθηματική εμπλοκή των μαθητών όπου η έμφαση δίνεται κυρίως στη χρήση αλγορίθμων και τεχνικών χωρίς κατανόηση. Η τετριμμένη δράση ή η απλή δράση πάνω σε μαθηματικά αντικείμενα δεν είναι αρκετά για να χαρακτηρίσουν μια δραστηριότητα μαθηματική. Είναι απαραίτητη η αναζήτηση ιδιοτήτων και σχέσεων, η εύρεση κανόνων, ο αναστοχασμός πάνω στη δράση και η γενίκευση της (Serpinska, 1994). Προϋπόθεση για τη διατήρηση της μαθηματικής δραστηριότητας των μαθητών σε υψηλό γνωστικό επίπεδο είναι ο εκπαιδευτικός να μπορεί να διακρίνει τα στοιχεία που συνιστούν μια πλούσια μαθηματική δραστηριότητα και αυτό συσχετίζεται τόσο με τη μαθηματική όσο και την παιδαγωγική γνώση του αναφορικά με το περιεχόμενο που διαχειρίζεται στη σχολική τάξη (Ball et al, 2008).

Συνθετική εργασία

Οι καταστάσεις – προβλήματα που αναφέρθηκαν παραπάνω συνδέονται με την επίτευξη ενός συγκεκριμένου ή κάποιου συνδυασμού μαθηματικών αποτελεσμάτων. Επέκταση αυτών των μορφών αποτελούν οι συνθετικές εργασίες που δίνουν έμφαση σε θέματα συνδέσεων των μαθηματικών τόσο στο πλαίσιο του αναγκαίου μαθηματικού γραμματισμού του μελλοντικού πολίτη στο σύγχρονο κόσμο όσο και στη θεώρηση των μαθηματικών ως πολιτισμικού δημιουργήματος της ανθρώπινης ιστορίας. Κεντρικός στόχος είναι να αναδειχτεί στους μαθητές η αναγκαιότητα της διδασκαλίας των μαθηματικών και ο κρίσιμος ρόλος τους στην αναζήτηση των μαθηματικών δομών στη φύση και στις ανθρώπινες δραστηριότητες. Η *συνθετική εργασία* ορίζεται ως μια δραστηριότητα που μπορεί να εφαρμοστεί από τον εκπαιδευτικό για ένα σύνολο διδακτικών ωρών και δίνει έμφαση στην ανάδειξη των διασυνδέσεων των μαθηματικών με άλλες επιστήμες και γνωστικές περιοχές και στην παιδαγωγική αξιοποίηση της ψηφιακής τεχνολογίας. Έτσι, το θέμα μιας τέτοιας εργασίας μπορεί να σχετίζεται είτε με την αξιοποίηση της τεχνολογίας είτε με την οριζόντια σύνδεση των μαθηματικών με άλλες περιοχές του ΠΣ (π.χ. Πολιτισμός, Σχολική Ζωή, Περιβάλλον και Εκπαίδευση για την Αειφόρο Ανάπτυξη) χωρίς να αποκλείεται ο συνδυασμός των παραπάνω. Στο επίκεντρο κάθε συνθετικής εργασίας βρίσκεται η συνεργασία μεταξύ των μαθητών (συχνά σε ομάδες) για τη διερεύνηση ενός θέματος ή τη λύση ενός προβλήματος στο οποίο εμπλέκονται τα μαθηματικά και αναδεικνύονται ως εργαλείο που ευνοεί τη διερεύνηση καθαυτή, τη διαπραγμάτευση και την ερμηνεία. Λαμβάνοντας υπόψη δεδομένα από έρευνες στο χώρο της διδακτικής των μαθηματικών που αναδεικνύουν τη σημασία της σύνδεσης της μαθηματικής δραστηριότητας των μαθητών με διαδικασίες κοινωνικής αλληλεπίδρασης και επικοινωνίας στη σχολική τάξη, οι συνθετικές εργασίες στοχεύουν στην εμπλοκή των μαθητών με νέους τρόπους συνεργατικής μάθησης που βασίζονται στην ανταλλαγή και επεξεργασία υλικού, την ανάπτυξη μαθηματικών νοημάτων και τη συλλογική διαπραγμάτευση εννοιών. Στην περίπτωση των συνθετικών εργασιών με αξιοποίηση των ψηφιακών εργαλείων η έμφαση δίνεται στην δυνατότητα που παρέχουν στους μαθητές να εμπλακούν βαθύτερα σε μαθηματικές δραστηριότητες, να κατασκευάσουν και να επεξεργαστούν ψηφιακά μαθηματικά αντικείμενα, συμπεριφορές και σχέσεις, να χειριστούν αλληλοσυνδεόμενες αναπαραστάσεις. Δίνουν την ευκαιρία στους μαθητές να κοινοποιήσουν τις κατασκευές τους, να επινοήσουν, να διατυπώσουν και να διερευνήσουν δικά τους ιδιότυπα προβλήματα, να επιχειρηματολογήσουν και να αιτιολογήσουν κανόνες και συμπεριφορές αντικειμένων.

Οι συνθετικές εργασίες που παρουσιάζονται ενδεικτικά στο ΠΣ σχεδιάστηκαν με βάση το παραπάνω πλαίσιο και οι δραστηριότητες που περιλαμβάνονται σε αυτές βασίστηκαν σε θέματα που αφορούν τη χρήση ειδικά σχεδιασμένων εργαλείων ψηφιακής τεχνολογίας, την ιστορία των μαθηματικών, την ερμηνεία φαινομένων και την επίλυση πραγματικών προβλημάτων με βάση τα μαθηματικά, τη σύνδεση των μαθηματικών με άλλες επιστήμες και τον πολιτισμό. Τόσο οι πιο εστιασμένες καταστάσεις-προβλήματα όσο και οι συνθετικές εργασίες δεν προτείνεται να ειδωθούν ως αντικείμενα υλικού προς επεξήγηση στους μαθητές, αλλά να λειτουργήσουν ως γεννήτορες ιδεών για τη δημιουργική εμπλοκή των ίδιων των εκπαιδευτικών στο σχεδιασμό νέων εκπαιδευτικών δραστηριοτήτων για τη διερεύνηση μιας ποικιλίας μαθηματικών εννοιών του ΠΣ από τους μαθητές. Το Πρόγραμμα σπουδών προτείνει τη διαχείριση 10 ωρών διδασκαλίας ανά σχολικό έτος από το προβλεπόμενο για να εργαστούν οι μαθητές σε συνθετικές εργασίες.

Αξιολόγηση

Η αξιολόγηση είναι μια πολύ σημαντική διαδικασία της εκπαίδευσης, για το λόγο αυτό τη βρίσκουμε ανάμεσα στις βασικές αρχές πολλών σύγχρονων αναλυτικών προγραμμάτων στο διεθνή χώρο. Η αξιολόγηση είναι σημαντικό να είναι πλήρως ενσωματωμένη στην εκπαίδευση των μαθηματικών και να συμβάλει ουσιαστικά για μια πιο ποιοτική μάθηση.

Ο σκοπός της αξιολόγησης είναι να παράγει πληροφορίες που συνεισφέρουν στη διαδικασία διδασκαλίας και μάθησης και υποστηρίζουν τη λήψη εκπαιδευτικών αποφάσεων από τους μαθητές, τους εκπαιδευτικούς, τους γονείς και τη διοίκηση. Παρακάτω θα παρουσιάσουμε μια σειρά από αρχές της αξιολόγησης όπως καταγράφονται από τους ερευνητές (Romberg, 2004, σελ. 16):

1. Ο κύριος σκοπός της αξιολόγησης στην τάξη είναι να βελτιωθεί η μάθηση.
2. Οι μέθοδοι αξιολόγησης επιτρέπουν στους μαθητές να παρουσιάσουν αυτό που ξέρουν παρά αυτό που δεν ξέρουν.
3. Οι αξιολογήσεις παρέχουν στους μαθητές πολλαπλές και ποικίλες ευκαιρίες (μορφές) για να επιδείξουν και να τεκμηριώσουν τις επιδόσεις τους.
4. Οι καταστάσεις που προτείνονται καθιστούν λειτουργικούς όλους τους στόχους του προγράμματος σπουδών (και όχι μόνο τους "χαμηλότερους"). Τα πρότυπα επίδοσης, συμπεριλαμβανομένων των ενδείξεων των διαφορετικών επιπέδων μαθηματικής σκέψης, είναι χρήσιμα εργαλεία σε αυτήν την διαδικασία.
5. Η βαθμολόγηση των κριτηρίων, συμπεριλαμβανομένων των περισσότερο ή λιγότερο υποδειγματικών παραδειγμάτων, δημοσιεύεται και εφαρμόζεται με συνέπεια.
6. Τα τεστ και η βαθμολόγηση περιλαμβάνουν την ελάχιστη μυστικότητα.
7. Η ανατροφοδότηση που δίνεται στους μαθητές είναι γνήσια.

8. Η ποιότητα μιας κατάστασης δεν καθορίζεται από τη δυνατότητα πρόσβασής της στο αντικειμενικό σκορ, την αξιοπιστία, ή την εγκυρότητα με την παραδοσιακή έννοια, αλλά από την αυθεντικότητα, την αμεροληψία, και την επεξήγηση των ανωτέρω αρχών.

Για πολλούς ο ρόλος της αξιολόγησης περιορίζεται στη μέτρηση στο τέλος του μαθήματος, με ένα τεστ, των επιδόσεων των μαθητών. Ενώ αντίθετα μπορεί να αποτελεί ένα ολοκληρωμένο μέρος της διδασκαλίας που πληροφορεί και καθοδηγεί τον εκπαιδευτικό στις διδακτικές του αποφάσεις καθώς επίσης καθοδηγεί και εμπλουτίζει τη μάθηση του μαθητή. Οι δύο βασικές λειτουργίες της αξιολόγησης είναι η αποτίμηση και η ανατροφοδότηση της μάθησης και της διδασκαλίας. Η αξιολόγηση βοηθά τον εκπαιδευτικό να πάρει αποφάσεις σχετικά με το περιεχόμενο και τη μορφή της διδασκαλίας (διαμορφωτική αξιολόγηση) μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για την αποτίμηση των επιτευγμάτων του μαθητή (αθροιστική αξιολόγηση). Ηδιαμορφωτική αξιολόγηση (α) επιτρέπει στον εκπαιδευτικό να παρεμβαίνει στη μαθησιακή διαδικασία, να λειτουργεί εξατομικευμένα, να επαναπροσδιορίζει το ρόλο του προς την κατεύθυνση της αυτόνομης μάθησης προσφέροντας συμπληρωματική βοήθεια και καθοδήγηση στους μαθητές που την έχουν ανάγκη, (β) στοχεύει στην ανατροφοδότηση της διδακτικής πράξης με παράλληλη βελτίωση της ποιότητας της παρεχόμενης διδασκαλίας και αύξηση της αποτελεσματικότητάς της, (γ) ενημερώνει το μαθητή για την πορεία και τα αποτελέσματα των προσπαθειών που κατέβαλε, (δ) οδηγεί το μαθητή σε αυτογνωσία σχετικά με τις ιδιαίτερες ικανότητες και κλίσεις που διαθέτει και οι οποίες θα μπορούσαν να σχετιστούν με τον επαγγελματικό του προσανατολισμό, (ε) διασφαλίζει σε ικανοποιητικό βαθμό την αξιοπιστία και την εγκυρότητα της αξιολόγησης. Η έρευνα στο πεδίο της αξιολόγησης έχει αναδείξει τα περιορισμένα αποτελέσματα που επιφέρουν συγκεκριμένα είδη αθροιστικής αξιολόγησης σε τομείς όπως η δημιουργικότητα και η κινητικότητα των μαθητών ή τις αναπόφευκτες επικρίσεις για τις επίσημες διαδικασίες αξιολόγησης (π.χ. Broadfoot, 1996). Παράλληλα, από τη σχετική έρευνα στο πεδίο προέκυψαν αμφιβολίες για την αντικειμενικότητα και την αποδοτικότητα των συμβατικών αθροιστικών τεχνικών αξιολόγησης, για τη μη δυνατότητα ενίσχυσης της επίδοσης και πρόβλεψης της μελλοντικής επίδοσης, καθώς και για την έλλειψη κινήτρου για μάθηση (π.χ. Black & William, 1998; Harlen & Deakin-Crick, 2003).

Η αξιολόγηση μπορεί να επηρεάσει και να εμπλουτίσει τη μάθηση του μαθητή ποικιλοτρόπως. Ένα πρώτο σημείο είναι ότι ο μαθητής επικεντρώνεται και θεωρεί ως σημαντική μαθηματική γνώση τα σημεία στα οποία αναφέρεται η αξιολόγηση. Καταβάλει περισσότερη προσπάθεια και προσανατολίζεται στις γνώσεις, τις μεθόδους και τις διαδικασίες τις οποίες προκρίνει η αξιολόγηση. Έτσι αν ο εκπαιδευτικός στο πλαίσιο της αξιολόγησης χρησιμοποιεί την προσωπική συνέντευξη, το διάλογο στην τάξη και τη συστηματική παρατήρηση, οι μαθητές συνηθίζουν και ασκούνται στο να οργανώνουν και να εκφράζουν τις σκέψεις τους με μεταγνωστικό τρόπο. Ένα δεύτερο σημείο είναι ότι μέσα από τις διαδικασίες της αξιολόγησης ο μαθητής αποκτά μεγαλύτερη ευθύνη και γίνεται πιο ανεξάρτητος στη μάθηση. Έτσι για παράδειγμα, συζητώντας και αναλύοντας τα αποτελέσματα σε μια βαθμολογημένη κλίμακα αξιολόγησης οι μαθητές διακρίνουν τα χαρακτηριστικά και τον τρόπο που πρέπει να παρουσιάζεται μια σωστή και πλήρης απάντηση. Η επικέντρωση επίσης σε διαδικασίες αυτοαξιολόγησης και ετεροαξιολόγησης έχουν πολύ θετική επίδραση στους μαθητές. Μέσα από τη συζήτηση των κριτηρίων της σωστής απάντησης οι μαθητές εκπαιδεύονται στην αυτοαξιολόγηση και την κριτική στάση της δικής τους εργασίας αλλά και της εργασίας των άλλων.

Όταν ο εκπαιδευτικός έχει στη διάθεσή του αρκετές και χρήσιμες πληροφορίες σχετικά με τη μάθηση των μαθητών του, μπορεί να οργανώσει και να οδηγήσει τη διδασκαλία του σε πιο ουσιαστικές και προσαρμοσμένες για τους μαθητές μαθηματικές γνώσεις και δεξιότητες. Για να έχει μια πλήρη εικόνα για τον μαθητή ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να χρησιμοποιήσει ποικίλες και διαφορετικές τεχνικές αξιολόγησης. Η ποσοτική αξιολόγηση με τα γραπτά τεστ παρέχει περιορισμένες πληροφορίες σχετικά με το τι μπορεί να κάνει ο μαθητής σε πολύ ειδικές συνθήκες. Οι πληροφορίες από αυτού του είδους την αξιολόγηση δίνουν μια ελλιπή και ίσως αποσπασματική εικόνα σχετικά με τις επιδόσεις των μαθητών. Η χρήση λοιπόν στην τάξη διαφορετικών τεχνικών αξιολόγησης όπως οι ερωτήσεις ανοιχτού τύπου, η επιλογή προκατασκευασμένων απαντήσεων, η αξιολόγηση συνθετικών εργασιών, η συζήτηση, η παρατήρηση, ο φάκελος εργασιών και το ημερολόγιο μπορούν να βοηθήσουν στην καλύτερη αποτίμηση της επίτευξης των προσδοκώμενων μαθησιακών αποτελεσμάτων. Για παράδειγμα, με τις συζητήσεις μέσα στην τάξη ο εκπαιδευτικός μπορεί να καταλάβει καλύτερα τη σκέψη, τις στρατηγικές και την ικανότητα αιτιολόγησης του μαθητή. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να χρησιμοποιεί διαφοροποιημένα τις διάφορες τεχνικές αξιολόγησης σύμφωνα με τις ιδιαιτερότητες των μαθητών της τάξης του ως προς τις εμπειρίες, τις μαθησιακές δυσκολίες, τις διαπολιτισμικές και γλωσσικές διαφορές κτλ. Με τις παραπάνω τεχνικές ο εκπαιδευτικός αντλεί στοιχεία για να αναλύσει, αξιολογήσει και βελτιώσει τη διδασκαλία του. Το πρόγραμμα σπουδών βοηθά τον εκπαιδευτικό στην αξιολόγηση της μάθησης και της διδασκαλίας:

- Παρουσιάζοντας αναλυτικά τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα ανά τάξη και μέσω των μαθησιακών - διδακτικών τροχιών πως συνδέονται με αυτά των προηγούμενων και επόμενων τάξεων. Με τον τρόπο αυτό ο εκπαιδευτικός κατανοεί από τη μια μεριά τις μαθηματικές δράσεις που είναι σημαντικό οι μαθητές να αναπτύξουν καθώς και αποκτά μια ολική εικόνα του τρόπου που αυτές εξελίσσονται σ’ όλη την υποχρεωτική εκπαίδευση. Έτσι μπορεί να παρατηρήσει και να ερμηνεύσει τη μαθηματική δράση των μαθητών καθώς και να διαφοροποιήσει τη διδασκαλία του ανάλογα με τις ιδιαιτερότητες της τάξης του.
- Προτείνοντας ενδεικτικές δραστηριότητες και συνθετικές εργασίες που συσχετίζονται με συγκεκριμένα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα ώστε η αξιολόγηση τους να είναι εφικτή. Αποτελούν δε παραδείγματα για τον εκπαιδευτικό ώστε να μπορεί ο ίδιος να σχεδιάσει δραστηριότητες και ερωτήματα προς τους μαθητές τους που να τους επιτρέπουν την εμπλοκή τους σε πλούσια μαθηματική δραστηριότητα.

Πίνακες θεματικών ενοτήτων- Κωδικοί – Σύμβολα

Τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα (ΠΜΑ), τα βασικά θέματα, οι δραστηριότητες και το εκπαιδευτικό υλικό παρουσιάζονται σε μορφή πίνακα ανά θεματική ενότητα (θεματικός άξονας) για κάθε τάξη. Η παρουσίαση τους δεν συνδέεται με τη σειρά διαχείρισης του περιεχομένου στη διδασκαλία που αυτή εξαρτάται από το τι γνώσεις από άλλες θεματικές ενότητες χρειάζεται να έχουν οι μαθητές ώστε να επιτύχουν κάποιο συγκεκριμένο προσδοκώμενο μαθησιακό αποτέλεσμα. Στην πρώτη στήλη, τα ΠΜΑ αριθμούνται με βάση τη θεματική ενότητα στην οποία εντάσσονται. Ο παρακάτω πίνακας εξηγεί την αρίθμηση:

ΠΜΑ	**Βασική θεματική ενότητα**
Αρ#	Αριθμοί
Α#	Άλγεβρα
Γ#	Γεωμετρία- Χώρος
Μ#	Μέτρηση
Σ#	Στατιστική
Π#	Πιθανότητες

Στη δεύτερη στήλη παρουσιάζεται ο τίτλος της βασικής τροχιάς και των υποτροχιών καθώς και ενδεικτικός διδακτικός χρόνος. Στην τρίτη στήλη παρουσιάζεται κάποιο διδακτικό σχόλιο και γίνεται παραπομπή στις σχετικές ενδεικτικές δραστηριότητες. Στην τέταρτη στήλη το εκπαιδευτικό υλικό αφορά χειραπτικό υλικό που μπορούν να χρησιμοποιήσουν οι μαθητές, αναφορές στα υπάρχοντα διδακτικά εγχειρίδια, αναφορές σε σχετικές ιστοσελίδες καθώς και παραπομπή σε αρχεία λογισμικού που αναπτύχθηκαν στο πλαίσιο του Προγράμματος Σπουδών και θα ενταχθούν στο ψηφιακό υλικό ώστε να έχουν πρόσβαση οι εκπαιδευτικοί. Ένα παράδειγμα τέτοιου λογισμικού στην τέταρτη στήλη είναι το αρχείο: Γ-ΑΔ1-Το α στην ψ=αχ^2 ,που αφορά την Γ΄ Γυμνασίου και την δραστηριότητα ΑΔ1 στον πίνακα των δραστηριοτήτων.

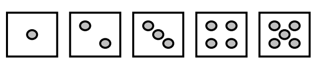
Στους πίνακες που παρουσιάζονται οι δραστηριότητες υπάρχει ανάλογη αρίθμηση με αυτή των ΠΜΑ. Για παράδειγμα, ΑΔ1 αντιστοιχεί στη δραστηριότητα 1 που αφορά στην Άλγεβρα ενώ ΠΔ2 είναι η δραστηριότητα 2 που αφορά στις Πιθανότητες. Στη δεύτερη στήλη ακολουθεί η περιγραφή της δραστηριότητας που άλλοτε απευθύνεται στον εκπαιδευτικό και άλλες φορές στο μαθητή. Στην τελευταία στήλη αναφέρονται τα ΠΜΑ που συνδέονται με τη συγκεκριμένη δραστηριότητα.

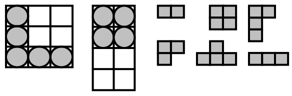
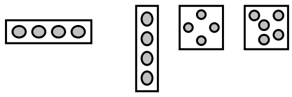
Τέλος οι συνθετικές εργασίες που παρουσιάζονται στο τέλος του κάθε κύκλου παρουσιάζονται αρχικά συνοπτικά σε ένα πίνακα όπου δίνεται ο τίτλος τους, μια σύντομη περιγραφή τους, η τάξη στην οποία αντιστοιχούν καθώς και το εκπαιδευτικό υλικό που μπορεί να αξιοποιηθεί. Στη συνέχεια ακολουθεί αναλυτική περιγραφή της συνθετικής εργασίας όπως μπορεί αυτή να δοθεί στους μαθητές, ενδεικτικές φάσεις εφαρμογής της καθώς και τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα που μπορούν να επιτευχθούν μέσα από την εμπλοκή των μαθητών. Σε κάποιες περιπτώσεις οι συνθετικές εργασίες θέτουν ερωτήματα πέρα από αυτά των μαθηματικών ενώ αρκετές από αυτές αξιοποιούν την ψηφιακή τεχνολογία. Στο Γυμνάσιο υπάρχει παράδειγμα συνθετικής εργασίας όπου παρουσιάζεται πιο λεπτομερής τρόπος διαχείρισης.

Στους πίνακες παρουσιάζεται ένα ενδεικτικός χρόνος για κάθε θεματική ενότητα. Ο χρόνος αφορά 120 ώρες για το Δημοτικό και 110 ώρες για το Γυμνάσιο ενώ 10 ώρες προβλέπεται να διατεθούν στις συνθετικές εργασίες. Η διδακτική διαχείριση του περιεχομένου δεν θα είναι γραμμική αλλά θα γίνεται με βάση το τι χρειάζεται να γνωρίζουν οι μαθητές για να αντιμετωπίσουν τη συγκεκριμένη ενότητα.

Νηπιαγωγείο

Θεματική ενότητα: Αριθμοί και Πράξεις – Άλγεβρα

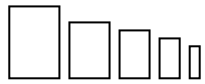
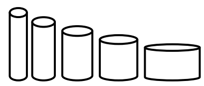
Περιεχόμενα	**Μαθησιακοί στόχοι**	**Ιδέες για δραστηριότητες - Προτεινόμενη διδακτική μεθοδολογία**	
		Η υλοποίηση του στόχου διευκολύνεται όταν για παράδειγμα τα παιδιά...	**Οι εκπαιδευτικοί συμβάλλουν στην υλοποίηση αυτών των στόχων όταν για παράδειγμα...**
Φυσικοί αριθμοί: *Αριθμητικά σύμβολα*	Τα παιδιά: *Αρ1.*Απαγγέλλουν, διαβάζουν και γράφουναριθμούς μέχρι το 10.		
Άμεση αναγνώριση	*Αρ2.* Αναγνωρίζουν αριθμούς χρησιμοποιώντας στρατηγικές άμεσης αναγνώρισης και αντιστοίχισης.	*Αρ2.* καλούνται να αναγνωρίσουν με μια ματιά τους αριθμούς, να αναγνωρίσουν με μια ματιά ποσότητες σε διάφορους σχηματισμούς και να τις αντιστοιχίσουν στους αριθμούς.	*Αρ2.* - οργανώνουν παιχνίδια ταχύτητας όσον αφορά: την άμεση αναγνώριση των αριθμών 1-9, - την άμεση αναγνώριση ποσοτήτων και την αντιστοίχισή τους με τους αριθμούς -ενθαρρύνουν τη χρήση αρχικά συγκεκριμένου χειραπτικού υλικού (φασόλια, μπίλιες) και στη συνέχεια αναπαραστατικού (μάρκες, κύβους, σπίρτα...) και εικονιστικού υλικού (βούλες, τετράγωνα και τετραγωνισμένο χαρτί) σε ποικιλία σχηματισμών. Σχηματισμός ζαριού:  Δυάδες και τριάδες και

			τετραγωνάκια:  Γραμμικά, κυκλικά και διάσπαρτα:  - αξιοποιούν καθημερινές ή αναδυόμενες δραστηριότητες που απαιτούν αναγνώριση των αριθμητικών συμβόλων (π.χ. επιλέγω τον αριθμό που δηλώνει τους απόντες, διαβάζω τον αριθμό τηλεφώνου μου στους φίλους μου...) (*ενδεικτική δραστηριότητα ΑρΔ1*)
Καταμέτρηση ποσοτήτων	*Αρ3.* Καταμετρούν πραγματικά αντικείμενα και αντικείμενα σε εικόνες και άλλες μορφές συμβολικών παραστάσεων μέχρι το 10.	*Αρ3.* καλούνται να καταμετρήσουν πραγματικά αντικείμενα σε εικόνες και άλλες μορφές συμβολικών παραστάσεων μέχρι το 10.	*Αρ3.* - αξιοποιούν το ψηφιακό περιβάλλον GCompris Ελεύθερο Λογισμικό / Λογισμικό Ανοικτού Κώδικα, (ΕΛ/ΛΑΚ) «Δραστηριότητες Μαθηματικών-αρίθμηση-μέτρηση αντικειμένων», για την εξάσκηση των παιδιών. Διατίθεται στο δικτυακό τόπο: http://gcompris.net/-el-
Διάταξη ποσοτήτων και αριθμών	*Αρ4.*Συγκρίνουν και διατάσσουνποσότητες καιαριθμούς και αναπαριστούν στην αριθμογραμμή. *Αρ5.*Διερευνούν πώς κατασκευάζονται οι αριθμοί μέχρι το 10, τους αναλύουν και τους	*Αρ5.* καλούνται να χειριστούν υλικό που τους επιτρέπει να	*Αρ5.* -προτείνουν παιχνίδια όπου τα παιδιά συνεργαζόμενα σε

	συνθέτουν.	διερευνήσουν την ανάλυση και τη σύνθεση των αριθμών της πρώτης δεκάδας.	ομάδες μπορούν να βρουν πόσα ακόμα χρειάζονται για να είναι..., πόσα να βγάλουν για να μείνουν..., πόσα να βάλουν μαζί για να είναι..., με πόσους τρόπους μπορούμε να χωρίσουμε μία ομάδα αντικειμένων σε δύο άλλες μικρότερες - ενθαρρύνουν κατασκευές με τη χρήση συγκεκριμένου χειραπτικού υλικού, κυβάκια, πούλια.. που τοποθετείται σε βάσεις του 5,6,8,9,10 (*ενδεικτικές δραστηριότητες ΑρΔ2, ΑρΔ3*)
Πρόσθεση-Αφαίρεση	*Αρ6.* Διερευνούν καταστάσεις «βάζω μαζί», «βάζω ακόμα» και «συγκρίνω» για να προσεγγίσουν τις πράξεις πρόσθεση και αφαίρεση και κατασκευάζουν απλά προβλήματα πρόσθεσης και αφαίρεσης. *Αρ7.* Διερευνούν συνδυασμούς που δίνουν τα αθροίσματα ή τις διαφορές των αριθμών ως το 10.	*Αρ7.* έχουν την ευκαιρία να διερευνήσουν συνδυασμούς που δίνουν τα αθροίσματα ή τις διαφορές των αριθμών ως το 10.	*Αρ7.* -οργανώνουν παιχνίδια σε ομάδες οι οποίες συνδυάζουν το υλικό τους με διάφορους τρόπους ώστε να προκύψει κάποιος συγκεκριμένος αριθμός. -οργανώνουν παιχνίδια ταχύτητας. Κερδίζει η ομάδα με τους περισσότερους συνδυασμούς σε δεδομένο χρόνο.

			-χρησιμοποιούν υλικό που μπορεί να ενωθεί ή να χωριστεί όπως: κύβους, κάρτες με δύο χρώματα, τετράγωνα χωρισμένα σε μέρη, κάρτες με ποσότητες, ταινίες... (*ενδεικτική δραστηριότητα ΑρΔ4*)
Πολλαπλασιασμός-Διαίρεση	*Αρ8.* Ομαδοποιούν αντικείμενα σε δυάδες, τριάδες, τετράδες και πεντάδες και τις καταμετρούν. *Αρ9.* Μοιράζουν αντικείμενα σε δυάδες, τριάδες και καταμετρούν.	*Αρ8.* καλούνται να ομαδοποιήσουν αντικείμενα σε δυάδες, τριάδες, τετράδες και πεντάδες , να καταμετρήσουν πόσες φορές επαναλαμβάνονται οι ομάδες, και να βρουν πόσα είναι όλα τα αντικείμενα μαζί μέσα από μια διαδικασία επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης. *Αρ9.* καλούνται να βρουν τρόπους να μοιράσουν κάποιο υλικό στα δύο ή στα τρία.	*Αρ8.* -οργανώνουν παιχνίδια σε ομάδες οι οποίες καλούνται να βάλουν τόσες κάρτες με δυάδες, τριάδες, τετράδες και πεντάδες όσες τους ζητείται και να βρουν πόσα είναι όλα τα αντικείμενα μαζί -ενθαρρύνουν την επαφή των παιδιών με κάποιο πολλαπλασιαστικό συλλογισμό και όχι με την άμεση καταμέτρηση όλων των αντικειμένων. (*ενδεικτική δραστηριότητα ΑρΔ5*) *Αρ9.* -οργανώνουν παιχνίδια σε ομάδες οι οποίες καλούνται να μοιράσουν κάποιο υλικό και να βρουν πόσα έχει ο καθένας. -αξιοποιούν καθημερινές ή αναδυόμενες δραστηριότητες όπως το να μοιραστούν τα αυτοκινητάκια στις ελεύθερες δραστηριότητες, τα αυτοκόλλητα ή τα γλυκά που έφερε κάποιο παιδί...

			-διατυπώνουν ανοιχτές ερωτήσεις που βοηθούν τα παιδιά να περιγράψουν τη διαδικασία που ακολούθησαν, τον τρόπο που σκέφτηκαν (πώς μοιράσατε τα γλυκά; Τί σκεφτήκατε για να το κάνετε; Τί άλλο θα μπορούσατε να κάνετε;...) -προτείνουν ποικιλία υλικού για να αναπτύξουν άλλες διαστάσεις του μοιράσματος στα παιδιά:κυβάκια, πούλια, κάρτες, τετράγωνα... (*ενδεικτική δραστηριότητα ΑρΔ6*)
Κανονικότητες: Αναγνώριση, συμπλήρωση, περιγραφή/εξήγηση κανονικότητας	Τα παιδιά: *Α1.* Αναγνωρίζουν, περιγράφουν και συμπληρώνουν κανονικότητες με χειραπτικό υλικό και σε εικόνες.	*Α1.* καλούνται να αναγνωρίσουν, να περιγράψουν και να συμπληρώσουν κανονικότητες με χειραπτικό υλικό και σε εικόνες	*Α1.* -αξιοποιούν το ψηφιακό περιβάλλον GCompris Ελεύθερο Λογισμικό/Λογισμικό Ανοικτού Κώδικα, (ΕΛ/ΛΑΚ) στη διαδρομή: «Δραστηριότητες ανακάλυψης-Συλλογή ποικίλων δραστηριοτήτων-Αλγόριθμος» http://gcompris.net/-el-
Κατασκευή κανονικοτήτων	*Α2.* Κατασκευάζουν δικές τους απλές κανονικότητες με υλικό.		
Συναρτήσεις: Εξερεύνηση σχέσεων μεταξύ συμμεταβαλόμενων μεγεθών	*Α3.* Εξερευνούν σχέσεις ανάμεσα σε συμμεταβαλόμενα ή αντίστροφα μεταβαλόμενα	*Α3.* καλούνται να διατάξουν υλικό που μεταβάλλεται ως προς δύο διαστάσεις (π.χ.	*Α3.* -οργανώνουν παιχνίδια του τύπου «βάζω στη σειρά»

	μεγέθη σε απλές καταστάσεις.	μήκος-πλάτος).	-Χρησιμοποιούν ποικιλία υλικών που μεταβάλλονται ως προς δύο διαστάσεις όπως κορδέλες, ορθογώνια, ράβδους, πύργους, κυλίνδρους... Μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί το μοντεσσοριανό υλικό. Τα μεγέθη στα υλικά μπορεί να συμμεταβάλονται (μεγαλώνει το ένα, μεγαλώνει και το άλλο)  ή να μεταβάλλονται αντίστροφα  (*ενδεικτική δραστηριότητα ΑΔ1*)
Ισότητα/ανισότητα: Έννοια της ισότητας και ανισότητας	Α4. Διερευνούν την έννοια της ισότητας και ανισότητας σε διαφορετικά πλαίσια. *(Στόχος από γεωμετρία, μέτρηση και αριθμούς)*		

Θεματική ενότητα: Χώρος και Γεωμετρία – Μέτρηση

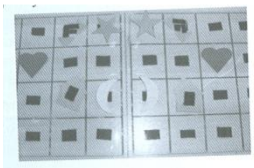
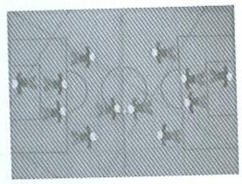
Περιεχόμενα	**Μαθησιακοί στόχοι**	**Ιδέες για δραστηριότητες - Προτεινόμενη διδακτική μεθοδολογία**	
		Η υλοποίηση του στόχου διευκολύνεται όταν για παράδειγμα τα παιδιά...	**Οι εκπαιδευτικοί συμβάλλουν στην υλοποίηση αυτών των στόχων όταν για**

			παράδειγμα...
Χώρος: *Θέσεις διευθύνσεις και διαδρομές*	Τα παιδιά: Γ1. Εντοπίζουν και περι γράφουν θέσεις, διευθύνσεις και δια δρομές στο χώρο ως προς διαφορετικ άσυστήματα αναφο ράς, με τη χρήση χωρικών εννοιών.	*Γ1.* καλούνται να εντοπίσουν και να περιγράψουν θέσεις, διευθύνσεις και διαδρομές με εκφράσεις τύπου «μπρος-πίσω», «πάνω-κάτω», «δεξιά-αριστερά».	*Γ1.* -οργανώνουν παιχνίδια προσανατολισμού στο χώρο. Τα παιδιά ορίζουν ένα σημείο αναφοράς, εκτός από τον ίδιο τους τον εαυτό, και τοποθετούν άλλα παιδιά ή αντικείμενα «μπρος-πίσω», «δεξιά-αριστερά» από αυτό το σημείο αναφοράς. -σταδιακά οργανώνουν πιο σύνθετα παιχνίδια. Τα στοιχεία που μπορούν να αλλάξουν είναι: το μέγεθος του χώρου (παιχνίδια με αντικείμενα ή πιόνια που πρέπει να διευθετηθούν στο μικροχώρο) και η μεταφορά της δράσης σε αναπαραστάσεις (παιχνίδια με αντικείμενα ή πιόνια σε ένα χάρτη) (*ενδεικτική δραστηριότητα ΓΔ1*) -χρησιμοποιούν ψηφιακά περιβάλλοντα τύπου Logo, όπως το περιβάλλον «Ladybug Leaf» του Πανεπιστημίου Utah των ΗΠΑ, που διατίθεται στο δικτυακό τόπο: http://nlvm.usu.edu
Ανάγνωση χαρτών	*Γ2*. Αναγνωρίζουν οικείους απλούς χάρτες εντοπίζονταιθέσεις		

	και διαδρομές.		
Δόμηση χώρου και συντεταγμένες	*Γ3*. Εντοπίζουν, περιγράφουν και αναπαριστούν θέσεις, διευθύνσεις και διαδρομές σε τε τραγωνισμένα περιβάλλοντα.	*Γ3.* καλούνται να εντοπίσουν, να περιγράψουν και να αναπαραστήσουν θέσεις, διευθύνσεις και διαδρομές σε τετραγωνισμένα περιβάλλοντα.	*Γ3*. -οργανώνουν παιχνίδια προσανατολισμού σε τετραγωνισμένα περιβάλλοντα. -χρησιμοποιούν τα περιβάλλοντα αυτά • βιωματικά (πλακόστρωτο), • εμπράγματα (σκακιέρα, βάση lego)και • αναπαραστατικά (τετραγωνισμένο χαρτί) -οργανώνουν παιχνίδια κατασκευών στα οποία τα παιδιά καλούνται να αναπαράγουν σχηματισμούς που έχουν δει. (*ενδεικτική δραστηριότητα ΓΔ2*)
Γεωμετρικά σχήματα: *Αναγνώριση, ονομασία και ταξινόμηση γεωμετρικών σχημάτων και στερεών*	*Γ4*. Αναγνωρίζουν και ταξινομούν τα βασικά επίπεδα και στερεά σχήματα με βάση γενικά χαρακτηριστικά και σε ποικιλία θέσεων, μεγεθών και προσανατολισμών.		
Ανάλυση γεωμετρικών σχημάτων και στερεών σε στοιχεία και ιδιότητες	*Γ5*. Περιγράφουν απλά επίπεδα γεωμετρικά σχήματα χρησιμοποιώντας τα στοιχεία τους και ιδιότητες.	*Γ5*. καλούνται να περιγράψουν επίπεδα γεωμετρικά σχήματα χρησιμοποιώντας τα στοιχεία τους και ιδιότητες.	*Γ5*. -οργανώνουν παιχνίδια αναγνώρισης των γεωμετρικών σχημάτων μέσα από την περιγραφή τους -διαθέτουν στα παιδιά ποικιλία σχημάτων και μεγεθών

			(*ενδεικτική δραστηριότητα ΓΔ3*)
Κατασκευές γεωμετρικών σχημάτων και στερεών	*Γ6.*Κατασκευάζουνεπίπεδα και στερεά γεωμετρικά σχήματα με διάφορα μέσα.		
Σύνδεση μεταξύ γεωμετρικών σχημάτων και στερεών	*Γ7.* Συνδέουν επίπεδα και στερεά σχήματα (με αποτυπώματα και ενσφηνώματα).		
Ανάλυση ή σύνθεση γεωμετρικών σχημάτων και στερεών σε άλλα σχήματα ή μέρη	*Γ8.* Συνθέτουν και αναλύουν απλά επίπεδα γεωμετρικά σχήματα και στερεά σε 2 ή περισσότερα μέρη.	*Γ8.* καλούνται να συνθέσουν και να αναλύσουν απλά επίπεδα γεωμετρικά σχήματα και στερεά σε δύο ή περισσότερα μέρη.	*Γ8.* -οργανώνουν παιχνίδια κατασκευών με επίπεδα γεωμετρικά σχήματα του τύπου «βάζω μαζί σχήματα για να φτιάξω άλλα», προτείνουν επικαλύψεις, τανγκράμ, δημιουργικές κατασκευές με δεδομένα σχήματα (τί μπορώ να φτιάξω με τέσσερα τρίγωνα;) -οργανώνουν παιχνίδια κατασκευών με στερεά (πόσα διαφορετικά σπίτια μπορείτε να κατασκευάσετε με τέσσερις κύβους;) -διαθέτουν στα παιδιά ποικιλία σχημάτων και μεγεθών (*ενδεικτική δραστηριότητα ΓΔ4*)

Μετασχηματισμοί και συμμετρία:			
Μετατόπιση και στροφή	*Γ9.* Παρατηρούν μετατοπίσεις και στροφές (90, 180) και μπορούν να προ βλέψουν το αποτέλεσμα.	*Γ9.* καλούνται να παρατηρήσουν μετατοπίσεις και στροφές και μπορούν να προβλέψουν το αποτέλεσμα.	*Γ9.* -οργανώνουν παιχνίδια στα οποία αλλάζει η θέση παιδιών ή αντικειμένων και τα υπόλοιπα παιδιά καλούνται να εντοπίσουν την αλλαγή. Η αλλαγή μπορεί να είναι: μετακίνηση κατά μήκος, στροφή ή και τα δύο. -χρησιμοποιούν διαφορετικούς χώρους όπως: πλακόστρωτο, σκακιέρα, ψηφιακό περιβάλλον.(Δραστηριότητα ΓΔ5) -χρησιμοποιούν ψηφιακά περιβάλλοντα τύπου Logo, όπως το περιβάλλον «Ladybug Leaf» του Πανεπιστημίου Utah των ΗΠΑ, που διατίθεται στο δικτυακό τόπο: http://nlvm.usu.edu
Αξονική συμμετρία	*Γ10.* Αναγνωρίζουν απλά και οικεία συ μμετρικά δισδιάστ ατα και τρισδιάστατα σχήματα και σχήματα με άξονες συμμετρίας. *Γ11.* Εντοπίζουν τους άξονες με δίπλωση. *Γ12.* Κάνουν απλές κατασκευές συμμετρικών σχημάτων. *Γ13.* Προσεγγίζουν εμπε ιρικά τις ιδιότητες	*Γ13.* τα παιδιά καλούνται να προσεγγίσουν	Γ13 -προτείνουν κατασκευές στο μεσοχώρο και

	της συμμετρίας.	εμπειρικά τις ιδιότητες της συμμετρίας μέσα από την κατασκευή συμμετρικών σχημάτων.	μικροχώρο με υλικά, αντικείμενα, σχέδια κολλώντας, βάφοντας σε τετραγωνισμένα χαρτιά ή σε άλλα πλέγματα. -χρησιμοποιούν μεγάλη ποικιλία υλικών και σχεδίων. Τα παιδιά μπορούν να κολλήσουν, να βάψουν τετραγωνισμένα χαρτιά ή άλλα πλέγματα. Η χρήση διαφανών χαρτιών διευκολύνει τη δίπλωση και τον έλεγχο των κατασκευών Καθώς το υλικό σχετίζεται σε μεγάλο βαθμό με τις ιδιότητες που θα αναδειχθούν χρησιμοποιείται σταδιακά και σε μεγάλη ποικιλία υλικό που αναδεικνύει τις ίσες αποστάσεις από τον άξονα, την αντιστροφή, τις ευθυγραμμίσεις. -ενθαρρύνουν τη συζήτηση στην τάξη και την περιγραφή του τρόπου κατασκευής. Από τη συζήτηση αναδεικνύονται οι ιδιότητες (ίδια σχήματα, ίσα σχήματα, απέχουν ίδια απόσταση από τον άξονα, είναι αντίστροφα)  

Οπτικοποίηση και χωρικός συλλογισμός: *Αναγνώριση οπτικών γωνιών, δημιουργία οπτικοποιήσεων*	*Γ14.* Αναγνωρίζουν απλές καταστάσεις από διαφορετικές οπτικές γωνίες. Γ15. Πραγματοποιούν κατασκευές απλών τρισδιάστατων συνθέσεων από εικόνες σχέδια ή άλλες ανα παραστάσεις.	*Γ14.* καλούνται να αναγνωρίσουν απλές καταστάσεις από διαφορετικές οπτικές γωνίες.	*Γ14.* -οργανώνουν παιχνίδια παρατήρησης μιας τρισδιάστατης κατασκευής από μια οπτική γωνία την οποία στη συνέχεια τα παιδιά αναγνωρίζουν και δείχνουν σε μια παρόμοια κατασκευή ή φωτογραφία -οργανώνουν παιχνίδια αναγνώρισης της οπτικής γωνίας μιας δισδιάστατης απεικόνισης (π.χ. παίζουν τους φωτογράφους και βρίσκουν από που τραβήχτηκε φωτογραφία. Καλούνται να βγάλουν μια ίδια. Συγκρίνουν τις φωτογραφίες και συζητούν: -πώς μπορούν οι φωτογραφίες να είναι ίδιες; -τί μπορούμε να αλλάξουμε;...) (Δραστηριότητες ΓΔ6,ΓΔ7)
Μέτρηση μήκους: *Άμεσες και έμμεσες συγκρίσεις*	*Μ1.* Πραγματοποιούν άμεσες και έμμεσες συγκρίσεις και	*Μ1.* καλούνται να πραγματοποιήσουν άμεσες και έμμεσες	*Μ1.* -οργανώνουν παιχνίδια σύγκρισης μηκών,

	διατάξεις ίσων και άνισων μηκών.	συγκρίσεις και διατάξεις ίσων και άνισων μηκών.	-παρουσιάζουν καταστάσεις προβλήματα στις οποίες τα παιδιά οδηγούνται αβίαστα στη μεταφορά του μεγέθους σε άλλο μέσο (κορδέλα, σπάγκος...) -εμπλέκουν τα παιδιά αρχικά σε δράσεις σύγκρισης χαρακτηριστικών που συνδέονται με το σώμα τους (π.χ. ύψος, μήκη χεριών και ποδιών, πόσο μεγάλο βήμα μπορούν να κάνουν...) και στη συνέχεια αξιοποιούν συγκρίσεις που εμπλέκονται στην καθημερινή τους λειτουργία (π.χ. ποιός έκανε το ψηλότερο άλμα, ποιός έριξε την μακρινότερη βολή...) (*ενδεικτικήδραστηριότητ αΜΔ1*)
	Μ2. Αναλύουν και συνθέτουν μήκη σε δύο μέρη.	*Μ2.* καλούνται να αναλύσουν και να συνθέσουν μήκη σε δύο μέρη.	*Μ2.* -οργανώνουν παιχνίδια ταχύτητας σε ομάδες. Στα παιχνίδια αυτά τα παιδιά καλούνται να συνδυάσουν ζεύγη μεγεθών για να είναι ίσα με το πρότυπο -προτείνουν ποικιλία υλικών (χαρτόνια στα δύο, κορδέλες στα δύο, ράβδους...) (*ενδεικτική δραστηριότητα ΜΔ2*)
Μέτρηση με επικαλύψεις, με και χωρίς επανάληψη μονάδας	*Μ3.* Πραγματοποιούν επικαλύψεις και στη συνέχεια επικαλύψεις με επαναλήψεις με μη τυπικές και τυπικές	*Μ3.* καλούνται να πραγματοποιήσουν επικαλύψεις και στη συνέχεια επικαλύψεις με μη τυπικές και	*Μ3.* -οργανώνουν παιχνίδια υπολογισμού αποστάσεων που δεν μπορούν να συγκριθούν άμεσα. Ενθαρρύνουν τα

	μονάδες. *Μ4.* Πραγματοποιούν τη σύνδεση των επικαλύψεων ή επαναλήψεων με το αριθμητικό αποτέλεσμα.	τυπικές μονάδες.	παιδιά να κάνουν εκτιμήσεις και στη συνέχεια να βρουν τρόπους να ‘μετρήσουν’ (π.χ. με βήματα, παλάμες, ξυλάκια,). -παρουσιάζουν καταστάσεις προβλήματα στις οποίες τα παιδιά έχουν ένα μέτρο και πρέπει να συγκρίνουν μεγέθη που χρειάζονται περισσότερα από ένα έτσι ώστε να προκύψει φυσικά η ανάγκη επανάληψης της μονάδας. (*ενδεικτικές δραστηριότητες ΜΔ3, ΜΔ4*)
Χρήση τυπικών οργάνων μέτρησης μήκους	*Μ5.* Προσεγγίζουν την ανάγκη χρήσης τυπικών μονάδων μέτρησης. *Μ6.* Χρησιμοποιούν χάρακα για επικαλύψεις ή επαναλήψεις.		
Εκτιμήσεις αποστάσεων και μηκών	*Μ7.* Κάνουν απλές εκτιμήσεις και συγκρίσεις.		
Μέτρηση επιφάνειας: *Άμεσες και έμμεσες συγκρίσεις*	*Μ8.* Πραγματοποιούν απλές άμεσες και έμμεσες συγκρίσεις επιφανειών.	*Μ8.* καλούνται να πραγματοποιήσουν άμεσες και έμμεσες συγκρίσεις επιφανειών.	*Μ8.* -παρουσιάζουν καταστάσεις προβλήματα που οδηγούν τα παιδιά στην άμεση σύγκριση επιφανειών (π.χ. Θα χωρέσει ο πίνακας στην κορνίζα; πώς μπορεί η μία κορνίζα να μπει στην

			άλλη;) -παρουσιάζουν καταστάσεις προβλήματα ή οργανώνουν παιχνίδια έμμεσων συγκρίσεων με επικαλύψεις και 'γεμίσματα' (π.χ. ποιό ορθογώνιο πάτωμα χωράει τα περισσότερα τετράγωνα πλακάκια;) (*ενδεικτική δραστηριότητα ΜΔ5*)
Δόμηση επιφανειών *Χρήση οργάνων (τετραγώνων) μέτρησης*	*Μ9.*Δομούν επιφάνειες με τετράγωνα και μετρούν το αποτέλεσμα. *Μ10.* Χρησιμοποιούν τε τράγωνα για να δομήσουν ορθογώνιες περιοχές σε γραμμές και στήλες.	*Μ9.* καλούνται να δομήσουν επιφάνειες με τετράγωνα και να μετρήσουν το αποτέλεσμα. *Μ10.* καλούνται να χρησιμοποιήσουν τετράγωνα για να δομήσουν ορθογώνιες περιοχές σε γραμμές.	*Μ9.* -οργανώνουν παιχνίδια στα οποία τα παιδιά πρέπει να επιλέξουν το μεγαλύτερο ορθογώνιο. Ελέγχουν επιστρώνοντας με τετράγωνα - διαθέτουν στα παιδιά υλικό που περιέχει ορθογώνια σε διάφορες διαστάσεις ώστε το μεγαλύτερο να μη γίνεται αμέσως αντιληπτό. (*ενδεικτική δραστηριότητα ΜΔ6*) *Μ10.* -οργανώνουν παιχνίδια ταχύτητας σε ομάδες τύπου 'βρίσκω πόσα τετράγωνα έχει' -το υλικό που χρησιμοποιείται ευνοεί τη δόμηση σε γραμμές και στήλες (π.χ. σχήματα από τετράγωνα που πρέπει να συμπληρωθούν και να καταμετρηθούν). (*ενδεικτική δραστηριότητα ΜΔ7*)
Εκτιμήσεις επιφανειών	*Μ11.* Εκτιμούν το μέγεθος απλών επιφανειών και		

	κάνουν συγκρίσεις.		
Μέτρηση όγκου: *Άμεσες και έμμεσες συγκρίσεις*	*Μ12.* Συγκρίνουν άμεσα κι έμμεσα τη χωρητικότητα δύο δοχείων. *Μ13.* Συγκρίνουν όγκους κατασκευών που αποτελούνται από μικρό αριθμό δομικών υλικών (κύβοι).	*Μ13.* καλούνται να συγκρίνουν όγκους κατασκευών.	*Μ13.* -οργανώνουν παιχνίδια σε ομάδες που καλούνται να διαλέξουν το μεγαλύτερο κουτί.Κερδίζει η ομάδα που επέλεξε σωστά. Ο έλεγχος γίνεται γεμίζοντας το κουτί με κύβους. -διαθέτουν σε όλες τις ομάδες τα ίδια κουτιά (*ενδεικτική δραστηριότητα ΜΔ8*)
Μέτρηση με τη χρήση μη τυπικών και τυπικών μονάδων μέτρησης όγκου	*Μ14.* Μετρούν τη χωρητικότητα δοχείων με επανάληψη μη τυπικών ή τυπικών μονάδων.		
Εκτιμήσεις όγκων	Μ15 Εκτιμούν τον όγκο απλών στερεών και κάνουν συγκρίσεις		

Θεματική ενότητα: Στατιστική – Πιθανότητες

Περιεχόμενα	**Μαθησιακοί στόχοι**	**Ιδέες για δραστηριότητες - Προτεινόμενη διδακτική μεθοδολογία**	
		Η υλοποίηση του στόχου διευκολύνεται όταν για παράδειγμα τα παιδιά...	**Οι εκπαιδευτικοί συμβάλλουν στην υλοποίηση αυτών των στόχων όταν για παράδειγμα...**

Στατιστική: *Κατηγορικά δεδομένα* *Διαγράμματα με υλικά* *Εικονογράμματα*	*Σ1.* Θέτουν ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με δεδομένα (κατηγορικά). *Σ2.* Συλλέγουν δεδομένα μέσω μικρών ερευνών και *τα* οργανώνουν χρησιμοποιώντας υλικά, καταμέτρηση με γραμμές. *Σ3.*Κατασκευάζουν *διαγράμματα* με υλικά, εικονογράμματα. *Σ4.*Διαβάζουν *πληροφορίες* σε διαγράμματα με υλικά, εικονογράμματα.	*Σ1, Σ2, Σ3* καλούνται: -να θέσουν ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με κατηγορικά δεδομένα -να συλλέξουν τα δεδομένα -να τα οργανώσουν με διάφορους τρόπους -να κατασκευάσουν διαγράμματα και να εξάγουν συμπεράσματα. *Σ4.* καλούνται να περιγράψουν τις πληροφορίες ενός διαγράμματος.	*Σ1, Σ2, Σ3, Σ4* -αξιοποιούν γεγονότα της καθημερινής ζωής του νηπιαγωγείου που ενδιαφέρουν τα παιδιά (π.χ. οργάνωση μιας γιορτής, οργάνωση της γωνιάς της βιβλιοθήκης...) για να εξοικειώσουν τα παιδιά με την ερευνητική διαδικασία - διατυπώνουν ανοιχτές ερωτήσεις (π.χ. Ποια είναι τα αγαπημένα μας χρώματα; Ποιους χυμούς φρούτων προτιμάμε; Πώς μπορούμε να βρούμε ποιο χρώμα προτιμούν τα περισσότερα παιδιά;) -προτρέπουν τα παιδιά: να συλλέξουν τα δεδομένα, να πειραματιστούν με διάφορες μορφές οργάνωσής τους, να εξάγουν συμπεράσματα (Δραστηριότητα ΣΔ1) -οργανώνουν παιχνίδια του τύπου: «Μαντεύω τον κανόνα» για να οδηγήσουν τα παιδιά να βρουν τον τρόπο που φτιάχνονται οι κατηγορίες *Σ4.* -παρουσιάζουν στα παιδιά διαγράμματα και συζητούν για τις πληροφορίες που περιέχουν (*ενδεικτική δραστηριότητα ΣΔ2*)

Πιθανότητες: Πείραμα τύχης Δειγματικός χώρος	*Π1.Περιγράφουν* ένα γεγονός ως βέβαιο, πιθανό, αδύνατο.	*Π1.* καλούνται να περιγράψουν ένα γεγονός ως βέβαιο, πιθανό αδύνατο.	*Π1.* -συζητούν με τα παιδιά για γεγονότα που συμβαίνουν πάντα, μερικές φορές ή ποτέ στο νηπιαγωγείο - ενθαρρύνουν τα παιδιά σε ομάδες να κατασκευάσουν τη «χώρα του πάντα», τη «χώρα του μερικές φορές» και τη «χώρα του ποτέ» (*ενδεικτική δραστηριότητα ΠΔ1*)
	Π2.Πραγματοποιούν απλά πειράματα τύχης ενός σταδίου και περιγράφουν το δειγματικό χώρο.	*Π2.* καλούνται να πραγματοποιήσουν απλά πειράματα τύχης ενός σταδίου και να περιγράψουν το δειγματικό χώρο (το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων).	*Π2.* -οργανώνουν απλά πειράματα τύχης χρησιμοποιώντας τη ρίψη του κέρματος, τη σβούρα, το ζάρι, την κλήρωση για να προσεγγίσει το παιδί όλα τα πιθανά αποτελέσματα - αξιοποιούν πραγματικές καταστάσεις (π.χ. βάφουν τις προσκλήσεις για μία γιορτή παίζοντας με ένα ζάρι που έχει τρία χρώματα) και πραγματοποιούν απλά πειράματα τύχης. Τα παιδιά καλούνται να κάνουν μία πρόβλεψη, να ρίξουν το ζάρι και να καταγράψουν το αποτέλεσμα. Στο τέλος συζητούν τα αποτελέσματα και ανακοινώνουν το συμπέρασμα. (Δραστηριότητα ΠΔ2) -αξιοποιούν ψηφιακά περιβάλλοντα, όπως το «Spinners» του

			Πανεπιστημίου Utah των ΗΠΑ, που διατίθεται στο δικτυακό τόπο: http://nlvm.usu.edu
	*Π3.*Χαρακτηρίζουν ένα *παιχνίδι* τύχης ως δίκαιο-άδικο.	*Π3.* καλούνται να χαρακτηρίσουν ένα παιχνίδι τύχης ως δίκαιο-άδικο.	*Π3.* -προτείνουν σε ζευγάρια παιδιών να γυρίσουν μία σβούρα που έχει μόνο ένα χρώμα ή να διαλέξουν μπάλες από ένα κουτί, όταν οι μπάλες έχουν όλες το ίδιο χρώμα. Τα ζευγάρια παρατηρούν ότι ο ένας κερδίζει πάντα και ο άλλος ποτέ και προσπαθούν να αλλάξουν τη σβούρα ή τις μπάλες έτσι ώστε το παιχνίδι να είναι δίκαιο (*ενδεικτική δραστηριότητα ΠΔ3*)

Ενδεικτικές Δραστηριότητες

Θεματική ενότητα: Αριθμοί και πράξεις

Α/Α	**Περιγραφή δραστηριότητας**	**Μαθησιακοί στόχοι**
ΑρΔ1	***«Γνωρίζω τους αριθμούς»: Παιχνίδι ταχύτητας-κρυμμένοι αριθμοί*** Τα παιδιά χωρίζονται σε 4 ομάδες. Αριθμοκάρτες με τους αριθμούς από το 1 ως το 9 είναι κρυμμένες μέσα στην τάξη. Παίζει ένα παιδί από κάθε ομάδα,. Ο εκπαιδευτικός φωνάζει έναν αριθμό και τα παιδιά ψάχνουν να βρουν τη σχετική κάρτα. Φέρνουν μόνο εκείνες τις κάρτες για τις οποίες ξέρουν ποιός αριθμός είναι και τον παρουσιάζουν. Κερδίζει το παιδί που φτάνει πρώτο. Κερδίζει η ομάδα που έχει βρει τις περισσότερες κάρτες. Οι ομάδες ελέγχουν τις κάρτες (Πριν από το παιχνίδι προηγείται μια κατάσταση ‘συστήνω’: Μετά από μια εισαγωγή για την επίσκεψη των αριθμών, τα παιδιά ψάχνουν για τις σχετικές αριθμοκάρτες που έχουν κρυφτεί στην τάξη.) Υλικό: αριθμοκάρτες κρυμμένες ή αριθμοκάρτες σε ένα σωρό	**Αρ2**

ΑρΔ2	***«Πόσα ακόμα χρειάζονται;» Κατασκευή*** Τα παιδιά παίζουν σε ομάδες που έχουν στα χέρια τους υλικό. Αντίστοιχο υλικό βρίσκεται διαθέσιμο στο τραπέζι. Ο εκπαιδευτικός λέει ένα αριθμό (και προτείνει μια βάση) κι ένας εκπρόσωπος της ομάδας (μετά από απόφαση) πηγαίνει και παίρνει από το τραπέζι το υλικό που χρειάζεται για να συμπληρωθεί η ποσότητα. Οι ομάδες συζητούν πόσα χρειάζονται για να συμπληρώσουν την ποσότητα. Η συμπλήρωση της βάσης ελέγχει το αποτέλεσμα Υλικό: υλικό κυβάκια, πούλια ή άλλο υλικό. Βάσεις του 5,6,8,9 και 10	**Αρ5**
ΑρΔ3	***«Στοιχήματα»: Παιχνίδι*** Τα παιδιά παίζουν σε ζευγάρια. Κάθε παιδί έχει 5,6,7,8 ή 10 σπίρτα. Το ένα παιδί χωρίζει την ποσότητα, παρουσιάζει το ένα χέρι με τη μια ποσότητα και κρύβει στο άλλο την υπόλοιπη. Πόσα σπίρτα είναι κρυμμένα; Όποιος κερδίζει παίρνει τη σειρά. Τα παιδιά που παίζουν συζητούν και εκφράζονται με αριθμούς, αναπτύσσοντας σχετικό λεξιλόγιο. Ο έλεγχος γίνεται με την επίδειξη της κρυμμένης ποσότητας	**Αρ5**
ΑρΔ4	***«Βάζω μαζί ή βάζω κι άλλο»: Παιχνίδι*** Τα παιδιά παίζουν σε ομάδες. Η κάθε ομάδα έχει ένα σύνολο από υλικά. Ο εκπαιδευτικός δείχνει ένα αριθμό και οι ομάδες δοκιμάζουν να ενώσουν τα υλικά για να έχουν αυτό το αποτέλεσμα. Ο χρόνος είναι περιορισμένος. Κερδίζει η ομάδα που έκανε τους περισσότερους συνδυασμούς. Οι ομάδες ελέγχουν την ορθότητα των συνθέσεων. Αν το υλικό είναι κυβάκια ή ταινίες το μήκος ελέγχει την ορθότητα των συνδυασμών Μετά το τέλος της δράσης μπορούν να συγκεντρωθούν οι συνθέσεις και να συζητηθούν οι συνδυασμοί. Υλικό: κύβοι που ενώνονται, δίνονται στα παιδιά δεδομένοι συνδυασμοί (με 2,3,4 κλπ) ή κάρτες με δύο χρώματα ή τετράγωνα ή λωρίδες τετραγωνισμένο χαρτί	**Αρ7**
ΑρΔ5	***«Ξέρω πόσα γάντια είναι μέσα»: Άγνωστη κατάσταση*** Τα παιδιά παίζουν σε ομάδες. Υπάρχει ένα μαύρο κουτί, το μαγικό κουτί. Μια αριθμοκάρτα παρουσιάζει πόσα ζεύγη γαντιών βρίσκονται μέσα σ' αυτό. Τα παιδιά προσπαθούν να υπολογίσουν πόσα γάντια είναι στο κουτί. Κερδίζει η ομάδα που απαντάει πρώτη. Οι ομάδες εξηγούν τον τρόπο που το βρήκαν και αναπτύσσεται ο αντίστοιχος διάλογος. Οι ομάδες ελέγχουν ανοίγοντας το κουτί και μετρώντας ή αναγνωρίζοντας Υλικό. Κάρτες με δυάδες, τετράδες ή πραγματικά αντικείμενα (γάντια... κλπ).	**Αρ8**
ΑρΔ6	***«Ξέρω να μοιράζω»: Άγνωστη κατάσταση*** Τα παιδιά παίζουν σε ομάδες. Στην κάθε ομάδα δίνεται ένα υλικό και τα παιδιά πρέπει να βρουν τρόπους να το μοιράσουν στα 2 (3,4, κλπ). Κερδίζει η ομάδα που απαντάει	**Αρ9**

	πρώτη. Μετά το τέλος της δράσης οι ομάδες εξηγούν πως βρήκαν το αποτέλεσμα. Οι ομάδες μπορούν να ελέγξουν την ορθότητα των αποτελεσμάτων Υλικό: Το προτεινόμενο υλικό χρησιμοποιείται σε ποικιλία για να αναπτύξει άλλες διαστάσεις του μοιράσματος στα παιδιά: τα κυβάκια, πούλια, κάρτες, τετράγωνα κλπ	

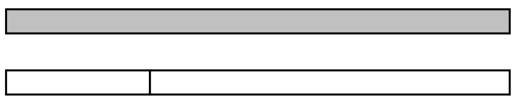
Θεματική Ενότητα: Άλγεβρα

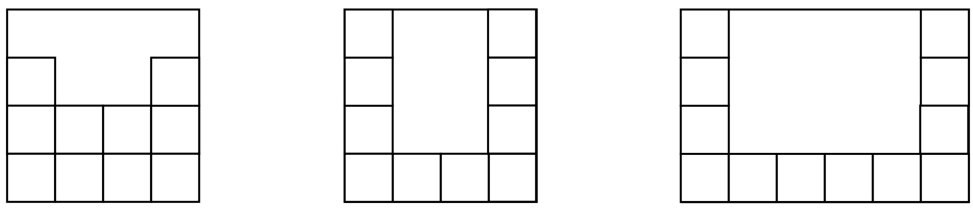
Α/Α	Περιγραφή δραστηριότητας	Μαθησιακοί στόχοι
ΑΔ1	**«Βάζω στη σειρά»: Παιχνίδι ταχύτητας.** Τα παιδιά παίζουν σε ομάδες. Έχουν στο τραπέζι υλικό με διαφορετικά μήκη και πλάτη από πέντε κομμάτια και πάνω. Καλούνται να συγκρίνουν το μήκος και το πλάτος των υλικών και με το σήμα να το βάλουν σε σειρά μεγέθους. Κερδίζει η ομάδα που τελειώνει πρώτη. Οι ομάδες ελέγχουν το αποτέλεσμα. Μετά το τέλος η τάξη συζητά πως αποφασίζει για τη σύγκριση μήκους-πλάτους. Υλικό: Μπορεί να χρησιμοποιηθεί ποικιλία υλικών που μεταβάλλονται ως προς δύο διαστάσεις (κορδέλες, ορθογώνια, ράβδοι, πύργοι, κύλινδροι.	Α3

Θεματική Ενότητα: Χώρος και Γεωμετρία – Μέτρηση

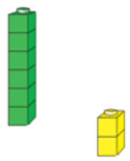
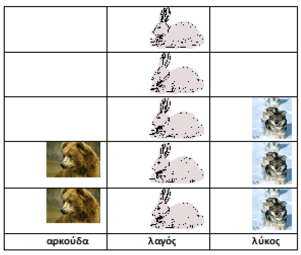
Α/Α	Περιγραφή δραστηριότητας	Μαθησιακοί στόχοι
ΓΔ1	***«Θυμάμαι που ήταν»: Παιχνίδι-φλας*** Κάθε ομάδα παιδιών που παίζει ορίζει μια διευθέτηση των μελών της στο χώρο, πίσω από ένα παραβάν. Με την μετακίνηση του παραβάν για μερικά δευτερόλεπτα τα παιδιά καταγράφουν θέσεις. Όταν επανατοποθετείται το παραβάν η ομάδα που παίζει αλλάζει μία ή περισσότερες θέσεις. Τα παιδιά πρέπει να θυμηθούν τί ήταν που. Τα παιδιά περιγράφουν λεκτικά τις θέσεις και τις αλλαγές με εκφράσεις τύπου «μπρος-πίσω», «πάνω-κάτω», «δεξιά-αριστερά». Υπάρχει χρονικό όριο. Οι ομάδες των παιδιών παίζουν διαδοχικά. Για κάθε διευθέτηση ο εκπαιδευτικός τραβάει μία φωτογραφία. Η επιβεβαίωση γίνεται με τη σύγκριση της τελικής θέσης με τη φωτογραφία	**Γ1**
ΓΔ2	***«Κατασκευές με τουβλάκια»: Παιχνίδια και κατασκευές*** Τα παιδιά αρχικά αναπαράγουν σχηματισμούς σε πλάκες όπου είναι τοποθετημένα τουβλάκια. Αφού προπονηθούν με αυτές τις ανακατασκευές στη συνέχεια μπορούν να παίξουν ένα παιχνίδι όπως βλέπω και θυμάμαι (φλας). Τα παιδιά είναι χωρισμένα σε ομάδες. Ο εκπαιδευτικός παρουσιάζει ένα σχηματισμό για λίγα δευτερόλεπτα και οι ομάδες καλούνται να το ανακατασκευάσουν. Ο έλεγχος	**Γ3**

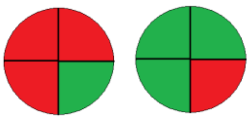
	γίνεται με τη σύγκριση της κατασκευής και του πρότυπου. Η κάθε ομάδα παίρνει ένα πόντο για κάθε ορθό σχηματισμό. Κερδίζει η ομάδα με τους περισσότερους πόντους. Στο τέλος συζητάνε για τους τρόπους που χρησιμοποιούν για να βρίσκουν τις θέσεις. Υλικό: τουβλάκια lego ή αντίστοιχο υλικό Το παιχνίδι μπορεί να διαφοροποιηθεί ως εξής: Η μία ομάδα έχει μία κατασκευή και την περιγράφει στην άλλη που καλείται να την ανακατασκευάσει σύμφωνα με τις οδηγίες, χωρίς να την έχει δει.	
ΓΔ3	***«Ξέρω πως είναι τα σχήματα»: Παιχνίδι*** Τα παιδιά παίζουν σε ομάδες. Η μία ομάδα περιγράφει ένα σχήμα από μία διαθέσιμη ομάδα σχημάτων και η άλλη πρέπει να το βρει και να το δείξει. Η ομάδα που περιγράφει ελέγχει το σωστό ή το λάθος της απάντησης από την εύρεση ή μη του σχήματος. Ο χρόνος είναι περιορισμένος. Κερδίζει η ομάδα που βρίσκει τα περισσότερα σχήματα. Υλικό: διάφορα σχήματα σε μέγεθος και σχήμα	**Γ5**
ΓΔ4	***«Βάζω μαζί τα σχήματα για να φτιάξω σχέδια»: Κατασκευές*** Τα παιδιά δουλεύουν ατομικά και επικαλύπτουν δεδομένα σχήματα ή άλλες μορφές με διαθέσιμα σχήματα σε πολλά μεγέθη και μορφές. Τα προτεινόμενα σχήματα επικαλύπτονται ακριβώς. Οι κατασκευές συγκεντρώνονται στην τάξη και τα παιδιά εξηγούν πως έκαναν τα σχήματα τους. Ο έλεγχος είναι οπτικός. Υλικό: σχήματα κομμένα σε χαρτόνι ή υλικό του εμπορίου	**Γ8**
ΓΔ5	***«Ξέρω τι κίνηση κάνει»: Παιχνίδι*** Τα παιδιά παίζουν σε ομάδες διαδοχικά. Η μία ομάδα κάνει μία διάταξη σε πλακόστρωτο δάπεδο και οι υπόλοιπες ομάδες παρατηρούν. Μετά η πρώτη ομάδα αλλάζει τη θέση ενός παιδιού χωρίς να το δουν οι άλλοι. Η αλλαγή είναι μετακίνηση (μπρος πίσω ή στροφή ή και τα δύο). Τα παιδιά των ομάδων περιγράφουν την αλλαγή που έγινε. Η αρχική θέση σημειώνεται με μαρκαδόρο. Ο έλεγχος γίνεται με την αναπαραγωγή της κίνησης από το παιδί που την προτείνει.	**Γ9**
ΓΔ6	***«Από που τραβήχτηκε η φωτογραφία;»: Παιχνίδι*** Τα παιδιά είναι χωρισμένα σε ομάδες. Κάποιες ομάδες-φωτογράφοι τραβούν φωτογραφίες στην τάξη, την αυλή ή σε άλλο υλικό. Οι άλλες ομάδες πρέπει να βρουν από που τραβήχτηκε η φωτογραφία και να τραβήξουν μια ακριβώς ίδια φωτογραφία για να τις συγκρίνουν. Συγκρίνουν με το αρχικό πρότυπο και συζητούν για τον τρόπο με τον οποίο καταφέρνουν ακρίβεια στη φωτογραφία. Υλικό: Φωτογραφικές μηχανές	**Γ14**
ΓΔ7	***«Μέσα από την τρύπα»: Παιχνίδι*** Τα παιδιά παίζουν σε ομάδες. Κάθε ομάδα κοιτάζει το εσωτερικό ενός κιβωτίου, όπου βρίσκεται μία κατασκευή, από μία από τις 4 τρύπες που βρίσκονται γύρω. Κάθε παιδί	**Γ14**

	της ομάδας βλέπει μία όψη. Πρέπει να εξηγήσουν στη συνέχεια ποιά όψη της κατασκευής βλέπουν (να τη δείξουν σε μία άλλη κατασκευή που είναι έξω ή να την αναγνωρίσουν σε μία φωτογραφία) και με ποιό τρόπο βρίσκουν τη σχετική όψη. Ο έλεγχος γίνεται με τη σύγκριση με το αρχικό πρότυπο. Υλικό: Μοντέλα με πραγματικές καταστάσεις ή με συνθέσεις από κύβους	
ΜΔ1	***«Μπορώ να βρω ποιά είναι η πιο μεγάλη αγκαλιά»: Κατάσταση πρόβλημα*** Τα παιδιά σε ομάδες καλούνται να βρουν τρόπο να υπολογίσουν το μήκος της αγκαλιάς τους. Δεν δίνεται κανένα βοηθητικό μέσο ή άλλο βοήθημα. Μετά το τέλος της αναζήτησης τα παιδιά εξηγούν τον τρόπο με τον οποίο αποφάσισαν να μετρήσουν και να συγκρίνουν τα μεγέθη. Οι ιδέες δοκιμάζονται στην εφαρμογή. Υλικό: Για τη μεταφορά του μεγέθους σε άλλο υλικό μπορεί να χρησιμοποιηθεί κορδέλα, σπάγκος, μεζούρα, κλπ.	**Μ1**
ΜΔ2	***«Ξέρω πόσο λείπει»: Παιχνίδι ταχύτητας*** Τα παιδιά παίζουν σε ομάδες. Έχουν στο τραπέζι ένα μέγεθος και 4 ζεύγη που σχηματίζουν το μέγεθος αυτό. Με το σήμα συνδυάζουν τα ζεύγη για να προκύψει το ίδιο μέγεθος. Ελέγχουν συγκρίνοντας με το πρότυπο. Κερδίζει η ομάδα που τελειώνει πρώτη. Μετά το τέλος η τάξη συζητά πως βρήκαν οι ομάδες τα ζευγάρια μεγεθών. Αναπτύσσεται το σχετικό λεξιλόγιο ‘να είναι ίσα’. Υλικό: Μπορεί να προταθεί ποικιλία υλικών όπως χαρτόνια στα δύο, κορδέλες στα δύο, ράβδοι, πύργοι απότουβλάκια (που αποκτούν και μία μετρική διάσταση). Ενδεικτική μορφή υλικού.  Πρότυπο	**Μ2**
ΜΔ3	***«Που χωράνε πιο πολλά;»: Παιχνίδι*** Τα παιδιά παίζουν σε ομάδες. Ο/η εκπαιδευτικός απλώνει ανάμεσα από τα παιδιά ένα σχηματισμό με διαφορετικές αποστάσεις που δεν μπορούν να συγκριθούν άμεσα. Τα παιδιά εκτιμούν ποιά απόσταση είναι πιο μεγάλη. Κάθε ομάδα παρουσιάζει εκείνη που θεωρεί πιο μεγάλη απόσταση και στη συνέχεια οι ομάδες επαληθεύουν δοκιμάζοντας με βήματα. Οι ομάδες παρουσιάζουν τις ιδέες τους και εξηγούν πώς κρίνουν τις αποστάσεις Υλικό: αποστάσεις ζωγραφισμένες ή με κορδέλες αποτυπωμένες σε χαρτί (με τη μορφή που είναι οι διαδρομές σε ένα χαρτί	**Μ3**
ΜΔ4	***«Μπορώ μόνο με ένα»: Κατάσταση πρόβλημα*** Τα παιδιά δουλεύουν σε ομάδες. Έχουν από ένα μέτρο και πρέπει να συγκρίνουν δύο μεγέθη που χρειάζονται περισσότερα από ένα. Τί να κάνουν; Τα παιδιά συζητούν τις ιδέες για τον τρόπο με τον οποίο μπορούν να το κάνουν. Υλικό: μέτρο	

ΜΔ5	***«Ξέρω που χωράνε περισσότερα»: Παιχνίδι*** Τα παιδιά σε ομάδες δοκιμάζουν να εκτιμήσουν ποιό ορθογώνιο πάτωμα χωράει τα περισσότερα τετράγωνα πλακάκια, από ορισμένα που έχουν. Η κάθε ομάδα επιλέγει ένα ορθογώνιο, το επιστρώνουν και δίνουν τον αριθμό.Κερδίζει η ομάδα που βάζει τα περισσότερα τετράγωνα. Μετά το τέλος η τάξη συζητά πως αποφάσισε για το μεγαλύτερο ορθογώνιο. Υλικό: Ορθογώνια σε διάφορες διαστάσεις ώστε το μεγαλύτερο να μην γίνεται αμέσως αντιληπτό. Όλες οι ομάδες έχουν τα ίδια σχήματα, που επιλέγονται ώστε να περιλαμβάνουν μικρό αριθμό τετραγώνων.	**Μ8**
ΜΔ6	***«Τα τετράγωνα με βοηθάνε»: Παιχνίδι ταχύτητας*** Τα παιδιά σε ομάδες εκτιμούν ποιο ορθογώνιο είναι πιο μεγάλο. Το επιλέγουν και για να το ελέγξουν το επιστρώνουν με τετράγωνα. Στο τέλος δίνουν τον αριθμό (το πρόβλημα της σύγκρισης των ορθογωνίων που δεν συγκρίνονται μπαίνοντας το ένα μέσα στο άλλο μπορεί να είναι η εκκίνηση). Κερδίζει η ομάδα που στο ορθογώνιο που διάλεξε μπαίνουν τα περισσότερα τετράγωνα. Μετά το τέλος η τάξη συζητά πώς αποφάσισε για το μεγαλύτερο ορθογώνιο. Υλικό: Ορθογώνια σε διάφορες διαστάσεις ώστε το μεγαλύτερο να μην γίνεται αμέσως αντιληπτό. Όλες οι ομάδες έχουν τα ίδια ορθογώνια, που επιλέγονται ώστε να περιλαμβάνουν μικρό αριθμό τετραγώνων.	**Μ9**
ΜΔ7	***«Πόσα ακόμα;» Παιχνίδι ταχύτητας*** Τα παιδιά δουλεύουν σε ομάδες. Έχουν στα χέρια σχήματα από τετράγωνα και δοκιμάζουν να βρουν πόσα χρειάζεται να συμπληρώσουν. Βρίσκουν πόσα τετράγωνα έχουν. Ο έλεγχος γίνεται με τη διάλυση της κατασκευής και τη μέτρηση των τετραγώνων. Μετά το τέλος η τάξη συζητά πως βρίσκει τον αριθμό των τετραγώνων. Υλικό: Κατασκευές από τετράγωνα ή σχήματα σε τετραγωνισμένο χαρτί 	**Μ10**
ΜΔ8	***«Οι κύβοι με βοηθάνε»: Παιχνίδι ταχύτητας*** Τα παιδιά σε ομάδες δοκιμάζουν να εκτιμήσουν ποιό κουτί είναι πιο μεγάλο. Το επιλέγουν και για να το ελέγξουν το γεμίζουν με κύβους. Στο τέλος δίνουν τον αριθμό. Κερδίζει η ομάδα που στο κουτί που διάλεξε μπαίνουν οι περισσότεροι κύβοι. Μετά το τέλος η τάξη συζητά πως αποφάσισε για το μεγαλύτερο κουτί Υλικό: κουτιά σε διάφορες διαστάσεις ώστε το μεγαλύτερο να μην γίνεται αμέσως αντιληπτό. Όλες οι ομάδες έχουν τα ίδια κουτιά, που επιλέγονται ώστε να περιλαμβάνουν μικρό αριθμό κύβων.	**Μ13**

Θεματική Ενότητα: Στατιστική και Πιθανότητες

Α/Α	**Περιγραφή δραστηριότητας**	**Μαθησιακοί στόχοι**
ΣΔ1	Προκειμένου να οργανώσουν μία γιορτή τα παιδιά διατυπώνουν ένα ερώτημα για να διερευνήσουν τι τους αρέσει: π.χ. «Σου αρέσουν τα μπισκότα;», «Σου αρέσει το πορτοκάλι ή το μήλο;», «Σου αρέσει το πράσινο, το κίτρινο ή το κόκκινο χρώμα;». Συζητούν με ποιο τρόπο θα καταγράψουν τις απαντήσεις τους (π.χ. χρησιμοποιούν ένα κουτί για το ΝΑΙ και ένα κουτί για το ΟΧΙ και βάζουν μέσα ένα συνδετήρα ή σε ένα πίνακα με δύο στήλες ΝΑΙ/ΟΧΙ γράφουν τα ονόματά τους ή βάζουν μία γραμμή για κάθε παιδί) και πώς θα ελέγξουν ότι απάντησαν όλα τα παιδιά. Κατασκευάζουν ένα διάγραμμα με υλικά (π.χ. χρησιμοποιούν δύο κυβάκια διαφορετικού χρώματος, ένα για το ΝΑΙ και ένα για το ΟΧΙ όπως φαίνεται παρακάτω)  ΝΑΙ ΟΧΙ Συζητούν ερωτήματα όπως: Πόσα παιδιά απάντησαν ΝΑΙ; Πόσα παιδιά απάντησαν ΟΧΙ;	**Σ1, Σ2, Σ3**
ΣΔ2	Τα παιδιά συζητούν για τις πληροφορίες που υπάρχουν σε ένα εικονόγραμμα. Για παράδειγμα το παρακάτω εικονόγραμμα δείχνει τα ζώα που βοήθησε μια ομάδα ανθρώπων που ασχολείται με την προστασία τους, καθώς είχαν τραυματιστεί σε δρόμους μέσα στα δάση. 	**Σ4**
ΠΔ1	Συζητούν γεγονότα που συμβαίνουν πάντα, μερικές φορές ή ποτέ στο νηπιαγωγείο (π.χ. Πάντα συναντάμε παιδιά. Ποτέ δεν συναντάμε έναν ελέφαντα. Μερικές φορές διαβάζουμε παραμύθια). Χωρίζονται σε ομάδες και κατασκευάζουν τη «χώρα του πάντα», τη «χώρα του ποτέ» και τη «χώρα του μερικές φορές» με βάση εικόνες που τους δίνονται (π.χ. κουνέλι με φτερά, κουνέλι χωρίς φτερά, δέντρο με βιβλία στα κλαδιά του, μισοφέγγαρο, πράσινο μήλο κ.λπ.).	**Π1**
ΠΔ2	Τα παιδιά για να φτιάξουν προσκλήσεις έχουν στη διάθεσή τους τρία χρώματα (π.χ. κόκκινο, κίτρινο, πράσινο). Χρησιμοποιούν ένα ζάρι με τρία χρώματα (2 πλευρές με κάθε χρώμα) και συζητούν ποιο χρώμα μπορεί να τύχει, αν ρίξουν το ζάρι, για να	**Π2**

	βάψουν τις προσκλήσεις τους. -Κάθε παιδί αρχικά εκφράζει και δικαιολογεί την πρόβλεψή του και την καταγράφει σε έναν πίνακα. -Στη συνέχεια κάθε παιδί ρίχνει το ζάρι και ανάλογα με το χρώμα που θα τύχει, την καταγράφει σε μία διπλανή στήλη του πίνακα. -Συζητούν τα αποτελέσματα που προέκυψαν και ανακοινώνουν το συμπέρασμα στο οποίο κατέληξαν (ρίχνοντας το ζάρι το χρώμα μπορεί να είναι ή το κόκκινο ή το κίτρινο ή το πράσινο).	
ΠΔ3	**Παιχνίδι** Τα παιδιά χωρίζονται σε 2 ομάδες και η κάθε ομάδα τυχαία παίρνει από μία σβούρα. Με βάση το αποτέλεσμα της σβούρας το πιόνι της κάθε ομάδας προχωράει ένα βήμα όταν ο δείκτης σταματήσει στο πράσινο χρώμα και 2 βήματα όταν ο δείκτης σταματήσει στο κόκκινο χρώμα. Μόλις ολοκληρωθεί το παιχνίδι συζητούν εάν το παιχνίδι ήταν δίκαιο ή άδικο και για ποια ομάδα. Πώς μπορεί το παιχνίδι να γίνει δίκαιο; Υλικό: μια σβούρα δύο χρωμάτων (π.χ. κόκκινο και πράσινο) σε αναλογία ¾ και ¼ και μια σβούρα των ίδιων χρωμάτων σε αναλογία ¼ και ¾ αντίστοιχα, μια βάση για επιτραπέζιο παιχνίδι. 	**Π3**

ΣΥΝΘΕΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ Α΄ ΚΥΚΛΟΥ-ΝΗΠΙΑΓΩΓΕΙΟ

Πίνακας Περιεχομένων

ΣΥΝΘΕΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ 1
«Παρασκευάζοντας ένα γλυκό»

Τα παιδιά ενός νηπιαγωγείου αποφασίζουν να καλέσουν τα παιδιά της διπλανής τάξης για να γνωριστούν και θέλουν να τους προσφέρουν κάποιο γλυκό.
Το πρόβλημα που προκύπτει είναι ποιό γλυκό θέλουν να παρασκευαστεί.

1η φάση: Ο εκπαιδευτικός προτείνει στα παιδιά να αναφέρουν το γλυκό που αρέσει στον καθένα και καταγράφει τις προτιμήσεις τους τυχαία σε ένα χαρτί. Στη συνέχεια ρωτάει τα παιδιά:
-Ποιό γλυκό αρέσει στους περισσότερους; Πώς μπορούμε να το βρούμε;
Ακολουθεί συζήτηση σχετικά με την εύρεση του γλυκού που συγκεντρώνει τις περισσότερες προτιμήσεις.
2η φάση : Ο εκπαιδευτικός προτείνει στα παιδιά να σημειώσουν τα είδη των γλυκών οριζόντια επάνω σε ένα χαρτί και στη συνέχεια το κάθε παιδί να δηλώσει την προτίμησή του με ένα σημάδι που θα γράψει κάτω από το συγκεκριμένο γλυκό (π.χ. Χ). Οι επιλογές των παιδιών μπαίνουν η μία κάτω από την άλλη.
Αφού σημειώσουν όλα τα παιδιά, τα ενθαρρύνει να παρατηρήσουν τα σημάδια στις στήλες και να κάνουν εκτιμήσεις για το γλυκό που συγκεντρώνει τις περισσότερες προτιμήσεις.
Τα καλεί να ελέγξουν τις εκτιμήσεις τους καταμετρώντας τα σημάδια κάθε στήλης και γράφοντας τον αντίστοιχο αριθμό.
3η φάση: Τα παιδιά συγκρίνουν τους αριθμούς κάθε στήλης και καταλήγουν σε συμπεράσματα (ποιό γλυκό αρέσει τελικά στα περισσότερα παιδιά, ποιό γλυκό αρέσει στα λιγότερα παιδιά; ποιό γλυκό θα κατασκευάσουμε;)

Στόχοι:
Τα παιδιά:
- συλλέγουν δεδομένα μέσω μικρών ερευνών και τα οργανώνουν χρησιμοποιώντας υλικά, καταμέτρηση με γραμμές
-διαβάζουν πληροφορίες σε διαγράμματα με υλικά, εικονογράμματα.

Διασυνδέσεις με άλλα μαθησιακά αντικείμενα

Γλώσσα
Τα παιδιά:
-εντοπίζουν την ονομασία του γλυκού σε ένα βιβλίο συνταγών
-παρατηρούν τα κειμενικά χαρακτηριστικά μιας συνταγής και κάνουν υποθέσεις για το περιεχόμενο
-καταγράφουν τα υλικά που πρέπει να αγοραστούν
-περιγράφουν τη διαδικασία παρασκευής του γλυκού

Φυσικές Επιστήμες
Τα παιδιά παρατηρούν τα είδη των υλικών και τα περιγράφουν ως προς:
-τις ιδιότητες τους

-τα χαρακτηριστικά τους
-τις αλλαγές τους κατά την ζύμωση και μετά το ψήσιμο του γλυκού

Περιβάλλον
Τα παιδιά συζητούν για την καθαριότητα των χεριών, των σκευών και του χώρου παρασκευής καθώς επίσης και για τις προφυλάξεις που πρέπει να παίρνονται κατά τη χρήση των ηλεκτρικών συσκευών.

ΣΥΝΘΕΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ 2
«Ανοιξιάτικη διακόσμηση»

Με τον ερχομό της άνοιξης τα παιδιά μαζί με τον εκπαιδευτικό συζητούν για τους τρόπους με τους οποίους μπορούν να στολίσουν ανοιξιάτικα την τάξη τους. Ανάμεσα στις προτάσεις των παιδιών είναι να κατασκευάσουν πεταλούδες.

1η φάση: Ο εκπαιδευτικός προτείνει στα παιδιά να παρατηρήσουν προσεκτικά διάφορες φωτογραφίες με πεταλούδες πριν κατασκευάσουν τις δικές τους. Πώς είναι τα φτερά της κάθε μιας; Είναι ίσα μεταξύ τους; Μοιάζουν ή διαφέρουν; Αν μπορούσαμε να τα διπλώσουμε τι θα γινόταν; Πώς λέγονται τα αντικείμενα που η μία τους πλευρά μοιάζει να καθρεφτίζεται στην άλλη; Μπορούμε εμείς να κατασκευάσουμε συμμετρικές πεταλούδες;
2η φάση: Προτείνει στα παιδιά να χωριστούν σε ομάδες, να πάρουν πολύχρωμα ριζόχαρτα και να κατασκευάσουν τις πεταλούδες τους έτσι ώστε να είναι συμμετρικές.
Ενθαρρύνει την κάθε ομάδα να πειραματιστεί, να κατασκευάσει τις πεταλούδες, να ελέγξει αν είναι συμμετρικές ή όχι.
3η φάση: Η κάθε ομάδα παρουσιάζει τον τρόπο που δούλεψε, τις διαδικασίες ελέγχου που ακολούθησε, τις δυσκολίες που αντιμετώπισε.
Συγκρίνουν τα αποτελέσματα στα οποία έχουν καταλήξει και αναφέρουν τα συμπεράσματά τους σχετικά με την κατασκευή συμμετρικών αντικειμένων και τον έλεγχό τους.

Η δραστηριότητα μπορεί να συνεχιστεί με τη διακόσμηση των φτερών που και αυτή πρέπει να είναι συμμετρική (καθρέφτισμα).

Στόχος: Τα παιδιά κάνουν απλές κατασκευές συμμετρικών σχημάτων.

Διασυνδέσεις με άλλα μαθησιακά αντικείμενα

Περιβάλλον
Τα παιδιά μπορούν να ασχοληθούν εκτενέστερα με το θέμα απαντώντας σε ερωτήματα όπως:
- -γιατί έχουμε πεταλούδες μόνο την άνοιξη;
- -που πηγαίνουν τις άλλες εποχές;
- -τί τρώνε οι πεταλούδες;
- -που ζουν;

Γλώσσα
Τα παιδιά μετά την επαφή τους με τον κύκλο της ζωής μιας πεταλούδας μπορούν να κατασκευάσουν ένα βιβλίο με τίτλο «η ιστορία μιας πεταλούδας»

ΣΥΝΘΕΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ 3
«Το μεγαλύτερο άλμα»

Τα παιδιά κάνουν διάφορα αγωνίσματα στο γυμναστήριο. Στο άλμα εις μήκος προκύπτουν προβλήματα μέτρησης του μήκους.

1η φάση: Ο εκπαιδευτικός προτείνει στα παιδιά να σκεφτούν τρόπους επίλυσης του προβλήματος που προέκυψε.
-Ποιός νομίζετε ότι πήδηξε πιο μακριά; Πώς μπορούμε να είμαστε σίγουροι για τον νικητή; Με ποιό τρόπο μπορούμε να μετρήσουμε τις αποστάσεις; Τί μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε;
2η φάση: Ενθαρρύνει τα παιδιά να κάνουν διάφορες προτάσεις και να δοκιμάσουν να ‘μετρήσουν’ με διάφορους τρόπους (π.χ. με βήματα, παλάμες...).
Εάν προκύψει διαφοροποίηση στα αποτελέσματα της μέτρησης ο εκπαιδευτικός την αξιοποιεί για να οδηγήσει τα παιδιά με κατάλληλες ερωτήσεις στην αναγκαιότητα ενιαίας μονάδας.
3η φάση: Η δραστηριότητα κλείνει με συζήτηση σχετική με τους τρόπους μέτρησης που εφαρμόστηκαν, τα προβλήματα που ίσως προέκυψαν και πως αυτά αντιμετωπίστηκαν. Ανακοινώνεται ο νικητής.

Στόχος: Οι μαθητές καλούνται να πραγματοποιήσουν επικαλύψεις και στη συνέχεια επικαλύψεις με μη τυπικές και τυπικές μονάδες.

Διασυνδέσεις με άλλα μαθησιακά αντικείμενα

Περιβάλλον
Η δραστηριότητα μπορεί να συνεχιστεί με τη διερεύνηση ερωτημάτων όπως:
-πώς βραβεύεται ο νικητής ενός αγωνίσματος σήμερα;
-τι συνέβαινε παλιότερα; Τι βραβεία δινόταν στους αθλητές;
-υπήρχαν τα ίδια αγωνίσματα; Ποιά αγωνίσματα υπήρχαν;
-που γινόταν οι αγώνες;

Εικαστικά
Τα παιδιά κατασκευάζουν μετάλλια για τους επόμενους αγώνες.

Α΄ Δημοτικού

Θεματική ενότητα: Αριθμοί

Ενδεικτικές διδακτικές ώρες: 60

Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα (ΠΜΑ)	**Βασικά θέματα**	**Δραστηριότητες**	**Εκπαιδευτικό υλικό**
Αρ1. Απαγγέλλουν, διαβάζουν και γράφουν αριθμούς μέχρι το 100 (ψηφία και λέξεις) *Αρ2.* Αναγνωρίζουν αριθμούς (μέχρι το 100) χρησιμοποιώντας στρατηγικές άμεσης αναγνώρισης και αντιστοίχισης. *Αρ3.* Καταμετρούν πραγματικά αντικείμενα και αντικείμενα σε εικόνες και άλλες μορφές συμβολικών παραστάσεων κι αναπτύσσουν στρατηγικές μέτρησης. *Αρ4.* Μετρούν μέχρι το 100 και μετρούν με βήματα εμπρός και πίσω (ανά 2, 5, 10). *Αρ5.* Συγκρίνουν και διατάσσουν αριθμούς (μέχρι το 100) και βρίσκουν τη θέση ενός αριθμού (μέχρι το 100) στην αριθμογραμμή *Αρ6.* Διερευνούν τις σχέσεις των αριθμών αρχικά μέχρι το 20 και στη συνέχεια μέχρι το 100, αναλύουν και συνθέτουν αριθμούς μέχρι το 100 *Αρ7.* Διερευνούν τη σχέση	**Φυσικοί Αριθμοί (ως το 100)** *(50 ώρες)* • Άμεση αναγνώριση • Καταμέτρηση ποσοτήτων και αρίθμηση • Διάταξη ποσοτήτων και αριθμών • Ανάλυση και σύνθεση αριθμών • Θεσιακή αξία ψηφίων • Εκτιμήσεις • Πράξεις στους φυσικούς αριθμούς • Προσθέσεις και αφαιρέσεις αριθμών • Πολλαπλασιαστικές καταστάσεις • Πολλαπλασιασμός και διαίρεση αριθμών	Μέσα από δραστηριότητες οι μαθητές αρχικά αναγνωρίζουν τα αριθμητικά σύμβολα και ασκούνται να τα αναγνωρίζουν και να τα διαβάζουν. Στη συνέχεια ασκούνται να αναγνωρίζουν χωρίς μέτρηση κάρτες με σχηματισμούς ώστε να δημιουργήσουν ισχυρές νοερές εικόνες για τις ποσότητες που συνδέονται με τους αριθμούς. *(ενδεικτικές δραστηριότητες ΑρΔ1, ΑρΔ2)* Καταμετρούν αντικείμενα (πραγματικά και σε συμβολικές αναπαραστάσεις), τα οποία είναι κατάλληλα επιλεγμένα ώστε να βοηθούν στην ανάπτυξη στρατηγικών μέτρησης (π.χ. Πόσα είναι τα κουμπιά; Πώς τα μέτρησες;) *(ενδεικτικές δραστηριότητες ΑρΔ3, ΑρΔ4)*	Κατασκευή του πίνακα των 100, όπως υπάρχει π.χ. στο βιβλίο «Μαθηματικά» επίπεδο 1, σελ. 56 http://www.pre.uth.gr/main/index.php?option=com_content&view=category&layout=blog&id=35&Itemid=52 Αντίστοιχο στο δικτυακό τόπο του τμήματος εκπ/σης της επαρχίας Νέας Ουαλίας στην Αυστραλία: http://www.curriculumsupport.education.nsw.gov.au/countmein/children_hundred_chart.html Παιχνίδια με ντόμινο, όπως υπάρχουν π.χ. στο βιβλίο «Μαθηματικά» επίπεδο 1, σ. 42-51 http://www.pre.uth.gr/main/index.php?option=com_content&view=category&layout=blog&id=35&Itemid=52 Αντίστοιχη δραστηριότητα, υπάρχει στον δικτυακό τόπο του τμήματος εκπ/σης της επαρχίας Νέας Ουαλίας στην

μεταξύ ενός ψηφίου και της αξίας του. Βρίσκουν την αξία θέσης των αριθμών στους διψήφιους αριθμούς (και του μηδενός). *Αρ8.* Εκφράζουν εκτίμηση για ποσότητες μέχρι 50 αντικειμένων *Αρ9.* Διερευνούν και δημιουργούν αθροιστικές καταστάσεις. *Αρ10.* Διερευνούν συνδυασμούς που δίνουν τα αθροίσματα ή τις διαφορές των αριθμών ως το 10 και των δεκάδων ως το 100. *Αρ11.* Κάνουν νοερές και γραπτές προσθέσεις και αφαιρέσεις χρησιμοποιώντας τα σύμβολα με μονοψήφιους και διψήφιους αριθμούς. *Αρ12.* Ομαδοποιούν αντικείμενα σε δυάδες, πεντάδες και δεκάδες. Βρίσκουν το διπλάσιο (και το μισό) μονοψήφιων και διψήφιων αριθμών. *Αρ13.* Μοιράζουν αντικείμενα σε δυάδες, τριάδες και καταμετρούν		Είναι σημαντικό οι μαθητές να αναπτύξουν, μέσα από μία ποικιλία δράσεων, τις σταθερές σχέσεις που συνδέουν τους αριθμούς ως το 10 και στη συνέχεια των δεκάδων ως το 100. Οι σταθερές αυτές σχέσεις, που δεν απομνημονεύονται αλλά σταθεροποιούνται από την συστηματική χρήση, αποτελούν βάση για κάθε αριθμητική ανάπτυξη. *(ενδεικτική δραστηριότητα ΑρΔ5)* Είναι σημαντικό οι μαθητές να ανακαλύψουν την αξία των ψηφίων σύμφωνα με τη θέση τους και να αντιληφθούν την σημασία του μηδενός στο σύστημα αρίθμησης. *(ενδεικτικές δραστηριότητες ΑρΔ3, ΑρΔ4)* Ο εκπαιδευτικός προτείνει δραστηριότητες με στόχο το σταδιακό πέρασμα από την ένα προς ένα καταμέτρηση στη σύνθεση των αριθμών. Οι πράξεις πρόσθεση και αφαίρεση να αντιμετωπίζονται μαζί μέσα από μία ποικιλία καταστάσεων που καλύπτει όλες τις περιπτώσεις	Αυστραλία: http://www.curriculumsupport.education.nsw.gov.au/countmein/teachers_teaching_ideas_-_washing_line.html Δραστηριότητα «Ο ταμίας», βιβλίο μαθητή, κεφ. 33 Δραστηριότητα «Η κατσίκα με τα κατσικάκια», βιβλίο μαθητή κεφ. 29 Δραστηριότητα «Παίζω το φιδάκι», βιβλίο μαθητή, κεφ. 46 Δραστηριότητα « Τα μυρμήγκια», βιβλίο μαθητή, κεφ. 47 Παιχνίδια «Μαντεύω τον αριθμό» και «Βρίσκω τον αριθμό», βιβλίο μαθητή, κεφ. 49 Δραστηριότητα «Τα τρία γουρουνάκια», βιβλίο μαθητή, κεφ. 59 Πρόβλημα «Τα παπούτσια», τετράδιο εργασιών, κεφ. 53 Πρόβλημα «Μοιράζω τις καραμέλες» τετράδιο εργασιών, κεφ. 59

		αθροιστικών προβλημάτων («συνδυάζω», «αλλάζω», «συγκρίνω»). *(ενδεικτική δραστηριότητα ΑρΔ7)* Σημαντικό είναι οι καταστάσεις πολλαπλασιασμού και διαίρεσης να αντιμετωπίζονται μαζί μέσα από μία ποικιλία καταστάσεων που καλύπτει όλες τις περιπτώσεις πολλαπλασιαστικών προβλημάτων («επαναλαμβανόμενη πράξη», «συμμεταβολή ποσοτήτων», «δημιουργίας νέου μεγέθους») *(ενδεικτικές δραστηριότητες: ΑρΔ6, ΑρΔ8)*	
Αρ14. Συγκρίνουν δύο ποσότητες με απλή σχέση μεγέθους 1/2 , 1/4 και περιγράφουν τη σχέση λεκτικά (μισή/διπλάσια…) *Αρ15.* Χωρίζουν εμπράγματες διακριτές και συνεχείς ποσότητες (γραμμές, δυσδιάστατα σχήματα) σε ίσα μέρη: 2, 4, 8. Χωρίζουν εμπράγματες και μη, διακριτές και συνεχείς ποσότητες (γραμμές, δυσδιάστατα σχήματα) σε ίσα μέρη: 3, 6, 5, 10	**Κλασματικοί αριθμοί** *(10 ώρες)*	Ο εκπαιδευτικός προτείνει δραστηριότητες, όπου τα παιδιά καλούνται να συγκρίνουν μέρος μιας ποσότητας ή μεγέθους με το όλο. *(ενδεικτική δραστηριότητα ΑρΔ9)* Ο εκπαιδευτικός ως συνέχεια των δραστηριοτήτων πολλαπλασιασμού/ διαίρεσης, προτείνει στους μαθητές δραστηριότητες μερισμού σε συνεχείς ποσότητες (όπως π.χ. μια σοκολάτα) και τα ενθαρρύνει να ανακαλύψουν τρόπους μερισμού, αλλά και	Ψηφιακά περιβάλλοντα, όπως το «Fractions – Partsof a Whole» του Πανεπιστημίου Utah των ΗΠΑ, που διατίθεται στο δικτυακό τόπο: http://nlvm.usu.edu

		λεκτικής έκφρασης του μέρους που πήραν. *(ενδεικτική δραστηριότητα ΑρΔ10)*	

Θεματική ενότητα: Άλγεβρα

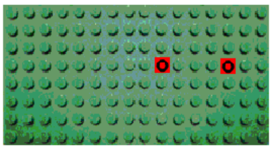
Ενδεικτικές διδακτικές ώρες: 6

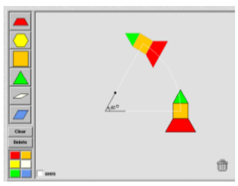
Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα (ΠΜΑ)	**Βασικά θέματα**	**Δραστηριότητες**	**Εκπαιδευτικό υλικό**
Α1. Αναγνωρίζουν την ύπαρξη μιας κανονικότητας. *Α2.* Συμπληρώνουν, επαναλαμβανόμενες κανονικότητες *Α3.* Περιγράφουν και εξηγούν επαναλαμβανόμενες κανονικότητες και τη διαδικασία δημιουργίας τους. *Α4.* Κατασκευάζουν επαναλαμβανόμενες κανονικότητες. *Α5.* Δημιουργούν και περιγράφουν αντιστοιχίες. *Α6.* Αναγνωρίζουν, αναπαριστάνουν και περιγράφουν σχέσεις μεταξύ συμμεταβαλομένων μεγεθών.	**Κανονικότητα - Συναρτήσεις** *(3 ώρες)* • Διερεύνηση: αναγνώριση, συμπλήρωση, περιγραφή και κατασκευή επαναλαμβανόμενων και μεταβαλλόμενων κανονικοτήτων • Αναγνώριση αντιστοιχιών • Σχέσεις συμμεταβολής	Οι μαθητές συγκρίνουν αντικείμενα με κριτήριο την ύπαρξη μοτίβου ή άλλης κανονικότητας. Συμπληρώνουν κατασκευές με την επανάληψη του μοτίβου. Ανταλλάσσουν μηνύματα με οδηγίες για την κατασκευή αντικειμένων με κανονικότητες Κατασκευάζουν δικά τους αντικείμενα (πχ κομπολόγια, συνθέσεις σχημάτων) και παρουσιάζουν τον κανόνα του δικού τους μοτίβου. *(ενδεικτική δραστηριότηταΑΔ1)* Διερευνούν συνδυασμούς και σχέσεις. Κατασκευάζουν, καταγράφουν και περιγράφουν δεδομένα συμμεταβολής. *(ενδεικτική*	Χάντρες Γεωμετρικά σχήματα από χαρτόνι Κυβάκιαlego και άλλα οικοδομικά υλικά Υλικά κατασκευής και υλικά κατασκευής αναπαραστάσεων για καταγραφή των δεδομένων (π.χ. μαγνητικούς πίνακες) Χρήση τεχνολογικού περιβάλλοντος με μοτίβα του Πανεπιστημίου Utah των ΗΠΑ, που διατίθεται στο δικτυακό τόπο: http://nlvm.usu.edu

		δραστηριότηταΑΔ2)	
Α7. Αντιλαμβάνονται το σύμβολο της ισότητας ως σχέση ανάμεσα σε σύνθετες αριθμητικές παραστάσεις. *Α8.* Εκφράζουν συμβολικά ένα απλό πρόβλημα με αριθμητική παράσταση ή σχέση. *Α9.* Διατυπώνουν ένα πρόβλημα που να δημιουργείται από δεδομένη αριθμητική παράσταση ή σχέση.	**Αλγεβρικές παραστάσεις** *(2 ώρες)* .	Οι βασικές έννοιες που εμπλέκονται στην τροχιά της Άλγεβρας, έχουν να κάνουν με διαφορετική, πιο διευρυμένη οπτική του εννοιολογικού πεδίου κυρίως της αριθμητικής. Έτσι, τα περισσότερα επιμέρους θέματα της Άλγεβρας, μπορούν και μάλλον πρέπει να ενταχθούν στο πλαίσιο των αριθμητικών δραστηριοτήτων: κατά τη διάρκεια της αρίθμησης και των πράξεων γίνονται και οι δραστηριότητες που αφορούν τις αντιστοιχίσεις, τις συμμεταβολές, τις αλγεβρικές παραστάσεις, την ισότητα και την ανισότητα.	Πίνακες των επιμέρους αποτελεσμάτων: △+□=8 1 + 7 2 + 5 ……
Α10. Διερευνούν την έννοια της ισότητας και ανισότητας σε διάφορα πλαίσια: αριθμητικά, μεγεθών και διατυπώνουν τη σχέση συμβολικά. *Α11.* Συγκρίνουν αριθμούς και κάνουν πράξεις με αυτούς χρησιμοποιώντας τακατάλληλα σύμβολα	**Ισότητα –Ανισότητα** *(1 ώρα)*	Δραστηριότητες χρήσης των συμβόλων στις διάφορες περιπτώσεις ολοκλήρωσης των αντίστοιχων αριθμητικών θεμάτων. Διερεύνηση καταστάσεων όπως 5<8 το 5+3?8+3 ή το 5<8, 3<4 το 5+3?8+4	

Θεματική ενότητα: Χώρος και Γεωμετρία

Ενδεικτικές διδακτικές ώρες: 20

Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα (ΠΜΑ)	Βασικά θέματα	Δραστηριότητες	Εκπαιδευτικό υλικό
Γ1. Εντοπίζουν, περιγράφουν και αναπαριστούν θέσεις, διευθύνσεις και διαδρομές στο χώρο ως προς διαφορετικά συστήματα αναφοράς, με τη χρήση ποικίλων χωρικών εννοιών. *Γ2.* Αναγνωρίζουν και δημιουργούν οικείους χάρτες, εντοπίζοντας θέσεις και διαδρομές. *Γ3.* Επικαλύπτουν το επίπεδο με διάφορα σχήματα και μελετούν απλές σχέσεις. *Γ4.* Εντοπίζουν, περιγράφουν και αναπαριστούν θέσεις, διευθύνσεις και διαδρομές σε τετραγωνισμένα περιβάλλοντα. *Γ5.* Προσεγγίζουν τις δισδιάστατες συντεταγμένες με τη χρήση αυθαίρετων συμβόλων.	**Χώρος** *(4 ώρες)* • Θέσεις διευθύνσεις και διαδρομές σε χάρτες • Δόμηση χώρου, επικαλύψεις και συντεταγμένες	Ο εκπαιδευτικός οργανώνει βιωματικές δραστηριότητες που επιτρέπουν στα παιδιά να ορίσουν συστήματα αναφοράς, να προσανατολιστούν και προσανατολίσουν ως προς αυτά. Για να συζητηθεί το θέμα των οροσήμων ως προς τα οποία γίνεται ο προσανατολισμός προτείνονται κατάλληλες δράσεις. *(ενδεικτικές δραστηριότητες ΓΔ1, ΓΔ).* Οι διευθετήσεις στο χώρο μπορούν να αναπτυχθούν λεκτικά με περιγραφές κατασκευών *(ενδεικτική δραστηριότηταΓΔ3.)* Τοποθετήσεις σε τετραγωνισμένα περιβάλλοντα (τουβλάκια, σκακιέρα, τετραγωνισμένο χαρτί) τύπου «Ναυμαχία» εισάγουν στην ιδέα των συντεταγμένων.	Χρήση απλών χαρτών Χρήση τεχνολογικού περιβάλλοντος τύπου Logo, όπως περιβάλλον «LadybugMazes» του Πανεπιστημίου Utah των ΗΠΑ, που διατίθεται στο δικτυακό τόπο: http://nlvm.usu.edu Χρήση . ψηφιακού περιβάλλοντος «Τάνγκραμ» του Πανεπιστημίου Utah των ΗΠΑ, που διατίθεται στο δικτυακό τόπο: http://nlvm.usu.edu Υλικό με τουβλάκια  Τετραγωνισμένο χαρτί
Γ6. Αναγνωρίζουν και ταξινομούν επίπεδα και στερεά σχήματα με βάση τα γεωμετρικά τους χαρακτηριστικά σε ποικιλία θέσεων,	**Γεωμετρικά σχήματα** *(12 ώρες)* • Ταξινόμηση και • Ανάλυση σε στοιχεία	Ο εκπαιδευτικός δεν επιδιώκει την απλή αναγνώριση σχημάτων σε στερεοτυπικές θέσεις που οδηγούν σε ολιστικές και αισθησιο-	Χρήση . ψηφιακού περιβάλλοντος του Ε.Λ. του Π.Ι. για την Α΄ και Β΄ τάξη. Ενότητα Γεωμετρία, δραστηριότητα «Γραμμές και σχήματα» http://www.pi-

μεγεθών και προσανατολισμών. *Γ7.* Περιγράφουν απλά επίπεδα γεωμετρικά σχήματα με τη χρήση όρων όπως κορυφή και πλευρά. *Γ8.* Κατασκευάζουν γνώριμα επίπεδα και στερεά γεωμετρικά σχήματα με διάφορα μέσα και συζητούν ιδιότητες. *Γ9.* Συνδέουν επίπεδα και στερεά σχήματα προσεγγίζοντας έδρες και ακμές. *Γ10.* Συνθέτουν και αναλύουν επίπεδα γεωμετρικά σχήματα και στερεά σε 2 ή περισσότερα μέρη	και ιδιότητες • Κατασκευές και σχεδιασμός • Σύνδεση επιπέδων και στερεών σχημάτων • Ανάλυση ή σύνθεση	κινητικές προσεγγίσεις. Ξεκινά από αναγνωρίσεις και κατηγοριοποιήσεις που πραγματοποιούν οι ίδιοι οι μαθητές εντοπίζοντας ιδιότητες και σχέσεις. *(ενδεικτική δραστηριότηταΓΔ5)* Οι κατασκευές με υλικά και οι αναλύσεις και συνθέσεις στηρίζουν την ανάδειξη ιδιοτήτων και σχέσεων. *(ενδεικτική δραστηριότητα ΓΔ6*)	schools.gr/software/dimotiko/
Γ11. Παρατηρούν μετατοπίσεις και στροφές (90, 180, 360) και μπορούν να προβλέψουν το αποτέλεσμα. *Γ12.* Αναγνωρίζουν συμμετρικά δισδιάστατα και τρισδιάστατα σχήματα και σχήματα με άξονες συμμετρίας. Εντοπίζουν τους άξονες. *Γ13.* Κατασκευάζουν συμμετρικά σχήματα και συνεχίζουν συμμετρικά μοτίβα *Γ14.* Προσεγγίζουν τις ιδιότητες της συμμετρίας	**Μετασχηματισμοί** *(3 ώρες)* • Μετατοπίσεις, στροφές καιαξονική συμμετρία	Ο εκπαιδευτικός επιδιώκει να αναπτύξει την οπτική ευλυγισία και τις νοερές επεξεργασίες των μαθητών. Προτείνει δράσεις με παρατήρηση και αναγνώριση μετασχηματισμών όπως και πρόβλεψη. Οι κατασκευές συμμετρικών σχημάτων αναδεικνύει ιδιότητες *(ενδεικτική δραστηριότητα ΓΔ7.)*	Χρήση τεχνολογικών περιβαλλόντων, όπως περιβάλλον «Transformations - Rotation» του Πανεπιστημίου Utah των ΗΠΑ, που διατίθεται στο δικτυακό τόπο: http://nlvm.usu.edu 
Γ15. Αναγνωρίζουν τρισδιάστατες κατασκευές από διαφορετικές οπτικές γωνίες *Γ16.* Πραγματοποιούν κατασκευές	**Οπτικοποίηση** *(1 ώρα)* • Αναγνώριση οπτικών γωνιών, δημιουργία οπτικοποιήσεων	Ο εκπαιδευτικός επιδιώκει αρχικά να βελτιώσει την αντίληψη των οπτικών γωνιών. Επίσης να ασκήσει τους μαθητές στην	

τρισδιάστατων καταστάσεων από εικόνες, σχέδια ή άλλες αναπαραστάσεις		ανάγνωση των χωρικών και γεωμετρικών αναπαραστάσεων, δηλαδή στη μετάβαση από το τρισδιάστατο αντικείμενο στην δισδιάστατη αναπαράσταση και αντίστροφα.	

Θεματική ενότητα: Μετρήσεις

Ενδεικτικές διδακτικές ώρες: 18

Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα (ΠΜΑ)	**Βασικά θέματα**	**Δραστηριότητες**	**Εκπαιδευτικό υλικό**
Μ1. Συγκρίνουν γωνίες με την ορθή. *Μ2.* Αναγνωρίζουν ίσες γωνίες με άμεση σύγκριση.	**Μέτρηση γωνίας** *(1 ώρα)*	Ο εκπαιδευτικός προτείνει ομαδοποιήσεις γωνιών με κριτήριο την ισότητα και διαφορετικά μεγέθη και προσανατολισμούς.	
Μ3. Πραγματοποιούν έμμεσες συγκρίσεις και διατάξεις ίσων και άνισων μηκών. *Μ4.* Αναλύουν και συνθέτουν μήκη σε δύο ή περισσότερα μέρη. *Μ5.* Πραγματοποιούν επικαλύψεις με και χωρίς επανάληψη, με μη τυπικές και τυπικές μονάδες. *Μ6.* Συνδέουν τις επικαλύψεις ή τις επαναλήψεις με το αριθμητικό αποτέλεσμα. *Μ7.* Διαπιστώνουν την ανάγκη χρήσης τυπικών μονάδων μέτρησης και πραγματοποιούν	**Μέτρηση μήκους** *(8 ώρες)* • Άμεσες και έμμεσες συγκρίσεις • Μέτρηση με χρήση μη τυπικών και τυπικών μονάδων • Χρήση οργάνων μέτρησης μήκους • Εκτιμήσεις	Η ανάλυση και σύνθεση μεγεθών βοηθάει τα παιδιά να κάνουν συγκρίσεις και να αντιληφθούν τα μεγέθη. Ο εκπαιδευτικός επιδιώκει να αντιληφθούν οι μαθητές την επικάλυψη με μονάδες, την επανάληψη των μονάδων και τη σύνδεση με τον αριθμό που προκύπτει. *(ενδεικτική δραστηριότητα ΜΔ1)*	Η χρήση του τεχνολογικού περιβάλλοντος τύπου Logo, όπως περιβάλλον «LadybugMazes» του Πανεπιστημίου Utah των ΗΠΑ, που διατίθεται στο δικτυακό τόπο: http://nlvm.usu.edu, Η εφαρμογή του μπορεί να προσαρμοσθεί στον υπολογισμό ίσων αποστάσεων ή συμπληρωμάτων (του τύπου πόσο ακόμα χρειάζεται για να συμπληρώσει την κίνηση;)

μετρήσεις μήκους με τυπικές μονάδες. *M8.* Χρησιμοποιούν χάρακα για να μετρήσουν μήκος. *M9.* Εκτιμούν και συγκρίνουν μήκη			
M10. Πραγματοποιούν άμεσες και έμμεσες συγκρίσεις επιφανειών. *M11.* Πραγματοποιούν συγκρίσεις με ανάλυση και σύνθεση απλών επιφανειών *M12.* Κάνουν επικαλύψεις επιφανειών με μη τυπικές ή τυπικές μονάδες μέτρησης. *M13.* Συνδέουν την επικάλυψη με ένα αριθμητικό αποτέλεσμα *M14.* Χρησιμοποιούν τετράγωνα 1 cm και 1dm για να δομήσουν ορθογώνιες περιοχές σε γραμμές και στήλες. *M15.* Εκτιμούν το μέγεθος απλών επιφανειών και κάνουν συγκρίσεις	**Μέτρηση επιφάνειας** *(6 ώρες)* ● Άμεσες και έμμεσες συγκρίσεις ● Μέτρηση επιφανειών με χρήση μη τυπικών και τυπικών μονάδων ● Χρήση οργάνων μέτρησης επιφάνειας για τη δόμηση επιφανειών ● Εκτιμήσεις επιφανειών	Οι άμεσες συγκρίσεις και αναλύσεις και συνθέσεις επιφανειών βοηθούν τους μαθητές να αντιληφθούν το μέγεθος ‘επιφάνεια’. *(ενδεικτική δραστηριότηταΜΔ2)* Συγκρίσεις με τετράγωνα που βοηθούν τους μαθητές να συνδέουν την επιφάνεια με τη μονάδας της. Τα συμπληρώματα των επιφανειών με τετράγωνα υποστηρίζουν στους μαθητές την αντίληψη γραμμών και στηλών. *(ενδεικτική δραστηριότηταΜΔ3)*	Εμπράγματο, αναπαραστατικό και ψηφιακό υλικό
M16. Συγκρίνουν έμμεσα τη χωρητικότητα δύο δοχείων. *M17.* Συγκρίνουν όγκους κατασκευών που αποτελούνται από μικρό αριθμό δομικών υλικών. *M18.* Μετρούν το πλήθος των κύβων που δομούν μια απλή κατασκευή ή γεμίζουν ένα κουτί. *M19.* Εκτιμούν τον όγκο απλών στερεών και κάνουν	**Μέτρησηχωρητικότητας όγκου** *(3 ώρες)* ● Έμμεσες συγκρίσεις ● Μέτρηση όγκων με χρήση μη τυπικών και τυπικών μονάδων ● Εκτίμηση χωρητικότητας και όγκου	Η ίδια δράση προτείνεται και για τρισδιάστατες συνθέσεις. Ο εκπαιδευτικός προτείνει εκτιμήσεις της μορφής «ποιο κουτί είναι πιο μεγάλο» για να ασκήσει τους μαθητές σε μια πρώτη αντίληψη του όγκου. *(ενδεικτική*	

συγκρίσεις.		*δραστηριότηταΜΔ4)*	

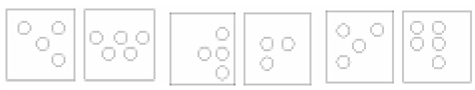
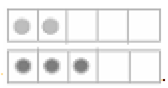
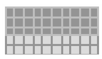
Θεματική ενότητα: Στοχαστικά Μαθηματικά (Στατιστική-Πιθανότητες)

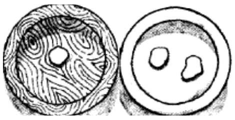
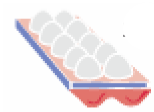
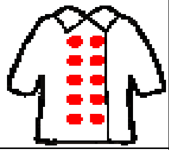
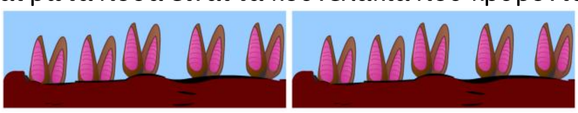
Ενδεικτικές διδακτικές ώρες: 6

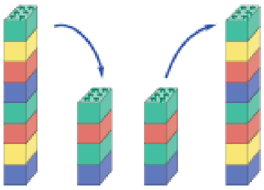
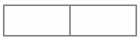
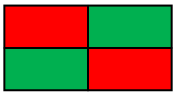
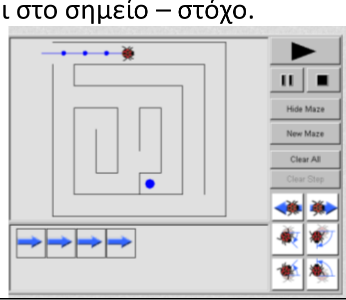
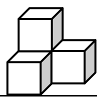
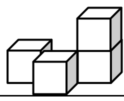
Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα (ΠΜΑ)	**Βασικά θέματα**	**Δραστηριότητες**	**Εκπαιδευτικό υλικό**
Σ1. Διατυπώνουνερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με δεδομένα (κατηγορικά) *Σ2.* Συλλέγουν δεδομένα μέσω μικρών ερευνών και τα οργανώνουν (υλικά, καταμέτρηση με γραμμές) *Σ3.* Επεκτείνουν τις αναπαραστάσεις των δεδομένων και σε διαγράμματα όπως τα ραβδογράμματα *Σ4.* Κάνουν μετατροπές από μία μορφή αναπαράστασης δεδομένων σε μία άλλη *Σ5.* Συγκρίνουν πληροφορίες στις διαφορετικές μορφές αναπαράστασης δεδομένων	**Δεδομένα** *(3 ώρες)* • Συλλογή οργάνωση και αναπαράσταση κατηγορικών δεδομένων	Οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να συλλέξουν δεδομένα στην τάξη τους για ένα δικό τους ερώτημα, να τα οργανώσουν σε κατηγορίες, να τα αναπαραστήσουν με διαφορετικούς τρόπους και να τα ερμηνεύσουν. *(ενδεικτικές δραστηριότητεςΣΔ1, ΣΔ2, ΣΔ3)*	
Π1. Περιγράφουν όλα τα δυνατά αποτελέσματα (δειγματικός χώρος) σε απλά πειράματα τύχης ενός σταδίου *Π2.* Χαρακτηρίζουν ένα παιχνίδι τύχης ως δίκαιο-άδικο (τριών ή περισσότερων ενδεχομένων) *Π3.* Συνδυάζουν μικρό αριθμό αντικειμένων	**Πείραμα τύχης** *(2ώρες)*	Οι μαθητές παίζουν παιχνίδια τύχης με περισσότερα από δύο ενδεχόμενα. Επίσης, βρίσκουν συνδυασμούς 3-4 αντικειμένων. *(ενδεικτικές δραστηριότητεςΠΔ1, ΠΔ2)*	

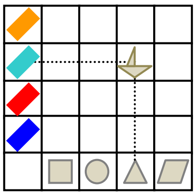
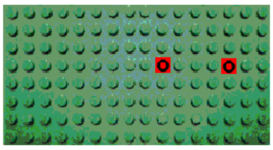
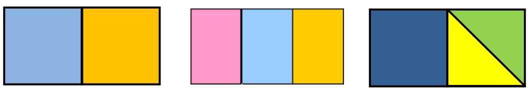
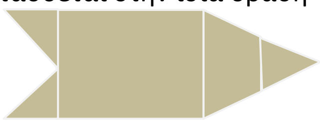
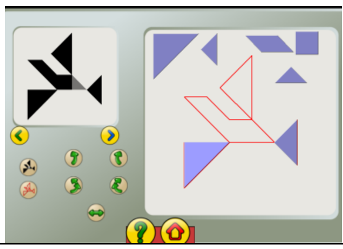
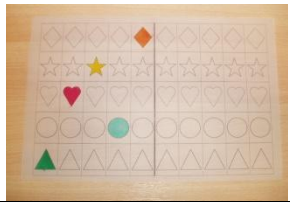
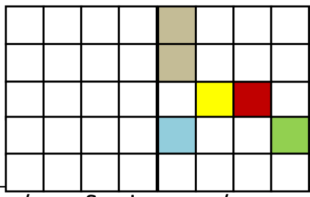
Π4. Περιγράφουν ένα ενδεχόμενο ως βέβαιο, πιθανό, απίθανο, αδύνατο	**Πιθανότητα ενδεχομένου** *(1 ώρα)*		

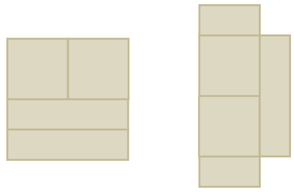
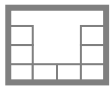
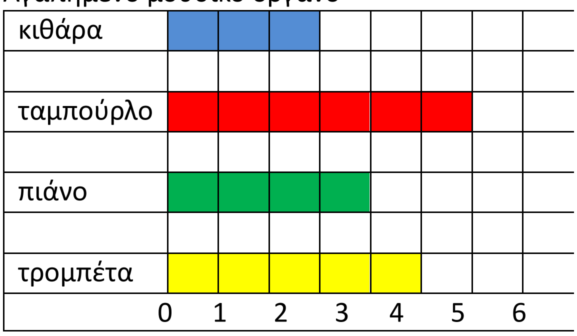
Ενδεικτικές Δραστηριότητες

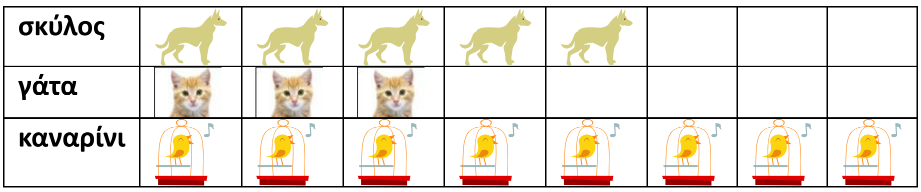
Α/Α	Περιγραφή δραστηριότητας	ΠΜΑ
ΑρΔ1	Παιχνίδια με αριθμοκάρτες: 1) «Συστήνω τον αριθμό που βρήκα» Αριθμοκάρτες με τους αριθμούς από το 0 ως το 9 είναι κρυμμένες μέσα στην τάξη. Οι μαθητές χωρίζονται σε ομάδες και ψάχνουν να βρουν τις αριθμοκάρτες. Όταν τις βρουν όλες συμφωνούν για το πώς θα παρουσιάσουν τους αριθμούς που αναγράφονται. Κερδίζει η ομάδα που κάνει την καλύτερη παρουσίαση όλων των αριθμών. 2) Οι μαθητές παίρνουν τυχαία κάρτες με αριθμούς και τις διατάσσουν σε μια γραμμή ανάλογα με τον αριθμό που κρατούν. Μια ενδιαφέρουσα λεπτομέρεια των δραστηριοτήτων διάταξης είναι ότι μπορεί να λείπει κάθε φορά ένας αριθμός (τον οποίο θα κρατά ο εκπαιδευτικός) και θα πρέπει τα παιδιά να βρουν ποιος αριθμός λείπει και να αφήσουν κενό στη θέση που πρέπει για να μπει ο αριθμός αυτός. 3) Ο εκπαιδευτικός έχει ένα καπέλο με αριθμοκάρτες. Βγάζει 2 κάρτες με διαφορετικά ψηφία και οι μαθητές πρέπει να τοποθετήσουν τα ψηφία με τέτοιο τρόπο ώστε να σχηματιστεί ο μικρότερος ή ο μεγαλύτερος αριθμός ή ο αριθμός πιο κοντά στον αριθμό στόχο.	**Αρ. 1** **Αρ. 5**
ΑρΔ2	Οι κάρτες με τους σχηματισμούς είναι σκορπισμένες στο πάτωμα. Οι μαθητές σε ομάδες προσπαθούν να βρουν όσες από τις κάρτες έχουν την ποσότητα που άκουσαν με το σύνθημα του εκπαιδευτικού σε χρόνο περιορισμένο. Κερδίζει όποια ομάδα βρίσκει τις περισσότερες. Οι δραστηριότητες αναγνώρισης στην αρχή αφορούν αριθμούς μέχρι το 10  ή  και κατόπιν αριθμούς σε δεκάδες 	**Αρ. 2**
ΑρΔ3	Ο εκπαιδευτικός διηγείται στους μαθητές μια ιστορία για ένα βοσκό στα πολύ παλιά χρόνια που δεν είχαν ανακαλύψει ακόμα οι άνθρωποι τον τρόπο να μετρούν. Ο βοσκός αυτός είχε ένα πρόβατο. Δεν χρειαζόταν το μέτρημα, γιατί ήξερε ότι, αν έβλεπε το πρόβατο, το είχε, αν δεν το έβλεπε, το είχε χάσει και το έψαχνε. Όταν αργότερα πήρε κι άλλο ένα πρόβατο, σκέφτηκε να κρατά όρθιο ένα δάχτυλο για κάθε πρόβατο και θα ήξερε ότι αν δεν έβλεπε ένα πρόβατο για κάθε δάχτυλο, τότε έπρεπε να αρχίσει να ψάχνει. Έτσι όμως ήταν αναγκασμένος να βόσκει τα πρόβατα όλη μέρα με τα δάχτυλα ανοιχτά. Μάλιστα το πράγμα δυσκόλεψε όταν πήρε κι άλλα πρόβατα. Επίσης σκέφτηκε ότι δεν μπορούσε να πάρει περισσότερα πρόβατα από όσα ήταν τα δάχτυλά του. Σκέφτηκε λοιπόν να πάρει ένα πιατάκι και να βάλει μια πετρούλα μέσα. Αυτή η πετρούλα σήμαινε για εκείνον ότι είχε πρόβατα όσα είναι τα δάχτυλά του. Όταν πήρε ακόμη ένα πρόβατο σκέφτηκε ότι, αντί να κρατά το δάχτυλό του ανοιχτό, μπορούσε να βάλει δίπλα στο πιατάκι με την πετρούλα που σήμαινε 10 πρόβατα, ένα άλλο πιατάκι με μια πετρούλα που να σημαίνει 1 πρόβατο και να βάζει σ’ αυτό το πιατάκι μία πετρούλα για κάθε ένα	**Αρ. 7**

	πρόβατο, αντί να κρατά τα δάχτυλά του ανοιχτά, όπως έκανε παλιά. Μόλις συμπληρωνόταν δέκα πετρούλες στο πιατάκι, θα έκανε ότι είχε κάνει πριν: Θα τις αντικαθιστούσε με μια πετρούλα στο διπλανό πιατάκι  (από το βιβλίο του Κάρλο Φραμπέτι «Καταραμένα Μαθηματικά» εκδόσεις Όπερα)	
ΑρΔ4	Ο εκπαιδευτικός προτείνει μια δραστηριότητα βιωματική με τη μορφή παιχνιδιού: Σε δύο καρέκλες έχουν μπει οι πινακίδες «μονάδες» - «δεκάδες». Τα παιδιά παίρνουν αριθμοκάρτες με τα ψηφία 0-9 και προσπαθούν να κάτσουν στις καρέκλες ώστε να σχηματίσουν τους αριθμούς που ακούν από τον εκπαιδευτικό.	**Αρ. 7**
ΑρΔ5	Οι μαθητές σε ζευγάρια κρατούν στα χέρια μια ποσότητα υλικού (π.χ. ξυλάκια, χάντρες κλπ.). Στη συνέχεια κρύβει ένα μέρος της ποσότητας και δείχνει στο δεύτερο παιδί το υπόλοιπο. Το παιδί αυτό προσπαθεί να μαντέψει πόσα κρύφτηκαν.	**Αρ. 10**
ΑρΔ6	Απαγγέλλουν προφορικά 2-2 την ακολουθία των αριθμών μέχρι το 10 και 5-5 και 10-10 την ακολουθία των αριθμών μέχρι το 50, σε καταστάσεις όπως π.χ. Πόσα είναι τα κουμπιά στο παλτό; (ή τα αυγά στην αυγοθήκη) Μπορείς να τα μετρήσεις δύο-δύο; Πέντε-πέντε;  	**Αρ.4** **Αρ. 12**
ΑρΔ7	Παίρνουν κάρτες με αριθμούς και ψάχνουν να βρουν ένα άλλο άτομο για να γίνουν ζευγάρι ώστε να αθροίζουν τον αριθμό στόχο (το 10 στην αρχή, μετά μεγαλύτερους αριθμούς) Εναλλακτικά μπορεί να αξιοποιηθεί το Ψηφιακό περιβάλλον «Αριθμοζυγαριά», στην ενότητα «Πρόσθετο υλικό», του εγκεκριμένου από το Π.Ι. Ε.Λ. για τις Α΄ και Β΄ τάξεις http://www.pi-schools.gr/software/dimotiko/. Συγκεκριμένα, οι μαθητές μελετούν την ανάλυση – σύνθεση των αριθμών τοποθετώντας βάρη – αριθμούς στις δύο πλευρές της ζυγαριάς ώστε να επιτύχουν ισορροπία. 	**Αρ. 10** **Αρ. 11**
ΑρΔ8	Κάνουν αναπηδήσεις στην αριθμογραμμή ανά δύο, για να αντιληφθούν την έννοια «φορές». Ανταλλάσσουν πέντε 2ευρα με ένα χαρτονόμισμα των 10 ευρώ. Ο εκπαιδευτικός προτείνει δραστηριότητες όπου τα παιδιά οδηγούνται στον πολλαπλασιαστικό συλλογισμό όπως π.χ. δείχνει εικόνες με αυτιά από κρυμμένα κουνελάκια και ρωτά πόσα είναι τα κουνελάκια που κρύβονται  ή βιωματικά οι μαθητές ρίχνουν ζευγάρια γάντια σε ένα κουτί και, γνωρίζοντας πόσες φορές έριξαν γάντια, προσπαθούν να βρουν πόσα είναι συνολικά τα γάντια, στο κουτί.	**Αρ. 12**
ΑρΔ9	Οι μαθητές σε ζευγάρια χτίζουν πολυκατοικίες όπου η μία να έχει διπλάσιους ορόφους από την άλλη (Η έννοια του μισού και του διπλάσιου με τουβλάκια)	**Αρ. 13**

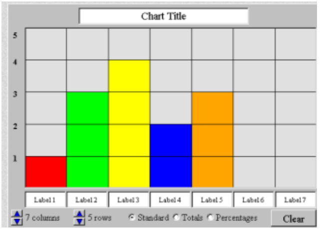
		
ΑρΔ10	Βρίσκουν τον τρόπο να μοιράζουν μια σοκολάτα αρχικά σε 2 και μετά σε 4 μέρη. Το υλικό που παριστάνει τη σοκολάτα είναι φτιαγμένο με τρόπο που να διευκολύνει, όχι όμως να καθοδηγεί τα παιδιά σε οφθαλμοφανή λύση: π.χ. Μοιράστε αυτή τη σοκολάτα σε 4 παιδιά  ή μοιράστε αυτή τη σοκολάτα σε 6 παιδιά  Εξηγούν πώς τη μοίρασαν και τι μέρος της σοκολάτας πήρε κάθε παιδί.	**Αρ. 15**
ΑΔ1	Κομπολόγια ή συνθέσεις γεωμετρικών σχημάτων με επαναλαμβανόμενο μοτίβο. <u>Παραδείγματα μοτίβων</u>: Κόκκινο, κίτρινο –κόκκινο, κίτρινο - …. Κόκκινο, κόκκινο, κίτρινο – κόκκινο, κόκκινο, κίτρινο - …..  Μπορεί να προταθεί μία ποικιλία από υλικά και συνδυασμοί, με βαθμιαία αυξανόμενη πολυπλοκότητα	**Α1**
ΑΔ2	Κατασκευή, καταγραφή και περιγραφή δεδομένων συμμεταβολής: - Για να γίνει ένα κομπολόι χρειάζονται 2 κόκκινες χάντρες, και 4 πράσινες. Για να γίνουν 2 κομπολόγια, 3 κομπολόγια, 4 κομπολόγια - Για να γεμίσω ένα τετράγωνο θέλω 4 μικρά τετραγωνάκια. Αν προσθέσω στην άκρη ακόμα ένα τετραγωνάκι πόσα χρειάζομαι ακόμα για να συμπληρώσω το τετράγωνο. - Έχουμε 30 κυβάκια και θέλουμε να φτιάξουμε πύργους, αν φτιάξουμε ένα πύργο πόσα πατώματα θα έχει αυτός, αν φτιάξουμε 2 πύργους, 3 πύργους….	**Α6**
ΓΔ1	Παιχνίδια για τις έννοιες του χώρου «Ξέρω πού είναι»: οι μαθητές βρίσκουν και περιγράφουν τη θέση τους σε ένα σχέδιο ή σε ένα χάρτη και βάζουν ένα πιόνι στη θέση που βρίσκονται εξηγώντας πού το τοποθετούν. «Ψάχνω να βρω»: Οι μαθητές παίζουν σε ομάδες. Κάθε ομάδα που παίζει ορίζει κάποιον που θα βγει από την τάξη. Οι υπόλοιποι μαθητές της ομάδας θα κρύψουν ένα αντικείμενο σε μία θέση και στη συνέχεια θα καθοδηγήσουν το παιδί που γυρνάει να το βρει. Η περιγραφή της θέσης γίνεται αποκλειστικά με εκφράσεις του τύπου «μπρος –πίσω», «πάνω- κάτω», «δεξιά – αριστερά». Υπάρχει χρονικό όριο. Με λάθος οδηγία η ομάδα διορθώνει με την αντίστροφη οδηγία ή χάνει τη σειρά της και παίζει η επόμενη.	**Γ1, Γ2**
ΓΔ2	Χρήση τεχνολογικού περιβάλλοντος τύπου Logo, όπως περιβάλλον «LadybugMazes» του Πανεπιστημίου Utah των ΗΠΑ, που διατίθεται στο δικτυακό τόπο: http://nlvm.usu.edu Οι μαθητές κατευθύνουν την πασχαλίτσα με συγκεκριμένες εντολές μέσα σε ένα λαβύρινθο με στόχο να φθάσει στο σημείο – στόχο. 	**Γ1**
ΓΔ3	Οι μαθητές δρουν σε ομάδες. Η μία ομάδα κάνει μια κατασκευή με τουβλάκια (ή άλλο υλικό). Στη συνέχεια περιγράφουν τον τρόπο που είναι τοποθετημένα τα τουβλάκια χρησιμοποιώντας έννοιες χώρου,  	**Γ1, Γ2**

	ώστε οι άλλες ομάδες να την ανακατασκευάσουν χωρίς να το βλέπουν. Οι ομάδες συγκρίνουν το αποτέλεσμα.	
ΓΔ4	 «Ναυμαχία»: Οι μαθητές παίζουν σε ομάδες ή ζευγάρια. Η μία ομάδα τοποθετεί σε τετραγωνισμένο πλαίσιο 10Χ10, με χρώματα και σχήματα στα άκρα, σημάδια που είναι τα πλοία του στόλου. Η αντίπαλη ομάδα δε γνωρίζει τις θέσεις των πλοίων και προσπαθεί να τις εντοπίσει στο τετραγωνισμένο πλαίσιο. Αν στη θέση που λένε δεν υπάρχει πλοίο τότε χάνουν ένα χτύπημα. Αν υπάρχει πλοίο το βυθίζουν. Κερδίζει η ομάδα που βυθίζει όλα τα πλοία. - Αντίστοιχα βρίσκουν τις θέσεις με τουβλάκια: 	**Γ5**
ΓΔ5	- Γρήγορη αναγνώριση σχημάτων: οι μαθητές δουλεύουν ανά θρανίο. Έχουν μπροστά τους μια ποικιλία επίπεδων σχημάτων και ως προς το μέγεθος κι ως προς τη μορφή (τρίγωνα τετράγωνα, κύκλους, ορθογώνια, εξάγωνα, πεντάγωνα, τραπέζια, απλά τετράπλευρα κλπ). Ο εκπαιδευτικός αναφέρει ένα από αυτά και τα παιδιά αναζητούν όσα περισσότερα μπορούν. - «Βρες τον κανόνα μου»: μία ομάδα παιδιών ξεχωρίζει από μια ποικιλία σχημάτων ορισμένα με βάση ένα κανόνα. (ορθογώνια τρίγωνα, σχήματα με τέσσερις πλευρές). Οι υπόλοιποι μαθητές δοκιμάζουν να εντοπίσουν τον κανόνα με τον οποίο έγινε η επιλογή.	**Γ6, Γ7**
ΓΔ6	Δίνεται στους μαθητές μια ποικιλία σχημάτων και σχηματισμών και περιγράμματα σχεδίων που καλούνται να επικαλύψουν. Το ‘τάνγκραμ’ εντάσσεται στην ίδια δράση   Επιπλέον θα μπορούσε να το περιβάλλον GCompris Ελεύθερο Λογισμικό / Λογισμικό Ανοικτού Κώδικα, (ΕΛ/ΛΑΚ) «Παιχνίδι Τάνγκραμ», που διατίθεται στο δικτυακό τόπο: http://gcompris.net/-el- 	**Γ10**
ΓΔ7	Προτείνονται στους μαθητές κατασκευές , ή σχεδιασμός συμμετρικών σχημάτων σε διαφανές χαρτί. ώστε να μπορούν να το ελέγξουν με δίπλωση.  	**Γ12, Γ13**
ΜΔ1	Ο εκπαιδευτικός απλώνει στο δάπεδο ένα σχηματισμό με διαφορετικές αποστάσεις που	**Μ5, Μ6**

<table>
<tr><td></td><td>δεν μπορούν να συγκριθούν άμεσα. Οι μαθητές εκτιμούν αρχικά ποια απόσταση είναι πιο μεγάλη και στη συνέχεια δοκιμάζουν να επαληθεύσουν επικαλύπτοντας με ράβδους, χάρακες ή άλλα μέσα.</td><td></td></tr>
<tr><td>ΜΔ2</td><td>Ο εκπαιδευτικός προτείνει διάφορες επιφάνειες και οι μαθητές δοκιμάζουν να τις συγκρίνουν κόβοντας και μετακινώντας μέρη των επιφανειών αυτών.
</td><td>Μ11</td></tr>
<tr><td>ΜΔ3</td><td>Οι μαθητές καλούνται να υπολογίσουν πόσα τετράγωνα απαιτούνται ακόμα για να συμπληρωθεί το σχήμα. Η δράση μπορεί να γίνει αρχικά με τετράγωνα σχήματα και εμπράγματες επικαλύψεις και στη συνέχεια με σχεδιαστικές που οδηγούν στην αντίληψη γραμμών και στηλών.
</td><td>Μ14</td></tr>
<tr><td>ΜΔ4</td><td>Ο εκπαιδευτικός προτείνει διάφορα κουτιά καλώντας τους μαθητές να εκτιμήσουν «ποιο κουτί είναι πιο μεγάλο». Στη συνέχεια οι μαθητές καλούνται να γεμίσουν τα κουτιά με κύβους για να ελέγξουν την εκτίμηση τους.</td><td>Μ19</td></tr>
<tr><td>ΣΔ1</td><td>Οι μαθητές σε ομάδες διατυπώνουν ένα ερώτημα προκειμένου να γνωρίσουν τα αγαπημένα πράγματα των συμμαθητών τους: «Ποιο είναι το αγαπημένο σου … (π.χ. φαγητό, παιχνίδι, φρούτο κλπ.)». Συζητούν με ποιο τρόπο θα καταγράψουν τις απαντήσεις (π.χ. λίστα με ονόματα), πώς θα είναι σίγουροι ότι απάντησαν όλα τα παιδιά, πώς θα οργανώσουν τα αποτελέσματα (π.χ. χρησιμοποιούν ένα κουτί για κάθε κατηγορία και βάζουν ένα κυβάκι για κάθε απάντηση ή δίπλα σε κάθε κατηγορία βάζουν μία γραμμή για κάθε παιδί).
Κατασκευάζουν ένα ραβδόγραμμα σε τετραγωνισμένο χαρτί, όπως το παρακάτω:
Αγαπημένο μουσικό όργανο


Συζητούν ερωτήματα όπως: Ποιο … προτιμούν τα περισσότερα παιδιά; Πόσα περισσότερα παιδιά προτιμούν … σε σχέση με …..;</td><td>Σ1, Σ2, Σ3, Σ5</td></tr>
<tr><td>ΣΔ2</td><td>Σε μια σχολική εφημερίδα υπάρχει το ακόλουθο κείμενο: «Τα παιδιάμιας Α’ τάξης ενός Δημοτικού Σχολείου ρωτήθηκαν για τα αγαπημένα τους κατοικίδια ζώα και απάντησαν ως εξής: 5 παιδιά αγαπούν τους σκύλους, 3 παιδιά αγαπούν τις γάτες και 10 παιδιά αγαπούν τα καναρίνια».


Συζητούν αν το εικονόγραμμα δείχνει σωστά τις πληροφορίες του κειμένου. Με ποιον</td><td>Σ4</td></tr>
</table>

	άλλο τρόπο μπορούμε να δείξουμε τις πληροφορίες του κειμένου; (π.χ. καταμέτρηση με γραμμές, ραβδόγραμμα). Ποιες είναι οι ομοιότητες και οι διαφορές ανάμεσα στο εικονόγραμμα και το ραβδόγραμμα;	
ΣΔ3	Ο εκπαιδευτικός με τους μαθητές καταγράφουν τα δεδομένα και τα παρουσιάζουν με διαγράμματα αξιοποιώντας κατάλληλα ψηφιακά και υπολογιστικά περιβάλλοντα, όπως το «BarChart» ή «PieChart»του Πανεπιστημίου Utah των ΗΠΑ, που διατίθεται στο δικτυακό τόπο: http://nlvm.usu.edu 	**Π2, Π3**
ΠΔ1	Παιχνίδι με ζάρια (2 ζάρια, ένα κανονικό και ένα που στις πλευρές του έχει τους αριθμούς 4,5,6 δύο φορές και μια βάση για ένα επιτραπέζιο παιχνίδι). Οι μαθητές χωρίζονται σε 2 ομάδες και η κάθε ομάδα τυχαία παίρνει από ένα ζάρι. Με βάση το αποτέλεσμα του ζαριού το πιόνι της κάθε ομάδας προχωράει αντίστοιχα βήματα πάνω στη βάση με στόχο το ‘τέλος’. Μόλις ολοκληρωθεί το παιχνίδι συζητούν εάν το παιχνίδι ήταν δίκαιο ή άδικο και για ποια ομάδα. Ξαναπαίζουν το παιχνίδι με αντιστροφή των ζαριών. Συμβαίνει ξανά το ίδιο; Γιατί; Πώς μπορεί το παιχνίδι να γίνει δίκαιο;	**Π2**
ΠΔ2	Ο κύριος Μανώλης, ιδιοκτήτης ενός καταστήματος που πουλάει παγωτά, προσφέρει 3 γεύσεις παγωτού (π.χ. βανίλια, σοκολάτα, μπανάνα) σε κυπελάκι με μία ή δύο διαφορετικές μπάλες. Ο κος Μανώλης ζητά από τα παιδιά να φτιάξουν έναν τιμοκατάλογο (π.χ. η κάθε μπάλα παγωτού κοστίζει 2 ευρώ ή μπορεί να υπάρχουν διαφορές στις τιμές ανάλογα με τη γεύση). Αν ο κος Μανώλης προσθέσει ακόμα μία γεύση παγωτού (π.χ. φράουλα), ποιος θα ήταν ο τιμοκατάλογος;	**Π3**

Β΄ Δημοτικού

Θεματική ενότητα: Αριθμοί

Ενδεικτικές διδακτικές ώρες: 58

Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα (ΠΜΑ)	Βασικά θέματα	Δραστηριότητες	Εκπαιδευτικό υλικό
Αρ1. Απαγγέλουν, διαβάζουν και γράφουν αριθμούς (μέχρι το 1000, ψηφία και λέξεις) *Αρ2.* Αναγνωρίζουν αριθμούς (μέχρι το 1000) σε μια ποικιλία από πλαίσια και σχηματισμούς χρησιμοποιώντας στρατηγικές άμεσης αναγνώρισης και αντιστοίχισης *Αρ3.* Καταμετρούν αντικείμενα και αναπτύσσουν στρατηγικές μέτρησης. *Αρ4.* Αριθμούν και καταμετρούν μέχρι 1000 αντικείμενα ανά 20, 50, 100 αναπαριστώντας τις αντίστοιχες διαδικασίες με διαφορετικούς τρόπους *Αρ5.* Συγκρίνουν και διατάσσουν αριθμούς (μέχρι το 1000) και βρίσκουν τη θέση ενός αριθμού (μέχρι το 1000) στην αριθμογραμμή. *Αρ6.* Διερευνούν τις σχέσεις των αριθμών, αναλύουν και συνθέτουν αριθμούς μέχρι το 1000. *Αρ7.* Διερευνούν τη σχέση μεταξύ ενός ψηφίου και της αξίας του. Βρίσκουν την αξία θέσης των αριθμών (και του	**Φυσικοί Αριθμοί (ως το 1000)** *(50 ώρες)* • Αριθμητικά σύμβολα • Άμεση αναγνώριση • Καταμέτρηση ποσοτήτων και αρίθμηση • Διάταξη αριθμών • Σχέσεις αριθμών • Θεσιακή αξία ψηφίων • Εκτιμήσεις • Πράξεις στους φυσικούς αριθμούς • Πρόσθεση και αφαίρεση αριθμών • Πολλαπλασιασμός και διαίρεση φυσικών αριθμών • Προσθετικές και πολλαπλασιαστικές καταστάσεις	Είναι σημαντικό οι μαθητές να αναπτύξουν τις δικές τους στρατηγικές για τη δόμηση των αριθμών στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης με χρήση εκπαιδευτικού υλικού αλλά και νοερά και να τις επικοινωνούν μεταξύ τους. *(ενδεικτικές δραστηριότητες: ΑρΔ1, ΑρΔ2, ΑρΔρ3, ΑρΔ4)* Είναι σημαντικό οι μαθητές να χρησιμοποιούν τις στρατηγικές που έχουν αναπτύξει κατά την κατασκευή των αριθμών για να υπολογίσουν τα αποτελέσματα αριθμητικών παραστάσεων. Χρησιμοποιούν και εκπαιδευτικό υλικό για να δείξουν και να εξηγήσουν τις στρατηγικές τους στους συμμαθητές τους. Οι μαθητές κατασκευάζουν προβλήματα με αφορμή καταστάσεις και αντικείμενα της καθημερινότητας για να τα λύσουν οι	*(το υλικό που ακολουθεί αφορά τα Μαθηματικά Β' Δημοτικού, ΟΕΔΒ, Βιβλίο του Μαθητή (ΒΜ) και Τετράδιο Εργασιών (ΤΕ))* ΒΜ, α' , σελ.14, δραστηριότητα – ανακάλυψη. ΤΕ, α' , κεφ.2 (άβακας, τουβλάκια) ΒΜ, β', κεφ.41, σελ.36 Δραστηριότητα ανακάλυψη, σελ.37 Εργασίες 1 και 2 άβακας, αριθμογραμμή) Χρησιμοποιούνται αναπαραστάσεις, όπως για παράδειγμα η φωτογραφία με τις καραμέλες  ΒΜ, β', κεφ.43, Δραστηριότητα-ανακάλυψη, σελ.40 και 41, Εργασία σελ.41, (αριθμοκάρτες που υπάρχουν και στο παράρτημα του ΒΜ, αριθμογραμμή) ΤΕ, δ', σελ.41, Σπαζοκεφαλιές «Φτιάχνω αριθμούς» (χαρτονάκια, διπλόκαρφα)

μηδενός) στους διψήφιους αριθμούς *Αρ8.* Εκτιμούν με διαφορετικούς τρόπους την πληθικότητα ενός συνόλου που περιλαμβάνει μέχρι 100 στοιχεία *Αρ9.* Προσθέτουν και αφαιρούν διψήφιους αριθμούς και διερευνούν αθροίσματα και διαφορές εκατοντάδων μέχρι το 1000 *Αρ10.* Διερευνούν κι εφαρμόζουν στρατηγικές νοερών υπολογισμών προσθέσεων κι αφαιρέσεων διψήφιων αριθμών. *Αρ11.* Βρίσκουν τα πολλαπλάσια των αριθμών 2, 4, 5, 10. *Αρ12.* Αναπτύσσουν και εφαρμόζουν στρατηγικές για να υπολογίσουν το αποτέλεσμα διαίρεσης διψήφιου αριθμού με το 2, 4, 5 και 10 (διαίρεση τέλεια) (όχι τυπικοί αλγόριθμού *Αρ13.* Διερευνούν συνδυασμούς που δίνουν τα αθροίσματα ή τις διαφορές των δεκάδων και των εκατοντάδων ως το 1000. *Αρ14.* Διερευνούν προσθετικές και πολλαπλασιαστικές καταστάσεις. *Αρ15.* Αναπτύσσουν στρατηγικές στην επίλυση κατασκευή και προβλημάτων και χρησιμοποιούν μοντέλα και αναπαραστάσεις για να τις τεκμηριώσουν και να τις κοινοποιήσουν σε		συμμαθητές τους. Είναι σημαντικό να αναπαριστούν τα προβλήματα κατά περίπτωση, να τα λύνουν και να εφαρμόζουν αντίστροφες διαδικασίες για επαλήθευση των αποτελεσμάτων τους. *(ενδεικτικές δραστηριότητες: ΑρΔ5, ΑρΔ6, ΑρΔ7, ΑρΔ8)*	ΒΜ, α’, κεφ.10, σελ.32 και από σελ.33 η 3. ΤΕ, α’, κεφ.10 (β,δ,ε), γ’ τεύχος, κεφ.34, α,β,γ,ε και γ’ , κεφ.35 Χειραπτικό υλικό: άβακας, αριθμογραμμή, αριθμητήριο, κύβοι Dienes και νομίσματα, ΒΜ, α’ τεύχος κεφ.24, 25, 26, 27, β΄ τεύχος κεφ.29. ΤΕ, β΄ τεύχος κεφ.24, 25, 26, 27 και γ’ τεύχοςκεφ.29. Πίνακες σελ. 70- 73, τετραγωνισμένο χαρτί. Νομίσματα, κάρτες αριθμών. Αριθμητήριο και αριθμογραμμές με άλματα 2-2, 3-3, κλπ) Β. Μ, β’ κεφ.50, εργασία 2. Τ.Ε, δ’ κεφ.50, εργασίες α,β,γ, Κεφ.43, σελ.11, εργασίες δ, στ (ΒΜ, β’, κεφ.44, εργασίες 1 και 2: οι μαθητές μπορούν να επεκτείνουν τα προβλήματα θέτοντας και επιπλέον δεδομένα και ερωτήματα. ΤΕ, δ’, κεφ.44 ΒΜ, β’, εφ.49, (αναπαραστάσεις) ΤΕ, δ’, κεφ.49, α, β, γ (αναπαραστάσεις, χαρτονομίσματα) ΒΜ, β’, κεφ.53 (αναπαραστάσεις σε πινακίδια)

άλλους.			
Αρ16. Χωρίζουν εμπράγματες και μη, διακριτές και συνεχείς ποσότητες (γραμμές, δυσδιάστατα σχήματα) σε ίσα μέρη: 3, 6, 5, 10 *Αρ17.* Συγκρίνουν δύο ποσότητες, προσδιορίζουν τη σχέση μεγέθους και τη συνδέουν λεκτικά (τριπλάσια/ ένα τρίτο, πενταπλάσια/ένα πέμπτο, εξαπλάσια/ένα έκτο, δεκαπλάσια/ένα δέκατο) και συμβολικά 1/3, 1/6, 1/5, 1/10 *Αρ18.* Διερευνούν με χειραπτικά υλικά και αναπαραστάσεις και προσεγγίζουν διαισθητικά τα κλάσματα 2/4, ¾, 2/3	**Κλασματικοί αριθμοί** *(5 ώρες)*	Είναι σημαντικό οι μαθητές να κατασκευάσουν την ιδέα των κλασματικών μερών του (συν)όλου όταν αυτό έχει χωριστεί σε ισομεγέθη τμήματα. Επιπλέον να δομήσουν συνδέσεις ανάμεσα στο1/3 και το 1/6, το 1/5 και το 1/10 *(Ενδεικτικές δραστηριότητες: ΑρΔ9, ΑρΔ10, ΑρΔ11)*	Χειραπτικό υλικό: Συνεχή μοντέλα ή επιφάνειας: Χάρτινα κυκλικά και ορθογώνια μοντέλα, τετραγωνισμένο χαρτί, (παράρτημα στο ΒΜ), λωρίδες χαρτιού είτε ράβδοι Cuisenaire Διακριτά μοντέλα ή συνόλων: κυβάκια, καλαμάκια, χρώματα, καραμέλες, πλακίδια
Αρ19. Αναγνωρίζουν δεκαδικούς αριθμούς σε μια ποικιλία από καθημερινά πλαίσια (τιμές προϊόντων, μετρήσεις με χάρακα, χρόνος) *Αρ20.* Εισάγονται διερευνητικά στη γραφή και στην ορολογία που αφορά απλούς δεκαδικούς αριθμούς μέσα σε καθημερινά πλαίσια, όπως τα χρήματα, αντιστοιχίζοντας τα κέρματα με τη δεκαδική τους μορφή και γραφή.	**Δεκαδικοί αριθμοί** *(3 ώρες)*	Βασική ιδέα είναι οι μαθητές να συνδέσουν τις τιμές προϊόντων της καθημερινότητας με τις αντίστοιχες αξίες των νομισμάτων και με την αναπαράσταση των δεκαδικών αριθμών. (Η διδασκαλία των δεκαδικών αριθμών ξεκινά στη Γ΄Δημοτικού). *(ενδεικτικές δραστηριότητες: ΑρΔ12)*	Οι εργασίες στα παρακάτω κεφάλαια που αφορούν σε ασκήσεις και προβλήματα με νομίσματα και αγοροπωλησίες μπορούν να επεκταθούν όπως στη δραστηριότητα ΑρΔ12. Μαθηματικά Β' Δημοτικού, Βιβλίο του Μαθητή, α τεύχος, ΟΕΔΒ, Κεφ.11, ΤΕ, α', κεφ.11(νομίσματα, αντικείμενα με τιμές) ΒΜ, α', κεφ.12 ΤΕ, α' , κεφ.13(νομίσματα, αντικείμενα με τιμές) Βιβλίο του Δασκάλου,

			σελ.64, εργασία 9 και σελ.65 εργασία 11. (πλαστικά νομίσματα και χαρτονομίσματα).

Θεματική ενότητα: Άλγεβρα

Ενδεικτικές διδακτικές ώρες: 8

Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα (ΠΜΑ)	**Βασικά θέματα**	**Δραστηριότητες**	**Εκπαιδευτικό υλικό**
Α1. Αναγνωρίζουν την ύπαρξη μεταβαλλόμενης κανονικότητας *Α2.* Συμπληρώνουν, επαναλαμβανόμενες και μεταβαλλόμενες (αυξανόμενες ή μειούμενες) κανονικότητες *Α3.* Περιγράφουν και εξηγούν επαναλαμβανόμενες και μεταβαλλόμενες (αυξανόμενες ή μειούμενες) κανονικότητες και τη διαδικασία τους, *Α4.* Κατασκευάζουν επαναλαμβανόμενες και μεταβαλλόμενες κανονικότητες. *Α5.* Δημιουργούν και περιγράφουν αντιστοιχίες *Α6.* Αναγνωρίζουν, αναπαριστάνουν και περιγράφουν σχέσεις μεταξύ συμμεταβαλομένων μεγεθών	**Κανονικότητα - Συναρτήσεις** *(3 ώρες)* • Διερεύνηση: αναγνώριση, συμπλήρωση, περιγραφή και κατασκευή επαναλαμβανόμενων και μεταβαλλόμενων κανονικοτήτων • Αναγνώριση αντιστοιχιών • Σχέσεις συμμεταβολής	Σύγκριση αντικειμένων με κριτήριο την ύπαρξη επαναλαμβανόμενου μοτίβου. Συμπληρώνουν κατασκευές με επανάληψη του μοτίβου *(ενδεικτικές δραστηριότητες ΑΔ1)* Ανταλλάσσουν μηνύματα με οδηγίες για την κατασκευή αντικειμένων με κανονικότητες. Κατασκευάζουν δικά τους αντικείμενα (πχ κομπολόγια, συνθέσεις σχημάτων) και παρουσιάζουν τον κανόνα του δικού τους μοτίβου. Κατασκευάζουν δικούς τους συνδυασμούς και σχέσεις. Κατασκευή, καταγραφή και περιγραφή δεδομένων συμμεταβολής. *(ενδεικτικές δραστηριότητες ΑΔ2)*	Χάντρες Γεωμετρικά σχήματα από χαρτόνι Κυβάκιαlego και άλλα οικοδομικά υλικά Παραδείγματα μοτίβων: Κόκκινο, κίτρινο – κόκκινο, κίτρινο - …. Κόκκινο, κόκκινο, κίτρινο – κόκκινο, κόκκινο, κίτρινο - ….. Κόκκινο, κίτρινο - κόκκινο, κόκκινο, κίτρινο, κίτρινο - κόκκινο, κόκκινο,κόκκινο, κίτρινο, κίτρινο, κίτρινο - …. Ψηφιακό περιβάλλον GCompris Ελεύθερο Λογισμικό/ Λογισμικό Ανοικτού Κώδικα, (ΕΛ/ΛΑΚ) για κανονικότητες στη διαδρομή: «Δραστηριότητες ανακάλυψης-Συλλογή ποικίλων δραστηριοτήτων-Αλγόριθμος» http://gcompris.net/-el- Διερεύνηση μεταβολής εμβαδού, όταν μεταβάλλεται η πλευρά:

			Υλικά κατασκευής και υλικά κατασκευής αναπαραστάσεων για καταγραφή των δεδομένων (π.χ. μαγνητικούς πίνακες)
Α7. Αντιλαμβάνονται το σύμβολο της ισότητας ως σχέση ανάμεσα σε σύνθετες αριθμητικές παραστάσεις. *Α8.* Χρησιμοποιούν σύμβολα (ως μεταβλητές) και τα αντικαθιστούν με αριθμούς σε «κλειστές» (πχ 3+□=9) και σε ανοιχτές αριθμητικές. προτάσεις (πχ △+□=8). *Α9.* Εκφράζουν συμβολικά ένα απλό πρόβλημα με αριθμητική παράσταση ή σχέση. *Α10.* Διατυπώνουν ένα πρόβλημα που να μοντελοποιείται από δεδομένη αριθμητική παράσταση ή σχέση.	**Αλγεβρικές παραστάσεις** *(3 ώρες)* .	Οι βασικές έννοιες που εμπλέκονται στην τροχιά της Άλγεβρας, έχουν να κάνουν με διαφορετική, πιο διευρυμένη οπτική του εννοιολογικού πεδίου κυρίως της Αριθμητικής. Έτσι, τα περισσότερα επιμέρους θέματα της Άλγεβρας, μπορούν και μάλλον πρέπει να ενταχθούν στο πλαίσιο των αριθμητικών δραστηριοτήτων: κατά τη διάρκεια της αρίθμησης και των πράξεων γίνονται και οι δραστηριότητες που αφορούν τις αντιστοιχίσεις, τις συμμεταβολές, τις αλγεβρικές παραστάσεις, την ισότητα και την ανισότητα. Συμβολική αναπαράσταση των καταστάσεων και προβλημάτων που διερευνήθηκαν στις ενότητες των αριθμών Κατασκευή και αναζήτηση άλλων προβλημάτων και καταστάσεων με βάση σχέσεις ίδιου τύπου με την προηγούμενη περίπτωση	
Α11. Διερευνούν την έννοια της ισότητας και ανισότητας σε διάφορα πλαίσια:	**Ισότητα –Ανισότητα** *(2 ώρες)* • Γενίκευση της	Δραστηριότητες χρήσης των συμβόλων στις διάφορες περιπτώσεις	

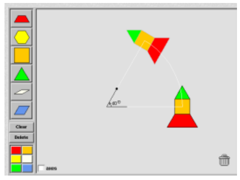
αριθμητικά, μεγεθών και διατυπώνουν τη σχέση συμβολικά. *Α12.* Συγκρίνουν αριθμούς και κάνουν πράξεις με αυτούς χρησιμοποιώντας τα κατάλληλα σύμβολα	ισότητας και ανισότητας και συμβολική έκφραση των σχέσεων. Χρήση των συμβόλων =, >, <. • Ιδιότητες ισότητας και ανισότητας.	ολοκλήρωσης των αντίστοιχων θεμάτων. Διερεύνηση καταστάσεων όπως 5<8 το 5+3?8+3 ή το 5<8, 3<4 το 5+3?8+4	

Θεματική ενότητα: Χώρος και Γεωμετρία

Ενδεικτικές διδακτικές ώρες: 18

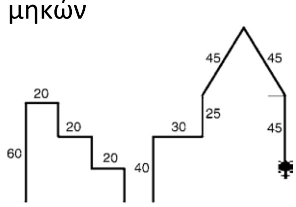
Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα (ΠΜΑ)	**Βασικά θέματα**	**Δραστηριότητες**	**Εκπαιδευτικό υλικό**
Γ1. Εντοπίζουν, περιγράφουν κι αναπαριστούν θέσεις, διευθύνσεις και διαδρομές σε αναπαραστάσεις και σε χάρτες οικείων περιοχών. *Γ2.* Επικαλύπτουν το επίπεδο με ποικιλία σχημάτων και μελετούν χωρικές σχέσεις. *Γ3.* Προσεγγίζουν τις δισδιάστατες συντεταγμένες περνώντας από τα αυθαίρετα σύμβολα σε γράμματα και αριθμούς.	**Χώρος** *(5 ώρες)* • Θέσεις διευθύνσεις και διαδρομές σε χάρτες • Δόμηση χώρου, επικαλύψεις και συντεταγμένες	Ο εκπαιδευτικός προτείνει δράσεις με χρήση χαρτών για το σχολείο, τη γειτονιά, την πόλη. *(ενδεικτικές δραστηριότητες ΓΔ1, ΓΔ11)* Οι δραστηριότητες της μορφής «Στρώνω με πλακάκια» εισάγουν τους μαθητές στη δόμηση της επιφάνειας και βοηθούν στην κατανόηση της μέτρησής της. *(ενδεικτική δραστηριότητα ΓΔ2.)* Προτείνεται μια ανοικτή κατάσταση - πρόβλημα για να προβληματιστούν οι μαθητές για την κωδικοποίηση των συντεταγμένων. *(ενδεικτική δραστηριότητα ΓΔ3)*	Χάρτες από το διαδίκτυο

Γ4. Αναγνωρίζουν και ταξινομούν επίπεδα και στερεά σχήματα με βάση κριτήρια που παρατηρούν. *Γ5.* Αναγνωρίζει και διερευνά χαρακτηριστικά επίπεδων και στερεών γεωμετρικών σχημάτων. *Γ6.* Κατασκευάζουν κι αναπαριστούν επίπεδα και στερεά γεωμετρικά σχήματα με διάφορα μέσα με βάση ιδιότητες. *Γ7.* Συνδέουν τις έδρες των στερεών με τα επίπεδα σχήματα και αναγνωρίζουν απλά αναπτύγματα. *Γ8.* Συνθέτουν και αναλύουν επίπεδα γεωμετρικά σχήματα και στερεά σε 2 ή περισσότερα μέρη.	**Γεωμετρικά σχήματα** *(8 ώρες)* • Ταξινόμηση και ανάλυση σε στοιχεία και ιδιότητες • Κατασκευές και σχεδιασμός • Σύνδεση επιπέδων, ανάλυση και σύνθεση	Για τους στόχους αυτούς υπάρχουν χαρακτηριστικές δραστηριότητες γρήγορης αναγνώρισης σχημάτων «φλας», εύρεσης κριτηρίων επιλογής «ποιος είναι ο κανόνας μου» και περιγραφής «σπασμένο τηλέφωνο» που εισάγει μαθητές σε αρχικά άτυπη και στη συνέχεια πιο συστηματική αναζήτηση ιδιοτήτων και σχέσεων. *(ενδεικτικέςδραστηριότητες ΓΔ4, ΓΔ5)* Ο εκπαιδευτικός προτείνει κατασκευές και σχεδιασμό με εμπράγματο υλικό και όργανα. Με τον τρόπο αυτό οι μαθητές προσεγγίζουν και συζητούν ιδιότητες. *(ενδεικτική δραστηριότητα ΓΔ10)* Ο εκπαιδευτικός προτείνει συνθέσεις με ποικιλία σχημάτων που μπορούν να συνδυαστούν με διαφορετικούς τρόπους και δίνουν ευκαιρίες στους μαθητές να προσεγγίσουν περισσότερο τις ιδιότητες και τις σχέσεις. *(ενδεικτικήδραστηριότητα ΓΔ6)*	

Γ9. Παρατηρούν, προβλέπουν το αποτέλεσμα και αναπαριστούν μετατοπίσεις και στροφές (90, 180, 360 και 45). *Γ10.* Αναγνωρίζουν συμμετρικά δισδιάστατα και τρισδιάστατα σχήματα και σχήματα με άξονες συμμετρίας. Σχεδιάζουν τους άξονες. *Γ11.* Κατασκευάζουν συμμετρικά σχήματα και συνεχίζουν συμμετρικά μοτίβα *Γ12.* Περιγράφουν τις ιδιότητες της συμμετρίας	**Μετασχηματισμοί** *(3 ώρες)* • Μετατοπίσεις και στροφές • Αξονική συμμετρία	Ο εκπαιδευτικός προτείνει καταστάσεις στροφών για πρόβλεψη της κίνησης. *(ενδεικτική δραστηριότητα ΓΔ7)* Οι κατασκευές συμμετρικών με έλεγχο τους αποτελέσματος επιτρέπουν στους μαθητές να προσεγγίσουν ιδιότητες. Όμοια οι καταστάσεις όπου οι μαθητές αποφασίσουν αν είναι ή όχι συμμετρικές και εξηγούν. *(ενδεικτική δραστηριότητα ΓΔ8)*	Χρήση τεχνολογικών περιβαλλόντων, όπως περιβάλλον «Transformations - Rotation» του Πανεπιστημίου Utah των ΗΠΑ, που διατίθεται στο δικτυακό τόπο: http://nlvm.usu.edu 
Γ13. Αναγνωρίζουν τρισδιάστατες συνθέσεις και στερεά σχήματα από διαφορετικές οπτικές γωνίες *Γ14.* Πραγματοποιούν κατασκευές τρισδιάστατων συνθέσεων ή σχημάτων από εικόνες, σχέδια ή άλλες αναπαραστάσεις	**Οπτικοποίηση** *(2 ώρες)* • Αναγνώριση οπτικών γωνιών, δημιουργία οπτικοποιήσεων	Δραστηριότητες που ενθαρρύνουν τους μαθητές να παρατηρήσουν τρισδιάστατες καταστάσεις από διαφορετικές οπτικές γωνίες όπως και να ανακατασκευάσουν συνθέσεις που παρίστανται σε εικόνες ή σχέδια βελτιώνουν την οπτική ευλυγισία και την αναπαραστατική τους αντίληψη. *(ενδεικτική δραστηριότητα ΓΔ9)*	

Θεματική ενότητα: Μετρήσεις

Ενδεικτικές διδακτικές ώρες: 18

Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα (ΠΜΑ)	**Βασικά θέματα**	**Δραστηριότητες**	**Εκπαιδευτικό υλικό**
Μ1. Συγκρίνουν γωνίες άμεσα ή έμμεσα με χρήση υλικών και μέσων	**Μέτρηση γωνίας** *(2 ώρες)*		
Μ2. Αναλύουν και συνθέτουν μήκη σε μέρη. *Μ3.* Πραγματοποιούν επικαλύψεις με τυπικές μονάδες. *Μ4.* Συνδέουν το αριθμητικό αποτέλεσμα της επικάλυψης με το μήκος. *Μ5.* Επιλύουν προβλήματα μέτρησης μήκους. *Μ6.* Κάνουν εκτιμήσεις και συγκρίσεις μηκών.	**Μέτρηση μήκους** *(9 ώρες)* • Μέτρηση με χρήση τυπικών μονάδων • Χρήση οργάνων μέτρησης μήκους κι εκτιμήσεις	Ο εκπαιδευτικός προτείνει πραγματικές καταστάσεις και προβλήματα σύγκρισης και μέτρησης.	Υλικό πραγματικό ή ψηφιακό για τον υπολογισμό αθροισμάτων μηκών 
Μ7. Πραγματοποιούν έμμεσες συγκρίσεις επιφανειών. *Μ8.* Πραγματοποιούν συγκρίσεις με ανάλυση και σύνθεση επιφανειών *Μ9.* Κάνουν επικαλύψεις επιφανειών με τυπικές μονάδες μέτρησης. *Μ10.* Συνδέουν το αριθμητικό αποτέλεσμα με την επιφάνεια. *Μ11.* Επιλύουν απλά προβλήματα μέτρησης επιφάνειας με τη χρήση εμπράγματου υλικού και αναπαραστάσεων. *Μ12.* Χρησιμοποιούν τυπικές μονάδες μέτρησης επιφάνειας για να δομήσουν ορθογώνιες περιοχές σε γραμμές και στήλες. *Μ13.* Εκτιμούν το μέγεθος	**Μέτρηση επιφανειών** *(5 ώρες)* • Συγκρίσεις επιφανειών • Επικαλύψεις με τυπικές και μη τυπικές μονάδες • Δόμηση επιφάνειας και χρήση οργάνων • Εκτιμήσεις	Οι καταστάσεις άμεσης σύγκρισης επιφανειών με κόψιμο και μετακίνηση μερών επιφανειών βοηθούν τους μαθητές να αντιληφθούν το μέγεθος ‘επιφάνεια’ που αντιμετωπίζουν. *(ενδεικτική δραστηριότητα ΓΔ12)* Οι μαθητές πραγματοποιούν επικαλύψεις με τετράγωνα και υπολογισμούς που συνδέουν με τις γραμμές και τις στήλες.	

απλών επιφανειών και κάνουν συγκρίσεις			
Μ14. Συγκρίνουν όγκους κατασκευών που αποτελούνται από δομικά υλικά. *Μ15.* Μετρούν με συστηματικό τρόπο το πλήθος των κύβων που δομούν μια κατασκευή ή γεμίζουν ένα κουτί. *Μ16.* Εκτιμούν τον όγκο στερεών και κάνουν συγκρίσεις. *Μ17.* Εκτιμούν συγκρίνουν και διατάσσουν χρονικά διαστήματα με ακρίβεια τέταρτου. *Μ18.* Διερευνούν τις σχέσεις, ημερών, μήνα, έτους	**Μέτρηση χωρητικότητας- όγκου** *(2 ώρες)* • Συγκρίσεις και μετρήσεις με τυπικές και μη τυπικές μονάδες • Εκτίμηση χωρητικότητας και όγκου • Μέτρηση χρόνου		

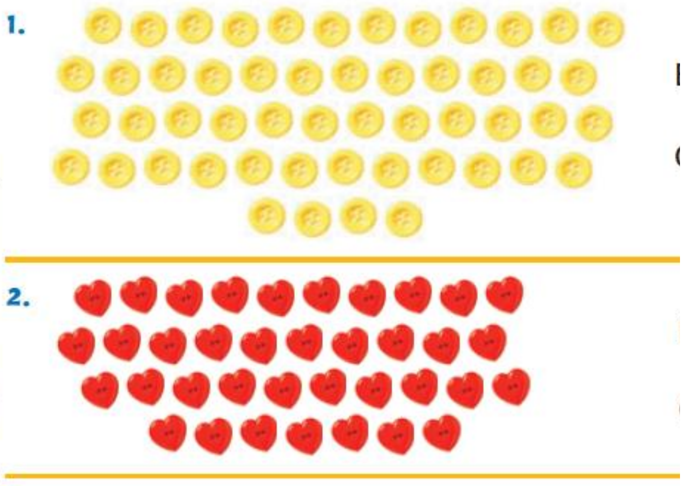
Θεματική ενότητα: Στοχαστικά Μαθηματικά (Στατιστική-Πιθανότητες)

Ενδεικτικές διδακτικές ώρες: 8

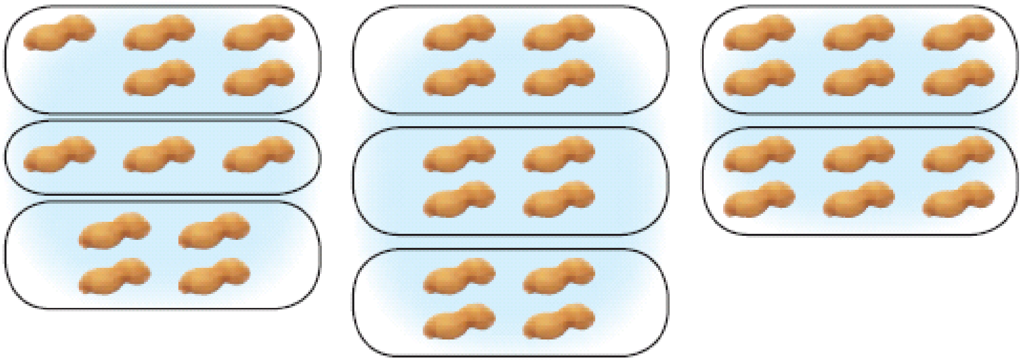
Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα (ΠΜΑ)	**Βασικά θέματα**	**Δραστηριότητες**	**Εκπαιδευτικό υλικό**
Σ1. Διατυπώνουν ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με δεδομένα (περιλαμβάνονται και διακριτά ποσοτικά) *Σ2.* Συλλέγουν δεδομένα μέσω μικρών ερευνών και τα οργανώνουν (πίνακες) *Σ3.* Επεκτείνουν τις αναπαραστάσεις των δεδομένων και στα σημειογράμματα *Σ4.* Κάνουν μετατροπές από μία μορφή αναπαράστασης	**Δεδομένα** *(3 ώρες)* • Συλλογή οργάνωση και αναπαράσταση διακριτών ποσοτικών δεδομένων	Οι μαθητές έχουν την ευκαιρία να συλλέξουν αριθμητικά δεδομένα στην τάξη τους για ένα δικό τους ερώτημα. Μέσω της οργάνωσης και της αναπαράστασης των δεδομένων κατανοούν ότι κάποιοι αριθμοί αντιπροσωπεύουν τις τιμές των δεδομένων και κάποιοι πόσο συχνά εμφανίζεται μία τιμή. Ερμηνεύουν ένα δοσμένο διάγραμμα, βρίσκοντας τίτλο και θέτοντας ερωτήσεις.	

δεδομένων σε μία άλλη *Σ5.* Διερευνούν πληροφορίες στις διαφορετικές μορφές αναπαράστασης δεδομένων		*(ενδεικτικές δραστηριότητεςΣΔ1, ΣΔ2, ΣΔ3)*	
Π1. Συνδυάζουν και διατάσσουν μικρό αριθμό αντικειμένων	**Πείραμα τύχης** *(2 ώρες)*	Οι μαθητές βρίσκουν διατάξεις 2-4 στοιχείων. *(ενδεικτική δραστηριότηταΠΔ1)*	
Π2. Συγκρίνουν ενδεχόμενα ως προς την πιθανότητα εμφάνισής τους (λιγότερο πιθανό, περισσότερο πιθανό, ισοπίθανο)	**Πιθανότητα ενδεχομένου** *(1 ώρα)*	Εμπλέκονται σε καταστάσεις σύγκρισης της πιθανότητας εμφάνισης ενός ενδεχομένου. *(ενδεικτική δραστηριότηταΠΔ2)*	

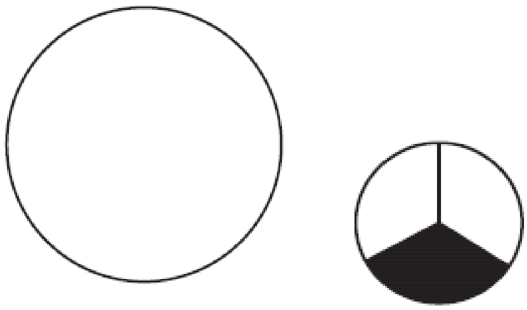
Ενδεικτικές Δραστηριότητες

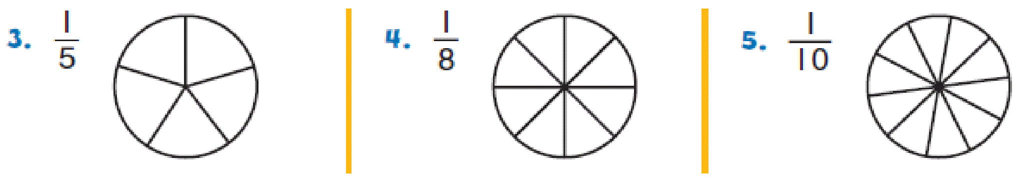
Α/Α	Περιγραφή δραστηριότητας	ΠΜΑ
ΑρΔ1	Κύκλωσε ομάδες με τον ίδιο αριθμό κουμπιών. Εκτίμησε πόσα είναι όλα. Κατόπιν μέτρησε  Εκτίμησε:......... Μέτρησε:.......... Εκτίμησε:.......... Μέτρησε:.......... Πώς σε βοήθησαν στην εκτίμηση οι ομάδες που έφτιαξες κυκλώνοντας τα κουμπιά;	**Αρ3** **Αρ9**
ΑρΔ2	Ο Γιάννης πήρε μια κάρτα που είχε έναν διψήφιο αριθμό, όπου το ψηφίο των μονάδων ήταν μεγαλύτερο από το ψηφίο των δεκάδων. Ποιος μπορεί να είναι ο αριθμός; (Οι μαθητές αναμένεται να δώσουν διαφορετικές λύσεις.) Παραλλαγή 1: Το ψηφίο των μονάδων στην κάρτα είναι μεγαλύτερο από το ψηφίο των δεκάδων και ο αριθμός μικρότερος από 50. Παραλλαγή 2: Οι μαθητές χρησιμοποιούν τον άβακα και κατασκευάζουν έναν τριψήφιο αριθμό μικρότερο από το 200 και το ψηφίο των δεκάδων μεγαλύτερο από το ψηφίο των μονάδων. Ποιος μπορεί να είναι ο αριθμός; Παραλλαγή 3: Οι μαθητές παίζουν σε ζευγάρια και κατασκευάζουν ο ένας για τον άλλον παρόμοια προβλήματα.	**Αρ7**
ΑρΔ3	Τα παιχνίδια με το καπέλο: Ο εκπαιδευτικός έχει ένα καπέλο με αριθμοκάρτες 0 - 9 . Ένας μαθητής βγάζει 2 κάρτες (ή 3 κάρτες για τριψήφιους αριθμούς) και οι μαθητές πρέπει να τοποθετήσουν τα ψηφία σε πινακάκι με δύο (Δ Μ) ή τρεις (Ε Δ Μ) στήλες έτσι ώστε ο αριθμός που θα προκύψει να είναι ο μεγαλύτερος δυνατός ή ο μικρότερος δυνατός ή ο πιο κοντινός σε αριθμό στόχο που έχει βάλει ο δάσκαλος. Παραλλαγές: Με τις δοσμένες κάρτες να κατασκευάσουν • τον αριθμό που είναι πιο κοντά στις 3 εκατοντάδες κ.ο.κ. • τον αριθμό που είναι πιο μακριά από το 4 εκατοντάδες και 3 δεκάδες κ.ο.κ. • τον αριθμό που είναι ανάμεσα στον αριθμό.....και τον αριθμό... Υλικό: καπέλο, αριθμοκάρτες 0 - 9 , ατομικά πινακάκια με 2 ή 3 στήλες	**Αρ1,** **Αρ2,** **Αρ7**
ΑρΔ4	Είμαστε σε ένα εργοστάσιο που κατασκευάζει καραμέλες. Οι καραμέλες μπαίνουν σε σακουλάκια των 10. Ο εκπαιδευτικός προτείνει στους μαθητές να πάρουν διαφορετικές ποσότητες με καραμέλες (διψήφιοι ή τριψήφιοι αριθμοί). Οι μαθητές χρησιμοποιούν BlockDienes για να αναπαραστήσουν τις ποσότητες που έχουν πάρει και τις διατάσσουν σε αριθμογραμμές. Εναλλακτικά για τους διψήφιους αριθμούς μπορούν να χρησιμοποιηθούν ράβδους	**Αρ1,** **Αρ4,** **Αρ7,** **Αρ8**

<table>
<tr><td></td><td>Cuisenaire χάρτινες.
Οι χάρτινες ράβδοι Cuisenaire μπορούν να κατασκευαστούν με χρήση προτύπων που βρίσκονται στο http://isocrates.minedu.gov.gr/content_files/tsigganopaides/MATH1.pdf, σελ.14
Για την κατασκευή αριθμού και την κατανόηση της αξίας θέσης ο εκπαιδευτικός μπορεί να ανατρέξει:
http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_152_g_1_t_1.html?from=category_ g_1_t_1.html</td><td></td></tr>
<tr><td>ΑρΔ5</td><td>Οι μαθητές βρίσκουν τον αριθμό των αυτοκόλλητων που έχει κάθε παιδί, υπολογίζοντας το αποτέλεσμα των πράξεων που αντιστοιχεί στο όνομά του.
<table>
<tr><th>Μαθητής</th><th>Πράξη</th><th>Αριθμός αυτοκόλλητων</th></tr>
<tr><td>Γιάννης</td><td>90 - 40</td><td></td></tr>
<tr><td>Πένη</td><td>6 + 2</td><td></td></tr>
<tr><td>Λένα</td><td>32 + 23</td><td></td></tr>
<tr><td>Τάκης</td><td>56 - 52</td><td></td></tr>
<tr><td>Μάριος</td><td>10 - 3</td><td></td></tr>
<tr><td>Βάσω</td><td>85 - 35</td><td></td></tr>
<tr><td>Μιχάλης</td><td>20 + 30</td><td></td></tr>
<tr><td>Κώστας</td><td>39 - 6</td><td></td></tr>
</table></td><td>Αρ9, Αρ10</td></tr>
<tr><td>ΑρΔ6</td><td>Παιχνίδια με ζάρια.
α) Δύο ζάρια συνηθισμένα. Οι μαθητές παίζουν ανά δύο. Ρίχνουν τα ζάρια εναλλάξ 5 φορές ο καθένας και βρίσκουν τα γινόμενα των αριθμών που εμφανίζονται. Τα σημειώνουν σε ένα πινακάκι. Όποιος κάνει λάθος χάνει τη σειρά του. Νικητής αυτός που έχει το μεγαλύτερο άθροισμα των γινομένων.
β) Οι μαθητές παίζουν το προηγούμενο παιχνίδι με ένα συνηθισμένο και ένα «ασυνήθιστο» ζάρι (ένα ζάρι με 10, 20,...60, ή με 11, 12, 13, 14, 15, 16, που μπορούν να κατασκευάσουν στην ώρα των καλλιτεχνικών.)</td><td>Αρ11, Αρ12, Αρ13</td></tr>
<tr><td>ΑρΔ7</td><td>Οι μαθητές περιγράφουν αρχικά προφορικά τη στρατηγική που χρησιμοποιούν για να βρουν το αποτέλεσμα 5 + 6 =......Ακούγονται διάφορες στρατηγικές.
Τις εφαρμόζουν κατόπιν γραπτά.
Ο κάθε μαθητής επεκτείνει τη στρατηγική για το άθροισμα 15 + 6 =....
35 + 6 =....κοκ
Παραλλαγές: Ο κάθε μαθητής φτιάχνει για τον διπλανό του νέα αθροίσματα αλλάζοντας τα ψηφία των μονάδων, τα ψηφία των δεκάδων ή αντιμεταθέτοντας τους προσθετέους (μονοψήφιος + διψήφιος)</td><td>Αρ10</td></tr>
<tr><td>ΑρΔ8</td><td>Οι μαθητές αναγνωρίζουν δίκαιες μοιρασιές διακριτών ποσοτήτων:
Σε ποια στήλη εμφανίζεται η δίκαιη μοιρασιά 12 φιστικιών σε 3 παιδιά; Κύκλωσέ τη.</td><td>Αρ17, Αρ18, Αρ19</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>


Η δραστηριότητα αυτή είναι αντιπροσωπευτική μιας σειράς από δραστηριότητες με δομημένα (κυβάκια,κλπ) ή μη δομημένα υλικά (φιστίκια, φασόλια κλπ) τα οποία τα παιδιά ομαδοποιούν με κάποιο κριτήριο.
</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>ΑρΔ9</td>
<td>
Οι μαθητές εργάζονται ανά δύο και χωρίζουν ζωγραφισμένες πλάκες, όπως αυτή της εικόνας, σε ίσα κομμάτια. (3, 4, 5, 6, 8, 10) Χρωματίζουν τις κλασματικές μονάδες.



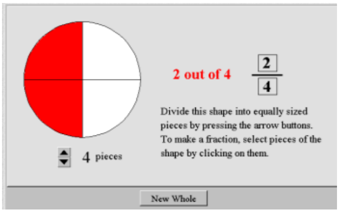
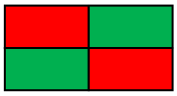
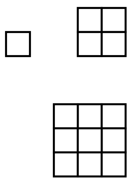


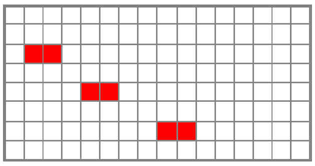
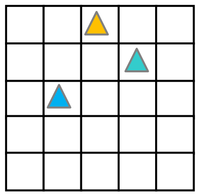
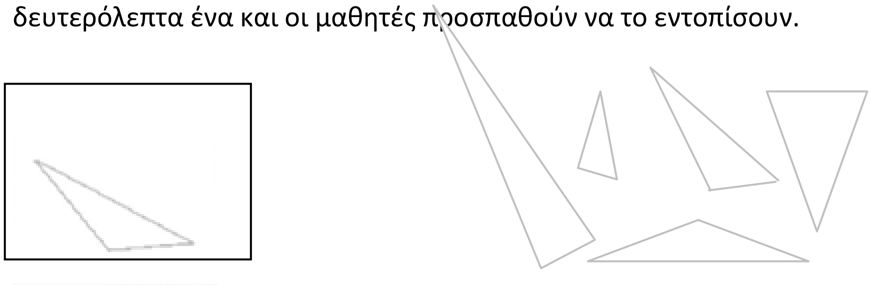
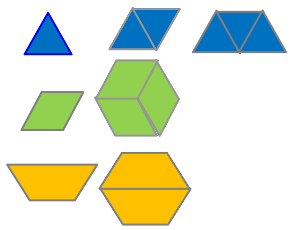
Η δράση αυτή επαναλαμβάνεται σε άλλα συνεχή μοντέλα, όπως το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, και διακριτά, όπως ξυλομπογιές, κυβάκια, καλαμάκια.
</td>
<td>Αρ17, Αρ18, Αρ19</td>
</tr>
<tr>
<td>ΑρΔ10</td>
<td>
Ο εκπαιδευτικός παρουσιάζει στους μαθητές δύο συσκευασίες γάλακτος του ενός λίτρου. Α και Β με καρτελάκια που γράφουν τις τιμές τους. Η μία κοστίζει 1 ευρώ και η άλλη 1,50 ευρώ. Ζητάει από τους μαθητές να πουν ποια είναι πιο ακριβή..
Στη συνέχεια ο εκπαιδευτικός προτείνει στους μαθητές να εργαστούν ανά δύο με τα νομίσματά τους και να κατασκευάσουν τις τιμές των δύο συσκευασιών. (Υπάρχουν αρκετοί συνδυασμοί: 1 ευρώ, 2 50λεπτα, 5 20λεπτα ...για την Α, 1ευρώ και 50 λεπτά, 3 50λεπτα,...για την Β). Απαντούν προφορικά στις ερωτήσεις: Πόσο ακριβότερο είναι το Β από το Α; Πόσο φθηνότερο είναι το Α από το Β;
Ο εκπαιδευτικός παρουσιάζει και μια τρίτη συσκευασία Γ με καρτελάκι 1, 20 ευρώ. Οι μαθητές ετοιμάζουν χρήματα και γι αυτή.
Ο εκπαιδευτικός ζητάει από τους μαθητές να κατασκευάσουν τις τιμές και των τριών συσκευασιών χρησιμοποιώντας όσο το δυνατόν λιγότερα νομίσματα. Υπάρχει μία λύση.
Οι μαθητές συμπληρώνουν το πινακάκι:
<table>
<tr><td>Συσκευασία</td><td>Τιμή</td><td>Νομίσματα</td></tr>
</table>
</td>
<td>Αρ20</td>
</tr>
</table>

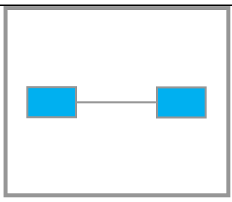
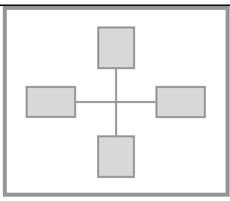
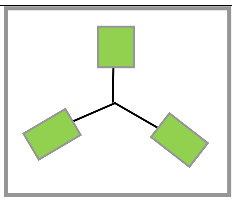
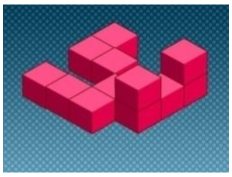
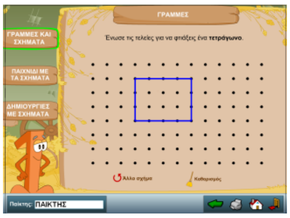
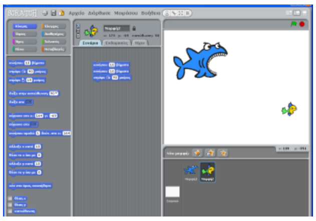
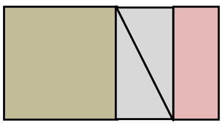
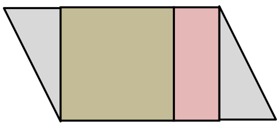
Α	1 ευρώ	
Β	1, 50 ευρώ	
Γ	1, 20 ευρώ	

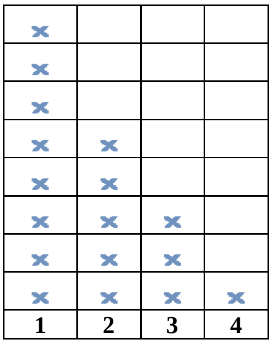
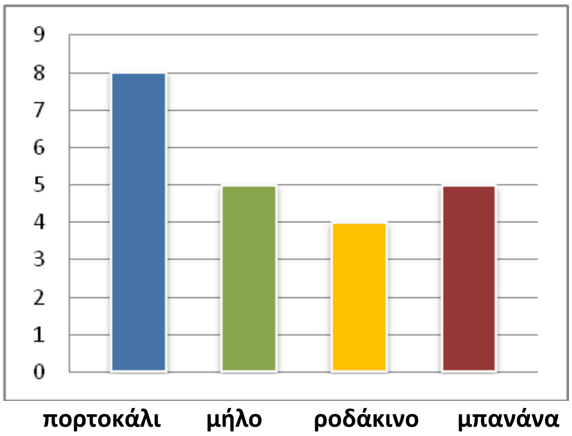
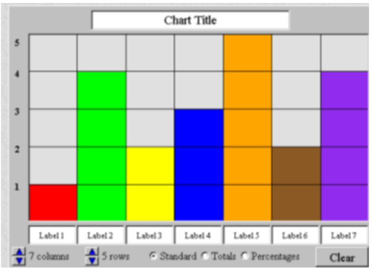
.....

Εάν το επίπεδο της τάξης το επιτρέπει μπορεί να υπάρξει και τέταρτη τιμή 1,70 ευρώ. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται...

ΑρΔ11	Με τη χρήση ψηφιακών περιβαλλόντων όπως το «Fractions – Partsof a Whole» του Πανεπιστημίου Utah των ΗΠΑ, που διατίθεται στο δικτυακό τόπο: http://nlvm.usu.edu, οι μαθητές χωρίζουν ακέραιες μονάδες σε ίσα μέρη και επιλέγουν τα μέρη που επιθυμούν. 	**Αρ17, Αρ19**
ΑΔ1	Π.χ. κομπολόγια ή συνθέσεις γεωμετρικών σχημάτων με μεταβαλλόμενη κανονικότητα, επαναλαμβανόμενη κανονικότητα και χωρίς κανονικότητα Παραδείγματα κανονικοτήτων:  Κόκκινο, κίτρινο –κόκκινο, κίτρινο - …. Κόκκινο, κόκκινο, κίτρινο – κόκκινο, κόκκινο, κίτρινο - ….. Κόκκινο, κίτρινο - κόκκινο, κόκκινο, κίτρινο, κίτρινο - κόκκινο, κόκκινο,κόκκινο, κίτρινο, κίτρινο, κίτρινο -…	**Α1**
ΑΔ2	Διερεύνηση μεταβολής εμβαδού, όταν μεταβάλλεται η πλευρά: 	**Α5**
ΓΔ1.	Οι μαθητές εντοπίζουν τη διαδρομή μέχρι το σπίτι τους σε χάρτη και δίνουν οδηγίες σε έναν επισκέπτη. Εντοπίζουν τη θέση ενός πάρκου στο χάρτη ή κάποιου άλλου χώρου που επισκέφτηκαν.	**Γ1**
ΓΔ2	Στο «Γεωπίνακα» και στο «Τετραγωνικό πλέγμα (γραμμές)» μεγέθους 30, ο εκπαιδευτικός	**Γ2,**

	με τους μαθητές κατασκευάζουν ένα τετράγωνο πλευράς 2. Καλύπτουν την επιφάνειά του με το μοναδιαίο τετράγωνο και μετρούν πόσα μοναδιαία τετράγωνα χρειάστηκαν. Μπορούν να προταθούν επεκτάσεις: - να διπλασιάσουν ή να τριπλασιάσουν την πλευρά - να πάρουν τη μισή.	**Μ9, Μ12**
ΓΔ3	Δύο παιδιά θέλουν να παίξουν ναυμαχία σε τετραγωνισμένα πλαίσιο 5Χ5 ή 10Χ10.. Πώς θα εξηγεί ο κάθε παίχτης που κάνει το χτύπημα?  	**Γ3**
ΓΔ4	Δραστηριότητα ‘φλας’: Σε μια αφίσα ή στον πίνακα είναι αναρτημένη μεγάλη ποικιλία σχημάτων σε σχήμα, μέγεθος και προσανατολισμό. Ο εκπαιδευτικός δείχνει για μερικά δευτερόλεπτα ένα και οι μαθητές προσπαθούν να το εντοπίσουν. 	**Γ4, Γ5**
ΓΔ5	Μία ομάδα παιδιών περιγράφει ένα σχήμα και οι άλλες πρέπει να το βρουν από την περιγραφή. Η δράση αυτή οδηγεί τους μαθητές να εντοπίσουν και να περιγράψουν ιδιότητες. Ανάλογα με την ποικιλία σχημάτων από την οποία επιλέγεται το σχήμα, η περιγραφή στρέφεται σε άλλες ιδιότητες. Για παράδειγμα από σύνολο τριγώνων, ή από σύνολο τετραπλεύρων κλπ. Η δράση αυτή μπορεί να πάρει και την παιγνιώδη μορφή αινίγματος: «είμαι ένα σχήμα που έχω τρεις ίσες πλευρές. Ποιο σχήμα είμαι;»	**Γ4** **Γ5**
ΓΔ6	«Πόσους συνδυασμούς μπορείς να κάνεις». Στις δράσεις αυτές οι μαθητές ξεκινούν από ένα σχήμα και δοκιμάζουν να το συνδυάσουν για να δημιουργήσουν άλλα σχήματα. 	**Γ7, Γ8**
ΓΔ7	Ο εκπαιδευτικός προτείνει μια κατασκευή με δύο (ή τρία ή τέσσερα) κουτιά που μπορεί να περιστραφεί Τοποθετεί σε ένα από τα κουτιά ένα αντικείμενο ώστε να μην είναι ορατό και το περιστρέφει. Οι μαθητές προσπαθούν να εντοπίσουν πού θα βρεθεί το αντικείμενο μετά την περιστροφή.	**Γ9**

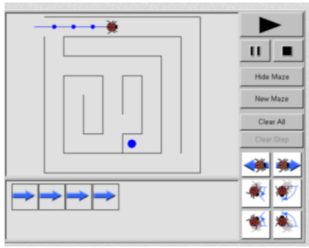
	  	
ΓΔ8	Γιατί δεν είναι συμμετρικά; Προτείνονται μία σειρά από καταστάσεις που δεν είναι συμμετρικές και εξηγώντας οι μαθητές καλούνται να εντοπίσουν τις ιδιότητες. Οι μαθητές κατασκευάζουν συμμετρικά σχήματα και σχηματισμούς σε τετραγωνισμένο και μη χαρτί	**Γ11, Γ12**
ΓΔ9	Ο εκπαιδευτικός προτείνει μια σειρά συνθέσεων από κυβάκια ή σχήματα ή άλλο υλικό και οι μαθητές δοκιμάζουν να εντοπίσουν την οπτική γωνία από την οποίο το κοιτούν. Αντίστοιχα μπορούν να προχωρήσουν σε ανακατασκευές.  ή 	**Γ13, Γ14**
ΓΔ10	Αξιοποιούν το ψηφιακό περιβάλλον του Ε.Λ. του Π.Ι. για την Α΄ και Β΄ τάξη. Ενότητα Γεωμετρία, δραστηριότητα «Γραμμές και σχήματα», http://www.pi-schools.gr/software/dimotiko/, για να σχεδιάσουν γεωμετρικά σχήματα και να μελετήσουν τις ιδιότητές τους. 	**Γ6**
ΓΔ11	Αξιοποιούν το ψηφιακά περιβάλλοντα τύπου Logo, όπως το περιβάλλον «Scratch», MIT MediaLab, εξελληνισμένο, διατίθεται δωρεάν: http://scratch.mit.edu/, για να σχεδιάσουν και να υλοποιήσουν διαδρομές μέσω αλλαγής κατεύθυνσης και προσανατολισμού. 	**Γ1**
ΓΔ12	Συγκρίσεις επιφανειών. Προτείνονται αναλύσεις-συνθέσεις για συγκρίσεις επιφανειών.  	**Μ7, Μ8**
ΣΔ1	Οι μαθητές σε ομάδες διατυπώνουν ένα ερώτημα προκειμένου να γνωρίσουν την οικογένεια των συμμαθητών τους: π.χ. «Πόσα παιδιά έχει η οικογένειά σου;», «Πόσα αδέρφια έχεις;». Συζητούν με ποιο τρόπο θα καταγράψουν τις απαντήσεις (π.χ. λίστα με ονόματα), πώς θα είναι σίγουροι ότι απάντησαν όλα τα παιδιά, πώς θα οργανώσουν τα	**Σ1, Σ2, Σ3**

	αποτελέσματα (π.χ. με πίνακα). Κατασκευάζουν ένα σημειόγραμμα, όπως το παρακάτω:  **Πόσα παιδιά έχει η κάθε οικογένεια;** Συζητούν για τις πληροφορίες του σημειογράμματος (π.χ. Πόσες οικογένειες έχουν 2 παιδιά; Οι περισσότερες οικογένειες πόσα παιδιά έχουν;)	
ΣΔ2	Τα παιδιά χωρίζονται σε ομάδες και τους δίνουμε ένα διάγραμμα όπως το παρακάτω.  Η κάθε ομάδα προτείνει έναν τίτλο για το διάγραμμα και γράφει δύο τουλάχιστον ερωτήματα που αναφέρονται στις πληροφορίες του διαγράμματος. Οι ομάδες συζητούν για τις πιθανές διαφορετικές ερμηνείες του διαγράμματος.	**Σ5**
ΣΔ3	Με ψηφιακά περιβάλλοντα, όπως το «BarChart» ή «PieChart»του Πανεπιστημίου Utah των ΗΠΑ, που διατίθεται στο δικτυακό τόπο: http://nlvm.usu.edu, συλλέγουν δεδομένα μέσω μικρών ερευνών και τα παρουσιάζουν με διαγράμματα.  	**Σ2**
ΠΔ1	Οι μαθητές σε ομάδες έχουν στη διάθεσή τους 3 ψηφία (π.χ. 1,2,3 η μία ομάδα, 4,5,6 η άλλη ομάδα κ.λπ.) και κάνουν διάφορους συνδυασμούς προκειμένου να σχηματίσουν αριθμούς, αν κάθε ψηφίο χρησιμοποιείται μία φορά. Πόσοι διψήφιοι αριθμοί υπάρχουν; Πόσοι τριψήφιοι αριθμοί υπάρχουν;	**Π1**
ΠΔ2	Τοποθετούμε σε ένα αδιαφανές κουτί αντικείμενα της ίδιας κατηγορίας (π.χ. μπάλες, μαρκαδόρους) σε διαφορετικές αναλογίες κάθε φορά (π.χ. 4 κίτρινες -1 μπλε μπάλα, 1	**Π2**

	κίτρινη-4 μπλε μπάλες). Οι μαθητές μαντεύουν τι είναι περισσότερο ή λιγότερο πιθανό να τύχει, αν τραβήξουν ένα αντικείμενο με κλειστά μάτια. -Κάθε μαθητής αρχικά εκφράζει και δικαιολογεί την πρόβλεψή του και την καταγράφει σε έναν πίνακα. -Στη συνέχεια κάθε μαθητής τραβάει ένα αντικείμενο με κλειστά μάτια και καταγράφει το αντικείμενο που τυχαίνει σε μία διπλανή στήλη του πίνακα. -Συζητούν τα αποτελέσματα που προέκυψαν και ανακοινώνουν το συμπέρασμα στο οποίο κατέληξαν.	

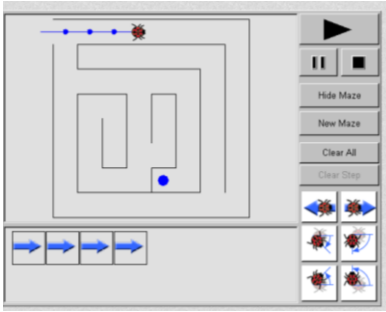
ΣΥΝΘΕΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ 1ου ΚΥΚΛΟΥ (Α΄& Β΄ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ)

Πίνακας Περιεχομένων

Α/Α	Τίτλος	Θέμα	Τάξη	Εκπαιδευτικό υλικό
1	«Θεατρικό παιχνίδι με την πασχαλίτσα»	Ο εκπαιδευτικός οργανώνει στην αίθουσα διδασκαλίας θεατρικό παιχνίδι. Ένα παιδί υποδύεται την πασχαλίτσα και οι υπόλοιποι μαθητές δίνουν συγκεκριμένες οδηγίες-εντολές (βήματα μπροστά πίσω, στρίψε δεξιά αριστερά) για να την οδηγήσουν σε ένα ορισμένο σημείο της τάξης. Το θεατρικό παιχνίδι συνεχίζεται και το ρόλο της πασχαλίτσας υποδύονται και άλλοι μαθητές. (Γεωμετρία – Θεατρικό Παιχνίδι)	Α΄ δημοτικού	Τεχνολογικά περιβάλλοντα τύπου Logo, όπως για παράδειγμα το περιβάλλον «Ladybug Mazes» του Πανεπιστημίου Utah των ΗΠΑ, http://nlvm.usu.edu 
2	«Ο δικός μας κήπος»	Οι μαθητές αποφασίζουν να μελετήσουν την ανάπτυξη των φυτών τους. Χρησιμοποιούν άτυπες ή/και τυπικές μονάδες μέτρησης για να μετρήσουν το ύψος των φυτών. Αναπτύσσουν στρατηγικές καταμέτρησης των φύλλων των φυτών. Συνδέουν τα αποτελέσματα τους με την ανάπτυξη των φυτών γενικά καθώς με την ανάπτυξη των ανθρώπων	Α΄- Β΄ Δημοτικού	Ομοιόμορφες χάρτινες λωρίδες, χαρακάκια, χρώματα, εικόνες από περιοδικά, φωτογραφική μηχανή, παραμύθια και το ανθολόγιο Α΄ και Β΄ Δημοτικού.
3	«Κυκλοφορώ με ασφάλεια»	Στο πλαίσιο των Μαθηματικών (Γεωμετρία-χαρακτηριστικά και ιδιότητες επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων) και της Μελέτης του Περιβάλλοντος (κυκλοφοριακή Αγωγή) εκπαιδευτικοί και μαθητές διαμορφώνουν την αυλή του σχολείου ως πάρκο κυκλοφοριακής αγωγής με τη βοήθεια της Τροχαίας ή εναλλακτικά επισκέπτονται κοντινό δημοτικό πάρκο κυκλοφοριακής αγωγής. Συζητούν για τους κανόνες του ΚΟΚ και ομαδοποιούν τις πινακίδες κυκλοφορίας με βάση τις πληροφορίες που δίνουν,το γεωμετρικό τους σχήμα και χρώμα. (Μαθηματικά και Μελέτη Περιβάλλοντος-Κυκλοφοριακή αγωγή)	Β΄ δημοτικού	Από το δικτυακό τόπο του Υπουργείου Μεταφορών και Επικοινωνιών http://www.yme.gr, βρίσκουν και μεταφορτώνουν τον Κώδικα Οδικής Κυκλοφορίας (ΚΟΚ). 

ΣΥΝΘΕΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ 1 (Α΄Δημοτικού)
«Θεατρικό παιχνίδι με την πασχαλίτσα»

Ο εκπαιδευτικός προτείνει στους μαθητές να παίξουν ένα θεατρικό παιχνίδι με μια πασχαλίτσα που έχει χαθεί και ψάχνει να βρει το δρόμο της .



Ενδεικτικές φάσεις εφαρμογής

Η εφαρμογή των δραστηριοτήτων μπορεί να χωριστεί στις ακόλουθες φάσεις:

1η φάση: Μία μαθήτρια υποδύεται την πασχαλίτσα και οι υπόλοιποι μαθητές της δίνουν συγκεκριμένες οδηγίες-εντολές (βήματα μπροστά-πίσω, στρίψε δεξιά-αριστερά) για να την οδηγήσουν σε ένα ορισμένο σημείο της τάξης. Το θεατρικό παιχνίδι συνεχίζεται και με άλλους μαθητές στο ρόλο της πασχαλίτσας.

2η φάση: Οι μαθητές στη συνέχεια ανοίγουν το ψηφιακό περιβάλλον «Ladybug Mazes» του Πανεπιστημίου Utah των ΗΠΑ, στο δικτυακό τόπο http://nlvm.usu.edu και αφού πρώτα κάνουν τον εικονιδιακό προγραμματισμό στο κάτω μέρος του περιβάλλοντος οδηγούν την πασχαλίτσα στο σημείο που βρίσκεται η μπλε τελεία. Σε περίπτωση λάθους επανέρχονται στις εντολές του προγραμματισμού και κάνουν τις απαραίτητες διορθώσεις. Προτείνουν επίσης και υλοποιούν εναλλακτικές διαδρομές για να οδηγήσουν την πασχαλίτσα στο στόχο (μπλε τελεία).

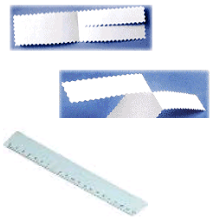
Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Οι μαθητές εντοπίζουν, περιγράφουν και αναπαριστούν θέσεις, διευθύνσεις και διαδρομές στο χώρο ως προς διαφορετικά συστήματα αναφοράς με τη χρήση ποικίλλων χωρικών εννοιών. Η δραστηριότητα μέσα από τις συγκεκριμένες κιναισθητικές δραστηριότητες-θεατρικό παιχνίδι- αποσκοπεί στην κατανόηση των προαναφερθέντων εννοιών της Γεωμετρίας και την απόκτηση θετικής στάσης των μαθητών προς τα Μαθηματικά.

ΣΥΝΘΕΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ 2 (Α΄- Β΄ Δημοτικού)
«Ο δικός μας κήπος: παρακολουθώντας την ανάπτυξη των φυτών στην τάξη»

Οι μαθητές και ο εκπαιδευτικός της τάξης αποφασίζουν να δημιουργήσουν ένα δικό τους κήπο στην τάξη και να μελετήσουν την ανάπτυξη των φυτών που θα προκύψουν 1 φορά/ εβδομάδα την ώρα της Μελέτης Περιβάλλοντος για 3-4 εβδομάδες.





Ενδεικτικές φάσεις εφαρμογής

$1^{η}$ φάση: Οι μαθητές φυτεύουν σπόρους φακής σε κεσεδάκια. Μπορεί να έχουν ένα κεσεδάκι/δύο μαθητές. Συζητούν και αποφασίζουν ότι θα πρέπει να περιμένουν λίγο καιρό (προτείνεται μία εβδομάδα) για να διαπιστώσουν ότι φυτρώνουν φυτά των οποίων την ανάπτυξη μπορούν να μετρήσουν.

$2^{η}$ φάση: (μετά από μια βδομάδα περίπου)

Ο εκπαιδευτικός θέτει την ερώτηση: -Πώς θα μετράμε πόσο μεγάλωσαν τα φυτά μας;

Ενθαρρύνει τους μαθητές να προτείνουν τις δικές τους ιδέες σχετικά

α) με τους τρόπους καταμέτρησης των μικρών φυτών (μίσχων) σε κάθε κεσεδάκι (απαρίθμηση),

β) καταμέτρησης του αριθμού των φύλλων (απαρίθμηση) και

γ) του ύψους του υψηλότερου φυτού σε κάθε κεσεδάκι.

Για τα α) και β) οι μαθητές αναπτύσσουν στρατηγικές για να μετρήσουν κάθε φορά πόσα είναι τα φυτά και πόσα τα φύλλα των φυτών. Σημειώνουν τα αποτελέσματα σε πινακάκι.

Για το γ): εάν οι μαθητές υποδείξουν άτυπες μονάδες μέτρησης του ύψους, όπως για παράδειγμα μολύβια ή γόμες, ο εκπαιδευτικός μπορεί να προτείνει μικρές ομοιόμορφες λωρίδες χαρτί πάνω στις οποίες θα σημειώνονται οι μετρήσεις με διαφορετικό χρώμα κάθε φορά. Στο τέλος θα κληθούν να μετρήσουν με χαρακάκι στα χαρτονάκια τους για να μπορέσουν να συγκρίνουν τα αποτελέσματά τους.

Εάν οι μαθητές υποδείξουν τα χαρακάκια τους, τότε ο εκπαιδευτικός ετοιμάζει πινακάκια για τα ζευγάρια των μαθητών, όπου τα παιδιά θα σημειώσουν τις ημερομηνίες και τις μετρήσεις.

Τα παιδιά πριν από κάθε μέτρηση μπορεί να υποθέσουν αρχικά το νέο ύψος και μετά να επαληθεύσουν με μέτρηση.

$3^{η}$ φάση: (μετά από 2 βδομάδες)

Επαναλαμβάνονται οι μετρήσεις για τα α), β), γ) και σημειώνονται στα πινακάκια.

$4^{η}$ φάση: (μετά από 3 ή 4 εβδομάδες)

Ο εκπαιδευτικός και οι μαθητές διαπιστώνουν ότι η ανάπτυξη των φυτών έχει ολοκληρωθεί. Συγκρίνουν τα τελικά αποτελέσματα των μετρήσεών τους. Διαπιστώνουν πόσο μεγάλωσαν τα φυτά τους ως προς τα α), β), γ).
Συμπεραίνουν ότι η ανάπτυξη των φυτών αλλά και των υπόλοιπων ζωντανών οργανισμών (ζώων, ανθρώπων) ολοκληρώνεται κάποτε.

Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα
Μαθηματικά
Στην παρούσα εργασία οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα
- να απαριθμήσουν στοιχεία σε ρεαλιστικά περιβάλλοντα όπου τα αντικείμενα δεν είναι στη σειρά ή σε κανονική κατανομή όπως έχουν συνηθίσει στην τάξη των μαθηματικών.
-να πραγματοποιήσουν μετρήσεις ύψους με άτυπες και τυπικές μονάδες μέτρησης σε πραγματικές καταστάσεις
-να διαπιστώσουν την ανάγκη κοινής μονάδας μέτρησης του ύψους των φυτών και καταγραφής των μετρήσεων με οργανωμένο τρόπο (πινακάκι, ημερομηνία) ώστε να μπορούν να τις συγκρίνουν
-να υπολογίσουν τις διαφορές που προκύπτουν από τις νέες μετρήσεις με διάφορες στρατηγικές (αφαίρεση, συμπλήρωμα)
-να χρησιμοποιήσουν τα αποτελέσματα των μετρήσεων για να οδηγηθούν σε συμπεράσματα σχετικά με το αρχικό πρόβλημα που είναι η ανάπτυξη των φυτών.

Περιβάλλον
Οι μαθητέςσυζητούν για τουςπαράγοντες που επηρεάζουν την μετατροπή του σπόρου σε φυτό, για το ρόλο του χρόνου στην ανάπτυξη ενός φυτού, για την ολοκλήρωση της ανάπτυξης των ζωντανών οργανισμών (φυτά, ζώα, άνθρωποι) και για το τι παραμένει σταθερό μετά την ολοκλήρωση της ανάπτυξης (πχ το ύψος) και τι όχι (πχ ο αριθμός των φύλλων).

Γλώσσα
Οι μαθητέςακούνε ή διαβάζουν από το Ανθολόγιο Α και Β Δημοτικού: Φύλλο φύλλο της κουκιάς (Λαϊκό παραμύθι της Μήλου, σελ.56), Το γιασεμί, η ροδιά και η χαρουπιά (Λαϊκό παραμύθι, σελ.80) και άλλα παραμύθια.

Εικαστικά
Οι μαθητέςκατασκευάζουν τις χάρτινες λωρίδες με τις οποίες θα κάνουν τις μετρήσεις και αναγνωρίζουν την ανάγκη να χρησιμοποιήσουν διαφορετικά χρώματα γιακάθε καινούρια μέτρηση.
Οι μαθητές κατασκευάσουν κολάζ είτε με φωτογραφίες των δικών τους φυτών που έχουν βγάλει στην τάξη με τη μηχανή τους από διάφορες οπτικές γωνίες είτε με εικόνες από περιοδικά που δείχνουν γνωστά τους φυτά.

ΣΥΝΘΕΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ 3 (Α΄- Β΄ Δημοτικού)
«Κυκλοφορώ με ασφάλεια»

Οι μαθητές επισκέπτονται κοντινό δημοτικό πάρκο κυκλοφοριακής αγωγής και αποφασίζουν να διαμορφώσουν την αυλή του σχολείου ως πάρκο κυκλοφοριακής αγωγής. Ζητούν τη βοήθεια της τροχαίας, συζητούν για τους κανόνες του ΚΟΚ και ομαδοποιούν τις πινακίδες κυκλοφορίας.


Ενδεικτικές φάσεις εφαρμογής

1η φάση: Οι μαθητές επισκέπτονται το δικτυακό τόπο του Υπουργείου Μεταφορών και Επικοινωνιών http://www.yme.gr, βρίσκουν τον ΚΟΚ, τα οδικά σήματα κυκλοφορίας και συζητούν για τα μηνύματα και τις πληροφορίες που μας δίνει το καθένα χωριστά. Κατόπιν, τα ταξινομούν-ομαδοποιούν με βάση τις πληροφορίες που δίνουν (π.χ. σήματα αναγγελίας κινδύνου, κλπ) και στη συνέχεια με τι κοινό έχουν μεταξύ τους (π.χ. γεωμετρικό σχήμα και χρώμα).

2η φάση: Οι μαθητές μεταβαίνουν στην αυλή του σχολείου και με τη συνεργασία των εκπαιδευτικών ή του προσωπικού της τροχαίας εφαρμόζουν στην πράξη τους κανόνες του Κ.Ο.Κ.

3η φάση: Επανέρχονται στην αίθουσα διδασκαλίας και συζητούν για τη σημασία της τήρησης των κανόνων του ΚΟΚ για την πρόληψη και την αποφυγή ατυχημάτων.

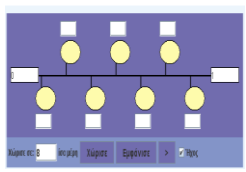
Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

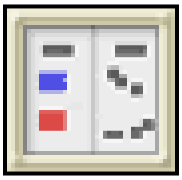
Η εργασία φιλοδοξεί στη σύνδεση των Μαθηματικών (Γεωμετρία, ιδιότητες γεωμετρικών σχημάτων) με την πραγματικότητα (οδικά σήματα κυκλοφορίας) και την εμπλοκή των μαθητών σε βιωματικές δραστηριότητες. Οι μαθητές διερευνούν και ταξινομούν τα επίπεδα γεωμετρικά σχήματα με βάση τα κοινά τους χαρακτηριστικά γνωρίσματα.

Γ΄ Δημοτικού

Θεματική ενότητα: Αριθμοί – Άλγεβρα

Ενδεικτικές διδακτικές ώρες: 74 (65 + 9)

Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα (ΠΜΑ)	**Βασικά θέματα**	**Δραστηριότητες**	**Εκπαιδευτικό υλικό**
Αρ1. Απαγγέλουν, διαβάζουν και γράφουν φυσικούς αριθμούς. *Αρ2.* Αναγνωρίζουν αριθμούς σε μια ποικιλία από πλαίσια και σχηματισμούς, χρησιμοποιώντας στρατηγικές άμεσης αναγνώρισης και αντιστοίχισης. *Αρ3.* Αναπαριστούν φυσικούς αριθμούς με αντικείμενα, εικόνες, λέξεις και σημεία στην ευθεία και σύμβολα. *Αρ4.* Καταμετρούν αντικείμενα (σε ομάδες) και αναπτύσσουν στρατηγικές μέτρησης. *Αρ5.* Αριθμούν και καταμετρούν αντικείμενα ανά 20, 50, 100, αναπαριστώντας τις αντίστοιχες διαδικασίες με διαφορετικούς τρόπους. *Αρ6.* Συγκρίνουν και διατάσσουν φυσικούς αριθμούς και βρίσκουν τη θέση ενός αριθμού στην αριθμογραμμή. *Αρ7.* Αναλύουν και συνθέτουν αριθμούς με διαφορετικούς τρόπους. *Αρ8.* Διερευνούν πώς κατασκευάζονται οι	**Φυσικοί Αριθμοί (ως το 10.000)** • αριθμητικά σύμβολα • άμεση αναγνώριση • καταμέτρηση ποσοτήτων και αρίθμηση • διάταξη αριθμών • σχέσεις αριθμών • θεσιακή αξία ψηφίων • εκτιμήσεις • πράξεις στους φυσικούς αριθμούς • πρόσθεση και αφαίρεση αριθμών • πολλαπλασιασμός και διαίρεση φυσικών αριθμών (*47 ώρες*)	Οι δραστηριότητες της αίσθησης του αριθμού είναι απαραίτητες για την οικοδόμηση αριθμητικών σχέσεων και ενισχύουν τον ευέλικτο τρόπο σκέψης και τις διαισθητικές ιδέες σχετικά με τον αριθμό. Ένα μέρος της αίσθησης του αριθμού αφορά την ικανότητα διάσπασης των αριθμών και τον ευέλικτο συνδυασμό τους. Η αντίληψη των αριθμών και η κατανόηση των υπολογισμών αναπτύσσονται μέσω της βαθιάς κατανόησης της αξίας θέσης. Η κατανόηση αυτή είναι εφικτή όταν ο εκπαιδευτικός αποφύγει να αποδώσει τη μαθηματική ορολογία πριν οι μαθητές συνειδητοποιήσουν τι συμβολίζει αυτή η ορολογία. (*ενδεικτικές δραστηριότητες ΑρΔ1, ΑρΔ2, ΑρΔ3, ΑρΔ4, ΑρΔ5*)	Μαθηματικά Γ΄ Δημοτικού, Βιβλίο του Μαθητή, ΟΕΔΒ, «Ο μετρητής των χιλιομέτρων», σελ. 42. Ψηφιακό περιβάλλον για την τοποθέτηση αριθμών στην αριθμογραμμή http://www.pi-schools.gr 

φυσικοί αριθμοί, κατανοούν τη σημασία του μηδενός στο σύνολο των φυσικών αριθμών και τη σχέση μεταξύ ενός ψηφίου και της αξίας του. *Αρ9.* Εκτιμούν με διαφορετικούς τρόπους την πληθικότητα ενός συνόλου που περιλαμβάνει μέχρι 1000 στοιχεία. *Αρ10.* Αναπτύσσουν και εφαρμόζουν αλγόριθμους της πρόσθεσης, της αφαίρεσης και του πολλαπλασιασμού με τριψήφιους αριθμούς και της διαίρεσης με μονοψήφιο διαιρέτη, χρησιμοποιώντας μια ποικιλία από στρατηγικές, μέσα και αναπαραστάσεις. *Αρ11.* Διερευνούν κι εφαρμόζουν στρατηγικές νοερών υπολογισμών προσθέσεων κι αφαιρέσεων τριψήφιων αριθμών. *Αρ12.* Κατανοούν την προπαίδεια του πολλαπλασιασμού και τη διαίρεση ως αντίστροφη πράξη του πολλαπλασιασμού. *Αρ13.* Αναπτύσσουν στρατηγικές στην επίλυση και κατασκευή προβλημάτων και χρησιμοποιούν μοντέλα και αναπαραστάσεις για να τις τεκμηριώσουν και να τις κοινοποιήσουν σε άλλους.			Δραστηριότητα σχετικά με την αφαίρεση με blocks http://nlvm.usu.edu/en/nav/grade_g_3.html 
Αρ14. Χωρίζουν σε ίσα μέρη διακριτές και συνεχείς ποσότητες (σε εικονική	**Κλασματικοί αριθμοί**	Η έννοια του κλασματικού μέρους σχετίζεται απόλυτα με	Μαθηματικά Γ΄ Δημοτικού, Βιβλίο του Μαθητή, ΟΕΔΒ, σελ 65,

και συμβολική μορφή, π.χ. γραμμές, δυσδιάστατα σχήματα). *Αρ15.* Συγκρίνουν δύο ποσότητες, προσδιορίζουν τη σχέση μεγέθους τους, χρησιμοποιούν την κλασματική αναπαράσταση και την τοποθετούν στην αριθμογραμμή. *Αρ16.* Εκφράζουν την ίδια σχέση με διαφορετικές κλασματικές αναπαραστάσεις. *Αρ17.* Βρίσκουν έναν ενδιάμεσο κλασματικό αριθμό (μεταξύ ½ και ¼ ή μεταξύ 2/3 και ¾).	*(10 ώρες)*	το όλο. Σημαντικό σημείο στην ανάπτυξη της ιδέας του κλάσματος είναι να βοηθηθούν οι μαθητές στο να κατασκευάσουν την ιδέα των κλασματικών μερών του συνόλου. Όταν καλλιεργηθεί η ιδέα των κλασματικών μερών ή των ίσων μεριδίων, τότε είναι εφικτό ο εκπαιδευτικός να τα αποκαλέσει τέταρτα ή τρίτα ή οτιδήποτε άλλο και να τα απαριθμήσει με τον ίδιο τρόπο που απαριθμεί και άλλα αντικείμενα. Η αριθμητική αντίληψη για τα κλάσματα απαιτεί από τους μαθητές κάποια διαισθητική κατανόηση των κλασμάτων. Θα πρέπει να γνωρίζουν περίπου πόσο μεγάλο είναι ένα κλάσμα και να μπορούν να πουν με ευκολία ποιο είναι μεγαλύτερο μεταξύ δύο κλασμάτων. Τα σύμβολα των κλασμάτων θα πρέπει να εισαχθούν αργότερα. Η ικανότητα ενός μαθητή να διακρίνει από δύο κλάσματα το μεγαλύτερο αποτελεί μια επιπλέον πτυχή της αντίληψης για τα κλάσματα. Η ικανότητα αυτή δομείται γύρω από έννοιες σχετικές με τα κλάσματα και όχι με βάση την αλγοριθμική ικανότητα ή κάποιο τέχνασμα με τα	δραστηριότητα 3 «Σχηματίζω ένα ευρώ με διαφορετικούς τρόπους και βρίσκω ισοδύναμα κλάσματα».

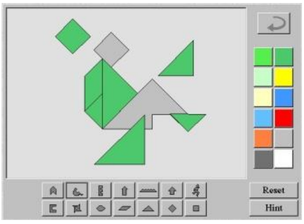
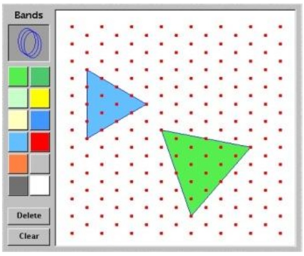
		σύμβολα. (*ενδεικτικές δραστηριότητες ΑρΔ6, ΑρΔ7*)	
Αρ18. Κατανοούν και χρησιμοποιούν το δεκαδικό συμβολισμό για τα δέκατα και τα εκατοστά μέσα σε πλαίσια. *Αρ19.* Στρογγυλοποιούν έναν αριθμό με ένα ή δύο δεκαδικά ψηφία στον πλησιέστερο ακέραιο ή στο πλησιέστερο δέκατο.	**Δεκαδικοί αριθμοί** *(8 ώρες)*	Η διαδικασία της στρογγυλοποίησης αριθμών δεν πρέπει να διδάσκεται ως αλγόριθμος χωρίς να αναπτύσσεται η σκέψη σε σχέση με το πώς λειτουργεί ο αλγόριθμος. Η στρογγυλοποίηση ενός αριθμού σημαίνει την αντικατάσταση ενός «δυσκίνητου» αρχικού αριθμού με έναν «καλό» αριθμό που να συνιστά μια κατά προσέγγιση απόδοσή του. (ενδεικτική δραστηριότητα ΑρΔ8)	Μαθηματικά Γ΄ Δημοτικού, Βιβλίο του Μαθητή, ΟΕΔΒ, σελ.95, δραστηριότητα 3 «Ελληνικοί μεζέδες».
Α1. Αναγνωρίζουν, διερευνούν, περιγράφουν και συμπληρώνουν αριθμητικές και γεωμετρικές κανονικότητες. *Α2.* Αναπαριστούν μια κανονικότητα με διαφορετικά μέσα (λεκτικά, αριθμητικά, εικονικά). *Α3.* Συγκρίνουν απλές κανονικότητες. *Α4.* Διατυπώνουν τον κανόνα μιας κανονικότητας.	***Κανονικότητες/ συναρτήσεις*** *(4 ώρες)*	Είναι σημαντικό να χρησιμοποιηθούν διάφορες κανονικότητες, μέσω των οποίων οι μαθητές να μπορέσουν να αποκτήσουν μια αίσθηση της σειράς και της οργάνωσης διαφόρων καταστάσεων γύρω τους. Επίσης, να ασκήσουν την παρατηρητικότητά τους στην ακρίβεια και στην εκτέλεση συγκεκριμένων διαδοχικών βημάτων . Η σύγχρονη βιβλιογραφία προτείνει ότι η προσέγγιση των αλγεβρικών ιδεών προϋποθέτει τη συνειδητοποίηση από το μαθητευόμενο των δυνατοτήτων του νου	Βιβλίο μαθητή σελίδα 116 εργασία 1, σελίδα 117 εργασία 3 Λογισμικό κεφάλαιο «διαίρεση φυσικών αριθμών». Χειραπτικό υλικό χάντρες, κάρτες, χρωματιστοί κύβοι κ.λπ.

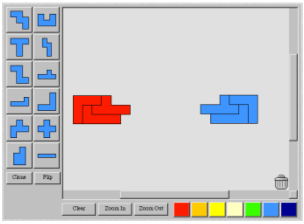
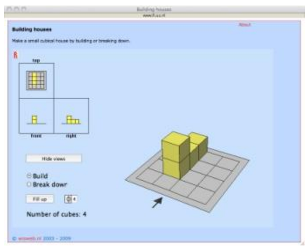
		να αντιλαμβάνεται σχέσεις. *(ενδεικτικές δραστηριότητές ΑΔ1, ΑΔ2).*	
Α5. Χρησιμοποιούν σύμβολα (ως αγνώστους και ως μεταβλητές) και τα αντικαθιστούν με αριθμούς σε «κλειστές» (πχ . 3+□=9) και σε ανοιχτές αριθμητικές προτάσεις (πχ r+□=8).	***Αλγεβρικές παραστάσεις*** *(2 ώρες)*	Οι σχετικές έρευνες αποδίδουν την επιτυχία σε αυτού του είδους τις δραστηριότητες στην προοδευτική συνειδητοποίηση από τους μαθητές των βασικών ιδιοτήτων και δομικών χαρακτηριστικών των τεσσάρων πράξεων της αριθμητικής.	
Α6. Συγκρίνουν και διατάσσουν αριθμούς από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο και από μεγαλύτερο προς το μικρότερο (φυσικούς). *Α7.* Χρησιμοποιούν κατάλληλο σύμβολο (ισότητας - ανισότητας) για την αναπαράσταση μιας σχέσης μεταξύ αριθμών (π.χ. 7+5 … 10+2 ή 6-1 … 5+2) *Α8.* Συμπληρώνουν ισότητες με κατάλληλο αριθμό (π.χ. 8+3=□+7 ή 6+□=10-1). *Α9.* Προσδιορίζουν τον αριθμό που πρέπει να προστεθεί σε έναν άλλο για να προκύψει ένας τρίτος αριθμός (π.χ. 7+□=21)	***Ισότητες-ανισότητες*** *(3 ώρες)*		

Θεματική ενότητα: Χώρος και Γεωμετρία – Μέτρηση

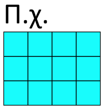
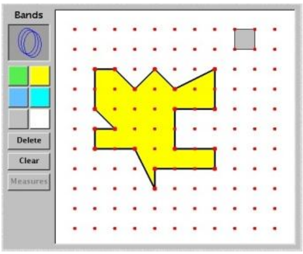
Ενδεικτικές διδακτικές ώρες: 36 (22 + 14)

Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα (ΠΜΑ)	**Βασικά θέματα**	**Δραστηριότητες**	**Εκπαιδευτικό υλικό**
Γ1. Ερμηνεύουν και κατασκευάζουν απλούς χάρτες για να δείξουν τις θέσεις και τις διαδρομές μεταξύ σημείων αναφοράς (πρώτη επαφή με συντεταγμένες). *Γ2.* Χρησιμοποιούν συντεταγμένες για την ερμηνεία και κατασκευή απλών χαρτών.	***Έννοιες του χώρου*** • διευθύνσεις, θέσεις και διαδρομές • ανάγνωση και δημιουργία χαρτών • δόμηση του χώρου και συντεταγμένες (2 ώρες)	Μέσω των κινήσεων σε τετραγωνισμένους καμβάδες, οι μαθητές προετοιμάζονται για τη χρήση αλφαριθμητικών και Καρτεσιανών συντεταγμένων που θα ακολουθήσουν στις επόμενες τάξεις. *(ενδεικτική δραστηριότητα ΓΔ1)*	Τετραγωνισμένοι καμβάδες, απλοί χάρτες.
Γ3. Διευρύνουν την αναγνώριση και κατάταξη επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων και στερεών, με βάση πλευρές και γωνίες. *Γ4.* Αναγνωρίζουν και διερευνούν χαρακτηριστικά επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων και βασικών στερεών που αφορούν σε πλευρές και γωνίες. *Γ5.* Χρησιμοποιούν όρους όπως κορυφή, ακμή, έδρα όταν περιγράφουν απλά γεωμετρικά στερεά. *Γ6.* Διερευνούν τις σχέσεις μεταξύ τετραπλεύρων. *Γ7.* Συγκρίνουν γωνίες χρησιμοποιώντας την ορθή ως μέτρο. *Γ8.* Σχεδιάζουν επίπεδα γεωμετρικά σχήματα πάνω σε διάφορους καμβάδες και σε λευκό χαρτί με χρήση χάρακα.	***Γεωμετρικά σχήματα*** • αναγνώριση, ονομασία και ταξινόμηση γεωμετρικών σχημάτων και στερεών • ανάλυση γεωμετρικών σχημάτων και στερεών σε στοιχεία και ιδιότητες • κατασκευές και σχεδιασμός γεωμετρικών σχημάτων και στερεών • σύνδεση μεταξύ γεωμετρικών σχημάτων και στερεών • ανάλυση ή σύνθεση γεωμετρικών σχημάτων και στερεών σε άλλα σχήματα ή μέρη *(14ώρες)*	Είναι σημαντικό ο εκπαιδευτικός να εστιάσει στην ανάδειξη των ιδιαίτερων χαρακτηριστικών των γεωμετρικών εννοιών, ώστε να αποφύγουν οι μαθητές προτυπικές αντιλήψεις που σχετίζονται, για παράδειγμα, με τον τρόπο αναπαράστασης των εννοιών αυτών. Εκτός από τα φυσικά υλικά αναπαράστασης και τα χειραπτικά υλικά, η γλώσσα που θα χρησιμοποιήσουν οι μαθητές για να περιγράψουν τις εμπειρίες τους είναι εξίσου σημαντική, μιας και προετοιμάζει την εξέλιξη σε ένα επόμενο στάδιο κατανόησης των γεωμετρικών εννοιών. *(ενδεικτικές δραστηριότητες ΓΔ2,*	Μαθηματικά Γ' Δημοτικού, Βιβλίο του Μαθητή, ΟΕΔΒ, σελ. 16-17, σελ. 30-31, σελ. 46-47. Μαθηματικά, Βιβλίο του Μαθητή, Επίπεδο Διδασκαλίας Β΄, Πρόγραμμα «Ένταξη Τσιγγανοπαίδων στο Σχολείο», σελ. 7-15. http://www.pre.uth.gr/main/index.php?option=com_content&view=category&layout=blog&id=35&Itemid=52. Έτοιμες συλλογές σχημάτων (Alfa Shapes, Shape Set), σχήματα από μακετόχαρτο, γεωπίνακες, Polydron, Τάνγκραμ, Πεντόμινο, φυσικά υλικά, εικόνες. Ψηφιακό περιβάλλον: Τάνγκραμ. http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_290_g

Γ9. Κατασκευάζουν στερεά. *Γ10.* Περιγράφουν σχέσεις μεταξύ επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων και στερεών (π.χ. τετραγώνου -κύβου, κύκλου - σφαίρας, κ.ά.). *Γ11.* Κατασκευάζουν στερεά από αναπτύγματα. *Γ12.* Συνθέτουν και αναλύουν επίπεδα γεωμετρικά σχήματα και στερεά σε 2 ή περισσότερα μέρη.		*ΓΔ3)*	_3_t_3.html?open=activities&from=category_g_3_t_3.html.  Ισομετρικός γεωπίνακας. http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_129_g_2_t_3.html?open=activities&from=category_g_2_t_3.html 
Γ13. Αναγνωρίζουν την ισότητα επίπεδων σχημάτων ή/και αντικειμένων μέσα από ακολουθία μετασχηματισμών (μεταφορά, περιστροφή και ανάκλαση). *Γ14.* Εντοπίζουν άξονες συμμετρίας σε σχήματα δύο διαστάσεων ή σε αντικείμενα του φυσικού περιβάλλοντος. *Γ15.* Κατασκευάζουν συμμετρικά σχήματα στο γεωπίνακα και τα σχεδιάζουν σε διάστικτους καμβάδες (τετραγωνικό και ισομετρικό). *Γ16.* Αναγνωρίζουν σχήματα με κέντρο συμμετρίας (απλές περιστροφές 180ο).	***Μετασχηματισμοί*** • μετατόπιση, στροφή και ανάκλαση • αξονική Συμμετρία • κεντρική Συμμετρία *(4 ώρες)*	Οι μετασχηματισμοί είναι ένας βασικός τρόπος για να ελέγξουμε την ισότητα δύο γεωμετρικών σχημάτων στο επίπεδο. Ακόμη και σε φαινομενικά απλές σπαζοκεφαλιές κάλυψης μιας επιφάνειας με Τάνγκραμ ή Πεντόμινο, οι μαθητές χρησιμοποιούν μεταφορές, περιστροφές και ανακλάσεις για να τοποθετήσουν τα κομμάτια στις κατάλληλες θέσεις. *(ενδεικτική δραστηριότητα ΓΔ4)*	Μαθηματικά Γ' Δημοτικού, Βιβλίο του Μαθητή, ΟΕΔΒ, σελ. 104-105. Μαθηματικά, Βιβλίο του Μαθητή, Επίπεδο Διδασκαλίας Β΄, Πρόγραμμα "Ένταξη Τσιγγανοπαίδων στο Σχολείο", σελ. 15-26 και σελ. 27-39. http://www.pre.uth.gr/main/index.php?option=com_content&view=category&layout=blog&id=35&Itemid=52. Έτοιμες συλλογές σχημάτων (Alfa Shapes, Shape Set) και στερεών, σχήματα από μακετόχαρτο, γεωπίνακες, Τάνγκραμ, Πεντόμινο, φυσικά υλικά, καθημερινά αντικείμενα, εικόνες,

			καθρεπτάκι Mira. Ψηφιακό περιβάλλον: Πεντόμινο. http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_114_g_2_t_3.html?open=activities&from=category_g_2_t_3.html. 
Γ17. Βρίσκουν τον αριθμό των κύβων που απαρτίζουν τρισδιάστατα σχήματα (κτίρια) από δοσμένες εικόνες ή σχέδια σε φυσικό και ψηφιακό περιβάλλον.	***Οπτικοποίηση*** • αναγνώριση και αναπαράσταση διαφορετικών οπτικών γωνιών αντικειμένων και καταστάσεων • δημιουργία οπτικοποιήσεων για τη διαχείριση σχημάτων, διευθύνσεων και θέσεων *(2 ώρες)*	*(ενδεικτική δραστηριότητα ΓΔ5)*	Μαθηματικά Γ΄Δημοτικού, Βιβλίο του Μαθητή, ΟΕΔΒ, σελ. 31 και σελ. 38. Εικόνες, σχέδια, κυβάκια. Ψηφιακό περιβάλλον: Χτίζοντας σπίτια. http://www.fi.uu.nl/toepassingen/00249/toepassing_wisweb.en.html. 
Μ1. Χρησιμοποιούν το γνώμονα για να συγκρίνουν γωνίες με την ορθή και να κατασκευάσουν ορθές γωνίες με διάφορα μήκη πλευρών και διαφορετικούς προσανατολισμούς.	***Μέτρηση γωνίας*** • χρήση οργάνων μέτρησης • άμεσες και έμμεσες συγκρίσεις *(1 ώρα)*	Πολλοί μαθητές θεωρούν ότι δύο ορθές γωνίες με διαφορετικό προσανατολισμό δεν είναι ίσες. Όταν τα μήκη των πλευρών είναι ίσα, συγκρίνουν εύκολα γωνίες, όταν όμως τα μήκη των πλευρών διαφέρουν, βασίζουν την κρίση τους στο μήκος των πλευρών ή στην	Μαθηματικά Β' Δημοτικού. β' τεύχος, ΟΕΔΒ. σελ. 63, Δραστ. Ανακάλυψη. Μαθηματικά Δ' Δημοτικού, ΟΕΔΒ, σελ. 72, Εργασία 1 και σελ. 73, Εργασία 4. Τα Μαθηματικά μου, Γ' Δημοτικού, β' μέρος. ΟΕΔΒ, σελ. 115, Εργασία 3 και σελ. 116, Εργασία

		απόσταση μεταξύ των ακραίων σημείων των πλευρών (σαν να συγκρίνουν μια νοητή τρίτη πλευρά τριγώνου). Προκειμένου να αναδυθούν και να συζητηθούν οι παραπάνω παρανοήσεις χρειάζεται οι μαθητές να ασχοληθούν με γωνίες που έχουν διαφορετικό μήκος πλευρών και προσανατολισμό.	4.
Μ2. Μετρούν, συγκρίνουν και διατάσσουν μήκη χρησιμοποιώντας τυπικές μονάδες μέτρησης. *Μ3.* Αναλύουν και συνθέτουν μήκη, και μετρούν το μήκος τεθλασμένων διαδρομών. *Μ4.* Επιλύουν σχετικά προβλήματα μέτρησης. *Μ5.* Πραγματοποιούν μετατροπές απλών μονάδων μέτρησης. *Μ6.* Πραγματοποιούν εκτιμήσεις μηκών σε διαφορετικά πλαίσια.	***Μέτρηση μήκους*** • άμεσες και έμμεσες συγκρίσεις • μέτρηση με μη τυπικές και τυπικές μονάδες. • χρήση οργάνων μέτρησης *(3 ώρες)*	Οι μαθητές μετρούν μήκος με διαφορετικές μονάδες (π.χ. μέτρα, εκατοστά, χιλιοστά) και χρησιμοποιούν τις σχέσεις μεταξύ τους για να μετατρέπουν μονάδες. Η ανάλυση και η σύνθεση μηκών επεκτείνεται στον υπολογισμό του συνολικού μήκους τεθλασμένων διαδρομών ως άθροισμα των επιμέρους μηκών (και όχι ως η απόσταση μεταξύ της αρχής και του τέλους της διαδρομής). Αυτό το στάδιο είναι σημαντικό γιατί προετοιμάζει για τον υπολογισμό της περιμέτρου πολυγωνικών σχημάτων. Για την εκτίμηση μήκους μπορούν να χρησιμοποιηθούν η μέθοδος μάντεψε και έλεγξε, η εξοικείωση με σημεία αναφοράς	Μαθηματικά Β' Δημοτικού, Τετράδιο Εργασιών α' τεύχος, ΟΕΔΒ, σελ. 12-13, Εργασίες α, β και γ. Μαθηματικά Β' Δημοτικού α' τεύχος. ΟΕΔΒ, σελ. 19, σελ.33, Εργασία 3. Μαθηματικά Γ' Δημοτικού: Μαθηματικά της φύσης και της ζωής, ΟΕΔΒ, σελ. 28, Εργασίες 1 και 2, σελ. 29, Εργασία 4.

		μήκους (π.χ. το 1 εκ. ή το 1 μ. είναι περίπου ίσο με...) ή η διάταξη σημείων σε ευθείες.	
Μ7. Πραγματοποιούν συγκρίσεις επιφανειών με ανάλυση και σύνθεση (και διαπιστώνουν τη διατήρηση του εμβαδού). *Μ8.* Υπολογίζουν εμβαδό δομημένων επιφανειών χρησιμοποιώντας την πολλαπλασιαστική σχέση μεταξύ γραμμών και στηλών. *Μ9.* Εκτιμούν και συγκρίνουν το εμβαδόν επιφανειών.	***Μέτρηση επιφάνειας*** • άμεσες και έμμεσες συγκρίσεις • μέτρηση με μη τυπικές και τυπικές μονάδες • εκτίμηση ***(4 ώρες)***	Η έννοια της διατήρησης του εμβαδού είναι σημαντική για τη μέτρηση της επιφάνειας και αργότερα για τον υπολογισμό του εμβαδού παραλληλογράμμων και τραπεζίων. Πολλοί μαθητές δυσκολεύονται να κατανοήσουν ότι δύο επιφάνειες διαφορετικού σχήματος μπορεί να έχουν ίσο εμβαδό. Η χρήση τάγκραμ και πεντόμινο μπορεί να τους βοηθήσει να διαπιστώσουν τη διατήρηση του εμβαδού. Για τον υπολογισμό του εμβαδού δομημένων επιφανειών (ορθογώνιες επιφάνειες διαιρεμένες σε γραμμές και στήλες) χρησιμοποιείται ο πολλαπλασιαστικός συλλογισμός. Μπορεί να γίνει σύνδεση με τον πολλαπλασιασμό και τους πίνακες πολλαπλασιασμού. Π.χ.  Εμβαδό=3x4 τετράγωνα=12 τετράγωνα. *(ενδεικτική*	Μαθηματικά Γ' Δημοτικού, Μαθηματικά της φύσης και της ζωής, ΟΕΔΒ, σελ. 49, εργασία: 3. Μαθηματικά Δ' Δημοτικού, ΟΕΔΒ, σελ. 78. Ψηφιακό περιβάλλον: Ανάλυση και σύνθεση επιφανειών σε γεωπίνακα. http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_281_g_2_t_4.html?open=activities&from=category_g_2_t_4.html 

		δραστηριότητα ΜΔ1)	
Μ10. Μετρούν τη χωρητικότητα δοχείων με τυπικές μονάδες και υποδιαιρέσεις τους. *Μ11.* Υπολογίζουν το σύνολο των κύβων μιας ορθογώνιας κατασκευής, μετρώντας το πλήθος των κύβων μιας στρώσης και χρησιμοποιώντας επαναλαμβανόμενη πρόσθεση.	***Μέτρηση χωρητικότητας-όγκου*** • μέτρηση με μη τυπικές και τυπικές μονάδες *(3 ώρες)*	Για τη μέτρηση της χωρητικότητας δοχείων χρησιμοποιούν ως μονάδες το λίτρο και το μισό λίτρο. Για τον υπολογισμό του όγκου ορθογώνιων κατασκευών χρησιμοποιούνται προσθετικές στρατηγικές (προσθέτουν ανά στρώσεις). (*ενδεικτική δραστηριότητα* ΜΔ2)	Μαθηματικά Δ' Δημοτικού, ΟΕΔΒ, σελ. 134, Δραστηριότητα και σελ. 135, Εργασία 2.
Μ12. Εκτιμούν, συγκρίνουν και διατάσσουν χρονικά διαστήματα με ακρίβεια πεντάλεπτου. *Μ13.* Διερευνούν τις σχέσεις μεταξύ λεπτού και ώρας, ώρας και ημέρας και επιλύουν σχετικά προβλήματα.	***Μέτρηση χρόνου*** • *άμεσες και έμμεσες συγκρίσεις* • *μέτρηση με μη τυπικές και τυπικές μονάδες* • *χρήση οργάνων μέτρησης* • *εκτίμηση* *(3 ώρες)*		Μαθηματικά Γ' Δημοτικού, Μαθηματικά της φύσης και της ζωής, Τετράδιο εργασιών δ' τεύχος, ΟΕΔΒ, σελ. 16, Εργασίες: 1, 3 και σελ. 22, Εργασία 1. Μαθηματικά Δ' δημοτικού, ΟΕΔΒ, σελ. 129, Εργασία 3. Τα μαθηματικά μου Γ' Δημοτικού, β΄ μέρος, ΟΕΔΒ, σελ. 19-20.

Θεματική ενότητα: Στοχαστικά Μαθηματικά (Στατιστική – Πιθανότητες)

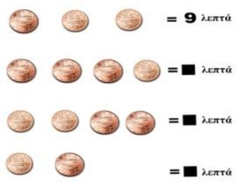
Ενδεικτικές διδακτικές ώρες: 10 (6 + 4)

Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα (ΠΜΑ)	**Βασικά θέματα**	**Δραστηριότητες**	**Εκπαιδευτικό υλικό**
Σ1. Διατυπώνουν ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με δεδομένα. *Σ2.* Συλλέγουν δεδομένα μέσω μικρών ερευνών ή πειραμάτων και τα οργανώνουν.	**Δεδομένα** • Συλλογή, οργάνωση, αναπαράσταση και ερμηνεία δεδομένων *(5 ώρες)*	Οι μαθητές συλλέγουν πολλαπλές πληροφορίες για ένα αντικείμενο ή ένα άτομο και δημιουργούν διαφορετικούς τρόπους κατηγοριοποίησης και	

Σ3. Επεκτείνουν τις αναπαραστάσεις των δεδομένων και σε διαγράμματα, στα οποία η εικόνα ή το σύμβολο αντιπροσωπεύει πολλαπλάσια του ένα. *Σ4.* Κάνουν μετατροπές από μία μορφή αναπαράστασης δεδομένων σε άλλη. *Σ5.* Διερευνούν πληροφορίες στις διαφορετικές μορφές αναπαράστασης δεδομένων και εξάγουν συμπεράσματα.		οργάνωσης κατηγορικών και διακριτών ποσοτικών δεδομένων *(ενδεικτικές δραστηριότητες ΣΔ1, ΣΔ2)*	
Σ6. Προσδιορίζουν και περιγράφουν χαρακτηριστικά των δεδομένων.	**Μέτρα θέσης** • Επικρατούσα τιμή **Μεταβλητότητα** *(1 ώρα)*	Είναι σημαντικό οι μαθητές να χρησιμοποιούν εκφράσεις όπως: «οι περισσότεροι μαθητές της τάξης μας έχουν έναν αδελφό / αδελφή». Περιγράφουν από πού μέχρι πού είναι απλωμένα τα δεδομένα, πού είναι πολύ συγκεντρωμένα, πού υπάρχουν λίγα ή καθόλου δεδομένα (χρησιμοποιώντας εκφράσεις όπως σχεδόν όλοι οι μαθητές, πολύ λίγοι από τους μαθητές, οι περισσότεροι από τους μαθητές).	
Π1. Διερευνούν τα αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης πραγματοποιώντας πολλές δοκιμές.	**Πείραμα τύχης** *(3ώρες)*	*(Ενδεικτικές δραστηριότητες ΠΔ1, ΠΔ2)*	
Π2. Εκτιμούν την πιθανότητα ενός ενδεχομένου σε κλίμακα με εύρος από αδύνατο ενδεχόμενο ως	**Πιθανότητα ενδεχομένου** *(1 ώρα)*		

βέβαιο ενδεχόμενο.			

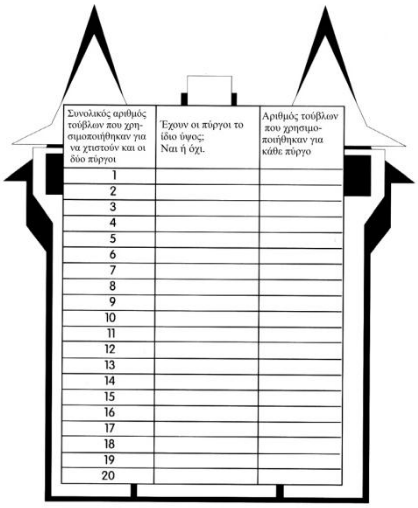
Ενδεικτικές Δραστηριότητες

Α/Α	Περιγραφή δραστηριότητας	ΠΜΑ
ΑρΔ1	*Το παιχνίδι των διαφορών* Οι μαθητές θα χρειαστούν μια τράπουλα. Μπορούν να παίξουν δύο ή περισσότεροι μαθητές. Ένας μαθητής μοιράζει από 6 ζεύγη τραπουλόχαρτων σε κάθε μαθητή που συμμετέχει στο παιχνίδι. Τακτοποιεί τα χαρτιά του σε ζευγάρια και υπολογίζει τις διαφορές. Προσθέτει τα αποτελέσματα.	**Αρ10, Αρ13**
ΑρΔ2	*Τριψήφιοι αριθμοί* Οι μαθητές καλούνται να σχηματίσουν τριψήφιους αριθμούς με συγκεκριμένα ψηφία. Μπορούν να χρησιμοποιήσουν κάθε νούμερο μία φορά σε κάθε αριθμό. Γράφουν τους αριθμούς που θα σχηματίσουν με τη σειρά από τον μικρότερο στο μεγαλύτερο. **3 2 1** Βρίσκουν τον αριθμό που έχει τις περισσότερες εκατοντάδες, τις περισσότερες δεκάδες και τις περισσότερες μονάδες.	**Αρ8, Αρ13**
ΑρΔ3	*Ρέστα*  Οι μαθητές χρησιμοποιούν μόνο νομίσματα με αξία 2 λεπτά και 5 λεπτά. Προσπαθούν να σχηματίσουν όλα τα ποσά μέχρι το 30. Διερευνούν ποια ποσά δεν μπορούν να σχηματιστούν.	**Αρ10, Αρ11**
ΑρΔ4	*Όσο ψηλότερα τόσο καλύτερα* Οι μαθητές παίζουν ανά δύο. Χρησιμοποιούν 10 κάρτες με τους αριθμούς **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.**Σκοπός του παιχνιδιού είναι να σχηματιστεί ο μεγαλύτερος αριθμός. Ανακατεύουν τις δέκα κάρτες και τις τοποθετούν ανάποδα πάνω στο θρανίο. Ο πρώτος μαθητής ανοίγει μία κάρτα και την τοποθετεί σε μία από τις κατάλληλες θέσεις (οι θέσεις αυτές δημιουργούνται από το αποτύπωμα 4 καρτών σε ένα χαρτί μεγέθους Α4, όπως φαίνεται παρακάτω). Ο δεύτερος μαθητής κάνει το ίδιο. Ο πρώτος μαθητής ανοίγει μια δεύτερη κάρτα και την τοποθετεί σε μια άλλη κατάλληλη θέση. Ο δεύτερος μαθητής κάνει το ίδιο. Κάθε μαθητής σημειώνει τον αριθμό που έφερε. Οι μαθητές ανακατεύουν τις κάρτες και παίζουν ξανά. Σημειώνουν τα αποτελέσματά τους, προσθέτοντας κάθε φορά τον αριθμό της κάρτας που ανοίγουν. Νικητής είναι ο μαθητής που θα συμπληρώσει πρώτος 500 βαθμούς.  Οι μαθητές επαναλαμβάνουν το παιχνίδι διαλέγοντας από τρεις κάρτες ο καθένας. Ο πρώτος μαθητής ανοίγει μία κάρτα και την τοποθετεί σε μία από τις κατάλληλες θέσεις (οι θέσεις αυτές δημιουργούνται από το αποτύπωμα 6 καρτών σε ένα χαρτί μεγέθους Α4, όπως φαίνεται παρακάτω). Νικητής είναι αυτός που θα συμπληρώσει πρώτος 5.000 βαθμούς. Ποιος είναι ο	**Αρ8, Αρ13**

<table>
<tr>
<td></td>
<td>μεγαλτερος αριθμός που μπορεί να σχηματίσει;


</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>ΑρΔ5</td>
<td>Πύργοι-παρατηρητήρια

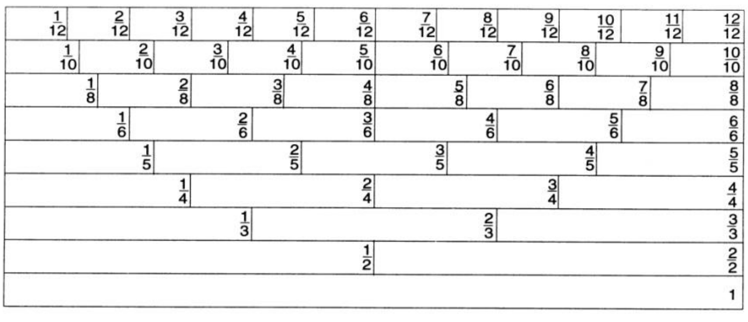
Μπορούν οι μαθητές να χτίσουν δύο πύργους χρησιμοποιώντας ένα μόνο τούβλο; Δύο τούβλα; Τρία τούβλα; Οι δύο πύργοι πρέπει να έχουν το ίδιο ύψος. Οι μαθητές καλούνται να χτίσουν πύργους χρησιμοποιώντας μέχρι 20 τούβλα. Συμπληρώνουν τον πίνακα.

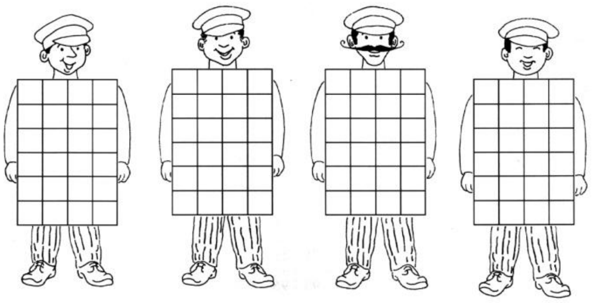


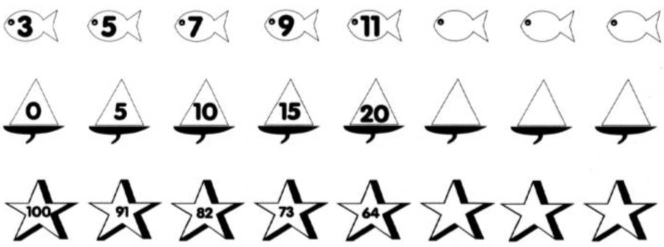
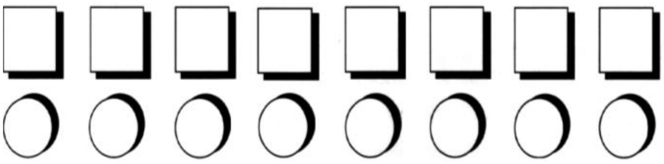
Τι θα συμβεί, αν οι μαθητές χτίσουν τρεις πύργους-παρατηρητήρια; Τέσσερις;</td>
<td>Αρ7, Αρ9, Αρ13</td>
</tr>
<tr>
<td>ΑρΔ6</td>
<td>Ποιο είναι το μισό του μισού

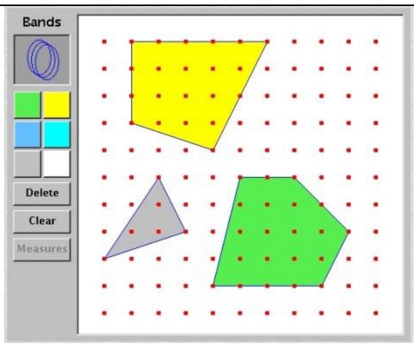
Οι μαθητές κόβουν το ½ μιας λωρίδας. Το διπλώνουν στη μέση. Το τοποθετούν στη σωστή θέση πάνω στον χάρακα κλασμάτων.

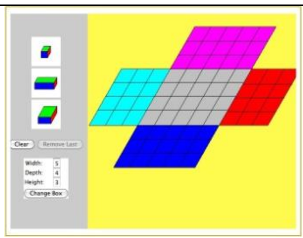
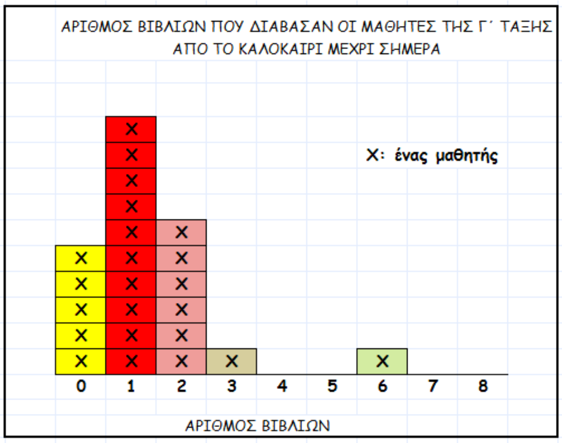
$\frac{1}{2}$ του $\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$


</td>
<td>Αρ14, Αρ15</td>
</tr>
</table>

	Βρίσκουν το $\frac{1}{2}$ του $\frac{1}{3}$, αφού κόψουν το $\frac{1}{3}$, το διπλώσουν και το τοποθετήσουν στη σωστή θέση στο χάρακα κλασμάτων. Καταγράφουν τα αποτελέσματά τους. Στη συνέχεια, βρίσκουν και καταγράφουν το $\frac{1}{2}$ του $\frac{1}{4}$, το $\frac{1}{2}$ του $\frac{1}{5}$ και το $\frac{1}{2}$ του $\frac{1}{6}$. Συνεχίζουν βρίσκοντας και καταγράφοντας το $\frac{1}{4}$ του $\frac{1}{2}$, το $\frac{1}{3}$ του $\frac{1}{4}$, το $\frac{1}{3}$ του $\frac{1}{2}$ και το $\frac{1}{4}$ του $\frac{1}{3}$. Παρατηρούν τα αποτελέσματά τους.	
ΑρΔ7	*Καινούργιες στολές* Οι μαθητές καλούνται να φτιάξουν καινούργιες στολές για τους φρουρούς του βασιλιά. Η στολή του πρώτου φρουρού πρέπει να έχει το $\frac{1}{2}$ κόκκινο και το $\frac{1}{2}$ μπλε. Η στολή του δεύτερου φρουρού πρέπει να έχει το $\frac{1}{3}$ κόκκινο, το $\frac{1}{3}$ μπλε και το $\frac{1}{3}$ πράσινο. Η στολή του τρίτου φρουρού πρέπει να έχει το $\frac{1}{4}$ κόκκινο, το $\frac{1}{4}$ μπλε, το $\frac{1}{4}$ πράσινο και το $\frac{1}{4}$ κίτρινο. Η στολή του τέταρτου φρουρού πρέπει να έχει το $\frac{1}{8}$ κόκκινο, το $\frac{1}{8}$ μπλε, το $\frac{1}{8}$ πράσινο, το $\frac{1}{8}$ κίτρινο, το $\frac{1}{8}$ καφέ, το $\frac{1}{8}$ μαύρο, το $\frac{1}{8}$ πορτοκαλί και το $\frac{1}{8}$ μωβ.  Στη συνέχεια, οι μαθητές καλούνται να φτιάξουν μια διαφορετική σειρά από στολές για τους φρουρούς.	**Αρ14, Αρ16**
ΑρΔ8	*Μετρώντας παράθυρα* Για ορισμένα αντικείμενα, η μέτρηση στο πλησιέστερο εκατοστό είναι αρκετά ακριβής. Αλλά αν χρειάζεται ένα καινούργιο τζάμι για το παράθυρο, τα 42 εκατοστά δεναποτελούν μια αρκετά ακριβή μέτρηση. Για πιο ακριβείς μετρήσεις, κάθε εκατοστό (εκ) έχει χωριστεί σε δέκα χιλιοστά (χιλ). Οι μαθητές μετρούν το μικρό παράθυρο της τάξης τους, το οποίο έχει πλάτος, για παράδειγμα, 41 εκ και 8 χιλ. Αυτό γράφεται 41,8. Το τζάμι για το παράθυρο της τάξης θα πρέπει να είναι λίγο μικρότερο από 41,8 εκ, έτσι ώστε να τοποθετείται ευκολότερα. Οι μαθητές κάνουν εκτιμήσεις για το πάχος που θα πρέπει να έχει το γυαλί. Καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι 2 χιλιοστά από κάθε πλευρά θα ήταν αρκετά. Στη συνέχεια, οι μαθητές υπολογίζουν τις διαστάσεις των τζαμιών που	**Αρ18**

	θα πρέπει να παραγγείλουν για να ταιριάζουν σε παράθυρα με δεδομένες διαστάσεις (π.χ. 41,8 μήκος και 34,4 πλάτος).	
ΑΔ1	Ο εκπαιδευτικός ζητά από τους μαθητές να συμπληρώσουν τους αριθμούς σε ένα τρίγωνο Pascal: 1 1 1 1 2 1 … στο οποίο είναι συμπληρωμένες οι πρώτες 3 γραμμές.	**Α1, Α2**
ΑΔ2	*Ψάχνοντας για κανονικότητες* Οι μαθητές παρατηρούν προσεκτικά τις ακολουθίες των παρακάτω αριθμών. Σε κάθε περίπτωση, γράφουν τους επόμενους τρεις αριθμούς. Για κάθε ακολουθία αριθμών γράφουν μια πρόταση που να εξηγεί τι συμβαίνει.  Οι μαθητές φτιάχνουν μερικές ακολουθίες αριθμών για να τις διερευνήσουν άλλοι μαθητές. 	**Α1, Α2, Α3, Α4**
ΓΔ1	Ο εκπαιδευτικός βοηθά τους μαθητές να εντοπίσουν κατόψεις οικείων περιοχών, για παράδειγμα του σχολείου τους, του κοντινού πάρκου, ενός αρχαιολογικού χώρου, χρησιμοποιώντας και το διαδίκτυο. Στη συνέχεια τοποθετώντας πάνω σε αυτές διαφανείς τετραγωνισμένους καμβάδες, εντοπίζουν σημεία αναφοράς χρησιμοποιώντας εκφράσεις όπως «Το δέντρο της αυλής του σχολείου βρίσκεται στην 3^{η} γραμμή και την 4^{η} στήλη».	**Γ1, Γ2**
ΓΔ2	Ο εκπαιδευτικός μοιράζει στους μαθητές Γεωπίνακες και ζητά να κατασκευάσουν επίπεδα γεωμετρικά σχήματα με λαστιχάκια. Στη συνέχεια τους μοιράζει διάστικτους καμβάδες και τους ζητά να μεταφέρουν σε αυτούς τα σχήματα που έφτιαξαν. Οι μαθητές παρουσιάζουν τη δουλειά τους αναρτώντας τους καμβάδες στον πίνακα. Τέλος, οι μαθητές συζητούν για διαφορετικούς τρόπους ταξινόμησης των σχημάτων βάσει χαρακτηριστικών (π.χ. είδος, αριθμός, ή μήκος πλευρών). Εναλλακτικά, ο εκπαιδευτικός μπορεί να οργανώσει τη δραστηριότητα σε ψηφιακό περιβάλλον (σύνδεσμος http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_281_g_2_t_4.html?open=activities&from=category_g_2_t_4.html)	**Γ3, Γ4, Γ8**

		
ΓΔ3	Ο εκπαιδευτικός μοιράζει στους μαθητές συλλογές από Polydron και ζητά από τους μαθητές να κατασκευάσουν βασικά γεωμετρικά στερεά, όπως παραλληλεπίπεδα και πυραμίδες. Οι μαθητές επιλέγουν τον απαραίτητο αριθμό κατάλληλων όψεων, κατασκευάζουν τα στερεά και συζητούν για τα χαρακτηριστικά τους (κορυφές, ακμές, έδρες). Στη συνέχεια, ο εκπαιδευτικός ζητά από τους μαθητές να ξεδιπλώσουν τον κύβο επιστρέφοντας και πάλι στο ανάπτυγμά του. Παρατηρώντας τα αναπτύγματα σχολιάζουν τα διαφορετικά, χωρίς απαραίτητα να εντοπίσουν όλα τα αναπτύγματα. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να ακολουθήσει την ίδια πορεία και για τα άλλα στερεά.	**Γ4, Γ11**
ΓΔ4	Ο εκπαιδευτικός μοιράζει στους μαθητές τις συλλογές Πεντόμινο, σπάγκους, καθρέπτες Mira και τετραγωνισμένους καμβάδες, κατά προτίμηση συμβατές ως προς τις διαστάσεις με τα κομμάτια Πεντόμινο. Στη συνέχεια ζητά από τους μαθητές να εντοπίσουν εκείνα τα κομμάτια που έχουν άξονα συμμετρίας, να τα μεταφέρουν στον καμβά και να σχεδιάσουν ένα τουλάχιστον άξονα συμμετρίας.	**Γ13**
ΓΔ5	Ο εκπαιδευτικός δίνει στους μαθητές απλά κτίρια κατασκευασμένα από ίσους κύβους σε φυσική μορφή. Οι μαθητές εκτιμούν και στη συνέχεια υπολογίζουν τον αριθμό των κύβων που απαρτίζουν το κτίριο. Προεκτείνοντας τη δραστηριότητα, ο εκπαιδευτικός μπορεί να δώσει στους μαθητές τα κτίρια σε δισδιάστατη αναπαράσταση σε τετραγωνισμένο καμβά.	**Γ17**
ΜΔ1	Οι μαθητές συγκρίνουν την επιφάνεια σχημάτων από χαρτί. Κόβουν κάποιο σχήμα με ψαλίδι (ανάλυση) και επιθέτουν τα κομμάτια πάνω σε κάποιο άλλο σχήμα (σύνθεση) και συγκρίνουν τις επιφάνειες. Οι μαθητές επίσης, δημιουργήσουν διάφορα σχέδια με όλα τα κομμάτια του Τάνγκραμ ή με τον ίδιο αριθμό κομματιών Πεντόμινο. Διαπιστώνουν με αυτόν τον τρόπο ότι διαφορετικά σχέδια μπορεί να έχουν το ίδιο εμβαδόν αν έχουν κατασκευαστεί από τα ίδια μέρη (διατήρηση του εμβαδού).	**Μ7**
ΜΔ2	Οι μαθητές δημιουργούν ορθογώνιες κατασκευές από κύβους και μετρούν το πλήθος των κύβων με όλο και πιο συστηματικό τρόπο. Στόχος είναι να χρησιμοποιούν το πλήθος των κύβων της βάσης ως σύνθετη μονάδα την οποία επαναλαμβάνουν για να μετρούν το πλήθος των κύβων της κατασκευής. Το πλαίσιο που επενδύει τη δραστηριότητα θα μπορούσε να είναι η μέτρηση των διαμερισμάτων (κύβοι) μιας πολυκατοικίας (ορθογώνια κατασκευή). Σε αυτό το πλαίσιο κάθε όροφος αναπαριστά τη σύνθετη μονάδα, την οποία επαναλαμβάνουν για να υπολογίσουν το συνολικό αριθμό των κύβων. Η ίδια δραστηριότητα μπορεί να πραγματοποιηθεί και σε ψηφιακό περιβάλλον, ακολουθώντας τον σύνδεσμο http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=6.	**Μ11**

		
ΣΔ1	Οι μαθητές διεξάγουν μια έρευνα σχετική με το γάλα και το γιαούρτι που έχουν στο σπίτι τους. Συζητούν τι δεδομένα θα καταγράψουν και πώς θα τα καταγράψουν. Για παράδειγμα, για το γάλα, μπορεί ο κάθε μαθητής, ξεχωριστά, να καταγράψει σε ένα καρτελάκι το υλικό της συσκευασίας, τη μορφή της, το μέγεθος της, το είδος του γάλατος κλπ. Συγκεντρώνουν όλα τα δεδομένα και συζητούν για τρόπους με τους οποίους μπορούν να τα οργανώσουν. Ανά ομάδες θέτουν ένα ερώτημα και με βάση αυτό οργανώνουν και αναπαριστούν, με ποικίλους τρόπους τα δεδομένα . Η κάθε ομάδα κοινοποιεί και παρουσιάζει στην τάξη τα αποτελέσματα της έρευνας της. Με βάση τα ευρήματα συζητούν για άλλα θέματα (π.χ. ανακύκλωση).	**Σ1, Σ2, Σ3, Σ4**
ΣΔ2	Μια μαθήτρια έχει συλλέξει δεδομένα για τον αριθμό βιβλίων που διάβασαν το καλοκαίρι οι μαθητές της Γ΄ τάξης και έχει φτιάξει το παρακάτω διάγραμμα:  Συζητούν: Από πόσα μέχρι πόσα βιβλία έχουν διαβάσει οι μαθητές; Πόσα βιβλία έχουν διαβάσει οι περισσότεροι μαθητές; Πόσοι μαθητές έχουν διαβάσει δύο βιβλία; Ποιος είναι ο μεγαλύτερος αριθμός βιβλίων που έχουν διαβάσει κάποιοι μαθητές. Μπορείτε να βρείτε κάποια άλλη πληροφορία από το παραπάνω διάγραμμα; π.χ. πόσοι δεν απάντησαν στο ερώτημα (αν η έρευνα έχει γίνει με τους μαθητές της τάξης).	**Σ5, Σ6**
ΠΔ1	Οι μαθητές σε ομάδες πειραματίζονται με ένα ζάρι 3 χρωμάτων (π.χ. 1 κόκκινη έδρα, 2 μπλε, 3 πράσινες). Αρχικά, προβλέπουν ποιο χρώμα θα εμφανιστεί πιο συχνά ή πιο σπάνια αν ρίξουν το ζάρι πολλές φορές και η κάθε ομάδα καταγράφει τις προβλέψεις της. Το πείραμα πραγματοποιείται σε δύο φάσεις. Αρχικά, η κάθε ομάδα ρίχνει το ζάρι μέχρι να εμφανιστούν όλα τα χρώματα και καταγράφει τα αποτελέσματα. Στη συνέχεια η κάθε ομάδα επαναλαμβάνει 10-15 φορές την ίδια διαδικασία. Συζητούν τα ακόλουθα: α) Ποιο χρώμα εμφανίζεται συνήθως τελευταίο σε κάθε γύρο; Προσπαθούν να βρουν εξήγηση, γιατί τις περισσότερες φορές έρχεται το κόκκινο χρώμα τελευταίο. β) Η κάθε ομάδα αθροίζει τα επιμέρους αποτελέσματα των γύρων και τα συγκρίνει με τις προβλέψεις της. γ) Συζητούν τα συνολικά αποτελέσματα όλων των ομάδων και τα συγκρίνουν με τις προβλέψεις τους.	**Π1, Σ2**
ΠΔ2	Οι μαθητές είναι χωρισμένοι σε ομάδες. Υπάρχουν δύο αδιαφανείς σακούλες με τις	**Π1, Σ2**

	εξωτερικές ενδείξεις Α και Β. Οι μαθητές γνωρίζουν ότι: α) κάθε σακούλα περιέχει κύβους με 2 χρώματα: άσπρο και κόκκινο, β) κάθε σακούλα έχει συνολικά 10 κύβους, γ) σε μία από τις σακούλες υπάρχουν 5 άσπροι και 5 κόκκινοι κύβοι και στην άλλη υπάρχουν 2 άσπροι και 8 κόκκινοι κύβοι, αλλά δεν είναι γνωστό το ακριβές περιεχόμενο της σακούλας Α και της Β. Κάθε ομάδα τραβάει 10 κύβους από κάθε σακούλα (με επανατοποθέτηση), ενώ ταυτόχρονα όλη η υπόλοιπη τάξη παρακολουθεί και καταγράφει τα αποτελέσματα. Με βάση τα αποτελέσματα που κατέγραψαν, η κάθε ομάδα προβλέπει ποια είναι η σακούλα που έχει 5 άσπρους και 5 κόκκινους κύβους και επιχειρηματολογεί σχετικά. Στο τέλος ανοίγουν τις σακούλες και συζητούν για τα αποτελέσματα και τις προβλέψεις τους.	

Δ΄ Δημοτικού

Θεματική ενότητα: Αριθμοί

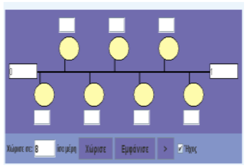
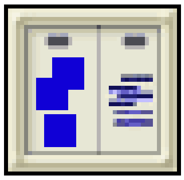
Ενδεικτικές Διδακτικές ώρες: 74 (65 + 9)

Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα (ΠΜΑ)	**Βασικά θέματα**	**Δραστηριότητες**	**Εκπαιδευτικό υλικό**
Αρ1. Απαγγέλουν, διαβάζουν και γράφουν αριθμούς. *Αρ2. Αναγνωρίζουν αριθμούς σε μια ποικιλία από πλαίσια και σχηματισμούς.* *Αρ3.* Καταμετρούν αντικείμενα και εξελίσσουν στρατηγικές μέτρησης. *Αρ4.* Αριθμούν και καταμετρούν αντικείμενα (σε ομάδες). *Αρ5.* Συγκρίνουν και διατάσσουν αριθμούς και βρίσκουν τη θέση ενός αριθμού στην αριθμογραμμή. *Αρ6.* Αναλύουν και συνθέτουν αριθμούς με διαφορετικούς τρόπους *Αρ7.* Διερευνούν τη σχέση των φυσικών αριθμών με τους κλασματικούς και τους δεκαδικούς αριθμούς. *Αρ8.* Διερευνούν τη σχέση μεταξύ ενός ψηφίου και της αξίας του. *Αρ9.* Εκτιμούν με διαφορετικούς τρόπους την πληθικότητα ενός συνόλου. *Αρ10.* Αναγνωρίζουν και αναπαριστούν με διαφορετικούς τρόπους	***Φυσικοί αριθμοί (μέχρι 1.000.000)*** • αριθμητικά σύμβολα • άμεση αναγνώριση • *καταμέτρηση ποσοτήτων και αρίθμηση* • *διάταξη αριθμών* • *σχέσεις αριθμών* • *θεσιακή αξία ψηφίων* • *εκτιμήσεις* • *πρόσθεση και αφαίρεση αριθμών* • *πολλαπλασιασμός και διαίρεση φυσικών αριθμών* • *Φυσικοί αριθμοί – Διαιρετότητα* *(44 ώρες)*	Η σχέση μεταξύ φυσικών, δεκαδικών και κλασματικών αριθμών συμβάλλει στην αίσθηση του αριθμού, βοηθά τους μαθητές να οικοδομήσουν σχέσεις, οι οποίες θα αφορούν ειδικά τους υπολογισμούς, ενισχύει τον ευέλικτο τρόπο σκέψης και τις διαισθητικές ιδέες σχετικά με τους αριθμούς. Οι δεξιότητες της εκτίμησης μπορούν να επεκτείνουν αργότερα τις ήδη ανεπτυγμένες νοερές στρατηγικές των μαθητών και την ικανότητά τους να ασχολούνται με καταστάσεις του πραγματικού κόσμου, οι οποίες δεν απαιτούν ακριβείς λύσεις. Οι μαθητές αποκτούν την ικανότητα να διασπούν τους αριθμούς και να τους συνδυάζουν με ευελιξία, η οποία είναι εξαιρετικής σπουδαιότητας για πολυψήφιους αριθμούς. Η ικανότητα	Μαθηματικά Δ΄ Δημοτικού, Βιβλίο του Μαθητή, ΟΕΔΒ, σελ. 24 «Εκδρομή στα Καλάβρυτα».

καταστάσεις πρόσθεσης, αφαίρεσης, πολλαπλασιασμού και (τέλειας και ατελούς) διαίρεσης. *Αρ11.* Διερευνούν και εφαρμόζουν στρατηγικές νοερών υπολογισμών προσθέσεων κι αφαιρέσεων τετραψήφιων αριθμών. *Αρ12.* Αναπτύσσουν και εφαρμόζουν αλγόριθμους της πρόσθεσης, της αφαίρεσης και του πολλαπλασιασμού με τετραψήφιους αριθμούς, καθώς και της διαίρεσης με μονοψήφιο και διψήφιο διαιρέτη, χρησιμοποιώντας ποικιλία στρατηγικών, μέσων και αναπαραστάσεων. *Αρ13.* Χρησιμοποιούν σε πράξεις και προβλήματα το ένα ως το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού, το μηδέν ως το απορροφητικό στοιχείο του πολλαπλασιασμού, την αντιμεταθετική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού, την προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού, την επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση. *Αρ14.* Αναπτύσσουν στρατηγικές στην επίλυση και κατασκευή προβλημάτων και χρησιμοποιούν μοντέλα και αναπαραστάσεις για να τις τεκμηριώσουν και να τις κοινοποιήσουν σε		αυτή είναι απαραίτητο να καλλιεργηθεί για να βελτιωθούν οι μαθητές στη χρήση των αυτοσχέδιων στρατηγικών και στους αλγόριθμους για τους φυσικούς αριθμούς. *(ενδεικτικές δραστηριότητες ΑρΔ1, ΑρΔ2)*	

άλλους. *Αρ15.* Αναγνωρίζουν τον αλγόριθμο της Ευκλείδειας διαίρεσης δύο φυσικών αριθμών με μονοψήφιο και διψήφιο διαιρέτη και με τη βοήθειά του κάνουν τη δοκιμή της διαίρεσης. *Αρ16.* Αναλύουν ένα φυσικό αριθμό σε γινόμενα. *Αρ17.* Ανακαλύπτουν, διατυπώνουν και εφαρμόζουν τα κριτήρια διαιρετότητας των αριθμών *2, 3, 5 και 9.*			
Αρ18. Εισάγονται στην έννοια του κλάσματος ως αριθμού (ως έκφραση σχέσης μεταξύ ποσοτήτων, ανεξαρτήτως αριθμητικών τιμών, π.χ. κοινός τελεστής). *Αρ19.* Συγκρίνουν κλάσματα με διάφορους τρόπους (λεκτικά και συμβολικά). *Αρ20.* Προσθέτουν και αφαιρούν ομώνυμα και μικρά ετερώνυμα κλάσματα.	***Κλασματικοί αριθμοί*** *(5 ώρες)*	Ενδείκνυται η χρήση ποικίλων μοντέλων ώστε να αναπτυχθούν επαρκώς οι κλασματικές έννοιες (π.χ. περιοχής ή εμβαδού, μήκους και συνόλου). Η αριθμητική αντίληψη για το κλάσμα απαιτεί κάποια διαισθητική κατανόησή του. Ο μαθητής χρειάζεται να γνωρίζει περίπου πόσο μεγάλο είναι ένα συγκεκριμένο κλάσμα και να μπορεί να πει με ευκολία ποιο είναι μεγαλύτερο μεταξύ δύο κλασμάτων. Αν οι μαθητές διδαχτούν τους κανόνες πριν δοθεί η ευκαιρία να αναρωτηθούν για το σχετικό μέγεθος των κλασμάτων, έχουν ελάχιστες πιθανότητες να εξοικειωθούν ή να αποκτήσουν αριθμητική αντίληψη για το μέγεθος των	

		κλασμάτων. Είναι απαραίτητη η σύγκριση κλασμάτων με εννοιολογικό τρόπο (πρότυπα εννοιολογικής σκέψης για τη σύγκριση: περισσότερα μέρη του ίδιου μεγέθους, ίδιος αριθμός μερών αλλά διαφορετικά μεγέθη, περισσότερο και λιγότερο από το μισό ή το ένα, πιο κοντά στο μισό ή στο όλο) Είναι αναγκαία η ανάπτυξη στρατηγικών πρόσθεσης και αφαίρεσης με ποικίλες μεθόδους. Η διδασκαλία των μεθόδων υπολογισμού περιορίζει τον πολύτιμο χρόνο για την εννοιολογική ανάπτυξη θεμελιωδών ιδεών. Είναι απαραίτητο να ενθαρρύνεται ο άτυπος πειραματισμός καταρχήν και, στη συνέχεια, ο μαθητής να εμπλέκεται σε μια καθοδηγούμενη πορεία εξέλιξης για κάθε παραδοσιακό αλγόριθμο, η οποία θα δομείται πάνω στους ανεπίσημους πειραματισμούς του. *(ενδεικτική δραστηριότητα ΑρΔ3)*	
Αρ21. Αναγνωρίζουν δεκαδικούς αριθμούς (μέχρι δύο δεκαδικά ψηφία) σε μια ποικιλία από καθημερινά πλαίσια και εισάγονται στη γραφή και στην ορολογία τους. *Αρ22.* Αναγνωρίζουν ως ειδική	**Δεκαδικοί αριθμοί** *(13 ώρες)*	Είναι σημαντική η σύνδεση των δύο αριθμητικών συστημάτων, των κλασμάτων και των δεκαδικών, με στόχο τη δόμηση της έννοιας «*ότι και τα δύο*	Μαθηματικά Δ΄ Δημοτικού, Βιβλίο του Μαθητή, ΟΕΔΒ, σελ.66, «Παραγγελία αναλώσιμων ειδών». Ψηφιακό περιβάλλον για την τοποθέτηση αριθμών στην

περίπτωση τα δεκαδικά κλάσματα (με παρονομαστή το 10 και το 100) και τα μετατρέπουν σε δεκαδική μορφή. *Αρ23.* Συγκρίνουν και διατάσσουν δεκαδικούς αριθμούς. *Αρ24.* Τοποθετούν/ παρεμβάλλουν στην αριθμογραμμή ένα σύνολο αριθμών ή μετρήσεων που περιλαμβάνουν δεκαδικούς αριθμούς. *Αρ25.* Προσθέτουν και αφαιρούν αριθμούς που περιλαμβάνουν και δεκαδικούς. Χρησιμοποιούν προσεγγιστικές και άλλες στρατηγικές για να ελέγξουν αν οι απαντήσεις τους είναι λογικές. *Αρ26.* Εκτελούν σύντομους πολλαπλασιασμούς και διαιρέσεις δεκαδικών αριθμών με μονοψήφιο ακέραιο και χρησιμοποιούν προσεγγιστικές και άλλες στρατηγικές, για να ελέγχουν τη λογικότητα των απαντήσεών τους. *Αρ27.* Χρησιμοποιούν την αριθμομηχανή για υπολογισμούς με πολλά δεκαδικά ψηφία.		*συστήματα εκφράζουν τις ίδιες ιδέες*». Ακόμη, είναι χρήσιμη η σύνδεση των δεκαδικών με κλάσματα , για να εξοικειωθούν οι μαθητές με τη σύγκριση και την ταξινόμηση δεκαδικών και την προσέγγιση δεκαδικών αριθμών μέσω γνωστών αριθμών. Ο διάλογος στην τάξη για τη σχετικότητα του μεγέθους των δεκαδικών αριθμών μπορεί να συμβάλλει στην εννοιολογική κατανόηση της δομής των δεκαδικών αριθμών. Οι πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς θα πρέπει να αναπτυχθούν ως επέκταση της κατανόησης των υπολογισμών με φυσικούς αριθμούς. Οι εκτιμήσεις μπορούν και πρέπει να παίζουν σημαντικό ρόλο σε αυτή τη διαδικασία ανάπτυξης και να αποφεύγονται μηχανικοί κανόνες του τύπου «*στοιχίζουμε τις υποδιαστολές τη μία κάτω από την άλλη*», «*μετράμε τις θέσεις των δεκαδικών ψηφίων*» κ.λπ. Αποτελούν μια καλή αφετηρία για τους υπολογισμούς με δεκαδικούς. Βοηθούν τους μαθητές να αντιμετωπίζουν	αριθμογραμμή http://pi-schools.gr  Ψηφιακό περιβάλλον για την πρόσθεση δεκαδικών αριθμών http://nlvm.usu.edu/en/nav/grade_g_3.html 

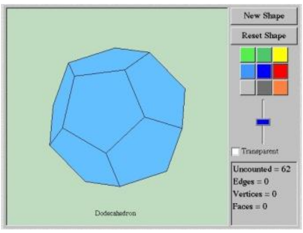
		σφαιρικά τις απαντήσεις, μπορεί να χρησιμοποιηθούν ως επαλήθευση των πράξεων που γίνονται στο χαρτί και προσφέρουν μια δυνατότητα συζήτησης για την τοποθέτηση της υποδιαστολής στον πολλαπλασιασμό και στη διαίρεση. Οι εκτιμήσεις, επιπλέον, είναι απαραίτητο να διαδραματίσουν σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη ενός αλγόριθμου για τον πολλαπλασιασμό και τη διαίρεση. Ορισμένες φορές υπάρχει ανάγκη για ένα ακριβές αποτέλεσμα και κατά συνέπεια για κάποιους υπολογισμούς. Τα αποτελέσματα στην αριθμομηχανή προσφέρουν ευκαιρία για συζήτηση στην τάξη και συνδέονται με την πρόσκτηση αριθμητικών ιδεών για τους δεκαδικούς αριθμούς. *(ενδεικτικές δραστηριότητες ΑρΔ4, ΑρΔ5, ΑρΔ6)*	
Αρ28. Αντιλαμβάνονται διαισθητικά τους ακέραιους αριθμούς μέσα από καθημερινές καταστάσεις (αισθητοποίηση). *Αρ29.* Διερευνούν διαισθητικά απλές προσθέσεις με θετικούς και αρνητικούς	**Ακέραιοι αριθμοί** *(3 ώρες)*	Οι μαθητές σχεδόν καθημερινά αλληλεπιδρούν με αρνητικούς αριθμούς ή βιώνουν καταστάσεις, οι οποίες στηρίζονται σε αρνητικούς αριθμούς. Στην πραγματικότητα, κάθε έννοια που	

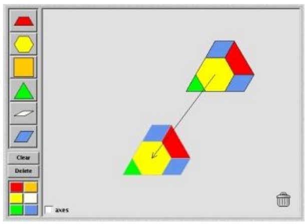
ακέραιους αριθμούς.		προσδιορίζεται ποσοτικά και έχει μια κατεύθυνση διακρίνεται από μια θετική και μια αρνητική τιμή. Οι αρνητικές τιμές γενικά εισάγονται κυρίως με τους ακεραίους και λιγότερο με τους δεκαδικούς αριθμούς και τα κλάσματα. Είναι χρήσιμο να δοθούν ως παραδείγματα πραγματικά μοντέλα, τα οποία θα συζητηθούν στην τάξη ώστε οι μαθητές να μην περάσουν απευθείας στον υπολογισμό με αριθμούς που έχουν πρόσημα.	
Α1. Αναγνωρίζουν, διερευνούν, περιγράφουν και συμπληρώνουν γεωμετρικές, αριθμητικές και αναδρομικές κανονικότητες. *Α2.* Αναπαριστούν μια κανονικότητα με διαφορετικά μέσα (λεκτικά, αριθμητικά, εικονικά). *Α3.* Συγκρίνουν κανονικότητες μεταξύ τους. *Α4.* Βρίσκουν κάποιον "απομακρυσμένο" όρο μιας κανονικότητας.	***Κανονικότητες/ συναρτήσεις*** *(3 ώρες)*	*(ενδεικτική δραστηριότητα ΑΔ1)*	Βιβλίο μαθητή σελίδα 136 εργασία α και β. Χειραπτικό υλικό, κ.λπ.
Α5. Χρησιμοποιούν σύμβολα (ως αγνώστους και ως μεταβλητές) και τα αντικαθιστούν με	***Αλγεβρικές παραστάσεις*** *(3 ώρες)*	Τα στοιχεία και οι κανόνες της άλγεβρας αποτελούν αφαιρέσεις των αντίστοιχων της αριθμητικής, δηλαδή	

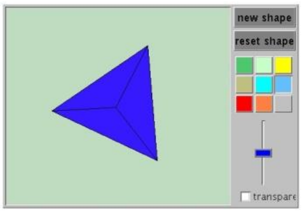
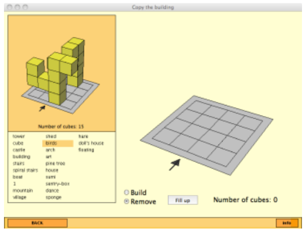
αριθμούς σε σύνθετες ανοιχτές αριθμητικές προτάσεις (π.χ. Δ+□=8). *Α6.* Εκφράζουν συμβολικά ένα απλό πρόβλημα με αριθμητική παράσταση ή σχέση. *Α7.* Διερευνούν τον αλγεβρικό χαρακτήρα των ιδιοτήτων των πράξεων (αντιμεταθετική, προσεταιριστική και επιμεριστική) και τη γενίκευση της ισχύος τους. *Α8.* Υπολογίζουν την τιμή μιας απλής αριθμητικής παράστασης, με χρήση της προτεραιότητας των πράξεων (χωρίς παρενθέσεις).		αποτελούν αφαιρέσεις αφαιρέσεων και, επομένως, η κατανόησή τους αποτελεί μια ιδιαίτερα απαιτητική διαδικασία. Οι σχετικές έρευνες υποδεικνύουν ότι πολλά παιδιά τείνουν να μεταφέρουν τους κανόνες της αριθμητικής στο αλγεβρικό πεδίο χωρίς καμία προσαρμογή, κυρίως εξαιτίας της έμφασης που δίνεται κατά τη διδασκαλία των αλγεβρικών ιδεών στην αντίληψη ότι "τα γράμματα είναι όπως οι αριθμοί". Χρειάζεται, λοιπόν, ιδιαίτερη προσοχή στη διαχείριση αυτού του ζητήματος. *(ενδεικτική δραστηριότητα ΑΔ2)*	
Α9. Συνδέουν ανισοτικές σχέσεις μεταξύ φυσικών και δεκαδικών αριθμών (με ένα δεκαδικό ψηφίο) με τη θέση τους στην αριθμογραμμή. *Α10.* Συμπληρώνουν ανισότητες με κατάλληλους αριθμούς (π.χ. 8+3 <□+7 ή 6+□>10-1). *Α11.* Προσδιορίζουν τον αριθμό που πρέπει να πολλαπλασιαστεί με έναν άλλο για να προκύψει ένας τρίτος αριθμός (π.χ. 7•□=21)	***Ισότητες-ανισότητες*** *(3 ώρες)*		

Θεματική ενότητα: Χώρος και Γεωμετρία – Μέτρηση

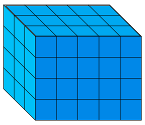
Ενδεικτικές Διδακτικές ώρες: 35 (20 + 15)

Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα (ΠΜΑ)	**Βασικά θέματα**	**Δραστηριότητες**	**Εκπαιδευτικό υλικό**
Γ1. Ερμηνεύουν και χρησιμοποιούν βασικούς χάρτες με απλές κλίμακες και υπομνήματα. Δίνουν θέσεις και διευθύνσεις μεταξύ συγκεκριμένων σημείων του χάρτη. *Γ2.* Χρησιμοποιούν αλφαριθμητικές συντεταγμένες (π.χ. Α5, Β1) σε τετραγωνισμένα πλαίσια και στην ερμηνεία και χρήση βασικών χαρτών.	***Έννοιες του χώρου*** • διευθύνσεις, θέσεις και διαδρομές • ανάγνωση και δημιουργία χαρτών • δόμηση του χώρου και συντεταγμένες *(5 ώρες)*	Σε αυτή την τάξη ο εκπαιδευτικός εστιάζει στη χρήση απλών κλιμάκων και αλφαριθμητικών συντεταγμένων για την περιγραφή τοποθεσιών και διαδρομών σε βασικούς χάρτες. *(ενδεικτική δραστηριότητα ΓΔ1)*	Απλοί χάρτες (google maps), σκακιέρα, παιχνίδι Ναυμαχία, κ.λπ.
Γ3. Διευρύνουν την αναγνώριση και κατάταξη επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων και στερεών, με βάση (γεωμετρικές) ιδιότητες και σχέσεις. *Γ4.* Αναγνωρίζουν σημεία, ευθείες, ημιευθείες, ευθύγραμμα τμήματα, τεμνόμενες, παράλληλες και κάθετες ευθείες. *Γ5.* Αναγνωρίζουν και διερευνούν χαρακτηριστικά επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων και βασικών στερεών, με βάση (γεωμετρικές) ιδιότητες και σχέσεις. *Γ6.* Σχεδιάζουν γωνίες ίσες, μικρότερες και μεγαλύτερες από μία ορθή. *Γ7.* Γενικεύουν αναφορικά με τα επίπεδα γεωμετρικά σχήματα ως όψεις στερεών και τα συνδέει να τα αναπτύγματά τους.	***Γεωμετρικά Σχήματα*** • αναγνώριση, ονομασία και ταξινόμηση γεωμετρικών σχημάτων και στερεών • ανάλυση γεωμετρικών σχημάτων και στερεών σε • στοιχεία και ιδιότητες • κατασκευές και σχεδιασμός γεωμετρικών σχημάτων και στερεών • σύνδεση μεταξύ γεωμετρικών σχημάτων και στερεών • ανάλυση ή σύνθεση γεωμετρικών σχημάτων και στερεών σε άλλα σχήματα ή μέρη *(12 ώρες)*	Η διεύρυνση της αναγνώρισης και κατάταξης επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων και στερεών είναι συνώνυμη με την ανάπτυξη κλάσεων γεωμετρικών σχημάτων και στερεών (π.χ. κλάση τετραπλεύρων). *(ενδεικτικές δραστηριότητες ΓΔ2, ΓΔ3)*	Μαθηματικά Δ΄ Δημοτικού, Βιβλίο του μαθητή, ΟΕΔΒ, σελ. 70-71, σελ. 80, σελ. 131 και σελ. 132-133. Alfa shapes, γεωπίνακες (και ισομετρικοί), Polydron, Τάνγκραμ, Πεντόμινο, φυσικά υλικά, σχήματα, εικόνες, Polydron, διάφοροι καμβάδες. Ψηφιακό περιβάλλον: Πλατωνικά στερεά. http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_128_g_2_t_3.html?open=instructions&from=category_g_2_t_3.html 

Γ8. Κατασκευάζουν στερεά από αναπτύγματα (με Polydron ή χαρτόνι και σε ψηφιακά περιβάλλοντα) και σχεδιάζει αναπτύγματα. *Γ9.* Κατασκευάζουν γεωμετρικά στερεά από ίσα σχήματα (Πλατωνικά στερεά). *Γ10.* Αναλύουν επίπεδα γεωμετρικά σχήματα και στερεά σε 2 ή περισσότερα μέρη.			
Γ11. Περιγράφουν ένα μετασχηματισμό χρησιμοποιώντας σημεία αναφοράς ή διευθύνσεις. *Γ12.* Εντοπίζουν ίσα επίπεδα σχήματα χρησιμοποιώντας μετασχηματισμούς σε φυσικό και ψηφιακό περιβάλλον. *Γ13.* Εξασκούνται στο σχεδιασμό σχημάτων που έχουν άξονες συμμετρίας σε ποικιλία καμβάδων. *Γ14.* Αναγνωρίζουν σχήματα με κέντρο συμμετρίας. *Γ15.* Συνδέουν τους μετασχηματισμούς με τη δημιουργία απλών ψηφιδωτών.	***Μετασχηματισμοί*** • μετατόπιση, στροφή και ανάκλαση • αξονική Συμμετρία • κεντρική Συμμετρία • επικαλύψεις επιφανειών και κανονικότητες *(3 ώρες)*	Τα ψηφιδωτά, εκτός από πεδίο εφαρμογής των μετασχηματισμών, μπορούν να δώσουν στον εκπαιδευτικό ευκαιρίες για διαθεματικές και διαπολιτισμικές προσεγγίσεις (π.χ. ιστορία, τέχνη, λαϊκός πολιτισμός, άλλοι πολιτισμοί). *(ενδεικτική δραστηριότητα ΓΔ4)*	Μαθηματικά Δ΄ Δημοτικού, Βιβλίο του Μαθητή, ΟΕΔΒ, σελ. 84-85. Ψηφιδωτά από την ελληνική ιστορία και παράδοση αλλά και από άλλους πολιτισμούς, τετραγωνικοί καμβάδες, Τάνγκραμ, διάφορες ψηφίδες (π.χ. pattern blocks, pentablocks), καθρεπτάκι Mira, γεωπίνακες, αντικείμενα των παιδιών κ.λπ. Ψηφιακό περιβάλλον: Ισότητα σχημάτων. http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_301_g_2_t_3.html?open=activities&from=category_g_2_t_3.html 
Γ16. Κατασκευάζουν τρισδιάστατα σχήματα (κτίρια) με αλληλοσυνδεόμενους κύβους από δοσμένες	***Οπτικοποίηση*** • αναγνώριση και αναπαράσταση διαφορετικών οπτικών	*(ενδεικτική δραστηριότητα ΓΔ5)*	Εικόνες, σχέδια, αλληλοσυνδεόμενοι κύβοι (connecting cubes).

εικόνες ή σχέδια, σε φυσικό και ψηφιακό περιβάλλον. *Γ17.* Αναγνωρίζουν βασικά τρισδιάστατα στερεά (ορθογώνια πρίσματα και κυλίνδρους) από διαφορετικές οπτικές γωνίες.	γωνιών αντικειμένων και καταστάσεων • δημιουργία οπτικοποιήσεων για τη διαχείριση σχημάτων, διευθύνσεων και θέσεων *(2 ώρες)*		Ψηφιακό περιβάλλον: Στερεά υπό γωνία. (http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=70)  Χτίζοντας σπίτια. http://www.fi.uu.nl/toepassingen/00339/toepassing_wisweb.en.html 
Μ1. Μετρούν και συγκρίνουν γωνίες χρησιμοποιώντας μη τυπικές μονάδες μέτρησης.	***Μέτρηση γωνίας*** • Άμεσες και έμμεσες συγκρίσεις. • Μέτρηση με μη τυπικές και τυπικές μονάδες. *(3 ώρες)*	Η εξοικείωση με μη τυπικές μονάδες μέτρησης γωνίας βοηθά στην ανάπτυξη των εννοιών της μονάδας μέτρησης, της ίσης διαμέρισης της μονάδας και της επανάληψης των μονάδων, που είναι απαραίτητες για την ανάπτυξη της έννοιας της μέτρησης γωνίας. Η μέτρηση γωνιών με μη τυπικές μονάδες θα βοηθήσει τους μαθητές να εξοικειωθούν με τη μέτρηση και σύγκριση γωνιών με διαφορετικά μήκη πλευρών και προσανατολισμούς και θα τους προετοιμάσει για τη χρήση του τυπικού μοιρογνωμονίου. *(ενδεικτική δραστηριότητα ΜΔ1)*	

Μ2. Μετρούν και συγκρίνουν την περίμετρο πολυγωνικών σχημάτων και επιλύουν σχετικά προβλήματα (όπως κατασκευή σχημάτων με δεδομένη περίμετρο). *Μ3.* Επιλύουν προβλήματα μέτρησης μήκους με τη χρήση οργάνων μέτρησης. *Μ4.* Πραγματοποιούν απλές μετατροπές μονάδων μέτρησης μήκους. *Μ5.* Συγκρίνουν και μεταφέρουν ευθύγραμμα τμήματα χρησιμοποιώντας διαβήτη. *Μ6.* Πραγματοποιούν εκτιμήσεις περιμέτρων σε διάφορα πλαίσια.	***Μέτρηση μήκους*** • άμεσες και έμμεσες συγκρίσεις • μέτρηση με μη τυπικές και τυπικές μονάδες • χρήση οργάνων μέτρησης • εκτίμηση *(4 ώρες)*	Μετρούν μήκη και περιμέτρους με τυπικές μονάδες μέτρησης (π.χ. χιλιόμετρα, μέτρα, δεκατόμετρα, εκατοστά, χιλιοστά). Η χρήση του διαβήτη για σύγκριση και μεταφορά ευθύγραμμων τμημάτων μπορεί να γίνει με μια δραστηριότητα κατασκευής κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο (μετρούν την ακτίνα με το διαβήτη και τη μεταφέρουν ως χορδή του κύκλου). *(ενδεικτική δραστηριότητα ΜΔ2)*	Μαθηματικά Δ' Δημοτικού, ΟΕΔΒ, σελ. 45, Εργασίες: 1-4. Τα Μαθηματικά μου, Δ' Δημοτικού, α΄ μέρος, ΟΕΔΒ, σελ. 30, Εργασία 2. Τα Μαθηματικά μου, Ε' τάξη Δημοτικού, β΄ μέρος, ΟΕΔΒ, σελ. 108, Εργασία 1.
Μ7. Δομούν ορθογώνιες επιφάνειες σε γραμμές και στήλες με ισοδιαμέριση των γραμμικών τους διαστάσεων και υπολογίζουν το εμβαδό. *Μ8.* Καλύπτουν επιφάνειες και υπολογίζουν εμβαδό χρησιμοποιώντας υποδιαιρέσεις της μονάδας. *Μ9.* Εκτιμούν και συγκρίνουν εμβαδό επιφανειών. *Μ10.* Διακρίνουν την περίμετρο από το εμβαδό και επιλύουν σχετικά προβλήματα.	***Μέτρηση επιφάνειας*** • άμεσες και έμμεσες συγκρίσεις. • μέτρηση με μη τυπικές και τυπικές μονάδες. • χρήση οργάνων μέτρησης • εκτίμηση *(4 ώρες)*	Οι μαθητές δομούν ορθογώνιες επιφάνειες σε γραμμές και στήλες αρχικά με ενδείξεις για την υποδιαίρεση των γραμμικών τους διαστάσεων και στη συνέχεια μετρώντας και διαιρώντας τις πλευρές σε ίσα μέρη. Η δόμηση ορθογώνιων επιφανειών σε γραμμές και στήλες θέτει τη βάση για να αποκτήσουν νόημα οι τύποι υπολογισμού εμβαδού, που εμφανίζονται σε μεγαλύτερες τάξεις. Επίσης, βοηθά στη διάκριση της περιμέτρου από το εμβαδό. Η εισαγωγή στις υποδιαιρέσεις της μονάδας μέτρησης	Μαθηματικά Δ' δημοτικού, ΟΕΔΒ, σελ. 82, Δραστηριότητες α, β και σελ. 79, Εργασία 2. Μαθηματικά Δ' Δημοτικού, Τετράδιο Εργασιών, γ' τεύχος, ΟΕΔΒ, και σελ. 12, Εργασία 2-4, σελ. 15, Εργασίες 4-5, σελ. 18, Εργασία 2 και σελ. 19, Εργασία 4. Τα μαθηματικά μου Δ' τάξη δημοτικού, α΄ μέρος, ΟΕΔΒ, σελ. 34-35, Εργασίες 3-5. Τα Μαθηματικά μου, Δ' τάξη Δημοτικού, β΄ μέρος, ΟΕΔΒ, σελ. 60, Πρόβλημα 7. Μαθηματικά, Βιβλίο του Μαθητή, Επίπεδο Διδασκαλίας Β΄, Πρόγραμμα Ένταξη

		επιφάνειας μπορεί να γίνει αρχικά σε τετραγωνισμένο χαρτί, στο οποίο μέρος της επιφάνειας αποτελείται από μισά (τρίγωνου ή ορθογώνιου σχήματος) ή τέταρτα (τετράγωνου ή ορθογώνιου σχήματος) του μοναδιαίου τετραγώνου. *(ενδεικτική δραστηριότητα ΜΔ2, ΜΔ3)*	Τσιγγανοπαίδων στο Σχολείο, σελ. 29-33. http://www.pre.uth.gr/main/index.php?option=com_content&view=category&layout=blog&id=35&Itemid=52.
Μ11. Υπολογίζουν και συγκρίνουν το πλήθος των κύβων ορθογώνιων κατασκευών, υπολογίζοντας (μήκος x πλάτος) το πλήθος των κύβων σε μια στρώση και πολλαπλασιάζοντας με τον αριθμό των στρώσεων. *Μ12.* Αναλύουν στερεά σε δομικές μονάδες (κύβους) και τα ανασυνθέτουν σε νέα στερεά, διαπιστώνοντας τη διατήρηση του όγκου. *Μ13.* Εκτιμούν και συγκρίνουν τον όγκο ορθογώνιων κατασκευών.	***Μέτρηση χωρητικότητας-όγκου*** • άμεσες και έμμεσες συγκρίσεις • μέτρηση με μη τυπικές και τυπικές μονάδες • εκτίμηση *(3 ώρες)*	Ο υπολογισμός του όγκου ορθογώνιων κατασκευών επεκτείνεται σε πολλαπλασιαστικές στρατηγικές. Με αυτή την προσέγγιση τίθενται οι βάσεις για να αποκτήσουν νόημα οι τύποι υπολογισμού όγκου σε μεγαλύτερες τάξεις. Π.χ. κατασκευάζουν ορθ. κατασκευή.  Υπολογίζουν το πλήθος των κύβων μιας στρώσης: 3x5 κύβοι = 15 κύβοι. Πολλαπλασιάζουν με τον αριθμό των στρώσεων: 15x4 κύβοι = 60 κύβοι. Για τη διαπίστωση της διατήρησης του όγκου μπορούν να αναδιατάξουν τους κύβους των ορθογώνιων κατασκευών και να	Τα Μαθηματικά μου, Δ' Τάξη Δημοτικού, α΄ μέρος, ΟΕΔΒ, σελ. 37, Εργασία 1.

		υπολογίσουν τον αριθμό κύβων της νέας κατασκευής.	
Μ14. Εκτιμούν, συγκρίνουν και διατάσσουν χρονικά διαστήματα με ακρίβεια λεπτού. *Μ15.* Διερευνούν τις σχέσεις μεταξύ έτους, δεκαετίας και χιλιετίας, και επιλύουν σχετικά προβλήματα.	***Μέτρηση χρόνου*** • άμεσες και έμμεσες συγκρίσεις • μέτρηση με μη τυπικές και τυπικές μονάδες • χρήση οργάνων μέτρησης • εκτίμηση *(3 ώρες)*	Οι σχέσεις μεταξύ των μονάδων χρόνου αξιοποιούνται για την παράλληλη ανάπτυξη των συμμιγών αριθμών. Οι σχέσεις μεταξύ έτους, δεκαετίας, αιώνα και χιλιετίας μπορούν να αξιοποιηθούν στην Ιστορία (οριζόντια σύνδεση) με την κατασκευή και μελέτη της ιστορικής γραμμής, την αναπαράσταση γεγονότων με αυτή και τον υπολογισμό χρονικών διαστημάτων.	Μαθηματικά Δ' δημοτικού, ΟΕΔΒ, σελ. 127, Εργασίες 1 και 2. Μαθηματικά Δ' Δημοτικού, Τετράδιο Εργασιών, δ' τεύχος, ΟΕΔΒ, σελ. 28-29, εργασίες: 1-7.

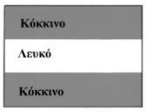
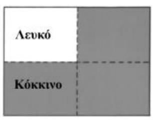
Θεματική ενότητα: Στοχαστικά Μαθηματικά (Στατιστική – Πιθανότητες)

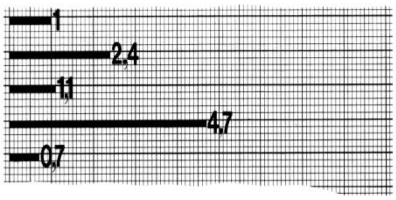
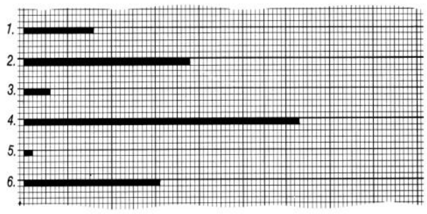
Προτεινόμενες διδακτικές ώρες: 10

Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα (ΠΜΑ)	**Βασικά θέματα**	**Δραστηριότητες**	**Εκπαιδευτικό υλικό**
Σ1. Διατυπώνουν ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με δεδομένα. *Σ2.* Συλλέγουν δεδομένα μέσω μικρής κλίμακας ερευνών ή πειραμάτων και επεκτείνουν τους τρόπους οργάνωσης τους και σε πίνακες απόλυτων συχνοτήτων. *Σ3.* Επεκτείνουν τις αναπαραστάσεις των δεδομένων και σε διπλά ραβδογράμματα. *Σ4.* Κάνουν μετατροπές από μία μορφή	**Δεδομένα** • συλλογή, οργάνωση, αναπαράσταση και ερμηνεία δεδομένων *(5 ώρες)*	Οι μαθητές σ' αυτή την τάξη συνεχίζουν να εξερευνούν κατηγορικά ή διακριτά ποσοτικά δεδομένα, εστιάζοντας σε συγκρίσεις ομάδων. (*ενδεικτική δραστηριότητα ΣΔ1*)	

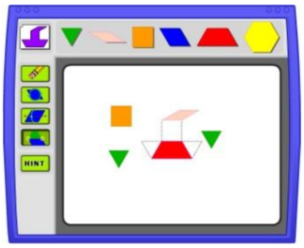
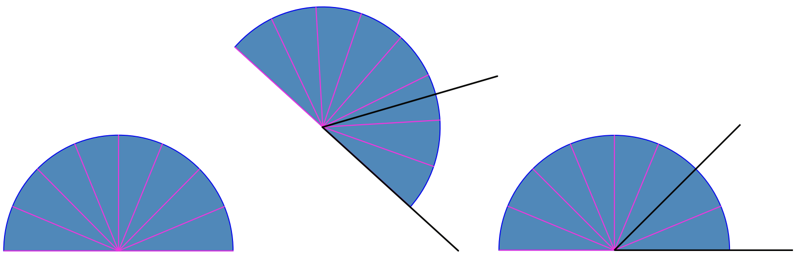
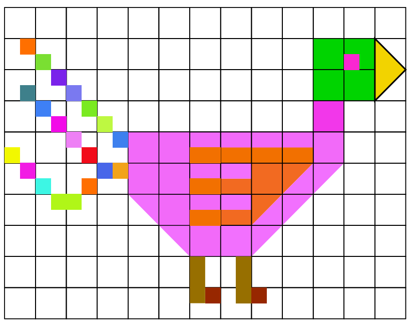
αναπαράστασης σε άλλη. *Σ5.* Επιχειρηματολογούν βασιζόμενοι στα δεδομένα.			
Σ6. Προσδιορίζουν χαρακτηριστικές τιμές των δεδομένων (επικρατούσα τιμή) και διερευνούν τα χαρακτηριστικά τους.	**Μέτρα θέσης** • διάμεσος **Μεταβλητότητα** *(1 ώρα)*	Οι μαθητές με την χρήση κατάλληλων υλικών ή μέσων (π.χ. αλληλοσυνδεόμενοι κύβοι, καρτελάκια όπου στο καθένα είναι σημειωμένη μια τιμή κλπ) διατάσσουν τα δεδομένα. Προσδιορίζουν την θέση του «κέντρου» των δεδομένων και την τιμή του (διάμεσος). Το περιγράφουν με εκφράσεις όπως για παράδειγμα: «οι μισοί περίπου μαθητές διαβάζουν 6 βιβλία ή περισσότερα».	
Π1. Καταγράφουν τα χαρακτηριστικά του πειράματος τύχης και προβλέπουν την συχνότητα εμφάνισης ενός ενδεχομένου κατά την επανάληψη ενός πειράματος.	**Πείραμα τύχης** *(3 ώρες)*	(*ενδεικτική δραστηριότητα ΠΔ1*)	
Π2. Εκτιμούν την πιθανότητα ενός ενδεχομένου σε κλίμακα με από αδύνατο ενδεχόμενο έως βέβαιο ενδεχόμενο με τη μέση της κλίμακας να αντιπροσωπεύει το ίδιο πιθανό να συμβεί όσο το να μην συμβεί (50-50).	**Πιθανότητα ενδεχομένου** *(1 ώρα)*		

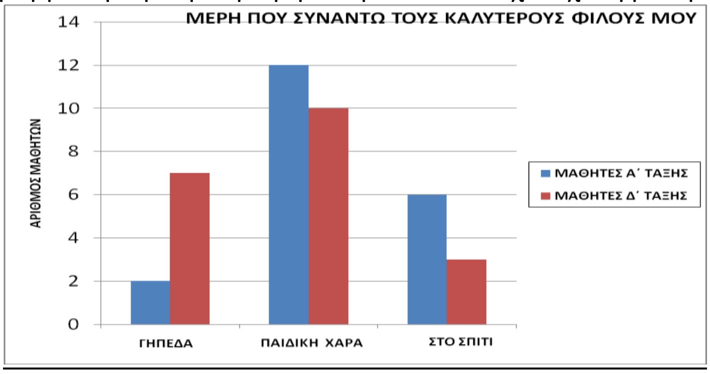
Ενδεικτικές Δραστηριότητες

Α/Α	Περιγραφή δραστηριότητας	ΠΜΑ
ΑρΔ1	Οι μαθητές καλούνται να επιλύσουν προβλήματα όπως: Ένα αυτοκίνητο διανύει 369 χμ προς μία κατεύθυνση και 122 χμ προς την αντίθετη κατεύθυνση. Πόσο μακριά βρίσκεται το αυτοκίνητο από το σημείο που ξεκίνησε;	**Αρ10, Αρ12**
ΑρΔ2	Για κάθε μία από τις παρακάτω πράξεις δίνονται τρεις απαντήσεις. Οι μαθητές προσπαθούν να μαντέψουν τη σωστή απάντηση και να κάνουν την επαλήθευση. Κυκλώνουν τη σωστή απάντηση. **1763+359= ; 21222 2122 4122** **1156-94= ; 962 1162 1062** Στη συνέχεια, δίνονται στους μαθητές κάποια αποτελέσματα. Για το καθένα χωριστά, καλούνται να κυκλώσουν την πράξη που πιστεύουν ότι έδωσε αυτό το αποτέλεσμα. **5003 1500+503 ή 233+4770 ή 2261+2942** **2546 5546-2546 ή 6624-4078 ή 1252+1394**	**Αρ10, Αρ11, Αρ12**
ΑρΔ3	Οι μαθητές παρατηρούν σημαίες που έχουν σε περισσότερα από ένα κομμάτια το ίδιο χρώμα. Η Αυστρία έχει στα 2/3 της σημαίας της κόκκινο χρώμα.  Αυστρία Χρησιμοποιούν κλάσματα για να περιγράψουν σημαίες όπως οι παρακάτω:   Νιγηρία Ουγκάντα Για κάποιες σημαίες, όπως αυτή του Άμπου Ντάμπι, οι μαθητές χρειάζεται να χαράξουν μέσα στο σχέδιο μερικές ακόμη γραμμές, για να μπορούν να αναγνωρίσουν πιο εύκολα τα κλάσματα που έχουν χρησιμοποιηθεί. Η σημαία του Άμπου Ντάμπι είναι κατά τα ¾ κόκκινη και κατά το ¼ άσπρη.    Άμπου Ντάμπι Ταϋλάνδη Ελβετία	**Αρ18**

ΑρΔ4	Γραμμές με δεκαδικούς  Οι μαθητές, αφού έχουν διερευνήσει δεκαδικούς αριθμούς σε χιλιοστομετρικό χαρτί, καλούνται να βρουν δεκαδικούς αριθμούς που παρουσιάζονται με γραμμές, όπως παρακάτω.  	**Αρ21, Αρ23**
ΑρΔ5	Πόσο κοντά μπορείς να φτάσεις; Οι μαθητές βρίσκουν τον ακέραιο αριθμό με τον οποίο μπορούν να πολλαπλασιάσουν τον καθένα από τους παρακάτω αριθμούς για να φτάσουν όσο πιο κοντά γίνεται στο 100. **18 12 29 34 14** Μπορούν να χρησιμοποιήσουν δεκαδικούς αριθμούς για να πλησιάσουν περισσότερο. Πόσο κοντά στο 100 μπορούν να φτάσουν; Μπορούν να χρησιμοποιήσουν αριθμομηχανή τσέπης.	**Αρ22, Αρ23, Αρ24, Αρ26**
ΑρΔ6	Δεκαδικοί αριθμοί Οι μαθητές έχουν κάρτες με τους παρακάτω δεκαδικούς αριθμούς. **0,07 1,03 1,13 0,71 0,24 0,98** Τις κόβουν και τις τοποθετούν σε δύο στοίβες. Μαντεύουν ποια από τις δύο στοίβες έχει το μεγαλύτερο άθροισμα. Ελέγχουν αν είναι σωστό το άθροισμα που έχουν μαντέψει. Μπορούν να χρησιμοποιήσουν αριθμομηχανή τσέπης. Μπορούν να φτιάξουν δύο στοίβες που να έχουν το ίδιο άθροισμα; Μπορούν να τις φτιάξουν έτσι ώστε να έχουν περίπου το ίδιο άθροισμα; Ανακατεύουν όλες τις κάρτες και τις βάζουν στη σειρά από το μεγαλύτερο προς το μικρότερο αριθμό. Στη συνέχεια, φτιάχνουν άλλες 4 κάρτες που θα συμπεριληφθούν σε αυτό το πακέτο. Οι αριθμοί που επιλέγουν να γράψουν πάνω στις κάρτες πρέπει να είναι ανάμεσα στο μικρότερο και στο μεγαλύτερο αριθμό που είχαν στις αρχικές κάρτες. Απαντούν στις ίδιες ερωτήσεις.	**Αρ21**
ΑΔ1	Δίνεται στους μαθητές ο κανόνας “πολλαπλασίασε επί 3” και η σειρά των αριθμών 1, 3, 6, 9, 12… και ζητείται να συνεχίσουν τη σειρά των αριθμών αυτών και να βρουν τον 10^{ο} όρο.	**Α1, Α2**

<table>
<tr>
<td>ΑΔ2</td>
<td>
Μίνι γεύματα
Παρακάτω, παρουσιάζεται το μενού ενός καταστήματος.
<table>
<tr><th>Μενού</th><th>στο κατάστημα</th><th>σε πακέτο</th></tr>
<tr><td>Σάντουιτς</td><td>1,40</td><td>1,20</td></tr>
<tr><td>Πίτα</td><td>1,10</td><td>1,00</td></tr>
<tr><td>Μπισκότα</td><td>0,70</td><td>0,60</td></tr>
<tr><td>Καφές</td><td>1,00</td><td>0,90</td></tr>
<tr><td>Τσάι</td><td>0,90</td><td>0,70</td></tr>
<tr><td>Χυμός</td><td>1,00</td><td>0,90</td></tr>
</table>
Επειδή το κατάστημα έχει πολλούς πελάτες, το προσωπικό, αντί να γράφει ολόκληρη την παραγγελία, χρησιμοποιεί έναν κώδικα στον οποίο οι τιμές των προϊόντων συμβολίζονται με γράμματα. Έτσι, ο σερβιτόρος αντί να γράφει «ένας καφές, ένα σάντουιτς και ένας χυμός», γράφει Κ+Σ+Χ.
Το κόστος αυτής της παραγγελίας είναι:
Φαγητό στο κατάστημα 1,00+1,40+1,00=3,40
Φαγητό σε πακέτο 0,90+1,20+0,90=3,00
Οι μαθητές καλούνται να γράψουν τους κωδικούς των τιμών και να βρουν το κόστος της παραγγελίας στο κατάστημα και σε πακέτο για κάθε μία από τις παρακάτω παραγγελίες:
«Ένα τσάι, ένα σάντουιτς»
«Ένας καφές, ένα μπισκότο και μια πίτα»
«Ένας χυμός, ένα τσάι, ένα σάντουιτς και δύο πίτες»
</td>
<td>Α1, Α2</td>
</tr>
<tr>
<td>ΓΔ1</td>
<td>Ο εκπαιδευτικός αξιοποιεί το επιτραπέζιο παιγνίδι Ναυμαχία για να περιγράψουν θέσεις και διαδρομές χρησιμοποιώντας αλφαριθμητικές συντεταγμένες. Αρχικά οι μαθητές μπορούν να παίξουν παρτίδες Ναυμαχίας σημειώνοντας σε κατάλληλο φύλλο καταγραφής τις πετυχημένες βολές τους. Ο εκπαιδευτικός θα μπορούσε στη συνέχεια να μοιράσει φύλλα εργασίας με αναπαραστάσεις καμβάδων Ναυμαχίας, ζητώντας από τους μαθητές να σημειώσουν με αλφαριθμητικές συντεταγμένες τις βολές που χρειάζονται για να «βυθίσουν» ένα συγκεκριμένο πλοίο.</td>
<td>Γ2</td>
</tr>
<tr>
<td>ΓΔ2</td>
<td>Ο εκπαιδευτικός φέρνει στην τάξη δύο κουβάρια σπάγκου και τα δίνει σε δύο ζευγάρια μαθητών. Οι μαθητές αναπαριστούν ευθείες γραμμές κρατώντας τεντωμένα μεγάλου μήκους κομμάτια του σπάγκου και διερευνούν τις σχετικές τους θέσεις. Περιμένουμε οι μαθητές να αναπαραστήσουν ευκολότερα περιπτώσεις τεμνόμενων ευθειών και να συζητήσουν τα είδη των γωνιών που σχηματίζονται (ορθές, οξείες, αμβλείες). Για τις περιπτώσεις των παράλληλων ευθειών η διερεύνηση θα εστιαστεί στην ανάγκη οι ευθείες να βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο (για παράδειγμα, οι σπάγκοι να «ακουμπούν» στον πίνακα). Η διερεύνηση μπορεί να επεκταθεί και σε περιπτώσεις ασύμβατων ευθειών.</td>
<td>Γ4, Γ6</td>
</tr>
<tr>
<td>ΓΔ3</td>
<td>Ο εκπαιδευτικός ζητά από τους μαθητές να ψηλαφήσουν διάφορα στερεά δίχως να τα βλέπουν. Ακολούθως περιγράφουν τα χαρακτηριστικά τους, ονομάζουν τα σχήματα των εδρών τους, τις σχεδιάζουν σε καμβάδες και τα κατασκευάζουν με Polydron. Οι στρατηγικές ψηλάφησης ακολουθούν σε μεγάλο βαθμό την εξέλιξη της γεωμετρικής σκέψης των παιδιών. Αποτελεσματικότερες στρατηγικές χρησιμοποιούν εξωτερικά σημεία αναφοράς για την διερεύνηση και αιτιολόγηση εικασιών. Για παράδειγμα, το θρανίο ως επίπεδο μπορεί να χρησιμοποιηθεί στον έλεγχο της καθετότητας ακμών ή παραλληλίας εδρών.</td>
<td>Γ3, Γ5, Γ8</td>
</tr>
<tr>
<td>ΓΔ4</td>
<td>Οι μαθητές χρησιμοποιώντας γνωστά ψηφιδωτά από την ελληνική ιστορία μελετούν τους</td>
<td>Γ15</td>
</tr>
</table>

	μετασχηματισμούς στο επίπεδο. Στη συνέχεια πάνω σε διάστικτους καμβάδες σχηματίζουν ψηφίδες, τις αναπαράγουν και δημιουργούν πλακόστρωτα και ψηφιδωτά. Αντίστοιχα, η μελέτη μπορεί να επεκταθεί σε περιπτώσεις ψηφιδωτών άλλων πολιτισμών. Η δραστηριότητα να επεκταθεί και σε ψηφιακό περιβάλλον. Ενδεικτικά ο εκπαιδευτικός μπορεί να χρησιμοποιήσει την εφαρμογή Ψηφιδωτά ακολουθώντας τον σύνδεσμο: http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=27. 	
ΓΔ5	Ο εκπαιδευτικός τοποθετεί στην επιφάνεια της συσκευής προβολής διαφανειών, ακριβώς κάτω από τον φακό, διάφορα στερεά. Τα παιδιά από τη σιλουέτα που προβάλλεται στον πίνακα προσπαθούν να μαντέψουν κάθε φορά το στερεό, συνδέοντας τις σιλουέτες με τα σχήματα των πλευρών των στερεών. Συνεχίζοντας τη δραστηριότητα, ο εκπαιδευτικός μπορεί να δώσει στους μαθητές φύλλα εργασίας με διάφορες σιλουέτες από τις οποίες θα επιλέγουν αυτές που μπορούν να ταιριάζουν με συγκεκριμένα στερεά.	**Γ17**
ΜΔ1	Κατασκευάζουν «μοιρογνωμόνιο» διπλώνοντας διαδοχικά διαφανές χαρτί ημικυκλικού σχήματος, το οποίο χρησιμοποιούν για να μετρήσουν γωνίες και να συγκρίνουν γωνίες χρησιμοποιώντας μη τυπικές μονάδες. 	**Μ1**
ΜΔ2	Σχεδιάζουν σε τετραγωνισμένο χαρτί ή με τη χρήση λογισμικού γεωμετρίας διάφορα σχήματα με δεδομένη περίμετρο και υπολογίζουν το εμβαδό τους.	**Μ2, Μ10**
ΜΔ3	Ο εκπαιδευτικός μπορεί να δώσει σχέδια σε τετραγωνισμένο χαρτί (1εκ. x 1 εκ.) και να ζητήσει από τους μαθητές να υπολογίσουν το εμβαδό των χρωματισμένων περιοχών, όπως για παράδειγμα στο σχέδιο της εικόνας. Για να χρησιμοποιηθούν υποδιαιρέσεις της μονάδας μέτρησης επιφάνειας (1τ.εκ)το σχέδιο θα πρέπει να περιλαμβάνει και διάφορες υποδιαιρέσεις της μονάδας, όπως τρίγωνα (0,5 τ.εκ.), τετράγωνα (0,25 τ.εκ.), ορθογώνια (0,5 ή 0,25 τ.εκ.). 	**Μ8**

ΣΔ1	Ο Χρήστος έκανε μια έρευνα με μαθητές της Α΄ τάξης και της Δ΄ τάξης και έφτιαξε το παρακάτω διάγραμμα. Γράψτε μια μικρή ιστορία που να έχει σχέση με την έρευνα του. 	**Σ3, Σ5, Σ6**
ΠΔ1	Οι μαθητές προβλέπουν πόσες φορές θα έρθει κεφάλι και πόσες γράμματα, αν ρίξουν ένα νόμισμα 6 συνεχόμενες φορές και πόσες αν το ρίξουν 20 συνεχόμενες φορές. Εκτελούν το σχετικό πείραμα και το επαναλαμβάνουν 5 φορές, ενώ καταγράφουν την ένδειξη του νομίσματος κάθε φορά. Αντιπαραβάλουν τα αποτελέσματα με τις προβλέψεις τους. Συγκεντρώνουν όλα τα αποτελέσματα και συζητούν στην τάξη θέματα που παρατηρούν στις καταγραφές που έχουν κάνει.	**Π1, Σ2**

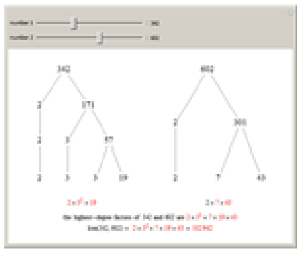
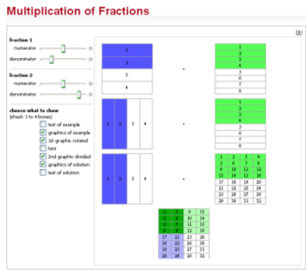
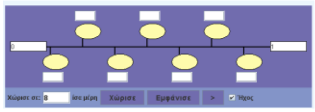
Ε΄ Δημοτικού

Θεματική ενότητα: Αριθμοί – Άλγεβρα

Προτεινόμενες Διδακτικές ώρες: 71 (62 + 9)

Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα (ΠΜΑ)	**Βασικά θέματα**	**Δραστηριότητες**	**Εκπαιδευτικό υλικό**
Αρ1. Διαβάζουν, γράφουν και αναγνωρίζουν αριθμούς σε μια ποικιλία από πλαίσια *Αρ2.* Διερευνούν τη σχέση μεταξύ ενός ψηφίου και της αξίας του. *Αρ3.* Αναλύουν και συνθέτουν φυσικούς αριθμούς με διαφορετικούς τρόπους *Αρ4.* Διερευνούν τη σχέση των φυσικών αριθμών με τους κλασματικούς και τους δεκαδικούς αριθμούς. *Αρ5.* Αναγνωρίζουν και αναπαριστούν με διαφορετικούς τρόπους καταστάσεις πρόσθεσης, αφαίρεσης, πολλαπλασιασμού και (τέλειας και ατελούς) διαίρεσης. *Αρ6.* Εκτιμούν και υπολογίζουν το αποτέλεσμα αριθμητικών παραστάσεων που περιλαμβάνουν και τις τέσσερις πράξεις, συνειδητοποιώντας το ρόλο της παρένθεσης. *Αρ7.* Αναγνωρίζουν, διατυπώνουν και εφαρμόζουν στρατηγικές νοερών υπολογισμών των τεσσάρων πράξεων	***Φυσικοί αριθμοί (μέχρι 1 τρις αλλά και άνω)*** • αριθμητικά σύμβολα • *σχέσεις αριθμών* • *θεσιακή αξία ψηφίων* • *πρόσθεση, αφαίρεση , πολλαπλασιασμός και διαίρεση φυσικών αριθμών* • *Φυσικοί αριθμοί – Διαιρετότητα* (24 ώρες)	Είναι σημαντικό να αναπτύσσουν οι μαθητές διαφορετικές στρατηγικές νοερού υπολογισμού. Ο εκπαιδευτικός προκαλεί τους μαθητές να κάνουν εκτιμήσεις του αποτελέσματος τεσσάρων πράξεων, να αιτιολογούν την εκτίμηση τους και να την επιβεβαιώνουν με τη χρήση της αριθμομηχανής. *(ενδεικτικές δραστηριότητες ΑΔ1, ΑΔ2)*	Μαθηματικά Ε΄ Δημοτικού, Βιβλίο του Μαθητή, ΟΕΔΒ, σελ. 26 «Στο εργαστήρι πληροφορικής». Ψηφιακό περιβάλλον: Η Χαλασμένη Αριθμομηχανή  (Freudenthal Institute) Κάποια κουμπιά λειτουργούν και κάποια όχι. Οι μαθητές θα πρέπει να προσεγγίσουν τον αριθμό που τους δίνεται χρησιμοποιώντας τα κουμπιά που λειτουργούν.

(διαίρεση: τέλεια, με μονοψήφιο διαιρέτη). *Αρ8.* Αναπτύσσουν και αξιοποιούν διαδικασίες εκτέλεσης / αλγορίθμους των τεσσάρων πράξεων, χρησιμοποιώντας διάφορες στρατηγικές, μέσα (ανάμεσα στα οποία και αριθμομηχανή) και αναπαραστάσεις. *Αρ9.* Αναπτύσσουν στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων και μοντελοποίησης / αναπαράστασης καταστάσεων για να τις τεκμηριώσουν και να τις κοινοποιήσουν. *Αρ10.* Διερευνούν τον αλγόριθμο της Ευκλείδειας διαίρεσης δύο φυσικών αριθμών και τον χρησιμοποιούν για να κάνουν τη δοκιμή της διαίρεσης. *Αρ11.* Διατυπώνουν αιτιολογούν και εφαρμόζουν τα κριτήρια διαιρετότητας των 2,3, 4, 5, 8, 9, 10 και 25.			
Αρ12. Εισάγονται στα κλάσματα μεγαλύτερα της μονάδας και στους μικτούς. *Αρ13.* Αναγνωρίζουν και κατασκευάζουν ισοδύναμα κλάσματα και απλοποιούν κλάσματα. *Αρ14.* Διατάσσουν ένα σύνολο κλασματικών αριθμών και βρίσκουν ενδιάμεσους, μικρότερους και μεγαλύτερους κλασματικούς αριθμούς. *Αρ15.* Προσθέτουν και	***Κλασματικοί αριθμοί*** *(20 ώρες)*	Είναι σημαντικό να δοθεί έμφαση στις στρατηγικές των μαθητών για την προσέγγιση των ισοδυνάμων κλασμάτων προκειμένου να συγκρίνουν, να προσθέτουν και να αφαιρούν κλάσματα. *(ενδεικτική δραστηριότητα ΑΔ3)*	Μαθηματικά Ε΄ Δημοτικού, Βιβλίο του Μαθητή, ΟΕΔΒ, σελ. 48, «Εκλογές στην τάξη». Ψηφιακό περιβάλλον: Ανάλυση πρώτων παραγόντων Applet από δικτυακό τόπο Wolfram Demonstrations Project

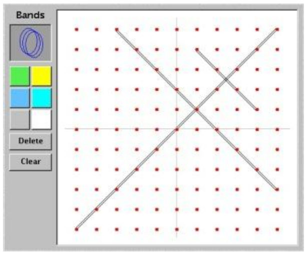
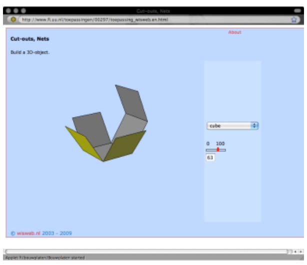
αφαιρούν κλάσματα. *Αρ16.*Πολλαπλασιάζουν κλάσματα με φυσικούς και κλάσματα με κλάσματα. *Αρ17.* Διαιρούν κλάσματα με φυσικούς και κλάσματα με κλάσματα (διαίρεση ως αντίστροφος πολλαπλασιασμός)			 Οπτικοποίηση πολλαπλασιασμού κλασμάτων Applet από δικτυακό τόπο Wolfram Demonstrations Project 
*Αρ18.*Αναγνωρίζουν τα δεκαδικά κλάσματα και τα μετατρέπουν σε δεκαδικούς αριθμούς και αντιστρόφως. *Αρ19.*Αναγνωρίζουν ότι κάθε δεκαδικός αριθμός με πεπερασμένα δεκαδικά ψηφία (terminating decimal) είναι ένα κλάσμα. *Αρ20.*Ταξινομούν δεκαδικούς αριθμούς με περισσότερα από δύο δεκαδικά ψηφία. *Αρ21.* Εκτιμούν το αποτέλεσμα σε προβλήματα με δεκαδικούς αριθμούς.	***Δεκαδικοί αριθμοί*** *(12 ώρες)*	Είναι σημαντικό να αντιληφθούν οι μαθητές ότι τα μέρη μιας ποσότητας θα μπορούσε να εκφραστούν σε διαφορετικές μορφές: ως ποσοστό, ως κλασματικό μέρος, ως δεκαδικό μέρος και ως φυσικός αριθμός. Επίσης, ο εκπαιδευτικός καλεί τους μαθητές να κάνουν εκτιμήσεις και να επιβεβαιώνουν το αποτέλεσμα με την χρήση της αριθμομηχανής. *(ενδεικτικές δραστηριότητες ΑΔ4, ΑΔ5, ΑΔ6)*	Μαθηματικά Στ΄ Δημοτικού, Βιβλίο του Μαθητή, ΟΕΔΒ, σελ.15, δραστηριότητα 2 «Οι αποστάσεις στις Κυκλάδες». Ψηφιακό περιβάλλον: Δεκαδικοί αριθμοί στην αριθμογραμμή, Λογισμικό "Αριθμογραμμή" Παιδαγωγικού Ινστιτούτου 
Αρ22. Αντιλαμβάνονται την ανάγκη επέκτασης της αριθμογραμμής, για να συμπεριλάβει αριθμούς μικρότερους από το μηδέν.	***Ακέραιοι αριθμοί*** *(6 ώρες)*	Ο εκπαιδευτικός καλεί τους μαθητές να συγκρίνουν εύκολους αρνητικούς και θετικούς αριθμούς και να αιτιολογήσουν το	

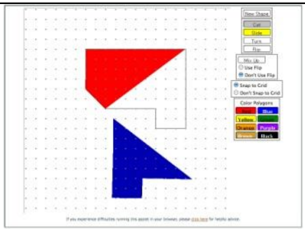
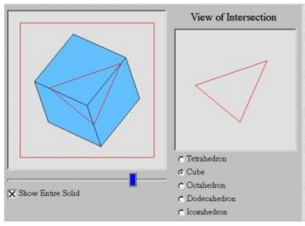
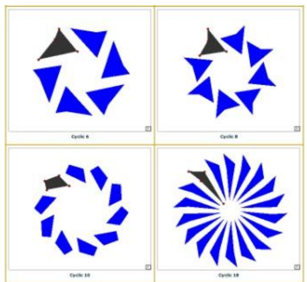
Αρ23. Συγκρίνουν και διατάσσουν ακεραίους αριθμούς και ορίζουν τη θέση τους στην αριθμογραμμή.		συλλογισμό τους. Προτείνεται η χρήση της αριθμογραμμής αλλά και ο συνδυασμός λέξεων, συμβόλων και διαγραμμάτων στις προσεγγίσεις των μαθητών. *(ενδεικτικές δραστηριότητες ΑΔ7, ΑΔ8)*	
Α1. *Αξιοποιούν κανονικότητες και τις ιδιότητές τους, για να επιλύσουν σχετικά προβλήματα* *Α2*. Με διαδικασίες δοκιμής και ελέγχου διερευνούν τις μεταβολές που προκαλούνται σε μια ποσότητα λόγω μεταβολής μιας άλλης ποσότητας (ανεξάρτητη – εξαρτημένη μεταβλητή). *Α3*. Διερευνούν τη σχέση μεταξύ ανάλογων ποσών. Α4. *Διερευνούν την έννοια της συνάρτησης μέσω απλών αναπαραστάσεων μονοσήμαντων αντιστοιχιών.*	***Κανονικότητες/ συναρτήσεις*** *(4 ώρες)*	Στις τελευταίες τάξεις του Δημοτικού Σχολείου, μπορεί να δοθεί έμφαση στη μελέτη «μηχανών παραγωγής απαντήσεων», π.χ., μια «μηχανή», η οποία, όταν τροφοδοτηθεί στην είσοδό της με έναν αριθμό, δίνει στην έξοδό της το διπλάσιό του, κτλ. Αν και σε αυτή τη φάση η προσέγγιση συνεχίζει να έχει άτυπο χαρακτήρα, η διδασκαλία μπορεί να αρχίσει να ενθαρρύνει μια πιο τυπική διερεύνηση του θέματος, π.χ., γιατί σε κάποιες από αυτές τις «μηχανές», κάθε είσοδος δίνει ένα μοναδικό αριθμό στην έξοδο, ενώ σε άλλες όχι και τι σημαίνει αυτό. *(ενδεικτική δραστηριότητα ΑΔ2)*	Βιβλίο μαθητή Ε΄, σελίδα 23, εργασία. Εύρεση αναδρομικής Κανονικότητας σε σχέση με το εκπαιδευτικό υλικό που προτείνεται (Βιβλίο μαθητή Δ΄ δημοτικού σελ 136 εργασία α) .
Α5. Εκφράζουν συμβολικά ένα απλό πρόβλημα με αριθμητική παράσταση ή σχέση και διατυπώνουν ένα πρόβλημα που να μοντελοποιείται από δεδομένη αριθμητική παράσταση ή σχέση (απλές περιπτώσεις).	***Αλγεβρικές παραστάσεις*** *(3 ώρες)*	Ένας παράγοντας που φαίνεται να ευθύνεται σημαντικά για τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές στην άλγεβρα είναι η εκτεταμένη χρήση συμβόλων που τη διακρίνει. Χρειάζεται προσοχή και υπομονή	

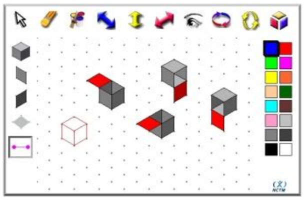
Α6. Υπολογίζουν την τιμή μιας απλής αριθμητικής παράστασης με χρήση της προτεραιότητας των πράξεων (και με παρενθέσεις). *Α7.* Χρησιμοποιούν γράμματα για να εκφράσουν μεγέθη σε τύπους και σχέσεις (από την καθημερινή ζωή και τις επιστήμες)		στην προσπάθεια μύησης των μαθητών στον αλγεβρικό συμβολισμό, με έμφαση στην κατανόηση των ιδεών που αναπαρίστανται παρά στον ίδιο το συμβολισμό. Η χρησιμοποίηση καθημερινών καταστάσεων που αφορούν σε συναρτήσεις προσφέρει έναν ιδιαίτερα αποτελεσματικό τρόπο εισαγωγής της χρήσης μιας ή περισσότερων μεταβλητών σε μία ισότητα, καθώς και των γραμμάτων ως συμβόλων γενίκευσης κανονικοτήτων και ως μεταβλητών. *(ενδεικτική δραστηριότητα ΑΔ1)*	
Α8. Χρησιμοποιούν τις ιδιότητες των αριθμών, για να συμπληρώσουν σύνθετες αριθμητικές προτάσεις, όπως (5+3) + $\square$ = 5+(3+4), 2 (3+4) = $\square$ + 8. *Α9.* Διερευνούν τις διαφορετικές χρήσεις του συμβόλου = σε αριθμητικές ισότητες με άγνωστη ποσότητα στο πρώτο ή στο 2^{ο} μέλος.	***Ισότητες-ανισότητες*** *(2 ώρες)*	Πολλοί από τους μαθητές θεωρούν το ‘=’ ως ένα σημάδι για «να κάνεις κάτι» και συχνά «να δώσεις την απάντηση, έναν αριθμό» και όχι ως το σύμβολο της ισότητας μεταξύ του δεξιού και του αριστερού σκέλους. Αυτή η αντίληψη του συμβόλου της ισότητας δημιουργεί δυσκολίες στην κατανόηση και στο χειρισμό των μετασχηματισμών της εξίσωσης, που απαιτούνται για την επίλυσή της αργότερα και επιβάλλεται να ανατραπεί από τη διδακτική πράξη.	

Θεματική ενότητα: Χώρος και Γεωμετρία – Μέτρηση

Προτεινόμενες Διδακτικές ώρες: 36 (20 + 16)

Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα (ΠΜΑ)	Βασικά θέματα	Δραστηριότητες	Εκπαιδευτικό υλικό
Γ1. Κατασκευάζουν βασικούς χάρτες χρησιμοποιώντας απλές κλίμακες και υπομνήματα. *Γ2*. Περιγράφουν τοποθεσίες και διαδρομές σε βασικούς χάρτες χρησιμοποιώντας τυπικό σύστημα συντεταγμένων και προσανατολισμού στο χώρο, καθώς και γλωσσικούς όρους διεύθυνσης και απόστασης (καρτεσιανό σύστημα αξόνων, κύρια σημεία του ορίζοντα).	***Έννοιες του χώρου*** • ανάγνωση και δημιουργία χαρτών • δόμηση του χώρου και συντεταγμένες *(3 ώρες)*	*(ενδεικτικές δραστηριότητες ΓΔ1)*	Χάρτες, πυξίδα. Ψηφιακό περιβάλλον: Γεωπίνακας κατρεσιανών συντεταγμένων. http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_303_g_3_t_3.html?open=activities&from=category_g_3_t_3.html. 
Γ3. *Αναγνωρίζουν κανονικά πολύγωνα.* Γ4. *Ταξινομούν τρίγωνα βάσει των πλευρών και των γωνιών τους.* Γ5. *Αναγνωρίζουν την περιφέρεια, την ακτίνα και τη διάμετρο κύκλων.* Γ6. *Χρησιμοποιούν την αξονική συμμετρία στη διερεύνηση τριγώνων και ορθογωνίων παραλληλογράμμων.* Γ7. *Αντιλαμβάνονται ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι 180^o.* Γ8. *Δημιουργούν καταλόγους με τα στοιχεία και τις ιδιότητες επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων και στερεών.* Γ9. *Σχεδιάζουν σημεία, ευθείες, ημιευθείες, ευθύγραμμα τμήματα,*	***Γεωμετρικά σχήματα*** • αναγνώριση, ονομασία και ταξινόμηση γεωμετρικών σχημάτων και στερεών • ανάλυση γεωμετρικών σχημάτων και στερεών σε στοιχεία και ιδιότητες • κατασκευές και σχεδιασμός γεωμετρικών σχημάτων και στερεών • σύνδεση μεταξύ γεωμετρικών σχημάτων και στερεών • ανάλυση ή σύνθεση γεωμετρικών σχημάτων και στερεών σε άλλα σχήματα ή μέρη *(12 ώρες)*	Η αναγνώριση και κατάταξη επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων θα εστιάσει στα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά της κάθε κλάσης και στις ταξινομήσεις εντός της κλάσης (π.χ. ταξινόμηση τριγώνων ως προς τις πλευρές και τις γωνίες τους). *(ενδεικτικές δραστηριότητες ΓΔ2, ΓΔ3, ΓΔ5, ΓΔ6, ΓΔ7)*	Alfa shapes, γεωπίνακες, Polydron, τάνγκραμ, πεντόμινο, φυσικά υλικά, σχήματα, εικόνες, διάφοροι καμβάδες. Ψηφιακό περιβάλλον: Αναπτύγματα, πλατωνικά στερεά. http://www.fi.uu.nl/toepassingen/00297/toepassing_wisweb.en.html.  Ψαλιδίζοντας σχήματα. http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=72.

τεμνόμενες, παράλληλες και κάθετες ευθείες και τα συνδέουν με χάρτες και διαδρομές. Γ10. *Σχεδιάζουν τρίγωνα με τη βοήθεια μοιρογνωμονίου.* Γ11. *Αναγνωρίζουν στερεά από τα αναπτύγματά τους.* Γ12. *Αναλύουν επίπεδα γεωμετρικά σχήματα και στερεά σε δύο ή περισσότερα μέρη.*			 Κόβοντας Πλατωνικά στερεά. http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_126_g_3_t_3.html?open=instructions&from=category_g_3_t_3.html 
Γ13. *Κατασκευάζουν στο γεωπίνακα και σχεδιάζουν σε διάφορους καμβάδες ίσα σχήματα περιγράφοντας τους μετασχηματισμούς που τα συνδέουν.* Γ14. *Εντοπίζουν όλους τους άξονες συμμετρίας επίπεδων σχημάτων.* Γ15. *Αναγνωρίζουν σχήματα με κέντρο συμμετρίας (σύνθετες περιστροφές).* Γ16. *Σχεδιάζουν σχήματα με κέντρο συμμετρίας σε διάφορους καμβάδες (απλές περιστροφές 90^o, 180^o).* Γ17. *Αναγνωρίζουν και περιγράφουν μεγεθύνσεις και σμικρύνσεις δισδιάστατων σχημάτων.* Γ18. *Σχεδιάζουν σε τετραγωνισμένο καμβά μεγεθύνσεις και σμικρύνσεις με απλές κλίμακες και τις συνδέουν με την κατασκευή χαρτών.*	***Μετασχηματισμοί*** • μετατόπιση, στροφή και ανάκλαση • αξονική συμμετρία • κεντρική συμμετρία • επικαλύψεις επιφανειών και κανονικότητες • ομοιότητα (μεγέθυνση, σμίκρυνση, κλίμακες) *(3 ώρες)*	Οι μαθητές με τη βοήθεια των δραστηριοτήτων που θα οργανώσει ο εκπαιδευτικός θα έχουν την ευκαιρία να αναγνωρίσουν τη μεγέθυνση και τη σμίκρυνση ως ακόμη έναν μετασχηματισμό στο επίπεδο. *(ενδεικτική δραστηριότητα ΓΔ4)*	Βιβλίο μαθητή, ΟΕΔΒ, σελ. 128-129. Τετραγωνικοί καμβάδες, Τάνγκραμ, pattern blocks, pentablocks, γεωπίνακες, καθρεπτάκι Mira, αντικείμενα των παιδιών κ.λπ. Εικόνες σε μεγέθυνση ή σμίκρυνση φυσικών αντικειμένων, χάρτες του άμεσου περιβάλλοντος των παιδιών (τάξης, γειτονιάς κ.ά.). Ψηφιακό περιβάλλον: Κυκλική συμμετρία. http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=167. 

Γ19. *Αναγνωρίζουν βασικά τρισδιάστατα στερεά (ορθογώνια και τριγωνικά πρίσματα, κυλίνδρους, κώνους και σφαίρες) από διαφορετικές οπτικές γωνίες.* Γ20. *Σχεδιάζουν σε διάφορους καμβάδες και σε ψηφιακό περιβάλλον κύβους και ορθογώνια παραλληλεπίπεδα.*	***Οπτικοποίηση*** • αναγνώριση και αναπαράσταση διαφορετικών οπτικών γωνιών αντικειμένων και καταστάσεων • δημιουργία οπτικοποιήσεων για τη διαχείριση σχημάτων, διευθύνσεων και θέσεων *(2 ώρες)*	*(ενδεικτική δραστηριότητα ΓΔ5)*	Εικόνες, σχέδια, σφηνοτουβλάκια (connecting cubes). Ψηφιακό περιβάλλον: Σε ισομετρικό καμβά. http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=125. 
Μ1. Χρησιμοποιούν το μοιρογνωμόνιο για να μετρήσουν και να κατασκευάσουν γωνίες μέχρι 180^{o}.	***Μέτρηση γωνίας*** ***2 ώρες*** • μέτρηση με μη τυπικές και τυπικές μονάδες • χρήση οργάνων μέτρησης *(2 ώρες)*	Η κατασκευή και η χρήση του άτυπου μοιρογνωμονίου στην προηγούμενη τάξη έχει εξοικειώσει τους μαθητές με δραστηριότητες μέτρησης γωνιών. Οι μαθητές χρησιμοποιούν το τυπικό μοιρογνωμόνιο για να μετρήσουν και να κατασκευάσουν γωνίες με διάφορα μήκη πλευρών και διάφορους προσανατολισμούς. Συμπληρωματικά, είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν λογισμικά, όπως ο «Χελωνόκοσμος».	Μαθηματικά Ε΄ Δημοτικού, Τετράδιο Εργασιών, γ τεύχος, ΟΕΔΒ, σελ. 32, Εργασία γ΄ (προέκταση πλευρών). Τα Μαθηματικά μου, Ε΄ Δημοτικού, α΄ μέρος, ΟΕΔΒ, σελ. 102, Εργασία 4. Μαθηματικά Στ΄ Δημοτικού, Τετράδιο Εργασιών, δ τεύχος, ΟΕΔΒ, σελ. 12, Δραστηριότητα με προεκτάσεις. Μαθηματικά Στ΄ Δημοτικού, ΟΕΔΒ, σελ. 141, Δραστηριότητα 1η.
Μ2. Υπολογίζουν την περίμετρο σχημάτων χρησιμοποιώντας γεωμετρικές ιδιότητες. *Μ3.* Διερευνούν τη σχέση πλευρών και περιμέτρου επίπεδων σχημάτων. *Μ4.* Πραγματοποιούν μετατροπές μονάδων μέτρησης μήκους χρησιμοποιώντας τις	***Μέτρηση μήκους*** • Άμεσες και έμμεσες συγκρίσεις • Μέτρηση με μη τυπικές και τυπικές μονάδες *(4 ώρες)*	Για τον υπολογισμό της περιμέτρου λαμβάνονται υπόψη γεωμετρικές ιδιότητες των υπό μελέτη σχημάτων. Για παράδειγμα, μπορεί να ζητηθεί από τους μαθητές να υπολογίσουν την περίμετρο κανονικών πολυγώνων όταν	Τα Μαθηματικά μου Ε΄ τάξη δημοτικού δεύτερο μέρος, ΟΕΔΒ,Σελ. 88, Εργασίες 6 και 7. Μαθηματικά Ε΄ Δημοτικού, Τετράδιο Εργασιών, β’ Τεύχος, ΟΕΔΒ, Σελ. 29, Εργασία γ. Μαθηματικά Ε΄ Δημοτικού, ΟΕΔΒ, Σελ.

σχέσεις μεταξύ των μονάδων και επιλύουν σχετικά προβλήματα.		δίνεται το μήκος μιας πλευράς ή σε άλλη δραστηριότητα να χρησιμοποιήσουν τη σταθερή απόσταση μεταξύ παραλλήλων. Η μελέτη της σχέσης πλευρών και περιμέτρου εισάγει τους μαθητές σε καταστάσεις συμμεταβολής μεγεθών σε γεωμετρικό πλαίσιο. (*ενδεικτικές δραστηριότητες ΜΔ1, ΜΔ2*)	121, Εργασία 1α. Τα Μαθηματικά μου Στ΄ Δημοτικού, β΄ μέρος, ΟΕΔΒ, Σελ. 108, Εργασία 2, Σελ. 111, Εργασίες 1-4˙και Σελ. 112, Εργασία 1α.
Μ5. Υπολογίζουν το εμβαδό ορθογωνίων και ορθογωνίων τριγώνων χρησιμοποιώντας τις γραμμικές τους διαστάσεις και επιλύουν σχετικά προβλήματα χρησιμοποιώντας όργανα μέτρησης. *Μ6*. Πραγματοποιούν απλές μετατροπές μονάδων μέτρησης επιφάνειας και επιλύουν σχετικά προβλήματα. *Μ7*. Υπολογίζουν το εμβαδό επιφάνειας ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου.	***Μέτρηση επιφάνειας*** • μέτρηση με μη τυπικές και τυπικές μονάδες. • χρήση οργάνων μέτρησης *(4 ώρες)*	Οι μαθητές υπολογίζουν εμβαδό ορθογωνίων πολλαπλασιάζοντας τα μήκη των πλευρών. Στις προηγούμενες τάξεις έχουν προηγηθεί δραστηριότητες που αποδίδουν νόημα στον τύπο υπολογισμού του εμβαδού ορθογωνίου. Για τον υπολογισμό του εμβαδού ορθογωνίου τριγώνου χρησιμοποιούν την ανάλυση ορθογωνίου σε ορθογώνια τρίγωνα, διαπιστώνουν την ισότητα των δύο τριγώνων με μετασχηματισμό και υπολογίζουν το εμβαδό σε σχέση με το εμβαδό του αντίστοιχου ορθογωνίου. Για τον υπολογισμό του εμβαδού επιφανείας ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου λαμβάνουν υπόψη τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του	Τα Μαθηματικά μου Δ Δημοτικού, α΄μέρος, ΟΕΔΒ. Σελ. 34, Εργασία 4. Μαθηματικά Ε δημοτικού, Τετράδιο Εργασιών γ τεύχος, ΟΕΔΒ,Σελ. 10-11, Εργασίες β και γ. Μαθηματικά Στ΄ Δημοτικού, ΟΕΔΒ, Σελ. 158, Εφαρμογές 1 και 2. Μαθηματικά Στ΄ δημοτικού, Τετράδιο εργασιών, δ’ τεύχος, ΟΕΔΒ,Σελ. 30, Πρόβλημα 1.

		στερεού, υπολογίζουν τα επιμέρους εμβαδά και τα προσθέτουν. (*ενδεικτικές δραστηριότητες ΜΔ3, ΜΔ4, ΓΔ7*)	
Μ8. Υπολογίζουν τον όγκο εικονικών αναπαραστάσεων ορθογώνιων κατασκευών, όταν παρέχονται ενδείξεις υποδιαίρεσης των γραμμικών τους διαστάσεων. *Μ9.* Υπολογίζουν και συγκρίνουν τον όγκο ορθογωνίων παραλληλεπιπέδων με βάση τις γραμμικές τους διαστάσεις, χρησιμοποιώντας τυπικές μονάδες όγκου και υποδιαιρέσεις τους. *Μ10.* Εκτιμούν και συγκρίνουν τον όγκο ορθογωνίων παραλληλεπιπέδων.	***Μέτρηση όγκου*** • άμεσες και έμμεσες συγκρίσεις • μέτρηση με μη τυπικές και τυπικές μονάδες • χρήση οργάνων μέτρησης • εκτίμηση *(3 ώρες)*	Οι ενδείξεις υποδιαίρεσης των γραμμικών διαστάσεων ορθογωνίων παραλληλεπιπέδων βοηθούν στο πέρασμα από το εμπράγματο υλικό (κύβοι) στις εικονικές αναπαραστάσεις και στον υπολογισμό του όγκου με βάση τα μήκη των ακμών. Π.χ. υπολογίζουν τον όγκο στερεών όταν δίνονται τα αναπτύγματα, στα οποία οι αντίστοιχες έδρες είναι δομημένες σε γραμμές και στήλες. Τελικά, υπολογίζουν τον όγκο με βάση τα μήκη των ακμών.	Τα μαθηματικά μου, Δ' δημοτικού, α΄ μέρος, ΟΕΔΒ, Σελ. 37, Εργασία: 1 και Σελ. 39. Εργασία: 3. Τα Μαθηματικά μου, Ε' δημοτικού πρώτο μέρος, ΟΕΔΒ, Σελ. 98, Εργασίες 2-4. Μαθηματικά Στ΄ δημοτικού. Αθήνα: ΟΕΔΒ. Σελ. 165, Δραστηριότητα 2. Τα Μαθηματικά μου, Στ Δημοτικού, β΄ μέρος, ΟΕΔΒ, σελ. 116, Πρόβλημα: α, Σελ. 117, Πρόβλημα: γ΄και Σελ. 118, Πρόβλημα: 3β. Μαθηματικά Στ΄ Δημοτικού, Τετράδιο Εργασιών, δ τεύχος, ΟΕΔΒ, Σελ. 38, Πρόβλημα 2.
Μ11. Εκτιμούν και συγκρίνουν χρονικά διαστήματα με ακρίβεια δευτερολέπτου. *Μ12.* Διερευνούν τις σχέσεις μεταξύ ώρας, λεπτού και δευτερολέπτου και επιλύουν σχετικά προβλήματα.	***Μέτρηση χρόνου*** • Άμεσες και έμμεσες συγκρίσεις. • Μέτρηση με μη τυπικές και τυπικές μονάδες. • Χρήση οργάνων μέτρησης. • Εκτίμηση *(3 ώρες)*	Οι σχέσεις μεταξύ των μονάδων χρόνου αξιοποιούνται για την παράλληλη ανάπτυξη των συμμιγών αριθμών.	Τα μαθηματικά μου Στ΄ τάξη δημοτικού πρώτο μέρος. Αθήνα: ΟΕΔΒ.Σελ. 152, Πρόβλημα: 1˙ Σελ. 154, Εργασία: 1. Μαθηματικά Δ΄ Δημοτικού, Τετράδιο Εργασιών, δ τεύχος, ΟΕΔΒ, Σελ. 26-27, Εργασίες 1-7.

Θεματική ενότητα: Στοχαστικά Μαθηματικά (Στατιστική – Πιθανότητες)

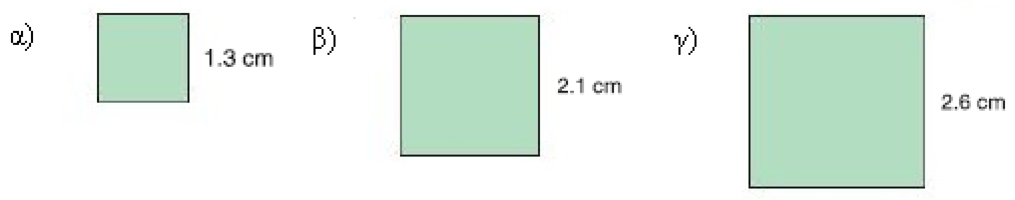
Ενδεικτικές Διδακτικές ώρες: 10 (6 + 4)

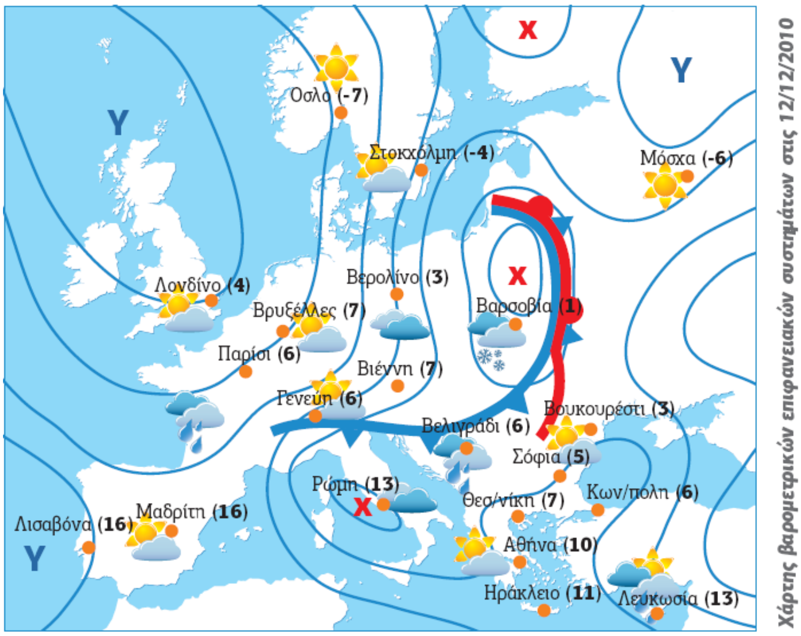
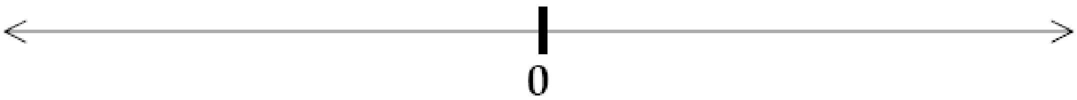
Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα (ΠΜΑ)	**Βασικά θέματα**	**Δραστηριότητες**	**Εκπαιδευτικό υλικό**
Σ1. Διατυπώνουν ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με δεδομένα (ποσοτικά συνεχή δεδομένα). *Σ2*. Συλλέγουν δεδομένα μέσω ερευνών, μετρήσεων ή πειραμάτων και επεκτείνουν τους τρόπους οργάνωσης τους και στις απλές ομαδοποιήσεις. *Σ3*. Κάνουν μετατροπές από μία μορφή αναπαράστασης δεδομένων σε άλλη. *Σ4*. Επιχειρηματολογούν βασιζόμενοι στα δεδομένα.	**Δεδομένα** • Συλλογή, οργάνωση, αναπαράσταση και ερμηνεία δεδομένων *(4 ώρες)*	Οι μαθητές κάνουν έρευνες και εστιάζουν και σε ποσοτικά συνεχή δεδομένα (*ενδεικτική δραστηριότητα ΣΔ1*)	
Σ5. Προσδιορίζουν χαρακτηριστικές τιμές των δεδομένων (επικρατούσα τιμή , διάμεσο) και διερευνούν τα χαρακτηριστικά τους.	**Μέτρα θέσης** • μέση τιμή **Μεταβλητότητα** *(2 ώρες)*		Μαθηματικά, Ε' Δημοτικού, Βιβλίο Μαθητή, κεφ. 21, ΟΕΔΒ, Δραστ. Ανακάλυψη. Μαθηματικά Ε' Δημοτικού, ΟΕΔΒ, Τετράδιο Εργασιών, Κεφ.21, ασκ. α, β, γ, δ και ε. Μαθηματικά Ε' Δημοτικού, Βιβλίο Μαθητή, κεφ. 21, ΟΕΔΒ, εργασίες 1 και 2.
Π1. Διερευνούν την σχετική συχνότητα εμφάνισης ενός ενδεχομένου κατά την επανάληψη ενός πειράματος.	**Πείραμα τύχης** *(3 ώρες)*		
Π2. Υπολογίζουν την πιθανότητα ενός ενδεχομένου χρησιμοποιώντας κλάσματα και την αναπαριστούν σε κλίμακα από 0 έως 1.	**Πιθανότητα ενδεχομένου** *(1 ώρα)*	Οι μαθητές εκφράζουν την πιθανότητα ενός απλού ενδεχομένου ως το κλάσμα (ευνοϊκές περιπτώσεις) / (δυνατές περιπτώσεις).	

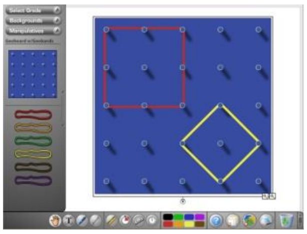
		(*ενδεικτική δραστηριότητα ΠΔ1*)	

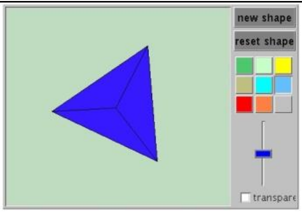
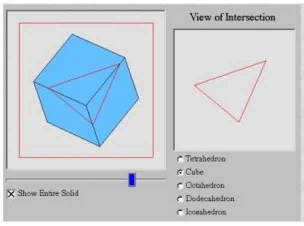
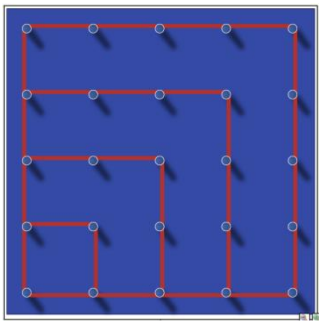
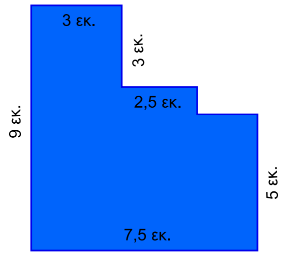
Ενδεικτικές Δραστηριότητες

Α/Α	**Περιγραφή δραστηριότητας**	**ΠΜΑ**
ΑρΔ1	**Βοηθήστε τον Νικόλα** Ο Νικόλας προσπαθεί να λύσει ένα πρόβλημα που έχει στα μαθηματικά για την επόμενη μέρα. Το πρόβλημα είναι το εξής: «Ένα κατάστημα με βιντεοπαιχνίδια παρέλαβε ένα φορτίο με εμπορεύματα. Ο υπεύθυνος παρέλαβε 23 κιβώτια. Κάθε κιβώτιο περιέχει 25 συσκευασίες παιχνιδιών. Πόσα βιντεοπαιχνίδια παρέλαβε;» Ο Νικόλας προσπαθεί να κάνει τον πολλαπλασιασμό: $\begin{array}{r} 2\ 5 \\ \times\ 2\ 3 \\ \hline 1\ 2\ 5 \end{array}$ Ο μεγαλύτερος αδερφός του, ο Γιώργος, ρίχνει μια ματιά στη λύση του Νικόλα και του λέει, «Αποκλείεται να είναι σωστό. Έχεις κάνει σίγουρα κάποιο λάθος.» 1. *Πώς νομίζεις ότι κατάφερε ο Γιώργος αμέσως να καταλάβει ότι ο αδερφός του είχε κάνει κάποιο λάθος;* 2. *Πρότεινε στο Νικόλα δύο τρόπους για να λύσει σωστά το πρόβλημα.*	**Αρ7**
ΑρΔ2	**Εκτίμηση αποτελέσματος** *Εκτιμήστε το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού 20 x 198.* • *Είναι το αποτέλεσμα της εκτίμησης που κάνατε μικρότερο ή μεγαλύτερο από το ακριβές γινόμενο;* • *Πώς το γνωρίζετε;* • *Επιβεβαιώστε το χρησιμοποιώντας το κομπιουτεράκι σας.* *Χρησιμοποιήστε την προηγούμενη εκτίμηση που κάνατε για να εκτιμήσετε αυτή τη φορά το αποτέλεσμα του πολλαπλασιασμού 201 x 198.* • *Είναι το αποτέλεσμα της εκτίμησης που κάνατε μικρότερο ή μεγαλύτερο από το ακριβές γινόμενο;* • *Περιγράψτε πώς αξιοποιήσατε την αρχική σας εκτίμηση για να κάνατε την δεύτερη εκτίμηση.*	**Αρ8**
ΑρΔ3	**Το αγαπημένο λουλούδι** Κατά την διάρκεια μια έρευνας σε ένα αριθμό ανθρώπων έγινε η εξής ερώτηση: «Ποιο είναι το αγαπημένο σας λουλούδι». Τα αποτελέσματα της έρευνας ήταν: • Το ½ των ερωτηθέντων απάντησαν ότι τα τριαντάφυλλα είναι το αγαπημένο τους λουλούδι., • το 1/5 ότι τους αρέσουν περισσότερο οι τουλίπες και • το 1/6 ότι τους αρέσουν περισσότερο τα κυκλάμινα. • Οι υπόλοιποι δεν είχαν κάποιο αγαπημένο λουλούδι. Τι μέρος των ανθρώπων που πήραν μέρος στην έρευνα απάντησαν ότι είχαν ένα αγαπημένο λουλούδι; Τι μέρος των ανθρώπων που πήραν μέρος στην έρευνα απάντησαν ότι δεν είχαν	**Αρ17**

	κάποιο ένα αγαπημένο λουλούδι;	
ΑρΔ4	**Τα μπισκότα** Η Ελένη έφτιαξε μερικά μπισκότα και κάλεσε τα ξαδέλφια της για να τα δοκιμάσουν. • Ο Γιώργος έφαγε το 15% του συνολικού αριθμού των μπισκότων. • Ο Νικόλας έφαγε το $\frac{1}{10}$ του συνολικού αριθμού των μπισκότων. • Η Λεμονιά έφαγε το 0,20 του συνολικού αριθμού των μπισκότων. • Όταν τα ξαδέρφια της έφυγαν είχαν απομείνει 33 μπισκότα. Πόσα μπισκότα έφτιαξε συνολικά η Ελένη; Αιτιολόγησε την άποψή σου.	**Αρ18, Αρ21**
ΑρΔ5	**Ένας κύκλος από παιδιά** Η δασκάλα της Στ΄ τάξης ενός σχολείου, η κ. Κοραλία, ανακοίνωσε στους μαθητές της ότι θα κάνουν το μάθημα των Μαθηματικών στο προαύλιο. Οι μαθητές έτρεξαν στην αυλή του σχολείου και η δασκάλα τους ζήτησε να σταθούν ο ένας δίπλα στον άλλο σχηματίζοντας ένα μεγάλο κύκλο ακουμπώντας τους ώμους τους. Μπορείτε να εκτιμήσετε το μήκος της διαμέτρου του κύκλου που σχημάτισαν οι μαθητές; Σημείωση: (Θα χρειαστεί να κάνετε κάποιες υποθέσεις σχετικά με τις διαστάσεις του σώματος των μαθητών. Σιγουρευτείτε ότι οι υποθέσεις σας αυτές αποτελούν μέρος της απάντησή σας.)	**Αρ21**
ΑρΔ6	**Εκτιμήσεις περιμέτρου**  Εκτιμήστε την περίμετρο κάθε τετραγώνου. • Είναι το αποτέλεσμα της εκτίμησης που κάνατε μεγαλύτερο ή μικρότερο από την πραγματική περίμετρο κάθε τετραγώνου; • Πώς το γνωρίζετε; • Επιβεβαιώστε το χρησιμοποιώντας το κομπιουτεράκι.	**Αρ21**
ΑρΔ7	**Κάνει κρύο εκεί;** Στον παρακάτω χάρτη φαίνονται οι θερμοκρασίες ορισμένων ευρωπαϊκών πρωτευουσών την Κυριακή 12/12/2010. Μελέτησε το χάρτη για να απαντήσεις στις παρακάτω ερωτήσεις: • Ποια πόλη ήταν θερμότερη (πιο ζεστή) και ποια πόλη ήταν πιο ψυχρή; Αιτιολόγησε το συλλογισμό σου. • Ποια πόλη ήταν πιο θερμή, το Βελιγράδι ή το Βουκουρέστι; Πόσο πιο θερμή; Αιτιολόγησε το συλλογισμό σου. • Ποια πόλη ήταν πιο θερμή, η Στοκχόλμη ή το Όσλο; Πόσο πιο θερμή; Αιτιολόγησε το συλλογισμό σου. • Ποια πόλη ήταν πιο θερμή, η Γενεύη ή η Μόσχα; Πόσο πιο θερμή; Αιτιολόγησε το συλλογισμό σου.	**Αρ22, Αρ23**

	 (http://www.enet.gr/?i=issue.el.home&date=12%2F12%2F2010)	
ΑρΔ8	**Ακέραιοι στη σειρά** Τοποθέτησε τους παρακάτω αριθμούς στην αριθμογραμμή. Να είσαι όσο το δυνατόν πιο ακριβής. **-4, 6, 4, -2**  	**Αρ23**
ΑΔ1	**Το παιχνίδι της άλγεβρας** Ένα παιχνίδι για 2 μέχρι 4 μαθητές. Οι μαθητές θα χρειαστούν ένα ζάρι και κάθε μαθητής θα χρειαστεί ένα πούλι. Σύμφωνα με τον κανονισμό θα παίξουν με τη σειρά. Ρίχνουν το ζάρι. Αντικαθιστούν το d στην εξίσωση που βρίσκεται το πούλι ανάλογα με τον αριθμό της ζαριάς. Οι μαθητές μετακινούνται τόσα εξάγωνα όσα δείχνει η τιμή της παράστασης μετά από την αντικατάσταση του d με τον αριθμό της ζαριάς.  Οι μαθητές καταγράφουν τις κινήσεις τους. Νικητής είναι αυτός που θα συγκεντρώσει τους περισσότερους βαθμούς.	**Α7, Α9**

ΑΔ2	**Διαίρεση με το 9** Ζητάμε από τους μαθητές να διαιρέσουν με την αριθμομηχανή μονοψήφιους αριθμούς με το 9 και να συζητήσουν με τους συμμαθητές τους τι παρατηρούν. Στη συνέχεια, να επαναλάβουν την ίδια διαδικασία με το 99, το 999, κ.ο.κ. ή με το 0,9, 0,09, 0,009, κ.τ.λ. Το ίδιο μπορεί να γίνει και με διψήφιους, τριψήφιους, κ.ο.κ. αριθμούς.	**Α1, Α2**
ΓΔ1	Οι μαθητές ακολουθούν οδηγίες που τους έχουμε δώσει ώστε να αποκαλύψουν τα σημεία μιας διαδρομής πάνω στο χάρτη μιας δασικής έκτασης ή του πάρκου της περιοχής (κυνήγι θησαυρού, orienteering).	**Γ1, Γ2**
ΓΔ2	Οι μαθητές κατασκευάζουν διάφορα τρίγωνα με καλαμάκια ή πάνω σε γεωπίνακες και τα ταξινομούν βάσει των πλευρών και των γωνιών τους. Ακολούθως διερευνούν το ενδεχόμενο ύπαρξης σύνθετων περιπτώσεων τριγώνων (π.χ. ορθογώνια και ισοσκελή, σκαληνό και ορθογώνιο, κ.λπ.). Εναλλακτικά, ο εκπαιδευτικός μπορεί να χρησιμοποιήσει ψηφιακό γεωπίνακα, όπως για παράδειγμα στην εφαρμογή του επόμενου συνδέσμου: http://www.glencoe.com/sites/common_assets/mathematics/ebook_assets/vmf/VMF-Interface.html. 	**Γ4**
ΓΔ3	Οι μαθητές επιλέγουν εκείνα τα κομμάτια πεντόμινο που αν διπλωθούν μπορούν να δώσουν ένα ανοιχτό κουτί. Για να υποστηρίξουν τις εκτιμήσεις τους σημειώνουν τις πλευρές που θα βρίσκονται απέναντι στο κουτί. Στη συνέχεια επιβεβαιώνουν τις επιλογές τους χρησιμοποιώντας το υλικό Polydron.	**Γ11**
ΓΔ4	Οι μαθητές περιστρέφουν και σχεδιάζουν διάφορα οικεία σχήματα πάνω σε καμβάδες κατά 90^{o} και 180^{o}.	**Γ16**
ΓΔ5	Οι μαθητές σχεδιάζουν σε καμβάδες την τάξη τους ή άλλους οικείους χώρους χρησιμοποιώντας απλές κλίμακες.	**Γ18**
ΓΔ6	Οι μαθητές αναγνωρίζουν διάφορα στερεά από τις σιλουέτες τους και τις συνδέουν με τις πλευρές αυτών των στερεών και τις τομές τους από ένα επίπεδο. Για την περιστροφή και την δημιουργία τομών σε στερεά ο εκπαιδευτικός θα μπορούσε να χρησιμοποιήσει εφαρμογές σε ψηφιακό περιβάλλον ακολουθώντας τους παρακάτω συνδέσμους: Στερεά υπό γωνία. http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=70	**Γ19**

	 Κόβοντας Πλατωνικά στερεά. http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_126_g_3_t_3.html?open=instructions&from=category_g_3_t_3.html  	
ΓΔ7	Ο εκπαιδευτικός ζητά από τους μαθητές να αναπαραστήσουν όλα τα διαφορετικά τετράγωνα (διαφορετικού εμβαδού) πάνω σε ένα γεωπίνακα που αποτελείται από 5 x 5 καρφάκια. Περιμένουμε εύκολα να βρουν τα παρακάτω τετράγωνα:  Υπάρχουν όμως άλλα τόσα τετράγωνα τα οποία για να τα εντοπίσουν οι μαθητές θα πρέπει να σκεφτούν μη προτυπικές αναπαραστάσεις του τετραγώνου πάνω στο γεωπίνακα.	**Γ12, Μ7**
ΜΔ1	Διερευνούν τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλεται η περίμετρος τετραγώνου, ορθογωνίου, τριγώνου, τυχαίου ευθύγραμμου σχήματος, όταν μεταβάλλεται το μήκος των πλευρών του με ακέραιο συντελεστή. Διαπιστώνουν κανονικότητες και γενικεύουν.	**Μ3**
ΜΔ2	Ο εκπαιδευτικός ζητά από τους μαθητές να υπολογίσουν την περίμετρο σχημάτων όπως αυτού της Εικόνας 1. Στη συνέχεια τους ζητά να τη συγκρίνουν με την περίμετρο ενός ορθογωνίου αντίστοιχου μήκους και πλάτους (στην περίπτωσή μας μήκους 7,5 εκ. και πλάτους 9 εκ) και να διατυπώσουν συμπεράσματα.  **Εικόνα 1**	**Μ2**

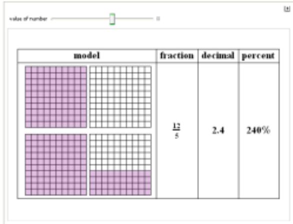
ΜΔ3	Αναλύουν ορθογώνια σε δύο ορθογώνια τρίγωνα (με τη διαγώνιο), διαπιστώνουν με μετασχηματισμό (στροφή) ότι τα ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα και υπολογίζουν το εμβαδό τους με βάση το εμβαδό του ορθογωνίου.	**Μ5**
ΣΔ1	Οι μαθητές διεξάγουν μια έρευνα για τις ώρες ξεκούρασης και παιχνιδιού που έχουν τις καθημερινές οι μαθητές της Α΄ και της Ε΄ τάξης. Συλλέγουν δεδομένα, τα οργανώνουν και τα αναπαριστούν κατάλληλα. Συζητούν στην τάξη για χαρακτηριστικά που έχουν τα δεδομένα και για χαρακτηριστικές τιμές αυτών. Συζητούν για θέματα που προέκυψαν από την έρευνά τους και αν έχουν «λογική» εξήγηση (π.χ. γιατί οι μαθητές της Α΄ τάξης έχουν περισσότερες ώρες παιχνιδιού)	**Σ1, Σ2, Σ3, Σ4, Σ5**
ΠΔ1	Οι μαθητές εκφράζουν την πιθανότητα για τα παρακάτω ενδεχόμενα, όταν ρίχνουμε ένα ζάρι: Η ένδειξη είναι 1, η ένδειξη είναι άρτιος αριθμός, η ένδειξη είναι πολλαπλάσιο του 3, η ένδειξη είναι διαιρέτης του 6.	**Π2**

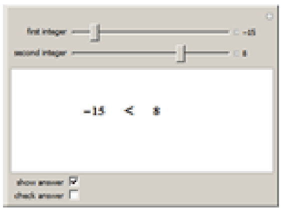
ΣΤ΄ Δημοτικού

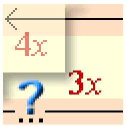
Θεματική ενότητα: Αριθμοί – Άλγεβρα

Προτεινόμενες Διδακτικές ώρες: 69 (60 + 9)

Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα (ΠΜΑ)	Βασικά θέματα	Δραστηριότητες	Εκπαιδευτικό υλικό
Αρ1. Συνδέουν τις τέσσερις πράξεις μεταξύ τους και χρησιμοποιούν ιδιότητές τους, για να επιλύσουν προβλήματα. *Αρ2.* Εισάγονται στην έννοια της δύναμης και υπολογίζουν και εκφράζουν δυνάμεις φυσικών αριθμών με εκθέτη φυσικό αριθμό. *Αρ3.* Εκτιμούν το αποτέλεσμα μιας πράξης, στρογγυλοποιώντας στην πλησιέστερη δύναμη του 10. *Αρ4.* Διατυπώνουν και επιλύουν προβλήματα με περισσότερες από μία πράξεις, ελέγχοντας τη λογικότητα του αποτελέσματος και κοινοποιούν τις προσεγγίσεις τους σε άλλους. *Αρ5.* Εισάγονται στην έννοια του λόγου και επιλύουν αντίστοιχα προβλήματα. *Αρ6.* Αναλύουν και	***Φυσικοί αριθμοί*** • Πράξεις στους φυσικούς • *Φυσικοί αριθμοί – Διαιρετότητα* *(20 ώρες)*	Είναι σημαντικό να αναπτύξουν οι μαθητές αναλογική σκέψη και να αξιοποιήσουν τις δεξιότητες που έχουν αναπτύξει σχετικά με τον υπολογισμό μεγάλων αριθμών. Ειδικότερα, οι μαθητές καλούνται να χρησιμοποιήσουν τα μαθηματικά για να δείξουν πώς ένας άγνωστος αριθμός σε εκατομμύρια μπορεί να είναι ασήμαντος όταν συγκριθεί με ένα αναλογικά μεγαλύτερο αριθμό. (*ενδεικτική δραστηριότηταΑρΔ1*)	Μαθηματικά Στ΄ (Τετράδιο εργασιών α΄ τεύχος), ΟΕΔΒ (2006) σελ. 24, «Η μεγαλύτερη κρεμαστή γέφυρα του κόσμου». Μαθηματικά Στ΄ (βιβλίο μαθητή) σελ. 43, δραστηριότητα 2.

εκφράζουν έναν αριθμό ως γινόμενο πρώτων παραγόντων. *Αρ7.* Υπολογίζουν και διερευνούν το ΕΚΠ και τον ΜΚΔ δύο ή περισσοτέρων αριθμών.			
Αρ8. Εισάγονται στα ποσοστά, μετατρέπουν κλασματικούς αριθμούς σε ποσοστά και τα χρησιμοποιούν στη μοντελοποίηση καταστάσεων και την επίλυση προβλημάτων.	***Κλασματικοί αριθμοί*** *(16 ώρες)*	Είναι σημαντικό να αντιληφθούν οι μαθητές ότι τα ποσοστά δεν είναι μονάδες μέτρησης αλλά αριθμοί που μπορούν να εφαρμοστούν σε μια ποσότητα οποιουδήποτε μεγέθους. Ενδείκνυται η χρήση της αριθμογραμμής ως μέσο για την αναπαράσταση και σύγκριση κλασματικών αριθμών, ποσοστών και δεκαδικών αριθμών. *(ενδεικτικές δραστηριότητες: ΑρΔ2, ΑρΔ3)*	Σύγκριση κλασμάτων, δεκαδικών και ποσοστών Applet από δικτυακό τόπο Wolfram Demonstrations Project 
Αρ9. Προσθέτουν και αφαιρούν νοερά αριθμούς που έχουν μέχρι δύο δεκαδικά ψηφία. *Αρ10.* Χρησιμοποιούν γνωστές διαδικασίες, για να εκτελέσουν τις τέσσερις πράξεις με δεκαδικούς αριθμούς *Αρ11.* Εκτιμούν το αποτέλεσμα μιας πράξης, στρογγυλοποιώντας	***Δεκαδικοί αριθμοί*** *(18 ώρες)*	Είναι σημαντικό να αναπτύσσουν οι μαθητές διαφορετικές στρατηγικές νοερού υπολογισμού πράξεων με δεκαδικούς αριθμούς. Ο εκπαιδευτικός προκαλεί τους μαθητές να κάνουν εκτιμήσεις του αποτελέσματος τεσσάρων πράξεων, να αιτιολογούν την εκτίμηση τους και να	

στην πλησιέστερη δύναμη του 10 με αρνητικό εκθέτη. *Αρ12.* Χρησιμοποιούν αποτελεσματικά την αριθμομηχανή για υπολογισμούς με δεκαδικούς αριθμούς.		την επιβεβαιώνουν με τη χρήση της αριθμομηχανής. *(ενδεικτικές δραστηριότητες: ΑρΔ4, ΑρΔ5)*	Μαθηματικά Στ΄(Τετράδιο εργασιών α΄ τεύχος) σελ. 18, πρόβλημα 3ο
Αρ13. Διερευνούν διαισθητικά απλές προσθέσεις με θετικούς και αρνητικούς ακέραιους αριθμούς.	***Ακέραιοι αριθμοί*** *(6 ώρες)*	Ο εκπαιδευτικός παρακινεί τους μαθητές να κάνουν διαισθητικά απλές προσθέσεις με θετικούς και αρνητικούς ακέραιους αριθμούς στην προσπάθειά τους να μοντελοποιήσουν καταστάσεις της καθημερινής ζωής. *(ενδεικτική δραστηριότητα: ΑρΔ6)*	Σύγκριση ακεραίων Applet από δικτυακό τόπο Wolfram Demonstrations Project http://demonstrations.wolfram.com/topic.html?topic=Integers&limit=20 
Α1. Αναπαριστούν και μελετούν κανονικότητες σε διαφορετικά αναπαραστατικά συστήματα *Α2.* Διερευνούν τη σχέση μεταξύ ανάλογων και αντιστρόφων ανάλογων ποσών. *Α3.* Διερευνούν την έννοια της συνάρτησης μέσω διαφορετικών αναπαραστάσεων μονοσήμαντων αντιστοιχιών. *Α4.* Διερευνούν την έννοια της μεταβλητής σε γνωστούς τύπους από τη φυσική και τη γεωμετρία	***Κανονικότητες / συναρτήσεις*** *(3 ώρες)*	*(ενδεικτική δραστηριότητα ΑΔ1)*	Βιβλίο μαθητή σελίδα 129 δραστηριότητα 2, σελίδα 131 δραστηριότητα 2

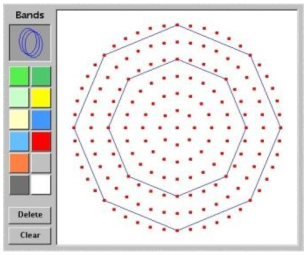
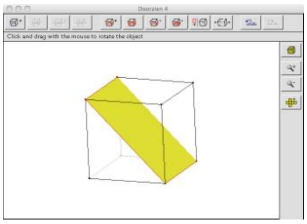
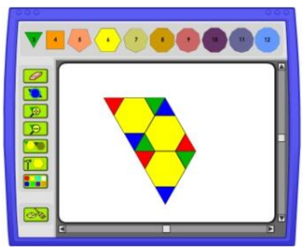
Α5. Εκφράζουν συμβολικά ένα πρόβλημα με αριθμητική παράσταση ή σχέση, διατυπώνουν ένα πρόβλημα που να μοντελοποιείται από δεδομένη αριθμητική παράσταση ή σχέση. *Α6.* Συζητούν για τη δομή μιας αριθμητικής παράστασης χρησιμοποιώντας κατάλληλη ορολογία (πχ. άθροισμα και όροι του, γινόμενο και παράγοντές του). *Α7.* Υπολογίζουν την τιμή μιας αριθμητικής παράστασης με χρήση της προτεραιότητας των πράξεων (με παρενθέσεις και δυνάμεις με ακέραιο εκθέτη μέχρι 4). *Α8.* Χρησιμοποιούν γράμματα ως μεταβλητές στον γενικό όρο κανονικοτήτων και συναρτήσεων.	***Αλγεβρικές παραστάσεις*** *(3 ώρες)*	Τα ερευνητικά ευρήματα συγκλίνουν στη διαπίστωση ότι οι μαθητές της υποχρεωτικής εκπαίδευσης τείνουν να ερμηνεύουν ένα γράμμα ως το όνομα ενός συγκεκριμένου αριθμού, δηλαδή ως ένα συγκεκριμένο άγνωστο. Είναι, λοιπόν, ιδιαίτερα σημαντικό να δοθεί η ευκαιρία στους μαθητές να εμπλακούν σε δραστηριότητες που θα τους επιτρέψουν να συνειδητοποιήσουν τις ποικίλες ερμηνείες του εγγράμματου συμβόλου στην άλγεβρα.	
Α12. Χρησιμοποιούν γράμματα ως άγνωστους σε απλές αριθμητικές εξισώσεις ενός βήματος και επιλύουν τις αντίστοιχες εξισώσεις.	***Ισότητες-ανισότητες*** *(3 ώρες)*	Η επίλυση μιας εξίσωσης προϋποθέτει την ικανότητα του μαθητή να τη χειρίζεται ως αντικείμενο. Ωστόσο, η σχετική έρευνα αποκαλύπτει ότι συχνά οι μαθητές είτε ακολουθούν μεθόδους επίλυσης με μικρή εμβέλεια είτε υιοθετούν την τυπική μέθοδο, εργαζόμενοι	Ψηφιακό περιβάλλον για τον υπολογισμό εμβαδών χωρίων, , όπως το παρακάτω μπορούν να βρεθούν στο διαδυκτιακό τόπο. http://www.fi.uu.nl/wisweb/en/ 

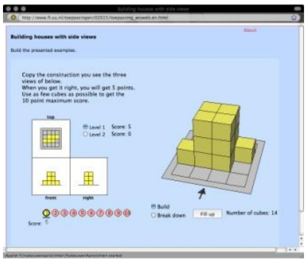
		μηχανικά. Και στις δύο περιπτώσεις, σύντομα οδηγούνται σε αδιέξοδο. Στην τάξη αυτή είναι σημαντικό να δοθεί έμφαση σε άτυπες μεθόδους επίλυσης όπως για παράδειγμα δοκιμή και πλάνη κατευθύνοντας στην αναγκαιότητα μιας πιο γενικευμένης – τυπικής μεθόδου επίλυσης.	

Θεματική ενότητα: Χώρος και Γεωμετρία – Μέτρηση

Προτεινόμενες Διδακτικές ώρες: 35 (20 + 15)

Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα (ΠΜΑ)	**Βασικά θέματα**	**Δραστηριότητες**	**Εκπαιδευτικό υλικό**
Γ1. Αναγνωρίζουν, τοποθετούν και ονομάζουν σημεία στο Καρτεσιανό σύστημα, καθώς και σε γεωγραφικούς χάρτες με χρήση σύνθετων σημείων του ορίζοντα (π.χ. ΒΔ, ΝΑ) και όρων που σχετίζονται με το γεωγραφικό μήκος και πλάτος.	***Έννοιες του χώρου*** • δόμηση του χώρου και συντεταγμένες *(3 ώρες)*	(ενδεικτικές δραστηριότητες ΓΔ1, ΓΔ2)	Τετραγωνισμένοι καμβάδες, γεωγραφικοί χάρτες.
Γ2. Ταξινομούν πολύγωνα βάσει του αριθμού και του μήκους των πλευρών τους, των γωνιών, των παράλληλων πλευρών τους, των αξόνων συμμετρίας και της περιστροφικής συμμετρίας. Γ3. Ταξινομούν στερεά βάσει του σχήματος της βάσης και της παράπλευρης επιφάνειας τους. Γ4. Ταξινομούν τετράπλευρα και πολύγωνα βάσει της αξονικής συμμετρίας, των	***Γεωμετρικά Σχήματα*** • αναγνώριση, ονομασία και ταξινόμηση γεωμετρικών σχημάτων και στερεών • ανάλυση γεωμετρικών σχημάτων και στερεών σε στοιχεία και ιδιότητες • κατασκευές και σχεδιασμός γεωμετρικών σχημάτων και στερεών • σύνδεση μεταξύ	Είναι σημαντικό οι μαθητές να εστιάζονται προοδευτικά σε λιγότερα αλλά επαρκή χαρακτηριστικά για τον ορισμό και τις ταξινομήσεις των γεωμετρικών σχημάτων και στερεών. Είναι σημαντικό να αναδείξει ο εκπαιδευτικός την ύπαρξη κλάσεων και στα στερεά σώματα, σε αναλογία με τα	Βιβλίο μαθητή, ΟΕΔΒ, σελ. 137, σελ. 159. Έτοιμες συλλογές σχημάτων (Alfa Shapes, Shape Set), Polydron, φυσικά υλικά, σχήματα, εικόνες. Ψηφιακό περιβάλλον: Word, Sketchpad, Cabri, Geogebra, κ.λπ. Κυκλικός γεωπίνακας. http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_284_g_3_t_3.html?open=activi

γωνιών και των πλευρών τους. Γ5. Αναγνωρίζουν την περιφέρεια, την ακτίνα και την διάμετρο κύκλων και ημικυκλίων. Γ6. Αναγνωρίζουν ομοιότητες μεταξύ διάφορων πρισμάτων και διάφορων πυραμίδων. Γ7. Συζητούν για τα κρίσιμα χαρακτηριστικά επίπεδων γεωμετρικών σχημάτων και συντάσσουν περιγραφές (μη τυπικούς ορισμούς) για τετράπλευρα. Γ8. Κατασκευάζουν και σχεδιάζουν πολύγωνα (φυσικά υλικά, ψηφιακό περιβάλλον). Γ9. Αναλύουν επίπεδα γεωμετρικά σχήματα και στερεά σε μέρη.	γεωμετρικών σχημάτων και στερεών • ανάλυση ή σύνθεση γεωμετρικών σχημάτων και στερεών σε άλλα σχήματα ή μέρη *(10 ώρες)*	επίπεδα σχήματα. Για παράδειγμα, η κλάση των πρισμάτων περιλαμβάνει και τα παραλληλεπίπεδα, ενώ στην αναζήτηση διαφορετικών πρισμάτων μπορεί να συμβάλλουν οι κλάσεις των τριγώνων και των τετραπλεύρων. *(ενδεικτικές δραστηριότητες ΓΔ3, ΓΔ4, ΜΔ1, ΜΔ2)*	ties&from=category_g_3_t_3.html.  Κόβοντας στερεά. http://www.fi.uu.nl/toepassingen/00349/toepassing_wisweb.en.html. 
Γ10. Περιγράφουν ισοδύναμους μετασχηματισμούς που οδηγούν στην κατασκευή ίσων σχημάτων σε φυσικό και ψηφιακό περιβάλλον. Γ11. Σχεδιάζουν το συμμετρικό απλών γεωμετρικών σχημάτων ως προς κατακόρυφο και τον οριζόντιο άξονα σε τετραγωνισμένο καμβά και με τη χρήση του γνώμονα. Γ12. Σχεδιάζουν σχήματα με κέντρο συμμετρίας για διάφορες περιστροφές σε καμβάδες και σε ψηφιακό περιβάλλον. Γ13. Αναγνωρίζουν ποια σχήματα μπορούν να δώσουν ψηφιδωτά και χρησιμοποιούν στοιχειώδεις μετασχηματισμούς για	***Μετασχηματισμοί*** • μετατόπιση, στροφή και ανάκλαση • αξονική Συμμετρία • κεντρική Συμμετρία • επικαλύψεις επιφανειών και κανονικότητες *(3 ώρες)*	Είναι σημαντικό οι μαθητές να διακρίνουν εκείνα τα χαρακτηριστικά που συνιστούν ίσα σχήματα ώστε να επιχειρούν τους ελάχιστους δυνατούς μετασχηματισμούς για την αιτιολόγηση της ισότητας και την καλύτερη κατανόηση των διαφορετικών ειδών της συμμετρίας. (ενδεικτική δραστηριότητα ΓΔ5, ΜΔ1, ΜΔ2)	Βιβλίο μαθητή, ΟΕΔΒ, σελ. 145-146. Τετραγωνικοί καμβάδες, Τάνγκραμ, καθρεπτάκι, Mira, γεωπίνακες, αντικείμενα των παιδιών κ.λπ., εικόνες σε μεγέθυνση ή σμίκρυνση φυσικών αντικειμένων. Ψηφιδωτά. http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=202. 

την κατασκευή τους.			
Γ14. Κατασκευάζουν κτίρια από συνδεόμενους κύβους χρησιμοποιώντας εικόνες ή σχέδια από διαφορετικές οπτικές γωνίες. *Γ15.* Σχεδιάζουν σε ισομετρικό καμβά ή σε ψηφιακό περιβάλλον δοσμένες κατασκευές κτιρίων από αλληλοσυνδεόμενους κύβους.	***Οπτικοποίηση*** • αναγνώριση και αναπαράσταση διαφορετικών οπτικών γωνιών αντικειμένων και καταστάσεων • δημιουργία οπτικοποιήσεων για τη διαχείριση σχημάτων, διευθύνσεων και θέσεων *(4 ώρες)*	Είναι σημαντικό οι μαθητές να συνδέουν δισδιάστατα σχήματα όπως οι κατόψεις ή οι όψεις με την τρισδιάστατη αναπαράσταση που παράγεται από το συνδυασμό τους. (*ενδεικτική δραστηριότητα ΓΔ4, ΓΔ6*)	Εικόνες, σχέδια, αλληλοσυνδεόμενοι κύβοι (connecting cubes), ισομετρικοί καμβάδες, Ψηφιακό περιβάλλον: Χτίζοντας κτίρια. http://www.fi.uu.nl/toepassingen/02015/toepassing_wisweb.en.html. 
Μ1. Προσθέτουν και αφαιρούν γωνίες χρησιμοποιώντας διάφορα μέσα και στρατηγικές.	***Μέτρηση γωνίας*** • μέτρηση με μη τυπικές και τυπικές μονάδες *(1 ώρα)*	Για την πρόσθεση και την αφαίρεση γωνιών μπορεί να χρησιμοποιηθεί διαφανές χαρτί, γωνίες από χαρτί ή/και μοιρογνωμόνιο για τη μεταφορά της μιας γωνίας σε συνέχεια ή εντός της άλλης (με κοινή πλευρά) και υπολογισμό του αθροίσματος ή της διαφοράς. (*ενδεικτική δραστηριότητα ΜΔ1*)	Τα Μαθηματικά μου Στ' Δημοτικού, α΄ μέρος, ΟΕΔΒ, σελ. 147, Πρόβλημα (ως δραστηριότητα). Μαθηματικά Στ' δημοτικού. Αθήνα: ΟΕΔΒ. Σελ. 141, Δραστηριότητα $2^η$.
Μ2. Διερευνούν τη σχέση μεταξύ μήκους και διαμέτρου κύκλου και γενικεύουν για να διατυπώσουν τύπο για τον υπολογισμό του μήκους κύκλου. *Μ3.* Εκτιμούν και συγκρίνουν μήκη κύκλων.	***Μέτρηση μήκους*** • άμεσες και έμμεσες συγκρίσεις • μέτρηση με μη τυπικές και τυπικές μονάδες • εκτίμηση *(3 ώρες)*	Η διερεύνηση του λόγου μήκος προς διάμετρο κύκλου αποτελεί δραστηριότητα που μπορεί να αποδώσει νόημα στον τύπο υπολογισμού του μήκους κύκλου. Η εκτίμηση του μήκους κύκλου και οι	

		συγκρίσεις βασίζονται στη διάμετρο (το μήκος κύκλου είναι περίπου τριπλάσιο από τη διάμετρο). (*ενδεικτική δραστηριότητα ΜΔ3*)	
Μ4. Υπολογίζουν το εμβαδό παραλληλογράμμων, τριγώνων και τραπεζίων και γενικεύουν για να διατυπώσουν τύπους. *Μ5*. Υπολογίζουν το εμβαδό ακανόνιστων επιφανειών χρησιμοποιώντας ποικιλία εργαλείων και στρατηγικών. *Μ6*. Διερευνούν τη σχέση μεταξύ πλευρών, περιμέτρου, εμβαδού και όγκου ενός γεωμετρικού σχήματος. *Μ7*. Πραγματοποιούν μετατροπές μονάδων μέτρησης επιφάνειας χρησιμοποιώντας τις σχέσεις μεταξύ των μονάδων και επιλύουν σχετικά προβλήματα.	***Μέτρηση επιφάνειας*** • μέτρηση με μη τυπικές και τυπικές μονάδες *(8 ώρες)*	Ο υπολογισμός του εμβαδού παραλληλογράμμου, τριγώνου και τραπεζίου βασίζεται στο μετασχηματισμό των σχημάτων ώστε να προκύψουν σχήματα με γνωστό εμβαδό (ορθογώνια ή παραλληλόγραμμα). Για τον υπολογισμό εμβαδού ακανόνιστων επιφανειών μπορεί να χρησιμοποιηθούν προσεγγιστικές μέθοδοι ή ανάλυση και ανασύνθεση του σχήματος σε σχήμα με γνωστό εμβαδό. Η πρώτη μέθοδος συνδέεται με το στόχο Μ10 (ακρίβεια και σφάλμα στη μέτρηση). Η διερεύνηση της σχέσης μεταξύ πλευρών εμβαδού και όγκου επεκτείνει τις καταστάσεις συμμεταβολής γεωμετρικών μεγεθών, που έχουν εισαχθεί στην προηγούμενη τάξη. (*ενδεικτικές δραστηριότητες ΜΔ2, ΜΔ4, ΜΔ5, ΜΔ6*)	Μαθηματικά Στ΄ Δημοτικού, ΟΕΔΒ, σελ. 151, Δραστηριότητα 2 και σελ. 153, Δραστηριότητα 2. Μαθηματικά Ε’ Δημοτικού, Τετράδιο εργασιών, γ’ τεύχος, ΟΕΔΒ,σελ. 11, Εργασία στ. Τα Μαθηματικά μου, Στ’ Δημοτικού, α΄ μέρος, ΟΕΔΒ, σελ. 117-118, Εργασίες 1-5.
Μ8. Διερευνούν περιπτώσεις στις οποίες όγκος και χωρητικότητα διαφέρουν.	***Μέτρηση χωρητικότητας όγκου*** • Μέτρηση με μη	Για τη διάκριση χωρητικότητας και όγκου μπορούν να	Τα Μαθηματικά μου, Στ’ Δημοτικού, α΄ μέρος, ΟΕΔΒ, σελ. 137-138,

Μ9. Πραγματοποιούν μετατροπές μονάδων μέτρησης χωρητικότητας-όγκου χρησιμοποιώντας τις σχέσεις μεταξύ των μονάδων και επιλύουν σχετικά προβλήματα.	τυπικές και τυπικές μονάδες *(2 ώρες)*	χρησιμοποιηθούν δοχεία (π.χ. δοχεία αρωμάτων με αρκετό πάχος γυαλιού) στα οποία η χωρητικότητα είναι μικρότερη από τον όγκο που καταλαμβάνουν.	Εργασίες 1-5.
Μ10. Προσεγγίζουν την ακρίβεια και το σφάλμα στη μέτρηση.	***Μετρήσεις*** • Μέτρηση με μη τυπικές και τυπικές μονάδες *(1 ώρα)*	Αναδεικνύεται ο προσεγγιστικός χαρακτήρας της μέτρησης, η απαιτούμενη ακρίβεια με βάση το πλαίσιο εφαρμογής (π.χ. πόσα δεκαδικά ψηφία χρησιμοποιούν οι μηχανικοί στις μετρήσεις για την κατασκευή οικοδομών) και το σφάλμα στη μέτρηση ανάλογα με την ακρίβεια της μέτρησης.	Μαθηματικά Ε' Δημοτικού, ΟΕΔΒ, σελ. 34-35. Μαθηματικά Ε' Δημοτικού, τετράδιο εργασιών, α' τεύχος, ΟΕΔΒ, σελ. 28-29, Εργασίες: α-δ και στ.

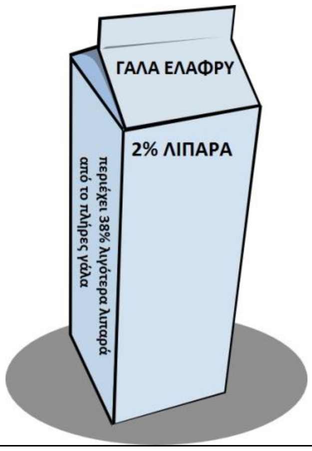
Θεματική ενότητα: Στοχαστικά Μαθηματικά (Στατιστική – Πιθανότητες)

Ενδεικτικές Διδακτικές ώρες: 12 (6 + 6)

Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα (ΠΜΑ)	**Βασικά θέματα**	**Δραστηριότητες**	**Εκπαιδευτικό υλικό**
Σ1. Διατυπώνουν ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με δεδομένα. *Σ2*. Συλλέγουν δεδομένα μέσω ερευνών, μετρήσεων ή πειραμάτων και επεκτείνουν τους τρόπους οργάνωσης τους και σε πίνακες σχετικών συχνοτήτων. *Σ3*. Κάνουν μετατροπές από μία μορφή αναπαράστασης δεδομένων σε άλλη. *Σ4*. Επιχειρηματολογούν βασιζόμενοι στα δεδομένα.	**Δεδομένα** • Συλλογή, οργάνωση, αναπαράσταση και ερμηνεία δεδομένων *(5 ώρες)*	(*ενδεικτική δραστηριότητα ΣΔ1*)	Μαθηματικά ΣΤ΄Δημοτικού, Βιβλίο του Μαθητή, Κεφ. 45, εφαρμογή, Κεφ. 46, Δραστηριότητα, Κεφ. 45, Δρ. 1, 2, Κεφ. 47 Δρ. 1, 2. Μαθηματικά ΣΤ΄Δημοτικού, Τετράδιο Εργασιών, Κεφ. 45, ασκ. 1, 2, Κεφ. 46, ασκ. 1, δρ. με προεκτάσεις, Κεφ. 47, ασκ. 1, 5.
Σ5. Προσδιορίζουν χαρακτηριστικές τιμές των	**Μέτρα θέσης** **Μεταβλητότητα**	Είναι σημαντικό οι μαθητές να	Μαθ. ΣΤ΄Δημ., βιβλίο Μαθητή: Κεφ. 47,

δεδομένων (επικρατούσα τιμή, διάμεσο, μέση τιμή) και διερευνούν τα χαρακτηριστικά τους.	*(2 ώρες)*	αναφέρονται και στα τρία μέτρα θέσης όταν περιγράφουν τα δεδομένα, γιατί έτσι θα καταφέρουν να έχουν καλύτερη αντίληψη των δεδομένων.	Δραστηριότητες 1 και 2.
Π1. Περιγράφουν τον δειγματικό χώρο ενός πειράματος τύχης δύο σταδίων.	**Πείραμα τύχης** *(2 ώρες)*		
Π2. Υπολογίζουν την πιθανότητα ενός ενδεχομένου ως κλάσμα (πλήθος ευνοϊκών περιπτώσεων) / (πλήθος δυνατών περιπτώσεων) και την συγκρίνουν με την σχετική συχνότητα των αποτελεσμάτων που προκύπτουν από την πραγματοποίηση ενός πειράματος τύχης.	**Πιθανότητα ενδεχομένου** *(3 ώρες)*	(*ενδεικτική δραστηριότητα ΠΔ1*)	

Ενδεικτικές Δραστηριότητες

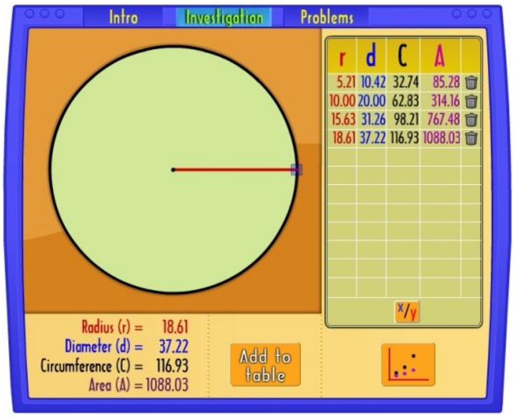
<table>
<tr><th>Α/Α</th><th>Περιγραφή δραστηριότητας</th><th>ΠΜΑ</th></tr>
<tr><td>ΑρΔ1</td><td>Το παγκόσμιο χωριό
Τον Οκτώβρη του 1999, ο συνολικός πληθυσμός της γης ήταν περίπου 6.000.000.000 κάτοικοι. Φανταστείτε ότι θέλουμε να φτιάξουμε ένα χωριό με πληθυσμό ακριβώς 100 κατοίκους. Στην συγκρότηση του πληθυσμού θα συμμετέχουν αναλογικά άνθρωποι από όλες τις ηπείρους. Με άλλα λόγια μπορούμε να «σμικρύνουμε» αναλογικά τον πληθυσμό της γης σε ένα χωριό με πληθυσμό ακριβώς 100 κάτοικους. Οι κάτοικοι, λοιπόν, του παγκόσμιου αυτού χωριού θα είναι:
• 61 κάτοικοι από την Ασία
• 13 κάτοικοι από την Αφρική
• 12 κάτοικοι από την Ευρώπη
• 8 κάτοικοι από την Βόρεια Αμερική
• 6 κάτοικοι από την Νότια Αμερική
Ο Γιώργος διαφωνεί με την προτεινόμενη σύνθεση του πληθυσμού και υποστηρίζει: «στην Αυστραλία ζούσαν εκατομμύρια άνθρωποι το 1999. Γιατί δεν υπάρχει τουλάχιστον ένας κάτοικος στο παγκόσμιο χωριό από την Αυστραλία;»
Ο ισχυρισμός του Γιώργου είναι σωστός καθώς στην Αυστραλία ζούσαν εκατομμύρια κάτοικοι το 1999. Κανένας κάτοικος όμως το παγκόσμιου χωριού δεν είναι από την Αυστραλία. Γιατί νομίζεις ότι συμβαίνει αυτό; Χρησιμοποίησε τα μαθηματικά για να αποδείξεις ότι κάτι τέτοιο είναι δυνατό να συμβεί.</td><td>Αρ1,
Αρ4,
Αρ5</td></tr>
<tr><td>ΑρΔ2</td><td>Λιγότερα λιπαρά


Αυτό είναι ένα κουτί με ελαφρύ γάλα.
• Τι ποσοστό λιπαρών περιέχει το πλήρες γάλα;
• Αιτιολογείστε την απάντησή σας.</td><td>Αρ8,
Αρ4</td></tr>
<tr><td>ΑρΔ3</td><td>Ο αριθμός π
Περισσότερα από 2000 χρόνια πριν, ο Έλληνας Μαθηματικός Αρχιμήδης χρησιμοποίησε κανονικά πολύγωνα με 96 πλευρές για να υπολογίσει ότι ο αριθμός π βρίσκεται ανάμεσα στους αριθμούς $3\frac{10}{71}$ και $3\frac{1}{7}$. Σήμερα η πιο συνηθισμένη δεκαδική προσέγγιση για τον αριθμό π είναι το 3,14. Βρίσκεται το 3,14 στο διάστημα που χρησιμοποιούσε ο Αρχιμήδης για την προσέγγιση του αριθμού; Αν όχι, πώς θα βελτιώναμε τη δεκαδική προσέγγιση του</td><td>Αρ4
Αρ9
Αρ10</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

π; Τοποθέτησε όλους τους αριθμούς σε μια αριθμογραμμή.

Στην ίδια δραστηριότητα, μέσω εφαρμογής σε ψηφιακό περιβάλλον (σύνδεσμος http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=116) οι μαθητές μπορούν να κατασκευάσουν κύκλους καταγράφοντας για κάθε περίπτωση τα μήκη της ακτίνας, της διαμέτρου και της περιφέρειας του κύκλου. Από τον πίνακα των τιμών μπορούν να καταλήγουν σε μια δεκαδική προσέγγιση του αριθμού π.



</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>ΑρΔ4</td>
<td>

Νοερός υπολογισμός – Κέρματα

Ο Νικόλας χρησιμοποιεί μια ενδιαφέρουσα στρατηγική για να κάνει υπολογισμούς με το μυαλό του. Για παράδειγμα, αντί να υπολογίζει πόσο κάνει 6 x 0,15 €, υπολογίζει 3 x 0,30€ το οποίο κάνει 0,90€. Όταν του ζητούν να εξηγήσει την στρατηγική του αυτός τοποθετεί κέρματα των 5 και 10 λεπτών στο τραπέζι, όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα.

- *Πώς νομίζεις ότι μπορεί να χρησιμοποιήσει τα κέρματα αυτά για να δείξει ότι το 6 x 0,15 € είναι ίδιο με το 3 x 30€ ;*
- *Χρησιμοποίησε την στρατηγική του Νικόλα για να υπολογίσεις πόσο κάνει 4 x 1,35€.*
- *Κατασκευάσε ένα παρόμοιο πρόβλημα πολλαπλασιασμό.*

</td>
<td>Αρ9
Αρ10</td>
</tr>
<tr>
<td>ΑρΔ5</td>
<td>

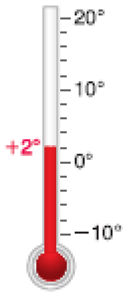
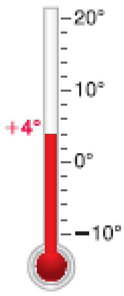
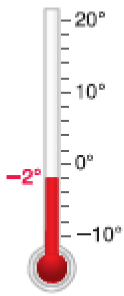
Το τετράγωνο με το κομπιουτεράκι

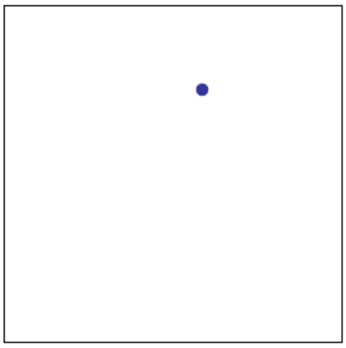
Ο Γιώργος, ο Χρήστος και ο Νικόλας συζητούν σχετικά με ποιο μπορεί να είναι το μήκος της πλευράς του τετραγώνου που έχει εμβαδό 32 τ.εκ. Ο Χρήστος υποστηρίζει ότι πρέπει να είναι ή το 5,6 τ.εκ. ή το 5,7 τ.εκ.

Γιώργος: «Χρήστο, δεν νομίζω ότι το 5,6 τ.εκ. ή το 5,7 τ.εκ. είναι αρκετά ακριβές. Εάν είχε περισσότερα δεκαδικά ψηφιά τότε θα είχαμε το ακριβές μήκος. Ας δοκιμάσουμε το 5,65 τ.εκ. γιατί είναι ακριβώς στη μέση μεταξύ των 5,6 τ.εκ. και 5,7 τ.εκ.»

</td>
<td>Αρ10,
Αρ12</td>
</tr>
</table>

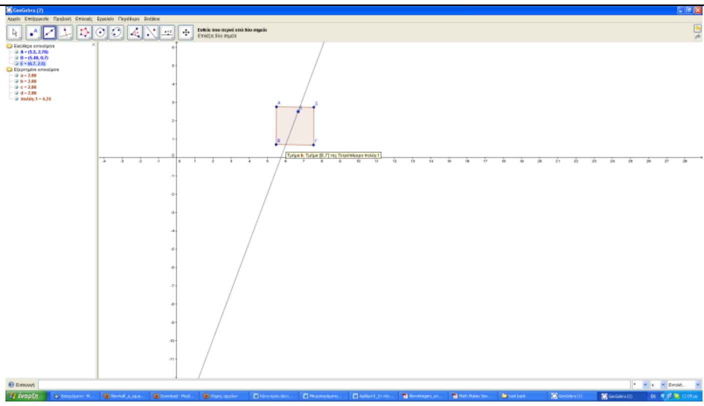
<table>
<tr><td></td><td colspan="3">Χρήστος: «Γιώργο δεν νομίζω ότι αυτό θα βοηθήσει. Αν έναν αριθμό με περισσότερα δεκαδικά ψηφία τον πολλαπλασιάσουμε με τον εαυτό του ποτέ δεν θα πάρουμε ένα ολόκληρο αριθμό ως απάντηση.»
Νικόλας: «Το έκανα στο κομπιουτεράκι μου και βρήκα 5,6568542. Αυτή πρέπει να είναι η σωστή απάντηση».


Γιώργος: «Μπράβο Νικόλα. Ας το δοκιμάσουμε!»
• Στην αρχή της συζήτησης ο Χρήστος και ο Γιώργος διαφωνούσαν. Ποιος από τους δύο νομίζεις ότι έχει δίκιο; Εξήγησε το.
• Πώς βρήκε ο Νικόλας τον αριθμό 5,6568542 χρησιμοποιώντας το κομπιουτεράκι του;</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">ΑρΔ6</td><td colspan="3">Τα θερμόμετρα
Μελετήστε τα τρία θερμόμετρα. Υπολογίστε την θερμοκρασία που θα δείχνει κάθε θερμόμετρο, όταν:</td><td rowspan="3">Αρ13</td></tr>
<tr><td>α) η θερμοκρασία πέσει κατά 4^o C</td><td>β) η θερμοκρασία πέσει κατά 7^o C</td><td>α) η θερμοκρασία ανέβει κατά 6^o C</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>ΑΔ1</td><td colspan="3">Να βρεθεί και να διατυπωθεί ο κανόνας με τον οποίο συνεχίζεται η παρακάτω ακολουθία των αριθμών:
720, 360, 120, ...,
Να βρεθεί ο 8ος όρος της.</td><td>Α2</td></tr>
<tr><td>ΓΔ1</td><td colspan="3">Ο εκπαιδευτικός χρησιμοποιώντας τον παγκόσμιο χάρτη και την υδρόγειο σφαίρα ζητά από τους μαθητές να μελετήσουν ή να σχεδιάσουν τις πορείες θαλασσοπόρων και εξερευνητών. Οι μαθητές σημειώνουν σημαντικά σημεία από τις πορείες αυτές και τα περιγράφουν χρησιμοποιώντας τα σημεία του ορίζοντα και το γεωγραφικό μήκος και πλάτος. Εναλλακτικά μπορεί να γίνει χρήση ψηφιακών χαρτών και εξομοιωτών (π.χ. Google Earth) και καταγραφή συντεταγμένων ή υπολογισμός αποστάσεων.</td><td>Γ1</td></tr>
<tr><td>ΓΔ2</td><td colspan="3">Ο εκπαιδευτικός αναρτά στην τάξη ένα χάρτη της Ευρωπαϊκής Ένωσης και ζητά από τους μαθητές να περιγράψουν, χρησιμοποιώντας σημεία του ορίζοντα, τη θέση χωρών-μελών με βάση μία χώρα αναφοράς.</td><td>Γ1</td></tr>
<tr><td>ΓΔ3</td><td colspan="3">Στην αίθουσα των Η/Υ ο εκπαιδευτικός ζητά από τους μαθητές να δημιουργήσουν ένα αρχείο του προγράμματος Word. Στη συνέχεια τους ζητά να επιλέξουν από τα βασικά σχήματα τον κύκλο και να τον σχεδιάσουν στη σελίδα του εγγράφου Word. Επειδή στα σχέδια αυτά δεν σημειώνεται το κέντρο του κύκλου τους ζητά να διερευνήσουν τρόπους</td><td>Γ5</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>προσδιορισμού του κέντρου. Με αυτόν τον τρόπο ο εκπαιδευτικός επιδιώκει να αναδείξει κατάλληλες στρατηγικές προσδιορισμού του κέντρου του κύκλου από τους μαθητές του και μέσα από αυτές την χρήση στοιχείων του κύκλου όπως είναι η ακτίνα και η διάμετρός του. Τέλος του ζητά να τοποθετήσουν τα στοιχεία αυτά πάνω στον κύκλο που σχεδίασαν.</td><td></td></tr>
<tr><td>ΓΔ4</td><td>Ο εκπαιδευτικός δίνει στους μαθητές το υλικό Polydron και τους ζητά να κατασκευάσουν πυραμίδες και πρίσματα. Στη συνέχεια τους ζητά να καταγράψουν τα σχήματα που χρειάστηκαν για την κατασκευή του κάθε στερεού, εντοπίζοντας ομοιότητες και διαφορές σε μια προσπάθεια να τα ταξινομήσουν. Οι μαθητές σχεδιάζουν τα στερεά σε ισομετρικούς καμβάδες.</td><td>Γ3, Γ6, Γ9, Γ14</td></tr>
<tr><td>ΓΔ5</td><td>Ο εκπαιδευτικός ζητά από τους μαθητές να συλλέξουν εικόνες και αντικείμενα από το περιβάλλον τους που παρουσιάζουν συμμετρία. Στη συνέχεια τους ζητά να τα ταξινομήσουν ανάλογα με το είδος της συμμετρίας που παρουσιάζουν και να κατασκευάσουν με αυτά πόστερ που θα τα αναρτήσουν στην τάξη τους.</td><td>Γ11, Γ12</td></tr>
<tr><td>ΓΔ6</td><td>Ο εκπαιδευτικός δίνει στους μαθητές σχέδια της κάτοψης του σχολείου και ίσα κυβάκια και τους ζητά να κατασκευάσουν ένα κτίριο – ομοίωμα του σχολείου. Προεκτείνοντας τη δραστηριότητα μπορεί να δώσει στους μαθητές μακετόχαρτο και να τους ζητήσει μια απλή μακέτα του σχολείου.</td><td>Γ14, Γ15</td></tr>
<tr><td>ΓΔ7</td><td>Το μισό τετράγωνο

Σχεδιάστε μια γραμμή που να περνά από τη μπλε κουκίδα και να κόβει το τετράγωνο στη μέση.

Είναι η γραμμή που κατασκευάσατε άξονας συμμετρίας του τετραγώνου; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
Είναι τα δύο μέρη που κατασκευάσατε ίσα; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.
Ο Γιώργος υποστηρίζει ότι δεν έχει σημασία που βρίσκεται η κουκίδα. Οπουδήποτε και να είναι μέσα στο τετράγωνο, αυτός μπορεί πάντα να κατασκευάζει μια ευθεία που να περνά από την κουκίδα και να χωρίζει το τετράγωνο σε δύο ίσα μέρη.

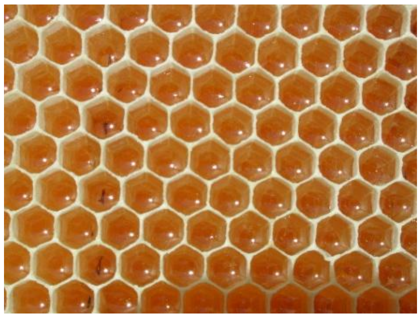
Οι μαθητές θα μπορούσαν να πειραματιστούν με τα λογισμικά Δυναμικής Γεωμετρίας (Sketchpad, Cabri, Geogebra) δημιουργώντας ένα τετράγωνο και τοποθετώντας ένα σημείο μέσα στο τετράγωνο. Στη συνέχεια θα κατασκευάσουν μια ευθεία που θα ορίζεται από το σημείο μέσα στο τετράγωνο και ένα σημείο πάνω στην περίμετρο του τετραγώνου. Θα μπορούσαν οι μαθητές να πειραματιστούν μεταβάλλοντας δυναμικά το σημείο της περιμέτρου και να αποφασίσουν υπολογίζοντας τα εμβαδά των τετραπλεύρων που σχηματίζονται για την κατάλληλη θέση του.</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>


Μια πλήρης προσέγγιση στα παραπάνω ερωτήματα θα περιλάμβανε τον ορισμό της ευθείας μέσω του σημείου τομής των διαγωνίων του τετραγώνου.
</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>ΜΔ1</td>
<td>
«Μαθηματικά μωσαϊκά - πλακοστρώσεις»

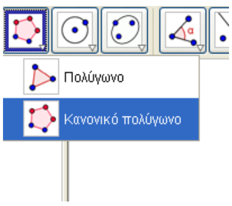
Στο μάθημα των καλλιτεχνικών ο δάσκαλος της Στ΄ τάξης παρουσιάζει στους μαθητές του το έργο του Ολλανδού καλλιτέχνη Maurits Cornelis Escher (1898-1972). Ο Escher ανέπτυξε τη δική του θεωρία για τις πλακοστρώσεις στο επίπεδο και στα τα έργα του εμπλέκονται έννοιες και τεχνικές της σύγχρονης Γεωμετρίας. Επισκεφτείτε την επίσημη ιστοσελίδα του καλλιτέχνη (http://www.mcescher.com/) για να θαυμάσετε πολλά από τα έργα του.

Ο Νικόλας και οι φίλοι του γοητεύθηκαν από τα έργα του Ολλανδού καλλιτέχνη και άρχισαν να αναζητούν τρόπους για να πετύχουν πλακοστρώσεις – επικαλύψεις του επιπέδου με γνωστά τους σχήματα. Αρχικά άρχισαν να αναζητούν γύρω τους τέτοια μοτίβα και ανακάλυψαν ότι και τα τετράγωνα πλακάκια στο πάτωμα της τάξης τους ήταν μια πλακόστρωση από ίσα τετράγωνα. Ο Νικόλας σκέφτηκε την κυψέλη των μελισσών και αναζητώντας στο διαδίκτυο κάποια εικόνα διαπίστωσε ότι σε αυτή την περίπτωση η πλακόστρωση γινόταν με την επανάληψη ίσων εξαγώνων.



Τα παιδιά όσο και έψαξαν δεν μπόρεσαν να εντοπίσουν κάποια άλλη περίπτωση πλακόστρωσης. Έτσι, αποφάσισαν να πειραματιστούν οι ίδιοι έτσι ώστε να ανακαλύψουν μια πιθανή σχέση ανάμεσα στις ιδιότητες του σχήματος και της δυνατότητας δημιουργίας ενός μωσαϊκού με την επανάληψη του σχήματος. Διαπίστωσαν, βέβαια, ότι δεν θα πρέπει να υπάρχουν στο μωσαϊκό κενά και επικαλύψεις.
Μπορείτε να τους βοηθήσετε στην αναζήτησή τους;

Ενδεικτικές φάσεις εφαρμογής
1η φάση:
Με τη χρήση του λογισμικού Geogebra οι μαθητές μπορούν να κατασκευάσουν κανονικά πολύγωνα (εικόνα 1) και να πειραματιστούν στην επικάλυψη του επίπεδου.



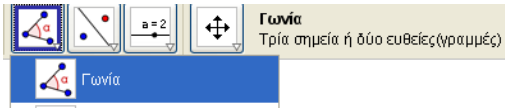
Εικόνα 1
</td>
<td>Μ1, Γ8, Γ9, Γ13</td>
</tr>
</table>

1. Αρχικά καλούνται να δημιουργήσουν τα παρακάτω κανονικά πολύγωνα αξιοποιώντας την ενσωματωμένη λειτουργικότητα:

- τρίγωνο,
- τετράγωνο,
- πεντάγωνο
- εξάγωνο,
- οκτάγωνο και
- δωδεκάγωνο)

(Οι μαθητές αφού ορίσουν δύο σημεία στο επίπεδο που θα αποτελούν δύο συνεχόμενες κορυφές του κανονικού πολυγώνου θα καθορίσουν τον αριθμό των πλευρών του πολυγώνου) .

2η φάση: Οι μαθητές καλούνται να υπολογίσουν το μέτρο των γωνιών κάθε πολυγώνου χωρίζοντας το κάθε σχήμα σε τρίγωνα. Επιβεβαιώνουν τους συλλογισμούς τους αξιοποιώντας την λειτουργικότητα του λογισμικού.



3η φάση: Οι μαθητές καλούνται να μελετήσουν αν είναι δυνατόν να χρησιμοποιήσουν έναν αριθμό ίδιων πολυγώνων για να καλύψουν το χώρο γύρω από ένα σημείο στο επίπεδο χωρίς κενά και επικαλύψεις.
(Οι μαθητές κατασκευάζουν το αρχικό πολύγωνο και στη συνέχεια κατασκευάζουν κάθε νέο πολύγωνο ορίζοντας ως κορυφές του τις κορυφές του γειτονικού πολυγώνου).

Τίθενται οι παρακάτω ερωτήσεις στους μαθητές:

α. Με ποια πολύγωνα είναι δυνατή η επικάλυψη του επιπέδου γύρω από ένα σημείο. Ποιος είναι ο αριθμός των πολυγώνων που χρησιμοποιήσατε σε κάθε περίπτωση;

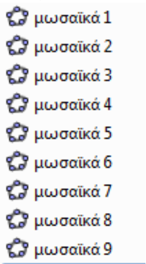
β. Σε ποιες από τις περιπτώσεις δημιουργούνται κενά;

γ. Σε ποιες από τις περιπτώσεις δεν είναι δυνατή η επικάλυψη του επιπέδου; Δημιουργήθηκαν κενά ή επικαλύψεις; Ποιος ήταν ο αριθμός των πολυγώνων που χρησιμοποιήσατε σε κάθε περίπτωση;

δ. Πώς συσχετίζεται (στις περιπτώσεις επιτυχημένης επικάλυψης) ο αριθμός των πολυγώνων και το μέγεθος της γωνίας του πολυγώνου;

ε. Υπάρχει περίπτωση επικάλυψης του επιπέδου με την χρήση διαφορετικών πολυγώνων; Μπορείτε να περιγράψετε το μοτίβο που δημιουργείται;

Αρχεία Λογισμικού

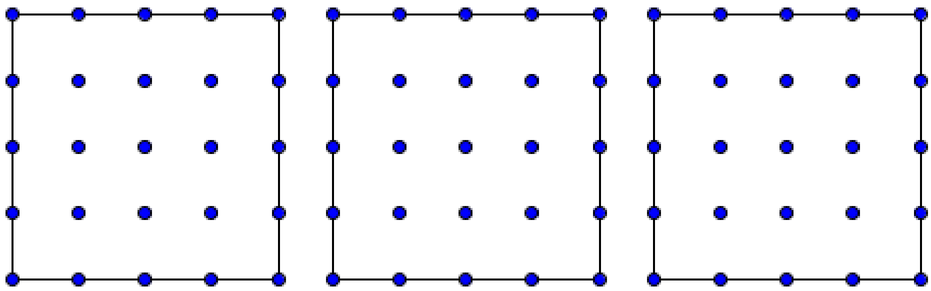


Μέσα από την δυναμική μεταβολή των γεωμετρικών σχημάτων οι μαθητές καλούνται να

<table>
<tr><td></td><td>συσχετίσουν το μέτρο της γωνίας ενός κανονικού πολυγώνου με τη δυνατότητα επικάλυψης του επιπέδου με ίδια ή διαφορετικά κανονικά πολύγωνα δημιουργώντας μοτίβα γεωμετρικών σχημάτων.</td><td></td></tr>
<tr><td>ΜΔ2</td><td>Μοιράζοντας το κέικ

Ο Γιώργος, ο Νικόλας και οι φίλοι τους, Λάμπρος και Σοφία γύρισαν από το σχολείο πολύ πεινασμένοι. Στην κουζίνα βρήκαν ένα μεγάλο τετράγωνο κομμάτι κέικ που είχε περισσέψει από το χθεσινό πάρτι γενεθλίων. Ἡθελαν να είναι δίκαιοι και να μοιράσουν το κέικ σε τέσσερα ίσα κομμάτια έτσι ώστε καθένας τους να πάρει το ένα τέταρτο (¼) από το κέικ.

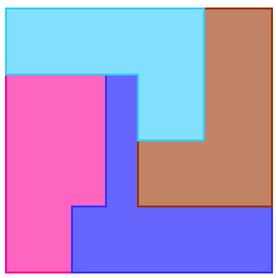
1. Προτείνετε διάφορους τρόπους που τα παιδιά θα μπορούσαν να κόψουν και να μοιράσουν το τετράγωνο κομμάτι κέικ. Για κάθε τρόπο που προτείνετε, εξηγήστε γιατί κάθε παιδί θα πάρει ακριβώς το ένα τέταρτο από το κέικ. Μπορείτε να πειραματιστείτε με τα παρακάτω πλαίσια:

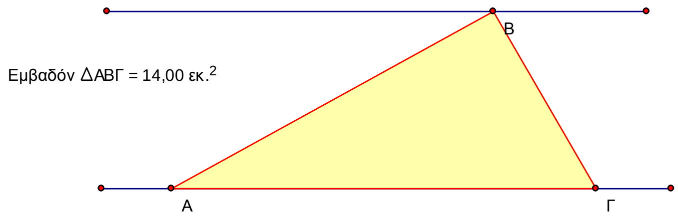
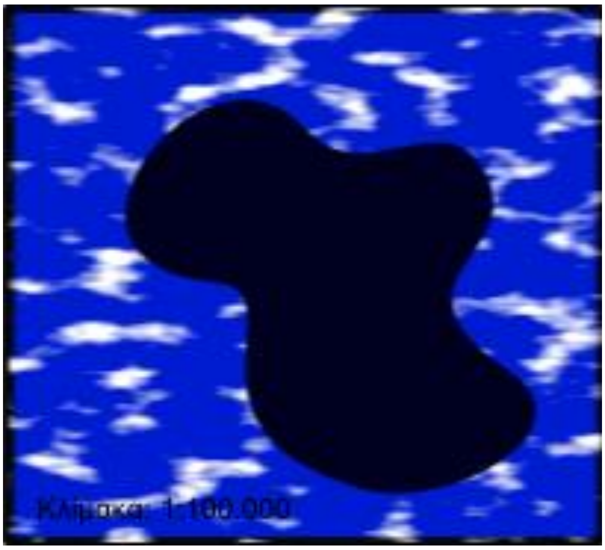


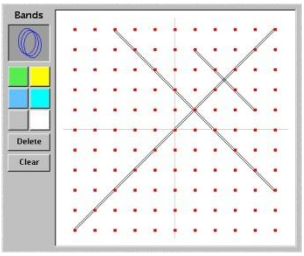
Οι μαθητές θα μπορούσαν να πειραματιστούν και με τα λογισμικά Δυναμικής Γεωμετρίας (Sketchpad, Cabri, Geogebra) δημιουργώντας ένα τετράγωνο πλέγμα και αξιοποιώντας τις δυναμικές λειτουργικότητες των λογισμικών να προτείνουν τις διαφορετικές στρατηγικές που ανέπτυξαν μέσα από τη χρήση του διαδραστικού πίνακα.

2. Ο Γιώργος πρότεινε τον παρακάτω τρόπο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η Σοφία αντιδρώντας στην πρόταση του Γιώργου υποστήριξε: «Είναι λάθος αυτό που προτείνεις. Μα δε το βλέπεις, τα κομμάτια δεν είναι ίσα!!»

3. Ποιος από τους δύο έχει δίκιο; Εξηγήστε

</td><td>Μ5, Γ9, Γ10</td></tr>
<tr><td>ΜΔ3</td><td>Οι μαθητές μετρούν τη διάμετρο και την περιφέρεια κυλινδρικών αντικειμένων με χάρακα και λωρίδες χαρτιού, κορδέλα ή σπάγκο. Καταγράφουν τις μετρήσεις τους σε πίνακα τιμών και προσπαθούν να ανακαλύψουν κανονικότητες στα δεδομένα. Ανακαλύπτουν το σταθερό λόγο περιφέρειας προς διάμετρο κύκλου. Εφαρμόζουν τη σχέση που ανακάλυψαν για να υπολογίσουν και να συγκρίνουν μήκη κύκλων.</td><td>Μ2</td></tr>
</table>

ΜΔ4	Οι μαθητές αναλύουν παραλληλόγραμμα σε επιμέρους σχήματα και τα ανασυνθέτουν σε σχήματα με γνωστό εμβαδό (ορθογώνια). Στη συνέχεια αναλύουν παραλληλόγραμμα σε δύο τρίγωνα (με τη διαγώνιο), διαπιστώνουν με μετασχηματισμό (στροφή) ότι τα τρίγωνα είναι ίσα και υπολογίζουν το εμβαδόν τους με βάση το εμβαδό του παραλληλογράμμου. Οι μαθητές μπορούν να χρησιμοποιήσουν λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας (π.χ. Geometer's Sketchpad) για να διαπιστώσουν ότι παραλληλόγραμμα ή τρίγωνα με ίσες βάσεις και ίσο ύψος έχουν ίσο εμβαδό. Για παράδειγμα, κατασκευάζουν ένα σχήμα σαν αυτό της εικόνας και μετακινώντας το σημείο Β διαπιστώνουν ότι το εμβαδό του τριγώνου παραμένει σταθερό.  	**Μ4**
ΜΔ5	Ένα δεξαμενόπλοιο έπαθε βλάβη, η οποία προκάλεσε διαρροή πετρελαίου, με αποτέλεσμα να δημιουργηθεί μια πετρελαιοκηλίδα σαν αυτή που φαίνεται στην εικόνα.  Α) Υπολογίστε πόσα περίπου τετραγωνικά χιλιόμετρα είναι η έκταση που καταλαμβάνει η πετρελαιοκηλίδα. Β) Όταν 100 λίτρα αργού πετρελαίου απελευθερώνονται στη θάλασσα, καταλαμβάνουν επιφάνεια περίπου 1.000 τ.μ. Πόσα λίτρα περίπου απελευθερώθηκαν από τη βλάβη του δεξαμενόπλοιου; Γ) Κάθε βαρέλι πετρελαίου περιέχει περίπου 160 λίτρα και ζυγίζει περίπου 140 κιλά. Αν θέλαμε να υπολογίσουμε τη διαρροή σε βαρέλια, πόσα περίπου βαρέλια αργού πετρελαίου απελευθερώθηκαν στη θάλασσα; Δ) Ανάλογα με την ποσότητα του πετρελαίου που απελευθερώνεται στη θάλασσα οι πετρελαιοκηλίδες κατατάσσονται σε μικρές (λιγότερο από 7 τόνους), μεσαίες (7-700 τόνους) και μεγάλες (περισσότερους από 700 τόνους). Σε ποια κατηγορία θα εντάσσατε την παραπάνω πετρελαιοκηλίδα;	**Μ5**

	Ε) Με βάση τις καιρικές συνθήκες ήταν δυνατόν να εφαρμοστούν δύο τεχνικές απορρύπανσης: ο μηχανικός καθαρισμός, που κοστίζει από 80 έως 750 € για κάθε βαρέλι, και η επιτόπια καύση, που κοστίζει 40 € για κάθε βαρέλι πετρελαίου. Πόσο θα κόστιζε η απορρύπανση της θάλασσας για καθεμία μέθοδο;	
ΜΔ6	Οι μαθητές διερευνούν τον τρόπο που μεταβάλλονται η περίμετρος και το εμβαδό γνωστών γεωμετρικών σχημάτων (π.χ. τετράγωνο, ορθογώνιο τρίγωνο) όταν μεταβάλλεται το μήκος των πλευρών τους με ακέραιο ή κλασματικό συντελεστή και εξάγουν συμπεράσματα. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να αξιοποιήσει καμβάδες ή και γεωπίνακες σε φυσική ή ψηφιακή μορφή.(http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_303_g_3_t_3.html?open=activities&from=category_g_3_t_3.html) 	**Μ6**
ΣΔ1	Οι μαθητές διεξάγουν μια έρευνα σχετικά με το πλήθος των λέξεων που έχει ένα βιβλίο (π.χ. της Ιστορίας) της Δ΄ τάξης και της ΣΤ΄ τάξης. Συλλέγουν με κατάλληλο τρόπο τα δεδομένα , τα οργανώνουν και τα αναπαριστούν κατάλληλα. Συζητούν για χαρακτηριστικά που έχουν τα δεδομένα και για χαρακτηριστικές τιμές αυτών. Συζητούν για θέματα που προέκυψαν από την έρευνά τους και αν έχουν «λογική» εξήγηση όπως για παράδειγμα: γιατί τα βιβλία της Δ΄ τάξης έχουν λιγότερες λέξεις ανά σελίδα σε σχέση με τα βιβλία της ΣΤ τάξης.	**Σ2, Σ3, Σ4, Σ5**
ΠΔ1	Οι μαθητές σε ομάδες ρίχνουν δύο ίδια νομίσματα (π.χ. δύο των 20 λεπτών) 20 φορές και καταγράφουν αν εμφανίζεται α) Κεφάλι και στα δύο, β) Γράμματα και στα δύο ή γ) διαφορετικές ενδείξεις και στα δύο νομίσματα. Συζητούν ποια περίπτωση εμφανίστηκε τις περισσότερες φορές και αν υπάρχει εξήγηση γι’ αυτό. Εκτελούν το ίδιο πείραμα με δύο διαφορετικά νομίσματα και προσπαθούν να βρουν ομοιότητες με το προηγούμενο. Περιγράφουν τον δειγματικό χώρο.	**Σ2, Π1, Π2**

ΣΥΝΘΕΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ 2ου ΚΥΚΛΟΥ (Γ΄- Δ΄- Ε΄ -ΣΤ΄ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ)

Πίνακας Περιεχομένων

	Κόστος ζωής»	οι οποίες στηρίζονται σε δεδομένα οικονομικής διαχείρισης και κάνουν σχετικούς υπολογισμούς και εκτιμήσεις.		δραστηριότητας, αναζήτηση στοιχείων στο διαδίκτυο
7	«Γωνίες και ηλικία»	Οι μαθητές συσχετίζουν μορφές και σχήματα στο ανθρώπινο σώμα και τα ερμηνεύουν χρησιμοποιώντας μαθηματικά. Συγκεκριμένα καλούνται να αναγνωρίσουν τη διαφοροποίηση της γωνίας του μηριαίου οστού ανάλογα με την ηλικία του ατόμου και να πάρουν αποφάσεις με βάση τα δεδομένα μετρήσεων και υπολογισμών.	Ε΄ και Στ΄	Σχήματα και φωτογραφίες της δραστηριότητας, γεωμετρικά όργανα (κανόνας και μοιρογνωμόνιο), αναζήτηση στοιχείων στο διαδίκτυο
8	«Συνθήκες φωτισμού στο χώρο»	Οι μαθητές καλούνται να μετρήσουν τις γυάλινες επιφάνειες των παραθύρων της τάξης και να πάρουν αποφάσεις αν αυτές επαρκούν για την εξασφάλιση ικανοποιητικών συνθηκών φωτισμού με βάση τα δεδομένα των μετρήσεων τους και του προσανατολισμού των παραθύρων.	Ε΄ και Στ΄	Μετροταινία, αριθμομηχανή, πυξίδα, αναζήτηση στοιχείων στο διαδίκτυο.
9	«Κύκλος και ψάρεμα»	Οι μαθητές καλούνται να συσχετίσουν παραδοσιακές δραστηριότητες του ανθρώπου στο περιβάλλον και να τις ερμηνεύσουν χρησιμοποιώντας μαθηματικά. Συγκεκριμένα καλούνται να υπολογίσουν δεδομένα σχετικά με το ψάρεμα και να αποφασίσουν για τις επιδράσεις του στο περιβάλλον με βάση τα δεδομένα που τους δίνονται και σχετικούς υπολογισμούς.	Ε΄ και Στ΄	Εικόνες από τη συνθετική εργασίας, αριθμομηχανή, αναζήτηση στοιχείων στο διαδίκτυο.
10	«Στα μονοπάτια των Θεών του Ολύμπου»	Οι μαθητές σχεδιάζουν δραστηριότητες του ανθρώπου στη φύση και υπολογίζουν δεδομένα σχετικά με τα υλικά που θα χρειαστεί να πάρουν μαζί τους, το κόστος των υλικών και της μεταφοράς τους με βάση τις ανάγκες της συγκεκριμένης διαδρομής.	Ε΄ και Στ΄	Χάρτες, λογισμικό Goggle Earth, αριθμομηχανή αναζήτηση στοιχείων στο διαδίκτυο.
11	«Κύκλοι στην αυλή του σχολείου»	Οι μαθητές μελετούν γεωμετρικές ιδιότητες του κύκλου μέσα από βιωματικές δραστηριότητες αξιοποιώντας και ψηφιακά εργαλεία.	Ε΄ και Στ΄	Περιβάλλοντα δυναμικής γεωμετρίας και χειραπτικό υλικό. Αρχείο: *10-Μήκος κύκλου*
12	«Λονδίνο 2012»	Οι μαθητές καλούνται να μελετήσουν τις αλλαγές ώρας ανάμεσα στις ζώνες ώρας που είναι χωρισμένος ο	Ε΄ και Στ΄	Παγκόσμιος χάρτης, χάρτης ζωνών ώρας,

		πλανήτης. Μελετούν τον παγκόσμιο χάρτη που είναι χωρισμένος στις ζώνες ώρας και καλούνται να τον φανταστούν ως μια τεράστια αριθμογραμμή των ακεραίων. Το μηδέν είναι το σημείο αναφοράς που αντιστοιχεί στο Λονδίνο όπου γίνονται οι Ολυμπιακοί αγώνες.		αναζήτηση στοιχείων στο διαδίκτυο
13	«Το πράσινο σχολείο»	Οι μαθητές μέσα από ένα πραγματικό πρόβλημα υπολογισμού των διαστάσεων ενός ξύλινου πλαισίου για τον κήπο του σχολείου, διερευνούν τη περίμετρο και το εμβαδόν ορθογωνίων και την ελαχιστοποίηση του κόστους κατασκευής του. Χρησιμοποιούν παραμετρικές διαδικασίες με τη βοήθεια εργαλείου συμβολικής έκφρασης με δυνατότητα δυναμικού χειρισμού γεωμετρικών αντικειμένων, το Χελωνόκοσμο.	Στ΄	Λογισμικό Χελωνόκοσμος Αρχεία: *13-φάση 1η-Δρ2* *13-φάση 1η-Δρ3* *13-φάση2η-δρ3* *13-Φύλλο εργασίας*
14	«Οι μαθητές κατασκευάζουν σκάλες παίζοντας»	Οι μαθητές μέσα από ένα πρόβλημα κατασκευής μιας σκάλας για το σχολείο, διερευνούν επαναληπτικές δομές, κατασκευάζουν σκαλοπάτια και σκάλες χειρίζοντάς τες δυναμικά με τη βοήθεια του Χελωνόκοσμου.	Στ΄	Λογισμικό Χελωνόκοσμος Αρχεία: *14-Φύλλο εργασίας* *14-φάση 1η-Δρ2* *14-φάση 1η-Δρ3* *14-φάση 1η-Δρ4* *14-φάση 2η-Δρ3* *14-φάση 2η-Δρ5*

ΣΥΝΘΕΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ 1 (Γ΄- Δ΄ Δημοτικού)
«Νερό, το πιο πολύτιμο αγαθό»

Μαγείρεμα, καθάρισμα, πότισμα, πλύσιμο... το νερό είναι απαραίτητο κάθε μέρα στους ανθρώπους σε κάθε γωνιά της γης. Το ξοδεύουμε όμως με σύνεση; Μελετήστε τον πίνακα και απαντήστε.

Ενεργώ απερίσκεπτα	**Λίτρα**
Μπάνιο σε γεμάτη μπανιέρα	180
Πλύσιμο δοντιών (η βρύση ανοιχτή)	20
Πλύσιμο πιάτων στο χέρι (24ωρο)	150
Πλυντήριο πιάτων (πλήρες πρόγρ.)	40
Πλυντήριο ρούχων (πλήρες πρόγρ.)	80
Ξύρισμα (βρύση συνεχώς ανοιχτή)	20
Πλύσιμο αυτοκινήτου με λάστιχο	180
Βρύση που στάζει (24ωρο)	144
Καζανάκι χωρίς ειδική σακούλα	10

Ενεργώ με περίσκεψη	**Λίτρα**
Ντους (κλειστό στο σαπούνισμα)	30
Πλύσιμο δοντιών (η βρύση κλειστή)	1
Πλύσιμο-ξέβγαλμα στο νεροχύτη	25
Πλυντ. πιάτων (οικονομικό πρόγρ.)	22
Πλυντ. ρούχων (οικονομικό πρόγρ.)	45
Ξύρισμα (νερό όταν χρειάζεται)	3
Πλύσιμο αυτοκινήτου με κουβά	60
Βρύση που δεν στάζει	0
Καζανάκι με ειδική σακούλα	7
Καζανάκι 2 ταχυτήτων	3 ή 6

Πηγή: ΕΥΑΘ

Με βάση τις παραπάνω πληροφορίες μπορείτε να υπολογίσετε
α) Το νερό που ξοδεύει ένα άτομο (εσύ) σε μια εβδομάδα;
β) Το νερό που ξοδεύει μια οικογένεια (σου) σε μια εβδομάδα;

Θέματα για διερεύνηση και συζήτηση
- Επαρκούν τα 150 λίτρα νερό την ημέρα για τις ανάγκες της σύγχρονης οικογένειας;
- Οι ανάγκες μας για νερό στο μέλλον θα αυξηθούν ή θα ελαττωθούν;
- Τι γίνεται το νερό που χρησιμοποιούμε;
- Ο ρόλος των φυτών στο νερό...

Μια μικρή έρευνα:
Σύμφωνα με στοιχεία από τους λογαριασμούς ύδρευσης του προηγούμενου χρόνου υπολογίστε την κατανάλωση νερού της οικογένειάς σας.

Ενδεικτικές φάσεις εφαρμογής

1η φάση: Οι μαθητές υπολογίζουν την ποσότητα του νερού που είναι απαραίτητη για ένα άτομο και για μία οικογένεια σε μία εβδομάδα. Στη συνέχεια συγκρίνουν τα αποτελέσματά τους με τα αποτελέσματα των υπόλοιπων ομάδων και συμφωνούν στις μετρήσεις που είναι κοινά αποδεκτές.
2η φάση: Οι μαθητές κάθε ομάδας συζητούν για τις ανάγκες της σύγχρονης οικογένειας σε νερό, για τη διαχείριση του κ.λπ.
Τέλος, διερευνούν τρόπους συνετής διαχείρισης σε ατομικό, οικογενειακό και τοπικό επίπεδο.

Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα
Μαθηματικά
Στην παραδοσιακή τάξη η διδασκαλία των μαθηματικών δεν συνδέεται επαρκώς με την καθημερινότητα και δεν έχει εφαρμογή σε καταστάσεις που σχετίζονται με την επίδραση του ανθρώπου στο φυσικό περιβάλλον και τη διαχείριση των φυσικών πόρων. Στην παρούσα εργασία οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα:
-να συνδέσουν τα μαθηματικά με θέματα που σχετίζονται με τη διαχείριση φυσικών πόρων σε ατομικό και οικογενειακό επίπεδο και την επίδραση της συνετής ή μη διαχείρισης του στο περιβάλλον.
-να εκφράσουν με τη χρήση των μαθηματικών καταστάσεις επίδρασης του ανθρώπου στο φυσικό περιβάλλον και να τις ερμηνεύσουν.
-να χρησιμοποιήσουν τα μαθηματικά για να μοντελοποιήσουν καταστάσεις του πραγματικού κόσμου.

Περιβάλλον και Εκπαίδευση για την Αειφόρο Ανάπτυξη
Μέσα από τις διαφορετικές απόψεις σχετικά με την επίδραση των ανθρώπινων ενεργειών στο περιβάλλον, οι μαθητές μπορούν:
- να διακρίνουν τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα της αρμονικής συνύπαρξης του ανθρώπου με το φυσικό περιβάλλον και την αειφόρο ανάπτυξη μίας περιοχής.
- να αξιοποιήσουν και να ερμηνεύσουν βιβλιογραφικά δεδομένα και στοιχεία σχετικά με τη συνετή διαχείριση φυσικών πόρων και τα πλεονεκτήματα που προσφέρει τόσο για τον άνθρωπο όσο και για τη φύση.
- να διατυπώνουν επιχειρήματα και τεκμηριωμένες απόψεις.

ΣΥΝΘΕΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ 2 (Γ΄ - Δ΄Δημοτικού)
«Μυστικοί κώδικες και κρυπτογραφία»

Ο Ιούλιος Καίσαρας επινόησε έναν απλό κρυπτογραφικό κώδικα προκειμένου να επικοινωνεί με τους στρατηγούς του με μηνύματα που δεν θα ήταν δυνατόν να τα διαβάσουν οι εχθροί του. Ο κώδικας βασιζόταν στην αντικατάσταση κάθε γράμματος του αλφαβήτου με κάποιο άλλο, όχι όμως επιλεγμένο τυχαία αλλά με βάση έναν μυστικό αριθμό. Πολλοί σύγχρονοι κρυπτογραφικοί κώδικες είναι βασισμένοι σε έναν ή σε γινόμενο από πρώτους αριθμούς. Η τεχνική της κωδικοποίησης είναι απλή. Ας δούμε ένα παράδειγμα:
Κοιτάξτε στον ακόλουθο πίνακα το ελληνικό αλφάβητο. Στην πράσινη γραμμή εμφανίζεται όπως το γνωρίζουμε και το χρησιμοποιούμε. Στην καφετιά γραμμή μετατοπίσαμε τα γράμματα κατά 3 θέσεις προς τα δεξιά. Έτσι το Α έγινε Χ, το Β έγινε Ψ κ.λπ. (Αυτή είναι η κωδικοποίηση 3Δ, δηλαδή 3 θέσεις δεξιά).

Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ζ	Η	Θ	Ι	Κ	Λ	Μ	Ν	Ξ	Ο	Π	Ρ	Σ	Τ	Υ	Φ	Χ	Ψ	Ω
Χ	Ψ	Ω	Α	Β	Γ	Δ	Ε	Ζ	Η	Θ	Ι	Κ	Λ	Μ	Ν	Ξ	Ο	Π	Ρ	Σ	Τ	Υ	Φ

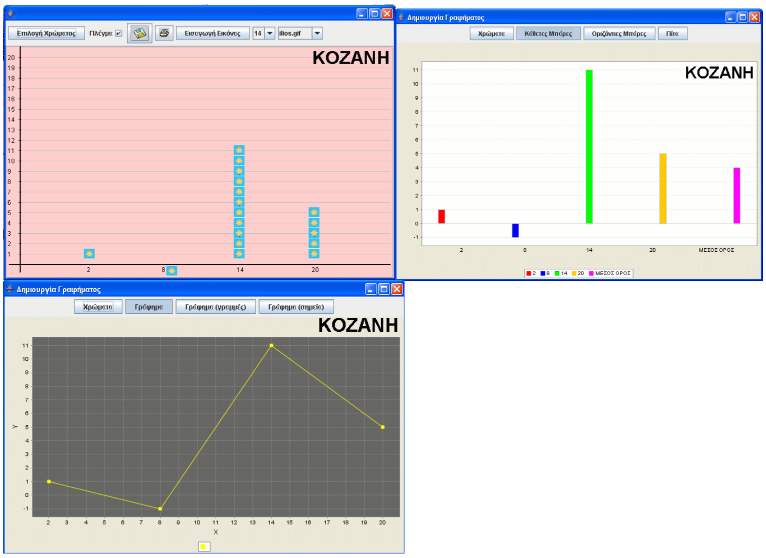
Με την κωδικοποίηση (3Δ), αντί να γράψουμε Α, γράφουμε Χ, αντί του Β γράφουμε Ψ κ.λπ. Για παράδειγμα, η λέξη ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ θα γίνει ΙΧΕΔΙΧΠΖΗΧ
Με ποια κωδικοποίηση η λέξη ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ γίνεται ΠΕΜΛΠΕΨΝΞΕ;
Δημιουργήστε μια δική σας κωδικοποίηση και γράψτε τα ονόματά σας κωδικοποιημένα. Μετά ανταλλάξτε τα ονόματά σας με τα ονόματα κάποιας άλλης ομάδας και προσπαθήστε να βρείτε η μια ομάδα την κωδικοποίηση που χρησιμοποίησε η άλλη.

Θέματα για διερεύνηση και συζήτηση
- Ποιες ανάγκες έκαναν τους ανθρώπους να επινοήσουν την κρυπτογραφία;
- Που νομίζεις ότι χρησιμοποιείται η κρυπτογραφία σήμερα;
- Μπορεί να εφαρμοστεί η κρυπτογραφία στους αριθμούς;

Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα
Στην παρούσα εργασία οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα:
-να συνδέσουν τα μαθηματικά με θέματα που σχετίζονται με τη διαχείριση της κωδικοποίησης των χαρακτήρων στη γλώσσα
-να χρησιμοποιήσουν τα μαθηματικά για να μοντελοποιήσουν καταστάσεις του πραγματικού κόσμου.

ΣΥΝΘΕΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ 3 (Γ΄ - Δ΄Δημοτικού)
«Θερμοκρασίες πόλεων της χώρας μας»

Μελετήστε τις τοπικές κλιματολογικές διαφορές μεταξύ διαφορετικών πόλεων της χώρας μας αφού αναζητήσετε πληροφορίες σε σχετικούς με τον καιρό δικτυακούς τόπους. Επεξεργαστείτε τα δεδομένα, απεικονίστε τα σε διαγράμματα και διατυπώστε τα συμπεράσματα σας.



Ενδεικτικές φάσεις εφαρμογής

1η φάση: Οι μαθητές σχηματίζουν ομάδες των τριών ή τεσσάρων. Η κάθε ομάδα ασχολείται με μία πόλη, την οποία έχουν προαποφασίσει όλες οι ομάδες μαζί και βρίσκεται σε διαφορετικό γεωγραφικό διαμέρισμα. Στη συνέχεια αναζητούν πληροφορίες σε σχετικές ιστοσελίδες και καταγράφουν σε φύλλο εργασίας τις θερμοκρασίες μιας ημέρας της πόλης που επέλεξαν.

2η φάση: Εισέρχονται στο περιβάλλον του Εκπαιδευτικού Λογισμικού των Μαθηματικών της Γ΄ και Δ΄ τάξης, του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου και στον μικρόκοσμο «Στατιστική», εισάγουν τα δεδομένα και τα παρουσιάζουν σε γραφήματα. Κάθε ομάδα αυτόνομα επιλέγει τον τύπο του γραφήματος που επιθυμεί για να παρουσιάσει τις θερμοκρασίες της πόλης που επέλεξε και αιτιολογεί την απόφασή της αυτή.

3η φάση: Στη συνέχεια όλες οι ομάδες μαζί υπολογίζουν και συγκρίνουν το Μέσο Όρο των θερμοκρασιών των πόλεων, συζητούν την επίδραση της θερμοκρασίας στις συνήθειες των κατοίκων, του τρόπου ζωής τους και κατανοούν τα καθημερινά πρακτικά τους προβλήματα.

4η φάση: Προτείνεται το σχεδίου εργασίας αυτό να επεκταθεί σε θερμοκρασίες πόλεων άλλων ευρωπαϊκών πόλεων ή χωρών και σε διαφορετικά σημεία του πλανήτη, να εξαχθούν συμπεράσματα και να γίνουν συγκρίσεις για τον καιρό και το κλίμα σε άλλες περιοχές της γης την ίδια στιγμή.

Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Μαθηματικά

Το σενάριο φιλοδοξεί στη βελτίωση και την απόκτηση θετικής στάσης των μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά και στη διαδικασία προσέγγισής τους με την εμπλοκή των μαθητών σε ενδιαφέρουσες και ελκυστικές δραστηριότητες.

Με το διαδίκτυο οι μαθητές έχουν άμεση και γρήγορη πρόσβαση σε πληροφορίες για τις θερμοκρασίες των πόλεων που αναζητούν. Επιπλέον, μπορούν να επισκεφτούν πολλές και διαφορετικές ιστοσελίδες και να επιλέξουνε εκείνη που θεωρούνε πιο έγκυρη και ευκολόχρηστη.

Το εκπαιδευτικό λογισμικό, μικρόκοσμος «Στατιστική», δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να οργανώσουν και να καταγράψουν τις πληροφορίες σε πίνακα και κατόπιν να δούνε την αναπαράστασή τους σε διαφορετικούς τύπους γραφημάτων και να βρούνε πολύ εύκολα το Μέσο Όρο των θερμοκρασιών μιας πόλης. Ακόμη, δίνει τη δυνατότητα διαφορετικής αναπαράστασης της ίδιας πληροφορίας. Επιπρόσθετα, η ταχύτητα της επεξεργασίας των δεδομένων και η παρουσίασή τους με γραφήματα δίνει τη χρονική άνεση για επέκταση της συζήτησης, ερμηνείας και ανάλυσης των γραφημάτων, όπως επίσης και τη συσχέτιση του Μέσου Όρου των θερμοκρασιών των πόλεων αυτών με τις συνήθειες των κατοίκων και του τρόπου ζωής τους.

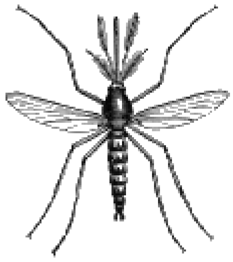
ΣΥΝΘΕΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ 4 (Γ΄ - Δ΄Δημοτικού) «Η συμμετρία στη φύση»

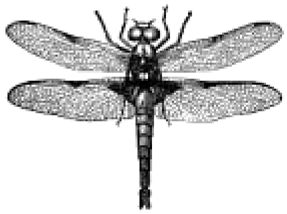
Η συμμετρία βρίσκεται παντού γύρω μας. Κοιτάξτε έξω από το παράθυρο, τα φύλλα, τα κτίρια, κοιτάξτε ακόμα δίπλα σας τους συμμαθητές σας, τα πράγματα της τάξης σας, τα πράγματά σας. Οι άνθρωποι από τα προϊστορικά χρόνια αγαπούσαν οτιδήποτε συμμετρικό. Για παράδειγμα οι βραχογραφίες στα σπήλαια ήταν βασισμένες στη συμμετρία, στη λαϊκή τέχνη όλα σχεδόν τα μοτίβα παρουσιάζουν αξονική συμμετρία.

Με την ομάδα σας θα πρέπει να επιλέξετε μια από τις παρακάτω περιοχές και να συγκεντρώσετε υλικό το οποίο θα παρουσιάσετε στην τάξη σας.

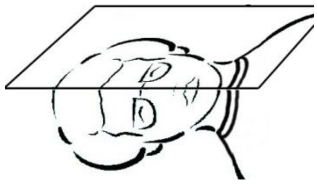
Περιοχές που μπορώ να επιλέξω

α) φύση: σταγόνες, νιφάδες χιονιού, κύματα στο νερό, πλανήτες κ.λπ.
β) φυτά: φύλλα, λουλούδια, καρποί κ.λπ.
γ) ζωικό βασίλειο: ζώα, πουλιά, έντομα, ο ανθρώπινος σκελετός κ.λπ.
δ) αρχιτεκτονικές δημιουργίες
ε) τέχνη
στ) άλλο





Το υλικό που θα παρουσιάσετε θα πρέπει να είναι σε σκίτσο ή φωτογραφία και να διακρίνεται καθαρά ο άξονας ή οι άξονες συμμετρίας. Τους περισσότερους πόντους θα πάρουν οι παρουσιάσεις που είναι πρωτότυπες και δημιουργικές. Για παράδειγμα, η φωτογραφία του σκύλου σας θα βαθμολογηθεί με έναν πόντο, ενώ μια φωτογραφία από το αποτύπωμα του ποδιού του θα βαθμολογηθεί με πολύ περισσότερους πόντους.



Θέματα για διερεύνηση και συζήτηση

- Για ποιο λόγο νομίζεις ότι υπάρχει η συμμετρία στη φύση;
- Το πρόσωπό μας είναι ακριβώς συμμετρικό; Βάζοντας ένα καθρεφτάκι κάθετα επάνω στον άξονα συμμετρίας σε μια φωτογραφία σου. Δοκίμασε να δεις το συμμετρικό του μισού προσώπου σου. Διαφέρει από αυτό που είναι στη φωτογραφία;

Ενδεικτικές φάσεις εφαρμογής

1η φάση: Οι μαθητές αποφασίζουν με την ομάδα τους ποια περιοχή θα επιλέξουν για να διερευνήσουν συμμετρικά μοτίβα. Στη συνέχεια συγκεντρώνουν το υλικό το οποίο επεξεργάζονται ώστε να το παρουσιάσουν στις υπόλοιπες ομάδες.

2η φάση: Οι μαθητές βαθμολογούν κάθε παρουσίαση ανάλογα με την πρωτοτυπία και τη δημιουργική προσέγγιση της ομάδας που το παρουσιάζει. Στη συνέχεια συζητούν για το ρόλο της συμμετρίας στη φύση την αρχιτεκτονική και την τέχνη.

Τέλος, διερευνούν άλλους τρόπους με τους οποίους θα μπορούσαν να παρουσιάσουν το υλικό τους ώστε να προβληθεί η συμμετρία με διαφορετικούς τρόπους.

Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Μαθηματικά

Στην παραδοσιακή τάξη η διδασκαλία των μαθηματικών δεν συνδέεται επαρκώς με την καθημερινότητα και δεν έχει εφαρμογή σε καταστάσεις που σχετίζονται με θέματα του περιβάλλοντος. Στην παρούσα εργασία οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα:

-να συνδέσουν τα μαθηματικά με θέματα που σχετίζονται με τη φύση, τη χλωρίδα και την πανίδα.

-να μελετήσουν, με τη χρήση των μαθηματικών, καταστάσεις στο φυσικό περιβάλλον και να τις ερμηνεύσουν.

-να χρησιμοποιήσουν τα μαθηματικά για να μοντελοποιήσουν καταστάσεις του πραγματικού κόσμου.

Περιβάλλον

Μέσα από τις διαφορετικές απόψεις σχετικά με την ύπαρξη συμμετρίας στο φυσικό, το ανθρωπογενές αλλά και το περιβάλλον της τέχνης, οι μαθητές μπορούν:

- να διακρίνουν τα πλεονεκτήματα της συμμετρίας ως του οικονομικότερου τρόπου σύνθεσης και κατασκευής τόσο σε επίπεδο οργανισμών όσο και σε αρχιτεκτονικές δημιουργίες ή τεχνουργημάτων.
- να αξιοποιήσουν και να ερμηνεύσουν βιβλιογραφικά δεδομένα και στοιχεία σχετικά με τη φύση, το ανθρωπογενές περιβάλλον και την τέχνη.
- να διατυπώνουν επιχειρήματα και τεκμηριωμένες απόψεις.

ΣΥΝΘΕΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ 5 (Γ΄ - Δ΄ Δημοτικού)
«Προσκλήσεις σε γιορτή»

Ένα μαθητής της Γ΄ τάξης θέλει να προσκαλέσει τους φίλους του στη γιορτή του και αποφάσισε να κατασκευάσει μόνος του τις προσκλήσεις. Για το λόγο αυτό αγόρασε μία χαρτοταινία από το βιβλιοπωλείο. Για κάθε μία πρόσκληση χρησιμοποίησε τα 3/24 της χαρτοταινίας και στο τέλος δεν περίσσεψε καθόλου χαρτί. Πόσα παιδιά προσκάλεσε στη γιορτή του;

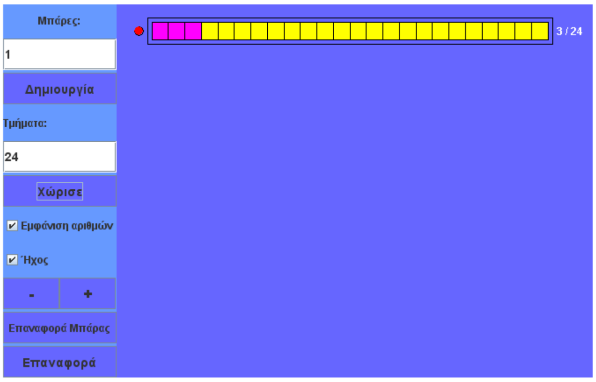
Σε αυτήν την εργασία οι μαθητές καλούνται να υπολογίσουν τον αριθμό των παιδιών που πήραν πρόσκληση αν για την κάθε μία πρόσκληση χρησιμοποιήθηκαν τα 3/24 μιας χαρτοταινίας. Δηλαδή, να βρουν το όλο όταν γνωρίζουν το κάθε ένα μέρος του.

Προτείνεται να αξιοποιήσουν την εφαρμογή «Μπάρες» του Εκπαιδευτικού Λογισμικού του Π.Ι. για τα Μαθηματικά των Γ΄ και Δ΄ τάξεων. Η εφαρμογή βοηθά τους μαθητές να κάνουν πειράματα με το χωρισμό της χαρτοταινίας-μπάρας σε ίσα μέρη ώστε να πάρουν αρχικά το ένα κομμάτι της χαρτοταινίας και να το αντιστοιχίσουν με ένα παιδί και στη συνέχεια να φτάσουν στο όλο.

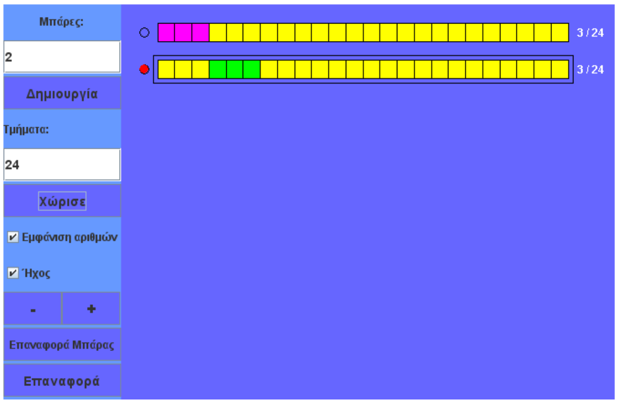
Ενδεικτικά η εξέλιξη της δραστηριότητας

Η δραστηριότητα μπορεί να αναπτυχθεί ως εξής:

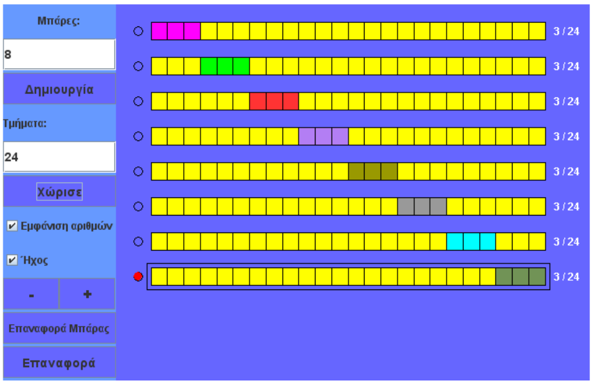
Οι μαθητές ανοίγουν την εφαρμογή «Μπάρες», δημιουργούν μία μπάρα, τη χωρίζουν σε 24 ίσα κομμάτια και επιλέγουν τα 3 από αυτά όπως φαίνεται παρακάτω:



Κατόπιν, δημιουργούν μία δεύτερη μπάρα, τη χωρίζουν κι αυτή σε 24 ίσα κομμάτια και επιλέγουν τα επόμενα 3 κομμάτια στη σειρά:



Συνεχίζουν τη διαδικασία- δημιουργώντας νέες μπάρες και επιλέγοντας κάθε φορά τα τρία επόμενα ίσα κομμάτια της, μέχρι να εξαντληθούν όλα και να διαπιστώσουν ότι η χαρτοταινία επαρκεί για οχτώ προσκλήσεις.



Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Μαθηματικά

Η δραστηριότητα προτείνεται να γίνει διερευνητικά με τη χρήση της εφαρμογής «Μπάρες» και όχι με μια απλή διαίρεση 24:3.

Τα οφέλη που προκύπτουν είναι ότι οι μαθητές διερευνούν και πειραματίζονται ώστε να πάρουν αρχικά τα 3/24 της χαρτοταινίας και να τα αντιστοιχίσουν με το κομμάτι χαρτιού που χρειάζεται για να γίνει μία πρόσκληση. Έτσι, μπορούν να έχουν ταυτόχρονα την οπτική με την αριθμητική αναπαράσταση του κλάσματος και σταδιακά να υπολογίσουν και να συνδέσουν ευκολότερα το μέρος ενός συνόλου με το όλο.

Τέλος, η δραστηριότητα μπορεί να επεκταθεί θέτοντας ο εκπαιδευτικός ερωτήματα της μορφής: «Αν ο μαθητής ήθελε να προσκαλέσει στη γιορτή του διπλάσιους φίλους, τότε τι μέρος της χαρτοταινίας θα έπρεπε να χρησιμοποιήσει για την κάθε μία πρόσκληση;»

ΣΥΝΘΕΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ 6 (Ε΄ - ΣΤ΄Δημοτικού)
«Οικονομική διαχείριση-Κόστος ζωής»

Η διαχείριση των οικονομικών μας δεν είναι απλή υπόθεση. Πολλοί παράγοντες εμπλέκονται και πρέπει να τους υπολογίσουμε όλους για να κρατήσουμε τα έξοδα και τα έσοδα σε ισορροπία. Στον ακόλουθο πίνακα παρουσιάζονται αναλυτικά τα μηνιαία έσοδα και έξοδα (δηλαδή το κόστος ζωής) μιας εργαζόμενης κοπέλας και πρέπει με την ομάδα σας να τα μελετήσετε και να κάνετε τις προτάσεις σας για το πώς νομίζετε ότι θα μπορούσε να διαχειριστεί καλύτερα τα οικονομικά της.

Μαρία Κ. Μηνιαία έσοδα (μισθός) 1100 €			
Πάγια έξοδα (σταθερά κάθε μήνα):			
Ενοίκιο	350		
Εξόφληση αυτοκινήτου	252		
Ασφάλεια αυτοκινήτου	35		
Ασφάλεια ζωής	30		
Μεταβαλλόμενα έξοδα:			
Λογαριασμός σταθερού τηλεφώνου και Internet	35		
Λογαριασμός κινητού τηλεφώνου	40		
Λογαριασμός ηλεκτρικού	45		
Λογαριασμός ύδρευσης	15		
Έξοδα για τρόφιμα	120		
Έξοδα για είδη καθαριότητας και είδη σπιτιού	70		
Έξοδα για βενζίνη	80		
Έξοδα για διασκέδαση	100		
Άλλες μηνιαίες οικονομικές υποχρεώσεις			
Πιστωτική κάρτα (οφείλει 1500 €)	45		
ΣΥΝΟΛΟ ΕΞΟΔΩΝ			

- Βρίσκονται σε ισορροπία τα έξοδα με τα έσοδα της Μαρίας;
- Αν χρειαστεί να πληρώσει για κάποια ζημία ένα χρηματικό ποσό, από που νομίζεις πως μπορεί να πάρει χρήματα;

Στη δεύτερη στήλη γράψτε τις αλλαγές που προτείνει το κάθε μέλος της ομάδας προτείνει σε κάθε ποσό και στην τρίτη στήλη γράψτε τις αλλαγές που η ομάδα σας συμφώνησε να προτείνει.

- Πόσα ευρώ συνολική διαφορά έχει η δική σας πρόταση από της Μαρίας;
- Πόσα ευρώ συνολική διαφορά έχει η δική σας πρόταση από την πρόταση της ομάδας σας;
- Ποιες είναι οι κατηγορίες στις οποίες, ως ομάδα, προτείνετε να ξοδεύει λιγότερα χρήματα;
- Μπορείτε να σκεφτείτε άλλους τρόπους να φέρει η Μαρία σε ισορροπία τα έξοδα με τα έσοδά της;

Θέματα για διερεύνηση και συζήτηση

- Συζητήστε για το κόστος ζωής σε διαφορετικές περιοχές της Ελλάδας.
- Συζητήστε για αστάθμητους παράγοντες στο κόστος ζωής (ζημιές, ασθένειες κ.λπ.).
- Προσδιορίστε κάποια «περιττά έξοδα» που συνήθως κάνουμε στη ζωή μας.

Ενδεικτικές φάσεις εφαρμογής

1η φάση: Οι μαθητές μελετούν τα δεδομένα του πίνακα, υπολογίζουν τη διαφορά εξόδων εσόδων και προσπαθούν να εντοπίσουν τις δαπάνες οι οποίες μπορούν να μειωθούν ώστε να ισοσκελιστούν τα έξοδα με τα έσοδα.

Για παράδειγμα, διερευνούν ποιές από τις δαπάνες είναι οι «απολύτως απαραίτητες» για να εξασφαλιστεί το απαραίτητο επίπεδο καλής διαβίωσης.

2η φάση: Οι μαθητές κάθε ομάδας παρουσιάζουν και τεκμηριώνουν τις προτάσεις τους, συγκρίνουν και αποφασίζουν ποια είναι η πιο ρεαλιστική και εφαρμόσιμη από όλες τις προτάσεις των ομάδων.

Τέλος, διερευνούν άλλους παράγοντες που υπεισέρχονται στο κόστος ζωής, όπως η γεωγραφική περιοχή, η τοπική κοινωνία, οι οικονομικές ιδιαιτερότητες της εποχής κ.λπ.

Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Μαθηματικά

Στην παραδοσιακή τάξη η διδασκαλία των μαθηματικών δεν συνδέεται με δραστηριότητες της καθημερινής ζωής κι έτσι οι μαθητές έχουν περιορισμένες δυνατότητες εμπλοκής τους σε διαδικασίες επέκτασης και διερεύνησης της χρηστικότητάς τους. Στην παρούσα εργασία οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα:

-να συνδέσουν τα μαθηματικά με καταστάσεις οικονομικής διαχείρισης,

-να πειραματιστούν με τις αλλαγές του ύψους των εξόδων και των εσόδων και να διερευνήσουν τις προϋποθέσεις μιας ορθολογιστικής οικονομικής διαχείρισης,

-να χρησιμοποιήσουν τα μαθηματικά για να μοντελοποιήσουν καταστάσεις του πραγματικού κόσμου.

Λήψη αποφάσεων σε πρακτικά προβλήματα

Με την αντιπαράθεση απόψεων σχετικά με την οικονομική διαχείριση, οι μαθητές μπορούν:

-να διακρίνουν τα πλεονεκτήματα της συνετής οικονομικής διαχείρισης.

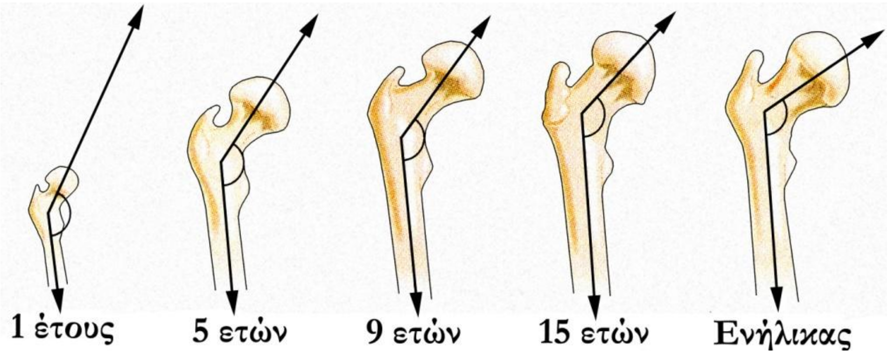
-να αξιοποιήσουν και να ερμηνεύσουν δεδομένα και στοιχεία σχετικά με την οικονομική διαχείριση ενός νοικοκυριού και το κόστος ζωής σε μια περιοχή ή χώρα.

-να διατυπώνουν επιχειρήματα και τεκμηριωμένες απόψεις.

ΣΥΝΘΕΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ 7 (Ε΄ - ΣΤ΄Δημοτικού)
«Γωνίες και ηλικία»

Το πιο δυνατό κόκαλο του ανθρώπινου σώματος είναι το κόκαλο του μηρού που συνδέει τη λεκάνη με το γόνατο. Το άκρο του, που συνδέεται με τη λεκάνη, σχηματίζει γωνία με το υπόλοιπο όπως φαίνεται στην εικόνα.

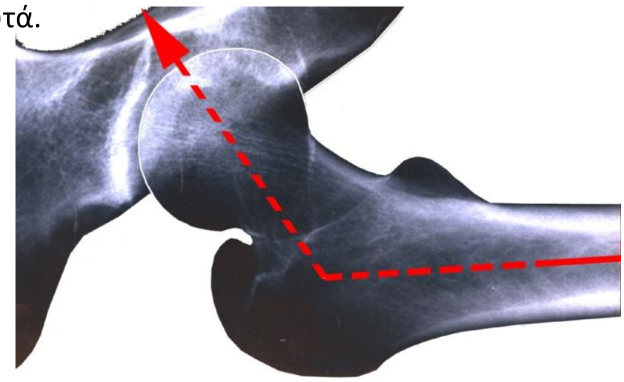
Η γωνία αυτή, σύμφωνα με τους ανθρωπολόγους, αλλάζει ανάλογα με την ηλικία του ανθρώπου, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Μοίρες: 150^o ....

Στις πρόσφατες ανασκαφές βρέθηκαν δύο κόκαλα μηρού που το ένα σχημάτιζε γωνία 135^o και το άλλο γωνία 120^o . Δοκίμασε με την ομάδα σου, να υπολογίσεις τι ηλικία είχαν τα άτομα στα οποία ανήκαν τα οστά αυτά.

Στη διπλανή εικόνα φαίνεται η ακτινογραφία από ένα κόκαλο μηρού. Τι μπορείτε να συμπεράνετε για την ηλικία του ατόμου που έκανε την ακτινογραφία;



Θέματα για διερεύνηση και συζήτηση

- Βρείτε και εξετάστε στον ανθρώπινο σκελετό άλλες γωνίες που υπάρχουν.
- Μετρήστε τη γωνία που μπορεί να διαγράψει η κνήμη, ο βραχίονας και ο καρπός σας.
- Δοκιμάστε κρατώντας δύο μολύβια να «μεταφέρετε» σε χαρτί και να μετρήσετε γωνίες από αντικείμενα που βρίσκονται μακριά.

Ενδεικτικές φάσεις εφαρμογής

1η φάση: Οι μαθητές μελετούν τα δεδομένα του σκίτσου, μετρούν με το μοιρογνωμόνιο τις μοίρες και συμπληρώνουν τη γωνία σε κάθε οστό στις διάφορες ηλικίες. Στη συνέχεια συγκρίνουν τις μετρήσεις τους με τις μετρήσεις των υπόλοιπων ομάδων και συμφωνούν στις μετρήσεις που είναι αποδεκτές από τις περισσότερες ομάδες.

2η φάση: Οι μαθητές κάθε ομάδας μετρούν το οστό της ακτινογραφίας, αποφασίζουν για την ηλικία του ατόμου στο οποίο ανήκε, παρουσιάζουν και τεκμηριώνουν τις προτάσεις τους, συγκρίνουν και αποφασίζουν ποια είναι η πιο ρεαλιστική και εφαρμόσιμη από όλες τις προτάσεις των ομάδων.

Τέλος, διερευνούν άλλες γωνίες που υπάρχουν στον ανθρώπινο σκελετό και μετρούν τη γωνία που μπορεί να διαγράψει η κνήμη, ο βραχίονας και ο καρπός τους.

Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Μαθηματικά

Στην παραδοσιακή τάξη η διδασκαλία των γωνιών δεν συνδέεται με τη φύση ή το ανθρώπινο σώμα κι έτσι οι μαθητές έχουν περιορισμένες δυνατότητες εμπλοκής τους σε διαδικασίες επέκτασης και διερεύνησης των διαφορετικών γωνιών και της χρήσης τους. Στην παρούσα εργασία οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα:

-να συνδέσουν τα μαθηματικά με σχήματα και κινήσεις του σώματός τους.

-να πειραματιστούν με τις κινήσεις διαφόρων μελών του σώματος και να αντιληφθούν τους λόγους για τους οποίους κάποια μέλη μπορούν να διαγράψουν μεγαλύτερες γωνίες κατά την κίνησή τους.

-να χρησιμοποιήσουν τα μαθηματικά για να μοντελοποιήσουν καταστάσεις του πραγματικού κόσμου.

Φυσικές επιστήμες

Με την αντιπαράθεση απόψεων οι μαθητές μπορούν:

-να διακρίνουν τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά του ανθρώπινου σκελετού.

-να αξιοποιήσουν και να ερμηνεύσουν δεδομένα και στοιχεία σχετικά με την κίνηση διαφόρων μελών του ανθρώπινου σώματος ως εργαλείου προσαρμογής του ανθρώπου στο φυσικό περιβάλλον.

-να διατυπώνουν επιχειρήματα και τεκμηριωμένες απόψεις.

ΣΥΝΘΕΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ 8 (Ε΄ - ΣΤ΄Δημοτικού)
«Συνθήκες φωτισμού στο χώρο»

Έχει υπολογιστεί από μετρήσεις που έγιναν σε σχολικούς χώρους ότι σε χώρες όπως η δική μας, για να υπάρχουν καλές συνθήκες φωτισμού σε ορθογώνια σχολική τάξη, θα πρέπει το 10% του συνόλου των τοίχων να αποτελείται από γυάλινη επιφάνεια, ώστε η ποσότητα του φωτός που θα μπαίνει στο εσωτερικό να είναι αρκετή για εργασία χωρίς τεχνητό φωτισμό για το μεγαλύτερο διάστημα της ημέρας.
Υπολόγισε αν ισχύει αυτό στη δική σου τάξη (υπολόγισε μόνο τις γυάλινες επιφάνειες, όχι το «σκελετό» κάθε παραθύρου).

Σημείωση: Το μέγεθος της γυάλινης επιφάνειας το οποίο βρήκες, αν ο προσανατολισμός των παραθύρων είναι νότιος μπορεί να είναι 10% μικρότερο από το αναμενόμενο, ενώ, αν ο προσανατολισμός των παραθύρων είναι βορινός πρέπει να είναι 10% μεγαλύτερο.

Θέματα για διερεύνηση και συζήτηση

- Για ποιο λόγο νομίζεις ότι διαφέρει ο νότιος από τον βορινό προσανατολισμό;
- Ποιοι άλλοι παράγοντες σχετίζονται με τις καλές συνθήκες φωτισμού σε μια τάξη;

Ενδεικτικές φάσεις εφαρμογής
1η φάση: Οι μαθητές μετρούν και καταγράφουν τα αποτελέσματα των μετρήσεών τους. Στη συνέχεια υπολογίζουν τη συνολική επιφάνεια, συγκρίνουν τις μετρήσεις τους με τις μετρήσεις των υπόλοιπων και συμφωνούν στις μετρήσεις που είναι κοινά αποδεκτές.
2η φάση: Οι μαθητές κάθε ομάδας εξετάζουν τον προσανατολισμό των παραθύρων, αποφασίζουν αν η επιφάνεια των παραθύρων είναι αρκετή για την εξασφάλιση καλού φωτισμού και παρουσιάζουν τα ευρήματά τους, συγκρίνοντάς τα με εκείνα των υπολοίπων.
Τέλος, διερευνούν άλλους παράγοντες που σχετίζονται με τις καλές συνθήκες φωτισμού σε μια τάξη.

Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα
Μαθηματικά
Στην παραδοσιακή τάξη η διδασκαλία των μαθηματικών δεν συνδέεται επαρκώς με την καθημερινότητα και δεν έχει εφαρμογή σε καταστάσεις που σχετίζονται με το άμεσο περιβάλλον στο οποίο ζει ο μαθητής. Στην παρούσα εργασία οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα:
-να συνδέσουν τα μαθηματικά με θέματα που σχετίζονται με παραμέτρους του κτισμένου περιβάλλοντος στο οποίο ζουν.
-να εκφράσουν με τη χρήση των μαθηματικών καταστάσεις του φυσικού κόσμου (φωτισμός) και να τις ερμηνεύσουν.
-να χρησιμοποιήσουν τα μαθηματικά για να μοντελοποιήσουν καταστάσεις του πραγματικού κόσμου.

Φυσικές επιστήμες

Με την διερεύνηση των παραμέτρων του φυσικού φωτισμού από τον ήλιο, οι μαθητές μπορούν:

-να διακρίνουν τα χαρακτηριστικά του επαρκούς φωτισμού.

-να αξιοποιήσουν και να ερμηνεύσουν δεδομένα και στοιχεία σχετικά με την επάρκεια ή μη του φυσικού φωτισμού στο χώρο εργασίας τους.

-να διατυπώνουν επιχειρήματα και τεκμηριωμένες απόψεις.

ΣΥΝΘΕΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ 9 (Ε΄ - ΣΤ΄Δημοτικού)
«Κύκλος και ψάρεμα»

Ένας από τους παραδοσιακούς τρόπους ψαρέματος σε ποτάμια αλλά και σε λίμνες της Ελλάδας που πλέον έχει απαγορευθεί και εκλείψει ήταν με το «ριχτάρι» ή «λιχτάρι».
Με τη μέθοδο αυτή ο ψαράς πετούσε ένα κυκλικό δίχτυ με τέτοια τεχνική που αυτό πριν πέσει στο νερό, άνοιγε σαν ομπρέλα.
Το δίχτυ είχε περιμετρικά πολλά μολυβένια βαρίδια που το βοηθούσαν να βουλιάζει ταχύτατα εγκλωβίζοντας τα ψάρια που βρίσκονταν από κάτω του.
Ο ψαράς μάζευε στη συνέχεια το δίχτυ τραβώντας ένα σχοινί που ήταν δεμένο στο κέντρο του κύκλου.
Το δίχτυ μαζεύονταν προς το κέντρο, ενώ παράλληλα έρχονταν προς το μέρος του και τα ψάρια που δεν μπορούσαν να φύγουν λόγω των βαριδιών παρέμεναν στο δίχτυ.
Ένα συνηθισμένο τέτοιο λιχτάρι είχε ακτίνα 5 μέτρα και ζύγιζε μέχρι 20 κιλά.

- Να βρεθεί η επιφάνεια του ποταμού που καλύπτει ένα πέταγμα του λιχταριού.
- Αν υπολογίσουμε ότι ο ψαράς ρίχνει το δίχτυ του κάθε 6 λεπτά, πόση περιοχή του ποταμού έχει «σαρώσει» με το δίχτυ σε 2 ώρες;
- Αν για κάθε τετραγωνικό μέτρο χρειάζονται 200 μέτρα νήμα να υπολογίσετε το συνολικό μήκος του νήματος που απαιτείται για ολόκληρο το δίχτυ.

Θέματα για έρευνα και συζήτηση
- Τραβώντας το δίχτυ, αυτό σέρνεται στον πυθμένα του ποταμού. Επηρεάζει αυτή η κίνηση τους υπόλοιπους οργανισμούς που ζουν στο οικοσύστημα του ποταμού;
- Στο επαγγελματικό ψάρεμα τα μεγάλα αλιευτικά πλοία έχουν στόλο από μικρότερα καραβάκια που κυκλώνουν ολόκληρες περιοχές των ωκεανών σε ακτίνα 2 μιλίων (1 ν.μίλι = 1809 μέτρα). Ποια είναι η έκταση της περιοχής στην οποία ψαρεύουν;
- Η βιομηχανοποίηση της αλιείας εξαφάνισε τα ψάρια από τη θάλασσα. Πώς έγινε αυτό;

Ενδεικτικές φάσεις εφαρμογής
1η φάση: Οι μαθητές υπολογίζουν την επιφάνεια που καλύπτει το δίχτυ όταν πέφτει στον ποταμό ανοιχτό. Στη συνέχεια υπολογίζουν τη συνολική επιφάνεια που θα καλύψει σε 2 ώρες, συγκρίνουν τα αποτελέσματά τους με τα αποτελέσματα των υπόλοιπων ομάδων και συμφωνούν στις μετρήσεις που είναι κοινά αποδεκτές.
2η φάση: Οι μαθητές κάθε ομάδας συζητούν την επίδραση των ενεργειών αυτού του τρόπου ψαρέματος στο οικοσύστημα του ποταμού και υπολογίζουν αντίστοιχα

την περιοχή αλίευσης των αλιευτικών στολίσκων και την επίδραση της βιομηχανοποιημένης αλιείας στο φυσικό περιβάλλον.
Τέλος, διερευνούν άλλους τρόπους με τους οποίους θα μπορούσαν να καλυφθούν οι ανάγκες διατροφής με αλιεύματα.

Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα
Μαθηματικά
Στην παραδοσιακή τάξη η διδασκαλία των μαθηματικών δεν συνδέεται επαρκώς με την καθημερινότητα και δεν έχει εφαρμογή σε καταστάσεις που σχετίζονται με παραδοσιακά επαγγέλματα. Στην παρούσα εργασία οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα:
-να συνδέσουν τα μαθηματικά με θέματα που σχετίζονται με το επάγγελμα του ψαρά και την επίδραση του στο μικροπεριβάλλον του ποταμού ή της λίμνης.
-να εκφράσουν με τη χρήση των μαθηματικών καταστάσεις επίδρασης του ανθρώπου στο φυσικό περιβάλλον και να τις ερμηνεύσουν.
-να χρησιμοποιήσουν τα μαθηματικά για να μοντελοποιήσουν καταστάσεις του πραγματικού κόσμου.

Περιβάλλον και Εκπαίδευση για την Αειφόρο Ανάπτυξη
Μέσα από τις διαφορετικές απόψεις σχετικά με την επίδραση στο περιβάλλον των παραδοσιακών μορφών αλιείας αλλά και τη βιομηχανοποίηση της, οι μαθητές μπορούν:
- να διακρίνουν τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα της λελογισμένης χρήσης των πλουτοπαραγωγικών πηγών στο τοπικό περιβάλλον και την αειφόρο ανάπτυξη μίας περιοχής.
- να αξιοποιήσουν και να ερμηνεύσουν βιβλιογραφικά δεδομένα και στοιχεία σχετικά με την αλιεία και τις ιχθυοκαλλιέργειες.
- να διατυπώνουν επιχειρήματα και τεκμηριωμένες απόψεις.

ΣΥΝΘΕΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ 10 (Ε΄ - ΣΤ΄Δημοτικού)
«Στα μονοπάτια των Θεών του Ολύμπου»

Βοηθητικό υλικό

- Χάρτες: Όλυμπος (ή άλλο βουνό της περιοχής του σχολείου).
- Τεχνολογία: Λογισμικό Google Earth για το σχεδιασμό της πορείας τη μέτρηση αποστάσεων, την εύρεση των γεωγραφικών συντεταγμένων, του υψομέτρου, την εικονική διαδρομή κ.λπ.

Με την ομάδα σας σχεδιάζετε ένα Σαββατοκύριακο πεζοπορίας στον Όλυμπο. Αναζητήστε πληροφορίες ώστε να υπολογίσετε τι εξοπλισμό θα χρειαστεί να έχετε μαζί σας (ποια υλικά σας είναι απαραίτητα και μπορείτε να μεταφέρετε;)

- Ποιες θα είναι οι καιρικές συνθήκες στο βουνό; Διαφέρουν από τις συνθήκες της πόλης σας; (Γεωγραφία)
- Αν χρειαστεί να μείνετε το βράδυ στο καταφύγιο θα χρειαστείτε κάτι επιπλέον;
- Πως θα επικοινωνήσετε με άλλες ομάδες στη διάρκεια της διαδρομής; Σε πιθανή κατάσταση ανάγκης;
- Υπολογίστε το κόστος των προμηθειών και της μεταφοράς προς και από τον Όλυμπο. (Μαθηματικά)
- Τι θα μπορούσατε να μελετήσετε στη φύση του βουνού; (Μελέτη περιβάλλοντος μελέτη των φυτών και των ζώων)
- Πως θα μπορούσατε να απεικονίσετε μια τέτοια εμπειρίας ώστε να παρακινήσετε και άλλους να τη δοκιμάσουν (εικαστικά);

Θέματα για έρευνα και συζήτηση

Σκεφτείτε την ομάδα σας ως πρωτοπόρους εξερευνητές σε διαφορετικές περιοχές του κόσμου (έρημοι, τροπικά δάση, πόλοι, ωκεανοί) ποιες διαφορετικές ανάγκες προκύπτουν σε κάθε περίπτωση;
Δημιουργήσετε μια εκδοχή της διαδρομής στον Όλυμπο, στην οποία συμβαίνει μια δύσκολη κατάσταση (κακοκαιρία, φωτιά, ατύχημα) και καταγράψτε τρόπους που θα μπορούσατε να προσφέρετε ή να λάβετε βοήθεια από άλλους.

Ενδεικτικές φάσεις εφαρμογής

1η φάση: Οι μαθητές σχεδιάζουν την πορεία που θα ακολουθήσουν στο βουνό υπολογίζοντας μέσω του λογισμικού τις διαδρομές το υψόμετρο τις αποστάσεις και το χρόνο που θα χρειαστεί. Στη συνέχεια συγκρίνουν τα αποτελέσματά τους με τα αποτελέσματα των υπόλοιπων ομάδων και συμφωνούν στις μετρήσεις που είναι κοινά αποδεκτές.

2η φάση: Οι μαθητές κάθε ομάδας συζητούν για τον απαραίτητο εξοπλισμό που θα χρειαστεί και υπολογίζουν το κόστος την αναγκαιότητα αλλά και τη δυνατότητα μεταφοράς του από τα μέλη της ομάδας.
Τέλος, διερευνούν τρόπους δράσης, λήψης και παροχής βοήθειας σε δύσκολες καταστάσεις στη διαδρομή που έχουν σχεδιάσει.

Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα
Μαθηματικά
Στην παρούσα εργασία οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα:
-να συνδέσουν τα μαθηματικά με θέματα που σχετίζονται με το σχεδιασμό μιας δραστηριότητας στη φύση.
-να αποφασίσουν, χρησιμοποιώντας τα μαθηματικά, για τα υλικά που θα χρειαστούν το κόστος, το βάρος τους πιθανούς τρόπους διαχείρισης κ.λπ.
-να χρησιμοποιήσουν τα μαθηματικά για να μοντελοποιήσουν καταστάσεις του πραγματικού κόσμου.

Περιβάλλον και Εκπαίδευση για την Αειφόρο Ανάπτυξη
Μέσα από τις διαφορετικές απόψεις σχετικά με την επίδραση των ανθρώπινων ενεργειών στο περιβάλλον, οι μαθητές μπορούν:
- να διακρίνουν τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα της αρμονικής συνύπαρξης του ανθρώπου με το φυσικό περιβάλλον και την αειφόρο ανάπτυξη μίας περιοχής.
- να αξιοποιήσουν και να ερμηνεύσουν βιβλιογραφικά δεδομένα και στοιχεία σχετικά με τον εναλλακτικό τουρισμό και τα πλεονεκτήματα που προσφέρει τόσο για τον άνθρωπο όσο και για τη φύση.
- να διατυπώνουν επιχειρήματα και τεκμηριωμένες απόψεις.

ΣΥΝΘΕΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ 11 (Ε΄ - ΣΤ΄Δημοτικού) «Οι μαθητές σχεδιάζουν κύκλους στην αυλή του σχολείου για τις χορευτικές τους εκδηλώσεις»

Στο πλαίσιο της κατασκευής κύκλων στην αυλή του σχολείου για τις χορευτικές τους εκδηλώσεις μελετήστε τις έννοιες ακτίνα, διάμετρο, μήκος κύκλου, εμβαδό κυκλικού δίσκου και τη σχέση μεταξύ ακτίνας και διαμέτρου, μήκους κύκλου και διαμέτρου, ακτίνας και εμβαδού κυκλικού δίσκου. Κάντε αρχικά την προσέγγιση σε χειριστικό επίπεδο, κατόπιν με δυναμικούς μετασχηματισμούς αξιοποιώντας το ψηφιακό εργαλείο GeoGebra και το υπολογιστικό περιβάλλον Χελωνόκοσμος που συνδυάζει εργαλεία συμβολικής έκφρασης και δυναμικού χειρισμού γεωμετρικών αντικειμένων.



Ενδεικτικές φάσεις εφαρμογής

$1^{η}$ φάση: Οι μαθητές εμπλέκονται με τη βοήθεια του/της εκπαιδευτικού σε βιωματικές δραστηριότητες στην αυλή του σχολείου τους για να σχεδιάσουν κύκλους διαφορετικών ακτίνων. Στη συνέχεια καταγράφουν, σε φύλλο εργασίας που έχει έτοιμο ο/η εκπαιδευτικός, τις τιμές που προκύπτουν από τις μετρήσεις που κάνουν για την ακτίνα, τη διάμετρο και το μήκος του κύκλου και κάνουν εικασίες για τη σχέση μεταξύ ακτίνας και διαμέτρου, μήκους κύκλου και διαμέτρου.

$2^{η}$ φάση: Οι μαθητές επανέρχονται στην αίθουσα διδασκαλίας, χρησιμοποιούν το λογισμικό GeoGebra και αξιοποιούν τα δυναμικά του χαρακτηριστικά στο σχεδιασμό κύκλων και στην αυτόματη καταγραφή των τιμών και των υπολογισμών που κάνει. Με τη βοήθεια του εκπαιδευτικού εξάγουν συμπεράσματα και διατυπώνουν τη σχέση που υπάρχει μεταξύ ακτίνας και διαμέτρου, μήκους κύκλου και διαμέτρου, διατυπώνουν τον κανόνα και σχηματίζουν τον τύπο. (Στην Στ΄ δημοτικού μπορεί η δραστηριότητα να επεκταθεί και στο εμβαδό του κυκλικού δίσκου και τη σχέση που έχει με την ακτίνα του κύκλου).

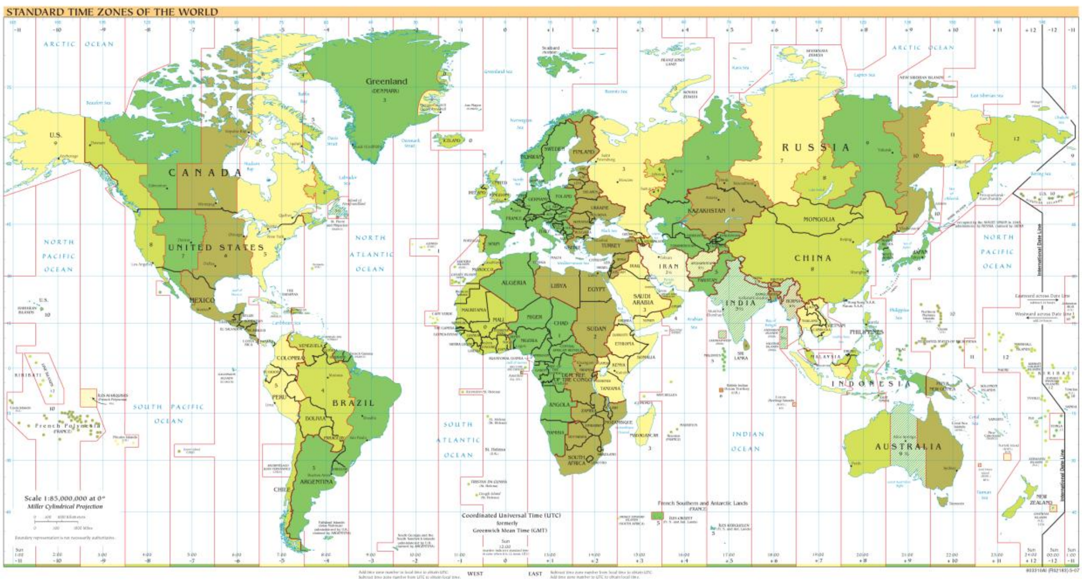
$3^{η}$ φάση: Οι μαθητές εφαρμόζουν τη γνώση που απέκτησαν στο χελωνόκοσμο. Αρχικά σχεδιάζουν πολύγωνα και σταδιακά φτάνουν στην κατασκευή κυκλικού δίσκου ως πολυγώνου με πολύ μικρή πλευρά.

4η φάση: Προτείνεται επέκταση του σχεδίου εργασίας και εφαρμογή των γνώσεων σε ζητήματα της καθημερινότητας ή της επικαιρότητας (π.χ. η μόλυνση μιας θαλάσσιας περιοχής από πετρελαιοκηλίδα και η απόσταση που έγινε αισθητή μια σεισμική δόνηση).

Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα
Η εργασία φιλοδοξεί στη βελτίωση και απόκτηση θετικής στάσης των μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά και στη διαδικασία προσέγγισής τους με την εμπλοκή των μαθητών/τριών σε βιωματικές δραστηριότητες.
Οι μαθητές θα διαπραγματευτούν και θα διερευνήσουν τη σχέση μεταξύ ακτίνας και διαμέτρου, μήκους κύκλου και διαμέτρου, ακτίνας και εμβαδού κυκλικού δίσκου με τη βοήθεια του εκπαιδευτικού ώστε η αίθουσα διδασκαλίας να μετατραπεί σε εργαστήριο μαθηματικών δραστηριοτήτων.
Η αξιοποίηση του λογισμικού GeoGebra με την αυτόματη καταγραφή των τιμών της διαμέτρου, του μήκους κύκλου, του αριθμού π και του εμβαδού του κυκλικού δίσκου όταν οι μαθητές θα εφαρμόζουν τους μετασχηματισμούς (αυξομείωση των κύκλων) θα βοηθήσει στην εξαγωγή συμπερασμάτων, γενικεύσεων και κανόνων.
Με το χελωνόκοσμο θα εφαρμόσουν, θα επεκτείνουν τη νέα γνώση, θα εμβαθύνουν σε αυτή και θα μπορούν να διατυπώνουν συμπεράσματα σε μαθηματική γλώσσα.

ΣΥΝΘΕΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ 12 (Ε΄ - ΣΤ΄Δημοτικού)
«Λονδίνο 2012»

Μελετήστε τις αλλαγές ώρας ανάμεσα στις ζώνες ώρας που είναι χωρισμένος ο πλανήτης. Μια παρέα τεσσάρων φίλων από τέσσερις διαφορετικές περιοχές του πλανήτη, οι οποίοι επικοινωνούν με τη χρήση του διαδικτύου θέλουν να παρακολουθήσουν ζωντανά τους Ολυμπιακούς Αγώνες του 2012 στο Λονδίνο.



http://www.watchtime.net/magazine-de/wp-content/uploads/2008/11/zeitzonen_weltkarte_cia_2007.png

Στο χάρτη φαίνονται οι παγκόσμιες ζώνες ώρας. Οι ζώνες ώρας είναι περιοχές της Γης που έχουν θεσμοθετήσει την ίδια ώρα που αναφέρεται και ως τοπική ώρα. Το Greenwich που βρίσκεται στο Λονδίνο είναι το σημείο αναφοράς ή το σημείο 0 για τις ζώνες ώρας ολόκληρου του πλανήτη. Η ζώνη ώρας του Greenwich αναφέρεται ως UTC (Coordinated Universal Time) και όλες οι ζώνες ώρες καθορίζονται σε σχέση με αυτήν. Οι θετικοί και αρνητικοί αριθμοί στο χάρτη φανερώνουν τη διαφορά της κάθε ζώνης ώρας από την ζώνη ώρας του Greenwich. Το Λονδίνο και η Αγγλία βρίσκονται στην ζώνης ώρας του Greenwich.

Η Οργανωτική Επιτροπή της διοργάνωσης των Ολυμπιακών Αγώνων του Λονδίνου ανακοίνωσε ότι η Τελετή Έναρξης θα διεξαχθεί την Παρασκευή 27 Ιουλίου 2012 στις 19:30 τοπική ώρα. Η τελετή έναρξης θα αναμεταδοθεί ζωντανά σε όλες σχεδόν τις χώρες του κόσμου.
Συμβουλευτείτε το χάρτη με τις παγκόσμιες ζώνες ώρας και έναν παγκόσμιο χάρτη για να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα:

1. Τέσσερα παιδιά που ζουν σε τέσσερις διαφορετικές περιοχές του πλανήτη έχουν γίνει φίλοι μέσω μιας on-line μαθητικής κοινότητας και έχουν εκφράσει την επιθυμία να παρακολουθήσουν αυτό το μεγάλο αθλητικό γεγονός. Ο Γιώργος ζει στην Πάτρα, ο Κων στο Πεκίνο, η Λένια στην Καλιφόρνια και ο Νίκολας στην Νέα Ζηλανδία. Τι ώρα θα πρέπει να συντονιστεί ο καθένας έτσι ώστε να παρακολουθήσουν μαζί, μέσω του διαδικτύου, την τελετή έναρξης; Θα είναι

εύκολο να συντονιστούν και οι τέσσερις φίλοι; Ποια πιθανά προβλήματα θα πρέπει αντιμετωπίσουν;

2. Και στους τέσσερις φίλους αρέσει η κολύμβηση. Αναζητήστε στην επίσημη ιστοσελίδα των Ολυμπιακών Αγώνων του Λονδίνου (http://www.tickets.london2012.com) πληροφορίες σχετικά με την ημερομηνία και ώρα έναρξης των παρακάτω τελικών αγώνων κολύμβησης:
    - 100μ. ελεύθερο ανδρών,
    - 100μ. πεταλούδα γυναικών,
    - 4 × 100 μ. μικτής ανδρών και
    - 4 × 100 μ. μικτής γυναικών.
3. Θα είναι εύκολο να συντονιστούν και οι τέσσερις φίλοι;
4. Πότε θα διεξαχθεί η τελετή λήξης των αγώνων; Θα μπορέσουν να την παρακολουθήσουν μαζί οι τέσσερις φίλοι;

Θέματα για διερεύνηση και συζήτηση

- Ποιες ανάγκες έκαναν τους ανθρώπους να επινοήσουν τις διαφορετικές ζώνες ώρας;
- Πώς συσχετίζονται οι αλλαγές της ώρας στις διάφορες ζώνες με την κίνηση της γης;
- Την τελευταία Κυριακή του Μαρτίου και την τελευταία Κυριακή του Οκτωβρίου διορθώνουμε τα ρολόγια μας κατά μια ώρα; Γιατί συμβαίνει αυτό; Το κάνουν οι άνθρωποι σε όλο τον κόσμο;

Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Στην παρούσα εργασία οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα:
-να συνδέσουν τα μαθηματικά με θέματα που σχετίζονται με τη καθημερινή ζωή
-να χρησιμοποιήσουν τα μαθηματικά για να μοντελοποιήσουν καταστάσεις του πραγματικού κόσμου.

ΣΥΝΘΕΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ 13 (ΣΤ΄ Δημοτικού)
«Το Πράσινο Σχολείο»

Οι μαθητές ενός σχολείου αποφάσισαν να πάρουν μέρος στο διαγωνισμό «Πράσινο σχολείο» που διοργανώνεται στο δήμο τους. Το σχολείο με το καλύτερο σχολικό κήπο θα κερδίσει μια τριήμερη εκδρομή στο **Εθνικό Θαλάσσιο Πάρκο Ζακύνθου** που είναι υπεύθυνο για την προστασία της θαλάσσιας χελώνας Καρέττα Καρέττα.

Στη γενική συνέλευση του σχολείου αποφασίστηκε ότι θα ξεκινήσουν με την διαμόρφωση του κήπου του σχολείου, φτιάχνοντας ένα ξύλινο παρτέρι ύψους 50 εκατοστών το οποίο θα γεμίσουν με ειδικό χώμα εμπλουτισμένο με τα απαραίτητα συστατικά για την ανάπτυξη των φυτών.

Οι μαθητές της Στ΄ τάξης ανέλαβαν το σχεδιασμό του πλαισίου, την οριοθέτησή του στον κήπο του σχολείου και τον υπολογισμό της οικονομικότερης λύσης. Θα πρέπει να δώσουν στους μαθητές της Ε΄ τάξης ακριβείς διαστάσεις του πλαισίου ώστε να αναζητήσουν αυτοί πληροφορίες σχετικά με την προμήθεια του απαραίτητου χώματος με το οποίο θα γεμίσουν το παρτέρι. Οι μαθητές της Δ΄ τάξης ανέλαβαν να αναζητήσουν πληροφορίες σχετικά με την απόσταση που θα πρέπει να έχουν τα φυτά μεταξύ τους, ενώ οι μαθητές της Γ΄ είναι υπεύθυνοι για την προμήθεια των σπόρων των φυτών. Κάθε ομάδα πρέπει να έχει ολοκληρώσει την δουλειά που τους ανατέθηκε μέσα σε δύο μέρες.

Οι μαθητές της Στ΄ τάξης μέτρησαν τον κήπο του σχολείου και βρήκαν ότι έχει ορθογώνιο σχήμα με διαστάσεις 10,5 μ. μήκους και 5,25 μ. πλάτους. Επειδή θα γίνουν και άλλες κατασκευές στον κήπο η συγκεκριμένη κατασκευή δεν πρέπει να ξεπερνά το 2% του συνολικού εμβαδού του κήπου. Επιπλέον, έπειτα από πληροφορίες που συνέλεξαν σχετικά με το σχήμα που θα πρέπει να έχει το παρτέρι που θέλουν να κατασκευάσουν, κατέληξαν ότι το ορθογώνιο σχήμα είναι το πιο βολικό στην κατασκευή. Στη συνέχεια συνέλλεξαν πληροφορίες σχετικά με το κόστος του ξύλινου πλαισίου ύψους 50 εκ. και κατέληξαν στην οικονομικότερη προσφορά που είναι 55 ευρώ το μέτρο.
Μπορείτε να βοηθήσετε του μαθητές της Στ΄ να ολοκληρώσουν την αποστολή τους;

Ενδεικτικές φάσεις εφαρμογής

1η φάση: Οι μαθητές αρχικά υπολογίζουν ποιο θα πρέπει να είναι το μέγιστο δυνατό εμβαδόν του κήπου. Πειραματίζονται στο χαρτί σχεδιάζοντας διάφορα ορθογώνια υπολογίζοντας την περίμετρο και το εμβαδόν τους και στη συνέχεια με τη βοήθεια του Χελωνόκοσμου κατασκευάζουν διαφορετικά ορθογώνια και μελετούν κάθε φορά την περίμετρο και το εμβαδόν τους σε μη παραμετρικές αλλά και σε παραμετρικές διαδικασίες.

2η φάση: Οι μαθητές διαπραγματεύονται τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά, αναγνωρίζουν το μέγεθος (περίμετρο) που ελαχιστοποιεί το κόστος σε ένα ορθογώνιο με σταθερό εμβαδόν και στη συνέχεια μέσα από τη δυναμική μεταβολή του μήκους ενός ορθογωνίου, σε μία παραμετρική διαδικασία που κατασκευάζει ορθογώνια σταθερού εμβαδού, αναγνωρίζουν ότι το τετράγωνο (105Χ105 εκ.) είναι το σχήμα που έχει την μικρότερη περίμετρο με το ζητούμενο εμβαδόν άρα και με το μικρότερο κόστος.

Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Στην παραδοσιακή τάξη η διδασκαλία των διάφορων ειδών τετραπλεύρων γίνεται με στατικά μέσα αναπαράστασης και κάθε σχήμα εμφανίζεται εντελώς διαφορετικό από το άλλο. Στην παρούσα εργασία και με τη βοήθεια του Χελωνόκοσμου οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα:

- να συνδέσουν την έννοια του τετραγώνου με την έννοια του ορθογωνίου παραλληλογράμμου,
- να συνδέσουν τα αντιστρόφως ανάλογα ποσά με πραγματικά προβλήματα,
- να κατανοήσουν την έννοια της μεταβλητής και να αναγνωρίσουν την χρησιμότητα των μεταβλητών σε πραγματικά προβλήματα,
- να εισαχθούν διαισθητικά στην έννοια της συμμεταβολής μεγεθών,
- να πειραματιστούν με τις αλλαγές στις τιμές των μεταβλητών των πλευρών και να κάνουν συσχετίσεις ανάμεσα στην έννοια της περιμέτρου και του εμβαδού. Να αντιμετωπίσουν έτσι μια κοινή παρανόηση ότι σχήματα με την ίδια περίμετρο έχουν το ίδιο εμβαδόν και αντίστροφα.

Μέσω της δυναμικής μεταβολής των ιδιοτήτων των σχημάτων οι μαθητές μπορούν να κατασκευάσουν ιεραρχικές σχέσεις ανάμεσα σε διαφορετικά επίπεδα σχήματα.

ΣΥΝΘΕΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ 14 (ΣΤ΄ Δημοτικού)
«Οι μαθητές κατασκευάζουν σκάλες παίζοντας»

Ο δάσκαλος του σχολείου χώρισε τους μαθητές της τάξης του σε ομάδες, με στόχο τη διερεύνηση για την κατασκευή μιας σκάλας σε ένα σημείο του σχολείου που έχει υψομετρική διαφορά. Οι μαθητές αφού μέτρησαν την απόσταση και την υψομετρική διαφορά και διερεύνησαν τις ιδανικές αναλογίες που πρέπει να έχουν τα σκαλοπάτια, θα πρέπει με τη βοήθεια του Χελωνόκοσμου να δώσουν την καλύτερη δυνατή λύση για το πρόβλημα κατασκευής των διαστάσεων των σκαλοπατιών καθώς και τον καθορισμό του αριθμού τους.



Ενδεικτικές φάσεις εφαρμογής

1η φάση: Οι μαθητές αρχικά διερευνούν την επαναληπτική δομή ενός σκαλοπατιού για την κατασκευή μιας σκάλας και στη συνέχεια κατασκευάζουν σκάλες στο περιβάλλον του Χελωνόκοσμου με χρήση διαδικασιών, εντολών επανάληψης και υπο- και υπερδιαδικασιών.

2η φάση: Οι μαθητές χρησιμοποιώντας παραμετρικές διαδικασίες κατασκευάζουν σκάλες και τις χειρίζονται δυναμικά. Κατασκευάζουν μία σκάλα επάνω σε ένα έτοιμο σχέδιο και τέλος ελέγχοντας την οριζόντια και την κατακόρυφη κάλυψη της σκάλας στο Χελωνόκοσμο, σχεδιάζουν μία σκάλα για το σχολείο τους ώστε να τηρεί όσο το δυνατόν περισσότερο τις ιδανικές διαστάσεις κατασκευής σκαλοπατιών.

Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Τα οφέλη που προκύπτουν για τους μαθητές διερευνώντας ένα πραγματικό πρόβλημα, είναι ότι εξοικειώνονται με αλγοριθμικές διαδικασίες, διαδικασίες προγραμματισμού και με την έννοια της μεταβλητής αξιοποιώντας τα δυναμικά χαρακτηριστικά του Χελωνόκοσμου. Κάτι που είναι δύσκολο να κατανοηθεί στο παραδοσιακό περιβάλλον του τετραδίου και του πίνακα

Επίσης, η εργασία προσδοκά στην προσέλκυση του ενδιαφέροντος των μαθητών ως διερευνητική και με χαρακτηριστικά παιχνιδιού.

Α΄ Γυμνασίου

Θεματική ενότητα: Αριθμοί-Άλγεβρα

Ενδεικτικές διδακτικές ώρες: 55

Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα	**Βασικά θέματα**	**Δραστηριότητες**	**Εκπαιδευτικό υλικό**
Αρ1. Χρησιμοποιούν κατάλληλα όρους όπως: παράγοντας, διαιρέτης, πολλαπλάσιο, διαιρεί, διαιρείται. *Αρ2.* Αναγνωρίζουν και εκφράζουν συμβολικά την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης και τη χρησιμοποιούν στην επίλυση προβλημάτων. *Αρ3.* Διερευνούν και εφαρμόζουν απλές ιδιότητες της διαιρετότητας και τα κριτήρια της διαιρετότητας. *Αρ4.* Αναγνωρίζουν πρώτους αριθμούς και εφαρμόζουν το κόσκινο του Ερατοσθένη για να βρίσκουν τους πρώτους αριθμούς. *Αρ5.* Αναλύουν ένα φυσικό αριθμό σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και χρησιμοποιούν αυτή την ανάλυση για να προσδιορίσουν πρώτους παράγοντες, ΜΚΔ, σχετικά πρώτους αριθμούς, πολλαπλάσια και ΕΚΠ δύο ή περισσότερων αριθμών. *Αρ6.* Διερευνούν και εφαρμόζουν έννοιες από	***Φυσικοί Αριθμοί – Διαιρετότητα*** • Ευκλείδεια διαίρεση, ανάλυση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων *(6 ώρες)*	Οι μαθητές, με δραστηριότητες και προβλήματα μαθηματικού περιεχομένου, διερευνούν στοιχεία της δομής των φυσικών αριθμών, αιτιολογούν και συζητούν τις λύσεις τους. *(ενδεικτικές δραστηριότητες ΑρΔ1, ΑρΔ2)*	Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου, Βανδουλάκης κ.ά., ΟΕΔΒ, 2010) παρ. Α1.4 και Α1.5.

τη θεωρία αριθμών (παραγοντοποίηση φυσικών, παράγοντες, πολλαπλάσια, πρώτοι και σύνθετοι αριθμοί, διαιρετότητα, ΜΚΔ, ΕΚΠ) στην επίλυση προβλημάτων.			
Αρ7. Διερευνούν συστήματα αρίθμησης φυσικών αριθμών (πχ το δυαδικό) και συγκρίνουν με το δεκαδικό.	***Φυσικοί αριθμοί*** • θεσιακά συστήματα αρίθμησης *(2 ώρες)*	Το σημαντικό είναι η ανάδειξη στοιχείων του δεκαδικού συστήματος (ομαδοποίηση σε δυνάμεις του 10, αξία θέσης ψηφίου) μέσα από την διερεύνηση ενός άλλου συστήματος αρίθμησης (δυαδικό) και όχι η εξάσκηση στις μετατροπές αριθμών από το ένα σύστημα στο άλλο. *(ενδεικτική δραστηριότητα ΑρΔ3)*	http://www.schools.ac.cy/eyliko/mesi/Themata/mathimatika/gymnasio/09_09_2010_ekpaideftiko_yliko_a_gymnasiou_enotita1.pdf σελ 39–42.
Αρ8. Αναγνωρίζουν και αναπαριστούν ακεραίουςαριθμούς σε διαφορετικά πλαίσια. *Αρ9.* Συγκρίνουν και διατάσσουν ακέραιους αριθμούς, χρησιμοποιώντας την αριθμογραμμή και συνειδητοποιούν ότι κάθε ακέραιος αριθμός έχει επόμενο. *Αρ10.* Διερευνούν τη σχέση των ακεραίων με τους φυσικούς αριθμούς (κάθε φυσικός είναι ακέραιος, ύπαρξη ελάχιστου φυσικού και όχι ελάχιστου ακεραίου, ύπαρξη επόμενου). *Αρ11.* Αναγνωρίζουν την απόλυτη τιμή ακεραίων αριθμών ως την απόστασή τους από το 0.	***Ακέραιοι αριθμοί*** • επέκταση των φυσικών στους ακεραίους *(14 ώρες)*	Οι μαθητές, με τις δραστηριότητες, διερευνούν και καταλήγουν στους κανόνες ορισμού των πράξεων, μέσω μοντέλων/μεταφορών. Επιπλέον, διερευνούν όψεις της δομής των ακεραίων (πχ ύπαρξη επόμενου) και των πράξεών τους (πχ η αφαίρεση ως πρόσθεση, οι ερμηνείες του "–" ως προσήμου και συμβόλου πράξης). *(ενδεικτικές δραστηριότητες ΑρΔ4, ΑρΔ5, ΑρΔ6, ΑρΔ7, ΑρΔ8)*	Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου, Βανδουλάκης κ.ά., ΟΕΔΒ, 2010) Α μέρος, κεφ. 7ο Ψηφιακό περιβάλλον: http://www.e-yliko.gr/resource/resource.aspx?id=665 (πολλαπλασιασμός ρητών με μοντέλο θερμοκρασίας) http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_161_g_1_t_1.html?from=topic_t_1.html Οδηγίες:Α-ΑρΔ5-Πρόσθεση με θ-α κάρτες.doc http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_162_g_2_t_1.html?from=topic_t

Αναγνωρίζουν τους αντίθετους αριθμούς ως ετερόσημους με ίσες αποστάσεις από το 0. *Αρ12.* Προσθέτουν ακέραιους αριθμούς χρησιμοποιώντας στην αρχή μοντέλα-μεταφορές και καταλήγουν στον ορισμό της πρόσθεσης ακεραίων. *Αρ13.* Κατανοούν την έννοια των αντίθετων ως τους αριθμούς με άθροισμα 0. *Αρ14.* Αφαιρούν ακέραιους χρησιμοποιώντας μοντέλα-μεταφορές και αναγνωρίζουν την αφαίρεση ακεραίων ως πρόσθεση του αντίθετου. Αφαιρούν ακέραιους μετατρέποντας την αφαίρεση σε πρόσθεση του αντιθέτου. *Αρ15.* Αναγνωρίζουν τις διαφορετικές ερμηνείες του συμβόλου « - » ως προσήμου και ως σύμβολου πράξης. *Αρ16.* Συγκρίνουν το νόημα της πρόσθεσης ως αύξησης και της αφαίρεσης ως ελάττωσης στους φυσικούς με το νόημα των αντίστοιχων πράξεων στους ακέραιους. *Αρ17.* Πολλαπλασιάζουν ακέραιους χρησιμοποιώντας στην αρχή μοντέλα-μεταφορές και καταλήγουν στον ορισμό του πολλαπλασιασμού ακεραίων.			_1.html Οδηγίες:Α-ΑρΔ7-Αφαίρεση με θ-α κάρτες.doc

Αρ18. Διαιρούν ακέραιους χρησιμοποιώντας τη διαίρεση ως αντίστροφη πράξη του πολλαπλασιασμού.			
Αρ19. Αναγνωρίζουν το κλάσμα ως μια αναπαράσταση του αποτελέσματος της διαίρεσης δύο φυσικών και τα ισοδύναμα κλάσματα ως διαφορετικές αναπαραστάσεις του ίδιου αποτελέσματος. *Αρ20.* Αναγνωρίζουν ως θετικό ρητό αριθμό το αποτέλεσμα της διαίρεσης δύο φυσικών αριθμών, δηλαδή ένα κλάσμα. *Αρ21.* Αναπαριστούν στην αριθμογραμμή τους θετικούς ρητούς και αισθητοποιούν τους αρνητικούς. Αναγνωρίζουν το σύνολο των ρητών. *Αρ22.* Συγκρίνουν και διατάσσουν ρητούς αριθμούς, χρησιμοποιώντας την αριθμογραμμή και αναγνωρίζουν ότι ένας ρητός δεν έχει επόμενο. *Αρ23.* Αναγνωρίζουν την απόλυτη τιμή ρητών αριθμών ως την απόστασή τους από το 0. *Αρ24.* Επεκτείνουν τις πράξεις των ακεραίων στους ρητούς. *Αρ25.* Αναγνωρίζουν τους αντίστροφους ως τους αριθμούς με γινόμενο 1 και τη διαίρεση ως τον πολλαπλασιασμό με τον αντίστροφο του	***Ρητοί αριθμοί*** • επέκταση των ακεραίων στους ρητούς, πυκνότητα ρητών *(16 ώρες)*	Οι μαθητές εξοικειώνονται με τους ρητούς μέσω αναπαραστάσεών τους (π.χ. κλάσματα πάνω στην αριθμογραμμή). Με δραστηριότητες αποκτούν ευχέρεια στους υπολογισμούς με χρήση ιδιοτήτων των πράξεων. Τα προβλήματα δίνουν νόημα στις υπολογιστικές τεχνικές, αποφεύγοντας τη μονοδιάστατη εξάσκηση με πολύπλοκες παραστάσεις. Οι μαθητές χρησιμοποιούν τη μεταβλητή ως γενικευμένο αριθμό, διατυπώνοντας συμβολικά τις ιδιότητες των πράξεων. *(ενδεικτική δραστηριότητα ΑρΔ9)*	Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου, Βανδουλάκης κ.ά, ΟΕΔΒ, 2010) Α μέρος, παρ. 2.2 και 2.3 (ισοδύναμα κλάσματα, σύγκριση κλασμάτων), κεφ. 7ο (ρητοί αριθμοί).

διαιρέτη. *Αρ26.* Γενικεύουν και εκφράζουν συμβολικά τον αντίθετο ενός αριθμού (-α), τις ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού ρητών αριθμών καθώς και την αφαίρεση ως πρόσθεση του αντιθέτου (α-β=α+(-β)) και τη διαίρεση ως πολλαπλασιασμό του αντιστρόφου ($\alpha:\beta=\alpha\cdot\frac{1}{\beta}$). *Αρ27.* Διατυπώνουν και χρησιμοποιούν τον ορισμό των δυνάμεων με βάση ρητό και εκθέτη φυσικό. *Αρ28.* Προσδιορίζουν το πρόσημο της δύναμης ρητού αριθμού με βάση τον ορισμό. *Αρ29.* Υπολογίζουν την τιμή μιας αριθμητικής παράστασης με ρητούς (που μπορεί να περιέχει και δυνάμεις και παρενθέσεις) χρησιμοποιώντας την προτεραιότητα των πράξεων. *Αρ30.* Μοντελοποιούν προβλήματα χρησιμοποιώντας τις πράξεις και τις ιδιότητες των ρητών.			
Α1. Διερευνούν αριθμητικές και γεωμετρικές κανονικότητες και διατυπώνουν το γενικό τους όρο λεκτικά και συμβολικά με μια αλγεβρική παράσταση. *Α2.* Προσδιορίζουν ένα	***Κανονικότητες– Συναρτήσεις*** • αλγεβρική και γραφική αναπαράσταση κανονικοτήτων *(4 ώρες)*	Η ανάγκη συμβολικής διατύπωσης του γενικού όρου μιας κανονικότητας οδηγεί στη χρήση της μεταβλητής. Η αναπαράσταση μιας κανονικότητας σε σύστημα	Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου, Βανδουλάκης κ.ά., ΟΕΔΒ, 2010) σελ. 74 (ασκ 15), παρ. 6.1 (παράσταση σημείων στο επίπεδο) Ψηφιακό περιβάλλον:

σημείο (ως διατεταγμένο ζεύγος) σε σύστημα αξόνων. *Α3.* Αναπαριστούν κανονικότητες με εικόνες, με πίνακες και με σημεία σε σύστημα ημιαξόνων ή αξόνων και μεταβαίνουν από τη μία αναπαράσταση στην άλλη.		συντεταγμένων είναι ένα σημαντικό εργαλείο που θα αξιοποιηθεί αργότερα στις συναρτήσεις. *(ενδεικτική δραστηριότητα ΑΔ1)*	http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_328_g_3_t_2.html?open=activities&from=category_g_3_t_2.html
Α4. Χρησιμοποιούν γράμματα για να εκφράσουν μεγέθη σε τύπους (σε καταστάσεις καθημερινής ζωής, φυσικής, κλπ) *Α5.* Μοντελοποιούν προβλήματα με χρήση αριθμητικών και αλγεβρικών παραστάσεων. *Α6.* Μεταφράζουν από λεκτικές εκφράσεις σε απλές αλγεβρικές παραστάσεις και αντίστροφα (π.χ. το διπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 3, 2α+3). *Α7.* Υπολογίζουν την αριθμητική τιμή μιας αλγεβρικής παράστασης και κατασκευάζουν πίνακες τιμών. *Α8.* Χρησιμοποιούν την επιμεριστική ιδιότητα για να απλοποιήσουν γραμμικές αλγεβρικές παραστάσεις (αναγωγή ομοίων όρων). *Α9.* Αναγνωρίζουν στοιχεία της δομής μιας αλγεβρικής παράστασης (π.χ. η 2x+3 είναι άθροισμα, το 2x είναι γινόμενο).	***Αλγεβρική παράσταση*** • μεταβλητές και αλγεβρικές παραστάσεις *(6 ώρες)*	Με δραστηριότητες μοντελοποίησης καταστάσεων, μετάφρασης λεκτικών διατυπώσεων, και υπολογισμού αριθμητικών τιμών, αναδεικνύεται η ανάγκη χρήσης μεταβλητών και αλγεβρικών παραστάσεων. Επιπλέον, η αναγωγή όμοιων όρων υποστηρίζεται αρχικά με μοντέλα / μεταφορές και στη συνέχεια με την επιμεριστική ιδιότητα. *(ενδεικτική δραστηριότητα ΑΔ2)*	Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου, Βανδουλάκης κ.ά., ΟΕΔΒ, 2010) σελ 16, 72, 74 Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, Βλάμος κ.ά., ΟΕΔΒ, 2010) παρ. 1.1. http://www.schools.ac.cy/eyliko/mesi/Themata/mathimatika/gymnasio/11_03_2011_ekpaideftiko_yliko_enotita_4.pdf σελ 1–11.

Α10. Αναγνωρίζουν πότε ένας αριθμός είναι λύση εξίσωσης σε διαφορετικές μορφές εξισώσεων. *Α11.* Αναγνωρίζουν ποσά ανάλογα και αντιστρόφως ανάλογα και επιλύουν προβλήματα με πίνακες και με εξισώσεις της μορφής αβ=γx και α/β=γ/x. *Α12.* Διερευνούν και διατυπώνουν τις ιδιότητες της ισότητας με βάση μοντέλα – μεταφορές. *Α13.* Μοντελοποιούν προβλήματα με γραμμικές εξισώσεις της μορφής αx+β=γ και τις επιλύουν αριθμητικά, με μοντέλα–μεταφορές και αλγεβρικά με τις ιδιότητες της ισότητας.	***Ισότητα – Ανισότητα*** • η εξίσωση (αx+β=γ) ως εργαλείο επίλυσης προβλημάτων. • μετασχηματισμοί εξίσωσης. *(7 ώρες)*	Οι διαδικασίες δοκιμής και ελέγχου και των αντίστροφων πράξεων μπορούν να χρησιμοποιηθούν παράλληλα με την μέθοδο των ισοδύναμων ισοτήτων. Η χρήση μοντέλων / μεταφορών (ζυγαριά, πλακίδια) οδηγεί τόσο στη διατύπωση των ιδιοτήτων της ισότητας, όσο και στη διαδικασία επίλυσης μιας εξίσωσης. Η επίλυση των εξισώσεων πρέπει να γίνεται με ιδιότητες της ισότητας και όχι με μνημονικούς κανόνες (πχ όταν αλλάζει μέλος, αλλάζει πρόσημο), οι οποίοι αποκρύπτουν το νόημα της διαδικασίας. *(ενδεικτικές δραστηριότητες ΑΔ3, ΑΔ4)*	Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, Βλάμος κ.ά., ΟΕΔΒ, 2010) παρ. 1.2 (μόνο για εξισώσεις με άγνωστο στο ένα μέλος) http://www.schools.ac.cy/eyliko/mesi/Themata/mathimatika/gymnasio/11_03_2011_ekpaideftiko_yliko_enotita_4.pdf σελ. 12-19 (μόνο για εξισώσεις με άγνωστο στο ένα μέλος).

Θεματική ενότητα: Γεωμετρία – Μέτρηση

Ενδεικτικές διδακτικές ώρες: 32

Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα	**Βασικά θέματα**	**Δραστηριότητες**	**Εκπαιδευτικό υλικό**
Γ1. Διερευνούν τα γεωμετρικά σχήματα και διαμορφώνουν ορισμούς. *Γ2.* Αναγνωρίζουν σχέσεις μεταξύ των βασικών σχημάτων και τις εφαρμόζουν σε απλές καταστάσεις. *Γ3.* Χρησιμοποιούν κανόνα, διαβήτη ή άλλα εργαλεία για να διατυπώσουν και να	***Γεωμετρικά σχήματα*** • αναγνώριση, ονομασία και ταξινόμηση των γεωμετρικών σχημάτων • ανάλυση των βασικών γεωμετρικών σχημάτων σε στοιχεία και ιδιότητες • κατασκευές και	Η αναφορά στα βασικά γεωμετρικά σχήματα γίνεται μέσα από την παρατήρηση/διερεύνηση οικείων στους μαθητές σχημάτων του χώρου. Ο εκπαιδευτικός με κατάλληλα ερωτήματα εντοπίζει και ανατρέπει διάφορες	Σχολικό βιβλίο Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου, Βανδουλάκης κ.ά., Γεωμετρία, Κεφάλαιο 1^{ο}& 3^{ο} Α- ΓΔ3-Κατασκευάζοντας παραλληλόγραμμα Φύλλο εργασίας: Φύλο εργασίας-Α- ΓΔ3-Κατασκευάζοντας

ελέγξουν εικασίες σχετικά με τις ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων (είδη τριγώνων ως προς τις γωνίες και ως προς τις πλευρές, είδη τετραπλεύρων, γωνίες που σχηματίζονται από δύο παράλληλες και μία τέμνουσα). *Γ4.* Διερευνούν και αιτιολογούν τις ιδιότητες των σχημάτων με επαγωγικούς. συλλογισμούς και (μη τυπικές) αποδείξεις (άθροισμα των γωνιών του τριγώνου, ιδιότητες των τετραπλεύρων, ταξινόμηση των τετραπλεύρων). *Γ5.* Εφαρμόζουν τις γνώσεις των ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων στην επίλυση προβλημάτων. *Γ6.* Χρησιμοποιούν κανόνα, διαβήτη ή άλλα εργαλεία για να σχεδιάσουν γεωμετρικά σχήματα. Διαχωρίζουν την κατασκευή με βαθμολογημένα όργανα από τη γεωμετρική κατασκευή με κανόνα και διαβήτη. *Γ7.* Επιλύουν προβλήματα γεωμετρικών κατασκευών.	σχεδιασμός γεωμετρικών σχημάτων. *(26 ώρες)*	παρανοήσεις με χρήση αντιπαραδειγμάτων αναδεικνύοντας την ανάγκη ύπαρξης καθολικά αποδεκτών ορισμών. Παρουσιάζει σύνθετα γεωμετρικά σχήματα και ζητά από τους μαθητές να προσδιορίσουν τα βήματα της κατασκευής τους και στη συνέχεια να τα κατασκευάσουν με χρήση γεωμετρικών οργάνων ή λογισμικού. Ενδεικτικές δραστηριότητες ΓΔ1, ΓΔ2, ΓΔ3, ΓΔ4, ΓΔ5, ΓΔ6, ΓΔ7.	παραλληλόγραμμα Α- ΓΔ4-Κατασκευάζοντας είδη τετραπλεύρων. Φύλλο εργασίας:Φύλλο εργασίας-Α-ΓΔ4-Κατασκευάζοντας είδη τετραπλεύρων Α-ΓΔ5-εξωτερική τριγώνου
Μ1. Συνδέουν τη σύγκριση των ευθυγράμμων τμημάτων, των τόξων του ίδιου ή ίσων κύκλων και των γωνιών με τις διαδικασίες και τα όργανα μέτρησης. *Μ2.* Υπολογίζουν μήκη χρησιμοποιώντας ιδιότητες ή σχέσεις (π.χ. την περίμετρο "μη	***Μέτρηση μήκους, μέτρηση γωνίας*** • άμεσες και έμμεσες συγκρίσεις μήκους / γωνίας • μέτρηση με μη τυπικές και τυπικές μονάδες μέτρησης μήκους /γωνίας *(6 ώρες)*	Οι μαθητές, είναι σημαντικό να κατανοήσουν ότι η μέτρηση μιας γωνίας με μοιρογνωμόνιο αποτελεί εφαρμογή της μεθόδου σύγκρισης γωνιών μέσω της μετατροπής τους σε επίκεντρες (το μοιρογνωμόνιο είναι ένα	Σχολικό βιβλίο Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου, Βανδουλάκης κ.ά., Γεωμετρία, Κεφάλαιο $1^{ο}$.

συμβατικών” ευθύγραμμων σχημάτων). *Μ3.* Υπολογίζουν γωνίες χρησιμοποιώντας ιδιότητες ή σχέσεις. *Μ4.* Επιλύουν προβλήματα υπολογισμού μηκών και γωνιών με τη χρήση κατάλληλων μονάδων μέτρησης (με βάση την ακρίβεια που απαιτείται).		βαθμονομημένοημικύκλιο, στο οποίο η γωνία γίνεται επίκεντρη έτσι ώστε η διάμετρός του να συμπίπτει με μια πλευρά της γωνίας). (*ενδεικτικήδραστηριότηταΜΔ1*)	

Θεματική ενότητα: Στοχαστικά Μαθηματικά

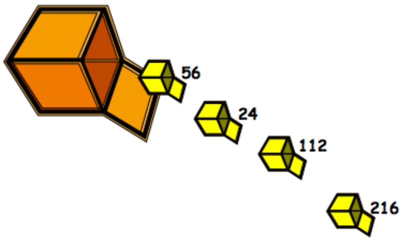
Ενδεικτικές διδακτικές ώρες: 14

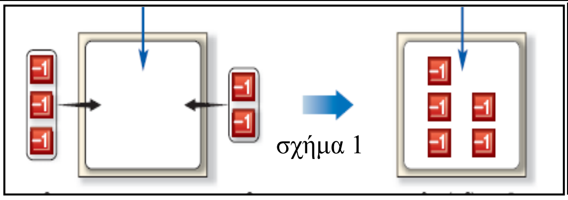
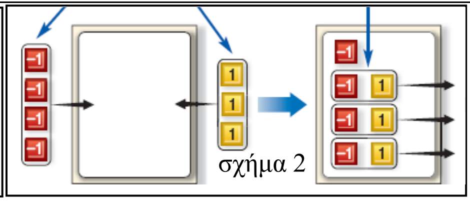
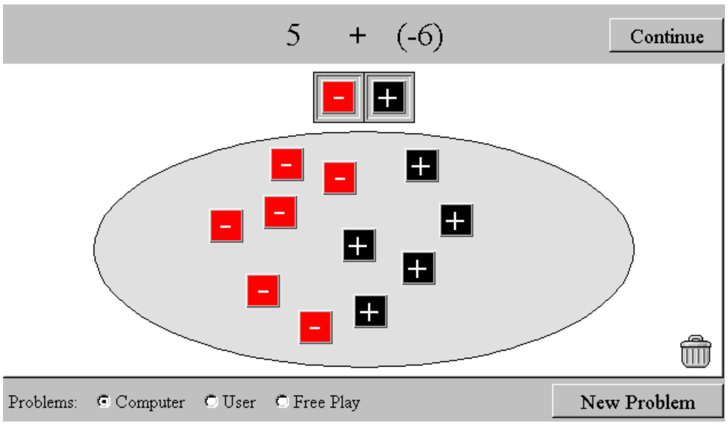
Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα	**Βασικά θέματα**	**Δραστηριότητες**	**Εκπαιδευτικό υλικό**
Σ7. Διατυπώνουν ερωτήματα που μπορούν να απαντηθούν με δεδομένα και αφορούν διαφορετικά χαρακτηριστικά της περίπτωσης που εξετάζεται. *Σ8.* Συλλέγουν δεδομένα καθορίζοντας κριτήρια επιλογής και αιτιολογούν τις επιλογές τους. *Σ9.* Κατασκευάζουν απλά κυκλικά διαγράμματα και χρονοδιαγράμματα. *Σ10.* Επιλέγουν κατάλληλες μορφές αναπαράστασης και επιχειρηματολογούν για τις επιλογές τους. *Σ11.* Ερμηνεύουν πίνακες και στατιστικά διαγράμματα, καταλήγουν σε συμπεράσματα και κάνουν προβλέψεις.	***Δεδομένα*** • συλλογή, αναπαράσταση, και ερμηνεία δεδομένων *(5 ώρες)*	Οι μαθητές είναι σημαντικό να χρησιμοποιούν πραγματικά δεδομένα που συλλέγουν οι ίδιοι ως πλαίσιο αναφοράς για τις έννοιες της Στατιστικής . Επίσης είναι σημαντικό να αναπτύξουν κριτική στάση απέναντι σε τρόπους παρουσίασης των δεδομένων που ίσως είναι παραπλανητικοί. Για την κατασκευή απλών κυκλικών διαγραμμάτων δίνονται έτοιμοι κύκλοι χωρισμένοι σε ίσα τόξα (π.χ. 4 ή 6 ή 12) και δεδομένα που μπορούν να παρασταθούν σε αυτούς. Ενδεικτική δραστηριότητα ΣΔ1	Μέρος του 4ου κεφαλαίου του βιβλίου: Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου (Βλάμος, Δρούτσας, κ.ά.) με κατάλληλες τροποποιήσεις

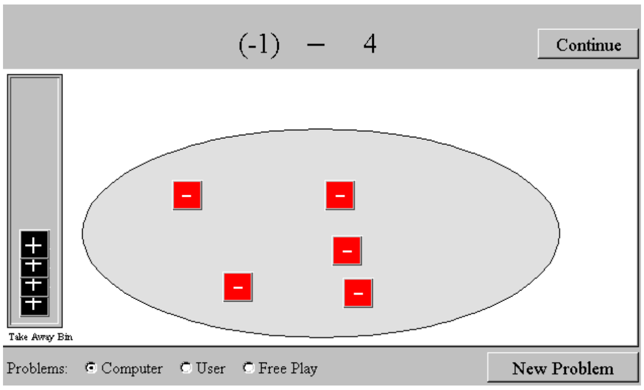
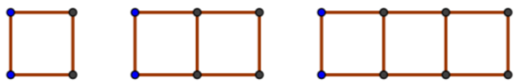
Σ12. Εικάζουν ή/και προσδιορίζουν την διάμεσο τιμή, την επικρατούσα τιμή και την μέση τιμή με βάση την αναπαράσταση των δεδομένων. *Σ13.* Χρησιμοποιούν τα μέτρα θέσης για να περιγράψουν δεδομένα, να κάνουν συγκρίσεις και να εξάγουν συμπεράσματα.	***Μέτρα θέσης*** *(3 ώρες)*	Οι μαθητές είναι σημαντικό να αναπτύξουν μεθόδους προσδιορισμού των μέτρων θέσης, πέρα από τις καθαρά υπολογιστικές. Ενδεικτική δραστηριότητα ΣΔ2.	Μέρος του 4ου κεφαλαίου του βιβλίου: Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου (Βλάμος, Δρούτσας, κ.ά.) με κατάλληλες τροποποιήσεις http://illuminations.nctm.org/activitydetail.aspx?ID=160 Οδηγίες:Οδηγίες-Α-ΣΔ2-Διάμεσος_Μέση τιμή
Σ14. Περιγράφουν χαρακτηριστικά των δεδομένων που προκύπτουν από τις αναπαραστάσεις τους χρησιμοποιώντας ενδεχομένως και εκφράσεις όπως: εύρος, συστάδες δεδομένων, κενά, απόμακρη τιμή. *Σ15.* Εξηγούν χαρακτηριστικά των δεδομένων (όπως λόγοι ύπαρξης απόμακρων τιμών) ή πιθανούς λόγους για την μεταβλητότητα των δεδομένων.	***Μεταβλητότητα*** *(1 ώρα)*	Η ηλικιακή περίοδος, για παράδειγμα, είναι ένας από τους πιθανούς λόγους της μεταβλητότητας του ύψους των μαθητών (οι έφηβοι έχουν διαφορετικό ύψος από τα παιδιά των μικρών τάξεων του Δημοτικού). Ωστόσο υπάρχουν και άλλοι λόγοι, επειδή έφηβοι της ίδιας ηλικίας δεν έχουν το ίδιο ύψος.	
Π1. Προσδιορίζουν και περιγράφουν το δειγματικό χώρο (δ.χ.) ενός πειράματος τύχης που πραγματοποιείται σε δυο ή περισσότερα στάδια χρησιμοποιώντας κατάλληλες αναπαραστάσεις. *Π2.* Μεταφράζουν τα ενδεχόμενα από τη φυσική γλώσσα σε στοιχεία του δειγματικού χώρου.	***Πειράματα τύχης - Δειγματικοί χώροι*** • περιγραφή σύνθετων δειγματικών χώρων και ενδεχομένων *(2 ώρες)*	Οι μαθητές περιγράφουν το δειγματικό χώρο που προκύπτει από παιχνίδια χρησιμοποιώντας λίστα ή δεντροδιάγραμμα ή πίνακα διπλής εισόδου και κατόπιν εκφράζουν με στοιχεία του δειγματικού χώρου κάποια ενδεχόμενα.	Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου (Αργυράκης, Βουργανάς, κ.ά.) σελ 167-172 www.math.uah.edu/stat/applets/DiceSampleExperiment.xhtml
Π3. Υπολογίζουν την πιθανότητα ενός	***Πιθανότητα ενδεχομένου***	Οι μαθητές είναι σημαντικό να	www.shodor.org/interactivate/activities/Adjusta

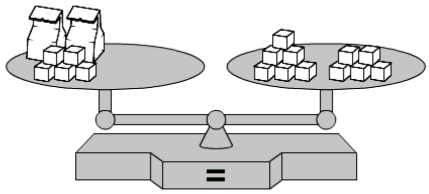
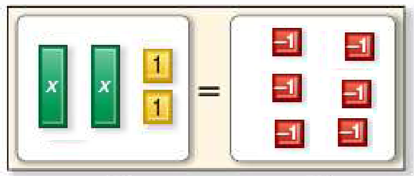
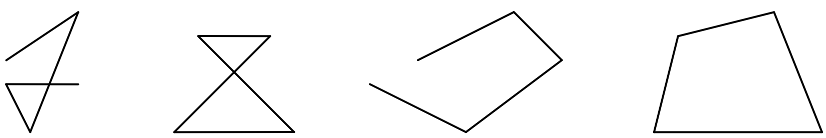
σύνθετου ενδεχομένου χρησιμοποιώντας τον κλασσικό ορισμό των Πιθανοτήτων. *Π4.* Παρατηρούν ότι η σχετική συχνότητα ενός ενδεχομένου πλησιάζει την τιμή της πιθανότητας, όταν έχουμε μεγάλο αριθμό εκτελέσεων του ίδιου πειράματος (Νόμος των Μεγάλων Αριθμών).	• σχετική συχνότητα και πιθανότητα σε σύνθετα πειράματα τύχης *(3 ώρες)*	κατανοήσουν ότι, όσο αυξάνει ο αριθμός των εκτελέσεων ενός πειράματος τύχης, τότε η σχετική συχνότητα του ενδεχομένου τείνει να σταθεροποιηθεί «γύρω» από την πιθανότητα. Προτείνεται να παρουσιαστούν και παραδείγματα όπου τα απλά ενδεχόμενα δεν είναι ισοπίθανα. Ενδεικτικές δραστηριότητες ΠΔ1, ΠΔ2.	bleSpinner

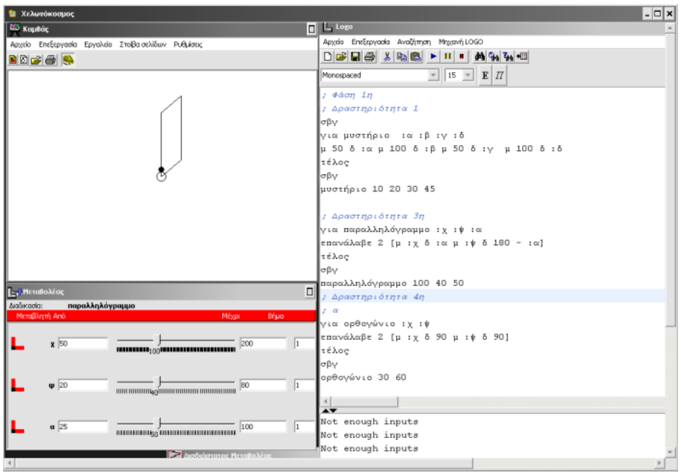
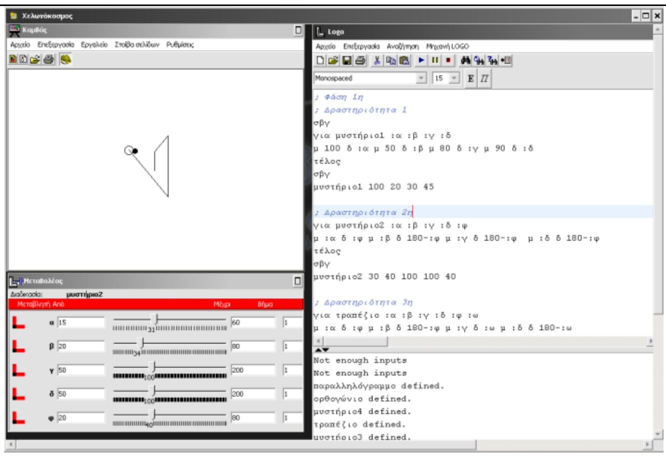
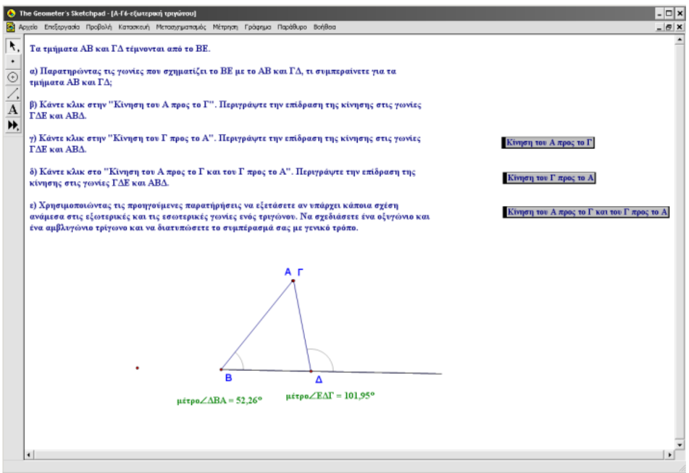
Ενδεικτικές Δραστηριότητες

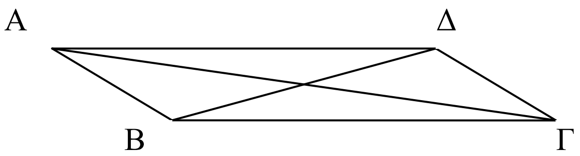
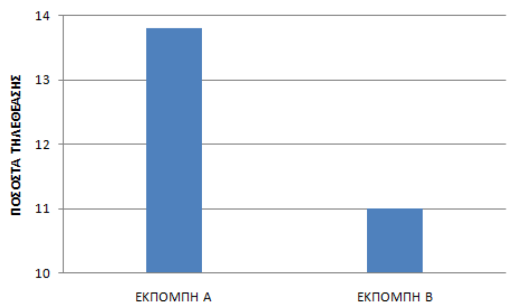
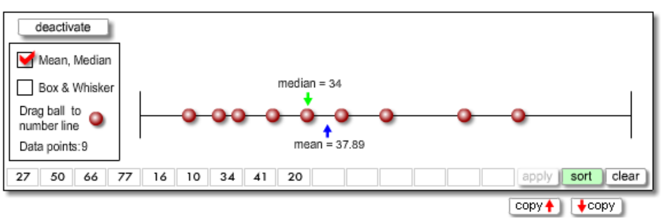
Α/Α	**Περιγραφή δραστηριότητας**	**ΠΜΑ**
ΑρΔ1	Μία μαγική μηχανή πολλαπλασιάζει τους αριθμούς που εισέρχονται σε αυτή με έναν αριθμό. Η εικόνα δείχνει τους αριθμούς που βγήκαν από τη μηχανή. Να βρείτε με ποιον αριθμό μπορεί να πολλαπλασιάζει η μηχανή τους αριθμούς που της βάζουμε.  	**Αρ5**
ΑρΔ2	Ο Αντρέας παίζει ποδόσφαιρο κάθε 4 ημέρες, ο Μιχάλης κάθε 5 ημέρες και ο Μαρίνος κάθε 8 ημέρες. Αν σήμερα παίζουν ποδόσφαιρο και οι τρεις μαζί, τότε να υπολογίσετε μετά από πόσες ημέρες θα συμβεί το ίδιο για δεύτερη φορά.	**Αρ6**
ΑρΔ3	Ένας αριθμός μετατρέπεται από το δεκαδικό στο δυαδικό σύστημα και δίνει τετραψήφιο αριθμό. Ποιος θα μπορούσε να είναι ο αρχικός αριθμός;	**Αρ7**
ΑρΔ4	Σε ένα παιχνίδι, δύο ομάδες παιδιών απαντούν σε ερωτήσεις. Για κάθε σωστή απάντηση η ομάδα παίρνει μια θετική κάρτα και για κάθε λάθος παίρνει μια αρνητική. Για παράδειγμα, αν η ομάδα Α έχει 5 θετικές κάρτες (+5) και πάρει άλλες δύο θετικές (+2), θα έχει 7 θετικές, δηλαδή σύνολο +7 πόντους. Αυτό μπορούμε να το εκφράσουμε με την πρόσθεση: (+5)+(+2)=+7. α) Το σχήμα 1 περιγράφει την κατάσταση μιας ομάδας που είχε 3 αρνητικές και πήρε δύο ακόμη αρνητικές. Μπορείτε να εκφράσετε αυτή την κατάσταση με μια πράξη;	**Αρ12, Αρ13**

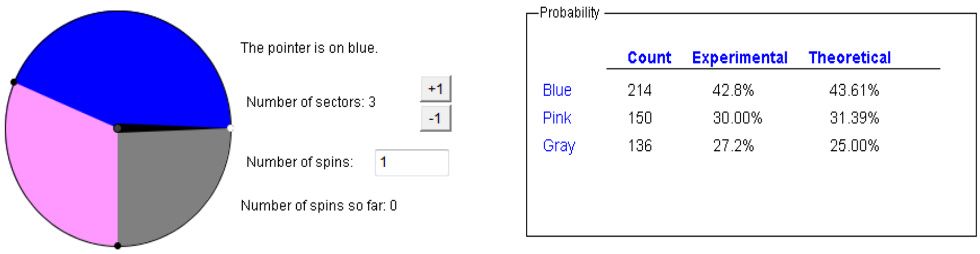
	  β) Περιγράψτε με λόγια και με μια πράξη την κατάσταση που περιγράφει το σχήμα 2. Ποιο είναι το σύνολο πόντων της ομάδας; γ) Χρησιμοποιήστε αυτό το παιχνίδι για να πείτε τι μπορεί να σημαίνουν οι επόμενες πράξεις και υπολογίστε τα αποτελέσματά τους: (+3)+(+4) (–2)+(–5) (–8)+(–3) (–7)+(–5) Μπορείτε να σκεφτείτε έναν κανόνα για να κάνετε αυτές τις προσθέσεις, χωρίς κάθε φορά να σκέφτεστε τις κάρτες; δ) Χρησιμοποιήστε αυτό το παιχνίδι για να πείτε τι μπορεί να σημαίνουν οι επόμενες πράξεις και υπολογίστε τα αποτελέσματά τους: (+3)+(–5) (–2)+(+3) (–5)+(+3) (+7)+(–4) Μπορείτε να σκεφτείτε έναν κανόνα για να κάνετε αυτές τις προσθέσεις, χωρίς κάθε φορά να σκέφτεστε τις κάρτες;	
ΑρΔ5	Στην εφαρμογή χρησιμοποιείται το διακριτό μοντέλο των θετικών και αρνητικών καρτών όπου με την αλληλοαναίρεση ίδιου αριθμού θετικών και αρνητικών καρτών, αισθητοποιούν και κατανοούν την πράξη της πρόσθεσης ακεραίων αριθμών  διεύθυνση ιστοσελίδας: http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_161_g_1_t_1.html?from=topic_t_1.html Οδηγίες:Α-ΑρΔ5-Πρόσθεση με θ-α κάρτες.doc	**Αρ12, Αρ13**
ΑρΔ6	Σε μια παραλλαγή του παιχνιδιού με τις κάρτες, μπορούν από μια ομάδα να αφαιρούνται κάρτες, θετικές ή αρνητικές. Έτσι, για παράδειγμα, όταν αφαιρούνται 5 θετικές κάρτες από 10, μένουν 5, δηλαδή (+10)–(+5)=+5. α) Πως μπορούμε να εκφράσουμε (με πράξη) την κατάσταση μιας ομάδας που είχε 5 αρνητικές κάρτες και της αφαιρέθηκαν 3 αρνητικές; Ποιο είναι τώρα το σκορ της ομάδας; β) Μια ομάδα έχει σκορ +25. Με ποιους τρόπους μπορεί να αυξήσει το σκορ της σε +28; Με ποιους τρόπους μπορεί να μειωθεί το σκορ της σε +20; γ) Πώς θα μπορούσαν από μια ομάδα που δεν έχει ούτε θετικές ούτε αρνητικές κάρτες να αφαιρεθούν 5 θετικές κάρτες; 3 αρνητικές; γ) Χρησιμοποιήστε το παιχνίδι με τις κάρτες για να πείτε τι μπορεί να σημαίνουν οι	**Αρ14, Αρ15**

	παρακάτω πράξεις και υπολογίστε τα αποτελέσματά τους: (+3)–(–5) (–2)–(+3) (–5)–(+3) (+7)–(–4) (–7)–(–5) δ) Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την πρόσθεση για να κάνετε τις αφαιρέσεις, χωρίς κάθε φορά να σκέφτεστε τις κάρτες;	
ΑρΔ7	Στην εφαρμογή χρησιμοποιείται το διακριτό μοντέλο των θετικών και αρνητικών καρτών όπου με το τέχνασμα πρόσθεσης ίδιου αριθμού θετικών και αρνητικών καρτών, αισθητοποιούν και κατανοούν την αφαίρεση ακέραιων αριθμών. Με κατάλληλη χρήση της εφαρμογής κατανοούν σε ένα πραγματικό πλαίσιο ότι η αφαίρεση με έναν ακέραιο αριθμό ισοδυναμεί με την πρόσθεση του αντίθετου αριθμού (διεύθυνση ιστοσελίδας:  http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_162_g_2_t_1.html?from=topic_t_1.htmlΟδηγίες:Α-ΑρΔ7-Αφαίρεση με θ-α κάρτες.doc	**Αρ13, Αρ14**
ΑρΔ8	Ένα ρομποτάκι κινείται πάνω στην αριθμογραμμή μέσω ενός τηλεχειριστηρίου–αριθμομηχανής. Το +5 ερμηνεύεται ως "5 βήματα δεξιά", ενώ το –5 ερμηνεύεται ως "5 βήματα αριστερά". Αν υποθέσουμε ότι το ρομποτάκι ξεκινάει από τη θέση 0, ποια θα είναι η καινούρια του θέση ,όταν πληκτρολογήσουμε: α) +3 β) –5 γ) +3+5 ε) +5–3 η) –4–7 θ) –5+8 ι) +3+5–4 ια) –2+3–5 ιβ) –4–2+6–1 Πώς μπορούμε να οδηγήσουμε το ρομποτάκι από τη θέση 5 στη θέση –2 με δύο κινήσεις; Μπορείτε να διατυπώσετε έναν κανόνα, για να βρίσκουμε εκ των προτέρων τη θέση του;	**Αρ12, Αρ13, Αρ15**
ΑρΔ9	Υπολογίστε την τιμή της αριθμητικής παράστασης $\frac{2}{5}\cdot 10-3\cdot(-2)-\frac{1}{2}(-3+7-2)$ καταγράφοντας σε κάθε κίνηση που κάνετε τον ορισμό ή την ιδιότητα που χρησιμοποιείτε.	**Αρ27, Αρ30**
ΑΔ1	Χρησιμοποιώντας σπίρτα κατασκευάζουμε ένα τετράγωνο (1ο σχήμα) και κατόπιν προσθέτουμε δίπλα του άλλο ένα τετράγωνο (2ο σχήμα), κι άλλο ένα τετράγωνο (3ο σχήμα), κοκ  α) Να βρείτε πόσα σπίρτα χρειάζονται για 4 τετράγωνα, για 10 τετράγωνα, για 57 τετράγωνα β) Να παραστήσετε τα ζεύγη (αριθμός τετραγώνων, αριθμός σπίρτων) σε ένα σύστημα αξόνων.	**Α1, Α2, Α3**

ΑΔ2	Στο ταξί πληρώνουμε 1,19€ για «σημαία» και 0,68€ για κάθε χιλιόμετρο. Πόσα χρήματα θα πληρώσουμε (α) για μια διαδρομή 7 χιλιομέτρων, (β) για μια διαδρομή x χιλιομέτρων.	**Α5**
ΑΔ3	Στο διπλανό σχήμα οι τσάντες έχουν το ίδιο βάρος και κάθε κυβάκι ζυγίζει 50 g. Η ζυγαριά ισορροπεί. Υπολογίστε πόσο ζυγίζει κάθε τσάντα. Περιγράψτε τον τρόπο που θα το υπολογίζατε, αν είχατε μπροστά σας τη ζυγαριά και δεν είχατε χαρτί και μολύβι. Πώς θα περιγράφατε τον παραπάνω τρόπο με τη διαδικασία επίλυσης μιας εξίσωσης; 	**Α12, Α13**
ΑΔ4	Στο διπλανό σχήμα περιγράφεται μια ισότητα (τα δύο x εκφράζουν τον ίδιο αριθμό). Μπορείτε να βρείτε το x χωρίς χαρτί και μολύβι; Περιγράψτε τον τρόπο που λύσατε το πρόβλημα, πρώτα με λόγια και μετά με τη διαδικασία επίλυσης μιας εξίσωσης. 	**Α12, Α13**
ΓΔ1	Δίνονται στους μαθητές μοντέλα ή εικόνες διάφορων στερεών σχημάτων (φυσικών ή γεωμετρικών) και ζητείται να εντοπίσουν βασικά γεωμετρικά σχήματα που γνωρίζουν από το Δημοτικό. Οι μαθητές διερευνούν τα στερεά, καταγράφουν τα ονόματα των σχημάτων που αναγνωρίζουν, παρουσιάζουν τα αποτελέσματα της εργασίας τους και τα συγκρίνουν με εκείνα των συμμαθητών τους. (Το είδος και το πλήθος των βασικών σχημάτων που θα εντοπίσουν οι μαθητές εξαρτάται από το είδος των στερεών που θα δοθούν προς διερεύνηση). Αξιοποιώντας τα αποτελέσματα την δραστηριότητας και με κατάλληλα ερωτήματα, ο διδάσκων προκαλεί μια συζήτηση στην τάξη για την ανάγκη συστηματικής καταγραφής των βασικών γεωμετρικών σχημάτων και σαφήνειας στην απόδοση των ονομάτων, στην περιγραφή των σχέσεων και των ιδιοτήτων. Στο πλαίσιο αυτό γίνεται μια ενημέρωση των μαθητών για το νόημα και την οργάνωση της θεωρίας στη Γεωμετρία και τα Μαθηματικά γενικότερα.	**Γ1**
ΓΔ2	Ο διδάσκων απευθύνει το ερώτημα “τι είναι τετράπλευρο” και χρησιμοποιεί τις απαντήσεις των μαθητών για να τους καθοδηγήσει στη διατύπωση του ορισμού. Στην πολύ πιθανή απάντηση “ένα σχήμα με τέσσερις πλευρές”, παρουσιάζει διαδοχικά τα παρακάτω σχήματα και ζητά κάθε φορά από τους μαθητές να εντοπίσουν εκείνο το χαρακτηριστικό που δε συνδέεται με την εικόνα που έχουν για την έννοια “τετράπλευρο”. 	**Γ1**

ΓΔ3	 Με το Χελωνόκοσμο διερευνούν βασικές ιδιότητες των παραλληλογράμμων χρησιμοποιώντας εργαλεία συμβολικής έκφρασης και δυναμικού χειρισμού γεωμετρικών αντικειμένων. Κατασκευάζουν παραλληλόγραμμα, ορθογώνια, ρόμβους και τετράγωνα. Εκτελούν τις διαδικασίες με διαφορετικές τιμές πλευρών ή γωνιών τις οποίες παράλληλα μπορούν να μεταβάλλουν δυναμικά χρησιμοποιώντας τα διαθέσιμα υπολογιστικά εργαλεία. Κατασκευάζουν παραλληλόγραμμα και τις διάφορες μορφές του, χρησιμοποιώντας τις λιγότερες δυνατές μεταβλητές. Διαπραγματεύονται τις σχέσεις εγκλεισμού των διάφορων μορφών παραλληλογράμμου (αρχείο: Α-ΓΔ3-Κατασκευάζοντας παραλληλόγραμμα Φύλλο εργασίας: Φύλο εργασίας-Α-ΓΔ3- Κατασκευάζοντας παραλληλόγραμμα).	**Γ3, Γ4, Γ6, Α4, Α5**
ΓΔ4	 Με το Χελωνόκοσμο διερευνούν βασικές ιδιότητες των τετραπλεύρων χρησιμοποιώντας εργαλεία συμβολικής έκφρασης και δυναμικού χειρισμού γεωμετρικών αντικειμένων. Διορθώνουν παραμετρικές διαδικασίες, ώστε να κατασκευάζουν τετράπλευρα, παραλληλόγραμμα και τραπέζια και κατανοούν βασικές ιδιότητές τους (αρχείο: Α-ΓΔ4- Κατασκευάζοντας είδη τετραπλεύρων. Φύλλο εργασίας:Φύλλο εργασίας-Α-ΓΔ4- Κατασκευάζοντας είδη τετραπλεύρων)	**Γ3, Γ4, Γ6, Α4, Α5**
ΓΔ5	 Ζητείται από τους μαθητές να σχεδιάσουν ένα οξυγώνιο και ένα αμβλυγώνιο τρίγωνο και να συγκρίνουν τις εξωτερικές με τις εσωτερικές γωνίες κάθε τριγώνου. Αναδεικνύεται η ανεπάρκεια των μετρήσεων για την αιτιολόγηση της σχετικής ιδιότητας (κάθε εξωτερική είναι μεγαλύτερη από κάθε απέναντι εσωτερική γωνία) και χρησιμοποιείται το αρχείο Α-ΓΔ5-εξωτερική τριγώνου για να αναδειχθεί η σημασία της αιτιολόγησης με ένα νοητικό πείραμα.	**Γ4**

ΓΔ6	Το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου χρησιμοποιείται ως βασικό αποτέλεσμα για τον προσδιορισμό μιας σχέσης ανάμεσα στο άθροισμα των γωνιών και το πλήθος των πλευρών ενός τυχαίου πολυγώνου. Οι μαθητές κατασκευάζουν πολύγωνα με 4, 5, 6, 7 και 8 πλευρές, τα χωρίζουν σε τρίγωνα με διαγώνιες που άγονται από μία κορυφή και καταγράφουν σε πίνακα το είδος του πολυγώνου, το πλήθος των τριγώνων στα οποία χωρίζεται και το άθροισμα των γωνιών του. Από τα στοιχεία του πίνακα συνάγουν με επαγωγικό τρόπο τη ζητούμενη γενική σχέση.	**Γ4, Γ5**
ΓΔ7	Για εμβάθυνση στην έννοια της γεωμετρικής κατασκευής, αναπτύσσεται μια δραστηριότητα στην οποία οι μαθητές: α) δημιουργούν ένα γεωμετρικό σχήμα που έχει δεδομένες ιδιότητες και β) περιγράφουν τα βήματα της κατασκευής ενός δεδομένου γεωμετρικού σχήματος. Παράδειγμα: • Να κατασκευάσετε με χρήση του χάρακα, του μοιρογνωμονίου και του διαβήτη (ή με χρήση λογισμικού) ένα παραλληλόγραμμο του οποίου οι πλευρές έχουν μήκη 5,1cm και 3,2cm και σχηματίζουν γωνία 52^o. • Να περιγράψετε τον τρόπο που κατασκευάστηκε με χρήση του χάρακα και του μοιρογνωμονίου (ή με χρήση λογισμικού) το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ στο οποίο οι διαγώνιες έχουν μήκη ΑΓ = 6cm, ΒΔ = 3,5cm και σχηματίζουν γωνία 66^o.  	**Γ6, Γ7**
ΜΔ1	Οι μαθητές καταγράφουν και σχεδιάζουν τα διάφορα είδη γωνιών (μηδενική, κυρτή, οξεία, ορθή, αμβλεία, ευθεία, μη κυρτή, πλήρης) και τις ταξινομούν ως προς το μέτρο με διάφορους τρόπους (γραμμική διάταξη, διάγραμμα ροής κλπ)	**Μ1**
ΣΔ1	 Με αφορμή ένα διάγραμμα, όπως το διπλανό, που παρουσιάζει τα ποσοστά τηλεθέασης ανάμεσα σε δύο τηλεοπτικές εκπομπές, οι μαθητές κρίνουν και αξιολογούν τη δήλωση που έκαναν οι συντελεστές της εκπομπής Α, όταν παρουσίαζαν και συνέκριναν τα ποσοστά τηλεθέασης και η οποία ήταν ότι: «Το γράφημα δείχνει ξεκάθαρα ότι η εκπομπή Α είναι πιο δημοφιλής από την εκπομπή Β και στην πραγματικότητα είναι σχεδόν τρεις φορές πιο δημοφιλής».	**Σ5**
ΣΔ2	 Μέσα από το δυναμικό χειρισμό δεδομένων οι μαθητές καλούνται να διερευνήσουν και να κατασκευάσουν καταστάσεις με μικρά σύνολα δεδομένων τα οποία θα ικανοποιούν κάποια κριτήρια ως προς το πλήθος, το εύρος ή τα μέτρα θέσης, με σκοπό να κατανοήσουν βαθύτερα και πιο διαισθητικά διάφορες πτυχές ή/και ιδιότητες εννοιών της στατιστικής, να αναπτύξουν στρατηγικές ελέγχου κάποιων παραμέτρων ανοικτών	**Σ6, Σ7**

	προβλημάτων καθώς και στρατηγικές για τη διερεύνηση τέτοιων προβλημάτων. Διεύθυνση ιστοσελίδαςhttp://illuminations.nctm.org/activitydetail.aspx?ID=160 Οδηγίες:Οδηγίες-Α&Β-Σ Διάμεσος _ Μέση τιμή	
ΠΔ1	Ρίχνοντας δυο ζάρια τι πιθανότητα έχουμε να φέρουμε δυο 6άρια και τι πιθανότητα να φέρουμε ένα 6 κι ένα 5; Τι είναι πιο εύκολο να φέρουμε: ζαριά με άθροισμα μεγαλύτερο από 7 ή ζαριά με γινόμενο μικρότερο από 7;	**Π3**
ΠΔ2	Σε ένα τροχό τύχης www.shodor.org/interactivate/activities/AdjustableSpinner που είναι χωρισμένος σε 2 ή περισσότερους άνισους κυκλικούς τομείς με διαφορετικά χρώματα θέλουμε να εκτιμήσουμε την πιθανότητα, όταν γυρίσουμε το δείκτη, να πετύχουμε κάποιο συγκεκριμένο χρώμα πχ το μπλε.  Εκτελώντας αρχικά μικρό αριθμό δοκιμών και κατόπιν ολοένα και μεγαλύτερο ζητάμε από τους μαθητές να σημειώσουν σε ένα φύλλο εργασίας τις τιμές της σχετικής συχνότητας για το μπλε χρώμα μετά από 5, 10 50, 100, 500, 1000, 2000, 5000 κλπ δοκιμές. Ζητάμε κατόπιν οι μαθητές να εκτιμήσουν την πιθανότητα να πετύχουμε το μπλε χρώμα και συζητάμε με ποιον τρόπο έφτασαν στην εκτίμησή της.	**Π4**

Β΄ Γυμνασίου

Θεματική ενότητα: Αριθμοί – Άλγεβρα

Ενδεικτικές διδακτικές ώρες: 46

Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα	**Βασικά θέματα**	**Δραστηριότητες**	**Εκπαιδευτικό υλικό**
Αρ1. Διερευνούν τις δεκαδικές *αναπαραστάσεις* των ρητών αριθμών και κάνουν μετατροπές από τη μία μορφή στην άλλη. *Αρ2.* Αναγνωρίζουν, μέσα από προβλήματα, την αναγκαιότητα εισαγωγής και χρήσης των τετραγωνικών ριζών θετικών αριθμών και υπολογίζουν τετραγωνικές ρίζες με δοκιμές, με διαδοχικές προσεγγίσεις και με χρήση υπολογιστή τσέπης. *Αρ3.* Διερευνούν την ύπαρξη αριθμών που δεν είναι ρητοί και αναγνωρίζουν τους άρρητους. *Αρ4.* Αναπαριστούν γεωμετρικά και τοποθετούν στην ευθεία αριθμούς της μορφής $\sqrt{\alpha}$. *Αρ5.* Αναγνωρίζουν το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Διερευνούν τις σχέσεις των συνόλων των φυσικών, των ακεραίων, των ρητών, των άρρητων και των πραγματικών. *Αρ6.* Συγκρίνουν και διατάσσουν πραγματικούς αριθμούς χρησιμοποιώντας την ευθεία. *Αρ7.* Επεκτείνουν τις πράξεις των ρητών και τις ιδιότητές τους στους πραγματικούς.	**Άρρητοι αριθμοί** • άρρητοι, επέκταση από τους ρητούς στους πραγματικούς, πυκνότητα *(8 ώρες)*	Είναι σημαντικό, μέσα από δραστηριότητες, να αναδειχθούν: α) η αναγκαιότητα εισαγωγής των τετραγωνικών ριζών και των άρρητων αριθμών, β) τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των άρρητων, καθώς και τα κοινά χαρακτηριστικά τους με τους ρητούς στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. (*ενδεικτική δραστηριότητα ΑρΔ1*)	Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, Βλάμος κα, ΟΕΔΒ, 2010) κεφ. 2^{o}.

Αρ8. Διερευνούν την ιδιότητα της πυκνότητας των πραγματικών αριθμών. *Αρ9.* Χρησιμοποιούν τους πραγματικούς αριθμούς στην επίλυση προβλημάτων.			
Α1. Αναγνωρίζουν συμμεταβαλλόμενα ποσά (μεταβλητές) σε συγκεκριμένες καταστάσεις και διακρίνουν ποιο ποσό εξαρτάται από το άλλο. *Α2.* Αναγνωρίζουν σχέσεις που είναι συναρτήσεις (σε κάθε τιμή της μιας αντιστοιχεί μόνο μία τιμή της άλλης) και τις διακρίνουν από σχέσεις που δεν είναι συναρτήσεις. Αναγνωρίζουν ανεξάρτητη και εξαρτημένη μεταβλητή σε μια συνάρτηση. *Α3.* Σχεδιάζουν τη γραφική παράσταση συναρτήσεων χρησιμοποιώντας πίνακες τιμών. *Α4.* Εξετάζουν αν ένα σημείο (διατεταγμένο ζεύγος) ανήκει στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης. *Α5.* Υπολογίζουν, γραφικά και αλγεβρικά, τις τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής για δεδομένες τιμές της ανεξάρτητης και αντιστρόφως. *Α6.* Μοντελοποιούν μια κατάσταση με μια συνάρτηση λεκτικά, αριθμητικά (με πίνακα τιμών), γεωμετρικά (με γραφική παράσταση) και συμβολικά (με τύπο). *Α7.* Βρίσκουν τις τιμές που μπορεί να πάρει η	**Κανονικότητες–Συναρτήσεις** • συμμεταβολή μεγεθών, πολλαπλές αναπαραστάσεις συνάρτησης (7 ώρες)	Η συμμεταβολή μεγεθών είναι οικεία στους μαθητές από την καθημερινή τους ζωή αλλά και από προηγούμενες σχολικές εμπειρίες. Οι δραστηριότητες θα πρέπει να εισάγουν την έννοια της συνάρτησης και των αναπαραστάσεών της με άμεση αναφορά σε καταστάσεις και προβλήματα (μοντελοποίηση). Η ικανότητα να μεταφράζουν από τη μία αναπαράσταση στην άλλη (όπου είναι δυνατόν) είναι στοιχείο κατανόησης της έννοιας της συνάρτησης. (*ενδεικτική δραστηριότητα ΑΔ1*)	Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, Βλάμος κα, ΟΕΔΒ, 2010) παρ. 3.1 και 3.2. http://www.schools.ac.cy/eyliko/mesi/Themata/mathimatika/gymnasio/11_03_2011_ekpaideftiko_yliko_enotita_4.pdf σελ 20-34 (μόνο δραστηριότητες).

ανεξάρτητη μεταβλητή από τη γραφική παράσταση και από τις συνθήκες της κατάστασης. *Α8.* Επιλύουν προβλήματα που μοντελοποιούνται με συναρτήσεις. Αιτιολογούν τις απαντήσεις τους χρησιμοποιώντας τις αναπαραστάσεις των συναρτήσεων (γραφικές παραστάσεις, πίνακες τιμών, τύπους) και μεταβαίνουν από τη μία αναπαράσταση στην άλλη (όπου είναι δυνατόν).			
Α9. Προσδιορίζουν τη σχέση που συνδέει τις αντίστοιχες τιμές δυο ανάλογων ποσών. *Α10.* Διερευνούν συγκεκριμένες συναρτήσεις της μορφής y=αx. Σχεδιάζουν τη γραφική παράστασή τους και διαπιστώνουν ότι είναι ευθεία. Εξηγούν γιατί η γραφική παράσταση διέρχεται από την αρχή και διερευνούν το ρόλο του α. *Α11.* Διερευνούν τη μεταβολή του y για οποιαδήποτε μοναδιαία αύξηση του x σε συναρτήσεις της μορφής y=αx. Συγκρίνουν με συναρτήσεις που η αντίστοιχη μεταβολή του y δεν είναι σταθερή (πχ τετραγωνικές) *Α12.* Επιλύουν (αλγεβρικά και γραφικά) προβλήματα ανάλογων ποσών χρησιμοποιώντας την συνάρτηση y=αx.	**Κανονικότητες-Συναρτήσεις** • ανάλογα ποσά, η συνάρτηση y=αx. *(4 ώρες)*	Μέσα από προβλήματα ανάλογων ποσών μπορεί να εισαχθεί και να διερευνηθεί η συνάρτηση y=αx και οι αναπαραστάσεις της. Η χρήση της γραφικής παράστασης από τους μαθητές ως εργαλείο διερεύνησης και αιτιολόγησης αποτελεί σημαντικό στόχο των δραστηριοτήτων. (ενδεικτικές δραστηριότητες ΑΔ2, ΑΔ3, ΑΔ4)	Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, Βλάμος κα, ΟΕΔΒ, 2010) παρ. 3.3. Β-ΑΔ3-Ανάλογα ποσά και η ψ=αχ-1 , Β-ΑΔ3-Ανάλογα ποσά και η ψ=αχ-2 Φύλλο εργασίας- Β-ΑΔ3-Ανάλογα ποσά και η ψ=αχ Β-ΑΔ4-Η μεταβολή της τεταγμένης στην ψ=αχ
Α13. Μοντελοποιούν και επιλύουν (γραφικά και αλγεβρικά) προβλήματα με συναρτήσεις της μορφής y=αx+β.	**Κανονικότητες-Συναρτήσεις** • η συνάρτηση y=αx+β *(4 ώρες)*	Μέσω της y=αx+β πρέπει να αρχίσει να αναδεικνύεται ο ρόλος των γραμμάτων στην άλγεβρα ως μεταβλητών (χ, ψ) ή ως	Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, Βλάμος κα, ΟΕΔΒ, 2010) παρ. 3.4.

Α14. Διερευνούν τη συνάρτηση y=αx+β. Εξετάζουν το ρόλο του α (σταθερή μεταβολή του y για οποιαδήποτε μοναδιαία αύξηση του x) και του β («σημείο» τομής με τον άξονα των y). *Α15.* Βρίσκουν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της y=αx+β με τους άξονες. *Α16.* Χρησιμοποιούν τις γραφικές παραστάσεις για την επίλυση εξισώσεων της μορφής αx+β=γ.		παραμέτρων (α, β). Ενδεικτική δραστηριότητα ΑΔ5.	
Α17. Προσδιορίζουν τη σχέση που συνδέει δυο αντιστρόφως ανάλογα ποσά. *Α18.* Διερευνούν τη συνάρτηση y = α/x και τη γραφική της παράσταση. *Α19.* Επιλύουν προβλήματα αντιστρόφως ανάλογων ποσών χρησιμοποιώντας διάφορες αναπαραστάσεις της συνάρτησης y=α/x.	**Κανονικότητες-Συναρτήσεις** • αντιστρόφως ανάλογα ποσά, η συνάρτηση y=α/x *(2 ώρες)*	Μέσω δραστηριοτήτων πρέπει να αναδειχθούν τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των αντιστρόφως ανάλογων ποσών και της υπερβολής σε αντιδιαστολή με τα ανάλογα ποσά και την ευθεία. (*ενδεικτικές δραστηριότητες ΑΔ6, ΑΔ7*)	Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, Βλάμος κα, ΟΕΔΒ, 2010) παρ. 3.5. Β-ΑΔ7-Η_υπερβολή
Α20. Διερευνούν τις ιδιότητες των δυνάμεων με βάση ρητό και εκθέτη φυσικό, τις διατυπώνουν συμβολικά και τις αιτιολογούν χρησιμοποιώντας τον ορισμό της δύναμης. *Α21.* Καταλήγουν στον ορισμό των δυνάμεων με ακέραιο εκθέτη, επεκτείνουν τις ιδιότητες των δυνάμεων με φυσικό εκθέτη και τις χρησιμοποιούν σε προβλήματα. *Α22.* Χρησιμοποιούν την τυποποιημένη μορφή για να εκφράσουν μεγάλους και μικρούς αριθμούς. *Α23.* Υπολογίζουν την τιμή απλών αριθμητικών	***Αλγεβρική παράσταση*** • αναπαραστάσεις αριθμών, σύντομη γραφή αριθμού *(8 ώρες)*	Οι μαθητές από τον ορισμό των δυνάμεων, μέσω κατάλληλων δραστηριοτήτων, οδηγούνται στις ιδιότητες και από τις ιδιότητες στη διατύπωση του ορισμού της δύναμης με αρνητικό εκθέτη. Επιδίωξη είναι μια ισορροπία ανάμεσα στην εννοιολογική κατανόηση και στη διαδικαστική γνώση.	Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Α΄ Γυμνασίου, Βανδουλάκης κα, ΟΕΔΒ, 2010), παρ. 7.8, 7.9, 7.10.

παραστάσεων που περιέχουν και δυνάμεις.			
Α24. Διερευνούν κανονικότητες και εκφράζουν το γενικό όρο τους με μια αλγεβρική παράσταση. *Α25.* Μοντελοποιούν ένα πρόβλημα με μια αλγεβρική παράσταση. *Α26.* Απλοποιούν απλές αλγεβρικές παραστάσεις με τη βοήθεια της επιμεριστικής ιδιότητας (απαλοιφή παρένθεσης και αναγωγή ομοίων όρων). *Α27.* Υπολογίζουν την αριθμητική τιμή μιας αλγεβρικής παράστασης για δεδομένες τιμές των μεταβλητών. Διακρίνουν το ρόλο της μεταβλητής σε μια παράσταση από το ρόλο του αγνώστου σε μια εξίσωση. *Α28.* Αναγνωρίζουν στοιχεία της δομής μιας αλγεβρικής παράστασης (πχ η x+4(x-3) είναι άθροισμα με όρους το x και το γινόμενο 4(x-3), που έχει παράγοντες το 4 και το x-3 κλπ).	***Αλγεβρική παράσταση*** • μεταβλητές, αλγεβρικές παραστάσεις και απλοί μετασχηματισμοί *(5 ώρες)*	Με δραστηριότητες μοντελοποίησης καταστάσεων, μετάφρασης λεκτικών διατυπώσεων, και υπολογισμού αριθμητικών τιμών, αναδεικνύεται η ανάγκη χρήσης αλγεβρικής παράστασης. (*ενδεικτική δραστηριότητα ΑΔ8*)	Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, Βλάμος κα, ΟΕΔΒ, 2010) παρ. 1.1.
Α29. Μοντελοποιούν προβλήματα με γραμμικές εξισώσεις της μορφής αx+β=γx+δ (με άγνωστο και στα δύο μέλη) και τις επιλύουν αριθμητικά και γραφικά (σύνδεση με συναρτήσεις της μορφής ψ=αx+β). Ελέγχουν αν η λύση της εξίσωσης είναι και λύση του προβλήματος. *Α30.* Επιλύουν την εξίσωση αx+β=γx+δ (και άλλες που περιέχουν παρενθέσεις ή/και κλάσματα και ανάγονται σε αυτήν),	***Ισότητες–ανισότητες*** • η εξίσωση (αx+β=γx+δ) ως εργαλείο επίλυσης προβλημάτων • μετασχηματισμοί εξίσωσης. *(8 ώρες)*	Μέσα από δραστηριότητες οι μαθητές διατυπώνουν τις ιδιότητες της ισότητας και επιλύουν εξισώσεις. Είναι σκόπιμο η χρήση πρακτικών κανόνων να μην οδηγήσει στην απώλεια του νοήματος, αλλά να υπάρχουν συνεχείς αναφορές στις αντίστοιχες μαθηματικές ιδέες. Έμφαση στην επίλυση προβλημάτων εξισώσεων και τη	Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, Βλάμος κα, ΟΕΔΒ, 2010) παρ. 1.2 και 1.4.

χρησιμοποιώντας αρχικά διάφορα μοντέλα – μεταφορές και στη συνέχεια τις ιδιότητες της ισότητας. *Α31.* Αναγνωρίζουν αν ένας αριθμός είναι λύση της εξίσωσης ή/και του αντίστοιχου προβλήματος. *Α32.* Αναγνωρίζουν ότι μια εξίσωση μπορεί να έχει άπειρες λύσεις ή καμία λύση.		σύνδεσή τους με τις συναρτήσεις. (ενδεικτικές *δραστηριότητες ΑΔ9, ΑΔ10*)	

Θεματική ενότητα: Γεωμετρία – Μέτρηση

Ενδεικτικές διδακτικές ώρες: 47

Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα	**Βασικά θέματα**	**Δραστηριότητες**	**Εκπαιδευτικό υλικό**
Γ1. Αναγνωρίζουν τη διαφορά ανάμεσα σε ευθύγραμμο τμήμα και διάνυσμα. *Γ2.* Αναπαριστούν θέσεις, διευθύνσεις και διαδρομές με τη βοήθεια διανυσμάτων.	**Προσανατολισμός στο χώρο** • θέσεις, διευθύνσεις και διαδρομές • δόμηση του χώρου και συντεταγμένες *(3 ώρες)*	(*ενδεικτική δραστηριότητα ΓΔ1*)	Σχολικό βιβλίο Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, Π. Βλάμος κ.ά., Γεωμετρία, Κεφ. 2^{ο} (μόνο η παρ. 2.5).
Γ3. Διερευνούν και αιτιολογούν τις ιδιότητες των γεωμετρικών σχημάτων με επαγωγικούς συλλογισμούς και (μη τυπικές) αποδείξεις. *Γ4.* Χρησιμοποιούν κανόνα, διαβήτη ή άλλα εργαλεία για να σχεδιάσουν γεωμετρικά σχήματα.	**Γεωμετρικά σχήματα** • ανάλυση των γεωμετρικών σχημάτων σε στοιχεία και ιδιότητες • κατασκευές και σχεδιασμός γεωμετρικών σχημάτων *(6 ώρες)*	Οι μαθητές θα κατασκευάσουν τα ζητούμενα σχήματα (π.χ.κατασκευή του κοινού σημείου των τριών μεσοκαθέτων, τριών διχοτόμων, τριών υψών ή τριών διαμέσων ενός τριγώνου, κατασκευή κανονικών πολυγώνων εγγεγραμμένων σε κύκλο) και αξιοποιώντας τις δυνατότητες κίνησης και μέτρησης του λογισμικού, θα εντοπίσουν	Σχολικό βιβλίο Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, Π. Βλάμος κ.ά., Γεωμετρία, Κεφ. 3^{ο}. Β-ΓΔ2-Σχέση εγγεγραμμένης και επίκεντρης γωνίας Β-ΓΔ3-Κέντρα τριγώνου

		αναλλοίωτες σχέσεις και θα διατυπώσουν ιδιότητες. (*ενδεικτικές δραστηριότητες ΓΔ1, ΓΔ2*)	
Γ5. Αναγνωρίζουν τη σημασία της μεταφοράς και της στροφής στις γεωμετρικές κατασκευές και την αιτιολόγηση ιδιοτήτων των σχημάτων. *Γ6.* Κατασκευάζουν το σχήμα που προκύπτει από τη μεταφορά ή τη στροφή ενός σχήματος και αναγνωρίζουν τη σχέση του με το αρχικό. *Γ7.* Αναγνωρίζουν σχήματα με άξονα συμμετρίας ή κέντρο συμμετρίας και κατασκευάζουν τα συμμετρικά γεωμετρικών σχημάτων ως προς διάφορους άξονες ή κέντρα σε πραγματικό και ψηφιακό περιβάλλον. *Γ8.* Εντοπίζουν τις γεωμετρικές ιδιότητες της αξονικής και της κεντρικής συμμετρίας.	**Μετασχηματισμοί** • μεταφορά και στροφή • αξονική συμμετρία (Ανάκλαση) • κεντρική συμμετρία *(12 ώρες)*	Ο μετασχηματισμός «παράλληλη μεταφορά» έχει χρησιμοποιηθεί έμμεσα στην κατασκευή της παράλληλης προς δοθείσα ευθεία (μεταφορά του γνώμονα) και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αιτιολόγηση της ισότητας των γωνιών που σχηματίζονται από δύο παράλληλες και μια τέμνουσα. Η «ανάκλαση» ως προς άξονα αξιοποιεί την έννοια της μεσοκάθετης. Ο δυναμικός χαρακτήρας των μετασχηματισμών αναδεικνύεται με τη χρήση λογισμικού. (*ενδεικτικές δραστηριότητες ΓΔ4, ΓΔ5, ΓΔ6*)	Σχολικό βιβλίο Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, Π. Βλάμος κ.ά., Γεωμετρία, Κεφάλαιο 2^o (μόνο η παρ. 2.5). http://www.e-yliko.gr/Lists/List7/simmetria.aspx Β-ΓΔ4-Μετασχηματισμοί σημείου
Μ1. Αναγνωρίζουν τη σχέση ανάμεσα σε μήκος διαμέτρου, μήκος κύκλου και μήκος τόξου και αιτιολογούν τους σχετικούς τύπους.	**Μέτρηση μήκους** • μέτρηση με μη τυπικές και τυπικές μονάδες μέτρησης μήκους *(2 ώρες)*	Η μέτρηση του κύκλου με μοίρες και μονάδες μήκους προσφέρεται για μια συζήτηση σχετικά με τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα των δύο μονάδων μέτρησης.	Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, Βλάμος κα, ΟΕΔΒ, 2010) κεφ.3 (παράγραφοι 3.3, 3.4)
Μ2. Αναγνωρίζουν και κατασκευάζουν ισεμβαδικές επιφάνειες με βάση ιδιότητες και σχέσεις	**Μέτρηση επιφάνειας** • Άμεσες και έμμεσες συγκρίσεις	Για τη δημιουργία των τύπων εμβαδού των γεωμετρικών σχημάτων είναι	Σχολικό βιβλίο Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, Π. Βλάμος κ.ά., Γεωμετρία, Κεφ.

για να αιτιολογήσουν τους γνωστούς τύπους εμβαδού. *Μ3.*Διερευνούν και διατυπώνουντο Πυθαγόρειο θεώρημα και το αντίστροφό του και τα χρησιμοποιούν για τον υπολογισμό μηκών και τον προσδιορισμό ορθών γωνιών. *Μ4.*Υπολογίζουν το εμβαδό κυκλικού δίσκου και κυκλικού τομέα. *Μ5.*Επιλύουν προβλήματα υπολογισμού εμβαδών με τη χρήση κατάλληλων μονάδων μέτρησης (με βάση την ακρίβεια που απαιτείται).	επιφανειών. • Μέτρηση με μη τυπικές και τυπικές μονάδες μέτρησης επιφανειών *(16 ώρες)*	βασικός ο μετασχηματισμός τους σε απλούστερα σχήματα με διατήρηση του εμβαδού. (*ενδεικτικές δραστηριότητες ΜΔ1, ΜΔ2, ΜΔ3, ΜΔ4*)	1ο& 3ο. Β-ΜΔ3-Πυθαγόρειο θεώρημα Β-ΜΔ4-Εμβαδόν κυκλικού δίσκου
*Μ6.*Υπολογίζουν γωνίες (κλίσεις) χρησιμοποιώντας ιδιότητες ή σχέσεις (όμοια ορθογώνια τρίγωνα, λόγος ευθυγράμμων τμημάτων). *Μ7.*Χρησιμοποιούν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς (εφαπτομένη, ημίτονο και συνημίτονο οξείας γωνίας) για τον υπολογισμό γωνιών. *Μ8.*Χρησιμοποιούν το Πυθαγόρειο θεώρημα και την Τριγωνομετρία για την επίλυση ενός ορθογωνίου τριγώνου σε σχετικά προβλήματα.	**Τριγωνομετρία** *(8 ώρες)*	Με αφετηρία την ερμηνεία των πινακίδων οδικής κυκλοφορίας (κλίση δρόμου) γίνεται μια πρώτη αναφορά στην έννοια της ομοιότητας τριγώνων και στην ανάγκη εισαγωγής τριγωνομετρικών αριθμών. (*ενδεικτική δραστηριότητα ΜΔ5*)	Σχολικό βιβλίο Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, Π. Βλάμος κ.ά., Γεωμετρία, Κεφ. 2ο.

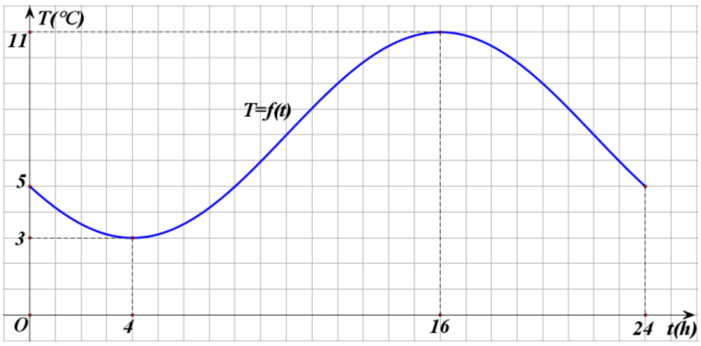
Θεματική ενότητα: Στοχαστικά μαθηματικά

Ενδεικτικές διδακτικές ώρες: **7**

Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα	**Βασικά θέματα**	**Δραστηριότητες**	**Εκπαιδευτικό υλικό**
Σ1. Διατυπώνουν ερωτήματα που αφορούν το ευρύτερο κοινωνικό περιβάλλον και που να μπορούν να απαντηθούν με δεδομένα από πραγματικές ή υποθετικές καταστάσεις. *Σ2.* Διακρίνουν τους πιθανούς τρόπους συλλογής δεδομένων (απογραφή – διαρκής καταγραφή- δειγματοληψία). *Σ3.* Κατασκευάζουν κυκλικά διαγράμματα και διαγράμματα διασποράς. *Σ4.* Αναγνωρίζουν ότι η συσχέτιση ανάμεσα σε δύο χαρακτηριστικά δεν είναι κατ’ ανάγκη σχέση αιτίου αποτελέσματος. *Σ5.* Αναγνωρίζουν εσφαλμένους ή/ και παραπλανητικούς τρόπους κατασκευής και παρουσίασης στατιστικών διαγραμμάτων που σχετίζονται με το εμβαδόν. *Σ6.* Εξετάζουν κριτικά στατιστικές έρευνες και ερμηνείες τους.	**Δεδομένα** • Συλλογή, αναπαράσταση , ερμηνεία δεδομένων *(4 ώρες)*	*(ενδεικτική δραστηριότητα ΣΔ1)*	Μέρος του 4ου κεφαλαίου του βιβλίου: Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου (Βλάμος, Δρούτσας κλπ) με κατάλληλες τροποποιήσεις.
Σ7. Διερευνούν ιδιότητες της μέσης τιμής.	**Μέτρα θέσης** *(2 ώρες)*	*(ενδεικτική δραστηριότητα ΣΔ2)*	Μέρος του 4ου κεφαλαίου του βιβλίου: Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου (Βλάμος, Δρούτσας κλπ) με κατάλληλες τροποποιήσεις http://illuminations.nctm.org/activitydetail.aspx?ID=160

			Οδηγίες: Οδηγίες- Β-ΣΔ2- Διάμεσος_ Μέση τιμή
Σ8. Διερευνούν την έννοια της μεταβλητότητας και τα χαρακτηριστικά της.	**Μεταβλητότητα** *(1 ώρα)*	*Η μεταβλητότητα των δεδομένων για το ύψος ενός ανθρώπου εκτός από τον παράγοντα της ηλικίας, μπορεί να οφείλεται και σε σφάλματα μέτρησης.*	

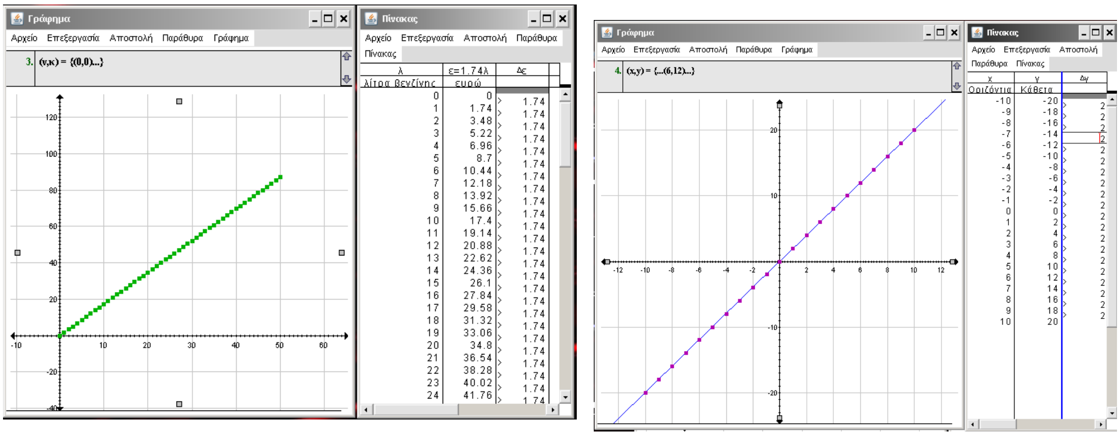
Ενδεικτικές δραστηριότητες

Α/Α	**Περιγραφή δραστηριότητας**	**ΠΜΑ**
ΑρΔ1	Μια μικρή αίθουσα του σχολείου μας έχει δάπεδο σχήματος τετραγώνου πλευράς 4 m. Μια άλλη αίθουσα έχει επίσης δάπεδο σχήματος τετραγώνου, αλλά διπλάσιου εμβαδού. Πόσο είναι το μήκος της πλευράς του δαπέδου της δεύτερης αίθουσας;	**Αρ2, Αρ3**
ΑΔ1	Η παρακάτω γραφική παράσταση δείχνει τη θερμοκρασία Τ (σε βαθμούς Κελσίου) ενός τόπου κατά τη διάρκεια ενός 24ώρου.  α) Ποια είναι η ελάχιστη και ποια η μέγιστη θερμοκρασία; Ποια ώρα του 24ώρου συμβαίνουν; Ποια σημεία της γραφικής παράστασης δείχνουν την ελάχιστη και τη μέγιστη θερμοκρασία; β) Ποια είναι η θερμοκρασία στις 2 τη νύχτα, στις 2 το μεσημέρι και στις 11 το βράδυ; Ποια ώρα η θερμοκρασία είναι 6ºC; γ) Τι εκφράζει με βάση το πρόβλημα το σημείο (20, 9) της γραφικής παράστασης; δ) Ποιες άλλες πληροφορίες μπορούμε να αντλήσουμε από αυτή τη γραφική παράσταση;	**Α4, Α5, Α8**
ΑΔ2	Το 60% της μάζας του μοσχαρίσιου κρέατος είναι νερό. Με βάση αυτή την πληροφορία συμπληρώστε τον πίνακα:	**Α9, Α10, Α12**

μάζα κρέατος σε Kg (x)	2	6	8		20	
μάζα νερού σε Kg (y)				6		

Είναι η "μάζα κρέατος" (x) και η "μάζα νερού" (y) ποσά ανάλογα; Ποια σχέση συνδέει τα δύο ποσά; Ποιες τιμές μπορεί να πάρει η μεταβλητή x; Κατασκευάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης, περιγράψτε και εξηγήστε τα χαρακτηριστικά της (για παράδειγμα, το σχήμα της, κάποια σημεία της κλπ).

ΑΔ3



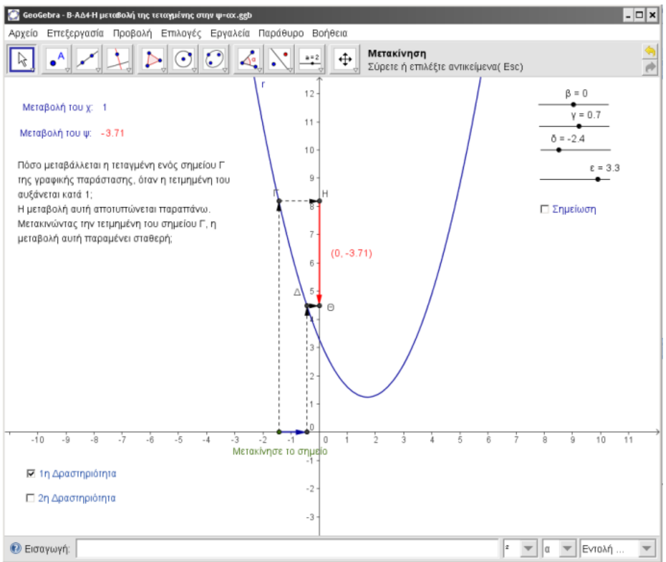
Χρησιμοποιούν τη δυνατότητα πολλαπλών αναπαραστάσεων (τύπος, πίνακας τιμών, γραφική αναπαράσταση) των μαθηματικών αντικειμένων του F-Probe, για να μεταβούν από τα ανάλογα ποσά στη συνάρτηση ψ=αχ και να διερευνήσουν το ρόλο του α στη γραφική της παράσταση (αρχεία;Β-ΑΔ3-Ανάλογα ποσά και η ψ=αχ-1, Β-ΑΔ3-Ανάλογα ποσά και η ψ=αχ-2

Φύλλο εργασίας:Φύλλο εργασίας-Β-ΑΔ3-Ανάλογα ποσά και η ψ=αχ).

Α4, Α5, Α7, Α8, Α9, Α10

ΑΔ4

Με το Geogebra διερευνούν τη μεταβολή της τεταγμένης ενός σημείου που ανήκει σε μία ευθεία της μορφής ψ=αχ, όταν η τετμημένη του αυξάνεται μοναδιαία και διαπιστώνουν ότι η μεταβολή αυτή είναι σταθερή και ισούται με την κλίση α της ευθείας. Διαπιστώνουν ότι αυτό δεν ισχύει σε γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων που δεν είναι ευθείες. (αρχείο: Β-ΑΔ4-Η μεταβολή της τεταγμένης στην ψ=αχ).



Α11

ΑΔ5

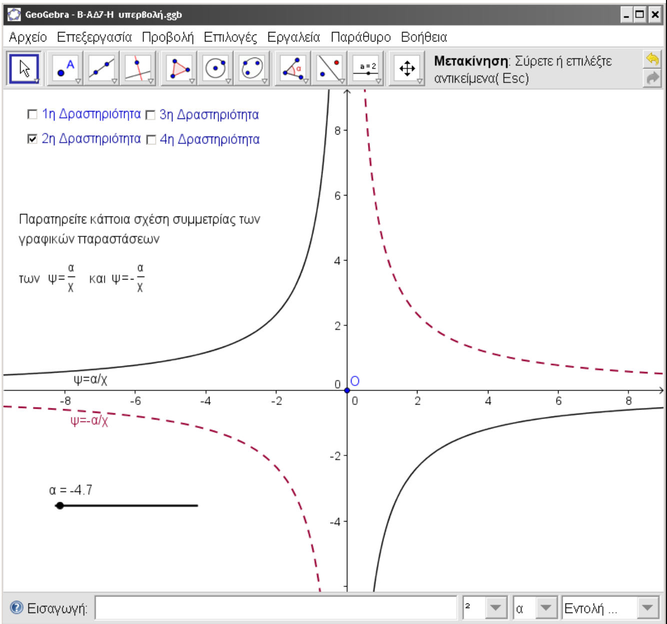
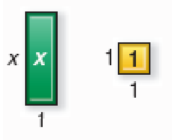
Ο Παύλος πήγε για κούρεμα. Όταν γύρισε στο σπίτι του, κοίταξε στον καθρέφτη του και είπε: «Είναι πολύ κοντά!».

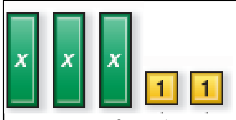
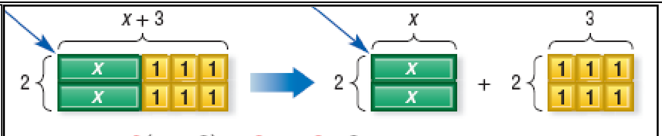
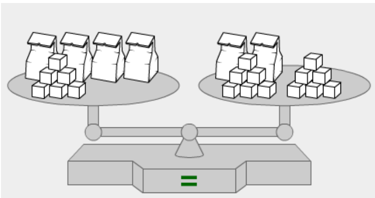
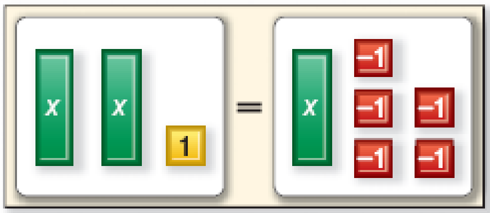
Αποφάσισε να μην ξανακόψει τα μαλλιά του για μεγάλο διάστημα και να μετράει πόσο γρήγορα μεγαλώνουν. Ο παρακάτω πίνακας δείχνει το μήκος των μαλλιών του Παύλου (σε εκατοστά) όπως το μετρούσε κάθε μήνα:

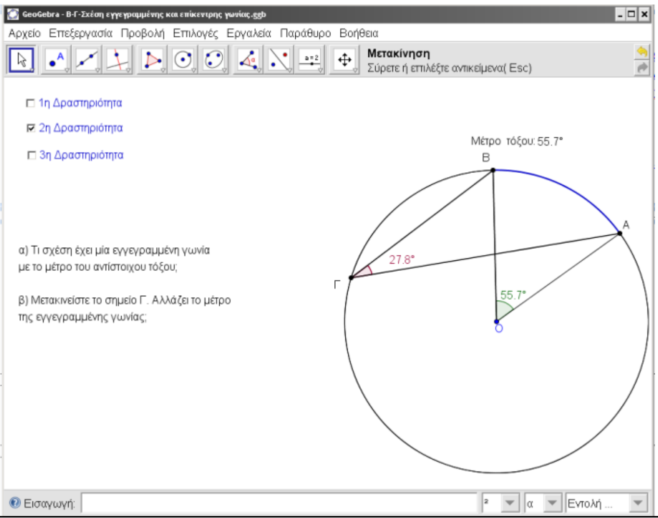
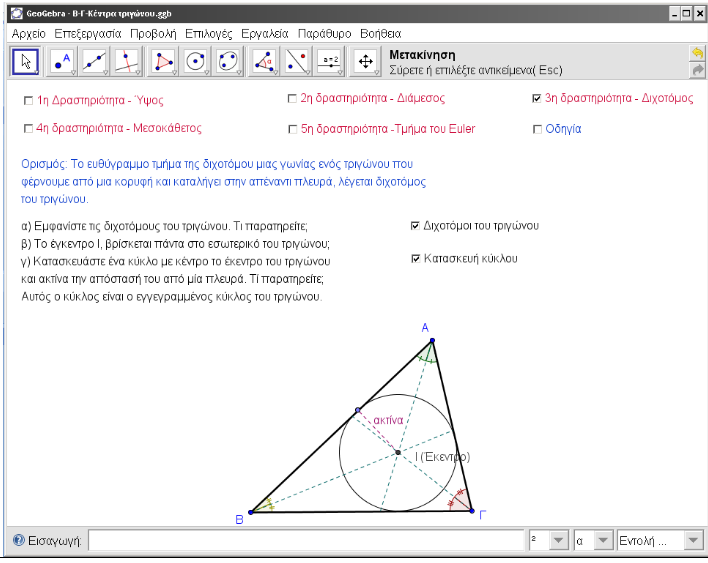
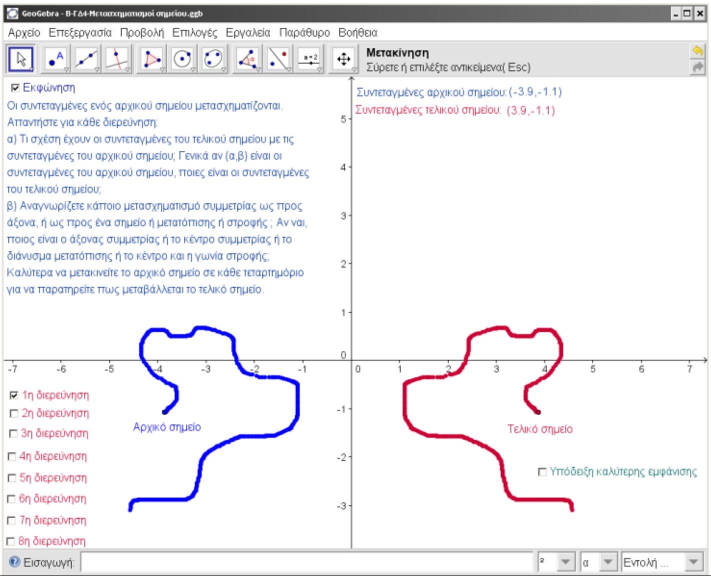
Χρόνος (σε μήνες)	0	1	2	3	4	5	6
Μήκος (σε εκατοστά)	2	3,5	5	6,5			

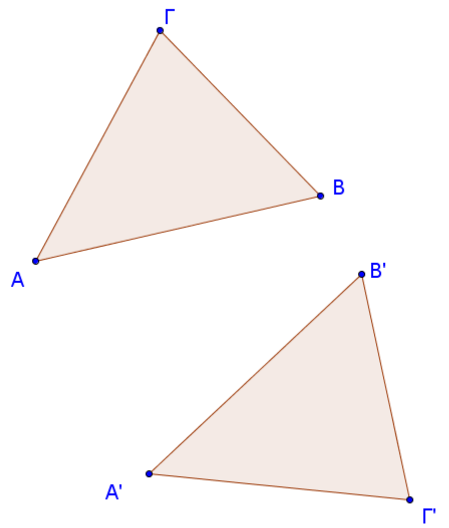
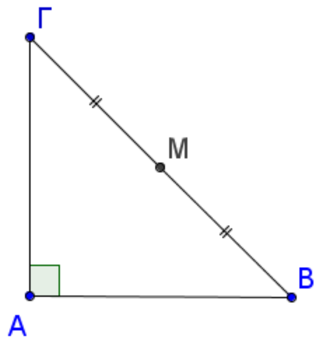
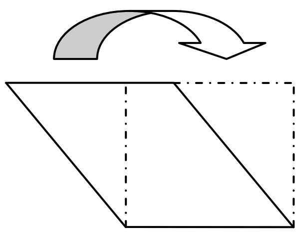
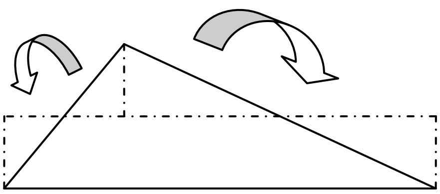
1. Πόσο μακριά ήταν τα μαλλιά του Παύλου μετά το κούρεμα;

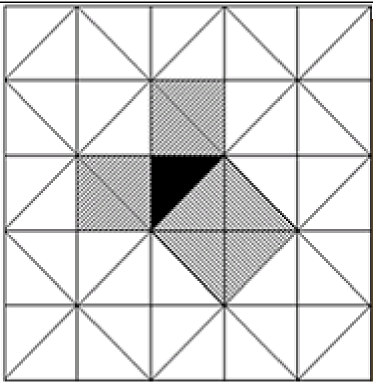
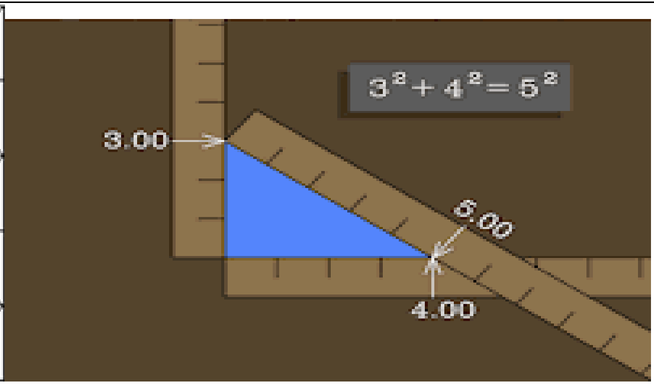
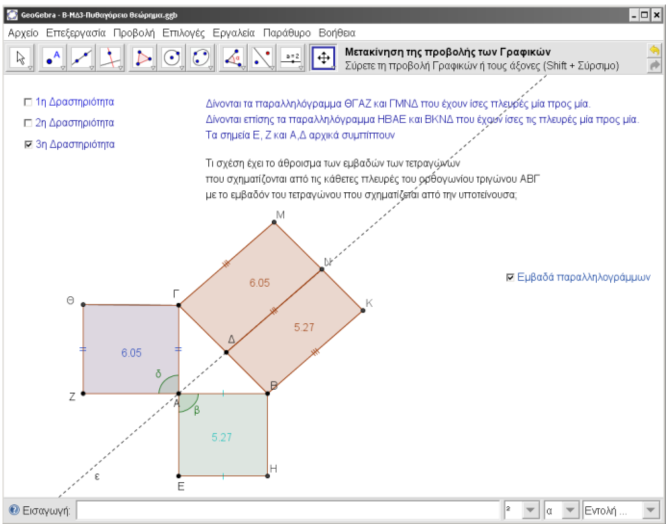
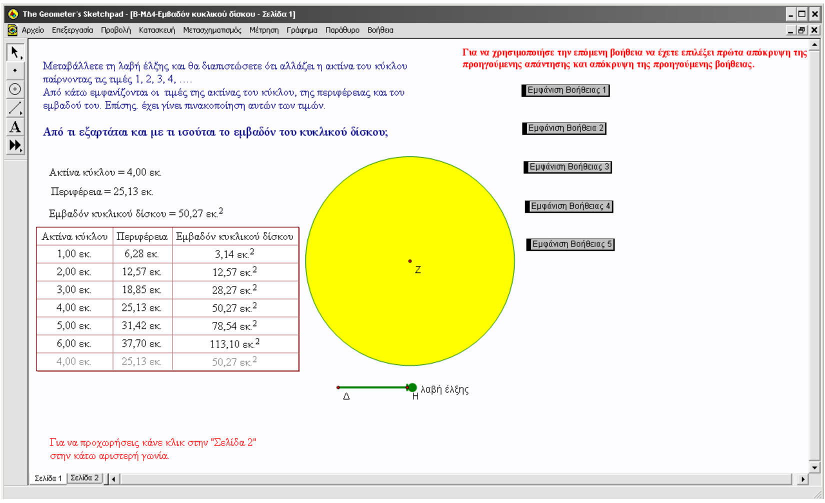
Α13, Α14, Α16

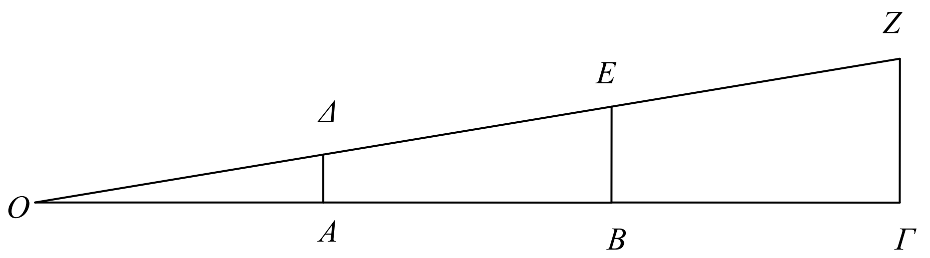
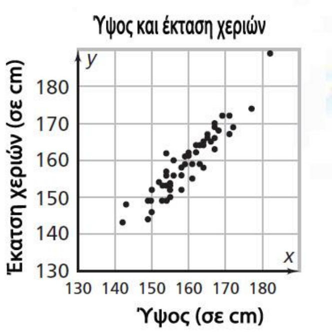
	2. α. Πόσο μακριά θα είναι τα μαλλιά του σε πέντε μήνες; β. Γιατί είναι εύκολο να υπολογιστεί αυτό το μήκος; 3. α. Πόσο μακριά θα είναι τα μαλλιά του Παύλου μετά από ένα χρόνο, αν συνεχίσουν να μεγαλώνουν με τον ίδιο ρυθμό και δεν κουρευτεί; β. Σχεδιάστε ένα γράφημα που να δείχνει πώς μεγαλώνουν τα μαλλιά του Παύλου στη διάρκεια ενός έτους, αν δεν κουρευτεί. Περιγράψτε το σχήμα του γραφήματος. γ. Μετά από πόσους μήνες τα μαλλιά του Παύλου θα έχουν μήκος 29 εκατοστά; δ. Γράψτε έναν τύπο για να υπολογίζετε το μήκος των μαλλιών αν ξέρετε πόσοι μήνες πέρασαν απ' το κούρεμα. 4. Τα μαλλιά της Σοφίας είναι 20 εκατοστά μακριά και μεγαλώνουν με σταθερό ρυθμό 1,4 εκατοστά κάθε μήνα. Γράψτε έναν τύπο για να υπολογίζετε το μήκος των μαλλιών της Σοφίας μετά από κάποιους μήνες. Σχεδιάστε ένα γράφημα.	
ΑΔ6	Για ένα ορθογώνιο οικόπεδο γνωρίζουμε ότι έχει εμβαδόν 240 m^2, αλλά δεν γνωρίζουμε τις διαστάσεις του. Αν το μήκος είναι 20m, πόσο είναι το πλάτος του; Πόσο μεγάλο και πόσο μικρό μπορεί να είναι το μήκος; Να εξετάσετε αν οι διαστάσεις του είναι ανάλογα ποσά. Αν το μήκος είναι x και το πλάτος ψ μπορείτε να εκφράσετε το ψ ως συνάρτηση του x; Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης. Από τη γραφική παράσταση μπορείτε να προσδιορίσετε τις διαστάσεις, ώστε το οικόπεδο να είναι τετράγωνο;	**Α17, Α18, Α19**
ΑΔ7	Με το Geogebra διερευνούν το ρόλο του α στη γραφική παράσταση της ψ=α/χ, τη σχέση των γραφικών παραστάσεων ψ=α/χ και ψ=–α/χ, τη συμμετρία των κλάδων της υπερβολής ως προς την αρχή των αξόνων, τη μεταβολή της τεταγμένης όταν αυξάνεται η τετμημένη, τις τιμές που δεν μπορούν να πάρουν οι δύο μεταβλητές και την ύπαρξη ελάχιστης ή μέγιστης τιμής του ψ (αρχείο: [Β-ΑΔ7-Η υπερβολή]). 	**Α7, Α18**
ΑΔ8	Για να "δούμε" μια αλγεβρική παράσταση (όπως η $3x+2$), μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ορθογώνια μήκους x και πλάτους 1 για το x και τετράγωνα πλευράς 1 για το 1. Έτσι, η παράσταση 3x+2 μπορεί να απεικονιστεί όπως στο σχήμα 1. Χρησιμοποιώντας αυτά τα "πλακάκια", μπορούμε να βρούμε το διπλάσιο της παράστασης x+3, όπως φαίνεται στο σχήμα 2. 	**Α26, Α28**

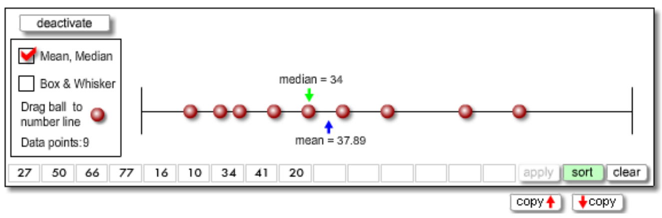
	 *σχήμα 1*  $2(x+3) = 2x + 2 \cdot 3$ $= 2x + 6$ *σχήμα 2* α) Χρησιμοποιώντας τα πλακάκια γράψτε σε απλούστερη μορφή τις παραστάσεις: 2x+3x , 5x–2x , 2x+5x+2, (2x+3)+(5x+3) β) Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την επιμεριστική ιδιότητα, για να απλοποιήσετε τις ίδιες παραστάσεις; γ) Κάποιος μαθητής έγραψε: 2x+5+6x=13x. Είναι σωστό ή λάθος; Εξηγήστε την απάντησή σας με τους δύο τρόπους που χρησιμοποιήσατε στα δύο προηγούμενα ερωτήματα.	
ΑΔ9	Στα παρακάτω σχήματα περιγράφονται δύο (διαφορετικές) εξισώσεις. Στο ένα σχήμα όλα τα σακουλάκια έχουν το ίδιο βάρος και η ζυγαριά ισορροπεί. Στο άλλο σχήμα τα πλακάκια με το γράμμα x εκφράζουν το ίδιο αριθμό. Μπορείτε να βρείτε (χωρίς χαρτί και μολύβι) το βάρος που έχει κάθε σακουλάκι και τον αριθμό που εκφράζει το x; Περιγράψτε τον τρόπο που λύσατε κάθε πρόβλημα, πρώτα με λόγια και μετά με μαθηματικές σχέσεις.   	**Α30**
ΑΔ10	Δύο γραφεία νοικιάζουν αυτοκίνητα. Το γραφείο «Ταξιδια» παίρνει για δικαίωμα ενοικίασης 30 € και 0,20€ για κάθε χιλιόμετρο. Το γραφείο «Δελφοι» παίρνει 6€ για δικαίωμα ενοικίασης και 0,50€ για κάθε χιλιόμετρο. (α) Να βρείτε τις συναρτήσεις που δίνουν το ποσό που πρέπει να πληρώσουμε σε κάθε γραφείο για x χιλιόμετρα διαδρομής. (β) Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων στο ίδιο σύστημα αξόνων. (γ) Για πόσα χιλιόμετρα θα πληρωθεί και στα δύο γραφεία το ίδιο ποσό; Μπορείτε να απαντήσετε με περισσότερους από έναν τρόπους; Σχόλιο: η απάντηση στο ερώτημα (γ) μπορεί να βρεθεί γραφικά, αριθμητικά από τους πίνακες τιμών και αλγεβρικά με εξίσωση.	**Α29**
ΓΔ1	Ως υλικό μιας εισαγωγικής δραστηριότητας που αναδεικνύει την έννοια του προσανατολισμένου ευθύγραμμου τμήματος χρησιμοποιούνται διάφορες πραγματικές καταστάσεις οι οποίες περικλείουν τις έννοιες της διεύθυνσης και φοράς: • Η επίδραση της διεύθυνσης του αέρα και της βαρύτητας στην τροχιά ενός βέλους που εκτοξεύεται στον ουρανό. • Η επίδραση της διεύθυνσης του αέρα στη διαδρομή ενός αεροπλάνου ή της διεύθυνσης του ρεύματος ενός ποταμού στη διαδρομή ενός πλοιαρίου που τον διασχίζει κάθετα. Οι μαθητές χρησιμοποιούν βέλη για την αναπαράσταση και μελέτη αυτών των καταστάσεων, αναζητούν έναν όρο για να διαφοροποιήσουν το προσανατολισμένο από το μη προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα και συζητούν την προέλευση του όρου “διάνυσμα”.	**Γ1, Γ2**

ΓΔ2	Με το Geogebra κατανοούν τον ορισμό του μέτρου ενός τόξου και τη σχέση των μέτρων της εγγεγραμμένης γωνίας ενός τόξου και της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας (αρχείο: (Β-ΓΔ2-Σχέση εγγεγραμμένης και επίκεντρης γωνίας). 	**Γ3**
ΓΔ3	Με το Geogebra εμφανίζουν ύψη, διαμέσους, διχοτόμους και μεσοκάθετους τριγώνου, διερευνούν τη θέση των σημείων τομής τους σε διαφορετικά είδη τριγώνων και τη σχετική τους θέση (αρχείο Β-Γ-Κέντρα τριγώνου). 	**Γ4**
ΓΔ4	Με το Geogebra σε ένα καρτεσιανό σύστημα αξόνων διερευνούν τη σχέση ενός σημείου (τελικού) ως προς ένα άλλο σημείο (αρχικό). Το αρχικό σημείο έχει υποστεί έναν μετασχηματισμό (συμμετρία ως προς άξονα ή στροφή ως προς σημείο ή μετατόπιση κατά ένα διάνυσμα). Βρίσκουν τη σχέση που έχουν οι συντεταγμένες τους και γενικεύουν (αρχείο:Β-ΓΔ4-Μετασχηματισμοί σημείου). 	**Γ5, Γ6**

ΓΔ5	Αναλύουν τη γνωστή από την προηγούμενη τάξη κατασκευή της μεσοκαθέτου ε ενός ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ και εξετάζουν τη σχέση των σημείων Α και Β ως προς την ε (“αξονική συμμετρία ή ανάκλαση”). Για να αναδειχθεί η σχέση ανάμεσα σε μεσοκάθετο ευθύγραμμου τμήματος και τον άξονα συμμετρίας μιας ανάκλασης χρησιμοποιείται το πρόβλημα: «Τα δυο τρίγωνα είναι συμμετρικά ως προς άξονα. Να προτείνετε έναν γεωμετρικό τρόπο ώστε να σχεδιάσετε τον άξονα συμμετρίας» 	**Γ7, Γ8**
ΓΔ6	Για να αναδειχθεί η σημασία ενός γεωμετρικού μετασχηματισμού (κεντρική συμμετρία) στην ανακάλυψη και αιτιολόγηση μιας ιδιότητας του ορθογωνίου τριγώνου (ιδιότητα της διαμέσου προς την υποτείνουσα) χρησιμοποιείται το πρόβλημα: «Η ΑΜ είναι διάμεσος του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ. α. Να σχεδιάσετε το συμμετρικό τρίγωνο του ΑΒΓ ως προς κέντρο Μ β. Τι είδους τετράπλευρο προκύπτει και γιατί; γ. Να εξετάσετε αν η διάμεσος ΑΜ είναι το μισό της υποτείνουσας ΒΓ και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.» 	**Γ8**
ΜΔ1	Βασική δραστηριότητα για τη δημιουργία των τύπων εμβαδού των γεωμετρικών σχημάτων είναι ο μετασχηματισμός τους σε απλούστερα σχήματα με διατήρηση του εμβαδού. Χρησιμοποιώντας γεωμετρικά όργανα ή λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας οι μαθητές καθοδηγούνται μέσω κατάλληλων ερωτήσεων να λύσουν το πρόβλημα μετασχηματισμού ενός παραλληλογράμμου και ενός τριγώνου σε ισοδύναμο ορθογώνιο. Στη συνέχεια αυτής της δραστηριότητας διατυπώνουν και αιτιολογούν τους αντίστοιχους τύπους εμβαδού. Τα επόμενα σχήματα δείχνουν έναν από τους πολλούς τρόπους επίλυσης του προβλήματος:  	**Μ2**
ΜΔ2	Οι μαθητές κατασκευάζουν τετράγωνα στις πλευρές ενός ορθογωνίου ισοσκελούς τριγώνου (βλ. το διακοσμητικό μοτίβο στο σχήμα αριστερά) και χρησιμοποιώντας ως μονάδα μέτρησης εμβαδού το ίδιο το ορθογώνιο τρίγωνο επαληθεύουν τη σχέση του Πυθαγόρειου θεωρήματος. Στη συνέχεια επαληθεύουν τη σχέση αυτή στο ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές μήκους 3cm και 4cm και υποτείνουσα μήκους 5cm.	**Μ3**

<table>
<tr><td></td><td> 
</td><td></td></tr>
<tr><td>ΜΔ3</td><td>Με το Geogebra κατανοούν γεωμετρικά το Πυθαγόρειο θεώρημα μετασχηματίζοντας ίσα παραλληλόγραμμα σε ισεμβαδικά τετράγωνα και ορθογώνια, δημιουργώντας ταυτόχρονα τα τετράγωνα των πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου. (αρχείο: Β-ΜΔ3-Πυθαγόρειο θεώρημα). 
</td><td>Μ2, Μ3</td></tr>
<tr><td>ΜΔ4</td><td>Στο Sketchpad μεταβάλλουν δυναμικά την ακτίνα ενός κύκλου και με την δυνατότητα του λογισμικού να πινακοποιεί τιμές μεταβλητών, “ανακαλύπτουν” μέσα από μία διαδικασία μοντελοποίησης τον τύπο του εμβαδού κυκλικού δίσκου και εμφανίζουν τη γραφική παράσταση της συναρτησιακής σχέσης ‘ακτίνας’ και ‘εμβαδού’. Συνδέουν τη γραφική παράσταση με το είδος της συγκεκριμένης συναρτησιακής σχέσης και τα μέτρα των εμπλεκόμενων μεγεθών (αρχείο: Β-ΜΔ4-Εμβαδόν κυκλικού δίσκου). 
</td><td>Μ4, Α1</td></tr>
<tr><td>ΜΔ5</td><td>Το πρόβλημα ερμηνείας μιας πινακίδας οδικής κυκλοφορίας που δείχνει την κλίση ενός δρόμου και το παρακάτω σχήμα χρησιμοποιούνται ως υλικό μιας δραστηριότητας που αναδεικνύει την ισότητα των λόγων ΑΔ:ΟΑ, ΒΕ:ΟΒ, ΓΖ:ΟΓ στα ορθογώνια τρίγωνα ΟΑΔ, ΟΒΕ, ΟΓΖ. Οι μαθητές διαπιστώνουν την ισότητα των λόγων και των γωνιών των τριών τριγώνων,</td><td>Μ6</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>εξετάζουν τη μορφή τους και αναζητούν ένα όρο για να εκφράσουν αυτή τη σχέση (μεγέθυνση, ομοιότητα).

</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>ΣΔ1</td>
<td>

Οι μαθητές διερευνούν το εξής ερώτημα: «Ποια είναι η σχέση που έχει το άνοιγμα των χεριών ενός ατόμου , όταν βρίσκονται σε έκταση με το ύψος του;» Συλλέγουν δεδομένα από μαθητές, τα αναπαριστούν σε διάγραμμα διασποράς, όπως το διπλανό, και επιχειρηματολογούν σχετικά, τεκμηριώνοντας τις απόψεις τους με βάση τα στοιχεία που συνέλεξαν, το διάγραμμα που δημιούργησαν και τις γνώσεις που έχουν από την Άλγεβρα και τις συναρτήσεις. Επίσης προσπαθούν να βρουν περιπτώσεις όπου η έκταση των χεριών είναι μικρότερη από το ύψος, αλλά και περιπτώσεις που να δείχνουν το αντίθετο.</td>
<td>Σ3, Σ4</td>
</tr>
<tr>
<td>ΣΔ2</td>
<td>

Μέσα από τον δυναμικό χειρισμό δεδομένων της εφαρμογής, οι μαθητές καλούνται να διερευνήσουν και να κατασκευάσουν καταστάσεις με μικρά σύνολα δεδομένων τα οποία θα ικανοποιούν κάποια κριτήρια ως προς το πλήθος, το εύρος ή τα μέτρα θέσης, με σκοπό να κατανοήσουν βαθύτερα και πιο διαισθητικάδιάφορες πτυχές ή/και ιδιότητες εννοιών της στατιστικής, να αναπτύξουν στρατηγικές ελέγχου κάποιων παραμέτρων ανοικτών προβλημάτων καθώς και στρατηγικές για τη διερεύνηση τέτοιων προβλημάτων.
Διεύθυνση ιστοσελίδας : http://illuminations.nctm.org/activitydetail.aspx?ID=160
Οδηγίες:Οδηγίες- Β-ΣΔ2- Διάμεσος_ Μέση τιμή</td>
<td>Σ7</td>
</tr>
</table>

Γ΄ Γυμνασίου

Θεματική ενότητα: Αριθμοί – Άλγεβρα

Ενδεικτικές διδακτικές ώρες: 49

Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα	**Βασικά θέματα**	**Δραστηριότητες**	**Εκπαιδευτικό υλικό**
Α1. Μοντελοποιούν μια κατάσταση με τη συνάρτηση $y=αx^2$. *Α2.* Εξετάζουν την μεταβολή του y για κάθε μοναδιαία αύξηση του x (συγκρίνουν με την γραμμική συνάρτηση) *Α3.* Διερευνούν μέσω της γραφικής της παράστασης τις ιδιότητές της $y=αx^2$ και το ρόλο της παραμέτρου α. *Α4.* Επιλύουν προβλήματα χρησιμοποιώντας τις αναπαραστάσεις της συνάρτησης $y=αx^2$. *Α5.* Βρίσκουν αλγεβρικά και γραφικά τα κοινά σημεία των συναρτήσεων $y=αx^2$ και $y=αx+β$.	**Κανονικότητες-Συναρτήσεις** • η $y=αx^2$ ως περίπτωση μη γραμμικής μεταβολής *(4 ώρες)*	Είναι σημαντική η διερεύνηση προβλημάτων που μοντελοποιούνται με τετραγωνικές συναρτήσεις, οι οποίες είναι μια μορφή μη γραμμικής μεταβολής. Η χρήση λογισμικού μπορεί να υποστηρίξει τη διερεύνηση του ρόλου του α και τη σύνδεση με τις εξισώσεις. (*ενδεικτικές δραστηριότητες ΑΔ1, ΑΔ2*)	Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου, Αργυράκης κ.ά., ΟΕΔΒ, 2010) παρ. 4.1. Γ- ΑΔ1-Το α στην $ψ=αχ^2$
Α6. Διερευνούν και αποδεικνύουν τις ιδιότητες των ριζών $\sqrt{αβ}=\sqrt{α}\sqrt{β}$, $\sqrt{\frac{α}{β}}=\frac{\sqrt{α}}{\sqrt{β}}$. *Α7.* Χρησιμοποιούν τις τετραγωνικές ρίζες και τις ιδιότητές τους στην απλοποίηση παραστάσεων και στην επίλυση προβλημάτων.	**Αλγεβρική παράσταση** • Ιδιότητες τετραγωνικών ριζών, μετασχηματισμοί *(3 ώρες)*	Η διερεύνηση και απόδειξη των ιδιοτήτων και η εφαρμογή τους σε απλές παραστάσεις είναι βασικός στόχος των δραστηριοτήτων. (*ενδεικτική δραστηριότητα ΑΔ3*)	Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου, Αργυράκης κα, ΟΕΔΒ, 2010) παρ. 1.1.Γ.
Α8. Αναγνωρίζουν τα	**Αλγεβρική παράσταση**	Οι δραστηριότητες	Σχολικό βιβλίο

μονώνυμα και τα πολυώνυμα, το βαθμό τους και υπολογίζουν την αριθμητική τιμή ενός πολυωνύμου. *Α9.* Υπολογίζουν το άθροισμα, τη διαφορά και το γινόμενο μονωνύμων και (απλών) πολυωνύμων (κυρίως μιας μεταβλητής). Αναγνωρίζουν την επιμεριστική ιδιότητα όπου χρησιμοποιείται. *Α10.* Μοντελοποιούνπροβλήματα με πολυώνυμα και χρησιμοποιούν τις πράξεις τους στην επίλυσή τους. *Α11.* Διερευνούν και αποδεικνύουν αλγεβρικά και (όπου είναι δυνατόν) γεωμετρικά τις ταυτότητες $(\alpha\pm\beta)^2=\alpha^2\pm2\alpha\beta+\beta^2$, $(\alpha\pm\beta)^3=\alpha^3\pm3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2\pm\beta^3$, $\alpha^2-\beta^2=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$, $\alpha^3\pm\beta^3=(\alpha\pm\beta)(\alpha^2\mp\alpha\beta+\beta^2)$ *Α12.* Μοντελοποιούν και επιλύουν προβλήματα με χρήση ταυτοτήτων. *Α13.* Αναγνωρίζουν στοιχεία της δομής μιας παράστασης (άθροισμα και οι όροι του, γινόμενο και οι παράγοντές του) και χρησιμοποιούν κατάλληλη ορολογία *Α14.* Παραγοντοποιούν απλά πολυώνυμα (κυρίως μιας μεταβλητής) με κοινό παράγοντα, με ομαδοποίηση, με χρήση ταυτοτήτων. *Α15.* Αναγνωρίζουν την επιμεριστική ιδιότητα ως το βασικό κοινό στοιχείο των πράξεων πολυωνύμων, των	• δομή της αλγεβρικής παράστασης και μετασχηματισμοί. *(24 ώρες)*	μετασχηματισμού παραστάσεων να βρίσκονται σε ισορροπία με τις δραστηριότητες μοντελοποίησης καταστάσεων, γεωμετρικής ερμηνείας, διερεύνησης και αιτιολόγησης σχέσεων, αναγνώρισης δομών, αναγνώρισης αναλογιών με την αριθμητική (πχ στην εύρεση του ΕΚΠ, στις πράξεις κλασμάτων). (*ενδεικτικές δραστηριότητες ΑΔ4, ΑΔ5, ΑΔ6*)	(Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου, Αργυράκης κα, ΟΕΔΒ, 2010) κεφ 1ο (μόνο όσα αφορούν τα ΠΜΑ της 1ης στήλης) http://nlvm.usu.edu/en/nav/frames_asid_189_g_3_t_2.html?open=activities&from=category_g_3_t_2.html (πολλαπλασιασμός διωνύμων με πλακίδια).

ταυτοτήτων και της παραγοντοποίησης. *Α16.* Προσδιορίζουν το ΕΚΠ μονωνύμων και απλών πολυωνύμων μιας μεταβλητής. *Α17.* Υπολογίζουν το αποτέλεσμα των πράξεων με απλές ρητές παραστάσεις (πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός, διαίρεση). *Α18.* Απλοποιούν απλές ρητές παραστάσεις.			
Α19. Διερευνούν (με μοντέλα – μεταφορές) και διατυπώνουν τις βασικές ιδιότητες της διάταξης. *Α20.* Μοντελοποιούν προβλήματα με την ανίσωση αχ+β<γ (άγνωστος μόνο στο ένα μέλος) και την επιλύουν αλγεβρικά και γραφικά (σύνδεση με συνάρτηση της μορφής y=αx+β). *Α21.* Μοντελοποιούν προβλήματα με γραμμικές ανισώσεις της μορφής αχ+β<γχ+δ (άγνωστος και στα δύο μέλη) και τις επιλύουν αλγεβρικά και γραφικά (σύνδεση με συναρτήσεις της μορφής ψ=αχ+β). *Α22.* Διακρίνουν τις διαφορές μεταξύ εξίσωσης (συνήθως μία λύση) και ανίσωσης (συνήθως άπειρες λύσεις), ώστε να μην θεωρούν ότι η μόνη διαφορά είναι στο σύμβολο. *Α23.* Βρίσκουν τις κοινές λύσεις δύο ανισώσεων χρησιμοποιώντας τον	**Ισότητες-ανισότητες** • ανίσωση α΄ βαθμού και μετασχηματισμοί *(5 ώρες)*	Παρά τις ομοιότητες εξίσωσης και ανίσωσης, που μπορούν να αξιοποιηθούν διδακτικά, πρέπει να δοθεί έμφαση στις διαφορές μεταξύ ισότητας – εξίσωσης και ανίσωσης – εξίσωσης. Η αναπαράσταση των λύσεων ανίσωσης στην αριθμογραμμή είναι ένα χρήσιμο μέσο και για τους παραπάνω στόχους. (*ενδεικτική δραστηριότητα ΑΔ7*)	Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, Βλάμος κα, ΟΕΔΒ, 2010) παρ. 1.5.

άξονα των πραγματικών αριθμών.			
Α24. Επιλύουν απλές πολυωνυμικές εξισώσεις (δευτέρου βαθμού ελλιπούς ή και πλήρους μορφής, αλλά και μεγαλύτερου βαθμού) με παραγοντοποίηση. *Α25.* Μοντελοποιούν προβλήματα με απλές πολυωνυμικές εξισώσεις (κυρίως δευτεροβάθμιες), οι οποίες ανάγονται σε πρωτοβάθμιες με παραγοντοποίηση.	**Ισότητες-Ανισότητες** • πολυωνυμικές εξισώσεις *(6 ώρες)*	Η επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων αποτελεί μια ευκαιρία δικαιολόγησης της παραγοντοποίησης και σύνδεσης των πολυωνύμων με προβλήματα. (*ενδεικτική δραστηριότητα ΑΔ8*)	Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου, Αργυράκης κα, ΟΕΔΒ, 2010) παρ. 2.2Α, 2.3.
Α26. Αναγνωρίζουν γραμμικές εξισώσεις της μορφής αx+βy=γ, τις αναπαριστούν γραφικά και τις συνδέουν με συναρτήσεις της μορφής y=αx+β. *Α27.* Αναγνωρίζουν ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους και εξετάζουν αν ένα ζεύγος αριθμών είναι λύση του. *Α28.* Ερμηνεύουν γραφικά ένα γραμμικό σύστημα και το πλήθος των λύσεών του. *Α29.* Μοντελοποιούν προβλήματα με δύο γραμμικέςεξισώσεις της μορφής αx+βy=γ ή με δύο συναρτήσεις της μορφής y=αx+β. Επιλύουν το σύστημα γραφικά και αλγεβρικά (με τις μεθόδους των αντίθετων συντελεστών και της αντικατάστασης) και επαληθεύουν τη λύση με βάση το πλαίσιο του προβλήματος.	**Ισότητες-Ανισότητες** • γραμμικά συστήματα *(7 ώρες)*	Οι δραστηριότητες μοντελοποίησης καταστάσεων, σύνδεσης με τις συναρτήσεις και τις αναπαραστάσεις τους, γραφικής ερμηνείας και επίλυσης συστημάτων είναι εξίσου σημαντικές με τις αλγεβρικές μεθόδους επίλυσης. Η χρήση λογισμικού μπορεί να υποστηρίξει τη γραφική ερμηνεία και επίλυση συστήματος. (*ενδεικτικές δραστηριότητες ΑΔ9, ΑΔ10, ΑΔ11*)	Σχολικό βιβλίο (Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου, Αργυράκης κα, ΟΕΔΒ, 2010) κεφ 3^{ο}. Γ-ΑΔ10-Γραφική επίλυση γραμμικού συστήματος

Θεματική ενότητα: Γεωμετρία – Μέτρηση

Ενδεικτικές διδακτικές ώρες: 33

Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα	**Βασικά θέματα**	**Δραστηριότητες**	**Εκπαιδευτικό υλικό**
Γ1. Χρησιμοποιούν τα κριτήρια ισότητας των τριγώνων για την αιτιολόγηση ιδιοτήτων των σχημάτων και κατασκευών. *Γ2.* Αναγνωρίζουν τα ομοιόθετα σχήματα και συνδέουν την ομοιοθεσία με την αναλογία (και τη σχετική συνάρτηση). *Γ3.* Κατασκευάζουν ομοιόθετα και όμοια σχήματα. *Γ4.* Αναγνωρίζουν τις σχέσεις περιμέτρων και εμβαδών των ομοίων σχημάτων. *Γ5.* Επιλύουν προβλήματα χρησιμοποιώντας την ομοιότητα και κλίμακες.	**Μετασχηματισμοί** • η διατήρηση της ισότητας των σχημάτων ως βασικό γνώρισμα της μεταφοράς, στροφής και συμμετρίας • ομοιότητα και ομοιοθεσία • διαδοχικοί μετασχηματισμοί *(15 ώρες)*	Είναι πολύ σημαντικό να γίνει μια επανάληψη των μετασχηματισμών που μελετήθηκαν στην προηγούμενη τάξη και να τονιστεί η διατήρηση της απόστασης και της ισότητας των σχημάτων ως χαρακτηριστική κοινή ιδιότητά τους. Στην ομοιοθεσία χαρακτηριστική ιδιότητα είναι η διατήρηση του λόγου των αποστάσεων. Κοινή ιδιότητα όλων των μετασχηματισμών που μελετήθηκαν είναι η διατήρηση της καθετότητας, της παραλληλίας και του μέτρου των γωνιών. Το θεώρημα του Θαλή θα αναφερθεί ως μία ενδιαφέρουσα εφαρμογή των ομοίων τριγώνων. Οι σχέσεις περιμέτρων και εμβαδών των ομοίων σχημάτων θα εξεταστούν με την κατασκευή σε σύστημα συντεταγμένων του ομοιόθετου ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Ο δυναμικός χαρακτήρας των μετασχηματισμώνανα	Σχολικό βιβλίο Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου, Δ. Αργυράκης κ.ά., Γεωμετρία, Κεφάλαιο 1$^{\text{ο}}$. Γ-ΓΔ3-Ομοιότητα με μετασχηματισμούς Γ-ΓΔ5-Λόγος εμβαδών και περιμέτρων ομοιόθετων ορθογωνίων

		δεικνύεται με τη χρήση λογισμικού. (*ενδεικτικές δραστηριότητες ΓΔ1, ΓΔ2, ΓΔ3, ΓΔ4, ΓΔ5, ΓΔ6*)	
Μ1. Υπολογίζουν το εμβαδόν της επιφάνειας πρισμάτων, πυραμίδων, κυλίνδρων, κώνων, σφαιρών και καταλήγουν σε τύπους. *Μ2.* Υπολογίζουν τον όγκο πρισμάτων, πυραμίδων, κυλίνδρων, κώνων, σφαιρών και καταλήγουν σε τύπους.	**Μέτρηση επιφάνειας** • μέτρηση με μη τυπικές και τυπικές μονάδες μέτρησης επιφανειών **Μέτρηση χωρητικότητας – όγκου** • μέτρηση με μη τυπικές και τυπικές μονάδες μέτρησης όγκου *(8 ώρες)*	Οι μαθητές κατασκευάζουν αναπτύγματα στερεών και χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες γνώσεις τους υπολογίζουν τα εμβαδά των αντίστοιχων επιφανειών και αιτιολογούν τους σχετικούς τύπους. Η μέτρηση του όγκου των στερεών προσφέρεται για τη δημιουργία συνδέσεων με τη Φυσική. Οι μαθητές ζυγίζουν μοντέλα στερεών που είναι κατασκευασμένα από το ίδιο υλικό και χρησιμοποιούν τον τύπο πυκνότητα = μάζα : όγκος για να υπολογίσουν τον αντίστοιχο όγκο. Τα αποτελέσματα χρησιμοποιούνται για να αιτιολογηθούν οι σχετικοί τύποι. (*ενδεικτική δραστηριότητα ΜΔ1*)	Σχολικό βιβλίο Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου, Π. Βλάμος κ.ά., Γεωμετρία, Κεφάλαιο 4^{ο} Σχολικό βιβλίο Φυσική Β΄ Γυμνασίου, Ν. Αντωνίου κ.ά. (σσ.16-17).
Μ3. Επεκτείνουν τους ορισμούς των τριγωνομετρικών αριθμών σε αμβλείες γωνίες. *Μ4.* Χρησιμοποιούν τις τριγωνομετρικές σχέσεις ημ(180°-θ)=ημθ, συν(180°-θ)=-συνθ, εφ(180°-θ)=-εφθ και αποδεικνύουν απλές	**Τριγωνομετρία** *(10 ώρες)*	Η επίλυση ενός μη ορθογώνιου τριγώνου αναδεικνύει την ανάγκη επέκτασης των τριγωνομετρικών αριθμών για αμβλείες γωνίες. (*ενδεικτική*	Σχολικό βιβλίο Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου, Δ. Αργυράκης κ.ά., Γεωμετρία, Κεφάλαιο 2^{ο}.

τριγωνομετρικές ταυτότητες εφθ=ημθ/συνθ, $ημ^2θ + συν^2θ = 1$. *Μ5.* Χρησιμοποιούν τους νόμους ημιτόνων και συνημιτόνων για την επίλυση ενός τυχαίου τριγώνου σε σχετικά προβλήματα.		*δραστηριότητα ΜΔ2*)	

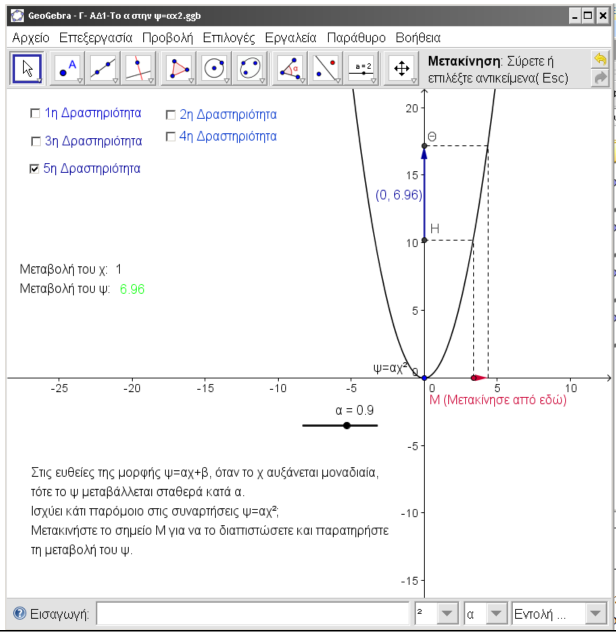
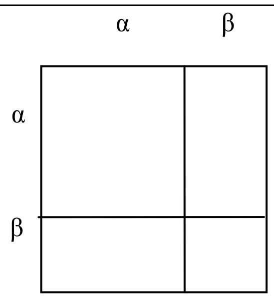
Θεματική ενότητα: Στοχαστικά μαθηματικά

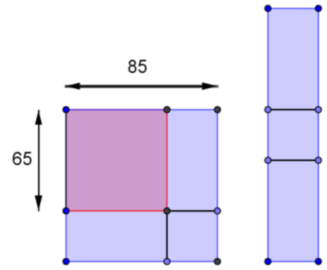
Ενδεικτικές διδακτικές ώρες: 14

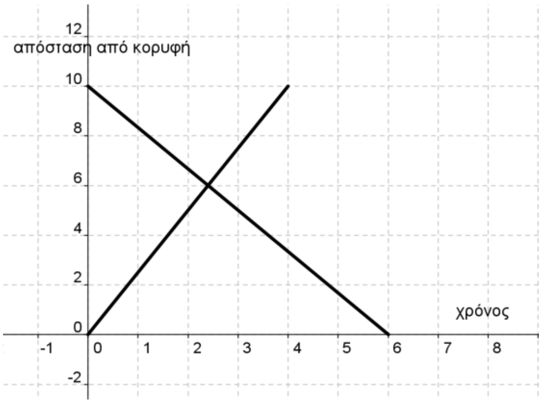
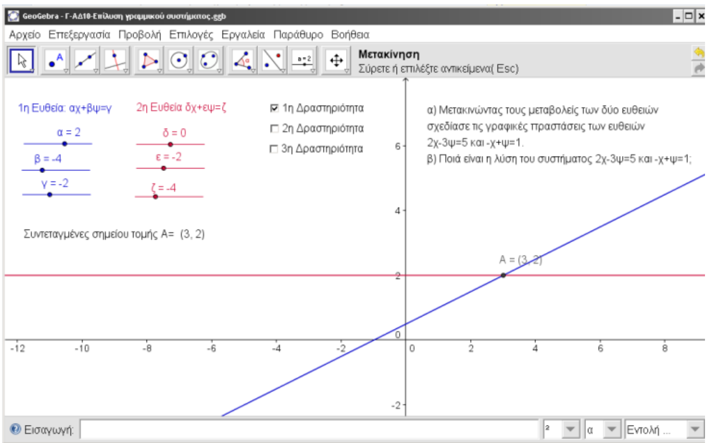
Π1. Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα	***Βασικά θέματα***	***Δραστηριότητες***	***Εκπαιδευτικό υλικό***
Π2. Κατασκευάζουν ιστογράμματα *Π3.* Αξιολογούν την αντιπροσωπευτικότητα ή μη ενός δείγματος *Π4.* Συνδυάζουν γνωστές μεθόδους και εργαλεία για να σχεδιάσουν και να υλοποιήσουν μικρές στατιστικές έρευνες	**Δεδομένα** • συλλογή, αναπαράσταση, ερμηνεία δεδομένων *(5 ώρες)*	Οι μαθητές σχεδιάζουν και υλοποιούν μια στατιστική έρευνα	Μέρος του 4ου κεφαλαίου του βιβλίου: Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου (Βλάμος, Δρούτσας κλπ) με κατάλληλες τροποποιήσεις
Π5. Προσδιορίζουν την μέση απόλυτη απόκλιση, για να περιγράψουν ποσοτικά την μεταβλητότητα των δεδομένων και να κάνουν συγκρίσεις δεδομένων	**Μεταβλητότητα** *(3ώρες)*	(*ενδεικτική δραστηριότητα ΣΔ1*)	
Π6. Διακρίνουν πότε δυο ενδεχόμενα είναι ασυμβίβαστα ή όχι. *Π7.* Διακρίνουν πότε δυο ενδεχόμενα είναι ανεξάρτητα ή όχι.	***Πειράματα Τύχης - Δειγματικοί Χώροι*** • ασυμβίβαστα *ενδεχό-μενα, ανεξάρτητα ενδε-χόμενα* *(2 ώρες)*	Οι μαθητές μέσα από παραδείγματα εξετάζουν (α) αν η πραγματοποίηση ενός ενδεχομένου αποκλείει την πραγματοποίηση ενός άλλου ενδεχομένου, (β) αν η πραγματοποίηση ενός ενδεχομένου επηρεάζει την	

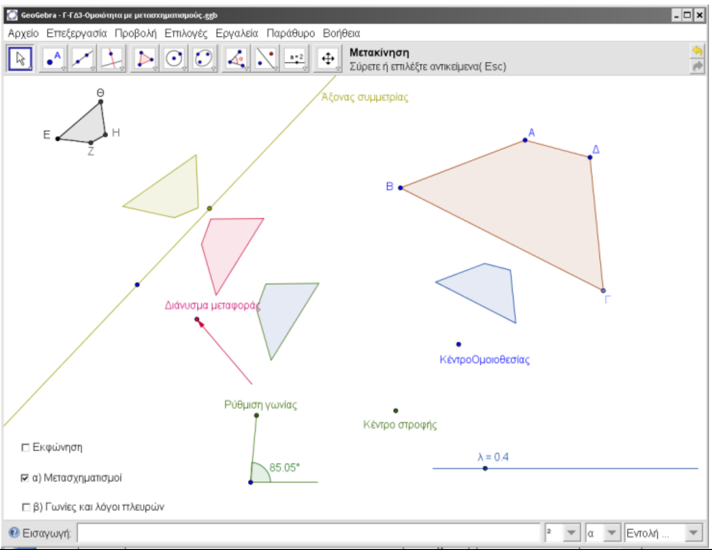
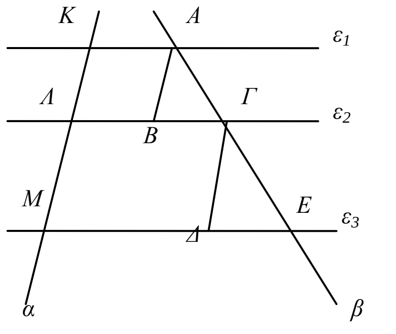
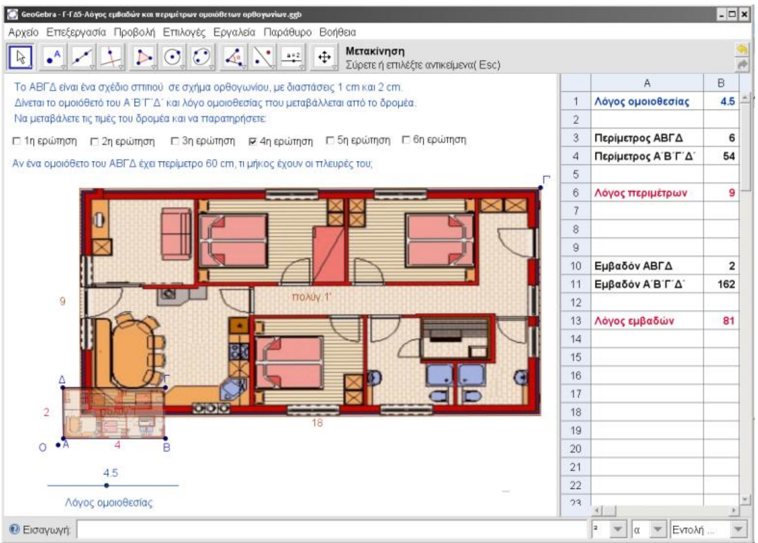
		πιθανότητα πραγματοποίησης ενός άλλου ενδεχομένου (π.χ. τα αποτελέσματα διαδοχικών ρίψεων ενός κέρματος). Ενδεικτικές δραστηριότητες ΠΔ1, ΠΔ2.	
Π8. Απαριθμούν το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου με χρήση της Βασικής Αρχής Απαρίθμησης (ΒΑΑ) και υπολογίζουν την αντίστοιχη πιθανότητα.	***Πιθανότητα Ενδεχομέ-νου*** • *βασική* Αρχή *Απαρίθμησης κι εφαρμογές της στις Πιθανότητες* *(4 ώρες)*	Οι μαθητές μέσα από παραδείγματα υπολογίζουν το πλήθος των στοιχείων διαφόρων ενδεχομένων και τις αντίστοιχες πιθανότητες. Ενδεικτικές δραστηριότητες ΠΔ3, ΠΔ4.	

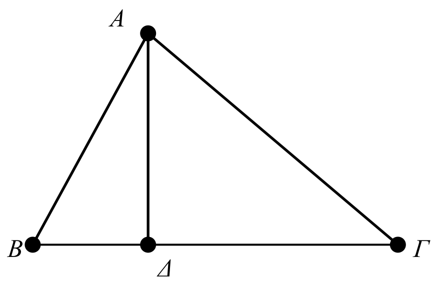
Ενδεικτικές δραστηριότητες

Α/Α	Περιγραφή δραστηριότητας	ΠΜΑ
ΑΔ1	Με το Geogebra μεταβάλλουν δυναμικά το α στη συνάρτηση $y=\alpha x^2$ και παρατηρώντας τις αλλαγές στη γραφική παράσταση διερευνούν τις ιδιότητες της $y=\alpha x^2$, το ρόλο του α και την μεταβολή του ψ, όταν το χ μεταβάλλεται μοναδιαία (αρχείο: [Γ-ΑΔ1-Το α στην ψ=αχ²]) 	**Α2, Α3**
ΑΔ2	Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να κάνετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $y=4x–3$ και $y=x^2$. Βρείτε τα σημεία τομής των δύο γραμμών πρώτα γραφικά και επαληθεύστε την απάντησή σας αλγεβρικά (με εξίσωση). Μπορείτε να κάνετε το ίδιο για τα ζευγάρια (β) $y=x–5$ και $y=2x^2$ (γ) $y=2x–1$ και $y=x^2$;	**Α4, Α5**
ΑΔ3	Η Μαρία υπολόγισε το γινόμενο $\sqrt{3}\cdot\sqrt{75}$ και το βρήκε 15. Ο Γιάννης ισχυρίστηκε ότι δεν μπορεί το αποτέλεσμα να είναι ακέραιος. Πώς νομίζετε ότι οδηγήθηκε ο Γιάννης σε αυτό συμπέρασμα; Συμφωνείτε με το Γιάννη ή με τη Μαρία και γιατί;	**Α6**
ΑΔ4	α) Ποια σχέση νομίζετε ότι έχουν οι παραστάσεις $(\alpha+\beta)^2$ και $\alpha^2+\beta^2$; Είναι ίσες ή άνισες; Με ποιο τρόπο μπορείτε να το διαπιστώσετε; β) Χρησιμοποιήστε το διπλανό σχήμα, για να υπολογίσετε το $(\alpha+\beta)^2$. γ) Διερευνήστε αν μπορεί ποτέ να ισχύει ο ισχυρισμός που κάνατε στο πρώτο ερώτημα. 	**Α11**
ΑΔ5	Ο Ανδρέας πειραματίζεται με ζεύγη διψήφιων αριθμών. Ψάχνει τη διαφορά των τετραγώνων διάφορων τέτοιων αριθμών και συγκεντρώνει κάποια αποτελέσματα που του κίνησαν την περιέργεια: α) $55^2 - 45^2 = 1000$, $105^2 - 95^2 = 2000$, $85^2 - 65^2 = 3000$ Μπορείτε να βρείτε άλλα ζευγάρια που η διαφορά των τετραγώνων τους να είναι πολλαπλάσιο του 1000;	**Α11, Α12**

	Μήπως παρατηρείτε κάτι ιδιαίτερο σε αυτά όλα αυτά τα ζευγάρια; β) Ο Ανδρέας με έκπληξη διαπίστωσε επίσης ότι: $89^2 - 12^2 = 7777$, $78^2 - 23^2 = 5555$ Μπορείτε να βρείτε άλλα ζευγάρια αριθμών που η διαφορά των τετραγώνων είναι αριθμός με επαναλαμβανόμενα ψηφία; Παρατηρείτε κάτι ιδιαίτερο σε αυτά τα ζευγάρια; γ) Θέλοντας να εξηγήσει τα εντυπωσιακά αποτελέσματα που παρατήρησε, ο Ανδρέας σχεδίασε μερικά διαγράμματα για να βοηθηθεί. Το διάγραμμα που σχεδίασε ,για να μελετήσει τη διαφορά $85^2 - 65^2$, φαίνεται στο διπλανό σχήμα.  Πώς συνδέεται το διάγραμμα του Ανδρέα με τον υπολογισμό της διαφοράς $85^2 - 65^2$; Πώς θα μπορούσε να υπολογιστεί η επιφάνεια του μακρόστενου μοβ ορθογωνίου (χωρίς τη βοήθεια υπολογιστή τσέπης); Μπορείτε να σχεδιάσετε παρόμοια διαγράμματα για άλλους υπολογισμούς που έκανε ο Ανδρέας ή για υπολογισμούς που κάνατε εσείς; Πώς θα μπορούσαν αυτά τα διαγράμματα να βοηθήσουν τον Ανδρέα να αναπτύξει μία γρήγορη μέθοδο, για να υπολογίζει διαφορές τετραγώνων της μορφής $α^2 - β^2$ για οποιαδήποτε α και β;	
ΑΔ6	α) Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τους αριθμούς 60 και 225 και να βρείτε το ΕΚΠ τους. β) Με τον ίδιο τρόπο, να βρείτε το ΕΚΠ των μονωνύμων $6x^2y$ και $9xy^3$, το ΕΚΠ των πολυωνύμων $x^2 - 1$ και $x^2 + x$	**Α16**
ΑΔ7	Το εισιτήριο εισόδου σε ένα χιονοδρομικό κέντρο στοιχίζει €7 και συμπεριλαμβάνει την ενοικίαση του εξοπλισμού. Στην περίπτωση που ο επισκέπτης χρησιμοποιήσει δικό του εξοπλισμό, τότε το εισιτήριο εισόδου είναι €4. Αν το κόστος αγοράς του εξοπλισμού είναι €75, πόσες φορές θα πρέπει να επισκεφθεί το ίδιο άτομο το χιονοδρομικό κέντρο, ώστε να είναι συμφέρουσα η αγορά του εξοπλισμού;	**Α21, Α22**
ΑΔ8	Παρατηρήστε ότι $1^3=1$, δηλαδή ότι ο κύβος του 1 ισούται με το 1. Μπορείτε να βρείτε όλους τους αριθμούς που έχουν αυτή την ιδιότητα, δηλαδή ο κύβος του αριθμού να είναι ίσος με τον ίδιο τον αριθμό; Πόσοι τέτοιοι αριθμοί υπάρχουν;	**Α24, Α25**

ΑΔ9	Η Μαρία ξεκινάει το πρωί από τη βάση της κατασκήνωσης, για να ανέβει στην κορυφή του Ολύμπου, η οποία απέχει 10 χιλιόμετρα. Η Έλενα ξεκινάει την ίδια ώρα από την κορυφή, για να επιστρέψει στην κατασκήνωση από την ίδια διαδρομή. Τα γραφήματα που περιγράφουν την απόσταση κάθε ορειβάτισσας από την κορυφή του βουνού είναι σχεδιασμένα στο σχήμα.  Ποια γραμμή αντιστοιχεί στη Μαρία και ποια στην Έλενα; Τι εκφράζει το σημείο τομής των δύο γραμμών; Σε πόση ώρα θα συναντήσει η Μαρία την Έλενα; Πώς μπορούμε να περιγράψουμε αλγεβρικά τη συνάντησή τους και να βρούμε την ώρα συνάντησης;	**Α28, Α29**
ΑΔ10	Με το Geogebra μεταβάλλουν δυναμικά τους συντελεστές σε ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων και διερευνούν (α) πώς η μεταβολή των συντελεστών επηρεάζει την γραφική παράσταση κάθε γραμμικής εξίσωσης (β) τον αριθμό των λύσεων του συστήματος και (γ) τη σχέση των τιμών των συντελεστών με τις σχετικές  θέσεις των δύο ευθειών και την γραφική επίλυση του συστήματος. (αρχείο: Γ-ΑΔ10-Γραφική επίλυση γραμμικού συστήματος)	**Α28, Α29**
ΑΔ11	Σε ένα πάρκινγκ υπάρχουν 20 θέσεις στάθμευσης οι οποίες είναι όλες κατειλημμένες. Σε κάποιες θέσεις έχουν σταθμεύσει μηχανές και σε κάποιες αυτοκίνητα. Μετρήσαμε τους τροχούς από τα αυτοκίνητα και τις μηχανές που ήταν σταθμευμένα στο πάρκινγκ και τους βρήκαμε 66. Πόσα αυτοκίνητα και πόσες μηχανές είναι σταθμευμένα στο πάρκινγκ;	**Α29**
ΓΔ1	Οι μαθητές σχεδιάζουν σε σύστημα συντεταγμένων ένα γεωμετρικό σχήμα του οποίου δίνονται οι συντεταγμένες των κορυφών (x, y) [π.χ. το ορθογώνιο τρίγωνο με κορυφές (0, 0), (1,0), (0, 2)] και κατασκευάζουν διαδοχικά τα σχήματα που έχουν κορυφές τα σημεία: α) (x + 3, y + 4),) β)(x, –y), γ) (–x, y), δ) (–x, –y) και ε) (–y, x). Διαπιστώνουν ότι τα νέα σχήματα είναι αντίστοιχα η εικόνα του αρχικού ως προς: α) μεταφορά κατά ένα διάνυσμα μήκους 5, β) ανάκλαση ως προς τον άξονα x΄x, γ) ανάκλαση ως προς τον άξονα y΄y, δ) ανάκλαση με κέντρο την αρχή των αξόνων, ε) στροφή με κέντρο την αρχή των αξόνων και γωνία 90^o. Συζητούν τη σχέση των σχημάτων αυτών με το αρχικό και χρησιμοποιούν τις έννοιες της μεταφοράς, ανάκλασης και στροφής για να καταλήξουν σε ένα γενικό ορισμό ης ισότητας.	**Γ1**
ΓΔ2	Οι μαθητές χρησιμοποιούν το επιδιασκόπιο για να προβάλλουν σε μεγέθυνση διάφορα γεωμετρικά σχήματα από μια διαφάνεια σε μια οθόνη. Χρησιμοποιούν δύο διαφάνειες	**Γ2, Γ3**

	στις οποίες έχουν σχεδιαστεί δύο όμοια τρίγωνα, τοποθετούν τη διαφάνεια με το μικρότερο τρίγωνο στο επιδιασκόπιο και αναρτούν τη διαφάνεια με το μεγαλύτερο τρίγωνο στην οθόνη. Προβάλλουν το μικρό τρίγωνο στην οθόνη και αυξομειώνουν τη μεγέθυνσή του με ρυθμίσεις του προβολέα, μέχρις ότου η μεγέθυνση εφαρμόσει ακριβώς στο μεγαλύτερο τρίγωνο που έχει αναρτηθεί στην οθόνη. Επαναλαμβάνουν την ίδια διαδικασία με δύο διαφάνειες στις οποίες έχουν σχεδιαστεί ανόμοια τρίγωνα. Χρησιμοποιούν τις έννοιες της ομοιοθεσίας και της ισότητας, για να περιγράψουν την προηγούμενη διαδικασία και να καταλήξουν σε ένα γενικό ορισμό της ομοιότητας.	
ΓΔ3	Με το Geogebra οι μαθητές ελέγχουν την ομοιότητα δύο σχημάτων με δύο τρόπους: (α) μέσω συνδυαστικών μετασχηματισμών (ομοιοθεσία, στροφή, μεταφορά, ανάκλαση) και (β) με χρήση του κριτηρίου ισότητας γωνιών και αναλογίας πλευρών. (αρχείο: [Γ-ΓΔ3-Ομοιότητα με μετασχηματισμούς](#)) 	**Γ2, Γ3**
ΓΔ4	Το επόμενο σχήμα χρησιμοποιείται στο πλαίσιο μιας δραστηριότητας, στην οποία αποδειχθεί το θεώρημα του Θαλή ως εφαρμογή των ομοίων τριγώνων.  θα	**Γ2**
ΓΔ5	Με το Geogebra οι μαθητές μεταβάλλουν το λόγο ομοιοθεσίας δύο ορθογωνίων και εμπλέκονται σε δραστηριότητες συσχέτισης του συγκεκριμένου λόγου με το λόγο των περιμέτρων και το λόγο των εμβαδών των δύο ορθογωνίων (αρχείο: [Γ-ΓΔ5-Λόγος εμβαδών και περιμέτρων ομοιόθετων ορθογωνίων](#)). 	**Γ2, Γ4**

ΓΔ6	Ένας μηχανικός, τα μάτια του οποίου βρίσκονται σε ύψος 1,8m από το έδαφος, χρησιμοποιεί την εξής διαδικασία, για να μετρήσει το ύψος μιας κατακόρυφης κεραίας: Τοποθετεί σε οριζόντια θέση στο έδαφος έναν καθρέπτη σε απόσταση 10 μέτρων από τη βάση της κεραίας. Στη συνέχεια μετακινείται προς την αντίθετη κατεύθυνση και παρατηρεί ότι σε απόσταση 0,9m από τον καθρέπτη βλέπει μέσα σε αυτόν την κορυφή της κεραίας. Από τα στοιχεία αυτά υπολογίζει ότι το ύψος της κεραίας είναι 20m. Να κάνετε ένα σχεδιάγραμμα και να εξηγήσετε γιατί αυτή η διαδικασία δίνει σωστό αποτέλεσμα.	**Γ5**
ΜΔ1	Οι μαθητές χρησιμοποιούν τα αποτελέσματα ενός πραγματικού ή νοητικού πειράματος, στο οποίο κατασκευάζονται από το ίδιο υλικό ένα παραλληλεπίπεδο και ένα πρίσμα με ίσες βάσεις και ίσα ύψη και εν συνεχεία προσδιορίζεται η μάζα τους. Η γνώση της μάζας των στερεών και της πυκνότητας του υλικού επιτρέπει τον υπολογισμό των όγκων σύμφωνα με τον τύπο: πυκνότητα = μάζα : όγκος. Το πείραμα επαναλαμβάνεται με ένα πρίσμα και μια πυραμίδα που έχουν ίσες βάσεις και ίσα ύψη. Από τα αποτελέσματα προσδιορίζονται οι σχέσεις ανάμεσα στους όγκους του παραλληλεπιπέδου, του πρίσματος και της πυραμίδας.	**Μ2**
ΜΔ2	Οι μαθητές χρησιμοποιούν την Τριγωνομετρία και το Πυθαγόρειο θεώρημα για να προσδιορίσουν σχέσεις ανάμεσα στις πλευρές και τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών ενός οξυγωνίου τριγώνου ΑΒΓ με ύψος ΑΔ. Οι σχέσεις αυτές διατυπώνονται στη μορφή γενικών προτάσεων (νόμοι ημιτόνων και συνημιτόνων) και εξετάζεται η δυνατότητα της επέκτασής τους σε αμβλυγώνια τρίγωνα. 	**Μ3, Μ5**
ΣΔ1	Η Άννα έφτιαξε το διπλανό σημειόγραμμα που αφορά την ποσότητα ζάχαρης ανά μερίδα σε 9 κουτιά δημητριακών. Υπολόγισε τη μέση τιμή και βρήκε ότι είναι 6 γραμμάρια ζάχαρης και μετά δημιούργησε τα υπόλοιπα στοιχεία του διαγράμματος.  α) Τι υποδηλώνουν τα βέλη που υπάρχουν εκατέρωθεν της γραμμής που δείχνει την θέση της μέσης τιμής; β) Υπολογίστε το μήκος του κάθε βέλους και το άθροισμα των μηκών για τα βέλη που δείχνουν προς τα δεξιά και ξεχωριστά το άθροισμα των μηκών για τα βέλη που δείχνουν αριστερά. γ) Τι σχέση έχουν τα δύο αθροίσματα; Γιατί νομίζετε ότι συμβαίνει αυτό; Εξηγήστε αν αυτό θα συμβαίνει πάντα ή όχι. δ) Πώς μπορούμε να αξιοποιήσουμε κάποια από τα παραπάνω, για να βρούμε τη μέση απόσταση που έχουν τα δεδομένα από την μέση τιμή;	**Σ4**
ΠΔ1	Ρίχνουμε δυο ζάρια και θεωρούμε τα ενδεχόμενα Α: να φέρουν άθροισμα 9	**Π1**

	Β: τουλάχιστον ένα από τα δυο ζάρια να φέρει 1 ή 2 Γ: τουλάχιστον ένα από τα δυο ζάρια να φέρει 5 ή 6 Ρωτάμε τους μαθητές αν είναι δυνατό να πραγματοποιηθούν συγχρόνως δυο από τα παραπάνω ενδεχόμενα και ποια.	
ΠΔ2	Σε δυο κουτιά βάζουμε από τρεις ίσες κιμωλίες όχι όμως ακριβώς τα ίδια χρώματα στα δυο κουτιά π.χ. λευκή, μπλε, κόκκινη στο 1^{ο} κουτί και λευκή, λευκή μπλε στο 2^{ο} κουτί. Ρίχνουμε ένα κέρμα και με βάση το αποτέλεσμα διαλέγουμε κουτί. Κατόπιν διαλέγουμε μια κιμωλία από το κάθε κουτί και θεωρούμε τα ενδεχόμενα Α: επιλέγω το 2^{ο} κουτί Β: επιλέγω λευκή κιμωλία Ρωτάμε τους μαθητές κατά πόσο η πραγματοποίηση ενός ενδεχομένου επηρεάζει ή όχι την πραγματοποίηση του άλλου ενδεχομένου; Στη συνέχεια θέτουμε το ίδιο πρόβλημα βάζοντας όμως στα κουτιά τις ίδιες ακριβώς κιμωλίες.	**Π2**
ΠΔ3	Δίνουμε στους μαθητές ένα μενού εστιατορίου με 3 ορεκτικά, 2 σαλάτες, 4 κύρια πιάτα και 2 γλυκά και ζητάμε κάθε μαθητής να δώσει διαφορετική παραγγελία από τους συμμαθητές του. Κατόπιν βρίσκουμε πόσες διαφορετικές παραγγελίες μπορούμε να κάνουμε με το συγκεκριμένο μενού. Στη συνέχεια στους υπολογισμούς μπορούμε να βάλουμε και περιορισμούς όπως να μην παραγγείλουμε μαζί το τάδε ορεκτικό με το τάδε κύριο πιάτο.	**Π3**
ΠΔ4	Δίνουμε στους μαθητές ένα ερωτηματολόγιο με 4 ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής, όπου σε κάθε ερώτηση υπάρχουν τρεις απαντήσεις, εκ των οποίων μόνο μια σωστή. Οι ερωτήσεις είναι τέτοιες, ώστε να αναγκαστούν οι μαθητές να τις απαντήσουν στην τύχη. Ζητάμε την πιθανότητα να απαντήσουν όλες τις ερωτήσεις σωστά καθώς και την πιθανότητα να τις απαντήσουν όλες λάθος.	**Π3**

ΣΥΝΘΕΤΙΚΕΣ ΕΡΓΑΣΙΕΣ 3ου Κύκλου (Α΄ - Β΄ - Γ΄ Γυμνασίου)

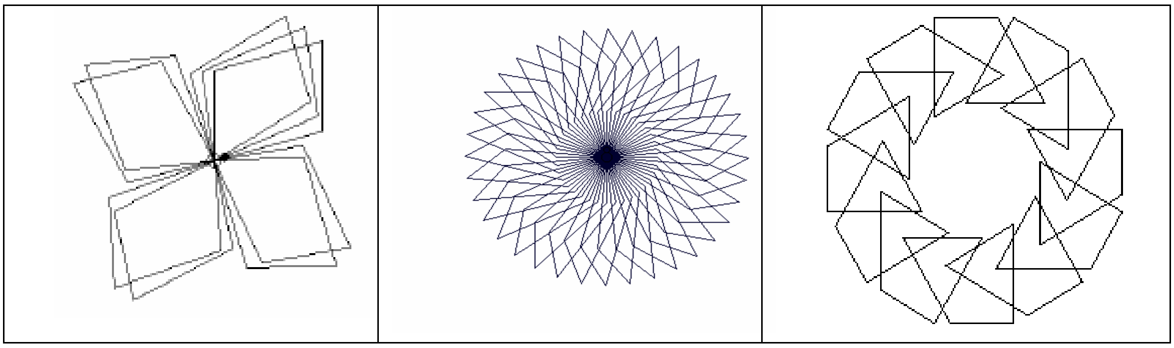
Πίνακας Περιεχομένων

				Ιστότοπος της Ευρωπαϊκής Ένωσης: http://europa.eu/pol/ener/index_el.htm Ευρωπαϊκός Οργανισμός Περιβάλλοντος http://www.eea.europa.eu/themes/energy Υπουργείο Περιβάλλοντος, Ενέργειας και Κλιματικής αλλαγής: http://www.ypeka.gr/Default.aspx?tabid=225&language=el-GR Κέντρο Ανανεώσιμων Πηγών Ενέργειας: http://www.cres.gr/kape/publications/download.htm
4	«Αιτιολόγηση (“αναζήτηση της αιτίας”) των γεωμετρικών προτάσεων στην αρχαία Ελλάδα»	Στους μαθητές δίνεται μια γεωμετρική πρόταση για τις εξωτερικές γωνίες του τριγώνου και θα ζητηθεί από αυτούς να εξετάσουν αν ισχύει πάντοτε ή όχι. Στη συνέχεια μελετούν ένα αρχαιοελληνικό μαθηματικό κείμενο (σε μετάφραση), στο οποίο παρουσιάζεται ένας τρόπος αιτιολόγησης της ίδιας γεωμετρικής πρότασης διαφορετικός από την τυπική Ευκλείδεια απόδειξη με βάση αξιώματα και προηγούμενες προτάσεις.	Α΄ Γυμνασίου	Αρχείο Sketchpad: *4-‘ Παράδοξες’ ιδιότητες των γεωμετρικών προτάσεων*
5	«Αναζητώντας το λάθος του γραμμωτού κώδικα»	Μέσα από ένα πραγματικό πρόβλημα οι μαθητές μελετούν τις γραμμικές συναρτήσεις ψ=αχ και ψ=αχ+β, χρησιμοποιώντας το υπολογιστικό περιβάλλον Function Probe (FP) που διασυνδέει τις διαφορετικές αναπαραστάσεις των συναρτήσεων (πίνακα τιμών, γραφική παράσταση και συμβολική έκφραση).	Β΄ Γυμνασίου	Αρχεία Function Probe: *5 -φάση 1-αρχικό* *5-φάση 1-τελικό* *5- φάση 2-ερ3-τελικό* *5- φάση 2-ερ6β-τελικό* *5- φάση 4-τελικό* *5- Φύλλο εργασίας*
6	«Αρνητικοί αριθμοί και εξισώσεις»	Οι μαθητές μελετούν ένα ιστορικό κείμενο στο οποίο ένας σπουδαίος μαθηματικός απορρίπτει τη χρήση των αρνητικών αριθμών όταν αυτοί	Β΄ Γυμνασίου	

		εμφανίζονται ως λύσεις εξισώσεων. Στη συνέχεια ασχολούνται με ένα πρόβλημα στο οποίο θα διαφανεί η σημασία των αρνητικών αριθμών για την επίλυση των εξισώσεων.		
7	«"Παράδοξες" ιδιότητες των γεωμετρικών προτάσεων»	Στους μαθητές δίνεται προς επίλυση ένα γεωμετρικό πρόβλημα. Στη συνέχεια μελετούν ένα αρχαιοελληνικό μαθηματικό κείμενο (σε μετάφραση) στο οποίο τονίζεται ο παράδοξος χαρακτήρας της λύσης του συγκεκριμένου προβλήματος.	Β΄ Γυμνασίου	Αρχεία Sketchpad: *7-"Παράδοξες" ιδιότητες των γεωμετρικών προτάσεων*
8	«Παγκόσμιο χωριό - Οι άνθρωποι και οι κοινωνίες πίσω από τους αριθμούς»	Στο πλαίσιο των στατιστικών ερευνών που κάνουν οι μαθητές, στο μάθημα των μαθηματικών, μελετούν ομοιότητες και διαφορές ανάμεσα σε αυτούς και τους μαθητές άλλων χωρών, συλλέγουν δεδομένα από το διαδίκτυο και τα επεξεργάζονται χρησιμοποιώντας το υπολογιστικό περιβάλλον των λογιστικών φύλλων.	Β΄ Γυμνασίου. Η εργασία μπορεί να εφαρμοστεί σε οποιαδήποτε τάξη.	
9	«Μελετώντας την κάτοψη ενός σπιτιού»	Με αφετηρία ένα πραγματικό πρόβλημα που σχετίζεται με το μετασχηματισμό της κάτοψης ενός σπιτιού οι μαθητές εισάγονται στην έννοια της ομοιοθεσίας και της ομοιότητας γεωμετρικών σχημάτων. Διαπραγματεύονται τη σχέση του λόγου των περιμέτρων και του λόγου των εμβαδών ομοιόθετων γεωμετρικών σχημάτων με το λόγο ομοιότητας και θα διερευνήσουν το πρόβλημα του κόστους της οικοδομής σε σχέση με την περίμετρο και το εμβαδόν της.	Γ΄ Γυμνασίου	Αρχεία Geogebra: *9-φάση 1-Ομοιόθετο σημείου* *9 -φάση 1-Ομοιόθετο τμήματος* *9 -φάση 1-Λόγος περιμέτρων-εμβαδών* *9 -φάση 2-Ομοιότητα* *9 -φάση 3*
10	«Ανακαλύπτοντας τη χρυσή αναλογία»	Χωρίζοντας ένα ευθύγραμμο τμήμα σε μέσο και άκρο λόγο, οι μαθητές ανακαλύπτουν τη χρυσή αναλογία και τον αριθμό φ. Τον υπολογίζουν προσεγγιστικά και διερευνούν συνεργατικά την εμφάνιση του λόγου φ στη φύση, στην αρχιτεκτονική και στις τέχνες.	Γ΄ Γυμνασίου	Αρχείο Geogebra: *10- Ψάχνοντας για τη χρυσή αναλογία*

ΣΥΝΘΕΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ 1 (Α΄ Γυμνασίου)
«Σχεδιάζοντας με τετράπλευρα»

Ο καθηγητής των καλλιτεχνικών του σχολείου σας έχει αναθέσει να σχεδιάσετε δυναμικά σχέδια με δομικό λίθο τα τετράπλευρα. Σας πρότεινε να κατασκευάσετε τα σχέδια στο λογισμικό «Χελωνόκοσμος», ώστε να μπορείτε να τροποποιείτε το σχήμα τους και τον αριθμό των χρησιμοποιούμενων τετραπλεύρων (παραλληλογράμμων και τραπεζίων) όπως και να μπορείτε να τα κινείτε ώστε να φαίνονται περισσότερο εντυπωσιακά. Οι επόμενες διερευνήσεις θα βοηθήσουν την ομάδα σας να κάνει τέτοιες κατασκευές.



Ενδεικτικές φάσεις εφαρμογής

1η φάση: Οι μαθητές κατασκευάζουν τετράπλευρα χρησιμοποιώντας το δυναμικό χειρισμό μεταβλητών που αναπαριστούν τις γωνίες του. Στη συνέχεια κατασκευάζουν παραλληλόγραμμα με τρεις μεταβλητές αφού διερευνήσουν πόσες μεταβλητές για πλευρές και γωνίες είναι απολύτως απαραίτητες για να γράψουμε μια παραμετρική διαδικασία που θα κατασκευάζει παραλληλόγραμμα διαφορετικών τύπων και μεγεθών.

2η φάση: Οι μαθητές μετασχηματίζουν τετράπλευρα σε τραπέζια και παραλληλόγραμμα και στη συνέχεια σε ορθογώνια, ρόμβους και τετράγωνα. Διαπραγματεύονται τη σχέση των διάφορων μορφών τετραπλεύρου.

Για παράδειγμα, ζητείται από τους μαθητές να διορθώσουν παραμετρικές διαδικασίες ώστε να κατασκευάζουν διαφορετικά είδη παραλληλογράμμων και τραπεζίων διερευνώντας παράλληλα τις γεωμετρικές τους ιδιότητες.

3η φάση: Οι μαθητές χρησιμοποιούν τα υπολογιστικά εργαλεία για να κατασκευάσουν δυναμικές συνθέσεις σχεδίων βασισμένων σε διαφορετικά είδη τετραπλεύρων που θα μπορούν να χειριστούν δυναμικά με το μεταβολέα.

Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Στην παραδοσιακή τάξη η διδασκαλία των διάφορων ειδών τετραπλεύρων γίνεται με στατικά μέσα αναπαράστασης και εμφανίζεται εντελώς αποκομμένη από έννοιες της άλγεβρας. Στο πλαίσιο αυτό οι μαθητές έχουν περιορισμένες δυνατότητες εμπλοκής τους σε διαδικασίες διερεύνησης των ιδιοτήτων των παραλληλογράμμων και των τραπεζίων και των μεταξύ τους σχέσεων. Στην παρούσα εργασία και με τη βοήθεια του Χελωνόκοσμου οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα:

- να συνδέσουν διαφορετικές έννοιες και αναπαραστάσεις (π.χ. να συνδέσουν την κατασκευή ενός γεωμετρικού σχήματος με την έννοια της μεταβλητής),

- να πειραματιστούν με τις αλλαγές στις τιμές των μεταβλητών των πλευρών ή/και των γωνιών σε παραμετρικές διαδικασίες κατασκευής τεθλασμένων πολυγωνικών γραμμών και να διερευνήσουν τις προϋποθέσεις κατασκευής παραλληλογράμμων και τις ιδιότητές τους,
- να χρησιμοποιήσουν τις παραμετρικές διαδικασίες ως δομικό λίθο για να μοντελοποιήσουν την κατασκευή πολύπλοκων γεωμετρικών σχεδίων,
- να αναγνωρίσουν την αξία του γενικευμένου -χάρη στα μαθηματικά – εργαλείου ως του μηχανισμού μέσω του οποίου μπορεί να κατασκευάζουμε πολύπλοκες γεωμετρικές συνθέσεις.

Μέσω της χρήσης μεταβλητών προσφέρονται ευκαιρίες στους μαθητές να αναπτύξουν εικασίες, να διορθώσουν παραμετρικές διαδικασίες και να διαχειριστούν τα λάθη τους, να εξαγάγουν συμπεράσματα και να διατυπώσουν κανόνες για την κατασκευή παραλληλογράμμων και τραπεζίων. Αυτές ακριβώς οι δυνατότητες έχουν ιδιαίτερη διδακτική αξία αφού στην συνήθη διδακτική πρακτική αποτελούν την κατάληξη και όχι την αφετηρία της διερεύνησης των ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων.

(Η κεντρική δομή της συνθετικής εργασίας προέρχεται από το σενάριο 1 του επιμορφωτικού υλικού για την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών στα Κέντρα Στήριξης Επιμόρφωσης Β΄ επιπέδου για τη χρήση των ΤΠΕ στην εκπαιδευτική διαδικασία – ΥπΠΔΒΜ,Πάτρα 2010).

ΣΥΝΘΕΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ 2 (Α΄ Γυμνασίου) «Η αιτιολόγηση του “κανόνα των προσήμων” από τους μαθηματικούς του 18ου αιώνα»

Nicholas Saunderson: The Elements of Algebra (1741)

Σχετικά με τον πολλαπλασιασμό αλγεβρικών ποσοτήτων.
Και πρώτα, πώς να βρίσκει κανείς το πρόσημο του γινομένου στον πολλαπλασιασμό, από εκείνα του πολλαπλασιαστή και του πολλαπλασιαστέου

Πριν προχωρήσουμε στον πολλαπλασιασμό αλγεβρικών ποσοτήτων, να έχουμε υπόψη ότι, αν τα πρόσημα του πολλαπλασιαστή και του πολλαπλασιαστέου είναι ίδια, δηλαδή, και τα δυο θετικά, ή και τα δυο αρνητικά, το γινόμενο θα είναι θετικό, αλλιώς θα είναι αρνητικό: έτσι όταν το +4 πολλαπλασιάζεται με το +3, ή το –4 με το –3 προκύπτει σε κάθε περίπτωση +12. Αλλά όταν το –4 πολλαπλασιάζεται με το +3 ή το +4 με το –3 προκύπτει σε κάθε περίπτωση –12.
Αν ο αναγνώστης αναμένει μια απόδειξη αυτού του κανόνα, πρέπει αρχικά να του γνωστοποιήσουμε δύο πράγματα: πρώτον, λέμε ότι κάποιοι αριθμοί βρίσκονται σε αριθμητική πρόοδο, όταν αυξάνονται ή μειώνονται με ίσες διαφορές, όπως οι 0, 2, 4, 6, ή 6, 4, 2, 0. Επίσης όπως οι 3, 0, –3 ή 4, 0, –4, ή 12, 0, –12 ή –12, 0, +12. Από εδώ έπεται ότι αριθμοί με τους οποίους μπορεί να σχηματιστεί μια αριθμητική πρόοδος είναι το λιγότερο τρεις, και ότι αν οι δύο πρώτοι από αυτούς είναι γνωστοί, τότε ο τρίτος μπορεί εύκολα να βρεθεί. Έτσι, αν οι δύο πρώτοι όροι είναι 4 και 2, ο επόμενος θα είναι το 0, αν οι δύο πρώτοι είναι 12 και 0, ο επόμενος θα είναι –12, αν οι δύο πρώτοι είναι –12 και 0, ο επόμενος θα είναι +12, κ.ο.κ.
Δεύτερον, αν ένα σύνολο αριθμών σε αριθμητική πρόοδο, όπως οι 3, 2 και 1, πολλαπλασιάζονται διαδοχικά με έναν κοινό πολλαπλασιαστή, όπως το 4, ή αν ένας μεμονωμένος αριθμός, όπως το 4 πολλαπλασιάζεται διαδοχικά με ένα σύνολο αριθμών σε αριθμητική πρόοδο, όπως οι 3, 2 και 1, τα γινόμενα 12, 8, και 4 θα βρίσκονται, σε κάθε περίπτωση, σε αριθμητική πρόοδο.
Με αυτό το δεδομένο (το οποίο μέχρις ενός σημείου είναι αυτονόητο), ο κανόνας που έχουμε να αποδείξουμε αναλύεται σε τέσσερις περιπτώσεις:
Πρώτον, ότι το +4 όταν πολλαπλασιάζεται με το +3 παράγει +12.
Δεύτερον, ότι το –4 όταν πολλαπλασιάζεται με το +3 παράγει –12.
Τρίτον, ότι το +4 όταν πολλαπλασιάζεται με το –3 παράγει –12.
Και τέλος, ότι το –4 όταν πολλαπλασιάζεται με το –3 παράγει +12. Αυτές οι περιπτώσεις γενικά εκφράζονται με συντομία ως εξής: πρώτον + επί + δίνει + · δεύτερον – επί + δίνει – · τρίτον + επί – δίνει – · τέταρτον – επί – δίνει +.
Περίπτωση πρώτη. Ότι το +4 όταν πολλαπλασιάζεται με το +3 παράγει +12, είναι αυτονόητο, και δεν χρειάζεται απόδειξη. Αν όμως ζητηθεί, θα μπορούσε να γίνει σύμφωνα με την πρώτη παράγραφο της τρίτης ενότητα· διότι ο πολλαπλασιασμός +4 επί +3 είναι το ίδιο με την πρόσθεση των 4 + 4 + 4 σε ένα άθροισμα· αλλά όταν τα 4 + 4 + 4 προστίθενται σε ένα άθροισμα δίνουν +12, επομένως όταν το +4 πολλαπλασιάζεται με το +3, δίνει +12.
Περίπτωση δεύτερη. Και από τη δεύτερη παράγραφο της τρίτης ενότητας θα μπορούσε με τον ίδιο τρόπο να αποδειχθεί, ότι το –4 όταν πολλαπλασιάζεται με το +3 παράγει –

12. Όμως θα το αποδείξω εδώ με άλλο τρόπο, ως εξής: πολλαπλασιάζω τους όρους της αριθμητικής προόδου 4, 0, –4 με το +3, και τα γινόμενα θα βρίσκονται σε αριθμητική πρόοδο, όπως αναφέρθηκε παραπάνω˙ αλλά τα δύο πρώτα γινόμενα είναι 12 και 0, επομένως το τρίτο θα είναι –12. Άρα το –4 όταν πολλαπλασιάζεται με το +3 παράγει –12.

Περίπτωση τρίτη. Να αποδειχθεί ότι το +4 όταν πολλαπλασιάζεται με το –3 παράγει –12. Πολλαπλασιάζω το +4 με τους +3, 0 και –3 διαδοχικά και τα γινόμενα θα βρίσκονται σε αριθμητική πρόοδο˙ αλλά τα δύο πρώτα είναι 12 και 0, επομένως το τρίτο θα είναι –12. Άρα +4 όταν πολλαπλασιάζεται με το –3 παράγει –12.

Περίπτωση τέταρτη. Τέλος, για να αποδειχθεί ότι το –4 όταν πολλαπλασιάζεται με το –3 παράγει +12, πολλαπλασιάζω το –4 με τους 3, 0 και –3 διαδοχικά και τα γινόμενα θα βρίσκονται σε αριθμητική πρόοδο˙ αλλά τα δύο πρώτα γινόμενα είναι –12 και 0, σύμφωνα με την δεύτερη περίπτωση. Επομένως το τρίτο γινόμενο θα είναι +12. Άρα το –4 όταν πολλαπλασιάζεται με το –3 παράγει +12.

Αυτές οι 4 περιπτώσεις μπορούν επίσης να αποδειχθούν πιο σύντομα ως εξής: το +4 όταν πολλαπλασιάζεται με το +3 παράγει +12˙ επομένως το –4 με το +3, ή το +4 με το –3 οφείλουν να παράγουν κάτι αντίθετο προς το +12, δηλαδή το –12. Αλλά όταν το –4 πολλαπλασιαζόμενο με το +3 παράγει –12, τότε το –4 πολλαπλασιαζόμενο με το –3 οφείλει να παράγει κάτι αντίθετο προς το –12, δηλαδή το +12˙ ώστε αυτή η τελευταία περίπτωση, που φοβίζει τόσο πολύ τους αρχάριους, εμφανίζεται να μη είναι τίποτε περισσότερο από μια κοινή αρχή της Γραμματικής, δηλαδή, ότι δυο αρνήσεις κάνουν μια κατάφαση˙ οποία αναμφίβολα αληθεύει στη Γραμματική, αν και ενδεχομένως δεν παρατηρείται πάντοτε στις γλώσσες.

Ενδεικτικές φάσεις εφαρμογής

1η φάση*:* Οι μαθητές μελετούν το ιστορικό κείμενο, κάνουν συνοπτική περιγραφή και συγκρίνουν τους δύο τρόπους αιτιολόγησης του "κανόνα των προσήμων". Στη συνέχεια εντοπίζουν μια άλλη αιτιολόγηση του κανόνα σε σύγχρονες πηγές (διδακτικά βιβλία, εγκυκλοπαίδειες, διαδίκτυο) και κάνουν συνοπτική περιγραφή της.

2η φάση*:* Οι μαθητές παρουσιάζουν στην τάξη τα αποτελέσματα της εργασίας τους, ανταλλάσουν ιδέες και καταλήγουν σε ορισμένα συμπεράσματα σχετικά με το νόημα της αιτιολόγησης των πράξεων των ακεραίων αριθμών.

Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Παρά το γεγονός ότι έχει ηλικία 270 ετών, η πρώτη αιτιολόγηση του "κανόνα των προσήμων" που υπάρχει στο ιστορικό κείμενο διαθέτει δύο πολύ σύγχρονα διδακτικά και μαθηματικά χαρακτηριστικά:

α) Αξιοποιεί την έννοια του "μοτίβου" στη μορφή της αριθμητικής προόδου.

β) Χρησιμοποιεί ως "αξίωμα" την ιδιότητα του συγκεκριμένου "μοτίβου" να παραμένει αναλλοίωτο στον πολλαπλασιασμό (μια σύμβαση που δεν διαφέρει ουσιωδώς από τη σύγχρονη αξιωματική παραδοχή ότι η επιμεριστική ιδιότητα ισχύει a priori και για τους αρνητικούς αριθμούς).

Η δραστηριότητα δίνει στους μαθητές τη δυνατότητα να εκτιμήσουν ορισμένα διαχρονικά χαρακτηριστικά της μαθηματικής δραστηριότητας, όπως είναι η έννοια της απόδειξης, και να διαπιστώσουν ότι στην αποδεικτική διαδικασία παίζουν θεμελιώδη ρόλο ορισμένες παραδοχές στη μορφή περισσότερο ή λιγότερο φανερών αξιωμάτων.

Σχόλιο: Μεγάλο ενδιαφέρον ως θέμα συμπληρωματικής εργασίας παρουσιάζει επίσης η βιογραφία του συγγραφέα Nicholas Saunderson και ο τρόπος που διδάχθηκε Μαθηματικά (Α.Μ.Ε.Α. και Lucasian Professor of Mathematics στο Πανεπιστήμιο του Cambridge).

ΣΥΝΘΕΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ 3 (Α΄ Γυμνασίου)
«Αιολική ενέργεια - Κατασκευάζουμε έναν ανεμόμυλο;»

Ο ανεμόμυλος είναι μια μηχανή που αξιοποιεί την αιολική ενέργεια. Αρχικά χρησιμοποιήθηκε για την άλεση δημητριακών και την άντληση νερού ενώ στη συνέχεια κατασκευάστηκαν οι ανεμογεννήτριες για την παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας.

Ο καθηγητής τεχνολογίας του σχολείου σας έχει αναθέσει να σχεδιάσετε ένα σχέδιο για να κατασκευάσετε στη συνέχεια ένα μοντέλο ανεμόμυλου του οποίου τα πτερύγια θα έχουν σχήμα παραλληλογράμμου. Σας πρότεινε να κατασκευάσετε το σχέδιο του ανεμόμυλου στο λογισμικό «Χελωνόκοσμος», ώστε να μπορείτε να τροποποιείτε το σχήμα και τον αριθμό των πτερυγίων. Οι επόμενες διερευνήσεις θα βοηθήσουν την ομάδα σας να κάνει αυτή την κατασκευή και παράλληλα να μελετήσει τα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα της χρήσης ανεμογεννητριών και τα πιθανά οφέλη μιας περιοχής από την ανάπτυξη της χρήσης της αιολικής ενέργειας. Αφού ερευνήσετε τη βιβλιογραφία και το κατάλληλο ενημερωτικό υλικό που θα σας υποδείξει ο υπεύθυνος καθηγητής, οργανώστε μια αντιπαράθεση απόψεων σχετικά με την εγκατάσταση ή μη ανεμογεννητριών στην περιοχή σας. Τεκμηριώστε με επιχειρήματα τις απόψεις σας και προσπαθείτε να φθάσετε σε μία κοινά αποδεκτή λύση.

Ενδεικτικές φάσεις εφαρμογής

$1^{η}$ φάση: Οι μαθητές κατασκευάζουν παραλληλόγραμμα χρησιμοποιώντας το δυναμικό χειρισμό μεταβλητών που αναπαριστούν τις γωνίες του. Στη συνέχεια κατασκευάζουν παραλληλόγραμμα με τρεις μεταβλητές.

$2^{η}$ φάση: Οι μαθητές χρησιμοποιούν τα υπολογιστικά εργαλεία για να περιστρέψουν παραλληλόγραμμα και να κατασκευάσουν διαφορετικά μοντέλα ανεμόμυλων. Παράλληλα, στο πλαίσιο αυτό οι μαθητές εισάγονται στην έννοια της στροφής ενός σχήματος και στην κεντρική συμμετρία.

$3^{η}$ φάση: Οι μαθητέςχωρισμένοι σε δύο ομάδες αντιπαρατίθενται σχετικά με την εγκατάσταση ανεμογεννητριών στην περιοχή τους και με επιχειρήματα τεκμηριώνουν και καταγράφουν τις απόψεις τους. Επιδίωξη είναι η εξεύρεση μίας κοινά αποδεκτής λύσης.

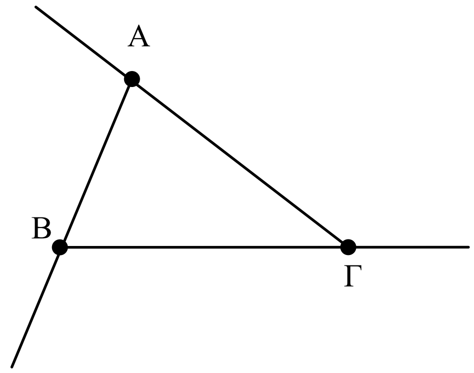
Για παράδειγμα,η πρώτη ομάδα υποστηρίζει την άποψη ότι η χρήση ανεμογεννητριών συμβάλλει στη μείωση της έντασης του φαινομένου του θερμοκηπίου, ως ανανεώσιμη πηγή παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας, ενώ παράλληλα προσφέρει ευκαιρίες ανάπτυξης στην περιοχή. Η δεύτερη ομάδα υποστηρίζει ότι η χρήση ανεμογεννητριών έχει μειονεκτήματα, όπως επιπτώσεις στο τοπικό περιβάλλον, μικρή ισχύς, μείωση της αξίας της γης στην περιοχή.

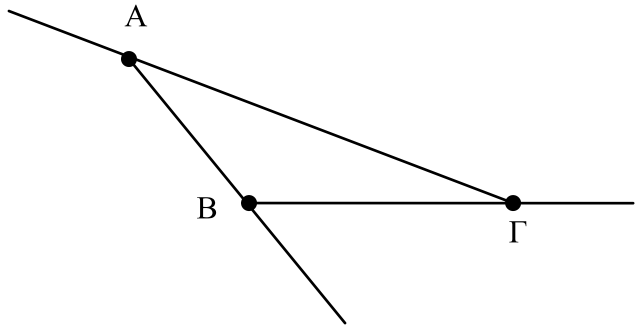
Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα
Μαθηματικά
Στην παραδοσιακή τάξη η διδασκαλία των παραλληλογράμμων γίνεται με στατικά μέσα αναπαράστασης κι έτσι οι μαθητές έχουν περιορισμένες δυνατότητες εμπλοκής τους σε διαδικασίες διερεύνησης των ιδιοτήτων τους. Στην παρούσα εργασία και με τη βοήθεια των εργαλείων του Χελωνόκοσμου οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα:
- να συνδέσουν διαφορετικές έννοιες και αναπαραστάσεις (π.χ. να συνδέσουν την κατασκευή ενός γεωμετρικού σχήματος με την έννοια της μεταβλητής),
- να πειραματιστούν με τις αλλαγές στις τιμές των μεταβλητών των πλευρών ή/και των γωνιών σε παραμετρικές διαδικασίες κατασκευής τεθλασμένων πολυγωνικών γραμμών και να διερευνήσουν τις προϋποθέσεις κατασκευής παραλληλογράμμων και τις ιδιότητές τους,
- να χρησιμοποιήσουν τις παραμετρικές διαδικασίες ως δομικό λίθο για να μοντελοποιήσουν την κατασκευή αντικειμένων του πραγματικού κόσμου.

Περιβάλλον και Εκπαίδευση για την Αειφόρο Ανάπτυξη
Με την αντιπαράθεση απόψεων σχετικά με την εγκατάσταση ανεμογεννητριών σε μία περιοχή, για την παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας από ανανεώσιμες πηγές, οι μαθητές μπορούν:
- να διακρίνουντα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα της χρήσης ανεμογεννητριών στο τοπικό περιβάλλον και την αειφόρο ανάπτυξη μίας περιοχής,
- να αξιοποιήσουν και να ερμηνεύσουν βιβλιογραφικά δεδομένα και στοιχεία σχετικά με την παραγωγή ενέργειας από ανεμογεννήτριες,
- να διατυπώσουν επιχειρήματα και τεκμηριωμένες απόψεις.

ΣΥΝΘΕΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ 4 (Α΄Γυμνασίου)
«Αιτιολόγηση (“αναζήτηση της αιτίας”) των γεωμετρικών προτάσεων στην αρχαία Ελλάδα»

Είναι κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου μεγαλύτερη από τις εσωτερικές γωνίες;
Στα δύο παρακάτω σχήματα έχουμε σχεδιάσει ένα οξυγώνιο και ένα αμβλυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και έχουμε σχηματίσει τις εξωτερικές γωνίες του.

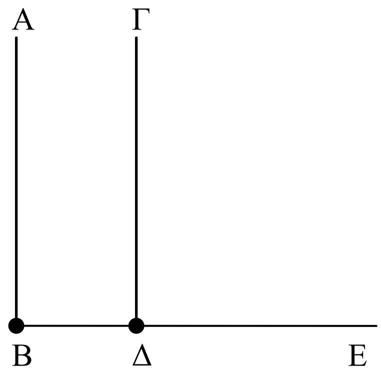




Κάποιος ισχυρίζεται ότι: Σε κάθε τρίγωνο, μια εξωτερική γωνία είναι πάντοτε μεγαλύτερη από όλες τις εσωτερικές γωνίες.
Ένας άλλος ισχυρίζεται ότι: Σε κάθε τρίγωνο, μια εξωτερική γωνία είναι πάντοτε μεγαλύτερη από δύο εσωτερικές γωνίες.
Να εξετάσετε αν αυτοί οι ισχυρισμοί είναι σωστοί. Αν δεν είναι, να τους συμπληρώσετε ή να τους τροποποιήσετε έτσι ώστε να είναι σωστοί.

Ένα απόσπασμα από το έργο του Πρόκλου
Σχόλια στο α΄ βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη

Σε κάθε τρίγωνο, αν προεκταθεί μια από τις πλευρές, η εξωτερική γωνία είναι μεγαλύτερη από οποιαδήποτε εσωτερική και απέναντι γωνία.



Θεωρούμε δύο ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΓΔ τα οποία τέμνει μια ευθεία ΒΕ έτσι ώστε οι γωνίες ΑΒΔ και ΓΔΕ να είναι ίσες. Τότε τα τμήματα ΑΒ, ΓΔ είναι παράλληλα.
Αν το ΑΒ παραμένει ακίνητο και θεωρήσουμε ότι το ΓΔ στρέφεται προς το ΑΒ για να συναντηθούν, τότε η γωνία ΓΔΕ θα μεγαλώνει διότι όσο πλησιάζει το ΓΔ προς το ΑΒ, τόσο απομακρύνεται από το ΔΕ. Και αν παραμένει ακίνητο το ΓΔ και θεωρήσουμε ότι το ΑΒ στρέφεται προς το ΓΔ για να συναντηθούν, τότε η γωνία ΑΒΔ θα μικραίνει διότι το ΑΒ καθώς στρέφεται προς το ΓΔ στρέφεται και προς το ΒΔ. Και αν θεωρήσουμε ότι στρέφονται και τα δύο, το ένα προς το άλλο, θα διαπιστώσουμε ότι το μεν ΑΒ πλησιάζοντας προς το ΒΔ μικραίνει τη γωνία, ενώ το ΓΔ καθώς στρέφεται προς το ΑΒ απομακρύνεται από το ΔΕ και έτσι μεγαλώνει τη γωνία ΓΔΕ.

Αναγκαστικά λοιπόν, αν συναντηθούν οι ΑΒ, ΓΔ και σχηματιστεί ένα τρίγωνο, η εξωτερική γωνία θα είναι μεγαλύτερη από την απέναντι εσωτερική. Διότι όταν η εσωτερική παραμένει η ίδια, η εξωτερική αυξάνεται και όταν η εξωτερική παραμένει η ίδια, η εσωτερική μειώνεται. Ή όταν και οι δυο μεταβάλλονται, η εσωτερική μειώνεται και η εξωτερική αυξάνεται. Αιτία αυτών των αλλαγών είναι η κίνηση των ευθυγράμμων τμημάτων, το μεν ένα πλησιάζοντας προς την πλευρά που σχηματίζει την εσωτερική γωνία, το δε άλλο απομακρυνόμενο από την πλευρά που σχηματίζει την εξωτερική γωνία. Από αυτό μπορείς να συμπεράνεις πώς οι κατασκευές των πραγμάτων φέρνουν μπροστά στα μάτια μας τις αληθινές αιτίες των ζητουμένων.

Ερωτήσεις

1) Το κείμενο αυτό ενισχύει ή όχι το συμπέρασμα στο οποίο καταλήξατε σχετικά με τις εξωτερικές γωνίες του τριγώνου;

2) Πώς συγκρίνετε τον τρόπο που χρησιμοποιήσατε για να καταλήξετε στο δικό σας συμπέρασμα με τον τρόπο αιτιολόγησης που χρησιμοποιεί ο συγγραφέα του κειμένου;

Ενδεικτικές φάσεις εφαρμογής

1η φάση: Οι μαθητές διερευνούν τη γεωμετρική πρόταση και χρησιμοποιούν διάφορα μέσα (σχεδίαση, μετρήσεις, υπολογισμούς κ.λ.π.) για να διατυπώσουν την άποψή τους και να την υποστηρίξουν με επιχειρήματα. Στη συνέχεια μελετούν το ιστορικό κείμενο και απαντούν στα ερωτήματα που το συνοδεύουν.

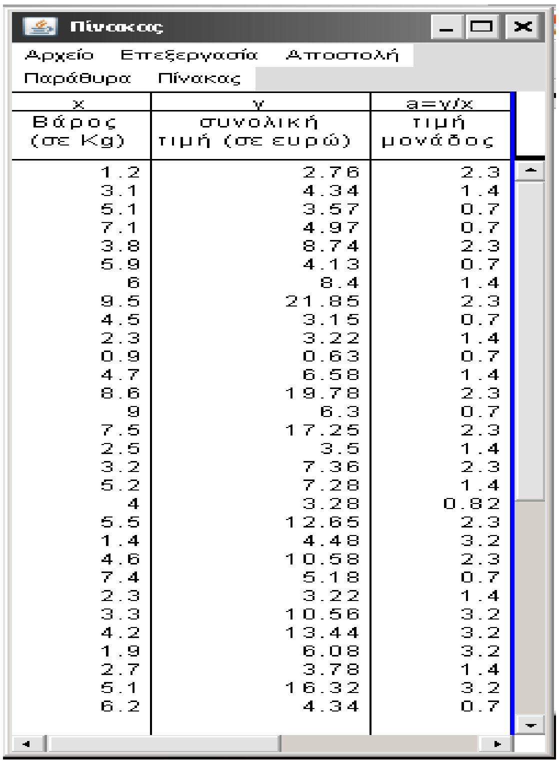
2η φάση: Οι μαθητές παρουσιάζουν στην τάξη τα αποτελέσματα της εργασίας τους, συγκρίνουν διαφορετικούς τρόπους επαλήθευσης, ανταλλάσσουν ιδέες και καταλήγουν σε ορισμένα συμπεράσματα σχετικά με το νόημα και τα μέσα αιτιολόγησης των ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων.

Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Το ιστορικό κείμενο δίνει ένα παράδειγμα της μεθόδου αιτιολόγησης που οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί ονόμαζαν "απόδειξη από αιτία" και τη διαχώριζαν από την Ευκλείδεια αποδεικτική μέθοδο που ονόμαζαν "απόδειξη από τεκμήριο".

Η δραστηριότητα δίνει στους μαθητές τη δυνατότητα να γνωρίσουν μια πρωταρχική μέθοδο "αιτιολόγησης" που έχει τα χαρακτηριστικά του νοητικού πειράματος, να εκτιμήσουν τη σημασία της κίνησης των γεωμετρικών σχημάτων και να διαπιστώσουν ότι η επαλήθευση των ιδιοτήτων μπορεί να γίνει με διαδικασίες που δεν χρησιμοποιούν όργανα σχεδίασης ή μετρήσεων.

ΣΥΝΘΕΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ 5 (Β΄ Γυμνασίου)
«Αναζητώντας το λάθος του γραμμωτού κώδικα»



x	y	a=y/x
Βάρος (σε Kg)	συνολική τιμή (σε ευρώ)	τιμή μονάδος
1.2	2.76	2.3
3.1	4.34	1.4
5.1	3.57	0.7
7.1	4.97	0.7
3.8	8.74	2.3
5.9	4.13	0.7
6	8.4	1.4
9.5	21.85	2.3
4.5	3.15	0.7
2.3	3.22	1.4
0.9	0.63	0.7
4.7	6.58	1.4
8.6	19.78	2.3
9	6.3	0.7
7.5	17.25	2.3
2.5	3.5	1.4
3.2	7.36	2.3
5.2	7.28	1.4
4	3.28	0.82
5.5	12.65	2.3
1.4	4.48	3.2
4.6	10.58	2.3
7.4	5.18	0.7
2.3	3.22	1.4
3.3	10.56	3.2
4.2	13.44	3.2
1.9	6.08	3.2
2.7	3.78	1.4
5.1	16.32	3.2
6.2	4.34	0.7

Ένας ελεγκτής πωλήσεων σε ένα πολυκατάστημα τροφίμων, δέχεται διαμαρτυρίες πελατών για υπερτιμολογήσεις προϊόντων που αγοράζουν από το τμήμα οπωροκηπευτικών. Εκεί τα προϊόντα συσκευάζονται, ζυγίζονται και τιμολογούνται με το σύστημα του γραμμωτού κώδικα (barcode) από μια συγκεκριμένη ζυγαριά. Ο υπάλληλος τοποθετεί την ετικέτα με το γραμμωτό κώδικα που εκτυπώνει η ζυγαριά και ακολούθως διαβάζεται από το σύστημα ανάγνωσης του ταμείου. Θέλει να ελέγξει αν η ζυγαριά δίνει λάθος τιμές. Έχει ενημερώσει τον πωλητή που ζυγίζει και τιμολογεί τα προϊόντα, να καταγράφει την ποσότητα x (σε κιλά) και δίπλα το ποσόν με το οποίο τιμολογήθηκε το προϊόν. Ο πωλητής παρέδωσε στον ελεγκτή έναν πίνακα από τριάντα πωλήσεις που αφορούσαν 4 προϊόντα. Ο ελεγκτής, με βάση τον πίνακα αυτό, θα ελέγξει αν υπήρξαν λάθη τιμολόγησης σε κάποιο προϊόν.
Στη δραστηριότητα αυτή, εκτός από το αποτέλεσμα, έχει σημασία και ο χρόνος υλοποίησης ο οποίος θα πρέπει να ελαχιστοποιηθεί με την βοήθεια των υπολογιστικών εργαλείων που διαθέτουν.

Ενδεικτικές φάσεις εφαρμογής

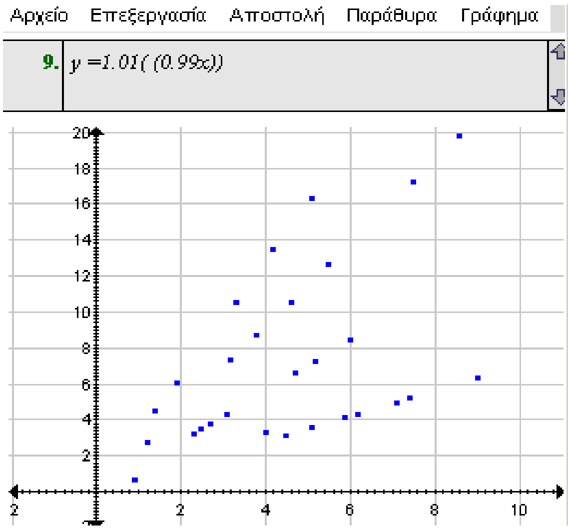
1η φάση

Οι μαθητές μέσα από τη διερεύνηση του παραπάνω προβλήματος θα απεικονίσουν σε πίνακα τιμών και σε σύστημα ημιαξόνων σχέσεις αναλογίας Στη συνέχεια θα εμπλακούν με τη σύνδεση της συγκεκριμένης αναπαράστασης με τη γραφική παράσταση της ψ=αχ, την κλίση της αντίστοιχης ευθείας και το συντελεστή αναλογίας.

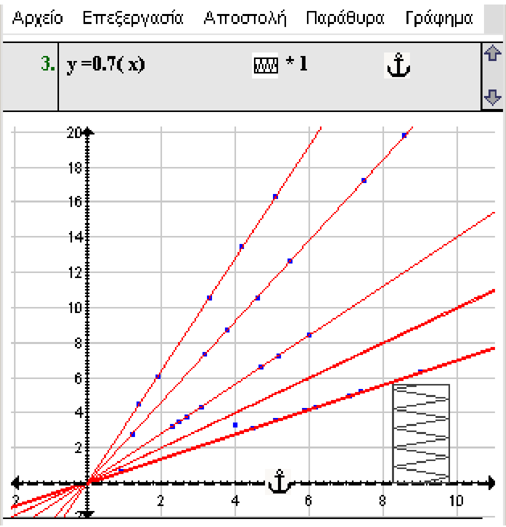
Παραδείγματα δραστηριοτήτων

1) Στέλνουμε τα ζεύγη βάρους και τιμής στο γράφημα. Μπορούμε να χωρίσουμε τα σημεία σε ομάδες; Αν ναι, με ποιο κριτήριο;

2) Μπορούμε να εκφράσουμε με σχέσεις αναλογίας αυτές τις ομάδες σημείων; Θα βοηθήσει η κατασκευή της ψ=χ που μπορεί να περιστραφεί με το εργαλείο κατακόρυφου ελαστικού χειρισμού του Function Probe (FP). Υπάρχει κάποια σχέση αναλογίας; Αν ναι, να γραφεί ο τύπος της και να εξεταστεί αν εμφανίζεται ο συντελεστής αναλογίας σε στοιχεία του πίνακα τιμών; Αν ναι, τι ακριβώς εκφράζει;



Εικόνα 1: Αποστολή σημείων στο γράφημα.



Εικόνα 2: Περιστροφές της ψ=χ.

3) Σε πόσες περιπτώσεις έγινε υπερτιμολόγηση και σε ποιο/α είδος/η; Ποιά/ες θα έπρεπε να είναι η/οι κανονική/ες τιμή; Γνωρίζουμε ότι οι τιμές ανά κιλό αυτών των προϊόντων είναι πολλαπλάσιες του δεκαλέπτου του ευρώ.

4) Η κάθε ομάδα επιλέγει μία από τις τέσσερις ευθείες. Προσαρμόζουμε το εργαλείο μεταβολής στη γραφική παράσταση της ευθείας. Δημιουργείται ένα τρίγωνο στο οποίο το λογισμικό μας δίνει την κλίση αυτής της ευθείας (ως πηλίκο της διαφοράς των τεταγμένων προς τη διαφορά των τετμημένων). Με τι ισούται αυτό το πηλίκο; Παρουσιάζει η κάθε ομάδα τα συμπεράσματά της στην ολομέλεια της τάξης.

5) Ο ελεγκτής πωλήσεων αντικατέστησε την ελαττωματική ζυγαριά αλλά θέλει επιπλέον να φτιάξει έναν πίνακα για τον υπάλληλο που ζυγίζει τα προϊόντα, με σκοπό να ελέγχει για λίγες ημέρες μετά την αντικατάσταση, τις τιμές που εκτυπώνει η ζυγαριά. Ο πίνακας αυτός θα έχει στην πρώτη στήλη το βάρος των προϊόντων από 0 έως 10 Kg με βήμα 0,1 Kg και στις υπόλοιπες 4 στήλες θα έχει την αντίστοιχη τιμή του κάθε προϊόντος. Η κάθε ομάδα να κατασκευάσει την πρώτη στήλη του πίνακα και τη στήλη με τις τιμές για το προϊόν που ασχολήθηκε στην επόμενη ερώτηση. Πως μπορούμε να ελέγξουμε την ορθότητα του πίνακα από τη γραφική παράσταση;

2η φάση

Οι μαθητές θα εισαχθούν στην έννοια της γραμμικής συνάρτησης ψ=αχ εκτός πλαισίου συγκεκριμένου προβλήματος και θα διερευνήσουν τη γραφική της παράσταση, την κλίση της και τη σχέση της με τα τεταρτημόρια στα οποία βρίσκεται η γραφική παράσταση. Ακολούθως, θα γίνει εισαγωγή στη συνάρτηση ψ=αχ+β ως παράλληλη μεταφορά της ψ=αχ μέσα από την επέκταση του αρχικού προβλήματος που δόθηκε στους μαθητές και θα μελετηθεί ο ρόλος των παραμέτρων α και β.

Παραδείγματα δραστηριοτήτων

1) Δύο ποσά χ και ψ είναι ανάλογα με συντελεστή αναλογίας 2. Αν ψ/χ=2, τότε ψ=_____ . Αυτή η σχέση, είναι συνάρτηση του ψ ως προς χ; Αν ψ/χ=α, τότε ψ=_____ . Αυτή η σχέση, είναι συνάρτηση του ψ ως προς χ; Τι συμβαίνει όταν α=0;

2) Κάθε ομάδα δίνει 5 συναρτήσεις της μορφής ψ=αχ στη ομάδα που έχει στα δεξιά της και παίρνει αντίστοιχα 5 συναρτήσεις από την ομάδα που έχει στα αριστερά της. Η κάθε ομάδα κατασκευάζει τις γραφικές παραστάσεις αυτών των συναρτήσεων. Υπάρχει κάποιο σημείο του καρτεσιανού επιπέδου από το οποίο διέρχεται η γραφική παράσταση της ψ=αχ ανεξάρτητα από την τιμή του α; Αιτιολογούμε την άποψή μας.

3) Τον αριθμό α στην ψ=αχ τον ονομάζουμε συντελεστή διεύθυνσης. Κατασκευάζουμε την ευθεία ψ=χ και με το εργαλείο κατακόρυφου ελαστικού χειρισμού, μεταβάλλουμε την ευθεία. Παρατηρούμε ότι ο συντελεστής διεύθυνσης παίρνει διάφορες τιμές. Σε ποια τεταρτημόρια βρίσκεται η γραφική παράσταση όταν α>0 και σε ποιά όταν α<0;

4) Κάθε ομάδα δίνει 2 συναρτήσεις της μορφής ψ=αχ στη ομάδα που έχει στα δεξιά της και παίρνει αντίστοιχα 2 συναρτήσεις από την ομάδα που έχει στα αριστερά της. Η μία θα πρέπει να έχει συντελεστή διεύθυνσης θετικό και η άλλη αρνητικό. Η κάθε ομάδα πρέπει να κατασκευάσει τις γραφικές παραστάσεις αυτών των συναρτήσεων. Πόσο μεταβάλλεται το ψ όταν το χ αυξάνεται κατά 1; Μπορούμε να δημιουργήσουμε 11 σημεία πάνω στη γραφική παράσταση της κάθε ευθείας που οι τετμημένες τους να διαφέρουν κατά 1 και στη συνέχεια αποστέλλοντας τις συντεταγμένες στον πίνακα τιμών να βρούμε τις διαφορές των τεταγμένων τους.

5) Παιχνίδι: Κάθε ομάδα τοποθετεί 5 σημεία στο γράφημα της ομάδας που βρίσκεται στα δεξιά της (κανένα σημείο δεν πρέπει να βρίσκεται πάνω στον άξονα ψ΄ψ). Πρέπει η ομάδα να βρει για κάθε σημείο, μία συνάρτηση της μορφής ψ=αχ η οποία να διέρχεται από αυτό το σημείο. Κερδίζει η ομάδα που βρίσκει πρώτη τις πέντε ευθείες.

6) Αν τοποθετήσουμε ένα σημείο που ανήκει στον άξονα ψ΄ψ (εκτός του σημείου (0,0)), ορίζεται συνάρτηση της μορφής ψ=αχ που να διέρχεται από αυτό το σημείο; Αιτιολογούμε την άποψή μας.

7) Συνέχεια του αρχικού προβλήματος: «Στο πολυκατάστημα, το προϊόν με τιμή μονάδος 0,7 € υπάρχει δυνατότητα να συσκευαστεί με ειδικό τρόπο αν το επιθυμεί ο πελάτης, χρεώνοντας σε κάθε αγορά αυτού του προϊόντος και ανεξάρτητα από την ποσότητα αγοράς, 0,5 € επιπλέον».

α) Ο πωλητής που ζυγίζει, συσκευάζει και κοστολογεί το προϊόν χρειάζεται ένα πίνακα που σε μία στήλη να έχει όλα τα βάρη από 0 έως 10 κιλά (ανά 100 gr), στη διπλανή στήλη την τιμή του προϊόντος χωρίς την ειδική συσκευασία και στην τελευταία στήλη την τιμή μαζί με τη συσκευασία. Φτιάχνουμε ένα τέτοιο πίνακα.

β) Στέλνουμε και τις δύο περιπτώσεις βάρους-τιμής, στο γράφημα. Τι παρατηρούμε; Ποιοι είναι οι τύποι των δύο συναρτήσεων; Πληκτρολογούμε στο γράφημα τους τύπους των δύο συναρτήσεων ώστε να κατασκευαστεί η γραφική τους παράσταση. Διέρχεται η κάθε μία από την αντίστοιχη ομάδα σημείων;

γ) Κάθε ομάδα κατασκευάζει τη δική της γραφική παράσταση της μορφής ψ=αχ σύμφωνα με τον παρακάτω πίνακα και στη συνέχεια μεταφέροντας αυτή τη γραφική παράσταση κατασκευάζει ευθείες της μορφής ψ=αχ+β. Σε ποιο σημείο τέμνει η κάθε μία των άξονα ψ΄ψ;

Ομάδα	*Κατασκευή*	*Κατασκευή μετά από μεταφορά*
1η	*ψ=2χ*	*ψ=2χ+1 , ψ=2χ+4, ψ=2χ-3*
2η	*ψ=0.5χ*	*ψ=0.5χ+2, ψ=0.5χ+5, ψ=0.5χ-4*
3η	*ψ=-3χ*	*ψ=-3χ+2, ψ=-3χ+4, ψ=-3χ-5*
4η	*ψ=1.5χ*	*ψ=1.5χ+3, ψ=1.5χ+4, ψ=1.5χ-2*
5η	*ψ=-2.7χ*	*ψ=-2.7χ+4, ψ=-2.7χ+1, ψ=-2.7χ-3*

Γενικεύουμε και καταγράφουμε τα συμπεράσματά μας για τη σχέση της γραφικής παράστασης της ψ=αχ+β με τη γραφική παράσταση της ψ=αχ.

δ) Κάθε ομάδα δίνει 3 εξισώσεις ευθειών της μορφής ψ=αχ+β με ακέραιους συντελεστές στην ομάδα που βρίσκεται στα δεξιά της και παίρνει αντίστοιχα 3 τέτοιες ευθείες από την ομάδα στα αριστερά της. Ο στόχος είναι να τοποθετηθούν στο γράφημα δύο σημεία της κάθε ευθείας γνωρίζοντας το ρόλο των παραμέτρων α και β στη γραφική παράσταση της ευθείας. Ο έλεγχος θα γίνει από την ομάδα που έθεσε τις εξισώσεις των ευθειών κάνοντας τις γραφικές παραστάσεις αυτών των ευθειών και ελέγχοντας αν πράγματι διέρχονται από αυτά τα σημεία.

Παραδείγματα εργασιών για το σπίτι

Ο κάθε μαθητής θα ανεβάσει τις απαντήσεις των παρακάτω εργασιών στα ψηφιακά εργαλεία επικοινωνίας του σχολείου.

1. Γράψε μία σύντομη έκθεση για το ρόλο του α στη γραφική παράσταση της συνάρτησης ψ=αχ.
2. Μια συνάρτηση της μορφής ψ=αχ διέρχεται από το σημείο (2, -3,6). Να βρεις τη συνάρτηση ψ=αχ που διέρχεται από αυτό το σημείο, με 3 τουλάχιστον διαφορετικούς τρόπους. Γράψε αναλυτικά τις σκέψεις σου.
3. Κατασκεύασε σε μιλιμετρέ χαρτί τη γραφική παράσταση της συνάρτησης ψ=2χ και της συμμετρικής της ως προς των άξονα χ΄χ. Ποιος είναι ο τύπος της συμμετρικής της; Ποια είναι η συμμετρική της ψ=αχ ως προς τον άξονα χ΄χ΄;
4. Ο Δημήτρης και η Μαρία είναι μαθητές της Β΄ γυμνασίου και προσπαθούν να λύσουν το πρόβλημα που τους έβαλε ο καθηγητής τους: «Δίνονται τα σημεία Α(0,3) και Β(1,-2). Ποια ευθεία της μορφής ψ=αχ+β διέρχεται από αυτά τα σημεία;». Ο Δημήτρης ξεκινάει να λύσει το πρόβλημα αντικαθιστώντας στον τύπο της συνάρτησης τις συντεταγμένες των σημείων. Σε ένα λεπτό όμως η Μαρία ισχυρίζεται ότι βρήκε τη λύση χρησιμοποιώντας το ρόλο των συντελεστών α και β. Ο Δημήτρης αμφισβητεί τον τρόπο της Μαρίας αλλά όταν τελειώνει διαπιστώνει ότι είχαν βρει την ίδια ευθεία. Ποια είναι αυτή η ευθεία και πως έλυσαν το πρόβλημα τα δύο παιδιά;

3η φάση

Οι μαθητές/-τριες εμπλέκονται σε δραστηριότητες γραφικής επίλυσης εξισώσεων και ανισώσεων της μορφής αχ+β >(=,>)γχ+δ μέσα από πραγματικά προβλήματα.

Παραδείγματα δραστηριοτήτων

Το κόστος δύο εταιριών (Α και Β) κινητής τηλεφωνίας είναι:

Α: πάγιο μηνιαίο κόστος 9 ευρώ και κόστος 0,1 ευρώ ανά λεπτό συνομιλίας,

Β: έχει πάγιο μηνιαίο κόστος 3 ευρώ και κόστος 0,2 ευρώ ανά λεπτό συνομιλίας.

1) Αν συμβολίσουμε με x τα μηνιαία λεπτά συνομιλίας και y τα χρήματα σε ευρώ που πρέπει να πληρώσουμε, γράφουμε για κάθε εταιρεία τη συνάρτηση των χρημάτων ως προς τα λεπτά συνομιλίας και κάνουμε τη γραφική παράσταση των δύο συναρτήσεων.

2) Τέμνονται οι δύο γραφικές παραστάσεις σε κάποιο σημείο; Αν ναι, πώς ερμηνεύουμε τις συντεταγμένες αυτού του σημείου στο πλαίσιο του προβλήματος;

3) Πόσα λεπτά συνομιλίας πρέπει να κάνει κάποιος μηνιαία, για να είναι συμφέρουσα η επιλογή της εταιρείας Α και πόσα για να είναι συμφέρουσα η επιλογή της εταιρείας Β;

Παραδείγματα εργασιών για το σπίτι

1. Κάθε ομάδα ανεβάζει ένα παρόμοιο πρόβλημα στα ψηφιακά εργαλεία επικοινωνίας του σχολείου με προσφορές από τρεις εταιρείες τηλεφωνίας και λύνει το πρόβλημα της περισσότερο συμφέρουσας προσφοράς με βάση τον αριθμό των μηνιαίων λεπτών συνομιλίας.
2. Κάθε ομάδα ανεβάζει στα ψηφιακά εργαλεία επικοινωνίας του σχολείου ένα πρόβλημα και θέτει ένα ερώτημα που η επίλυσή του μπορεί να βασιστεί σε ανισώσεις της μορφής αχ+β>γχ+δ. Στη συνέχεια λύνει γραφικά και αλγεβρικά την ανίσωση. Η κάθε ομάδα ελέγχει τα προβλήματα των άλλων ομάδων και προτείνει τρόπους βελτίωσής τους.

Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Ως αφετηρία στην παρούσα συνθετική εργασία χρησιμοποιείται ένα πραγματικό πρόβλημα που προσφέρει το πλαίσιο για να νοηματοδοτηθεί από τους μαθητές η γραφική αναπαράσταση των αναλόγων ποσών. Έτσι, οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα συνδέσουν την κλίση της ευθείας ψ=αχ με το συντελεστή αναλογίας στα ανάλογα ποσά, να μελετήσουν τη σχέση της κλίσης με τα τεταρτημόρια στα οποία βρίσκεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης και να νοηματοδοτήσουν την κλίση ως μεταβολή των τιμών του ψ όταν το χ αυξάνεται κατά 1.

Στο πλαίσιο της παρούσας εργασίας η ψ=αχ+β προκύπτει μέσα από τον δυναμικό μετασχηματισμό της ψ=αχ ώστε να δοθούν στους μαθητές ευκαιρίες σύνδεσης των δύο συγκεκριμένων συναρτήσεων. Αυτή ακριβώς η δυνατότητα μετασχηματισμού της γραφικής παράστασης έχει μία ιδιαίτερη διδακτική αξία αφού στην συνήθη πρακτική ο μετασχηματισμός αυτός είναι η κατάληξη και όχι η αφετηρία της διερεύνησης μίας συνάρτησης. Τέλος, επιδιώκεται οι μαθητές να διερευνήσουν το ρόλο των α και β στις γραμμικές συναρτήσεις και να εμπλακούν στην γραφική επίλυση και ερμηνεία εξισώσεων και ανισώσεων της μορφής αχ+β>(<,=) γχ+δ.

Οι πολλαπλές αναπαραστάσεις της συνάρτησης στο FP είναι δυναμικά συνδεδεμένες και έτσι διευρύνονται οι ευκαιρίες των μαθητών να κατανοήσουν το ρόλο των αναπαραστάσεων αυτών στον ορισμό της γραμμικής συνάρτησης αλλά και στο πλαίσιο της επίλυσης προβλήματος.

Οι κοινωνικοί στόχοι για τους μαθητές εντοπίζονται στη συνεργασία και τη συλλογική διαπραγμάτευση των ιδεών τους σε επίπεδο ομάδας, σε επίπεδο τάξης και στο επίπεδο της επικοινωνίας τους μέσω ψηφιακών εργαλείων συζητήσεων. Στα πλαίσια αυτά ο στόχος είναι να ενισχυθεί η κοινωνική αλληλεπίδραση μέσα από τη ενεργό εμπλοκή των μαθητών σε συνεργατικές και διαλογικές πρακτικές.

ΣΥΝΘΕΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ 6 (Β΄ Γυμνασίου)
«Αρνητικοί αριθμοί και εξισώσεις»

Αποσπάσματα από το λήμμα "Αρνητικοί" της Encyclopédie (1751–1765) (συγγραφέας του λήμματος ο Jean d' Alembert)

Αρνητικές ποσότητες στην Άλγεβρα είναι εκείνες που επηρεάζονται από το σημείο – και οι οποίες θεωρούνται από πολλούς μαθηματικούς ως μικρότερες από το μηδέν. Αυτή όμως η τελευταία ιδέα δεν είναι ορθή, όπως θα δούμε παρακάτω …
Οι ποσότητες που ονομάζονται αρνητικές, θεωρούμενες λαθεμένα ότι βρίσκονται κάτω από το μηδέν, παριστάνονται πολύ συχνά από πραγματικές ποσότητες ….
Ας υποθέσουμε π.χ. ότι αναζητούμε την τιμή ενός αριθμού x, ο οποίος όταν προστίθεται στο 100 μας δίνει 50. Σύμφωνα με τους κανόνες της Άλγεβρας, έχουμε x + 100 = 50, δηλαδή x = –50. Αυτό που διαπιστώνουμε είναι ότι η ποσότητα x ισούται με 50 και ότι αντί να προστίθεται στο 100 θα πρέπει να αφαιρείται. Πράγμα που σημαίνει ότι το πρόβλημα θα έπρεπε να είχε διατυπωθεί ως εξής: Να βρεθεί ένα μέγεθος x το οποίο, όταν αφαιρείται από το 100 να αφήνει υπόλοιπο 50. Αν το πρόβλημα είχε διατυπωθεί με αυτόν τον τρόπο, τότε θα είχαμε 100 – x = 50 και x = 50 και η αρνητική μορφή του x δεν θα επιβίωνε πλέον. Έτσι λοιπόν οι αρνητικές ποσότητες υποδηλώνουν στην πραγματικότητα θετικές ποσότητες στους υπολογισμούς, οι οποίες όμως είχαν υποτεθεί σε λάθος θέση. …
Έτσι λοιπόν, πραγματικά και ξεκάθαρα, δεν υπάρχουν καθόλου μεμονωμένες αρνητικές ποσότητες: το –3 θεωρούμενο αφηρημένα δεν έχει κανένα νόημα. Όταν όμως λέω ότι ένας άνθρωπος έδωσε σε κάποιον άλλο –3 écus, αυτό σημαίνει σε κατανοητή γλώσσα ότι του οφείλει 3 écus.

Ενδεικτικές φάσεις εφαρμογής

1η φάση: Οι μαθητές μελετούν το ιστορικό κείμενο, περιγράφουν με συντομία τη θέση που υποστηρίζει ο συγγραφέας και διατυπώνουν τη δική τους άποψη. Στη συνέχεια εξετάζουν το παρακάτω πρόβλημα και απαντούν στα ερωτήματα που το συνοδεύουν.
Πρόβλημα: Χρειάζονται οι αρνητικοί αριθμοί στην επίλυση των εξισώσεων;
Ζητήματα όπως αυτά που θίγει ο Jean d' Alembert στο προηγούμενο απόσπασμα (και αρκετοί άλλοι με πολύ μεγαλύτερη ένταση) είχαν χωρίσει τους μαθηματικούς του 18ου αιώνα σε δύο στρατόπεδα, σε "οπαδούς" και "αντίπαλους" των αρνητικών. Οι "οπαδοί" υποστήριζαν ότι οι αρνητικοί είναι χρήσιμοι, παρά το γεγονός ότι δύσκολα μπορεί να αποδοθεί ένα πραγματικό νόημα στις πράξεις τους, ενώ "αντίπαλοι" θεωρούσαν ότι τα Μαθηματικά μπορούν να υπάρξουν και χωρίς τους αρνητικούς. Τη φύση της διαμάχης μπορούμε να την καταλάβουμε με το επόμενο παράδειγμα, στο οποίο ένας υποθετικός "αντίπαλος" και ένας υποθετικός "οπαδός" των αρνητικών επιλύουν με διαφορετικό τρόπο ο καθένας μια απλή εξίσωση :

"ΑΝΤΙΠΑΛΟΣ" Λύνω την εξίσωση 7x – 5 = 10x – 11 χωρίς χρήση των αρνητικών αριθμών	"ΟΠΑΔΟΣ" Λύνω την εξίσωση 7x – 5 = 10x – 11 με χρήση των αρνητικών αριθμών
7x – 5 = 10x – 11 11 – 5 = 10x – 7x 6 = 3x	7x – 5 = 10x – 11 7x – 10x = 5 – 11 –3x = –6

$x = 6 : 3$ $x = 2$	$x = (-6):(-3)$ $x = 2$

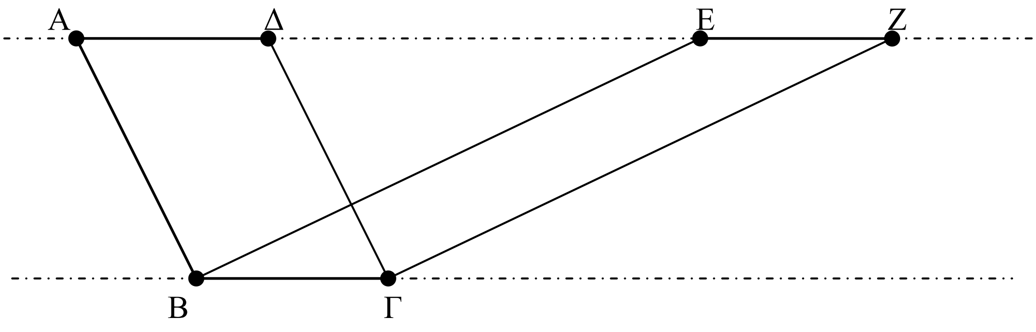
Ερωτήσεις
1) Ποια είναι η βασική διαφορά στους δύο τρόπους επίλυσης;
2) Διακρίνετε πλεονεκτήματα ή μειονεκτήματα σε κάθε τρόπο;
3) Μπορείτε να χαρακτηρίσετε τον έναν τρόπο ταχύτερο ή πιο πρακτικό από τον άλλο;
4) Μπορείτε να εξηγήσετε έναν κανόνα των πράξεων των αρνητικών αριθμών με βάση τους δύο διαφορετικούς τρόπους επίλυσης της ίδιας εξίσωσης;

2η φάση: Οι μαθητές συζητούν στην τάξη τη θέση που υποστηρίζει ο συγγραφέας του ιστορικού κειμένου, παρουσιάζουν τη δική τους άποψη και τη συνδέουν με τις απαντήσεις που έδωσαν στο πρόβλημα.

Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα
Η δραστηριότητα δίνει στους μαθητές τη δυνατότητα να εκτιμήσουν ότι η εισαγωγή των αρνητικών αριθμών έγινε για να εξυπηρετηθούν πρωταρχικά οι ανάγκες της μαθηματικής πρακτικής (π.χ. ευελιξία στην επίλυση των εξισώσεων) και όχι πραγματικές ανάγκες (π.χ. η μέτρηση της θερμοκρασίας). Αυτό το γεγονός μπορεί να συμβάλει στη θεραπεία της “τραυματικής” εμπειρίας που προκαλεί η πρώτη επαφή με τις πράξεις των αρνητικών αριθμών οι οποίες οδηγούν στην απώλεια του νοήματος των αριθμητικών πράξεων (π.χ. η πρόσθεση μπορεί να προκαλεί ελάττωση, η αφαίρεση αύξηση κ.λπ.).

ΣΥΝΘΕΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ 7 (Β΄ Γυμνασίου)
«"Παράδοξες” ιδιότητες των γεωμετρικών προτάσεων»

Ένα πρόβλημα για το εμβαδόν των παραλληλογράμμων
Στο παρακάτω σχήμα έχουμε σχεδιάσει δύο παραλληλόγραμμα ΑΒΓΔ και ΕΒΓΖ με την ίδια βάση ΒΓ και τις κορυφές τους πάνω σε δύο παράλληλες ευθείες.



Να εξετάσετε αν τα δύο παραλληλόγραμμα είναι ισοδύναμα, δηλαδή αν έχουν το ίδιο εμβαδόν και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Ένα απόσπασμα από το έργο του Πρόκλου
Σχόλια στο α΄ βιβλίο των Στοιχείων του Ευκλείδη

Προκαλούσε πλήρη αμηχανία σε όλους εκείνους που αγνοούσαν την επιστήμη της Γεωμετρίας το γεγονός ότι τα παραλληλόγραμμα που έχουν την ίδια βάση και βρίσκονται ανάμεσα στις ίδιες παράλληλες, πρέπει να είναι ισοδύναμα μεταξύ τους. Διότι πώς είναι δυνατόν να παραμένει η ισότητα των εμβαδών, όταν τα μήκη των δύο άλλων πλευρών αυξάνονται επ’ άπειρον; (αφού μπορούμε – προεκτείνοντας τις δύο παράλληλες – να αυξήσουμε όσο θέλουμε τα μήκη τους). Εύλογα θα μπορούσε να αναρωτηθεί κανείς γιατί να παραμένει η ισότητα των εμβαδών όταν συμβαίνει αυτό. Διότι όταν το πλάτος είναι ίδιο (αφού η βάση είναι κοινή) και το μήκος μεγαλώνει, πώς γίνεται να μη μεγαλώνει και το εμβαδό; Αυτό το θεώρημα λοιπόν, και το αντίστοιχο για τα τρίγωνα, ανήκουν στα λεγόμενα “παράδοξα θεωρήματα” των Μαθηματικών….
Μένουν έκπληκτοι λοιπόν οι περισσότεροι όταν μαθαίνουν ότι ο πολλαπλασιασμός του μήκους των πλευρών δεν ανατρέπει την ισότητα των εμβαδών. Η αλήθεια είναι όμως ότι ο σημαντικότερος παράγοντας για την αύξηση ή ελάττωση του εμβαδού είναι η ισότητα ή ανισότητα των γωνιών. Διότι όσο πιο άνισες κάνουμε τις γωνίες, τόσο περισσότερο ελαττώνουμε το εμβαδό όταν διατηρούμε σταθερό το μήκος και το πλάτος˙ έτσι λοιπόν, για να διατηρήσουμε την ισότητα των εμβαδών, πρέπει να αυξήσουμε την πλευρά.
1) Θεωρείτε δικαιολογημένη την αμηχανία και την έκπληξη αυτών που αντιμετώπιζαν το συγκεκριμένο πρόβλημα;
2) Διαπιστώνετε ότι στο πρόβλημα αυτό εμφανίζεται κάποια αντίφαση ανάμεσα στην εποπτεία και τα αποτελέσματα των Μαθηματικών;

Ενδεικτικές φάσεις εφαρμογής
1η φάση: Οι μαθητές διερευνούν τη γεωμετρικό πρόβλημα και χρησιμοποιούν διάφορα μέσα (μετρήσεις, υπολογισμούς, συλλογισμούς, κλπ) για να το λύσουν. Η δυνατότητα

χρήσης εργαλείων δυναμικής γεωμετρίας από τους μαθητές για την κατασκευή και χειρισμό των σχημάτων του αρχαίου κειμένου αναμένεται να εμπλουτίσει τον πειραματισμό των μαθητών καθώς θα τους επιτρέψει να ενεργοποιήσουν τις νοερές κινήσεις (στροφή και μετατόπιση αντίστοιχα) που περιγράφονται στις κατασκευές των σχημάτων αυτών. Στη συνέχεια οι μαθητές μελετούν το ιστορικό κείμενο και απαντούν στα ερωτήματα που το συνοδεύουν.
2η φάση: Οι μαθητές παρουσιάζουν στην τάξη τα αποτελέσματα της εργασίας τους, ανταλλάσουν ιδέες και καταλήγουν σε ορισμένα συμπεράσματα για τη σχέση ανάμεσα σε ένα συμπέρασμα που φαίνεται διαισθητικά προφανές και στο συμπέρασμα που προκύπτει ως αποτέλεσμα της αιτιολόγησης των ιδιοτήτων των γεωμετρικών σχημάτων.

Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Το ιστορικό κείμενο δίνει ένα παράδειγμα των γεωμετρικών προτάσεων που οι αρχαίοι Έλληνες μαθηματικοί αποκαλούσαν "παράδοξα θεωρήματα" επειδή το συμπέρασμά τους έρχεται σε άμεση αντίθεση με αυτό που υποδεικνύει η διαίσθηση και η κοινή λογική.
Η δραστηριότητα δίνει στους μαθητές τη δυνατότητα να έλθουν σε επαφή με ένα παράδειγμα της διάστασης που υφίσταται πολύ συχνά ανάμεσα σε μια μαθηματική πρόταση και τη διαισθητική προφάνεια, και να εκτιμήσουν έτσι την εγκυρότητα που παρέχει το αποτέλεσμα της μαθηματικής απόδειξης.
Η χρήση λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας αναμένεται να ενισχύσει την εισαγωγή των μαθητών στους γεωμετρικούς μετασχηματισμούς οι οποίοι αποτελούν βασική καινοτομία στο νέο ΑΠΣ Γεωμετρίας του Γυμνασίου.

ΣΥΝΘΕΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ 8 (Β΄ Γυμνασίου)
«Παγκόσμιο χωριό - Οι άνθρωποι και οι κοινωνίες πίσω από τους αριθμούς»

Ο καθηγητής μαθηματικών του σχολείου, σας έχει αναθέσει να σχεδιάσετε και να εκτελέσετε μια μικρή στατιστική έρευνα που να αφορά «τυπικά» χαρακτηριστικά ανάμεσα σε μαθητές όλου του κόσμου. Μία πολύ πλούσια πηγή για να συλλέξετε δεδομένα είναι το διαδίκτυο. Σας πρότεινε να συλλέξετε δεδομένα από το διεθνές έργο «απογραφή στο σχολείο» (Census At School International) με σκοπό να τα επεξεργαστείτε και να ανακαλύψετε ομοιότητες και διαφορές ανάμεσα σε σας και σε μαθητές άλλων χωρών και παράλληλα να συντάξετε στο τέλος μία μικρή αναφορά για ενδιαφέροντα στοιχεία που βρήκατε μέσα από αυτή την έρευνα. Οι επόμενες διερευνήσεις θα βοηθήσουν την ομάδα σας να πραγματοποιήσει αυτή την έρευνα και παράλληλα να μελετήσει θέματα ή φαινόμενα που αφορούν την σχολική ζωή ή θέματα που αφορούν το περιβάλλον ή θέματα που αφορούν την παγκόσμια κοινότητα.

Ενδεικτικές φάσεις εφαρμογής

1η φάση: Οι μαθητές με την βοήθεια των καθηγητών της τεχνολογίας και των ξένων γλωσσών, συλλέγουν δεδομένα από τον διαδικτυακό ιστότοπο http://www.censusatschool.com/en/links για κάποιες από τις χώρες που συμμετέχουν. Για να είναι δυνατή η σύγκριση ανάμεσα στις διαφορετικές χώρες υπάρχουν κοινές ερωτήσεις ενώ παράλληλα η κάθε χώρα έχει και «εθνικές» ερωτήσεις, που εξετάζουν διάφορα θέματα σχετικά με τους μαθητές της χώρας.

Για παράδειγμα, συλλέγουν δεδομένα σε ένα υπολογιστικό περιβάλλον λογιστικών φύλλων, για τις διάφορες χώρες με σκοπό να τα επεξεργαστούν, καθώς και τα σχετικά ερωτηματολόγια όπως το παρακάτω, που προέρχεται από την Νότια Αφρική:

CensusAtSchool Form Grades 8 – 12

Learner number: ______

ABOUT YOU

1. Are you a
1 Male? 2 Female?

2. What is your date of birth?
(day month year)

3. What grade are you in at school?
Grade ___ e.g. Grade 10

4. Where were you born?
1 Eastern Cape
2 Free State
3 Gauteng
4 Kwazulu-Natal
5 Mpumalanga
6 Northern Cape
7 Northern Province
8 North West
9 Western Cape
10 Outside South Africa

5. How tall are you? Answer to the nearest centimetre.
________ centimetres

6. What is the length of your right foot? Answer to the nearest centimetre.
________ centimetres

7. What sport that you have played this year is your favourite sport?
Use the sport coding list to code your answer or put 0 if you do not have a favourite sport.
Sport code: ______

8. What sport would you like to participate in?
Use the sport coding list to code your answer or put 0 if there is no sport you would like to participate in.
Sport code: ______

ABOUT YOUR HOUSEHOLD

9. Tick the box if you have:
Running water inside your house
A radio at home
A TV at home
A telephone at home
Access to a computer at home
Access to the Internet at home
Access to a library
Cellular Phone of your own

10. Do you live in a
1 House on separate yard/stand
2 Traditional House
3 Flat
4 Town/cluster house
5 Retirement village
6 Room in back yard
7 Shack/Zozo back in yard/stand
8 Room in squatter settlement
9 Tent/Caravan
10 Other (specify)

11. How many people live in your household? (include yourself)
________ people

12. How many people still at school (Grade 1-12) live in your household? (include yourself)
________ Males
________ Females

SCHOOL

13. What is your favourite subject/learning area at school? Enter the code letter(s) in the box in order of your preference.
1st
2nd
3rd

The codes are:

1	LLC	2	NS
3	T	4	HSS
5	EMS	6	AC
7	LO	8	MLMMS
9	Maths	10	History
11	Geography	12	Science
13	Biology	14	Guidance
15	Accountancy		
16	Industrial Arts		
17	Home Economics		
18	Languages		
19	Other Subjects (specify)		

14. How do you usually travel to school?
The codes are:
1 Walk 2 Bus
3 Car 4 Bicycle
5 Train 6 Taxi
7 Motorcycle / scooter
8 Other

15. How long does it usually take you to travel to school?
________ minutes

16. What distance do you travel from home to school in km?
1 Less than 1km
2 1 to 5 km
3 6 to 10km
4 11km or over

Οι μαθητές επεξεργάζονται τα δεδομένα για κάποιες από τις κοινές ερωτήσεις που υπάρχουν, όπως για παράδειγμα ερωτήσεις που αφορούν αθλητικές δραστηριότητες (θα χρειαστεί και το αρχείο της κωδικοποίησης των αθλημάτων) ή αγαπημένα μαθήματα.

2η φάση: Με αφορμή τις μη κοινές ερωτήσεις ανάμεσα στις διαφορετικές χώρες, οι μαθητές αναζητούν περισσότερες πληροφορίες για θέματα που μπορεί να τους έκαναν εντύπωση.

Για παράδειγμα, με αφορμή το ερωτηματολόγιο της Νότιας Αφρικής, οι μαθητές αναζητούν πληροφορίες για τις συνθήκες διαβίωσης των μαθητών (π.χ. ύπαρξη ή όχι τρεχούμενου νερού) και τις επιπτώσεις αυτού στην καθημερινή ζωή ή του στοιχειώδους εξοπλισμού των σχολείων της Νότιας Αφρικής και τις επιπτώσεις αυτού στις ευκαιρίες μάθησης των μαθητών (π.χ. χωρίς ηλεκτρικό ρεύμα στο σχολείο δεν υπάρχει η δυνατότητα αναζήτησης πηγών πληροφορίας από το διαδίκτυο) ή με αφορμή την ερώτηση από το ερωτηματολόγιο του Καναδά σχετικά με την ενδοσχολική βία μελετούν και συζητούν για το φαινόμενο αυτό.

3^{η} φάση: Με την βοήθεια εκπαιδευτικών διαφόρων ειδικοτήτων, μελετούν βαθύτερα κάποια θέματα και την σημασία τους για τον άνθρωπο, το περιβάλλον ή την ανθρωπότητα.
Για παράδειγμα μελετούν το θέμα των υδάτινων πόρων, τη σημασία τους στην καθημερινή ζωή, το θέμα της αλόγιστης και άσκοπης χρήσης τους και την σημασία τους σε παγκόσμιο επίπεδο ως πιθανή αιτία συγκρούσεων ή μελετούν την σημασία και την αξία κοινής γλώσσας συνεννόησης των ανθρώπων (διεθνείς γλώσσες, μαθηματικά) και της κατανόησης τους για την επεξεργασία πληροφοριών.
4^{η} φάση: Συντάσσουν μία μικρή αναφορά για τα θέματα που τους έκαναν εντύπωση σχετικά με προβλήματα ή δυσκολίες που αντιμετωπίζουν ή τις δυνατότητες που έχουν οι μαθητές, σε θέματα καθημερινής επιβίωσης, εκπαίδευσης ή υγείας σε διαφορετικές χώρες και παρουσιάζουν τα αποτελέσματα των ερευνών τους.

Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα
Τα σχολικά μαθήματα είναι απομονωμένα το ένα από το άλλο, με αποτέλεσμα η γνώση που προσφέρεται σε κάποιο απ’ αυτά να μην συνδέεται με την γνώση που προσφέρεται από κάποιο άλλο. Η δε γνώση, αυτή καθ’ αυτή, δεν έχει όλη την αξία και τη σημασία που της αρμόζει για την μελλοντική εξέλιξη των μαθητών σε αυριανούς πολίτες και την διαμόρφωσή τους ως προσωπικότητες, μια και συνδέεται συχνά μόνον με την μελλοντική χρήση της σε κάποιο επάγγελμα. Με αφορμή όλη την έρευνα ίσως βοηθήσουμε τους μαθητές μας να γίνουν πιο συνειδητά άτομα και πολίτες αυτού του κόσμου, που θα αναγνωρίζουν και θα σέβονται τις δυνατότητες που έχουν στην παρούσα φάση της ζωής τους, θα είναι σε θέση να ερμηνεύουν τον κόσμο και το περιβάλλον τους, θα αναγνωρίζουν τις τεράστιες δυνατότητες της ανθρωπότητας και θα ερμηνεύουν τις αδυναμίες της.
Προκειμένου να διδαχτούν κάποιες έννοιες της στατιστικής στο σχολείο συχνά χρησιμοποιούνται έτοιμα προκατασκευασμένα δεδομένα, που μπορεί να μην είναι πραγματικά. Έτσι χάνεται η ευκαιρία οι μαθητές να έχουν ένα πραγματικό πλαίσιο αναφοράς με βάση το οποίο θα συνδέσουν τις διαφορετικές έννοιες και διαδικασίες της στατιστικής.
Στην παρούσα εργασία οι μαθητές θα εμπλακούν ενεργά στην έρευνα και θα χρησιμοποιήσουν την στατιστική ως ένα εργαλείο ανάλυσης δεδομένων και εξαγωγής συμπερασμάτων. Θα πρέπει να συλλέξουν δεδομένα, να τα αναπαραστήσουν κατάλληλα, να ερμηνεύσουν πίνακες και στατιστικά διαγράμματα και να τα αναλύσουν με σκοπό να καταλήξουν σε συμπεράσματα που να είναι τεκμηριωμένα με βάση τα δεδομένα και τις μεθόδους που χρησιμοποίησαν.
Ταυτόχρονα, θα διαπιστώσουν τη σημασία που έχουν τα μαθηματικά (και όχι μόνο) ως κοινή γλώσσα της ανθρωπότητας, ως ένα μέσο για την κατανόηση του κόσμου ενώ θα αναγνωρίσουν της προσφορά τους σε τομείς της κοινωνικής ζωής. Η διαπίστωση των δυνατοτήτων που προσφέρουν τα μαθηματικά στον άνθρωπο για να μελετήσει, να περιγράψει και να κατανοήσει τον κόσμο που τον περιβάλλει αναμένεται να ενισχύσει θετικές στάσεις των μαθητών/τριών απέναντι στα μαθηματικά.

ΣΥΝΘΕΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ 9 (Γ΄ Γυμνασίου)
«Μελετώντας την κάτοψη ενός σπιτιού»

Ο κ. Αναγνώστου διαθέτει ένα οικόπεδο 360m^2 σε ένα οικισμό κάτω των 2000 κατοίκων. Το μέγιστο ποσοστό κάλυψης του οικοπέδου σ' αυτήν την περιοχή είναι 70% (δηλαδή θα πρέπει να μένει ακάλυπτο τουλάχιστον το 30% του οικοπέδου) και ο συντελεστής δόμησης για τα πρώτα 100 m^2 του οικοπέδου είναι 1,6, για τα επόμενα 100 m^2 είναι 0,8, για τα επόμενα 100 m^2 είναι 0,6 και πέραν των 300 m^2 είναι 0,4. Στην επόμενη εικόνα εμφανίζεται το σχέδιο ενός πολιτικού μηχανικού στον οποίο απευθύνθηκε ο κ. Αναγνώστου για την ανέγερση μιας κατοικίας. Το σχέδιο έγινε με βάση τους περιορισμούς του οικιστικού νόμου. (Συντελεστής Δόμησης είναι ο αριθμός ο οποίος πολλαπλασιάζεται με την επιφάνεια του οικοπέδου και δίνει την συνολική επιφάνεια όλων των κτιρίων, σε όλους τους ορόφους που θα ανεγερθούν στο οικόπεδο. Για παράδειγμα, σ' αυτήν την περιοχή για ένα οικόπεδο 320 m^2 μπορεί κάποιος να κτίσει 160 m^2 για τα πρώτα 100 m^2, 80 m^2 για τα επόμενα 100 m^2, 60 m^2 για τα επόμενα 100 m^2 και 8m^2 για τα υπόλοιπα 20 m^2 . Συνολικά δηλαδή 328m^2 σε όλους τους ορόφους).

Εικόνα 1. Το προτεινόμενο σχέδιο από τον πολιτικό μηχανικό.

Πριν αποφασίσει σχετικά με το τελικό σχέδιο ο κ. Αναγνώστου θέλει να δοκιμάσει και δύο άλλες ιδέες. Η πρώτη ιδέα είναι να μεγαλώσει το παραπάνω σχέδιο, διατηρώντας όμως τις αναλογίες του, ώστε να εκμεταλλευτεί τη μέγιστη επιφάνεια κάλυψης του οικοπέδου. Η δεύτερη ιδέα είναι να κτίσει και άλλον όροφο, ακριβώς όπως το ισόγειο και να αξιοποιήσει το μέγιστο εμβαδόν που δικαιούται να κτίσει σύμφωνα με τους συντελεστές δόμησης του οικιστικού νόμου. Το κόστος της οικοδομής, σύμφωνα με την ποιότητα των υλικών που επέλεξε ο κ. Αναγνώστου, καθορίζεται από την περίμετρο και από το εμβαδόν της κατασκευής. Το κόστος είναι 2000€ για κάθε μέτρο της περιμέτρου του ισογείου, και 1100€ για κάθε μέτρο της περιμέτρου του 1ου ορόφου (η διαφορά του ισογείου οφείλεται στο κόστος των θεμελίων της οικοδομής). Σ' αυτό το κόστος προστίθενται και 850€ για κάθε m^2. Πόσο θα κοστίσει σε κάθε περίπτωση το κάθε τετραγωνικό μέτρο που θα κτίσει ο κ. Αναγνώστου και ποια είναι η περισσότερο συμφέρουσα λύση ως προς το κόστος ανά τ.μ.;

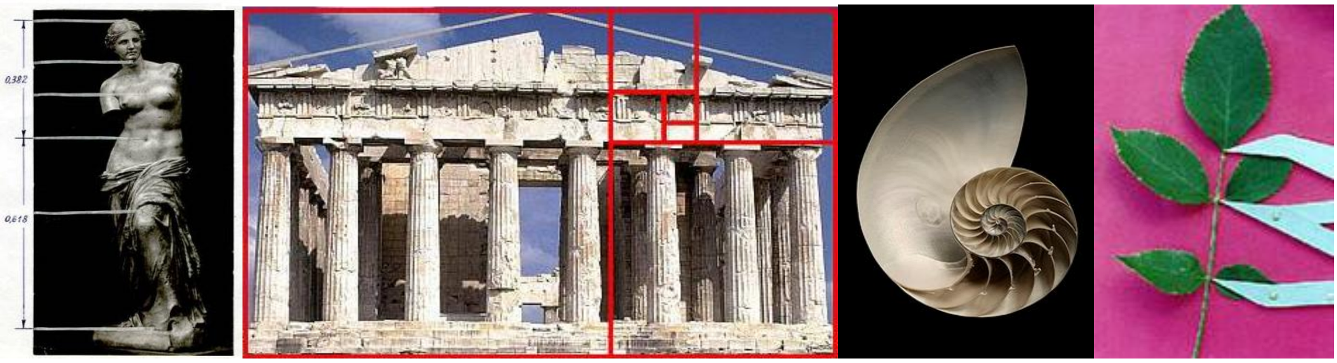
Οι επόμενες διερευνήσεις θα μας βοηθήσουν να υπολογίσουμε τις διαστάσεις του σπιτιού σ΄ αυτές τις δύο περιπτώσεις και να βρούμε την οικονομικότερη λύση ανά m^2 για τον κ. Αναγνώστου.
Σημείωση: Η νομοθεσία που αναφέρεται στο πρόβλημα είναι πραγματική.

Ενδεικτικές φάσεις εφαρμογής
1η φάση: Οι μαθητές εισάγονται στην έννοια της ομοιοθεσίας με το ομοιόθετο ενός σημείου και ενός τμήματος και διαπιστώνουν ότι τα ομοιόθετα τμήματα έχουν τον ίδιο λόγο με τον λόγο ομοιοθεσίας και είναι παράλληλα. Επίσης, διαπραγματεύονται τον λόγο των περιμέτρων και των εμβαδών ομοιόθετων γεωμετρικών σχημάτων.
2η φάση: Οι μαθητές εισάγονται στην έννοια της ομοιότητας ως ένα σύνολο μετασχηματισμών δύο σχημάτων. Στη συνέχεια αναγνωρίζουν όμοια σχήματα από τις γωνίες και το λόγο των πλευρών τους.
3η φάση: Οι μαθητές απαντούν σε ερωτήσεις που αφορούν το αρχικό πρόβλημα του μετασχηματισμού της κάτοψης ενός σπιτιού. Διερευνούν το εμβαδόν του σχεδίου σε σχέση με το λόγο ομοιότητας. Διερευνούν το πρόβλημα κόστους της οικοδομής σε σχέση με την περίμετρο και το εμβαδόν της.

Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα
Στην παραδοσιακή τάξη η διδασκαλία των εννοιών της ομοιοθεσίας και της ομοιότητας των γεωμετρικών σχημάτων γίνεται με στατικά μέσα αναπαράστασης και δύσκολα συνδέεται με την μοντελοποίηση πραγματικών προβλημάτων και την μελέτη τους με βάση τις συγκεκριμένες μαθηματικές έννοιες. Στο πλαίσιο αυτό οι μαθητές έχουν περιορισμένες δυνατότητες εμπλοκής τους σε διαδικασίες κατασκευής ομοιόθετων και όμοιων γεωμετρικών σχημάτων και διερεύνησης των ιδιοτήτων τους. Στην παρούσα εργασία και με τη βοήθεια του Geogebra οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα:
- να πειραματιστούν με την κατασκευή ομοιόθετων γεωμετρικών σχημάτων,
- να συνδέσουν τις έννοιες ομοιότητας και ομοιοθεσίας και να διερευνήσουν τον ‘μηχανισμό’ κατασκευής όμοιων γεωμετρικών σχημάτων μέσω της ομοιοθεσίας και άλλων διαδοχικών μετασχηματισμών,
- να διερευνήσουν τις ιδιότητες των όμοιων γεωμετρικών σχημάτων και να διαπραγματευτούν τη σχέση του λόγου των περιμέτρων και του λόγου των εμβαδών ομοιόθετων γεωμετρικών σχημάτων με το λόγο ομοιότητας,
- να συνδέσουν την επίλυση πραγματικών προβλημάτων με τις έννοιες της περιμέτρου και του εμβαδού όμοιων γεωμετρικών σχημάτων,
- να αναγνωρίσουν την αξία των μετασχηματισμών στην επίλυση προβλήματος στα μαθηματικά.

ΣΥΝΘΕΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ 10 (Γ΄ Γυμνασίου)
«Ανακαλύπτοντας τη χρυσή αναλογία»

Τι κοινό μπορεί να έχουν ο Παρθενώνας, ένας κοχλίας, οι αναλογίες του ανθρώπινου σώματος, ο τρόπος με τον οποίο φυτρώνουν τα φύλλα στα κλαδιά και η Μόνα Λίζα του Λεονάρντο ντα Βίντσι; Η απάντηση κρύβεται στον μαγικό αριθμό φ, που συμβολίζεται έτσι διεθνώς από το πρώτο γράμμα του ονόματος του γλύπτη Φειδία. Αν χωρίσουμε ένα ευθύγραμμο τμήμα σε δύο μέρη, έτσι ώστε ο λόγος του με το μεγαλύτερο μέρος, να είναι ίσος με το λόγο του μεγαλύτερου προς το μικρότερο μέρος, τότε αυτός ο λόγος που σχηματίζεται ισούται με φ. Ο λόγος φ εμφανίζεται στο σύμπαν, στη φύση και στα ανθρώπινα δημιουργήματα. Από την αρχαιότητα είχε παρατηρηθεί ότι δημιουργεί την αίσθηση του ωραίου και γι’ αυτό χρησιμοποιήθηκε στην Αρχιτεκτονική, στην Γλυπτική, στη Ζωγραφική. Οι επόμενες διερευνήσεις θα σας βοηθήσουν να ανακαλύψετε περισσότερα για τον αριθμό φ και την εμφάνισή του στη φύση και στα ανθρώπινα δημιουργήματα.



Ενδεικτικές φάσεις εφαρμογής

1η φάση: Οι μαθητές εισάγονται στο μαθηματικό πρόβλημα της χρυσής τομής. Ο εκπαιδευτικός μπορεί να χρησιμοποιήσει και ψηφιακό περιβάλλον για τον υπολογισμό του φ (π.χ. στο Geogebra). Σε ένα τμήμα α με μεταβαλλόμενο μήκος έχει τοποθετηθεί ένα σημείο σε απόσταση χ από το ένα άκρο. Μεταβάλλοντας το μήκος του χ οι μαθητές παρατηρούν τη μεταβολή των λόγων α/χ και χ/(α-χ). Καλούνται να εντοπίσουν πότε οι λόγοι γίνονται ίσοι, να υπολογίσουν τον αριθμό φ και να συμπεράνουν μετά από πειραματισμό ότι είναι ανεξάρτητος από το μήκος του τμήματος α. Στη συνέχεια σχηματίζουν την εξίσωση $φ^2=φ+1$ και συνδέουν τον αριθμό φ με την τομή των συναρτήσεων $ψ=χ^2$ και $ψ=χ+1$.

2η φάση: Οι μαθητές χωρίζονται σε ομάδες και η κάθε ομάδα αναλαμβάνει τις δικές της διερευνήσεις. Οι ομάδες έχουν τη δυνατότητα να συλλέξουν πληροφορίες και να συγκεντρώσουν υλικό (π.χ. εικόνες, φωτογραφίες) σχετικά με τη εμφάνιση του φ στη φύση και στα ανθρώπινα δημιουργήματα. Μπορεί μάλιστα ο χωρισμός των ομάδων να γίνει θεματικά όπως παρακάτω:

Ομάδα Μαθηματικών: Δίνεται στους μαθητές το πρόβλημα της ακολουθίας του Fibonacci, βρίσκουν ένα μεγάλο πλήθος όρων αυτής της ακολουθίας, υπολογίζουν το λόγο των διαδοχικών όρων, υπολογίζουν τη διαφορά των λόγων από τον αριθμό φ και διαπιστώνουν ότι ο λόγος αυτός πλησιάζει συνεχώς προς τον αριθμό φ. Χρησιμοποιώντας τεχνολογία (π.χ. Function Probe ή Excel) μπορεί να εξοικονομηθεί πολύτιμος χρόνος στους υπολογισμούς αυτούς. Στη συνέχεια ανακαλύπτουν τους αριθμούς Fibonacci στο τρίγωνο του Pascal.

Ομάδα Αρχιτεκτονικής και Τεχνών: Οι μαθητές αναζητούν ιστορικά και αρχιτεκτονικά στοιχεία για διάφορα αρχιτεκτονικά μνημεία όπως για τον Παρθενώνα, την Πυραμίδα του Χέοπα κ.α. και διερευνούν τη σχέση τους με τη χρυσή αναλογία.

Ομάδα Βιολογίας : Οι μαθητές μελετούν τη εμφάνιση του φ στη φύση (φύλλα, έντομα κ.λ.π.) και στις αναλογίες του ανθρώπινου σώματος.

Στη συνέχεια οι μαθητές μπορεί να κληθούν να εισάγουν φωτογραφίες σε κατάλληλα διαμορφωμένο αρχείο του Geogebra όπου έχουν την δυνατότητα να εξετάσουν, αν τμήματα της φωτογραφίας τηρούν τη χρυσή αναλογία.

3η φάση: Οι μαθητές παρουσιάζουν στην ολομέλεια της τάξης τα συμπεράσματα από τη διερεύνησή τους και ακολουθεί συζήτηση μετά από κάθε παρουσίαση. Αναρτούν στα ψηφιακά εργαλεία επικοινωνίας του σχολείου μία συνοπτική έκθεση των συμπερασμάτων τους.

Προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα

Η διδασκαλία των μαθηματικών εννοιών (π.χ. των λόγων και αναλογιών) συνήθως γίνεται στην τάξη χωρίς αναφορές σε παραδείγματα από τον πραγματικό κόσμο, τις επιστήμες και τον πολιτισμό. Η παρούσα εργασία αναμένεται να βοηθήσει τους μαθητές να κατανοήσουν την αναγκαιότητα της διδασκαλίας των μαθηματικών και ειδικότερα να τα συνδέσουν με την αναζήτηση των μαθηματικών δομών στη φύση και στις ανθρώπινες δραστηριότητες. Στην παρούσα εργασία οι μαθητές έχουν τη δυνατότητα:

- να συνδέσουν τα μαθηματικά με άλλες επιστήμες και τον πολιτισμό,
- να τοποθετήσουν τα μαθηματικά στην ιστορική, πολιτιστική και κοινωνική τους διάσταση,
- να θεωρήσουν τα μαθηματικά ως μια ανθρώπινη κατασκευή μέσω της οποίας μπορούμε να ερμηνεύσουμε τον κόσμο που μας περιβάλει και να αναγνωρίσουμε τις δομές και τις κανονικότητες που εμφανίζονται μέσα σ΄ αυτόν,

Η επικοινωνία για τα μαθηματικά θα ενισχύσει τις ευκαιρίες κατανόησης των αντίστοιχων μαθηματικών εννοιών ενώ η συνεργατική διερεύνηση θα βοηθήσει τους μαθητές να αναπτύξουν συνεργατικές και διαλογικές δεξιότητες και μεταδεξιότητες.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Ball D. L.,Thames M.H. & Phelps G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59, 389-407.

Black, P and Wiliam, D. (1998). Assessment and classroom learning, *Assessment in Education,* 5 (1), 7 – 74.

Borkowski, J. G. (1992). Metacognitive theory: a framework for teaching literacy, writing, and math skills. *Journal of Learning Disabilities, 25* (4), 253-257.

Bragg, P. & Outhred, l. (2000). Students' Knowledge of Length Units: Do They Know More than Rules about Rulers? In T. Nakarahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Educatio*n (Vol. 2, 97-104). Hiroshima, Japan: Program Committee.

Bragg, P. & Outhred, l. (2004). Ameasure of rulers – the importance of units in a measure**.** In J. Hoines , M. & A.B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol 2, 159–166). Bergen, Norway: Bergen University College.

Broadfoot, M.P. (1996), *Education, Assessment and Society*, Open University Press, Buckingham.

Brown, A. L., Bransford, J.D., Ferrara, R.A. & Campione, J.C. (1983). Learning, remembering, and understanding. In P.H. Mussen (Ed.) *Handbook of child psychology* (Vol. 3: Cognitive development pp 77-166). New York: Wiley

Clements, D. H. & Battista, M. T. (1992), Geometry and spatial reasoning. In D. A. Grouws (ed.), *The Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan.

Clements, D., & Sarama, J. (2000). Young Children's Ideas about Geometric Shapes. *Teaching Children Mathematics, 6(8)*, 482-491.

Clements, D. H. & Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: the learning trajectory approach.* New York & London: Routledge.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. V. Mammana, V. (ed.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century. An ICMI Study*, 37-51. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M. & Sceaffer, R. (2005). *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education*. American Statistical Association

Freudenthal, H., (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Mathematics Education Library. D. Reidel, Boston.

Garfield, J. & Ben-Zvi, D. (2007). How Students Learn Statistics Revisited: A Current Review of Research on Teaching and Learning Statistics. *International Statistical Review,* 75 (3), 372–396.

Garfield, J. B. & Ben-Zvi, D. (2008). *Developing Students' Statistical Reasoning: Connecting Research and Teaching Practice.* Springer Science & Business Media

Gutierez, A. (1996). Visualization in 3- Dimensional Geometry: In Search of a Framework. In L.Puig & A. Guitierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 3-20). Valencia: University of Valencia, Spain

Harlen, W. and Deakin Crick, R. (2003). Testing and Motivation for Learning, *Assessment in Education,* 10 (2),169 – 208

Henningsen, M. and Stein, M. K. (1997). Mathematical Tasks and Student Cognition: Classroom-Based Factors that support and Inhibit High-Level Mathematical Thinking and Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(5), 524-549.

Heuvel – Panhuizen, M. (2001). *Children learn mathematics: a learning – teaching trajectory with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school*. Utrecht: Freudenthal Institute & National Institute for Curriculum Development.

Jones, G.A. (Ed.) (2005). *Exploring Probability in School. Challenges for Teaching and Learning.* Springer Science & Business Media

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. In F. Lester (Ed.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 707- 762). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Leont'ev, A. N. (1978). *Activity, Consciousness, and Personality*. Englewood Cliffs: Prentice Hall.

Millett, A., Brown, M. Askew, M. (2004). *Primary mathematics and the developing professional*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Mammana, C., & Villani, V. (1998). Geometry and Geometry: Teaching Through the ages. In C. V. Mammana, V. (Ed.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century. An ICMI Study* (pp. 1-3). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Niss, M. (1996). Goals of mathematics teaching. In A. J. Bishop et al. (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 11-47). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers

Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM Project. In A. Gagatsis & S. Papastavridis (Eds.), *3rd Mediterranean conference on mathematical education.Athens,* Jan. 2003, pp. 115-124. Athens: Hellenic Math. Society.

Outhred, L. & Mitchelmore, M. (2000). Young children's intuitive understanding of rectangular area measurement. *Journal for Research in Mathematics Education, 31(2),* 147-167.

Outhred, L., Mitchelmore, M., Mcphail, D. & Gould, P. (2003). Count Me into Measurement. In D. Clements & G. Bright (Eds.), *Learning and Teaching Measurement: 2003 Yearbook*, 81-99. Reston, Va: National Council of Teachers of Mathematics.

Owens, K., & Outhred, L. (2006). The Complexity of Learning Geometry and Measurement. In A.Gutierez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 83-116). Rotterdam, Taipei: Sense Publishers.

Romberg, T. (2004). *Standards-Based Mathematics Assessment in Middle School: Rethinking Classroom Practice*, Teachers' College, Columbia University New York and London.

Samara, J. & Clements, D. H. (2009). *Early Childhood Mathematics Education Research. Learning Trajectories for Young Children*. Routledge.

Schoenfeld, A. H. (1987). What's the fuss about metacognition. In A. H. Schoenfeld (Ed.) *Cognitive Science and Mathematics Education.* Hillsdale, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Share, B. M. & Dover, A. C. (1987) Metacognition, intelligence, and giftedness. *Gifted Child Quarterly, 31*, (1), 37-39.

Shaughnessy, M. J. (2007). Research on Statistics Learning and Reasoning. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research On Mathematics Teaching and Learning: a Project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 957-1010). NCTM.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. London, Washington: The Palmer Press.

van den Heuvel-Panhuizen, & Buys, K. (Eds.) (2005). *Young Children Learn Measurement and Geometry. A Learning-Teaching Trajectory with Intermediate Attainment Targets for the Lower Grades in Primary School*. Tal Project, 227-326. NL: Utrecht: Freudenthall Institute, Utrecht University & National Institute for Curriculun Development

Van de Walle, J. (2005). *Μαθηματικά για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο*. Αθήνα: Τυπωθήτω – Γιώργος Δαρδανός.

Wenger, E., McDermott, R., & Snyder, W. M. (2002). *Cultivating communities of practice*. Boston, MA: Harvard Business School Press.

Wittmann, E. (2005). Plenary Lecture presented at the International Colloquium "Mathematical Learning from Early Childhood to Adulthood" organized by the *Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathematiques* in collaboration with the *Institut de mathématique de l'Université de Mons-Hainaut*, Mons/Belgium.

Βερύκιος, Π. (2010). *Συναρτησιακή προσέγγιση βασικών μαθηματικών εννοιών στο Γυμνάσιο*, Αδημοσίευτη Διδακτορική Διατριβή, ΕΚΠΑ: Μαθηματικό Τμήμα.

Δραμαλίδης, Α. & Σακονίδης, Χ. (2006) Η επίδοση μαθητών ηλικίας 12-15 χρόνων σε θέματα σχολικής άλγεβρας, *Επιθεώρηση Εκπαιδευτικών Θεμάτων*, τεύχος 11, σελ. 100-114.

Κολέζα, Ε. & Φακούδης, Ε. (2009). Το πρόβλημα της επιλογής πλαισίου για την εισαγωγή μαθηματικών εννοιών. Η περίπτωση της πρόσθεσης και αφαίρεση ρητών αριθμών στα νέα σχολικά εγχειρίδια. Στο Φ. Καλαβάσης, Σ. Καφούση, Μ. Χιονίδου – Μοσκοφόγλου, Χ. Σκουμπουρδή και Γ. Φεσάκης (επιμ.) *Πρακτικά 3^{ου} Πανελληνίου Συνεδρίου Ερευνητών της Διδακτικής των Μαθηματικών: Μαθηματικής Εκπαίδευση και Διδακτικές Πρακτικές* (σελ. 373-382). Αθήνα: Νέες Τεχνολογίες.

Σακονίδης, Χ. (2001). *Μαθηματικά: οδηγίες για τον εκπαιδευτικό*. Αθήνα: ΥΠΕΠΘ-Ερευνητικό Πρόγραμμα «Πηνελόπη»: Ανάπτυξη εκπαιδευτικού λογισμικού πολυμέσων/ «Δημιουργός Μοντέλων».

Τζεκάκη, Μ. (2007). *Μικρά Παιδιά, Μεγάλα Μαθηματικά Νοήματα*. Αθήνα: Gutenberg.

Σακονίδης, Χ. (2001). Μαθηματικά: οδηγίες για τον εκπαιδευτικό. Αθήνα: ΥΠΕΠΘ-Ερευνητικό Πρόγραμμα «Πηνελόπη»: Ανάπτυξη εκπαιδευτικού λογισμικού πολυμέσων/ «Δημιουργός Μοντέλων».