**Συμπληρωματικές σημειώσεις στο πεδίο των**

**Πεπλεγμένων Συναρτήσεων**

Οι σημειώσεις αυτές αποτελούν συμπλήρωμα της ύλης που υπάρχει στα προτεινόμενα βιβλία του Β εξαμήνου του Τμήματος Πολιτικών Μηχανικών του ΠΘ. Το περιεχόμενό τους έχει παρουσιαστεί κατά τη διάρκεια των διαλέξεων του Μαθήματος «Απειροστικός Λογισμός ΙΙ» και αποτελούν συμπλήρωμα του πεδίου των πεπλεγμένων συναρτήσεων.

**ΠΕΠΛΕΓΜΕΝΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ**

Έστω μια συνάρτηση και ένα σύνολο

Καλούμαστε να αναζητήσουμε την επίλυση της εξίσωσης ως προς μια από τις δύο μεταβλητές.

Επιπλέον καλούμαστε να βρούμε σε κάποιο υποσύνολο του *S* ορίζεται η συνάρτηση ή . Τις απαντήσεις στις λύσεις αυτές τις δίνουμε μέσω παραδείγματος.

*Παράδειγμα 1*

Θεωρούμε τη συνάρτηση . Η εξίσωση

(1)

είναι κύκλος κέντρου *Κ(0,0)* ακτίνας *r=1.*

Αποδεικνύεται ότι η εξίσωση (1) ως προς τη μεταβλητή *y* **λύνεται μονοσήμαντα** με λύσεις:

και ,

Η παραπάνω λύση **αποδίδει δύο συναρτήσεις** της μορφής:

,

**Συμπερασματικά** η συνάρτηση βρίσκεται υπό *πεπλεγμένη μορφή* στην εξίσωση .

Ένα χρήσιμο θεώρημα με το οποίο ορίζεται η παραπάνω πεπλεγμένη μορφή και για ποιες τιμές του *x* γίνεται αυτό*,* είναι το παρακάτω Θεώρημα:

**Θεώρημα 1**

Μια σχέση ορίζει το *y* ως συνάρτηση του *x* για τις τιμές του *x* για τις οποίες ισχύει

(2)

Για τις τιμές αυτές ισχύουν τα εξής

(3)

*Άσκηση 1 (εφαρμογή του Θεωρήματος)*

Α) Για ποιες τιμές των *x, y* η σχέση

ορίζει τη συνάρτηση υπό πεπλεγμένη μορφή;

Β) Να υπολογιστεί η .

Λύση

Α) Η εξίσωση ορίζει τη συνάρτηση για εκείνες τις τιμές του *x* για τις οποίες ισχύει

με

Από τον υπολογισμό της μερικής παραγώγου είναι ,

άρα και ισχύει

Β) Για τη μερική παράγωγο έχουμε:

Για συναρτήσεις τριών μεταβλητών ισχύει το παρακάτω πόρισμα:

**Πόρισμα 1**

Μια σχέση μεταξύ των ορίζει το ως συνάρτηση των δηλαδή για εκείνα τα για τα οποία και ισχύει:

και .

*Άσκηση 2*

Για ποιες τιμές των η σχέση

(1)

Ορίζει το *z* ως συνάρτηση των *x,y*;

Να βρεθούν οι

*Λύση*

Η σχέση (1) ορίζει τη συνάρτηση για εκείνα τα *x, y* για τα οποία

δηλαδή με

Άρα έχουμε

και

Εκτός από μία σχέση μπορεί και ένα **σύστημα σχέσεων να ορίζει** μεταξύ των n μεταβλητών *m* από τις μεταβλητές αυτές ως συναρτήσεις των άλλων *n-m* μεταβλητών. Για να εξετάσουμε αυτή τη σχέση παρουσιάζουμε την ορίζουσα μερικών παραγώγων (Ιακωβιανή Ορίζουσα).

**Ιακωβιανή Ορίζουσα**

*Ορισμός 1*

Θεωρούμε τις συναρτήσεις

Ιακωβιανή Ορίζουσα των ανωτέρω συναρτήσεων ορίζουμε τη συνάρτηση

**Θεώρημα 2**

Οι παρακάτω m - σχέσεις μεταξύ των n μεταβλητών

…………………….

με , ορίζουν *m* από τις μεταβλητές αυτές ως συναρτήσεις των άλλων *n-m* μεταβλητών για τις τιμές για τις οποίες ισχύει

Έτσι μπορούμε να ορίσουμε ένα σύστημα σχέσεων ως συναρτήσεις μιας μεταβλητής και να βρούμε τις ολικές πλέον παραγώγους ως προς τη μεταβλητή αυτή.

*Άσκηση 3*

Α) Για ποιες τιμές των οι σχέσεις

(1)

(2)

ορίζουν τα *y* και *z*  ως συναρτήσεις του *x* .

Β) Να βρεθούν τα

*Λύση*

Θεωρούμε τις συναρτήσεις

Οι ορίζουν τα *y* και *z* ως συναρτήσεις του *x* για τις τιμές για τις οποίες

Υπολογίζοντας τις Ιακωβιανές ορίζουσες έχουμε:

Α)

Δηλαδή

Β)

Για να βρούμε τις εργαζόμαστε όπως παρακάτω

Αφού δείξαμε ότι τα *y, z* είναι συναρτήσεις του *x* παραγωγίζουμε τις (1) και (2) ως προς *x*.

(3)

Από το σύστημα των εξισώσεων (3) και (4) λύνουμε ως προς και παίρνουμε

Αντικαθιστούμε στην (4) και βρίσκουμε το

Αντικαθιστούμε στην (5) και βρίσκουμε το

Βασιζόμενοι στα παραπάνω ερχόμαστε στην πιο περίπλοκη μορφή των πεπλεγμένων συναρτήσεων οι οποίες περιλαμβάνουν σχέσεις μεταξύ τεσσάρων μεταβλητών που οι δύο μεταβλητές από αυτές ορίζουν ως συνεχώς διαφορίσιμες πεπλεγμένες συναρτήσεις των άλλων δύο μεταβλητών κοντά σε ένα σημείοτο οποίο αποτελεί τον τελικό σκοπό μελέτης των Πεπλεγμένων Συναρτήσεων.

**Πόρισμα 2**

Θεωρούμε το σύστημα

Οι σχέσεις (1) και (2) μεταξύ τεσσάρων μεταβλητών ορίζουν δύο από αυτές πχ τις ως συνεχώς διαφορίσιμες πεπλεγμένες συναρτήσεις των κοντά σε ένα σημείο για τις τιμές για τις οποίες ισχύει

Ισχύουν τα εξής

*Άσκηση 4*

Α) Να εξεταστεί εάν κοντά στο σημείο με και , το σύστημα:

Ορίζει τα *u* και *v* ως συνεχώς διαφορίσιμες πεπλεγμένες συναρτήσεις των *x*, *y*.

Β) Να υπολογιστούν τα στο *P.*

Λύση

Το σύστημα ορίζει τα *u, v* ως συνεχώς διαφορίσιμες πεπλεγμένες συναρτήσεις των *x,y* κοντά στο *P* εάν

με

Από την Ιακωβιανή ορίζουσα έχουμε:

Οι συναρτήσεις *u* και *v* στο σημείο *P* γίνονται

και η ιακωβινή στο *Ρ*

Άρα σύμφωνα με το πόρισμα το σύστημα ορίζει τα *u, v* ως συνεχείς διαφορίσιμες πεπλεγμένες συναρτήσεις των *x, y* κοντά στο *P*.

Β) Για το σημείο *Ρ* έχουμε:

Η Ιακωβιανή γίνεται

Άρα

Επίσης