Temporal Description of the Sea Surface
Χρονική Περιγραφή της επιφάνειας της θάλασσας

Θεωρώντας το θαλάσσιο πεδίο γραμμικό και 2D, μία ντετερμινιστική λύση δίνει:

$$\eta(x,t)=\sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(k_m x-\omega_m t+\theta_m)$$

Linear random wave model

where a_m - amplitude of the mth component
k_m - wave number of the mth component
ω_m - wave frequency of the mth component
θ_m - phase angle of the mth component

A Spectral Description of the Sea Surface
Φασματική Περιγραφή της επιφάνειας της θάλασσας

Κάθε χρονοσειρά $X(t)$ μπορεί να αναπαρασταθεί στο πεδίο συχνοτήτων χρησιμοποιώντας ένα μετασχηματισμό Fourier (Fourier integral transform):

$$X(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(t)\exp(-i\omega t)dt$$

όπου $i=\sqrt{-1}$, και ο αντίστροφος μετασχηματισμός επίσης εφαρμόζεται:

$$X(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\exp(i\omega t)d\omega$$

Στο πλαίσιο των επιφανειακών κυματισμών, ο μετασχηματισμός Fourier Transform της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης (auto-correlation function) της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας είναι ιδιαιτέρως σημαντική.

$$S_{\eta\eta}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} R_{\eta\eta}(\tau)\exp(-i\omega\tau)d\tau$$

όπου $S_{\eta\eta}$ ορίζεται σαν συνάρτηση φασματικής πυκνότητας (***spectral density function)*** της διακύμανσης της ελεύθερης επιφάνειας ή απλά το φάσμα (***Spectrum***).

Εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό:

$$R_{\eta\eta}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\eta\eta}(\omega)\exp(i\omega\tau)d\omega$$

Αλλά,

$$\sigma_\eta^2 = R_{\eta\eta}(\tau = 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\eta\eta}(\omega)d\omega$$

Έτσι, το φάσμα ορίζει την κατανομή της διακύμανσης της ελεύθερης επιφάνειας στο πεδίο συχνοτήτων.

Ομως, σ_η^2 σχετίζεται με την ενέργεια και άρα το φάσμα καταδεικνύει την κατανομή της ενέργειας στο εύρος των συχνοτήτων.

Χρησιμοποιώντας τον παρόντα ορισμό, $S_{\eta\eta}$ είναι real και even function του (ω) ($f(\omega) = f(-\omega)$), και επομένως αντιστοιχεί ένα αμφίπλευρο φάσμα (***two-sided*** spectrum). Στην πράξη οι μηχανικοί χρησιμοποιούμε ένα μονόπλευρο φάσμα (***one-sided*** spectrum) $G_{\eta\eta}(\omega)$, όπου:

$$G_{\eta\eta}(\omega) = 2S_{\eta\eta}(\omega) \qquad \omega > 0$$
$$G_{\eta\eta}(\omega) = 0 \qquad \omega < 0$$

Με το παραπάνω:

$$\sigma_\eta^2 = R_{\eta\eta}(\tau = 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\eta\eta}(\omega) d\omega = \int_0^{+\infty} G_{\eta\eta} d\omega$$

Το ποσοστό της ολικής διακύμανσης που αντιστοιχεί σε ένα μικρό διάστημα συχνοτήτων $\Delta\omega$ κεντραρισμένο στο ω_m δίνεται από:

$$\sigma_\eta^2(\omega_m) = G_{\eta\eta}(\omega_m)\Delta\omega = a_m^2 / 2$$

όπου η συνεχής συνάρτηση της διακύμανσης περιγράφεται κατά προσέγγιση από ένα διακριτό γραμμικό στοιχείο εύρους, a_m.

i.e. $$a_m = \sqrt{(2G_{\eta\eta}(\omega_m)\Delta\omega)}$$

και επομένως: $$\eta(x,t) = \sum_m \sqrt{(2G_{\eta\eta}(\omega_m)\Delta\omega)} \cos(k_m x - \omega_m t + \alpha_m)$$

όπου $\omega_m^2 = g k_m \tanh(k_m d)$

και d το βάθος ροής.