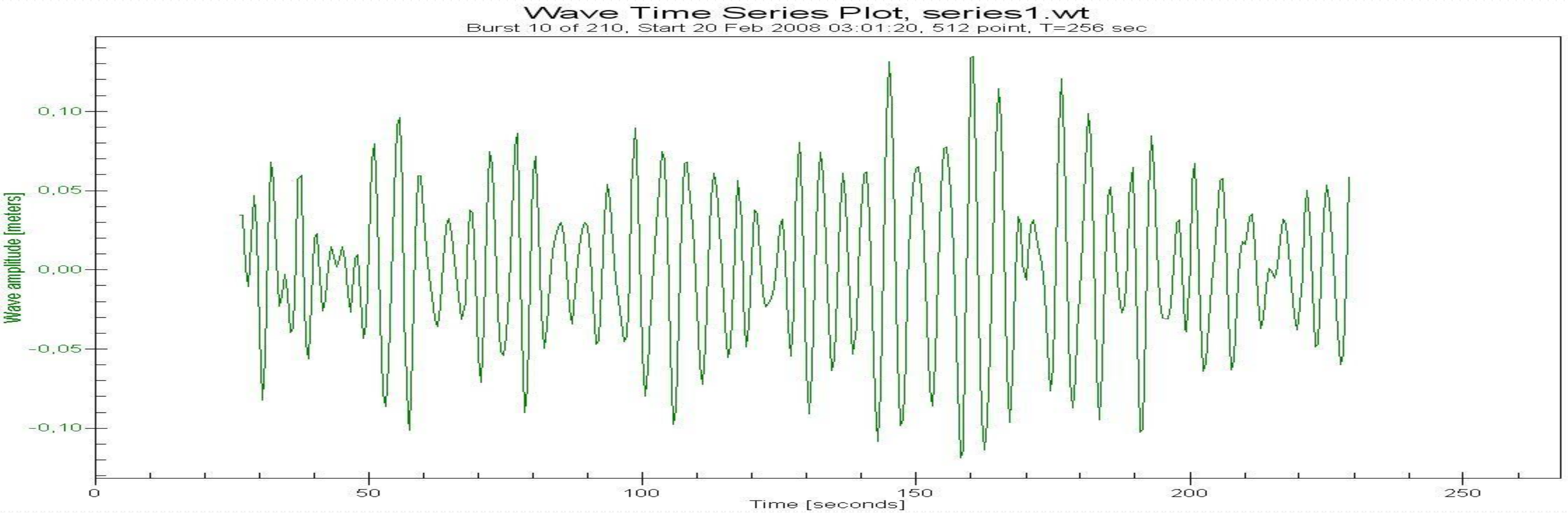
Κυματομηχανική

Σειρά VI:

Πραγματικοί Κυματισμοί

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας - Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών
Δρ. Βασιλική Κατσαρδή

Πραγματικοί κυματισμοί



- Οι κυματισμοί που δημιουργεί η επίδραση του ανέμου στην επιφάνεια της θάλασσας, δεν είναι «μονοχρωματικοί».
- Η επιφάνεια της θάλασσας μπορεί να προσεγγιστεί με σύνθεση περισσοτέρων απλών κυματισμών και να αναλυθεί ως στοχαστικό μέγεθος
- Ανεμογενείς κυματισμοί=στοχαστικά μεγέθη που ακολουθούν συγκεκριμένους πιθανολογικούς νόμους κατανομής

ΑΝΕΜΟΓΕΝΕΙΣ ΚΥΜΑΤΙΣΜΟΙ

Μονοχρωματικός κυματισμός
(1 συχνότητα)

$$\eta = a\cos(kx - \omega t)$$

η πραγματική μορφή της ελεύθερης επιφάνειας της θάλασσας μπορεί να προσεγγιστεί με επαλληλία ημιτονοειδών κυμάτων

$$\eta = \sum a_i \cos(\kappa_i x - \omega_i t + \varphi_i)$$

Για κάθε αρμονική συνιστώσα η πυκνότητα ενέργειας υπολογίζεται από τη σχέση

$$\overline{E_i} = \tfrac{1}{2} g \rho a_i^2$$

Περιγραφή της θαλάσσιας επιφάνειας στο πεδίο των χρόνων

Υποθέτοντας 2-D γραμμική περιγραφή του κυματικού πεδίου, μία ντετερμινιστική λύση θα δίνεται από

$$\eta(x,t)=\sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos(k_m x-\omega_m t+\theta_m)$$

- a_m - εύρος της m^th^ συνιστώσας
- k_m - κυματαριθμός της m^th^ συνιστώσας
- ω_m - κυματική συχνότητα της m^th^ συνιστώσας
- θ_m - φάση της m^th^ συνιστώσας

Περιγραφή της θαλάσσιας επιφάνειας στο πεδίο των συχνοτήτων

Κάθε χρονοσειρά $X(t)$ μπορεί να περιγραφεί στο πεδίο των συχνοτήτων χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό Fourier (Fourier integral transform):

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(t)\exp(-i\omega t)dt$$

όπου $i = \sqrt{-1}$, και ο ανάστροφος μετασχηματισμός μπορεί να εφαρμόστεί:

$$X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\exp(i\omega t)d\omega$$

Στο πλαίσιο των κυματισμών επιφανείας ο μετασχηματισμός Fourier (Fourier Transform) της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης της επιφανειακής ανύψωσης είναι ιδιαίτερα σημαντικός.

$$S_{\eta\eta}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} R_{\eta\eta}(\tau)\exp(-i\omega\tau)d\tau$$

όπου $S_{\eta\eta}$ ορίζεται ως συνάρτηση φασματικής πυκνότητας (***spectral density function)*** της διακύμανσης της ελεύθερης επιφάνειας, ή απλά το Φάσμα (***Spectrum)***.

Εφαρμόζοντας τον ανάστροφο μετασχηματισμό

$$R_{\eta\eta}(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}S_{\eta\eta}(\omega)\exp(i\omega\tau)d\omega$$

Αλλά:

$$\sigma_{\eta}^{2}=R_{\eta\eta}(\tau=0)=\int_{-\infty}^{+\infty}S_{\eta\eta}(\omega)d\omega$$

- Επομένως το φάσμα ορίζει την κατανομή της διακύμανσης της ελεύθερης επιφάνειας στο πεδίο των συχνοτήτων.
- Παράλληλα, σ_{η}^{2} εξαρτάται από την κυματική ενέργεια και έτσι το φάσμα υποδεικνύει την κατανομή ενέργειας στις συχνότητες.
- Χρησιμοποιώντας τον παρόντα ορισμό, $S_{\eta\eta}$ είναι μία πραγματική και μία άρτια συνάρτηση του (ω), και επομένως αντιπροσωπεύει ένα φάσμα με 2 πλευρές. Στην πράξη είναι πιο σύνηθες να χρησιμοποιούμε ένα φάσμα μίας πλευράς $G_{\eta\eta}(\omega)$, όπου:

$$G_{\eta\eta}(\omega) = 2S_{\eta\eta}(\omega) \qquad \omega > 0$$

$$G_{\eta\eta}(\omega) = 0 \qquad \omega < 0$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω εξίσωση:

$$\sigma_\eta^2 = R_{\eta\eta}(\tau = 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\eta\eta}(\omega)d\omega = \int_0^{+\infty} G_{\eta\eta}d\omega$$

Το ποσοστό της συνολικής διακύμανσης σχετιζόμενη με ένα μικρό διάστημα συχνοτήτων Δω γύρω από το ω_m δίδεται από:

$$\sigma_\eta^2(\omega_m) = G_{\eta\eta}(\omega_m)\Delta\omega = a_m^2 / 2$$

όπου η συνεχής κατανομή της διακύμανσης προσεγγίζεται με μία διακεκριμένη γραμμική κυματική συνιστώσα, a_m. $a_m = \sqrt{(2G_{\eta\eta}(\omega_m)\Delta\omega)}$

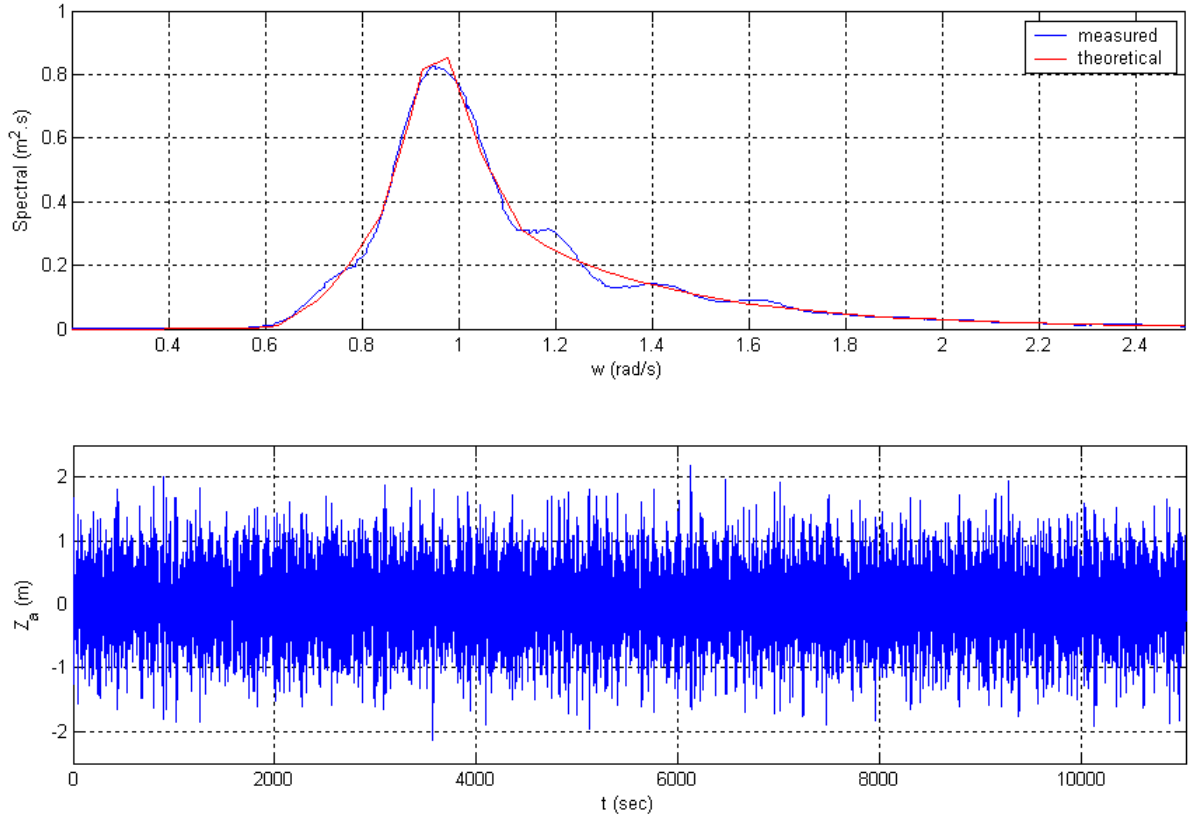
Και επομένως:

$$\eta(x,t) = \sum_m \sqrt{(2G_{\eta\eta}(\omega_m)\Delta\omega)}\cos(k_m x - \omega_m t + \alpha_m)$$

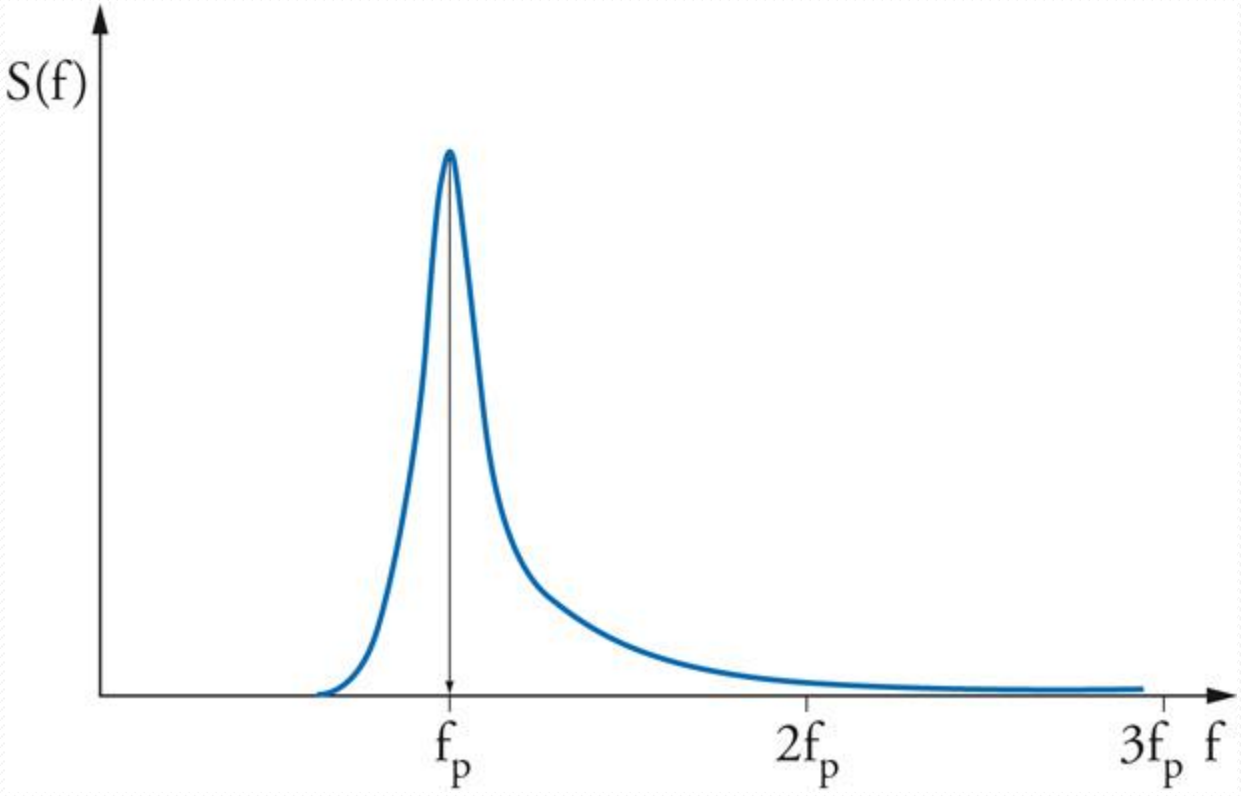
όπου

$$\omega_m^2 = gk_m \tanh(k_m d)$$

Φάσμα

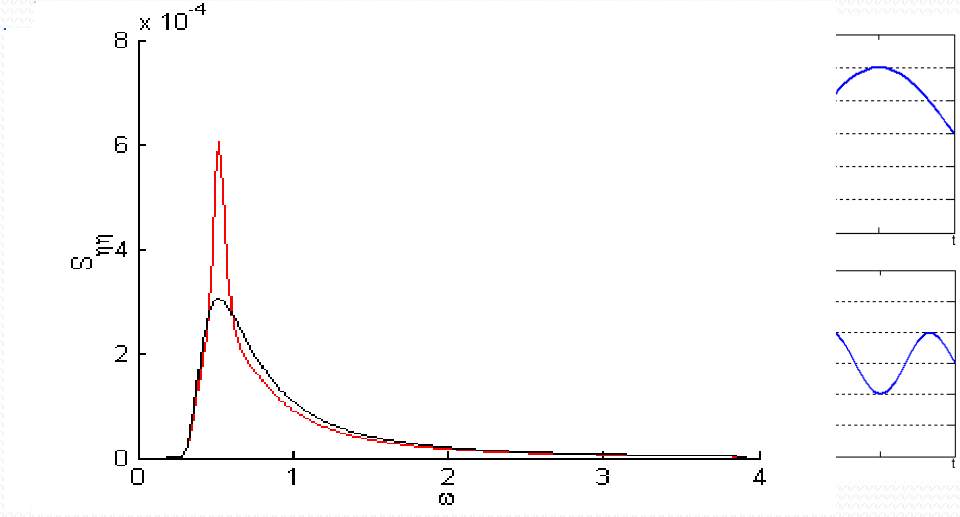


JONSWAP το πιο συνηθισμένο

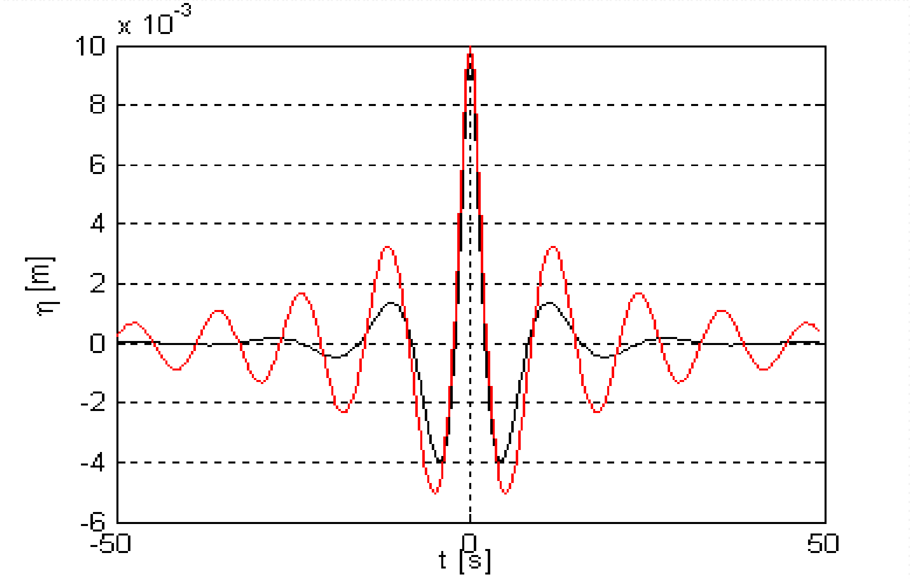


Εύρος Συχνοτήτων

Διασπορά Ενέργειας: περιγράφεται από το φάσμα $S_{\eta\eta}(\omega)$



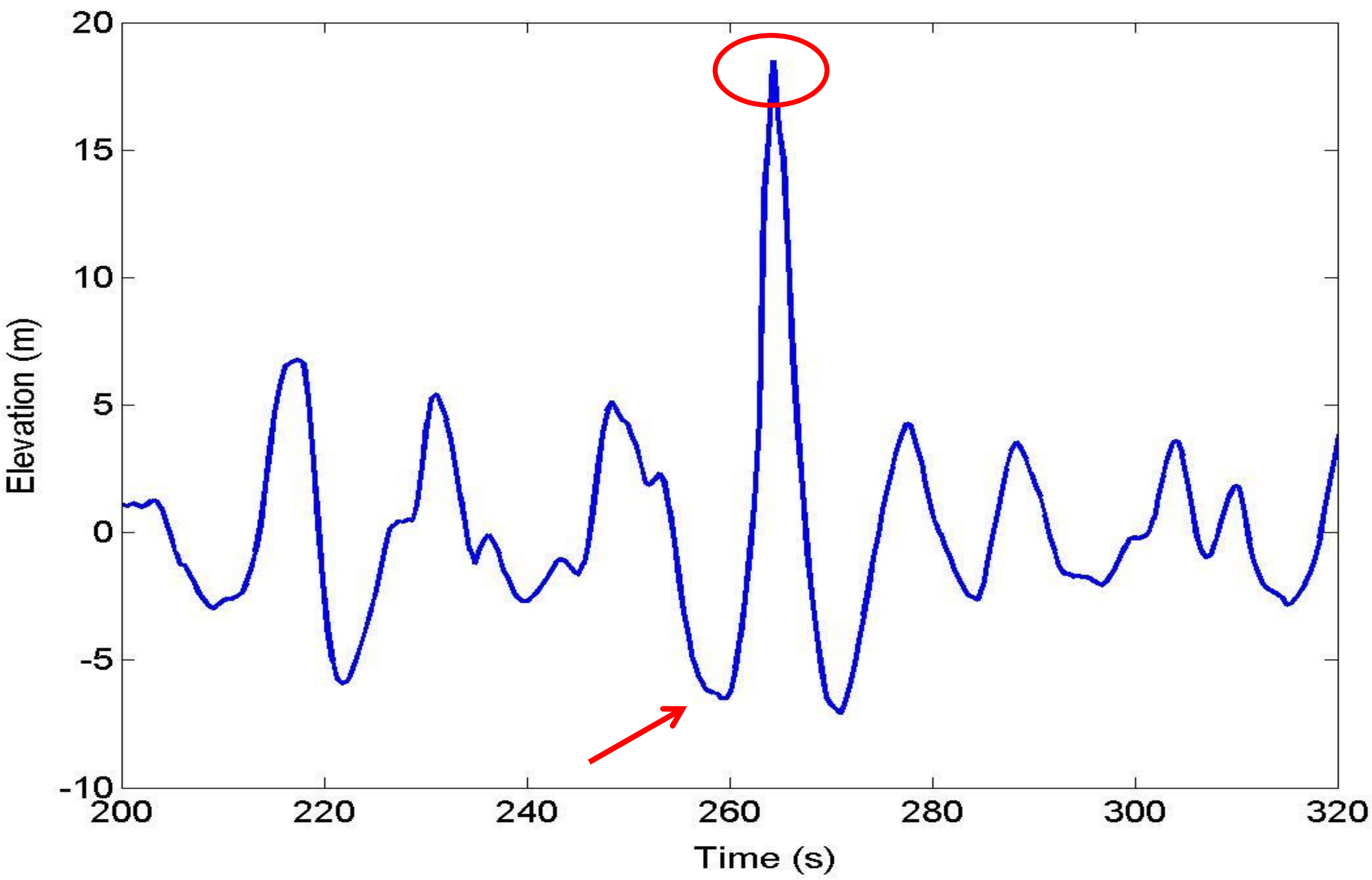
Μεγάλο κύμα: άθροισμα κυματοκορυφών



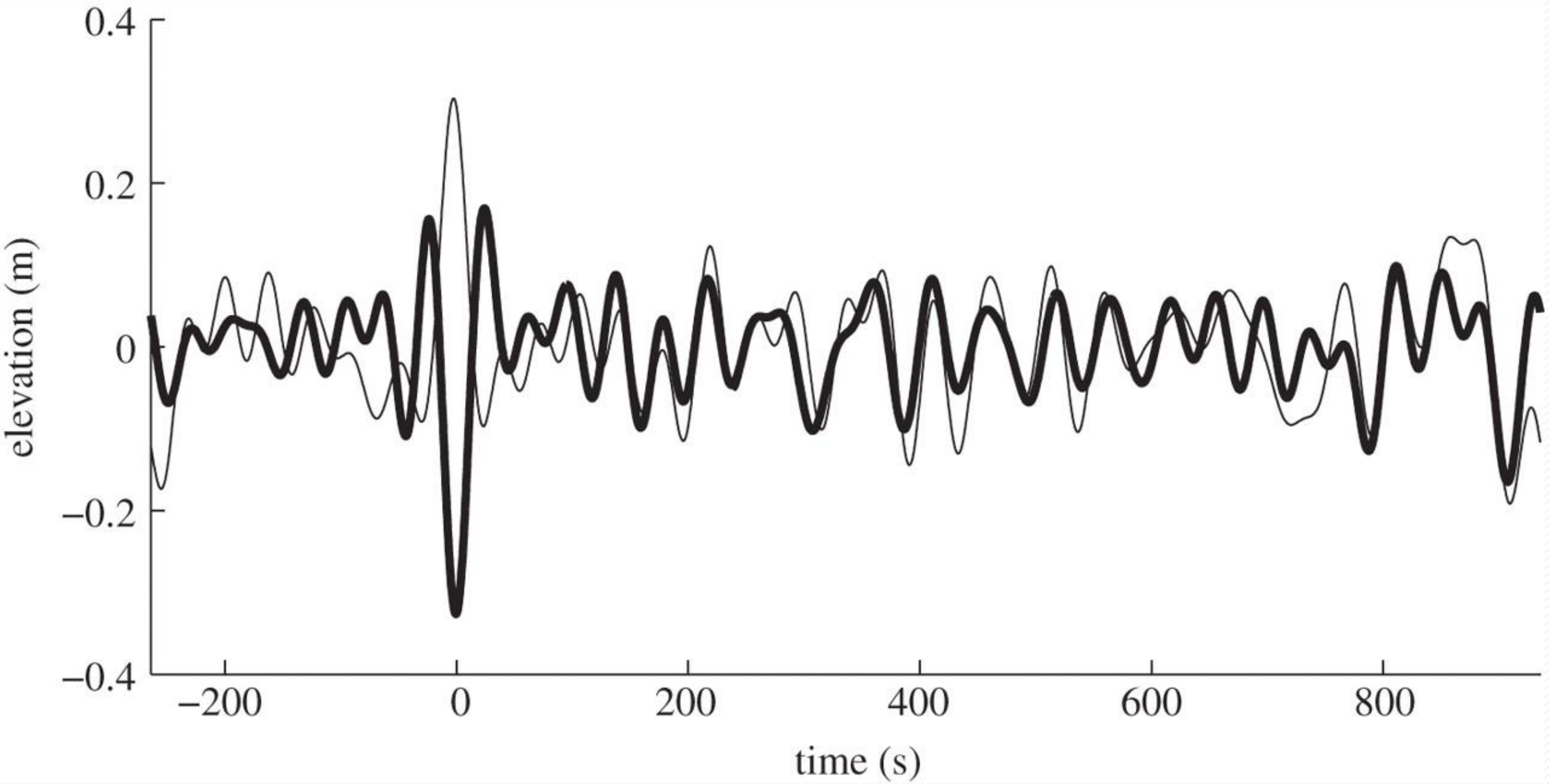
“Freak Wave passing a tanker”

“Freak Wave” Draupner

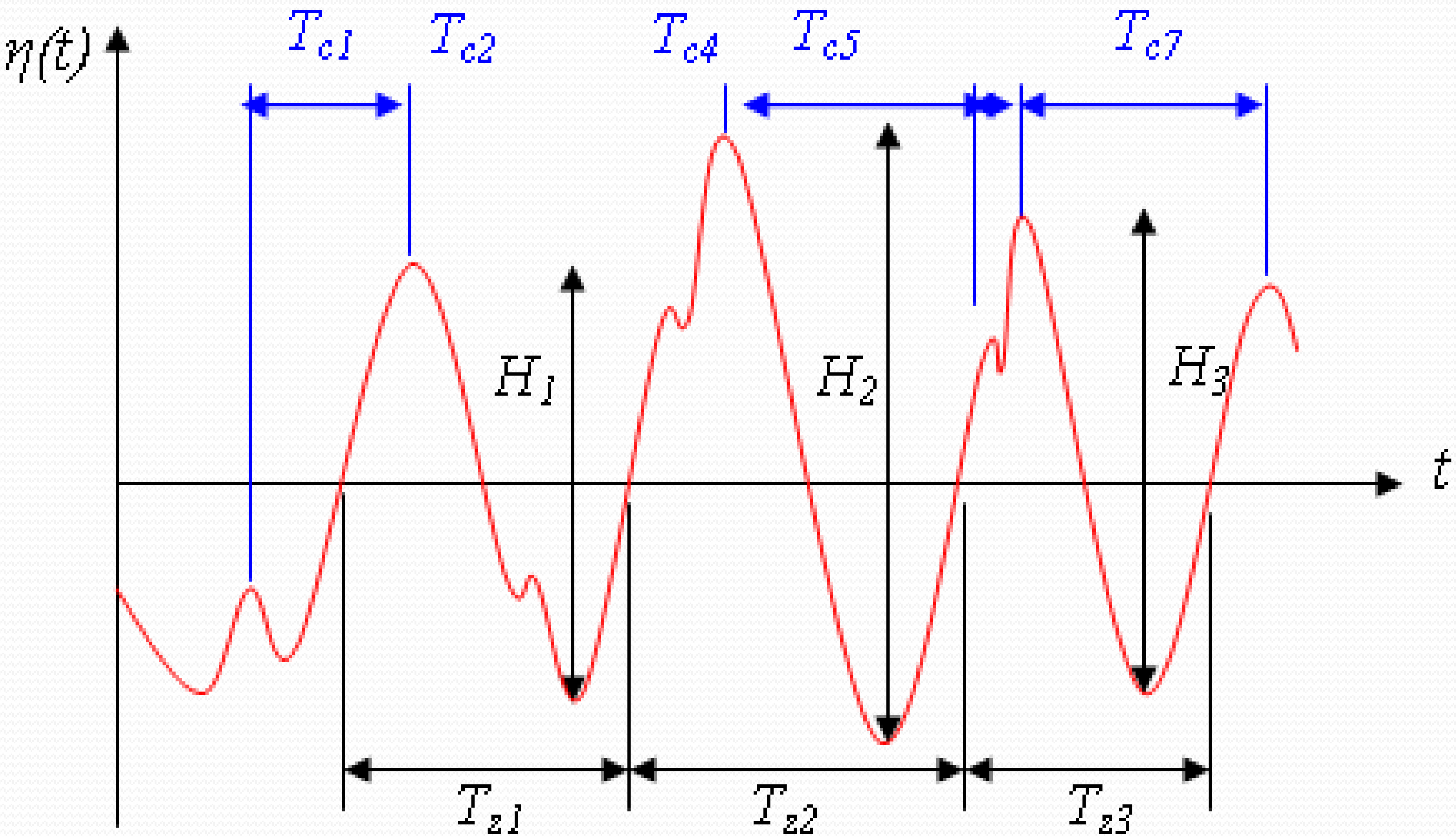
- Βορειότερη βόρεια θάλασσα
- Data από Statoil



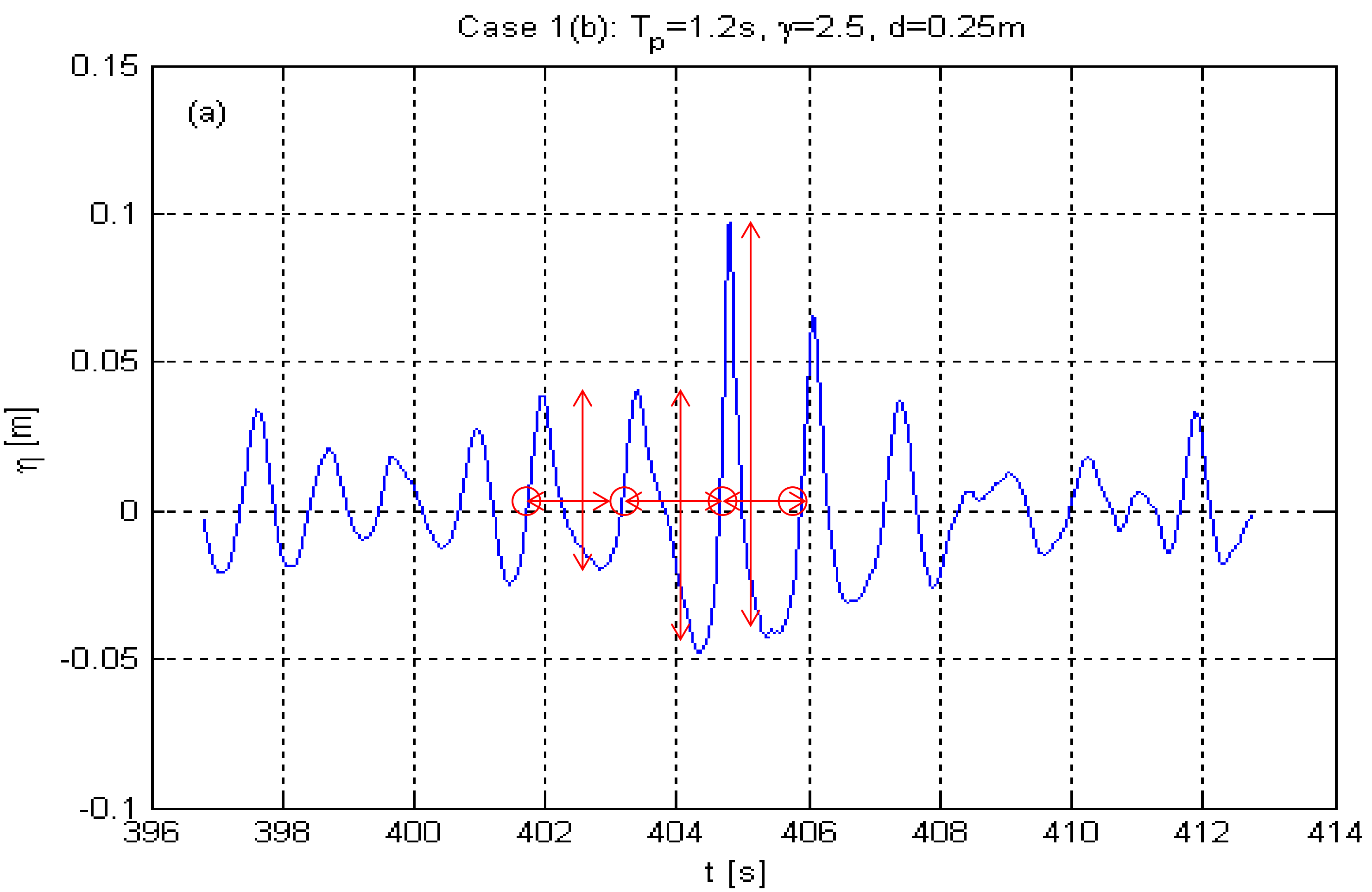
Freak wave Draupner



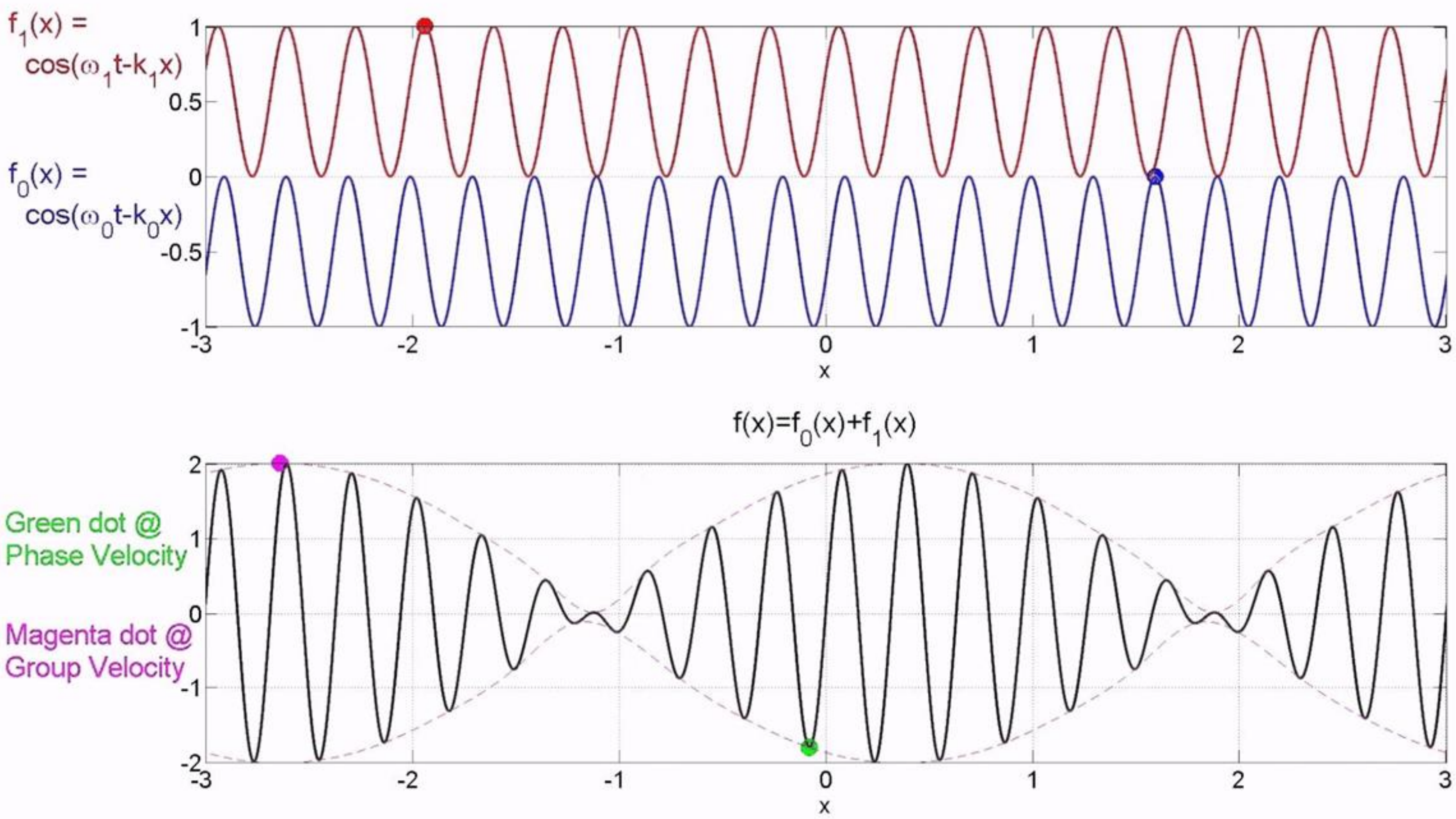
Περιγραφή κυματικού ύψους χρησιμοποιώντας πιθανότητες



Μέθοδος Zero up-crossing



Χαρ/κά Μεγέθη Πραγματικών Κυματισμών



Χαρ/κά Μεγέθη Πραγματικών Κυματισμών

- Για να βρούμε την συνάρτηση κυματικού ύψους σε irregular seas αρκεί να εξετάσουμε το wave height envelope από $t = 0$ στο $\frac{\pi}{\Delta\omega}$. Από το antinode στο πρώτο node.
- Για να βρούμε την πιθανότητα εμφάνισης (ή καλύτερα υπέρβασης) ενός κυματικού ύψους σε irregular seas που αποτελείται από 2 κυματισμούς ίδιου ύψους H_o, και διαφορά συχνότητας $\Delta\omega$, αρκεί να υπολογίσουμε το wave height envelope από $t = 0$ στο $p\pi/\Delta\omega$.

$$H_p = \frac{1}{p\pi/\Delta\omega} \int_0^{p\pi/\Delta\omega} 2H_o \cos\frac{\Delta\omega}{2} t \, dt = 4\frac{H_o}{p\pi} \sin\frac{p\pi}{2}$$

Χαρ/κά Μεγέθη Πραγματικών Κυματισμών

Επίσης, $H_{rms} = \sqrt{2}H_o$

Μπορούμε να εκφράσουμε το H_p με όρους H_{rms}:

$$H_p = \frac{2\sqrt{2}H_{rms}}{p\pi}\sin\frac{p\pi}{2}$$

Έτσι, $H_{max} = 2H_o = \sqrt{2}H_{rms}$

- Άρα $H_{1/10} = \frac{20\sqrt{2}H_{rms}}{\pi}\sin\frac{\pi}{20} = 1.408H_{rms}$
- $H_s = H_{1/3} = \frac{6\sqrt{2}H_{rms}}{\pi}\sin\frac{\pi}{6} = 1.350H_{rms}$

Χαρ/κά Μεγέθη Πραγματικών Κυματισμών

Μέσο ύψος κύματος ➡ $$\overline{H} = H_{100} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} H_{rms}$$

ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ ΥΨΟΣ ΚΥΜΑΤΟΣ = η μέση τιμή του ανώτερου 33% των υψών κύματος ➡ $$H_s = H_{33} = \sqrt{2}\ H_{rms}$$

$$P(H > H_{33}) = 0{,}135$$

Η μέγιστη πιθανή τιμή H_{max} σε δείγμα Ν τιμών Η:

➡ $$H_{max} = H_{rms} \sqrt{\ln(N)}$$

όπου N= T_L/T_z (αν δεν είναι γνωστό)

T_L η διάρκεια καταγραφής και

T_z η μέση περίοδος κύματος.

Variance of surface elevation $\sigma_\eta^2 = \int \eta^2 dt$

Significant wave height, $H_s = 4\sqrt{\sigma_\eta^2}$

Root-mean-square wave height, $H_{rms} = H_s/\sqrt{2}$

Για γραμμικούς κυματισμούς

- Wave period - based on zero up-crossings
- Wave height - in each given period

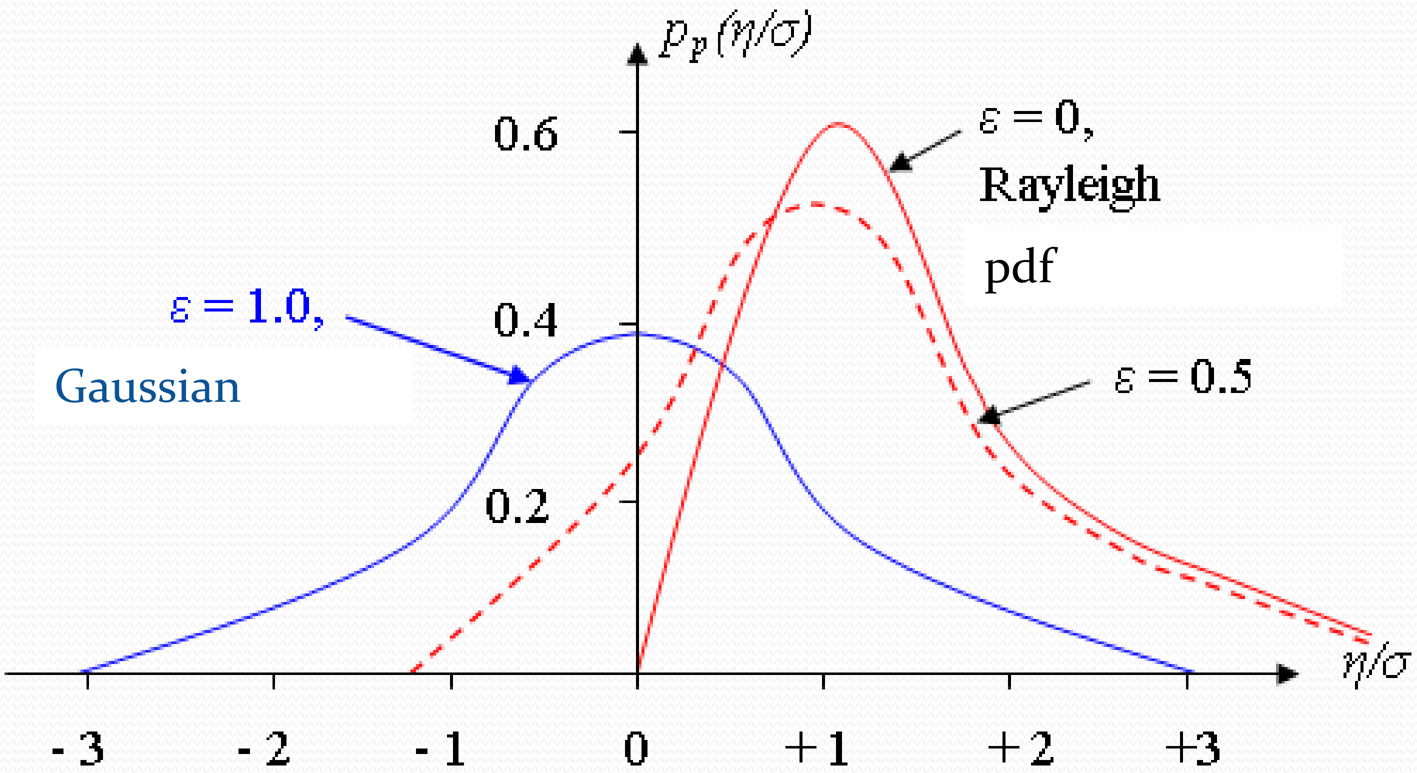
- But other methods are applied - be careful.

- If $P_p(\eta)$ and $p_p(\eta)$ are the cdf and pdf of the wave crests, then:

A. In a broad-banded sea state (ε →1.0)
   - equal probability that a wave crest occurs above and below SWL.

B. In a narrow-banded sea state (ε → 0).
   - crests occur above SWL.
   - troughs occur below SWL

case B is more realistic


$p_p(\eta/\sigma)$
0.6
0.4
0.2
$\varepsilon = 0,$
Rayleigh
pdf
$\varepsilon = 1.0,$
Gaussian
$\varepsilon = 0.5$
η/σ
- 3
- 2
- 1
0
+1
+2
+3

Στο σχεδιασμό χρησιμοποιούμε την κατανομή ***Rayleigh*** ώόπου η πιθανότητα η κορυφή να είναι πάνω από ένα όριο $\eta = \alpha$ δίνεται από:

- cdf: $P_p(\eta = \alpha) = 1 - \exp\left(-\alpha^2 / 2\sigma_\eta^2\right) \qquad \alpha \geq 0$
- pdf: $p_p(\eta = \alpha) = \dfrac{\alpha}{\sigma_\eta^2} \exp\left(-\alpha^2 / 2\sigma_\eta^2\right)$

Θεωρώντας

i. Στενό φάσμα συχνοτήτων

ii. Γραμμικούς κυματισμούς $\rightarrow H = 2a$

Και άρα: $P(H) = P_p(\eta = \alpha) = 1 - \exp[-(H/2)^2 / 2\sigma_\eta^2]$

$$P(H) = 1 - \exp[\frac{-H^2}{8\sigma_\eta^2}]$$

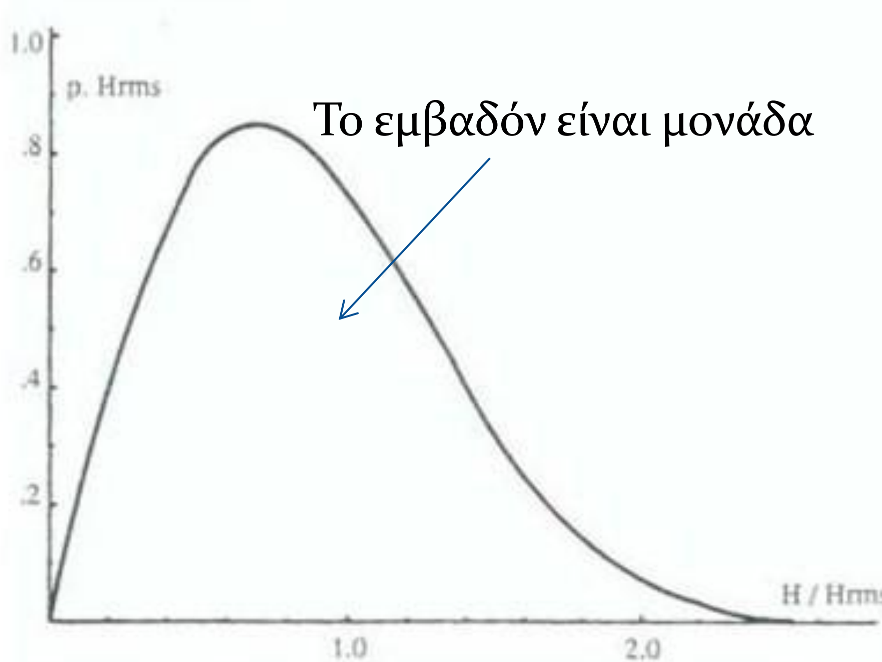
και $$p(H) = \frac{H}{2\sigma_\eta^2} \exp\left[-\frac{H^2}{8\sigma_\eta^2}\right]$$

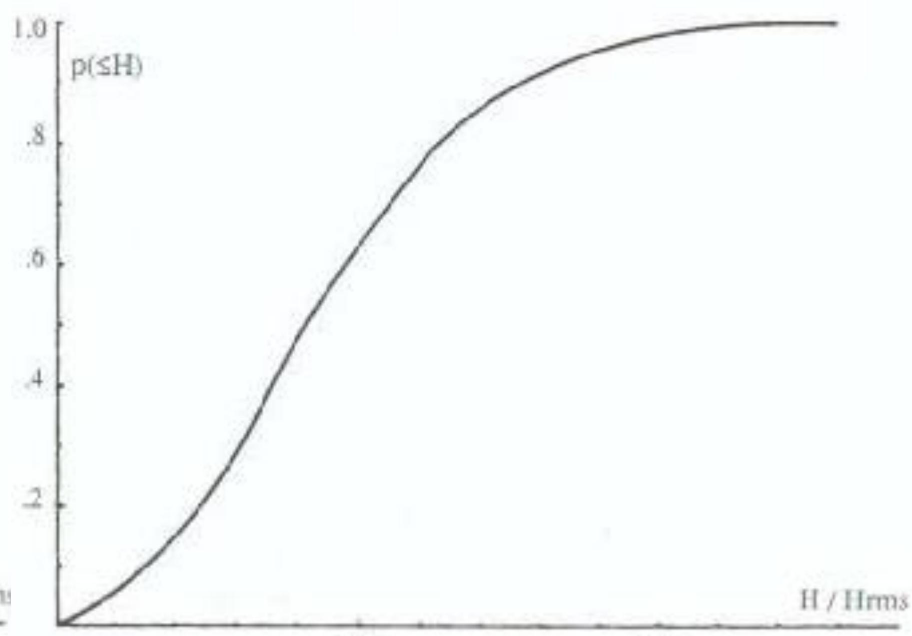
ΚΑΤΑΝΟΜΗ Rayleigh

Η πιθανότητα υπέρβασης μιας τιμής Η

$$P\left(H_i \geq H\right) = e^{-\left(\frac{H}{H_{rms}}\right)^2} = \frac{n}{N}$$

$$H_{rms} = \sqrt{\frac{\Sigma H_i^{\,2}}{N}}$$ η μέση τετραγωνική τιμή ύψους κύματος

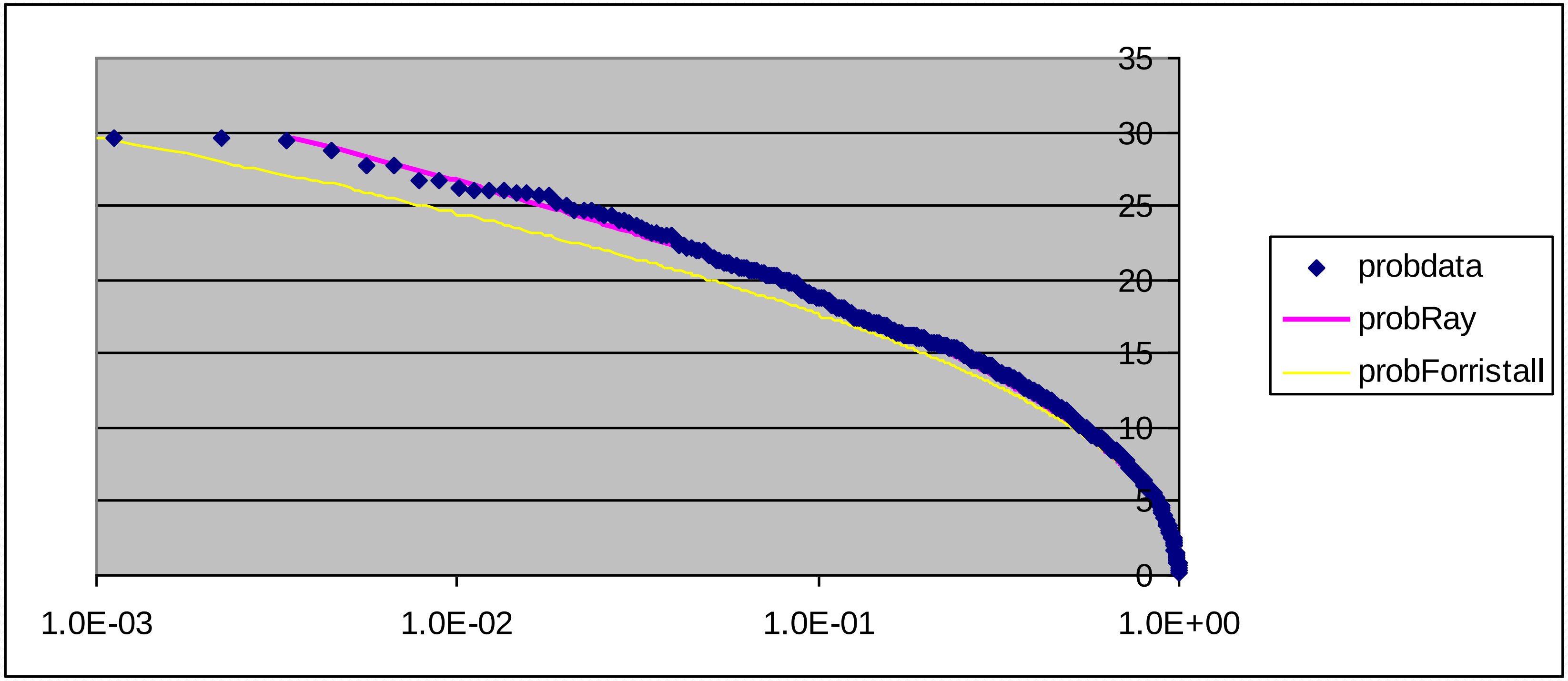




Wave height distributions

- Sort
  - Wave heights
  - Crest elevations

ascending



Στατιστικά ύψους κυματισμών σε 3 διαφορετικά βάθη *Κλίση Πυθμένα=1/100*

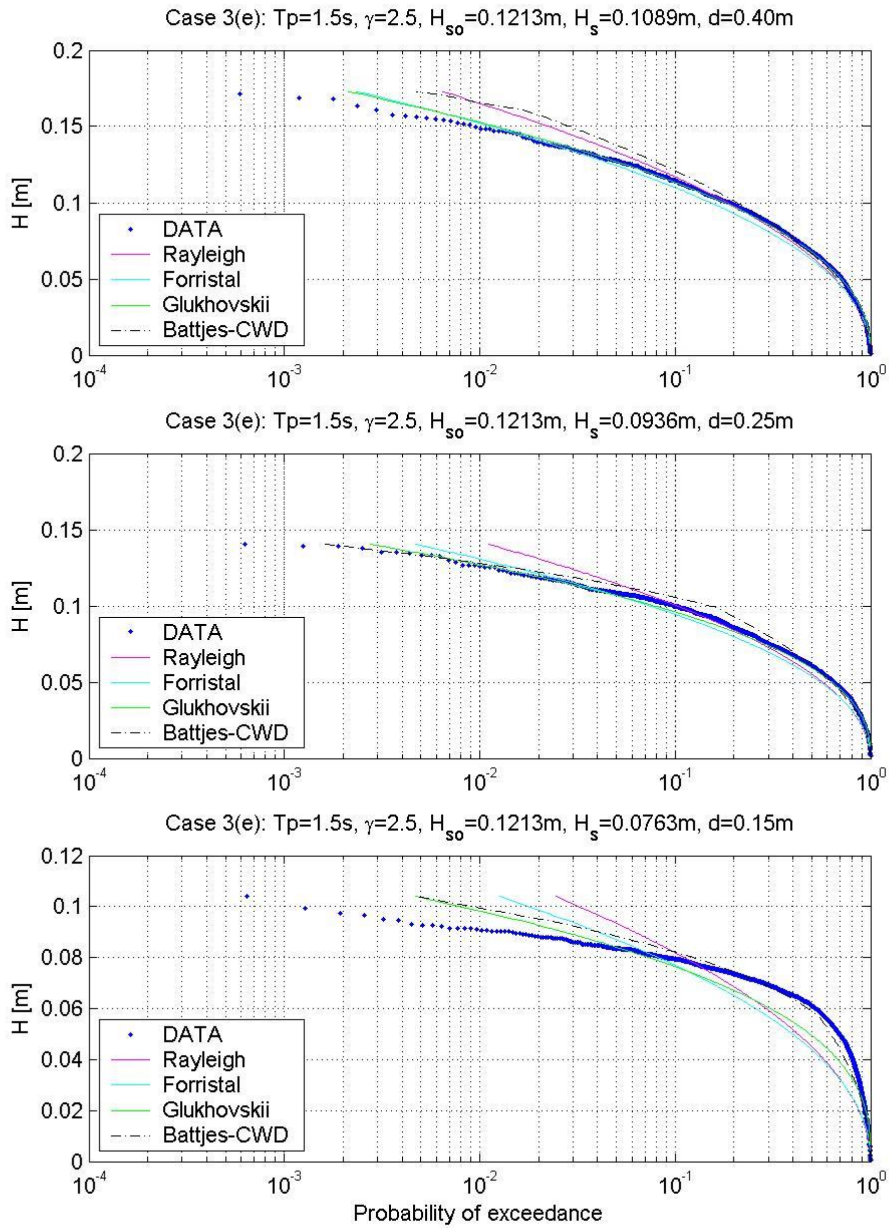
Μη γραμμικοί κυματισμοί ακολουθούν γενικά ειδικές περιπτώσεις της κατανομής Weibull

$$P_{cdf}=\exp\left[a\left(\frac{H}{H_S}\right)^{\beta}\right]$$

όπου α και β παίρνουν διάφορες ΕΜΠΕΙΡΙΚΕΣ τιμές ανάλογα με το βάθος, την κλιση πυθμένα, την θραύση κλπ.

π.χ. Κατανομή Forristall (1978)

$$P_{cdf}=\exp\left[-2.263\left(\frac{H}{H_s}\right)^{2.126}\right]$$



ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΑ ΦΑΣΜΑΤΑ-1.
Φάσμα Pierson Moskowitz (PM)

Η διάρκεια πνοής του ανέμου και το μήκος αναπτύγματος είναι απεριόριστα

(i) ***Pierson-Moskowitz*** (fully-developed seas)

$$G_{\eta\eta}(\omega) = \frac{\alpha g^2}{\omega^5} \exp\left(\frac{-\beta \omega_o^4}{\omega^4} \right)$$

$\alpha = 0.0081$

$\beta = 0.74$

$\omega_o = 9/U$

U_{10} or $U\left(z =^{+} 10m\right)$

where U characteristic wind speed

ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΑ ΦΑΣΜΑΤΑ-2.Φάσμα JONSWAP

Μετρήσεις στη Β. Θάλασσα
ανάπτυξη κυματισμών με περιορισμό μήκους

(ii) *JONSWAP* (fetch-limited seas)

$$G_{\eta\eta}(\omega) = \frac{\alpha g^2}{\omega^5} \exp\left(\frac{-\beta \omega_m^4}{\omega^4} \right) \gamma^{\exp\left[\frac{-(\omega-\omega_m)^2}{2\omega_m^2 \sigma^2} \right]}$$

$\beta = 1.25$

$\sigma = 0.07 \quad \omega \le \omega_m$

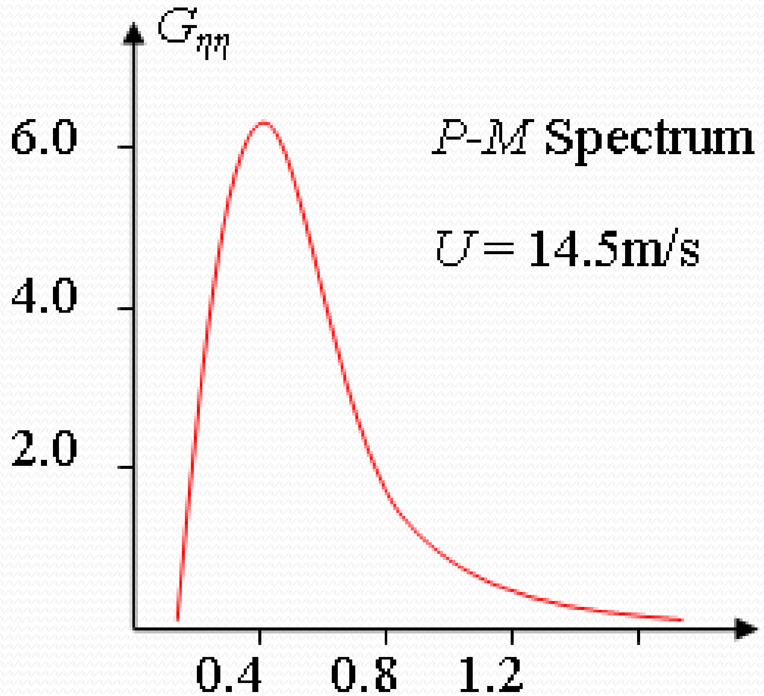
$\sigma = 0.09 \quad \omega > \omega_m$

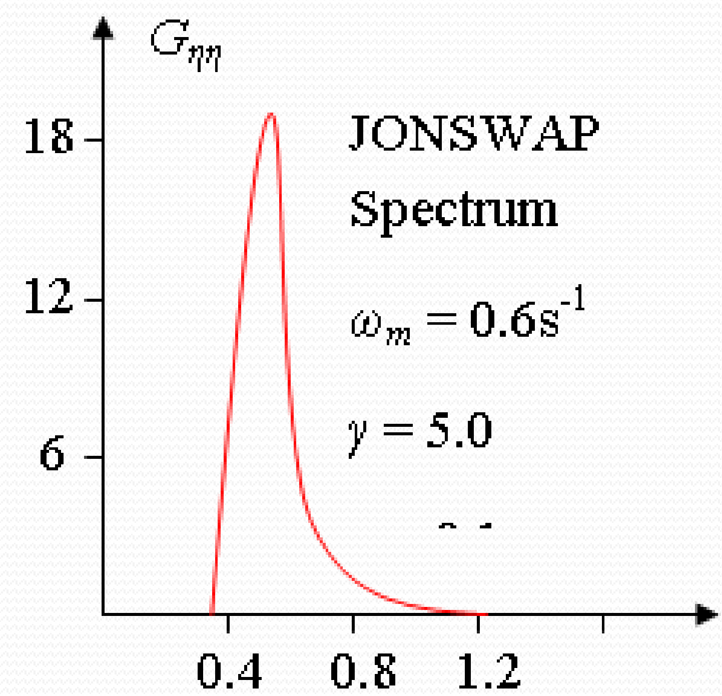
γ = peak enhancement factor

ω_m = frequency of spectral peak

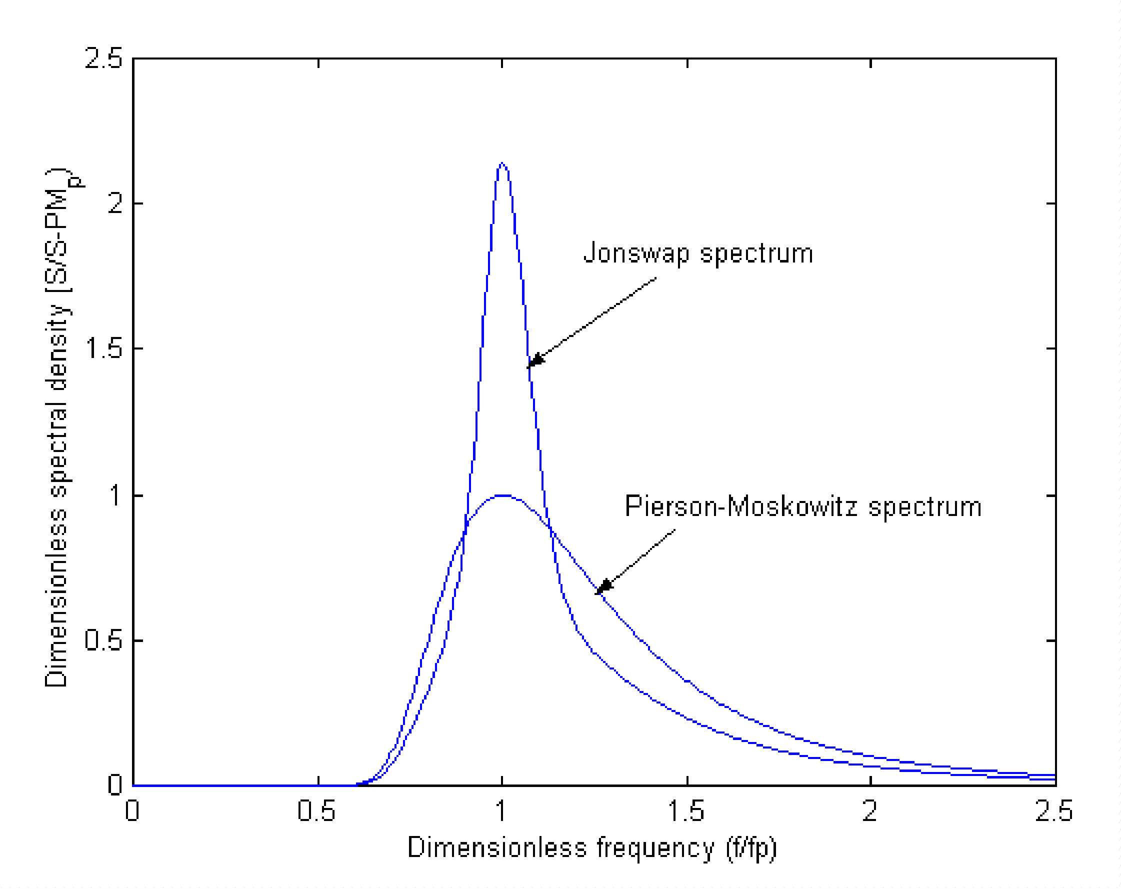
$\left.\begin{array}{l}\gamma \\ \omega_m\end{array}\right\}$ dependent upon wind speed and fetch

Ενεργειακά Φάσματα

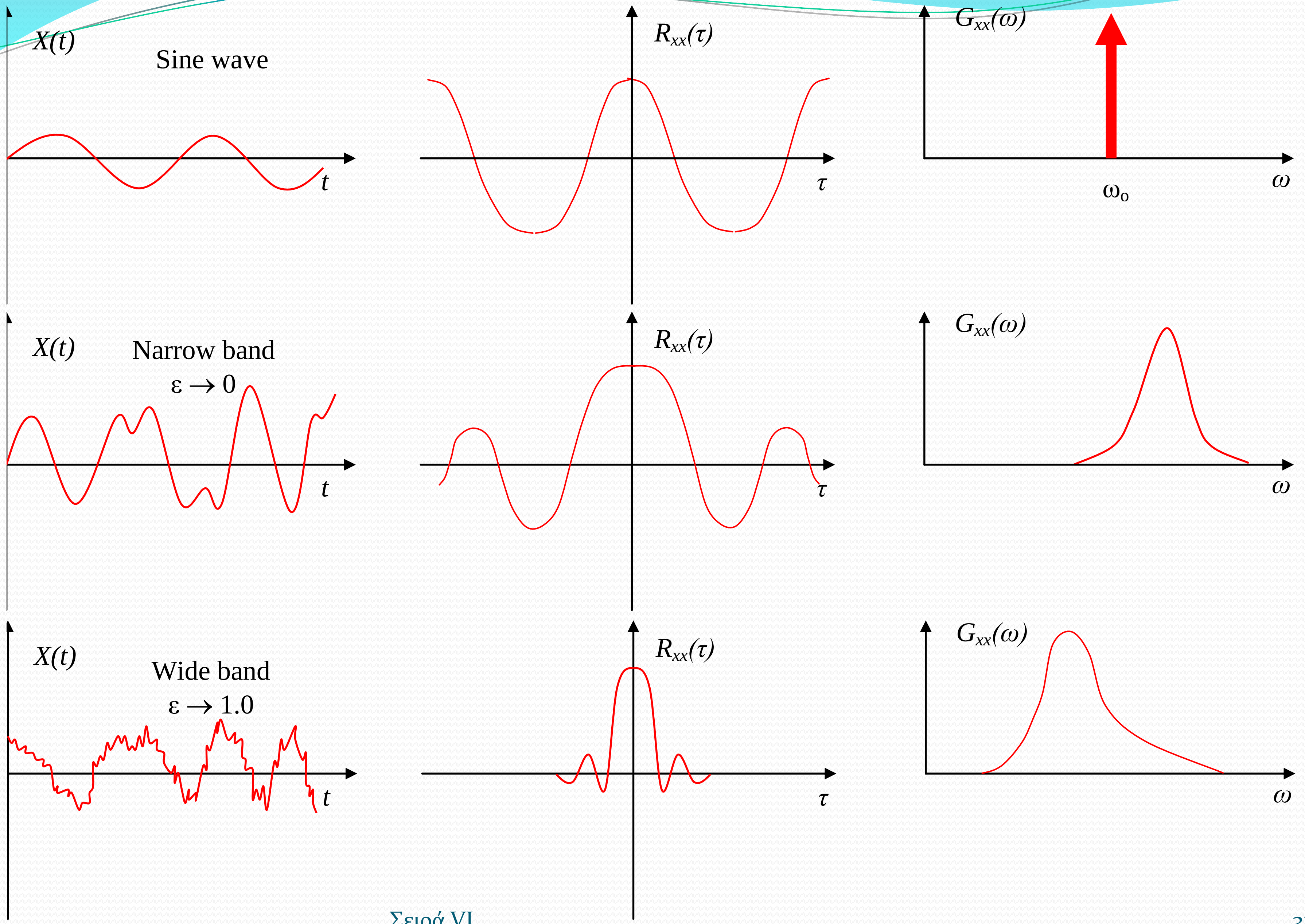




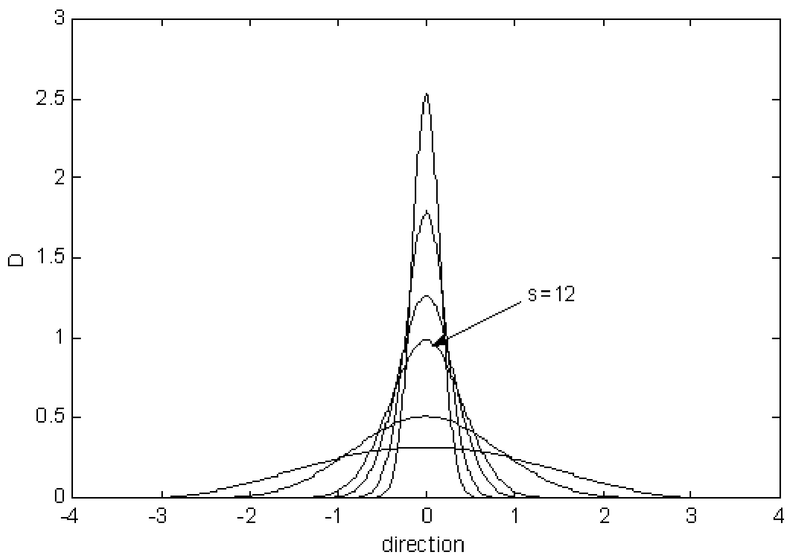
Jonswap vs. P.M.



Wide and Narrow-Banded Processes

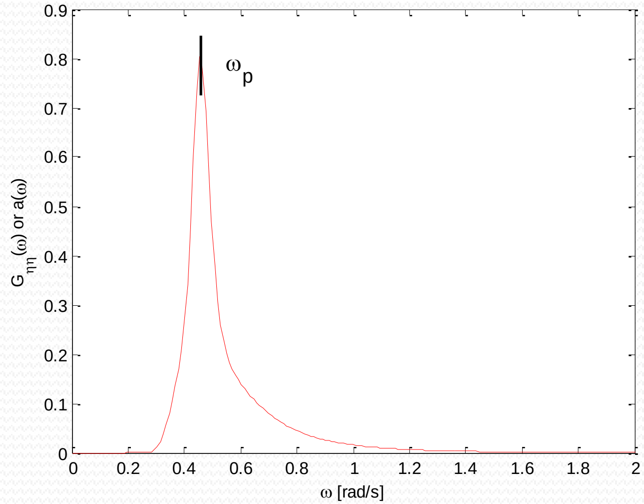


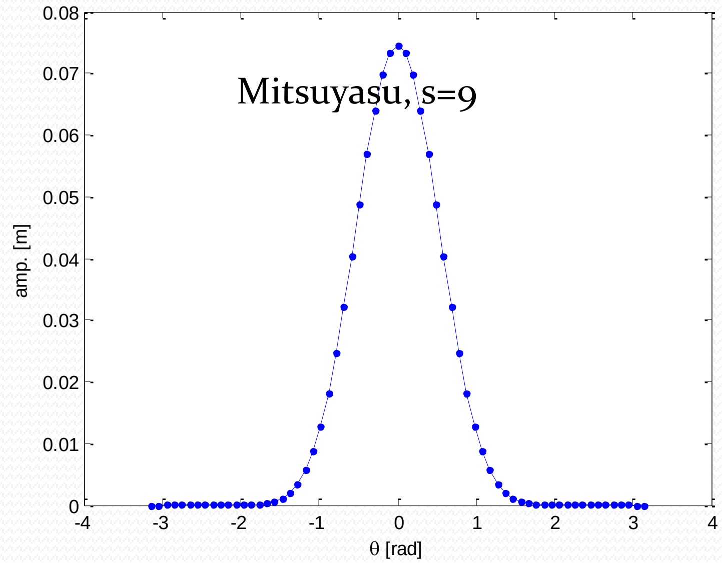
Κατευθυντικοί Κυματισμοί (3D)

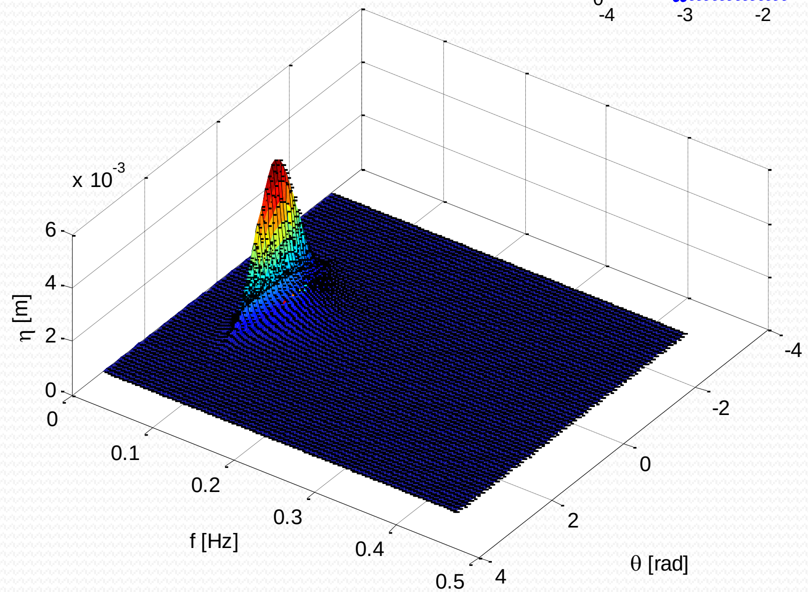


- Κατανομή Mitsuyasu (1975) παράμετρος κατευθυντικότητας s.
- $\cos^{2s}(\theta)$
- s→ο μεγάλη κατευθυντικότητα
- s→∞ χωρίς κατευθυντικότητα
- Αντιστοιχεί σε σ_θ =28° κανονικής κατανομής.

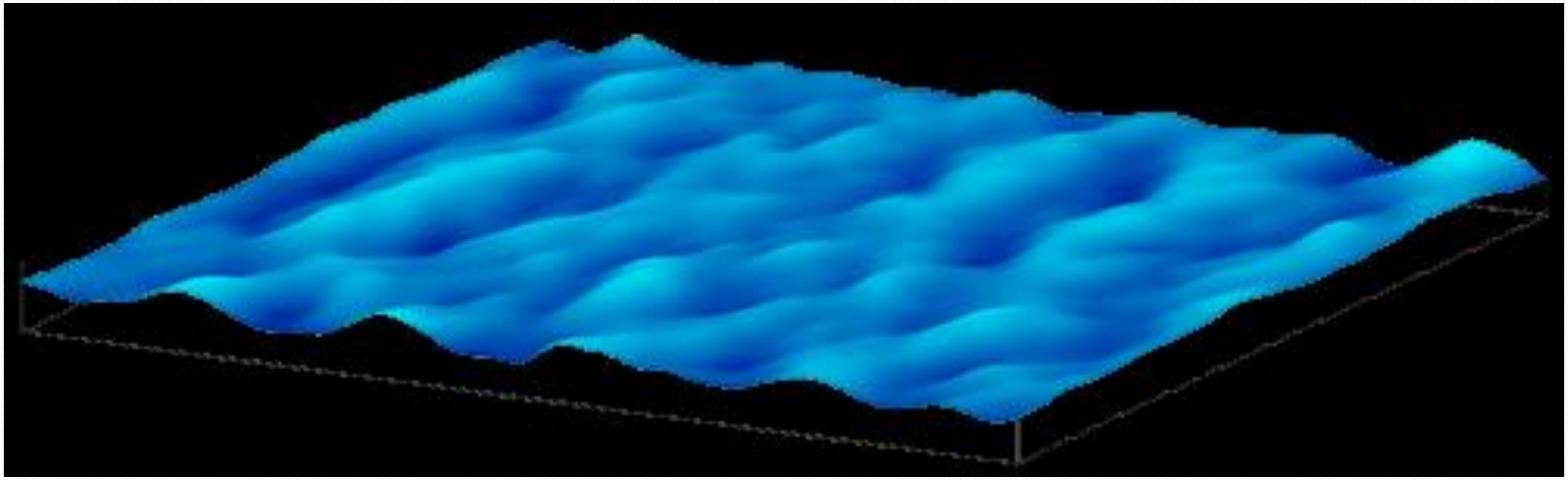
Κατευθυντικοί Κυματισμοί (3D)





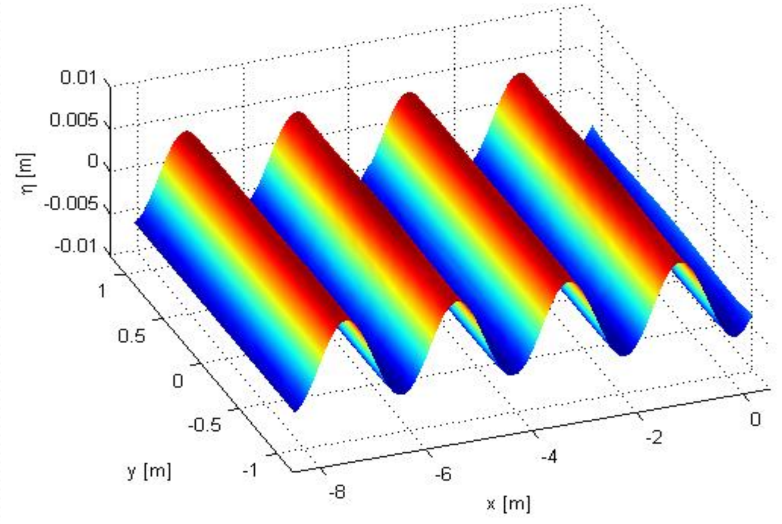


Κατευθυντικοί Κυματισμοί (3D)

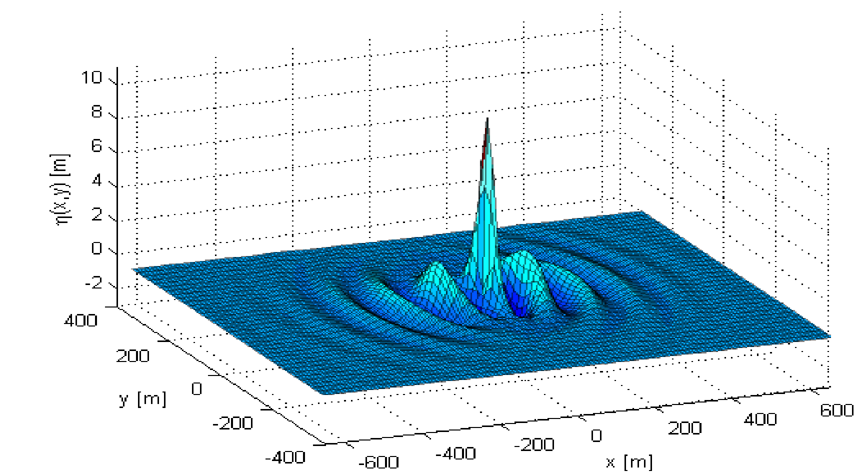


Κατευθυντικοί κυματισμοί

- Μονοκατευθυντικοί κυματισμοί: Μακροκόρυφοι κυματισμοί



- Πολυκατευθυντικοί κυματισμοί: Βραχυκόρυφοι κυματισμοί



8. Coastal 4.0 (39-56).doc

https://www.youtube.com/watch?v=oGpW3OdhOus