ΚΥΜΑΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ & ΕΡΓΑ ΑΝΟΙΚΤΗΣ ΘΑΛΑΣΣΑΣ

Σειρά IV:

Μη Γραμμικές Θεωρίες Κυματισμών

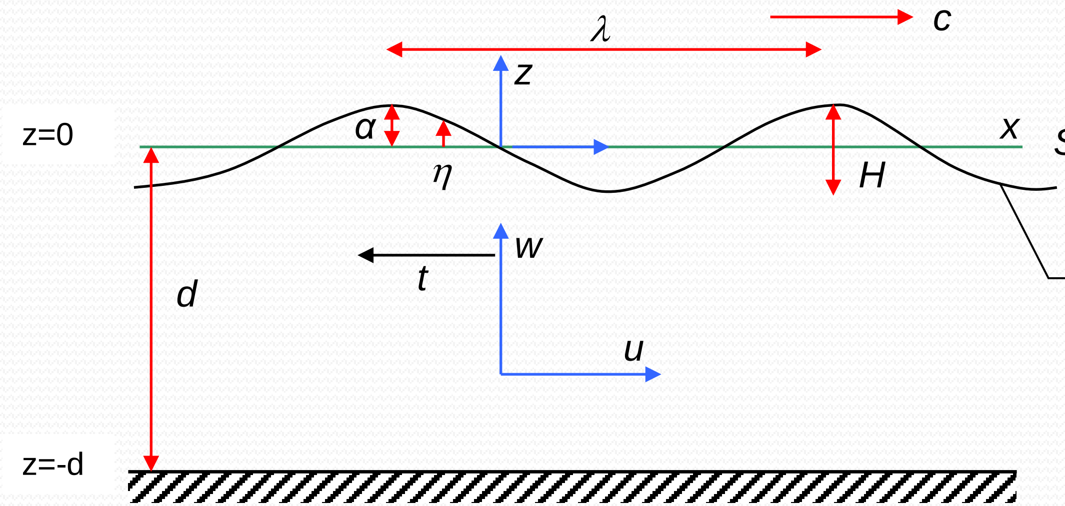
Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας - Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών
Δρ. Βασιλική Κατσαρδή

Περιεχόμενα

1. Κυματική Θεωρία Stokes 2ης τάξης
2. Κυματική Θεωρία Stokes 5ης τάξης
3. Κυματική Θεωρία Συνάρτησης ροής (Fourier 18ης τάξης)
4. Cnoidal waves
5. Θεωρία μοναχικού κύματος (Solitary wave)
6. Επιλογή κυματικής θεωρίας

Θεωρία Airy – ή Stokes 1ης τάξης
Γραμμικοί & Κανονικοί Κυματισμοί

Ταχύτητα μετάδοσης
phase velocity
wave celerity



Ελεύθερη
επιφάνεια η(x,t)

$$\boxed{\eta = a\cos(kx - \omega t)}$$

Wave Frequency, $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$; Wave Number $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

$$\boxed{\omega^2 = gk\tanh(kd)}$$

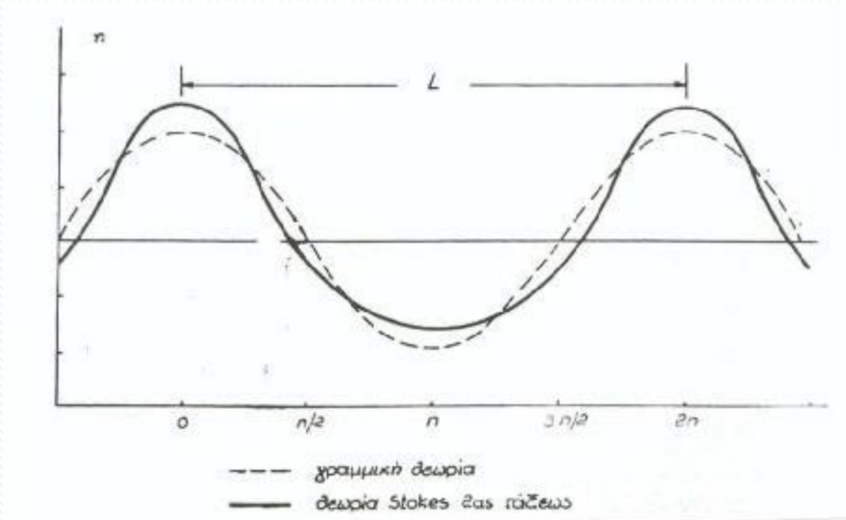
$k =$ αριθμός κύματος $\lambda =$ μήκος κύματος,

$$\boxed{\begin{aligned} u &= \frac{a\omega\cosh k(y+d)}{\sinh(kd)}\sin(\omega t - kx) \\ v &= \frac{a\omega\sinh k(y+d)}{\sinh(kd)}\cos(\omega t - kx) \end{aligned}}$$

Μη γραμμικότητα, Κανονικοί Κυματισμοί

- Όσο πιο «μεγάλο» ένα κύμα τόσο πιο σημαντική γίνεται η μη γραμμικότητα
- GG Stokes, θεωρία έως $5^{η}$ τάξη μη γραμμικότητας
- $2^{η}$ τάξη θα έχει τη μορφή:

$$\eta = \frac{H}{2}\cos(kx-\omega t)+\frac{H^2 k}{16}\frac{\cosh(kd)}{\sinh^3(kd)}\left(2+\cosh(2kd)\right)\cos 2(kx-\omega t)$$



$$u = \frac{H}{2} g \frac{k}{\omega}\frac{\cosh k(d+y)}{\cosh(kd)}\cos(kx-\omega t) + \frac{3}{16}H^2\omega k\frac{\cosh 2k(d+y)}{\sinh^4(kd)}\cos 2(kx-\omega t)$$

$$w = \frac{H}{2} g \frac{k}{\omega}\frac{\sinh k(d+y)}{\sinh(kd)}\sin(kx-\omega t) + \frac{3}{16}H^2\omega k\frac{\sinh k(d+y)}{\sinh^4(kd)}\sin 2(kx-\omega t)$$

Εξίσωση διασποράς - Αμετάβλητη

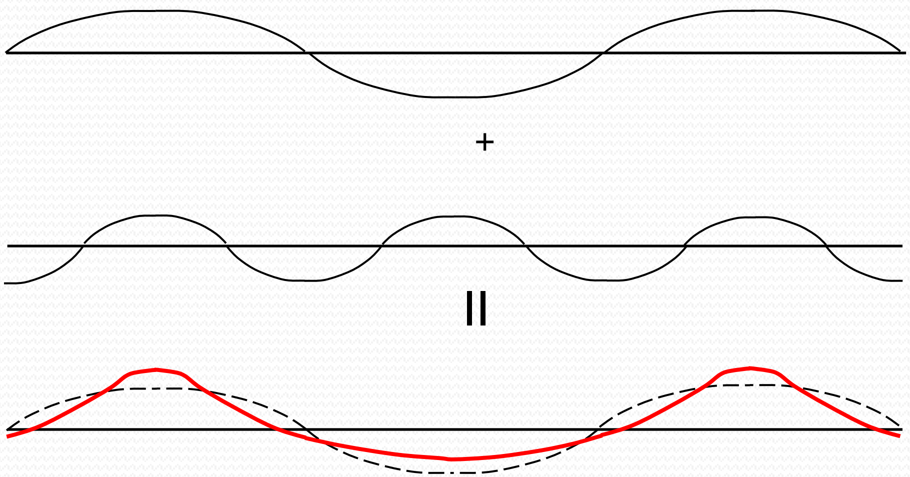
$$\omega^2 = gk\tanh(kd)$$

Ανοιχτές τροχιές σωματιδίων

Μη γραμμικότητα, Κανονικοί Κυματισμοί

- GG Stokes, θεωρία έως 5^{η} τάξη μη γραμμικότητας
- 2^{η} τάξη θα έχει τη μορφή:

$$\eta = \frac{H}{2}\cos(kx - \omega t) + \frac{H^2 k}{16}\frac{\cosh(kd)}{\sinh^3(kd)}\left(2 + \cosh(2kd)\right)\cos 2(kx - \omega t)$$



1st ή κύρια αρμονική. Περιγράφει *ελευθερους κυματισμούς*

$$c = \omega / k$$

2nd αρμονική. Περιγράφει *δεσμευμένους κυματισμούς* στους ελεύθερους κυματισμούς

$$c = 2\omega / 2k = \omega / k$$

Typical *η(t)*

Εξηγεί:

- Ασυμμετρία κυματοκορυφής –κοιλίας
- Μεταβολή της μέσης στάθμης νερού

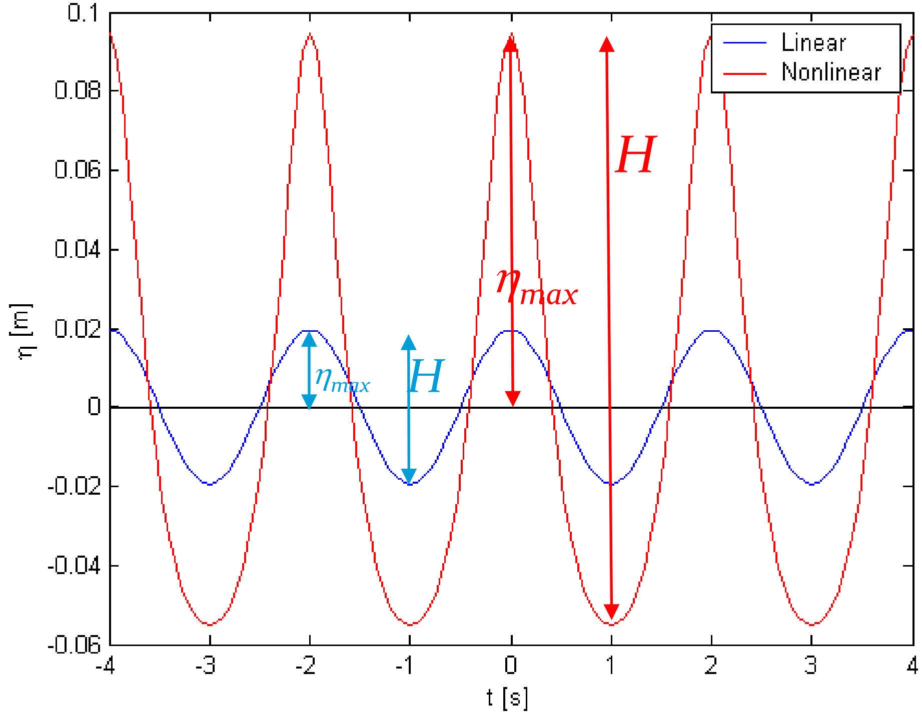
Μη γραμμικότητα, Κανονικοί Κυματισμοί

(a) Μία συχνότητα, μικρό εύρος α

$$\eta_{max} = H/2$$

(b) Μία Συχνότητα, μεγάλο εύρος α

$$\eta_{max} > H/2$$



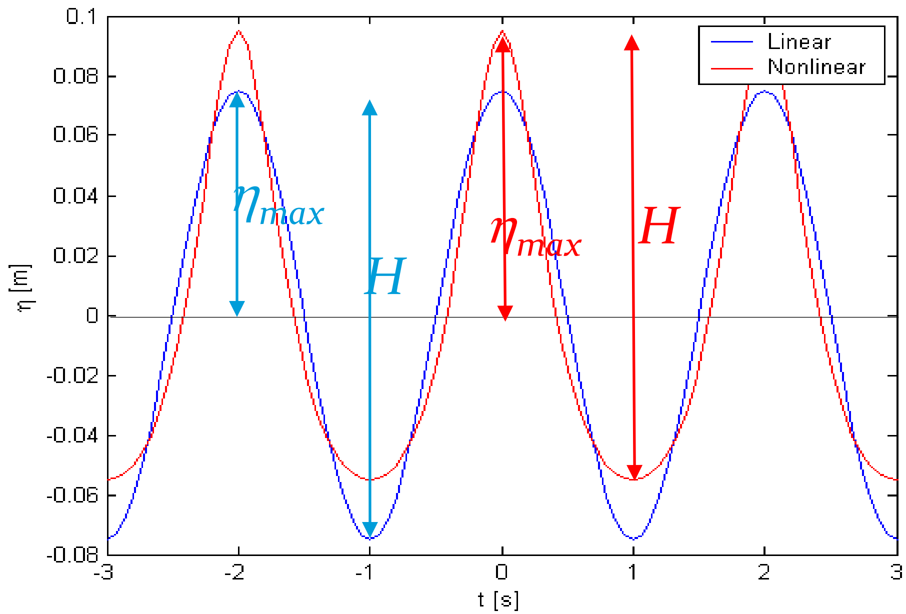
Μη γραμμικότητα, Κανονικοί Κυματισμοί

(a) Μία συχνότητα, μεγάλο εύρος α, γραμμική λύση

$$\eta_{max} = H/2$$

(b) Μία συχνότητα, μεγάλο εύρος α, μη-γραμμική λύση

$$\eta_{max} > H/2$$



Μη γραμμικότητα, Κανονικοί Κυματισμοί

Δυστυχώς, όσο πιο «μεγάλοι» κυματισμοί τόσους περισσότερους όρους πρέπει να χρησιμοποιούμε:

1. Αναλυτικές λύσεις, μέχρι 5ης τάξης. Fenton (1985) επέκταση της λύσης Stokes έως 5η τάξη:

$$k\eta(x) = kd + \varepsilon\cos(kx) + \varepsilon^2 B_{22}\cos(2kx) + \varepsilon^3 B_{31}[\cos(kx) - \cos(3kx)]$$

$$+\varepsilon^4[B_{42}\cos(2kx) + B_{44}\cos(4kx)]$$

$$+\varepsilon^5[-(B_{53} + B_{55})\cos(kx) + B_{53}\cos(3kx) + B_{55}\cos(5kx)]$$

Μη γραμμικότητα, Κανονικοί Κυματισμοί – Stokes 5th

$$\phi(x,y) = -cx + c_o\left(\frac{g}{k^3}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^{5} \varepsilon^i \sum_{j=1}^{i} A_{ij} \cosh(jky)\sin(jkx)$$

Ανοιχτές τροχιές σωματιδίων

$$c\left(\frac{k}{g}\right)^{\frac{1}{2}} = c_o + \varepsilon^2 c_2 + \varepsilon^4 c_4 + \dots\dots\dots$$

Εξίσωση διασποράς - μεταβλητή

$$Q\left(\frac{k^3}{g}\right)^{\frac{1}{2}} = c_o kd + \varepsilon^2(c_2 kd + D_2) + \varepsilon^4(c_4 kd + D_4) + \dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{Rk}{g} = \frac{1}{2}c_o^2 + kd + \varepsilon^2 E_2 + \varepsilon^4 E_4 + \dots\dots\dots$$

Note: y - measured from bed upwards

ϵ - $H/2\, k$

d - mean water level

Q - Volume flux, R - Bernoulli's constant.

Μη γραμμικότητα, Κανονικοί Κυματισμοί – Stokes 5th

TABLE 1.—Formulas for Coefficients in Fifth-Order Solution, Eqs. 12–16[a]

$$A_{11} = 1/\sinh kd$$

$$A_{22} = 3S^2/[2(1-S)^2]$$

$$A_{31} = (-4 - 20S + 10S^2 - 13S^3)/[8 \sinh kd\,(1-S)^3]$$

$$A_{33} = (-2S^2 + 11S^3)/[8 \sinh kd\,(1-S)^3]$$

$$A_{42} = (12S - 14S^2 - 264S^3 - 45S^4 - 13S^5)/[24(1-S)^5]$$

$$A_{44} = (10S^3 - 174S^4 + 291S^5 + 278S^6)/[48(3+2S)(1-S)^5]$$

$$A_{51} = (-1{,}184 + 32S + 13{,}232S^2 + 21{,}712S^3 + 20{,}940S^4 + 12{,}554S^5 - 500S^6 - 3{,}341S^7 - 670S^8)/[64 \sinh kd\,(3+2S)(4+S)(1-S)^6]$$

$$A_{53} = (4S + 105S^2 + 198S^3 - 1{,}376S^4 - 1{,}302S^5 - 117S^6 + 58S^7)/[32 \sinh kd\,(3+2S)(1-S)^6]$$

$$A_{55} = (-6S^3 + 272S^4 - 1{,}552S^5 + 852S^6 + 2{,}029S^7 + 430S^8)/[6 \sinh kd\,(3+2S)(4+S)(1-S)^6]$$

$$B_{22} = \coth kd\,(1+2S)/[2(1-S)]$$

$$B_{31} = -3(1 + 3S + 3S^2 + 2S^3)/[8(1-S)^3]$$

$$B_{42} = \coth kd\,(6 - 26S - 182S^2 - 204S^3 - 25S^4 + 26S^5)/[6(3+2S)(1-S)^4]$$

$$B_{44} = \coth kd\,(24 + 92S + 122S^2 + 66S^3 + 67S^4 + 34S^5)/[24(3+2S)(1-S)^4]$$

$$B_{53} = 9(132 + 17S - 2{,}216S^2 - 5{,}897S^3 - 6{,}292S^4 - 2{,}687S^5 + 194S^6 + 467S^7 + 82S^8)/[128(3+2S)(4+S)(1-S)^6]$$

$$B_{55} = 5(300 + 1{,}579S + 3{,}176S^2 + 2{,}949S^3 + 1{,}188S^4 + 675S^5 + 1{,}326S^6 + 827S^7 + 130S^8/[384(3+2S)(4+S)(1-S)^6]$$

$$C_0 = (\tanh kd)^{1/2}$$

$$C_2 = (\tanh kd)^{1/2}\,(2 + 7S^2)/[4(1-S)^2]$$

$$C_4 = (\tanh kd)^{1/2}\,(4 + 32S - 116S^2 - 400S^3 - 71S^4 + 146S^5)/[32(1-S)^5]$$

$$D_2 = -(\coth kd)^{1/2}/2$$

$$D_4 = (\coth kd)^{1/2}\,(2 + 4S + S^2 + 2S^3)/[8(1-S)^3]$$

$$E_2 = \tanh kd\,(2 + 2S + 5S^2)/[4(1-S)^2]$$

$$E_4 = \tanh kd\,(8 + 12S - 152S^2 - 308S^3 - 42S^4 + 77S^5)/[32(1-S)^5]$$

[a]In terms of hyperbolic functions of kd, including S = sech $2kd$.

Μη γραμμικότητα, Κανονικοί Κυματισμοί – Stokes 5th

TABLE 2.—Values of Coefficients in Special Cases[a]

Coefficient (1)	Deep water, value in limit as $kd \to \infty$ (2)	Shallow water, behavior in limit as $kd \to 0$ (3)	Value for $kd = 0.753982$ (4)
A_{11}	$2e^{-kd}$	$\sim(kd)^{-1}$[b]	1.208490
A_{22}	$6e^{-4kd}$	-4	0.799840
A_{31}	$-e^{-kd}$	-7	-9.105340
A_{33}	$-2e^{-5kd}$	-7	0.368275
A_{42}	e^{-2kd}	-10	-12.196150
A_{44}	$5e^{-6kd}/9$	-10	0.058723
A_{51}	$-37e^{-kd}/12$	-13	108.467921
A_{53}	$e^{-3kd}/6$	-13	-6.941756
A_{55}	$-e^{-7kd}/8$	-13	-0.074979
B_{22}	$1/2$	-3	2.502414
B_{31}	$-3/8$	-6	-5.731666
B_{42}	$1/3$	-9	-32.407508
B_{44}	$1/3$	-9	14.033758
B_{53}	$99/128$	-12	-103.445042
B_{55}	$125/384$	-12	37.200027
C_0	1	$1/2$	0.798448
C_2	$1/2$	$-7/2$	1.940215
C_4	$1/8$	$-19/2$	-12.970403
D_2	$-1/2$	$-1/2$	-0.626215
D_4	$1/4$	$-13/2$	3.257104
E_2	$1/2$	-3	1.781926
E_4	$1/4$	-9	-11.573657

[a]The limiting value in the deep water limit is given, but for shallow water the behavior only is given.

[b]After the first entry, only the exponent of kd is given.

Μη γραμμικότητα, Κανονικοί Κυματισμοί – Stokes 5th

Τυπικό μοτίβο αρμονικών

Note: $\varepsilon = H\!\!\diagup_{\!2}\, k$ ~ εκφράζει την καμπυλότητα.

Όσο μεγαλύτερη η καμπυλότητα, τόσο περισσότερες αρμονικές πρέπει να συμπεριληφθούν.

Phase velocity, uniform current.							**o. order (ϵ^{o})**
$(\omega t - kx)$							**1st. order (ϵ^{1})**
	$2(\omega t - kx)$					+ mean	**2nd order (ϵ^{2})**
$(\omega t - kx)$		$3(\omega t - kx)$					**3rd.order (ϵ^{3})**
	$2(\omega t - kx)$		$4(\omega t - kx)$			+ mean	**4th.order (ϵ^{4})**
$(\omega t - kx)$		$3(\omega t - kx)$		$5(\omega t - kx)$			**5th. order (ϵ^{5})**
	$2(\omega t - kx)$		$4(\omega t - kx)$		$6(\omega t - kx)$	+ mean	**6th. order (ϵ^{6})**

Μη γραμμικότητα, Κανονικοί Κυματισμοί

2. Λύσεις συνάρτησης ροής. Dean (1965), Fourier 18th

$$\psi(x,y)=\left(c-\overline{U}\right)y+\sum_{n=4,6,8}^{N-1}\sinh\left[\frac{(n-2)}{2}k(d+y)\right]\left\{X_n\cos\left(\frac{n-2}{2}\right)kx+X_{n+1}\sin\left(\frac{n-2}{2}\right)kx\right\}$$

Για $y=\eta$

$$\eta=\frac{\psi_\eta}{\left(c-\overline{U}\right)}-\frac{1}{\left(c-\overline{U}\right)}+\sum_{n=4,6,8}^{N-1}\sinh\left[\frac{(n-2)}{2}k(d+y)\right]\left\{X_n\cos\left(\frac{n-2}{2}\right)kx+X_{n+1}\sin\left(\frac{n-2}{2}\right)kx\right\}$$

$\overline{U}$ Μέση ταχύτητα ρεύματος αν υπάρχει

Μη γραμμικότητα, Κανονικοί Κυματισμοί

- Λύσεις συνάρτησης ροής. Dean (1965), Fourier 18th

Εδώ πάλι:

- Η κυρίαρχη εξίσωση Laplace $\nabla^2\psi = 0$ ικανοποιείται πάντα.
- Οι οριακές συνθήκες στον πυθμένα ικανοποιούνται πάντα.
- X_n άγνωστοι προσδιορίζονται με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων που προσαρμόζεται στις οριακές συνθήκες της ελεύθερης επιφάνειας.

Σημείωση:

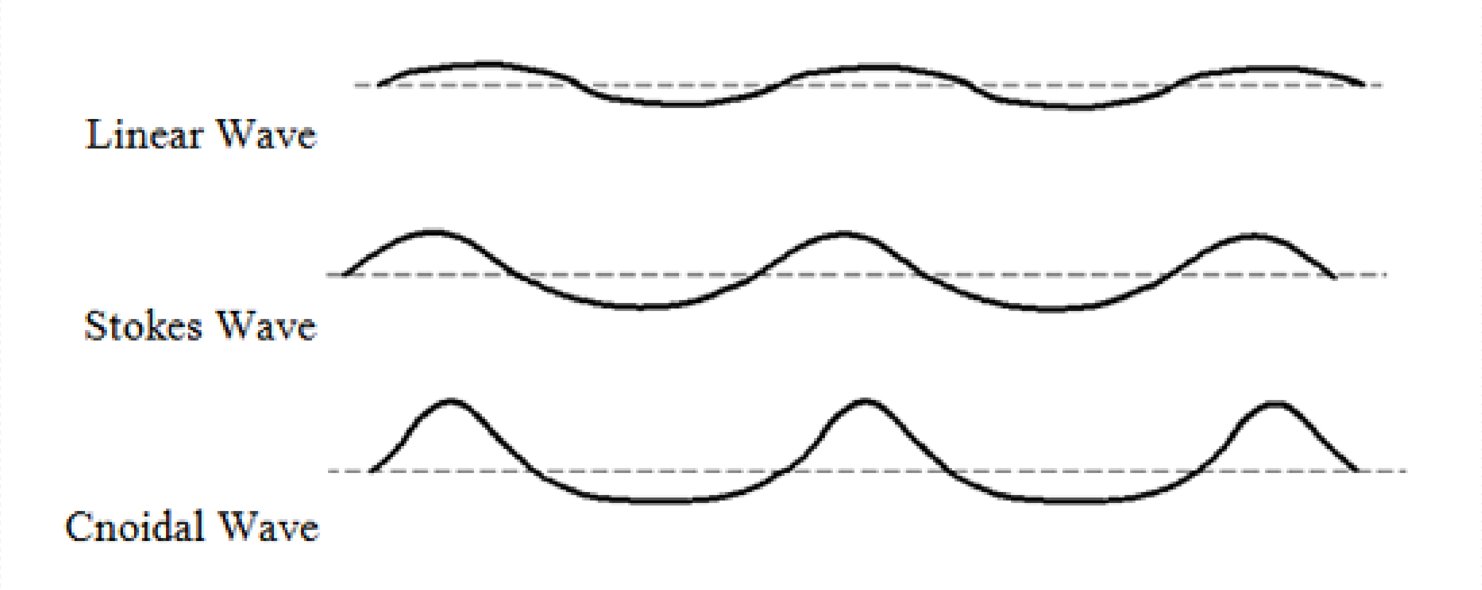
- Το μοντέλο εφαρμόζεται σε ευρύτερο πεδίο βαθών (δες Fig.1 παρακάτω)
- Μπορεί να χρησιμοποιηθεί με δύο τρόπους
  - Με δεδομένα τα H, T και d → $\eta(x)$ και $\psi(x, y)$ και άρα u, v
  - Με δεδομένη χρονοσειρά $\eta(t)$ → $\psi(x, y)$ και άρα u, v

Μη γραμμικότητα, Κανονικοί Κυματισμοί

3. Cnoidal Waves

Για 1/50 < *d/λ* <1/8

μαθηματική επίλυση του προβλήματος κάνοντας χρήση των Ιακωβιανών ελλειπτικών συναρτήσεων συνημιτόνου

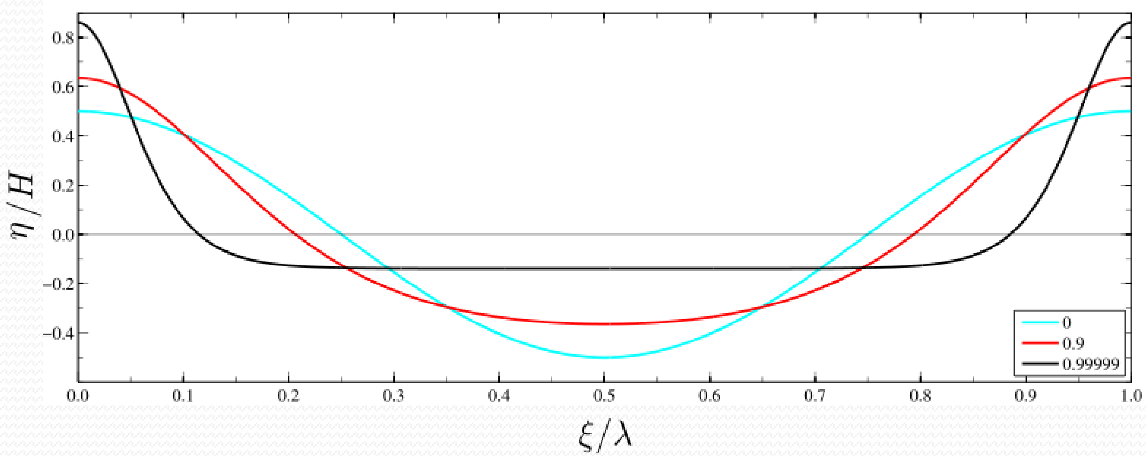


Μη γραμμικότητα, Κανονικοί Κυματισμοί

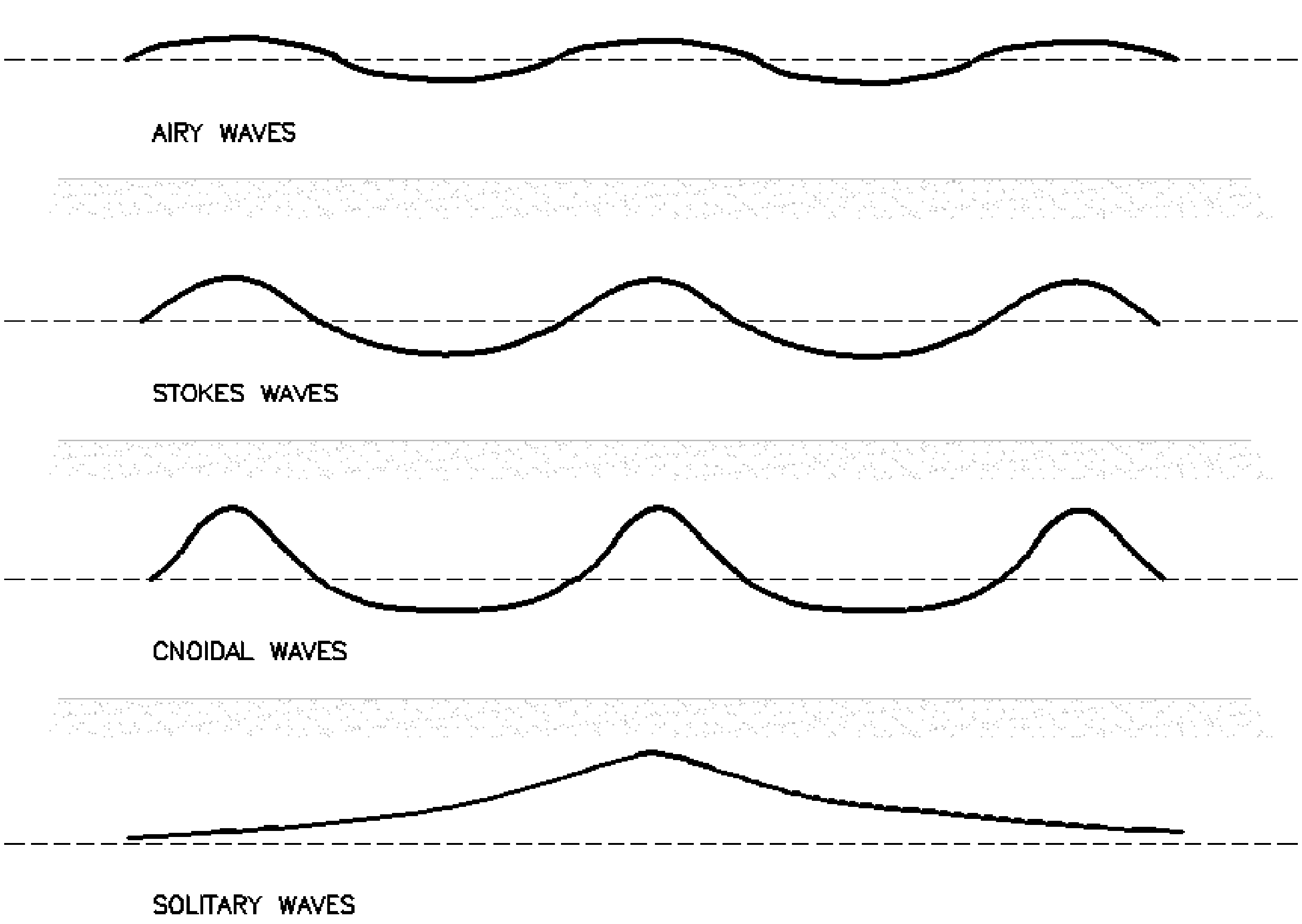
3. Cnoidal Waves

κατακόρυφη απόσταση του πυθμένα από την ελεύθερη επιφάνεια δίνεται

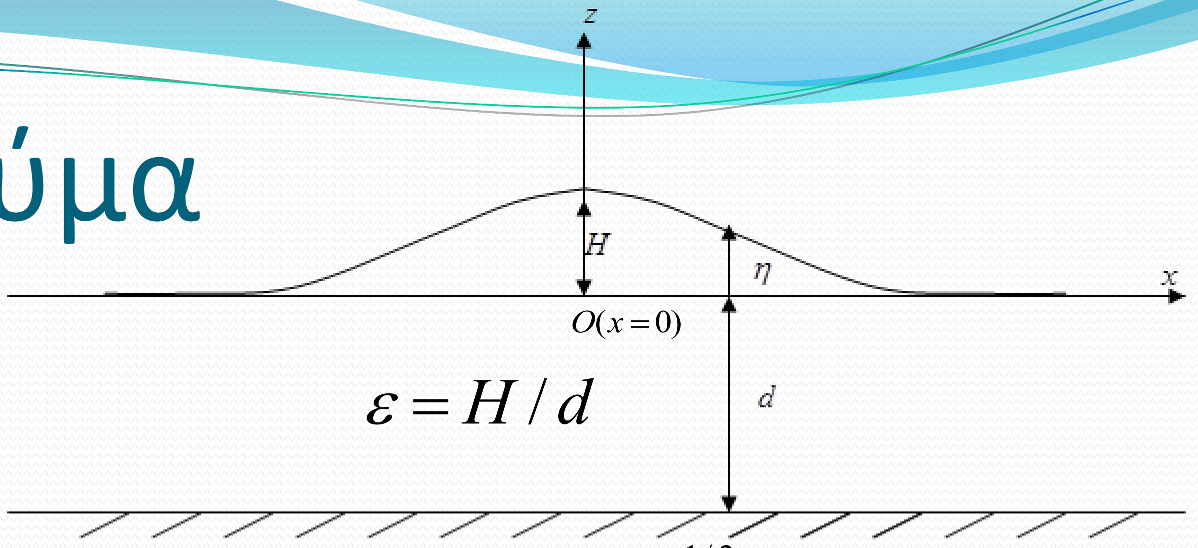
$$y_s = y_t + H\, cn^2\left[2K(k)\left(\frac{x}{L} - \frac{t}{T}\right), k\right]$$



Μοναχικό κύμα



Μοναχικό κύμα



Προσέγγιση Πρώτης Τάξης

$$\varepsilon = H / d$$

Στάθμη νερού η στο σημείο x : $\eta = H.\operatorname{sech}^2 q \qquad q = \frac{(3\varepsilon)^{1/2}}{2d}(x - C.t)$

Ταχύτητα μετάδοσης $C = \sqrt{gd}\left(1+\varepsilon\right)^{1/2} \approx \sqrt{gd}\left(1+0.5\varepsilon\right)$

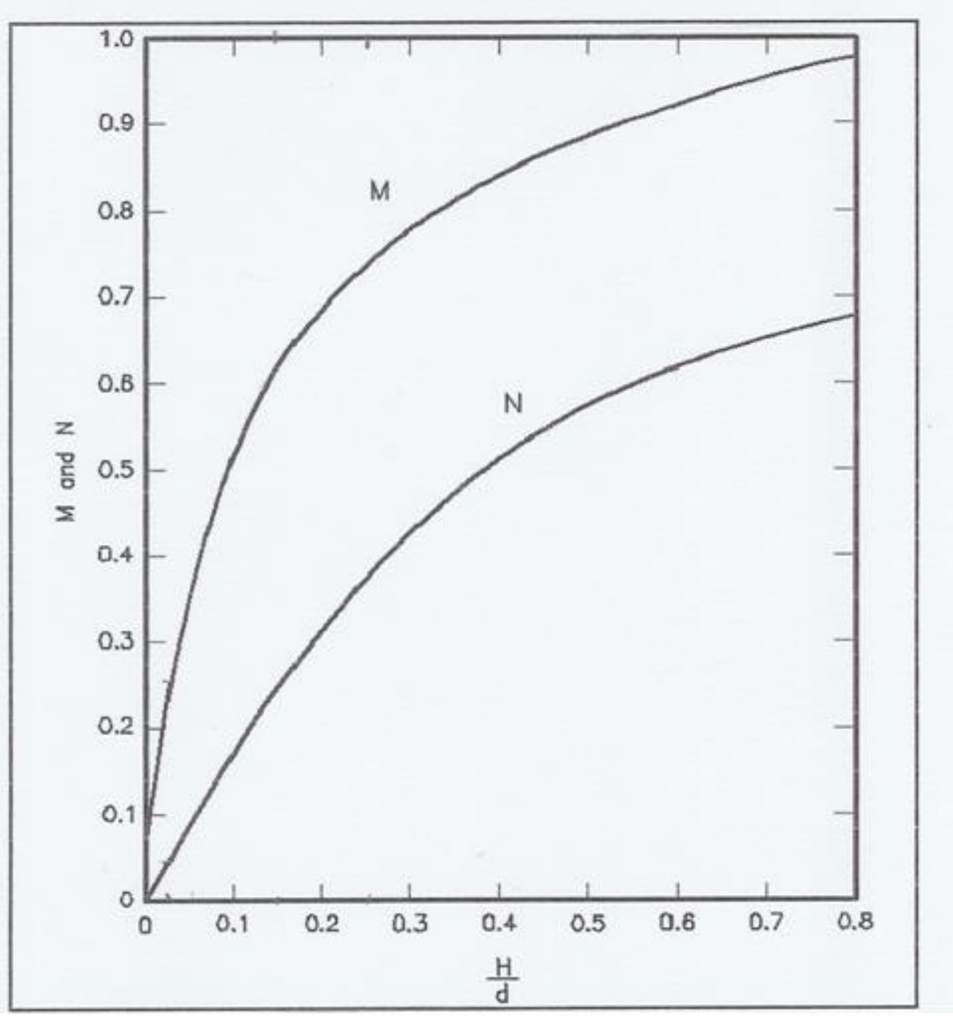
Ταχύτητες u, w στο σημείο (x, z):

$$u = C.N.\frac{1+\cos\left(M\frac{z+d}{d}\right).\cosh\left(M\frac{x}{d}\right)}{\left[\cos\left(M\frac{z+d}{d}\right)+\cosh\left(M\frac{x}{d}\right)\right]^2} \qquad w = C.N.\frac{\sin\left(M\frac{z+d}{d}\right).\sinh\left(M\frac{x}{d}\right)}{\left[\cos\left(M\frac{z+d}{d}\right)+\cosh\left(M\frac{x}{d}\right)\right]^2}$$

Μέγιστη ταχύτητα u_{max}:

$$u_{\max} = \frac{C.N}{1+\cos\left(M\frac{z+d}{d}\right)}$$

Μοναχικό κύμα



Επιλογή Κυματικής Θεωρίας

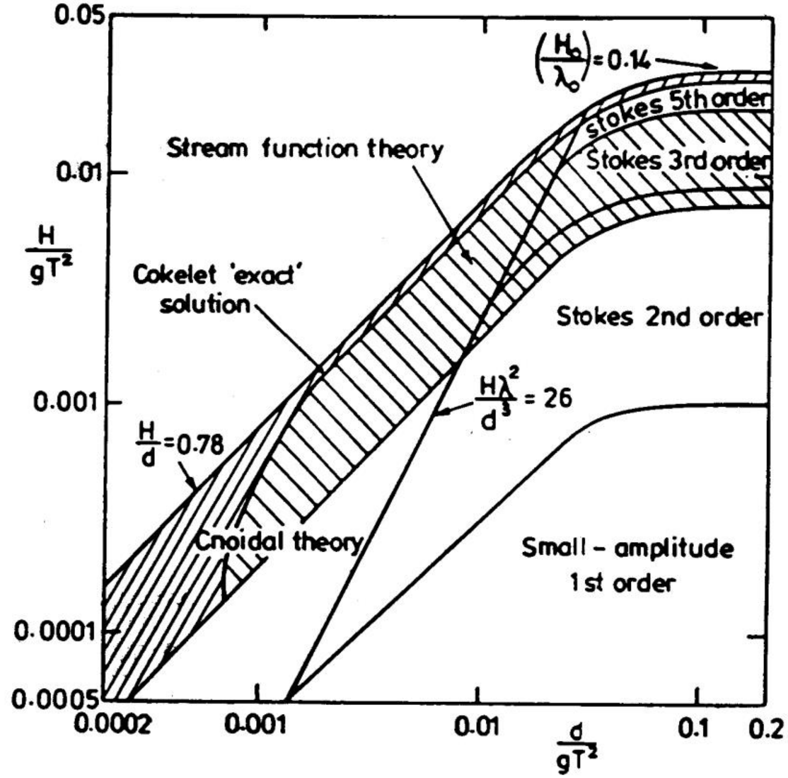


Figure 1. Limits of validity of various wave theories (after Dean, 1970, and Le Mehaute, 1976).

Παράδειγμα Υπολογισμού

(α) Κύμα ύψους στα ανοικτά 1.8m και περιόδου 8 secs εισέρχεται σε παράκτια περιοχή βάθους 5m. Να προταθεί η κατάλληλη θεωρία για την περιγραφή του κύματος.

(β) Να επαναληφθεί το ίδιο εάν το κύμα μεταδίδεται σε βαθιά νερά d=35m.

(γ) Να υπολογιστεί για το (β) η μέγιστη ανύψωση του κυματισμού, η οριζόντια ταχύτητα και η οριζόντια επιτάχυνση για γραμμικό κυματισμό αλλά και σύμφωνά με τη θεωρία που προκύπτει από το διάγραμμα.

<u>Απάντηση</u>

(α) Από την εξίσωση διασποράς (Εξ. (2η) στη σειρά ΙΙ) καταλήγουμε ότι λ= 53.1m
Ο συντελεστής ρήχωσης (Εξ. (3ζ)) προκύπτει $\mathrm{K}_s = 1.023$ Συνεπώς Η=2.0*1.023=2.56m.

Θα είναι d/gT^2= 0.008 και H/gT^2= 0.003, συνεπώς, από το διάγραμμα Le Mehaute προκύπτει ότι θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί η ελλειπτική θεωρία ή η θεωρία ροϊκής συνάρτησης .

(β)Με τον ίδιο τρόπο λ = 97.8m και $\mathrm{K}_s = 0.964$, Η=1.8*0.964=1.735m.
Συνεπώς, d/gT^2 = 0.056 και H/gT^2= 0.0026, οπότε μπορεί να χρησιμοποιηθεί η θεωρία Stokes 2ης τάξης.

Βιβλιογραφία

- Καραμπάς, Θ., «Στοιχεία Κυματομηχανικής», Διδακτικές σημειώσεις, Τμήμα Επιστημών της Θάλασσας, Πανεπιστήμιο Αιγαίου.
- Κατσαρδή, Β., «Ακτομηχανική και Παράκτια Έργα», Διδακτικές Σημειώσεις, ΤΕΙ Αθήνας.
- Κουτίτας, Χ., «Εισαγωγή στην παράκτια Τεχνική και τα Λιμενικά Έργα», ΑΠΘ, Εκδόσεις Ζήτα, Θεσσαλονίκη
- Ματσούκης, Π.Φ., «Παράκτιες Διεργασίες», Διδακτικές Σημειώσεις, ΔΠΘ.
- Fenton, J.D., 1985, «A Fifth-Order Stokes Theory for Steady Waves», J. Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering, Vol.111, No. 2, 216-234.
- Swan, C., «Coastal Engineering», Lecture Notes, Imperial College, London.
- Swan, C., «Fluid Mechanics», Lecture Notes, Imperial College, London.
- Swan, C., «Inaugural Lecture», Imperial College, London.