ΘΑΛΑΣΣΙΑ ΜΗΧΑΝΙΚΗ & ΛΙΜΕΝΙΚΑ ΕΡΓΑ

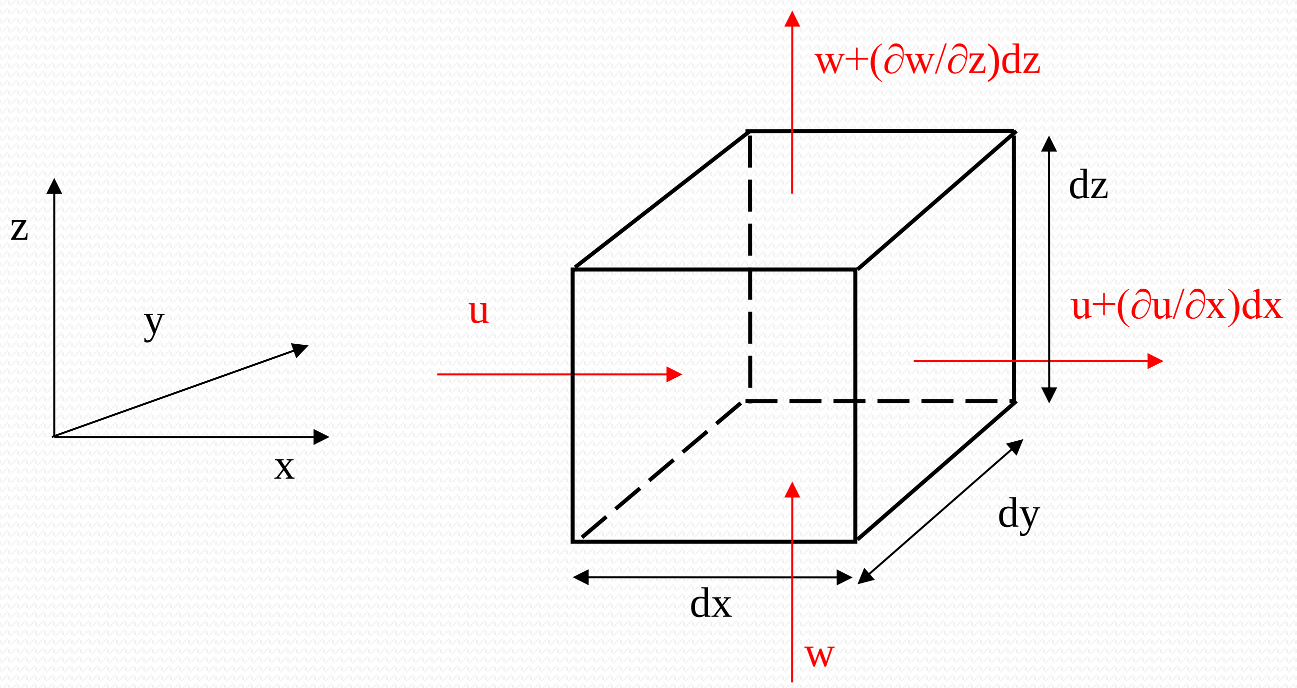
Σειρά ΙΙ:
Εισαγωγή στη Γραμμική Θεωρία Κυμάτων

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας - Πολυτεχνική Σχολή
Τμήμα Πολιτικών Μηχανικών
Δρ. Βασιλική Κατσαρδή

Περιεχόμενα

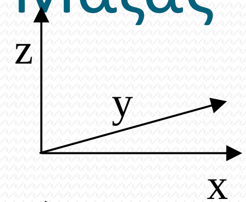
- Εξίσωση Συνέχειας
- Αστρόβιλη Ροή
- Εξισώσεις Κίνησης
- Γραμμική Θεωρία Κυμάτων
- Οριακές Συνθήκες
- Τροχιές Σωματιδίων
- Εξίσωση Διασποράς
- Κατανομή Πίεσης
- Παραδείγματα

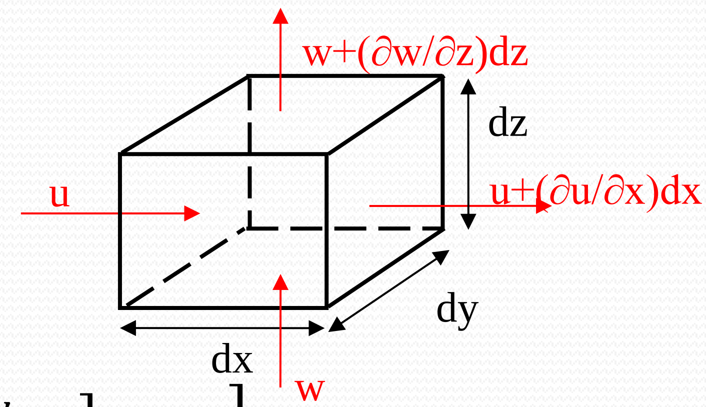
Πεδίο ταχύτητας – Όγκος Ελέγχου Καρτεσιανές Συντεταγμένες



1. Εισαγωγή

1.1 Εξίσωση Συνέχειας της Μάζας





Έστω ένα 2D πεδίο ροής

Εισροή μάζας $= (udydz + wdxdy)\rho$

Εκροή μάζας $= \left[\left[u + \frac{\partial u}{\partial x}dx\right]dydz + \left[w + \frac{\partial w}{\partial z}dz\right]dxdy\right]\rho$

ρ πυκνότητα (Kg/m^3).

Για ασυμπίεστη ροή: Εκροή – Εισροή = 0 →

$$\left[u + \frac{\partial u}{\partial x}dx - u\right]dydz + \left[w + \frac{\partial w}{\partial z}dz - w\right]dxdy = 0 \rightarrow \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\right]dxdydz = 0$$

→ $\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0}$ (1α) **Εξίσωση συνέχειας της μάζας** για 2D πεδίο ροής.

Αντίστοιχα για 3D πεδίο ροής: $\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0}$ (1β)

1.2 Αστρόβιλη Ροή

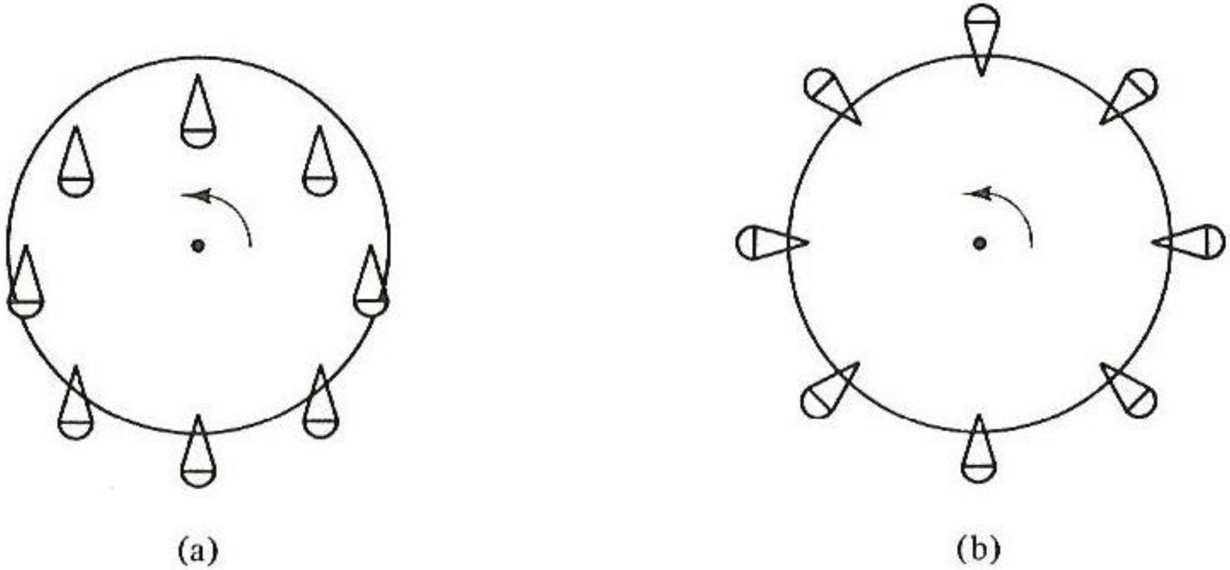
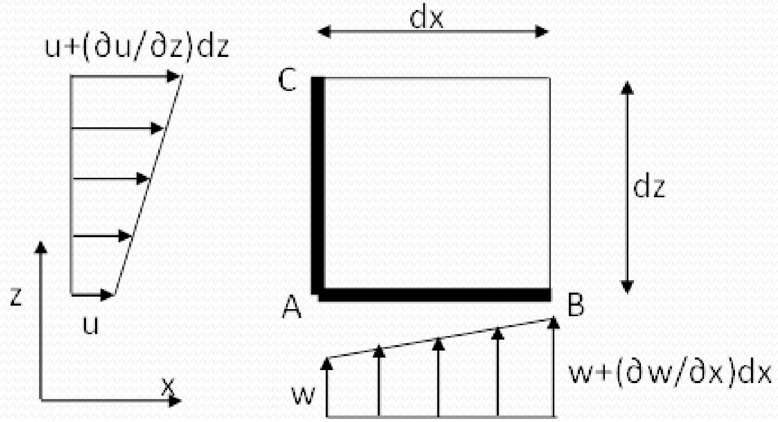


Figure 2.11 (a) Irrotational motion of chairs on a Ferris wheel; (b) rotational motion of the chairs.

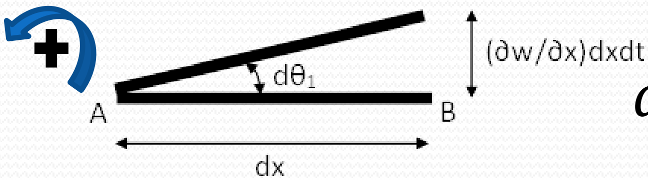
1.2 Αστρόβιλη Ροή



Όταν σε μία ροή έχουμε στροφή των στοιχείων της ροής, τότε λέμε ότι έχουμε στροβιλότητα Ω.

Πάλι σε ένα 2D πεδίο ροής

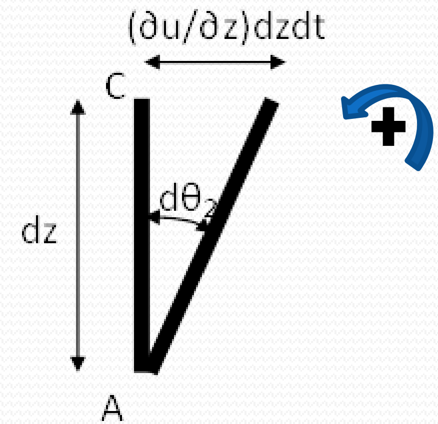
Μετά από χρόνο δt, η στοιχειώδης γραμμή AB θα έχει στραφεί κατά μία γωνία $d\theta_1$,



$$d\theta_1 = \frac{\frac{\partial w}{\partial x} dx dt}{dx} = \frac{\partial w}{\partial x} dt$$

Επομένως η γωνιακή ταχύτητα του AB θα είναι $\frac{d\theta_1}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}$ [s^{-1}]

1.2 Αστρόβιλη Ροή - συνέχεια



Παρομοίως η στροφή της στοιχειώδους γραμμή AC μετά από χρόνο δt δίνεται από:

$$-d\theta_2 = \frac{\frac{\partial u}{\partial z}dzdt}{dz} = \frac{\partial u}{\partial z}dt \rightarrow \frac{d\theta_2}{dt} = -\frac{\partial u}{\partial z} \text{ [s}^{-1}\text{]}$$

Η μέση στροβιλότητα (Ω) ορίζεται ως:

Άρα: $\Omega = \left(\frac{d\theta_1}{dt} + \frac{d\theta_2}{dt}\right)/2 \rightarrow \boxed{\Omega = \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right)/2}$ [s^{-1}] (1c)

Έτσι για **αστρόβιλη ροή** έχουμε μηδενική στροβιλότητα σε κάθε σημείο της ροής

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0} \quad (1d)$$

1.3 Δυναμικό Ροής

Με δεδομένο την αστρόβιλη ροή, $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial z}$,

ολοκληρώνοντας **ως προς x** έχουμε

$\int \frac{\partial w}{\partial x} dx = \int \frac{\partial u}{\partial z} dx$ και άρα $w = \int \frac{\partial u}{\partial z} dx$

ολοκληρώνοντας **ως προς z** έχουμε

$\int w\, dz = \iint \frac{\partial u}{\partial z} dxdz$ και άρα $\int w\, dz = \int u\, dx$

Θέτοντας το παραπάνω ως μία συνάρτηση φ έχουμε

$\int w\, dz = \int u\, dx = \varphi(x, z, t)$ ← **Δυναμικό ροής**

Έτσι, $\boxed{u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}}$ και $\boxed{w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}}$ (και $\boxed{v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}}$ για 3D ροή) (1e)

Μία συνάρτηση περιγράφει **όλη** τη ροή.

(Άσκηση: Από (1e) να καταλήξουμε στην (1d))

1.3 Δυναμικό Ροής – Εξίσωση Laplace

Από την εξίσωση συνέχειας της μάζας για 3D ροή:

$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$ και με δεδομένα τα $u=\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $w=\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ και $v=\frac{\partial \varphi}{\partial y}$

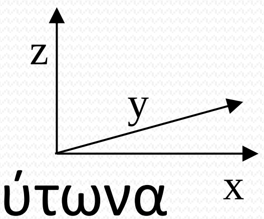
$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)=0$ άρα $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}=0$ ή

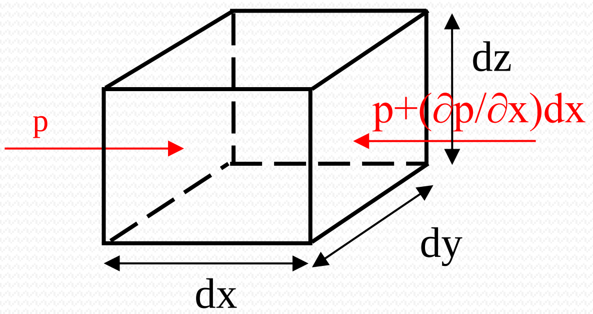
$$\boxed{\nabla^2\varphi=0}$$

Συνάρτηση ***Laplace*** *με όρους φ*

Εύκολη στη λύση του!!!

1.4 Εξισώσεις Κίνησης





Σε ένα 3D πεδίο ροής

Εφαρμόζουμε 2ο νόμο του Νεύτωνα

Δύναμη = μάζα x επιτάχυνση κατά x.

$$\left\{-\left[p+\frac{\partial p}{\partial x}dx\right]+p\right\}dydz+Xdxdydz=\rho\alpha_x dxdydz$$

όπου X η εξωτερική δύναμη ανά μονάδα όγκου ρευστού, και α_x η επιτάχυνση κατά x.

Άρα οι εξισώσεις κίνησης δίνονται από

$$\left.\begin{aligned}\frac{-1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+X&=\alpha_x\\ \frac{-1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+Y&=\alpha_y\end{aligned}\right\}\quad \text{Όμως } X=Y=0$$

$$\frac{-1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+Z=\alpha_z \text{ και } Z=-g$$

$$\alpha_x=\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}\overbrace{\frac{\partial x}{\partial t}}^{u}+\frac{\partial u}{\partial y}\overbrace{\frac{\partial y}{\partial t}}^{v}+\frac{\partial u}{\partial z}\overbrace{\frac{\partial z}{\partial t}}^{w}$$

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}$$

1.4 Εξισώσεις Κίνησης – Συνέχεια

Εισάγοντας τα παραπάνω έχουμε τις **Εξισώσεις Euler**

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u\partial u}{\partial x} + \frac{v\partial u}{\partial y} + \frac{w\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u\partial v}{\partial x} + \frac{v\partial v}{\partial y} + \frac{w\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{u\partial w}{\partial x} + \frac{v\partial w}{\partial y} + \frac{w\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g$$

Μη ιδανικά ρευστά μ≠0

- Navier – Stokes

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+\rho g_x$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)+\rho g_y$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)+\rho g_z\,.$$

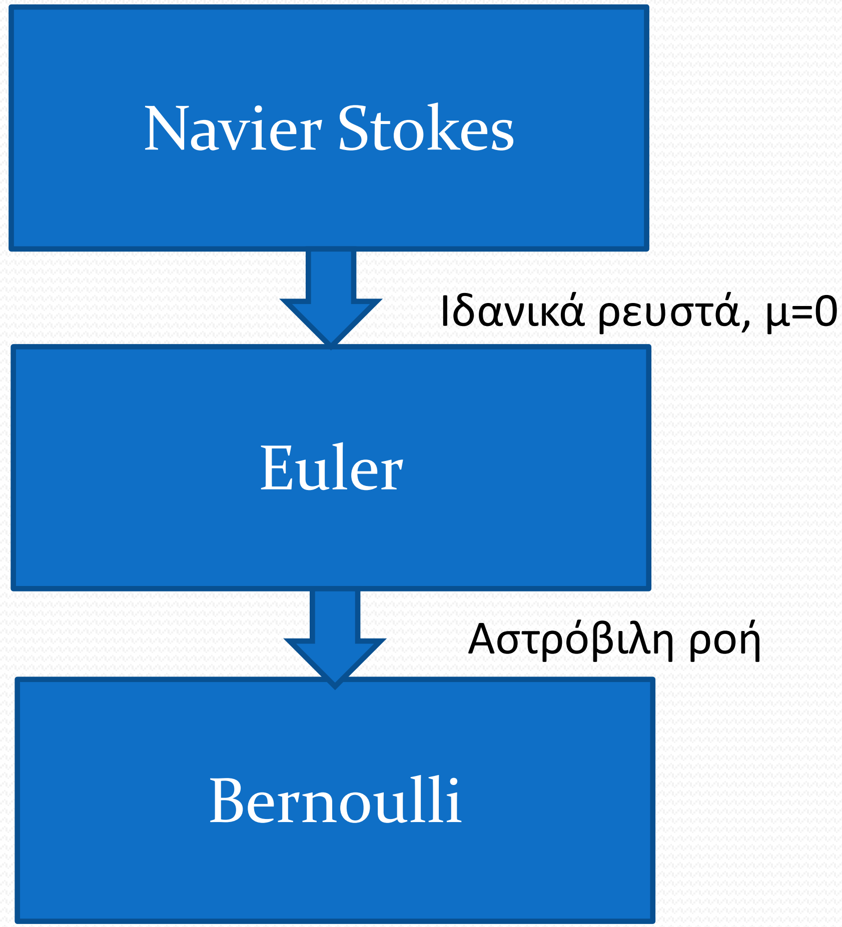
1.4 Εξισώσεις Κίνησης – Συνέχεια

Εισάγοντας την αστρόβιλη ροή για τις 2 διαστάσεις (Να γίνει σαν άσκηση) λαμβάνουμε την **Εξίσωση Bernoulli**

$$\frac{\rho\partial\varphi}{\partial t} + p + \rho g z + \rho\left[\frac{u^2 + w^2}{2}\right] = C$$

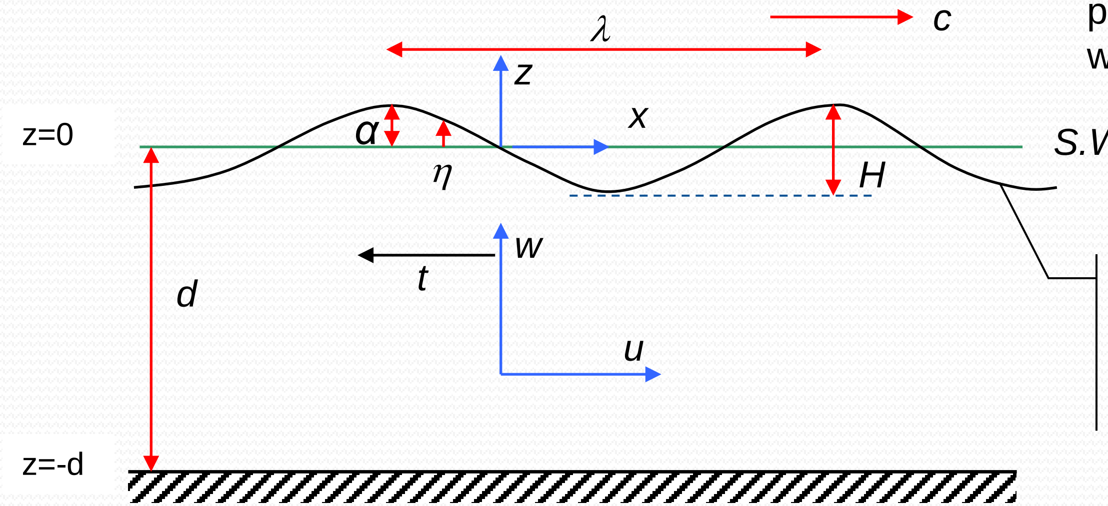
όπου C σταθερά Bernoulli.

Εξισώσεις


Navier Stokes
Ιδανικά ρευστά, μ=0
Euler
Αστρόβιλη ροή
Bernoulli

2. Γραμμική Θεωρία (Θεωρία Airy)

Ταχύτητα μετάδοσης
phase velocity
wave celerity



Ελεύθερη επιφάνεια η(x,t)

$$\boxed{\eta = a\sin(\omega t - kx)}$$

Wave Frequency, $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$; Wave Number $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

$k =$ αριθμός κύματος $\lambda =$ μήκος κύματος,

2.1 Βασικές Παραδοχές

(A) Αρχή διατήρησης της μάζας (υποθέτει και το ότι το ρευστό είναι ασυμπίεστο)

2D: $$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$ Εξ. (2.1)

(B) Αστρόβιλη ροή 2D: $$\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$ Εξ. (2.2)

(C) Εξίσωση Bernoulli: 2D: $$\frac{\rho \partial \varphi}{\partial t} + p + \rho g z + \rho \left[\frac{u^2+w^2}{2}\right] = C$$ Εξ. (2.3)

(D) Κίνηση περιοδική σε *x* και *t*

(E) Εύρος κυματισμού μικρό σε σχέση με το μήκος κύματος,

$$a \ll \lambda$$

(F) Εύρος κυματισμού μικρό σε σχέση με το βάθος,

$$a \ll d.$$

2.2 Βασικές Εξισώσεις

Παίρνουμε την 1η παράγωγο ως προς x της εξίσωσης της μάζας

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x} = 0$$

Αντικαθιστούμε για αστρόβιλη ροή με την εξίσωση 2.2: $\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$ Εξ. (2α) *Εξίσωση Laplace με όρους ταχύτητας*

Αφού η κίνηση είναι περιοδική σε *x* και *t* μπορεί να εκφραστεί σαν μία σειρά Fourier σε $(\omega t - kx)$. Άρα:

$$u = F_1(z)\sin(\omega t - kx) + F_2(z)\sin 2(\omega t - kx) + F_3(z)\sin 3(\omega t - kx) + \cdots$$

Ενδιαφερόμαστε μόνο για τον 1ο όρο $u = F_1(z)\sin(\omega t - kx)$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (2α) $\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - k^2 F = 0$

2.2 Βασικές Εξισώσεις -Συνέχεια

Λύνοντας την εξίσωση (2α)

$F(z)$=Acosh(kz)+Bsinh(kz),

Α & Β σταθερές

Άρα

$\boxed{u=[A\cosh(kz)+B\sinh(kz)]\sin(\omega t-kx)}$ Εξ. (2β) **Οριζόντια Συνιστώσα Ταχύτητας**

Από την εξίσωση της μάζας

$$w=-\int\frac{\partial u}{\partial x}dz$$

Αντικαθιστούμε στην εξίσωση 2β

$\boxed{w=[A\sinh(kz)+B\cosh(kz)]\cos(\omega t-kx)}$ Εξ. (2γ) **Κατακόρυφη Συνιστώσα Ταχύτητας**

Σημείωση $\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ και $\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

2.3 Οριακές Συνθήκες

1. Στον πυθμένα
   - Οριζόντιος
   - Αδιαπέρατος

Τότε Κατακόρυφη Ταχύτητα είναι μηδέν, $w = 0$ στο $z = -d$

Εξ. (2γ) γίνεται $0 = [A\sinh(kd) + B\cosh(kd)]\cos(\omega t - kx)$ ή

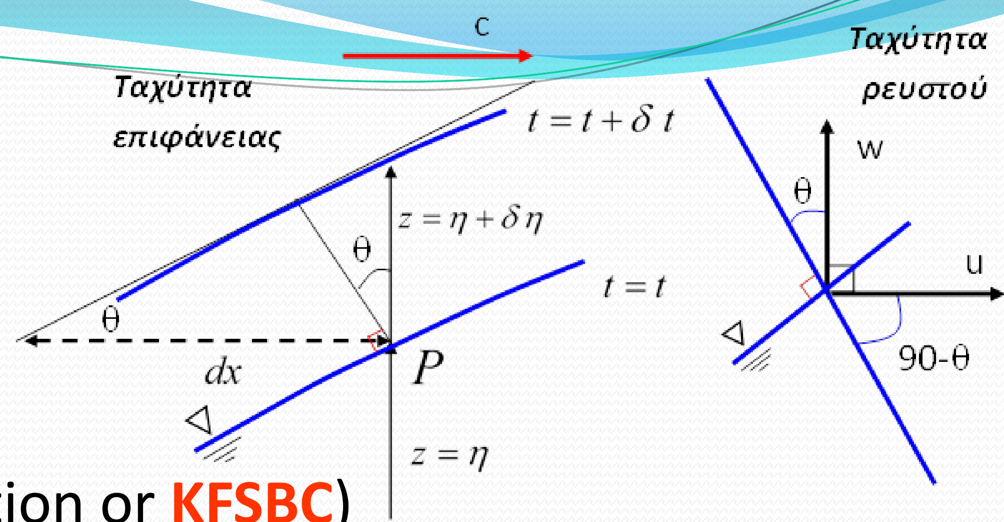
$A\sinh(kd) = B\cosh(kd)$ ή $B = A\tanh(kd)$

Στην Εξ. (2γ) πάλι $w = \frac{A\sinh[k(z+d)]}{\cosh(kd)}\cos(\omega t - kx)$ εξ. (2δ)

2.3 Οριακές Συνθήκες - Συνέχεια

2. Στην επιφάνεια

   i. Τα σωματίδια παραμένουν στην επιφάνεια (Kinematic free-surface boundary condition or **KFSBC**)



Τότε η ταχύτητα του ρευστού κάθετη στην επιφάνεια πρέπει να είναι ίση με την ταχύτητα της επιφάνειας κατά μήκος της καθέτου.

Για μία δεδομένη τιμή του *x* έστω ότι *z=η* αντιπροσωπεύει ένα σημείο P πάνω στην επιφάνεια σε χρόνο *t*. Σε χρόνο *t+δt,* η επιφάνεια θα δίνεται από *z=η+δη.*

Από το αριστερό τμήμα της εικόνας: η ταχύτητα της επιφάνειας πάνω στην κάθετο, μέσω του σημείου P είναι: $\frac{(\eta+\partial\eta)-\eta}{\partial t}\cos\theta = \frac{\partial\eta}{\partial t}\cos\theta$

Από το δεξιό τμήμα της εικόνας: η ταχύτητα του ρευστού κατά μήκος της ίδιας καθέτου είναι: $w\cos\theta - u\sin\theta$

Εξισώνοντας τα παραπάνω έχουμε: $\frac{\partial\eta}{\partial t}\cos\theta = w\cos\theta - u\sin\theta$ ή

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = w - u\tan\theta = w - \frac{u\partial\eta}{\partial x}$$

2.3 Οριακές Συνθήκες- Συνέχεια

$\frac{\partial\eta}{\partial t}=w-\frac{u\partial\eta}{\partial x}$

Όμως εφόσον *α<<λ* τότε $\frac{\partial\eta}{\partial x}\ll 1$, και άρα $\frac{u\partial\eta}{\partial x}\ll w$

Άρα $\frac{\partial\eta}{\partial t}=(w)_{z=\eta}$ και άρα από την εξίσωση (2δ) → $\frac{\partial\eta}{\partial t}=\frac{A\sinh[k(\eta+d)]}{\cosh(kd)}\cos(\omega t-kx)$

Επίσης, αφού *α<<d,* τότε *η<<d,* άρα $\sinh[k(\eta+d)]\rightarrow\sinh[kd]$

Ολοκληρώνοντας έχουμε $\eta=\frac{A\sinh(kd)}{\omega\cosh(kd)}\sin(\omega t-kx)$

Όμως εξ ορισμού $\boxed{\eta=\alpha\sin(\omega t-kx)}$ Εξ. (2ε) $\quad a=\frac{A}{\omega}\tanh(kd)$

Αντικαθιστώντας στις (2β) και (2δ) παίρνουμε

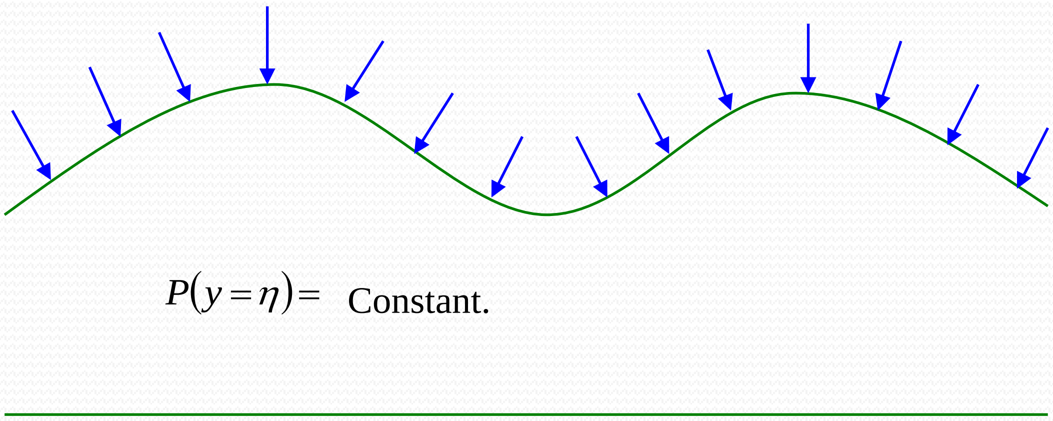
$$\boxed{\begin{aligned}u&=\frac{a\omega\cosh[k(z+d)]}{\sinh(kd)}\sin(\omega t-kx)\\ w&=\frac{a\omega\sinh[k(z+d)]}{\sinh(kd)}\cos(\omega t-kx)\end{aligned}}$$

Εξς. (2ζ)

2.3 Οριακές Συνθήκες- Συνέχεια

2. Στην επιφάνεια

   ii. ***"Η πίεση στην ελεύθερη επιφάνεια είναι σταθερή" (π.χ. ατμοσφαιρική).*** (Dynamic free-surface boundary condition or **DFSBC**)



$P(y=\eta)=$ Constant.

Σημείωση: Αυτή η συνθήκη αγνοεί τις επιδράσεις ροής αέρα (ανέμου).

- Bernoulli: $\frac{\rho\partial(\int u\partial x)}{\partial t}+p+\rho gz+\rho\left[\frac{u^2+w^2}{2}\right]=C$
- Αφού “α” είναι μικρό *u* >> *u*², και έτσι $\rho\left[\frac{u^2+w^2}{2}\right]$ είναι όρος 2ης τάξης και μπορεί να παραλειφθεί.
- Αντικαθιστώντας την *u*, και θέτοντας $z=\eta=\alpha\sin(\omega t-kx)$ στην επιφάνεια

$$-\frac{\rho\alpha\omega^2}{k}\frac{\cosh[k(\eta+d)]}{\sinh kd}\sin(\omega t-kx)+\rho ga\sin(\omega t-kx)=C$$

- Εξισώνοντας τους συντελεστές της παραπάνω εξίσωσης:

$$-\frac{\rho\alpha\omega^2}{k}\frac{\cosh[k(\eta+d)]}{\sinh kd}+\rho ga=0$$

2.5 Ταχύτητα μετάδοσης (c)

- Αλλά αφού $\eta << d$

$$\frac{\omega^2}{k}\frac{\cosh(kd)}{\sinh(kd)} = g \qquad \therefore \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{g}{k}\tanh(kd)$$

Αλλά, $\frac{\omega^2}{k^2} = c^2 \qquad \therefore c = \frac{\omega}{k} = \left[\frac{g}{k}\tanh(kd)\right]^{\frac{1}{2}}$

Επομένως: $\boxed{\omega = \left[gk\tanh(kd)\right]^{\frac{1}{2}}}$ ή $\boxed{\omega^2 = \left[gk\tanh(kd)\right]}$ Εξ. (2η)

Σχέση Γραμμικής Διασποράς

$$\left.\begin{array}{l} T \Rightarrow \omega \quad \surd \\ d \qquad\quad \surd \end{array}\right\} \textbf{Σχέση διασποράς} \Rightarrow k$$

2.3 Οριακές Συνθήκες- Συνέχεια -Ταχύτητα μετάδοσης (c)

Εξ ορισμού η περίοδος είναι ο χρόνος που χρειάζεται το κύμα για να διανύσει απόσταση ίση με το μήκος, λ.

$$c = \frac{\lambda}{\mathrm{T}} = \frac{\omega}{k}$$

2.3 Οριακές Συνθήκες- Συνέχεια

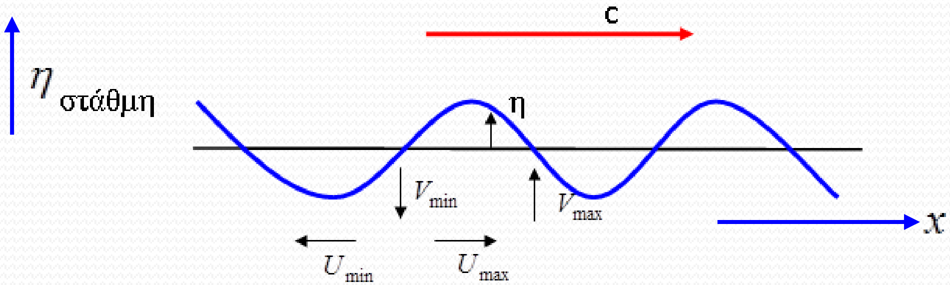
$\eta = \alpha \sin(\omega t - kx)$ Εξ. (2ε)

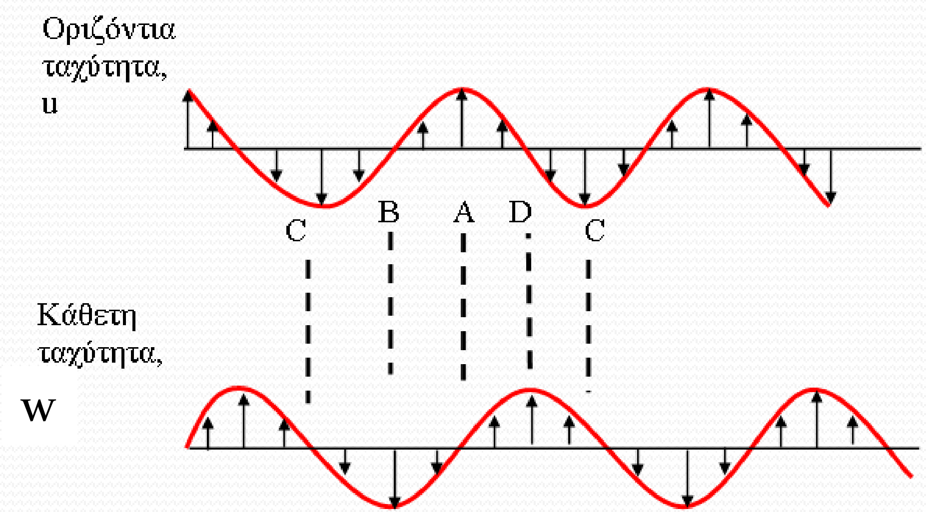
Συνιστώσες ταχύτητας:

$$u = \frac{\alpha\omega \cosh[k(z+d)]}{\sinh(kd)} \sin(\omega t - kx)$$

$$w = \frac{\alpha\omega \sinh[k(z+d)]}{\sinh(kd)} \cos(\omega t - kx)$$

Εξς. (2ζ)





Ταχύτητες και επιταχύνσεις

$$u = \frac{a\omega\cosh[k(z+d)]}{\sinh(kd)}\sin(\omega t - kx)$$

$$w = \frac{a\omega\sinh[k(z+d)]}{\sinh(kd)}\cos(\omega t - kx)$$

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t}, a_z = \frac{\partial w}{\partial t}$$

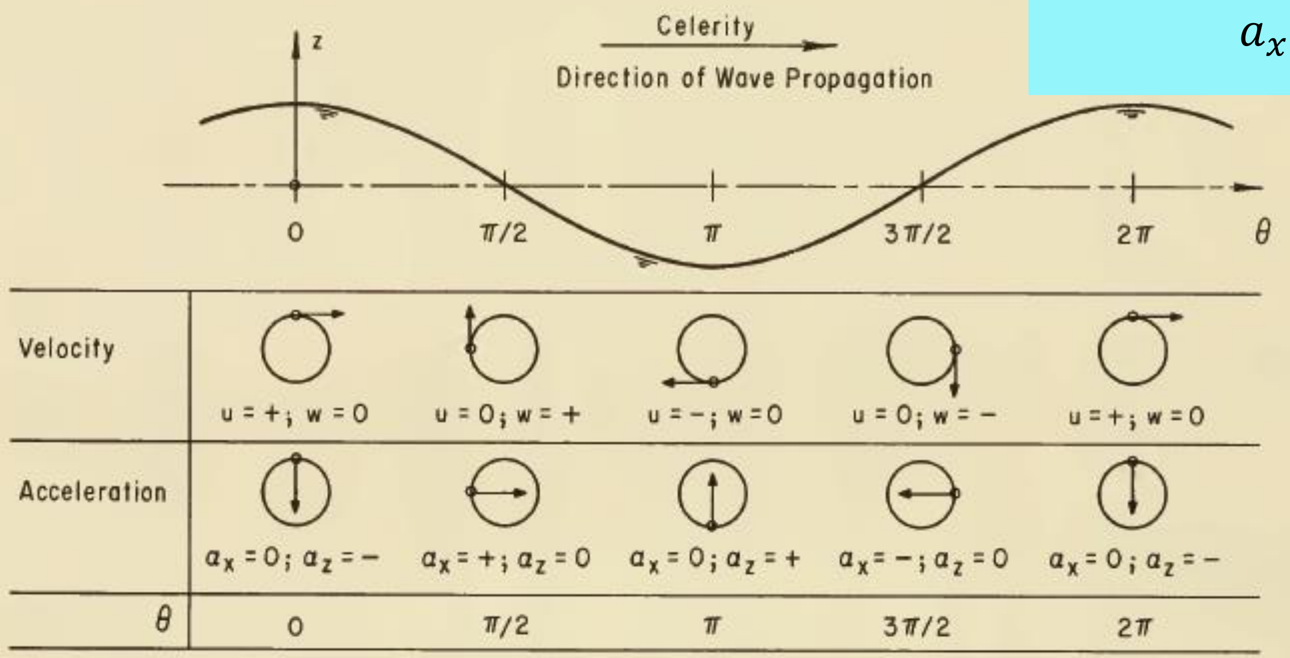


Figure 2-3. Local fluid velocities and accelerations.

SPM 2-14

2.3 Οριακές Συνθήκες- Συνέχεια

Επανεξέταση ορίων στον πυθμένα, *z=-d*

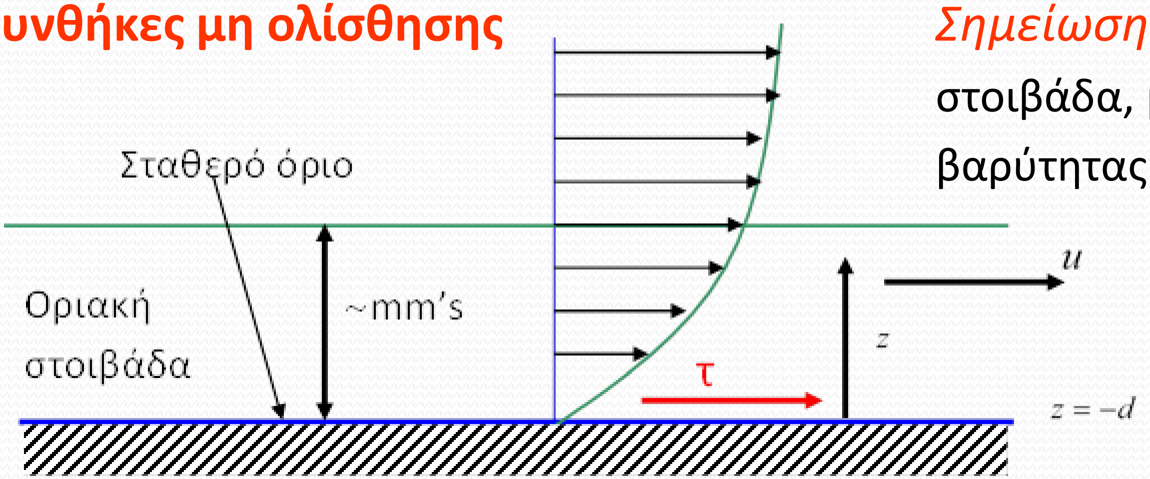
i. Στο *z=-d* $\sinh[k(z+d)] = \sinh[0] = 0 \Rightarrow w = 0$ ok!

ii. Στο *z=-d* $\cosh[k(z+d)] = \cosh[0] = 1 \Rightarrow u = \dfrac{a\omega}{\sinh(kd)}\sin(\omega t - kx)$

Στην πραγματικότητα και οι 2 συνιστώσες πρέπει να είναι μηδενικές σε σταθερό όριο λόγω τριβών.

Συνθήκες μη ολίσθησης

Σημείωση: Πάνω από την οριακή στοιβάδα, μόνο οι δυνάμεις βαρύτητας έχουν σημασία.



Εκθετική μείωση στο όριο. Το ιξώδες είναι σημαντικό

$$\tau = \mu \frac{du}{dz}$$

2.4 Μετατοπίσεις σωματιδίων

Αν $\hat{\xi}, \hat{\psi}$ τοπικές συντεταγμένες που ορίζουν την θέση ενός σωματιδίου του ρευστού

τότε: $u \approx \frac{\partial \hat{\xi}}{\partial t}$ και $w \approx \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial t}$ (Πλήρης λύση μέσω ανάπτυξης σειρών Taylor)

Άρα: $\hat{\xi} = \int u dt$ και $\hat{\psi} = \int w dt$

$$\boxed{\begin{aligned} u &= \frac{a\omega \cosh[k(z+d)]}{\sinh(kd)} \sin(\omega t - kx) \\ w &= \frac{a\omega \sinh[k(z+d)]}{\sinh(kd)} \cos(\omega t - kx) \end{aligned}}$$

Εξς. (2ζ)

Ολοκληρώνοντας τις εξισώσεις (2ζ)

$$\hat{\xi} = \frac{-\alpha \cosh[k(z+d)]}{\sinh(kd)} \cos(\omega t - kx)$$

$$\hat{\psi} = \frac{\alpha \sinh[k(z+d)]}{\sinh(kd)} \sin(\omega t - kx)$$

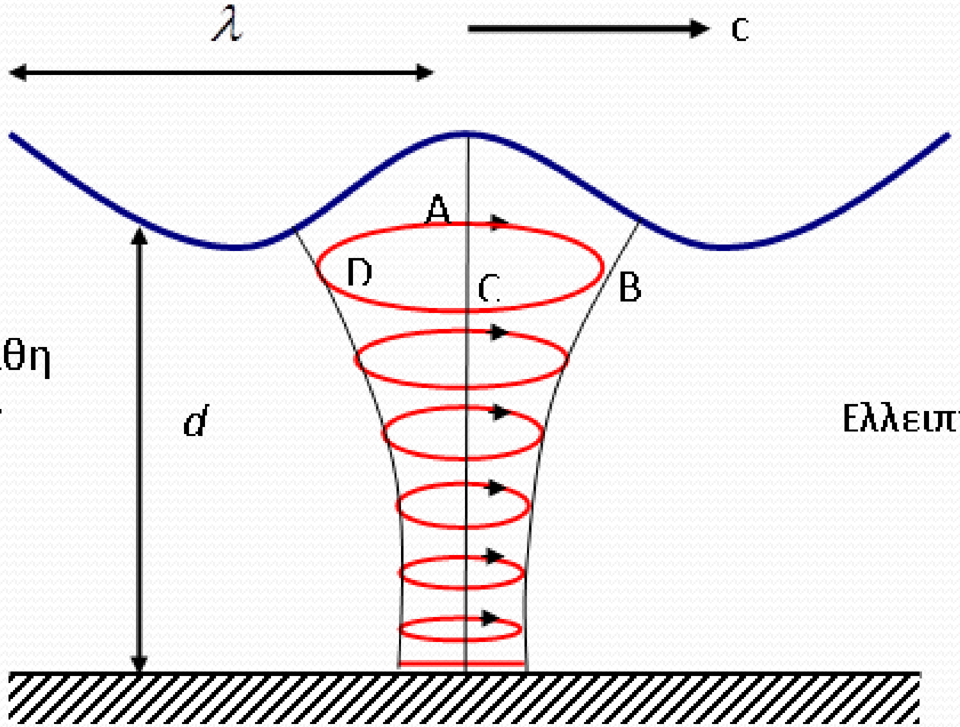
Εξς. (2η)

Αφού: $\cos^2(\omega t - kx) + \sin^2(\omega t - kx) = 1$ $\Rightarrow$ $\frac{\hat{\xi}^2}{\cosh^2[k(z+d)]} + \frac{\hat{\psi}^2}{\sinh^2[k(z+d)]} = \text{constant}$

Εξίσωση Έλλειψης

2.4 Μετατοπίσεις σωματιδίων – Συνέχεια

Μεταβολή με το χρόνο σε σταθερό σημείο:



Ενδιάμεσα βάθη

$kd = 1 \rightarrow 2$ or

$\lambda \approx d$

Ελλειπτικά σωματίδια

Για πολύ ρηχά νερά δεν έχει εφαρμογή αυτή η θεωρία.

2.4 Μετατοπίσεις σωματιδίων – Συνέχεια

Αν τα νερά είναι βαθειά $d \to \infty$

$$u = \frac{a\omega \cosh[k(z+d)]}{\sinh(kd)} \sin(\omega t - kx)$$ αλλά

$$\cosh[k(z+d)] = \frac{[e^{k(z+d)} + e^{-k(z+d)}]}{2} = \frac{1}{2}[e^{kz}e^{kd} - e^{-kz}e^{-kd}] = \frac{e^{kz}e^{kd}}{2}$$ και

$$\sinh(kd) = \left[e^{kd} - e^{-kd}\right]\frac{1}{2} = \frac{e^{kd}}{2}$$

Έτσι: $\frac{\cosh[k(z+d)]}{\sinh(kd)} \to \frac{e^{kz}e^{kd}}{e^{kd}} = e^{kd}$

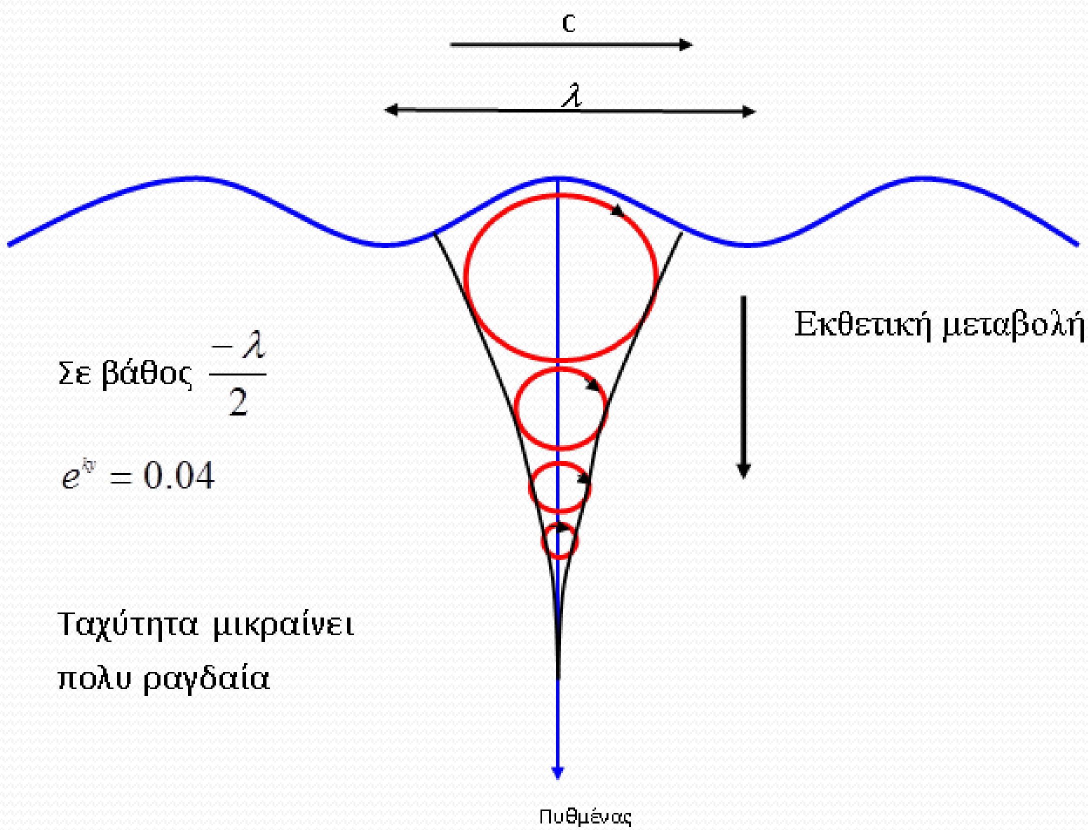
Το πεδίο ταχύτητας στα βαθιά είναι έτσι:

$$\boxed{\begin{aligned} u &= a\omega e^{kz} \sin(\omega t - kx) \\ w &= a\omega e^{kz} \cos(\omega t - kx) \end{aligned}}$$

Εξς. (2θ)

2.4 Μετατοπίσεις σωματιδίων – Συνέχεια

Να αποδειχθεί η κυκλική τροχιά και ότι η ταχύτητα μειώνεται ραγδαία με το βάθος



2.6 Κατανομή Πίεσης

Από εξίσωση Bernoulli Εξ. (1d) έχουμε:

$$p = -\frac{\rho\partial\left(\int u\partial x\right)}{\partial t} - \rho g z + p_o$$

όπου p_o είναι η σταθερά που ασκείται στο $z = 0$, και ο όρος $\rho\left[\frac{u^2+w^2}{2}\right]$ έχει πάλι παραλειφθεί.

$$p = p_o - \rho g z + \frac{\rho\alpha\omega^2}{k}\frac{\cosh[k(z+d)]}{\sinh kd}\sin(\omega t - kx)$$

Όμως: $\frac{\omega^2}{k}\frac{\cosh(kd)}{\sinh(kd)} = g$

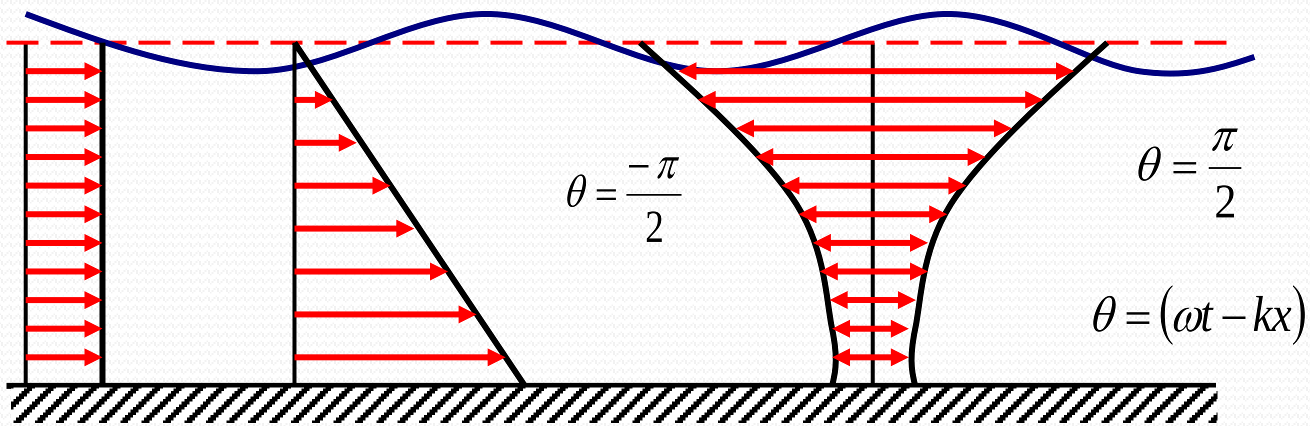
Άρα

$$p = p_o - \rho g z + \rho\alpha g\frac{\cosh[k(z+d)]}{\cosh kd}\sin(\omega t - kx) \qquad \text{Εξς. (2ι)}$$

2.6 Κατανομή Πίεσης – Συνέχεια

$$\boxed{p = p_o - \rho g z + \rho \alpha g \frac{\cosh[k(z+d)]}{\cosh kd} \sin(\omega t - kx)} \quad \text{Εξ. (21)}$$

Συνολική πίεση



Σταθερή πίεση

p_o

Υδροστατική πίεση

$-\rho g z$

Δυναμική πίεση

$$\rho \alpha g \frac{\cosh[k(z+d)]}{\cosh kd} \sin(\omega t - kx)$$