ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

ΧΑΡΑΞΗ ΓΡΑΦΙΚΗΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ

- Η Μέθοδος των Ελαχίστων Τετραγώνων (ΜΕΤ) χρησιμοποιείται για την κατασκευή της γραφικής παράστασης που περιγράφει ένα φαινόμενο, όταν γνωρίζουμε **ΜΟΝΟΝ** μια σειρά από πειραματικές τιμές των μεγεθών που το περιγράφουν και **ΟΧΙ** την ακριβή σχέση τους (τύπο).
- Στην πραγματικότητα, κατά τη μελέτη ενός φαινομένου, προσπαθούμε να προσδιορίσουμε τη μορφή της άγνωστης σχέσης, στην οποία ταιριάζουν καλύτερα τα πειραματικά μας δεδομένα, ελέγχοντας μια σειρά γνωστών σχέσεων.
- Στο εκπαιδευτικό εργαστήριο επαληθεύουμε μια ήδη γνωστή σχέση χρησιμοποιώντας μόνον τα πειραματικά μας δεδομένα.

Πότε χρησιμοποιείται;

Πορεία σκέψης (1)

- Οι κυριότερες σχέσεις που εξετάζονται είναι οι:
  - Γραμμική: $y = a + bx$ *(ευθεία γραμμή)*
  - Πολυωνυμική: $y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n$
  - Σχέση δύναμης: $y = ax^b$
  - Εκθετική: $y = ae^{bx}$
  - Λογαριθμική: $y = a + b\ln x$ όπου:

    x*: ανεξάρτητη μεταβλητή*

    y*: εξαρτημένη μεταβλητή*

    a, b, c_k: *σταθερές που μπορούν να είναι είτε απλές είτε σύνθετες*

Πορεία σκέψης (2)

- Κάθε φυσικό φαινόμενο μπορεί να περιγραφεί με μια μαθηματική σχέση που συνδέει τα μεγέθη που το επηρεάζουν, π.χ.:
  - *κίνηση: χρόνος – απόσταση*
  - *ηλεκτρικό ρεύμα: τάση – ένταση κλπ.*
- Τα μεγέθη που μεταβάλλονται ανεξάρτητα από την πορεία του φαινομένου είναι οι **ανεξάρτητες μεταβλητές** ενώ εκείνα που μεταβάλλονται συναρτήσει αυτών και περιγράφουν το φαινόμενο είναι οι **εξαρτημένες μεταβλητές**.
  - *Στην περίπτωση της κίνησης, ο χρόνος είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή και η απόσταση είναι η εξαρτημένη.*

- Αρχικά, παρατηρώντας τα πειραματικά δεδομένα, προσπαθούμε να **μαντέψουμε** το είδος της καμπύλης που μπορεί να ταιριάζει καλύτερα σε αυτά.
- Στόχος της ΜΕΤ είναι **ο προσδιορισμός των σταθερών συντελεστών** a, b, c_k της σχέσης που επιλέξαμε για να περιγράψουμε το φαινόμενο.
- **Η σχέση για την οποία τα πειραματικά δεδομένα προσαρμόζονται καλύτερα πάνω στη γραφική της παράσταση είναι και η ζητούμενη.**
- Αν και γενικά η γραφική παράσταση δεν είναι απαραίτητο να είναι ευθεία γραμμή, στα πλαίσια του εργαστηρίου θα ασχοληθούμε μόνο με γραμμικές σχέσεις της μορφής:

$$\boldsymbol{y = a + bx}$$

Στόχος της ΜΕΤ

Έστω ότι για κάποιο φυσικό φαινόμενο υπάρχουν οι μετρήσεις για τις *x* και *y* μεταβλητές που το περιγράφουν ως εξής:

x	y
x_1	y_1
x_2	y_2
x_3	y_3
…	…
…	…
x_{n-2}	y_{n-2}
x_{n-1}	y_{n-1}
x_n	y_n

Αν θέλουμε να δοκιμάσουμε τη γραμμική σχέση $\boldsymbol{y = a + bx}$ οι τύποι υπολογισμού των *a* και *b* είναι αντίστοιχα:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{D}, \qquad \delta a = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{D}}$$

$$b = \frac{n \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{D}, \qquad \delta b = \sigma_y \sqrt{\frac{n}{D}}$$

$$D = n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \quad \text{και} \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - a - bx_i)^2}{n-2}},$$

όπου *n: πλήθος των μετρήσεων.*

Μελέτη γραμμικών σχέσεων με τη ΜΕΤ

Παράδειγμα: Από την παρατήρηση μιας κίνησης, προέκυψαν τα πειραματικά δεδομένα του πίνακα (οι αποστάσεις μετρώνται από σταθερό σημείο):

t (sec)	s (cm)
1	1,49
2	2,96
4	5,97
7	10,52
11	16,50
15	22,55
16	24,06
20	30,01

Επιθυμούμε να διαπιστώσουμε αν επαληθεύεται η σχέση της ευθύγραμμης ομαλής κίνησης:

$$s = s_0 + \upsilon t$$

όπου εδώ θα θεωρήσουμε ότι $s_0 = 0$.
Για να χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις που αναφέρθηκαν, θα πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε κάποια αθροίσματα και συγκεκριμένα τα εξής:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \,, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \,, \quad \sum_{i=1}^{n} y_i \,, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

τα οποία μεταφράζονται στα:

$$\sum_{i=1}^{n} t_i \,, \quad \sum_{i=1}^{n} t_i^2 \,, \quad \sum_{i=1}^{n} s_i \,, \quad \sum_{i=1}^{n} t_i s_i$$

Παράδειγμα μελέτης με τη ΜΕΤ

Παράδειγμα μελέτης με τη ΜΕΤ

Έστω ότι από την παρατήρηση μιας κίνησης, προέκυψαν τα πειραματικά δεδομένα του πίνακα, όπου οι αποστάσεις μετρώνται από σταθερό σημείο. Πλήθος μετρήσεων: ***n=8***

n	t *(sec)*	s *(cm)*	t^2	t·s	s-a-bt
1	1	1,49	1	1,49	0,0002
2	2	2,96	4	5,92	0,0004
3	4	5,97	16	23,88	0,0003
4	7	10,52	49	73,64	0,0005
5	11	16,50	121	181,50	0,0002
6	15	22,55	225	338,25	0,0005
7	16	24,06	256	384,96	0,0008
8	20	30,01	400	600,20	0,0013
	76	**114,06**	**1072**	**1609,84**	**0,0041**

Αθροίσματα στηλών

Η τελευταία στήλη έλαβε υπόψη και τις τιμές των *a* και *b* όπως φαίνονται στην επόμενη διαφάνεια

Οι υπολογιζόμενες ποσότητες που προαναφέρθηκαν είναι:

$D = 2800$ $\quad a = -0{,}0270$ $\quad b = 1{,}5036$

$\sigma_y = 0{,}0012$ $\quad \delta a = 0{,}0008$ $\quad \delta b = 0{,}0001$

Τι σημαίνουν όμως όλα αυτά τα νούμερα για τη μελέτη μας;

Παράδειγμα μελέτης με τη ΜΕΤ

Θυμηθείτε ότι, χρησιμοποιώντας τα πειραματικά δεδομένα μας, προσπαθούμε να επαληθεύσουμε ότι το διάστημα στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση έχει γραμμική σχέση με το χρόνο της κίνησης.

Θα χρησιμοποιήσουμε τη γενική γραμμική σχέση:

$$\boldsymbol{y = a + bx}$$

Παρατηρούμε ότι η τιμή *b=1,5036* **αντιστοιχεί στη σταθερή ταχύτητα *υ***, ενώ η *a=-0,0270* **αντιστοιχεί στην αρχική απόσταση s_0** που θεωρήσαμε ότι **είναι πρακτικά μηδέν**. Το ότι δεν είναι ακριβώς μηδέν οφείλεται στα σφάλματα της πειραματικής διαδικασίας. Η σχέση μας τώρα μπορεί να γραφεί ως:

$$\boldsymbol{s = s_0 + vt}$$

και αντικαθιστώντας τις υπολογισμένες τιμές και τις μεταβλητές *x* και *y* με τις *t* και *s έχουμε*:

$$\boldsymbol{s = -0,0270 + 1,5036t}$$

Έτσι επαληθεύσαμε τη γραμμική μορφή της σχέσης χρόνου – διαστήματος στην ευθύγραμμη ομαλή κίνηση.

Παράδειγμα μελέτης με τη ΜΕΤ

Για τη **χάραξη της ευθείας** των ελαχίστων τετραγώνων ακολουθούμε την εξής πορεία:

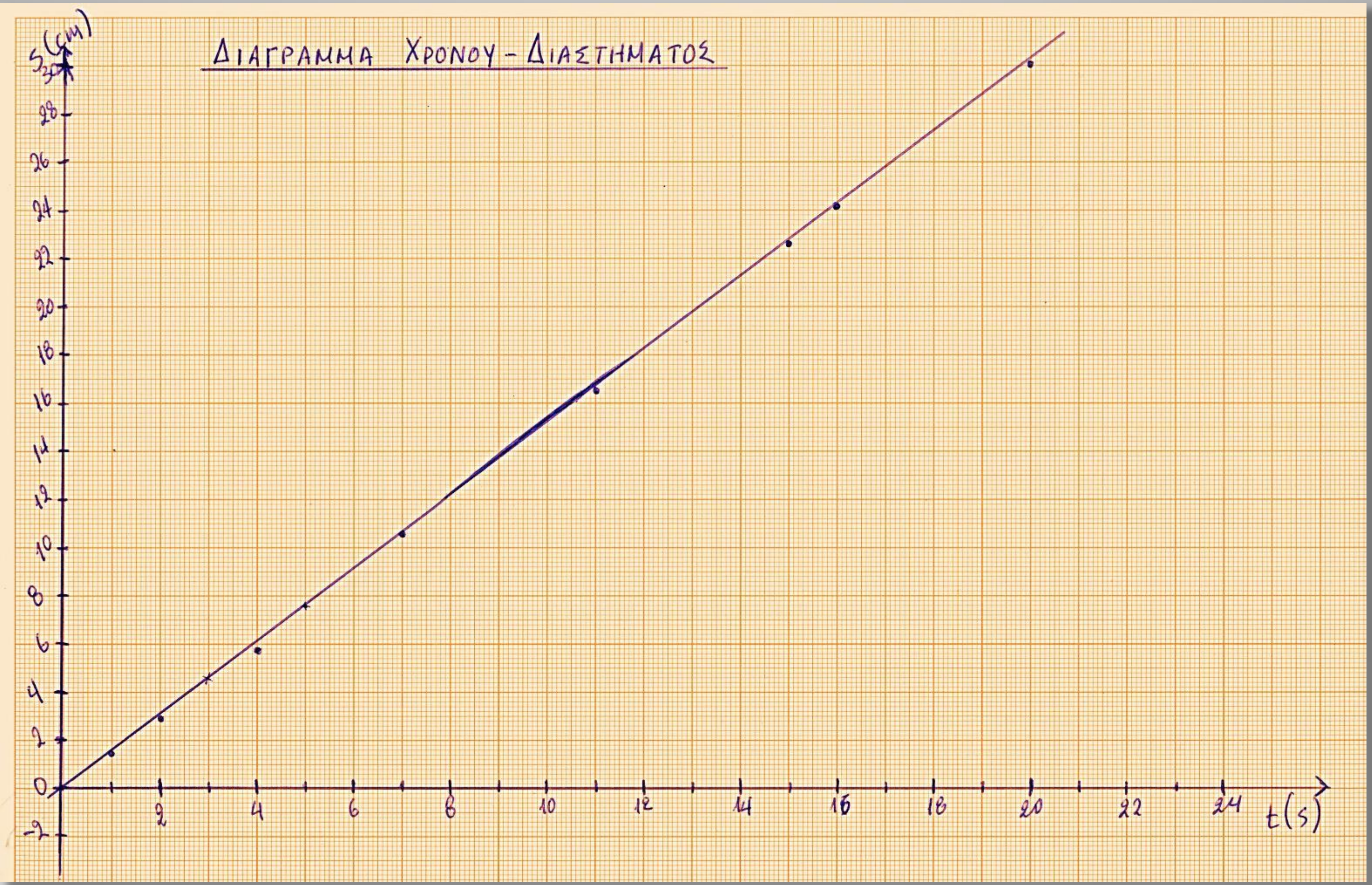
1. Εφόσον η σχέση είναι γραμμική, επιλέγουμε χιλιοστομετρικό χαρτί. Υπάρχουν και άλλα είδη χαρτιών (λογαριθμικό, ημιλογαριθμικό) τα οποία χρησιμοποιούνται για τις εκθετικές σχέσεις.
2. ***Χαράζουμε*** τους ορθογώνιους άξονες και ***αντιστοιχίζουμε*** την ανεξάρτητη μεταβλητή *(x)* στον οριζόντιο και την εξαρτημένη *(y)* στον κατακόρυφο άξονα. ***Υποδιαιρούμε*** τους άξονες σημειώνοντας πάνω στον καθένα το μέγεθος που αντιπροσωπεύει και τις μονάδες που χρησιμοποιούνται.

Παράδειγμα μελέτης με τη ΜΕΤ

4. ***Σημειώνουμε*** τα πειραματικά σημεία πάνω στο διάγραμμα.
5. Για να φέρουμε τη βέλτιστη ευθεία από τα πειραματικά σημεία, χρησιμοποιούμε τη σχέση $\boldsymbol{s = -0,0270 + 1,5036t}$. Εφόσον από δυο σημεία περνάει μόνο μια ευθεία αντικαθιστούμε δυο τυχαίες τιμές χρόνου t, έστω τις 3 και 5 στη σχέση και παίρνουμε τις αντίστοιχες τιμές του διαστήματος, τις 4,4838 και 7,4910 αντίστοιχα. Από τα σημεία (3, 4,4838) και (5, 7,4910) φέρνουμε τη ζητούμενη ευθεία.
6. Τέλος, ολοκληρώνουμε τη γραφική παράσταση δίνοντάς της τον απαιτούμενο τίτλο.

Παράδειγμα μελέτης με τη ΜΕΤ

Όλα τα παραπάνω εμφανίζονται στο διάγραμμα που ακολουθεί:



Παράδειγμα μελέτης με τη ΜΕΤ

- **Παρατηρήσεις:**
  - Η σταθερά *b* παριστάνει την κλίση της ευθείας ελαχίστων τετραγώνων αφού $b = \frac{s-a}{t}$.
  - Η σταθερά *a* είναι η τομή της ευθείας με τον κατακόρυφο άξονα, αφού για $t = 0$ η σχέση γίνεται $s = a + b \cdot 0 \Rightarrow s = a$
  - Στην προκειμένη περίπτωση, η ευθεία τέμνει τον κατακόρυφο άξονα πολύ κοντά στο μηδέν.
  - Οι τιμές $\delta a = 0{,}0008$ και $\delta b = 0{,}0001$ δίνουν τα σφάλματα των *a* και *b* αντίστοιχα. Έτσι η πλήρης σχέση που περιγράφει το φαινόμενο γίνεται:

$$\boldsymbol{s = (-0,0270 \pm 0,0008) + (1,5036 \pm 0,0001)t}$$

Παρατηρούμε ότι το σφάλμα στην *b* είναι αμελητέο.

Παράδειγμα μελέτης με τη ΜΕΤ

- Ένα βήμα ακόμη: Η εκθετική εξίσωση:

$$y = ae^{bx}$$

- Την εκθετική σχέση τη «ζωγραφίζουμε» κανονικά σε ημιλογαριθμικό χαρτί.
- Για να τη σχεδιάσουμε σε χιλιοστομετρικό χαρτί τη μετασχηματίζουμε σε γραμμική λογαριθμίζοντάς την ως εξής:

$$y = ae^{bx} \Rightarrow lny = lna + bx \Rightarrow z = \kappa + \lambda x$$

- όπου θέσαμε $z = lny$, $\kappa = lna$ και $\lambda = b$. Η τελευταία είναι γραμμική και μπορεί να μελετηθεί όπως είδαμε προηγουμένως.
- Τέλος, για τη φυσική ερμηνεία των αποτελεσμάτων, επαναφέρουμε τις αρχικές μεταβλητές με τους αντίστροφους μετασχηματισμούς.

Μελέτη εκθετικών σχέσεων με τη ΜΕΤ