Οι Κατανομές χ^2, t και F

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζουμε συνοπτικά τρεις *συνεχείς* κατανομές οι οποίες, όπως και η *κανονική κατανομή*, είναι πολύ χρήσιμες στη *Στατιστική Συμπερασματολογία*. Είναι αξιοσημείωτο, ότι και οι τρεις έχουν ως αφετηρία την *κανονική κατανομή*[1]. Πρόκειται για την *κατανομή* χ^2 (διαβάζεται *χι τετράγωνο*), την *κατανομή t* και την *κατανομή F*.

Γιατί οι τρεις αυτές κατανομές, είναι χρήσιμες στη *Στατιστική Συμπερασματολογία,* θα γίνει εύκολα κατανοητό όταν στα επόμενα μιλήσουμε για τις *στατιστικές συναρτήσεις (δειγματοσυναρτήσεις)* και το ρόλο τους στις συμπερασματικές στατιστικές διαδικασίες. Παρατηρείστε στον ορισμό αυτών των κατανομών, που δίνουμε στη συνέχεια, ότι πρόκειται για κατανομές συναρτήσεων *ανεξάρτητων* τυχαίων μεταβλητών και θυμηθείτε ότι όταν λέμε *τυχαίο δείγμα* μεγέθους *n* από έναν πληθυσμό εννοούμε *n ανεξάρτητες* και *ισόνομες* τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, ..., X_n$.

Την *κατανομή* χ^2 εισήγαγε ο *F. R. Helmert* το 1876, την *κατανομή t* το 1908 ο *W. L. Gosset* και την *κατανομή F* ο *G.W Snedecor* (το 1934) ο οποίος της έδωσε το όνομα *F* προς τιμήν του διακεκριμένου στατιστικού (και γενετιστή) *R. A. Fisher*, γι' αυτό στη βιβλιογραφία συναντάται και ως *κατανομή Fisher*, ως *κατανομή Snedecor* ή ως *κατανομή Snedecor-Fisher*. Σημειώνουμε, επίσης, ότι η *κατανομή t* είναι γνωστή και ως *κατανομή Student,* ψευδώνυμο του *Gosset* με το οποίο δημοσίευε τα άρθρα του. Για την προέλευση (γέννηση) της *κατανομής t,* θα δώσουμε σε επόμενη ενότητα και κάποιες επιπλέον χρήσιμες πληροφορίες.

Στη συνέχεια, για κάθε μια από αυτές τις τρεις κατανομές, δίνουμε μόνο τον ορισμό της, τη γραφική παράσταση της *συνάρτησης πυκνότητάς* της, τη *μέση τιμή* της, τη *διασπορά* της και τα *άνω* α*-ποσοστιαία σημεία* της, δηλαδή, μόνο τις ελάχιστες πληροφορίες που μας είναι απαραίτητες για να κατανοήσουμε και να μπορούμε να εφαρμόζουμε σωστά βασικές στατιστικές μεθόδους της *Στατιστικής Συμπερασματολογίας*.

Η κατανομή χ^2 *(chi-square distribution)*

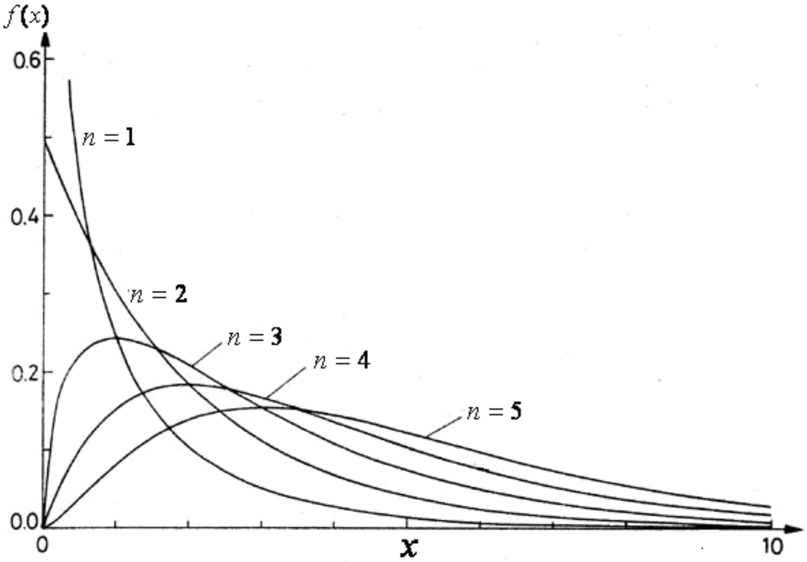
Αν $Z_1, Z_2, ..., Z_n$ είναι *n ανεξάρτητες τυποποιημένες κανονικές* τυχαίες μεταβλητές, δηλαδή, αν $Z_i \sim N(0, 1),\ i = 1,2,...,n$, τότε η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής,

$$X = Z_1^2 + Z_2^2 + ... + Z_n^2$$

ονομάζεται ***κατανομή χι-τετράγωνο με n βαθμούς ελευθερίας*** και συμβολίζεται με χ_n^2.

Είναι προφανές ότι πρόκειται για οικογένεια κατανομών. Για κάθε τιμή του *n* παίρνουμε και μια άλλη *κατανομή χι-τετράγωνο*. Είναι επίσης προφανές ότι μια τυχαία μεταβλητή *X* που ακολουθεί μια χ_n^2 *κατανομή* δεν παίρνει αρνητικές τιμές. Στο σχήμα που ακολουθεί φαίνεται η γραφική παράσταση της *συνάρτησης πυκνότητας* της $X = Z_1^2 + Z_2^2 + ... + Z_n^2 \sim \chi_n^2$ για διάφορες τιμές του *n*.

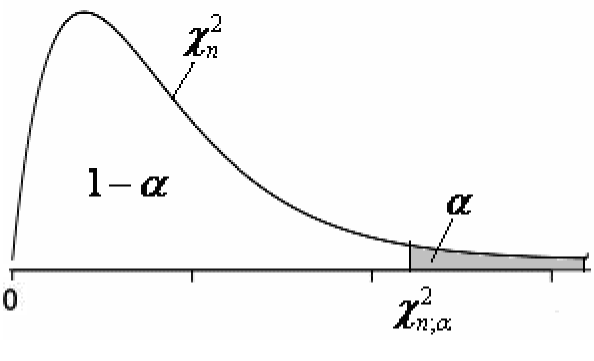
[1] *Φυσικά, δε μας κάνει εντύπωση!*



Αποδεικνύεται ότι η *μέση τιμή* της χ_n^2 είναι ίση με *n* και η *διασπορά* της είναι ίση με $2 \cdot n$. Δηλαδή, αν $X \sim \chi_n^2$ τότε $E(X) = n$ και $V(X) = 2 \cdot n$.

Παρατηρείστε στο παραπάνω σχήμα ότι όσο το *n* αυξάνεται τόσο η γραφική παράσταση της *συνάρτησης πυκνότητας* της χ_n^2 γίνεται πιο συμμετρική. Για $n > 30$, προσεγγίζεται πολύ ικανοποιητικά από την *κανονική* $N(n, 2n)$.

Όπως θα διαπιστώσουμε στα επόμενα, στη *Στατιστική Συμπερασματολογία* μάς είναι χρήσιμα τα *άνω* α*-ποσοστιαία σημεία* της χ_n^2 τα οποία έχει επικρατήσει να συμβολίζονται με $\chi_{n;\alpha}^2$ ή με $\chi_n^2(\alpha)$. Όπως φαίνεται και στο σχήμα που ακολουθεί, αν μια τυχαία μεταβλητή *X* ακολουθεί την κατανομή χ_n^2, δηλαδή αν $X \sim \chi_n^2$, τότε το $\chi_{n;\alpha}^2$ είναι εκείνη η τιμή της *X* για την οποία ισχύει $P(X > \chi_{n;\alpha}^2) = \alpha$, ή ισοδύναμα, $P(X \le \chi_{n;\alpha}^2) = 1 - \alpha$.



Για διευκόλυνσή μας, έχουν δημιουργηθεί πίνακες που μας δίνουν τα $\chi_{n;\alpha}^2$ για διάφορες τιμές του α και του *n*. Έτσι από τον πίνακα που υπάρχει στο τέλος της ενότητας παίρνουμε, για παράδειγμα, $\chi_{4;0.05}^2 = 9.488$, $\chi_{5;0.01}^2 = 15.086$ και $\chi_{7;0.995}^2 = 0.989$.

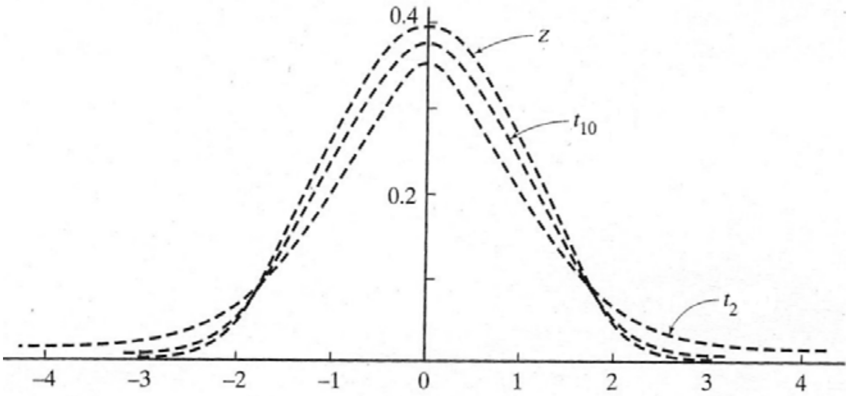
Η κατανομή t ή κατανομή Student (t-distribution ή Student distribution)

Έστω Z μια τυχαία μεταβλητή η οποία ακολουθεί την *τυποποιημένη κανονική κατανομή*, δηλαδή $Z \sim N(0, 1)$, και S_n μια τυχαία μεταβλητή *ανεξάρτητη* από την Z η οποία ακολουθεί την κατανομή χ_n^2, δηλαδή $S_n \sim \chi_n^2$. Τότε, η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής,

$$T = \frac{Z}{\sqrt{\frac{S_n}{n}}}$$

ονομάζεται ***κατανομή t ή κατανομή Student με n βαθμούς ελευθερίας*** και συμβολίζεται με t_n.

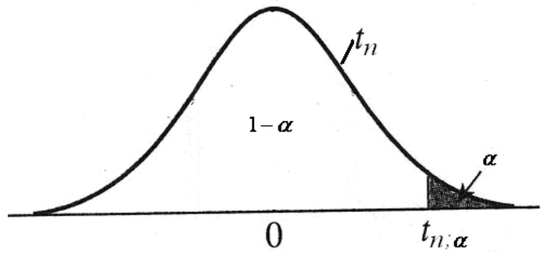
Είναι προφανές ότι πρόκειται για οικογένεια κατανομών. Για κάθε τιμή του n παίρνουμε και μια άλλη *κατανομή t*. Είναι επίσης προφανές ότι μια τυχαία μεταβλητή T που ακολουθεί μια t_n *κατανομή* παίρνει τιμές από $-\infty$ έως $+\infty$ όπως η *κανονική κατανομή*. Στο σχήμα που ακολουθεί φαίνεται η γραφική παράσταση της *συνάρτησης πυκνότητας* της $T \sim t_n$ για $n = 2$ και για $n = 10$. Επίσης φαίνεται η γραφική παράσταση της *συνάρτησης πυκνότητας* της $Z \sim N(0, 1)$.



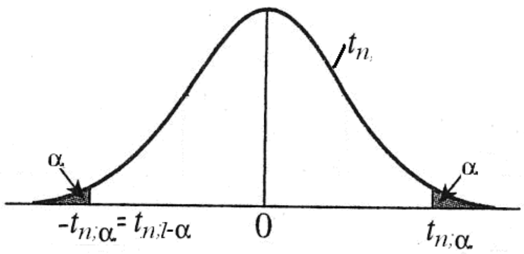
Παρατηρείστε στο παραπάνω σχήμα ότι η γραφική παράσταση της *συνάρτησης πυκνότητας* της $T \sim t_n$ έχει *κωδωνοειδή* μορφή και είναι συμμετρική ως προς τον κατακόρυφο άξονα στο 0, όπως η $Z \sim N(0, 1)$, όμως έχει πιο «παχιές» ουρές (είναι πιο πεπλατυσμένη). Όσο το n αυξάνεται η t_n προσεγγίζεται ικανοποιητικά από την *κανονική* $N(0, n/(n-2))$. Για $n > 30$, προσεγγίζεται πολύ καλά από την *τυποποιημένη κανονική* $N(0, 1)$.

Αποδεικνύεται ότι η *μέση τιμή* της t_n είναι ίση με 0 (για $n > 1$) και η *διασπορά* της, για $n > 2$, είναι ίση με $n/(n-2)$. Δηλαδή, αν $T \sim t_n$ τότε $E(T) = 0$ (για $n > 1$) και $V(T) = \dfrac{n}{n-2}$ (για $n > 2$).

Για την κατανομή t_n υπάρχουν πίνακες που δίνουν, για διάφορες τιμές του α και του n, τα *άνω α-ποσοστιαία σημεία* της, τα οποία συμβολίζονται με $t_{n;\alpha}$ ή με $t_n(\alpha)$. Όπως φαίνεται και στο σχήμα που ακολουθεί, αν μια τυχαία μεταβλητή T ακολουθεί την κατανομή t_n, δηλαδή αν $T \sim t_n$, τότε το $t_{n;\alpha}$ είναι εκείνη η τιμή της T για την οποία ισχύει $P(T > t_{n;\alpha}) = \alpha$, ή ισοδύναμα, $P(T \le t_{n;\alpha}) = 1 - \alpha$.



Όπως στην *κανονική κατανομή*, λόγω συμμετρίας της γραφικής παράστασης της *συνάρτησης πυκνότητας* της t_n, προφανώς ισχύει ότι: $t_{n;1-\alpha} = -t_{n;\alpha}$.



Έτσι, για παράδειγμα, αν μας ενδιαφέρει το ποσοστιαίο σημείο $t_{8;0.90}$, παρότι αυτό δε δίνεται στον πίνακα που υπάρχει στο τέλος της ενότητας, η τιμή του προκύπτει από τη σχέση $t_{8;0.90} = -t_{8;0.10} = -1.397$ αφού από τον πίνακα έχουμε ότι $t_{8;0.10} = 1.397$.

<u>Άσκηση</u>: Χρησιμοποιείστε τον πίνακα της τυποποιημένης κανονικής κατανομής για να επαληθεύσετε ότι η τελευταία γραμμή του πίνακα της κατανομής t_n δίνει τις τιμές των αντίστοιχων άνω α-ποσοστιαίων σημείων της τυποποιημένης κανονικής κατανομής, δηλαδή, τα αντίστοιχα z_α. Γιατί συμβαίνει αυτό;

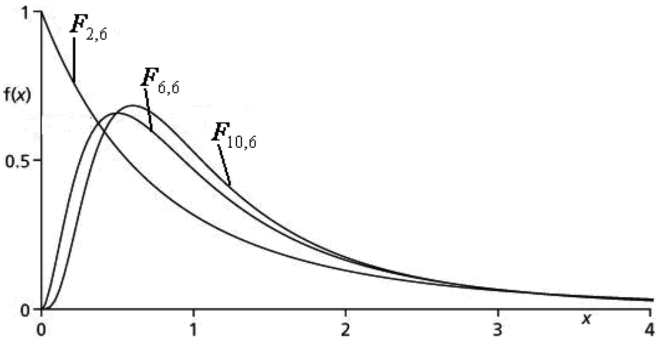
Η κατανομή F (F-distribution)

Έστω S_n και S_m δύο *ανεξάρτητες* τυχαίες μεταβλητές οι οποίες ακολουθούν τις κατανομές χ^2_n και χ^2_m αντίστοιχα. Τότε, η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής,

$$F = \frac{\frac{S_n}{n}}{\frac{S_m}{m}}$$

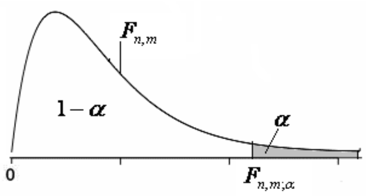
ονομάζεται ***κατανομή F με n και m βαθμούς ελευθερίας*** και συμβολίζεται με $F_{n,m}$.

Όπως και για τις κατανομές χ^2_n και t_n, πρόκειται για οικογένεια κατανομών. Για κάθε τιμή του *n* και κάθε τιμή του *m* παίρνουμε μια άλλη $F_{n,m}$ *κατανομή*. Επίσης, είναι φανερό ότι μια τυχαία μεταβλητή X που ακολουθεί μια $F_{n,m}$ *κατανομή* δεν παίρνει αρνητικές τιμές. Στο σχήμα που ακολουθεί φαίνεται η γραφική παράσταση της *συνάρτησης πυκνότητας* της $F_{n,m}$ για διάφορες τιμές των *n* και *m*. Παρατηρείστε ότι όσο αυξάνονται οι *βαθμοί ελευθερίας n* και *m* τόσο η (*θετική*) *ασυμμετρία* της γραφικής παράστασης της *συνάρτησης πυκνότητας* της $F_{n,m}$ μειώνεται.



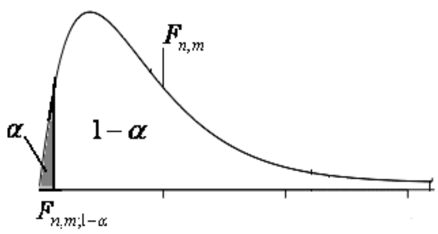
Αποδεικνύεται ότι η *μέση τιμή* και η *διασπορά* μιας τυχαίας μεταβλητής X που ακολουθεί την κατανομή $F_{n,m}$ ($X \sim F_{n,m}$) είναι, αντίστοιχα, $E(X) = \dfrac{m}{m-2}$ (για $m > 2$) και $V(X) = \dfrac{2 \cdot m^2 \cdot (n+m-2)}{n \cdot (m-2)^2 \cdot (m-4)}$ (για $m > 4$). Παρατηρείστε ότι η *μέση τιμή* της $F_{n,m}$ εξαρτάται μόνο από τους *βαθμούς ελευθερίας, m*, του παρανομαστή.

Όπως για τις κατανομές χ_n^2 και t_n που παρουσιάσαμε προηγουμένως, έτσι και για την *κατανομή F με n και m βαθμούς ελευθερίας* έχουν δημιουργηθεί πίνακες που δίνουν, για διάφορες τιμές του α, του *n* και του *m*, τα *άνω* α *-ποσοστιαία σημεία* της, τα οποία συμβολίζονται με $F_{n,m;\alpha}$ ή με $F_{n,m}(\alpha)$. Όπως φαίνεται και στο σχήμα που ακολουθεί, αν μια τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κατανομή $F_{n,m}$, δηλαδή αν $X \sim F_{n,m}$, τότε το $F_{n,m;\alpha}$ είναι εκείνη η τιμή της X για την οποία ισχύει $P(X > F_{n,m;\alpha}) = \alpha$, ή ισοδύναμα, $P(X \le F_{n;m\alpha}) = 1 - \alpha$.



Έτσι από τον πίνακα που υπάρχει στο τέλος της ενότητας παίρνουμε, για παράδειγμα, $F_{6,6;0.05} = 4.28$, $F_{10,6;0.05} = 4.06$ και $F_{6,10;0.05} = 3.22$.

Τέλος, αναφέρουμε ότι εύκολα[2] μπορεί να αποδειχθεί ότι, $F_{n,m;1-\alpha} = 1/F_{m,n;\alpha}$.



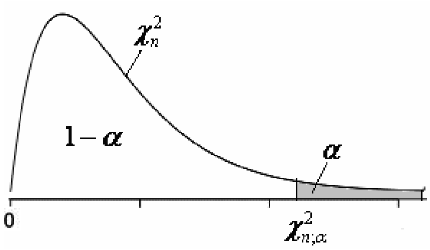
Έτσι, αν για παράδειγμα, θέλουμε την τιμή $F_{6,10;0.95}$, ενώ αυτή δε δίνεται από τους πίνακες που συνήθως υπάρχουν στα βιβλία *Στατιστικής*, μπορούμε να την υπολογίσουμε από την προηγούμενη σχέση ως εξής: $F_{6,10,0.95} = F_{6,10;1-0.05} = 1/F_{10,6;0.05} = 1/4.06 = 0.246$.

[2] *Αν* $X \sim F_{n,m}$ *τότε* $1/X \sim F_{m,n}$. *Άρα,* $P(X \le F_{n,m;1-\alpha}) = \alpha \Leftrightarrow P(1/X \ge 1/F_{n,m;1-\alpha}) = \alpha$ *και επομένως από τον ορισμό των άνω* α *-ποσοστιαίων σημείων προκύπτει η ζητούμενη σχέση (αφού* $1/X \sim F_{m,n}$*).*

Τιμές $\chi^2_{n;a}$ της κατανομής χ^2_n

Ο Πίνακας δίνει τα άνω α -ποσοστιαία σημεία
της κατανομής χ^2 με n βαθμούς ελευθερίας

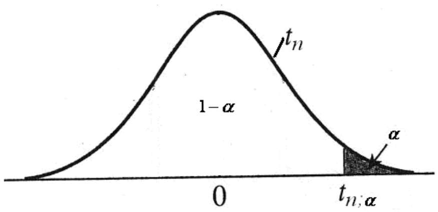
Αν $X \sim \chi^2_n$, ισχύει, $P(X > \chi^2_{n;\alpha}) = \alpha$.



n	*α = 0.995*	*α = 0.99*	*α = 0.975*	*α = 0.95*	*α = 0.05*	*α = 0.025*	*α = 0.01*	*α = 0.005*
1	0.000	0.000	0.001	0.004	3.841	5.024	6.635	7.879
2	0.010	0.020	0.051	0.103	5.991	7.378	9.210	10.597
3	0.072	0.115	0.216	0.352	7.815	9.348	11.345	12.838
4	0.207	0.297	0.484	0.711	9.488	11.143	13.277	14.860
5	0.412	0.554	0.831	1.145	11.070	12.832	15.086	16.750
6	0.676	0.872	1.237	1.635	12.592	14.449	16.812	18.548
7	0.989	1.239	1.690	2.167	14.067	16.013	18.475	20.278
8	1.344	1.647	2.180	2.733	15.507	17.535	20.090	21.955
9	1.735	2.088	2.700	3.325	16.919	19.023	21.666	23.589
10	2.156	2.558	3.247	3.940	18.307	20.483	23.209	25.188
11	2.603	3.053	3.816	4.575	19.675	21,920	24.725	26.757
12	3.074	3.571	4.404	5.226	21.026	23.337	26.217	28.300
13	3.565	4.107	5.009	5.892	22.362	24.736	27.688	29.819
14	4.075	4.660	5.629	6.571	23.685	26.119	29.141	31.319
15	4.601	5.229	6.262	7.261	24.996	27.488	30.578	32.801
16	5.142	5.812	6.908	7.962	26.296	28.845	32.000	34.267
17	5.697	6.408	7.564	8.672	27.587	30.191	33.409	35.718
18	6.265	7.015	8.231	9.390	28.869	31.526	34.805	37.156
19	6.844	7.633	8.907	10.117	30.144	32.852	36.191	38.582
20	7.434	8.260	9.591	10.851	31.414	34.170	37.566	39.997
21	8.034	8.897	10.283	11.591	32.671	35.479	38.932	41.401
22	8.643	9.542	10.982	12.338	33.924	36.781	40.289	42.796
23	9.260	10.196	11.689	13.091	35.172	38.076	41.638	44.181
24	9.886	10.856	12.401	13.848	36.415	39.364	42.980	45.558
25	10.520	11.524	13.120	14.611	37.652	40.646	44.314	46.928
26	11.160	12.198	13.844	15.379	38.885	41.923	45.642	48.290
27	11.808	12.878	14.573	16.151	40.113	43.194	46.963	49.645
28	12.461	13.565	15.308	16.928	41.337	44.461	48.278	50.994
29	13.121	14.256	16.047	17.708	42.557	45.722	49.588	52.335
30	13.787	14.953	16.791	18.493	43.773	46.979	50.892	53.672
40	20.706	22.164	24.4331	26.509	55.756	59.342	63.691	66.766
50	27.991	29.708	32.3574	34.764	67.505	71.420	76.154	79.490
60	35.535	37.485	40.4817	43.188	79.082	83.298	88.379	91.952
70	43.275	45.442	48.7576	51.739	90.531	95.023	100.425	104.215
80	51.172	53.540	57.1532	60.392	101.879	106.629	112.329	116.321
90	59.196	61.754	65.6466	69.126	113.145	118.136	124.116	128.299
100	67.328	70.065	74.2219	77.930	124.342	129.561	135.807	140.169

Τιμές $t_{n;a}$ της κατανομής t_n

Ο Πίνακας δίνει τα άνω α -ποσοστιαία σημεία
της κατανομής t με n βαθμούς ελευθερίας
Αν $T \sim t_n$, ισχύει, $P(T > t_{n;\alpha}) = \alpha$. Επίσης, ισχύει, $t_{n;1-\alpha} = -t_{n;a}$

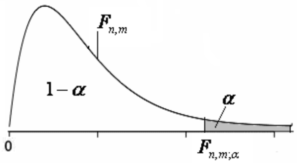


n	*α = 0.1*	*α = 0.05*	*α = 0.025*	*α = 0.01*	*α = 0.005*
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
∞	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

Τιμές $F_{n,m;\alpha}$ της κατανομής $F_{n,m}$

Οι Πίνακες δίνουν τα άνω α -ποσοστιαία σημεία της κατανομής F με n και m βαθμούς ελευθερίας, για $\alpha = 0.05$ και $\alpha = 0.01$, αντίστοιχα.

Αν $X \sim F_{n,m}$, ισχύει, $P(X > F_{n,m;\alpha}) = \alpha$. Επίσης ισχύει, $F_{n,m;1-\alpha} = 1/F_{m,n;\alpha}$



n = Βαθμοί ελευθερίας για τον αριθμητή

m = Βαθμοί ελευθερίας για τον παρονομαστή

$\alpha = 0.05$

m \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	248	249	250	251	252	253	254
2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
3	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.37
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

n = Βαθμοί ελευθερίας για τον αριθμητή

m = Βαθμοί ελευθερίας για τον παρονομαστή

$\alpha = 0.01$

m \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	4,052	5,000	5,403	5,625	5,764	5,859	5,928	5,982	6,023	6,056	6,106	6,157	6,209	6,235	6,261	6,287	6,313	6,339	6,366
2	98.5	99.0	99.2	99.2	99.3	99.3	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5
3	34.1	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.3	27.2	27.1	26.9	26.7	26.6	26.5	26.4	26.3	26.2	26.1
4	21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.7	14.5	14.4	14.2	14.0	13.9	13.8	13.7	13.7	13.6	13.5
5	16.3	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.2	10.1	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02
6	13.7	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
7	12.2	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
8	11.3	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86
9	10.6	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31
10	10.0	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.78	3.69	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.43	3.34	3.25	3.17
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.70	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09	3.00
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.84	2.75
17	8.40	6.11	5.19	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.83	2.75	2.65
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57
19	8.19	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.86	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85	2.70	2.62	2.53	2.45	2.36	2.27	2.17
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.47	1.32	1.00