ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΑΝΟΙΚΤΑ ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ

Πιθανότητες

Ερμηνεία και Μπεϋζιανή Στατιστική

Διδάσκων: Επίκουρος Καθηγητής
Κωνσταντίνος Μπλέκας

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

I7. Πολλαπλασιαστικός τύπος

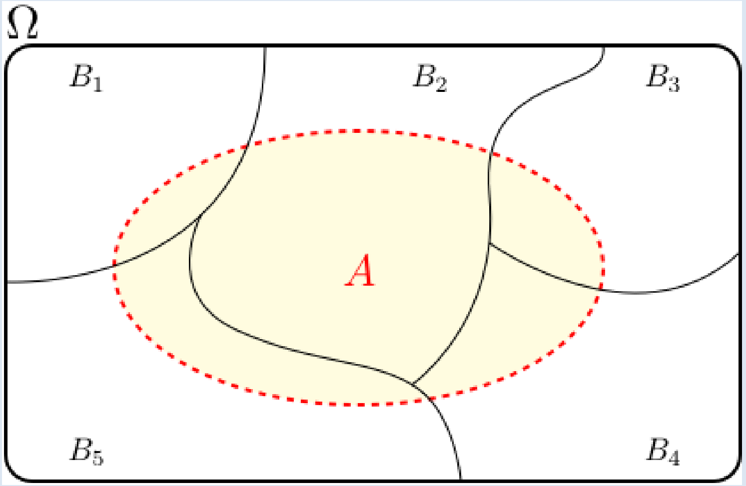
$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \Leftrightarrow P(A\cap B)=P(B)P(A|B)$$

P(A $\cap$ *B)* : η από-κοινού πιθανότητα να συμβεί (ταυτόχρονα) το *A* και το *B*.

<u>Ερμηνεία</u>: Για να ισχύουν και τα 2 ταυτόχρονα, θα πρέπει να συμβεί ένα από τα δύο (Β) και εφόσον ισχύει αυτό να ισχύει και το άλλο (Α).

Ι8. Θεώρημα της Ολικής Πιθανότητας

Έστω δ.χ. Ω με n ασυμβίβαστα ενδεχόμενα $B_1, B_2, \ldots, B_n$ που καλύπτουν τον Ω, δηλ. $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = \Omega$, $B_i \cap B_j = \varnothing \ \forall i,j$.



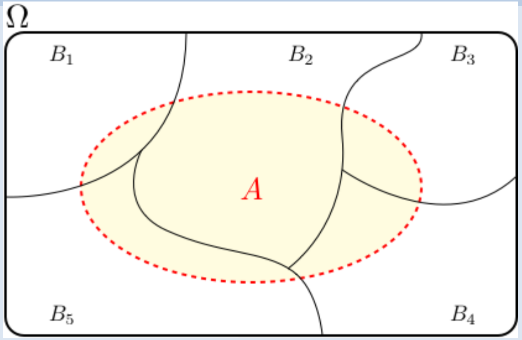
Έστω ότι εμφανίζεται ένα ενδεχόμενο A.

Τότε η P(A) ονομάζεται <u>ολική πιθανότητα</u> και υπολογίζεται ως εξής:

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \ldots + P(A \cap B_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) P(A | B_i)$$

Ι9. Κανόνας του Bayes



Έστω δ.χ. *Ω* με *n* ασυμβίβαστα ενδεχόμενα $B_1, B_2, \ldots, B_n$ με **εκ των προτέρων** (**prior**) πιθανότητα $P(B_i) > 0$. Έστω ότι εμφανίζεται το ενδεχόμενο A. Ψάχνουμε να βρούμε κατά πόσο μεταβλήθηκε η πιθανότητα του B_i **μετά την εμφάνιση του A**.

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} = \frac{P(A \mid B_i) P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A \mid B_j) P(B_j)}$$

$P(B_i|A)$: **εκ των υστέρων πιθανότητα (a-posteriori)** του B_i μετά το A.
Ο παρονομαστής P(A) είναι η **ολική πιθανότητα** (για κανονικοποίηση).

Βάση της **Μπεϋζιανής Στατιστικής**

I10. Ανεξαρτησία ενδεχομένων

Δύο ενδεχόμενα A, B λέγονται **ανεξάρτητα** όταν ισχύει *P(A|B)=P(A)*
δηλ. η γνώση του ενός (B) δεν επηρεάζει την πιθανότητα του άλλου (A).
Ισοδύναμος τύπος (χρησιμοποιώντας τον πολλαπλασιαστικό τύπο)

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(A)\, P(B)$$

Αποτελούν ικανές και αναγκαίες συνθήκες για ανεξαρτησία.

Εξαρτημένα ενδεχόμενα (αλληλουχία εξαρτήσεων):

$$P\left(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n\right) = P\left(A_1\right)P\left(A_2 \mid A_1\right)P\left(A_3 \mid A_1 \cap A_2\right)\cdots P\left(A_n \mid A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}\right)$$

Αν έχουμε εξάρτηση μόνο από το προηγούμενο (εξάρτηση $1^{ης}$ τάξης), τότε:

$$P\left(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n\right) = P\left(A_1\right)P\left(A_2 \mid A_1\right)P\left(A_3 \mid A_2\right)\cdots P\left(A_n \mid A_{n-1}\right)$$

Μαρκοβιανή αλυσίδα: στοχαστική διαδικασία (ή ανέλιξη) μεταβάσεων από κατάσταση σε κατάσταση, όπου το «παρελθόν» της πρόσφατης κατάστασης καθορίζει το «μέλλον» της διαδικασίας.

Ι11. Αξιοπιστία Συστημάτων

R : η συνολική πιθανότητα λειτουργίας ενός συστήματος αποτελούμενο από n ανεξάρτητες στοχαστικές μονάδες A_i καλείται **αξιοπιστία συστήματος**. Κάθε μονάδα έχει μία πιθανότητα λειτουργίας $P(A_i)=p_i$.

Ανάλογα με την διάταξή τους (συνδεσμολογία) διακρίνουμε:

- *n*-ανεξάρτητες μονάδες <u>σε σειρά</u>.

$$R = P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)\cdots P(A_n) = \prod_{i=1}^{n} p_i$$

- *n*-ανεξάρτητες μονάδες συνδεδεμένες <u>παράλληλα</u>.

$$R = P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = 1 - P(A_1' \cap A_2' \cap \ldots \cap A_n') =$$

$$= 1 - (1 - P(A_1))(1 - P(A_2))\cdots(1 - P(A_n)) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - p_i)$$

- <u>Σύνθετες</u> συνδεσμολογίες (σε σειρά και παράλληλα).

Τέλος Ενότητας

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Σημειώματα

Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση 1.0.

Έχουν προηγηθεί οι κάτωθι εκδόσεις:

- Έκδοση 1.0 διαθέσιμη εδώ. http://ecourse.uoi.gr/course/view.php?id=1178.

Σημείωμα Αναφοράς

Copyright Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, Διδάσκων: Επίκουρος Καθηγητής Κωνσταντίνος Μπλέκας. «Πιθανότητες. Ερμηνεία και Μπεϋζιανή Στατιστική». Έκδοση: 1.0. Ιωάννινα 2014. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση: http://ecourse.uoi.gr/course/view.php?id=1178.