ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΚΑΙ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΩΝ ΚΛΩΘΟΕΙΔΟΥΣ, ΙΔΙΑΙΤΕΡΑ ΣΕ ΜΗ ΤΥΠΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ.

Ν. Ε. Ηλιού
Επίκουρος Καθηγητής Τμήματος Πολιτικών Μηχανικών Πανεπιστημίου Θεσσαλίας

Γ. Δ. Καλιαμπέτσος
Επιστημονικός Συνεργάτης Τμήματος Πολιτικών Μηχανικών Πανεπιστημίου Θεσσαλίας

Σχεδιασμός, Χάραξη, Καμπύλη Συναρμογής, Κλωθοειδής

ΠΕΡΙΛΗΨΗ: Η κλωθοειδής είναι η καμπύλη που χρησιμοποιείται κατά τη μετάβαση από ευθυγραμμία σε κυκλικό τόξο και αντίστροφα αλλά και για τη συναρμογή δύο ομόρροπων κυκλικών τόξων διαφορετικών ακτίνων. Στη βιβλιογραφία δίνονται οι σχέσεις για τον υπολογισμό των συντεταγμένων Χ και Υ ενός σημείου της κλωθοειδούς με τη μορφή σειρών Tailor. Σ' αυτή την εργασία παρουσιάζεται ο υπολογισμός όσωνδήποτε όρων αυτών των σειρών με αναδρομικές σχέσεις, που είναι κατάλληλες για χρήση από ένα πρόγραμμα ή ένα λογιστικό φύλλο ή ακόμη για πρόχειρους υπολογισμούς με αριθμομηχανή. Επίσης δίνονται πίνακες για διαφορετικούς λόγους L/A, ώστε ο μελετητής να γνωρίζει τα περιθώρια σφάλματος των γρήγορων-πρόχειρων υπολογισμών στις διάφορες περιοχές χρησιμοποίησης της κλωθοειδούς, ιδιαίτερα δε στις περιπτώσεις που μελετώνται έργα με σημαντική διαφοροποίηση από τα θεωρούμενα ως τυπικά.

1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η κλωθοειδής είναι το τόξο συναρμογής που χρησιμοποιείται κυρίως στα έργα οδοποιίας τόσο στην Ελλάδα όσο και διεθνώς. Με τη χρήση της επιτυγχάνεται η μετάβαση από μία καμπυλότητα σε μία άλλη και πιο συγκεκριμένα η συνεχής γραμμική μεταβολή της φυγόκεντρης επιτάχυνσης. Κλωθοειδής χρησιμοποιείται κατά τη μετάβαση από ευθυγραμμία σε κυκλικό τόξο και αντίστροφα αλλά και για τη συναρμογή δύο ομόρροπων κυκλικών τόξων διαφορετικών ακτίνων.

Στην Ελληνική και διεθνή βιβλιογραφία (Kasper 1954, Γιώτης 1990, Lamm 1999) δίνονται οι σχέσεις για τον υπολογισμό των συντεταγμένων Χ και Υ ενός σημείου της κλωθοειδούς με τη μορφή σειρών Tailor, των οποίων συνήθως αναφέρονται οι 3-4 πρώτοι όροι. Στις πρόσφατες Οδηγίες Μελετών Οδικών Έργων δίνονται οι αριθμητικές τιμές των συντελεστών των λόγων L^{n+1}/A^n για τους 5 πρώτους όρους των σειρών. Θεωρούμε ότι είναι ιδιαίτερα χρήσιμο για τον Έλληνα μηχανικό να γνωρίζει την μεθοδολογία που προκύπτουν αυτές οι σχέσεις καθώς και έναν απλό τρόπο να υπολογίζει αυτούς τους όρους.

Σ' αυτή την εργασία παρουσιάζεται ο υπολογισμός όσωνδήποτε όρων αυτών των σειρών με αναδρομικές σχέσεις. Αυτές οι σχέσεις είναι κατάλληλες να εισαχθούν σε ένα πρόγραμμα ή σε ένα λογιστικό φύλλο ή ακόμη να χρησιμοποιηθούν για πρόχειρους υπολογισμούς με αριθμομηχανή. Τέλος δίνονται πίνακες που παρουσιάζουν την συμβολή των διάφορων όρων για διαφορετικούς λόγους L/A, ώστε ο μελετητής να γνωρίζει τα περιθώρια σφάλματος των υπολογισμών στις διάφορες περιοχές χρησιμοποίησης της κλωθοειδούς και να μπορεί να εκτιμήσει πότε ένας γρήγορος-πρόχειρος υπολογισμός είναι και ακριβής, ιδιαίτερα στις περιπτώσεις σχεδιασμού έργων με σημαντική διαφοροποίηση από τα θεωρούμενα ως τυπικά.

2 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΤΗΣ ΚΛΩΘΟΕΙΔΟΥΣ

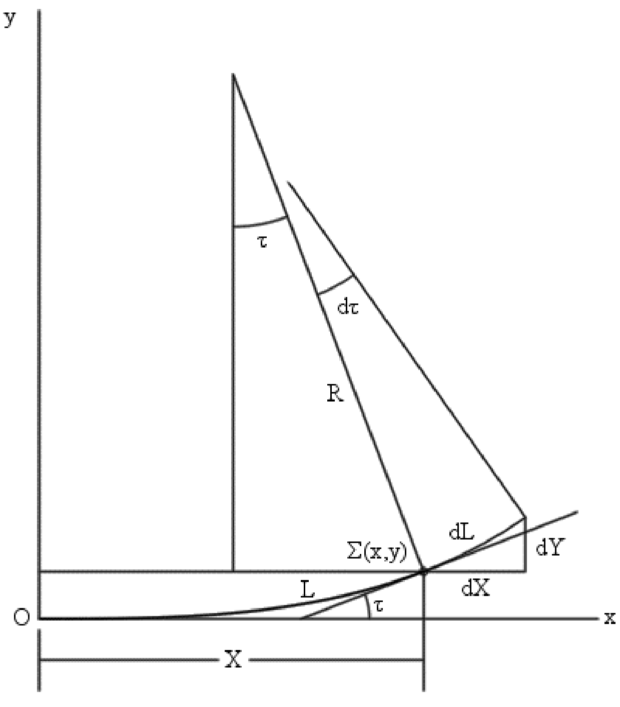
Για λόγους πληρότητας της παρουσίασης θα προηγηθεί της επίλυσης της κλωθοειδούς η μαθηματική εισαγωγή της (Γιώτης 1990) και η σύνδεσή της με την κίνηση του οχήματος. Αν υποθέσουμε ότι ένα όχημα εισέρχεται σε μία στροφή διατηρώντας την ταχύτητά του υ σταθερή τότε αυτή θα δίνεται από τη σχέση:

$$\upsilon = \frac{dL}{dt} = C_1 \tag{1}$$

όπου η σταθερά C_1 έχει διαστάσεις (m/s). Αν στο τόξο συναρμογής (Σχ. 1) ο οδηγός στρέφει το τιμόνι με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, τότε η γωνιακή επιτάχυνση του οχήματος θα είναι σταθερή ή η γωνιακή ταχύτητά του θα μεταβάλλεται γραμμικά με το χρόνο και θα δίνεται από τη σχέση:

$$\omega = \frac{d\tau}{dt} = C_2 t \tag{2}$$

όπου η σταθερά C_2 θα έχει διαστάσεις ($1/s^2$).



Σχήμα 1: Τόξο Συναρμογής (Κλωθοειδής)

Χρησιμοποιώντας τη σχέση $t = L / \upsilon$ η (2) γίνεται:

$$\frac{d\tau}{dt} = C_2 \frac{L}{\upsilon} \;\Rightarrow\; d\tau = C_2 \frac{L}{\upsilon} dt \tag{3}$$

Αντικαθιστώντας βάσει των σχέσεων (4)

$$\upsilon = C_1 , \quad dt = \frac{dL}{C_1} \tag{4}$$

όπως αυτές προκύπτουν από την (1), η σχέση (3) γίνεται:

$$d\tau = C_2 \frac{L}{C_1} \frac{dL}{C_1} \;\Rightarrow\; \frac{d\tau}{dL} = \frac{C_2}{C_1^2} L \tag{5}$$

ή οποία με την αντικατάσταση της (6)

$$\frac{C_2}{C_1^2} = \frac{1}{A^2} \tag{6}$$

καταλήγει στην:

$$\frac{d\tau}{dL} = \frac{1}{A^2} L \tag{7}$$

Αλλά από το Σχήμα 1 προκύπτει η σχέση:

$$dL = R d\tau \tag{8}$$

ή οποία χρησιμοποιώντας και την (7) γράφεται:

$$\frac{d\tau}{dL} = \frac{1}{R} = \frac{1}{A^2} L \tag{9}$$

και προκύπτει τελικά η σχέση:

$$RL = A^2 \tag{10}$$

που είναι η εξίσωση της κλωθοειδούς. Το μέγεθος A ονομάζεται παράμετρος της κλωθοειδούς και οι διαστάσεις του είναι σε μέτρα όπως προκύπτει από τη σχέση (10) αλλά και από τον αρχικό ορισμό του με την σχέση (6).

Η εξίσωση της κλωθοειδούς δείχνει ότι σε οποιοδήποτε σημείο της, το γινόμενο της απόστασής της από την αρχή (L) επί την ακτίνα καμπυλότητας σε εκείνη τη θέση (R) είναι σταθερό και ίσο με το τετράγωνο της παραμέτρου (A) που την χαρακτηρίζει. Για να εξεταστεί η κλωθοειδής από την σκοπιά της καμπυλότητας, η σχέση (9) διατυπώνεται με την παρακάτω μορφή:

$$u(L) = \frac{1}{R(L)} = \frac{1}{A^2} L \tag{11}$$

Από τη σχέση (11) προκύπτει ότι μέσα στο τόξο συναρμογής η καμπυλότητα μεταβάλλεται γραμμικά με το μήκος *L*. Αυτό είναι και το βασικό χαρακτηριστικό της κλωθοειδούς που την κάνει κατάλληλη να παρεμβληθεί ώστε να συναρμόσει την μηδενική καμπυλότητα της ευθυγραμμίας με την σταθερή καμπυλότητα $1/R$ του κυκλικού τόξου.

3 ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΗΣ ΚΛΩΘΟΕΙΔΟΥΣ

Η διαδικασία επίλυσης της κλωθοειδούς, η οποία περιγράφεται στη βιβλιογραφία (Kasper 1954, Γιώτης 1990, Lamm 1999), αναλύεται διεξοδικά παρακάτω και στη συνέχεια δίνονται αναδρομικές σχέσεις για τον απλοποίηση των τελικών υπολογισμών. Από τις σχέσεις (8) και (10) προκύπτει η παρακάτω:

$$dL = \frac{A^2}{L} d\tau \;\; \Rightarrow \;\; LdL = A^2 d\tau \tag{12}$$

της οποίας ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη έχουμε:

$$\int LdL = \int A^2 d\tau + C' = A^2 \int d\tau + C' \;\; \Rightarrow \;\; \frac{L^2}{2} = A^2 \tau + C' \tag{13}$$

και επειδή για $\tau=0$ είναι και $L=0$, θα ισχύει $C'=0$ δηλαδή για τη γωνία τ (σε rad) θα ισχύει:

$$\tau = \frac{L^2}{2A^2} \tag{14}$$

Από το Σχήμα 1 προκύπτουν οι σχέσεις:

$$dX = dL \cos\tau \,, \quad dY = dL \sin\tau \tag{15}$$

οι οποίες με βάση τη (14) γίνονται:

$$dX = dL \cos\left(\frac{L^2}{2A^2}\right), \quad dY = dL \sin\left(\frac{L^2}{2A^2}\right) \tag{16}$$

Ολοκληρώνοντας τις παραπάνω θα έχουμε:

$$x = \int_0^1 \cos\left(\frac{L^2}{2A^2}\right) dL \,, \;\; y = \int_0^1 \sin\left(\frac{L^2}{2A^2}\right) dL \tag{17}$$

Οι συναρτήσεις cos και sin αναπτύσσονται σε σειρές Tailor όπως παρακάτω:

$$\cos a = 1 - \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} - \frac{a^6}{6!} + \cdots \quad , \quad \sin a = a - \frac{a^3}{3!} + \frac{a^5}{5!} - \frac{a^7}{7!} + \cdots \tag{18}$$

Από τις σχέσεις (18), που σε συμβολική μορφή γράφονται:

$$\cos a = \sum_0^k (-1)^n \frac{a^{2n}}{(2n)!} \ , \quad \sin a = \sum_0^k (-1)^n \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!} \tag{19}$$

προκύπτουν οι παρακάτω:

$$\cos\left(\frac{L^2}{2A^2}\right) = \sum_{n=0}^k (-1)^n \frac{L^{4n}}{(2n)!\left(2A^2\right)^{2n}} = \sum_{n=0}^k (-1)^n \frac{L^{4n}}{(2n)!2^{2n} A^{4n}} \tag{20}$$

$$\sin\left(\frac{L^2}{2A^2}\right) = \sum_{n=0}^k (-1)^n \frac{L^{4n+2}}{(2n+1)!\left(2A^2\right)^{2n+1}} = \sum_{n=0}^k (-1)^n \frac{L^{4n+2}}{(2n+1)!2^{2n+1} A^{4n+2}} \tag{21}$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (20), (21) στις (17) έχουμε:

$$x = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^k (-1)^n \frac{L^{4n}}{(2n)!2^{2n} A^{4n}} \right) dL \tag{22}$$

$$y = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^k (-1)^n \frac{L^{4n+2}}{(2n+1)!2^{2n+1} A^{4n+2}} \right) dL \tag{23}$$

και ολοκληρώνοντας θα έχουμε:

$$x = \sum_{n=0}^k (-1)^n \frac{1^{4n+1}}{(4n+1)(2n)!2^{2n} A^{4n}} \tag{24}$$

$$y = \sum_{n=0}^k (-1)^n \frac{1^{4n+3}}{(4n+3)(2n+1)!2^{2n+1} A^{4n+2}} \tag{25}$$

οι οποίες μας δίνουν τις συντεταγμένες οποιουδήποτε σημείου της κλωθοειδούς. Για τον απλούστερο υπολογισμό οσωνδήποτε όρων των παραπάνω σειρών θα χρησιμοποιήσουμε συντελεστές που μπορούν να προκύψουν από αναδρομικές σχέσεις. Οι σειρές των σχέσεων (24), (25) γράφονται διαφορετικά:

$$x = \sum_{n=0}^k (-1)^n \frac{1^{4n+1}}{A^{4n}} \frac{1}{a_n}, \quad a_n = (4n+1)(2n)!2^{2n}, \qquad a_0 = 1 \tag{26}$$

$$y = \sum_{n=0}^k (-1)^n \frac{1^{4n+3}}{A^{4n+2}} \frac{1}{b_n}, \quad b_n = (4n+3)(2n+1)!2^{2n+1}, \quad b_0 = 6 \tag{27}$$

όπου οι συντελεστές a_n, b_n για *n=1..k* προκύπτουν και από αναδρομικές σχέσεις όπως παρακάτω:

$$a_n = (4n+1)\,p_n, \quad p_n = 8n(2n-1)\,p_{n-1}, \quad p_0 = 1 \tag{28}$$

$$b_n = (4n+3)q_n, \quad q_n = 8n(2n+1)q_{n-1}, \quad q_0 = 2 \tag{29}$$

Στον Πίνακα 1 φαίνονται αναλυτικά οι υπολογισμοί των πρώτων 6 συντελεστών *p* και *a* με βάση τις σχέσεις (28). Εύκολα θα μπορούσε ο υπολογισμός να επεκταθεί σε περισσότερους συντελεστές αλλά αυτό δεν θα είχε πρακτικό αποτέλεσμα.

Πίνακας 1. Αναλυτικοί υπολογισμοί συντελεστών *α*.

n	4*n*+1	8*n*	2*n*-1	*p*	*α*
0	1	-	-	1	1
1	5	8	1	8	40
2	9	16	3	384	3,456
3	13	24	5	46,080	599,040
4	17	32	7	10,321,920	175,472,640
5	21	40	9	3,715,891,200	78,033,715,200

Στον Πίνακα 2 φαίνονται αναλυτικά οι υπολογισμοί των πρώτων 6 συντελεστών *q* και *b* με βάση τις σχέσεις (29). Ο τελευταίος όρος οδηγεί σε υπερβολικά μεγάλο παρανομαστή, απλώς υπάρχει για λόγους ομοιομορφίας και σύγκρισης με τον προηγούμενο πίνακα.

Πίνακας 2. Αναλυτικοί υπολογισμοί συντελεστών *b*.

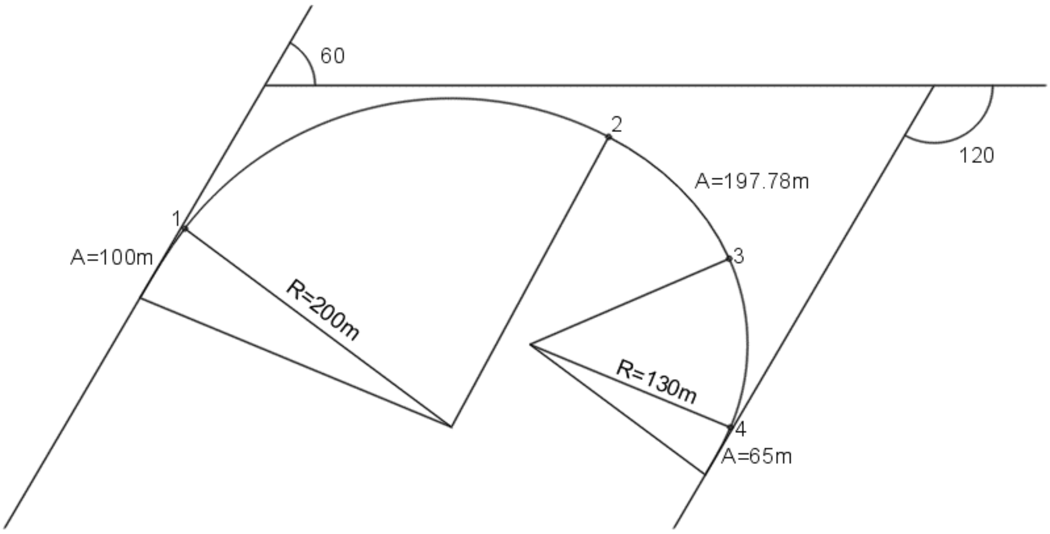
n	4*n*+3	8*n*	2*n*+1	*q*	*b*
0	3	-	-	2	6
1	7	8	3	48	336
2	11	16	5	3,840	42,240
3	15	24	7	645,120	9,676,800
4	19	32	9	185,794,560	3,530,096,640
5	23	40	11	81,749,606,400	1,880,240,947,200

Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα των πινάκων μπορούμε να γράψουμε τους πρώτους όρους των σχέσεων (26), (27) όπως παρακάτω:

$$x = 1 - \frac{1^5}{40A^4} + \frac{1^9}{3456A^8} - \frac{1^{13}}{599040A^{12}} + \frac{1^{17}}{175472640A^{16}} - \frac{1^{21}}{78033715200A^{20}} \cdots \tag{30}$$

$$y = \frac{1^3}{6A^2} - \frac{1^7}{336A^6} + \frac{1^{11}}{42240A^{10}} - \frac{1^{15}}{9676800A^{14}} + \frac{1^{19}}{3530096640A^{18}} \cdots \tag{31}$$

Στις συνηθισμένες περιπτώσεις, όπου επιλέγεται παράμετρος κλωθοειδούς *A* μεγαλύτερη από *R*/3 και αρκετά μικρότερη από *R* και το μήκος κλωθοειδούς *L* δεν υπερβαίνει το *A*, αρκούν για ικανοποιητική ακρίβεια οι δύο πρώτοι όροι της σειράς (30) και μόνο ο πρώτος της σειράς (31), οι οποίοι οδηγούν και σε πολύ απλούς υπολογισμούς. Υπάρχουν όμως περιπτώσεις που για τον ακριβή υπολογισμό των συντεταγμένων των σημείων της κλωθοειδούς επιβάλλεται να χρησιμοποιηθούν περισσότεροι όροι.



Σχήμα 2. Παράδειγμα μη τυπικής χάραξης

4 ΔΙΕΡΕΥΝΗΣΗ ΣΕ ΜΗ ΤΥΠΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Όταν η κλωθοειδής χρησιμοποιείται με τη μορφή της ωοειδούς, σαν καμπύλη συναρμογής μεταξύ δύο ομόρροπων κυκλικών τόξων, υπάρχουν περιπτώσεις που η παράμετρος της ωοειδούς A είναι μεγαλύτερη από την ακτίνα του ενός κυκλικού τόξου άρα το συνολικό μήκος κλωθοειδούς L είναι μεγαλύτερο από την παράμετρο A.

Θα διερευνηθεί μια τέτοια περίπτωση μέσα από ένα παράδειγμα χάραξης με τη χρήση ωοειδούς. Στο Σχήμα 2 φαίνονται δύο διαδοχικά κυκλικά τόξα ακτίνων $R1$=200m και $R2$=130m μεταξύ των οποίων μεσολαβεί μία ωοειδής καμπύλη με παράμετρο A=197.78m. Η τιμή αυτή αντιστοιχεί στη μοναδική λύση τόξου συναρμογής μεταξύ των δύο κυκλικών τόξων αν θεωρήσουμε δεδομένη την πολυγωνική της χάραξης.

Πριν το πρώτο κυκλικό τόξο έχουμε κλωθοειδή εισόδου με παράμετρο A=100m και μετά το δεύτερο κυκλικό τόξο κλωθοειδή εξόδου με παράμετρο A=65m. Οι τιμές της παραμέτρου που επιλέχθηκαν για τις εκατέρωθεν κλωθοειδείς είναι τέτοιες ώστε να προκύπτουν μικρά σχετικά μήκη κλωθοειδούς και στους σχετικούς πίνακες να είναι εμφανής η διαφορά, ανάμεσα σε τυπικές και μη τυπικές εφαρμογές, όσον αφορά στην ακρίβεια των υπολογισμών με τη χρήση των δύο πρώτων όρων.

Έχουν επιλεγεί μερικά χαρακτηριστικά σημεία πάνω στον άξονα, αυτά που σημειώνονται με τους αριθμούς 1-4, για τα οποία θα υπολογιστούν τα x, y της κλωθοειδούς. Στον Πίνακα 3 φαίνονται αναλυτικά οι τιμές των όρων, των οποίων το αλγεβρικό άθροισμα είναι η τιμή της τετμημένης x. Σε κάθε στήλη φαίνονται οι όροι που αντιστοιχούν στο κάθε χαρακτηριστικό σημείο του άξονα.

Πίνακας 3. Υπολογισμός επιμέρους όρων τετμημένης *x*

Όρος(n)	Σημείο 1	Σημείο 2	Σημείο 3	Σημείο 4
0	50.000000	195.580000	300.900000	32.5000
1	-0.078120	-4.675550	-40.301522	-0.0507
2	0.000056	0.051747	2.499004	0.0000
3	-0.000000	-0.000285	-0.077240	-0.0000
4	0.000000	0.000001	0.001413	0.0000
5	-0.000000	-0.000000	-0.000017	-0.0000

Βλέπουμε ότι για τα σημεία 1 και 4, εκατέρωθεν κλωθοειδείς με μικρά σχετικά μήκη, αρκούν οι δύο πρώτοι όροι για τον υπολογισμό της προβολής τους x πάνω στην πολυγωνική. Για το σημείο 2 είναι υπολογίσιμος και ο τρίτος όρος ενώ για το σημείο 3 αυτός είναι πολύ σημαντικός και είναι υπολογίσιμος και ο τέταρτος.

Στον Πίνακα 4 φαίνονται αναλυτικά οι τιμές των όρων των οποίων το αλγεβρικό άθροισμα είναι η τιμή της τεταγμένης y. Σε κάθε στήλη φαίνονται οι όροι που αντιστοιχούν στο κάθε χαρακτηριστικό σημείο, από τα 1-4, του άξονα.

Πίνακας 4. Υπολογισμός επιμέρους όρων τεταγμένης *y*

Όρος(n)	Σημείο 1	Σημείο 2	Σημείο 3	Σημείο 4
0	2.083333	31.875524	116.078174	1.35416
1	-0.002325	-0.544299	-11.105083	-0.00151
2	0.000001	0.004140	0.473256	0.00000
3	-0.000000	-0.000017	-0.011067	-0.00000
4	0.000000	0.000000	0.000163	0.00000
5	-0.000000	-0.000000	-0.000002	-0.00000

Βλέπουμε ότι για τα σημεία 1 και 4, εκατέρωθεν κλωθοειδείς με μικρά σχετικά μήκη, αρκεί ίσως και ο πρώτος μόνο όρος για τον υπολογισμό της απόστασής τους y από την πολυγωνική. Για το σημείο 2 αρκούν οι δύο πρώτοι όροι και είναι οριακά αμελητέος ο τρίτος όρος ενώ για το σημείο 3 αυτός είναι πολύ σημαντικός και είναι σχετικά υπολογίσιμος και ο τέταρτος.

5 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Η κλωθοειδής είναι το τόξο συναρμογής στο οποίο η καμπυλότητα μεταβάλλεται γραμμικά με το μήκος. Αυτό το βασικό χαρακτηριστικό της την κάνει κατάλληλη για τη συναρμογή της μηδενικής καμπυλότητας της ευθυγραμμίας με τη σταθερή καμπυλότητα του κυκλικού τόξου ή ακόμη για τη συναρμογή δύο ομόρροπων κυκλικών τόξων διαφορετικών ακτίνων.

Η επίλυση της εξίσωσης της κλωθοειδούς οδηγεί σε δύο σειρές που δίνουν τις τιμές της τετμημένης και της τεταγμένης συναρτήσει του μήκους. Οι σχετικοί πίνακες και οι αναδρομικές σχέσεις βοηθούν στον εύκολο υπολογισμό οσωνδήποτε όρων αυτών των σειρών.

Στις συνηθισμένες περιπτώσεις, όπου επιλέγεται παράμετρος κλωθοειδούς αρκετά μικρότερη από την ακτίνα του κυκλικού τόξου, αρκούν για ικανοποιητική ακρίβεια μόνο οι δύο πρώτοι όροι της σειράς για την τετμημένη και μόνο ο πρώτος της αντίστοιχης σειράς για την τεταγμένη.

Υπάρχουν περιπτώσεις που για τον ακριβή υπολογισμό των συντεταγμένων των σημείων της κλωθοειδούς επιβάλλεται να χρησιμοποιηθούν περισσότεροι όροι. Όταν τμήμα της κλωθοειδούς χρησιμοποιείται σαν καμπύλη συναρμογής μεταξύ δύο ομόρροπων κυκλικών τόξων, με τη μορφή της ωοειδούς, υπάρχουν περιπτώσεις που η παράμετρος της ωοειδούς πλησιάζει ή είναι και μεγαλύτερη από την ακτίνα του ενός κυκλικού τόξου. Τότε απαιτείται η χρήση περισσοτέρων όρων για τον ακριβή υπολογισμό των συντεταγμένων, όπως υποδεικνύουν και οι σχετικοί πίνακες.

6 ΑΝΑΦΟΡΕΣ

Kasper, H., Schuerba, W., and Lorenz, H. (1954). *The Clothoid as an Element of Horizontal Alignment*, F. Dummlers, Publishing House, Bonn, Germany

Lamm, R., Psarianos, B., and Mailaender, T. (1999). *Highway Design and Traffic Safety Engineering Handbook*. McGraw-Hill, New York.

Γιώτης, Α., Κανελλαΐδης, Γ., Μαλέρδος, Γ. (1990). *Γεωμετρικός Σχεδιασμός των Οδών*. Αθήνα: Συμεών.