

ΠΕΤΡΟΥ Γ. ΤΟΓΚΑ

ΕΠΙΤΙΜΟΥ ΔΙΕΥΘΥΝΤΟΥ ΤΗΣ ΒΑΡΒΑΚΕΙΟΥ ΠΡΟΤΥΠΟΥ ΣΧΟΛΗΣ
ΤΟΥ ΔΙΔΑΣΚΑΛΕΙΟΥ ΤΗΣ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΕΩΣ
Τ. ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΗΣ ΣΧΟΛΗΣ ΕΥΕΛΠΙΔΩΝ

ΕΚΔΟΣΙΣ ΕΙΚΟΣΤΗ ΠΕΜΠΤΗ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΔΙΑ ΤΟΥΣ ΜΑΘΗΤΑΣ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ, ΠΡΑΚΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΥΠΟΨΗΦΙΟΥΣ ΑΝΩΤΑΤΩΝ ΣΧΟΛΩΝ ΤΟΥ ΚΡΑΤΟΥΣ,
ΦΟΙΤΗΤΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΛΠ.



ΠΕΤΡΟΥ Γ. ΤΟΓΚΑ
ΕΠΙΤΙΜΟΥ ΔΙΕΥΘΥΝΤΟΥ ΤΗΣ ΒΑΡΒΑΚΕΙΟΥ ΠΡΟΤΥΠΟΥ ΣΧΟΛΗΣ
ΤΟΥ ΔΙΔΑΣΚΑΛΕΙΟΥ ΤΗΣ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΕΩΣ
Τ. ΚΑΘΗΓΗΤΟΥ ΤΗΣ ΣΧΟΛΗΣ ΕΥΕΛΠΙΔΩΝ

ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΠΡΟΣ ΧΡΗΣΙΝ
ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΤΩΝ ΓΥΜΝΑΣΙΩΝ, ΠΡΑΚΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ ΚΑΙ
ΤΩΝ ΥΠΟΨΗΦΙΩΝ ΔΙΑ ΤΑΣ ΑΝΩΤΑΤΑΣ ΣΧΟΛΑΣ ΤΟΥ ΚΡΑΤΟΥΣ

ΕΚΔΟΣΙΣ ΕΙΚΟΣΤΗ ΠΕΜΠΤΗ
ΒΕΛΤΙΩΜΕΝΗ ΚΑΙ ΕΠΗΥΣΗΜΕΝΗ

ΕΚΔΟΤΙΚΟΣ ΟΙΚΟΣ
“ΠΕΤΡΟΥ Γ. ΤΟΓΚΑ Ο.Ε.”
ΙΠΠΟΚΡΑΤΟΥΣ 4 - ΤΗΛ. 626.816
ΑΘΗΝΑΙ (143)

Κάθε γνήσιον αντίτυπον φέρει τὴν ὑπογραφήν τοῦ συγγραφέως.

A red handwritten signature or stamp, possibly reading 'I. MAKRHΣ', is written diagonally across the page.

Ἐκτύπωσης: Γραφικαὶ Τέχναι, Ι. ΜΑΚΡΗΣ Α.Ε.

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΤΗΣ ΠΡΩΤΗΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ

‘Ο πόθος μου άφ’ ενός, όπως ολοκληρώσω την συγγραφικήν μου έργασίαν επί των κλάδων των Μαθηματικών, των διδασκομένων σήμερα εις τὰ Σχολεία της Μέσης ‘Εκπαιδύσεως, άφ’ έτέρου ή εύμενής ύποδοχή, της οποίας έτυχον όλα τὰ βιβλία μου, ιδιαιτέρως δέ τὸ τελευταίως τεθὲν εις κυκλοφορίαν «**Ευθύγραμμος Τριγωνομετρία**», με ώθησαν εις την συγροφήν του άνά χείρας βιβλίου «**Θεωρητική Γεωμετρία**».

Κατά την συγροφήν του παρόντος βιβλίου έλαβον πρό όφθαλμών, όχι μόνον σχετικά βιβλία ίδικων μας και ξένων συγγραφέων, αλλά πρό παντός είχον ως οδηγόν την πείραν, την όποιαν άπεκόμησα κατά την πολυετή διδασκαλίαν μου εις τὰ Γυμνάσια και Πρακτικά Λύκεια, πρό παντός δέ εις την Βαρβάκειον Πρότυπον Σχολήν, ως και τὰς άνάγκας των ύποψηφίων διά τὰς άνωτάτας Σχολάς του Κράτους.

Ούτω έκρινα σκόπιμον διά την έπιτυχεστέραν και μάλλον έπαγωγόν διδασκαλίαν της Θεωρητικής Γεωμετρίας νά ακολουθήσω τὰς έξής κατευθύνσεις :

Αί άποδείξεις όλων των θεωρημάτων είναι πλήρεις και σαφείς κατά τὸ πρότυπον των Στοιχείων του Εύκλειδου, χωρίς ύπονοούμενα ή παραπομπάς. Εις την καινοτομίαν αυτήν προέβην, διότι είχον διαπιστώσει από πολλοῦ, μετά πόσης δυσκολίας οι μαθηταί διατυπώνουν τὰς σκέψεις των επί των άποδείξεων των γεωμετρικών προτάσεων, πόσα δέ κενά, άσαφείας και άνακριβείας παρουσιάζουν, προκειμένου νά διαρθρώσουν την άπόδειξιν ένός θεωρήματος ή την λύσιν μιās γεωμετρικής άσκήσεως. “Ας μου έπιτραπεί, επί του προκειμένου, νά φρονώ, ότι ή καινοτομία αυτή δέν είναι εις βάρος της άυτενεργείας των μαθητών, ή όποια καλλιεργείται από τόν δεξιοτέχνην, έμπειυσμένον και ένθουσιώδη διδάσκαλον άφ’ ενός και από την λύσιν των άσκήσεων άφ’ έτέρου. “Αλλως τε πρέπει νά συνηθίσουν οι μαθηταί πρώτον νά **άκριβολογοῦν** και κατόπιν νά **άυτενεργοῦν**.

‘Η σταθερά μας μέριμνα κατά την συγροφήν του βιβλίου αυτού, ύπήρξε νά καταστήσωμεν τόν άναγνώστην του Ικανόν νά κατανοή τὸ πνεῦμα της άποδείξεως των θεωρημάτων, διαφωτίζοντες την θεωρίαν διά μιās έφαρμογής ή διά μιās παρατηρήσεως. ‘Αναφέρομεν ως παραδείγματα τὰς § 25, 46, 78, 133—135, κλπ. όπου γίνεται λόγος περί της Ισότητος των σχημάτων, περί της έννοίας της γωνίας, περί του μέτρου της γωνίας, περί της έφαρμογής των περιπτώσεων της Ισότητος των τριγώνων και των Ιδιοτήτων των Ισοσκελών τριγώνων κλπ.

‘Ως πρός την ύλην και την διάταξιν αυτής προσεπαθήσαμεν νά συμμορφωθώμεν πρός τὰ Ισχύοντα προγράμματα, τὰ καθορίζοντα την ύλην των Γυμνασίων και Πρακτικών Λυκείων. Εις πολλά όμως σημεία ήκολούθησαμεν άλλην διάταξιν ύλης, ή όποια, κατά την γνώμη μας, ήτο πλέον

έπωφελής διά τήν άπλούστευσιν πολλών θεωρημάτων. Ούτω :

Εισάγομεν από τοῦ I κεφαλαίου τοῦ πρώτου βιβλίου τήν στοιχειώδη σπουδὴν τῆς περιφερείας ἐνὸς κύκλου, διά νά κατανοήσουν, ἀπό τῆς πρώτης στιγμῆς, οἱ μαθηταί τήν ἔννοιαν τῆς γωνίας καί τοῦ μέτρου αὐτῆς. εἰσάγομεν τά ἀντίστροφα θεωρήματα τῶν ἰδιοτήτων τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων, διότι δι' αὐτῶν διευκολύνεται ἡ κατανόησις καί ἡ ἀπλούστευσις πολλῶν θεωρημάτων καί ἐπιτυγχάνεται εὐχερέστερον ἡ λύσις πλείστων ἀσκήσεων.

Παρεμβάλλομεν εἰς τά οἰκεία μέρη γραφικά προβλήματα, ἀναγράφοντες τὰς μεθόδους τῆς κατασκευῆς καθέτων εὐθειῶν, διχοτόμων γωνιῶν κλπ. διά τοῦ διαβήτου καί τοῦ κανόνος, εὐθύς ὡς ἡ ἔννοια αὐτῶν διδασχθῆ, δηλ. ἀπό τοῦ πρώτου βιβλίου. Οὔτω ἀποφεύγομεν τὸ ἄτοπον νά ὁμιλοῦμεν περὶ καθέτων εὐθειῶν, παραλλήλων, μέσων εὐθειῶν, τόξων γωνιῶν κλπ. καί νά διδάσκεται ὁ τρόπος τῆς κατασκευῆς αὐτῶν μετὰ πολὺν χρόνον.

Εἰς τὴν Στερεομετρίαν προτάσσομεν τὸ κεφάλαιον τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων, διὰ νά εἶναι δυνατὴ ἡ διερεύνησις τῶν ἀσκήσεων τοῦ κεφαλαίου τῶν καθέτων εὐθειῶν καί ἐπιπέδου καί διὰ νά χρησιμεύσῃ ὡς ἔρεισμα διὰ τὸν ἐπακριβωμένον ὄρισμὸν τῆς καθέτου εὐθείας ἐπὶ ἐπίπεδον, ὁ ὁποῖος διευκολύνει κατὰ πολὺ τὴν ἀπόδειξιν ἀρκετῶν θεωρημάτων.

Τὴν λεπτὴν καί σπουδαιοτάτην ἔννοιαν τῶν γεωμετρικῶν τόπων εἰσάγομεν ἀμέσως ἀπὸ τοῦ I βιβλίου § 162—164. Διὰ νά κατανοήσουν δὲ οἱ μαθηταί τελείως τὴν ἔννοιαν τοῦ γεωμετρικοῦ τόπου ἀναγράφομεν λεπτομερῶς, εἰς χωριστὰ θεωρήματα καί προβλήματα, ὅπου παρουσιάζεται ἡ εὐκαιρία, τὸν τρόπον τῆς εὐρέσεως τῆς φύσεως τοῦ γεωμετρικοῦ τόπου τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἔχουν μίαν κοινὴν ἰδιότητα (§ 216—220, 271, 298—300). Οὔτω οἱ μαθηταί δύνανται νά κατανοήσουν ἀκόπως τὴν λύσιν τῶν γεωμετρικῶν προβλημάτων, διὰ τῆς χρήσεως τῶν γεωμετρικῶν τόπων, τὴν ὁποίαν ἀναγράφομεν εἰς τὸ δεῦτερον βιβλίον καί εἰς τὸ κεφάλαιον τῆς Ἀναλύσεως καί Συνθέσεως

Αἱ πολυπληθεῖς ἀσκήσεις (2875), αἱ ὁποῖαι ἀναγράφονται εἰς τὸ βιβλίον αὐτό, ἔχουν χωρισθῆ εἰς τρεῖς κατηγορίας.

Εἰς τὴν πρώτην κατηγορίαν ὑπάγονται αἱ ἀσκήσεις, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἀναγραφῆ ἀμέσως μετὰ τὴν ἀπόδειξιν ἐνὸς θεωρήματος, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀπλᾶ καί ἔχουν σκοπὸν νά ἐμπεδώσουν τὴν διδασκαλίαν τοῦ θεωρήματος καί νά ἐξασκήσουν τὴν αὐτενέργειαν τῶν μαθητῶν. Ὡς πρὸς τὰς ἀσκήσεις αὐτὰς ἔχομεν τὴν γνώμην, ὅτι πρέπει νά δίδωνται ὑπὸ τοῦ καθηγητοῦ εἰς τοὺς μαθητὰς ἀμέσως μετὰ τὴν διδασκαλίαν τοῦ θεωρήματος καί νά λῶνται, ὑπὸ τῶν μαθητῶν, ἐντὸς τῆς αἰθούσης τῆς παραδόσεως.

Εἰς τὴν δευτέραν κατηγορίαν ὑπάγονται αἱ ἀσκήσεις, αἱ ὁποῖαι εἶναι κατὰ τι δυσκολώτεροι τῶν πρώτων καί τῶν ὁποίων ἡ λύσις στηρίζεται εἰς τὴν γνώσιν δύο ἢ περισσοτέρων θεωρημάτων ἢ Γεωμετρικῶν προτάσεων, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀποδειχθῆ προηγουμένως.

Τέλος εἰς τὴν τρίτην κατηγορίαν ὑπάγονται αἱ ἀσκήσεις, αἱ ὁποῖαι ἀναγράφονται εἰς τὸ τέλος ἐκάστου Κεφαλαίου ἢ ἐκάστου Βιβλίου. Αἱ ἀσκήσεις αὗται ἀναγράφονται χάριν τῶν μαθητῶν τῶν Πρακτικῶν Λυκείων

και τῶν ὑποψηφίων διὰ τὰς ἀνωτάτας Σχολὰς τοῦ Κράτους

Κατὰ ταῦτα αἱ ἀσκήσεις, αἱ περιεχόμεναι εἰς τὸ βιβλίον αὐτό, εἶναι διατεταγμέναι κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε νὰ μὴ ἀπογοητεύουν τὸν ἀρχάριον, νὰ ἱκανοποιῶν τὸν προκεχωρημένον καὶ νὰ εὐχαριστοῦν τὸν πεπειραμένον μαθητὴν.

Οὕτω συγγραφεὺς τὸ παρὸν βιβλίον εὐελπιστῶ, ὅτι θὰ τύχη τῆς αὐτῆς ὑποδοχῆς ἐκ μέρους τῶν κ.κ. Συναδέλφων καὶ νὰ καταστή ἡ χρησιμώτατον βοήθημα, τόσον εἰς τοὺς μαθητὰς τῶν Γυμνασίων καὶ Πρακτικῶν Λυκείων, ὅσον καὶ εἰς τοὺς μὲ Μαθηματικὰ καὶ ἰδιαιτέρως μὲ τὴν Γεωμετρίαν ἀσχολουμένους σπουδαστάς.

Ἀθῆναι τῆ 20ῆ Φεβρουαρίου 1947

ὁ Συγγραφεὺς
Π. Γ. ΤΟΓΚΑΣ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΤΗΣ ΔΕΥΤΕΡΑΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ

Ἡ δευτέρα ἔκδοσις διαφέρει τῆς πρώτης κατὰ τὴν διάταξιν τῆς ὕλης κλπ.

Οἱ Γεωμετρικοὶ τόποι ἀναγράφονται εἰς ἰδιαίτερον κεφάλαιον.

Διὰ τὰ διευκολύνονται οἱ μαθηταὶ εἰς τὴν αὐτενεργὸν λύσιν τῶν ἀσκήσεων παρεθέσαμεν παραπλευρῶς πολλῶν ἀσκήσεων καὶ τὸ σχετικὸν σχῆμα των.

Ἀθῆναι τῆ 15ῃ Αὐγούστου 1951

ὁ Συγγραφεὺς
Π. Γ. ΤΟΓΚΑΣ

ΠΡΟΛΟΓΟΣ ΤΗΣ ΤΡΙΤΗΣ ΕΚΔΟΣΕΩΣ

Ἡ τρίτη ἔκδοσις τῆς Γεωμετρίας συμπληρώνει τὰς δύο προηγουμένας ἐκδόσεις καὶ οὕτω τὸ βιβλίον αὐτό δύναται νὰ θεωρηθῆ τέλειον ἀπὸ πάσης ἀπόψεως.

Εἰς τὴν ἔκδοσιν αὐτὴν δίδεται ὁ νέος ὁρισμὸς τῆς γωνίας, ἐξηγοῦνται μερικαὶ ἔννοιαι, ὅπως: ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη ἢ πρέπει καὶ ἀρκεῖ, ἀναγράφεται ἡ μέθοδος τοῦ Simson διὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ἐμβαδοῦ μεικτογράμμων σχημάτων κλπ.

Ἐπειδὴ εἰς ὅλας τὰς ἀνωτέρας Σχολὰς τοῦ Κράτους δίδονται προβλήματα, ἀναφερόμενα εἰς ὕλην τοῦ Συμπληρώματος τῆς Γεωμετρίας, ἡ νέα ἔκδοσις περιλαμβάνει εἰς ἰδιαίτερον κεφάλαιον τὰς μεθόδους: Μεταφορά, Στροφή, Συμμετρία.

Ἐν Ἀθήναις τῆ 26ῃ Μαΐου 1957

ὁ Συγγραφεὺς
Π. Γ. ΤΟΓΚΑΣ

ΠΙΝΑΞ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ. Πρώται ἔννοιαι καὶ ὀρισμοί. Ἡ εὐθεία γραμμὴ. Εἶδη ἐπιφανειῶν	1— 6
ΒΙΒΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ. Ἡ εὐθεΐα γραμμῆ.	
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'. <i>Εὐθεΐαι καὶ γωνίαι.</i> Εὐθύγραμμα τμήματα. Γωνίαι. Κάθετοι εὐθεΐαι. Κύκλος. Τόξα καὶ ἐπίκεντροι γωνίαι. Ἀσκήσεις	7— 41
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'. <i>Πολύγωνα - τρίγωνα.</i> Πολύγωνα καὶ πολυγωνικαὶ γραμμαί. Σύγκρισις καθέτων καὶ πλαγίων πρὸς εὐθείαν. Τρίγωνα. Ἴσοσκελὴ τρίγωνα. Περιπτώσεις ἰσότητος τριγώνων. Ἐφαρμογαὶ τῶν περιπτώσεων τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων καὶ τῶν ἰδιοτήτων τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου. Θεμελιώδεις γεωμετρικαὶ κατασκευαί. Περιπτώσεις ἰσοτήτος ὀρθογωνίων τριγώνων. Ἰδιότης τῶν σημείων τῆς μεσοκαθέτου ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος. Ἰδιότης τῶν σημείων τῆς διχοτόμου μιᾶς γωνίας. Ἀντιστοιχία μεταξὺ τῶν γωνιῶν καὶ τῶν πλευρῶν τριγώνου. Ἀσκήσεις	42— 81
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'. <i>Συμμετρία.</i> Συμμετρία πρὸς κέντρον. Συμμετρία πρὸς ἄξονα	82— 85
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'. <i>Εὐθεΐαι παράλληλοι.</i> Γενικότητες. Γωνίαι σχηματιζόμεναι ὑπὸ δύο παραλλήλων καὶ μιᾶς τεμνούσης. Γραφικαὶ ἐφαρμογαί. Γωνίαι τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶναι παράλληλοι ἢ κάθετοι. Ἀσκήσεις	86—101
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε'. <i>Ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου ἑνὸς πολυγώνου.</i> Ἀσκήσεις	102—110
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ'. <i>Τετράπλευρα, παραλληλόγραμμα.</i> Παραλληλόγραμμα. Ὄρθογώνιον. Ρόμβος. Τετράγωνον. Τραπεζίαι. Ἀσκήσεις.	111—132
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ'. <i>Ἐφαρμογαὶ τῶν ἰδιοτήτων τῶν παραλληλογράμμων.</i> Ἀσκήσεις	132—139
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Η'. <i>Μερικαὶ ἀξιοσημεῖωτοι ἰδιότητες τοῦ τριγώνου.</i> Ἀσκήσεις	140—147
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Θ'. <i>Γεωμετρικοὶ τόποι.</i> Προβλήματα ἐπὶ τοῦ Α' βιβλίου πρὸς γενικὴν ἐπανάληψιν	148—162
ΒΙΒΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ. Ἡ περιφέρεια.	
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'. <i>Περιφέρεια. Εὐθεΐα καὶ περιφέρεια.</i> Ἐφαπτομένη περιφέρειας καὶ ἰδιότητες αὐτῆς. Σχετικαὶ θέσεις δύο περιφερειῶν. Ἀσκήσεις	163—182
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'. <i>Χορδαί.</i> Ἰδιότητες τῶν τόξων καὶ τῶν χορδῶν. Σχέσεις μεταξὺ τῶν τόξων καὶ τῶν χορδῶν των. Σχέσεις μεταξὺ χορδῶν καὶ τῶν ἀποστάσεων των ἀπὸ τὸ κέντρον. Ἀσκήσεις.	182—192
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'. <i>Ἐγγεγραμμένα γωνίαι.</i> Μέτρον τῶν ἐγγεγραμμένων γωνιῶν. Ἐγγεγραμμένα τετράπλευρα. Ἀσκήσεις	193—218
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'. <i>Στοιχειώδη γεωμετρικὰ προβλήματα.</i> Κατασκευὴ τριγώνων. Διάφοροι ἄλλαι κατασκευαί	219—229
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε'. <i>Ἀναλυτικὴ καὶ συνθετικὴ μέθοδος.</i> Γεωμετρικὰ προβλήματα πρὸς λύσιν	230—239
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ'. <i>Γεωμετρικοὶ τόποι.</i> Ἀσκήσεις ἐπὶ τοῦ κεφαλαίου τῶν γεωμετρικῶν τόπων	240—252
ΚΑΦΑΛΑΙΟΝ Ζ'. <i>Χρῆσις τῶν γεωμετρικῶν τόπων πρὸς λύσιν γεωμετρικῶν προβλημάτων.</i> Ἀσκήσεις	253—268

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ. ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΚΑΙ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ. Ἰδιότητες τοῦ ὀρθοκέντρου. Εὐθεία τοῦ Simpson. Εὐθεία καὶ κύκλος τοῦ Euler. Γωνία εὐθείας καὶ περιφέρειας. Γωνία δύο τεμνομένων περιφερειῶν. Μεταφορά. Στροφή. Συμμετρία. Ἀσκήσεις. 269—311

BIBLION TRITON. Ὅμοια σχήματα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄. <i>Λόγοι καὶ ἀναλογίαι.</i> Ὅρισμοί. Σημεῖα τὰ ὅποια διαιροῦν ἓνα εὐθύγραμμον τμήμα κατὰ δοθέντα λόγον. Ἀσκήσεις. 313—319
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄. <i>Θεώρημα τοῦ Θαλή.</i> Ἐφαρμογαὶ τῶν ἀναλογιῶν. Ἰδιότης τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου. Ἀσκήσεις. 320—334
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄. <i>Ὅμοια τρίγωνα - Ὅμοια πολύγωνα.</i> Γενικότητες. Περιπτώσεις ὁμοιότητος τριγώνων. Παράλληλοι εὐθεῖαι τεμνόμεναι ὑπὸ δέσμης εὐθειῶν. Ὅμοια πολύγωνα. Ἀσκήσεις . . . 335—362
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄. <i>Μετρικαὶ σχέσεις.</i> Ὅρισμοί. Μετρικαὶ σχέσεις μεταξύ τῶν στοιχείων ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου. Μετρικαὶ σχέσεις μεταξύ τῶν στοιχείων τυχόντος τριγώνου. Μετρικαὶ σχέσεις εἰς τὸν κύκλον. Ὑπολογισμὸς τῶν ἀξιοσημειώτων εὐθειῶν ἑνὸς τριγώνου Ἀσκήσεις 363—393
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄. <i>Γεωμετρικαὶ κατασκευαί.</i> Ἀσκήσεις 394—412
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ΄. <i>Κανονικὰ πολύγωνα.</i> Γενικότητες. Ἐγγραφή κανονικῶν πολυγώνων. Προβλήματα ἐπὶ τῶν κυρτῶν κανονικῶν πολυγώνων. Ἀσκήσεις 413—432
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ΄. <i>Μέτρησις τῆς περιφέρειας ἑνὸς κύκλου.</i> Ὑπολογισμὸς τοῦ π. Ἀσκήσεις ἐπὶ τοῦ Γ' Βιβλίου πρὸς γενικὴν ἐπατάληψιν 433—452

BIBLION TETARTON. Ἐμβαδά.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄. <i>Μέτρησις τῶν ἐπιφανειῶν.</i> Γενικότητες. Ἐμβαδὸν εὐθύγραμμων σχημάτων. Ἐμβαδὸν κύκλου, κυκλικὸ τομέως. Ἀσκήσεις 452—486
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄. <i>Σχέσεις μεταξύ τῶν ἐμβαδῶν.</i> Σχέσεις μεταξύ τῶν ἐμβαδῶν δύο ὁμοίων σχημάτων 487—492
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄. <i>Προβλήματα ἐπὶ τῶν ἐμβαδῶν.</i> Ἀσκήσεις ἐπὶ τοῦ Γ' Κεφαλαίου πρὸς γενικὴν ἐπανάληψιν. Ἀσκήσεις ἐπὶ τοῦ Γ' καὶ Δ' βιβλίου πρὸς γενικὴν ἐπανάληψιν 493—518

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ. ΤΟΥ ΤΡΙΤΟΥ ΚΑΙ ΤΕΤΑΡΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ. Μετρικαὶ σχέσεις εἰς τὸ τρίγωνον καὶ εἰς τὸ τετράπλευρον. Ριζικὸς ἄξων δύο περιφερειῶν, Περιφέρειαι τεμνόμεναι ὀρθογωνίως. Ὅμοιοθεσία. Ὑπολογισμὸς τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνὸς μεικτογράμμου σχήματος. Ἀστέροειδῆ κανονικὰ πολύγωνα 518—562
*Ἐπαναληπτικὸς πίναξ τῶν μεθόδων λύσεως τῶν Γεωμετρικῶν προβλημάτων 563—568

ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ

BIBLION PEMPTON. Εὐθεῖαι καὶ ἐπίπεδα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄. <i>Τομὴ καὶ ἐπιπέδων.</i> Ὅρισμοί. Τομὴ δύο ἐπιπέδων. Ἀσκήσεις 569—574
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄. <i>Εὐθεῖαι παράλληλοι.</i> Εὐθεῖα καὶ ἐπίπεδον παράλληλα. Ἀσκήσεις 575—579
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄. <i>Παράλληλα ἐπίπεδα.</i> Ἀσκήσεις 580—590
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄. <i>Εὐθεῖα καὶ ἐπίπεδον κάθετα.</i> Θεωρήματα τῶν τριῶν καθέτων. Κάθετος καὶ πλάγια πρὸς ἐπίπεδον. Κοινὴ κά-

θετος δύο άσυμβάτων εϋθειών. Ἀσκήσεις 591—608:

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε'. *Διέδροι γωνίαι, επίπεδα κάθετα*. Διέδροι γωνίαι. Σχέσεις μεταξύ τῶν διέδρων καὶ τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν τῶν. Κάθετα ἐπίπεδα. Ὁρθή προβολή ἐπὶ ἐπίπεδον. Γωνία μιᾶς εϋθείας καὶ ἐνὸς ἐπιπέδου. Ἀσκήσεις 609—626

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ'. *Στερεαὶ γωνίαι*. Κατασκευή τριέδρου στερεᾶς γωνίας. Συμμετρικαὶ στερεαὶ γωνίαι. Τριέδροι παραπληρωματικαὶ γωνίαι. Περιπτώσεις ἰσότητος τῶν τριέδρων γωνιῶν. Ἀσκήσεις. 627—650

ΒΙΒΛΙΟΝ ΕΚΤΟΝ. Πολύεδρα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'. *Πρίσματα, παραλληλεπίπεδα*. Πρίσματα, παραλληλεπίπεδα. Μέρησις πρισμάτων, παραλληλεπιπέδων. Ἀσκήσεις . 651—678:

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'. *Πυραμίδες*. Ὁρισμοὶ καὶ ιδιότητες. Μέτροις τῶν πυραμίδων. Κόλουρος πυραμίδος. Κολοβὸν πρίσμα. Πρισματοειδὴ πολύεδρα. Ἀσκήσεις 677—706

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'. *Ὁμοία πολύεδρα*. Ἀσκήσεις 707—714

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ'. *Συμμετρία εἰς τὸν χώρον*. Ἀσκήσεις 715—720

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε'. *Γενικαὶ ιδιότητες τῶν πολυέδρων*. Εἶδη καὶ πλήθος κανονικῶν πολυέδρων. Ἀσκήσεις 721—734

ΒΙΒΛΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ. Κύλινδρος - Κῶνος - Σφαῖρα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α'. *Κύλινδρος*. Ὁρισμοὶ καὶ ιδιότητες. Ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας ἐνὸς κυλίνδρου. Ὀγκος κυλίνδρου. Ἀσκήσεις . . . 733—743:

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'. *Κῶνος καὶ κόλουρος κῶνος*. Ὁρισμοὶ καὶ ιδιότητες. Ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας ἐνὸς κώνου. Ὀγκος κώνου. Κόλουρος κώνου. Ἀσκήσεις 744—764

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'. *Σφαῖρα*. Ὁρισμοὶ καὶ ιδιότητες. Ἐπίπεδοι τομαὶ μιᾶς σφαίρας. Ἐφαπτόμενα εϋθεῖαι καὶ ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα σφαίρας. Πόλοι. Γραφικαὶ ἐφαρμογαί. Σχετικαὶ θέσεις δύο σφαιρῶν. Ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σφαίρας. Ὀγκος σφαίρας. Σφαιρικὸς δακτύλιος. Σφαιρικὸν τμήμα. Ἀσκήσεις. Ἀσκήσεις πρὸς γενικὴν ἐπανάληψιν 715—808:

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ. *Σφαιρικὰ πολύγωνα καὶ τρίγωνα* 809—823



Γ Ε Ω Μ Ε Τ Ρ Ι Α

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ι. Πρῶται ἔννοιαι καὶ ὀρισμοὶ

1. Ὅγκος καὶ ἐπιφάνεια ἑνὸς σώματος. Κάθε ὑλικὸν ἀντικείμενον, κάθε σῶμα καταλαμβάνει μέσα εἰς τὸ ἄπειρον διάστημα, πὸ μᾶς περιβάλλει, ἓνα χῶρον.

Ὁ χῶρος αὐτός, πὸν καταλαμβάνει ἓνα σῶμα μέσα εἰς τὸ ἄπειρον διάστημα, καλεῖται **ὄγκος** αὐτοῦ.

Π.χ. τὸ κενόν, πὸν σχηματίζεται εἰς ἓνα τοῖχον, δταν ἀποσπάσωμεν ἀπὸ αὐτὸν ἓνα λίθον, παριστάνει τὸν ὄγκον τοῦ λίθου.

Ὁ ὄγκος ἑνὸς σώματος εἶναι ἀναγκαστικῶς πεπερασμένος· αὐτὸ τὸ πέρασ τοῦ σώματος, πὸν χωρίζει τὸ σῶμα, ἀπὸ τὸ γύρω διάστημα, πὸν τὸ περιβάλλει, ὀνομάζεται **ἐπιφάνεια** τοῦ σώματος.

Δυνάμεθα νὰ φαντασθῶμεν τὴν ἐπιφάνειαν ἑνὸς σώματος, ἑνὸς ξυλίνου χάρακος, π.χ., ὡς ἓνα λεπτὸν ἐπίχρισμα βερνικίου, τὸ ὁποῖον περιβάλλει τὸν χάρακα καὶ τὸ ὁποῖον χωρίζει τὸ ξύλον ἀπὸ τὸν γύρω ἀέρα.

2. Σχῆμα ἑνὸς σώματος. Παρατηροῦντες τὰ διάφορα ὑλικά σώματα, π.χ., μίαν ξυλίνην κασετίναν, ἓνα τετράδιον, ἓνα βῶλον, διακρίνομεν, ὅτι τὰ σώματα αὐτὰ δὲν τελειώνουν ἐξωτερικῶς κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον.

Ὁ τρόπος κατὰ τὸν ὁποῖον τελειώνει ἐξωτερικῶς ἓνα σῶμα καλεῖται **σχῆμα** αὐτοῦ.

3. Γραμμαί. Τὰ πέρατα μιᾶς ἐπιφανείας ἢ καὶ μέρους αὐτῆς λέγονται **γραμμαί**.

Π.χ. τὰ ἄκρα τοῦ πίνακος, τοῦ θρανίου, ἑνὸς φύλλου τετραδίου, ἑνὸς μεταλλικοῦ νομίσματος εἶναι γραμμαί.

4. Σημεῖα. Τὰ ἄκρα μιᾶς γραμμῆς ἢ τὰ ἄκρα μέρους αὐτῆς λέγονται **σημεῖα**.

Δύο γραμμαὶ δύνανται νὰ τέρνωται εἰς ἓνα ἢ περισσότερα **σημεῖα**. Ὡστε ἡ τομὴ δύο γραμμῶν εἶναι **σημεῖον**. Διὰ τοῦτο παριστάνομεν τὸ σημεῖον μὲ τὴν τομὴν δύο μικρῶν γραμμῶν (Σχ. 1).

Δυνάμεθα ἐξ ἄλλου νὰ νοήσωμεν ἓνα σημεῖον, χωρὶς νὰ τὸ θεωρήσωμεν ὡς τομὴν δύο γραμμῶν: ἕνας κόκκος ἄμμου, πάρα πολὺ λεπτός, μᾶς δίδει τὴν ἔννοιαν ἑνὸς σημείου.

$\begin{matrix} B & A \\ x & \cdot \end{matrix}$
Σχ. 1.

Διὰ τοῦτο τὸ σημεῖον τὸ παριστάνομεν μὲ μίαν τελείαν, πλησίον τῆς ὁποίας θέτομεν ἓνα γράμμα. Π.χ., λέγομεν τὸ σημεῖον A (Σχ. 1).

5. Γενίκευσις τῆς ἐννοίας τῶν γραμμῶν καὶ τῶν ἐπιφανειῶν. Δυνάμεθα νὰ παρατηρήσωμεν ἀκόμη, ὅτι: *κάθε σημεῖον, τὸ ὁποῖον κινεῖται εἰς τὸ διάστημα, παράγει μίαν γραμμὴν.*

Ἡ τροχιά, τὴν ὁποίαν γράφει μία σφαῖρα ὄπλου, ἢ ἕνας λίθος ἐκσφενδονιζόμενος, μᾶς δίδουν τὴν εἰκόνα τῆς γραμμῆς.

Ἡ μύτη ἑνὸς μολυβιοῦ, ἢ ὁποία μετατίθεται ἐπὶ τοῦ χάρτου, χαράσσει μίαν γραμμὴν.

Ὡστε: *τὸ σύνολον τῶν διαδοχικῶν θέσεων, τὰς ὁποίας λαμβάνει ἓνα σημεῖον κατὰ τὴν κίνησίν του, εἶναι μία γραμμὴ.*

Δυνάμεθα ἐπίσης νὰ παρατηρήσωμεν, ὅτι: *κάθε γραμμὴ, ἢ ὁποία κινεῖται εἰς τὸ διάστημα, παράγει μίαν ἐπιφάνειαν.*

Ἐνα λεπτὸν σύρμα, τὸ ὁποῖον διαρεῖ ἓνα τεμάχιον βουτύρου, παράγει μίαν ἐπιφάνειαν, ἢ ὁποία τὸ χωρίζει εἰς δύο τεμάχια.

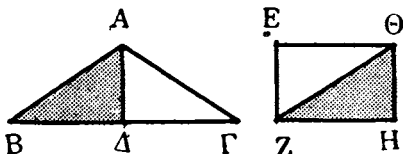
Παρατήρησις. Τὰ σημεῖα, αἱ γραμμαὶ, αἱ ἐπιφάνειαι δύνανται νὰ ἔξετάζονται ἀνεξαρτήτως τῶν ὑλικῶν σωμάτων, εἰς τὰ ὁποῖα ἀνήκουν. Πρέπει νὰ θεωρῶμεν τὴν ἐπιφάνειαν, τὴν γραμμὴν χωρὶς πάχος, τὸ δὲ σημεῖον χωρὶς πάχος καὶ χωρὶς ἔκτασιν.

6. Γεωμετρικὰ σχήματα. Τὰ σημεῖα, αἱ γραμμαὶ, αἱ ἐπιφάνειαι ἑνὸς σχήματος λέγονται **στοιχεῖα** τοῦ σχήματος. Τὸ σύνολον τῶν στοιχείων ἑνὸς σχήματος λέγεται **γεωμετρικὸν σχῆμα**.

Τὰ γεωμετρικὰ σχήματα καὶ τὰς ιδιότητας αὐτῶν ἔξετάζει ἡ **Γεωμετρία**.

7. Ἴσα σχήματα. Δύο σχήματα λέγονται **ἴσα**, ὅταν τὸ ἓνα τιθέμενον ἐπὶ τοῦ ἄλλου καταλλήλως, ἐφαρμύζον καὶ ἀποτελοῦν ἓνα μόνον σχῆμα.

8. Ἰσοδύναμα σχήματα. Τὰ σχήματα $AB\Gamma$ καὶ $EZH\Theta$ (Σχ. 2) ἀκέραια ὡς εἶναι, δὲν ἐφαρμοζοῦν. Τὸ μέρος ὅμως $AB\Delta$ ἐφαρμοζοῦται ἐπὶ τοῦ μέρους ΘZH , καὶ τὸ μέρος $A\Delta\Gamma$ ἐπὶ τοῦ $Z\Theta$. Τὰ τοιαῦτα σχήματα καλοῦμεν *ισοδύναμα* ἢ *ἴσα κατὰ μέρος*.



Σχ. 2.

᾽Ωστε: *Δύο σχήματα λέγονται ἰσοδύναμα, ὅταν ἐφαρμοζοῦν κατὰ μέρος.*

9. Σκοπὸς τῆς Γεωμετρίας. Ἡ Γεωμετρία σπουδάζει τὰ γεωμετρικὰ σχήματα ἀπὸ ἀπόψεως τοῦ σχήματός των, τῆς ἐκτάσεώς των καὶ τῶν σχέσεών, αἱ ὁποῖαι ὑπάρχουν μεταξύ των.

10. Γεωμετρικαὶ ἐκφράσεις. Ἡ Γεωμετρία, κατὰ τὴν ἐξέτασιν τῶν ἰδιοτήτων τῶν γεωμετρικῶν σχημάτων, προχωρεῖ μὲ συλλογισμούς, πὸν στηρίζονται εἰς τὴν λογικὴν.

Ὁ συλλογισμὸς ἢ οἱ συλλογισμοί, πὸν κάμνομεν διὰ τὰ βεβαιωθῶμεν, ὅτι μία πρότασις εἶναι ἀληθής, λέγεται **ἀποδείξεις**.

Κάθε πρότασις, τῆς ὁποίας ἡ ἀλήθεια γίνεται φανερὰ διὰ τῆς ἀποδείξεως, λέγεται **θεώρημα**.

Κάθε πρότασις, ἡ ὁποία πηγάζει, ὡς συμπέρασμα ἀπὸ προηγουμένου θεώρημα, λέγεται **πόρισμα**.

Ἡ ἀπόδειξις μιᾶς προτάσεως στηρίζεται εἰς ἄλλας προτάσεις, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἀποδειχθῆ, ἐκεῖναι εἰς ἄλλας προηγουμένας καὶ οὕτω καθεξῆς. Εἶναι φανερόν, ὅτι οὕτω καταλήγομεν εἰς μερικὰς ἀρχικὰς προτάσεις, τοὺς **δορισμούς**, ἢ εἰς ἄλλας προτάσεις, πὸν δὲν μποροῦν γὰ ἀποδειχθῶν ἢ καὶ δὲν ἔχουν ἀνάγκην ἀποδείξεως, διότι εἶναι φανεραὶ ἀφ' ἐαυτῶν ἢ δεχόμεθα αὐτὰς ὡς ἀληθεῖς. Αἱ τοιαῦται προτάσεις λέγονται **ἀξιώματα**.

Π.χ., αἱ προτάσεις:

Κάθε σχῆμα δύναται ν' ἀλλάξη θέσιν, χωρὶς τὰ μεταβληθῆ.

Κάθε μέρος εἶναι ὁμοειδὲς πρὸς τὸ ὅλον.

Δύο σχήματα ἴσα πρὸς τρίτον εἶναι καὶ μεταξύ των ἴσα, εἶναι ἀξιώματα.

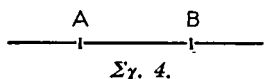
II. Ἡ εὐθεῖα γραμμὴ

11. Εὐθεῖα γραμμὴ. Ἡ ἀπλουστέρα ἀπὸ ὅλας τὰς γραμμὰς εἶ-

ναί ἡ *εὐθεῖα γραμμῆ*, ἢ ἀπλῶς ἡ *εὐθεῖα*. Δὲν δυνάμεθα νὰ δώσωμεν τὸν ὀρισμὸν τῆς εὐθείας (*). Ἐνα τενωμένον _____ νῆμα μᾶς δίδει τὴν εἰκόνα μιᾶς εὐθείας (Σχ. 3). Σχ. 3.

12. Ἀξιώματα τῆς εὐθείας. Ἐνῶ δὲν δυνάμεθα νὰ δώσωμεν τὸν ὀρισμὸν τῆς εὐθείας, ἐν τούτοις ὅλοι γνωρίζομεν, ὅτι ἀπὸ ἓνα σημείου εἰς ἄλλο δυνάμεθα νὰ χαράξωμεν μίαν καὶ μόνον εὐθεῖαν. Ὡστε:

I. Δύο σημεῖα ὀρίζουν τὴν θέσιν μιᾶς καὶ μόνον εὐθείας.



Οὕτω τὰ σημεῖα A καὶ B (Σχ. 4) ὀρίζουν τὴν εὐθεῖαν, ἢ ὁποῖα διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα A καὶ B. Θὰ λέγωμεν: ἡ *εὐθεῖα AB*.

Ἀπὸ τὴν πρότασιν I συνάγομεν ἀμέσως τὰς κάτωθι τρεῖς προτάσεις:!

1η. Δύο εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα, συμπίπτουν καὶ ἀποτελοῦν μίαν μόνον εὐθεῖαν.

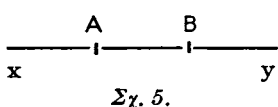
2α. Δύο διάφοροι εὐθεῖαι μόνον ἓνα κοινὸν σημεῖον δύναται νὰ ἔχουν.

Διότι, ἐὰν εἶχον δύο κοινὰ σημεῖα, θὰ συνέπιπτον καὶ θὰ ἀπετέλουν μίαν καὶ μόνον εὐθεῖαν.

3η. Δύο εὐθεῖαι δύναται νὰ ἐφαρμόσουν ἢ μία ἐπὶ τῆς ἄλλης, ὥστε νὰ ἀποτελέσουν μίαν εὐθεῖαν.

Ἐπίσης εἶναι φανερόν, ὅτι :

II. Μία εὐθεῖα δύναται νὰ ἐκταθῆ πέραν τῶν δύο ἄκρων της, χωρὶς νὰ παύσῃ νὰ εἶναι εὐθεῖα.



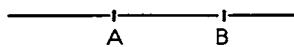
Διὰ τοῦτο, ὅταν λέγωμεν: ἡ *εὐθεῖα AB*, θὰ ἐννοοῦμεν ἀδιαφόρως ἢ μίαν ἀπεριόριστον εὐθεῖαν, ἢ ὁποῖα διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα A καὶ B ἢ μίαν εὐθεῖαν, ἢ ὁποῖα ἔχει ἄκρα τὰ σημεῖα A καὶ B.

13. Χάραξις εὐθείας. Διὰ νὰ χαράξωμεν μίαν εὐθεῖαν ἐπὶ τοῦ πίνακος ἢ ἐπὶ ἑνὸς φύλλου χάρτου, χρησιμοποιοῦμεν τὸν κανὸνα (χάρακα). Ὁ κανὼν εἶναι μία λεπτὴ σανὶς, τῆς ὁποίας αἱ ἄκμαι (κόψεις) παριστάνουν εὐθείας γραμμᾶς. Ὁ τρόπος τῆς χρησιμοποιήσεως τοῦ κανόνος, πρὸς χάραξιν μιᾶς εὐθείας, εἶναι γνωστὸς εἰς ὅλους.

(*) Ὁ Εὐκλείδης ὀρίζει τὴν εὐθεῖαν ὡς ἐξῆς: «*Εὐθεῖα γραμμὴ ἔστιν, ἣτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτοῦ σημείοις κεῖται*».

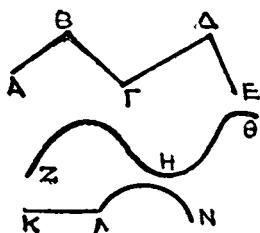
Μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ κανόνος δυνάμεθα νὰ χαράξωμεν μίαν εὐθεΐαν, ἢ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα ἢ καὶ νὰ προεκτείνωμεν μίαν εὐθεΐαν.

14. Εὐθύγραμμον τμήμα. Ἐνα μέρος AB μιᾶς εὐθείας (Σχ. 6), τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξύ δύο σημείων τῆς A καὶ B λέγεται **εὐθύγραμμον τμήμα** ἢ **τμήμα εὐθείας**.



Σχ. 6.

15. Τεθλασμένη γραμμὴ. Ἡ γραμμὴ $ABΓΔΕ$ (Σχ. 7) ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ διαδοχικὰ εὐθύγραμμα τμήματα AB , $ΒΓ$, $ΓΔ$, $ΔΕ$, ἀλλὰ δὲν εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ· εἶναι **τεθλασμένη γραμμὴ**. Ὅστε:



Σχ. 7.

Τεθλασμένη γραμμὴ λέγεται ἡ γραμμὴ, ἢ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ πολλὰ εὐθύγραμμα τμήματα, χωρὶς ὁμως αὐτὰ νὰ ἀποτελοῦν εὐθεΐαν.

Τὰ σημεῖα B , $Γ$, $Δ$ εἶναι αἱ κορυφαὶ τῆς τεθλασμένης γραμμῆς καὶ τὰ εὐθύγραμμα τμήματα AB , $ΒΓ$, $ΓΔ$, $ΔΕ$ εἶναι αἱ πλευραὶ αὐτῆς.

16. Καμπύλη γραμμὴ. Ἡ γραμμὴ $ZHΘ$ (Σχ. 7) δὲν εἶναι οὔτε εὐθεῖα, οὔτε τεθλασμένη· εἶναι **καμπύλη γραμμὴ**. Γενικῶς:

Καμπύλη γραμμὴ λέγεται ἡ γραμμὴ, τῆς ὁποίας κανένα μέρος δὲν εἶναι εὐθεῖα.

Μία καμπύλη γραμμὴ εἶναι **κλειστή**, ἐὰν τὰ ἄκρα τῆς συμπίπτουν.

17. Μεικτὴ γραμμὴ. Μία γραμμὴ, ἢ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ εὐθύγραμμα τμήματα καὶ καμπύλας γραμμάς, λέγεται **μεικτὴ γραμμὴ**.

Π.χ. ἡ γραμμὴ $KΛMN$ (Σχ. 7) εἶναι μεικτὴ γραμμὴ.

III. Εἶδη ἐπιφανειῶν

18. Ἐπίπεδον. Ἡ ἀπλουστέρα ἀπὸ ὅλας τὰς ἐπιφανείας εἶναι ἡ **ἐπίπεδος ἐπιφάνεια** ἢ ἀπλῶς τὸ **ἐπίπεδον**.

Εἰκόνα τοῦ ἐπιπέδου μιᾶς δίδουν: ἡ ἐπιφάνεια τῶν ὑαλοπινάκων, ἡ ἐπιφάνεια μιᾶς τραπέζης, καλῶς πλανισμένης, ἡ ἐπιφάνεια τῶν ἠρεμούντων ὑδάτων, κλπ.

Γενικῶς: Μία ἐπιφάνεια εἶναι **ἐπίπεδος**, ὅταν ἡ εὐθεῖα, ἢ ὁποία

συνδέει δύο τυχόντα σημεία τῆς ἐπιφανείας, κεῖται δλόκληρος ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας.

Ὅλαι αἱ ἐπίπεδοι ἐπιφάνειαι, τὰς ὁποίας συναντῶμεν εἰς τὴν πρῶ-
ξιν, εἶναι περιορισμέναι. Εἰς τὴν Γεωμετρίαν ὅμως τὸ ἐπίπεδον πρό-
πει νὰ θεωρῆται, ὅτι ἐκτείνεται ἐπ' ἄπειρον πρὸς ὅλας τὰς διευθύνσεις.

Δύο τυχόντα ἐπίπεδα δύνανται νὰ ταυτισθοῦν καθ' ὅλην τὴν ἔκτα-
σίν των' ὅταν δύο ἐπίπεδα ταυτισθοῦν, δυνάμεθα νὰ ὀλισθαίνωμεν,
ἀδιακόπως, τὰ ἐπίπεδα, τὸ ἓνα ἐπὶ τοῦ ἄλλου.

Δύο ἐπίπεδα δύνανται νὰ ταυτισθοῦν καὶ ὅταν τὸ ἓνα ἐξ αὐτῶν
ἀντιστραφῆ προηγουμένως.

Παραδεχόμεθα ὅτι: **Ἐὰν δύο ἐπίπεδα ἔχουν τρία κοινὰ ση-
μεῖα, τὰ ὁποῖα δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας, τὰ ἐπίπεδα αὐτὰ ταυ-
τίζονται καὶ ἀποτελοῦν ἓνα ἐπίπεδον.**

(Ἡ πρότασις αὐτὴ θὰ ἀποδειχθῆ βραδύτερον εἰς ἄλλο κεφάλαιον).

19. Ἐπίπεδον σχῆμα. Ἐνα σχῆμα λέγεται ἐπίπεδον σχῆμα,
ὅταν ὅλα τὰ στοιχεῖα του κεῖνται ἐπὶ ἐνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

20. Τεθλασμένη ἐπιφάνεια. Μία ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία ἀποτε-
λεῖται ἀπὸ ἐπιπέδους ἐπιφανείας, χωρὶς νὰ εἶναι ὅλη ἐπίπεδος, λέγε-
ται **τεθλασμένη ἐπιφάνεια.**

Π.χ. Οἱ συνεχόμενοι τοῖχοι μιᾶς αἰθούσης ἀποτελοῦν τεθλασμένην
ἐπιφάνειαν.

21. Καμπύλη ἐπιφάνεια. Μία ἐπιφάνεια λέγεται **καμπύλη
ἐπιφάνεια**, ὅταν κανένα μέρος τῆς δὲν εἶναι ἐπίπεδον.

Π.χ. τὸ τόπι, τὸ αὐγὸ, οἱ σωλῆνες κλπ. ἔχουν καμπύλην ἐπιφάνειαν.

22. Μεικτὴ ἐπιφάνεια. Μία ἐπιφάνεια λέγεται **μεικτὴ ἐπιφά-
νεια**, ὅταν ἀποτελῆται ἀπὸ ἐπίπεδον καὶ καμπύλην ἐπιφάνειαν.

23. Διαίρεσις τῆς Γεωμετρίας. Ἡ Γεωμετρία διαιρεῖται εἰς
δύο μέρη.

1ον. Εἰς τὴν **Ἐπίπεδον Γεωμετρίαν** ἢ **Ἐπιπεδομετρίαν**, ἡ
ὁποία ἐξετάζει τὰς ιδιότητες τῶν ἐπιπέδων σχημάτων.

2ον. Εἰς τὴν **Στερεομετρίαν** ἢ **Γεωμετρίαν τοῦ Χώρου**, ἡ
ὁποία ἐξετάζει τὰς ιδιότητες τῶν σχημάτων, τῶν ὁποίων τὰ στοιχεῖα
δὲν κεῖνται ἐπὶ ἐνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

ΕΠΙΠΕΔΟΜΕΤΡΙΑ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

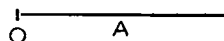
Η ΕΥΘΕΙΑ ΓΡΑΜΜΗ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄

ΕΥΘΕΙΑΙ ΚΑΙ ΓΩΝΙΑΙ

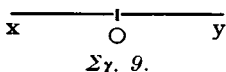
1. Εὐθύγραμμα τμήματα

24. Ἡμιευθεία. Ἡ εὐθεία OA (Σχ. 8), ἣ ὁποία ἔχει ἀρχὴν τὸ σημεῖον O καὶ ἐκτείνεται πέραν τοῦ A λέγεται **ἡμιευθεία**.



Σχ. 8.

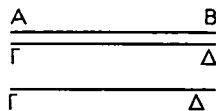
Ἐνα σημεῖον O (Σχ. 9), τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ μιᾶς ἀπεριορίστου εὐθείας xy , ὀρίζει δύο ἡμιευθείας Ox καὶ Oy . Τὸ σημεῖον O ὀνομάζεται **ἀρχὴ** τῶν ἡμιευθειῶν αὐτῶν.



Σχ. 9.

στον εὐθείας xy , ὀρίζει δύο ἡμιευθείας Ox καὶ Oy . Τὸ σημεῖον O ὀνομάζεται **ἀρχὴ** τῶν ἡμιευθειῶν αὐτῶν.

25. Σύγκρισις δύο εὐθύγραμμων τμημάτων. Διὰ νὰ συγκρίνωμεν δύο εὐθύγραμμα τμήματα AB καὶ $\Gamma\Delta$ θέτομεν τὸ ἓνα ἐπὶ τοῦ ἄλλου, π.χ. τὸ $\Gamma\Delta$ ἐπὶ τοῦ AB οὕτως, ὥστε τὰ ἄκρα A καὶ Γ νὰ συμπέσουν· ἔπειτα παρατηροῦμεν τίνα θέσιν θὰ λάβῃ, ἐπὶ τοῦ AB , τὸ ἄλλο ἄκρον Δ τοῦ $\Gamma\Delta$. Τὸ ἄκρον Δ δύναται νὰ καταλάβῃ μίαν ἀπὸ τὰς κάτωθι θέσεις:



Σχ. 10.

1ον. Ἐὰν τὸ Δ πέσῃ ἐπὶ τοῦ B , τότε τὰ δύο εὐθύγραμμα τμήματα AB καὶ $\Gamma\Delta$ εἶναι ἴσα (Σχ. 10).

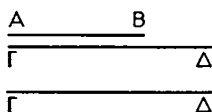
Τὸ ἐξαγόμενον τῆς συγκρίσεως αὐτῆς τὸ ἐκφράζομεν μὲ τὴν ἰσότητα:

$$\boxed{\text{εὐθ. τμ. } AB = \text{εὐθ. τμ. } \Gamma\Delta}$$

ἢ ἀπλῶς

$$\boxed{AB = \Gamma\Delta.}$$

2ον. Ἐὰν τὸ Δ πέσῃ πέραν τοῦ B (Σχ. 11), τότε τὸ εὐθύγραμμον τμήμα AB εἶναι **μικρότερον** τοῦ $\Gamma\Delta$ καὶ τὸ ἐξαγόμενον τῆς συγκρίσεως αὐτῆς τὸ ἐκφράζομεν μὲ τὴν ἀνισότητα:



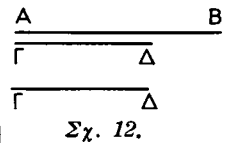
Σχ. 11.

$$\boxed{\text{εὐθ. τμ. } AB < \text{εὐθ. τμ. } \Gamma\Delta}$$

ἢ ἀπλῶς

$$\boxed{AB < \Gamma\Delta.}$$

3ον. Ἐὰν τὸ Δ πέση μεταξύ τῶν Α καὶ Β (Σχ. 12), τότε τὸ εὐθύγραμμον τμήμα ΑΒ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ΓΔ. Τὸ ἐξαγόμενον τῆς συγκρίσεως αὐτῆς τὸ ἐκφράζομεν μὲ τὴν ἀνισότητα :



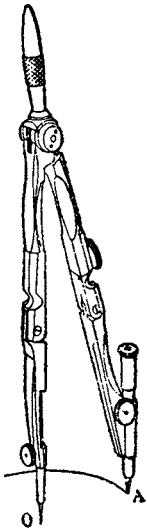
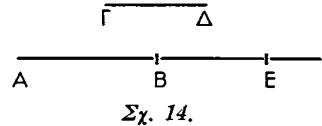
$\boxed{\text{εὐθ. τμ. } AB > \text{εὐθ. τμ. } \Gamma\Delta}$ ἢ ἀπλῶς $\boxed{AB > \Gamma\Delta}$.

Σημειώσεις. Μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ διαβήτου (Σχ. 13), ὡς εἶναι γνωστὸν ἐκ τῆς πρακτικῆς Γεωμετρίας, συγκρίνομεν ταχύτερον καὶ εὐκολώτερον δύο εὐθύγραμμα τμήματα καὶ εὐρίσκομεν, ἂν αὐτὰ εἶναι ἴσα ἢ ἄνισα καὶ ποῖον ἐξ αὐτῶν εἶναι τὸ μεγαλύτερον.

26. Ἀξίωμα ἀνισότητος. *Τὰ αὐτὰ σχήματα δὲν δύνανται νὰ εἶναι ἴσα καὶ ἄνισα.*

27. Ἄθροισμα δύο ἢ περισσοτέρων εὐθυγράμμων τμημάτων. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ προσθέσωμεν τὰ δύο εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ.

Πρὸς τοῦτο προεκτείνομεν τὸ εὐθύγραμμον τμήμα ΑΒ (Σχ. 14) καὶ λαμβάνομεν ἀπὸ τοῦ Β καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως αὐτῆς, ἓνα εὐθύγραμμον τμήμα ΒΕ ἴσον μὲ τὸ ΓΔ· τὸ εὐθύγραμμον τμήμα ΑΕ λέγεται ἄθροισμα τῶν δύο τμημάτων ΑΒ καὶ ΓΔ. Δηλ. εἶναι :



Σχ. 13.

$\boxed{AE = AB + BE}$ ἢ $\boxed{AE = AB + \Gamma\Delta}$

Διὰ νὰ προσθέσωμεν πολλὰ εὐθύγραμμα τμήματα, εὐρίσκομεν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων τμημάτων, ἔπειτα εἰς τὸ ἄθροισμα αὐτὸ προσθέτομεν τὸ τρίτον εὐθύγραμμον τμήμα καὶ οὕτω καθεξῆς μέχρις, ὅτου προσθέσωμεν διαδοχικῶς ὅλα τὰ εὐθύγραμμα τμήματα.

Οὕτω τὸ ἄθροισμα τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων α, β, γ, (Σχ. 15), εἶναι τὸ εὐθύγραμμον τμήμα ΑΔ. Δηλ. εἶναι

$\boxed{A\Delta = AB + B\Gamma + \Gamma\Delta}$ ἢ $\boxed{A\Delta = \alpha + \beta + \gamma}$

Παραδεχόμεθα, ὅτι τὸ ἄθροισμα πολλῶν εὐθυγράμμων τμημάτων

εἶναι τὸ αὐτό, καθ' οἷανδήποτε τάξιν καὶ ἂν προσθέσωμεν τὰ εὐθύγραμμα αὐτὰ τμήματα.

28. Διαφορὰ δύο εὐθυγράμμων τμημάτων. Διὰ νὰ εὐρωμεν τὴν διαφορὰν δύο εὐθυγράμμων τμημάτων π.χ. τῶν AB καὶ $\Gamma\Delta$, (Σχ. 16) λαμβάνομεν ἐπὶ τοῦ μεγαλύτερου τμήματος AB καὶ ἀπὸ τοῦ ἑνὸς τῶν ἄκρων του, ἔστω τοῦ A , ἕνα εὐθύγραμμον τμήμα AE



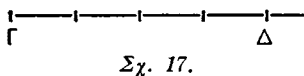
Σχ. 16.

ἴσον μὲ τὸ $\Gamma\Delta$: τὸ ἀπομένον εὐθύγραμμον τμήμα EB εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν δύο δοθέντων εὐθυγράμμων τμημάτων· ἦτοι εἶναι

$$\boxed{AB - AE = EB} \quad \eta \quad \boxed{AB - \Gamma\Delta = EB}$$

Ὅστε: Διαφορὰ δύο εὐθυγράμμων τμημάτων εἶναι ἕνα τρίτον εὐθύγραμμον τμήμα, τὸ ὁποῖον προστιθέμενον εἰς τὸ μικρότερον δίδει ὡς ἄθροισμα τὸ μεγαλύτερον.

29. Γινόμενον ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος ἐπὶ ἕνα ἀκέρατον ἀριθμὸν. Λέγομεν, ὅτι ἕνα εὐθύγραμμον τμήμα εἶναι διπλάσιον, τριπλάσιον, τετραπλάσιον, . . . νηπλάσιον ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος AB , ἂν εἶναι ἄθροισμα 2, 3, 4, . . . , ν εὐθυγράμμων τμημάτων ἴσων μὲ τὸ AB .



Σχ. 17.

Οὕτω, τὸ γινόμενον:

εὐθύγραμμον τμήμα $AB \times 4$, τὸ ὁποῖον γράφεται ἀπλούστερον $AB \times 4$ ἢ $4AB$, σημαίνει, ὅτι πρέπει νὰ σχηματίσωμεν

τὸ ἄθροισμα 4 εὐθυγράμμων τμημάτων ἴσων μὲ τὸ AB .

Τὸ εὐθύγραμμον τμήμα $\Gamma\Delta$ (Σχ. 17) παριστάνει τὸ γινόμενον $4AB$, δηλ. εἶναι $\Gamma\Delta = 4AB$.

30. Πηλίκον δύο εὐθυγράμμων τμημάτων. Λέγομεν, ὅτι ἕνα εὐθύγραμμον τμήμα εἶναι τὸ ἥμισυ, τὸ τρίτον, τὸ τέταρτον, . . . τὸ νηοστόν ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος AB , ἂν τὸ AB εἶναι τὸ ἄθροισμα 2, 3, 4 . . . , ν εὐθυγράμμων τμημάτων ἴσων μὲ τὸ πρῶτον.

Οὕτω τὸ εὐθύγραμμον τμήμα AB (Σχ. 17) εἶναι τὸ τέταρτον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος $\Gamma\Delta$: δηλ. εἶναι

$$\boxed{AB = \frac{1}{4} \cdot \Gamma\Delta} \quad \eta \quad \boxed{AB = \frac{\Gamma\Delta}{4}}$$

Κατωτέρω θὰ ἴδωμεν πῶς διαιροῦμεν ἕνα εὐθύγραμμον τμήμα εἰς 2, 3, 4, . . . , ν ἴσα εὐθύγραμματα τμήματα.

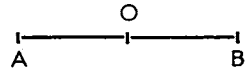
Παρατήρησις. Αἱ ιδιότητες τῆς ἰσότητος καὶ ἀνισότητος δύο

ἀριθμῶν ἢ μεγεθῶν ἰσχύουν καὶ διὰ τὰ εὐθύγραμμα τμήματα καὶ γενικῶς δι' ὅλα τὰ Γεωμετρικὰ σχήματα. Π.χ.

Ἐὰν εἰς ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα προστεθοῦν ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα, τὰ ἀθροίσματα εἶναι ἴσα: κλπ. κλπ.

31. Μέσον εὐθυγράμμου τμήματος. Ἐστω ἓνα εὐθύγραμμον τμήμα AB (Σχ. 18) καὶ O ἓνα σημεῖον αὐτοῦ.

Ἐὰν εἶναι $OA=OB$, τὸ σημεῖον O λέγεται **μέσον** τοῦ AB.



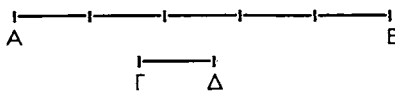
Σχ. 18.

Ὡστε: **Μέσον** εὐθυγράμμου τμήματος ὀνομάζομεν τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον διαιρεῖ τὸ εὐθύγραμμον τμήμα εἰς δύο ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα.

32. Μέτρησις εὐθυγράμμων τμημάτων. Ὅταν λέγωμεν, ὅτι θὰ μετρήσωμεν ἓνα εὐθύγραμμον τμήμα AB σημαίνει, ὅτι θὰ τὸ συγκρίνωμεν πρὸς ἓνα ἄλλο εὐθύγραμμον τμήμα ΓΔ, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν ὡς μονάδα μετρήσεως, διὰ νὰ ἴδωμεν πόσας φορὰς τὸ τμήμα αὐτὸ περιέχει τὴν μονάδα.

Διὰ νὰ συγκρίνωμεν τὸ εὐθύγραμμον τμήμα AB πρὸς τὸ ΓΔ φέρομεν τὸ ΓΔ ἐπὶ τοῦ AB τόσας φορὰς, ὅσας εἶναι δυνατόν. Κατὰ τὴν σύγκρισιν αὐτὴν τρεῖς περιπτώσεις δύνανται νὰ παρουσιασθοῦν:

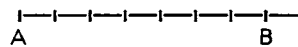
1ον. Τὸ εὐθύγραμμον τμήμα ΓΔ περιέχεται εἰς τὸ AB 2, 3, 4, ... ν φορὰς. Ἐστω ὅτι τὸ ΓΔ περιέχεται εἰς τὸ AB (Σχ. 19) 5 φορὰς· λέγομεν τότε, ὅτι τὸ **μέτρον** τοῦ AB εἶναι ὁ ἀκέραιος ἀριθμὸς 5.



Σχ. 19.

2ον. Τὸ εὐθύγραμμον τμήμα ΓΔ δὲν περιέχεται εἰς τὸ AB κατὰ ἓνα ἀκέραιον ἀριθμὸν φορῶν.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν διαιροῦμεν τὸ ΓΔ εἰς ἴσα μέρη καὶ παρατηροῦμεν, ἂν ἕκαστον τῶν ἴσων αὐτῶν μερῶν τοῦ ΓΔ περιέχεται ἀκριβῶς εἰς τὸ AB κατὰ ἓνα ἀκέραιον ἀριθμὸν φορῶν.



Σχ. 20.

Ἐστω, ὅτι διηρέσαμεν τὸ εὐθύγραμμον τμήμα ΓΔ εἰς τρία ἴσα μέρη (Σχ. 20)

καὶ ὅτι τὸ ἓνα ἀπὸ αὐτὰ τὰ τρία ἴσα μέρη,

δηλαδή τὸ ἐν τρίτον τοῦ ΓΔ, περιέχεται εἰς τὸ AB, 7 φορὰς· λέγομεν τότε, ὅτι τὸ **μέτρον** τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος AB εἶναι ὁ κλασματικὸς ἀριθμὸς $\frac{7}{3}$.

Γενικῶς: ἂν τὸ νουστὸν μέρος τοῦ ΓΔ περιέχεται μ φορὰς εἰς τὸ

ΑΒ, τὸ **μέτρον** τοῦ ΑΒ εἶναι ὁ κλασματικὸς ἀριθμὸς $\frac{\mu}{\nu}$, ὅταν λάβωμεν ὡς μονάδα μετρήσεως τὸ ΓΔ.

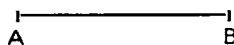
30ν. Δὲν δυνάμεθα νὰ εὐρωμεν ἕνα ἀκέραιον ἀριθμὸν ν τοιοῦτον, ὥστε ἂν διαιρέσωμεν τὸ ΓΔ εἰς ν ἴσα μέρη, τὸ ἕνα ἀπὸ αὐτὰ τὰ ἴσα μέρη, νὰ περιέχεται ἀκριβῶς εἰς τὸ ΑΒ κατὰ ἕνα ἀκέραιον ἀριθμὸν φορῶν. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν, ὅτι τὸ εὐθύγραμμον τμήμα ΑΒ δὲν ἔχει **κοινὸν μέτρον** μὲ τὴν μονάδα ΓΔ, τὴν ὁποίαν ἐξελέξαμεν.

33. Μῆκος εὐθυγράμμου τμήματος. Τὸ μέτρον ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος λέγεται καὶ μῆκος αὐτοῦ.

Διὰ νὰ εὐρωμεν τὰ μῆκη τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων χρησιμοποιοῦμεν, ὡς μονάδα μετρήσεως τὸ κοινὸν μέτρον, ἢ τὰς ὑποδιαιρέσεις του: τὸ ἑκατοστόμετρον (ἐκ.), τὸ χιλιοστόμετρον ἢ τὰ πολλαπλάσια του.

Διὰ νὰ μετρήσωμεν τὰ εὐθύγραμμα τμήματα, εἰς ἕνα γεωμετρικὸν σχέδιον, χρησιμοποιοῦμεν τὸ ὑποδεκάμετρον, δηλ. ἕνα κανόνα πλατύν, ὁ ὁποῖος εἶναι διηρημένος ἀπὸ 0 μέχρι 20 ἑκατοστόμετρα.

34. Ἀπόστασις δύο σημείων. Ἐστῶσαν δύο σημεῖα Α καὶ Β (Σχ. 21) καὶ ΑΒ τὸ εὐθύγραμμον τμήμα, πὸν συνδέει αὐτά.

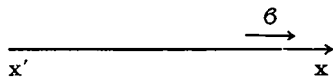


Σχ. 21.

Τὸ μῆκος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ λέγεται **ἀπόστασις** τῶν σημείων Α καὶ Β.

Ἐνίοτε ὡς ἀπόστασιν δύο σημείων θεωροῦμεν ἀπλῶς καὶ τὸ εὐθύγραμμον τμήμα, τὸ ὁποῖον συνδέει τὰ σημεῖα αὐτά.

35. Ἀξῶν. Ἐστω μία ἀπεριόριστος εὐθεῖα $x'x$. Ἐνα κινήτων σημεῖον δύναται νὰ διανύσῃ τὴν εὐθεῖαν αὐτὴν, εἴτε κατὰ τὴν φορὰν τοῦ βέλους β, εἴτε κατ' ἀντίθετον φορὰν.



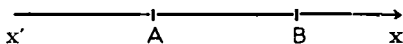
Σχ. 22.

Διὰ νὰ διακρίνωμεν τὰς δύο αὐτὰς φορὰς μεταξύ των, δίδομεν εἰς μίαν ἐξ αὐτῶν, αὐθαιρέτως, τὸ ὄνομα **θετικὴ φορὰ**, ὁπότε ἡ ἄλλη θὰ ὀνομασθῇ **ἀρνητικὴ φορὰ**. Συνήθως ὡς θετικὴν φορὰν λαμβάνομεν τὴν φορὰν ἐκ τοῦ x' πρὸς τὸ x καὶ ὡς ἀρνητικὴν τὴν φορὰν ἐκ τοῦ x πρὸς τὸ x' .

Ἡ ἀπεριόριστος εὐθεῖα $x'x$, ἐπὶ τῆς ὁποίας ἔχει ὀρισθῆ ἡ θετικὴ φορὰ καὶ κατὰ συνέπειαν καὶ ἡ ἀρνητικὴ φορὰ, λέγεται **ἄξων ἢ προσανατολισμένη εὐθεῖα**.

36. Διάνυσμα. Ἐπὶ μιᾶς ἀπεριόριστου εὐθείας $x'x$ (Σχ. 23),

λαμβάνομεν δύο σημεῖα A καὶ B. Τὰ σημεῖα A καὶ B ὀρίζουν ἐπὶ τῆς $x'x$ ἓνα εὐθύγραμμον τμήμα AB, τὸ ὁποῖον δυνάμεθα νὰ ὀνομάσωμεν, ἀδιαφόρως, εὐθύγραμμον τμήμα AB ἢ BA.



Σχ. 23.

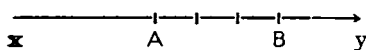
Ἐὰν ὁμῶς ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ εὐθύγραμμον αὐτὸ τμήμα διανύεται ἀπὸ ἓνα κινητὸν, τὸ ὁποῖον ἀναχωρεῖ ἀπὸ τὸ A καὶ φθάνει εἰς τὸ B, τότε τὸ εὐθύγραμμον τμήμα AB διαφέρει ἀπὸ τὸ εὐθύγραμμον τμήμα BA, πού διανύεται ἀπὸ ἓνα κινητὸν, τὸ ὁποῖον ἀναχωρεῖ ἀπὸ τὸ B καὶ φθάνει εἰς τὸ A.

Τὰ εὐθύγραμμα αὐτὰ τμήματα AB καὶ BA, τὰ ὁποῖα διανύονται ἀπὸ ἓνα κινητὸν κατὰ τινὰ φορὰν λέγονται **διανύσματα**.

Τὸ σημεῖον ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἐκκινεῖ τὸ κινητὸν διὰ νὰ διανύσῃ ἓνα διάνυσμα λέγεται **ἀρχὴ τοῦ διανύσματος**, τὸ δὲ σημεῖον εἰς τὸ ὁποῖον φθάνει τὸ κινητὸν λέγεται **τέλος τοῦ διανύσματος**, καὶ ἡ φορὰ, τὴν ὁποίαν ἀκολουθεῖ τὸ κινητὸν κατὰ τὴν κίνησίν του, λέγεται **φορὰ τοῦ διανύσματος**.

Π.χ. τὸ διάνυσμα AB (Σχ. 23), τὸ ὁποῖον παρίσταται διὰ τοῦ \vec{AB} ἔχει ἀρχὴν τὸ σημεῖον A, τέλος τὸ σημεῖον B καὶ φορὰν τὴν ἐκ τοῦ A πρὸς τὸ B, ἐνῶ τὸ διάνυσμα \vec{BA} ἔχει ἀρχὴν τὸ B, τέλος τὸ A καὶ φορὰν τὴν ἐκ τοῦ B πρὸς τὸ A.

Τὸ μέτρον ἢ ἡ ἀλγεβρική τιμὴ ἑνὸς διανύσματος \vec{AB} . τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ ἑνὸς ἄξονος εἶναι ἓνας ἀλγεβρικός ἀριθμὸς, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀπόλυτον τιμὴν τὸ μῆκος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος καὶ σημεῖον + ἢ —, καθόσον τὸ διάνυσμα ἔχει τὴν θετικὴν φορὰν ἢ τὴν ἀρνητικὴν φορὰν τοῦ ἄξονος.



Σχ. 24.

Ἡ ἀλγεβρική τιμὴ ἑνὸς διανύσματος \vec{AB} παρίσταται διὰ τοῦ \overline{AB} .

Οὕτω (Σχ. 24): $\overline{AB} = +3$ καὶ $\overline{BA} = -3$.

Ἀσκήσεις

1. (3*. Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας ΧΨ λαμβάνομεν κατὰ σειρὰν τὰ σημεῖα A, B, Γ, Δ. 1ον. Νὰ δεიχθῇ, ὅτι $AG + BD = AD + BG$. 2ον. Ἐὰν M εἶναι τὸ μέσον τοῦ AB καὶ N τὸ μέσον τοῦ ΓΔ, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $MN = \frac{AG + BD}{2}$.

* Ὁ δεύτερος ἀριθμὸς, ὁ εὐρισκόμενος ἐντὸς παρενθέσεως, δηλώνει τὸν αὐξήοντα ἀριθμὸν τῶν λύσεων τῶν ἀσκήσεων, αἱ ὁποῖαι ἀναγράφονται εἰς τὸ βιβλίον «Ἀσκήσεις καὶ προβλήματα Γεωμετρίας».

2. (5). Δίδονται τρία σημεία Α, Β, Γ, μιᾶς εὐθείας ΧΨ καὶ Ο τὸ μέσον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ.

1ον. Ἐὰν τὸ σημεῖον Γ κείται ἐκτὸς τοῦ τμήματος ΑΒ, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἶναι

$$ΑΟ = \frac{ΓΑ - ΓΒ}{2}, \quad ΓΟ = \frac{ΓΑ + ΓΒ}{2}.$$

2ον. Ἐὰν τὸ σημεῖον Γ κείται μεταξύ τῶν Ο καὶ Β, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$ΑΟ = \frac{ΓΑ + ΓΒ}{2}, \quad ΓΟ = \frac{ΓΑ - ΓΒ}{2}.$$

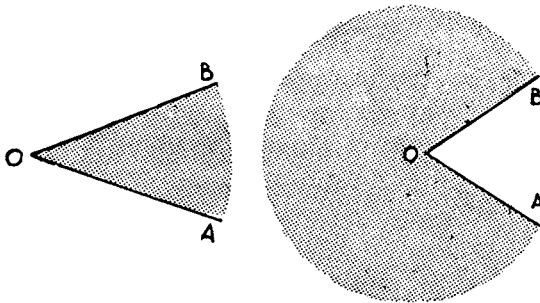
3. (8). Ἐπὶ ἑνὸς πίνακος ἔχουν σημειωθῆ πέντε σημεία, τὰ ὁποῖα δὲν κείνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας. Πόσας εὐθείας ὁρίζουν τὰ σημεία αὐτά; Νὰ γενικεύσετε τὸ ζήτημα διὰ ν σημεία.

4. (10). Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας λαμβάνομεν κατὰ σειρὰν τρία σημεία Α, Β, Γ καὶ τοιαῦτα, ὥστε νὰ εἶναι ΑΒ=10 ἐκ. καὶ ΒΓ=6 ἐκ. Ἐὰν Μ, Ν, Ρ εἶναι τὰ μέσα τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ τμήματα ΜΝ καὶ ΑΡ ἔχουν τὸ αὐτὸ μέσον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου αὐτοῦ ἀπὸ τὸ σημεῖον Α.

5. (11). Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας ΧΨ λαμβάνομεν τὰ σημεία Α, Ο, Β. Ἐὰν ΟΑ=α καὶ ΟΒ=β, ὅπου α>β, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μήκος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ καὶ ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου Ο ἀπὸ τὸ μέσον Μ τοῦ ΑΒ. Νὰ ἐξετασθοῦν δύο περιπτώσεις, καθ' ὅσον τὸ Ο δὲν κείται μεταξύ τῶν Α καὶ Β ἢ κείται μεταξύ τῶν Α καὶ Β.

2. Γωνίαι

37. Γωνία. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Ο ἑνὸς ἐπιπέδου φέρομεν δύο ἡμιευθείας ΟΑ καὶ ΟΒ (Σχ. 25, 26). Τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου, τὸ



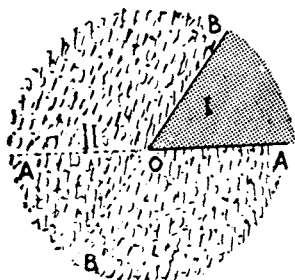
Σχ. 25.—Ἐξέχουσα γωνία. Σχ. 26.—Εἰσέχουσα γωνία.

ὁποῖον περιέχεται μεταξύ τῶν ἡμιευθειῶν αὐτῶν λέγεται **γωνία**.

Ὡστε: **Γωνία** λέγεται τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξύ δύο ἡμιευθειῶν, αἱ ὁποῖα ἔχουν κοινὴν ἀρχήν.

Τὸ κοινὸν σημεῖον Ο τῶν δύο ἡμιευθειῶν λέγεται **κορυφή** τῆς γωνίας, αἱ δὲ δύο ἡμιευθεῖαι λέγονται **πλευραὶ** τῆς γωνίας.

Αἱ ἡμιευθεῖαι OA καὶ OB χωρίζουν τὸ ἐπίπεδον εἰς δύο μέρη I καὶ II (Σχ. 27). Ἐκαστον τῶν μερῶν αὐτῶν, κατὰ τὸν ἀνωτέρω ὀρισμὸν, λέγεται γωνία.



Σχ. 27.

Ἐὰν προεκτείνωμεν τὴν πλευρὰν OA (εἶτε τὴν OB) τῆς γωνίας I πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς, ὀλόκληρος ἡ γωνία I κεῖται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ἀπεριορίστου εὐθείας OA . Αἱ προεκτάσεις τῶν ἡμιευθειῶν OA καὶ OB πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς O δὲν εἰσέρχονται ἐντὸς τῆς γωνίας I . Ἡ γωνία αὐτὴ λέγεται **ἐξέχουσα γωνία** ἢ **κυρτὴ γωνία**.

(Π.χ. ἡ γωνία τοῦ σχήματος 25 εἶναι ἐξέχουσα γωνία).

Τουναντίον ἡ γωνία II , εἰς τὴν ὁποίαν αἱ προεκτάσεις τῶν πλευρῶν τῆς εἰσέρχονται ἐντὸς αὐτῆς λέγεται **εἰσέχουσα γωνία** ἢ **μὴ κυρτὴ γωνία**.

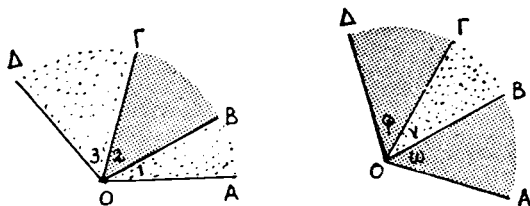
(Ἡ γωνία τοῦ σχήματος 26, εἶναι εἰσέχουσα γωνία).

Κατωτέρω, ἐκτὸς ἐναντίας δηλώσεως, θὰ θεωροῦμεν ὡς γωνίαν τὸ μέρος I τοῦ ἐπιπέδου, δηλ. τὴν ἐξέχουσαν γωνίαν.

38. Ὀνομασία μιᾶς γωνίας. Διὰ τὰ ὀνομάσωμεν τὴν γωνίαν, τὴν ὁποίαν ὀρίζουν αἱ ἡμιευθεῖαι OA καὶ OB λέγομεν: ἡ γωνία AOB ἢ ἡ γωνία BOA ἢ ἀπλούστερον ἡ γωνία O καὶ γράφομεν:

γων. AOB , εἶτε \widehat{AOB} , εἶτε \widehat{O} .

Ὅταν ἀπαγγέλλωμεν μίαν γωνίαν μὲ τρία γράμματα, πρέπει νὰ θέτωμεν τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς τῆς εἰς τὸ μέσον.



Σχ. 28.

Ὅταν πολλαὶ γωνίαι ἔχουν τὴν αὐτὴν κορυφὴν, (Σχ. 28) τοποθετοῦμεν συνήθως ἐντὸς αὐτῆς καὶ πλησίον τῆς κοινῆς κορυφῆς ἀπὸ ἓνα δείκτην ἢ ἓνα μικρὸν γράμμα τῆς ἀλφαβῆτου.

Π.χ. λέγομεν: ἡ γωνία O_1 , ἡ γωνία O_2 , ἡ γωνία O_3 (Σχ. 28) καὶ γράφομεν \widehat{O}_1 , \widehat{O}_2 , \widehat{O}_3 .

Ὅμοιως λέγομεν: ἡ γωνία ν (Σχ. 27), ἡ γωνία φ , ἡ γωνία ω καὶ γράφομεν: γων.ν, γων.φ, γων.ω ἢ $\widehat{\nu}$, $\widehat{\varphi}$, $\widehat{\omega}$.

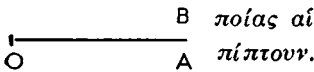
39. Πεπλατυσμένη γωνία. *Πεπλατυσμένη γωνία λέγεται ἡ γωνία, τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ εἶναι ἡ μία προέκτασις τῆς ἄλλης (Σχ. 29).*

Π.χ. ἡ γωνία $A\widehat{O}B$ (Σχ. 29) εἶναι πεπλατυσμένη γωνία.



Σχ. 29.

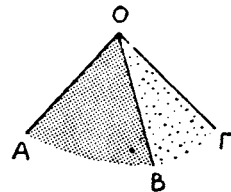
40. Γωνία μηδέν. *Μηδέν γωνία, λέγεται ἡ γωνία, τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ συμπίπτουν.*



Σχ. 30.

Π.χ. ἡ γωνία AOB (Σχ. 30) εἶναι μηδέν γωνία.

41. Ἐφεξῆς γωνίαι. Ἔστωσαν αἱ γωνίαι AOB καὶ $BO\Gamma$ (Σχ. 31), αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὴν αὐτὴν κορυφὴν O , κοινὴν τὴν πλευρὰν OB καὶ τὰς ἄλλας πλευρὰς OA καὶ $O\Gamma$ ἑκατέρωθεν τῆς κοινῆς πλευρᾶς OB . Αἱ γωνίαι αὐταὶ λέγονται *ἐφεξῆς γωνίαι*. Ὡστε:

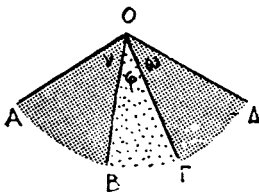


Σχ. 31.

Δύο γωνίαι λέγονται ἐφεξῆς, ὅταν ἔχουν τὴν αὐτὴν κορυφὴν, μίαν κοινὴν πλευρὰν καὶ τὰς δύο ἄλλας πλευρὰς ἑκατέρωθεν τῆς κοινῆς πλευρᾶς.

42. Διαδοχικαὶ γωνίαι. Ἐὰν πολλαὶ γωνίαι κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ καθεμία ἀπὸ αὐτὰς εἶναι ἐφεξῆς γωνία τῆς

προηγούμενης τῆς, τότε αἱ γωνίαι αὐταὶ λέγονται *διαδοχικαὶ γωνίαι*.



Σχ. 32.

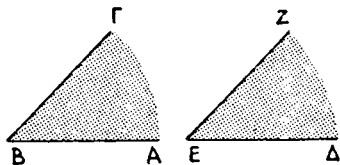
Π.χ. αἱ γωνίαι ω , ν , φ , (Σχ. 32) εἶναι διαδοχικαὶ γωνίαι.

43. Σύγκρισις γωνιῶν. Διὰ τὴν σύγκρισιν δύο γωνίας $AB\Gamma$ καὶ ΔEZ (Σχ. 33) μεταξὺ των, ὡς πρὸς τὸ μέγεθός των, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

Λαμβάνομεν τὴν μίαν γωνίαν, π.χ. τὴν ΔEZ καὶ τὴν θέτομεν ἐπὶ τῆς ἄλλης γωνίας $AB\Gamma$ οὕτως, ὥστε ἡ κορυφὴ E νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς κορυφῆς B καὶ ἡ πλευρὰ EA νὰ εφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς BA , ἡ δὲ πλευρὰ EZ νὰ πέσῃ πρὸς τὸ μέρος πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται ἡ πλευρὰ $B\Gamma$.

Ἐπειτα παρατηροῦμεν ποίαν θέσιν θὰ λάβῃ ἡ πλευρὰ EZ, ὡς πρὸς τὴν πλευρὰν BΓ :

1ον. Γωνίαι ἴσαι. Ἐὰν ἡ πλευρὰ EZ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς BΓ, τότε λέγομεν, ὅτι αἱ γωνίαι ABΓ καὶ ΔEZ εἶναι ἴσαι. Τὸ ἐξαγόμενον τῆς συγκρίσεως αὐτῆς δηλώνομεν μὲ τὴν ἰσότητα :



Σχ. 33.

$$\text{γων. AB}\Gamma = \text{γων. }\Delta\text{EZ}$$

$$\hat{\text{A}}\text{B}\Gamma = \hat{\text{A}}\text{E}\text{Z}$$

ἢ

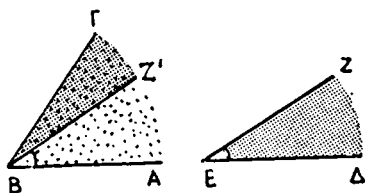
νίας ABΓ (Σχ. 34) καὶ λάβῃ τὴν θέσιν BZ', τότε ἡ γωνία ABΓ εἶναι *μεγαλύτερα* ἀπὸ τὴν γωνίαν ΔEZ.

Τὸ ἐξαγόμενον τῆς συγκρίσεως αὐτῆς δηλώνομεν μὲ τὴν ἀνισότητα :

$$\text{γων. AB}\Gamma > \text{γων. }\Delta\text{EZ}$$

ἢ

$$\hat{\text{A}}\text{B}\Gamma > \hat{\text{A}}\text{E}\text{Z}$$



Σχ. 34.

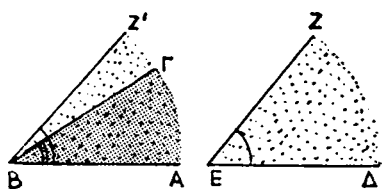
β') Ἐὰν ἡ πλευρὰ EZ (Σχ. 35) πέσῃ ἐκτὸς τῆς γωνίας ABΓ, τότε ἡ γωνία ABΓ εἶναι *μικρότερα* τῆς γωνίας ΔEZ.

Τὸ ἐξαγόμενον τῆς συγκρίσεως αὐτῆς δηλώνομεν μὲ τὴν ἀνισότητα :

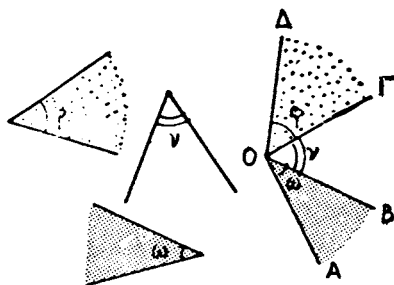
$$\text{γων. AB}\Gamma < \text{γων. }\Delta\text{EZ}$$

ἢ

$$\hat{\text{A}}\text{B}\Gamma < \hat{\text{A}}\text{E}\text{Z}$$



Σχ. 35.



Σχ. 36.

44. Ἄθροισμα γωνιῶν.

Διὰ τὴν προσθέσωμεν πολλὰς γωνίας ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς :

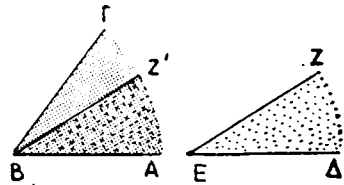
Καθιστῶμεν τὰς δοθείσας γωνίας διαδοχικὰς καὶ ἡ γωνία, ἡ ὁποία ἔχει πλευρὰς τὰς δύο ἐξωτερικὰς πλευρὰς τῶν διαδοχικῶν γωνιῶν, εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δοθεισῶν γωνιῶν.

Π.χ. ἡ γωνία $\widehat{AO\Delta}$ (Σχ. 36), εἶναι ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ω, ν, ϕ ἥτοι εἶναι $\widehat{AO\Delta} = \widehat{AOB} + \widehat{BO\Gamma} + \widehat{GO\Delta}$ ἢ $\widehat{AO\Delta} = \widehat{\omega} + \widehat{\nu} + \widehat{\phi}$.

Σημ. Παραδεχόμεθα, ὅτι τὸ ἄθροισμα ὁσωνδήποτε γωνιῶν εἶναι τὸ αὐτό, καθ' οἷανδήποτε τάξιν καὶ ἂν προσθέσωμεν τὰς γωνίας.

45. Διαφορὰ δύο γωνιῶν. Διὰ νὰ εὐρωμεν τὴν διαφορὰν δύο γωνιῶν, π.χ. τῶν $\widehat{AB\Gamma}$ καὶ $\widehat{\Delta EZ}$ (Σχ. 37) ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

Λαμβάνομεν τὴν μικροτέραν γωνίαν $\widehat{\Delta EZ}$ καὶ τὴν θέτομεν ἐπὶ τῆς $\widehat{AB\Gamma}$ οὕτως, ὥστε ἡ κορυφή E νὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς κορυφῆς B καὶ ἡ πλευρὰ EA ἐπὶ τῆς BA . Ἐπειδὴ ἡ γωνία $\widehat{\Delta EZ}$ εἶναι μικροτέρα τῆς γωνίας $\widehat{AB\Gamma}$, ἡ πλευρὰ EZ θὰ πέσῃ ἐντὸς τῆς γωνίας $\widehat{AB\Gamma}$ καὶ ἔστω ὅτι θὰ λάβῃ τὴν θέσιν BZ' . Ἡ γωνία $\widehat{Z'BG}$ εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν γωνιῶν $\widehat{AB\Gamma}$ καὶ $\widehat{\Delta EZ}$. ἥτοι εἶναι

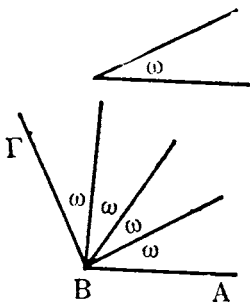


Σχ. 37.

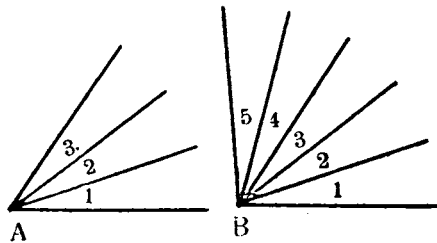
$$\widehat{AB\Gamma} - \widehat{\Delta EZ} = \widehat{Z'BG}$$

46. Πολλαπλασιασμός μιᾶς γωνίας ἐπὶ ἓνα ἀκέραιον ἀριθμὸν. Ὁ πολλαπλασιασμός μιᾶς γωνίας ἐπὶ ἓνα ἀκέραιον ἀριθμὸν γίνεται, ὅπως ὁ πολλαπλασιασμός ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος ἐπὶ ἀκέραιον ἀριθμὸν (§ 29).

Οὕτω ἡ γωνία $\widehat{AB\Gamma}$ (Σχ. 38) εἶναι τε-



Σχ. 38.



Σχ. 39.

τραπλασία τῆς γωνίας ω : δηλ. εἶναι: $\widehat{AB\Gamma} = 4\omega$.

Ἀντιστρόφως εἶναι $\omega = \frac{\widehat{AB\Gamma}}{4}$.

Ἡ γωνία ω εἶναι ἓνα ὑποπολλαπλασίον ἢ διαιρέτης τῆς γωνίας $\widehat{AB\Gamma}$.

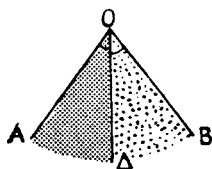
Ἐὰν θεωρήσωμεν μίαν γωνίαν A διηρημένην εἰς τρία ἴσα μέρη

(Σχ. 39) καὶ λάβωμεν 5 ἀπὸ αὐτὰ τὰ ἴσα μέρη, θὰ σχηματίσωμεν μίαν γωνίαν B ἴσην μὲ τὰ $\frac{5}{3}$ τῆς γωνίας A' δηλ. θὰ εἶναι

$$\widehat{B} = \frac{5}{3} \widehat{A}.$$

47. Διχοτόμος μιᾶς γωνίας. Ἐστω ἡ γωνία AOB (Σχ. 40).

Ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας αὐτῆς φέρομεν μίαν εὐθεῖαν OΔ, κειμένην μεταξὺ τῶν πλευρῶν της. Ἐὰν αἱ δύο σχηματιζόμεναι γωνίαι AOD καὶ DOB εἶναι ἴσαι, ἡ ἡμιευθεῖα OΔ λέγεται **διχοτόμος** τῆς γωνίας AOB.



Σχ. 40.

Ὡστε: **Διχοτόμος γωνίας** λέγεται ἡ ἡμιευθεῖα, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας καὶ χωρίζει αὐτὴν εἰς δύο ἴσας γωνίας.

Ἐὰν ἡ OΔ εἶναι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας AOB, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν:

$$\widehat{AOD} = \widehat{DOB} = \frac{1}{2} \widehat{AOB}.$$

48. Ὄρθη γωνία. Τὸ ἥμισυ μιᾶς πεπλατυσμένης γωνίας λέγεται **ὄρθη γωνία**.

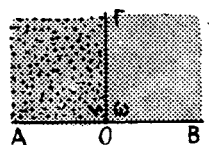
Π.χ. ἐὰν ἡ OΓ διχοτομῇ τὴν πεπλατυσμένην γωνίαν AOB, αἱ ἴσαι γωνίαι AOG καὶ GOB εἶναι ὄρθαι γωνίαι. (Σχ. 41).

Γράφομεν: $\widehat{AOG} = \widehat{GOB} = 1$ ὄρθῃ.

Εἶναι προφανές ὅτι:

48'. Ὅλαι αἱ ὄρθαι γωνίαι εἶναι ἴσαι.

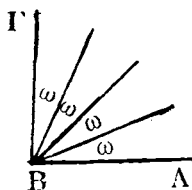
(ὡς ἡμίση ἴσων πεπλατυσμένων γωνιῶν).



Σχ. 41.

49. Μέτρησης γωνιῶν. Ὅταν λέγωμεν, ὅτι θὰ μετρήσωμεν μίαν

γωνίαν σημαίνει, ὅτι θὰ ζητήσωμεν νὰ εὗρωμεν πόσας φορές αὕτη περιέχει μίαν ἄλλην γωνίαν, τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν ὡς μονάδα. Ὁ ἀριθμὸς, ὁ ὁποῖος θὰ προκύψῃ ἐκ τῆς συγκρίσεως αὐτῆς λέγεται **μέτρον** τῆς δοθείσης γωνίας.



Σχ. 42.

Π.χ. Ἐστω, ὅτι θέλομεν νὰ μετρήσωμεν τὴν γωνίαν ABΓ (Σχ. 42). Λαμβάνομεν ὡς μονάδα μετρήσεως μίαν γωνίαν, ἔστω τὴν ω. Ὑποθέτομεν π.χ., ὅτι ἡ γωνία ABΓ περιέχει ἀκριβῶς 4 φορές τὴν γωνίαν ω. Τότε τὸ μέτρον τῆς γωνίας ABΓ εἶναι ὁ ἀριθμὸς 4 καὶ γράφομεν $\widehat{AB\Gamma} = 4$.

Συνήθως, ὡς μονάδα μετρήσεως τῶν γωνιῶν λαμβάνομεν τὴν ὀρθὴν γωνίαν.

Ἡ ὀρθὴ γωνία διαιρεῖται εἰς 90 ἴσας γωνίας, ἐκάστη τῶν ὁποίων ὀνομάζεται : μοῖρα (°).

Ἡ μοῖρα διαιρεῖται εἰς 60 πρῶτα λεπτά (') καὶ ἕκαστον πρῶτον λεπτὸν εἰς 60 δεύτερα λεπτά ("). Οὕτω εἶναι

$$1 \text{ ὀρθ} = 90^\circ, \quad 1^\circ = 60', \quad 1' = 60''.$$

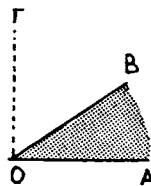
Μία γωνία 25 μοιρῶν 35 πρώτων λεπτῶν καὶ 48 δευτέρων λεπτῶν γράφεται 25° 35' 48".

Ἐπίσης μία ὀρθὴ γωνία διαιρεῖται εἰς 100 ἴσας γωνίας, ἐκάστη τῶν ὁποίων ὀνομάζεται : βαθμὸς (γ').

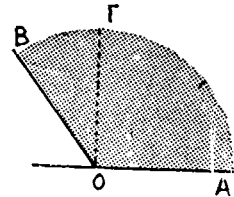
Ὁ βαθμὸς διαιρεῖται εἰς 10, 100, 1000, . . . ἴσα μέρη, τὰ ὁποία λέγονται ἀντιστοιχῶς δέκατα, ἑκατοστά, χιλιοστά, . . . τοῦ βαθμοῦ.

50. Ὀξεῖα γωνία. Μία γωνία λέγεται **ὄξεα**, ἐὰν εἶναι μικρότερα μιᾶς ὀρθῆς γωνίας.

Π.χ. ἡ γωνία AOB (Σχ. 43) εἶναι ὄξεα γωνία, διότι εἶναι μικρότερα τῆς ὀρθῆς γωνίας AOG.



Σχ. 43.



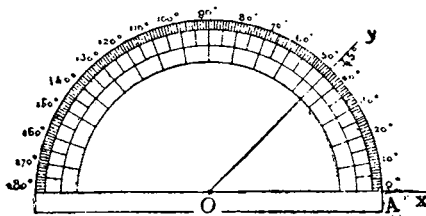
Σχ. 44.

51. Ἀμβλεῖα γωνία.

Μία γωνία λέγεται **ἀμβλεῖα**, ἐὰν εἶναι μεγαλύτερα μιᾶς ὀρθῆς γωνίας, ἀλλὰ μικρότερα μιᾶς πεπλατυσμένης γωνίας.

Π.χ. ἡ γωνία AOB (Σχ. 44) εἶναι ἀμβλεῖα γωνία, διότι εἶναι μεγαλύτερα τῆς ὀρθῆς γωνίας AOG.

52. Πρακτικὴ χάραξις καὶ κατασκευὴ τῶν γωνιῶν. Διὰ νὰ εὐρωμεν τὸ μέτρον μιᾶς γωνίας, ἡ ὁποία ἔχει σημειωθῆ ἐπὶ τοῦ χάρτου, χρησιμοποιοῦμεν τὸ μοιρογνωμόνιον (Σχ. 45).



Σχ. 45.

Τὸ μοιρογνωμόνιον εἶναι μία πεπλατυσμένη γωνία, ἡ ὁποία ἔχει διαιρεθῆ εἰς 180° ἔχει κατασκευασθῆ ἀπὸ μίαν λεπτὴν μεταλλινὴν πλάκα ἢ ἀπὸ διαφανῆ πάσταν καὶ συνήθως ἔχει σχῆμα ἡμικυκλίου (ἡμισὺ ἐνὸς κύκλου).

Ἡ κορυφὴ τῆς πεπλατυσμένης γωνίας λέγεται **κέντρον** τοῦ μοιρογνωμονίου.

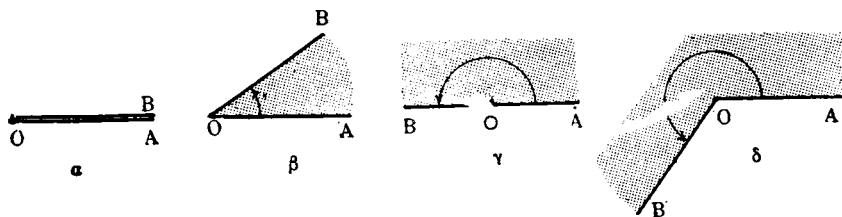
Διὰ νὰ μετρήσωμεν μίαν γωνίαν, π.χ. τὴν γωνίαν $\alpha O \gamma$, μὲ τὸ μοιρογνομόνιον, τοποθετοῦμεν τὸ κέντρον τοῦ μοιρογνομονίου εἰς τὴν κορυφὴν O τῆς γωνίας καὶ τὴν ἀκτῖνα του OA ἐπὶ μιᾶς ἐκ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας, ἔστω τῆς Ox' ἔπειτα διαβάζομεν τὸν ἀριθμὸν τῆς διαίρεσεως τοῦ μοιρογνομονίου, ὃ ὁποῖος ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ἄλλην πλευρὰν Oy τῆς γωνίας. Π.χ. εἰὰν ἡ πλευρὰ Oy διέρχεται ἀπὸ τὴν διαίρεσιν 45° , ἡ γωνία $\alpha O \gamma$ εἶναι 45°

Ἀντιστροφή. Μὲ τὸ μοιρογνομόνιον δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν μίαν γωνίαν. τῆς ὁποίας δίδεται τὸ μέτρον.

Π.χ. Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ κατασκευάσωμεν μίαν γωνίαν 45° , ἡ ὁποία νὰ ἔχη τὴν κορυφὴν τῆς εἰς ἓνα σημεῖον O μιᾶς δοθείσης εὐθείας x .

Τοποθετοῦμεν τὸ κέντρον τοῦ μοιρογνομονίου εἰς τὸ σημεῖον O , καὶ τὴν ἀκτῖνα του OA ἐπὶ τῆς εὐθείας x' εὐρίσκομεν ἔπειτα ἐπὶ τῆς ἡμιπεριφερείας τοῦ μοιρογνομονίου τὴν διαίρεσιν τῶν 45° καὶ σημειώνομεν πλησίον αὐτῆς ἓνα σημεῖον B . Παραμερίζομεν ἔπειτα τὸ μοιρογνομόνιον καὶ φέρομεν τὴν εὐθείαν OB , ἡ ὁποία σχηματίζει μὲ τὴν Ox μίαν γωνίαν $\alpha O \gamma$ ἴσην μὲ 45° .

53. Γενίκευσις τῆς ἐννοίας τῆς γωνίας. Δυνάμεθα νὰ φαντασθῶμεν, ὅτι μία γωνία, π.χ. ἡ γωνία AOB (Σχ. 46) σχηματίζεται



Σχ. 46.

ἀπὸ μίαν κινητὴν ἡμιευθεΐαν OB , ἡ ὁποία ταυτίζεται κατ' ἀρχὰς μὲ μίαν σταθεράν, κατὰ τὴν θέσιν, ἡμιευθεΐαν OA , στρέφεται ἔπειτα περὶ τὸ O , κατὰ τὴν φορὰν τοῦ βέλους καὶ σταματᾷ εἰς τὴν θέσιν OB .

Ἐννοεῖται, ὅτι κατὰ τὴν στροφὴν τῆς, ἡ ἡμιευθεΐα OB δὲν πρέπει νὰ ἐξέλθῃ τοῦ ἐπιπέδου τῆς.

Ἡ ἡμιευθεΐα OA λέγεται *ἀρχικὴ πλευρὰ* τῆς γωνίας AOB καὶ ἡ OB *τελικὴ πλευρὰ* αὐτῆς.

Ἐὰν ἡ τελικὴ πλευρὰ OB συμπίπτῃ μὲ τὴν ἀρχικὴν OA , (Σχ. 46α), ἡ γωνία AOB εἶναι μηδέν.

Ἐὰν ἡ τελικὴ πλευρὰ OB στρεφομένη περὶ τὸ O , ἀπομακρύνεται ἀπὸ τὴν ἀρχικὴν πλευρὰν OA , ἡ γωνία AOB (Σχ. 46β) αὐξάνει. Ἐξ αὐτοῦ συνάγομεν, ὅτι τὸ μέγεθος μιᾶς γωνίας ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ ἄνοιγμα τῶν πλευρῶν τῆς καὶ ὄχι ἀπὸ τὸ μήκος των, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ ὑποτεθῇ ἀπεριόριστον.

Ἐὰν ἡ OB , στρεφομένη περὶ τὸ O , φθάσῃ εἰς τὴν θέσιν OB (Σχ. 46γ), προέκτασιν τῆς OA , τότε ἔχομεν μίαν πεπλατυσμένην γωνίαν AOB .

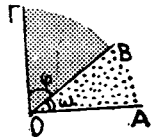
Ἐὰν ἡ OB , στρεφομένη περὶ τὸ O , ὑπερβῇ τὴν OB , προέκτασιν τῆς OA , τότε αἱ σχηματιζόμεναι γωνίαι εἶναι εἰσέχουσαι γωνίαι.

54. Συμπληρωματικαὶ γωνίαι. Δύο δεξίαι γωνίαι λέγονται συμπληρωματικαὶ γωνίαι, ὅταν τὸ ἄθροισμὰ των εἶναι ἴσον μὲ μίαν ὀρθὴν γωνίαν, ἢ μὲ 90° ἢ μὲ 100 βαθμούς.

Ἐκάστη τῶν δύο αὐτῶν γωνιῶν εἶναι τὸ συμπλήρωμα τῆς ἄλλης.

Ἀπὸ τὸν ὄρισμὸν τῶν συμπληρωματικῶν γωνιῶν συνάγομεν ὅτι:

55. Ἐὰν δύο ἐφεξῆς γωνίαι εἶναι συμπληρωματικαί, αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ των σχηματίζουν μίαν ὀρθὴν γωνίαν (Σχ. 47).



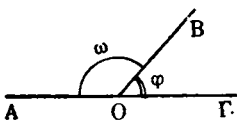
Σχ. 47.

56. Παραπληρωματικαὶ γωνίαι. Δύο γωνίαι λέγονται παραπληρωματικαὶ γωνίαι, ὅταν τὸ ἄθροισμὰ των εἶναι ἴσον μὲ μίαν πεπλατυσμένην γωνίαν (δηλ. μὲ 2 ὀρθὰς γωνίας ἢ μὲ 180° ἢ μὲ 200 βαθμούς).

Ἐὰν αἱ δύο παραπληρωματικαὶ γωνίαι δὲν εἶναι καὶ αἱ δύο ὀρθαί, τότε ἡ μία εἶναι ὀξεῖα καὶ ἡ ἄλλη ἀμβλεῖα. Ἐκάστη ἐξ αὐτῶν εἶναι τὸ παραπλήρωμα τῆς ἄλλης.

57. Ἀξίωμα. Ὅταν δύο γωνίαι ἔχουν τὴν αὐτὴν συμπληρωματικὴν, ἢ τὴν αὐτὴν παραπληρωματικὴν γωνίαν, αἱ γωνίαι αὐταὶ εἶναι ἴσαι.

58. Θεώρημα. Ἐὰν αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ δύο ἐφεξῆς γωνιῶν κείνται ἐπ' εὐθείας, αἱ ἐφεξῆς αὐταὶ γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί.



Σχ. 48.

Τοῦτο ἐξάγεται ἀπὸ τὸν ὄρισμὸν τοῦ ἄθροισματος δύο γωνιῶν: Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν GOB καὶ BOA (Σχ. 48) εἶναι ἡ πεπλατυσμένη γωνία GOA . Ἐπομένως αἱ γωνίαι αὐταὶ ἔχουν ἄθροισμα ἴσον μὲ δύο ὀρθὰς γωνίας· δηλ. αἱ γωνίαι GOB καὶ BOA εἶναι

παραπληρωματικαὶ γωνίαι.

59. Ὑπόθεσις καὶ συμπέρασμα μιᾶς προτάσεως. Ἡ προηγουμένη πρότασις:

«*Ἐὰν αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ δύο ἐφεξῆς γωνιῶν κείνται ἐπ' εὐθείας, αἱ γωνίαι αὐταὶ εἶναι παραπληρωματικαί*»), εἶναι μία πρότασις, τῆς ὁποίας ἡ ἀλήθεια γίνεται φανερὰ διὰ τῆς ἀποδείξεως· δηλ. εἶναι ἓνα **θεώρημα**.

Τὸ θεώρημα αὐτὸ ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο μέρη:

1^{ον}. Ἀπὸ τὴν *ὑπόθεσιν*: *Ἐὰν αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ δύο ἐφεξῆς γωνιῶν κείνται ἐπ' εὐθείας.*

καὶ 2^{ον} ἀπὸ τὸ *συμπέρασμα*: *Αἱ ἐφεξῆς αὐταὶ γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί.*

Γενικῶς: Κάθε θεώρημα ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο μέρη: ἀπὸ τὴν *ὑπόθεσιν* καὶ ἀπὸ τὸ *συμπέρασμα*.

Ἡ *ὑπόθεσις* εἶναι τὸ σύνολον τῶν προτάσεων, τὰς ὁποίας παράδεχόμεθα, ὅτι ὑφίστανται ἢ τῶν προτάσεων, -αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἤδη ἀποδειχθῆ.

Τὸ *συμπέρασμα* εἶναι μία πρότασις, τῆς ὁποίας ἡ ἀλήθεια ὀφείλει νὰ προκύψῃ, λογικῶς, ἀπὸ τὴν *ὑπόθεσιν*.

60. Θεώρημα (ἀντίστροφον). *Ἐὰν δύο ἐφεξῆς γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί, αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ τῶν κείνται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς.*

Ἐπειδὴ αἱ δύο γωνίαι GOB καὶ BOA (Σχ. 48) εἶναι παραπληρωματικαί, τὰ ἄθροισμά τῶν GOA εἶναι μία πεπλατυσμένη γωνία. Ἐπομένως, κατὰ τὸν ὀρισμὸν τῆς πεπλατυσμένης γωνίας (§ 39), αἱ πλευραὶ OG καὶ OA εἶναι ἡ μία προέκτασις τῆς ἄλλης.

61. Ἀντίστροφοι προτάσεις. Εἰς τὸ θεώρημα (§ 58) ἡ *ὑπόθεσις* ἦτο: *Ἐὰν αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ δύο ἐφεξῆς γωνιῶν κείνται ἐπ' εὐθείας.*

Τὸ δὲ *συμπέρασμα* ἦτο: *Αἱ ἐφεξῆς αὐταὶ γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί.*

Εἰς τὸ θεώρημα (§ 60) ἡ *ὑπόθεσις* ἦτο: *Ἐὰν δύο ἐφεξῆς γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί.*

Τὸ δὲ *συμπέρασμα* ἦτο: *Αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ τῶν δύο αὐτῶν ἐφεξῆς γωνιῶν κείνται ἐπ' εὐθείας.*

Εἰς τὰ δύο αὐτὰ θεωρήματα παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ *ὑπόθεσις* τοῦ ἐνὸς εἶναι *συμπέρασμα* τοῦ ἄλλου.

Τὰ τοιαῦτα θεωρήματα, εἰς τὰ ὁποῖα ἡ *ὑπόθεσις* τοῦ ἐνὸς εἶναι

σὺμπέρασμα τοῦ ἄλλου λέγονται **ἀντίστροφα θεωρήματα**.

Γενικῶς: Δύο προτάσεις λέγονται **ἀντίστροφοι**, διὰ τὴν ὑπόθεσιν τῆς μιᾶς εἶναι σὺμπέρασμα τῆς ἄλλης καὶ ἀντιστρόφως.

Τὸ θεώρημα τῆς § 58 λέγεται: **εὐθὺν θεώρημα**, ἢ **εὐθεῖα πρότασις**.

Ὅταν ἀποδειχθῇ ἓνα θεώρημα δὲν εἶναι βέβαιον, ὅτι καὶ τὸ ἀντίστροφόν του εἶναι ἀληθές. Χρειαζεται ἰδιαιτέρως ἀπόδειξις διὰ νὰ βεβαιωθῶμεν, ὅτι τὸ ἀντίστροφον ἀληθεύει.

Τὰ κάτωθι παραδείγματα θὰ μᾶς δείξουν, ὅτι τὰ ἀντίστροφα πολλῶν προτάσεων δὲν εἶναι ἀληθῆ.

Παραδείγματα: 1ον. **Εὐθεῖα πρότασις.** Οἱ μαθηταὶ τῆς τάξεως αὐτῆς εἶναι νέοι ἡλικίας ἀπὸ 13 ἕως 15 ἐτῶν.

Ἀντίστροφος πρότασις. Οἱ νέοι, οἱ ὅποιοι ἔχουν ἡλικίαν ἀπὸ 13 ἕως 15 ἐτῶν, εἶναι μαθηταὶ τῆς τάξεως αὐτῆς. Ἡ πρότασις αὐτὴ εἶναι *ἐσφαλμένη*.

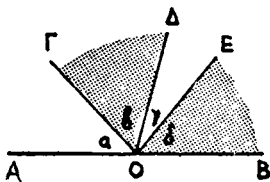
2ον. **Εὐθεῖα πρότασις.** Ὅλοι αἱ ὀρθαὶ γωνίαι εἶναι ἴσαι.

Ἀντίστροφος πρότασις. Ὅλοι αἱ ἴσαι γωνίαι, εἶναι ὀρθαί. Ἡ πρότασις αὐτὴ εἶναι *ἐσφαλμένη*.

62. Πορίσματα. 1ον. *Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν τὴν παραπληρωματικὴν μιᾶς γωνίας ἀρκεῖ νὰ προεκτείνωμεν τὴν μίαν ἐκ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς τῆς.*

2ον. *Ἐὰν ἀπὸ τυχόν σημεῖον μιᾶς εὐθείας φέρωμεν ἡμικυκλίαν πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας αὐτῆς, τὸ ἄθροισμα τῶν σχηματιζομένων διαδοχικῶν γωνιῶν εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθὰς γωνίας.*

Πράγματι, κατὰ τὸν ὁρισμὸν τοῦ ἄθροίσματος πολλῶν γωνιῶν θὰ εἶναι



Σχ. 49.

$$\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} + \widehat{\gamma} + \widehat{\delta} = \widehat{AOB} \quad (1)$$

Ἐπειδὴ ἡ γωνία AOB εἶναι πεπλατυσμένη, θὰ εἶναι ἴση μὲ δύο ὀρθὰς γωνίας. Ἡ ἰσότης λοιπὸν (1) γίνεται

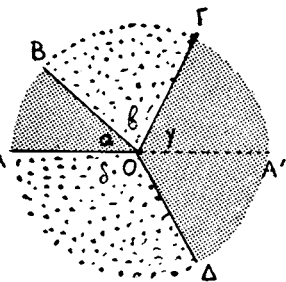
$$\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} + \widehat{\gamma} + \widehat{\delta} = 2 \text{ ὀρθ.}$$

3ον. *Ἐὰν ἀπὸ τυχόν σημεῖον φέρωμεν ὁσασδήποτε ἡμικυκλίαν, τὸ ἄθροισμα τῶν σχηματιζομένων διαδοχικῶν γωνιῶν εἶναι ἴσον μὲ 4 ὀρθὰς.*

Ἐστω τὸ σημεῖον O (Σχ. 50) καὶ αἱ ἡμιευθείαι OA, OB, OG, OD , αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὰς γωνίας $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} + \widehat{\gamma} + \widehat{\delta} = 4 \delta\rho\theta.$$

Πράγματι· προεκτείνομεν τὴν AO πρὸς τὸ μέρος τοῦ O . Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν, ποὺ σχηματίζονται ἄνω τῆς εὐθείας AOA' εἶναι ἴσον μὲ $2 \delta\rho\theta$ άς. Ἐπίσης τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν, ποὺ σχηματίζονται κάτω τῆς AOA' εἶναι ἴσον μὲ $2 \delta\rho\theta$ άς. Ἐπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν, ποὺ σχηματίζονται γύρω ἀπὸ τὸ O εἶναι ἴσον μὲ $4 \delta\rho\theta$ άς. Ὡστε θὰ εἶναι



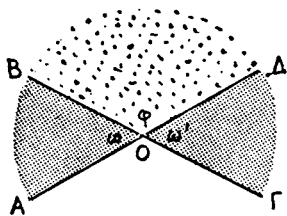
Σχ. 50.

$$\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} + \widehat{\gamma} + \widehat{\delta} = 4 \delta\rho\theta.$$

63. Κατὰ κορυφήν γωνία. Δύο γωνία λέγονται **κατὰ κορυφήν**, ὅταν ἔχουν κοινὴν κορυφήν καὶ αἱ πλευραὶ τῆς μιᾶς γωνίας εἶναι προεκτάσεις τῶν πλευρῶν τῆς ἄλλης.

Π.χ. αἱ γωνία AOB καὶ $ГОΔ$ (Σχ. 51) εἶναι κατὰ κορυφήν γωνία. Ἐπίσης καὶ αἱ γωνία $AOГ$ καὶ $BOΔ$ εἶναι κατὰ κορυφήν γωνία.

64. Θεώρημα. Δύο κατὰ κορυφήν γωνία εἶναι ἴσαι.



Σχ. 51.

Ἐπίσης.	$\widehat{\omega}$ καὶ $\widehat{\omega}'$ κατὰ κορυφήν γωνία
Συμπέρασμα.	$\widehat{\omega} = \widehat{\omega}'$

Ἐπίσης. Ἐστώσαν αἱ κατὰ κορυφήν γωνία $AOB = \omega$ καὶ $ГОΔ = \omega'$ (Σχ. 51).

Συμπέρασμα. Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\widehat{\omega} = \widehat{\omega}'$.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ ἡ $AOΔ$ εἶναι εὐθεῖα, αἱ ἐφεξῆς γωνία ω καὶ φ εἶναι παραπληρωματικά (§ 58). Ἐπίσης, ἐπειδὴ ἡ $BOГ$ εἶναι εὐθεῖα, αἱ ἐφεξῆς γωνία ω' καὶ φ εἶναι παραπληρωματικά. Παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ γωνία ω καὶ ω' ἔχουν τὴν αὐτὴν παραπληρωματικὴν γωνίαν φ · ἄρα αἱ γωνία ω καὶ ω' εἶναι ἴσαι (§ 57).

Ἀσκήσεις

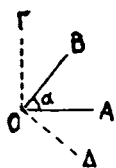
6. (17). Δίδονται αἱ γωνίαι $\alpha=75^\circ$, $\beta=135^\circ$, $\gamma=40^\circ 24' 30''$, $\delta=124^\circ 2' 48''$.
 1ον. Νά ὑπολογισθοῦν αἱ συμπληρωματικαὶ τῶν γωνιῶν α καὶ γ . 2ον. Νά ὑπολογισθοῦν αἱ παραπληρωματικαὶ τῶν γωνιῶν β καὶ δ . 3ον. Νά ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα $\alpha+\beta+\gamma+\delta$ καὶ ἡ διαφορὰ $\delta-\gamma$.

7. (21). Ἡ διαφορὰ δύο παραπληρωματικῶν γωνιῶν εἶναι 96° . Πόσων μοιρῶν εἶναι ἑκάστη γωνία ;

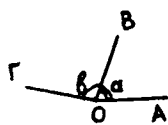
8. (22). Ἡ διαφορὰ δύο συμπληρωματικῶν γωνιῶν εἶναι $1/4$ τῆς ὀρθῆς γωνίας. Πρὸς πόσα μέρη τῆς ὀρθῆς ἰσοῦται ἑκάστη γωνία ;

9. (23). Δίδεται μία γωνία AOB ἴση μὲ $43^\circ 17' 24''$. Ἀπὸ τὸ σημεῖον O φέρομεν τὴν ἡμιευθεῖαν OG κάθετον ἐπὶ τὴν OA καὶ κειμένην πρὸς τὸ μέρος τῆς OB καὶ ἔπειτα τὴν ἡμιευθεῖαν OD κάθετον ἐπὶ τὴν OB καὶ κειμένην πρὸς τὸ μέρος τῆς OA . Νά ὑπολογισθῇ ἡ γωνία GOD .

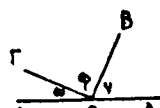
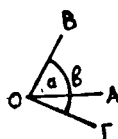
10. (26). Τρεῖς ἡμιευθεῖαι OA , OB , OG ἄγονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον O . Ἐὰν εἶναι $\text{γων.}\text{AOB} = \frac{3}{4}$ ὀρθ., $\text{γων.}\text{BOG} = 98^\circ 12' 48''$, νά ὑπολογισθῇ τὸ μέτρον τῆς γωνίας GOA εἰς μοίρας. Νά ἐξετασθοῦν δύο περιπτώσεις σχήματος.



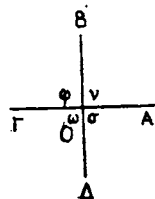
Σχ. ἀσκ. 9.



Σχ. ἀσκ. 10.



Σχ. ἀσκ. 11.



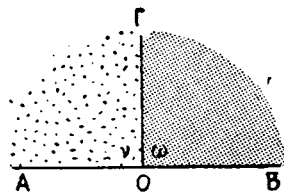
11. (28). Ἀπὸ ἓνα σημεῖον O φέρομεν τὰς ἡμιευθεῖας OA , OB , OG , OD . Ἐὰν ἡ γωνία BOG εἶναι ὀρθή καὶ αἱ γωνίαι AOB καὶ GOD συμπληρωματικαί, τί γραμμὴ εἶναι ἡ AOD ;

3. Κάθετοι εὐθείαι

65. Ὅρισμοί. Ἀπὸ τυχόν σημεῖον O μιᾶς εὐθείας AB φέρομεν μίαν ἡμιευθεῖαν OG (Σχ. 52), ἡ ὁποία σχηματίζει μὲ τὴν AB δύο ἐφεξῆς γωνίας ν καὶ ω .

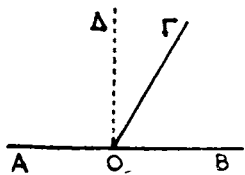
Ἐὰν αἱ γωνίαι ν καὶ ω εἶναι ἴσαι, ἡ ἡμιευθεῖα OG λέγεται **κάθετος** ἐπὶ τὴν AB (Σχ. 52).

Ἐὰν αἱ δύο γωνίαι ν καὶ ω εἶναι ἄνιστοι, ἡ ἡμιευθεῖα GO λέγεται **πλαγία** πρὸς τὴν AB (Σχ. 53).



Σχ. 52.

᾽Ωστε: Μία ἡμιευθεΐα εἶναι **κάθετος ἐπὶ ἄλλην εὐθεΐαν**, ἐὰν σχηματίζῃ μὲ αὐτὴν δύο ἐφεξῆς γωνίας ἴσας.



Σχ. 53.

Τὸ σημεῖον O , εἰς τὸν ὁποῖον ἡ κάθετος ἢ ἡ πλαγία συναντᾷ τὴν εὐθεΐαν AB λέγεται πὺς τῆς καθέτου ἢ πὺς τῆς πλαγίας (Σχ. 52) καὶ (Σχ. 53).

Διὰ τὸ δηλώσωμεν, ὅτι ἡ GO εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν AB (Σχ. 52) γράφομεν: $GO \perp AB$ καὶ ἀπαγγέλλομεν: ἡ GO εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν AB , ἢ ἡ GO

εἶναι κάθετος πρὸς τὴν AB .

66. Εὐθείαι κάθετοι. Λέγομεν ὅτι δύο εὐθεΐαι εἶναι **κάθετοι μεταξύ των**, ὅταν ἡ μία ἀπὸ τὰς τέσσαρας γωνίας, ποὺ σχηματίζουν, εἶναι ὀρθή.

Ἔστω, ὅτι αἱ εὐθεΐαι AB καὶ GD (Σχ. 54), τεμνόμεναι εἰς τὸ σημεῖον O , σχηματίζουν μίαν ὀρθὴν γωνίαν AOG . Αἱ εὐθεΐαι αὗται, κατὰ τὸν ἀνωτέρω ὀρισμὸν, εἶναι κάθετοι μεταξύ των.

Αἱ γωνίαι $AO\Delta$ καὶ GOB , ὡς παραπληρωματικαὶ τῆς ὀρθῆς γωνίας AOG , εἶναι ὀρθαί.

Ἡ γωνία $BO\Delta$, ὡς κατὰ κορυφὴν τῆς AOG , εἶναι ἐπίσης ὀρθή.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι:

1. **Δύο εὐθεΐαι, κάθετοι μεταξύ των, σχηματίζουν τέσσαρας ὀρθὰς γωνίας.**

2. **Ἐὰν ἡ εὐθεΐα GD εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν AB , θὰ εἶναι καὶ ἡ AB κάθετος ἐπὶ τὴν GD .**

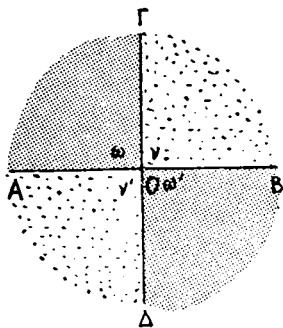
Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ γράψωμεν, ἀδιαφόρως:

$$GD \perp AB, \text{ ἔτε } AB \perp GD.$$

Αἱ εὐθεΐαι AB καὶ GD λέγονται καὶ **ὀρθογώνιοι εὐθεΐαι** ἢ λέγομεν ὅτι: **τέμνονται ὀρθογωνίως.**

Τὸ κάτωθι θεώρημα δεικνύει, ὅτι ὑπάρχει εὐθεΐα κάθετος ἐπὶ ἄλλην εὐθεΐαν.

67. Θεώρημα. Ἀπὸ τυχὸν σημείου μιᾶς εὐθείας δυνάμεθα νὰ φέρωμεν μίαν κάθετον ἐπ' αὐτὴν καὶ μίαν μόνον.

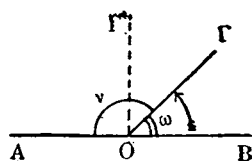


Σχ. 54.

Υπόθεσις. Ἐστω ἡ εὐθεῖα AB καὶ O ἓνα τυχὸν σημεῖον τῆς (Σχ. 55).

Συμπέρασμα 1ον. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἀπὸ τὸ O δυνάμεθα νὰ φέρωμεν μίαν κάθετον ἐπὶ τὴν AB .

Ἀπόδειξις. Ἀπὸ τὸ O φέρομεν μίαν τυχοῦσαν ἡμιευθεῖαν OG πλαγίαν πρὸς τὴν AB , ἡ ὁποία νὰ σχηματίζῃ μετὰ τὴν AB δύο ἀνίσους ἐφεξῆς γωνίας ω καὶ ν , ($\nu > \omega$).



Σχ. 55.

Στρέφομεν ἔπειτα συνεχῶς τὴν ἡμιευθεῖαν OG περὶ τὸ O πρὸς τὸ μέρος τῆς μεγαλύτερας γωνίας ν , ὁπότε ἡ μὲν γωνία ω αὐξάνει, ἡ δὲ γωνία ν ἐλαττοῦται.

Εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ OG , στρεφομένη περὶ τὸ O , θὰ λάβῃ μίαν θέσιν OG' τοιαύτην, ὥστε αἱ δύο γωνίαι ω καὶ ν νὰ εἶναι ἴσαι. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν καθεμίᾳ ἀπὸ τὰς γωνίας αὐτὰς θὰ εἶναι ἴση μετὰ τὸ ἥμισυ μιᾶς πεπλατυσμένης γωνίας, δηλ. θὰ εἶναι ἴση μετὰ μίαν ὀρθὴν γωνίαν καὶ ἐπομένως ἡ OG' εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν AB .

Συμπέρασμα 2ον. Θὰ δείξωμεν τώρα, ὅτι ἀπὸ τὸ σημεῖον O δὲν δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἄλλην κάθετον ἐπὶ τὴν AB .

Ἀπόδειξις. Ἐὰν ἡ ἡμιευθεῖα OG , στρεφομένη περὶ τὸ O , λάβῃ ἄλλην θέσιν ἐκτὸς τῆς OG' , αἱ σχηματιζόμεναι γωνίαι ω καὶ ν θὰ εἶναι ἀνίσου καὶ ἡ εὐθεῖα OG θὰ εἶναι πλαγία πρὸς τὴν AB .

Ἐδείχθη λοιπὸν, ὅτι: **Ἀπὸ τυχὸν σημείου...**

68. Ἀξιώματα. 1ον. Κάθε εὐθεῖα χωρίζει τὸ ἐπίπεδον ἐπὶ τοῦ ὁποίου κεῖται εἰς δύο μέρη, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐκατέρωθεν αὐτῆς.

2ον. Κάθε εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει δύο σημεία ἐπιπέδου, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐκατέρωθεν ἄλλης δοθείσης εὐθείας, τέμνει αὐτήν.

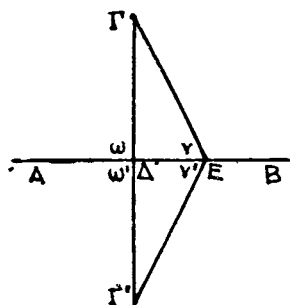
69. Θεώρημα. Ἀπὸ ἓνα σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς εὐθείας, δυνάμεθα νὰ φέρωμεν μίαν κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν αὐτὴν καὶ μίαν μόνον.

Υπόθεσις. Ἐστω AB μία εὐθεῖα (Σχ. 56) καὶ Γ τυχὸν σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τῆς AB .

Συμπέρασμα 1ον. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἀπὸ τὸ σημεῖον Γ δυνάμεθα νὰ φέρωμεν μίαν εὐθεῖαν κάθετον ἐπὶ τὴν AB .

Ἀπόδειξις. Ἡ εὐθεῖα AB χωρίζει τὸ ἐπίπεδον, ἐπὶ τοῦ ὁποῖου

κείται εἰς δύο μέρη : εἰς τὸ ἄνω μέρος τῆς AB , καὶ εἰς τὸ κάτω μέρος τῆς AB .



Σχ. 56.

Περιστρέφωμεν τὸ ἄνω μέρος τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον περιέχει τὸ σημεῖον Γ , περὶ τὴν AB μέχρως, ὅτου πέση ἐπὶ τοῦ κάτω μέρους τοῦ ἐπιπέδου. Τότε τὸ σημεῖον Γ θὰ λάβῃ μίαν θέσιν, ἔστω τὴν Γ' .

Ἐπαναφέρωμεν ἔπειτα τὸ ἄνω μέρος τοῦ ἐπιπέδου εἰς τὴν ἀρχικὴν του θέσιν καὶ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν $\Gamma\Gamma'$ ἢ ὁποία τέμνει τὴν AB εἰς ἓνα σημεῖον Δ (§ 68),

λέγομεν, ὅτι ἡ εὐθεῖα $\Gamma\Gamma'$ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν AB .

Πράγματι· ἔὰν περιστρέψωμεν πάλιν τὸ ἄνω μέρος τοῦ ἐπιπέδου περὶ τὴν AB , μέχρως ὅτου πέση ἐπὶ τοῦ κάτω μέρους του, τὸ σημεῖον Γ θὰ πέση πάλιν ἐπὶ τοῦ Γ' , τὸ Δ θὰ μένῃ εἰς τὴν θέσιν του καὶ ἡ $\Delta\Gamma$ θὰ πέση ἐπὶ τῆς $\Delta\Gamma'$ · ἐπειδὴ δὲ ἡ $A\Delta$ μένει ἀκίνητος, ἡ γωνία $\Gamma\Delta A = \omega$ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς γωνίας $A\Delta\Gamma' = \omega'$. Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ω καὶ ω' εἶναι ἴσαι, ἕκαστη ἐξ αὐτῶν εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ μιᾶς πεπλατυσμένης γωνίας, δηλ. μὲ μίαν ὀρθὴν καὶ ἐπομένως αἱ εὐθεῖαι $\Gamma\Gamma'$ καὶ AB εἶναι κάθετοι μεταξύ των.

Συμπέρασμα 2ον. Θὰ δεῖξωμεν τώρα, ὅτι δὲν δυνάμεθα νὰ φέρομεν ἀπὸ τὸ Γ ἄλλην εὐθεῖαν κάθετον ἐπὶ τὴν AB .

Ἀπόδειξις. Ἐστω, ὅτι ἐκτὸς τῆς $\Gamma\Delta$ ὑπάρχει καὶ ἄλλη κάθετος ἐπὶ τὴν AB , ἡ ΓE .

Ἐπειδὴ ἡ ΓE εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν AB , ἡ γωνία ν εἶναι ὀρθή.

Ἐὰν περιστρέψωμεν πάλιν τὸ ἄνω μέρος τοῦ ἐπιπέδου περὶ τὴν AB , τὸ Γ θὰ πέση ἐπάνω εἰς τὸ Γ' , τὸ E θὰ μένῃ ἀκίνητον καὶ ἡ $E\Gamma$ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς $E\Gamma'$. Ἐπειδὴ ἡ AB μένει ἀκίνητος, αἱ γωνίαι ν καὶ ν' θὰ εἶναι ἴσαι. Ἐπειδὴ δὲ ἡ ν εἶναι ὀρθὴ ἔπεται, ὅτι καὶ ἡ ἴση τῆς ν' εἶναι ὀρθή.

Παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ ἐφεξῆς γωνίαι ν καὶ ν' εἶναι παραπληρωματικαί· ἄρα αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ των $E\Gamma$ καὶ $E\Gamma'$ κεῖνται ἐπ' εὐθείας· ἦτοι ἡ $\Gamma E\Gamma'$ εἶναι εὐθεῖα. Ἄλλ' ἐξ ὑποθέσεως καὶ ἡ $\Gamma\Delta\Gamma'$ εἶναι εὐθεῖα. Θὰ ἔχωμεν λοιπόν, ἐξ ἑνὸς σημείου Γ εἰς ἄλλο σημεῖον Γ' , δύο εὐθείας τὰς $\Gamma E\Gamma'$ καὶ $\Gamma\Delta\Gamma'$ πρᾶγμα, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον, διότι ἀντιβαίνει εἰς τὸ ἀξίωμα : δύο σημεῖα ὀρίζουν τὴν θέσιν μιᾶς μόνον εὐθείας.

Ἡ ΓΕ δὲν εἶναι λοιπὸν κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ.

Ὡστε ἀπὸ τὸ Γ δὲν δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἄλλην κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ ἐκτὸς τῆς ΓΓ'.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι : **Ἀπὸ ἓνα σημεῖον, τὸ ὁποῖον . . .**

70. Μέθοδος διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς. Εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα δὲν ἀπεδείξαμεν ἀπ' εὐθείας, ὅτι μία καὶ μόνον κάθετος ἄγεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Γ πρὸς τὴν εὐθείαν ΑΒ, ἀλλὰ *παρεδέχθημεν προσωρινῶς*, ὅτι ἐκτὸς τῆς ΓΔ ὑπάρχει καὶ ἄλλη κάθετος πρὸς τὴν ΑΒ, ἡ ΓΕ.

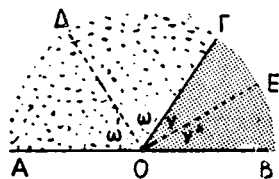
Παραδεχθέντες ὅμως, ὅτι ἡ ΓΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ, καταλήξαμεν εἰς τὸ συμπέρασμα : *ὅτι αἱ ΓΔΓ'' καὶ ΓΕΓ'' εἶναι δύο διαφορετικαὶ εὐθεῖαι μὲ τὰ αὐτὰ ἄκρα, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀπαράδεκτον.*

Ἡ μέθοδος αὐτὴ τοῦ συλλογισμοῦ, πρὸς ἀπόδειξιν μιᾶς προτάσεως, λέγεται *πλαγία ἀπόδειξις* ἢ *μέθοδος ἀποδείξεως διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.*

Γενικῶς : Ἡ μέθοδος ἀποδείξεως διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς συνίσταται : εἰς τὸ νὰ *ὑποθέσωμεν προσωρινῶς*, ὅτι τὸ συμπέρασμα μιᾶς ἀποδεικτέας προτάσεως δὲν εἶναι ἀκριβές. Παραδεχόμεθα ἔπειτα, ὡς ἀληθεῖς ὅλας τὰς ἀντιθέτους περιπτώσεις τῆς προσωρινῆς αὐτῆς ὑποθέσεως. Ἐάν, ἐκ τῆς παραδοχῆς αὐτῶν, καταλήξωμεν εἰς συμπεράσματα, τὰ ὁποῖα ἀντίκεινται εἰς τὴν ὑπόθεσιν τῆς ἀποδεικτέας προτάσεως ἢ ἄλλης γνωστῆς προτάσεως, τότε πρέπει νὰ παραδεχθῶμεν, ὅτι ἡ *προσωρινὴ ὑπόθεσίς μας* πρέπει νὰ ἀπορριφθῇ.

71. Θεώρημα. *Ἐάν δύο ἐφεξῆς γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί, αἱ διχοτόμοι τῶν εἶναι κάθετοι μεταξύ τῶν.*

Ἐπίδοσις. Ἐστῶσαν αἱ ἐφεξῆς γωνίαι ΑΟΓ καὶ ΓΟΒ (Σχ. 57),



Ἐπίδοθ.	$\widehat{ΑΟΓ}$ καὶ $\widehat{ΓΟΒ}$ ἐφεξῆς γωνίαι
	$\widehat{ΑΟΓ} + \widehat{ΓΟΒ} = 2$ ὄρθαι
	ΟΔ διχοτόμος γων. ΑΟΓ
	ΟΕ > γων. ΓΟΒ
Συμπ.	ΟΔ ⊥ ΟΕ

Σχ. 57.

αἱ ὁποῖαι εἶναι παραπληρωματικαὶ καὶ ΟΔ, ΟΕ αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν αὐτῶν ἀντιστοίχως.

Συμπέρασμα. Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ διχοτόμοι ΟΔ καὶ ΟΕ εἶναι

κάθετοι μεταξύ των, δηλ. ὅτι ἡ γωνία $\Delta O E$ εἶναι ὀρθή.

Ἀπόδειξις. Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $\widehat{2\omega} + \widehat{2\nu} = 2$ ὀρθ.

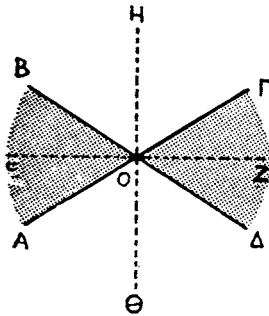
ἄρα θὰ εἶναι $\widehat{\omega} + \widehat{\nu} = 1$ ὀρθ. ἢ $\widehat{\Delta O E} = 1$ ὀρθ.

Ἐπειδὴ ἡ γωνία $\Delta O E$ εἶναι ὀρθή, αἱ πλευραὶ τῆς $O A$ καὶ $O E$ εἶναι κάθετοι μεταξύ των.

Ἐδείχθη λοιπὸν ὅτι: Ἐὰν δύο ἐφεξῆς γωνίαι. . .

72. Θεώρημα. Αἱ διχοτόμοι τῶν κατὰ κορυφὴν γωνιῶν κείνται ἐπ' εὐθείας.

Ἐπίστασις. Ἐστώσαν αἱ κατὰ κορυφὴν γωνίαι $A O B$ καὶ $\Gamma O \Delta$ (Σχ. 58) καὶ $O E, O Z$ αἱ διχοτόμοι τῶν ἀντιστοιχῶς.



Σχ. 58.

Ἐπίστασις.	$\widehat{A O B}$ καὶ $\widehat{\Gamma O \Delta}$ κατὰ κορυφὴν γωνίαι $O E$ διχοτ. $\widehat{A O B}$ $O Z$ διχοτ. $\widehat{\Gamma O \Delta}$
Συμπερ.	$E O Z =$ εὐθεῖα

Συμπέρασμα. Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι ἡ γραμμὴ $E O Z$ εἶναι εὐθεῖα.

Ἀπόδειξις. Φέρομεν τὴν διχοτόμον $O H$ τῆς γωνίας $B O \Gamma$. Αἱ ἐφεξῆς γωνίαι $A O B$ καὶ $B O \Gamma$ εἶναι παραπληρωματικάι, διότι αἱ μὴ κοινὰ πλευραὶ τῶν κείνται ἐπ' εὐθείας· ἄρα αἱ διχοτόμοι τῶν $O E$ καὶ $O H$ εἶναι κάθετοι μεταξύ των (§ 71)· ἤτοι εἶναι

$$\text{γων. } E O H = 1 \text{ ὀρθή} \quad (1)$$

Ὀμοίως αἱ διχοτόμοι $O H$ καὶ $O Z$ τῶν ἐφεξῆς παραπληρωματικῶν γωνιῶν $B O \Gamma$ καὶ $\Gamma O \Delta$ εἶναι κάθετοι μεταξύ των· ἤτοι εἶναι

$$\text{γων. } H O Z = 1 \text{ ὀρθή} \quad (2)$$

Προσθέτομεν τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν
 $\text{γων. } E O H + \text{γων. } H O Z = 2$ ὀρθαί.

Ἐπειδὴ αἱ ἐφεξῆς γωνίαι $E O H$ καὶ $H O Z$ εἶναι παραπληρωματικάι, αἱ μὴ κοινὰ πλευραὶ τῶν $O E$ καὶ $O Z$ κείνται ἐπ' εὐθείας (§ 58).

Ὡστε ἡ γραμμὴ $E O Z$ εἶναι εὐθεῖα.

Ἐδείχθη λοιπὸν ὅτι: Αἱ διχοτόμοι τῶν. . .

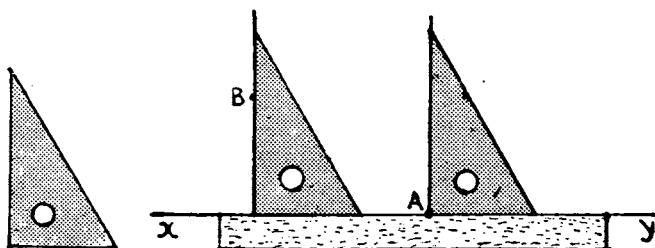
73. Πρόβλημα. Αἱ διχοτόμοι τῶν τεσσάρων γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι

σχηματίζονται ὑπὸ δύο τεμνομένων εὐθειῶν, ἀποτελοῦν δύο εὐθείας κάθετους μεταξύ των.

Διότι αἱ διχοτόμοι αὐταὶ εἶναι διχοτόμοι τῶν κατὰ κορυφὴν γωνιῶν.

74. Πρακτικὴ χάραξις καθέτων. Ἡ κατασκευὴ καθέτων εὐθειῶν δύναται νὰ γίνῃ πρακτικῶς μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ γνώμονος καὶ τοῦ κανόνος.

Ὁ γνώμων εἶναι μία λεπτὴ σανὶς (Σχ. 59), ἡ ὁποία καταλήγει



Σχ. 59.

εἰς τρεῖς εὐθείας (πλευρᾶς) ἐκ τῶν ὁποίων αἱ δύο εἶναι κάθετοι μεταξύ των, ἡ δὲ τρίτη εἶναι πλαγία πρὸς τὰς δύο ἄλλας.

Μὲ τὸν γνώμονα καὶ μὲ τὸν κανόνα δυνάμεθα νὰ λύσωμεν τὰ δύο ἐπόμενα προβλήματα :

Πρόβλημα 1^{ον}. Ἀπὸ ἓνα σημεῖον *A* μιᾶς εὐθείας *xy* νὰ ἀχθῇ ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν αὐτήν.

Ἐφαρμοζόμεν τὸν κανόνα κατὰ μῆκος τῆς εὐθείας *xy* καὶ ὀλισθαίνομεν τὴν μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν τοῦ γνώμονος ἐπὶ τοῦ κανόνος μέχρις, ὅτου ἡ ἄλλη πλευρὰ του συναντήσῃ τὸ δοθὲν σημεῖον *A*.

Κατόπιν χαράσσομεν μὲ τὸ μολύβι ἢ μὲ τὴν κιμωλίαν, κατὰ μῆκος τῆς πλευρᾶς αὐτῆς τοῦ γνώμονος μίαν εὐθεῖαν *ΓΑ*, ἡ ὁποία εἶναι ἡ ζητούμενη εὐθεῖα.

Πρόβλημα 2^{ον}. Ἀπὸ ἓνα σημεῖον *B*, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς μιᾶς εὐθείας *xy*, νὰ ἀχθῇ ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν αὐτήν.

Ἐργαζόμεθα ὅπως ἀνωτέρω.

75. Γεωμετρικὸν πρόβλημα. Μία πρότασις εἰς τὴν ὁποίαν ζητεῖται νὰ κατασκευασθῇ ἓνα γεωμετρικὸν σχῆμα, λέγεται **γεωμετρικὸν πρόβλημα**.

Δύσις γεωμετρικοῦ προβλήματος, λέγεται ὁ τρόπος τῆς κατασκευῆς του.

Ὅταν ἡ κατασκευὴ ἐνὸς γεωμετρικοῦ σχήματος γίνεται μὲ τὴν

χοῖσιν τοῦ κανόνος καὶ τοῦ γνώμονος ἢ τοῦ μοιρογναμονίου, ἢ λύσις τοῦ γεωμετρικοῦ προβλήματος λέγεται *πρακτικὴ λύσις* τοῦ προβλήματος.

Ὅταν ἡ κατασκευὴ τοῦ γεωμετρικοῦ σχήματος γίνεται μὲ τὴν χοῖσιν τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου, ἢ λύσις τοῦ γεωμετρικοῦ προβλήματος λέγεται *θεωρητικὴ λύσις* τοῦ προβλήματος.

Τὰ ἀνωτέρω προβλήματα ἐλύθησαν πρακτικῶς.

Ἐσκήσεις

12. (29). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ διχοτόμοι δύο ἐφεξῆς γωνιῶν σχηματίζουν γωνίαν, ἡ ὁποία εἶναι ἴση μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν δοθεισῶν γωνιῶν. Ἐφαρμογή: Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία τῶν διχοτόμων: 1ον ἂν αἱ δοθεῖσαι γωνίαι εἶναι 68° καὶ 45° . 2ον ἂν αἱ δοθεῖσαι γωνίαι εἶναι συμπληρωματικαί.

13. (31). Νὰ διατυπωθῇ καὶ νὰ ἀποδειχθῇ τὸ ἀντίστροφον τοῦ θεωρήματος τῆς § 71.

14. (32). Δίδονται δύο ἐφεξῆς γωνίαι AOB καὶ BOΓ καὶ OM ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας AOB· νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

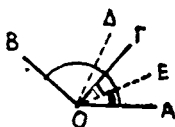
$$\widehat{AOM} = \frac{\widehat{AOG} - \widehat{BOG}}{2}, \quad \widehat{GOM} = \frac{\widehat{GOA} + \widehat{GOB}}{2}.$$

15. (33). Ἀπὸ ἓνα σημεῖον O φέρομεν τὰς ἡμιευθείας OA, OB, OG, οὕτως ὥστε αἱ σχηματιζόμεναι τρεῖς διαδοχικαὶ γωνίαι νὰ εἶναι ἴσαι. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι κάθε μία ἀπὸ τὰς ἡμιευθείας αὐτάς, ἂν προσεκταθῇ πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς, διχοτομῇ τὴν γωνίαν τῶν δύο ἄλλων ἡμιευθειῶν.

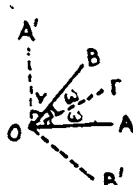
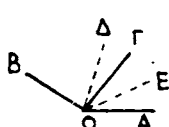
16. (34). Νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ διχοτόμος OG μιᾶς γωνίας AOB σχηματίζει μὲ μίαν ἡμιευθείαν OM, ἡ ὁποία κεῖται ἐκτὸς ἢ ἐντὸς τῆς γωνίας AOB, μίαν γωνίαν ἴσην μὲ τὸ ἡμιάθροισμα ἢ μὲ τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζει ἡ ἡμιευθεῖα OM μὲ ἐκάστην τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας AOB.

17. (35). Δίδεται μία ὀρθὴ γωνία xOy. Ἐὰν ἡ Ox εἶναι διχοτόμος μιᾶς γωνίας AOB καὶ Oy εἶναι διχοτόμος μιᾶς γωνίας ΓΟΔ, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ γωνίαι AOG καὶ BOD εἶναι παραπληρωματικαί.

18. (36). Δύο γωνίαι, αἱ ὁποῖαι ἔχουν κοινὴν κορυφὴν καὶ μίαν κοινὴν



Σχ. ἀσκήσ. 18.



Σχ. ἀσκήσ. 20.

πλευρὰν καὶ δὲν εἶναι ἐφεξῆς, ἔχουν διαφορὰν 90° . Νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν αὐτῶν εἶναι ἴση μὲ 45° .

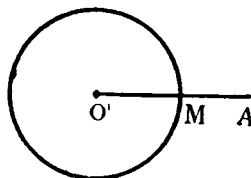
19. (37). Δίδεται μία γωνία AOB. Ἀπὸ τὴν κορυφὴν O φέρομεν τὴν

ήμευθειαν OA' κάθετον ἐπὶ τὴν OA καὶ κειμένην πρὸς τὸ μέρος τῆς OB καὶ ἔπειτα τὴν ἡμιευθειαν OB' κάθετον ἐπὶ τὴν OB καὶ κειμένην πρὸς τὸ μέρος τῆς OA' . 1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ γωνίαι AOB καὶ $A'OB'$ εἶναι ἴσαι καὶ αἱ διχοτόμοι τῶν κάθετοι.

20. (38). Δίδεται μία γωνία AOB . Ἀπὸ τὴν κορυφὴν O φέρομεν τὴν OA' κάθετον ἐπὶ τὴν OA καὶ κειμένην πρὸς τὸ μέρος τῆς OB καὶ ἔπειτα τὴν ἡμιευθειαν OB' κάθετον ἐπὶ τὴν OB καὶ κειμένην πρὸς τὸ μέρος τῆς OA . Νὰ δειχθῇ, ὅτι αἱ γωνίαι AOB καὶ $A'OB'$ ἔχουν τὴν αὐτὴν διχοτόμον καὶ ὅτι αἱ γωνίαι αὐταὶ εἶναι παραπληρωματικαί.

4. Κύκλος

76. Περιφέρεια κύκλου. Ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι μία ἡμιευθεῖα OA (Σχ. 60), ἀναχωροῦσα ἀπὸ τὴν ἀρχικὴν θέσιν OA καὶ μένουσα ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, κάμῃ μίαν ὀλόκληρον στροφὴν περὶ τὸ σημεῖον O , εἰς τρόπον, ὥστε νὰ ἐπανέλθῃ εἰς τὴν ἀρχικὴν τῆς θέσιν OA , τότε κάθε σημεῖον M τῆς OA παρὰσύρεται κατὰ τὴν κίνησίν του καὶ γράφει μίαν κλειστὴν καμπύλην γραμμὴν, ἣ ὁποία λέγεται **περιφέρεια κύκλου**. Ὡστε:

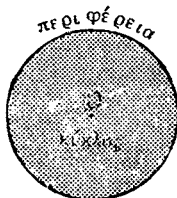


Σχ. 60.

Περιφέρεια κύκλου ἢ ἀπλῶς περιφέρεια, λέγεται ἡ ἐπίπεδος κλειστὴ καμπύλη γραμμὴ, τῆς ὁποίας ὅλα τὰ σημεῖα ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ δοθέν σημείου, τὸ ὁποῖον λέγεται **κέντρον**.

Τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον περικλείεται ἀπὸ μίαν περιφέρειαν, λέγεται **κύκλος**.

Ἀπὸ τοὺς ὁρισμοὺς τῆς περιφερείας καὶ τοῦ κύκλου, συνάγομεν ὅτι ἡ περιφέρεια εἶναι μία γραμμὴ καὶ ὁ κύκλος εἶναι μία ἐπιφάνεια (Σχ. 61). Ἐν τούτοις χρησιμοποιοῦμεν πολλάκις τὴν λέξιν κύκλος, ἀντὶ τῆς λέξεως περιφέρεια καὶ ἀντιστρόφως.



Σχ. 61.

77. Ὅρισμοί. Τὸ εὐθύγραμμον τμήμα, τὸ ὁποῖον συνδέει τὸ κέντρον ἐνὸς κύκλου μὲ τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας τοῦ λέγεται **ἀκτίς** τοῦ κύκλου.

Π.χ. Ἡ OA εἶναι ἀκτίς τοῦ κύκλου O . (Σχ. 62).

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν αὐτόν:

Ὅλαι αἱ ἀκτῖνες τοῦ αὐτοῦ κύκλου εἶναι ἴσαι.

Τυχὸν μέρος μιᾶς περιφερείας λέγεται **τόξον**.

Λίγα σημεῖα μιᾶς περιφερείας ὀρίζουν δύο τόξα. Διὰ τὸ ἀποφύγωμεν τὴν σύγκρισιν σημειώνομεν ἓνα τόξον μὲ τρία γράμματα :

Π.χ. τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ (Σχ. 62) ὀρίζουν τὰ τόξα ΓΕΔ καὶ ΓΖΔ, τὰ ὁποῖα παριστάνομεν ὡς ἑξῆς: τοξ.ΓΕΔ καὶ τοξ.ΓΖΔ ἢ $\widehat{ΓΕΔ}$ καὶ $\widehat{ΓΖΔ}$.

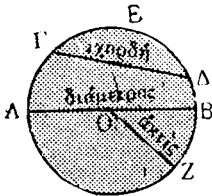
Τὸ εὐθύγραμμον τμήμα, τὸ ὁποῖον συνδέει δύο τυχόντα σημεῖα μιᾶς περιφερείας λέγεται **χορδὴ κύκλου**.

Π.χ. ἡ ΓΔ εἶναι χορδὴ τοῦ κύκλου Ο. (Σχ. 62).

Κάθε χορδὴ, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, λέγεται **διάμετρος**.

Π.χ. ἡ ΑΒ εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου Ο. (Σχ. 62).

Κάθε διάμετρος κύκλου εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα δύο ἀκτίνων ἄρα: **Ὅλαι αἱ διάμετροι τοῦ αὐτοῦ κύκλου εἶναι ἴσαι**.



Σχ. 62.

Μία περιφέρεια ἔχει ὀρισθῆ, ὅταν γνωρίζωμεν: 1^{ον}. Τὴν ἀκτίνα της καὶ τὸ κέντρον της. 2^{ον}. Τὴν διάμετρόν της.

Δύο περιφέρειαι, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀκτίνα εἶναι ἴσαι, διότι συμπίπτουν, ὅταν τὰ κέντρα των συμπέσουν.

Διὰ τὸ δηλώσωμεν τὴν περιφέρειαν, ἡ ὁποία ἔχει κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτίνα R χρησιμοποιοῦμεν τὴν συμβολικὴν παράστασιν (Ο, R).

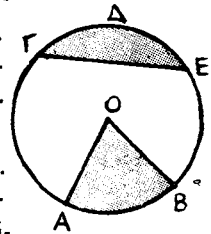
Τὸ ἥμισυ μιᾶς περιφερείας λέγεται **ἡμιπεριφέρεια** καὶ τὸ ἥμισυ ἐνὸς κύκλου λέγεται **ἡμικύκλιον**.

Τὸ μέρος τοῦ κύκλου, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ ἐνὸς τόξου καὶ τῆς χορδῆς του λέγεται **κυκλικὸν τμήμα**.

Π.χ. τὸ ΓΔΕΓ (Σχ. 63) εἶναι ἓνα κυκλικὸν τμήμα.

Τὸ μέρος τοῦ κύκλου, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ ἐνὸς τόξου καὶ τῶν ἀκτίνων, αἱ ὁποῖαι καταλήγουν εἰς τὰ ἄκρα τοῦ τόξου, λέγεται **κυκλικὸς τομεύς**.

Π.χ. τὸ μέρος ΟΑΒΟ τοῦ κύκλου Ο (Σχ. 63) εἶναι κυκλικὸς τομεύς.



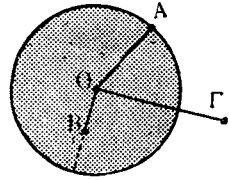
Σχ. 63.

78. Μέρη τοῦ ἐπιπέδου ὀριζόμενα ὑπὸ τῆς περιφερείας κύκλου. Ἐστω ὁ κύκλος Ο, ἀκτίνος R (Σχ. 64). Ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου Ο χωρίζει τὸ ἐπίπεδον, ἐπὶ τοῦ ὁποῖου κεῖται, εἰς δύο μέρη: εἰς τὸ μέρος, ποῦ περιέχει τὸ κέντρον, τὸ ὁποῖον λέγεται **ἐσωτερικὸν μέρος τοῦ κύκλου** καὶ εἰς τὸ ἄλλο μέρος τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον λέγεται **ἐξωτερικὸν μέρος** αὐτοῦ.

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ δ τὴν ἀπόστασιν ἐνὸς σημείου τοῦ ἐπιπέδου ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου Ο, εὐκόλως συνάγωμεν ὅτι :

1. Κάθε σημείον Α, τὸ ὁποῖον *κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας* ἑνὸς κύκλου, ἀπέχει ἀπὸ τὸ κέντρον Ο ἀπόστασιν ἴσην μὲ τὴν ἀκτίνα: δηλ. εἶναι: $OA=R$ ἢ $\boxed{\delta=R}$

2. Κάθε σημείον Β, τὸ ὁποῖον *κεῖται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν μέρος* ἑνὸς κύκλου, ἀπέχει ἀπὸ τὸ κέντρον Ο ἀπόστασιν μικροτέραν τῆς ἀκτίνας· δηλ. εἶναι: $OB < R$, ἢ $\boxed{\delta < R}$



Σχ. 64.

3. Κάθε σημείον Γ, τὸ ὁποῖον *κεῖται εἰς τὸ ἐξωτερικὸν μέρος* ἑνὸς κύκλου, ἀπέχει ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἀπόστασιν μεγαλυτέραν τῆς ἀκτίνας· δηλ. εἶναι $OG > R$ ἢ $\boxed{\delta > R}$

Ἀντιστρόφως. 1. Ἐὰν $\delta=R$, τὸ σημείον κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου.

2. Ἐὰν $\delta < R$, τὸ σημείον κεῖται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν μέρος τοῦ κύκλου.

3. Ἐὰν $\delta > R$, τὸ σημείον κεῖται εἰς τὸ ἐξωτερικὸν τοῦ κύκλου.

79. Γεωμετρικὸς τόπος. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι: ὅλα τὰ σημεία μιᾶς περιφερείας ἀπέχουν ἀπὸ τὸ κέντρον ἀπόστασιν ἴσην μὲ τὴν ἀκτίνα, καὶ εἶναι τὰ μόνον σημεία τοῦ ἐπιπέδου, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν ιδιότητα αὐτήν.

Τὸ σύνολον αὐτῶν τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν ιδιότητα νὰ ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ ἑνα ὠρισμένον σημείον, (ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου) σχηματίζουν ἕνα σχῆμα (τὴν περιφέρειαν ἑνὸς κύκλου), τὸ ὁποῖον λέγεται **γεωμετρικὸς τόπος**. Ὡστε:

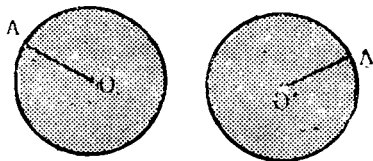
Γεωμετρικὸς τόπος λέγεται τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον σχηματίζεται ἀπὸ τὸ σύνολον τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἔχουν μίαν κοινὴν ιδιότητα.

Συνεπῶς: *Ἡ περιφέρεια κύκλου εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἴσην ἀπόστασιν R ἀπὸ ἑνα ὠρισμένον σημείον O.*

80. Κύκλοι ἴσοι. Ἐστωσαν δύο κύκλοι ἴσοι Ο καὶ Ο' (Σχ. 65). Ἐὰν θέσωμεν τὸν ἕνα ἐπὶ τοῦ ἄλλου οὕτως, ὥστε νὰ συμπέσουν τὰ κέντρα των Ο καὶ Ο', τότε θὰ συμπέσουν καὶ αἱ περιφερείαι των. Ἄρα οἱ κύκλοι αὐτοὶ ἔχουν ἴσας ἀκτίνας.

Ἀντιστρόφως. Δύο κύκλοι, οἱ ὁποῖοι ἔχουν ἴσας ἀκτίνας, εἶναι ἴσοι.

Πράγματι· ἐὰν θέσωμεν τὸν κύκλον O' ἐπὶ τοῦ O οὕτως, ὥστε νὰ συμπέσουν τὰ κέντρα τῶν O καὶ O' , τότε κάθε σημεῖον A' τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου O' θὰ συμπέσῃ μὲ ἓνα σημεῖον τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου O . Αἱ δύο λοιπὸν περιφέρειαι συμπίπτουν καὶ ἐπομένως οἱ κύκλοι αὐτοὶ εἶναι ἴσοι.

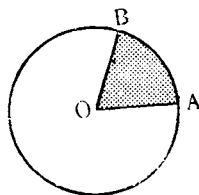


Σχ. 65.

81. Τόξα ἴσα. Δύο τόξα εἶναι ἴσα, ὅταν τὸ ἓνα τιθέμενον ἐπὶ τοῦ ἄλλου, ἐφαρμόζον.

Εἶναι φανερόν, ὅτι ἓνα τόξον δύναται νὰ ἐφαρμόσῃ πανταχοῦ ἐπὶ τῆς περιφερείας, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει.

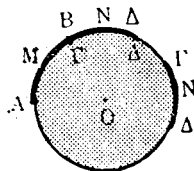
Πράγματι, ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι ὁ κυκλικὸς τομεὺς $AOBA$ (Σχ. 66) στρέφεται περὶ τὸ κέντρον O , χωρὶς νὰ ἐξέλθῃ τοῦ ἐπιπέδου του, τὸ τόξον AB , κατὰ τὴν περιστροφὴν του, θὰ ἐφαρμόζῃ πάντοτε ἐπὶ τῆς περιφερείας O . Διότι κάθε σημεῖον τοῦ τόξου AB θὰ ἐξακολουθῇ νὰ ἀπέχῃ ἀπὸ τὸ κέντρον ἀπόστασιν σταθερὰν καὶ ἴσην μὲ τὴν ἀκτίνα τοῦ κύκλου.



Σχ. 66.

Εὐνόητον εἶναι, ὅτι τὸ τόξον AB δύναται νὰ ἐφαρμόσῃ πανταχοῦ καὶ ἐπὶ πάσης ἄλλης περιφερείας ἴσης μὲ τὴν O .

82. Ἄθροισμα δύο τόξων. Ἐστῶσαν τὰ δύο τόξα AMB καὶ $\Gamma N\Delta$ (Σχ. 67) τῆς περιφερείας O . Ὀλισθαίνοντες ἐπὶ τῆς περιφερείας τὸ τόξον $\Gamma N\Delta$ εἰς τρόπον, ὥστε τὸ σημεῖον Γ νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ B . Ἐστω BND' ἡ νέα θέσις τοῦ τόξου $\Gamma N\Delta$. Τὸ τόξον $AB\Delta'$ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν τόξων AMB καὶ $\Gamma N\Delta$ καὶ γράφομεν:



Σχ. 67.

$$\widehat{AB\Delta'} = \widehat{AMB} + \widehat{\Gamma N\Delta}.$$

Διὰ νὰ προσθέσωμεν πολλὰ τόξα, εὐρίσκομεν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο πρώτων τόξων, ἔπειτα εἰς τὸ ἄθροισμα αὐτὸ προσθέτομεν τὸ τρίτον τόξον κ.ο.κ. μέχρις ὅτου λάβωμεν διαδοχικῶς ὅλα τὰ τόξα. Παραδεχόμεθα, ὅτι τὸ ἐξαγόμενον, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν εἶναι ἀνεξάρτητον τῆς τάξεως κατὰ τὴν ὁποίαν προστίθενται τὰ τόξα.

83. Ἄνισα τόξα. Τὸ τόξον $AB\Delta'$ (Σχ. 67), τὸ ὁποῖον εἶναι

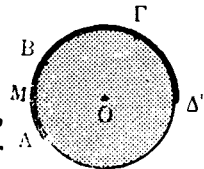
ἄθροισμα τοῦ τόξου AMB καὶ ἑνὸς ἄλλου τόξου (ἔδῳ τοῦ $\widehat{ΓΝΔ}$) λέγεται *μεγαλύτερον* τοῦ τόξου AMB καὶ γράφομεν: $\widehat{ΑΜΔ'} > \widehat{ΑΜΒ}$.

Τὸ τόξον AMB λέγεται *μικρότερον* τοῦ τόξου $ΑΒΔ'$ καὶ γράφομεν: $\widehat{ΑΜΒ} < \widehat{ΑΒΔ'}$.

84. Διαφορὰ δύο τόξων. Ἡ διαφορὰ τῶν τόξων $ΑΒΔ'$ καὶ AMB (Σχ. 67) εἶναι τὸ τόξον $\widehat{ΓΝΔ}$, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ προσθέσωμεν εἰς τὸ μικρότερον τόξον AMB διὰ νὰ λάβωμεν τὸ μεγαλύτερον τόξον $ΑΒΔ'$. Γράφομεν: $\widehat{ΓΝΔ} = \widehat{ΑΒΔ'} - \widehat{ΑΜΒ}$.

85. Γινόμενον ἑνὸς τόξου ἐπὶ ἓνα ἀκέραιον ἀριθμὸν. Ἐστω ὅτι τὸ τόξον $ΑΒΔ$ (Σχ. 68), εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τριῶν τόξων, ἴσων μὲ τὸ τόξον AMB . Τὸ τόξον $ΑΒΔ$ λέγεται *τριπλάσιον* τοῦ τόξου AMB : δηλ. εἶναι γινόμενον τοῦ τόξου AMB ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν 3 καὶ γράφομεν: $\widehat{ΑΒΔ} = \widehat{ΑΜΒ} \times 3$ ἢ $\widehat{ΑΒΔ} = 3 \widehat{ΑΜΒ}$.

Γενικῶς: *Λέγομεν* ὅτι, ἓνα τόξον εἶναι *διπλάσιον*, *τριπλάσιον* . . . *νιπλάσιον* ἑνὸς ἄλλου τόξου, ἂν εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα 2, 3, . . . n τόξων, ἴσων μὲ τὸ δοθὲν τόξον.

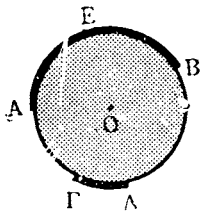


Σχ. 68.

86. Ἀκριβὲς πηλίκον ἑνὸς τόξου δι' ἑνὸς ἀκέραιου ἀριθμοῦ. Τὸ τόξον AMB εἶναι τὸ τρίτον τοῦ τόξου $ΑΒΔ$ (Σχ. 68). Λέγομεν, ὅτι τὸ τόξον AMB εἶναι τὸ *ἀκριβὲς πηλίκον* τοῦ τόξου $ΑΒΔ$ διὰ τοῦ ἀριθμοῦ 3 καὶ γράφομεν $\widehat{ΑΜΒ} = \frac{\widehat{ΑΒΔ}}{3}$.

Γενικῶς: *Λέγομεν*, ὅτι ἓνα τόξον AMB εἶναι τὸ *ἡμισυ*, τὸ *τρίτον*, . . . τὸ *νιοστὸν* ἑνὸς ἄλλου τόξου $ΑΒΔ$, ὅταν τὸ τόξον $ΑΒΔ$ εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ τόξου AMB ἐπὶ 2, 3, . . . n .

87. Μέσον τόξου. Τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον διαιρεῖ ἓνα τόξον εἰς δύο ἴσα τόξα, λέγεται *μέσον* τοῦ τόξου. Εἶναι φανερόν, ὅτι:



Σχ. 69.

Κάθε τόξον ἔχει ἓνα καὶ μόνον μέσον.

88. Μέτρον τόξου. Ὄταν λέγομεν, ὅτι θὰ *μετρήσωμεν* ἓνα τόξον σημαίνει, ὅτι θὰ τὸ συγκρίνωμεν πρὸς ἓνα ἄλλο τόξον, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν ὡς μονάδα μετρήσεως, διὰ νὰ ἴδωμεν πόσας φορὰς ἢ μονὰς χωρεῖ εἰς τὸ δοθὲν τόξον.

Ὁ ἀριθμὸς, ὁ ὁποῖος θὰ προκύψῃ ἐκ τῆς συγκρίσεως αὐτῆς, λέγεται *μέτρον* τοῦ δοθέντος τόξου.

Π.χ. ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ μετρήσωμεν τὸ τόξον ΑΒ (Σχ. 69). Λαμβάνομεν ὡς μονάδα μετρήσεως τὸ τόξον ΓΔ. Ἐστὼ ὅτι ἡ μονὰς ΓΔ τῶν τόξων περιέχεται 4 φορές ἀκριβῶς εἰς τὸ τόξον ΑΒ. Ὁ ἀριθμὸς 4 εἶναι τὸ μέτρον τοῦ τόξου ΑΒ καὶ γράφομεν: $\widehat{ΑΒ}=4$.

Σημ. Ἡ μονὰς τῶν τόξων θὰ δοθῇ εἰς τὴν § 94.

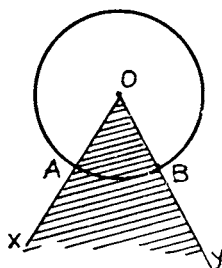
5. Τόξα καὶ ἐπίκεντροι γωνία

89. Ἐπίκεντρος γωνία. Ἐστὼ μία περιφέρεια Ο (Σχ. 70) καὶ μία γωνία $\alpha O\gamma$, ἡ ὁποία ἔχει τὴν κορυφήν της εἰς τὸ κέντρον Ο.

Ἡ γωνία αὕτη λέγεται **ἐπίκεντρος γωνία**.

Γενικῶς:

Ἐπίκεντρος γωνία λέγεται κάθε γωνία, ἡ ὁποία ἔχει τὴν κορυφήν της εἰς τὸ κέντρον ἐνὸς κύκλου.



Σχ. 70.

Τὸ τόξον ΑΒ τῆς περιφέρειας, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξύ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας $\alpha O\gamma$ λέγεται **ἀντίστοιχον τόξον** αὐτῆς. Συνήθως λέγομεν, ὅτι ἡ ἐπίκεντρος γωνία $\alpha O\gamma$ **βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΒ**.

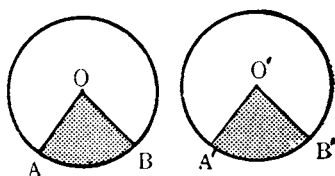
90. Θεώρημα. *Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους, δύο ἴσαι ἐπίκεντροι γωνίαὶ βαίνουν ἐπὶ ἴσων τόξων.*

Ἐπίκεντροι γωνίαὶ: Ἐστῶσαν δύο ἴσοι κύκλοι Ο καὶ Ο' (Σχ. 71) καὶ αἱ ἴσαι ἐπίκεντροι γωνίαὶ ΑΟΒ καὶ Α'Ο'Β'.

Ἐπίκεντροι γωνίαὶ	Κύκλ. Ο = κύκλ. Ο'
Ἐπίκεντροι γωνίαὶ	$\widehat{ΑΟΒ} = \widehat{Α'Ο'Β'}$
Συμπ.	$\widehat{ΑΒ} = \widehat{Α'Β'}$

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ τόξα ΑΒ καὶ Α'Β', ἐπὶ τῶν ὁποίων βαίνουν αἱ γωνίαὶ αὐταί, εἶναι ἴσα.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν φαντασθῶμεν, ὅτι θέτομεν τὸν κύκλον Ο' ἐπὶ τοῦ κύκλου Ο οὕτως, ὥστε ἡ γωνία Α'Ο'Β' νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης τῆς ΑΟΒ, τότε οἱ κύκλοι Ο' καὶ Ο θὰ ἐφαρμόσων, διότι εἶναι ἴσοι καὶ συμπίπτουν τὰ κέντρα τῶν· τὸ σημεῖον Α' θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Α, τὸ σημεῖον Β' θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Β, διότι αἱ ἀκτίνες ΟΑ', ΟΒ', εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς ἀκτίνες ΟΑ καὶ ΟΒ καὶ ἐπομένως τὸ τόξον Α'Β' θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΒ.



Σχ. 71.

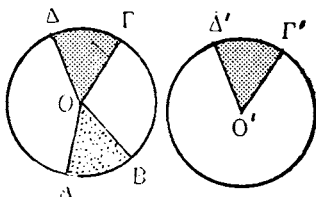
Εἰς τὸ αὐτὸ συμπέρασμα καταλήγομεν, ἐὰν φαντασθῶμεν, ὅτι αἱ

Εἰς τὸ αὐτὸ συμπέρασμα καταλήγομεν, ἐὰν φαντασθῶμεν, ὅτι αἱ

ΐσαι επίκεντροι γωνία κείνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.

Πράγματι: ἔστωσαν αἱ ἴσαι ἐπίκεντροι γωνία AOB καὶ $ΓΟΔ$ (Σχ. 72), αἱ ὁποῖα κείνται ἐπὶ τῆς

αὐτῆς περιφερείας O' θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ ἀντίστοιχα τόξα αὐτῶν AB καὶ $ΓΔ$ εἶναι ἴσα. Διότι, ἐὰν φαντασθῶμεν ἕνα κύκλον O' (Σχ. 72) ἴσον μὲ τὸν δοθέντα κύκλον O καὶ μίαν ἐπίκεντρον γωνία $Γ'Ο'Δ'$ ἴσην πρὸς τὰς δοθείσας ἐπίκεντρον γωνία AOB καὶ $ΓΟΔ$ καὶ ἐργασθῶμεν ὡς ἀνωτέρω, θὰ εὐρωμεν, ὅτι τὰ τόξα AB καὶ $ΓΔ$ θὰ εἶναι ἴσα, ὡς ἴσα πρὸς τὸ τόξον $Γ'Δ'$.



Σχ. 72.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον...**

91. Θεώρημα. (Ἀντίστροφον). **Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους εἰς ἴσα τόξα βαίνουν ἴσαι ἐπίκεντροι γωνία.**

Ἐπίκεντροι γωνία O καὶ O' (Σχ. 71) καὶ δύο ἴσα τόξα AB καὶ $A'B'$.

Συμπέρασμα. Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ ἐπίκεντροι γωνία AOB καὶ $A'O'B'$, αἱ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰ τόξα αὐτά, εἶναι ἴσαι.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν θέσωμεν τὸν κύκλον O' ἐπὶ τοῦ ἴσου τοῦ κύκλου O οὕτως, ὥστε τὸ τόξον $A'B'$ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ ἴσου τοῦ τόξου AB , τότε τὰ κέντρα O καὶ O' θὰ ἐφαρμόσουν, διότι οἱ κύκλοι εἶναι ἴσοι· ἢ ἀκτὶς $O'A'$ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς OA καὶ ἢ ἀκτὶς $O'B'$ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς OB καὶ ἐπομένως θὰ ἐφαρμόσουν αἱ ἐπίκεντροι γωνία AOB καὶ $A'O'B'$.

Σημ. Εἰς τὸ αὐτὸ συμπέρασμα καταλήγομεν, ἐὰν φαντασθῶμεν, ὅτι τὰ ἴσα τόξα κείνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον...**

92. Θεώρημα. **Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους: δύο ἄνισοι ἐπίκεντροι γωνία βαίνουν ἐπὶ ἀνίσων τόξων καὶ ἡ μεγαλύτερα γωνία βαίνει εἰς τὸ μεγαλύτερον τόξον.**

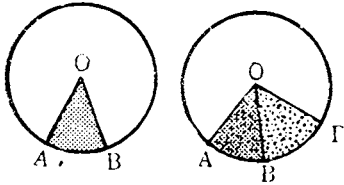
Ἐπίκεντροι γωνία O καὶ O' καὶ αἱ ἄνισοι ἐπίκεντροι γωνία $AOΓ$ καὶ $A'O'B'$. Ἐστω ὅτι εἶναι $\widehat{AOΓ} > \widehat{A'O'B'}$.

Ἐπίκεντροι γωνία	Κύκλ. $O =$ κύκλ. O' $\widehat{AB} = \widehat{A'B'}$
Συμπ.	$\widehat{AOB} = \widehat{A'O'B'}$

Ἐπίκεντροι γωνία	Κύκλ. $O =$ κύκλ. O' $\widehat{AOΓ} > \widehat{A'O'B'}$
Συμπ.	$\widehat{AΓ} > \widehat{A'B'}$

Συμπέρασμα. Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\widehat{A\Gamma} > \widehat{A'B'}$.

Ἀπόδειξις. Λαμβάνομεν ἐπὶ τοῦ κύκλου O μίαν ἐπίκεντρον γωνίαν AOB ἴσην μὲ τὴν γωνίαν $A'O'B'$. Τὰ τόξα AB καὶ $A'B'$ εἶναι ἴσα. Ἀλλὰ εἶναι $\text{τόξ.}A\Gamma > \text{τόξ.}AB$, διότι τὸ B κεῖται μεταξὺ τῶν A καὶ Γ . Ἄρα θὰ εἶναι καὶ $\text{τόξ.}A\Gamma > \text{τόξ.}A'B'$.

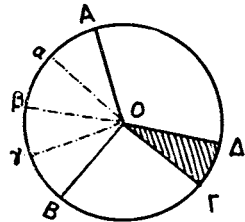


Σχ. 73.

Τὸ ἀντίστροφον τοῦ θεωρήματος διατυποῦται καὶ ἀποδεικνύεται εὐκόλως

93. Θεώρημα. Ἡ ἐπίκεντρος γωνία ἔχει τὸ αὐτὸ μέτρον, πού ἔχει καὶ τὸ ἀντίστοιχον τόξον της, ὑπὸ τὸν ὄρον νὰ λάβωμεν ὡς μονάδα τῶν γωνιῶν τὴν ἐπίκεντρον γωνίαν, ἢ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν μονάδα τῶν τόξων.

Ἐστω, ὅτι θέλομεν νὰ μετρήσωμεν τὴν ἐπίκεντρον γωνίαν AOB (Σχ. 74) καὶ ἔστω, ὅτι, ὡς μονὰς μετρήσεως τῶν γωνιῶν, λαμβάνεται ἡ ἐπίκεντρος γωνία $ΓΟΔ$, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ τόξον $\Gamma\Delta$, τὸ ὁποῖον λαμβάνεται ὡς μονὰς τῶν τόξων. Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ τόξον AB , πού ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ἐπίκεντρον γωνίαν AOB , περιέχει 4 φορὰς τὴν μονάδα τῶν τόξων. Θὰ εἶναι τότε (§ 88) $\text{μετρ.} \widehat{AB} = 4$ (1).



Σχ. 74.

Διαιροῦμεν τὸ τόξον AB εἰς τέσσαρα ἴσα μέρη καὶ ἔστωσαν α, β, γ , τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως. Ἐπειδὴ τὰ τόξα $A\alpha, \alpha\beta, \beta\gamma, \gamma B$ καὶ $\Gamma\Delta$ εἶναι ἴσα καὶ αἱ ἐπίκεντροι γωνίαι, αἱ ὁποῖαι βαίνουν ἐπὶ τῶν τόξων αὐτῶν εἶναι ἴσαι· ὥστε ἡ ἐπίκεντρος γωνία AOB εἶναι ἴση μὲ 4 ἐπίκεντρος γωνίας, ἑκάστη τῶν ὁποίων εἶναι ἴση μὲ τὴν ἐπίκεντρον γωνίαν $\GammaΟΔ$, ἡ ὁποία ἐλήφθη ὡς μονὰς μετρήσεως τῶν γωνιῶν. Δηλ. εἶναι $\text{μετρ.} \widehat{AOB} = 4$ (2).

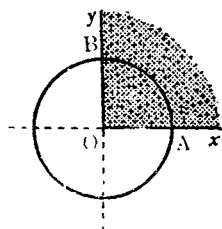
Ἀπὸ τὰς ἰσοτήτας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι

$$\text{μετρ.} \widehat{AOB} = \text{μετρ.} \widehat{AB}.$$

94. Μονάδες τόξου. Δεχόμεθα νὰ λαμβάνωμεν πάντοτε ὡς μονάδα τόξου ἐπὶ τῆς περιφερείας ἐνὸς κύκλου τὸ τόξον, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ἐπίκεντρον γωνίαν, τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν ὡς μονάδα γωνιῶν.

Ἐστω μία ὀρθὴ γωνία xOy (Σχ. 75). Μὲ κέντρον τὴν κορυ-

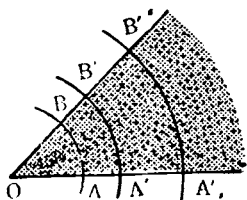
φάν της O και με ακτίνα τυχούσαν γράφομεν περιφέρεια κύκλου, η οποία τέμνει τὰς πλευράς τῆς γωνίας εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B . Τὸ τόξον AB , τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν ἐπίκεντρον ὀρθὴν γωνίαν, λέγεται *τεταρτημόριον*. Εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ περιφέρεια O ἔχει τέσσαρα τεταρτημόρια. Τὸ τεταρτημόριον διαιρεῖται εἰς 90 ἴσα τόξα, ἕκαστον τῶν ὁποίων λέγεται *μοῖρα* ($^{\circ}$). Ἡ μοῖρα διαιρεῖται εἰς 60 λε-



Σχ. 75.

πτὰ ($'$) καὶ τὸ λεπτόν εἰς 60 *δεύτερα λεπτά* ($''$) κλπ. Μία περιφέρεια ἔχει 360 μοῖρας.

Τὸ τεταρτημόριον διαιρεῖται ἐπίσης καὶ εἰς 100 *βαθμοὺς* ($^{\circ}$). Αἱ ὑποδιαίρέσεις τοῦ βαθμοῦ εἶναι: Τὸ *δέκατον*



Σχ. 76.

τοῦ βαθμοῦ, τὸ *ἐκατοστὸν* τοῦ βαθμοῦ, τὸ *χιλιοστὸν* τοῦ βαθμοῦ. Ἡ περιφέρεια ἔχει 400 βαθμούς.

Συνηθεστέρα μονὰς μετρήσεως ἑνὸς τόξου εἶναι ἡ μοῖρα.

Παρατήρησις. Τὰ τόξα AB , $A'B'$, $A''B''$ (Σχ. 76) δὲν εἶναι ἴσα, διότι αἱ ἀκτῖνες τῶν περιφερειῶν εἰς τὰς ὁποίας ἀνήκουν εἶναι διάφοροι. Ἐν τούτοις ἔχουν τὸ αὐτὸ μέτρον, διότι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν αὐτὴν ἐπίκεντρον γωνίαν τῶν 45° .

Ἄσκησης. 21. (414). Δίδονται δύο διαδοχικὰ τόξα AB καὶ $B\Gamma$ μιᾶς περιφερείας. Ἐὰν M εἶναι τὸ μέσον τοῦ τόξου AB , νὰ δειχθῇ, ὅτι:

$$\widehat{AM} = \frac{\widehat{A\Gamma} - \widehat{B\Gamma}}{2}, \quad \Gamma M = \frac{\widehat{GA} + \widehat{GB}}{2}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'.

ΠΟΛΥΓΩΝΑ - ΤΡΙΓΩΝΑ

1. Πολύγωνα και πολυγωνικά γραμμά

95. Ὅρισμοί. Ἐνα μέρος τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον περικλείεται ἀπὸ εὐθύγραμμα τμήματα, λέγεται **πολύγωνον**.

Τὰ εὐθύγραμμα τμήματα, τὰ ὁποῖα περικλείουν ἓνα πολύγωνον λέγονται **πλευραὶ τοῦ πολυγώνου**.

Τὸ σχῆμα ΑΒΓΔΕ (Σχ. 77) εἶναι ἓνα πολύγωνον· αἱ πλευραὶ του εἶναι αἱ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΑ.

Τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν ἑνὸς πολυγώνου λέγεται **περίμετρος** αὐτοῦ.

Π.χ. ἡ περίμετρος τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ εἶναι τὸ ἄθροισμα
 $ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΕ + ΕΑ$.

Αἱ γωνίαι τὰς ὁποίας σχηματίζουν αἱ πλευραὶ ἑνὸς πολυγώνου, λέγονται **γωνίαι τοῦ πολυγώνου**.

Αἱ κορυφαὶ τῶν γωνιῶν ἑνὸς πολυγώνου λέγονται καὶ **κορυφαὶ** τοῦ πολυγώνου.

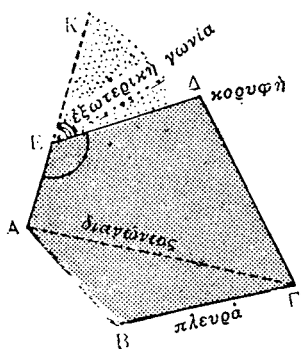
Ἐνα πολύγωνον ἔχει τόσας γωνίας, ὅσας καὶ κορυφάς. Δύο κορυφαί, αἱ ὁποῖαι κείνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς πλευρᾶς, λέγονται **διαδοχικά**.

Τὸ εὐθύγραμμον τμήμα, τὸ ὁποῖον συνδέει δύο μὴ διαδοχικάς κορυφάς ἑνὸς πολυγώνου λέγεται **διαγώνιος** αὐτοῦ.

Π.χ. τὸ εὐθύγραμμον τμήμα ΑΓ (Σχ. 77) εἶναι μία διαγώνιος τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ.

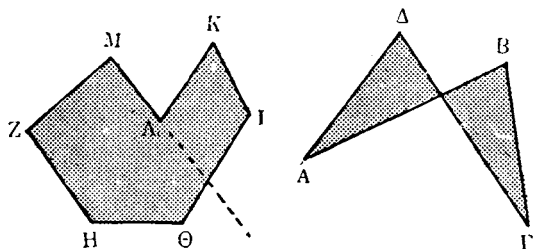
Ἐὰν προεκτείνωμεν μίαν πλευρὰν ἑνὸς πολυγώνου (Σχ. 77), ἔστω τὴν ΑΕ, μέχρι τοῦ σημείου Κ, ἡ γωνία ΚΕΔ, ἡ ὁποία σχηματίζεται ἀπὸ τὴν προέκτασιν τῆς ΑΕ καὶ ἀπὸ τὴν προσκειμένην πλευρὰν ΕΔ λέγεται **ἐξωτερικὴ γωνία** τοῦ πολυγώνου.

Ἐνα πολύγωνον λέγεται **κυρτόν**, ὅταν, κάθε πλευρά του προεκτενομένη, ἀφήνῃ ὅλον τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς.



Σχ. 77.

Π.χ. τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ (Σχ. 77) εἶναι κυρτόν, ἐνῶ τὸ ΖΗΘΙΚΛΜ (Σχ. 78) δὲν εἶναι κυρτόν, διότι ἡ πλευρά του ΜΛ προεκτεινομένη χωρίζει τὸ πολύγωνον εἰς δύο μέρη. Ἐπίσης τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔ (Σχ. 78) δὲν εἶναι κυρτόν.



Σχ. 78.

Τὰ κυριώτερα πολύγωνα εἶναι :

- 1ον. Τὸ τρίγωνον (μὲ 3 πλευρὰς)
- 2ον. Τὸ τετράπλευρον (μὲ 4 πλευρὰς)
- 3ον. Τὸ πεντάγωνον (μὲ 5 πλευρὰς)
- 4ον. Τὸ ἑξάγωνον (μὲ 6 πλευρὰς)
- 5ον. Τὸ ὀκτάγωνον (μὲ 8 πλευρὰς)
- 6ον. Τὸ δεκάγωνον (μὲ 10 πλευρὰς)
- 7ον. Τὸ δωδεκάγωνον (μὲ 12 πλευρὰς)
- 8ον. Τὸ δεκαπεντάγωνον (μὲ 15 πλευρὰς)

96. Πολυγωνικαὶ γραμμάι. Μία τεθλασμένη γραμμὴ κλειστή ἢ μὴ, λέγεται καὶ **πολυγωνικὴ γραμμὴ**.

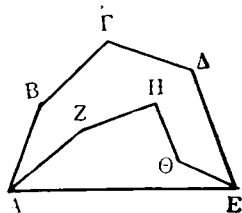
Αἱ πλευραὶ τῆς τεθλασμένης γραμμῆς λέγονται καὶ **πλευραὶ** τῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς.

Μία πολυγωνικὴ γραμμὴ λέγεται **κυρτὴ**, ὅταν κάθε πλευρὰ τῆς προεκτεινομένη, ἀφίηνη ὅλην τὴν πολυγωνικὴν γραμμὴν πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς.

Μία εὐθεῖα συναντᾷ μίαν κυρτὴν πολυγωνικὴν γραμμὴν μόνον εἰς δύο σημεῖα.

Ὅταν δύο πολυγωνικαὶ γραμμάι, κυρταὶ ἢ μὴ, ἔχουν τὰ αὐτὰ ἄκρα λέγομεν, ὅτι ἡ μία περιβάλλει τὴν ἄλλην, ἐὰν ἡ τελευταία εὐρίσκειται ὀλόκληρος ἐντὸς τοῦ πολυγώνου, τὸ ὁποῖον σχηματίζεται ἀπὸ τὴν πρώτην πολυγωνικὴν γραμμὴν καὶ ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν, ἣ ὁποία συνδέει τὰ ἄκρα των.

Π.χ. ἡ ΑΒΓΔΕ εἶναι μία πολυγωνικὴ γραμμὴ, ἣ ὁποία περιβάλλει τὴν ΑΖΗΘΕ. (Σχ. 79).



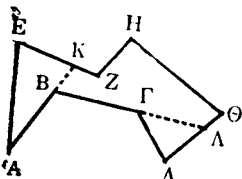
Σχ. 79.

97. Ἀξίωμα τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος. Κάθε εὐθύγραμμον τμήμα εἶναι μικρότερον ἀπὸ κάθε ἄλλην γραμμὴν, ἢ ὅποια ἔχει τὰ αὐτὰ ἄκρα μὲ τὸ εὐθύγραμμον τμήμα.

Τὸ ἀξίωμα αὐτὸ ἐκφράζεται γενικώτερον, ἐὰν ἴπωμεν: Ἡ εὐθεῖα γραμμὴ εἶναι ὁ συντομώτερος δρόμος μεταξὺ δύο σημείων.

98. Θεώρημα. Κάθε κυρτὴ τεθλασμένη γραμμὴ εἶναι μικρότερα ἀπὸ κάθε ἄλλην τεθλασμένην γραμμὴν, κυρτήν ἢ μὴ κυρτήν, ἢ ὅποια περιβάλλει τὴν πρώτην καὶ ἔχει τὰ αὐτὰ ἄκρα μὲ αὐτήν.

Ἐπίπεδος: Ἐστω ἡ τεθλασμένη γραμμὴ ΑΕΖΗΘΔ (Σχ. 80), ἢ ὅποια περιβάλλει τὴν κυρτὴν τεθλασμένην γραμμὴν ΑΒΓΔ καὶ ἔχει μὲ αὐτήν τὰ αὐτὰ ἄκρα Α καὶ Δ.



Σχ. 80.

Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι
 $AB + BΓ + ΓΔ < AE + EZ + ZH + HΘ + ΘΔ.$

Ἀπόδειξις: Προεκτείνωμεν τὴν πλευρὰν ΑΒ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Β καὶ τὴν πλευρὰν ΒΓ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Γ μέχρις, ὅτου συναντήσουν τὴν περιβάλλουσαν εἰς τὰ σημεῖα Κ καὶ Λ ἀντιστοίχως.

Ἐπειδὴ τὸ εὐθύγραμμον τμήμα ΑΚ εἶναι μικρότερον τῆς τεθλασμένης ΑΕΚ, θὰ εἶναι

$$AB + BK < AE + EK \quad (1)$$

Ὅμοίως, ἐπειδὴ τὸ εὐθύγραμμον τμήμα ΒΓ εἶναι μικρότερον τῆς τεθλασμένης ΒΚΖΗΘΛ, θὰ εἶναι

$$BΓ + ΓΔ < BK + KZ + ZH + HΘ + ΘΔ \quad (2)$$

Ὅμοίως, ἐπειδὴ τὸ εὐθύγραμμον τμήμα ΓΔ εἶναι μικρότερον τῆς τεθλασμένης ΓΛΔ, θὰ εἶναι

$$ΓΔ < ΓΛ + ΛΔ \quad (3)$$

Προσθέτομεν τὰς ἀνισότητας (1), (2), (3) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν
 $AB + BK + BΓ + ΓΔ + ΓΔ < AE + EK + BK + KZ + ZH + HΘ + ΘΔ + ΓΛ + ΛΔ.$

Ἀφαιροῦμεν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέλη τῆς ἀνισότητος αὐτῆς τὰ ΒΚ καὶ ΓΛ, τὰ ὅποια εἶναι κοινά, καὶ ἔχομεν

$$AB + BΓ + ΓΔ < AE + EK + KZ + ZH + HΘ + ΘΔ + ΛΔ \quad (4)$$

Ἐὰν παρατηρήσωμεν, ὅτι $EK + KZ = EZ$ καὶ $ΘΛ + ΛΔ = ΘΔ$, ἢ ἀνισότης (4) γράφεται

$$AB + BΓ + ΓΔ < AE + EZ + ZH + HΘ + ΘΔ.$$

Ἐδείχθη λοιπὸν ὅτι: Κάθε κυρτὴ τεθλασμένη. . . .

Ἀσκήσεις

22. (39). Πόσας διαγωνίους δυνάμεθα νὰ φέρωμεν: 1ον εἰς ἓνα ὀκτάγωνον; 2ον εἰς ἓνα πολύγωνον μὲ ν πλευράς;

23. (40). Πόσας πλευράς ἔχει τὸ πολύγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει 14 διαγωνίους; 54 διαγωνίους.

24. (41). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ περίμετρος ἐνὸς κυρτοῦ πολυγώνου εἶναι μικροτέρα ἀπὸ τὴν περίμετρον κάθε πολυγώνου, κυρτοῦ ἢ μὴ κυρτοῦ, τὸ ὁποῖον περιβάλλει τὸ πρῶτον.

2. Σύγκρισις καθέτων και πλαγίων πρὸς εὐθείαν

99. **Θεώρημα.** Ἐὰν ἀπὸ ἓνα σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς εὐθείας, φέρωμεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθείαν και διαφόρους πλαγίας πρὸς αὐτήν:

1ον. Ἡ κάθετος εἶναι μικροτέρα ἀπὸ κάθε πλαγίαν.

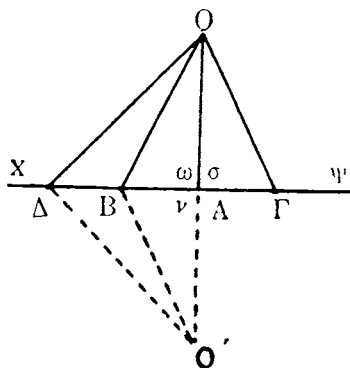
2ον. Δύο πλάγια, τῶν ὁποίων οἱ πόδες ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὸν πόδα τῆς καθέτου, εἶναι ἴσαι.

3ον. Δύο πλάγια, τῶν ὁποίων οἱ πόδες ἀπέχουν ἄνισον ἀπὸ τὸν πόδα τῆς καθέτου, εἶναι ἄνισοι και μεγαλύτερα εἶναι ἐκεῖνη, τῆς ὁποίας ὁ πὸς ἀπέχει περισσότερον ἀπὸ τὸν πόδα τῆς καθέτου.

Ἐστω μία εὐθεῖα $X\Psi$ (Σχ. 81) και O ἓνα σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς αὐτῆς.

1ον. Ὑπόθεσις: Ἀπὸ τὸ O φέρομεν τὴν κάθετον OA και τὴν πλαγίαν OB ἐπὶ τὴν $X\Psi$.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι $OA < OB$.



Σχ. 81.

Ὑπόθ.	$OA \perp X\Psi$ OB πλαγία πρὸς $X\Psi$
Συμπ.	$OA < OB$

Ἀπόδειξις: Προεκτείνωμεν τὴν OA και ἐπὶ τῆς προεκτάσεως λαμβάνωμεν ἓνα εὐθύγραμμον τμήμα $AO' = OA$. Φέρομεν τὴν BO' .

Στρέφωμεν τὸ ἄνω μέρος τοῦ σχήματος περὶ τὴν $X\Psi$ μέχρις, ὅτου πέση ἐπὶ τοῦ κάτω μέρους τοῦ σχήματος ἔπειδὴ αἱ γωνίαι ω και ν εἶναι ἴσαι, ὡς ὀρθαί, ἢ OA θὰ πέση ἐπὶ τῆς AO' και ἔπειδὴ $AO = AO'$,

τὸ O θὰ πέση ἐπὶ τοῦ O' . Ἐπίσης ἡ BO θὰ συμπέση μὲ τὴν BO' καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι $OB=O'B$.

Ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα $OA O'$ εἶναι μικροτέρα τῆς OBO' θὰ εἶναι
 $OA+AO' < OB+BO'$ (1)

Ἐπειδὴ $AO'=OA$, ἐκ κατασκευῆς καὶ $BO'=OB$, ὡς ἐδείχθη, ἡ ἀνισότης (1) γράφεται

$$OA+OA < OB+OB \quad \eta \quad 2OA < 2OB \quad \eta \quad OA < OB.$$

2ον. Ὑπόθεσις: Ἐστῶσαν αἱ πλάγια OB καὶ OG καὶ τοιαῦται, ὥστε νὰ εἶναι $AB=AG$.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν,

ὅτι $OB=OG$.

Ἀπόδειξις: Στρέφωμεν τὸ μέρος OAG τοῦ σχήματος περὶ

τὴν OA μέχρις ὅτου πέση ἐπὶ τοῦ ἄλλου μέρους OAX τοῦ σχήματος. Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ω καὶ σ εἶναι ἴσαι, ὡς ὀρθαί, ἡ AG θὰ πέση ἐπὶ τῆς AB καὶ ἐπειδὴ εἶναι $AG=AB$, ἐξ ὑποθέσεως, τὸ G θὰ πέση ἐπὶ τοῦ B . Ἐπειδὴ κατὰ τὴν στροφὴν τὸ σημεῖον O μένει ἀκίνητον, ἡ OG συμπίπτει μὲ τὴν OB . Ὡστε θὰ εἶναι $OB=OG$.

3ον. Ὑπόθεσις: Ἐστῶσαν OD καὶ OG δύο πλάγια πρὸς τὴν XY καὶ τοιαῦται, ὥστε νὰ εἶναι

$$AD > AG.$$

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν,

ὅτι $OD > OG$.

Ἀπόδειξις: Ἐπὶ τῆς AD

λαμβάνομεν ἓνα τμήμα $AB=AG$. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν OB . Ἐπειδὴ $AB=AG$, αἱ πλάγια OB καὶ OG εἶναι ἴσαι, ὅπως ἐδείχθη εἰς τὴν περίπτωσιν 2ον.

Προεκτείνωμεν τὴν κάθετον OA καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεώς της λαμβάνομεν τμήμα $AO'=OA$. Φέρομεν τὰς εὐθείας $O'B$ καὶ $O'A$.

Ἡ τεθλασμένη γραμμὴ ODO' περιβάλλει τὴν τεθλασμένην γραμμὴν OBO' καὶ ἔχει μὲ αὐτὴν τὰ αὐτὰ ἄκρα ἄρα ἡ ODO' εἶναι μεγαλύτερα τῆς OBO' (§ 98), ἥτοι θὰ εἶναι

$$OD+DO' > OB+BO' \quad (2)$$

Ἐπειδὴ $OD=DO'$ καὶ $OB=BO'$, διότι εἶναι πλάγια πρὸς τὴν OO' καὶ οἱ πόδες των O, O' ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὸν πόδα A τῆς καθέτου XY ἐπὶ τὴν OO' , ἡ ἀνισότης (2) γράφεται

$$OD+OD > OB+OB \quad \eta \quad 2OD > 2OB \quad \eta \quad OD > OB.$$

Ἐπειδὴ $OB=OG$, ὡς ἐδείχθη ἀνωτέρω, ἡ τελευταία ἀνισότης γράφεται $OA > OG$.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: Ἐὰν ἀπὸ ἓνα σημείου. . . .

100. Θεώρημα (ἀντίστροφον). Ἐὰν ἀπὸ ἓνα σημείου, τὸ ὁποῖον κείται ἐκτὸς εὐθείας φέρωμεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθείαν και διαφόρους πλαγίας:

1ον. Ἀπὸ ὅλας τὰς εὐθείας, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὸ σημείου, τὸ ὁποῖον κείται ἐκτὸς τῆς εὐθείας, μὲ τὰ διάφορα σημεία τῆς εὐθείας, ἡ μικροτέρα εἶναι ἡ κάθετος, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ σημείου ἐπὶ τὴν εὐθείαν.

2ον. Ἐὰν δύο πλαγίαι εἶναι ἴσαι, οἱ πόδες των ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὸν πόδα τῆς καθέτου.

3ον. Ἐὰν δύο πλαγίαι εἶναι ἀνισοί, οἱ πόδες ἀπέχουν ἀνισον ἀπὸ τὸν πόδα τῆς καθέτου, και περισσότερον ἀπέχει ὁ πὸς τῆς μεγαλυτέρας πλαγίας.

Ἐστω μία εὐθεῖα $X\Psi$ (Σχ. 81) καὶ O ἓνα σημείου ἐκτὸς αὐτῆς ἀπὸ τὸ O φέρομεν τὰς εὐθείας OA, OB, OG, OD, \dots , αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὸ O μὲ τὰ διάφορα σημεία τῆς $X\Psi$.

1ον. Ὑπόθεσις. Ἐστω, ὅτι ἡ OA εἶναι ἡ μικροτέρα ἀπὸ ὅλας τὰς εὐθείας, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὸ O μὲ τὰ διάφορα σημεία τῆς $X\Psi$.

Συμπέρασμα: $\Theta\acute{\alpha}$ δεῖξωμεν, ὅτι ἡ OA θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν $X\Psi$.

Ἀπόδειξις: Ἐὰν ἡ OA δὲν ἦτο κάθετος ἐπὶ τὴν $X\Psi$, θὰ ἦτο πλαγία πρὸς αὐτὴν καὶ ἡ κάθετος OA' , ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ O πρὸς τὴν $X\Psi$ θὰ ἦτο (§ 99. 1ον) μικροτέρα ἀπὸ τὴν OA , πρᾶγμα τὸ ὁποῖον ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσίν μας, ἡ ὁποία ἦτο, ὅτι ἡ OA εἶναι ἡ μικροτέρα ἀπὸ ὅλας τὰς εὐθείας, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὸ O μὲ τὰ διάφορα σημεία τῆς $X\Psi$. Ὡστε ἡ OA εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν $X\Psi$.

2ον. Ὑπόθεσις: Ἐστω, ὅτι αἱ πλαγίαι OB καὶ OG (Σχ. 81), εἶναι ἴσαι.

Συμπέρασμα: $\Theta\acute{\alpha}$ δεῖξωμεν, ὅτι $AB=AG$.

Ἀπόδειξις: Ἐὰν ἡ AB δὲν ἦτο ἴση μὲ τὴν AG , θὰ ἦτο ἢ μεγαλυτέρα τῆς AG ἢ μικροτέρα τῆς AG .

Ἐὰν ἦτο $AB > AG$, τότε θὰ ἦτο $OB > OG$, (§ 99, 2ον), πρᾶγμα τὸ ὁποῖον ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσίν μας.

Ἐὰν ἦτο $AB < AG$, τότε θὰ ἦτο $OB < OG$, τὸ ὁποῖον πάλιν

Ὑπόθ.	$OA \perp X\Psi$ OB, OG πλαγίαι $OB=OG$
Συμπ.	$AB=AG$

ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσίν μας. Ὡστε ἡ AB δὲν δύναται νὰ εἶναι οὔτε μεγαλυτέρα, οὔτε μικροτέρα τῆς AG . ἄρα θὰ εἶναι ἴση μὲ αὐτήν, ἦτοι θὰ εἶναι $OB=OG$.

3ον. Ὑπόθεσις. Ἐστω, ὅτι αἱ πλάγαι OA καὶ OG (Σχ. 81) εἶναι ἄνισοι καὶ ὅτι $OA > OG$.

Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι θὰ εἶναι $AA > AG$.

Ἀπόδειξις: Ἐὰν ἡ AA δὲν ἦτο μεγαλυτέρα τῆς AG , θὰ ἦτο ἴση μὲ αὐτήν ἢ μικροτέρα αὐτῆς.

Ἐὰν ἦτο $AA=AG$ τότε, κατὰ τὴν (§ 99. 2ον), θὰ ἦτο $OA=OG$, τὸ ὁποῖον ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσίν μας.

Ἐὰν ἦτο $AA < AG$, τότε θὰ ἦτο, κατὰ τὴν (§ 99. 3ον), $OA < OG$, τὸ ὁποῖον ἀντίκειται πάλιν εἰς τὴν ὑπόθεσίν μας.

Ὡστε ἡ AA δὲν δύναται νὰ εἶναι οὔτε ἴση μὲ τὴν AG , οὔτε μικροτέρα τῆς AG . ἄρα θὰ εἶναι μεγαλυτέρα αὐτῆς ἦτοι θὰ εἶναι

$$AA > AG.$$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: Ἐὰν ἀπὸ ἓνα σημεῖον. . . .

101. Σπουδαῖαι παρατηρήσεις. I. Ἡ ἀνωτέρω ἀπόδειξις (§ 100. 2ον) δεικνύει, ὅτι: ἐὰν οἱ πόδες δύο πλαγιῶν OB καὶ OG ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὸν πόδα τῆς καθέτου, αἱ πλάγαι αὐταὶ σχηματίζουν ἴσας γωνίας:

1ον. Μὲ τὴν κάθετον OA : τὰς $\widehat{AOB}=\widehat{AOG}$.

2ον. Μὲ τὴν εὐθεῖαν XY : τὰς $\widehat{OBA}=\widehat{OGA}$.

II. Ἀπὸ τὰ προηγούμενα θεωρήματα συνάγομεν, ὅτι: Ἀπὸ ἓνα σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς εὐθείας δὲν δυνάμεθα νὰ φέρωμεν παρὰ δύο μόνον πλαγίας, αἱ ὁποῖαι νὰ εἶναι ἴσαι μεταξὺ τῶν.

102. Ἀπόστασις σημείου ἀπὸ εὐθείαν. Ὀνομάζομεν ἀπόστασιν σημείου ἀπὸ εὐθείαν, τὸ μῆκος τῆς καθέτου, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ δοθὲν σημεῖον πρὸς τὴν εὐθεῖαν (τὸ περιλαμβανόμενον μεταξὺ τοῦ σημείου καὶ τοῦ ποδὸς τῆς καθέτου).

Ἡ ἀπόστασις ἑνὸς σημείου ἀπὸ εὐθείαν, εἶναι ἢ μικροτέρα τῶν ἀποστάσεων τοῦ σημείου αὐτοῦ ἀπὸ τὰ διάφορα σημεία τῆς εὐθείας.

Ὑπόθ.	$OA \perp XY$ OB, OG πλάγαι $OB > OG$
Συμπ.	$AA > AG$

Άσκήσεις

25. (41). Δίδεται ή όρθή γωνία xOy' επί τής πλευράς Ox λαμβάνομεν δύο σημεία A και A' και τοιαύτα, ώστε $OA < OA'$ και επί τής πλευράς Oy τὰ σημεία B και B' και τοιαύτα, ώστε νά είναι $OB < OB'$. Φέρομεν τὰς εὐθείας AB και $A'B'$. Νά ἀποδειχθῆ, ὅτι $AB < A'B'$.

26. (42). Ἀπό ἕνα σημείου O , τὸ ὁποῖον κεῖται ἔκτος μιᾶς εὐθείας xy φέρομεν τὴν κάθετον OA ἐπὶ τὴν xy και δύο ἀνίσους πλαγίας OB και OG . Ἐάν εἶναι $OG > OB$ νά ἀποδειχθῆ, ὅτι θὰ εἶναι και $\gamma\omega\nu.AOG > \gamma\omega\nu.AOB$.

3. Τρίγωνα

103. Τρίγωνον. Ὅπως ὠρίσαμεν εἰς τὴν § 95, *τρίγωνον* ὀνομάζεται τὸ πολύγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει τρεῖς πλευράς.

Κάθε τρίγωνον εἶναι κυρτὸν σχῆμα.

Κάθε τρίγωνον ἔχει 3 κορυφάς, 3 πλευράς και 3 γωνίας.

Π.χ. εἰς τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ (Σχ. 82) αἱ τρεῖς πλευραὶ του εἶναι αἱ $AB, B\Gamma, \Gamma A$: αἱ τρεῖς κορυφαὶ του εἶναι αἱ A, B, Γ και αἱ τρεῖς γωνίαὶ του εἶναι αἱ $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{\Gamma}$.

Κάθε γωνία τριγώνου περιέχεται μεταξύ δύο πλευρῶν του.

Π.χ. ἡ γωνία A (Σχ. 82) περιέχεται μεταξύ τῶν πλευρῶν AB και $A\Gamma$.

Εἰς κάθε πλευρὰν τριγώνου πρόοκεινται δύο γωνίαὶ.

Π.χ. εἰς τὴν πλευρὰν $B\Gamma$ πρόοκεινται αἱ γωνίαὶ B και Γ .

Ἀπέναντι κάθε πλευράς τριγώνου κεῖται μία γωνία και ἀντιστρόφως.

Π.χ. ἀπέναντι τής πλευράς $B\Gamma$ κεῖται ἡ γωνία A κλπ.

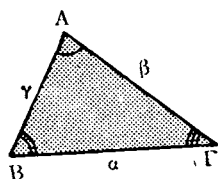
Ἀντιστρόφως ἀπέναντι τής γωνίας A κεῖται ἡ πλευρὰ $B\Gamma$, κλπ.

Παριστάνομεν με α τὴν πλευρὰν $B\Gamma$, ἡ ὁποία κεῖται ἀπέναντι τής γωνίας A , με β τὴν πλευρὰν $A\Gamma$, ἡ ὁποία κεῖται ἀπέναντι τής γωνίας B και με γ τὴν πλευρὰν AB , ἡ ὁποία κεῖται ἀπέναντι τής γωνίας Γ .

Αἱ τρεῖς πλευραὶ και αἱ τρεῖς γωνίαὶ ἑνὸς τριγώνου ἀποτελοῦν τὰ ἔξ κύρια στοιχεῖα τοῦ τριγώνου.

104. Εἶδη τριγώνων. I. Ἄν ἐξετάσωμεν τὰ τρίγωνα ὡς πρὸς τὰς πλευράς των, διακρίνομεν τρία εἶδη τριγώνων:

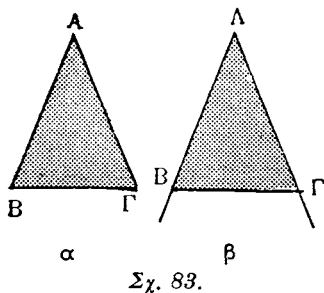
Τὰ ἰσοσκελῆ, τὰ ἰσόπλευρα και τὰ σκαληνὰ.



Σχ. 82.

1ον. Ἐνα τρίγωνον λέγεται **ισοσκελές**, ἐὰν ἔχη δύο πλευρὰς ἴσας.

Ἡ πλευρά, ἡ ὁποία δὲν εἶναι ἴση πρὸς τὰς ἄλλας, ὀνομάζεται συνήθως **βάσις** τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου· ἡ ἀπέναντι τῆς βάσεως κορυφή, ὀνομάζεται ἰδιαιτέρως **κορυφή τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου**.



Π.χ. τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (Σχ. 83α) εἶναι ἰσοσκελές τρίγωνον.

Αἱ ἴσαι πλευραὶ του εἶναι αἱ ΑΒ καὶ ΑΓ, ἡ βάση του εἶναι ἡ ΒΓ καὶ ἡ κορυφή του ἡ Α.

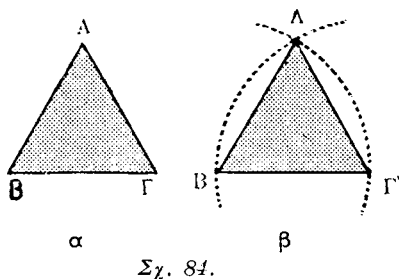
Αἱ ἴσαι πλευραὶ ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου λέγονται **σκελή** αὐτοῦ.

Κατασκευάζομεν ἓνα ἰσοσκελές τρίγωνον, ἂν λάβωμεν ἐπὶ τῶν πλευρῶν μιᾶς γωνίας Α (Σχ. 83β) μήκη ἴσα $AB=AG$ καὶ φέρωμεν τὴν εὐθεΐαν ΒΓ.

2ον. Ἐνα τρίγωνον λέγεται **ισόπλευρον**, ἐὰν ἔχη καὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς του ἴσας.

Π.χ. τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (Σχ. 84α) εἶναι ἰσόπλευρον, ἐὰν εἶναι $AB=BG=GA$.

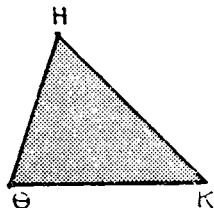
Διὰ νὰ κατασκευάσωμεν ἓνα ἰσόπλευρον τρίγωνον, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Λαμβάνομεν τυχὸν εὐθύγραμμον τμήμα ΒΓ (Σχ. 84β) καὶ μὲ κέντρα τὰ ἄκρα του Β καὶ Γ καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν ΒΓ γράφομεν δύο τόξα, τὰ ὁποῖα νὰ τέμνονται εἰς ἓνα σημεῖον, ἔστω εἰς τὸ Α· φέρομεν ἔπειτα τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΑΓ καὶ σχηματίζεται τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσόπλευρον, διότι καὶ αἱ τρεῖς πλευραὶ του εἶναι ἴσαι μὲ τὴν ΒΓ.



3ον. Ἐνα τρίγωνον λέγεται **σκαληνόν**, ἐὰν αἱ τρεῖς πλευραὶ του εἶναι ἄνισοι.

Π.χ. τὸ τρίγωνον ΗΘΚ (Σχ. 85) εἶναι σκαληνόν.

II. Ἐὰν ἐξετάσωμεν τὰ τρίγωνα ὡς πρὸς τὰς γωνίας των, διακρίνομεν τρία εἶδη τριγώνων:



Σχ. 85.

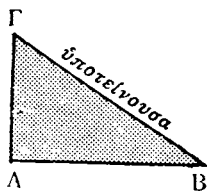
Τὰ ὀρθογώνια, τὰ ὀξυγώνια καὶ τὰ ἀμβλυγώνια τρίγωνα.

1ον. Ἐνα τρίγωνον λέγεται **ὀρθογώνιον τρίγωνον**, ὅταν ἡ μία γωνία του εἶναι ὀρθή.

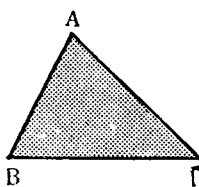
Εἰς ἓνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ἡ πλευρά, ἡ ὁποία κεῖται ἀπέναντι τῆς ὀρθῆς γωνίας, λέγεται **ὑποτείνουσα**, αἱ δύο ἄλλαι πλευραὶ του λέγονται **κάθειτοι πλευραὶ** τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου.

Π.χ. τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (Σχ. 86) εἶναι ὀρθογώνιον τρίγωνον.

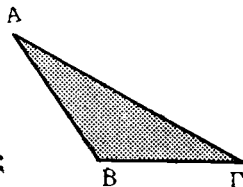
Ἡ πλευρά ΒΓ εἶναι ἡ ὑποτείνουσα αὐτοῦ.



Σχ. 86.



Σχ. 87.



Σχ. 88.

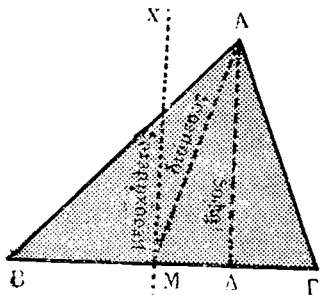
2ον. Ἐνα τρίγωνον λέγεται **ὀξυγώνιον τρίγωνον**, ἐὰν ὅλαι αἱ γωνίαι του εἶναι ὀξείαι.

Π.χ. τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (Σχ. 87) εἶναι ὀξυγώνιον.

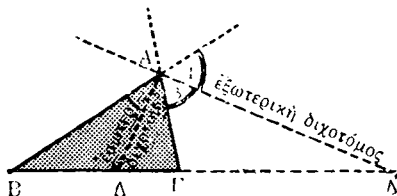
3ον. Ἐνα τρίγωνον λέγεται **ἀμβλυγώνιον τρίγωνον**, ἐὰν ἔχη μίαν γωνίαν ἀμβλεῖαν.

Π.χ. τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (Σχ. 88) εἶναι ἀμβλυγώνιον, διότι ἡ γωνία του Β εἶναι ἀμβλεῖα.

105. Ἀξιοσημεῖωτοι εὐθεῖαι ἐνὸς τριγώνου. 1ον. Μία ἀπὸ τὰς πλευρὰς ἐνὸς τριγώνου λαμβάνεται ὡς **βάσις** αὐτοῦ.



Σχ. 89.



Σχ. 90.

Π.χ. εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (Σχ. 89) βάσις του εἶναι εἴτε ἡ πλευρά ΒΓ, εἴτε ἡ ΑΒ, εἴτε ἡ ΑΓ.

2ον. Ἐστω, ὅτι ἡ βάσις τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ἡ ΒΓ (Σχ. 89).

Ἐκ τῆν κορυφῆν A φέρομεν τὴν κάθετον AD ἐπὶ τὴν $BΓ$. Ἡ AD λέγεται *ὑψος* τοῦ τριγώνου $ABΓ$.

Γενικῶς: "**Υψος** ἐνὸς τριγώνου λέγεται ἡ κάθετος, ἡ ὁποία ἀγεται ἀπὸ μίαν κορυφῆν ἐπὶ τὴν ἀπέναντι πλευρὰν του ἢ ἐπὶ τὴν προέκτασίν της (Σχ. 91).

(Ὡς ὑψος ἐνὸς τριγώνου πρέπει νὰ θεωροῦμεν τὸ εὐθύγραμμον τμήμα τῆς καθέτου αὐτῆς, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῆς κορυφῆς καὶ τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς).

3ον. Τὸ εὐθύγραμμον τμήμα, τὸ ὁποῖον συνδέει μίαν κορυφῆν ἐνὸς τριγώνου μὲ τὸ μέσον τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς του, λέγεται **διάμεσος**.

Π.χ. ἐάν M εἶναι τὸ μέσον τῆς $BΓ$, ἡ AM εἶναι διάμεσος τοῦ τριγώνου $ABΓ$ (Σχ. 90).

4ον. α') Ἡ διχοτόμος μιᾶς γωνίας ἐνὸς τριγώνου λέγεται **ἔσωτερικὴ διχοτόμος** ἢ ἀπλῶς **διχοτόμος τῆς γωνίας τριγώνου**.

Ἰδιαιτέρως ὀνομάζομεν ἔσωτερικὴν διχοτόμον, τὸ εὐθύγραμμον τμήμα τὸ περιλαμβανόμενον μεταξὺ τῆς κορυφῆς τῆς γωνίας καὶ τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς.

Π.χ. ἐάν $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (Σχ. 90), ἡ AD εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας A .

β') Ἡ διχοτόμος μιᾶς ἐξωτερικῆς γωνίας ἐνὸς τριγώνου λέγεται **ἐξωτερικὴ διχοτόμος τοῦ τριγώνου**.

Ἐάν $\widehat{A_3} = \widehat{A_4}$, ἡ AD' εἶναι ἐξωτερικὴ διχοτόμος.

Ἐπειδὴ εἰς κάθε κορυφῆν τριγώνου αἱ ἐξωτερικαὶ γωνίαι του εἶναι κατὰ κορυφῆν, ἡ διχοτόμος τῆς μιᾶς εἶναι ἡ προέκτασις τῆς διχοτόμου τῆς ἄλλης. Διὰ τοῦτο ἓνα τρίγωνον ἔχει τρεῖς ἐξωτερικὰς διχοτόμους.

Ἡ ἐσωτερικὴ διχοτόμος καὶ ἡ ἐξωτερικὴ διχοτόμος, αἱ σχετικαὶ πρὸς τὴν αὐτὴν κορυφῆν εἶναι κάθετοι μεταξὺ των (§ 71).

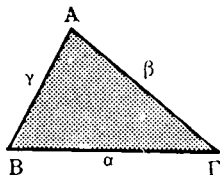
5ον. Ἐστω ἓνα τρίγωνον $ABΓ$ (Σχ. 89). Ἀπὸ τὸ μέσον M τῆς πλευρᾶς του $BΓ$ φέρομεν τὴν MX κάθετον ἐπὶ τὴν $BΓ$ ἢ MX λέγεται **μεσοκάθετος** τῆς πλευρᾶς $BΓ$ τοῦ τριγώνου $ABΓ$. Κάθε τρίγωνον ἔχει τρεῖς μεσοκαθέτους.

106. Γενικὴ ιδιότης τῶν τριγώνων. Κάθε πλευρὰ τριγώνου εἶναι μικρότερα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων καὶ μεγαλύτερα τῆς διαφορᾶς των.

Υπόθεσις. Ἐστω ἓνα τρίγωνον $ABΓ$ (Σχ. 92).

Συμπέρασμα. Θα δείξωμεν, ὅτι $B\Gamma < BA + A\Gamma$.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα εἶναι ὁ συντομώτερος δρόμος μεταξὺ δύο σημείων, θὰ εἶναι $B\Gamma < BA + A\Gamma$.



Σχ. 92.

Ἐπίπ. (Hypothesis)	α, β, γ πλευραὶ τριγώνου
Συμπ. (Conclusion)	1. $\alpha < \beta + \gamma, \beta < \gamma + \alpha, \gamma < \alpha + \beta$ 2. $\gamma > \alpha - \beta, \beta > \alpha - \gamma, \alpha > \beta - \gamma$

Ὅμοίως εὐρίσκομεν ὅτι $AB < B\Gamma + \Gamma A, A\Gamma < AB + B\Gamma$.

Γενικῶς, εἰάν ὀνομάσωμεν μὲ α, β, γ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$, θὰ ἔχωμεν $\alpha < \beta + \gamma, \beta < \gamma + \alpha, \gamma < \alpha + \beta$ (1).

Θὰ δείξωμεν τώρα, ὅτι κάθε πλευρά του, π.χ. ἡ AB , εἶναι μεγαλύτερα τῆς διαφορᾶς τῶν δύο ἄλλων, ἤτοι ὅτι

$$AB > B\Gamma - A\Gamma \quad \gamma > \alpha - \beta.$$

Πράγματι, εἰάν ἀφαιρέσωμεν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέλη τῆς πρώτης ἀνισότητος τῶν (1) τὴν πλευρὰν β , θὰ ἔχωμεν $\alpha - \beta < \gamma$ ἢ $\gamma > \alpha - \beta$.

Ὅμοίως, εἰάν ἀφαιρέσωμεν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέλη τῆς αὐτῆς ἀνισότητος τὴν πλευρὰν γ , θὰ ἔχωμεν $\alpha - \gamma < \beta$ ἢ $\beta > \alpha - \gamma$.

Ἐπίσης, εἰάν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέλη τῆς δευτέρας ἀνισότητος τῶν (1) ἀφαιρέσωμεν τὸ γ , θὰ ἔχωμεν $\beta - \gamma < \alpha$ ἢ $\alpha > \beta - \gamma$.

Παρατήρησις. Ἀπὸ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα συνάγομεν ὅτι, εἰάν λάβωμεν αὐθαίρετως τρία εὐθύγραμμα τμήματα, δὲν δυνάμεθα πάντοτε νὰ σχηματίσωμεν ἓνα τρίγωνον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχη πλευρὰς τὰ τρία αὐτὰ τμήματα. Διὰ νὰ σχηματισθῇ τρίγωνον, πρέπει τὸ μῆκος τοῦ μεγαλύτερου εὐθυγράμμου τμήματος νὰ εἶναι μικρότερον τοῦ ἄθροίσματος τῶν μικρῶν τῶν δύο ἄλλων.

Ἀσκήσεις

27. (44). Νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν διαγωνίων τετραπλεύρου εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἄθροίσματος τῶν δύο ἀπέναντι πλευρῶν του.

28. (45). Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς $B\Gamma$ ἑνὸς τριγώνου $AB\Gamma$ λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Δ φέρομεν τὸ εὐθύγρ. τμήμα $A\Delta$. Νὰ ἀποδειχθῇ: 1ον ὅτι τὸ $A\Delta$ εἶναι μικρότερον τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ τριγώνου καὶ 2ον ὅτι $A\Delta > \frac{AB + A\Gamma - B\Gamma}{2}$.

29. (46). Νὰ εὐρεθῇ ἡ τρίτη πλευρά ἑνὸς τριγώνου, τοῦ ὁποῖου αἱ δύο

ἄλλαι πλευραὶ εἶναι 4 μέτρ. καὶ 9 μέτρα, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ τρίτη πλευρὰ περιέχει ἓνα ἀκέραιον ἀριθμὸν μέτρων. Ὑπάρχουν πολλαὶ λύσεις;

30. (47). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ περίμετρος ἑνὸς κυρτοῦ τετραπλεύρου περιλαμβάνεται μεταξύ τοῦ ἀθροίσματος τῶν διαγωνίων καὶ τοῦ διπλασίου τοῦ ἀθροίσματος αὐτῶν.

31. (48). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ περίμετρος ἑνὸς τριγώνου $A'B'T'$, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς κορυφὰς του ἐπὶ τῶν πλευρῶν ἄλλου τριγώνου $ABΓ$, εἶναι μικροτέρα τῆς περιμέτρου τοῦ $ABΓ$.

32. (49). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἀθροισμα τῶν ἀποστάσεων σημείου κειμένου ἐντὸς τριγώνου ἀπὸ τῶν κορυφῶν του, εἶναι μικρότερον τῆς περιμέτρου καὶ μεγαλύτερον τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ τριγώνου.

4. Ἴσοσκελῆ τρίγωνα

107. Προσανατολισμὸς δύο ἐπιπέδων σχημάτων. Διὰ τὰ ἐξετάσωμεν, ἔὰν δύο σχήματα, τὰ ὁποῖα εἶναι ὀχρδιασμένα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, (πίνακος ἢ χάρτου) εἶναι ἴσα, ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς: Ἀντιγράφωμεν τὸ ἓνα σχῆμα ἐπὶ διαφανοῦς χάρτου καὶ ἐξετάζωμεν, ἔὰν τὸ ἀντίγραφον τοῦ ἑνὸς σχήματος ἐφαρμόξῃ ἐπὶ τοῦ ἄλλου σχήματος.

Ἡ τοποθέτησις τοῦ ἑνὸς σχήματος ἐπὶ τοῦ ἄλλου δύναται νὰ γίνῃ κατὰ δύο τρόπους:

1ον. Δι' ἀπλῆς ὀλισθήσεως· δηλ. ὀλισθαίνομεν τὸ ἓνα σχῆμα ἢ τὸ ἀντίγραφόν του ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου του καὶ τὸ φέρομεν ἐπὶ τοῦ ἄλλου σχήματος. Εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν τὰ σχήματα ἐφαρμόσουν δι' ὀλισθήσεως, λέγομεν ὅτι τὰ σχήματα αὐτὰ ἔχουν τὸν αὐτὸν προσανατολισμὸν καὶ ὅτι εἶναι εὐθέως ἴσα.

R R

Σχ. 93. Π.χ. τὰ σχήματα R καὶ R (Σχ. 93) ἔχουν τὸν αὐτὸν προσανατολισμὸν καὶ εἶναι εὐθέως ἴσα.

2ον. Δι' ἀναστροφῆς καὶ ὀλισθήσεως· δηλ. ἀναστρέφομεν πρῶτον τὸ σχῆμα ἢ τὸ ἀντίγραφόν του καὶ ἔπειτα τὸ φέρομεν ἐπὶ τοῦ ἄλλου δι' ὀλισθήσεως. Εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν τὰ σχήματα ἐφαρμόσουν δι' ἀναστροφῆς καὶ ὀλισθήσεως, λέγομεν, ὅτι τὰ σχήματα αὐτὰ δὲν ἔχουν τὸν αὐτὸν προσανατολισμὸν καὶ ὅτι εἶναι ἀντιστρόφως ἴσα.

P Q

Σχ. 94. Π.χ. τὰ σχήματα P καὶ Q (Σχ. 94) δὲν ἔχουν τὸν αὐτὸν προσανατολισμὸν καὶ ἐπειδὴ ἐφαρμόζουν τὸ ἓνα ἐπὶ τοῦ ἄλλου δι' ἀναστροφῆς καὶ ὀλισθήσεως λέγονται ἀντιστρόφως ἴσα.

Δ ∇

Εἰς μερικὰς περιπτώσεις δύο σχήματα δύναται νὰ ἐφαρμόσουν καὶ κατὰ τοὺς δύο ἀνωτέρω τρόπους.
Σχ. 95. Π.χ. τὰ σχήματα Δ καὶ ∇ (Σχ. 95) ἐφαρμόζουν δι' ὀλισθήσεως καὶ δι' ἀναστροφῆς καὶ ὀλισθήσεως.

108. Θεώρημα. *Εἰς κάθε ἰσοσκελὲς τρίγωνον, αἱ γωνίαι του, αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν του, εἶναι ἴσαι.*

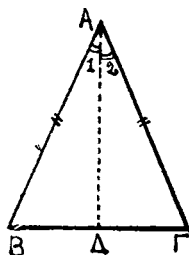
Ῥπόθεσις. Ἐστω τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ (Σχ. 96)· ἔξ ὑποθέσεως εἶναι $AB=AG$.

Συμπέρασμα. Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι $\widehat{B}=\widehat{\Gamma}$.

Ἀπόδειξις. Φέρομεν τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας Α, ἣ ὁποῖα τέμνει τὴν πλευρὰν ΒΓ εἰς τὸ σημεῖον Δ.

Ῥπόθ.	$AB=AG$
Συμπ.	$\widehat{\Gamma}=\widehat{B}$

Ἐπειδὴ ΑΔ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Α, θὰ εἶναι $\widehat{A}_1=\widehat{A}_2$. Στρέφομεν τὸ τρίγωνον ΑΔΓ περὶ τὴν ΑΔ μέχρις, ὅτου πέσει ἐπὶ τοῦ τριγώνου ΑΔΒ. Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι Α₁ καὶ Α₂ εἶναι ἴσαι, ἡ πλευρὰ ΑΓ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ καὶ ἐπειδὴ $AG=AB$, τὸ σημεῖον Γ θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Β· τότε ἡ ΔΓ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΔΒ, διότι μεταξὺ τῶν δύο σημείων Δ καὶ Β μία εὐθεῖα ἄγεται. Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΑΔΓ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ τριγώνου ΑΔΒ καὶ ἐπομένως θὰ συμπίσουν καὶ αἱ γωνίαι Γ καὶ Β. Ὡστε αἱ γωνίαι Β καὶ Γ εἶναι ἴσαι.



Σχ. 96.

Ἐδείχθη λοιπὸν ὅτι: **Εἰς κάθε ἰσοσκελὲς τρίγωνον...**

Σημ. Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα ἐκφράζεται καὶ ὡς ἑξῆς:

Αἱ παρὰ τὴν βᾶσιν γωνίαι ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι ἴσαι.

109. Θεώρημα (ἀντίστροφον). *Ἐὰν ἓνα τρίγωνον ἔχη δύο γωνίας ἴσας, θὰ ἔχη καὶ τὰς ἀπέναντι τῶν γωνιῶν αὐτῶν πλευρὰς ἴσας· δηλ. τὸ τρίγωνον θὰ εἶναι ἰσοσκελὲς.*

Ῥπόθεσις. Ἐστω τὸ τρίγωνον (Σχ. 97), τὸ ὁποῖον ἔχει ἔξ ὑποθέσεως $\widehat{B}=\widehat{\Gamma}$.

Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι θὰ εἶναι $AG=AB$.

Ῥπόθ.	$\widehat{B}=\widehat{\Gamma}$
Συμπ.	$AG=AB$

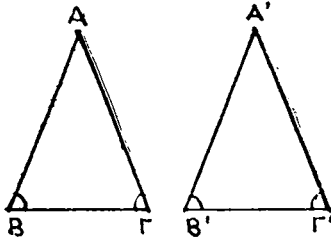
Ἀπόδειξις: Κάμνομεν, ἐπὶ διαφανοῦς χάρτου, ἓνα ἀντίγραφον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἔστω τὸ Α'Β'Γ'. Εἶναι φανερόν, ὅτι θὰ εἶναι

$$\widehat{A}=\widehat{A'}, \widehat{B}=\widehat{B'}, \widehat{\Gamma}=\widehat{\Gamma'}, AB=A'B', AG=A'G', B\Gamma=B'\Gamma'.$$

Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι Β καὶ Γ εἶναι ἴσαι ἔξ ὑποθέσεως καὶ ἐπειδὴ

$$\widehat{B}=\widehat{B'} \text{ καὶ } \widehat{\Gamma}=\widehat{\Gamma'}, \text{ θὰ εἶναι } \widehat{B}=\widehat{\Gamma}=\widehat{B'}=\widehat{\Gamma'}.$$

Ἄντιστρέφωμεν ἔπειτα τὸ τρίγωνον $A'B'Γ'$ καὶ τὸ θέτομεν ἐπὶ τοῦ τριγώνου $ABΓ$ οὕτως, ὥστε ἡ πλευρὰ $Γ'B'$ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης τῆς $BΓ$, δηλ. τὸ σημεῖον $Γ'$ νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ B καὶ τὸ B' ἐπὶ τοῦ $Γ$.



Σχ. 97.

Ἐπειδὴ, ἐξ ὑποθέσεως, αἱ γωνίαι $B, Γ, B', Γ'$ εἶναι ἴσαι, ἡ γωνία $Γ'$ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης τῆς B καὶ ἐπομένως ἡ $Γ'A'$ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς BA . Ὀμοίως ἡ γωνία B' θὰ ἐφαρμόσῃ, ἐπὶ τῆς ἴσης τῆς γωνίας $Γ$ καὶ ἐπομένως ἡ $B'A'$ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς $ΓA$. Ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι BA καὶ $ΓA$ τέμνονται εἰς τὸ A καὶ αἱ κείμεναι ἐπ' αὐ-

τῶν εὐθεῖαι $Γ'A'$ καὶ $B'A'$ θὰ τέμνονται εἰς τὸ A , διότι δύο εὐθεῖαι μόνον εἰς ἓνα σημεῖον τέμνονται. Τὰ τρίγωνα λοιπὸν $ABΓ$ καὶ $A'B'Γ'$ ἐφαρμόζουσι καὶ ἐπομένως ἡ $Γ'A'$, ἡ ὁποία δὲν εἶναι ἄλλη ἀπὸ τὴν $AΓ$, θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς AB , ἥτοι θὰ εἶναι $AΓ=AB$. Ἄρα τὸ τρίγωνον $ABΓ$ θὰ εἶναι ἰσοσκελές.

Ἐδείχθη λοιπὸν, ὅτι: *Ἐὰν ἓνα τρίγωνον ἔχη...*

110. Ἰκαναὶ καὶ ἀναγκαῖαι συνθήκαι. Γνωρίζομεν (§ 108, 109) ὅτι:

1ον. Ἐὰν ἓνα τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές, αἱ γωνίαι του, αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν του, εἶναι ἴσαι. (Θεώρημα εὐθύ).

2ον. Ἐὰν ἓνα τρίγωνον ἔχη δύο γωνίας ἴσας, θὰ ἔχη καὶ τὰς ἀπέναντι τῶν γωνιῶν αὐτῶν πλευρὰς ἴσας, δηλ. τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές. (Θεώρημα ἀντίστροφον).

Αἱ δύο ἀνωτέρω προτάσεις δύνανται νὰ διατυπωθοῦν καὶ ὡς ἐξῆς:

Διὰ νὰ εἶναι ἓνα τρίγωνον ἰσοσκελές, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ ἔχη δύο γωνίας ἴσας.

Ἡ μορφή τῆς ἐκφράσεως αὐτῆς μᾶς ἐπιτρέπει ν' ἀντικαταστήσωμεν, ὑπὸ μορφήν πλέον συμπεπυκνωμένην, τὴν ἐκφρασιν ἐνὸς θεωρήματος καὶ ἐκείνην τοῦ ἀντιστρόφου του. Ἡ ἐκφρασις «*πρέπει*» ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ εὐθὺ θεώρημα (*ἀναγκαῖα συνθήκη*) καὶ ἡ ἐκφρασις «*ἀρκεῖ*» ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ ἀντίστροφον θεώρημα (*ἰκανὴ συνθήκη*).

111. Χαρακτηριστικὴ ιδιότης ἐνὸς σχήματος. Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι ἓνα τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές, πρέπει ν' ἀποδείξωμεν:

1ον. Εἴτε, ὅτι τὸ τρίγωνον αὐτὸ ἔχει δύο πλευρὰς ἴσας.

2ον. Εἴτε, ὅτι τὸ τρίγωνον αὐτὸ ἔχει δύο γωνίας ἴσας.

Ἡ ἰσότης δύο γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου, εἴτε ἡ ἰσότης δύο πλευρῶν αὐτοῦ, μᾶς ἐπιτρέπει νὰ συμπεράνωμεν, ὅτι τὸ τρίγωνον αὐτὸ εἶναι ἰσοσκελές. Διὰ τοῦτο λέγομεν :

Ἡ ἰσότης δύο γωνιῶν εἶναι μία **χαρακτηριστικὴ ιδιότης** τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου.

Γενικῶς : Ὅνομάζομεν **χαρακτηριστικὴν ιδιότητα ἑνὸς σχήματος**, κάθε ιδιότητα, ἡ ὁποία ἀνταποκρίνεται πρὸς τὸν ὁρισμὸν τοῦ σχήματος αὐτοῦ.

112. Θεώρημα. Κάθε ἰσοπλευρον τρίγωνον εἶναι καὶ ἰσογώνιον.

Ἐστω ἓνα ἰσοπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ.

Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι

$$AB = BG = ΓΑ.$$

Ἐξ ὑποθέσεως.	$AB = BG = ΓΑ$
Συμπ.	$\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{\Gamma}$

Συμπέρασμα. Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{\Gamma}$.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ εἶναι $AB = BG$, θὰ εἶναι

(§ 108) καὶ $\widehat{\Gamma} = \widehat{A}$ (1).

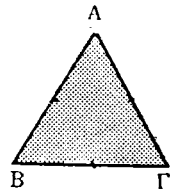
Ἐπίσης ἐπειδὴ εἶναι $BG = ΓΑ$, θὰ εἶναι

$$\widehat{A} = \widehat{B} \quad (2).$$

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι

$$\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{\Gamma}.$$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι : **Κάθε ἰσοπλευρον τρίγωνον. . . .**



Σχ. 98.

113. Θεώρημα. (Ἀντίστροφον). Κάθε ἰσογώνιον τρίγωνον εἶναι καὶ ἰσοπλευρον.

Ἐξ ὑποθέσεως ἔστω ἓνα τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι, ἔξ ὑποθέσεως $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{\Gamma}$.

Συμπέρασμα. Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι $AB = BG = ΓΑ$.

Ἀπόδειξις. Ἐπειδὴ εἶναι $\widehat{A} = \widehat{B}$, θὰ εἶναι (§ 109) καὶ $BG = ΓΑ$ (1)

Ἐπίσης ἐπειδὴ εἶναι $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$, θὰ εἶναι καὶ $ΓΑ = AB$ (2)

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι $AB = BG = ΓΑ$.

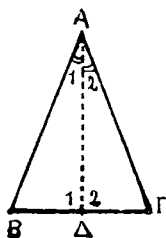
Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι : **Κάθε ἰσογώνιον τρίγωνον. . . .**

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι :

Ἡ ἰσότης τῶν τριῶν γωνιῶν εἶναι μία **χαρακτηριστικὴ ιδιότης** τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου.

114. Θεώρημα. *Είς κάθε ισοσκελές τρίγωνον, ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς του, εἶναι συγχρόνως διάμεσος, ὕψος καὶ μεσοκάθετος τοῦ τριγώνου.*

Ἐπίπεδοι. Ἐστω ἓνα ισοσκελές τρίγωνον ΑΒΓ (Σχ. 99), εἰς τὸ



Σχ. 99.

ὁποῖον εἶναι ἕξ ὑποθέσεως $AB=AG$. Ἐστω ΑΔ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Α, δηλ. ἔστω $\widehat{A}_1=\widehat{A}_2$.

Ἐπίπεδοι.	$AB=AG$ $A_1=A_2$
Συμπ.	$BD=DG$ $AD \perp BG$

Συμπέρασμα. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ ΑΔ εἶναι διάμεσος τοῦ τριγώνου, δηλ. ὅτι $AB=AG$, καὶ ὅτι ἡ ΑΔ εἶναι καὶ ὕψος τοῦ τριγώνου, δηλ. ὅτι ἡ ΑΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν στρέψωμεν τὸ τρίγωνον ΑΔΓ περὶ τὴν ΑΔ μέχρις, ὅτου πέση ἐπὶ τοῦ τριγώνου ΑΔΒ, τὰ δύο τρίγωνα θὰ ἐφαρμόσουν, ὅπως ἐδείχθη εἰς τὴν § 108 ἄρα θὰ εἶναι

$$\Delta\Gamma = \Delta B \quad \text{καὶ} \quad \widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Delta}_2.$$

Ἐπειδὴ $\Delta\Gamma = \Delta B$, ἡ ΑΔ εἶναι **διάμεσος** τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Ἐπειδὴ ἡ ΑΔ σχηματίζει μὲ τὴν ΒΓ τὰς ἴσας γωνίας Δ_1 καὶ Δ_2 , θὰ εἶναι **κάθετος** ἐπὶ τὴν ΒΓ καὶ ἐπομένως ἡ ΑΔ εἶναι **ὕψος** τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Ἡ ΑΔ ὡς κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς ΒΓ εἶναι **μεσοκάθετος** τῆς ΒΓ.

Ἡ ΑΔ εἶναι ἕξ ὑποθέσεως καὶ **διχοτόμος** τῆς γωνίας Α.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Εἰς κάθε ισοσκελές τρίγωνον. . . .**

115. Παρατήρησις. Ἀπὸ τὸ προηγούμενον θεώρημα συνάγομεν, ὅτι αἱ τρεῖς εὐθεῖαι, διχοτόμος, ὕψος καὶ διάμεσος, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὴν κορυφὴν ἑνὸς ισοσκελοῦς τριγώνου, συμπίπτουν. Κατόπιν τούτου, τὸ προηγούμενον θεώρημα δύναται νὰ χωρισθῇ εἰς τὰ τρία κατωτέρω θεωρήματα:

1ον. *Εἰς ἓνα ισοσκελές τρίγωνον ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς του εἶναι συγχρόνως καὶ ὕψος τοῦ τριγώνου.*

2ον. *Εἰς ἓνα ισοσκελές τρίγωνον τὸ ὕψος, τὸ ἀγόμενον ἐκ τῆς κορυφῆς του εἶναι συγχρόνως καὶ διάμεσος τοῦ τριγώνου.*

3ον. *Εἰς ἓνα ισοσκελές τρίγωνον ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς του εἶναι συγχρόνως καὶ διάμεσος τοῦ τριγώνου.*

Καὶ τὰ ἀντίστροφα τῶν τριῶν ἀνωτέρω θεωρημάτων εἶναι ἀληθῆ καὶ ἀποδεικνύονται εὐκόλως (μετὰ τὴν § 123):

Ἐνα τρίγωνον εἶναι ισοσκελές:

1ον. ἐὰν ἡ διχοτόμος μιᾶς γωνίας του εἶναι συγχρόνως καὶ ὕψος αὐτοῦ.

2ον. ἐὰν ἓνα ὕψος του εἶναι συγχρόνως καὶ διάμεσός του.

3ον. ἐὰν ἡ διχοτόμος μιᾶς γωνίας του εἶναι συγχρόνως καὶ διάμεσός του.

5. Περιπτώσεις ισότητος τριγώνων

116. Ἰσότης δύο τριγώνων. Δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα, διὰν τιθέμενα καταλλήλως τὸ ἓνα ἐπὶ τοῦ ἄλλου ἐφαρμόζουν.

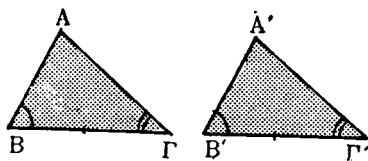
Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν αἱ τρεῖς πλευραὶ τοῦ ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς τρεῖς πλευρὰς τοῦ ἄλλου. Ἐπίσης αἱ τρεῖς γωνίαι τοῦ ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς γωνίας τοῦ ἄλλου.

Ὅταν δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα, αἱ ἴσαι πλευραὶ των κείνται ἀπέναντι ἴσων γωνιῶν καὶ ἀντιστρόφως.

Κατωτέρω θὰ ἐξετάσωμεν μερικὰς εἰδικὰς περιπτώσεις ισότητος τριγώνων.

117. Περίπτωσης I. Θεώρημα. Δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα, διὰν ἔχουν μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς προσκειμένας εἰς αὐτὴν γωνίας ἴσας, μίαν πρὸς μίαν.

Ὶποθέσις. Ἐστωσαν τὰ τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $A'B'\Gamma'$ (Σχ. 100),



Σχ. 100.

Ὶπόθ.	$B\Gamma = B'\Gamma'$ $\widehat{B} = \widehat{B'}$ $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'}$
Συμπ.	$\text{τρ. } AB\Gamma = \text{τρ. } A'B'\Gamma'$

τὰ ὁποῖα ἔχουν ἐξ ὑποθέσεως $B\Gamma = B'\Gamma'$, $B = B'$, $\Gamma = \Gamma'$.

Συμπέρασμα. Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ἴσα.

Ἀπόδειξις. Λαμβάνομεν (νοερῶς) τὸ τρίγωνον $A'B'\Gamma'$ καὶ τὸ θέτομεν, δι' ὀλισθήσεως, ἐπὶ τοῦ $AB\Gamma$ οὕτως, ὥστε ἡ πλευρὰ $B'\Gamma'$ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης τῆς $B\Gamma$, δηλ. τὸ B' νὰ πέσῃ εἰς τὸ B καὶ τὸ Γ' εἰς τὸ Γ . Τότε ἡ πλευρὰ $B'A'$ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς BA , διότι αἱ γωνίαι B καὶ B' εἶναι ἴσαι ἐξ ὑποθέσεως, τὸ δὲ σημεῖον A' θὰ εὐρίσκειται εἰς ἓνα σημεῖον τῆς BA ἢ τῆς προεκτάσεώς της. Ἐπίσης ἡ πλευρὰ $\Gamma'A'$ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΓA , διότι αἱ γωνίαι Γ καὶ Γ' εἶναι

ἴσαι ἐξ ὑποθέσεως, τὸ δὲ σημεῖον A' θὰ εὑρίσκεται εἰς ἓνα σημεῖον τῆς GA ἢ τῆς προεκτάσεώς της. Ἀλλὰ τὸ σημεῖον A' , τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς BA καὶ ἐπὶ τῆς GA , θὰ συμπίπτῃ μὲ τὸ σημεῖον A , διότι δύο εὐθείαι τέμνονται μόνον εἰς ἓνα σημεῖον. Τὸ τρίγωνον λοιπὸν $A'B'G'$ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ ABG καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι ἴσον μὲ αὐτό.

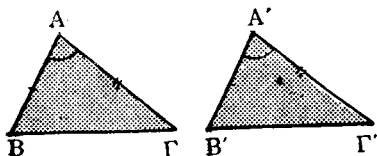
Ἐδείχθη λοιπὸν, ὅτι: **Δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα. . . .**

118. Πόρισμα. Ἐὰν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχουν μίαν κάθετον πλευρὰν ἴσην καὶ τὴν προσκειμένην ὀξείαν γωνίαν ἴσην, εἶναι ἴσα.

Τὰ ὀρθογώνια αὐτὰ τρίγωνα ἔχουν μίαν πλευρὰν ἴσην, ἐξ ὑποθέσεως, καὶ τὰς προσκειμένας εἰς αὐτὴν γωνίας ἴσας, τὴν μὲν ὀξείαν γωνίαν, ἐξ ὑποθέσεως, τὴν δὲ ἄλλην προσκειμένην, ὡς ὀρθήν ἄρα θὰ εἶναι ἴσα.

119. Περίπτωσης II. Θεώρημα. Δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα, ὅταν ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην.

Ἐπιπέσεις. Ἐστῶσαν τὰ τρίγωνα ABG καὶ $A'B'G'$ (Σχ. 101), τὰ ὁποῖα ἔχουν $AB=A'B'$, $AG=A'G'$ καὶ $A=A'$.



Ἐπιπέσεις.	$AB=A'B'$ $AG=A'G'$ $\widehat{A}=\widehat{A}'$
Συμπ.	$\text{τρ.}ABG=\text{τρ.}A'B'G'$

Σχ. 101.

Συμπέρασμα. Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ἴσα.

Ἀπόδειξις. Λαμβάνομεν τὸ τρίγωνον $A'B'G'$ καὶ τὸ θέτομεν ἐπὶ τοῦ τριγώνου ABG οὕτως, ὥστε ἡ γωνία A' νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης τῆς γωνίας A . Τότε ἡ πλευρὰ $A'B'$ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης τῆς AB , δηλ. τὸ σημεῖον B' θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ B . Ἐπίσης ἡ πλευρὰ $A'G'$ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης τῆς πλευρᾶς AG , δηλ. τὸ σημεῖον G' θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ G . Ἀλλὰ τότε καὶ ἡ πλευρὰ $B'G'$ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς BG , διότι δύο σημεία ὀρίζουν τὴν θέσιν μιᾶς καὶ μόνον εὐθείας.

Τὸ τρίγωνον λοιπὸν $A'B'G'$ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ τριγώνου ABG καὶ ἐπομένως εἶναι ἴσον μὲ αὐτό.

Ἐδείχθη λοιπὸν, ὅτι: **Δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα. . . .**

120. Πέρισμα. Ἐὰν δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ἔχουν τὰς καθέτους πλευράς των ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, εἶναι ἴσα.

Τὰ ὀρθογώνια αὐτὰ τρίγωνα, ἔχουν δύο πλευράς ἴσας, ἕξ ὑποθέσεως καὶ τὰς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένης γωνίας ἴσας, ὡς ὀρθάς· ἄρα θὰ εἶναι ἴσα.

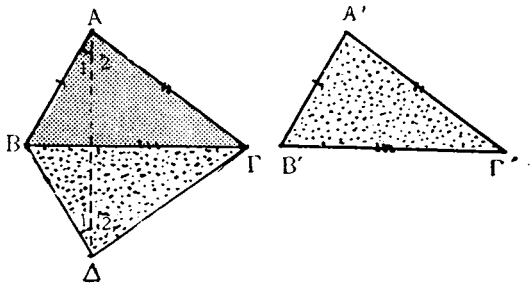
121. Περίπτωσης III. Θεώρημα. Δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα, διὰν ἔχουν καὶ τὰς τρεῖς πλευράς των ἴσας, μίαν πρὸς μίαν.

Ἐπιπέδου. Ἐστώσαν τὰ τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $A'B'\Gamma'$ (Σχ. 102), τὰ ὁποῖα ἔχουν ἕξ ὑποθέσεως $AB=A'B'$, $B\Gamma=B'\Gamma'$, $\Gamma A=\Gamma'A'$.

Συμπέρασμα. Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ἴσα.

Ἀπόδειξις. Λαμβάνομεν τὸ τρίγωνον $A'B'\Gamma'$ καὶ τὸ θέτομεν ἐπὶ τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ οὕτως, ὥστε ἡ πλευρὰ $B'\Gamma'$ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης τῆς $B\Gamma$, δηλ. τὸ σημεῖον B' νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ B καὶ τὸ Γ' ἐπὶ τοῦ Γ .

Στρέφομεν ἔπειτα τὸ τρίγωνον $A'B'\Gamma'$ περὶ τὴν $B\Gamma$ μέχρις, ὅτου πέσῃ πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ σχετικῶς μὲ τὴν $B\Gamma$, καὶ ἔστω, ὅτι τὸ τρίγωνον $A'B'\Gamma'$ θὰ λάβῃ τὴν θέσιν $B\Delta\Gamma$. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν $A\Delta$. Τὸ



Σχ. 102.

σχηματισθὲν τρίγωνον $AB\Delta$ εἶναι ἰσοσκελές, διότι αἱ AB καὶ $B\Delta$ εἶναι ἴσαι, ὡς ἴσαι μὲ τὴν $A'B'$. Ἄρα αἱ παρὰ τὴν βάσιν τοῦ γωνία A_1 καὶ Δ_1 εἶναι ἴσαι, ἥτοι εἶναι $\widehat{A}_1 = \widehat{\Delta}_1$ (1)

Ἐπίσης καὶ τὸ τρίγωνον $\Gamma A\Delta$ εἶναι ἰσοσκελές, διότι αἱ ΓA καὶ $\Gamma\Delta$ εἶναι ἴσαι, ὡς ἴσαι πρὸς τὴν $A'\Gamma'$. Ἄρα αἱ παρὰ τὴν βάσιν τοῦ γωνία A_2 καὶ Δ_2 εἶναι ἴσαι, ἥτοι εἶναι $\widehat{A}_2 = \widehat{\Delta}_2$ (2).

Προσθέτομεν τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = \widehat{\Delta}_1 + \widehat{\Delta}_2 \quad \eta \quad \widehat{BAG} = \widehat{B\Delta\Gamma}.$$

Ἄλλὰ $\widehat{B\Delta\Gamma} = \widehat{A'}$. Τὰ τρίγωνα λοιπὸν $AB\Gamma$ καὶ $A'B'\Gamma'$ ἔχουν: δύο πλευράς ἴσας, $AB=A'B'$, $A\Gamma=A'\Gamma'$ καὶ τὰς ὑπ' αὐτῶν περιε-

χομένης γωνίας Α και Α' ἴσας· ἄρα εἶναι ἴσα (§ 119).

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα. . .**

122. Παρατήρησις I. Τὰ τρία προηγούμενα θεωρήματα μᾶς δεικνύουν, ὅτι ἡ ἰσότης τῶν τριῶν στοιχείων ἑνὸς τριγώνου, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἓνα τοῦλάχιστον πρέπει νὰ εἶναι μία πλευρά, εἶναι ἀρκετὴ διὰ νὰ συμπεράνωμεν τὴν ἰσότητα τῶν τριγώνων.

Ὅταν δύο τρίγωνα ἔχουν καὶ τὰς τρεῖς γωνίας τῶν ἴσας μίαν πρὸς μίαν, τὰ τρίγωνα αὐτὰ δὲν εἶναι ἀναγκαστικῶς ἴσα μεταξὺ τῶν. Πρέπει ἀπαραιτήτως νὰ ἔχουν καὶ μίαν πλευρὰν ἴσην, διὰ νὰ εἶναι ἴσα.

II. Ὅταν δύο τρίγωνα εἶναι ἴσα, πρέπει νὰ ἀπαγγέλλωμεν τὰ γράμματα τῶν ἀντιστοίχων κορυφῶν τῶν κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν. Αἱ κορυφαὶ τῶν αὐταῖ λέγονται **δμόλογοι**.

Ἐὰν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ εἶναι ἴσα, δυνάμεθα νὰ γράψωμεν, χωρὶς σχῆμα, τὰς ἑξῆς σχέσεις:

$$\begin{array}{ccc} \widehat{A}=\widehat{\Delta} & \widehat{B}=\widehat{E} & \widehat{\Gamma}=\widehat{Z} \\ A\Gamma=EZ & \Gamma B=Z\Delta & AB=\Delta E. \end{array}$$

5. Ἐφαρμογαὶ τῶν περιπτώσεων τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων καὶ τῶν ιδιοτήτων τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου

123. Αἱ περιπτώσεις τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων καὶ αἱ ιδιότητες τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου χρησιμεύουν πολλάκις εἰς τὸ νὰ ἀποδεικνύωμεν τὴν ἰσότητα δύο εὐθύγραμμων τμημάτων ἢ δύο γωνιῶν.

Πρὸς τοῦτο, διὰ νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι δύο εὐθύγραμμα τμήματα εἶναι ἴσα ἢ ὅτι δύο γωνίαι εἶναι ἴσαι, ἀρκεῖ νὰ σχηματίσωμεν δύο τρίγωνα, εἰς τὰ ὁποῖα νὰ ἀνήκουν τὰ εὐθύγραμμα αὐτὰ τμήματα ἢ αἱ γωνίαι καὶ νὰ ἀποδείξωμεν ἔπειτα, ὅτι τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ἴσα.

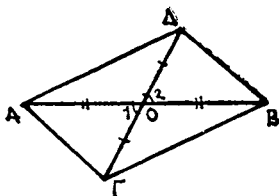
Κατωτέρω θὰ δώσωμεν δύο παραδείγματα, τὰ ὁποῖα θὰ μᾶς δείξουν καλύτερον τὸν τρόπον τῆς ἐφαρμογῆς τῶν περιπτώσεων τῆς ἰσότητος τῶν τριγώνων.

124. Παράδειγμα I. Δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ (Σχ. 103), τέμνονται εἰς ἓνα σημεῖον Ο οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι ΑΟ=ΟΒ καὶ ΓΟ=ΟΔ. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΔ, ΔΒ, ΒΓ, ΓΑ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΑΓ=ΒΔ καὶ ΑΔ=ΒΓ.

1ον. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ΑΓ=ΒΔ. Ἀρκεῖ πρὸς τοῦτο νὰ ἀποδεί-

ξῶμεν ὅτι τὰ τρίγωνα $ΑΟΓ$ καὶ $ΔΟΒ$ εἶναι ἴσα.

Ἀπόδειξις. Τὰ τρίγωνα $ΑΟΓ$ καὶ $ΔΟΒ$ ἔχουν: $ΑΟ = ΟΒ$, $ΟΓ = ΟΔ$, ἐξ ὑποθέσεως καὶ $\widehat{Ο}_1 = \widehat{Ο}_2$, ὡς κατὰ κορυφήν· ἤτοι ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὰς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένας γωνίας ἴσας, ἄρα εἶναι



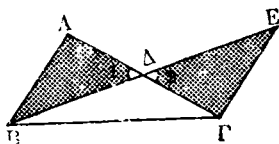
Σχ. 103.

Ἐπόθ.	$ΑΟ = ΟΒ$ $ΟΓ = ΟΔ$
Συμπ.	$ΑΓ = ΒΔ$ $ΔΑ = ΓΒ$

ἴσα καὶ ἐπομένως θὰ ἔχουν καὶ τὰ ἄλλα στοιχεῖα τῶν ἴσων· ἤτοι θὰ εἶναι $ΑΓ = ΒΔ$.

2ον. Ὅμοιος ἀπὸ τὴν ἰσότητα τῶν τριγῶνων $ΓΟΒ$ καὶ $ΑΟΔ$ ἀποδεικνύομεν, ὅτι $ΓΒ = ΑΔ$.

125. Παράδειγμα II. *Εἰς ἓνα τρίγωνον $ΑΒΓ$ (Σχ. 104) φέρομεν τὴν διάμεσον $ΒΔ$ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεώς της λαμβάνομεν ἓνα τμήμα $ΔΕ = ΒΔ$. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $ΑΓΕ = \widehat{Α}$.*



Σχ. 104.

Ἐπόθ.	$ΑΔ = ΔΓ$ $ΒΔ = ΔΕ$
Συμπ.	$\widehat{ΑΓΕ} = \widehat{Α}$

Ἀπόδειξις. Ἡ γωνία $Α$ εἶναι μία γωνία τοῦ τριγῶνου $ΑΒΔ$ καὶ ἡ γωνία $ΑΓΕ$ εἶναι μία γωνία τοῦ τριγῶνου $ΔΓΕ$. Ἐὰν ἀποδείξωμεν, ὅτι τὰ τρίγωνα $ΑΒΔ$ καὶ $ΔΓΕ$ εἶναι ἴσα, τότε θὰ εἶναι καὶ αἱ γωνίαι αὐταὶ ἴσαι.

Τὰ τρίγωνα $ΑΒΔ$ καὶ $ΔΓΕ$ ἔχουν: $ΑΔ = ΔΓ$, διότι ἡ $ΒΔ$ εἶναι διάμεσος, $ΒΔ = ΔΕ$ ἐξ ὑποθέσεως, $\widehat{Δ}_1 = \widehat{Δ}_2$ ὡς κατὰ κορυφήν. Ἄρα, κατὰ τὴν 2αν περίπτωσιν τῆς ἰσότητος τῶν τριγῶνων, τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ἴσα καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι $\widehat{Α} = \widehat{ΑΓΕ}$, ὡς γωνίαι κείμεναι ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν $ΒΔ$ καὶ $ΔΕ$.

Άσκήσεις

Α' Όμάς. 33. (53). Νά αποδειχθῆ, ὅτι ἓνα τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές :

1ον. Ἐάν ἡ διχοτόμος μιᾶς γωνίας του εἶναι συγχρόνως καὶ ὕψος αὐτοῦ.

2ον. Ἐάν ἓνα ὕψος του εἶναι συγχρόνως καὶ διάμεσός του. (Ἀντίστροφα τῶν θεωρημάτων τῆς § 115).

34. (54). Αἱ κάθετοι, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὰ μέσα τῶν ἴσων πλευρῶν ἰσοσκελοῦς τριγώνου μέχρι τῶν ἀπέναντι πλευρῶν, εἶναι ἴσαι.

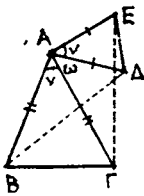
35. (55). Αἱ διχοτόμοι τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι ἴσαι.

36. (56). Κάθε σημεῖον τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου, ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς βάσεώς του.

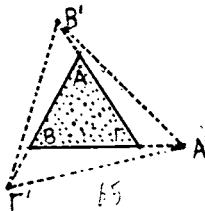
37. (57). Ἐπὶ τῶν πλευρῶν AB, BG, GA ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου λαμβάνομεν μῆκη $AA' = BB' = GG'$. Νά αποδειχθῆ, ὅτι τὸ τρίγωνον $A'B'G'$ εἶναι ἰσόπλευρον.

38. (58). Τὸ τρίγωνον, τοῦ ὁποῖου αἱ κορυφαὶ εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ἰσοσκελοῦς τριγώνου, εἶναι ἰσοσκελές.

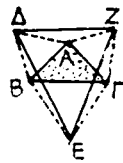
39. (59). Δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα ABG, ADE ἔχουν τὴν κορυφὴν των A κοινὴν καὶ τὰς γωνίας τῆς κορυφῆς ἴσας. Ἐάν φέρωμεν τὰς εὐθείας BD καὶ GE , νά αποδειχθῆ, ὅτι $BD = GE$.



Ἔσκη. 39.



Ἔσκη. 45.



Ἔσκη. 46.

40. (60). Δίδεται τὸ ἰσοσκελές τρίγωνον ABG' προεκτείνομεν τὴν βάσιν του BG καὶ ἑκατέρωθεν αὐτῆς λαμβάνομεν τμήματα, BB' καὶ GG' ἴσα. Νά αποδειχθῆ: 1ον ὅτι αἱ γωνίαι ABB' καὶ AGG' εἶναι ἴσαι. 2ον ὅτι τὸ τρίγωνον $AB'G'$ εἶναι ἰσοσκελές.

41. (61). Ἐάν αἱ ἴσαι πλευραὶ ἰσοσκελοῦς τριγώνου προεκταθοῦν κατὰ μῆκη ἴσα, τὰ ἄκρα των θὰ ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς βάσεώς του.

42. (62). Ἐάν αἱ πλευραὶ καὶ αἱ γωνίαι ἑνὸς πενταγώνου εἶναι ἴσαι, αἱ διαγώνιοί του, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὴν αὐτὴν κορυφὴν τοῦ πενταγώνου, εἶναι ἴσαι.

Β' Όμάς. 43. (63). Αἱ διάμεσοι ἰσοσκελοῦς τριγώνου, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς ἴσας πλευράς του, εἶναι ἴσαι.

44. (64). Νά αποδειχθῆ, ὅτι ἓνα τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές, ἐάν ἡ διχοτόμος μιᾶς γωνίας του εἶναι συγχρόνως καὶ διάμεσός του (ἀντίστροφον τοῦ 3ου θεωρήματος τῆς § 115).

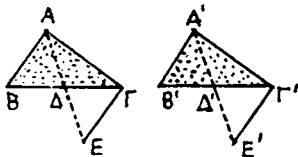
45. (65). Δίδεται τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ABG' προεκτείνομεν τὴν πλευρὰν BG κατὰ GA' , τὴν GA κατὰ AB' καὶ τὴν AB κατὰ BG' . Νά αποδειχθῆ,

ὅτι, ἐὰν αἱ προεκτάσεις $\Gamma A'$, AB' , $B\Gamma'$ εἶναι ἴσαι, τὸ τρίγωνον $A'B'\Gamma'$ εἶναι ἰσοπέφυρον.

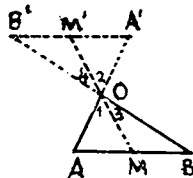
46. (66). Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου κατασκευάζομεν ἰσόπλευρα τρίγωνα, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἔκτος τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ ἑξωτερικαὶ κορυφαὶ τῶν σχηματίζουσι ἰσοσκελεῖς τρίγωνον.

47. (67). Δύο τετράπλευρα εἶναι ἴσα, ἐὰν ἔχουσι τὰς τέσσαρας πλευράς ἰσας μίαν πρὸς μίαν καὶ μίαν γωνίαν, περιεχομένην μεταξύ ἴσων πλευρῶν, ἴσην.

48. (68). Δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $A'B'\Gamma'$ ἔχουσι τὰς πλευράς $AB=A'B'$, $A\Gamma=A'\Gamma'$ καὶ τὰς διαμέσους $A\Delta$ καὶ $A'\Delta'$ ἴσας. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ἴσα.



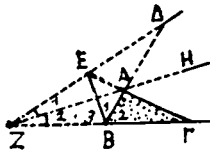
Σχ. ἀσκ. 48.



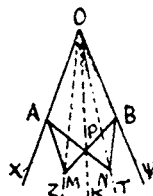
Σχ. ἀσκ. 49

Γ' Ὀμάς. 49. (69). Δίδονται τὰ σημεῖα A, B, O , τὰ ὁποῖα δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας. Προεκτείνουσι τὴν AO κατὰ ἓνα μῆκος $OA'=AO$ καὶ τὴν BO κατὰ ἓνα μῆκος $OB'=BO$. 1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $A'B'=AB$. 2ον. Φέρομεν τὴν διάμεσον OM τοῦ τριγώνου OAB , ἣ ὁποῖα προεκτείνουμένη τέμνει τὴν $A'B'$ εἰς τὸ M' . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ M' εἶναι μέσον τῆς $A'B'$.

50. Προεκτείνουσι τὴν πλευρὰν BA ἑνὸς τριγώνου $AB\Gamma$ κατὰ ἓνα μῆκος $A\Delta=AB$ καὶ τὴν πλευρὰν ΓA κατὰ ἓνα μῆκος $A\epsilon=AB$. Φέρομεν τὴν $E\Delta$, ἣ ὁποῖα τέμνει τὴν $B\Gamma$ εἰς τὸ Z . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον BEZ εἶναι ἰσοσκελεῖς καὶ ὅτι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Z διέρχεται διὰ τοῦ σημείου A .



Σχ. ἀσκ. 50.



Σχ. ἀσκ. 54.

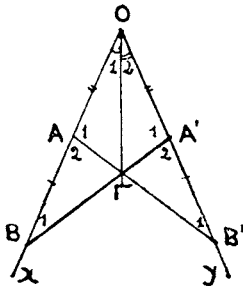
51. (71). Δίδεται ἡ γωνία $XO\Psi$. Φέρομεν τὴν κάθετον OZ ἐπὶ τὴν OX καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς $O\Psi$, ἔπειτα τὴν κάθετον OT ἐπὶ τὴν $O\Psi$ καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς OX . Λαμβάνομεν ἐπὶ τῶν OX καὶ OZ δύο μῆκη ἴσα $OM=ON$ καὶ ἐπὶ τῶν $O\Psi$ καὶ OT δύο ἄλλα μῆκη ἴσα $OP=OS$. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ γωνίαι OPN καὶ $O\epsilon M$ εἶναι ἴσαι.

52. (72). Δίδονται δύο ἴσαι γωνίαι $BA\Gamma$ καὶ ΔAE , αἱ ὁποῖαι ἔχουσι κοινὴν κορυφὴν A καὶ ἓνα κοινὸν μέρος τὴν γωνίαν $\Delta A\Gamma$. Ἐπὶ τῶν $A\Delta$ καὶ $A\Gamma$ λαμβάνομεν μῆκη ἴσα $AM=AN$ ἐπὶ τῶν AB καὶ AE λαμβάνομεν δύο ἄλλα μῆκη

ἴσα $AP=AS$. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι $MP=NS$ καὶ ὅτι ἡ PS εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας $\Delta A \Gamma$.

53. (73). Δίδεται ἡ γωνία $XO\Psi$ καὶ ἓνα σημεῖον M τῆς διχοτόμου τῆς OZ . Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς OX λαμβάνομεν δύο τμήματα OA καὶ OB καὶ ἐπὶ τῆς $O\Psi$ δύο τμήματα OA' καὶ OB' , ἀντιστοίχως ἴσα μὲ τὰ OA καὶ OB . Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὰ τρίγωνα MAB καὶ $M\Gamma A$ εἶναι ἴσα.

54. (74). Ἐπὶ τῶν πλευρῶν OX καὶ $O\Psi$ μιᾶς γωνίας $XO\Psi$ λαμβάνομεν δύο μήκη ἴσα $OA=OB$. Εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας $XO\Psi$ φέρομεν τὴν ἡμιευθεῖαν OZ οὕτως, ὥστε ἡ γωνία XOZ νὰ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἡμίσεως τῆς γωνίας $XO\Psi$. Ὁμοίως φέρομεν τὴν OT εἰς τὸ ἐσω-



Σχ. ἀσκ. 55.

τερικὸν τῆς γωνίας $XO\Psi$ οὕτως, ὥστε $\widehat{\Psi O T} = \widehat{X O Z}$. Ἐπὶ τῶν OZ καὶ OT λαμβάνομεν δύο μήκη ἴσα $OM=ON$. Φέρομεν τὰς AN καὶ BM , αἱ ὁποῖα τέμνονται εἰς τὸ P . Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι: 1ον. Τὰ τρίγωνα PAM καὶ PBN εἶναι ἴσα. 2ον. Τὸ P κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας $XO\Psi$.

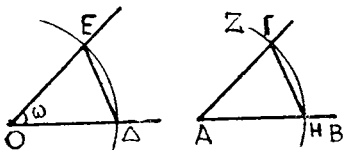
55. (75). Δίδεται μία γωνία xOy . Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Ox λαμβάνομεν τὰ τμήματα OA καὶ OB , ἐπὶ δὲ τῆς Oy τὰ τμήματα $OA'=OA$ καὶ $OB'=OB$. Φέρομεν ἔπειτα τὰς εὐθείας BA καὶ $B'A$, αἱ ὁποῖα τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Γ . Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι ἡ εὐθεῖα $O\Gamma$ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας xOy .

7. Θεμελιώδεις γεωμετρικαὶ κατασκευαὶ

126. Ὅρισμός. Κάθε κατασκευὴ, ἡ ὁποία γίνεται μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου λέγεται **γεωμετρικὴ κατασκευὴ**.

127. Πρόβλημα 1ον. Μὲ πλευρὰν δοθεῖσαν εὐθεῖαν AB καὶ μὲ κορυφὴν δοθὲν σημεῖον αὐτῆς A νὰ κατασκευασθῆ γωνία ἴση μὲ δοθεῖσαν γωνίαν ω .

Μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν O τῆς δοθείσης γωνίας ω καὶ μὲ ἀκτῖνα τυχοῦσαν γράφομεν ἓνα τόξον κύκλου, τὸ ὁποῖον τέμνει τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας ω εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ E . Ἐπειτα μὲ κέντρον τὸ A καὶ ἀκτῖνα τὴν αὐτὴν γράφομεν ἓνα τόξον,



Σχ. 105.

τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν AB εἰς τὸ H . Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΔE . Μὲ κέντρον τὸ H καὶ μὲ ἀνοιγμα τοῦ διαβήτου ἴσον μὲ τὴν ἀπόστασιν ΔE , γράφομεν ἓνα τόξον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὸ τόξον HZ εἰς τὸ Γ . Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν $H\Gamma$. Τὰ τρίγωνα $AH\Gamma$ καὶ $O\Delta E$ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς τρεῖς

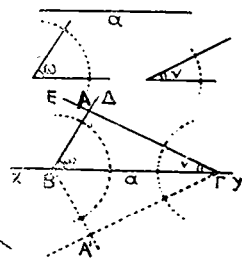
$H\Gamma$. Τὰ τρίγωνα $AH\Gamma$ καὶ $O\Delta E$ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς τρεῖς

πλευρᾶς τῶν ἴσας μίαν πρὸς μίαν ἐκ κατασκευῆς. Ἐπομένως αἱ γωνίαι A καὶ ω , αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν $H\Gamma$ καὶ ΔE , εἶναι ἴσαι.

128. Πρόβλημα 2ον. *Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν μίαν πλευρὰν τοῦ $B\Gamma = a$ καὶ τὰς προσκειμένας εἰς αὐτὴν γωνίας $B = \omega$ καὶ $\Gamma = \nu$. (Σχ. 106).*

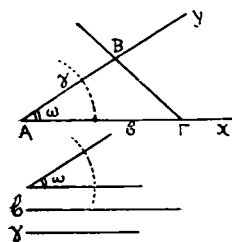
Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας λαμβάνομεν ἓνα εὐθύγραμμον τμήμα $B\Gamma$ ἴσον μὲ a . Μὲ πλευρὰν τὴν $B\Gamma$ καὶ κορυφὰς τὰ B καὶ Γ κατασκευάζομεν πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς $B\Gamma$, δύο γωνίας B καὶ Γ ἴσας ἀντιστοίχως πρὸς τὰς δοθείσας γωνίας B καὶ Γ . Αἱ ἄλλαι πλευραὶ τῶν γωνιῶν B καὶ Γ , ἐκτὸς τῆς $B\Gamma$, τέμνονται εἰς ἓνα σημεῖον A καὶ τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι προφανῶς τὸ ζητούμενον.

Σημ. Κατωτέρω θὰ ἴδωμεν εἰς ποίους περιορισμοὺς πρέπει νὰ ὑπόκεινται αἱ γωνίαι B καὶ Γ διὰ νὰ εἶναι δυνατὴ ἡ κατασκευὴ τοῦ τριγώνου.



Σχ. 106.

129. Πρόβλημα 3ον. *Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν δύο πλευρὰς τοῦ καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν.*



Σχ. 107.

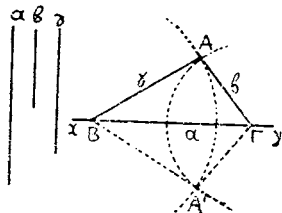
Ἐστωσαν β καὶ γ (Σχ. 107) αἱ δύο δοθεῖσαι πλευραὶ καὶ ω ἡ δοθεῖσα γωνία.

Κατασκευάζομεν μίαν γωνίαν xAy ἴσην μὲ τὴν ω . Ἐπειτα λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Ax ἓνα τμήμα $AG = \beta$ καὶ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Ay ἓνα τμήμα $AB = \gamma$ φέρομεν τὴν εὐθείαν $B\Gamma$ · τὸ σχηματισθὲν τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι προφανῶς τὸ ζητούμενον.

130. Πρόβλημα 4ον. *Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν τὰς τρεῖς πλευρὰς τοῦ a, β, γ .*

Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας xy (Σχ. 108) λαμβάνομεν ἓνα εὐθύγραμμον τμήμα $B\Gamma$ ἴσον μὲ τὴν πλευρὰν a . Μὲ κέντρον τὸ σημεῖον B καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ γ γράφομεν ἓνα τόξον κύκλου.

Ἐπειτα μὲ κέντρον τὸ Γ καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ β γράφομεν ἓνα τόξον.



Σχ. 108.

Ἡ τομὴ Α τῶν δύο αὐτῶν τόξων ὀρίζει τὴν τρίτην κορυφὴν τοῦ ζητουμένου τριγώνου.

Σημ. Κατωτέρω θὰ ἴδωμεν εἰς ποίους περιορισμοὺς πρέπει νὰ ὑπόκειται αἱ πλευραὶ α, β, γ διὰ νὰ εἶναι δυνατὴ ἡ κατασκευὴ τοῦ τριγώνου.

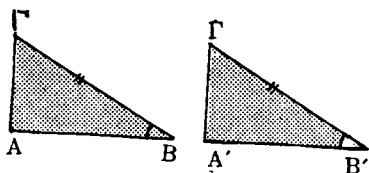
8. Περιπτώσεις ἰσότητος ὀρθογωνίων τριγώνων

131. Εἴδομεν (§ 118 καὶ 120) πότε δύο ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι ἴσα. Θὰ ἐξετάσωμεν τώρα καὶ ἄλλας ἰδιαιτέρας περιπτώσεις ἰσότητος αὐτῶν.

132. Θεώρημα. Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι ἴσα, διὰν ἔχουν τὰς ὑποτείνουσας τῶν ἴσας καὶ μίαν ὀξεῖαν γωνίαν ἴσην.

Ἐπιπέσεις: Ἐστώσαν τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' (Σχ. 109), τὰ ὁποῖα ἔχουν ἐξ ὑποθέσεως:

$$B\Gamma = B'\Gamma', \quad \widehat{B} = \widehat{B'}, \quad \widehat{A} = \widehat{A'} = 1 \text{ ὀρθή.}$$



Ἐπιπέσεις.	$B\Gamma = B'\Gamma'$ $\widehat{B} = \widehat{B}'$
Συμπ.	τρ. ΑΒΓ = τρ. Α'Β'Γ'

Σχ. 109.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ἴσα.

Ἀπόδειξις: Θέτομεν τὸ τρίγωνον Α'Β'Γ' ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ οὕτως, ὥστε ἡ Β'Γ' νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης τῆς ΒΓ, ἐπειδὴ ἡ γωνία Β' εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν Β, ἡ πλευρὰ Β'Α' θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΑ καὶ τὸ σημεῖον Α' θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ΒΑ ἢ ἐπὶ τῆς προεκτάσεώς της. Ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ Γ'Α' καὶ ΓΑ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθείαν καὶ ἄγονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον Γ, ἡ Γ'Α' θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΓΑ καὶ τὸ σημεῖον Α' θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ΓΑ ἢ ἐπὶ τῆς προεκτάσεώς της. Ἀλλὰ τὸ σημεῖον Α', ἐπειδὴ πρέπει νὰ κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς ΒΑ καὶ ἐπὶ τῆς ΓΑ, πρέπει ἀναγκαστικῶς νὰ συμπίπτῃ μὲ τὸ Α, διότι δύο εὐθεῖαι μόνον εἰς ἓνα σημεῖον τέμνονται. Ἀλλὰ τότε τὰ τρίγωνα Α'Β'Γ' καὶ ΑΒΓ ἐφαρμόζουσι καὶ ἐπομένως εἶναι ἴσα.

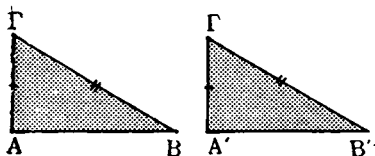
Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα. . . .

133. Θεώρημα. Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι ἴσα, διὰν ἔχουν τὰς ὑποτείνουσας τῶν ἴσας καὶ μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν ἴσην.

Ἐπίπεδοι: Ἐστώσαν τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $A'B'\Gamma'$ (Σχ. 110), τὰ ὁποῖα ἔχουν ἐξ ὑποθέσεως :

$$B\Gamma = B'\Gamma', \quad A\Gamma = A'\Gamma' \quad \text{καὶ} \quad \widehat{A} = \widehat{A'} = \text{ὀρθή.}$$

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ ὀρθογώνια αὐτὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα.



Σχ. 110.

Ἐπίπεδοι.	$B\Gamma = B'\Gamma'$ $A\Gamma = A'\Gamma'$
Συμπ.	$\text{τρ.} AB\Gamma = \text{τρ.} A'B'\Gamma'$

Ἐπίπεδοι: Ἐστώσαν τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $A'B'\Gamma'$ ἐπὶ τοῦ $AB\Gamma$ οὕτως, ὥστε ἡ πλευρὰ $A'\Gamma'$ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης τῆς πλευρᾶς $A\Gamma$. Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι A καὶ A' εἶναι ἴσαι, ὡς ὀρθαί, ἡ πλευρὰ $A'B'$ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς AB καὶ τὸ σημεῖον B' θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς AB ἢ ἐπὶ τῆς προεκτάσεώς της. Ἐπὶ τοὺς ὄρους αὐτοὺς, αἱ $\Gamma'B'$ καὶ ΓB δύνανται νὰ θεωρηθοῦν, ὡς πλάγια πρὸς τὴν εὐθεῖαν AB , αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον Γ' ἐπειδὴ αἱ πλάγια $\Gamma'B'$ καὶ ΓB εἶναι ἴσαι, οἱ πόδες τῶν B καὶ B' θὰ ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὸν πόδα A τῆς καθέτου καὶ ἐπομένως τὸ σημεῖον B' θὰ πέσῃ ἀναγκαστικῶς ἐπὶ τοῦ B . Ἀλλὰ τότε τὰ τρίγωνα $A'B'\Gamma'$ καὶ $AB\Gamma$ θὰ ἐφαρμόσουν καὶ ἐπομένως εἶναι ἴσα.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα...**

Ἀσκήσεις

Α' Ὁμάς. 56. (76). Τὰ μέσα τῶν ἴσων πλευρῶν ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὴν βάσιν του.

57. (77). Τὸ μέσον τῆς ὑποτείνουσας ἑνὸς ὀρθογωνίου καὶ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰς καθέτους πλευρᾶς του.

58. (78). Αἱ κάθετοι, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὸ μέσον τῆς βάσεως ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἐπὶ τὰς ἴσας πλευρᾶς του εἶναι ἴσαι, καὶ σχηματίζουν ἴσας γωνίας μὲ τὴν βάσιν, καθὼς καὶ μὲ τὴν διάμεσον τοῦ τριγώνου.

59. (79). Ἐὰν αἱ κάθετοι, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὸ μέσον μιᾶς πλευρᾶς τριγώνου ἐπὶ τὰς ἄλλας πλευρᾶς του εἶναι ἴσαι, τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές.

60. (80). Αἱ κάθετοι, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς βάσεως ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἐπὶ τὰς ἴσας πλευρᾶς του, εἶναι ἴσαι.

61. (81). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι δύο κορυφαὶ τριγώνου ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὴν διάμεσον, ἢ ὅποια ἄγεται ἀπὸ τὴν τρίτην κορυφήν.

Β' Ὁμάς. 62. (82). Δίδεται τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$, ὀρθογώνιον εἰς τὸ A . φέρομεν τὴν διχοτόμον BD τῆς γωνίας B ἢ ὅποια τέμνει τὴν πλευρὰν AG εἰς τὸ D . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $DA < DG$.

63 (83). Ἐὰν δύο ὕψη τριγώνου εἶναι ἴσα, τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές καὶ ἀντιστρόφως.

64. (84). Δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $A'B'\Gamma'$ ἔχουν τὰς πλευρὰς $B\Gamma$ καὶ $B'\Gamma'$ ἴσας καὶ τὰ ὕψη BA καὶ BE ἴσα, ἀντιστοίχως, πρὸς τὰ $B'A'$ καὶ $\Gamma'E$. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὰ τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $A'B'\Gamma'$ εἶναι ἴσα.

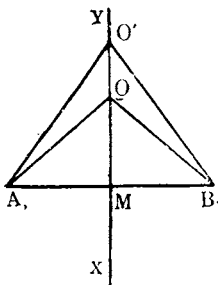
65. (85). Τὰ τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $A'B'\Gamma'$ ἔχουν τὰς γωνίας A καὶ A' παραπληρωματικὰς καὶ $AB=A'B'$, $A\Gamma=A'\Gamma'$. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὰ ὕψη BA καὶ $B'A'$ εἶναι ἴσα. Ἐπίσης εἶναι ἴσα καὶ τὰ ὕψη ΓE καὶ $\Gamma'E$.

66. (86). Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας xy λαμβάνομεν δύο σημεῖα A καὶ B . Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον O , τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τῆς xy , φέρομεν τὰς εὐθείας OA καὶ OB καὶ ἐπὶ τῶν προεκτάσεων λαμβάνομεν εὐθύγραμμα τμήματα AA' , BB' ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς τὰ OA καὶ OB . Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὰ σημεῖα A' καὶ B' ἀπέχουν ἰσάκως ἀπὸ τῆν xy .

9. Ἰδιότης τῶν σημείων τῆς μεσοκαθέτου ἐνὸς εὐθυγράμμου τμήματος

134. **Θεώρημα.** *Κάθε σημεῖον τῆς μεσοκαθέτου ἐνὸς εὐθυγράμμου τμήματος, ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰ ἄκρα αὐτοῦ.*

Ἐπίσης: Ἐστω ἓνα εὐθύγραμμον AB (Σχ. 111), XY ἡ κάθετος,



Σχ. 111.

ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ μέσον M τοῦ AB ἐπ' αὐτὸ καὶ O τυχὸν σημεῖον τῆς καθέτου αὐτῆς.

Ἐπίσης:	$XY \perp AB$ $AM=MB$
Συμπ.	$OA=OB$

Συμπέρασμα: Ἐὰν φέρωμεν τὰς εὐθείας OA καὶ OB , θὰ δείξωμεν, ὅτι $OA=OB$.

Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι: $AM=MB$, αἱ πλάγιαι OA καὶ OB , πρὸς τὴν AB , εἶναι ἴσαι, διότι οἱ πόδες των A καὶ B ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὸν πόδα M τῆς καθέτου XY .

Ἐδείχθη λοιπὸν, ὅτι: **Κάθε σημεῖον τῆς μεσοκαθέτου. . . .**

135. **Θεώρημα.** (Ἀντίστροφον). *Κάθε σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰ ἄκρα ἐνὸς εὐθυγράμμου τμήματος, κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου αὐτοῦ.*

Ἐπίσης: Ἐστω ἓνα σημεῖον O (Σχ. 111), τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰ ἄκρα ἐνὸς εὐθυγράμμου τμήματος AB , δηλ. ἔστω, ὅτι $OA=OB$.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ O κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος AB .

Ἐπίσης:	$OA=OB$
Συμπ.	$XY \perp AB$ $AM=MB$

Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $OA=OB$, τὸ τρίγωνον OAB εἶναι ἰσοσκελές. Ἐὰν συνδέσωμεν, μὲ εὐθεῖαν, τὸ σημεῖον O μὲ τὸ μέσον M τοῦ AB , ἢ OM , ὡς διάμεσος ἰσοσκελοῦς τριγώνου, θὰ εἶναι καὶ ὕψος αὐτοῦ καὶ ἐπομένως κάθετος ἐπὶ τὴν AB . Ὡστε τὸ O κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου τοῦ AB .

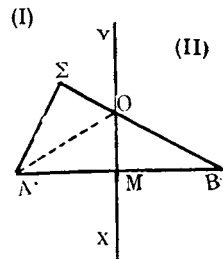
Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Κάθε σημεῖον. . .**

Παρατήρησις: Τὰ δύο ἄνωτέρω θεωρήματα (§ 134 καὶ 135) δύνανται νὰ ἐκφρασθοῦν καὶ ὡς ἑξῆς:

Ἡ ἀναγκαία καὶ ἰκανὴ συνθήκη, ἵνα ἓνα σημεῖον ἀπέχη ἴσον ἀπὸ τὰ ἄκρα ἑνὸς εὐθύγραμμου τμήματος εἶναι, ὅτι τὸ σημεῖον αὐτὸ πρέπει νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος, ἢ

Διὰ νὰ ἀπέχη ἓνα σημεῖον ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰ ἄκρα ἑνὸς εὐθύγραμμου τμήματος, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ σημεῖον αὐτὸ νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου τοῦ εὐθύγραμμου αὐτοῦ τμήματος.

136. Περιοχαὶ ὀριζόμεναι ὑπὸ τῆς μεσοκαθέτου ἑνὸς εὐθ. τμήματος. Ἐστω ἓνα εὐθύγραμμον τμήμα AB καὶ XY ἡ μεσοκάθετος αὐτοῦ. Ἡ μεσοκάθετος αὕτη χωρίζει τὸ ἐπίπεδον ἐπὶ τοῦ ὁποίου κεῖται εἰς δύο μέρη, εἰς δύο ἡμιεπίπεδα (I), (II), τὰ ὁποῖα περιέχουν τὸν μὲν ἓνα τὸ σημεῖον A , τὸ δὲ ἄλλο τὸ σημεῖον B .



Σχ. 112.

Ζητεῖται νὰ συγκριθοῦν αἱ ἀποστάσεις ἑνὸς σημείου Σ ἀπὸ τὰ ἄκρα τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος AB .

1ον. Ἐστω ὅτι τὸ σημεῖον Σ κεῖται εἰς τὴν περιοχὴν (I). Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΣA καὶ τὴν εὐθεῖαν ΣB , ἡ ὁποία τέμνει τὴν μεσοκάθετον XY εἰς τὸ σημεῖον O . Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν OA .

Ἀπὸ τὸ τρίγωνον ΣOA ἔχομεν $\Sigma A < \Sigma O + OA$ (1).

Ἐπειδὴ $OA=OB$, (§ 134) ἢ (1) γράφεται
 $\Sigma A < \Sigma O + OB$ ἢ $\Sigma A < \Sigma B$.

Ὡστε διὰ κάθε σημεῖον τῆς περιοχῆς (I) ἔχομεν $\Sigma A < \Sigma B$.

2ον. Ἐὰν τὸ σημεῖον Σ κεῖται εἰς τὴν περιοχὴν (II) ἀποδεικνύομεν ὁμοίως, ὅτι $\Sigma B < \Sigma A$.

Ἀντιστρόφως. 1ον. Ἐὰν $\Sigma A < \Sigma B$, τὸ σημεῖον M κεῖται εἰς τὴν περιοχὴν (I).

Πράγματι τὸ σημεῖον Σ δὲν δύναται νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου, διότι τότε θὰ ἦτο $\Sigma A = \Sigma B$, τὸ ὁποῖον ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν.

Ἐπίσης τὸ σημεῖον Σ δὲν δύναται νὰ κεῖται εἰς τὴν περιοχὴν (II), διότι τότε θὰ ἦτο $\Sigma A > \Sigma B$, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον ἀντίκειται πάλιν εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Ὡστε τὸ σημεῖον θὰ κεῖται ἀναγκαστικῶς εἰς τὴν περιοχὴν (I).

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν :

Ἐὰν δίδεται ἓνα εὐθύγραμμον τμήμα AB καὶ ἓνα σημεῖον Σ ἐκτὸς αὐτοῦ, ἢ ἰκανὴ καὶ ἀναγκαῖα συνθήκη διὰ νὰ εἶναι $\Sigma A < \Sigma B$ εἶναι, τὸ Σ νὰ κεῖται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται τὸ σημεῖον A , ἐν σχέσει πρὸς τὴν μεσοκάθετον τοῦ AB .

137. Γεωμετρικὸς τόπος. Εἰς τὰ θεωρήματα § 134 καὶ § 135 εἶδομεν ὅτι : **Κάθε σημεῖον τῆς μεσοκαθέτου ἑνὸς εὐθύγραμμου τμήματος AB ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰ ἄκρα αὐτοῦ A καὶ B .**

Καὶ ἀντιστρόφως : Κάθε σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰ ἄκρα ἑνὸς εὐθύγραμμου τμήματος AB , κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου αὐτοῦ.

Τὸ σύνολον αὐτῶν τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν ιδιότητα νὰ ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὰ ἄκρα ἑνὸς εὐθύγραμμου τμήματος, σχηματίζουν ἓνα σχῆμα, (ἔδῳ μίαν εὐθεῖαν γραμμὴν), τὸ ὁποῖον λέγεται **γεωμετρικὸς τόπος.**

Ὡστε δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν, κατὰ τὰ ἀνωτέρω, ὅτι :

I. Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὰ ἄκρα ἑνὸς εὐθύγραμμου τμήματος, εἶναι ἡ μεσοκάθετος αὐτοῦ.

10. Στοιχειώδεις γεωμετρικαὶ κατασκευαὶ

138. Ἐφαρμογαί. Πρόβλημα 1^{ον}. **Μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτη νὰ ἀχθῇ ἡ μεσοκάθετος ἑνὸς εὐθύγραμμου τμήματος.**

Ἐστω, ὅτι θέλομεν νὰ φέρωμεν τὴν μεσοκάθετον τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος AB (Σχ. 113).

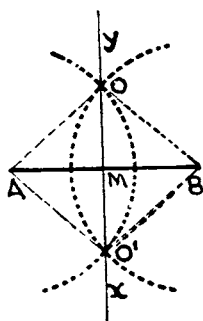
Κατασκευή : Μὲ κέντρα τὰ σημεία A καὶ B καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν αὐτὴν, ἀλλὰ μεγαλυτέραν τοῦ ἡμίσεως τοῦ AB , γράφομεν δύο τόξα, τὰ ὁποῖα τέμνονται εἰς τὰ σημεία O καὶ O' . Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν OO' , ἡ ὁποία εἶναι ἡ ζητούμενη μεσοκάθετος τοῦ AB .

Ἀπόδειξις : Φέρομεν τὰς εὐθείας $OA, OB, O'A, O'B$ αἱ εὐ-

θεῖται αὐτὰ εἶναι ἴσαι, ὡς ἀκτῖνες ἴσων περιφερειῶν. Τὰ σημεῖα λοιπὸν O καὶ O' ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὰ ἄκρα A καὶ B τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος AB καὶ ἐπομένως κεῖνται ἐπὶ τῆς μεσοκάθετου αὐτοῦ (§ 135). Ὡστε ἡ OO' εἶναι μεσοκάθετος τοῦ AB .

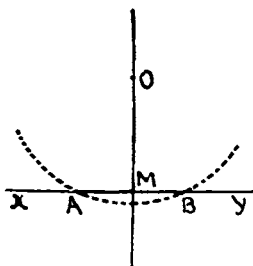
Παρατήρησις. Ἡ προηγουμένη κατασκευὴ μᾶς δίδει τὸ μέσον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος AB . Ἐπαναλαμβάνοντες διαδοχικῶς τὴν αὐτὴν κατασκευὴν καὶ εἰς καθένα ἀπὸ τὰ ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα, εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται τὸ τμήμα AB , διαιροῦμεν αὐτὸ εἰς 4, 8, 16, ... 2^n ἴσα μέρη.

139. Πρόβλημα 2ον. Ἀπὸ δοθὲν σημείου, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς εὐθείας, νὰ ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν αὐτήν, μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου.



Σχ. 113.

Ἐστω, ὅτι θέλομεν νὰ φέρωμεν ἀπὸ τὸ σημεῖον O (Σχ. 114) τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν xy .



Σχ. 114.

Μὲ κέντρον τὸ δοθὲν σημεῖον O καὶ μὲ ἀκτῖνα μεγαλυτέραν τῆς ἀποστάσεως τοῦ O ἀπὸ τὴν xy , γράφομεν ἓνα τόξον περιφερείας, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν xy εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B . Ἡ μεσοκάθετος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος AB , θὰ διέρχεται ἀναγκαστικῶς ἀπὸ τὸ σημεῖον O , διότι τὸ O , ἐκ κατασκευῆς, ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰ A καὶ B . Ὡστε ἡ ζητούμενη κάθετος θὰ διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον τοῦ AB

καὶ ἐπομένως δυνάμεθα νὰ τὴν κατασκευάσωμεν (§ 138).

140. Πρόβλημα 3ον. Ἀπὸ δοθὲν σημείου μιᾶς εὐθείας, νὰ ἀχθῇ κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν αὐτήν, μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου.

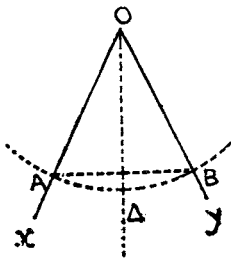
Ἐστω M ἓνα σημεῖον τῆς εὐθείας xy (Σχ. 114) ἀπὸ τὸ ὁποῖον θέλομεν νὰ φέρωμεν κάθετον ἐπὶ τὴν xy .

Κατασκευὴ: Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς εὐθείας xy δύο σημεῖα A καὶ B οὕτως, ὥστε $MA = MB$. Ἡ μεσοκάθετος MO τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος AB εἶναι ἡ ζητούμενη κάθετος ἐπὶ τὴν xy .

141. Πρόβλημα 4ον. Μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου, νὰ ἀχθῇ ἡ διχοτόμος μιᾶς γωνίας.

Ἐστω xOy (Σχ. 115) μία γωνία, τὴν ὁποίαν θέλομεν νὰ διχοτομήσωμεν.

Κατασκευή: Μὲ κέντρον τὴν κορυφήν τῆς O καὶ μὲ ἀκτίνα τυχοῦ-



Σχ. 115.

σαν γράφομεν ἓνα τόξον περιφερείας, τὸ ὁποῖον τέμνει τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B . Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν AB . Τὸ σχηματισθὲν τρίγωνον OAB εἶναι ἰσοσκελές. Ἡ κάθετος λοιπὸν εἰς τὸ μέσον τῆς βάσεώς του θὰ εἶναι καὶ διχοτόμος τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς του O . Ὡστε διὰ νὰ φέρωμεν τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας xOy , ἀρκεῖ νὰ φέρωμεν τὴν μεσοκάθετον τοῦ AB , ὅπως ἐδείχθη εἰς τὴν § 138.

Παρατήρησις: Ἐὰν διχοτομήσωμεν δοθεῖσαν γωνίαν καὶ ἔπειτα διχοτομήσωμεν διαδοχικῶς ἑκάστη μίαν ἀπὸ τὰς ἴσας αὐτὰς γωνίας, δυνάμεθα νὰ διαιρέσωμεν μίαν γωνίαν εἰς 4, 8, 16, . . . 2^n ἴσας γωνίας.

Ἄσκήσεις

67. (87). Ἐὰν δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν, ἢ εὐθεῖα, ἢ ὁποία συνδέει τὰς κορυφὰς τῶν εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν.

68. (88). Δίδεται τὸ ἰσοσκελές τρίγωνον $ABΓ$. Ἐπὶ τῆς διχοτόμου AD τῆς γωνίας A τῆς κορυφῆς του λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον O καὶ φέρομεν τὰς εὐθείας BOB' καὶ $GOΓ'$, αἱ ὁποιαί τέμνουσι τὰς πλευρὰς AG καὶ AB ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα B' καὶ $Γ'$. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $BB' = ΓΓ'$.

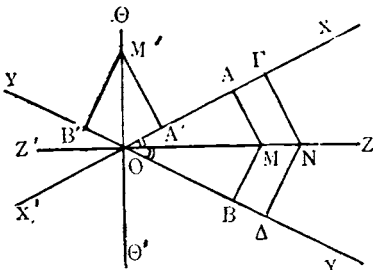
11. Ἰδιότης τῶν σημείων τῆς διχοτόμου μιᾶς γωνίας

142. Θεώρημα. Κάθε σημεῖον τῆς διχοτόμου μιᾶς γωνίας ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰς πλευρὰς τῆς.

Ἐπίπεδος: Ἐστω XOY (Σχ. 116) μία γωνία, M ἓνα σημεῖον τῆς διχοτόμου τῆς OZ καὶ MA, MB αἱ ἀποστάσεις του ἀπὸ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι $MA = MB$.

Ἀπόδειξις: Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα OAM καὶ OBM ἔχουν τὴν



Σχ. 116.

Ἐπίπεδος.	$\widehat{MOX} = \widehat{MOY}$
	$MA \perp OX$ $MB \perp OY$
Συμπ.	$MA = MB$

ὑποτείνουσιν OM κοινὴν καὶ τὰς ὀξείας γωνίας MOA καὶ MOB ἴσας. Ἄρα θὰ εἶναι ἴσα καὶ ἐπομένως θὰ ἔχουν καὶ $MA = MB$.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Κάθε σημεῖον τῆς διχοτόμου. . . .**

143. Θεώρημα. (*Ἀντίστροφον*). **Κάθε σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰς πλευρὰς μιᾶς γωνίας, κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας.**

Ὑπόθεσις: Ἐστω ΧΟΥ μία γωνία καὶ Μ ἓνα σημεῖον ἐντὸς αὐτῆς καὶ τοιοῦτον, ὥστε αἱ ἀποστάσεις του ΜΑ καὶ ΜΒ ἀπὸ τὰς πλευρὰς τῆς νὰ εἶναι ἴσαι. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΟΜ.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ ΟΜ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΧΟΥ.

Ὑπόθ.	ΜΑ ⊥ ΟΧ
	ΜΒ ⊥ ΟΥ
	ΜΑ = ΜΒ
Συμπ.	$\widehat{ΜΟΧ} = \widehat{ΜΟΥ}$

Ἀπόδειξις. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΜΑ καὶ ΟΜΒ ἔχουν τὴν ὑποτείνουσαν ΟΜ κοινὴν καὶ τὰς καθετοὺς πλευρὰς ΜΑ καὶ ΜΒ ἴσας, ἐξ ὑποθέσεως. Ἄρα θὰ εἶναι ἴσα καὶ ἐπομένως θὰ ἔχουν καὶ $\widehat{ΜΟΧ} = \widehat{ΜΟΥ}$, ὁπότε ἡ ΟΖ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΧΟΥ.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Κάθε σημεῖον, τὸ ὁποῖον. . . .**

Παρατήρησις. Τὰ δύο ἀνωτέρω θεωρήματα ἐκφράζονται καὶ ὡς ἐξῆς:

Διὰ νὰ κεῖται ἓνα σημεῖον ἐπὶ τῆς διχοτόμου μιᾶς γωνίας πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ σημεῖον αὐτὸ νὰ ἀπέχη ἴσον ἀπὸ τὰς δύο πλευρὰς τῆς γωνίας αὐτῆς.

144. Γεωμετρικὸς τόπος. Εἰς τὰ δύο θεωρήματα 142 καὶ 143 εἶδομεν, ὅτι:

Κάθε σημεῖον τῆς διχοτόμου μιᾶς γωνίας ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰς πλευρὰς τῆς.

Καὶ ἀντιστρόφως: **Κάθε σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰς πλευρὰς μιᾶς γωνίας κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας.**

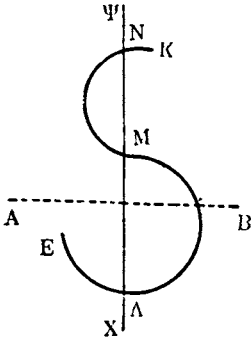
Παρατηροῦμεν καὶ ἐδῶ, ὅτι ὅλα τὰ σημεία τῆς διχοτόμου μιᾶς γωνίας ἔχουν τὴν ιδιότητα νὰ ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας. Ὡστε δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν ὅτι:

Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὰς πλευρὰς μιᾶς γωνίας, εἶναι ἡ διχοτόμος αὐτῆς.

145. Χρῆσις τῆς ἐννοίας τοῦ γεωμετρικοῦ τύπου. Οἱ γεωμετρικοὶ τόποι χρησιμοποιοῦνται πρὸ παντὸς εἰς τὰ προβλήματα κατασκευῶν π.χ. ὅταν πρόκειται νὰ εὗρωμεν ἓνα σημεῖον, τὸ ὁποῖον νὰ ἱκανοποιῇ δύο καθωρισμένας ἐκ τῶν προτέρων συνθήκας. Ἐὰν ἐγνωρίζωμεν τοὺς γεωμετρικοὺς τόπους τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα πληροῦν καὶ τὴν μίαν καὶ τὴν ἄλλην ἀπὸ τὰς δοθείσας συνθήκας, τὸ ζητούμενον

σημείον θὰ εὐρίσκητο εἰς τὴν τομὴν τῶν δύο αὐτῶν τόπων. Τὸ κατωτέρω παράδειγμα θὰ μᾶς δείξῃ καλύτερον τὸν τρόπον τῆς χρήσεως τῶν γεωμετρικῶν τόπων.

146. Πρόβλημα. Δίδονται δύο σημεία A καὶ B (Σχ. 117) καὶ μία καμπύλη K καὶ ζητεῖται νὰ εὐρεθοῦν ὅλα τὰ σημεία τῆς καμπύλης K , τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὰ σημεία A καὶ B .



Σχ. 117.

Κατὰ τὸ πρόβλημα τὰ ζητούμενα σημεία πρέπει νὰ κεῖνται ἐπὶ τῆς καμπύλης K .

Ἐπειδὴ ὁμως τὰ ζητούμενα σημεία πρέπει νὰ ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὰ δοθέντα σημεία A καὶ B , πρέπει νὰ ἀνήκουν εἰς τὸν γεωμετρικὸν τόπον τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὰ A καὶ B : δηλ. πρέπει νὰ κεῖνται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου $X\Psi$ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος AB , τὸ ὁποῖον συνδέει τὰ σημεία A καὶ

B . Τὰ ζητούμενα λοιπὸν σημεία θὰ εἶναι τὰ σημεία τῆς τομῆς τῆς μεσοκαθέτου $X\Psi$ καὶ τῆς καμπύλης K : δηλ. εἶναι τὰ σημεία Λ, N, M .

Ἐσκήσεις

Α' Ὁμάς. 69. (91). Νὰ εὐρεθῇ σημείον, τὸ ὁποῖον νὰ ἀπέχη ἴσον ἀπὸ δύο τεμνομένας εὐθείας καὶ ἴσον ἀπὸ δύο ἄλλας τεμνομένας εὐθείας.

70. (92). Δίδεται ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$ καὶ ζητεῖται νὰ εὐρεθῇ ἐπὶ τῆς $B\Gamma$ ἓνα σημείον, τὸ ὁποῖον νὰ ἀπέχη ἴσον ἀπὸ τὰς πλευρὰς AB καὶ $A\Gamma$.

71. (93). Δίδεται ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$ καὶ ζητεῖται νὰ εὐρεθῇ ἐπὶ τῆς $A\Gamma$ ἢ ἐπὶ τῆς προεκτάσεώς της, ἓνα σημείον, τὸ ὁποῖον νὰ ἀπέχη ἴσον ἀπὸ τὰς κορυφὰς B καὶ Γ .

72. (94). Νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν, αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ δύο δοθέντα σημεία.

Β' Ὁμάς. 73. (95). Δίδονται δύο εὐθύγραμμα τμήματα AB καὶ $\Gamma\Delta$, τὰ ὁποῖα δὲν κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας. Ζητεῖται νὰ εὐρεθῇ ἓνα σημείον O τὸ ὁποῖον νὰ εἶναι κοινὴ κορυφὴ δύο ἰσοσκελῶν τριγῶνων, τὰ ὁποῖα νὰ ἔχουν βάσεις τὰς AB καὶ $\Gamma\Delta$.

74. (96). Δίδεται μία γωνία AOB καὶ ἓνα σημείον Γ τοιοῦτον, ὥστε ἡ $O\Gamma$ νὰ μὴν εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας AOB . Νὰ εὐρεθῇ ἓνα σημείον M , τὸ ὁποῖον νὰ ἀπέχη ἴσον ἀπὸ τὰς OA καὶ OB καὶ τοιοῦτον, ὥστε $MO=MG$.

75. (97). Δίδεται ἓνα εὐθύγραμμον τμήμα AB : ἀπὸ τὰ ἄκρα τοῦ AB καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτοῦ φέρομεν τὰς εὐθείας Ax καὶ By , αἱ ὁποῖαι σχημα-

τίζουν ἴσας γωνίας μὲ τὸ AB. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου M τῆς τομῆς των.

76. (98). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ὅταν ἓνα σημεῖον ἀπέχη ἴσον ἀπὸ τὰ ἄκρα δύο διαδοχικῶν τμημάτων AG καὶ BG, τὰ ὁποῖα δὲν κείνται ἐπ' εὐθείας, θὰ ἀπέχη ἴσον καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα A καὶ Γ.

12. Ἀντιστοιχία μεταξὺ τῶν γωνιῶν καὶ τῶν πλευρῶν τριγώνου

147. Θεώρημα. Ἐὰν δύο γωνίαι τριγώνου εἶναι ἄνισοι καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτῶν κείμεναι πλευραὶ εἶναι ἄνισοι καὶ ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας γωνίας κείται μεγαλυτέρα πλευρὰ.

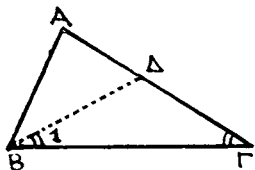
Ἐπίθεσις: Ἐστω τὸ τρίγωνον ABΓ (Σχ. 118), εἰς τὸ ὁποῖον, ἔξ ὑποθέσεως, εἶναι

$$\widehat{B} > \widehat{\Gamma}.$$

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ πλευρὰ

Ἐπίθεσις.	$\widehat{B} > \widehat{\Gamma}$
Συμπ.	$AG > AB$

AG εἶναι μεγαλυτέρα τῆς πλευρᾶς AB.



Σχ. 118.

Ἀπόδειξις: Ἀπὸ τὴν κορυφὴν B φέρομεν μίαν εὐθεῖαν ΒΔ, ἡ ὁποία νὰ σχηματίζῃ μὲ

τὴν ΒΓ μίαν γωνίαν ΓΒΔ ἴσην μὲ τὴν γωνίαν Γ. Ἐπειδὴ ἡ γωνία Β εἶναι, ἔξ ὑποθέσεως, μεγαλυτέρα τῆς γωνίας Γ, ἡ εὐθεῖα ΒΔ θὰ κείται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας ΑΒΓ καὶ ἐπομένως τὸ σημεῖον Δ θὰ κείται μεταξὺ τῶν Α καὶ Γ.

Τὸ τρίγωνον ΔΒΓ εἶναι ἰσοσκελές, διότι αἱ γωνίαι Β, καὶ Γ εἶναι ἴσαι ἐκ κατασκευῆς· ἄρα θὰ εἶναι ΒΔ=ΔΓ.

Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΔ, ἡ πλευρὰ ΑΒ εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του· ἦτοι εἶναι

$$AB < AD + \Delta B \tag{1}$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἀνισότητα αὐτὴν τὴν ΔΒ μὲ τὴν ἴσην τῆς ΔΓ καὶ ἔχομεν $AB < AD + \Delta \Gamma$ ἢ $AB < AG$ ἢ $AG > AB$.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: Ἐὰν δύο γωνίαι τριγώνου. . . .

148. Θεώρημα. (Ἀντίστροφον). Ἐὰν δύο πλευραὶ τριγώνου εἶναι ἄνισοι καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτῶν κείμεναι γωνίαι εἶναι ἄνισοι καὶ ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας πλευρᾶς κείται μεγαλυτέρα γωνία.

Ἐπίθεσις: Ἐστω ἓνα τρίγωνον ABΓ (Σχ. 118), εἰς τὸ ὁποῖον

είναι $ΑΓ > ΑΒ$.

Συμπέρασμα: Θα δείξωμεν, ότι θα είναι και $\widehat{Β} > \widehat{Γ}$.

Υπόθ.	$ΑΓ > ΑΒ$
Συμπ.	$\widehat{Β} > \widehat{Γ}$

Απόδειξις: Ἐάν υποθέσωμεν, ότι ἡ γωνία Β δὲν εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας Γ, τότε θα εἶναι ἢ ἴση με αὐτὴν ἢ μικροτέρα αὐτῆς.

Ἐάν ἦτο $\widehat{Β} = \widehat{Γ}$, τότε τὸ τρίγωνον ΑΒΓ θα ἦτο ἰσοσκελὲς καὶ ἐπομένως θα ἦτο $ΑΒ = ΑΓ$. Τοῦτο ὅμως εἶναι ἀπαράδεκτον, διότι ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσίν μας: $ΑΓ > ΑΒ$.

Ἐάν ἦτο $\widehat{Β} < \widehat{Γ}$, τότε κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα, θα ἦτο $ΑΓ < ΑΒ$. Ἀλλὰ καὶ τοῦτο εἶναι ἀπαράδεκτον, διότι ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσίν μας.

Ὅστε ἡ γωνία Β δὲν δύναται νὰ εἶναι, οὔτε ἴση με τὴν Γ, οὔτε μικροτέρα αὐτῆς· ἄρα ἀναγκαστικῶς θα εἶναι μεγαλυτέρα τῆς Γ· ἦτοι θα εἶναι $\widehat{Β} > \widehat{Γ}$.

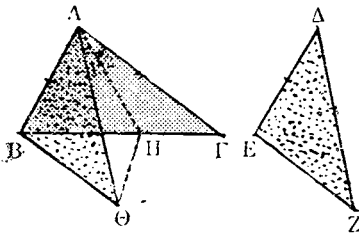
Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: Ἐάν δύο πλευραὶ . . .

149. Θεώρημα. Ἐάν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, καὶ τὰς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένας γωνίας ἀντίσους, τότε αἱ τρίται πλευραὶ τῶν εἶναι ἀνίσοι καὶ μεγαλυτέρα εἶναι ἐκείνη, ἢ ὁποία κεῖται ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας γωνίας.

Υπόθεσις: Ἐστῶσαν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ (Σχ. 119), τὰ ὁποία ἔχουν ἐξ ὑποθέσεως: $ΑΒ = ΔΕ$, $ΑΓ = ΔΖ$ καὶ $\widehat{Α} > \widehat{Δ}$.

Συμπέρασμα: Θα δείξωμεν, ὅτι $ΒΓ > ΕΖ$.

Απόδειξις: Θετόμεν τὸ τρίγωνον ΔΕΖ ἐπὶ τοῦ ΑΒΓ οὕτως, ὥστε



Σχ. 119.

Υπόθ.	$ΑΒ = ΔΕ$ $ΑΓ = ΔΖ$ $\widehat{Α} > \widehat{Δ}$
Συμπ.	$ΒΓ > ΕΖ$

ἡ ΔΕ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης τῆς ΑΒ· ἐπειδὴ ἡ γωνία Δ εἶναι μικροτέρα τῆς Α, ἡ πλευρὰ ΔΖ θα πέσῃ ἐντὸς τῆς γωνίας Α καὶ θα λάβῃ τὴν θέσιν ΑΘ, τὸ δὲ τρίγωνον ΔΕΖ θα λάβῃ τὴν θέσιν ΑΒΘ.

Φέρομεν τὴν διχοτόμον ΑΗ τῆς γωνίας ΘΑΓ, ἢ ὁποία συναντᾷ τὴν πλευρὰν ΒΓ εἰς τὸ Η· φέρομεν ἔπειτα τὴν εὐθεῖαν ΗΘ. Τὰ σχη-

ματισθέντα τρίγωνα ΑΗΘ καὶ ΑΗΓ ἔχουν: τὴν πλευρὰν ΑΗ κοινήν, ΑΘ=ΑΓ, διότι εἶναι ἴσαι πρὸς τὴν ΔΖ καὶ $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$, ἄρα θὰ εἶναι ἴσα (§ 119) καὶ ἐπομένως θὰ ἔχουν καὶ ΘΗ=ΗΓ.

Εἰς τὸ τρίγωνον ΒΗΘ εἶναι $B\Theta < BH + H\Theta$ (1)

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἀνισότητα (1) τὴν ΗΘ μὲ τὴν ἴσην τῆς ΗΓ καὶ ἔχομεν $B\Theta < BH + H\Gamma$.

Ἐπειδὴ ΒΘ=ΕΖ καὶ ΒΗ+ΗΓ=ΒΓ, ἡ προηγουμένη ἀνισότης γράφεται $EZ < B\Gamma$ ἢ $B\Gamma > EZ$.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν...

150. Θεώρημα. (Ἀντίστροφον). Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας μίαν πρὸς μίαν, τὰς δὲ τρίτας πλευρὰς τῶν ἀνίσους, τότε αἱ ἀπέναντι τῶν ἀνίσων πλευρῶν κείμεναι γωνίαι εἶναι ἀνισοὶ καὶ μεγαλυτέρα εἶναι ἐκείνη, ἡ ὁποία κεῖται ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας πλευρᾶς.

Ἐπίδοξαι: Ἐστῶσαν τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ (Σχ. 119), τὰ ὁποῖα ἔχουν ἕξ ὑποθέσεως:

$AB = DE, AG = \Delta Z$ καὶ $B\Gamma > EZ$.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν $\widehat{A} > \widehat{\Delta}$.

Ἀπόδειξις: Ἐὰν ἡ γωνία Α δὲν ἦτο μεγαλυτέρα τῆς γωνίας Δ, θὰ ἦτο ἴση μὲ αὐτὴν ἢ μικροτέρα αὐτῆς.

Ἐὰν ἡ Α ἦτο ἴση μὲ τὴν Δ, τότε τὰ δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ θὰ ἦσαν ἴσα (§ 119), καὶ ἐπομένως θὰ ἦτο $B\Gamma = EZ$. Ἀλλὰ τοῦτο ἀντιβαίνει εἰς τὴν ὑπόθεσίν μας $B\Gamma > EZ$.

Ἐὰν ἡ Α ἦτο μικροτέρα τῆς Δ, τότε, κατὰ τὸ προηγουμένον θεώρημα, θὰ ἦτο καὶ $B\Gamma < EZ$. Ἀλλὰ τοῦτο ἀντιβαίνει ἐπίσης εἰς τὴν ὑπόθεσίν μας.

Ὡστε ἡ γωνία Α δὲν δύναται νὰ εἶναι, οὔτε ἴση, οὔτε μικροτέρα τῆς Δ· ἐπομένως θὰ εἶναι μεγαλυτέρα αὐτῆς· ἦτοι θὰ εἶναι $\widehat{A} > \widehat{\Delta}$.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: Ἐὰν δύο τρίγωνα...

Ἀσκήσεις

77. (99). Δίδεται ἓνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ. Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Β τῆς βάσεώς του ΒΓ φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν ΒΔ ἐντὸς τοῦ τριγώνου, ἡ ὁποία τέμνει τὴν πλευρὰν ΑΓ εἰς τὸ σημεῖον Δ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $BD > \Delta\Gamma$.

78. (100). Αί διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ ἑνὸς τριγώνου τέμνονται εἰς ἓνα σημεῖον Ο. Ἐὰν εἶναι $AB > AG$, νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι $OB > OG$.

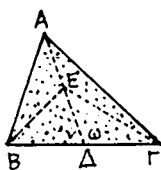
79. (101). Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι κάθε πλευρὰ τριγώνου εἶναι μικρότερα τῆς ἡμιπεριμέτρου του.

80. (102). Εἰς ἓνα τετράπλευρον ΑΒΓΔ, ἡ ΑΒ εἶναι ἡ μεγαλύτερα πλευρὰ του καὶ ἡ ΓΔ ἡ μικρότερα πλευρὰ του. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι $\gamma\omega\nu.ΑΔΓ > \gamma\omega\nu.ΑΒΓ$ καὶ $\gamma\omega\nu.ΒΓΔ > \gamma\omega\nu.ΒΑΔ$.

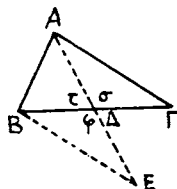
81. (103). Εἰς ἓνα κυρτὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι $AD = BG$ καὶ $\widehat{A} > \widehat{G}$. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι $AG > BD$.

82. (104). Ἐὰν διάμεσος τριγώνου περιέχεται μεταξύ ἀνίσων πλευρῶν, αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὑποταί ἄγονται ἀπὸ τυχὸν σημεῖον αὐτῆς μέχρι τῶν ἄκρων τῆς τρίτης πλευρᾶς, εἶναι ἄνισοι καὶ μεγαλύτερα εἶναι ἐκείνη, ἡ ὁποία κείται πρὸς τὸ μέρος τῆς μεγαλύτερας πλευρᾶς.

83. (105). Ἐὰν διάμεσος τριγώνου περιέχεται μεταξύ ἀνίσων πλευρῶν. 1ον σχηματίζει μετ' αὐτὰς ἀνίσους γωνίας καὶ μεγαλύτεραν μετ' τὴν μικρότεραν πλευρᾶν. 2ον σχηματίζει μετ' τὸ ἥμισυ τῆς τρίτης πλευρᾶς, ἡ ὁποία πρόσκειται εἰς τὴν μεγαλύτεραν πλευρᾶν, γωνίαν ἀμβλείαν.



Σχ. ἀσκ. 82.



Σχ. ἀσκ. 83.

Α' Ὁμάς. 84. (106). Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ὑψῶν ἑνὸς ὀξυγωνίου τριγώνου περιέχεται μεταξύ τοῦ ἄθροίσματος καὶ τοῦ ἡμισυθροίσματος τῶν πλευρῶν του.

85. (109). Ἐὰν α, β, γ εἶναι αἱ πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ καὶ μ_α ἡ διάμεσος, ἡ ἀγομένη ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α, νὰ ἀποδειχθῆ:

$$1\text{ον } \delta\tau\iota \frac{\beta + \gamma - \alpha}{2} < \mu_\alpha < \frac{\beta + \gamma}{2}. \quad 2\text{ον } \delta\tau\iota \frac{\gamma - \beta}{2} < \mu_\alpha < \frac{\gamma + \beta}{2}.$$

86. (110). Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν διαμέσων ἑνὸς τριγώνου εἶναι μεγαλύτερον τῆς ἡμιπεριμέτρου του καὶ μικρότερον τῆς περιμέτρου του.

87. (111). Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι εἰς κάθε τρίγωνον, τὸ ὁποῖον δὲν εἶναι ἰσόπλευρον, ἡ μεγαλύτερα πλευρὰ του εἶναι μεγαλύτερα τοῦ τρίτου τῆς περιμέτρου του καὶ ἡ μικρότερα πλευρὰ του εἶναι μικρότερα τοῦ τρίτου τῆς περιμέτρου του (δύο περιπτώσεις).

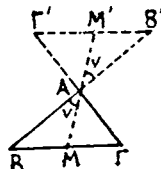
88. (118). Ἀπὸ ἓνα σημεῖον Ο, τὸ ὁποῖον κείται ἐκτὸς εὐθείας xy , φέρομεν τὴν κάθετον ΟΑ ἐπὶ τὴν xy καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς καθέτου τὰς πλαγίας ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ, . . . καὶ τοιαύτας, ὥστε $AB = BG = BD = \dots$. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι αἱ γωνίαι ΑΟΒ, ΒΟΓ, ΓΟΔ, . . . βαίνουν ἐλαττούμεναι.

89. (119). Εἰς ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$ φέρομεν ὕψος AD . Ἐὰν εἶναι $AB > A\Gamma$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι καὶ $\gamma\omega\nu.BAD > \gamma\omega\nu.DA\Gamma$.

90. (120). Κάθε πλευρὰ τριγώνου εἶναι μεγαλυτέρα τῆς εὐθείας, ἣ ὁποία συνδέει τοὺς πόδας τῶν καθέτων, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τυχὸν σημεῖον αὐτῆς ἐπὶ τὰς ἄλλας πλευρὰς τοῦ τριγώνου.

91. (107). Δίδεται ἓνα εὐθύγραμμον τμήμα $B\Gamma$, ἡ μεσοκάθετος αὐτοῦ εἰς τὸ μέσον M καὶ Σ ἓνα τυχὸν σημεῖον τῆς μεσοκαθέτου. Ἡ κάθετος ἀπὸ τὸ Σ ἐπὶ τὴν ΣB τέμνει τὴν $B\Gamma$ εἰς τὸ E καὶ ἡ κάθετος ἀπὸ τὸ Σ ἐπὶ τὴν $\Sigma\Gamma$ τέμνει τὴν $B\Gamma$ εἰς τὸ Z . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΣM εἶναι μεσοκάθετος τῆς EZ .

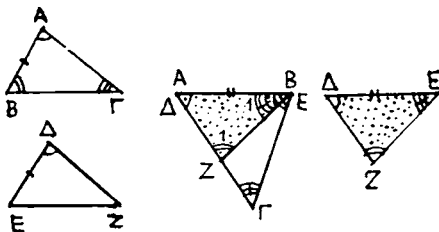
92. (108). Δίδεται ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$ προεκτείνομεν τὰς πλευρὰς τοῦ BA καὶ ΓA πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς A καὶ ἐπὶ τῶν προεκτάσεων λαμβάνομεν ἀντιστοιχῶς τμήματα $AB' = AB$ καὶ $A\Gamma' = A\Gamma$ φέρομεν τὴν εὐθείαν $B'\Gamma'$. Νὰ ἀποδειχθῇ: ἴον ὅτι $B'\Gamma' = B\Gamma$. ἴον ὅτι ἡ κορυφή A καὶ τὰ μέσα M καὶ M' τῶν $B\Gamma$ καὶ $B'\Gamma'$ κεῖνται ἐπ' εὐθείας καὶ ὅτι τὸ A εἶναι τὸ μέσον τῆς εὐθείας MM' .



Σχ. ἀσκ. 92.

93. (112). Δύο τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ τὴν γωνίαν, ἣ ὁποία κεῖται ἀπέναντι τῆς μίᾶς αὐτῶν ἴσην, εἶναι ἢ ἴσα ἢ ἄνισα.

94. (113). Ἐἰν δύο τρίγωνα ἔχουν μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς τρεῖς γωνίας τῶν ἴσας μίαν πρὸς μίαν, τὰ τρίγωνα εἶναι ἢ ἴσα ἢ ἄνισα.



Σχ. ἀσκ. 94.

95. (114). Ἐὰν δύο διαδοχικαὶ πλευραὶ τετραπλεύρου εἶναι ἴσαι καὶ αἱ προσκείμεναι εἰς αὐτὰς δύο γωνίαι τοῦ εἶναι ἴσαι, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ διαγώνιοι τοῦ τετραπλεύρου εἶναι κάθετοι μεταξὺ τῶν.

96. (115). Δύο πολύγωνα εἶναι ἴσα, ὅταν ἔχουν $n-1$ διαδοχικὰς πλευρὰς ἴσας, αἱ ὁποῖαι περιέχουν $n-2$ γωνίας ἴσας καὶ ὁμοίως κειμένας.

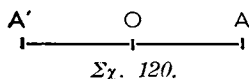
97. (116). Δύο πολύγωνα εἶναι ἴσα, ὅταν ἔχουν $n-2$ διαδοχικὰς πλευρὰς ἴσας καὶ $n-1$, προσκείμενὰς εἰς αὐτὰς, γωνίας ἴσας καὶ ὁμοίως κειμένας.

98. (117). Δύο πολύγωνα εἶναι ἴσα, ὅταν ἔχουν ὅλας τὰς πλευρὰς τῶν ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ $n-3$ διαδοχικὰς γωνίας ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ ὁμοίως κειμένας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄.
ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

1. Συμμετρία πρὸς κέντρον

151. Ὅρισμοί. Ἐστω ἓνα ὠρισμένον σημεῖον O (Σχ. 120) καὶ ἓνα τυχὸν σημεῖον A . Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν AO , τὴν ὁποίαν προεκτείνομεν πρὸς τὸ μέρος τοῦ O κατὰ ἓνα μῆκος $OA' = OA$. Τὸ σημεῖον A' λέγεται *συμμετρικὸν* τοῦ σημείου A , ὡς πρὸς τὸ σημεῖον O .



Ἀντιστρόφως, τὸ A εἶναι συμμετρικὸν τοῦ A' ὡς πρὸς τὸ σημεῖον O . Ὡστε:

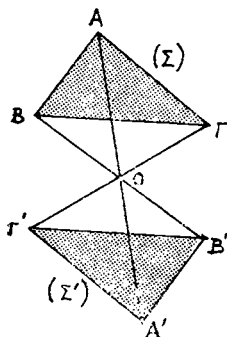
*Δύο σημεῖα A καὶ A' λέγονται **συμμετρικὰ** ὡς πρὸς ἓνα σημεῖον O , διὰ τὸ O εἶναι τὸ μέσον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος AA' , ποῦ συνδέει τὰ σημεῖα αὐτά.*

Τὸ ὠρισμένον σημεῖον O λέγεται *κέντρον συμμετρίας*.

Ὅταν κατασκευάσωμεν τὰ συμμετρικὰ ὅλων τῶν σημείων ἑνὸς σχήματος (Σ) ὡς πρὸς τὸ αὐτὸ κέντρον O , λαμβάνομεν ἓνα *σχῆμα (Σ') συμμετρικὸν τοῦ σχήματος (Σ) ὡς πρὸς κέντρον τὸ O* . Ὡστε:

*Δύο σχήματα (Σ) καὶ (Σ') (Σχ. 121) εἶναι **συμμετρικὰ πρὸς κέντρον**, διὰ τὸ συμμετρικὸν τυχόντος σημείου τοῦ σχήματος (Σ) κεῖται ἐπὶ τοῦ σχήματος (Σ') καὶ ἀντιστρόφως.*

152. Θεώρημα. *Δύο σχήματα συμμετρικὰ πρὸς κέντρον συμμετρίας, εἶναι ἴσα.*



Σχ. 121.

Ὑπόθεσις: Ἐστώσαν τὰ συμμετρικὰ σχήματα $AB\Gamma$ καὶ $A'B'\Gamma'$ (Σχ. 121) πρὸς κέντρον συμμετρίας O .

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ σχήματα αὐτὰ εἶναι ἴσα.

Ἀπόδειξις: Ἐὰν στρέψωμεν τὸ σχῆμα $AB\Gamma$ περὶ τὸ O , κατὰ γωνίαν 180° καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου του, ἢ OB θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς OB' καὶ ἐπειδὴ εἶναι $OB = OB'$, τὸ B θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ B' .

Ἐπίσης ἡ OA θὰ πέση ἐπὶ τῆς OA' , διότι αἱ γωνίαι BOA καὶ $B'OA'$ εἶναι ἴσαι, τὸ δὲ A θὰ πέση ἐπὶ τοῦ A' , διότι $OA=OA'$.

Ὅμοίως ἡ OG θὰ πέση ἐπὶ τῆς OG' , διότι αἱ γωνίαι BOG καὶ $B'OG'$ εἶναι ἴσαι, τὸ δὲ G ἐπὶ τοῦ G' , διότι $OG=OG'$.

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὰ σημεῖα A, B, G , τοῦ σχήματος ABG ἔφαρμόζουσαν ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν συμμετρικῶν σημείων τοῦ σχήματος $A'B'G'$ καὶ ἐπομένως τὰ δύο αὐτὰ σχήματα ABG καὶ $A'B'G'$ εἶναι ἴσα.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Δύο σχήματα συμμετρικά. . .**

Παραδείγματα : Τὸ συμμετρικὸν σχῆμα ἐνὸς εὐθύγραμμου τμήματος AB εἶναι ἓνα εὐθύγραμμον τμήμα $A'B'$ ἴσον πρὸς αὐτό.

Ἐπίσης τὸ συμμετρικὸν μιᾶς γωνίας ABG εἶναι μία γωνία $A'B'G'$ ἴση πρὸς αὐτήν.

Ὅμοίως τὸ συμμετρικὸν σχῆμα μιᾶς περιφέρειας εἶναι μία περιφέρεια ἴση πρὸς αὐτήν.

153. Κέντρον συμμετρίας ἐνὸς σχήματος. Ὄταν τὰ σημεῖα ἐνὸς σχήματος εἶναι ἀνὰ δύο συμμετρικά πρὸς ἓνα καὶ τὸ αὐτὸ σημεῖον τοῦ σχήματος, τὸ σημεῖον αὐτὸ λέγεται **κέντρον συμμετρίας** (ἢ ἀπλῶς **κέντρον**) τοῦ σχήματος.

Παραδείγματα : 1. Τὸ μέσον ἐνὸς εὐθύγραμμου τμήματος εἶναι κέντρον συμμετρίας τοῦ εὐθύγραμμου αὐτοῦ τμήματος.

2. Τὸ κέντρον μιᾶς περιφέρειας εἶναι κέντρον συμμετρίας τοῦ σχήματος αὐτοῦ· πράγματι τὰ ἄκρα κάθε διαμέτρου τῆς περιφέρειας εἶναι συμμετρικά πρὸς τὸ κέντρον τῆς.

2. Συμμετρία πρὸς ἄξονα

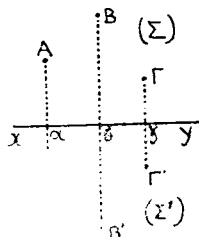
154. Ὅρισμοί. Ἐστω μία ὠρισμένη εὐθεῖα xy (Σχ. 122) καὶ ἓνα τυχὸν σημεῖον A . Ἀπὸ τὸ A φέρομεν τὴν κάθετον Aa ἐπὶ τὴν xy καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεώς της λαμβάνομεν ἓνα τμήμα $aA'=Aa$. Τὸ σημεῖον A' λέγεται **συμμετρικὸν** τοῦ σημείου A πρὸς τὴν εὐθεῖαν xy .

Ἀντιστρόφως, τὸ A' εἶναι συμμετρικὸν τοῦ A πρὸς τὴν xy . Ὡστε :

Δύο σημεῖα A καὶ A' λέγονται συμμετρικά πρὸς μίαν εὐθεῖαν xy , ἐὰν ἡ xy εἶναι μεσοκάθετος τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος AA' .

Ἡ εὐθεῖα xy λέγεται **ἄξων συμμετρίας**.

Δύο σχήματα (Σ) καὶ (Σ') εἶναι συμμετρικά πρὸς ἄξονα, ὅταν τὸ συμμετρικὸν τυχόντος σημείου τοῦ σχήματος (Σ) κεῖται ἐπὶ τοῦ σχήματος (Σ') καὶ ἀντιστρόφως.



Σχ. 122.

Τὸ συμμετρικὸν σχῆμα ἑνὸς σχήματος $AB\Gamma$. . . πρὸς ἄξονα συμμετρίας xy εὐρίσκεται, ἂν κατασκευάσωμεν τὰ συμμετρικὰ A', B', Γ', \dots τῶν σημείων A, B, Γ .

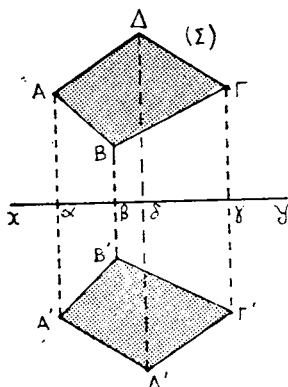
155. Θεώρημα. Δύο σχήματα συμμετρικὰ πρὸς ἄξονα συμμετρίας, εἶναι ἴσα.

Ἐπίσημοι: Ἐστώσαν τὰ συμμετρικὰ σχήματα $AB\Gamma\Delta$ καὶ $A'B'\Gamma'\Delta'$ (Σχ. 123) πρὸς ἄξονα συμμετρίας xy .

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ σχήματα αὐτὰ εἶναι ἴσα.

Ἀπόδειξις: Ἐὰν περιστρέψωμεν τὸ ἡμιεπίπεδον Axy περὶ τὴν xy , μέχρις ὅτου πέσῃ ἐπὶ τοῦ ἡμιεπιπέδου $A'xy$, τότε ἡ aA θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς aA' , διότι καὶ αἱ δύο εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν xy εἰς τὸ σημεῖον a , τὸ δὲ A θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ A' , διότι εἶναι $Aa = A'a'$.

Ὁμοίως τὰ σημεῖα B, Γ, Δ τοῦ σχήματος $AB\Gamma\Delta$ θὰ πέσουν ἐπὶ τῶν συμμετρικῶν τῶν σημείων B', Γ', Δ' τοῦ σχήματος $A'B'\Gamma'\Delta'$. Ὅστε κάθε σημεῖον τοῦ



Σχ. 123.

σχήματος $AB\Gamma\Delta$ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ συμμετρικοῦ τοῦ σημείου τοῦ σχήματος $A'B'\Gamma'\Delta'$ καὶ ἐπομένως τὰ δύο αὐτὰ σχήματα εἶναι ἴσα.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: Δύο σχήματα συμμετρικὰ. . .

156. Πορίσματα. 1. Τὸ συμμετρικὸν σχῆμα ἑνὸς εὐθύγραμμου τμήματος, πρὸς ἄξονα συμμετρίας, εἶναι εὐθύγραμμον τμήμα ἴσον πρὸς τὸ δοθέν.

Πράγματι ὅπως ἐδείχθη ἀνωτέρω τὸ εὐθύγραμμον τμήμα AB ἐφαρμόζει ἐπὶ τοῦ συμμετρικοῦ τοῦ τμήματος $A'B'$, ἥτοι εἶναι $AB = A'B'$.

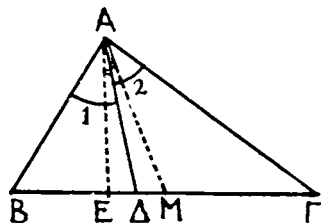
2. Τὸ συμμετρικὸν σχῆμα μιᾶς γωνίας, πρὸς ἄξονα συμμετρίας εἶναι μία γωνία ἴση πρὸς τὴν δοθεῖσαν.

157. Ἄξων συμμετρίας ἑνὸς σχήματος. Λέγομεν, ὅτι ἓνα σχῆμα ἔχει ἄξονα συμμετρίας, ὅταν τὰ σημεῖα του εἶναι ἀνὰ δύο συμμετρικὰ πρὸς τὸν ἄξονα αὐτόν.

Παραδείγματα: 1. Ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ τριγώνου.

2. Ἡ μεσοκάθετος ἑνὸς εὐθύγραμμου τμήματος εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ εὐθύγραμμου αὐτοῦ τμήματος.

158. Συμμετροδιάμεσος ἑνὸς τριγώνου. Ἐστω $AB\Gamma$ ἓνα τρίγωνον, AD ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας A καὶ AM ἡ διάμεσος, ἡ ἀγομένη ἐκ τῆς κορυφῆς A . Ἐὰν ἡ AE εἶναι συμμετρικὴ τῆς διαμέσου AM πρὸς ἄξονα συμμετρίας τὴν διχοτόμον AD , ἡ AE λέγεται **συμμετροδιάμεσος** τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$.



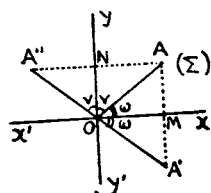
Σχ. 124.

Εἶναι φανερόν, ὅτι κάθε τρίγωνον ἔχει τρεῖς συμμετροδιαμέσους. Ὡστε :

Συμμετροδιάμεσος ἑνὸς τριγώνου λέγεται ἡ εὐθεῖα, ἡ συμμετρικὴ τῆς διαμέσου τοῦ τριγώνου πρὸς ἄξονα συμμετρίας τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας, τὴν ἀγομένην ἐκ τῆς αὐτῆς κορυφῆς.

159. Θεώρημα. Ὅταν ἓνα σχῆμα ἔχη δύο ἄξονας συμμετρίας καθέτους μεταξύ των, θὰ ἔχη καὶ ἓνα κέντρον συμμετρίας, τὸ συμμεῖον τῆς τομῆς τῶν ἀξόνων.

Ἐπίδειξις: Ἐστώσαν $x'x$ καὶ $y'y$ (Σχ. 125) δύο ἄξονες συμμετρίας, οἱ ὁποῖοι τέμνονται καθέτως εἰς τὸ σημεῖον O .



Σχ. 125.

Ἐστω A τυχὸν σημεῖον ἑνὸς σχήματος (Σ) , A' τὸ συμμετρικόν του, πρὸς τὸν ἄξονα $x'x$ καὶ A'' τὸ συμμετρικὸν τοῦ A πρὸς τὸν ἄξονα $y'y$.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ σημεῖα A' καὶ A'' εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὸ σημεῖον O .

Ἀπόδειξις: Φέρομεν τὰς εὐθείας OA , OA' καὶ OA'' .

Ἐπειδὴ ἡ Ox εἶναι μεσοκάθετος τῆς AA' , θὰ εἶναι $OA=OA'$ (1) καὶ αἱ γωνίαι ω θὰ εἶναι ἴσαι.

Ὅμοίως θὰ εἶναι $OA=OA''$ (2) καὶ $\widehat{v}=\widehat{v}$.

Ἀλλὰ $x\widehat{Oy}=1$ ὁρθ. ἢ $\widehat{\omega}+\widehat{v}=1$ ὁρθ. ἢ $2\widehat{\omega}+2\widehat{v}=2$ ὁρθ.

$$\text{ἢ } A\widehat{OA}+A\widehat{OA''}=2 \text{ ὁρθ.}$$

Ἐπειδὴ αἱ ἐφεξῆς γωνίαι $A'OA$ καὶ AOA'' εἶναι παραπληρωματικάι, αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ τῶν OA' καὶ OA'' θὰ κείνται ἐπ' εὐθείας, ἥτοι ἡ γραμμὴ $A'OA''$ εἶναι εὐθεῖα.

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι $OA'=OA''$ ἐπομένως τὰ σημεῖα A' καὶ A'' εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὸ σημεῖον O .

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: Ὅταν ἓνα σχῆμα. . .

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄.

ΕΥΘΕΙΑΙ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΙ

1. Γενικότητες

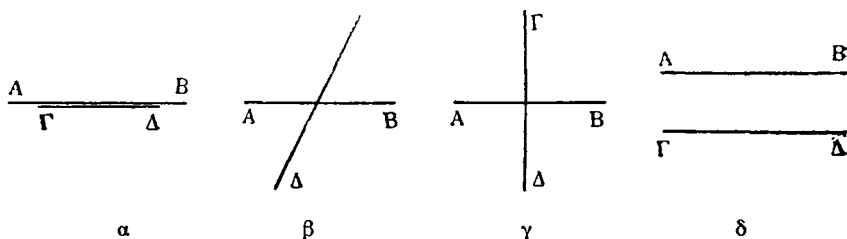
160. Σχετικά θέσεις δύο ευθειών. Ευθείαι παράλληλοι.

Δύο ευθείαι AB και $\Gamma\Delta$, αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου δύνανται νὰ καταλάβουν τὰς κάτωθι θέσεις :

1ον. Νὰ *συμπίπτουν* (Σχ. 126α).

2ον. Νὰ *τέμνονται*. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ μία ευθεία εἶναι πλαγία πρὸς τὴν ἄλλην (Σχ. 126β) ἢ εἶναι κάθετος πρὸς τὴν ἄλλην (Σχ. 126γ).

3ον. Νὰ *μὴ συναντῶνται*, ὅσονδήποτε καὶ ἂν προεκταθοῦν (Σχ. 126δ).



Σχ. 126.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν, ὅτι αἱ ευθείαι αὐταὶ εἶναι **παράλληλοι**. Ὡστε :

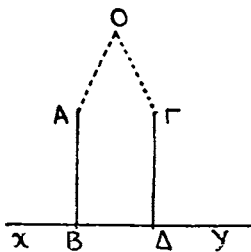
Δύο ευθείαι λέγονται **παράλληλοι**, ὅταν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ δὲν συναντῶνται, ὅσον καὶ ἂν προεκταθοῦν.

Διὰ νὰ δηλώσωμεν, ὅτι ἡ ευθεία AB εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$ (Σχ. 126δ) γράφομεν: $AB \parallel \Gamma\Delta$ καὶ ἀπαγγέλλομεν: ἡ AB εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$.

Τὸ κατωτέρω θεώρημα ἀποδεικνύει τὴν ὕπαρξιν παραλλήλων ευθειῶν.

161. Θεώρημα. Δύο ευθείαι, κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν ευθείαν, εἶναι παράλληλοι.

Ὑπόθεσις: Ἐστωσαν αἱ εὐθεῖαι AB καὶ $\Gamma\Delta$ (Σχ. 127), αἱ ὁποῖαι εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν xy καὶ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου (τοῦ ἐπιπέδου τοῦ σχήματος).



Σχ. 127.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ AB καὶ $\Gamma\Delta$ εἶναι παράλληλοι.

Ἀπόδειξις: Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι AB καὶ $\Gamma\Delta$ δὲν ἦσαν παράλληλοι, τότε, προεκτεινόμενοι,

θὰ ἐτέμνοντο εἰς ἓνα σημεῖον O . Ἀλλὰ τότε θὰ εἴχομεν ἀπὸ τὸ σημεῖον O δύο κάθετους, τὰς OAB καὶ $O\Gamma\Delta$ ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν xy , τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον (§ 69) ὥστε αἱ εὐθεῖαι AB καὶ $\Gamma\Delta$ δὲν συναντῶνται καὶ ἐπειδὴ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, εἶναι παράλληλοι.

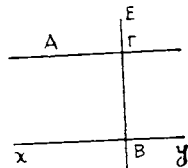
Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Δύο εὐθεῖαι, κάθετοι. . . .**

162. Θεώρημα. Ἀπὸ ἓνα σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς εὐθείας, δυνάμεθα νὰ φέρωμεν μίαν παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν αὐτήν.

Ὑπόθεσις: Ἐστω A ἓνα τυχὸν σημεῖον (Σχ. 128), τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τῆς εὐθείας xy .

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἀπὸ τὸ A δυνάμεθα νὰ φέρωμεν μίαν παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν xy .

Ἀπόδειξις: Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον B τῆς xy φέρομεν τὴν BE κάθετον ἐπὶ τὴν xy . Ἐπειτα ἀπὸ τὸ A φέρομεν τὴν AG κάθετον ἐπὶ τὴν BE . Αἱ εὐθεῖαι AG καὶ xy εἶναι παράλληλοι, διότι εἶναι κάθετοι, ἐκ κατασκευῆς, ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν BE (§ 161).



Σχ. 128.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Ἀπὸ ἓνα σημεῖον. . . .**

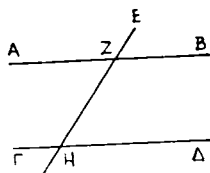
163. Αἴτημα τοῦ Εὐκλείδου. Ἀπὸ ἓνα σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς εὐθείας, ἄγεται μία καὶ μόνη παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν αὐτήν (*).

(*) Εἶναι ἀδύνατον νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι ἡ παράλληλος αὐτὴ εἶναι ἡ μόνη, τὴν ὁποίαν δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἀπὸ τὸ σημεῖον A πρὸς τὴν εὐθεῖαν xy . Αὐτὴ ἡ πρότασις, ἡ ὁποία δὲν εἶναι καθόλου προφανῆς καὶ ἡ ὁποία ἔχει ἐπα-

164. Πόρισμα 1ον. Ἐὰν μία εὐθεΐα συναντᾷ μιαν ἐκ δύο παραλλήλων, θὰ συναντᾷ καὶ τὴν ἄλλην.

Ῥπόθεσις: Ἐστῶσαν αἱ παράλληλοι εὐθεΐαι AB καὶ $\Gamma\Delta$ (Σχ. 129), καὶ EZ μία εὐθεΐα, ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν AB .

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ EZ ,



Σχ. 129.

προεκτεινομένη, συναντᾷ καὶ τὴν $\Gamma\Delta$.

Ἀπόδειξις: Ἐὰν ἡ EZ δὲν συνήντα τὴν $\Gamma\Delta$, θὰ ἦτο παράλληλος πρὸς αὐτήν· ἀλλὰ τότε θὰ εἶχομεν ἀπὸ τὸ σημεῖον Z δύο παραλλήλους πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$, τὰς ZB καὶ ZE , τὸ ὁποῖον ἀντίκειται πρὸς τὸ αἴτημα τοῦ Εὐκλείδου· ὥστε ἡ EZ συναντᾷ τὴν $\Gamma\Delta$.

Ῥπόθ.	$AB \parallel \Gamma\Delta$ EZ συναντᾷ τὴν AB
Συμπ.	EZ συναντᾷ τὴν $\Gamma\Delta$

165. Πόρισμα 2ον. Δύο εὐθεΐαι παράλληλοι πρὸς τρίτην εἶναι καὶ μεταξύ των παράλληλοι.

Ῥπόθεσις: Ἐστῶσαν αἱ εὐθεΐαι AB καὶ $\Gamma\Delta$ (Σχ. 130), αἱ ὁποῖαι εἶναι παράλληλοι ἐξ ὑποθέσεως πρὸς τὴν EZ .

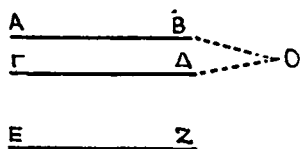
Συμπέρασμα:

Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ AB καὶ $\Gamma\Delta$ εἶ-

ναι παράλληλοι μεταξύ των.

Ἀπόδειξις: Ἐὰν αἱ εὐθεΐαι AB καὶ

$\Gamma\Delta$ δὲν ἦσαν παράλληλοι, τότε, προεκτεινόμεναι, θὰ ἐτέμοντο εἰς ἓνα σημεῖον O . Ἀλλὰ τότε θὰ ἦγοντο ἀπὸ τὸ σημεῖον O δύο παράλληλοι,



Σχ. 130.

Ῥπόθ.	$AB \parallel EZ$ $\Gamma\Delta \parallel EZ$
Συμπ.	$AB \parallel \Gamma\Delta$

ληφθευθῆ διὰ τοῦ πειράματος, εἶναι ἓνα αἴτημα⁽¹⁾, τὸ ὁποῖον τὸ πρῶτον διευπλώθη ὑπὸ τοῦ Εὐκλείδου.

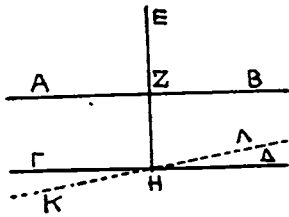
Καίτοι τὸ αἴτημα τοῦτο ἔχει ἐπιβεβαιωθῆ διὰ τῶν πλέον ἀκριβῶν μετρήσεων, ὅλαι αἱ γεγόμεναι ἀπόπειραι διὰ νὰ τὸ ἀποδείξουν ἀπέβησαν μάταιαι. Τουναντίον ὁ Ρῶσος Lobatchefski κατὰ τὸ 1826 καὶ ὁ Βολγαί κατὰ τὸ 1932 ἀνέπτυξαν μίαν νέαν γεωμετρίαν, ἡ ὁποία λέγεται «μὴ Εὐκλείδειος γεωμετρία» μὴ παραδεχθέντες τὸ αἴτημα τοῦ Εὐκλείδου. Ὅσον παράδοξα καὶ ἐὰν εἶναι τὰ οὕτω ἐπιτευχθέντα ἀποτελέσματα δὲν εὐρέθη κανεῖς, ὁ ὁποῖος νὰ δυνηθῆ νὰ θέσῃ ὡς προφανῆ διὰ τοῦ συλλογισμοῦ τὴν πρότασιν αὐτήν. Ὁ Henri Poincaré κατὰ τὸ 1892 ἀπέδειξεν, ὅτι ἡ ἀπόδειξις τοῦ αἰτήματος τοῦ Εὐκλείδου ἦτο ἀδύνατος.

(1) Αἴτημα παλαιότερον ἐκαλεῖτο κάθε πρότασις, τὴν ὁποῖαν ἐδεχόμεθα, ὡς ἀληθῆ. Σήμερον αἱ λέξεις: ἀξίωμα καὶ αἴτημα ἔχουν τὴν αὐτὴν σημασίαν: εἶναι πρότασις, τὰς ὁποίας δεχόμεθα ὡς ἀληθεῖς.

αί ΟΒΑ και ΟΔΓ πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΕΖ, τὸ ὁποῖον ἀντιβαίνει εἰς τὸ αἴτημα τοῦ Εὐκλείδου. Ὡστε αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι.

166. Θεώρημα. Ὅταν δύο εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι, τότε, κάθετος ἐπὶ τὴν μίαν ἐξ αὐτῶν εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ἄλλην.

Ἐπίπεδοι: Ἐστωσαν αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ (Σχ. 131)



Σχ. 131.

καὶ ΕΖ μία τρίτη εὐθεῖα, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ.

Συμπέρασμα:

Ἐπίπεδοι:	ΑΒ // ΓΔ ΕΖ ⊥ ΑΒ
Συμπ.	ΕΖ ⊥ ΓΔ

Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι ἡ ΕΖ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΓΔ.

Ἀπόδειξις: Ἐν πρώτοις ἡ ΕΖ, προεκτεινομένη, συναντᾷ τὴν ΓΔ εἰς ἓνα σημεῖον Η (§ 164).

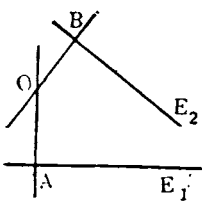
Λέγομεν τώρα, ὅτι ἡ ΕΗ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΓΔ.

Ἐὰν ἡ ΕΗ δὲν ἦτο κάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ, τότε θὰ ἦτο κάθετος ἐπὶ μίαν ἄλλην εὐθεῖαν, ἔστω τὴν ΚΗΛ, εἰς τὸ σημεῖον Η. Ἀλλὰ τότε ἡ ΚΗΛ, θὰ ἦτο παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ, ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΕΗ (§ 161). Θὰ εἴχομεν λοιπὸν ἀπὸ τὸ σημεῖον Η δύο παράλληλους, τὰς ΓΗΔ καὶ ΚΗΛ, πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΑΒ, τὸ ὁποῖον ἀντιβαίνει εἰς τὸ αἴτημα τοῦ Εὐκλείδου. Ὡστε ἡ ΕΗ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ.

Ἐδείχθη λοιπὸν, ὅτι: Ὅταν δύο εὐθεῖαι. . . .

167. Θεώρημα. Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνονται, θὰ τέμνονται ἐπίσης καὶ αἱ κάθετοι πρὸς αὐτάς.

Ἐπίπεδοι: Ἐστωσαν εὐθεῖαι ΟΑ καὶ ΟΒ (Σχ. 132), αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ Ο καὶ ἔστω ὅτι ἡ εὐθεῖα Ε₁ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΑ εἰς τὸ Α καὶ ἡ εὐθεῖα Ε₂ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΒ εἰς τὸ Β.



Σχ. 132.

Συμπέρασμα:

Ἐπίπεδοι:	ΟΑ καὶ ΟΒ τέμν. Ε ₁ ⊥ ΟΑ Ε ₂ ⊥ ΟΒ
Συμπ.	Ε ₁ καὶ Ε ₂ τέμν.

Θὰ δεῖξωμεν ὅτι αἱ Ε₁ καὶ Ε₂ τέμνονται.

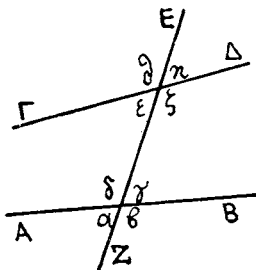
Ἀπόδειξις: Ἐὰν αἱ Ε₁ καὶ Ε₂ δὲν ἐτέμνοντο, θὰ ἦσαν παράλληλοι. Ἀλλὰ τότε ἡ ΟΑ, ὡς κάθετος ἐξ ὑποθέσεως ἐπὶ τὴν Ε₁, θὰ

ἦτο κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλόν τῆς E_2 ; ἀλλὰ ἡ E_2 εἶναι ἐξ ὑποθέσεως, κάθετος ἐπὶ τὴν OB . Θὰ εἴχομεν λοιπὸν ἀπὸ τὸ σημεῖον O δύο κάθετους, τὰς OA καὶ OB , ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν E_2 , τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον ὥστε ἀναγκαστικῶς αἱ E_1 καὶ E_2 θὰ τέμνονται.

Ἐδείχθη λοιπὸν, ὅτι: **Ἐὰν δύο εὐθεῖαι. . .**

2. Γωνίαι σχηματιζόμεναι ὑπὸ δύο παραλλήλων καὶ μιᾶς τεμνούσης

168. Ὅρισμοί. Ὄταν δύο εὐθεῖαι AB καὶ $\Gamma\Delta$ (Σχ. 133) τέμνονται ὑπὸ τρίτης EZ , ὠρισμένα ζεύγη τῶν σχηματιζομένων ὀκτὼ γωνιῶν $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta, \eta, \theta$, λαμβάνουν ἰδιαιτέρα ὀνόματα:



Σχ. 133.

Αἱ γωνίαι δ καὶ ζ , αἱ ὁποῖαι κεῖνται μεταξύ τῶν εὐθειῶν AB καὶ $\Gamma\Delta$ καὶ ἑκατέρωθεν τῆς τεμνούσης EZ , λέγονται **ἐντὸς ἐναλλάξ γωνίαι**.

Ἐντὸς ἐναλλάξ γωνίαι εἶναι καὶ αἱ γωνίαι γ καὶ ϵ .

Αἱ γωνίαι α καὶ η , αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἔκτος τῶν εὐθειῶν AB καὶ $\Gamma\Delta$ καὶ

ἑκατέρωθεν τῆς τεμνούσης EZ λέγονται **ἐκτὸς ἐναλλάξ γωνίαι**.

Ἐκτὸς ἐναλλάξ γωνίαι εἶναι καὶ αἱ β καὶ θ .

Αἱ γωνίαι δ καὶ θ , αἱ ὁποῖαι κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς τεμνούσης EZ καὶ ἡ μία κεῖται μεταξύ τῶν εὐθειῶν AB καὶ $\Gamma\Delta$, ἡ δὲ ἄλλη ἔκτος αὐτῶν, λέγονται **ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι**. Ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι εἶναι καὶ αἱ γ καὶ η , ἐπίσης αἱ ϵ καὶ α , καθὼς καὶ αἱ ζ καὶ β .

Αἱ γωνίαι δ καὶ ϵ , αἱ ὁποῖαι κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς τεμνούσης EZ καὶ μεταξύ τῶν εὐθειῶν AB καὶ $\Gamma\Delta$, λέγονται **ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι**.

Ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι εἶναι καὶ αἱ γ καὶ ζ .

Αἱ γωνίαι α καὶ θ , αἱ ὁποῖαι κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς τεμνούσης καὶ ἔκτος τῶν εὐθειῶν AB καὶ $\Gamma\Delta$, λέγονται **ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι**.

Ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι εἶναι καὶ αἱ β καὶ η .

Ὄταν αἱ δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι, ὑπάρχουν μεταξύ τῶν σχηματιζομένων γωνιῶν μερικαὶ σχέσεις μεγέθους, αἱ ὁποῖαι περιλαμβάνονται εἰς τὸ κάτωθι θεώρημα.

169. Θεώρημα. "Όταν δύο παράλληλοι εὐθεῖαι τμηθοῦν ὑπὸ τρίτης εὐθείας :

1ον. Αἱ ἐντὸς ἐναλλάξ γωνίαι εἶναι ἴσαι.

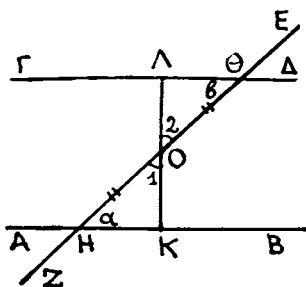
2ον. Αἱ ἐκτὸς ἐναλλάξ γωνίαι εἶναι ἴσαι.

3ον. Αἱ ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι εἶναι ἴσαι.

4ον. Αἱ ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι εἶναι παραπληρωματικάι.

5ον. Αἱ ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι εἶναι παραπληρωματικάι.

Ἐπίπεδος : Ἐστώσαν αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ (Σχ. 134), αἱ ὁποῖαι τέμνονται ὑπὸ τῆς ΕΖ εἰς τὰ σημεῖα Η καὶ Θ.



Σχ. 134.

Ἐπίπεδος.	ΑΒ//ΓΔ
Συμπ.	1ον. $\alpha = \beta$
	2ον. $\alpha = \eta$
	3ον. $\gamma = \eta$
	4ον. $\gamma + \zeta = 2$ ὀρθ.
	5ον. $\beta + \eta = 2$ ὀρθ.

Συμπέρασμα 1ον : Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι αἱ

ἐντὸς ἐναλλάξ γωνίαι α καὶ β εἶναι ἴσαι.

Ἀπόδειξις : Ἀπὸ τὸ μέσον Ο τῆς ΗΘ φέρομεν τὴν ΟΚ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ· αὕτη προεκτεινομένη θὰ τέμνη τὴν ΓΔ εἰς τὸ σημεῖον Λ καὶ θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΓΔ (§ 166).

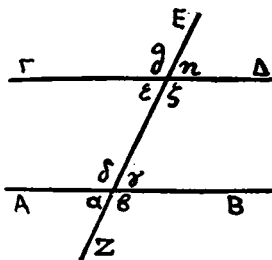
Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΚΗ καὶ ΟΛΘ ἔχουν τὰς ὑποτείνουσας τῶν ΟΗ καὶ ΟΘ ἴσας, ἕκ κατασκευῆς καὶ τὰς ὀξείας γωνίας Ο₁ καὶ Ο₂ ἴσας, ὡς κατὰ τὴν κορυφήν· ἄρα θὰ εἶναι ἴσα καὶ θὰ ἔχουν καὶ $\widehat{\alpha} = \widehat{\beta}$.

Αἱ δύο ἄλλαι ἐντὸς ἐναλλάξ γωνίαι εἶναι ἴσαι, ὡς παραπληρωματικάι τῶν ἴσων γωνιῶν α καὶ β .

Συμπέρασμα 2ον : Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι αἱ ἐκτὸς ἐναλλάξ γωνίαι α καὶ η (Σχ. 135) εἶναι ἴσαι.

Ἀπόδειξις : Αἱ γωνίαι α καὶ γ εἶναι ἴσαι, ὡς κατὰ κορυφήν· ὁμοίως καὶ αἱ ϵ καὶ η εἶναι ἴσαι, ὡς κατὰ κορυφήν.

Ἐπειδὴ αἱ γ καὶ ϵ εἶναι ἴσαι, ὡς ἐντὸς ἐναλλάξ, (ὅπως ἐδείχθη εἰς τὴν 1ην περίπτωσιν) καὶ αἱ ἴσαι πρὸς αὐτὰς α καὶ η , θὰ εἶναι ἴσαι.



Σχ. 135.

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι αἱ γωνίαι β καὶ θ εἶναι ἴσαι.

Συμπέρασμα 3ον : Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι αἱ ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι γ καὶ η (Σχ. 135) εἶναι ἴσαι :

Ἀπόδειξις : Αἱ γωνίαι γ καὶ ε εἶναι ἴσαι, ὡς ἐντὸς ἐναλλάξ (περιπτ. 1η) ἄλλὰ $\epsilon = \eta$, ὡς κατὰ κορυφήν ἄρα θὰ εἶναι καὶ $\gamma = \eta$.

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι $\delta = \theta$, $\epsilon = \alpha$, $\zeta = \beta$.

Συμπέρασμα 4ον : Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι αἱ ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι γ καὶ ζ (Σχ. 135) εἶναι παραπληρωματικάι.

Ἀπόδειξις : Ἡ ζ εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς ε, διότι εἶναι ἐφεξῆς, τῶν ὁποίων αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ κεῖνται ἐπ' εὐθείας ἄλλὰ $\epsilon = \gamma$, ὡς ἐντὸς ἐναλλάξ ἄρα αἱ ζ καὶ γ εἶναι παραπληρωματικάι δηλ. εἶναι $\gamma + \zeta = 2$ ὀρθαί ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι $\delta + \epsilon = 2$ ὀρθαί.

Συμπέρασμα 5ον : Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι αἱ ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι β καὶ η (Σχ. 135) εἶναι παραπληρωματικάι.

Ἀπόδειξις : Ἡ γωνία β εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς γ, διότι εἶναι ἐφεξῆς, τῶν ὁποίων αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ κεῖνται ἐπ' εὐθείας ἄλλὰ $\gamma = \eta$, ὡς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἄρα ἡ β θὰ εἶναι παραπληρωματικὴ καὶ τῆς η δηλ. θὰ εἶναι $\beta + \eta = 2$ ὀρθαί.

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι $\alpha + \theta = 2$ ὀρθ.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι : *Ὅταν δύο παράλληλοι. . .*

170. Θεώρημα. (*Ἀντίστροφον*). *Δύο εὐθείαι εἶναι παράλληλοι, διὰν, τεμνόμεναι ὑπὸ τρίτης εὐθείας, σχηματίζουσι :*

1ον. Τὰς ἐντὸς ἐναλλάξ γωνίας ἴσας.

2ον. Τὰς ἐκτὸς ἐναλλάξ γωνίας ἴσας.

3ον. Τὰς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας ἴσας.

4ον. Τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας παραπληρωματικάς.

5ον. Τὰς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας παραπληρωματικάς.

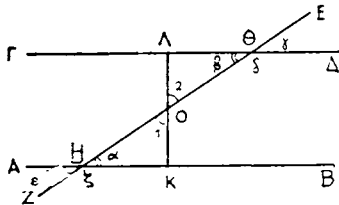
Ἔστωσαν αἱ εὐθεῖαι AB καὶ ΓΔ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται ὑπὸ τῆς EZ εἰς τὰ σημεῖα Η καὶ Θ (Σχ. 136).

1ον. Ὑπόθεσις : Ἔστω, ὅτι αἱ ἐντὸς ἐναλλάξ γωνίαι α καὶ β εἶναι ἴσαι.

Συμπέρασμα : Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι αἱ εὐθεῖαι AB καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι.

Ἀπόδειξις : Ἀπὸ τὸ μέσον Ο τῆς ΗΘ φέρομεν τὴν ΚΛ κάθετον ἐπὶ τὴν AB, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΓΔ εἰς τὸ Λ. Τὰ σχηματισθέντα τρί-

γωνία OKH καὶ $OL\Theta$ ἔχουν: $OH=O\Theta$ ἐξ ὑποθέσεως, $\widehat{\alpha}=\widehat{\beta}$ ἐξ ὑποθέσεως καὶ $\widehat{O}_1=\widehat{O}_2$, ὡς κατὰ κορυφήν· ἄρα τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ἴσα· θὰ ἔχουν λοιπὸν καὶ $\widehat{K}=\widehat{\Lambda}$. Ἐπειδὴ ἡ γωνία K εἶναι ὀρθή, θὰ εἶναι ὀρθὴ καὶ ἡ ἴση πρὸς αὐτὴν γωνία Λ . Αἱ εὐθεΐαι AB καὶ $\Gamma\Delta$,



Σχ. 136.

ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν εὐθεΐαν $K\Lambda$, εἶναι παράλληλοι.

2ον. Ὑπόθεσις: Ἐστω, ὅτι αἱ ἐκτὸς ἐναλλάξ γωνίαι ϵ καὶ γ εἶναι ἴσαι.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ εὐθεΐαι AB καὶ $\Gamma\Delta$ εἶναι παράλληλοι.

Ἀπόδειξις: Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $\epsilon=\gamma$.

Ἄλλὰ $\epsilon=\alpha$ καὶ $\gamma=\beta$, ὡς κατὰ κορυφήν· ἄρα θὰ εἶναι καὶ $\alpha=\beta$.

Παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ εὐθεΐαι AB καὶ $\Gamma\Delta$, τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς EZ , σχηματίζουν τὰς ἐντὸς ἐναλλάξ γωνίας α καὶ β ἴσας. Ἄρα, ὡς ἐδείχθη εἰς τὴν 1ην περίπτωσιν, αἱ εὐθεΐαι AB καὶ $\Gamma\Delta$ εἶναι παράλληλοι.

3ον. Ὑπόθεσις: Ἐστω, ὅτι αἱ ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι α καὶ γ (Σχ. 136) εἶναι ἴσαι, δηλ. ὅτι εἶναι $\alpha=\gamma$.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ AB καὶ $\Gamma\Delta$ εἶναι παράλληλοι.

Ἀπόδειξις: Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $\alpha=\gamma$ · ἀλλὰ $\gamma=\beta$ · ἄρα $\alpha=\beta$.

Παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ εὐθεΐαι AB καὶ $\Gamma\Delta$, τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς EZ , σχηματίζουν τὰς ἐντὸς ἐναλλάξ γωνίας α καὶ β ἴσας· ἄρα, ὡς ἐδείχθη εἰς τὴν 1ην περίπτωσιν, αἱ AB καὶ $\Gamma\Delta$ εἶναι παράλληλοι.

4ον. Ὑπόθεσις: Ἐστω, ὅτι αἱ ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι α καὶ δ εἶναι παραπληρωματικαί, ἤτοι ὅτι $\alpha+\delta=2$ ὀρθαί.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ AB καὶ $\Gamma\Delta$ εἶναι παράλληλοι.

Ἀπόδειξις: Αἱ γωνίαι β καὶ δ εἶναι παραπληρωματικαί, ὡς ἐφεξῆς, τῶν ὁποίων αἱ μὴ κοινὰ πλευρὰ κείνται ἐπ' εὐθείας.

Ἄλλ' ἐξ ὑποθέσεως καὶ αἱ γωνίαι α καὶ δ εἶναι παραπληρωματικαί. Ἄρα αἱ γωνίαι β καὶ α εἶναι ἴσαι, διότι ἔχουν τὴν αὐτὴν παραπληρωματικὴν γωνίαν δ .

Ὑπόθ.	1ον. $\alpha=\beta$
	2ον. $\epsilon=\gamma$
Συμπ.	3ον. $\alpha=\gamma$
	4ον. $\alpha+\delta=2$ ὀρθ.
	5ον. $\zeta+\gamma=2$ ὀρθ.
AB//ΓΔ	

Παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ εὐθεΐαι AB καὶ $\Gamma\Delta$, τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς EZ , σχηματίζουν τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας α καὶ β ἴσας ἄρα, ὡς ἐδείχθη εἰς τὴν 1^{ην} περίπτωσιν. αἱ εὐθεΐαι AB καὶ $\Gamma\Delta$ εἶναι παράλληλοι.

5ον Ὑπόθεσις: Ἐστω, ὅτι αἱ ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνία ζ καὶ γ (Σχ. 136) εἶναι παραπληρωματικά.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ εὐθεΐαι AB καὶ $\Gamma\Delta$ εἶναι παράλληλοι.

Ἀπόδειξις: Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $\zeta + \gamma = 2$ ὀρθ. (1). Ἐπίσης εἶναι καὶ $\zeta + \alpha = 2$ ὀρθ. (2), διότι αἱ ζ καὶ α εἶναι ἐφεξῆς, τῶν ὁποίων αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ κείνται ἐπ' εὐθείας. Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι: $\zeta + \gamma = \zeta + \alpha$ ἢ $\gamma = \alpha$.

Ἄλλὰ $\gamma = \beta$, ὡς κατὰ κορυφήν ἄρα θὰ εἶναι καὶ $\beta = \alpha$.

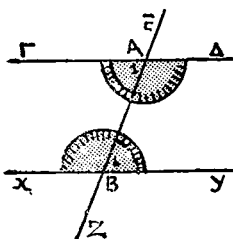
Παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ εὐθεΐαι AB καὶ $\Gamma\Delta$, τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς EZ , σχηματίζουν τὰς ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνίας α καὶ β ἴσας ἄρα αἱ εὐθεΐαι AB καὶ $\Gamma\Delta$ εἶναι παράλληλοι, ὅπως ἐδείχθη εἰς τὴν 1^{ην} περίπτωσιν.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Δύο εὐθεΐαι εἶναι παράλληλοι . . .**

3. Γραφικαὶ ἐφαρμογαὶ

171. Χάραξις παραλλήλων. Εἰς τὴν § 162 ἐδείξαμεν πῶς δυνάμεθα νὰ φέρωμεν μίαν εὐθεΐαν παράλληλον πρὸς δοθεῖσαν εὐθεΐαν, ἀπὸ δοθὲν σημεῖον, τὸ ὁποῖον κείται ἐκτὸς τῆς εὐθείας. Ἐκτὸς τοῦ τρόπου αὐτοῦ ὑπάρχουν καὶ ἄλλοι, οἱ ὁποῖοι πηγάζουν ἀπὸ τὰ προηγούμενα θεωρήματα.

1ον. Μὲ τὸ μοιρογνωμόνιον καὶ τὸν κανόνα. Ἐστω, ὅτι θέλομεν νὰ φέρωμεν ἀπὸ τὸ σημεῖον A (Σχ. 137), μίαν εὐθεΐαν παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεΐαν xy .



Σχ. 137.

Ἀπὸ τὸ σημεῖον A φέρομεν μίαν τυχούσαν εὐθεΐαν, ἣ ὁποία νὰ τέμνη τὴν xy , ἔστω εἰς ἓνα σημεῖον B . Κατασκευάζομεν ἔπειτα μὲ τὸ μοιρογνωμόνιον μίαν γωνίαν A_1 ἴσην μὲ τὴν γωνίαν B_1 .

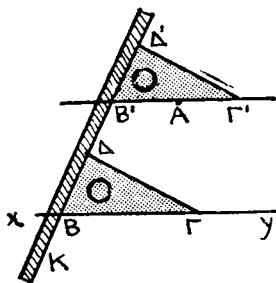
Ἡ πλευρὰ AG τῆς γωνίας A_1 εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν xy , διότι αἱ ἐντὸς ἐναλλὰξ γωνία B_1 καὶ A_1 εἶναι ἴσαι ἐκ κατασκευῆς.

2ον. Μὲ τὸν γνώμονα καὶ τὸν κανόνα. Ἐστω, ὅτι θέλομεν νὰ φέρωμεν ἀπὸ τὸ σημεῖον A μίαν εὐθεΐαν παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεΐαν xy (Σχ. 138).

Τοποθετοῦμεν τὸν γνώμονα εἰς τρόπον, ὥστε ἡ ὑποτείνουσά του

ΒΓ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς εὐθείας xy καὶ τὸν κανόνα Κ οὕτως, ὥστε μία ἀκμὴ του (κόψις) νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς καθέτου πλευρᾶς ΒΔ τοῦ γνώμονος.

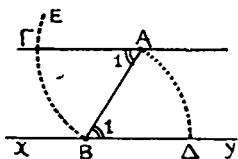
Ὅλοσθαινομεν ἔπειτα τὸν γνῶμονα ΒΓΔ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου, ἐπὶ τοῦ ὁποίου κεῖται ἡ xy καὶ κατὰ μῆκος τοῦ κανόνος μέχρως, ὅτου ἡ ὑποτείνουσα τοῦ γνῶμονος περάσῃ ἀπὸ τὸ σημεῖον Α. Χαράσσομεν ἔπειτα μὲ τὸ μολύβι ἢ μὲ ἄλλο μέσον, μίαν εὐθεῖαν Β'Γ' κατὰ μῆκος τῆς ὑποτείνουσας Β'Γ' τοῦ γνῶμονος καὶ ἔχομεν τὴν ζητούμενην παράλληλον· διότι αἱ ὑποτείνουσαι ΒΓ καὶ Β'Γ' τοῦ γνῶμονος σχηματίζουν μὲ τὸν κανόνα Κ τὰς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας Β καὶ Β' ἴσας.



Σχ. 138.

172. Πρόβλημα. Ἀπὸ δοθὲν σημείου Α, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς δοθείσης εὐθείας xy , νὰ ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν xy .

Λύσις. Ἀπὸ τὸ δοθὲν σημεῖον Α φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν ΑΒ, τέμνουσαν τὴν xy .



Σχ. 139.

Ἐστὼ B_1 ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ ΑΒ μὲ τὴν xy . Μὲ κορυφὴν τὸ Α καὶ πλευρὰν τὴν ΑΒ κατασκευάζομεν μίαν γωνίαν ΒΑΓ ἴσην μὲ τὴν γωνίαν B_1 (§ 127).

Ἡ εὐθεῖα ΑΓ εἶναι ἡ ζητούμενη παράλληλος.

Πράγματι· ἡ ΑΓ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Α καὶ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν xy , διότι αἱ ἐντὸς ἐναλλάξ γωνίαι A_1 καὶ B_1 εἶναι ἴσαι ἐκ κατασκευῆς.

Ἀσκήσεις

99. (121). Κάθε εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν ἰσοσκελοῦς τριγώνου καὶ τέμνουσα τὰς ἴσας πλευράς του, ὀρίζει ἓνα δεύτερον τρίγωνον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσοσκελές.

100. (122). Δύο εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι. Φέρομεν τὰς εὐθεῖας ΑΔ καὶ ΒΓ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς ἓνα σημεῖον Ο. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὰ τρίγωνα ΟΑΒ καὶ ΟΓΔ ἔχουν τὰς γωνίας των ἴσας, μίαν πρὸς μίαν.

101. (123). Ἐάν ἀπὸ τυχόν σημείου τῆς διχοτόμου μιᾶς γωνίας ἀχθῇ εὐ-

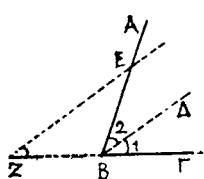
θεία παράλληλος πρὸς μίαν πλευρὰν τῆς γωνίας, τὸ προκύπτον τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές.

102. (124). Δίδεται μία γωνία $AB\Gamma$ · ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Z τῆς πλευρᾶς AB φέρομεν παράλληλον ZE πρὸς τὴν $B\Gamma$ καὶ κειμένην ἐντὸς τῆς γωνίας. Ἐπὶ τῆς ZE λαμβάνομεν τμήμα $ZE=ZB$. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεία BE εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας $AB\Gamma$.

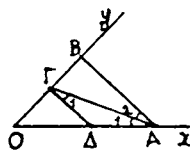
103. (125). Δίδεται ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$ · φέρομεν τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας A καὶ ἀπὸ τὸ B φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν διχοτόμον, ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν προέκτασιν τῆς ΓA εἰς τὸ Δ . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον $BA\Delta$ εἶναι ἰσοσκελές.

104. (126). Δίδεται τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$, ὀρθογώνιον εἰς τὸ A · ἀπὸ τὴν κορυφὴν B φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν πλευρὰν AB κειμένην ἐκτὸς τοῦ τριγώνου καὶ ἐπὶ τῆς καθέτου αὐτῆς λαμβάνομεν τμήμα $BD=BG$. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεία $D\Gamma$ εἶναι διχοτόμος τῆς ἑσωτερικῆς ἢ ἔξωτερικῆς γωνίας Γ .

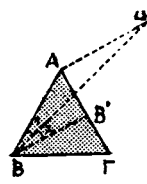
105. (127). Νὰ δειχθῇ, ὅτι μία εὐθεία παράλληλος πρὸς τὴν διχοτόμον μιᾶς γωνίας, τέμνει τὴν μίαν πλευρὰν καὶ τὴν προέκτασιν τῆς ἄλλης εἰς σημεία, τὰ ὁποία ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας.



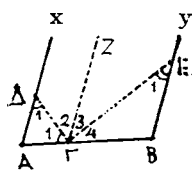
Σχ. ἀσκ. 105.



Σχ. ἀσκ. 106.



Σχ. ἀσκ. 107.



Σχ. ἀσκ. 108.

106. (128). Δίδεται μία γωνία xOy · ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Ox λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον A , ἀπὸ τὸ ὁποῖον φέρομεν τὴν κάθετον AB ἐπὶ τὴν Oy · φέρομεν τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας OAB , ἡ ὁποία τέμνει τὴν Oy εἰς τὸ Γ · ἀπὸ τὸ Γ φέρομεν τὴν $\Gamma\Delta$ κάθετον ἐπὶ τὴν Oy , ἡ ὁποία τέμνει τὴν Ox εἰς τὸ Δ . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον $\Gamma\Delta A$ εἶναι ἰσοσκελές.

107. (129). Ἀπὸ τὴν κορυφὴν A ἑνὸς ἰσοπλευροῦ τριγώνου $AB\Gamma$ φέρομεν τὴν κάθετον $A\Delta$ ἐπὶ τὴν πλευρὰν $A\Gamma$ καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν τμήμα $A\Delta=BG$. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεία $B\Delta$ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν, ἡ ὁποία σχηματίζεται ἀπὸ τὴν AB καὶ ἀπὸ τὸ ὕψος BB' τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$.

108. (130). Ἀπὸ τὰ ἄκρα ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος AB φέρομεν, πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ AB , δύο ἡμιευθείας παραλλήλους Ax καὶ By . Λαμβάνομεν ἐπὶ τοῦ AB τυχὸν σημεῖον Γ , ἐπὶ τῆς Ax ἓνα τμήμα $A\Delta=A\Gamma$ καὶ ἐπὶ τῆς By ἓνα τμήμα $BE=GB$. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία $\Delta\Gamma E$ εἶναι ὀρθή.

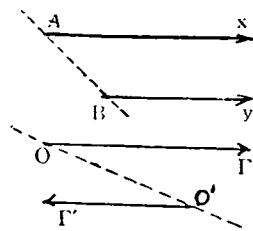
109. (131). Εἰς ἓνα ἰσοσκελές τρίγωνον $AB\Gamma$ φέρομεν τὸ ὕψος AH καὶ μίαν εὐθείαν παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν του, ἡ ὁποία τέμνει τὰς ἰσας πλευρὰς του εἰς τὰ σημεία M καὶ N . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\gammaων.NMH=\gammaων.MNH$ καὶ $\gammaων.AHM=\gammaων.AHN$.

4. Γωνίαι τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶναι παράλληλοι ἢ κάθετοι

173. Ὅρισμός. Θὰ λέγωμεν, ὅτι δύο ἡμιευθεῖαι ἔχουν τὴν αὐτὴν φορὰν, ὅταν κείνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας ἢ ὁποῖα συνδέει τὰς ἀρχάς των.

Ἐπίσης θὰ λέγωμεν, ὅτι δύο ἡμιευθεῖαι ἔχουν ἀντίθετον φορὰν, ὅταν κείνται ἐκατέρωθεν τῆς εὐθείας, ἢ ὁποῖα συνδέει τὰς ἀρχάς των.

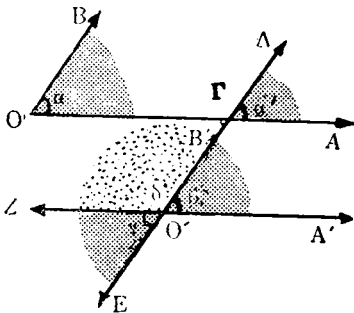
Π.χ. αἱ ἡμιευθεῖαι Ax καὶ By ἔχουν τὴν αὐτὴν φορὰν, ἐνῶ αἱ ἡμιευθεῖαι $OΓ$ καὶ $O'Γ'$ ἔχουν ἀντίθετον φορὰν.



Σχ. 140.

174. Θεώρημα. Δύο γωνίαι, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰς πλευράς των παραλλήλους, μίαν πρὸς μίαν εἶναι ἴσαι μὲν, ὅταν αἱ πλευραὶ των ἔχουν, ἀνὰ δύο, τὴν αὐτὴν φορὰν ἢ, ἀνὰ δύο, ἀντίθετον φορὰν· παραπληρωματικαὶ δέ, ὅταν δύο παράλληλοι πλευραὶ ἔχουν τὴν αὐτὴν φορὰν καὶ αἱ δύο ἄλλαι ἀντίθετον φορὰν.

1ον. Ὑπόθεσις: Ἐστωσαν αἱ γωνίαι $AOB = \alpha$ καὶ $A'O'B' = \beta$ (Σχ. 141), αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰς πλευράς των παραλλήλους, μίαν πρὸς μίαν, καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς.



Σχ. 141.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ γωνίαι α καὶ β εἶναι ἴσαι.

Ἀπόδειξις: Προεκτείνωμεν τὴν πλευρὰν $O'B'$ καὶ ἕστω Γ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῆς OA καὶ τῆς προεκτάσεως τῆς $O'B'$.

Αἱ γωνίαι β καὶ α' εἶναι ἴσαι, ὡς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν παραλλήλων $O'A'$ καὶ OA τεμνομένων ὑπὸ τῆς $O'\Delta$. Ἀλλὰ $\alpha' = \alpha$, ὡς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ

αὐτὰ μέρη τῶν παραλλήλων $O'\Delta$ καὶ OB τεμνομένων ὑπὸ τῆς OA' ἄρα θὰ εἶναι καὶ $\alpha = \beta$, ὡς ἴσαι πρὸς τὴν α' .

2ον. Ὑπόθεσις: Ἐστωσαν αἱ γωνίαι $AOB = \alpha$ καὶ $ZO'E = \gamma$ (Σχ. 141), αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰς πλευράς των παραλλήλους μίαν πρὸς μίαν καὶ μὲ ἀντιθέτους φορᾶς.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\widehat{\alpha} = \widehat{\gamma}$.

Ἀπόδειξις: Προεκτείνωμεν τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας O' πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς ἢ σχηματιζομένη γωνία β εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν γ ὡς κατὰ κορυφήν. Ἀλλὰ $\widehat{\beta} = \widehat{\alpha}$, διότι ἔχουν τὰς πλευρὰς των παραλλήλους καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς ἄρα θὰ εἶναι καὶ $\widehat{\alpha} = \widehat{\gamma}$.

3ον. Ὑπόθεσις: Ἐστώσαν αἱ γωνίαι $AOB = \alpha$ καὶ $ZO'B' = \delta$ (Σχ. 141), αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰς πλευρὰς των παραλλήλους μίαν πρὸς μίαν, ἀλλὰ αἱ μὲν πλευραὶ OB καὶ $O'B'$ ἔχουν τὴν αὐτὴν φορᾶν, αἱ δὲ πλευραὶ OA καὶ $O'Z$ ἔχουν ἀντίθετον φορᾶν.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ γωνίαι αὐταὶ εἶναι παραπληρωματικά· δηλ. ὅτι εἶναι $\widehat{\alpha} + \widehat{\delta} = 2$ ὄρθ.

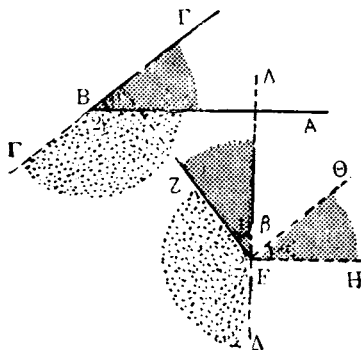
Ἀπόδειξις: Προεκτείνωμεν τὴν πλευρὰν ZO' πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς, μέχρις ἑνὸς σημείου A' . Αἱ γωνίαι δ καὶ β εἶναι παραπληρωματικά, ὡς ἐφεξῆς τῶν ὁποίων αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ κείνται ἐπ' εὐθείας· δηλ. εἶναι $\widehat{\delta} + \widehat{\beta} = 2$ ὄρθ. (1)

Ἀλλὰ $\beta = \alpha$, διότι ἔχουν τὰς πλευρὰς των παραλλήλους καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς. Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὴν γωνίαν β μὲ τὴν ἴσην τῆς γωνίαν α καὶ ἔχομεν $\widehat{\delta} + \widehat{\alpha} = 2$ ὄρθαι.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Δύο γωνίαι. . .**

175. Θεώρημα. Δύο γωνίαι, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰς πλευρὰς των καθέτους μίαν πρὸς μίαν εἶναι ἴσαι ἢ παραπληρωματικά. Εἶναι ἴσαι μὲν, ἐὰν καὶ αἱ δύο γωνίαι εἶναι ὀξεῖαι, ἢ ἀμβλεῖαι· παραπληρωματικά δέ, ἐὰν ἡ μία εἶναι ὀξεῖα καὶ ἡ ἄλλη ἀμβλεῖα.

1ον. Ὑπόθεσις: Ἐστώσαν αἱ ὀξεῖαι γωνίαι $AB\Gamma$ καὶ ΔEZ (Σχ. 142), αἱ ὁποῖαι ἔχουν: τὴν πλευρὰν



Σχ. 142.

Ὑπόθ.	$E\Delta \perp BA$ $EZ \perp B\Gamma$
Συμπ.	$\widehat{AB\Gamma} = \widehat{\Delta EZ}$

$E\Delta$ κάθετον ἐπὶ τὴν BA καὶ τὴν πλευρὰν EZ κάθετον ἐπὶ τὴν $B\Gamma$.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ γωνίαι αὐταὶ εἶναι ἴσαι· δηλ. ὅτι εἶναι $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{\Delta EZ}$.

Ἀπόδειξις: Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Εῖ τῆς γωνίας ΔΕΖ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΕΗ παράλληλον πρὸς τὴν ΒΑ καὶ μὲ τὴν αὐτὴν φορὰν καὶ τὴν ΕΘ παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ καὶ μὲ τὴν αὐτὴν φορὰν. Ἡ σχηματιζομένη γωνία ΗΕΘ=α εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν Β₁, διότι ἔχουν τὰς πλευράς των παραλλήλους καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς, ἔκ κατασκευῆς, δηλ. εἶναι $\widehat{B}_1 = \widehat{\alpha}$.

Ἐπειδὴ ἡ ΕΔ εἶναι κάθετος, ἔξ ὑποθέσεως, ἐπὶ τὴν ΒΑ θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλον ΕΗ τῆς ΒΑ· ἄρα ἡ γωνία ΔΕΗ εἶναι ὀρθή. Ὅμοίως ἡ γωνία ΖΕΘ εἶναι ὀρθή, (διότι ἡ ΖΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΕΘ, ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν παράλληλόν της ΒΓ). Ἄν ἀπὸ τὰς ἴσας ὀρθὰς γωνίας ΔΕΗ καὶ ΖΕΘ ἀφαιρέσωμεν τὴν κοινὴν γωνίαν β, αἱ ἀπομένουςαι γωνίαι Ε₁ καὶ α εἶναι ἴσαι· δηλ. εἶναι $\widehat{E}_1 = \widehat{\alpha}$ · ἀλλὰ $\widehat{\alpha} = \widehat{B}_1$, ὡς ἐδείχθη ἀνωτέρω· ἄρα θὰ εἶναι καὶ

$$\widehat{E}_1 = \widehat{B}_1 \quad \text{ἢ} \quad \widehat{\Delta EZ} = \widehat{AB\Gamma}.$$

2ον. Ὑπόθεσις: Ἐστῶσαν αἱ ἀμβλείαι γωνίαι Β₂ καὶ Ε₂ (Σχ. 142), αἱ ὀποῖαι ἔχουν τὰς πλευράς των καθέτους μίαν πρὸς μίαν.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν ὅτι $\widehat{B}_2 = \widehat{E}_2$.

Ἀπόδειξις: Αἱ γωνίαι Β₁ καὶ Β₂ εἶναι παραπληρωματικάι, ὡς ἐφεξῆς, τῶν ὀποίων αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ κεῖνται ἐπ' εὐθείας. Ὅμοίως, διὰ τὸν αὐτὸν λόγον, αἱ γωνίαι Ε₁ καὶ Ε₂ εἶναι παραπληρωματικάι.

Ἐπειδὴ $\widehat{B}_1 = \widehat{E}_1$, ὡς ἐδείχθη εἰς τὴν 1ην περίπτωσιν καὶ αἱ παραπληρωματικάι αὐτῶν θὰ εἶναι ἴσαι· δηλαδὴ θὰ εἶναι $\widehat{B}_2 = \widehat{E}_2$.

3ον. Ὑπόθεσις: Ἐστῶσαν αἱ γωνίαι ΑΒΓ καὶ Δ'ΕΖ, αἱ ὀποῖαι ἔχουν τὰς πλευράς των καθέτους μίαν πρὸς μίαν, ἀλλὰ ἡ μὲν ΑΒΓ εἶναι ὀξεῖα, ἡ δὲ Δ'ΕΖ εἶναι ἀμβλεία.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ γωνίαι αὐταὶ εἶναι παραπληρωματικάι.

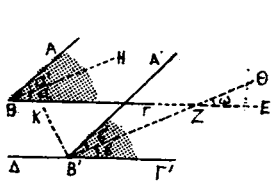
Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ ἡ \widehat{E}_2 , εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς \widehat{E}_1 καὶ ἡ \widehat{E}_1 εἶναι ἴση μὲ τὴν \widehat{B}_1 , ὡς ἐδείχθη προηγουμένως, ἔπεται, ὅτι αἱ \widehat{E}_2 καὶ Β₁ εἶναι παραπληρωματικάι.

Ἐδείχθη λοιπὸν, ὅτι: **Δύο γωνίαι, αἱ ὀποῖαι. . . .**

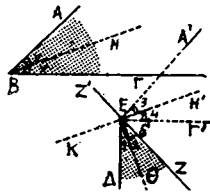
Ἀσκήσεις

Α' Ὁμάς. 110. (132). Ἐὰν δύο γωνίαι ἔχουν τὰς πλευράς των παραλλήλους, αἱ διχοτόμοι των εἶναι παράλληλοι ἢ κάθετοι.

111. (133). Δίδεται ἓνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον $AB\Gamma$. Ἐπὶ τῆς βάσεώς του $B\Gamma$ λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Δ καὶ ἀπὸ τὰ μέσα M καὶ N τῶν τμημάτων $B\Delta$ καὶ $\Delta\Gamma$ φέρομεν καθέτους ἐπὶ τὴν $B\Gamma$, αἱ ὁποῖαι τέμνουσι τὰς πλευράς AB καὶ $A\Gamma$ εἰς τὰ σημεῖα E καὶ Z . Νὰ δειχθῆ, ὅτι ἡ γωνία $E\Delta Z$ εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν $\angle A$.



Σχ. άσκ. 110.

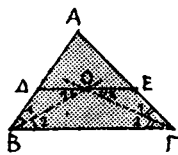


Σχ. άσκ. 112.

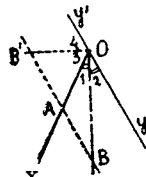
B' Όμάς. 112. (134). Ἐὰν δύο γωνίαι ἔχουσι τὰς πλευράς των καθέτους, μίαν πρὸς μίαν, αἱ διχοτόμοι των εἶναι κάθετοι ἢ παράλληλοι.

113. (135). Ἐὰν ἡ διχοτόμος ἐξωτερικῆς γωνίας τριγώνου εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην πλευράν του, τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἀντιστρόφως.

114. (136). Δίδεται ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$ καὶ O τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν του. Ἀπὸ τὸ O φέρομεν παράλληλον [πρὸς] τὴν $B\Gamma$, ἡ



Σχ. άσκ. 114.



Σχ. άσκ. 117.

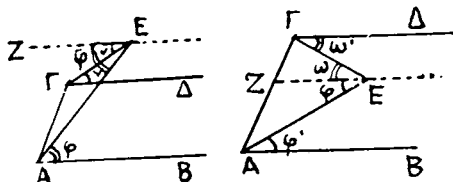
ὁποῖα τέμνει τὴν AB εἰς τὸ Δ καὶ τὴν $A\Gamma$ εἰς τὸ E . Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι $\Delta E = B\Delta + \Gamma E$.

115. (137). Ἀπὸ τυχὸν σημείου Δ τῆς βάσεως $B\Gamma$ ἰσοσκελοῦς τριγώνου $AB\Gamma$ φέρομεν τὴν ΔE κάθετον ἐπὶ τὴν πλευράν $A\Gamma$. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι ἡ γωνία A εἶναι διπλασία τῆς γωνίας $E\Delta\Gamma$.

116. (138). Δίδεται ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ὀρθογώνιον εἰς τὸ A . Προεκτείνομεν τὰς πλευράς AB καὶ $A\Gamma$ πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς A καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς BA τμήμα $AB' = A\Gamma$ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΓA ἓνα τμήμα $A\Gamma' = AB$. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι ἡ προέκτασις τοῦ ὕψους $A\Delta$ τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον E τῆς $B\Gamma'$.

117. (139). Δίδεται μία γωνία $\alpha O\gamma$ ἀπὸ τυχὸν σημείου A τῆς πλευράς $O\alpha$ φέρομεν εὐθείαν παράλληλον πρὸς τὴν $O\gamma$ καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς τμήμα $AB = OA$. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι ἡ εὐθεῖα OB εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας O ἢ τῆς παραπληρωματικῆς της, καθόσον τὸ τμήμα AB κεῖται ἐντὸς ἢ ἐκτὸς τῆς γωνίας A .

118. (140). Δύο παράλληλοι εὐθεΐαι AB καὶ ΓΔ κείνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς τεμνούσης ΑΓ, ἓνα δὲ σημεῖον Ε κείται ἐκτὸς τοῦ σχήματος ΒΑΓΔ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία ΑΕΓ ἰσοῦται μὲ τὴν διαφορὰν τῶν γωνιῶν ΕΑΒ καὶ ΕΓΔ.

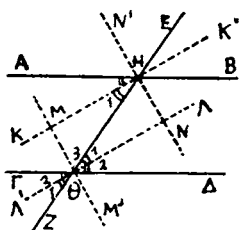


Σχ. ἀσκ. 118.

Σχ. ἀσκ. 119.

119. (141). Δύο παράλληλοι εὐθεΐαι AB καὶ ΓΔ κείνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς τεμνούσης ΑΓ, ἓνα δὲ σημεῖον Ε κείται ἐντὸς τοῦ σχήματος ΒΑΓΔ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία ΑΕΓ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ΕΑΒ καὶ ΕΓΔ.

120. (142). Δύο εὐθεΐαι παράλληλοι τέμνονται ὑπὸ τρίτης. Νὰ ἀποδειχθῇ : 1ον. ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν δύο ἐντὸς ἐναλλάξ γωνιῶν ἢ τῶν δύο ἐκτὸς ἐναλλάξ



Σχ. ἀσκ. 120.

γωνιῶν ἢ τῶν ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνιῶν εἶναι παράλληλοι. 2ον. ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνιῶν εἶναι κάθετοι.

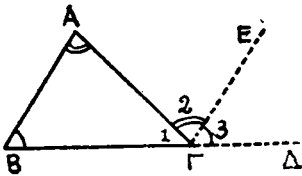
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄.

ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΤΩΝ ΓΩΝΙΩΝ ΕΝΟΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ,
ΕΝΟΣ ΠΟΛΥΓΩΝΟΥ

1. Ἐπίσυνα τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγῶνου,
ἑνὸς πολυγῶνου

176. Ἐσῶρημα. Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγῶνου εἶναι ἴσον μὲ δύο ὀρθὰς γωνίας.

Ἐπόθεσις: Ἐστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (Σχ. 143) καὶ Α, Β, Γ αἱ γωνίαι του.



Σχ. 143.

Ἐπόθε.	Α, Β, Γ γωνίαι τριγ. ΑΒΓ
Συμπ.	$\widehat{Α} + \widehat{Β} + \widehat{Γ} = 2$ ὀρθ.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$\widehat{Α} + \widehat{Β} + \widehat{Γ} = 2 \text{ ὀρθαί.}$$

Ἐπόδειξις: Προεκτείνωμεν τὴν πλευρὰν ΒΓ μέχρι ἑνὸς σημείου Δ' ἀπὸ τὸ σημεῖον Γ φέρομεν παράλληλον ΓΕ πρὸς τὴν ΒΑ.

Αἱ γωνίαι $\widehat{\Gamma}_1$, $\widehat{\Gamma}_2$, καὶ $\widehat{\Gamma}_3$ (§ 62, 2ον) ἔχουν ἄθροισμα ἴσον μὲ 2, ὀρθὰς γωνίας· ἤτοι θὰ εἶναι $\widehat{\Gamma}_1 + \widehat{\Gamma}_2 + \widehat{\Gamma}_3 = 2$ ὀρθ. (1)

Ἐλλὰ $\widehat{\Gamma}_2 = \widehat{Α}$, διότι εἶναι ἑντὸς ἑναλλάξ τῶν παραλλήλων ΑΒ καὶ ΓΕ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΓ.

Ἐπίσης εἶναι $\widehat{\Gamma}_3 = \widehat{Β}$, ὡς ἑντὸς ἑκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν παραλλήλων ΓΕ καὶ ΒΑ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΒΔ.

Ἐντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὰς γωνίας $\widehat{\Gamma}_2$ καὶ $\widehat{\Gamma}_3$ μὲ τὰς ἴσας τῶν γωνίας Α καὶ Β καὶ ἔχομεν

$$\widehat{\Gamma}_1 + \widehat{Α} + \widehat{Β} = 2 \text{ ὀρθ.} \quad \eta \quad \boxed{\widehat{Α} + \widehat{Β} + \widehat{Γ} = 2 \text{ ὀρθ.}}$$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν. . . .

Παρατήρησις : Ἀπὸ τὸ προηγούμενον θεώρημα συνάγομεν, ὅτι : ὅταν γνωρίζωμεν δύο γωνίας ἐνὸς τριγώνου, ἢ τρίτη γωνία του εἶναι καθωρισμένη : εἶναι παραπληρωματικὴ τοῦ ἄθροίσματος τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν.

Π.χ. Ἐάν εἰς ἓνα τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι $\widehat{Α}=47^\circ$ καὶ $\widehat{Β}=68^\circ$, ἢ γωνία Γ θὰ εἶναι ἴση μὲ $180^\circ - (47^\circ + 68^\circ) = 65^\circ$.

177. Περιόσματα : I. Ἐνα τρίγωνον δὲν δύναται νὰ ἔχη περισσοτέρας ἀπὸ μίαν ὀρθὴν γωνίαν ἢ ἀπὸ μίαν ἀμβλείαν γωνίαν.

Διότι, ἐάν συνέβαινε ἄλλως, τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν του θὰ ὑπερέβαινε τὰς δύο ὀρθὰς γωνίας πρᾶγμα, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον (§ 176).

II. Εἰς κάθε ὀρθογώνιον τρίγωνον, αἱ δύο ὀξεῖαι γωνίαι του εἶναι συμπληρωματικαί.

Πράγματι· ἀφοῦ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν γωνιῶν ἐνὸς τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ 2 ὀρθὰς καὶ ἢ μία ἀπὸ τὰς γωνίας του εἶναι ὀρθή, αἱ δύο ἄλλαι ὀξεῖαι γωνίαι του θὰ ἔχουν ἄθροισμα ἴσον μὲ 1 ὀρθὴν καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι συμπληρωματικαί.

III. Ἐάν δύο τρίγωνα ἔχουν δύο γωνίας ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, θὰ ἔχουν καὶ τὰς τρίτας γωνίας των ἴσας.

Διότι αἱ τρίται γωνίαι τῶν δύο τριγώνων εἶναι παραπληρωματικαὶ τοῦ αὐτοῦ ἄθροίσματος γωνιῶν· ἄρα θὰ εἶναι ἴσαι.

VI. Κάθε γωνία ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι ἴση μὲ $\frac{2}{3}$ τῆς ὀρθῆς ἢ μὲ $\frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$ ἢ μὲ $\frac{200}{3}$ βαθμούς.

Αἱ τρεῖς ἴσαι γωνίαι τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ἔχουν ἄθροισμα ἴσον μὲ 2 ὀρθὰς γωνίας ἢ μὲ 180° ἢ μὲ 200 βαθμούς· ἄρα ἢ μία ἀπὸ τὰς γωνίας αὐτὰς εἶναι ἴση μὲ 2 ὀρθ. : 3, δηλ. μὲ $\frac{2}{3}$ τῆς ὀρθῆς, ἢ μὲ $180^\circ : 3 = 60^\circ$, ἢ μὲ 200 βαθμ. : 3 = $\frac{200}{3}$ βαθ.

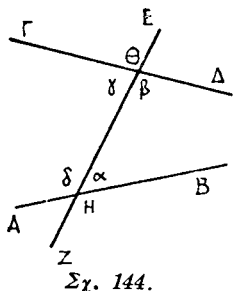
178. Ἰδιότης τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας τριγώνου. Εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα ἐδείχθη, ὅτι ἡ ἐξωτερικὴ γωνία ΑΓΔ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἐχωρίσθη, ὑπὸ τῆς εὐθείας ΓΕ, εἰς δύο γωνίας Γ, καὶ Γ₃, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι μὲ τὰς γωνίας Α καὶ Β τοῦ τριγώνου· ὥστε δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν, ὅτι :

1ον. Ἡ ἐξωτερικὴ γωνία ἐνὸς τριγώνου εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἐντὸς καὶ ἀπέναντι γωνιῶν τοῦ τριγώνου.

2ον. Ἡ ἐξωτερικὴ γωνία ἐνὸς τριγώνου εἶναι μεγαλυτέρα μιᾶς τῶν ἐντὸς καὶ ἀπέναντι γωνιῶν τοῦ τριγώνου.

179. Θεώρημα. Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνονται ὑπὸ τρίτης καὶ σχηματίζονται δύο ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα διαφέρει τῶν δύο ὀρθῶν γωνιῶν, αἱ εὐθεῖαι αὐταὶ τέμνονται καὶ τέμνονται πρὸς τὸ μέρος τῆς τεμνούσης δπου τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν εἶναι μικρότερον τῶν δύο ὀρθῶν.

1ον. Ὑπόθεσις: Ἐστωσαν αἱ εὐθεῖαι AB καὶ ΓΔ (Σχ. 144), αἱ ὁποῖαι τέμνονται ὑπὸ τῆς EZ εἰς τὰ ση-



Ἑπόθεσις.	1ον. $\alpha + \beta \neq 2$ ὀρθ. $\gamma + \delta \neq 2$ ὀρθ. 2ον. $\alpha + \beta < 2$ ὀρθ.
Συμπ.	1ον. Αἱ AB καὶ ΓΔ τέμνονται 2ον. Αἱ ἡμιευθεῖαι HB καὶ ΘB τέμνονται

μεῖα Η καὶ Θ ἀντιστοίχως· καὶ ἔστω, ὅτι

$$\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} < 2 \text{ ὀρθ.}$$

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ AB καὶ ΓΔ τέμνονται.

Ἀπόδειξις: Ἐὰν αἱ AB καὶ ΓΔ δὲν ἐτέμνοντο, θὰ ἦσαν παράλληλοι, ὁπότε θὰ εἶχομεν $\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} = 2$ ὀρθ., τὸ ὁποῖον ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσίν μας $\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} < 2$ ὀρθ.· ὥστε αἱ AB καὶ ΓΔ τέμνονται.

2ον. Ἐστω ὅτι εἶναι $\alpha + \beta < 2$ ὀρθ.· τότε θὰ εἶναι $\gamma + \delta > 2$ ὀρθ. Αἱ ἡμιευθεῖαι HA καὶ ΘΓ δὲν δύνανται νὰ τέμνονται, διότι τότε θὰ ἐσχηματίζετο ἓνα τρίγωνον, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του δ καὶ γ θὰ ἦτο μεγαλύτερον τῶν 2 ὀρθῶν γωνιῶν. Ἐπομένως θὰ τέμνονται αἱ ἡμιευθεῖαι HB καὶ ΘΔ.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: Ἐὰν δύο εὐθεῖαι. . .

180. Θεώρημα. Ἐὰν ἓνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ἔχη μιαν γωνίαν 30° , ἡ πλευρὰ, ἡ ὁποία κεῖται ἀπέναντι τῆς γωνίας αὐτῆς, εἶναι ἴση μὲ τὸ ἕμισυ τῆς ὑποτείνουσας.

Ὑπόθεσις: Ἐστω τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ABΓ (Σχ. 145), εἰς τὸ ὁποῖον ἡ γωνία Γ εἶναι ἴση μὲ 30° .

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ πλευρὰ AB εἶναι ἴση μὲ τὸ ἕμισυ τῆς ὑποτείνουσας ΒΓ.

Ἀπόδειξις: Προεκτείνωμεν τὴν πλευρὰν BA πρὸς τὸ μέρος τῆς

εἶναι 60° , ἢ ἄλλη ὀξεῖα γωνία τοῦ Γ θὰ εἶναι 30° , ὡς συμπληρωματική τῆς γωνίας B .

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: *Ἐὰν ἓνα ὀρθογώνιον τρίγωνον. . .*

182. Θεώρημα. *Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς πολυγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει n πλευράς, εἶναι ἴσον μὲ $2n-4$ ὀρθὰς γωνίας.*

Ἐστω τὸ πολύγωνον $AB\Gamma\Delta E$ (Σχ. 146). Ἀπὸ μίαν κορυφήν του, ἔστω τὴν A , φέρομεν τὰς διαγωνίους AG , AD . Χωρίζεται οὕτω τὸ πολύγωνον εἰς τόσα τρίγωνα, ὅσα εἶναι αἱ πλευραὶ τοῦ πλην 2.

Πράγματι· ἐὰν θεωρήσωμεν τὸ σημεῖον A ὡς κοινήν κορυφήν ὄλων αὐτῶν τῶν τριγώνων, εἰς κάθε πλευρὰν $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔE τοῦ πολυγώνου ἀντιστοιχεῖ ἓνα τρίγωνον, ἐκτὸς τῶν δύο πλευρῶν AB καὶ AE , αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὴν γωνίαν A τοῦ πολυγώνου. Ἐὰν λοιπόν τὸ πολύγωνον ἔχη 5 πλευράς, θὰ σχηματισθοῦν $5-2$ τρίγωνα. Ἐὰν ἔχη n πλευράς θὰ σχηματισθοῦν $n-2$ τρίγωνα. Ὅλαι αἱ γωνίαι αὐτῶν τῶν τριγώνων, ἀθροίζονται καταλλήλως, ἀποτελοῦν τὰς γωνίας τοῦ πολυγώνου. Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ 2 ὀρθὰς γωνίας, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν $n-2$ τριγώνων, θὰ εἶναι ἴσον μὲ $2(n-2)$ ὀρθὰς, δηλ. μὲ $2n-4$ ὀρθὰς.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: *Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν. . .*

Παρατήρησις: Ἀπὸ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα συνάγομεν, ὅτι, ἐὰν παραστήσωμεν μὲ n τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν ἑνὸς πολυγώνου, μὲ Σ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του, εἰς ὀρθὰς γωνίας, θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν

$$\Sigma = 2n - 4 \text{ ὀρθ.} \quad (1)$$

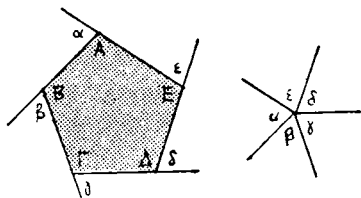
Μὲ τὴν βοήθειαν τῆς σχέσεως αὐτῆς δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ Σ , ἐὰν γνωρίζωμεν τὸ n καὶ ἀντιστρόφως, νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ n , ἐὰν γνωρίζωμεν τὸ Σ .

183. Πόρισμα. *Ἐὰν αἱ n γωνίαι ἑνὸς κυρτοῦ πολυγώνου εἶναι ἴσαι, καθεμία ἀπὸ τὰς ἴσας γωνίας του εἶναι ἴση μὲ $\frac{2n-4}{n}$ ὀρθὰς.*

Πράγματι· αἱ n ἴσαι γωνίαι τοῦ κυρτοῦ πολυγώνου ἔχουν ἄθροισμα $2n-4$ ὀρθὰς γωνίας· ἄρα καθεμία γωνία του θὰ εἶναι ἴση μὲ $\frac{2n-4}{n}$ ὀρθὰς γωνίας.

184. Θεώρημα. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας λαμβάνομεν, ἂν προεκτείνωμεν ὅλας τὰς πλευρὰς ἑνὸς πολυγώνου κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν, εἶναι ἴσον μὲ 4 ὀρθάς.

Ἑπόθεσις: Ἐστω ΑΒΓΔΕΖ (Σχ. 147) ἓνα κυρτὸν πολύγωνον μὲ n πλευρὰς καὶ $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \dots$ αἱ ἐξωτερικαὶ γωνίαι του, τὰς ὁποίας λαμβάνομεν, ἂν προεκτείνωμεν τὰς πλευρὰς του κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν.



Σχ. 147.

Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι $\widehat{\alpha} + \widehat{\beta} + \widehat{\gamma} + \widehat{\delta} + \widehat{\epsilon} + \dots = 4 \text{ ὀρθ.}$

Ἀπόδειξις: Κάθε κορυφὴ πολυγώνου, π.χ. ἡ Α, εἶναι κορυφὴ μιᾶς ἐσωτερικῆς γωνίας Α τοῦ πολυγώνου καὶ μιᾶς ἐξωτερικῆς γωνίας α . Αἱ γωνίαι Α καὶ α ἔχουν ἄθροισμα ἴσον μὲ 2 ὀρθάς, (διότι εἶναι ἐφεξῆς, τῶν ὁποίων αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ των κεῖνται ἐπ' εὐθείας).

Ἐπειδὴ τὸ πολύγωνον ἔχει n κορυφὰς ἔπεται, ὅτι τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν γωνιῶν του, ἐσωτερικῶν καὶ ἐξωτερικῶν, εἶναι ἴσον μὲ $2n$ ὀρθάς. Ἀλλὰ γνωρίζομεν, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐσωτερικῶν γωνιῶν ἑνὸς πολυγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει n πλευρὰς, εἶναι ἴσον μὲ $2n - 4$ ὀρθ. Ὡστε τὸ ἄθροισμα τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου θὰ εἶναι ἴσον μὲ $2n - (2n - 4) = 4$ ὀρθάς.

Ἀσκήσεις

121. (143). Εἰς ἓνα ὀρθογώνιον τρίγωνον μία γωνία του εἶναι ἴση μὲ τὰ $2/3$ μιᾶς ἄλλης γωνίας του. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι τοῦ ὀρθογ. τριγώνου (2 περιπτώσεις).

122. (154). Πόσον εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς τετραπλεύρου; ἑνὸς ἑξαγώνου; ἑνὸς δεκαπενταγώνου;

123 (155). Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς κυρτοῦ πολυγώνου εἶναι 18 ὀρθαί. Πόσας πλευρὰς ἔχει τὸ πολύγωνον;

124. (156). Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς κυρτοῦ πολυγώνου εἶναι 1080°. Πόσας πλευρὰς ἔχει τὸ πολύγωνον;

125. (157). Ἐνα δεκάγωνον ἔχει ὅλας τὰς γωνίας του ἴσας. Μὲ πόσα μέρη τῆς ὀρθῆς ἰσοῦται κάθε γωνία του;

126. (158). Ἡ μία γωνία ὀκταγώνου εἶναι ὀρθή καὶ αἱ ἄλλαι γωνίαι του εἶναι ἴσαι μεταξὺ των. Πόσων μοιρῶν εἶναι κάθε γωνία του;

127. (159). Ὑπάρχει κυρτὸν πολύγωνον, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του εἶναι 13 ὀρθαί γωνίαι;

128. (144). Εἰς ἓνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, ἡ γωνία τῆς κορυφῆς του εἶ-

ναί 78°. Ἐκατέρωθεν τῆς βάσεως ΒΓ λαμβάνομεν τμήματα ΒΔ=ΑΒ καὶ ΓΕ=ΓΑ. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι: 1ον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. 2ον τοῦ τριγώνου ΑΔΕ.

129. (147). Εἰς ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, ἡ γωνία τῆς κορυφῆς Α εἶναι διπλασία μιᾶς τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν του. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τῆς βάσεως.

130. (148). Ἐὰν ἡ βάσις ΒΓ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ προεκταθῇ μέχρι ἑνὸς σημείου Δ, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι: $ΑΔ > ΑΓ$.

131. (149). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ διχοτόμος μιᾶς γωνίας ἑνὸς τριγώνου τέμνει τὴν ἀπέναντι πλευρὰν εἰς δύο τμήματα, τὰ ὁποῖα εἶναι μικρότερα, ἀντιστοιχῶς, τῶν προσκειμένων, πρὸς τὰ τμήματα αὐτά, πλευρῶν τοῦ τριγώνου.

132. (176). Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἡ γωνία Α εἶναι ἀμβλεία καὶ μικρότερα τῶν 135°, ἡ γωνία Γ εἶναι μικρότερα τῶν 45°. Ἐὰν ΑΔ εἶναι τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $ΒΔ < ΑΔ < ΓΔ$.

133. (179). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ· προεκτείνομεν τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ καὶ ἐπὶ τῶν προεκτάσεων λαμβάνομεν τμήματα ΒΔ=ΓΕ. 1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $ΔΕ > ΒΓ$. 2ον. Ἐὰν εἶναι $ΑΒ < ΑΓ$ νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $ΔΓ < ΒΕ$.

134. (173). Νὰ ἀποδειχθῇ, ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει τοὺς πόδας τῶν δύο ὕψων ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου, τὰ ὁποῖα ἄγονται ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς βάσεώς του, εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν.

135. (160). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία, ἡ ὁποία σχηματίζεται ἀπὸ τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ, εἶναι ἴση μὲ $1 \text{ ὀρθ.} + \frac{Α}{2}$.

136 (161). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία, ἡ ὁποία σχηματίζεται ἀπὸ τὰς διχοτόμους τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν Β καὶ Γ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ, εἶναι ἴση μὲ $1 \text{ ὀρθ.} - \frac{Α}{2}$.

137. (162). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ διχοτόμος τῆς ἐσωτερικῆς γωνίας Β ἑνὸς τριγώνου καὶ ἡ διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας του Γ εἶναι ἴση μὲ $\frac{Α}{2}$.

138. (163). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία, ἡ ὁποία σχηματίζεται ὑπὸ τῆς διχοτόμου καὶ τοῦ ὕψους, τὰ ὁποῖα ἄγονται ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ, εἶναι ἴση μὲ τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ.

139. (150). Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ ἡ γωνία του Β εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας Γ. Ἐὰν φέρωμεν τὴν διχοτόμον ΑΔ τῆς γωνίας Α, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$\widehat{ΑΔΓ} - \widehat{ΑΔΒ} = \widehat{Β} - \widehat{Γ}.$$

140. (151). Ἐὰν ἡ μία γωνία ἑνὸς τριγώνου εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἀκροῦσματος τῶν δύο ἄλλων, νὰ δειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον εἶναι ἀμβλυγώνιον.

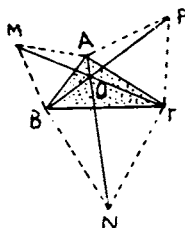
141. (152). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι $Β - Γ = 90^\circ$. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ διχοτόμος ΑΔ τῆς γωνίας Α σχηματίζει μὲ τὴν ΒΓ γωνίαν 45°.

142. (153). Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α, εἶναι $ΑΒ < ΑΓ$. Φέρομεν τὸ ὕψος ΑΗ καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ὑποτείνουσῆς ΒΓ τμήμα ΗΔ=ΗΒ. Ἀπὸ τὸ Γ φέρομεν τὴν ΓΕ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΔ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς ΑΔ εἰς τὸ Ε. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΒΓ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΑΓΕ.

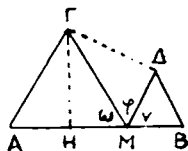
143. (164). Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζομεν, ἐκτὸς αὐτοῦ

τὰ ἰσόπλευρα τρίγωνα MAB, NBF καὶ PAF. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι $MG=NA=PB$.

144. (165). Δίδεται ἕνα εὐθύγραμμον τμήμα $AB=3a$. Ἐπὶ τοῦ AB λαμβάνομεν ἕνα τμήμα $AM=2a$. Μὲ πλευρὰς τὰς AM καὶ MB κατασκευάζομεν τὰ ἰσόπλευρα τρίγωνα AMΓ καὶ MBΔ, κείμενα πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ AB. Φέρομεν τὴν εὐθεΐαν ΓΔ καὶ τὴν κάθετον ΓΗ ἐπὶ τὴν AB. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι $GH=GD$.



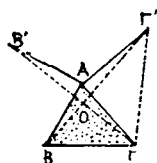
Σχ. ἀσκ. 143.



Σχ. ἀσκ. 144.

145. (166). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ABΓ, ὀρθογώνιον εἰς τὸ A. Ἀπὸ τὰς κορυφὰς B καὶ Γ φέρομεν τὰς εὐθεΐας Bx καὶ Γy, αἱ ὁποῖαι νὰ σχηματίζουν μὲ τὰς AB καὶ AΓ γωνίας 45° . Ἀπὸ τὸ A φέρομεν τὰς καθέτους AD καὶ AE ἐπὶ τὰς Bx καὶ Γy ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὰ σημεῖα Δ, A, E κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

146. (167). Δίδεται μία ὀρθή γωνία xOy. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Ox λαμβάνομεν τυχόν σημεῖον A καὶ ἐπὶ τῆς Oy ἕνα ἄλλο σημεῖον B. Ἀπὸ τὸ A φέρομεν τὴν εὐθεΐαν AM, ἣ ὁποία νὰ σχηματίζῃ μὲ τὴν Ox γωνίαν 30° καὶ νὰ τέμνῃ τὴν Oy εἰς τὸ M. Ἐπίσης ἀπὸ τὸ B φέρομεν τὴν BN, ἣ ὁποία νὰ σχηματίζῃ μὲ τὴν Oy γωνίαν 30° καὶ νὰ τέμνῃ τὴν Ox εἰς τὸ N. Αἱ εὐθεΐαι AM καὶ BN τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Γ. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὰ τρίγωνα ANΓ καὶ BMΓ εἶναι ἰσοσκελεῖ.

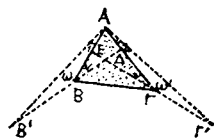


Σχ. ἀσκ. 147.

147. (175). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ABΓ. Ἀπὸ τὴν κορυφὴν A φέρομεν τὴν AB' κάθετον ἐπὶ τὴν AB καὶ ἴση μὲ τὴν AB καὶ κειμένην ἔκτος τοῦ τριγώνου. Ἐπίσης ἀπὸ τὸ A φέρομεν τὴν κάθετον AG' ἐπὶ τὴν AΓ καὶ ἴση μὲ τὴν AΓ καὶ κειμένην ἔκτος τοῦ τριγώνου. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι αἱ εὐθεΐαι ΓB' καὶ BΓ' εἶναι ἴσαι καὶ κάθετοι μεταξύ των.

148 (182). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ABΓ, τοῦ ὁποίου ἡ γωνία A εἶναι 60° . Φέρομεν τὰς διχοτόμους BB' καὶ ΓΓ' τῶν γωνιῶν του, αἱ ὁποῖαι τέμνουσιν τὰς πλευρὰς AΓ καὶ AB εἰς τὰ σημεῖα B' καὶ Γ'. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι $\gamma\omega\nu.BB'\Gamma' = \gamma\omega\nu.\Gamma\Gamma'A$.

149. (168). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ABΓ, ὀρθογώνιον εἰς τὸ A. φέρομεν τὸ ὕψος AD καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΓΔ λαμβάνομεν τμήμα $\Delta\Gamma'=\Delta\Gamma$. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν γωνιῶν B καὶ Γ' τοῦ τριγώνου ABΓ' εἶναι ἴση μὲ 90° .



Σχ. ἀσκ. 150.

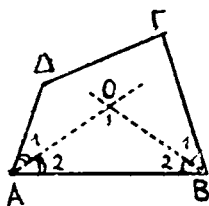
150. (174). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ABΓ. φέρομεν τὸ ὕψη ΒΔ καὶ ΓΕ. Προεκτείνομεν τὸ ὕψος ΒΔ πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς B καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως λαμβάνομεν τμήμα $BB'=A\Gamma$. Ἐπίσης ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τοῦ ὕψους ΓΕ πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς Γ λαμβάνομεν τμήμα $\Gamma\Gamma'=AB$. Νὰ ἀποδειχθῆ: 1ον. ὅτι $AB'=A\Gamma'$. 2ον. ὅτι ἡ γωνία B'AG' εἶναι ὀρθή.

151. (177). Ἐάν ἡ βάσις BΓ ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι μεγαλύτερα, ἢ ἴση, ἢ μικροτέρα τῶν ἴσων πλευρῶν του, νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι ἡ γωνία A εἶναι, ἀντιστοίχως μεγαλύτερα ἢ ἴση ἢ μικροτέρα τῶν 60° .

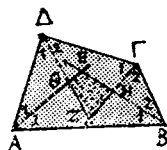
152 (178). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι μία γωνία ἐνὸς τριγώνου εἶναι ὀξεῖα, ὀρθή, ἢ ἀμβλεία, ἐὰν ἡ διάμεσος, ἡ ὁποία ἀγεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας αὐτῆς εἶναι ἀντιστοίχως μεγαλύτερα, ἴση ἢ μικροτέρα τοῦ ἡμίσεως τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς.

153. (180). Ἐὰν τὸ ὕψος ἐνὸς τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ἀντιστοίχου πλευρᾶς. νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία, ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς ὁποίας ἀγεται τὸ ὕψος, εἶναι ὀξεῖα ἢ κατ' ἐξαιρέσειν ὀρθή.

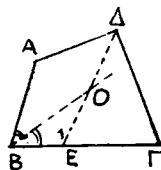
154. (169). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία, ἡ ὁποία σχηματίζεται ἀπὸ τὰς δι-



Σχ. ἀσκ. 154.



Σχ. ἀσκ. 155.



Σχ. ἀσκ. 156.

χοτόμους δύο διαδοχικῶν γωνιῶν τετραπλεύρου εἶναι ἴση μὲ τὸ ἡμίθροισμα τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν του.

155. (186). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τετραπλεύρου σχηματίζουν τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου αἱ ἀπέναντι γωνίαι εἶναι παραπληρωματικά.

156. (170). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ διχοτόμοι δύο ἀπέναντι γωνιῶν τετραπλεύρου εἶναι ἴση μὲ τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν του.

157. (171). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ διχοτόμοι δύο διαδοχικῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν τετραπλεύρου, εἶναι ἴση μὲ τὸ ἡμίθροισμα τῶν δύο (ἐσωτερικῶν) αὐτῶν διαδοχικῶν γωνιῶν του.

158. (172). Αἱ διχοτόμοι τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν τετραπλεύρου, τεμνόμεναι, σχηματίζουν τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου αἱ ἀπέναντι γωνίαι εἶναι παραπληρωματικά.

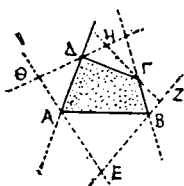
159. (187). Δίδεται ἓνα τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$. Προεκτείνωμεν τὴν πλευρὰν AB πρὸς τὸ μέρος τοῦ B καὶ τὴν πλευρὰν $B\Gamma$ πρὸς τὸ μέρος τοῦ Γ . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν σχηματιζομένων ἐξωτερικῶν γωνιῶν εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν A καὶ Δ .

160. (181). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ὅταν δύο ἀπέναντι γωνίαι τετραπλεύρου εἶναι ὀρθαί, αἱ διχοτόμοι τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν του εἶναι παράλληλοι.

161. (184). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε πολυγώνον, τὸ ὁποῖον ἔχει τοῦλάχιστον τέσσαρας πλευρᾶς, μία τυχούσα γωνία του εἶναι μικροτέρα τοῦ ἄθροίσματος τῶν ἄλλων γωνιῶν του.

162 (185). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου αἱ γωνίαι του δὲν εἶναι ἴσαι: 1ον. ἡ μία τοῦλάχιστον ἐκ τῶν γωνιῶν του εἶναι ὀξεῖα. 2ον. ἡ μία τοῦλάχιστον ἐκ τῶν γωνιῶν του εἶναι ἀμβλεία.

163. (183). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἓνα κυρτὸν πολυγώνον δὲν δύναται νὰ ἔχη περισσότερας ἀπὸ τρεῖς ὀξεῖας γωνίας.



Σχ. ἀσκ. 158.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ΄.

ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΑ - ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ

185. Τὰ σπουδαιότερα τετράπλευρα εἶναι :

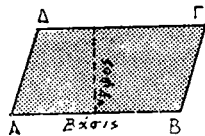
Τὸ *παράλληλόγραμμον*, τὸ *ὀρθογώνιον*, ὁ *ῥόμβος*, τὸ *τετράγωνον* καὶ τὸ *τραπέζιον*.

1. Παράλληλόγραμμα

186. Παράλληλόγραμμον. Κάθε τετράπλευρον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς ἀπέναντι πλευρὰς του παράλληλους, λέγεται *παράλληλόγραμμον*.

Π.χ. τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ (Σχ. 148) εἶναι παράλληλόγραμμον.

Μία ἀπὸ τὰς πλευρὰς ἑνὸς παράλληλογράμμου λέγεται *βάσις* αὐτοῦ· καὶ ἡ ἀπόστασις αὐτῆς, ἀπὸ τὴν ἀπέναντι παράλληλον πλευρὰν, λέγεται *ὕψος*.



Σχ. 148.

187. Ἰδιότητες τῶν γωνιῶν ἑνὸς παραλληλογράμμου. Θεώρημα. *Εἰς κάθε παράλληλόγραμμον :*

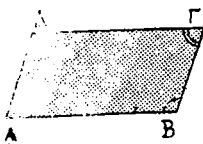
1ον. Αἱ ἀπέναντι γωνίαι του εἶναι ἴσαι.

2ον. Δύο διαδοχικαὶ γωνίαι του εἶναι παραπληρωματικαί.

Ἐπίσης: Ἐστω τὸ παράλληλόγραμμον ΑΒΓΔ.

Συμπέρασμα: 1ον. Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ ἀπέναντι γωνίαι τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ εἶναι ἴσαι· δηλ. θὰ δείξωμεν, ὅτι :

$$\widehat{A} = \widehat{\Gamma} \quad \text{καὶ} \quad \widehat{B} = \widehat{\Delta}.$$



Σχ. 149.

Ἀπόδειξις: Αἱ γωνίαι Α καὶ Γ εἶναι ἴσαι, διότι ἔχουν τὰς πλευρὰς τῶν παράλληλους καὶ μὲ ἀντίθετον φοράν. Ὀμοίως καὶ αἱ

Ἐπίσης.	$AB \parallel \Gamma\Delta$ $A\Delta \parallel B\Gamma$
Συμπ.	$\widehat{A} = \widehat{\Gamma}$ $\widehat{B} = \widehat{\Delta}$

γωνίαι Β καὶ Δ εἶναι ἴσαι, διὰ τὸν αὐτὸν λόγον.

2ον. Θὰ δείξωμεν, ὅτι δύο διαδοχικαὶ γωνίαι τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ εἶναι παραπληρωματικαί.

Ἀπόδειξις: Πράγματι· αἱ γωνίαι A καὶ Δ (Σχ. 149) εἶναι παραπληρωματικαί, διότι εἶναι ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν παραλλήλων AB καὶ $\Delta\Gamma$ τεμνομένων ὑπὸ τῆς $A\Delta$ · ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι αἱ γωνίαι A καὶ B εἶναι παραπληρωματικαί, καθὼς καὶ αἱ B καὶ Γ καὶ αἱ Γ καὶ Δ .

ῥΥπόθ.	$AB // \Gamma\Delta$ $A\Delta // B\Gamma$
Συμπ.	$\widehat{A} + \widehat{\Delta} = 2\delta\rho\theta.$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Εἰς κάθε παραλληλόγραμμον...**

188. Θεώρημα (Ἀντίστροφον). Ἐνα τετράπλευρον εἶναι παραλληλόγραμμον:

1ον. Ἐὰν αἱ ἀπέναντι γωνίαι του εἶναι ἴσαι.

2ον. Ἐὰν αἱ προσκείμεναι γωνίαι, εἰς ἐκάστην τῶν πλευρῶν του, εἶναι παραπληρωματικά.

1ον. ῥΥπόθεσις: Ἐστω τὸ τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$ (Σχ. 149), εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι: $\widehat{A} = \widehat{\Gamma}$ καὶ $\widehat{B} = \widehat{\Delta}$.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ τετράπλευρον αὐτὸ εἶναι παραλληλόγραμμον.

Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς τετραπλεύρου εἶναι ἴσον μὲ 4

ῥΥπόθ.	$\widehat{A} = \widehat{\Gamma}$ $\widehat{B} = \widehat{\Delta}$
Συμπ.	$AB // \Delta\Gamma$ $A\Delta // B\Gamma$

ὀρθὰς γωνίας, θὰ εἶναι: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} + \widehat{\Delta} = 4 \delta\rho\theta.$ (1)

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὴν γωνίαν Γ μὲ τὴν ἴσην τῆς A καὶ τὴν γωνίαν Δ μὲ τὴν ἴσην τῆς B , καὶ ἔχομεν

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{A} + \widehat{B} = 4 \delta\rho\theta. \quad \eta \quad 2\widehat{A} + 2\widehat{B} = 4 \delta\rho\theta. \quad \eta \quad \widehat{A} + \widehat{B} = 2 \delta\rho\theta.$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ εὐθεῖαι $A\Delta$ καὶ $B\Gamma$ τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς AB σχηματίζουν τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας A καὶ B παραπληρωματικὰς· ἄρα (§ 170. 4ον) αἱ εὐθεῖαι $A\Delta$ καὶ $B\Gamma$ εἶναι παράλληλοι.

Ὅμοιως, ἐὰν αντικαταστήσωμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὴν γωνίαν B μὲ τὴν ἴσην τῆς Δ καὶ τὴν γωνίαν Γ μὲ τὴν ἴσην τῆς A , θὰ ἔχωμεν

$$\widehat{A} + \widehat{\Delta} + \widehat{A} + \widehat{\Delta} = 4 \delta\rho\theta. \quad \eta \quad 2\widehat{A} + 2\widehat{\Delta} = 4 \delta\rho\theta. \quad \eta \quad \widehat{A} + \widehat{\Delta} = 2 \delta\rho\theta.$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ εὐθεῖαι AB καὶ $\Delta\Gamma$, τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς $A\Delta$ σχηματίζουν τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας A καὶ Δ παραπληρωματικὰς· ἄρα αἱ εὐθεῖαι AB καὶ $\Delta\Gamma$ εἶναι παράλληλοι.

Τὸ τετράπλευρον λοιπόν $AB\Gamma\Delta$, ὡς ἔχον τὰς ἀπέναντι πλευράς του παραλλήλους, εἶναι παραλληλόγραμμον.

2ον. ῥΥπόθεσις: Ἐστω τὸ τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$ (Σχ. 149), εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι:

$$\widehat{A} + \widehat{B} = 2 \delta\rho\theta., \quad \widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 2 \delta\rho\theta.$$

ῥΥπόθ.	$\widehat{A} + \widehat{B} = 2 \delta\rho\theta.$ $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 2 \delta\rho\theta.$
Συμπ.	$AB // \Delta\Gamma$ $A\Delta // B\Gamma$

Συμπέρασμα: Θα δείξωμεν, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον.

Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ $\widehat{A} + \widehat{B} = 2 \text{ ὀρθ.}$, αἱ εὐθεῖαι ΑΔ καὶ ΒΓ εἶναι παράλληλοι. Ὀμοίως, ἐπειδὴ $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 2 \text{ ὀρθ.}$, αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΔΓ εἶναι παράλληλοι.

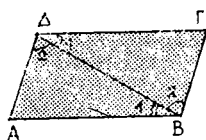
Τὸ τετράπλευρον λοιπὸν ΑΒΓΔ ἔχει τὰς ἀπέναντι πλευράς του παραλλήλους καὶ ἐπομένως εἶναι παραλληλόγραμμον.

Ἐδείχθη λοιπὸν, ὅτι: **Ἐνα τετράπλευρον εἶναι . . .**

189. Ἰδιότητες τῶν πλευρῶν ἐνὸς παραλληλογράμμου. Θεώρημα. *Εἰς κάθε παραλληλόγραμμον αἱ ἀπέναντι πλευραὶ του εἶναι ἴσαι ἀνὰ δύο.*

Ἐπίπεδος: Ἐστω τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ (Σχ. 150).

Συμπέρασμα: Θα δείξωμεν, ὅτι: $AB = \Delta\Gamma$ καὶ $AD = B\Gamma$.



Σχ. 150.

Ἀπόδειξις: Φέρομεν τὴν διαγώνιον ΒΔ. Τὰ σχηματισθέντα τρίγωνα ΑΒΔ, ΒΓΔ ἔχουν: τὴν ΒΔ κοινήν, τὴν γωνίαν Β₁ ἴσην μὲ

Ἐπίπεδος.	$AB \parallel \Gamma\Delta$ $AD \parallel B\Gamma$
Συμπ.	$AB = \Delta\Gamma$ $AD = B\Gamma$

τὴν γωνίαν Α₁, ὡς ἐντὸς ἐναλλάξ τῶν παραλλήλων ΑΒ καὶ ΔΓ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΒΔ· ἐπίσης ἔχουν τὴν γωνίαν Β₂ ἴσην μὲ τὴν γωνίαν Α₂, ὡς ἐντὸς ἐναλλάξ τῶν παραλλήλων ΑΔ καὶ ΒΓ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΒΔ· δηλ. τὰ τρίγωνα αὐτὰ ἔχουν μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς προσκειμένας εἰς αὐτὴν γωνίας ἴσας· ἄρα εἶναι ἴσα καὶ ἐπομένως θὰ ἔχουν καὶ $AB = \Delta\Gamma$, $AD = B\Gamma$.

Ἐδείχθη λοιπὸν, ὅτι: **Εἰς κάθε παραλληλόγραμμον . . .**

190. Θεώρημα. (*Ἀντίστροφον*). **Ἐνα τετράπλευρον εἶναι παραλληλόγραμμον, ἐὰν αἱ ἀπέναντι πλευραὶ του εἶναι ἴσαι.**

Ἐπίπεδος: Ἐστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ (Σχ. 150), εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι $AB = \Gamma\Delta$ καὶ $AD = B\Gamma$.

Συμπέρασμα: Θα δείξωμεν, ὅτι τὸ ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον.

Ἐπίπεδος.	$AB = \Gamma\Delta$ $AD = B\Gamma$
Συμπ.	$AB \parallel \Delta\Gamma$ $AD \parallel B\Gamma$

Ἀπόδειξις: Φέρομεν τὴν διαγώνιον ΒΔ. Τὰ σχηματισθέντα τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΒΓΔ ἔχουν: $AB = \Gamma\Delta$, $AD = B\Gamma$, ἐξ ὑποθέσεως καὶ τὴν πλευρὰν ΒΔ κοινήν· δηλ. ἔχουν καὶ τὰς τρεῖς πλευράς των ἴσας,

μίαν πρὸς μίαν· ἄρα εἶναι ἴσα καὶ ἐπομένως θὰ ἔχουν καὶ

$$\widehat{B}_1 = \widehat{\Delta}_1 \quad \text{καὶ} \quad \widehat{\Delta}_2 = \widehat{B}_2.$$

Ἐπειδὴ $\widehat{B}_1 = \widehat{\Delta}_1$, αἱ εὐθεῖαι AB καὶ ΔΓ εἶναι παράλληλοι, διότι τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς ΒΔ σχηματίζουν τὰς ἐντὸς ἐναλλάξ γωνίας Δ_1 καὶ B_1 ἴσας.

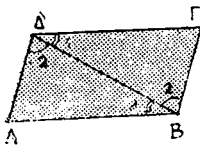
Ὀμοίως ἐπειδὴ $\widehat{\Delta}_2 = \widehat{B}_2$, αἱ ΑΔ καὶ ΒΓ εἶναι παράλληλοι.

Τὸ τετράπλευρον λοιπὸν ΑΒΓΔ ἔχει τὰς ἀπέναντι πλευρὰς παραλλήλους· ἄρα εἶναι παραλληλόγραμμον.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Ἐνα τετράπλευρον εἶναι...**

191. Θεώρημα. Ἐάν ἓνα τετράπλευρον ἔχη δύο ἀπέναντι πλευρὰς ἴσας καὶ παραλλήλους, τὸ τετράπλευρον αὐτὸ εἶναι παραλληλόγραμμον.

Ἐπίθεσις: Ἐστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ (Σχ. 151) εἰς τὸ ὁποῖον αἱ ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ ΑΒ καὶ ΔΓ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι.



Σχ. 151.

Συμπέρασμα: Θὰ

δείξωμεν, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον.

Ἐπίθ.	AB=ΓΔ AB//ΓΔ
Συμπ.	ΑΔ//ΒΓ

Ἀπόδειξις: Φέρομεν τὴν διαγώνιον ΒΔ.

Τὰ σχηματισθέντα τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΒΓΔ ἔχουν: AB=ΔΓ, ἐξ ὑποθέσεως, τὴν πλευρὰν ΒΔ κοινὴν καὶ $\widehat{B}_1 = \widehat{\Delta}_1$, ὡς ἐντὸς ἐναλλάξ τῶν παραλλήλων ΑΒ καὶ ΔΓ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΒΔ· δηλ. ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην· ἄρα τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ἴσα καὶ ἐπομένως θὰ ἔχουν καὶ $\widehat{\Delta}_2 = \widehat{B}_2$. Παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΔ καὶ ΒΓ τεμνόμεναι ὑπὸ τῆς ΒΔ σχηματίζουν τὰς ἐντὸς ἐναλλάξ γωνίας Δ_2 καὶ B_2 ἴσας· ἄρα αἱ εὐθεῖαι αὐταὶ εἶναι παράλληλοι.

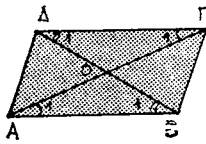
Τὸ τετράπλευρον λοιπὸν ΑΒΓΔ ἔχει τὰς ἀπέναντι πλευρὰς τοῦ παραλλήλους καὶ ἐπομένως εἶναι παραλληλόγραμμον.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Ἐάν ἓνα τετράπλευρον...**

Σημ. Ἡ ιδιότης αὐτὴ μᾶς ἐπιτρέπει νὰ κατασκευάσωμεν εὐκόλως ἓνα παραλληλόγραμμον εἰς ἓνα φύλλον τετραδίου.

192. Ἰδιότης τῶν διαγωνίων ἐνὸς παραλληλογράμμου.
Θεώρημα. Εἰς κάθε παραλληλόγραμμον αἱ διαγώνιοι τοῦ διχοτομοῦνται.

Υπόθεσις: Ἐστώσαν ΑΓ καὶ ΒΔ (Σχ. 152) αἱ διαγώνιοι τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ο.



Σχ. 152.

Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι $ΑΟ=ΟΓ$ καὶ $ΟΒ=ΟΔ$.

Ἀπόδειξις: Τὰ τρίγωνα ΟΑΒ καὶ ΟΓΔ ἔχουν $ΑΒ=ΔΓ$, ὡς ἁπέναντι πλευρὰς πα-

Υπόθ.	$ΑΒ//ΔΓ$ $ΑΔ//ΒΓ$
Συμπ.	$ΑΟ=ΟΓ$ $ΒΟ=ΟΔ$

ραλληλογράμμου, $\widehat{Α}_1=\widehat{Γ}_1$, ὡς ἐντὸς ἐναλλάξ

τῶν παραλλήλων ΑΒ καὶ ΓΔ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΓ, καὶ $\widehat{Β}_1=\widehat{Δ}_1$, ὡς ἐντὸς ἐναλλάξ τῶν παραλλήλων ΑΒ καὶ ΓΔ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΒΔ· ἄρα τὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα (§ 117) καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι καὶ $ΑΟ=ΟΓ$ καὶ $ΟΒ=ΟΔ$.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: *Εἰς κάθε παραλληλόγραμμον...*

193. Θεώρημα. (Ἀντίστροφον). Ἐνα τετράπλευρον εἶναι παραλληλόγραμμον, όταν αἱ διαγώνιοι του διχοτομοῦνται.

Υπόθεσις: Ἐστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ (Σχ. 152) καὶ ΑΓ, ΒΔ αἱ διαγώνιοί του, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ο. Ἐστω ὅτι εἶναι $ΑΟ=ΟΓ$ καὶ $ΟΒ=ΟΔ$.

Υπόθ.	$ΑΟ=ΟΓ$ $ΒΟ=ΟΔ$
Συμπ.	$ΑΒ//ΔΓ$ $ΑΔ//ΒΓ$

Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον.

Ἀπόδειξις: Τὰ τρίγωνα ΟΑΒ καὶ ΟΓΔ ἔχουν: $ΟΑ=ΟΓ$, $ΟΒ=ΟΔ$, ἐξ ὑποθέσεως καὶ $\widehat{ΑΟΒ}=\widehat{ΔΟΓ}$, ὡς κατὰ κορυφήν· δηλ. ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην· ἄρα θὰ εἶναι ἴσα καὶ ἐπομένως θὰ ἔχουν καὶ $\widehat{Β}_1=\widehat{Δ}_1$.

Ἐπειδὴ $\widehat{Β}_1=\widehat{Δ}_1$, αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΔΓ εἶναι παράλληλοι (§ 170).

Ὀμοίως ἀπὸ τὴν ἰσότητα τῶν τριγώνων ΟΑΔ καὶ ΟΒΓ εὐρίσκωμεν, ὅτι $\widehat{ΟΒΓ}=\widehat{ΟΔΑ}$ καὶ ἐπομένως αἱ ΒΓ καὶ ΑΔ εἶναι παράλληλοι. Τὸ τετράπλευρον λοιπόν ΑΒΓΔ ἔχει τὰς ἁπέναντι πλευρὰς του παραλλήλους καὶ ἐπομένως εἶναι παραλληλόγραμμον.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: *Ἐνα τετράπλευρον εἶναι...*

194. Κέντρον ἑνὸς παραλληλογράμμου. Τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων ἑνὸς παραλληλογράμμου λέγεται *κέντρον τοῦ παραλληλογράμμου*.

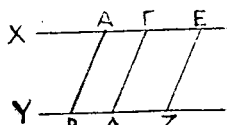
Τὸ κέντρον τοῦ παραλληλογράμου εἶναι κέντρον συμμετρίας τοῦ παραλληλογράμου.

Καὶ ἀντιστρόφως: "Ἐνα κυρτὸν τετράπλευρον, τὸ ὁποῖον ἔχει ἓνα κέντρον συμμετρίας, εἶναι παραλληλόγραμον.

195. Θεώρημα. Παράλληλοι εὐθεῖαι, περιεχόμεναι μεταξὺ παραλλήλων εὐθειῶν, εἶναι ἴσαι.

Ἐπιπέδουσι: Ἐστώσαν αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι $AB, \Gamma\Delta, EZ$, αἱ ὁποῖαι περιέχονται μεταξὺ τῶν παραλλήλων εὐθειῶν X καὶ Y .

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι $AB = \Gamma\Delta = EZ$.



Σχ. 153.

Ἀπόδειξις: Τὸ τετράπλευρον $A\Gamma\Delta B$ εἶναι παραλληλόγραμον, διότι αἱ ἀπέναντι πλευραὶ του εἶναι παράλληλοι, ἐξ ὑποθέσεως· ἄρα αἱ ἀπέναντι πλευραὶ του AB καὶ $\Gamma\Delta$ θὰ εἶναι ἴσαι, ἥτοι θὰ εἶναι $AB = \Gamma\Delta$ (1)

Ὁμοίως ἀπὸ τὸ παραλληλόγραμον $\Gamma E Z \Delta$ ἔχομεν $\Gamma\Delta = EZ$ (2)

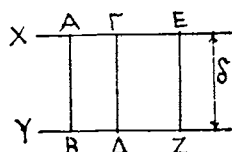
Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι $AB = \Gamma\Delta = EZ$.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: Παράλληλοι εὐθεῖαι. . .

196. Πόρισμα. Κάθετοι εὐθεῖαι, περιεχόμεναι μεταξὺ παραλλήλων εὐθειῶν, εἶναι ἴσαι.

Αἱ κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν εἶναι παράλληλοι· ἄρα εἶναι ἴσαι, ὡς παράλληλοι περιεχόμεναι μεταξὺ παραλλήλων εὐθειῶν (§ 195).

Σημ. Τὸ πόρισμα αὐτὸ ἐκφράζεται καὶ ὡς ἑξῆς:

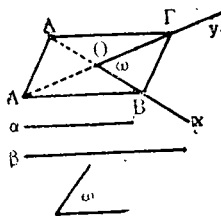


Σχ. 154.

"Ἐὰν δύο εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι,

ὅλα τὰ σημεῖα τῆς μιᾶς εὐθείας ἀπέχουν ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὴν ἄλλην.

197. Πρόβλημα. 1ον. Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα παραλληλόγραμον, ἂν γνωρίζωμεν τὰς διαγωνίους του καὶ τὴν γωνίαν των.



Σχ. 155.

Ἐστώσαν ω ἡ γωνία τῶν διαγωνίων καὶ α καὶ β αἱ διαγώνιοι τοῦ παραλληλογράμου. Κατασκευάζομεν μίαν γωνίαν xOy (Σχ. 155) ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ω . Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Oy λαμβάνομεν τμῆμα OG ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τῆς διαγωνίου β καὶ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Ox τμῆμα OB ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ἄλλης διαγωνίου α . Προεκτείνομεν τὰς OG καὶ OB πρὸς

τὸ μέρος τῆς κορυφῆς O καὶ ἐπὶ τῶν προεκτάσεων λαμβάνομεν τμήματα $AO=OG$ καὶ $OD=OB$. Τὸ τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$, τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τὰ σημεῖα A, B, Γ, Δ εἶναι τὸ ζητούμενον παραλληλόγραμμα.

Ἀπόδειξις: Τὸ τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$ εἶναι παραλληλόγραμμα, διότι αἱ διαγώνιοί του AG καὶ BD διχοτομοῦνται ἐκ κατασκευῆς· εἶναι δὲ καὶ τὸ ζητούμενον, διότι αἱ διαγώνιοί του εἶναι ἐκ κατασκευῆς ἴσαι μὲ τὰς δοθείσας α καὶ β καὶ σχηματίζουν γωνίαν ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ω ἐκ κατασκευῆς.

Ἀσκήσεις

164. (191). Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι κάθε εὐθεῖα, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον ἑνὸς παραλληλογράμμου καὶ περατοῦται εἰς τὰς ἀπέναντι πλευράς του, διχοτομεῖται ὑπὸ τοῦ κέντρου τοῦ παραλληλογράμμου.

165. (192). Αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι συνδέουσιν τὰ μέσα τῶν ἡμιδιαγωνίων παραλληλογράμμου σχηματίζουν παραλληλόγραμμα μὲ κέντρον τὸ κέντρον τοῦ δοθέντος παραλληλογράμμου.

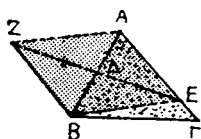
166. (193). Δίδεται ἕνα τρίγωνον $AB\Gamma$ ἀπὸ τὸ μέσον Δ τῆς πλευρᾶς AB φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν AG εἰς τὸ σημεῖον E . Προεκτείνομεν τὴν ED πέραν τοῦ Δ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως λαμβάνομεν τμήμα $DZ=ED$. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι ἡ εὐθεῖα BZ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν GA .

167. (194). Δίδεται ἕνα τρίγωνον $AB\Gamma$. Φέρομεν τὰς διαμέσους BB' καὶ $\Gamma\Gamma'$ καὶ ἐπὶ τῶν προεκτάσεων των λαμβάνομεν μήκη $B'\Delta=BB'$ καὶ $\Gamma'E=\Gamma\Gamma'$. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι $A\Delta=AE$ καὶ ὅτι τὰ σημεῖα A, Δ, E , κείνται ἐπ' εὐθείας.

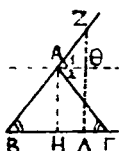
168. (195). Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει τὰ μέσα δύο ἀπέναντι πλευρῶν παραλληλογράμμου διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ παραλληλογράμμου.

169. (196). Δίδεται τὸ παραλληλόγραμμα $AB\Gamma\Delta$ καὶ E καὶ Z τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν του AB καὶ $\Gamma\Delta$. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὸ τετράπλευρον $AEGZ$ εἶναι παραλληλόγραμμα.

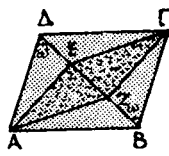
170. (197). Ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει τὰ μέσα δύο ἀπέναντι πλευρῶν παραλληλογράμμου χωρίζει αὐτὸ εἰς δύο παραλληλόγραμμα. Ἀληθεύει τὸ ἀντίστροφον;



Σχ. ἀσκ. 166.



Σχ. ἀσκ. 171.



Σχ. ἀσκ. 173.

171. (198). Ἀπὸ τυχόν σημείον Δ τῆς βάσεως $B\Gamma$ ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου $AB\Gamma$ φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν $B\Gamma$, ἡ ὁποία τέμνει τὴν AG εἰς τὸ E καὶ τὴν AB εἰς τὸ Z . Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὸ ἄθροισμα $\Delta E + \Delta Z$ εἶναι σταθερόν.

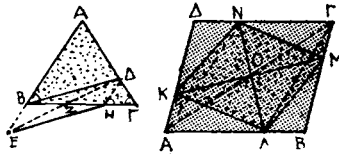
172. (199). Ἐάν ἀπὸ τυχὸν σημείου τῆς βάσεως ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἀχθοῦν παράλληλοι πρὸς τὰς ἴσας πλευρὰς του, σχηματίζεται ἓνα παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶναι σταθερὰ.

173. (200). Δίδεται τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ. Ἀπὸ τὰς ἀπέναντι κορυφὰς Α καὶ Γ φέρομεν καθέτους, ΑΕ καὶ ΓΖ ἐπὶ τὴν διαγώνιον ΒΔ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΑΕΓΖ εἶναι παραλληλόγραμμον.

174. (201). Εἰς ἓνα τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν τὰς διαμέσους ΑΔ καὶ ΒΕ. Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Γ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΒΕ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ Ε, εἰς τὸ σημεῖον Ζ. Ἐάν Η εἶναι τὸ μέσον τῆς ΕΖ νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΔΕ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΗ.

175. (202). Δίδεται τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ μὲ βάσιν τὴν ΒΓ. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΓ λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Δ καὶ προεκτείνομεν τὴν ΑΒ κατὰ ἓνα μῆκος ΒΕ ἴσον μὲ ΓΔ· φέρομεν ἔπειτα τὴν εὐθεῖαν ΕΔ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΒΓ εἰς ἓνα σημεῖον Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ Ζ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΕΔ.

176. (203). Δίδεται ἓνα παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ· προεκτείνομεν τὴν πλευρὰν ΑΒ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως λαμβάνομεν τμήμα ΒΕ=ΒΓ. Ἐπίσης προεκτείνομεν τὴν ΑΔ καὶ λαμβάνομεν ΔΖ=ΓΔ. Νὰ ἀποδειχθῇ: 1ον. ὅτι $\widehat{\Delta\Gamma Z} = \widehat{B\Gamma E}$ καὶ 2ον. ὅτι τὰ σημεῖα Ζ, Γ, Ε κείνται ἐπ' εὐθείας.



Σχ. ἀσκ. 175. Σχ. ἀσκ. 177.

177. (204). Ἐάν ἓνα παραλληλόγραμμον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἓνα ἄλλο, (δηλ. αἱ κορυφαὶ του κείνται ἐπὶ τῶν πλευρῶν τοῦ πρώτου), τὰ κέντρα των συμπίπτουν.

178. (205). Δίδεται τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς του ΑΒ λαμβάνομεν τυχὸν τμήμα ΑΕ, ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΓΔ τμήμα ΓΖ=ΑΕ. Ἐπίσης ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΔ λαμβάνομεν τυχὸν τμήμα ΑΗ καὶ ἐπὶ τῆς ΓΒ τμήμα ΓΘ=ΑΗ. Νὰ ἀποδειχθῇ: 1ον ὅτι τὸ τετράπλευρον ΕΘΖΗ εἶναι παραλληλόγραμμον ἐγγεγραμμένον εἰς τὸ ΑΒΓΔ. 2ον ὅτι τὰ κέντρα τῶν δύο παραλληλογράμμων συμπίπτουν.

179. (206). Δίδεται τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ· ἐπὶ τῶν πλευρῶν του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ λαμβάνομεν τμήματα $AE = \frac{AB}{4}$, $BZ = \frac{BG}{4}$, $GH = \frac{GD}{4}$, $\Delta\Theta = \frac{\Delta A}{4}$. Νὰ ἀποδειχθῇ: 1ον. ὅτι τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΘ εἶναι παραλληλόγραμμον. 2ον. ὅτι τὰ δύο παραλληλόγραμμα ἔχον τὸ αὐτὸ κέντρον.

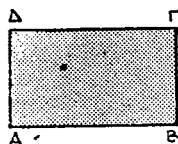
180. (229). Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ, ἂν γνωρίζωμεν:

- 1ον. Τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΑΔ καὶ τὴν γωνίαν Α.
- 2ον. Τὴν πλευρὰν ΔΓ, τὴν διαγώνιον ΒΔ καὶ τὴν γωνίαν ΑΒΔ.
- 3ον. Τὴν πλευρὰν ΑΒ καὶ τὰς γωνίας ΑΒΔ καὶ ΒΑΓ.

2. Ὁρθογώνιον

198. Ὁρθογώνιον. Κάθε παραλληλόγραμμον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς γωνίας του ὀρθάς, λέγεται **ὀρθογώνιον** (Σχ. 156).

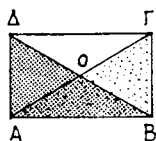
Εἰς ἓνα ὀρθογώνιον δύο διαδοχικαὶ πλευραὶ του λαμβάνονται ὡς **βάσις** καὶ **ὑψος** καὶ λέγονται **διαστάσεις** αὐτοῦ.



Σχ. 156.

199. Θεώρημα. Αἱ διαγώνιοι ὀρθογωνίου εἶναι ἴσαι.

Ὶπόθεσις: Ἐστω τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ (Σχ. 157) καὶ ΑΓ, ΒΔ αἱ διαγώνιοί του.



Σχ. 157.

Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι: $ΑΓ = ΒΔ$.

Ἀπόδειξις: Τὰ ὀρθογώ-

νια τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΑΒ ἔχουν: τὴν ΑΒ κοινήν, $ΒΓ = ΑΔ$, ὡς ἀπέναντι πλευρὰς παραλληλογράμμου·

δηλ. ἔχουν τὰς καθέτους πλευρὰς των ἴσας μίαν πρὸς μίαν· ἄρα θὰ εἶναι ἴσα καὶ ἐπομένως θὰ ἔχουν καὶ $ΑΓ = ΒΔ$.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Αἱ διαγώνιοι ὀρθογωνίου. . .**

200. Θεώρημα. Κάθε παραλληλόγραμμον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς διαγωνίους του ἴσας, εἶναι ὀρθογώνιον.

Ὶπόθεσις: Ἐστω τὸ παραλληλόγραμμον (Σχ. 157), τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς διαγωνίους του ΑΓ καὶ ΒΔ ἴσας.

Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι τὸ ΑΒΓΔ εἶναι ὀρθογώνιον.

Ἀπόδειξις: Τὰ τρίγωνα ΔΑΒ καὶ ΓΒΑ ἔχουν: τὴν πλευρὰν ΑΒ κοινήν, $ΑΔ = ΒΓ$, ὡς

ἀπέναντι πλευρὰς παραλληλογράμμου καὶ $ΒΔ = ΑΓ$ ἕξ ὑποθέσεως· δηλ. ἔχουν καὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς των ἴσας μίαν πρὸς μίαν· ἄρα θὰ εἶναι

ἴσα καὶ ἐπομένως θὰ ἔχουν $\widehat{ΔΑΒ} = \widehat{ΑΒΓ}$.

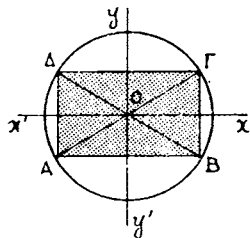
Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΔΑΒ καὶ ΑΒΓ εἶναι ἴσαι καὶ παραπληρωματικά, ὡς διαδοχικαὶ γωνίαι παραλληλογράμμου ἔπεται, ὅτι καθεμία ἕξ αὐτῶν εἶναι ὀρθή. Τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ ἔχει λοιπόν δύο διαδοχικὰς γωνίας του ὀρθὰς καὶ ἐπομένως εἶναι ὀρθογώνιον.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Κάθε παραλληλόγραμμον. . .**

Ὶπόθ.	ΑΒΓΔ=ὀρθογών.
Συμπ.	ΑΓ=ΒΔ

Ὶπόθ.	ΑΒΓΔ=παραλληλόγρ. ΑΓ=ΒΔ
Συμπ.	ΑΒΓΔ=ὀρθ.

201. Περιγεγραμμένος κύκλος περι ὀρθογώνιον. Ἐπειδὴ αἱ διαγώνιοι ἐνὸς ὀρθογωνίου εἶναι ἴσαι, τὸ μέσον O τῶν διαγωνίων τοῦ ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰς κορυφάς του.



Σχ. 158.

Ἄν λοιπὸν γράψωμεν μίαν περιφέρειαν κύκλου με κέντρον τὸ O καὶ ἀκτίνα τὴν OA , ἡ περιφέρεια αὐτὴ θὰ περάσῃ ἀπὸ τὰς τέσσαρας κορυφάς του. Ὁ κύκλος εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκει ἡ περιφέρεια αὐτὴ λέγεται: **περιγεγραμμένος κύκλος περι τὸ ὀρθογώνιον $AB\Gamma\Delta$.**

202. Ἄξων συμμετρίας ὀρθογωνίου. Αἱ διαγώνιοι τοῦ ὀρθογωνίου $AB\Gamma\Delta$ (Σχ. 158) τεμνόμεναι εἰς τὸ O σχηματίζουν τέσσαρα ἰσοσκελῆ τρίγωνα. Ἡ εὐθεῖα $x'x$, ἡ ὁποία διχοτομεῖ τὰς γωνίας $AO\Delta$ καὶ $BO\Gamma$ εἶναι μεσοκάθετος τῶν $A\Delta$ καὶ $B\Gamma$. Ὁμοίως ἡ $y'y$ εἶναι μεσοκάθετος τῶν AB καὶ $\Gamma\Delta$. ἄρα αἱ $x'x$ καὶ $y'y$ εἶναι **ἄξονες συμμετρίας τοῦ ὀρθογωνίου $AB\Gamma\Delta$.**

202. Ἄξων συμμετρίας ὀρθογωνίου.

203. Ἰδιότης διαμέσου ὀρθογωνίου τριγώνου. Αἱ διαγώνιοι $A\Gamma$ καὶ BA τοῦ ὀρθογωνίου $AB\Delta\Gamma$ διχοτομοῦνται εἰς τὸ M (Σχ. 159) καὶ ἐπειδὴ εἶναι ἴσαι, θὰ εἶναι $AM = \frac{B\Gamma}{2}$, $MB = \frac{A\Delta}{2}$.

Ἐπειδὴ ἡ AM εἶναι διάμεσος τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ συνάγομεν, ὅτι :

Ἡ διάμεσος ὀρθογωνίου τριγώνου, ἡ ὁποία ἄγεται ὑπὸ τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας, εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτεινούσης.

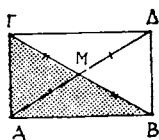
Ἀντιστρόφως. Ἐὰν ἡ διάμεσος ἐνὸς τριγώνου εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ἀντιστοίχου πλευρᾶς, τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον.

Ἐπίδειξις: Ἐστω τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ (Σχ. 159) καὶ AM ἡ διάμεσός του. Ἐστω ὅτι εἶναι :

$$AM = \frac{B\Gamma}{2}.$$

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ A .

	$AB\Gamma$ τρ. AM διάμεσος
Ἐπίδειξις.	$AM = \frac{B\Gamma}{2}$
Συμπ.	$AB\Gamma = \delta\rho\theta.$ τρ.



Σχ. 159.

Ἀπόδειξις: Προεκτείνωμεν τὴν AM καὶ λαμβάνωμεν ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τμήμα $M\Delta = AM$. Φέρομεν τὰς εὐθείας $\Gamma\Delta$ καὶ BA

Τὸ σχηματισθὲν τετράπλευρον $AB\Delta\Gamma$ εἶναι παραλληλόγραμμον

διότι αἱ διαγώνιοί του $ΑΔ$ καὶ $ΒΓ$ διχοτομοῦνται εἰς τὸ $Μ$, ἐξ ὑποθέσεως καὶ ἐκ κατασκευῆς.

Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι καὶ $ΑΜ = \frac{ΒΓ}{2}$ ἢ $2ΑΜ = ΒΓ$ ἢ $ΑΔ = ΒΓ$. ἦτοι αἱ διαγώνιοι $ΑΔ$ καὶ $ΒΓ$ τοῦ παραλληλογράμμου $ΑΒΔΓ$ εἶναι ἴσαι· ἄρα τὸ $ΑΒΔΓ$ εἶναι (§ 200) ὀρθογώνιον καὶ ἐπομένως ἡ γωνία του $Α$ εἶναι ὀρθή:

Ὡστε τὸ τρίγωνον $ΑΒΓ$ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ $Α$.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Ἐὰν ἡ διάμεσος...**

204. Πρόβλημα. Ἡ διάμεσος ὀρθογωνίου τριγώνου, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας διαιρεῖ τὸ ὀρθογώνιον τριγώνον εἰς δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα.

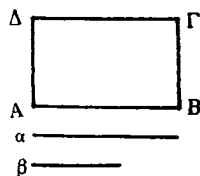
Πράγματι· ἐδείχθη, ὅτι $ΑΜ = \frac{ΒΓ}{2}$, δηλ. ὅτι $ΑΜ = ΜΒ = ΜΓ$.

Ἐπειδὴ $ΑΜ = ΜΒ$ τὸ τρίγωνον $ΑΜΒ$ εἶναι ἰσοσκελές. Ἐπίσης ἐπειδὴ $ΑΜ = ΜΓ$, τὸ τρίγωνον $ΑΜΓ$ εἶναι ἰσοσκελές.

205. Πρόβλημα. Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου δίδονται αἱ διαστάσεις $α$ καὶ $β$.

Κατασκευάζομεν μίαν ὀρθὴν γωνίαν $Α$ καὶ ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῆς λαμβάνομεν τμήματα $ΑΒ = α$ καὶ $ΑΔ = β$ (Σχ. 160).

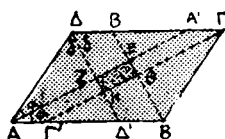
Ἀπὸ τὰ σημεῖα $Β$ καὶ $Δ$ φέρομεν καθέτους πρὸς τὰς $ΑΒ$ καὶ $ΑΔ$ ἀντιστοίχως, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον $Γ$. Τὸ σχηματισθὲν τετράπλευρον $ΑΒΓΔ$ εἶναι τὸ ζητούμενον ὀρθογώνιον. (Διατί:).



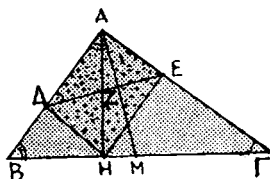
Σχ. 160.

Ἀσκήσεις

181. (207). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν παραλληλογράμμου σχηματίζουν ὀρθογώνιον.



Σχ. ἀσκ. 181.



Σχ. ἀσκ. 182.

182. (208). Δίδεται ἓνα τρίγωνον $ΑΒΓ$, ὀρθογώνιον εἰς τὸ $Α$. Ἀπὸ τὸν

πόδα Η του ύψους ΑΗ φέρομεν τὰς καθέτους ΗΔ και ΗΕ ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ και ΑΓ. Φέρομεν και τὴν διάμεσον ΑΜ.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $ΔΕ=ΑΗ$.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\widehat{ΒΑΜ}=\widehat{ΑΒΜ}$ και $\widehat{ΑΔΕ}=\widehat{ΑΓΒ}$.

3ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΑΜ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΕ.

183. (209). Δίδεται τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, ($ΑΒ=ΑΓ$). Προεκτείνομεν τὴν πλευρὰν ΒΑ πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς Α και ἐπὶ τῆς προεκτάσεως λαμβάνομεν τμῆμα $ΑΔ=ΑΒ$ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΔΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία ΒΓΔ εἶναι ὀρθή.

184. (210). Εἰς ἓνα τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν τὰ ὕψη του ΒΒ' και ΓΓ'. Ἐὰν Δ εἶναι τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $ΔΒ'=ΔΓ'$.

185. (211). Δίδεται ἓνα τρίγωνον ΑΒΓ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ λαμβάνομεν ἓνα τμῆμα $ΑΔ=ΑΓ$ και ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΒΑ ἓνα τμῆμα $ΑΕ=ΑΓ$. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΔΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΕΓ.

186. (212). Εἰς ἓνα τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν τὴν διχοτόμον ΑΔ τῆς γωνίας Α και τὴν διχοτομον ΑΔ' τῆς ἔξωτερικῆς γωνίας Α, αἱ ὁποῖαι τέμνουσιν τὴν πλευρὰν ΒΓ εἰς τὰ σημεῖα Δ και Δ' ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ μέσον Μ τῆς ΔΔ' ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰ σημεῖα Δ, Δ' και Α.

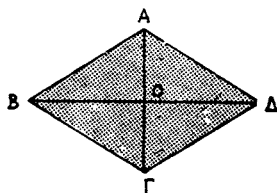
177. (213). Ἀπὸ τὸ μέσον Μ τῆς πλευρᾶς ΑΒ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν κάθετον ΜΝ ἐπὶ τὴν ΑΒ. Ἐὰν τὸ Ν εἶναι τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΒΓ νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α.

188. (214). Δίδεται μία γωνία xOy και ἓνα σημεῖον Α ἐντὸς αὐτῆς. Ἀπὸ τὸ Α φέρομεν τὴν ΑΒ κάθετον ἐπὶ τὴν Ox και τὴν ΑΓ κάθετον ἐπὶ τὴν Oy . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει τὸ μέσον Μ τῆς εὐθείας ΟΑ μὲ τὸ μέσον Ν τῆς εὐθείας ΒΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ.

189. (296). Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας xy λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Ο και ἐκτὸς αὐτῆς ἓνα ἄλλο σημεῖον Μ. Ἐστω Μ' τὸ συμμετρικὸν τοῦ Μ πρὸς τὴν xy και Μ'' τὸ συμμετρικὸν τοῦ Μ πρὸς τὸ Ο. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία ΜΜ'Μ'' εἶναι ὀρθή.

3. Ρόμβος

206. **Ρόμβος.** Κάθε παραλληλόγραμμον, τὸ ὁποῖον ἔχει και τὰς τέσσαρας πλευρὰς του ἴσας, λέγεται **ρόμβος** (Σχ. 161).



Σχ. 161.

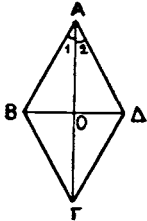
Εἶναι προφανές, ὅτι, ἐὰν ἓνα παραλληλόγραμμον ἔχη δύο διαδοχικὰς πλευρὰς του ἴσας, εἶναι ρόμβος.

Ὁ ρόμβος ἔχει ὅλας τὰς ἰδιότητες τοῦ παραλληλογράμμου· ἐκτὸς αὐτῶν ἔχει και ἄλλας ἰδιότητες, τὰς ὁποίας θὰ ἐξετάσωμεν κατωτέρω.

207. **Θεώρημα.** Αἱ διαγώνιοι ἑνὸς ρόμβου τέμνονται καθέτως και διχοτομοῦν τὰς γωνίας του.

Υπόθεσις: "Εστω ὁ ρόμβος ΑΒΓΔ καὶ ΑΓ, ΒΔ, αἱ διαγώνιοί του, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ο.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ ΑΓ καὶ ΒΔ εἶναι κάθετοι μεταξύ των καὶ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τοῦ ρόμβου.



Σχ. 162.

Ἀπόδειξις: Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι

$$AB = BG = ΓΔ = ΔΑ.$$

Ἐπίσης ἐπειδὴ ὁ ρόμβος εἶναι παραλληλόγραμμον, θὰ εἶναι $AO = OΓ$ καὶ $OB = OΔ$. Εἰς τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΔ, ἡ ΑΟ εἶναι διάμεσος ἄρα θὰ εἶναι καὶ ὕψος τοῦ τριγώνου καὶ διχοτόμος τῆς γωνίας Α. Ὡστε ἡ ΑΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΔ

Υπόθ.	$AB = BG = ΓΔ = ΔΑ$
Συμπ.	$ΑΓ \perp ΒΔ$ $\hat{A}_1 = \hat{A}_2, \hat{B}_1 = \hat{B}_2$

καὶ διχοτόμος τῆς γωνίας Α.

Ὀμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ ἡ ΒΔ εἶναι διχοτόμος τῶν γωνιῶν Β καὶ Δ.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Αἱ διαγώνιοι ἐνὸς ρόμβου. . .**

208. Θεώρημα I. (Ἀντίστροφον). Ἐὰν αἱ διαγώνιοι ἐνὸς παραλληλογράμμου εἶναι κάθετοι μεταξύ των, τὸ παραλληλόγραμμον εἶναι ρόμβος.

Υπόθεσις: Ἐστω τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ (Σχ. 162), εἰς τὸ ὁποῖον αἱ διαγώνιοί του ΑΓ καὶ ΒΔ εἶναι κάθετοι μεταξύ των

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ ΑΒΓΔ εἶναι ρόμβος.

Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ τὸ ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον θὰ εἶναι $BO = OΔ$.

Υπόθ.	$ΑΒΓΔ$ παραλληλόγρ. $ΑΓ \perp ΒΔ$
Συμπ.	$AB = BG = ΓΔ = ΔΑ$

Ἐξ ὑποθέσεως ὁμως ἡ ΑΟ εἶναι κάθετος εἰς τὴν ΒΔ. Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΔ ἡ ΑΟ εἶναι διάμεσος καὶ ὕψος του καὶ ἐπομένως (§ 115) τὸ τρίγωνον ΑΒΔ εἶναι ἰσοσκελές. δηλ. εἶναι $AB = ΑΔ$. ἐπειδὴ δύο διαδοχικαὶ πλευραὶ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ εἶναι ἴσαι, τὸ παραλληλόγραμμον εἶναι ρόμβος.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Ἐὰν αἱ διαγώνιοι ἐνὸς. . .**

209. Θεώρημα II. (Ἀντίστροφον). Ἐὰν μία διαγώνιος παραλληλογράμμου εἶναι διχοτόμος μιᾶς γωνίας του, τὸ παραλληλόγραμμον εἶναι ρόμβος.

Υπόθεσις: Ἐστω τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ (Σχ. 162), εἰς

τὸ ὁποῖον ἡ διαγώνιος ΑΓ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Α.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ ΑΒΓΔ εἶναι ρόμβος.

Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ τὸ ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον, θὰ εἶναι $BO=OD$.

Ἐξ ὑποθέσεως ἡ ΑΟ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Α. Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΔ, ἡ ΑΟ εἶναι διάμεσός του καὶ διχοτόμος τῆς γωνίας Α τῆς κορυφῆς του ἄρα (§ 115, 3ον) τὸ τρίγωνον ΑΒΔ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι $AB=AD$.

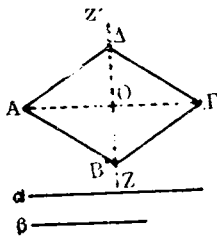
Ἐπόθ.	$ABΓΔ = \text{παραλληλόγρ.}$ $A_1 = A_2$
Συμπ.	$AB = BΓ = ΓΔ = ΔΑ$

Ἐπειδὴ δύο διαδοχικαὶ πλευραὶ ΑΒ καὶ ΑΔ τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ εἶναι ἴσαι, τὸ παραλληλόγραμμον αὐτὸ εἶναι ρόμβος.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: *Ἐὰν μία διαγώνιος...*

210. Ἄξων συμμετρίας τοῦ ρόμβου. Γνωρίζομεν ὅτι αἱ διαγώνιοι ἑνὸς ρόμβου εἶναι μεσοκάθετοι, ἢ μία τῆς ἄλλης. Ἄν λοιπὸν διπλώσωμεν τὸν ρόμβον ΑΒΓΔ (Σχ. 162) κατὰ μίαν διαγώνιον του, ἔστω τὴν ΒΔ, τὰ δύο μέρη αὐτοῦ ΑΔΒ καὶ ΓΒΔ θὰ συμπίσουν. Ὡστε: αἱ διαγώνιοι ἑνὸς ρόμβου εἶναι ἄξονες συμμετρίας τοῦ ρόμβου.

211. Πρόβλημα. *Νὰ κατασκευασθῇ ἕνας ρόμβος, ἂν γνωρίζωμεν τὰς διαγωνίους του.*



Σχ. 163.

Φέρομεν δύο καθέτους εὐθεῖαι ΑΓ' καὶ ΖΖ' (Σχ. 163) καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς των Ο λαμβάνομεν ἑκατέρωθεν τοῦ Ο ἐπὶ τῆς ΑΓ' τὰ τμήματα ΟΑ καὶ ΟΓ ἴσα μὲ τὸ ἥμισυ τῆς α καὶ ἐπὶ τῆς ΖΖ' τὰ τμήματα ΟΒ, ΟΔ ἴσα μὲ τὸ ἥμισυ τῆς β. Τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι ὁ ζητούμενος ρόμβος. (Διὰ τί;).

Ἀσκήσεις

- 190. (215). Ἀπὸ τὸ μέσον Μ τῆς βάσεως ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν τὰς παραλλήλους ΜΔ καὶ ΜΕ πρὸς τὰς πλευράς ΑΒ καὶ ΑΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τετράπλευρον ΑΔΜΕ εἶναι ρόμβος.
- 191. (216). Δίδεται ἕνας ρόμβος ΑΒΓΔ ἀπὸ τὴν κορυφὴν του Β φέρομεν κάθετον ΒΕ ἐπὶ τὴν ΑΔ καὶ ἀπὸ τὴν κορυφὴν Δ κάθετον ΔΖ ἐπὶ τὴν ΒΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΕΒΖΔ εἶναι ὀρθογώνιον.
- 192. (217). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ἀπόστασις δύο παραλλήλων πλευρῶν ρόμβου εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀπόστασιν τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του.

4. Τετράγωνον

212. Τετράγωνον. Τὸ παραλληλόγραμμον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς γωνίας του ὀρθὰς καὶ τὰς πλευράς του ἴσας λέγεται **τετράγωνον** (Σχ. 164).

Ἐπειδὴ τὸ τετράγωνον ἔχει τὰς γωνίας του ὀρθὰς καὶ τὰς πλευράς του ἴσας, ἔχει τὰς ιδιότητες τοῦ ὀρθογωνίου καὶ τοῦ ῥόμβου, δηλαδή:

Αἱ διαγώνιοι τοῦ τετραγώνου εἶναι :

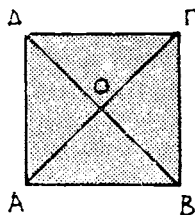
1ον. ἴσαι.

2ον. εἶναι κάθετοι μεταξύ των.

καὶ 3ον. εἶναι καὶ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν του.

Καὶ ἀντιστρόφως :

1ον. Ἐὰν αἱ διαγώνιοι παραλληλογράμμου εἶναι ἴσαι καὶ κάθετοι μεταξύ των, τὸ παραλληλόγραμμον εἶναι τετράγωνον.



Σχ. 164.

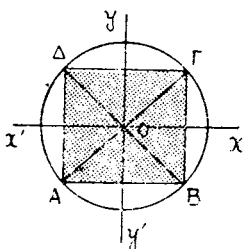
Πράγματι ἐπειδὴ αἱ διαγώνιοι τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι ἴσαι, τὸ παραλληλόγραμμον εἶναι ὀρθογώνιον (§ 200). Ἐπειδὴ αἱ διαγώνιοί του εἶναι κάθετοι μεταξύ των, τὸ παραλληλόγραμμον εἶναι ῥόμβος (§ 208). Τὸ παραλληλόγραμμον λοιπὸν ἔχει τὰς γωνίας του ὀρθὰς καὶ τὰς πλευράς του ἴσας καὶ ἐπομένως εἶναι τετράγωνον.

2ον. Ἐὰν αἱ διαγώνιοι παραλληλογράμμου εἶναι ἴσαι καὶ ἡ μία ἐξ αὐτῶν εἶναι διχοτόμος μιᾶς γωνίας τοῦ παραλληλογράμμου, τὸ παραλληλόγραμμον εἶναι τετράγωνον.

Ἡ ἀπόδειξις εἶναι ἀνάλογος πρὸς ἐκείνην, ποὺ ἐδόθη εἰς τὴν περίπτωσηί 1ον.

213. Ἄξων συμμετρίας ἐνὸς τετραγώνου. Τὸ κέντρον τοῦ

τετραγώνου, εἶναι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τετράγωνον. Τὸ τετράγωνον ἔχει τέσσαρας ἄξονας συμμετρίας. **Τὰς μεσοκαθέτους τῶν ἀπέναντι πλευρῶν του,** ὅπως εἰς τὸ ὀρθογώνιον καὶ τὰς **διαγώνιους του,** ὅπως εἰς τὸν ῥόμβον.

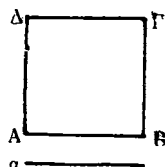


Σχ. 165.

214. Πρόβλημα.

Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα τετράγωνον, ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν πλευράν του.

Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας λαμβάνομεν τμήμα ΑΒ (Σχ. 166) ἴσον μὲ τὴν



Σχ. 166

δοθείσαν πλευράν α τοῦ τετραγώνου. Ἐκ τῶν σημείων Α καὶ Β ὑψοῦμεν τὰς καθέτους ΑΔ καὶ ΒΓ πρὸς τὴν ΑΒ, πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῆς καὶ ἴσας μὲ τὴν δοθείσαν πλευράν α. Φέρομεν τὴν εὐθείαν ΔΓ καὶ τὸ σχηματισθὲν τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι τὸ ζητούμενον τετράγωνον.

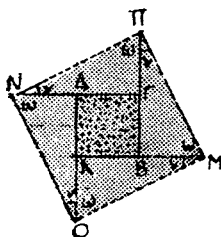
Ἐσκήσεις

193. (218). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν ἑνὸς ὀρθογωνίου, τεμνόμεναι, σχηματίζουν τετράγωνον.

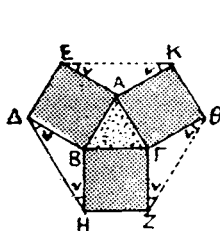
194. (219). Ἐκ τυχόν σημείων μιᾶς διαγωνίου τετραγώνου φέρομεν εὐθείας πρὸς τὰς κορυφάς του. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τετράγωνον ἐκχωρίσθη εἰς δύο ζεύγη ἕξ ἴσων τριγώνων.

195. (220). Δίδεται ἓνα τετράγωνον ΑΒΓΔ· προεκτείνομεν τὰς ἀπέναντι πλευράς του κατὰ μήκη ἴσα πρὸς τὰς πλευράς καὶ κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν· καὶ λαμβάνομεν ΒΜ=ΑΒ, ΔΝ=ΓΔ, ΓΠ=ΒΓ, ΑΘ=ΔΑ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΜΝ καὶ ΘΠ εἶναι ἴσαι.

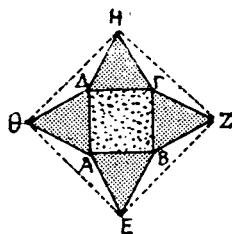
196. (221). Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζομεν τετράγωνα, τὰ ὅποια κείνται ἐκτὸς τοῦ τριγώνου. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ γωνίαι τοῦ σχηματιζομένου ἑξαγώνου εἶναι ἴσαι καὶ ὅτι αἱ πλευραὶ του σχηματίζουν δύο ὁμάδας τριῶν ἴσων πλευρῶν.



Σχ. ἀσκ. 195.



Σχ. ἀσκ. 196.



Σχ. ἀσκ. 197.

197. (222). Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ἑνὸς τετραγώνου ΑΒΓΔ κατασκευάζομεν τέσσαρα ἰσόπλευρα τρίγωνα ΑΒΕ, ΒΓΖ, ΓΔΗ, ΔΑΘ, τὰ ὅποια κείνται ἐκτὸς τοῦ τετραγώνου. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεία Ε, Ζ, Η, Θ εἶναι κορυφαὶ τετραγώνου.

198. (293). Νὰ ἐξετασθῇ ἡ συμμετρία : 1ον εἰς ἓνα ἰσόπλευρον τρίγωνον. 2ον εἰς ἓνα παραλληλόγραμμον. 3ον εἰς ἓνα ὀρθογώνιον. 4ον εἰς ἓνα ῥόμβον. 5ον εἰς ἓνα τετράγωνον.

199. (294). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἐὰν ἓνα τετράπλευρον ἔχη ἓνα κέντρον συμμετρίας, τὸ τετράπλευρον αὐτὸ εἶναι παραλληλόγραμμον.

200. (228). Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα τετράγωνον :

1ον. Ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν περίμετρόν του.

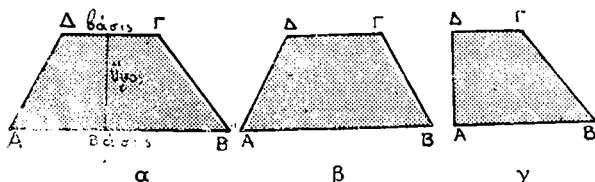
2ον. Ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν διαγώνιόν του.

5. Τραπεζίια

214. Τραπεζίιον. Τὸ τετράπλευρον, τὸ ὁποῖον ἔχει δύο μόνον πλευρὰς παραλλήλους, λέγεται **τραπέζιον**.

Π.χ. Τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ (Σχ. 167), τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΓΔ παραλλήλους εἶναι ἓνα τραπέζιον.

Αἱ δύο παράλληλοι πλευραὶ τοῦ τραπέζιου λέγονται **βάσεις τοῦ**



Σχ. 167.

τραπέζιου (μεγάλῃ βάσει καὶ μικρὰ βάσει), ἡ δὲ ἀπόστασις αὐτῶν λέγεται **ὑψος** τοῦ τραπέζιου.

Εἰς κάθε τραπέζιον, αἱ γωνίαι αἱ προσκείμεναι εἰς μίαν ἀπὸ τὰς μὴ παραλλήλους πλευρὰς του εἶναι παραπληρωματικαὶ (§ 169, 4^{ον}), δηλ. εἶναι $\widehat{A} + \widehat{\Delta} = 180^\circ$, $\widehat{B} + \widehat{\Gamma} = 180^\circ$.

Ἐνα τραπέζιον λέγεται ἰσοσκελὲς τραπέζιον, ὅταν αἱ δύο, μὴ παράλληλοι, πλευραὶ του εἶναι ἴσαι.

Π.χ. Τὸ τραπέζιον (Σχ. 167 β) εἶναι ἰσοσκελὲς, ἐὰν $ΑΔ = ΒΓ$.

Ἐνα τραπέζιον λέγεται ὀρθογώνιον τραπέζιον, ὅταν ἡ μία ἀπὸ τὰς μὴ παραλλήλους πλευρὰς του εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς βάσεις του.

Π.χ. Τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ (Σχ. 167 γ) εἶναι ὀρθογώνιον τραπέζιον.

Διάμεσος τραπέζιου λέγεται ἡ εὐθεΐα, ἡ ὁποία συνδέει τὰ μέσα τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του.

215. Θεώρημα. *Εἰς κάθε ἰσοσκελὲς τραπέζιον :*

1ον. αἱ γωνίαι, αἱ προσκείμεναι εἰς μίαν ἀπὸ τὰς βάσεις του, εἶναι ἴσαι.

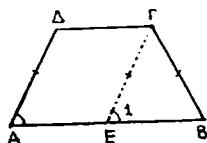
2ον. αἱ διαγώνιοι του εἶναι ἴσαι.

Ἐπίπεδος: Ἐστω τὸ ἰσοσκελὲς τραπέζιον ΑΒΓΔ (Σχ. 168), εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι $ΔΑ = ΓΒ$.

1ον. Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\widehat{A} = \widehat{B}$ καὶ $\widehat{\Delta} = \widehat{\Gamma}$.

Ἀπόδειξις: Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Γ φέρομεν τὴν παράλληλον πρὸς τὴν ΔΑ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν πλευρὰν ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Ε. Τὸ τετρά-

πλευρον ΑΕΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, διότι αἱ ἀπέναντι πλευραὶ του εἶναι παράλληλοι· ἄρα θὰ εἶναι $\Delta A = \Gamma E$ · ἀλλ' ἐπειδὴ, ἐξ ὑποθέσεως, εἶναι καὶ $\Delta A = \Gamma B$,

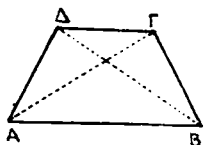


Σχ. 168.

θὰ εἶναι $\Gamma E = \Gamma B$. Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΓΕΒ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι $\widehat{E}_1 = \widehat{B}$.

Ἄλλὰ $\widehat{E}_1 = \widehat{A}$, ὡς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν παραλλήλων ΔΑ καὶ ΓΕ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΒ· ἄρα θὰ εἶναι καὶ $\widehat{A} = \widehat{B}$.

Αἱ γωνίαι Δ καὶ Γ εἶναι ἴσαι, ὡς παραπληρωματικαὶ τῶν ἴσων γωνιῶν Α καὶ Β.



Σχ. 169.

2ον. Ὑπόθεσις: Ἐστῶσαν ΑΓ καὶ ΒΔ (Σχ. 169) αἱ διαγώνια τοῦ ἰσοσκελοῦς τραπέζιου ΑΒΓΔ.

Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι: $A\Gamma = B\Delta$.

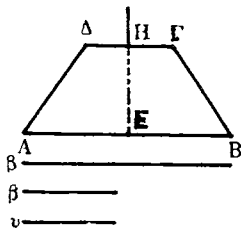
Ἀπόδειξις: Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΒΔ ἔχουν τὴν πλευρὰν ΑΒ κοινήν, $B\Gamma = A\Delta$, ἐξ

ὑποθέσεως, καὶ $\widehat{B} = \widehat{A}$, ὡς ἐδείχθη εἰς τὴν περίπτωσιν 1ον· ἄρα θὰ εἶναι ἴσα (§ 119) καὶ ἐπομένως θὰ ἔχουν καὶ $A\Gamma = B\Delta$.

Ἐδείχθη λοιπὸν, ὅτι: **Εἰς κάθε ἰσοσκελές...**

216. Πρόβλημα. Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα ἰσοσκελὲς τραπέζιον, ἂν γνωρίζωμεν τὰς δύο βάσεις του β καὶ β' καὶ τὸ ὕψος του υ.

Ἐπὶ μιᾷ εὐθείας λαμβάνομεν ἓνα τμήμα ΑΒ (Σχ. 170) ἴσον μὲ τὴν μεγαλυτέραν βᾶσιν του β. Ἐπειτα φέρομεν τὴν μεσοκάθετον ΕΗ τῆς ΑΒ καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς ἓνα τμήμα ΕΗ = υ καὶ ἀπὸ τὸ Η φέρομεν τὴν παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ. Ἐπὶ τῆς παραλλήλου αὐτῆς καὶ ἑκατέρωθεν τοῦ Η λαμβάνομεν τμήματα ΗΓ καὶ ΗΔ ἴσα μὲ τὸ ἥμισυ τῆς β'. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΔ καὶ ΒΓ καὶ τὸ σχημαζόμενον τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι τὸ ζητούμενον ἰσοσκελὲς τραπέζιον. (Διατί:)



Σχ. 170.

Ἀσκήσεις

201. (223). Δίδεται τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ· ἀπὸ τὰ ἄκρα Α καὶ Β τῆς μεγάλης βάσεως του φέρομεν παραλλήλους ΑΜ καὶ ΒΝ πρὸς τὰς πλευρὰς ΒΓ καὶ

ΑΔ ἀντιστοίχως, αἱ ὁποῖα τέμνουσιν τὴν προέκτασιν τῆς ΔΓ εἰς τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\widehat{M} = \widehat{B}$ καὶ $\widehat{N} = \widehat{A}$.

202. (224). Ἡ εὐθεῖα, ἣ ὁποῖα συνδέει τὰ μέσα τῶν παραλλήλων πλευρῶν ἰσοσκελοῦς τραπέζιου εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς πλευρὰς αὐτάς.

203. (225). Ἐὰν ἡ εὐθεῖα, ἣ ὁποῖα συνδέει τὰ μέσα δύο μὴ διαδοχικῶν πλευρῶν τετραπλευροῦ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς πλευρὰς αὐτάς, τὸ τετράπλευρον εἶναι ἰσοσκελὲς τραπέζιον.

204. (226). Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ περίμετρος ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τραπέζιου ΑΒΓΔ (ΑΔ=ΒΓ), ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι αἱ ἀμβλείαι γωνίαι του εἶναι διπλάσιαι τῶν ὀξεῖων γωνιῶν του καὶ ὅτι ἡ διαγώνιος ΑΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ. Ἡ μικρὰ βᾶσις ΓΔ ἔχει μήκος β μέτρον

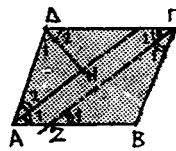
205. (227) Νὰ διατυπωθῇ καὶ νὰ ἀποδειχθῇ τὸ ἀντίστροφον τοῦ θεωρήματος τῆς § 215.

Ἀσκήσεις ἐπὶ τοῦ ΣΤ' Κεφαλαίου

206. (188). Δίδεται τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ. Ἀπὸ τὸ μέσον Δ τῆς βάσεως του ΒΓ φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ, αἱ ὁποῖα τέμνουσιν τὴν παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ, ἣ ὁποῖα ἄγεται ἀπὸ τὸ Α, εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον ΔΕΖ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

207. (189). Δίδεται ἓνα τρίγωνον ΑΒΓ. Φέρομεν τὴν διχοτόμον ΑΔ τῆς γωνίας Α, ἣ ὁποῖα τέμνει τὴν πλευρὰν ΒΓ εἰς τὸ Δ. Ἀπὸ τὸ Δ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ, ἣ ὁποῖα τέμνει τὴν πλευρὰν ΑΓ εἰς τὸ Ε. Ἀπὸ τὸ Ε φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ, ἣ ὁποῖα τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΑΕ=ΒΖ.

208. (190). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν ἀπέναντι γωνιῶν παραλληλογράμμου εἶναι παράλληλοι, αἱ δὲ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι πρόσκεινται πρὸς τὴν αὐτὴν πλευρὰν, εἶναι κάθετοι.



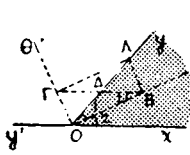
Σχ. ἀσκ. 208.

209. (230). Δίδεται μία γωνία xOy' ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Α τῆς πλευρᾶς Oy φέρομεν τὴν ΑΒ κάθετον ἐπὶ τὴν ἐσωτερικὴν διχοτόμον τῆς γωνίας xOy καὶ τὴν ΑΓ κάθετον ἐπὶ τὴν ἐξωτερικὴν διχοτόμον τῆς γωνίας xOy. Νὰ ἀποδειχθῇ: 1ον ὅτι τὸ τετράπλευρον ΟΒΑΓ εἶναι ὀρθογώνιον. 2ον ὅτι, ἡ ΒΓ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν Οx καὶ διχοτομεῖ τὴν ΟΑ.

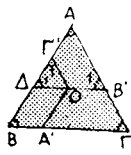
210. (231). Δίδεται ἓνα ἰσοπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ· ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Ο' τὸ ὁποῖον κεῖται ἐντὸς τοῦ τριγώνου, φέρομεν παραλλήλους ΟΑ', ΟΒ', ΟΓ' πρὸς τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ, αἱ ὁποῖα τέμνουσιν τὰς πλευρὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα Α', Β', Γ'. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα ΟΑ'+ΟΒ'+ΟΓ' εἶναι ἴσον μὲ μίαν ἀπὸ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου.

211. (232). Δίδεται ἓνα τρίγωνον ΑΒΓ. Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α φέρομεν κάθετους ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ, αἱ ὁποῖα τέμνουσιν τὴν ΒΓ εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε ἀντιστοίχως. Φέρομεν τὴν διάμεσον ΑΜ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεώς της

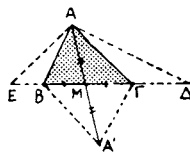
λαμβάνομεν τμήμα $MA' = AM$. Νά ἀποδειχθῆ: 1ον ὅτι τὸ τετράπλευρον $ABA\Gamma$ εἶναι παραλληλόγραμμον. 2ον ὅτι αἱ γωνίαι ABA' καὶ EAD εἶναι ἴσαι ἢ παραπληρωματικά.



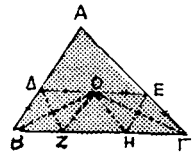
Σχ. ἀσκ. 209.



Σχ. ἀσκ. 210.



Σχ. ἀσκ. 211.

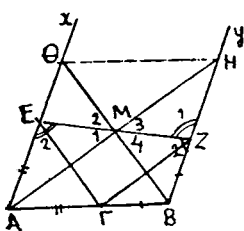


Σχ. ἀσκ. 212.

212. (233). Ἀπὸ τὸ κοινὸν σημεῖον O τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν B καὶ Γ ἑνὸς τριγώνου $AB\Gamma$ φέρομεν μίαν εὐθείαν παράλληλον πρὸς τὴν πλευρὰν $B\Gamma$, ἣ ὅποια τέμνει τὴν AB εἰς τὸ Δ καὶ τὴν $A\Gamma$ εἰς τὸ E . Νά ἀποδειχθῆ: 1ον. Ὅτι $DE = BD + \Gamma E$. 2ον. Ἀπὸ τὸ O φέρομεν τὴν OZ παράλληλον πρὸς τὴν AB , ἣ ὅποια τέμνει τὴν $B\Gamma$ εἰς τὸ Z : ἐπίσης φέρομεν τὴν OH παράλληλον πρὸς τὴν $A\Gamma$, ἣ ὅποια τέμνει τὴν $B\Gamma$ εἰς τὸ H . Νά ἀποδειχθῆ, ὅτι ἡ OG εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν EH καὶ ἡ OB κάθετος ἐπὶ τὴν DZ .

213. (234). Νά ἀποδειχθῆ, ὅτι ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι ἰσοσκελές, ὅταν ἡ εὐθεῖα DE , ἣ ὅποια συνδέει τοὺς πόδας τῶν διχοτόμων BE καὶ $\Gamma\Delta$ τῶν γωνιῶν B καὶ Γ , εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν $B\Gamma$.

214. (235). Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας AB λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Γ : ἀπὸ τὰ σημεῖα A καὶ B φέρομεν δύο τυχούσας παραλλήλους Ax καὶ By πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς AB . Ἐπὶ τῆς Ax λαμβάνομεν τμήμα $AE = A\Gamma$ καὶ ἐπὶ τῆς By τμήμα $BZ = B\Gamma$. Ἐὰν M εἶναι τὸ μέσον τῆς εὐθείας EZ , νά ἀποδειχθῆ, ὅτι ἡ γωνία AMB εἶναι ὀρθή.



Σχ. ἀσκ. 214.

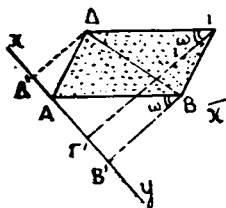
215. (236). Εἰς ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἡ γωνία B εἶναι διπλασία τῆς γωνίας Γ . Ἀπὸ τὸ μέσον M τῆς $A\Gamma$ φέρομεν τὴν παράλληλον πρὸς τὴν διχοτόμον BD τῆς γωνίας B : ἡ παράλληλος αὕτη τέμνει τὴν $B\Gamma$ εἰς τὸ N . Νά ἀποδειχθῆ, ὅτι τὸ τρίγωνον $AN\Gamma$ εἶναι ὀρθογώνιον.

216. (237). Ἐὰν εἰς ἓνα παραλληλόγραμμον ἡ μία ἀπὸ τὰς δύο διαδοχικὰς πλευρὰς του εἶναι διπλασία τῆς ἄλλης, νά ἀποδειχθῆ, ὅτι αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὅποια ἄγονται ἀπὸ τὸ μέσον τῆς μεγαλύτερας πλευρᾶς εἰς τὰ ἄκρα τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς τέμνονται καθέτως.

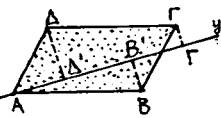
217. (238). Ἀπὸ τὴν κορυφὴν A ἑνὸς παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ φέρομεν μίαν τυχούσαν εὐθείαν xAy . Νά ἀποδειχθῆ, ὅτι ἡ ἀπόστασις τῆς κορυφῆς Γ ἀπὸ τὴν xy εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα ἢ μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ἀποστάσεων τῶν κορυφῶν B καὶ Δ ἀπὸ τὴν xy , καθόσον ἡ xy κείται ἐκτὸς τοῦ παραλληλογράμμου ἢ τέμνει αὐτό.

218. (239). Δίδεται ἓνα ἰσοσκελές τρίγωνον $AB\Gamma$. Μὲ πλευρὰς τὰς ἴσας

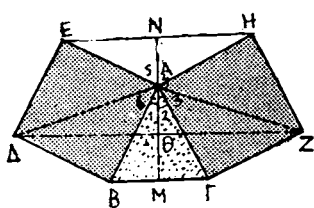
πλευρὰς AB καὶ AG κατασκευάζομεν τὰ τετράγωνα $ABDE$ καὶ $AGZH$, ἐκτὸς τοῦ τριγώνου. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ εὐθεῖαι DZ καὶ EH εἶναι παράλληλοι.



Σχ. ἀσκ. 217.



Σχ. ἀσκ. 218.



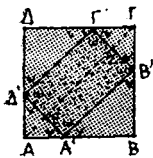
219. (240). Δίδεται ἕνας ῥόμβος $ABΓΔ'$ ἐπὶ τῶν πλευρῶν τοῦ AB καὶ AD λαμβάνομεν μήκη AA' καὶ AD' ἴσα, ἐπὶ δὲ τῶν πλευρῶν τοῦ $ΓB$ καὶ $ΓΔ$ λαμβάνομεν μήκη $ΓB'$ καὶ $ΓΓ'$, ἀντιστοίχως, ἴσα πρὸς τὰ πρῶτα. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα $A', B', Γ', Δ'$ εἶναι κορυφαὶ ὀρθογωνίου.

220. (241). Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ἑνὸς τετραγώνου $ABΓΔ$ λαμβάνομεν κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν μήκη $AA'=BB'=ΓΓ'=ΔΔ'$. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα $A', B', Γ', Δ'$ εἶναι κορυφαὶ τετραγώνου.

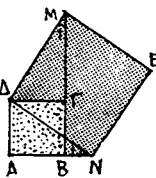
221. (242). Δίδεται τὸ τετράγωνον $ABΓΔ'$ ἐπὶ τῶν πλευρῶν AB καὶ AD τῆς γωνίας A λαμβάνομεν τμήματα $AA'=AD'$ ἐπίσης ἐπὶ τῶν πλευρῶν $ΓB$ καὶ $ΓΔ$ τῆς γωνίας $Γ$ λαμβάνομεν τμήματα $ΓB'=ΓΓ'$ ἴσα πρὸς τὰ AA' καὶ AD' . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα $A', B', Γ', Δ'$ εἶναι κορυφαὶ ὀρθογωνίου, τοῦ ὁποῖου ἡ περίμετρος εἶναι σταθερά.

222. (243). Δίδεται ἕνα τετράγωνον $ABΓΔ$ ἐπὶ τῶν πλευρῶν AD καὶ $ΔΓ$ λαμβάνομεν τμήματα AM καὶ $ΔN$ ἴσα. Φέρομεν τὰς εὐθείας BM καὶ AN . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ AN εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν BM .

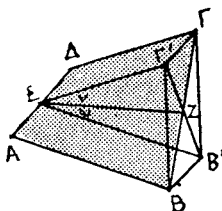
223. (244). Δίδεται ἕνα τετράγωνον $ABΓΔ$. Προεκτείνομεν τὴν πλευρὰν AB κατὰ ἕνα μῆκος $AN > AB$. Ἐπίσης προεκτείνομεν τὴν πλευρὰν $BΓ$ καὶ λαμβάνομεν ἕνα μῆκος $ΓM=AN$. Κατασκευάζομεν τὸ παραλληλόγραμμον $ΔNEM$. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τοῦτο εἶναι τετράγωνον.



Σχ. ἀσκ. 221.



Σχ. ἀσκ. 222.



Σχ. ἀσκ. 223.

224. (245). Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ἑνὸς παραλληλογράμμου $ABΓΔ$ κατασκευάζομεν τέσσαρα τετράγωνα $ABEZ, BΓ'ΗΘ, ΓΔΙΚ, ΔΑΛΜ$, τὰ ὁποῖα κείνται ἐκτὸς

του παραλληλογράμμου. Νά αποδειχθῆ, ὅτι τὰ κέντρα Π, Ρ, Σ, Τ τῶν τεσσάρων τετραγώνων εἶναι κορυφαί ἐνὸς ἄλλου τετραγώνου.

225. (246). Νά αποδειχθῆ, ὅτι, ἐάν ἡ μικροτέρα βᾶσις ἐνὸς τραπεζίου εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του, αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν, ποὺ πρόσκεινται εἰς τὴν μεγαλυτέραν βᾶσιν, τέμνουν τὴν μικροτέραν βᾶσιν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

226. (247). Νά αποδειχθῆ, ὅτι, ὅταν ἡ μεγαλυτέρα βᾶσις ἐνὸς τραπεζίου εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του, αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν, ποὺ πρόσκεινται εἰς τὴν μικροτέραν βᾶσιν τέμνουν τὴν μεγάλην βᾶσιν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

227. (248). Ἐάν ἀπὸ τὰς κορυφὰς ἐνὸς τετραπλεύρου φέρωμεν παραλλήλους πρὸς τὰς διαγωνίους του σχηματίζεται ἓνα παραλληλόγραμμον διπλάσιον τοῦ δοθέντος τετραπλεύρου.

228. (249). Δίδεται ἓνα τετράπλευρον ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου αἱ ἀπέναντι πλευραὶ ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι ἴσαι. Νά αποδειχθῆ, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΕΖ, ἡ ὁποία συνδέει τὰ μέσα τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του σχηματίζει ἴσας γωνίας μὲ τὴν ΑΒ καὶ ΔΓ.

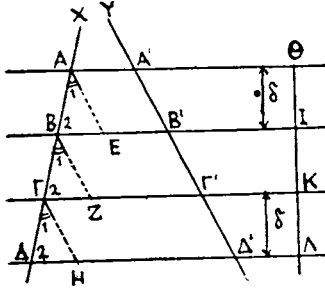
229. (250). Δίδεται ἓνα τρίγωνον ΑΒΓ. Αἱ μεσοκάθετοι ΔΟ, ΕΟ τῶν πλευρῶν του ΑΒ, ΒΓ, προεκτεινόμεναι, τέμνουν τὰς πλευρὰς ΒΓ, ΑΒ εἰς τὰ σημεία Ζ, Η ἀντιστοίχως. Ἐάν σχηματίσωμεν τὸ παραλληλόγραμμον ΗΒΖΘ, νά δειχθῆ, ὅτι ἡ ΟΘ εἶναι μεσοκάθετος τῆς πλευρᾶς ΑΓ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ΄.

ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΩΝ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ ΤΩΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΩΝ

217. Θεώρημα. Ἐάν παράλληλοι εὐθεῖαι τέμνουν δύο ἄλλας εὐθεῖας καὶ ὀρίζουν ἴσα τμήματα ἐπὶ τῆς μιᾶς εὐθεῖας, θὰ ὀρίζουν ἴσα τμήματα καὶ ἐπὶ τῆς δευτέρας εὐθεῖας.

Ῥπόθεσις: Ἐστωσαν αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι $AA', BB', \Gamma\Gamma', \Delta\Delta'$ (Σχ. 171), αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὰς εὐθεῖας X καὶ Y καὶ ἔστω ὅτι εἶναι $AB=BG=\Gamma\Delta$.



Σχ. 171.

Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι θὰ εἶναι καὶ $A'B'=B'\Gamma'=\Gamma'\Delta'$.

Ῥπόθ.	$AA' \parallel BB' \parallel \Gamma\Gamma' \parallel \Delta\Delta'$ $AB=BG=\Gamma\Delta$
Συμπ.	$A'B'=B'\Gamma'=\Gamma'\Delta'$

Ἀπόδειξις: Ἀπὸ τὰ σημεῖα A, B, Γ φέρομεν παραλλήλους $AE, BZ, \Gamma H$ πρὸς τὴν εὐθεῖαν Y . Αἱ $AE, BZ, \Gamma H$ εἶναι παράλληλοι με-

ταξῷ των, ὡς παράλληλοι πρὸς τὴν Y . Τὰ σχηματισθέντα τρίγωνα $ABE, B\Gamma Z$, ἔχουν: τὰς πλευρὰς $AB=BG$, ἐξ ὑποθέσεως, $\widehat{A}_1=\widehat{B}_1$, ὡς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ αὐτὰ μέρη τῶν παραλλήλων AE καὶ BZ τεμνομένων ὑπὸ τῆς X , $\widehat{B}_2=\widehat{G}_2$, ὡς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν παραλλήλων BB' καὶ $\Gamma\Gamma'$ τεμνομένων ὑπὸ τῆς X' δηλ. ἔχουν μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς προσκειμένας εἰς αὐτὴν γωνίας ἴσας ἄρα θὰ εἶναι ἴσα καὶ ἐπομένως θὰ ἔχουν καὶ $AE=BZ$. Ἀλλὰ ἐπειδὴ $AE=A'B'$ καὶ $BZ=B'\Gamma'$, ὡς ἀπέναντι πλευραὶ τῶν παραλληλογράμμων $AEB'A'$ καὶ $BZ\Gamma'B'$, θὰ εἶναι καὶ $A'B'=B'\Gamma'$ (1)

Ἐάν λάβωμεν τὰ τρίγωνα ABE καὶ $\Gamma\Delta H$ καὶ ἐργασθῶμεν ὁμοίως, θὰ εὑρωμεν, ὅτι $A'B'=\Gamma'\Delta'$ (2)

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι $A'B'=B'\Gamma'=\Gamma'\Delta'$.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: Ἐάν παράλληλοι εὐθεῖαι. . .

218. Ἰσαπέχουσαι παράλληλοι. Ἐὰν αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι $AA', BB', \Gamma\Gamma', \Delta\Delta'$ (Σχ. 171) ὀρίζουν ἴσα τμήματα ἐπὶ τῆς τεμνούσης αὐτὰς εὐθείας X , δηλ. ἐὰν εἶναι $AB=BG=\Gamma\Delta$, θὰ ὀρίζουν ἴσα τμήματα καὶ ἐπὶ τῆς καθέτου $\Theta\Lambda$, ἢ ὁποῖα τέμνει αὐτάς· δηλ. θὰ εἶναι $\Theta I=IK=K\Lambda$. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν αἱ παράλληλοι $AA', BB', \Gamma\Gamma', \Delta\Delta'$ λέγονται *ισαπέχουσαι παράλληλοι*.

219. Ἐφαρμογή. Πρόβλημα. *Νὰ διαιρεθῇ ἓνα εὐθύγραμμον τμήμα εἰς ὁσαδήποτε ἴσα μέρη.*

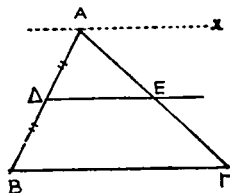
Ἐστω ἓνα εὐθύγραμμον τμήμα AB , τὸ ὁποῖον θέλομεν νὰ διαιρέσωμεν εἰς ἴσα μέρη, ἔστω εἰς 5 ἴσα μέρη. Πρὸς τοῦτο ἀπὸ τὸ ἓνα ἄκρον A τοῦ AB φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν Ax . Ἐπὶ τῆς Ax λαμβάνομεν, μὲ τὸν διαβήτην, πέντε ἴσα διαδοχικὰ τμήματα $AG, \Gamma\Delta, \Delta E, EZ, ZH$.

Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν BH καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα A, Γ, Δ, E, Z , φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὴν εὐθεῖαν BH , αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν AB εἰς τὰ σημεῖα, $A, \Gamma', \Delta', E', Z'$. Λέγομεν, ὅτι τὰ τμήματα $A\Gamma', \Gamma'\Delta', \Delta'E', E'Z', Z'B$ εἶναι ἴσα μεταξὺ τῶν.

Πράγματι· αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι $AA', \Gamma\Gamma', \Delta\Delta', EE', ZZ', HB$ ὀρίζουν ἴσα τμήματα, ἐκ κατασκευῆς, ἐπὶ τῆς Ax · ἄρα θὰ ὀρίζουν ἴσα τμήματα καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας AB , τὴν ὁποίαν τέμνουν· ἦτοι θὰ εἶναι $A\Gamma'=\Gamma'\Delta'=\Delta'E'=E'Z'=Z'B$.

220. Πόρισμα I. Ἐὰν ἀπὸ τὸ μέσον μιᾶς πλευρᾶς τριγώνου φέρωμεν παράλληλον πρὸς ἄλλην πλευράν του, ἡ παράλληλος αὐτὴ θὰ περάσῃ ἀπὸ τὸ μέσον τῆς τρίτης πλευρᾶς τοῦ τριγώνου.

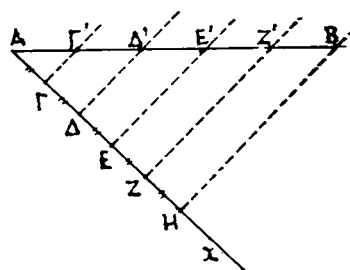
Ἐπίπεδοι: Ἐστω τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ καὶ Δ τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς AB · δηλ. ἔστω ὅτι $A\Delta=\Delta B$. Ἀπὸ τὸ Δ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν $B\Gamma$, ἢ ὁποῖα τέμνει τὴν $A\Gamma$ εἰς τὸ σημεῖον E .



Σχ. 173.

Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι $AE=E\Gamma$.

Ἀπόδειξις: Ἀπὸ τὴν κορυφὴν A φέρομεν μίαν εὐθεῖαν Ax παράλληλον πρὸς τὴν $B\Gamma$ · ἢ ὁποῖα, θὰ εἶναι παράλληλος καὶ πρὸς τὴν ΔE .



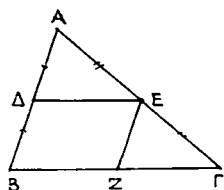
Σχ. 172.

Ἐπίπεδοι.	$A\Delta=\Delta B$ $\Delta E \parallel B\Gamma$
Συμπ.	$AE=E\Gamma$

Παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι Ακ, ΔΕ, ΒΓ τέμνουσι τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ καὶ ὀρίζουσι ἐπὶ τῆς ΑΒ ἴσα τμήματα, ΑΔ=ΔΒ· ἄρα θὰ ὀρίζουσι ἴσα τμήματα καὶ ἐπὶ τῆς ΑΓ· δηλ. θὰ εἶναι ΑΕ=ΕΓ.

221. Πόρισμα II. Ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει τὰ μέσα δύο πλευρῶν τριγώνου εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην πλευρὰν τοῦ καὶ ἴση μὲ τὸ ἥμισυ αὐτῆς.

Ἐπίθεσις: Ἐστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ Δ καὶ Ε τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ ΑΒ καὶ ΑΓ.



Σχ. 174.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΔΕ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ καὶ ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ΒΓ.

Ἐπίθεσις.	ΑΔ=ΔΒ ΑΕ=ΕΓ
Συμπ.	ΔΕ//ΒΓ ΔΕ = $\frac{ΒΓ}{2}$

Ἀπόδειξις: Ἐὰν φέρωμεν ἀπὸ τὸ μέσον Δ τῆς ΑΒ παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ, αὕτη θὰ περάσῃ ἀπὸ τὸ μέσον Ε τῆς ΑΓ (§ 220) καὶ ἐπομένως θὰ συμπέσῃ μὲ τὴν ΔΕ.

Ἐὰν τώρα φέρωμεν ἀπὸ τὸ Ε παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ, αὕτη θὰ περάσῃ ἀπὸ τὸ μέσον Ζ τῆς ΒΓ καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι

$$ΒΖ=ΖΓ = \frac{ΒΓ}{2}.$$

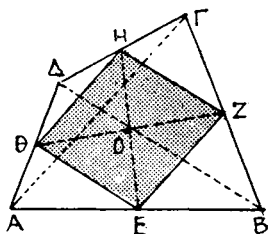
Ἐπειδὴ τὸ τετράπλευρον ΔΒΖΕ εἶναι παραλληλογραμμον, διότι αἱ ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ εἶναι παράλληλοι, θὰ εἶναι

$$ΔΕ=ΒΖ \quad \text{ἢ} \quad ΔΕ = \frac{ΒΓ}{2}.$$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: Ἡ εὐθεῖα. . .

222. Θεώρημα. Τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τετραπλεύρου εἶναι κορυφαὶ παραλληλογράμμου

Ἐπίθεσις: Ἐστω ἓνα τετράπλευρον ΑΒΓΔ (Σχ. 175) καὶ Ε, Ζ, Η, Θ τὰ μέσα



Σχ. 175.

τῶν πλευρῶν τοῦ ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ. Φέρομεν τὰς εὐθεῖας ΕΖ, ΖΗ, ΗΘ, ΘΕ.

Ἐπίθεσις.	ΑΕ=ΕΒ ΒΖ=ΖΓ ΓΗ=ΗΔ ΔΘ=ΘΑ
Συμπ.	ΕΖΗΘ=παραλληλόγραμμον

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΘ εἶναι παραλληλόγραμμον.

Ἀπόδειξις: Φέρομεν τὴν διαγώνιον ΑΓ.

Εἰς τὸ τρίγωνον ΔΑΓ, ἡ εὐθεῖα ΘΗ συνδέει τὰ μέσα δύο πλευρῶν του καὶ ἐπομένως εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην πλευρὰν του ΑΓ καὶ ἴση μὲ τὸ ἥμισυ αὐτῆς (§ 221).

Ὅμοίως εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἡ εὐθεῖα ΕΖ συνδέει τὰ μέσα τῶν δύο πλευρῶν του καὶ ἐπομένως εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην πλευρὰν ΑΓ καὶ ἴση μὲ τὸ ἥμισυ αὐτῆς.

Ἐπειδὴ αἱ ΘΗ καὶ ΕΖ εἶναι ἴσαι μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ΑΓ καὶ παράλληλοι πρὸς αὐτήν, θὰ εἶναι καὶ ἴσαι μεταξύ των καὶ παράλληλοι· ἄρα τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΘ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ δύο ἀπέναντι πλευραὶ του ΕΖ καὶ ΘΗ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι (§ 191).

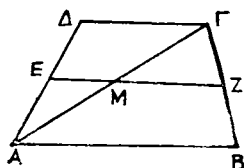
Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: *Τὰ μέσα τῶν πλευρῶν. . .*

223. Πόρισμα. Αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τετραπλεύρου διχοτομοῦνται.

Αἱ εὐθεῖαι ΕΗ καὶ ΖΘ (Σχ. 175), αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ εἶναι διαγώνιοι τοῦ παραλληλογράμμου ΕΖΗΘ καὶ ἐπομένως διχοτομοῦνται.

224. Θεώρημα. Ἡ διάμεσος τραπέζιου εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις του καὶ ἴση μὲ τὸ ἡμίθροισμα αὐτῶν.

Ἐπόθεσις: Ἐστω τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ (Σχ. 176) καὶ Ε, Ζ τὰ



Σχ. 176.

μέσα τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του ΑΔ καὶ ΒΓ.

Συμπέρασμα:

Θὰ δείξωμεν ὅτι

ὅτι ἡ διάμεσος ΕΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις του ΑΒ καὶ ΓΔ καὶ ἴση μὲ $\frac{AB+GD}{2}$.

Ἐπόθ.	$AE = ED$ $BZ = ZG$
Συμπ.	$EZ \parallel AB$ $EZ = \frac{AB + GD}{2}$

Ἀπόδειξις: Φέρομεν τὴν διαγώνιον ΑΓ καὶ ἔστω Μ τὸ μέσον της. Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΔΓ, ἡ εὐθεῖα ΕΜ συνδέει τὰ μέσα Ε καὶ Μ δύο πλευρῶν του, ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΔΓ καὶ ἴση μὲ τὸ ἥμισυ αὐτῆς (§ 221). Ὅμοίως εἰς τὸ τρίγωνον ΓΑΒ, ἡ εὐθεῖα ΜΖ συνδέει τὰ μέσα Μ καὶ Ζ δύο πλευρῶν του· ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην πλευρὰν του ΑΒ καὶ ἴση μὲ τὸ ἥμισυ αὐτῆς.

Αἱ εὐθεῖαι EM καὶ MZ, ὡς παράλληλοι πρὸς τὰς παραλλήλους AB καὶ ΔΓ καὶ ἀγόμεναι ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον M ἀποτελοῦν μίαν εὐθεῖαν EMZ παράλληλον πρὸς τὰς AB καὶ ΔΓ.

Ἐδείχθη ἀνωτέρω, ὅτι $EM = \frac{\Delta\Gamma}{2}$ καὶ $MZ = \frac{AB}{2}$.

Ἄρα θὰ εἶναι $EM + MZ = \frac{\Delta\Gamma}{2} + \frac{AB}{2}$ ἢ $EZ = \frac{\Delta\Gamma + AB}{2}$.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Ἡ διάμεσος τραπεζίου. . .**

Διὰ τοῦτο ἡ διάμεσος τραπεζίου λέγεται καί: **μέση βᾶσις** αὐτοῦ.

Ἀσκήσεις

230. (251). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τριγώνου μὲ μίαν ἀπὸ τὰς κορυφάς του, εἶναι κορυφαὶ παραλληλογράμου.

231. (252). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου εἶναι κορυφαὶ ἄλλου τριγώνου, τοῦ ὁποῦ αἱ πλευραὶ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς πλευράς τοῦ πρώτου ἀντιστοίχως καὶ ἴσαι μὲ τὰ ἡμίση αὐτῶν.

232. (253). Αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι συνδέουσιν τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου διαιροῦν τὸ τρίγωνον εἰς τέσσαρα ἴσα τρίγωνα.

233. (254). Ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει τὰ μέσα δύο πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου, διχοτομεῖ τὴν διάμεσον, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν τρίτην πλευράν του.

234. (267). Τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου καὶ ὁ πούς ἑνὸς ὕψους του εἶναι κορυφαὶ ἰσοσκελοῦς τραπεζίου.

235. (255). Εἰς ἓνα τρίγωνον ABΓ φέρομεν τὴν διάμεσον ΒΔ καὶ ἔστω E τὸ μέσον αὐτῆς. Φέρομεν ἔπειτα τὴν εὐθεῖαν AE, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ Z. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $Z\Gamma = 2BZ$.

236. (256). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὰς ἀπέναντι κορυφὰς παραλληλογράμου εἰς τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν του, διαιροῦν τὴν διαγώνιον του εἰς τρία ἴσα μέρη.

237. (257). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν:

1ον. Ἐνὸς ὀρθογωνίου εἶναι κορυφαὶ ῥόμβου.

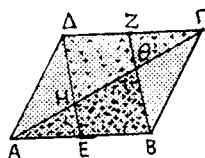
2ον. Ἐνὸς ῥόμβου εἶναι κορυφαὶ ὀρθογωνίου

3ον. Ἐνὸς τετραγώνου εἶναι κορυφαὶ ἄλλου τετραγώνου.

238. (298). Ἐὰν ἓνα σχῆμα ἔχῃ ἄξονα συμμετρίας καὶ ἓνα κέντρον συμμετρίας, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος αὐτοῦ, θὰ ἔχῃ καὶ δεύτερον ἄξονα συμμετρίας κάθετον ἐπὶ τὸν πρῶτον εἰς τὸ κέντρον συμμετρίας αὐτοῦ.

239. (311). Ἀπὸ τὴν κορυφήν A ἑνὸς τριγώνου ABΓ φέρομεν τυχούσαν εὐθεῖαν xAy. Ἀπὸ τὰς κορυφὰς B καὶ Γ φέρομεν καθέτους BB' καὶ ΓΓ' ἐπὶ τὴν xAy. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ μέσον Δ τῆς ΒΓ ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰ σημεῖα B' καὶ Γ'.

240. (323). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν



Σχ. ἀσκ. 236.

ἑνὸς τριγώνου εἶναι μικρότερον τῆς περιμέτρου καὶ μεγαλύτερον τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ τριγώνου.

241. (351). Ἐὰν ἡ γωνία A ἑνὸς τριγώνου $AB\Gamma$ εἶναι ὀξεῖα, ὀρθή, ἢ ἀμβλεία, ἢ διάμεσός του, ἢ ὁποῖα ἄγεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν A εἶναι μεγαλύτερα, ἴση, ἢ μικρότερα τοῦ ἡμίσεως τῆς πλευρᾶς $B\Gamma$.

242. (352). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τυχὸν σημεῖον ἐντὸς ἑνὸς τριγώνου εἰς τὰς κορυφὰς του εἶναι μικρότερον τοῦ ἄθροίσματος τῶν δύο μεγαλύτερων πλευρῶν τοῦ τριγώνου.

243. (355). Ἐὰν αἱ διχοτόμοι δύο γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἴσαι, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές.

244. (356). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς τὴν μεγαλύτεραν πλευρὰν ἑνὸς τριγώνου ἀντιστοιχεῖ ἡ μικρότερα διχοτόμος γωνίας του.

245. (340). Δίδεται ἕνα τρίγωνον $AB\Gamma$. Φέρομεν τὴν διχοτόμον AD καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς AB ἕνα μῆκος $AG = A\Gamma$ καὶ ἐπὶ τῆς $A\Gamma$ ἕνα μῆκος $AB' = AB$. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα B', Γ' καὶ D κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

246. (342). Εἰς ἕνα τρίγωνον $AB\Gamma$ φέρομεν τὸ ὕψος τοῦ AH , τὴν διχοτόμον AD τῆς γωνίας A καὶ τὴν διάμεσον AM . Νὰ ἀποδειχθῇ :

1ον. Ὅτι ἡ διχοτόμος AD κεῖται ἐντὸς τῆς γωνίας HAG .

2ον. Ὅτι $D\Gamma > BD$.

3ον. Ὅτι ἡ διχοτόμος AD δὲν ὑπερβαίνει τὴν διάμεσον AM .

247. (258). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τραπεζίου εἶναι κορυφαὶ ῥόμβου.

248. (259). Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τετραπλεύρου εἶναι ἴσαι, τὸ τετράπλευρον, τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ δοθέντος τετραπλεύρου, εἶναι ὀρθογώνιον.

249. (260). Ἐὰν μία βᾶσις τραπεζίου εἶναι διπλάσια τῆς ἄλλης, ἢ διάμεσός του διαιρεῖται εἰς τρία ἴσα μέρη ὑπὸ τῶν διαγωνίων του.

250. (261). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ διάμεσος τραπεζίου διέρχεται ἀπὸ τὰ μέσα τῶν διαγωνίων του καὶ ὅτι τὸ τμήμα τῆς διαμέσου, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν διαγωνίων του εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν βάσεων τοῦ τραπεζίου.

251. (262). Προεκτείνομεν τὰς μὴ παραλλήλους πλευρὰς ἑνὸς τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$ μέχρι τῆς συναντήσεώς των εἰς ἕνα σημεῖον E . Ἐὰν Z, H, Θ, K εἶναι τὰ μέσα τῶν AE, BE καὶ τῶν διαγωνίων $A\Gamma$ καὶ $B\Delta$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ΘKHZ εἶναι τραπέζιον.

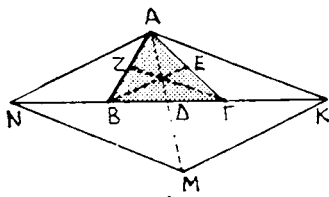
252. (269). Ἐὰν αἱ διαγώνιοι τετραπλεύρου εἶναι κάθετοι μεταξὺ των, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του εἶναι κορυφαὶ ὀρθογωνίου.

253. (270). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ τρεῖς εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τετραπλεύρου καὶ τὰ μέσα τῶν διαγωνίων του, τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ μέσον ἑκάστης τῶν τριῶν αὐτῶν εὐθειῶν.

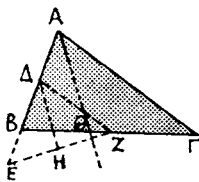
254. (263). Εἰς ἕνα τρίγωνον $AB\Gamma$ φέρομεν τὰς διαμέσους $AD, BE, \Gamma Z$. Προεκτείνομεν τὴν AD κατὰ μῆκος $DM = AD$. Ἐπίσης προεκτείνομεν τὴν $B\Gamma$ καὶ ἑκατέρωθεν αὐτῆς λαμβάνομεν τμήματα $BN = \Gamma K = B\Gamma$. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ πλευραὶ τῶν τριγώνων AMN καὶ AMK εἶναι διπλάσιαι τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$.

255. (264). Εἰς ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$ ἡ πλευρὰ $B\Gamma$ εἶναι διπλασία τῆς AB . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ διάμεσος AD διχοτομεῖ τὴν γωνίαν, ἡ ὁποία σχηματίζεται ἀπὸ τὴν πλευρὰν AG καὶ ἀπὸ τὴν διάμεσον AE τοῦ τριγώνου ABA .

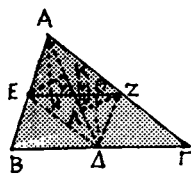
256. (265). Δίδεται ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ AB καὶ ἀπὸ τὸ μέσον Δ αὐτῆς λαμβάνομεν ἓνα τμήμα ΔE ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τῆς AG . Ἀπὸ τὸ E φέρομεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας A . Νὰ δεიχθῇ, ὅτι ἡ κάθετος αὐτὴ τέμνει τὴν $B\Gamma$ εἰς τὸ μέσον τῆς.



Σχ. ἀσκ. 254.



Σχ. ἀσκ. 256.



Σχ. ἀσκ. 258.

257. (266). Ἀπὸ τὰ μέσα Δ καὶ E τῶν πλευρῶν AB καὶ AG ἑνὸς τριγώνου $AB\Gamma$ φέρομεν δύο τυχούσας παραλλήλους ΔZ καὶ $E\Theta$, αἱ ὁποῖαι τέμνουσιν τὴν $B\Gamma$ εἰς τὰ σημεῖα Z καὶ Θ . Νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. Ὅτι τὸ τρίγωνον $A\Delta E$ εἶναι τὸ τέταρτον τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$.

2ον. Ὅτι τὸ τετράπλευρον $\Delta Z\Theta E$ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$.

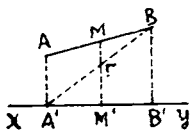
258. (268). Εἰς ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$ φέρομεν τὴν διάμεσον AD , ἡ ὁποία τέμνει τὴν εὐθεῖαν EZ , ποὺ συνδέει τὰ μέσα E καὶ Z τῶν πλευρῶν AB καὶ AG εἰς τὸ σημεῖον M . Νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. Ὅτι τὸ M εἶναι τὸ μέσον τῆς AD καὶ EZ .

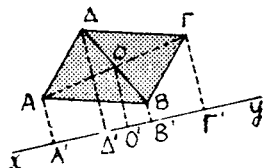
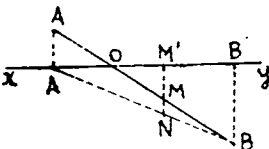
2ον. Ὅτι τὰ σημεῖα A καὶ Δ ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὴν EZ .

3ον. Ὅτι τὰ σημεῖα E καὶ Z ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὴν AD .

259. (271). Δίδεται μία εὐθεῖα xy καὶ δύο σημεῖα A καὶ B , τὰ ὁποῖα κείνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς xy . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ἀπόστασις τοῦ μέσου M τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος AB ἀπὸ τὴν xy εἶναι ἴση μὲ τὸ ἡμίθροισμα τῶν ἀποστάσεων τῶν σημείων A καὶ B ἀπὸ τὴν xy . Ἐὰν τὰ σημεῖα A καὶ B κείνται ἐκατέρωθεν τῆς xy , τί δυνάμεθα νὰ εἰπωμεν;



Σχ. ἀσκ. 259.



Σχ. ἀσκ. 260.

260. (272). Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τῶν κορυφῶν ἑνὸς παραλληλογράμμου ἀπὸ εὐθεῖαν, ἡ ὁποία δὲν τέμνει τὸ παραλληλόγραμμον εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετραπλάσιον τῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων τοῦ παραλληλογράμμου ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν αὐτήν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Η΄

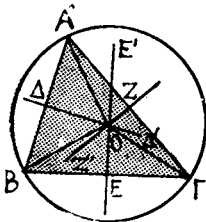
ΜΕΡΙΚΑΙ ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

225. Μεταξύ τῶν κυρίων στοιχείων ἑνὸς τριγώνου (τῶν τριῶν πλευρῶν του καὶ τῶν τριῶν γωνιῶν του) καὶ τῶν ὑψῶν του, τῶν διαμέσων του, τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν του κλπ. ὑπάρχουν μερικαὶ ἀξιοσημεῖωτοι ιδιότητες θέσεως, τὰς ὁποίας θὰ ἐξετάσωμεν κατωτέρω:

226. Θεώρημα. *Αἱ τρεῖς μεσοκάθετοι ἑνὸς τριγώνου, δηλ. αἱ κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευράς του εἰς τὰ μέσα αὐτῶν, τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.*

‘Υπόθεσις: Ἐστω τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ καὶ $\Delta\Delta'$, EE' , ZZ' αἱ τρεῖς μεσοκάθετοί του.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν ὅτι αἱ $\Delta\Delta'$, EE' , ZZ' τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.



Σχ. 177.

‘Υπόθ.	$\Delta\Delta'$ μεσοκάθ. τῆς AB EE' > » $B\Gamma$ ZZ' > » ΓA
Συμπ.	Αἱ $\Delta\Delta'$, EE' , ZZ' τέμνον- ται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον

‘Απόδειξις: Αἱ μεσοκάθετοι $\Delta\Delta'$ καὶ EE' θὰ τέμνονται, διότι ἔφ' ὅσον αἱ BA καὶ $B\Gamma$ τέμνονται, θὰ τέμνονται καὶ αἱ κάθετοι πρὸς αὐτὰς (§ 167).

Ἐστω O τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν $\Delta\Delta'$ καὶ EE' . Θὰ δείξωμεν, ὅτι καὶ ἡ τρίτη μεσοκάθετος τῆς πλευρᾶς AG , θὰ διέρχεται ἀπὸ τὸ O .

Ἐπειδὴ τὸ O κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου τῆς AB , θὰ ἀπέχη ἴσον ἀπὸ τὰ ἄκρα αὐτῆς· δηλ. θὰ εἶναι $OA=OB$ (1)

Ἐπίσης, ἐπειδὴ τὸ O κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου τῆς πλευρᾶς $B\Gamma$, θὰ εἶναι $OG=OB$ (2)

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι $OA=OG$.

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἰσότητα παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ O ἀπέχει ἴσον

ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς πλευρᾶς $ΑΓ$ ἄρα (§ 135) τὸ O θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου τῆς $ΑΓ$, δηλ. ἐπὶ τῆς $ΖΖ'$.

Ὡστε αἱ μεσοκάθετοι τῶν πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον O .

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Αἱ τρεῖς μεσοκάθετοι ἑνὸς τριγώνου...**

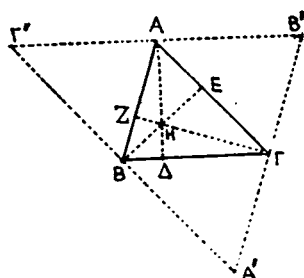
227. Περιγεγραμμένος κύκλος περὶ τριγώνου. Ἀπὸ τὰς ἰσότητος (1) καὶ (2) τῆς § 226, συνάγομεν ὅτι: $OA=OB=OG$.

Τὸ σημεῖον O , ὡς ἀπέχον ἴσον ἀπὸ τὰς τρεῖς κορυφὰς τοῦ τριγώνου $ΑΒΓ$, εἶναι τὸ κέντρον ἑνὸς κύκλου, ὃ ὁποῖος διέρχεται ἀπὸ τὰς τρεῖς κορυφὰς του. Ὁ κύκλος αὐτὸς ὀνομάζεται **περιγεγραμμένος κύκλος** περὶ τὸ τρίγωνον $ΑΒΓ$.

228. Θεώρημα. *Τὰ τρία ὕψη ἑνὸς τριγώνου τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.*

Ἐπίδειξις: Ἐστω ἓνα τρίγωνον $ΑΒΓ$ (Σχ. 178) καὶ $ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ$ τὰ τρία ὕψη του.

Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι τὰ ὕψη του τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.



Σχ. 178.

Ἀπόδειξις: Ἀπὸ τὰς κορυφὰς $A, B, Γ$ τοῦ τριγώνου $ΑΒΓ$ φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς ἀπέναντι πλευρὰς του, αἱ ὁποῖαι τεμνόμενα σχηματίζουν ἓνα τρίγωνον $A'B'Γ'$.

Ἐπίδειξις.	$ΑΔ \perp ΒΓ$ $ΒΕ \perp ΓΑ$ $ΓΖ \perp ΑΒ$
Συμπ.	$ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ,$ τέμν. εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον

Τὰ τετράπλευρα $ΒΓΑΓ'$ καὶ $ΒΓΒ'A$ εἶναι παραλληλόγραμμα, ἐκ κατασκευῆς: ἄρα θὰ εἶναι $ΒΓ=Γ'A$ καὶ $ΒΓ=ΑΒ'$. Ἀπὸ τὰς ἰσότητος αὐτὰς συνάγομεν, ὅτι $Γ'A=ΑΒ'$, δηλ. ὅτι ἡ κορυφή A τοῦ τριγώνου $ΑΒΓ$ εἶναι τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς $Γ'B'$ τοῦ τριγώνου $A'B'Γ'$.

Ὀμοίως ἀπὸ τὰ παραλληλόγραμμα $ΓΑΓ'B$ καὶ $ΓΑΒA'$ συνάγομεν, ὅτι τὸ B εἶναι τὸ μέσον τῆς $Γ'A'$ καὶ ἀπὸ τὰ παραλληλόγραμμα $ΑΒA'Γ$ καὶ $ΑΒΓΒ'$, ὅτι τὸ $Γ$ εἶναι τὸ μέσον τῆς $A'B'$.

Ἐπειδὴ ἡ $ΑΔ$ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν $ΒΓ$, θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλὸν τῆς $Γ'B'$ ἥτοι τὸ ὕψος $ΑΔ$ τοῦ τριγώνου $ΑΒΓ$ εἶναι μεσοκάθετος τῆς πλευρᾶς $Γ'B'$ τοῦ τριγώνου $A'B'Γ'$.

Ὅμοίως τὰ ὕψη BE καὶ ΓZ εἶναι μεσοκάθετοι τῶν πλευρῶν Γ'Α καὶ Α'Β' τοῦ τριγώνου Α'Β'Γ'.

Ἄλλὰ γνωρίζομεν, ὅτι αἱ μεσοκάθετοι τῶν πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον (§ 226). Ὡστε τὰ ὕψη ΑΔ, BE, ΓZ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: *Τὰ τρία ὕψη ἑνὸς τριγώνου...*

229. Ὁρθόκεντρον. Τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν τριῶν ὕψων ἑνὸς τριγώνου λέγεται *ὀρθόκεντρον*.

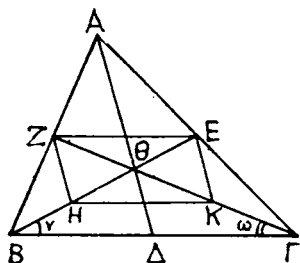
Ὅταν τὸ τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον, τὸ ὀρθόκεντρον εἶναι ἡ κορυφή τῆς ὀρθῆς γωνίας. Ὅταν τὸ τρίγωνον εἶναι ἀμβλυγώνιον, τὸ ὀρθόκεντρον κεῖται ἔκτος τοῦ τριγώνου.

230. Θεώρημα. *Αἱ τρεῖς διαμέσοι ἑνὸς τριγώνου τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἀπὸ κάθε κορυφῆν ἀποστασιν ἴσην μὲ τὰ δύο τρίτα τῆς ἀντιστοιχοῦ διαμέσου.*

Ἐπίδειξις: Ἐστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (Σχ. 179) καὶ ΑΔ, BE, ΓZ αἱ τρεῖς διαμέσοί του.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ διαμέσοι αὐταὶ τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

Ἀπόδειξις: Αἱ διαμέσοι BE καὶ ΓZ



Σχ. 179.

τέμνονται εἰς ἓνα σημεῖον, διότι αἱ γωνίαί ω καὶ ν, τὰς ὁποίας σχηματίζουν μὲ τὴν ΒΓ, ἔχουν ἄθροισμα μικρότερον τῶν δύο ὀρθῶν, ἐφ' ὅσον εἶναι μέρη τῶν δύο γωνιῶν Β καὶ Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἐστω Θ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς των. Ἐστω Η τὸ μέσον τῆς ΒΘ καὶ Κ τὸ μέσον τῆς ΓΘ. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΗΚ, ΚΕ, ΕΖ, ΖΗ.

Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἡ εὐθεῖα ΖΕ συνδέει τὰ μέσα δύο πλευρῶν του καὶ ἐπομένως εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην πλευρὰν του ΒΓ καὶ ἴση μὲ τὸ ἥμισυ αὐτῆς.

Ὅμοίως εἰς τὸ τρίγωνον ΘΒΓ, ἡ ΗΘ συνδέει τὰ μέσα δύο πλευ-

Ἐπίδειξις.	ΑΔ, BE, ΓZ διαμέσοι
	1ον. Αἱ ΑΔ, BE, ΓZ τέμν. εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.
Συμπ.	2ον. $AO = \frac{2}{3} AD,$ $BO = \frac{2}{3} BE, \quad CO = \frac{2}{3} CZ$

ρῶν του καὶ ἐπομένως εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην πλευρὰν του ΒΓ καὶ ἴση μὲ τὸ ἥμισυ αὐτῆς.

Ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι ΗΚ καὶ ΖΕ εἶναι ἴσαι μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ΒΓ καὶ παράλληλοι πρὸς τὴν ΒΓ, θὰ εἶναι καὶ μεταξύ των ἴσαι καὶ παράλληλοι· ἄρα τὸ τετράπλευρον ΖΗΚΕ εἶναι παραλληλόγραμμον.

Ἐπειδὴ αἱ διαγώνιοι παραλληλογράμμου διχοτομοῦνται, θὰ εἶναι: $H\Theta = \Theta E$ καὶ $Z\Theta = \Theta K$. Ἐπειδὴ τὸ Η εἶναι τὸ μέσον τῆς ΒΘ εἶναι εἶναι

$$BH = H\Theta = \Theta E, \quad \text{ἄρα} \quad B\Theta = \frac{2}{3} BE.$$

Ὅμοίως ἔπειδὴ τὸ Κ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΘΓ θὰ εἶναι

$$Z\Theta = \Theta K = K\Gamma \quad \text{ὁπότε} \quad \Gamma\Theta = \frac{2}{3} \Gamma Z.$$

Ἐὰν λάβωμεν τὰς διαμέσους ΑΔ καὶ ΒΕ καὶ ἐργασθῶμεν ὁμοίως εὐρίσκομεν, ὅτι αὐταὶ τέμνονται εἰς ἓνα σημεῖον Θ, τὸ ὁποῖον κεῖται εἰς τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς ΒΕ ἀπὸ τῆς κορυφῆς Β καὶ εἰς τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς ΑΔ ἀπὸ τῆς κορυφῆς Α· δηλ. τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Θ. Τὸ Θ λοιπὸν εἶναι κοινὸν σημεῖον καὶ τῆς τρίτης διαμέσου ΑΔ.

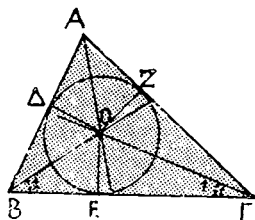
Ἐδείχθη λοιπὸν, ὅτι: **Αἱ τρεῖς διάμεσοι ἑνὸς τριγώνου.**

231. Βαρύκεντρον. Τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέσων ἑνὸς τριγώνου λέγεται **κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου** ἢ καὶ **βαρύκεντρον** τοῦ τριγώνου.

232. Θεώρημα. **Αἱ τρεῖς διχοτόμοι τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.**

Ἐπίθεσις: Ἐστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ΒΟ, ΓΟ, ΑΟ, αἱ διχοτόμοι τῶν τριῶν γωνιῶν του Β, Γ, Α.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν ὅτι αἱ διχοτόμοι αὐταὶ τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.



Σχ. 180.

Ἐπίθεσις.	ΒΟ διχοτ. γων. Β
	ΓΟ » » Γ
	ΑΟ » » Α
Συμπ.	Αἱ ΒΟ, ΓΟ, ΑΟ τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον

Ἀπόδειξις: Αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ θὰ τέμνονται, διότι αἱ γωνίαι Β₁ καὶ Γ₁, ποὺ σχηματίζουν μὲ τὴν ΒΓ ἔχουν ἄθροισμα μικρότερον τῶν δύο ὀρθῶν· ἔστω Ο τὸ σημεῖον τῆς τομῆς των.

Ἐπειδὴ τὸ O κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας B , θὰ ἀπέχη ἴσον ἀπὸ τὰς πλευρὰς τῆς BA καὶ BG · δηλ., ἐὰν φέρωμεν τὰς καθέτους OD καὶ OE ἐπὶ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας B , θὰ εἶναι $OD=OE$ (1).

Ὀμοίως ἐπειδὴ τὸ O κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Γ , αἱ ἀποστάσεις OE καὶ OZ ἀπὸ τὰς πλευρὰς ΓB καὶ ΓA θὰ εἶναι ἴσαι, ἦτοι $OE=OZ$ (2). Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι $OD=OZ$.

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἰσότητα συνάγομεν, ὅτι τὸ O ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας A · ἄρα τὸ O κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας A . Ὡστε αἱ τρεῖς διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον O .

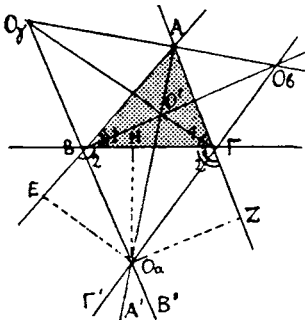
Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Αἱ τρεῖς διχοτόμοι τῶν γωνιῶν...**

233. Παρατήρησις. Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) τῆς προηγουμένης παραγράφου συνάγομεν, ὅτι $OD=OE=OZ$ · δηλ. ὅτι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰς τρεῖς πλευρὰς τοῦ τριγώνου· τὸ σημεῖον αὐτὸ ὀνομάζεται **κέντρον τοῦ κύκλου τοῦ ἐγγεγραμμένου** εἰς τὸ τρίγωνον.

234. Θεώρημα. Ἡ ἐσωτερικὴ διχοτόμος μιᾶς γωνίας ἑνὸς τριγώνου καὶ αἱ ἐξωτερικαὶ διχοτόμοι τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν του τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

Ἐπίθεσις: Ἐστω ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$ (Σχ. 181), AA' ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας A , καὶ BB' , $\Gamma\Gamma'$ αἱ ἐξωτερικαὶ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν B καὶ Γ .

Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι



Σχ. 181.

Ἐπίθεσις.	AA' διχοτ. ἐσωτ. γων. A BB' διχοτ. ἐξωτ. γων. B $\Gamma\Gamma'$ διχοτ. ἐξωτ. γων. Γ
Συμπ.	Αἱ AA' , BB' , $\Gamma\Gamma'$ τέμν. εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον

AA' , BB' , $\Gamma\Gamma'$ τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

Ἀπόδειξις: Ἐν πρώτοις θὰ δεῖξωμεν, ὅτι αἱ BB' καὶ $\Gamma\Gamma'$ τέμνονται. Αἱ γωνίαι B_1 καὶ B_2 εἶναι ἐφεξῆς παραπληρωματικαί· ἐπομένως αἱ διχοτόμοι τῶν BO' καὶ BB' εἶναι κάθετοι (§ 71). Ὀμοίως αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Γ_1 καὶ Γ_2 εἶναι κάθετοι. Ἀλλὰ αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν B_1 καὶ Γ_1 τέμνονται (§ 232), ἄρα καὶ αἱ κάθετοι πρὸς αὐτὰς BB' καὶ $\Gamma\Gamma'$ θὰ τέμνονται (§ 167).

Ἐστω O_a τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν BB' καὶ $ΓΓ'$ καὶ O_aE , O_aH , O_aZ αἱ ἀποστάσεις τοῦ O_a ἀπὸ τὰς πλευρὰς AB , $BΓ$, $ΓA$ τοῦ τριγώνου $ABΓ$.

Ἐπειδὴ τὸ O_a εἶναι σημεῖον τῆς διχοτόμου BO_a τῆς γωνίας $EBΓ$ θὰ εἶναι $O_aE = O_aH$ (1)

Ὁμοίως ἐπειδὴ τὸ O_a εἶναι σημεῖον τῆς διχοτόμου $ΓO_a$ τῆς γωνίας $BΓZ$ θὰ εἶναι $O_aZ = O_aH$ (2).

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι $O_aE = O_aZ$.

Τὸ O_a , ὡς ἀπέχον ἴσον ἀπὸ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας A , κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας A . Ὡστε τὸ O_a εἶναι κοινὸν σημεῖον τῶν τριῶν διχοτόμων AA' , BB' καὶ $ΓΓ'$.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Ἡ ἐσωτερικὴ διχοτόμος...**

235. Πρόρισμα. I. *Αἱ διχοτόμοι τῶν ἐσωτερικῶν καὶ ἐξωτερικῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου τέμνονται, ἀνὰ τρεῖς, εἰς τέσσαρα διάφορα σημεῖα: τὰ O , O_a , O_b , O_γ .*

II. *Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ἑνὸς τριγώνου $ABΓ$ ὑπάρχουν τέσσαρα σημεῖα, καθένα τῶν ὁποίων ἀπέχει ἰσάκεις ἀπὸ τὰς τρεῖς πλευρὰς του.*

III. *Αἱ ἐσωτερικαὶ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου $ABΓ$ εἶναι ὕψη τοῦ τριγώνου $O_aO_bO_\gamma$.*

Πράγματι ἡ AO εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν πλευρὰν O_bO_γ . Ἡ BO εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν $O_\gamma O_a$. Ἡ OG εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν O_aO_b .

Ἀσκήσεις

261. (273). Εἰς τὸ τετράπλευρον $ABΓΔ$, αἱ γωνίαι B καὶ D εἶναι ὀρθαί. Προεκτείνωμεν τὰς πλευρὰς AB καὶ $ΓΔ$, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον E καὶ τὰς πλευρὰς $BΓ$ καὶ AD , αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ Z . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ διαγώνιος AG εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν EZ .

262. (274). Δίδεται ἓνα τρίγωνον $ABΓ$, ὀρθογώνιον εἰς τὸ A . Προεκτείνωμεν τὴν πλευρὰν $ΓA$ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεώς της λαμβάνωμεν τμήμα $AD = ΓA$. Ἀπὸ τὸ D φέρομεν τὴν DH κάθετον ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν $BΓ$, ἡ ὁποία τέμνει τὴν AB εἰς τὸ E . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα $ΓE$ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν $ΔB$.

263. (275). Ἐὰν δύο διάμεσοι τριγώνου εἶναι ἴσαι, τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελές.

264. (276). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἐὰν δύο πλευραὶ τριγώνου εἶναι ἄνισοι καὶ αἱ ἀντίστοιχοι διάμεσοί του εἶναι ἄνισοι καὶ εἰς τὴν μεγαλύτεραν πλευρὰν ἀντιστοιχεῖ μικροτέρα διάμεσος.

265. (277). Νὰ ἀποδειχθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν διαμέσων ἑνὸς τριγώνου εἶναι μεγαλύτερον τῶν τριῶν τετάρτων τῆς περιμέτρου του.

266. (278). Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι κάθε διάμεσος τριγώνου εἶναι μικροτέρα τοῦ ἄθροισματος τῶν δύο ἄλλων διαμέσων του.

267. (279). Ἀπὸ τὸ σημεῖον O τῆς τομῆς τῶν ἐσωτερικῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν ἐνὸς τριγώνου $AB\Gamma$ φέρομεν τὰς καθέτους OA' , OB' , OG' ἐπὶ τὰς πλευρὰς $B\Gamma$, ΓA , AB . Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου εἶναι κάθετοι εἰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου $A'B'\Gamma'$.

268. (280). Ἀπὸ τὸ σημεῖον O τῆς τομῆς τῶν ἐσωτερικῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν ἐνὸς τριγώνου $AB\Gamma$ φέρομεν τὴν κάθετον OE ἐπὶ τὴν πλευρὰν $B\Gamma$. Ἐὰν Δ εἶναι τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ διχοτόμος AD τῆς γωνίας A τέμνει τὴν πλευρὰν $B\Gamma$, νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι $\gamma\omega\nu.BOD = \gamma\omega\nu.EOG$.

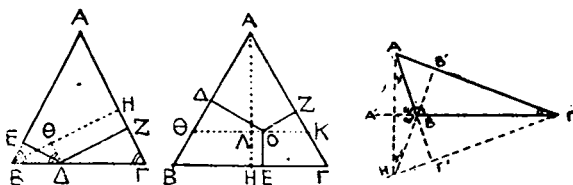
269. (281). Εἰς τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ φέρομεν τὴν διχοτόμον AO τῆς γωνίας A καὶ τὰς ἐξωτερικὰς διχοτόμους BO καὶ GO τῶν γωνιῶν B καὶ Γ , αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον O . Ἀπὸ τὸ O φέρομεν τὴν παράλληλον πρὸς τὴν πλευρὰν AB , ἡ ὁποία τέμνει τὴν πλευρὰν $B\Gamma$ εἰς τὸ σημεῖον E καὶ τὴν πλευρὰν $A\Gamma$ εἰς τὸ Z . Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι $EZ = AZ - BE$.

270. (282) Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τυχόντος σημείου τῆς βάσεως ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἀπὸ τῶν ἰσῶν πλευρῶν του εἶναι σταθερὸν καὶ ἴσον μὲ ἓνα ἀπὸ τὰ ἴσα ὕψη του.

271. (283). Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων σημείου κειμένου ἐντὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου ἀπὸ τῶν πλευρῶν του εἶναι σταθερὸν (καὶ ἴσον μὲ τὸ ὕψος του).

272. (284). Αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τυχὸν σημεῖον τῆς βάσεως ἰσοσκελοῦς τριγώνου καὶ αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὰς ἴσας πλευρὰς του ὑπὸ ἴσας γωνίας ἔχουν ἄθροισμα σταθερὸν.

273. (285). Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν ἀποστάσεων τυχόντος σημείου, τὸ ὁποῖον κείται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς βάσεως ἐνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου, ἀπὸ τὰς ἴσας πλευρὰς του, εἶναι σταθερὰ.



Σχ. ἀσκ. 270. Σχ. ἀσκ. 271.

Σχ. ἀσκ. 276.

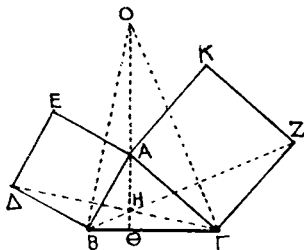
274. (286). Δίδονται δύο ἐφεξῆς γωνίαι AOB καὶ $BO\Gamma$, ἐκάστη τῶν ὁποίων εἶναι 60° . Νὰ ἀποδειχθῆ ὅτι, ἐὰν ἓνα σημεῖον Σ κείται ἐπὶ τῆς πρώτης γωνίας, ἡ ἀπόστασις του $\Sigma\Delta$ ἀπὸ τὴν $O\Gamma$ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα $\Sigma E + \Sigma Z$ τῶν ἀποστάσεων του ἀπὸ τὰς εὐθεῖας AO καὶ OB .

275. (287). Δίδεται ἓνα ὀρθογώνιον $AB\Gamma\Delta$. Νὰ ἀποδειχθῆ ὅτι, ἐὰν ἓνα σημεῖον Σ κινῆται ἐπὶ τῆς περιμέτρου του, αἱ ἀποστάσεις του ἀπὸ τὰς διαγωνίους τοῦ ὀρθογωνίου ἔχουν ἄθροισμα σταθερὸν.

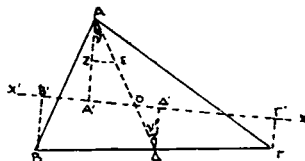
276. (288). Εἰς ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι $B - \Gamma = 90^\circ$. Ἐὰν H εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον, νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὰ τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $H\beta\Gamma$ εἶναι ἴσα.

277. (289). *Θεώρημα τοῦ Vecten.* Ἐπὶ τῶν πλευρῶν AB καὶ AG ἑνὸς τριγώνου $AB\Gamma$, καὶ ἔκτος αὐτοῦ, κατασκευάζομεν τὰ τετράγωνα $AB\Delta E$ καὶ $A\Gamma ZK$. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ εὐθεῖαι BZ καὶ $\Gamma\Delta$ τέμνονται ἐπὶ τοῦ ὕψους $A\Theta$ τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$.

278. (290). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἓνα τρίγωνον εἶναι ἰσοπλευρον, ἐὰν τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν καθέτων εἰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ συμπίπτῃ μετὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν τοῦ καὶ ἀντιστρόφως.



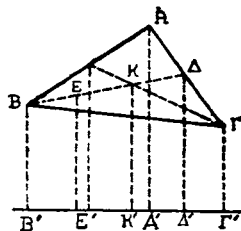
Σχ. ἀσκ. 277.



Σχ. ἀσκ. 279.

279. (291). Ἐκ τῆς τομῆς τῶν διαμέσων ἑνὸς τριγώνου φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τῶν δύο κορυφῶν τοῦ τριγώνου, αἱ ὁποῖαι κείνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας, ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν αὐτήν, εἶναι ἴσον μετὴν ἀπόστασιν τῆς τρίτης κορυφῆς τοῦ τριγώνου ἀπὸ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.

280. (292). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου βάρους ἑνὸς τριγώνου, ἀπὸ εὐθείαν, ἣ ὁποία κείται ἔκτος τοῦ τριγώνου, εἶναι ἴση μετὸ τρίτον τοῦ ἄθροισματος τῶν ἀποστάσεων τῶν τριῶν κορυφῶν τοῦ τριγώνου ἀπὸ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.



Σχ. ἀσκ. 280.

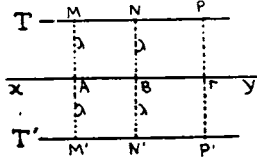
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

236. Εἰς τὰς § 137 καὶ 145 εἶδομεν τί λέγεται γεωμετρικός τόπος καὶ ποία εἶναι ἡ χρῆσις του διὰ τὴν λύσιν ὠρισμένων γεωμετρικῶν προβλημάτων. Ἐδῶ θὰ ἐξετάσωμεν λεπτομερέστερον τὴν ἔννοιαν τοῦ γεωμετρικοῦ τόπου, λόγῳ τῆς μεγάλης συμβολῆς αὐτοῦ εἰς τὴν λύσιν διαφόρων γεωμετρικῶν προβλημάτων.

237. Πρόβλημα. *Νὰ εὕρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τὰ ἅποια ἀπέχουν δοθείσαν ἀπόστασιν λ ἀπὸ δοθείσαν εὐθείαν.*

Ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ εὕρωμεν τὸν γεωμετρικὸν τόπον τῶν σημείων, τὰ ὅποια ἀπέχουν ἀπόστασιν λ ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν xy .



Σχ. 182.

Ἀπὸ τυχόν σημείου A τῆς xy (Σχ. 182) φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν xy καὶ ἐπὶ τῆς καθέτου αὐτῆς λαμβάνομεν τμήμα AM ἴσον μὲ τὴν δοθείσαν ἀπόστασιν λ . Τὸ σημεῖον M εἶναι προφανῶς σημεῖον τοῦ τόπου.

Ὁμοίως ἀπὸ ἓνα ἄλλο σημεῖον B τῆς xy φέρομεν κάθετον ἐπ' αὐτὴν καὶ λαμβάνομεν τμήμα BN ἴσον μὲ λ καὶ τὸ σημεῖον N εἶναι προφανῶς σημεῖον τοῦ τόπου.

Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν T , ἡ ὅποια συνδέει τὰ σημεῖα M καὶ N . Ἐκ κατασκευῆς αἱ AM καὶ BN εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν xy ἄρα εἶναι καὶ παράλληλοι· ἐπειδὴ δὲ εἶναι $AM=BN=\lambda$, ἐξ ὑποθέσεως, τὸ τετραπλευρον $ABNM$ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι ἔχει δύο ἀπέναντι πλευράς, τὰς AM καὶ BN ἴσας καὶ παραλλήλους. Ἡ εὐθεῖα λοιπὸν TMN εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν xy .

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὰ τυχόντα σημεῖα M καὶ N τοῦ τόπου κεῖνται ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὴν xy , ἡ ὅποια ἀπέχει ἀπὸ τὴν xy ἀπόστασιν ἴσην μὲ λ .

Ἀντιστρόφως. Θὰ δείξωμεν τώρα, ὅτι κάθε σημεῖον τῆς εὐθείας

TMN, είναι σημείον τοῦ τόπου· δηλ. ἀπέχει ἀπὸ τὴν xy ἀπόστασιν ἴσην μὲ λ .

Πράγματι· ἐπειδὴ ἡ TMN εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν xy , ὅλα τὰ σημεία τῆς ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὴν xy (§ 196)· ἐπειδὴ δὲ ἐκ κατασκευῆς ἡ ἀπόστασις MA τοῦ M ἀπὸ τὴν xy εἶναι ἴση μὲ λ ἔπεται, ὅτι ὅλα τὰ σημεία τῆς TMN ἀπέχουν ἀπόστασιν λ ἀπὸ τὴν xy .

᾿Ωστε ἡ εὐθεῖα TMN εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἀπόστασιν λ ἀπὸ τὴν xy .

᾿Ομοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ ἡ εὐθεῖα T'M'N' εἶναι γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἀπόστασιν λ ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν xy . ᾿Ωστε:

᾿Ο γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν δοθεῖσαν ἀπόστασιν λ ἀπὸ δοθεῖσαν εὐθεῖαν, εἶναι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν, αἱ ὁποῖαι κείνται ἐκατέρωθεν αὐτῆς καὶ εἰς ἀπόστασιν λ .

238. Παρατήρησις. Εἰς τὸ πρόβλημα τῆς § 237 ἦτο ἄγνωστος ἡ φύσις τοῦ γεωμετρικοῦ τόπου καὶ διὰ τὸν προσδιορίσωμεν εἰργάσθημεν ὡς ἑξῆς:

Κατεσκευάσαμεν δύο σημεία M καὶ N, τὰ ὁποῖα εἶχον τὴν ιδιότητα τοῦ τόπου, δηλ. ἀπέχον ἀπόστασιν λ ἀπὸ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν xy . ᾿Επειτα ἐφέραμεν τὴν εὐθεῖαν MN καὶ ἐδείξαμεν, ὅτι ἡ εὐθεῖα αὐτή, ἡ ὁποῖα περιέχει τὰ σημεία τοῦ τόπου, εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν xy . Τέλος ἐδείξαμεν, ὅτι κάθε σημείον τῆς εὐθείας αὐτῆς ἀπέχει ἀπόστασιν λ ἀπὸ τὴν xy καὶ οὕτω κατελήξαμεν εἰς τὸ συμπέρασμα, ὅτι ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι μία εὐθεῖα παράλληλος κλπ.

Γενικῶς: ᾿Όταν θέλωμεν νὰ εὕρωμεν τὸν γεωμετρικὸν τόπον τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἔχουν μίαν κοινὴν ιδιότητα, ἀποδεικνύομεν:

1ον. ᾿Ότι κάθε σημείον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν δοθεῖσαν ιδιότητα κείνται ἐπὶ ἐνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ σχήματος, καὶ

2ον. ᾿Ότι κάθε σημείον τοῦ σχήματος αὐτοῦ ἔχει τὴν δοθεῖσαν ιδιότητα.

239. Θεώρημα. *Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ δύο παραλλήλους εὐθείας, εἶναι μία τρίτη παράλληλος πρὸς αὐτάς εὐθεῖα, ἡ ὁποῖα ἀπέχει ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὰς δύο πρώτας.*

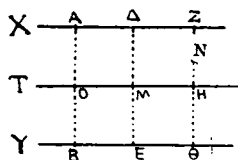
᾿Εστῶσαν X καὶ Y δύο παράλληλοι εὐθεῖαι (Σχ. 183).

Φέρομεν τὴν κοινὴν κάθετον AB ἐπὶ τὰς X καὶ Y, καὶ ἔστω O

τὸ μέσον τῆς AB . Ἐκ τὸ O φέρομεν τὴν παράλληλον TO πρὸς τὰς X καὶ Y .

Θὰ δείξωμεν ὅτι ὅλα τὰ σημεῖα τῆς TO ἀπέχουν ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὰς X καὶ Y .

Πράγματι ἔστω M ἓνα τυχὸν σημεῖον τῆς TO . Ἐκ τὸ M φέρομεν τὴν κοινὴν κάθετον ἐπὶ τὰς X καὶ Y , ἡ ὁποία τέμνει τὴν X εἰς



Σχ. 183.

τὸ Δ καὶ τὴν Y εἰς τὸ E . Αἱ εὐθεῖαι ΔE καὶ AB εἶναι παράλληλοι, ὥς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν. Τὰ τετράπλευρα λοιπὸν $AOM\Delta$ καὶ $OBEM$ εἶναι παραλληλόγραμμα καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι $OA=O\Delta$ καὶ $OB=BE$ καὶ ἐπειδὴ $OA=OB$, ἐκ κατασκευῆς, ἔπεται ὅτι $O\Delta=BE$.

Ὡστε τὸ τυχὸν σημεῖον M τῆς TO ἀπέχει ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὰς παραλλήλων X καὶ Y .

Θὰ δείξωμεν τώρα, ὅτι κάθε σημεῖον, τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἐπὶ τῆς TO , δὲν εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου, δηλ. δὲν ἀπέχει ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὰς X καὶ Y .

Ἐστω N τυχὸν σημεῖον, τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἐπὶ τῆς TO .

Ἐκ τὸ N φέρομεν τὴν κοινὴν κάθετον ἐπὶ τὰς εὐθείαις X καὶ Y , ἡ ὁποία τέμνει τὴν X εἰς τὸ Z , τὴν T εἰς τὸ H καὶ τὴν Y εἰς τὸ Θ . Ἐπειδὴ τὸ H κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας T , θὰ ἀπέχη ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὰς X καὶ Y , δηλ. θὰ εἶναι $HZ=H\Theta$. Εἶναι προφανές λοιπὸν, ὅτι τὸ N , τὸ ὁποῖον κεῖται μεταξὺ τῶν σημείων H καὶ Z , θὰ ἀπέχη ἀπόστασιν μικροτέραν ἀπὸ τὴν X καὶ μεγαλυτέραν ἀπὸ τὴν Y . Ὡστε τὸ N δὲν εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι μόνον ἡ παράλληλος εὐθεῖα T πρὸς τὰς X καὶ Y εἶναι ὁ τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὰς εὐθείαις X καὶ Y .

Ἐδείχθη λοιπὸν, ὅτι: Ὁ γεωμετρικὸς τόπος. . .

240. Παρατήρησις. Εἰς τὴν § 239 ἐξητήθη νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ δύο παραλλήλων εὐθείαις X καὶ Y , εἶναι μία τρίτη παράλληλος εὐθεῖα, ἡ ὁποία ἀπέχει ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὰς δύο πρώτας.

Καὶ διὰ νὰ ἀποδείξωμεν αὐτὸ εἰργάσθημεν ὡς ἑξῆς:

Ἀπεδείξαμεν, ὅτι κάθε σημεῖον τῆς εὐθείας TO ἔχει τὴν ιδιότητα τῶν σημείων τοῦ τόπου, δηλ. ἀπέχει ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὰς

παραλλήλους εὐθείας X καὶ Y , ἐνῶ κάθε σημεῖον, τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἐπὶ τῆς TO δὲν ἔχει τὴν ιδιότητα τοῦ τόπου.

Γενικῶς: "Όταν θέλωμεν νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι ἓνα σχῆμα εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἔχουν δοθεῖσαν κοινὴν ιδιότητα, ἀποδεικνύομεν:

1ον. "Ότι κάθε σημεῖον τοῦ σχήματος αὐτοῦ ἔχει τὴν δοθεῖσαν ιδιότητα καὶ

2ον. "Ότι κάθε ἄλλο σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τοῦ σχήματος αὐτοῦ, δὲν ἔχει τὴν δοθεῖσαν ιδιότητα.

Ἄσκήσεις

281. (299). Νὰ εὐρεθῆ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κορυφῶν τῶν τριγῶνων, τὰ ὁποῖα ἔχουν κοινὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.

282. (300). Μεταξὺ δύο παραλλήλων εὐθειῶν X καὶ Y φέρομεν καθέτους. Μὲ βάσεις τὰς καθέτους αὐτὰς κατασκευάζομεν τρίγωνα ἴσα (μεταξὺ τῶν καὶ ἔχοντα τὸν αὐτὸν προσανατολισμόν. Νὰ εὐρεθῆ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῆς τριγώνου κορυφῆς τῶν τριγῶνων αὐτῶν.

283. (301). Νὰ εὐρεθῆ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν μέσων τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων τῶν περιεχομένων μεταξὺ δύο παραλλήλων εὐθειῶν.

284. Νὰ εὐρεθῆ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο παραλλήλους εὐθείας εἶναι ἴσον μὲ δοθὲν μῆκος λ .

285. (303). Νὰ εὐρεθῆ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν μέσων τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων, τὰ ὁποῖα ἄγονται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

286. (304). Νὰ εὐρεθῆ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κέντρων τῶν παραλληλογράμμων, τὰ ὁποῖα ἔχουν κοινὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.

287. (305). Δίδεται ἡ γωνία AOB ἀπὸ τυχὸν σημεῖον M , τὸ ὁποῖον κεῖται ἐντὸς τῆς γωνίας AOB φέρομεν τὰς παραλλήλους MG καὶ MD ἀντιστοίχως πρὸς τὰς πλευρὰς OB καὶ OA , αἱ ὁποῖαι τέμνουσιν τὴν OA εἰς τὸ Γ καὶ τὴν OB εἰς τὸ Δ . Νὰ εὐρεθῆ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου M , ἵνα τὸ ἄθροισμα $MG + MD$ εἶναι ἴσον μὲ δοθὲν μῆκος λ .

288. (306). Ποῖος εἶναι ὁ τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο τεμνομένων εὐθειῶν εἶναι ἴσον μὲ δοθὲν μῆκος λ .

289. (307). Ποῖος εἶναι ὁ τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο εὐθειῶν τεμνομένων εἶναι ἴση μὲ δοθὲν μῆκος λ .

290. (308). Δίδεται ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Δ τῆς βάσεώς του φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ AB καὶ $A\Gamma$, αἱ ὁποῖαι τέμνουσιν αὐτὰς, ἀντιστοίχως, εἰς τὰ σημεῖα E καὶ Z . Νὰ εὐρεθῆ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κέντρων τῶν παραλληλογράμμων $AZ\Delta E$, τὰ ὁποῖα σχηματίζονται, ὅταν τὸ Δ κινῆται ἐπὶ τῆς βάσεως $B\Gamma$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΠΙ ΤΟΥ Α' ΒΙΒΛΙΟΥ ΠΡΟΣ ΓΕΝΙΚΗΝ ΕΠΑΝΑΛΗΨΙΝ

Κατωτέρω συγκεντρώνομεν καὶ τακτοποιοῦμεν τὰς κυριωτέρας μεθόδους ἀποδείξεως, τὰς ὁποίας ἐχρησιμοποίησαμεν κατὰ τὴν ἀπόδειξιν θεωρημάτων ἢ τὴν λύσιν γεωμετρικῶν προβλημάτων καὶ τὰς ὁποίας πρέπει νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψει διὰ τὴν ἀπόδειξιν τῶν κατωτέρω ἀσκήσεων.

I. Γωνίαι ἴσαι :

Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι δύο γωνίαι εἶναι ἴσαι, πρέπει νὰ ἀποδείξωμεν :

- 1ον. Ὅτι εἶναι ἄθροισμα ἢ διαφορὰ γωνιῶν ἀντιστοίχως ἴσων.
- 2ον. Ὅτι εἶναι συμπληρωματικαὶ ἢ παραπληρωματικαὶ ἴσων γωνιῶν.
- 3ον. Ὅτι εἶναι κατὰ κορυφὴν γωνίαι.
- 4ον. Ὅτι εἶναι παρὰ τὴν βάσιν γωνίαι ἰσοσκελοῦς τριγώνου.
- 5ον. Ὅτι εἶναι ὁμόλογοι γωνίαι ἴσων τριγώνων.
- 6ον. Ὅτι εἶναι ἐντὸς ἐναλλάξ γωνίαι, ἐκτὸς ἐναλλάξ γωνίαι, ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι, ποῦ σχηματίζονται ὑπὸ δύο παραλλήλων καὶ μιᾶς τεμνοῦσης.
- 7ον. Ὅτι εἶναι γωνίαι, τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶναι παράλληλοι καὶ ἔχουν τὴν αὐτὴν φορὰν ἢ ἀντίθετον φορὰν.
- 8ον. Ὅτι εἶναι ὀξείαι ἢ ἀμβλείαι γωνίαι, τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶναι κάθετοι.
- 9ον. Ὅτι εἶναι συμμετρικαὶ γωνίαι ὡς πρὸς κέντρον ἢ πρὸς ἄξονα.
- 10ον. Ὅτι, κατὰ ἓνα γενικὸν τρόπον, εἶναι τὰ ἄκρα μιᾶς σειρᾶς ἴσων γωνιῶν.

II. Ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα :

Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι δύο εὐθύγραμμα τμήματα εἶναι ἴσα, πρέπει νὰ ἀποδείξωμεν :

- 1ον. Ὅτι εἶναι ἄθροισμα ἢ διαφορὰ εὐθυγράμμων τμημάτων ἀντιστοίχως ἴσων.
- 2ον. Ὅτι εἶναι δύο ὁμόλογοι πλευραὶ δύο ἴσων τριγώνων.
- 3ον. Ὅτι εἶναι αἱ ἀπέναντι πλευραὶ παραλληλογράμμου.
- 4ον. Ὅτι εἶναι αἱ διαγώνιοι ἐνὸς ὀρθογωνίου.
- 5ον. Ὅτι εἶναι τμήματα παραλλήλων περιεχομένων μεταξύ παραλλήλων εὐθειῶν.
- 6ον. Ὅτι εἶναι δύο εὐθύγραμμα τμήματα συμμετρικὰ πρὸς ἄξονα ἢ πρὸς κέντρον.
- 7ον. Ὅτι εἶναι αἱ δύο πλευραὶ ἐνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου.
- 8ον. Ὅτι εἶναι τὰ δύο τμήματα τῆς βάσεως ἐνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζεται ἡ βάση ἀπὸ τὸ ὕψος τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἢ ἀπὸ τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς του.

9ον. Ὅτι, κατὰ ἓνα γενικὸν τρόπον, εἶναι τὰ ἄκρα μιᾶς σειρᾶς ἴσων εὐθυγράμμων τμημάτων.

III. Εὐθεῖαι κάθετοι :

Διὰ τὴν ἀποδείξωμεν, ὅτι δύο εὐθεῖαι εἶναι κάθετοι μεταξύ των, πρέπει τὴν ἀποδείξωμεν :

1ον. Ὅτι ἡ μία τῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζουν εἶναι ὀρθή, (πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι εἶναι 90° ἢ ὅτι εἶναι ἴση μὲ μίαν ἄλλην ὀρθὴν γωνίαν τοῦ σχήματος ἢ ὅτι εἶναι ἡ τρίτη γωνία ἐνὸς τριγώνου, τοῦ ὁποίου αἱ δύο ἄλλαι γωνίαι εἶναι συμπληρωματικά).

2ον. Ὅτι εἶναι διχοτόμοι δύο ἐφεξῆς παραπληρωματικῶν γωνιῶν.

3ον. Ὅτι ἡ μία εὐθεῖα εἶναι ἡ βάσις ἐνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου καὶ ἡ ἄλλη εἶναι ἡ μεσοκάθετος τῆς βάσεως ἢ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς του.

4ον. Ὅτι ἡ μία εὐθεῖα εἶναι παράλληλος πρὸς μίαν κάθετον πρὸς τὴν ἄλλην εὐθεῖαν.

5ον. Ὅτι εἶναι δύο πλευραὶ ἴσων γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰς δύο ἄλλας πλευράς των ἀντιστοίχως καθετοὺς καὶ αἱ γωνίαι ἔχουν τὴν αὐτὴν φορὰν πρὸς τὰς τελευταίας πλευράς.

6ον. Ὅτι ἡ μία εὐθεῖα συνδέει δύο συμμετρικὰ σημεῖα πρὸς τὴν ἄλλην εὐθεῖαν.

IV. Εὐθεῖαι παράλληλοι :

Διὰ τὴν ἀποδείξωμεν, ὅτι δύο εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι, πρέπει τὴν ἀποδείξωμεν :

1ον. Ὅτι εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.

2ον. Ὅτι εἶναι κάθετοι πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.

3ον. Ὅτι σχηματίζουν μὲ μίαν τέμνουσαν :

δύο ἐντὸς ἐναλλάξ γωνίας ἴσας :

ἢ δύο ἐκτὸς ἐναλλάξ γωνίας ἴσας :

ἢ δύο ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας ἴσας :

ἢ δύο ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας παραπληρωματικάς :

ἢ δύο ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας παραπληρωματικάς.

4ον. Ὅτι εἶναι δύο πλευραὶ δύο ἴσων γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰς πλευράς των παραλλήλους καὶ αἱ γωνίαι ἔχουν τὴν αὐτὴν φορὰν ὡς πρὸς τὰς τελευταίας πλευράς.

5ον. Ὅτι ἡ μία εἶναι ἡ βάσις ἐνὸς τριγώνου καὶ ἡ ἄλλη εἶναι ἡ εὐθεῖα, ποῦ συνδέει τὰ μέσα τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

6ον. Ὅτι εἶναι εὐθεῖαι συνδέουσαι ἀντιστοίχως δύο ζεύγη σημείων συμμετρικῶν πρὸς τὸν αὐτὸν ἄξονα.

V. Παραλληλόγραμμα :

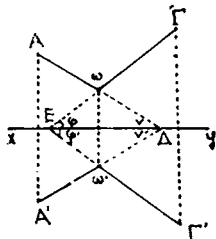
Διὰ τὴν ἀποδείξωμεν, ὅτι ἓνα τετράπλευρον εἶναι παραλληλόγραμμον πρέπει τὴν ἀποδείξωμεν ὅτι :

1ον. Αἱ ἀπέναντι πλευραὶ του εἶναι παράλληλοι ἀνὰ δύο.

- 2ον. Αἱ ἀπέναντι γωνίαι του εἶναι ἴσαι ἀνά δύο.
 3ον. Αἱ ἀπέναντι πλευραὶ του εἶναι ἴσαι ἀνά δύο
 4ον. Δύο ἀπέναντι πλευραὶ του εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι.
 5ον. Αἱ διαγώνιοί του διχοτομοῦνται.

Ἀσκήσεις πρὸς γενικὴν ἐπανάληψιν

291. (295). Δύο σημεῖα Α καὶ Α' εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὴν εὐθεῖαν xy συνδόμεν τὰ σημεῖα Α καὶ Α' μετὰ δύο τυχόντα σημεῖα Β καὶ Γ τῆς xy . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\gamma\omega\nu.ΒΑΓ = \gamma\omega\nu.ΒΑ'Γ$.



Σχ. ἀσκ. 292.

292. (297). Τὸ συμμετρικὸν σχῆμα μιᾶς γωνίας πρὸς κέντρον συμμετρίας ἢ πρὸς ἄξονα συμμετρίας εἶναι γωνία ἴση πρὸς τὴν δοθεῖσαν.

293. (309). Δίδεται ἡ εὐθεῖα xy καὶ, ἔκτος αὐτῆς καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος, δύο σημεῖα Α καὶ Β. Ἐκ τοῦ Α φέρομεν τὴν κάθετον ΑΓ ἐπὶ τὴν xy καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως αὐτῆς λαμβάνομεν τμήμα $ΓΑ' = ΑΓ$. Φέρομεν τὴν Α'Β, ἡ ὅποια τέμνει τὴν xy εἰς τὸ σημεῖον Μ καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς xy ἓνα ἄλλο τυχὸν σημεῖον Ν. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι:

$$AM + MB < AN + NB.$$

294. (319). Τέμνομεν τὰς πλευρὰς μιᾶς γωνίας μετὰ μίαν τυχοῦσαν τέμνουσαν. Φέρομεν τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζει ἡ τέμνουσα αὐτὴ μετὰ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ διχοτόμοι αὐταὶ τέμνονται ἀνά δύο ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς δοθείσης γωνίας.

295. (324). Ἐντὸς μιᾶς γωνίας xOy κεῖνται δύο σημεῖα Α καὶ Β. Νὰ εὐρεθῇ ὁ συντομώτερος δρόμος μεταβάσεως ἀπὸ τοῦ σημείου Α εἰς τὸ Β καὶ ὁ ὁποῖος νὰ ἐγγίξη τὰς πλευρὰς Ox καὶ Oy τῆς γωνίας.

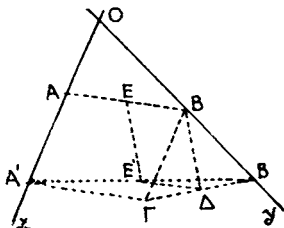
296. (325). Δίδονται δύο εὐθεῖαι X, Y παράλληλοι. Ἀπὸ τυχόν σημείου Α τῆς X φέρομεν τὴν AB κάθετον ἐπὶ τὴν Y καὶ τὴν $ΑΓ$ πλαγίαν πρὸς τὴν Y . Ἀπὸ τὸ σημεῖον Γ φέρομεν μίαν εὐθεῖαν $ΓΔΕ$, ἡ ὅποια τέμνει τὴν AB εἰς τὸ Δ καὶ τὴν X εἰς τὸ Ε καὶ τοιαύτην, ὥστε $ΔΕ = 2ΑΓ$.

1ον. Ἐὰν Ζ εἶναι τὸ μέσον τῆς $ΔΕ$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον $ΑΓΖ$ εἶναι ἰσοσκελές.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία $ΑΓΒ$ εἶναι τριπλασία τῆς γωνίας $ΕΓΒ$.

297. (353). Τρεῖς εὐθεῖαι Ox, Oy, Oz , σχηματίζουν μεταξύ των τὰς γωνίας xOy καὶ yOz ἴσας μετὰ 60° . Ἀπὸ τυχόν σημείου Μ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐντὸς τῆς γωνίας xOy φέρομεν τὰς καθέτους $MA, MB, MΓ$ ἐπὶ τὰς εὐθείαις Ox, Oy, Oz . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $MA + MB = MΓ$.

298. (354). Δίδεται μία γωνία xOy . Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Ox λαμβάνομεν δύο τυχόντα σημεῖα Α καὶ Α', ἐπὶ δὲ τῆς πλευρᾶς Oy δύο ἄλλα σημεῖα Β καὶ Β' καὶ τοιαῦτα, ὥστε $AA' = BB'$. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα EE' ,



Σχ. ἀσκ. 298.

ἢ ὅποια συνδέει τὰ μέσα Ε καὶ Ε' τῶν ΑΒ καὶ Α'Β' εἶναι παράλληλος ἢ κάθετος πρὸς τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας xOy.

299. (310). Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ, (ΑΒ>ΑΓ) φέρομεν τὸ ὕψος ΑΕ καὶ τὴν διχοτόμον ΑΔ τῆς γωνίας Α.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\gamma\omega\nu.\Delta A E = \frac{\Gamma - B}{2}$.

2ον. Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Γ φέρομεν τὴν ΓΖ κάθετον ἐπὶ τὴν διχοτόμον ΑΔ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\gamma\omega\nu. B \Gamma Z = \frac{\Gamma - B}{2}$.

3ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\gamma\omega\nu. A \Delta B = 1 \delta\epsilon\theta. + \frac{\Gamma - B}{2}$.

300. (316). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ. Ἀπὸ τὴν κορυφὴν του Α φέρομεν μίαν εὐθείαν xy κάθετον ἐπὶ τὴν διχοτόμον ΑΔ τῆς γωνίας Α. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι, ἐάν συνδέσωμεν τυχὸν σημεῖον Μ τῆς xy μὲ τὰς κορυφὰς Β καὶ Γ, λαμβάνομεν ἕνα τρίγωνον ΜΒΓ, τοῦ ὁποίου ἡ περιμετρος εἶναι μεγαλύτερα τῆς περιμέτρου τοῦ ΑΒΓ.

301. (333). Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ ἡ γωνία Β εἶναι 45°. Ἀπὸ τὰ μέσα Μ καὶ Ν τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΒΓ φέρομεν, εἰς τὸ ἐξωτερικὸν τοῦ τριγώνου, τὴν ΜΗ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ ἴσην μὲ $\frac{A B}{2}$ καὶ τὴν ΝΖ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ καὶ ἴσην μὲ $\frac{B \Gamma}{2}$. Ἐὰν Ρ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΑΓ, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΡΒ=ΡΗ=ΡΖ.

302. (337). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου ἡ γωνία Β εἶναι διπλασία τῆς γωνίας Γ. Φέρομεν τὸ ὕψος ΑΗ καὶ προεκτείνομεν τὴν ΑΒ κατὰ κατὰ ἕνα μῆκος ΒΔ=ΒΗ. Ἐὰν Ε εἶναι τὸ μέσον τῆς ΑΓ, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα Δ, Η, Ε κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

303. (338). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ. Κατασκευάζομεν τὸ συμμετρικὸν Μ τοῦ Γ ὡς πρὸς τὸ μέσον Δ τῆς ΑΒ καὶ τὸ συμμετρικὸν Ν τοῦ Β ὡς πρὸς τὸ μέσον Ε τῆς ΑΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα Μ, Ν καὶ Α κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

304. (341). Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν τὴν διάμεσον ΑΔ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως αὐτῆς λαμβάνομεν τμήμα ΔΕ=ΑΔ. Νὰ ἀποδειχθῇ :

1ον. Ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΔΓ καὶ ΒΔΕ εἶναι ἴσα.

2ον. Ὅτι τὸ τετράπλευρον ΑΒΕΓ εἶναι παραλληλόγραμμον.

3ον. Ὅτι $\frac{A B + A \Gamma - B \Gamma}{2} < A \Delta < \frac{A B + A \Gamma}{2}$.

4ον. Συνδέομεν, μὲ εὐθείαν, τὸ σημεῖον Β μὲ τὸ μέσον Ζ τῆς ΑΓ καὶ τὸ σημεῖον Γ μὲ τὸ μέσον Θ τῆς ΒΕ· νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΒΖ καὶ ΓΘ τριχοτομοῦν τὴν ΑΕ.

305. (343). Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ. Ἐκ τῆς κορυφῆς Α φέρομεν τὴν ΑΔ κάθετον ἐπὶ τὴν ἑσωτερικὴν διχοτόμον τῆς γωνίας Β καὶ τὴν ΑΕ κάθετον ἐπὶ τὴν ἐξωτερικὴν διχοτόμον τῆς γωνίας Β. Ὅμοίως ἐκ τοῦ Α φέρομεν τὰς καθέτους ΑΖ καὶ ΑΗ ἐπὶ τὴν ἑσωτερικὴν διχοτόμον καὶ ἐξωτερικὴν διχοτόμον τῆς γωνίας Γ. Νὰ ἀποδειχθῇ :

1ον. Ὅτι τὰ τετράπλευρα ΑΕΒΔ καὶ ΑΖΓΗ εἶναι ὀρθογώνια.

2ον. Ὅτι αἱ ΕΔ καὶ ΖΗ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν ΒΓ καὶ διχοτομοῦν ἀντιστοίχως τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ.

3ον. Ὅτι τὰ σημεῖα Ε, Δ, Ζ, Η κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας.

306. (349). Δίδεται ἓνα τρίγωνον ΑΒΓ, εἰς τὸ ὅποιον ἡ γωνία Β εἶναι διπλασία τῆς Γ. Φέρομεν τὸ ὕψος ΑΔ καὶ προεκτείνομεν τὴν ΑΒ κατὰ ἓνα μήκος ΒΕ=ΒΔ. Ἡ εὐθεῖα ΕΔ συναντᾷ τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ :

1ον. Ὅτι αἱ γωνίαι τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΑΕΖ εἶναι ἴσαι, μία πρὸς μίαν.

2ον. Ὅτι $ΖΑ=ΖΓ=ΖΔ$.

3ον. Ὅτι $ΑΒ=ΔΓ-ΔΒ$.

307. (350). Εἰς ἓνα τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν τὰς διαμέσους ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ. φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΖΕ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως λαμβάνομεν τμήμα ΕΗ=ΖΕ. Νὰ ἀποδειχθῇ :

1ον. Ὅτι τὰ τετράπλευρα ΑΖΔΕ, ΒΔΕΖ, ΓΕΖΔ, ΑΖΓΗ καὶ ΒΔΗΕ εἶναι παραλληλόγραμμα.

2ον. Ὅτι αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου ΑΔΗ εἶναι ἴσαι μὲ τὰς διαμέσους τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

3ον. Ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΔΗ εἶναι ἴσον μὲ τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

308. (317). Εἰς ἓνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον, τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διχοτόμων του, τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν μεσοκαθέτων του, τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέσεων του, τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν τριῶν ὑψῶν του καὶ ἡ κορυφή του κεῖνται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς.

309. (318). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἓνα τρίγωνον εἶναι ἰσόπλευρον, ἐὰν τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέσεων του συμπίπτῃ μὲ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν καθέτων εἰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του καὶ ἀντιστρόφως.

310. (321). Ἀπὸ τυχὸν σημείου Δ τῆς βάσεως ΒΓ' ἐνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν παραλλήλους ΔΕ καὶ ΔΖ πρὸς τὰς ἴσας πλευράς του ΑΒ καὶ ΑΓ.

1ον. Διὰ ποίαν θέσιν τοῦ Δ ἐπὶ τῆς ΒΓ, τὸ παραλληλόγραμμον ΑΖΔΕ γίνεται ῥόμβος ;

2ον. Ποίους ὄρους πρέπει νὰ ἐκπληρῇ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἵνα τὸ παραλληλόγραμμον ΑΖΔΕ εἶναι ὀρθογώνιον, καὶ πληρουμένων τῶν ὄρων αὐτῶν, διὰ ποίαν θέσιν τοῦ Δ τὸ ὀρθογώνιον αὐτὸ εἶναι τετράγωνον ;

311. (328). Δίδεται ἓνα ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ' ἐπὶ τῶν πλευρῶν του ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ λαμβάνομεν ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα Α', Β', Γ' καὶ τοιαῦτα, ὥστε νὰ εἶναι $ΑΑ'=ΒΒ'=ΓΓ'=\frac{ΑΒ}{3}$. Νὰ ἀποδειχθῇ :

1ον. Ὅτι τὸ τρίγωνον Α'Β'Γ' εἶναι ἰσόπλευρον.

2ον. Ὅτι αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου Α'Β'Γ' εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευράς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

312. (344). Εἰς ἓνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, (ΑΒ=ΑΓ) φέρομεν τὰς διαμέσους ΒΒ', ΓΓ', αἱ ὅποια τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ο. Νὰ ἀποδειχθῇ : 1ον. Ὅτι τὸ τρίγωνον ΟΒΓ' εἶναι ἰσοσκελὲς, τὰ δὲ τρίγωνα ΟΒΓ' καὶ ΟΓΒ' εἶναι ἴσα. 2ον. Φέρομεν τυχοῦσαν παράλληλον πρὸς τὴν βάση ΒΓ, ἡ ὅποια τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ Δ, τὴν διάμεσον ΒΒ' εἰς τὸ Ε, τὴν διάμεσον ΓΓ' εἰς τὸ Ζ καὶ τὴν πλευρὰν ΑΓ εἰς τὸ Θ' νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΔΕ=ΖΘ.

313. (347). Ἐπὶ τῶν ἴσων πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ ἐνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου

νου κατασκευάζομεν, ἔξωτερικῶς τοῦ τριγώνου, τὰ τετράγωνα ΑΒΔΕ καὶ ΑΓΖΘ.
Ἔστω Μ τὸ μέσον τῆς ΒΓ. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι:

1ον. $ME = M\Theta$.

2ον. $BZ = \Gamma\Delta$.

3ον. Αἱ ΕΘ καὶ ΑΜ εἶναι κάθετοι μεταξὺ των.

4ον. $E\Theta = 2AM$.

5ον. Αἱ ΒΖ καὶ ΓΔ τέμνονται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΜ.

314. (312). Ἡ γωνία Β ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ εἶναι 30° . Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι ἡ διάμεσος καὶ τὸ ὕψος, τὰ ὁποῖα ἄγονται ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας Α, διαιροῦν τὴν γωνίαν Α εἰς τρία ἴσα μέρη.

315. (313). Δίδεται ἓνα τρίγωνον ΑΒΓ, ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α. Φέρομεν τὸ ὕψος ΑΔ καὶ συνδέομεν μὲ εὐθείας τὸ Δ μὲ τὰ μέσα Ε καὶ Ζ τῶν πλευρῶν τοῦ ΑΒ καὶ ΑΓ. Νὰ ἀποδειχθῆ:

1ον. Ὅτι τὸ τρίγωνον ΕΔΖ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Δ.

2ον. Ὅτι αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου ΕΔΖ εἶναι ἴσαι μὲ τὰ ἡμίση τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

316. (314). Δίδεται ἓνα τρίγωνον ΑΒΓ, ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α. Μὲ πλευρὰς τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ κατασκευάζομεν, πρὸς τὰ ἔξω τοῦ τριγώνου, τὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΑΒΓ' καὶ ΑΓΒ'. Ἐὰν Α' εἶναι τὸ μέσον τῆς ὑποτείνουσος ΒΓ, νὰ ἀποδειχθῆ ὅτι τὸ τρίγωνον Α'Β'Γ' εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α'.

317. (315). Δίδεται ἓνα τρίγωνον ΑΒΓ, ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α. Φέρομεν τὴν διάμεσον ΑΔ καὶ μίαν τυχοῦσαν εὐθείαν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΔ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΔ εἰς τὸ σημεῖον Θ καὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ, ἢ τὰς προεκτάσεις των, εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει τὴν κορυφὴν Α μὲ τὸ μέσον Μ τῆς ΕΖ, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ.

318. (320). Δίδεται ἓνα ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ. Ἀπὸ τυχόν σημεῖον Μ τῆς ὑποτείνουσος ΒΓ φέρομεν τὰς καθέτους ΜΒ' καὶ ΜΓ' ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ. Νὰ ἀποδειχθῆ ὅτι, ὅταν τὸ σημεῖον Μ κινῆται ἐπὶ τῆς ὑποτείνουσος ΒΓ, ἡ κάθετος, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ Μ ἐπὶ τὴν ΒΓ', διέρχεται πάντοτε ἀπὸ ἓνα σταθερὸν σημεῖον.

319. (329). Δίδεται ἓνα τρίγωνον ΑΒΓ, ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α. Φέρομεν τὴν διάμεσον ΑΜ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως λαμβάνομεν τμήμα $M\Delta = AM$. Ἐκ τοῦ Δ φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ Ε, τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας Β εἰς τὸ Ζ καὶ τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας Γ εἰς τὸ Η. Νὰ ἀποδειχθῆ:

1ον. Ὅτι τὸ ΑΒΔΓ εἶναι ὀρθογώνιον.

2ον. Ὅτι $\Gamma\Delta = \Delta Z$ καὶ $\Delta H = AB$.

320. (330). Δίδεται ἓνα τρίγωνον ΑΒΓ, ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α· φέρομεν τὸ ὕψος ΑΗ· ἀπὸ τυχόν σημείον Δ τοῦ ὕψους ΑΗ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ὑποτείνουσον ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ Ε. Ἀπὸ τὸ Δ φέρομεν τὴν ΔΖ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓ, ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν ΑΒ εἰς τὸ Ζ. Νὰ ἀποδειχθῆ ὅτι $BE = AZ$.

321. (331). Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α τῆς ὀρθῆς γωνίας ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν τὸ ὕψος ΑΔ καὶ τὴν διάμεσον ΑΕ. Νὰ ἀποδειχθῆ:

1ον. Ὅτι $\gamma\omega\nu.\Delta A E = B - \Gamma$.

2ον. Ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν ΔΑΕ καὶ ΒΑΓ συμπύπτουν.

322. (332). Νὰ ἀποδειχθῇ: 1ον. Ὅτι αἱ κάθετοι εἰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας ὀρθογωνίου τριγώνου τέμνονται ἐπὶ τῆς ὑποτείνουσας.

2ον. Ὅτι αἱ κάθετοι αὐταὶ καὶ ἡ διάμεσος ἢ ἀγομένη ἐκ τῆς ὀρθῆς γωνίας διαιροῦν τὸ τρίγωνον εἰς τέσσαρα ἴσα ὀρθογώνια τρίγωνα.

323. (336). Δίδεται ἓνα τρίγωνον ΑΒΓ, ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α. Ἀπὸ τὴν κορυφὴν τοῦ Γ φέρομεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ καὶ λαμβάνομεν τμήμα ΓΕ=ΑΓ. Πρὸεκτείνομεν τὴν ΓΒ κατὰ μήκος ΒΔ=ΑΒ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα Δ, Α, Ε κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

324. (339). Ἀπὸ ἓνα σημεῖον Δ τῆς ὑποτείνουσας ΒΓ ἑνὸς ὀρθογ. τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ, ἢ ὁποῖα τέμνει τὴν ΑΓ εἰς τὸ Μ καὶ τὴν προέκτασιν τῆς ΒΑ εἰς τὸ Ν. Ἐστω Ο τὸ μέσον τῆς ΒΓ. Ὁρίζομεν ἐπὶ τῆς ΓΝ ἓνα σημεῖον Σ τοιοῦτον, ὥστε τὸ τρίγωνον ΟΓΣ νὰ εἶναι ἰσοσκελὲς μὲ κορυφὴν τὸ Ο. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα Β, Μ καὶ Σ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

325. (346). Δίδεται ἓνα τρίγωνον ΑΒΓ, ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α. Φέρομεν τὸ ὕψος ΑΗ καὶ λαμβάνομεν τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε συμμετρικὰ τοῦ Η ὡς πρὸς τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα Δ, Α, Ε κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΒΔ καὶ ΓΕ εἶναι παράλληλοι.

3ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΑΗ=ΔΑ=ΑΕ.

326. (348). Δίδεται ἓνα τρίγωνον ΑΒΓ ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α. Φέρομεν τὸ ὕψος ΑΗ καὶ ἐκ τοῦ Η τὰς καθέτους ΗΔ καὶ ΗΕ ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. Ὅτι αἱ ΑΗ καὶ ΔΕ εἶναι ἴσαι.

2ον. Ὅτι ἡ ΔΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν διάμεσον ΑΜ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

3ον. Ὅτι αἱ γωνίαι ΒΔΕ καὶ ΕΓΒ εἶναι παραπληρωματικά.

327. (334). Εἰς ἓνα τετράγωνον ΑΒΓΔ λαμβάνομεν τὰ μέσα Μ καὶ Ν τῶν δύο προσκειμένων πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΔ καὶ φέρομεν τὰς εὐθείας ΓΜ καὶ ΓΝ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν διαγώνιον ΒΔ εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΒΕ=ΕΖ=ΖΔ.

328. (322). Τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορά τῶν ἀποστάσεων τυχόντος σημείου κειμένου ἐκτὸς ῥόμβου ἀπὸ δύο διαδοχικὰς πλευρὰς τοῦ ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν τῶν ἀποστάσεων τοῦ αὐτοῦ σημείου ἀπὸ τὰς δύο ἄλλας πλευρὰς τοῦ ῥόμβου.

329. (345). Δίδεται ὁ ῥόμβος ΑΒΓΔ. Ἀπὸ τὰς κορυφὰς τοῦ Β καὶ Δ φέρομεν τὰς καθέτους ΒΕ, ΒΖ, ΔΗ, ΔΘ ἐπὶ τὰς ἀπέναντι πλευρὰς του. Αἱ κάθετοι αὐταὶ τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Κ καὶ Λ. Νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. Ὅτι αἱ γωνίαι τοῦ τετραπλεύρου ΒΛΔΚ εἶναι ἴσαι, μία πρὸς μίαν, μὲ τὰς γωνίας τοῦ ῥόμβου.

2ον. Ὅτι τὸ τετράπλευρον ΒΛΔΚ εἶναι ῥόμβος.

330. (360). Δίδεται ἓνας ῥόμβος ΑΒΓΔ. Ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων τοῦ ΑΓ καὶ ΒΔ φέρομεν τὰς καθέτους ΟΕ, ΟΖ, ΟΗ, ΟΘ ἐπὶ τὰς πλευ-

ράς του AB, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῆ :

1ον. Ὅτι $OE=OZ=OH=O\Theta$.

2ον. Ὅτι αἱ διαγώνιοι του διχοτομοῦν τὰς γωνίας, τὰς ὁποίας σχηματίζουν ἀνά δύο αἱ ἀποστάσεις OE, OZ, OH, OΘ.

3ον. Ὅτι τὰ σημεῖα E, Z, H, Θ εἶναι κορυφαὶ ὀρθογωνίου.

331. (359). Δίδεται ἓνα ὀρθογώνιον ABΓΔ. Φέρομεν δύο παραλλήλους πρὸς τὸν διαγώνιον ΑΓ, αἱ ὁποῖαι ἀπέχουν ἰσάκεις ἀπὸ τὴν ΑΓ καὶ τέμνουν τὰς προεκτάσεις τῶν πλευρῶν ΔΑ, ΔΓ, ΒΓ, ΒΑ εἰς τὰ σημεῖα E, Z, H, Θ. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὸ τετράπλευρον EZHΘ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν δύο διαδοχικῶν πλευρῶν του ἰσοῦται μὲ τὴν διαγώνιον τοῦ ὀρθογωνίου.

332. (368). Δίδεται ἓνα ὀρθογώνιον ABΓΔ. Φέρομεν δύο παραλλήλους EZ καὶ HΘ πρὸς τὴν διαγώνιον ΑΓ, αἱ ὁποῖαι ἀπέχουν ἰσάκεις ἀπὸ αὐτὴν καὶ αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὰς πλευρὰς τοῦ ὀρθογωνίου εἰς τὰ σημεῖα E, Z, H, Θ. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸ ὀρθογώνιον τετράπλευρον EZHΘ εἶναι παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν διαγωνίων τοῦ δοθέντος ὀρθογωνίου.

333. (370). Εἰς ἓνα ὀρθογώνιον ABΓΔ λαμβάνομεν ἐντὸς αὐτοῦ τυχὸν σημεῖον M. Εὐρίσκομεν τὰ συμμετρικὰ σημεῖα, E, Z, H, Θ τοῦ M πρὸς τὰς πλευρὰς AB, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ τοῦ ὀρθογωνίου. Νὰ ἀποδειχθῆ :

1ον. Ὅτι αἱ κορυφαὶ τοῦ ὀρθογωνίου ABΓΔ εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου EZHΘ, καὶ νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαγώνιοι του, συναρτήσῃ τῶν πλευρῶν τοῦ δοθέντος ὀρθογωνίου.

2ον. Ποῦ πρέπει νὰ κεῖται τὸ δοθὲν σημεῖον M, ἵνα τὸ EZHΘ εἶναι παραλληλόγραμμον ; Ποῖον παραλληλόγραμμον, εἰδικῶς, λαμβάνομεν τότε ;

3ον. Τί πρέπει νὰ εἶναι τὸ δοθὲν ὀρθογώνιον, ἵνα τὸ EZHΘ εἶναι τετράγωνον ;

334. (371). Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι δυνάμεθα νὰ ἐγγράψωμεν πάντοτε ἓνα παραλληλόγραμμον εἰς ἓνα ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς διαγωνίους τοῦ ὀρθογωνίου. Νὰ ἀποδειχθῆ δέ, ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν διαγωνίων τοῦ ὀρθογωνίου.

335. (365). Νὰ ἀποδειχθῆ : 1ον. Ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν παραλληλογράμμου, τεμνόμεναι σχηματίζουν ὀρθογώνιον.

2ον. Αἱ διαγώνιοι τοῦ σχηματιζομένου ὀρθογωνίου εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ παραλληλογράμμου καὶ ἐκάστη ἐξ αὐτῶν εἶναι ἴση μὲ τὴν διαφορὰν τῶν δύο διαδοχικῶν πλευρῶν τοῦ παραλληλογράμμου.

3ον. Ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν ἑνὸς ὀρθογωνίου, τεμνόμεναι σχηματίζουν τετράγωνον.

336. (336). Αἱ διχοτόμοι τῶν ἔξωτερικῶν γωνιῶν ἑνὸς παραλληλογράμμου, τεμνόμεναι σχηματίζουν ἓνα ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν διαγωνίων εἶναι ἴσον μὲ τὴν περίμετρον τοῦ παραλληλογράμμου.

337. (367). Δίδεται ἓνα παραλληλόγραμμον ABΓΔ, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ πλευρὰ AB εἶναι διπλασία τῆς ΒΓ. Ἐκ τῆς κορυφῆς A φέρομεν τὴν κάθετον ΑΕ ἐπὶ

τὴν ΒΓ καὶ συνδέομεν τὸ Ε μετὰ τὸ μέσον Ζ τῆς ΓΔ. Ἐστω Η τὸ μέσον τῆς ΑΒ. Νὰ ἀποδειχθῇ :

1ον. Ὅτι τὸ ΗΒΓΖ εἶναι ρόμβος.

2ον. Ὅτι $HZ=HE=HB$.

3ον. Ὅτι ἡ ΖΕ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΗΕΓ.

4ον. Ὅτι ἡ γων. ΔΖΕ εἶναι τριπλασία τῆς ΖΕΓ.

338. (369). Εἰς ἓνα παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ φέρομεν τὰς διχοτόμους ΑΕ, ΒΖ, ΓΗ, ΔΘ τῶν γωνιῶν του, αἱ ὁποῖαι τέμνουσιν τὰς ἀπέναντι πλευράς εἰς τὰ σημεῖα Ε, Ζ, Η, Θ. Νὰ ἀποδειχθῇ :

1ον. Ὅτι κάθε διχοτόμος σχηματίζει, μετὰ τὰς πλευράς τοῦ παραλληλογράμμου, ἓνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον (π.χ. ἡ ΑΕ σχηματίζει τὸ τρίγωνον ΑΔΕ).

2ον. Τὸ τετράπλευρον ΚΛΜΝ, τὸ ὁποῖον σχηματίζουν αἱ διχοτόμοι, εἶναι ἓνα ὀρθογώνιον.

3ον. Τὸ κέντρον τοῦ ὀρθογωνίου αὐτοῦ συμπίπτει μετὰ τὸ κέντρον τοῦ παραλληλογράμμου.

4ον. Τί πρέπει νὰ εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ, ἵνα τὸ ὀρθογώνιον ΚΛΜΝ εἶναι τετράγωνον;

339. (372). Δίδεται ἓνα παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ. Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Β φέρομεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΒ καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς καὶ ἐκατέρωθεν τοῦ Β τμήματα ΒΕ καὶ ΒΖ ἴσα πρὸς τὴν ΒΓ. Ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον Β φέρομεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΑ καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς καὶ ἐκατέρωθεν τοῦ Β μὴκη ΒΘ καὶ ΒΚ ἴσα μετὰ ΑΒ.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΕΚ καὶ ΘΖ εἶναι παράλληλοι.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ ἡ ἰσότης τῶν τριγώνων ΑΔΓ, ΑΒΓ, ΘΒΖ, ΕΒΚ.

3ον. Φέρομεν τὰ ὑψη ΒΗ καὶ ΒΗ' τῶν τριγώνων ΕΒΚ καὶ ΘΒΖ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $BH=BH'$ καὶ ὅτι τὰ σημεῖα Η, Β, Η' κεῖνται ἐπ' εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὴν ΑΓ.

4ον. Φέρομεν τὰ ὑψη ΒΜ καὶ ΒΝ τῶν τριγώνων ΒΕΘ καὶ ΒΖΚ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα Δ, Μ, Β, Ν κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

340. (326). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε τραπέζιον :

1ον. Ἡ διαφορὰ τῶν δύο βάσεων του εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του.

2ον. Ἐκάστη τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του εἶναι μικροτέρα τῆς ἄλλης, αὐξηθείσης κατὰ τὴν διαφορὰν τῶν βάσεων του.

3ον. Τὸ ἀθροῖσμα τῶν βάσεων του εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν διαγωνίων του.

341. (327). Συνδέομεν μετὰ εὐθείας τὰ μέσα Ε καὶ Ζ τῶν βάσεων ΑΒ καὶ ΓΔ ἐνὸς τραπέζιου ΑΒΓΔ μετὰ τὰ μέσα Η καὶ Θ τῶν διαγωνίων του ΑΓ καὶ ΒΔ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ γωνίαι Ε καὶ Ζ τοῦ τετραπλεύρου ΕΘΖΗ εἶναι ἴσαι μετὰ τὴν γωνίαν, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ μὴ παράλληλοι πλευραὶ ΑΔ καὶ ΒΓ, προεκτεινόμεναι μέχρι τῆς συναντήσεώς των εἰς τὸ σημεῖον Ο.

342. (362). Δίδεται ἓνα ὀρθογώνιον τραπέζιον ΑΒΓΔ, ($\widehat{A}=\widehat{D}=90^\circ$). Ἡ μεγάλη βᾶσις ΔΓ εἶναι διπλασία τῆς μικρᾶς βάσεως ΑΒ καὶ ἡ ἀμβλεῖα γωνία Β εἶναι τριπλασία τῆς ὀξείας γωνίας Γ.

1ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι Β καὶ Γ.

2ον. Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Β φέρομεν τὴν κάθετον ΒΕ ἐπὶ τὴν ΔΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ διαγωνίος ΑΓ διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον τῆς ΒΕ.

3ον. Φέρομεν τὴν εὐθείαν ΑΕ· νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΑΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΔ καὶ ἴση μὲ αὐτὴν.

4ον. Ἐὰν Ν εἶναι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ΑΕ καὶ ΒΔ, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΝΜ εἶναι ἴση μὲ τὸ τέταρτον τῆς βάσεως ΔΓ.

343. (363). Δίδεται ἓνα τραπέζιον ΑΒΓΔ μὲ βάσεις τὰς ΑΒ καὶ ΓΔ. Ἐστῶσαν Ε καὶ Ζ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΔ καὶ ΒΓ, Η τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν Α καὶ Δ καὶ Κ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ. Νὰ ἀποδειχθῇ :

1ον. Ὅτι ἡ ΗΚ εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις καὶ ὅτι :

$$EH = \frac{AD}{2}, \quad ZK = \frac{BG}{2}.$$

2ον. Ὅτι διὰ τὰ τέμνονταί αἱ τέσσαρες διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τοῦ τραπέζιου εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ ἄθροισμα τῶν βάσεων του νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του.

344. (364). Δίδεται ἓνα τραπέζιον ΑΒΓΔ μὲ μεγάλην βᾶσιν τὴν ΑΒ.

1ον. Αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Α καὶ Δ τέμνονται εἰς τὸ Η καὶ αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Γ καὶ Β τέμνονται εἰς τὸ Κ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΗΚ εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις καὶ τέμνει τὰς ΑΔ καὶ ΓΒ εἰς τὰ μέσα τῶν Ε καὶ Ζ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ΕΗ συναρτήσῃ τῆς ΑΔ καὶ ἡ ΚΖ συναρτήσῃ τῆς ΒΓ.

2ον. Ὑποθέτομεν, ὅτι αἱ τέσσαρες διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τοῦ τραπέζιου τέμνονται. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τότε τὸ ἄθροισμα τῶν βάσεων του εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν τοῦ τραπέζιου.

3ον. Ὑποθέτομεν, ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Δ καὶ Γ τέμνονται ἐπὶ τῆς ΑΒ. Νὰ εὐρεθῇ εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ σχέσις μεταξὺ τῶν πλευρῶν τοῦ τραπέζιου.

345. (355). Αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζουν αἱ προεκτάσεις τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τετραπλεύρου, τέμνονται ὑπὸ γωνίαν, ἡ ὁποία εἶναι ἴση μὲ τὸ ἡμίθροισμα τῶν ἀπέναντι γωνιῶν τοῦ τετραπλεύρου.

346. (357). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τῶν τεσσάρων κορυφῶν τετραπλεύρου ἀπὸ δοθείσαν εὐθείαν χγ, εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετραπλάσιον τῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν δύο εὐθειῶν, αἱ ὁποιαὶ συνδέουν τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου ἀπὸ τὴν εὐθείαν.

347. (358). Δίδεται ἓνα τετράπλευρον ΑΒΓΔ καὶ Ε, Ζ, Η, Θ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του 1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΘ, εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ΑΒΓΔ.

2ον. Ἀπὸ τὰς κορυφὰς τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς διαγωνίους του· νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ σχηματιζόμενον παραλληλόγραμμον ΚΑΜΝ εἶναι διπλάσιον τοῦ ΑΒΓΔ καὶ τετραπλάσιον τοῦ ΕΖΗΘ.

348. (373). Δίδεται ἓνα τρίγωνον ΑΒΓ. Ἀπὸ ἓνα σημεῖον Σ, τὸ ὁποῖον κινεῖται ἐπὶ τῆς ΒΓ φέρομεν μίαν παράλληλον πρὸς τὴν διχοτόμον ΑΔ τῆς γωνίας Α, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ε καὶ τὴν ΑΒ εἰς τὸ Ζ. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ μέσου τῆς ΕΖ.

349. (374). Εἰς ἓνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΔΕ παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν ΒΓ, ἣ ὁποία τέμνει τὰς ἴσας πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε· φέρομεν τὰς εὐθείας ΓΔ καὶ ΒΕ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς ἓνα σημεῖον Μ. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου Μ, ὅταν ἡ εὐθεῖα ΔΕ κινῆται παραλλήλως πρὸς τὴν ΒΓ.

350. (375). Δίδεται ἓνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ. Ἀπὸ τυχόν σημείου Σ τῆς βάσεως τοῦ ΒΓ φέρομεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ, ἣ ὁποία τέμνει τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ν καὶ τὴν ΑΒ εἰς τὸ Μ.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $AM=AN$.

2ον. Φέρομεν τὸ ὕψος ΑΗ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $AH = \frac{\Sigma M + \Sigma N}{2}$ καὶ ἐξ αὐτοῦ νὰ ἐξαχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα $\Sigma M + \Sigma N$ εἶναι σταθερόν, ὅταν τὸ σημεῖον Σ κινῆται ἐπὶ τῆς ΒΓ.

3ον. Νὰ εὐρεθῇ ὁ τόπος τοῦ μέσου τῆς ΜΝ, ὅταν τὸ Σ κινῆται ἐπὶ τῆς ΒΓ.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

Η ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

1. Περιφέρεια. Εὐθεία καὶ περιφέρεια

241. Περιφέρεια διερχομένη διὰ δύο σημείων. Ἐστωσαν δύο σημεία A καὶ B . Φέρομεν τὸ εὐθύγραμμον τμήμα AB καὶ τὴν μεσοκάθετον $X\psi$ αὐτοῦ. Κάθε σημεῖον O τῆς μεσοκαθέτου αὐτῆς θὰ ἀπέχη ἴσον ἀπὸ τὰ σημεία A καὶ B , δηλ. θὰ εἶναι $OA=OB$. Ἐὰν λοιπὸν γράψωμεν περιφέρειαν μὲ κέντρον τὸ O καὶ ἀκτίνα τὴν OA ἢ τὴν ἴσην τῆς OB , αὕτη θὰ διέλθῃ ἀπὸ τὰ A καὶ B .

Εἶναι φανερόν, ὅτι διὰ τῶν σημείων A καὶ B δύνανται νὰ διέλθουν ἄπειροι περιφέρειαι, ἀρκεῖ νὰ λαμβάνωμεν ὡς κέντρα τὰ διάφορα σημεία τῆς μεσοκαθέτου καὶ ὡς ἀκτίνας τὰς ἀποστάσεις τῶν κέντρων ἀπὸ τὰ σημεία A καὶ B .

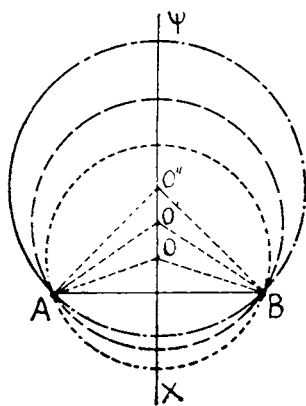
Συμπέρασμα: Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συναγομεν, ὅτι :

Ἡ μεσοκάθετος $X\psi$ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος AB εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν, αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ τὰ A καὶ B .

242. Θεώρημα. Διὰ τριῶν σημείων, μὴ κειμένων ἐπ' εὐθείας, διέρχεται μία καὶ μόνον περιφέρεια.

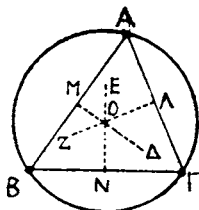
Ἐστωσαν A, B, Γ τρία σημεία, τὰ ὁποῖα δὲν κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας.

Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι ἀπὸ τὰ σημεία A, B, Γ διέρχεται μία καὶ μόνον περιφέρεια.



Σχ. 184.

Τὸ κέντρον μιᾶς περιφερείας, ἣ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα A καὶ B ἀπέχει ἰσάκεις ἀπὸ τὰ A καὶ B · ἐπομένως κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου $ΜΔ$ τῆς AB . Ὅμοίως, τὸ κέντρον τῆς περιφερείας αὐτῆς, ὡς ἀπέχον ἰσάκεις ἀπὸ τὰ σημεῖα B καὶ $Γ$ κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου NE τῆς $BΓ$.



Σχ. 185.

Αἱ μεσοκάθετοι αὐταὶ $ΜΔ$ καὶ NE τέμνονται (§ 226) εἰς ἓνα σημεῖον O , τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας.

Ἐπειδὴ αἱ μεσοκάθετοι $ΜΔ$ καὶ NE τέμνονται μόνον εἰς ἓνα σημεῖον, ἔπεται ὅτι διὰ τῶν τριῶν σημείων $A, B, Γ$ δύναται νὰ διέλθῃ μία καὶ μόνον περιφέρεια.

Ἐδείχθη, λοιπὸν ὅτι: **Διὰ τριῶν . . .**

243. Πορίσματα: I. *Μία εὐθεία και μία περιφέρεια ἔχουν τὸ πολὺ δύο κοινὰ σημεῖα.*

II. *Δύο περιφέρειαι δὲν δύνανται νὰ ἔχουν κοινὰ σημεῖα περισσότερα τῶν δύο.*

Διότι, ἐὰν εἶχον κοινὰ σημεῖα περισσότερα τῶν δύο, ἔστω τρία, τότε αἱ περιφέρειαι θὰ συνέπιπτον καὶ θὰ ἀπετέλουν μίαν περιφέρειαν.

III. *Διὰ τῶν κορυφῶν ἐνὸς τριγώνου διέρχεται μία καὶ μόνον περιφέρεια.*

Ἡ περιφέρεια αὐτὴ εἶναι περιγεγραμμένη περὶ τὸ τρίγωνον καὶ τὸ τρίγωνον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὴν περιφέρειαν (§ 227).

244. Παρατήρησις. Τὸ θεώρημα τῆς § 242 μᾶς ἐπιτρέπει νὰ λύσωμεν τὸ πρόβλημα:

Νὰ γραφῇ περιφέρεια διερχομένη διὰ τριῶν σημείων.

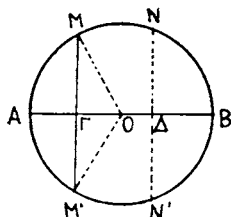
Τὸ πρόβλημα αὐτὸ εἶναι ἀδύνατον, ἄταν τὰ σημεῖα $A, B, Γ$ εἶναι διάφορα καὶ κεῖνται ἐπ' εὐθείας, διότι εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν αἱ μεσοκάθετοι τῶν AB καὶ $BΓ$ εἶναι παράλληλοι. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ὅτι τὸ κέντρον κεῖται εἰς τὸ ἄπειρον κατὰ τὴν διεύθυνσιν, τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθείαν $ABΓ$.

245. Θεώρημα. *Κάθε διάμετρος κύκλου εἶναι ἄξων συμμετρίας τῶν σημείων τῆς περιφερείας του.*

Ἐστω ὁ κύκλος O (Σχ. 186) καὶ AB μία διάμετρος του. Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ AB εἶναι ἄξων συμμετρίας τῆς περιφερείας O .

Πράγματι· ἔστω M τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας O . Ἀπὸ τὸ M φέρομεν τὴν κάθετον $ΜΓ$ ἐπὶ τὴν AB , ἣ ὁποία προεκτεινομένη τέ-

μνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ σημεῖον M' . Φέρομεν τὰς ἀκτῖνας OM και OM' . Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα OGM και OGM' εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς ὑποπνευούσας τῶν OM και OM' ἴσας, ὡς ἀκτῖνας τοῦ αὐτοῦ κύκλου και τὴν κάθετον πλευρὰν OG κοινήν· ἄρα θὰ εἶναι και $GM = GM'$. Τὰ σημεῖα λοιπὸν M και M' εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὴν AB (§ 154).



Σχ. 186.

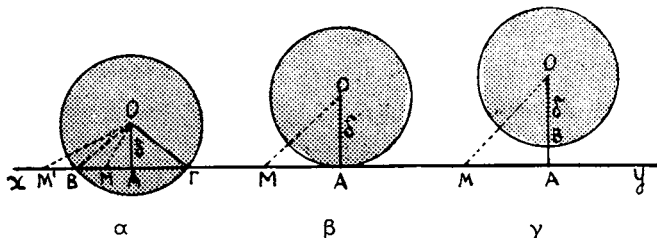
Ὅμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι κάθε σημεῖον τοῦ τόξου AMB ἔχει τὸ συμμετρικόν του ἐπὶ τοῦ τόξου $AM'B$. Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα τῆς περιφέρειας O εἶναι ἀνὰ δύο συμμετρικὰ πρὸς τὴν AB ἔπεται, ὅτι ἡ AB εἶναι ἄξων συμμετρίας τῆς περιφέρειας (§ 154).

Ἐδείχθη λοιπὸν, ὅτι: **Κάθε διάμετρος...**

246. Πόρισμα. Κάθε διάμετρος κύκλου χωρίζει τὴν περιφέρειαν εἰς δύο ἴσα τόξα (ἡμιπεριφέρειας) και τὸν κύκλον εἰς δύο ἴσα μέρη (ἡμικύκλια).

247. Σχετικαὶ θέσεις μιᾶς εὐθείας και μιᾶς περιφέρειας. Ἐστω μία εὐθεῖα xy , ἡ ὁποία μετατίθεται παραλλήλως πρὸς ἑαυτὴν και $OA = \delta$ ἡ μεταβλητὴ ἀπόστασις τῆς ἀπὸ τὸ κέντρον μιᾶς περιφέρειας (O, R).

1η. Περίπτωσις. Ἐστω $\delta > R$ (Σχ. 187γ). Εἰς τὴν περίπτωσιν



Σχ. 187.

αὐτὴν τὸ σημεῖον A κεῖται ἔκτος τοῦ κύκλου O . Κάθε ἄλλο σημεῖον M τῆς εὐθείας xy ἀπέχει ἀπὸ τὸ κέντρον O ἀπόστασιν μεγαλύτεραν τῆς OA , δηλ. εἶναι $OM > OA$ και ἐπομένως $OM > R$. ἄρα τὸ σημεῖον M κεῖται ἔκτος τοῦ κύκλου και λέγομεν ὅτι ἡ εὐθεῖα xy κεῖται ἔκτος τῆς περιφέρειας τοῦ κύκλου O .

2α. Περίπτωσις. Ἐστω $\delta = R$ (Σχ. 187β). Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ σημεῖον A κεῖται ἐπὶ τῆς περιφέρειας τοῦ κύκλου O . Κάθε ἄλλο σημεῖον M τῆς εὐθείας xy , διάφορον τοῦ A , ἀπέχει ἀπὸ τὸ κέν-

τρον O ἀπόστασιν μεγαλύτεραν τῆς OA , δηλ. εἶναι $OM > OA$ καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι $OM > R$. Ἡ εὐθεΐα λοιπὸν xy ἔχει ἓνα μόνον κοινὸν σημεῖον μὲ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου O καὶ λέγομεν, ὅτι ἡ εὐθεΐα xy εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφέρειας O .

3η. Περίπτωσις. Ἐστω $\delta < R$ (Σχ. 187a). Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ σημεῖον A κεῖται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς περιφέρειας. Ἐστω M ἓνα ἄλλο σημεῖον τῆς εὐθείας xy . Ὄταν τὸ M ἀπομακρύνεται ἀπὸ τὸ A ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας Ax , ἡ ἀπόστασις τοῦ OM ἀπὸ τὸ κέντρον O αὐξάνει σταθερῶς ἀπὸ τὴν τιμὴν $OA < R$ εἰς μίαν τιμὴν ὅσον θέλομεν μεγάλην. Ὑπάρχει λοιπὸν ἓνα σημεῖον B ἐπὶ τῆς xy τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι $OB = R$. Τὸ σημεῖον αὐτὸ εἶναι κοινὸν σημεῖον τῆς εὐθείας xy καὶ τῆς περιφέρειας O . Ἄν ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ σημεῖον M κινεῖται ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας Ay , εὐρίσκομεν καὶ ἓνα δεύτερον σημεῖον Γ συμμετρικὸν τοῦ A καὶ τοιοῦτον, ὥστε $O\Gamma = R$.

Ἡ εὐθεΐα xy καὶ ἡ περιφέρεια O ἔχουν λοιπὸν δύο κοινὰ σημεῖα καὶ δὲν δύνανται νὰ ἔχουν τρίτον (§ 243 II) καὶ λέγομεν ὅτι ἡ εὐθεΐα xy εἶναι τέμνουσα τῆς περιφέρειας O .

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι :

Ἐὰν $\delta > R$	ἡ εὐθεΐα κεῖται ἐκτὸς τῆς περιφέρειας
Ἐὰν $\delta = R$	» » εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφέρειας
Ἐὰν $\delta < R$	» » » τέμνουσα τῆς περιφέρειας

Τὰ ἀντίστροφα τῶν προτάσεων, πὸν εὐρίσκονται εἰς τὸν ἀνωτέρω πίνακα, ἀληθεύουν καὶ ἀποδεικνύονται διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς.

Π.χ. ἐὰν μία εὐθεΐα εἶναι ἐφαπτομένη περιφέρειας θὰ εἶναι $\delta = R$.

Πράγματι· ἐὰν δὲν ἦτο $\delta = R$ θὰ ἦτο εἴτε $\delta > R$, εἴτε $\delta < R$.

Ἐὰν ἦτο $\delta > R$, ἡ εὐθεΐα θὰ ἔκειτο ἐκτὸς τῆς περιφέρειας, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσίν μας.

Ἐὰν ἦτο $\delta < R$, ἡ εὐθεΐα θὰ ἔτεμνε τὴν περιφέρειαν, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον ἀντίκειται καὶ πάλιν πρὸς τὴν ὑπόθεσίν μας. Ὄποτε ἀπομένει νὰ εἶναι $\delta = R$.

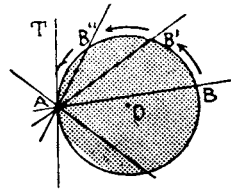
2. Ἐφαπτομένη περιφέρειας καὶ ιδιότητες αὐτῆς

248. Ἐφαπτομένη περιφέρειας. Ὅπως ἴδωμεν (§ 247) ἐφαπτομένη κύκλου ἢ ἐφαπτομένη περιφέρειας λέγεται κάθε εὐθεΐα, ἢ ὁποία ἔχει ἓνα κοινὸν σημεῖον καὶ μόνον ἓνα μὲ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου.

Τὸ κοινὸν σημεῖον τῆς εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας λέγεται *σημεῖον ἐπαφῆς* ἢ *σημεῖον ἀφῆς*.

Ὅταν μία εὐθεῖα εἶναι ἐφαπτομένη μιᾶς περιφερείας εἰς ἓνα σημεῖον αὐτῆς καὶ ἡ περιφέρεια εἶναι ἐφαπτομένη τῆς εὐθείας εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

Ἡ ἐφαπτομένη AT ἑνὸς κύκλου O (Σχ. 188) εἰς ἓνα σημείον τοῦ A δύναται νὰ θεωρηθῇ, ὡς ἡ τελικὴ (ὀριακὴ) θέσις, τὴν ὁποίαν ἔρχεται νὰ λάβῃ μία τέμνουσα AB , στρεφομένη περὶ τὸ σημεῖον A οὕτως, ὥστε τὸ μὲν σημεῖον A νὰ μένῃ ἀκίνητον, τὸ δὲ σημεῖον B , γράφον τὴν περιφέρειαν, ἔρχεται νὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ A .



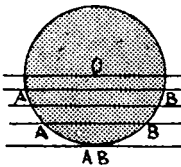
Σχ. 188.

Πράγματι· ὅταν τὰ δύο σημεῖα τῆς τομῆς B καὶ A συμπέσουν εἰς ἓνα καὶ μόνον σημεῖον A , ἡ εὐθεῖα AT δὲν ἔχει παρὰ ἓνα καὶ μόνον κοινὸν σημεῖον μὲ τὴν

περιφέρειαν καὶ ἐπομένως εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας.

Ὁ ὀρισμὸς αὐτὸς τῆς ἐφαπτομένης ἰσχύει δι' ὅλας τὰς καμπύλας γραμμάς.

Ἐπίσης ἡ ἐφαπτομένη ἑνὸς κύκλου δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἡ τελικὴ θέσις μιᾶς τεμνούσης AB , ἡ ὁποία μετατίθεται παραλλήλως πρὸς ἑαυτὴν καὶ τῆς ὁποίας ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τοῦ κέντρου πλησιάζει νὰ γίνῃ ἴση μὲ τὴν ἀκτίνα τοῦ κύκλου (Σχ. 189).



Σχ. 189.

249. Ὅρισμός. *Γωνία μιᾶς περιφερείας καὶ μιᾶς τεμνούσης αὐτῆν εὐθείας* λέγεται ἡ *γωνία*, ἡ ὁποία σχηματίζεται ἀπὸ τὴν δοθεῖσαν τέμνουσαν καὶ ἀπὸ τὴν ἐφαπτομένην τῆς περιφερείας αὐτῆς εἰς τὸ σημεῖον τῆς τομῆς.

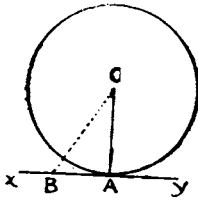
Π.χ. ἡ γωνία BAT (Σχ. 188) εἶναι γωνία τῆς περιφερείας O καὶ τῆς τεμνούσης AB .

250. Θεώρημα. *Κάθε εὐθεῖα, κάθετος εἰς τὸ ἄκρον μιᾶς ἀκτίνος ἑνὸς κύκλου, εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας του.*

Υπόθεσις: Ἐστω ὁ κύκλος O καὶ OA (Σχ. 190) μία ἀκτίς αὐτοῦ. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν xy κάθετον ἐπὶ τὴν OA εἰς τὸ ἄκρον αὐτῆς A .

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ xy εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας O · δηλ. θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ xy καὶ ἡ περιφέρεια O δὲν ἔχουν ἄλλο κοινὸν σημεῖον ἐκτὸς τοῦ A .

Ἀπόδειξις: Ἐστω ἓνα ἄλλο τυχόν σημεῖον B τῆς xy . Φέρομεν τὴν OB . Ἐπειδὴ ἡ OA εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν xy , ἡ OB θὰ εἶναι πλαγία πρὸς αὐτὴν καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι μεγαλύτερα τῆς OA . Τὸ σημεῖον B θὰ κεῖται λοιπὸν ἔκτος τῆς περιφέρειας O , ὡς ἀπέχον ἀποστασιν μεγαλύτεραν τῆς ἀκτίνας.



Σχ. 190.

Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ κάθε ἄλλο σημεῖον τῆς xy , ἔκτος τοῦ A. Ὡστε ἡ εὐθεῖα xy δὲν ἔχει ἄλλο κοινὸν σημεῖον, μὲ τὴν περιφέρειαν O , ἔκτος τοῦ A καὶ ἐπομένως ἡ xy εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφέρειας O εἰς τὸ σημεῖον A.

Ἐδείχθη λοιπὸν, ὅτι: **Κάθε εὐθεῖα. . .**

251. Θεώρημα. (Ἀντίστροφον). Κάθε ἐφαπτομένη περιφέρειας εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτίνα, ἡ ὁποία καταλήγει εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς.

Ἐπιπέσεις: Ἐστω, ὅτι ἡ εὐθεῖα xy (Σχ. 190) εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφέρειας O εἰς τὸ σημεῖον A. Φέρομεν τὴν ἀκτίνα OA .

Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι ἡ xy εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν OA εἰς τὸ σημεῖον A.

Ἀπόδειξις: Ἡ xy , ὡς ἐφαπτομένη τῆς περιφέρειας O εἰς τὸ σημεῖον A, δὲν ἔχει κανένα ἄλλο κοινὸν σημεῖον μὲ τὴν περιφέρειαν, ἔκτος τοῦ A. Ὅλα λοιπὸν τὰ σημεῖα τῆς xy , ἔκτος τοῦ A, κεῖνται ἔκτος τῆς περιφέρειας καὶ ἐπομένως αἱ ἀποστάσεις των ἀπὸ τὸ κέντρον O θὰ εἶναι μεγαλύτεραι τῆς ἀκτίνας OA . Ἐπειδὴ ἡ OA εἶναι ἡ μικρότερα ἀπὸ ὅλας τὰς εὐθείας, τὰς ὁποίας δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἀπὸ τὸ σημεῖον O πρὸς τὰ διάφορα σημεῖα τῆς xy , ἔπειτα (§ 100), ὅτι ἡ OA εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτίνα OA εἰς τὸ σημεῖον A.

Ἐδείχθη λοιπὸν, ὅτι: **Κάθε ἐφαπτομένη. . .**

252. Πρόβλημα. Εἰς κάθε σημεῖον περιφέρειας μία καὶ μόνη ἐφαπτομένη ἄγεται.

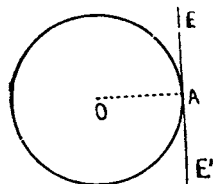
Διότι μία καὶ μόνον κάθετος ἐπὶ ἀκτίνα ἄγεται εἰς τὸ ἄκρον αὐτῆς.

Ἐπιπέσεις.	$OA = \text{ἀκτίς}$ $xy \perp OA$, εἰς τὸ A
Συμπ.	xy ἐφαπτ. τῆς O

Ἐπιπέσεις.	xy ἐφαπτομένη τῆς O εἰς τὸ A $OA = \text{ἀκτίς}$
Συμπ.	$xy \perp OA$ εἰς τὸ A

253. Έφαρμογή. Πρόβλημα. *Νά άχθῆ μία έφαπτομένη περιφερείας Ο εις δοθέν σημείον αυτής Α.*

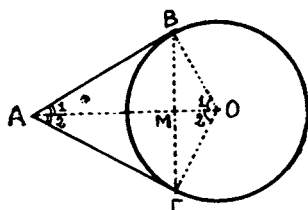
Πρός τοῦτο άρκει νά φέρωμεν τήν άκτίνα ΟΑ καί τήν κάθετον ΕΑΕ' επί τήν ΟΑ εις τό σημείον Α (Σχ. 191).



Σχ. 191.

254. Θεώρημα. *Αί δύο έφαπτόμεναι περιφερείας, αί όποιαί άγονται άπό σημείον, τό όποιον κείται έκτός αυτής, είναι ίσαι καί σχηματίζουν ίσας γωνίας με τήν εϋθειαν, ή όποία συνδέει τό δοθέν σημείον με τό κέντρον τής περιφερείας.*

Υπόθεσις: Έστω ή περιφέρεια Ο καί Α ένα σημείον έκτός αυτής (Σχ. 192). Φέρομεν τήν εϋθειαν ΑΟ καί τās έφαπτομένας ΑΒ καί ΑΓ πρός τήν περιφέρεια Ο.



Σχ. 192.

Υπόθ.	ΑΒ έφαπτομένη τής Ο ΑΓ " " Ο
Συμπ.	ΑΒ=ΑΓ $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$

Συμπέρασμα: Θα δείξωμεν, ότι:

$$ΑΒ=ΑΓ \text{ καί } \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2.$$

Απόδειξις: Φέρομεν τās άκτίνας ΟΒ καί ΟΓ εις τά σημεία έπαφῆς. Αί ΟΒ καί ΟΓ, ώς άκτίνες καταλήγουσαι εις τά σημεία έπαφῆς, είναι κάθετοι άντιστοιχώς επί τās έφαπτομένας ΑΒ καί ΑΓ.

Τά όρθογώνια τρίγωνα ΟΒΑ καί ΟΓΑ έχουν: τήν ΑΟ κοινήν καί ΟΒ=ΟΓ, ώς άκτίνας του κύκλου Ο· δηλ. έχουν τās ύποτείνουσας των ίσας καί μίαν κάθετον πλευράν ίσην· άρα είναι ίσα καί επομένως θα είναι ΑΒ=ΑΓ καί $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$.

Έδείχθη λοιπόν, ότι: *Αί δύο έφαπτόμεναι. . .*

255. Πόρισμα 1ον. Έδειξαμεν άνωτέρω, ότι τά τρίγωνα ΟΒΑ καί ΟΓΑ είναι ίσα· άρα θα είναι $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$ καί $\widehat{O}_1 = \widehat{O}_2$.

Παρατηρούμεν, ότι ή εϋθειά ΑΟ είναι διχοτόμος τών γωνιών ΒΑΓ καί ΒΟΓ.

Έάν φέρωμεν τήν χορδήν ΒΓ, παρατηρούμεν, ότι ή ΑΟ είναι διχοτόμος τής γωνίας τής κορυφῆς του ίσοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ· άρα ή ΑΟ θα είναι διάμεσος καί κάθετος επί τήν βάση του ΒΓ. Έκ τών άνωτέρω συνάγομεν, ότι:

Ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει τὸ κέντρον ἑνὸς κύκλου και τὸ σημεῖον, ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἄγονται αἱ δύο ἐφαπτόμεναι τῆς περιφερείας αὐτοῦ, εἶναι :

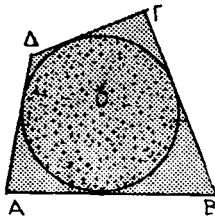
1ον. διχοτόμος τῆς γωνίας, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ δύο ἀκτῖνες, αἱ καταλήγουσαι εἰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς.

2ον. κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς χορδῆς, ἡ ὁποία συνδέει τὰ σημεῖα ἐπαφῆς.

256. Πρόσσμα 2ον. Εἰς τὸ τετράπλευρον ΑΒΟΓ, αἱ γωνίαι Β και Γ εἶναι ὀρθαί, ἐπομένως αἱ δύο ἄλλαι γωνίαι του Α και Ο ἔχουν ἄθροισμα ἴσον μὲ δύο ὀρθὰς γωνίας, δηλ. εἶναι παραπληρωματικά· ἐκ τῶν ἄνωτέρω συνάγομεν, ὅτι :

Ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ δύο ἐφαπτόμεναι περιφερείας, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον ἐκτὸς αὐτῆς, εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς γωνίας, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ δύο ἀκτῖνες, αἱ καταλήγουσαι εἰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς.

257. Ἐγγεγραμμένα και περιγεγραμμένα σχήματα περὶ κύκλον. Ἐνα πολύγωνον λέγεται περιγεγραμμένον περὶ κύκλον, διὰν ὅλαι αἱ πλευραὶ του ἐφάπτονται τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου αὐτοῦ.

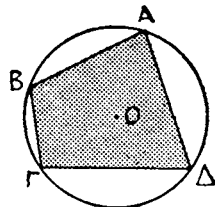


Σχ. 193.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὁ κύκλος λέγεται ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ πολύγωνον.

Π.χ. Τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ (Σχ. 193) εἶναι περιγεγραμμένον περὶ τὸν κύκλον Ο, ὁ δὲ κύκλος Ο εἶναι ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ.

Ἐνα πολύγωνον λέγεται ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον, διὰν ὅλαι αἱ κορυφαὶ του κεῖνται ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου.



Σχ. 194.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὁ κύκλος λέγεται περιγεγραμμένος περὶ τὸ πολύγωνον.

Π.χ. Τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ (Σχ. 194), εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον Ο, ὁ δὲ κύκλος Ο εἶναι περιγεγραμμένος περὶ τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ.

258. Ἀπόστασις σημείου ἀπὸ περιφέρειαν. Ἐστω μία περιφέρεια Ο ἀκτῖνος R και ἕνα τυχὸν σημεῖον Σ, τοῦ ὁποῖου θὰ ζητήσωμεν τὴν ἀπόστασιν ἀπὸ τὴν περιφέρειαν, δηλ. τὴν ἀπόστασιν τοῦ

Σ από το πλησιέστερον σημείον τῆς περιφερείας. Διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις:

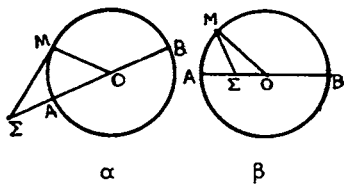
1ον. Τὸ δοθὲν σημεῖον Σ (Σχ. 195α), εἶναι εἰς τὸ ἐξωτερικὸν τῆς περιφερείας Ο. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΣΟ, ἣ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ Α. Λέγομεν, ὅτι τὸ εὐθύγραμμον τμήμα ΣΑ εἶναι τὸ **βραχύτερον** ἀπὸ ὅλα τὰ εὐθύγραμμα τμήματα, πού συνδέουν τὸ Σ μὲ τυχὸν ἄλλο σημεῖον Μ τῆς περιφερείας Ο.

Πράγματι, ἐὰν φέρωμεν τὴν ΣΜ, ἀπὸ τοῦ τριγώνου ΣΜΟ, ἔχομεν:

$$ΣΟ < ΟΜ + ΣΜ \quad \text{ἢ} \quad ΣΑ + R < R + ΣΜ \quad \text{ἢ} \quad ΣΑ < ΣΜ.$$

Τὸ εὐθύγραμμον τμήμα ΣΑ παριστάνει τὴν ἀπόστασιν τοῦ Σ ἀπὸ τὴν περιφέρειαν.

2ον. Τὸ σημεῖον Σ (Σχ. 195β) εἶναι εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς περιφερείας Ο. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΟΣ, ἣ ὁποία προεκτεινομένη τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ Α. Λέγομεν, ὅτι τὸ εὐθύγραμμον τμήμα ΣΑ εἶναι τὸ **βραχύτερον**, ἀπὸ ὅλα τὰ εὐθύγραμμα τμήματα, πού συνδέουν τὸ Σ μὲ τυχὸν ἄλλο σημεῖον Μ τῆς περιφερείας.



Σχ. 195.

Πράγματι, ἐὰν φέρωμεν τὰς ΟΜ καὶ ΣΜ, θὰ ἔχωμεν ἀπὸ τοῦ τριγώνου ΟΣΜ,

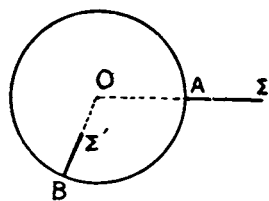
$$ΣΜ > ΟΜ - ΟΣ \quad \text{ἢ} \quad ΣΜ > ΟΑ - ΟΣ \quad \text{ἢ} \quad ΣΜ > ΣΑ.$$

Τὸ εὐθύγραμμον τμήμα ΣΑ παριστάνει τὴν ἀπόστασιν τοῦ Σ ἀπὸ τὴν περιφέρειαν.

3ον. Τὸ σημεῖον Σ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας Ο. Εἰς τὴν περιπτωσιν αὐτὴν ἡ ἀπόστασίς του ἀπὸ τὴν περιφέρειαν εἶναι μηδέν.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν:

Ἐπισημασμός. 1ον. Ἀπόστασις ἐνὸς σημείου Σ ἀπὸ δοθείσας περιφερείας λέγεται ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου Σ ἀπὸ τὸ πλησιέστερον σημεῖον τῆς περιφερείας.



Σχ. 196.

2ον. Ἡ ἀπόστασις ἐνὸς σημείου ἀπὸ μίαν περιφέρειαν μετροῦται ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἣ ὁποία συνδέει τὸ σημεῖον αὐτὸ μὲ τὸ κέντρον τῆς περιφερείας.

Π.χ. αἱ ἀποστάσεις τῶν σημείων Σ καὶ Σ' ἀπὸ τὴν περιφέρειαν Ο (Σχ. 196) εἶναι αἱ ΣΑ καὶ Σ'Β.

Ἄσκήσεις

351. (376). Νὰ ἀχθῆ ἐφαπτομένη περιφερείας παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν εὐθείαν

352. (377). Νὰ ἀχθῆ ἐφαπτομένη δοθείσης περιφερείας κάθετος πρὸς δοθεῖσαν εὐθείαν.

353. (378). Νὰ ἀχθῆ ἐφαπτομένη δοθείσης περιφερείας, ἡ ὁποία νὰ σχηματίζῃ μὲ δοθεῖσαν εὐθείαν AB γωνίαν ἴσην μὲ ω .

354. (379). Νὰ δειχθῆ, ὅτι αἱ ἐφαπτόμεναι περιφερείας: 1ον. εἰς τὰ ἄκρα μιᾶς διαμέτρου εἶναι παράλληλοι. 2ον. εἰς τὰ ἄκρα δύο καθέτων διαμέτρων σχηματίζουν τετράγωνον.

355. (380). Εἰς τὰ ἄκρα μιᾶς διαμέτρου AB ἐνὸς κύκλου O φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας τῆς περιφερείας. Ἐκατέρωθεν τῆς AB λαμβάνομεν ἐπὶ τῶν ἐφαπτομένων τμήματα $AE=BE'=AB$. 1ον. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὸ τετράπλευρον $AEBE'$ εἶναι παραλληλόγραμμον. 2ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι τοῦ παραλληλογράμμου αὐτοῦ.

356. (381). Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀπέναντι πλευρῶν τετραπλεύρου, περιγεγραμμένου περὶ κύκλον, εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του.

357. (382). Νὰ ἀποδειχθῆ ὅτι κάθε παραλληλόγραμμον, περιγεγραμμένον περὶ κύκλον, εἶναι ῥόμβος ἢ τετράγωνον.

358. (383). Αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὸ κέντρον ἐνὸς κύκλου μὲ τὰς τομὰς δύο παραλλήλων ἐφαπτομένων ὑπὸ τρίτης ἐφαπτομένης, εἶναι κάθετοι μεταξύ των.

359. (384). Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῆς ὑποτείνουσας του καὶ τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ τρίγωνον αὐτό.

360. (385). Δύο σημεῖα μιᾶς ἐφαπτομένης κύκλου, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς, ἀπέχουν ἴσην ἀπόστασιν καὶ ἀπὸ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου.

3. Σχετικά θέσεις δύο περιφερειῶν

259. Σχῆμα σχηματιζόμενον ὑπὸ δύο περιφερειῶν. Τὸ σχῆμα, ποὺ σχηματίζουν δύο περιφέρειαι O καὶ O' ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν θέσιν τῶν κέντρων των O καὶ O' καὶ ἀπὸ τὸ μέγεθος τῶν ἀκτίνων των R καὶ R' .

Ἡ εὐθεῖα OO' (Σχ. 197), ἡ συνδέουσα τὰ κέντρα O καὶ O' δύο περιφερειῶν λέγεται **διάκεντρος**.

Ἐπειδὴ κάθε διάμετρος κύκλου εἶναι ἄξων συμμετρίας τῶν σημείων τῆς περιφερείας του συνάγομεν, ὅτι:

Ἡ διάκεντρος δύο κύκλων O καὶ O' εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ σχήματος, ποὺ σχηματίζουν οἱ δύο αὐτοὶ κύκλοι.

Εἰς τὴν § 243 II ἐδείξαμεν, ὅτι δύο διάφοροι περιφέρειαι δὲν δύνανται νὰ ἔχουν περισσότερα ἀπὸ δύο κοινὰ σημεῖα. Ἐπομένως, διὰ νὰ γνωρίσωμεν τὰς σχετικὰς θέσεις δύο περιφερειῶν, πρέπει νὰ ἐξετάσωμεν τὰς τρεῖς κατωτέρω περιπτώσεις:

Αἱ περιφέρειαι :

1ον. Ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα.

2ον. Ἔχουν ἓνα κοινὸν σημεῖον.

3ον. Δὲν ἔχουν κανένα κοινὸν σημεῖον.

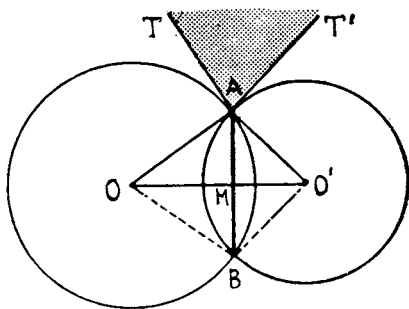
260. Τερνόμεναι περιφέρειαι. Δύο περιφέρειαι λέγονται *τερνόμεναι περιφέρειαι*, ὅταν ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα.

261. Θεώρημα. Ὅταν δύο περιφέρειαι ἔχουν ἓνα κοινὸν σημεῖον, ἐκτὸς τῆς διάκεντρον των, ἔχουν καὶ ἓνα δεύτερον κοινὸν σημεῖον, συμμετρικὸν τοῦ πρώτου ὡς πρὸς τὴν διάκεντρον των.

Ἐπίδειξις: Ἐστωσαν αἱ περιφέρειαι O καὶ O' , αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἓνα κοινὸν σημεῖον A (Σχ. 197).

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ περιφέρειαι αὐταὶ ἔχουν καὶ ἓνα δεύτερον κοινὸν σημεῖον, συμμετρικὸν τοῦ A πρὸς τὴν διάκεντρον OO' .

Ἀπόδειξις: Ἐστω B τὸ συμμετρικὸν τοῦ A πρὸς τὴν διάκεντρον OO' . Τὸ σημεῖον B , θὰ κείται (§ 245) καὶ ἐπὶ τῆς περιφερείας O καὶ ἐπὶ τῆς περιφερείας O' . Ἄρα θὰ εἶναι κοινὸν σημεῖον τῶν περιφερειῶν O καὶ O' .



Σχ. 197.

Αἱ περιφέρειαι λοιπὸν O καὶ O' ἔχουν καὶ ἓνα δεύτερον κοινὸν σημεῖον, τὸ B , τὸ συμμετρικὸν τοῦ A πρὸς τὴν διάκεντρον OO' .

Αἱ περιφέρειαι O καὶ O' δὲν δύνανται νὰ ἔχουν καὶ ἓνα τρίτον κοινὸν σημεῖον, διότι τότε θὰ συνέλιπτον (§ 243 II) καὶ θὰ ἀπετέλουσαν μίαν περιφέρειαν.

Ἐδείχθη λοιπὸν, ὅτι: Ὅταν δύο περιφέρειαι. . . .

262. Ὅρισμοί. Τὸ ἐκτὸς τῆς κοινῆς χορδῆς τῶν δύο περιφερειῶν O καὶ O' (Σχ. 197).

Ἐὰν εἰς τὸ σημεῖον A φέρωμεν τὰς ἐφαπτομένας AT καὶ AT'

τῶν περιφερειῶν O καὶ O' , ἡ γωνία TAT' λέγεται **γωνία τῶν δύο τεμνομένων περιφερειῶν**.

Ἐὰν ἡ γωνία TAT' εἶναι ὀρθή, λέγομεν ὅτι αἱ περιφέρειαι O καὶ O' τέμνονται ὀρθογωνίως.

263. Πορίσματα: I. Ὄταν δύο περιφέρειαι τέμνονται, ἡ διάκεντρος τῶν εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς κοινῆς χορδῆς τῶν.

Πράγματι· ἐπειδὴ $OA=OB$, τὸ κέντρον O κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου τῆς χορδῆς AB . Ὀμοίως ἐπειδὴ $O'A=O'B$, τὸ κέντρον O' κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου τῆς χορδῆς AB . Ἄρα τὰ κέντρα O καὶ O' εἶναι σημεῖα τῆς μεσοκαθέτου τῆς κοινῆς χορδῆς AB καὶ ἐπομένως ἡ διάκεντρος OO' εἶναι κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς κοινῆς χορδῆς AB .

II. Ὄταν δύο περιφέρειαι τέμνονται, ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων τῶν εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκτίνων τῶν καὶ μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς τῶν.

Δηλ. θὰ εἶναι $OA - O'A < OO' < OA + O'A$ (1)

Διότι εἰς τὸ τρίγωνον $OA O'$, ἡ πλευρὰ OO' εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων καὶ μεγαλυτέρα τῆς διαφορᾶς τῶν.

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ R καὶ R' τὰς ἀκτίνας τῶν κύκλων O καὶ O' καὶ μὲ δ τὴν ἀπόστασιν τῶν κέντρων, ἡ σχέσις (1) γράφεται

$$R - R' < \delta < R + R'$$

264. Ἐφαπτόμεναι περιφέρειαι. Δύο διάφοροι περιφέρειαι, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἓνα κοινὸν σημεῖον καὶ μόνον ἓνα, λέγονται **ἐφαπτόμεναι περιφέρειαι**.

265. Θέωρημα. Ὄταν δύο διάφοροι περιφέρειαι ἔχουν ἓνα κοινὸν σημεῖον, κείμενον ἐπὶ τῆς διακέντρου τῶν, αἱ περιφέρειαι αὐταὶ δὲν ἔχουν ἄλλο κοινὸν σημεῖον καὶ ἐφάπτονται εἰς τὸ σημεῖον αὐτό.

Ἐπιπέδουσι: Ἐστῶσαν αἱ περιφέρειαι O καὶ O' , αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἓνα κοινὸν σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τῆς διακέντρου τῶν OO' .

Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι αἱ περιφέρειαι αὐταὶ ἐφάπτονται εἰς τὸ σημεῖον O .

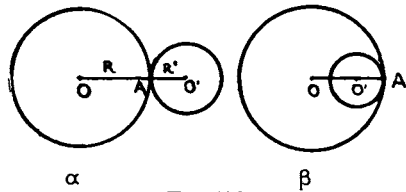
Ἀπόδειξις: Δύο περιπτώσεις σχετικῶς μὲ τὴν θέσιν τοῦ σημείου A ὡς πρὸς τὰ κέντρα O καὶ O' δύνανται νὰ παρουσιασθοῦν. Τὸ σημεῖον A κεῖται:

1ον. Μεταξὺ τῶν O καὶ O' (Σχ. 198 α).

2ον. Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς OO' (Σχ. 198 β).

Ἐὰν αἱ περιφέρειαι O καὶ O' εἶχον καὶ ἓνα δεύτερον κοινὸν σημεῖον *κείμενον ἐπὶ τῆς διακέντρον των*, θὰ εἶχον μίαν κοινήν διάμετρον καὶ θὰ συνέπιπτον. Ἀλλὰ τοῦτο ἀντίκειται πρὸς τὴν ὑπόθεσίν μας.

Ἐὰν αἱ περιφέρειαι O καὶ O' εἶχον ἓνα δεύτερον κοινὸν σημεῖον B *ἐκτὸς τῆς διακέντρον των*, θὰ εἶχον καὶ ἓνα τρίτον κοινὸν σημεῖον, τὸ συμμετρικὸν τοῦ B πρὸς τὴν διάκεντρον OO' καὶ ἐπομένως θὰ συνέπιπτον. Ἀλλὰ τοῦτο ἀντίκειται ἐπίσης πρὸς τὴν ὑπόθεσίν μας.



Σχ. 198.

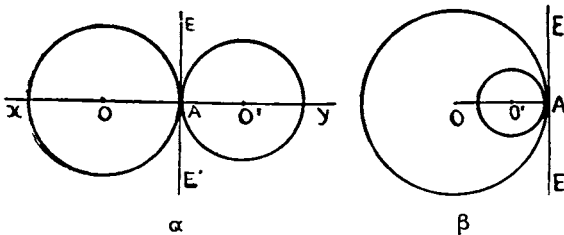
Ὡστε αἱ περιφέρειαι δὲν δύνανται νὰ ἔχουν ἄλλο κοινὸν σημεῖον ἐκτὸς τοῦ A .

Ἐπειδὴ αἱ περιφέρειαι αὐταὶ ἔχουν ἓνα μόνον κοινὸν σημεῖον ἐφάπτονται εἰς τὸ σημεῖον A .

Ἐδείχθη λοιπὸν, ὅτι: *Ὄταν δύο διάφοροι περιφέρειαι. . .*

266. Ὅρισμοί. *Τὸ κοινὸν σημεῖον δύο ἐφαπτομένων περιφερειῶν λέγεται σημεῖον ἐπαφῆς ἢ σημεῖον ἀφῆς αὐτῶν καὶ εὐρίσκεται πάντοτε ἐπὶ τῆς διακέντρον των.*

Ὄταν τὸ σημεῖον ἐπαφῆς κεῖται μεταξὺ τῶν δύο κέντρων, λέγομεν, ὅτι αἱ περιφέρειαι *ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς* (Σχ. 199 α).



Σχ. 199.

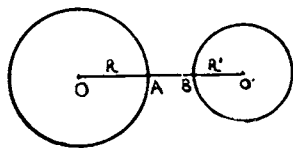
Εἰς τὴν ἐναντίαν περίπτωσιν λέγομεν ὅτι αἱ περιφέρειαι *ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς* (Σχ. 199 β).

Καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις αἱ περιφέρειαι ἔχουν τὴν αὐτὴν ἐφαπτομένην EE' εἰς τὸ κοινὸν σημεῖον, ἢ ὁποῖα λέγεται *κοινὴ ἐφαπτομένη* τῶν δύο περιφερειῶν.

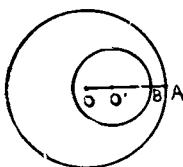
267. Περιφέρειαι μὴ ἔχουσαι κανένα κοινὸν σημεῖον.

Εἶναι φανερόν ὅτι, ὅταν δύο περιφέρειαι δὲν ἔχουν κανένα κοινὸν σημεῖον τότε :

1ον. Ὅλα τὰ σημεῖα τῆς μιᾶς κεῖνται ἐξωτερικῶς τῆς ἄλλης ἢ
2ον. Ὅλα τὰ σημεῖα τῆς μιᾶς κεῖνται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς ἄλλης.



α



β

Σχ. 200.

Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσηιν λέγομεν, ὅτι ἡ **μία περιφέρεια κεῖται ἐκτὸς τῆς ἄλλης** (Σχ. 200 α).

Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσηιν λέγομεν, ὅτι ἡ **μικροτέρα κεῖται δλόκληρος ἐντὸς τῆς ἄλλης** (Σχ. 200 β).

268. Σχετικά θέσεις δύο περιφερειῶν. Ἀπὸ ὅσα εἶδομεν εἰς τὰς § 243 II, 266, 268 συνάγομεν, ὅτι δύο διάφοροι περιφέρειαι Ο καὶ Ο' δύνανται νὰ καταλάβουν, ἢ μία πρὸς τὴν ἄλλην, πέντε διαφοροὺς θέσεις :

1ον. Ἡ μία περιφέρεια δύναται νὰ κεῖται ἐκτὸς τῆς ἄλλης (Σχ. 200 α).

Ἄν παραστήσωμεν τὴν ἀπόστασιν OO' μὲ δ καὶ τὰς ἀκτῖνας των μὲ R καὶ R' θὰ εἶναι $\delta > R + R'$.

2ον. Αἱ περιφέρειαι δύνανται νὰ ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς (Σχ. 199 α).

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θὰ εἶναι :

$$OO' = OA + AO' \quad \text{ἢ} \quad \delta = R + R'$$

3ον. Αἱ περιφέρειαι δύνανται νὰ τέμνονται (Σχ. 201).

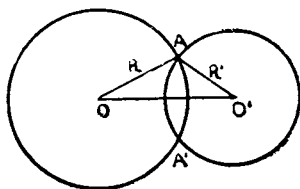
Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θὰ εἶναι

$$R - R' < \delta < R + R'$$

4ον. Αἱ περιφέρειαι δύνανται νὰ ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς (Σχ. 199 β).

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θὰ εἶναι :

$$OO' = OA - O'A \quad \text{ἢ} \quad \delta = R - R'$$



Σχ. 201.

5ον. Ἡ μία περιφέρεια δύναται νὰ κεῖται ἐντὸς τῆς ἄλλης (Σχ. 200 β).

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θὰ εἶναι :

$$OA = OO' + O'B + BA \quad \eta \quad R = \delta + R' + BA \quad \eta \quad R - R' = \delta + BA$$

ἄρα $\delta < R - R'$.

Ἐὰν τὰ κέντρα δύο τοιούτων περιφερειῶν συμπίπτουν αἱ περιφέρειαι λέγονται **δμόκεντροι** καὶ θὰ εἶναι $\delta = 0$.

269. Ἀντίστροφα (τῶν ἀνωτέρω προτάσεων). Αἱ σχέσεις αἱ ὁποῖαι ὑπάρχουν μεταξύ τῆς ἀποστάσεως δ τῶν κέντρων O καὶ O' δύο περιφερειῶν καὶ τῶν ἀκτίνων τῶν R καὶ R' , εἶναι **χαρακτηριστικά**. Δηλ. καὶ τὰ ἀντίστροφα τῶν προηγουμένων προτάσεων εἶναι ἀληθῆ.

Ἐπίθεσις	Συμπέρασμα
1ον. Ἐὰν $\delta > R + R'$ αἱ περιφέρ.	εἶναι ἡ μία ἐκτὸς τῆς ἄλλης
2ον. Ἐὰν $\delta = R + R'$ » »	ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς
3ον. Ἐὰν $R - R' < \delta < R + R'$ » »	τέμνονται
4ον. Ἐὰν $\delta = R - R'$ » »	ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς
5ον. Ἐὰν $\delta < R - R'$ » »	εἶναι ἡ μία ἐντὸς τῆς ἄλλης

Αἱ πέντε αὐταὶ προτάσεις ἀποδεικνύονται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον διὰ τῆς εἰς ἄτοπον ἀπαγωγῆς :

Π.χ. ἐὰν εἶναι $\delta < R + R'$, θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ περιφέρειαι O καὶ O' τέμνονται.

Ἐὰν αἱ περιφέρειαι δὲν ἐτέμνοντο, θὰ ἐφάπτοντο ἐξωτερικῶς ἢ ἐσωτερικῶς ἢ ἡ μία θὰ ἔκειτο ἐκτὸς τῆς ἄλλης ἢ ἐντὸς αὐτῆς.

Ἐὰν ἐφάπτοντο ἐξωτερικῶς, θὰ ἦτο $\delta = R + R'$, τὸ ὁποῖον ἀντιβίνει εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Ἐὰν ἐφάπτοντο ἐσωτερικῶς, θὰ ἦτο $\delta = R - R'$, τὸ ὁποῖον ἀντιβίνει πάλιν εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Ἐὰν ἡ μία ἔκειτο ἐκτὸς τῆς ἄλλης, θὰ ἦτο $\delta > R + R'$, τὸ ὁποῖον ἀντιβίνει εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Ἐὰν ἡ μία ἔκειτο ἐντὸς τῆς ἄλλης, θὰ ἦτο $\delta < R - R'$, τὸ ὁποῖον ἀντιβίνει πάλιν εἰς τὴν ὑπόθεσιν. Ὡστε αἱ περιφέρειαι O καὶ O' τέμνονται.

270. Σπουδαία παρατήρησις. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι :

1ον. Διὰ νὰ τέμνωνται δύο περιφέρειαι πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων τῶν νὰ περιλαμβάνεται μεταξύ τοῦ ἀθροίσματος καὶ τῆς διαφορᾶς τῶν ἀκτίνων τῶν.

Δηλ. πρέπει νὰ εἶναι : $R - R' < \delta < R + R'$.

2ον. Διὰ νὰ ἐφάπτωνται δύο περιφέρειαι πρέπει καὶ ἀρκεῖ

ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων των νὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα ἢ τὴν διαφορὰν τῶν ἀκτίνων των.

Δηλ. πρέπει νὰ εἶναι : $\boxed{\delta = R + R'}$, εἴτε $\boxed{\delta = R - R'}$.

Ἀσκήσεις

361. (386). Αἱ ἀκτίνες δύο κύκλων εἶναι 5 ἐκ. καὶ 6 ἐκ. Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων τῶν δύο κύκλων διὰ νὰ ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς ἢ ἐσωτερικῶς.

362. (387). Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἀκτίνες δύο κύκλων, οἱ ὅποιοι ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων των εἶναι 15 ἐκ. καὶ ἡ διαφορὰ τῶν ἀκτίνων των 7 ἐκ.

363. (388). Νὰ προσδιορισθοῦν αἱ σχετικαὶ θέσεις δύο περιφερειῶν, ἐὰν εἶναι:

1ον.	$\delta = 8$ ἐκ.,	$R = 5$ ἐκ.,	$R' = 3$ ἐκ.
2ον.	$\delta = 5$ ἐκ.,	$R = 3$ ἐκ.,	$R' = 3$ ἐκ.
3ον.	$\delta = 10$ ἐκ.,	$R = 6$ ἐκ.,	$R' = 3$ ἐκ.
4ον.	$\delta = 12$ ἐκ.,	$R = 7$ ἐκ.,	$R' = 3$ ἐκ.
5ον.	$\delta = 5$ ἐκ.,	$R = 7$ ἐκ.,	$R' = 2$ ἐκ.

364. (389). Δίδονται δύο ὁμόκεντροι κύκλοι Α καὶ Β ἀκτίνων 1 ἐκ. καὶ 4 ἐκ. καὶ ἓνας τρίτος κύκλος Γ ἀκτίνας 2 ἐκ. Ποῦ πρέπει νὰ τοποθετηθῇ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου Γ; ἵνα ὁ κύκλος Γ τέμνῃ τοὺς δύο πρώτους;

365. (390). Δίδονται δύο ὁμόκεντροι κύκλοι Α καὶ Γ ἀκτίνων 3 ἐκ. καὶ 1 ἐκ. καὶ ἓνας τρίτος κύκλος Γ, ὁ ὁποῖος ἐφάπτεται τῶν δύο πρώτων κύκλων. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτίς τοῦ κύκλου Γ καὶ ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου του ἀπὸ τὰ κέντρα τῶν δύο πρώτων κύκλων.

366. (391). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ κοιναὶ ἐφαπτόμεναι δύο ἴσων περιφερειῶν εἶναι ἴσαι.

367. (392). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ κοινὴ ἐφαπτομένη δύο ἀνίσων περιφερειῶν εἶναι μικροτέρα τῆς ἀποστάσεως τῶν κέντρων των.

368. (393). Δύο περιφέρειαι Ο καὶ Ο' ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς τὸ σημεῖον Α. Ἀπὸ τὸ Α φέρομεν τυχούσαν τέμνουσαν, ἢ ὅποια τέμνει τὴν περιφέρειαν Ο εἰς τὸ σημεῖον Β καὶ τὴν Ο' εἰς τὸ Γ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ ἀκτίνες ΟΒ καὶ Ο'Γ εἶναι παράλληλοι.

Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν.

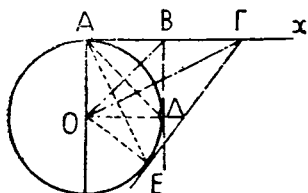
369. (394). Εἰς τυχὸν σημεῖον Α μιᾶς περιφέρειας Ο φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην αὐτῆς Αχ. Ἐπὶ τῆς Αχ λαμβάνομεν δύο τυχόντα σημεῖα Β καὶ Γ καὶ ἀπὸ τὰ Β καὶ Γ φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας ΒΔ καὶ ΓΕ τῆς περιφέρειας Ο. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ γωνίαι ΒΟΓ καὶ ΔΑΕ εἶναι ἴσαι ἢ παραπληρωματικαί.

370. (395). Δίδεται ἓνα τραπεζίον ΑΒΓΔ, ὀρθογώνιον εἰς τὰ Α καὶ Δ καὶ τοιοῦτον, ὥστε ἡ ΒΓ νὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο βάσεων του ΑΒ

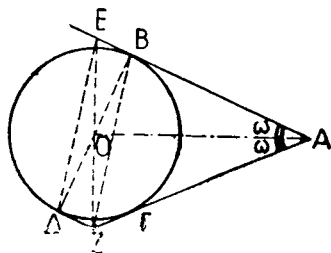
καὶ ΓΔ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ περιφέρεια, ἣ ὅποια ἔχει διάμετρον τὴν ΒΓ ἐφάπτεται τῆς πλευρᾶς ΑΔ.

371. (396). Ἀπὸ ἓνα σημεῖον Α, τὸ ὅποιον κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου Ο, φέρομεν μίαν τέμνουσαν ΑΓΔ τοῦ κύκλου, τῆς ὁποίας τὸ ἐκτὸς τοῦ κύκλου μέρος ΑΓ εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἀκτίνα τοῦ κύκλου Ο. Ἐπίσης φέρομεν τὴν τέμνουσαν ΑΟΒ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\gamma\omega\nu.ΒΟΔ=3 \gamma\omega\nu.ΓΟΑ$.

372. (397). Ἀπὸ ἓνα σημεῖον Μ, τὸ ὅποιον κεῖται ἐκτὸς κύκλου Ο, φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας ΜΑ καὶ ΜΒ τοῦ κύκλου Ο. Προεκτείνωμεν τὴν ἀκτίνα ΟΒ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως λαμβάνωμεν τμήμα ΒΓ=ΟΒ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία ΑΜΓ εἶναι τριπλασία τῆς γωνίας ΒΜΓ.



Σχ. ἀσκ. 369.



Σχ. ἀσκ. 374.

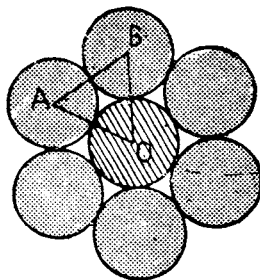
373. (398). Ἀπὸ ἓνα σημεῖον Α, τὸ ὅποιον κεῖται ἐκτὸς κύκλου Ο φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην ΑΒ τοῦ κύκλου Ο καὶ τὴν ΑΟ. Ἐπὶ τῆς ΑΟ λαμβάνωμεν τμήμα ΑΓ=ΑΒ καὶ φέρομεν τὴν ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν Ο εἰς τὸ σημεῖον Δ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΟΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΓ.

374. (399). Ἀπὸ ἓνα σημεῖον Α, τὸ ὅποιον κεῖται ἐκτὸς κύκλου Ο, φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας αὐτοῦ ΑΒ καὶ ΑΓ. Ἀπὸ τὸ κέντρον Ο φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθείαν ΟΑ, ἡ ὁποία τέμνει τὰς προεκτάσεις τῶν ἐφαπτομένων ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ ἀντιστοίχως. Ἐάν φέρομεν τὴν διάμετρον ΒΟΔ, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΔΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ.

375. (400). Δίδονται δύο περιφέρειαι Ο καὶ Ο' φέρομεν τὴν κοινὴν ἐξωτερικὴν ἐφαπτομένην τῶν ΑΑ' καὶ τὰς ἐσωτερικὰς ἐφαπτομένας τῶν ΒΒ' καὶ ΓΓ'. Αἱ ΒΒ' καὶ ΓΓ', προεκτείνωμεναι τέμνουσιν τὴν ΑΑ εἰς τὰ σημεῖα Ν καὶ Μ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ ᾿γωνίαί ΟΜΟ' καὶ ΟΝΟ' εἶναι ὄρθαι.

376. (401). Δύο περιφέρειαι Ο καὶ Ο' ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς τὸ σημεῖον Α. Ἀπὸ τὸ Α φέρομεν τυχούσαν χορδὴν ΑΜ τοῦ κύκλου Ο καὶ μίαν ἄλλην χορδὴν ΑΝ τοῦ κύκλου Ο', κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΜ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ ἀκτίνες ΟΜ καὶ Ο'Ν εἶναι παράλληλοι.

377. (402). Ἐχομεν κυκλικούς δίσκους ἴσους, ἐκ τῶν ὁποίων ὁ ἓνας εἶναι μαῦρος καὶ οἱ λοιποὶ

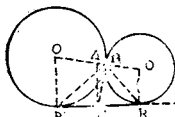


Σχ. ἀσκ. 377.

λευκοί. Πόσους λευκοὺς δίσκους δυνάμεθα νὰ θέσωμεν γύρω ἀπὸ τὸν μαῦρον δίσκον, οὕτως ὥστε οἱ λευκοὶ δίσκοι νὰ ἐφάπτονται τοῦ μαύρου καὶ κάθε λευκὸς δίσκος νὰ ἐφάπτεται τοῦ προηγούμενου καὶ τοῦ ἐπομένου του;

378. (403). Δίδεται μία περιφέρεια O ἀκτίνος R . Νὰ εὑρεθῆ πόσους κυκλικούς δίσκους ἀκτίνος $R/3$ δυνάμεθα νὰ θέσωμεν ἐντὸς τῆς περιφερείας O οὕτως, ὥστε ὅλοι νὰ ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς τῆς περιφερείας O καὶ καθένας ἐξ αὐτῶν, νὰ ἐφάπτεται τοῦ προηγούμενου καὶ τοῦ ἐπομένου του;

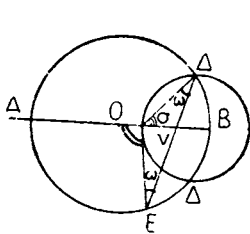
379. (404). Δίδονται δύο κύκλοι O καὶ O' , οἱ ὁποῖοι ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς τὸ σημεῖον A καὶ μία κοινὴ ἐφαπτομένη αὐτῶν BB' . Νὰ ἀποδειχθῆ: 1ον ὅτι γων. $BAB' = 1$ ὀρθή. 2ον ὅτι ὁ κύκλος, ὁ ὁποῖος ἔχει διάμετρον τὴν BB' ἐφάπτεται τῆς διακέντρου OO' . 3ον ὅτι ὁ κύκλος, ὁ ὁποῖος ἔχει διάμετρον τὴν OO' , ἐφάπτεται τῆς BB' εἰς τὸ μέσον τῆς.



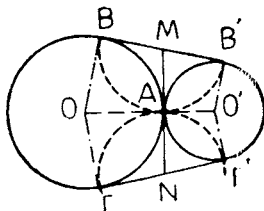
Σχ. ἀσκ. 379.

380. (405). Ἐπὶ τῆς διαμέτρου AB ἑνὸς κύκλου O λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Γ . Μὲ κέντρον τὸ Γ καὶ ἀκτίνα τὴν ΓO γράφομεν ἄλλην περιφέρεια, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρεια O εἰς δύο σημεῖα Δ καὶ Δ' . Φέρομεν τὴν $\Delta\Gamma$, ἡ ὁποία προεκτεινομένη τέμνει τὴν περιφέρεια O εἰς τὸ σημεῖον E . Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι ἡ γωνία AOE εἶναι τριπλασία τῆς γωνίας AOB .

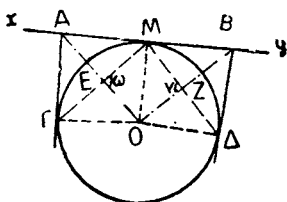
381. (406). Δύο περιφέρειαι O καὶ O' ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς ἓνα σημεῖον A . Φέρομεν τὰς κοινὰς ἐξωτερικὰς ἐφαπτομένας BB' καὶ $\Gamma\Gamma'$. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι αἱ δύο περιφέρειαι αἱ διερχόμεναι διὰ τῶν σημείων ἑξαγῆς B, A, B' καὶ Γ, A, Γ' ἐφάπτονται μεταξύ των.



Σχ. ἀσκ. 380.



Σχ. ἀσκ. 381.



Σχ. ἀσκ. 382.

382. (407). Δίδεται ἓνας κύκλος καὶ μία ἐφαπτομένη αὐτοῦ xy εἰς ἓνα σημεῖον M . Ἐπὶ τῆς xy λαμβάνομεν δύο σημεῖα A καὶ B , ἑκατέρωθεν τοῦ M καὶ ἀπὸ τὰ A καὶ B φέρομεν ἐφαπτομένας $ΑΓ$ καὶ $ΒΔ$ τοῦ κύκλου. Φέρομεν τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν $ΜΑΓ$ καὶ $ΜΒΔ$, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ O . Νὰ ἀποδειχθῆ: 1ον ὅτι ἡ OM εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν xy . 2ον ὅτι αἱ γωνία $\GammaΜΔ$ καὶ $ΑΟΒ$ εἶναι παραπληρωματικαί.

383. (408). Δίδονται δύο εὐθεῖαι παράλληλοι X καὶ Y καὶ μία εὐθεῖα AB κάθετος ἐπ' αὐτάς, ἡ ὁποία τέμνει τὴν X εἰς τὸ A καὶ τὴν Y εἰς τὸ B . Μία ὀρθὴ γωνία ἔχει τὴν κορυφὴν τῆς εἰς τὸ μέσον O τῆς AB , αἱ δὲ πλευραὶ τῆς τέμνουν τὴν X εἰς τὸ Γ καὶ τὴν Y εἰς τὸ Δ . Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι ἡ εὐθεῖα $\Gamma\Delta$

ἐφάπτεται τοῦ κύκλου, ὁ ὁποῖος ἔχει διάμετρον τὴν AB.

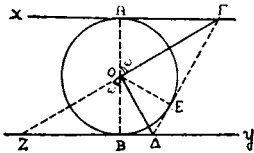
384. (409). Ἀπὸ ἓνα σημεῖον A, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς κύκλου O φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας AE καὶ AZ. Εἰς τυχὸν σημεῖον M τοῦ τόξου τοῦ περιεχομένου μεταξὺ τῶν ἐφαπτομένων AE καὶ AZ, φέρομεν τρίτην ἐφαπτομένην, ἡ ὁποία τέμνει τὰς AE καὶ AZ εἰς τὰ σημεῖα B καὶ Γ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῆ: 1ον ὅτι γων. ZOM = γων. AΓB καὶ γων. MOE = γων. ABΓ.

2ον ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου ABΓ εἶναι σταθερὰ καὶ ἴση μὲ 2AE, οἷανδήποτε θέσιν καὶ ἂν ἔχη τὸ σημεῖον M ἐπὶ τοῦ τόξου EMZ.

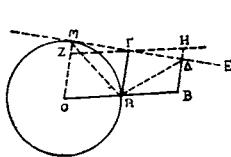
3ον ὅτι ἡ γωνία BOΓ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς γωνίας EΟZ.

385. (410). Προεκτείνομεν τὴν ἀκτῖνα OA ἐνὸς κύκλου O καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως λαμβάνομεν τμῆμα AB = OA· φέρομεν μίαν τυχοῦσαν ἐφαπτομένην ME τοῦ κύκλου O καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα A καὶ B καθέτους AG καὶ BD ἐπὶ τὴν ME. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι γων. AΔB = $\frac{1}{3}$ γων. OAD.

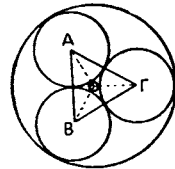
386. (411). Δίδεται ἓνα τρίγωνον, ὀρθογώνιον εἰς τὸ A. Μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν A καὶ μὲ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτείνουσας γράφομεν ἓνα τόξον κύκλου, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν BΓ ἢ τὴν προέκτασίν της εἰς τὸ Δ. Ἀπὸ τὸ Δ φέρομεν τὴν Δx παράλληλον πρὸς τὴν AB καὶ μὲ τὴν αὐτὴν φορὰν. Ἐὰν $AB > \Delta\Gamma$, νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι ἡ γωνία AΔx εἶναι τριπλασία τῆς γωνίας ABΓ.



Σχ. ἀσκ. 383.

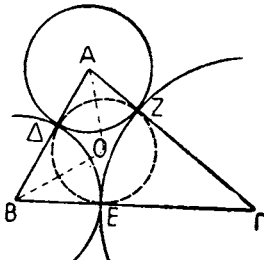


Σχ. ἀσκ. 385.



Σχ. ἀσκ. 387.

387. (412). Τρεῖς ἴσοι κύκλοι ἐφάπτονται μεταξὺ τῶν ἀνά δύο. Νὰ προσδιορισθοῦν τὰ κέντρα καὶ αἱ ἀκτῖνες τῶν δύο κύκλων, οἱ ὁποῖοι ἐφάπτονται ὁ μὲν ἐξωτερικῶς, ὁ δὲ ἐσωτερικῶς τῶν τριῶν αὐτῶν κύκλων.

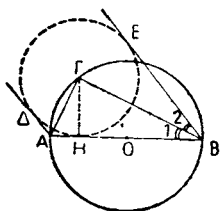


Σχ. ἀσκ. 388.

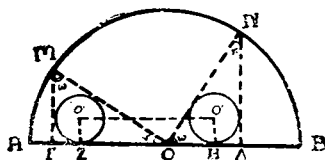
388. (413). Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι αἱ περιφέρειαι, αἱ ὁποῖαι γράφονται μὲ κέντρα τὰς κορυφὰς ἐνὸς τριγώνου καὶ αἱ ὁποῖαι διέρχονται διὰ τῶν σημείων ἐπαφῆς τοῦ τριγώνου καὶ τῆς περιφέρειας τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸ τρίγωνον, ἐφάπτονται ἀνά δύο.

389. (489). Δίδεται ἓνας κύκλος O, μία διάμετρος του AB καὶ Γ τυχὸν σημεῖον τῆς περιφέρειας του. Μὲ κέντρον τὸ Γ γράφομεν περιφέρειαν ἐφαπτομένην τῆς διαμέτρου AB. Ἀπὸ τὰ σημεῖα A καὶ B φέρομεν ἐφαπτομένας AD καὶ BE τῆς περιφέρειας Γ. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι αἱ AD καὶ BE εἶναι παράλληλοι.

390. (490). Δίδεται ἡμικύκλιον O διαμέτρου AB . Φέρομεν δύο ἀκτίνες OM καὶ ON καθέτους μεταξύ των καὶ τὰς $M\Gamma$ καὶ $N\Delta$ καθέτους ἐπὶ τὴν διάμετρον AB . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ κέντρα O' καὶ O'' τῶν κύκλων τῶν ἐγγεγραμ-



Σχ. ἀσκ. 389.



Σχ. ἀσκ. 390.

μένων εἰς τὰ τρίγωνα $OM\Gamma$ καὶ $ON\Delta$ κείνται ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὴν AB

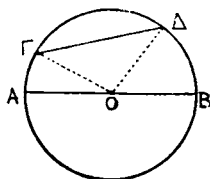
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β'

ΧΟΡΔΑΙ

1. Ἰδιότητες τῶν τόξων καὶ τῶν χορδῶν

271. Ἰδιότητες τῆς διαμέτρου. Θεώρημα I. Ἡ διάμετρος ἐνὸς κύκλου εἶναι ἡ μεγαλυτέρα χορδὴ αὐτοῦ.

Ἐπίπεδος: "Ἐστω ὁ κύκλος O (Σχ. 202). AB μία διάμετρος του καὶ $\Gamma\Delta$ μία τυχούσα χορδὴ του.



Σχ. 202.

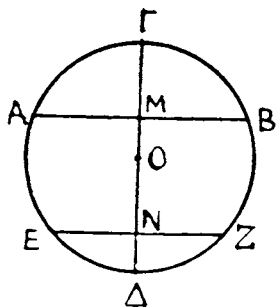
Συμπέρασμα: Ἐὰν δείξωμεν, ὅτι $AB > \Gamma\Delta$.

Ἀπόδειξις: Ἐὰν φέρωμεν τὰς ἀκτίνιας OG καὶ OD , τότε ἀπὸ τὸ τρίγωνον $OG\Delta$ θὰ ἔχωμεν $\Gamma\Delta < GO + OD$ (1).

Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα $GO + OD$, ὡς ἄθροισμα δύο ἀκτίνων τοῦ κύκλου O εἶναι ἴσον μὲ μίαν διάμετρον τοῦ κύκλου, ἔστω τὴν AB , ἡ σχέσηις (1) γράφεται $\Gamma\Delta < AB$ ἢ $AB > \Gamma\Delta$.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: Ἡ διάμετρος ἐνὸς κύκλου. . .

272. Θεώρημα II. Ἡ διάμετρος κύκλου, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ μίαν χορδὴν του, διαιρεῖ τὴν χορδὴν καὶ τὰ δύο τόξα, τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν χορδὴν αὐτήν, εἰς δύο ἴσα μέρη.



Σχ. ἀσκ. 203.

Ἐπίπεδος: "Ἐστω AB μία τυχούσα χορδὴ τοῦ κύκλου O (Σχ. 203) καὶ $\Gamma\Delta$ μία διάμετρος αὐτοῦ, κάθετος ἐπὶ τὴν χορδὴν AB εἰς τὸ σημεῖον M .

Συμπέρασμα: Ἐὰν δείξωμεν, ὅτι:

Ἐπίπεδος.	$\Gamma\Delta \perp AB$
	$AM = MB$
Συμπ.	$\widehat{A\Delta} = \widehat{B\Delta}$
	$\widehat{A\Gamma} = \widehat{B\Gamma}$

$AM = MB$, $\widehat{A\Delta} = \widehat{B\Delta}$ καὶ $\widehat{A\Gamma} = \widehat{B\Gamma}$.

Ἀπόδειξις: Ἡ $\Gamma\Delta$, ὡς διάμετρος τοῦ

κύκλου O , εἶναι ἄξων ἄξων συμμετρίας αὐτοῦ. Τὰ σημεῖα λοιπὸν A καὶ B εἶναι συμμετρικά, ὡς πρὸς τὴν διάμετρον $\Gamma\Delta$ καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι $AM=MB$.

Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ εἶναι συμμετρικά ἑαυτῶν, ἔπεται ὅτι $\widehat{A\Gamma}=\widehat{B\Gamma}$ καὶ $\widehat{A\Delta}=\widehat{B\Delta}$.

Ἐδείχθη λοιπὸν, ὅτι: **Ἡ διάμετρος κύκλου...**

273. Παρατήρησις. Ἀπὸ τὸ προηγούμενον θεώρημα παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ εὐθεῖα $\Gamma\Delta$:

- 1ον. Διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον O
- 2ον. Εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν χορδὴν AB .
- 3ον. Διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον M τῆς χορδῆς AB .
- 4ον. Διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον Δ τοῦ τόξου $A\Delta B$.
- 5ον. Διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον Γ τοῦ τόξου $A\Gamma B$.

Ὅταν μία εὐθεῖα ικανοποιῇ δύο ἀπὸ τοὺς πέντε αὐτοὺς ὁρους, θὰ ικανοποιῇ καὶ τοὺς ἄλλους τρεῖς ὁρους.

Π.χ. ἡ κάθετος, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ μέσον μιᾶς χορδῆς, θὰ διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου καὶ ἀπὸ τὰ μέσα τῶν δύο ἀντιστοιχῶν τόξων.

274. Βέλος τόξου. Τὸ εὐθύγραμμον τμήμα τὸ ὁποῖον συνδέει τὸ μέσον μιᾶς χορδῆς μὲ τὸ μέσον τοῦ ἀντιστοίχου τόξου λέγεται **βέλος τόξου**.

Ἐάν- M εἶναι τὸ μέσον τῆς χορδῆς AB (Σχ. 203) καὶ Γ καὶ Δ τὰ μέσα τῶν τόξων $A\Gamma B$ καὶ $A\Delta B$, τὰ εὐθύγραμμα τμήματα $M\Gamma$ καὶ $M\Delta$ εἶναι βέλη τῆς χορδῆς AB .

Ὅμοίως καὶ τὰ εὐθύγραμμα τμήματα $N\Gamma$ καὶ $N\Delta$ εἶναι βέλη τῆς χορδῆς EZ .

275. Θεώρημα. Τὰ τόξα τῆς αὐτῆς περιφέρειας, τὰ περιεχόμενα μεταξὺ δύο παραλλήλων εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι τέμνουσιν τὴν περιφέρειαν εἶναι ἴσα.

Ἐπιπέδουσι: Ἐστώσαν αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι X καὶ Ψ , αἱ ὁποῖαι τέμνουσιν τὴν περιφέρειαν O εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B ἢ X καὶ E καὶ Z ἢ Ψ .

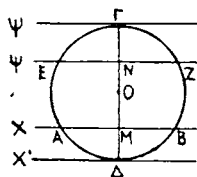
Συμπέρασμα: Θὰ

δείξωμεν, ὅτι:

$$\widehat{AE}=\widehat{BZ}.$$

Ἀπόδειξις: Φέρο-

μεν τὴν διάμετρον $\Gamma\Delta$ κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν



Σχ. 204.

Ἐπιπέδουσι.	$X \parallel \Psi$
Συμπ.	$\widehat{AE}=\widehat{BZ}$

X. Ἡ ΓΔ θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν εὐθείαν Ψ, παράλληλον τῆς X. Κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα, ἡ ΓΔ θὰ διχοτομῇ τὰ τόξα, ποὺ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς χορδὰς AB καὶ ΓΔ. Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$\widehat{A\Gamma} = \widehat{B\Gamma} \quad \text{καὶ} \quad \widehat{E\Gamma} = \widehat{Z\Gamma}.$$

Ἀφαιροῦμεν τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\widehat{A\Gamma} - \widehat{E\Gamma} = \widehat{B\Gamma} - \widehat{Z\Gamma} \quad \eta \quad \widehat{A\Xi} = \widehat{B\Xi}.$$

Ἐδείχθη λοιπὸν, ὅτι: *Τὰ τόξα τῆς αὐτῆς. . .*

Παρατήρησις. Ἡ ἀνωτέρω πρότασις εἶναι ἀληθὴς καὶ ὅταν ἡ μία ἀπὸ τὰς εὐθείας X καὶ Ψ ἢ καὶ αἱ δύο γίνουσι ἐφαπτόμεναι τῆς περιφερείας εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ.

276. Πρόρισμα. *Αἱ ἀκτῖνες, αἱ ὁποῖαι ἄγονται εἰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν παραλλήλων ἐφαπτομένων τῆς αὐτῆς περιφερείας κείνται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς.*

Ἀσκήσεις

391. (420). Μία χορδὴ τέμνει δύο ὁμοκέντρους περιφερείας, τὴν μικροτέραν εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B καὶ τὴν μεγαλυτέραν εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $AG = BD$ καὶ $AD = BG$.

392. (421). Ἀπὸ ἓνα σημεῖον, τὸ ὅποιον κεῖται ἐκτὸς περιφερείας φέρομεν μέχρις αὐτῆς δύο εὐθείας ἴσας. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας τῶν δύο αὐτῶν εὐθειῶν διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς περιφερείας.

393. (422). Ἀπὸ τὸ μέσον M μίας ἀκτῖνος OA ἐνὸς κύκλου O φέρομεν μίαν χορδὴν BMΓ κάθετον ἐπὶ τὴν OA. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ γωνίαι BOΓ καὶ BAΓ εἶναι ἴσαι.

394. (423). Ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ μέσα δύο παραλλήλων χορδῶν κύκλου, διέρχεται καὶ ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

395. (424). Ἡ ἐφαπτομένη κύκλου, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ μέσον ἑνὸς τόξου του, εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν χορδὴν τοῦ τόξου.

396. (425). Δίδεται ἡμικυκλίω O διαμέτρου AB. Ἐπὶ τῆς AB λαμβάνομεν δύο σημεῖα Γ καὶ Δ καὶ τοιαῦτα, ὥστε νὰ εἶναι $OG = AD$ ἀπὸ τὰ Γ καὶ Δ φέρομεν δύο παραλλήλους ΓΓ' καὶ ΔΔ', αἱ ὁποῖαι τέμνουσι τὴν ἡμικυκλίω εἰς τὰ σημεῖα Γ' καὶ Δ'. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ Γ'Δ' εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς δύο αὐτὰς παραλλήλους.

2. Σχέσεις μεταξὺ τῶν τόξων καὶ τῶν χορδῶν των

277. Τόξα ἀντιστοιχοῦντα εἰς χορδὴν. Εἰς κάθε χορδὴν ἀντιστοιχοῦν δύο τόξα.

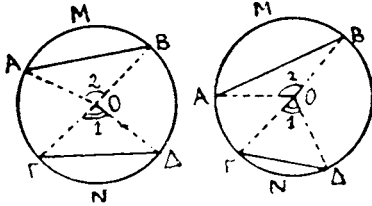
Π.χ. εἰς τὴν χορδὴν AB (Σχ. 205) ἀντιστοιχοῦν τὰ ἄνισα τόξα AMB καὶ ANB. Κατωτέρω ὅταν θὰ ἀναφέρωμεν τόξον ἀντιστοιχοῦν εἰς δοθεῖσαν χορδὴν, θὰ θεωροῦμεν τὸ τόξον, τὸ μικρότερον ἡμικυκλίω.

278. Θεώρημα. *Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους :*

1ον. *Εἰς ἴσας χορδὰς ἀντιστοιχοῦν ἴσα τόξα.*

2ον. *Εἰς ἀνίσους χορδὰς ἀντιστοιχοῦν ἀνίστα τόξα καὶ εἰς τὴν μεγαλύτεραν χορδὴν ἀντιστοιχεῖ μεγαλύτερον τόξον.*

1ον. Ὑπόθεσις: Ἐστῶσαν αἱ ἴσαι χορδαὶ AB καὶ ΓΔ τοῦ κύκλου O (Σχ. 205 α').



α' Σχ. 205.

β'

Ὑπόθ.	$\overline{AB} = \overline{\Gamma\Delta}$
Συμπ.	$\widehat{AMB} = \widehat{\Gamma\Delta}$

Συμπέρασμα: Θὰ δείξω-

μεν, ὅτι $\widehat{AMB} = \widehat{\Gamma\Delta}$.

Ἀπόδειξις: Φέρομεν τὰς ἀκτίνιας OA, OB, OΓ, OΔ. Τὰ τρίγωνα OAB καὶ OΓΔ ἔχουν τὰς τρεῖς πλευράς των ἴσας μίαν πρὸς μίαν· ἄρα εἶναι ἴσα καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι $\widehat{AOB} = \widehat{GO\Delta}$. Ἐπειδὴ αἱ ἐπίκεντροι γωνίαι AOB καὶ ΓΟΔ εἶναι ἴσαι, τὰ τόξα ἐπὶ τῶν ὁποίων βαίνουν θὰ εἶναι ἴσα, δηλ. θὰ εἶναι $\widehat{AMB} = \widehat{\Gamma\Delta}$.

2ον. Ἐστῶσαν αἱ ἀνίστοι χορδαὶ AB καὶ ΓΔ (Σχ. 205 β') καὶ ἔστω, ὅτι $AB > \Gamma\Delta$. Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\widehat{AMB} > \widehat{\Gamma\Delta}$.

Φέρομεν τὰς ἀκτίνιας OA, OB, OΓ, OΔ· τὰ σχηματισθέντα τρίγωνα OAB καὶ OΓΔ ἔχουν $OA = O\Gamma$, $OB = O\Delta$ καὶ $AB > \Gamma\Delta$ · ἄρα τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ἀνίστα καὶ ἀπέναντι τῆς μεγαλύτερας πλευρᾶς θὰ κεῖται μεγαλύτερα γωνία· δηλ. θὰ εἶναι $\widehat{AOB} > \widehat{GO\Delta}$.

Ἐπειδὴ ἡ ἐπίκεντρος γωνία AOB εἶναι μεγαλύτερα τῆς ἐπίκεντρος γωνίας ΓΟΔ, θὰ εἶναι καὶ $\widehat{AMB} > \widehat{\Gamma\Delta}$.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: *Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον. . .*

279. Θεώρημα. (*Ἀντίστροφον*). *Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς ἴσους κύκλους :*

1ον. *Εἰς ἴσα τόξα ἀντιστοιχοῦν ἴσαι χορδαί.*

2ον. *Εἰς ἀνίστα τόξα ἀντιστοιχοῦν ἀνίστοι χορδαὶ καὶ εἰς τὸ μεγαλύτερον τόξον ἀντιστοιχεῖ μεγαλύτερα χορδή.*

1ον. Ὑπόθεσις: Ἐστω (Σχ. 205 α') ὁ κύκλος O καὶ δύο ἴσα τόξα αὐτοῦ AMB καὶ ΓΝΔ.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ χορδαὶ τῶν AB καὶ ΓΔ εἶναι ἴσαι.

Ὑπόθ.	$\widehat{AMB} = \widehat{\Gamma\Delta}$
Συμπ.	$\overline{AB} = \overline{\Gamma\Delta}$

Ἀπόδειξις: Φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ. Ἐπειδὴ $\widehat{AMB} = \widehat{ΓNΔ}$ θὰ εἶναι καὶ $\widehat{AOB} = \widehat{ΓOD}$. Ἐπειδὴ εἶναι καὶ ΟΑ=ΟΒ=ΟΓ=ΟΔ, τὰ τρίγωνα ΟΑΒ καὶ ΟΓΔ εἶναι ἴσα. Ἄρα θὰ εἶναι καὶ ΑΒ=ΓΔ.

2ον. Ὑπόθεσις: Ἐστῶσαν τὰ ἄνισα τόξα ΑΜΒ καὶ ΓΝΔ καὶ ἔστω, ὅτι $\widehat{AMB} > \widehat{ΓNΔ}$.

Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι $\overline{AB} > \overline{ΓΔ}$.

Ἀπόδειξις: Φέρομεν τὰς ἀκτῖνας ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ.

Ὑπόθ.	$\widehat{AMB} > \widehat{ΓNΔ}$
Συμπ.	$\overline{AB} > \overline{ΓΔ}$

Τὰ σχηματισθέντα τρίγωνα ΟΑΒ καὶ ΟΓΔ ἔχουν: ΟΑ=ΟΓ, ΟΒ=ΟΔ ὡς ἀκτῖνας τοῦ αὐτοῦ κύκλου καὶ $\widehat{AOB} > \widehat{ΓOD}$ δηλ. ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἄνισον ἄρα θὰ εἶναι ἄνισα καὶ ἀπέναντι τῆς μεγαλύτερας γωνίας θὰ κεῖται μεγαλύτερα πλευρὰ ἤτοι θὰ εἶναι $\overline{AB} > \overline{ΓΔ}$.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: *Ὅτι εἰς τὸν αὐτόν. . .*

Ἀσκήσεις

397. (427). Ἐνα τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον Ο. Ἀπὸ τὸ μέσον Μ τοῦ τόξου ΒΓ φέρομεν τὴν χορδὴν ΜΝ παράλληλον πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΜΝ=ΑΒ.

398. (428). Ἐὰν δύο ἴσαι περιφέρειαι τέμνονται, τὰ δύο τόξα τῆς πρώτης εἶναι ἀντιστοίχως ἴσα μὲ τὰ τόξα τῆς δευτέρας.

399. (497). Εἰς ἕνα κύκλον Ο δίδεται ἡ ἐπίκεντρος γωνία ΑΟΒ φέρομεν τὴν διχοτόμον ΟΓ τῆς γωνίας αὐτῆς καὶ μίαν χορδὴν ΜΝ κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΟΑ εἰς τὸ σημεῖον Δ καὶ τὴν ΟΒ εἰς τὸ σημεῖον Ε. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΜΔ=ΕΝ καὶ ΑΔ=ΒΕ.

3. Σχέσεις μεταξύ χορδῶν καὶ τῶν ἀποστάσεων των ἀπὸ τὸ κέντρον

280. Θεώρημα. *Εἰς τὸν αὐτόν κύκλον ἢ εἰς δύο ἴσους κύκλους:*

1ον. *Δύο ἴσαι χορδαὶ ἀπέχουν ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὸ κέντρον.*

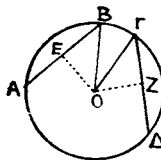
2ον. *Δύο ἄνισοι χορδαὶ ἀπέχουν ἄνισον ἀπὸ τὸ κέντρον καὶ ἡ μεγαλύτερα χορδὴ ἀπέχει ὀλιγώτερον ἀπὸ τὸ κέντρον.*

1ον. Ὑπόθεσις: Ἐστω ὁ κύκλος Ο (Σχ. 206) καὶ δύο ἴσαι χορδαὶ τοῦ ΑΒ καὶ ΓΔ. Ἀπὸ τὸ κέντρον Ο φέρομεν τὰς καθέτους ΟΕ καὶ ΟΖ ἐπὶ τὰς χορδὰς ΑΒ καὶ ΓΔ.

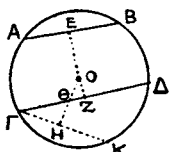
Ὑπόθ.	ΑΒ=ΓΔ ΟΕ ⊥ ΑΒ ΟΖ ⊥ ΓΔ
Συμπ.	ΟΕ=ΟΖ

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι $OE=OZ$.

Ἀπόδειξις: Τὰ σημεῖα E καὶ Z εἶναι τὰ μέσα τῶν χορδῶν AB καὶ $\Gamma\Delta$. Φέρομεν τὰς ἀκτῖνας OB καὶ $O\Gamma$. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα OEB καὶ $OZ\Gamma$ ἔχουν: $OB=O\Gamma$, ὡς ἀκτῖνας τοῦ αὐτοῦ κύκλου καὶ $BE=Z\Gamma$, ὡς ἡμίση τῶν ἴσων χορδῶν AB καὶ $\Gamma\Delta$. δηλ. ἔχουν τὰς ὑποτεινούσας των ἴσας καὶ μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν ἴσην ἄρα εἶναι ἴσα καὶ ἐπομένως ἔχουν καὶ $OE=OZ$.



Σχ. 206.



Σχ. 207.

2ον. Ὑπόθεσις: Ἐστω ὁ κύκλος O (Σχ. 207) καὶ AB καὶ $\Gamma\Delta$ δύο χορδαὶ αὐτοῦ ἄνισοι καὶ ἔστω,

ὅτι $\Gamma\Delta > AB$. Ἀπὸ τὸ κέντρον O φέρομεν τὰς καθέτους OE καὶ OZ ἐπὶ τὰς χορδὰς AB καὶ $\Gamma\Delta$.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι $OZ < OE$.

Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ ἡ χορδὴ $\Gamma\Delta$ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς AB , τὸ τόξον $\Gamma\Delta$ εἶναι μεγαλυτερον τοῦ τόξου AB . Ἐπὶ τοῦ τόξου $\Gamma\Delta$

Ὑπόθ.	$\Gamma\Delta > AB$
	$OE \perp AB$ $OZ \perp \Gamma\Delta$
Συμπ.	$OZ < OE$

λαμβάνομεν τὸ τόξον $\Gamma\Delta$ ἴσον μὲ τὸ τόξον AB , ὅποτε ἡ χορδὴ $\Gamma\Delta$ θὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν χορδὴν AB . Φέρομεν τὴν OH κάθετον ἐπὶ τὴν χορδὴν $\Gamma\Delta$. Ἐπειδὴ αἱ χορδαὶ AB καὶ $\Gamma\Delta$ εἶναι ἴσαι, αἱ ἀποστάσεις των OE καὶ OH ἀπὸ τὸ κέντρον O θὰ εἶναι ἴσαι ἤτοι θὰ εἶναι $OE=OH$. Ἡ OH τέμνει τὴν $\Gamma\Delta$ εἰς τὸ Θ , τὸ ὁποῖον κεῖται μεταξύ τῶν O καὶ H . Ἀλλὰ ἡ κάθετος OZ , ἐπὶ τὴν $\Gamma\Delta$, εἶναι μικρότερα ἀπὸ τὴν πλαγίαν $O\Theta$ καὶ κατὰ μείζονα λόγον θὰ εἶναι μικρότερα ἀπὸ τὴν OH , ἢ τὴν ἴσην τῆς OE . ἤτοι εἶναι $OZ < OE$.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον. . .**

281. Θεώρημα. (Ἀντίστροφον). **Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον ἢ εἰς δύο ἴσους κύκλους:**

1ον. **Δύο χορδαί, αἱ ὁποῖαι ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὸ κέντρον εἶναι ἴσαι.**

2ον. **Δύο χορδαί, αἱ ὁποῖαι ἀπέχουν ἄνισον ἀπὸ τὸ κέντρον εἶναι ἄνισοι καὶ ἡ ἀπέχουσα ὀλιγώτερον ἀπὸ τὸ κέντρον εἶναι ἢ μεγαλυτέρα.**

1ον. Ὑπόθεσις: Ἐστω ὁ κύκλος O (Σχ. 206), AB καὶ $\Gamma\Delta$ δύο χορδαὶ αὐτοῦ καὶ OE, OZ αἱ ἀποστάσεις αὐτῶν ἀπὸ τὸ κέντρον O . Τὰ σημεῖα E καὶ Z εἶναι μέσα τῶν χορδῶν AB καὶ $\Gamma\Delta$. Ἐστω ὅτι εἶναι $OE=OZ$.

Συμπέρασμα: Θα δείξωμεν ὅτι αἱ χορδαὶ AB καὶ $\Gamma\Delta$ εἶναι ἴσαι.

Ἀπόδειξις: Φέρομεν τὰς ἀκτῖνας OB καὶ OG . Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα OEB καὶ $OZ\Gamma$ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς ὑποτείνουσας τῶν ἴσας καὶ μίαν κάθετον πλευρὰν ἴσην ἥτοι ἔχουν $OB=OG$, ὡς ἀκτῖνας τοῦ αὐτοῦ κύκλου καὶ $OE=OZ$ ἐξ ὑποθέσεως ἄρα θὰ ἔχουν καὶ $EB=Z\Gamma$. Ἐπειδὴ τὰ ἡμίση τῶν χορδῶν AB καὶ $\Gamma\Delta$ εἶναι ἴσα, θὰ εἶναι ἴσαι καὶ ὁλόκληροι αἱ χορδαί ἥτοι θὰ εἶναι $AB=\Gamma\Delta$.

Ἐπίπεδο	$OE \perp AB$ $OZ \perp \Gamma\Delta$ $OE=OZ$
Συμπ.	$AB=\Gamma\Delta$

2ον. Ἐπίπεδοι: Ἐστω ὁ κύκλος O (Σχ. 207), AB καὶ $\Gamma\Delta$ δύο χορδαὶ αὐτοῦ καὶ OE καὶ OZ αἱ ἀποστάσεις αὐτῶν ἀπὸ τοῦ κέντρον O . Ἐστω ὅτι εἶναι $OZ < OE$.

Συμπέρασμα: Θα δείξωμεν, ὅτι $\Gamma\Delta > AB$.

Ἀπόδειξις: Πράγματι ἔαν ἡ χορδὴ $\Gamma\Delta$ δὲν ἦτο μεγαλύτερα τῆς AB , θὰ ἦτο ἴση μὲ αὐτὴν ἢ μικρότερα αὐτῆς.

Ἐπίπεδο	$OE \perp AB$ $OZ \perp \Gamma\Delta$ $OZ < OE$
Συμπ.	$\Gamma\Delta > AB$

Ἐάν ἡ $\Gamma\Delta$ ἦτο ἴση μὲ τὴν AB , τότε καὶ αἱ ἀποστάσεις τῶν OZ καὶ OE ἀπὸ τοῦ κέντρον O θὰ ἦσαν ἴσαι, πρᾶγμα τὸ ὁποῖον ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσίν μας.

Ἐάν ἡ $\Gamma\Delta$ ἦτο μικρότερα ἀπὸ τὴν AB , τότε ἡ ἀπόστασις OZ τῆς $\Gamma\Delta$ θὰ ἦτο μεγαλύτερα ἀπὸ τὴν ἀπόστασιν OE τῆς AB , πρᾶγμα τὸ ὁποῖον ἀντίκειται πάλιν εἰς τὴν ὑπόθεσιν.

Ὡστε ἡ $\Gamma\Delta$ εἶναι μεγαλύτερα ἀπὸ τὴν AB .

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον...**

Ἀσκήσεις

400. (429). Δύο χορδαὶ κύκλου κάθετοι εἰς τὰ ἄκρα τρίτης χορδῆς εἶναι ἴσαι

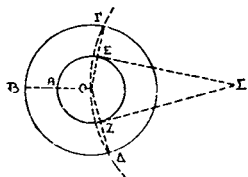
401. (430). Δύο περιφέρειαι O καὶ O' τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα A καὶ A' συνδέομεν μὲ εὐθεῖαν AM τὸ σημεῖον A μὲ τὸ μέσον M τῆς OO' καὶ ἀπὸ τὸ A φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν AM , ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν O εἰς τὸ Γ καὶ τὴν O' εἰς τὸ Γ' . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $A\Gamma=A\Gamma'$.

402. (431). Ἡ μικρότερα χορδὴ, ἡ ὁποία ἀγεται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐντὸς κύκλου, εἶναι ἡ κάθετος χορδὴ ἐπὶ τὴν διάμετρον, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ δοθὲν σημεῖον.

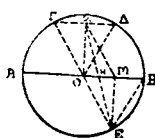
403. (432). Ἐάν δύο χορδαὶ κύκλου εἶναι ἴσαι καὶ προεκτείνωμεν αὐτὰς μέχρι τῆς συναντήσεώς των, αἱ εὐθεῖαι, αἱ περιεχόμεναι μεταξύ τοῦ σημείου τῆς τομῆς καὶ τῶν ἄκρων τῶν χορδῶν, εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι.

404. (433). Δύο σημεῖα μιᾶς χορδῆς κύκλου, τὰ ὁποία ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὸ μέσον αὐτῆς, ἀπέχουν ἴσην ἀπόστασιν καὶ ἀπὸ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου

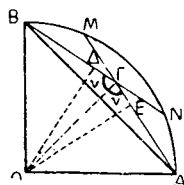
405. (434). Δίδονται δύο ὁμόκεντροι περιφέρειαι O ἀκτίνων OA καὶ OB καὶ τοιαῦται, ὥστε $OB=2 OA$. Μὲ κέντρον τυχὸν σημεῖον Σ , τὸ ὅποιον κείται ἐκτὸς τοῦ κύκλου (O, OB) καὶ μὲ ἀκτῖνα τὴν ΣO γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὅποια τέμνει τὴν περιφέρειαν (O, OB) εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ . Φέρομεν τὰς εὐθείας OG καὶ OD , αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου (O, OA) εἰς τὰ σημεῖα E καὶ Z . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΣE καὶ ΣZ εἶναι ἐφαπτόμεναι τῆς περιφερείας (O, OA).



Σχ. ἀσκ. 405.



Σχ. ἀσκ. 406.



Σχ. ἀσκ. 407.

406. (435). Εἰς ἓνα κύκλον O φέρομεν τὴν διάμετρον AB καὶ μίαν χορδὴν $\Gamma\Delta$ παράλληλον πρὸς τὴν AB καὶ ἴσην μὲ τὴν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου O . Ἀπὸ τὸ μέσον M τῆς ἀκτίνος OB , φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν AB , ἡ ὅποια τέμνει τὴν ἡμιπεριφέρειαν, ἡ ὅποια δὲν περιέχει τὸ τόξον $\Gamma\Delta$, εἰς τὸ σημεῖον E . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ διάμετρος AB διχοτομεῖ τὴν εὐθεῖαν, ἡ ὅποια συνδέει τὸ σημεῖον E μὲ τὸ μέσον Z τῆς χορδῆς $\Gamma\Delta$.

407 (436). Δίδεται ἓνα τεταρτοκύκλιον OAB Ἀπὸ τὰ σημεῖα A καὶ B φέρομεν δύο ἴσας χορδὰς AM καὶ BN , αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Γ . Νὰ ἀποδειχθῇ :

1ον. Ὅτι $\gamma\omega\nu\cdot O\Gamma B = \gamma\omega\nu\cdot O\Gamma A$.

2ον. Ὅτι $B\Gamma = \Gamma A$ καὶ $\Gamma N = \Gamma M$.

3ον. Ὅτι ἡ $O\Gamma$ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν χορδὴν AB .

408. (437). Δύο ἴσαι χορδαὶ κύκλου τέμνονται ἐντὸς αὐτοῦ. Νὰ ἀποδειχθῇ :

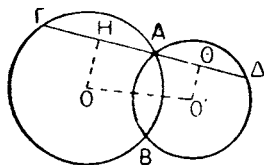
1ον. Ὅτι σχηματίζουν ἴσας γωνίας μὲ τὴν διάμετρον, ἡ ὅποια διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς των.

2ον. Ὅτι κάθε τμήμα τῆς μιᾶς εἶναι ἴσον μὲ ἓνα τμήμα τῆς ἄλλης.

409. (438). Ἐὰν ἀπὸ τὸ ἓνα κοινὸν σημεῖον δύο τεμνομένων περιφερειῶν φέρωμεν παράλληλον πρὸς τὴν διάκεντρόν των, τὸ ἄθροισμα τῶν χορδῶν, αἱ ὁποῖαι ὀρίζονται ἐπ' αὐτῆς εἶναι διπλάσιον τῆς ἀποστάσεως τῶν κέντρων των.

410. (439). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἀπὸ ὄσας τὰς τεμνούσας, τὰς ὁποῖας δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἀπὸ τὸ ἓνα κοινὸν σημεῖον δύο τεμνομένων περιφερειῶν, μεγαλυτέρα εἶναι ἡ τέμνουσα, ἡ ὅποια εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν διάκεντρον.

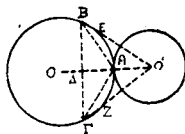
411. (440). Δύο περιφέρειαι O καὶ O' τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B . Ἀπὸ τὸ A φέρομεν τυχούσαν τέμνουσαν, ἡ ὅποια τέμνει τὴν περιφέρειαν O εἰς τὸ Γ καὶ τὴν O' εἰς τὸ Δ . Ἀπὸ τὰ κέντρα O καὶ O' φέρομεν τὰς καθέτους OH καὶ



Σχ. ἀσκ. 411.

Ο'Θ ἐπὶ τὴν ΓΔ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΗΘ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἡμιάθροισμα ἢ μὲ τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν χορδῶν ΑΓ καὶ ΑΔ.

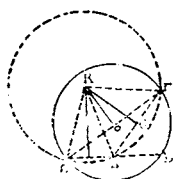
412. (441). Δύο περιφέρειαι Ο καὶ Ο' ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς ἓνα σημεῖον Α. Ἐὰν δύο σημεῖα Β καὶ Γ τῆς περιφερείας Ο ἀπέχουν ἰσάκεις ἀπὸ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς Α νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα Β καὶ Γ ἀπέχουν ἰσάκεις καὶ ἀπὸ τὴν περιφέρειαν Ο'.



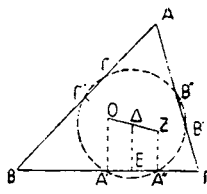
Σχ. ἀσκ. 412.

413. (442). Εἰς ἓνα κύκλον Ο φέρομεν μίαν χορδὴν ΑΒ καὶ λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Δ αὐτῆς, τὸ ὁποῖον συνδέομεν, δι' εὐθείας, μὲ τυχὸν σημεῖον Γ τῆς περιφερείας Ο. Ἀπὸ τὰ μέσα Ε καὶ Ζτῶν ΑΔ καὶ ΔΓ φέρομεν καθέτους ἐπ' αὐτὰς ἀντιστοίχως, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς ἓνα σημεῖον Κ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΟΚ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν χορδὴν ΑΓ.

414. (443). Δίδεται ἓνα τρίγωνον ΑΒΓ ἀπὸ ἓνα σημεῖον Ο, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐντὸς τοῦ τριγώνου φέρομεν τὰς καθέτους ΟΑ', ΟΒ', ΟΓ' ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ Ἡ περιφέρεια, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ τρία σημεῖα Α', Β', Γ' τέμνει τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου εἰς τρία ἄλλα σημεῖα Α'', Β'', Γ''. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ κάθετοι ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἰς τὰ σημεῖα Α'', Β'', Γ'' τέμνονται εἰς τὸ οὐτὸ σημεῖον.

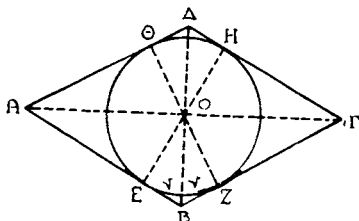


Σχ. ἀσκ. 413.

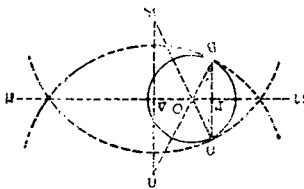


Σχ. ἀσκ. 414.

415. (444). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι δύο παράλληλοι χορδαὶ κύκλου, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὰ ἄκρα μιᾶς διαμέτρου τοῦ κύκλου, εἶναι ἴσαι καὶ ὅτι ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει τὰ δύο ἄλλα ἄκρα τῶν χορδῶν αὐτῶν εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου.



Σχ. ἀσκ. ἀσκ. 417.



Σχ. ἀσκ. 418.

416. (445). Εἰς ἓνα κύκλον Ο φέρομεν μίαν χορδὴν ΑΒ ἐπὶ τῆς χορδῆς ΑΒ καὶ ἀπὸ τὸ μέσον Γ αὐτῆς λαμβάνομεν, ἐκατέρωθεν τοῦ Γ, δύο τμήματα ΓΔ=ΓΕ. Ἀπὸ τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε φέρομεν καθέτους ΔΖ καὶ ΕΗ ἐπὶ τὴν ΑΒ,

αἱ ὁποῖαι τέμνουσιν τὸ τόξον AB εἰς τὰ σημεῖα Z καὶ H . Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι $\Delta Z = EH$.

417. (446). Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι αἱ πλευραὶ ρόμβου εἶναι ἐφαπτόμεναι ἐνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ κύκλου.

418. (447). Ἐὰν δύο τόξα, ἴσων κύκλων, ἐφάπτωνται τῆς αὐτῆς περιφερείας O , ἢ εὐθεῖα, ἢ ὁποῖα ἐνώνει τὸ κέντρον O μὲ τὸ ἓνα ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς τομῆς τῶν δύο τόξων, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν χορδὴν, ἢ ὁποῖα συνδέει τὰ σημεῖα ἐπαφῆς καὶ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς.

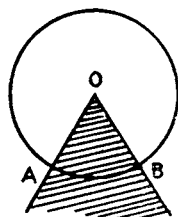
419. (448). Εἰς ἓνα κύκλον O φέρομεν μίαν διάμετρον AB καὶ μίαν τυχοῦσαν χορδὴν $\Gamma\Delta$. Ἀπὸ τὰ A καὶ B φέρομεν τὰ καθέτους AE καὶ BZ ἐπὶ τὴν $\Gamma\Delta$. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὰ σημεῖα E καὶ Z ἀπέχουν ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὸ μέσον H τῆς χορδῆς $\Gamma\Delta$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄.
ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΑΙ ΓΩΝΙΑΙ

1. Μέτρον τῶν ἐγγεγραμμένων γωνιῶν

282. Ὅρισμοί. Ἐστω, ὅτι δίδεται μία γωνία καὶ μία περιφέρεια. Ἡ κορυφή τῆς γωνίας δύναται νὰ καταλάβῃ, ὡς πρὸς τὴν περιφέρειαν, τέσσαρας χαρακτηριστικὰς θέσεις.

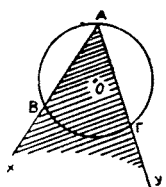
I. Ἡ κορυφή τῆς γωνίας εἶναι εἰς τὸ κέντρο τῆς περιφερείας (Σχ. 208). Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν, ὡς εἶδομεν, ἡ γωνία λέγεται **ἐπικεντρος γωνία**.



Σχ. 208.

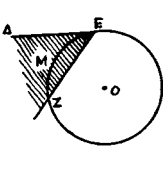
II. Ἡ κορυφή τῆς γωνίας κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας. Αἱ πλευραὶ τῆς γωνίας δύναται νὰ εἶναι τέμνουσαι τῆς περιφερείας (Σχ. 209α) ἢ ἡ μία νὰ εἶναι τέμνουσα καὶ ἡ ἄλλη ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας (Σχ. 209β). Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν αἱ γωνίαι λέγονται **ἐγγεγραμμέναι γωνίαι**.

Γενικῶς: Μία γωνία λέγεται **ἐγγεγραμμένη εἰς περιφέρειαν**, ὅταν ἡ κορυφή τῆς κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας, αἱ δὲ πλευραὶ τῆς εἶναι τέμνουσαι αὐτῆς ἢ ἡ μία εἶναι τέμνουσα καὶ ἡ ἄλλη ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας.

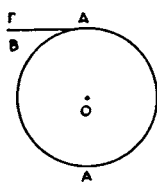


α

Σχ. 209.

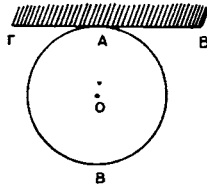


β

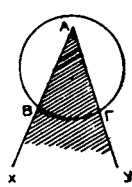


α

Σχ. 210.



β



Σχ. 211.

Τὸ τόξον τῆς περιφερείας, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας, λέγεται **ἀντίστοιχον τόξον** αὐτῆς.

Π.χ. ἡ γωνία $\alpha\Lambda\gamma$ (Σχ. 209α) εἶναι ἐγγεγραμμένη γωνία· ἡ κορυφή τῆς Λ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας καὶ αἱ πλευραὶ τῆς $\Lambda\alpha$ καὶ $\Lambda\gamma$ εἶναι τέμνουσαι αὐτῆς. Ἀντίστοιχον τόξον αὐτῆς εἶναι τὸ $\beta\Gamma$.

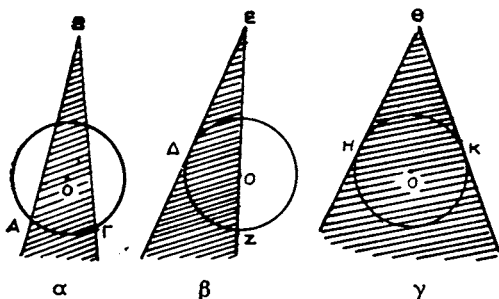
Ἐπίσης ἡ γωνία ΔΕΖ (Σχ. 209β) εἶναι ἐγγεγραμμένη γωνία ἢ κορυφή της Ε κεῖται ἐπὶ τῆς περιφέρειας, ἢ μία πλευρὰ της ΕΖ εἶναι τέμνουσα καὶ ἡ ΕΔ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφέρειας. Εἰδικώτερον ἡ γωνία ΔΕΖ λέγεται *γωνία σχηματιζομένη ὑπὸ χορδῆς καὶ ἐφαπτομένης*. Ἀντίστοιχον τόξον αὐτῆς εἶναι τὸ τόξον ΕΜΖ.

Σημ. Ὅταν μία γωνία ἔχη τὴν κορυφὴν της ἐπὶ τῆς περιφέρειας καὶ αἱ δύο πλευραὶ της εἶναι ἐφαπτόμεναι τῆς περιφέρειας, αἱ πλευραὶ αὗται δύνανται νὰ συμπίπτουν, ὁπότε ἡ γωνία εἶναι μηδὲν (Σχ. 210α) ἢ ἡ μία πλευρὰ εἶναι προέκτασις τῆς ἄλλης, ὁπότε ἡ γωνία εἶναι πεπλατυσμένη γωνία (Σχ. 210β).

III. Ἡ κορυφή τῆς γωνίας εἶναι εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς περιφέρειας (Σχ. 211). Π.χ. ἡ γωνία xAy ἔχει τὴν κορυφὴν εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς περιφέρειας.

Αἱ τοιαῦται γωνίαι λέγονται *γωνίαι κείμεναι εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς περιφέρειας*.

IV. Ἡ κορυφή τῆς γωνίας κεῖται εἰς τὸ ἐξωτερικὸν τῆς περιφέρειας. Αἱ πλευραὶ τῆς γωνίας αὐτῆς δύνανται νὰ εἶναι:



Σχ. 212.

1ον. Τέμνουσαι τῆς περιφέρειας.

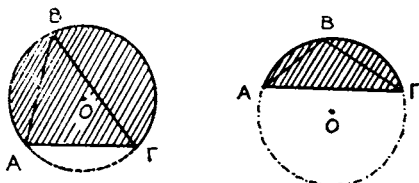
Π.χ. ἡ γωνία ΑΒΓ (Σχ. 212α) ἔχει τὴν κορυφὴν της ἐκτὸς τῆς περιφέρειας Ο καὶ αἱ πλευραὶ της ΒΑ καὶ ΒΓ εἶναι τέμνουσαι αὐτῆς.

2ον. Ἡ μία νὰ εἶναι τέμνουσα τῆς περιφέρειας καὶ ἡ ἄλλη ἐφαπτομένη αὐτῆς.

Π.χ. ἡ γωνία ΔΕΖ (Σχ. 212β) ἔχει τὴν κορυφὴν της Ε εἰς τὸ ἐξωτερικὸν τῆς περιφέρειας Ο, ἢ πλευρὰ της ΕΖ εἶναι τέμνουσα τῆς περιφέρειας καὶ ἡ πλευρὰ ΕΔ ἐφαπτομένη αὐτῆς.

3ον. Καὶ αἱ δύο πλευραὶ εἶναι ἐφαπτόμεναι τῆς περιφέρειας.

Π.χ. ἡ γωνία ΗΘΚ (Σχ. 212γ) ἔχει τὴν κορυφὴν της εἰς τὸ ἐξωτερικὸν τῆς περιφέρειας καὶ αἱ πλευραὶ ΘΗ καὶ ΘΚ εἶναι ἐφαπτόμεναι αὐτῆς.



Σχ. 213.

283. Ὅρισμός. Μία γωνία λέγεται *ἐγγεγραμμένη*

εἰς κυκλικὸν τμήμα, ὅταν ἡ κορυφή τῆς γωνίας κεῖται ἐπὶ τοῦ τόξου τοῦ κυκλικοῦ τμήματος, αἱ δὲ πλευραὶ τῆς διέρχονται ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς χορδῆς τοῦ κυκλικοῦ τμήματος.

Π.χ. ἡ γωνία ΑΒΓ (Σχ. 213) εἶναι ἔγγεγραμμένη εἰς τὸ κυκλικὸν τμήμα ΑΒΓΑ.

284. Θεώρημα. Κάθε ἔγγεγραμμένη γωνία εἰς κύκλον εἶναι ἴση μὲ τὸ ἡμισυ τῆς ἀντιστοίχου ἐπιπέντρου γωνίας.

Ἐστω ἡ ἔγγεγραμμένη γωνία ΑΒΓ καὶ ἡ ἀντίστοιχος ἐπίκεντρος γωνία ΑΟΓ. Θὰ δείξωμεν ὅτι :

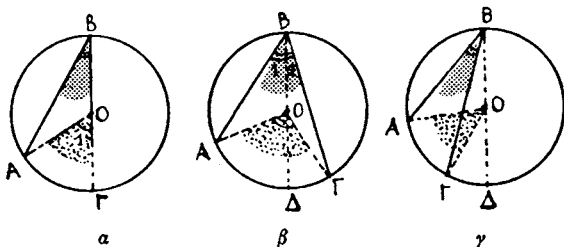
$$\widehat{ΑΒΓ} = \frac{1}{2} \widehat{ΑΟΓ}.$$

Διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις, αἱ ὁποῖαι ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὴν θέσιν τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ὡς πρὸς τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας.

Ι. Περίπτωσις. Μία ἀπὸ τὰς πλευρὰς τῆς ἔγγεγραμμένης γωνίας εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου.

Ἐπίπεδοις : Ἐστω ἡ ἔγγεγραμμένη γωνία ΑΒΓ (Σχ. 214α), τῆς ὁποίας ἡ πλευρὰ ΒΓ εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου Ο.

Συμπέρασμα : Θὰ δείξωμεν ὅτι $\widehat{ΑΒΓ} = \frac{1}{2} \widehat{ΑΟΒ}$.



Σχ. 214.

Ἀπόδειξις : Ἡ γωνία O_1 , ὡς ἔξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου ΑΟΒ θὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν Α καὶ Β· ἥτοι εἶναι

$$\widehat{O}_1 = \widehat{Α} + \widehat{Β} \quad (1)$$

Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΟΒ εἶναι ἰσοσκελές, θὰ εἶναι $\widehat{Α} = \widehat{Β}$. Ἐπομένως ἡ ἰσότης (1) γίνεται :

$$\widehat{O}_1 = \widehat{Α} + \widehat{Β} \quad \text{ἢ} \quad \widehat{O}_1 = 2\widehat{Β} \quad \text{ἢ} \quad \widehat{Β} = \frac{1}{2} \widehat{O}_1 \quad \text{ἢ} \quad \widehat{ΑΒΓ} = \frac{1}{2} \widehat{ΑΟΓ}.$$

II. *Περίπτωσις.* Τὸ κέντρον τοῦ κύκλου κεῖται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας. Ἐστω ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία ΑΒΓ καὶ ΑΟΓ ἡ ἀντίστοιχος ἐπίκεντρος γωνία (Σχ. 214 β).

$$\Theta\acute{\alpha} \text{ δειξωμεν \acute{\alpha}\lambda\iota\nu \delta\tau\iota} \quad \widehat{ΑΒΓ} = \frac{1}{2} \widehat{ΑΟΓ}.$$

Ἀπόδειξις. Φέρομεν τὴν διάμετρον ΒΟΔ. Ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι ἄθροισμα τῶν γωνιῶν Β₁ καὶ Β₂. Ἀλλὰ αἱ γωνίαι Β₁ καὶ Β₂ εἶναι γωνίαι ἐγγεγραμμέναι, τῶν ὁποίων ἡ μία πλευρὰ ΒΔ διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον ἐπομένως, κατὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν, θὰ εἶναι

$$\widehat{Β}_1 = \frac{1}{2} \widehat{ΑΟΔ}, \quad \widehat{Β}_2 = \frac{1}{2} \widehat{ΔΟΓ}.$$

Προσθέτομεν τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\widehat{Β}_1 + \widehat{Β}_2 = \frac{1}{2} \widehat{ΑΟΔ} + \frac{1}{2} \widehat{ΔΟΓ} \quad \eta \quad \widehat{Β}_1 + \widehat{Β}_2 = \frac{1}{2} (\widehat{ΑΟΔ} + \widehat{ΔΟΓ})$$

$$\eta \quad \widehat{ΑΒΓ} = \frac{1}{2} \widehat{ΑΟΓ}.$$

III. *Περίπτωσις.* Τὸ κέντρον τοῦ κύκλου κεῖται ἐκτὸς τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας. Ἐστω ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία ΑΒΓ (Σχ. 214 γ) καὶ ΑΟΓ ἡ ἀντίστοιχος ἐπίκεντρος γωνία. Θὰ δεῖξωμεν πάλιν ὅτι

$$\widehat{ΑΒΓ} = \frac{1}{2} \widehat{ΑΟΓ}.$$

Φέρομεν τὴν διάμετρον ΒΔ. Ἡ γωνία ΑΒΓ εἶναι διαφορὰ τῶν γωνιῶν ΑΒΔ καὶ ΓΒΔ, τῶν ὁποίων ἡ μία πλευρὰ ΒΔ διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον Ο. Κατὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν θὰ εἶναι :

$$\widehat{ΑΒΔ} = \frac{1}{2} \widehat{ΑΟΔ}, \quad \widehat{ΓΒΔ} = \frac{1}{2} \widehat{ΓΟΔ}.$$

Ἀφαιροῦμεν τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν :

$$\widehat{ΑΒΔ} - \widehat{ΓΒΔ} = \frac{1}{2} \widehat{ΑΟΔ} - \frac{1}{2} \widehat{ΓΟΔ}$$

$$\eta \quad \widehat{ΑΒΔ} - \widehat{ΓΒΔ} = \frac{1}{2} (\widehat{ΑΟΔ} - \widehat{ΓΟΔ}) \quad \eta \quad \widehat{ΑΒΓ} = \frac{1}{2} \widehat{ΑΟΓ}$$

Καὶ εἰς τὰς τρεῖς περιπτώσεις ἐδείχθη ὅτι ἡ ἐγγεγραμμένη γωνία εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ἀντιστοίχου ἐπίκεντρος γωνίας.

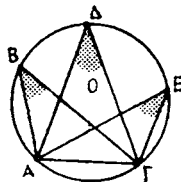
Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι : **Κάθε ἐγγεγραμμένη γωνία. . . .**

Παρατήρησις. Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα δύναται νὰ ἐκφρασθῇ καὶ ὡς ἑξῆς, ἐὰν λάβωμεν ὑπ' ὄψει μας τὴν § 93.

Τὸ μέτρον μιᾶς ἐγγεγραμμένης γωνίας εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ μέτρου τοῦ ἀντιστοίχου τόξου τῆς.

285. Πόρισμα I. Ὅλαι αἱ ἐγγεγραμμένοι γωνίαι, αἱ ὁποῖαι βαίνουν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου, εἶναι ἴσαι.

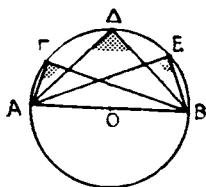
Πράγματι· διότι ὅλαι ἔχουν τὸ αὐτὸ μέτρον: τὸ ἥμισυ τοῦ μέτρου τοῦ τόξου ἐπὶ τοῦ ὁποίου βαίνουν. Π.χ. αἱ γωνίαι $AB\Gamma$, $A\Delta\Gamma$ (Σχ. 215), εἶναι ἴσαι, διότι ἔχουν μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ μέτρου τοῦ τόξου $A\Gamma$.



Σχ. 215.

286. Πόρισμα II. Κάθε γωνία ἐγγεγραμμένη καὶ βαίνουσα ἐπὶ ἡμιπεριφερείας εἶναι ὀρθή.

Ἐν πρώτοις ὅλαι ἔχουν τὸ αὐτὸ μέτρον: τὸ ἥμισυ τοῦ μέτρου τοῦ τόξου ἐπὶ τοῦ ὁποίου βαίνουν, δηλ. τῆς ἡμιπεριφερείας.



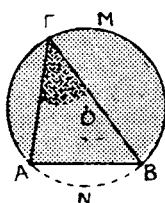
Σχ. 216.

Π.χ. αἱ γωνίαι $A\Gamma B$, $A\Delta B$ (Σχ. 216), ἔχουν μέτρον ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ μέτρου τῆς ἡμιπεριφερείας AMB .

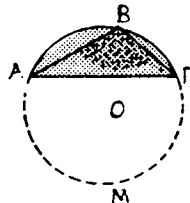
Ἐπειτα ἐπειδὴ τὸ μέτρον τῆς ἡμιπεριφερείας εἶναι 2 ὀρθ. ἢ 180° ἔπεται, ὅτι τὸ μέτρον τῶν γωνιῶν $A\Gamma B$, $A\Delta B$, εἶναι 1 ὀρθῆ ἢ $180^\circ : 2 = 90^\circ$.

287. Πόρισμα III. Μία γωνία, ἐγγεγραμμένη εἰς κυκλικὸν τμήμα, εἶναι ὀξεῖα, ὀρθῆ ἢ ἀμβλεῖα, καθόσον τὸ κυκλικὸν τμήμα εἶναι μεγαλύτερον, ἴσον ἢ μικρότερον ἡμικυκλίου.

1ον. Ἐστω ἡ γωνία $A\Gamma B$ (Σχ. 217), ἡ ὁποία εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ κυκλικὸν τμήμα $AMBA$, τὸ ὁποῖον εἶναι μεγαλύτερον ἡμικυκλίου. Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι ἡ γωνία $A\Gamma B$ εἶναι ὀξεῖα.



Σχ. 217.



Σχ. 218.

Πράγματι· ἡ γωνία $A\Gamma B$ ἔχει ὡς μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ μέτρου τοῦ τόξου ANB , τὸ ὁποῖον εἶναι μικρότερον ἡμιπεριφερείας· δηλ. ἡ γωνία αὐτὴ θὰ ἔχη μέτρον μικρότερον τῶν 90° καὶ ἐπομένως εἶναι ὀξεῖα.

2ον. Ἐδείχθη εἰς τὸ πόρισμα II.

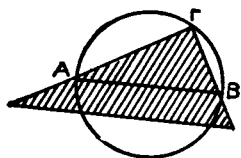
3ον. Ἐστω ἡ γωνία $AB\Gamma$ (Σχ. 218), ἡ ὁποία εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ κυκλικὸν τμήμα $AB\Gamma A$, τὸ ὁποῖον εἶναι μικρότερον ἡμικυκλίου· θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ γωνία $AB\Gamma$ εἶναι ἀμβλεῖα.

Πράγματι· ἡ γωνία $AB\Gamma$ ἔχει ὡς μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ μέτρου τοῦ τόξου $AM\Gamma$, τὸ ὁποῖον εἶναι μεγαλύτερον ἡμιπεριφερείας, δηλ. ἡ γωνία αὐτὴ θὰ ἔχη μέτρον μεγαλύτερον τῶν 90° καὶ ἐπομένως εἶναι ἀμβλεῖα.

288. Πέρισμα IV. Κάθε τρίγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς ἡμικύκλιον εἶναι ὀρθογώνιον.

Πράγματι· τὸ τρίγωνον AGB , (Σχ. 216) ἔχει τὴν γωνίαν του Γ ὀρθήν, διότι εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ ἡμικύκλιον $AGBOA$ · ἄρα τὸ τρίγωνον AGB εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Γ . Ὅμοίως τὰ τρίγωνα AAB καὶ AEB εἶναι ὀρθογώνια.

289. Ἐφαρμογή. Μὲ τὴν βοήθειαν ἐνὸς γνώμονος δυνάμεθα τὰ



Σχ. 219.

εὗρωμεν τὸ κέντρον ἐνὸς κύκλου. Τοποθετοῦμεν τὸν γνώμονα ἐπὶ τοῦ κύκλου οὕτως, ὥστε ἡ κορυφή Γ (Σχ. 219) τῆς ὀρθῆς γωνίας του νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου καὶ αἱ δύο κάθετοι πλευραὶ τοῦ γνώμονος νὰ τέμνουν τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B . Σημειώσωμεν αὐτὰ τὰ σημεῖα καὶ φέρομεν τὴν εὐθεΐαν AB , ἡ ὁποία εἶναι μία διάμετρος τοῦ

κύκλου. Μία δευτέρα ὁμοία ἐργασία δίδει μίαν δευτέραν διάμετρον. Ἡ τομὴ τῶν δύο αὐτῶν διαμέτρων δίδει τὸ ζητούμενον κέντρον.

Ἄσκήσεις

420. (449). Ἐπὶ μιᾶς περιφερείας λαμβάνομεν κατὰ σειρὰν τὰ τόξα: $\widehat{AB}=70^\circ$, $\widehat{BG}=120^\circ$. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$.

421. (450). Ἐνα τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἕνα κύκλον O . Φέρομεν τὴν διάμετρον AD καὶ τὸ ὕψος ΓH τοῦ τριγώνου. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ χορδὴ ΔB εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓH .

422. (451). Εἰς ἕνα κύκλον O φέρομεν μίαν διάμετρον AB καὶ μίαν χορδὴν $\Gamma\Delta$ παράλληλον τῆς AB · νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι δύο γωνίαι τοῦ τριγώνου $A\Delta\Gamma$ διαφέρουν κατὰ μίαν ὀρθὴν γωνίαν.

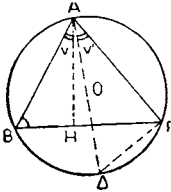
423. (452). Ἐὰν δύο περιφέρειαι ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς εἰς ἕνα σημεῖον A καὶ ἕαν ἡ μία ἀπὸ αὐτὰς διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς ἄλλης, ἡ ἐσωτερικὴ περιφέρεια διχοτομεῖ τὰς χορδὰς τῆς ἐξωτερικῆς, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὸ σημεῖον A .

424. (453). Δύο περιφέρειαι O καὶ O' τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B . Ἀπὸ τὸ A φέρομεν μίαν τυχοῦσαν τέμνουσαν $\Gamma A\Delta$, ἡ ὁποία τέμνει τὴν O εἰς

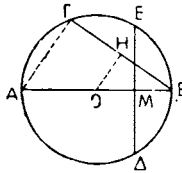
τὸ σημεῖον Γ καὶ τὴν Ο' εἰς τὸ Δ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία ΓΒΔ εἶναι σταθερά.

425. (454). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς ἓνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἡ γωνία τὴν ὁποίαν σχηματίζει τὸ ὕψος ΑΗ μὲ τὴν πλευρὰν ΑΒ εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ ΑΓ μὲ τὴν ἀκτίνα ΑΟ τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περὶ τὸ τρίγωνον.

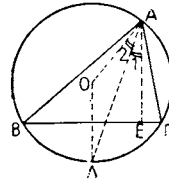
426. (455). Ἐνα τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἓνα κύκλον Ο. Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Β φέρομεν τὴν χορδὴν ΒΔ κάθετον ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΒΓ. Ἐάν Η εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΑΗ=ΒΔ.



Σχ. ἀσκ. 425.



Σχ. ἀσκ. 427.



Σχ. ἀσκ. 428.

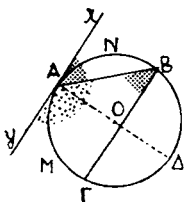
427. (456). Εἰς ἓνα κύκλον Ο φέρομεν τὴν διάμετρον ΑΒ καὶ τὴν χορδὴν ΒΓ, ἡ ὁποία σχηματίζει μὲ τὴν ΒΑ γωνίαν 30°. Ἀπὸ τὸ μέσον Μ τῆς ΒΟ φέρομεν τὴν χορδὴν ΔΜΕ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΒΓ=ΔΕ.

428. (457). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ διχοτόμος μιᾶς γωνίας ἐνὸς τριγώνου σχηματίζει γωνίας ἴσας μὲ τὸ ὕψος καὶ μὲ τὴν ἀκτίνα τοῦ κύκλου τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τρίγωνον, τὰ ὁποῖα ἄγονται ἀπὸ τὴν αὐτὴν κορυφὴν.

290. **Θεώρημα.** Ἡ γωνία, ἡ ὁποία σχηματίζεται ὑπὸ χορδῆς κύκλου καὶ ἐφαπτομένης αὐτοῦ εἰς τὸ ἓνα ἄκρον τῆς χορδῆς, ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ μέτρον τοῦ τόξου τοῦ περιεχομένου μεταξύ τῶν πλευρῶν τῆς.

Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις, καθόσον ἡ γωνία εἶναι ὀξεῖα ἢ ἀμβλεῖα.

Ι. **Περίπτωσης.** Ὑπόθεσις: Ἐστω ἡ ὀξεῖα γωνία ΒΑx (Σχ. 220), ἡ ὁποία σχηματίζεται ἀπὸ τὴν χορδὴν ΑΒ καὶ τὴν



Σχ. 220.

Ὑπόθ.	ΑΒ=χορδὴ xAy=ἐφαπτομένη
Συμπ.	μετρ. $\widehat{BAx} = \frac{1}{2}$ μετρ. \widehat{ANB}

ἐφαπτομένην xAy τοῦ κύκλου Ο εἰς τὸ σημεῖον Α, ἄκρον τῆς χορδῆς ΑΒ.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι: μετρ. $\widehat{BAx} = \frac{1}{2}$ μετρ. \widehat{ANB} .

Ἀπόδειξις: Ἀπὸ τὸ Β φέρομεν τὴν χορδὴν ΒΓ, παράλληλον πρὸς τὴν χγ. Τὰ τόξα ANB καὶ AMΓ, εἶναι ἴσα, διότι περιέχονται μεταξὺ τῶν παραλλήλων εὐθειῶν χγ καὶ ΒΓ· ἄρα αἱ ἐγγεγραμμέναι γωνίαι, αἱ ὁποῖαι βαίνουν ἐπὶ τῶν τόξων αὐτῶν ἔχουν τὸ αὐτὸ μέτρον: τὸ ἥμισυ τοῦ μέτρον τῶν τόξων AMΓ καὶ ANB, ἥτοι εἶναι:

$$\text{μέτρο.}\widehat{AB\Gamma} = \frac{1}{2} \text{μέτρο.}\widehat{AM\Gamma} \quad \eta \quad \text{μέτρο.}\widehat{AB\Gamma} = \frac{1}{2} \text{μέτρο.}\widehat{ANB} \quad (1).$$

Ἀλλὰ ἡ γωνία ABΓ εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν ΒΑχ, ὡς ἐντὸς ἐναλλάξ τῶν παραλλήλων χγ καὶ ΒΓ τεμνομένων ὑπὸ τῆς AB καὶ ἐπομένως ἡ (1) γίνεται $\text{μέτρο.}\widehat{BA\chi} = \frac{1}{2} \text{μέτρο.}\widehat{ANB}$.

II. Περίπτωσις. Ἐστω ἡ ἀμβλεῖα γωνία ΒΑγ (Σχ. 220), ἡ ὁποία σχηματίζεται ἀπὸ τὴν χορδὴν AB καὶ ἀπὸ τὴν ἐφαπτομένην Ay τοῦ κύκλου O εἰς τὸ σημεῖον A. Θὰ δεῖξωμεν πάλιν, ὅτι:

$$\text{μετρο.}\widehat{BA\gamma} = \frac{1}{2} \text{μετρο.}\widehat{AMB}.$$

Φέρομεν τὴν διάμετρον AOD. Ἡ γωνία ΒΑγ εἶναι ἄθροισμα τῆς ὀρθῆς γωνίας γΑΔ καὶ τῆς ἐγγεγραμμένης γωνίας ΔAB καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι:

$$\text{μετρο.}\widehat{BA\gamma} = \text{μετρο.}\widehat{\gamma A\Delta} + \text{μετρο.}\widehat{\Delta AB}$$

$$\eta \quad \text{μετρο.}\widehat{BA\gamma} = \frac{1}{2} \text{μετρο.}\widehat{AM\Delta} + \frac{1}{2} \text{μετρο.}\widehat{\Delta B}$$

$$\eta \quad \text{μετρο.}\widehat{BA\gamma} = \frac{1}{2} (\text{μετρο.}\widehat{AM\Delta} + \text{μετρο.}\widehat{\Delta B}) = \frac{1}{2} \text{μετρο.}\widehat{AMB}.$$

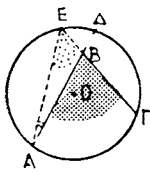
Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Ἡ γωνία, ἡ ὁποία...**

291. Θεώρημα. Κάθε γωνία, ἡ ὁποία ἔχει τὴν κορυφὴν τῆς ἐντὸς κύκλου ἔχει μέτρον ἴσον μὲ τὸ ἡμίθροισμα τῶν μέτρον τῶν τόξων, τὰ ὁποῖα περιέχονται μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς καὶ τῶν προεκτάσεων τῶν πλευρῶν τῆς.

Ἐπίδειξις: Ἐστω ἡ γωνία ABΓ (Σχ. 221), ἡ ὁποία ἔχει τὴν κορυφὴν τῆς ἐντὸς τοῦ κύκλου O. Προεκτείνωμεν τὰς πλευρὰς AB καὶ ΓB πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς τῆς B καὶ ἕστωσαν Δ καὶ E τὰ σημεία εἰς τὰ ὁποῖα τέμνουσιν τὴν περιφέρειαν αἱ προεκτάσεις τῶν AB καὶ ΓB.

Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι:

$$\text{μετρο.}\widehat{AB\Gamma} = \frac{\text{μετρο.}\widehat{A\Gamma} + \text{μετρο.}\widehat{E\Delta}}{2}.$$



Σχ. 221.

Ἀπόδειξις: Φέρομεν τὴν χορδὴν AE. Ἡ γωνία ABΓ εἶναι ἔξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου AEB καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι

$$\widehat{AB\Gamma} = \widehat{E} + \widehat{A} \quad \eta \quad \text{μετρ.}\widehat{AB\Gamma} = \text{μετρ.}\widehat{E} + \text{μετρ.}\widehat{A} \quad (1)$$

Ἄλλὰ αἱ γωνίαι E καὶ A εἶναι ἐγγεγραμμένοι εἰς τὸν κύκλον O καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι $\text{μετρ.}\widehat{E} = \frac{\text{μετρ.}\widehat{A\Gamma}}{2}$ καὶ $\text{μετρ.}\widehat{A} = \frac{\text{μετρ.}\widehat{E\Delta}}{2}$.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὰ μετρ. \widehat{E} καὶ μετρ. \widehat{A} μὲ τὰ ἴσα των καὶ ἔχομεν

$$\begin{aligned} \text{μετρ.}\widehat{AB\Gamma} &= \frac{\text{μετρ.}\widehat{A\Gamma}}{2} + \frac{\text{μετρ.}\widehat{E\Delta}}{2} \\ \eta \quad \text{μετρ.}\widehat{AB\Gamma} &= \frac{\text{μετρ.}\widehat{A\Gamma} + \text{μετρ.}\widehat{E\Delta}}{2} \end{aligned}$$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι : *Κάθε γωνία, ἡ ὁποία . . .*

292. Θεώρημα. *Κάθε γωνία, ἡ ὁποία ἔχει τὴν κορυφὴν τῆς ἐκτὸς κύκλου, αἱ δὲ πλευραὶ τῆς τέμνουσιν τὴν περιφέρειάν του, ἔχει μέτρον ἴσον μὲ τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν μέτρων τῶν δύο τόξων τῆς περιφέρειας, τὰ ὁποία περιέχονται μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας.*

Ὑπόθεσις : Ἐστω ἡ γωνία ABΓ (Σχ. 222), ἡ ὁποία ἔχει τὴν κορυφὴν τῆς ἐκτὸς τοῦ κύκλου O καὶ τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ BA καὶ BΓ τέμνουσιν τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ A ἢ μία καὶ E καὶ Γ ἢ ἄλλη.

Συμπέρασμα : Θὰ δείξωμεν, ὅτι :

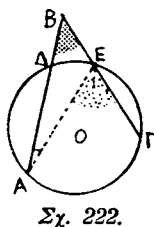
$$\text{μέτρ.}\widehat{AB\Gamma} = \frac{\text{μετρ.}\widehat{A\Gamma} - \text{μετρ.}\widehat{\Delta E}}{2}$$

Ἀπόδειξις : Φέρομεν τὴν χορδὴν AE. Ἡ γωνία E₁ εἶναι ἐξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου AEB καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι :

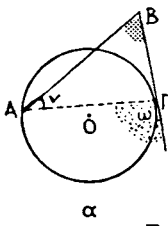
$$\widehat{E}_1 = \widehat{A} + \widehat{B} \quad \eta \quad \widehat{B} = \widehat{E}_1 - \widehat{A} \quad \eta \quad \text{μετρ.}\widehat{AB\Gamma} = \text{μετρ.}\widehat{E}_1 - \text{μετρ.}\widehat{A} \quad (1)$$

Ἀλλὰ ἡ γωνία E₁ εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸν κύκλον O καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι $\text{μετρ.}\widehat{E}_1 = \frac{\text{μέτρ.}\widehat{A\Gamma}}{2}$.

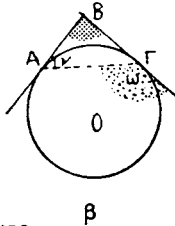
Ὅμοίως, ἐπειδὴ ἡ γωνία A εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸν κύκλον O, θὰ εἶναι $\text{μετρ.}\widehat{A} = \frac{\text{μετρ.}\widehat{E\Delta}}{2}$. Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1)



τὰ μέτρα τῶν γωνιῶν E_1 καὶ A μὲ τὰ ἴσα των καὶ ἔχομεν



α Σχ. 223.



β

$$\text{μέτρο.}\widehat{AB\Gamma} = \frac{\text{μέτρο.}\widehat{A\Gamma}}{2} - \frac{\text{μέτρο.}\widehat{\Delta E}}{2}$$

$$\text{ἢ μέτρο.}\widehat{AB\Gamma} = \frac{\text{μέτρο.}\widehat{A\Gamma} - \text{μέτρο.}\widehat{\Delta E}}{2}$$

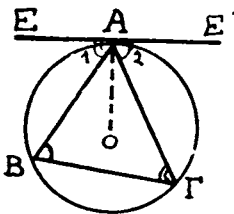
Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Κάθε γωνία ἢ ὀποία. . . .**

Παρατήρησις. Τὸ προηγούμενον θεώρημα εἶναι ἀληθὲς καὶ ὅταν ἀκόμη ἢ μία ἀπὸ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας εἶναι ἐφαπτομένη (Σχ. 223α), ἢ καὶ ὅταν καὶ αἱ δύο πλευραὶ τῆς εἶναι ἐφαπτόμεναι περιφερείας (Σχ. 223β).

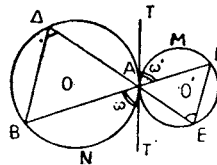
Ἀσκήσεις

429. (458). Ἐνα τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἓνα κύκλον O . Φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην EAE' τοῦ κύκλου εἰς τὴν κορυφὴν A . Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι $\widehat{EAB} = \widehat{\Gamma}$ καὶ $\widehat{E'AG} = \widehat{B}$.

430. (459). Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτονται καὶ διὰ τοῦ σημείου τῆς ἀφῆς τῶν ἀχθῶν δύο εὐθεῖαι περατοῦμενοι εἰς τὰς περιφερείας των, αἱ χορδαί, αἱ ὁποῖαι συνδέουσι τὰ ἄκρα τῶν εὐθειῶν αὐτῶν, εἶναι παράλληλοι.



Σχ. ἀσκ. 429.



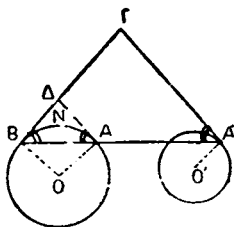
Σχ. ἀσκ. 430.

431. (460). Δίδονται δύο κύκλοι O καὶ O' καὶ δύο ἀκτῖνες $OA, O'A'$ παράλληλοι. Ἡ εὐθεῖα AA' τέμνει τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου O εἰς τὸ σημεῖον B . Φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας τῶν περιφερειῶν εἰς τὰ σημεῖα B καὶ A' , αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Γ . Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι $\Gamma B = \Gamma A'$.

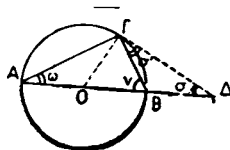
432. (461). Δίδεται κύκλος O καὶ μία χορδὴ AB , τῆς ὁποίας τὸ ἀντίστοιχον τόξον εἶναι 120° . Ἀπὸ τυχόν σημεῖον M τοῦ τόξου αὐτοῦ φέρομεν τὰς MA καὶ MB , αἱ ὁποῖαι προεκτεινόμεναι τέμνουσι τὰς ἐφαπτομένας $A\Gamma$ καὶ $B\Gamma$ τοῦ κύκλου εἰς τὰ σημεῖα A' καὶ B' . Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι $AA' = BB'$.

433. (462). Εἰς ἓνα κύκλον O φέρομεν τὴν διάμετρον AB καὶ μία χορδὴν $A\Gamma$, ἢ ὁποία νὰ σχηματίζῃ μὲ τὴν AB γωνίαν 30° . Εἰς τὸ Γ φέρομεν ἐφαπτο-

μένῃ τῆς περιφερείας, ἣ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς AB εἰς τὸ σημεῖον Δ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΓΔ εἶναι ἰσοσκελές.



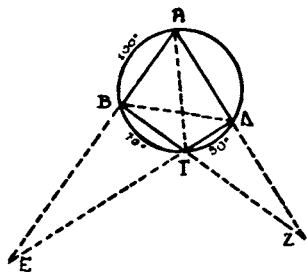
Σχ. ἀσκ. 431.



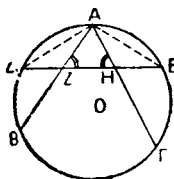
Σχ. ἀσκ. 433.

434. (463). Δύο εὐθεῖαι BAB' καὶ ΓΑΓ' τέμνουν μίαν περιφέρειαν O εἰς τὰ σημεῖα A, B, Γ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία ΒΑΓ' ἔχει μέτρον ἶσον μὲ τὸ ἡμιάθροισμα τῶν μέτρων τῶν τόξων AB καὶ ΑΓ, τὰ ὅποια περιέχονται μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς καὶ τῶν πλευρῶν τῆς κατὰ κορυφὴν τῆς γωνίας.

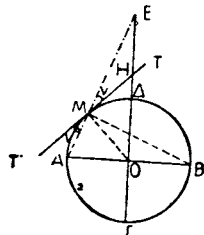
435. (464). Ἐπὶ τῆς περιφερείας ἑνὸς κύκλου λαμβάνομεν κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν τὰ τόξα: $\widehat{AB}=100^\circ$, $\widehat{B\Gamma}=70^\circ$, $\widehat{\Gamma\Delta}=50^\circ$. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, αἱ γωνίαι τῶν διαγωνίων του καὶ αἱ γωνίαι, τὰς ὁποίας σχηματίζουν αἱ ἀπέναντι πλευραὶ του.



Σχ. ἀσκ. 435.



Σχ. ἀσκ. 436.



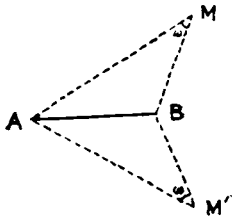
Σχ. ἀσκ. 437.

436. (465). Ἐπὶ μιᾷ περιφερείας O λαμβάνομεν δύο τόξα AB καὶ ΑΓ τῶν 120° ἕκαστον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ χορδὴ ΔΕ, ἣ ὁποία συνδέει τὰ μέσα Δ καὶ E τῶν τόξων AB καὶ ΑΓ διαιρεῖται εἰς τρία ἴσα μέρη ὑπὸ τῶν χορδῶν AB καὶ ΑΓ.

437. (466). Εἰς ἕνα κύκλον O φέρομεν δύο καθέτους διαμέτρους AB καὶ ΓΔ καὶ ἐπὶ τῆς περιφερείας του λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον M. Φέρομεν τὰς χορδὰς MA καὶ MB καὶ τὴν ἐφαπτομένην MT, αἱ ὅποιαί τέμνουν τὴν ΓΔ ἢ τὴν προέκτασιν τῆς εἰς τὰ σημεῖα E, Z, H ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $EH=HZ$.

2. Τόξα δεχόμενα δοθείσαν γωνίαν.

293. Ὅρισμός. Ἐστω ἓνα εὐθύγραμμον τμήμα AB (Σχ. 224) καὶ ἓνα σημεῖον M ἔκτος αὐτοῦ. Ἐὰν ἡ γωνία AMB εἶναι ἴση μὲ δοθείσαν γωνίαν ω , λέγομεν, ὅτι τὸ εὐθύγραμμον τμήμα AB φαίνεται ἀπὸ τοῦ M ὑπὸ γωνίαν ω ἢ ὅτι ἀπὸ τοῦ σημεῖον M βλέπομεν τὸ εὐθύγραμμον τμήμα ὑπὸ γωνίαν ω .

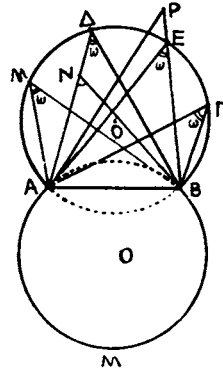


Σχ. ἀσκ. 224.

Ἐπίσης ἀπὸ τοῦ σημεῖον M' , συμμετρικὸν τοῦ M πρὸς τὴν AB , τὸ εὐθύγραμμον τμήμα AB φαίνεται ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν ω .

294. Θεώρημα. Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων ἐνὸς ἐπιπέδου, ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἓνα δοθὲν εὐθύγραμμον τμήμα AB φαίνεται ὑπὸ δοθείσαν γωνίαν ω , εἶναι δύο τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουν κοινὴν χορδὴν τὸ εὐθύγραμμον τμήμα AB καὶ εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὸ AB .

Ἐστω M (Σχ. 225) ἓνα σημεῖον, ἀπὸ τοῦ ὁποῖον τὸ εὐθύγραμμον τμήμα AB φαίνεται ὑπὸ γωνίαν AMB ἴσην μὲ τὴν δοθείσαν γωνίαν ω . Τὸ σημεῖον M εἶναι προφανῶς σημεῖον τοῦ τόπου.



Σχ. 225.

Γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα A, M, B . Εἶναι φανερόν, ὅτι ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ τόξου AMB εἶναι σημεῖα τοῦ τόπου, διότι ὅλαι αἱ γωνίαι, αἱ ἐγγεγραμμέναι εἰς τὸ κυκλικὸν τμήμα $AMBA$, ὅπως ἡ γωνία AGB , εἶναι ἴσαι μὲ τὴν γωνίαν ω , διότι βαίνουν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου AB .

Θὰ δεῖξωμεν τώρα, ὅτι κάθε σημεῖον, τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἐπὶ τοῦ τόξου AMB , δὲν ἔχει τὴν ιδιότητα αὐτὴν, δηλ. νὰ φαίνεται τὸ εὐθύγραμμον τμήμα AB , ἀπὸ τὸ σημεῖον αὐτό, ὑπὸ γωνίαν ω .

Πράγματι· ἔστω N ἓνα σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐντὸς τοῦ κυκλικοῦ τμήματος AMB .

Φέρομεν τὰς εὐθείας AN καὶ NB . Ἡ AN προεκτεινομένη τέμνει τὸ τόξον εἰς ἓνα σημεῖον Δ · φέρομεν τὴν εὐθείαν ΔB . Ἡ γωνία ANB , ὡς ἔξωτερικὴ γωνία τοῦ τριγώνου $N\Delta B$, εἶναι μεγαλυτέρα τῆς γωνίας Δ καὶ ἐπομένως καὶ τῆς ἴσης τῆς ω . Ὡστε τὸ σημεῖον N δὲν εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου.

Ἐστω τώρα ἓνα ἄλλο σημεῖον P, τὸ ὁποῖον κεῖται ἔκτος τοῦ κυκλικοῦ τμήματος· φέρομεν τὰς εὐθείας PA καὶ PB. Ἡ PB τέμνει τὸ τόξον εἰς τὸ σημεῖον E.

Φέρομεν καὶ τὴν εὐθείαν AE. Ἡ γωνία APB εἶναι μικροτέρα τῆς γωνίας AEB. δηλ. τῆς ω , καὶ ἐπομένως καὶ τὸ σημεῖον P δὲν εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου.

Ὁ ζητούμενος λοιπὸν τόπος εἶναι τὸ τόξον AMB τοῦ κυκλικοῦ τμήματος AMBA.

Ἐργαζόμενοι ὁμοίως καὶ ἐπὶ τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου, τὰ ὁποῖα εὐρίσκονται πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος AB, εὐρίσκουμεν, ὅτι ὑπάρχει καὶ ἓνα ἄλλο τόξον AM'B, συμμετρικὸν τοῦ AMB πρὸς τὸ AB καὶ τοῦ ὁποῖου τὰ σημεῖα ἔχουν τὴν δοθεῖσαν ἰδιότητα.

Ἐδείχθη λοιπὸν, ὅτι: **Ὁ γεωμετρικὸς τόπος. . .**

295. Πέρισμα. Ἐάν ἡ δοθεῖσα γωνία ω ἦτο ὀρθή, τὰ δύο τόξα AMB καὶ AM'B θὰ ἦσαν ἡμιπεριφέρειαι μὲ διάμετρον τὴν AB· ἐπομένως:

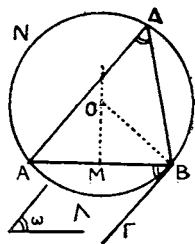
Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων [τοῦ ἐπιπέδου, ἀπὸ τὰ ὁποῖα δοθὲν εὐθύγραμμον τμήμα φαίνεται ὑπὸ ὀρθὴν γωνίαν, εἶναι περιφέρεια κύκλου, ἡ ὁποία γράφεται μὲ διάμετρον τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον τμήμα.

296. Ὅρισμός. Λέγομεν, ὅτι ἓνα κυκλικὸν τμήμα δέχεται μίαν δοθεῖσαν γωνίαν ω , ὅταν ὅλαι αἱ ἐγγεγραμμέναι γωνίαι εἰς τὸ κυκλικὸν τμήμα εἶναι ἴσαι μὲ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ω .

297. Κατασκευὴ τοῦ τόπου. Πρόβλημα. Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα κυκλικὸν τμήμα, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχη δοθεῖσαν χορδὴν AB καὶ νὰ δέχεται γωνίαν ἴσην μὲ δοθεῖσαν γωνίαν ω .

Μὲ πλευρὰν τὴν δοθεῖσαν χορδὴν AB (Σχ. 226) καὶ μὲ κορυφὴν τὸ B κατασκευάζομεν τὴν γωνίαν ABΓ ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ω . Φέρομεν τὴν μεσοκάθετον MO τῆς χορδῆς AB καὶ τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν BΓ εἰς τὸ σημεῖον B. Αἱ κάθετοι αὗται τέμνονται (§ 167) ἰεῖς ἓνα σημεῖον O, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ κέντρον τοῦ ζητουμένου κυκλικοῦ τμήματος.

Πράγματι· ἐπειδὴ τὸ O κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου τῆς AB, θὰ εἶναι OA=OB. Ἐπο-



Σχ. 226.

μένως ἡ περιφέρεια, ἡ ὁποία γράφεται μὲ κέντρον τὸ O καὶ ἀκτίνα τὴν OB , διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα A καὶ B καὶ ἐφάπτεται τῆς $B\Gamma$ εἰς τὸ σημεῖον B , ἐπειδὴ ἡ $B\Gamma$ εἶναι κάθετος, ἐκ κατασκευῆς, εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτίνας OB .

Τὸ κυκλικὸν τμήμα ANB εἶναι τὸ ζητούμενον κυκλικὸν τμήμα.

Πράγματι ἔαν ἐγγράψωμεν, εἰς αὐτὸ μίαν τυχούσαν γωνίαν $A\Delta B$, ἡ γωνία αὐτὴ εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν $AB\Gamma = \omega$, διότι καὶ αἱ δύο ἔχουν τὸ αὐτὸ μέτρον, τὸ ἥμισυ τοῦ μέτρου τοῦ τόξου ANB (§ 290).

298. Παρατήρησις. Ἔχοντες ὑπ' ὄψει τὴν § 295 καὶ τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα, δυνάμεθα νὰ συμπεράνωμεν, ὅτι :

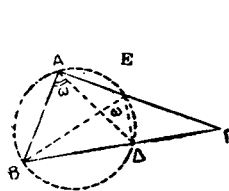
Ἐάν γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων ἀπὸ τὰ ὁποῖα δοθὲν εὐθύγραμμον τμήμα φαίνεται ὑπὸ δοθείσαν γωνίαν, εἶναι τὸ τόξον τοῦ κυκλικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον γράφεται μὲ χορδὴν τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον τμήμα καὶ δέχεται γωνίαν ἴσην μὲ τὴν δοθείσαν γωνίαν.

Ἀσκήσεις

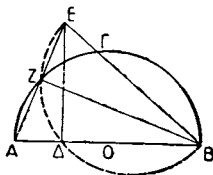
438. (467). Δίδεται ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$ ὀρθογώνιον εἰς τὸ A . Φέρομεν τὴν διχοτόμον AD τῆς γωνίας A , ἡ ὁποία τέμνει τὴν ὑποτείνουσαν $B\Gamma$ εἰς τὸ Δ . Ἐκ τῶν Δ φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν AG εἰς τὸ σημεῖον E . Νὰ ἀποδειχθῇ :

1ον. Ὅτι τὰ σημεῖα A, B, Δ, E κείνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.

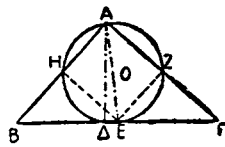
2ον. Ὅτι $BA = \Delta E$.



Σχ. ἀσκ. 438.



Σχ. ἀσκ. 439.



Σχ. ἀσκ. 440.

439. (468). Δίδεται ἓνα ἡμικύκλιον διαμέτρου AB . Φέρομεν χορδὴν $B\Gamma$ καὶ ἀπὸ τυχόν σημείου Δ τῆς AB φέρομεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν AB , ἡ ὁποία τέμνει τὴν χορδὴν $B\Gamma$ ἢ τὴν προέκτασίν της εἰς ἓνα σημεῖον E . Μὲ διάμετρον τὴν BE γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν πρώτην ἡμιπεριφέρειαν εἰς τὸ σημεῖον Z . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ AE εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν BZ .

440. (469). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$ ἡ κορυφή A τῆς ὀρθῆς γωνίας, ὁ πούς Δ τοῦ ὕψους $A\Delta$ καὶ τὰ μέσα τῶν τριῶν πλευρῶν του κείνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.

3. Ἐγγεγραμμένα τετράπλευρα

299. **Θεώρημα.** Ἐάν ἓνα τετράπλευρον εἶναι ἔγγεγραμμένον εἰς κύκλον :

1ον. Αἱ ἀπέναντι γωνίαι του εἶναι παραπληρωματικά.

2ον. Κάθε γωνία τοῦ τετραπλεύρου εἶναι ἴση μὲ τὴν ἐξωτερικὴν γωνίαν τοῦ τετραπλεύρου, ἢ ὁποία σχηματίζεται εἰς τὴν ἀπέναντι κορυφῇν.

3ον. Κάθε πλευρὰ τοῦ τετραπλεύρου φαίνεται ἀπὸ τὰς δύο ἀπέναντι αὐτῆς κορυφάς, ὑπὸ γωνίας ἴσας.

Ἐπίσης: Ἐστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ (Σχ. 227), τὸ ὁποῖον εἶναι ἔγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον Ο.

Συμπέρασμα 1ον: Θὰ δείξωμεν, ὅτι :

$$\widehat{A} + \widehat{\Gamma} = 2 \text{ ὄρθ.} \quad \text{καὶ} \quad \widehat{B} + \widehat{\Delta} = 2 \text{ ὄρθ.}$$

Ἀπόδειξις: Αἱ γωνίαι Α καὶ Γ εἶναι ἔγγεγραμμέναι εἰς τὸν κύκλον Ο καὶ

ἐπομένως τὰ μέτρα των εἶναι ἴσα μὲ τὰ ἡμίση τῶν μέτρων τῶν τόξων ΔΓΒ καὶ ΔΑΒ, ἐπὶ τῶν ὁποίων βαίνουν·

δηλ. εἶναι

$$\text{μέτρ. } \widehat{A} = \frac{\text{μέτρ. } \widehat{\Delta\Gamma\text{B}}}{2}, \quad \text{μέτρ. } \widehat{\Gamma} = \frac{\text{μέτρ. } \widehat{\Delta\text{A}\text{B}}}{2}.$$

Προσθέτομεν τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\text{μέτρ. } \widehat{A} + \text{μέτρ. } \widehat{\Gamma} = \frac{\text{μέτρ. } \widehat{\Delta\Gamma\text{B}}}{2} + \frac{\text{μέτρ. } \widehat{\Delta\text{A}\text{B}}}{2}$$

$$\text{ἢ} \quad \text{μέτρ. } \widehat{A} + \text{μέτρ. } \widehat{\Gamma} = \frac{\text{μέτρ. } \widehat{\Delta\Gamma\text{B}} + \text{μέτρ. } \widehat{\Delta\text{A}\text{B}}}{2} \quad (1)$$

Ἐπειδὴ $\text{μέτρ. } \widehat{\Delta\Gamma\text{B}} + \text{μέτρ. } \widehat{\Delta\text{A}\text{B}} = 360^\circ = 4 \text{ ὄρθ.}$, ἡ ἰσότης (1) γίνεται

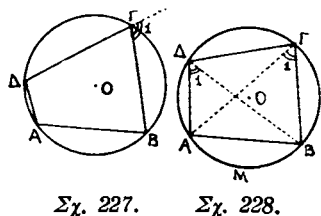
$$\text{μέτρ. } \widehat{A} + \text{μέτρ. } \widehat{\Gamma} = \frac{4 \text{ ὄρθ.}}{2} = 2 \text{ ὄρθ.} \quad \text{ἢ} \quad \widehat{A} + \widehat{\Gamma} = 2 \text{ ὄρθαί.}$$

Αἱ γωνίαι λοιπὸν Α καὶ Γ εἶναι παραπληρωματικά.

Ὀμοίως εὐρίσκομεν, ὅτι $\widehat{B} + \widehat{\Delta} = 2 \text{ ὄρθαί.}$

Συμπέρασμα 2ον: Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\widehat{A} = \widehat{\Gamma}_1$ (Σχ. 227).

Ἀπόδειξις: Αἱ γωνίαι Α καὶ Γ εἶναι παραπληρωματικά, ὅπως ἐδείχθη ἄνωτέρω. Ὀμοίως αἱ γωνίαι Γ καὶ Γ₁ εἶναι παραπληρωματι-



καί, ὡς ἐφεξῆς τῶν ὁποίων αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ κείνται ἐπ' εὐθείας ἑπομένως αἱ γωνίαι A καὶ Γ_1 εἶναι ἴσαι, διότι ἔχουν τὴν αὐτὴν παραπληρωματικὴν γωνίαν Γ .

Συμπέρασμα 3ον: Θὰ δείξωμεν, ὅτι μία πλευρὰ τοῦ τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$, ἔστω ἡ AB (Σχ. 228), φαίνεται ἀπὸ τὰς κορυφὰς Γ καὶ Δ , ὑπὸ ἴσας γωνίας· δηλ. θὰ δείξωμεν, ὅτι $\widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Gamma}_1$.

Ἀπόδειξις: Αἱ γωνίαι Δ_1 καὶ Γ_1 εἶναι ἴσαι, διότι εἶναι ἐγγεγραμμένοι καὶ βαίνουν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου AMB .

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Ἐὰν ἓνα τετράπλευρον. . .**

300. Ὅρισμός. Ἐνα τετράπλευρον καὶ γενικῶς ἓνα πολύγωνον λέγεται **ἐγγράψιμον εἰς κύκλον**, ὅταν ἡ περιφέρεια τοῦ κύκλου δύναται νὰ διέλθῃ ἀπὸ ὅλας τὰς κορυφὰς του.

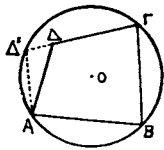
301. Θεώρημα. (Ἀντίστροφον). Ἐνα τετράπλευρον εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον:

1ον. Ὅταν δύο ἀπέναντι γωνίαι του εἶναι παραπληρωματικαί.

2ον. Ὅταν μία ἐκ τῶν γωνιῶν του εἶναι ἴση μὲ τὴν ἐξωτερικὴν γωνίαν, ἢ ὁποία σχηματίζεται εἰς τὴν ἀπέναντι κορυφὴν του.

3ον. Ὅταν ἡ μία πλευρὰ του φαίνεται ὑπὸ ἴσας γωνίας ἀπὸ δύο ἀπέναντι αὐτῆς κορυφὰς.

Ἐπιπέδουσι: Ἐστω τὸ τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$ (Σχ. 229) εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι $\widehat{A} + \widehat{\Gamma} = 2$ ὀρθ. καὶ $\widehat{B} + \widehat{\Delta} = 2$ ὀρθ.



Σχ. 229.

Συμπέρασμα 1ον: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον· δηλ. ὅτι ὑπάρχει μία περιφέρεια, ἢ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰς τέσσαρας κορυφὰς του.

Ἀπόδειξις: Γνωρίζομεν, ὅτι διὰ τριῶν σημείων, τὰ ὁποῖα δὲν κείνται ἐπ' εὐθείας, διέρχεται μία καὶ μόνη περιφέρεια. Γράφομεν λοιπόν τὴν περιφέρειαν O , ἢ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα A, B, Γ · λέγομεν, ὅτι ἡ περιφέρεια αὐτὴ θὰ διέλθῃ καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον Δ .

Πράγματι ἔαν ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ περιφέρεια αὐτὴ δὲν διέρχεται ἀπὸ τὸ Δ , τότε ἡ $\Gamma\Delta$ ἢ ἡ προέκτασις αὐτῆς θὰ ἔεμνε τὴν περιφέρειαν εἰς ἓνα σημεῖον Δ' . Φέρομεν τὴν $A\Delta'$. Τὸ τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta'$ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον O καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι

$$\widehat{B} + \widehat{\Delta'} = 2 \text{ ὀρθ.} \quad (1)$$

$$\text{Ἄλλὰ, ἔξ ὑποθέσεως εἶναι καὶ } \widehat{B} + \widehat{\Delta} = 2 \text{ ὀρθ.} \quad (2)$$

Παρατηρούμεν, ὅτι αἱ γωνίαι Δ' καὶ Δ ἔχουν τὴν αὐτὴν παραπληρωματικὴν γωνίαν B' ἄρα θὰ εἶναι ἴσαι· δηλ. θὰ εἶναι $\widehat{\Delta} = \widehat{\Delta}'$. τοῦτο ὅμως εἶναι ἄτοπον, διότι ἡ ἔξωτερικὴ γωνία Δ τοῦ τριγώνου $A\Delta\Delta'$ δὲν δύναται νὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἔσωτερικὴν γωνίαν Δ' . Εἰς τὸ ἄτοπον αὐτὸ ἐπέσαμεν, διότι ὑπεθέσαμεν, ὅτι ἡ περιφέρεια O δὲν θὰ διέλθῃ ἀπὸ τὴν τετάρτην κορυφὴν Δ' ἄρα ἡ περιφέρεια O θὰ διέλθῃ καὶ ἀπὸ τὴν τετάρτην κορυφὴν Δ .

2ον. Ὑπόθεσις: Ἔστω τὸ τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$ (Σχ. 227), εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι $\widehat{A} = \widehat{\Gamma}_1$.

Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι τὸ $AB\Gamma\Delta$ εἶναι ἔγγραψιμον εἰς κύκλον.

Ἀπόδειξις: Ἐὰν εἰς τὴν ἰσότητα $\widehat{\Gamma} + \widehat{\Gamma}_1 = 2$ ὀρθ. ἀντικαταστήσωμεν τὴν γωνίαν Γ_1 μὲ τὴν ἴσην της, ἐξ ὑποθέσεως, γωνίαν A , λαμβάνομεν

$$\widehat{\Gamma} + \widehat{A} = 2 \text{ ὀρθαί} \cdot \text{ ἄρα θὰ εἶναι καὶ } \widehat{B} + \widehat{\Delta} = 2 \text{ ὀρθ.}$$

Παρατηροῦμεν ὅτι τὸ τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$ ἔχει τὰς ἀπέναντι γωνίας του παραπληρωματικὰς· ἄρα θὰ εἶναι ἔγγραψιμον εἰς κύκλον, ὅπως ἐδείχθη εἰς τὴν 1ην περίπτωσιν.

3ον. Ὑπόθεσις: Ἔστω τὸ τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$ (Σχ. 230) εἰς τὸ ὁποῖον ἡ πλευρὰ AB φαίνεται ἀπὸ τὰς κορυφὰς Γ καὶ Δ ὑπὸ ἴσας γωνίας· δηλ. ἔστω ὅτι $\widehat{\Gamma}_1 = \widehat{\Delta}_2$.

Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι τὸ τετράπλευρον αὐτὸ εἶναι ἔγγραψιμον εἰς κύκλον.

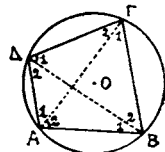
Ἀπόδειξις: Γράφομεν τὴν περιφέρειαν, ἣ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα A, B, Γ . Ἡ περιφέρεια αὕτη θὰ περάσῃ καὶ ἀπὸ τὴν τετάρτην κορυφὴν Δ , διότι τὸ τόξον $A\Delta\Gamma B$ εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἡ AB φαίνεται ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν (§ 294).

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Ἐνα τετράπλευρον εἶναι. . .**

302. Σπουδαία παρατήρησις. Εἰς κάθε τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$ δύναμεθα νὰ ἐξετάσωμεν τὰς τέσσαρας γωνίας του A, B, Γ, Δ , καὶ τὰς ὀκτώ γωνίας $A_1, A_2, B_1, B_2, \Gamma_1, \Gamma_2, \Delta_1, \Delta_2$ (Σχ. 230), τὰς ὁποίας σχηματίζουν αἱ πλευραὶ του μὲ τὰς διαγωνίους του.

Ἐὰν τὸ τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$ εἶναι ἔγγεγραμμένον εἰς κύκλον:

- 1ον. Αἱ γωνίαι A καὶ Γ εἶναι παραπληρωματικαί.
 2ον. Αἱ γωνίαι B καὶ Δ » »



Σχ. 230.

3ον. Αἱ γωνίαι A_1 καὶ B_2 εἶναι ἴσαι, διότι εἶναι ἐγγεγραμμένοι καὶ βαίνουν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου $\Delta\Gamma$.

4ον. Αἱ γωνίαι A_2 καὶ Δ_1 εἶναι ἴσαι, δι' ὁμοιον λόγον.

5ον. Αἱ γωνίαι B_1 καὶ Γ_2 εἶναι ἴσαι » » »

6ον. Αἱ γωνίαι Γ_1 καὶ Δ_2 εἶναι ἴσαι » » »

Ἀντιστρόφως. Ἐὰν ἡ μία ἀπὸ τὰς ἕξ αὐτὰς περιπτώσεις ἀληθεύῃ, τὸ τετράπλευρον $ΑΒΓΔ$ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

Ἀσκήσεις

441. (470). Κάθε ἰσοσκελὲς τραπέζιον εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

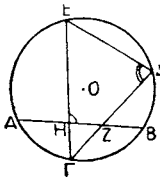
442. (471). Αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τετραπλεύρου σχηματίζουν τετράπλευρον ἐγγράψιμον εἰς κύκλον,

443. (472). Ἀπὸ τὸ μέσον Γ ἑνὸς τόξου $ΑΒ$ ἑνὸς κύκλου O , φέρομεν δύο χορδὰς $\GammaΔ$ καὶ $\GammaΕ$, αἱ ὁποῖαι τέμνουσιν τὴν χορδὴν $ΑΒ$ εἰς τὰ σημεῖα Z καὶ H . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τετράπλευρον $ΕΗΖΔ$ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

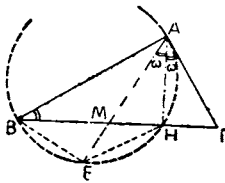
444. (473). Δίδεται τὸ τρίγωνον $ΑΒΓ$, ὀρθογώνιον εἰς τὸ A , τοῦ ὁποῖου ἡ γωνία B εἶναι 30° . Φέρομεν τὸ ὕψος τοῦ AH , τὴν διάμεσον AM καὶ ἀπὸ τὸ B τὴν κάθετον BE ἐπὶ τὴν προέκτασιν τῆς AM . Ἐπίσης φέρομεν τὴν EH . Νὰ ἀποδειχθῇ :

1ον. Ὅτι τὸ τετράπλευρον $ΑΒΕΗ$ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

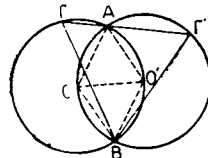
2ον. Ὅτι $BE=EH=AH$.



Σχ. ἀσκ. 443.

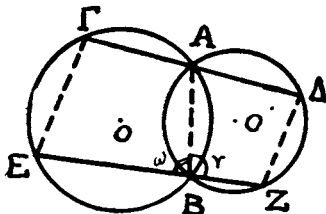


Σχ. ἀσκ. 444.



Σχ. ἀσκ. 445.

445. (474). Δύο ἴσοι κύκλοι O καὶ O' τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B καὶ ἡ διάκεντρος τῶν OO' εἶναι ἴση μετὰ τὴν ἀκτίνα τῶν κύκλων. Ἀπὸ τὸ σημεῖον A φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία τέμνει τὰς περιφερεῖας τῶν κύκλων O καὶ O' εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Γ' ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον $B\Gamma\Gamma'$ εἶναι ἰσοπλευρον.



Σχ. ἀσκ. 446.

446. (475). Ἐὰν δύο περιφέρειαι τέμνονται καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς τομῆς τῶν ἀχθοῦν δύο τυχοῦσαι εὐθεῖαι περατούμεναι εἰς τὰς περιφερεῖας τῶν, αἱ χορδαὶ αἱ ὁποῖαι συνδέουσι τὰ ἄκρα τῶν εὐθειῶν εἶναι παράλληλοι.

447 (476). Ἐὰν διὰ τῶν σημείων τῆς τομῆς δύο περιφερειῶν φέρωμεν παράλληλους, τὰ τμήματα τῶν παραλλήλων

ὑτῶν, τὰ ὅποια ὀρίζουν αἱ περιφέρειαι αὐταί, εἶναι ἴσα.

448. (477). Κάθε τετράπλευρον, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀπέναντι πλευρῶν εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων ἀπέναντι πλευρῶν του εἶναι περιγράψιμον περὶ κύκλον.

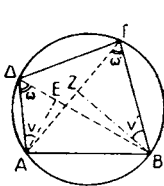
449. (478). Μία γωνία $AB\Gamma$ εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς ἕνα κύκλον O ἢ διχοτόμος BA τῆς γωνίας αὐτῆς τέμνει τὴν περιφέρειαν O εἰς τὸ σημεῖον Δ . Ἀπὸ τὸ Δ φέρομεν τὴν χορδὴν ΔE παράλληλον πρὸς τὴν AB . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\Delta E = B\Gamma$.

450. (479). Εἰς ἕνα κύκλον O δύο χορδαὶ AB καὶ $\Gamma\Delta$ εἶναι κάθετοι μετὰξὺ των. Φέρομεν τὴν διάμετρον GOE . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $BD = AE$.

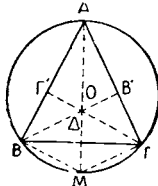
451. (480). Ἐνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἕνα κύκλον O . Συνδέομεν μὲ εὐθείαν τὴν κορυφὴν του A μὲ τυχόν σημεῖον M τοῦ τόξου $B\Gamma$. Ἀπὸ τὸ σημεῖον B φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν AM , ἢ ὅποια τέμνει τὴν χορδὴν MG , εἰς τὸ σημεῖον Δ . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $MB = MA$.

452. (481). Ἐνα τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον O . Ἀπὸ τὴν κορυφὴν A φέρομεν τὴν κάθετον AE ἐπὶ τὴν διαγώνιον BD καὶ ἀπὸ τὴν B τὴν κάθετον BZ ἐπὶ τὴν διαγώνιον AG . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\gammaων. \Delta AE = \gammaων. \Gamma BZ$.

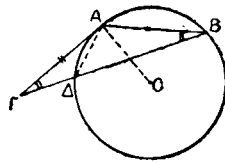
453. (482). Ἐνα τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἕνα κύκλον O φέρομεν τὰ ὕψη BB' καὶ $\Gamma\Gamma'$ τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$, τὰ ὅποια τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Δ . Ἐπίσης φέρομεν καὶ τὴν διάμετρον AOM . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ γωνίαι $B'\Delta\Gamma'$ καὶ $B\Gamma\Delta$ εἶναι ἴσαι.



Σχ. ἀσκ. 452.



Σχ. ἀσκ. 453.



Σχ. ἀσκ. 454.

454. (483). Δίδεται μία περιφέρεια O , μία χορδὴ AB καὶ ἡ ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας εἰς τὸ σημεῖον A . Ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης λαμβάνομεν τμήμα $AG = AB$ καὶ φέρομεν τὴν GB , ἢ ὅποια τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς ἕνα δεύτερον σημεῖον Δ . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\Delta\Gamma = \Delta A$.

455. (484). Ἀπὸ τὸ ἄκρον A μιᾶς διαμέτρου AB ἑνὸς κύκλου O φέρομεν μίαν χορδὴν AG , καὶ ἀπὸ τὸ ἄλλο ἄκρον B , τὴν ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου. Φέρομεν τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας ΓAB , ἢ ὅποια τέμνει τὴν χορδὴν GB εἰς τὸ Z , τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ H καὶ τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ Δ . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $BD = BZ$ καὶ ὅτι $ZH = HA$.

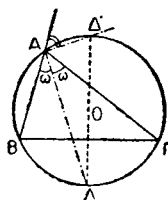
456. (485). Ἀπὸ ἕνα σημεῖον A , τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου O , φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας AB καὶ AG φέρομεν τὴν διάμετρον $GO\Delta$. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ εὐθείαι AO καὶ BA εἶναι παράλληλοι.

457. (486). Δύο περιφέρειαι O καὶ O' ἐφάπτονται εἰς τὸ σημεῖον A . Ἀπὸ τὸ A φέρομεν τυχούσαν τέμνουσαν $BA\Gamma$, ἢ ὅποια τέμνει τὴν περιφέρειαν O

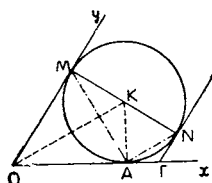
εἰς τὸ σημεῖον Β καὶ τὴν Ο' εἰς τὸ Γ. Ἀπὸ τὸ Β φέρομεν τὴν χορδὴν ΒΔ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ ἀπὸ τὸ Γ τὴν χορδὴν ΓΕ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΔΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν κοινὴν ἐφαπτομένην ΑΤ τῶν περιφερειῶν Ο καὶ Ο' εἰς τὸ σημεῖον Α.

458. (487). Ἐνα τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἕνα κύκλον Ο φέρομεν τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας Α, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ Δ' ἐπίσης φέρομεν καὶ τὴν διχοτόμον τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας Α, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ Δ'. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΔΔ' εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ.

459. (488). Προεκτείνομεν τὴν διάμετρον ΑΒ ἐνὸς κύκλου Ο κατὰ ἕνα μῆκος ΒΓ ἴσον μὲ τὴν ἀκτίνα. Ἀπὸ τὸ σημεῖον Γ φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην ΓΔ καὶ τὴν χορδὴν ΔΑ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ $\Delta\Delta = \Delta\Gamma$.



Σχ. ἀσκ. 458.



Σχ. ἀσκ. 460.

460. (491). Δίδεται μία γωνία xOy καὶ ἕνα σημεῖον Α ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Οκ. Γράφομεν περιφέρειαν κύκλου Κ ἐφαπτομένην τῆς Οκ εἰς τὸ Α καὶ φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας τῆς περιφέρειᾶς Κ, τὰς παραλλήλους πρὸς τὴν Ογ. Ἐὰν Μ καὶ Ν εἶναι τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν ἐφαπτομένων τούτων, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ ΑΜ καὶ ΑΝ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς διχοτόμους τῆς γωνίας xOy .

461. (492). Αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς δύο σημεῖα Α καὶ Β μιᾶς περιφερειᾶς κέντρου Ο τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Γ. Ἡ κάθετος, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ Α ἐπὶ τὴν ΓB τέμνει τὴν ΟΓ εἰς τὸ σημεῖον Δ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΑΔ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτίνα τοῦ κύκλου Ο.

462. (493). Δύο χορδαὶ κύκλου, κάθετοι εἰς τὰ ἄκρα τρίτης χορδῆς, εἶναι αἱ ἀπέναντι πλευραὶ ὀρθογωνίου ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον.

463. (494). Αἱ ἐφαπτόμεναι ΑΓ καὶ ΒΓ μιᾶς περιφερειᾶς κέντρου Ο εἰς δύο σημεῖα Α καὶ Β αὐτῆς, τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Γ. Φέρομεν τὴν διάμετρον ΑΟΔ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΑΓ λαμβάνομεν ἕνα τμήμα ΓΕ=ΑΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα Δ, Β, Ε κείνται ἐπ' εὐθείας.

464. (495). Ἐπὶ μιᾶς περιφερειᾶς Ο λαμβάνομεν τρία τυχόντα σημεῖα Α, Β, Γ, τὸ μέσον Α' τοῦ τόξου ΒΓ καὶ τὸ σημεῖον Β', ἄκρον τῆς διαμέτρου ΒΟΒ'. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ Α'Β', αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Δ καὶ τὰς εὐθείας ΑΑ' καὶ Β'Γ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ε. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΔΕ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν χορδὴν ΒΓ.

465. (496). Δίδεται περιφέρεια διαμέτρου ΑΟΒ καὶ Γ τυχὸν σημεῖον τῆς διαμέτρου ΑΒ. Ἀπὸ τὸ ἄκρον Δ τῆς ἀκτίνος ΟΔ, καθέτου ἐπὶ τὴν ΑΒ, φέρομεν τὴν $\Delta\Gamma$, ἡ ὁποία προεκτεινομένη τέμνει τὴν περιφέρειαν Ο εἰς τὸ σημεῖον Ε. Φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην τῆς περιφερειᾶς εἰς τὸ σημεῖον Ε, ἡ ὁποία τέμνει τὴν

προέκτασιν τῆς διαμέτρου AB εἰς τὸ σημεῖον Z . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $ZΓ = ZE$.

466. (498). Εἰς ἓνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ἐγγράφομεν ἓνα τετράγωνον, τοῦ ὁποῦν μία πλευρὰ νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ὑποτείνουσας. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας μὲ τὸ κέντρον τοῦ τετραγώνου, εἶναι διχοτόμος τῆς ὀρθῆς γωνίας.

467. (499). Ἐνα τρίγωνον $ABΓ$ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἓνα κύκλον O . Τὰ ὕψη του τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον H .

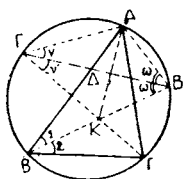
1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα MN , ἡ ὁποία συνδέει τὸ μέσον M τῆς AH μὲ τὸ μέσον N τῆς AB εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν OD , ἡ ὁποία συνδέει τὸ κέντρον O μὲ τὸ μέσον τῆς $AΓ$.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τετράπλευρον $OAMN$ εἶναι παραλληλόγραμμον.

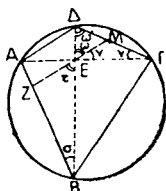
468. (500). Δίδεται ἓνα ἰσόπλευρον τρίγωνον $ABΓ$. Μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν A καὶ μὲ ἀκτίνα τὴν AB γράφομεν τόξον $BΔΓ$ μικρότερον ἡμικυκλείας. Ἐπὶ τοῦ τόξου $BΔΓ$ λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον $Δ$ καὶ φέρομεν τὰς χορδὰς BA καὶ $ΔΓ$. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει τὸ μέσον E τῆς πλευρᾶς AB μὲ τὸ μέσον Z τῆς $ΔΓ$ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν. ἡ ὁποία συνδέει τὸ μέσον H τῆς πλευρᾶς $AΓ$ μὲ τὸ μέσον $Θ$ τῆς BA .

469. (501). Εἰς ἓνα κύκλον O φέρομεν τυχούσαν χορδὴν AB ἀπὸ τυχὸν σημείου M τῆς περιφέρειας O φέρομεν τὰς χορδὰς MA καὶ MB προεκτείνομεν τὴν AM καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως λαμβάνομεν τμήμα $MΔ = MB$. Ἐὰν $Γ$ εἶναι τὸ μέσον τοῦ τόξου AMB , νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ $MΓ$ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν BA .

470. (502). Αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν B καὶ $Γ$ ἐνὸς τριγώνου $ABΓ$ τέμνουν τὴν περιφέρειαν, τὴν περιγεγραμμένην περὶ τὸ τρίγωνον, εἰς τὰ σημεῖα B' καὶ $Γ'$. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα $B'Γ'$ εἶναι μεσοκάθετος τοῦ τμήματος AK ὅπου K εἶναι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου $ABΓ$.



Σχ. ἀσκ. 470.



Σχ. ἀσκ. 471.

471. (503). Ἐνα τετράπλευρον $ABΓΔ$, τοῦ ὁποῦν αἱ διαγώνιοι $AΓ$ καὶ BA εἶναι κάθετοι μεταξύ των καὶ τέμνονται εἰς ἓνα σημεῖον E , εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἓνα κύκλον O . Ἀπὸ τὸ μέσον M τῆς $ΓΔ$ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ME , ἡ ὁποία προεκτετινομένη τέμνει τὴν AB εἰς τὸ σημεῖον Z . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ MZ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν AB .

472. (504). Ἐπὶ περιφέρειας O λαμβάνομεν τόξον AB . Ἀπὸ τὸ μέσον $Γ$ τοῦ τόξου AB φέρομεν κάθετον $ΓE$ ἐπὶ τὴν διάμετρον $AOΔ$, ἡ ὁποία τέμνει τὴν χορδὴν AB εἰς τὸ σημεῖον Z . Φέρομεν τὴν χορδὴν $ΓΔ$, ἡ ὁποία τέμνει τὴν AB εἰς τὸ σημεῖον H . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $AZ = ZH = ΓZ$.

473. (505). Ἐπὶ μιᾶς περιφέρειας λαμβάνομεν κατὰ σειρὰν τὰ τέσσαρα

σημεῖα A, B, Γ, Δ . Ἐὰν $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ εἶναι τὰ μέσα τῶν τόξων $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$. νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ εὐθεῖαι $\alpha\gamma$ καὶ $\beta\delta$ εἶναι κάθετοι μεταξύ των.

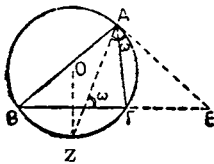
474. (506). Ἐπὶ μιᾶς περιφερείας λαμβάνομεν κατὰ σειρὰν τὰ σημεῖα B, A, Γ οὕτως, ὥστε τὰ τόξα BA καὶ $A\Gamma$ νὰ εἶναι μικρότερα τῆς ἡμιπεριφερείας. Φέρομεν τὴν χορδὴν ΔE , ἡ ὁποία συνδέει τὰ μέσα Δ καὶ E τῶν τόξων BA καὶ $A\Gamma$ καὶ ἡ ὁποία τέμνει τὰς χορδὰς AB καὶ $A\Gamma$ εἰς τὰ σημεῖα Z καὶ H ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $AZ=AH$.

475. (507). Ἐνα τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἕνα κύκλον O φέρομεν τὴν διχοτόμον AD τῆς γωνίας A , ἡ ὁποία τέμνει τὴν $B\Gamma$, εἰς τὸ Δ . Ἐπίσης φέρομεν καὶ τὴν ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου εἰς τὸ σημεῖον A , ἡ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς $B\Gamma$ εἰς τὸ σημεῖον E . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $EA=ED$.

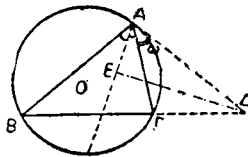
476. (508). Ἐνα τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἕνα κύκλον O . Ἡ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου εἰς τὸ σημεῖον A τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς $B\Gamma$ εἰς τὸ σημεῖον Δ .

1ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου $A\Gamma\Delta$, ἐὰν γνωρίζωμεν τὰς γωνίας A, B, Γ τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$.

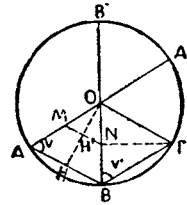
2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας A τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας Δ τοῦ τριγώνου $A\Gamma\Delta$.



Σχ. ἀσκ. 475.



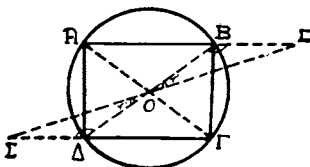
Σχ. ἀσκ. 476.



Σχ. ἀσκ. 477.

477. (509). Ἐπὶ τῆς περιφερείας ἑνὸς κύκλου O λαμβάνομεν τρία σημεῖα A, B, Γ , οὕτως ὥστε $\text{τοξ.}AB = \text{τοξ.}B\Gamma$. φέρομεν τὰς διαμέτρους AOA' καὶ BOB' . ἐπίσης φέρομεν τὴν BM κάθετον ἐπὶ τὴν AA' καὶ τὴν GN κάθετον ἐπὶ τὴν BB' . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ MN εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν διχοτόμον OH τῆς γωνίας AOB .

478. (510). Ἐξ ἑνὸς σημείου A , κειμένου ἐκτὸς κύκλου O , φέρομεν τὴν τέμνουσαν $AB\Gamma$ τοῦ κύκλου O . Εἰς τὰ σημεῖα B καὶ Γ φέρομεν ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου, αἱ ὁποῖαι συναντοῦν εἰς τὰ σημεῖα M καὶ N τὴν κάθετον, τὴν ἀγομένην ἐκ τοῦ A ἐπὶ τὴν διάμετρον τοῦ κύκλου, τὴν διερχομένην ἐκ τοῦ A . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι: $BM=GN$ καὶ $AM=AN$.



Σχ. ἀσκ. 479.

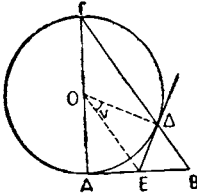
479. (511). Ἐξετάζομεν ὅλα τὰ ὀρθογώνια τὰ ἐγγεγραμμένα εἰς ἕνα κύκλον O καὶ τῶν ὁποίων μία πλευρά, ἢ ἡ προέκτασις αὐτῆς, διέρχεται ἀπὸ δοθῆν σημείου Σ . Νὰ ἀπο-

δειχθῇ, ὅτι ἡ ἀπέναντι πλευρὰ διέρχεται ἐπίσης ἀπὸ ἑνὸς ὁρισμένου σημείου.

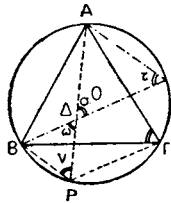
480. (512). Ἐὰν μία τῶν καθέτων πλευρῶν ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι

διάμετρος κύκλου, ἡ ἐφαπτομένη τῆς περιφέρειᾶς τοῦ κύκλου αὐτοῦ εἰς τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῆς περιφέρειᾶς καὶ τῆς ὑποτείνουσας, διχοτομεῖ τὴν ἄλλην κάθετον πλευρᾶν.

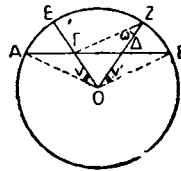
481. (513). Ἐνα ἰσόπλευρον τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἕνα κύκλον O . Ἐάν ἐπὶ τοῦ τόξου $B\Gamma$ λάβωμεν τυχὸν σημεῖον P καὶ φέρωμεν τὰς χορδὰς $PA, PB, P\Gamma$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $PA = PB + P\Gamma$.



Σχ. ἀσκ. 480.



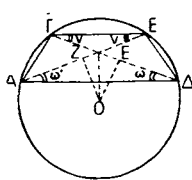
Σχ. ἀσκ. 481.



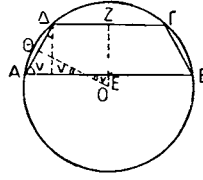
Σχ. ἀσκ. 482.

482. (514). Ἐάν χορδὴ τόξου διαιρεθῇ εἰς τρία ἴσα μέρη καὶ ἀχθοῦν αἱ ἀκτῖνες, αἱ διερχόμεναι ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως, αὗται διαιροῦν τὸ ἀντίστοιχον τόξον τῆς χορδῆς εἰς τρία τόξα, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ μεσαῖον εἶναι μεγαλύτερον τῶν δύο ἄλλων, τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα μεταξύ των.

482. (515). Ἴσαι χορδαὶ τοῦ αὐτοῦ κύκλου τεμνόμεναι (εἰς σημεῖον διάφορον τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου), εἶναι διαγώνιοι ἰσοσκελοῦς τραπέζιου.



Σχ. ἀσκ. 482.



Σχ. ἀσκ. 483.

483. (516). Ἐνα τραπέζιον $AB\Gamma\Delta$ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἕνα κύκλον O . Ἡ γωνία A , ἡ προσκειμένη εἰς τὴν μεγάλην βάσιν AB , εἶναι 45° . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ μικρὰ βάσις $\Gamma\Delta$ εἶναι διπλασία τῆς ἀποστάσεως OE τοῦ κέντρου ἀπὸ τὴν μεγάλην βάσιν.

484. (517). 1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ περιφέρειαι O καὶ O' , αἱ ὁποῖαι ἔχουν διαμέτρους ἀντιστοίχως τὰς δύο πλευρὰς AB καὶ $A\Gamma$ ἑνὸς τριγώνου $AB\Gamma$ ἔχουν τὸ δεύτερον κοινὸν σημεῖον A' ἐπὶ τῆς πλευρᾶς $B\Gamma$.

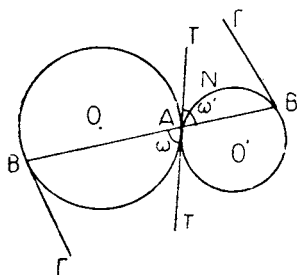
2ον. Ἀπὸ τὰ σημεῖα B καὶ Γ φέρομεν δύο τυχούσας χορδὰς παραλλήλους μεταξύ των, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὰς περιφέρειᾶς O καὶ O' εἰς τὰ σημεῖα B' καὶ Γ' . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα $B'\Gamma'$ διέρχεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν A .

485. (518). Δύο κύκλοι O καὶ O' ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς εἰς τὸ σημεῖον A . Ἀπὸ τὸ ἄκρον B τῆς διαμέτρου AB τῆς μεγαλύτερας περιφέρειᾶς φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην $B\Gamma$ τῆς μικροτέρας περιφέρειᾶς O' , ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν O εἰς τὸ σημεῖον Δ . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ $A\Gamma$ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας $B\Delta\Delta$.

486. (519). Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς ἢ ἐσωτερικῶς καὶ φέρομεν ἀπὸ τὸ σημεῖον τῆς ἀφῆς τῶν μίαν εὐθείαν περατουμένην εἰς τὰς περιφέρειας τῶν κύκλων, νὰ ἀποδειχθῇ :

1ον. Ὅτι τὰ τόξα τῶν δύο περιφερειῶν, τὰ ὅποια κεῖνται ἐκατέρωθεν τῆς εὐθείας, ἔχουν τὰ αὐτὰ μέτρα.

2ον. Ὅτι αἱ ἐφαπτόμεναι τῶν περιφερειῶν εἰς τὰ ἄκρα τῆς εὐθείας εἶναι παράλληλοι.



Σχ. ἀσκ. 486.

487. (520). Εἰς ἓνα κύκλον O διδεται μία διάμετρος αὐτοῦ AB με κέντρον τυχὸν σημείον Γ τῆς περιφέρειας O γράφομεν περιφέρειαν ἐφαπτομένην τῆς διαμέτρου AB ἀπὸ τὰ σημεῖα A καὶ B φέρομεν ἐφαπτομένας AD καὶ BE τοῦ κύκλου Γ . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ ἐφαπτόμεναι AD καὶ BE εἶναι παράλληλοι, οἷαδήποτε καὶ ἂν εἶναι ἡ θέσις τοῦ σημείου Γ .

488. (521). Δίδεται μία περιφέρεια O , ἓνα σημεῖον M ἐπὶ τῆς περιφέρειας O , μία εὐθεῖα xy ἐκτὸς τῆς περιφέρειας O καὶ ἓνα σημεῖον N ἐπὶ τῆς xy . Γράφομεν μίαν περιφέρειαν με μεταβλητὴν ἀκτίνα, ἡ ὅποια νὰ διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα M καὶ N καὶ νὰ τέμνῃ τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ σημεῖον A καὶ τὴν εὐθείαν xy εἰς τὸ σημεῖον B . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα BA τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς ἓνα δεῦτερον σημεῖον Σ , τὸ ὅποιον εἶναι ὠρισμένον.

489. (522). Δύο περιφέρειαι ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς τὸ σημεῖον A καὶ ἡ κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη ἐφάπτεται αὐτῶν εἰς τὰ σημεῖα B καὶ Γ ἀντιστοίχως. Ἐὰν, διὰ τοῦ σημείου A , ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα αὐτὰς εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ E ἀντιστοίχως καὶ προεκταθοῦν αἱ ΔB καὶ $E\Gamma$, μέχρι τῆς συναντήσεώς των εἰς ἓνα σημεῖον Z , νὰ δειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία ΔZE εἶναι ὀρθή.

490. (523). Δύο περιφέρειαι O καὶ O' διέρχονται διὰ τῶν κορυφῶν B καὶ Γ ἐνὸς τριγώνου $AB\Gamma$ καὶ τέμνουν τὰς πλευράς AB καὶ $A\Gamma$, ἡ μὲν O εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ E ἀντιστοίχως, ἡ δὲ O' εἰς τὰ σημεῖα Z καὶ H . Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΔE καὶ ZH εἶναι παράλληλοι.

491. (534). Εἰς ἓνα κύκλον O φέρομεν δύο χορδὰς AB καὶ $A\Gamma$ καὶ τὴν ἐφαπτομένην τοῦ AE εἰς τὸ A . Φέρομεν μίαν χορδὴν παράλληλον πρὸς τὴν ἐφαπτομένην AE , ἡ ὅποια τέμνει τὰς AB καὶ $A\Gamma$ εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Z . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα B, Γ, Z καὶ Δ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφέρειας.

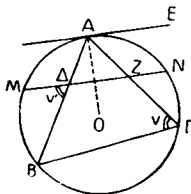
492. (535). Δίδεται μία διάμετρος AB ἐνὸς κύκλου O καὶ ἓνα σημεῖον Γ ἐπὶ τῆς AB ἢ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς AB . Ἀπὸ τὸ σημεῖον Γ ὑψοῦμεν κάθετον $\Gamma\epsilon$. Εἰς τυχὸν σημείον Δ τῆς περιφέρειας φέρομεν ἐφαπτομένην αὐτῆς, ἡ ὅποια τέμνει τὴν xy εἰς τὸ σημεῖον E . Ὁ κύκλος ὁ περιγεγραμμένος περὶ τὸ τρίγωνον $\Gamma B\Delta$ τέμνει τὴν xy εἰς τὸ σημεῖον Z .

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα A, Z, Δ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

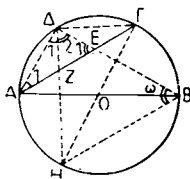
2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $E\Delta = EZ$.

493. (536). Ἀπὸ τὰ ἄκρα A καὶ B μιᾶς διαμέτρου AB ἐνὸς κύκλου O φέρομεν δύο χορδὰς $A\Gamma$ καὶ $B\Delta$, αἱ ὅποια τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον E καὶ τοι-

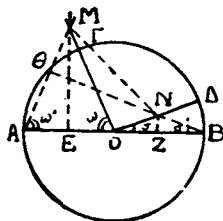
αὐτας, ὥστε τὸ Γ νὰ εἶναι τὸ μέσον τοῦ τόξου ΒΔ. Ἐκ τῆς Δ φέρομεν τὴν χορδὴν ΔΗ κάθετον ἐπὶ τὴν ΔΓ, ἣ ὅποια τέμνει τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $AZ=ZE$.



Σχ. ἀσκ. 491.



Σχ. ἀσκ. 493.



Σχ. ἀσκ. 494.

494. (537). Εἰς ἓνα κύκλον Ο δίδεται μία διάμετρος τοῦ ΑΒ· ἀπὸ τὸ κέντρον Ο φέρομεν τὰς ἀκτίνιας ΟΓ καὶ ΟΔ καθετοῦς μεταξύ τῶν ἀπὸ τὰ μέσα Ε καὶ Ζ τῶν ἀκτίνων ΟΑ καὶ ΟΒ φέρομεν καθετοῦς ἐπὶ τὴν ΑΒ, αἱ ὅποια τέμνουσιν τὰς ἀκτίνιας ΟΓ καὶ ΟΔ, ἢ τὰς προεκτάσεις τῶν εἰς τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν ἀντιστοίχως· φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΜ καὶ ΒΝ, αἱ ὅποια τέμνοντα εἰς τὸ σημεῖον Θ. Θὰ ἀποδειχθῇ :

1ον. Ὅτι τὸ σημεῖον Θ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου Ο.

2ον. Ὅτι τὰ τέσσαρα σημεῖα Μ, Θ, Ο, Ν κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.

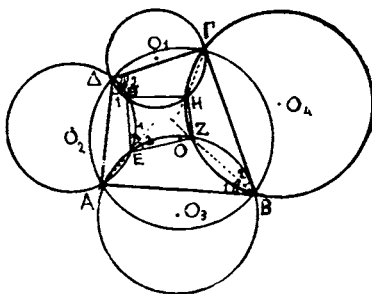
495. (538). Δύο περιφέρειαι Ο καὶ Ο' ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς εἰς ἓνα σημεῖον Α. Φέρομεν τυχοῦσαν χορδὴν ΒΓ τῆς περιφερείας Ο, ἐφαπτομένην τῆς μικροτέρας περιφερείας Ο' εἰς ἓνα σημεῖον Δ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΔ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΒΑΓ.

496. (539). Αἱ περιφέρειαι, αἱ ὅποια ἔχουν χορδὰς τὰς πλευρὰς ἐγγεγραμμένου τετραπλεύρου, τέμνοντα εἰς σημεῖα, τὰ ὅποια εἶναι κορυφαὶ ἄλλου τετραπλεύρου ἐγγραψίμου εἰς κύκλον.

497. (524). Δίδεται ἓνα τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἓνα σημεῖον Δ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΒΓ. Γράφομεν τὴν περιφέρειαν, ἣ ὅποια διέρχεται ἀπὸ τὸ Δ καὶ ἐφάπτεται τῆς πλευρᾶς ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Ε καὶ τὴν περιφέρειαν Ο, ἣ ὅποια διέρχεται ἀπὸ τὸ Δ καὶ ἐφάπτεται τῆς ΑΓ εἰς τὸ Γ. Αἱ περιφέρειαι, αὐταὶ τέμνοντα εἰς ἓνα δεύτερον σημεῖον Ε. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ Ε κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

498. (525). Δύο περιφέρειαι Ο καὶ Ο' ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς ἓνα σημεῖον Α. Ἐκ τυχόν σημείου Β τῆς περιφερείας Ο φέρομεν τὴν ΒΔ ἐφαπτομένην τῆς περιφερείας Ο' εἰς τὸ σημεῖον Δ, ἣ ὅποια τέμνει τὴν περιφέρειαν Ο εἰς ἓνα δεύτερον σημεῖον Γ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ χορδὴ ΑΔ διχοτομεῖ τὴν παραπληρωματικὴν γωνίαν τῆς γωνίας ΒΑΓ.

499. (526). Δύο περιφέρειαι Ο καὶ Ο' τέμνοντα εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β·

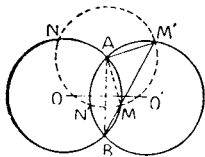


Σχ. ἀσκ. 496.

ἀπὸ τὸ σημεῖον A φέρομεν τυχοῦσαν τέμνουσαν $\Gamma\Delta$, ἡ ὁποία τέμνει τὰς περιφερείας O καὶ O' εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ . Φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας ΓE καὶ ΔE εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ , αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ E . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία $\Gamma E \Delta$ μένει σταθερά, ὅταν ἡ τέμνουσα στρέφεται περὶ τὸ A .

500. (527). Δύο περιφέρειαι O καὶ O' τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B . ἀπὸ τὸ σημεῖον A φέρομεν δύο τεμνούσας $\Gamma A \Gamma'$ καὶ $\Delta A \Delta'$, αἱ ὁποῖαι τέμνουσιν τὴν O εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ καὶ τὴν O' εἰς τὰ Γ' καὶ Δ' . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ εὐθεῖαι $\Gamma \Delta$ καὶ $\Gamma' \Delta'$ τέμνονται ὑπὸ σταθερὰν γωνίαν.

501. (528). Δύο ἴσαι περιφέρειαι O καὶ O' τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B . Μὲ κέντρον τὸ Ἀγράφομεν μίαν περιφέρειαν, ἡ ὁποία τέμνει τὰς δύο πρώτας. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ σημεῖον B καὶ τὰ δύο σημεῖα τῆς τομῆς τῆς τρίτης περιφερείας μετὰ τὰς δόθεισας O καὶ O' , κεῖνται ἐπὶ εὐθείας γραμμῆς.



Σχ. ἀσκ. 501.

502. (529). Δύο κύκλοι O καὶ O' κεῖνται ὁ ἓνας ἐκτὸς τοῦ ἄλλου· φέρομεν τὴν κοινὴν ἐξωτερικὴν ἐφαπτομένην $M M'$. Ἡ διάκεντρος $O O'$ προεκτεινομένη τέμνει τὴν περιφέρειαν O εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B καὶ τὴν O' εἰς τὰ σημεῖα A' καὶ B' (ἡ σειρά τῶν σημείων εἶναι A, B, A', B').

Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ MA εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν $M'B'$ καὶ ἡ MB κάθετος ἐπὶ τὴν $M'A'$.

503. (530). Δίδεται μία γωνία xOy , ἓνα σημεῖον E ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς $O\Delta$ καὶ δύο σημεῖα A καὶ B ἐπὶ τῆς Ox . Αἱ περιφέρειαι αἱ περιγεγραμμέναι περὶ τὰ τρίγωνα OAE, OBE τέμνουσιν τὴν Oy εἰς τὰ σημεῖα Z καὶ H . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $AB=HZ$.

504. (531). Δύο περιφέρειαι O καὶ O' ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς τὸ σημεῖον A . Ἡ περιφέρεια O' ἐφάπτεται καὶ μιᾶς εὐθείας xy εἰς ἓνα σημεῖον αὐτῆς B . Φέρομεν τὴν χορδὴν BA , ἡ ὁποία προεκτεινομένη τέμνει τὴν περιφέρειαν O εἰς τὸ σημεῖον Γ , Νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. Ὅτι ἡ διάμετρος $\Gamma O \Delta$ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν xy εἰς τὸ σημεῖον E .

2ον. Ὅτι τὰ τέσσαρα σημεῖα A, B, E, Δ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.

505. (532). Δίδεται ὁ κύκλος O καὶ ἓνα σημεῖον A ἐκτὸς αὐτοῦ· με κέντρον τὸ A καὶ ἀκτίνα τὴν AO γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου O εἰς τὰ σημεῖα B καὶ Γ , τὴν δὲ προέκτασιν τῆς OA εἰς τὸ Δ . Ἀπὸ τυχόν σημεῖον M τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου O φέρομεν τὰς χορδὰς MB καὶ $M\Gamma$, αἱ ὁποῖαι τέμνουσιν τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου A εἰς τὰ σημεῖα E καὶ Z . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $ME=\Delta Z$.

506. (533). Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας λαμβάνομεν τέσσαρα σημεῖα A, B, Γ, Δ τοιαῦτα ὥστε $AB=BG=\Gamma\Delta$ με πλευρὰν τὴν $B\Gamma$ κατασκευάζομεν ἰσόπλευρον τρίγωνον $MB\Gamma$ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν AM , ἡ ὁποία προεκτεινομένη τέμνει τὴν κάθετον, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Δ ἐπὶ τὴν AA , εἰς τὸ σημεῖον N . Νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. Ὅτι $AM=MN$.

2ον. Ὅτι ἡ BM εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓN .

3ον. Ὅτι τὸ τετράπλευρον $M\Gamma\Delta N$ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄.

ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

303. Λύσεις και διερεύνσεις γεωμετρικῶν προβλημάτων.

Εἰς τὴν § 75 ἐδώσαμεν τὸν ὄρισμὸν τοῦ Γεωμετρικοῦ προβλήματος καὶ εἰς προηγούμενα κεφάλαια ἐλύσαμεν μερικὰ ἀπλᾶ γεωμετρικὰ προβλήματα, ἀλλὰ δὲν ἐζητήσαμεν νὰ εὕρωμεν ποίας συνθήκας ὀφείλουν νὰ πληροῦν τὰ δεδομένα ἐνὸς προβλήματος διὰ νὰ εἶναι δυνατὴ ἡ λύσις του. Διότι δὲν ἀρκεῖ νὰ τίθενται οἱ ὄροι (συνθήκαι) ἐνὸς προβλήματος διὰ νὰ ἔχη τοῦτο λύσιν.

Π.χ. Ἐστω ὅτι ἔχομεν τρία στελέχη τῶν 16 ἐκ., 20 ἐκ. καὶ τῶν 60 ἐκ. Ἐὰν θεωρήσωμεν τὰ στελέχη αὐτὰ ὡς πλευρὰς ἐνὸς τριγώνου, εἶναι φανερόν, ὅτι εἶναι ἀδύνατον νὰ κατασκευάσωμεν ἕνα τρίγωνον, ὅπωςδηποτε καὶ ἂν τὰ προσαρμόσωμεν.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν, ὅτι **τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον**.

Ἐπίσης ἀδύνατος εἶναι ἡ κατασκευὴ ἐνὸς τριγώνου, ὅταν δίδεται μία πλευρὰ του καὶ δύο προσκείμεναι γωνίαι (§ 176), ἐὰν τὸ ἄθροισμα τῶν δύο γωνιῶν εἶναι ἴσον ἢ μεγαλύτερον τῶν δύο ὀρθῶν.

Ἐὰν ἔχωμεν δύο στελέχη τῶν 16 ἐκ. καὶ 20 ἐκ. δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τόσα τρίγωνα, ὅσα θέλομεν, ἀρκεῖ νὰ ἀφήσωμεν αὐθαίρετον τὸ μῆκος τῆς τρίτης πλευρᾶς του. Πάντως τὸ μῆκος τῆς πρέπει νὰ περιέχεται μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν 4 ἐκ., (διαφορὰ δύο πλευρῶν) καὶ 36 ἐκ., (ἄθροισμα δύο πλευρῶν).

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα **ἔχει ἀπείρους λύσεις** ἢ ὅτι **εἶναι ἀόριστον**.

Τέλος, ἐὰν ἔχωμεν τρία στελέχη τῶν 16 ἐκ., 20 ἐκ. καὶ 28 ἐκ. δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ἕνα καὶ μόνον τρίγωνον, ἂν θεωρήσωμεν τὰ στελέχη αὐτὰ ὡς πλευρὰς ἐνὸς τριγώνου.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα **ἔχει μίαν λύσιν καὶ μίαν μόνον καὶ εἶναι ὀρισμένον**.

Τὰ ἀνωτέρω παραδείγματα δεικνύουν, ὅτι εἰς ἕνα γεωμετρικὸν πρόβλημα εἶναι ἀπαραίτητον, ὄχι μόνον νὰ κατασκευάζωμεν τὸ ζητούμενον σχῆμα, ἀλλὰ καὶ **νὰ διερευνῶμεν αὐτό**, δηλ. **νὰ ζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν ποίας συνθήκας ὀφείλουν νὰ πληροῦν τὰ δεδομένα τοῦ προ-**

βλήματος, ἔνα τὸ πρόβλημα ἔχει μίαν λύσιν ἢ ἀπείρους λύσεις ἢ καμμίαν.

Κατωτέρω θὰ λύσωμεν καὶ ἄλλα γεωμετρικὰ προβλήματα καὶ θὰ διερευνήσωμεν αὐτά, ἂν τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος εἶναι τοιαῦτα, ὥστε νὰ δικαιολογοῦν τοιαύτην διερεύνησιν.

1. Κατασκευή τριγώνων

304. Εἰς τὴν § 128 ἐλύσαμεν τὸ πρόβλημα :

Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν μίαν πλευρὰν τοῦ $B\Gamma = a$ καὶ τὰς προσκειμένας εἰς αὐτὴν γωνίας $B = \omega$ καὶ $\Gamma = \nu$.

Διὰ νὰ ἔχη τὸ πρόβλημα αὐτὸ λύσιν, πρέπει αἱ δοθεῖσαι γωνίαι ω καὶ ν νὰ ἔχουν ἄθροισμα μικρότερον τῶν δύο ὀρθῶν· δηλ. πρέπει νὰ εἶναι $\widehat{\omega} + \widehat{\nu} < 2 \text{ ὀρθ.}$

Ὅμοιως εἰς τὴν § 129 ἐλύσαμεν τὸ πρόβλημα :

Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν δύο πλευρὰς τοῦ καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν.

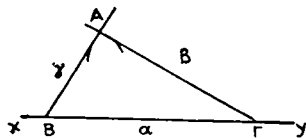
305. Πρόβλημα. **Νὰ κατασκευασθῇ, ἓνα τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν τὰς τρεῖς πλευρὰς τοῦ a, β, γ .**

Ἡ κατασκευή τοῦ τριγώνου γίνεται, ὅπως ἐδείχθη εἰς τὴν § 130. Διερεύνησις. 1ον. Ἐὰν αἱ δύο περιφέρειαι τέμνονται ἐκτὸς τῆς $B\Gamma$ (§χ. 231), δηλ. ἐὰν εἶναι

$$\beta - \gamma < a < \beta + \gamma$$

τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ δύναται νὰ κατασκευασθῇ καὶ εἶναι τελείως ὠρισμένον.

2ον. Ἐὰν αἱ δύο περιφέρειαι τέμνονται ἐπὶ τῆς $B\Gamma$, δηλ. ἐὰν εἶναι $a = \beta + \gamma$, αἱ περιφέρειαι ἐφάπτονται καὶ τὸ τρίγωνον γίνεται μία εὐθεῖα γραμμὴ $BA\Gamma$,



Σχ. 231.

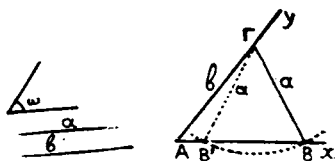
δηλ. τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον.

3ον. Ἐὰν αἱ περιφέρειαι δὲν τέμνονται. δηλ. ἐὰν $a > \beta + \gamma$, τὸ σημεῖον A δὲν ὑπάρχει καὶ τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον.

306. Πρόβλημα. **Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν δύο πλευρὰς τοῦ καὶ τὴν γωνίαν, ἣ ὁποία κεῖται ἀπέναντι τῆς μιᾶς αὐτῶν.**

Ἐστωσαν a καὶ β αἱ δύο δοθεῖσαι πλευραὶ καὶ $\widehat{A} = \omega$ ἡ δοθεῖσα γωνία, ἣ ὁποία κεῖται ἀπέναντι τῆς πλευρᾶς a .

Κατασκευάζομεν (Σχ. 232) μίαν γωνίαν $\kappa\Lambda\gamma$ ἴσην μετὴν δοθεῖσαν γωνίαν ω . Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς $\Lambda\gamma$ λαμβάνομεν τμήμα $\Lambda\Gamma$ ἴσον μετὴν δοθεῖσαν πλευρὰν β . Μετὸ κέντρον τὸ σημεῖον Γ καὶ μετὰ ἀκτῖνα τὴν πλευρὰν α γράφομεν ἕνα τόξον κύκλου ἔστω B ἕνα σημεῖον τῆς τομῆς τοῦ τόξου αὐτοῦ καὶ τῆς πλευρᾶς $\Lambda\kappa$. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΓB . Τὸ σχηματισθὲν τρίγωνον $\Lambda B\Gamma$ εἶναι τὸ ζητούμενον· διότι ἔχει τὴν γωνίαν Λ ἴσην μετὴν δοθεῖσαν γωνίαν ω , καὶ τὰς πλευρὰς $\Lambda\Gamma = \beta$ καὶ $\Gamma B = \alpha$.



Σχ. 232.

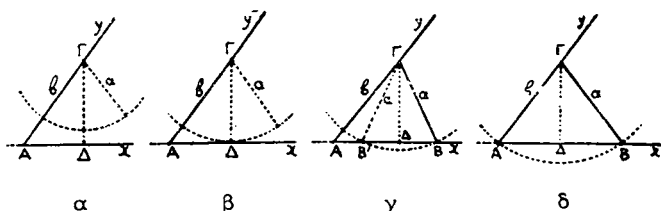
Διερεύνησις. Διὰ νὰ εἶναι τὸ πρόβλημα δυνατόν, πρέπει ἡ περιφέρεια, ἡ ὁποία γράφεται μετὸ κέντρον τὸ σημεῖον Γ καὶ μετὰ ἀκτῖνα τὴν α , νὰ τέμνῃ τὴν ἡμιευθεῖαν $\Lambda\kappa$.

Τὸ πρόβλημα λοιπὸν θὰ ἔχῃ τόσας λύσεις, ὅσα εἶναι τὰ κοινὰ σημεῖα τῆς περιφέρειας (Γ, α) καὶ τῆς ἡμιευθείας $\Lambda\kappa$.

Ὁ ἀριθμὸς τῶν λύσεων ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ εἶδος τῆς γωνίας $\Lambda = \omega$ καὶ ἀπὸ τὸ μήκος τῶν πλευρῶν α καὶ β .

I. **Ἡ γωνία Λ εἶναι ὀξεῖα** (Σχ. 233). Ἀπὸ τὸ σημεῖον Γ φέρομεν τὴν κάθετον $\Gamma\Delta$ ἐπὶ τὴν $\Lambda\kappa$. Διὰ νὰ ἔχῃ τὸ πρόβλημα λύσιν πρέπει ἡ περιφέρεια (Γ, α) νὰ συναντᾷ τὴν ἡμιευθεῖαν $\Lambda\kappa$.

Ἐὰν ἡ πλευρὰ α εἶναι μικροτέρα τῆς $\Gamma\Delta$, ἡ περιφέρεια (Γ, α) δὲν συναντᾷ τὴν $\Lambda\kappa$ καὶ τὸ πρόβλημα δὲν ἔχει λύσιν (Σχ. 233 α).



Σχ. 233.

Ἐὰν ἡ πλευρὰ α εἶναι ἴση μετὴν $\Gamma\Delta$, ἡ περιφέρεια (Γ, α) ἐφάπτεται τῆς $\Lambda\kappa$ εἰς τὸ σημεῖον Δ καὶ τὸ πρόβλημα ἔχει μίαν λύσιν, τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $\Lambda\Delta\Gamma$ (Σχ. 233 β).

Ἐὰν ἡ πλευρὰ α εἶναι μεγαλυτέρα τῆς $\Gamma\Delta$, ἀλλὰ μικροτέρα τῆς β , ἡ περιφέρεια (Γ, α) τέμνει τὴν ἡμιευθεῖαν $\Lambda\kappa$ εἰς δύο σημεῖα B καὶ B' καὶ τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις, τὰ τρίγωνα $\Lambda\Gamma B$ καὶ $\Lambda\Gamma B'$ (Σχ. 233 γ).

Ἐὰν ἡ πλευρὰ α εἶναι ἴση μὲ τὴν β , τὸ σημεῖον B' συμπίπτει μὲ τὸ σημεῖον A καὶ τὸ πρόβλημα ἔχει μίαν λύσιν, τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον $ΑΓΒ$ (Σχ. 233 δ).

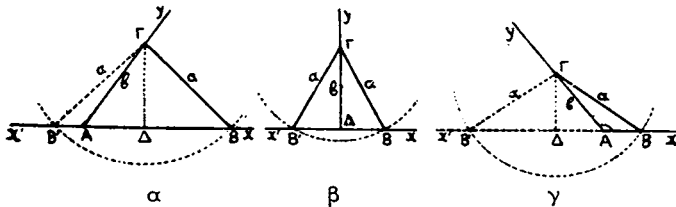
Τέλος, ὅταν ἡ πλευρὰ α εἶναι μεγαλυτέρα τῆς β , τὸ σημεῖον B' εὐρίσκεται ἀριστερὰ τοῦ A (Σχ. 234 α) καὶ μόνον τὸ τρίγωνον $ΑΓΒ$ εἶναι λύσις τοῦ προβλήματος.

II. Ἡ γωνία A εἶναι ὀρθή (Σχ. 234 β). Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ πρόβλημα εἶναι προφανῶς ἀδύνατον, ἐὰν ἡ πλευρὰ α εἶναι μικροτέρα τῆς β ἢ ἴση μὲ β .

Ὅταν ἡ πλευρὰ α εἶναι μεγαλυτέρα τῆς β , ἡ περιφέρεια (Γ, α) τέμνει τὴν $x'Ax$ εἰς δύο σημεῖα B καὶ B' , τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐκατέρωθεν τοῦ A καὶ λαμβάνομεν δύο ἴσα τρίγωνα, ΓAB καὶ $\Gamma AB'$, τὰ ὁποῖα εἶναι λύσις τοῦ προβλήματος. Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ἴσα, τὸ πρόβλημα ἔχει μίαν λύσιν.

III. Ἡ γωνία A εἶναι ἀμβλεία (Σχ. 234 γ). Ἐὰν ἡ πλευρὰ α εἶναι μικροτέρα τῆς β , ἡ περιφέρεια (Γ, α) δὲν συναντᾷ τὴν ἡμιευθεῖαν Ax καὶ τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον.

Ὅταν ἡ πλευρὰ εἶναι μεγαλυτέρα τῆς β , ἡ περιφέρεια (Γ, α) τέ-



Σχ. 234.

μνει τὴν Ax εἰς τὸ σημεῖον B καὶ τὴν Ax' εἰς τὸ B' . Ἐὰν φέρωμεν τὰς εὐθεῖας ΓB καὶ $\Gamma B'$ σχηματίζονται τὰ τρίγωνα ΓAB καὶ $\Gamma AB'$. Ἐκ τῶν τριγώνων αὐτῶν μόνον τὸ τρίγωνον ΓAB εἶναι παραδεκτόν, καὶ ἐπομένως τὸ πρόβλημα ἔχει μίαν λύσιν.

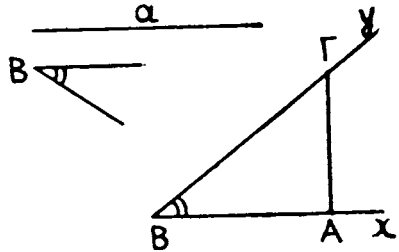
Τὰ ἐξαγόμενα τῆς ἀνωτέρω διερευνήσεως συνοψίζονται εἰς τὸν κατωτέρω πίνακα :

$$A < 90^\circ \left\{ \begin{array}{l} \alpha < \beta \left\{ \begin{array}{l} \alpha < \Gamma\Delta \dots\dots\dots 0 \text{ λύσις} \\ \alpha = \Gamma\Delta \dots\dots\dots 1 \text{ λύσις} \\ \alpha > \Gamma\Delta \dots\dots\dots 2 \text{ λύσεις} \end{array} \right. \\ \alpha = \beta \dots\dots\dots 1 \text{ λύσις} \\ \alpha > \beta \dots\dots\dots 1 \text{ λύσις} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l}
 A = 90^\circ \left\{ \begin{array}{l} \alpha > \beta \dots\dots\dots 1 \text{ λύσις} \\ \alpha = \beta \dots\dots\dots 0 \text{ λύσις} \\ \alpha < \beta \dots\dots\dots 0 \text{ λύσις} \end{array} \right. \\
 A > 90^\circ \left\{ \begin{array}{l} \alpha > \beta \dots\dots\dots 1 \text{ λύσις} \\ \alpha = \beta \dots\dots\dots 0 \text{ λύσις} \\ \alpha < \beta \dots\dots\dots 0 \text{ λύσις} \end{array} \right.
 \end{array}$$

307. Πρόβλημα. *Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν τὴν ὑποτείνουσάν του καὶ μίαν ὀξεῖαν γωνίαν.*

Τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος εἶναι : $\hat{A}=1$ ὀρθή, $B\Gamma=\alpha$, καὶ ἡ ὀξεῖα γωνία \hat{B} .



Σχ. 235.

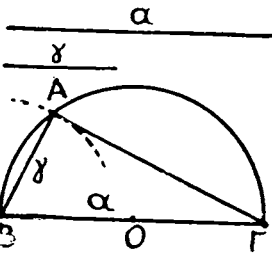
Κατασκευή. Κατασκευάζομεν μίαν γωνίαν xBy ἴσην μετὴν δοθεῖσαν γωνίαν B . Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς By λαμβάνομεν τμήμα $B\Gamma=\alpha$ καὶ ἀπὸ τὸ Γ φέρομεν τὴν κάθετον GA ἐπὶ τὴν Bx . Τὸ κατασκευασθὲν τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Τὸ πρόβλημα ἔχει πάντοτε μίαν λύσιν καὶ μίαν μόνον.

308. Πρόβλημα. *Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν τὴν ὑποτείνουσάν του καὶ μίαν κάθετον πλευρὰν του.*

Τὰ δεδομένα τοῦ προβλήματος εἶναι : $\hat{A}=1$ ὀρθή, $B\Gamma=\alpha$, $AB=\gamma$.

Κατασκευή : Μὲ διάμετρον ἴσην μετὴν δοθεῖσαν ὑποτείνουσαν $B\Gamma$ γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν κύκλου. Μὲ κέντρον τὸ B καὶ ἀκτῖνα ἴσην μετὴν δοθεῖσαν κάθετον πλευρὰν γ γράφομεν τόξον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν ἡμιπεριφέρειαν εἰς ἓνα σημεῖον A . Φέρομεν τὰς χορδὰς AB καὶ $A\Gamma$ καὶ τὸ προκύπτον τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι τὸ ζητούμενον.



Σχ. 236.

Ἀπόδειξις : Τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ A , διότι ἡ

γωνία A εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς ἡμικύκλιον· εἶναι δὲ καὶ τὸ ζητούμενον, διότι ἐκ κατασκευῆς εἶναι $B\Gamma=\alpha$ καὶ $BA=\gamma$.

Τὸ πρόβλημα ἔχει μίαν λύσιν καὶ μίαν μόνον, ἔὰν $\alpha > \gamma$.

Γεωμετρικά προβλήματα πρὸς λύσιν

507. (553). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον $AB\Gamma$, ($AB=AG$), ἂν γνωρίζωμεν :

1ον. Τὴν βᾶσιν του καὶ τὴν ἀπέναντι γωνίαν.

2ον. Τὴν βᾶσιν του καὶ μίαν ἀπὸ τὰς ἴσας γωνίας του.

3ον. Τὴν βᾶσιν του καὶ τὸ ἀντίστοιχον ὕψος του.

508. (554). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν:

1ον. Τὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς A καὶ τὸ ὕψος u_a .

2ον. Τὴν γωνίαν B καὶ τὰς ἴσας πλευρὰς $\beta=\gamma$.

3ον. Τὴν γωνίαν B καὶ τὸ ὕψος u_a .

509. (555). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν:

1ον. Τὰς πλευρὰς $\beta=\gamma$ καὶ τὸ ὕψος u_β .

2ον. Τὰς πλευρὰς $\beta=\gamma$ καὶ τὸ ὕψος u_a .

510. (557). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν $B\Gamma=a$ καὶ τὴν ἀκτίνα R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

511. (544). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν ἀκτίνα ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου καὶ τὸ ὕψος u_a .

512. (545). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν $\beta=\gamma$ καὶ τὴν ἀκτίνα R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

513. (546). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα ἰσόπλευρον τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν τὰ τρία ὕψη του.

514. (543). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν a , τὴν γωνίαν B καὶ τὴν διάμεσον μ_γ .

515. (558). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν :

1ον. Τὰς πλευρὰς β, γ καὶ τὸ ὕψος u_a .

2ον. Τὰς πλευρὰς a, β καὶ τὸ ὕψος u_β .

516. (559). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν δύο γωνίας του καὶ ἓνα ὕψος του.

517. (560). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὰς πλευρὰς a, γ καὶ τὴν διάμεσον μ_a .

518. (540). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα παραλληλόγραμμον, ἂν γνωρίζωμεν μίαν πλευρὰν του καὶ τὰς διαγωνίους του.

519. (561). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα παραλληλόγραμμον $AB\Gamma\Delta$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν βᾶσιν του, τὸ ὕψος του καὶ μίαν γωνίαν του.

520. (562). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα ὀρθογώνιον $AB\Gamma\Delta$, ἂν γνωρίζωμεν, τὴν διαγώνιον $A\Gamma$ καὶ τὴν γωνίαν ΓAB .

521. (541). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα ὀρθογώνιον, ἂν γνωρίζωμεν μίαν πλευρὰν του καὶ μίαν διαγώνιον του.

522. (547). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνας ῥόμβος $AB\Gamma\Delta$, ἂν γνωρίζωμεν :

1ον. Μίαν διαγώνιον του καὶ τὴν ἀκτίνα ρ τοῦ ἐγγεγραμ. κύκλου.

2ον. Μίαν γωνίαν του καὶ μίαν διαγώνιον του.

523. (548). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα ἰσοσκελὲς τραπέζιον $AB\Gamma\Delta$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν μεγαλύτεραν βᾶσιν του AB , τὸ ὕψος του καὶ τὰς μὴ παραλλήλους πλευρὰς του.

524. (549). Νά κατασκευασθῆ ἓνα τραπέζιον, ἂν γνωρίζωμεν τὰς μὴ παραλλήλους πλευράς του καὶ τὴν ἀκτίνα ρ τοῦ ἔγγεγρα. κύκλου.

525. (563). Νά κατασκευασθῆ ἓνα ἰσοσκελὲς τραπέζιον $ΑΒΓΔ$, ἂν γνωρίζωμεν :

1ον. Τὰς βάσεις του $ΑΒ, ΓΔ$ καὶ τὸ ὕψος του.

2ον. Τὰς βάσεις του $ΑΒ, ΓΔ$ καὶ τὴν ἀκτίνα R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

526. (564). Νά κατασκευασθῆ ἓνα ἰσοσκελὲς τραπέζιον $ΑΒΓΔ$, ἂν γνωρίζωμεν, μίαν βᾶσιν του, μίαν γωνίαν καὶ τὸ ὕψος του.

527. (565). Νά κατασκευασθῆ ἓνα τραπέζιον $ΑΒΓΔ$, ἂν γνωρίζωμεν :

1ον. Τὰς γωνίας του, μίαν βᾶσιν του καὶ μίαν ἀπὸ τὰς μὴ παραλλήλους πλευράς.

2ον. Τὰς γωνίας του, μίαν βᾶσιν του καὶ μίαν διαγώνιον του.

528. (566). Νά κατασκευασθῆ ἓνα τραπέζιον $ΑΒΓΔ$, ἂν γνωρίζωμεν :

1ον. Μίαν βᾶσιν του, τὴν ἀκτίνα ρ τοῦ ἔγγεγραμμένου κύκλου καὶ μίαν ἀπὸ τὰς μὴ παραλλήλους πλευράς του.

2ον. Τὰς μὴ παραλλήλους πλευράς του καὶ τὴν ἀκτίνα ρ τοῦ ἔγγεγραμμένου κύκλου.

529. (567). Νά κατασκευασθῆ ἓνα τραπέζιον $ΑΒΓΔ$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν βᾶσιν του $ΑΒ$, τὴν γωνίαν B , τὴν διαγώνιον $ΑΓ$ καὶ τὴν πλευράν $ΑΔ$.

530. (550). Νά κατασκευασθῆ ἓνα τετράπλευρον $ΑΒΓΔ$, ἂν γνωρίζωμεν :

1ον. Τὰς πλευράς του $ΑΔ, ΓΔ$ καὶ τὰς γωνίας $A, B, Γ$.

2ον. Τὰς πλευράς $ΑΒ, ΑΔ$, τὴν διαγώνιον $ΑΓ$ καὶ τὰς γωνίας $ΓΑΒ$ καὶ $ΔΒΑ$.

531. (551). Νά τριχοτομηθῆ, δηλ. νά διαιρεθῆ εἰς τρία ἴσα μέρη, μία ὀρθή γωνία.

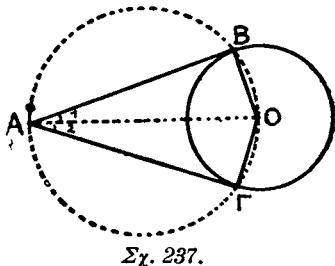
532. (552). Νά κατασκευασθῆ ἡ διχοτόμος μιᾶς γωνίας, τῆς ὁποίας ἡ κορυφή κεῖται ἐκτὸς τοῦ φύλλου σχεδιάσεως.

2. Διάφοροι ἄλλαι κατασκευαί

309. **Πρόβλημα.** Ἐκ δοθέν σημείου A νά ἀχθῆ ἑφαπτομένη πρὸς δοθείσαν περιφέρειαν O ἀκτίνος R (Σχ. 237).

Φέρομεν τὴν εὐθείαν $ΑΟ$. Μὲ διάμετρον τὴν $ΑΟ$ γράφομεν περιφέρειαν κύκλου, ἣ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν O εἰς τὰ σημεῖα B καὶ $Γ$. Φέρομεν τὰς εὐθείας $ΑΒ$ καὶ $ΑΓ$. Αἱ $ΑΒ$ καὶ $ΑΓ$ εἶναι αἱ ζητούμεναι ἑφαπτόμεναι.

Πράγματι· ἐὰν φέρωμεν τὴν ἀκτίνα OB , ἡ σχηματιζομένη γωνία $ΑΒΟ$ εἶναι ὀρθή, διότι εἶναι ἔγγεγραμμένη καὶ βαίνει ἐπὶ τῆς ἡμιπεριφερείας $ΑΓΟ$. Ἡ $ΑΒ$ εἶναι λοιπὸν κάθετος εἰς τὸ ἀκρον τῆς ἀκτίνος OB καὶ ἐπομένως εἶναι ἑφαπτομένη (§ 250) τῆς περιφερείας O εἰς τὸ σημεῖον B .



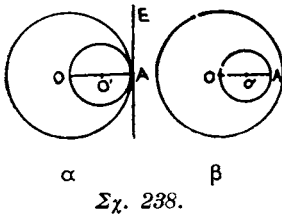
Σχ. 237.

Ὅμοιως ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ ἡ ΑΓ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας Ο.

Διερεύνησις. Τὸ πρόβλημα ἔχει τόσας λύσεις, ὅσα εἶναι τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν δύο περιφερειῶν. Διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις :

1ον. *Τὸ σημεῖον Α κείται ἐκτὸς τοῦ κύκλου Ο* ($OA > R$). Αἱ δύο περιφέρειαι ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα Β καὶ Γ καὶ τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις : τὰς ἐφαπτομένας ΑΒ καὶ ΑΓ (Σχ. 237).

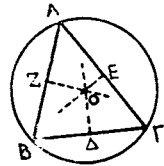
2ον. *Τὸ σημεῖον Α κείται ἐπὶ τῆς περιφερείας Ο* ($OA = R$). (Σχ. 238 α). Αἱ δύο περιφέρειαι ἐφάπτονται εἰς τὸ σημεῖον Α καὶ τὸ πρόβλημα ἔχει μίαν λύσιν : Ἡ εὐθεΐα ΑΕ, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτίνα ΟΑ εἰς τὸ σημεῖον Α, εἶναι ἡ ζητούμενη ἐφαπτομένη.



3ον. *Τὸ σημεῖον Α κείται ἐντὸς τοῦ κύκλου Ο* ($OA < R$) (Σχ. 238 β). Αἱ δύο περιφέρειαι δὲν ἔχουν κανένα κοινὸν σημεῖον καὶ τὸ πρόβλημα εἶναι ἀδύνατον.

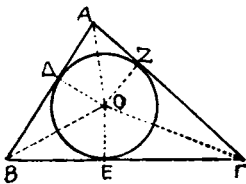
310. Πρόβλημα. Νὰ περιγραφῆ περιφέρεια περὶ δοθὲν τρίγωνον.

Ἔστω τὸ δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ (Σχ. 239). Αἱ κορυφαί του Α, Β, Γ εἶναι τρία σημεῖα, τὰ ὁποῖα δὲν κείνται ἐπ' εὐθείας· ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ γράψωμεν (§ 242) περιφέρειαν διερχομένην διὰ τῶν τριῶν κορυφῶν του.



Σχ. 239.

311. Πρόβλημα. Νὰ ἐγγραφῆ κύκλος εἰς δοθὲν τρίγωνον.



Σχ. 240.

Γνωρίζομεν (§ 232, 233), ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου τέμνονται εἰς ἓνα σημεῖον Ο, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἰσάκεις ἀπὸ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου. Τὸ κέντρον λοιπὸν τοῦ ζητουμένου κύκλου εἶναι τὸ σημεῖον Ο τῆς τομῆς τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν του καὶ ἡ ἀκτίς του εἶναι ἡ ἀπόστασις τοῦ Ο ἀπὸ μίαν ἀπὸ τὰς πλευρὰς του.

312. Πρόβλημα. Νὰ κατασκευασθῆ μία περιφέρεια ἐφαπτομένη τῶν τριῶν πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου ἢ τῶν προεκτάσεών των.

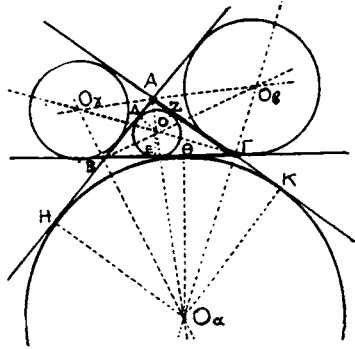
Ἔστω ἓνα τρίγωνον ΑΒΓ.

1ον. Γνωρίζομεν, ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου τέ

μνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὰς τρεῖς πλευρὰς του.

Ἐὰν O (Σχ. 241) εἶναι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ἐσωτερικῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$, αἱ ἀποστάσεις του OA , OB , OC ἀπὸ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου, θὰ εἶναι ἴσαι. Ἐὰν λοιπὸν γράψωμεν περιφέρειαν κύκλου, με κέντρον τὸ O καὶ με ἀκτίνα τὴν κοινὴν ἀπόστασιν $OA=OB=OC$, ἡ περιφέρεια αὕτη θὰ περάσῃ ἀπὸ τὰ σημεῖα Δ, E, Z καὶ ἐπομένως θὰ ἐφάπτεται τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου, διότι αἱ πλευραὶ $AB, B\Gamma, \Gamma A$ εἶναι κάθετοι, ἀντιστοίχως, ἐπὶ τὰς ἀκτίνας OA, OB, OC τοῦ κύκλου O .

2^{ον}. Γνωρίζομεν (§ 234), ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν δύο ἐξωτερικῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου καὶ ἡ ἐσωτερικὴ διχοτόμος τῆς τρίτης γωνίας του τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ μίαν πλευρὰν τοῦ τριγώνου καὶ ἀπὸ τὰς προεκτάσεις τῶν δύο ἄλλων.



Σχ. 241.

Ἐὰν O_α εἶναι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διχοτόμων τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν B καὶ Γ τοῦ τριγώνου καὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας A καὶ $O_\alpha H, O_\alpha \Theta, O_\alpha K$, αἱ ἀποστάσεις τοῦ O_α ἀπὸ τὰς πλευρὰς $AB, B\Gamma, \Gamma A$ τοῦ τριγώνου, θὰ εἶναι $O_\alpha H=O_\alpha \Theta=O_\alpha K$. Ἐὰν λοιπὸν γράψωμεν περιφέρειαν κύκλου, με κέντρον τὸ σημεῖον O_α καὶ με ἀκτίνα τὴν κοινὴν ἀπόστασιν $O_\alpha H=O_\alpha \Theta=O_\alpha K$, ἡ περιφέρεια αὕτη θὰ περάσῃ ἀπὸ τὰ σημεῖα H, Θ, K καὶ αἱ προεκτάσεις τῶν πλευρῶν AB καὶ $A\Gamma$, καθὼς καὶ ἡ πλευρὰ $B\Gamma$ θὰ εἶναι ἐφαπτόμεναι τοῦ κύκλου O_α , διότι εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς ἀκτίνας $O_\alpha H, O_\alpha \Theta, O_\alpha K$ ἀντιστοίχως.

Ὅμοίως εὐρίσκομεν, ὅτι ὑπάρχει καὶ δεύτερος κύκλος O_β , ὁ ὁποῖος ἐφάπτεται τῆς πλευρᾶς $A\Gamma$ καὶ τῶν προεκτάσεων τῶν AB καὶ $B\Gamma$ καὶ τέλος καὶ τρίτος κύκλος O_γ , ὁ ὁποῖος ἐφάπτεται τῆς πλευρᾶς AB καὶ τῶν προεκτάσεων τῶν δύο ἄλλων $B\Gamma$ καὶ ΓA .

Ὡστε ὑπάρχουν τέσσαρες κύκλοι, οἱ ὁποῖοι ἐφάπτονται τῶν πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου καὶ οἱ ὁποῖοι ἔχουν κέντρα τὰ σημεῖα $O, O_\alpha, O_\beta, O_\gamma$ καὶ ἀκτίνας τὰς ἀποστάσεις τῶν σημείων αὐτῶν ἀπὸ ἐκάστην τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου.

313. Παρεγγεγραμμένοι κύκλοι. Οἱ κύκλοι, οἱ ὁποῖοι ἔχουν

κέντρα τὰ σημεῖα O_a, O_b, O_γ (Σχ. 241) λέγονται *παρεγγεγραμμένοι κύκλοι* τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ εἰς τὰς γωνίας A, B, Γ ἀντιστοίχως.

314. Ὑπολογισμὸς εὐθυγράμμων τμημάτων ὀριζομένων ἐπὶ τῶν πλευρῶν ἐνὸς τριγώνου. Πρόβλημα. *Νὰ ὑπολογισθοῦν, συναρτήσει τῶν πλευρῶν ἐνὸς τριγώνου :*

1ον. *Αἱ ἀποστάσεις τῶν σημείων ἐπαφῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ παρεγγεγραμμένου κύκλου, ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς ἀντιστοίχου πλευρᾶς τοῦ τριγώνου.*

2ον. *Τὰ μήκη τῶν τμημάτων, τὰ ὅποια ὀρίζονται ἐπὶ τῶν πλευρῶν ἐνὸς τριγώνου, διὰ τῶν σημείων ἐπαφῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ παρεγγεγραμμένων κύκλων.*

Ἐστω O ὁ ἐγγεγραμμένος κύκλος εἰς τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ (Σχ. 241) καὶ Δ, E, Z τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τοῦ μὲ τὰς πλευρὰς $AB, B\Gamma, \Gamma A$ τοῦ τριγώνου. Ἐστω ἐπίσης O_a ὁ παρεγγεγραμμένος κύκλος εἰς τὴν γωνίαν A τοῦ τριγώνου καὶ H, Θ, K τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τοῦ μὲ τὰς πλευρὰς τοῦ $AB, B\Gamma, \Gamma A$.

Ἄν παραστήσωμεν μὲ α, β, γ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ καὶ μὲ 2τ τὴν περίμετρόν του, ζητεῖται νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ μήκη :

$A\Delta, AZ, B\Delta, BE, \Gamma E, \Gamma Z$ κλπ.

1ον. Ὑπολογισμὸς τῶν $A\Delta, AZ, B\Delta, BE, \Gamma Z, AH, B\Theta, \dots$

Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸ σχῆμα ἔχομεν

$$A\Delta + AZ + B\Delta + BE + \Gamma E + \Gamma Z = 2\tau \quad (1)$$

Ἐπειδὴ $A\Delta = AZ, B\Delta = BE, \Gamma E = \Gamma Z$, ὡς ἐφαπτόμενοι κύκλου, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον, ἢ ἰσότης (1) γράφεται

$$2A\Delta + 2BE + 2\Gamma E = 2\tau \quad \text{ἢ} \quad A\Delta + BE + \Gamma E = \tau \quad (2)$$

Ἐπειδὴ $BE + \Gamma E = B\Gamma = \alpha$, ἢ ἰσότης (2) γράφεται

$$A\Delta + \alpha = \tau, \quad \text{ἄρα} \quad A\Delta = \tau - \alpha \quad \text{ἢ} \quad A\Delta = AZ = \tau - \alpha.$$

Ὁμοίως εὐρίσκομεν, ὅτι

$$B\Delta = BE = \tau - \beta \quad \text{καὶ} \quad \Gamma Z = \Gamma E = \tau - \gamma.$$

Ὑπολογίζομεν τώρα τὰ μήκη $AH, BH, \Gamma\Theta$ κλπ.

Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸ σχῆμα 241 ἔχομεν

$$AB + B\Theta + \Theta\Gamma + \Gamma A = 2\tau. \quad (3)$$

Ἐπειδὴ $B\Theta = BH$ καὶ $\Gamma\Theta = \Gamma K$, ὡς ἐφαπτόμενοι τοῦ κύκλου O_a , αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον, ἢ ἰσότης (3) γράφεται

$$AB + BH + \Gamma K + \Gamma A = 2\tau. \quad (4)$$

Ἐπειδὴ $AB + BH = AH$ καὶ $\Gamma K + \Gamma A = AK$, ἢ ἰσότης (4) γράφεται

$$AH + AK = 2\tau \quad \text{ἢ} \quad 2AH = 2\tau \quad \text{ἢ} \quad AH = \tau.$$

Ὅστε εἶναι $\mathbf{AH=AK=\tau}$.

Διὰ τὴν $\mathbf{BH=B\Theta}$ ἔχομεν

$$\mathbf{BH=AH-AB} \quad \eta \quad \mathbf{BH=\tau-\gamma=B\Theta}.$$

Διὰ τὴν $\mathbf{G\Theta=GK}$ ἔχομεν

$$\mathbf{GK=AK-AG} \quad \eta \quad \mathbf{GK=\tau-\beta=G\Theta}.$$

2ον. Ὑπολογισμὸς τῶν μηκῶν $\mathbf{\Delta H, E\Theta, ZK}$.

Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸ σχῆμα 241 ἔχομεν

$$\mathbf{\Delta H=AH-AD} \tag{5}$$

Ἐπειδὴ $\mathbf{AH=\tau}$ καὶ $\mathbf{AD=\tau-\alpha}$, ἡ ἰσότης (5) γράφεται

$$\mathbf{\Delta H=\tau-(\tau-\alpha)=\alpha}.$$

Ἐπειδὴ τὰ τμήματα $\mathbf{\Delta H}$ καὶ \mathbf{ZK} εἶναι ἴσα, ὡς ὑπόλοιπα τῶν ἴσων τμημάτων $\mathbf{\Delta H}$ καὶ \mathbf{ZK} , ἀπὸ τῶν ὁποίων ἀφηρέθησαν τὰ ἴσα τμήματα $\mathbf{AD=AZ}$, θὰ εἶναι καὶ $\mathbf{ZK=\Delta H=\alpha}$.

Διὰ τὸ μῆκος $\mathbf{E\Theta}$ ἔχομεν :

$$\mathbf{E\Theta=B\Theta-BE} \quad \eta \quad \mathbf{E\Theta=(\tau-\gamma)-(\tau-\beta)} \quad \eta \quad \mathbf{E\Theta=\beta-\gamma}.$$

Συνοψίζοντες τὰ ἀνωτέρω ἔχομεν :

$\mathbf{AD=AZ=\tau-\alpha}$	$\mathbf{AH=AK=\tau}$	$\mathbf{\Delta H=ZK=\alpha}$
$\mathbf{BD=BE=\tau-\beta}$	$\mathbf{BH=B\Theta=\tau-\gamma}$	$\mathbf{E\Theta=\beta-\gamma}$
$\mathbf{GE=GZ=\tau-\gamma}$	$\mathbf{G\Theta=GK=\tau-\beta}$	

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄.

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΚΑΙ ΣΥΝΘΕΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ

315. Πρόβλημα. *Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν τοῦ $B\Gamma = a$, τὴν γωνίαν τοῦ $B = \omega$ καὶ τὸ ἄθροισμα $AB + A\Gamma = \lambda$ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν τοῦ.*

Ἐπειδὴ δὲν γνωρίζωμεν πῶς νὰ ἀρχίσωμεν τὴν κατασκευὴν τοῦ ζητουμένου τριγώνου ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς :

Ἐπιθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω $AB\Gamma$ (Σχ. 242) τὸ ζητούμενον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν $B\Gamma = a$, τὴν γωνίαν B ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ω καὶ τὸ ἄθροισμα $AB + A\Gamma = \lambda$, τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν τοῦ.

Προεκτείνωμεν τὴν πλευρὰν BA καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως λαμβάνομεν τμῆμα $A\Delta = A\Gamma$. Τότε θὰ εἶναι

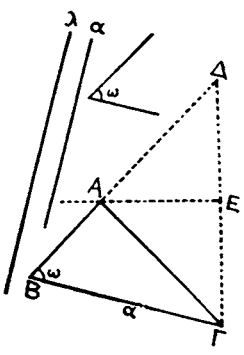
$$B\Delta = BA + A\Delta \quad \eta \quad B\Delta = BA + A\Gamma = \lambda.$$

Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν $\Delta\Gamma$. Τὸ σχηματισθὲν τρίγωνον $\Delta B\Gamma$ ἔχει τὴν πλευρὰν ΔB ἴσην μὲ τὸ δοθὲν ἄθροισμα λ τῶν δύο πλευρῶν, τὴν πλευρὰν $B\Gamma$ ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν πλευρὰν a καὶ τὴν γωνίαν B ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ω . Ἄρα

τὸ τρίγωνον $\Delta B\Gamma$ δύναται νὰ κατασκευασθῆ, διότι γνωρίζωμεν δύο πλευρὰς τοῦ $B\Gamma$ καὶ $B\Delta$ καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν B (§ 129).

Ἐκ κατασκευῆς εἶναι $A\Delta = A\Gamma$. Ἄρα τὸ τρίγωνον $\Delta A\Gamma$ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἐπομένως ἡ κορυφή τοῦ A κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου EA τῆς βάσεώς τοῦ $\Delta\Gamma$. Ἀλλὰ ἡ κορυφή A , δηλ. ἡ τρίτη κορυφή τοῦ ζητουμένου τριγώνου $AB\Gamma$, κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς $B\Delta$ τοῦ τριγώνου $\Delta B\Gamma$. Ὡστε ἡ τρίτη κορυφή τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ εἶναι τὸ σημεῖον τομῆς τῆς πλευρᾶς $B\Delta$ καὶ τῆς μεσοκαθέτου EA τῆς πλευρᾶς $\Delta\Gamma$.

Κατόπιν τῶν ἀνωτέρω δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὸ ζητούμενον τρίγωνον ὡς ἑξῆς :



Σχ. 242.

Κατασκευή : Κατασκευάζομεν μίαν γωνίαν $\Delta B\Gamma$ ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ω . Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς $B\Gamma$ λαμβάνομεν τμῆμα $B\Gamma'$ ἴσον μὲ τὴν δοθεῖσαν πλευρὰν α τοῦ τριγώνου· ἐπίσης ἐπὶ τῆς πλευρᾶς $B\Delta$ λαμβάνομεν τμῆμα $B\Delta'$ ἴσον μὲ τὸ δοθὲν ἄθροισμα λ τῶν δύο πλευρῶν τοῦ τριγώνου· φέρομεν τὴν $\Delta\Gamma'$. Ἀπὸ τὸ μέσον E τῆς $\Delta\Gamma'$ φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν $\Delta\Gamma$, ἣ ὁποία τέμνει τὴν πλευρὰν $B\Delta$ εἰς τὸ σημεῖον A' · φέρομεν τὴν εὐθείαν $A\Gamma'$ καὶ τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον $AB\Gamma'$ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Ἀπόδειξις : Τὸ τρίγωνον $AB\Gamma'$ ἔχει, ἐκ κατασκευῆς, τὴν πλευρὰν $B\Gamma'$ ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν πλευρὰν α , τὴν προσκειμένην γωνίαν B ἴσην, ἐκ κατασκευῆς, μὲ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ω · ἐπειδὴ τὸ A κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκάθετου τῆς $\Delta\Gamma'$, θὰ εἶναι $A\Delta = A\Gamma'$. Θὰ εἶναι λοιπόν :

$$BA + A\Gamma' = BA + A\Delta \quad \eta \quad BA + A\Gamma' = B\Delta = \lambda.$$

Τὸ τρίγωνον $AB\Gamma'$ εἶναι τὸ ζητούμενον, διότι ἔχει τὴν πλευρὰν $B\Gamma' = \alpha$, τὴν γωνίαν $B = \omega$ καὶ τὸ ἄθροισμα $BA + A\Gamma'$ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του ἴσον μὲ τὸ δοθὲν ἄθροισμα λ .

316. Ἀνάλυσις καὶ σύνθεσις. Διὰ νὰ λύσωμεν τὸ προηγούμενον πρόβλημα ἠκολουθήσαμεν τὴν κάτωθι πορείαν :

Ἐπεθέσαμεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ κατεσκευάσαμεν ἓνα τυχόν τρίγωνον $AB\Gamma'$, τὸ ὁποῖον ὑπεθέσαμεν, ὅτι εἶναι τὸ ζητούμενον τρίγωνον, δηλαδὴ, ὅτι ἔχει τὰ δοθέντα στοιχεῖα.

Ἀπὸ τὸ τρίγωνον $AB\Gamma'$ ἐφθάσαμεν εἰς ἓνα ἄλλο βοηθητικὸν τρίγωνον $\Delta B\Gamma'$, τὸ ὁποῖον δύναται νὰ κατασκευασθῇ μὲ τὰ δοθέντα στοιχεῖα τοῦ προβλήματος. Ἐπειτα ἐφέραμεν τὴν μεσοκάθετον τῆς πλευρᾶς $\Delta\Gamma'$ τοῦ βοηθητικοῦ τριγώνου $\Delta B\Gamma'$, ἣ ὁποία μᾶς ἔδωσε τὴν τρίτην κορυφὴν τοῦ ζητουμένου τριγώνου.

Ἡ ἐργασία αὕτη, τὴν ὁποίαν ἠκολουθήσαμεν, διὰ νὰ εὑρωμεν τὸν τρόπον τῆς κατασκευῆς τοῦ ζητουμένου τριγώνου μὲ τὰ δοθέντα στοιχεῖα, λέγεται **ἀνάλυσις τοῦ προβλήματος**, ἣ δὲ μέθοδος τῆς ἀναζητήσεως τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος λέγεται **ἀναλυτικὴ μέθοδος**.

Ἐπειτα, κατὰ τὴν κατασκευὴν ἠκολουθήσαμεν ἀντίθετον πορείαν :

Κατεσκευάσαμεν τὸ τρίγωνον $\Delta B\Gamma'$ μὲ τὰ δοθέντα στοιχεῖα τοῦ προβλήματος· ἀπὸ τὸ μέσον E τῆς πλευρᾶς του $\Delta\Gamma'$ ἐφέραμεν κάθετον ἐπὶ τὴν $\Delta\Gamma$ καὶ οὕτω προσδιωρίσαμεν τὴν τρίτην κορυφὴν A τοῦ ζητουμένου τριγώνου $AB\Gamma'$.

Ἡ δευτέρα αὕτη ἐργασία λέγεται **σύνθεσις τοῦ προβλήματος**, ἣ δὲ μέθοδος τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος λέγεται **συνθετικὴ μέθοδος**.

Τέλος ἀπεδείξαμεν, ὅτι τὸ κατασκευασθὲν τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι τὸ ζητούμενον, δηλ. ἔχει ὅλα τὰ δοθέντα στοιχεῖα τοῦ προβλήματος. Ἡ τρίτη αὐτῆ ἐργασία λέγεται *ἀπόδειξις*.

Γενικῶς: Ἡ *ἀνάλυσις* εἶναι μία μέθοδος δια τῆς ὁποίας μία ἄγνωστος πρότασις A ἀνάγεται εἰς μίαν ἄλλην ἄγνωστον πρότασιν B , ἔπειτα ἡ δευτέρα πρότασις B εἰς μίαν τρίτην Γ , ἡ Γ εἰς μίαν τετάρτην Δ κ.ο.κ. μέχρις ὅτου φθάσωμεν εἰς μίαν τελικὴν πρότασιν M , ἡ ὁποία εἶναι προφανῶς ἀληθής, ἢ ἔχει ἀποδειχθῆ προηγουμένως

Ἡ *σύνθεσις* εἶναι μία μέθοδος διὰ τῆς ὁποίας, ἀναχωροῦντες ἀπὸ μίαν γνωστὴν καὶ ἀληθῆ πρότασιν Δ , φθάνομεν εἰς μίαν ἄλλην γνωστὴν πρότασιν Γ , ἔπειτα ἀπὸ τὴν δευτέραν πρότασιν Γ φθάνομεν εἰς μίαν τρίτην γνωστὴν πρότασιν B καὶ ἐξ αὐτῆς εἰς μίαν τετάρτην κ.ο.κ. μέχρις ὅτου φθάσωμεν εἰς τὴν πρότασιν A , τὴν ὁποίαν ἔπρεπε νὰ ἀποδείξωμεν.

Ἡ ἀνάλυσις καὶ ἡ σύνθεσις ἀκολουθοῦν λοιπὸν δύο δρόμους ἀντιθέτους. Ἐνῶ ἡ ἀνάλυσις ἀναχωρεῖ συνήθως ἀπὸ τὸ ζήτημα, τοῦ ὁποίου ζητοῦμεν τὴν ἀπόδειξιν, ἢ τὴν κατασκευὴν, διὰ νὰ φθάσῃ εἰς ἓνα γνωστὸν ζήτημα, ἢ εἰς μίαν γνωστὴν κατασκευὴν, ἢ σύνθεσις ἀναχωρεῖ ἀπὸ ἓνα ζήτημα γνωστὸν, ἢ ἀπὸ γνωστὴν κατασκευὴν, διὰ νὰ φθάσῃ εἰς τὸ ζήτημα, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἀποδειχθῆ, ἢ πρέπει νὰ κατασκευασθῆ.

Εἰς τὴν πραγματικότητα ἡ σύνθεσις εἶναι μία μέθοδος ἐκθέσεως. Εἶναι, πράγματι, εὐκολωτέρα ἀπὸ τὴν ἀνάλυσιν, ἀλλὰ, ὡς ὀλιγώτερον διδασκτικὴ τῆς ἀναλύσεως, δὲν πρέπει νὰ χρησιμοποιηθῆ παρὰ μόνον εἰς ἀπλᾶς περιπτώσεις, τῶν ὁποίων ἡ λύσις εἶναι προφανής.

Γενικῶς, ὅταν πρόκειται νὰ λύσωμεν ἓνα δύσκολον γεωμετρικὸν πρόβλημα ἢ νὰ ἀποδείξωμεν μίαν δύσκολον πρότασιν, πρέπει νὰ ἀρχίζωμεν μὲ μίαν σύντομον ἀνάλυσιν καὶ νὰ ἀφήνωμεν εἰς τὴν σύνθεσιν τὴν φροντίδα τῆς διαφωτίσεως τῶν λεπτομερειῶν. Οὕτω ἡ ἀνάλυσις καὶ ἡ σύνθεσις ἀλληλοβοηθοῦνται, ἡ μὲν πρώτη *διευθύνουσα* τὴν πορείαν, ἡ δὲ δευτέρα *ἀσφαλιζουσα* αὐτήν.

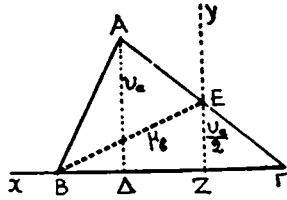
317. Πρόβλημα. *Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν $B\Gamma = a$, τὴν διάμεσον $BE = \mu_\beta$ καὶ τὸ ὕψος τοῦ $AD = u_a$.*

Ἀνάλυσις: Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω $AB\Gamma$ (Σχ. 243) τὸ ζητούμενον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὴν πλευρὰν $B\Gamma = a$, τὴν διάμεσον $BE = \mu_\beta$ καὶ τὸ ὕψος $AD = u_a$.

Ἀπὸ τὸ E φέρομεν τὴν EZ παράλληλον τῆς AD . Εἰς τὸ τρίγωνον

ΑΔΓ, ἡ ΕΖ ἄγεται ἀπὸ τὸ μέσον τῆς πλευρᾶς ΑΓ καὶ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΔ· ἄρα ἡ ΕΖ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ΑΔ· δηλ. εἶναι $EZ = \frac{u_a}{2}$.

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΒΖΕ ἔχει τὴν ὑποτείνουσάν του ΒΕ ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν διάμεσον μβ καὶ τὴν κάθετον πλευρὰν ΕΖ ἴσην μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ὕψους u_a · ἄρα τὸ τρίγωνον αὐτὸ δύναται νὰ κατασκευασθῇ.



Σχ. 243.

Ἡ πλευρὰ ΒΓ τοῦ ζητουμένου τριγώνου εἶναι προέκτασις τῆς κάθετου πλευρᾶς ΒΖ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΒΖΕ καὶ ἴση μὲ a . Ἡ θέσις τῆς πλευρᾶς ΑΓ εἶναι τελείως ὄρισμένη, διότι γνωρίζομεν δύο σημεῖα της, τὰ Γ καὶ Ε.

Ἐπειδὴ τὸ Ε εἶναι τὸ μέσον τῆς ΑΓ, ἡ ΑΓ εἶναι διπλασία τῆς ΕΓ, ἡ ὁποία εἶναι τελείως ὄρισμένη.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συναγομεν τὴν κάτωθι κατασκευὴν :

Σύνθεσις : Κατασκευάζομεν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΒΖΕ, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὴν ὑποτείνουσαν ἴσην μὲ μ_b καὶ τὴν κάθετον πλευρὰν ΕΖ ἴσην μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ δοθέντος ὕψους. Πρὸς τοῦτο κατασκευάζομεν μίαν ὀρθὴν γωνίαν xZy καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Ζγ ἓνα τμήμα ΖΕ ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ u_a . Μὲ κέντρον τὸ Ε καὶ ἀκτίνα ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν διάμεσον μ_b γράφομεν τόξον κύκλου, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν Ζx εἰς τὸ σημεῖον Β. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΕΒ καὶ ἔχομεν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΒΖΕ.

Προεκτείνομεν τὴν πλευρὰν ΒΖ καὶ λαμβάνομεν τμήμα ΒΓ= a · ἀπὸ τὸ Γ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΓΕ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεώς της λαμβάνομεν τμήμα ΕΑ=ΓΕ· φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ καὶ τὸ σχηματισθὲν τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Ἀπόδειξις : Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχει τὴν ΒΓ= a καὶ τὴν ΒΕ= μ_b ἐκ κατασκευῆς· εἶναι δὲ ἡ ΒΕ διάμεσος, διότι ἐλήφθη ΓΕ=ΕΑ. Φέρομεν τὴν ΑΔ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ. Αἱ ΑΔ καὶ ΕΖ εἶναι παράλληλοι, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΒΓ. Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΔΓ, ἡ ΕΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΔ καὶ ἄγεται ἀπὸ τὸ μέσον Ε τῆς πλευρᾶς ΑΓ· ἄρα ἡ ΕΖ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ΑΔ· δηλ. εἶναι $EZ = \frac{A\Delta}{2}$. Ἐπειδὴ $EZ = \frac{u_a}{2}$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γίνεται

$$\frac{u_a}{2} = \frac{A\Delta}{2} \quad \eta \quad u_a = A\Delta.$$

Τὸ τρίγωνον λοιπὸν $AB\Gamma$ ἔχει καὶ τὸ ὕψος AD ἴσον μὲ τὸ δοθὲν ὕψος u_α καὶ ἐπομένως εἶναι τὸ ζητούμενον.

Ἐὰν λάβωμεν $B\Gamma' = \alpha$, πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τῆς BZ , καὶ ἐργασθῶμεν ὁμοίως εὐρίσκομεν καὶ ἓνα ἄλλο τρίγωνον $\Gamma'BA'$, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰ δοθέντα στοιχεῖα.

Διερεύνησις: Τὸ πρόβλημα ἔχει λύσιν, ὅταν δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὸ τρίγωνον BZE , δηλ. ὅταν $\frac{u_\alpha}{2} < \mu_\beta$ ἢ $u_\alpha < 2\mu_\beta$.

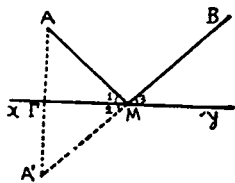
Ὡστε, εἰν $u_\alpha < 2\mu_\beta$, τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις.

318. Πρόβλημα. Δίδεται μία εὐθεῖα xy καὶ δύο σημεῖα A καὶ B πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς xy . Νὰ εὐρεθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας xy ἓνα σημεῖον M τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι $\widehat{AMx} = \widehat{BMy}$.

Ἀνάλυσις: Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω M (Σχ. 244) τὸ ζητούμενον σημεῖον τῆς εὐθείας xy καὶ τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι:

$$\gamma\omega\nu.AMx = \gamma\omega\nu.BMy.$$

Προεκτείνωμεν τὴν BM καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον A φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν xy , ἡ ὁποία τέμνει τὴν xy εἰς τὸ σημεῖον Γ καὶ τὴν προέκτασιν τῆς BM εἰς τὸ σημεῖον A' . Τὰ σχηματισθέντα ὀρθογώνια τρίγωνα $A\Gamma M$ καὶ $A'\Gamma M$ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὴν κάθετον πλευρὰν ΓM κοινὴν καὶ τὰς γωνίας M_1 καὶ M_2 ἴσας, ὡς ἴσας πρὸς τὴν M_3 , πράγματι ἡ γωνία M_1 εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν M_3 ἐξ ὑποθέσεως, ἡ δὲ γωνία M_2 εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν M_3 , ὡς κατὰ κορυφὴν ἄρα θὰ εἶναι $\gamma\omega\nu.M_1 = \gamma\omega\nu.M_2$. Ἀπὸ τὴν



Σχ. 244.

ἰσότητα τῶν τριγῶνων αὐτῶν συνάγομεν, ὅτι $A\Gamma = \Gamma A'$, δηλ. τὸ σημεῖον A' δύναται νὰ ὀρισθῇ ὡς συμμετρικὸν τοῦ A πρὸς τὴν xy .

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ ζητούμενον σημεῖον M εἶναι σημεῖον τομῆς τῆς δοθείσης εὐθείας xy καὶ τῆς εὐθείας $A'B$, τῆς ὁποίας ἡ θέσις ὀρίζεται ἀκριβῶς, ὕστερα ἀπὸ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ σημείου A' .

Σύνθεσις: Ἀπὸ τὸ δοθὲν σημεῖον A φέρομεν τὴν κάθετον $A\Gamma$ ἐπὶ τὴν δοθείσαν εὐθεῖαν xy καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως αὐτῆς λαμβάνομεν τμῆμα $\Gamma A' = A\Gamma$. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν $A'B$, ἡ ὁποία τέμνει τὴν xy εἰς τὸ σημεῖον M λέγομεν, ὅτι τὸ σημεῖον M εἶναι τὸ ζητούμενον.

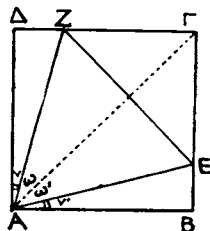
Ἀπόδειξις: Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν AM . Τὰ σχηματισθέντα ὀρθογώνια τρίγωνα $A\Gamma M$ καὶ $A'\Gamma M$ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς καθέτους πλευράς των ἴσας ἤτοι ἔχουν τὴν πλευρὰν ΓM κοινὴν, τὴν $A\Gamma = \Gamma A'$

ἔκ κατασκευῆς· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ $\gammaων. M_1 = \gammaων. M_2$. Ἀλλὰ $\gammaων. M_2 = \gammaων. M_3$ ὡς κατὰ κορυφὴν· ἄρα θὰ εἶναι καὶ $\gammaων. M_1 = \gammaων. M_3$, δηλ. $\gammaων. AM\kappa = \gammaων. BMy$.

319. Πρόβλημα. *Νὰ ἐγγραφῆ εἰς δοθὲν τετράγωνον, ἓνα ἰσόπλευρον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου μία κορυφὴ νὰ συμπίπτῃ μὲ μιαν κορυφὴν τοῦ τετραγώνου.*

Ἀνάλυσις: Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω AEZ (Σχ. 245) τὸ ζητούμενον ἰσόπλευρον τρίγωνον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὸ δοθὲν τετράγωνον $AB\Gamma\Delta$.

Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ABE καὶ $A\Delta Z$ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς ὑποτείνουσας τῶν ἴσας, ἦτοι $AE = AZ$, ὡς πλευρὰς τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου AEZ καὶ τὰς καθέτους πλευρὰς AB καὶ $A\Delta$ ἴσας, ὡς πλευρὰς τοῦ δοθέντος τετραγώνου· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ $\gammaων. \nu = \gammaων. \nu'$.



Σχ. 245.

Φέρομεν τὴν διαγώνιον AG , ἣ ὁποία εἶναι καὶ διχοτόμος τῶν ἀπέναντι γωνιῶν A καὶ Γ τοῦ τετραγώνου. Ἐὰν λοιπὸν ἀπὸ τὰς ἴσας γωνίας ΔAG καὶ ΓAB ἀφαιρέσωμεν τὰς ἴσας γωνίας ν καὶ ν' , αἱ ἀπομένουσαι γωνίαι ω καὶ ω' εἶναι ἴσαι, ἦτοι εἶναι $\gammaων. \omega = \gammaων. \omega'$.

Ὅστε AG εἶναι διχοτόμος καὶ τῆς γωνίας A τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου AEZ , ὁπότε θὰ εἶναι $\gammaων. \omega = \gammaων. \omega' = 30^\circ$.

Ὅστε αἱ πλευραὶ AE καὶ AZ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου σχηματίζουν μὲ τὴν διαγώνιον AG τοῦ τετραγώνου γωνίαν 30° .

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὴν κάτωθι κατασκευὴν:

Σύνθεσις: Φέρομεν τὴν διαγώνιον AG τοῦ τετραγώνου. Μὲ κορυφὴν τὸ A καὶ πλευρὰν τὴν AG κατασκευάζομεν μιαν γωνίαν ω' ἴσην μὲ 30° . Ἡ πλευρὰ AE τῆς γωνίας αὐτῆς τέμνει τὴν πλευρὰν $B\Gamma$ τοῦ τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ εἰς τὸ σημεῖον E . Μὲ κέντρον τὸ A καὶ ἀκτίνα ἴσην μὲ AE γράφομεν ἓνα τόξον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν πλευρὰν $\Gamma\Delta$ τοῦ τετραγώνου εἰς τὸ σημεῖον Z . Φέρομεν τὰς εὐθείας AZ καὶ ZE καὶ τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον AEZ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Ἀπόδειξις: Τὸ τρίγωνον AEZ εἶναι ἰσοσκελές, ἐπειδὴ $AE = AZ$, ὡς ἀκτῖνες τοῦ αὐτοῦ κύκλου. Ἀπὸ τὰ ἴσα ὀρθογώνια τρίγωνα ABE καὶ $A\Delta Z$ συνάγομεν, ὅτι $\gammaων. \nu' = \gammaων. \nu$. Ἐὰν ἀπὸ τὰς ἴσας γωνίας ΓAB καὶ $\Gamma A\Delta$ ἀφαιρέσωμεν τὰς ἴσας γωνίας ν καὶ ν' αἱ ἀπομένουσαι γωνίαι ω καὶ ω' εἶναι ἴσαι· ἦτοι εἶναι $\widehat{\omega} = \widehat{\omega'}$. Ἐπειδὴ $\widehat{\omega} = \widehat{\omega'} = 30^\circ$, ἡ

γωνία A τῆς κορυφῆς τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου AEZ εἶναι 60° ἄρα καὶ αἱ ἄλλαι δύο γωνίαι του θὰ εἶναι ἀπὸ 60° καὶ ἐπομένως τὸ τρίγωνον AEZ εἶναι ἰσόπλευρον.

Γεωμετρικά προβλήματα πρὸς λύσιν

533. (571). Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν β καὶ τὴν διαφορὰν $\alpha - \gamma = \lambda$.

534. (572). Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν τὴν ὑποτείνουσαν α καὶ τὴν διαφορὰν $\beta - \gamma = \lambda$.

535. (600). Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν μίαν κάθετον πλευρὰν καὶ τὴν ἀκτίνα ρ τοῦ ἐγγεγραμ. κύκλου.

536. (601). Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν μίαν ὀξείαν γωνίαν του καὶ τὴν ἀκτίνα ρ τοῦ ἐγγεγραμ. κύκλου.

537. (608). Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν τὴν κάθετον πλευρὰν β καὶ τὸ ὕψος u_a .

538. (609). Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν μίαν ὀξείαν γωνίαν καὶ τὴν ἀκτίνα R τοῦ περιγεγραμ. κύκλου

539. (610). Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν ὑποτείνουσαν α καὶ τὴν διαφορὰν $B - \Gamma = \omega$.

540. (611). Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὸ ὕψος u_a καὶ τὴν διάμεσον μ_a .

541. (612). Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν B καὶ τὴν διαφορὰν $\alpha - \gamma = \lambda$.

542. (613). Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν ὑποτείνουσαν α καὶ τὴν διαφορὰν $\beta - \gamma = \lambda$.

543. (614). Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν B καὶ τὸ ἄθροισμα $\alpha + \gamma = \lambda$.

544. (573). Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν μίαν ἀπὸ τὰς ἴσας γωνίας του καὶ τὸ ἄθροισμα τῆς βάσεως καὶ μίαν τῶν ἴσων πλευρῶν του.

545. (599). Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν, τὴν γωνίαν $B = \Gamma$ καὶ τὴν ἀκτίνα ρ τοῦ ἐγγεγραμ. κύκλου.

546. (597). Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν A τῆς κορυφῆς καὶ τὴν διαφορὰν τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους του u_a .

547. (598). Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα ἰσόπλευρον τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν, τὰ τρία ὕψη του.

548. (568). Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν :

1ον. Τὴν πλευρὰν $B\Gamma = a$ καὶ τὰς διαμέσους α_μ καὶ β_μ .

2ον. Τὴν πλευρὰν $B\Gamma = a$ καὶ τὰς διαμέσους α_μ καὶ γ_μ .

549. (569). Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν $B\Gamma = a$, τὸ ὕψος u_a καὶ τὴν διάμεσον α_μ .

550. (570). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὰς γωνίας του καὶ τὴν περίμετρόν του 2τ .

551. (574). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν α , τὴν γωνίαν B καὶ τὴν διαφορὰν $\gamma - \beta = \lambda$.

552. (596). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν, τὰς γωνίας του καὶ τὸ ἄθροισμα δύο πλευρῶν του.

553. (602). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὰ μέσα τῶν τριῶν πλευρῶν του.

554. (603). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν δύο κορυφὰς του καὶ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν του.

555. (604). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν δύο κορυφὰς καὶ τὸ ὀρθόκεντρον.

556. (605). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὰς γωνίας του καὶ τὴν ἀκτίνα ρ τοῦ ἔγγεγραμ. κύκλου.

557. (606). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν διάμεσον μ_α καὶ τὰς γωνίας, τὰς ὁποίας σχηματίζει αὕτη μὲ τὰς πλευρὰς β καὶ γ .

558. (607). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν :

1ον. Τὰς πλευρὰς β καὶ γ καὶ τὴν διάμεσον μ_α .

2ον. Τὰς τρεῖς διαμέσους του.

559. (615). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν :

1ον. Τὴν κορυφὴν A καὶ τοὺς πόδας Δ καὶ E τῶν ὑψῶν $A\Delta$ καὶ BE .

2ον. Τὴν κορυφὴν A καὶ τοὺς πόδας E καὶ Z τῶν ὑψῶν BE καὶ ΓZ .

560. (616). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν α , τὴν ἀκτίνα R καὶ ὅτι $B = 3\Gamma$.

561. (617). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν α , τὸ ὕψος u_β καὶ τὴν διάμεσον μ_α .

562. (618). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν α , τὸ ὕψος u_β καὶ τὴν διάμεσον μ_β .

563. (619). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὸ ὕψος u_α , τὴν διχοτόμον δ_α καὶ τὴν ἀκτίνα R .

564. (620). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν διάμεσον μ_α , τὴν διχοτόμον δ_α καὶ τὸ ὕψος u_α .

565. (621). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὰ κέντρα τῶν τριῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων.

566. (622). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν A καὶ τὰ μεγέθη BH καὶ ΓH τῶν τμημάτων, τὰ ὁποῖα περιλαμβάνονται μεταξὺ τῶν κορυφῶν B καὶ Γ καὶ τοῦ ὀρθοκέντρου H .

567. (623). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα παραλληλόγραμμον, ἂν γνωρίζωμεν μίαν γωνίαν του, μίαν πλευρὰν του καὶ μίαν διαγώνιον του.

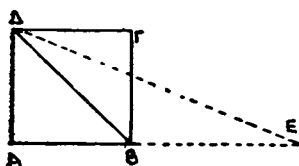
568. (637). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποῖου δύο ἀπέναντι κορυφαὶ νὰ εἶναι δοθέντα σημεῖα, αἱ δὲ δύο ἄλλαι κορυφαὶ νὰ κεῖνται ἐπὶ δοθείσης περιφερείας O .

569. (632). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα ὀρθογώνιον $AB\Gamma\Delta$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν περίμετρόν του 2τ καὶ τὴν διαγώνιον του.

570. (633). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα ὀρθογώνιον $AB\Gamma\Delta$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν

τὴν διαφορὰν τῶν δύο διαδοχικῶν πλευρῶν του καὶ τὴν γωνίαν τῶν διαγωνίων του.

571. (624). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τετράγωνον $ΑΒΓΔ$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν διαφορὰν τῆς διαγωνίου καὶ τῆς πλευρᾶς του.



Σχ. ἀσκ. 573.

572. (634). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τετράγωνον ἂν γνωρίζωμεν τὴν ἀπόστασιν τοῦ μέσου μιᾶς πλευρᾶς του ἀπὸ μίαν διαγωνίον του.

573. (635). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τετράγωνον, ἂν γνωρίζωμεν τὸ ἄθροισμα τῆς πλευρᾶς του καὶ τῆς διαγωνίου του.

574. (636). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνας ῥόμβος, ἂν γνωρίζωμεν τὴν περιμετρὸν του καὶ τὴν διαφορὰν δύο προσκειμένων γωνιῶν του.

575. (625). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τραπέζιον, ἂν γνωρίζωμεν τὰς δύο βάσεις του καὶ τὰς δύο γωνίας, αἱ ὁποῖαι πρόσκεινται εἰς μίαν ἀπὸ τὰς βάσεις του.

576. (626). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τραπέζιον, ἂν γνωρίζωμεν τὰς τέσσαρας πλευρᾶς του.

577. (627). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τραπέζιον, ἂν γνωρίζωμεν τὰς δύο βάσεις του καὶ τὰς διαγωνίους του.

578. (628). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τετράπλευρον, ἂν γνωρίζωμεν τὰ μέσα τῶν τριῶν πλευρῶν του καὶ μίαν εὐθεῖαν παράλληλον καὶ ἴσην πρὸς τὴν τετάρτην πλευράν.

579. (629). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τετράπλευρον, ἂν γνωρίζωμεν τὰς τέσσαρας πλευρᾶς του καὶ τὴν γωνίαν, τὴν ὁποῖαν σχηματίζουν δύο ἀπέναντι πλευραὶ του.

580. (630). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα πεντάγωνον, ἂν γνωρίζωμεν τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του (Lionnet).

581. (631). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τετράπλευρον, ἂν γνωρίζωμεν τὰς τέσσαρας πλευρᾶς του καὶ τὴν μίαν ἀπὸ τὰς εὐθείας, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰ μέσα δύο ἀπέναντι πλευρῶν του.

582. (578). Εἰς δοθὲν τετράγωνον νὰ ἐγγραφῆ ἓνα ἰσοπλευρον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ μία κορυφή νὰ κεῖται εἰς τὸ μέσον μιᾶς τῶν πλευρῶν τοῦ τετραγώνου.

583. (579). Εἰς δοθὲν παραλληλόγραμμον νὰ ἐγγραφῆ ἓνα παραλληλόγραμμον.

584. (580). Εἰς δοθέντα κύκλον, νὰ ἐγγραφῆ ἓνα τραπέζιον, τοῦ ὁποίου γνωρίζωμεν τὸ ὕψος του καὶ τὴν διαφορὰν τῶν βάσεων του.

585. (581). Εἰς δοθέντα κυκλικὸν τομέα, νὰ ἐγγραφῆ κύκλος.

586. (575). Δίδεται μία γωνία xOy καὶ ἓνα σημεῖον M , τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Ox . Νὰ εὐρεθῆ ἐπὶ τῆς Ox ἓνα ἄλλο σημεῖον N , τὸ ὁποῖον νὰ ἀπέχη ἴσον ἀπὸ τὸ M καὶ ἀπὸ τὴν πλευράν Oy .

587. (576). Νὰ ἀχθῆ μία εὐθεῖα $ΔΕ$ παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν $ΒΓ$ ἑνὸς τριγώνου $ΑΒΓ$ εἰς τρόπον, ὥστε νὰ εἶναι $ΒΔ=ΑΕ$.

588. (577). Δίδεται τὸ ἰσοσκελὲς καὶ ὀρθογώνιον τρίγωνον $ΑΒΓ$ (\hat{A} ὀρθή) καὶ ζητεῖται νὰ εὐρεθῆ ἐπὶ τοῦ ὕψους του $ΑΔ$ ἓνα σημεῖον O τοιοῦτον, ὥστε

αί κάθετοι ΟΕ και ΟΖ, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὸ Ο ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ και ΑΓ ἀντιστοίχως, νὰ ἔχουν ἄθροισμα ἴσον μὲ τὴν ΟΔ.

589. (582). Δίδονται δύο παράλληλοι εὐθεῖαι Π_1 και Π_2 και δύο σημεῖα Α και Β. Νὰ ἀχθοῦν ἀπὸ τὰ σημεῖα αὐτὰ παράλληλοι εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι νὰ τέμνουν τὰς Π_1 και Π_2 , οὕτως, ὥστε τὸ σχηματιζόμενον παραλληλόγραμμον νὰ εἶναι ῥόμβος.

590. (583). Δίδεται περιφέρεια Ο και ζητεῖται νὰ εὐρεθῇ μία χορδὴ τοιαύτη, ὥστε ἡ διαφορὰ τῶν δύο τόξων, ποὺ ὀρίζει, νὰ εἶναι ἴση μὲ δοθὲν τόξον τῆς δοθείσης περιφερείας.

591. (584). Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Ρ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐντὸς δοθείσης γωνίας $\alpha O \gamma$, νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα περατουμένη εἰς τὰς πλευρὰς τῆς και τοιαύτη, ὥστε νὰ διαιρηθῆται εἰς δύο ἴσα μέρη ὑπὸ τοῦ σημείου Ρ.

592. (585). Δίδεται κύκλος Ο και δύο σημεῖα Α και Β ἐκτὸς αὐτοῦ. Νὰ ἀχθῇ ἐκ τοῦ Α μία χορδὴ, τῆς ὁποίας τὰ ἄκρα νὰ ἀπέχουν ἐξ ἴσου ἐκ τοῦ σημείου Β.

593. (586). Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Ρ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς κύκλου Ο νὰ ἀχθῇ μία χορδὴ ΑΡΒ τοιαύτη, ὥστε ἡ σχηματιζομένη γωνία ΑΓΒ ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων τῆς περιφερείας Ο εἰς τὰ σημεῖα Α και Β νὰ εἶναι μεγίστη.

594 (587). Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Ρ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐντὸς δοθείσης γωνίας $\alpha O \gamma$, νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα τὰς πλευρὰς Ο α και Ο γ εἰς τὰ σημεῖα Α και Β και τοιαύτη ὥστε, ΡΑ=ΑΒ.

595. (588). Νὰ ἀχθοῦν ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα Α και Β δύο παράλληλοι, τῶν ὁποίων ἡ ἀπόστασις νὰ εἶναι ἴση μὲ δοθὲν μῆκος δ.

596. (589). Δίδονται δύο ζεύγη παραλλήλων τεμνομένων και ἕνα σημεῖον Ρ. Νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ Ρ μία τέμνουσα τοιαύτη, ὥστε τὰ εὐθύγραμμα τμήματα, τὰ περιλαμβανόμενα μεταξὺ τῶν παραλλήλων, νὰ εἶναι ἴσα.

597. (590). Δύο κύκλοι Ο και Ο' τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Α και Β' ἀπὸ τὸ Α φέρομεν μίαν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν Ο εἰς τὸ Μ και τὴν Ο' εἰς τὸ Μ'. Ἐὰν Δ εἶναι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν ΜΑΜ', ἡ ὁποία ἄγεται εἰς τὸ Α και τῆς διακέντρου ΟΟ', νὰ ὀρισθῇ ἡ θέσις τοῦ Δ, ἵνα τὸ σημεῖον Α εἶναι τὸ μέσον τῆς ΜΜ'.

598. (591). Νὰ εὐρεθῇ ἐπὶ τῆς βάσεως ΒΓ ἑνὸς δοθέντος τριγώνου ΑΒΓ ἕνα σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε, ἐὰν φέρωμεν τὰς παραλλήλους ΜΔ και ΜΕ πρὸς τὰς πλευρὰς ΑΒ και ΑΓ, τὸ σχηματιζόμενον παραλληλόγραμμον ΑΕΜΔ νὰ ἔχη δοθείσαν περίμετρον 2τ.

599. (592) Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Ρ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐντὸς δοθείσης γωνίας $\alpha \Lambda \gamma$ νὰ ἀχθῇ μία τέμνουσα τοιαύτη, ὥστε ἡ περίμετρος τοῦ σχηματιζομένου τριγώνου νὰ εἶναι ἴση μὲ δοθὲν μῆκος 2τ.

600. (593). Εἰς δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἀχθῇ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ, ἡ ὁποία νὰ τέμνη τὰς πλευρὰς ΑΒ και ΑΓ εἰς τὰ σημεῖα Δ και Ε και τοιαύτη ὥστε νὰ εἶναι ΔΕ=ΔΒ+ΕΓ.

601. (594). Ἀπὸ δύο σημεῖα Α και Β, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐπὶ δοθείσης περιφερείας, νὰ ἀχθοῦν δύο χορδαὶ παράλληλοι, τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ νὰ εἶναι ἴση μὲ δοθὲν μῆκος λ.

602. (595). Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας νὰ εὐρεθῇ ἕνα σημεῖον, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων του ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα νὰ εἶναι ἐλάχιστον. (Δύο περιπτώσεις).

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ'.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

320. Εἰς προηγούμενα κεφάλαια τοῦ Πρώτου Βιβλίου ἐδώσαμεν τὸν ὄρισμὸν τοῦ γεωμετρικοῦ τόπου καὶ ἐγνωρίσαμεν τοὺς κάτωθι 8 γεωμετρικοὺς τόπους :

1ον. Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τὰ ὅποια ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὰ ἄκρα ἑνὸς εὐθύγραμμου τμήματος, εἶναι ἡ μεσοκάθετος αὐτοῦ. (§ 137).

2ον. Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τὰ ὅποια ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὰς πλευρὰς μιᾶς γωνίας εἶναι ἡ διχοτόμος αὐτῆς. (§ 144).

3ον. Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τὰ ὅποια ἀπέχουν ὁμοῦσαν ἀπόστασιν λ ἀπὸ δοθεῖσαν εὐθείαν, εἶναι δύο εὐθεῖαι παράλληλοι πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθείαν, αἱ ὅποια κείνται ἑκατέρωθεν αὐτῆς καὶ εἰς ἀπόστασιν λ . (§ 195).

4ον. Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τὰ ὅποια ἀπέχουν ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ δύο παραλλήλους εὐθείας, εἶναι μία τρίτη παράλληλος εὐθεῖα, ἡ ὅποια ἀπέχει ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὰς δύο πρώτας. (§ 239).

5ον. Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου, τὰ ὅποια ἀπέχουν ἴσην ἀπόστασιν λ ἀπὸ ὠρισμένον σημεῖον O , εἶναι ἡ περιφέρεια κύκλου, ἡ ὅποια, ἔχει κέντρον τὸ δοθὲν σημεῖον O καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν ἀπόστασιν λ . (§ 79).

6ον. Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν, αἱ ὅποια διέρχονται ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα A καὶ B εἶναι ἡ μεσοκάθετος τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος AB . (§ 241).

7ον. Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου, ἀπὸ τὰ ὅποια δοθὲν εὐθύγραμμον τμήμα φαίνεται ὑπὸ ὀρθὴν γωνίαν, εἶναι ἡ περιφέρεια κύκλου, ἡ ὅποια γράφεται μὲ διάμετρον τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον τμήμα. (§ 295).

8ον. Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τοῦ ἐπιπέδου, ἀπὸ τὰ ὁποῖα δοθεῖσα εὐθεῖα φαίνεται ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν, εἶναι τὸ τόξον τοῦ κυκλικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον γράφεται μὲ χορδὴν τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν καὶ δέχεται γωνίαν ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν. (§ 295).

321. Προσδιορισμὸς τοῦ τόπου. Διὰ νὰ ἀναγνωρίσωμεν τὴν φύσιν τοῦ γεωμετρικοῦ τόπου τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἔχουν δοθεῖσαν ιδιότητα, καὶ νὰ προσδιορίσωμεν τὴν θέσιν τούτου, ὡς πρὸς τὰ δοθέντα ἢ γνωστὰ μεγέθη, ἐξετάζομεν ἓνα ἢ μερικὰ μεμονωμένα σημεῖα τοῦ τόπου καὶ ἀναζητοῦμεν νὰ εὕρωμεν ποία εἶναι ἡ γραμμὴ, ἡ ὁποία δύναται νὰ διέλθῃ διὰ τῶν σημείων τούτων.

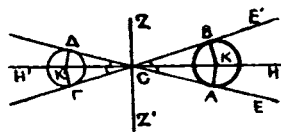
Τὰ κάτωθι προβλήματα θὰ μᾶς δείξουν τὴν πορείαν, τὴν ὁποίαν πρέπει νὰ ἀκολουθοῦμεν διὰ τὸν προσδιορισμὸν τῆς φύσεως καὶ τῆς θέσεως ἑνὸς γεωμετρικοῦ τόπου.

322. Πρόβλημα. *Νὰ εὕρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν, αἱ ὁποῖαι ἐφάπτονται δύο δοθεῖσῶν εὐθειῶν.*

Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις, καθ' ὅσον αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι τέμνονται ἢ εἶναι παράλληλοι.

I. Περίπτωσις. Ἐστῶσαν δύο εὐθεῖαι E καὶ E' , αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ O καὶ K τὸ κέντρον μιᾶς περιφερείας, ἡ ὁποία ἐφάπτεται τῶν E καὶ E' εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B . Τὸ K εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου.

Φέρομεν τὰς ἀκτῖνας KA καὶ KB εἰς τὰ σημεῖα τῆς ἐπαφῆς. Αἱ KA καὶ KB εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς OE καὶ OE' ἀντιστοίχως, ὡς ἀκτῖνες καταλήγουσαι εἰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ ἴσαι, ὡς ἀκτῖνες τοῦ αὐτοῦ κύκλου, ἔπεται, ὅτι τὸ K κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου $H'OH$ τῆς γωνίας EOE' .



Σχ. 246.

Ἀντιστρόφως. Ἐστω K' τυχὸν σημεῖον τῆς διχοτόμου $H'OH$ τῆς γωνίας τῶν εὐθειῶν E καὶ E' . Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ K' εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου, δηλ. εἶναι κέντρον περιφερείας, ἡ ὁποία ἐφάπτεται τῶν εὐθειῶν E καὶ E' .

Πράγματι· ἀπὸ τὸ K' φέρομεν τὴν $K'Γ$ κάθετον ἐπὶ τὴν E' καὶ τὴν $K'Δ$ κάθετον ἐπὶ τὴν E . Ἐπειδὴ τὸ K' εἶναι σημεῖον τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας τῶν εὐθειῶν E καὶ E' , θὰ εἶναι $K'Γ = K'Δ$. Ἐὰν λοι-

πὸν γράψωμεν περιφέρειαν μὲ κέντρον τὸ K' καὶ ἀκτῖνα $K'Γ = K'Δ$, ἡ περιφέρεια αὐτὴ θὰ ἐφάπτεται τῶν εὐθειῶν E καὶ E' .

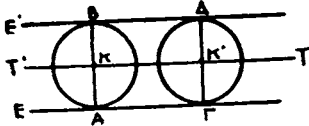
Τὸ τυχὸν λοιπὸν σημεῖον K' τῆς διχοτόμου $H'OH$ εἶναι κέντρον περιφερείας, ἡ ὁποία ἐφάπτεται τῶν εὐθειῶν E καὶ E' .

Ὡστε ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι ἡ διχοτόμος $H'OH$ τῆς γωνίας E , πὸς σχηματίζουν αἱ τεμνόμεναι εὐθεῖαι.

Ἐὰν φέρωμεν καὶ τὴν διχοτόμον OZ τῆς παραπληρωματικῆς γωνίας τῆς EOE' , ἀποδεικνύομεν ὁμοίως, ὅτι καὶ ἡ ZOZ' εἶναι ὁ ζητούμενος τόπος.

Ὡστε ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν, πὸς σχηματίζουν αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι E καὶ E' .

II. Περίπτωσης. Ἐστῶσαν δύο εὐθεῖαι E καὶ E' , αἱ ὁποῖαι εἶναι παράλληλοι καὶ K τὸ κέντρον μιᾶς περιφερείας, ἡ ὁποία ἐφάπτεται τῶν εὐθειῶν αὐτῶν εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B . Τὸ K εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου.



Σχ. 247.

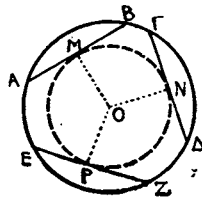
Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν AB , ἡ ὁποία, ὡς συνδέουσα τὰ σημεῖα ἐπαφῆς δύο παραλλήλων ἐφαπτομένων τῆς περιφερείας K , θὰ εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου K . Ἐπειδὴ $KA = KB$, ὡς ἀκτῖνες τοῦ αὐτοῦ κύκλου, ἔπεται, ὅτι τὸ κέντρον K ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰς παραλλήλους E καὶ E' ἐπομένως τὸ K (§ 320. 4ον)

κεῖται ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὰς E καὶ E' καὶ ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ μέσον τῆς ἀποστάσεως αὐτῶν.

Ὡστε ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι ἡ παράλληλος $T'T$ πρὸς τὰς E καὶ E' καὶ ἡ ὁποία ἀπέχει ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὰς E καὶ E' .

323. Πρόβλημα. *Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν μέσων ἴσων χορδῶν κύκλου, αἱ ὁποῖαι ἔχουν δοθὲν μήκος λ .*

Λύσις. Ἐστω ὁ κύκλος O (Σχ. 248) καὶ AB καὶ $\Gamma\Delta$ δύο χορδαὶ τοῦ ἴσαι μὲ λ . Ἐστω M τὸ μέσον τῆς χορδῆς AB καὶ N τὸ μέσον τῆς χορδῆς $\Gamma\Delta$. Τὰ σημεῖα M καὶ N εἶναι προφανῶς σημεῖα τοῦ τόπου.



Σχ. 248.

Φέρομεν τὰς εὐθεῖας OM καὶ ON . Αἱ OM καὶ ON εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς χορδὰς AB καὶ $\Gamma\Delta$, διότι συνδέουν τὸ κέντρον τοῦ κύκλου μὲ τὰ μέσα M καὶ N τῶν χορδῶν αὐτῶν εἶναι δὲ καὶ ἴσαι, ὡς ἀποστά-

σεις τῶν ἴσων χορδῶν AB καὶ $\Gamma\Delta$. Παρατηροῦμεν, ὅτι τὰ σημεῖα M καὶ N ἀπέχουν ἀπὸ τὸ κέντρον O ἀπόστασιν σταθεράν· ἄρα (§ 320. 5ον) κείνται ἐπὶ περιφερείας, ἡ ὁποία γράφεται μὲ κέντρον τὸ O καὶ ἀκτίνα ἴσην μὲ τὴν ἀπόστασιν τοῦ κέντρον O ἀπὸ μιᾶς χορδῆς, ἴσης μὲ τὸ δοθὲν μῆκος λ .

Ἀντιστρόφως. Ἐστω P τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας (O, OM) . Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ P εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου, δηλ. ὅτι εἶναι τὸ μέσον μιᾶς χορδῆς τοῦ δοθέντος κύκλου ἴσης πρὸς τὴν δοθεῖσαν χορδὴν λ .

Φέρομεν τὴν ἀκτίνα OP τῆς ἐσωτερικῆς περιφερείας καὶ κάθετον εἰς τὸ ἄκρον P αὐτῆς, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα E καὶ Z . Τὸ σημεῖον P εἶναι μέσον τῆς χορδῆς EZ , διότι ἡ OP εἶναι κάθετος, ἐκ κατασκευῆς, ἐπὶ τὴν EZ . Αἱ χορδαὶ EZ καὶ AB εἶναι ἴσαι, διότι αἱ ἀποστάσεις τῶν OM καὶ OP εἶναι ἴσαι, ὡς ἀκτίνες τοῦ αὐτοῦ κύκλου. Ὡστε τὸ τυχὸν σημεῖον P τῆς περιφερείας (O, OM) εἶναι μέσον μιᾶς χορδῆς ἴσης πρὸς τὴν δοθεῖσαν.

Ὡστε ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι περιφέρεια κύκλου, ὁμόκεντρος πρὸς τὴν δοθεῖσαν καὶ ἡ ὁποία ἔχει ἀκτίνα ἴσην μὲ τὴν ἀπόστασιν τοῦ κέντρον O ἀπὸ χορδῆν ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν λ .

324. Πρόβλημα. *Νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν δοθεῖσαν ἀπόστασιν a ἀπὸ περιφέρειαν ἀκτίνος R .*

Ἐστω O τὸ κέντρον τῆς δοθείσης περιφερείας (Σχ. 249). Φέρομεν μίαν τυχούσαν ἀκτίνα OA καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεώς της λαμβάνομεν τμήμα $AM=a$.

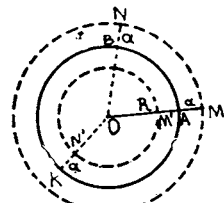
Ἐπειδὴ τὸ M ἀπέχει ἀπὸ τὴν περιφέρειαν O ἀπόστασιν $AM=a$, τὸ M εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου.

Ἐπειδὴ $OM=OA+AM$ ἢ $OM=R+a$, τὸ σημεῖον M ἀπέχει ἀπὸ τὸ σταθερὸν σημεῖον O ἀπόστασιν σταθεράν καὶ ἴσην μὲ $R+a$.

Ἄρα (§ 320. 5ον) τὸ M κείνται ἐπὶ περιφερείας κύκλου, ἡ ὁποία ἔχει κέντρον τὸ O καὶ ἀκτίνα $R+a$.

Γράφομεν τὴν ὁμόκεντρον περιφέρειαν (O, OM) .

Ἀντιστρόφως. Θὰ δείξωμεν τώρα, ὅτι τὸ τυχὸν σημεῖον N τῆς περιφερείας (O, OM) εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου, δηλ. ἀπέχει ἀπόστασιν a ἀπὸ τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν O .



Σχ. 249.

Πράγματι φέρομεν τὴν ἀκτίνα ON τῆς ἐξωτερικῆς περιφερείας, ἢ ὅποια τέμνει τὴν ἐσωτερικὴν περιφέρειαν εἰς ἓνα σημεῖον B . Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $ON=R+\alpha$ καὶ $OB=R$.

Ἀφαιροῦμεν τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$ON-OB=(R+\alpha)-R \quad \eta \quad BN=\alpha.$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ τυχὸν σημεῖον N τῆς περιφερείας (O, OM) ἀπέχει ἀπὸ τὴν περιφέρειαν (O, R) ἀπόστασιν $BN=\alpha$. Ἄρα εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου.

Ὡστε ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι μία περιφέρεια, ὁμόκεντρος τῆς δοθείσης καὶ ἡ ὅποια ἔχει ἀκτίνα ἴσην μὲ $R+\alpha$.

Ἐὰν ἐπὶ τῆς ἀκτίνος OA λάβωμεν ἓνα μῆκος $AM'=\alpha$ καὶ ἐργασθῶμεν ὁμοίως εὐρίσκομεν, ὅτι καὶ ἡ περιφέρεια, ἡ ὅποια ἔχει κέντρον τὸ O καὶ ἀκτίνα ἴσην μὲ τὴν διαφορὰν $R-\alpha$, εἶναι ὁ ζητούμενος τόπος.

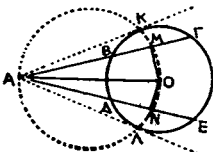
Ὡστε ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τὰ ὅποια ἀπέχουν δοθεῖσαν ἀπόστασιν α ἀπὸ δοθείσαν περιφέρειαν ἀκτίνος R , εἶναι δύο ὁμόκεντροι περιφέρειαι πρὸς τὴν δοθεῖσαν, αἱ ὅποια ἔχουν ἀκτίνας, ἡ μὲν μία $R+\alpha$, ἡ δὲ ἄλλη $R-\alpha$.

325. Πρόβλημα. *Νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν μέσων χορδῶν κύκλου, αἱ ἄποται προεκτεινόμεναι διέρχονται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον.*

Διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις, καθόσον τὸ δοθὲν σημεῖον κεῖται ἔκτος τῆς περιφερείας, ἐπὶ τῆς περιφερείας ἢ ἐντὸς τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου.

I. Περίπτωσις. *Τὸ δοθὲν σημεῖον κεῖται ἐκτὸς τῆς περιφερείας.*

Ἐστω ὁ κύκλος O (Σχ. 250) καὶ ἓνα σημεῖον A ἐκτὸς αὐτοῦ· ἀπὸ τὸ A φέρομεν τυχούσαν τέμνουσαν $AB\Gamma$ τῆς περιφερείας O , ἡ ὅποια τέμνει αὐτὴν εἰς τὰ σημεῖα B καὶ Γ . Ἐστω M τὸ μέσον τῆς χορδῆς $B\Gamma$ · τὸ σημεῖον M εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου, διότι εἶναι τὸ μέσον χορδῆς, ἡ ὅποια διέρχεται ἀπὸ τὸ A .



Σχ. 250.

Φέρομεν τὴν OM · ἡ OM εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν χορδὴν $B\Gamma$, διότι συνδέει τὸ κέντρον τοῦ κύκλου O μὲ τὸ μέσον M τῆς χορδῆς καὶ ἐπομένως ἡ γωνία AMO εἶναι ὀρθή. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν AO , ἡ ὅποια συνδέει τὸ δοθὲν σημεῖον A καὶ τὸ κέντρον O τοῦ κύκλου. Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ εὐθεῖα

ΑΟ, φαίνεται από το Μ υπό ὀρθήν γωνίαν ΑΜΟ· ἄρα το Μ κείται (§ 320. 7ον) ἐπὶ περιφερείας κύκλου, ἣ ὁποία ἔχει διάμετρον τὴν ΑΟ.

Γράφομεν λοιπὸν τὴν περιφέρειαν, ἣ ὁποία ἔχει διάμετρον τὴν ΑΟ καὶ ἣ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν Ο εἰς τὰ σημεῖα Κ καὶ Λ. Εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ τόξον ΚΟΛ, τὸ ὁποῖον κείται ἐντὸς τοῦ κύκλου Ο καὶ τὸ ὁποῖον ὀρίζεται ἀπὸ τὰς ἐφαπτομένας ΑΚ καὶ ΑΛ, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὸ δοθὲν σημεῖον Α πρὸς τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν Ο, εἶναι ὁ τόπος τῶν μέσων χορδῶν τοῦ κύκλου Ο, αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ τὸ Α.

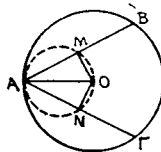
Ἀντιστρόφως. Θὰ δείξωμεν τώρα, ὅτι κάθε σημεῖον τοῦ τόξου ΚΟΛ εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου· δηλ. εἶναι τὸ μέσον μιᾶς χορδῆς τοῦ κύκλου Ο, ἣ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ δοθὲν σημεῖον Α.

Πράγματι· ἔστω Ν (Σχ. 250) τυχὸν σημεῖον τοῦ τόξου ΚΟΛ· φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΝΑ, ἣ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν Ο εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε· φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΟΝ· ἣ γωνία ΑΝΟ εἶναι ὀρθή, ὡς ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ ἡμικύκλιον ΑΝΟ καὶ ἐπομένως ἣ ΟΝ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΕ· ἐπειδὴ ἣ ΟΝ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν χορδὴν ΔΕ, τὸ σημεῖον Ν εἶναι τὸ μέσον τῆς χορδῆς ΔΕ· ὥστε τὸ σημεῖον Ν εἶναι μέσον τῆς χορδῆς ΔΕ, ἣ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Α καὶ ἐπομένως εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου.

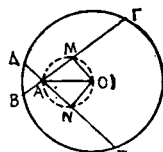
Ὡστε ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι τόξον περιφερείας κύκλου, ὁ ὁποῖος γράφεται μὲ διάμετρον τὴν ΑΟ καὶ τὸ ὁποῖον τόξον κείται ἐντὸς τοῦ δοθέντος κύκλου.

II. Περίπτωσις. Τὸ δοθὲν σημεῖον κείται ἐπὶ τῆς περιφερείας.

Ἐστω ὁ κύκλος Ο (Σχ. 251) καὶ ἓνα σημεῖον Α ἐπὶ τῆς περιφερείας του· ἀπὸ τὸ Α φέρομεν μίαν τυχοῦσαν χορδὴν ΑΒ τοῦ κύκλου Ο. Ἐστω Μ τὸ μέσον τῆς χορδῆς ΑΒ· τὸ Μ εἶναι προφανῶς σημεῖον τοῦ τόπου.



Σχ. 251.



Σχ. 252.

Φέρομεν τὴν ΟΜ καὶ τὴν ΟΑ καὶ ἀποδεικνύομεν, ὅπως εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν, ὅτι τὸ Μ κείται ἐπὶ περιφερείας κύκλου, ἣ ὁποία ἔχει διάμετρον τὴν ΑΟ.

III. Περίπτωσις. Τὸ δοθὲν σημεῖον κείται ἐντὸς τοῦ κύκλου.

Ἐστω ὁ κύκλος Ο (Σχ. 252) καὶ Α τὸ δοθὲν σημεῖον, τὸ ὁποῖον κείται ἐντὸς τοῦ κύκλου. Φέρομεν μίαν τυχοῦσαν χορδὴν ΒΑΓ· ἔστω Μ τὸ μέσον τῆς χορδῆς ΒΓ· τὸ Μ εἶναι προφανῶς σημεῖον τοῦ τόπου.

Ἀσκήσεις ἐπὶ τοῦ Κεφαλαίου τῶν γεωμετρικῶν τόπων

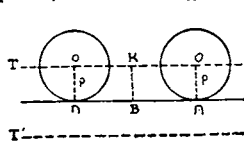
603. (638). Νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κέντρων τῶν κύκλων, οἱ ὅποιοι τέμνουσι, ἀπὸ τὰς πλευρὰς δοθείσης γωνίας, χορδὰς ἴσας.

604. (639). Νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κέντρων τῶν κύκλων, οἱ ὅποιοι ἐφάπτονται δοθείσης περιφερείας εἰς δοθὲν σημεῖον αὐτῆς.

605. (640). Νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν, αἱ ὁποῖαι ἔχουσι δοθεῖσαν ἀκτίνα ρ καὶ αἱ ὁποῖαι ἀποτέμνουσι ἀπὸ δοθείσαν εὐθείαν xy χορδὰς δοθέντος μήκους.

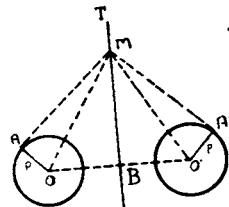
606. (641). Νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τῆς τομῆς τῶν διαμέσων τῶν τριγώνων, τὰ ὅποια ἔχουσι κοινὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος.

607. (642). Νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν, αἱ ὁποῖαι ἔχουσι δοθεῖσαν ἀκτίνα καὶ ἐφάπτονται δοθείσης εὐθείας.



Σχ. ἀσκ. 607.

608. (643). Νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἄγονται ἴσαι ἐφαπτόμεναι πρὸς δύο δοθείσας καὶ ἴσας περιφερείας.



Σχ. ἀσκ. 608.

609. (644). Νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν, αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ δοθὲν σημείου A καὶ ἔχουσι δοθεῖσαν ἀκτίνα.

610. (645). Δίδονται δύο ὁμόκεντροι περιφέρειαι καὶ ζητεῖται νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κορυφῶν τῶν ὀρθῶν γωνιῶν, τῶν ὁποίων ἡ μία πλευρὰ ἐφάπτεται τῆς ἐσωτερικῆς περιφερείας καὶ ἡ ἄλλη τῆς ἐξωτερικῆς.

611. (646). Νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κορυφῶν τῶν ὀρθῶν γωνιῶν, τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ ἐφάπτονται δοθείσης περιφερείας.

612. (647). Δίδονται δύο ὁμόκεντροι περιφέρειαι καὶ ζητεῖται νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κορυφῶν τῶν ἴσων γωνιῶν, τῶν ὁποίων ἡ μία πλευρὰ ἐφάπτεται τῆς ἐξωτερικῆς περιφερείας καὶ ἡ ἄλλη πλευρὰ τῆς ἐσωτερικῆς.

613. (648). Νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων ἀπὸ τὰ ὁποῖα αἱ ἀγόμεναι ἐφαπτόμεναι πρὸς δοθεῖσαν περιφέρειαν σχηματίζουσι ἴσας γωνίας.

614. (649). Ἀπὸ τυχόν σημείου A δοθείσης περιφερείας O φέρομεν ἐφαπτομένην καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς καὶ ἐκατέρωθεν τοῦ σημείου ἐπαφῆς A μήκη $AM=AM'=\lambda$. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων M καὶ M' , ὅταν τὸ A γράφῃ τὴν περιφέρειαν.

615. (650). Δίδεται μία γωνία xOy καὶ ἓνα σταθερὸν σημεῖον A ἐπὶ τῆς Ox . Γράφομεν περιφέρειαν K ἐφαπτομένην τῆς Ox εἰς τὸ A καὶ τῆς Oy εἰς ἓνα σημεῖον B . Νὰ εὐρεθῇ ὁ τόπος τοῦ σημείου B , ὅταν ἡ πλευρὰ Oy στρέφεται περὶ τὸ O .

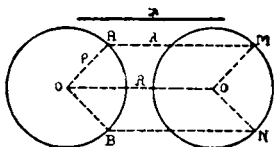
616. (651). Νὰ εὐρεθῇ ὁ τόπος τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν, αἱ ὁποῖαι ἔχουσι δοθεῖσαν ἀκτίνα καὶ αἱ ὁποῖαι τέμνουσαι δοθεῖσαν περιφέρειαν, ὀρίζουσι μίαν κοινὴν χορδὴν δοθέντος μήκους.

617. (652). Μία εὐθεῖα, δοθέντος μήκους λ , κινεῖται οὕτως, ὥστε νὰ μένῃ

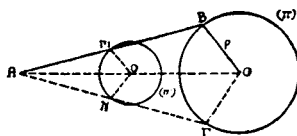
παράλληλος πρὸς ἑαυτὴν καὶ νὰ ἐγγίξῃ δοθεῖσαν περιφέρειαν μὲ ἓνα ἀπὸ τὰ ἄκρα της. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ ἄλλου ἄκρου της.

618. (653). Εὐθεία μήκους λ κινεῖται οὕτως, ὥστε τὰ ἄκρα της νὰ ἐγγίξουν δύο καθέτους εὐθείας. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ μέσου τῆς δοθείσης εὐθείας.

619. (654). Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν μέσων τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἔκτος δοθέντος κύκλου, μέχρι τῆς περιφέρειας του.



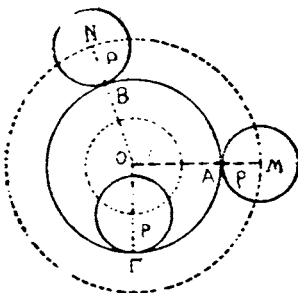
Σχ. ἀσκ. 617.



Σχ. ἀσκ. 619.

620. (655). Μία εὐθεῖα AB κινεῖται, οὕτως ὥστε τὰ ἄκρα της νὰ ἐγγίξουν δύο εὐθείας καθέτους Ox, Oy. Σχηματίζομεν τὸ ὀρθογώνιον BOAG. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῆς κορυφῆς Γ.

621. (656). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου ἐπαφῆς M δύο περιφερειῶν μεταβλητῶν ἀκτίνων, αἱ ὁποῖαι ἐφάπτονται ἀντιστοίχως μιᾶς εὐθείας xy εἰς δύο δοθέντα σημεῖα A καὶ B.



Σχ. ἀσκ. 622.

622. (657). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ κέντρου ἑνὸς κύκλου, ὁ ὁποῖος ἔχει δοθεῖσαν ἀκτίνα καὶ ἐφάπτεται δοθείσης περιφέρειας.

623. (658). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ συμμετρικοῦ δοθέντος σημείου A πρὸς ὅλας τὰς εὐθείας, αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον O.

624. (659). Ἡ πλευρὰ BG ἑνὸς τριγώνου ABΓ εἶναι σταθερὰ κατὰ τὸ μέ-

γεθος καὶ τὴν θέσιν καὶ ἡ διάμεσός του ΑΔ ἔχει δοθὲν μήκος λ . Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν διαμέσων τῶν τριγώνων ABΓ.

625. (660). Εἰς ἓνα τετράπλευρον ABΓΔ εἶναι ὠρισμένη κατὰ τὴν θέσιν καὶ τὸ μέγεθος ἡ πλευρὰ AB, αἱ δὲ δύο ἄλλαι πλευραὶ ΑΔ καὶ ΒΓ καὶ μία διαγώνιος ἔχουν δοθέντα μήκη. Ποῖος εἶναι ὁ τόπος τοῦ μέσου M τῆς ἄλλης διαγωνίου του καὶ ὁ τόπος τοῦ μέσου O τῆς εὐθείας MN, ἡ ὁποία συνδέει τὰ μέσα τῶν δύο διαγωνίων του :

626. (661). Ἀπὸ δοθὲν σημείου A, τὸ ὁποῖον κεῖται ἔκτος κύκλου O φέρομεν τὴν τέμνουσαν αὐτοῦ ABΓ. Ἀπὸ τὸ Γ ὑψοῦμεν κάθετον ΓΔ ἐπὶ τὴν ABΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ Δ. Κατασκευάζομεν ἔπειτα ἓνα ὀρθογώνιον ΑΓΔΕ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ σημείου E, ὅταν τὸ Γ γράφῃ τὴν περιφέρειαν.

622. (662). Μία σταθερὰ γωνία εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς μίαν περιφέρειαν

κύκλου O καὶ μία ἀπὸ τὰς πλευρὰς τῆς διέρχεται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον P , τὸ ὁποῖον κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ μέσου τῆς χορδῆς, ἡ ὁποία συνδέει τὰ ἄκρα τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας.

628. (663). Μία σταθερὰ γωνία $AB\Gamma$ ἔχει τὴν κορυφὴν τῆς B ἐπὶ μιᾷς περιφερείας, αἱ δὲ πλευραὶ τῆς εἶναι χορδαὶ αὐτῆς. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ μέσου τῆς χορδῆς, ἡ ὁποία συνδέει τὰ ἄκρα τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας αὐτῆς.

629 (664). Νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῆς κορυφῆς Γ ἑνὸς τριγώνου $AB\Gamma$, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ AB εἶναι ὠρισμένη καὶ τοῦ ὁποίου ἡ διάμεσος AD ἔχει δοθὲν μῆκος λ .

630. (665). Νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων τῶν ἰσοσκελῶν τραπεζίων, τὰ ὁποία σχηματίζονται, ἂν φέρωμεν παραλλήλους πρὸς τὴν βάσιν ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου.

631. (666). Δίδεται ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Δ τῆς βάσεως $B\Gamma$ φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς πλευρὰς BA καὶ ΓA , αἱ ὁποῖαι τέμνουσι τὰς πλευρὰς εἰς τὰς σημεῖα E καὶ Z . Νὰ εὐρεθῇ ὁ τόπος τοῦ σημείου M τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων τοῦ σχηματιζομένου παραλληλογράμμου, ὅταν τὸ Δ διαγράψῃ τὴν βάσιν $B\Gamma$.

632. (667). Εἰς μίαν περιφέρειαν O , μία χορδὴ AB εἶναι ἢ μία ἐκ τῶν βάσεων ἑνὸς τραπέζιου ἔγγεγραμμένου. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ μέσου ἐκάστης διαγωνίου καὶ τοῦ μέσου ἐκάστης τῶν δύο προσκειμένων πλευρῶν πρὸς τὴν βάσιν AB .

633. (668). Νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν μέσων τῶν βάσεων τῶν τραπεζίων, τὰ ὁποῖα ἔχουν ὡς διαγωνίους δύο τεμνούσας, ἀγομένας ἀπὸ τὸ κοινὸν σημεῖον ἐπαφῆς δύο ἐφαπτομένων περιφερειῶν, ὅταν αἱ τέμνουσαι αὐταί τέμνωνται ὑπὸ σταθερὰν γωνίαν.

634. (669). Μία περιφέρεια O σταθερὰ στρέφεται περὶ ἓνα ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς A . Νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ κέντρου τῆς O . Εἰς ἐκάστην νέαν θέσιν τῆς περιφερείας φέρομεν τὴν διάμετρον, τὴν παραλληλὴν πρὸς δοθεῖσαν διεύθυνσιν. Νὰ εὐρεθῇ ὁ τόπος τῶν ἄκρων τῶν διαμέτρων αὐτῶν.

635. (670). Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον O , τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ δύο εὐθείας παραλλήλους, $x'x$ καὶ $y'y$ φέρομεν δύο εὐθείας AOB καὶ $A'OB'$ καθέτους μεταξύ των, αἱ ὁποῖαι συναντοῦν τὴν $x'x$ εἰς τὰ A καὶ A' καὶ τὴν $y'y$ εἰς τὰ σημεῖα B καὶ B' . Νὰ εὐρεθῇ ὁ τόπος τῶν ποδῶν M καὶ M' τῶν καθέτων, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὸ σημεῖον O ἐπὶ τὰς εὐθείας $A'B$ καὶ $A'B'$, ὅταν ἡ AB στρέφεται περὶ τὸ O .

636. (671). Νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν, αἱ ὁποῖαι ἔχουν δοθεῖσαν ἀκτίνα καὶ διχοτομοῦν δοθεῖσαν περιφέρειαν.

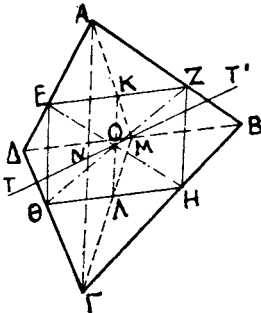
637. (672). Μία εὐθεῖα AB σταθερὰ κατὰ τὸ μῆκος κινεῖται οὕτως, ὥστε τὰ ἄκρα τῆς A καὶ B νὰ μένουσι ἐπὶ τῶν πλευρῶν δοθείσης γωνίας xOy . Νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τρίγωνον OAB .

638. (673). Δίδεται μία εὐθεῖα xy καὶ ἓνα σημεῖον τῆς A .

1ον. Νὰ εὐρεθῇ ὁ τόπος τῶν κέντρων τῶν κύκλων, οἱ ὁποῖοι ἐφάπτονται τῆς xy εἰς τὸ σημεῖον A .

2ον. Νὰ εὐρεθῇ ὁ τόπος τῶν ἄκρων τῶν διαμέτρων τῶν κύκλων αὐτῶν, αἱ ὁποῖαι εἶναι παράλληλοι τῆς xy .

639. (674). Νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κέντρων τῶν παραλληλογράμμων, τὰ ὁποῖα εἶναι ἐγγεγραμμένα εἰς δοθὲν τεράπλευρον.



Σχ. ἀσκ. 639.

640. (675). Δίδονται δύο εὐθεῖαι $x'x$ καὶ $y'y$ κάθετοι μεταξὺ των, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ O καὶ ἓνα σταθερὸν σημεῖον P , τὸ ὁποῖον κεῖται ἐντὸς τῆς γωνίας yOx . Μία ὀρθὴ γωνία, μὲ κορυφὴν τὸ P , στρέφεται περὶ τὸ σημεῖον P . Ἐὰν A καὶ B εἶναι τὰ σημεῖα, εἰς τὰ ὁποῖα αἱ πλευραὶ τῆς τέμνουσιν, ἀντιστοίχως, τὰς εὐθείας $x'x$ καὶ $y'y$, νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ μέσου τῆς εὐθείας AB .

641. (676). Νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν ποδῶν τῶν καθέτων, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον ἐπὶ τὰς ἀκτῖνας δοθέντος κύκλου.

642. (677). Μία ἀπὸ τὰς ἴσας πλευρὰς AB ἐνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου $AB\Gamma$ εἶναι ὀρισμένη κατὰ τὴν θέσιν καὶ κατὰ τὸ μέγεθος, ἐνῶ ἡ γωνία τῆς κορυφῆς A μεταβάλλεται. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ ποδὸς τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας A .

643. (678). Δίδεται ἓνα ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον E τῆς ὑποτείνουσας $B\Gamma$ ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τὴν $B\Gamma$, ἡ ὁποία τέμνει τὴν AB εἰς τὸ Δ καὶ τὴν $A\Gamma$ εἰς τὸ Z . Φέρομεν τὰς εὐθείας $\Gamma\Delta$ καὶ BZ καὶ ζητεῖται νὰ εὐρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν $\Gamma\Delta$ καὶ BZ .

644. (679). Δύο ἴσοι κύκλοι O καὶ O' τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B . Διὰ τοῦ B φέρομεν τυχούσαν τέμνουσαν, ἡ ὁποία τέμνει τὰς περιφερείας O καὶ O' εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Γ' ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. Ὅτι $AG = A\Gamma'$.

2ον. Ὅτι ἡ γωνία $\Gamma AI\Gamma'$ διατηρεῖ τὴν αὐτὴν τιμὴν, ὅταν ἡ τέμνουσα $\Gamma B\Gamma'$ στρέφεται περὶ τὸ B .

3ον. Νὰ εὐρεθῇ ὁ τόπος τοῦ μέσου M τῆς $\Gamma\Gamma'$.

645. (680). Δίδεται ἓνας ὀρισμένος κύκλος O ἀκτίνος $OA = r$ καὶ ἓνας ἄλλος μεταβλητός, ὁμόκεντρος τοῦ πρώτου καὶ ὁ ὁποῖος τέμνει τὴν διάμετρον AOB τοῦ πρώτου εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Γ' . Ἀπὸ τὰ σημεῖα Γ καὶ Γ' φέρομεν καθέτους ἐπὶ τὴν AB , αἱ ὁποῖαι συναντοῦν τὴν περιφέρειαν τοῦ δοθέντος κύκλου εἰς τὰ σημεῖα Δ, Δ' καὶ E, E' ἀντιστοίχως. Νὰ εὐρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων τῆς τομῆς τῶν ἀκτίνων $O\Delta, OE, O\Delta', OE'$ καὶ τῆς μεταβλητῆς περιφερείας.

646. (681). Λαμβάνομεν ὅλα τὰ τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν $B\Gamma$ καὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς A . Νὰ εὐρεθῇ:

1ον. Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῆς κορυφῆς A .

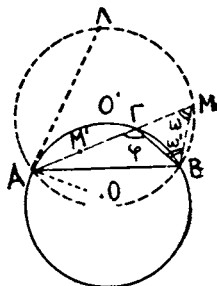
2ον. Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν ὑψῶν των.

647. (682). Νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν μέσων τῶν πλευρῶν ἐνὸς τριγώνου $AB\Gamma$, τοῦ ὁποῖου ἡ βάση εἶναι ὀρισμένη κατὰ τὴν θέσιν καὶ τὸ μέγεθος καὶ ἡ γωνία A τῆς κορυφῆς σταθερά.

648. (683). Δίδεται ἓνα κυκλικὸν τμήμα $AKBA$ χορδῆς AB . Κάθε σημεῖον

Κ τοῦ τόξου του εἶναι τὸ κέντρον ἑνὸς κύκλου ἐφαπτομένου τῆς χορδῆς AB . Νὰ εὐρεθῇ ὁ τόπος τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν ἐφαπτομένων τῶν κύκλων, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὰ σημεία A καὶ B πρὸς τοὺς κύκλους αὐτοὺς.

649 (684). Ἀπὸ τὸ ἄκρον A μιᾶς χορδῆς AB ἑνὸς κύκλου O φέρομεν τυχοῦσαν χορδὴν AG καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς χορδῆς αὐτῆς καὶ ἑκατέρωθεν τοῦ G δύο τμήματα GM καὶ GM' ἴσα μὲ τὸ εὐθυγρ. τμήμα BG . Νὰ εὐρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων M καὶ M' , ὅταν τὸ G γράφῃ ἕνα ἀπὸ τὰ τόξα τῆς χορδῆς.



Σχ. ἀσκ. 649.

650. (685). Ἀπὸ δοθὲν σημείον A , τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς κύκλου O φέρομεν τυχοῦσαν τέμνουσαν ABG αὐτοῦ. Ἀπὸ τὸ μέσον Δ τῆς χορδῆς BG ὑψοῦμεν κάθετον ἐπ' αὐτὴν καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς τμήματα $\Delta M = \Delta M' = \Delta A$. Νὰ εὐρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων M καὶ M' , ὅταν ἡ τέμνουσα ABG στρέφεται περὶ τὸ A .

651. (686). Λαμβάνομεν ὄλα τὰ τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς A .

1ον. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κέντρων τῶν κύκλων τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς τὰ τρίγωνα ABG .

2ον. Νὰ εὐρεθῇ ὁ τόπος τῶν κέντρων τῶν κύκλων τῶν παρεγγεγραμμένων εἰς τὸ τρίγωνον ABG .

652. (687). Δίδεται ἕνα τόξον ANB μιᾶς περιφερείας O , τὸ ὁποῖον ὀρίζεται ἀπὸ τὴν χορδὴν AB . Ἐνα σημείον G κινεῖται ἐπὶ τοῦ τόξου αὐτοῦ. Νὰ εὐρεθῇ ὁ τόπος τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ τρίγωνον ABG .

653. (688). Εἰς δοθέντα κύκλον O λαμβάνομεν μίαν σταθερὰν κατὰ τὴν θέσιν χορδὴν AB καὶ μίαν μεταβλητὴν χορδὴν GA , σταθεροῦ ὁμοῦ μήκους. Νὰ εὐρεθῇ :

1ον. Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου M τῆς τομῆς τῶν χορδῶν AG καὶ BA .

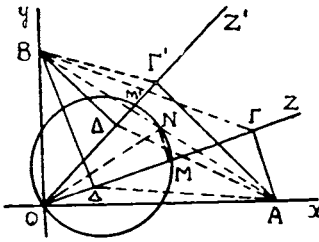
2ον. Ὁ τόπος τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν χορδῶν AG καὶ BG .

654. (689). Δίδεται ἡμικυκλίω O διαμέτρου AB . Ἡ ἐφαπτομένη εἰς τυχὸν σημείον G αὐτῆς τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς διαμέτρου εἰς ἕνα σημείον Δ ἀπὸ τὸ κέντρον O φέρομεν τὴν κάθετον πρὸς τὴν διχοτόμον ΔE τῆς γωνίας $\Gamma O \Delta$, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ἐφαπτομένην GA εἰς τὸ M . Νὰ εὐρεθῇ ὁ τόπος τοῦ σημείου M .

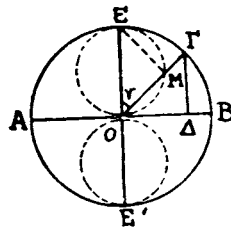
655. (691). Δίδονται δύο εὐθεῖαι Ox καὶ Oy κάθετοι μεταξύ των καὶ δύο σημεία A καὶ B , τὰ ὁποῖα κεῖνται ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν Ox καὶ Oy . Ἀπὸ τὸ σημείον O φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν OZ . Ἀπὸ τὰ σημεία A καὶ B φέρομεν τὰς καθέτους AG καὶ BD ἐπὶ τὴν OZ . Νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ μέσου τῆς GD , ὅταν ἡ OZ στρέφεται περὶ τὸ O .

656 (692). Εἰς δοθέντα κύκλον O φέρομεν μίαν διάμετρόν του AOB καὶ μίαν τυχοῦσαν ἀκτίνα OG . Ἀπὸ τὸ G φέρομεν τὴν GD κάθετον ἐπὶ τὴν AB .

Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ἀκτίνος ΟΓ τμήμα ΟΜ=ΓΔ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ Μ, ὅταν ἡ ΟΓ στρέφεται περὶ τὸ Ο



Σχ. ἀσκ. 655.



Σχ. ἀσκ. 656.

657. (693). Δύο περιφέρειαι Ο και Ο' τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Α και Α'. Ἐπὶ τὸ Α φέρομεν μίαν ὀρισιμένην τέμνουσαν ΒΑΓ και μίαν μεταβλητὴν ΜΑΝ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν Ο εἰς τὸ Μ και τὴν Ο' εἰς τὸ Ν. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΒΜ και ΓΝ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ Δ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ Δ, ὅταν ἡ ΜΝ στρέφεται περὶ τὸ Α.

658. (694). Λαμβάνομεν ὅλα τὰ τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν ΒΓ και τὴν αὐτὴν γωνίαν τῆς κορυφῆς Α. Νὰ εὑρεθῇ:

1ον. Ὁ τόπος τῶν μέσων Δ και Ε τῶν πλευρῶν ΑΒ και ΑΓ.

2ον. Ὁ τόπος τοῦ μέσου Μ τῆς εὐθείας ΔΕ.

659. (695). Δίδεται ἓνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἔγγεγραμμένον εἰς ἓνα κύκλον Ο. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ λαμβάνομεν ἓνα μεταβλητὸν σημεῖον Μ και ἐπὶ τῆς ΑΓ ἓνα σημεῖον Ρ τοιοῦτον, ὥστε ΡΑ=ΡΜ και τέλος ἐπὶ τῆς ΒΓ ἓνα σημεῖον Δ τοιοῦτον, ὥστε ΔΒ=ΔΜ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου Μ', συμμετρικοῦ τοῦ Μ πρὸς τὴν ΡΔ.

660. (696). Στρέφομεν μίαν δοθεῖσαν περιφέρειαν περὶ ἓνα τῶν σημείων τῆς και εἰς καθεμίαν ἀπὸ τὰς θέσεις τῆς φέρομεν ἑφαπτομένης παραλλήλους πρὸς μίαν, ὀρισιμένην κατὰ θέσιν, εὐθείαν. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων ἑπαφῆς.

661. (697). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων Μ τοιούτων, ὥστε τὸ εὐθύγραμμον τμήμα ΑΒ, τὸ ὁποῖον συνδέει τοὺς πόδας Α και Β τῶν καθέτων ΜΑ και ΜΒ ἐπὶ δύο δοθεῖσας εὐθείας, νὰ ἔχη δοθὲν μήκος λ.

662. (698). Μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν Α ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ και ἀκτῖνα τὴν πλευρὰν αὐτοῦ ΑΒ γράφομεν περιφέρειαν κύκλου. Ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτῆς και ἀπὸ τὸ Γ λαμβάνομεν δύο τόξα ΓΔ και ΓΕ τοιαῦτα, ὥστε τὸξον ΓΔ νὰ εἶναι διπλάσιον τοῦ τόξου ΓΕ. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΒΔ και ΟΕ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ΓΖ εἶναι ὕψος τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ, ἂν τὰ τόξα ΓΔ και Γ'Ε ἔχουν ἀντίθετον φορὰν και νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ σημείου Ζ, ἂν τὰ τόξα αὐτὰ ἔχουν τὴν αὐτὴν φορὰν.

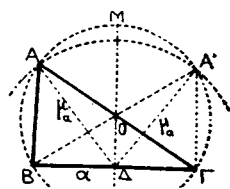
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ΄.

ΧΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΤΟΠΩΝ ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

327. Πρόβλημα. *Νά κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν $B\Gamma = a$, τὴν ἀπέναντι γωνίαν $A = \omega$ καὶ τὴν διάμεσον $AD = \mu_a$.*

Ἀνάλυσις: Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω $AB\Gamma$ (Σχ. 254) τὸ ζητούμενον τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν πλευρὰν $B\Gamma = a$, τὴν γωνίαν A ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ω καὶ τὴν διάμεσον $AD = \mu_a$.

Ἐπειδὴ ἡ πλευρὰ $B\Gamma$ φαίνεται ἀπὸ τὸ A ὑπὸ γωνίαν σταθερὰν καὶ ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ω , ἡ κορυφή A κεῖται ἐπὶ τόξου κυκλικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον γράφεται μὲ χορδὴν τὴν $B\Gamma$ καὶ δέχεται γωνίαν ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ω . Φέρομεν τὴν διάμεσον ΔA .



Σχ. 254.

Ἐπειδὴ ἡ ΔA εἶναι σταθερὰ καὶ ἴση μὲ τὴν δοθεῖσαν διάμεσον μ_a , τὸ A κεῖται ἐπὶ περιφερείας, ἡ ὁποία γράφεται μὲ κέντρον τὸ μέσον Δ τῆς $B\Gamma$ καὶ μὲ ἀκτῖνα ἴσην μὲ δοθεῖσαν διάμεσον μ_a .

Ἡ τομὴ τῶν δύο αὐτῶν τόξων ὀρίζει τὴν τρίτην κορυφὴν τοῦ ζητουμένου τριγώνου. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὴν κάτωθι κατασκευήν.

Σύνθεσις: Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας λαμβάνομεν ἓνα τμήμα $B\Gamma$ ἴσον μὲ τὴν δοθεῖσαν πλευρὰν a . Μὲ χορδὴν τὴν $B\Gamma$ κατασκευάζομεν τόξον κυκλικοῦ τμήματος $BM\Gamma$, τὸ ὁποῖον νὰ δέχεται γωνίαν ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ω . Μὲ κέντρον τὸ μέσον Δ τῆς $B\Gamma$ καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν διάμεσον μ_a , γράφομεν τόξον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὸ τόξον τοῦ κυκλικοῦ τμήματος εἰς τὰ σημεῖα A καὶ A' . Φέρομεν τὰς εὐθείας AB καὶ $A\Gamma$. Τὸ σχηματισθὲν τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Ἐὰν φέρωμεν καὶ τὰς εὐθείας $A'B$ καὶ $A'\Gamma$ λαμβάνομεν καὶ ἓνα δεύτερον τρίγωνον $A'B\Gamma$.

Ἀπόδειξις: Τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ ἔχει τὴν $B\Gamma$ ἴσην μὲ τὴν δοθεῖ-

σαν πλευρὰν α ἐκ κατασκευῆς, τὴν γωνίαν A ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ω , διότι εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ κυκλικὸν τμήμα $B\Gamma$, τὸ ὁποῖον δέχεται, ἐκ κατασκευῆς, γωνίας ἴσας μὲ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ω . Φέρομεν τὴν $A\Delta$ ἢ ΔA εἶναι διάμεσος τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ καὶ εἶναι ἴση μὲ τὴν δοθεῖσαν διάμεσον μ_α , διότι ἡ ΔA εἶναι ἀκτίς τοῦ κύκλου (Δ, μ_α). Ὡστε τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Διερεῦνησις: Ἡ περιφέρεια, ἡ ὁποία γράφεται μὲ κέντρον τὸ μέσον Δ τῆς $B\Gamma$ καὶ μὲ ἀκτίνα τὴν μ_α , δύναται νὰ κόψῃ τὸ τόξον τοῦ κυκλικοῦ τμήματος εἰς δύο σημεῖα, εἰς ἓνα ἢ εἰς κανένα.

Ἐὰν ἡ διάμεσος $\Delta A = \mu_\alpha$ εἶναι μικροτέρα τοῦ βέλους ΔM , ἀλλὰ πάντως μεγαλυτέρα τοῦ ἡμίσεως τῆς πλευρᾶς $B\Gamma$, δηλ. ἐὰν $\frac{\alpha}{2} < \mu_\alpha < \Delta M$ ἡ περιφέρεια (Δ, μ_α) τέμνει τὸ τόξον τοῦ κυκλικοῦ τμήματος εἰς δύο σημεῖα A καὶ A' καὶ τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις, τὰ τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $A'B\Gamma$.

Ἐὰν $\mu_\alpha = \Delta M$, ἡ περιφέρεια (Δ, μ_α) ἐφάπτεται τοῦ τόξου τοῦ κυκλικοῦ τμήματος εἰς τὸ σημεῖον M καὶ τὸ πρόβλημα ἔχει μίαν λύσιν, τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον $MB\Gamma$.

Ἐὰν $\mu_\alpha > \Delta M$, ἡ περιφέρεια (Δ, μ_α) δὲν τέμνει τὸ τόξον τοῦ κυκλικοῦ τμήματος καὶ ἐπομένως τὸ πρόβλημα δὲν ἔχει λύσιν.

328. Χρήσις τῶν γεωμετρικῶν τόπων εἰς τὴν λύσιν τῶν προβλημάτων. Εἰς τὸ ἀνωτέρω πρόβλημα ἄγνωστος ἦτο ἡ τρίτη κορυφὴ τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ · αἱ δύο ἄλλαι κορυφαὶ τοῦ B καὶ Γ ἦσαν τὰ ἄκρα τῆς εὐθείας $B\Gamma$, τῆς ἴσης μὲ τὴν δοθεῖσαν πλευρὰν α τοῦ τριγώνου. Ἡ ἄγνωστος κορυφὴ A κεῖται, ὅπως ἐδείχθη ἐπὶ τοῦ τόξου τοῦ κυκλικοῦ τμήματος $B\Gamma$, τὸ ὁποῖον γράφεται μὲ χορδὴν τὴν $B\Gamma$ καὶ δέχεται γωνίαν ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν. Δηλ. κεῖται ἐπὶ τοῦ τόπου τῶν σημείων, ἀπὸ τὰ ὁποῖα δοθεῖσα εὐθεῖα $B\Gamma = \alpha$ φαίνεται ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν ω .

Ἐπίσης ἡ κορυφὴ A κεῖται καὶ ἐπὶ τῆς περιφερείας (Δ, μ_α), δηλ. ἐπὶ τοῦ τόπου τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἀπόστασιν μ_α ἀπὸ τὸ δοθὲν σημεῖον Δ . Ἡ *τομὴ τῶν δύο αὐτῶν τόπων*, τοῦ τόξου τοῦ κυκλικοῦ τμήματος καὶ τῆς περιφερείας (Δ, μ_α), εἶναι ἡ τρίτη κορυφὴ τοῦ ζητουμένου τριγώνου.

Ἡ λύσις λοιπὸν τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος καὶ πολλῶν ἄλλων προβλημάτων, ἀνάγεται εἰς τὴν εὔρεσιν ἐνὸς σημείου, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἐκπληροῖ ὠρισμένους ὅρους τοῦ προβλήματος.

Γενικῶς, ὅταν ἡ λύσις ἐνὸς προβλήματος ἀνάγεται εἰς τὸν προσ-

διορισμὸν ἑνὸς σημείου, τὸ σημεῖον αὐτὸ ἔχει δύο τοῦλάχιστον ιδιότη-
 τας, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς δύο γεωμετρικούς τόπους, κατὰ τοὺς
 ὄρους τοῦ προβλήματος. Κατ' ἀρχὰς ζητοῦμεν τὰ σημεία, τὰ ὁποῖα
 ἱκανοποιοῦν μόνον τὴν μίαν ιδιότητα τῶν σημείων· τὰ σημεία αὐτὰ
 εἶναι συνήθως ἄπειρα καὶ ἀποτελοῦν μίαν γραμμὴν, δηλ. ἓνα γεωμε-
 τρικὸν τόπον.

Ἐπειτα ζητοῦμεν καὶ τὰ σημεία, τὰ ὁποῖα ἱκανοποιοῦν μόνον
 τὴν δευτέραν ιδιότητα· τὰ σημεία αὐτὰ ἀποτελοῦν ἓνα δεύτερον γεω-
 μετρικὸν τόπον. Εἰς τὴν τομὴν ἢ εἰς τὰς τομὰς αὐτῶν τῶν δύο τόπων
 εὐρίσκεται τὸ ζητούμενον σημεῖον.

Ἡ μέθοδος αὕτη τοῦ προσδιορισμοῦ ἑνὸς σημείου λέγεται *μέθο-
 δος διὰ τῆς τομῆς τῶν Γεωμετρικῶν τόπων* καὶ ὀφείλεται εἰς τὴν
 Σχολὴν τοῦ Πλάτωνος (430—347 π. X.).

Ἡ μέθοδος αὕτη εἶναι ἴσως ἡ γενικωτέρα καὶ ἡ πλέον γόνιμος
 ἐξ ὅλων τῶν μεθόδων τῆς Γεωμετρίας.

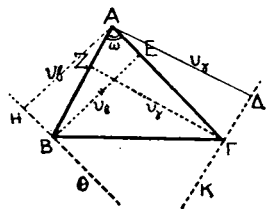
Ἡ χάρις καὶ ἡ πρακτικὴ ἀξία τῆς μεθόδου αὐτῆς ἔγκειται πρὸ
 παντὸς εἰς τὴν ἐκλογὴν τῶν ὄρων τοῦ προβλήματος, οἱ ὁποῖοι πρέπει
 νὰ παραλειφθοῦν ἀλληλοδιαδόχως· διότι ἐκ τῆς ἐκλογῆς αὐτῆς ἐξαρτᾶ-
 ται ἡ φύσις καὶ ἡ εὐκολία τῆς ἀναζητήσεως τῶν δύο τόπων, οἱ ὁποῖοι
 θὰ χρησιμοποιηθοῦν διὰ τὸν προσδιορισμὸν τοῦ ζητουμένου σημείου.

**329. Πρόβλημα. Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν
 γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν A καὶ τὰ ὕψη v_B καὶ v_γ .**

Ἀνάλυσις: Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω $AB\Gamma$
 τὸ ζητούμενον τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν γωνίαν A ἴσην μὲ τὴν δο-
 θείσαν γωνίαν καὶ τὰ ὕψη BE καὶ ΓZ ,
 ἴσα μὲ τὰ δοθέντα ὕψη v_B καὶ v_γ ἀντι-
 στοιχῶς.

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ κορυφὴ B ἀπέ-
 χει ἀπὸ τὴν πλευρὰν AG τῆς γωνίας A
 ἀπόστασιν $EB=v_B$ καὶ ἐπομένως κεῖται
 ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὴν AG καὶ
 ἡ ὁποία ἀπέχει αὐτῆς ἀπόστασιν ἴσην μὲ
 τὸ δοθὲν ὕψος $BE=v_B$. Ἡ παράλληλος
 αὕτη τέμνει τὴν πλευρὰν AB τῆς γωνίας A
 εἰς τὸ σημεῖον B , τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ
 δευτέρα κορυφὴ τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$.

Ὅμοίως ἡ κορυφὴ Γ κεῖται ἐπὶ εὐθείας
 παραλλήλου πρὸς τὴν AB καὶ ἡ ὁποία ἀπέχει
 ἀπὸ τὴν AB ἀπόστασιν ἴσην μὲ τὸ δοθὲν
 ὕψος $\Gamma Z=v_\gamma$. Ἡ παράλληλος αὕτη τέμνει
 τὴν πλευρὰν AG τῆς γω-



Σχ. 255.

τὸ Β, διότι ἡ διάκεντρος των ΟΟ' εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτί-
νων των, ἥτοι εἶναι $ΟΟ' = ΟΒ + ΒΟ'$.

Ἐπειδὴ τὸ Ο' κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου ΜΔ τῆς εὐθείας ΑΒ, θὰ εἶναι $Ο'Β = Ο'Α$. ἥτοι ἡ περιφέρεια Ο' διέρχεται ἀπὸ τὸ ση-
μεῖον Α.

Διερεύνησις: Διὰ τὰ ἔχῃ τὸ πρόβλημα λύσιν πρέπει ἡ μεσοκάθε-
τος ΜΔ τῆς ΑΒ νὰ τέμνῃ τὴν ἀκτίνα ΟΒ ἢ τὴν προέκτασίν της.

Ὅταν τὸ δοθὲν σημεῖον κεῖται ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης ΕΒΕ' τῆς
περιφερείας Ο εἰς τὸ σημεῖον Β, δηλ. ὅταν ἡ ΑΒ εἶναι ἐφαπτομένη
τῆς Ο, ἡ ΜΔ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΟΒ καὶ ἐπομένως δὲν τέμνει
αὐτήν. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ πρόβλημα δὲν ἔχει λύσιν.

Ὅταν ἡ ΑΒ σχηματίξῃ ἀμβλείαν γωνίαν μὲ τὴν ΟΒ, ἡ ΜΒ τέ-
μνει τὴν προέκτασιν τῆς ἀκτίνας ΟΒ εἰς ἓνα σημεῖον καὶ τὸ πρόβλημα
ἔχει μίαν λύσιν. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν αἱ δύο περιφέρειαι Ο καὶ
Ο' ἐφάπτονται ἔξωτερικῶς.

Ὅταν ἡ ΑΒ σχηματίξῃ ὀξεῖαν γωνίαν μὲ τὴν ΟΒ, ἡ ΜΔ τέμνει
τὴν ΟΒ ἢ τὴν προέκτασιν τῆς ΟΒ, κατὰ τὴν φοράν, ἐκ τοῦ Β πρὸς τὸ
Ο, εἰς ἓνα σημεῖον Ο₁ καὶ τὸ πρόβλημα ἔχει πάλιν μίαν λύσιν. Εἰς τὴν
περίπτωσιν αὐτὴν αἱ περιφέρειαι Ο καὶ Ο₁ ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς.

Ἐὰν τὸ δοθὲν σημεῖον Α κεῖται ἐντὸς τῆς περιφερείας Ο, τότε ἡ
περιφέρεια Ο θὰ περιέχῃ τὴν Ο₁. Ἐὰν τὸ Α κεῖται ἐκτὸς τῆς περιφε-
ρείας Ο, τότε ἡ περιφέρεια Ο₁ θὰ περιέχῃ τὴν Ο.

331. Πρόβλημα. *Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ ἐφά-
πτεται δοθείσης εὐθείας xy , εἰς δοθὲν σημεῖον της Β καὶ μιᾶς
δοθείσης περιφερείας Κ.*

Ἀνάλυσις: Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω Ο τὸ
κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας, ἡ ὁποία ἐφάπτεται τῆς δοθείσης
περιφερείας Κ εἰς τὸ σημεῖον Α καὶ τῆς δοθείσης εὐθείας xy εἰς τὸ
δοθὲν σημεῖον Β.

Φέρομεν τὴν διάκεντρον ΚΟ, ἡ ὁποία θὰ περάσῃ ἀπὸ τὸ σημεῖον
Α τῆς ἀφῆς. Φέρομεν τὴν ἀκτίνα ΟΒ, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν
ἐφαπτομένην xy .

Τὸ κέντρον τῆς ζητουμένης περιφερείας θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς καθέ-
του ΒΟ ἐπὶ τὴν xy , ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ δοθὲν σημεῖον Β.

Προεκτείνομεν τὴν ΟΒ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως λαμβάνομεν
τμήμα ΒΓ ἴσον μὲ τὴν ἀκτίνα ΚΑ τοῦ δοθέντος κύκλου. Θὰ εἶναι τότε
 $ΟΚ = ΟΓ$. Φέρομεν τὴν εὐθείαν ΚΓ. Ἐπειδὴ $ΚΟ = ΟΓ$, τὸ Ο κεῖται

τῶν ἀκτίων τῶν περιφερειῶν O καὶ O' ἦτοι εἶναι :

$OB=OA-O'A'$ (1). "Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸ σχῆμα ἔχομεν :

$OB=OA-BA$ (2). "Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι :

$$OA-O'A'=OA-BA \quad \eta \quad O'A'=BA.$$

Τὸ τετράπλευρον λοιπὸν $ABO'A'$ ἔχει τὰς δύο ἀπέναντι πλευρὰς BA καὶ $O'A'$ ἴσας καὶ παραλλήλους· ἄρα εἶναι παραλληλόγραμμον.

"Ἐπειδὴ δὲ ἡ γωνία OBO' εἶναι ὀρθή, διότι ἡ $O'B$ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας (O, OB) εἰς τὸ σημεῖον B ἔπεται, ὅτι καὶ ἡ παραπληρωματικὴ τῆς γωνία ABO' εἶναι ὀρθή.

"Ἐπειδὴ τὸ παραλληλόγραμμον $ABO'A'$ ἔχει τὴν γωνίαν τοῦ B ὀρθήν καὶ αἱ ἄλλαι γωνίαι τοῦ A, A' καὶ O' θὰ εἶναι ὀρθαί.

"Ὡστε αἱ OA καὶ $O'A'$ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν εὐθείαν AA' . "Ἡ AA' εἶναι λοιπὸν ἐφαπτομένη τῶν περιφερειῶν O καὶ O' , ὡς κάθετος εἰς τὰ ἄκρα τῶν ἀκτίων OA καὶ $O'A'$.

Διερεύνησις : Διὰ τὸ ἐξῆν τὸ πρόβλημα λύσιν, πρέπει νὰ δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἐφαπτομένην ἀπὸ τὸ κέντρον O' πρὸς τὴν βοηθητικὴν περιφέρειαν ($O, R-R'$). Τοῦτο ὅμως συμβαίνει, ὅταν τὸ κέντρον O' κεῖται ἔκτος ἢ ἐπὶ τῆς περιφερείας ($O, R-R'$).

"Ἔστω δ ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων O, O' .

"Ἐὰν $\delta > R-R'$, δηλ. ἐὰν αἱ περιφέρειαι κείνται ἢ μία ἔκτος τῆς ἄλλης ἢ ἐὰν αἱ δύο περιφέρειαι τέμνονται, τὸ πρόβλημα εἶναι δυνατόν καὶ ἐπειδὴ δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἀπὸ τὸ σημεῖον O' δύο ἐφαπτομένας, τὸ πρόβλημα ἔχει **δύο λύσεις**.

"Ἐὰν $\delta = R-R'$, δηλ. ἐὰν αἱ περιφέρειαι ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς, τὸ σημεῖον O' κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἢ ὁποία ἔχει ἀκτίνα τὴν OB ἀπὸ τὸ O' δυνάμεθα νὰ φέρωμεν μίαν μόνον ἐφαπτομένην καὶ τὸ πρόβλημα ἔχει **μίαν λύσιν**.

"Ἐὰν $\delta < R-R'$, δηλ. ἐὰν αἱ περιφέρειαι κείνται ἢ μία ἐντὸς τῆς ἄλλης, τὸ σημεῖον O' κεῖται ἐντὸς τῆς περιφερείας (O, OB) καὶ τὸ πρόβλημα **δὲν ἔχει λύσιν**.

II. Περίπτωσις. "Ἐσωτερικαὶ ἐφαπτόμεναι.

Ἀνάλυσις : Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω AA' (Σχ. 258) ἡ κοινὴ ἐσωτερικὴ ἐφαπτομένη τῶν περιφερειῶν O καὶ O' .

Φέρομεν τὰς ἀκτίνας OA καὶ $O'A'$ εἰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς· αἱ OA καὶ $O'A'$, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν AA' , εἶναι παράλληλοι.

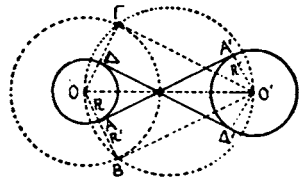
"Ἀπὸ τὸ σημεῖον O' φέρομεν τὴν παράλληλον πρὸς τὴν AA' , ἢ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς ἀκτίνος OA εἰς τὸ σημεῖον B . Τὸ σχηματισθὲν τετράπλευρον $ABO'A'$ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ ἐπομένως

θὰ εἶναι $AB = A'O' = R'$, ὁπότε $OB = OA + AB = R + R'$.

Ἐὰν μὲ κέντρον τὸ O καὶ ἀκτῖνα τὴν $OB = R + R'$ γράψωμεν περιφέρειαν κύκλου, ἢ $O'B$ θὰ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας (O, OB).

Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω συναγομέν τὴν κάτωθι κατασκευὴν :

Σύνθεσις : Μὲ κέντρον τὸ O καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ $R + R'$ γράφομεν μίαν περιφέρειαν (O, OB)· ἀπὸ τὸ O' φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην $O'B$ πρὸς τὴν περιφέρειαν (O, OB). Φέρομεν τὴν OB , ἢ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν (O, R) εἰς τὸ σημεῖον A . Φέρομεν τὴν $O'A'$ παράλληλον πρὸς τὴν OA καὶ συνδέομεν τὰ σημεῖα A καὶ A' μὲ εὐθεῖαν· ἢ AA' εἶναι ἡ ζητούμενη ἐφαπτομένη.



Σχ. 259.

Ἀπόδειξις : Τὸ τετράπλευρον $ABO'A'$ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ AB καὶ $O'A'$ εἶναι παράλληλοι ἐκ κατασκευῆς καὶ ἴσαι, διότι ἡ OB εἶναι ἴση μὲ $R + R'$. Ἐπειδὴ τὸ παραλληλόγραμμον αὐτὸ ἔχει τὴν γωνίαν B ὀρθήν, εἶναι ὀρθογώνιον καὶ συνεπῶς αἱ OA καὶ $O'A'$ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν AA' · ἐπομένως ἡ AA' εἶναι κοινὴ ἐφαπτομένη τῶν περιφερειῶν O καὶ O' .

Διερεύνησις : Ἐστω δ ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων O καὶ O' . Τὸ πρόβλημα θὰ εἶναι δυνατόν, ὅταν θὰ δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἀπὸ τὸ κέντρον O' μίαν ἐφαπτομένην πρὸς τὴν περιφέρειαν ($O, R + R'$).

Ἐὰν $\delta > R + R'$, δηλ. ἐὰν αἱ περιφέρειαι κεῖνται ἢ μία ἐκτὸς τῆς ἄλλης, τὸ πρόβλημα εἶναι δυνατόν καὶ ἐπειδὴ ἀπὸ τὸ σημεῖον O' δυνάμεθα νὰ φέρωμεν δύο ἐφαπτομένας, τὸ πρόβλημα ἔχει **δύο λύσεις**.

Ἐὰν $\delta = R + R'$, δηλ. ἐὰν αἱ περιφέρειαι ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς, τὸ σημεῖον O' κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας (O, OB) καὶ τὸ πρόβλημα ἔχει **μίαν λύσιν**.

Ἐὰν $\delta < R + R'$, δηλ. ἐὰν περιφέρειαι τέμνονται, ἢ ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς, ἢ κεῖται ἢ μία ἐντὸς τῆς ἄλλης, τὸ πρόβλημα δὲν ἔχει λύσιν.

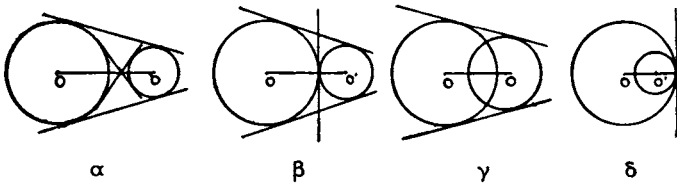
Τὴν διερεύνησιν τῶν δύο περιπτώσεων συνοψίζομεν κατωτέρω :

1ον. Ἐὰν αἱ περιφέρειαι κεῖνται ἢ μία ἐκτὸς τῆς ἄλλης (Σχ. 260α), δυνάμεθα νὰ φέρωμεν δύο ἐξωτερικὰς ἐφαπτομένας καὶ δύο ἐσωτερικὰς ἐφαπτομένας.

2ον. Ἐὰν αἱ περιφέρειαι ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς (Σχ. 260β), δυνάμεθα νὰ φέρωμεν δύο ἐξωτερικὰς ἐφαπτομένας καὶ μίαν ἐσωτερικὴν.

3ον. Ἐὰν αἱ περιφέρειαι τέμνονται (Σχ. 260γ), δυνάμεθα νὰ φέρωμεν δύο ἐξωτερικὰς ἐφαπτομένας καὶ καμμίαν ἐσωτερικὴν.

4ον. Ἐὰν αἱ περιφέρειαι ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς (Σχ. 260δ), δυνάμεθα νὰ φέρωμεν μίαν ἐξωτερικὴν ἐφαπτομένην καὶ καμμίαν ἐσωτερικὴν.



Σχ. 260.

5ον. Ἐὰν αἱ περιφέρειαι εἶναι ἢ μία ἐντὸς τῆς ἄλλης, δὲν δυνάμεθα νὰ φέρωμεν οὔτε ἐξωτερικὴν οὔτε ἐσωτερικὴν ἐφαπτομένην.

Παρατήρησις: Αἱ κοιναὶ ἐξωτερικαὶ καὶ ἐσωτερικαὶ ἐφαπτόμεναι δύο περιφερειῶν τέμνονται ἐπὶ τῆς διακέντρου, διότι ἡ διάκεντρος εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ σχήματος.

Ἀσκήσεις πρὸς γενικὴν ἐπανάληψιν

Α'. Ὀμάς. 663. (699). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα ὀρθογώνιον τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν τὴν ὑποτείνουσαν a καὶ τὸ ὕψος u_a .

664. (704). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα ὀρθογ. τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν τὴν ὑποτείνουσαν a καὶ τὴν διάμεσον m_b .

665. (705). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν ὑποτείνουσαν $B\Gamma = a$, τὴν κορυφὴν A τῆς ὀρθῆς γωνίας καὶ ὅτι αἱ κορυφαὶ B καὶ Γ κεῖνται ἐπὶ δύο καθέτων εὐθειῶν Ox καὶ Oy .

666. (734). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν ὑποτείνουσαν a καὶ τὸ ἄθροισμα $\beta + \gamma = \lambda$.

667. (735). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν ἀκτίνα ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου καὶ τὴν ἀκτίνα R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.
(Πολυτεχνεῖον)

668. (736). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν ἀκτίνα ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου καὶ τὸ ἄθροισμα $\beta + \gamma = \lambda$.

669. (737). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὸ ὕψος u_a καὶ τὴν ἀκτίνα ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

Β'. Ὀμάς. 670. (700). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν $B\Gamma = a$, τὴν ἀπέναντι γωνίαν A καὶ τὸ ὕψος u_a .

671. (701). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν $B\Gamma = a$, τὴν ἀπέναντι γωνίαν A καὶ ὅτι αἱ διάμεσοι BE καὶ ΓZ τέμνονται καθέτως.

672. (702). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν:

1ον. Τὴν γωνίαν A καὶ τὰς διαμέσους m_a καὶ m_γ .

2ον. Τὴν γωνίαν Γ καὶ τὰς διαμέσους μ_α καὶ μ_β .

673. (703). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν τὰς γωνίας του καὶ μίαν διάμεσόν του.

674. (706). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν $AB=\gamma$, τὴν ἀπέναντι γωνίαν Γ καὶ τὸ ὕψος u_α .

675. (731). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν, τὴν γωνίαν B , τὸ ὕψος u_α καὶ τὴν περίμετρον 2τ .

676. (732). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν, τὴν γωνίαν A , τὸ ὕψος u_α καὶ τὴν περίμετρον 2τ .

677. (733). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν a , τὴν διάμεσον μ_α καὶ τὴν ἀκτίνα R .

678. (738). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν B , τὸ ὕψος u_α καὶ τὴν διάμεσον μ_γ .

679. (739). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν γ , τὴν γωνίαν A καὶ τὴν ἀκτίνα ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

680. (740). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν :

1ον. Τὴν πλευρὰν a καὶ τὰ ὕψη u_β καὶ u_γ .

2ον. Τὴν πλευρὰν a καὶ τὰ ὕψη u_α καὶ u_β .

681. (741). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν :

1ον. Τὴν γωνίαν A καὶ τὰ ὕψη u_β καὶ u_γ .

2ον. Τὴν γωνίαν A καὶ τὰ ὕψη u_α καὶ u_β .

682. (742). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν διάμεσον μ_α καὶ τὰ ὕψη u_α καὶ u_β .

683. (743). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν A , τὸ ὕψος u_α καὶ τὴν διάμεσον μ_α .

684. (744). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν a , τὸ ὕψος u_α καὶ τὴν ἀκτίνα R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

685. (745). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν A , τὸ ὕψος u_α καὶ τὴν ἀκτίνα ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

686. (746). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν δύο πλευρὰς καὶ τὴν ἀκτίνα R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

687. (747). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν A , τὴν ἀκτίνα ρ καὶ τὴν περίμετρον 2τ .

688. (748). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν δύο ἀπὸ τοὺς παρεγγεγραμμένους κύκλους.

689. (749). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὸν ἐγγεγραμμένον κύκλον καὶ ἓνα ἐκ τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων.

690. (750). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν A καὶ τὰς ἀκτίνας ρ_β καὶ ρ_γ τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων.

691. (751). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν μίαν γωνίαν καὶ τὰ δύο τμήματα, τὰ ὁποῖα ἡ διχοτόμος τῆς ὀρίζει ἐπὶ τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς.

692. (752). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν a , τὴν γωνίαν A καὶ τὸ ἄθροισμα $\beta+\gamma=\lambda$.

693. (753). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν A τὴν πλευρὰν a καὶ τὴν ἀκτίνα ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

694. (754). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν A , τὴν περίμετρον $2t$ καὶ τὴν ἀκτίνα R .

695. (755). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν a καὶ τὰς ἀκτίνας ρ καὶ R .

696. (756). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὰς ἀκτίνας ρ καὶ ρ_a καὶ τὴν διαφορὰν $\beta - \gamma = \lambda$.

697. (757). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν a , καὶ τὰς ἀκτίνας ρ καὶ ρ_a .

698. (759). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν $AB = \gamma$, τὴν ἀπόστασιν δ τοῦ μέσου M τῆς $B\Gamma$ ἀπὸ τὸν πόδα τοῦ ὕψους AD καὶ τὴν διαφορὰν $\Gamma - B = \varphi$ τῶν γωνιῶν τοῦ Γ καὶ B .

699. (760). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν a , τὸ ὕψος u_β καὶ ἀκτίνα R .

700. (761). Δίδονται δύο ὁμόκεντροι περιφέρειαι O . Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὰς γωνίας του καὶ ὅτι ἡ κορυφή A κεῖται ἐπὶ τῆς μιᾶς περιφέρειας, αἱ δὲ δύο ἄλλαι κορυφαὶ ἐπὶ τῆς δευτέρας περιφέρειας.

701. (762). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν A καὶ τὰς ἀκτίνας ρ καὶ ρ_a .

702. (763). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν A καὶ τὰς ἀκτίνας ρ καὶ ρ_β .

703. (764). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν a , τὴν γωνίαν A καὶ τὴν ἀκτίνα ρ .

704. (758). Δίδεται μία εὐθεῖα $B\Gamma$ σταθερὰ κατὰ τὴν θέσιν καὶ τὸ μέγεθος, μία εὐθεῖα xy σταθερὰ κατὰ τὴν θέσιν, μία γωνία ω καὶ ἓνα εὐθύγραμμον τμήμα λ . Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχη βάσιν τὴν $B\Gamma$, γωνίαν $A = \omega$ καὶ τοιοῦτον, ὥστε αἱ πλευραὶ τοῦ AB καὶ $A\Gamma$ νὰ ἀποκόπτουν ἀπὸ τὴν xy τμήμα μήκους λ .

Γ'. Ὀμάς. 705. (765). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$, ἂν γνωρίζωμεν τὰς γωνίας B καὶ Γ , τὴν πλευρὰν AB καὶ τὰς διαγωνίους τοῦ $A\Gamma$ καὶ $B\Delta$.

706. (766). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν διαγώνιον $A\Gamma$, τὴν πλευρὰν AB καὶ τὰς γωνίας του.

707. (767). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$, ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, ἂν γνωρίζωμεν τὰς διαγωνίους του, τὴν γωνίαν τῶν διαγωνίων του καὶ τὴν ἀκτίνα R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

708. (768). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$, ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, ἂν γνωρίζωμεν τὰς γωνίας του, μίαν διαγώνιον καὶ τὴν γωνίαν τῶν διαγωνίων του.

709. (769). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$, ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, ἂν γνωρίζωμεν τὴν διαγώνιον $A\Gamma$, τὴν γωνίαν Δ , τὴν πλευρὰν AB καὶ τὴν γωνίαν ω τῶν διαγωνίων του.

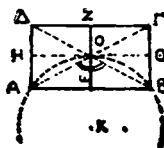
710. (770). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα παραλληλόγραμμον, ἂν γνωρίζωμεν μίαν

διαγώνιον και τὰς γωνίας, τὰς ὁποίας σχηματίζει ἡ ἄλλη διαγώνιος με τὰς πλευράς.

711. (771). Νά κατασκευασθῆ ἓνα τετράπλευρον $ΑΒΓΔ$, ἂν γνωρίζωμεν τὰς γωνίας του και τὰς διαγωνίους του.

712. (772). Νά κατασκευασθῆ ἓνα ὀρθογώνιον $ΑΒΓΔ$, ἂν γνωρίζωμεν μίαν πλευράν και τὴν γωνίαν τῶν διαγωνίων του.

713. (773). Δίδονται δύο κάθετοι εὐθεῖαι $ΑΒ$ και $ΓΔ$, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς ἓνα σημεῖον $Ο$ και μία ἄλλη εὐθεῖα, ἡ ὁποία τέμνει αὐτὰς ἀντιστοιχῶς εἰς τὰ σημεῖα $Ε$ και $Ζ$. Νά κατασκευασθῆ τετράγωνον, τοῦ ὁποίου μια γωνία νὰ συμπίπτῃ με τὴν γωνίαν $Ο$, ἡ δὲ κορυφή τῆς ἀπέναντι γωνίας νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας $ΕΖ$.



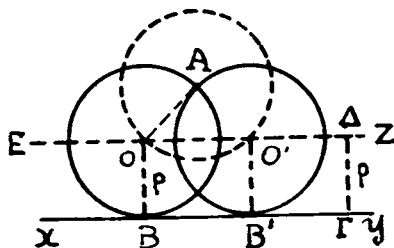
Σχ. ἀσκ. 712.

Δ'. *Ὁμάς*. 714. (707). Νά γραφῆ περιφέρεια κύκλου, με δοθεῖσαν ἀκτίνα, ἡ ὁποία νὰ ἐφάπτεται δύο τεμνομένων εὐθειῶν.

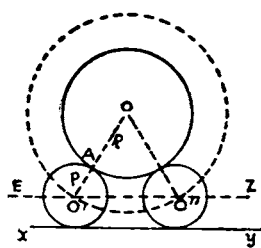
715. (708). Νά γραφῆ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ ἐφάπτεται δύο τεμνομένων εὐθειῶν και τῆς μιᾶς ἐξ αὐτῶν εἰς δοθὲν σημεῖον.

716. (709). Νά γραφῆ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ ἐφάπτεται τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν ἐκ τῶν ὁποίων αἱ δύο εἶναι παράλληλοι.

717. (710). Νά γραφῆ περιφέρεια με δοθεῖσαν ἀκτίνα, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται διὰ δοθέντος σημείου και νὰ ἐφάπτεται δοθείσης εὐθείας.



Σχ. ἀσκ. 717.



Σχ. ἀσκ. 719.

718. (711). Νά γραφῆ περιφέρεια ἐφαπτομένη δύο δοθεισῶν περιφερειῶν ἐκτὸς και ἔχουσα ἀκτίνα ἴσην πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν $α$.

719. (712). Νά γραφῆ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ δοθεῖσαν ἀκτίνα και νὰ ἐφάπτεται δοθείσης εὐθείας και δοθείσης περιφερείας.

720. (713). Νά γραφῆ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ ἐφάπτεται δοθείσης περιφερείας εἰς δοθὲν σημεῖον αὐτῆς και μιᾶς δοθείσης εὐθείας.

721. (714). Νά γραφῆ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ ἐφάπτεται δοθείσης περιφερείας εἰς δοθὲν σημεῖον αὐτῆς και μιᾶς ἄλλης περιφερείας.

722. (774). Νά γραφῆ περιφέρεια με δοθεῖσαν ἀκτίνα και διερχομένη διὰ δύο δοθέντων σημείων.

723. (775). Νά γραφῆ περιφέρεια κύκλου, ἡ ὁποία νὰ ἐφάπτεται δύο παραλλήλων εὐθειῶν και νὰ διέρχεται διὰ δοθέντος σημείου.

724. (776). Νά γραφῆ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται διὰ δύο δοθέν-

των σημείων καὶ τῆς ὁποίας τὸ κέντρον νὰ κείται ἐπὶ δοθείσης εὐθείας.

725. (777). Νὰ γραφῆ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ ἐφάπτεται δοθείσης εὐθείας xy εἰς δοθὲν σημεῖον αὐτῆς A καὶ νὰ διέρχεται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον B .

726. (778). Δίδεται μία εὐθεῖα xy καὶ δύο σημεῖα A καὶ B , τὰ ὁποῖα κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς xy καὶ εἰς ἴσην ἀπόστασιν ἀπ' αὐτῆς. Νὰ γραφῆ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ τὰ A καὶ B καὶ νὰ ἐφάπτεται τῆς xy .

727. (779). Νὰ γραφῆ περιφέρεια, μὲ δοθείσαν ἀκτίνα ρ , ἡ ὁποία νὰ ἀποτεμνῆ ἀπὸ δοθείσαν περιφέρειαν A , χορδὴν $B\Gamma$ παράλληλον καὶ ἴσην πρὸς δοθὲν εὐθύγραμμον τμήμα $EE' = \lambda$.

728. (780). Νὰ γραφῆ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα A καὶ B καὶ ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ δοθείσαν περιφέρειαν οὕτως, ὥστε ἡ κοινὴ χορδὴ των νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς δοθείσαν εὐθεῖαν xy .

729. (781). Δίδεται περιφέρεια O , ἡ ὁποία ἐφάπτεται μιᾶς δοθείσης εὐθείας xy εἰς ἓνα σημεῖον A . Ἐπίσης δίδεται καὶ ἓνα ἄλλο σημεῖον B τῆς xy . Νὰ γραφῆ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ ἐφάπτεται τῆς περιφερείας O καὶ τῆς εὐθείας xy εἰς τὸ B .

730. (782). Ἐπὶ μιᾶς καθέτου ἐπὶ δοθείσαν εὐθεῖαν xy λαμβάνομεν δύο σημεῖα A καὶ B κείμενα πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς xy . Νὰ γραφῆ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα A καὶ B καὶ νὰ ἐφάπτεται τῆς xy .

731. (783). Δίδεται μία εὐθεῖα xy καὶ δύο σημεῖα A καὶ B , τὰ ὁποῖα κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς xy . Νὰ γραφῆ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ τὰ A καὶ B καὶ νὰ ἀποκόπῃ ἀπὸ τὴν xy τὴν μικροτέραν χορδὴν.

732. (784). Δίδονται τέσσαρα σημεῖα A, B, Γ, Δ . Νὰ γραφῆ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα A καὶ B καὶ τοιαύτη, ὥστε αἱ ἐφαπτόμεναι αὐτῆς, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ , νὰ εἶναι ἴσαι.

733. (785). Δίδεται περιφέρεια A ἀκτίνας ρ . Νὰ γραφῆ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ ἔχη ὡς κέντρον δοθὲν σημεῖον O καὶ τοιαύτη, ὥστε ἡ κοινὴ ἐφαπτομένη αὐτῶν, νὰ ἔχη δοθὲν μῆκος λ .

734. (786). Μὲ κέντρον δοθὲν σημεῖον A νὰ γραφῆ περιφέρεια τέμνουσα δύο ὁμοκέντρον περιφερείας O εἰς τρόπον, ὥστε ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς τομῆς τῶν περιφερειῶν, νὰ διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον O .

735. (787). Νὰ γραφῆ περιφέρεια, διερχομένη διὰ δοθέντος σημείου A καὶ ἀποτεμνουσα ἀπὸ δύο δοθείσας περιφερείας B καὶ Γ χορδὰς παραλλήλους ἀντιστοιχῶς πρὸς δύο δοθείσας εὐθείας.

736. (788). Νὰ γραφῆ περιφέρεια μὲ δοθείσαν ἀκτίνα R , ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον A καὶ τῆς ὁποίας ἡ μικροτέρα ἀπόστασις ἀπὸ δοθείσαν περιφέρειαν B νὰ εἶναι ἴση μὲ δοθὲν μῆκος λ .

737. (789). Νὰ γραφῆ περιφέρεια μὲ δοθείσαν ἀκτίνα ρ , διερχομένη διὰ δοθέντος σημείου A καὶ τοιαύτη, ὥστε ἡ ἐφαπτομένη αὐτῆς, ἡ ἀγομένη ἐκ δοθέντος σημείου B , νὰ ἔχη δοθὲν μῆκος λ .

738. (790). Νὰ γραφῆ περιφέρεια, μὲ δοθείσαν ἀκτίνα ρ , ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ δύο δοθείσας περιφερείας A καὶ B κατὰ διάμετρον.

739. (791). Νὰ γραφῆ περιφέρεια μὲ δοθείσαν ἀκτίνα, ἐφαπτομένη δύο δοθεισῶν περιφερειῶν.

740. (792). Μὲ κέντρα τὰς κορυφὰς ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ, νὰ γραφοῦν τρεῖς περιφέρειαι, αἱ ὁποῖαι νὰ ἐφάπτονται ἀνά δύο.

741. (793). Νὰ γραφῆ περιφέρεια μὲ δοθεῖσαν ἀκτίνα, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Α καὶ νὰ ἐφάπτεται δοθείσης περιφερείας Ο.

742. (794). Νὰ γραφοῦν δύο περιφέρειαι, αἱ ὁποῖαι νὰ διέρχωνται ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα Α καὶ Β καὶ τοιαῦται, ὥστε αἱ ἐφαπτόμεναι αὐτῶν εἰς τὸ σημεῖον Α νὰ εἶναι παράλληλοι πρὸς δύο δοθείσας εὐθείας Χ καὶ Υ.

Ε'. *Ὁμάς.* 743. (715). Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐντὸς κύκλου νὰ ἀχθῆ χορδὴ ἴση πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

744. (716). Δίδεται περιφέρεια Ο καὶ ἓνα σημεῖα Μ ἐκτὸς αὐτῆς. Νὰ ἀχθῆ διὰ τοῦ Μ μία τέμνουσα ΜΑΒ τῆς περιφερείας καὶ τοιαύτη, ὥστε ἡ χορδὴ ΑΒ νὰ ἔχη δοθὲν μῆκος λ.

745. (717). Δίδεται περιφέρεια Ο καὶ ἓνα σημεῖον Σ ἐκτὸς αὐτῆς. Νὰ ἀχθῆ διὰ τοῦ Σ μία τέμνουσα ΣΑΒ τῆς περιφερείας, ἡ ὁποία νὰ ἀποτεμνῆ ἀπὸ τὸν κύκλον ἓνα κυκλικὸν τμήμα, τὸ ὁποῖον νὰ δέχεται γωνίαν ἴσην μὲ δοθεῖσαν.

746. (718). Εἰς δοθέντα κύκλον νὰ ἀχθοῦν δύο χορδαὶ παράλληλοι καὶ ἴσαι πρὸς δοθὲν μῆκος λ.

747. (719). Δίδονται δύο περιφέρειαι Ο καὶ Ο' καὶ ζητεῖται νὰ ἀχθῆ μία τέμνουσα αὐτῶν, ὥστε αἱ ἀποτεμνόμεναι χορδαὶ νὰ ἔχουν δοθέντα μῆκη λ καὶ λ'.

748. (720). Δίδεται ἓνα τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ζητεῖται νὰ ἀχθῆ ἀπὸ τὴν κορυφὴν του Α μία εὐθεῖα τοιαύτη, ὥστε ἂν ἀχθοῦν αἱ ΒΒ' καὶ ΓΓ' κάθετοι ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν αὐτήν, νὰ ὀρίζουν ἓνα τμήμα ΒΤ', τὸ ὁποῖον νὰ ἔχη δοθὲν μῆκος λ.

749. (721). Δίδεται ἓνας κύκλος Ο καὶ μία εὐθεῖα χγ. Νὰ κατασκευασθῆ μία τέμνουσα τῆς περιφερείας Ο, κάθετος ἐπὶ τὴν χγ καὶ τοιαύτη, ὥστε τὸ ἓνα ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς μὲ τὴν περιφέρειαν, νὰ εἶναι τὸ μέσον τοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον ὀρίζεται ἀπὸ τὸ δευτερον σημεῖον τῆς τομῆς καὶ τῆς εὐθείας χγ.

750. (722). Δίδονται δύο παράλληλοι εὐθεῖαι $x'x$ καὶ $y'y$ καὶ ἓνα σημεῖον Α. Νὰ ἀχθῆ ἀπὸ τὸ Α μία τέμνουσα αὐτῶν ΑΒΓ καὶ τοιαύτη, ὥστε τὸ μεταξὺ τῶν δύο παραλλήλων εὐθειῶν ὀριζόμενον εὐθύγραμμον τμήμα ΒΓ νὰ ἔχη δοθὲν μῆκος λ.

751. (723). Νὰ ἀχθῆ ἀπὸ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς δύο τεμνομένων περιφερειῶν, μία τέμνουσα τοιαύτη, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποτεμνομένων χορδῶν νὰ εἶναι ἴσον μὲ δοθὲν μῆκος λ.

752. (724). Δίδονται δύο εὐθεῖαι Αχ καὶ Βγ καὶ ζητεῖται νὰ τμηθοῦν αἱ εὐθεῖαι αὐταὶ ὑπὸ μιᾶς τρίτης εὐθείας ΜΝ, ἡ ὁποία ἔχει δοθὲν μῆκος λ, εἰς τρόπον ὥστε τὸ ἄθροισμα $AM+BN$ τῶν εὐθυγραμμῶν τμημάτων ΑΜ καὶ ΒΝ νὰ εἶναι ἴσον μὲ δοθὲν μῆκος κ.

753. (725). Δίδονται δύο εὐθεῖαι παράλληλοι $x'x$ καὶ $y'y$, ἓνα σημεῖον Α ἐπὶ τῆς $x'x$ καὶ ἓνα τυχὸν σημεῖον Β. Νὰ ἀχθῆ διὰ τοῦ Β μία εὐθεῖα, ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ τὴν $x'x$ εἰς τὸ Γ καὶ τὴν $y'y$ εἰς τὸ Δ εἰς τρόπον, ὥστε νὰ εἶναι $ΑΓ=ΑΔ$.

754. (726). Νὰ εὐρεθῆ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν μιᾶς γωνίας ΑΒΓ ἓνα σημεῖον Μ ἀπὸ τὸ ὁποῖον νὰ φαίνωνται ὑπὸ δοθείσας γωνίας ω καὶ ν τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καὶ ΒΓ.

755. (727). Νὰ εὐρεθῆ ἐπὶ τόξου AB δοθείσης περιφερείας O ἓνα σημεῖον Γ τοιοῦτον, ὥστε τὸ ἄθροισμα $\Gamma A + \Gamma B$ τῶν χορδῶν νὰ εἶναι ἴσον μὲ δοθὲν μῆκος λ .

756. (728). Δίδονται δύο περιφερείαι O καὶ O' ἀκτίνων ρ καὶ ρ' ἀντιστοίχως. Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα εὐθύγραμμον τμήμα MM' , τὸ ὁποῖον νὰ ἔχη τὰ ἄκρα του καὶ ἐπὶ τῶν δύο περιφερειῶν καὶ τὸ ὁποῖον νὰ εἶναι ἴσον, παράλληλον καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς πρὸς δοθὲν εὐθύγραμμον τμήμα AB .

757. (729). Δίδονται δύο περιφερείαι O καὶ O' καὶ ἓνα σημεῖον M . Νὰ ἀχθῆ ἀπὸ τὸ M ἓνα εὐθύγραμμον τμήμα AB , τοῦ ὁποῖου τὰ ἄκρα νὰ κείνται ἐπὶ ἐκάστης τῶν δοθεισῶν περιφερειῶν καὶ οὕτως, ὥστε τὸ M νὰ εἶναι τὸ μέσον τοῦ AB .

758. (730). Νὰ εὐρεθῆ ἓνα σημεῖον, ἀπὸ τὸ ὁποῖον αἱ τρεῖς πλευραὶ δοθέντος τριγώνου νὰ φαίνωνται ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν.

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ

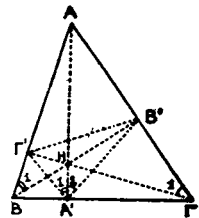
ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΚΑΙ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

1. Ίδιότητες του ὀρθοκέντρου

333. Θεώρημα. *Τὰ ὕψη ἐνὸς τριγώνου εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τοὺς πόδας τῶν ὕψων τοῦ πρώτου τριγώνου.*

Ἐπίπεδος: Ἐστω τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ (Σχ. 261) καὶ AA' , BB' , $\Gamma\Gamma'$ τὰ τρία ὕψη του, τὰ ὁποῖα τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον H . Φέρομεν τὰς εὐθείας $A'B$, $B'\Gamma$, $\Gamma'A'$.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ ὕψη AA' , BB' , $\Gamma\Gamma'$ εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου $A'B'\Gamma'$.



Σχ. 261.

Ἀπόδειξις: Τὸ τετράπλευρον $HA'B'\Gamma'$ εἶναι ἔγγραψιμον εἰς κύκλον, διότι αἱ δύο ἀπέναντι γωνίαι τοῦ A' καὶ Γ' εἶναι ὀρθαί, ἐξ ὑποθέσεως· ἄρα αἱ γωνίαι A_1 καὶ B_1 εἶναι ἴσαι, διότι εἶναι ἔγγεγραμμένοι εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον, τὸν περιγεγραμμένον περὶ τὸ τετράπλευρον $HA'B'\Gamma'$ καὶ βαίνουν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου $H\Gamma'$ · ἤτοι εἶναι

$$\widehat{A_1} = \widehat{B_1} \quad (1)$$

Ὄμοιως καὶ τὸ τετράπλευρον $HA'\Gamma B'$ εἶναι ἔγγραψιμον εἰς κύκλον, διότι αἱ δύο ἀπέναντι γωνίαι τοῦ A' καὶ B' εἶναι ὀρθαί· ἄρα αἱ γωνίαι A_2 καὶ Γ_1 εἶναι ἴσαι, διότι εἶναι ἔγγεγραμμένοι καὶ βαίνουν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου HB' · δηλ. εἶναι $\widehat{A_2} = \widehat{\Gamma_1}$ (2)

Ἄλλὰ αἱ γωνίαι B_1 καὶ Γ_1 εἶναι ἴσαι, διότι εἶναι ὀξεῖαι γωνίαι καὶ ἔχουν τὰς πλευράς των καθέτους μίαν πρὸς μίαν· ἄρα καὶ αἱ ἴσαι πρὸς αὐτὰς γωνίαι A_1 καὶ A_2 θὰ εἶναι ἴσαι. Ὡστε τὸ ὕψος AA' εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας A' τοῦ τριγώνου $A'B'\Gamma'$.

Ὄμοιως ἀποδεικνύομεν, ὅτι τὰ ὕψη BB' καὶ $\Gamma\Gamma'$ εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν B' καὶ Γ' τοῦ τριγώνου $A'B'\Gamma'$.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: *Τὰ ὕψη ἐνὸς τριγώνου. . .*

Σημ. Τὸ τρίγωνον $A'B'\Gamma'$ λέγεται *ὀρθοκεντρικὸν τρίγωνον*.

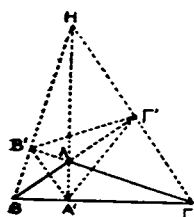
334. Πόρισμα. Αἱ πλευραὶ ἐνὸς τριγώνου $ABΓ$ εἶναι διχοτόμοι τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν τοῦ ὀρθοκεντρικοῦ τριγώνου $A'B'Γ'$.

Πράγματι· ἐδείχθη ἀνωτέρω, ὅτι τὸ ὕψος AA' εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας A' τοῦ τριγώνου $A'B'Γ'$. Ἀλλὰ τὸ ὕψος AA' εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν πλευρὰν $BΓ$ τοῦ τριγώνου $ABΓ$.

Ἐπειδὴ αἱ διχοτόμοι δύο ἐφεξῆς παραπληρωματικῶν γωνιῶν εἶναι κάθετοι, ἔπεται ὅτι ἡ $BΓ$ εἶναι διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας A' τοῦ τριγώνου $A'B'Γ'$.

Παρατήρησις. Ἐὰν τὸ τρίγωνον $ABΓ$ εἶναι ὀρθογώνιον, δὲν σχηματίζεται ὀρθοκεντρικὸν τρίγωνον.

Ἐὰν τὸ τρίγωνον $ABΓ$ εἶναι ἀμβλυγώνιον εἰς τὸ A , (Σχ. 262)



Σχ. 262.

τότε τὸ ὀρθόκεντρον H εὐρίσκεται ἐκτὸς τοῦ τριγώνου $ABΓ$.

Ἐργαζόμενοι ὅπως εἰς τὴν περίπτωσιν, πού τὸ τρίγωνον $ABΓ$ εἶναι ὀξυγώνιον, ἀποδεικνύομεν, ὅτι ἕνα ἀπὸ τὰ ὕψη του εἶναι διχοτόμος μιᾶς ἐσωτερικῆς γωνίας τοῦ τριγώνου $A'B'Γ'$, τὰ δὲ δύο ἄλλα ὕψη εἶναι διχοτόμοι τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου $A'B'Γ'$ καὶ ὅτι δύο ἀπὸ τὰς πλευρὰς τοῦ

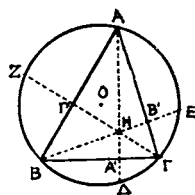
τριγώνου $ABΓ$ εἶναι διχοτόμοι δύο ἐσωτερικῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου $A'B'Γ'$, ἡ δὲ τρίτη πλευρὰ εἶναι διχοτόμος μιᾶς ἐξωτερικῆς γωνίας τοῦ τριγώνου $A'B'Γ'$.

335. Θεώρημα. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ συμμετρικὰ τοῦ ὀρθοκέντρου ἐνὸς τριγώνου πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου, κείνται ἐπὶ τῆς περιφερείας τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ τρίγωνον.

Ἐπίδοσις: Ἐστω τὸ τρίγωνον $ABΓ$ (Σχ. 263), H τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ὕψων του, καὶ Δ τὸ συμμετρικὸν τοῦ H πρὸς τὴν πλευρὰν $BΓ$.

Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξομεν, ὅτι τὸ Δ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ τρίγωνον $ABΓ$.

Ἀπόδειξις: Τὰ τρίγωνα $BΗΓ$ καὶ $B\Delta Γ^*$ εἶναι ἴσα, διότι εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὴν $BΓ$ · ἄρα θὰ εἶναι
γων. $BΗΓ$ = γων. $B\Delta Γ$ (1)



Σχ. 263.

Εἰς τὸ τετράπλευρον $AΓ'HB'$ αἱ ἀπέναντι γωνίαι τοῦ Γ' καὶ B' εἶναι ὀρθαί, ἄρα αἱ δύο ἄλλαι γωνίαι τοῦ θὰ εἶναι παραπληρωματικαί, ἦτοι θὰ εἶναι
γων. A + γων. $\Gamma'HB'$ = 2 ὀρθ.

* Εἰς τὸ σχῆμα 263 φέρατε τὰς χορδὰς $B\Delta$ καὶ $\Delta\Gamma$.

Εἰς τὴν ἰσότητα αὐτὴν ἀντικαθιστῶμεν τὴν γωνίαν $\Gamma'HB'$ μετὴν ἴσην τῆς κατὰ κορυφὴν γωνίας BHG ἢ μετὴν ἴσην τῆς γωνίας $B\Delta\Gamma$, ὅπως ἐδείχθη εἰς τὴν (1) καὶ ἔχομεν

$$\gamma\omega\nu.A + \gamma\omega\nu.B\Delta\Gamma = 2 \delta\theta\theta.$$

Εἰς τὸ τετράπλευρον $AB\Delta\Gamma$ παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ δύο ἀπέναντι γωνίαι τοῦ A καὶ Δ εἶναι παραπληρωματικαί· ἄρα τὸ τετράπλευρον $AB\Delta\Gamma$ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον. Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι τὸ σημεῖον Δ , συμμετρικὸν τοῦ H πρὸς τὴν πλευρὰν $B\Gamma$, κεῖται ἐπὶ τῆς περιφέρειας τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$.

Ὅμοίως ἀποδεικνύεται καὶ διὰ τὰ ἄλλα σημεῖα, τὰ συμμετρικὰ τοῦ H πρὸς τὰς ἄλλας πλευρὰς τοῦ τριγώνου.

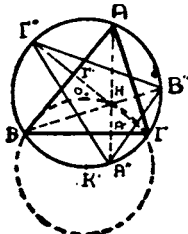
Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Νά ἀποδειχθῆ, ὅτι...**

Ἀσκήσεις

759. (795). Νά κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τοὺς πόδας τῶν ὑψῶν του.

760. (796). Νά ἀποδειχθῆ ὅτι αἱ κορυφαὶ A, B, Γ ἐνὸς τριγώνου καὶ τὸ ὀρθόκεντρόν του H δύνανται νὰ θεωρηθοῦν, ὡς ὀρθόκεντρα τῶν τριγώνων, τὰ ὁποῖα ἔχουν κορυφὰς τὰ τρία ἄλλα σημεῖα.

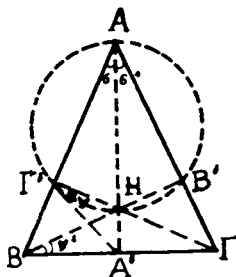
761. (797). Αἱ προεκτάσεις τῶν ὑψῶν $AA', BB', \Gamma\Gamma'$ ἐνὸς τριγώνου $AB\Gamma$ τέμνουσιν τὴν περιφέρειαν τὴν περιγεγραμμένην περὶ τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ εἰς τὰ σημεῖα A'', B'', Γ'' . Νά ἀποδειχθῆ: 1ον. ὅτι αἱ $AA'', BB'', \Gamma\Gamma''$ εἶναι δι-



Σχ. ἀσκ. 762.

τόμοι τῶν γωνιῶν τοῦ τριγώνου $A''B''\Gamma''$. 2ον. ὅτι τὰ ἕξ τόξα, τὰ ὁποῖα ὀρίζουσιν, ἐπὶ τῆς περιφέρειας, αἱ τρεῖς κορυφαὶ A, B, Γ καὶ τὰ σημεῖα A'', B'', Γ'' , εἶναι ἴσα ἀνά δύο.

762. (798). **Θεώρημα τοῦ Garnot.** Οἱ κύκλοι οἱ περιγεγραμμένοι περὶ ἑκάστην ἐκ τῶν τριῶν κορυφῶν καὶ περὶ τὸ ὀρθόκεντρόν του H εἶναι ἴσοι.



Σχ. ἀσκ. 763.

χουν κορυφὰς τὸ ὀρθόκεντρόν καὶ δύο ἀπὸ τὰς κορυφὰς τοῦ δοθέντος τριγώνου, εἶναι ἴσοι.

763. (799). Εἰς ἓνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον $AB\Gamma$, ($AB=AG$) φέρομεν τὰ ὑψη $AA', BB', \Gamma\Gamma'$, τὰ ὁποῖα τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον H . Νά ἀποδειχθῆ: 1ον. ὅτι τὸ τετράπλευρον $A\Gamma'HB'$ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον. 2ον. ὅτι ἡ εὐθεῖα $A\Gamma'$ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφέρειας $A\Gamma'HB'$.

764. (800). Εἰς ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$ φέρομεν τὰ ὑψη $BB', \Gamma\Gamma'$, τὰ ὁποῖα τέμνονται εἰς τὸ H καὶ λαμβάνομεν τὰ συμμετρικὰ E καὶ Z τῆς κορυφῆς A

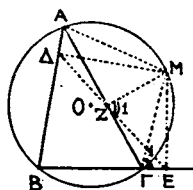
ὡς πρὸς τὰ ὕψη BB' καὶ $\Gamma\Gamma'$ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ πέντε σημεῖα B, Γ, E, H, Z κείνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.

765. (690). Δίδεται ἓνα ὀρθογώνιον $OAGB$ Περὶ τὴν κορυφὴν τοῦ Γ στρέφωμεν μίαν ὀρθὴν γωνίαν, τῆς ὁποίας ἡ μία κάθετος πλευρὰ τέμνει τὴν $O\Lambda$ εἰς τὸ σημεῖον E καὶ τὴν OB εἰς τὸ Z , ἡ δὲ ἄλλη κάθετος πλευρὰ τῆς τέμνει τὴν OA εἰς τὸ E' καὶ τὴν OB εἰς τὸ Z' . 1ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν μέσων τῶν εὐθειῶν EZ' καὶ $E'Z$. 2ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν EZ' καὶ $E'Z$.

2. Εὐθεία τοῦ Simson

356. **Θεώρημα.** Ἐὰν ἀπὸ τυχὸν σημείου τῆς περιφερείας τῆς περιγεγραμμένης περὶ ἓνα τρίγωνον, φέρωμεν καθέτους ἐπὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς τοῦ τριγώνου αὐτοῦ, οἱ τρεῖς πόδες τῶν καθέτων αὐτῶν κείνται ἐπ' εὐθείας.

Ἐπίσης: Ἐστω τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ (Σχ. 264) καὶ O ὁ κύκλος ὁ περιγεγραμμένος περὶ αὐτό. Ἀπὸ τυχὸν σημείου M τῆς περιφερείας O , φέρομεν τὰς καθέτους $M\Delta, ME, MZ$ ἐπὶ τὰς πλευρὰς $AB, B\Gamma, \Gamma A$ τοῦ τριγώνου.



Σχ. 264.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ σημεῖα Δ, E, Z κείνται ἐπ' εὐθείας.

Ἀπόδειξις: Φέρομεν τὰς εὐθείας $Z\Delta$ καὶ ZE καὶ τὰς χορδὰς MA καὶ $M\Gamma$.

Διὰ τὸ ἀποδείξωμεν, ὅτι τὰ σημεῖα Δ, E, Z κείνται ἐπ' εὐθείας, ἀρκεῖ νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι αἱ γωνίαι EZM καὶ $MZ\Delta$ εἶναι παραπληρωματικά· δηλ. πρέπει νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι :

$$\widehat{EZM} + \widehat{MZ\Delta} = 2 \text{ ὀρθαί.}$$

Τὸ τετράπλευρον $AB\Gamma M$ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον O καὶ ἐπομένως ἡ γωνία BAM εἶναι ἴση μὲ τὴν ἐξωτερικὴν γωνίαν Γ_1 (§ 299, 2ον)· δηλ. εἶναι $\gamma\omega\nu. BAM = \gamma\omega\nu. \Gamma_1$ (1)

Τὸ τετράπλευρον $MZ\Gamma E$ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, διότι αἱ δύο ἀπέναντι γωνίαι τοῦ Z καὶ E εἶναι ὀρθαί ἐκ κατασκευῆς· ἄρα αἱ γωνίαι Z_1 καὶ Γ_1 εἶναι ἴσαι, διότι εἶναι ἐγγεγραμμένα εἰς τὸν κύκλον, τὸν περιγεγραμμένον περὶ τὸ τετράπλευρον $MZ\Gamma E$ καὶ βαίνουν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ME · δηλ. εἶναι

$$\gamma\omega\nu. Z_1 = \gamma\omega\nu. \Gamma_1 \quad (2)$$

Ἀπὸ τὰς ἰσότητητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι

$$\gamma\omega\nu. BAM = \gamma\omega\nu. Z_1 \quad \eta \quad \gamma\omega\nu. \Delta AM = \gamma\omega\nu. Z_1 \quad (3)$$

Ἐπίσης τὸ τετράπλευρον ΑΔΖΜ εἶναι ἔγγράψιμον εἰς κύκλον, διότι αἱ γωνίαι ΑΔΜ καὶ ΑΖΜ εἶναι ὀρθαί, ἐκ κατασκευῆς καὶ ἐπομένως αἱ κορυφαὶ τῶν Δ καὶ Ζ κεῖνται ἐπὶ περιφερείας, ἡ ὁποία γράφεται μὲ διάμετρον τὴν ΑΜ.

Ἐπειδὴ τὸ τετράπλευρον ΑΔΖΜ εἶναι ἔγγράψιμον εἰς κύκλον, αἱ ἀπέναντι γωνίαι τοῦ ΔΑΜ καὶ ΔΖΜ εἶναι παραπληρωματικά· δηλ. εἶναι

$$\gamma\omega\nu.\Delta\text{ΑΜ} + \gamma\omega\nu.\Delta\text{ΖΜ} = 2 \text{ ὀρθ.}$$

Εἰς τὴν ἰσότητα αὐτὴν ἀντικαθιστῶμεν τὴν γωνίαν ΔΑΜ μὲ τὴν ἴσην τῆς γωνίας Ζ₁, ὅπως φαίνεται εἰς τὴν ἰσότητα (3) καὶ ἔχομεν

$$\gamma\omega\nu.\text{Ζ}_1 + \gamma\omega\nu.\Delta\text{ΖΜ} = 2 \text{ ὀρθ.} \quad \eta \quad \gamma\omega\nu.\text{ΜΖΕ} + \gamma\omega\nu.\Delta\text{ΖΜ} = 2 \text{ ὀρθ.}$$

Ἐπειδὴ αἱ ἐφεξῆς γωνίαι ΔΖΜ καὶ ΜΖΕ εἶναι παραπληρωματικά, αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ τῶν κεῖνται ἐπ' εὐθείας· ἦτοι ἡ ΔΖΕ εἶναι εὐθεΐα.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Ἐὰν ἀπὸ τυχὸν σημείου...**

Σημ. Ἡ εὐθεΐα ΔΖΕ, ἡ ὁποία συνδέει τοὺς πόδας τῶν καθέτων, αἱ ὁποιαὶ ἄγονται ἀπὸ τυχὸν σημείου Μ τῆς περιφερείας Ο ἐπὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ λέγεται **εὐθεΐα τοῦ Simson**.

357. Θεώρημα (ἀντίστροφον). *Ἄν οἱ πόδες τῶν καθέτων, αἱ ὁποιαὶ ἄγονται ἀπὸ δοθὲν σημείου ἐπὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς ἑνὸς τριγώνου, κεῖνται ἐπ' εὐθείας, τότε τὸ σημεῖον αὐτὸ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον.*

Ἐπόδειξις: Ἐστω Μ (Σχ. 264) ἓνα σημεῖον καὶ Δ, Ε, Ζ οἱ πόδες τῶν καθέτων, αἱ ὁποιαὶ ἄγονται ἀπὸ τὸ Μ ἐπὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ.

Συμπέρασμα: Ἄν τὰ σημεῖα Δ, Ε, Ζ κεῖνται ἐπ' εὐθείας, δηλ. εἰς τὴν ΔΖΕ εἶναι εὐθεΐα, θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ σημεῖον Μ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

Ἀπόδειξις: Φέρομεν τὰς εὐθείας ΜΑ καὶ ΜΓ· ἀρκεῖ νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΜΑΒΓ εἶναι ἔγγράψιμον εἰς κύκλον.

Τὸ τετράπλευρον ΜΖΓΕ εἶναι ἔγγράψιμον εἰς κύκλον, διότι αἱ δύο ἀπέναντι γωνίαι τοῦ Ζ καὶ Ε εἶναι ὀρθαί· ἄρα αἱ γωνίαι Ζ₁ καὶ Γ₁ εἶναι ἴσαι, διότι εἶναι ἔγγεγραμμένα εἰς τὸν κύκλον, τὸν περιγεγραμμένον περὶ τὸ τετράπλευρον ΜΖΓΕ καὶ βαίνουν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΜΕ· δηλ. εἶναι

$$\gamma\omega\nu.\Gamma_1 = \gamma\omega\nu.\text{Ζ}_1 \quad (1)$$

Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι ΑΔΜ καὶ ΑΖΜ εἶναι ὀρθαί, αἱ κορυφαὶ τῶν Δ καὶ Ζ κεῖνται ἐπὶ περιφερείας, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον τὴν ΑΜ. Ὡστε καὶ τὸ τετράπλευρον ΜΑΔΖ εἶναι ἔγγράψιμον εἰς κύκλον· ἄρα αἱ γωνίαι ΜΑΔ καὶ Ζ₁ εἶναι ἴσαι, διότι ἔχουν τὴν αὐτὴν παραπληρωματικὴν γωνίαν ΔΖΜ· δηλ. εἶναι

$$\gamma\omega\nu.\Delta\text{ΑΜ} = \gamma\omega\nu.\text{Ζ}_1 \quad (2)$$

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι
 $\gamma\omega\nu.\Delta AM = \gamma\omega\nu.\Gamma_1$.

Παρατηροῦμεν εἰς τὸ τετράπλευρον ABΓM, ὅτι ἡ γωνία ΔAM εἶναι ἴση μὲ τὴν ἔξωτερικὴν γωνίαν Γ_1 , ἡ ὁποία σχηματίζεται εἰς τὴν ἀπέναντι κορυφὴν τοῦ Γ· ἄρα (§ 300. 2ον) τὸ τετράπλευρον MABΓ εἶναι ἔγγραψιμον εἰς κύκλον καὶ ἐπομένως τὸ σημεῖον M κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας, τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ τρίγωνον ABΓ.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Ἄν οἱ πόδες...**

358. Πέρισμα. Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τὰ ὅποια ἔχουν τὴν ἰδιότητα αὐτήν: ὥστε οἱ πόδες τῶν καθέτων, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ καθένα ἀπὸ τὰ σημεῖα αὐτά, ἐπὶ τὰς πλευρὰς ἐνὸς τριγώνου, νὰ κεῖνται ἐπ' εὐθείας, εἶναι ἡ περιφέρεια κύκλου ἢ περιγεγραμμένη περὶ τὸ τρίγωνον.

Ἡ πρότασις αὐτὴ εἶναι ἄμεσος συνέπεια τῆς § 357.

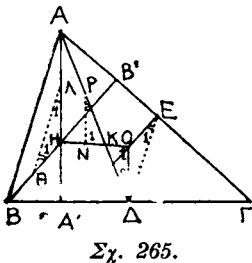
3. Εὐθεῖα καὶ κύκλος τοῦ Euler

359. Θεώρημα. Εἰς κάθε τρίγωνον, τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ὑψῶν τοῦ (ὀρθόκεντρον), τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέσων τοῦ (κέντρον βάρους) καὶ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν μεσοκαθέτων τῶν πλευρῶν τοῦ, κεῖνται ἐπ' εὐθείας καὶ ἡ ἀπόστασις τῶν δύο πρώτων σημείων εἶναι διπλασία τῆς ἀποστάσεως τῶν δύο δευτέρων.

Ἐπίδειξις: Ἐστω τὸ τρίγωνον ABΓ (Σχ. 265), H τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ὑψῶν τοῦ AA', BB', O τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν μεσοκαθέτων τῶν πλευρῶν BΓ καὶ ΓA. Φέρομεν τὴν διάμεσον AΔ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν εὐθεῖαν HO εἰς τὸ σημεῖον K.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ K εἶναι σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου ABΓ καὶ ὅτι $HK = 2KO$.

Ἀπόδειξις: Ἐστω Θ τὸ μέσον τῆς BH καὶ Λ τὸ μέσον τῆς AH. Εἰς τὸ τρίγωνον HAB ἡ εὐθεῖα ΘΛ συνδέει τὰ μέσα δύο πλευρῶν τοῦ



Σχ. 265.

καὶ ἐπομένως εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην πλευρὰν AB καὶ ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς AB. Ὀμοίως εἰς τὸ τρίγωνον ΓAB, ἡ εὐθεῖα ΕΔ συνδέει τὰ μέσα δύο πλευρῶν τοῦ καὶ ἐπομένως εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην πλευρὰν AB καὶ ἴση μὲ τὸ ἥμισυ αὐτῆς. Ὡστε αἱ ΘΛ καὶ

ΕΔ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, ὡς ἴσαι μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ΑΒ καὶ παράλληλοι πρὸς αὐτήν· δηλ. εἶναι $\Theta\Lambda = \text{ΕΔ}$.

Τὰ τρίγωνα ΗΘΛ καὶ ΟΔΕ ἔχουν: $\Theta\Lambda = \text{ΕΔ}$, ὡς ἔδειχθη, $\widehat{\Lambda}_1 = \widehat{\Delta}_1$, διότι ἔχουν τὰς πλευρὰς παράλληλους καὶ μὲ ἀντίθετον φορὰν, δηλ. τὴν ΛΗ παράλληλον πρὸς τὴν ΔΟ, διότι εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΒΓ καὶ ΛΘ παράλληλον πρὸς τὴν ΔΕ, ὡς ἔδειχθη· ἐπίσης τὰ τρίγωνα ἔχουν $\widehat{\Theta}_1 = \widehat{\text{Ε}}_1$, δι' ἴσους λόγον· δηλ. τὰ τρίγωνα ΗΘΛ καὶ ΟΔΕ ἔχουν μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς προσκειμένας εἰς αὐτὴν γωνίας ἴσας· ἄρα τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ἴσα καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι καὶ

$$ΟΔ = ΗΛ \quad (1)$$

Ἐστω Ν τὸ μέσον τῆς ΗΚ καὶ Ρ τὸ μέσον τῆς ΑΚ. Εἰς τὸ τρίγωνον ΚΑΗ, ἡ εὐθεῖα ΝΡ συνδέει τὰ μέσα δύο πλευρῶν του· ἄρα θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην πλευρὰν του ΑΗ καὶ ἴση μὲ τὸ ἥμισυ αὐτῆς· δηλ. θὰ εἶναι $ΝΡ = \frac{1}{2} ΑΗ$.

Ἐπειδὴ καὶ ἡ ΟΔ εἶναι ἴση καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ΛΗ, θὰ εἶναι καὶ ἡ ΡΝ ἴση καὶ παράλληλος πρὸς τὴν ΟΔ. Τὰ τρίγωνα ΚΝΡ καὶ ΚΟΔ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν μίαν πλευρὰν ἴσην, $ΝΡ = ΟΔ$ καὶ τὰς προσκειμένας εἰς αὐτὴν γωνίας ἴσας, δηλ. $\widehat{Ρ} = \widehat{\Delta}$, διότι ἔχουν τὰς πλευρὰς των παράλληλους καὶ μὲ ἀντίθετον φορὰν καὶ $\widehat{Ν}_1 = \widehat{\text{Ο}}_1$, ὡς ἐντὸς ἐναλλάξ τῶν παραλλήλων ΝΡ καὶ ΟΔ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΝΟ· ἀπὸ τὴν ἰσότητα τῶν τριγώνων αὐτῶν συνάγομεν, ὅτι:

$$ΡΚ = ΚΔ \quad (2) \quad \text{καὶ} \quad ΝΚ = ΚΟ \quad (3)$$

Ἐπειδὴ τὸ Ρ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΑΚ θὰ εἶναι $ΑΡ = ΡΚ$ καὶ ἐπομένως ἡ ἰσότης (2) γράφεται

$$ΑΡ = ΡΚ = ΚΔ.$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν συνάγομεν, ὅτι ἡ ΑΚ εἶναι ἴση μὲ τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς διαμέσου ΑΔ καὶ ἐπομένως τὸ σημεῖον Κ εἶναι σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Ἐπίσης, ἐπειδὴ τὸ Ν εἶναι τὸ μέσον τῆς ΗΚ, θὰ εἶναι $ΗΝ = ΝΚ$ καὶ ἐπομένως ἡ ἰσότης (3) γράφεται $ΗΝ = ΝΚ = ΚΟ$.

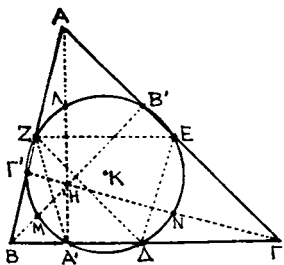
Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν συνάγομεν, ὅτι $ΗΚ = 2ΚΟ$.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Εἰς κάθε τρίγωνον, τὸ σημεῖον...**

Σημ. Ἡ εὐθεῖα ΗΚΟ λέγεται **εὐθεῖα τοῦ Euler**.

360. Θεώρημα. *Τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ἐνὸς τριγώνου, οἱ πόδες τῶν ὑψῶν του καὶ τὰ μέσα τῶν ἀποστάσεων τῶν κορυφῶν του ἀπὸ τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν ὑψῶν του, κείνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας. (Περιφέρεια τῶν 9 σημείων ἢ κύκλος τοῦ Euler).*

Ἐπιπέδου: Ἐστω τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ (Σχ. 266), Δ, E, Z τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του, A', B', Γ' πόδες τῶν ὑψῶν του, H τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ὑψῶν του καὶ Λ, M, N τὰ μέσα τῶν AH, BH καὶ ΓH .



Σχ. 266.

Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι τὰ 9 σημεῖα $\Delta, E, Z, A', B', \Gamma', \Lambda, M, N$ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.

Ἀπόδειξις: Ἀρχεῖ νὰ δεῖξωμεν, ὅτι ἡ περιφέρεια αὕτη διέρχεται διὰ τοῦ ἑνὸς ποδὸς A' καὶ διὰ τοῦ μέσου Λ τῆς AH . Φέρομεν τὰς ZA' καὶ ΔE .

Εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $BA'A$, ἡ $A'Z$ εἶναι διάμεσος αὐτοῦ καὶ ἄγεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας A' ἄρα εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ὑποτείνουσῃς ἤτοι εἶναι

$$A'Z = \frac{1}{2} AB \quad (1)$$

Εἰς τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$, ἡ εὐθεΐα ΔE συνδέει τὰ μέσα δύο πλευρῶν του ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην πλευρὰν του καὶ ἴση μὲ τὸ ἥμισυ αὐτῆς ἤτοι εἶναι

$$\Delta E = \frac{1}{2} AB \quad (2)$$

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι $ZA' = \Delta E$.

Εἰς τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$, ἡ εὐθεΐα ZE συνδέει τὰ μέσα δύο πλευρῶν του ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην πλευρὰν του $B\Gamma$. Τὸ τετράπλευρον λοιπὸν $A'\Delta EZ$ εἶναι τραπέζιον καὶ ἐπειδὴ εἶναι $ZA' = \Delta E$, ὡς ἐδείχθη, εἶναι ἰσοσκελὲς τραπέζιον. Ὡς ἰσοσκελὲς τραπέζιον, τὸ τετράπλευρον $A'\Delta EZ$ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον. Ὡστε ἡ περιφέρεια, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Δ, E, Z , μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$, διέρχεται καὶ ἀπὸ τὸν πόδα A' τοῦ ὕψους AA' .

Ὀμοίως ἀποδεικνύεται, ὅτι ἡ περιφέρεια, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Δ, E, Z διέρχεται καὶ ἀπὸ τοὺς πόδας B' καὶ Γ' τῶν ὑψῶν BB' καὶ $\Gamma\Gamma'$.

Θὰ δεῖξωμεν τώρα, ὅτι ἡ περιφέρεια αὕτη, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Δ, E, Z καὶ A', B', Γ' , διέρχεται καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον Λ , μέσον τῆς AH .

Φέρομεν τὰς ΛZ^* καὶ $Z\Delta$. Εἰς τὸ τρίγωνον ABH , ἡ εὐθεΐα $Z\Lambda$ συνδέει τὰ μέσα Z καὶ Λ δύο πλευρῶν του ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην πλευρὰν του BH .

* Φέρατε εἰς τὸ σχῆμα 266 τὴν εὐθεΐαν ΛZ .

Ὅμοιως εἰς τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$, ἡ εὐθεΐα $Z\Delta$ συνδέει τὰ μέσα δύο πλευρῶν του· ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην πλευράν του AG . Αἱ γωνίαι $\Lambda Z\Delta$ καὶ $BB'A$ εἶναι ἴσαι, διότι ἔχουν τὰς πλευράς των παραλλήλους καὶ μὲ ἀντίθετον φοράν ἐπειδὴ δὲ ἡ γωνία $BB'A$ εἶναι ὀρθή, θὰ εἶναι ὀρθή καὶ ἡ ἴση πρὸς αὐτὴν γωνία $\Lambda Z\Delta$ · ἦτοι εἶναι $\gammaων.\Lambda Z\Delta=1$ ὀρθή.

Ἡ κορυφή λοιπὸν Z τῆς ὀρθῆς γωνίας $\Lambda Z\Delta$ κεῖται ἐπὶ περιφερείας, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον τὴν $\Lambda\Delta$. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ $\gammaων.\Lambda A'\Delta=1$ ὀρθή, καὶ ἡ κορυφή A' κεῖται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον τὴν $\Lambda\Delta$. Τὰ σημεῖα λοιπὸν Λ, Z, A', Δ κείνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας. Ἡ περιφέρεια λοιπὸν, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Z, A', Δ διέρχεται καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον Λ καὶ ἐπομένως εἶναι ἡ προηγουμένως εὐρεθεῖσα περιφέρεια.

Ὅμοιως ἀποδεικνύεται, ὅτι ἡ περιφέρεια αὕτη διέρχεται καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα M καὶ N .

Ἐδείχθη λοιπὸν, ὅτι: *Τὰ μέσα τῶν. . .*

361. Θεώρημα. Νὰ ἀποδειχθῇ:

1^{ον}. Ὅτι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τοῦ Euler κεῖται εἰς τὸ μέσον τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία συνδέει τὸ ὀρθόκέντρον μὲ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον.

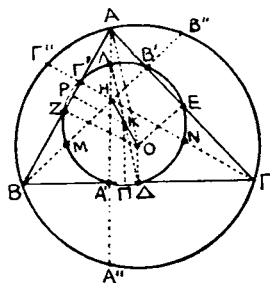
2^{ον}. Ὅτι ἡ ἀκτίς τοῦ κύκλου τοῦ Euler εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτίνος τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

Ἐπίσημοις: Ἐστω O (Σχ. 267) τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ καὶ H τὸ ὀρθόκέντρον.

Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι τὸ κέντρον K τοῦ κύκλου τοῦ Euler κεῖται εἰς τὸ μέσον τῆς OH .

Ἀπόδειξις: Τὸ κέντρον O τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περὶ τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι σημεῖον τῆς τομῆς τῶν καθέτων DO, ZO, EO εἰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$.

Φέρομεν τὴν HO . Τὸ τετράπλευρον $HA'\Delta O$ εἶναι τραπέζιον, διότι αἱ δύο ἀπέναντι πλευραὶ του HA' καὶ $O\Delta$ εἶναι παράλληλοι, ὥς κἀθετοὶ ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεΐαν $B\Gamma$. Ὅμοιως καὶ τὸ τετράπλευρον $OZ\Gamma'H$ εἶναι τραπέζιον, διότι αἱ OZ καὶ $H\Gamma'$ εἶναι παράλληλοι, ὥς κἀθετοὶ ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεΐαν AB .



Σχ. 267.

Ἄπο τὸ μέσον Π τῆς χορδῆς Α'Δ τοῦ κύκλου τοῦ Euler φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν Α'Δ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΗΟ εἰς τὸ Κ. Ἡ ΚΠ, ὡς κάθετος ἐπὶ τὴν Α'Δ, εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις τοῦ τραπεζίου ΗΑ'ΔΟ καὶ ἐπειδὴ ἄγεται ἀπὸ τὸ μέσον τῆς Α'Δ, θὰ διέλθῃ ἀπὸ τὸ μέσον τῆς ΗΟ· ἦτοι τὸ Κ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΗΟ.

Ὁμοίως ἡ κάθετος ΡΚ ἐπὶ τὴν ΖΓ' εἰς τὸ μέσον αὐτῆς διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον τῆς ΗΟ. Τὸ Κ ὡς ῥημεῖον τῆς τομῆς τῶν καθέτων εἰς τὰ μέσα τῶν χορδῶν Α'Δ καὶ Γ'Ζ τοῦ κύκλου τοῦ Euler, εἶναι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου αὐτοῦ.

Ὡστε τὸ κέντρον Κ τοῦ κύκλου τοῦ Euler εἶναι τὸ μέσον τῆς ΗΟ.

2ον. Ἡ γωνία ΛΑ'Δ εἶναι ὀρθή, ἐπειδὴ δὲ εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὸν κύκλον Κ ἔπεται, ὅτι ἡ ΛΔ εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου Κ. Φέρομεν τὴν ἀκτίνα ΟΑ. Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΟΗ, ἡ εὐθεῖα ΚΛ συνδέει τὰ μέσα τῶν δύο πλευρῶν του ΗΟ καὶ ΗΑ· ἄρα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην πλευρὰν του ΑΟ καὶ ἴση μὲ τὸ ἥμισυ αὐτῆς, δηλ. ἡ ἀκτίς ΚΛ τοῦ κύκλου τοῦ Euler εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτίνοσ ΑΟ τοῦ κύκλου

τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ· δηλ. εἶναι $R_e = \frac{R}{2}$.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: *Ὅτι τὸ κέντρον...*

Σημ. Ἡ εὐθεῖα ΟΗ λέγεται *εὐθεῖα τοῦ Euler*.

Ἀσκήσεις

Α'. *Ὁμάς. 166.* (801). *Θεώρημα τοῦ Saltmans.* Εἰς ἓνα κύκλον Ο φέρομεν τρεῖς χορδὰς ΜΑ, ΜΒ, ΜΓ. Μὲ διαμέτρους τὰς χορδὰς αὐτὰς γράφομεν τρεῖς περιφέρειας, αἱ ὁποῖαι τέμνονται, ἀνά δύο, εἰς τὰ σημεῖα Δ, Ε, Ζ, ἐκτὸς τοῦ κοινοῦ των σημείου Μ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα Δ, Ε, Ζ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

767. (802). Τὰ τέσσαρα κέντρα τῶν κύκλων, ἐγγεγραμμένων καὶ παρεγγεγραμμένων εἰς ἓνα τρίγωνον, συνδεόμενα μὲ εὐθείας δίδουν ἕξ εὐθύγραμμα τμήματα. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ μέσα τῶν ἕξ αὐτῶν εὐθυγρ. τμημάτων κεῖνται ἐπὶ τῆς περιφέρειας τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ δοθὲν τρίγωνον.

768. (803). Δίδεται ἓνα τρίγωνον ΑΒΓ, ὁ περιγεγραμμένος περὶ τὸ τρίγωνον κύκλος Ο καὶ ὁ κύκλος Κ τοῦ Euler. Ἐὰν Δ, Ε, Ζ εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τοῦ τριγώνου, Η τὸ ὀρθόκεντρόν του, καὶ Λ τὸ σημεῖον τοῦ κύκλου τοῦ Euler, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τοῦ ὕψους ΑΑ', νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. Ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΖΛ καὶ ΟΕ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι· ἐπίσης αἱ ΛΕ καὶ ΖΟ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι.

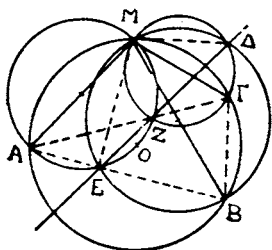
2ον. Ὅτι $OZ = \frac{1}{2} ΓΗ$, $OE = \frac{1}{2} ΒΗ$, καὶ $OL = \frac{1}{2} ΑΗ$.

769. (804). *Θεώρημα τοῦ Hamilton.* Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἓνα δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ καὶ τὰ τρία τρίγωνα ΑΒΗ, ΒΓΗ, ΓΑΗ, τὰ ὁποῖα ἔχουν κοινήν

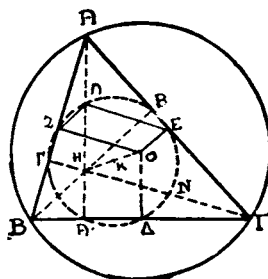
κορυφήν τὸ ὀρθόκεντρον Η καὶ βάσεις, ἀντιστοίχως, τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, ἔχουν κοινὸν τὸν κύκλον τοῦ Euler.

770. (805). Δίδεται ἓνα τρίγωνον ΑΒΓ καὶ Η τὸ ὀρθόκεντρόν του. Νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. Ὅτι τὰ τέσσαρα τρίγωνα ΑΒΓ, ΗΑΒ, ΗΒΓ, ΗΓΑ ἔχουν κοινὸν τὸν κύκλον τοῦ Euler.



Σχ. ἀσκ. 766.

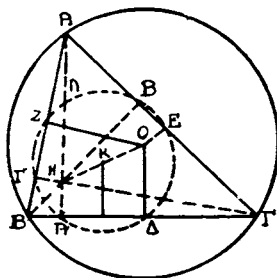


Σχ. ἀσκ. 768.

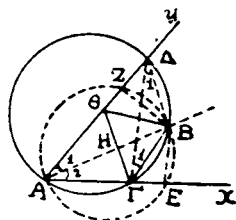
2ον. Ὅτι αἱ τέσσαρες περιφέρειαι, αἱ περιγεγραμμέναι περὶ τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ἴσαι.

3ον. Ὅτι αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὸ ὀρθόκεντρον Η μὲ τὸ κέντρον κάθε περιγεγραμμένου κύκλου διέρχονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται εἰς τὸ μέσον τῶν εὐθειῶν αὐτῶν.

771. (806). Εἰς κάθε τετράπλευρον ἔγγεγραμμένον εἰς κύκλον, αἱ κάθετοι, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὰ μέσα ἐκάστης πλευρᾶς, ἐπὶ τὴν ἀπέναντι πλευρᾶν, διέρχονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον.



Σχ. ἀσκ. 769.



Σχ. ἀσκ. 772.

772. (807). **Θεώρημα τοῦ Maclaurin.** Δίδεται μία γωνία xAy καὶ ἓνα σημεῖον Β, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς. Γράφομεν τυχοῦσαν περιφέρειαν διερχομένην ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β· ἡ περιφέρεια αὐτὴ τέμνει τὴν Αx εἰς τὸ Γ καὶ τὴν Ay εἰς τὸ Δ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $ΑΓ + ΑΔ = \sigma\tau\alpha\theta\epsilon\rho\acute{o}\nu$.

773. (808). Εἰς ἓνα τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν τὸ ὕψος ΑΗ, τὴν διχοτόμον ΑΔ τῆς γωνίας Α καὶ τὰς καθέτους ΒΕ καὶ ΓΖ ἐπὶ τὴν ΑΔ. Ἐὰν Μ καὶ Ν εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΒΓ καὶ ΑΒ, νὰ ἀποδειχθῇ:

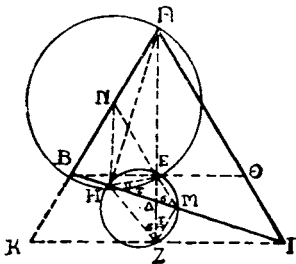
1ον. Ὅτι τὸ τετράπλευρον HZME εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

2ον. Ὅτι $\gamma\omega\nu.HZM = \gamma\omega\nu.\Gamma + \gamma\omega\nu.\frac{A}{2}$.

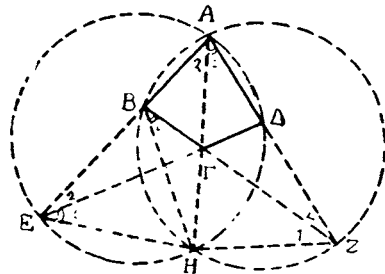
3ον. Ὅτι $\gamma\omega\nu.HNM = B - \Gamma$.

4ον. Ὅτι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου EHZM κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου τοῦ Euler τοῦ τριγώνου ABΓ.

774. (809). *Σημεῖον τοῦ Miquel.* Ἐάν εἰς ἓνα τετράπλευρον ABΓΔ προεκτείνωμεν τὰς ἀπέναντι πλευράς του AB καὶ ΓΔ μέχρι τῆς συναντήσεώς των εἰς τὸ σημεῖον E καὶ τὰς πλευράς AD καὶ ΒΓ μέχρι τῆς συναντήσεώς των εἰς τὸ Z, σχηματίζομεν ἓνα σχῆμα, τὸ ὁποῖον λέγεται *πλήρες τετράπλευρον*. Αὐτὸ τὸ πλήρες τετράπλευρον περιέχει τέσσαρα τρίγωνα EBΓ, EAD, ZΓΔ, ZAB. Νὰ ἀποδειχθῇ: 1ον. Ὅτι αἱ περιφέρειαι αἱ περιγεγραμμέναι περὶ τὰ τέσσαρα αὐτὰ τρίγωνα διέρχονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον.



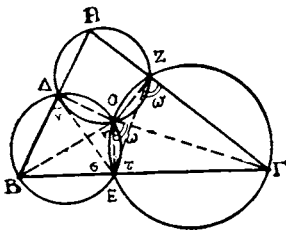
Σχ. ἀσκ. 773.



Σχ. ἀκ. 774.

2ον. Ὅτι τὰ κέντρα τῶν περιφερείῶν αὐτῶν κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.

775. (810). Ἐπὶ τῶν πλευρῶν AB, ΒΓ, ΓΑ ἑνὸς τριγώνου ABΓ λαμβάνομεν τὰ σημεῖα Δ, E, Z ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ:



Σχ. ἀσκ. 775.

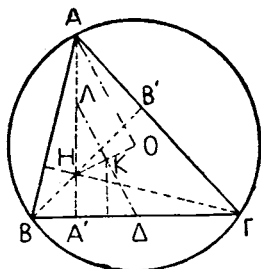
1ον. Ὅτι αἱ περιφέρειαι αἱ περιγεγραμμέναι περὶ τὰ τρίγωνα AΔZ, BEΔ καὶ ΓZE διέρχονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον O.

2ον. Ὅτι $\gamma\omega\nu.AOB = \gamma\omega\nu.\Gamma + \gamma\omega\nu.E\Delta Z$,
 $\gamma\omega\nu.BOG = \gamma\omega\nu.A + \gamma\omega\nu.\Delta E Z$,
 $\gamma\omega\nu.AOG = \gamma\omega\nu.B + \gamma\omega\nu.\Delta Z E$.

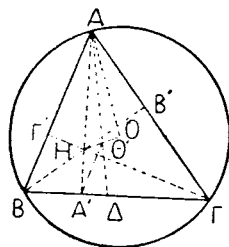
3ον. Ἀπὸ τὰς κορυφῶν A, B, Γ φέρομεν τρεῖς τυχούσας παραλλήλους AH, BΘ, ΓK, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὰς περιφερείας τῶν κύκλων AΔZ, BEΔ, ΓZE εἰς τὰ σημεῖα H, Θ, K ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα H, Θ, K καὶ O κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

B'. Ὁμάς. 776. (811). Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα τρίγωνον ABΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν κορυφήν A, τὸ ὀρθόκέντρον H καὶ τὸ σημεῖον Δ τῆς τομῆς τῆς διαμέσου AΔ καὶ τῆς πλευρῆς ΒΓ.

777. (812). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ H , τὸ κέντρον βάρους τοῦ Θ , καὶ τὸν πόδα A' τοῦ ὕψους AA' .



Σχ. ἀσκ. 776.



Σχ. ἀσκ. 777.

778. (813). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν κορυφήν τοῦ A , τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ H καὶ τὸ κέντρον βάρους τοῦ Θ .

779. (814). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὸ κέντρον O' τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου, τὸ κέντρον O τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου καὶ τὸ κέντρον O_a τοῦ παρεγγεγραμμένου κύκλου.

780. (815). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ H , τὸν πόδα A' τοῦ ὕψους AA' καὶ τὸ κέντρον O τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

781. (816). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὸ κέντρον O' τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου καὶ τὰ κέντρα O_a, O_b τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων.

782. (817). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὸ κέντρον O τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου καὶ τὰ κέντρα O_a, O_b τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων.

783. (818). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν κορυφήν τοῦ A , τὸ κέντρον βάρους τοῦ Θ καὶ τὸ κέντρον O τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

784. (819). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν κορυφήν τοῦ B , τὸ κέντρον O τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου καὶ τὸ κέντρον O_e τοῦ κύκλου τοῦ Euler.

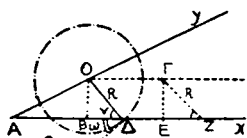
4. Γωνία εὐθείας καὶ περιφερείας. Γωνία δύο τεμνομένων περιφερειῶν.

362. Εἰς τὰς § 249, 262, ἐδώσαμεν τοὺς ὁρισμοὺς τῆς γωνίας εὐθείας καὶ περιφερείας καὶ τῆς γωνίας δύο τεμνομένων περιφερειῶν.

Κατωτέρω θὰ λύσωμεν δύο προβλήματα σχετικὰ μὲ τὴν γωνίαν εὐθείας καὶ περιφερείας καὶ τὴν γωνίαν δύο τεμνομένων περιφερειῶν.

363. Πρόβλημα 1ον. Δίδεται μία γωνία $\alpha\beta\gamma$. Νὰ γραφῆ περιφέρεια κύκλου με̄ δοθεῖσαν ἀκτίνα R , ἡ ὁποία νὰ ἔχη τὸ κέντρον τῆς ἐπὶ τῆς πλευρᾶς $\beta\gamma$ καὶ ἡ ὁποία νὰ τέμνη τὴν ἄλλην πλευρὰν $\alpha\beta$ ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν ω .

Ἀνάλυσις: Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω O ἡ ζητούμενη περιφέρεια, ἡ ὁποία ἔχει τὸ κέντρον τῆς O ἐπὶ τῆς πλευρᾶς $\beta\gamma$ τῆς γωνίας $\alpha\beta\gamma$ καὶ ἡ ὁποία τέμνει τὴν $\alpha\beta$ ὑπὸ γωνίαν $\alpha\delta\eta$ ἴσην με̄ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ω .



Σχ. ἀσκ. 268.

Φέρομεν τὴν OB κάθετον ἐπὶ τὴν $\alpha\beta$ καὶ τὴν ἀκτίνα OD . Ἡ ΔH , ὡς ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου O , εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτίνα OD . ἄρα αἱ γωνίαι ν καὶ ω εἶναι συμπληρωματικά.

Τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $OB\Delta$ γνωρίζομεν τὴν ὑποτείνουσαν OD ἴσην με̄ τὴν δοθεῖσαν ἀκτίνα R τοῦ κύκλου καὶ τὴν ὀξεῖαν γωνίαν ν , ἴσην με̄ τὴν συμπληρωματικὴν τῆς δοθείσης γωνίας ω . Τὸ τρίγωνον λοιπὸν $OB\Delta$ δύναται νὰ κατασκευασθῆ καὶ ἐπομένως δυνάμεθα νὰ ὀρίσωμεν τὸ μήκος OB , δηλ. τὴν ἀπόστασιν τοῦ κέντρον O ἀπὸ τὴν $\alpha\beta$.

Ἄλλὰ τότε τὸ κέντρον τοῦ ζητούμενου κύκλου εἶναι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῆς πλευρᾶς $\beta\gamma$ καὶ μιᾶς εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὴν $\alpha\beta$, ἡ ὁποία ἀπέχει ἀπὸ αὐτὴν ἀπόστασιν ἴσην με̄ OB .

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὴν κάτωθι κατασκευὴν:

Σύνθεσις: Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς $\alpha\beta$ λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Z καὶ με̄ κορυφὴν τὸ Z καὶ πλευρὰν τὴν $Z\alpha$ κατασκευάζομεν μίαν γωνίαν $\alpha Z\Gamma$ ἴσην με̄ τὴν συμπληρωματικὴν τῆς δοθείσης γωνίας ω . Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς $Z\Gamma$ λαμβάνομεν τμήμα $Z\Gamma$ ἴσον με̄ τὴν δοθεῖσαν ἀκτίνα R · ἀπὸ τὸ Γ φέρομεν τὴν κάθετον $\Gamma\epsilon$ ἐπὶ τὴν $\alpha\beta$ καὶ τὴν $\Gamma\epsilon$ παράλληλον πρὸς τὴν $\alpha\beta$, ἡ ὁποία τέμνει τὴν $\beta\gamma$ εἰς τὸ σημεῖον O . Ἀπὸ τὸ O φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΓZ , ἡ ὁποία τέμνει τὴν $\alpha\beta$ εἰς τὸ σημεῖον Δ . Με̄ κέντρον τὸ O καὶ με̄ ἀκτίνα τὴν OD γράφομεν περιφέρειαν κύκλου, ἡ ὁποία εἶναι ἡ ζητούμενη.

Ἀπόδειξις: Ἡ περιφέρεια O ἔχει τὸ κέντρον τῆς ἐπὶ τῆς $\beta\gamma$ καὶ ἀκτίνα OD ἴσην με̄ τὴν δοθεῖσαν R , διότι ἡ OD εἶναι ἴση με̄ τὴν $\Gamma Z = R$, ὡς ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ παραλληλογράμμου $ODZ\Gamma$. Φέρομεν τὴν ΔH κάθετον εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτίνος OD · ἡ ΔH εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου O εἰς τὸ σημεῖον Δ τῆς τομῆς τῆς $\alpha\beta$ καὶ τῆς περιφερείας O . Ἐπομένως ἡ γωνία $\alpha\delta\eta$ εἶναι γωνία μιᾶς περιφερείας καὶ μιᾶς τεμνούσης.

Θὰ δεῖξωμεν τώρα, ὅτι ἡ γωνία $\widehat{A\Delta H}$ εἶναι ἴση μὲ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ω .

Πράγματι· ἐπειδὴ ἡ γωνία $\widehat{O\Delta H}$ εἶναι ὀρθή, θὰ εἶναι

$$\widehat{A\Delta H} + \widehat{\nu} = 90^\circ \quad (1)$$

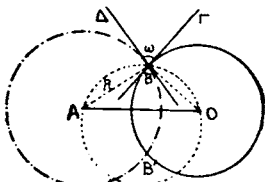
Ἀλλὰ $\widehat{\nu} = Z = 90^\circ - \omega$, ὁπότε ἡ (1) γράφεται

$$\widehat{A\Delta H} + 90^\circ - \omega = 90^\circ \quad \text{ἢ} \quad \widehat{A\Delta H} = \omega.$$

Ὡστε ἡ περιφέρεια $(O, O\Delta)$ εἶναι ἡ ζητούμενη.

364. Πρόβλημα 2ον. Μὲ κέντρον δοθὲν σημεῖον A , νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ τέμνη δοθεῖσαν περιφέρεια O , ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν ω .

Ἀνάλυσις: Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω A ἡ ζητούμενη περιφέρεια, ἡ ὁποία ἔχει κέντρον τὸ δοθὲν σημεῖον A καὶ τέμνει τὴν δοθεῖσαν περιφέρεια O εἰς τὰ σημεῖα B καὶ B' . Φέρομεν τὰς ἀκτῖνας AB, OB καὶ τὰς ἐφαπτομένας $B\Delta$ καὶ $B\Gamma$ τῶν περιφερειῶν A καὶ O εἰς τὸ σημεῖον B . Ἡ γωνία $\Delta B\Gamma$ εἶναι, ἐξ ὑποθέσεως, ἴση μὲ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ω . Ἐπειδὴ αἱ περὶ τὸ B γωνίαι $AB\Delta, \omega, \Gamma B O$ καὶ $O B A$ ἔχουν ἄθροισμα ἴσον μὲ 360° καὶ ἐπειδὴ αἱ γων. $AB\Delta = \text{γων.} \Gamma B O = 90^\circ$ ἔπεται, ὅτι ἡ γωνία ABO εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς γνωστῆς γωνίας ω . Φέρομεν τὴν διάκεντρον AO . Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ AO φαίνεται ἀπὸ τὸ B ὑπὸ γωνίαν ABO , ἴσην μὲ τὴν παραπληρωματικὴν τῆς δοθείσης ω ἄρα τὸ B κεῖται ἐπὶ τόξου κυκλικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον γράφεται μὲ χορδὴν τὴν AO καὶ δέχεται γωνίαν ἴσην μὲ $180^\circ - \omega$.



Σχ. 269.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὴν κάτωθι κατασκευὴν:

Σύνθεσις: Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν AO . Μὲ χορδὴν τὴν AO γράφομεν τόξον κυκλικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον νὰ δέχεται γωνίαν ἴσην μὲ $180^\circ - \omega$. Τὸ τόξον αὐτὸ τέμνει τὴν δοθεῖσαν περιφέρεια εἰς τὸ σημεῖον B . Μὲ κέντρον τὸ A καὶ ἀκτίνα τὴν AB γράφομεν περιφέρεια, ἡ ὁποία εἶναι ἡ ζητούμενη.

Ἀπόδειξις: Φέρομεν τὰς ἀκτῖνας AB καὶ OB . Φέρομεν τὴν $B\Delta$ κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκτίνα AB εἰς τὸ ἄκρον τῆς B . Ἐπίσης φέρομεν καὶ τὴν $B\Gamma$ κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκτίνα OB εἰς τὸ ἄκρον τῆς B . Αἱ $B\Delta$ καὶ $B\Gamma$ εἶναι καὶ ἐφαπτόμεναι τῶν περιφερειῶν A καὶ O εἰς τὸ σημεῖον B ἄρα ἡ γωνία $\Delta B\Gamma$ εἶναι γωνία δύο τεμνομένων περιφερειῶν. Θὰ δεῖξω-

μεν, ὅτι ἡ γωνία $\Delta\text{B}\Gamma$ εἶναι ἴση μὲ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ω .

Αἱ περὶ τὸ Β γωνίαι ἔχουν ἄθροισμα ἴσον μὲ 360° . Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι $\text{A}\text{B}\Delta$ καὶ $\Gamma\text{B}\text{O}$ εἶναι ὀρθαί, ἕκ κατασκευῆς, αἱ δύο ἄλλαι γωνίαι ABO καὶ $\Delta\text{B}\Gamma$ θὰ εἶναι παραπληρωματικά, δηλ. θὰ εἶναι

$$\gamma\omega\nu.\text{A}\text{B}\text{O} + \gamma\omega\nu.\Delta\text{B}\Gamma = 180^\circ \quad (1)$$

Ἄλλὰ ἡ γωνία ABO εἶναι ἴση μὲ $180^\circ - \omega$, διότι εἶναι ἔγγεγραμμένη εἰς τὸ κυκλικὸν τμήμα $\text{A}\text{B}\text{O}\text{A}$, τὸ ὁποῖον δέχεται, ἕκ κατασκευῆς, γωνίαν ἴσην μὲ $180^\circ - \omega$. Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (1) τὴν γωνίαν ABO μὲ τὴν ἴσην τῆς $180^\circ - \omega$ καὶ ἔχομεν

$$180^\circ - \omega + \gamma\omega\nu.\Delta\text{B}\Gamma = 180^\circ \quad \eta \quad \gamma\omega\nu.\Delta\text{B}\Gamma = \omega.$$

Ἀσκήσεις

785. (820). Νὰ γραφῆ περιφέρεια μὲ δοθεῖσαν ἀκτίνα R , ἡ ὁποία νὰ τέμνη δοθεῖσαν εὐθεῖαν ὑπὸ γωνίαν ω καὶ ἄλλην εὐθεῖαν ὑπὸ γωνίαν ν .

786. (821). Νὰ γραφῆ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ τέμνη κάθε πλευρὰν δοθέντος τριγώνου ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν ω .

787. (822). Νὰ γραφῆ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ ἐφάπτεται δοθείσας εὐθείας xy καὶ ἡ ὁποία νὰ τέμνη δοθεῖσαν περιφέρειαν K εἰς δοθὲν σημεῖον A αὐτῆς, ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν ω .

788. (823). Νὰ γραφῆ περιφέρεια μὲ δοθεῖσαν ἀκτίνα R , ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον A καὶ ἡ ὁποία νὰ τέμνη δοθεῖσαν περιφέρειαν O ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν ω .

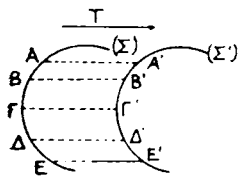
789. (824). Νὰ γραφῆ περιφέρεια μὲ δοθεῖσαν ἀκτίνα R , ἡ ὁποία νὰ τέμνη δοθεῖσαν περιφέρειαν A καὶ δοθεῖσαν εὐθεῖαν xy ὑπὸ δοθείσας γωνίας ω καὶ ν .

790. (825). Νὰ γραφῆ περιφέρεια μὲ δοθεῖσαν ἀκτίνα R , ἡ ὁποία νὰ τέμνη δύο δοθείσας περιφέρειας A καὶ B ὑπὸ δοθείσας γωνίας ω καὶ ν .

5. Μεταφορά

365. Εὐθύγραμμα τμήματα ὁμορρόπως ἴσα. Δύο ἢ περισσότερα εὐθύγραμμα τμήματα λέγονται **ὁμορρόπως ἴσα**, ἐὰν εἶναι παράλληλα μεταξύ των καὶ ἔχουν τὴν αὐτὴν φορὰν καὶ τὸ αὐτὸ μήκος.

366. Μεταφορά. Ἐστω ἓνα εὐθύγραμμον τμήμα T καὶ ἓνα σχῆμα (Σ) , τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου (*Σχ.* 270).

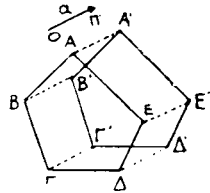


Σχ. 270.

Ἐὰν ἀπὸ τὰ διάφορα σημεῖα $\text{A}, \text{B}, \Gamma, \Delta, \dots$ τοῦ σχήματος (Σ) φέρωμεν εὐθύγραμμα τμήματα $\text{AA}', \text{BB}', \text{ΓΓ}', \text{ΔΔ}' \dots$, ὁμορρόπως ἴσα πρὸς τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον τμήμα T , ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων $\text{A}', \text{B}', \Gamma', \dots$ εἶναι ἓνα σχῆμα (Σ') , τὸ ὁποῖον λέγομεν, ὅτι

προέκυψε ἐκ τοῦ πρώτου διὰ *παράλληλον μεταθέσεως* ἢ *μεταφορᾶς* ὀριζομένης ὑπὸ τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος T .

Οὕτω τὸ σχῆμα $A'B'Γ'D'E'$ (Σχ. 271) προκύπτει ἐκ τοῦ σχήματος $ABΓΔE$ διὰ μεταφορᾶς ὀριζομένης ὑπὸ τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος $ΟΠ=α$, ἐὰν τὰ εὐθύγραμμα τμήματα $AA', BB', ΓΓ', \dots$ εἶναι ὁμορρόπως ἴσα πρὸς τὸ δοθὲν εὐθύγραμμον τμήμα $ΟΠ=α$.



Σχ. 271.

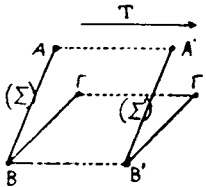
Τὰ σημεῖα $A', B', Γ', Δ', \dots$ τοῦ σχήματος (Σ') λέγονται *ὁμόλογα* τῶν σημείων $A, B, Γ, Δ, \dots$ τοῦ σχήματος (Σ).

Τὸ εὐθύγραμμον τμήμα T λέγεται *ὀδηγός* τῆς μεταφορᾶς.

Γενικῶς: *Μεταφορὰ* ἐνὸς ἐπιπέδου σχήματος (Σ) λέγεται ἡ μετατόπισις αὐτοῦ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου του οὕτως, ὥστε κάθε σημεῖον του νὰ γράφῃ, κατὰ τὴν μετατόπισίν του, ἕνα εὐθύγραμμον τμήμα ὁμορρόπως ἴσον πρὸς τὸ δοθὲν.

367. Θεώρημα. *Δύο σχήματα, τὰ ὁποῖα προκύπτουν τὸ ἕνα ἐκ τοῦ ἄλλου διὰ μεταφορᾶς, εἶναι ἴσα.*

Ἐστῶσαν τρία τυχόντα σημεῖα $A, B, Γ$ ἐνὸς σχήματος (Σ) (Σχ. 272). Ἀπὸ τὰ σημεῖα αὐτὰ φέρομεν εὐθύγραμμα τμήματα ὁμορρόπως ἴσα πρὸς δοθὲν εὐθύγραμμον τμήμα T καὶ ἔστῶσαν $A', B', Γ'$ τὰ ὁμόλογα σημεῖα τῶν $A, B, Γ$.



Σχ. 272.

Φέρομεν τὰ εὐθύγραμμα τμήματα $AB, BΓ, A'B', B'Γ'$. Τὸ τετράπλευρον $ABB'A'$ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ AA' καὶ BB' εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι ἐκ κατασκευῆς πρὸς τὸ T . ἄρα καὶ αἱ ἄλλαι ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ AB καὶ $A'B'$ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς.

Ἐπομένως καὶ τὸ τετράπλευρον $ΓBB'Γ'$ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ ἐπομένως αἱ ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ $BΓ$ καὶ $B'Γ'$ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς.

Αἱ γωνίαι $ABΓ$ καὶ $A'B'Γ'$ ἔχουν τὰς πλευράς των παράλληλους καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς καὶ ἐπομένως εἶναι ἴσαι καὶ ἔχουν τὴν αὐτὴν φορᾶν.

Ἐὰν λοιπὸν ὀλισθήσωμεν τὸ σχῆμα (Σ) οὕτως, ὥστε τὸ εὐθύ-

γραμμον τμήμα AB νὰ πέση ἐπὶ τοῦ ἴσου του $A'B'$, τὸ σημεῖον Γ θὰ συμπέση ἐπὶ τοῦ ὁμολόγου του σημείου Γ' .

Ὅμοιως καὶ ὄλα τὰ ἄλλα σημεία τοῦ σχήματος (Σ) θὰ συμπέσουν ἐπὶ τῶν ὁμολόγων σημείων τοῦ σχήματος (Σ') καὶ ἐπομένως τὰ δύο σχήματά (Σ) καὶ (Σ') εἶναι ἴσα.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: *Δύο σχήματα . . .*

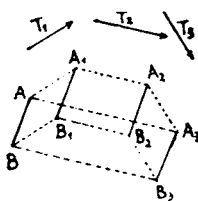
368. Πόρισμα. *Εἰς μίαν μεταφορὰν, δύο ὁμόλογα εὐθύγραμμα τμήματα εἶναι ὁμορρόπως ἴσα.*

Πράγματι· τὰ ὁμόλογα εὐθύγρ. τμήματα AB καὶ $A'B'$ (Σχ. 271) εἶναι ὁμορρόπως ἴσα, διότι ἐκ κατασκευῆς τὰ εὐθύγρ. τμήματα AA' καὶ BB' εἶναι ὁμορρόπως ἴσα καὶ τὸ τετράπλευρον $ABB'A'$ εἶναι παραλληλόγραμμον.

Ἀντιστρόφως: *Ἐὰν κάθε εὐθύγραμμον τμήμα ἐνὸς σχήματος εἶναι ὁμορρόπως ἴσον μὲ τὸ ὁμόλογον εὐθύγραμμον τμήμα τοῦ ἄλλου, τὰ δύο σχήματα προκύπτουν τὸ ἓνα ἐκ τοῦ ἄλλου διὰ μεταφορᾶς.*

Πράγματι· ἐὰν τὰ εὐθύγραμμα τμήματα AB καὶ $A'B'$ εἶναι ὁμορρόπως ἴσα, θὰ εἶναι ὁμορρόπως ἴσα καὶ τὰ εὐθύγραμμα τμήματα AA' καὶ BB' . Ἐὰν λοιπόν θεωρήσωμεν σταθερὰ τὰ σημεία A καὶ A' , τὰ σημεία B καὶ B' κατὰ τὴν κίνησίν των θὰ γράφουν τὰ σχήματα (Σ) καὶ (Σ'). Ἐπειδὴ δὲ τὰ εὐθύγραμμα τμήματα BB' εἶναι ὁμορρόπως ἴσα πρὸς τὸ ὄρισμένον εὐθύγραμμον τμήμα AA' , ἔπεται ὅτι τὸ ἓνα σχῆμα προκύπτει ἐκ τοῦ ἄλλου διὰ μεταφορᾶς.

369. Σύνθεσις πολλῶν μεταφορῶν. Ἐστω AB τυχὸν εὐθύγραμμον τμήμα ἐνὸς σχήματος Σ , τὸ ὁποῖον ὑπόκειται εἰς τρεῖς μετα-



Σχ. 273.

φορᾶς, ὀριζομένης ὑπὸ τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων T_1, T_2, T_3 . Ἡ μεταφορὰ, ἣ ὀριζομένη ὑπὸ τοῦ εὐθύγρ. τμήματος T_1 θὰ μεταθέσῃ τὸ εὐθύγραμμον τμήμα AB εἰς τὴν θέσιν A_1B_1 . Ἡ μεταφορὰ T_2 θὰ μεταθέσῃ τὸ εὐθύγραμμον τμήμα A_1B_1 εἰς τὴν θέσιν A_2B_2 , καὶ ἡ μεταφορὰ T_3 θὰ μεταθέσῃ τὸ εὐθύγραμμον τμήμα A_2B_2 εἰς τὴν θέσιν A_3B_3 . Ἐξετάσωμεν ἤδη τὰ εὐθύγραμμα τμήματα $AB, A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3$.

Ἐπειδὴ τὸ εὐθύγραμμον τμήμα A_1B_1 προέκυψε ἐκ τοῦ AB διὰ μεταφορᾶς, ἔπεται ὅτι τὰ εὐθύγραμμα τμήματα AB καὶ A_1B_1 εἶναι ὁμορρόπως ἴσα. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ τὰ εὐθύγρ. τμήματα A_1B_1

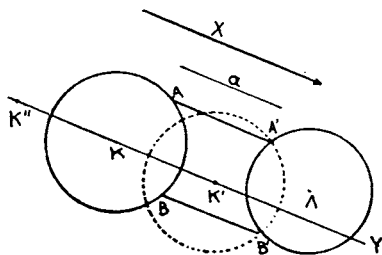
καὶ A_2B_2 εἶναι ὁμορρόπως ἴσα, καθὼς ἐπίσης καὶ τὰ A_1B_1 καὶ A_3B_3 , ἄρα καὶ τὰ εὐθύγραμμα τμήματα AB καὶ A_3B_3 εἶναι ὁμορρόπως ἴσα.

Ἐπειδὴ τὰ εὐθύγραμμα τμήματα AB καὶ A_3B_3 εἶναι ὁμορρόπως ἴσα ἔπεται, ὅτι καὶ τὰ εὐθύγραμμα τμήματα AA_3 καὶ BB_3 εἶναι ὁμορρόπως ἴσα, ὡς ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ παραλληλογράμμου ABB_3A_3 . Τὸ εὐθύγραμμον τμήμα λοιπὸν A_3B_3 προκύπτει ἐκ τοῦ AB διὰ μεταφορᾶς ὀριζομένης ὑπὸ τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος AA_3 . Ἡ τοιαύτη μεταφορὰ τοῦ εὐθύγρ. τμήματος AB εἰς τὴν θέσιν A_3B_3 καλεῖται **συνιστάμενη** τῶν μεταφορῶν T_1, T_2, T_3 , αὗται δὲ καλοῦνται **συνιστώσαι**. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν ὅτι:

Ὅσαιδήποτε μεταφοραὶ συντίθενται εἰς μίαν μόνον μεταφορὰν.

370. Πρόβλημα. Δίδονται δύο περιφέρειαι K καὶ Λ καὶ ζητεῖται νὰ ἀχθῆ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν X καὶ τοιαύτη, ὥστε τὸ μεταξὺ τῶν περιφερειῶν K καὶ Λ περιεχόμενον τμήμα αὐτῆς νὰ εἶναι ἴσον πρὸς δοθὲν εὐθύγραμμον τμήμα α .

Λύσις. Μεταθέτομεν τὴν περιφέρειαν K ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς κατὰ μεταφορὰν ὀριζομένην ὑπὸ εὐθύγρ. τμήματος ὁμορρόπως ἴσου πρὸς τὸ α , τὸ ὁποῖον εἶναι παράλληλον πρὸς τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν X . Πρὸς τοῦτο ἐπὶ τῆς εὐθείας Y , τῆς διερχομένης διὰ τοῦ κέντρου K καὶ παραλλήλου πρὸς τὴν X , λαμβάνομεν εὐθύγρ. τμήμα $KK' = \alpha$. Ἐπειδὴ κατὰ τὴν μεταφορὰν τὰ σχήματα μένουσιν ἀναλλοίωτα, ἡ νέα θέσις τῆς K , εἶναι περιφέρεια ἴση πρὸς αὐτὴν καὶ μὲ κέντρον τὸ K' .



Σχ. 274.

Ἡ περιφέρεια K' τέμνει τὴν Λ εἰς τὰ σημεῖα A' καὶ B' , τῶν ὁποίων εὐρίσκομεν τὰ ὁμόλογα ἐπὶ τῆς K .

Ἐστω A τὸ ὁμόλογον τοῦ A' καὶ B τὸ ὁμόλογον τοῦ B' . Τὰ εὐθύγρ. τμήματα AA', BB' , ὡς ὀριζόμενα ὑπὸ ὁμολόγων σημείων τῶν σχημάτων K καὶ K' εἶναι ὁμορρόπως ἴσα πρὸς τὸ ὀρίζον τὴν μεταφορὰν εὐθύγρ. τμήμα KK' , ἥτοι εἶναι

$$AA' = BB' = KK' = \alpha.$$

Ἐπὶ τῶν ὁποίων κείνται ἀντιστοι-

χως τὰ εὐθύγηρ. τμήματα AA' καὶ BB' καὶ τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦν λύσιν τοῦ προβλήματος.

Ἡ μεταφορὰ ἠδύνατο νὰ γίνη καὶ κατὰ τὸ εὐθύγηρ. τμήμα KK'' , ὁπότε θὰ ὑπῆρχον καὶ δύο ἄλλαι εὐθεῖαι λύουσαι τὸ πρόβλημα, ἐφ' ὅσον ὅμως ὁ κύκλος K'' θὰ ἔτεμεν τὸν Λ .

Τὸ πρόβλημα λοιπὸν ἔχει ἐν γένει τέσσαρας λύσεις.

Ἄσκήσεις

791. (902). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν βᾶσιν^α του, ἢ ὁποῖα κεῖται ἐπὶ δοθείσης εὐθείας xy , τὴν ἀπέναντι γωνίαν A καὶ ὅτι αἱ δύο ἄλλαι ἵπλευραὶ του, προεκτεινόμεναι, διέρχονται ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα M καὶ N .
(Πολυτεχνεῖον 1946)

792. (951). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τραπέζιον $AB\Gamma\Delta$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν μεγάλην βᾶσιν $AB=a$, τὰς μὴ παραλλήλους πλευρὰς $B\Gamma=b$, $\Delta A=d$, καὶ τὴν γωνίαν^α A .

793. (952). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τραπέζιον $AB\Gamma\Delta$, ἂν γνωρίζωμεν τὰς διαγωνίους $A\Gamma=d_1$, $B\Delta=d_2$, τὴν γωνίαν των ω καὶ τὴν διαφορὰν $AB-B\Gamma=l$.

794. (956). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τραπέζιον $AB\Gamma\Delta$, ἂν γνωρίζωμεν τὰς διαγωνίους του d_1 καὶ d_2 , τὴν γωνίαν αὐτῶν ω καὶ μίαν τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του a .

795. (958). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$, ἐὰν γνωρίζωμεν τὰς τρεῖς πλευρὰς του $AB=b$, $A\Delta=a$ καὶ $\Delta\Gamma=\gamma$ καὶ τὰς προσκειμένας γωνίας $B=\omega$ καὶ $\Gamma=\varphi$, εἰς τὴν τετάρτην πλευρὰν $B\Gamma$.

796. (959). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$, ἂν γνωρίζωμεν δύο ἀπέναντι πλευρὰς αὐτοῦ, $BA=a$ καὶ $\Gamma\Delta=\gamma$ καὶ τὰς γωνίας του
 $A=\omega$, $B=\varphi$, $\Gamma=\nu$, $\Delta=\sigma$.

797. (960). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τετράπλευρον, ἐὰν γνωρίζωμεν τὰς τέσσαρας πλευρὰς του a, β, γ, δ καὶ τὴν γωνίαν ω τῶν δύο ἀπέναντι πλευρῶν του a καὶ γ .

798. (932). Νὰ ἀχθῆ τέμνουσα δοθείσης περιφερείας K καὶ δοθείσης εὐθείας X καὶ τοιαύτη, ὥστε τὸ μεταξὺ τῆς εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας περιεχόμενον τμήμα αὐτῆς νὰ ἔχη μῆκος a καὶ νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς δοθείσαν εὐθεῖαν KZ .

799. (934). Δίδεται ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$ καὶ ζητεῖται νὰ ἀχθῆ εὐθεῖα μήκους a , ἢ ὁποῖα νὰ τέμνη τὴν AB εἰς τὸ Δ , τὴν $A\Gamma$ εἰς τὸ E , καὶ τοιαύτη, ὥστε νὰ εἶναι $A\Delta=\Gamma E$.

800. (935). Νὰ ἀχθῆ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν $B\Gamma$ τριγώνου $AB\Gamma$, τέμνουσα τὰς πλευρὰς AB καὶ $A\Gamma$ ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ E καὶ τοιαύτη, ὥστε $A\Delta=\Gamma E$.

801. (946). Δίδονται δύο περιφέρειαι K, Λ , κείμεναι ἐκτὸς ἀλλήλων καὶ ζητεῖται νὰ ἀχθῆ τέμνουσα $AB\Gamma\Delta$ τούτων, παράλληλος πρὸς δοθείσαν διεύθυνσιν KX καὶ τοιαύτη, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν χορδῶν τῶν ἀποτεμνομένων ἐπ' αὐτῆς ὑπὸ τῶν δύο περιφερειῶν νὰ ἰσοῦται πρὸς λ .

802. (942). Δίδονται δύο εὐθείαι παράλληλοι E_1 και E_2 και δύο σημεία A, B , τὰ ὅποια κείνται ἐκτός τῶν παραλλήλων τούτων και ζητεῖται, νὰ εὐρεθῇ ὁ ἐλάχιστος δρόμος, ὁ συνδέων τὰ A, B και τοῦ ὁποίου τὸ μεταξὺ τῶν E_1 και E_2 περιλαμβανόμενον μέρος νὰ εἶναι παράλληλον πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν E .

803. (944). Δίδεται διάμετρος $\Gamma\Delta$ περιφέρειας K και δύο σημεία A, B κείμενα ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἡμιπεριφέρειας. Νὰ εὐρεθῇ ἐπὶ τῆς ἄλλης ἡμιπεριφέρειας σημεῖον M τοιοῦτον, ὥστε τὸ τμήμα τῆς διαμέτρου $\Gamma\Delta$ τὸ περιλαμβανόμενον μεταξὺ τῶν χορδῶν MA και MB νὰ ἔχη μῆκος α .

804. (963). Εἰς δοθέντα κύκλον K νὰ ἐγγραφῇ ἓνα τραπέζιον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχη ὕψος ν και ἡ διαφορὰ τῶν βάσεών του νὰ εἶναι ἴση μὲ δοθὲν μῆκος δ .

805. (990). Νὰ γραφοῦν δύο περιφέρειαι K και Λ , ἂν γνωρίζωμεν τὸ μῆκος α τῶν κοινῶν ἐξωτερικῶν ἐφαπτομένων και τὸ μῆκος β τῶν ἐσωτερικῶν ἐφαπτομένων και τὴν γωνίαν ω τῶν ἐξωτερικῶν ἐφαπτομένων.

806. (22). Διὰ τῆς κορυφῆς A τριγώνου $AB\Gamma$ νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα AX τοιαύτη, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν προβολῶν, τῶν πλευρῶν AB και $A\Gamma$ ἐπὶ τὴν AX , νὰ ἰσοῦται πρὸς δοθὲν μῆκος μ .

807. (25). Εἰς δοθεῖσαν περιφέρειαν K νὰ ἀχθῇ χορδὴ παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν X και τῆς ὁποίας ἡ προβολὴ ἐπὶ δοθείσης διαμέτρου AB τῆς K νὰ ἔχη μῆκος α .

808. (26). Ἐπὶ δοθείσης εὐθείας X νὰ ὀρισθῇ τμήμα AB ἔχον δοθὲν μῆκος α , οὕτως ὥστε τὰ ἄκρα αὐτοῦ A, B ἐνούμενα ἀντιστοίχως μὲ τὰ σημεία Γ, Δ τὰ κείμενα πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς X , νὰ δίδουν τὴν τεθλασμένην $\Gamma B A \Delta$, ἡ ὅποια νὰ ἔχη τὸ ἐλάχιστον μῆκος.

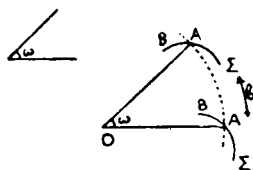
809. (21). Περιφέρεια K στρέφεται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου της περὶ δοθὲν σημείον αὐτῆς A . Ζητεῖται νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων ἐπαφῆς τῶν ἐφαπτομένων τῆς περιφέρειας K και παραλλήλων πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν E .

6. Στροφή

371. Ὅρισμοί. Ἐστω Σ ἓνα δοθὲν σχῆμα, ω δοθεῖσα γωνία και O δοθὲν σημεῖον, τὸ ὁποῖον κείται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ σχήματος Σ .

Συνδέομεν δι' εὐθειῶν τὸ σημεῖον O μὲ τὰ διάφορα σημεία A, B, \dots τοῦ σχήματος Σ και στρέφομεν τὰς εὐθείας αὐτάς, κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, περὶ τὸ σημεῖον O και κατὰ γωνίαν ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ω

Αἱ εὐθείαι OA, OB, \dots κατὰ τὴν στροφήν των περὶ τὸ O , δὲν πρέπει νὰ ἐξέρχωνται τοῦ ἐπιπέδου τοῦ σχήματος. Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν



Σχ. 275.

ἄκρων A', B', \dots εἶναι ἓνα σχῆμα Σ' τὸ ὁποῖον λέγομεν, ὅτι προέκυψε ἐκ τοῦ σχήματος Σ διὰ στροφῆς αὐτοῦ περὶ τὸ δοθὲν σημεῖον O καὶ κατὰ γωνίαν ω .

Ἡ γωνία ω λέγεται **γωνία στροφῆς**, τὸ σημεῖον O λέγεται **κέντρον στροφῆς** καὶ ἡ φορά κατὰ τὴν ὁποίαν γίνεται ἡ στροφή λέγεται **φορά τῆς στροφῆς**.

Τὰ σημεῖα A', B', \dots λέγονται **ὁμόλογα** τῶν σημείων A, B, \dots

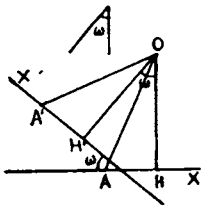
Ἐὰν ἡ γωνία στροφῆς εἶναι ἴση μὲ 180° , τὸ σχῆμα Σ' εἶναι συμμετρικὸν τοῦ σχήματος Σ ὡς πρὸς O .

Ἡ περιστροφή ἐνὸς σχήματος εἶναι τελείως ὠρισμένη, ἐὰν δοθῇ τὸ κέντρον στροφῆς, ἡ γωνία στροφῆς καὶ ἡ φορά στροφῆς.

Οὕτω, ἐὰν θέλωμεν νὰ εὑρωμεν τὸ ὁμόλογον σημεῖον A' ἐνὸς σημείου A ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς:

Μὲ κορυφὴν τὸ κέντρον στροφῆς O καὶ μὲ πλευρὰν τὴν OA κατασκευάζομεν μίαν γωνίαν AOA' ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ω (κατὰ τὸ μέγεθος καὶ τὴν φοράν) καὶ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς OA' λαμβάνομεν ἓνα τμήμα OA' ἴσον μὲ OA . Τὸ σημεῖον A' εἶναι τὸ ὁμόλογον τοῦ A .

372. Στροφή μιᾶς εὐθείας. Ἐστω ὅτι θέλομεν νὰ περιστρέψωμεν τὴν εὐθείαν X περὶ δοθὲν σημεῖον O καὶ κατὰ γωνίαν στροφῆς ω .



Σχ. 276.

Ἀπὸ τὸ O φέρομεν τὴν OH κάθετον ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθείαν X καὶ στρέφομεν τὴν OH περὶ τὸ O κατὰ γωνίαν $HOH' = \omega$ καὶ κατὰ τὴν καθορισθεῖσαν φοράν, ἔστω κατὰ τὴν φοράν τῶν δεικτῶν τοῦ ὠρολογίου καὶ ἔστω OH' ἡ νέα θέσις τῆς OH . Ἐστω A τυχὸν σημεῖον τῆς X . Φέρομεν τὴν OA καὶ μὲ πλευρὰν τὴν OA κατασκευάζομεν γωνίαν $AOA' = \omega$, ἔχουσαν τὴν αὐτὴν φοράν. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς OA'

λαμβάνομεν τμήμα $OA' = OA$.

Αἱ γωνίαι AOH καὶ $A'OH'$ εἶναι ἴσαι, διότι διαφέρουν τῶν ἴσων γωνιῶν HOH' καὶ AOA' κατὰ τὴν αὐτὴν γωνίαν AOH' . Φέρομεν τὴν εὐθείαν X' ἡ ὁποία συνδέει τὰ σημεῖα H' καὶ A' : τὰ τρίγωνα OHA καὶ $OH'A'$ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν

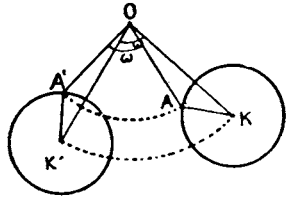
περιεχομένην γωνίαν ἴσην· ἄρα θὰ εἶναι $\widehat{H} = \widehat{H}'$. Ἀλλὰ ἡ γωνία H εἶναι ὀρθή· ἄρα καὶ ἡ ἴση τῆς γωνία H' εἶναι ὀρθή.

Κάθε λοιπὸν σημεῖον A τῆς εὐθείας X ἔχει τὸ ὁμόλογόν του A'

ἐπὶ τῆς ὠρισμένης εὐθείας X' , ἣ ὅποια εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν OH' εἰς τὸ σημεῖον H' .

373. Στροφή μιᾶς περιφέρειας. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ περιστρέψωμεν τὴν περιφέρειαν K περὶ τὸ σημεῖον O καὶ κατὰ γωνίαν στροφῆς ω .

Ἔστω A τυχὸν σημεῖον τῆς περιφέρειας K . Φέρομεν τὰς εὐθείας OK καὶ OA καὶ στρέφομεν αὐτὰς περὶ τὸ O κατὰ γωνίας ἴσας μὲ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ω . Ἔστω OK' καὶ OA' αἱ νέαι θέσεις τῶν OK καὶ OA μετὰ τὴν στροφήν των. Αἱ γωνίαι KOA καὶ $K'OA'$ εἶναι ἴσαι, ὡς ὑπόλοιπα τῶν ἴσων γωνιῶν KOK' καὶ AOA' ἀπὸ τῶν ὁποίων ἀφηρέθη ἡ γωνία AOK' . Φέρομεν τὰς εὐθείας AK καὶ $A'K'$. Τὰ σχηματισθέντα τρίγωνα OAK καὶ $OA'K'$ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ἴσην· ἄρα θὰ εἶναι $KA=K'A'$.



Σχ. 277.

Ὁ τόπος λοιπὸν τῶν σημείων A τῆς περιφέρειας K εἶναι ἡ περιφέρεια K' , ἣ ἴση πρὸς τὴν K .

Ὡστε ἡ θέσις τῆς περιφέρειας K μετὰ τὴν στροφήν περὶ τὸ O κατὰ γωνίαν ω εἶναι ἡ περιφέρεια K' , ἣ ἴση μὲ τὴν K .

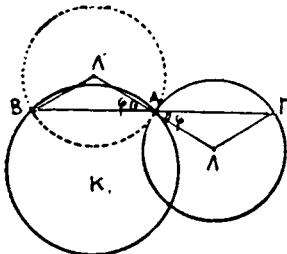
374. Πρόβλημα. Διὰ τῆς κοινῆς τομῆς A δύο τεμνομένων περιφερειῶν K καὶ Λ νὰ ἀχθῆ τέμνουσα αὐτῶν, ἣ ὅποια νὰ διχοτομεῖται ὑπὸ τοῦ A .

Λύσις. Στρέφομεν τὴν περιφέρειαν Λ περὶ τὸ σημεῖον A κατὰ γωνίαν 180° καὶ ἔστω Λ' ἡ νέα θέσις τῆς Λ μετὰ τὴν στροφήν της.

Ἔστω B τὸ σημεῖον εἰς τὸ ὁποῖον ἡ περιφέρεια Λ' τέμνει τὴν K .

Φέρομεν τὴν BA , ἣ ὅποια τέμνει τὴν περιφέρειαν Λ εἰς τὸ σημεῖον Γ . Λέγομεν ὅτι ἡ BAG εἶναι ἡ ζητούμενη τέμνουσα.

Ἀπόδειξις: Λόγω τῆς περιστροφῆς θὰ εἶναι $AA=AA'$. Φέρομεν τὰς $\Lambda'B$ καὶ $\Lambda\Gamma$. Τὰ σχηματισθέντα ἰσοσκελῆ τρίγωνα $A\Lambda\Gamma$ καὶ $A\Lambda'B$ εἶναι ἴσα, διότι



Σχ. 278.

ἔχουν $\Lambda A = A\Lambda'$ καὶ τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας φ καὶ φ' ἴσας. Ἀπὸ τὴν ἰσότητα τῶν τριγώνων αὐτῶν συνάγομεν ὅτι $BA = A\Gamma$.

Ἀσκήσεις

810. (918). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα ἰσόπλευρον τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν ὅτι αἱ κορυφαὶ τοῦ κείνται ἐπὶ τριῶν δοθεισῶν παραλλήλων εὐθειῶν

811. (919). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα ἰσόπλευρον τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν θέσιν τῆς κορυφῆς A καὶ ὅτι ἡ κορυφή B κείται ἐπὶ δοθείσης εὐθείας xy , ἡ δὲ κορυφή Γ κείται ἐπὶ δοθείσης περιφερείας O .

812. (922). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὰ μέσα Δ, E τῶν πλευρῶν τοῦ AB καὶ $A\Gamma$ καὶ ὅτι ἡ κορυφή B κείται ἐπὶ δοθείσης εὐθείας X , ἡ δὲ Γ ἐπὶ δοθείσης περιφερείας K .

813. (82). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν τὴν ἀπέναντι τῆς βάσεως γωνίαν ω , τῆς ὁποίας ἡ κορυφή νὰ εἶναι δεδομένον σημείον A , καὶ ὅτι αἱ δύο ἄλλαι κορυφαὶ τοῦ τριγώνου κείνται ἀντιστοίχως ἐπὶ δύο δοθεισῶν περιφερειῶν K, Λ .

814. (88). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τετράγωνον, ἔχον μίαν μὲν τῶν κορυφῶν τοῦ εἰς δοθὲν σημείον A , δύο δὲ τῶν ἄλλων ἀντιστοίχως ἐπὶ δύο δοθεισῶν παραλλήλων εὐθειῶν X καὶ Z .

815. (928). Ἀπὸ δοθὲν σημείον A τὸ ὅποιον κείται μεταξὺ τῶν πλευρῶν δοθείσης γωνίας XOY , νὰ ἀχθῆ τέμνουσα $BA\Gamma$, περατομένη εἰς τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας καὶ τοιαύτη, ὥστε $AB = \Gamma A$.

816. (931). Ἀπὸ δοθὲν σημείον A , τὸ ὅποιον κείται μεταξὺ δύο δοθεισῶν παραλλήλων εὐθειῶν X, Y , νὰ ἀχθῆ τέμνουσα $BA\Gamma$ καὶ τοιαύτη, ὥστε $A\Gamma - AB = a$, ὅπου a δοθὲν μῆκος.

817. (74). Ἀπὸ δοθὲν σημείον M , τὸ ὅποιον κείται ἐκτὸς δύο δοθεισῶν παραλλήλων εὐθειῶν X καὶ Ψ , νὰ ἀχθῆ τέμνουσα αὐτῶν, MAB καὶ τοιαύτη, ὥστε $MA + MB = a$, ὅπου a δοθὲν μῆκος.

818. (91). Διὰ τῆς τομῆς A δύο δοθεισῶν περιφερειῶν K, Λ νὰ ἀχθῆ τέμνουσα $BA\Gamma$ τοιαύτη, ὥστε $AB - A\Gamma = \mu$, ὅπου μ δοθὲν μῆκος.

819. (99). Ἀπὸ δοθὲν σημείον M νὰ ἀχθῆ εὐθύγραμμον τμήμα AMB περατούμενον εἰς δύο δοθείσας περιφερείας K, Λ καὶ τοιοῦτον, ὥστε $MA = MB$.

820. (75). Διὰ τῆς τομῆς A δύο τεμνομένων περιφερειῶν K καὶ Λ νὰ ἀχθῆ τέμνουσα $AB\Gamma$, τῆς ὁποίας τὰ σημεῖα B καὶ Γ νὰ κείνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ A καὶ τοιαύτη, ὥστε $AB + A\Gamma = a$, ὅπου a δοθὲν μῆκος.

821. (90). Εἰς δοθέντα κύκλον K νὰ ἀχθῆ χορδὴ τοιαύτη, ὥστε τὰ ἄκρα αὐτῆς καὶ δοθὲν σημείον A , κείμενον ἐκτὸς τοῦ κύκλου K , νὰ εἶναι κορυφαὶ ἰσοπλεύρου τριγώνου.

822. (939). Ἐπὶ δοθέντος τόξου AB περιφερείας K νὰ προσδιορισθῆ ἓνα σημείον M τοιοῦτον, ὥστε ἡ διαφορὰ $MA - MB$ τῶν χορδῶν MA καὶ MB νὰ ἰσοῦται πρὸς δοθὲν μῆκος λ .

823. (945). Ἐπί δοθέντος τόξου AB κύκλου K νὰ εὑρεθῇ σημεῖον M , τοιοῦτον ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεών του ἀπὸ τῶν ἄκρων A, B τοῦ τόξου νὰ ἰσοῦται πρὸς δοθὲν μῆκος α .

824. (76). Δίδονται δύο εὐθεῖαι X καὶ Ψ καὶ σημεῖον O , τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῶν καὶ ζητεῖται νὰ γραφῇ, μὲ κέντρον τὸ O , περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ ἀποτεμῆν ἀπὸ τὰς X καὶ Ψ δύο χορδὰς, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα νὰ ἰσοῦται μὲ δοθὲν μῆκος.

825. (966). Εἰς δοθὲν τρίγωνον $AB\Gamma$ νὰ ἐγγραφῇ ἓνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ ἀπέναντι τῆς βάσεως γωνία νὰ ἰσοῦται μὲ δοθεῖσαν γωνίαν ω καὶ τῆς ὁποίας ἡ κορυφή νὰ εἶναι δοθὲν σημεῖον Δ τῆς $B\Gamma$.

(Σχολή Εὐελπίδων 1955)

826. (86). Εἰς δοθέντα κυκλικὸν τομέα νὰ ἐγγραφῇ ἓνα ἰσοσκελὲς ὀρθογώνιον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ κορυφή τῆς ὀρθῆς γωνίας εἶναι δοθὲν σημεῖον A τοῦ τόξου ΔE δοθέντος τομέως $K\Delta E$.

7. Συμμετρία

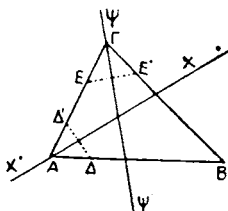
Εἰς τὰς τὰς § 151—159 ἐδώσαμεν τοὺς ὀρισμοὺς κλπ. τῆς συμμετρίας ὡς πρὸς κέντρον καὶ ὡς πρὸς ἄξονα συμμετρίας.

Κατωτέρω θὰ λύσωμεν μερικὰ προβλήματα διὰ τῆς συμμετρίας.

375. Πρόβλημα 1ον. *Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν διεύθυνσιν τῶν διχοτόμων δύο γωνιῶν του, καὶ δύο σημεία Δ καὶ E κείμενα ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν πλευρῶν AB καὶ $A\Gamma$.*

Ἀνάλυσις: Ὑποθέτομεν ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω $AB\Gamma$ τὸ ζητούμενον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὰς διευθύνσεις τῶν διχοτόμων $X'X$ καὶ $\Psi'\Psi$ τῶν γωνιῶν του A καὶ Γ , καὶ τὰ σημεία Δ καὶ E .

Ἐπειδὴ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας A εἶναι ἄξων συμμετρίας αὐτῆς ἔπεται ὅτι τὸ συμμετρικὸν σημεῖον Δ' τοῦ Δ θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς πλευρᾶς $A\Gamma$. Παρατηροῦμεν, ὅτι εἶναι γνωστὰ δύο σημεία τῆς πλευρᾶς $A\Gamma$, τὰ E καὶ Δ' καὶ ἐπομένως εἶναι ὀρισμένη ἡ θέσις τῆς πλευρᾶς $A\Gamma$. Αἱ κορυφαὶ A καὶ Γ τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$



Σχ. 278.

εἶναι σημεία τῆς τομῆς τῆς προεκτάσεως τῆς $\Delta'E$ καὶ τῶν διευθύνσεων τῶν διχοτόμων $X'X$ καὶ $\Psi'\Psi$. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον τὸ συμμετρικὸν σημεῖον E' τοῦ E πρὸς ἄξονα συμμετρίας τὴν διχοτόμον $\Psi'\Psi$ θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΓB . Ἐπομένως ἡ τρίτη κορυφή B τοῦ τριγώνου εἶναι ἡ τομὴ τῆς εὐθείας $\Gamma E'$ καὶ τῆς προεκτάσεως τῆς $A\Delta$.

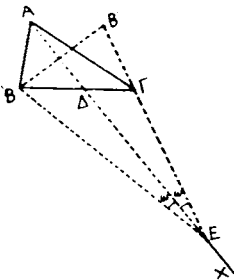
Σύνθεσις: Ὀρίζομεν τὸ σημεῖον Δ' , συμμετρικὸν τοῦ Δ πρὸς ἄξονα συμμετρίας τὴν $X'X$ καὶ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν $E\Delta'$, ἣ ὁποία προεκτεινομένη τέμνει τὴν $X'X$ εἰς τὸ A καὶ τὴν $\Psi'\Psi$ εἰς τὸ Γ .

Ὅμοίως ὀρίζομεν τὸ σημεῖον E' , συμμετρικὸν τοῦ E πρὸς ἄξονα συμμετρίας τὴν $\Psi'\Psi$ καὶ φέρομεν τὰς $\Gamma E'$ καὶ $A\Delta$, αἱ ὁποῖαι προεκτεινόμεναι, τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον B' τὸ σημεῖον B εἶναι ἡ τρίτη κορυφή τοῦ ζητουμένου τριγώνου.

Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Δ καὶ Δ' εἶναι συμμετρικὰ πρὸς ἄξονα συμμετρίας τὴν $X'X$, ἔπεται ὅτι ἡ $X'X$ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας A . Ὅμοίως, ἔπειδὴ τὰ σημεῖα E καὶ E' εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὴν $\Psi'\Psi$, ἔπεται ὅτι ἡ $\Psi'\Psi$ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Γ .

376. Πρόβλημα 2ον. Δίδεται ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$. Ἐπι τῆς πλευρᾶς $B\Gamma$ λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Δ καὶ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν $A\Delta X$. Νὰ εὐρεθῇ ἐπι τῆς εὐθείας $A\Delta X$ ἓνα σημεῖον ἀπὸ τὸ ὁποῖον αἱ $B\Delta$ καὶ $\Delta\Gamma$ νὰ φαίνωνται ὑπὸ ἴσας γωνίας.

Ἀνάλυσις: Ἐστω E τὸ ζητούμενον σημεῖον καὶ τοιοῦτον, ὥστε $\gamma\omega\nu.BE\Delta = \gamma\omega\nu.\Delta E\Gamma$. Ἐπειδὴ αἱ γωναὶ $BE\Delta = \omega$ καὶ $\Delta E\Gamma = \omega'$ εἶναι ἴσαι, ἡ AE εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας BEG καὶ ἐπομένως ἡ AX εἶναι ἄξων συμμετρίας τῆς γωνίας αὐτῆς.



Σχ. 279.

Ἐστω B' τὸ συμμετρικὸν τοῦ B πρὸς ἄξονα συμμετρίας τὴν AE . Τὸ B' θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς πλευρᾶς $E\Gamma$ καὶ οὕτω γνωρίζομεν δύο σημεῖα B' καὶ Γ αὐτῆς. Τὸ σημεῖον λοιπὸν E ὀρίζεται ὡς τομὴ τῆς $A\Delta X$ καὶ τῆς εὐθείας $B'\Gamma$.

Σύνθεσις: Εὐρίσκομεν τὸ συμμετρικὸν σημεῖον B' τῆς κορυφῆς B πρὸς ἄξονα συμμετρίας τὴν $A\Delta X$. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν $B'\Gamma$, ἣ ὁποία προεκτεινομένη, τέμνει τὴν $A\Delta X$ εἰς τὸ E . Τὸ σημεῖον E εἶναι τὸ ζητούμενον σημεῖον.

Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα B καὶ B' εἶναι συμμετρικὰ πρὸς ἄξονα συμμετρίας τὴν $A\Delta X$, ἔπεται ὅτι αὕτη εἶναι ἄξων συμμετρίας τῆς γωνίας BEB' καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι $\gamma\omega\nu.BE\Delta = \gamma\omega\nu.\Delta E\Gamma$.

Ἀσκήσεις

827. (911). Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἐὰν γνωρίζωμεν τὰς θέσεις τῶν εὐθειῶν X, Y, Z ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν του καὶ ἓνα σημεῖον Δ τῆς πλευρᾶς του AB .

828. (920). Νά κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον, ἔαν γνωρίζωμεν τὴν βάσιν του $BΓ = a$, τὴν διαφορὰν ω τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν του καὶ τὸν πόδα Π τοῦ ὕψους τοῦ ἀντιστοιχοῦντος εἰς τὴν $BΓ$.

829. (923). Νά κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $ABΓ$, ἔαν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν $BΓ$, τὴν διαφορὰν $\Gamma - B = \omega$ τῶν προσκειμένων εἰς αὐτὴν γωνιῶν καὶ τὴν εὐθείαν X ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται ἡ τρίτη κορυφὴ του A .

830. (961). Νά κατασκευασθῆ ἓνα τετράγωνον $ABΓΔ$, ἔαν γνωρίζωμεν ὅτι αἱ ἀπέναντι κορυφαὶ A, Γ κεῖνται ἐπὶ δοθείσης εὐθείας X , ἡ κορυφὴ B ἐπὶ δοθείσης εὐθείας Y καὶ ἡ κορυφὴ Δ ἐπὶ δοθείσης περιφερείας Λ .

831. (957). Νά κατασκευασθῆ ἓνα τετράπλευρον $ABΓΔ$, ἔαν γνωρίζωμεν τὰς πλευρὰς του $AB = \alpha, B\Gamma = \beta, \Gamma\Delta = \gamma$ καὶ $\Delta A = \delta$ καὶ ὅτι ἡ διαγώνιος $A\Gamma$ διχοτομεῖ τὴν γωνίαν A .

832. (925). Δίδονται δύο σημεῖα A καὶ B πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος δοθείσης εὐθείας xy . Νά εὐρεθῆ ἐπὶ τῆς xy ἓνα σημεῖον τοιοῦτον, ὥστε
γων. $A\Gamma x = 2$ γων. $B\Gamma y$.

833. (930). Νά εὐρεθῆ ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας A τριγώνου $AB\Gamma$ ἓνα σημεῖον M τοιοῦτον, ὥστε γων. $AMB -$ γων. $AM\Gamma = \omega$.

834. (936). Δίδεται ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$ καὶ ἡ διχοτόμος Ax τῆς ἔξωτερικῆς του γωνίας A' νά εὐρεθῆ ἐπὶ τῆς Ax ἓνα σημεῖον M τοιοῦτον, ὥστε γων. $AMB +$ γων. $AM\Gamma = \omega$ καὶ νά δειχθῆ, ὅτι διὰ κάθε σημεῖον M τῆς Ax εἶναι
 $MB + M\Gamma > AB + A\Gamma$.

835. (937). Ἀπὸ τὸ μέσον M εὐθυγράμμου τμήματος ἄγεται εὐθεῖα X , ἡ ὁποία σχηματίζει μὲ τὴν AB δοθείσαν γωνίαν ω . Νά εὐρεθῆ ἐπὶ τῆς X ἓνα σημεῖον N τοιοῦτον, ὥστε νά εἶναι γων. $MNB = 2$ γων ANM .

836. (938). Δίδεται εὐθεῖα $x'x$ καὶ δύο περιφέρειαι K, Λ κείμεναι πρὸ τὸ αὐτὸ μέρος τῆς $x'x$. Ζητεῖται νά εὐρεθῆ ἓνα σημεῖον ἐπὶ τῆς $x'x$, τοιοῦτον, ὥστε αἱ ἐξ αὐτοῦ ἀγόμεναι ἐφαπτόμεναι τῶν δύο περιφερειῶν νά σχηματίζουν μὲ τὴν $x'x$ ἴσας γωνίας.

837. (927). Μεταξὺ δύο περιφερειῶν K καὶ Λ νά ἀχθῆ εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ δοθείσαν εὐθείαν X καὶ διχοτομουμένη παρ' αὐτῆς.

838. (933). Δίδονται δύο παράλληλοι εὐθεῖαι x, y καὶ ἐπὶ τῆς x ἓνα σημεῖον A' ζητεῖται ἀπὸ δοθέν σημεῖον M , τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τῶν παραλλήλων, νά ἀχθῆ τέμνουσα $MB\Gamma$ τοιαύτη, ὥστε $AB = A\Gamma$.

839. (940). Δίδονται τρεῖς εὐθεῖαι X, Y, Z , αἱ ὁποῖαι δὲν διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ αὐτοῦ σημείου καὶ ζητεῖται νά ἀχθῆ εὐθύγραμμον τμήμα περατούμενον ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν X, Z καὶ τεμνόμενον δίχα καὶ καθέτως ὑπὸ τῆς Y , ἡ ὁποία κεῖται μεταξὺ τῶν δύο ἄλλων.

840. (941). Δίδονται δύο σημεῖα A καὶ B κείμενα μεταξὺ δύο εὐθειῶν E_1, E_2 . Νά εὐρεθῆ ὁ ἐλάχιστος δρόμος, ὁ ἐγγίζων τὰς δύο αὐτὰς εὐθείας καὶ συνδέων τὰ δύο σημεῖα.

841. (964). Εἰς δοθὲν τρίγωνον $AB\Gamma$, νά ἐγγραφῆ ἓνα ἄλλο τρίγωνον, τὸ ὁποῖον νά ἔχη τὴν ἐλαχίστην περίμετρον καὶ τοῦ ὁποίου μία τῶν κορυφῶν του νά κεῖται εἰς δοθὲν σημεῖον Δ τῆς $B\Gamma$.

842. (967). Περὶ δοθέντα κύκλον K νὰ περιγραφῆ ἓνα τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$, τοῦ ὁποίου δίδονται αἱ πλευραὶ $AB=\beta$, $A\Delta=\delta$ καὶ αἱ γωνίαι $B=\omega$ καὶ $\Delta=\varphi$.

843. (968). Εἰς δοθέντα κύκλον K νὰ ἐγγραφῆ τετράπλευρον, ἔαν γνωρίζωμεν, ὅτι δύο ἀπέναντι πλευραὶ ἔχουν ἀντιστοιχῶς μήκη α, β , καὶ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν ἰσοῦται πρὸς m .

Ἀσκήσεις πρὸς γενικὴν ἐπανάληψιν

Α' Ὁμάς. 844. (827). *Θεώρημα τοῦ Nagel.* Αἱ ἀκτίνες, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰς κορυφὰς ἑνὸς τριγώνου μὲ τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου εἶναι κάθετοι, ἀντιστοιχῶς, ἐπὶ τὰς εὐθείας, αἱ ὁποῖαι συνδέουν, ἀνά δύο, τοὺς πόδας ὑψῶν τοῦ τριγώνου.

845. (828). Δύο περιφέρειαι O καὶ O' κείνται ἢ μία ἐκτὸς τῆς ἄλλης· φέρομεν τὰς κοινὰς ἑξωτερικὰς ἐφαπτομένας AA' καὶ BB' , αἱ ὁποῖαι προεκτείνονται τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Σ , καὶ τὰς κοινὰς ἐσωτερικὰς ἐφαπτομένας $\Gamma\Gamma'$ καὶ $\Delta\Delta'$, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον K . Νὰ ἀποδειχθῆ:

1ον. Ὅτι τὰ σημεῖα Σ καὶ K κείνται ἐπὶ τῆς εὐθείας, ἣ ὁποία συνδέει τὰ κέντρα τῶν O καὶ O' .

2ον. Ὅτι αἱ χορδαὶ $AB, \Gamma\Delta, \Delta\Gamma', A'B'$ εἶναι παράλληλοι.

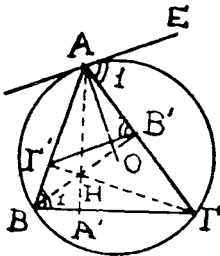
3ον. Ὅτι αἱ τέμνουσαι AB' καὶ $A'B$ ἴσαι καθὼς καὶ αἱ $\Gamma\Delta'$ καὶ $\Delta\Gamma'$.

846. (829). Ἐνα πεντάγωνον ἔχει τέσσαρας πλευρὰς ἴσας $AB=BG=\Gamma\Delta=\Delta E$, αἱ ὁποῖαι περιέχουν τρεῖς γωνίας ἴσας $B=\Gamma=\Delta$. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὸ πεντάγωνον εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

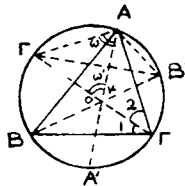
847. (830). Ἐνα τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἓνα κύκλον O · φέρομεν τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν τοῦ B καὶ Γ , αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον K καὶ προεκτείνονται τέμνουσιν τὴν περιφέρειαν O εἰς τὰ σημεῖα B' καὶ Γ' ἀντιστοιχῶς. Νὰ ἀποδειχθῆ:

1ον. Ὅτι $\Gamma'A=\Gamma'K$.

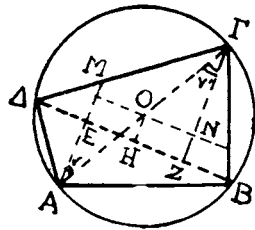
2ον. Ὅτι ἡ εὐθεῖα $B'\Gamma'$ εἶναι μεσοκάθετος τῆς AK .



Σχ. ἀσκ. 844.



Σχ. ἀσκ. 847.



Σχ. ἀσκ. 850.

848. (831). Οἱ πόδες τῶν καθέτων, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τυχὸν σημείου M ἐπὶ τρεῖς εὐθείας, αἱ ὁποῖαι διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Σ καὶ σχηματίζουν γωνίας α, γ, ω , τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα καὶ ἴσον μὲ δύο ὀρθάς, εἶ-

να κορυφαί τριγώνου, τοῦ ὁποίου αἱ γωνίαι εἶναι ἴσαι πρὸς τὰς γωνίας x, y, ω .

849. (832). Εἰς ἓνα κύκλον O φέρομεν μίαν χορδὴν AB καὶ μίαν διάμετρον $\Gamma\Delta$ κάθετον ἐπὶ τὴν χορδὴν αὐτὴν. Συνδέομεν μὲ εὐθεΐας τυχὸν σημεῖον K τῆς περιφερείας μὲ τὰ σημεῖα A, B, Γ, Δ . Ἀπὸ τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ φέρομεν κάθετους ΓE καὶ ΔZ ἐπὶ τὴν AK . Νὰ ἀποδειχθῆ :

1ον. Ὅτι τὰ σημεῖα E καὶ Z ἀπέχουν ἰσάκεις ἀπὸ τὸ μέσον H τῆς χορδῆς AK .

2ον. Ὅτι $KE + KZ = KA$.

3ον. Ὅτι $KZ - KE = KB$.

850. (833). Ἐνα τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$, τοῦ ὁποίου αἱ ἀπέναντι γωνίαι B καὶ Δ εἶναι ὀρθαί, εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον. Ἰ φέρομεν τὴν διαγώνιον BA καὶ τὰς AE καὶ ΓZ κάθετους ἐπὶ τὴν BA . Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι $\Delta E = BZ$ καὶ $\Delta Z = BE$.

851. (834). Δίδεται ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$ καὶ Δ, E, Z , τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του $B\Gamma, \Gamma A, AB$. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι οἱ κύκλοι οἱ περιγεγραμμένοι περὶ τὰ τρίγωνα AZE, BAZ καὶ ΓEA εἶναι ἴσοι καὶ διέρχονται ἀπὸ τὸ κέντρον O τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περὶ τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$.



Σχ. ἀσκ. 851.

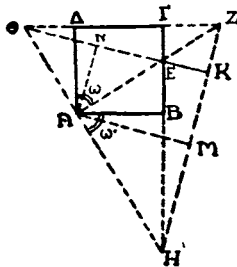
852. (835). Δίδεται ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ὀρθογώνιον εἰς τὸ A , εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι $AB < A\Gamma$. φέρομεν τὸ ὕψος AH καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ὑποτεινούσης $B\Gamma$ τμήμα $H\Delta = HB$ ἀπὸ τὸ Γ φέρομεν κάθετον ΓE ἐπὶ τὴν $A\Delta$. Νὰ ἀποδειχθῆ :

1ον. Ὅτι ἡ $B\Gamma$ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας $A\Gamma E$.

2ον. Ὅτι τὰ σημεῖα A, H, E, Γ κείνται ἐπὶ περιφερείας.

3ον. Ὅτι $AH = HE$.

853. (836). Δίδεται ἓνα τετράγωνον $AB\Gamma\Delta$ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς $B\Gamma$ λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον E καὶ φέρομεν τὴν εὐθεΐαν AE , ἡ ὁποία τέμνει τὴν προεκτάσιν τῆς $\Delta\Gamma$ εἰς ἓνα σημεῖον Z . Ἀπὸ τὸ A φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν AE , ἡ ὁποία τέμνει τὰς προεκτάσεις τῶν πλευρῶν ΓB καὶ $\Gamma\Delta$ εἰς τὰ σημεῖα H καὶ Θ ἀντιστοίχως.



Σχ. ἀσκ. 853.

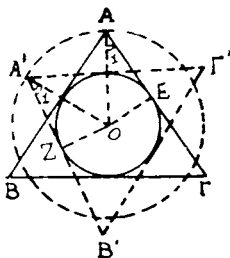
1ον. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὰ τρίγωνα AHZ καὶ $AE\Theta$ εἶναι ἰσοσκελῆ.

2ον. Ἐὰν K εἶναι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν HZ καὶ ΘE , M τὸ μέσον τῆς HZ καὶ N τὸ μέσον τῆς ΘE , νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τετράπλευρον $AMKN$ εἶναι ὀρθογώνιον.

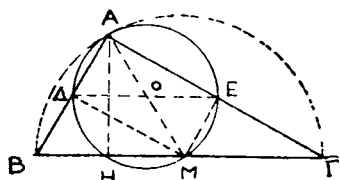
854. (837). Ὅταν ἓνα τρίγωνον εἶναι περιγεγραμμένον περὶ ἓνα κύκλον καὶ ἔχῃ δύο γωνίας, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα εἶναι σταθερὸν, ἡ τρίτη κορυφή του κείται ἐπὶ περιφερείας ὁμοκέντρου πρὸς τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν.

855. (838). Δίδεται ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ὀρθογώνιον εἰς τὸ A μὲ διάμετρον τὴν διάμεσον AM γράφομεν περιφέρειαν κύκλου O , ἡ ὁποία τέμνει τὴν AB εἰς τὸ Δ καὶ τὴν $A\Gamma$ εἰς τὸ E φέρομεν τὸ ὕψος AH . Νὰ ἀποδειχθῆ :

- 1ον. Ὅτι τὸ Η κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας Ο.
- 2ον. Ὅτι τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε εἶναι μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ.
- 3ον. Τί σχῆμα ἔχει τὸ τετράπλευρον ΑΔΜΕ;
- 4ον. Ὑποθέτομεν, ὅτι ἡ κορυφή Α κινεῖται ἐπὶ τῆς ἡμιπεριφερείας διαμέτρου ΒΓ· νὰ εὐρεθῇ τί σχῆμα γράφουν εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν, τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε;
- 5ον. Τί δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν διὰ τὸ μέγεθος τοῦ τμήματος ΔΕ κατὰ τὴν κίνησιν αὐτὴν;



Σχ. ἀσκ. 854.



Σχ. ἀσκ. 855.

856. (839). Ἐνα τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἕνα κύκλον Ο· ἀπὸ τὸ κέντρον Ο φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ, ἢ ὁποία συναντᾷ τὴν ΒΓ εἰς τὸ Ε. Ἐπίσης ἀπὸ τὸ Ο φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἢ ὁποία συναντᾷ τὴν κάθετον, ἢ ὁποία ἀγεται ἀπὸ τὸ Β ἐπὶ τὴν ΒΓ, εἰς τὸ σημεῖον Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ:

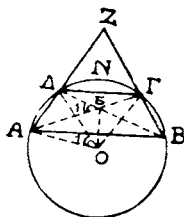
- 1ον. Ὅτι αἱ γωνίαι ΒΕΖ καὶ ΒΟΖ εἶναι ἴσαι.
- 2ον. Ὅτι ἡ ΖΕ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ.

857. (840). Εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν τὴν διχοτόμον ΑΔ τῆς γωνίας Α· περιγράφομεν περὶ τὰ τρίγωνα ΑΔΒ καὶ ΑΔΓ δύο κύκλους ἐκ τῶν ὁποίων ὁ πρῶτος τέμνει τὴν ΑΓ εἰς τὸ σημεῖον Ε καὶ ὁ δεύτερος τὴν ΒΑ εἰς τὸ Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ:

- 1ον. Ὅτι τὰ τρίγωνα ΖΔΓ καὶ ΒΔΕ εἶναι ἰσοσκελῆ.
- 2ον. Ὅτι ΒΖ=ΓΕ.

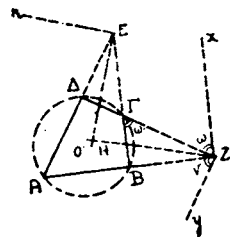
858. (841). Ἐνα τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἕνα κύκλον Ο· φέρομεν τὴν διχοτόμον ΑΔ τῆς γωνίας Α, ἢ ὁποία τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ Δ καὶ τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ σημεῖον Ε· ἐπίσης φέρομεν τὴν διχοτόμον ΑΔ' τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας Α, ἢ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς ΒΓ' εἰς τὸ Δ'. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου Ο εἰς τὸ σημεῖον Α διχοτομεῖ τὴν ΔΔ'.

859. (842). Ἐνα τραπέζιον ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον Ο. Αἱ διαγωνιοὶ τοῦ ΑΓ καὶ ΒΔ τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ε καὶ αἱ προεκτάσεις τῶν πλευρῶν ΑΔ καὶ ΒΓ τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ:



Σχ. ἀσκ. 859.

- 1ον. Ὅτι τὰ τέσσαρα σημεῖα Α, Δ, Ο, Ε κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.
- 2ον. Ὅτι τὰ τέσσαρα



Σχ. ἀσκ. 860.

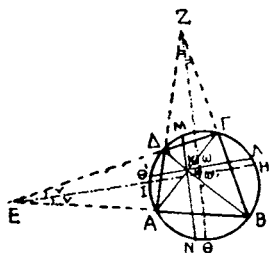
σημεῖα A, Γ, O, Z κείνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.

860. (843). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν δύο γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι σχηματίζονται ἀπὸ τὰς προεκτάσεις τῶν ἀπέναντι πλευρῶν ἐνὸς τετραπλεύρου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον, τέμνονται καθέτως.

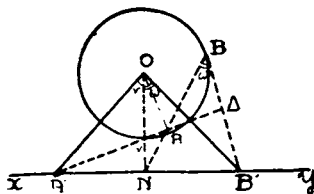
861 (844). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε τετράπλευρον, ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον, αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι σχηματίζονται ὑπὸ τῶν ἀπέναντι πλευρῶν του προεκτεινομένων, εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζουν αἱ διαγώνιοι του.

862. (845). Δίδεται μία περιφέρεια O καὶ μία εὐθεῖα xy ἐκτὸς αὐτῆς. Ἀπὸ τὸ κέντρον O φέρομεν τὴν ON κάθετον ἐπὶ τὴν xy καὶ ἀπὸ τὸ N μίαν τέμνουσαν NAB τῆς περιφερείας O , ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B · φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας τῆς περιφερείας O εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B , αἱ ὁποῖαι συναντοῦν τὴν xy εἰς τὰ σημεῖα A' καὶ B' ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ:

- 1ον. Ὅτι τὰ τετράπλευρα $NAOA'$ καὶ $NOBB'$ εἶναι ἐγγράψιμα εἰς κύκλον.
- 2ον. Ὅτι τὸ N εἶναι τὸ μέσον τῆς $A'B$.



Σχ. ἀσκ. 861.



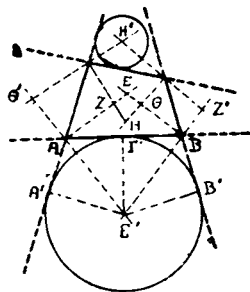
Σχ. ἀσκ. 862.

863. (846). Δίδεται μία γωνία xOy καὶ ἓνα σημεῖον A , τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς OZ . Γράφομεν μίαν περιφέρειαν K , ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα O καὶ A καὶ τέμνει τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ . Νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. Ὅτι ἡ κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς $\Gamma\Delta$ διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον A .

2ον. Ὅτι, ἐὰν $\Gamma'\Delta'$ εἶναι μία ἄλλη θέσις τῆς $\Gamma\Delta$, ἡ ὁποία ὀρίζεται ἀπὸ μίαν ἄλλην περιφέρειαν K' , θὰ εἶναι $\Gamma\Gamma' = \Delta\Delta'$.

864. (847). Δίδεται ἓνα τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$ · φέρομεν τὰς διχοτόμους τῶν ἐσωτερικῶν γωνιῶν του, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα E, Z, H, Θ καὶ τὰς διχοτόμους τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν του, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα E', Z', H', Θ' . Νὰ ἀποδειχθῇ:

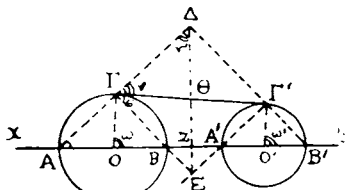


Σχ. ἀσκ. 864.

1ον. Ὅτι τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΘ εἶναι ἐγγράφισμον εἰς κύκλον καὶ ὅτι αἱ κορυφαὶ Ε, Ζ, Η, Θ εἶναι τὰ κέντρα τεσσάρων κύκλων, ἕκαστος τῶν ὁποίων ἐφάπτεται ἐσωτερικῶς τριῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

2ον. Ὅτι τὸ τετράπλευρον Ε'Ζ'Η'Θ' εἶναι ἐγγράφισμον εἰς κύκλον καὶ ὅτι αἱ κορυφαὶ τοῦ Ε', Ζ', Η', Θ' εἶναι τὰ κέντρα τῶν τεσσάρων κύκλων, ἕκαστος τῶν ὁποίων ἐφάπτεται μιᾶς πλευρᾶς τοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ καὶ τῶν προεκτάσεων τῶν δύο προσκειμένων εἰς αὐτὴν πλευρῶν του.

865. (848). Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας χγ λαμβάνομεν, διαδοχικῶς, τὰ σημεῖα Α, Β, Α', Β'. Μὲ διαμέτρους τὰς ΑΒ καὶ Α'Β' γράφομεν περιφερεῖας καὶ φέρομεν τὴν κοινὴν ἐξωτερικὴν ἐφαπτομένην τῶν ΓΓ'. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΓ, ΒΓ, Α'Γ', Β'Γ' σχηματίζουν ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου ἢ μία διαγώνιος εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν διάκεντρον τῶν κύκλων.



Σχ. ἀσκ. 865.

866. (849). Ἀπὸ τυχόν σημεῖον Α τῆς περιφερείας ἑνὸς κύκλου Ο φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην αὐτοῦ Αχ καὶ ἐπὶ τῆς Αχ λαμβάνομεν τυχόν σημεῖον Μ· ἀπὸ τὸ Μ φέρομεν τὴν δευτέραν ἐφαπτομένην ΜΒ τοῦ κύκλου Ο. Νὰ ἀποδειχθῇ :

1ον. Ὅτι τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ τρίγωνον ΜΑΒ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου Ο, οἰαδήποτε καὶ ἕαν εἶναι ἡ θέσις τοῦ σημείου Μ ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης Αχ.

2ον. Ὅτι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ὑψῶν τοῦ τριγώνου ΜΑΒ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας ἑνὸς κύκλου ἴσου πρὸς τὸν δοθέντα καὶ ὁ ὁποῖος ἔχει κέντρον τὸ σημεῖον Α.

867. (850). Δίδεται ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου ἡ γωνία Α τῆς κορυφῆς εἶναι ὀξεῖα. Φέρομεν τὸ ὕψος ΑΔ καὶ ἀπὸ τὸ Α τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἢ ὁποία συναντᾷ τὴν προέκτασιν τῆς βάσεως ΒΓ εἰς τὸ σημεῖον Ε. Ἐπίσης ἀπὸ τὸ Ε φέρομεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓ, ἢ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς ΑΓ εἰς τὸ Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ :

1ον. Ὅτι τὰ σημεῖα Α, Δ, Ζ, Ε κεῖνται ἐπὶ περιφερείας.

2ον. Ὅτι ἡ ΕΓ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας ΑΕΖ.

3ον. Ὅτι $ΑΔ = ΔΖ$.

4ον. Νὰ ἐξετασθῇ, ἕαν αἱ προηγούμεναι ιδιότητες ὑφίστανται, ὅταν ἡ γωνία Α εἶναι ἀμβλεία ἢ ὀρθή.

868. (851). Δίδεται ἕνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, ($ΑΒ = ΑΓ$). Προεκτείνομεν τὴν βάσιν ΒΓ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως λαμβάνομεν τμήμα ΓΔ = ΑΒ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΔ.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία Δ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς γωνίας ΑΒΓ.

2ον. Φέρομεν τὸ ὕψος ΑΗ· προεκτείνομεν τὴν ΑΒ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως λαμβάνομεν τμήμα $ΒΕ = \frac{1}{2} ΒΓ$ · φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΕΗ, ἢ ὁποία προεκτετινομένη τέμνει τὴν ΑΔ εἰς τὸ Ζ· νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον ΗΖΔ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ὅτι τὸ Ζ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΑΔ καὶ ὅτι $ΑΖ = ΖΔ = ΖΗ$.

3ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα A, H, Γ, Z κείνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.

4ον. Ἐάν ἡ γωνία BAG εἶναι ἴση μὲ 58° , νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίας Δ, E καὶ AZE .

869. (852). Ἐνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον $AB\Gamma$, ($AB=AG$) εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἕνα κύκλον O φέρομεν τυχούσαν χορδὴν AD καὶ ἀπὸ τὸ Γ τὴν κάθετον GE ἐπὶ τὴν AD , ἡ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς χορδῆς BD εἰς τὸ σημεῖον M . Νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. Ὅτι αἱ γωνίαι $\Gamma\Delta E$ καὶ EAM εἶναι ἴσαι.

2ον. Ὅτι τὰ τρίγωνα $\Gamma E\Delta$ καὶ ΔEM εἶναι ἴσα.

3ον. Ὅτι $AG=AM$ καὶ νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ σημείου M , ὅταν ἡ χορδὴ AD στρέφεται περὶ τὸ A .

4ον. Ὅτι ἡ γωνία BAG εἶναι διπλασία τῆς γωνίας BMG .

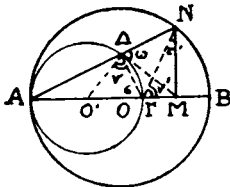
870. (853). Ἐνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἕνα κύκλον O . Εὐρίσκομεν τὸ συμμετρικὸν σημεῖον M τοῦ κέντρου O πρὸς τὴν πλευρὰν AG καὶ ἀπὸ τὸ M φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν πλευρὰν AB , ἡ ὁποία τέμνει τὴν $B\Gamma$ εἰς τὸ E . Νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. Ὅτι ἡ γωνία MGE εἶναι ὀρθή.

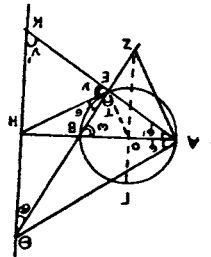
2ον. Ὅτι τὸ τετράπλευρον $OEGM$ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

3ον. Ὅτι ἡ γωνία MOE εἶναι ὀρθή.

871. (854). Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον M , τὸ ὁποῖον εὐρίσκεται ἐντὸς κύκλου O φέρομεν δύο καθέτους χορδὰς AMB καὶ ΓMA . Φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου εἰς τὰ σημεῖα A, B, Γ, Δ , αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα E, Z, H, Θ . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα E, Z, H, Θ κείνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.



Σχ. ἀσκ. 872.



Σχ. ἀσκ. 873.

872. (855). Δύο κύκλοι O καὶ O' ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς εἰς τὸ σημεῖον A φέρομεν τὴν διάμετρον AB τοῦ κύκλου O , ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν περιφέρειαν O' εἰς τὸ σημεῖον Γ καὶ ἀπὸ τὸ μέσον M τῆς ΓB φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΓB , ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν O εἰς τὸ σημεῖον N φέρομεν τὴν χορδὴν NA , ἡ ὑποία τέμνει τὴν περιφέρειαν O' εἰς τὸ σημεῖον Δ . Νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. Ὅτι αἱ γωνίαι $O'\Delta\Gamma$ καὶ $B\Gamma N$ εἶναι ἴσαι.

2ον. Ὅτι ἡ $M\Delta$ εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου O' .

3ον. Ὅτι $MN=NA$.

873. (856). Εἰς ἓνα κύκλον O φέρομεν δύο διαμέτρους AB καὶ $\Gamma\Delta$ καθέτους μεταξύ των. Ἀπὸ τὸ σημεῖον B φέρομεν τυχούσαν τέμνουσαν τῆς περιφέρειας, ἢ ὅποια τέμνει αὐτὴν εἰς τὸ E καὶ τὴν $\Gamma\Delta$ ἢ τὴν προέκτασιν τῆς εἰς τὸ Z φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην EH εἰς τὸ σημεῖον E , ἢ ὅποια τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς AB εἰς τὸ H . ἀπὸ τὸ H φέρομεν κάθετον $H\Theta$ ἐπὶ τὴν AB , ἢ ὅποια τέμνει τὴν τέμνουσαν BE εἰς τὸ σημεῖον Θ καὶ τὴν προέκτασιν τῆς AE εἰς τὸ K . Νὰ ἀποδειχθῇ :

1ον. Ὅτι $A\Theta = AK$.

2ον. Ὅτι ἡ $A\Theta$ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν AZ .

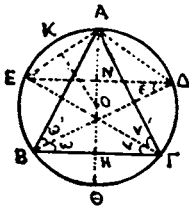
874. (857). Ἐνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἓνα κύκλον O . Φέρομεν τὰς διχοτόμους BD καὶ ΓE τῶν γωνιῶν τοῦ B καὶ Γ , αἱ ὅποια τέμνονται εἰς ἓνα σημεῖον M καὶ τέμνουσιν τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ E ἀντιστοίχως· φέρομεν τὴν χορδὴν ΔE , ἢ ὅποια τέμνει τὸ ὕψος AH τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ εἰς τὸ σημεῖον N . Νὰ ἀποδειχθῇ :

1ον. Ὅτι $EN = \Delta N$.

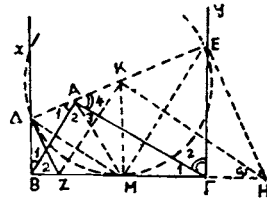
2ον. Ὅτι τὸ M κεῖται ἐπὶ τὸ ὕψος AH .

3ον. Ὅτι ἡ $E\Delta$ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν $B\Gamma$.

4ον. Ὅτι τὸ τετράπλευρον $AEM\Delta$ εἶναι ρόμβος .



Σχ. ἀσκ. 874.



Σχ. ἀσκ. 875.

875. (858). Δίδεται ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ὀρθογώνιον εἰς τὸ A · ἀπὸ τὰ ἄκρα B καὶ Γ τῆς ὑποτείνουσας $B\Gamma$ φέρομεν τὰς καθέτους Bx καὶ Γy ἐπὶ τὴν $B\Gamma$.

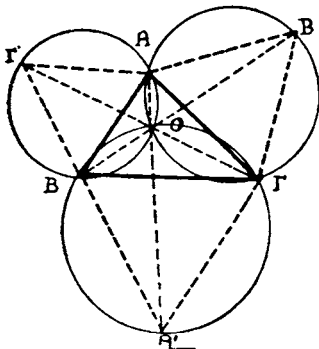
Ἀπὸ τὸ μέσον M τῆς $B\Gamma$ φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν AG , ἢ ὅποια τέμνει τὴν Γy εἰς τὸ E . Νὰ ἀποδειχθῇ :

1ον. Ὅτι τὰ σημεῖα Δ, A, E κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

2ον. Ὅτι τὰ τετράπλευρα $A\Delta B M$ καὶ $A M \Gamma E$ εἶναι ἐγγράψιμα εἰς κύκλον.

3ον. Ὅτι ἡ περιφέρεια ἢ περιγραμμένη περὶ τὸ τρίγωνον $\Delta M E$ ἐφάπτεται τῆς $B\Gamma$.

4ον. Αἱ ἐφαπτόμεναι τῆς περιφέρειας αὐτῆς εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ E τέμνουσιν τὴν $B\Gamma$ εἰς τὰ σημεῖα Z καὶ H ἀντιστοίχως. Ἐὰν K εἶναι τὸ μέσον τῆς ΔE , νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία ZKH εἶναι ὀρθή.



Σχ. ἀσκ. 876.

876. (859). Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ἑνὸς τρι-

γώνου $AB\Gamma$, κατασκευάζομεν ἑξωτερικῶς τοῦ τριγώνου, τὰ ἰσόπλευρα τρίγωνα $AB\Gamma'$, $B\Gamma A'$, $\Gamma A B'$. Νὰ ἀποδειχθῇ :

1ον. Ὅτι αἱ εὐθεῖαι AA' , BB' , $\Gamma\Gamma'$ εἶναι ἴσαι καὶ ὅτι τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον O .

2ον. Ὅτι ἀπὸ τὸ O βλέπομεν ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν τὰς τρεῖς πλευρὰς τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$. (Πολυτεχνεῖον 1943).

877. (860). Εἰς ἕνα κύκλον O δίδεται μία διάμετρος AB καὶ μία ἑφαπτομένη $\Gamma\chi$ παράλληλος πρὸς τὴν AB . Ἀπὸ τυχόν σημεῖον M τῆς $\Gamma\chi$ φέρομεν δευτέραν ἑφαπτομένην $M\Delta$ τοῦ O ἀπὸ τὸ M φέρομεν τὴν MN κάθετον ἐπὶ τὴν AB , ἢ ὁποῖα τέμνει τὴν χορδὴν $A\Delta$ εἰς τὸ σημεῖον E φέρομεν τὴν διάμετρον ΓOZ . Νὰ ἀποδειχθῇ :

1ον. Ὅτι τὰ σημεῖα E, N, B, Δ κεῖνται ἐπὶ περιφερείας.

2ον. Ὅτι τὸ τετράπλευρον $OZNM$ εἶναι παραλληλόγραμμον.

3ον. Ὅτι τὰ σημεῖα Z, N, Δ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

4ον. Ὅτι τὰ σημεῖα Γ, E, B κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

878. (861). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι εἰς ὅλα τὰ τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν βᾶσιν $B\Gamma$ καὶ σταθερὰν τὴν γωνίαν A τῆς κορυφῆς, τὸ μέσον O τῆς βάσεως $B\Gamma$ ἀπέχει σταθερὰν ἀπόστασιν ἀπὸ τὰς εὐθείας $B\Gamma'$, ἢ ὁποῖα συνδέει τοὺς πόδας τῶν ὑψῶν BB' καὶ $\Gamma\Gamma'$ τοῦ τριγώνου, τὰ ὁποῖα ἄγονται ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς βάσεως.

879. (862). *Θεώρημα τοῦ Transon.* Ὅταν ἕνα παραλληλόγραμμον $AB\Gamma\Delta$, τὸ ὁποῖον εἶναι σταθερὸν κατὰ τὸ μέγεθος μετατίθεται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου του, οὕτως, ὥστε δύο διαδοχικαὶ πλευραὶ τοῦ AB καὶ $A\Delta$ νὰ διέρχωνται ἀπὸ δύο σταθερὰ σημεῖα M καὶ N , ἢ διαγώνιος $A\Gamma$ διέρχεται ἐπίσης ἀπὸ ἕνα ὠρισμένον σημεῖον.

B' Ὁμάς. 880. (863). Δίδεται μία περιφέρεια O καὶ διάμετρος AB . Ἐστω M ἕνα σημεῖον τῆς περιφερείας. Φέρομεν τὴν ἀκτίνα OM καὶ ἀπὸ τὸ M φέρομεν τὴν κάθετον $M\Gamma$ ἐπὶ τὴν AB . Νὰ εὐρεθῇ ὁ τόπος τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ τρίγωνον $OM\Gamma$.

881. (864). Ἐνα μεταβλητὸν σημεῖον M κεῖται ἐκτός ἑνὸς κύκλου O . Φέρομεν τὰς ἑφαπτομένας MA καὶ MB τοῦ κύκλου. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ τρίγωνον MAB .

882. (865). Ἐνα μεταβλητὸν σημεῖον M κεῖται ἐπὶ τῆς πλευρᾶς AB ἑνὸς τριγώνου $AB\Gamma$. Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως $\Gamma\chi$ τῆς $A\Gamma$ λαμβάνομεν ἕνα τμήμα $\Gamma N = BM$. Νὰ εὐρεθῇ ὁ τόπος τῆς κορυφῆς Σ τοῦ παραλληλογράμμου $BMNS$.

883. 866). Τὰ ἄκρα τῆς ὑποτείνουσας ἑνὸς γνώμονος ὀλισθαίνουν ἐπὶ τῶν πλευρῶν μιᾶς ὀρθῆς γωνίας $\chi O\gamma$. Νὰ εὐρεθῇ ὁ τόπος τῆς κορυφῆς τῆς ὀρθῆς γωνίας.

884. (867). Δίδεται ἡμιπεριφέρεια O διαμέτρου AB καὶ ἕνα σημεῖον Γ τῆς AB . Συνδέομεν μὲ εὐθεῖαν τὸ σημεῖον Γ μὲ ἕνα τυχόν σημεῖον M τῆς ἡμιπεριφερείας. Ἡ κάθετος εἰς τὸ M ἐπὶ τὴν ΓM τέμνει εἰς τὰ σημεῖα E καὶ Z τὰς ἑφαπτομένας τῆς ἡμιπεριφερείας εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι :

1ον. Τὰ τετράπλευρα $A\Gamma M E$ καὶ $B\Gamma M Z$ εἶναι ἑγγράψιμα.

2ον. Ἡ γωνία ΕΓΖ εἶναι ὀρθή.

3ον. Νὰ εὐρεθῆ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ μέσου τῆς ΕΖ, ἐὰν τὸ Μ διαγράψῃ τὴν ἡμιπεριφέρειαν καὶ τὸ Γ μένῃ σταθερόν.

885. (868). Εἰς ἡμιπεριφέρειαν Ο διαμέτρου ΑΒ φέρομεν δύο ἀκτίνας ΟΓ καὶ ΟΔ καθέτους μεταξύ των. Αἱ ΑΔ καὶ ΒΓ τέμνονται εἰς ἓνα σημεῖον Σ, τὸ ὁποῖον κεῖται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ ἡμικυκλίου. Αἱ ΑΓ καὶ ΒΔ τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Μ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τοῦ ἡμικυκλίου.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι $ΑΓ=ΓΣ$ καὶ $ΑΔ=ΔΜ$.

2ον. Ἡ ἀκτίς ΟΓ στρέφεται περὶ τὸ Ο ἀπὸ τὴν θέσιν ΟΑ μέχρι τῆς θέσεως, ἣ ὅποια εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΒ. Νὰ εὐρεθῆ ὁ τόπος τοῦ σημείου Σ.

3ον. Νὰ εὐρεθῆ ὑπὸ τοὺς αὐτοὺς ὄρους ὁ τόπος τοῦ Μ.

886. (869). Μία γωνία ΒΑΓ, σταθεροῦ μεγέθους, στρέφεται περὶ τὴν κορυφὴν τῆς Α, ἣ ὅποια κεῖται ἐπὶ μιᾶς ἡμιπεριφέρειας. Αἱ πλευραὶ τῆς τέμνουσιν τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ ἀντιστοίχως.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι ἡ ΒΓ διατηρεῖ ἓνα σταθερὸν μῆκος.

2ον. Νὰ εὐρεθῆ ὁ τόπος τοῦ μέσου τῆς ΒΓ.

3ον. Νὰ εὐρεθῆ ὁ τόπος τοῦ ὀρθοκέντρου τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

4ον. Χαράσσομεν τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΔΓ. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὸ ὀρθοκέντρον τοῦ τριγώνου ΒΓΔ εἶναι ἓνα ὠρισμένον σημεῖον.

5ον. Νὰ εὐρεθῆ ὁ τόπος τοῦ κέντρου τῆς περιφέρειας, τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ τρίγωνον ΒΓΔ

887. (870). Δίδονται δύο ὀρθογώνιοι εὐθεῖαι Χ'ΟΧ καὶ Ψ'ΟΨ, Α ἓνα ὠρισμένον σημεῖον τῆς ΟΧ' καὶ Β ἓνα ὠρισμένον σημεῖον τῆς ΟΧ, Μ ἓνα μεταβλητὸν σημεῖον τῆς ΨΟΨ'. Ἡ κάθετος, ἣ ὅποια ἀγεται ἀπὸ τὸ Β ἐπὶ τὴν ΑΜ, τέμνει τὴν ΑΜ εἰς τὸ Γ καὶ τὴν ΨΟΨ' εἰς τὸ Δ. Αἱ περιφέρειαι αἱ περιγεγραμμέναι περὶ τὰ τρίγωνα ΒΟΔ καὶ Γ'ΔΜ τέμνονται εἰς τὸ Σ.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὰ σημεῖα Μ, Σ καὶ Β κεῖνται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὰ σημεῖα Α, Σ καὶ Δ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

3ον. Νὰ εὐρεθῆ ὁ τόπος τοῦ Σ, ὅταν τὸ Μ γράψῃ τὴν ΨΟΨ'.

888. (871). Δίδονται δύο παράλληλοι εὐθεῖαι Χ καὶ Ψ. Ἀπὸ δοθὲν σημείου Α τῆς Χ φέρομεν τυχούσαν εὐθεῖαν, ἣ ὅποια τέμνει τὴν Ψ εἰς τὸ Β. Ἀπὸ τὸ Β φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἣ ὅποια τέμνει τὴν Χ εἰς τὸ Γ. Ἀπὸ τὸ Γ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΓΔ οὕτως, ὥστε $\gamma\omega\nu.ΑΓΔ=2 \gamma\omega\nu.ΓΑΒ$. Ἀπὸ τὸ Α φέρομεν κάθετον ΑΜ. Νὰ εὐρεθῆ ὁ τόπος τοῦ Μ, ὅταν ἡ τέμνουσα ΑΒ στρέφεται περὶ τὸ Α.

889. (872). Δύο περιφέρειαι Ο καὶ Ο' τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Ἀπὸ τὸ σημεῖον Β φέρομεν μίαν τυχούσαν τέμνουσαν ΓΒΓ', ἣ ὅποια τέμνει τὴν περιφέρειαν Ο εἰς τὸ Γ καὶ τὴν Ο' εἰς τὸ Γ'. Ἐπίσης ἀπὸ τὸ Β φέρομεν μίαν ἄλλην τέμνουσαν ΒΔ'Δ, κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΓ', ἣ ὅποια τέμνει τὴν περιφέρειαν Ο εἰς τὸ Δ καὶ τὴν Ο' εἰς τὸ Δ'. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΓΔ καὶ Γ'Δ', αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Μ. Νὰ εὐρεθῆ ὁ τόπος τοῦ Μ, ὅταν αἱ τέμνουσαι ΓΒΓ' καὶ ΒΔ'Δ στρέφονται περὶ τὸ Β.

890. (873). Δίδεται ἓνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ. Ἀπὸ τυχὸν σημείου

Δ τῆς ὑποτείνουσας φέρομεν τυχοῦσαν τέμνουσαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν AB εἰς τὸ E καὶ τὴν AΓ εἰς τὸ Z. Γράφομεν τὰς περιφερείας, πού διέρχονται ἀπὸ τὰ σημεῖα Δ, E, B καὶ Δ, Γ, Z καὶ αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς ἓνα δευτέρον σημεῖον M. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ M, ὅταν ἡ τέμνουσα στρέφεται περὶ τὸ O.

891. (874). Μία γωνία $\chi A\gamma$ ἀμετάβλητος, στρέφεται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς περὶ τὴν κορυφὴν τῆς A, ἡ ὁποία εἶναι ὠρισμένη. Ἀπὸ ἓνα σημεῖον B, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς φέρομεν τὰς καθέτους BG καὶ BD ἐπὶ τὰς Ax καὶ Ay Aί κἀθετοὶ αὐταὶ τέμνουσι τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας εἰς δύο ἄλλα σημεῖα E καὶ Z.

1ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων Γ καὶ Δ.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ μήκος ΓΔ εἶναι ἀμετάβλητον καὶ νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ μέσου του.

3ον. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ γεωμετρικοὶ τόποι τῶν σημείων E καὶ Z.

892. (875) Δίδεται μία γωνία $\chi O\gamma$. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς OX λαμβάνομεν τὸ σταθερὸν σημεῖον A, ἐπὶ δὲ τῆς Oγ τὸ σταθερὸν σημεῖον B. Γράφομεν δύο περιφερείας K καὶ K', αἱ ὁποῖαι ἐφάπτονται μεταξύ των καὶ ἡ μὲν K ἐφάπτεται τῆς Ox εἰς τὸ A, ἡ δὲ K' ἐφάπτεται τῆς Oγ εἰς τὸ B. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ σημείου ἐπαφῆς τῶν περιφερειῶν αὐτῶν, ὅταν αἱ ἀκτῖνες των μεταβάλλονται.

893. (876). Δίδεται ἓνα ὀρθογώνιον OAGB, τοῦ ὁποίου αἱ διαστάσεις εἶναι $OA = \alpha$, $OB = \beta$. Περὶ τὴν κορυφὴν Γ στρέφομεν μίαν ὀρθὴν γωνίαν, τῆς ὁποίας ἡ μία ἐκ τῶν πλευρῶν τέμνει τὴν OA εἰς τὸ E καὶ τὴν OB εἰς τὸ Z, ἡ δὲ ἄλλη πλευρὰ τέμνει τὴν OA εἰς τὸ E' καὶ τὴν OB εἰς τὸ Z'. Νὰ εὑρεθῇ:

1ον. Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν μέσων τῶν εὐθειῶν EZ' καὶ E'Z.

2ον. Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν ποδῶν τῶν καθέτων τῶν ἀγομένων ἐκ τοῦ σημείου Γ ἐπὶ τὰς εὐθείας αὐτὰς EZ' καὶ E'Z.

3ον. Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου τῆς τομῆς M τῶν εὐθειῶν EZ' καὶ E'Z

894. (877). Κύκλος κυλίεται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν μιᾶς περιφερείας διπλασίας ἀκτῖνος. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος ἑνὸς σημείου τῆς κινητῆς περιφερείας.

895. (878). Ἀπὸ ἓνα σημεῖον A δοθείσης περιφερείας O φέρομεν μίαν μεταβλητὴν χορδὴν AB. Ἀπὸ τὸ κέντρον O φέρομεν εὐθειαν παράλληλον τῆς AB, ἡ ὁποία προεκτεινομένη τέμνει εἰς τὸ σημεῖον M τὴν ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου O εἰς τὸ σημεῖον B. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου M.

896. (879). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν, αἱ ὁποῖαι ἔχουν δοθεῖσαν ἀκτῖνα καὶ τέμνουσι δοθεῖσαν εὐθειαν, ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν ω .

897. (880). Δίδεται περιφέρεια O. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον A τῆς περιφερείας φέρομεν δύο χορδὰς AB καὶ AΓ παραλλήλους ἀντιστοίχως πρὸς δύο δοθείσας εὐθείας X καὶ Ψ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ κέντρου τῆς περιφερείας τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ τρίγωνον ABΓ, ὅταν τὸ σημεῖον A κινῆται ἐπὶ τῆς περιφερείας O.

898. (881). Δίδεται μία περιφέρεια O καὶ μία χορδὴ αὐτῆς AB , ἡ ὁποία εἶναι σταθερὰ κατὰ τὴν θέσιν. Ἐνα μεταβλητὸν σημεῖον M κινεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας O . Ἀπὸ τὸ μέσον Γ τῆς χορδῆς AB φέρομεν εὐθείαν τέμνουσαν τὰς MA καὶ MB ἢ τὰς προεκτάσεις των εἰς σημεῖα Δ καὶ E καὶ τοιαῦτα, ὥστε νὰ εἶναι $M\Delta = ME$.

1ον. Νὰ εὐρεθῇ ὁ τόπος τοῦ μέσου N τῆς εὐθείας ΔE .

2ον. Νὰ εὐρεθῇ ὁ τόπος τῶν Δ καὶ E , ὅταν τὸ M κινῆται ἐπὶ τῆς περιφερείας O .

899. (882). Δίδεται ἕνα κυκλικὸν τμήμα χορδῆς AB . Μία μεταβλητὴ περιφέρεια ἐφάπτεται τῆς χορδῆς AB καὶ τὸ κέντρον της γράφει τὸ τόξον τοῦ κυκλικοῦ τμήματος. Ἀπὸ τὰ σημεῖα A καὶ B φέρομεν ἐφαπτομένης τῆς μεταβλητῆς περιφερείας, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ M . Νὰ εὐρεθῇ ὁ τόπος τοῦ M .

900. (883). Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον A φέρομεν τὰς εὐθείας Ax καὶ Ay , αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν σταθερὰν γωνίαν $\alpha xAy = \omega$ καὶ αἱ ὁποῖαι τέμνουσι δοθεῖσαν εὐθείαν $E'E$ εἰς τὰ σημεῖα M καὶ N . Ἀπὸ τὸ M φέρομεν τὴν $M\Gamma$ κάθετον ἐπὶ τὴν Ax , ἡ ὁποία τέμνει τὴν Ay εἰς τὸ Γ καὶ ἀπὸ τὸ N τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν Ay , ἡ ὁποία τέμνει τὴν Ax εἰς τὸ B . Αἱ $M\Gamma$ καὶ NB τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον Θ . Ἡ εὐθεῖα $A\Theta$ τέμνει τὴν εὐθείαν $B\Gamma$ εἰς ἕνα σημεῖον P . Νὰ εὐρεθῇ ὁ τόπος τοῦ P , ὅταν ἡ σταθερὰ γωνία αxAy στρέφεται περὶ τὴν κορυφὴν της A καὶ αἱ πλευραὶ της τέμνουσι τὴν $E'E$.

901. (884). Εἰς ἕνα τρίγωνον $AB\Gamma$ ἡ βάσις $B\Gamma$ εἶναι ὠρισμένη κατὰ τὴν θέσιν καὶ τὸ μέγεθος, ἡ δὲ διαφορὰ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του εἶναι σταθερὰ. Ἀπὸ τὰς κορυφὰς B καὶ Γ φέρομεν καθέτους ἐπὶ τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας A . Νὰ εὐρεθῇ ὁ τόπος τῶν ποδῶν τῶν καθέτων αὐτῶν.

902. (885). Ἐνὸς τριγώνου $AB\Gamma$ δίδεται ἡ βάσις $B\Gamma = a$ καὶ τὸ ἄθροισμα $AB + A\Gamma = \lambda$ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του. Ἀπὸ τὴν κορυφὴν B φέρομεν τὴν κάθετον BM ἐπὶ τὴν διχοτόμον τῆς ἔξωτερικῆς γωνίας A . Νὰ εὐρεθῇ ὁ τόπος τῶν ποδῶν τῶν καθέτων αὐτῶν, ὅταν ἡ κορυφὴ τῆς γωνίας A λαμβάνη τοιαύτας θέσεις, ὥστε τὸ ἄθροισμα $AB + A\Gamma$ νὰ εἶναι σταθερὸν.

903. (886). Δίδεται μία περιφέρεια O καὶ ἕνα ὠρισμένον σημεῖον A ἐντὸς αὐτῆς. Διὰ τοῦ A φέρομεν μίαν χορδὴν $BA\Gamma$. Διὰ τῶν σημείων A καὶ B καθὼς καὶ διὰ τῶν σημείων E καὶ Γ γράφομεν δύο περιφερείας, αἱ ὁποῖαι νὰ ἐφάπτονται τῆς O καὶ αἱ ὁποῖαι τέμνονται μεταξύ των εἰς ἕνα σημεῖον M . Ποῖος εἶναι ὁ τόπος τοῦ σημείου M .

904. (887). Νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου ἐπαφῆς δύο περιφερειῶν K καὶ Λ , αἱ ὁποῖαι ἐφάπτονται μεταξύ των ἔξωτερικῶς καὶ αἱ ὁποῖαι ἐφάπτονται καὶ δοθείσης περιφερείας O εἰς δύο δοθέντα σημεῖα A καὶ B αὐτῆς.

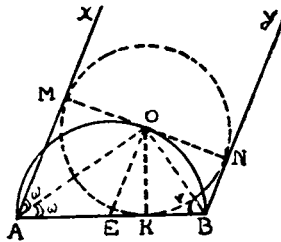
905. (888). Δίδεται μία εὐθεῖα AB καὶ λαμβάνομεν ὅλους τοὺς κύκλους, οἱ ὁποῖοι ἐφάπτονται τῆς εὐθείας αὐτῆς καὶ τοιούτους, ὥστε αἱ ἐφαπτόμεναι, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὰ σημεῖα A καὶ B πρὸς κάθε ἕνα ἀπὸ τοὺς κύκλους αὐτοὺς νὰ εἶναι παράλληλοι. Ἔστωσαν M καὶ N τὰ σημεῖα ἐπαφῆς μὲ τὰς ἐφαπτομένης αὐτάς καὶ K τὸ σημεῖον ἐπαφῆς μὲ τὴν AB .

1ον. Νὰ δεχθῇ ὅτι ὁ τόπος τῶν κέντρων εἶναι ἕνας κύκλος.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι αἱ εὐθεῖαι MN εἶναι ἐφαπτόμεται τοῦ κύκλου αὐτοῦ εἰς τὸ μέσον.

3ον. Διὰ ποίαν θέσιν τῶν ἐφαπτομένων τὸ τρίγωνον MNK εἶναι ἰσοσκελές;

4ον. Διὰ ποίαν θέσιν τῶν ἐφαπτομένων ἡ ἀκτίς τοῦ μεταβλητοῦ κύκλου εἶναι ἴση μὲ k ;



Σχ. ἀσκ. 905.

906. (889). Δύο περιφέρειαι O καὶ O' τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B . Ἀπὸ τὸ A φέρομεν τυχοῦσαν τέμνουσαν $\Gamma\Delta$, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν O εἰς τὸ Γ καὶ τὴν O' εἰς τὸ Δ . Φέρομεν τὰς εὐθεῖας ΓO καὶ $\Delta O'$, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον M . Νὰ εὑρεθῆ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ M , ὅταν ἡ τέμνουσα $\Gamma\Delta$ στρέφεται περὶ τὸ A .

907. (890). Δύο περιφέρειαι O καὶ O' τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B . Ἀπὸ τὸ σημεῖον A φέρομεν τυχοῦσαν τέμνουσαν $\Gamma\Delta$, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν O εἰς τὸ σημεῖον Γ καὶ τὴν O' εἰς τὸ Δ . Μὲ κορυφὰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ καὶ πλευρὰν τὴν $\Gamma\Delta$ κατασκευάζομεν τὴν γωνίαν $\text{ΑΓΜ} = \omega$ καὶ τὴν γωνίαν $\text{ΑΔΜ} = \nu$. Νὰ εὑρεθῆ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῆς τομῆς M τῶν πλευρῶν ΓM καὶ ΔM τῶν γωνιῶν αὐτῶν, ὅταν ἡ τέμνουσα $\Gamma\Delta$ στρέφεται περὶ τὸ A .

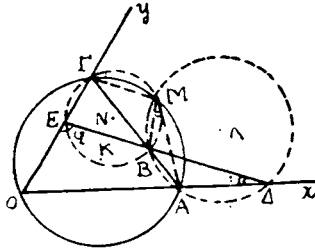
908. (891). Δίδονται δύο περιφέρειαι O καὶ O' , αἱ ὁποῖαι κείνται ἢ μία ἐκτὸς τῆς ἄλλης. Φέρομεν δύο μεταβλητὰς ἀκτίνας OA καὶ $O'B$, αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν μεταξύ των μίαν σταθερὰν γωνίαν ω . Νὰ εὑρεθῆ ὁ τόπος τοῦ μέσου M τῆς εὐθείας AB , ἡ ὁποία συνδέει τὰ ἄκρα τῶν ἀκτίνων.

909. (892). Δίδεται ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$. Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς πλευρᾶς ΓB λαμβάνομεν ἓνα ὠρισμένον σημεῖον Σ , ἀπὸ τὸ ὁποῖον φέρομεν μίαν μεταβλητὴν τέμνουσαν $\Sigma B'\Gamma'$ τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$, ἡ ὁποία τέμνει τὴν πλευρὰν AB εἰς τὸ B' καὶ τὴν πλευρὰν $A\Gamma$ εἰς τὸ Γ' . Γράφομεν περιφέρειαν κύκλου, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Σ, B, B' καὶ μίαν ἄλλην περιφέρειαν κύκλου, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Σ, Γ, Γ' . Νὰ εὑρεθῆ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ δευτέρου σημείου M τῆς τομῆς τῶν δύο αὐτῶν περιφερειῶν.

910. (893). Δίδεται ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$ καὶ Δ, E, Z τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ $B\Gamma, \Gamma A, AB$. Ἀπὸ τὴν κορυφὴν A φέρομεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν xy καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα B καὶ Γ καθέτους BH καὶ $\Gamma\Theta$ ἐπὶ τὴν xy . Φέρομεν τὰς εὐθείας HZ καὶ ΘE , αἱ ὁποῖαι προεκτείνονται τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον M . Νὰ εὑρεθῆ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου M , ὅταν ἡ xy στρέφεται περὶ τὸ A .

911. (894). Δίδεται μία γωνία xOy καὶ ἓνα σημεῖον B , τὸ ὁποῖον κείται

ἐντὸς τῆς γωνίας αὐτῆς. Ἀπὸ τὸ Β φέρομεν μίαν σταθερὰν τέμνουσαν $AB\Gamma$, ἡ ὁποία τέμνει τὰς πλευρὰς Ox καὶ Oy τῆς γωνίας εἰς τὰ σημεῖα A καὶ Γ ἀντιστοίχως καὶ μίαν μεταβλητὴν τέμνουσαν ΔBE , ἡ ὁποία τέμνει τὰς Ox καὶ Oy εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ E ἀντιστοίχως. Νὰ εὗρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ δευτέρου σημείου τομῆς τῶν περιφερειῶν, αἱ ὁποῖαι εἶναι περιγεγραμμέναι περὶ τὰ τρίγωνα BAD καὶ $B\Gamma E$.



Σχ. ἀσκ. 911.

Γ' Ὁμάς. 912. (895). Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν Γ καὶ τὰς διαμέσους μ_α καὶ μ_β .

913. (896). Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν a , τὴν γωνίαν A καὶ τὴν διαφορὰν $B-\Gamma=\omega$.

914. (897). Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὰς πλευρὰς a καὶ β καὶ τὴν διαφορὰν $A-B=\omega$.

915. (898). Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν a , τὸ ἄθροισμα $B+\Gamma=\omega$ τῶν γωνιῶν B καὶ Γ καὶ τὴν διαφορὰν $\gamma-\beta=\lambda$.

916. (899). Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν a , τὴν διαφορὰν $\beta-\gamma=\lambda$ καὶ τὴν ἀκτίνα ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

917. (900). Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι αἱ πλευραὶ του πρέπει νὰ διέρχονται ἀπὸ τρία ὀρισμένα σημεῖα Λ, M, N , ὅτι αἱ κορυφαὶ B καὶ Γ κεῖνται ἐπὶ μιᾶς ὀρισμένης περιφερείας, ὁποῖα διέρχεται ἀπὸ τὰ Λ καὶ M καὶ ὅτι ἡ γωνία A εἶναι δοθεῖσα.

918. (901). Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν a , τὴν διαφορὰν $B-\Gamma=\omega$ καὶ $\beta-\gamma=\lambda$.

919. (903). Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν βάσιν $B\Gamma=a$, τὴν διαφορὰν $B-\Gamma=\omega$ καὶ ὅτι ἡ κορυφή A κεῖται ἐπὶ τοῦ τόπου τῶν σημείων ἐπαφῆς δύο μεταβλητῶν περιφερειῶν ἐφαπτομένων τῆς βάσεως $B\Gamma$ εἰς τὰ σημεῖα B καὶ Γ ἀντιστοίχως.

920. (904). Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν θέσιν καὶ τὸ μέγεθος τῆς πλευρᾶς a , μίαν εὐθείαν xy ἐπὶ τῆς ὁποίας κεῖται ἡ κορυφή A καὶ τὴν διαφορὰν $\beta-\gamma=\lambda$.

921. (905) Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὰ μέσα δύο πλευρῶν του καὶ ὅτι αἱ δύο ἄλλαι κορυφαὶ του κεῖνται ἢ μὲν μία ἐπὶ δο-

θείσης εὐθείας ἢ δὲ ἄλλη ἐπὶ δοθείσης περιφερείας.

922. (906). Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν a , τὸ ὕψος u_a καὶ τὴν διαφορὰν $\Gamma - B = \omega$.

923. (907). Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν βάσιν $B\Gamma = a$, τὴν διαφορὰν $B - \Gamma = \omega$ καὶ ὅτι ἡ κορυφή A κεῖται ἐπὶ δοθείσης εὐθείας xy . (Compragnon).

924. (908). Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν a , τὴν ἀπόστασιν $AH = \mu$ τῆς κορυφῆς A ἀπὸ τὸ ὀρθόκέντρον H καὶ τὴν ἀπόστασιν $AO = \lambda$ τῆς κορυφῆς A ἀπὸ τὸ κέντρον O τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ τρίγωνον κύκλου.

925. (909). Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν a , τὴν διαφορὰν $B - \Gamma = \omega$ καὶ $\beta + \gamma = \lambda$.

926. (910). Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὸ ὕψος τοῦ $BD = u_\beta$ καὶ τὰς ἀκτῖνας τῶν περιγεγραμμένων κύκλων περὶ τὰ τρίγωνα $AB\Delta$ καὶ $B\Gamma\Delta$.

927. (912). Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν δι-εὐθύνουσιν δύο διχοτόμων του, ἓνα σημεῖον Δ τῆς AB καὶ ἓνα σημεῖον E τῆς $A\Gamma$.

928. (914). Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν δύο πλευρὰς του καὶ τὴν γωνίαν ω τῶν διαμέσων, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς δοθείσας πλευρὰς.

929. (915). Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν θέσιν τῆς κορυφῆς A , τὸ σημεῖον Δ τῆς τομῆς τῆς πλευρᾶς $B\Gamma$ καὶ τῆς διαμέσου $A\Delta$ καὶ τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περὶ τὸ τρίγωνον.

930. (916). Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν :

1ον τὴν πλευρὰν $B\Gamma$ καὶ τὸ κέντρον O τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

2ον > > $B\Gamma$ > > > O_α > παρεγγεγραμμένου >

3ον > > $B\Gamma$ > > > O_β > >

4ον > > $B\Gamma$ > > > O_γ > >

931. (917). Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν, τὰ σημεῖα τῆς τομῆς τῶν πλευρῶν του καὶ τῶν διαμέσων του.

932. (926). Δίδεται περιφέρεια O καὶ δύο εὐθεῖαι Ox καὶ Oy , αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ τὸ κέντρον O καὶ σχηματίζουν γωνίαν $\omega = 60^\circ$. Νὰ ἀχθῇ μία ἐφαπτομένη AB τῆς περιφερείας O εἰς τρόπον, ὥστε τὸ μέρος τὸ ἐφαπτομένης τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τῶν δύο εὐθειῶν Ox καὶ Oy νὰ ἔχη δοθὲν μῆκος λ .

933. (929). Ἐννοῦμεν τὴν κορυφὴν A τριγώνου $AB\Gamma$ μὲ ἓνα σημεῖον Δ τῆς βάσεώς του· νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς $A\Delta$ ἓνα σημεῖον ἀπὸ τοῦ ὁποῖου αἱ $B\Delta$ καὶ $\Delta\Gamma$ νὰ φαίνωνται ὑπὸ ἴσας γωνίας.

934. (943). Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Σ , τὸ ὁποῖον κεῖται ἔκτος δοθείσης περιφερείας O , νὰ ἀχθῇ μία τέμνουσα ΣAB τοιαύτη, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τῶν σημείων τῆς τομῆς A καὶ B ἀπὸ τὴν εὐθείαν $O\Sigma$, νὰ ἔχη δοθὲν μῆκος λ .

935. (948). Νὰ κατασκευασθῇ ἓνας ῥόμβος, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν

του α καὶ τὴν ἀκτίνα ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

936. (949). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνας ρόμβος, ἂν γνωρίζωμεν μίαν γωνίαν του καὶ τὴν ἀκτίνα ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

937. (950). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τραπέζιον ΑΒΓΔ, ἂν γνωρίζωμεν τὰς διαγωνίους του ΑΓ, ΒΔ, τὴν γωνίαν των ω καὶ τὴν μὴ παράλληλον πλευρὰν ΑΔ.

938. (953). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τετράπλευρον ΑΒΓΔ, ἂν γνωρίζωμεν τὰς δύο ἀπέναντι πλευρὰς ΑΒ=α, ΓΔ=γ καὶ τὰς γωνίας του Α, Β, Γ, Δ.

939. (954). Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τετράπλευρον ΑΒΓΔ, ἂν γνωρίζωμεν τὰς πλευρὰς του ΑΒ, ΑΔ, ΔΓ καὶ τὰς γωνίας Β καὶ Γ.

940. (962). Νὰ ἐγγραφῇ εἰς κύκλον ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον, τοῦ ὁποίου αὐτὸς ἀκέραιος πλευραὶ, ἢ αὐτὸς προεκτάσεις των, νὰ διέρχωνται ἀπὸ δοθέντα σημεῖα Μ καὶ Ν.

941. (965). Περὶ δοθὲν τετράπλευρον νὰ περιγραφῇ ἕνα τετράγωνον.

Δ' Ὀμάς. 942. (969). Νὰ γραφῇ περιφέρεια, μετὰ δοθεῖσαν ἀκτίνα, ἡ ὁποία νὰ ἀπέχη ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τρία δοθέντα σημεῖα Α, Β, Γ, τὰ ὁποῖα δὲν κείνται ἐπ' εὐθείας (τρεις περιπτώσεις).

943. (970). Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ ἀπέχη ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ (τρεις περιπτώσεις).

944. (971). Δίδονται δύο περιφέρειαι Ο καὶ Ο', ἀκτίνων R καὶ R' ἀντιστοίχως, αἱ ὁποῖαι κείνται ἢ μία ἐκτὸς τῆς ἄλλης. Ζητεῖται νὰ γραφῇ μία τρίτη περιφέρεια Ο'', ἡ ὁποία νὰ ἐφάπτεται τῶν δύο ἄλλων καὶ τοιαύτη, ὥστε ἡ γωνία ΟΟ''Ο' νὰ εἶναι ἴση μετὰ 2ω. Ἡ ἀπόστασις ΟΟ' τῶν κέντρων εἶναι ἴση μετὰ δ.

945. (972). Μετὰ κέντρον δοθὲν σημεῖον Α, νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ τέμνη δοθεῖσαν περιφέρειαν εἰς δύο ἴσα μέρη.

946. (973). Νὰ γραφῇ περιφέρεια μετὰ δοθεῖσαν ἀκτίνα R, ἔχουσα τὸ κέντρον τῆς ἐπὶ τῆς πλευρὰς δοθείσης γωνίας xAy καὶ ἀποτείνουσα ἀπὸ τῆς ἄλλης πλευρὰς τῆς γωνίας, χορδὴν δοθέντος μήκους λ.

947. (974). Δίδεται περιφέρεια Α ἀκτίνος R. Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἔχουσα, ὡς κέντρον δοθὲν σημεῖον Ο καὶ τοιαύτη, ὥστε αἱ δύο κοινὰ ἐφαπτόμενα νὰ σχηματίζουν γωνίαν ἴσην μετὰ 2ω.

948. (975). Μετὰ κέντρον δοθὲν σημεῖον Α, νὰ γραφῇ περιφέρεια, τοιαύτη, ὥστε αἱ ἐφαπτόμενα αὐτῆς ἀγόμενα πρὸς αὐτὴν ἐκ δύο ἄλλων δοθέντων σημείων Β καὶ Γ, νὰ σχηματίζουν δοθεῖσαν γωνίαν 2ω.

949. (978). Νὰ γραφῇ περιφέρεια μετὰ δοθεῖσαν ἀκτίνα R, ἡ ὁποία νὰ ἀποκόπῃ ἀπὸ δύο παραλλήλους εὐθείας, χορδὰς ἴσας μετὰ δοθέντα μήκη k καὶ λ.

950. (979). Νὰ γραφῇ περιφέρεια μετὰ δοθεῖσαν ἀκτίνα R, ἡ ὁποία νὰ ἀποκόπῃ ἀπὸ δύο τεμνομένης εὐθείας χορδὰς ἴσας μετὰ δοθέντα μήκη k καὶ λ.

951. (980). Νὰ γραφῇ περιφέρεια μετὰ δοθεῖσαν ἀκτίνα R, ἡ ὁποία νὰ τέμνη δοθεῖσαν περιφέρειαν κατὰ χορδὴν ΑΒ=λ.

952. (982). Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ ἀποκόπῃ ἀπὸ τρεῖς δοθείσας εὐθείας X, Y, Z τὸ αὐτὸ δοθὲν μήκος.

953. (984). Νὰ γραφῆ περιφέρεια μὲ δοθεῖσαν ἀκτίνα R , ἡ ὁποία νὰ ἀποκόπτη ἀπὸ δύο δοθείας εὐθείας, χορδὰς ἴσας μὲ δοθέντα μήκη μ καὶ ν .

954. (985). Νὰ γραφῆ περιφέρεια μὲ δοθεῖσαν ἀκτίνα R , ἡ ὁποία νὰ ἀποκόπτη ἀπὸ δύο δοθείσας περιφερείας A καὶ B χορδὰς, ἴσας μὲ δοθέντα μήκη λ καὶ μ .

955. (986). Δίδονται δύο εὐθεῖαι X καὶ Y καὶ ἓνα σημεῖον O . Μὲ κέντρον τὸ O νὰ γραφῆ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ ἀποκόπτη ἀπὸ τὰς X καὶ Y χορδὰς, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα νὰ εἶναι ἴσον μὲ 2λ .

956. (887). Μὲ κέντρον δοθὲν σημεῖον O νὰ γραφῆ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ τὰς πλευρὰς AB καὶ AG δοθέντος τριγώνου ABG εἰς τὰ σημεῖα M καὶ N εἰς τρόπον, ὥστε ἡ χορδὴ MN νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην πλευρὰν BG .

957. (988). Μὲ κέντρον δοθὲν σημεῖον O νὰ γραφῆ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ τὰς πλευρὰς δοθείσης γωνίας ABG εἰς τρόπον, ὥστε ἡ προκύπτουσα χορδὴ νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν xy .

958. (989). Δίδονται τρία σημεῖα A, B, Γ , τὰ ὅποια δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας καὶ μία εὐθεῖα AD , ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ A . Νὰ γραφῆ περιφέρεια κύκλου, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα A καὶ B καὶ τοιαύτη, ὥστε ἡ ἑφαπτομένη αὐτῆς, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ σημεῖον E , εἰς τὸ ὁποῖον ἡ περιφέρεια αὐτὴ τέμνει τὴν AD , νὰ διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Γ .



ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ

ΟΜΟΙΑ ΣΧΗΜΑΤΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

ΛΟΓΟΙ ΚΑΙ ΑΝΑΛΟΓΙΑΙ

377. Ὅρισμοί. Ἀπὸ τὴν Ἀριθμητικὴν γνωρίζομεν, ὅτι :

Λόγος ἑνὸς ἀριθμοῦ πρὸς ἕνα ἄλλον λέγεται τὸ πηλίκον τῆς διαιρέσεως τοῦ πρώτου ἀριθμοῦ διὰ τοῦ δευτέρου.

Π.χ. ὁ λόγος τῶν ἀριθμῶν α καὶ β εἶναι ὁ $\frac{\alpha}{\beta}$ ἢ $\alpha : \beta$.

Ἀναλογία λέγεται ἡ ἰσότης δύο λόγων.

Π.χ. ἡ ἰσότης $\frac{3}{5} = \frac{12}{20}$ εἶναι μία ἀναλογία.

Ἐὰν οἱ ἀριθμοὶ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ εἶναι τοιοῦτοι, ὥστε νὰ εἶναι

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \quad (1)$$

λέγομεν, ὅτι οἱ ἀριθμοὶ αὗτοὶ σχηματίζουν ἀναλογίαν.

Ἡ ἀναλογία (1) γράφεται καὶ $\alpha : \beta = \gamma : \delta$ καὶ ἔκφωνεῖται : α πρὸς β καθὼς γ πρὸς δ .

Οἱ ἀριθμοὶ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ λέγονται **ὄροι τῆς ἀναλογίας**· ὁ α εἶναι ὁ πρῶτος ὄρος, ὁ β ὁ δεύτερος, ὁ γ ὁ τρίτος καὶ ὁ δ ὁ τέταρτος ὄρος τῆς ἀναλογίας.

Οἱ α καὶ δ λέγονται **ἄκροι ὄροι** τῆς ἀναλογίας, οἱ δὲ β καὶ γ λέγονται **μέσοι ὄροι** τῆς ἀναλογίας.

Εἰς τὴν ἀναλογίαν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ (2)

ὁ β λέγεται **μέσος ἀνάλογος** ἢ **γεωμετρικὸς μέσος** τῶν α καὶ γ .

Ἡ ἀναλογία (2) λέγεται **συνεχῆς ἀναλογία**.

Τρίτος ἀνάλογος δύο δοθέντων ἀριθμῶν α καὶ β εἶναι ὁ τέταρτος ὄρος x τῆς ἀναλογίας $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{x}$.

378. Ἰδιότητες τῶν ἀναλογιῶν. Εἰς τὴν Ἀριθμητικὴν ἀποδεικνύονται αἱ κάτωθι ἰδιότητες τῶν ἀναλογιῶν :

I. **Εἰς κάθε ἀναλογίαν τὸ γινόμενον τῶν μέσων ὄρων τῆς εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν ἄκρων ὄρων τῆς.**

Π.χ. Ἐάν εἶναι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, θά εἶναι καὶ $\alpha\delta = \beta\gamma$.

Ἐπίσης, ἐάν εἶναι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma}$, θά εἶναι $\beta^2 = \alpha\gamma$, ὁπότε $\beta = \sqrt{\alpha\gamma}$.

II. **Ἀντιστρόφως. Ἐάν εἶναι $\alpha\delta = \beta\gamma$, θά εἶναι καὶ $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$.**

III. **Ἄν ἀλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν μέσων ὄρων, ἢ τῶν ἄκρων ὄρων μιᾶς ἀναλογίας, προκύπτει πάλιν ἀναλογία.**

Π.χ. Ἐάν εἶναι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, θά εἶναι καὶ $\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$, $\frac{\delta}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha}$.

IV. **Ἐάν ἔχωμεν τὴν ἀναλογίαν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$, θά ἔχωμεν καὶ τὰς ἀναλογίας :**

$$\begin{array}{l|l} \frac{\alpha \pm \beta}{\beta} = \frac{\gamma \pm \delta}{\delta} & \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} = \frac{\gamma + \delta}{\gamma - \delta} \\ \frac{\alpha}{\alpha \pm \beta} = \frac{\gamma}{\gamma \pm \delta} & \frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta} = \frac{\alpha - \gamma}{\beta - \delta} \text{ κλπ.} \end{array}$$

V. **Ἐάν ἔχωμεν μιαν σειρὰν ἴσων λόγων $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\epsilon}{\zeta} = \dots$,**

θά εἶναι καὶ $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} = \frac{\epsilon}{\zeta} = \dots = \frac{\alpha + \gamma + \epsilon + \dots}{\beta + \delta + \zeta + \dots}$.

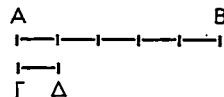
379. Λόγος δύο ὁμοειδῶν μεγεθῶν. Λόγος ἑνὸς εὐθύγραμμου

τμήματος AB (Σχ. 280) πρὸς ἓνα ἄλλο εὐθύγραμμον τμήμα ΓΔ, λέγεται ὁ ἀριθμὸς, ὁ ὁποῖος μετρεῖ τὸ AB, ὅταν τὸ ΓΔ ληφθῇ ὡς μονάς.

Σχ. 280. Ὁ λόγος τοῦ AB πρὸς τὸ ΓΔ παρίσταται μὲ $\frac{AB}{\Gamma\Delta}$.

Γενικῶς : Λόγος ἑνὸς μεγέθους A πρὸς ἓνα ἄλλο ὁμοειδὲς μέγεθος B εἶναι ὁ ἀριθμὸς $\frac{A}{B}$, ὁ ὁποῖος μετρεῖ τὸ μέγεθος A, ὅταν τὸ B ληφθῇ ὡς μονάς.

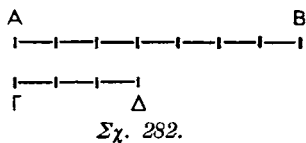
Ἐάν τὸ εὐθύγραμμον τμήμα AB (Σχ. 281) περιέχῃ τὴν μονάδα ΓΔ 5 φορές ἀκριβῶς, λέγομεν, ὅτι ὁ λόγος τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος AB πρὸς τὸ ΓΔ εἶναι 5 καὶ γράφομεν $\frac{AB}{\Gamma\Delta} = 5$.



Σχ. 281.

Ἐάν ἡ μονάς ΓΔ δὲν περιέχεται ἀκριβῶς κατὰ ἓνα ἀκέραιον ἀριθμὸν φορῶν εἰς τὸ AB, τότε διαιροῦμεν τὴν μονάδα ΓΔ εἰς ἴσα μέρη καὶ παρατηροῦμεν πόσα ἀπὸ τὰ ἴσα αὐτὰ μέρη περιέχει τὸ εὐθύγραμμον τμήμα AB.

Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ μονὰς ΓΔ (Σχ. 282) διηρέθη εἰς 3 ἴσα μέρη καὶ ὅτι τὸ ΑΒ περιέχει 7 ἀπὸ τὰ ἴσα αὐτὰ μέρη. Τὸ κλάσμα $\frac{7}{3}$ εἶναι τὸ μέτρον τοῦ ΑΒ, δηλ. εἶναι ὁ λόγος τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ, ὁ ὁποῖος γράφεται $\frac{ΑΒ}{ΓΔ} = \frac{7}{3}$.



380. Θεώρημα. Ὁ λόγος δύο μοριεῶν ποσῶν εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι παριστοῦν τὰ ποσὰ αὐτὰ, δταν μετρηθοῦν μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα.

Ἐστῶσαν τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ (Σχ. 282). Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ μέτρον τοῦ ΑΒ εἶναι 7 ἕκ. καὶ τὸ μέτρον τοῦ ΓΔ εἶναι 3 ἕκ. Ἐπειδὴ τὸ ΓΔ περιέχει 3 ἑκατοστόμετρα, τὸ 1 ἕκ. θὰ εἶναι τὸ τρίτον τοῦ ΓΔ. Τὸ εὐθύγραμμον τμήμα ΑΒ, τὸ ὁποῖον περιέχει 7 ἕκ. εἶναι ἴσον μὲ 7 τρίτα τοῦ ΓΔ καὶ ἐπομένως ὁ λόγος τοῦ ΑΒ πρὸς τὸ ΓΔ εἶναι $\frac{7}{3}$.

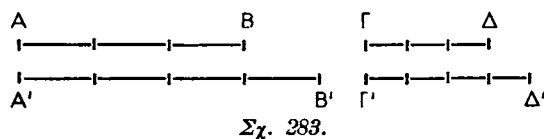
Γενικῶς, ἐὰν α καὶ β εἶναι ἀντιστοιχῶς τὰ μέτρα δύο εὐθύγραμμων τμημάτων ΑΒ καὶ ΓΔ, τὰ ὁποῖα ἐμετρήθησαν μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα μ, θὰ εἶναι $\frac{ΑΒ}{ΓΔ} = \frac{α}{β}$.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: Ὁ λόγος δύο. . .

Σημ. Κατωτέρω, δταν θὰ γράφωμεν $\frac{ΑΒ}{ΓΔ}$, θὰ ὑποθέτωμεν, ὅτι τὰ ΑΒ καὶ ΓΔ παριστάνουν τὰ μέτρα τῶν τμημάτων αὐτῶν. Ὡστε ὁ λόγος $\frac{ΑΒ}{ΓΔ}$ παριστάνει τὸν λόγον τοῦ $\frac{\text{μέτρ. ΑΒ}}{\text{μέτρ. ΓΔ}}$.

Οὕτω, δταν λέγωμεν «ὁ λόγος δύο εὐθύγραμμων τμημάτων», «ὁ λόγος δύο πλευρῶν» κλπ., θὰ ἐννοοῦμεν τὸν λόγον τῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι μετροῦν τὰ μήκη τῶν τμημάτων ἢ τῶν πλευρῶν.

381. Ἀνάλογα μεγέθη. Ἐστῶσαν τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ



καὶ Α'Β' (Σχ. 283), τὰ ὁποῖα ἐμετρήθησαν μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα καὶ ἔστω, ὅτι εἶναι ΑΒ=3 καὶ Α'Β'=4. Ὁ λόγος

τῶν εὐθύγραμμων τμημάτων (§ 380) θὰ εἶναι $\frac{ΑΒ}{Α'Β'} = \frac{3}{4}$.

Ἐστῶσαν ἐπίσης δύο ἄλλα εὐθύγραμμα τμήματα ΓΔ καὶ Γ'Δ',

τὰ ὁποῖα ἔμετρήθησαν μὲ ἄλλην μονάδα καὶ ἔστω, ὅτι εἶναι $\Gamma\Delta=3$ καὶ $\Gamma'\Delta'=4$. Ὁ λόγος των θὰ εἶναι $\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} = \frac{3}{4}$ (2).

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) ἔχομεν $\frac{AB}{A'B'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'}$ καὶ λέγομεν, ὅτι τὰ εὐθύγραμμα τμήματα AB καὶ $A'B'$ εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ εὐθύγραμμα τμήματα $\Gamma\Delta$ καὶ $\Gamma'\Delta'$.

Ἔστω: *Δύο εὐθύγραμμα τμήματα εἶναι ἀνάλογα πρὸς δύο ἄλλα εὐθύγραμμα τμήματα, ὅταν ὁ λόγος τῶν δύο πρώτων εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν δύο ἄλλων.*

Γενικῶς, λέγομεν, ὅτι τὰ μεγέθη $AB, \Gamma\Delta, EZ, \dots$ εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ ὁμοειδῆ καὶ ἰσοπληθῆ μεγέθη $A'B', \Gamma'\Delta', E'Z', \dots$, ὅταν εἶναι

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} = \frac{EZ}{E'Z'} = \dots$$

Ἀσκήσεις

959. (991). Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ τέταρτος ἀνάλογος τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων $\alpha=6$ ἐκ., $\beta=12$ ἐκ., $\gamma=5$ ἐκ.

960. (992). Τὰ σημεῖα A, B, Γ, Δ, E κεῖνται, κατὰ τὴν σειρὰν αὐτὴν, ἐπὶ μιᾶς εὐθείας. Ἐὰν εἶναι $AB=8$ ἐκ., $B\Gamma=10$ ἐκ., $\Gamma\Delta=6$ ἐκ. καὶ ΔE ὁ τέταρτος ἀνάλογος τῶν τριῶν αὐτῶν εὐθυγράμμων τμημάτων, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μήκος AE .

961. (993). Νὰ θετοῦν ὑπὸ μορφὴν ἀναλογιῶν τὰ κάτωθι ἴσα γινόμενα:
1ον. $AB \times B\Gamma = \Gamma\Delta \times \Delta E$. 2ον. $\overline{AB}^2 = B\Gamma \times \Gamma\Delta$. 3ον. $AB \times B\Gamma = 4 \cdot \overline{\Gamma\Delta}^2$.

2. Σημεῖα τὰ ὁποῖα διαιροῦν ἕνα εὐθύγραμμον τμήμα κατὰ δοθέντα λόγον.

Γνωρίζομεν νὰ διαιροῦμεν ἕνα εὐθύγραμμον τμήμα εἰς n ἴσα μέρη (§ 219). Τὸ κατωτέρω πρόβλημα μᾶς ἐπιτρέπει νὰ διαιρέσωμεν ἕνα εὐθύγραμμον τμήμα κατὰ δοθέντα λόγον.

382. **Πρόβλημα.** Ἐπὶ μιᾶς ἀπεριορίστου εὐθείας xy δίδονται δύο ὠρισμένα σημεῖα A καὶ B καὶ ζητεῖται νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας αὐτῆς ἕνα σημεῖον M τοιοῦτον, ὥστε ὁ λόγος $\frac{MA}{MB}$ τῶν ἀποστάσεων του ἀπὸ τὰ A καὶ B νὰ ἔχη δοθεῖσαν τιμὴν $\frac{\mu}{\nu}$ διάφορον τῆς μονάδος.

Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις, καθόσον τὸ δοθὲν σημεῖον δύναται νὰ κεῖται μεταξὺ τῶν A καὶ B ἢ νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς AB .

*Ἐστω $\frac{3}{5}$ ὁ δοθεὶς λόγος.

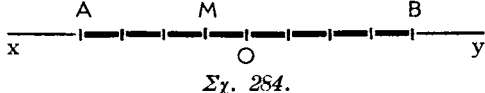
1ον Ἐὰν ὑπάρχη ἓνα τοιοῦτον σημεῖον M (Σχ. 284) μεταξὺ τῶν A καὶ B πρέπει νὰ εἶναι $\frac{MA}{MB} = \frac{3}{5}$ (1) καὶ $MA + MB = AB$ (2).

*Ἀπὸ τὴν (1) λαμβάνομεν $\frac{MA}{3} = \frac{MB}{5} = \frac{MA+MB}{3+5} = \frac{AB}{8}$.

*Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν εὐρίσκομεν

$$MA = 3 \cdot \frac{AB}{8} \quad \text{καὶ} \quad MB = 5 \cdot \frac{AB}{8}.$$

*Ἀπὸ τὰς δύο τελευταίας σχέσεις συνάγομεν, ὅτι ὑπάρχει μεταξὺ τῶν A καὶ B ἓνα σημεῖον M, τὸ ὁποῖον πληροῖ τοὺς τεθέντας ὅρους (1) καὶ (2).

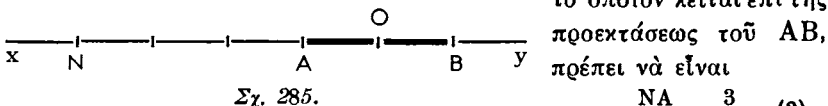


Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ διαι-

ρέσωμεν τὸ εὐθύγραμμον τμήμα AB εἰς 3+5 ἢ 8 ἴσα μέρη καὶ τὸ ζητούμενον σημεῖον εἶναι τὸ 3ον σημεῖον διαιρέσεως ἀπὸ τὸ A.

Αὐτὸ τὸ σημεῖον M εἶναι τὸ *μόνον*, τὸ ὁποῖον ἱκανοποιεῖ τὸν τεθέντα ὅρον (1), διότι ἡ ἀπόστασις του ἀπὸ τὸ A εἶναι ὠρισμένη καὶ ἴση μὲ $MA = \frac{3}{8} AB$.

2ον. Ἐὰν ὑπάρχη ἐπὶ τῆς xy (Σχ. 285) ἓνα τοιοῦτον σημεῖον N,



τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τοῦ AB, πρέπει νὰ εἶναι

$$\frac{NA}{NB} = \frac{3}{5} \quad (3).$$

*Ἐπίσης ἐπειδὴ $NA < NB$, τὸ σημεῖον N θὰ κεῖται ἀριστερὰ τοῦ σημείου A καὶ θὰ ἔχωμεν $NB - NA = AB$ (4).

*Ἀπὸ τὴν (3) ἔχομεν $\frac{NB}{NA} = \frac{5}{3}$ ἢ $\frac{NB}{5} = \frac{NA}{3} = \frac{NB-NA}{5-3} = \frac{AB}{2}$.

*Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν εὐρίσκομεν

$$NB = 5 \cdot \frac{AB}{2} \quad \text{καὶ} \quad NA = 3 \cdot \frac{AB}{2}.$$

*Ἀπὸ τὰς δύο τελευταίας σχέσεις συνάγομεν, ὅτι ὑπάρχει ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς AB καὶ πρὸς τὰ ἀριστερὰ τοῦ A ἓνα σημεῖον N, τὸ ὁποῖον πληροῖ τοὺς τεθέντας ὅρους.

Πρὸς εὐρεσιν τούτου ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸ εὐθύγραμμον τμήμα AB εἰς 5-3 ἢ 2 ἴσα μέρη καὶ τὸ ζητούμενον σημεῖον N θὰ εὐρεθῇ ἐπὶ τῆς xy, ἐὰν λάβωμεν ἐπὶ τῆς Ax ἓνα τμήμα AN ἴσον μὲ 3 μέρη ἴσα πρὸς αὐτά.

Αὐτὸ τὸ σημεῖον N εἶναι τὸ *μόνον*, τὸ ὁποῖον ἱκανοποιεῖ τὸν τε-
θθέντα ὅρον (3), διότι ἡ ἀπόστασις τοῦ NA ἀπὸ τοῦ σημείου A εἶναι
ὠρισμένη καὶ ἴση μὲ $NA = \frac{3}{2} \cdot AB$.

Ὅμοιως ἐργαζόμεθα, ἐὰν ὁ δοθεὶς λόγος εἶναι μεγαλύτερος τῆς
μονάδος.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὰ κάτωθι :

Συμπέρασμα : Ἐὰν δίδωνται δύο σημεία A καὶ B ἐπὶ μιᾶς
ἀπεριορίστου εὐθείας xy , ὑπάρχουν ἐπὶ τῆς εὐθείας αὐτῆς δύο
σημεία M καὶ N καὶ δύο *μόνον*, τὰ ὁποῖα διαιροῦν τὸ εὐθύγραμ-
μον τμήμα AB κατὰ δοθέντα λόγον $\frac{\mu}{\nu}$, διάφορον τῆς μονάδος.

Τὸ ἓνα ἐξ αὐτῶν, τὸ M , κεῖται μεταξὺ τῶν A καὶ B καὶ διαιρεῖ
τὸ εὐθύγραμμον τμήμα εἰς δύο τμήματα MA καὶ MB , τῶν ὁποίων τὸ
ἄθροισμα εἶναι ἴσον μὲ AB .

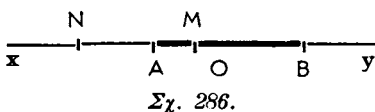
Τὸ ἄλλο, τὸ N , διαιρεῖ ἔξωτερικῶς τὸ εὐθύγραμμον τμήμα AB
εἰς δύο τμήματα NB καὶ NA , τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ εἶναι ἴση μὲ AB .

Καὶ τὰ δύο σημεία M καὶ N κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος, ὡς πρὸς
τὸ μέσον O τοῦ τμήματος AB · πρὸς τὰ ἀριστερὰ μὲν τοῦ μέσου, ὅταν
ὁ δοθεὶς λόγος εἶναι μικρότερος τῆς μονάδος, πρὸς τὰ δεξιὰ δὲ τοῦ μέ-
σου, ὅταν ὁ λόγος εἶναι μεγαλύτερος τῆς μονάδος.

383. Σπουδαία παρατήρησις. 1^{ον}. Ἐὰν δύο σημεία M καὶ M'
κεῖνται μεταξὺ τῶν A καὶ B καὶ διαιροῦν τὸ εὐθύγραμμον τμήμα AB
κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον, τὰ σημεία αὐτὰ συμπίπτουν.

2^{ον}. Ἐὰν δύο σημεία N καὶ N' κεῖνται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως
τοῦ AB καὶ διαιροῦν τὸ AB κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον, τὰ σημεία αὐτὰ
συμπίπτουν.

384. Ὅρισμί. Ἔστω ἓνα εὐθύγραμμον τμήμα AB (Σχ. 286)



τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ μιᾶς ἀπεριο-
ρίστου εὐθείας xy καὶ ἐπὶ τῆς xy
δύο σημεία M καὶ N καὶ τοιαῦτα,
ὥστε $\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = \frac{\mu}{\nu}$.

Λέγομεν ἀδιαφόρως, ὅτι : 1^{ον}. Τὰ M καὶ N διαιροῦν τὸ AB κατὰ
τὸν αὐτὸν λόγον.

2^{ον}. Τὰ M καὶ N διαιροῦν ἀρμονικῶς τὸ εὐθύγραμμον τμή-
μα AB .

3^{ον}. Τὰ M καὶ N εἶναι συζυγῆ ἀρμονικὰ πρὸς τὰ A καὶ B .

4ον. Τὰ σημεῖα A, B, M, N σχηματίζουν μίαν ἄρμονικὴν διαίρεσιν.

Ἐσκήσεις

962. (994). Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας λαμβάνομεν τέσσαρα σημεῖα A, A', B', B κατὰ τὴν σειρὰν καθ' ἣν ἐκφωνοῦνται καὶ τοιαῦτα, ὥστε νὰ εἶναι $AA'=6$ ἐκ., $A'B'=12$ ἐκ., $B'B=2$ ἐκ. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τοῦ τμήματος $A'B'$ ἓνα σημεῖον M τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι $\frac{MA}{MB} = \frac{MA'}{MB'}$.

963. (995). Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας λαμβάνομεν τὰ σημεῖα A, B, Γ, Δ κατὰ τὴν τάξιν καθ' ἣν ἐκφωνοῦνται καὶ τοιαῦτα, ὥστε νὰ εἶναι $AB=6, B\Gamma=2, \Gamma\Delta=4$, Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τοῦ τμήματος $A\Gamma$ λαμβάνομεν ἓνα σημεῖον M τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι $\frac{MA}{M\Gamma} = \frac{5}{3}$. Ἐπίσης λαμβάνομεν ἓνα σημεῖον M' μεταξὺ τῶν B καὶ Γ καὶ τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι $\frac{M'B}{M'\Gamma} = \frac{5}{3}$. Ἐὰν O καὶ O' εἶναι τὰ μέσα τῶν AB καὶ $\Gamma\Delta$, νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ λόγοι $\frac{MO}{MO'}$ καὶ $\frac{M'O}{M'O'}$.

964. (996). Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας xy λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον A ἀπὸ τὸ σημεῖον A λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς xy καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ A τμήματα $AB=8$ ἐκ., $A\Gamma=6$ ἐκ., $A\Delta=12$ ἐκ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ εἶναι συζυγῆ ἄρμονικὰ πρὸς τὰ A καὶ B .

965. (997). Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας λαμβάνομεν εὐθύγραμμον τμήμα $AB=8$ ἐκ. καὶ δύο σημεῖα M καὶ M' καὶ τοιαῦτα, ὥστε νὰ εἶναι

$$\frac{MA}{MB} = \frac{M'A}{M'B} = \frac{3}{2}.$$

1ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ τμήματα $MA, MB, M'A, M'B$.

2ον. Ἐὰν O εἶναι τὸ μέσον τοῦ AB , νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι

$$OM \times OM' = \overline{OA}^2.$$

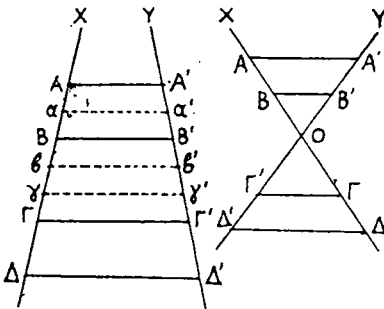
966. (998). Μία εὐθεῖα AB εἶναι διηρημένη εἰς 24 ἴσα μέρη. Ἐὰν τὸ Γ εἶναι τὸ μέσον τῆς AB , νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λόγος $\frac{MA}{M\Gamma}$, ὅταν τὸ Γ καταλαμβάνη διαδοχικῶς τὰς διαιρέσεις 9 καὶ 10 καὶ νὰ εὑρεθοῦν αἱ διαιρέσεις, τὰς ὁποίας καταλαμβάνει τὸ συζυγὲς ἄρμονικὸν M' τοῦ M πρὸς τὰ σημεῖα A καὶ Γ .

967. (999). Νὰ εὑρεθοῦν τὰ δύο σημεῖα Γ καὶ Δ , τὰ ὁποῖα διαιροῦν ἄρμονικῶς μίαν εὐθεῖαν $AB=24$ ἐκ. κατὰ τὸν λόγον 3 πρὸς 5 καὶ νὰ ἀποδειχθῇ ἀριθμητικῶς, ὅτι καὶ τὰ σημεῖα A καὶ B διαιροῦν ἄρμονικῶς τὴν εὐθεῖαν $\Gamma\Delta$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΟΥ ΘΑΛΗ. ΕΦΑΡΜΟΓΑΙ ΤΩΝ ΑΝΑΛΟΓΙΩΝ

385. **Θεώρημα.** Ἐάν δύο τυχοῦσαι εὐθεῖαι τέμνονται ὑπὸ παραλλήλων εὐθειῶν, ὁ λόγος δύο τυχόντων τμημάτων τῆς πρώτης εὐθείας εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν ἀντιστοιχῶν τμημάτων τῆς δευτέρας εὐθείας.



Σχ. 287.

Ἐπίσης: Ἐστῶσαν αἱ εὐθεῖαι X καὶ Y, αἱ ὁ-

Ἐπίσης:	$AA' \parallel BB' \parallel \Gamma\Gamma'$
Συμπ.	$\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{A'B'}{B'\Gamma'}$

ποῖαι τέμνονται ὑπὸ τῶν παραλλήλων εὐθειῶν AA', BB', ΓΓ', ΔΔ'

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{A'B'}{B'\Gamma'}$.

Ἀπόδειξις: 1ον. Ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι τὰ εὐθύγραμμα τμήματα AB καὶ BΓ ἔχουν ἓνα κοινὸν μέτρον, τὸ ὁποῖον περιέχεται 2 φορές εἰς τὸ AB καὶ 3 φορές εἰς τὸ BΓ· τότε θὰ εἶναι $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{2}{3}$ (1)

Διαιροῦμεν τὸ AB εἰς δύο ἴσα μέρη τὰ Aα καὶ αB καὶ τὸ BΓ εἰς τρία ἴσα μέρη τὰ Bβ=βγ=γΓ. Ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως α, β, γ, φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὴν AA', αἱ ὁποῖαι τέμνουσιν τὴν Y εἰς τὰ σημεῖα α', β', γ'.

Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $A\alpha = \alpha B = B\beta = \beta\gamma = \gamma\Gamma$.

Ἐπειδὴ αἱ παράλληλοι AA', αα', . . . ὀρίζουν ἴσα τμήματα ἐπὶ τῆς εὐθείας X, θὰ ὀρίζουν ἴσα τμήματα καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας Y, τὴν ὁποίαν τέμνουσιν (§ 217) ἤτοι θὰ εἶναι

$$A'a' = a'B' = B'\beta' = \beta'\gamma' = \gamma'\Gamma'$$

Ἀλλὰ ἡ A'B' περιέχει 2 καὶ ἡ B'Γ' 3 ἀπὸ τὰ ἴσα αὐτὰ τμήματα καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι $\frac{A'B'}{B'\Gamma'} = \frac{2}{3}$ (2)

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι

$$\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{A'B'}{B'\Gamma'} \quad (3)$$

2ον. Ἐὰν τὰ εὐθύγραμμα τμήματα AB καὶ $B\Gamma$ δὲν ἔχουν κοινὸν μέτρον, θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ τιμαὶ τῶν λόγων $\frac{AB}{B\Gamma}$ καὶ $\frac{A'B'}{B'\Gamma'}$ εἶναι αἱ αὐταὶ κατὰ προσέγγισιν.

Πράγματι· ἄς διαιρέσωμεν τὸ εὐθύγραμμον τμήμα $B\Gamma$ εἰς 7 ἴσα μέρη καὶ ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ AB περιέχει 4 ἀπὸ τὰ ἴσα αὐτὰ μέρη, καὶ κάτι ἀκόμη, ἀλλὰ δὲν περιέχει 5 ἀπὸ αὐτὰ τὰ μέρη.

Οἱ ἀριθμοὶ $\frac{4}{7}$ καὶ $\frac{5}{7}$ εἶναι αἱ πλησιάζουσαι τιμαὶ τοῦ λόγου $\frac{AB}{B\Gamma}$ κατὰ προσέγγισιν $\frac{1}{7}$. δηλ. θὰ εἶναι

$$\frac{4}{7} < \frac{AB}{B\Gamma} < \frac{5}{7} \quad (1)$$

Ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὴν AA' , αἱ ὁποῖαι ὀρίζουν 7 ἴσα τμήματα ἐπὶ τῆς $B'\Gamma'$ καὶ 5 τμήματα ἐπὶ τῆς $A'B'$. Τὰ 4 πρῶτα τμήματα τῆς $A'B'$ εἶναι ἴσα μὲ τὰ τμήματα τῆς $B'\Gamma'$ καὶ τὸ τελευταῖον εἶναι μικρότερον ἀπὸ αὐτά. Ἄρα τὸ $\frac{1}{7}$ τῆς $B'\Gamma'$ περιέχεται 4 φορές εἰς τὸ τμήμα $A'B'$, ἀλλὰ δὲν περιέχεται 5 φορές· δηλ. θὰ εἶναι πάλιν $\frac{4}{7} < \frac{A'B'}{B'\Gamma'} < \frac{5}{7}$ (2)

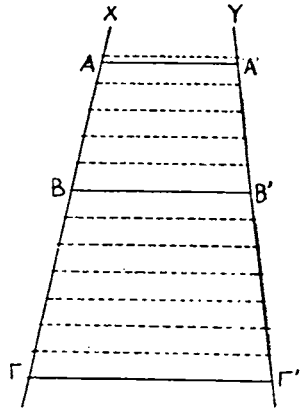
Καὶ εἰς τὰς δύο σχέσεις (1) καὶ (2) οἱ ἄκροι λόγοι διαφέρουν κατὰ

$$\frac{5}{7} - \frac{4}{7} = \frac{1}{7}.$$

Ἀλλὰ ἡ διαφορὰ αὕτη $\frac{1}{7}$ δύναται νὰ γίνῃ ὅσονδῆποτε μικρὰ θέλομεν, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸ εὐθύγραμμον τμήμα $B\Gamma$ εἰς ἓνα μεγάλον ἀριθμὸν ἴσων μερῶν.

Οἱ λόγοι λοιπὸν $\frac{AB}{B\Gamma}$ καὶ $\frac{A'B'}{B'\Gamma'}$, οἱ ὁποῖοι περιέχονται μεταξὺ τῶν δύο τιμῶν $\frac{4}{7}$ καὶ $\frac{5}{7}$, αἱ ὁποῖαι διαφέρουν τόσον ὀλίγον, ὅσον θέλομεν, θὰ διαφέρουν μεταξύ των κατὰ μίαν ποσότητα, ἡ ὁποία τείνει πρὸς τὸ μηδὲν καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι ἴσοι. Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{A'B'}{B'\Gamma'}.$$



Σχ. 288.

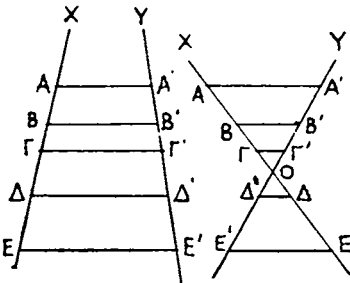
Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Ἐὰν δύο τυχοῦσαι εὐθεῖαι. . . .**

386. Παρατήρησις. Ἀπὸ τὴν ἀναλογίαν $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{A'B'}{B'\Gamma'}$, τὴν ὁποίαν εὐρήκαμεν εἰς τὴν § 385 λαμβάνομεν, κατὰ γνωστὴν ἰδιότητα τῶν ἀναλογιῶν, τὴν ἀναλογίαν

$$\frac{AB}{AB+B\Gamma} = \frac{A'B'}{A'B'+B'\Gamma'} \quad \eta \quad \frac{AB}{A\Gamma} = \frac{A'B'}{A'\Gamma'}$$

387. Πόρισμα. Ἐὰν δύο τυχοῦσαι εὐθεῖαι τέμνονται ὑπὸ παραλλήλων εὐθειῶν, ὅλα τὰ τμήματα τὰ ὀριζόμενα ἐπὶ τῆς πρώτης εὐθείας ὑπὸ τῶν παραλλήλων, εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ ἀντίστοιχα τμήματα, τὰ ὀριζόμενα ἐπὶ τῆς δευτέρας εὐθείας.

Ἐπίθεσις: Ἐστώσαν αἱ εὐθεῖαι X καὶ Y, αἱ ὁποῖαι τέμνονται ὑπὸ τῶν παραλλήλων εὐθειῶν AA', BB', ΓΓ',



Σχ. 289.

Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι $\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{B\Delta}{B'\Delta'} = \dots$

Ἀπόδειξις: Κατὰ τὸ θεώρημα § 385 θὰ εἶναι

$$\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{A'B'}{B'\Gamma'}$$

Ἄς ἀλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν μέσων ὄρων τῆς ἀναλογίας αὐτῆς,

$$\theta\acute{\alpha} \acute{\epsilon}\chi\omega\mu\epsilon\upsilon\upsilon \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} \quad (1)$$

Ὅμοίως ἀπὸ τὴν ἀναλογίαν $\frac{AB}{B\Delta} = \frac{A'B'}{B'\Delta'}$ λαμβάνομεν

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Delta}{B'\Delta'} \quad (2)$$

Ἀπὸ τὰς σχέσεις (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{B\Delta}{B'\Delta'}$$

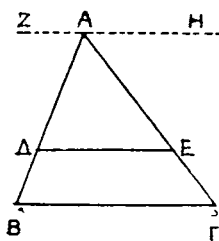
Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Ἐὰν δύο τυχοῦσαι εὐθεῖαι. . . .**

Σημ. Ὅταν λέγωμεν ἀντίστοιχα τμήματα, ἐννοοῦμεν τὰ τμήματα τῶν τεμνομένων εὐθειῶν, τὰ ὁποῖα περιέχονται μεταξὺ τῶν αὐτῶν παραλλήλων.

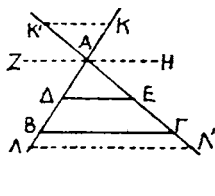
388. Θεώρημα τοῦ Θαλῆ(*). Κάθε παράλληλος εὐθεῖα πρὸς μίαν ἀπὸ τὰς πλευρὰς ἐνὸς τριγώνου διαιρεῖ τὰς δύο ἄλλας πλευρὰς τοῦ εἰς μέρη ἀνάλογα.

(*) Ὁ Θαλῆς ὁ Μιλήσιος (637—548 π.Χ.) ἦτο ἓνας ἀπὸ τοὺς ἐπὶ πέντε σοφοὺς τῆς ἀρχαιότητος. Εἰς τὸν Θαλῆν ἀποδίδονται αἱ πρῶται ἐργασίαι ἐπὶ τῆς ὁμοιότητος.

Ἐπίθεσις: Ἐστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (Σχ. 290 α) καὶ ΔΕ μία εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ.



α



β

Σχ. 290.

Ἐπίθεσις.	$\Delta E // B\Gamma$
Συμπ.	$\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{A E}{E\Gamma}$

Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι $\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{A E}{E\Gamma}$.

Ἀπόδειξις: Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α τοῦ τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΗ παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ. Ἡ ΑΗ θὰ εἶναι παράλληλος καὶ πρὸς τὴν ΔΕ.

Ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΑΓ τέμνονται ὑπὸ τῶν παραλλήλων εὐθειῶν ΑΗ, ΔΕ, ΒΓ, θὰ εἶναι (§ 385).

$$\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{A E}{E\Gamma}$$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Κάθε παράλληλος εὐθεῖα...**

389. Παρατηρήσεις: I. Κατὰ τὴν § 386, θὰ εἶναι

$$1ον. \frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{A E}{E\Gamma}, \quad \frac{\Delta B}{\Delta A} = \frac{E\Gamma}{A E}, \quad \frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{A E}{E\Gamma}$$

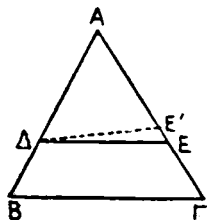
$$2ον. \frac{A\Delta}{A E} = \frac{\Delta B}{E\Gamma} = \frac{\Delta B}{\Delta A}$$

II Τὸ θεώρημα τῆς § 388 εἶναι ἀληθὲς καὶ εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν ἡ παράλληλος συναντᾷ τὰς προεκτάσεις τῶν δύο πλευρῶν τοῦ τριγώνου, εἴτε πρὸς τὸ μέρος τῆς κορυφῆς, εἴτε πρὸς τὸ μέρος τῆς βάσεως του (Σχ. 290 β): δηλ. θὰ εἶναι πάντοτε:

$$\frac{A K}{A B} = \frac{A K'}{A\Gamma}, \quad \frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{A\Delta'}{A\Gamma'}$$

390. Θεώρημα. (Ἀντίστροφον). Ἐὰν μία εὐθεῖα τέμνη δύο πλευρὰς τριγώνου εἰς μέρη ἀνάλογα, ἡ εὐθεῖα αὐτὴ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τρίτην πλευρὰν τοῦ τριγώνου.

Ἐπίθεσις: Ἐστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (Σχ. 291)



Σχ. 291.

καὶ ΔΕ μία εὐθεῖα, ἡ ὁποία τέμνει τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε ἀντιστοίχως καὶ τοιαύτη,

ὥστε νὰ εἶναι $\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{A E}{E\Gamma}$ (1)

Ἐπίθεσις.	$\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{A E}{E\Gamma}$
Συμπ.	$\Delta E // B\Gamma$

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ ΔΕ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ.

Ἀπόδειξις: Ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ ΔΕ δὲν ἦτο παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ, θὰ ἦτο μία ἄλλη εὐθεῖα, ἔστω ἡ ΔΕ'

Ἐπειδὴ ἡ ΔΕ' εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ, θὰ ἔχωμεν (§ 385)

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE'}{E'B} \quad (2)$$

Ἀλλὰ ἐξ ὑποθέσεως ἔχομεν καὶ τὴν σχέσιν (1).

Ἀπὸ τὰς (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι

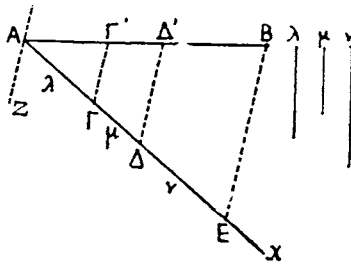
$$\frac{AE}{E'B} = \frac{AE'}{E'B} \quad \eta \quad \frac{EA}{E'B} = \frac{E'A}{E'B} \quad (3)$$

Ἐπειδὴ τὰ δύο σημεῖα Ε' καὶ Ε κείνται μεταξύ τῶν Α καὶ Β καὶ διαιροῦν τὴν ΑΒ εἰς μέρη, τὰ ὅποια ἔχουν τὸν αὐτὸν λόγον, ἔπεται (§ 383) ὅτι τὰ σημεῖα Ε' καὶ Ε συμπίπτουν· δηλ. ἡ παράλληλος ΔΕ' συμπίπτει μὲ τὴν ΔΕ καὶ ἐπομένως ἡ ΔΕ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Ἐὰν μία εὐθεῖα τέμνη...**

391. Ἐφαρμογαί. Πρόβλημα I. Νὰ διαιρεθῇ δοθεῖσα εὐθεῖα ΑΒ εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς δοθέντα εὐθύγραμμα τμήματα λ, μ, ν.

Ἀπὸ τὸ σημεῖον Α τῆς εὐθείας ΑΒ φέρομεν τυχούσαν ἡμιευθεῖαν Αχ ἐπὶ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν κατὰ σειράν τὰ μήκη



Σχ. 292.

ΑΓ=λ, ΓΔ=μ, ΔΕ=ν. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΕΒ καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα Γ, Δ φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὴν ΕΒ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν ΑΒ εἰς τὰ σημεῖα Γ' καὶ Δ'. Τὰ τμήματα ΑΓ', Γ'Δ', Δ'Β εἶναι τὰ ζητούμενα.

Πράγματι· αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ Αχ τέμνονται ὑπὸ τῶν παραλλήλων ΓΓ', ΔΔ', ΕΒ καὶ ἐπομένως ὅλα τὰ τμήματα τῆς μιᾶς εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ ἀντίστοιχα τμήματα τῆς ἄλλης· δηλ. θὰ εἶναι

$$\frac{AG'}{A\Gamma} = \frac{G'D'}{G\Delta} = \frac{D'B}{\Delta E} \quad \eta \quad \frac{AG'}{\lambda} = \frac{G'D'}{\mu} = \frac{D'B}{\nu}$$

Σημ. Ἐὰν θέλωμεν νὰ διαιρέσωμεν μίαν εὐθεῖαν εἰς μέρη ἀνάλογα ἀριθμῶν. π.χ. τῶν 3, 2, 4, λαμβάνομεν αὐθαιρέτως ἓνα εὐθύγραμμον τμήμα ὡς μονάδα καὶ κατασκευάζομεν τρία εὐθύγραμμα τμή-

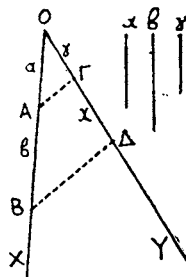
ματα ἀντιστοιχῶς ἴσα μὲ 3 φορές, 2 φορές, 4 φορές τὴν μονάδα αὐτὴν καὶ ἔπειτα ἐργαζόμεθα, ὡς ἐδείχθη ἀνωτέρω.

392. Πρόβλημα II. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν τριῶν εὐθειῶν α, β, γ.

Λύσις. Πρέπει νὰ εὗρωμεν ἓνα εὐθύγραμμον τμήμα x τοιοῦτον,

ὥστε νὰ εἶναι $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{x}$.

Κατασκευάζομεν τυχοῦσαν γωνίαν XOY καὶ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς OX λαμβάνομεν διαδοχικῶς τμήματα OA=α καὶ AB=β καὶ ἐπὶ τῆς ἄλλης πλευρᾶς OY τμήμα OΓ=γ. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΓ καὶ ἀπὸ τὸ Β παράλληλον πρὸς τὴν ΑΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν πλευρὰν OY εἰς τὸ σημεῖον Δ. Τὸ τμήμα ΓΔ εἶναι ἡ ζητουμένη τετάρτη ἀνάλογος τῶν α, β, γ.



Σχ. 293.

Πράγματι ἔπειδὴ αἱ εὐθεῖαι ΑΓ καὶ ΒΔ εἶναι παράλληλοι καὶ τέμνουσιν τὰς εὐθείας OX καὶ OY, θὰ εἶναι

$$\frac{OA}{AB} = \frac{OG}{GD} \quad \eta \quad \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{x}$$

Ἀσκήσεις

Α' Ὁμάς. 968. (1000). Τέσσαρες παράλληλοι εὐθεῖαι ὀρίζουν ἐπὶ μιᾶς εὐθείας τμήματα 3 ἐκ., 5 ἐκ., 8 ἐκ. Ποῖα μῆκη θὰ ὀρίζουν ἐπὶ μιᾶς ἄλλης εὐθείας 60 ἐκ.;

969. (1001). Εἰς ἓνα τραπέζιον ΑΒΓΔ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΕΖ παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις ΑΒ καὶ ΓΔ καὶ κειμένην μεταξὺ τῶν δύο βάσεων. Ἐὰν εἶναι ΑΔ=10 ἐκ., ΑΕ=8 ἐκ., ΒΓ=15 ἐκ., νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ΒΖ.

970. (1002). Εἰς ἓνα τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ΑΒ=30 ἐκ., ΒΓ=45 ἐκ. Ἀπὸ ἓνα σημεῖον Δ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τῆς ΑΒ φέρομεν παράλληλον ΔΕ πρὸς τὴν ΑΓ. Ἐὸν εἶναι ΑΔ=9 ἐκ., νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ τμήματα ΒΕ, ΕΓ.

971. (1003). Δύο εὐθεῖαι x'x καὶ y'y τέμνονται εἰς ἓνα σημεῖον O. Ἐπὶ τῆς Ox λαμβάνομεν τμήμα OA=8 ἐκ., ἐπὶ τῆς Oy ἓνα τμήμα OB=2 ἐκ. καὶ ἐπὶ τῆς Ox' ἓνα τμήμα OA'=12 ἐκ. Ἀπὸ τὸ Α' φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν Oy' εἰς τὸ Β'. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ OB'.

972. (1004). Δύο πλευραὶ ἐνὸς τριγώνου εἶναι ΑΒ=54 ἐκ. καὶ ΑΓ=63 ἐκ. Ἐπὶ τῆς ΑΒ λαμβάνομεν τμήμα ΑΔ=40 ἐκ. Ποῖον τμήμα ΑΕ πρέπει νὰ λάβωμεν ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΓΕ οὕτως, ὥστε ἡ εὐθεῖα ΔΕ νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ.

Β' Ὁμάς. 973. (1005). Εἰς ἓνα τρίγωνον ΑΒΓ ἡ παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ τέμνει τὰς ἄλλας πλευρὰς του εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε, ἡ δὲ ἀπὸ τὸ Ε πα-

ράλληλος πρὸς τὴν AB τέμνει τὴν $BΓ$ εἰς τὸ Z . Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι

$$\frac{AD}{BD} = \frac{BZ}{ZΓ}.$$

974. (1006). Εἰς ἓνα τρίγωνον $ABΓ$ φέρομεν τὴν διάμεσον AD καὶ ἔστω E τὸ μέσον αὐτῆς. Φέρομεν τὴν εὐθείαν BE , ἡ ὁποία τέμνει τὴν AG εἰς τὸ σημεῖον Z . Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι $\frac{AZ}{ZΓ} = \frac{1}{2}$.

975. (1007). Δίδεται ἓνα τρίγωνον $ABΓ$. ἀπὸ δύο τυχόντα σημεῖα Δ καὶ Δ' τῆς πλευρᾶς $BΓ$ φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὴν πλευρὰν AB , αἱ ὁποῖαι τέμνουσιν τὴν AG εἰς τὰ σημεῖα E καὶ E' . Ἐπίσης ἀπὸ τὰ Δ καὶ Δ' φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὴν πλευρὰν AG , αἱ ὁποῖαι τέμνουσιν τὴν AB εἰς τὰ σημεῖα Z καὶ Z' . Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι $\frac{EE'}{ZZ'} = \frac{AG}{BΓ}$.

976. (1008). Δίδεται μία γωνία $\alpha O\gamma$. Ἐπὶ τῆς $O\alpha$ λαμβάνομεν δύο τυχόντα σημεῖα A καὶ B ($OB > OA$) καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα αὐτὰ φέρομεν δύο παραλλήλους, αἱ ὁποῖαι τέμνουσιν τὴν πλευρὰν $O\gamma$ εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ' φέρομεν τὴν εὐθείαν ΓB καὶ ἀπὸ τὸ Δ παράλληλον πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$, ἡ ὁποία τέμνει τὴν $O\alpha$ εἰς τὸ σημεῖον E . Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι $OB^2 = OA \times OE$.

977. (1009). Εἰς ἓνα τρίγωνον $ABΓ$ φέρομεν τὴν διάμεσον AD καὶ μίαν παράλληλον πρὸς τὴν AD , ἡ ὁποία τέμνει τὴν $BΓ$ εἰς τὸ E , τὴν AG εἰς τὸ Z καὶ τὴν AB εἰς τὸ H . Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι $\frac{AH}{AZ} = \frac{AB}{AG}$.

978. (1010). Ἀπὸ τὸ μέσον Δ τῆς πλευρᾶς $BΓ$ ἑνὸς τριγώνου $ABΓ$ φέρομεν μίαν εὐθείαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν AB εἰς τὸ B' καὶ τὴν AG εἰς τὸ Γ' . Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι $\frac{B'A}{B'B} = \frac{\Gamma'A}{\Gamma'\Gamma}$.

979. (1011). Εἰς ἓνα τραπέζιον $ABΓ\Delta$ φέρομεν τὰς διαγωνίους τοῦ AG καὶ BD , αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον E . Ἀπὸ τὸ E φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς πλευρὰς AD καὶ $BΓ$, αἱ ὁποῖαι τέμνουσιν τὴν βάσιν AB εἰς τὰ σημεῖα A' καὶ B' . Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι $AA' = BB'$.

Γ' Ὀμάς. 980. (1012). Δίδεται ἓνα παραλληλόγραμμον $ABΓ\Delta$. ἀπὸ τὸ Γ φέρομεν μίαν εὐθείαν, ἡ ὁποία διαιρεῖ τὴν διαγώνιον BD εἰς δύο μέρη BE καὶ ED ἐκ τῶν ὁποίων τὸ BE εἶναι τετραπλάσιον τοῦ ἄλλου DE . Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι ἡ τέμνουσα αὐτὴ διαιρεῖ τὴν AD εἰς δύο μέρη, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἓνα εἶναι τριπλάσιον τοῦ ἄλλου.

981. (1013). Δίδονται δύο τρίγωνα $ABΓ$ καὶ $A'B'\Gamma'$. Ὑποθέτομεν ὅτι αἱ εὐθεῖαι AA' , BB' , $\Gamma\Gamma'$, αἱ ὁποῖαι συνδέουσιν τὰς κορυφὰς τῶν ἀνὰ δύο τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον O , καὶ ὅτι αἱ AB καὶ $A'B'$, καθὼς καὶ αἱ AG καὶ $A'\Gamma'$ εἶναι παράλληλοι. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι αἱ $BΓ$ καὶ $B'\Gamma'$ εἶναι παράλληλοι.

982. (1014). Εἰς ἓνα τρίγωνον $ABΓ$ φέρομεν τὴν διάμεσον AD ἀπὸ τυχὸν σημεῖον A' τῆς διαμέσου αὐτῆς φέρομεν παραλλήλους $A'B'$ καὶ $A'\Gamma'$ πρὸς τὰς πλευρὰς AB καὶ AG , αἱ ὁποῖαι τέμνουσιν τὴν $BΓ$ εἰς τὰ σημεῖα B' καὶ Γ' . Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι ἡ $A'\Delta$ εἶναι διάμεσος τοῦ τριγώνου $A'B'\Gamma'$.

983. (1015). Ἐὰν ἀπὸ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέσων ἑνὸς τριγώνου φέρωμεν παράλληλον πρὸς μίαν πλευρὰν του, ἡ παράλληλος αὐτὴ διαιρεῖ ἐκά-

στην τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του εἰς τμήματα, τὰ ὅποια ἔχουν λόγον 2.

984. (1016). Ἐνα τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἕνα κύκλον Ο. Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α φέρομεν τὴν διάμετρον ΑΕ, ἡ ὅποια τέμνει τὴν πλευρὰν ΒΓ εἰς τὸ σημεῖον Δ. Ἀπὸ τὸ Δ φέρομεν τὰς καθέτους ΔΖ καὶ ΔΗ ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΖΗ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ.

985. (1017). Εἰς ἕνα τυχὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ λαμβάνομεν ἕνα σημεῖον Ε ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΔ. Ἀπὸ τὸ Ε φέρομεν τὴν παράλληλον ΕΖ πρὸς τὴν ΓΔ ἡ ὅποια τέμνει τὴν διαγώνιον ΑΓ εἰς τὸ Ζ καὶ ἔπειτα τὴν παράλληλον ΖΗ πρὸς τὴν ΓΒ.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $EA \times BH = \Delta E \times AH$.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ ΔΒ καὶ ΕΗ εἶναι παράλληλοι.

2. Ἰδιότης τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν ἐνὸς τριγώνου.

393. Θεώρημα. Ἡ διχοτόμος μιᾶς γωνίας ἐνὸς τριγώνου τέμνει τὴν ἀπέναντι πλευρὰν εἰς δύο μέρη ἀνάλογα τῶν προσκειμένων εἰς αὐτὰ πλευρῶν τῆς γωνίας.

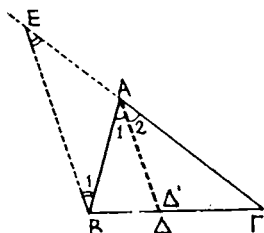
Ἐπίπεδος: Ἐστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (Σχ. 294) καὶ ΑΔ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Α.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma} \quad (1)$$

Ἀπόδειξις:

Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Β φέρομεν εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν διχοτόμον ΑΔ, ἡ ὅποια τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς ΓΑ εἰς τὸ σημεῖον Ε.



Σχ. 294.

Ἐπίπεδος.	$A_1 = A_2$
Συμπ.	$\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}$

Ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι ΓΒ καὶ ΓΕ τέμνονται ὑπὸ τῶν παραλλήλων ΑΔ καὶ ΕΒ, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma} = \frac{AE}{A\Gamma} \quad (2)$$

Διὰ νὰ φθάσωμεν ἀπὸ τὴν σχέσιν (2) εἰς τὴν σχέσιν (1) πρέπει νὰ δείξωμεν, ὅτι $AE = AB$, δηλ. πρέπει νὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΕΒ εἶναι ἰσοσκελές.

Πράγματι ἡ γωνία Β, εἶναι ἴση μὲ τὴν A_1 , ὡς ἐντὸς ἐναλλὰξ τῶν παραλλήλων ΕΒ καὶ ΑΔ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΒ. Ἀλλὰ καὶ αἱ γωνίαι Ε καὶ A_2 εἶναι ἴσαι, ὡς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν

αὐτῶν παραλλήλων, τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΕΓ. Ἀλλὰ αἱ γωνίαι A_1 καὶ A_2 εἶναι ἴσαι, διότι ἡ ΑΔ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Α· ἄρα καὶ αἱ ἴσαι πρὸς αὐτὰς B_1 καὶ E θὰ εἶναι ἴσαι. Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΑΕΒ εἶναι ἰσοσκελές, διότι αἱ γωνίαι τοῦ Β₁ καὶ Ε εἶναι ἴσαι· ἄρα θὰ εἶναι $AE=AB$.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (2), τὸ ΑΕ μὲ τὸ ἴσον τοῦ ΑΒ καὶ ἔχομεν

$$\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma} = \frac{AB}{\Lambda \Gamma}.$$

Ἐδείχθη λοιπὸν, ὅτι: **Ἡ διχοτόμος μιᾶς γωνίας...**

394. Θεώρημα. (Ἀντίστροφον). *Ἐὰν μία εὐθεΐα ΑΔ, (Σχ. 294) ἢ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α ἐνὸς τριγώνου ΑΒΓ, διαιρῇ τὴν ἀπέναντι πλευρὰν ΒΓ εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε $\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma} = \frac{AB}{\Lambda \Gamma}$, ἢ ΑΔ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Α.*

Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι

$$\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma} = \frac{AB}{\Lambda \Gamma} \quad (1)$$

Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι ἡ ΑΔ εἶ-

ναι διχοτόμος τῆς γωνίας Α.

Ἀπόδειξις: Ἐὰν ἡ ΑΔ δὲν ἦτο διχοτόμος τῆς γωνίας Α, θὰ ἦτο μία ἄλλη, ἔστω ἡ ΑΔ'. ἐπειδὴ ἡ ΑΔ' εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Α, θὰ εἶναι (§ 393)

$$\frac{\Delta' B}{\Delta' \Gamma} = \frac{AB}{\Lambda \Gamma} \quad (2)$$

Ἀλλὰ ἐξ ὑποθέσεως ἔχομεν καὶ τὴν ἰσότητα (1). Ἀπὸ τὰς ἰσότη-
τας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι $\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma} = \frac{\Delta' B}{\Delta' \Gamma}$ (3)

Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὴν ἰσότητα (3), τὰ σημεῖα Δ καὶ Δ' διαιροῦν τὴν ΒΓ εἰς δύο μέρη, τὰ ὁποία ἔχουν τὸν αὐτὸν λόγον καὶ κεῖνται μεταξὺ τῶν Β καὶ Γ· ἄρα (§ 383) τὰ Δ καὶ Δ' θὰ συμπίπτουν, ὁπότε ἡ ΑΔ θὰ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Α.

Ἐδείχθη λοιπὸν, ὅτι: **Ἐὰν μία εὐθεΐα...**

395. Πρόβλημα. *Νὰ ὑπολογισθοῦν, συναρτήσῃ τῶν πλευρῶν ἐνὸς τριγώνου ΑΒΓ, τὰ δύο τμήματα, εἰς τὰ ὁποία διαιρεῖται ἡ πλευρὰ ΒΓ ὑπὸ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Α.*

Ἐφαρμογή: $\alpha=5, \beta=4, \gamma=6$.

Ἐστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (Σχ. 294) καὶ ΑΔ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Α. Ἐὰν εἶναι $B\Gamma=\alpha, \Gamma A=\beta, AB=\gamma$, ζητεῖται νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ μήκη ΔΒ καὶ ΔΓ.

Γνωρίζομεν (§ 393), ὅτι $\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}$ ἢ $\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma} = \frac{\gamma}{\beta}$ (1)

Ἐὰν ἀλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν μέσων ὄρων τῆς ἀναλογίας (1) λαμβάνομεν τὴν ἀναλογίαν $\frac{B\Delta}{\gamma} = \frac{\Delta \Gamma}{\beta}$ (2)

Κατὰ γνωστὴν ἰδιότητα τῶν ἴσων λόγων, ἀπὸ τὴν σχέσιν (2) ἔχομεν

$$\frac{\Delta B}{\gamma} = \frac{\Delta \Gamma}{\beta} = \frac{\Delta B + \Delta \Gamma}{\gamma + \beta} = \frac{B\Gamma}{\beta + \gamma} = \frac{\alpha}{\beta + \gamma} \quad (3)$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν (3) λαμβάνομεν

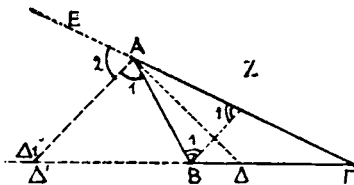
$$\boxed{\Delta B = \frac{\alpha \gamma}{\beta + \gamma}} \quad \text{καὶ} \quad \boxed{\Delta \Gamma = \frac{\alpha \beta}{\beta + \gamma}}$$

Ἐφαρμογή. Διὰ $\alpha=5, \beta=4, \gamma=6$, εὐρίσκομεν

$$\Delta B = \frac{5 \cdot 6}{4 + 6} = 3, \quad \Delta \Gamma = \frac{5 \cdot 4}{4 + 6} = 2.$$

396. Θεώρημα. Ἡ διχοτόμος ἐξωτερικῆς γωνίας ἐνὸς τριγώνου τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς εἰς ἓνα σημεῖον, τοῦ ὁποῦ αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς πλευρᾶς αὐτῆς εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς προσκειμένας πλευρᾶς τοῦ τριγώνου αὐτοῦ.

Ἐπιπέσεις: Ἐστω τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ καὶ AA' ἡ διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας τοῦ A , ἡ ὁ-



Σχ. 295.

Ἐπιπέσεις.	$AA' \text{ διχοτ. } \widehat{BAE}$
Συμπ.	$\frac{\Delta'B}{\Delta'\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}$

ποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς πλευρᾶς $B\Gamma$ εἰς τὸ σημεῖον Δ' .

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\frac{\Delta'B}{\Delta'\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}$ (1)

Ἀπόδειξις: Ἀπὸ τὴν κορυφὴν B φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν AA' , ἡ ὁποία τέμνει τὴν AG εἰς τὸ σημεῖον Z . Ἐπειδὴ αἱ $\Gamma\Delta'$ καὶ ΓA τέμνονται ὑπὸ τῶν παραλλήλων εὐθειῶν BZ καὶ $\Delta'A$, θὰ εἶναι

$$\frac{\Delta'B}{\Delta'\Gamma} = \frac{AZ}{A\Gamma} \quad (2)$$

Διὰ νὰ φθάσωμεν ἀπὸ τὴν σχέσιν (2) εἰς τὴν σχέσιν (1) πρέπει νὰ δείξωμεν, ὅτι $AZ=AB$, δηλ. πρέπει νὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ τρίγωνον ABZ εἶναι ἰσοσκελές.

Πράγματι· αἱ γωνίαι A_1 καὶ B_1 εἶναι ἴσαι, ὡς ἐντὸς ἐναλλάξ τῶν παραλλήλων AA' καὶ ZB τεμνομένων ὑπὸ τῆς AB . Ἐπίσης αἱ γωνίαι

A_2 καὶ Z_1 εἶναι ἴσαι, ὡς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν παραλλήλων AD' καὶ ZB τεμνομένων ὑπὸ τῆς $ΓΕ$. Ἀλλὰ αἱ γωνίαι A_1 καὶ A_2 εἶναι ἴσαι, διότι ἡ AD' εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας BAE : ἄρα καὶ αἱ ἴσαι πρὸς αὐτὰς γωνίαι B_1 καὶ Z_1 θὰ εἶναι ἴσαι· ἀλλὰ τότε τὸ τρίγωνον ABZ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι $AB=AZ$.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (2) τὸ AZ μὲ τὸ ἴσον του AB καὶ ἔχομεν

$$\frac{\Delta'B}{\Delta'\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}$$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Ἡ διχοτόμος ἐξωτερικῆς...**

397. Παρατήρησις. Ἐὰν Δ καὶ Δ' εἶναι οἱ πόδες τῶν διχοτόμων, ἐσωτερικῆς καὶ ἐξωτερικῆς, τῆς γωνίας A τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$, θὰ εἶναι

$$\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}, \quad \frac{\Delta'B}{\Delta'\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}.$$

Ἀπὸ τὰς σχέσεις αὐτὰς συνάγομεν, ὅτι $\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma} = \frac{\Delta'B}{\Delta'\Gamma}$, δηλ. οἱ πόδες Δ καὶ Δ' τῶν δύο διχοτόμων εἶναι σημεῖα συζυγῆ ἁρμονικὰ πρὸς τὰς κορυφὰς B καὶ Γ τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$.

398. Θεώρημα. (Ἀντίστροφον). Ἐὰν μία εὐθεῖα AD' (Σχ. 295) ἢ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν A ἐνὸς τριγώνου $AB\Gamma$, συναντᾷ τὴν προέκτασιν τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς $B\Gamma$ εἰς ἓνα σημεῖον Δ' , τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι $\frac{\Delta'B}{\Delta'\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}$, ἢ AD' εἶναι διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας A .

Ἐπιπέσεις: Ἐξ ὑποθέσεως εἶναι

$$\frac{\Delta'B}{\Delta'\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma} \quad (1).$$

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ

AD' εἶναι διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας A , δηλ. τῆς γωνίας BAE .

Ἀπόδειξις: Ἐὰν ἡ AD' δὲν ἦτο διχοτόμος τῆς γωνίας BAE , θὰ ἦτο μία ἄλλη, ἔστω ἡ AD_1 . Ἐπειδὴ ἡ AD_1 εἶναι διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας A , θὰ εἶναι (§ 396) $\frac{\Delta_1 B}{\Delta_1 \Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}$ (2)

Ἀλλὰ ἐξ ὑποθέσεως ἔχομεν καὶ τὴν ἰσότητα (1). Ἀπὸ τὰς ἰσοτήτας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι $\frac{\Delta'B}{\Delta'\Gamma} = \frac{\Delta_1 B}{\Delta_1 \Gamma}$ (3)

Ἀλλὰ διὰ νὰ ὑφίσταται ἡ σχέση (3) πρέπει τὰ σημεῖα Δ' καὶ Δ_1 νὰ συμπίπτουν, διότι ἓνα, καὶ μόνον ἓνα, σημεῖον ὑπάρχει ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς $B\Gamma$, τὸ ὁποῖον διαιρεῖ αὐτὴν κατὰ τὸν αὐτὸν λόγον (§ 383).

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Ἐὰν μία εὐθεῖα...**

399. Πρόβλημα. Νὰ ὑπολογισθοῦν, συναρτήσῃ τῶν πλευ-

Ἐπιπέσεις.	$\frac{\Delta'B}{\Delta'\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}$
Συμπ.	$AD' = \text{διχοτ. } \widehat{BAE}$

ρῶν ἐνὸς τριγώνου $AB\Gamma$, τὰ τμήματα BD' καὶ $\Gamma\Delta'$, τὰ ὁποῖα ὀρί-
ζει ἐπὶ τῆς πλευρᾶς $B\Gamma$, ἡ διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας A .

Ἐστω $\Delta\Delta'$ (Σχ. 295) ἡ διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας A τοῦ
τριγώνου $AB\Gamma$. Γνωρίζομεν (§ 397) ὅτι

$$\frac{\Delta'\Gamma}{\Delta'B} = \frac{A\Gamma}{AB} \quad \eta \quad \frac{\Delta'\Gamma}{\Delta'B} = \frac{\beta}{\gamma} \quad (1)$$

Ἄν ἀλλάξωμεν τὴν θέσιν τῶν μέσων ὄρων τῆς ἀναλογίας (1) λαμ-
βάνομεν τὴν ἀναλογίαν

$$\frac{\Delta'\Gamma}{\beta} = \frac{\Delta'B}{\gamma} \quad (2)$$

Κατὰ γνωστὴν ἰδιότητα τῶν ἴσων λόγων, ἀπὸ τὴν σχέσιν (2) λαμ-
βάνομεν

$$\frac{\Delta'\Gamma}{\beta} = \frac{\Delta'B}{\gamma} = \frac{\Delta'\Gamma - \Delta'B}{\beta - \gamma} = \frac{B\Gamma}{\beta - \gamma} = \frac{\alpha}{\beta - \gamma} \quad (3)$$

Ἄπὸ τὴν σχέσιν (3) εὐρίσκομεν $\boxed{\Delta'\Gamma = \frac{\alpha\beta}{\beta - \gamma}}$ καὶ $\boxed{\Delta'B = \frac{\alpha\gamma}{\beta - \gamma}}$.

400. Θεώρημα. Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τῶν
ὁποίων ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα A καὶ
 B εἶναι ἴσος μὲ δοθέντα λόγον k , διάφορον τῆς μονάδος, εἶναι
μία περιφέρεια κύκλου.

Ἐστω M τυχὸν σημεῖον τοῦ τόπου, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τῆς
εὐθείας AB . Φέρομεν τὰς εὐθείας
 MA καὶ MB . Ἐπειδὴ τὸ M εἶναι
σημεῖον τοῦ τόπου, θὰ εἶναι

$$\frac{MA}{MB} = k \quad (1)$$

Φέρομεν τὴν διχοτόμον $M\Delta$ τῆς
ἐσωτερικῆς γωνίας M τοῦ τριγώνου
 AMB καὶ τὴν διχοτόμον $M\Delta'$ τῆς
ἐξωτερικῆς γωνίας BME .

Κατὰ τὸ θεώρημα τῶν διχοτο-
μῶν γωνιῶν τριγώνου θὰ εἶναι

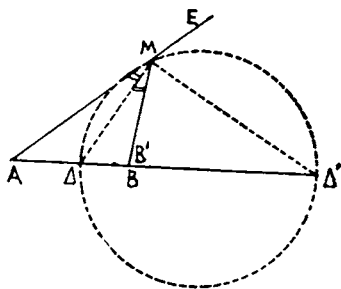
$$\frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{\Delta'A}{\Delta'B} = \frac{MA}{MB} \quad (2)$$

Ἄπὸ τὰς σχέσεις 1 καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι

$$\frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{\Delta'A}{\Delta'B} = \frac{MA}{MB} = k \quad (3)$$

Ἄπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν συνάγομεν, ὅτι καὶ τὰ σημεῖα Δ καὶ Δ' ,
εἶναι σημεῖα τοῦ τόπου καὶ συγχρόνως εἶναι καὶ τὰ συζυγῆ ἄρμονικὰ
τῶν A καὶ B μὲ λόγον k .

Ἐπειδὴ αἱ $M\Delta$ καὶ $M\Delta'$ εἶναι διχοτόμοι τῶν δύο ἐφεξῆς παρα-



Σχ. 296.

πληρωματικῶν γωνιῶν AMB καὶ BME , ἔπεται ὅτι αἱ διχοτόμοι αὐταὶ εἶναι κάθετοι μεταξύ των. Ὡστε ἡ γωνία $\Delta M \Delta'$ εἶναι ὀρθή

Ἐπειδὴ ἡ $\Delta \Delta'$ φαίνεται ἀπὸ τὸ M ὑπὸ γωνίαν ὀρθήν, τὸ M κεῖται ἐπὶ περιφερείας κύκλου, ἡ ὁποία γράφεται μὲ διάμετρον τὴν $\Delta \Delta'$. Ἡ $\Delta \Delta'$ εἶναι σταθερὰ κατὰ τὴν θέσιν καὶ τὸ μέγεθος, διότι συνδέει τὰ συζυγῆ ἄρμονικὰ σημεῖα Δ καὶ Δ' τῶν δοθέντων A καὶ B μὲ λόγον k .

Ὡστε τὸ τυχὸν σημεῖον M τοῦ τόπου κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἡ ὁποία γράφεται μὲ διάμετρον τὴν $\Delta \Delta'$.

Ἀντιστρόφως. Θὰ δείξωμεν τώρα, ὅτι κάθε σημεῖον M (Σχ. 296) τῆς περιφερείας αὐτῆς εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου· δηλ. θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$\frac{MA}{MB} = k.$$

Φέρομεν τὰς εὐθείας $M \Delta$ καὶ $M \Delta'$. Ἡ γωνία $\Delta M \Delta'$ εἶναι ὀρθή, διότι εἶναι ἔγγεγραμμένη εἰς ἡμιπεριφέρειαν· ἄρα αἱ $M \Delta$ καὶ $M \Delta'$ εἶναι κάθετοι μεταξύ των.

Ἐὰν αἱ γωνίαι $AM \Delta$ καὶ $\Delta M B$ εἶναι ἴσαι, τότε ἡ $M \Delta$ θὰ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας AMB καὶ ἐπομένως καὶ ἡ κάθετος πρὸς αὐτὴν $M \Delta'$ θὰ εἶναι διχοτόμος τῆς παραπληρωματικῆς γωνίας BME . Ἐπειδὴ αἱ $M \Delta$ καὶ $M \Delta'$ εἶναι διχοτόμοι, ἐσωτερικὴ καὶ ἔξωτερικὴ, τῆς γωνίας M τοῦ τριγώνου AMB , θὰ εἶναι (§ 393 καὶ 396)

$$\frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{\Delta' A}{\Delta' B} = \frac{MA}{MB} = k$$

καὶ ἐπομένως τὸ τυχὸν σημεῖον M τῆς περιφερείας εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου.

Ἐὰν αἱ γωνίαι $AM \Delta$ καὶ $\Delta M B$ δὲν εἶναι ἴσαι, φέρομεν τὴν εὐθείαν $M B'$ οὕτως, ὥστε $\gammaων. AM \Delta = \gammaων. \Delta M B'$. Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι $AM \Delta$ καὶ $\Delta M B'$ εἶναι ἴσαι, ἡ $M \Delta$ θὰ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας AMB' καὶ ἡ $M \Delta'$, ὡς κάθετος ἐπ' αὐτήν, θὰ εἶναι διχοτόμος τῆς παραπληρωματικῆς γωνίας. Ἀλλὰ τότε τὰ σημεῖα A καὶ B' θὰ εἶναι συζυγῆ ἄρμονικὰ τῶν Δ καὶ Δ' · ἄρα τὸ σημεῖον B' συμπίπτει μὲ τὸ B . Ἐπειδὴ αἱ $M \Delta$ καὶ $M \Delta'$ εἶναι διχοτόμοι τῆς γωνίας AMB καὶ τῆς παραπληρωματικῆς τῆς, θὰ εἶναι

$$\frac{MA}{MB} = \frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{\Delta' A}{\Delta' B} = k.$$

Ὡστε τὸ τυχὸν σημεῖον M τῆς περιφερείας αὐτῆς εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι : Ὁ γεωμετρικὸς τόπος. . . .

Ἡ περιφέρεια αὐτή, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον τὰ συζυγῆ ἄρμονικὰ Δ καὶ Δ' τῶν A καὶ B λέγεται Ἀπολλώνιος περιφέρεια.

Σημ. Ἐὰν ὁ δοθεὶς λόγος k εἶναι ἴσος μὲ τὴν μονάδα 1, τὸ σημείον Δ εἶναι τὸ μέσον τῆς AB καὶ τὸ σημεῖον Δ' ἀφανίζεται εἰς τὸ ἄπειρον. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὁ γεωμετρικὸς τόπος εἶναι ἡ κάθετος εἰς τὸ μέσον τῆς AB .

401. Ὑπολογισμὸς τῆς ἀκτίνος τοῦ Ἀπολλωνίου κύκλου. Ὑποθέτομεν ὅτι $MA > MB$ (Σχ. 296) καὶ ὅτι $k > 1$. Ἀπὸ τὴν σχέσιν

$$\frac{MA}{MB} = \frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{\Delta' A}{\Delta' B} = k, \text{ λαμβάνομεν } \frac{\Delta A}{k} = \frac{\Delta B}{1} \text{ καὶ } \frac{\Delta' A}{k} = \frac{\Delta' B}{1}.$$

Ἀπὸ αὐτὰς λαμβάνομεν

$$\frac{\Delta A}{k} = \frac{\Delta B}{1} = \frac{\Delta A + \Delta B}{k+1} = \frac{AB}{k+1}, \text{ ἄρα } \Delta A = \frac{k \cdot AB}{k+1}$$

$$\frac{\Delta' A}{k} = \frac{\Delta' B}{1} = \frac{\Delta' A - \Delta' B}{k-1} = \frac{AB}{k-1}, \text{ ἄρα } \Delta' A = \frac{k \cdot AB}{k-1}.$$

Ἐὰν θέσωμεν $AB = \alpha$, θὰ εἶναι $\Delta A = \frac{\alpha k}{k+1}$ καὶ $\Delta' A = \frac{\alpha k}{k-1}$.

Ἄρα θὰ εἶναι $\Delta \Delta' = \Delta' A - \Delta A = \frac{\alpha k}{k-1} - \frac{\alpha k}{k+1} = \frac{2\alpha k}{k^2-1}$.

Ἐπειδὴ $\Delta \Delta' = 2R$ ἔπεται, ὅτι $R = \frac{\alpha k}{k^2-1}$.

Ἀσκήσεις

A' Ὁμάς. 986. (1018). Ἐνὸς τριγώνου $AB\Gamma$ αἱ πλευραὶ τοῦ εἶναι $AB=12$ ἐκ. $A\Gamma=14$ ἐκ. καὶ $B\Gamma=13$ ἐκ. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ τμήματα εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται ἡ $B\Gamma$ ὑπὸ τῶν διχοτόμων, ἐσωτερικῆς καὶ ἐξωτερικῆς, τῆς γωνίας A .

987. (1019). Δίδεται ἓνας κύκλος O διαμέτρου AB καὶ μία χορδὴ $\Gamma\Delta$ κάθετος ἐπὶ τὴν AB . Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον M τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου φέρομεν τὰς χορδὰς $M\Delta$ καὶ $M\Gamma$, αἱ ὁποῖαι τέμνουσιν τὴν AB εἰς τὰ σημεῖα E καὶ Z . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα E καὶ Z εἶναι συζυγῆ ἄρμονικὰ πρὸς τὰ A καὶ B .

988. (1020). Δίδεται ἡμιπεριφέρεια O διαμέτρου AB . Εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας Ax καὶ By τῆς ἡμιπεριφερείας. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον M τῆς ἡμιπεριφερείας φέρομεν τρίτην ἐφαπτομένην αὐτῆς, ἡ ὁποία τέμνει τὴν Ax εἰς τὸ Γ , τὴν By εἰς τὸ Δ καὶ τὴν AB προεκτεινομένην εἰς τὸ σημεῖον E : νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα M καὶ E εἶναι συζυγῆ ἄρμονικὰ τῶν Γ καὶ Δ .

989. (1021). Ἀπὸ ἓνα σημεῖον Σ , τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς κύκλου O φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας ΣA καὶ ΣB καὶ τὴν διάμετρον $\Sigma\Gamma$, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ Σ . Ἐὰν E εἶναι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῆς διαμέτρου αὐτῆς καὶ τῆς χορδῆς AB , νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα Σ καὶ E εἶναι συζυγῆ ἄρμονικὰ πρὸς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ .

B' Ὁμάς. 990. (1022). Τέσσαρες ἡμιευθεῖαι OA, OB, OG, OD σχηματίζουν διαδοχικὰς γωνίας 45° . Τέμνομεν αὐτὰς μὲ μίαν εὐθεῖαν $AB\Gamma\Delta$ οὕτως, ὥστε νὰ σχηματίζεται ἓνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον OAA . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\overline{AB}^2 = A\Delta \times B\Gamma$.

991. (1023). Εἰς ἓνα τρίγωνον $ΑΒΓ$ φέρομεν τὴν διάμεσον $ΑΔ$ καὶ τὰς διχοτόμους $ΔΕ$ καὶ $ΔΖ$ τῶν γωνιῶν $ΑΔΒ$ καὶ $ΑΔΓ$, αἱ ὁποῖοι τέμνουσι τὰς πλευράς $ΑΒ$ καὶ $ΑΓ$ ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα $Ε$ καὶ $Ζ$. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ $ΕΖ$ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν $ΒΓ$.

992. (1024). Εἰς ἓνα κύκλον $Ο$ φέρομεν μίαν διάμετρον $ΑΒ$ καὶ μίαν χορδὴν $ΓΔ$ κάθετον ἐπὶ τὴν $ΑΒ$. Ἐπὶ τῆς $ΓΔ$ λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον $Ε$ καὶ φέρομεν τὰς εὐθείας $ΑΕ$ καὶ $ΒΕ$, αἱ ὁποῖαι προεκτεινόμεναι τέμνουσι τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου $Ο$ εἰς τὰ σημεῖα $Ζ$ καὶ $Η$ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τετράπλευρον $ΓΗΔΖ$ ἔχει δύο διαδοχικὰς πλευράς, τῶν ὁποίων ὁ λόγος εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

993. (1025). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου διαιρεῖ κάθε διχοτόμον εἰς δύο μέρη, τῶν ὁποίων ὁ λόγος εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῆς πλευρᾶς ἐπὶ τῆς ὁποίας κείται ὁ πούς τῆς διχοτόμου πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

994. (1026). Ἐὰν $Δ, Ε, Ζ$ εἶναι οἱ πόδες τῶν ἑσωτερικῶν διχοτόμων $ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ$ τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου $ΑΒΓ$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$\frac{ΔΒ}{ΔΓ} \times \frac{ΕΓ}{ΕΑ} \times \frac{ΖΑ}{ΖΒ} = 1.$$

995. (1027). Ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων τυχόντος σημείου $Μ$ μιᾶς περιφέρειας ἀπὸ δύο σημεία $Α$ καὶ $Β$, τὰ ὁποῖα εἶναι συζυγῆ ἁρμονικὰ πρὸς μίαν διάμετρον τῆς $ΔΔ'$, εἶναι σταθερός, ὅταν τὸ $Μ$ γράφῃ τὴν περιφέρειαν αὐτήν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄.

ΟΜΟΙΑ ΤΡΙΓΩΝΑ - ΟΜΟΙΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

1. Γενικότητες

402. Ὅρισμοί. Ἐστω ἓνα τρίγωνον $ΑΒΓ$ (Σχ. 297) καὶ ἡ εὐ-
θεΐα $ΔΕ$, ἣ ὁποία συνδέει τὰ μέσα τῶν πλευρῶν $ΑΒ$ καὶ $ΑΓ$.

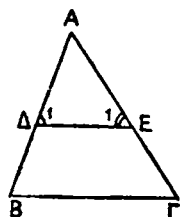
Ἐπειδὴ ἡ $ΔΕ$ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν $ΒΓ$,
θὰ εἶναι :

$$\widehat{A} = \widehat{A}, \quad \widehat{\Delta_1} = \widehat{B}, \quad \widehat{E_1} = \widehat{\Gamma}.$$

Ἐπειδὴ ἡ $ΔΕ$ συνδέει τὰ μέσα δύο πλευρῶν
τοῦ τριγώνου, θὰ εἶναι :

$$\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{1}{2}, \quad \frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{1}{2}, \quad \frac{ΔΕ}{ΒΓ} = \frac{1}{2} \quad \eta$$

$$\frac{ΑΔ}{ΑΒ} = \frac{ΑΕ}{ΑΓ} = \frac{ΔΕ}{ΒΓ} = \frac{1}{2} \quad (2)$$



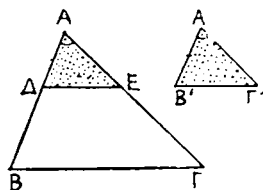
Σχ. 297.

Τὰ τρίγωνα $ΑΔΕ$ καὶ $ΑΒΓ$, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰς γωνίας τῶν ἴσας
μιαὶ πρὸς μίαν καὶ μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῶν ἰσχύει ἡ σχέση (2), λέ-
γονται **ὁμοία** καὶ λέγομεν, ὅτι ὁ λόγος τῆς ὁμοιότητός τῶν εἶναι $\frac{1}{2}$.

Αἱ πλευραί, αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἀπέναντι ἴσων γωνιῶν λέγονται
ὁμολόγοι πλευραί.

Γενικῶς: **Δύο τρίγωνα λέγονται ὁμοία, ὅταν ἔχουν τὰς γωνίας τῶν ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ τὰς ὁμολόγους πλευράς τῶν ἀναλόγους.**

Λόγος ὁμοιότητος δύο ὁμοίων τριγώνων λέγεται ὁ λόγος τῶν ὁμολόγων πλευρῶν τῶν.



Σχ. 298.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν αὐτὸν τὰ τρίγωνα $ΑΒΓ$ καὶ $Α'Β'Γ'$ (Σχ. 298)
θὰ εἶναι ὁμοία, ἔαν εἶναι :

$$\widehat{A} = \widehat{A'}, \quad \widehat{B} = \widehat{B'}, \quad \widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma'}$$

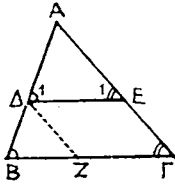
καὶ

$$\frac{ΑΒ}{Α'Β'} = \frac{ΒΓ}{Β'Γ'} = \frac{ΓΑ}{Γ'Α'} = k$$

ὅπου k παριστάνει τὸν **λόγον τῆς ὁμοιότητός τῶν.**

403. Θεώρημα τοῦ Θαλή. Κάθε παράλληλος πρὸς μίαν πλευρὰν ἐνὸς τριγώνου ὀρίζει ἓνα δεῦτερον τρίγωνον, ὁμοιον πρὸς τὸ πρῶτον

Ἐπίθεσις: Ἐστω ἓνα τρίγωνον ΑΒΓ (Σχ. 299) καὶ ΔΕ μία παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ.



Σχ. 299.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΔΕ εἶναι ὅμοια.

Ἀπόδειξις:

Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ

νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι τὰ δύο αὐτὰ τρίγωνα ἔχουν τὰς γωνίας των ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ τὰς

ὁμολόγους πλευράς των ἀνάλογους.

1^{ον}. Αἱ γωνίαι των εἶναι ἴσαι μίαν πρὸς μίαν. Πράγματι· ἡ γωνία Α εἶναι κοινή. Αἱ γωνίαι Β καὶ Δ, εἶναι ἴσαι, ὡς ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῶν παραλλήλων ΒΓ καὶ ΔΕ τεμνομένων ὑπὸ τῆς ΑΒ. Δι' ὅμοιον λόγον εἶναι $\widehat{\Gamma} = \widehat{E}_1$.

2^{ον}. Αἱ ὁμολόγοι πλευραὶ των εἶναι ἀνάλογοι. Πράγματι· ἐπειδὴ ἡ ΔΕ εἶναι ἐξ ὑποθέσεως παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{A\Delta}{A\Gamma} = \frac{A\Delta}{A\Gamma} \quad (1)$$

Μένει τώρα νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι αἱ δύο αὐτοὶ λόγοι (1) εἶναι ἴσοι μὲ τὸν λόγον $\frac{A\Delta}{B\Gamma}$. Πρὸς τοῦτο ἀπὸ τὸ Δ φέρομεν τὴν ΔΖ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ Ζ. Ἐπειδὴ ἡ ΔΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{A\Delta}{A\Gamma} = \frac{B\Gamma}{A\Gamma} \quad (2)$$

Ἄλλὰ $B\Gamma = E\Delta$, ὡς ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ παραλληλογράμμου ΔΖΓΕ. Ἄν λοιπὸν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν σχέσιν (2) τὸ ΒΓ μὲ τὸ

$$\text{ἴσον του } E\Delta, \text{ θὰ ἔχωμεν } \frac{A\Delta}{A\Gamma} = \frac{E\Delta}{A\Gamma} \quad \eta \quad \frac{A\Delta}{A\Gamma} = \frac{A\Delta}{B\Gamma} \quad (3)$$

Ἀπὸ τὰς σχέσεις (1) καὶ (3) συνάγομεν, ὅτι

$$\frac{A\Delta}{A\Gamma} = \frac{A\Delta}{B\Gamma} = \frac{A\Delta}{A\Gamma}$$

Τὰ τρίγωνα λοιπὸν ΑΒΓ καὶ ΑΔΕ ἔχουν τὰς γωνίας των ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ τὰς ὁμολόγους πλευράς των ἀνάλογους· ἄρα εἶναι ὅμοια.

Ἐδείχθη λοιπὸν, ὅτι: **Κάθε παράλληλος. . .**

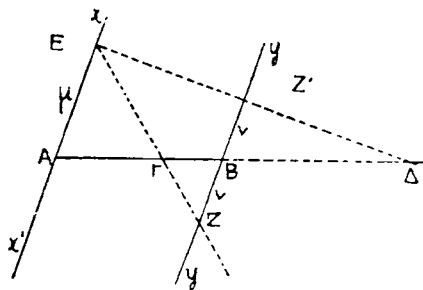
Παρατηρήσεις: 1^η. Τὸ προηγούμενον θεώρημα δεικνύει τὴν ὑπαρξίν ὁμοίων τριγώνων.

2α. Μεταθέτοντες την εὐθείαν ΔΕ παραλλήλως πρὸς ἑαυτήν, λαμβάνομεν μίαν ἀπειρίαν τριγώνων ὁμοίων πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

3η. Κάθε τρίγωνον ἴσον πρὸς τὸ ΑΔΕ εἶναι ὁμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

404. Ἐφαρμογή. Πρόβλημα. *Νὰ κατασκευασθοῦν τὰ συζυγῆ ἄρμονικὰ σημεῖα τὰ ὁποῖα διαιροῦν μίαν εὐθείαν ΑΒ κατὰ δοθέντα λόγον $\frac{\mu}{\nu}$.*

Ἀπὸ τὰ ἄκρα Α καὶ Β (Σχ. 300) τῆς δοθείσης εὐθείας φέρομεν δύο τυχούσας παραλλήλους Αχ καὶ Βγ. Ἐπὶ τῆς πρώτης λαμβάνομεν τμήμα ΑΕ=μ καὶ ἐπὶ τῆς δευτέρας δύο τμήματα ΒΖ=ΒΖ'=ν με ἀντίθετον φοράν. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΕΖ καὶ ΕΖ', αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν ΑΒ εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ. Τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ εἶναι τὰ ζητούμενα σημεῖα.



Σχ. 300.

Πράγματι τὰ τρίγωνα ΑΓΕ καὶ ΓΖΒ εἶναι ὅμοια, διότι ἡ ΒΖ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΕ· ἄρα θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\Gamma\Lambda}{\Gamma\text{B}} = \frac{\text{A}\text{E}}{\text{B}\text{Z}} = \frac{\mu}{\nu} \quad (1)$$

Ὅμοίως ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΛΑΕ καὶ ΔΒΖ' ἔχομεν

$$\frac{\Delta\Lambda}{\Delta\text{B}} = \frac{\text{A}\text{E}}{\text{B}\text{Z}'} = \frac{\mu}{\nu} \quad (2)$$

Ἀπὸ τὰς ἰσότη. : 1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι

$$\frac{\Gamma\Lambda}{\Gamma\text{B}} = \frac{\Delta\Lambda}{\Delta\text{B}} = \frac{\mu}{\nu}.$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν σχέσιν συνάγομεν, ὅτι τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ εἶναι τὰ ζητούμενα συζυγῆ ἄρμονικὰ τῶν Α καὶ Β με λόγον $\frac{\mu}{\nu}$.

Ἀσκήσεις

Α' Ὁμάς. 996. (1028). Αἱ πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ εἶναι : ΑΒ=45 ἐκ., ΒΓ=50 ἐκ., ΑΓ=64 ἐκ. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ ἑνὸς ἄλλου τριγώνου Α'Β'Γ', ὁμοίου πρὸς τὸ πρῶτον, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ πλευρὰ Α'Β', ἡ ὁμόλογος τῆς ΑΒ, εἶναι 18 ἐκ.

997. (1029) Αἱ πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ΑΒ=4 ἐκ., ΒΓ=5 ἐκ.,

$\Gamma\Lambda=7$ εκ. Νά υπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου, ὁμοίου πρὸς τὸ $\text{AB}\Gamma$ καὶ τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶναι 36 εκ.

998. (1030). Ἐν γνωρίζωμεν τὰς τέσσαρας πλευρὰς ἑνὸς τραπεζίου, νά υπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου, τὸ ὁποῖον σχηματίζεται ἀπὸ τὴν προέκτασιν τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του.

Β' Ομάς. 999. (1031). Εἰς ἓνα τρίγωνον $\text{AB}\Gamma$ προεκτείνωμεν τὰς πλευρὰς του AB καὶ $\text{A}\Gamma$ κατὰ μήκη BD καὶ GE ἴσα. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν DE , ἡ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς $\text{B}\Gamma$ εἰς τὸ Z . Νά ἀποδειχθῇ, ὅτι $\frac{\text{AB}}{\text{A}\Gamma} = \frac{\text{EZ}}{\text{DZ}}$.

1000. (1032). Δίδεται μία γωνία xOy ὀρθή ἢ ἀμβλεία, δύο σημεῖα A καὶ A' ἐπὶ τῆς Ox καὶ δύο σημεῖα B καὶ B' ἐπὶ τῆς Oy . Ἐὰν εἶναι $\frac{\text{A}'\text{B}'}{\text{AB}} = \frac{\text{OA}'}{\text{OA}}$, νά ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα $\text{A}'\text{B}'$ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν AB .

Γ' Ομάς. 1001. (1033). Δίδεται μία γωνία xOy καὶ δύο σημεῖα A καὶ B ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Ox , ($\text{OB} > \text{OA}$). Νά εὐρεθῇ ἐπὶ τῆς Oy ἓνα σημεῖον M τοιοῦτον, ὥστε ἡ MA νά εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας OMB .

1002 (1034). Δύο δοθέντα σημεῖα A καὶ B κείνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς δοθείσης εὐθείας xy . Ἐνα τμήμα $\text{MN}=\lambda$ ὀλισθαίνει ἐπὶ τῆς εὐθείας xy . Νά εὐρεθῇ ἡ θέσις τοῦ τμήματος αὐτοῦ, ἵνα εἶναι $\frac{\text{AM}}{\text{BN}} = \frac{\mu}{\nu}$, ὅπου μ καὶ ν εἶναι δοθέντα μήκη.

1003. (1035). Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας xy λαμβάνωμεν τρία σημεῖα A , B , Γ (τὸ B κεῖται μεταξὺ τῶν A καὶ Γ). Νά εὐρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων, ἀπὸ τὰ ὁποῖα βλέπομεν τὰ τμήματα AB καὶ $\text{B}\Gamma$ ὑπὸ ἴσας γωνίας.

1004. (1036). Νά κατασκευασθῇ ἓνα τρίγωνον $\text{AB}\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν $\text{B}\Gamma=a$, τὸ ὕψος $\text{AD}=u_a$ καὶ τὸν λόγον $\frac{\text{AB}}{\text{A}\Gamma} = \frac{\mu}{\nu}$ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του.

2. Περιπτώσεις ομοιότητας τριγώνων

405. Ὅρισμός. Διὰ νὰ εἶναι δύο τρίγωνα $\text{AB}\Gamma$ καὶ $\text{A}'\text{B}'\Gamma'$ ὅμοια, πρέπει, κατὰ τὸν ὅρισμόν τῆς ομοιότητος τῶν τριγώνων, νὰ πληροῦνται οἱ κάτωθι **πέντε ὄροι**:

$$\widehat{\text{A}}=\widehat{\text{A}'}, \quad \widehat{\text{B}}=\widehat{\text{B}'}, \quad \widehat{\Gamma}=\widehat{\Gamma'}$$

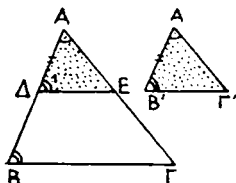
$$\frac{\text{AB}}{\text{A}'\text{B}'} = \frac{\text{B}\Gamma}{\text{B}'\Gamma'} = \frac{\text{A}\Gamma}{\text{A}'\Gamma'}$$

Τὰ κατωτέρω θεωρήματα, τὰ ὁποῖα λέγονται **περιπτώσεις ομοιότητος τῶν τριγώνων**, ἔχουν σκοπὸν νὰ μᾶς δείξουν, ὅτι εἰς μερικὰς περιπτώσεις καὶ **δύο** μόνον ἐκ τῶν πέντε τούτων ὄρων, ἂν πληροῦνται, εἶναι ἀρκετοὶ διὰ νὰ εἶναι δύο τρίγωνα ὅμοια, δηλ. διὰ νὰ πληροῦνται καὶ οἱ ὑπόλοιποι τρεῖς ὄροι.

406. Περίπτωσης I. Θεώρημα. Δύο τρίγωνα είναι όμοια, όταν έχουν δύο γωνίας ίσας μίαν προς μίαν.

Υπόθεσις: Ἐστώσαν τὰ τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $A'B'\Gamma'$, τὰ ὁποῖα

ἔχουν ἕξ ὑποθέσεως: $\widehat{A}=\widehat{A'}$, $\widehat{B}=\widehat{B'}$.



Σχ. 301. -

Υπόθ.	$\widehat{A}=\widehat{A'}$ $\widehat{B}=\widehat{B'}$
Συμπ.	τρ. $AB\Gamma$ ὁμοιον πρὸς τριγ. $A'B'\Gamma'$

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ὅμοια.

Ἀπόδειξις: Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς AB λαμβάνομεν ἓνα τμήμα $A\Delta=A'B'$ καὶ ἀπὸ τὸ Δ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν $B\Gamma$, ἣ ὁποῖα τέμνει τὴν $A\Gamma$ εἰς τὸ E .

Ἐπειδὴ ἡ ΔE εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν $B\Gamma$, τὸ τρίγωνον $A\Delta E$ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ $AB\Gamma$ (§ 403).

Ἄλλὰ τὰ τρίγωνα $A\Delta E$ καὶ $A'B'\Gamma'$ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς προσκειμένας εἰς αὐτὴν γωνίας ἴσας μίαν πρὸς μίαν· δηλ. ἔχουν: $A\Delta=A'B'$, ἐκ κατασκευῆς, $\widehat{A}=\widehat{A'}$ ἕξ ὑποθέσεως καὶ $\widehat{\Delta_1}=\widehat{B'}$, ὡς ἴσας πρὸς τὴν B' πράγματι αἱ γωνίαι Δ_1 καὶ B εἶναι ἴσαι, ὡς ἐντὸς ἐκτὸς τῶν παραλλήλων ΔE καὶ $B\Gamma$ τεμνομένων ὑπὸ τῆς AB , αἱ δὲ γωνίαι B' καὶ B ἴσαι ἕξ ὑποθέσεως.

Ἄλλὰ τὸ τρίγωνον $A\Delta E$ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ $AB\Gamma$, ὅπως ἐδείχθη ἀνωτέρω, ἄρα καὶ τὸ ἴσον τοῦ τρίγωνον $A'B'\Gamma'$ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ $AB\Gamma$.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: Δύο τρίγωνα εἶναι ὅμοια. . . .

407. Πορίσματα. I. Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι ὅμοια, όταν ἔχουν μίαν ὀξείαν γωνίαν ἴσην.

Τὰ ὀρθογώνια αὐτὰ τρίγωνα ἔχουν καὶ τὰς ὀρθὰς γωνίας των ἴσας· ἄρα εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουν δύο γωνίας ἴσας μίαν πρὸς μίαν.

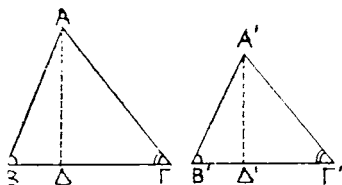
II. Δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην εἶναι ὅμοια.

Πράγματι· ἐὰν ἡ ἴση γωνία εἶναι μία ἀπὸ τὰς παρὰ τὴν βάσιν γωνίας, τὰ δύο τρίγωνα ἔχουν δύο γωνίας ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ ἐπομένως εἶναι ὅμοια.

Ἐὰν ἡ ἴση γωνία εἶναι ἡ γωνία τῆς κορυφῆς, τὸ ἄθροισμα τῶν

παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν του εἶναι τὸ αὐτὸ καὶ διὰ τὰ δύο τρίγωνα ἑπομένως αἱ γωνίαι των εἶναι ἀντιστοιχῶς ἴσαι, ὡς ἡμίση ἴσων ἀθροισμάτων, ὁπότε πάλιν τὰ τρίγωνα εἶναι ὅμοια.

III. Ὁ λόγος τῶν ὁμολόγων ὑψῶν δύο ὁμοίων τριγώνων εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων.



Σχ. 302.

Ἐστωσαν τὰ ὅμοια τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $A'B'\Gamma'$ καὶ $A\Delta$, $A'\Delta'$ δύο ὁμόλογα ὑψη των. Θὰ δείξωμεν, ὅτι

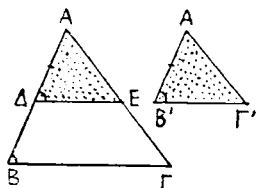
$$\frac{A\Delta}{A'\Delta'} = \frac{AB}{A'B'}$$

Πράγματι· τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα $A\Delta B$ καὶ $A'\Delta'B'$ εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουν ἕξ ὑποθέσεως τὰς δεξείας

γωνίας B καὶ B' ἴσας καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι $\frac{A\Delta}{A'\Delta'} = \frac{AB}{A'B'}$.

408. Περίπτωσης II. Θεώρημα. Δύο τρίγωνα εἶναι ὅμοια, δταν ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ δύο ἀναλόγων πλευρῶν.

Ἐπιπέσεις: Ἐστωσαν τὰ τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $A'B'\Gamma'$ (Σχ. 303),



Σχ. 303.

Ἐπιπέσεις.	$\widehat{A} = \widehat{A}'$
	$\frac{AB}{A'B'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}$
Συμπ.	τρ. $AB\Gamma$ ὅμοιον πρὸς τρ. $A'B'\Gamma'$

τὰ ὁποῖα ἔχουν ἕξ ὑποθέσεως:

$$\widehat{A} = \widehat{A}' \quad \text{καὶ} \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'} \quad (1)$$

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ὅμοια.

Ἀπόδειξις: Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς AB λαμβάνομεν ἕνα τμήμα $A\Delta = A'B'$ καὶ ἀπὸ τὸ Δ φέρομεν τὴν παράλληλον πρὸς τὴν $B\Gamma$, ἣ ὁποῖα τέμνει τὴν $A\Gamma$ εἰς τὸ E .

Ἐπειδὴ ἡ ΔE εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν $B\Gamma$, τὸ τρίγωνον $A\Delta E$ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ $AB\Gamma$.

Θὰ δείξωμεν τώρα, ὅτι τὰ τρίγωνα $A\Delta E$ καὶ $A'B'\Gamma'$ εἶναι ἴσα.

Τὰ τρίγωνα αὐτὰ ἔχουν: $\widehat{A} = \widehat{A}'$, ἕξ ὑποθέσεως, $A\Delta = A'B'$, ἕκ κατασκευῆς. Ἐπειδὴ ἡ ΔE εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν $B\Gamma$, θὰ εἶναι

$$\frac{AB}{\Delta\Delta} = \frac{A\Gamma}{A\epsilon} \quad \eta \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{A\Gamma}{A\epsilon} \quad (2)$$

Ἄλλὰ ἐξ ὑποθέσεως ἔχομεν καὶ τὴν ἰσότητα (1) ἀπὸ τὰς ἰσότη-
 τας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι $\frac{A\Gamma}{A'\Gamma'} = \frac{A\Gamma}{A\epsilon}$.

Ἐπειδὴ οἱ λόγοι αὐτοὶ εἶναι ἴσοι καὶ ἔχουν τοὺς ἀριθμητὰς τῶν
 ἴσους θὰ ἔχουν καὶ τοὺς παρονομαστὰς τῶν ἴσους, δηλ. θὰ εἶναι
 $A\epsilon = A'\Gamma'$.

Τὰ τρίγωνα λοιπὸν $\Delta\Delta\epsilon$ καὶ $A'B'\Gamma'$ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν δύο
 πλευρὰς ἴσας, $\Delta\Delta = A'B'$, $A\epsilon = A'\Gamma'$, καὶ τὰς ὑπ' αὐτῶν περιεχομέ-
 νας γωνίας A καὶ A' ἴσας.

Ἄλλὰ τὸ τρίγωνον $\Delta\Delta\epsilon$ εἶναι ὁμοιον πρὸς τὸ $AB\Gamma$, ὅπως ἐδείχθη
 ἀνωτέρω· ἄρα καὶ τὸ ἴσον του $A'B'\Gamma'$ θὰ εἶναι ὁμοιον πρὸς τὸ $AB\Gamma$.

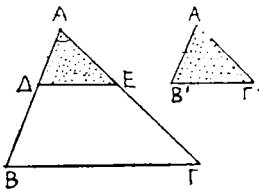
Ἐδείχθη λοιπὸν, ὅτι: **Δύο τρίγωνα εἶναι ὁμοια. . .**

409. Πρόρισμα. *Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι ὁμοια, εἰταν αἱ
 κάθετοι πλευραὶ τῶν εἶναι ἀνάλογοι.*

Πράγματι· τὰ τρίγωνα αὐτὰ ἔχουν καὶ τὰς γωνίας, αἱ ὁποῖαι πε-
 ριέχονται ὑπὸ τῶν καθέτων πλευρῶν ἴσας, ὡς ὀρθὰς· ἄρα εἶναι ὁμοια,
 διότι ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην, περιεχομένην ὑπὸ πλευρῶν ἀναλόγων.

410. Περίπτωσης III. Θεώρημα. *Δύο τρίγωνα εἶναι ὁμοια,
 εἰταν ἔχουν τὰς πλευρὰς τῶν ἀντιστοιχῶς ἀναλόγους.*

Ἐπιπέσεις: Ἐστῶσαν τὰ τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $A'B'\Gamma'$ (Σχ. 304),
 τὰ ὁποῖα ἔχουν



Σχ. 304.

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'} \quad 1$$

Ἐπιπέσεις.	$\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}$
Συμπ.	τρ. $AB\Gamma$ ὁμοιον πρὸς τρ. $A'B'\Gamma'$

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ὁμοια.

Ἀπόδειξις: Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς AB λαμβάνομεν τμῆμα $\Delta\Delta = A'B'$
 καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον Δ φέρομεν τὴν $\Delta\epsilon$ παράλληλον πρὸς τὴν $B\Gamma$, ἣ
 ὁποῖα τέμνει τὴν $A\Gamma$ εἰς τὸ σημεῖον ϵ .

Ἐπειδὴ ἡ $\Delta\epsilon$ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν $B\Gamma$, τὸ τρίγωνον $\Delta\Delta\epsilon$
 εἶναι ὁμοιον πρὸς τὸ $AB\Gamma$ (§ 405).

Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $\Delta\Delta\epsilon$ εἶναι ὁμοια, θὰ εἶναι

$$\frac{AB}{\Delta\Delta} = \frac{B\Gamma}{\Delta\epsilon} = \frac{A\Gamma}{\epsilon A} \quad (2)$$

Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $AD = A'B'$, ἡ σχέσηις αὐτὴ γράφεται

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BG}{\Delta E} = \frac{\Gamma A}{EA} \quad (3)$$

Ἀλλὰ ἐξ ὑποθέσεως ἔχομεν καὶ τὴν σχέσιν (1).

Ἐπειδὴ οἱ πρῶτοι λόγοι τῶν σχέσεων (1) καὶ (3) εἶναι ἴσοι, θὰ εἶναι ἴσοι καὶ οἱ ἄλλοι τῶν λόγοι· δηλ. θὰ εἶναι

$$\frac{BG}{B'\Gamma'} = \frac{\Gamma A}{\Gamma'A'} = \frac{BG}{\Delta E} = \frac{\Gamma A}{EA}$$

ἢ $\frac{BG}{B'\Gamma'} = \frac{BG}{\Delta E} \quad (4) \text{ καὶ } \frac{\Gamma A}{\Gamma'A'} = \frac{\Gamma A}{EA} \quad (5)$

Ἐπειδὴ οἱ ἴσοι λόγοι (4) ἔχουν τοὺς ἀριθμητὰς τῶν ἴσους, θὰ ἔχουν ἴσους καὶ τοὺς παρονομαστὰς τῶν· δηλ. θὰ εἶναι $B'\Gamma' = \Delta E$.

Ὁμοίως ἀπὸ τοὺς ἴσους λόγους (5) εὐρίσκομεν, ὅτι $\Gamma'A' = EA$.

Τὰ τρίγωνα ΔE καὶ $A'B'\Gamma'$ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν καὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς τῶν ἴσας μίαν πρὸς μίαν· δηλ. ἔχουν $AD = A'B'$ ἐκ κατασκευῆς, $\Delta E = B'\Gamma'$, $AE = A'\Gamma'$, ὡς ἐδείχθη ἀνωτέρω.

Ἀλλὰ τὸ τρίγωνον ΔE εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$, ἄρα καὶ τὸ ἴσον του $A'B'\Gamma'$ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ $AB\Gamma$.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: *Δύο τρίγωνα εἶναι. . .*

411. Θεώρημα. *Δύο τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰς πλευρὰς τῶν παραλλήλους μίαν πρὸς μίαν ἢ καθέτους, μίαν πρὸς μίαν, εἶναι ὅμοια.*

Ἐπιπέσεις: Ἐστῶσαν τὰ τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $A'B'\Gamma'$, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰς πλευρὰς $AB, BG, \Gamma A$ ἀντιστοίχως παραλλήλως ἢ ἀντιστοίχως καθέτους πρὸς τὰς $A'B', B'\Gamma', \Gamma'A'$.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ὅμοια.

Ἀπόδειξις: Γνωρίζομεν, ὅτι δύο γωνίαι, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰς πλευρὰς τῶν παραλλήλους μίαν πρὸς μίαν, ἢ καθέτους μίαν πρὸς μίαν, εἶναι ἴσαι ἢ παραπληρωματικαί. Ὡστε αἱ γωνίαι τῶν δύο τριγώνων νὰ εἶναι:

1ον. Ἐἴτε $A + A' = 2 \delta\rho\theta.$, $B + B' = 2 \delta\rho\theta.$, $\Gamma + \Gamma' = 2 \delta\rho\theta.$

2ον. Ἐἴτε $A = A'$, $B + B' = 2 \delta\rho\theta.$, $\Gamma + \Gamma' = 2 \delta\rho\theta.$

3ον. Ἐἴτε $A = A'$, $B = B'$ καὶ συνεπῶς $\Gamma = \Gamma'$.

Ἡ πρώτη ὑπόθεσις θὰ ἔδιδε, ὡς ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν δύο τριγώνων 6 ὀρθὰς καὶ ἐπομένως ἡ ὑπόθεσις αὐτὴ ἀποκλείεται, διότι

Ἐπιπέσεις.	1ον.	$\left\{ \begin{array}{l} AB \parallel A'B' \\ BG \parallel B'\Gamma' \\ \Gamma A \parallel \Gamma'A' \end{array} \right.$
	2ον.	$\left\{ \begin{array}{l} AB \perp A'B' \\ BG \perp B'\Gamma' \\ \Gamma A \perp \Gamma'A' \end{array} \right.$
Συμπ.		τρ. $AB\Gamma$ ὅμοιον πρὸς τρ. $A'B'\Gamma'$

τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν δύο τριγώνων εἶναι ἴσον μὲ 4 ὀρθάς.

Ἡ δευτέρα ὑπόθεσις θὰ ἔδιδε, ὡς ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν δύο τριγώνων μεγαλύτερον τῶν 4 ὀρθῶν καὶ ἐπομένως καὶ ἡ ὑπόθεσις αὐτὴ ἀποκλείεται.

Ἡ τρίτη ὑπόθεσις εἶναι μόνον παραδεκτὴ· ἀλλὰ τότε τὰ τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $A'B'\Gamma'$ θὰ εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουν τὰς γωνίας των ἴσας μίαν πρὸς μίαν.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Δύο τρίγωνα, τὰ ὁποῖα. . .**

Σημ. Εἰς τὰ τρίγωνα αὐτά, ὁμόλογοι πλευραὶ εἶναι αἱ παράλληλοι ἢ αἱ κάθετοι πλευραὶ των.

Ἀσκήσεις

Α' Ὁμάς. 1005. (1037). Ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος ἑνὸς τριγώνου εἶναι 7,4 μ. καὶ 6,2 μ. Ἐάν ἡ ὁμόλογος βάσις ὁμοίου τριγώνου εἶναι 4,6 μ. πόσον εἶναι τὸ ὕψος τούτου.

1006. (1038). Δίδονται τὰ μήκη B καὶ β τῶν βάσεων τραπεζίου καὶ τὸ ὕψος του v . Νὰ εὑρεθῇ τὸ ὕψος τοῦ σχηματιζομένου τριγώνου ἀπὸ τὴν προέκτασιν τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν τοῦ τραπεζίου. Ἐφαρμογή:

$$B=25 \mu., \quad \beta=18 \mu., \quad v=12,2 \mu.$$

Β' Ὁμάς. 1007. (1039). Αἱ πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου $AB\Gamma$ ἔχουν μήκη 8 μ., 12 μ. καὶ 16 μ. Αἱ πλευραὶ ἑνὸς ἄλλου τριγώνου $A'B'\Gamma'$ ἔχουν μήκη 4 μ., 6 μ. καὶ 8 μ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $A'B'\Gamma'$ εἶναι ὅμοια.

1008. (1040). Ἐάν εἰς ὀξυγώνιον τρίγωνον ἀχθοῦν δύο ὕψη του, τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν κοινὴν κορυφὴν τὴν τομὴν τῶν ὑψῶν αὐτῶν, εἶναι ὅμοια.

1009. (1041). Ἐάν ἀχθοῦν αἱ διαγώνιοι τραπεζίου, τὰ τρίγωνα τὰ ὁποῖα ἔχουν κοινὴν κορυφὴν τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων καὶ βάσεις τὰς βάσεις τοῦ τραπεζίου εἶναι ὅμοια.

1010. (1042). Ἐάν τὰ τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $AB\Gamma'$ εἶναι ὅμοια, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι καὶ τὰ τρίγωνα $BA\beta'$ καὶ $\Gamma A\Gamma'$ εἶναι ὅμοια.

Γ' Ὁμάς. 1011. (1043). Ἀπὸ τὴν κορυφὴν A ἑνὸς παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ φέρομεν μίαν τέμνουσαν αὐτοῦ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν διαγώνιον $B\Delta$ εἰς τὸ E , τὴν πλευρὰν $\Gamma\Delta$ εἰς τὸ Z καὶ τὴν προέκτασιν τῆς $B\Gamma$ εἰς τὸ H . νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι

$$\overline{EA}^2 = EH \times EZ$$

1012. (1044). Δίδεται τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$, τὸ ὕψος $\Delta\Delta$ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν $B\Gamma$ καὶ ἡ κάθετος ΔE ἐπὶ τὴν AB . Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι

$$\overline{A\Delta}^2 = A\Gamma \times \Delta E.$$

1013. (1045). Ἐάν εἰς ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$ ἡ πλευρὰ AB εἶναι διπλασία τῆς $B\Gamma$ καὶ ἐπὶ τῆς AB ληφθῇ ἓνα σημεῖον E τοιοῦτον, ὥστε $BE = \frac{1}{2} B\Gamma$,

νά αποδειχθῆ, ὅτι αἱ γωνίαι BGE καὶ GAB εἶναι ἴσαι.

1014. (1046). Ἐὰν ἓνα τρίγωνον ABG εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον καὶ ἀπὸ τὴν κορυφὴν τοῦ A ἀχθῶσιν ἡ διάμετρος AD καὶ τὸ ὕψος AE τοῦ τριγώνου, νά αποδειχθῆ, ὅτι $AB : AD = AE : AG$.

1015. (1047). Ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας A τριγώνου ABG ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον τέμνει τὴν ἀπέναντι πλευρὰν εἰς τὸ σημεῖον Δ καὶ τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ E . Νά αποδειχθῆ ὅτι $AB : AE = AD : AG$.

1016. (1048). Ἐνα τρίγωνον ABG εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον O . Φέρομεν τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας A , ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν BG εἰς τὸ Δ καὶ τὴν περιφέρειαν O εἰς τὸ E . Νά αποδειχθῆ, ὅτι $\overline{EB}^2 = EA \times ED$.

1017. (1049). Ἐνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ABG , ($AB = AG$) εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἓνα κύκλον O . Ἀπὸ τὴν κορυφὴν A φέρομεν μίαν εὐθεΐαν, ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν βάσιν BG εἰς τὸ Δ καὶ τὴν περιφέρειαν O εἰς τὸ E . Νά αποδειχθῆ ὅτι $\overline{AB}^2 = AD \times AE$.

1018. (1050). Ἐνα τρίγωνον ABG εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον O . Φέρομεν μίαν χορδὴν $B'G'$ παράλληλον πρὸς τὴν πλευρὰν BG φέρομεν τὴν χορδὴν AG' , ἡ ὁποία τέμνει τὴν BG εἰς τὸ Δ . Νά αποδειχθῆ, ὅτι

$$AB \times AG' = AB' \times AD.$$

1019. (1051). Δύο κύκλοι O καὶ O' ἐφάπτονται ἐκτὸς εἰς τὸ σημεῖον A . Ἀπὸ τὸ A φέρομεν δύο εὐθεΐας BAB' καὶ GAG' , αἱ ὁποῖαι περατοῦνται εἰς τὰς περιφερείας O καὶ O' .

1ον. Νά αποδειχθῆ, ὅτι αἱ χορδαὶ BG καὶ $B'G'$, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰ ἄκρα των εἶναι παράλληλοι.

2ον. Νά αποδειχθῆ, ὅτι $\frac{AB}{AB'} = \frac{AG}{AG'}$.

Δ' Ὁμάς. 1020. (1052). Ἐὰν δύο τρίγωνα εἶναι ὅμοια, ὁ λόγος δύο ὁμολόγων διχοτόμων εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῆς ομοιότητός των.

1021. (1053). Ἐὰν δύο τρίγωνα εἶναι ὅμοια, ὁ λόγος δύο ὁμολόγων διαμέσων των εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῆς ομοιότητός των.

1022. (1054). Δίδεται ἓνα τρίγωνον ABG καὶ ἓνα τυχὸν σημεῖον M ἐπὶ τῆς πλευρᾶς BG . Νά αποδειχθῆ, ὅτι οἱ κύκλοι O καὶ O' , οἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ τὰ σημεῖα A, B, M καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα A, G, M ἔχουν τὰς ἀκτῖνας των ἀνάλογους πρὸς τὰς πλευρὰς AB καὶ AG .

1023. (1055). Νά αποδειχθῆ, ὅτι εἰς ἓνα παραλληλόγραμμον δύο διαδοχικαὶ πλευραὶ τοῦ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι πρὸς τὰ ἀντίστοιχα ὕψη του.

1024. (1056). Δίδεται ἓνα ὀρθογώνιον $ABGD$ εἰς τὸ ὁποῖον ἡ βάσις AB εἶναι διπλασία τοῦ ὕψους BG . Ἀπὸ τὴν κορυφὴν A φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν διαγώνιον BD , ἡ ὁποία τέμνει τὴν πλευρὰν GD εἰς τὸ E . Νά αποδειχθῆ, ὅτι ἡ DE εἶναι τὸ τέταρτον τῆς DG .

1025. (1057). Εἰς ἓνα ὀρθογώνιον τρίγωνον εἶναι ἐγγεγραμμένον ἓνα τετράγωνον, τοῦ ὁποίου μία πλευρὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ὑποτείνουσῃς νά αποδειχθῆ, ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν δύο τμημάτων τῆς ὑποτείνουσῃς τὰ ὁποῖα μένουσιν.

1026. (1058). Νά αποδειχθῆ, ὅτι εἰς ἓνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ABG αἱ

ἀποστάσεις τοῦ ποδὸς Δ τοῦ ὕψους ΑΔ, ἀπὸ τὰς καθέτους πλευρὰς τοῦ τριγώνου εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς πλευρὰς αὐτάς.

1027. (1059). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ ἀποστάσεις τοῦ μέσου μιᾶς πλευρᾶς τριγώνου ἀπὸ τὰς δύο ἄλλας πλευρὰς του εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι πρὸς τὰς δύο αὐτάς πλευρὰς.

1028. (1060). Δίδεται ἓνα τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι α, β, γ. Γράφομεν περιφέρειαν κύκλου Ο, ἣ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ Β καὶ ἐφάπτεται τῆς ΑΓ εἰς τὸ Α. Ἡ περιφέρεια αὐτὴ τέμνει τὴν πλευρὰν ΒΓ εἰς ἓνα σημεῖον Δ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΔ εἶναι ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν α, β, γ

1029. (1061). Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας λαμβάνομεν κατὰ σειρὰν τέσσαρα σημεῖα Γ, Α, Β, Δ οὕτως, ὥστε $AB = \alpha$, $GB = AD = \beta$ καὶ ὑποθέτομεν, ὅτι $\alpha < \beta$. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἐὰν Μ εἶναι ἓνα ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς τομῆς τῶν δύο περιφερειῶν, αἱ ὁποῖαι ἔχουν κέντρα τὰ Γ καὶ Δ καὶ ἀκτῖνα τὴν αὐτὴν β, ἡ ΑΜ εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν α καὶ β.

Ε' Ὁμάς. 1030. (1062). Ἐὰν ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Δ μιᾶς τῶν πλευρῶν ᾠγωνίας ΑΒΓ ἀχθῇ ἡ ΔΕ κάθετος ἐπὶ τὴν ἄλλην πλευρὰν, ὁ λόγος ΔΕ : ΔΒ εἶναι ὁ αὐτὸς δι' οἵανδήποτε θέσιν τοῦ Δ.

1031. (1063). Δίδεται ἓνας κύκλος Ο καὶ μία εὐθεῖα χγ ἐκτὸς αὐτοῦ. Ἀπὸ τὸ ἓνα ἄκρον Α μιᾶς διαμέτρου ΑΒ καθέτου ἐπὶ τὴν χγ, φέρομεν μίαν τέμνουσαν, αὐθαιρέτου διευθύνσεως, ἣ ὁποία συναντᾷ τὴν περιφέρειαν Ο εἰς τὸ σημεῖον Μ καὶ τὴν χγ εἰς τὸ Μ'. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ γινόμενον $AM \times AM'$ εἶναι σταθερόν.
(Σχολή Ἰκάρων 1948)

1032. (1064). Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α ἐνὸς παραλληλογραμμοῦ ΑΒΓΔ φέρομεν μίαν τέμνουσαν μεταβλητῆς διευθύνσεως, ἣ ὁποία συναντᾷ τὰς πλευρὰς ΒΓ καὶ ΓΔ εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ γινόμενον $BE \times AZ$ εἶναι σταθερόν

1033. (1065). Ἐὰν δύο κύκλοι ἐφάπτονται αἱ χορδαὶ των, αἱ ὁποῖαι σχηματίζονται ἀπὸ μίαν εὐθειαν, ἣ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον τῆς ἀφῆς των ἔχουν τὸν αὐτὸν λόγον, τὸν ὁποῖον ἔχουν καὶ αἱ διάμετροί των.

1034. (1066). Δίδεται μία γωνία xOy καὶ ἓνα σημεῖον Σ ἐντὸς αὐτῆς. Ἀπὸ τὰ σημεῖα Ο καὶ Σ φέρομεν μίαν περιφέρειαν μεταβλητῆς ἀκτίνος, ἣ ὁποία τέμνει τὰς Ox καὶ Oy εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὁ λόγος $\frac{\Sigma A}{\Sigma B}$ μένει σταθερός.

3. Παράλληλοι εὐθείαι τεμνόμεναι ὑπὸ δέσμης εὐθειῶν

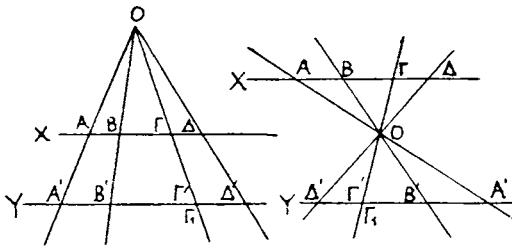
412. **Δέσμη εὐθειῶν.** Ἔστωσαν αἱ εὐθείαι ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ... (Σχ. 305), αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον Ο. Τὸ σύνολον τῶν εὐθειῶν αὐτῶν, αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο λέγεται **δέσμη εὐθειῶν.**

Αἱ εὐθείαι ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ... λέγονται **ἀκτῖνες** τῆς δέσμης.

Τὸ κοινὸν σημεῖον Ο τῆς δέσμης λέγεται **κέντρον** τῆς δέσμης.

413. Θεώρημα. Δύο εὐθεῖαι παράλληλοι τέμνονται εἰς μέρη ἀνάλογα ὑπὸ μιᾶς δέσμης εὐθειῶν.

Ἐπίδοσις: Ἐστῶσαν δύο παράλληλοι εὐθεῖαι X, Y, αἱ ὁποῖαι



Σχ. 305.

Ἐπίδοσις.	X//Y
Συμπ.	$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BΓ}{B'Γ'} = \frac{ΓΔ}{Γ'Δ'}$

τέμνονται ὑπὸ μιᾶς δέσμης εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὸ σημεῖον O, εἰς τὰ σημεῖα A, B, Γ, Δ ἢ X καὶ εἰς τὰ A', B', Γ', Δ' ἢ Y.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BΓ}{B'Γ'} = \frac{ΓΔ}{Γ'Δ'}$.

Ἐπίδοσις: Τὰ τὰ τρίγωνα OAB καὶ OA'B' εἶναι ὅμοια, διότι ἡ AB εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν A'B'.

Ἀπὸ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγῶνων αὐτῶν, ἔχομεν

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{OB}{OB'} \quad (1)$$

Ὁμοίως ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα OBG καὶ OB'G' ἔχομεν

$$\frac{OB}{OB'} = \frac{BG}{B'G'} = \frac{OG}{OG'} \quad (2)$$

Ἐπίσης ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα OGD καὶ OG'D' ἔχομεν

$$\frac{OG}{OG'} = \frac{GD}{G'D'} = \frac{OD}{OD'} \quad (3)$$

Ἐπειδὴ αἱ σχέσεις (1), (2), (3) ἔχουν ἀνὰ δύο ἓνα κοινὸν λόγον, ὅλοι οἱ λόγοι τῶν θὰ εἶναι ἴσοι καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BG}{B'G'} = \frac{GD}{G'D'}$$

Ἐδείχθη λοιπὸν, ὅτι: Δύο εὐθεῖαι παράλληλοι. . .

414. Θεώρημα. (Ἀντίστροφον). Ἐὰν δύο παράλληλοι εὐθεῖαι τέμνονται εἰς μέρη ἀνάλογα ὑπὸ πολλῶν τεμνουσῶν εὐθειῶν, αἱ τέμνουσαι αὐταὶ ἀποτελοῦν δέσμη εὐθειῶν.

Ἐπίδοσις: Ἐστῶσαν αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι X καὶ Y (Σχ. 305), αἱ ὁποῖαι τέμνονται ὑπὸ τῶν εὐθειῶν AA', BB', ΓΓ', ΔΔ' εἰς μέρη ἀνάλογα, ἥτοι ἔστω

ὅτι εἶναι: $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BΓ}{B'Γ'} = \frac{ΓΔ}{Γ'Δ'}$.

	X//Y
Ἐπίδοσις.	$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BΓ}{B'Γ'} = \frac{ΓΔ}{Γ'Δ'}$
Συμπ.	A'A, B'B, ΓΓ', ΔΔ' ἀποτελοῦν δέσμη

Συμπέρασμα: Θα δείξωμεν, ὅτι αἱ εὐθεῖαι αὐταὶ ἀποτελοῦν δέσμην εὐθειῶν, δηλ. προεκτεινόμεναι διέρχονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον.

Ἀπόδειξις: Ἐστω O τὸ σημεῖον τομῆς τῶν εὐθειῶν AA' καὶ BB' . Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν OG , ἡ ὁποία προεκτεινομένη τέμνει τὴν παράλληλον Y εἰς τὸ σημεῖον Γ_1 . Θα δείξωμεν, ὅτι τὰ σημεῖα Γ' καὶ Γ_1 συμπίπτουν καὶ ἔπομένως ἡ $\Gamma'\Gamma$ διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον O .

Ἐπειδὴ αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι X καὶ Y τέμνονται ὑπὸ τῆς δέσμης τῶν εὐθειῶν OAA' , OBB' , $OG\Gamma_1$, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma_1} \quad (1)$$

Ἀλλὰ ἐξ ὑποθέσεως ἔχομεν καὶ

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} \quad (2)$$

Ἀπὸ τὰς σχέσεις (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι

$$\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma_1}$$

Ἐπειδὴ οἱ δύο αὐτοὶ λόγοι εἶναι ἴσοι καὶ ἔχουν τοὺς ἀριθμητὰς τῶν ἴσους θὰ ἔχουν καὶ τοὺς παρονομαστὰς τῶν ἴσους· δηλ. θὰ εἶναι $B'\Gamma' = B'\Gamma_1$, καὶ ἔπομένως τὰ σημεῖα Γ' καὶ Γ_1 συμπίπτουν, διότι κείνται ἐπὶ τῆς εὐθείας Y πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ σημείου B' καὶ εἶναι $B'\Gamma' = B'\Gamma_1$. Ὀμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ ἡ τέμνουσα $\Delta'\Delta$ διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον O .

Ἀσκήσεις

1035. (1067). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς ἓνα τραπέζιον, τὰ μέσα τῶν βάσεων, τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων καὶ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του εἶναι τέσσαρα σημεῖα, τὰ ὁποῖα κείνται ἐπ' εὐθείας.

1036. (1068). Εἰς ἓνα τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$ φέρομεν μίαν παράλληλον πρὸς τὴν διαγώνιον BD , ἡ ὁποία τέμνει τὴν πλευρὰν AB εἰς τὸ E καὶ τὴν AD εἰς τὸ Z . Ἐπίσης φέρομεν μίαν δευτέραν παράλληλον πρὸς τὴν BD , ἡ ὁποία τέμνει τὴν $B\Gamma$ εἰς τὸ H καὶ τὴν $\Gamma\Delta$ εἰς τὸ Θ . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ εὐθεῖαι $Z\Theta$, EH καὶ $A\Gamma$ τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

1037. (1069). Δίδεται ἓνα παραλληλόγραμμον $AB\Gamma\Delta$ ἀπὸ τυχόν σημεῖον E τῆς διαγωνίου $A\Gamma$ φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς πλευράς του, αἱ ὁποῖαι τέμνουσι τὰς AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔA εἰς τὰ Z , H , Θ , I . Νὰ ἀποδειχθῇ:

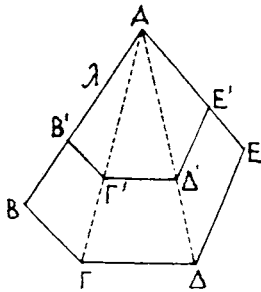
1ον. Ὅτι αἱ διαγώνιοι ZI καὶ $H\Theta$ τῶν παραλληλογράμμων $AZEI$ καὶ $EH\Theta E$ εἶναι παράλληλοι.

2ον. Ὅτι αἱ διαγώνιοι ZH καὶ $I\Theta$ τῶν παραλληλογράμμων $ZBHE$ καὶ $I\Theta\Delta$ καὶ ἡ διαγώνιος $A\Gamma$ τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

4. Ὀμοια πολύγωνα

415. Ὅρισμοί. Ἐστω ἓνα τυχόν πολύγωνον $AB\Gamma\Delta E$ καὶ ἓνα σημεῖον B' ἐπὶ τῆς πλευρᾶς του AB . Φέρομεν τὰς διαγωνίους $A\Gamma$ καὶ

ΑΔ, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α, καὶ τὰς Β'Γ', Γ'Δ', Δ'Ε' παραλλήλους ἀντιστοίχως πρὸς τὰς ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ. Λαμβάνομεν οὕτω τὸ πολύγωνον ΑΒ'Γ'Δ'Ε'. Τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ ΑΒ'Γ'Δ'Ε' ἔχουν :



Σχ. 306.

1ον. Τὰς γωνίας των ἴσας μίαν πρὸς μίαν : \widehat{A} κοινήν, $\widehat{B}=\widehat{B}'$, $\widehat{\Gamma}=\widehat{\Gamma}'$

2ον. Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΒ'Γ', ΑΓ'Δ', ΑΔ'Ε' εἶναι ἀντιστοίχως ὅμοια πρὸς τὰ ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΕ θὰ εἶναι :

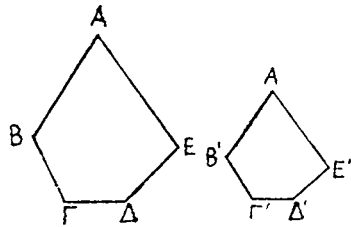
$$\frac{AB'}{AB} = \frac{B'\Gamma'}{B\Gamma} = \frac{A\Gamma'}{A\Gamma} = \frac{\Gamma'\Delta'}{\Gamma\Delta} = \frac{A\Delta'}{A\Delta} = \frac{\Delta'E'}{\Delta E} = \frac{AE'}{AE}.$$

Λέγομεν, ὅτι τὰ πολύγωνα αὐτὰ εἶναι **ὅμοια**.

Αἱ κορυφαὶ τῶν ἴσων γωνιῶν λέγονται **ὁμόλογοι κορυφαί**. Π.χ. αἱ κορυφαὶ Β καὶ Β', καθὼς αἱ Γ καὶ Γ', . . . εἶναι ὁμόλογοι κορυφαί.

Αἱ πλευραὶ Β'Γ' καὶ ΒΓ, πὸν συνδέουν δύο ὁμόλογους κορυφάς, λέγονται **ὁμόλογοι πλευραί** (π.χ. αἱ Γ'Δ' καὶ ΓΔ, αἱ Α'Β' καὶ ΑΒ. . .).

Γενικῶς : **Δύο πολύγωνα λέγονται ὅμοια**, ὅταν ἔχουν τὰς γωνίας των ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ τὰς ὁμόλογους πλευράς των ἀναλόγους.



Σχ. 307.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν αὐτὸν τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ Α'Β'Γ'Δ'Ε' (Σχ. 307) θὰ εἶναι ὅμοια, ἐὰν ἔχουν :

1ον. $\widehat{A}=\widehat{A}'$, $\widehat{B}=\widehat{B}'$, $\widehat{\Gamma}=\widehat{\Gamma}'$, $\widehat{\Delta}=\widehat{\Delta}'$, $\widehat{E}=\widehat{E}'$ καὶ

2ον. $\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} = \frac{\Delta E}{\Delta'E'} = \frac{EA}{E'A'}$.

Ὁ ἀριθμὸς, ὁ ὁποῖος ἐκφράζει τὸν λόγον τῶν ὁμόλογων πλευρῶν δύο ὁμοίων πολυγώνων, λέγεται **λόγος τῆς ὁμοιότητος αὐτῶν**.

416. Θεώρημα. Δύο πολύγωνα ὅμοια δύνανται νὰ χωρισθοῦν εἰς ἰσάριθμα τρίγωνα, ὅμοια ἓνα πρὸς ἓνα καὶ ὁμοίως κείμενα.

Ἐπίθεσις: Ἐστωσαν τὰ ὅμοια πολύγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ Α'Β'Γ'Δ'Ε' (Σχ. 308). Φέρομεν τὰς διαγωνίους ΑΓ, ΑΔ, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α καὶ τὰς διαγωνίους Α'Γ', Α'Δ', αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α', ὁμόλογον τῆς Α.

Καθένα ἀπὸ τὰ πολύγωνα αὐτὰ ἐχωρίσθη εἰς τρία τρίγωνα, τὰ ὁποῖα εἶναι τοποθετημένα κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ τρίγωνα $AB\Gamma$, $A\Gamma\Delta$, $A\Delta E$ εἶναι ὅμοια ἀντιστοίχως πρὸς τὰ τρίγωνα $A'B'\Gamma'$, $A'\Gamma'\Delta'$, $A'\Delta'E'$.

Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ τὰ πολύγωνα $AB\Gamma\Delta E$ καὶ $A'B'\Gamma'\Delta'E'$ εἶναι ὅμοια, θὰ εἶναι

$$\widehat{A}=\widehat{A}', \quad \widehat{B}=\widehat{B}', \quad \widehat{\Gamma}=\widehat{\Gamma}', \quad \widehat{\Delta}=\widehat{\Delta}', \quad \widehat{E}=\widehat{E}'$$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} = \frac{\Delta E}{\Delta'E'} = \frac{EA}{E'A'} \quad (1)$$

Τὰ τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $A'B'\Gamma'$ εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην, $B=B'$, περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἀναλόγων $\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}$.

Ἀπὸ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων αὐτῶν συνάγομεν, ὅτι

$$\widehat{A}_1=\widehat{A}'_1, \quad \widehat{\Gamma}_1=\widehat{\Gamma}'_1 \quad \text{καὶ} \quad \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} \quad (2)$$

Θὰ δείξωμεν τώρα, ὅτι τὰ τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ καὶ $A'\Gamma'\Delta'$ εἶναι ὅμοια.

Ἐὰν ἀπὸ τὰς ἴσας γωνίας Γ καὶ Γ' ἀφαιρέσωμεν τὰς ἴσας γωνίας Γ_1 καὶ Γ'_1 , αἱ ἀπομένουςαι γωνίαι Γ_2 καὶ Γ'_2 εἶναι ἴσαι. Ἀπὸ τὰς σχέσεις (2) καὶ (1) συνάγομεν, ὅτι $\frac{A\Gamma}{A'\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'}$.

Τὰ τρίγωνα λοιπὸν $A\Gamma\Delta$ καὶ $A'\Gamma'\Delta'$ εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην, $\Gamma_2=\Gamma'_2$ περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἀναλόγων,

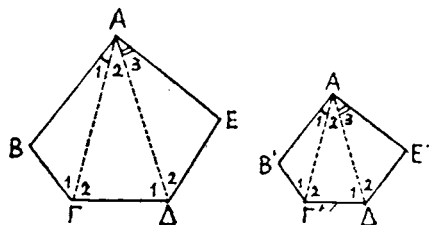
$$\frac{A\Gamma}{A'\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'}$$

Ὅμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ τὰ τρίγωνα $A\Delta E$ καὶ $A'\Delta'E'$ εἶναι ὅμοια.

Ἐδείχθη λοιπὸν, ὅτι: **Δύο πολύγωνα ὅμοια. . .**

417. Θεώρημα. (*Ἀντίστροφον*). Ἐὰν δύο πολύγωνα ἀποτελοῦνται ἀπὸ ἰσάριθμα τρίγωνα, ὅμοια ἓνα πρὸς ἓνα καὶ τοποθετημένα κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν, τὰ πολύγωνα αὐτὰ εἶναι ὅμοια.

Ἐπίδειξις: Ἐστω τὸ πολύγωνον $AB\Gamma\Delta E$ (Σχ. 308), τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ τρίγωνα $AB\Gamma$, $A\Gamma\Delta$ καὶ $A\Delta E$ καὶ τὸ πολύγωνον $A'B'\Gamma'\Delta'E'$ τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ τρίγωνα $A'B'\Gamma'$, $A'\Gamma'\Delta'$ καὶ



Σχ. 308.

Α'Δ'Ε', τὰ ὁποῖα εἶναι ὅμοια ἀντιστοίχως πρὸς τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΕ τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ καὶ τοποθετημένα κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν πρὸς αὐτὰ.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ πολύγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ Α'Β'Γ'Δ'Ε' εἶναι ὅμοια.

Ἀπόδειξις: Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ πολύγωνα αὐτὰ ἔχουν τὰς γωνίας των ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς των ἀναλόγους.

Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' εἶναι ὅμοια, θὰ ἔχουν τὰς γωνίας των ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους· ἦτοι θὰ εἶναι

$$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_1', \quad \widehat{B} = \widehat{B}', \quad \widehat{\Gamma}_1 = \widehat{\Gamma}_1' \quad (1)$$

καὶ
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'} \quad (1')$$

Ὅμοίως ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΓΔ καὶ Α'Γ'Δ' ἔχομεν

$$\widehat{\Gamma}_2 = \widehat{\Gamma}_2', \quad \widehat{\Delta}_1 = \widehat{\Delta}_1', \quad \widehat{A}_2 = \widehat{A}_2' \quad (2)$$

καὶ
$$\frac{A\Gamma}{A'\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} = \frac{A\Delta}{A'\Delta'} \quad (2')$$

Ὅμοίως ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΔΕ καὶ Α'Δ'Ε' ἔχομεν

$$\widehat{\Delta}_2 = \widehat{\Delta}_2', \quad \widehat{E} = \widehat{E}', \quad \widehat{A}_3 = \widehat{A}_3' \quad (3)$$

καὶ
$$\frac{A\Delta}{A'\Delta'} = \frac{\Delta E}{\Delta'E'} = \frac{EA}{E'A'} \quad (3')$$

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1), (2), (3) συνάγομεν, ὅτι αἱ γωνίαι τῶν δύο πολυγώνων ΑΒΓΔΕ καὶ Α'Β'Γ'Δ'Ε' εἶναι ἴσαι μία πρὸς μίαν, εἴτε ἀπ' εὐθείας, ὅπως $B = B'$, $E = E'$, εἴτε ὡς ἄθροισμα ἴσων γωνιῶν, ὅπως αἱ γωνίαι Γ καὶ Γ', αἱ ὁποῖαι εἶναι ἄθροισμα τῶν ἴσων γωνιῶν

$$\widehat{\Gamma}_1 = \widehat{\Gamma}_1' \quad \text{καὶ} \quad \widehat{\Gamma}_2 = \widehat{\Gamma}_2'.$$

Ἐπίσης ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1'), (2'), (3') συνάγομεν, ὅτι

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} = \frac{\Delta E}{\Delta'E'} = \frac{EA}{E'A'}.$$

Τὰ πολύγωνα λοιπὸν ΑΒΓΔΕ καὶ Α'Β'Γ'Δ'Ε' ἔχουν τὰς γωνίας των ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους· ἄρα εἶναι ὅμοια.

Ἐδείχθη λοιπὸν, ὅτι: *Ἐὰν δύο πολύγωνα. . .*

418. Παρατήρησις. Κατὰ τὸν ὀρισμὸν τῶν ὁμοίων πολυγώνων, δύο πολύγωνα εἶναι ὅμοια, ὅταν ἔχουν τὰς γωνίας των μίαν πρὸς μίαν

ἴσας καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς τῶν ἀναλόγους.

Εἰς τὴν περίπτωσιν τῶν ὁμοίων τριγῶνων (I περίπτωσις) εἶδομεν:

1^{ον}. Ὅτι ὅταν δύο τρίγωνα ἔχουν τὰς γωνίας τῶν ἴσας μίαν πρὸς μίαν εἶναι ὅμοια, δηλ. ἔχουν καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς τῶν ἀναλόγους, καὶ 2^{ον} ὅταν δύο τρίγωνα ἔχουν τὰς ὁμολόγους πλευρὰς τῶν ἀναλόγους (III περίπτωσις) τὰ τρίγωνα εἶναι ὅμοια, δηλ. ἔχουν καὶ τὰς γωνίας τῶν ἴσας μίαν πρὸς μίαν.

Δηλ. εἰς τὰ τρίγωνα ἢ ἰσότης τῶν γωνιῶν δύο τριγῶνων συνεπάγεται καὶ τὴν ἀναλογίαν τῶν πλευρῶν καὶ ἀντιστρόφως ἢ ἀναλογία τῶν πλευρῶν δύο τριγῶνων συνεπάγεται καὶ τὴν ἰσότητα τῶν γωνιῶν.

Δὲν συμβαίνει ὁμως τὸ αὐτὸ καὶ διὰ τὰ πολύγωνα. Διὰ τὰ εἶναι δύο πολύγωνα ὅμοια, πρέπει νὰ ἀποδεικνύωμεν, ὅτι ἔχουν τὰς γωνίας τῶν μίαν πρὸς μίαν ἴσας καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς τῶν ἀναλόγους. Διότι ὑπάρχουν πολύγωνα, τὰ ὅποια ἔχουν τὰς γωνίας τῶν ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ δὲν εἶναι ὅμοια, ὅπως τὸ τετράγωνον καὶ τὸ ὀρθογώνιον. ἢ δύο τυχόντα ὀρθογώνια· ἐπίσης ὑπάρχουν πολύγωνα, τὰ ὅποια ἔχουν τὰς ὁμολόγους πλευρὰς τῶν ἀναλόγους καὶ ἐν τούτοις δὲν εἶναι ὅμοια, ὅπως τὸ τετράγωνον καὶ ὁ ῥόμβος, ἢ δύο τυχόντες ῥόμβοι.

419. Θεώρημα. *Αἱ περίμετροι δύο ὁμοίων πολυγώνων ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον δύο ὁμολόγων πλευρῶν τῶν (δηλ. ἴσον μὲ τὸν λόγον τῆς ὁμοιοτήτος τῶν).*

Ὑπόθεσις: Ἐστωσαν ΑΒΓΔΕ καὶ Α'Β'Γ'Δ'Ε' (Σχ 308) δύο ὅμοια, πολύγωνα.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\frac{\text{περίμετρ. ΑΒΓΔΕ}}{\text{περίμετρ. Α'Β'Γ'Δ'Ε'}} = \frac{ΑΒ}{Α'Β'}$.

Ἀπόδειξις: Πράγματι· ἐπειδὴ τὰ πολύγωνα εἶναι ὅμοια, αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ τῶν θὰ εἶναι ἀνάλογοι, δηλ. θὰ εἶναι

$$\frac{ΑΒ}{Α'Β'} = \frac{ΒΓ}{Β'Γ'} = \frac{ΓΔ}{Γ'Δ'} = \frac{ΔΕ}{Δ'Ε'} = \frac{ΕΑ}{Ε'Α'} = k \quad (\text{ὁ λόγος ὁμοιοτήτος}).$$

Κατὰ τὴν ιδιότητα τῶν ἴσων κλασμάτων, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμητῶν τῶν πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν παρονομαστῶν τῶν, ἔχει λόγον ἴσον μὲ ἓνα ἀπὸ τὰ δοθέντα κλάσματα, ἥτοι εἶναι

$$\frac{ΑΒ+ΒΓ+ΓΔ+ΔΕ+ΕΑ}{Α'Β'+Β'Γ'+Γ'Δ'+Δ'Ε'+Ε'Α'} = \frac{ΑΒ}{Α'Β'} = \dots = k$$

$$\text{ἢ} \quad \frac{\text{περίμετρ. ΑΒΓΔΕ}}{\text{περίμετρ. Α'Β'Γ'Δ'Ε'}} = \frac{ΑΒ}{Α'Β'} = k.$$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: *Αἱ περίμετροι δύο ὁμοίων. . .*

ἈΣΚΗΣΕΙΣ

Α' Ὁμάς. 1038. (1070). Δύο παραλληλόγραμμα, τὰ ὁποῖα ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ πλευρῶν ἀνάλογων, εἶναι ὅμοια.

1039. (1071). Δύο ὀρθογώνια, τῶν ὁποίων αἱ διαγώνιοι τέμνονται ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν, εἶναι ὅμοια.

1040. (1072). Δύο παραλληλόγραμμα, τῶν ὁποίων αἱ διαγώνιοι τέμνονται ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν καὶ εἶναι ἀνάλογοι, εἶναι ὅμοια.

1041. (1073). Δύο τετράπλευρα εἶναι ὅμοια, ἐὰν αἱ πλευραὶ καὶ μία διαγώνιος τοῦ ἑνὸς εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα τοῦ ἄλλου.

1042. (1074). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι δύο τραπέζια, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰς βάσεις των ἀνάλογους καὶ τὰς προσκειμένας γωνίας, εἰς δύο ὁμολόγους βάσεις, ἴσας μίαν πρὸς μίαν, εἶναι ὅμοια.

Β' Ὁμάς. 1043. (1075). Δύο τετράπλευρα ΑΒΓΔ καὶ Α'Β'Γ'Δ' περιγεγραμμένα περὶ δύο κύκλους Ο καὶ Ο' ἔχουν τὰς γωνίας των ἴσας μίαν πρὸς μίαν. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ τετράπλευρα αὐτὰ εἶναι ὅμοια.

1044. (1076). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὅλα τὰ ὀρθογώνια τὰ περιγεγραμμένα περὶ δοθὲν τετράπλευρον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς διαγωνίους του καθέτους, εἶναι ὅμοια.

1045. (1077). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι οἱ ῥόμβοι, οἱ ἐγγεγραμμένοι εἰς δοθὲν ὀρθογώνιον, εἶναι ὅμοιοι.

1046. (1078). Δίδεται ἓνα πολύγωνον ΑΒΓ... περιγεγραμμένον περὶ ἓνα κύκλον καὶ ἓνα ἄλλο πολύγωνον Α'Β'Γ'... , τὸ ὁποῖον σχηματίζεται ἐκ τοῦ πρώτου πολυγώνου διὰ παραλλήλων Α'Β', Β'Γ'... πρὸς τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ, ... καὶ αἱ ὁποῖα ἀπέχουν ἀπόστασιν δ ἀπὸ τὰς πλευρὰς αὐτάς. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ πολύγωνα ΑΒΓ... καὶ Α'Β'Γ'... εἶναι ὅμοια.

1047. (1079). Δίδεται ἓνα παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ ἀπὸ τὰς κορυφὰς του Α καὶ Γ φέρομεν καθέτους ΑΑ' καὶ ΓΓ' ἐπὶ τὴν διαγώνιον ΒΔ. Ἐπίσης ἀπὸ τὰς κορυφὰς Β καὶ Δ φέρομεν καθέτους ΒΒ' καὶ ΔΔ' ἐπὶ τὴν διαγώνιον ΑΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τετράπλευρον Α'Β'Γ'Δ' εἶναι ἓνα παραλληλόγραμμον ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓΔ.

Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν ἐπὶ τοῦ Γ' Κεφαλαίου

Α' Ὁμάς. 1048. (1080). Δίδεται ἓνα τραπέζιον ΑΒΓΔ. Ἐπὶ τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του ΑΔ καὶ ΒΓ λαμβάνομεν ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι $\frac{EA}{ED} = \frac{ZB}{ZG} = \frac{\mu}{\nu}$. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ εὐθεῖα ΕΖ, ἂν γνωρίζωμεν τὰς βάσεις ΑΒ=α καὶ ΓΔ=β τοῦ τραπέζιου.

04 (1081). Ὄταν δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς, ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου ἐπαφῆς των ἀπὸ μίαν κοινὴν ἐφαπτομένην εἶναι τετάρτη ἀνάλογος τοῦ ἡμισυαίσιματος τῶν ἀκτίνων των καὶ ἐκάστης τῶν ἀκτίνων αὐτῶν.

Β' Ὁμάς. 1050. (1082). Ἐὰν ἐπὶ τῶν ὁμολόγων πλευρῶν ΒΓ, Β'Γ' δύο ὁμοίων τριγώνων ΑΒΓ, Α'Β'Γ' ληφθοῦν δύο τμήματα ΒΗ καὶ Β'Η', τὰ ὁποῖα ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον δύο ὁμολόγων πλευρῶν, αἱ ΑΗ καὶ Α'Η' διαίρουσιν τὰ δοθέντα τρίγωνα εἰς ἄλλα ὅμοια, ἓνα πρὸς ἓνα.

1051. (1083). Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $A'B'\Gamma'$ εἶναι ὅμοια, ὅταν ὁ λόγος $\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}$ τῶν ὑποτείνουσῶν των εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον $\frac{AB}{A'B'}$ τῶν καθέτων πλευρῶν των.

1052. (1084). Δύο τρίγωνα εἶναι ὅμοια, ἐὰν μία πλευρὰ καὶ τὰ ὕψη των, τὰ ὁποῖα ἄγονται ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς πλευρᾶς αὐτῆς, εἶναι ἀνάλογα.

1053. (1085). Δύο τρίγωνα εἶναι ὅμοια, ἂν ἓνα ὕψος των καὶ αἱ περιέχουσαι αὐτὸ πλευραὶ των εἶναι ἀνάλογοι.

1054. (1086). Δύο τρίγωνα εἶναι ὅμοια, ἂν ἔχουν δύο πλευρὰς των καὶ τὰς ἀκτῖνας τῶν περιγεγραμμένων κύκλων ἀνάλογους.

1055. (1087). Δύο τρίγωνα εἶναι ὅμοια, ἐὰν ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην καὶ μίαν πλευρὰν καὶ τὰς ἀκτῖνας τῶν ἐγγεγραμμένων κύκλων ἀνάλογους.

1056. (1088). Δύο τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην καὶ τὰ ὕψη, τὰ ἀντιστοιχοῦντα εἰς τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας αὐτῆς ἀνάλογα, εἶναι ὅμοια.

1057. (1089). Δύο ὀρθογώνια τρίγωνα εἶναι ὅμοια, ἐὰν ὁ λόγος τῶν ὑποτείνουσῶν των εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν ἀντιστοίχων ὑψῶν των.

1058. (1090). Εἰς ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ὀρθογώνιον εἰς τὸ A , φέρομεν τὸ ὕψος του AD καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῶν AB , $A\Gamma$ καὶ ΔA τμήματα

$$AB' = \frac{AB}{3}, \quad A\Gamma' = \frac{A\Gamma}{3} \quad \text{καὶ} \quad \Delta\Delta' = \frac{\Delta\Delta}{3}.$$

Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τρίγωνον $\Delta'B'\Gamma'$ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ $AB\Gamma$

1059. (1091). Ἄν AB , $A\Gamma$ εἶναι χορδαὶ καὶ AD διάμετρος τοῦ αὐτοῦ κύκλου, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον A τῆς περιφερείας του, ἀχθῆ δὲ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου εἰς τὸ Δ , ἢ ὁποῖα τέμνει τὰς AB καὶ $A\Gamma$ εἰς τὰ E καὶ Z , νὰ δεიχθῇ, ὅτι τὰ τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ AZE εἶναι ὅμοια.

1060. (1092). Εἰς ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$ φέρομεν τὰ τρία ὕψη του AA' , BB' καὶ $\Gamma\Gamma'$. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ τρία τρίγωνα $AB'\Gamma'$, $B\Gamma'A'$, $\Gamma A'B'$ εἶναι ὅμοια πρὸς τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$.

Γ' Ὁμάς. 1061. (1093). Εἰς τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ φέρομεν μίαν παράλληλον πρὸς τὴν πλευρὰν $B\Gamma$, ἢ ὁποῖα συναντᾷ τὴν AB εἰς τὸ Δ καὶ τὴν $A\Gamma$ εἰς τὸ E . Ἐστω M τὸ μέσον τῆς ΔE . Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν BM , ἢ ὁποῖα συναντᾷ τὴν $A\Gamma$ εἰς τὸ Γ' . ἐπίσης φέρομεν καὶ τὴν εὐθεῖαν ΓM , ἢ ὁποῖα συναντᾷ τὴν AB εἰς τὸ B' . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ $B'\Gamma'$ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν $B\Gamma$.

1062. (1094). Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας λαμβάνομεν τέσσαρα διαδοχικὰ σημεῖα A , B , Γ , Δ καὶ τοιαῦτα, ὥστε $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{A\Gamma}{A\Delta}$. Ἀπὸ τὸ A φέρομεν μίαν δευτέραν εὐθεῖαν ἐπὶ τῆς ὁποίας λαμβάνομεν τμήμα $AE = A\Gamma$. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ $E\Gamma$ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας $BE\Delta$.

1063. (1095). Δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $A'B'\Gamma'$ ἔχουν $\gammaων.A = \gammaων.A'$ καὶ $\gammaων.B + \gammaων.B' = 2$ ὀρθ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{A\Gamma}{A'\Gamma'}$.

1064. (1096). Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Γ ἑνὸς παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ φέρομεν μίαν εὐθεῖαν, ἢ ὁποῖα νὰ κείται ἐκτὸς τοῦ παραλληλογράμμου καὶ ἢ ὁποῖα τέμνει τὰς προεκτάσεις τῶν AB καὶ $\Delta\Delta$ εἰς τὰ σημεῖα E καὶ Z . Νὰ ἀποδειχθῇ,

ὅτι
$$\frac{AB}{AE} + \frac{\Delta\Delta}{AZ} = 1.$$

1065. (1097). Τὰ ὕψη ἐνὸς τριγώνου $AB\Gamma$ εἶναι AA' , BB' , $\Gamma\Gamma'$. Νὰ ἀποδειχθῆ :

$$1ον. \text{ "Οτι } \frac{AB}{A\Gamma} = \frac{AB'}{A\Gamma'}$$

$$2ον. \text{ "Οτι } AB' \times B\Gamma' \times \Gamma A' = A\Gamma' \times BA' \times \Gamma B'.$$

1066. (1098). Δίδεται ἓνα τραπέζιον $AB\Gamma A'$ ἀπὸ τὸ σημεῖον E τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων του φέρομεν παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις του AB καὶ ΓA , ἡ ὁποία τέμνει τὰς μὴ παραλλήλους πλευρὰς του $A\Delta$ καὶ $B\Gamma$ εἰς τὰ σημεῖα M καὶ N . Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὸ E εἶναι τὸ μέσον τῆς MN .

1067. (1099). Δίδεται ἓνα τετράπλευρον $AB\Gamma A$ καὶ M καὶ N τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν $A\Delta$ καὶ $B\Gamma$. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν MN , ἡ ὁποία τέμνει τὰς προεκτάσεις τῶν πλευρῶν AB καὶ ΓA εἰς τὰ σημεῖα E καὶ Z . Νὰ ἀποδειχθῆ,

$$\text{ὅτι } \frac{EA}{EB} = \frac{ZA}{Z\Gamma}.$$

1068. (1100). Δίδεται ἓνα ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$ ἐπὶ τῶν καθέτων πλευρῶν του AB καὶ $A\Gamma$ κατασκευάζομεν, ἔξωτερικῶς τοῦ τριγώνου, τὰ τετράγωνα $AB\Delta E$ καὶ $A\Gamma ZH$. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΓA , ἡ ὁποία τέμνει τὴν AB εἰς τὸ Θ καὶ τὴν εὐθεῖαν BZ , ἡ ὁποία τέμνει τὴν $A\Gamma$ εἰς τὸ K . Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι $A\Theta = AK$ καὶ $A\Theta^2 = B\Theta \times \Gamma K$.

1069. (1101). Εἰς ἓνα τραπέζιον $AB\Gamma A$ τὸ ἄθροισμα $AB + \Gamma A$ τῶν δύο βάσεων του εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα $A\Delta + B\Gamma$ τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του. Ἀπὸ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς O τῶν διαγωνίων του φέρομεν μίαν παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις, ἡ ὁποία τέμνει τὴν $A\Delta$ εἰς τὸ M καὶ τὴν $B\Gamma$ εἰς τὸ N . Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι $AM + BN = AB$ καὶ $\Delta M + \Gamma N = \Delta\Gamma$.

1070. (1102). Ἀπὸ ἓνα σημεῖον A φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας AB καὶ $A\Gamma$ εἰς μίαν περιφέρειαν O καὶ μίαν τυχοῦσαν τέμνουσαν $A\Delta E$. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι $B\Delta \times \Gamma E = BE \times \Gamma A$.

1071. (1103). Ἀπὸ ἓνα σημεῖον A φέρομεν μίαν ἐφαπτομένην AB εἰς ἓνα κύκλον O καὶ μίαν τέμνουσαν $A\Gamma A$. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι

$$\frac{A\Gamma}{A\Delta} = \frac{B\Gamma^2}{B\Delta^2}.$$

1072. (1104). Ἐπὶ μιᾶς περιφέρειας O λαμβάνομεν τρία σημεῖα A, B, Γ . Φέρομεν τὴν διάμετρον $A\Delta$ καὶ τὰς καθέτους BB' καὶ $\Gamma\Gamma'$ ἐπὶ τὴν $A\Delta$. Ἀπὸ τὸ A φέρομεν τὴν κάθετον AA' ἐπὶ τὴν χορδὴν $B\Gamma$. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι

$$AA'^2 = AB' \times A\Gamma'.$$

Δ' Ὁμάς. 1073. (1105). Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων τοῦ ποδὸς ἐνὸς ὕψους ἐνὸς τριγώνου ἀπὸ τὰ ἄκρα τῆς ἀντιστοίχου πλευρᾶς τοῦ τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεών του ἀπὸ τοὺς πόδας τῶν δύο ἄλλων ὑψῶν του.

1074. (1106). Δίδεται ἓνα παραλληλόγραμμον $AB\Gamma A$. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι αἱ ἀποστάσεις τυχόντος σημείου τῆς διαγωνίου $A\Gamma$ ἀπὸ τὰς πλευρὰς AB καὶ $A\Delta$ εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι πρὸς τὰς πλευρὰς αὐτάς.

1075. (1107). Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει τὰ μέσα τῶν

διαγωνίων ἑνὸς τετραπλεύρου ὀρίζει ἐπὶ τῶν δύο ἀπέναντι πλευρῶν του τμήματα ἀνάλογα.

1076. (1108). Δίδεται μία γωνία $\alpha O\gamma$ καὶ ἓνα σημεῖον Σ ἐκτὸς τῆς γωνίας. Γράφομεν δύο κύκλους, οἱ ὅποιοι διέρχονται ἀπὸ τὰ σημεῖα O καὶ Σ · ὁ πρῶτος τέμνει τὴν $O\alpha$ εἰς τὸ A καὶ τὴν $O\gamma$ εἰς τὸ B , ὁ δευτερός τέμνει τὴν $O\alpha$ εἰς τὸ A' καὶ τὴν $O\gamma$ εἰς τὸ B' . Νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. Ὅτι τὰ τρίγωνα $\Sigma AA'$ καὶ $\Sigma BB'$ εἶναι ὅμοια.

2ον. Ὅτι οἱ κύκλοι, οἱ ὅποιοι διέρχονται ἀπὸ τὰ O καὶ Σ ὀρίζουν ἐπὶ τῶν $O\alpha$ καὶ $O\gamma$ τμήματα ἀνάλογα.

1077. (1109). Δίδεται μία περιφέρεια κύκλου O καὶ μία χορδὴ AB . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ἀπόστασις τυχόντος σημείου M τῆς περιφέρειᾶς ἀπὸ τὴν χορδὴν AB εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν ἀποστάσεων τοῦ σημείου αὐτοῦ ἀπὸ τὰς ἐφαπτομένας τῆς περιφέρειᾶς εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B .

Ε' Ομάς. 1078. (1110). Δίδεται τὸ τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$. Ἀπὸ τὴν κορυφὴν A φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν πλευρὰν $B\Gamma$, ἡ ὁποία τέμνει τὴν διαγώνιον $B\Delta$ εἰς τὸ σημεῖον M . Ἐπίσης ἀπὸ τὴν κορυφὴν B φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν $A\Delta$, ἡ ὁποία τέμνει τὴν διαγώνιον $A\Gamma$ εἰς τὸ σημεῖον N . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ MN εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν $\Delta\Gamma$.

1079. (1111). Ἐπὶ τῶν πλευρῶν AB καὶ $\Gamma\Delta$ ἑνὸς τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ λαμβάνομεν τὰ σημεῖα E καὶ Z ἀστιστοιχῶς οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι

$\frac{EA}{EB} = \frac{Z\Delta}{Z\Gamma} = \frac{A\Delta}{B\Gamma}$. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ EZ σχηματίζει ἴσας γωνίας μὲ τὰς πλευρὰς $B\Gamma$ καὶ $A\Delta$.

1080. (1112). Δίδεται ἡμικυκλίωτος O διαμέτρου AB . Εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας Ax καὶ By τῆς ἡμικυκλίωτος ἀπὸ τυχόν σημείου M τῆς ἡμικυκλίωτος φέρομεν τρίτην ἐφαπτομένην αὐτῆς, ἣ ὁποία τέμνει τὴν Ax εἰς τὸ Γ καὶ τὴν By εἰς τὸ Δ . Φέρομεν τὰς εὐθείας $A\Delta$ καὶ $B\Gamma$, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον N . Φέρομεν τὴν MN , ἡ ὁποία τέμνει τὴν AB εἰς τὸ σημεῖον Z . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ MZ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν AB καὶ ὅτι τὸ N εἶναι τὸ μέσον τῆς MZ .

ΣΤ' Ομάς. 1081. (1113). Δίδεται ἓνα ὀρθογώνιον $AB\Gamma\Delta$, εἰς τὸ ὅποιον εἶναι $AB = a\sqrt{2}$ καὶ $A\Delta = a$. Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Γ φέρομεν κάθετον $\Gamma\Gamma'$ ἐπὶ τὴν διαγώνιον $B\Delta$, ἡ ὁποία, προεκτεινομένη συναντᾷ τὴν AB εἰς τὸ σημεῖον E .

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ E εἶναι τὸ μέσον τῆς AB .

2ον. Ἀπὸ τὸ A φέρομεν κάθετον AA' ἐπὶ τὴν $B\Delta$ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ $\Gamma\Gamma'$ καὶ AA' διαιροῦν τὴν διαγώνιον $B\Delta$ εἰς τρία ἴσα μέρη.

1082. (1114). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ μὴ παράλληλοι πλευραὶ ἑνὸς τραπεζίου προεκτεινόμεναι, διαιροῦν ἐκαστὴν τῶν βάσεων εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν προσκεμένων μὴ παραλλήλων πλευρῶν.

1083. (1115). Δίδεται ἓνα ἰσοπλευρον τρίγωνον $AB\Gamma$ καὶ ἔξωτερικῶς αὐτοῦ ἡ ἡμικυκλίωτος, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον τὴν $B\Gamma$. Ἐπὶ τῆς ἡμικυκλίωτος λαμβάνομεν τὰ σημεῖα Δ καὶ E , τὰ ὅποια διαιροῦν αὐτὴν εἰς τρία ἴσα τόξα. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ εὐθεῖαι $A\Delta$ καὶ AE διαιροῦν τὴν $B\Gamma$ εἰς τρία ἴσα μέρη.

1084. (1116). Εἰς τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ φέρομεν τὰς BB' καὶ $\Gamma\Gamma'$ καθέτους

ἐπὶ τὴν διχοτόμον AD τῆς γωνίας A . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα A καὶ Δ εἶναι συζυγῆ ἁρμονικὰ πρὸς τὰ B' καὶ Γ' .

Z' Ὁμάς. 1085. (1117). Δίδονται δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $A'B'\Gamma'$, τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ AB καὶ $A'B'$, $B\Gamma$ καὶ $B'\Gamma'$, GA καὶ $\Gamma'A'$ εἶναι παράλληλοι. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ εὐθεῖαι AA' , BB' , $\Gamma\Gamma'$, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰς ὁμολόγους κορυφὰς τῶν, τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

1086. (1118). Δίδονται δύο τετράπλευρα $AB\Gamma\Delta$ καὶ $A'B'\Gamma'\Delta'$ ὑποθέτομεν ὅτι αἱ πλευραὶ AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔA εἶναι παράλληλοι ἀντιστοίχως πρὸς τὰς πλευρὰς $A'B'$, $B'\Gamma'$, $\Gamma'\Delta'$ καὶ $\Delta'A'$ καὶ ὅτι αἱ εὐθεῖαι AA' , BB' καὶ $\Gamma\Gamma'$ τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον O νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα $\Delta\Delta'$ διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον O .

1087. (1119). Εἰς ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$ φέρομεν τὴν διάμεσον AD . Ἀπὸ ἓνα σημεῖον M τῆς BD φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν AD , ἡ ὁποία τέμνει τὴν AB εἰς τὸ E καὶ τὴν AG εἰς τὸ Z . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα $ME + MZ$ μένει σταθερόν, ὅταν τὸ M κινῆται ἐπὶ τῆς BD .

1088. (1120). Δίδονται τρεῖς παράλληλοι εὐθεῖαι X, Y, Z . Ἐπὶ τῆς Z λαμβάνομεν δύο ὠρισμένα σημεῖα B καὶ Γ καὶ ἐπὶ τῆς X τυχόν σημεῖον A . Φέρομεν τὰς εὐθείας AB καὶ AG , αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν Y εἰς τὰ σημεῖα B' καὶ Γ' ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ὅταν τὸ A κινῆται ἐπὶ τῆς X , τὸ εὐθύγραμμον τμήμα $B'\Gamma'$ διατηρεῖ τὸ αὐτὸ μῆκος.

1089. (1121). Δίδεται μία ἡμιπεριφέρεια O διαμέτρου AB καὶ ἓνα ὠρισμένον σημεῖον Σ ἐπὶ τῆς AB . Ἀπὸ ἓνα μεταβλητὸν σημεῖον M , τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τῆς ἡμιπεριφερείας φέρομεν τὴν εὐθεῖαν $M\Sigma$ καὶ τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν $M\Sigma$, ἡ ὁποία τέμνει εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ τὰς ἐφαπτομένας τῆς ἡμιπεριφερείας εἰς τὰ A καὶ B . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ γινόμενον $AG \times BD$ μένει σταθερόν.

1090. (1122). Δίδεται ἓνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον $AB\Gamma$, ($AB = AG$). Μὲ κέντρον τὸ μέσον O τῆς βάσεως $B\Gamma$ τοῦ τριγώνου κατασκευάζομεν μίαν ἡμιπεριφέρεια, ἡ ὁποία νὰ ἐφάπτεται τῶν πλευρῶν AB καὶ AG . Φέρομεν μίαν τυχούσαν ἐφαπτομένην τῆς ἡμιπεριφερείας O , ἡ ὁποία τέμνει τὴν AB εἰς τὸ M καὶ τὴν AG εἰς τὸ N . Νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. Ὅτι τὰ τρίγωνα BOM καὶ ΓON εἶναι ὅμοια.

2ον. Ὅτι τὸ γινόμενον $BM \times \Gamma N$ εἶναι σταθερόν.

1091. (1123). Δίδονται τρεῖς παράλληλοι εὐθεῖαι X, Y, Z καὶ μία τέμνουσα, ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν X εἰς τὸ A , τὴν Y εἰς τὸ B καὶ τὴν Z εἰς τὸ Γ . Ἐπὶ τῆς Z λαμβάνομεν τυχόν σημεῖον M καὶ φέρομεν τὴν AM , ἡ ὁποία τέμνει τὴν Y εἰς τὸ B' ἐπίσης φέρομεν τὴν MB , ἡ ὁποία τέμνει τὴν X εἰς τὸ A' . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ὅταν τὸ M κινῆται ἐπὶ τῆς Z , ἡ εὐθεῖα $A'B'$ διέρχεται ἀπὸ ἓνα ὠρισμένον σημεῖον.

1092. (1124). Δίδεται μία γωνία xOy . Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Ox κινεῖται ἓνα σημεῖον A , ἐπὶ δὲ τῆς Oy ἓνα σημεῖον B εἰς τρόπον, ὥστε νὰ εἶναι

$$\frac{1}{OA} + \frac{1}{OB} = \frac{1}{\lambda}$$

ὅπου λ εἶναι δοθὲν μῆκος. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα AB τέμνει τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας xOy εἰς ἓνα ὠρισμένον σημεῖον.

1093. (1125). Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας xy λαμβάνομεν τέσσαρα διαδοχικά σημεῖα A, B, Γ, Δ ἀπὸ τὰ A καὶ B φέρομεν δύο παραλλήλους καὶ ἀπὸ τὰ Γ καὶ Δ δύο ἄλλας παραλλήλους, αἱ ὁποῖαι τέμνουσιν τὰς δύο πρώτας. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ διαγώνιοι τοῦ σχηματιζομένου παραλληλογράμμου ὑπὸ τῶν τεσσάρων εὐθειῶν, τέμνουσιν τὴν xy εἰς δύο ὠρισμένα σημεῖα.

1094. (1126). Εἰς ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$ ἐγγράφομεν τὸν κύκλον O , ὁ ὁποῖος ἐφάπτεται τῆς πλευρᾶς $B\Gamma$ εἰς τὸ σημεῖον Δ . Φέρομεν τὴν διάμετρον $\Delta O\epsilon$ καὶ τὴν εὐθείαν $A\epsilon$, ἡ ὁποία τέμνει τὴν $B\Gamma$ εἰς τὸ Z . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ Z εἶναι τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τῆς $B\Gamma$ καὶ τοῦ παρεγγεγραμμένου κύκλου εἰς τὴν γωνίαν A .

1095. (1127). Δύο κύκλοι O καὶ O' ἐφάπτονται εἰς τὸ σημεῖον A . Ἀπὸ τὸ σημεῖον A φέρομεν τὴν χορδὴν AB εἰς τὸν O καὶ τὴν χορδὴν AB' εἰς τὸν κύκλον O' κάθετον ἐπὶ τὴν AB . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα BB' διέρχεται ἀπὸ ἓνα ὠρισμένον σημεῖον, ὅταν ἡ γωνία BAB' στρέφεται περὶ τὸ A .

Η' Ὁμάς. 1096. (1128). Δίδεται ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν τοῦ AB καὶ $A\Gamma$ λαμβάνομεν ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα Δ καὶ E οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι

$$\frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{E\Gamma}{\Gamma A}.$$

Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ μέσα B' καὶ Γ' τῶν πλευρῶν AB καὶ $A\Gamma$ καὶ τὸ μέσον M τῆς ΔE κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

1097. (1129). Εἰς ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$ φέρομεν τὰ ὑψη $AA', BB', \Gamma\Gamma'$ καὶ λαμβάνομεν τὰ A'', B'', Γ'' , τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐπ' αὐτῶν καὶ εἰς τὸ τρίτον ἐκάστου ἐξ αὐτῶν ἀπὸ τοῦ ποδός των. Νὰ ἀποδειχθῇ ;

1ον. Ὅτι τὰ τρία αὐτὰ σημεῖα, τὸ ὀρθόκεντρον H καὶ τὸ σημεῖον Θ τῆς τομῆς τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ κύκλου.

2ον. Ὅτι τὸ τρίγωνον $A''B''\Gamma''$ εἶναι ὁμοιον μὲ τὸ $AB\Gamma$.

1098. (1130). Ἐνα ἰσοσκελὲς τραπέζιον $AB\Gamma\Delta$ εἶναι περιγεγραμμένον περὶ ἓνα κύκλον O . Νὰ ἀποδειχθῇ :

1ον. Ὅτι τὰ σημεῖα ἐπαφῆς E καὶ Z τῶν βάσεων AB καὶ $\Gamma\Delta$ καὶ τῆς περιφερείας O εἶναι μέσα τῶν βάσεων αὐτῶν.

2ον. Ὅτι ἡ τομὴ H τῶν διαγωνίων $A\Gamma$ καὶ $B\Delta$ καὶ τὰ σημεῖα ἐπαφῆς M καὶ N τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν τοῦ $\Delta\Delta$ καὶ $B\Gamma$ κεῖνται ἐπ' εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὰς βάσεις.

Η' Ὁμάς. 1099. (1131). Νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα χωρίζουν κατὰ δοθέντα λόγον $\frac{\mu}{\nu}$ τὰς εὐθείας, αἱ ὁποῖαι συνδέουν δοθὲν σημεῖον O μὲ τὰ διάφορα σημεῖα μιᾶς δοθείσης εὐθείας X .

1100 (1132). Νὰ εὐρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο δοθείσας παραλλήλους X καὶ Y εἶναι ἴσος μὲ $\frac{\mu}{\nu}$.

(Σχολή Ἰκάρων 1948)

1101. (1133). Δίδονται δύο εὐθεῖαι παράλληλοι X καὶ Y καὶ ἓνα σημεῖον O ἐκτός αὐτῶν. Ἀπὸ τὸ O φέρομεν μίαν τέμνουσαν αὐτάς εἰς τὰ A καὶ B . Νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ ἄρμονικοῦ συζυγοῦς M τοῦ O πρὸς τὴν AB .

1102. (1134). Νὰ εὐρεθῇ ὁ τόπος τῶν μέσων τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι εἶναι παράλληλοι πρὸς μίαν πλευρὰν τριγώνου καὶ τέμνουσιν τὰς δύο ἄλλας.

1103. (1135). Δίδεται ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$ καὶ μία τυχοῦσα παράλληλος $B\Gamma'$ πρὸς τὴν βάσιν του $B\Gamma$. Φέρομεν τὰς εὐθείας $B\Gamma'$ καὶ $\Gamma B'$, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς ἓνα σημεῖον M . Νὰ εὐρεθῆ ὁ τόπος τοῦ σημείου M τῆς τομῆς τῶν $B\Gamma'$ καὶ $\Gamma B'$, ὅταν ἡ $B\Gamma'$ κινήται παραλλήλως πρὸς τὴν $B\Gamma$.

1104. (1136). Νὰ εὐρεθῆ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ δύο τεμνομένων εὐθειῶν ἔχουν λόγον ἴσον με $\frac{\mu}{\nu}$.

1105. (1137). Δίδονται δύο παράλληλοι εὐθεῖαι X καὶ Y καὶ ἓνα σημεῖον O ἐκτὸς αὐτῶν. Ἀπὸ τὸ O φέρομεν μίαν ὠρισμένην τέμνουσαν, ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν X εἰς τὸ A καὶ τὴν Y εἰς τὸ B καὶ μίαν μεταβλητὴν, ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν X εἰς τὸ A' καὶ τὴν Y εἰς τὸ B' . Νὰ εὐρεθῆ ὁ τόπος τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν AB' καὶ BA' .

1106. (1138). Δίδεται μία ὀρθὴ γωνία xOy . Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Ox λαμβάνομεν τμήμα $OA = a$ καὶ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς Oy ἓνα τμήμα $OB = 2a$. Ἐστω M τυχὸν σημεῖον τῆς AB καὶ $M\Gamma\Delta$ αἱ ἀποστάσεις του ἀπὸ τὰς Ox καὶ Oy . Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὸ εὐθύγραμμον τμήμα AB εἶναι ὁ τόπος τῶν σημείων M , τὰ ὁποῖα κείνται ἐντὸς τῆς γωνίας xOy καὶ τοιούτων, ὥστε $M\Gamma + 2M\Delta = 2a$.

1107. (1139). Δύο εὐθεῖαι xOx' καὶ yOy' τέμνονται καθέτως εἰς τὸ O . Ἐπὶ τῆς Ox λαμβάνομεν ἓνα τμήμα $OA = a$, ἐπὶ δὲ τῆς Oy' ἓνα τμήμα $OB = 2a$. Ἐστω M τυχὸν σημεῖον καὶ $M\Gamma$ καὶ $M\Delta$ αἱ ἀποστάσεις του ἀπὸ τὰς xOx' καὶ yOy' . Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι ὁ τόπος τῶν σημείων M , τὰ ὁποῖα κείνται ἐντὸς τῆς γωνίας xOy καὶ τοιούτων ὥστε $2M\Delta - M\Gamma = 2a$, εἶναι τὸ τμήμα τῆς εὐθείας AB , τὸ ὁποῖον κείται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας xOy .

1108. (1140). Δίδονται δύο εὐθεῖαι $x'Ox$ καὶ $y'Oy$ τεμνόμεναι εἰς τὸ O . Ἐπὶ τῆς Ox λαμβάνομεν δύο σημεῖα A καὶ A' καὶ ἐπὶ τῆς Oy δύο σημεῖα B καὶ B' . Τὰ σημεῖα A καὶ B θεωροῦνται σταθερά, ἐνῶ τὰ A' καὶ B' κινουῦνται ἐπὶ τῶν εὐθειῶν αὐτῶν οὕτως, ὥστε νὰ μένουν πάντοτε πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας AB καὶ οὕτως, ὥστε ὁ λόγος $\frac{AA'}{BB'}$ νὰ μένῃ ἴσος με μ δοθέντα

λόγον $\frac{\mu}{\nu}$. Νὰ εὐρεθῆ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ μέσου M τῆς $A'B'$,

1109. (1141). Νὰ εὐρεθῆ ὁ τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα χωρίζουν κατὰ δοθέντα λόγον τὰ παράλληλα τμήματα πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν, τὰ ὁποῖα ὀρίζονται μεταξὺ δύο τεμνομένων εὐθειῶν.

1110. (1142). Νὰ εὐρεθῆ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων ὄλων τῶν ὀρθογωνίων, τὰ ὁποῖα εἶναι ἐγγεγραμμένα εἰς δοθὲν τρίγωνον.

1111. (1143). Δύο εὐθεῖαι $x'Ox$ καὶ $y'Oy$ τέμνονται εἰς τὸ O . Ἐπὶ τῆς Ox λαμβάνομεν δύο σημεῖα A καὶ A' , ἐπὶ δὲ τῆς Oy' τὰ σημεῖα B καὶ B' . Τὰ σημεῖα A καὶ B εἶναι ὠρισμένα, ἐνῶ τὰ A' καὶ B' κινουῦνται ἐπὶ τῶν εὐθειῶν αὐτῶν, ἀλλὰ μένουν πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας AB καὶ οὕτως, ὥστε ὁ λόγος $\frac{AA'}{BB'}$ νὰ εἶναι ἴσος με $\frac{\mu}{\nu}$. Νὰ εὐρεθῆ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῆς τετάρτης κορυφῆς M τοῦ παραλληλογράμμου, τοῦ ὁποίου δύο ἐκ τῶν πλευρῶν του εἶναι αἱ AA' καὶ $A'B'$. Ἐπειτα νὰ χρησιμοποιηθῆ ὁ τόπος αὐτὸς διὰ νὰ

κατασκευασθῆ ἐκείνη ἀπὸ τὰς εὐθείας Α'Β', ἡ ὁποία εἶναι παράλληλος πρὸς μίαν δοθεῖσαν εὐθείαν καὶ ἐκείνη ἀπὸ τὰς εὐθείας αὐτάς διὰ τὰς ὁποίας ἡ Α Β' εἶναι ἐλαχίστη.

1112. (1144). Νὰ εὐρεθῆ ὁ τόπος τῶν σημείων τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων ἑνὸς τραπεζίου, τοῦ ὁποίου μία ἀπὸ τὰς μὴ παραλλήλους πλευράς του εἶναι ὠρισμένη κατὰ τὴν θέσιν καὶ τὸ μέγεθος καὶ τοῦ ὁποίου αἱ βάσεις ἔχουν δοθέντα μήκη.

1113. (1145). Νὰ εὐρεθῆ ὁ τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποία χωρίζουν κατὰ δοθέντα λόγον τὰς εὐθείας, αἱ ὁποιαὶ συνδέουν δοθὲν σημεῖον Β μετὰ τὰ διάφορα σημεῖα μιᾶς δοθείσης περιφερείας.

1114. (1146). Νὰ εὐρεθῆ ὁ τόπος τῶν σημείων ἀπὸ τὰ ὁποία δύο δοθέντες κύκλοι φαίνονται ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν.

1115. (1147). Ἐνὸς τριγώνου ΑΒΓ αἱ κορυφαὶ Β καὶ Γ εἶναι ὠρισμένοι, ἐνῶ ἡ κορυφή Α διαγράφει δοθεῖσαν περιφέρειαν μετὰ κέντρον τὸ Β. Νὰ εὐρεθῆ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ ποδὸς τῆς διχοτομοῦσης τὴν γωνίαν Β.

1116. (1148). Ἐνα τρίγωνον ΑΒΓ διατηρεῖται ὁμοιον πρὸς ἑαυτό, ἐνῶ στρέφεται περὶ τὴν κορυφὴν του Α (σταθεράν).

1ον. Νὰ εὐρεθῆ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῆς κορυφῆς του Γ, ὅταν ἡ κορυφή Β γράφῃ δοθεῖσαν εὐθείαν x'x.

2ον. Νὰ εὐρεθῆ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῆς κορυφῆς του Γ, ὅταν ἡ κορυφή του Β γράφῃ δοθεῖσαν περιφέρειαν Ο.

1117. (1149). Ἐνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ ἡ κορυφή Α διατηρεῖται σταθερά, ἐνῶ ἡ κορυφή Γ γράφει δοθεῖσαν περιφέρειαν Κ. Νὰ εὐρεθῆ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ κέντρου Μ τῆς περιφερείας τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

1118. (1150). Ἐνα τρίγωνον ΒΓΜ, τὸ ὁποῖον διατηρεῖται ὁμοιον πρὸς ἑαυτό, κινεῖται οὕτως, ὥστε αἱ κορυφαὶ του Β καὶ Γ γράφουν ἀντιστοίχως δύο εὐθείας παραλλήλους Ε καὶ Ε'. Ἐάν ἡ πλευρά ΒΓ διέρχεται ἀπὸ σταθερὸν σημεῖον Α, νὰ εὐρεθῆ ὁ τόπος τῆς τρίτης κορυφῆς Μ.

1119. (1151). Δίδεται περιφέρεια κέντρου Ο καὶ ἕνα σταθερὸν σημεῖον Α. Φέρομεν μίαν μεταβλητὴν χορδὴν ΑΒ στρεφομένην περὶ τὸ Α καὶ μετὰ διάμετρον τὴν ΑΒ γράφομεν περιφέρειαν κύκλου. Νὰ εὐρεθῆ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν τομῶν τῆς περιφερείας αὐτῆς καὶ τῆς διαμέτρου τῆς Ο, τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν ΑΒ.

Γ' Ὁμάς. 1120. (1152). Δίδεται μία γωνία xOy. Νὰ εὐρεθῆ ἕνα σημεῖον ἐπὶ τῆς Ox καὶ ἕνα σημεῖον Β ἐπὶ τῆς Oy οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι

$$\frac{OA}{OB} = \frac{\mu}{\nu} \quad \text{καὶ} \quad AB = \lambda.$$

1121. (1153). Δίδονται δύο εὐθεῖαι ΟX καὶ ΟΥ καὶ ἕνα σημεῖον Σ ἐντὸς τῆς γωνίας ΧΟΥ. Νὰ ἀχθῆ μία τέμνουσα αὐτοῦ, ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν X εἰς τὸ Α καὶ τὴν Y εἰς τὸ Β, παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν τρίτην εὐθείαν Z καὶ τοιαύτη, ὥστε ΣΑ=ΣΒ.

1122. (1154). Δίδονται δύο εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καὶ Α'Β'. Ποῖον μῆκος ἴσον πρέπει νὰ ἀφαιρέσωμεν καὶ ἀπὸ τὰ δύο αὐτὰ τμήματα, ὥστε ὁ λόγος τῶν ὑπολοίπων τμημάτων νὰ εἶναι ἴσος μετὰ τὸν λόγον $\frac{\mu}{\nu}$ δύο δοθέντων τμημάτων.

1123. (1155). Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον P νὰ ἀχθῆ μία εὐθεῖα, τῆς ὁποίας ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα A καὶ B νὰ εἶναι ἴσος μὲ δοθέντα λόγον $\frac{\mu}{\nu}$.

1124. (1156). Δίδονται δύο τεμνόμενα εὐθεῖαι Ox καὶ Oy καὶ ἓνα σημεῖον P . Νὰ ἀχθῆ ἀπὸ τὸ P μία εὐθεῖα τέμνουσα τὰς Ox καὶ Oy εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B ἀντιστοίχως καὶ τοιαύτη, ὥστε $\frac{PA}{PB} = \frac{\mu}{\nu}$.

1125. (1157). Δίδονται τρεῖς εὐθεῖαι Ox, Oy, Oz καὶ ἓνα σημεῖον P . Νὰ ἀχθῆ ἀπὸ τὸ P μία τέμνουσα τὰς Ox, Oy, Oz εἰς τὰ σημεῖα A, B, Γ ἀντιστοίχως καὶ τοιαύτη, ὥστε $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{\mu}{\nu}$.

1126. (1158). Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς AB δοθέντος τριγώνου $AB\Gamma$, νὰ εὐρεθῆ ἓνα σημεῖον Δ τοιοῦτον, ὥστε, ἐάν ἡ ΔE εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν $B\Gamma$, νὰ εἶναι $\frac{B\Delta}{\Delta E} = \frac{\mu}{\nu}$, ὅπου μ καὶ ν εἶναι δοθέντα μήκη.

1127. (1159). Δίδονται δύο παράλληλοι εὐθεῖαι E καὶ E' καὶ ἓνα σημεῖον P ἐκτὸς αὐτῶν. Νὰ κατασκευασθῆ ἡ κοινὴ κάθετος AB τῶν εὐθειῶν αὐτῶν καὶ τοιαύτη, ὥστε $\frac{PA}{PB} = \frac{\mu}{\nu}$, ὅπου μ καὶ ν εἶναι δοθέντα μήκη.

1128. (1160). Εἰς δοθέντα κύκλον O φέρομεν δύο ἀκτῖνας OA καὶ OB . Ζητεῖται νὰ ἀχθῆ μία χορδὴ τοῦ κύκλου O , ἡ ὁποία νὰ διαιρῆται εἰς τρία ἴσα μέρη ὑπὸ τῶν ἀκτῖναν αὐτῶν.

1129. (1161). Δίδεται ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$ καὶ ζητεῖται νὰ ἀχθῆ μία εὐθεῖα τοιαύτη, ὥστε αἱ ἀποστάσεις τῆς ἀπὸ τὰς κορυφᾶς A, B, Γ νὰ εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀριθμῶν $1, 3, 5$.

1130. (1162). 1ον. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι αἱ μὴ παράλληλοι πλευραὶ καὶ αἱ διαγώνιοι ἑνὸς τραπεζίου ὀρίζουν ἐπὶ μιᾶς εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὰς βάσεις του τρία διαδοχικὰ τμήματα, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ πρῶτον καὶ τὸ τρίτον εἶναι ἴσα.

2ον. Νὰ κατασκευασθῆ ἡ παράλληλος αὐτή, ἵνα τὰ τρία αὐτὰ τμήματα εἶναι ἴσα.

1131. (1163). Δίδεται μία γωνία xOy καὶ μία περιφέρεια K . Νὰ ἀχθῆ μία εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὴν Ox καὶ τοιαύτη, ὥστε τὸ τμήμα αὐτῆς τὸ περιλαμβανόμενον μεταξὺ τῆς Ox καὶ τῆς περιφερείας K νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ τμήματος, τοῦ περιλαμβανομένου μεταξὺ τῆς Ox καὶ Oy .

1132. (1164). Δίδονται δύο κύκλοι O καὶ O' καὶ ἓνα σημεῖον Σ ἐκτὸς αὐτῶν. Νὰ ἀχθοῦν δύο ἀκτῖνες OA καὶ $O'A'$ παράλληλοι καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς καὶ τοιαῦται, ὥστε $\Sigma A = \Sigma A'$.

1133. (1165). Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Σ , τὸ ὁποῖον κεῖται ἐντὸς δοθέντος κύκλου, νὰ ἀχθῆ χορδὴ $A\Sigma B$ τοιαύτη, ὥστε $\frac{\Sigma A}{A\Gamma} = \frac{\mu}{\nu}$.

ΙΑ' Ὁμάς. 1134. (1166). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἄν γνωρίζωμεν: τὴν πλευρὰν $B\Gamma = a$, τὴν ἀπέναντι γωνίαν A καὶ τὸν λόγον $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{\mu}{\nu}$ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του.

1135. (1167). Νά κατασκευασθῆ ἓνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν Α καὶ τὸ ἄθροισμα τῆς βάσεως καὶ τοῦ ἀντιστοίχου ὕψους.

1136. (1168). Νά κατασκευασθῆ ἓνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν: τὸν περιγεγραμμένον κύκλον καὶ τὸ ἄθροισμα τῆς βάσεως καὶ τοῦ ἀντιστοίχου ὕψους.

1137. (1169). Νά κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν: τὰς πλευρὰς β, γ καὶ τὴν διχοτόμον δ_α.

1138. (1170). Νά κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν: τὴν γωνίαν Δ, τὸ ὕψος ΑΔ=υ_α καὶ τὸν λόγον $\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma} = \frac{\mu}{\nu}$.

(Σχολή Εὐελπίδων 1950)

1139. (1171). Νά κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν: μίαν πλευράν, τὴν διχοτόμον τῆς ἀπέναντι γωνίας καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του.

1140. (1172). Νά κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν: τὴν πλευράν ΒΓ=α, τὴν διχοτόμον ΑΔ=δ_α καὶ τὸν λόγον $\frac{AB}{AG} = \frac{\mu}{\nu}$ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

1141. (1173). Νά κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν: τὸν λόγον $\frac{\beta}{\gamma} = k$ δύο πλευρῶν του, τὴν διάμεσον μ_α καὶ τὴν διχοτόμον δ_α.

1142. (1174). Νά κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν: τὸ ὕψος ΑΔ=υ_α, τὴν διάμεσον ΑΜ=μ_α καὶ τὸν λόγον $\frac{AB}{AG} = \frac{\mu}{\nu}$ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄.
ΜΕΤΡΙΚΑΙ ΣΧΕΣΕΙΣ

1. Ὅρισμοί

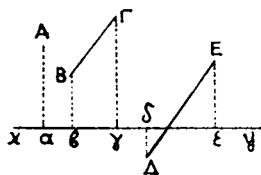
420. Εἰς τὸ κεφάλαιον αὐτὸ θὰ ἐξετάσωμεν τὰς μετρικὰς σχέσεις, αἱ ὁποῖαι ὑπάρχουν μεταξὺ τῶν γραμμικῶν στοιχείων ἑνὸς τριγώνου, δηλ. τῶν πλευρῶν του, τῶν διαμέσων του, τῶν ὑψῶν του κλπ.

Ὅταν κατωτέρω θὰ ἀναφέρωμεν μίαν μετρικὴν σχέσιν μεταξὺ δύο ἢ περισσοτέρων γραμμικῶν μεγεθῶν, θὰ ἐννοοῦμεν τὴν σχέσιν, ἢ ὁποία ὑπάρχει μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι μετροῦν τὰ μεγέθη αὐτά, ὅταν μετρηθοῦν μὲ τὴν αὐτὴν μονάδα.

Π.χ. θὰ λέγωμεν: τὸ τετράγωνον μιᾶς πλευρᾶς ἑνὸς τριγώνου, ἀντὶ νὰ εἴπωμεν: τὸ τετράγωνον τοῦ ἀριθμοῦ, ὃ ὁποῖος μετρεῖ τὸ μήκος τῆς πλευρᾶς. Θὰ λέγωμεν τό: γινόμενον δύο εὐθυγράμμων τμημάτων, ἀντὶ νὰ εἴπωμεν: τὸ γινόμενον τῶν δύο ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι μετροῦν τὰ δύο αὐτὰ εὐθύγραμμα τμήματα.

Διὰ νὰ εὐρωμεν ὅμως τὰς μετρικὰς αὐτὰς σχέσεις εἶναι ἀνάγκη νὰ γνωρίζωμεν μίαν νέαν γεωμετρικὴν ἔννοιαν, τὴν *προβολήν*.

421. Προβολή. Ἐστω μία εὐθεῖα xy καὶ ἓνα σημεῖον A ἔκτος αὐτῆς (Σχ. 309). Ἀπὸ τὸ A φέρομεν τὴν κάθετον Aa ἐπὶ τὴν xy . Τὸ σημεῖον a λέγεται *προβολή* τοῦ σημείου A ἐπὶ τὴν xy .



Σχ. 309.

Γενικῶς: *Προβολή* ἑνὸς σημείου ἐπὶ μίαν εὐθεῖαν xy , λέγεται ὃ πὸς τῆς κάθετου, ἢ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ δοθὲν σημεῖον ἐπὶ τὴν xy .

Ἐστω ἓνα εὐθύγραμμον τμήμα $BΓ$ καὶ β καὶ γ αἱ προβολαὶ τῶν ἄκρων του B καὶ Γ ἐπὶ τὴν xy : τὸ εὐθύγραμμον τμήμα $\beta\gamma$ λέγεται *προβολή* τοῦ $BΓ$ ἐπὶ τὴν xy .

Γενικῶς: *Προβολή* ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος ἐπὶ μίαν εὐθεῖαν xy , εἶναι τὸ τμήμα τῆς xy , τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῶν προβολῶν τῶν ἄκρων τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ἐπὶ τὴν xy .

2. Μετρικαὶ σχέσεις μεταξὺ τῶν στοιχείων ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου

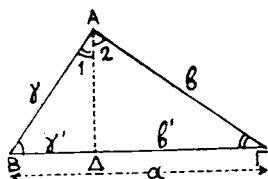
422. Θεώρημα. Ἐὰν ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου φέρωμεν κάθετον ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν :

1ον. Ἡ κάθετος αὐτὴ χωρίζει τὸ δοθὲν τρίγωνον εἰς δύο ἄλλα τρίγωνα, τὰ ὁποῖα εἶναι ὅμοια μεταξὺ των καὶ ὅμοια πρὸς τὸ δοθὲν τρίγωνον.

2ον. Ἡ κάθετος αὐτὴ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν δύο τμημάτων, τὰ ὁποῖα ὀρίζει ἐπὶ τῆς ὑποτείνουσας.

3ον. Ἐκάστη τῶν καθέτων πλευρῶν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ ὀλοκλήρου τῆς ὑποτείνουσας καὶ τῆς προβολῆς τῆς ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν.

Ἐπιπέσεις: Ἐστω τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ (Σχ. 310).



Σχ. 310.

Ἐπιπέσεις.	$\widehat{A} = 90^\circ$ $AD \perp BC$
Συμπ.	1ον. Τὰ τρ. ΑΔΒ, ΑΔΓ, ΑΒΓ ὅμοια μεταξὺ των. 2ον. $\overline{AD}^2 = \Delta B \times \Delta \Gamma$ 3ον. $\begin{cases} \overline{AB}^2 = \Delta B \times \Delta \Gamma \\ \overline{AC}^2 = \Delta C \times \Delta \Gamma \end{cases}$

Ἀπὸ τὴν κορυφὴν τοῦ Α φέρομεν τὴν κάθετον ΑΔ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ.

Συμπέρασμα 1ον. Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΔΒ καὶ ΑΔΓ εἶναι ὅμοια μεταξὺ των καὶ ὅμοια πρὸς τὸ δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ.

Ἀπόδειξις: Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΔΒ καὶ ΑΒΓ εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουν τὴν ὀξείαν γωνίαν Β κοινήν· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ $\gamma\omega\nu A_1 = \gamma\omega\nu \Gamma$.

Ὁμοίως τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΔΓ καὶ ΑΒΓ εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουν τὴν ὀξείαν γωνίαν Γ κοινήν· ἄρα θὰ ἔχουν καὶ $\gamma\omega\nu A_2 = \gamma\omega\nu B$.

Ἐπειδὴ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΔΒ καὶ ΑΔΓ εἶναι ὅμοια πρὸς τὸ ΑΒΓ εἶναι ὅμοια καὶ μεταξὺ των.

Συμπέρασμα 2ον. Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\overline{AD}^2 = \Delta B \times \Delta \Gamma$.

Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΔΒ καὶ ΑΔΓ εἶναι ὅμοια, αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ των εἶναι ἀνάλογοι· δηλ. θὰ εἶναι

$$\frac{AD}{\Delta \Gamma} = \frac{\Delta B}{AD} \quad \eta \quad \boxed{\overline{AD}^2 = \Delta B \times \Delta \Gamma}$$

Ὅστε ἡ κάθετος ΑΔ εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν δύο τμημάτων ΔΒ καὶ ΔΓ τῆς ὑποτείνουσας ΒΓ.

Συμπέρασμα 3ον. Θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$\overline{AB^2} = \text{ΒΓ} \times \text{ΒΔ} \quad \text{καὶ} \quad \overline{ΑΓ^2} = \text{ΒΓ} \times \text{ΔΓ}.$$

Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΒΓ εἶναι ὅμοια, αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ των θὰ εἶναι ἀνάλογοι· δηλ. θὰ εἶναι

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{ΒΓ}} = \frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΑΒ}} \quad \text{ἢ} \quad \boxed{\overline{AB^2} = \text{ΒΓ} \times \text{ΒΔ}}$$

Ὁμοίως ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΑΔΓ καὶ ΑΒΓ ἔχομεν

$$\frac{\overline{ΑΓ}}{\overline{ΒΓ}} = \frac{\text{ΔΓ}}{\text{ΑΓ}} \quad \text{ἢ} \quad \boxed{\overline{ΑΓ^2} = \text{ΒΓ} \times \text{ΔΓ}}$$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: Ἐὰν ἀπὸ τὴν κορυφὴν . . .

423. Πόρισμα I. *Εἰς ἓνα ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὁ λόγος τῶν τετραγώνων τῶν καθέτων πλευρῶν τοῦ εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν προβολῶν των ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν.*

Πράγματι· ἐδείξαμεν (§ 422. 3ον) ὅτι

$$\overline{AB^2} = \text{ΒΓ} \times \text{ΒΔ} \quad \text{καὶ} \quad \overline{ΑΓ^2} = \text{ΒΓ} \times \text{ΔΓ}.$$

Διαιροῦμεν τὰς ἰσότητες αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\frac{\overline{AB^2}}{\overline{ΑΓ^2}} = \frac{\text{ΒΓ} \times \text{ΒΔ}}{\text{ΒΓ} \times \text{ΔΓ}} \quad \text{ἢ} \quad \boxed{\frac{\overline{AB^2}}{\overline{ΑΓ^2}} = \frac{\text{ΒΔ}}{\text{ΔΓ}}} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\gamma^2}{\beta^2} = \frac{\gamma'}{\beta'}.$$

424. Πόρισμα II. *Εἰς ἓνα ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ γινόμενον τῶν δύο καθέτων πλευρῶν τοῦ εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς ὑποτείνουσας ὑπὸ τὸ ἀντίστοιχον ὕψος τοῦ.*

Πράγματι ἀπὸ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΑΒΔ ἔχομεν

$$\frac{\overline{ΒΓ}}{\overline{ΑΒ}} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΔ}} \quad \text{ἢ} \quad \text{ΒΓ} \times \text{ΑΔ} = \text{ΑΓ} \times \text{ΑΒ} \quad \text{ἢ} \quad \boxed{\alpha\upsilon = \beta\gamma}$$

425. Θεώρημα τοῦ Πυθαγόρα. *Τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτείνουσας ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο καθέτων πλευρῶν τοῦ.*

Ἐπίδειξις: Ἐστω τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ (γωνία Α ὀρθή) (Σχ. 310).

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$\overline{ΒΓ^2} = \overline{ΑΒ^2} + \overline{ΑΓ^2}.$$

Ἀπόδειξις: Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α

φέρομεν τὴν κάθετον ΑΔ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ.

Γνωρίζομεν (§ 422. 3ον), ὅτι

$$\overline{AB^2} = \text{ΒΓ} \times \text{ΒΔ}, \quad \overline{ΑΓ^2} = \text{ΒΓ} \times \text{ΔΓ}.$$

Ἐπίδειξις.	$\widehat{Α} = 90^\circ$
Συμπ.	$\overline{ΒΓ^2} = \overline{ΑΒ^2} + \overline{ΑΓ^2}$

Προσθέτομεν τὰς ἰσοτήτας αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\overline{AB^2} + \overline{AG^2} = \overline{BG} \times \overline{BD} + \overline{BG} \times \overline{DG}$$

$$\text{ἢ } \overline{AB^2} + \overline{AG^2} = \overline{BG} \times (\overline{BD} + \overline{DG}) \quad \text{ἢ } \overline{AB^2} + \overline{AG^2} = \overline{BG} \times \overline{BG} = \overline{BG^2}.$$

$$\text{᾽Ὡστε εἶναι } \overline{BG^2} = \overline{AB^2} + \overline{AG^2} \quad \text{ἢ } \boxed{\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2} \quad (1)$$

426. Πόρισμα. Ἐάν ἀφαιρέσωμεν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος (1) τὸ γ^2 λαμβάνομεν

$$\alpha^2 - \gamma^2 = \beta^2 \quad \text{ἢ } \boxed{\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2}$$

$$\text{᾽Ομοίως εὐρίσκομεν, ὅτι } \boxed{\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2}$$

᾽Ὡστε: *Τὸ τετράγωνον μιᾶς καθέτου πλευρᾶς ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτείνουσῆς ἡλαττωμένον κατὰ τὸ τετράγωνον τῆς ἄλλης καθέτου πλευρᾶς.*

427. Ἀνακεφαλαίωσις. Ἐάν παραστήσωμεν μὲ β' καὶ γ' τὰς προβολὰς τῶν καθέτων πλευρῶν β καὶ γ ἐνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ (Σχ. 310) ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν α καὶ μὲ ν τὸ ὕψος τοῦ $\Delta\Delta$, θὰ εἶναι:

$$\boxed{\alpha = \beta' + \gamma'}, \quad \boxed{\beta^2 = \alpha\beta'}, \quad \boxed{\gamma^2 = \alpha\gamma'}, \quad \boxed{\nu^2 = \beta'\gamma'},$$

$$\boxed{\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2}, \quad \boxed{\beta\gamma = \alpha\nu}$$

428. Ἐφαρμογαί. Πρόβλημα. *Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διαγώνιος ἐνὸς τετραγώνου, ἐάν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν του.*

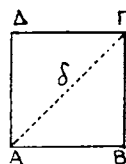
Λύσις. Ἐστω τὸ τετράγωνον $AB\Gamma\Delta$ (Σχ. 311) ἐάν παραστήσωμεν μὲ α τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου καὶ μὲ δ τὴν διαγώνιον τοῦ $AB\Gamma$, θὰ ἔχωμεν ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$, κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Πυθαγόρα

$$\delta^2 = \alpha^2 + \alpha^2 \quad \text{ἢ } \delta^2 = 2\alpha^2$$

$$\text{ἄρα θὰ εἶναι } \boxed{\delta = \alpha\sqrt{2}}$$

Παρατήρησις. Ἡ ἰσότης $\delta = \alpha\sqrt{2}$ γράφεται

$$\frac{\delta}{\alpha} = \sqrt{2}.$$



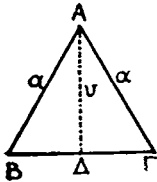
Σχ. 311.

Παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ λόγος τῆς διαγωνίου δ ἐνὸς τετραγώνου πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ α ἐκφράζεται διὰ τοῦ ἀριθμοῦ $\sqrt{2}$. Ἐπειδὴ δὲν ὑπάρχει ἀριθμὸς ἀκέραιος ἢ κλασματικὸς, τοῦ ὁποίου τὸ τετράγωνον νὰ ἰσοῦναι μὲ 2, συνάγομεν, ὅτι:

Ἡ διαγώνιος καὶ ἡ πλευρὰ ἐνὸς τετραγώνου δὲν ἔχουν κοινὴν μέτρον, δηλ. εἶναι ἀσύμμετρα μεγέθη μεταξύ των.

429. Πρόβλημα. *Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος ἑνὸς ἰσοπλευροῦ τριγώνου, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν του.*

Ἐστω τὸ ἰσοπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ (Σχ. 312) πλευρᾶς α' φέρομεν τὸ ὕψος ΑΔ=υ.



Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΔΒ, ἔχομεν

$$u^2 = \alpha^2 - \overline{BD}^2 \quad (2)$$

Ἐπειδὴ $BD = \frac{\alpha}{2}$, ὁπότε $\overline{BD}^2 = \frac{\alpha^2}{4}$, ἢ ἰσότης

(1) γράφεται

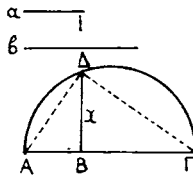
Σχ. 312.

$$u^2 = \alpha^2 - \frac{\alpha^2}{4} = \frac{4\alpha^2 - \alpha^2}{4} = \frac{3\alpha^2}{4}$$

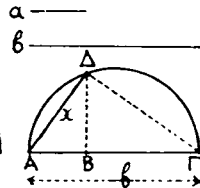
Ἀπὸ αὐτὴν λαμβάνομεν $u = \sqrt{\frac{3\alpha^2}{4}}$ ἢ $u = \frac{\alpha}{2}\sqrt{3}$

430. Πρόβλημα. *Νὰ κατασκευασθῇ ἡ μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν εὐθειῶν α καὶ β.*

1η Μέθοδος. Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας λαμβάνομεν δύο διαδοχικὰ τμήματα ΑΒ καὶ ΒΓ (Σχ. 313) ἴσα ἀντιστοίχως μὲ τὰς δοθείσας εὐθείας α καὶ β. Μὲ διάμετρον τὴν ΑΓ γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν ἀπὸ τὸ σημεῖον Β φέρομεν τὴν κάθετον ΒΔ ἐπὶ τὴν ΑΓ, ἢ ὁποῖα τέμνει τὴν ἡμιπεριφέρειαν εἰς τὸ σημεῖον Δ. Λέγομεν, ὅτι ἡ ΒΔ εἶναι ἡ ζητούμενη μέση ἀνάλογος τῶν εὐθειῶν α καὶ β.



Σχ. 313.



Σχ. 314.

Πράγματι ἔὰν φέρωμεν τὰς χορδὰς ΑΔ καὶ ΓΔ, τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον ΑΔΓ εἶναι ὀρθογώνιον, ὡς ἐγγεγραμμένον εἰς ἡμικύκλιον καὶ ἐπομένως τὸ ὕψος ΔΒ εἶναι μέσον ἀνάλογον μεταξὺ τῶν δύο τμημάτων ΑΒ καὶ ΒΓ τῆς ὑποτείνουσας ΑΓ (§ 422. 2ον) δηλ. εἶναι $\overline{BD}^2 = AB \times BG$ ἢ $\overline{BD}^2 = \alpha \times \beta$.

2α Μέθοδος. Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας λαμβάνομεν τὰ τμήματα ΑΒ=α καὶ ΑΓ=β (Σχ. 314). Μὲ διάμετρον τὴν ΑΓ γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν ἀπὸ τὸ σημεῖον Β φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓ, ἢ ὁποῖα τέμνει τὴν ἡμιπεριφέρειαν εἰς τὸ σημεῖον Δ. Φέρομεν τὴν χορδὴν ΑΔ, ἢ ὁποῖα εἶναι ἡ ζητούμενη εὐθεῖα.

Πράγματι ἔὰν φέρωμεν τὴν χορδὴν ΔΓ, σχηματίζεται τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΔΓ, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ κάθετος πλευρὰ ΑΔ εἶναι μέση

ἀνάλογος μεταξὺ τῆς ὑποτείνουσας ΑΓ καὶ τῆς προβολῆς τῆς ΑΒ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν· δηλ. εἶναι

$$\overline{ΑΔ}^2 = ΑΓ \times ΑΒ \quad \eta \quad \overline{ΑΔ}^2 = \beta \times \alpha.$$

Ἀσκήσεις

Α' Ὀμάς. 1143. (1175). Ἐνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ (Α ὀρθή) δίδονται :

1ον.	$\beta = 8$ ἐκ.,	$\gamma = 6$ ἐκ.	Νὰ ὑπολογισθοῦν	α ,	β' ,	γ'	καὶ	ν	
2ον.	$\alpha = 10$ ἐκ.,	$\gamma = 7$ ἐκ.	>	>	β ,	β' ,	γ'	καὶ	ν
3ον.	$\alpha = 50$ ἐκ.,	$\beta' = 32$ ἐκ.	>	>	β ,	γ ,	γ'	καὶ	ν
4ον.	$\alpha = 10$ ἐκ.,	$\nu = 4$ ἐκ.	»	>	β ,	γ ,	β'	καὶ	γ'
5ον.	$\alpha = 13$ ἐκ.,	$\beta = 12$ ἐκ.	>	>	γ ,	β' ,	γ'	καὶ	ν
6ον.	$\beta = 6$ μ.,	$\beta' = 4$ μ.	>	>	α ,	γ ,	γ'	καὶ	ν
7ον.	$\beta = 80$ ἐκ.,	$\nu = 48$ ἐκ.	>	>	α ,	γ ,	β'	καὶ	γ'
8ον.	$\beta' = 96$ ἐκ.,	$\gamma' = 54$ ἐκ.	>	>	α ,	β ,	γ	καὶ	ν
9ον.	$\beta' = 64$ ἐκ.,	$\nu = 48$ ἐκ.	>	>	α ,	β ,	γ	καὶ	γ'
10ον.	$\beta = 60$ ἐκ.,	$\gamma' = 22$ ἐκ.	>	>	α ,	γ ,	β'	καὶ	ν

1144. (1176). Δίδονται δύο μήκη α καὶ β , ($\alpha > \beta$) καὶ κατασκευάζομεν ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς καθέτους πλευρὰς τὰ μήκη $\frac{\alpha - \beta}{2}$ καὶ $\sqrt{\alpha\beta}$. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ὑποτείνουσά του.

1145. (1177). Ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν α ἐνὸς τετραγώνου, νὰ ὑπολογισθῇ: 1ον ἡ διαγώνιος του δ .

2ον ἡ διαγώνιος δ' τοῦ τετραγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰν τὴν διαγώνιον δ τοῦ πρώτου.

1146. (1178). Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ α ἐνὸς τετραγώνου, ἂν γνωρίζωμεν τὴν διαγώνιον του δ .

1147. (1179). Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ ἐνὸς τετραγώνου, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ διαγώνιος καὶ ἡ πλευρὰ του ἔχουν ἄθροισμα 19,312 μέτρ.

1148. (1180). Ἡ περίμετρος ἐνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι 187,50 μέτρ. καὶ ἡ βάσις του 52 μέτρ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος του.

1149. (1181). Δίδεται ἕνα ἰσοπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς α . Νὰ ὑπολογισθῇ: 1ον τὸ ὕψος του ν .

2ον τὸ ὕψος ν' τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου, ποῦ ὁποῖου ἡ πλευρὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ ὕψος ν τοῦ πρώτου.

1150. (1182). Αἱ διαγώνιοι ἐνὸς ῥόμβου εἶναι 40 μέτρα καὶ 90 μέτρα. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ του καὶ ἡ περίμετρος του.

1151. (1183). Ἡ πλευρὰ ἐνὸς ῥόμβου εἶναι 85 ἐκ. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαγώνιοί του, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ μία εἶναι τὰ τρία πέμπτα τῆς ἄλλης.

1152. (1184). Ἐνὸς τραπεζίου ΑΒΓΔ, ὀρθογωνίου εἰς Α καὶ Δ, δίδονται αἱ πλευραὶ ΑΒ=15 ἐκ., ΓΔ=10 ἐκ., ΑΔ=12 ἐκ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ΒΓ.

1153. (1185). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος καὶ αἱ διαγώνιοι ἐνὸς ἰσοσκελοῦς τραπεζίου ΑΒΓΔ, ἂν γνωρίζωμεν, τὰς βάσεις του ΑΒ=50 ἐκ., ΓΔ=14 ἐκ. καὶ τὰς ἄλλας πλευρὰς του ΒΓ=ΔΑ=30 ἐκ.

1154. (1186). Εἰς ἓνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἡ βᾶσις του καὶ τὸ ὕψος του ἔχουν τὸ αὐτὸ μῆκος 8 ἐκ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτίς τοῦ κύκλου τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τρίγωνον.

Β' Ὁμάς. 1155. (1187). Εἰς ἓνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον $AB\Gamma$, ($AB=AG$) φέρομεν τὸ ὕψος BB' . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$\overline{AB}^2 + \overline{B\Gamma}^2 + \overline{AG}^2 = \overline{GB'}^2 + 2\overline{AB'}^2 + 3\overline{BB'}^2.$$

1156. (1188). Δίδεται ἓνα ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$ ($A=90^\circ$): Ἐπὶ τὸ μέσον Δ τῆς AB φέρομεν τὴν κάθετον ΔE ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν $B\Gamma$. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$\overline{E\Gamma}^2 - \overline{EB}^2 = \overline{AG}^2.$$

1157. (1189). Δίδεται ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ὀρθογώνιον εἰς τὸ A' φέρομεν τὸ ὕψος του $\Delta\Delta$ καὶ τὰς καθέτους ΔE καὶ ΔZ ἐπὶ τὰς πλευράς του AB καὶ AG .

Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$\frac{\overline{AG}^2}{A\Delta^2} = \frac{\overline{GZ}}{\overline{BE}}.$$

1158. (1190). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι μεταξὺ τῶν δύο καθέτων πλευρῶν β καὶ γ ἐνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ καὶ τοῦ ὕψους του ν ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν α ὑπάρχει ἡ σχέση

$$\frac{1}{\nu^2} = \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}.$$

1159. (1191). Ἐὰν δύο διαμέσοι τριγώνου τέμνονται καθέτως, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἰσοῦται μὲ τὸ τετράγωνον τῆς τρίτης διαμέσου.

1160. (1192) Ἐὰν ἀπὸ ἓνα σημείου O , τὸ ὁποῖον κεῖται ἐντὸς ὀρθογωνίου $B\Gamma\Delta$ φέρωμεν εὐθείας πρὸς τὰς κορυφάς του, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι

$$\overline{OA}^2 + \overline{OG}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{OD}^2.$$

1161. (1193). Εἰς ἓνα τεταρτοκύκλιον OAB φέρομεν τὴν διχοτόμον OD τῆς γωνίας AOB . Ἐπὶ τυχὸν σημείου Γ τοῦ τόξου AB φέρομεν τὴν GE κάθετον ἐπὶ τὴν OA , ἡ ὁποία τέμνει τὴν OD εἰς τὸ σημεῖον Z . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$\overline{OA}^2 = \overline{GE}^2 + \overline{ZE}^2.$$

1162. (1194). Δίδεται ἡμικυκλίω O διαμέτρου AB . Μὲ διάμετρον τὴν AO γράφομεν ἡμικυκλίω ἐντὸς τῆς πρώτης. Ἐπὶ τυχὸν σημείου Γ τῆς AO φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν AB , ἡ ὁποία τέμνει τὴν μικροτέραν ἡμικυκλίω εἰς τὸ σημεῖον Δ καὶ τὴν ἄλλην εἰς τὸ E . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\overline{AE}^2 = 2\overline{AD}^2$.

1163. (1195). Αἱ πλευραὶ ἐνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ ($A=90^\circ$) εἶναι $B\Gamma=\alpha$, $\Gamma A=\beta$ καὶ $AB=\gamma$. Ἐὰν Δ εἶναι τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς τὸ τρίγωνον καὶ τῆς ὑποτείνουσας του, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$\Delta B \times \Delta \Gamma = \frac{\beta \gamma}{2}.$$

1164. (1196). Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος ἐνὸς σημείου τῆς O λαμβάνομεν τμήματα $OA=\alpha$, $OB=3\alpha$ καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον A φέρομεν μίαν κάθετον $AG=2\alpha$ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν αὐτήν. Μὲ κέντρον τὸ O καὶ ἀκτίνα τὴν OG γράφομεν περιφέρειαν κύκλου, ἡ ὁποία τέμνει τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν εἰς τὰ σημεῖα M καὶ M' . Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ AM , BM , AM' , BM' καὶ νὰ ἐπαληθευθοῦν αἱ ἰσότητες $\overline{AM}^2 = AB \times MB$ καὶ $\overline{AM'}^2 = AB \times M'B$.

1165. (1197). Εἰς ἓνα κύκλον O ἀκτίνας R φέρομεν δύο χορδὰς καθέτους AB , $\Gamma\Delta$, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Σ . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι:

$$\overline{\Sigma A}^2 + \overline{\Sigma B}^2 + \overline{\Sigma \Gamma}^2 + \overline{\Sigma \Delta}^2 = 4R^2.$$

Γ' Ὁμάς. 1166. (1198). Εἰς ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$ ἡ γωνία B εἶναι ἀμβλεία, τὸ δὲ ὕψος AD εἶναι μέσον ἀνάλογον μεταξὺ τῶν DB καὶ $D\Gamma$. νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι

$$\widehat{B} - \widehat{\Gamma} = 1 \text{ ὀρθή.}$$

1167. (1199). **Θεώρημα τοῦ Carnot.** Αἱ κάθετοι, αἱ ὁποῖοι ἄγονται ἀπὸ ἓνα σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐντὸς ἐνὸς τριγώνου, ἐπὶ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου αὐτοῦ, ὀρίζουν 6 τμήματα τοιαῦτα, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τριῶν μὴ διαδοχικῶν τμημάτων εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν ἄλλων τμημάτων.

1168. (1200). Δίδεται ὀρθογώνιον $AB\Gamma\Delta$, τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰς $AD = a$, $AB = a\sqrt{2}$. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι αἱ κάθετοι ἐπὶ τὴν διαγώνιον BD , αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὰς κορυφὰς A καὶ Γ διαιροῦν τὴν διαγώνιον αὐτὴν εἰς τρία ἴσα μέρη.

1169. (1201). Ἐάν αἱ διαγώνιοι ἐνὸς κυρτοῦ τετραπλεύρου εἶναι κάθετοι, νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἀπέναντι πλευρῶν του εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του.

1170. (1202). Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὸ γινόμενον τῶν δύο βάσεων ἐνὸς ἰσοσκελοῦς τραπεζίου, περιγεγραμμένου περὶ κύκλον, εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου.

Δ' Ὁμάς. 1171. (1203). Ἐάν εἰς ἓνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ἡ μία κάθετος πλευρὰ του εἶναι διπλασία τῆς ἄλλης, τὸ ὕψος διαιρεῖ τὴν ὑποτείνουσαν εἰς δύο τμήματα ἕκ τῶν ὁποίων τὸ ἓνα εἶναι τετραπλάσιον τοῦ ἄλλου.

1172. (1204). Ἐάν αἱ διαγώνιοι ἐνὸς ὀρθογωνίου τραπεζίου εἶναι κάθετοι, νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὸ ὕψος του εἶναι μέσον ἀνάλογον μεταξὺ τῶν βάσεων του.

1173. (1205). Ὅταν πολλαὶ χορδαὶ AM, AM', AM'', \dots ἄγονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον A μιᾶς περιφερείας, τὰ τετράγωνα τῶν χορδῶν αὐτῶν εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰς προβολὰς τῶν ἐπὶ τὴν διάμετρον, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ σημεῖον A .

1174. (1206). Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι κάθε τρίγωνον $AB\Gamma$, εἰς τὸ ὁποῖον ἡ γωνία B εἶναι ὀξεία καὶ ἡ πλευρὰ AB εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς πλευρᾶς $B\Gamma$ καὶ τῆς προβολῆς τῆς ἐπὶ τὴν $B\Gamma$, εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ A .

1175. (1207). Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι κάθε τρίγωνον $AB\Gamma$ εἰς τὸ ὁποῖον αἱ γωνίαι B καὶ Γ εἶναι ὀξείαι καὶ ὅπου τὸ ὕψος AD εἶναι μέσον ἀνάλογον μεταξὺ τῶν δύο τμημάτων, τὰ ὁποῖα ὀρίζει ἐπὶ τῆς πλευρᾶς $B\Gamma$, εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ A .

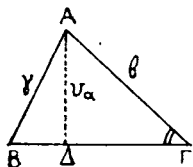
1176. (1208). Δύο κύκλοι ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι ἡ κοινὴ ἐφαπτομένη τῶν εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν διαμέτρων τῶν.

3. Μετρικαὶ σχέσεις μεταξὺ τῶν στοιχείων τυχόντος τριγώνου

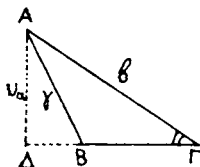
431. Θεώρημα I. *Τὸ τετράγωνον πλευρᾶς τριγώνου, ἡ ὁποία κεῖται ἀπέναντι ὀξείας γωνίας, εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του ἡλαττωμένον κατὰ τὸ διπλάσιον γινόμενον τῆς μιᾶς ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτῶν ἐπὶ τὴν*

προβολὴν τῆς ἄλλης πλευρᾶς ἐπ' αὐτήν.

Ἐπίπεδος: Ἐστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (Σχ. 315) καὶ ΑΒ μία πλευρά του, ἡ ὁποία κεῖται ἀπέναντι τῆς ὀξείας γωνίας Γ. Φέρομεν τὴν κάθετον ΑΔ ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΒΓ.



Σχ. 315.



Σχ. 316.

Ἐπίπεδος.	$\widehat{\Gamma} = \text{ὀξεία}$
Συμπ.	$\overline{AB}^2 = \overline{BG}^2 + \overline{AG}^2 - 2\overline{BG} \times \overline{DG}$

Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι

$$\overline{AB}^2 = \overline{BG}^2 + \overline{AG}^2 - 2\overline{BG} \times \overline{DG}.$$

Ἀπόδειξις: Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΔΒ ἔχομεν, κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Πυθαγόρα,

$$\overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2 \tag{1}$$

Ἀλλὰ εἰς τὸ σχῆμα 315 εἶναι $\overline{BD} = \overline{BG} - \overline{DG}$ (2)

καὶ εἰς τὸ σχῆμα 316 εἶναι $\overline{BD} = \overline{DG} - \overline{BG}$ (3)

Ἐψοῦμεν εἰς τὸ τετράγωνον καὶ τὰ δύο μέλη τῶν ἰσοτήτων (2) καὶ (3) καὶ λαμβάνομεν, κατὰ τὴν ἀξιοσημείωτον ταυτότητα $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$,

$$\overline{BD}^2 = \overline{BG}^2 - 2\overline{BG} \times \overline{DG} + \overline{DG}^2.$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὸ \overline{BD}^2 μὲ τὸ ἴσον του καὶ ἔχομεν

$$\overline{AB}^2 = \overline{BG}^2 - 2\overline{BG} \times \overline{DG} + \overline{DG}^2 + \overline{AD}^2 \tag{4}$$

Ἀλλὰ ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΔΓ ἔχομεν

$$\overline{AD}^2 + \overline{DG}^2 = \overline{AG}^2.$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (4) τὸ ἄθροισμα $\overline{DG}^2 + \overline{AD}^2$ μὲ τὸ ἴσον του \overline{AG}^2 καὶ ἔχομεν

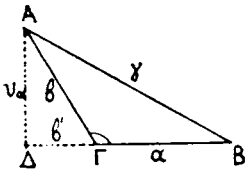
$$\overline{AB}^2 = \overline{BG}^2 - 2\overline{BG} \times \overline{DG} + \overline{AG}^2.$$

ἢ $\overline{AB}^2 = \overline{BG}^2 + \overline{AG}^2 - 2\overline{BG} \times \overline{DG}$ ἢ $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: Τὸ τετράγωνον πλευρᾶς...

432. Θεώρημα II. Τὸ τετράγωνον πλευρᾶς τριγώνου, ἡ ὁποία κεῖται ἀπέναντι ἀμβλείας γωνίας, εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του, ἠδὲξημένον κατὰ τὸ διπλάσιον γινόμενον τῆς μιᾶς ἐκ τῶν πλευρῶν αὐτῶν ἐπὶ τὴν προβολὴν τῆς ἄλλης ἐπ' αὐτήν.

Ἐπίπεδος: Ἐστω τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ (Σχ. 317) καὶ AB μία πλευρὰ του, ἣ ὁποία κεῖται ἀπέναντι τῆς ἀμβλείας γωνίας Γ φέρομεν τὸ ὕψος AD , τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς $B\Gamma$ εἰς τὸ Δ .



Σχ. 317.

Ἐπίπεδος.	$\widehat{\Gamma} > 90^\circ$
Συμπ.	$\overline{AB^2} = \overline{BG^2} + \overline{AG^2} + 2BG \times \Gamma\Delta$

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν ὅτι

$$\overline{AB^2} = \overline{BG^2} + \overline{AG^2} + 2BG \times \Gamma\Delta.$$

Ἀπόδειξις: Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $A\Delta B$ ἔχομεν, κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Πυθαγόρα, $\overline{AB^2} = \overline{BD^2} + \overline{AD^2}$ (1).

Ἀλλὰ $BD = BG + \Gamma\Delta$. Ὑποῦμεν εἰς τὸ τετράγωνον καὶ τὰ δύο μέλη τῆς τελευταίας ἰσότητος καὶ λαμβάνομεν, κατὰ τὴν ἀξιοσημείωτον ταυτότητα $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$,

$$\overline{BD^2} = \overline{BG^2} + 2BG \times \Gamma\Delta + \overline{\Gamma\Delta^2}.$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὸ $\overline{BD^2}$ μὲ τὸ ἴσον του καὶ ἔχομεν $\overline{AB^2} = \overline{BG^2} + 2BG \times \Gamma\Delta + \overline{\Gamma\Delta^2} + \overline{AD^2}$ (2).

Ἀλλὰ ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $A\Delta\Gamma$ ἔχομεν

$$\overline{\Gamma\Delta^2} + \overline{AD^2} = \overline{AG^2}.$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (2) τὸ ἄθροισμα $\overline{\Gamma\Delta^2} + \overline{AD^2}$ μὲ τὸ ἴσον του $\overline{AG^2}$ καὶ ἔχομεν $\overline{AB^2} = \overline{BG^2} + 2BG \times \Gamma\Delta + \overline{AG^2}$.

ἢ $\boxed{\overline{AB^2} = \overline{BG^2} + \overline{AG^2} + 2BG \times \Gamma\Delta}$ ἢ $\boxed{\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta'}$.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: *Τὸ τετράγωνον πλευρᾶς. . .*

433. Παρατήρησις. Ἐστώσαν α, β, γ αἱ πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου $AB\Gamma$ ἀπὸ τὰ θεωρήματα τῶν § 425, 431, 432 συνάγομεν, ὅτι

1ον. Ἐὰν ἡ γωνία A εἶναι ὀρθή, θὰ εἶναι $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ (Θεώρημα τοῦ Πυθαγόρα).

2ον. Ἐὰν ἡ γωνία A εἶναι ὀξεῖα, θὰ εἶναι $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$ (Θεώρημα I).

3ον. Ἐὰν ἡ γωνία A εἶναι ἀμβλεία, θὰ εἶναι $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$ (Θεώρημα II).

Ἀντιστρόφως:

1ον. Ἐὰν $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$, ἡ γωνία A εἶναι ὀρθή.

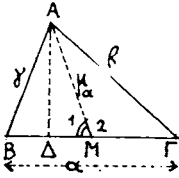
2ον. Ἐὰν $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$, ἡ γωνία A εἶναι ὀξεῖα.

3ον. Ἐὰν $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$, ἡ γωνία A εἶναι ἀμβλεία.

Ἀσκήσεις: 1177, 1178, 1179, 1180, 1181.

434. Θεώρημα τῶν διαμέσων τριγώνου. Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων δύο πλευρῶν τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ διπλάσιον τετραγώνου τῆς διαμέσου, ἢ ὁποῖα περιέχεται μεταξὺ τῶν δύο αὐτῶν πλευρῶν, ἠϋξημένον κατὰ τὸ διπλάσιον τετραγώνον τοῦ ἡμίσεως τῆς τρίτης πλευρᾶς.

Ῥπόθεις: Ἐστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (Σχ. 318) καὶ ΑΜ μία διάμεσός του.



Σχ. 318.

Ῥπόθ.	ΑΜ=διάμεσος
Συμπ.	$\overline{ΑΒ}^2 + \overline{ΑΓ}^2 = 2\overline{ΑΜ}^2 + 2\overline{ΒΜ}^2$

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$\overline{ΑΒ}^2 + \overline{ΑΓ}^2 = 2\overline{ΑΜ}^2 + 2\overline{ΒΜ}^2.$$

Ἀπόδειξις: Ἡ διάμεσος ΑΜ δὲν εἶναι γενικῶς κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν ΒΓ. Ἐπομένως αἱ γωνίαι M_1 καὶ M_2 , τὰς ὁποίας σχηματίζει μὲ τὴν ΒΓ εἶναι ἄνισοι· ἐπειδὴ δὲ αἱ γωνίαι M_1 καὶ M_2 εἶναι παραπληρωματικά, ἢ μία θὰ εἶναι ὀξεῖα καὶ ἡ ἄλλη ἀμβλεία· ἔστω ὅτι ἡ M_1 εἶναι ὀξεῖα, ὁπότε ἡ M_2 θὰ εἶναι ἀμβλεία.

Φέρομεν τὸ ὕψος ΑΔ· ἡ ΔΜ εἶναι ἡ προβολὴ τῆς διαμέσου ΑΜ ἐπὶ τὴν ΑΓ.

Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΜ ἡ πλευρὰ ΑΒ κεῖται ἀπέναντι τῆς ὀξεῖας γωνίας M_1 καὶ ἐπομένως, κατὰ τὸ θεώρημα τῆς § 431, θὰ εἶναι

$$\overline{ΑΒ}^2 = \overline{ΑΜ}^2 + \overline{ΒΜ}^2 - 2\overline{ΒΜ} \cdot \Delta\overline{Μ} \quad (1).$$

Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΜΓ ἡ πλευρὰ ΑΓ κεῖται ἀπέναντι τῆς ἀμβλείας γωνίας M_2 καὶ ἐπομένως, κατὰ τὸ θεώρημα τῆς § 432, θὰ εἶναι

$$\overline{ΑΓ}^2 = \overline{ΑΜ}^2 + \overline{ΜΓ}^2 + 2\overline{ΜΓ} \cdot \Delta\overline{Μ}.$$

Ἐπειδὴ $\overline{ΜΓ} = \overline{ΒΜ}$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γράφεται

$$\overline{ΑΓ}^2 = \overline{ΑΜ}^2 + \overline{ΒΜ}^2 + 2\overline{ΒΜ} \cdot \Delta\overline{Μ} \quad (2).$$

Προσθέτομεν τὰς ἰσότητες (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\boxed{\overline{ΑΒ}^2 + \overline{ΑΓ}^2 = 2\overline{ΑΜ}^2 + 2\overline{ΒΜ}^2} \quad (3)$$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων. . .**

Σημ. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ α, β, γ τὰς πλευρὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ μὲ $\mu_\alpha, \mu_\beta, \mu_\gamma$ τὰς διαμέσους του, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὰς κορυφὰς Α, Β, Γ ἀντιστοιχῶς, ἢ ἰσότης (3) γράφεται

$$\gamma^2 + \beta^2 = 2\mu_\alpha^2 + 2 \cdot \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2$$

$$\boxed{\gamma^2 + \beta^2 = 2\mu_\beta^2 + \frac{\alpha^2}{2}}$$

Ἐργαζόμενοι ὁμοίως εὐρίσκομεν, ὅτι

$$\boxed{\alpha^2 + \beta^2 = 2\mu_\gamma^2 + \frac{\gamma^2}{2}} \quad \text{καὶ} \quad \boxed{\alpha^2 + \gamma^2 = 2\mu_\beta^2 + \frac{\beta^2}{2}}$$

435. 2ον Θεώρημα τῶν διαμέσων τριγώνου. Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν κατὰ μέλη τὴν ἰσότητα (1) ἀπὸ τὴν ἰσότητα (2) τῆς § 434 λαμβάνομεν

$$\overline{A\Gamma^2 - AB^2} = 4BM \times \Delta M \quad (3)$$

Ἐπειδὴ $4BM = 2 \cdot 2BM = 2B\Gamma$, ἢ ἰσότης (3) γράφεται

$$\boxed{\overline{A\Gamma^2 - AB^2} = 2B\Gamma \times \Delta M}$$

Ὡστε: Ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων δύο πλευρῶν ἐνὸς τριγώνου εἶναι ἴση μὲ τὸ διπλάσιον γινόμενον τῆς τρίτης πλευρᾶς ἐπὶ τὴν προβολὴν ἐπ' αὐτήν, τῆς διαμέσου, ἢ ὁποῖα ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν τρίτην πλευράν.

Ἀσκήσεις: 1182, 1183, 1184, 1185, 1186.

436. Ἐφαρμογή. Θεώρημα. Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων των ἀπὸ δύο ὠρισμένα σημεῖα A καὶ B εἶναι σταθερὸν καὶ ἴσον μὲ k^2 , εἶναι μία περιφέρεια κύκλου, ἢ ὁποῖα ἔχει τὸ κέντρον τῆς εἰς τὸ μέσον τῆς εὐθείας AB.

Ἐπίδοσις: Ἐστώσαν A καὶ B (Σχ. 319) τὰ δοθέντα σημεῖα καὶ M ἓνα σημεῖον τοῦ τόπου.

Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι τὸ M κεῖται ἐπὶ περιφερείας κύκλου.

Ἀπόδειξις: Φέρομεν τὰς εὐθείας MA καὶ MB. Ἐπειδὴ τὸ M εἶναι, ἐξ ὑποθέσεως, σημεῖον τοῦ τόπου πρέπει νὰ εἶναι

$$\overline{MA^2} + \overline{MB^2} = k^2 \quad (1)$$

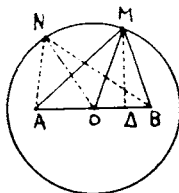
Φέρομεν τὴν εὐθείαν AB καὶ ἔστω O τὸ μέσον τῆς. Φέρομεν τὴν εὐθείαν MO, ἢ ὁποῖα εἶναι διάμεσος τοῦ τριγώνου MAB.

Κατὰ τὸ θεώρημα τῶν διαμέσων τριγώνου θὰ εἶναι

$$\overline{MA^2} + \overline{MB^2} = 2\overline{MO^2} + 2\overline{AO^2} \quad (2)$$

Ἀλλὰ ἐξ ὑποθέσεως ἔχομεν καὶ τὴν ἰσότητα (1). Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι

$$k^2 = 2\overline{MO^2} + 2\overline{AO^2} \quad \text{ἢ} \quad 2\overline{MO^2} = k^2 - 2\overline{AO^2} \quad \text{ἢ} \quad \overline{MO^2} = \frac{k^2}{2} - \overline{AO^2}.$$



Σχ. 319.

Ἐπειδὴ $AO = \frac{AB}{2}$, ἢ προηγουμένη ἰσότης γράφεται

$$\overline{MO}^2 = \frac{k^2}{2} - \frac{\overline{AB}^2}{4} = \text{σταθερόν, ἄρα } MO = \sqrt{\frac{k^2}{2} - \frac{\overline{AB}^2}{4}}$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ τυχὸν σημεῖον M τοῦ τόπου ἀπέχει ἀπὸ τὸ μέσον O τῆς εὐθείας AB ἀπόστασιν σταθερὰν καὶ ἴσην μὲ $\sqrt{\frac{k^2}{2} - \frac{\overline{AB}^2}{4}}$. ἄρα τὸ M κεῖται ἐπὶ περιφερείας κύκλου, ἢ ὁποία ἔχει κέντρον τὸ μέσον O τῆς AB καὶ ἀκτῖνα ἴσην μὲ $\sqrt{\frac{k^2}{2} - \frac{\overline{AB}^2}{4}}$.

Ἀντιστρόφως. Θὰ δείξωμεν, ὅτι κάθε σημεῖον τῆς περιφερείας αὐτῆς εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου.

Ἐπιπέδου: Ἐστω N τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας αὐτῆς· φέρομεν τὰς εὐθείας NA καὶ NB .

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\overline{NA}^2 + \overline{NB}^2 = k^2$.

Ἀπόδειξις: Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν NO · ἢ NO εἶναι διάμεσος τοῦ τριγώνου NAB καὶ ἐπομένως κατὰ τὸ θεώρημα τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου θὰ εἶναι

$$\overline{NA}^2 + \overline{NB}^2 = 2\overline{NO}^2 + 2\overline{AO}^2 \quad \text{ἢ} \quad \overline{NA}^2 + \overline{NB}^2 = 2\overline{NO}^2 + \frac{\overline{AB}^2}{2} \quad (3)$$

Ἡ NO εἶναι ἀκτίς τοῦ κύκλου O καὶ ἐπομένως εἶναι ἴση μὲ $\sqrt{\frac{k^2}{2} - \frac{\overline{AB}^2}{4}}$. Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (3) τὸ \overline{NO}^2 μὲ τὸ ἴσον τοῦ $\frac{k^2}{2} - \frac{\overline{AB}^2}{4}$ καὶ ἔχομεν

$$\overline{NA}^2 + \overline{NB}^2 = 2\left(\frac{k^2}{2} - \frac{\overline{AB}^2}{4}\right) + \frac{\overline{AB}^2}{2} \quad \text{ἢ} \quad \overline{NA}^2 + \overline{NB}^2 = k^2.$$

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα αὐτὴν συνάγομεν, ὅτι τὸ τυχὸν σημεῖον N τῆς περιφερείας O εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου.

Διευρύνσεις. Ὄταν $k^2 = \frac{\overline{AB}^2}{2}$, ἢ ἀκτίς τῆς περιφερείας O μηδενίζεται καὶ ἐπομένως ὁ τόπος εἶναι ἓνα σημεῖον O .

Ὄταν $k^2 < \frac{\overline{AB}^2}{2}$, ὁ τόπος δὲν εἶναι πραγματικὸς (ἀκτίς φανταστική).

Ἀσκήσεις. 1187.

Ἀσκήσεις

Α' Ὁμάς. 1177. (1209). Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ $ΑΓ$ ἑνὸς τριγώνου, ἂν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν $B=60^\circ$, καὶ τὰς πλευρὰς $AB=6$ ἐκ., $BC=8$ ἐκ.

1178. (1210). Αἱ πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου $AB\Gamma$ εἶναι $AB=3$ ἐκ., $B\Gamma=5$ ἐκ., $\Gamma A=7$ ἐκ. 1ον. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι ἡ γωνία B εἶναι ἀμβλεία.

2ον. Νὰ ὑπολογισθῆ ἡ προβολὴ BA τῆς πλευρᾶς BA ἐπὶ τὴν ΓB .

3ον. Νὰ ὑπολογισθῆ ἡ γωνία B .

1179. (1211). Ἐνὸς τριγώνου $AB\Gamma$ δίδονται αἱ τρεῖς πλευραὶ α, β, γ καὶ ἡ γωνία $B=120^\circ$. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι $\beta^2=\alpha^2+\gamma^2+\alpha\gamma$.

1180. (1212). Εἰς ἕνα κύκλον O ἀκτίνος R φέρομεν μίαν χορδὴν AB καὶ συνδέομεν τυχὸν σημεῖον Γ αὐτῆς μὲ τὸ κέντρον O . Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι

$$R^2=O\Gamma^2+A\Gamma\times\Gamma B.$$

1181. (1213). Ἐὰν AB καὶ ΓA εἶναι αἱ βάσεις ἑνὸς τραπέζιου $AB\Gamma A$, νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι $\overline{A\Gamma^2}+\overline{B\Delta^2}=\overline{A\Delta^2}+\overline{B\Gamma^2}+2AB\times\Gamma A$.

B' Ὁμάς. 1182. (1214). Αἱ πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου $AB\Gamma$ εἶναι $\alpha=6$ ἐκ., $\beta=7$ ἐκ., $\gamma=11$ ἐκ. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διάμεσοι $\mu_\alpha, \mu_\beta, \mu_\gamma$.

1183. (1215). Νὰ ἀποδειχθῆ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τριῶν πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὰ $\frac{4}{3}$ τοῦ ἄθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν τριῶν διαμέσων του.

1184. (1216). Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων τυχόντος σημείου M ἀπὸ τὰς δύο ἀπέναντι κορυφᾶς A καὶ Γ παραλληλογράμου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων τοῦ αὐτοῦ σημείου ἀπὸ τὰς ἄλλας δύο κορυφᾶς.

1185. (1217). Ἐὰν Θ εἶναι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέσων ἑνὸς τριγώνου $AB\Gamma$, νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι $\overline{A\Theta^2}+\overline{B\Gamma^2}+\overline{\Gamma A^2}=3(\overline{O A^2}+\overline{O B^2}+\overline{O \Gamma^2})$.

1186. (1218). Δίδεται ἕνα τρίγωνον $AB\Gamma$ πλευρῶν α, β, γ . Μὲ πλευρὰν τὴν $B\Gamma$ κατασκευάζομεν ἑκατέρωθεν αὐτῆς τὰ ἰσοπλευρα τρίγωνα $B\Gamma A$ καὶ $B\Gamma A'$. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι $\overline{A\Delta^2}+\overline{A\Delta'^2}=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$.

1187. (1219). Δίδονται δύο σημεία A καὶ B , τῶν ὁποίων ἡ ἀπόστασις εἶναι $AB=8\alpha$. Νὰ εὑρεθῆ ὁ τόπος τῶν σημείων M , ὥστε νὰ εἶναι

$$\overline{M A^2}+\overline{M B^2}=82\alpha^2.$$

4. Μετρικαὶ σχέσεις εἰς τὸν κύκλον

437. **Θεώρημα.** Ἐὰν ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Σ φέρωμεν μίαν τυχοῦσαν τέμνουσαν $\Sigma A B$ περιφερείας O , τὸ γινόμενον $\Sigma A \times \Sigma B$ τῶν ἀποστάσεων τοῦ σημείου Σ ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς τομῆς τῆς τεμνούσης καὶ τῆς περιφερείας, εἶναι σταθερὸν καὶ ἀνεξάρτητον τῆς διευθύνσεως τῆς τεμνούσης.

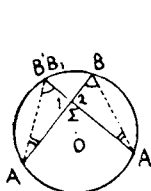
Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις, καθόσον τὸ δοθὲν σημεῖον Σ κεῖται ἐντὸς τοῦ δοθέντος κύκλου ἢ ἐκτὸς αὐτοῦ.

Περίπτωσις I. Τὸ σημεῖον Σ κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου (Σχ. 320).

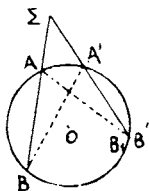
Ἐπιπέσεις: Ἐστώσαν δύο τυχοῦσαι τέμνουσαι $A\Sigma B$ καὶ $A'\Sigma B'$ τοῦ κύκλου O , αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ τὸ δοθὲν σημεῖον Σ .

Συμπέρασμα: Πρέπει νὰ δείξωμεν, ὅτι $\Sigma A \times \Sigma B = \Sigma A' \times \Sigma B'$.

Ἀπόδειξις: Ἐὰν φέρωμεν τὰς χορδὰς AB' καὶ $A'B$, τὰ σχηματιζόμενα τρίγωνα $\Sigma AB'$ καὶ $\Sigma A'B$



Σχ. 320.



Σχ. 321.

εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουν δύο γωνίας ἴσας μίαν πρὸς μίαν ἤτοι ἔχουν τὰς γωνίας Σ , καὶ Σ , ἴσας, ὡς κατὰ κορυφὴν καὶ τὰς γωνίας A καὶ A' ἴσας, διότι εἶναι ἔγγεγραμμένοι εἰς κύκλον καὶ βαίνουν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου $B'B$.

Ἀπὸ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων αὐτῶν ἔχομεν

$$\frac{\Sigma A}{\Sigma A'} = \frac{\Sigma B'}{\Sigma B} \quad \text{ἢ} \quad \boxed{\Sigma A \times \Sigma B = \Sigma A' \times \Sigma B'}$$

Περίπτωσις II. Τὸ σημεῖον Σ κείται ἐκτὸς τοῦ κύκλου.

Ἐπίστασις: Ἐστώσαν δύο τυχοῦσαι τέμνουσαι ΣAB καὶ $\Sigma A'B'$ τοῦ κύκλου O , (Σχ. 321), αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ τὸ δοθὲν σημεῖον Σ .

Συμπέρασμα: Πρέπει νὰ δείξωμεν, ὅτι $\Sigma A \times \Sigma B = \Sigma A' \times \Sigma B'$

Ἀπόδειξις: Ἐὰν φέρωμεν τὰς χορδὰς AB' καὶ $A'B$ σχηματίζονται τὰ τρίγωνα $\Sigma AB'$ καὶ $\Sigma A'B$, τὰ ὁποῖα εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουν δύο γωνίας ἴσας μίαν πρὸς μίαν ἤτοι ἔχουν τὴν γωνίαν Σ κοινὴν καὶ τὰς γωνίας B καὶ B' ἴσας, διότι εἶναι ἔγγεγραμμένοι εἰς κύκλον καὶ βαίνουν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου AA' .

Ἀπὸ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων αὐτῶν ἔχομεν

$$\frac{\Sigma A}{\Sigma A'} = \frac{\Sigma B'}{\Sigma B} \quad \text{ἢ} \quad \boxed{\Sigma A \times \Sigma B = \Sigma A' \times \Sigma B'}$$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Ἐὰν ἀπὸ δοθὲν σημείου...**

Παρατήρησις. Ἡ περίπτωσις I τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος ἐκφράζεται καὶ ὡς ἑξῆς:

Ἐὰν δύο χορδαὶ κύκλου τέμνονται, τὸ γινόμενον τῶν δύο τμημάτων τῆς μιᾶς χορδῆς εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν δύο τμημάτων τῆς ἄλλης χορδῆς.

438. Θεώρημα. (Ἀντίστροφον). Ἐὰν δύο εὐθεῖαι AB καὶ $A'B'$ τέμνονται εἰς ἓνα σημεῖον Σ , οὕτως ὥστε νὰ εἶναι $\Sigma A \times \Sigma B = \Sigma A' \times \Sigma B'$ (1), τὰ τέσσαρα σημεῖα A, B, A', B' κείνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφέρειας.

Ἀπόδειξις: Ἐὰν γράψωμεν περιφέρειαν κύκλου, ἣ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ τὰ τρία σημεῖα A, A', B (Σχ. 320), λέγομεν, ὅτι ἡ περιφέρεια αὐτὴ θὰ διέλθῃ καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον B' .

Ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ περιφέρεια αὐτὴ δὲν διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Β', τότε θὰ τέμνη τὴν ΣΑ' εἰς ἓνα σημεῖον Β₁, διάφορον τοῦ Β'. ἄλλὰ τότε, κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα, θὰ ἔχωμεν

$$\Sigma A \times \Sigma B = \Sigma A' \times \Sigma B_1.$$

Ἄλλὰ ἐξ ὑποθέσεως ἔχομεν καὶ τὴν ἰσότητα (1).

Ἄπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2), αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰ πρῶτα μέλη των ἴσα, συνάγομεν, ὅτι $\Sigma A' \times \Sigma B_1 = \Sigma A' \times \Sigma B'$ ἢ $\Sigma B_1 = \Sigma B'$.

Ἄπὸ τὴν τελευταίαν ἰσότητα συνάγομεν, ὅτι τὰ σημεῖα Β₁ καὶ Β' συμπίπτουν. Ὡστε τὰ τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Α', Β' κείνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.

Ἀσκήσεις: 1188, 1189, 1190.

439. Θεώρημα. Ἐὰν ἀπὸ ἓνα σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς κύκλου φέρωμεν μίαν ἐφαπτομένην καὶ μίαν τέμνουσαν τοῦ κύκλου, ἡ ἐφαπτομένη εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς ὄλης τεμνούσης καὶ τοῦ ἐκτὸς τοῦ κύκλου μέρους αὐτῆς.

Ἐπίδειξις: Ἐστω Σ (Σχ. 322) τὸ δοθὲν σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου Ο' ἀπὸ τὸ Σ φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην ΣΑ καὶ τὴν τέμνουσαν ΣΒΓ τοῦ κύκλου Ο.

Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι

$$\overline{\Sigma A}^2 = \Sigma \Gamma \times \Sigma B.$$

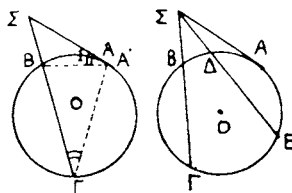
Ἀπόδειξις: Φέρομεν τὰς χορδὰς ΑΒ καὶ ΑΓ. Τὰ τρίγωνα ΣΑΒ καὶ ΒΑΓ εἶναι ὁμοία, διότι ἔχουν δύο γωνίας ἴσας μίαν πρὸς μίαν· ἤτοι ἔχουν τὴν γωνίαν Σ κοινὴν καὶ τὰς γωνίας Α₁ καὶ Γ ἴσας, διότι ἡ μὲν Α, εἶναι γωνία σχηματιζομένη ὑπὸ χορδῆς καὶ ἐφαπτομένης, ἡ δὲ Γ εἶναι ἐγγεγραμμένη καὶ βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου ΒΑ, τοῦ περιεχομένου μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας Α₁.

Ἄπὸ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων αὐτῶν ἔχομεν

$$\frac{\Sigma A}{\Sigma \Gamma} = \frac{\Sigma B}{\Sigma A} \quad \text{ἢ} \quad \boxed{\Sigma A^2 = \Sigma \Gamma \times \Sigma B}.$$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: Ἐὰν ἀπὸ ἓνα σημεῖον. . .

440. Παρατήρησις. Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα εἶναι μία μερικὴ περίπτωση τοῦ θεωρήματος τῆς § 437, διότι ἡ ἐφαπτομένη ΣΑ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ὀρική θέσις μιᾶς τεμνούσης ΣΔΕ (Σχ. 323) ὅταν αὕτη στρέφεται περὶ τὸ Σ μέχρις, ὅτου τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε συμπίπτουν



Σχ. 322.

Σχ. 323.

εἰς τὸ Α. Ἄλλὰ τότε θὰ εἶναι $\Sigma\Delta = \Sigma E = \Sigma A$ καὶ ἡ σχέσις

$$\Sigma\Delta \times \Sigma E = \Sigma B \times \Sigma\Gamma$$

γράφεται $\Sigma A \times \Sigma A = \Sigma B \times \Sigma\Gamma$ ἢ $\overline{\Sigma A^2} = \Sigma B \times \Sigma\Gamma$.

441. Θεώρημα. (Ἀντίστροφον). Δύο εὐθεῖαι τέμνονται εἰς ἓνα σημεῖον Σ· ἐπὶ τῆς μιᾶς ἐξ αὐτῶν δίδονται δύο σημεῖα Β καὶ Γ κείμενα πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ Σ καὶ ἐπὶ τῆς ἄλλης ἓνα σημεῖον Α. Ἐὰν εἶναι $\overline{\Sigma A^2} = \Sigma B \times \Sigma\Gamma$ (1), ἡ περιφέρεια, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Α, Β, Γ ἐφάπτεται τῆς ΣΑ εἰς τὸ σημεῖον Α.

Ἀπόδειξις: Γράφομεν τὴν περιφέρειαν Ο (Σχ. 322), ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ τρία σημεῖα Α, Β, Γ. Ἐὰν ἡ ΣΑ δὲν εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας Ο εἰς τὸ σημεῖον Α, θὰ εἶναι τέμνουσα αὐτῆς καὶ ἐπομένως προεκτεινομένη θὰ ἔτεμνε τὴν περιφέρειαν εἰς ἓνα δεύτερον σημεῖον Α'.

Ἐπειδὴ αἱ ΣΒΓ καὶ ΣΑΑ' εἶναι τέμνουσαι τῆς περιφερείας Ο, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον Σ, θὰ εἶναι

$$\Sigma B \times \Sigma\Gamma = \Sigma A \times \Sigma A' \quad (2)$$

Ἀλλὰ ἐξ ὑποθέσεως ἔχομεν καὶ τὴν ἰσότητα (1).

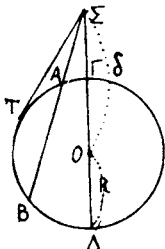
Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι

$$\Sigma A \times \Sigma A' = \overline{\Sigma A^2} \quad \text{ἢ} \quad \Sigma A' = \Sigma A.$$

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα αὐτὴν συνάγομεν, ὅτι τὰ σημεῖα Α καὶ Α' συμπίπτουν· ἄρα ἡ εὐθεῖα ΣΑ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας Ο εἰς τὸ σημεῖον Α.

Ἀσκήσεις: 1191, 1192, 1193, 1194, 1195.

442. Δύναμις σημείου ὡς πρὸς κύκλον. Ἐστω ὁ κύκλος Ο καὶ ἓνα σημεῖον Σ ἐκτὸς αὐτοῦ (Σχ. 324). Εἰς προηγούμενον θεώρημα εἶδομεν ὅτι, ἐὰν φέρωμεν μίαν τυχοῦσαν τέμνουσαν ΣΑΒ τοῦ κύκλου, τὸ γινόμενον $\Sigma A \times \Sigma B$ τῆς ὅλης τεμνούσης καὶ τοῦ ἐκτὸς τοῦ κύκλου μέρους αὐτῆς, εἶναι σταθερὸν καὶ ἀνεξάρτητον τῆς διεύθυνσεως τῆς τεμνούσης. Αὐτὸ τὸ σταθερὸν γινόμενον $\Sigma A \times \Sigma B$, τὸ ὁποῖον χαρακτηρίζει τὴν θέσιν τοῦ σημείου Σ πρὸς τὸν κύκλον Ο, λέγεται **δύναμις σημείου πρὸς κύκλον**.



Σχ. 324.

Αὐτὴ ἡ δύναμις δύναται νὰ ἐκφρασθῇ συναρτήσῃ τῆς ἀκτίνος R τοῦ κύκλου καὶ τῆς ἀποστάσεως δ τοῦ σημείου Σ ἀπὸ τὸ κέντρον Ο τοῦ κύκλου.

Πρὸς τοῦτο φέρομεν μίαν τέμνουσαν ΣΓΔ, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον Ο τοῦ κύκλου.

1ον. Ἐὰν τὸ σημεῖον Σ κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου Ο (Σχ. 324) θὰ ἔχωμεν

$$\Sigma\Lambda \times \Sigma\text{B} = \Sigma\Gamma \times \Sigma\Delta \quad (1)$$

Ἐπειδὴ $\Sigma\Gamma = \Sigma\text{O} - \text{O}\Gamma = \delta - R$ καὶ $\Sigma\Delta = \Sigma\text{O} + \text{O}\Delta = \delta + R$ ἡ ἰσότης (1) γράφεται

$$\Sigma\Lambda \times \Sigma\text{B} = (\delta - R)(\delta + R) \quad \text{ἢ} \quad \Sigma\Lambda \times \Sigma\text{B} = \delta^2 - R^2.$$

Ἐὰν παραστήσωμεν τὴν δύναμιν $\Sigma\Lambda \times \Sigma\text{B}$ μὲ Δ , ἡ προηγουμένη ἰσότης γράφεται

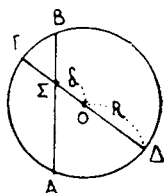
$$\boxed{\Delta = \delta^2 - R^2} \quad (2)$$

2ον. Ἐὰν τὸ σημεῖον Σ κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου Ο (Σχ. 325) θὰ ἔχωμεν

$$\Sigma\Lambda \times \Sigma\text{B} = \Sigma\Gamma \times \Sigma\Delta$$

$$\text{ἢ} \quad \Sigma\Lambda \times \Sigma\text{B} = (R - \delta)(R + \delta)$$

ἢ $\Sigma\Lambda \times \Sigma\text{B} = R^2 - \delta^2$ ἢ $\boxed{\Delta = R^2 - \delta^2} \quad (3)$



Σχ. 325.

Αἱ δύο παραστάσεις (2) καὶ (3) τῆς δυνάμεως Δ διαφέρουν μόνον κατὰ τὸ σημεῖον, διότι ἡ διαφορὰ $R^2 - \delta^2$ δύναται νὰ γραφῆ $-(\delta^2 - R^2)$.

443. Παρατήρησις I. Ἐὰν ἡ δύναμις $\Delta = \delta^2 - R^2$ εἶναι θετική, δηλ. ἐὰν $\delta^2 - R^2 > 0$ ἢ $\delta > R$, τότε τὸ σημεῖον κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου.

Ἐὰν εἶναι $\Delta = 0$, δηλ. $\delta^2 - R^2 = 0$ ἢ $\delta = R$, τὸ σημεῖον κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας.

Ἐὰν ἡ δύναμις $\Delta = \delta^2 - R^2$ εἶναι ἀρνητική, δηλ. ἐὰν εἶναι $\delta^2 - R^2 < 0$ ἢ $\delta < R$, τὸ σημεῖον κεῖται ἐντὸς τοῦ κύκλου.

Ἐὰν $\delta = 0$, τότε θὰ εἶναι $\Delta = -R^2$ αὐτὴ εἶναι ἡ μικροτέρα τιμὴ τὴν ὁποίαν δύναται νὰ λάβῃ ἡ δύναμις Δ ἐνὸς σημείου πρὸς κύκλον.

444. Παρατήρησις II. Ἄν φέρωμεν τὴν ἐφαπτομένην ΣΤ τῆς περιφερείας (Σχ. 324) θὰ εἶναι $\overline{\Sigma\text{T}}^2 = \Sigma\Lambda \times \Sigma\text{B}$. Ἐπειδὴ τὸ γινόμενον $\Sigma\Lambda \times \Sigma\text{B}$ παριστάνει τὴν δύναμιν τοῦ σημείου Σ πρὸς τὸν κύκλον Ο συναγομεν, ὅτι:

Ἡ δύναμις ἐνὸς σημείου πρὸς κύκλον εἶναι ἴση μὲ τὸ τετράγωνον τῆς ἐφαπτομένης, ἡ ὁποία ἀγεται ἀπὸ τὸ σημεῖον πρὸς τὸν κύκλον.

Ἄσκησεις

A' Ὀμάς. 1188. (1220). Δίδεται κύκλος ἀκτίνοσ 8,20 μέτρ. Ἐπὶ ἓνα σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἀπέχει 15 μέτρα ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου, φέρομεν μίαν τέμνουσαν, τῆσ ὁποίας τὸ ἐκτόσ τοῦ κύκλου μέρος εἶναι 10,25 μ. Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ μήκοσ τῆσ χορδῆσ, τὴν ὁποίαν ὀρίζει ἡ τέμνουσα ἐπὶ τοῦ κύκλου.

1189. (1221). Δύο χορδαὶ κύκλου ἀκτίνοσ 12 μετρ. τέμνονται ἐντόσ τοῦ κύκλου. Ἐὰν τὸ γινόμενον τῶν δύο τμημάτων τῆσ μιᾶσ εἶναι 135 μ., νὰ ὑπολογισθῆ ἡ ἀπόστασισ τοῦ κέντρου ἀπὸ τὸ σημεῖον τῆσ τομῆσ τῶν χορδῶν αὐτῶν.

1190. (1222). Δύο χορδαὶ κύκλου τέμνονται ἐντόσ αὐτοῦ. Τὸ μήκοσ τῆσ μιᾶσ χορδῆσ εἶναι 26 μέτρα καὶ τὰ δύο τμήματα τῆσ ἄλλησ ἔχουν μήκη 10 μέτρα καὶ 12 μέτρα. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ μήκη τῶν δύο τμημάτων τῆσ ἄλλησ χορδῆσ.

B' Ὀμάς. 1191. (1223). Δίδεται κύκλοσ ἀκτίνοσ 15 μέτρων καὶ ἓνα σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἀπὸ τὸ κέντρον 32 μέτρ. Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ μήκοσ τῆσ ἐφαπτομένησ τοῦ κύκλου, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ σημεῖον αὐτό.

1192. (1224). Δίδεται κύκλοσ ἀκτίνοσ 20 μέτρων ἀπὸ ἓνα σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτόσ τοῦ κύκλου, φέρομεν μίαν ἐφαπτομένην, τῆσ ὁποίας τὸ μήκοσ εἶναι 45,60 μέτρα. Νὰ ὑπολογισθῆ ἡ ἀπόστασισ τοῦ σημείου αὐτοῦ ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

1193. (1225). Ἐπὶ ἓνα σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἀπέχει 1,75 μέτρα ἀπὸ τὸ κέντρον ἐνόσ κύκλου φέρομεν μίαν ἐφαπτομένην, τῆσ ὁποίας τὸ μήκοσ εἶναι 1,38 μ. Νὰ ὑπολογισθῆ ἡ ἀκτίσ τοῦ κύκλου.

1194. (1226). Δίδεται μία διάμετροσ κύκλου O ἴση μὲ 238 ἐκ. καὶ ἡ ἀπόστασισ ΣO ἐνόσ σημείου Σ ἀπὸ τὸ κέντρον O τοῦ κύκλου ἴση μὲ 187 ἐκ. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἀποστάσεισ $\Sigma\Gamma$ καὶ $\Sigma\Delta$ τοῦ σημείου Σ ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆσ τομῆσ τῆσ περιφερείασ O καὶ μιᾶσ τεμνούσῆσ, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ Σ , ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ $\Sigma\Delta$ εἶναι διπλασία τῆσ $\Sigma\Gamma$.

1195. (1227). Δίδεται κύκλοσ ἀκτίνοσ 6 μέτρα. Νὰ ὀρισθῆ ἐπὶ μιᾶσ ἐφαπτομένησ τοῦ κύκλου αὐτοῦ ἓνα σημεῖον Σ , τοιοῦτον ὥστε, ἐὰν ἀχθῆ ἀπὸ τὸ Σ μία τέμνουσα τοῦ κύκλου, διερχομένη ἀπὸ τὸ κέντρον του, τὸ ἐκτόσ τοῦ κύκλου μέρος αὐτῆσ νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τῆσ ἐφαπτομένησ.

Γ' Ὀμάς. 1196. (1228). Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι ἡ κοινῆ χορδῆ δύο τεμνομένων κύκλων προεκτεινομένη διχοτομεῖ τὰσ κοινὰσ ἐφαπτομένασ τῶν περιφερειῶν.

1197. (1229). Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι αἱ ἐφαπτόμεναι, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τυχόν σημεῖον τῆσ προεκτάσεωσ τῆσ κοινῆσ χορδῆσ δύο τεμνομένων κύκλων πρὸσ τὰσ περιφερείασ τῶν κύκλων αὐτῶν, εἶναι ἴσαι.

1198. (1230). Εἰσ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$ φέρομεν τὰ ὑψη του AA' , BB' , $\Gamma\Gamma'$, τὰ ὁποῖα τέμνονται εἰσ τὸ σημεῖον H . Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι

$$HA \times HA' = HB \times HB' = H\Gamma \times H\Gamma'.$$

1199. (1231). Εἰσ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$ φέρομεν τὴν διάμεσον AM ἀπὸ τὸ M φέρομεν μίαν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν $A\Gamma$ εἰσ τὸ Δ καὶ τοιαύτην, ὥστε ἡ γωνία $AM\Delta$ νὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν B τοῦ τριγώνου ἀπὸ τὸ Δ φέρομεν παράλληλον πρὸσ τὴν $B\Gamma$, ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν AM εἰσ τὸ E . Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι

$$\overline{ED}^2 = EA \times EM.$$

1200. (1232). Ἐάν Μ εἶναι ἓνα τυχόν σημεῖον τῆς βάσεως ΒΓ ἐνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ, νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι

$$\overline{ΑΒ}^2 - \overline{ΑΜ}^2 = ΜΒ \times ΜΓ.$$

1201. (1233). Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς διαμέτρου ΑΒ ἐνὸς κύκλου Ο λαμβάνομεν ἓνα σημεῖον Γ. Ἀπὸ τὸ Γ φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην ΓΔ τοῦ κύκλου καὶ τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἣ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς χορδῆς ΑΔ εἰς τὸ σημεῖον Ε. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι

$$\overline{ΓΔ}^2 = \overline{ΓΑ}^2 - ΑΔ \times ΑΕ.$$

5. Υπολογισμός τῶν ἀξιοσημειώτων εὐθειῶν ἐνὸς τριγώνου

445. Ὑπολογισμός τῶν διαμέσων ἐνὸς τριγώνου. Εἰς τὴν (§ 434 Σημ.) εἶδομεν, ὅτι μεταξὺ τῶν διαμέσων $\mu_\alpha, \mu_\beta, \mu_\gamma$ ἐνὸς τριγώνου ΑΒΓ καὶ τῶν πλευρῶν του α, β, γ ὑπάρχουν αἱ σχέσεις

$$\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2} \quad (1), \quad \gamma^2 + \alpha^2 = 2\mu_\beta^2 + \frac{\beta^2}{2} \quad (2),$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = 2\mu_\gamma^2 + \frac{\gamma^2}{2} \quad (3).$$

Ἀπὸ τὴν (1) ἔχομεν

$$2\mu_\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \frac{\alpha^2}{2} \quad \eta \quad 2\mu_\alpha^2 = \frac{2(\beta^2 + \gamma^2) - \alpha^2}{2}$$

$$\mu_\alpha = \frac{1}{2} \sqrt{2(\beta^2 + \gamma^2) - \alpha^2}.$$

Ὅμοίως ἀπὸ τὰς (2) καὶ (3), ἢ διὰ κυκλικῆς ἐναλλαγῆς, εὐρίσκομεν

$$\mu_\beta = \frac{1}{2} \sqrt{2(\gamma^2 + \alpha^2) - \beta^2} \quad , \quad \mu_\gamma = \frac{1}{2} \sqrt{2(\alpha^2 + \beta^2) - \gamma^2}.$$

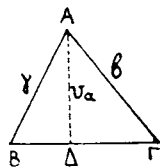
446. Πρόβλημα. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ὕψη ἐνὸς τριγώνου, ἂν γνωρίζωμεν τὰς τρεῖς πλευράς του α, β, γ .

Ἐστω ἓνα τρίγωνον ΑΒΓ (Σχ. 326) καὶ ἔστω, ὅτι θέλομεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ὕψος του ΑΔ = u_α , τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν πλευρὰν α . Μία ἀπὸ τὰς γωνίας Β καὶ Γ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶναι ὀξεῖα.

Ἐστω, ὅτι ἡ γωνία Γ εἶναι ὀξεῖα. Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΔΓ ἔχομεν

$$\overline{ΑΔ}^2 = \overline{ΑΓ}^2 - \overline{ΔΓ}^2 \quad \eta \quad u_\alpha^2 = \beta^2 - \overline{ΔΓ}^2 \quad (1)$$

Ὑπολογίζομεν τὸ ΔΓ συναρτήσῃ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.



Σχ. 326.

Τὸ ΔΓ εἶναι προβολὴ τῆς πλευρᾶς β ἐπὶ τὴν πλευρὰν ΒΓ.

Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἡ πλευρὰ γ κεῖται ἀπέναντι τῆς ὀξείας γωνίας Γ καὶ ἐπομένως, κατὰ τὸ θεώρημα τῆς § 431, θὰ ἔχωμεν

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha \cdot \Delta\Gamma.$$

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα αὐτὴν λαμβάνομεν $\Delta\Gamma = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2}{2\alpha}$.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὸ $\overline{\Delta\Gamma^2}$ μὲ τὸ ἴσον του καὶ ἔχομεν $v_\alpha^2 = \beta^2 - \frac{(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)^2}{4\alpha^2}$ ἢ $v_\alpha^2 = \frac{4\alpha^2\beta^2 - (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)^2}{4\alpha^2}$ (2)

Τρέπομεν τὸν ἀριθμητὴν τοῦ κλάσματος τοῦ δευτέρου μέλους τῆς ἰσότητος (2) εἰς γινόμενον παραγόντων.

Ἐδῶ ἔχομεν διαφορὰν τετραγώνων δύο ἀριθμῶν καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀριθμῶν ἐπὶ τὴν διαφορὰν των. Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$\begin{aligned} 4\alpha^2\beta^2 - (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)^2 &= [2\alpha\beta + (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)] [2\alpha\beta - (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)] \\ &= [\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta - \gamma^2] [2\alpha\beta - \alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2] \\ &= [(\alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta) - \gamma^2] [\gamma^2 - (\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta)] \\ &= [(\alpha + \beta)^2 - \gamma^2] [\gamma^2 - (\alpha - \beta)^2] \\ &= [(\alpha + \beta + \gamma)(\alpha + \beta - \gamma)] [(\gamma + \alpha - \beta)(\gamma - \alpha + \beta)], \end{aligned}$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (2) τὸ $4\alpha^2\beta^2 - (\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)^2$ μὲ τὸ ἴσον του καὶ ἔχομεν

$$v_\alpha^2 = \frac{(\alpha + \beta + \gamma)(\alpha + \beta - \gamma)(\gamma + \alpha - \beta)(\gamma - \alpha + \beta)}{4\alpha^2} \quad (3)$$

Ἐὰν θέσωμεν $\alpha + \beta + \gamma = 2\tau$
τότε θὰ εἶναι $\alpha + \beta - \gamma = 2\tau - 2\gamma = 2(\tau - \gamma)$
 $\gamma + \alpha - \beta = 2\tau - 2\beta = 2(\tau - \beta)$
 $\gamma + \beta - \alpha = 2\tau - 2\alpha = 2(\tau - \alpha).$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (3) τὰ $(\alpha + \beta + \gamma)$, $(\alpha + \beta - \gamma)$. . . μὲ τὰ ἴσα των καὶ ἔχομεν

$$v_\alpha^2 = \frac{4\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}{\alpha^2} \quad \text{ἢ} \quad \boxed{v_\alpha = \frac{2}{\alpha} \sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}}.$$

Ἄν παραστήσωμεν δὲ v_β καὶ v_γ τὰ ἄλλα δύο ὕψη τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, τὰ ὁποῖα ἄγονται ἀπὸ τὰς κορυφὰς Β καὶ Γ, εὐρίσκομεν ὁμοίως, ὅτι

$$\boxed{v_\beta = \frac{2}{\beta} \sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}} \quad , \quad \boxed{v_\gamma = \frac{2}{\gamma} \sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)}}.$$

Σημ. Ἐὰν θέσωμεν $E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$, οἱ προηγούμενοι τύποι γίνονται

$$v_\alpha = \frac{2E}{\alpha}, \quad v_\beta = \frac{2E}{\beta}, \quad v_\gamma = \frac{2E}{\gamma}.$$

Θὰ ἴδωμεν ἀργότερον, ὅτι τὸ E παριστάνει τὸ ἔμβαδὸν ἐνὸς τριγώνου.

Ἀπὸ τοὺς τύπους αὐτοὺς εὐρίσκομεν, ὅτι

$$\alpha v_\alpha = \beta v_\beta = \gamma v_\gamma = 2E.$$

Ἀσκησις: 1202.

447. Ὑπολογισμὸς τῆς ἀκτίνος R . Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν ἀκτίνα R τοῦ κύκλου τοῦ περιγεγραμμένου περὶ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$ συναρτήσῃ τῶν πλευρῶν του α, β, γ στηριζόμεθα εἰς τὸ κάτωθι θεώρημα.

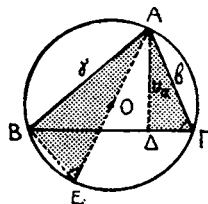
448. Θεώρημα. *Τὸ γινόμενον δύο πλευρῶν ἐνὸς τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου, τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τρίγωνον, ἐπὶ τὸ ὕψος του, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν τρίτην πλευράν.*

Ἐπίσης: Ἐστω τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ (Σχ. 327), $AD = v_\alpha$ τὸ ὕψος του καὶ O ὁ περιγεγραμμένος κύκλος περὶ τὸ τρίγωνον αὐτό. Φέρομεν τὴν διάμετρον AOE .

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$AB \times A\Gamma = AE \times AD.$$

Ἀπόδειξις: Φέρομεν τὴν χορδὴν BE . Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ABE καὶ $A\Delta\Gamma$ εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουν τὰς ὀξείας γωνίας E καὶ Γ ἴσας, διότι εἶναι ἐγγεγραμμένα καὶ βαίνουν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου AB .



Σχ. 327.

Ἀπὸ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων αὐτῶν ἔχομεν

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AE}{A\Gamma} \quad \text{ἢ} \quad AB \times A\Gamma = AE \times AD \quad (1)$$

Ἐὰν θέσωμεν $AB = \gamma$, $A\Gamma = \beta$, $AE = 2R$ καὶ $AD = v_\alpha$, ἡ ἰσότης

(1) γράφεται

$$\beta\gamma = 2R \cdot v_\alpha.$$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: *Τὸ γινόμενον δύο πλευρῶν. . .*

449. Ἐφαρμογή. Πρόβλημα. *Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτίς τοῦ κύκλου τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τρίγωνον, ἐὰν γνωρίζωμεν τὰς τρεῖς πλευράς του α, β, γ .*

Ἐδείξαμεν εἰς τὴν (§ 448), ὅτι $\beta\gamma = 2R \cdot v_\alpha$.

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα αὐτὴν λαμβάνομεν $R = \frac{\beta\gamma}{2v_\alpha}$ (1)

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὸ u_a μὲ τὸ ἴσον του $\frac{2E}{a}$ ποὺ εὐρήκαμεν εἰς τὴν § 446 Σημ. καὶ ἔχομεν

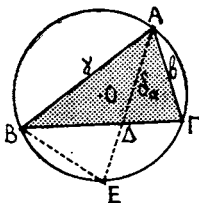
$$R = \frac{\alpha\beta\gamma}{4E}$$

Ἀσκήσεις: 1203, 1204.

450. Ἐπιπέδου ἑξισοσημειώτων εὐθειῶν ἑνὸς τριγώνου. Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὰς ἐσωτερικὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν ἑνὸς τριγώνου, στηριζόμεθα εἰς τὸ κάτωθι θεώρημα.

451. Θεώρημα. *Τὸ γινόμενον δύο πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν δύο τμημάτων τῆς τρίτης πλευρᾶς του, τὰ ὁποῖα ὀρίζει ἡ διχοτόμος τῆς ἀπέναντι γωνίας, ἠϋξημένον κατὰ τὸ τετράγωνον τῆς διχοτόμου αὐτῆς.*

Ἐπίδησις: Ἐστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (Σχ. 328) καὶ ΑΔ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας Α.



Σχ. 328.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$AB \times AG = BD \times DG + AD^2.$$

Ἀπόδειξις: Περιγράφομεν περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ τὸν κύκλον Ο. Προεκτείνωμεν τὴν διχοτόμον ΑΔ μέχρις οὗ συναντήσῃ τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ σημεῖον Ε. Φέρομεν τὴν χορδὴν ΒΕ.

Τὰ τρίγωνα ΑΒΕ καὶ ΑΔΓ εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουν δύο γωνίας ἴσας μίαν πρὸς μίαν, ἥτοι ἔχουν τὰς γωνίας ΒΑΔ καὶ ΔΑΓ ἴσας, διότι ἡ ΑΔ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας Α καὶ τὰς γωνίας Ε καὶ Γ ἴσας, διότι εἶναι ἔγγεγραμμένα καὶ βαίνουν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΑΒ.

Ἀπὸ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων αὐτῶν ἔχομεν

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AE}{AG} \quad \text{ἢ} \quad AB \times AG = AD \times AE \quad (1)$$

Ἐπειδὴ $AE = AD + DE$, ἡ ἰσότης (1) γράφεται

$$AB \times AG = AD \times (AD + DE) \quad \text{ἢ} \quad AB \times AG = AD^2 + AD \times DE \quad (2)$$

Ἄλλὰ $AD \times DE = BD \times DG$, διότι αἱ ΑΕ καὶ ΒΓ εἶναι δύο χορδαὶ τοῦ κύκλου Ο, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Δ (§ 437).

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (2) τὸ γινόμενον $AD \times DE$ μὲ τὸ ἴσον του $BD \times DG$ καὶ ἔχομεν

$$AB \times AG = AD^2 + BD \times DG \quad (3)$$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: *Τὸ γινόμενον δύο πλευρῶν...*

452. Παρατήρησις. Ἡ ἰσότης (3) γράφεται καὶ ὡς ἑξῆς :

$$\overline{A\Delta^2} = AB \times A\Gamma - B\Delta \times \Delta\Gamma$$

καὶ ἐπομένως τὸ προηγούμενον θεώρημα δύναται νὰ ἐκφρασθῇ καὶ ὡς ἑξῆς :

Τὸ τετράγωνον τῆς διχοτόμου μιᾶς γωνίας ἐνὸς τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν δύο πλευρῶν, ποὺ περιέχουν τὴν γωνίαν αὐτήν, ἡλαττωμένον κατὰ τὸ γινόμενον τῶν δύο τμημάτων, τὰ ὁποῖα ὀρίζει ἡ διχοτόμος ἐπὶ τῆς τρίτης πλευρᾶς τοῦ τριγώνου.

453. Ἐφαρμογή. Πρόβλημα. *Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν ἐνὸς τριγώνου $AB\Gamma$, ἐὰν γνωρίζωμεν τὰς τρεῖς πλευρὰς του α, β, γ .*

Γνωρίζομεν (§ 452), ὅτι

$$\overline{A\Delta^2} = AB \times A\Gamma - B\Delta \times \Delta\Gamma \quad \eta \quad \delta_a^2 = \gamma \times \beta - B\Delta \times \Delta\Gamma \quad (1)$$

Ἄλλὰ γνωρίζομεν (§ 395), ὅτι $B\Delta = \frac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma}$ καὶ $\Delta\Gamma = \frac{\alpha\beta}{\beta+\gamma}$.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὰ $B\Delta$ καὶ $\Delta\Gamma$ μὲ τὰ ἴσα τῶν καὶ ἔχομεν

$$\begin{aligned} \delta_a^2 &= \beta\gamma - \frac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma} \times \frac{\alpha\beta}{\beta+\gamma} \quad \eta \quad \delta_a^2 = \beta\gamma - \frac{\alpha^2\beta\gamma}{(\beta+\gamma)^2} \\ \eta \quad \delta_a^2 &= \frac{\beta\gamma}{(\beta+\gamma)^2} [(\beta+\gamma)^2 - \alpha^2] \\ \eta \quad \delta_a^2 &= \frac{\beta\gamma}{(\beta+\gamma)^2} [(\beta+\gamma+\alpha)(\beta+\gamma-\alpha)] \end{aligned} \quad (2)$$

Ἐὰν θέσωμεν $\alpha+\beta+\gamma=2\tau$, θὰ εἶναι $\beta+\gamma-\alpha=2(\tau-\alpha)$ καὶ ἡ ἰσότης 2 γράφεται :

$$\delta_a^2 = \frac{\beta\gamma}{(\beta+\gamma)^2} \times 2\tau \times 2(\tau-\alpha) \quad \eta \quad \delta_a = \frac{2}{\beta+\gamma} \sqrt{\beta\gamma\tau(\tau-\alpha)}$$

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ $\delta_\beta, \delta_\gamma$ τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν B καὶ Γ εὐρίσκομεν ὁμοίως (ἢ διὰ κυκλικῆς ἑναλλαγῆς), ὅτι :

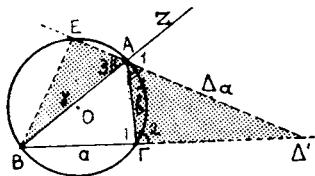
$$\delta_\beta = \frac{2}{\gamma+\alpha} \sqrt{\gamma\alpha\tau(\tau-\beta)}, \quad \delta_\gamma = \frac{2}{\alpha+\beta} \sqrt{\alpha\beta\tau(\tau-\gamma)}$$

454. Ὑπολογισμὸς τῶν ἐξωτερικῶν διχοτόμων. Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὰς ἐξωτερικὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν ἐνὸς τριγώνου, στηρίζομεθα εἰς τὸ κάτωθι θεώρημα :

455. Θεώρημα. *Τὸ γινόμενον δύο πλευρῶν ἐνὸς τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν δύο τμημάτων τῆς τρίτης πλευ-*

ρᾶς του, τὰ ὁποῖα ὀρτίζει ἡ διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας, τὴν ὁποῖαν σχηματίζουν αἱ δύο πλευραὶ, ἡλαττωμένον κατὰ τὸ τετράγωνον τῆς διχοτόμου αὐτῆς.

Ὑπόθεσις: Ἐστω τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ καὶ AD' (Σχ. 329) ἡ διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας A , ἡ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς πλευρᾶς $B\Gamma$ εἰς τὸ σημεῖον Δ' .



Σχ. 329.

Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι

$$AB \times A\Gamma = \Delta' B \times \Delta' \Gamma - \overline{AD'}^2.$$

Ἀπόδειξις: Περιγράφομεν περὶ τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ τὸν κύκλον O . Προεκτείνωμεν τὴν διχοτόμον AD' μέχρις ὅτου συναντήσῃ τὴν περιφέρειαν O εἰς τὸ σημεῖον E : φέρομεν τὴν χορδὴν BE .

Τὰ τρίγωνα AEB καὶ $A\Gamma\Delta'$ εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουν δύο γωνίας ἴσας μίαν πρὸς μίαν· πράγματι, αἱ γωνίαι A_2 καὶ A_1 εἶναι ἴσαι, ὡς ἴσαι πρὸς τὴν A_1 : ἡ μὲν A_2 ὡς κατὰ κορυφὴν τῆς A_1 , ἡ δὲ A_2 , ἐξ ὑποθέσεως, ἴση πρὸς τὴν A_1 : ἐπίσης αἱ γωνίαι E καὶ Γ_2 εἶναι ἴσαι, διότι ἔχουν τὴν αὐτὴν παραπληρωματικὴν γωνίαν Γ_1 .

Ἀπὸ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων αὐτῶν ἔχομεν

$$\frac{AB}{AD'} = \frac{AE}{A\Gamma} \quad \text{ἢ} \quad AB \times A\Gamma = AD' \times AE \quad (1)$$

Ἐπειδὴ $AE = \Delta'E - AD'$, ἡ ἰσότης (1) γράφεται

$$AB \times A\Gamma = AD' \times (\Delta'E - AD') \quad \text{ἢ} \quad AB \times A\Gamma = AD' \times \Delta'E - \overline{AD'}^2 \quad (2)$$

Ἄλλὰ $\Delta'A \times \Delta'E = \Delta'\Gamma \times \Delta'B$, διότι αἱ $\Delta'A E$ καὶ $\Delta'\Gamma B$ εἶναι τέμνουσαι τῆς περιφερείας, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον Δ' , τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου O .

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (2) τὸ γινόμενον $AD' \times \Delta'E$ μὲ τὸ ἴσον του $\Delta'\Gamma \times \Delta'B$ καὶ ἔχομεν

$$\boxed{AB \times A\Gamma = \Delta'\Gamma \times \Delta'B - \overline{AD'}^2}$$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: *Τὸ γινόμενον δύο πλευρῶν. . .*

456. Ἐφαρμογή. Πρόβλημα. *Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διχοτόμοι τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν ἐνὸς τριγώνου, ἂν γνωρίζωμεν τὰς τρεῖς πλευρὰς του α, β, γ .*

Ἐστω τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ (Σχ. 329), τοῦ ὁποίου δίδονται αἱ πλευραὶ $B\Gamma = \alpha$, $\Gamma A = \beta$, $AB = \gamma$. Ἐστω $AD' = \Delta_a$ ἡ διχοτόμος τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας του A , ἡ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς πλευρᾶς $B\Gamma$ εἰς τὸ σημεῖον Δ' .

Κατὰ τὸ θεώρημα (§ 455) ἔχομεν :

$$AB \times AG = \Delta' \Gamma \times \Delta' B - \overline{A\Delta'}^2 \quad \text{ἢ} \quad \gamma \times \beta = \Delta' \Gamma \times \Delta' B - \Delta_a^2$$

$$\text{ἢ} \quad \Delta_a^2 = \Delta' \Gamma \times \Delta' B - \beta \gamma \quad (1)$$

Ἀλλὰ γνωρίζομεν (§ 399) ὅτι $\Delta' \Gamma = \frac{\alpha\beta}{|\gamma-\beta|}$ καὶ $\Delta' B = \frac{\alpha\gamma}{|\gamma-\beta|}$.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὰ $\Delta' \Gamma$ καὶ $\Delta' B$ μὲ τὰ ἴσα τῶν καὶ ἔχομεν :

$$\Delta_a^2 = \frac{\alpha\beta}{|\gamma-\beta|} \times \frac{\alpha\gamma}{|\gamma-\beta|} - \beta\gamma \quad \text{ἢ} \quad \Delta_a^2 = \frac{\alpha^2\beta\gamma}{(\gamma-\beta)^2} - \beta\gamma$$

$$\text{ἢ} \quad \Delta_a^2 = \frac{\beta\gamma}{(\gamma-\beta)^2} [\alpha^2 - (\gamma-\beta)^2]$$

$$\text{ἢ} \quad \Delta_a^2 = \frac{\beta\gamma}{(\gamma-\beta)^2} [(+\gamma-\beta)(\alpha-\gamma+\beta)] \quad (2)$$

Ἐὰν θέσωμεν $\alpha+\beta+\gamma=2\tau$, ὁπότε $\alpha+\gamma-\beta=2(\tau-\beta)$ καὶ $\alpha-\gamma+\beta=2(\tau-\gamma)$, ἡ ἰσότης (2) γράφεται :

$$\Delta_a^2 = \frac{\beta\gamma}{(\gamma-\beta)^2} \times 2(\tau-\beta) \times 2(\tau-\gamma)$$

$$\text{ἢ} \quad \boxed{\Delta_a = \frac{2}{|\gamma-\beta|} \sqrt{\beta\gamma(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}}$$

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ $\Delta_\beta, \Delta_\gamma$ τὰς διχοτόμους τῶν ἔξωτερικῶν γωνιῶν B καὶ Γ τοῦ τριγώνου ABΓ, εὐρίσκομεν ὁμοίως (ἢ διὰ κυκλικῆς ἐναλλαγῆς), ὅτι :

$$\boxed{\Delta_\beta = \frac{2}{|\alpha-\gamma|} \sqrt{\gamma\alpha(\tau-\gamma)(\tau-\alpha)}}, \quad \boxed{\Delta_\gamma = \frac{2}{|\beta-\alpha|} \sqrt{\alpha\beta(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}}$$

Ἀσκήσεις : 1205.

Ἀσκήσεις

1202. (1234). Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ὕψη ἐνὸς τριγώνου ABΓ, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι $\alpha=25$ ἐκ. $\beta=39$ ἐκ. $\gamma=56$ ἐκ.

1203. (1235). Εἰς ἓνα κύκλον O ἀκτίνος R φέρομεν μίαν χορδὴν $AB=\gamma$ καὶ μίαν ἄλλην χορδὴν BΓ κάθετον ἐπὶ τὴν διάμετρον, ἣ ὅποια διέρχεται ἀπὸ τοῦ A. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ BΓ συναρτήσῃ τῶν R καὶ γ . Ἐφαρμογή : R=25 ἐκ., $\gamma=30$ ἐκ.

1204. (1236). Ἐπὶ τῆς περιφερείας ἐνὸς κύκλου O, περιγεγραμμένου περὶ τὸ τρίγωνον ABΓ, λαμβάνομεν ἓνα σημεῖον M. Φέρομεν τὰς εὐθείας MA, MB, MΓ καὶ τὰς ἀποστάσεις MD, ME, MZ τοῦ σημείου M ἀπὸ τὰς πλευρὰς AB, BΓ, ΓA. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι $MA \times ME = MB \times MZ = M\Gamma \times MD$.

1205. (1237). Αἱ πλευραὶ ἐνὸς τριγώνου εἶναι 6 μ., 9 μ., 12 μ. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διχοτόμοι, (ἔσωτερικαὶ καὶ ἔξωτερικαὶ), τῶν γωνιῶν του.

Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν ἐπὶ τοῦ Δ' Κεφαλαίου

Α' Ὁμάς. 1206. (1238). Αἱ πλευραὶ ἐνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου $ABΓ$ εἶναι $AB=AG=10$ ἐκ. καὶ $BΓ=12$ ἐκ. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ὕψη του.

1207. (1239). Δίδεται ἕνας κύκλος O διαμέτρου $AB=8$ ἐκ. Φέρομεν τὴν ἀκτῖνα OG κάθετον ἐπὶ τὴν διάμετρον AB καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς ἕνα τμήμα $OD=3$ ἐκ. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν AD , ἣ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς ἕνα σημεῖον M . Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ χορδαὶ AM καὶ MB .

1208. (1240). Ἐνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου $ABΓ$ δίδονται αἱ πλευραὶ $AB=AG=10$ ἐκ. καὶ $BΓ=16$ ἐκ. Νὰ ὑπολογισθοῦν:

1ον. Τὸ ὕψος τοῦ AD .

2ον. Ἡ ἀκτίς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

1209. (1241). Δύο περιφέρειαι O καὶ O' ἀκτῖνων $R=7$ ἐκ. καὶ $R'=1$ ἐκ. κεῖνται ἢ μία ἐκτὸς τῆς ἄλλης. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ κοιναὶ ἐξωτερικαὶ καὶ ἐσωτερικαὶ ἐφαπτόμεναὶ των, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ ἀπόστασις δ τῶν κέντρων των εἶναι 10 ἐκ.

1210. (1242). Εἰς μίαν περιφέρειαν O ἀκτῖνος R φέρομεν δύο χορδὰς AB καὶ $ΓΔ$ παραλλήλους, αἱ ὁποῖαι κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ κέντρου O καὶ αἱ ὁποῖαι ἀπέχουν ἀπὸ τὸ O ἀποστάσεις $\frac{3R}{5}$ καὶ $\frac{4R}{5}$ ἀντιστοίχως. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ μήκη τῶν χορδῶν αὐτῶν καὶ αἱ γωνίαι τοῦ τραπεζίου $ABΔΓ$.

1211. (1243). Δίδεται ἡμικύκλιον διαμέτρου $AOB=2R$. Εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ ἡμικυκλίου κατασκευάζομεν δύο ἡμικύκλια μὲ διαμέτρους τὰς ἀκτῖνας OA καὶ OB . Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτίς τῆς περιφερείας, ἣ ὁποία ἐφάπτεται τῶν τριῶν ἡμικυκλίων αὐτῶν.

1212. (1244). Δίδεται περιφέρεια O διαμέτρου $AB=6$ ἐκ. καὶ ἕνα σημεῖον Σ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς BA καὶ τοιοῦτον, ὥστε $O\Sigma=5$ ἐκ. Ἀπὸ τὸ Σ φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην $\SigmaΓ$ καὶ ἀπὸ τὸ μέσον Δ τῆς $\SigmaΓ$ φέρομεν τὴν κάθετον ΔE ἐπὶ τὴν ΣO καὶ τέλος τὴν ἐφαπτομένην EZ πρὸς τὴν περιφέρειαν O . Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ $\SigmaΓ$ καὶ ΣE καὶ νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $EZ=E\Sigma$.

Β' Ὁμάς. 1213. (1245). Δίδεται ἕνα ἡμικύκλιον O διαμέτρου AB καὶ ἕνα τρίγωνον $ABΓ$ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸ ἡμικύκλιον· μία εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὴν AB τέμνει τὴν AB εἰς τὸ Δ , τὴν AG εἰς τὸ E , τὴν ἡμiperiφέρεια εἰς τὸ Z καὶ τὴν $BΓ$ εἰς τὸ H . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\overline{Z\Delta}^2 = \Delta E \times \Delta H$.

1214. (1246). Εἰς ἕνα τρίγωνον $ABΓ$ φέρομεν τὴν διάμεσον AD καὶ τὴν διχοτόμον AE τῆς γωνίας A . Περιγράφομεν περὶ τὸ τρίγωνον $AΔE$ περιφέρειαν, ἣ ὁποία τέμνει τὴν AB εἰς τὸ B' καὶ τὴν AG εἰς τὸ $Γ'$. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $BB'=ΓΓ'$.

1215. (1247). Δίδεται περιφέρεια κύκλου O διαμέτρου $AB=2R$. Μία χορδὴ $ΓΔ$ τέμνει τὴν διάμετρον AB εἰς τὸ σημεῖον E ὑπὸ γωνίαν 45° . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\overline{EΓ}^2 + \overline{EΔ}^2 = 2R^2$.

1216. (1248). Εἰς ἕνα κύκλον O φέρομεν τὴν διάμετρον AB καὶ μίαν χορδὴν $ΓΔ$ παράλληλον πρὸς τὴν AB . Ἐὰν M εἶναι τυχὸν σημεῖον τῆς διαμέτρου, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\overline{MΓ}^2 + \overline{MΔ}^2 = \overline{MA}^2 + \overline{MB}^2$.

1217. (1249). Ἐνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ δίδονται αἱ κάθετοι πλευραὶ τοῦ ΑΒ=γ, ΑΓ=β καὶ ἡ διχοτόμος ΑΔ=δ τῆς ὀρθῆς γωνίας Α. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$\frac{\sqrt{2}}{\delta} = \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}.$$

1218. (1250). Δίδεται ἓνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ· ἀπὸ τυχὸν σημείου Δ τῆς ὑποτείνουσας τοῦ ΒΓ φέρομεν τὴν ΔΕ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ τὴν ΔΖ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΔΒ×ΔΓ=ΕΑ×ΕΒ+ΖΑ×ΖΓ.

1219. (1251). Δίδεται ἓνα τεταρτοκύκλιον ΑΟΒ· ἀπὸ τυχὸν σημείου Μ τοῦ τόξου ΑΒ φέρομεν μίαν παράλληλον πρὸς τὴν χορδὴν ΑΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΟΑ εἰς τὸ Γ καὶ τὴν ΟΒ εἰς τὸ Δ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\overline{ΜΓ}^2 + \overline{ΜΔ}^2 = \overline{ΑΒ}^2$.

1220. (1252). Εἰς ἓνα τρίγωνον ΑΒΓ δίδονται τὰ κέντρα Ο καὶ Ο_α τοῦ ἔγγεγραμμένου κύκλου καὶ τοῦ παρεγγεγραμμένου εἰς τὴν γωνίαν Α. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΟΑ×ΑΟ_α=ΑΒ×ΑΓ.

Γ' Ὁμάς. 1221. (1253). Δύο κύκλοι Ο καὶ Ο' ἀκτίων 3α καὶ 2α ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς εἰς τὸ σημεῖον Α. Ἀπὸ τὸ κέντρον Ο' τοῦ μικροτέρου κύκλου φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν διάκεντρον ΟΟ', ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν τοῦ μεγάλου κύκλου εἰς τὸ σημεῖον Γ. Ἀπὸ τὸ Γ φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας ΓΔ καὶ ΓΕ εἰς τὸν κύκλον Ο'. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία ΔΓΕ εἶναι ὀρθή.

1222. (1254). Δίδεται μία περιφέρεια διαμέτρου ΟΑ καὶ ἓνας κύκλος, ὁ ὁποῖος ἔχει κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτίνα τὴν ΟΑ. Ἐὰν ΓΔ εἶναι μία χορδὴ τοῦ μεγάλου κύκλου, ἐφαπτομένη εἰς τὸ Β τοῦ μικροῦ κύκλου, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΑΒ εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν ΒΓ καὶ ΒΔ.

1223. (1255). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι κάθε τρίγωνον εἰς τὸ ὁποῖον τὸ γινόμενον μιᾶς πλευρᾶς ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχον ὕψος τοῦ εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν τοῦ, εἶναι ὀρθογώνιον.

1224. (1256). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι κάθε τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τὸ ὁποῖον αἱ γωνίαι Β καὶ Γ εἶναι ὀξεῖαι καὶ ὁ λόγος τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν, αἱ ὁποῖαι κείνται ἀπέναντι τῶν γωνιῶν αὐτῶν, εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν προβολῶν τῶν πλευρῶν αὐτῶν ἐπὶ τὴν ΒΓ, εἶναι ὀρθογώνιον ἢ ἰσοσκελές.

1225. (1257). Εἰς ἓνα τρίγωνον ΑΒΓ ἡ μία ἀπὸ τὰς γωνίας Β καὶ Γ εἶναι ἀμβλεία καὶ ὁ λόγος τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν, αἱ ὁποῖαι κείνται ἀπέναντι τῶν γωνιῶν αὐτῶν εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν προβολῶν τῶν πλευρῶν αὐτῶν ἐπὶ τὴν ΒΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ εἶναι ἴση μὲ μίαν ὀρθήν.

1226. (1258). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε ὀρθογώνιον τρίγωνον τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τριῶν διαμέσων τοῦ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τριπλάσιον τοῦ ἡμίσεως τοῦ τετραγώνου τῆς ὑποτείνουσας.

1227. (1259). Ἐὰν τρεῖς ἀριθμοὶ β, γ, υ ἐπαληθεύουν τὴν σχέσιν $\frac{1}{\upsilon^2} = \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}$ ὑπάρχουν δύο τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ὡς πλευρὰς τὰ β καὶ γ καὶ ὡς ὕψος ἀντίστοιχον πρὸς τὴν τρίτην πλευρὰν τὸ υ. Εἰς τὸ ἓνα τρίγωνον τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι κείνται ἀπέναντι τῶν πλευρῶν β καὶ γ εἶναι ἴσον μὲ 1 ὀρθήν καὶ εἰς τὸ ἄλλο ἡ διαφορὰ τῶν γωνιῶν αὐτῶν εἶναι ἴση μὲ 1 ὀρθήν.

1228. (1260). Εἰς ἓνα τρίγωνον ΑΒΓ γνωρίζομεν τὰς πλευρὰς $AB = \frac{1}{3}$,

$AG = \frac{1}{4}$ καὶ τὸ ὕψος $AD = \frac{1}{5}$. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τρίτη πλευρὰ ΒΓ. Νὰ ἐξε-

τασθοῦν αἱ δύο περιπτώσεις, καθόσον ἡ γωνία Γ εἶναι ὀξεῖα ἢ ἀμβλεῖα. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἓνα ἀπὸ τὰ τρίγωνα εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α καὶ εἰς τὸ ἄλλο εἶναι $\widehat{\Gamma} - \widehat{B} = 1$ ὀρθή.

1229. (1261). 1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὁ λόγος τῶν ἀκτίνων δύο κύκλων, ἔγγεγραμμένων εἰς δύο ὁμοια τρίγωνα, εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον δύο ὁμολόγων πλευρῶν των.

2ον. Εἰς ἓνα τρίγωνον ΑΒΓ, ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α, φέρομεν τὸ ὕψος ΑΔ' νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἐὰν παραστήσωμεν μὲ ρ, ρ', ρ'' τὰς ἀκτίνας τῶν κύκλων τῶν ἔγγεγραμμένων εἰς τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΒΔ, ΑΓΔ θὰ εἶναι $\rho^2 = \rho'^2 + \rho''^2$.

1230. (1262). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἓνα τυχὸν σημεῖον Σ τῆς προεκτάσεως τῆς διαγωνίου ΑΓ ἑνὸς ῥόμβου ΑΒΓΔ διαιρεῖ τὴν διαγώνιον αὐτὴν εἰς δύο τμήματα, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον εἶναι ἴσον μὲ τὴν διαφορὰν τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων τῆς κορυφῆς Δ ἀπὸ τὰ σημεῖα Σ καὶ Α.

1231. (1263). Ἐὰν δύο χορδαὶ κύκλου τέμνονται οὕτως, ὥστε ὁ λόγος τῶν δύο τμημάτων τῆς μιᾶς νὰ εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν δύο τμημάτων τῆς ἄλλης, αἱ δύο αὐταὶ χορδαὶ εἶναι ἴσαι.

1232. (1264). Εἰς ἓνα τετράπλευρον, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἀπέναντι πλευρῶν του εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του, αἱ διαγώνιοι τοῦ τετραπλεύρου αὐτοῦ τέμνονται καθέτως.

1233. (1265). Ἐὰν αἱ πλευραὶ α, β, γ, ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ συνδέωνται διὰ τῆς σχέσεως $\beta^2 + \gamma^2 = 2\alpha^2$.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ διάμεσοί του $\mu_\alpha, \mu_\beta, \mu_\gamma$ συνδέονται διὰ τῆς σχέσεως $2\mu_\alpha^2 = \mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2$.

2ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διάμεσοι τοῦ τριγώνου αὐτοῦ, συναρτήσει τῶν πλευρῶν του καὶ

3ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς πλευρὰς τὰς διαμέσους αὐτὰς εἶναι ὁμοιον πρὸς τὸ δοθὲν τρίγωνον.

Δ' Ὁμάς. 1234. (1266). Δίδεται ἓνα ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ καὶ ἓνα σημεῖον Μ τῆς περιφερείας τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ ὀρθογώνιον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τοῦ Μ ἀπὸ τὰς τέσσαρας πλευρὰς τοῦ ὀρθογωνίου μένει σταθερόν, ὅταν τὸ σημεῖον Μ διαγράφῃ τὴν περιφέρειαν.

1235. (1267). Δύο περιφέρειαι Ο' καὶ Ο'' ἀκτίνων R καὶ R' ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς τὸ σημεῖον Α. Ἀπὸ τὸ σημεῖον Α φέρομεν δύο τεμνούσας ὀρθογωνίους ΜΑΜ' καὶ ΝΑΝ'. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα $\overline{MM'}^2 + \overline{NN'}^2$ μένει σταθερόν, ὅταν αἱ τέμνουσαι στρέφονται περὶ τὸ Α καὶ μένουσιν ὀρθογώνιοι.

1236. (1268). Ἀπὸ τυχὸν σημείων Σ, τὸ ὁποῖον κείται ἐντὸς κύκλου Ο, φέρομεν δύο χορδὰς ὀρθογωνίους ΑΣΒ καὶ ΓΣΔ. Ν' ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα $\overline{AB}^2 + \overline{GD}^2$ μένει σταθερόν, ὅταν αἱ χορδαὶ αὐταὶ στρέφονται περὶ τὸ Σ καὶ μένουσιν ὀρθογώνιοι.

1237. (1269). Δίδονται δύο περιφέρειαι, αἱ ὁποῖαι ἔχουν κέντρα O καὶ O' καὶ τοιαῦται, ὥστε τὸ κέντρον O' νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας, ἣ ὁποία ἔχει κέντρον τὸ O . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἐὰν εἰς τυχὸν σημεῖον M τῆς περιφερείας O' φέρωμεν τὴν ἐφαπτομένην, ἣ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B' , τὸ γινόμενον $O'A \times O'B$ εἶναι σταθερόν.

1238. (1238). Δίδεται μία ἡμιπεριφέρεια O διαμέτρου AB . Ἐπὶ τῆς διαμέτρου AB λαμβάνομεν δύο σημεῖα Σ καὶ Σ' , τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἰσάκεις ἀπὸ τὸ κέντρον O καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα Σ καὶ Σ' φέρομεν δύο παραλλήλους ΣM καὶ $\Sigma' M'$, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν ἡμιπεριφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα M καὶ M' . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ γινόμενον $\Sigma M \times \Sigma' M'$, μένει σταθερόν, ὅταν ἡ διεύθυνσις τῶν παραλλήλων μεταβάλλεται.

1239. (1271). Ἐὰν συνδέσωμεν μὲ εὐθείαν δοθὲν σημεῖον Σ , τὸ ὁποῖον κεῖται ἐντὸς ἐνὸς κύκλου O , μὲ ἓνα μεταβλητὸν σημεῖον A , τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας O καὶ ἐὰν φέρωμεν τὴν χορδὴν AB κάθετον ἐπὶ τὴν ΣA καὶ ἔπειτα ἀπὸ τὸ B μίαν χορδὴν $B\Gamma$ παράλληλον πρὸς τὴν ΣA , νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ τελευταία χορδὴ διέρχεται ἀπὸ ἓνα ὠρισμένον σημεῖον N καὶ ὅτι τὸ γινόμενον $\Sigma A \times NB$ εἶναι σταθερόν.

1240. (1272). Δίδονται δύο σημεῖα A καὶ Σ , τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐπὶ μιᾶς διαμέτρου ἐνὸς κύκλου O καὶ εἰς ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὸ κέντρον O καὶ ἀπὸ τὸ Σ φέρομεν μίαν χορδὴν $B\Sigma\Gamma$ μεταβλητῆς διευθύνσεως. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ μένει σταθερόν.

Ε' Ομάς. 1241. (1273). Δίδεται ἓνας κύκλος O καὶ ἓνα σημεῖον Σ ἐντὸς αὐτοῦ· ἀπὸ τὸ Σ φέρομεν μίαν τέμνουσαν μεταβλητῆς διευθύνσεως. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ἐφαπτομένων εἰς τὰ ἄκρα τῆς τεμνούσης, κινεῖται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας ὠρισμένης, καθέτου ἐπὶ τὴν διάμετρον, ἣ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Σ .

1242. (1274). Δίδεται ἓνας κύκλος O καὶ μία εὐθεῖα XY ἐκτὸς αὐτοῦ· ἀπὸ ἓνα σημεῖον A , τὸ ὁποῖον κινεῖται ἐπὶ τῆς XY φέρομεν τὰς δύο ἐφαπτομένας εἰς τὸν κύκλον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα, ἣ ὁποία συνδέει τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν δύο ἐφαπτομένων, τέμνει τὴν διάμετρον, τὴν κάθετον ἐπὶ XY , εἰς ἓνα ὠρισμένον σημεῖον.

1243. (1275). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε τραπέζιον περιγεγραμμένον περὶ κύκλον, αἱ διαγώνιοι καὶ ἡ διάμετρος, ἣ ὁποία συνδέει τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν βάσεων του, τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

1244. (1276). Δίδονται τρεῖς κύκλοι, ἕκαστος τῶν ὁποίων τέμνει τοὺς δύο ἄλλους. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ τρεῖς κοιναὶ τέμνουσαι διέρχονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον.

ΣΤ' Ομάς. 1245. (1277). Νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο εὐθείας ὀρθογωνίων εἶναι ἴσον μὲ k^2 .

1246. (1278). Δίδεται μία εὐθεῖα AB . Νὰ εὐρεθῇ ὁ τόπος τῶν ἄκρων M τῶν καθέτων ἐπὶ τὴν AB , αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὰ σημεῖα Γ αὐτῆς, ἂν εἶναι $\Gamma M^2 = A\Gamma \times \Gamma B$.

1247. (1279). Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας $x'x$ λαμβάνομεν κατὰ σειρὰν τὰ σημεῖα O, A, B . Ἀπὸ τὸ B φέρομεν κάθετον $y'y$ ἐπὶ τὴν $x'x$. Ἐνα σημεῖον M κινεῖ-

ται ἐπὶ τῆς $y'y'$ ἐπὶ τῆς εὐθείας OM λαμβάνομεν ἓνα σημεῖον M' , τὸ ὁποῖον κεῖται μεταξύ τῶν O καὶ M καὶ τοιοῦτον, ὥστε $OM \times OM' = OA \times OB$. Νὰ εὐρεθῇ ὁ τόπος τοῦ σημείου M' .

1248. (1280). 'Επὶ μιᾶς εὐθείας δίδονται κατὰ σειράν τὰ σημεῖα A, B, Γ . Νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων ἐπαφῆς τῶν ἐφαπτομένων, τῶν ἀγομένων ἀπὸ τὸ Γ πρὸς ὄλας τὰς περιφερείας, αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ τὰ σημεῖα B καὶ Γ .

1249. (1281). 'Επὶ τῆς ὑποτείνουσας $B\Gamma$ ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$ ὑποῦμεν μίαν κάθετον ΔEZ , ἡ ὁποία τέμνει τὴν BA εἰς τὸ E καὶ τὴν ΓA εἰς τὸ Z . 'Επὶ τῆς καθέτου αὐτῆς λαμβάνομεν ἓνα μῆκος ΔM τοιοῦτον, ὥστε $\overline{\Delta M}^2 = \Delta E \times \Delta Z$ (1) Νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου M .

1250. (1282). 'Επὶ μιᾶς καθέτου ΔEZ ἐπὶ μίαν εὐθεῖαν ΓAB λαμβάνομεν δύο σημεῖα E καὶ Z τοιαῦτα, ὥστε $\Delta E \times \Delta Z = BA \times \Gamma A$. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων A , εἰς τὰ ὁποῖα τέμνονται αἱ BEA καὶ ΓAZ .

1251. (1284). 'Απὸ ἓνα σημεῖον O φέρομεν τυχούσαν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία συναντᾷ μίαν ἄλλην δοθείσαν εὐθεῖαν AB εἰς ἓνα σημεῖον N . 'Επὶ τῆς τυχούσης εὐθείας λαμβάνομεν ἓνα μῆκος OM τοιοῦτον, ὥστε $ON \times OM = k^2$ (1). Νὰ εὐρεθῇ ὁ τόπος τοῦ σημείου M .

1252. (1252). Εἰς ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἡ βᾶσις $B\Gamma$ εἶναι ὠρισμένη κατὰ τὴν θέσιν καὶ κατὰ τὸ μέγεθος, ἡ δὲ ἀπέναντι γωνία A εἶναι σταθερὰ κατὰ τὸ μέγεθος. 'Εκ τοῦ μέσου E μιᾶς τῶν μεταβλητῶν πλευρῶν τοῦ $A\Gamma$ φέρομεν κάθετον EM ἐπὶ τὴν ἄλλην μεταβλητὴν πλευρὰν AB Ποῖος εἶναι ὁ τόπος τοῦ σημείου M ;

1253. (1285). 'Απὸ ἓνα σημεῖον Δ , τὸ ὁποῖον κεῖται ἐντὸς κύκλου O φέρομεν μίαν χορδὴν $B\Delta\Gamma$. Μὲ ὑποτείνουσαν τὴν χορδὴν αὐτὴν $B\Gamma$ γράφομεν ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$, τοῦ ὁποίου ἡ κορυφή A προβάλλεται ἐπὶ τῆς ὑποτείνουσας εἰς τὸ Δ . Νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῆς κορυφῆς A .

1254. (1286). 'Επὶ τῆς ἐξωτερικῆς διχοτόμου τῆς γωνίας A ἑνὸς τριγώνου $AB\Gamma$ λαμβάνομεν ἑκατέρωθεν τοῦ A δύο τμήματα $A\Delta, AE$ τοιαῦτα, ὥστε $A\Delta \times AE = AB \times A\Gamma$. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων M , εἰς τὰ ὁποῖα τέμνονται αἱ ΔB καὶ ΓE .

1255. (1287). Δίδονται δύο ὁμόκεντροι περιφέρειαι. Φέρομεν μίαν σταθερὰν ἀκτίνα OAA' καὶ μίαν ἄλλην OBB' μεταβλητὴν. Φέρομεν τὰς AB' καὶ BA' , αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς ἓνα σημεῖον M . Νὰ εὐρεθῇ ὁ τόπος τοῦ M .

1256. (1288). 'Απὸ ἓνα σημεῖον A , τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς κύκλου O φέρομεν μίαν τέμνουσαν $AB\Gamma$, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα B καὶ Γ . Νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου M τῆς τομῆς τῶν περιφερειῶν, τῶν διερχομένων διὰ τῶν σημείων A καὶ B καὶ διὰ τῶν σημείων A καὶ Γ , ὅταν αἱ περιφέρειαι αὗται ἐφάπτονται τῆς δοθείσης περιφερείας.

1257 (1289). 'Απὸ τὰ ἄκρα μιᾶς εὐθείας AB ὑποῦμεν καθέτου; AA' καὶ BB' ἐπὶ τὴν AB . Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς AB ἓνα σημεῖον P . Λαμβάνομεν ἐπίσης ἐπὶ τῆς AA' ἓνα σημεῖον Γ καὶ ἐπὶ τῆς BB' ἓνα ἄλλο σημεῖον Δ καὶ τοιαῦτα, ὥστε $A\Gamma \times BA = PA \times PB$. Φέρομεν ἐκ τοῦ P , τὴν PM κάθετον ἐπὶ τὴν $\Gamma\Delta$. Νὰ εὐρεθῇ ὁ τόπος τοῦ M , ὅταν τὰ Γ καὶ Δ κινουῦνται ἐπὶ τῶν AA' καὶ BB' , τὸ δὲ P μένη σταθερόν.

1258. (1290). Δίδονται δύο εὐθεῖαι AA καὶ BB' κάθετοι ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν AB καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῶν εὐθειῶν τούτων τὰ σημεῖα A' καὶ B' τοιαῦτα, ὥστε $AA' \times BB' = \overline{AB}^2$. Νὰ εὐρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων M τῆς τομῆς τῶν AB' καὶ BA' . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ἐφαπτομένη εἰς τὸ M τοῦ τόπου τούτου διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Σ τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν AB καὶ $B'A'$.

1259. (1291). Δίδεται τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον $AB\Gamma$. Νὰ εὐρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τῆς βάσεως εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν ἀποστάσεων των ἀπὸ τὰς ἴσας πλευρὰς AB καὶ $A\Gamma$.

1260. (1292). Ἡ βάσις AB ἐνὸς τριγώνου $AB\Gamma$ εἶναι ὠρισμένη κατὰ τὴν θέσιν καὶ τὸ μέγεθος, καὶ ἡ ἀπέναντι γωνία τοῦ Γ σταθερά. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς $B\Gamma$ λαμβάνομεν ἓνα σημεῖον E τοιοῦτον, ὥστε $\frac{BE}{E\Gamma} = \frac{\mu}{\nu}$. Διὰ τοῦ E φέρομεν μίαν εὐθεῖαν EM , ἡ ὁποία τέμνει τὴν ἀπέναντι πλευρὰν ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν $AME = \omega$. Νὰ εὐρεθῇ ὁ τόπος τοῦ σημείου M .

1261. (1294). Ἐνα τρίγωνον $AB\Gamma$ στρέφεται περὶ μίαν τῶν κορυφῶν τοῦ A , ἐνῶ ἡ κορυφή B διαγράφει τὴν περιφέρειαν δοθέντος κύκλου O . Νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῆς κορυφῆς Γ , ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ τρίγωνον μένει ὁμοιον πρὸς ἑαυτό.

1262. (1295). Ἐνὸς τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$ δίδονται τὰ μήκη $AB = a$ καὶ $\Delta\Gamma = \beta$ τῶν δύο βάσεων του, καὶ τὸ μήκος $A\Delta = \gamma$ μιᾶς τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του. Ἡ βάσις $AB = a$ εἶναι ὠρισμένη καὶ κατὰ τὴν θέσιν. Νὰ εὐρεθῇ :

1ον. Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του.

2ον. Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων του.

1263. (1296). Τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$ δίδονται αἱ βάσεις $AB = a$ καὶ $\Gamma\Delta = \beta$. Ἡ βάσις AB εἶναι ὠρισμένη καὶ κατὰ τὴν θέσιν. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του καὶ ὁ τόπος τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων, ὅταν ἡ κορυφή Δ γράφῃ μίαν εὐθεῖαν γραμμὴν ἢ μίαν δοθεῖσαν περιφέρειαν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ

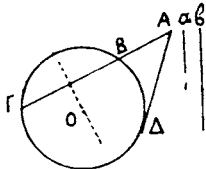
Εἰς προηγούμενα κεφάλαια (§ 391, 392, 404, 430) ἐλύσαμεν μερικὰ γεωμετρικὰ προβλήματα. Κατωτέρω θὰ λύσωμεν καὶ ἄλλα γεωμετρικὰ προβλήματα γραφικῶς.

457. Πρόβλημα 1ον. *Νὰ κατασκευασθῇ ἡ μέση ἀνάλογος μεταξὺ δύο εὐθυγράμμων τμημάτων α καὶ β.*

Εἰς τὴν § 430 ἐδώσαμεν δύο μεθόδους τῆς κατασκευῆς τῆς μέσης ἀναλόγου δύο εὐθυγράμμων τμημάτων α καὶ β.

Τὸ θεώρημα τῆς § 439 δίδει καὶ μίαν τρίτην κατασκευὴν τῆς μέσης ἀναλόγου δύο εὐθυγράμμων τμημάτων α καὶ β.

Πράγματι· ἐπὶ τυχούσης εὐθείας λαμβάνομεν δύο τμήματα $AB = \alpha$ καὶ $AG = \beta$ (Σχ. 330). Γράφομεν ἔπειτα τυχούσαν περιφέρειαν, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Β, Γ καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον Α φέρομεν ἔφαπτομένην ΑΔ τῆς περιφερείας αὐτῆς. Ἡ ΑΔ εἶναι ἡ ζητούμενη μέση ἀνάλογος τῶν δύο εὐθυγράμμων τμημάτων α καὶ β.



Σχ. 330.

Πράγματι· ἐπειδὴ ἡ ΑΒΓ εἶναι τέμνουσα τοῦ κύκλου Ο, ἡ δὲ ΑΔ ἔφαπτομένη αὐτοῦ, αἱ ὁποῖαι ἄγουνται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον Α, θὰ εἶναι κατὰ τὸ θεώρημα τῆς § 439, $\overline{AD}^2 = AB \times AG$ ἢ $\overline{AD}^2 = \alpha \times \beta$.

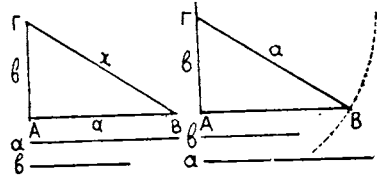
458. Πρόβλημα 2ον. *Ἐὰν α καὶ β εἶναι δοθέντα εὐθύγραμμα τμήματα, νὰ κατασκευασθῇ τὸ εὐθύγραμμον τμήμα x, τὸ ὁποῖον δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :*

$$1ον. x = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}. \quad 2ον. x = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}. \quad 3ον. x = \alpha\sqrt{\beta}.$$

Λύσις. 1ον. Ὑποθῶμεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος $x = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ εἰς τὸ τετράγωνον καὶ ἔχομεν $x^2 = \alpha^2 + \beta^2$.

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα αὐτὴν παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ ζητούμενον εὐθύγραμμον τμήμα x εἶναι ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου αἱ κάθετοι πλευραὶ εἶναι αἱ α καὶ β. (Σχ. 331α).

2ον. Ὅμοιως ἀπὸ τὴν ἰσότητα $x = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ λαμβάνομεν $x^2 = \alpha^2 - \beta^2$. Τὸ ζητούμενον εὐθύγραμμον τμήμα εἶναι ἡ κάθετος πλευρὰ AB ὀρθογωνίου τριγώνου ABΓ, τοῦ ὁποίου ὑποτείνουσα εἶναι ἡ α καὶ ἡ ἄλλη κάθετος πλευρὰ ἡ β. Ἡ κατασκευὴ τοῦ ὀρθογωνίου αὐτοῦ τριγώνου εἶναι εὐκόλος. (Σχ. 331β).



α β
Σχ. 331.

3ον. Ὑψώνομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος $x = \alpha\sqrt{5}$ εἰς τὸ τετράγωνον καὶ ἔχομεν

$$x^2 = 5\alpha^2 \quad \eta \quad x^2 = 5\alpha \cdot \alpha.$$

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα αὐτὴν συνάγομεν, ὅτι τὸ ζητούμενον τμήμα x εἶναι μέσον ἀνάλογον μεταξὺ τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων 5α καὶ α, τὸ ὁποῖον δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν (§ 457).

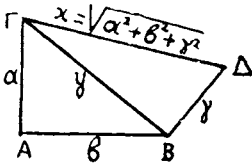
459. Πρόβλημα 3ον. Νὰ κατασκευασθῇ τὸ εὐθύγραμμον τμήμα x, τὸ ὁποῖον δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου: $x = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$, ὅπου α, β, γ εἶναι δοθέντα εὐθύγραμμα τμήματα.

Λύσις: Ἐὰν ὑψώσωμεν εἰς τὸ τετράγωνον καὶ τὰ δύο μέλη τοῦ δοθέντος τύπου ἔχομεν $x^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ (1)

$$\text{Ἐὰν θέσωμεν} \quad \alpha^2 + \beta^2 = y^2 \quad (2)$$

$$\text{ὁ τύπος (1) γράφεται} \quad x^2 = y^2 + \gamma^2 \quad (3)$$

Κατασκευάζομεν κατ' ἀρχὰς τὴν εὐθεῖαν y, ἡ ὁποία δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον (2) καὶ ἡ ὁποία εἶναι ἡ ὑποτείνουσα ΒΓ ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ABΓ, τοῦ ὁποίου αἱ κάθετοι πλευραὶ εἶναι α καὶ β (Σχ. 332).



Σχ. 332.

Μένει τώρα νὰ κατασκευάσωμεν τὴν εὐθεῖαν x, ἡ ὁποία δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου (3).

Πρὸς τοῦτο κατασκευάζομεν τὴν ὑποτείνουσαν x τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΓΒΔ, τὸ ὁποῖον ἔχει κάθετους πλευρὰς τὰς γ καὶ γ.

Ἡ ὑποτείνουσα ΓΔ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΓΒΔ εἶναι τὸ ζητούμενον μῆκος.

Πράγματι· ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΓΒΔ ἔχομεν

$$\overline{\Gamma\Delta^2} = \overline{\Gamma\beta^2} + \overline{\beta\Delta^2} \quad \eta \quad x^2 = y^2 + \gamma^2.$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα αὐτὴν τὸ y^2 μὲ τὸ ἴσον του $\alpha^2 + \beta^2$ καὶ ἔχομεν $x^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$ ἢ $x = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$.

Σημ. Γενικῶς, ἐὰν εἶναι $x^2 = a^2 \pm \beta^2 \pm \gamma^2 \pm \dots$ δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὴν x , διὰ μιᾶς σειρᾶς ὀρθογωνίων τριγώνων, ἄν κατασκευάσωμεν διαδοχικῶς τὰς γραμμὰς y, z, \dots τοιαύτας, ὥστε νὰ εἶναι

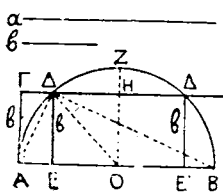
$$y^2 = a^2 \pm \beta^2, \quad z^2 = y^2 \pm \gamma^2, \dots$$

Ἀσκήσεις: 1264, 1265, 1266, 1267, 1268.

460. Πρόβλημα 4ον. Νὰ κατασκευασθοῦν δύο εὐθύγραμμα τμήματα x καὶ y , ἂν γνωρίζωμεν τὸ ἄθροισμά των a καὶ τὸ γινόμενόν των β^2 .

Λύσις: Πρέπει νὰ εἶναι $\begin{cases} x+y=a \\ xy=\beta^2 \end{cases}$

Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας λαμβάνομεν ἓνα τμήμα AB ἴσον μὲ τὸ δοθὲν ἄθροισμα a . Μὲ διάμετρον τὴν AB γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν O : ἀπὸ τὸ A φέρομεν ἑφαπτομένην τῆς ἡμιπεριφερείας καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς τμήμα $A\Gamma$ ἴσον μὲ β . Ἀπὸ τὸ σημεῖον Γ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν AB , ἣ ὁποία τέμνει τὴν ἡμιπεριφέρειαν εἰς δύο σημεῖα Δ καὶ Δ' . Ἀπὸ τὸ Δ φέρομεν τὴν κάθετον DE ἐπὶ τὴν AB , ἣ ὁποία χωρίζει τὴν AB εἰς δύο τμήματα AE καὶ EB , τὰ ὁποῖα εἶναι τὰ ζητούμενα.



Σχ. 333.

Πράγματι εἶναι $AE + EB = AB$ ἢ $AE + EB = a$ (1)

Ἐπὶ πλέον, ἐὰν φέρωμεν τὰς εὐθείας ΔA καὶ ΔB , σχηματίζεται τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΔAB . Τὸ ὕψος DE τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΔAB εἶναι μέσον ἀνάλογον μεταξύ τῶν δύο τμημάτων, τὰ ὁποῖα ὀρίζει ἐπὶ τῆς ὑποτείνουσας, ἥτοι εἶναι

$$\overline{DE}^2 = AE \times EB \quad \text{ἢ} \quad \overline{A\Gamma}^2 = AE \times EB \quad \text{ἢ} \quad \beta^2 = AE \times EB \quad (2)$$

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι τὰ ζητούμενα εὐθύγρ. τμήματα εἶναι $x = AE$ καὶ $y = EB$.

Διερεύνησις. Διὰ νὰ εἶναι τὸ πρόβλημα δυνατὸν πρέπει ἡ παράλληλος, ἣ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ Γ πρὸς τὴν AB , νὰ τέμνη τὴν ἡμιπεριφέρειαν ἢ νὰ ἐφάπτεται αὐτῆς· δηλ. πρέπει νὰ εἶναι

$$A\Gamma \leq OZ \quad \text{ἢ} \quad \beta \leq \frac{a}{2}.$$

Ἐὰν $\beta < \frac{a}{2}$, τὰ εὐθύγρ. τμήματα εἶναι διάφορα μεταξύ των.

Ἐὰν $\beta = \frac{a}{2}$, ἡ $\Gamma\Delta$ ἐφάπτεται τῆς ἡμιπεριφερείας O εἰς τὸ σημεῖον Z καὶ θὰ εἶναι $x = y = \frac{a}{2}$.

Σημ. Δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὰ τμήματα ΑΕ καὶ ΕΒ συναρτήσῃ τῶν α καὶ β.

Πράγματι, ἐὰν φέρωμεν τὴν ΟΔ, ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΕΔ ἔχομεν

$$\overline{OE}^2 = \overline{OD}^2 - \overline{ED}^2 \quad (1)$$

Ἐπειδὴ ΟΔ=ΟΑ= $\frac{\alpha}{2}$ καὶ ΕΔ=ΑΓ=β, ἡ (1) γίνεται

$$\overline{OE}^2 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 - \beta^2 \quad \text{ἢ} \quad OE = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \beta^2}$$

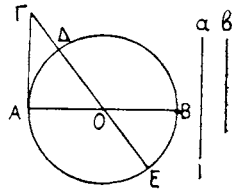
Γνωρίζοντες τώρα τὸ ΟΕ εὐρίσκομεν, ὅτι

$$AE = AO - EO = \frac{\alpha}{2} - \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \beta^2} \quad \text{καὶ} \quad EB = OB + OE = \frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \beta^2}.$$

461. Πρόβλημα 5ον. *Νὰ κατασκευασθοῦν δύο εὐθεῖαι x καὶ y, ἂν γνωρίζωμεν τὴν διαφορὰν τῶν α καὶ τὸ γινόμενόν τῶν β².*

Λύσις. Πρέπει νὰ εἶναι
$$\begin{cases} x - y = \alpha \\ xy = \beta^2. \end{cases}$$

Ἐπὶ μιᾷ εὐθείᾳ λαμβάνομεν τμήμα ΑΒ ἴσον μὲ τὴν δοθεῖσαν διαφορὰν α. Μὲ διάμετρον τὴν ΑΒ γράφομεν περιφέρεια κύκλου Ο. Εἰς τὸ Α φέρομεν τὴν ἑφαπτομένην τῆς περιφερείας καὶ ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν τμήμα ΑΓ=β. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΓΟ, ἡ ὁποία, προεκτεινομένη, τέμνει τὴν περιφέρεια εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε. Τὰ εὐθύγραμμα τμήματα ΓΕ καὶ ΓΔ εἶναι τὰ ζητούμενα.



Σχ. 334.

Πράγματι ἔχομεν ΓΕ-ΓΔ=ΔΕ=ΑΒ ἢ ΓΕ-ΓΔ=α (1)

Ἐξ ἄλλου, ἐπειδὴ ἡ ΓΑ εἶναι ἑφαπτομένη τῆς περιφερείας Ο ἢ δὲ ΓΔΕ τέμνουσα αὐτῆς, θὰ εἶναι

$$\overline{GA}^2 = \overline{GE} \times \overline{GD} \quad \text{ἢ} \quad \overline{GE} \times \overline{GD} = \beta^2 \quad (2)$$

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι αἱ ζητούμεναι εὐθεῖαι εἶναι αἱ $x = GE$, $y = GD$.

Τὸ πρόβλημα αὐτὸ εἶναι πάντοτε δυνατόν.

Σημ. Δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὰ μήκη ΓΕ καὶ ΓΔ συναρτήσῃ τῶν α καὶ β.

Πράγματι ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΓΑΟ λαμβάνομεν

$$\overline{GO}^2 = \overline{GA}^2 + \overline{AO}^2 \quad \text{ἢ} \quad \overline{GO}^2 = \beta^2 + \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \quad \text{ἢ} \quad GO = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \beta^2}.$$

Γνωρίζοντες τὸ ΓΟ εὐρίσκομεν, ὅτι

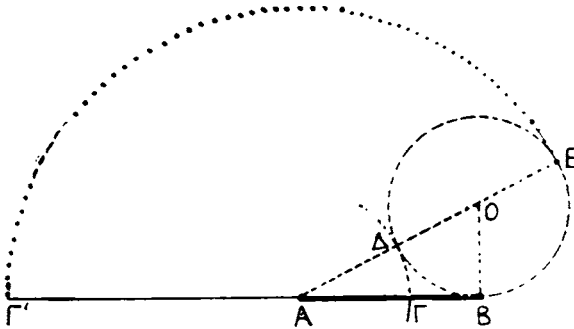
$$GE = GO + OE = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \beta^2} + \frac{AB}{2} = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \beta^2} + \frac{\alpha}{2}$$

$$\Gamma\Delta = \Gamma\text{Ο} - \text{Ο}\Delta = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \beta^2} - \frac{\text{AB}}{2} = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \beta^2} - \frac{\alpha}{2}.$$

**Ἀσκήσεις*: 1269, 1270, 1271, 1272, 1273, 1278, 1279, 1274, 1275, 1276.

462. Πρόβλημα 6ον. (*Πρόβλημα τῆς χρυσῆς τομῆς*). *Νὰ διαιρεθῇ μία εὐθεῖα εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον· δηλ. νὰ διαιρεθῇ ἡ εὐθεῖα αὐτὴ εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὸ μεγαλύτερον μέρος τῆς νὰ εἶναι μέσον ἀνάλογον μεταξὺ τῆς ὅλης εὐθείας καὶ τοῦ μικροτέρου μέρους τῆς.*

Λύσις: Ἀπὸ τὸ ἄκρον Β τῆς δοθείσης εὐθείας ΑΒ ὑψοῦμεν κά-



Σχ. 335.

θετον ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς ἓνα τμήμα ΒΟ ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ΑΒ. Μὲ κέντρον τὸ Ο καὶ ἀκτῖνα τὴν ΟΒ γράφομεν περιφέρειαν κύκλου, ἡ ὁποία νὰ ἐφάπτεται τῆς ΑΒ εἰς τὸ Β. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΟ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε. Μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα τὴν ΑΔ γράφομεν ἓνα τόξον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Γ, ὁπότε θὰ εἶναι ΑΔ=ΑΓ. Τὸ Γ εἶναι τὸ ζητούμενον σημεῖον, τὸ ὁποῖον διαιρεῖ τὴν ΑΒ εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.

Πράγματι· ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας Ο, ἡ δὲ ΑΔΕ τέμνουσα αὐτῆς, θὰ ἔχωμεν

$$\begin{aligned} \overline{ΑΒ}^2 &= ΑΔ \times ΑΕ \quad \text{ἢ} \quad \overline{ΑΒ}^2 = ΑΔ \times (ΑΔ + ΔΕ) \\ &\quad \text{ἢ} \quad \overline{ΑΒ}^2 = \overline{ΑΔ}^2 + ΑΔ \times ΔΕ \end{aligned} \quad (1)$$

*Ἀντικαθιστῶμεν τὰ τμήματα ΑΔ, ΔΕ μὲ ἴσα τμήματα, τὰ ὁποία

κεῖνται ἐπὶ τῆς AB . Ἐπειδὴ $AD=AG$ καὶ $DE=2 \times OB=AB$, ἡ ἰσότης (1) γράφεται

$$\overline{AB^2} = \overline{AG^2} + AG \times AB \quad \eta \quad \overline{AG^2} = \overline{AB^2} - AG \times AB$$

$$\eta \quad \overline{AG^2} = AB \times (AB - AG) \quad \eta \quad \overline{AG^2} = AB \times GB$$

ὥστε τὸ σημεῖον G διαιρεῖ τὴν AB εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.

Ὑπολογισμὸς τῆς AG . Ἐὰν θέσωμεν $AB=\alpha$, καὶ $AG=x$, θὰ εἶναι $GB=\alpha-x$ καὶ ἡ ἰσότης $\overline{AG^2}=AB \times GB$ γίνεται

$$x^2 = \alpha(\alpha-x) \quad \eta \quad x^2 = \alpha^2 - \alpha x \quad \eta \quad x^2 + \alpha x - \alpha^2 = 0.$$

Λύοντες τὴν δευτεροβάθμιον αὐτὴν ἐξίσωσιν εὐρίσκομεν

$$AG = x = \frac{\alpha}{2}(\sqrt{5}-1).$$

463. Παρατήρησις. Ἐὰν λάβωμεν ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς BA ἓνα σημεῖον G' τοιοῦτον, ὥστε $AG'=AE$, ἡ ἰσότης $\overline{AB^2}=AD \times AE$ γράφεται

$$\overline{AB^2} = AD \times AG' \quad (1)$$

Ἐπειδὴ $AD=AE-DE=AG'-AB$, ἡ (1) γίνεται

$$\overline{AB^2} = (AG' - AB) \times AG' \quad \eta \quad \overline{AB^2} = \overline{AG'^2} - AB \times AG'$$

$$\eta \quad \overline{AG'^2} = \overline{AB^2} + AB \times AG' \quad \eta \quad \overline{AG'^2} = AB \times (AB + AG')$$

$$\eta \quad \overline{AG'^2} = AB \times BG'.$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι ὑπάρχει καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς εὐθείας AB ἓνα σημεῖον G' τοιοῦτον, ὥστε $\overline{AG'^2} = AB \times BG'$.

Ἐὰν εἰς τὴν ἰσότητα $\overline{AG'^2} = AB \times BG'$ θέσωμεν $AB=\alpha$ καὶ $AG'=x$ καὶ $G'B=G'A+AB=x+\alpha$, θὰ ἔχωμεν $x^2 = \alpha(x+\alpha)$ ἢ $x^2 - \alpha x - \alpha^2 = 0$.

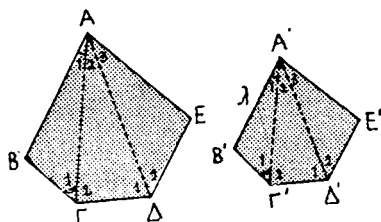
Λύοντες αὐτὴν εὐρίσκομεν $AG' = x = \frac{\alpha}{2}(\sqrt{5}+1)$.

Ἀσκήσεις: 1278, 1279.

464. Πρόβλημα 7ον. *Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα πολύγωνον $A'B'G'D'$, ... ὁμοιον πρὸς δοθὲν πολύγωνον $ABGD$, ... καὶ τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ $A'B'$, ἡ ὁμόλογος πρὸς τὴν πλευρὰν AB τοῦ δοθέντος πολυγώνου, νὰ ἔχη δοθὲν μῆκος λ .*

Ἱν Δύσις. Χωρίζομεν τὸ δοθὲν πολύγωνον εἰς τρίγωνα πρὸς τοῦτο φέρομεν τὰς διαγωνίους AG, AD, \dots

Μὲ κορυφὴν τὸ A' , καὶ πλευρὰν τὴν $A'B' = \lambda$ κατασκευάζομεν γωνίαν A_1' ἴσην μὲ τὴν γωνίαν A_1 μὲ κορυφὴν τὸ B' καὶ πλευρὰν τὴν $B'A'$ κατασκευάζομεν γωνίαν B' ἴσην μὲ τὴν γωνίαν B . Αἱ πλευραὶ $B'G'$ καὶ $A'G'$

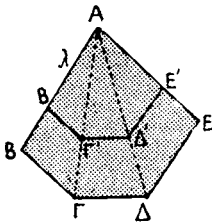


Σχ. 336.

τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Γ' . Τὸ σχηματισθὲν τρίγωνον $A'B'\Gamma'$ εἶναι ὁμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$, διότι ἔχουν δύο γωνίας ἴσας μίαν πρὸς μίαν, ἕκ κατασκευῆς.

Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς $A'\Gamma'$, ἡ ὁποία εἶναι ὁμόλογος τῆς $A\Gamma$ κατασκευάζομεν κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ἓνα τρίγωνον $A'\Gamma'\Delta'$ ὁμοιον πρὸς τὸ $A\Gamma\Delta$ ὁμοίως ἐπὶ τῆς πλευρᾶς $A'\Delta'$, ὁμολόγου τῆς $A\Delta$, κατασκευάζομεν ἓνα τρίγωνον $A'\Delta'E'$ ὁμοιον πρὸς τὸ $A\Delta E$. Τὸ πολύγωνον $A'B'\Gamma'\Delta'E'$, τὸ ὁποῖον κατασκευάσθη κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον, εἶναι ὁμοιον πρὸς τὸ $AB\Gamma\Delta E$, διότι τὰ δύο αὐτὰ πολύγωνα ἀποτελοῦνται ἀπὸ ὁμοια τρίγωνα, ἰσάριθμα καὶ ὁμοίως κείμενα (§ 417).

2α Λύσις. Χωρίζομεν τὸ δοθὲν πολύγωνον $AB\Gamma\Delta E$ εἰς τρίγωνα πρὸς τοῦτο φέρομεν τὰς διαγωνίους $A\Gamma, A\Delta$. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς AB λαμβάνομεν ἓνα τμήμα AB' ἴσον μὲ δοθὲν μῆκος λ . Ἀπὸ τὸ A φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν $B\Gamma$, ἡ ὁποία τέμνει τὴν $A\Gamma$ εἰς τὸ Γ' .



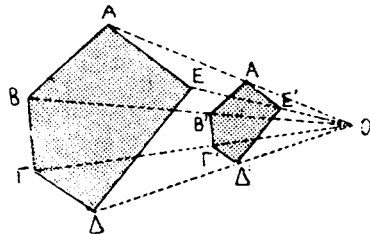
Σχ. 337

Ἀπὸ τὸ Γ' φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$, ἡ ὁποία τέμνει τὴν $A\Delta$ εἰς τὸ Δ' . Τέλος ἀπὸ τὸ Δ' φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΔE , ἡ ὁποία τέμνει τὴν $A E$ εἰς τὸ E' .

Τὰ τρίγωνα $AB'\Gamma'$, $A\Gamma'\Delta'$, $A\Delta'E'$ εἶναι ὁμοια, ἀντιστοίχως, πρὸς τὰ $AB\Gamma$, $A\Gamma\Delta$, $A\Delta E$, διότι ἔχουν τὰς γωνίας των ἴσας μίαν πρὸς μίαν.

Τὰ πολύγωνα $AB\Gamma\Delta E$ καὶ $A'B'\Gamma'\Delta'E'$ εἶναι ὁμοια, διότι ἀποτελοῦνται ἀπὸ τρίγωνα ὁμοια, ἰσάριθμα καὶ ὁμοίως κείμενα.

465. Παρατήρησις. Ἐάν, ἀντὶ νὰ δοθῇ ἡ πλευρὰ $A'B'$, ἡ ὁμολογος τῆς AB , δίδεται ὁ λόγος τῆς ὁμοιότητος $\frac{\mu}{\nu}$, κατασκευάζομεν πρῶτον ἓνα εὐθύγραμμον τμήμα $A'B'$, τοῦ ὁποῖου ὁ λόγος πρὸς τὴν AB νὰ εἶναι $\frac{\mu}{\nu}$, δηλ. εὐρίσκομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον τῶν μ, ν, AB , $\left(\frac{\mu}{\nu} = \frac{AB}{A'B'}\right)$



Σχ. 338.

καὶ ἔπειτα ἐφαρμόζομεν μίαν ἀπὸ τὰς ἀνωτέρω λύσεις. Εἶναι προτιμότερον ὅμως νὰ ἀκολουθῶμεν τὴν κάτωθι κατασκευὴν:

Λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον O , ἔκτος τοῦ δοθέντος πολυγώνου $AB\Gamma\Delta E$ καὶ φέρομεν τὰς εὐθείας OA, OB, OG, OD, OE . Ἐπὶ τῆς

ΟΑ λαμβάνομεν ἓνα τμήμα ΟΑ' τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι $\frac{ΟΑ'}{ΟΔ} = \frac{\mu}{\nu}$.

Ἐκ τῆς Α' φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ, ἣ ὁποία τέμνει τὴν ΟΒ εἰς τὸ Β'. Ἐκ τῆς Β' φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ, ἣ ὁποία τέμνει τὴν ΟΓ εἰς τὸ Γ', καὶ οὕτω καθεξῆς.

Τὰ τρίγωνα ΟΑ'Β', ΟΒ'Γ', ΟΓ'Δ', ΟΔ'Ε', ΟΕ'Α' εἶναι ὅμοια ἀντιστοίχως πρὸς τὰ ΟΑΒ, ΟΒΓ, . . . ΟΕΑ, διότι ἔχουν τὰς γωνίας τῶν ἴσας μίαν πρὸς μίαν.

Ἐκ τῆς ὁμοιότητος τῶν τριγώνων αὐτῶν συνάγομεν, ὅτι

$$\frac{ΟΑ'}{ΟΑ} = \frac{ΑΒ'}{ΑΒ} = \frac{ΟΒ'}{ΟΒ} = \frac{ΒΓ'}{ΒΓ} = \frac{ΟΓ'}{ΟΓ} = \frac{ΓΔ'}{ΓΔ} = \dots = \frac{\mu}{\nu}.$$

Ἐκ τῆς σχέσεως αὐτῆς συνάγομεν, ὅτι

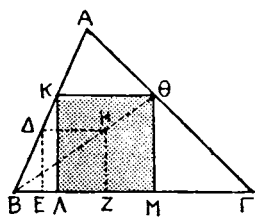
$$\frac{ΑΒ'}{ΑΒ} = \frac{ΒΓ'}{ΒΓ} = \frac{ΓΔ'}{ΓΔ} = \dots = \frac{ΕΑ'}{ΕΑ} = \frac{\mu}{\nu}.$$

Τὰ πολύγωνα λοιπὸν Α'Β'Γ'Δ'Ε' καὶ ΑΒΓΔΕ ἔχουν τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους καὶ τὰς γωνίας τῶν ἴσας μίαν πρὸς μίαν, διότι αἱ πλευραὶ τῶν εἶναι παράλληλοι καὶ ἔχουν τὴν αὐτὴν φοράν· ἄρα τὰ πολύγωνα αὐτὰ εἶναι ὅμοια.

Ἀσκήσεις: 1280, 1281.

466. Πρόβλημα 8ον. *Εἰς δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ (Σχ. 339), νὰ ἐγγραφῆ τετράγωνον.*

Κατασκευή: Ἐκ τυχόν σημείου Δ τῆς πλευρᾶς ΑΒ φέρομεν κάθετον ΔΕ ἐπὶ τὴν ΒΓ· μετὰ πλευρὰν τὴν ΔΕ κατασκευάζομεν τὸ τετράγωνον ΔΕΖΗ. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΒΗ, ἣ ὁποία, προεκτεινομένη, τέμνει τὴν ΑΓ εἰς τὸ Θ. Ἐκ τῆς Θ φέρομεν τὴν ΘΜ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ καὶ τὴν ΘΚ κάθετον ἐπὶ τὴν ΘΜ· ἀπὸ τῆς Κ φέρομεν τὴν ΚΛ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ. Τὸ σχηματισθὲν ὀρθογώνιον ΛΜΘΚ εἶναι τὸ ζητούμενον τετράγωνον.



Σχ. 339.

Ἀπόδειξις: Αἱ ΗΖ καὶ ΘΜ εἶναι

παράλληλοι, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν· ἄρα τὰ τρίγωνα ΒΖΗ καὶ ΒΜΘ εἶναι ὅμοια καὶ ἐπομένως θὰ ἔχωμεν $\frac{ΗΖ}{ΘΜ} = \frac{ΒΗ}{ΒΘ}$ (1).

Ὁμοίως ἀπὸ τὰ ὅμοια τρίγωνα ΒΗΔ καὶ ΒΘΚ ἔχομεν $\frac{ΔΗ}{ΚΘ} = \frac{ΒΗ}{ΒΘ}$ (2).

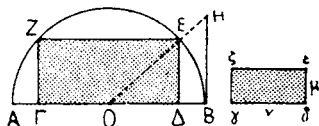
Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι $\frac{ΗΖ}{ΘΜ} = \frac{ΔΗ}{ΚΘ}$.

Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι ΗΖ=ΔΗ, θὰ εἶναι καὶ ΘΜ=ΚΘ.

Ὡστε τὸ ὀρθογώνιον ΛΜΘΚ ἔχει δύο διαδοχικὰς πλευρὰς ἴσας· ἄρα εἶναι τετράγωνον.

467. Πρόβλημα 9ον. *Εἰς δοθὲν ἡμικύκλιον νὰ ἐγγραφῆ ὀρθογώνιον, ὁμοιον πρὸς δοθὲν ὀρθογώνιον.*

Ἀνάλυσις. Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω ΓΔΕΖ (Σχ. 340) τὸ ζητούμενον ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὸ ἡμικύκλιον Ο διαμέτρου ΑΒ καὶ τὸ ὁποῖον εἶναι ὁμοιον πρὸς τὸ δοθὲν ὀρθογώνιον γδεξ.



Σχ. 340.

Ἐπειδὴ τὰ ὀρθογώνια ΓΔΕΖ καὶ γδεξ εἶναι ὁμοια, θὰ εἶναι

$$\frac{\Gamma Z}{\Gamma \Delta} = \frac{\gamma \zeta}{\gamma \delta} \quad \eta \quad \frac{\Gamma Z}{\Gamma \Delta} = \frac{\mu}{\nu} \quad (1)$$

Ἐπειδὴ $\Gamma \Delta = 2 \times \text{ΟΔ}$, ἡ ἰσότης (1) γράφεται

$$\frac{\Gamma Z}{2 \times \text{ΟΔ}} = \frac{\mu}{\nu} \quad \frac{\Gamma Z}{\text{ΟΔ}} = \frac{2\mu}{\nu} \quad (1')$$

Φέρομεν τὴν ἀκτῖνα ΟΕ, ἡ ὁποία, προεκτεινομένη, τέμνει τὴν κάθετον, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ Β ἐπὶ τὴν ΑΒ, εἰς τὸ σημεῖον Η. Ἀπὸ τὰ ὁμοια τρίγωνα ΟΒΗ καὶ ΟΔΕ ἔχομεν

$$\frac{\text{ΒΗ}}{\Delta \text{Ε}} = \frac{\text{ΟΒ}}{\text{ΟΔ}} \quad \eta \quad \frac{\text{ΒΗ}}{\text{ΟΒ}} = \frac{\Delta \text{Ε}}{\text{ΟΔ}} \quad \eta \quad \frac{\text{ΒΗ}}{\text{ΟΒ}} = \frac{\Gamma \text{Ζ}}{\text{ΟΔ}} \quad (2)$$

Ἀπὸ τὰς ἰσοτήτας (1') καὶ (2) συνάγομεν

$$\frac{\text{ΒΗ}}{\text{ΟΒ}} = \frac{2\mu}{\nu} \quad \eta \quad \frac{\nu}{\text{ΟΒ}} = \frac{2\mu}{\text{ΒΗ}}$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ ΒΗ εἶναι ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν γνωστῶν τμημάτων ν , ΟΒ, 2μ καὶ ἐπομένως δύναται νὰ κατασκευασθῆ.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὴν κάτωθι κατασκευὴν:

Σύνθεσις. Κατασκευάζομεν τὴν τετάρτην ἀνάλογον ΒΗ τῶν γνωστῶν τμημάτων ν , ΟΒ, 2μ . Ἀπὸ τὸ Β φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν διάμετρον ΑΒ καὶ ἐπὶ τῆς καθέτου αὐτῆς λαμβάνομεν τμήμα ἴσον μὲ ΒΗ. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΟΗ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ἡμιπεριφέρειαν εἰς τὸ σημεῖον Ε. Ἀπὸ τὸ Ε φέρομεν τὴν ΕΔ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ τὴν ΕΖ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ἡμιπεριφέρειαν εἰς τὸ Ζ. Τέλος φέρομεν τὴν κάθετον ΖΓ ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ τὸ σχηματιζόμενον ὀρθογώνιον ΓΔΕΖ εἶναι τὸ ζητούμενον.

Ἀσκήσεις: 1280, 1281, 1282, 1283, 1284, 1285, 1286, 1287, 1288, 1289.

468. Πρόβλημα 10ον. *Νὰ γραφῆ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα Α καὶ Β καὶ νὰ ἐφάπτεται δοθείσης εὐθείας xy.*

Ἀνάλυσις. Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω Ο ἡ ζητουμένη περιφέρεια, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β καὶ ἐφάπτεται τῆς xy, ἔστω εἰς τὸ σημεῖον Δ.

Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, ἡ ὁποία, προεκτεινομένη, τέμνει τὴν xy εἰς τὸ σημεῖον Γ.

Ἐπειδὴ ἡ ΓΔ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας Ο, ἡ δὲ ΓΒΑ τέμνουσα αὐτῆς, αἱ ὁποιαὶ ἄγονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον, θὰ εἶναι

$$\Gamma\Delta^2 = \Gamma A \times \Gamma B.$$

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα αὐτὴν συνάγομεν, ὅτι ἡ ΓΔ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν γνωστῶν τμημάτων ΓΑ καὶ ΓΒ καὶ ἐπομένως δύναται νὰ κατασκευασθῆ. Γνωρίζοντες τὴν ΓΔ δύναμεθα νὰ ὀρίσωμεν τὸ σημεῖον Δ ἐπαφῆς τῆς xy καὶ τῆς ζητουμένης περιφερείας, καὶ ἐπομένως νὰ κατασκευάσωμεν τὴν περιφέρεια, ἡ ὁποία θὰ διέρχεται ἀπὸ τὰ τρία σημεῖα Α, Β καὶ Δ. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὴν κάτωθι κατασκευὴν :

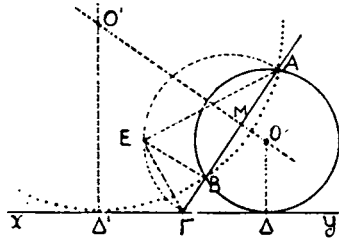
Σύνθεσις. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ, ἡ ὁποία, προεκτεινομένη, τέμνει τὴν xy εἰς τὸ σημεῖον Γ. Κατασκευάζομεν ἔπειτα τὴν μέσην ἀνάλογον τῶν ΓΑ καὶ ΓΒ· πρὸς τοῦτο μὲ διάμετρον τὴν ΓΑ γράφομεν ἡμιπεριφέρεια καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον Β φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΑ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ἡμιπεριφέρεια εἰς τὸ σημεῖον Ε· φέρομεν τὴν ΓΕ ἡ ὁποία εἶναι ἡ μέση ἀνάλογος τῶν ΓΑ καὶ ΒΓ (§ 422. 3ον).

Λαμβάνομεν ἔπειτα ἐπὶ τῆς εὐθείας xy ἓνα τμήμα ΓΔ=ΓΕ καὶ γράφομεν τὴν περιφέρεια Ο, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Α, Β, Δ καὶ ἡ ὁποία εἶναι ἡ ζητουμένη περιφέρεια.

Ἐὰν λάβωμεν ἐπὶ τῆς ἡμιευθείας Γx ἓνα τμήμα ΓΔ'=ΓΕ καὶ γράψωμεν τὴν περιφέρεια, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Α, Β, Δ', εὐρίσκομεν καὶ δευτέραν περιφέρεια, ἡ ὁποία λύει τὸ πρόβλημα.

Διερεύνησις. Διὰ νὰ ἔχη τὸ πρόβλημα λύσιν πρέπει τὰ σημεῖα Α καὶ Β νὰ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας xy.

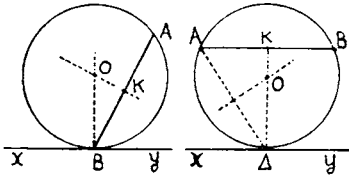
Ἐὰν λοιπὸν τὰ σημεῖα Α καὶ Β κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς xy, τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις, διότι τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τῆς ζητου-



Σχ. 341.

μένης περιφέρειας καὶ τῆς δοθείσης εὐθείας δύναται νὰ εἶναι τὸ Δ ἢ τὸ Δ'.

Ἐὰν τὸ Β κεῖται ἐπὶ τῆς xy , τὸ Β εἶναι καὶ σημεῖον ἐπαφῆς καὶ ἐπομένως τὸ κέντρον τῆς ζητουμένης περιφέρειας κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν xy , ἡ ὁποία ἀγεται ἀπὸ τὸ Β καὶ ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου τῆς AB (Σχ. 342α).



α β
Σχ. 342.

Ἐὰν ἡ AB εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν xy , τὸ σημεῖον ἐπαφῆς Δ κεῖται ἐπὶ τῆς μεσοκαθέτου τῆς AB καὶ ἡ περιφέρεια, ἡ ὁποία διέρχεται

ἀπὸ τὰ σημεῖα A, B καὶ Δ εἶναι ἡ ζητουμένη (Σχ. 342β).

469. Πρόβλημα 11ον. Νὰ γραφῆ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα καὶ νὰ ἐφάπτεται δοθείσης περιφέρειας.

Ἀνάλυσις. Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω O' (Σχ. 343) ἡ ζητουμένη περιφέρεια, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ δοθέντα σημεῖα A καὶ B καὶ ἐφάπτεται τῆς δοθείσης περιφέρειας O στὴν εἰς τὸ σημεῖον Γ .

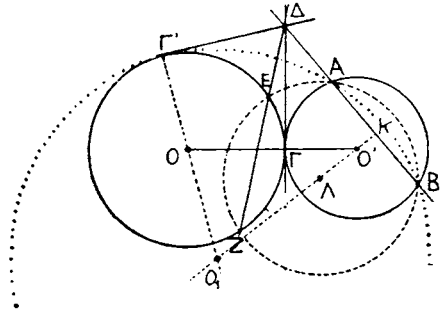
Ἐὰν τὸ σημεῖον Γ ἦτο γνωστόν, τότε τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τό: νὰ γραφῆ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ τὰ τρία σημεῖα A, B, Γ .

Εἶναι ἀνάγκη λοιπὸν νὰ προσδιορίσωμεν τὸ σημεῖον Γ .

Φέρομεν τὴν κοινὴν ἐφαπτομένην τῶν περιφερειῶν O καὶ O' εἰς τὸ σημεῖον Γ , ἡ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς εὐθείας AB εἰς τὸ σημεῖον Δ . Ἀπὸ τὸ Δ φέρομεν τυχούσαν τέμνουσαν ΔEZ τῆς δοθείσης περιφέρειας O .

Ἐπειδὴ ἡ $\Delta\Gamma$ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφέρειας O , ἡ δὲ ΔEZ τέμνουσα αὐτῆς, ἔχομεν $\overline{\Delta\Gamma}^2 = \Delta E \times \Delta Z$ (1)

Ὁμοίως ἐπειδὴ ἡ $\Delta\Gamma$ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφέρειας O' , ἡ δὲ ΔAB τέμνουσα αὐτῆς, ἔχομεν $\overline{\Delta\Gamma}^2 = \Delta A \times \Delta B$ (2)



Σχ. 343.

Ἐκ τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι

$$\Delta E \times \Delta Z = \Delta A \times \Delta B \quad (3)$$

Ἐκ τῆς ἰσοτήτα (3) συνάγομεν, ὅτι τὰ σημεῖα A, B, E, Z κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὴν κάτωθι κατασκευὴν :

Σύνθεσις. Γράφομεν τυχούσαν περιφέρειαν Λ , ἣ ὅποια νὰ διέρχεται ἀπὸ τὰ δοθέντα σημεῖα A καὶ B καὶ ἣ ὅποια νὰ τέμνῃ τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν O, ἔστω εἰς τὰ σημεῖα E καὶ Z. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ZE, ἣ ὅποια, προεκτεινομένη, τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς εὐθείας AB εἰς τὸ σημεῖον Δ. Ἐκ τῆς Δ φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην ΔΓ τῆς περιφερείας O. Ἐπειτα γράφομεν τὴν περιφέρειαν, ἣ ὅποια διέρχεται ἀπὸ τὰ τρία σημεῖα A, B, Γ, ἣ ὅποια εἶναι καὶ ἡ ζητούμενη.

Ἐπειδὴ ἀπὸ τῆς Δ δυνάμεθα νὰ φέρωμεν δύο ἐφαπτομένας ΔΓ καὶ ΔΓ' τῆς περιφερείας O, τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις: τὴν περιφέρειαν O' καὶ τὴν περιφέρειαν O₁.

Διερεύνησις. 1^{ον}. Τὸ σημεῖον Δ τῆς τομῆς τῆς εὐθείας AB καὶ τῆς εὐθείας EZ θὰ ὑπάρχῃ, ὅταν ἡ EZ δὲν εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν AB.

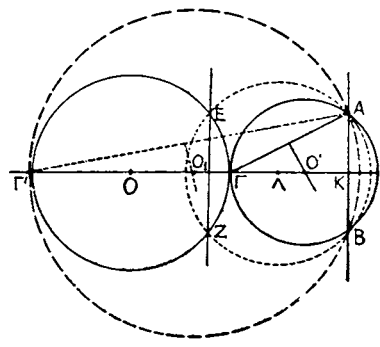
Ἄλλὰ διὰ νὰ ἔχῃ τὸ πρόβλημα λύσιν πρέπει νὰ δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἀπὸ τῆς Δ ἐφαπτομένην πρὸς τὴν δοθεῖσαν περιφέρειαν O· δηλ. πρέπει τὸ Δ νὰ κεῖται ἐκτὸς τοῦ κύκλου O.

Ἄρα, ὅταν τὸ Δ κεῖται ἐκτὸς τῆς περιφερείας O, τὸ πρόβλημα ἔχει δύο λύσεις, διότι δυνάμεθα νὰ φέρωμεν δύο ἐφαπτομένας ΔΓ καὶ ΔΓ' πρὸς τὴν περιφέρειαν αὐτήν. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτήν αἱ περιφέρειαι O καὶ O' ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς, ἐὰν φέρωμεν τὴν ἐφαπτομένην ΔΓ καὶ αἱ O καὶ O₁ ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς, ἐὰν φέρωμεν τὴν ἐφαπτομένην ΔΓ'.

Ἐάν τὸ Δ κεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας O τὸ πρόβλημα ἔχει μίαν μόνον λύσιν, διότι μία καὶ μόνον ἐφαπτομένη ἄγεται ἀπὸ τῆς Δ πρὸς τὴν O.

Ἐάν τὸ Δ κεῖται ἐντὸς τῆς περιφερείας O, τὸ πρόβλημα δὲν ἔχει λύσιν, διότι δὲν δυνάμεθα ἀπὸ τῆς Δ νὰ φέρωμεν ἐφαπτομένην πρὸς τὴν περιφέρειαν O.

2^{ον}. Ἐάν ἡ EZ εἶναι παράλ-



Σχ. 344.

ληλος πρὸς τὴν AB (Σχ. 344), αἱ εὐθεῖαι αὐταὶ δὲν τέμνονται καὶ ἐπομένως τὸ σημεῖον Δ δὲν ὑπάρχει.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἢ μεσοκάθετος τῆς AB εἶναι ἐπίσης καὶ μεσοκάθετος τῆς EZ . Ἡ μεσοκάθετος αὐτὴ διέρχεται ἀπὸ τὰ κέντρα O καὶ Λ τῆς δοθείσης περιφερείας καὶ τῆς βοηθητικῆς περιφερείας καὶ ἐπομένως εἶναι ἄξων συμμετρίας τοῦ σχήματος.

Διὰ νὰ παρουσιασθῇ αὐτὴ ἢ διάταξις τοῦ σχήματος, πρέπει νὰ εἶναι $OA=OB$. Τὰ σημεῖα ἐπαφῆς Γ καὶ Γ' τῶν κύκλων O' καὶ O_2 , μὲ τὸν δοθέντα κύκλον O , εἶναι αἱ τομαὶ τοῦ ἄξωνος συμμετρίας καὶ τοῦ δοθέντος κύκλου καὶ τὰ κέντρα των κεῖνται ἐπὶ τῶν μεσοκαθέτων $A\Gamma$ καὶ $A\Gamma'$.

Ἀσκήσεις: 1290, 1291, 1292, 1293, 1294, 1320, 1321, 1322, 1323, 1324.

Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν ἐπὶ τοῦ Ε' Κεφαλαίου

Α' Ὀμάς. 1264. (1297). Νὰ λυθῇ γραφικῶς ἡ ἐξίσωσις $5x=4 \times 3$

1265. (1298). Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ εὐθεῖαι:

$$1\text{ον. } x=\sqrt{5}. \quad 2\text{ον. } x=\sqrt{15}. \quad 3\text{ον. } x=a\sqrt{3}$$

1266. (1299). Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι δίδονται ὑπὸ τῶν τύπων: $x=\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2}$ $x=\sqrt{\alpha^2-\beta^2+\gamma^2-\delta^2}$.

1267. (1300). Νὰ κατασκευασθῇ ἡ εὐθεῖα $x=\sqrt{\alpha\beta-\beta\delta}$.

1268. (1301). Νὰ κατασκευασθῇ ἡ εὐθεῖα $x=\sqrt{\alpha^2-\beta\gamma}$.

1269. (1302). Νὰ κατασκευασθοῦν δύο εὐθεῖαι, ἂν γνωρίζωμεν τὸν λόγον των $\mu:\nu$ καὶ τὸ ἄθροισμὰ των α .

1270. (1303). Νὰ κατασκευασθοῦν δύο εὐθεῖαι, ἂν γνωρίζωμεν τὸν λόγον των $\mu:\nu$ καὶ τὴν διαφορὰν των α .

1271. (1304). Νὰ κατασκευασθοῦν δύο εὐθεῖαι, ἂν γνωρίζωμεν τὸ ἄθροισμὰ των α καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων των β^2 .

1272. (1305). Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα εὐθύγραμμα τμήμα x , τὸ ὁποῖον δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $\frac{x^2}{\alpha^2} = \frac{\mu}{\nu}$, ὅπου α, μ, ν εἶναι δοθέντα εὐθύγραμμα τμήματα.

1273. (1306). Νὰ κατασκευασθοῦν δύο εὐθύγραμμα τμήματα, ἂν γνωρίζωμεν τὸν λόγον των $\mu:\nu$ καὶ τὸ γινόμενόν των k^2

1274. (1324). Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ εὐθεῖαι x , αἱ ὁποῖαι δίδονται ὑπὸ τῶν τύπων: $1\text{ον. } \frac{1}{x^2} = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2}$. $2\text{ον. } \frac{1}{x^2} = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}$.

1275. (1325). Νὰ κατασκευασθοῦν δύο εὐθεῖαι x καὶ y τοιαῦται, ὥστε

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{\alpha}, \quad \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{\beta^2}.$$

1276. (1326). Νὰ κατασκευασθοῦν δύο εὐθεΐαι, αἱ ὁποῖαι ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν κύβων δύο εὐθειῶν μ καὶ ν .

1277. (1327). Νὰ κατασκευασθοῦν αἱ ρίζαι μιᾶς ἐξισώσεως τοῦ δευτέρου βαθμοῦ.

1278. (1307). Ἐὰν γνωρίζωμεν τὸ μεγαλύτερον τμήμα μιᾶς εὐθείας, ἡ ὁποία διηρέθη εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον, νὰ κατασκευασθῇ ἡ εὐθεΐα αὐτή.

1279. (1308). Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Σ , τὸ ὅποιον κεῖται ἐκτὸς μιᾶς γωνίας $\alpha\text{O}\gamma$, νὰ ἀχθῇ τέμνουσα ΣAB , ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν $\text{O}\gamma$ εἰς τὸ A καὶ τὴν $\text{O}\alpha$ εἰς τὸ B εἰς τρέπον. ὥστε τὸ σημεῖον A νὰ διαιρῇ τὴν ΣAB εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον.

Β' Ὁμάς. 1280 (1309). Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα τρίγωνον ὁμοιον πρὸς δοθὲν τρίγωνον $\text{AB}\Gamma$ καὶ τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος νὰ εἶναι ἴση μὲ 2τ .

1281. (1310). Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα τρίγωνον ὁμοιον πρὸς δοθὲν τρίγωνον καὶ τοῦ ὁποίου αἱ κορυφαὶ νὰ εὐρίσκωνται ἐπὶ τριῶν δοθεισῶν ὁμοκέντρων περιφερειῶν.

1282. (1311). Εἰς δοθέντα κύκλον νὰ ἐγγραφῇ ἓνα ὀρθογώνιον ὁμοιον πρὸς δοθὲν ὀρθογώνιον.

1283. (1312). Εἰς δοθὲν τρίγωνον $\text{AB}\Gamma$ νὰ ἐγγραφῇ ἓνα τρίγωνον, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ εἶναι παράλληλοι ἀντιστοίχως πρὸς τρεῖς δοθείσας εὐθείας.

1284. (1313). Εἰς δοθέντα κυκλικὸν τομέα $\text{OAB}\Gamma$, νὰ ἐγγραφῇ ἓνα τετράγωνον.

1285. (1314). Εἰς δοθὲν ἡμικύκλιον νὰ ἐγγραφῇ τετράγωνον.

1286. (1315). Εἰς δοθέντα κύκλον, νὰ ἐγγραφῇ ἓνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον, τοῦ ὁποίου γνωρίζωμεν τὸ ἄθροισμα λ τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους.

1287. (1316). Νὰ περιγραφῇ περὶ δοθέντα κύκλον ἓνα τρίγωνον, ὁμοιον πρὸς δοθὲν τρίγωνον.

1288. (1317). Νὰ περιγραφῇ ἓνα τρίγωνον περὶ δοθέντα κύκλον, οὕτως ὥστε αἱ τρεῖς κορυφαὶ του νὰ κεῖνται ἐπὶ τριῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι ἀγονταὶ ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

1289. (1318). Περὶ δοθὲν τετράπλευρον $\text{AB}\Gamma\Delta$ νὰ περιγραφῇ ἓνα τετράπλευρον ὁμοιον πρὸς δοθὲν τετράπλευρον ἐξηθ'.

Γ' Ὁμάς. 1290. (1319). Δίδεται μία εὐθεΐα $\chi\gamma$, ἓνα σημεῖον τῆς A καὶ ἓνα σημεῖον B ἐκτὸς τῆς $\chi\gamma$. Νὰ γραφῇ περιφέρεια μὲ κέντρον τὸ B , ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ τὴν $\chi\gamma$ εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι $\text{A}\Gamma \times \text{A}\Delta = \lambda^2$.

1291. (1320). Νὰ γραφῇ περιφέρεια κύκλου, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα A καὶ B καὶ τοιαύτη, ὥστε ἡ ἐφαπτομένη αὐτῆς, ἡ ὁποία ἀγεται ἀπὸ τρίτον δοθὲν σημεῖον Γ νὰ ἔχη δοθὲν μῆκος λ .

1292. (1321). Νὰ κατασκευασθῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα A καὶ B καὶ νὰ ἀποκόπτῃ ἀπὸ δοθείσαν εὐθεΐαν $\chi\gamma$ χορδὴν $\Gamma\Delta$ ἴσην μὲ δοθὲν μῆκος.

1293. (1322). Νὰ κατασκευασθῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον A καὶ νὰ ἐφάπτεται δύο δοθεισῶν εὐθειῶν X καὶ Y .

1294. (1323). Νὰ κατασκευασθῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον A καὶ νὰ ἐφάπτεται δοθείσης εὐθείας $\chi\gamma$ καὶ δοθείσης περιφερείας O .

Δ' Ὁμάς. 1295. (1328). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν διχοτόμον $AE=\delta_a$, τὸ ὕψος $AD=u_a$ καὶ τὸ γινόμενον $AB \times A\Gamma = \lambda^2$.

1296. (1329). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὸ γινόμενον $\beta\gamma = k^2$ τῶν δύο πλευρῶν του, τὸ ὕψος $AD=u_a$ καὶ τὴν διάμεσον $AM=\mu_a$.

1297. (1330). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν διχοτόμον $AD=\delta_a$ τῆς γωνίας A , τὸ γινόμενον $\beta\gamma$ τῶν δύο πλευρῶν του καὶ τὴν διαφορὰν $\Gamma-B=\omega$ τῶν γωνιῶν του B καὶ Γ .

1298. (1331). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν A , τὴν πλευρὰν $B\Gamma=a$ καὶ τὸ γινόμενον $AB \times A\Gamma = \lambda^2$ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του.

1299. (1332). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν κάθετον πλευρὰν καὶ τὸν λόγον τῆς ὑποτείνουσας πρὸς τὴν ἄλλην κάθετον πλευρὰν.

1300. (1333). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν a , τὴν διχοτόμον Δ_a τῆς ἔξωτερικῆς γωνίας A καὶ τὴν διαφορὰν $\beta-\gamma=\delta$.

1301. (1334). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν, τὴν πλευρὰν a , τὴν διάμεσον μ_a καὶ τὴν διαφορὰν $B-\Gamma=\omega$.

1302. (1335). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὸν λόγον $\frac{\beta}{\gamma} = k$, τὸ ὕψος u_a καὶ τὴν διχοτόμον δ_a .

1303. (1336). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὸν λόγον $\frac{\beta}{\gamma} = k$, τὴν διαφορὰν $\widehat{B}-\widehat{\Gamma}=\omega$ καὶ τὴν διχοτόμον δ_a .

1304. (1337). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὸν λόγον $\frac{\beta}{\gamma} = k$, τὴν διάμεσον μ_a καὶ τὴν γωνίαν, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν ἡ διάμεσος καὶ ἡ διχοτόμος δ_a .

1305. (1338). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὰς ἀκτίνας ρ_β, ρ_γ τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων καὶ τὰς εὐθείας $O_\beta\Gamma, O_\gamma B$, αἱ ὁποῖαι συνδέουσι τὰ κέντρα τῶν μετὰ τὰς κορυφὰς Γ καὶ B .

1306. (1339). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν A , τὴν πλευρὰν a , καὶ ὅτι ἡ διχοτόμος AD εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν δύο τμημάτων BD καὶ $\Delta\Gamma$.

1307. (1340). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὸ ὕψος u_a , τὴν διαφορὰν $B-\Gamma=\omega$ καὶ τὸ γινόμενον k^2 τῶν τμημάτων εἰς τὰ ὁποῖα ἡ πλευρὰ $B\Gamma$ διαιρεῖται ὑπὸ τοῦ ὕψους u_a .

1308. (1341). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν a , τὴν διάμεσον μ_a καὶ τὴν διαφορὰν $B-\Gamma=\omega$.

1309. (1342). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὰ τρεῖς ὕψη του u_a, u_β, u_γ .

1310. (1343). Ἐπὶ τῆς διχοτόμου μιᾶς γωνίας $\alpha O\gamma$ λαμβάνομεν ἓνα σημεῖον M , τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἀπὸ τὴν κορυφὴν O ἀπόστασιν $OM=a$. Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον AMB τοιοῦτον, ὥστε ἡ περιμετρὸς του νὰ εἶναι ἴση μετὰ $2a$. Ἡ κορυφή A νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς Ox καὶ ἡ κορυφή B ἐπὶ τῆς Oy .

1311. (1344). Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν βάσιν, τὴν ἀπέναντι γωνίαν καὶ τὸν λόγον τοῦ ἄθροισματος τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν.

Ε' Ὁμάς. 1312. (1345). Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα ὀρθογώνιον, ἂν γνωρίζωμεν τὴν περιμετρὸν του 2τ καὶ τὴν διαφορὰν k^2 τῶν τετραγώνων τῶν δύο προσκειμένων πλευρῶν του.

1313. (1346). Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα ὀρθογώνιον, ἂν γνωρίζωμεν τὴν περίμετρον 2τ καὶ τὸ ἄθροισμα k^2 τῶν τετραγώνων τῶν δύο προσκειμένων πλευρῶν του.

1314. (1347). Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα ὀρθογώνιον, ἂν γνωρίζωμεν τὴν περίμετρον του 2τ καὶ τὸν λόγον τῶν δύο προσκειμένων πλευρῶν του.

1315. (1348). Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα παραλληλόγραμμον ὁμοιον πρὸς δοθὲν παραλληλόγραμμον καὶ τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ νὰ διέρχωνται ἀπὸ τέσσαρα σημεῖα, τὰ ὁποῖα κείνται ἐπ' εὐθείας.

1316. (1349). Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα τραπέζιον ΑΒΓΔ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν βάσιν ΑΒ, τὸ ὕψος ΑΖ, τὴν γωνίαν φ τῶν διαγωνίων του καὶ τὴν σχέσιν

$$\overline{ΑΓ}^2 = \overline{ΓΖ}^2 + ΓΖ \times ΔΖ.$$

1317. (1350). Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα τραπέζιον ΑΒΓΔ, ἂν γνωρίζωμεν τὸ ὕψος ΑΕ=υ, τὴν ἀπόστασιν λ τῶν μέσων τῶν διαγωνίων του, ὅτι ἡ διαγώνιος ΑΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΔ καὶ ὅτι $\overline{ΑΓ}^2 = ΑΒ \times ΓΔ$ (Πολυτεχνεῖον)

1318. (1351). Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα τραπέζιον ΑΒΓΔ, ἂν γνωρίζωμεν τὰς γωνίας του καὶ τὰς διαγωνίους του.

1319. (1352). Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα τετράπλευρον ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, ἂν γνωρίζωμεν τὰς τέσσαρας πλευράς του (Sturm).

ΣΤ' Ὁμάς. 1320. (1353). Νὰ κατασκευασθῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ ἐφάπτεται δοθείσης εὐθείας καὶ δύο δοθεισῶν περιφερειῶν.

1321. (1354). Νὰ κατασκευασθῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον καὶ νὰ ἐφάπτεται δύο περιφερειῶν.

1322. (1355). Νὰ κατασκευασθῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ ἐφάπτεται δύο εὐθειῶν καὶ μιᾶς περιφερείας.

1323. (1356). Νὰ κατασκευασθῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ ἐφάπτεται τριῶν δοθεισῶν περιφερειῶν.

1324. (1357). Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ ἔχη τὸ κέντρον της ἐπὶ δοθείσης εὐθείας καὶ νὰ ἐφάπτεται δύο ἀνίσων περιφερειῶν.

1325. (1358). Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ ἐφάπτεται δοθείσης εὐθείας καὶ περιφερείας καὶ ἡ ὁποία νὰ ἀποκόπτη ἀπὸ ἄλλην δοθείσαν περιφέρειαν, χορδὴν παράλληλον πρὸς δοθείσαν εὐθείαν.

1326. (1359). Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα Α καὶ Β καὶ νὰ ἀποκόπτη ἀπὸ δοθείσαν περιφέρειαν Ο χορδὴν μήκους λ ἢ κυκλικὸν τμήμα, τὸ ὁποῖον νὰ δέχεται δοθείσαν γωνίαν.

1327. (1360). Δίδονται δύο κύκλοι Ο καὶ Ο' ἀκτίων R καὶ R/2, οἱ ὁποῖοι ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς εἰς τὸ σημεῖον Α. Νὰ γραφῇ περιφέρεια Ο'', ἡ ὁποία νὰ ἐφάπτεται τῶν Ο καὶ Ο' καὶ τῆς εὐθείας ΟΑ εἰς τὸ Β.

1328. (1361). Δίδεται ἓνα τετράγωνον ΑΒΓΔ πλευρᾶς α. Μὲ διάμετρον τὴν ΒΓ γράφομεν περιφέρειαν Ο.

1ον. Νὰ γραφῆ περιφέρεια Ο', ἡ ὁποία νὰ ἐφάπτεται τῆς ΑΔ εἰς τὸ Δ καὶ τῆς περιφερείας Ο.

2ον. Νὰ ὑπολογισθῆ ἡ ἀκτίς Ο'Δ τῆς περιφερείας Ο'.

3ον. Ἐὰν Μ εἶναι τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τῶν δύο περιφερειῶν Ο καὶ Ο', νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ μήκη τῶν χορδῶν ΜΔ, ΜΒ καὶ ἡ γωνία τῶν χορδῶν αὐτῶν.

Ζ' Ὁμάς. 1329. (1362). Δίδονται τρεῖς εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς ἓνα σημεῖον Ο καὶ ἓνα σημεῖον Μ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς αὐτῶν. Νὰ ἀχθῆ ἀπὸ τὸ Μ μία εὐθεῖα τοιαύτη, ὥστε τὰ δύο τμήματα αὐτῆς, τὰ ὁποῖα ἀποκόπτονται ἀπὸ τὰς τρεῖς εὐθεῖας, νὰ εἶναι ἴσα.

1330. (1363). Δίδεται μία περιφέρεια Ο καὶ ἓνα σημεῖον Α ἐκτὸς αὐτοῦ. Νὰ ἀχθῆ ἀπὸ τὸ Α μία τέμνουσα ΑΒΓ τῆς περιφερείας Ο καὶ τοιαύτη, ὥστε ἡ περιφέρεια, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον τὴν ΒΓ, νὰ ἐφάπτεται τῆς εὐθείας ΟΑ.

1331. (1364). Ἀπὸ ἓνα σημεῖον Ρ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς δοθείσης περιφερείας Ο, νὰ ἀχθῆ μία τέμνουσα ΡΑΒ τοιαύτη, ὥστε $\overline{ΑΒ}^2 = ΡΑ \times ΡΒ$.

1332 (1365). Ἀπὸ ἓνα σημεῖον Σ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς κύκλου Ο, νὰ ἀχθῆ μία τέμνουσα ΣΑΒ τῆς περιφερείας του τοιαύτη, ὥστε $\Sigma Α \times ΑΒ = k^2$, ὅπου k δοθὲν μήκος.

1333. (1366). Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Σ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς κύκλου, νὰ ἀχθῆ τέμνουσα ΣΑΒ τοῦ κύκλου καὶ τοιαύτη, ὥστε νὰ εἶναι $\frac{\Sigma Α}{ΑΒ} = \frac{\mu}{\nu}$.

1334. (1367). Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Α, νὰ ἀχθῆ τέμνουσα ΑΒΓ περιφερείας Ο τοιαύτη, ὥστε $\frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{\mu}{\nu}$.

1335. (1368). Ἀπὸ τὸ ἓνα ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς τομῆς δύο περιφερειῶν νὰ ἀχθῆ τέμνουσα τοιαύτη, ὥστε τὸ γινόμενον τῶν ἀποτεμνομένων χορδῶν νὰ εἶναι ἴσον μὲ k^2 .

1336. (1370). Εἰς ἓνα τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἀχθῆ μία εὐθεῖα ΔΕ παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ, ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ τὴν πλευρὰν ΑΒ εἰς τὸ Δ καὶ τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ε καὶ τοιαύτη, ὥστε $\overline{ΕΔ}^2 = ΑΓ \times ΕΓ$.

1337. (1371). Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Ρ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς κύκλου Ο ἀκτίος R, νὰ ἀχθῆ μία τέμνουσα ΡΑΒ τοιαύτη, ὥστε $\overline{ΡΑ}^2 + \overline{ΡΒ}^2 = 2R$.

1338. (1372). Δίδεται ἓνα τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ζητεῖται νὰ ἀχθῆ μία εὐθεῖα ΔΕ, ἡ ὁποία νὰ τέμνῃ τὴν ΑΒ εἰς τὸ Δ καὶ τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ε οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι:

$$\frac{\Delta Β}{ΕΓ} = \frac{\mu}{\nu}, \quad \frac{\Delta Β}{\Delta Ε} = \frac{\mu}{\lambda} \quad \text{καὶ} \quad \frac{\Gamma Ε}{\Delta Ε} = \frac{\nu}{\lambda}.$$

Η' Ὁμάς. 1339. (1373). Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας xy λαμβάνομεν τέσσαρα διαδοχικὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ. Νὰ εὑρεθῆ ἓνα σημεῖον ἀπὸ τὸ ὁποῖον φαίνονται ὑπὸ ἴσας γωνίας τὰ τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ.

1340. (1374). Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας λαμβάνομεν δύο σημεῖα Α καὶ Β. Νὰ εὑρεθῆ ἐπὶ τῆς εὐθείας αὐτῆς ἓνα σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε $\overline{ΜΑ}^2 + \overline{ΜΒ}^2 = k^2$, ὅπου k εἶναι δοθὲν μήκος.

1341. (1375). Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας λαμβάνομεν τρία διαδοχικὰ σημεῖα Α, Β, Γ. Νὰ εὐρεθῇ ἐπὶ τοῦ τμήματος ΒΓ ἓνα σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε $\overline{AM}^2 = MB \times MG$.

1342. (1376). Δίδεται μία περιφέρεια Ο. Νὰ εὐρεθῇ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως μιᾶς διαμέτρου της ΒΑ ἓνα σημεῖον Σ τοιοῦτον, ὥστε ἡ ἔφαπτομένη ΣΓ τῆς περιφέρειας νὰ εἶναι διπλασία τοῦ τμήματος ΣΑ.

1343. (1377). Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας λαμβάνομεν κατὰ σειρὰν τὰ σημεῖα Α, Β, Γ. Νὰ εὐρεθῇ ἐπὶ τῆς εὐθείας αὐτῆς ἓνα σημεῖον Μ, τὸ ὁποῖον νὰ κείται ἐκτὸς τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΒΓ καὶ τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι $\overline{MA}^2 = MB \times MG$.

1344. (1378). Νὰ προσδιορισθῇ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς πλευρᾶς ΒΓ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ ἓνα σημεῖον Σ τοιοῦτον, ὥστε $\overline{SA}^2 = SB \times SG$.

1345. (1379). Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας χγ νὰ εὐρεθῇ ἓνα σημεῖον τοιοῦτον, ὥστε αἱ ἀποστάσεις του ἀπὸ δοθεῖσαν εὐθεῖαν ΑΒ καὶ ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Γ νὰ εἶναι ἴσαι.

1346. (1380). Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας χγ νὰ εὐρεθῇ ἓνα σημεῖον, τοῦ ὁποῖου τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα Α καὶ Β νὰ εἶναι ἴσον μὲ κ.

1347. (1381). Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας χγ, νὰ εὐρεθῇ ἓνα σημεῖον, τοῦ ὁποῖου ἡ διαφορὰ τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα Α καὶ Β νὰ εἶναι ἴση μὲ δοθὲν μῆκος δ.

1348. (1382). Δίδεται περιφέρεια Ο καὶ μία χορδὴ της ΑΒ. Νὰ ὀρισθῇ ἐπὶ τῆς περιφέρειας ἓνα σημεῖον Γ τοιοῦτον, ὥστε ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων ΓΑ, ΓΒ νὰ εἶναι ἴσος μὲ $\mu : \nu$.

1349. (1383). Δίδεται ἡμιπεριφέρεια διαμέτρου ΒΓ=2R καὶ ζητεῖται νὰ εὐρεθῇ ἐπὶ τῆς ἡμιπεριφέρειας ἓνα σημεῖον Α τοιοῦτον, ὥστε, ἐὰν φέρωμεν τὴν κάθετον ΑΔ ἐπὶ τὴν διάμετρον ΒΓ καὶ τὴν χορδὴν ΑΒ νὰ εἶναι

$$\overline{BA}^2 + \overline{AD}^2 = k^2.$$

1350. (1384). Δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Β μιᾶς περιφέρειας Κ καὶ μία χορδὴ ΕΖ ὠρισμένη. Νὰ ὀρισθῇ ἐπὶ τῆς περιφέρειας ἓνα σημεῖον Γ τοιοῦτον, ὥστε αἱ χορδαὶ ΓΑ καὶ ΓΒ νὰ ἀποκόπτουν ἀπὸ τὴν χορδὴν ΕΖ καὶ ἀπὸ τὸ μέσον της Ο δύο εὐθύγραμμα τμήματα ΟΜ καὶ ΟΝ, τὰ ὁποῖα νὰ ἔχουν λόγον $\mu : \nu$.

Θ' Ὀμάς. **1351.** (1385). Εἰς δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ, νὰ ἐγγραφῇ ἓνα ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχη δοθεῖσαν περίμετρον 2τ.

1352. (1386). Εἰς δοθὲν τρίγωνον νὰ ἐγγραφῇ, ἓνα παραλληλόγραμμον, ὁμοιον πρὸς δοθὲν παραλληλόγραμμον.

1353. (1387). Εἰς δοθὲν τετράγωνον, νὰ ἐγγραφῇ ἓνα ἄλλο τετράγωνον πλευρᾶς λ. Μεταξὺ ποίων τιμῶν πρέπει νὰ μεταβάλλεται τὸ μῆκος λ;

1354. (1388). Εἰς δοθὲν τετράπλευρον νὰ ἐγγραφῇ ῥόμβος, τοῦ ὁποῖου αἱ πλευραὶ νὰ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς διαγωνίους τοῦ τετραπλεύρου.

1355. (1389). Εἰς δοθὲν ἡμικύκλιον νὰ ἐγγραφῇ ἓνα ὀρθογώνιον, ἔχον δοθεῖσαν περίμετρον 2τ.

1356. (1390). Νὰ ἐγγραφῇ εἰς κυκλικὸν τομέα ΟΑΒ, τοῦ ὁποῖου ἡ ἀκτίς ΟΑ εἶναι ἴση μὲ $R=6$ καὶ τοῦ ὁποῖου ἡ ἐπίκεντρος γωνία εἶναι 45° , ἓνα ὀρθογώνιον ΚΑΜΝ, τοῦ ὁποῖου ἡ διακόνιος εἶναι ἴση μὲ $\delta = 3\sqrt{2}$. Ὑποτίθεται.

ὅτι ἡ πλευρὰ ΚΑ κεῖται ἐπὶ τῆς ΟΑ, τὸ σημεῖον Μ ἐπὶ τοῦ τόξου ΑΒ καὶ τὸ σημεῖον Ν ἐπὶ τῆς ΟΒ.

1357. (1391). Νὰ ἐγγραφῆ εἰς ἓνα κύκλον ἓνα τρίγωνον, τοῦ ὁποῦ μίᾳ πλευρᾷ νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν εὐθεΐαν, καὶ αἱ δύο ἄλλαι πλευραὶ νὰ διέρχωνται ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα Μ καὶ Ν.

1358. (1392). Εἰς δοθέντα κύκλον, νὰ ἐγγραφῆ ἓνα ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποῦ ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν δύο προσκειμένων πλευρῶν νὰ ἰσοῦται μὲ $4k^2$.

1359. (1393). Εἰς δοθέντα κύκλον, νὰ ἐγγραφῆ ἓνα τετράπλευρον, ἂν γνωρίζωμεν δύο ἀπέναντι πλευρὰς καὶ τὸν λόγον τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

1360. (1394). Εἰς δοθέντα κύκλον, νὰ ἐγγραφῆ ἓνα τετράπλευρον, ἂν γνωρίζωμεν δύο διαδοχικὰς πλευρὰς του καὶ τὸν λόγον τῶν δύο ἄλλων.

1361. (1395). Δίδεται ἓνα τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τὸ ὁποῖον τὸ ὕψος του ΑΔ εἶναι ἴσον μὲ τὴν πλευρὰν ΒΓ. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι ὅλα τὰ ὀρθογώνια, τὰ ἐγγεγραμμένα εἰς τὸ τρίγωνον αὐτὸ καὶ τὰ ὁποῖα ἔχουν δύο κορυφὰς ἐπὶ τῆς ΒΓ, ἔχουν τὴν αὐτὴν περίμετρον.

1362. (1396). Εἰς ἓνα παραλληλόγραμμον εἶναι ἐγγεγραμμένον ἓνα τραπέζιον. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων τοῦ τραπέζιου κεῖται ἐπὶ μιᾷς τῶν διαγωνίων τοῦ παραλληλογράμμου.

1363. (1397). Νὰ περιγραφῆ περὶ δοθὲν τρίγωνον, τὸ μέγιστον δυνατὸν τρίγωνον, τὸ ὁποῖον νὰ εἶναι ὁμοιον πρὸς δοθὲν τρίγωνον.

1364. (1398). Νὰ περιγραφῆ περὶ κύκλον ἀκτίνοσ R ἓνα ἰσοσκελὲς τραπέζιον, τοῦ ὁποῦ ἡ περίμετροσ εἶναι $4r$ μέτρα. Ἐφαρμογὴ $R=3$ καὶ $t=5$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ΄
ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

1. Γενικότητες

471. Όρισμοί. Ένα πολύγωνον λέγεται **κανονικόν**, όταν όλαι αὶ γωνίαι του εἶναι ἴσαι καὶ ὅλαι αὶ πλευραὶ του εἶναι ἴσαι.

Τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον, τὸ τετράγωνον εἶναι κανονικὰ πολύγωνα.

Μία τεθλασμένη γραμμὴ λέγεται **κανονικὴ**, όταν ὅλαι αὶ πλευραὶ της εἶναι ἴσαι καὶ ὅλαι αὶ γωνίαι της εἶναι ἴσαι.

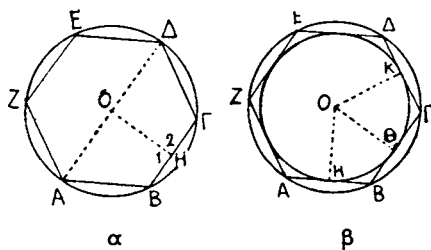
472. Θεώρημα. Κάθε κανονικὸν πολύγωνον δύναται νὰ ἐγγραφῆ εἰς κύκλον καὶ νὰ περιγραφῆ περὶ κύκλον.

Υπόθεσις: Ἐστω τὸ κανονικὸν πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖ (Σχ. 345α).

Συμπέρασμα 1^{ον}: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ πολύγωνον αὐτὸ δύναται νὰ ἐγγραφῆ εἰς κύκλον.

Ἀπόδειξις: Γράφομεν τὴν περιφέρειαν Ο, ἣ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰς τρεῖς διαδοχικὰς κορυφὰς του Α, Β, Γ. Λέγομεν, ὅτι ἡ περιφέρεια αὐτὴ θὰ περάσῃ καὶ ἀπὸ τὰς ἄλλας κορυφὰς του, ἔστω τὴν Δ.

Πράγματι· ἀπὸ τὸ κέντρον Ο φέρομεν τὴν κάθετον ΟΗ ἐπὶ τὴν ΒΓ· τὸ σημεῖον Η εἶναι τὸ μέσον τῆς ΒΓ· φέρομεν τὰς εὐθείας ΟΑ καὶ



Σχ. 345.

ΟΔ. Ἐὰν στρέψωμεν τὸ τετράπλευρον ΟΗΒΑ περὶ τὴν ΟΗ, μέχρις ὅτου πέσῃ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΟΗΓΔ, ἡ ΗΒ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΗΓ, διότι αὶ γωνίαι Η₁ καὶ Η₂ εἶναι ἴσαι ὡς ὀρθαί, τὸ Β θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Γ, διότι ΗΒ=ΗΓ, ἡ πλευρὰ ΒΑ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ΓΔ, διότι αὶ γωνίαι Β καὶ Γ εἶναι ἴσαι ἐξ ὑποθέσεως καὶ τὸ σημεῖον Α θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Δ, διότι εἶναι ΒΑ=ΓΔ ἐξ ὑποθέσεως. Ἄρα θὰ εἶναι ΟΔ'=ΟΑ καὶ ἐπομένως ἡ περιφέρεια Ο θὰ περάσῃ καὶ ἀπὸ τὴν κορυφὴν Δ.

Ὅμοιως ἀποδεικνύομεν, ὅτι ἡ περιφέρεια O θὰ περάσῃ καὶ ἀπὸ τὰς ἄλλας κορυφὰς E καὶ Z καὶ ἐπομένως τὸ πολύγωνον $ΑΒΓΔΕΖ$ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον.

Συμπέρασμα 2ον: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ πολύγωνον $ΑΒΓΔΕΖ$ (Σχ. 344β) δύναται **νὰ περιγραφῆ περὶ κύκλον.**

Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ τὸ κανονικὸν αὐτὸ πολύγωνον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον, αἱ πλευραὶ τοῦ $ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, \dots$ εἶναι ἴσαι χορδαὶ τοῦ κύκλου O καὶ ἐπομένως αἱ ἀποστάσεις τῶν $ΟΗ, ΟΘ, ΟΚ, \dots$ ἀπὸ τὸ κέντρον O θὰ εἶναι ἴσαι μεταξύ των. Ἡ περιφέρεια λοιπόν, ἡ ὁποία γράφεται μὲ κέντρον τὸ O καὶ ἀκτῖνα $ΟΗ$, θὰ περάσῃ ἀπὸ τὰ μέσα H, Θ, K, \dots τῶν πλευρῶν $ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, \dots$.

Κάθε πλευρὰ τοῦ πολυγώνου $ΑΒΓΔΕΖ$, ὡς κάθετος εἰς τὸ ἄκρον ἀκτῖνος, εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας καὶ ἐπομένως τὸ πολύγωνον αὐτὸ εἶναι περιγεγραμμένον περὶ τὸν κύκλον ($O, ΟΗ$).

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Κάθε κανονικὸν πολύγωνον. . .**

473. Ὅρισμοί. Τὸ κοινὸν κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου κύκλου εἰς ἓνα κανονικὸν πολύγωνον, λέγεται **κέντρον τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου.**

Ἡ ἀκτίς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου λέγεται **ἀκτίς τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου**, καὶ ἡ ἀκτίς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου λέγεται **ἀπόστημα τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου.**

Οὕτω αἱ $ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, \dots$ εἶναι αἱ ἀκτῖνες τοῦ πολυγώνου $ΑΒΓΔΕΖ$, αἱ δὲ $ΟΗ, ΟΘ, ΟΚ, \dots$ εἶναι τὰ ἀποστήματα αὐτοῦ.

Ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν δύο διαδοχικαὶ ἀκτῖνες ἐνὸς πολυγώνου, λέγεται **κεντρικὴ γωνία τοῦ πολυγώνου.**

Π.χ. ἡ γωνία $ΑΟΒ$ εἶναι κεντρικὴ γωνία τοῦ πολυγώνου $ΑΒΓΔΕΖ$.

Εἰς ἓνα κανονικὸν πολύγωνον μὲ n πλευράς, αἱ n κεντρικαὶ γωνίαὶ του εἶναι ἴσαι καὶ ἔχουν ἄθροισμα 4 ὀρθῶν γωνιῶν ἄρα καθεμία ἀπὸ αὐτὰς εἶναι ἴση μὲ $\frac{4 \text{ ὀρθ.}}{n}$ ἢ μὲ $\frac{360^\circ}{n}$.

Εἰς ἓνα κανονικὸν πολύγωνον μὲ n πλευράς, τὸ ἄθροισμα τῶν n ἐσωτερικῶν γωνιῶν του εἶναι ἴσον μὲ $2n-4$ ὀρθὰς γωνίας.

Ἐπειδὴ αἱ n γωνίαὶ τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου εἶναι ἴσαι ἔπεται, ὅτι κάθε μία εἶναι ἴση μὲ $\frac{2n-4}{n}$ ὀρθὰς.

Ἡ ἐσωτερικὴ γωνία ἐνὸς κανονικοῦ πολυγώνου καὶ ἡ κεντρικὴ γωνία του εἶναι παραπληρωματικά, διότι τὸ ἄθροισμά των εἶναι:

$$\frac{2n-4}{n} + \frac{4}{n} = \frac{2n-4+4}{n} = \frac{2n}{n} = 2 \text{ ὀρθὰς.}$$

Ἀσκήσεις: 1365, 1366, 1367, 1368, 1369.

474. Θεώρημα. Ἐὰν μία περιφέρεια διαιρεθῇ εἰς ἴσα μέρη :

1ον. Αἱ χορδαί, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰ διαδοχικὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως, σχηματίζουν ἓνα κανονικὸν πολύγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον.

2ον. Αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως σχηματίζουν ἓνα κανονικὸν πολύγωνον περιγεγραμμένον περὶ κύκλον.

1η Ὑπόθεσις: Ἐστω ἡ περιφέρεια O (Σχ. 346), ἡ ὁποία ἔχει διαιρεθῇ εἰς $n=5$ ἴσα τόξα $AB, B\Gamma, \dots$. Φέρομεν τὰς χορδὰς $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta E, EA$.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ πολύγωνον $AB\Gamma\Delta E$ εἶναι κανονικόν.

Ἀπόδειξις: Αἱ πλευραὶ $AB, B\Gamma, \dots$ τοῦ πολυγώνου αὐτοῦ εἶναι ἴσαι, ὡς χορδαὶ τῶν ἴσων τόξων, $AB, B\Gamma, \dots$. Αἱ γωνίαι A, B, Γ, \dots εἶναι ἴσαι, διότι εἶναι ἐγγεγραμμέναι εἰς τὸν κύκλον O καὶ ἔχουν τὸ αὐτὸ μέτρον, τὸ ἥμισυ τοῦ μέτρου τῶν $n-2$ διαιρέσεων τῆς περιφερείας. Τὸ πολύγωνον λοιπὸν $AB\Gamma\Delta E$

ἔχει τὰς πλευράς του ἴσας καὶ τὰς γωνίας του ἴσας καὶ ἐπομένως εἶναι κανονικόν.

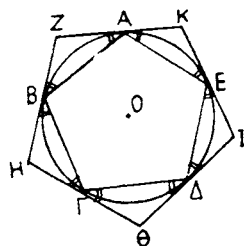
2α Ὑπόθεσις: Ἐστω ἡ περιφέρεια O , ἡ ὁποία ἔχει διαιρεθῇ εἰς 5 ἴσα τόξα $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta E, EA$. Εἰς τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως A, B, Γ, Δ, E φέρομεν ἐφαπτομένας τῆς περιφερείας, αἱ ὁποῖαι, τεμνόμεναι, σχηματίζουν τὸ περιγεγραμμένον, περὶ τὸν κύκλον O , πολύγωνον $ZH\Theta IK$.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ πολύγωνον αὐτὸ εἶναι κανονικόν.

Ἀπόδειξις: Φέρομεν τὰς χορδὰς $AB, B\Gamma, \dots$ αἱ ὁποῖαι εἶναι ἴσαι, ὡς χορδαὶ ἴσων τόξων.

Τὸ τρίγωνον AZB εἶναι ἰσοσκελές, διότι αἱ ZA καὶ ZB εἶναι ἴσαι, ὡς ἐφαπτόμεναι κύκλου, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον Z . Ὁμοίως τὰ τρίγωνα $B\eta\Gamma, \Gamma\theta\Delta, \dots$ εἶναι ἰσοσκελῆ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον.

Τὰ ἰσοσκελῆ αὐτὰ τρίγωνα $AZB, B\eta\Gamma, \Gamma\theta\Delta, \dots$ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς βάσεις των $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \dots$ ἴσας, ὡς χορδὰς ἴσων τόξων καὶ τὰς παρὰ τὴν βάσιν των γωνίας ἴσας, διότι ἐκάστη τούτων σχηματίζεται ὑπὸ χορδῆς καὶ ἐφαπτομένης καὶ ἔχει μέτρον τὸ ἥμισυ τοῦ μέτρου τοῦ τόξου μιᾶς ἐκ τῶν ἴσων διαιρέσεων τῆς περιφερείας.



Σχ. 346.

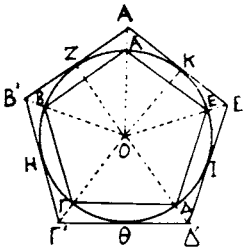
Ἀπὸ τὴν ἰσότητα τῶν ἰσοσκελῶν αὐτῶν τριγῶνων συνάγομεν, ὅτι

$$\widehat{Z} = \widehat{H} = \widehat{\Theta} = \widehat{I} = \widehat{K} \quad \text{καὶ} \quad AZ = ZB = BH = H\Gamma = \dots$$

Τὸ πολύγωνον λοιπὸν ΖΗΘΙΚ ἔχει ὅλας τὰς γωνίας του Ζ, Η, Θ, ..., ἴσας καὶ τὰς πλευράς του ΖΗ, ΗΘ, ΘΙ, . . . ἴσας, διότι ἐκάστη τούτων ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο ἴσα τμήματα· ἄρα εἶναι κανονικόν.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Ἐὰν μία περιφέρεια. . .**

475. Παρατήρησις. Κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα, διὰ νὰ περιγράψωμεν περὶ δοθέντα κύκλον ἕνα κανονικὸν πολύγωνον μὲ ν πλευράς, πρέπει νὰ διαιρέσωμεν τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου εἰς ν ἴσα μέρη καὶ νὰ φέρωμεν τὰς ἐφαπτομένας τοῦ κύκλου εἰς τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως.



Σχ. 347.

Ἄλλὰ καὶ τὰ μέσα Ζ, Η, Θ, . . . τῶν τόξων ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, . . . (Σχ. 347) τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς πλευράς τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ διαιροῦν προφανῶς τὴν περιφέρειαν εἰς ν ἴσα μέρη. Ἄν λοιπὸν φέρωμεν ἐφαπτομένας τῆς περιφερείας

εἰς τὰ σημεῖα αὐτά, θὰ σχηματισθῇ ἕνα πολύγωνον κανονικὸν περιγεγραμμένον περὶ τὸν κύκλον Ο.

Ἡ κατασκευὴ αὐτὴ εἶναι προτιμότερα, διότι τὸ πολύγωνον Α'Β'Γ'Δ'Ε', τὸ ὁποῖον σχηματίζεται κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον ἔχει τὰς πλευράς του παραλλήλους πρὸς τὰς πλευράς τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ καὶ τὰς κορυφάς του Α', Β', Γ', . . . ἐπὶ τῶν ἀκτίνων ΟΑΑ', ΟΒΒ', ΟΓΓ', . . . ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖνται καὶ αἱ κορυφαί, τοῦ ΑΒΓΔΕ.

Πράγματι· δύο πλευραί, ὅπως αἱ ΑΒ καὶ Α'Β' εἶναι παράλληλοι, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ΟΖ· ἐπίσης ὅσο κορυφαί, ὅπως Α' καὶ Α κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἀκτίνος ΟΑΑ', διότι αἱ ἐφαπτόμεναι Α'Ζ καὶ Α'Κ πρέπει νὰ τέμνονται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας ΖΟΚ.

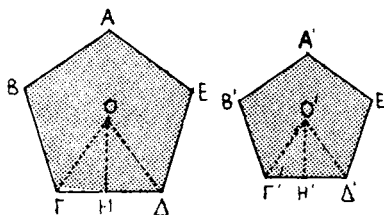
476. Θεώρημα. Δύο κανονικά πολύγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸ αὐτὸ πλῆθος πλευρῶν εἶναι ὁμοια καὶ ὁ λόγος τῆς ὁμοιότητός των εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν ἀκτίνων των ἢ τῶν ἀποστημάτων των.

1η Ὑπόθεσις: Ἐστῶσαν τὰ κανονικά πολύγωνα ΑΒΓΔΕ καὶ Α'Β'Γ'Δ'Ε', τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸ αὐτὸ πλῆθος $n=5$ πλευρῶν.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ πολύγωνα αὐτὰ εἶναι ὁμοια.

Ἀπόδειξις: Τὸ ἄθροισμα τῶν $n=5$ γωνιῶν τοῦ πολυγώνου $ΑΒΓ\dots$ εἶναι ἴσον μὲ $2n-4$ ὀρθ. γωνίας καὶ ἐπειδὴ αἱ n γωνίαι του εἶναι ἴσαι, κάθε μία ἀπὸ τὰς γωνίας του εἶναι ἴση μὲ $\frac{2n-4}{n}$ ὀρθάς.

Ὅμοίως κάθε μία ἀπὸ τὰς $n=5$ γωνίας τοῦ πολυγώνου $Α'Β'Γ'\dots$ εἶναι ἴση μὲ $\frac{2n-4}{n}$ ὀρθάς. Τὰ πολύγωνα λοιπὸν $ΑΒΓ\dots$ καὶ $Α'Β'Γ'\dots$ ἔχουν τὰς γωνίας των ἴσας.



Σχ. 348.

Ἐπειδὴ τὰ πολύγωνα αὐτὰ εἶναι κανονικά, αἱ πλευραὶ των εἶναι ἴσαι· ἤτοι εἶναι $ΑΒ=ΒΓ=ΓΔ=\dots$ (1) $Α'Β'=Β'Γ'=Γ'Δ'=\dots$ (2). Διαιροῦμεν τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\frac{ΑΒ}{Α'Β'} = \frac{ΒΓ}{Β'Γ'} = \frac{ΓΔ}{Γ'Δ'} = \dots$$

Τὰ πολύγωνα λοιπὸν $ΑΒΓΔ\dots$ καὶ $Α'Β'Γ'Δ'\dots$ ἔχουν τὰς γωνίας των ἴσας καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους· ἄρα εἶναι ὅμοια.

2^α Ὑπόθεσις: Ἐστω O τὸ κέντρον τοῦ πολυγώνου $ΑΒΓΔ\dots$ καὶ OG, OD δύο ἀκτίνες του καὶ OH τὸ ἀπόστημά του. Ὅμοίως ἔστω O' τὸ κέντρον τοῦ πολυγώνου $Α'Β'Γ'\dots$, $O'G', O'D'$ δύο ἀκτίνες του καὶ $O'H'$ τὸ ἀπόστημά του.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\frac{ΓΔ}{Γ'Δ'} = \frac{OG}{O'G'} = \frac{OH}{O'H'}$.

Ἀπόδειξις: Τὰ τρίγωνα $OGΔ$ καὶ $O'G'Δ'$ εἶναι ὅμοια, διότι εἶναι ἰσοσκελῆ καὶ ἔχουν ἴσας τὰς γωνίας τῆς κορυφῆς· πράγματι αἱ γωνίαι $ΓΟΔ$ καὶ $Γ'Ο'Δ'$ εἶναι ἴσαι, διότι εἶναι κεντρικαὶ γωνίαι καὶ ἐκάστητούτων εἶναι ἴση μὲ $\frac{4 \text{ ὀρθ.}}{n}$.

Ἀπὸ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων αὐτῶν ἔχομεν $\frac{OG}{O'G'} = \frac{ΓΔ}{Γ'Δ'}$ (3)

Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα $OGΔ$ καὶ $O'G'Δ'$ εἶναι ὅμοια, ὁ λόγος τῶν ὁμολόγων ὑψῶν των OH καὶ $O'H$ θὰ εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῆς ὁμοιότητός των· δηλ. θὰ εἶναι $\frac{OH}{O'H'} = \frac{OG}{O'G'}$ (4)

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (3) καὶ (4) συνάγομεν, ὅτι $\frac{ΓΔ}{Γ'Δ'} = \frac{OG}{O'G'} = \frac{OH}{O'H'}$.

Ἐδείχθη λοιπὸν, ὅτι: **Δύο κανονικὰ πολύγωνα...**

Ἀσκήσεις: 1370, 1371, 1372, 1373, 1374, 1375.

Ἀσκήσεις

A' Ὁμάς. 1365. (1339). Νὰ ὑπολογισθῇ: 1ον ἡ κεντρικὴ γωνία καὶ 2ον ἐκάστη γωνία τῶν κάτωθι κανονικῶν πολυγώνων: ἰσοπλεύρου τριγώνου, τετραγώνου, πενταγώνου, ἑξαγώνου, ὀκταγώνου, δεκαγώνου.

1366. (1400). Ποίου κανονικοῦ πολυγώνου ἡ κεντρικὴ γωνία εἶναι: 1ον. 30° ; 2ον 45° ; 3ον 36° ;

1367. (1401). Πόσων μοιρῶν εἶναι ἡ ἔξωτερικὴ γωνία ἑνὸς κανονικοῦ: 1ον πενταγώνου, 2ον ἑξαγώνου, 3ον ὀκταγώνου, 4ον δεκαγώνου;

1368. (1402). Ποίου κανονικοῦ πολυγώνου ἡ ἔξωτερικὴ γωνία του εἶναι ἴση μὲ δύο τρίτα τῆς ὀρθῆς;

1369. (1403). Θέλομεν νὰ καλύψωμεν, χωρὶς κενά, ἓνα ἐπίπεδον μὲ κανονικὰ πολύγωνα ἴσα μεταξύ των. Νὰ δειχθῇ, ὅτι τοῦτο εἶναι δυνατὸν μὲ τρία μόνον εἶδη κανονικῶν πολυγώνων. Ποῖα εἶναι αὐτά;

B' Ὁμάς. 1370. (1404). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἀπόστημα ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου, συναρτήσῃ τῆς πλευρᾶς του λ καὶ τῆς ἀκτίνας του.

1371. (1405). Κάθε ἰσόπλευρον πολύγωνον, τὸ ὁποῖον εἶναι περιγεγραμμένον περὶ κύκλον καὶ ἔχει περιττὸν πλῆθος πλευρῶν, εἶναι κανονικόν.

1372. (1406). Κάθε ἰσογώνιον πολύγωνον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον καὶ ἔχει περιττὸν πλῆθος πλευρῶν, εἶναι κανονικόν.

1373. (1407). Κάθε ἰσογώνιον πολύγωνον, τὸ ὁποῖον εἶναι περιγεγραμμένον περὶ κύκλον εἶναι κανονικόν.

1374. (1408). Πολύγωνον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐγγεγραμμένον καὶ περιγεγραμμένον εἰς δύο ὁμοκέντρους κύκλους, εἶναι κανονικόν.

1375. (1409). Ἐὰν φέρωμεν ὅλας τὰς διαγωνίους κανονικοῦ πενταγώνου σχηματίζεται νέον κανονικὸν πεντάγωνον.

Γ' Ὁμάς. 1376. (1410). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας $\angle ABE$ ἑνὸς κανονικοῦ πενταγώνου $AB\Gamma\Delta E$ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν πλευρὰν $B\Gamma$.

1377. (1411). Ἐὰν A, B, Γ, Δ εἶναι διαδοχικαὶ κορυφαὶ μιᾶς κανονικῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι $\overline{A\Gamma}^2 - \overline{AB}^2 = AB \times A\Delta$.

1378. (1412). Ἐνὸς κανονικοῦ πενταγώνου $AB\Gamma\Delta E$ αἱ διαγώνιοι AA καὶ BE τέμνονται εἰς ἓνα σημεῖον O . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΔO εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξύ τῶν AO καὶ AA .

1379. (1413). Ἐὰν αἱ πλευραὶ κανονικοῦ πολυγώνου προεκταθοῦν κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν, ἢ μία μετὰ τὴν ἄλλην καὶ κατὰ τὸ αὐτὸ μῆκος καὶ συνδέσωμεν τὰ ἄκρα τῶν προεκτάσεων, σχηματίζεται νέον κανονικὸν πολύγωνον. Νὰ εὐρεθῇ ὁ λόγος τῶν περιμέτρων τῶν δύο κανονικῶν πολυγώνων.

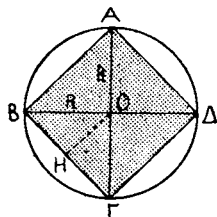
1380. (1414). Εἰς ἓνα κανονικὸν ἑξάγωνον $AB\Gamma\Delta E Z$ αἱ διαγώνιοι του $A\Gamma$ καὶ BZ τέμνονται εἰς ἓνα σημεῖον Θ . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $A\Gamma = 3A\Theta$, $BZ = 3B\Theta$.

2. Ἐγγραφή κανονικῶν πολυγώνων

477. Πρόβλημα. *Νὰ ἐγγραφῆ ἓνα τετράγωνον εἰς δοθέντα κύκλον καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ του καὶ τὸ ἀπόστημά του, συναρτήσῃ τῆς ἀκτίνοσ R τοῦ κύκλου.*

Ἐστω ὁ κύκλος O (Σχ. 349) ἀκτίνοσ R εἰς τὸν ὁποῖον θέλομεν νὰ ἐγγράψωμεν ἓνα τετράγωνον.

Κατασκευή: Φέρομεν δύο διαμέτροσ $ΑΓ$ καὶ $ΒΔ$ καθέτουσ μεταξὺ των, αἱ ὁποῖαι διαιροῦν τὴν περιφέρειαν εἰς τέσσαρα ἴσα τόξα $ΑΒ$, $ΒΓ$, $ΓΔ$, $ΔΑ$. Φέρομεν τὰς χορδὰσ $ΑΒ$, $ΒΓ$, $ΓΔ$, $ΔΑ$ καὶ τὸ σχηματιζόμενον τετράπλευρον $ΑΒΓΔ$ εἶναι τὸ ζητούμενον τετράγωνον.



Σχ. 349.

Ἀπόδειξισ: Τὸ τετράπλευρον $ΑΒΓΔ$ εἶναι τετράγωνον, διότι ἔχει τὰσ πλευράσ του ἴσασ ὡσ χορδὰσ ἴσων τόξων καὶ τὰσ γωνίασ του ὀρθὰσ, ὡσ ἐγγεγραμμένασ εἰς ἡμιπεριφερείασ.

Ὑπολογισμὸσ τῆσ πλευρὰσ του καὶ τοῦ ἀποστήματόσ του. Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $ΑΟΒ$ ἔχομεν

$$\overline{ΑΒ}^2 = \overline{ΟΒ}^2 + \overline{ΟΑ}^2 \quad \text{ἢ} \quad \overline{ΑΒ}^2 = R^2 + R^2 \quad \text{ἢ} \quad \overline{ΑΒ}^2 = 2R^2 \quad \text{ἢ} \quad ΑΒ = R\sqrt{2}.$$

Ἐστω $ΟΗ$ τὸ ἀπόστημα τοῦ τετραγώνου $ΑΒΓΔ$. τὸ $Η$ εἶναι μέσον τῆσ πλευρὰσ $ΒΓ$. Εἰς τὸ τρίγωνον $ΑΒΓ$, ἡ $ΟΗ$ συνδέει τὰ μέσα δύο πλευρῶν του, ἄρα εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆσ τρίτησ πλευρὰσ του

δηλ. εἶναι
$$ΟΗ = \frac{ΑΒ}{2} = \frac{R\sqrt{2}}{2}.$$

Ἄν παραστήσωμεν μὲ λ_4 τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου καὶ μὲ α_4 τὸ ἀπόστημά του θὰ ἔχωμεν

$$\boxed{\lambda_4 = R\sqrt{2}} \quad \text{καὶ} \quad \boxed{\alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}}$$

478. Κανονικὰ πολύγωνα μὲ 2ⁿ πλευράσ. Ἄν διαιρέσωμεν εἰς δύο ἴσα μέρη κάθε ἓνα ἀπὸ τὰ τόξα $ΑΒ$, $ΒΓ$, πὸν ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰσ πλευράσ τοῦ τετραγώνου $ΑΒΓΔ$ καὶ συνδέσωμεν μὲ εὐθείασ τὰ διαδοχικὰ σημεῖα τῆσ διαιρέσεωσ θὰ λάβωμεν ἓνα κανονικὸν ὀκτάγωνον.

Οὕτω, μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ τετραγώνου, ἐγγράφομεν εἰς ἓνα κύκλον ἓνα κανονικὸν ὀκτάγωνον.

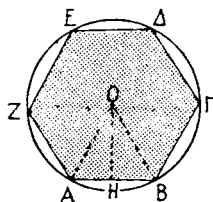
Μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ ὀκταγώνου ἐγγράφομεν, κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ἓνα κανονικὸν πολύγωνον μὲ 16 πλευράσ κ.ο.κ.

Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ ἐγγράψωμεν εἰς ἕνα κύκλον ἕνα πολύγωνον μὲ 4, 8, 16, 32, ... καὶ γενικῶς μὲ 2^n πλευρᾶς.

Ἀσκήσεις: 1381, 1382, 1383, 1384.

479. Πρόβλημα. Νὰ ἐγγραφῆ κανονικὸν ἑξάγωνον εἰς δοθέντα κύκλον καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ του καὶ τὸ ἀπόστημά του, συναρτήσῃ τῆς ἀκτίνος R τοῦ κύκλου.

Ἀνάλυσις: Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω AB (Σχ. 350) ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον O .



Σχ. 350.

Φέρομεν τὰς ἀκτίνας OA καὶ OB . Ἡ κεντρικὴ γωνία AOB εἶναι ἴση μὲ $360^\circ : 6 = 60^\circ$. Αἱ δύο ἄλλαι γωνίαι A καὶ B ἔχουν ἄθροισμα 120° καὶ ἐπειδὴ εἶναι ἴσαι, διότι τὸ τρίγωνον OAB εἶναι ἰσοσκελές, θὰ εἶναι $\widehat{A} = \widehat{B} = 60^\circ$. Τὸ τρίγωνον λοιπὸν OAB εἶναι ἰσόπλευρον καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι $AB = OA$, δηλ. ἡ πλευρὰ AB εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτίνα τοῦ κύκλου.

Κατασκευή: Διὰ νὰ ἐγγράψωμεν λοιπὸν ἕνα κανονικὸν ἑξάγωνον εἰς ἕνα κύκλον πρέπει νὰ φέρωμεν 6 φορὰς ἐπὶ τῆς περιφερείας ἕνα ἄνοιγμα τοῦ διαβήτου, ἴσον μὲ τὴν ἀκτίνα τοῦ κύκλου καὶ νὰ συνδέσωμεν ἔπειτα μὲ εὐθείας τὰ διαδοχικὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως.

Ὑπολογισμὸς τῆς πλευρᾶς του λ_6 καὶ τοῦ ἀποστήματός του α_6 . Ἐδείχθη ἄνωτέρω, ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτίνα τοῦ κύκλου ἄρα θὰ εἶναι

$$\lambda_6 = R$$

Ἐστω OH (Σχ. 350) τὸ ἀπόστημα τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου $ABΓΔΕΖ$. Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον OHA ἔχομεν

$$\overline{OH}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{AH}^2 \quad \text{ἢ} \quad \overline{OH}^2 = R^2 - \frac{R^2}{4} = \frac{4R^2 - R^2}{4} = \frac{3R^2}{4}$$

$$\text{ἄρα} \quad OH = \frac{R\sqrt{3}}{2}, \quad \text{ἢ} \quad \alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

480. Πρόβλημα. Νὰ ἐγγραφῆ ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον εἰς δοθέντα κύκλον καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ του καὶ τὸ ἀπόστημά του, συναρτήσῃ τῆς ἀκτίνος R τοῦ κύκλου.

Κατασκευή: Διαιροῦμεν τὴν περιφέρειαν O εἰς 6 ἴσα μέρη, AB , $BΓ$, $ΓΔ$, ... (Σχ. 351), ὅπως ἐδείξαμεν εἰς τὸ κανονικὸν ἑξάγωνον καὶ συνδέομεν μὲ εὐθείας, ἀνὰ δύο, τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως λαμβάνομεν

οὕτω ἓνα τρίγωνον ΑΓΕ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσόπλευρον, διότι αἱ πλευραὶ του εἶναι ἴσαι, ὡς χορδαὶ ἴσων τόξων.

Ἐπιλογισμὸς τῆς πλευρᾶς του λ_3 . Φέρομεν τὴν εὐθείαν ΑΔ καὶ τὴν χορδὴν ΓΔ. Ἐπειδὴ τὸ τόξον ΑΒΓΔ εἶναι $\frac{2}{3}$ ἢ $\frac{1}{2}$ τῆς περιφερείας, ἡ ΑΔ εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου Ο.

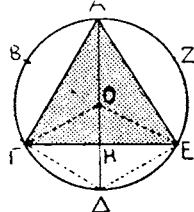
Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΓΔ ἔχομεν

$$\overline{ΑΓ^2} = \overline{ΑΔ^2} - \overline{ΓΔ^2} \quad (1)$$

Ἐπειδὴ ΑΔ=2R καὶ ΓΔ=πλευρὰ κανονικοῦ ἔξαγώνου=R, ἡ ἰσότης (1) γίνεται

$$\overline{ΑΓ^2} = 4R^2 - R^2 \quad \text{ἢ} \quad \overline{ΑΓ^2} = 3R^2$$

ἄρα $ΑΓ = R\sqrt{3}$.



Σχ. 351.

Ὅστε ἡ πλευρὰ λ_3 τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι $\lambda_3 = R\sqrt{3}$.

Ἐπιλογισμὸς τοῦ ἀποστήματος τοῦ α_3 . Ἐστω ΟΗ τὸ ἀπόστημα τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΓΕ. Ἐὰν φέρωμεν τὰς ἀκτῖνας ΟΓ καὶ ΟΕ σχηματίζεται ὁ ῥόμβος ΟΓΔΕ· ἐπειδὴ αἱ διαγώνιοι ῥόμβου εἶναι κάθετοι καὶ διχοτομοῦνται, θὰ εἶναι ΟΗ=ΗΔ· τὸ ἀπόστημα λοιπὸν τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτίνος τοῦ κύκλου· δηλ. εἶναι

$$\alpha_3 = \frac{R}{2}$$

481. Παρατήρησις. Στηριζόμενοι εἰς τὸ ὅτι τὸ ἀπόστημα τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου, τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον, εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτίνος τοῦ κύκλου, δυνάμεθα νὰ ἐγγράψωμεν, ἀπ' εὐθείας, ἓνα ἰσόπλευρον τρίγωνον εἰς ἓνα κύκλον. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ φέρωμεν μίαν διάμετρον ΑΔ τοῦ κύκλου Ο (Σχ. 351) καὶ μίαν χορδὴν ΓΕ κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ΟΔ εἰς τὸ μέσον Η αὐτῆς. Τὰ σημεῖα Α, Γ, Ε εἶναι κορυφαὶ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου.

482. Πολύγωνα μὲ 3×2^n πλευράς. Ἐὰν διαιρέσωμεν εἰς δύο ἴσα μέρη κάθε ἓνα ἀπὸ τὰ τόξα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, . . . , τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς πλευράς ἑνὸς κανονικοῦ ἔξαγώνου, ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον καὶ συνδέσωμεν μὲ εὐθείας τὰ διαδοχικὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως, λαμβάνομεν ἓνα κανονικὸν δωδεκάγωνον.

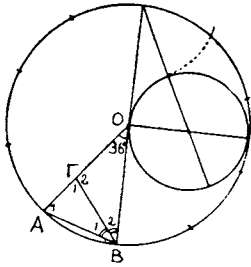
Ἄν ἐργασθῶμεν ὁμοίως καὶ εἰς τὸ δωδεκάγωνον, λαμβάνομεν ἓνα κανονικὸν πολύγωνον μὲ 24 πλευράς καὶ οὕτω καθεξῆς.

Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ ἐγγράψωμεν κανονικὰ πολύγωνα μὲ 3, 6, 12, 24, . . . καὶ γενικῶς μὲ 3×2^n πλευράς.

Ἀσκήσεις: 1385, 1386, 1387, 1388, 1389, 1390, 1391, 1392, 1393, 1394.

483. Πρόβλημα. *Νὰ ἐγγραφῆ κανονικὸν δεκάγωνον εἰς δοθέντα κύκλον καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ του, συναρτηθεῖ τῆς ἀκτίνος R τοῦ κύκλου.*

Ἀνάλυσις: Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἐλύθη καὶ ἔστω AB ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον O (Σχ. 352).



Σχ. 352.

Φέρομεν τὰς ἀκτίνας OA καὶ OB . Ἡ κεντρικὴ γωνία AOB εἶναι ἴση μὲ $360^\circ:10=36^\circ$. Αἱ δύο ἄλλαι γωνίαι A καὶ B τοῦ τριγώνου OAB ἔχουν ἄθροισμα $180^\circ-36^\circ=144^\circ$ καὶ ἐπειδὴ εἶναι ἴσαι, διότι τὸ τρίγωνον OAB εἶναι ἰσοσκελές, θὰ εἶναι $A=B=72^\circ$. Διχοτομοῦμεν τὴν γωνίαν B καὶ ἔστω B_1 ἡ διχοτόμος αὐτῆς, ὁπότε θὰ εἶναι

$$\gammaων. B_1 = \gammaων. B_2 = 36^\circ.$$

Τὸ τρίγωνον λοιπὸν OGB εἶναι ἰσοσκελές, διότι

$$\gammaων. O = \gammaων. B_2 = 36^\circ \quad \text{ἄρα θὰ εἶναι } OG = BG \quad (1)$$

Εἰς τὸ τρίγωνον ABG ἡ γωνία $A=72^\circ$, ἡ γωνία $B_1=36^\circ$, ἄρα ἡ τρίτη γωνία τοῦ G , εἶναι 72° . Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ABG εἶναι ἰσοσκελές καὶ ἐπομένως εἶναι $AB = BG$ (2)

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι

$$GO = BG = AB \quad (3)$$

Εἰς τὸ τρίγωνον OAB ἡ BG εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας B , ἄρα κατὰ τὸ θεώρημα τῆς διχοτόμου γωνίας (§ 393), θὰ ἔχωμεν

$$\frac{GO}{GA} = \frac{OB}{AB} \quad (4)$$

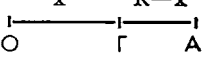
Εἰς τὴν σχέσιν αὐτὴν ἀντικαθιστῶμεν τὰ τμήματα OB καὶ AB μὲ ἴσα τμήματα, τὰ ὁποῖα κείνται ἐπὶ τῆς ἀκτίνος OA . Δηλ. θέτομεν $OB = OA$ καὶ $AB = GO$, ὡς φαίνεται ἀπὸ τὴν ἰσότητα (3), ὁπότε ἡ σχέσις (4) γράφεται $\frac{GO}{GA} = \frac{OA}{GO}$ ἢ $GO^2 = OA \times GA$ (4)

Ἡ ἰσότης αὐτὴ δεικνύει, ὅτι τὸ σημεῖον G διαιρεῖ τὴν ἀκτίνα OA εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον. Τὸ μεγαλύτερον τμῆμα τῆς εἶναι τὸ GO , τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον μὲ AB , δηλ. μὲ τὴν πλευρὰν τοῦ δεκαγώνου.

Κατασκευὴ: Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι: διὰ νὰ ἐγγράψωμεν ἓνα κανονικὸν δεκάγωνον εἰς ἓνα κύκλον διαιροῦμεν τὴν ἀκτίνα τοῦ κύκλου εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον (§ 462) ἔπειτα λαμβάνομεν ἓνα ἄνοιγμα τοῦ διαβήτου ἴσον μὲ τὸ μεγαλύτερον τμῆμα OG καὶ φέρομεν αὐτὸ τὸ μῆκος 10 φορὰς ἐπὶ τῆς περιφερείας. Τέλος συνδέομεν μὲ εὐ-

θείας τὰ διαδοχικὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως τῆς περιφερείας καὶ οὕτω λαμβάνομεν τὸ κανονικὸν δεκάγωνον, τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον.

Ἐπολογισμὸς τῆς πλευρᾶς τοῦ λ_{10} . Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ R τὴν ἀκτῖνα OA τοῦ κύκλου καὶ μὲ x τὸ μεγαλύτερον

τμήμα OG τῆς ἀκτίνος OA , ἡ ἰσότης (5) γράφεται  $x^2 = R(R-x)$ ἢ $x^2 + Rx - R^2 = 0$ (6)

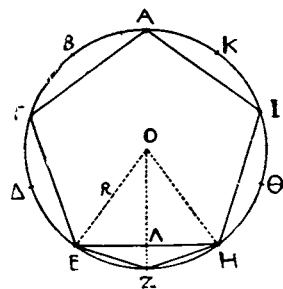
Αἱ ρίζαι τῆς δευτεροβαθμίου αὐτῆς ἐξισώσεως εἶναι $\frac{-R \pm R\sqrt{5}}{2}$.

Ἐκ τούτων ἡ ρίζα $x = \frac{R}{2}(-1 - \sqrt{5})$ ἀποκλείεται, ὡς ἀρνητικὴ καὶ ἀπολύτως μεγαλυτέρα τῆς ἀκτίνος R . Ἄρα ἡ παραδεκτὴ ρίζα τῆς ἐξισώσεως (6) εἶναι $x = \frac{R}{2}(-1 + \sqrt{5})$, δηλ. εἶναι

$$\lambda_{10} = \frac{R}{2}(-1 + \sqrt{5}) = R \times 0,61803$$

484. Πρόβλημα. *Νὰ ἐγγραφῆ κανονικὸν πεντάγωνον εἰς δοθέντα κύκλον καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ του καὶ τὸ ἀπόστημα του, συναρτήσῃ τῆς ἀκτίνος R τοῦ κύκλου.*

Κατασκευὴ: Ἐγγράφομεν εἰς τὸν δοθέντα κύκλον O ἓνα κανονικὸν δεκάγωνον $AB\Gamma\Delta\dots$ (Σχ. 353) καὶ συνδέομεν ἀνά δύο τὰς κορυφάς του· δηλ. φέρομεν τὰς χορδὰς AG, GE, EH, HI, IA καὶ λαμβάνομεν οὕτω τὸ κανονικὸν πεντάγωνον $A\Gamma E\eta I A$, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ζητούμενον.



Σχ. 353.

Ἐπολογισμὸς τῆς πλευρᾶς τοῦ λ_5 . Φέρομεν τὰς ἀκτῖνας OE καὶ OH . Ἡ OZ τέμνει τὴν $E\eta$ εἰς τὸ σημεῖον Λ , μέσον τῆς $E\eta$.

Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $O\Lambda E$ ἔχομεν $\overline{E\Lambda}^2 = \overline{OE}^2 - \overline{O\Lambda}^2$ ἢ $\overline{E\Lambda}^2 = R^2 - \overline{O\Lambda}^2$ (1).

Ἐπολογίζομεν τὴν $O\Lambda$ · ἡ $O\Lambda$ εἶναι προβολὴ τῆς OE ἐπὶ τὴν OZ . Εἰς τὸ τρίγωνον OEZ ἡ πλευρὰ EZ κεῖται ἀπέναντι τῆς ὀξείας γωνίας O καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι $\overline{EZ}^2 = \overline{OE}^2 + \overline{OZ}^2 - 2 \cdot OZ \times O\Lambda$ (2).

Ἄλλὰ $EZ = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)$, ὡς πλευρὰ κανονικοῦ δεκαγώνου καὶ $OE = OZ = R$ · ἐπομένως ἡ ἰσότης (2) γράφεται

$$\frac{R^2}{4}(\sqrt{5} - 1)^2 = R^2 + R^2 - 2R \times O\Lambda$$

$$\eta \quad \frac{R^2}{4}(5 - 2\sqrt{5} + 1) = 2R^2 - 2R \times O\Lambda$$

$$\eta \quad 2R \times O\Lambda = 2R^2 - \frac{R^2}{4}(6 - 2\sqrt{5})$$

$$\eta \quad 2R \times O\Lambda = \frac{R^2(1 + \sqrt{5})}{2}, \quad \text{ἄρα } O\Lambda = \frac{R}{4}(1 + \sqrt{5}).$$

Τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ $O\Lambda$ θέτομεν εἰς τὴν (1) καὶ ἔχομεν

$$\overline{E\Lambda}^2 = R^2 - \frac{R^2}{16}(1 + \sqrt{5})^2 \quad \eta \quad \overline{E\Lambda}^2 = \frac{16R^2 - R^2(1 + 2\sqrt{5} + 5)}{16}$$

$$\eta \quad \overline{E\Lambda}^2 = \frac{R^2(10 - 2\sqrt{5})}{16}, \quad \text{ἄρα } E\Lambda = \frac{R}{4}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}.$$

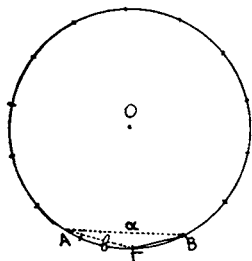
᾿Ωστε ἡ πλευρὰ λ_5 τοῦ κανονικοῦ πενταγώνου εἶναι

$$\lambda_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = R \times 1,17557.$$

Ἐπολοιομοδὸς τοῦ ἀποστήματός του a_5 . Τὸ ἀπόστημα a_5 τοῦ πενταγώνου ΑΓΕΗΙ εἶναι τὸ $O\Lambda$, τὸ ὁποῖον, ὡς ἐδείχθη ἀνωτέρω, εἶναι ἴσον μὲ $\frac{R}{4}(1 + \sqrt{5})$. ᾿Ωστε εἶναι:

$$a_5 = \frac{R}{4}(1 + \sqrt{5}).$$

485. Πρόβλημα. *Νὰ ἐγγραφῆ κανονικὸν δεκαπεντάγωνον εἰς δοθέντα κύκλον καὶ νὰ ὑπολογισθῆ ἡ πλευρὰ του, συναρτήσῃ τῆς ἀκτίνας R τοῦ κύκλου.*



Σχ. 354.

Κατασκευή: Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Α τῆς δοθείσης περιφερείας φέρομεν μίαν χορδὴν ΑΒ ἴσην μὲ τὴν ἀκτίνα τοῦ κύκλου O , ὁπότε τὸ ἀντίστοιχον τόξον ΑΒ εἶναι τὸ $\frac{1}{6}$ τῆς περιφερείας O . Ἐπίσης ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον Α φέρομεν μίαν χορδὴν ΑΓ ἴσην μὲ τὴν πλευρὰν τοῦ κανονικοῦ δεκαγώνου, τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον O · τὸ ἀντίστοιχον τόξον ΑΓ θὰ εἶναι τὸ $\frac{1}{10}$ τῆς περιφερείας. Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$\begin{aligned} \text{τόξ. } \Gamma B &= \text{τόξ. } AB - \text{τόξ. } A\Gamma = \\ &= \frac{1}{6} \text{ περιφ.} - \frac{1}{10} \text{ περιφ.} = \frac{5-3}{30} \text{ περιφ.} = \frac{1}{15} \text{ περιφ.} \end{aligned}$$

᾿Επειδὴ τὸ τόξον ΓB εἶναι τὸ $\frac{1}{15}$ τῆς περιφερείας O , ἡ χορδὴ του ΓB θὰ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ δεκαπενταγώνου, τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον O .

Λαμβάνομεν ἔπειτα 15 διαδοχικὰς χορδὰς ἴσας μὲ τὴν χορδὴν ΓB καὶ σχηματίζεται οὕτω τὸ κανονικὸν δεκαπεντάγωνον.

᾿Υπολοιομοδὸς τῆς πλευρᾶς του λ_{15} . Διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν

πλευρὰν τοῦ κανονικοῦ δεκαπενταγώνου, τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτίνας R, ἐφαρμόζομεν τὸ **θεώρημα τῶν τριῶν χορδῶν***.

Ἄν καλέσωμεν μὲ α τὴν χορδὴν AB καὶ μὲ β τὴν χορδὴν AG θὰ ἔχωμεν κατὰ τὸ θεώρημα αὐτὸ $GB = \frac{\alpha\sqrt{4R^2 - \beta^2} - \beta\sqrt{4R^2 - \alpha^2}}{2R}$.

Ἄν θέσωμεν εἰς τὸν τύπον αὐτὸν $GB = \lambda_{15}$, $\alpha = R$, $\beta = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)$ λαμβάνομεν

$$\begin{aligned} \lambda_{15} &= \frac{R\sqrt{4R^2 - \frac{R^2}{4}(\sqrt{5} - 1)^2} - \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)\sqrt{4R^2 - R^2}}{2R} \\ &= \frac{R\sqrt{4R^2 - \frac{R^2}{4}(5 - 2\sqrt{5} + 1)} - \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)\sqrt{3R^2}}{2R} \\ &= \frac{\frac{R}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

ἢ $\lambda_{15} = \frac{R}{4}(\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{15} + \sqrt{3})$.

* *Ἀσκήσεις*: 1395.

Ἀσκήσεις

A' Ὀμάς. 1381. (1415). Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ καὶ ἡ διαγώνιος ἐνὸς τετραγώνου, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ἄθροισμὰ των εἶναι ἴσον μὲ $\sqrt{2}$.

1382. (1416). Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ καὶ τὸ ἀπόστημα ἐνὸς κανονικοῦ ὀκταγώνου, ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτίνας R.

1383. (1417). Ἡ πλευρὰ ἐνὸς κανονικοῦ ὀκταγώνου εἶναι 1 μέτρ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτίς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

1384. (1418). Ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν πλευρῶν τοῦ τετραγώνου καὶ τοῦ κανονικοῦ ὀκταγώνου, ἐγγεγραμμένων εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον, εἶναι 3 ἐκ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτίς τοῦ κύκλου αὐτοῦ καὶ αἱ πλευραὶ τῶν δύο πολυγώνων.

1385. (1419). Τὸ ὕψος ἐνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ 1 μέτρ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ περίμετρος τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου, τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸν αὐτὸν κύκλον.

1386. (1420). Ἡ περίμετρος ἐνὸς κανονικοῦ ἑξαγώνου εἶναι 120 μέτρ. Πόσον εἶναι τὸ ἀπόστημά του;

1387. (1421). Τὸ ἀπόστημα ἐνὸς κανονικοῦ ἑξαγώνου εἶναι 2,80 μ. Πόση εἶναι ἡ περίμετρος του.

1388. (1422). Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ ἐνὸς κανονικοῦ ἑξαγώνου, περιγεγραμμένου περὶ κύκλον ἀκτίνας R.

* Τὸ θεώρημα τῶν τριῶν χορδῶν θὰ ἀναγραφῇ εἰς τὸ **Συμπλήρωμα τοῦ τρίτου καὶ τετάρτου βιβλίου**.

1389. (1423). Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ ἐνὸς κανονικοῦ δωδεκαγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτίνοσ R.

B' 'Ομάς. 1390. (1424). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς ἰσοπλεύρου τριγώνου, ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον, ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου καὶ τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου.

1391. (1425). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ περίμετροσ ἐνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου, ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον, εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆσ περιμέτρου τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου, τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸν αὐτὸν κύκλον.

1392. (1426). Δίδεται ἓνα κανονικὸν ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι: 1ον: ἡ διαγώνιοσ ΒΖ διαιρεῖ τὴν ΑΔ εἰς δύο μέρη ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἓνα εἶναι τριπλάσιον τοῦ ἄλλου.

2ον. αἱ διαγώνιοι ΖΔ καὶ ΕΓ χωρίζονται εἰς δύο μέρη, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἓνα εἶναι διπλάσιον τοῦ ἄλλου.

1393. (1427). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἓνα κυρτὸν ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰσ πλευρᾶσ του ἴσασ καὶ τὰσ γωνίασ Α, Β, Γ, Ε ἴσασ, εἶναι κανονικόν.

1394. (1428). Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ἐνὸς κανονικοῦ ἑξαγώνου καὶ ἑξωτερικῶσ αὐτοῦ, κατασκευάζομεν τετράγωνα. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ κορυφαὶ τοῦ τετραγώνου, αἱ ὁποῖαι δὲν συμπίπτουν μὲ τὰσ κορυφᾶσ τοῦ ἑξαγώνου, εἶναι κορυφαὶ κανονικοῦ δωδεκαγώνου.

1395. (1429). Ἡ πλευρὰ ἐνὸς κανονικοῦ δεκαγώνου εἶναι $\lambda=0,20$ μέτρα. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἀπόστημά του.

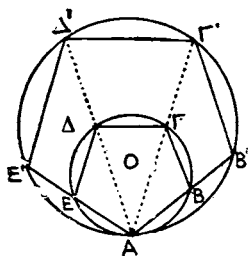
3. Προβλήματα ἐπὶ τῶν κυρτῶν κανονικῶν πολυγώνων

486. Πρόβλημα. Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα κανονικὸν πολύγωνον, διὰν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν του.

Λύσις. Ἐστω, ὅτι θέλομεν νὰ κατασκευάσωμεν ἓνα κανονικὸν πεντάγωνον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχη πλευρὰν ἴσην μὲ λ .

Ἐγγράφομεν εἰς τυχόντα κύκλον Ο τὸ κανονικὸν πεντάγωνον ΑΒΓΔΕ. Ἐπειδὴ τὸ ζητούμενον πεντάγωνον εἶναι κανονικόν, θὰ εἶναι ὁμοιον πρὸσ τὸ ΑΒΓΔΕ (§ 476). Τὸ πρόβλημα λοιπὸν ἀνάγεται εἰς τό: **Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα πολύγωνον ὁμοιον πρὸσ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ καὶ τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ, ἡ ὁμόλογοσ πρὸσ τὴν ΑΒ, νὰ ἔχη δοθὲν μῆκοσ λ** (§ 464).

Πρὸσ τοῦτο ἐπὶ τῆσ πλευρᾶσ ΑΒ λαμβάνομεν τμήμα ΑΒ'= λ . Ἀπὸ τὸ Β' φέρομεν παράλληλον Β'Γ' πρὸσ τὴν ΒΓ, ἡ ὁποῖα τέμνει τὴν προέκτασιν τῆσ διαγωνίου ΑΓ εἰς τὸ Γ'. Ἀπὸ τὸ Γ' φέρο-



Σχ. 355.

μεν παράλληλον πρὸς τὴν πλευρὰν ΓΔ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς διαγωνίου ΑΔ εἰς τὸ Δ'. Τέλος ἀπὸ τὸ Δ' φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΔΕ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΕ εἰς τὸ Ε'. Τὸ πεντάγωνον ΑΒ'Γ'Δ'Ε' εἶναι τὸ ζητούμενον πεντάγωνον.

487. Πρόβλημα. *Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα κανονικὸν πολύγωνον, δταν γνωρίζωμεν τὸ ἀπόστημα τῶν.*

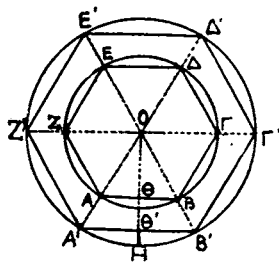
Λύσις. Ἐστω, ὅτι θέλομεν νὰ κατασκευάσωμεν ἓνα κανονικὸν πολύγωνον μὲ n πλευρὰς καὶ τοῦ ὁποίου τὸ ἀπόστημα νὰ ἔχη δοθὲν μῆκος k .

Ἐγγράφομεν εἰς τυχόντα κύκλον O ἓνα κανονικὸν πολύγωνον μὲ n πλευρὰς, ἔστω τὸ ΑΒΓ... (Σχ. 356).

Ἐπειδὴ τὸ ζητούμενον κανονικὸν πολύγωνον θὰ ἔχη n πλευρὰς, θὰ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ ΑΒΓ... καὶ ὁ λόγος τῆς ὁμοιότητός των θὰ εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν ἀποστημάτων των.

Πρὸς τοῦτο φέρομεν τὸ ἀπόστημα $O\Theta$ τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου ΑΒΓ... καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτοῦ τμήμα $O\Theta' = k$.

Ἀπὸ τὸ Θ' φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΒ, ἡ ὁποία τέμνει τὰς προεκτάσεις τῶν ἀκτίων OA καὶ OB εἰς τὰ σημεῖα A' καὶ B' . Ἀπὸ τὸ B' φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ἀκτίνα OG εἰς τὸ Γ' . Ἀπὸ τὸ Γ' φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$, ἡ ὁποία τέμνει τὴν $O\Delta$ εἰς τὸ Δ' κ.ο.κ. Τὸ σχηματιζόμενον πολύγωνον $A'B'\Gamma'\Delta' \dots$ εἶναι τὸ ζητούμενον πολύγωνον.



Σχ. 356.

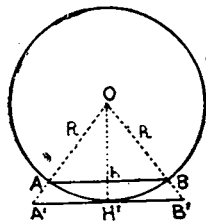
488. Πρόβλημα. *Νὰ περιγραφῇ περὶ δοθέντα κύκλον κανονικὸν πολύγωνον μὲ n πλευρὰς.*

Λύσις. Ἐγγράφομεν εἰς τὸν δοθέντα κύκλον ἓνα κανονικὸν πολύγωνον μὲ n πλευρὰς καὶ φέρομεν ἑφαπτομένας τοῦ κύκλου, εἴτε εἰς τὰς κορυφάς, εἴτε παραλλήλως πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου.

489. Πρόβλημα. *Ἄν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν $AB = \lambda$ ἐνὸς κανονικοῦ πολυγώνου μὲ n πλευρὰς, ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτίνας R , νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ $A'B' = \lambda'$ τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸν αὐτὸν κύκλον καὶ τὸ ὅποιον ἔχει τὸ αὐτὸ πλῆθος πλευρῶν (Σχ. 357).*

Λύσις. Ἐστω $AB = \lambda$ ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον O . Διὰ νὰ λάβωμεν τὴν πλευρὰν $A'B' = \lambda'$

τοῦ περιγεγραμμένου πολυγώνου φέρομεν ἑφαπτομένην τοῦ κύκλου O εἰς τὸ μέσον H' τοῦ τόξου AB , ἡ ὁποία τέμνει τὰς ἀκτίνας OA καὶ OB εἰς τὰ σημεῖα A' καὶ B' .



Σχ. 357.

Φέρομεν τὴν ἀκτίνα OH' , ἡ ὁποία τέμνει τὴν AB εἰς τὸ H .

Τὸ OH εἶναι τὸ ἀπόστημα τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου καὶ τὸ OH' εἶναι τὸ ἀπόστημα τοῦ περιγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου.

Ἐπειδὴ ἴσα πολύγωνα αὐτὰ εἶναι ὅμοια, διότι εἶναι κανονικά καὶ ἔχουν τὸ αὐτὸ πλῆθος πλευρῶν, ὁ λόγος τῆς ὁμοιότητός των θὰ εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν ἀποστημάτων (§ 476) ἤτοι θὰ εἶναι $\frac{A'B'}{AB} = \frac{OH'}{OH}$, $\frac{\lambda'_v}{\lambda_v} = \frac{R}{OH}$.

$$\text{Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν λαμβάνομεν } \lambda'_v = \frac{\lambda_v R}{OH} \quad (1)$$

Ὑπολογίζομεν τὸ ἀπόστημα OH . Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον OHA ἔχομεν $\overline{OH}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{AH}^2$ ἢ $\overline{OH}^2 = R^2 - \frac{\lambda_v^2}{4} = \frac{4R^2 - \lambda_v^2}{4}$,

$$\text{ἄρα } HO = \frac{1}{2} \sqrt{4R^2 - \lambda_v^2}.$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὸ OH μὲ τὸ ἴσον του καὶ ἔχομεν

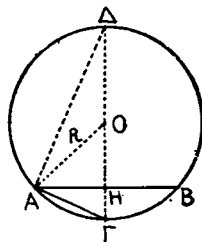
$$\lambda'_v = \frac{2\lambda_v R}{\sqrt{4R^2 - \lambda_v^2}}.$$

Ἀσκησις: 1396.

490. Πρόβλημα. Ἐάν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν $AB = \lambda$ ἐνός κανονικοῦ πολυγώνου μὲ n πλευράς, ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτίνας R , νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ λ'_v τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον καὶ τὸ ὅποιοι ἔχει διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν.

Λύσις. Ἐστω AB ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον O (Σχ. 358). Ἐὰν Γ εἶναι τὸ μέσον τοῦ τόξου AB , ἡ χορδὴ $A\Gamma$ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου, τὸ ὅποιοι ἔχει διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν.

Φέρομεν τὴν διάμετρον $GO\Delta$ καὶ τὴν χορδὴν $A\Delta$. Ἡ διάμετρος $\Delta\Gamma$ τέμνει τὴν πλευ-



Σχ. 358.

ρὰν AB εἰς τὸ μέσον H. Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΔΑΓ ἔχομεν

$$\overline{ΑΓ}^2 = ΔΓ \times ΓΗ \quad \eta \quad \overline{ΑΓ}^2 = 2R \times (R - OH) \quad (1)$$

Ἐπολογίζομεν τὸ ἀπόστημα OH· ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον

ΟΗΑ ἔχομεν $\overline{ΟΗ}^2 = \overline{ΟΑ}^2 - \overline{ΑΗ}^2 = R^2 - \frac{\lambda_v^2}{4} = \frac{4R^2 - \lambda_v^2}{4}$,

ἄρα $OH = \frac{\sqrt{4R^2 - \lambda_v^2}}{2}$.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὸ OH μὲ τὴν τιμὴν του καὶ ἔχομεν

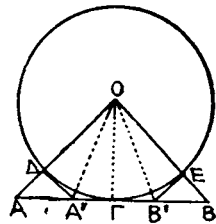
$$\overline{ΑΓ}^2 = 2R \left(R - \frac{\sqrt{4R^2 - \lambda_v^2}}{2} \right) = 2R^2 - R\sqrt{4R^2 - \lambda_v^2}$$

ἄρα $\boxed{ΑΓ = \lambda_{2v} = \sqrt{R(2R - \sqrt{4R^2 - \lambda_v^2})}}$.

Ἄσκησης: 1397.

491. Πρόβλημα. Ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν $AB = \lambda_v$ ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου μὲ v πλευράς, περιγεγραμμένου περὶ κύκλον, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ $A'B' = \lambda_{2v}$ τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸν αὐτὸν κύκλον καὶ τὸ ὅποιον ἔχει διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν.

Λύσις. Ἐστω AB (Σχ. 359) ἡ πλευρὰ ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου, περιγεγραμμένου περὶ τὸν κύκλον O. Φέρομεν τὰς ἀκτίνιας OA καὶ OB, αἱ ὁποῖαι τέμνουσιν τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε. Φέρομεν ἑφαπτομένας τοῦ κύκλου O εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε, αἱ ὁποῖαι τέμνουσιν τὴν AB εἰς τὰ σημεῖα A' καὶ B'. Ἡ A'B' εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ κανονικοῦ πολυγώνου, τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸν κύκλον O καὶ τὸ ὅποιον ἔχει διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν.



Σχ. 359.

Πράγματι· αἱ εὐθεῖαι OA' καὶ OB' εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν ΔΟΓ καὶ ΓΟΕ καὶ συνεπῶς ἡ γωνία A'OB' εἶναι τὸ ἥμισυ τῆς γωνίας AOB.

Εἰς τὸ τρίγωνον AOG ἡ OA' εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας O καὶ ἐπομένως διαιρεῖ τὴν πλευρὰν AG εἰς δύο τμήματα A'A καὶ A'Γ, ἀνάλογα τῶν πλευρῶν OA καὶ OG· ἥτοι εἶναι

$$\frac{A'Γ}{A'A} = \frac{OG}{OA} \quad \eta \quad \frac{A'Γ}{OG} = \frac{A'A}{OA}$$

$$\eta \quad \frac{A'Γ}{OG} = \frac{A'A}{OA} = \frac{A'Γ + A'A}{OG + OA} = \frac{GA}{OG + OA}$$

$$\text{Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν λαμβάνομεν } A\Gamma = \frac{O\Gamma \times \Gamma A}{O\Gamma + O A} \quad (1)$$

$$\text{Ἐδῶ εἶναι } O\Gamma = R, \quad \Gamma A = \frac{AB}{2} = \frac{\lambda_v'}{2}.$$

Ὑπολογίζομεν τὴν $O A$ ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $O\Gamma A$ ἔχομεν

$$\overline{O A^2} = \overline{O\Gamma^2} + \overline{A\Gamma^2} = R^2 + \frac{\lambda_v'^2}{4} = \frac{4R^2 + \lambda_v'^2}{4}, \quad \text{ἄρα } O A = \frac{\sqrt{4R^2 + \lambda_v'^2}}{2}.$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν (1) τὰ $O\Gamma$, ΓA , $O A$ μὲ τὰ ἴσα τῶν καὶ ἔχομεν

$$A\Gamma = \frac{R \times \frac{\lambda_v'}{2}}{R + \frac{\sqrt{4R^2 + \lambda_v'^2}}{2}} = \frac{R\lambda_v'}{2R + \sqrt{4R^2 + \lambda_v'^2}}$$

ἄρα

$$A'B' = \lambda_{2,v} = \frac{2R\lambda_v'}{2R + \sqrt{4R^2 + \lambda_v'^2}}$$

Ἀσκήσεις

A' Ὁμάς. 1396. (1430). Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ :

1ον. τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου. 2ον. τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου. 3ον. τοῦ κανονικοῦ ὀκταγώνου, τὰ ὁποῖα εἶναι περιγεγραμμένα περὶ κύκλον ἀκτίνοσ R .

1397. (1431). Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ πλευραὶ τῶν κανονικῶν πολυγώνων μὲ 4, 8, 16, 32, . . . , 2^v πλευράσ, τὰ ὁποῖα εἶναι ἐγγεγραμμένα εἰς κύκλον ἀκτίνοσ $R=1$.

B' Ὁμάς. 1398. (1432). Ἀπὸ ἓνα σημεῖον A μιᾶσ περιφερείασ ἀκτίνοσ R λαμβάνομεν διαδοχικῶσ τὰ τόξα $AB=60^\circ$, $B\Gamma=120^\circ$, $\Gamma\Delta=120^\circ$ καὶ σχηματίζομεν τὸ τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$.

1ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ τοῦ τετραπλεύρου συναρτήσῃ τῆσ ἀκτίνοσ R .

2ον. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι αἱ διαγώνιοι $A\Gamma$ καὶ $B\Delta$ εἶναι κάθετοι.

3ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαγώνιοι $A\Gamma$ καὶ $B\Delta$ καὶ τὰ τμήματα αὐτῶν, τὰ ὁποῖα ὀρίζονται ἀπὸ τὸ σημεῖον τῆσ τομῆσ τῶν.

1399. (1433). Ἐνα ἰσόπλευρον τρίγωνον $AB\Gamma$ πλευράσ a εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον O . Ἐπὶ τοῦ τόξου $B\Gamma$ λαμβάνομεν ἓνα σημεῖον M καὶ φέρομεν τὰς εὐθείασ MA , MB , $M\Gamma$. Ἡ MA τέμνει τὴν $B\Gamma$ εἰς τὸ σημεῖον Δ . Ἐπὶ τῆσ MA λαμβάνομεν ἓνα σημεῖον E τοιοῦτον, ὥστε $\gamma\omega\nu.MBE=60^\circ$.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι εἶναι $ME=MB$ καὶ $EA=M\Gamma$.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὰ τρίγωνα BMA καὶ $\Delta M\Gamma$ εἶναι ὅμοια.

3ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ MB , $M\Gamma$, $M\Delta$, συναρτήσῃ τοῦ a εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν εἶναι $MB=M\Gamma$.

1400. (1434). Εἰς κύκλον O ἀκτίνος R ἐγγράφομεν ἰσόπλευρον τρίγωνον $ABΓ$. Μὲ πλευρὰς τὰς $ΑΓ$ καὶ $ΒΓ$ κατασκευάζομεν τὰ τετράγωνα $ΑΓΔΖ$ καὶ $ΒΗΘΓ$, τὰ ὁποῖα κείνται ἄκως τοῦ τριγώνου $ΑΒΓ$.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ πλευραὶ $ΑΖ$ καὶ $ΒΗ$ τέμνονται εἰς ἓνα σημεῖον $Μ$, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τῆς περιφέρειας O καὶ ὅτι αἱ πλευραὶ $ΖΔ$ καὶ $ΗΘ$ τέμνονται εἰς ἓνα σημεῖον $Ν$, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς διαμέτρου $ΜΟΓ$.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον $ΖΗΝ$ εἶναι ἰσόπλευρον.

1401. (1435) Δίδεται περιφέρεια O διαμέτρου $ΑΒ=2R$. Ἀπὸ τυχὸν σημείου $Γ$ τῆς περιφέρειας φέρομεν τὰς χορδὰς $ΓΔ$ καὶ $ΓΕ$ κειμένας πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς διαμέτρου $ΑΒ$ καὶ ἀντιστοιχῶς ἴσας μὲ τὰς πλευρὰς ἑνὸς κανονικοῦ ἑξαγώνου καὶ ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου, ἐγγεγραμμένων εἰς τὸν κύκλον O .

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ σημεῖον $Δ$ εἶναι τὸ μέσον τοῦ τόξου $ΓΔΕ$ καὶ ὅτι ἡ ἀκτίς $ΟΔ$ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν $ΓΕ$ εἰς τὸ μέσον $Ζ$ αὐτῆς.

2ον. Νὰ ὀρισθῇ τὸ σχῆμα τοῦ τετραπλεύρου $ΓΔΕΟ$ καὶ νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ του καὶ αἱ διαγώνιοί του, συναρτήσει τῆς ἀκτίνος R .

3ον. Προβάλλομεν τὰ σημεῖα $Γ, Δ, Ζ, Ε$ ἐπὶ τὴν $ΑΒ$ καὶ ἔστωσαν $Γ', Δ', Ζ', Ε'$ αἱ προβολαὶ των. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ $Ζ'$ εἶναι τὸ μέσον τῆς $Γ'Ε'$ καὶ τῆς $Δ'Ο$, καὶ ὅτι $ΔΔ' = ΓΓ' + ΕΕ'$.

1402. (1436). Δίδεται περιφέρεια O ἀκτίνος R . Ἐπὶ τῆς περιφέρειας λαμβάνομεν τὰ διαδοχικὰ τόξα $ΑΒ=60^\circ$, $ΒΓ=90^\circ$ καὶ $ΓΔ=120^\circ$.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τετράπλευρον $ΑΒΓΔ$ εἶναι τραπέζιον καὶ νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ του.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ διαγώνιοι $ΑΓ$ καὶ $ΒΔ$ τοῦ τραπέζιου $ΑΒΓΔ$ εἶναι κάθετοι.

3ον. Ἐστὼ $Η$ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων $ΑΓ$ καὶ $ΒΔ$ καὶ $Ε$ καὶ $Ζ$ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν $ΑΒ$ καὶ $ΓΔ$. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα $Ε, Η, Ο, Ζ$ κείνται ἐπ' εὐθείας.

4ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ τμήματα $ΑΗ, ΗΓ, ΕΗ, ΗΖ$.

1403. (1437). Δίδεται περιφέρεια O διαμέτρου $ΑΒ$ καὶ μία χορδὴ $ΓΔ$ κάθετος ἐπὶ τὴν διάμετρον $ΑΒ$. Ἐκ τυχόντος σημείου $Μ$ τῆς περιφέρειας O φέρομεν τὰς $ΜΓ$, καὶ $ΜΔ$.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ σημεῖον $Α$ εἶναι τὸ κέντρον μιᾶς περιφέρειας, ἐφαπτομένης τῆς $ΜΓ$ καὶ $ΜΔ$. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ περιφέρεια αὐτὴ διὰ δοθεῖσαν θέσιν τοῦ $Μ$.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ὅταν τὰ $Μ$ διαγράφη τὴν περιφέρειαν O , τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τοῦ κύκλου A καὶ τῶν εὐθειῶν $ΜΓ$ καὶ $ΜΔ$ γράφουν περιφέρειας σταθεράς.

3ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τοῦ κύκλου A καὶ τῶν εὐθειῶν $ΜΓ$ καὶ $ΜΔ$ καὶ τὸ σημεῖον $Η$ τῆς τομῆς τῆς διαμέτρου $ΑΒ$ καὶ τῆς χορδῆς $ΓΔ$ κείνται ἐπ' εὐθείας.

4ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτίς τοῦ κύκλου A εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν ἡ $ΓΔ$ εἶναι πλευρὰ τετραγώνου, ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον O διαμέτρου $ΑΒ=8$ ἐκ. καὶ τὸ $Μ$ κεῖται μεταξύ A καὶ $Γ'$ καὶ εἰς τοιαύτην θέσιν, ὥστε νὰ εἶναι $τοξ.ΜΓ=90^\circ$.

1404. (1438). Δίδεται ἓνα τετράγωνον ΑΒΓΔ πλευρᾶς 2α καὶ κέντρου Ο. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΔ λαμβάνομεν μήκη $ΑΑ' = ΑΑ'' = λ$, μικρότερα τοῦ ἡμίσεως τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου. Ἐπίσης ἀπὸ τὰς κορυφᾶς Β, Γ, Δ, καὶ ἐπὶ τῶν πλευρῶν τοῦ τετραγώνου λαμβάνομεν ὁμοίως μήκη

$$ΒΒ' = ΒΒ'' = ΓΓ' = ΓΓ'' = ΔΔ' = ΔΔ'' = λ.$$

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ σχηματιζόμενον ὀκτάγωνον Α'Β'Β''Γ''Γ'Δ''Δ'Α'', εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

2ον. Πῶς πρέπει νὰ ἐκλεγῇ ὁ λ, ἵνα τὸ ὀκτάγωνον εἶναι κανονικόν.

3ον. Πῶς πρέπει νὰ ἐκλεγῇ ὁ λ συναρτήσῃ τοῦ α, ἵνα τὰ τρίγωνα ΟΑ'Β'', ΟΒ'Γ'', ... εἶναι ἰσόπλευρα;

1405. (1439). Ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν ἀκτίνα καὶ τὸ ἀπόστημα ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου μὲ ν πλευρᾶς, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτίς καὶ τὸ ἀπόστημα ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου μὲ 2ν πλευρᾶς καὶ ἰσοπεριμέτρου πρὸς τὸ πρῶτον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ζ΄.

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΗΣ ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΣ ΕΝΟΣ ΚΥΚΛΟΥ

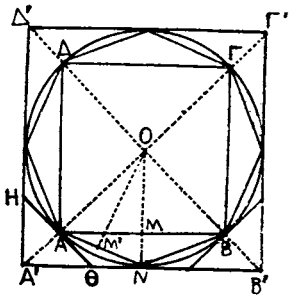
492. Μήκος περιφέρειας. Κάθε εὐθύγραμμον τμήμα δύναται νὰ παρασταθῆ μὲ ἓνα ἀριθμὸν, διότι ἠμποροῦμεν νὰ τὸ συγκρίνωμεν πρὸς ἓνα ἄλλο εὐθύγραμμον τμήμα, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν ὡς μονάδα.

Ἐπίσης κάθε τόξον κύκλου δύναται νὰ παρασταθῆ μὲ ἓνα ἀριθμὸν, ἂν τὸ συγκρίνωμεν πρὸς ἓνα ἄλλο τόξον τοῦ αὐτοῦ κύκλου, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν ὡς μονάδα.

Δὲν δυνάμεθα ὁμῶς νὰ συγκρίνωμεν μεταξύ των δύο τόξα διαφόρων περιφερειῶν ἢ ἓνα τόξον καὶ ἓνα εὐθύγραμμον τμήμα, διότι δὲν ἠμποροῦμεν νὰ θέσωμεν τὸ ἓνα ἐπὶ τοῦ ἄλλου, ὥστε τὰ σημεῖα των νὰ συμπίσουν.

Εἶναι ἀνάγκη λοιπὸν νὰ ὀρίσωμεν τί ὀνομάζομεν **μήκος περιφέρειας ἑνὸς κύκλου, μήκος τόξου.**

Ἐστω μία περιφέρεια O , ἓνα πολύγωνον $ABΓΔ$ (Σχ. 360) ἔγγεγραμμένον εἰς αὐτήν καὶ $A'B'Γ'D'$ ἓνα πολύγωνον περιγεγραμμένον περὶ αὐτήν, τὸ ὁποῖον ἔχει τὸ αὐτὸ πλῆθος πλευρῶν μὲ τὸ $ABΓ$ Εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ περιφέρεια Γ τοῦ κύκλου O εἶναι μεγαλύτερα τῆς περιμέτρου Π τοῦ ἔγγεγραμμένου πολυγώνου $ABΓ$ καὶ μικρότερα τῆς περιμέτρου Π' τοῦ πολυγώνου $A'B'Γ'$, δηλ. εἶναι $\Pi < \Gamma < \Pi'$.



Σχ. 360.

Ἐὰν διπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τῶν δύο αὐτῶν πολυγώνων οὕτως, ὥστε νὰ παραμένουν κανονικά, ἡ περίμετρος Π αὐξάνει, διότι κάθε πλευρὰ τοῦ πρώτου πολυγώνου, ὅπως ἡ AB , ἀντικαθίσταται μὲ τὴν τεθλασμένην γραμμὴν ANB , ἐνῶ ἡ περίμετρος Π' ἐλαττοῦται, διότι, ὅταν μεταβαίνωμεν ἀπὸ τὸ ἓνα πολύγωνον εἰς τὸ ἄλλο, κάθε τεθλασμένη γραμμὴ, ὅπως ἡ $HA'\Theta$, ἀντικαθίσταται μὲ τὴν εὐθεῖαν $H\Theta$. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ Π_1 καὶ Π_1' τὰς νέας περιμέτρους, θὰ εἶναι

πάλιν $\Pi_1 < \Gamma < \Pi_1'$. Ἐὰν διπλασιάζωμεν ἀκαταπαύστως τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τῶν δύο αὐτῶν πολυγώνων, αἱ περιμέτροι τοῦ ἐγγεγραμμένου πολυγώνου καὶ τοῦ περιγεγραμμένου πλησιάζουν ἐπὶ μᾶλλον καὶ μᾶλλον πρὸς τὴν περιφέρειαν Γ , δηλ. θὰ ἔχουν ἓνα κοινὸν ὄριον (*) τὴν περιφέρειαν καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι: ὄριον $\Pi = \delta$ ριον $\Pi' = \Gamma$.

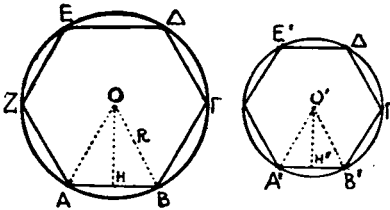
Ὡστε δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν, ὅτι:

Τὸ μῆκος μιᾶς περιφερείας κύκλου εἶναι τὸ κοινὸν ὄριον, πρὸς τὸ ὁποῖον τείνουν αἱ περιμέτροι Π καὶ Π' τῶν ὁμοίων κανονικῶν πολυγώνων, τοῦ μὲν ἐνὸς ἐγγεγραμμένου, τοῦ δὲ ἄλλου περιγεγραμμένου περὶ τὸν κύκλον, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῶν πολυγώνων αὐτῶν διπλασιάζεται ἀπεριορίστως.

493. Ἀνάπτυγμα περιφερείας. Τὸ εὐθύγραμμον τμήμα, τοῦ ὁποῖου τὸ μῆκος εἶναι ἴσον μὲ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας ἐνὸς κύκλου λέγεται **ἀνάπτυγμα τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου αὐτοῦ.**

494. Θεώρημα. Ὁ λόγος τῶν μηκῶν δύο περιφερειῶν εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν ἀκτίνων των.

Ἐπιπέδισις: Ἐστῶσαν O καὶ O' (Σχ. 361) δύο κύκλοι καὶ R καὶ R' αἱ ἀκτίνες των ἀντιστοιχῶς.



Σχ. 361.

Συμπέρασμα: Ἄν παραστήσωμεν μὲ Γ καὶ Γ' τὰ μήκη τῶν περιφερειῶν τῶν κύκλων αὐτῶν θὰ δείξωμεν, ὅτι $\frac{\Gamma}{\Gamma'} = \frac{R}{R'}$.

Ἀπόδειξις: Ἐγγράφομεν εἰς τοὺς δύο αὐτοὺς κύκλους κανονικὰ πολύγωνα μὲ τὸ αὐτὸ πλῆθος πλευρῶν, ἔστω ἑξάγωνα. Ἐπειδὴ τὰ πολύγωνα αὐτὰ εἶναι κανονικὰ καὶ ἔχουν

(*) Τὸ κάτωθι παράδειγμα θὰ μᾶς δώσῃ τὴν ἔννοιαν τοῦ κοινοῦ ὄριου.

Ἐστῶσαν τὰ κλάσματα $\frac{2}{3}$ καὶ $\frac{3}{2}$. Ἄν προσθέσωμεν διαδοχικῶς τὴν μονάδα καὶ εἰς τοὺς δύο ὄρους των, τὸ πρῶτον κλάσμα γίνεται

$$\frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6} \dots \frac{9}{10} \dots \frac{99}{100} \dots \frac{9999}{10000} \dots$$

τὸ δὲ δευτερον $\frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5} \dots \frac{10}{9} \dots \frac{100}{99} \dots \frac{10000}{9999} \dots$

Παρατηροῦμεν, ὅτι καὶ τὰ δύο κλάσματα πλησιάζουν πρὸς τὴν μονάδα, τὸ μὲν πρῶτον μένον πάντοτε μικρότερον τῆς μονάδος, καὶ τὸ δευτερον μένον πάντοτε μεγαλύτερον τῆς μονάδος. Λέγομεν, ὅτι τὰ κλάσματα αὐτὰ ἔχουν ἓνα κοινὸν ὄριον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ μονάς.

τὸ αὐτὸ πλῆθος πλευρῶν, εἶναι ὅμοια καὶ ἐπομένως ὁ λόγος τῶν περιμέτρων των θὰ ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῆς ὁμοιότητός των ἢ μὲ τὸν λόγον τῶν ἀκτίνων των. Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν μὲ Π καὶ Π', τὰς περιμέτρους των θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\Pi}{\Pi'} = \frac{R}{R'} \quad (1)$$

Ἐὰν διπλασιάσωμεν ἀπεριορίστως τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τῶν δύο πολυγώνων, αἱ περιμέτροί των Π καὶ Π' θὰ ἔχουν ὄρια τὰ μήκη Γ καὶ Γ' τῶν περιφερειῶν τῶν κύκλων εἰς τὰ ὁποῖα ἀνίχουν. Ἐὰν λοιπὸν λάβωμεν τὰ ὄρια καὶ τῶν δύο μελῶν τῆς ἰσότητος (1) θὰ ἔχωμεν

$$\delta\sigma. \frac{\Pi}{\Pi'} = \delta\sigma. \frac{R}{R'} \quad \eta \quad \left. \begin{array}{l} \delta\sigma. \Pi \\ \delta\sigma. \Pi' \end{array} \right\} = \left. \begin{array}{l} \delta\sigma. R \\ \delta\sigma. R' \end{array} \right\} \quad (2)$$

Ἐπειδὴ $\delta\sigma. \Pi = \Gamma$, $\delta\sigma. \Pi' = \Gamma'$, καὶ $\delta\sigma. R = R$, $\delta\sigma. R' = R'$, διότι αἱ ἀκτῖνες R καὶ R' εἶναι σταθεραὶ, ἡ ἰσότης (2) γράφεται

$$\frac{\Gamma}{\Gamma'} = \frac{R}{R'} \quad (3)$$

Ἐδείχθη λοιπὸν, ὅτι: **Ὁ λόγος τῶν μηκῶν. . .**

495. Πρόρισμα I. Ἡ ἰσότης (3) γράφεται

$$\frac{\Gamma}{\Gamma'} = \frac{2R}{2R'} \quad \eta \quad \frac{\Gamma}{2R'} = \frac{\Gamma'}{2R'}$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἰσότητα συνάγομεν, ὅτι: ὁ λόγος τῆς περιφερείας Γ ἑνὸς κύκλου πρὸς τὴν διάμετρόν του 2R εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῆς περιφερείας Γ' ἑνὸς ἄλλου κύκλου πρὸς τὴν διάμετρόν του 2R'.

Ὡστε: **Ὁ λόγος τοῦ μήκους τῆς περιφερείας ἑνὸς κύκλου πρὸς τὴν διάμετρόν του εἶναι σταθερὸς, δηλ. ὁ αὐτὸς δι' ὅλας τὰς περιφερείας.**

496. Ὁ ἀριθμὸς π. Ὁ σταθερὸς λόγος τοῦ μήκους μιᾶς περιφερείας πρὸς τὸν διάμετρόν του παρίσταται, διεθνῶς, μὲ τὸ ἑλληνικὸν γράμμα π· δηλ. εἶναι $\frac{\Gamma}{2R} = \pi$.

Ἀπεδείχθη, ὅτι ὁ ἀριθμὸς π εἶναι ἀσύμμετρος καὶ ὑπερβατικὸς ἀριθμὸς, τοῦ ὁποῖου ἔχουν ὑπολογισθῆ, μέχρι σήμερον περισσότερα ἀπὸ ἑπτακόσια δεκαδικὰ ψηφία. Ὁ π λέγεται ὑπερβατικὸς ἀριθμὸς, διότι δὲν εἶναι ρίζα ἀλγεβρικῆς ἐξισώσεως.

Ἡ κατὰ προσέγγισιν τιμὴ του, μὲ 20 δεκαδικὰ ψηφία, εἶναι:

$$\pi = 3,14159\ 26435\ 89793\ 23846. . .$$

Εἰς τὰς ἐφαρμογὰς γίνεται χρῆσις τῆς τιμῆς $\pi = 3,14159$

καὶ $\frac{1}{\pi} = 0,3183$.

497. Πόρισμα II. Τὸ μῆκος τῆς περιφερείας ἐνὸς κύκλου εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς διαμέτρου του ἐπὶ τὸν ἀριθμὸν π.

Πράγματι· ἀπὸ τὴν ἰσότητα $\frac{\Gamma}{2R} = \pi$ λαμβάνομεν

$$\Gamma = 2R \times \pi \quad \eta \quad \boxed{\Gamma = 2\pi R}.$$

Ἀσκήσεις: 1406, 1407, 1408, 1409, 1410, 1411, 1412, 1413, 1414.

498. Μῆκος τόξου. Μῆκος τόξου μιᾶς περιφερείας ὀνομάζεται τὸ ὄριον πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει ἡ περίμετρος μιᾶς κανονικῆς τεθλασμένης γραμμῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸ τόξον, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῆς διπλασιάζεται ἀπεριορίστως·

Ἡ ὕπαρξις τοῦ ὄριου αὐτοῦ ἀποδεικνύεται μὲ τοὺς αὐτοὺς συλλογισμοὺς μὲ τοὺς ὁποίους ἀπεδείχθη καὶ διὰ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου.

499. Μῆκος ἐνὸς τόξου μ°. Δύο τόξα τῆς αὐτῆς περιφερείας, τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς ἴσας ἐπικέντρους γωνίας ἔχουν τὰ αὐτὰ μήκη, διότι τὰ τόξα αὐτὰ δύνανται νὰ ἐφαρμόσουν δι' ἐπιθέσεως.

Ἐὰν R εἶναι ἡ ἀκτίς ἐνὸς κύκλου, τὸ μῆκος τῆς περιφερείας του θὰ εἶναι 2πR, καὶ τὸ μῆκος αὐτὸ ἀντιστοιχεῖ εἰς 360°.

Ἔστω, ἐὰν τὸ τόξον ἦτο 360°, τὸ μῆκος του θὰ ἦτο 2πR·

ἐὰν τὸ τόξον ἦτο 1°, τὸ μῆκος του θὰ ἦτο $\frac{2\pi R}{360}$ ἢ $\frac{\pi R}{180^\circ}$

καὶ ἐὰν τὸ τόξον ἦτο μ°, τὸ μῆκος του θὰ ἦτο $\frac{\pi R \mu}{180^\circ}$.

Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν μὲ T τὸ μῆκος ἐνὸς τόξου μ°, θὰ ἔχωμεν τὸν τύπον

$$\boxed{T = \frac{\pi R \mu}{180}} \quad (1).$$

500. Ὁμοια τόξα. Δύο τόξα, τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς ἴσας ἐπικέντρους γωνίας δύο διαφόρων κύκλων, λέγονται ὁμοια τόξα.

501. Θεώρημα. Ὁ λόγος δύο ὁμοίων τόξων εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν ἀκτίων των.

Ἐστώσαν T, T' τὰ μήκη δύο ὁμοίων τόξων καὶ R, R' αἱ ἀκτῖνες τῶν κύκλων εἰς τοὺς ὁποίους ἀνήκουν τὰ τόξα αὐτά· θὰ δεῖξωμεν, ὅτι

$$\frac{T}{T'} = \frac{R}{R'}.$$

Πράγματι· ἐὰν μ εἶναι τὸ κοινὸν μέτρον τῶν ἐπικέντρων γωνιῶν

εἰς τὰς ὁποίας ἀντιστοιχοῦν τὰ ὅμοια αὐτὰ τόξα, θὰ ἔχωμεν

$$T = \frac{\pi R \mu}{180}, \quad T' = \frac{\pi R' \mu}{180}.$$

Διαιροῦμεν κατὰ μέλη τὰς ἰσότητας αὐτὰς καὶ ἔχομεν

$$\frac{T}{T'} = \frac{\pi R \mu}{\pi R' \mu} \quad \eta \quad \boxed{\frac{T}{T'} = \frac{R}{R'}}.$$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Ὁ λόγος δύο ὁμοίων τόξων...**

Ἀσκήσεις: 1415, 1416, 1417, 1418, 1419, 1420, 1421, 1422, 1423.

Ὑπολογισμὸς τοῦ π

502. Ὑπολογισμὸς τοῦ π. Γνωρίζομεν, ὅτι μεταξὺ τοῦ μήκους Γ μιᾶς περιφερείας ἐνὸς κύκλου ἀκτίνος R καὶ τοῦ ἀριθμοῦ π ὑπάρχει ἡ σχέση

$$\pi = \frac{\Gamma}{2R} \quad (1).$$

Ἀπὸ τὸν τύπον (1) συνάγομεν, ὅτι διὰ νὰ ὑπολογίσωμεν τὸν π πρέπει ἢ νὰ ὑπολογίσωμεν πρῶτον τὸ μήκος Γ τῆς περιφερείας, ὅταν γνωρίζωμεν τὴν ἀκτίνα R (μέθοδος τῶν περιμέτρων)

ἢ νὰ ὑπολογίσωμεν τὴν ἀκτίνα R τοῦ κύκλου, ὅταν γνωρίζωμεν τὸ μήκος Γ τῆς περιφερείας (μέθοδος τῶν ἰσοπεριμέτρων).

Θὰ ἐξετάσωμεν μόνον τὴν πρώτην μέθοδον.

503. Μέθοδος τῶν περιμέτρων. Ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι $2R=1$, ὁ τύπος (1) γίνεται $\pi = \Gamma$, δηλ. *ὁ ἀριθμὸς π εἶναι ἴσος μὲ τὸ μήκος τῆς περιφερείας κύκλου, τοῦ ὁποίου ἡ διάμετρος εἶναι ἴση μὲ τὴν μονάδα.*

Εἶναι ἀνάγκη λοιπὸν νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ μήκος τῆς περιφερείας, τῆς ὁποίας ἡ διάμετρος εἶναι ἴση μὲ τὴν μονάδα.

Ἐπειτα, μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ τύπου (§ 490) $\lambda_{2\nu} = \sqrt{R(2R - \sqrt{4R^2 - \lambda_{\nu}^2})}$ (1) ὑπολογίζομεν τὰς πλευρὰς καὶ ἐπομένως καὶ τὰς περιμέτρους $\Pi_{2\nu}$, $\Pi_{4\nu}$, $\Pi_{8\nu}$, ... τῶν κανονικῶν πολυγώνων, τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον καὶ τὰ ὁποῖα λαμβάνομεν, ἂν διαπλασιάζωμεν διαδοχικῶς τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ πολυγώνου.

Κάθε μία ἀπὸ τὰς περιμέτρους αὐτὰς εἶναι καὶ μία κατὰ προσέγγισιν τιμὴ τοῦ π, κατ' ἔλλειψιν καὶ τόσον γετονικὴ πρὸς τὸ π, ὅσον ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου εἶναι ἀρκετὰ μεγάλος.

Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι ὑπελογίσωμεν τὴν περίμετρον Π_{ν} ἐνὸς κανονικοῦ πολυγώνου μὲ ν πλευρὰς, ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον αὐτόν. Ἐπειτα ὑπολογίζομεν, μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ τύπου (§ 491) $\lambda_{\nu}' = \frac{2\lambda_{\nu}R}{\sqrt{4R^2 - \lambda_{\nu}^2}}$ (2), τὴν

πλευρὰν τοῦ περιγεγραμμένου καὶ ὁμοίου κανονικοῦ πολυγώνου καὶ ἐπο-

μένως καὶ τὴν περίμετρόν του Π_n . Ἡ περίμετρος αὐτὴ εἶναι μίᾳ κατὰ προσέγγισιν τιμῇ τοῦ π καθ' ὑπεροχὴν.

Ἐπειδὴ ἡ περιφέρεια περιλαμβάνεται μεταξύ τῶν περιμέτρων Π_n καὶ Π'_n καὶ ἐπειδὴ αἱ διαφοραὶ τῶν περιμέτρων αὐτῶν δύνανται νὰ γίνουν τόσον μικραὶ, ὅσον θέλομεν, ἀρκεῖ νὰ διπλασιάσωμεν ἀδιακόπως τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τῶν πολυγώνων, ἔπεται ὅτι δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ μήκος τῆς περιφέρειας καὶ ἐπομένως καὶ τοῦ ἀριθμοῦ π μὲ μίαν προσέγγισιν τόσον μεγάλην, ὅσον θέλομεν.

Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἐγγράφομεν κατ' ἀρχὰς εἰς τὴν περιφέρειαν ἓνα κανονικὸν ἑξάγωνον, ὅπως ἔκαμεν ὁ Ἀρχιμήδης. Ἡ πλευρὰ λ_6 τοῦ ἑξαγώνου αὐτοῦ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτίνα τοῦ κύκλου, δηλ. μὲ $\frac{1}{2}$. Ἐπομένως ἡ περίμετρος τοῦ Π_6 εἶναι $\Pi_6 = \frac{1}{2} \times 6 = 3$.

Μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ τύπου (2) ὑπολογίζομεν τὴν πλευρὰν λ'_6 τοῦ περιγεγραμμένου κανονικοῦ ἑξαγώνου [καὶ εὐρίσκομεν $\lambda'_6 = \frac{1}{\sqrt{3}}$,

καὶ ἐπομένως ἡ περίμετρος τοῦ Π'_6 εἶναι $\Pi'_6 = 6 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = 3,46410$.

Ἐπειτα ἐργαζόμενοι, ὡς ἀνωτέρω, ὑπολογίζομεν τὰς περιμέτρους Π_{12} , Π_{24} , Π_{48} , ... καὶ Π'_{12} , Π'_{24} , Π'_{48} , ...

Ὁ κάτωθι πίναξ δίδει τὰς τιμὰς τῶν περιμέτρων αὐτῶν.

Ἀριθμὸς πλευρῶν	Περίμετρος ἐγγεγραμμένου πολυγώνου	Περίμετρος περιγεγραμμένου πολυγώνου
6	$\Pi_6 = 3$	$\Pi'_6 = 3,46410$
12	$\Pi_{12} = 3,10582$	$\Pi'_{12} = 3,21539$
24	$\Pi_{24} = 3,13262$	$\Pi'_{24} = 3,15966$
48	$\Pi_{48} = 3,13933$	$\Pi'_{48} = 3,14608$
96	$\Pi_{96} = 3,14103$	$\Pi'_{96} = 3,14271$
192	$\Pi_{192} = 3,14156$	$\Pi'_{192} = 3,14187$
384	$\Pi_{384} = 3,14155$	$\Pi'_{384} = 3,14166$

Παρατηροῦμεν, ὅτι, ἐὰν σταματήσωμεν εἰς τὸ πολύγωνον μὲ 384 πλευρὰς, ὁ ἀριθμὸς π περιλαμβάνεται μεταξύ 3,14155 καὶ 3,14166 καὶ ἐπομένως ἡ τιμὴ τοῦ π εἶναι ἢ 3,14155 κατ' ἑλλειψιν, μικροτέρα τοῦ 0,00001.

504. Παρατήρησις. Εἰς τὸν Ἀρχιμήδην, τὸν διάσημον Ἑλληνα Μαθηματικὸν (287—212 π.Χ.) ἀνήκει ἡ δόξα, ὅτι πρῶτος εὗρε τὴν τιμὴν τοῦ π . Ὁ Ἀρχιμήδης, ἀναχωρήσας ἀπὸ ἓνα κανονικὸν ἑξάγωνον καὶ σταματήσας εἰς τὰ κανονικὰ πολύγωνα, τὰ ἐγγεγραμμένα καὶ περιγεγραμμένα περὶ κύκλον μὲ 96 πλευρὰς ἀπέδειξεν, ὅτι ὁ π περιλαμβάνεται μεταξύ $3\frac{10}{71}$ καὶ

$3\frac{10}{70}$. Ἡ τιμὴ $3\frac{10}{70}$ ἢ $\frac{22}{7} = 3,1428$ διαφέρει τῆς ἀληθοῦς τιμῆς διαφορὰν μικροτέραν τοῦ 0,001.

Ὁ Πτολεμαῖος (87—167 μ.Χ.) εἶδεν ἀκριβεστέραν τιμὴν τοῦ π, τὴν 3,14166.

Ὁ Adrien Metius Ὀλλανδὸς γεωμέτρης (1571—1635 μ.Χ.) εἶδεν ὡς τιμὴν τοῦ π τὴν $\frac{355}{113} = 3,1415920$.

Αἱ τιμαὶ τοῦ π, τὰς ὁποίας εὗρηκαν οἱ ἀνωτέρω σοφοὶ εἶναι τιμαὶ πλησιάζουσαι τοῦ π καὶ ὄχι ἄκριβεις, διότι ὅπως ἀπέδειξεν ὁ Γερμανὸς μαθηματικὸς Lindemann ὁ π εἶναι ἀσύμμετρος ἀριθμὸς.

Ἀσκήσεις

Α' Ὁμάς. 1406. (1440). Ἡ ἀκτίς ἐνὸς κύκλου εἶναι $R=2,75$ μ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τοῦ.

1407. (1441). Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτίς ἐνὸς κύκλου, τοῦ ὁποίου ἡ περιφέρεια εἶναι 4,40 μέτρα.

1408. (1442). Ἡ διάμετρος τοῦ τροχοῦ μιᾶς ἀμάξης εἶναι 1,30 μέτρα. Πόσας στροφὰς θὰ κάμῃ ὁ τροχὸς διὰ τὴν διανύσῃ μίαν ἀπόστασιν 15 χιλιομέτρ.

1409. (1443). Ὁ τροχὸς μιᾶς ἀμάξης ἔκαμεν 2400 στροφὰς διὰ τὴν διανύσῃ 5026 μέτρα. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτίς τοῦ τροχοῦ.

1410. (1444). Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτίς ἐνὸς κυκλικοῦ στίβου, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι χρειάζομεθα 845 βήματα διὰ τὸν διανύσωμεν καὶ ὅτι τὰ 130 βήματα ἰσοδυναμοῦν πρὸς 100 μέτρα.

Β' Ὁμάς. 1411. (1445). Ἐνα ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς 2 μέτρ. εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἕνα κύκλον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου.

1412. (1446). Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας xy λαμβάνομεν διαδοχικὰ τμήματα AB, ΒΓ, . . . ΚΛ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γραμμὴ, ἡ ὁποία σχηματίζεται ἀπὸ τὰς ἡμιπεριφερείας, αἱ ὁποῖαι γράφονται μὲ διαμέτρους τὰ τμήματα αὐτὰ, ἔχει μῆκος ἴσον μὲ τὸ μῆκος τῆς ἡμιπεριφερείας διαμέτρου ΑΛ.

1413. (1447). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου καὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου, τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς τὴν αὐτὴν περιφέρειαν, παριστάνει κατὰ προσέγγισιν τὸ μῆκος τοῦ ἡμίσεως τῆς περιφερείας αὐτῆς.

1414. (1448). Ἐὰν Δ εἶναι ἡ διάμετρος μιᾶς περιφερείας, κατασκευάζομεν ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει καθέτους πλευρᾶς $\frac{3\Delta}{5}$ καὶ $\frac{6\Delta}{5}$. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῆς περιμέτρου τοῦ τριγώνου αὐτοῦ καὶ τοῦ μῆκους τῆς περιφερείας εἶναι μικροτέρα τοῦ ἑνὸς δεκάκις χιλιοστοῦ τῆς διαμέτρου.

Γ' Ὁμάς. 1415. (1449). Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τόξου 36° μιᾶς περιφερείας, ἀκτίων 12 μέτρων.

1416. (1350). Ἐνα τόξον 45° μιᾶς περιφερείας ἔχει μῆκος 14,1372 μέτρα. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτίς τῆς περιφερείας αὐτῆς.

1417. (1451). Δύο τόξα τῶν 22° καὶ 35° ἀνήκουν εἰς τὴν αὐτὴν περιφέρειαν. Τὸ μῆκος τοῦ πρώτου εἶναι 5,40 μέτρ. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τοῦ δευτέρου καὶ πόση ἡ ἀκτίς τοῦ κύκλου;

1418. (1452). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τῆς περιφέρειάς, τῆς περιγεγραμμένης περὶ ἓνα τετράγωνον πλευρᾶς $a=8$ ἔκ.

Α' Ὁμάς. 1419. (1453). Ἐπὶ τῆς διαμέτρου AB μιᾶς περιφέρειας O λαμβάνομεν ἓνα σημεῖον Γ μεταξὺ τῶν A καὶ O καὶ ἓνα σημεῖον Δ μεταξὺ τῶν O καὶ B. Μὲ διαμέτρους τὰς AG, ΓO, OΔ, ΔB γράφομεν περιφερείας κύκλων. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν μηκῶν τῶν περιφερειῶν αὐτῶν εἶναι ἴσον μὲ τὸ μῆκος τῆς μεγάλης περιφέρειας.

1420. (1454). Δύο περιφέρειαι O καὶ O' ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς εἰς ἓνα σημεῖον A καὶ ἡ μικροτέρα διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον O τῆς μεγάλης. Μία ἀκτίς OG τῆς μεγάλης συναντᾷ τὴν μικροτέραν εἰς τὸ B. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ τόξα AB καὶ AG ἔχουν τὸ αὐτὸ μῆκος.

1421. (1455). Δύο περιφέρειαι O καὶ O' ἔχουν ἀκτίνας ἀντιστοίχως 100 μέτρα καὶ 25 μ. Ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων τῶν εἶναι 150 μ. Φέρομεν τὰς κοινὰς ἐξωτερικὰς ἐφαπτομένας AB καὶ ΓΔ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τῆς περιμέτρου τοῦ κυρτοῦ μικτογράμμου σχήματος, τὸ ὁποῖον σχηματίζεται ἀπὸ τὰς δύο ἐφαπτομένας καὶ τὰς δύο περιφερείας.

1422. (1456). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς δύο περιφερείας ἀκτίνων διαφόρων, ὁ λόγος τῶν ἐπικέντρων γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι βαίνουν εἰς τόξα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰ αὐτὰ μήκη, εἶναι ἴσος μὲ τὸν ἀντίστροφον λόγον τῶν ἀκτίνων τῶν.

1423. (1457). Ἐάν δύο κανονικὰ πολύγωνα μὲ n πλευρᾶς εἶναι τὸ ἓνα ἐγγεγραμμένον καὶ τὸ ἄλλο περιγεγραμμένον εἰς τὴν αὐτὴν περιφέρειαν, ἡ περιφέρεια αὐτὴ εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς περιφέρειας τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸ πρῶτον πολύγωνον καὶ τῆς περιγεγραμμένης περιφέρειας εἰς τὸ δεύτερον.

Ἀσκήσεις ἐπὶ τοῦ Γ' βιβλίου πρὸς γενικὴν ἐπανάληψιν

Α' Ὁμάς. 1424. (1458). Εἰς ἓνα τρίγωνον ABΓ φέρομεν τὸ ὕψος AD καὶ λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Σ αὐτοῦ. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν BΣ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν AG εἰς τὸ B' καὶ τὴν εὐθεῖαν ΓΣ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν AB εἰς τὸ Γ'. Αἱ κάθετοι B'B' καὶ Γ'Γ'', αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὰ σημεῖα B' καὶ Γ' ἐπὶ τὴν BΓ, τέμνουν τὰς ΓΓ' καὶ BB' ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα M καὶ N καὶ τὴν BΓ εἰς τὰ σημεῖα B'' καὶ Γ''. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ B'Γ', MN καὶ BΓ τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

1425. (1459). Ἀπὸ τὸ μέσον M ἑνὸς τόξου AB ἑνὸς κύκλου O φέρομεν μίαν τέμνουσαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν χορδὴν AB εἰς τὸ Γ καὶ τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ Δ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ χορδὴ MA εἶναι ἐφαπτομένη εἰς τὸ A τῆς περιφέρειας, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα A, Γ καὶ Δ.

1426. (1461). Ἐνα τρίγωνον ABΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἡμιπεριφέρειαν διαμέτρου BΓ. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον M τῆς πλευρᾶς BΓ ὑψοῦμεν κάθετον ἐπ' αὐτὴν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν πλευρὰν AG εἰς τὸ σημεῖον Δ, τὴν ἡμιπεριφέρειαν

εἰς τὸ σημεῖον E καὶ τὴν προέκτασιν τῆς BA εἰς τὸ Z. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἶναι $\overline{ME}^2 = MZ \times M\Delta$ (Σχολὴ Εὐελπίδων).

1427. (1462). Ἐνα τρίγωνον ABΓ, τοῦ ὁποῦοι αἱ πλευραὶ AB καὶ AΓ εἶναι ἄνισοι, εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἕνα κύκλον O. Φέρομεν τὸ ὕψος AΔ, τὸ ὁποῖον προεκτεινόμενον τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ Θ. Ἐπίσης φέρομεν τὴν ἀκτίνα AO, ἢ ὁποία προεκτεινομένη τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ Z καὶ τέλος φέρομεν τὴν κάθετον OM ἐπὶ τὴν BΓ, ἢ ὁποία προεκτεινομένη τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ E. Ἐστω H τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ὕψων.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ γωνίαι BΓΘ, ΓBZ, BΓH εἶναι ἴσαι καὶ ὅτι αἱ γωνίαι ZAE, EAΘ εἶναι ἐπίσης ἴσαι.

2ον. Ὅτι $Z\Theta = 2M\Delta$.

3ον. Ὅτι τὰ τρία σημεῖα Z, M, H κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

4ον. Νὰ συγκριθοῦν τὰ τμήματα OM καὶ AH.

1428. (1463). Δίδεται ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ABΓ ($A=90^\circ$). Μὲ διάμετρον τὴν διάμεσον AM γράφομεν περιφέρειαν O, ἢ ὁποία τέμνει τὴν AB εἰς τὰ σημεῖα A' καὶ Δ καὶ τὴν AΓ εἰς τὰ σημεῖα A καὶ N:

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ περιφέρεια O διέρχεται ἀπὸ τὸν πόδα H τοῦ ὕψους AH ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν καὶ ὅτι τὰ Δ καὶ N εἶναι τὰ μέσα τῶν AB καὶ AΓ.

2ον. Ποία εἶναι ἡ φύσις τοῦ τετραπλεύρου AΔMN;

3ον. Ὑποθέτομεν, ὅτι τὸ σημεῖον A κινεῖται ἐπὶ τῆς ἡμιπεριφερείας διαμέτρου BΓ. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τί γράφουν τὰ σημεῖα Δ καὶ N; Τί δυνατόμεθα νὰ εἴπωμεν περὶ τῆς διευθύνσεως καὶ τοῦ μεγέθους τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΔN κατὰ τὴν κίνησιν αὐτὴν;

1429. (1464). Ἐνα τρίγωνον ABΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον O ἀκτίνος R. Ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας A τέμνει τὴν πλευρὰν BΓ εἰς τὸ σημεῖον Δ καὶ τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ σημεῖον E.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ E εἶναι τὸ μέσον τοῦ τόξου BEΓ.

2ον. Φέρομεν τὴν EΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὑπάρχουν ἐπὶ τοῦ σχήματος δύο τρίγωνα, ὁμοία πρὸς τὸ ΔEΓ.

3ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ EΓ ἐφάπτεται εἰς τὸ Γ τῆς περιφερείας τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ τρίγωνον AΔΓ.

4ον. Ἐάν $R=6$ ἐκ. καὶ ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ πλευρὰ BΓ ἀπέχει ἀπὸ τὸ κέντρον 3 ἐκ. καὶ ὅτι $AE=9$ ἐκ. νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ EΔ, ΔA.

1430. (1465). Δίδεται τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ABΓ, ($AB=A\Gamma$). Γράφομεν τὴν περιφέρειαν O, τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὰ σημεῖα B καὶ Γ τῶν ἴσων πλευρῶν AB καὶ AΓ. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον M τοῦ τόξου BMΓ φέρομεν τὰς καθέτους MΔ, ME, MZ ἐπὶ τὰς πλευρὰς AB, BΓ, ΓA. Φέρομεν τὰς MΓ καὶ MB. Νὰ ἀποδειχθῇ: 1ον. ὅτι τὰ τετράπλευρα MEGZ καὶ MΔBE, εἶναι ἐγγράψιμα εἰς κύκλον.

2ον. ὅτι αἱ γωνίαι MZE καὶ MΔE εἶναι ἴσαι.

3ον. ὅτι τὰ τρίγωνα MΔE καὶ MEZ εἶναι ὁμοία καὶ ὅτι $\overline{ME}^2 = M\Delta \times MZ$.

1431. (1466). Δίδεται μία ἡμιπεριφέρεια O διαμέτρου $AB=2R$. Μὲ διάμετρον τὴν AO γράφομεν ἐντὸς τῆς ἡμιπεριφερείας μίαν νέαν ἡμιπεριφέρειαν κέντρου O'. Ἀπὸ τὸ σημεῖον B φέρομεν τὴν BΓ ἐφαπτομένην τῆς O' καὶ φέρομεν τὴν εὐθείαν AΓ, ἢ ὁποία σιαναντᾷ τὴν O εἰς τὸ Γ'. Ἡ ἐφαπτομένη εἰς

τὸ Γ' συναντᾷ τὴν AB εἰς τὸ Β'. Νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. ὅτι ἡ ΟΓ εἶναι διάμεσος τοῦ τριγώνου ΑΟΓ'.

2ον. ὅτι αἱ ἐφαπτόμεναι ΓΒ καὶ Γ'Β' εἶναι παράλληλοι. Νὰ ὑπολογισθοῦν συναρτήσῃ τῆς R, αἱ Β'Α, ΒΓ, Β'Γ'.

1432. (1467). Δίδεται μία ἡμιπεριφέρεια Ο διαμέτρου $AB=2R$. Φέρομεν τὴν χορδὴν $AG = \frac{3R}{2}$. Ἡ προέκτασις τῆς AG τέμνει τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ

B εἰς τὸ σημεῖον Θ. Ἐστω Η ἡ προβολὴ τοῦ Γ ἐπὶ τὴν AB καὶ Δ τὸ σημεῖον ὅπου ἡ κάθετος, ἡ ὁποία ἀγεται ἀπὸ τὸ Θ ἐπὶ τὴν ΑΘ τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς AB. 1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ΗΒ.

2ον. Νὰ δειχθῇ ὅτι $GH \times B\Theta = GA \times G\Theta$.

3ον. Νὰ ἐκφρασθῇ συναρτήσῃ τοῦ R ἡ κοινὴ τιμὴ τῶν δύο αὐτῶν γινομένων.

4ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ΓΘ καὶ ΒΔ.

1433. (1468). Δίδεται ἡμιπεριφέρεια Ο διαμέτρου $AB=2R$. Εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας Ax καὶ By τῆς ἡμιπεριφερείας. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον M τῆς ἡμιπεριφερείας φέρομεν τρίτην ἐφαπτομένην αὐτῆς, ἡ ὁποία τέμνει τὴν Ax εἰς τὸ Γ καὶ τὴν By εἰς τὸ Δ. Νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. ὅτι $GD = AG + BD$.

2ον. ὅτι ἡ γωνία ΓΟΔ εἶναι ὀρθή.

3ον. ὅτι $AG \times BD = R^2$.

4ον. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΔ καὶ ΒΓ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον N. Φέρομεν τὴν εὐθείαν MN, ἡ ὁποία τέμνει τὴν διάμετρον AB εἰς τὸ Z. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ MZ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν AB καὶ ὅτι τὸ N εἶναι τὸ μέσον τῆς MZ.

1434. (1469). Δίδεται ἡμιπεριφέρεια Ο διαμέτρου $AB=2R$. Εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B φέρομεν ἐφαπτομένας Ax καὶ By τῆς ἡμιπεριφερείας. Ἀπὸ τυχὸν σημείον M τῆς ἡμιπεριφερείας φέρομεν τρίτην ἐφαπτομένην, ἡ ὁποία τέμνει τὴν Ax εἰς τὸ Γ, τὴν By εἰς τὸ Δ καὶ τὴν προέκτασιν τῆς AB εἰς τὸ Σ.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $AG \times BD = R^2$.

2ον. Ἐὰν $AG=3BD$, νὰ ὑπολογισθοῦν, συναρτήσῃ τῆς ἀκτίνος R, τὰ ΑΓ, ΒΔ, ΓΔ, ΒΣ.

3ον. Νὰ κατασκευαθῇ ἡ ἐφαπτομένη ΣΔΓ' εἰς τὴν περίπτωσιν, καθ' ἣν $AG=2BD$.

4ον. Ἀπὸ τὸ M φέρομεν τὴν MN κάθετον ἐπὶ τὴν AB καὶ ἀπὸ Δ τὴν ΔΕ κάθετον ἐπὶ τὴν Ax νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ τρίγωνα MON καὶ ΓΕΔ εἶναι ὅμοια.

5ον. Ἐὰν ΓΔ εἶναι ἴσον μὲ τὴν διαγώνιον τοῦ τετραγώνου, τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸν κύκλον Ο, νὰ ὑπολογισθοῦν, συναρτήσῃ τῆς ΓΔ, τὰ μήκη MN, AN, BN, ΑΓ, ΓΜ, ΒΔ, ΔΜ.

1435. (1470). Ἐνα τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον Ο. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς AB λαμβάνομεν ἓνα μήκος ΑΓ'= AG καὶ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΓ ἓνα μήκος ΑΒ'= AB . Φέρομεν τὴν Β'Γ', ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα E καὶ Δ καὶ τὴν πλευρᾶν ΒΓ εἰς τὸ M. Νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. ὅτι ἡ ΑΜ διέρχεται ἀπὸ ἓνα ὠρισμένον σημεῖον, ὅταν ἡ χορδὴ A διαγράφῃ τὸ τόξον ΒΑΓ.

2ον. ὅτι $AD=AE$ καὶ ὅτι $\overline{AD}^2 = AB \times AG$.

1436. (1471). Μὲ διάμετρον τὴν πλευρὰν $\Gamma\Delta = \alpha$ ἑνὸς τετραγώνου $\text{AB}\Gamma\Delta$ κατασκευάζομεν ἡμιπεριφέρειαν κειμένην ἐκτὸς τοῦ τετραγώνου. Ἐπὶ τῆς ἡμιπεριφέρειας αὐτῆς λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον M καὶ ἀπὸ τὸ M φέρομεν τὰς MA καὶ MB , αἱ ὁποῖαι τέμνουσιν τὴν $\Delta\Gamma$ εἰς τὰ σημεῖα E καὶ Z ἀντιστοίχως. Ἀπὸ τὸ E ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τὴν $\Delta\Gamma$, ἣ ὁποία τέμνει τὴν MD εἰς τὸ σημεῖον Θ καὶ ἀπὸ τὸ Z ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τὴν $\Delta\Gamma$, ἣ ὁποία τέμνει τὴν MG εἰς τὸ σημεῖον H . Νὰ ἀποδειχθῇ :

1ον. ὅτι τὸ τετράπλευρον $\text{EZH}\Theta$ εἶναι τετράγωνον.

2ον. ὅτι τὰ τρίγωνα $\Delta\text{E}\Theta$, $\Delta\text{M}\Gamma$ καὶ $\text{HZ}\Gamma$ εἶναι ὁμοία καὶ ὅτι $\overline{\text{EZ}}^2 = \Delta\text{E} \times \text{Z}\Gamma$.

3ον. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν x ἀπὸ τῆς $\Delta\Gamma$ πρέπει νὰ κεῖται τὸ M , ἵνα $\text{EZ} = \alpha k$, ὅπου k εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς μικρότερος τῆς μονάδος.

4ον. Νὰ προσδιορισθῇ ὁ x , ἵνα ἡ EZ ἔχη τὴν μεγαλύτεραν τιμὴν.

1437. (1472). Δίδεται τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $\text{AB}\Gamma$. Ἀπὸ τὴν κορυφὴν A τῆς ὀρθῆς γωνίας φέρομεν τὸ ὕψος AD ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν. Ἀπὸ τὸ Δ φέρομεν τὰς καθέτους ΔE καὶ ΔZ ἐπὶ τὰς AB καὶ AG ἀντιστοίχως· ἀπὸ τὰ E καὶ Z φέρομεν τὰς καθέτους EH καὶ ZH ἐπὶ τὴν BG . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$\frac{\text{BH}}{\Gamma\Theta} = \frac{\overline{\text{AB}}^4}{\overline{\text{AG}}^4}.$$

1438. (1473). Δίδεται ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον $\text{AB}\Gamma$. Ἐπὶ τῆς ὑποτείνουσας BG λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον M καὶ ἀπὸ τὸ M φέρομεν τὰς καθέτους MD καὶ ME ἐπὶ τῆς πλευρᾶς AB καὶ AG τοῦ τριγώνου $\text{AB}\Gamma$.

1ον. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ λόγοι, οἱ ἴσοι πρὸς $\frac{\text{AD}}{\text{AB}}$ καὶ οἱ λόγοι, οἱ ἴσοι πρὸς $\frac{\text{AE}}{\text{AG}}$.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν λόγων $\frac{\text{AD}}{\text{AB}}$ καὶ $\frac{\text{AE}}{\text{AG}}$ διατηρεῖ τὴν αὐτὴν τιμὴν, ὅταν τὸ M κινῆται ἐπὶ τῆς BG .

3ον. Ἐὰν εἶναι $\text{AB} = 6 \mu.$ καὶ $\text{AG} = 8$ μέτρα, νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ λόγοι $\frac{\text{AD}}{\text{AB}}$ καὶ $\frac{\text{AE}}{\text{AG}}$, ὅταν τὸ M εἶναι ἡ προβολὴ τῆς A ἐπὶ τὴν BG .

1439. (1474). Δίδεται ἕνα τρίγωνον $\text{AB}\Gamma$ καὶ τὰ ὕψη τοῦ AA' , BB' , GG' καὶ H τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ὑψῶν του.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\text{AA}' + \text{BB}' + \text{GG}' < \text{AB} + \text{BG} + \text{GA}$.

2ον. Ἀπὸ τὰ B καὶ Γ φέρομεν καθέτους BD καὶ GE ἐπὶ τὴν προέκτασιν τῆς εὐθείας $\text{G}'\text{B}'$. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\Delta\Gamma' = \text{B}'\text{E}$ καὶ ὅτι $\text{A}'\Gamma' + \text{A}'\text{B}' = \Delta\text{E}$.

1440. (1475). Τὸ ὕψος AD ἑνὸς τριγώνου $\text{AB}\Gamma$ τέμνει τὴν πλευρὰν BG εἰς τὸ σημεῖον Δ , μεταξὺ B καὶ Γ . Ἐστω ὅτι εἶναι $\text{BA} = \text{BG}$, $\text{BD} = \alpha$ καὶ $\Delta\Gamma = 2\alpha$.

1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος AD .

2ον. Ἐὰν M καὶ N εἶναι τὰ μέσα τῶν AD καὶ AG νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τραπέζιον $\text{MB}\Gamma\text{N}$ εἶναι ἰσοσκελές.

3ον. Ἡ διαγώνιος BN τοῦ τραπέζιου $\text{MB}\Gamma\text{N}$ τέμνει τὸ [ὕψος AD εἰς τὸ σημεῖον H καὶ τὴν διαγώνιον MG εἰς τὸ σημεῖον O . Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τιμαὶ

τῶν λόγων $\frac{\text{HN}}{\text{HB}}$, $\frac{\text{HA}}{\text{HA}}$, $\frac{\text{ON}}{\text{OB}}$.

4ον. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ O εἶναι τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περὶ τὸ τρίγωνον $\text{AB}\Gamma$. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτίς τοῦ κύκλου αὐτοῦ.

1441. (1476). Δίδεται ἓνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον $AB\Gamma$ καὶ O τὸ μέσον τῆς βάσεώς του $B\Gamma$. Ἐπὶ τῶν ἰσων πλευρῶν του AB καὶ AG λαμβάνομεν ἀντιστοιχῶς δύο σημεῖα Δ καὶ E καὶ τοιαῦτα, ὥστε $OB^2 = BA \times GE$.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ τρίγωνα ΔBO καὶ $EO\Gamma$ εἶναι ὅμοια. Νὰ ἐξαχθῇ ἐξ αὐτοῦ, ὅτι ἡ γωνία ΔOE εἶναι σταθερά.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον ΔOE εἶναι ὅμοιον πρὸς τὰ δύο προηγούμενα τρίγωνα $B\Delta O$ καὶ $E\Gamma O$.

3ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΔE ἐφάπτεται τῆς περιφερείας, ἡ ὁποία ἔχει κέντρον τὸ O καὶ ἀκτίνα τὴν ἀπόστασιν τοῦ O ἀπὸ τὰς ἴσας πλευρὰς τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$.

1442. (1477). Δίδονται δύο παράλληλοι εὐθεῖαι x καὶ y καὶ μία κοινὴ κάθετος αὐτῶν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν x εἰς τὸ A καὶ τὴν y εἰς τὸ B . Μία ὀρθὴ γωνία $\Gamma O\Delta$ στρέφεται περὶ τὸ μέσον O τῆς εὐθείας AB καὶ συναντᾷ τὴν x εἰς τὸ Γ καὶ τὴν y εἰς τὸ Δ . Νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. ὅτι $OA^2 = A\Gamma \times B\Delta$.

2ον. ὅτι $\Gamma\Delta = A\Gamma + B\Delta$.

3ον. ὅτι ἡ $\Gamma\Delta$ ἐφάπτεται τοῦ κύκλου, ὁ ὁποῖος ἔχει διάμετρον τὴν AB .

1443. (1478). Αἱ διαγώνιοι $A\Gamma$ καὶ $B\Delta$ ἐνὸς παραλληλογράμμου τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον O . Ἀπὸ ἓνα σημεῖον E τῆς OB φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν $A\Gamma$, ἡ ὁποία τέμνει τὰς AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔA εἰς τὰ σημεῖα Z , H , Θ , K . Νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. ὅτι $\frac{EZ}{OA} = \frac{EB}{OB}$.

2ον. ὅτι $\frac{EZ}{EK} = \frac{EB}{E\Delta} \times \frac{OA}{OB}$.

3ον. ὅτι $\frac{EZ}{EK} = \frac{EH}{E\Theta}$.

4ον. ὅτι ἡ παράλληλος, ἡ ἀγομένη ἀπὸ τὸ Z πρὸς τὴν $A\Delta$ καὶ ἡ παράλληλος, ἡ ἀγομένη ἀπὸ τὸ H , πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$ τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον N , τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τῆς $B\Delta$.

1444. (1479), Δίδεται τὸ παραλληλόγραμμον $AB\Gamma\Delta$: ἀπὸ τὴν κορυφὴν Δ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν διαγώνιον $A\Gamma$, ἡ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς $B\Gamma$ εἰς τὸ H καὶ ἀπὸ τὸ Γ παράλληλον πρὸς τὴν διαγώνιον $B\Delta$, ἡ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς $A\Delta$ εἰς τὸ Z . Αἱ ΓZ καὶ ΔH τέμνονται εἰς τὸ E . Νὰ ἀποδειχθῇ: 1ον. ὅτι τὸ τετράπλευρον $\Delta ZH\Gamma$ εἶναι παραλληλόγραμμον.

2ον. ὅτι αἱ AE καὶ BE τέμνουσιν τὴν $\Delta\Gamma$ εἰς τρία ἴσα μέρη.

3ον. ὅτι $2(AE^2 + BE^2) = AB^2 + 9A\Delta^2$.

1445. (1480). Δίδεται τὸ παραλληλόγραμμον $AB\Gamma\Delta$, ὅπου $AB = \Gamma\Delta = a$ καὶ $A\Delta = \Gamma B = b$. Φέρομεν τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν A , B , Γ , Δ , αἱ ὁποῖαι τεμνόμεναι σχηματίζουν τὸ τετράπλευρον $EZH\Theta$.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ διχοτόμοι δύο ἀπέναντι γωνιῶν τοῦ δοθέντος παραλληλογράμμου εἶναι παράλληλοι.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τετράπλευρον $EZH\Theta$ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ ὅτι αἱ διαγώνιοί του εἶναι ἀντιστοιχῶς παράλληλοι πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ δοθέντος παραλληλογράμμου.

3ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου $\{EZH\Theta$ εἰς τὴν περίπτωσηιν, καθ' ἣν ἡ γωνία A εἶναι 60° .

4ον. Ὑποθέτομεν, ὅτι ἡ πλευρὰ AB τοῦ δοθέντος παραλληλογράμμου μένει ὠρισμένη, ἡ δὲ $\Gamma\Delta$ κινεῖται παραλλήλως πρὸς ἑαυτὴν καὶ οὕτως, ὥστε τὸ Δ νὰ μένῃ ἐπὶ τῆς εὐθείας $A\Delta\chi$, τὸ δὲ Γ ἐπὶ τῆς εὐθείας $B\Gamma\gamma$. α) Νὰ ἔξετασθῇ, ἐὰν τὸ σημεῖον H τῆς τομῆς τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν Δ καὶ Γ δύναται νὰ συμπέσῃ μὲ τὴν τομὴν E τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν A καὶ B : διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ β ἴθ' ἀ συμβῆ τοῦτο; β) Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ β τὸ σημεῖον H ἴθ' ἀ κεῖται ἐπὶ τῆς AB . γ) Κατὰ τὴν κίνησιν αὐτὴν τῆς $\Delta\Gamma$, ποίαν γραμμὴν διαγράφει τὸ σημεῖον H ;

1446. (1481). Ἐὰν E, Z, H, Θ εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ ἐνὸς ὀρθογωνίου τραπέζιου $AB\Gamma\Delta$ (γων. A =γων. B = 1 ὀρθ.) καὶ M, N τὰ μέσα τῶν διαγωνίων του $B\Delta$ καὶ $A\Gamma$, αἱ ὁποῖαι εἶναι κάθετοι ἀναμεταξύ των, νὰ ἀποδειχθῇ: 1ον. ὅτι $EH=\Theta Z$.

2ον. ὅτι ἡ AB εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου AMN εἰς τὸ σημεῖον A .

1447. (1482). Ἐνα τραπέζιον $AB\Gamma\Delta$, ὀρθογώνιον εἰς τὰ A καὶ Δ , ἔχει τὰς διαγωνίους του $A\Gamma$ καὶ $B\Delta$ κάθετους. Νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. ὅτι τὰ τρίγωνα BAD καὶ $A\Delta\Gamma$ εἶναι ὁμοια καὶ νὰ ἐξαχθῇ ἐξ αὐτοῦ ἡ σχέσις $\overline{AD}^2 = AB \times \Delta\Gamma$.

2ον. ὅτι αἱ τέσσαρες περιφέρειαι, αἱ ὁποῖαι ἔχουν διαμέτρους τὰς τέσσαρας πλευρὰς τοῦ τραπέζιου ἔχουν ἓνα κοινὸν σημεῖον. Νὰ προσδιορισθῇ τὸ κοινὸν αὐτὸ σημεῖον.

3ον. ὅτι αἱ περιφέρειαι, αἱ ὁποῖαι ἔχουν διαμέτρους τὰς AB καὶ $\Gamma\Delta$ ἐφάπτονται.

1448. (1483). Δίδεται ὁ ρόμβος $AB\Gamma\Delta$. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς $B\Gamma$ λομβάνομεν τμῆμα BE τοιοῦτον, ὥστε $\frac{BE}{\Delta A} = \mu$, καὶ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΔA λαμβάνομεν τμῆμα ΔZ , τοιοῦτον, ὥστε $\frac{\Delta Z}{\Delta A} = \mu$, ὅπου μ εἶναι θετικὸς ἀριθμὸς μικρότερος τῆς μονάδος.

1ον. Νὰ προσδιορισθῇ τὸ σχῆμα τῶν τετραπλεύρων $BE\Delta Z$ καὶ $AE\Gamma Z$.

2ον. Αἱ εὐθεῖαι BA καὶ EZ προεκτεινόμεναι τέμνονται εἰς ἓνα σημεῖον H . Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λόγος $\frac{HA}{HB}$.

3ον. Ἐὰν $\mu = \frac{2}{3}$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ $H\Delta$ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν $B\Delta$.

1449. (1484). Δύο περιφέρειαι O καὶ O' ἀκτίνων R καὶ R' ($R > R'$) τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B : αἱ ἐφαπτόμεναι τῶν περιφερειῶν O καὶ O' εἰς τὸ σημεῖον A διέρχονται διὰ τῶν κέντρων O καὶ O' .

1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διάκεντρος OO' , συναρτήσῃ τῶν ἀκτίνων R καὶ R' .

2ον. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον M τῆς προεκτάσεως τῆς κοινῆς χορδῆς BA φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας $M\Gamma$ καὶ $M\Gamma'$ τῶν περιφερειῶν O καὶ O' , ὅπου Γ καὶ Γ' εἶναι τὰ σημεῖα ἐπαφῆς. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $M\Gamma = M\Gamma'$.

3ον. Νὰ κατασκευασθῇ γεωμετρικῶς ἡ ἐφαπτομένη $M\Gamma$ διὰ τὴν ἔχῃ δοθὲν μῆκος λ .

4ον. Νὰ ἐκφρασθῇ ἡ διαφορὰ $\overline{MO}^2 - \overline{MO'}^2$ καὶ νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ διαφορὰ αὕτη εἶναι σταθερά.

1450. (1485). Δύο κύκλοι O καὶ O' ἀκτίνων R καὶ R' ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς τὸ σημεῖον A . Ἀπὸ τὸ A φέρομεν μίαν τυχοῦσαν τέμνουσαν $BAΓ$, ἢ ὅποια τέμνει τὴν περιφέρειαν O εἰς τὸ B καὶ τὴν περιφέρειαν O' εἰς τὸ $Γ$.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ ἀκτίνες OB καὶ OG εἶναι παράλληλοι.

2ον. Προεκτείνωμεν τὴν BO μέχρις, ὅτου συναντήσῃ τὴν περιφέρειαν O εἰς ἓνα σημεῖον Δ . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ $\Delta Γ$ προεκτεινομένη τέμνει τὴν διάκεντρον OO' εἰς ἓνα ὠρισμένον σημεῖον Σ .

3ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ τμήματα ΣO καὶ $\Sigma O'$.

4ον. Ἐὰν $R=3R'$ νὰ ὀρισθῇ ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ θέσις τῆς τεμνοῦσης $BAΓ$, ἵνα ἡ $\Delta Γ\Sigma$ εἶναι κοινὴ ἐφαπτομένη τῶν περιφερειῶν O καὶ O' .

5ον. Εἰς τὴν περιπτώσιν αὐτὴν νὰ ὑπολογισθῇ ἡ κοινὴ ἐφαπτομένη των.

1451. (1486). *Θεώρημα τοῦ Maclaurin.* Ἀπὸ τυχόν σημεῖον A μιᾶς περιφερείας O φέρομεν μίαν χορδὴν AB καὶ ἑκατέρωθεν αὐτῆς τὰς χορδὰς AG, AD οὕτως, ὥστε $\gamma\omega\nu.ΓAB = \gamma\omega\nu.ΒΑΔ$. Ἀπὸ ἓνα δεύτερον σημεῖον A , τῆς αὐτῆς περιφερείας φέρομεν τὰς χορδὰς $A_1B_1, A_1Γ_1, A_1\Delta_1$ παραλλήλους πρὸς τὰς AB, AG, AD ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι $\frac{AΓ+AD}{A_1Γ_1+A_1\Delta_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$.

Β' Ὁμάς. 1452. (1487). Ἡ ὑποτείνουσα BG ἐνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι διπλασία τῆς πλευρᾶς AB προεκτείνωμεν τὰς $BΓ$ καὶ BA κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς BA ἓνα μῆκος $AD=x$, ἐπὶ δὲ τῆς προεκτάσεως τῆς $BΓ$ ἓνα μῆκος $GE=x$. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος x , ἵνα ἡ εὐθεῖα DE εἶναι ἴση μὲ $2x$.

1453. (1488). Δίδεται περιφέρεια O διαμέτρου $AB=2R$. Φέρομεν τὴν ἀκτίνα OG κάθετον ἐπὶ τὴν AB . Συνδέομεν τὸ A μὲ τὸ μέσον E τῆς OG δι' εὐθείας, ἢ ὅποια τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ σημεῖον M .

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $AM=2MB$.

2ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ περίμετρος τοῦ τριγώνου AMB συναρτήσῃ τῆς ἀκτίνος R .

1454. (1489). Δίδεται περιφέρεια O διαμέτρου $AB=2R$. Φέρομεν τὴν χορδὴν $ΓΔ$ παράλληλον τῆς AB καὶ εἰς ἀπόστασιν $R/2$ ἀπ' αὐτῆς.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία $AOΓ=30^\circ$.

2ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι καὶ αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου $ABΓ$.

1455. (1490). Εἰς ἓνα κύκλον O ἀκτίνος $R=5$ ἐκ. φέρομεν μίαν χορδὴν $AG=6$ ἐκ. καὶ τὴν διάμετρον BA κάθετον ἐπὶ τὴν χορδὴν αὐτὴν εἰς τὸ σημεῖον E .

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $AE=EG$.

2ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν $ABΓ$ καὶ $ADΓ$.

3ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τῶν εὐθειῶν BE καὶ DE .

4ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ περίμετρος τοῦ τετραπλεύρου $ABΓΔ$.

5ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τῆς παραλλήλου $Z\Theta$ πρὸς τὴν AG , ἢ ὅποια ἄγεται ἀπὸ τὸ O καὶ τέμνει τὰς πλευρὰς AD καὶ $ΓΔ$ εἰς τὰ σημεῖα Z καὶ Θ .

1456. (1491). Ἐνὸς τριγώνου $ABΓ$ ἡ γωνία A εἶναι 60° καὶ ἡ γωνία B εἶναι 45° καὶ τὸ ὕψος $ΓΔ=4$ μετρ.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον $ΓΔB$ εἶναι ἰσοσκελές.

2ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου $ABΓ$ κατὰ προσέγγισιν $0,01$.

3ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος BH τοῦ τριγώνου $ABΓ$ κατὰ προσέγγισιν $0,01$.

1457. (1492). Δύο ὀρθογώνια καὶ ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΒΑΓ καὶ ΑΔΒ (ὀρθογώνια εἰς τὰ Α καὶ Δ) ἔχουν κοινὴν τὴν πλευρὰν $AB=a$, αἱ δὲ κορυφαὶ τῶν κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς κοινῆς πλευρᾶς ΑΒ.

1ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ μήκη τῶν ΒΓ, ΑΔ, ΓΔ.

2ον. Ἐὰν Ε εἶναι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ΑΒ καὶ ΓΔ νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ΕΑ, ΕΒ, ΕΓ, ΕΔ.

3ον. Ἀπὸ τὸ Β φέρομεν τὴν ΒΖ, κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΔ. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ μήκη ΕΖ καὶ ΖΔ.

1458. (1493). Δίδεται τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ. Φέρομεν τὸ ὕψος ΑΔ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ, τὸ ὅποιον ὀρίζει ἐπ' αὐτῆς τμήματα $BD=3,6$ ἐκ. καὶ $ΔΓ=6,4$ ἐκ.

1ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ μήκη, ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ.

2ον. Ἀπὸ τὸ Δ φέρομεν τὰς καθέτους ΔΕ καὶ ΔΖ ἐπὶ τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΑΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ τρίγωνα ΔΕΒ, ΔΖΓ καὶ ΑΒΓ εἶναι ὅμοια καὶ νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ μήκη ΔΕ καὶ ΔΖ.

3ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἄκτις τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἡ ἄκτις τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

1459. (1494). Εἰς ἓνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ δίδεται τὸ ὕψος του $AD=u$, τὸ ὅποιον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν βάσιν του 2α καὶ ἡ ἄκτις ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου. Νὰ ὑπολογισθοῦν συναρτήσει τῶν u καὶ ρ , αἱ ἴσαι πλευραὶ β, ἡ βᾶσις 2α, καὶ ἡ ἄκτις R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

Γ' Ὀμάς. 1460. (1495). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς ἓνα τετράπλευρον, περιγεγραμμένον περὶ κύκλον, αἱ διαγώνιοί του καὶ αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὅποιαι συνδέουσιν τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τοῦ κύκλου καὶ τῶν ἀπέναντι πλευρῶν του τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

1461. (1496). Δίδεται τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου αἱ κάθετοι πλευραὶ εἶναι $AB=15$ ἐκ., $AD=20$ ἐκ. Ἀπὸ τὸ μέσον Μ τῆς ὑποτείνουσας ΒΓ φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ, ἡ ὅποια τέμνει τὴν ΑΓ εἰς τὸ Δ καὶ τὴν προεκτάσιν τῆς ΒΑ εἰς τὸ Ε.

1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ΜΓ.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ τρίγωνα ΔΜΓ καὶ ΑΒΓ εἶναι ὅμοια καὶ νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου ΔΜΓ.

3ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ΒΕ.

4ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα Ε, Α, Μ, Γ, κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ΕΓ.

1462. (1497). Ἐνα τραπέζιον ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἓνα κύκλον Ο. Αἱ διαγώνιοί του τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ε καὶ αἱ προεκτάσεις τῶν πλευρῶν του ΑΔ καὶ ΒΓ τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. ὅτι τὰ τέσσαρα σημεῖα Α, Δ, Ο, Ε κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.

2ον. ὅτι τὰ σημεῖα Α, Γ, Ο, Ζ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.

1463. (1498). Ἀπὸ τὸ μέσον Ο ἐνὸς εὐθυγράμμου τμήματος $AB=2a$ ὕψομεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ ἐπὶ τῆς καθέτου αὐτῆς λαμβάνομεν τμήμα $OD=a/2$. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΔ καὶ ἐκ τοῦ Β τὴν ΒΓ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΔ.

1ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν συναρτήσει τοῦ a , τὰ μήκη ΑΔ, ΑΓ, ΓΒ.

2ον. Προεκτείνομεν τὴν ΔΟ καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως λαμβάνομεν τμήμα

ΟΕ=α καὶ φέρομεν τὴν εὐθείαν ΓΕ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Ε κείνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας καὶ νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ΑΖ καὶ ΒΖ.

1464. (1499). Δίδεται κύκλος Ο διαμέτρου ΑΒ. Ἀπὸ τὸ Α φέρομεν τὰς χορδὰς ΑΓ καὶ ΑΔ κειμένας πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς διαμέτρου ΑΒ. Φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας τῆς περιφερείας Ο εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Δ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ε. Φέρομεν καὶ τὴν ἀκτίνα, τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν χορδὴν ΑΓ, ἡ ὁποία προεκτεινομένη τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς ΔΓ εἰς τὸ σημεῖον Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ: 1ον. ὅτι τὰ τρίγωνα ΕΑΔ καὶ ΖΑΓ εἶναι ἰσοσκελῆ καὶ ὅμοια.

2ον. ὅτι τὰ σημεῖα Α, Ζ, Ε, Δ, Ο κείνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.

3ον. ὅτι ἡ ΖΕ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΓ.

1465. (1500). Δίδεται ἓνα τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ εὗρεθῇ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ ἓνα σημεῖον Δ καὶ ἐπὶ τῆς ΒΓ ἓνα σημεῖον Ε οὕτως, ὥστε νὰ εἶναι ΒΔ=ΕΓ καὶ ἡ εὐθεῖα ΔΕ νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν διεύθυνσιν.

1466. (1501). Δίδεται τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, τὸ ὕψος τοῦ ΑΔ καὶ Μ τὸ μέσον τοῦ ΑΔ.

1ον. Νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ Μ ἡ εὐθεῖα ΕΜΖ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ Ε καὶ τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ζ καὶ τοιαύτη, ὥστε νὰ εἶναι ΕΜ=ΜΖ.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα Β, Γ, Ε, Ζ κείνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας Ο.

3ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ κάθετος ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΕΖ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου Ν τῆς ΒΓ.

4ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΑΜΟΝ εἶναι παραλληλόγραμμον.

Δ' Ὁμάς. 1467. (1502). Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Ο μιᾶς ὠρισμένης γωνίας xOy φέρομεν ἓνα κύκλον μεταβλητόν, ὁ ὁποῖος τέμνει τὴν Ox εἰς τὸ Α καὶ τὴν Oy εἰς τὸ Β.

1ον. Ἐὰν ἡ ΑΒ ἔχη μίαν διεύθυνσιν ὠρισμένην, νὰ εὗρεθῇ ὁ τόπος τῶν ἄκρων τῆς διαμέτρου τῆς παραλλήλου πρὸς τὴν ΑΒ.

2ον. Ἐὰν ἡ ΑΒ ἔχη ἓνα δοθὲν μῆκος, νὰ εὗρεθῇ ὁ τόπος τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου καὶ ὁ τόπος, τὸν ὁποῖον γράφει τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου αὐτοῦ.

1468. (1503). Δίδονται δύο ὀρθογώνιοι εὐθεῖαι Ox καὶ Oy, ἓνα σημεῖον Σ ἐπὶ τῆς Oy καὶ ἓνα σημεῖον Α, τὸ ὁποῖον κείται εἰς ἀπόστασιν ΑΗ=k ἀπὸ τὴν Ox. Μία ὀρθὴ γωνία ἔχει κορυφὴν τὸ Α καὶ αἱ πλευραὶ τῆς συναντοῦν τὴν Ox εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ. Ἡ τέμνουσα ΣΗ τέμνει εἰς τὸ σημεῖον Μ τὸν κύκλον ΣΒΓ.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ σημεῖον Μ εἶναι ὠρισμένον, ὅταν ἡ γωνία στρέφεται περὶ τὸ Α.

2ον. Νὰ εὗρεθῇ ὁ τόπος τοῦ Μ, ὅταν τὸ Σ διαγράφῃ τὴν Oy.

1469. (1504). Νὰ εὗρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων Μ τοιούτων, ὥστε, ἂν φέρωμεν τὰς κάθετους ΜΑ καὶ ΜΒ ἐπὶ τὰς πλευρὰς μιᾶς γωνίας, νὰ ἔχωμεν: $ΜΑ+2ΜΒ=α$.

1470. (1505). Ἀπὸ τυχὸν σημείου Μ μιᾶς εὐθείας Oy φέρομεν τὴν κάθετον ΜΑ ἐπὶ μίαν ἄλλην εὐθείαν Ox, ἔπειτα ἐπὶ τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν Ox λαμβάνομεν ἓνα μῆκος ΜΒ τοιούτου, ὥστε $ΜΑ+ΜΒ=λ$. Νὰ εὗρεθῇ ὁ τόπος τοῦ σημείου Β.

1471. (1506). Δίδεται μία εὐθεῖα ΑΒ καὶ ἓνα σημεῖον Ν ἐπ' αὐτῆς. Ἀπὸ

τὰ Α καὶ Β φέρομεν τὰς καθέτους Αχ καὶ Βy ἐπὶ τὴν ΑΒ καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς Αχ τμήμα ΑΓ, ἐπὶ δὲ τῆς Βy τμήμα ΒΔ καὶ τοιαῦτα, ὥστε νὰ εἶναι $NA \times NB = GA \times BD$.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὰ τρίγωνα ΓΑΝ καὶ ΝΒΔ εἶναι ὁμοία.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι ἡ γωνία ΓΝΔ εἶναι ὀρθή.

3ον. Ἀπὸ τὸ Ν φέρομεν τὴν ΝΜ κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΔ. Νὰ εὑρεθῆ ὁ τόπος τοῦ σημείου Μ.

1472. (1507). Δίδεται μία εὐθεῖα χy καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β καὶ τοιαῦτα, ὥστε ἡ ΑΒ νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν χy. Συνδέομεν μὲ εὐθείας τυχὸν σημεῖον Γ τῆς χy μὲ τὰ σημεῖα Α καὶ Β καὶ φέρομεν τὰς καθέτους ΑΜ καὶ ΒΜ ἐπὶ τὰς εὐθείας ΓΑ καὶ ΓΒ. Νὰ εὑρεθῆ ὁ τόπος τοῦ σημείου Μ.

1473. (1508). Δίδεται τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, (ΑΒ=ΑΓ). Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α φέρομεν τυχούσαν εὐθεῖαν, εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας ΒΑΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν βάσιν ΒΓ εἰς τὸ σημεῖον Μ καὶ τὸν περιγεγραμμένον κύκλον Ο εἰς τὸ σημεῖον Ν.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὸ γινόμενον $AM \times AN$ εἶναι σταθερὸν, ὅταν ἡ ΑΝ στρέφεται περὶ τὸ Α.

2ον. Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Γ φέρομεν τὴν κάθετον ΓΔ ἐπὶ τὴν ΑΝ, ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν προέκτασιν τῆς ΝΒ εἰς τὸ σημεῖον Ε. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι $GD = DE$.

3ον. Νὰ εὑρεθῆ ὁ τόπος τοῦ Ε, ὅταν ἡ ΑΝ στρέφεται περὶ τὸ Α.

1474. (1509). Ἐπὶ τῆς βάσεως ΒΓ ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Δ καὶ φέρομεν ἄπὸ τὸ Δ παραλλήλους πρὸς τὰς πλευρὰς αὐτὰς εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ ἀντιστοίχως. Νὰ ἀποδειχθῆ :

1ον ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ παραλληλογράμμου ΑΕΔΖ εἶναι σταθερά, ὅταν τὸ σημεῖον Δ κινῆται ἐπὶ τῆς βάσεως ΒΓ.

2ον. Ὅταν τὸ σημεῖον Δ κινῆται ἐπὶ τῆς ΒΓ, ποῖος εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ μέσου Μ τῆς ΕΖ; ἐξ αὐτοῦ νὰ συναχθῆ, ὅτι τὸ σημεῖον Μ κινεῖται μὲ ταχύτητα δύο φορὰς μικροτέρα τῆς ταχύτητος τοῦ σημείου Δ.

1475. (1510). Δίδεται ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ. Ἐκ τυχόντος σημείου Δ τῆς ὑποτεινούσης ΒΓ ὑψοῦμεν κάθετον ἐπ' αὐτήν, ἡ ὁποία τέμνει τὰς πλευρὰς ΑΓ καὶ ΑΒ εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ ἀντιστοίχως. Νὰ εὑρεθῆ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων Μ τῆς εὐθείας ΕΖ καὶ τοιούτων, ὥστε νὰ εἶναι $\overline{DM}^2 = DE \times DZ$.

1476. (1511). Ἐνα τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον Ο ἀκτίνος R. Φέρομεν τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας Α, ἡ ὁποία τέμνει τὴν πλευρὰν ΒΓ εἰς τὸ Δ καὶ τὸ τόξον ΒΓ εἰς τὸ Μ.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὸ σημεῖον Μ εἶναι τὸ μέσον τοῦ τόξου ΒΜΓ.

2ον. Φέρομεν τὸ ὕψος ΑΑ' καὶ τὴν ἀκτίνα ΟΑ. Νὰ ἀποδειχθῆ ὅτι ἡ ΑΜ σχηματίζει ἴσας γωνίας μὲ τὸ ὕψος ΑΑ' καὶ τὴν ἀκτίνα ΑΟ.

3ον. Φέρομεν τὴν ΜΓ. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὰ τρίγωνα ΜΔΓ, ΜΑΓ, καὶ ΑΒΔ εἶναι ὁμοία, καὶ ὅτι $\overline{MG}^2 = \Delta M \times MA$.

4ον. Νὰ εὑρεθῆ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κορυφῶν Β καὶ Γ, ὅταν τὰ τρία σημεῖα Α, Δ, Μ μένουν σταθερά, καὶ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ κινῆται καθ' ὅλους τοὺς δυνατοὺς τρόπους

1477. (1512). Δίδεται ἓνα τρίγωνον ΑΒΓ. Προεκτείνομεν τὴν πλευρὰν ΒΓ

καὶ λαμβάνομεν ἑκατέρωθεν τοῦ Β τὰ μήκη ΒΒ' καὶ ΒΒ'' ἴσα πρὸς δοθὲν μήκος λ' ἐπίσης ἑκατέρωθεν τοῦ Γ λαμβάνομεν τὰ μήκη ΓΓ' καὶ ΓΓ'' ἴσα πρὸς δοθὲν μήκος μ. Ἀπὸ τὰ σημεῖα Β' καὶ Β'' φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὴν ΑΒ καὶ ἀπὸ τὰ Γ' καὶ Γ'' παραλλήλους πρὸς τὴν ΑΓ καὶ σχηματίζομεν ἕνα παραλληλόγραμμον ΕΖΗΘ. Ἐπίσης ἀπὸ τὰ σημεῖα Β' καὶ Β'' φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὴν ΑΓ καὶ ἀπὸ τὰ Γ' καὶ Γ'' παραλλήλους πρὸς τὴν ΑΒ καὶ σχηματίζομεν ἕνα παραλληλόγραμμον Ε'Ζ'Η'Θ'.

1ον. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ τόποι τῶν κορυφῶν τῶν παραλληλογράμμων αὐτῶν, εἰάν λ καὶ μ μεταβάλλονται εἰς τρόπον, ὥστε ὁ λόγος $\frac{\lambda}{\mu}$ νὰ εἶναι ἴσος μὲ δοθέντα ἀριθμὸν κ.

2ον. Διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ κ ἕνα ἀπὸ τὰ παραλληλόγραμμα αὐτὰ εἶναι ῥόμβος ;

1478. (1513). Εἰς ἕνα τραπέζιον ἢ μία ἀπὸ τὰς μὴ παραλλήλους πλευρὰς εἶναι ὠρισμένη καὶ αἱ βάσεις του ἔχουν σταθερὰ μήκη. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων του.

1479. (1514). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο ἀπέναντι πλευρὰς ἐγγραψίμου τετραπλεύρου εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

1480. (1515). Ἀπὸ ἕνα σημεῖον Σ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς κύκλου Ο φέρομεν τὰς δύο ἐφαπτομένας ΣΑ καὶ ΣΒ. Αἱ δύο αὐταὶ ἐφαπτόμεναι τέμνονται ἀντιστοίχως εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ ὑπὸ τῆς διαμέτρου τῆς παραλλήλου πρὸς τὴν ΑΒ. Φέρομεν μίαν ἐφαπτομένην ΕΜΖ τῆς περιφερείας Ο, ἢ ὁποία τέμνει τὰς ἐφαπτομένας ΣΑ καὶ ΣΒ εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ καὶ οὕτω σχηματίζεται τὸ περιγεγραμμένον περὶ τὸν κύκλον Ο τρίγωνον ΣΕΖ.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ γινόμενον ΕΓ×ΔΖ εἶναι σταθερόν, ὅταν τὸ σημεῖον ἐπαφῆς Μ κινῆται ἐπὶ τῆς περιφερείας.

2ον. Γράφομεν περιφέρειαν Κ διερχομένην διὰ τῶν τριῶν σημείων Ε, Ο, Ζ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ κέντρου Κ, ὅταν τὸ Μ κινῆται ἐπὶ τῆς περιφερείας.

1481. (1516). Δίδεται περιφέρεια Ο καὶ μία ὠρισμένη διάμετρος αὐτῆς ΑΒ. Ἀπὸ τυχόν σημεῖον Μ τῆς περιφερείας Ο φέρομεν τὴν ΜΜ' κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ σημείου Ν τῆς καθέτου ΜΜ' καὶ τοιούτου, ὥστε $\frac{AM^2}{AN^2} = k^2$, ὅταν τὸ Μ γράφῃ τὴν περιφέρειαν Ο.

1482. (1517). Δύο κύκλοι Ο καὶ Ο' τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου Ο λαμβάνομεν ἕνα σημεῖον Γ μεταβλητὸν καὶ φέρομεν τὰς εὐθείας ΓΑ καὶ ΓΒ, αἱ ὁποῖαι προεκτεινόμεναι τέμνουν τὴν περιφέρειαν Ο' εἰς τὰ σημεῖα Α' καὶ Β' ἀντιστοίχως. Νὰ εὑρεθοῦν οἱ τόποι τοῦ κέντρου τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περὶ τὸ τρίγωνον ΓΑ'Β' καὶ τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν ὑψῶν του.

1483. (1518). Εἰς ἕνα κύκλον Ο διαμέτρου ΑΒ φέρομεν μίαν τυχοῦσαν χορδὴν ΑΓ ἐπὶ τῆς ὁποίας ὀρίζομεν ἑκατέρωθεν τοῦ Γ τὰ σημεῖα Δ καὶ Δ' τοιαῦτα, ὥστε $\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma\text{B}} = \frac{\Gamma\Delta'}{\Gamma\text{B}'} = \frac{\mu}{\nu}$. Νὰ εὑρεθῇ :

1ον. ὁ τόπος τῶν σημείων Δ καὶ Δ'.

2ον. ὁ τόπος τῶν σημείων τῆς τομῆς τῶν ὑψῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΔ ἢ τοῦ τριγώνου ΑΒΔ'.

3ον. ὁ τόπος τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ τρίγωνον ΒΔΔ'.

1484. (1519). Δίδεται μία περιφέρεια Ο ὠρισμένη καὶ ἓνα σημεῖον Μ μεταβλητόν, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ μιᾷς περιφερείας Ο'. Ἀπὸ τὸ Μ φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας ΜΓ καὶ ΜΓ' πρὸς τὴν περιφέρειαν Ο.

1ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ τοῦ κύκλου τοῦ παρεγγεγραμμένου εἰς τὴν γωνίαν Μ τοῦ τριγώνου ΜΤΤ'.

2ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τρίγωνον ΜΤΤ'.

3ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν ὑψῶν τοῦ τριγώνου ΜΤΤ'.

1485. (1520). Δίδονται δύο περιφέρειαι Ο καὶ Ο', αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ' συνδέομεν μὲ εὐθείας ἓνα τυχόν σημεῖον Α τῆς πρώτης περιφερείας μὲ τὰ σημεῖα Β καὶ Γ' αἱ ΑΒ καὶ ΑΓ τέμνουν τὴν δευτέραν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα Β' καὶ Γ' ἀντιστοιχῶς.

1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία, ἡ ὁποία σχηματίζεται ὑπὸ τῆς ΑΟ καὶ τῆς Β'Γ'.

2ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν τομῶν τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας Α καὶ τῆς καθέτου, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ Ο' ἐπὶ τὴν Β'Γ'.

1486. (1521). Δύο περιφέρειαι Ο καὶ Ο' τέμνονται εἰς δύο σημεῖα Α καὶ Β. Ἀπὸ τυχόν σημείου Σ τῆς πρώτης περιφερείας, φέρομεν τὰς εὐθείας ΣΑ καὶ ΣΒ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν περιφέρειαν Ο' εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ ἀντιστοιχῶς. Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ κέντρου βάρους τοῦ τριγώνου ΑΓΔ.

1487. (1522). Δύο περιφέρειαι Ο καὶ Ο' τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Ἐκ τυχόντος σημείου Π τῆς περιφερείας Ο φέρομεν τὰς τεμνοῦσας ΠΑΓ καὶ ΠΒΔ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν περιφέρειαν Ο' εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ χορδὴ ΓΔ εἶναι σταθερά.

2ον. Φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην ΠΜ τῆς περιφερείας Ο'. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὁ λόγος $\frac{\overline{ΠΜ}^2}{\overline{ΠΑ} \cdot \overline{ΠΒ}}$ εἶναι σταθερός.

3ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου ΑΔΓ.

Ε' Ὁμάς. 1488. (1523). Δίδονται τρεῖς περιφέρειαι Ο, Ο', Ο''. Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα τρίγωνον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχη μίαν κορυφὴν ἐπὶ ἐκάστης τῶν περιφερειῶν αὐτῶν καὶ αἱ πλευραὶ του νὰ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ΟΟ'Ο''.

1489. (1524). Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἃν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν α, τὸ ὕψος u_a καὶ ὅτι $\Gamma - B = 2\omega$.

1490. (1525). Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, ἃν γνωρίζωμεν τὸ ὕψος u_a καὶ τὴν διάμεσον μ_B .

1491. (1526). Δίδονται τρεῖς εὐθεῖαι Χ, Υ Ζ καὶ ζητεῖται νὰ ἀχθῇ μία εὐθεῖα ΑΒΓ τέμνουσα τὰς Χ, Υ, Ζ εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ ἀντιστοιχῶς, κάθετος ἐπὶ τὴν Υ εἰς τὸ σημεῖον Β καὶ τοιαύτη, ὥστε νὰ εἶναι $B\Gamma = 2AB$,

1492. (1527). Δίδονται δύο παράλληλοι εὐθεῖαι X καὶ Y καὶ ἐπὶ τῆς X ἓνα σημεῖον A καὶ ἐπὶ τῆς Y ἓνα σημεῖον B. Νὰ ἀχθῆ ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Σ μία τέμνουσα ΣΑΒ τὴν X εἰς τὸ Γ καὶ τὴν Y εἰς τὸ Δ καὶ τοιαύτη, ὥστε

$$\frac{ΑΓ}{ΒΔ} = \frac{μ}{ν}.$$

1493. (1528). Αἱ πλευραὶ ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι $AB=8 \mu$, $ΒΓ=10 \mu$, $ΓΑ=6 \mu$. Νὰ εὐρεθῆ ἓνα σημεῖον M ἐπὶ τῆς πλευρᾶς AB τοιοῦτον, ὥστε $MA+MG=2.MB$.

1494. (1493). Δίδονται δύο σημεία ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς μιᾶς ὀρθῆς γωνίας. Νὰ εὐρεθῆ ἐπὶ τῆς ἄλλης πλευρᾶς ἓνα σημεῖον Γ τοιοῦτον, ὥστε, ἂν φέρωμεν τὰς εὐθεῖας ΓΑ καὶ ΓΒ νὰ εἶναι $\gamma\omega\nu.ΑΓΒ=2 \gamma\omega\nu.ΑΒΓ$.

1495. (1530). Δίδεται ἡμικυκλίωτος Ο διαμέτρου $AB=2R$. Νὰ εὐρεθῆ ἐπὶ τῆς ἡμικυκλίωτος αὐτῆς ἓνα σημεῖον M τοιοῦτον, ὥστε, ἂν φέρωμεν τὴν χορδὴν MA καὶ τὴν κάθετον MG ἐπὶ τὴν AB, νὰ εἶναι $\overline{AM}^2 + \overline{MG}^2 = k^2$, ὅπου k δοθὲν μήκος.

1496. (1531). Δύο κύκλοι O καὶ O' ἀκτίνων R καὶ $\frac{R}{2}$ ἀντιστοιχῶς ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς εἰς τὸ σημεῖον A. Ζητεῖται νὰ γραφῆ ἓνας τρίτος κύκλος K, ὁ ὁποῖος νὰ ἐφάπτεται τῶν δύο πρώτων O καὶ O' καὶ τῆς εὐθείας OA. (Νὰ προσδιορισθῆ ὁ κύκλος K ἀπὸ τὴν ἀπόστασιν OB τοῦ κέντρου O τοῦ μεγάλου κύκλου ἀπὸ τὸ σημεῖον ἐπαφῆς τοῦ B μὲ τὴν AO καὶ ἀπὸ τὴν ἀκτίνα KB).

ΒΙΒΛΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

ΕΜΒΑΔΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄.

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΤΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

1. Γενικότητες. Ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου

505. Ἐμβαδόν. Διὰ νὰ ἐκτιμήσωμεν τὴν ἔκτασιν μιᾶς ἐπιφανείας, τὴν συγκρίνομεν πρὸς μίαν ἄλλην ἐπιφάνειαν, τὴν ὁποίαν λαμβάνομεν ὡς μονάδα.

Τὸ ἐξαγόμενον τῆς συγκρίσεως τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς πρὸς τὴν μονάδα τῶν ἐπιφανειῶν, δηλ. ὁ ἀριθμὸς ποῦ ἐκφράζει πόσας φορὰς ἡ δοθεῖσα ἐπιφάνεια περιέχει τὴν μονάδα τῶν ἐπιφανειῶν ἢ τὰ μέρη αὐτῆς, λέγεται *ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας*.

Ὡς μονάδα ἐπιφανείας λαμβάνομεν τὸ *τετραγωνικὸν μέτρον*, δηλ. τὴν ἐπιφάνειαν ἑνὸς τετραγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι ἴση μὲ 1 μέτρον.

Ὅταν λαμβάνωμεν ὡς μονάδα μήκους τὸ *δεκατόμετρον*, τὸ *ἐκατοστόμετρον*, τὸ *χιλιοστόμετρον*, κλπ. πρέπει νὰ λαμβάνωμεν ἀντιστοίχως ὡς μονάδα ἐπιφανείας τὸ *τετραγωνικὸν δεκατόμετρον*, τὸ *τετραγωνικὸν ἐκατοστόμετρον*, τὸ *τετραγωνικὸν χιλιοστόμετρον* κλπ. δηλ. τὴν ἐπιφάνειαν ἑνὸς τετραγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι ἴση μὲ 1 δεκατόμετρον, 1 ἐκατοστόμετρον, 1 χιλιοστόμετρον.

Δύο ἐπιφάνειαι εἶναι ἴσαι, ὅταν δύνανται νὰ ἐφαρμόσουν ἡ μία ἐπὶ τῆς ἄλλης.

Εἰς τὴν περὶπτωσιν αὐτὴν αἱ ἐπιφάνειαι αὐταὶ ἔχουν τὴν αὐτὴν ἔκτασιν, τὸ αὐτὸ ἐμβαδόν.

Ἐμάθαμεν εἰς τὴν (§ 8), ὅτι *δύο σχήματα εἶναι ἰσοδύναμα*, ὅταν ἔχουν τὴν αὐτὴν ἔκτασιν, χωρὶς νὰ ἔχουν καὶ τὴν αὐτὴν μορφήν. Εἶναι φανερόν, ὅτι δύο σχήματα ἰσοδύναμα θὰ ἔχουν τὸ αὐτὸ ἐμβαδόν, ἐὰν μετρηθοῦν διὰ τῆς αὐτῆς μονάδος.

Σημ. Αἱ λέξεις *ἐπιφάνεια* καὶ *ἐμβαδόν* ἑνὸς σχήματος, π.χ. ἑνὸς

πολυγώνου, δὲν σημαίνουν τὸ αὐτὸ πρᾶγμα. Ἡ λέξις ἐπιφάνεια δηλώνει τὴν μορφήν, τὴν ἑκτασιν ἑνὸς σχήματος, ἐνῶ ἡ λέξις ἐμβαδὸν δηλώνει τὸν ἀριθμὸν, ὃ ὁποῖος μετρεῖ μίαν ἐπιφάνειαν. Ὡστε, ἂν δύο σχήματα ἔχουν τὸ αὐτὸ ἐμβαδόν, δὲν πρέπει νὰ συμπεραίνωμεν ἀπαραιτήτως, ὅτι τὰ σχήματα αὐτὰ εἶναι καὶ ἴσα.

506. Διαστάσεις ὀρθογωνίου. Ἡ *βάσις* καὶ τὸ *ὑψος* ἑνὸς ὀρθογωνίου ὀνομάζονται **διαστάσεις** αὐτοῦ.

Εἶναι φανερόν, ὅτι: *Δύο ὀρθογώνια, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὑψη ἐφαρμόζουν καὶ ἐπομένως εἶναι ἴσα.*

507. Θεώρημα. Ὁ *λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὀρθογωνίων, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴσας βάσεις εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν ὑψῶν τῶν.*

Ἐπιπέδοι: Ἐστωσαν τὰ ὀρθογώνια ΑΒΓΔ καὶ ΖΗΘΙ (Σχ. 362), τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴσας βάσεις $AB=ZH=\beta$ καὶ διάφορα ὑψη ν καὶ ν' ,

Συμπέρασμα: Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ Ε καὶ Ε' τὰ ἐμβαδὰ τῶν, ἀντιστοίχως,

θὰ δεῖξωμεν, ὅτι $\frac{E}{E'} = \frac{\nu}{\nu'}$.

Ἀπόδειξις: 1^{ον}. Ὑποθέτομεν, ὅτι τὰ ὑψη ν καὶ ν' ἔχουν ἓνα κοινὸν μέτρον, τὸ ὁποῖον χωρεῖ 3 φορὰς εἰς τὸ ν καὶ 4 φο-

ρὰς εἰς τὸ ν' . Θὰ εἶναι λοιπὸν $\frac{\nu}{\nu'} = \frac{3}{4}$ (1)

Διαιροῦμεν τὸ ὑψος ν εἰς 3 ἴσα μέρη καὶ τὸ ὑψος ν' εἰς 4 ἴσα μέρη καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς βάσεις ΑΒ καὶ ΖΗ.

Τὰ ὀρθογώνια ΑΒΓΔ καὶ ΖΗΘΙ διηρέθησαν, τὸ πρῶτον εἰς τρία ὀρθογώνια καὶ τὸ δεύτερον εἰς τέσσαρα. Ὅλα τὰ ὀρθογώνια αὐτὰ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν ἴσα ὑψη καὶ ἴσας βάσεις. Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$\frac{AB\Gamma\Delta}{ZH\Theta I} = \frac{3}{4} \quad \text{καὶ} \quad \frac{E}{E'} = \frac{3}{4} \quad (2)$$

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι $\frac{E}{E'} = \frac{\nu}{\nu'}$.

2^{ον}. Ὑποθέτομεν, ὅτι τὰ ὑψη ν καὶ ν' δὲν ἔχουν κοινὸν μέτρον. Διαιροῦμεν τὸ ὑψος ν' εἰς ν ἴσα μέρη, ὅποτε τὸ ἓνα ἀπὸ αὐτὰ τὰ μέρη θὰ εἶναι ἴσον μὲ $\frac{1}{\nu}$ τοῦ ν' , δηλ. μὲ $\frac{1}{\nu} \times \nu'$ καὶ ὡς ὑποθέσωμεν, ὅτι τὸ ὑψος ν περιέχει μ ἀπὸ τὰ ἴσα αὐτὰ μέρη, ἀλλὰ δὲν περιέχει $\mu+1$

ἀπὸ αὐτά, ἦτοι ὅτι εἶναι $\mu \times \frac{1}{\nu} \nu' < \nu < (\mu+1) \frac{1}{\nu} \nu'$.

$$\text{Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν λαμβάνομεν } \frac{\mu}{\nu} < \frac{\nu}{\nu'} < \frac{\mu+1}{\nu} \quad (3)$$

Ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως τῶν ὑψῶν ν καὶ ν' φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς βάσεις AB καὶ ZH , ὁπότε τὸ δεύτερον ὀρθογώνιον E' θὰ χωρισθῇ εἰς ν ἴσα ὀρθογώνια. Ἐνα ἀπὸ τὰ ὀρθογώνια αὐτά, δηλ. τὸ $\frac{1}{\nu} \times E'$ θὰ χωρῇ μ φορές εἰς τὸ E , ἀλλὰ δὲν θὰ χωρῇ $\mu+1$ φορές, ἦτοι θὰ εἶναι

$$\mu \times \frac{1}{\nu} E' < E < (\mu+1) \frac{1}{\nu} E' \quad \eta \quad \frac{\mu}{\nu} < \frac{E}{E'} < \frac{\mu+1}{\nu} \quad (4)$$

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (3) καὶ (4) παρατηροῦμεν, ὅτι οἱ λόγοι $\frac{\nu}{\nu'}$ καὶ $\frac{E}{E'}$ περιέχονται μεταξὺ τῶν αὐτῶν τιμῶν $\frac{\mu}{\nu}$ καὶ $\frac{\mu+1}{\nu}$, αἱ ὁποῖαι διαφέρουν κατὰ $\frac{1}{\nu}$.

Ἀλλὰ ἡ διαφορὰ αὐτὴ δύναται νὰ γίνῃ ὅσονδῆποτε μικρὰ καὶ ἂν θέλωμεν, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὸ ὕψος ν' εἰς ἕνα μέγαν ἀριθμὸν ἴσων μερῶν.

Οἱ λόγοι λοιπὸν $\frac{\nu}{\nu'}$ καὶ $\frac{E}{E'}$, οἱ ὁποῖοι περιέχονται μεταξὺ δύο τιμῶν $\frac{\mu}{\nu}$ καὶ $\frac{\mu+1}{\nu}$, αἱ ὁποῖαι διαφέρουν τόσον ὀλίγον, ὅσον θέλωμεν, θὰ διαφέρουν μεταξὺ των κατὰ μίαν ποσότητα, ἡ ὁποία τείνει πρὸς τὸ μηδὲν καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι ἴσοι· ἄρα θὰ εἶναι $\frac{E}{E'} = \frac{\nu}{\nu'}$.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: *Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο...*

508. Πόρισμα. Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὀρθογωνίων, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴσα ὕψη, εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν βάσεων των.

Τοῦτο γίνεται φανερὸν ἐκ τοῦ ὅτι δυνάμεθα εἰς ἕνα ὀρθογώνιον νὰ λάβωμεν τὴν βάσιν του ὡς ὕψος καὶ τὸ ὕψος του ὡς βάσιν.

509. Θεώρημα. Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὀρθογωνίων εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν γινομένων τῶν διαστάσεων των.

Ἐπιπέδουσι: Ἐστωσαν E καὶ E' τὰ ἐμβαδὰ δύο ὀρθογωνίων, τὰ ὁποῖα ἔχουν διαστάσεις, τὸ πρῶτον β καὶ ν καὶ τὸ δεύτερον β' καὶ ν' . (Σχ. 363).

Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι $\frac{E}{E'} = \frac{\beta\nu}{\beta'\nu'}$.

Ἀπόδειξις: Φανταζόμεθα ἕνα τρίτον ὀρθογώνιον E'' , τὸ ὁποῖον

Παράδειγμα: Ἐὰν ἡ βάσις ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι 14,5 μ. καὶ τὸ ὕψος του 8 μ., τὸ ἔμβαδόν του εἶναι $14,5 \times 8 = 116$ τετρ. μέτρα.

Παρατηρήσεις: I. Ὅταν λέγωμεν ὅτι: τὸ ἔμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του, ἐννοοῦμεν, ὅτι τὸ ἔμβαδόν του εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι μετροῦν τὴν βάσιν καὶ τὸ ὕψος.

Γενικῶς: ἂν δύο ἀριθμοὶ ἐκφράζουσιν μῆκη εὐθειῶν, τὸ γινόμενον των θὰ σημαίνει τὸ ἔμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου, ποῦ ἔχει βάσιν καὶ ὕψος τὰς εὐθείας αὐτάς.

II. Ὁ τύπος $E = \beta \times \upsilon$ εἶναι μία σχέση, ἡ ὁποία συνδέει τὰ τρία μεγέθη E (ἔμβαδόν), β (βάσιν), υ (ὕψος). Ὁ τύπος αὐτὸς μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ἓνα μέγεθος, ὅταν γνωρίζωμεν τὰ δύο ἄλλα.

Δηλ. εἶναι: $E = \beta \times \upsilon$, $\beta = \frac{E}{\upsilon}$, $\upsilon = \frac{E}{\beta}$.

511. Ἐμβαδὸν τετραγώνου. Τὸ τετράγωνον εἶναι ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου αἱ διαστάσεις εἶναι ἴσαι. Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν μὲ α τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου καὶ μὲ E τὸ ἔμβαδόν του, θὰ εἶναι

$$E = \alpha \times \alpha \quad \text{ἢ} \quad E = \alpha^2.$$

Ὅστε: Τὸ ἔμβαδὸν ἑνὸς τετραγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τῆς πλευρᾶς του.

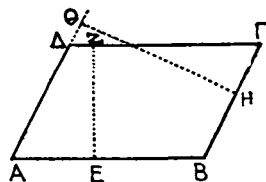
Σημ. Ἡ δευτέρα δύναμις ἑνὸς ἀριθμοῦ, π.χ. ἡ 5^2 λέγεται καὶ τετράγωνον τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ, διότι δίδει τὸ ἔμβαδόν τοῦ τετραγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι ἴση μὲ τὸν ἀριθμὸν.

Ἀσκήσεις: 1497, 1498, 1499, 1500, 1501, 1502, 1503, 1505, 1511, 1514.

2. Ἐμβαδὸν εὐθυγράμμων σχημάτων

512. Ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου. Ὅρισμοί. Εἰς ἓνα παραλληλόγραμμον λαμβάνομεν ὡς βάσιν του μίαν ἀπὸ τὰς πλευρὰς του· τότε τὸ ὕψος του εἶναι ἡ ἀπόστασις τῆς πλευρᾶς αὐτῆς (βάσεως) ἀπὸ τὴν ἀπέναντι πλευρὰν.

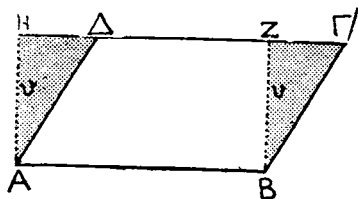
Π.χ. εἰς τὸ παραλληλόγραμμον $AB\Gamma\Delta$ (Σχ. 365), ἐὰν ληφθῇ ὡς βάσις ἡ πλευρὰ AB , ὕψος του θὰ εἶναι ἡ EZ . Ἐὰν ληφθῇ ὡς βάσις του ἡ $A\Delta$, ὕψος θὰ εἶναι ἡ $H\Theta$.



Σχ. 365.

513. Πρόβλημα. *Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔμβαδὸν ἐνὸς παραλληλογράμμου, τοῦ ὁποίου δίδεται ἡ βάση του καὶ τὸ ὕψος του.*

Ἐστω τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ (Σχ. 366), ΑΒ=β ἡ βάση του καὶ ΒΖ=υ τὸ ὕψος του. Ἀπὸ τὰς κορυφᾶς Α καὶ Β φέρομεν καθέτους ΑΗ καὶ ΒΖ ἐπὶ τὴν ΑΓ, αἱ ὁποῖαι τέμνουσιν τὴν ΑΓ εἰς τὰ σημεῖα Η καὶ Ζ. Σχηματίζεται οὕτω τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΖΗ, τὸ ὁποῖον



Σχ. 366.

ἔχει τὴν αὐτὴν βάση ΑΒ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ΒΖ μὲ τὸ παραλληλόγραμμον. Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ καὶ τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΖΗ εἶναι ἰσοδύναμα.

Ἀπόδειξις: Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΗΔ καὶ ΒΖΓ εἶναι ἴσα.

Ἐὰν ἀπὸ τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΗ ἀφαιρέσωμεν τὸ τρίγωνον ΑΗΔ, μένει τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ. Ἐπίσης, ἂν ἀπὸ τὸ αὐτὸ τετράπλευρον ἀφαιρέσωμεν τὸ τρίγωνον ΒΖΓ, μένει τὸ ὀρθογώνιον ΑΒΖΗ. Ἐπειδὴ καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις ἀφαιροῦμεν ἴσα τρίγωνα ἀπὸ τὸ αὐτὸ τετράπλευρον, τὸ παραλληλόγραμμον εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ὀρθογώνιον καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι
 $\text{ἔμβ. παραλλ. ΑΒΓΔ} = \text{ἔμβ. ὀρθογ. ΑΒΖΗ} = \text{ΑΒ} \times \text{ΒΖ}$

ἢ

$$\boxed{\text{ἔμβ. παραλλ. ΑΒΓΔ} = \beta \times \upsilon}$$

Ἔστω: *Τὸ ἔμβαδὸν ἐνὸς παραλληλογράμμου εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.*

514. Πόρισμα I. *Δύο παραλληλόγραμμα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη, εἶναι ἰσοδύναμα.*

Διότι ἔχουν τὸ αὐτὸ ἔμβαδόν: τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος.

515. Πόρισμα II. *Ἄν δύο παραλληλόγραμμα ἔχουν ἴσας βάσεις, τὰ ἔμβαδά των ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν ὕψων των· ἂν ἔχουν ἴσα ὕψη, τὰ ἔμβαδά των ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν βάσεών των.*

Ἐπίσης: Ἐστώσαν Ε καὶ Ε' τὰ ἔμβαδά δύο παραλληλογράμμων, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν βάση β καὶ ὕψη υ καὶ υ' ἀντιστοίχως.

Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι $\frac{Ε}{Ε'} = \frac{\upsilon}{\upsilon'}$.

Ἀπόδειξις: Γνωρίζομεν, ὅτι $Ε = \beta \times \upsilon$ καὶ $Ε' = \beta \times \upsilon'$.

Διαιροῦμεν τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\frac{E}{E'} = \frac{\beta \times v}{\beta' \times v'} \quad \eta \quad \frac{E}{E'} = \frac{v}{v'}$$

Ἐὰν τὰ παραλληλόγραμμα ἔχουν βάσεις β καὶ β' καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος v εὐρίσκομεν ὁμοίως, ὅτι $\frac{E}{E'} = \frac{\beta}{\beta'}$.

516. Πόρισμα III. *Τὰ ἔμβαδὰ δύο τυχόντων παραλληλογράμμων ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν γινομένων τῶν βάσεων τῶν ἐπὶ τὰ ὕψη τῶν.*

Ἐπιπέδουσι: Ἐστῶσαν E καὶ E' τὰ ἔμβαδὰ δύο παραλληλογράμμων, τὰ ὁποῖα ἔχουν βάσεις β καὶ β' καὶ ὕψη v καὶ v' .

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\frac{E}{E'} = \frac{\beta \times v}{\beta' \times v'}$.

Ἀπόδειξις: Γνωρίζομεν, ὅτι $E = \beta \times v$ καὶ $E' = \beta' \times v'$.

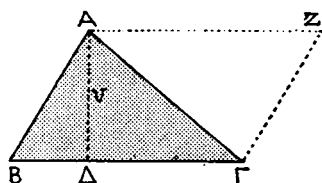
Διαιροῦμεν τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν $\frac{E}{E'} = \frac{\beta \times v}{\beta' \times v'}$.

Ἀσκήσεις: 1524, 1525, 1526, 1527, 1528.

517. Β'. Ἐμβαδὸν τριγώνου. Πρόβλημα. *Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔμβαδὸν ἐνὸς τριγώνου, συναρτήσῃ τῆς βάσεώς του καὶ τοῦ ὕψους του.*

Λύσις. Ἐστω τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ (Σχ. 367), $B\Gamma = \beta$ ἡ βᾶσις του καὶ $AD = v$ τὸ ὕψος του.

Ἀπὸ τὰς κορυφὰς A καὶ Γ φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς ἀπέναντι πλευράς του, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς ἓνα σημεῖον Z . Τὸ σχηματισθὲν τετράπλευρον $AB\Gamma Z$ εἶναι παραλληλόγραμμον. Ἐπειδὴ ἡ διαγώνιος $A\Gamma$ τοῦ παραλληλογράμμου $AB\Gamma Z$ διαιρεῖ αὐτὸ εἰς δύο ἴσα τρίγωνα, τὸ $AB\Gamma$ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλογράμμου $AB\Gamma Z$. Ἐπομένως καὶ τὸ ἔμβαδὸν τοῦ τριγώνου θὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ἔμβαδοῦ τοῦ παραλληλογράμμου, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον μὲ $B\Gamma \times AD$, δηλ. θὰ εἶναι:



Σχ. 367.

$$\text{ἔμβ. τριγ. } AB\Gamma = \frac{1}{2} \text{ ἔμβ. παραλληλογρ. } AB\Gamma Z = \frac{1}{2} B\Gamma \times AD.$$

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ E τὸ ἔμβαδὸν τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$, θὰ εἶναι:

$$E = \frac{1}{2} B\Gamma \times AD \quad \eta \quad \boxed{E = \frac{\beta \times v}{2}}$$

Ὡστε: *Τὸ ἔμβαδὸν ἐνὸς τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.*

518. Πόρισμα I. *Τὸ ἐμβαδὸν ἐνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῶν καθέτων πλευρῶν του.*

Διότι, ἐὰν λάβωμεν τὴν μίαν ἀπὸ τὰς καθέτους πλευρὰς ὡς βάσιν ἢ ἄλλη καθέτος πλευρὰ θὰ εἶναι ὕψος τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου.

Παρατήρησις: Ἐὰν α εἶναι ἡ ὑποτείνουσα ἐνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, β, γ αἱ κάθετοι πλευραὶ του καὶ υ τὸ ὕψος του ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν, θὰ εἶναι: $\beta\gamma = \alpha\upsilon$ διότι καθένα ἀπὸ τὰ γινόμενα αὐτὰ παριστάνει τὸ διπλάσιον ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου.

519. Πόρισμα II. *Δύο τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη εἶναι ἰσοδύναμα.*

Διότι ἔχουν τὸ αὐτὸ ἐμβαδόν: τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς βάσεως τῶν ἐπὶ τὸ ὕψος τῶν.

520. Πόρισμα III. *Ἄν δύο τρίγωνα ἔχουν ἴσας βάσεις, τὰ ἐμβαδὰ των ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν ὑψῶν των. Ἄν ἔχουν ἴσα ὕψη, τὰ ἐμβαδὰ των ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν βάσεων του.*

1ον Ἐστωσαν δύο τρίγωνα Τ καὶ Τ', τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν β καὶ ὕψη υ καὶ υ' ἀντιστοίχως. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ Ε καὶ Ε' τὰ ἐμβαδὰ των, θὰ εἶναι: $E = \frac{\beta \times \upsilon}{2}$ καὶ $E' = \frac{\beta \times \upsilon'}{2}$.

Διαιροῦμεν τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\frac{E}{E'} = \frac{\beta \times \upsilon}{\beta \times \upsilon'} \quad \eta \quad \frac{E}{E'} = \frac{\upsilon}{\upsilon'}$$

2ον: Ἐὰν τὰ τρίγωνα Τ καὶ Τ' ἔχουν βάσεις β καὶ β' καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος υ εὐρίσκομεν ὁμοίως, ὅτι $\frac{E}{E'} = \frac{\beta}{\beta'}$.

521. Πόρισμα IV. *Τὰ ἐμβαδὰ δύο τυχόντων τριγώνων ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν γινομένων τῶν βάσεων των ἐπὶ τὰ ὕψη των.*

Ἐστωσαν Τ καὶ Τ' δύο τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἀντιστοίχως, βάσεις β καὶ β' καὶ ὕψη υ καὶ υ'. Ἄν παραστήσωμεν μὲ Ε καὶ Ε' τὰ ἐμβαδὰ των, θὰ ἔχωμεν $E = \frac{\beta \times \upsilon}{2}$ καὶ $E' = \frac{\beta' \times \upsilon'}{2}$.

Διαιροῦμεν τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\frac{E}{E'} = \frac{\beta \times \upsilon}{\beta' \times \upsilon'}$$

Ἀσκήσεις: 1529, 1530, 1531, 1532, 1536, 1537, 1539, 1542.

522. Πρόβλημα. *Νὰ ἐκφρασθῇ τὸ ἔμβαδὸν ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου, συναρτήσῃ τῆς πλευρᾶς του α.*

Λύσις. Ἡ βάση τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι α, τὸ ὕψος του εἶναι ἴσον (§ 362) μετὰ $\frac{\alpha}{2}\sqrt{3}$. Ἐπομένως τὸ ἔμβαδὸν τοῦ Ε εἶναι

$$E = \frac{1}{2} \alpha \times \frac{\alpha}{2} \sqrt{3} \quad \eta \quad \boxed{E = \frac{\alpha^2 \sqrt{3}}{4}}$$

Ἀσκήσεις: 1547, 1548, 1549.

523. Πρόβλημα. *Νὰ ἐκφρασθῇ τὸ ἔμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ: 1ον. συναρτήσῃ τῶν πλευρῶν α, β, γ.*

2ον. συναρτήσῃ τῶν πλευρῶν του καὶ τῆς ἀκτίνος R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

Λύσις. 1ον. Ἐὰν λάβωμεν ὡς βάση τοῦ τριγώνου ΑΒΓ τὴν πλευρὰν α, τότε τὸ ὕψος του (§ 446) θὰ εἶναι $v_a = \frac{2}{\alpha} \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$ καὶ ἐπομένως τὸ ἔμβαδὸν τοῦ Ε θὰ εἶναι

$$E = \frac{1}{2} \alpha \times \frac{2}{\alpha} \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} \quad \eta \quad \boxed{E = \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}}^*$$

2ον Γνωρίζομεν (§ 448), ὅτι $\beta\gamma = 2Rv_a$. ἄρα $v_a = \frac{\beta\gamma}{2R}$.

Ἐὰν λοιπὸν λάβωμεν ὡς βάση τοῦ τριγώνου τὴν πλευρὰν α, τὸ ὕψος του θὰ εἶναι $v = \frac{\beta\gamma}{2R}$ καὶ ἐπομένως τὸ ἔμβαδὸν τοῦ Ε, θὰ εἶναι

$$E = \frac{1}{2} \alpha \times \frac{\beta\gamma}{2R} \quad \eta \quad \boxed{E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}}$$

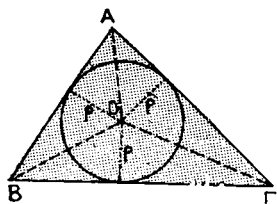
Ἀσκήσεις: 1549, 1550.

524. Πρόβλημα. *Νὰ ἐκφρασθῇ τὸ ἔμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου, συναρτήσῃ τῆς ἀκτίνος ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.*

Λύσις. Ἐστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (Σχ. 368) καὶ Ο ὁ ἐγγεγραμμένος εἰς αὐτὸ κύκλος. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ καὶ τὰς ἀκτῖνας ρ εἰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς. Τὸ ἔμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ εἶ-

* Ὁ τύπος αὐτὸς φέρεται ὡς τύπος τοῦ Ἡρώου. Περιέχεται εἰς τὸ ἔργον τοῦ Ἡρώου «Μετρικά» I. 8 καθὼς καὶ εἰς τὸ ἔργον του «Διόπτρα» κεφ. 30. Ἦδη κατὰ τὸν κ. Ε. Σταμάτην καθηγ. Φυσικῶν, ὁ ὁποῖος ἀσχολεῖται ἀπὸ καιροῦ μετὰ τὰ ἔργα τοῦ Ἀρχιμήδους, εἶναι γνωστὸν ἕξ Ἀραβικῶν πηγῶν, ὅτι ἡ ἀπόδειξις τοῦ τύπου αὐτοῦ ὀφείλεται εἰς τὸν Ἀρχιμήδην.

καί ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγῶνων ΟΒΓ, ΟΓΑ,



Σχ. 368.

ΟΑΒ, τὰ ὁποῖα ἔχουν βάσεις τὰς πλευρὰς α, β, γ τοῦ τριγῶνου, ἀντιστοίχως καὶ ὕψη ἴσα μὲ τὴν ἀκτίνα ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ Ε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγῶνου ΑΒΓ θὰ ἔχωμεν :

$$E = \text{ἐμβ.τρ.ΟΒΓ} + \text{ἐμβ.τρ.ΟΓΑ} + \text{ἐμβ.τρ.ΟΑΒ} = \frac{\alpha \times \rho}{2} + \frac{\beta \times \rho}{2} + \frac{\gamma \times \rho}{2} = \frac{\rho}{2} (\alpha + \beta + \gamma).$$

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ 2τ τὴν περιμέτρον α+β+γ τοῦ τριγῶνου, θὰ ἔχωμεν

$$E = \rho \tau.$$

525. Πρόβλημα. Νὰ ἐκφρασθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τριγῶνου, συναρτήσῃ τῆς περιμέτρου του καὶ τῆς ἀκτίνας ρ_a ἢ ρ_b ἢ ρ_γ ἑνὸς ἐκ τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων.

Λύσις. Ἐστω τὸ τρίγωνον ΑΒΓ (Σχ. 369) καὶ O_a τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τοῦ παρεγγεγραμμένου εἰς τὴν γωνίαν Α τοῦ τριγῶνου. Φέρομεν τὰς εὐθείας $O_a A$, $O_a B$, $O_a \Gamma$ καὶ τὰς ἀκτίνας ρ_a εἰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς. Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸ σχῆμα, τὸ ἐμβαδὸν Ε τοῦ τριγῶνου εἶναι

$$E = \text{ἐμβ. τρ. } O_a AB + \text{ἐμβ. τρ. } O_a A\Gamma - \text{ἐμβ. τριγ. } O_a B\Gamma$$

$$\text{ἢ } E = \frac{\gamma \times \rho_a}{2} + \frac{\beta \times \rho_a}{2} - \frac{\alpha \times \rho_a}{2}$$

$$E = (\gamma + \beta - \alpha) \times \frac{\rho_a}{2} \quad (1)$$

Ἐὰν θέσωμεν $\alpha + \beta + \gamma = 2\tau =$ περιμετρος τριγῶνου, τότε $\beta + \gamma - \alpha = 2\tau - 2\alpha = 2(\tau - \alpha)$ καὶ ἡ ἰσότης (1) γράφεται

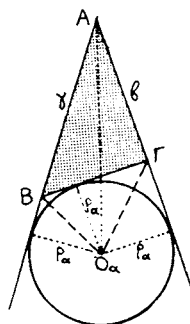
$$E = (\tau - \alpha) \rho_a.$$

Ὁμοίως εὐρίσκομεν, ὅτι

$$E = (\tau - \beta) \rho_b \quad \text{καὶ} \quad E = (\tau - \gamma) \rho_\gamma.$$

526. Παρατήρησις. Οἱ τύποι τῶν § 523, 524, 525 μᾶς ἐπιτρέπουν νὰ ὑπολογίσωμεν, συναρτήσῃ τῶν τριῶν πλευρῶν ἑνὸς τριγῶνου, τὰς ἀκτίνας τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων.

Πράγματι οἱ τύποι $E = \rho \tau$, $E = (\tau - \alpha) \rho_a = (\tau - \beta) \rho_b = (\tau - \gamma) \rho_\gamma$



Σχ. 369.

δίδου

$$\rho = \frac{E}{\tau} = \frac{\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}}{\tau} = \sqrt{\frac{(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau}}$$

$$\rho_\alpha = \frac{E}{\tau-\alpha} = \frac{\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\gamma)(\tau-\beta)}}{\tau-\alpha} = \sqrt{\frac{\tau(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}{\tau-\alpha}}$$

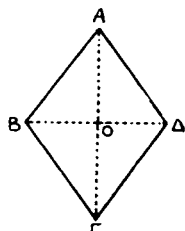
$$\rho_\beta = \sqrt{\frac{\tau(\tau-\gamma)(\tau-\alpha)}{\tau-\beta}}, \quad \rho_\gamma = \sqrt{\frac{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)}{\tau-\gamma}}$$

Ἀσκήσεις: 1551, 1552, 1553.

527. Γ'. Ἐμβαδὸν ρόμβου. Πρόβλημα. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔμβαδον ἐνὸς ρόμβου, συναρτήσῃ τῶν διαγωνίων του.

Λύσις. Ἐστω ὁ ρόμβος ΑΒΓΔ καὶ ΑΓ, ΒΔ (Σχ. 370) αἱ διαγωνιοὶ του.

Τὸ ἔμβαδον τοῦ ρόμβου ΑΒΓΔ εἶναι ἴσον μὲ ἄθροισμα τῶν ἔμβადων τῶν δύο τριγώνων ΑΒΔ καὶ ΓΒΔ, ἢ μὲ τὸ διπλάσιον τοῦ ἔμβადου τοῦ τριγώνου ΑΒΔ, διότι τὰ δύο αὐτὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα. Δηλ. εἶναι ἔμβ. ρόμβου ΑΒΓΔ = 2 × ἔμβ. τριγ. ΑΒΔ (1)



Σχ. 370.

Ἐπειδὴ αἱ διαγωνιοὶ τοῦ ρόμβου διχοτομοῦνται καὶ εἶναι κάθετοι μεταξύ των, τὸ ΑΟ εἶναι ὕψος τοῦ τριγώνου ΑΒΔ. Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$\text{ἔμβ. τριγ. ΑΒΔ} = \frac{ΒΔ \times ΑΟ}{2}, \text{ ὁπότε ἡ (1) γράφεται}$$

$$\text{ἔμβ. ρόμβ. ΑΒΓΔ} = 2 \times \frac{ΒΔ \times ΑΟ}{2} = ΒΔ \times ΑΟ \quad (2)$$

Ἐπειδὴ ΑΟ = $\frac{ΑΓ}{2}$, ἡ ἰσότης (2) γράφεται

$$\text{ἔμβ. ρόμβ. ΑΒΓΔ} = \frac{ΒΔ \times ΑΓ}{2}$$

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ Ε τὸ ἔμβαδον τοῦ ρόμβου καὶ μὲ δ καὶ δ' τὰς διαγωνίους του, θὰ εἶναι $E = \frac{\delta \times \delta'}{2}$.

Ὡστε: **Τὸ ἔμβαδον ἐνὸς ρόμβου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἡμισυ τοῦ γινομένου τῶν δύο διαγωνίων του.**

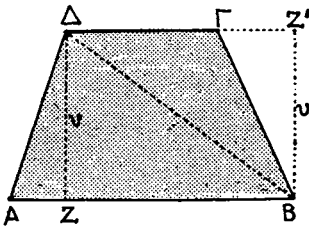
Ἀσκήσεις: 1554, 1555, 1556, 1557.

528. Δ'. Ἐμβαδὸν τραπέζιου. Πρόβλημα. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔμβαδον ἐνὸς τραπέζιου, συναρτήσῃ τῶν δύο βάσεων του καὶ τοῦ ὕψους του.

Λύσις. Ἐστω τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσεις τὰς ΑΒ = β καὶ ΓΔ = β καὶ ὕψος τὸ ΔΖ = υ (Σχ. 371).

Φέρομεν τὴν διαγώνιον ΒΔ· τὸ τραπέζιον ΑΒΓΔ εἶναι ἄθροισμα

τῶν δύο τριγώνων ΔAB καὶ $\Delta \Gamma B$: τὸ τρίγωνον ΔAB ἔχει βάσιν τὴν $AB=B$ καὶ ὕψος τὸ $\Delta Z=v$ καὶ τὸ τρίγωνον $\Delta \Gamma B$ ἔχει βάσιν τὴν $\Gamma \Delta=\beta$ καὶ ὕψος $BZ'=v$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον μὲ τὸ ὕψος ΔZ . Θὰ εἶναι λοιπὸν :



Σχ. 371.

$$\begin{aligned} \text{ἔμβ. τραπ. } AB\Gamma\Delta &= \\ &= \text{ἔμβ. τριγ. } \Delta AB + \text{ἔμβ. τριγ. } \Delta \Gamma B = \\ &= \frac{1}{2} B \cdot v + \frac{1}{2} \beta \cdot v = \frac{1}{2} v \cdot (B + \beta). \end{aligned}$$

Ἄρα εἶναι :

$$\text{Ἐμβ. τραπ.} = \frac{B + \beta}{2} \times v$$

Ὡστε: *Τὸ ἔμβαδὸν ἑνὸς τραπεζίου εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν δύο βάσεων του ἐπὶ τὸ ὕψος του.*

Παρατήρησις: Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ E τὸ ἔμβαδὸν ἑνὸς τραπεζίου, μὲ B καὶ β τὰς δύο βάσεις του AB καὶ $\Gamma \Delta$ καὶ μὲ v τὸ ὕψος του ΔZ , θὰ ἔχωμεν, ὅπως εὐρέθη ἄνωτέρω, τὸν τύπον

$$E = \frac{B + \beta}{2} \times v \quad (1)$$

ὁ ὁποῖος δίδει τὸ ἔμβαδὸν ἑνὸς τραπεζίου.

Ὁ τύπος (1) συνδέει τὰ τέσσαρα μεγέθη E , B , β , v . Ἐὰν τρία ἀπὸ τὰ μεγέθη αὐτὰ εἶναι γνωστά, δυνάμεθα, ἀπὸ τὸν τύπον αὐτόν, νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ τέταρτον. Ὡστε ὁ τύπος (1) μᾶς ἐπιτρέπει νὰ λύσωμεν 4 διάφορα προβλήματα, καθόσον τὸ ἓνα ἀπὸ τὰ μεγέθη αὐτὰ λαμβάνεται ὡς ἄγνωστον. Δηλ. εἶναι

$$\boxed{B = \frac{2E - \beta v}{v}}, \quad \boxed{\beta = \frac{2E - Bv}{v}}, \quad \boxed{v = \frac{2E}{B + \beta}}$$

529. Πόρισμα. Ἐπειδὴ τὸ ἡμιαθροίσμα $\frac{B + \beta}{2}$ τῶν δύο βάσεων B καὶ β ἑνὸς τραπεζίου εἶναι ἴσον μὲ τὴν διάμεσόν του (§ 224) συναγομεν, ὅτι :

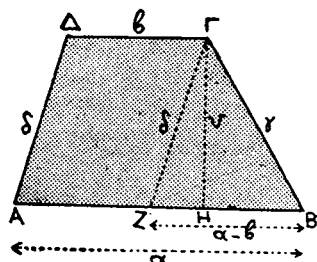
Τὸ ἔμβαδὸν ἑνὸς τραπεζίου εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς διαμέσου του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

530. Πρόβλημα. *Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔμβαδὸν ἑνὸς τραπεζίου, συναρτήσει τῶν πλευρῶν του.*

Λύσις. Ἐστω τὸ τραπέζιον $AB\Gamma\Delta$ (Σχ. 372) καὶ $AB=\alpha$, $\Gamma\Delta=\beta$, $B\Gamma=\gamma$, $\Delta A=\delta$ αἱ πλευραὶ του. Ἐὰν ΓH εἶναι τὸ ὕψος του, θὰ εἶναι :

$$\text{ἔμβ. τραπ } AB\Gamma\Delta = \frac{\alpha + \beta}{2} \times \Gamma H \quad (1).$$

Ἐπολογίζομεν τὸ ὕψος ΓΗ. Ἀπὸ τὸ Γ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ΔΑ, ἢ ὁποία τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ Ζ. Θὰ εἶναι ΓΖ=ΔΑ=δ, ΑΖ=ΔΓ=β, ὁπότε ΖΒ=ΑΒ-ΑΖ=α-β. Τοῦ τριγώνου ΓΖΒ γνωρίζομεν τὰς τρεῖς πλευράς του ΓΖ=δ, ΖΒ=α-β, ΒΓ=γ καὶ ἐπομένως δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ὕψος τοῦ ΓΗ.



Σχ. 372.

Γνωρίζομεν (§ 379), ὅτι

$$\Gamma\text{H} = \frac{2}{\alpha - \beta} \sqrt{[\tau - (\alpha - \beta)](\tau - \gamma)(\tau - \delta)} \quad (2).$$

ὅπου $\tau = \frac{(\alpha - \beta) + \gamma + \delta}{2}$ = ἡμικυκλίωτος τριγώνου ΓΖΒ. Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (2) τὸ τ μετὰ τὴν τιμὴν του καὶ ἔχομεν:

$$\Gamma\text{H} = \frac{2}{\alpha - \beta} \sqrt{\frac{\alpha - \beta + \gamma + \delta}{2} \times \frac{\beta + \gamma + \delta - \alpha}{2} \times \frac{\alpha - \beta - \gamma + \delta}{2} \times \frac{\alpha - \beta + \gamma - \delta}{2}} \quad (3).$$

Ἐὰν θέσωμεν $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\sigma$ = περίμετρος τραπεζίου, θὰ εἶναι
 $\alpha - \beta + \gamma + \delta = 2(\sigma - \beta)$
 $\beta + \gamma + \delta - \alpha = 2(\sigma - \alpha)$
 $\alpha - \beta - \gamma + \delta = 2(\sigma - \beta - \gamma)$
 $\alpha - \beta + \gamma - \delta = 2(\sigma - \beta - \delta)$.

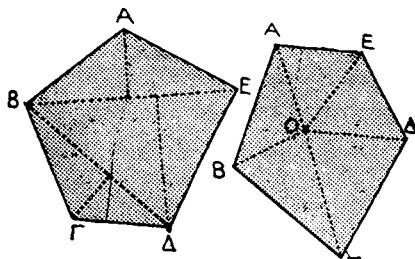
Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (3) τὰ $\alpha - \beta + \gamma + \delta$ κλπ. μετὰ τὰ ἴσα των καὶ ἔχομεν $\Gamma\text{H} = \frac{2}{\alpha - \beta} \sqrt{(\sigma - \alpha)(\sigma - \beta)(\sigma - \beta - \gamma)(\sigma - \beta - \delta)}$. Τὴν τιμὴν αὐτὴν τοῦ ΓΗ θέτομεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) καὶ εὐρίσκομεν

$$\text{ἐμβ. τραπ. ΑΒΓΔ} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta} \sqrt{(\sigma - \alpha)(\sigma - \beta)(\sigma - \beta - \gamma)(\sigma - \beta - \delta)}$$

Ἀσκήσεις: 1558, 1559, 1560, 1561, 1562, 1563, 1564, 1565, 1566, 1567.

531. Ε'. Ἐμβαδὸν τυχόντος πολυγώνου. Διὰ νὰ εὕρωμεν τὸ ἔμβαδον τυχόντος πολυγώνου ἐργαζόμεθα κατὰ δύο τρόπους:

Πρῶτος τρόπος. Διαιροῦμεν τὸ πολύγωνον εἰς τρίγωνα, εἴτε φέροντες ὅλας τὰς διαγωνίους του, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὴν αὐτὴν κορυφὴν του (Σχ. 373), εἴτε συνδέοντες ὅλας τὰς κορυφὰς τοῦ πολυγώνου μετὰ τυχὸν ση-



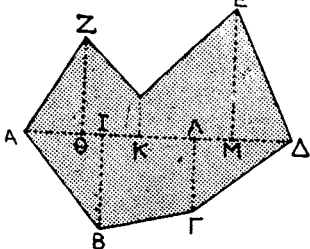
Σχ. 373.

μειον, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν ἐντὸς τοῦ πολυγώνου.

Ἐπολογίζομεν χωριστὰ τὸ ἔμβαδὸν τῶν τριγώνων, ποὺ ἐσχηματίσθησαν καὶ προσθέτομεν ἔπειτα τὰ ἔμβαδὰ τῶν τριγώνων αὐτῶν.

Τὸ ἄθροισμα τῶν ἔμβαδῶν τῶν τριγώνων αὐτῶν δίδει τὸ ἔμβαδὸν τοῦ πολυγώνου.

Δεύτερος τρόπος. Φέρομεν τὴν μεγαλύτεραν διαγώνιον ΑΔ τοῦ πολυγώνου (Σχ. 374). Ἐπειτα ἀπὸ ὅλας τὰς κορυφὰς τοῦ φέρομεν τὰς καθέτους ΒΙ, ΓΛ, . . . ἐπὶ τὴν διαγώνιον αὐτήν, αἱ ὁποῖα χωρίζουν τὸ πολύγωνον εἰς τρίγωνα καὶ τραπέζια. Μετροῦμεν τὰ μήκη τῶν καθέτων ΖΘ, ΒΙ, . . . καὶ τὰ μήκη ΑΘ, ΘΙ, . . . , τὰ ὁποῖα ὀρίζουν οἱ πόδες τῶν καθέτων ἐπὶ τῆς διαγωνίου ΑΔ.

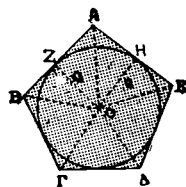


Σχ. 374.

Ἐπειτα ὑπολογίζομεν τὰ ἔμβαδὰ τῶν τριγώνων καὶ τῶν τραπέζιων, ποὺ ἐσχηματίσθησαν. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἔμβαδῶν τῶν τριγώνων καὶ τῶν τραπέζιων αὐτῶν εἶναι τὸ ἔμβαδὸν τοῦ δοθέντος πολυγώνου. Ἡ μέθοδος αὕτη ἐφαρμόζεται συνήθως ἐπὶ τοῦ ἐδάφους κατὰ τὸν ὑπολογισμὸν τοῦ ἔμβαδοῦ ἑνὸς ἀγροῦ κλπ.

532. Ἰδιαιτεραι περιπτώσεις: Πρόβλημα. Νὰ εὐρεθῇ τὸ ἔμβαδὸν ἑνὸς πολυγώνου, περιγεγραμμένου περὶ ἓνα κύκλον ἀκτίνας ρ.

Λύσις. Ἐστω ἓνα πολύγωνον ΑΒΓΔΕ περιγεγραμμένον περὶ ἓνα κύκλον Ο (Σχ. 375). Ἄν φέρωμεν τὰς εὐθείας ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, . . . τὸ πολύγωνον χωρίζεται εἰς τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν βάσεις ἀντιστοίχως τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου καὶ ὡς ὕψη τὴν ἀκτίνα ρ τοῦ κύκλου. Ἐπομένως, ἐὰν παραστήσωμεν μὲ Ε τὸ ἔμβαδὸν τοῦ πολυγώνου, θὰ εἶναι



Σχ. 375.

$$\begin{aligned} E &= \text{ἔμβ. τριγ. ΟΑΒ} + \text{ἔμβ. τριγ. ΟΒΓ} + \text{ἔμβ. τριγ. ΟΓΔ} + \dots \\ &= \frac{1}{2} \text{ΑΒ} \cdot \rho + \frac{1}{2} \text{ΒΓ} \cdot \rho + \frac{1}{2} \text{ΓΔ} \cdot \rho + \dots \\ &= \frac{1}{2} (\text{ΑΒ} + \text{ΒΓ} + \text{ΓΔ} + \dots) \cdot \rho. \end{aligned}$$

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ 2τ τὴν περίμετρον ΑΒ + ΒΓ + . . . τοῦ πολυγώνου, θὰ εἶναι $E = \frac{1}{2} \cdot 2\tau \cdot \rho$ ἢ $E = \rho\tau$.

Ὡστε : Τὸ ἔμβαδὸν ἑνὸς πολυγώνου, περιγεγραμμένου περὶ κύκλον, εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς ἡμιπεριμέτρου τοῦ ἐπὶ τὴν ἀκτίνα τοῦ κύκλου.

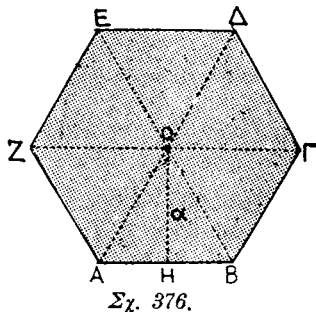
533. Θεώρημα. Τὸ ἔμβαδὸν ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἕμισυ τοῦ γινομένου τῆς περιμέτρου τοῦ ἐπὶ τὸ ἀπόστημά του.

Ἐπίπεδοι : Ἐστω ἓνα κανονικὸν πολύγωνον ΑΒΓΔΕΖ (Σχ.376), ΑΒ ἡ πλευρά του, ΟΗ=α τὸ ἀπόστημά του καὶ ν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν του.

Συμπέρασμα : Θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$\text{ἔμβ.ΑΒΓΔΕΖ} = \frac{1}{2} \text{περιμ.} \times \text{ἀπόστημα.}$$

Ἀπόδειξις : Ἐὰν φέρωμεν τὰς ἀκτίνας ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ... τὸ πολύγωνον χωρίζεται εἰς ν ἴσα τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΒΓ, ... Τὰ τρίγωνα αὐτὰ ἔχουν ὡς βάσιν μίαν πλευρὰν ΑΒ=ΒΓ=ΓΔ=... τοῦ πολυγώνου καὶ ὕψος τὸ ἀπόστημα ΟΗ.



Σχ. 376.

Ἐπειδὴ τὸ ἔμβαδὸν τοῦ ἑνὸς τριγώνου, π.χ. τοῦ ΟΑΒ, εἶναι $\frac{ΑΒ \times ΟΗ}{2}$, τὸ ἔμβαδὸν τῶν ν ἴσων τριγώνων θὰ εἶναι $\frac{ΑΒ \times ΟΗ}{2} \times ν$ ἢ $\frac{1}{2} ΑΒ \times ν \times ΟΗ$.

Δηλ. θὰ εἶναι $\text{ἔμβ. πολυγ.ΑΒΓΔ...} = \frac{1}{2} ΑΒ \times ν \times ΟΗ$.

Ἐπειδὴ ΑΒ×ν παριστάνει τὴν περίμετρον τοῦ πολυγώνου καὶ ΟΗ τὸ ἀπόστημά του, ἡ ἰσότης (1) γράφεται :

$$\text{ἔμβ. πολυγ. ΑΒΓΔ...} = \frac{1}{2} \text{περιμέτρου} \times \text{ἀπόστημα}$$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι : Τὸ ἔμβαδὸν ἑνὸς κανονικοῦ. . .

534. Ἐφαρμογὰί. Στηριζόμενοι εἰς τὸ προηγούμενον θεώρημα δυνάμεθα νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ἔμβαδὸν ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου, συναρτήσει τῆς ἀκτίνοσ R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου. Οὕτω :

1ον. Διὰ τὸ ἰσοπλευρον τρίγωνον ἔχομεν

$$E = \frac{1}{2} \text{περίμετρο.} \times \text{ἀπόστημα} = \frac{1}{2} \times 3\lambda_3 \times \alpha_3 = \frac{1}{2} \cdot 3R\sqrt{3} \times \frac{R}{2},$$

ἄρα

$$E = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$$

2ον. Διὰ τὸ τετράγωνον ἔχομεν

$$E = \frac{1}{2} \text{περίμετρο.} \times \text{ἀπόστημα} = \frac{1}{4} \times 4\lambda_4 \times \alpha_4 = \frac{1}{2} \times 4 R\sqrt{2} \times \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

ἄρα

$$E = 2R^2.$$

3ον. Διὰ τὸ κανονικὸν ἑξάγωνον ἔχομεν

$$E = \frac{1}{2} \text{περίμετρο.} \times \text{ἀπόστημα} = \frac{1}{2} \times 6\lambda_6 \times \alpha_6 = \frac{1}{2} \times 6.R \times \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

ἄρα

$$E = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}.$$

Ἀσκήσεις: 1568, 1569, 1570, 1571, 1572, 1573.

Ἀσκήσεις

Ἐμβαδὸν ὀρθογωνίου: **A' Ὀμάς. 1497.** (1533). Τὸ μῆκος ἑνὸς ὀρθογωνίου κήπου εἶναι 84,6 μ. καὶ τὸ πλάτος του εἶναι τὰ δύο τρίτα τοῦ μήκους του. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔμβαδόν του καὶ ἡ ἀξία του πρὸς 12000 δρχ. τὸ στρέμμα.

1498. (1534). Θέλομεν νὰ περιβάλλωμεν ἕνα κήπον, ὁ ὁποῖος ἔχει μῆκος 60 μέτρα καὶ πλάτος 48,20 μέτρα μὲ συρματοπλέγμα, τὸ ὁποῖον ἔχει ὕψος 1,20 μ. Πόσον θὰ κοστίσῃ τὸ συρματοπλέγμα, ἐὰν τὸ τετραγωνικὸν μέτρον ἀξίῃ 25 δρ.

1499. (1535). Ἡ πλευρὰ ἐνὸς τετραγώνου εἶναι 35,40 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἔμβαδόν τοῦ τετραγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει διπλασίαν πλευράν; Κατὰ πόσον εἶναι μεγαλύτερον τὸ δεύτερον τετράγωνον ἀπὸ τὸ πρῶτον;

1500. (1536). Ἐνας τετραγωνικὸς κήπος περιβάλλεται μὲ συρματοπλέγμα, τὸ ὁποῖον ἐκόστισε 1152 δρ. πρὸς 1,80 δρ. τὸ μέτρον. Πόσον εἶναι τὸ ἔμβαδόν τοῦ κήπου.

1501. (1537). Μία αὐλὴ ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου, τοῦ ὁποῖου τὸ μῆκος εἶναι 24,60 μ. καὶ τὸ πλάτος 18,20 μ. Θέλομεν νὰ στρώσωμεν τὴν αὐλὴν αὐτὴν μὲ τετραγωνικὰ πλακάκια πλευρᾶς 0,25 μ. Πόσα πλακάκια θὰ χρειασθῶμεν;

B' Ὀμάς. 1502. (1538). Τὸ ἔμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι 1 τετραγ. χιλόμετρον. Τὸ μῆκος του εἶναι πενταπλάσιον τοῦ πλάτους. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαστάσεις του.

1503. (1539). Ἐνα φύλλον χάρτου σχήματος ὀρθογωνίου ἔχει περίμετρον 1,92 μ. Ἀπὸ κάθε πλευρᾶν του ἀποκόπτομεν μίαν ταινίαν χάρτου πλάτους 0,02 μ. Κατὰ πόσον ἡλαττώθη τὸ ἔμβαδόν τοῦ φύλλου;

1504. (1540). Ἡ περίμετρος ἑνὸς ὀρθογωνίου τάπητος εἶναι 8,50 μ. καὶ ἡ διαφορὰ τῶν διαστάσεών του 0,75 μ. Ἐὰν καλύψωμεν τὸν τάπητα αὐτὸν μὲ ὑφασμα πλάτους 0,90 μ., πόσον θὰ κοστίσῃ τὸ ὑφασμα πρὸς 250 δρ. τὸ μέτρον;

1505. (1541). Τὸ ἔμβαδὸν ἑνὸς κήπου ὀρθογωνίου εἶναι 2504 τετρ. μέτρα. Ἡ μεγαλύτερα πλευρὰ του εἶναι 84 μ. Ἄν θέλωμεν νὰ αὐξήσωμεν τὸ ἔμβαδόν τοῦ κήπου κατὸ 200 τ.μ., χωρὶς νὰ μεταβάλλωμεν τὸ μῆκος του, κατὰ πόσον πρέπει νὰ αὐξήσωμεν τὸ πλάτος του;

1506. (1542). Τὸ μῆκος ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι τριπλάσιον τοῦ πλάτους

του. Ἐὰν αὐξήσωμεν τὰς διαστάσεις κατὰ τὸ ἕνα τέταρτον αὐτῶν, τὸ ἔμβαδὸν του αὐξάνει κατὰ 5292 τ.μ. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἀρχικαὶ καὶ αἱ νέαι διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου.

1507. (1543). Τὸ ἔμβαδὸν ἑνὸς τετραγώνου εἶναι 7225 τ.μ. Ἐὰν ἐλαττώσωμεν τὰς πλευρὰς του κατὰ 15 μ. πόσον θὰ εἶναι τὸ ἔμβαδὸν τοῦ νέου τετραγώνου;

1508. (1544). Ἐὰν αὐξήσωμεν τὴν μίαν πλευρὰν ἑνὸς τετραγώνου κατὰ 2,80 μ. καὶ τὴν ἄλλην κατὰ 1,80 μ. τὸ ἔμβαδὸν του αὐξάνει κατὰ 38,16 τ.μ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου.

1509. (1545). Ἐνας ὀρθογώνιος ἀγρὸς ἔχει μῆκος 420,40 μ. καὶ πλάτος 385,75 μ. Πόση θὰ ἦτο ἡ πλευρὰ ἑνὸς ἰσοδύναμου τετραγώνου;

1510. (1546). Ἐνα ὀρθογώνιον ἔχει μῆκος 75,60 μ. καὶ πλάτος 47,25 μ. Κατὰ πόσον πρέπει νὰ ἐλαττώσωμεν τὸ μῆκος καὶ νὰ αὐξήσωμεν τὸ πλάτος του διὰ νὰ λάβωμεν ἕνα ἰσοδύναμον τετράγωνον.

Γ' Ὁμάς. 1511. (1547). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι αἱ διαστάσεις του εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀριθμῶν 4 καὶ 5 καὶ τὸ ἔμβαδόν του 2880 τ.μ.

1512. (1548). Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαστάσεις ἑνὸς ὀρθογωνίου, ἂν γνωρίζωμεν τὴν διαγώνιον του 17 μ. καὶ τὸ ἔμβαδόν του 120 τ.μ.

1513. (1549). Αἱ διαστάσεις ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι 10 μ. καὶ 18 μ. Ἐὰν ἐλαττώσωμεν τὴν πρώτην κατὰ 4 μ., πόσον πρέπει νὰ αὐξήσωμεν τὴν δευτέραν διὰ νὰ λάβωμεν ἕνα δεύτερον ὀρθογώνιον ἰσοδύναμον μὲ τὸ πρῶτον;

1514. (1550). Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαστάσεις ἑνὸς ὀρθογωνίου, ἂν γνωρίζωμεν τὸ ἔμβαδόν του 360 τ.μ. καὶ ὅτι τὸ ἔμβαδόν του δὲν μεταβάλλεται, ἂν ἐλαττώσωμεν τὴν βᾶσιν του κατὰ 10 μέτρα καὶ αὐξήσωμεν τὸ ὕψος του κατὰ 6 μέτρα.

1515 (1551). Αἱ διαστάσεις ἑνὸς ὀρθογωνίου εἶναι α καὶ β. Νὰ ὑπολοισθοῦν αἱ διαστάσεις ἑνὸς ὀρθογωνίου ὁμοίου πρὸς τὸ πρῶτον, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ περίμετρος του καὶ τὸ ἔμβαδόν του ἐκφράζονται μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν. Ἐφαρμογή: $\alpha=5$, $\beta=5$.

1516. (1552). Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαστάσεις ὀρθογωνίου, ἰσοδύναμου πρὸς τετράγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει πλευρὰν 99 μ. καὶ ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία εἶναι τὰ $\frac{9}{16}$ τῆς ἄλλης.

1517. (1553). Ἐὰν αἱ πλευραὶ τετραγώνου αὐξηθοῦν κατὰ 3 μ. τὸ ἔμβαδόν του θὰ εἶναι 2,26 φορὰς μεγαλύτερον τοῦ ἀρχικοῦ. Πόση εἶναι ἡ πλευρὰ αὐτοῦ;

Δ' Ὁμάς. 1518. (1554). Νὰ ἐγγραφῇ ἕνα τετράγωνον εἰς ἕνα κύκλον ἀκτίνος 7,5 ἐκ. καὶ νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔμβαδόν του, ἡ περίμετρος του καὶ ἡ διαγώνιος του.

1519. (1555). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔμβαδὸν ἑνὸς τετραγώνου, περιγεγραμμένου περὶ κύκλον ἀκτίνος 0,80 μ.

1520. (1556). Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ ἑνὸς τετραγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ἔμβαδόν τοῦ τετραγώνου, τοῦ περιγεγραμμένου, περὶ τὸν αὐτὸν κύκλον, εἶναι 30 τ.μ.

Ε' Ὁμάς. 1521. (1557). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἔμβαδὸν ἑνὸς τετραγώνου

εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ἔμβαδοῦ τοῦ τετραγώνου, τὸ ὅποιον ἔχει πλευρὰν τὴν διαγώνιον τοῦ πρώτου τετραγώνου.

1522. (1558). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἀπὸ ὅλα τὰ ὀρθογώνια, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν περίμετρον, τὸ τετράγωνον ἔχει τὴν μεγαλυτέραν ἐπιφάνειαν.

1523. (1559). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι κάθε ὀρθογώνιον, τὸ ὅποιον εἶναι ἰσοδύναμον μὲ δοθὲν τετράγωνον, ἔχει περίμετρον μεγαλυτέραν τῆς περιμέτρου τοῦ τετραγώνου.

Ἐμβαδὸν παραλληλογράμμου. 1524. (1560). Εἰς ἓνα παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ εἶναι $AB=1,25$ μ. $BC=2,70$ μ. Ἐὰν ἡ ἀπόστασις τῶν παραλλήλων πλευρῶν ΒΓ καὶ ΑΔ εἶναι $1,64$ μ., νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις τῶν παραλλήλων πλευρῶν ΑΒ καὶ ΓΔ.

1525. (1561). Κάθε εὐθεῖα, ἡ ὁποῖα διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων ἑνὸς παραλληλογράμμου, διαιρεῖ τὸ παραλληλόγραμμον εἰς δύο τραπέζια ἴσα καὶ ἐπομένως ἰσοδύναμα.

1526. (1562). Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον μιᾶς διαγωνίου ἑνὸς παραλληλογράμμου φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς πλευράς του. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι δύο ἀπὸ τὰ σχηματισθέντα παραλληλόγραμμα εἶναι ἰσοδύναμα.

1527. (1563). Ἀπὸ τὰς κορυφᾶς ἑνὸς τετραπλεύρου φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὰς διαγωνίους του. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἔμβαδὸν τοῦ σχηματιζομένου παραλληλογράμμου εἶναι διπλάσιον τοῦ ἔμβαδοῦ τοῦ τετραπλεύρου.

1528. (1564). Τὸ ἔμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου, τὸ ὅποιον ἔχει κορυφὰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ἑνὸς τετραπλεύρου εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ἔμβαδοῦ τοῦ τετραπλεύρου.

Ἐμβαδὸν τριγώνου. Α' Ὀμάς. 1529. (1565). Ἡ περίμετρος ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι $187,50$ μέτρα καὶ ἡ βᾶσις του 52 μέτρα. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος του καὶ τὸ ἔμβαδόν του.

1530. (1466). Ἡ περίμετρος ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἶναι 2169 μέτρ. καὶ ἡ βᾶσις εἶναι τὰ $\frac{2}{3}$ τῆς περιμέτρου. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔμβαδὸν τοῦ τριγώνου.

1531. (1567). Ἡ ὑποτείνουσα ἑνὸς ἰσοσκελοῦς καὶ ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι 8 μέτρα. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔμβαδόν του.

1532. (1568). Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ ἑνὸς τετραγώνου, τὸ ὅποιον εἶναι ἰσοδύναμον μὲ ἓνα τρίγωνον, τὸ ὅποιον ἔχει βᾶσιν $17,375$ μέτρα καὶ ὕψος $1,39$ μέτρ.

1533. (1569). Ἐνας κτηματίας ἀνταλλάσσει ἓνα τριγωνικὸν ἀγρόν, ὃ ὁποῖος ἔχει βᾶσιν 184 μ. καὶ ὕψος 38 μ. μὲ ἓνα ὀρθογώνιον ἀγρόν, τοῦ ὁποῖου τὸ ὕψος εἶναι τριπλάσιον τοῦ ὕψους τοῦ τριγώνου. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ βᾶσις τοῦ ὀρθογωνίου.

1534. (1570). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος καὶ τὸ ἔμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, εἰάν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ ὑποτείνουσά του εἶναι 20 μ. καὶ μία ἀπὸ τὰς καθέτους πλευρὰς ἴση μὲ 14 μέτρ.

1535. (1571). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποῖου μία κάθετος πλευρὰ εἶναι 15 ἐκ. καὶ τὸ ὕψος πρὸς τὴν ὑποτείνουσαν εἶναι 11 ἐκ.

B' Ὁμάς. 1536. (1572). Τὸ ἔμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου εἶναι 300 τ.μ. καὶ ἡ ἴκσις τοῦ 40 μ. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος τοῦ.

1537. (1573). Τὸ ἔμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου εἶναι 1134 τ.μ. Τὸ ὕψος τοῦ εἶναι τὰ $\frac{1}{5}$ τῆς βάσεως. Νὰ ὑπολογισθοῦν ἡ βᾶσις καὶ τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου.

1538. (1574). Τὸ ἔμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι 4675 τ.μ. Ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι μία ἀπὸ τὰς καθέτους πλευρᾶς τοῦ εἶναι 85 μ., νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἄλλη κάθετος πλευρᾶ, ἡ ὑποτείνουσα καὶ τὸ ὕψος τοῦ να.

Γ' Ὁμάς. 1539. (1575). Δίδεται ἓνα τετράγωνον ΑΒΓΔ πλευρᾶς α. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ λαμβάνομεν ἓνα τμήμα ΑΕ = $\frac{2}{3}$ ΑΒ καὶ ἐπὶ τῆς ΑΔ ἓνα τμήμα ΑΖ = $\frac{3}{4}$ ΑΔ καὶ φέρομεν τὴν εὐθεΐαν ΕΖ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔμβαδὸν τοῦ πενταγώνου ΕΒΓΔΖ.

1540. (1576). Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ καὶ τὸ ἔμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, ἂν γνωρίζωμεν τὴν ἀκτίνα ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου καὶ τὴν ἀκτίνα R τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

1541. (1577). Δύο τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος, ἔχουν βάσεις β καὶ β' τοιαύτας ὥστε $\beta = 0,75\beta'$. Ἐὰν τὸ ἔμβαδὸν τοῦ τριγώνου, ποῦ ἔχει βάσιν β, εἶναι 28 τ.μ. πόσον εἶναι τὸ ἔμβαδὸν τοῦ ἄλλου;

1542. (1578). Ἐνα τρίγωνον ἔχει βάσιν β καὶ ὕψος υ καὶ ἓνα ἄλλο τρίγωνον ἔχει βάσιν $\beta' = \frac{2}{3}\beta$ καὶ ὕψος $υ' = \frac{5}{6}υ$. Τὸ ἔμβαδὸν τοῦ πρώτου εἶναι 18 τ.μ. Πόσον εἶναι τὸ ἔμβαδὸν τοῦ δευτέρου;

Δ' Ὁμάς. 1543. (1579). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ διάμεσος ἑνὸς τριγώνου διαιρεῖ τὸ τρίγωνον εἰς δύο ἰσοδύναμα τρίγωνα.

1544. (1580). Νὰ χωρισθῇ δοθὲν τρίγωνον εἰς 5 ἰσοδύναμα τρίγωνα μὲ τὴν βοήθειαν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὴν αὐτὴν καρυφήν.

1545. (1581) Ποῖος εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τύπος τῶν κορυφῶν τῶν τριγώνων, τὰ ὁποῖα εἶναι ἰσοδύναμα καὶ ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν;

Ε' Ὁμάς. 1546. (1582). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔμβαδὸν ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου, τοῦ ὁποῖου ἡ περίμετρος εἶναι 27 μ.

1547. (1583). Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρᾶ καὶ τὸ ἔμβαδὸν ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου, τοῦ ὁποῖου τὸ ὕψος εἶναι 65 μ.

1548. (1584). Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρᾶ καὶ τὸ ὕψος ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου, τοῦ ὁποῖου τὸ ἔμβαδὸν εἶναι 925 τ.μ.

ΣΤ' Ὁμάς. 1549. (1585). Αἱ πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου εἶναι 5 μ., 6 μ., 7 μ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔμβαδὸν τοῦ καὶ ἡ ἀκτίς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

1550. (1586). Αἱ πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου εἶναι 13 μέτρ., 37 μέτρ. καὶ 40 μέτρ. Νὰ ὑπολογισθοῦν :

1ον. τὸ ἔμβαδὸν τοῦ τριγώνου.

2ον. τὰ ὕψη τοῦ.

3ον. τὸ ἔμβαδὸν ἑνὸς ὀρθογωνίου, ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν τὸ ὕψος τοῦ 4 μ. καὶ ὅτι ἡ βᾶσις τοῦ ὀρθογωνίου κεῖται ἐπὶ τῆς μεγαλυτέρας πλευρᾶς τοῦ τριγώνου.

1551. (1587). Αἱ πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ εἶναι 40 ἔκ., 51 ἔκ., 77 ἔκ.

Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔμβαδὸν τοῦ, ἡ ἀκτίς τοῦ ἔγγεγραμμένου κύκλου καὶ ἡ ἀκτίς τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου.

1552. (1588). Διὰ τὰ ἔκφραζονται μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν τὸ ἔμβαδὸν ἑνὸς τριγώνου καὶ ἡ περίμετρος τοῦ πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἡ ἀκτίς τοῦ κύκλου, τοῦ ἔγγεγραμμένου εἰς τὸ τρίγωνον, νὰ εἶναι ἴσαι μὲ 2.

1553. (1589). Ἐνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ δίδονται αἱ κάθετοι πλευραὶ $AB=15$ ἔκ., $AG=8$ ἔκ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ περίμετρος τοῦ, τὸ ἔμβαδὸν τοῦ καὶ αἱ ἀκτίες τοῦ ἔγγεγραμμένου καὶ παρεγγεγραμμένων κύκλων.

Ἐμβαδὸν ρόμβου. 1554. (1590). Τὸ ἔμβαδὸν ἑνὸς ρόμβου εἶναι Ε. Αἱ διαγώνιοι ἑνὸς ἄλλου ρόμβου εἶναι ἡ μία τὰ $\frac{2}{3}$ μιᾶς διαγωνίου τοῦ πρώτου ρόμβου καὶ ἡ ἄλλη τὰ $\frac{5}{6}$ τῆς ἄλλης διαγωνίου τοῦ πρώτου. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔμβαδὸν τοῦ δευτέρου ρόμβου.

1555. (1591). Ἐνὸς ρόμβου ΑΒΓΔ ἡ γωνία Α εἶναι 60° , ἡ διαγώνιος $AG=12$ ἔκ. καὶ ἡ πλευρὰ $AB=16$ ἔκ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔμβαδὸν τοῦ.

1556. (1592). Αἱ διαγώνιοι ἑνὸς ρόμβου εἶναι 16 ἔκ. καὶ 12 ἔκ. καὶ ἡ πλευρὰ τοῦ 10 ἔκ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις τῶν δύο ἀπέναντι πλευρῶν τοῦ.

1557. (1593). Ἡ πλευρὰ ἑνὸς ρόμβου εἶναι 16 μέτρα καὶ δύο διαδοχικαὶ πλευραὶ τοῦ σχηματίζουν γωνίαν 45° . Νὰ ὑπολογισθῇ :

1ον. τὸ ἔμβαδὸν τοῦ ρόμβου.

2ον. ἡ ἀκτίς τοῦ ἔγγεγραμμένου κύκλου.

Ἐμβαδὸν τραπεζίου. Α' Ὀμάς. 1558. (1594). Αἱ βάσεις ἑνὸς τραπεζίου εἶναι 95 μέτρα καὶ 80 μέτρα καὶ τὸ ὕψος τοῦ 10,4 μέτρα. Πόσον εἶναι τὸ ἔμβαδὸν τοῦ ; Πόση θὰ εἶναι ἡ βάση ἑνὸς ἰσοδυνάμου τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει τὸ αὐτὸ ὕψος μὲ τὸ τραπέζιον ;

1559. (1595). Αἱ βάσεις ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τραπεζίου εἶναι 100 μέτρα καὶ 40 μέτρα καὶ ἡ μία ἀπὸ τὰς μὴ παραλλήλους πλευρὰς τοῦ 50 μέτρα. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔμβαδὸν τοῦ.

1560. (1596). Ἡ μεγάλη βάση ΑΒ ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τραπεζίου ΑΒΓΔ εἶναι 100 μέτρα, ἡ μὴ παράλληλος πλευρὰ $AD=20$ μέτρα καὶ $\gamma\omega\nu. A=\gamma\omega\nu. B=60^\circ$. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔμβαδὸν τοῦ τραπεζίου.

1561. (1597). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔμβαδὸν καὶ ἡ περίμετρος ἑνὸς ὀρθογωνίου τραπεζίου, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ πλαγία πλευρὰ τοῦ εἶναι 24 μέτρα καὶ ἴση μὲ τὴν μεγάλην βάση τοῦ καὶ σχηματίζει μὲ αὐτὴν γωνίαν 60° .

1562. (1598). Τὸ ὕψος ἑνὸς τραπεζίου εἶναι 54 μέτρα, ἡ διαφορὰ τῶν βάσεων τοῦ 25 μέτρα καὶ ἡ μία ἀπὸ τὰς βάσεις τοῦ εἶναι τὸ τρίτον τῆς ἄλλης. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔμβαδὸν τοῦ τραπεζίου.

Β' Ὀμάς. 1563. (1599). Τὸ ἔμβαδὸν ἑνὸς τραπεζίου εἶναι 6308 τ. μέτρα, τὸ ὕψος τοῦ 38 μέτρα καὶ ἡ μία ἀπὸ τὰς βάσεις τοῦ 228 μέτρα. Πόση εἶναι ἡ ἄλλη βάση τοῦ ;

1564. (1600). Τὸ ἔμβαδὸν ἑνὸς τραπεζίου εἶναι 361 τ.μ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος τοῦ, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι εἶναι ἴσον μὲ τὴν διάμεσόν τοῦ.

1565. (1601). Τὸ ὕψος ἑνὸς τραπεζίου εἶναι 84 μέτρα καὶ τὸ ἔμβαδὸν τοῦ 4896 τ.μ. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ βάσεις τοῦ τραπεζίου, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ μεγάλη βάση εἶναι κατὰ 54 μέτρα μεγαλυτέρα τῆς μικρᾶς βάσεως.

1566. (1602). Ἡ μεγάλη βάση ἑνὸς τραπεζίου εἶναι τριπλασία τῆς μικρᾶς

βίσεως καὶ τὸ ὕψος τοῦ εἶναι 52 μέτρα. Ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ἔμβαδὸν τοῦ τραπεζίου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἔμβαδὸν τοῦ τετραγώνου, τὸ ὅποιον ἔχει πλευρὰν ἴσην μὲ τὸ ὕψος τοῦ τραπεζίου, νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ βάσεις τοῦ τραπεζίου.

1567. (1603). Αἱ πλευραὶ ἐνὸς τραπεζίου εἶναι 10 μέτρα, 12 μέτρα, 15 μέτρα, 17 μέτρα. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔμβαδὸν τοῦ.

Ἐμβαδὸν τυχόντος πολυγώνου. **1568.** (1604). Ἐνας ἀγρὸς ἔχει σχῆμα τετραπλεύρου ΑΒΓΔ. Ἡ γωνία Α εἶναι ὀρθή, ἡ πλευρὰ ΑΒ=216 μέτρα, ἡ πλευρὰ ΑΔ=283 μέτρα καὶ αἱ πλευραὶ ΒΓ=ΓΔ=300 μέτρα. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔμβαδὸν τοῦ ἀγροῦ αὐτοῦ.

1569. (1605). Ἐνὸς τετραπλεύρου ΑΒΓΔ δίδονται αἱ πλευραὶ ΑΒ=224 μ., ΑΔ=168 μ., ΓΔ=490 μ. καὶ αἱ διαγώνιοι ΑΓ=518 μ. καὶ ΒΔ=280 μ.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ γωνίαι Α καὶ Δ εἶναι ὀρθαί.

2ον. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ φύσις καὶ τὸ ἔμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου αὐτοῦ.

1570. (1606). Συναρτήσῃ τῆς ἀκτίνος R ἐνὸς κύκλου, νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἔμβαδά τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς τὸν κύκλον αὐτὸν κανονικῶν: ὀκταγώνου, δωδεκαγώνου, δεκαγώνου, πενταγώνου.

1571. (1607). Νὰ ὑπολογισθοῦν κατὰ προσέγγισιν 0,01 αἱ ἀκτίνες δύο ὁμοκέντρων περιφερειῶν, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι αἱ ἀκτίνες τῶν διαφέρουν κατὰ 1 μ. καὶ ὅτι τὸ ἔμβαδὸν τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου. τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸν μεγαλύτερον κύκλον, εἶναι μεγαλύτερον κατὰ 6 τετρ. μέτρ. ἀπὸ τὸ ἔμβαδὸν τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου, τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν μικρότερον κύκλον.

1572. (1608). Ἡ πλευρὰ ἐνὸς κανονικοῦ ἑξαγώνου εἶναι α. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου, τὸ ὅποιον ἔχει τὴν αὐτὴν περίμετρον μὲ τὸ ἑξάγωνον καὶ νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἔμβαδὸν τοῦ ἑξαγώνου εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ ἔμβαδὸν τοῦ τετραγώνου.

1573 (1609). Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ ἐνὸς κανονικοῦ ἑξαγώνου, τοῦ ὁποίου τὸ ἔμβαδὸν εἶναι ἴσον μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ἑμβαδῶν τῶν κανονικῶν ἑξαγώνων, τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου περὶ κύκλον ἀκτίνος $R=1,25$ μ.

3. Ἐμβαδὸν κύκλου, κυκλικοῦ τομέως

535. Ὅρισμός. Ἐμβαδὸν κύκλου ὀνομάζομεν τὸ ὄριον πρὸς τὸ ὅποιον τείνει τὸ ἔμβαδὸν ἐνὸς κανονικοῦ πολυγώνου, ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον αὐτόν, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τοῦ διπλασιάζεται ἀπεριορίστως.

Παραδεχόμεθα, ὅτι τὰ ἔμβαδά τῶν διαδοχικῶν πολυγώνων, τὰ ὁποῖα λαμβάνομεν, διπλασιάζοντες ἀπεριορίστως τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τῶν, ἔχουν ἓνα ὄριον καὶ ὅτι τὸ ὄριον αὐτὸ εἶναι τὸ αὐτό, οἷον-δήποτε καὶ ἐὰν εἶναι τὸ πολύγωνον, τὸ ὅποιον ἐγγράφομεν ἀρχικῶς εἰς τὸν κύκλον.

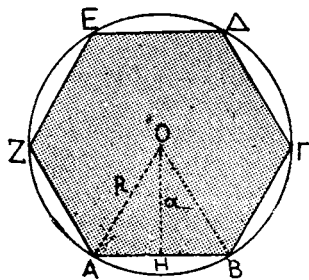
536. Θεώρημα. Τὸ ἔμβαδὸν ἐνὸς κύκλου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινόμενου τῆς περιφέρειας τοῦ ἐπὶ τὴν ἀκτίνα τοῦ.

Ἐπιπέδου: Ἐστω ὁ κύκλος O καὶ R ἡ ἀκτίς του.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$\text{ἔμβ. κύκλου} = \frac{1}{2} \text{ περιφερείας} \times \text{ἀκτίνα},$$

Ἀπόδειξις: Ἐγγράφομεν εἰς τὸν κύκλον O ἓνα κανονικὸν πολυγώνον $ΑΒΓΔ\dots$ με n πλευράς.



Σχ. 377.

Γνωρίζομεν, ὅτι τὸ ἔμβαδὸν ἑνὸς κανονικοῦ πολυγώνου, ἔγγεγραμμένου εἰς κύκλον, εἶναι ἴσον μετὰ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς περιμέτρου του ἐπὶ τὸ ἀπόστημαμά του (§ 533). Ἐὰν παραστήσωμεν με E_1 τὸ ἔμβαδόν, με Π_1 τὴν περίμετρον καὶ με α_1 τὸ ἀπόστημα τοῦ πολυγώνου $ΑΒΓΔ\dots$, θὰ εἶναι $E_1 = \frac{\Pi_1 \times \alpha_1}{2}$.

Ἐὰν διπλασιάσωμεν τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου, τὸ νέον πολυγώνον θὰ ἔχη ἓνα ἔμβαδὸν E_2 , μίαν περίμετρον Π_2 καὶ ἓνα ἀπόστημα α_2 καὶ θὰ εἶναι πάλιν $E_2 = \frac{\Pi_2 \times \alpha_2}{2}$.

Ἐὰν συνεχίσωμεν νὰ διπλασιάζωμεν ἀπεριορίστως τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου, αἱ περίμετροι τῶν διαδοχικῶν πολυγώνων θὰ ἔχουν ὄριον τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου, τὰ ἀποστήματα τῶν θὰ ἔχουν ὄριον τὴν ἀκτίνα τοῦ κύκλου καὶ τὰ ἔμβαδά των θὰ ἔχουν ὄριον, κατὰ τὸν ὀρισμὸν τῆς § 535, τὸ ἔμβαδὸν τοῦ κύκλου.

Θὰ εἶναι λοιπόν·

$$\text{ἔμβ. κύκλου} = \frac{\text{περιφέρεια} \times \text{ἀκτίνα}}{2} \quad (1)$$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: *Τὸ ἔμβαδὸν ἑνὸς κύκλου. . .*

537. Τύπος τοῦ ἔμβαδοῦ κύκλου. Ἐὰν παραστήσωμεν με E τὸ ἔμβαδὸν ἑνὸς κύκλου καὶ ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὸν τύπον (1) τὴν περιφέρειαν με $2\pi R$ καὶ τὴν ἀκτίνα με R , λαμβάνομεν τὸν τύπον

$$E = \frac{1}{2} \times 2\pi R \times R \quad \eta \quad \boxed{E = \pi R^2}$$

ὁ ὁποῖος δίδει τὸ ἔμβαδὸν ἑνὸς κύκλου.

538. Πρόρισμα I. *Τὰ ἔμβαδά δύο κύκλων, ἔχουν λόγον ἴσον μετὰ τὸν λόγον τῶν τετραγώνων τῶν ἀκτίνων των.*

Ἐπιπέδου: Ἐστωσαν E καὶ E' τὰ ἔμβαδά δύο κύκλων, ἀκτίνων ἀντιστοίχως R καὶ R' .

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\frac{E}{E'} = \frac{R^2}{R'^2}$.

Ἀπόδειξις: Γνωρίζομεν, ὅτι $E = \pi R^2$ καὶ $E' = \pi R'^2$.

Διαιροῦμεν τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\frac{E}{E'} = \frac{\pi R^2}{\pi R'^2} \quad \eta \quad \boxed{\frac{E}{E'} = \frac{R^2}{R'^2}}$$

Ἀσκήσεις: 1574, 1575, 1576, 1579, 1580, 1583, 1584, 1585.

539. Κυκλικὸς τομέυς. Γνωρίζομεν (§ 76), ὅτι: τὸ μέρος τοῦ κύκλου, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ ἑνὸς τόξου καὶ τῶν ἀκτίνων, αἱ ὁποῖαι καταλήγουν εἰς τὰ ἄκρα τοῦ τόξου, λέγεται **κυκλικὸς τομέυς**. Π.χ. ὁ κυκλικὸς τομέυς OABO (Σχ. 378).

Ἡ OA εἶναι **ἀκτίς τοῦ κυκλικοῦ τομέως**, τὸ τόξον AB εἶναι ἡ **βάσις αὐτοῦ** καὶ ἡ γωνία AOB εἶναι ἡ **γωνία τοῦ κυκλικοῦ τομέως**.

540. Πρόβλημα. *Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔμβαδὸν ἑνὸς κυκλικοῦ τομέως μ° καὶ ἀκτίνος R.*

Λύσις. Ἐνας κύκλος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς κυκλικὸς τομέυς 360° . Θὰ εἶναι λοιπὸν

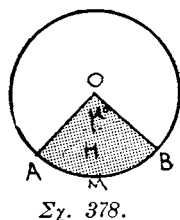
Ἐμβαδὸν τομέως 360° ἢ κύκλου $= \pi R^2$

Ἐμβαδὸν τομέως 1° $= \frac{\pi R^2}{360}$

Ἐμβαδὸν τομέως μ° $= \frac{\pi R^2 \mu}{360}$

Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν μὲ E τὸ ἔμβαδὸν ἑνὸς τομέως μ° , θὰ ἔχωμεν τὸν τύπον

$$\boxed{E = \frac{\pi R^2 \mu}{360}}$$



541. Πρόβλημα. Ἐπειδὴ ἡ παράστασις $\frac{\pi R^2 \mu}{360}$ δύναται νὰ γραφῇ:

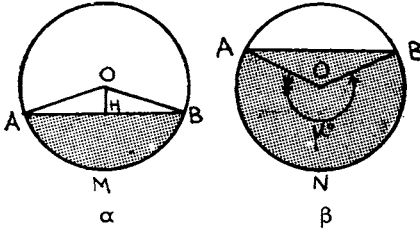
$\frac{2\pi R \mu}{360} \times \frac{R}{2}$, δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν, ὅτι:

Τὸ ἔμβαδὸν ἑνὸς κυκλικοῦ τομέως εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ μήκους τοῦ τόξου τοῦ ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτίνος του.

542. Κυκλικὸν τμήμα. Τὸ μέρος τοῦ κύκλου, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ ἑνὸς τόξου καὶ τῆς χορδῆς του, λέγεται **κυκλικὸν τμήμα**. Π.χ. τὸ μέρος AMBA εἶναι ἓνα κυκλικὸν τμήμα (Σχ. 379a).

Ἡ OA εἶναι ἡ **ἀκτίς** τοῦ κυκλικοῦ τμήματος AMBA καὶ ἡ γωνία AOB εἶναι ἡ **γωνία** τοῦ κυκλικοῦ αὐτοῦ τμήματος.

543. Ἐμβαδὸν κυκλικῶς τμήματος. Ἐνα κυκλικὸν τμήμα, ὅπως τὸ AMBA (Σχ. 379α) δύναται νὰ θεωρηθῆ ὡς διαφορὰ μεταξύ τοῦ κυκλικῶς τομέως OAMBO καὶ τοῦ τριγώνου OAB. Θὰ εἶναι λοιπὸν



Σχ. 379.

$$\begin{aligned} \text{Ἐμβ. κυκλ. τμ. AMBA} &= \\ &= \text{ἔμβ. κυκλ. τομ. OAMBO} - \\ &- \text{ἔμβ. τριγ. OAB.} \end{aligned}$$

Ἐάν τὸ κυκλικὸν τμήμα εἶναι μεγαλύτερον ἡμικυκλίου, ὅπως τὸ ABNA (Σχ. 379β) θὰ εἶναι

$$\text{ἔμβ. ABNA} = \text{ἔμβ. κυκλ. τομ. OANBO} + \text{ἔμβ. τριγ. OAB.}$$

**Ἀσκήσεις:* 1591, 1592, 1593, 1594, 1595, 1596, 1597.

Ἀσκήσεις

Ἐμβαδὸν κύκλου. Α' Ὁμάς. 1574. (1610). Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ἔμβαδὸν ἑνὸς κύκλου, ἂν γνωρίζωμεν :

1ον. τὴν ἀκτίνα τοῦ 0,25 μ.

2ον. τὴν διάμετρόν του 25,13272 μ.

1575. (1611). Τὸ ἔμβαδὸν ἑνὸς κύκλου εἶναι 9,42477 μ. Πόση εἶναι ἡ ἀκτίς του καὶ πόσον τὸ μήκος τῆς περιφερείας του ;

1576. (1612). Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ἔμβαδὸν τοῦ τετραγώνου, τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτίνας 3,20 μ. καὶ τὸ ἔμβαδὸν ἑκάστου τῶν τεσσάρων μερῶν τοῦ κύκλου, τὰ ὅποια κεῖνται ἐκτὸς τοῦ τετραγώνου.

1577. (1613). Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ἔμβαδὸν τοῦ κύκλου, τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τετράγωνον πλευρᾶς 48 ἐκ.

1578. (1614). Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ἔμβαδὸν τοῦ κύκλου, τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τετράγωνον πλευρᾶς 50 ἐκ.

Β' Ὁμάς. 1579. (1615). Ἡ ἀκτίς ἑνὸς κύκλου εἶναι 4 μ. Πόση θὰ εἶναι ἡ ἀκτίς τοῦ κύκλου, ὁ ὁποῖος ἔχει τετραπλασίαν ἐπιφάνειαν τοῦ πρώτου.

1580. (1616). Νὰ ὑπολογισθῆ ἡ ἀκτίς ἑνὸς κύκλου, ὁ ὁποῖος εἶναι ἰσοδύναμος μὲ δύο ἄλλους κύκλους ἀκτίνων 3,40 μ. καὶ 5,60 μ.

1581. (1617). Πόση εἶναι ἡ ἀκτίς τοῦ κύκλου, ὁ ὁποῖος εἶναι ἰσοδύναμος μὲ ἓνα ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς 3,5 μ.

1582. (1618). Πόση εἶναι ἡ ἀκτίς ἑνὸς κύκλου, ὁ ὁποῖος εἶναι ἰσοδύναμος μὲ ἓνα κανονικὸν ἑξάγωνον 100 τ.μ.

Γ' Ὁμάς. 1583. (1619). Εἰς ἓνα κύκλον ἀκτίνας 0,85 μ. ἐγγράφομεν ἓνα ἰσόπλευρον τρίγωνον. Νὰ ὑπολογισθῆ ἡ διαφορὰ μεταξύ τῶν ἔμβαδῶν τοῦ κύκλου καὶ τοῦ τριγώνου αὐτοῦ.

1584. (1620). Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ἔμβαδὸν ἑνὸς κύκλου, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ διαφορὰ μεταξύ τοῦ ἔμβαδου τοῦ κύκλου καὶ τοῦ ἔμβαδου τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου, τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον αὐτὸν εἶναι 12,40 τ.μ.

1585. (1621). Εἰς ἓνα κύκλον ἀκτίνος 0,45 μ. ἐγγράφομεν ἓνα κανονικὸν ἐξαγώνον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ἐξαγώνου καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ κύκλου.

1586. (1622). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἐνὸς κύκλου, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν ἐμβαδῶν τοῦ κύκλου καὶ τοῦ κανονικοῦ ἐξαγώνου, τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον, εἶναι 0,625 τ.μ.

1587. (1623). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἐνὸς κύκλου, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου καὶ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ περιγεγραμμένου τετραγώνου εἶναι 2,82 τ.μ.

1588. (1624). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἐνὸς κανονικοῦ ἐξαγώνου, περιγεγραμμένου περὶ περιφέρειαν, τῆς ὁποίας τὸ μῆκος εἶναι 7,854 μ.

1589. (1625). Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτίς ἐνὸς κύκλου, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν ἐμβαδῶν τῶν κανονικῶν ἐξαγώνων, ἐγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου, εἶναι 68,28 τ.μ.

1590. (1626). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς στεφάνης, τῆς ὀριζομένης ὑπὸ δύο ὁμοκέντρων περιφερειῶν, εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἐμβαδὸν κύκλου, ὁ ὁποῖος ἔχει διάμετρον μίαν χορδὴν τῆς μεγάλης περιφέρειας, ἡ ὁποία ἐφάπτεται τῆς μικρᾶς περιφέρειας.

Ἐμβαδὸν κυκλικῶς τομέως κλπ. **A' Ὁμάς.** **1591.** (1627). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἐνὸς κυκλικῶς τομέως 20° καὶ ἀκτίνος 20 ἔκ.

1592. (1628). Τὸ ἐμβαδὸν ἐνὸς κυκλικῶς τομέως 50° εἶναι 15,708 τετρ. ἔκ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτίς τοῦ κύκλου εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκει ὁ τομέυς.

1593. (1629). Τὸ ἐμβαδὸν ἐνὸς κυκλικῶς τομέως ἀκτίνος 4 ἔκ. εἶναι 14 τετρ. ἔκ. Πόσων μοιρῶν εἶναι ὁ τομέυς;

1594. (1630). Ἡ ἀκτίς ἐνὸς κύκλου εἶναι 4 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικῶς τμήματος, τοῦ ὁποῖου τὸ τόξον εἶναι 120° .

B' Ὁμάς. **1595.** (1631). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδόν, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τριῶν ἴσων περιφερειῶν, αἱ ὁποῖαι ἐφάπτονται ἀνά δύο.

1596. (1632). Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ἐνὸς κανονικοῦ ἐξαγώνου κατασκευάζομεν, ἐξωτερικῶς αὐτοῦ, ὀρθογώνια ἴσα, τῶν ὁποίων συνδέομεν τὰς ἐξωτερικὰς πλευρὰς μὲ τόξα, τὰ ὁποῖα γράφομεν μὲ κέντρα τὰς κορυφὰς τοῦ ἐξαγώνου. Οὕτω τὸ ἀρχικὸν ἐξαγώνον περιβάλλεται μὲ μίαν ἐπιφάνειαν, ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ 6 ὀρθογώνια καὶ 6 κυκλικούς τομεῖς. Ἄν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφάνειας αὐτῆς εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἐξαγώνου, νὰ ὑπολογισθῇ:

1ον. τὸ κοινὸν ὕψος τῶν ὀρθογωνίων, ἐὰν ἡ ἀκτίς τοῦ ἐξαγώνου εἶναι 13 μ.

2ον. ἡ περίμετρος ὁλοκλήρου τοῦ σχήματος.

1597. (1633). Δίδεται κύκλος ἀκτίνος 1 μ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικῶς τμήματος, τὸ ὁποῖον ὀρίζεται ἀπὸ τὴν πλευρὰν:

1ον. τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου.

2ον. τοῦ ἐγγεγραμμένου κανονικοῦ ἐξαγώνου.

3ον. τοῦ ἰσοπλευροῦ τριγώνου.

Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν ἐπὶ τῶν ἐμβαδῶν τῶν διαφορῶν σχημάτων

A' Ὁμάς. 1598. (1634). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἐνὸς τριγώνου $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν, τὰς πλευρὰς $AB=\beta$, $AC=\gamma$ καὶ τὴν γωνίαν $A=45^\circ$. Ἐφαρμογή: $\beta=10$ ἐκ. καὶ γ ἴσον μὲ τὴν διαγώνιον τετραγώνου πλευρᾶς 3 ἐκ.

1599. (1635). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἐνὸς τριγώνου $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν, τὰς πλευρὰς $AB=\beta$, $AC=\gamma$ καὶ τὴν γωνίαν $A=30^\circ$.

1600. (1636). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἐνὸς τριγώνου $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν, τὰς πλευρὰς $AB=\beta$, $AC=\gamma$ καὶ τὴν γωνίαν $A=60^\circ$. Ἐφαρμογή: $\beta=5$ ἐκ. καὶ γ ἴσον μὲ τὸ ὕψος τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου πλευρᾶς 6 ἐκ.

1601. (1637). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἐνὸς τριγώνου $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν, τὰς πλευρὰς $AB=\beta$, $AC=\gamma$ καὶ τὴν γωνίαν $A=150^\circ$.

B' Ὁμάς. 1602. (1638). Δίδεται ἕνα ἰσοπλευρον τρίγωνον $AB\Gamma$. Κατὰ ποῖον μῆκος $\Gamma\Delta$ πρέπει νὰ προεκτείνωμεν τὴν πλευρὰν $B\Gamma$, διὰ νὰ εἶναι τὸ τρίγωνον $AB\Delta$ ὀρθογώνιον; Νὰ συγκριθοῦν τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων $AB\Gamma$ καὶ $\Gamma\Delta\Delta$.

1603. (1639). Δίδεται ἕνα ἰσοπλευρον τρίγωνον $AB\Gamma$. Προεκτείνωμεν τὰς πλευρὰς του κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν καὶ κατὰ μῆκη ἴσα μὲ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τὰ ἄκρα τῶν προεκτάσεων αὐτῶν, εἶναι ἰσοπλευρον καὶ νὰ συγκριθῇ τὸ ἐμβαδὸν του πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$.

1604. (1640). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν ἐνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν τμημάτων, τὰ ὁποῖα ὀρίζονται ἐπὶ τῆς ὑποτείνουσας ὑπὸ τοῦ σημείου ἐπαφῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς τὸ τρίγωνον αὐτό.

1605. (1641). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τετραγώνου, ἐγγεγραμμένου εἰς ἡμικύκλιον, εἶναι τὰ $0,4$ τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον τετραγώνου.

1606. (1642). Ἐὰν ἀπὸ τυχὸν σημείου, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐντὸς παραλληλογράμμου φέρωμεν εὐθείας πρὸς τὰς κορυφὰς του, τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο ἀπέναντι τριγώνων εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ παραλληλογράμμου.

1607. (1643). Δίδεται ἕνα παραλληλόγραμμον $AB\Gamma\Delta$ καὶ ἕνα τυχὸν σημεῖον O τῆς διαγωνίου του AG . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ τρίγωνα OAB καὶ $O\Delta\Delta$ εἶναι ἰσοδύναμα.

1608. (1644). Αἱ μὴ παράλληλοι πλευραὶ $A\Delta$ καὶ $B\Gamma$ ἐνὸς τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$ τέμνονται εἰς ἕνα σημεῖον O . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ τρίγωνα OAG καὶ OBA εἶναι ἰσοδύναμα.

1609. (1645). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ὡς βάσεις τὰς μὴ παραλλήλους πλευρὰς ἐνὸς τραπεζίου καὶ κοινὴν κορυφὴν τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων του, εἶναι ἰσοδύναμα.

1610. (1646). Ἐνὸς τραπεζίου δίδονται αἱ βάσεις $AB=a$ καὶ $\Gamma\Delta=\beta$ ($a>\beta$) καὶ τὸ ὕψος u . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων, τὰ ὁποῖα ἔχουν βάσεις τὰς AB καὶ $\Gamma\Delta$ ἀντιστοίχως καὶ κορυφὴν τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων του εἶναι ἴσον μὲ $\frac{(a-\beta)u}{2}$.

1611. (1647). Ἐὰν Θ εἶναι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέσων ἑνὸς τριγώνου $ΑΒΓ$, νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὰ τρίγωνα $\Theta ΑΒ$, $\Theta ΒΓ$, $\Theta ΓΑ$ εἶναι ἰσοδύναμα.

1612. (1648). Ἐὰν Θ εἶναι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέσων ἑνὸς τριγώνου $ΑΒΓ$ καὶ Σ τυχὸν σημεῖον, νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ τρία τρίγωνα $\Sigma \Theta Α$, $\Sigma \Theta Β$, $\Sigma \Theta Γ$ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων.

1613. (1649). Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι αἱ διάμεσοι ἑνὸς τριγώνου χωρίζουν τὸ τρίγωνον εἰς 6 ἰσοδύναμα τρίγωνα.

1614. (1650). Δίδεται ἕνα τρίγωνον $ΑΒΓ$ · διαιροῦμεν κάθε πλευρὰν τοῦ τριγώνου αὐτοῦ εἰς ν ἴσα μέρη καὶ συνδέομεν τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως μὲ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέσων του. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὸ τρίγωνον $ΑΒΓ$ διαιρεῖται εἰς 3ν ἰσοδύναμα μέρη.

1615. (1651). Δίδεται ἕνα τρίγωνον $ΑΒΓ$, ἡ διάμέσος του $ΑΔ$ καὶ $Ο$ ἕνα τυχὸν σημεῖον. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου $ΟΑΜ$ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἡμιἄθροισμα ἢ μὲ τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων $ΟΑΒ$ καὶ $ΟΑΓ$, καθόσον αἱ κορυφαὶ $Β$ καὶ $Γ$ εὐρίσκονται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας $ΟΑ$ ἢ ἐκατέρωθεν αὐτῆς.

1616. (1652). Ἐνα κινήτων διατρέχει τὴν περίμετρον ἑνὸς τριγώνου $ΑΒΓ$, καθ' ὠρισμένην φορὰν· προεκτείνομεν κάθε πλευρὰν τοῦ τριγώνου κατὰ τὴν φορὰν αὐτὴν καὶ ἐπὶ τῶν προεκτάσεων λαμβάνομεν μῆκος ἴσον πρὸς τὴν πλευρὰν αὐτὴν. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τὰ ἄκρα τῶν προεκτάσεων αὐτῶν εἶναι ἑπταπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου $ΑΒΓ$.

1617. (1617). Δίδεται ἕνα τρίγωνον $ΑΒΓ$, τοῦ ὁποῖου αἱ γωνίαι $Β$ καὶ $Γ$ εἶναι ὀξείαι· ἀπὸ τὰς κορυφὰς $Β$ καὶ $Γ$ καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς $ΒΓ$, φέρομεν τὰς καθετοὺς $ΒΔ$ καὶ $ΓΕ$ ἐπὶ τὴν $ΒΓ$ καὶ ἴσας μὲ τὸ διπλάσιον τοῦ ὕψους $ΑΗ$ τοῦ τριγώνου $ΑΒΓ$. Ἐὰν τὰ σημεῖα $Ζ$ καὶ Θ εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν $ΑΒ$ καὶ $ΑΓ$, νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὸ $ΑΒΓ$ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τριγώνων $ΒΔΖ$ καὶ $ΓΕ\Theta$.

1618. (1654). Διαιροῦμεν τὴν περίμετρον τριγώνου εἰς ν ἴσα μέρη καὶ συνδέομεν κάθε σημεῖον τῆς διαιρέσεως μὲ τὸ κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὸ τρίγωνον διηρέθη οὕτω εἰς ν ἰσοδύναμα μέρη.

1619. (1655). Δίδονται δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα $ΑΒΓ$ καὶ $Α'ΒΓ'$, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν βᾶσιν $ΒΓ$. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι, ἐὰν $Α=2Α'$, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ $Α'ΒΓ'$ εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ διπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ $ΑΒΓ$.

1620. (1656). Δίδεται ἕνα τρίγωνον $ΑΒΓ$, $Η$ τὸ ὀρθόκεντρόν του καὶ μία ἡμιπερίφερεια διαμέτρου $ΒΓ$, ἡ ὁποία τέμνει τὸ ὕψος $ΑΑ'$ εἰς μ καὶ λ . Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου $ΒΓΔ$ εἶναι μέσον ἀνάλογον μετὰ τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγώνων $ΒΓΑ$ καὶ $ΒΓΗ$.

1621. (1657). Ἐπὶ ἐκάστης πλευρᾶς ἑνὸς ὀξυγωνίου τριγώνου $ΑΒΓ$ κατασκευάζομεν ὀρθογωνίον τρίγωνον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχη τὴν κορυφὴν τῆς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ τοῦ ἀντιστοίχου ὕψους. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἐμβαδῶν τῶν ὀρθογωνίων αὐτῶν τριγώνων εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τριγώνου $ΑΒΓ$.

1622. (1658). Δίδεται ἕνα τετράγωνον $ΑΒΓΔ$ καὶ $Λ, Μ, Ν, Κ$, τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του $ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ$. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι αἱ εὐθεῖαι $ΔΛ, ΑΜ, ΒΝ, ΓΚ$

ὀρίζουν ἓνα τετράγωνον, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι ἴσον μὲ τὸ πέμπτον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ πρῶτου.

1623. (1659). Δίδεται ἓνα ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ. Προεκτείνωμεν τὰς πλευράς του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ καὶ ἐπὶ τῶν προεκτάσεών των λαμβάνωμεν μήκη ΒΕ=ΑΒ, ΓΖ=ΒΓ, ΔΗ=ΓΔ, ΑΘ=ΔΑ. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὰ σημεῖα Ε, Ζ, Η, Θ εἶναι κορυφαὶ ἑνὸς παραλληλογράμμου, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι πενταπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ὀρθογωνίου.

1624. (1660). Δίδεται ἓνα ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ. Ὁ κύκλος ὁ ἐγγεγραμμένος εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἐφάπτεται τῆς ΑΒ εἰς τὸ Ε, τῆς ΒΓ εἰς τὸ Ζ καὶ τῆς ΑΓ εἰς τὸ Μ. Φέρομεν τὴν ΕΗ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΔ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΓΔ εἰς τὸ Η. Ἐπίσης φέρομεν τὴν ΖΘ παράλληλον πρὸς τὴν ΓΔ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΑΔ εἰς τὸ Θ. Νὰ ἀποδειχθῆ :

1ον. ὅτι ἐμβ. τριγ. ΑΒΓ=ΑΜ×ΓΜ.

2ον. ὅτι τὸ ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον ἔχει διαγώνιον τὴν ΘΗ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΒΓΔ.

1625. (1661). Δίδεται ἓνα παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ καὶ ἓνα σημεῖον Ο, τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται οὔτε ἐντὸς τῆς γωνίας Α, οὔτε ἐντὸς τῆς ἀπέναντι γωνίας Γ. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὸ τρίγωνον ΟΑΓ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τριγῶνων ΟΑΒ καὶ ΟΑΔ.

1626. (1662). Δίδεται μία γωνία xOy καὶ ἓνα σημεῖον Σ ἐπὶ τῆς διχοτόμου της. Θεωροῦμεν ὅλα τὰ τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν πλευρὰς τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας αὐτῆς καὶ μίαν μεταβλητὴν τέμνουσαν, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ Σ. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι ἐξ ὄλων αὐτῶν τῶν τριγῶνων, τὸ μικρότερον ἐμβαδὸν ἔχει τὸ τρίγωνον, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν τέμνουσαν, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΣ.

1627. (1663). Δίδεται ἓνα ἰσοσκελὲς τραπέζιον ΑΒΓΔ, μὲ βάσεις τὰς ΑΒ καὶ ΓΔ καὶ ὕψος ΓΖ. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπέζιου αὐτοῦ εἶναι διπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ὀρθογωνίου τριγῶνου ΑΓΖ.

1628. (1664). Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τραπέζιου εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον μίᾳς τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν τῆς πλευρᾶς αὐτῆς ἀπὸ τὸ μέσον τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς.

1629. (1665). Αἱ βάσεις ἑνὸς τραπέζιου ΑΒΓΔ εἶναι αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ καὶ αἱ διαγώνιοι του ΑΓ καὶ ΒΔ τέμνονται εἰς ἓνα σημεῖον Ο. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγῶνου ΟΒΓ εἶναι μέσον ἀνάλογον μεταξὺ τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριγῶνων ΟΑΒ καὶ ΟΓΔ.

1630. (1666). Δίδεται ἓνα τραπέζιον ΑΒΓΔ, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσεις ΑΒ=7 μ., ΓΔ=2 μ. καὶ μὴ παραλλήλους πλευρὰς ΒΓ=4 μ. καὶ ΑΔ=3 μ. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι αἱ ΒΓ καὶ ΑΔ εἶναι κάθετοι καὶ νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπέζιου.

1631. (1667). Τὸ ἐμβαδὸν κάθετου πολυγώνου, περιγεγραμμένου περὶ κύκλον, εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς περιμέτρου του ἐπὶ τὴν ἀκτίνα τοῦ κύκλου.

1632. (1668). Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τετραπλεύρου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου μίᾳς διαγωνίου του ἐπὶ τὴν προβολὴν τῆς ἄλλης ἐπὶ μίαν εὐθεῖαν κάθετον ἐπὶ τὴν πρώτην.

1633. (1669). Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς τετραπλεύρου, τοῦ ὁποίου

αὶ διαγώνιοι σχηματίζουν μίαν γωνίαν 30° εἶναι ἴσον μὲ τὸ τέταρτον τοῦ γινόμενου τῶν διαγωνίων του.

Γ' Ὁμάς. 1634. (1670). Εἰς ἓνα κύκλον O ἀκτίνος R δίδονται αἱ χορδαὶ $AB=a$ καὶ $BF=\beta$. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ χορδὴ AF καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ABF . Ἐφαρμογὴ. $R=6 \mu.$, $AB=5 \mu.$, $BF=4 \mu.$

1635. (1671). Δίδεται ἓνα τρίγωνον ABF μὲ πλευρὰς 3, 4, 5 μέτρα. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου, τὸ ὅποιον εἶναι ὁμοιον πρὸς τὸ ABF καὶ τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν καὶ ἡ περίμετρος ἐκφράζονται μὲ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν.

1636 (1672). Ἐνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ABF εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον O ἀκτίνος $R=5$ καὶ περιγεγραμμένον περὶ κύκλον K ἀκτίνος $\rho=2$. Νὰ ὑπολογισθοῦν ἡ ἀπόστασις OK τῶν κέντρων, ἡ βᾶσις BF καὶ τὸ ὕψος AD τοῦ τριγώνου.

1637. (1673). Ἐνας ἄγρὸς $ABF\Gamma$ ἔχει σχῆμα τετραγώνου.

1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ του, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι, ἂν αὐξήσωμεν τὴν πλευρὰν AB κατὰ 2 μέτρα καὶ ἂν ἐλαττώσωμεν τὴν πλευρὰν BF κατὰ 10 $\mu.$ λαμβάνομεν ἓνα ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν εἶναι 8800 τ.μ.

2ον. Θέλομεν νὰ ἀνοίξωμεν ἓνα πηγάδι εἰς τὸν ἄγρὸν αὐτὸν, τὸ ὅποιον νὰ ἀπέχη ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὰς πλευρὰς AB , BF καὶ ἀπὸ τὴν διαγώνιον AF . Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς διαγωνίου αὐτῆς θὰ εὐρίσκειται τὸ πηγάδι;

1638. (1674). Δίδεται ἓνα ὀρθογώνιον $ABF\Gamma$ ἐπὶ τῆς διαγωνίου του AF λαμβάνομεν ἓνα σημεῖον Σ τοιοῦτον, ὥστε $A\Sigma = \frac{AF}{6}$ καὶ ἀπὸ τὸ Σ φέρομεν

παράλληλον πρὸς τὴν διαγώνιον BD , ἡ ὁποία τέμνει τὴν AB εἰς τὸ σημεῖον B' καὶ τὴν AD εἰς τὸ Δ' . Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων $B'\Gamma B'$ καὶ $\Delta F \Delta'$ καὶ τοῦ τετραπλεύρου $AB'\Gamma \Delta'$ συναρτήσῃ τοῦ ἐμβαδοῦ E τοῦ ὀρθογωνίου $ABF\Gamma$.

1639. (1675). Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ ἐνὸς ἰσοσκελοῦς τραπεζίου, ἂν γνωρίζωμεν τὴν περίμετρόν του ἴσην μὲ 60 μέτρ. τὸ ἐμβαδὸν του ἴσον μὲ 160 τ.μ. καὶ τὸ ὕψος του ἴσον μὲ 8 μέτρα.

1640. (1672). Αἱ βάσεις ἐνὸς τραπεζίου εἶναι 12 μέτρα καὶ 6 μέτρα καὶ τὸ ὕψος του 8 μέτρα. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἐμβαδὰ τῶν τεσσάρων τριγώνων εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται τὸ τραπέζιον ὑπὸ τῶν διαγωνίων του.

1641. (1677). Ἐνὸς τραπεζίου $ABF\Gamma$ δίδονται αἱ βάσεις $AB=27 \mu.$, $\Gamma A=6 \mu.$ καὶ αἱ μὴ παράλληλοι πλευραὶ $BF=20 \mu.$, $\Delta A=13 \mu.$ Νὰ ὑπολογισθοῦν ἡ προβολὴ τῆς AD ἐπὶ τὴν AB , τὸ ὕψος τοῦ τραπεζίου καὶ τὸ ἐμβαδὸν του.

1642. (1678). Ἐνὸς τραπεζίου $ABF\Gamma$ δίδονται τὸ ἐμβαδὸν 8 τ.μ., τὸ μήκος $EZ=\lambda$ τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία συνδέει τὰ μέσα τῶν διαγωνίων του AF , BF , καὶ τὸ γινόμενον $3\lambda^2$ τῶν δύο βάσεων του AB , ΓA . Νὰ ὑπολογισθοῦν:

1ον. τὸ ὕψος τοῦ τραπεζίου.

2ον. τὸ ὕψος OH τοῦ τριγώνου, τὸ ὅποιον λαμβάνομεν, ἂν προεκτείνωμεν τὰς μὴ παραλλήλους πλευρὰς του μέχρι τῆς συναντήσεώς των. (AB εἶναι ἡ μεγάλη βᾶσις). Ἐφαρμογὴ: $\lambda=7$ μέτρ.

1643. (1679). Εἰς ἓνα ἰσοσκελὲς τραπέζιον $ABF\Gamma$ αἱ βάσεις εἶναι $AB=168 \mu.$ καὶ $\Gamma A=40 \mu.$ καὶ αἱ ἴσαι πλευραὶ $BF=AD=80 \mu.$ Νὰ ὑπολογισθοῦν:

1ον. τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπεζίου.

2ον. τὸ ἔμβადόν τοῦ τριγώνου ΟΑΒ, τὸ ὅποσον λαμβάνομεν, ἐὰν προεκτείνομεν τὰς μὴ παραλλήλους πλευράς του μέχρι τῆς συναντήσεώς των εἰς τὸ σημεῖον Ο.

3ον. αἱ διαστάσεις ἑνὸς ὀρθογωνίου, ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ τρίγωνον ΟΑΒ, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ἄθροισμὰ των εἶναι 152 μ.

1644. (1680). Εἰς ἓνα κύκλον φέρομεν ἑκατέρωθεν τοῦ κέντρου Ο, δύο χορδὰς ΑΒ καὶ ΓΔ παραλλήλους, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ ΑΒ εἶναι ἴση μὲ τὴν πλευρὰν τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου καὶ ἡ ἄλλη ΓΔ μὲ τὴν πλευρὰν τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου, τὰ ὅποια εἶναι ἐγγεγραμμένα εἰς τὸν κύκλον αὐτόν. Συνδέομεν τὰ ἄκρα τῶν χορδῶν καὶ λαμβάνομεν ἓνα τραπέζιον ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου τὸ ἔμβადόν εἶναι 10 τ.μ.

1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔμβადόν τοῦ κύκλου καὶ ἡ περίμετρος τοῦ τραπέζιου.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ τρίγωνα ΟΑΒ καὶ ΟΓΔ εἶναι ἰσοδύναμα.

1645. (1681). Δίδονται δύο κυρτὰ πολύγωνα· τὸ ἓνα εἶναι ἐντὸς τοῦ ἄλλου καὶ αἱ πλευραὶ των εἶναι παράλληλοι, μία πρὸς μίαν καὶ κείνται εἰς ἴσην ἀπόστασιν. Ἐὰν γνωρίζωμεν τὰς περιμέτρους 2τ καὶ 2τ' τῶν δύο αὐτῶν πολυγώνων καὶ τὴν ἀπόστασιν α τῶν παραλλήλων πλευρῶν, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν ἔμβადων των.

1646. (1682). Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας λαμβάνομεν τρία διαδοχικὰ σημεῖα Α, Β, Γ τοιαῦτα, ὥστε $AB = \alpha$ καὶ $ΒΓ = \beta$. Μὲ πλευράς τὰς ΑΒ καὶ ΒΓ κατασκευάζομεν πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας τὰ ἰσόπλευρα τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΒΓΕ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔμβადόν τοῦ τετραπλεύρου ΑΔΕΓ.

1647. (1683). Εἰς ἓνα τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι $\gamma\omega\nu. \Gamma = 90^\circ$, πλευρὰ ΑΒ=13 μ., ΒΓ=20 μ., ΓΔ=10 μ. καὶ ΔΑ=17 μ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία Α εἶναι ἀμβλεία καὶ νὰ ὑπολογισθοῦν: ἡ προβολὴ ΔΔ' τῆς ΔΔ ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἡ κάθετος ΔΔ' καὶ τὸ ἔμβადόν τοῦ τετραπλεύρου.

1648. (1684). Ἐνὸς τριγώνου ΑΒΓ δίδεται ἡ γωνία $A = 120^\circ$ καὶ αἱ πλευραὶ ΑΓ=α, ΑΒ=2α. Μὲ πλευράς τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ κατασκευάζομεν, ἑξωτερικῶς τοῦ τριγώνου, τὰ τετράγωνα ΑΒΔΕ καὶ ΑΓΖΘ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα Ζ, Θ, Ε κείνται ἐπ' εὐθείας καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ περίμετρος καὶ τὸ ἔμβადόν τοῦ πενταγώνου ΒΓΖΕΔ.

1649. (1685). Δίδεται μία ἡμιπεριφέρεια ἀκτίνος R. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ ἑνὸς κανονικοῦ ἑξαγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ περίμετρος εἶναι ἴση μὲ τὸ μῆκος τῆς περιφέρειᾶς αὐτῆς καὶ νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἔμβადόν τοῦ ἑξαγώνου αὐτοῦ εἶναι μικρότερον τοῦ ἔμβαδου τοῦ κύκλου, ὃ ὁποῖος ὀρίζεται ἀπὸ τὴν περιφέρειαν αὐτήν.

Δ' Ὅμας. 1650. (1686). Δίδεται κύκλος Ο διαμέτρου ΑΒ=6α. Διαιροῦμεν τὴν διάμετρον ΑΒ εἰς τρία ἴση μέρη ΑΓ=ΓΔ=ΔΒ καὶ μὲ διαμέτρους τὰς ΑΓ, ΓΔ καὶ ΔΒ γράφομεν τρεῖς ἴσους κύκλους. Νὰ εὐρεθῇ ὁ λόγος τοῦ ἄθροισματος τῶν ἔμβადων τῶν τριῶν ἴσων κύκλων πρὸς τὸ ἔμβადόν τοῦ δοθέντος κύκλου Ο.

1651. (1687). Δίδεται κύκλος Ο διαμέτρου ΑΒ. Μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτίνα τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου, τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον αὐτόν, γράφομεν περιφέρειαν κύκλου. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔμβადόν τῆς κοινῆς ἐπιφανείας τῶν δύο αὐτῶν κύκλων.

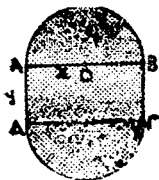
1652. (1688). Μὲ κέντρον μίαν ἀπὸ τὰς κορυφὰς τετραγώνου πλευρᾶς α, περιγεγραμμένου περὶ κύκλον καὶ μὲ ἀκτίνα τὴν διαγώνιον τοῦ γράφομεν περιφέρειαν κύκλου. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο κύκλων.

1653. (1689). Εἰς ἓνα τετράγωνον, ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον, γράφονται τέσσαρες ἴσοι κύκλοι, οἱ ὁποῖοι ἐφάπτονται μεταξύ των ἐξωτερικῶς καὶ ἐφάπτονται τῶν πλευρῶν τοῦ τετραγώνου. Νὰ εὗρεθῇ ὁ λόγος τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἐμβαδῶν τῶν τεσσάρων κύκλων πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου, τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τετράγωνον.

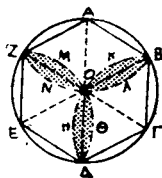
1654. (1690). Μὲ διαμέτρον τὰς πλευρὰς ἑνὸς τετραγώνου κατασκευάζομεν, εἰς τὸ ἐσωτερικόν του, ἡμιπεριφέρειαν. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῶν τεσσάρων σχηματιζομένων φύλλων εἶναι 30,87 τ.μ.

1655. (1691). Ἐνα παραθύρον ἔχει σχηματισθῇ ἀπὸ ἓνα ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ καὶ ἀπὸ ἓνα καμπυλόγραμμον μέρος ΔΕΓ, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν, ἂν γράψωμεν δύο τόξα ΔΕ καὶ ΓΕ μὲ κέντρα τὰ Δ καὶ Γ καὶ μὲ τὴν αὐτὴν ἀκτίνα ΔΓ. Ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ὕψος τοῦ καμπυλόγραμμου μέρους εἶναι τὸ τρίτον ὁλοκλήρου τοῦ ὕψους, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραθύρου αὐτοῦ, ἂν τὸ ὕψος ΑΔ τοῦ ὀρθογωνίου εἶναι 3,40 μ.

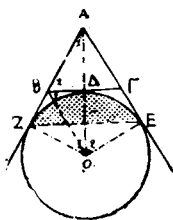
1656. (1692). Ἐνα σχῆμα ἀποτελεῖται ἀπὸ ἓνα ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ, τὸ ὁποῖον καταλήγει εἰς δύο ἡμικύκλια Ο καὶ Ο', τὰ ὁποῖα ἔχουν διαμέτρους τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΔΓ τοῦ ὀρθογωνίου. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαστάσεις ΑΒ=x καὶ ΑΔ=y τοῦ ὀρθογωνίου, ἂν γνωρίζωμεν τὸ ἐμβαδὸν Ε ὅλου τοῦ σχήματος καὶ τὴν περιμέτρον του τ. Ἐφαρμογή: $t=100$ μ., $E=200$ τ.μ.



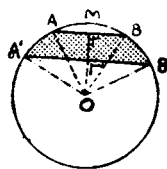
Σχ. ἀσκ. 1656.



Σχ. ἀσκ. 1657.



Σχ. ἀσκ. 1658.



Σχ. ἀσκ. 1659.

1657. (1693). Μὲ κέντρα τὰς ἀρτίας (ἢ περιττὰς) κορυφὰς κανονικοῦ ἑξαγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον ἀκτίνας R καὶ μὲ ἀκτίνας ἴσας μὲ R γράφομεν τρία τόξα, τὰ ὁποῖα κείνται ἐντὸς τοῦ κύκλου καὶ περατοῦνται εἰς τὴν περιφέρειαν του. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῶν τριῶν σχηματιζομένων φύλλων.

1658. (1694). Δίδεται ἓνα ἰσοπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ πλευρᾶς α' ὃ παρεγγεγραμμένος κύκλος Οα εἰς τὴν γωνίαν Α, ἐφάπτεται τῆς πλευρᾶς ΒΓ εἰς τὸ Δ καὶ τῶν προσετάσεων τῶν ΑΓ καὶ ΑΒ εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ ἀντιστοίχως.

1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτίς τοῦ κύκλου αὐτοῦ.

2ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τμήματος ΖΔΕ.

1659 (1695). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μέρους ἑνὸς κύκλου ἀκτί-
 νος R, τὸ ὁποῖον περιλαμβάνεται μεταξύ δύο χορδῶν παραλλήλων, οἱ ὁποῖοι

κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ κέντρου καὶ αἱ ὅποιαι εἶναι ἴσαι ἀντιστοίχως μὲ τὰς πλευρὰς ἑνὸς κανονικοῦ ἑξαγώνου καὶ ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου, ἐγγεγραμμένων εἰς τὸν κύκλον αὐτόν.

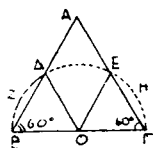
1660. (1696). Ἀπὸ ἑνα σημείου A μιᾶς περιφερείας O λαμβάνομεν δύο τόξα $AB=90^\circ$, $AG=45^\circ$ πρὸς τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν φέρομεν τὴν χορδὴν GB καὶ τὴν AD παράλληλον πρὸς τὴν GB . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ κυκλικὸν τμήμα $\Delta DB\Gamma$ εἶναι τὸ τέταρτον τοῦ κύκλου.

1661. (1697). Δύο ἀκτίνες OA καὶ OB μιᾶς περιφερείας O σχηματίζουν γωνίαν 60° . Ἀπὸ τὸ σημεῖον A φέρομεν τὴν AG κάθετον ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ B . Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μέρους, πού περιλαμβάνεται μεταξὺ τῆς καθέτου AG , τῆς ἐφαπτομένης $B\Gamma$ καὶ τοῦ τόξου AB .

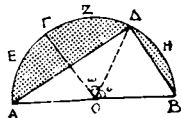
1662. (1698). Εἰς ἕνα κύκλον διαμέτρου $2R=1 \mu$. φέρομεν δύο χορδὰς AB καὶ AG , ἐκ τῶν ὁποίων ἡ AB εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτίνα καὶ ἡ ἄλλη μὲ τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου, τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον καὶ τοιαύτως, ὥστε τόξα AB καὶ AG νὰ ἔχουν τὴν αὐτὴν φοράν. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μέρους τοῦ κύκλου, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῶν δύο χορδῶν καὶ τοῦ τόξου $B\Gamma$.

1663. (1699). Μὲ διάμετρον τὴν πλευρὰν $B\Gamma=a$ ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου $AB\Gamma$ γράφομεν ἡμικύκλιον πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ τριγώνου. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἐμβαδὰ τῶν κυκλικῶν τμημάτων, τὰ ὁποῖα εὐρίσκονται ἐκτὸς τοῦ τριγώνου.

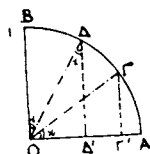
1664. (1700). Δίδεται ἡμικύκλιον διαμέτρου AOB , ἡ ἀκτίς OG καὶ ἡ ἀκτίς OD , ἡ ὁποία διχοτομεῖ τὴν γωνίαν BOG . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν δύο κυκλικῶν τμημάτων, τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς χορδὰς AD καὶ BD , εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὸν τομέα OAG .



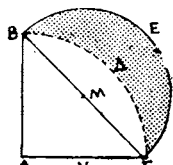
Σχ. ἀσκ. 1663.



Σχ. ἀσκ. 1664.



Σχ. ἀσκ. 1665.



Σχ. ἀσκ. 1666.

1665. (1701). Ἐπὶ τοῦ τόξου AB ἑνὸς τεταρτοκυκλίου OAB λαμβάνομεν δύο σημεῖα Γ καὶ Δ , τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὸ μέσον τοῦ τόξου AB καὶ φέρομεν τὰς καθέτους $\Gamma\Gamma'$ καὶ $\Delta\Delta'$ ἐπὶ τὴν OA . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ μικτόγραμμον σχῆμα $\Gamma\Delta\Delta'\Gamma'$ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸν τομέα $\Gamma O\Delta$.

1666. (1702). Δίδεται ἕνα ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον $AB\Gamma$. Μὲ διάμετρον τὴν ὑποτείνουσαν $B\Gamma=2a$ γράφομεν ἡμιπεριφέρεια, ἡ ὁποία κεῖται ἐκτὸς τοῦ τριγώνου καὶ μὲ κέντρον τὴν κορυφὴν A καὶ ἀκτίνα ἴσην μὲ τὴν πλευρὰν AB γράφομεν τόξον $B\Delta\Gamma$. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ σχηματισθέντος μηνίσκου $BE\Gamma\Delta B$.

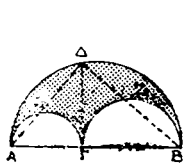
1667. (1703). Ἐπὶ ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος AB λαμβάνομεν ἕνα σημεῖον Γ καὶ μὲ διαμέτρους τὰς AB , AG , $B\Gamma$ γράφομεν τρία ἡμικύκλια πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς AB . Ἐκ τοῦ Γ ὑψοῦμεν κάθετον $\Gamma\Delta$, ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν

μεγαλυτέραν ἡμιπεριφέρειαν εἰς τὸ Δ. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια, ἡ περιλαμβανομένη μεταξὺ τῶν τριῶν ἡμιπεριφερειῶν, εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὸν κύκλον, ὁ ὁποῖος ἔχει διάμετρον τὴν ΓΔ.

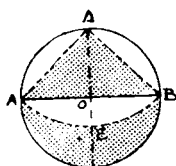
1668. (1704). Δίδεται κύκλος διαμέτρου $AB=2R$ καὶ ἐπὶ τῆς AB ἓνα σημεῖον Γ κείμενον εἰς ἀπόστασιν AG ἴσην μὲ τὸ τρίτον τῆς διαμέτρου AB . Μὲ διαμέτρου; τὰς AG καὶ GB γράφομεν δύο ἡμικύκλια ἐκατέρωθεν τῆς AB . Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι ἡ γραμμὴ, ἡ ὁποία σχηματίζεται ἀπὸ τὰς δύο ἡμιπεριφερείας διαιρεῖ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κύκλου εἰς δύο μέρη, ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἓνα εἶναι διπλάσιον τοῦ ἄλλου.

1669. (1705). Εἰς κύκλον O ἀκτίνος R φέρομεν δύο διαμέτρους $AB, ΓΔ$ καθέτους. Μὲ κέντρον τὸ σημεῖον Δ καὶ ἀκτῖνα τὴν ΔA γράφομεν τὸ τόξον AEB . Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μηνίσκου $AGBEA$ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΔAB .

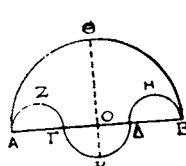
1670. (1706). Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας λαμβάνομεν τέσσαρα διαδοχικὰ σημεῖα A, Γ, Δ, B καὶ τοιαῦτα, ὥστε $AG=\Delta B$. Μὲ διαμέτρους τὰς AB, AG καὶ ΔB γράφομεν τρία ἡμικύκλια πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς εὐθείας AB καὶ μὲ διάμετρον τὴν $ΓΔ$ ἓνα ἄλλο ἡμικύκλιον πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τῆς AB . Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια, ἡ περιεχομένη μεταξὺ τῶν τεσσάρων ἡμιπεριφερειῶν, εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὸν κύκλον, ὁ ὁποῖος ἔχει διάμετρον τὴν AD .



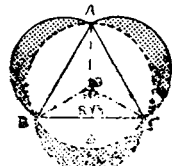
Σχ. ἀσκ. 1667.



Σχ. ἀσκ. 1669.



Σχ. ἀσκ. 1670.



Σχ. ἀσκ. 1672.

1671. (1707). Δίδεται ἓνα ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$. Μὲ διάμετρον τὴν ὑποτείνουσαν $B\Gamma$ γράφομεν, ἐξωτερικῶς τοῦ τριγώνου, ἡμικύκλιον $BE\Gamma$. Ἐπίσης μὲ διαμέτρους τὰς AB καὶ $A\Gamma$ γράφομεν, εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ τριγώνου, ἡμικύκλια $B\Delta A$ καὶ $A\Delta\Gamma$. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι αἱ ἡμιπεριφέρειαι τῶν δύο τελευταίων ἡμικυκλίων τέμνονται εἰς τι σημεῖον Δ , κείμενον ἐπὶ τῆς ὑποτείνουσας καὶ ὅτι τὸ κοινὸν μέρος τῶν δύο τελευταίων ἡμικυκλίων, αὐξανόμενον κατὰ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$, εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ μέρος τοῦ πρώτου ἐκ τῶν ἡμικυκλίων, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐξωτερικῶς τῶν δύο ἄλλων ἡμικυκλίων.

1672. (1708). Δίδεται ἓνα ἰσοπλευρον τρίγωνον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον O ἀκτίνος R . Μὲ διαμέτρους τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου γράφομεν τρεῖς ἡμιπεριφερείας ἐξωτερικῶς. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τριῶν σχηματισθέντων μηνίσκων ὑπερβαίνει τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἰσοπλευροῦ τριγώνου κατὰ τὰ ὄγδοον τοῦ δοθέντου κύκλου.

1673. (1709). Δίδεται ἓνα τεταρτοκύκλιον OAB , ὀριζόμενον ἀπὸ τὰς καθέτους ἀκτῖνας OA, OB τοῦ κύκλου O ἀκτίνος R . Μὲ διαμέτρους τὰς OA καὶ OB γράφομεν, εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ τεταρτοκυκλίου, δύο ἡμιπεριφερείας $O\epsilon GA$ καὶ $O\zeta\Gamma B$, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Γ . Νὰ ἀποδειχθῆ:

1ον. ὅτι τὰ σημεῖα A, Γ, B κείνται ἐπ' εὐθείας.

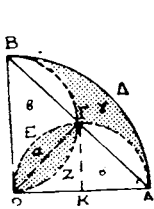
2ον. ὅτι τὰ ἐμβαδὰ τῶν καμπυλογράμμων σχημάτων ΑΔΒΓΑ καὶ ΟΖΓΕΟ, εἶναι ἰσοδύναμα.

3ον. ὅτι ἕκαστον τῶν ἐμβαδῶν τῶν ΟΑΓΖΟ καὶ ΟΕΓΒΟ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ τέταρτον τοῦ τετραγώνου πλευρᾶς ΟΑ.

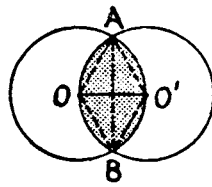
1674. (1710). Ἐνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ δίδεται ἡ ὑποτείνουσα ΒΓ=α καὶ τὸ ἐμβαδὸν του=κ².

1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ, συναρτήσῃ τῶν α καὶ κ, ἡ ἀκτίς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου.

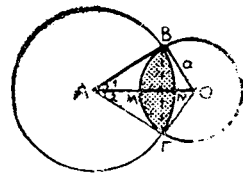
2ον. Ἐάν Δ, Ε, Ζ εἶναι τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ καὶ τοῦ κύκλου αὐτοῦ, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κυκλικοῦ τμήματος ΖΔΕ, τὸ ὁποῖον σχηματίζεται ὑπὸ τῆς χορδῆς ΔΕΖ.



Σχ. ἀσκ. 1673.



Σχ. ἀσκ. 1675.

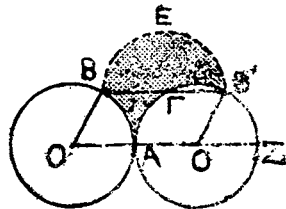


Σχ. ἀσκ. 1676.

1675. (1711). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κοινοῦ μέρους δύο ἰσων κύκλων, τῶν ὁποίων ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων τῶν εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτίνα τῶν.

1676. (1712). Ἀπὸ ἓνα σημεῖον Α, τὸ ὁποῖον κεῖται εἰς ἀπόστασιν ΟΑ=2α ἀπὸ τὸ κέντρον Ο ἑνὸς κύκλου ἀκτίνας α φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΒ ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου εἰς τὸ Β καὶ γράφομεν ἔπειτα μίαν περιφέρειαν μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτίνα τὴν ΑΒ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κοινοῦ μέρους τῶν δύο κύκλων. Ἐφαρμογή: α=3 ἐκ.

1677. (1713). Δύο ἴσοι κύκλοι Ο καὶ Ο' ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς τὸ Α. Φέρομεν δύο ἀκτίνας ΟΒ καὶ Ο'Β' παραλλήλους καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς καὶ κατασκευάζομεν ἐξωτερικῶς τῶν δύο κύκλων τὴν ἡμιπεριφέρειαν, διαμέτρου ΒΒ'. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ καμπυλογράμμου σχήματος, τὸ ὁποῖον περιλαμβάνεται μεταξὺ τῆς ἡμιπεριφέρειᾶς αὐτῆς καὶ τῶν δύο τόξων ΑΒ καὶ ΑΒ' εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου ΟΒΒ'Ο'.



Σχ. ἀσκ. 1677.

1678. (1714). Δίδονται δύο ὁμόκεντροι κύκλοι καὶ δύο ἀκτίνας ΟΑ'Α καὶ ΟΒ'Β. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς διαφορᾶς τῶν δύο σχηματιζομένων κυκλικῶν τομέων εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς διαφορᾶς τῶν ἀκτίνων ἐπὶ τὸ τόξον ὁμοκέντρου περιφερείας, τὸ ὁποῖον ὀρίζεται ὑπὸ τῶν μέσων τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων ΑΑ' καὶ ΒΒ' τῶν δύο ἀκτίνων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΕΜΒΑΔΩΝ

1. Σχέσεις μεταξύ τῶν ἐμβαδῶν δύο ὁμοίων σχημάτων

544. Θεώρημα. Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὁμοίων τριγώνων εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν τετραγώνων δύο ὁμολόγων πλευρῶν των.

Ἐπιπέδουσι. Ἐστωσαν τὰ ὅμοια τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $A'B'\Gamma'$.

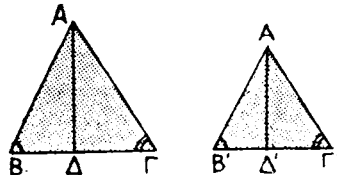
Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$\frac{\text{ἐμβ. τριγ. } AB\Gamma}{\text{ἐμβ. τριγ. } A'B'\Gamma'} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}.$$

Ἀπόδειξις: Φέρομεν τὰ ὁμόλογα ὕψη AD καὶ $A'D'$. Γνωρίζομεν ὅτι

$$\text{ἐμβ. τριγ. } AB\Gamma = \frac{B\Gamma \times AD}{2} \quad \text{καὶ}$$

$$\text{ἐμβ. τριγ. } A'B'\Gamma' = \frac{B'\Gamma' \times A'D'}{2}.$$



Σχ. 380.

Διαιροῦμεν τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\frac{\text{ἐμβ. τριγ. } AB\Gamma}{\text{ἐμβ. τριγ. } A'B'\Gamma'} = \frac{B\Gamma \times AD}{B'\Gamma' \times A'D'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} \times \frac{AD}{A'D'} \quad (1).$$

Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $A'B'\Gamma'$ εἶναι ὅμοια, ὁ λόγος τῶν ὁμολόγων ὕψων των ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν ὁμολόγων πλευρῶν των (§ 407. III)· δηλ. εἶναι $\frac{AD}{A'D'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \dots$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τοὺς λόγους $\frac{B\Gamma}{B'\Gamma'}$ καὶ $\frac{AD}{A'D'}$ μὲ τὸν ἴσον των $\frac{AB}{A'B'}$ καὶ ἔχομεν

$$\frac{\text{ἐμβ. τριγ. } AB\Gamma}{\text{ἐμβ. τριγ. } A'B'\Gamma'} = \frac{AB}{A'B'} \times \frac{AB}{A'B'} = \frac{AB \times AB}{A'B' \times A'B'} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}.$$

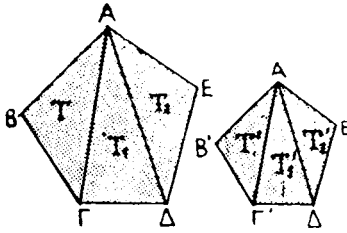
Ἐδείχθη λοιπὸν, ὅτι: Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν...

545. Θεώρημα. Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὁμοίων πολυγώνων εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν τετραγώνων δύο ὁμολόγων πλευρῶν των.

Ἐπίπεδοι: Ἐστώσαν τὰ ὅμοια πολύγωνα $ΑΒΓΔΕ$ καὶ $Α'Β'Γ'Δ'Ε'$ (Σχ. 381).

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\frac{\text{ἐμβ. } ΑΒΓΔΕ}{\text{ἐμβ. } Α'Β'Γ'Δ'Ε'} = \frac{\overline{ΑΒ}^2}{\overline{Α'Β'}^2}$.

Ἀπόδειξις: Ἀπὸ τὰς ὁμολόγους κορυφὰς $Α$ καὶ $Α'$ φέρομεν καὶ εἰς τὰ δύο πολύγωνα, ὄλας τὰς διαγωνίους. Τὰ δοθέντα πολύγωνα χωρίζονται τότε εἰς ὅμοια τρίγωνα, ἰσάριθμα καὶ ὁμοίως κείμενα.



Σχ. 381.

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ T, T_1, T_2 τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγῶνων $ΑΒΓ, ΑΓΔ, ΑΔΕ$ καὶ μὲ T', T_1', T_2' τὰ ἐμβαδὰ τῶν ὁμοίων τριγῶνων $Α'Β'Γ', Α'Γ'Δ', Α'Δ'Ε'$, θὰ ἔχωμεν (§ 544)

$$\frac{T}{T'} = \frac{\overline{ΑΒ}^2}{\overline{Α'Β'}^2}, \quad \frac{T_1}{T_1'} = \frac{\overline{ΓΔ}^2}{\overline{Γ'Δ'}^2}, \quad \frac{T_2}{T_2'} = \frac{\overline{ΔΕ}^2}{\overline{Δ'Ε'}^2} \quad (1)$$

Ἐπειδὴ τὰ πολύγωνα $ΑΒΓΔΕ$ καὶ $Α'Β'Γ'Δ'Ε'$ εἶναι ὅμοια, θὰ εἶναι

$$\frac{ΑΒ}{Α'Β'} = \frac{ΓΔ}{Γ'Δ'} = \frac{ΔΕ}{Δ'Ε'} \quad \text{ὁπότε καὶ} \quad \frac{\overline{ΑΒ}^2}{\overline{Α'Β'}^2} = \frac{\overline{ΓΔ}^2}{\overline{Γ'Δ'}^2} = \frac{\overline{ΔΕ}^2}{\overline{Δ'Ε'}^2}$$

Ἐπειδὴ τὰ δευτέρω μέλη τῶν ἰσοτήτων (1) εἶναι ἴσα, θὰ εἶναι ἴσα καὶ τὰ πρῶτα μέλη των καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι

$$\frac{T}{T'} = \frac{T_1}{T_1'} = \frac{T_2}{T_2'} = \frac{\overline{ΑΒ}^2}{\overline{Α'Β'}^2} \quad (2)$$

Κατὰ γνωστὴν ἰδιότητα τῶν ἴσων κλασμάτων ἢ σχέσις (2) γράφεται

$$\frac{T+T_1+T_2}{T'+T_1'+T_2'} = \frac{\overline{ΑΒ}^2}{\overline{Α'Β'}^2} \quad \eta \quad \frac{\text{ἐμβ. } ΑΒΓΔΕ}{\text{ἐμβ. } Α'Β'Γ'Δ'Ε'} = \frac{\overline{ΑΒ}^2}{\overline{Α'Β'}^2}$$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο. . .

546. Παρατήρησις. Ἐπειδὴ $\frac{\overline{ΑΒ}^2}{\overline{Α'Β'}^2} = \left(\frac{ΑΒ}{Α'Β'}\right)^2$ τὰ προηγούμενα θεωρήματα ἐκφράζονται καὶ ὡς ἑξῆς:

Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν δύο ὁμοίων τριγῶνων ἢ δύο ὁμοίων πολυγῶνων εἶναι ἴσος μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ λόγου τῆς ὁμοιότητός των.

547. Πέρισμα I. Ἐὰν ὄλαι αἱ πλευραὶ πολυγώνου πολλαπλασιασθοῦν ἐπὶ τὸν αὐτὸν ἀριθμὸν k , αἱ δὲ γωνίαι των μείνουν

ἀμετάβλητοι, τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου πολλαπλασιάζεται ἐπὶ k^2 .

Πράγματι· ἐν πρώτοις τὸ δοθὲν πολύγωνον καὶ τὸ νέον πολύγωνον εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουν τὰς γωνίας τῶν ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ τὰς ὁμολόγους πλευρὰς ἀναλόγους, μὲ λόγον ὁμοιότητος k . Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν μὲ E τὸ ἐμβαδὸν τοῦ δοθέντος πολυγώνου καὶ μὲ E' τοῦ νέου, θὰ ἔχωμεν (§ 545) $\frac{E'}{E} = k^2$ ἢ $E' = E \times k^2$.

548. Πόρισμα II. Τὰ ἐμβαδὰ πολλῶν ὁμοίων πολυγώνων εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν τῶν.

Ἐπίθεσις: Ἐστωσαν Π, Π_1, Π_2, \dots τὰ ἐμβαδὰ πολλῶν ὁμοίων πολυγώνων καὶ $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \dots$ αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ τῶν.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\frac{\Pi}{\alpha^2} = \frac{\Pi_1}{\alpha_1^2} = \frac{\Pi_2}{\alpha_2^2} \dots$

Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ τὰ πολύγωνα Π καὶ Π_1 εἶναι ὅμοια, θὰ ἔχωμεν, κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα (§ 545)

$$\frac{\Pi}{\Pi_1} = \frac{\alpha^2}{\alpha_1^2} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\Pi}{\alpha^2} = \frac{\Pi_1}{\alpha_1^2} \quad (1)$$

Ὁμοίως ἐπειδὴ τὰ πολύγωνα Π καὶ Π_2 εἶναι ὅμοια, θὰ εἶναι

$$\frac{\Pi}{\Pi_2} = \frac{\alpha^2}{\alpha_2^2} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\Pi}{\alpha^2} = \frac{\Pi_2}{\alpha_2^2} \quad (2)$$

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) ... συνάγομεν, ὅτι

$$\frac{\Pi}{\alpha^2} = \frac{\Pi_1}{\alpha_1^2} = \frac{\Pi_2}{\alpha_2^2} = \dots$$

Ἀσκήσεις: 1679, 1680, 1681, 1682, 1683, 1684.

549. Θεώρημα. Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην ἢ παραπληρωματικὴν, ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τῶν εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν γινομένων τῶν πλευρῶν, αἱ ὁποῖα περιέχουν τὰς ἴσας ἢ παραπληρωματικὰς αὐτὰς γωνίας.

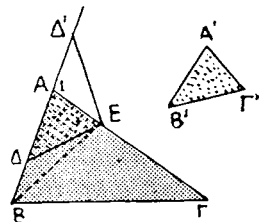
Ἐπίθεσις: 1ον. Ἐστωσαν τὰ τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $A'B'\Gamma'$ (Σχ. 382), τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰς γωνίας A καὶ A' ἴσας.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$\frac{\text{ἐμβ. τρίγ. } AB\Gamma}{\text{ἐμβ. τρίγ. } A'B'\Gamma'} = \frac{AB \times A\Gamma}{A'B' \times A'\Gamma'}$$

Ἀπόδειξις: Θέτομεν τὸ τρίγωνον

$A'B'\Gamma'$ ἐπὶ τοῦ $AB\Gamma$ οὕτως, ὥστε νὰ ἐφαρμόσουν αἱ ἴσαι γωνίαι A



Σχ. 382.

καὶ A' καὶ ἔστω $ΑΔΕ$ ἡ θέσις, τὴν ὅποιαν καταλαμβάνει τοῦτο ἐπὶ τοῦ τριγώνου $ΑΒΓ$. Φέρομεν τὴν εὐθείαν $ΒΕ$. Τὰ τρίγωνα $ΑΒΓ$ καὶ $ΑΒΕ$ ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος, τὸ ὁποῖον ἄγεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν $Β$ πρὸς τὰς βάσεις τῶν $ΑΓ$ καὶ $ΑΕ$, αἱ ὁποῖαι κείνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας $ΑΓ$. ἄρα τὰ τρίγωνα αὐτὰ θὰ ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν βάσεων τῶν (§ 520), δηλ. θὰ εἶναι

$$\frac{\text{ἐμβ. τριγ. } ΑΒΓ}{\text{ἐμβ. τριγ. } ΑΒΕ} = \frac{ΑΓ}{ΑΕ} \quad (1)$$

Ὅμοίως τὰ τρίγωνα $ΑΒΕ$ καὶ $ΑΔΕ$ ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος, τὸ ὁποῖον ἄγεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν $Ε$ πρὸς τὰς βάσεις $ΑΒ$ καὶ $ΑΔ$ ἄρα θὰ εἶναι

$$\frac{\text{ἐμβ. τριγ. } ΑΒΕ}{\text{ἐμβ. τριγ. } ΑΔΕ} = \frac{ΑΒ}{ΑΔ} \quad (2)$$

Πολλαπλασιάζομεν τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\frac{\text{ἐμβ. τριγ. } ΑΒΓ}{\text{ἐμβ. τριγ. } ΑΒΓ} \times \frac{\text{ἐμβ. τριγ. } ΑΒΕ}{\text{ἐμβ. τριγ. } ΑΔΕ} = \frac{ΑΓ}{ΑΕ} \times \frac{ΑΒ}{ΑΔ}$$

ἢ, ἀπλοποιῶντες,
$$\frac{\text{ἐμβ. τριγ. } ΑΒΓ}{\text{ἐμβ. τριγ. } ΑΔΕ} = \frac{ΑΓ \times ΑΒ}{ΑΕ \times ΑΔ} \quad (3)$$

Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον $ΑΔΕ$ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον $Α'Β'Γ'$ καὶ ἐπειδὴ $ΑΕ = Α'Γ'$, $ΑΔ = Α'Β'$, ἡ ἰσότης (3) γράφεται

$$\boxed{\frac{\text{ἐμβ. τριγ. } ΑΒΓ}{\text{ἐμβ. τριγ. } Α'Β'Γ'} = \frac{ΑΒ \times ΑΓ}{Α'Β' \times Α'Γ'}}$$

2^{ον}. Ἐὰν τὰ τρίγωνα $ΑΒΓ$ καὶ $ΑΕΔ'$ (Σχ. 382) ἔχουν τὰς γωνίας $ΒΑΓ$ καὶ $ΕΑΔ'$ παραπληρωματικὰς εὐρίσκομεν ὁμοίως, ὅτι

$$\frac{\text{ἐμβ. τριγ. } ΑΒΓ}{\text{ἐμβ. τριγ. } ΑΕΔ'} = \frac{ΑΒ \times ΑΓ}{ΑΕ \times ΑΔ'}$$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Ἐὰν δύο τρίγωνα ἔχουν...**

Ἀσκήσεις: 1685, 1686, 1687, 1688, 1689, 1690, 1691, 1692, 1693, 1694.

2. Γεωμετρικὴ ἐξήγησις τοῦ θεωρήματος τοῦ Πυθαγόρα

Εἰς τὸ III βιβλίον εὐρήκαμεν τὴν σχέσιν $a^2 = b^2 + c^2$, ἡ ὁποία ἐκφράζει, ὅτι: **τὸ τετράγωνον τῆς ὑποτείνουσας ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο καθέτων πλευρῶν του.**

Ἡ πρότασις αὕτη ἐξηγεῖται γεωμετρικῶς εἰς τὸ κατωτέρω θεώρημα:

550. Θεώρημα. *Τὸ τετράγωνον, τὸ ὁποῖον κατασκευάζεται*

μὲ πλευρὰν τὴν ὑποτείνουσαν ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων, τὰ ὁποῖα κατασκευάζονται μὲ πλευρὰς τὰς δύο καθέτους πλευρὰς τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου.

Ἐπίθεσις: Ἐστω τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ. Μὲ πλευρὰς τὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ (Σχ. 383) κατασκευάζομεν τὰ τετράγωνα Μ, Ν, Κ, τὰ ὁποῖα νὰ κεῖνται ἔκτος τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι
 $M = N + K$.

Ἀπόδειξις: Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α τῆς ὀρθῆς γωνίας φέρομεν κάθετον ΑΣ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ, ἣ ὁποῖα προεκτεινομένη, χωρίζει τὸ τετράγωνον Μ εἰς δύο ὀρθογώνια Λ καὶ Ρ. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΔ καὶ ΓΙ.

Τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΙΒΓ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας καὶ τὰς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένας γωνίας ἴσας· ἤτοι ἔχουν $ΒΔ = ΒΓ$, ὡς ἡ πλευρὰς τοῦ τετραγώνου Μ, $ΑΒ = ΒΙ$, ὡς πλευρὰς τοῦ τετραγώνου Κ καὶ $\widehat{ΒΑΔ} = \widehat{ΒΓΙ}$, διότι ἐκάστη τούτων εἶναι ἄθροισμα μιᾶς ὀρθῆς γωνίας καὶ τῆς κοινῆς γωνίας Β.

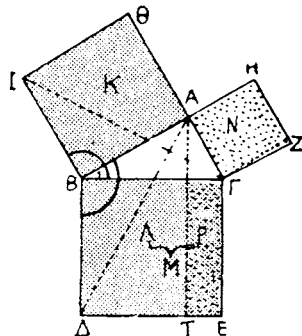
Ἄλλὰ τὸ τρίγωνον ΑΒΔ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ὀρθογωνίου Λ, διότι ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν ΒΔ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ΣΒ. Ἐπίσης τὸ τρίγωνον ΙΒΓ εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ τετραγώνου Κ, διότι ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν ΙΒ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ΑΒ.

Ἐπειδὴ ὁμοῦς τὰ τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΙΒΓ εἶναι ἴσα, ἔπεται ὅτι καὶ τὰ διπλάσια αὐτῶν, δηλ. τὸ ὀρθογώνιον Λ καὶ τὸ τετράγωνον Κ, θὰ εἶναι ἰσοδύναμα· ἤτοι θὰ εἶναι $Λ = Κ$ (1)

Ἀποδεικνύομεν ὁμοίως, ὅτι τὸ ὀρθογώνιον Ρ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ τετράγωνον Ν· ἤτοι εἶναι $Ρ = Ν$ (2)

Προσθέτομεν τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν
 $Λ + Ρ = Κ + Ν$ ἢ $Μ = Κ + Ν$.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: *Τὸ τετράγωνον τὸ ὁποῖον...*



Σχ. 383.

551. Πέρισμα. Ἐὰν τρία ὁμοία σχήματα, οἰασδήποτε μορφῆς, πολυγωνικῆς ἢ ἀλλῆς, ἔχουν ὡς ὁμολόγους πλευρὰς τὰς πλευρὰς α, β, γ ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, τὸ ἐμβαδὸν E_a τοῦ

σχήματος, τὸ ὅποσον κατασκευάζεται μετὰ πλευρὰν τὴν ὑποτείνουσαν α , εἶναι ἴσον μετὰ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν E_β, E_γ τῶν σχημάτων, τὰ ὅποια κατασκευάζονται μετὰ πλευρὰς τὰς δύο ἄλλας πλευρὰς β καὶ γ .

Γνωρίζομεν (§ 548), ὅτι τὰ ἐμβαδὰ $E_\alpha, E_\beta, E_\gamma$ ὁμοίων σχημάτων εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ὁμολόγων πλευρῶν τῶν α, β, γ

$$\text{ἄρα θὰ εἶναι} \quad \frac{E_\alpha}{\alpha^2} = \frac{E_\beta}{\beta^2} = \frac{E_\gamma}{\gamma^2}.$$

Κατὰ τὴν ιδιότητα τῶν ἴσων καλασμάτων ἢ προηγουμένη σχέσις γράφεται

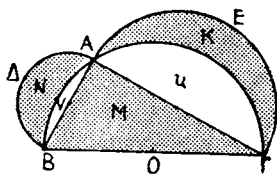
$$\frac{E_\alpha}{\alpha^2} = \frac{E_\beta + E_\gamma}{\beta^2 + \gamma^2} \quad (1)$$

Ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ α, β, γ εἶναι πλευραὶ ὀρθογωνίου τριγώνου, θὰ εἶναι $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$.

Παρατηροῦμεν, ὅτι οἱ παρονομασταὶ τῶν ἴσων κλασμάτων τῆς ἰσότητος (1) εἶναι ἴσοι· ἄρα θὰ εἶναι ἴσοι καὶ οἱ ἀριθμηταὶ τῶν· δηλ. θὰ εἶναι

$$E_\alpha = E_\beta + E_\gamma.$$

552. Ἐφαρμογή. Μηνίσκοι τοῦ Ἰπποκράτους. Ἡ προηγουμένη σχέσις ἐφαρμόζεται εἰς τὰ τρία ἡμικύκλια, τὰ ὅποια γράφονται μετὰ διαμέτρους τὰς τρεῖς πλευρὰς τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $AB\Gamma$. Ἐκ τούτων τὸ ἡμικύκλιον, τὸ ὅποσον γράφεται μετὰ διάμετρον τὴν ὑποτείνουσαν διέρχεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν A τῆς ὀρθῆς γωνίας, τὰ δὲ δύο ἄλλα κεῖνται ἐκτὸς τοῦ τριγώνου.



Σχ. 384.

Τὰ δύο ἡμικύκλια, τὰ ὅποια γράφονται μετὰ διαμέτρους τὰς καθέτους πλευρὰς τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου χωρίζονται ἀπὸ τὴν ἡμιπεριφέρειαν, ἡ ὅποια ἔχει διάμετρον τὴν $B\Gamma$, εἰς τοὺς μηνίσκους N καὶ K καὶ εἰς τὰ κυκλικὰ τμήματα ν καὶ κ .

Κατὰ τὸ πόρισμα τῆς § 551 θὰ εἶναι

$$\text{ἔμβ. ἡμικ. } B\Lambda\Gamma = \text{ἔμβ. ἡμικ. } B\Delta A + \text{ἔμβ. ἡμικ. } A\epsilon\Gamma$$

$$\text{ἢ} \quad M + \kappa + \nu = N + \nu + K + \kappa \quad \text{ἢ} \quad M = N + K.$$

Ὡστε: **Τὸ ἐμβαδὸν M ἐνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου εἶναι ἴσον μετὰ τὸ ἄθροισμα τῶν δύο μηνίσκων N καὶ K .**

Τὰ δύο μέρη N καὶ K λέγονται μηνίσκοι τοῦ Ἰπποκράτους

Ἀσκήσεις: 1695.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΠΙ ΤΩΝ ΕΜΒΑΔΩΝ

553. Πρόβλημα. *Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τετράγωνον ἰσοδύναμον: 1ον μὲ τὸ ἄθροισμα δύο δοθέντων τετραγώνων. 2ον μὲ τὴν διαφορὰν δύο δοθέντων τετραγώνων.*

Λύσις. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ α καὶ β τὰς πλευρὰς τῶν δοθέντων τετραγώνων, τὰ ἐμβαδὰ τῶν θὰ εἶναι α^2 καὶ β^2 . Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ x τὴν πλευρὰν τοῦ ζητουμένου τετραγώνου, τὸ ἐμβαδόν του θὰ εἶναι x^2 .

1ον. Κατὰ τὸ πρόβλημα θὰ ἔχωμεν $x^2 = \alpha^2 + \beta^2$.

Ἐκ τῆς σχέσεως αὐτῆς συνάγομεν, ὅτι ἡ πλευρὰ x τοῦ ζητουμένου τετραγώνου εἶναι ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὰς καθετοὺς πλευρὰς τοῦ α καὶ β .

2ον. Κατὰ τὸ πρόβλημα θὰ ἔχωμεν $x^2 = \alpha^2 - \beta^2$.

Ἐκ τῆς σχέσεως αὐτῆς συνάγομεν, ὅτι ἡ πλευρὰ x τοῦ ζητουμένου τετραγώνου εἶναι ἡ κάθετος πλευρὰ ἐνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου, τοῦ ὁποίου γνωρίζομεν τὴν ὑποτείνουσαν α καὶ τὴν ἄλλην κάθετον πλευρὰν β .

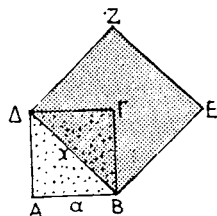
554. Πρόβλημα. *Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τετράγωνον, διπλάσιον δοθέντος τετραγώνου.*

Λύσις. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ α τὴν πλευρὰν τοῦ δοθέντος τετραγώνου καὶ μὲ x τὴν πλευρὰν τοῦ ζητουμένου, τὰ ἐμβαδὰ τῶν θὰ εἶναι α^2 καὶ x^2 .

Κατὰ τὸ πρόβλημα θὰ ἔχωμεν

$$x^2 = 2\alpha^2 \quad \text{ἢ} \quad x^2 = \alpha^2 + \alpha^2.$$

Ἐκ τῆς σχέσεως αὐτῆς συνάγομεν, ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου εἶναι ἡ ὑποτείνουσα ὀρθογωνίου τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει καθετοὺς πλευρὰς τὰς α καὶ α δηλ. εἶναι ἡ διαγώνιος τοῦ δοθέντος τετραγώνου (Σχ. 385).



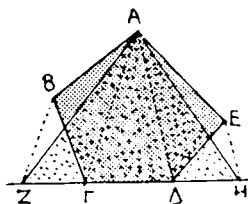
Σχ. 385.

555. Πρόβλημα. *Νὰ μετασχηματισθῆ δοθὲν πολύγωνον εἰς ἰσοδύναμον τρίγωνον.*

Λύσις. Ἐστω τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ (Σχ. 386). Φέρομεν τὴν

διαγώνιον ΑΓ· ἀπὸ τὴν κορυφὴν Β φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν διαγώνιον ΑΓ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς ΓΔ εἰς τὸ σημεῖον Ζ. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΑΖ.

Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΖΓ εἶναι ἰσοδύναμα, ἐπειδὴ ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν ΑΓ καὶ ἴσα ὕψη, δεδομένου ὅτι αἱ κορυφαὶ τῶν Β καὶ Ζ κείνται ἐπὶ εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν.



Σχ. 386.

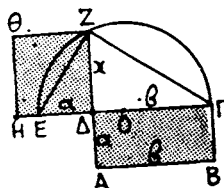
Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸ δοθὲν πολύγωνον τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ τὸ ἀντικαταστήσωμεν μὲ τὸ ἰσοδύναμόν του τρίγωνον ΑΖΓ, λαμβάνομεν ἕνα νέον πολύγωνον ΑΖΔΕ, ἰσοδύναμον μὲ τὸ πρῶτον καὶ τὸ ὁποῖον ἔχει μίαν πλευρὰν ὀλιγώτερον ἀπὸ τὸ πρῶτον.

Ἐπαναλαμβάνοντες τὴν αὐτὴν ἐργασίαν καὶ εἰς τὸ νέον πολύγωνον ΑΖΔΕ, μετασχηματίζομεν αὐτὸ εἰς ἕνα τρίγωνον ΑΖΗ, ἰσοδύναμον μὲ τὸ ΑΖΔΕ καὶ ἐπομένως ἰσοδύναμον μὲ τὸ δοθὲν πολύγωνον.

556. Πρόβλημα. *Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα τετράγωνον ἰσοδύναμον μὲ δοθὲν ὀρθογώνιον.*

Λύσις. Ἐὰν α καὶ β εἶναι αἱ διχοστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου, τὸ ἐμβαδόν του θὰ εἶναι $\alpha \times \beta$. Ἄν παραστήσωμεν μὲ x τὴν πλευρὰν τοῦ ζητουμένου τετραγώνου, τὸ ἐμβαδόν του θὰ εἶναι x^2 . Ἐπειδὴ τὸ τετράγωνον καὶ τὸ ὀρθογώνιον εἶναι ἰσοδύναμα, θὰ εἶναι $x^2 = \alpha\beta$.

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα αὐτὴν συνάγομεν, ὅτι ἡ πλευρὰ x τοῦ ζητουμένου τετραγώνου εἶναι ἡ μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν διαστάσεων α καὶ β . Κατασκευάζομεν (§ 430) τὴν μέσην ἀνάλογον x τῶν α καὶ β καὶ μὲ πλευρὰν τὴν x κατασκευάζομεν τετράγωνον, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ζητούμενον.



Σχ. 387.

557. Παρατήρησις. Ὄταν τὸ ἐμβαδόν ἑνὸς πολυγώνου ἐκφράζεται μὲ τὸ γινόμενον δύο μηκῶν, δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ἕνα τετράγωνον, ἰσοδύναμον μὲ τὸ δοθὲν πολύγωνον. Ἡ πλευρὰ τοῦ ζητουμένου τετραγώνου θὰ εἶναι ἡ μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν δύο αὐτῶν μηκῶν.

Τὰ δύο μήκη, τὰ ὁποῖα ἐκφράζουν τὸ ἐμβαδόν :

Ἐνὸς **παραλληλογράμμου** εἶναι ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος του.

Ἐνὸς **τριγώνου** εἶναι ἡ βάσις καὶ τὸ ἡμισυ τοῦ ὕψους του ἢ τὸ ὕψος καὶ τὸ ἡμισυ τῆς βάσεώς του.

Ἐνὸς **τραπεζίου** εἶναι ἡ διάμεσός του καὶ τὸ ὕψος του.

Ἐνὸς **κανονικοῦ πολυγώνου** εἶναι τὸ ἀπόστημα καὶ ἡ ἡμιπερίμετρος του.

Ἐνὸς **τυχόντος πολυγώνου** εἶναι ἡ βάσις καὶ τὸ ὕψος τοῦ ἰσοδυνάμου τριγώνου.

Ἐνὸς **κύκλου** εἶναι ἡ ἀκτίς καὶ τὸ μῆκος τῆς ἡμιπεριφερείας του.

558. Τετραγωνισμός. Ἡ κατασκευὴ ἐνὸς τετραγώνου, ἰσοδυνάμου πρὸς δοθὲν σχῆμα λέγεται **τετραγωνισμός** τοῦ σχήματος.

Ὁ τετραγωνισμός ὄλων τῶν πολυγώνων εἶναι πάντοτε δυνατός· διότι ἀρκεῖ νὰ ἐκφράσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ πολυγώνου μὲ τὸ ψινόμενον δύο μηκῶν, ὅπως ἀνεφέραμεν εἰς τὴν παρατήρησιν τῆς § 556 καὶ νὰ κατασκευάσωμεν τὴν μέσην ἀνάλογον μεταξὺ τῶν δύο αὐτῶν μηκῶν. Ἡ μέση ἀνάλογος τῶν δύο αὐτῶν μηκῶν εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου, τοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς τὸ πολύγωνον.

Ὁ τετραγωνισμός ὁμως τοῦ κύκλου εἶναι ἀπραγματοποίητος.

Πράγματι ἐὰν x ἦτο ἡ πλευρὰ τοῦ τετραγώνου, τοῦ ἰσοδυνάμου πρὸς ἕνα κύκλον ἀκτίως R , πρέπει νὰ ἔχωμεν

$$x^2 = \pi R^2 \quad \text{ἢ} \quad x^2 = \pi R \times R.$$

Δηλ. ἡ πλευρὰ x τοῦ τετραγώνου εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς ἡμιπεριφερείας τοῦ κύκλου καὶ τῆς ἀκτίως του. Ἀλλὰ τὸ μῆκος τῆς ἡμιπεριφερείας τοῦ κύκλου δὲν κατασκευάζεται μὲ τὸν κανόνα καὶ μὲ τὸν διαβήτην, ὅπως ἀπέδειξε ὁ Γερμανὸς μαθηματικὸς Lindemann καὶ ἐπομένως καὶ ὁ τετραγωνισμὸς τοῦ κύκλου εἶναι ἀδύνατος.

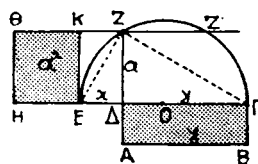
559. Πρόβλημα. *Νὰ κατασκευασθῇ ἕνα ὀρθογώνιον, ἂν γνωρίζωμεν τὸ ἐμβαδὸν του a^2 καὶ τὸ ἄθροισμα k τῶν διαστάσεών του.*

Λύσις. Ἄν παραστήσωμεν μὲ x καὶ y τὰς διαστάσεις τοῦ ὀρθογώνιου, τὸ ἐμβαδὸν του θὰ εἶναι xy . Κατὰ τὸ πρόβλημα θὰ ἔχωμεν

$$xy = a^2 \quad \text{καὶ} \quad x + y = k.$$

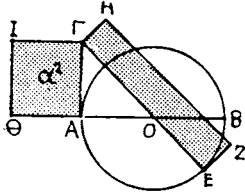
Ἀπὸ τὰς σχέσεις αὐτὰς συνάγομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸ νὰ κατασκευάσωμεν δύο εὐθείας x καὶ y , τῶν ὁποίων γνωρίζομεν τὸ ἄθροισμα καὶ τὸ γινόμενον.

Ἡ κατασκευὴ γίνεται ὅπως ἐδείχθη εἰς τὸ πρόβλημα τῆς § 460.



Σχ. 388.

560. Πρόβλημα. *Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα ὀρθογώνιον, ἂν γνωρίζωμεν τὸ ἐμβαδόν του α^2 καὶ τὴν διαφορὰν k τῶν διαστάσεών του.*



Σχ. 389.

Λύσις. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ x καὶ y τὰς διαστάσεις τοῦ ὀρθογωνίου, τὸ ἐμβαδόν του θὰ εἶναι xy . Κατὰ τὸ πρόβλημα θὰ ἔχωμεν $xy = \alpha^2$ καὶ $x - y = k$.

Ἀπὸ τὰς σχέσεις αὐτὰς συνάγομεν, ὅτι τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸ νὰ κατασκευάσωμεν δύο εὐθείας, τῶν ὁποίων γνωρίζωμεν τὸ γινόμενον α^2 καὶ τὴν διαφορὰν τῶν k .

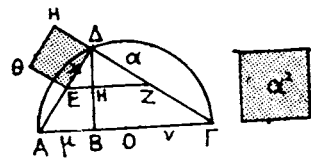
Ἡ κατασκευὴ γίνεται ὅπως ἐδείχθη εἰς τὸ πρόβλημα τῆς § 461.

561. Πρόβλημα. *Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα τετράγωνον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχη λόγον πρὸς δοθὲν τετράγωνον, ἴσον μὲ τὸν λόγον δύο δοθέντων εὐθυγράμμων τμημάτων.*

Λύσις. Ἐστώσαν α ἡ πλευρὰ τοῦ δοθέντος τετραγώνου καὶ μ καὶ ν τὰ δοθέντα εὐθύγραμμα τμήματα. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ x τὴν πλευρὰν τοῦ ζητουμένου τετραγώνου, πρέπει νὰ ἔχωμεν, κατὰ τὸ πρόβλημα

$$\frac{x^2}{\alpha^2} = \frac{\mu}{\nu}$$

Ἐπὶ μιᾷ εὐθείᾳ λαμβάνομεν δύο διαδοχικὰ τμήματα $AB = \mu$ καὶ $B\Gamma = \nu$ (Σχ. 390). Μὲ διάμετρον τὴν AG γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν· ἀπὸ τὸ σημεῖον B φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν AG , ἡ ὁποία τέμνει τὴν ἡμιπεριφέρειαν εἰς τὸ σημεῖον Δ · φέρομεν τὰς εὐθείας ΔA καὶ $\Delta \Gamma$. Ἐπὶ τῆς $\Delta \Gamma$ λαμβάνομεν τμήμα ΔZ ἴσον μὲ τὴν πλευρὰν α τοῦ δοθέντος τετραγώνου· ἀπὸ τὸ Z φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν GA , ἡ ὁποία τέμνει τὴν ΔA εἰς τὸ E . Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ ΔE εἶναι ἡ πλευρὰ x τοῦ ζητουμένου τετραγώνου.



Σχ. 390.

Πράγματι· εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΔEZ , τὰ τετράγωνα τῶν καθέτων πλευρῶν του x καὶ α ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν προβολῶν τῶν ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν (§ 423)· ἤτοι εἶναι

$$\frac{x^2}{\alpha^2} = \frac{EH}{HZ} \quad (1)$$

Ἐπειδὴ αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι EZ καὶ AG τέμνονται ὑπὸ τῆς δέσμης τῶν εὐθειῶν $\Delta A, \Delta B, \Delta \Gamma$ θὰ εἶναι (§ 413)

$$\frac{EH}{\mu} = \frac{HZ}{\nu} \quad \text{ἢ} \quad \frac{EH}{HZ} = \frac{\mu}{\nu} \quad (2)$$

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι $\frac{x^2}{a^2} = \frac{\mu}{\nu}$.

Ἀσκήσεις: 1696.

562. Πρόβλημα. *Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα πολύγωνον, ὁμοιον πρὸς δοθὲν πολύγωνον Π καὶ ἰσοδύναμον πρὸς ἄλλο δοθὲν πολύγωνον Π'.*

Λύσις. Ἐστω α ἡ πλευρὰ τοῦ δοθέντος πολυγώνου Π καὶ x ἡ ὁμόλογος πλευρὰ τοῦ ζητουμένου πολυγώνου Π'.

Ἐπειδὴ τὰ πολύγωνα Π καὶ Π' εἶναι ὅμοια, ὁ λόγος των θὰ εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν τετραγώνων τῶν ὁμολόγων πλευρῶν των· ἦτοι θὰ εἶναι

$$\frac{\Pi}{\Pi'} = \frac{a^2}{x^2}.$$

Καὶ ἐπειδὴ τὸ πολύγωνον Π' εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ Π, ἡ προηγουμένη σχέσις γράφεται

$$\frac{\Pi}{\Pi'} = \frac{a^2}{x^2} \quad (1)$$

Τὰ δοθέντα πολύγωνα Π καὶ Π' δύνανται νὰ μετασχηματισθοῦν εἰς ἰσοδύναμα τετράγωνα καὶ ἔστωσαν β καὶ γ αἱ πλευραὶ τῶν τετραγώνων αὐτῶν· ἀλλὰ τότε ἡ σχέσις (1) γίνεται

$$\frac{\beta^2}{\gamma^2} = \frac{a^2}{x^2} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\beta}{\gamma} = \frac{a}{x} \quad (2)$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν (2) συνάγομεν, ὅτι ἡ πλευρὰ x τοῦ ζητουμένου πολυγώνου εἶναι ἡ τετάρτη ἀνάλογος τῶν εὐθειῶν β, γ καὶ α.

Γνωρίζοντες τὴν πλευρὰν x τοῦ ζητουμένου πολυγώνου, τὴν ὁμόλογον πρὸς τὴν α, δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν πολύγωνον Π' ὁμοιον πρὸς τὸ Π, ὅπως εἰδείχθη εἰς τὴν § 464.

563. Πρόβλημα. *Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα πολύγωνον, ὁμοιον πρὸς δύο δοθέντα ὅμοια πολύγωνα καὶ ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἄθροισμὰ των ἢ τὴν διαφορὰν των.*

Λύσις. Ἐστωσαν α καὶ α' δύο ὁμόλογοι πλευραὶ τῶν δοθέντων ὁμοίων πολυγώνων Π καὶ Π' καὶ x ἡ ὁμόλογος πλευρὰ τοῦ ζητουμένου πολυγώνου Π''. Ἐπειδὴ τὰ πολύγωνα Π, Π', Π'' εἶναι ὅμοια, θὰ εἶναι ἀνάλογα τῶν τετραγώνων τῶν ὁμολόγων πλευρῶν των (§ 551)· ἦτοι θὰ εἶναι

$$\frac{\Pi}{a^2} = \frac{\Pi'}{a'^2} = \frac{\Pi''}{x^2} \quad (1)$$

Κατὰ γνωστὴν ἰδιότητα τῶν ἴσων κλασμάτων ἡ σχέσις (1) γράφεται

$$\frac{\Pi \pm \Pi'}{a^2 \pm a'^2} = \frac{\Pi''}{x^2} \quad (2)$$

Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $\Pi'' = \Pi \pm \Pi'$, οἱ ἀριθμηταὶ τῶν ἴσων κλασμάτων τῆς σχέσεως (2) εἶναι ἴσοι· ἄρα θὰ εἶναι ἴσοι καὶ οἱ παρονομασταὶ τῶν· δηλ. θὰ εἶναι $x^2 = a^2 \pm a'^2$.

Ὡστε τὸ πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τὸ νὰ κατασκευασθῇ ἓνα τετράγωνον ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἄθροισμα ἢ μὲ τὴν διαφορὰν δύο δοθέντων τετραγῶνων (§ 553).

Γνωρίζοντες ἤδη τὴν πλευρὰν x , τὴν ὁμόλογον πρὸς τὴν πλευρὰν a τοῦ δοθέντος πολυγώνου, δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ἓνα πολύγωνον Π'' ὅμοιον πρὸς τὸ Π , ὅπως ἐδείχθη εἰς τὴν § 464.

564. Πρόβλημα. *Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα πολύγωνον, ὅμοιον πρὸς δοθὲν πολύγωνον καὶ τοιοῦτον, ὥστε ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τῶν νὰ εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον δύο δοθέντων εὐθύγραμμων τμημάτων.*

Ἐστωσαν μ καὶ ν τὰ δοθέντα εὐθύγραμμα τμήματα, Π τὸ δοθὲν πολύγωνον καὶ Π' τὸ ζητούμενον πολύγωνον.

$$\text{Κατὰ τὸ πρόβλημα πρέπει νὰ ἔχωμεν} \quad \frac{\Pi}{\Pi'} = \frac{\mu}{\nu} \quad (1)$$

Ἐστωσαν a καὶ x αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ τῶν ὁμοίων πολυγῶνων Π καὶ Π' . Ἐπειδὴ τὰ πολύγωνα Π καὶ Π' εἶναι ὅμοια, ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τῶν θὰ εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν τετραγῶνων τῶν ὁμολόγων πλευρῶν τῶν· ἤτοι θὰ εἶναι
$$\frac{\Pi}{\Pi'} = \frac{a^2}{x^2} \quad (2)$$

Ἀπὸ τὰς σχέσεις (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι

$$\frac{a^2}{x^2} = \frac{\mu}{\nu} \quad \eta \quad \frac{x^2}{a^2} = \frac{\nu}{\mu}.$$

Τὸ πρόβλημα λοιπὸν ἀνάγεται εἰς τὸ νὰ κατασκευασθῇ ἓνα τετράγωνον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχη λόγον πρὸς δοθὲν τετράγωνον ἴσον μὲ τὸν λόγον δύο εὐθύγραμμων τμημάτων ν καὶ μ .

Ἡ κατασκευὴ τοῦ τετραγώνου αὐτοῦ γίνεται, ὅπως ἐδείχθη εἰς τὸ πρόβλημα τῆς (§ 561).

Γνωρίζοντες ἤδη τὴν πλευρὰν x , τὴν ὁμόλογον τῆς a , δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ἓνα πολύγωνον ὅμοιον πρὸς τὸ δοθὲν πολύγωνον Π , ὅπως ἐδείχθη εἰς τὸ πρόβλημα τῆς § 464.

565. Πρόβλημα. *Νὰ διαιρεθῇ δοθὲν τρίγωνον εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη δι' εὐθείας παραλλήλου πρὸς μίαν πλευρὰν του.*

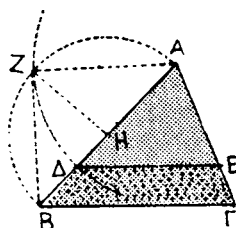
Ἀνάλυσις: Ἐστω τὸ τρίγωνον $ΑΒΓ$ (Σχ. 391) καὶ $ΔΕ$ ἡ ζητούμενη παράλληλος πρὸς τὴν $ΒΓ$, ἡ ὁποία διαιρεῖ τὸ τρίγωνον εἰς δύο μέρη $ΑΔΕ$ καὶ $ΔΒΓΕ$, τὰ ὁποῖα εἶναι ἰσοδύναμα.

Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα $\triangle A\Delta E$ καὶ $\triangle AB\Gamma$ εἶναι ὁμοια, ὁ λόγος τῶν ἔμβασδων τῶν θὰ εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν τετραγώνων δύο ὁμολόγων πλευρῶν τῶν· δηλ. θὰ εἶναι

$$\frac{\text{Ἐμβ. τριγ. } \triangle A\Delta E}{\text{Ἐμβ. τριγ. } \triangle AB\Gamma} = \frac{\overline{A\Delta}^2}{\overline{AB}^2} \quad (1)$$

Ἐπειδὴ τὰ μέρη $\triangle A\Delta E$ καὶ $\triangle B\Gamma E$ εἶναι ἰσοδύναμα, τὸ τρίγωνον $\triangle A\Delta E$ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἡμισυ τοῦ τριγώνου $\triangle AB\Gamma$ · δηλ. εἶναι

$$\frac{\text{ἔμβ. τριγ. } \triangle A\Delta E}{\text{ἔμβ. τριγ. } \triangle AB\Gamma} = \frac{1}{2} \quad (2)$$



Σχ. 391.

Ἀπὸ τὰς ἰσοτήτας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι

$$\frac{\overline{A\Delta}^2}{\overline{AB}^2} = \frac{1}{2} \quad \eta \quad \overline{A\Delta}^2 = \frac{\overline{AB}^2}{2} \quad \eta \quad \overline{A\Delta} = \overline{AB} \times \frac{\overline{AB}}{2}$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ $\overline{A\Delta}$ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν \overline{AB} καὶ $\frac{\overline{AB}}{2}$.

Σύνθεσις: Μὲ διάμετρον τὴν \overline{AB} γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν ἀπὸ τὸ μέσον H τῆς \overline{AB} φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὴν \overline{AB} , ἡ ὁποία τέμνει τὴν ἡμιπεριφέρειαν εἰς τὸ σημεῖον Z . Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν \overline{AZ} , ἡ ὁποία εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν \overline{AB} καὶ $\overline{AH} = \frac{\overline{AB}}{2}$. Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς \overline{AB} λαμβάνομεν τμῆμα $\overline{A\Delta} = \overline{AZ}$ καὶ ἀπὸ τὸ Δ φέρομεν παράλληλον $\overline{\Delta E}$ πρὸς τὴν $\overline{B\Gamma}$, ἡ ὁποία εἶναι καὶ ἡ ζητούμενη παράλληλος.

Ἀσκήσεις: 1697, 1698, 1699, 1700.

Ἀσκήσεις

Α' Ὀμάς. 1679. (1715). Ἡ βάση ἑνὸς τριγώνου εἶναι 7,5 μ. καὶ τὸ ἔμβασδὸν τοῦ 22,5 τ.μ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἔμβασδὸν ἄλλου τριγώνου ὁμοίου πρὸς τὸ πρῶτον, τοῦ ὁποίου ἡ βάση εἶναι 5 μ.

1680. (1716). Αἱ πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου εἶναι 8 μ., 10 μ., 12 μ. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου, τὸ ὁποῖον εἶναι ὁμοιον πρὸς τὸ πρῶτον καὶ ἔχει διπλασίαν ἐπιφάνειαν.

1681. (1717). Δύο τρίγωνα εἶναι ὁμοια. Τὸ ἔμβασδὸν τοῦ πρῶτου εἶναι 48 τ.μ. καὶ τοῦ δευτέρου 108 τ.μ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῆς ὁμοιότητός των.

1682. (1718). Ἡ περίμετρος ἑνὸς πολυγώνου εἶναι πενταπλασία τῆς περιμέτρος ἄλλου ὁμοίου πολυγώνου. Πόσας φορὰς εἶναι μεγαλυτέρα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πρῶτου ἀπὸ τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ δευτέρου.

1683. (1719). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἔμβασδὸν ἑνὸς κανονικοῦ ἑξαγώνου, ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον εἶναι τὰ τρία τέταρτα τοῦ ἔμβασδοῦ τοῦ περιγεγραμμένου κανονικοῦ ἑξαγώνου.

1684. (1720). Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὸ ἔμβადόν τοῦ τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς πλευρὰς τὰς διαμέσους ἐνὸς τριγώνου, εἶναι τὰ τρία τέταρτα τοῦ ἔμβადου τοῦ τριγώνου αὐτοῦ.

B' Ὁμάς. 1685. (1721). Δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $A'B'\Gamma'$, τὰ ὁποῖα ἔχουν δύο γωνίας παραπληρωματικὰς, $A+A'=180$ καὶ τὰς πλευρὰς, πὺν περιέχουν τὰς γωνίας αὐτὰς ἴσας μίαν πρὸς μίαν, $AB=A'B'$, $A\Gamma=A'\Gamma'$, εἶναι ἰσοδύναμα.

1686. (1722). Ἀπὸ ἓνα σημεῖον Σ , τὸ ὁποῖον κείται ἐντὸς κύκλου O φέρομεν δύο χορδὰς ASB καὶ $\Gamma\Sigma\Delta$. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὰ τρίγωνα OAG καὶ OBA εἶναι ἰσοδύναμα.

1687. (1723). Δίδεται ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$ καὶ εἰς τὸ ἔσωτερικόν του ἓνα σημεῖον O . Ἀπὸ τὸ O φέρομεν κάθετον, ἐπὶ τὴν $B\Gamma$ καὶ λαμβάνομεν τμήμα $OA'=B\Gamma$. Ὁμοίως φέρομεν τὰς OB' καὶ OG' καθέτους ἐπὶ τὰς $A\Gamma$ καὶ AB καὶ ἴσας ἀντιστοίχως μὲ τὰς $A\Gamma$ καὶ AB . Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὸ τρίγωνον $A'B'\Gamma'$ εἶναι τριπλάσιον τοῦ $AB\Gamma$.

1688. (1724). Δίδεται ἓνα τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$ καὶ ἓνα σημεῖον O εἰς τὸ ἔσωτερικόν του. Ἀπὸ τὸ σημεῖον O φέρομεν καθέτους ἐπὶ τὰς πλευρὰς $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ καὶ ἐπὶ τῶν καθέτων αὐτῶν λαμβάνομεν τμήματα $OK=AB, OL=B\Gamma, OM=\Gamma\Delta, ON=\Delta A$. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὸ τετράπλευρον $KLMN$ εἶναι διπλάσιον τοῦ $AB\Gamma\Delta$.

1689. (1725). Εἰς ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$ φέρομεν μίαν παράλληλον ΔE πρὸς τὴν πλευρὰν $B\Gamma$, ἣ ὁποία τέμνει τὴν AB εἰς τὸ Δ καὶ τὴν $A\Gamma$ εἰς τὸ E . Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὸ τρίγωνον ABE εἶναι μέσον ἀνάλογον μεταξὺ τῶν τριγώνων $AB\Gamma$ καὶ $A\Delta E$.

1690. (1726). Δίδεται ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν του $B\Gamma, \Gamma A, AB$ λαμβάνομεν τὰ σημεῖα A', B', Γ' οὕτως, ὥστε τὰ τμήματα $AB', B'\Gamma', \Gamma'A'$ νὰ εἶναι ἀντιστοίχως ἴσα μὲ τὸ τρίτον τῶν πλευρῶν $A\Gamma, AB, \Gamma B$. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὸ ἔμβადόν τοῦ τριγώνου $A'B'\Gamma'$ εἶναι τὸ τρίτον τοῦ ἔμβადου τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$.

Γ' Ὁμάς. 1691. (1727). Τὸ ἔμβადόν ἐνὸς τριγώνου $AB\Gamma$ εἶναι E . Προεκτείνομεν τὴν $B\Gamma=a$ κατὰ ἓνα μῆκος $\Gamma\Delta=\mu a$, τὴν $\Gamma A=\beta$ κατὰ ἓνα μῆκος $AZ=\nu\beta$ καὶ τὴν $AB=\gamma$ κατὰ ἓνα μῆκος $BH=\lambda\gamma$. Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ἔμβადόν τοῦ τριγώνου ΔZH συναρτήσῃ τοῦ ἔμβადου E .

1692. (1728). Δίδεται τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$, ὁ κύκλος O ὁ ἐγγεγραμμένος εἰς αὐτό, ὁ ὁποῖος ἐφάπτεται τῆς πλευρῆς $B\Gamma$ εἰς τὸ σημεῖον Δ .

1ον. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι αἱ γωνίαι $BO\Delta$ καὶ $AO\Gamma$ εἶναι παραπληρωματικαί.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι
$$\frac{O\Delta^2}{B\Delta \times \Delta\Gamma} = \frac{O\Lambda^2}{AB \times A\Gamma}.$$

1693. (1729). Ἐνα τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$ εἶναι περιγεγραμμένον περὶ κύκλον O .
1ον. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι $AB+\Gamma\Delta=B\Gamma+A\Delta$.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι $\widehat{AOB}+\widehat{\Gamma O\Delta}=2$ ὀρθαί.

3ον. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι
$$\frac{O\Lambda^2}{O\Gamma^2} = \frac{AB \times A\Delta}{\Gamma B \times \Gamma\Delta}.$$

1694. (1730). Ἐπὶ τυχούσης εὐθείας λαμβάνομεν τρία διαδοχικὰ σημεῖα A, B, Γ , τοιαῦτα, ὥστε $AB=a$ καὶ $B\Gamma=\beta$. Μὲ πλευρὰς τὰς AB καὶ $B\Gamma$ κατα-

σκευάζομεν πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς ΑΓ τὰ ἰσόπλευρα τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΒΓΕ. Προεκτείνομεν τὰς ΑΔ καὶ ΓΕ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ζ.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΕ καὶ ΔΒΓ εἶναι ἴσα.

2ον. Νὰ ὑπολογισθῆ ἡ γωνία ω τῶν εὐθειῶν ΔΓ καὶ ΑΕ.

3ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων ΑΒΔ, ΕΒΓ, ΔΒΕ καὶ τοῦ τετραπλεύρου ΑΓΕΔ.

4ον. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΖΔΒΕ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ἐμβαδὸν του.

Δ' Ὁμάς. 1695. (1731). Νὰ ἐξηγηθοῦν γεωμετρικῶς αἱ ταυτότητες :

1ον. $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$.

2ον. $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$.

3ον. $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$.

1696. (1732). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τετράγωνον ἰσοδύναμον :

1ον. Πρὸς τὰ $\frac{5}{8}$ δοθέντος τετραγώνου.

2ον. Πρὸς τὰ $\frac{5}{3}$ δοθέντος τετραγώνου.

1697. Νὰ διαιρεθῆ δοθὲν τρίγωνον εἰς δύο μέρη ἔχοντα λόγον $\mu : \nu$, δι' εὐθείας παραλλήλου πρὸς μίαν πλευράν του.

1698. (1734). Νὰ διαιρεθῆ ἓνα τρίγωνον εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον, δι' εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν του (δύο περιπτώσεις).

1699. (1735). Νὰ διαιρεθῆ ἓνα τρίγωνον ΑΒΓ εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα διὰ μιᾶς εὐθείας παραλλήλου πρὸς δοθείσαν εὐθείαν.

1700. (1736). Νὰ διαιρεθῆ δοθὲν τρίγωνον εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη δι' εὐθείας καθέτου ἐπὶ μίαν τῶν πλευρῶν του.

Ἀσκήσεις ἐπὶ Γ' Κεφαλαίου πρὸς γενικὴν ἐπανάληψιν

Δ' Ὁμάς. 1701. (1737). Ἀπὸ σημείου, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ μιᾶς ἐκ τῶν πλευρῶν δοθέντος τριγώνου, νὰ ἀχθῆ εὐθεῖα, ἡ ὁποία νὰ διαιρῆ τὸ τρίγωνον εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα ἢ ἔχοντα λόγον $\mu : \nu$.

1702. (1738). Νὰ διαιρεθῆ δοθὲν τρίγωνον εἰς τρία ἰσοδύναμα μέρη δι' εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ δύο σημεία, τὰ ὁποῖα κείνται ἐπὶ τῶν πλευρῶν του.

1703. (1739). Ἀπὸ ἓνα σημεῖον μιᾶς τῶν ἴσων πλευρῶν ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ, νὰ ἀχθῆ μία εὐθεῖα ΔΕΖ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν βάσιν ΒΓ εἰς τὸ Ε καὶ τὴν προέκτασιν, τῆς ἄλλης ἴσης πλευρᾶς εἰς τὸ Ζ, εἰς τρόπον ὥστε τὸ σχηματιζόμενον τρίγωνον ΑΔΖ νὰ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ΑΒΓ.

1704. (1740). Νὰ διαιρεθῆ δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τρία μέρη ἀνάλογα πρὸς τρία δοθέντα μήκη, διὰ δύο παραλλήλων πρὸς τὴν πλευράν ΒΓ.

1705. (1741). Νὰ εὑρεθῆ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ ἓνα σημεῖον Ο τοιοῦτον, ὥστε τὰ τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΒΓ, ΟΓΑ νὰ εἶναι ἰσοδύναμα.

1706. (1742). Νὰ εὑρεθῆ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ ἓνα σημεῖον Ο τοιοῦτον, ὥστε τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων ΟΑΒ, ΟΒΓ, ΟΓΑ νὰ εἶναι ἀνάλογα πρὸς τρία δοθέντα μήκη.

1707. (1743). Νά διαιρεθῆ δοθὲν τετράγωνον εἰς τρία μέρη ἰσοδύναμα δι' εὐθειῶν παραλλήλων πρὸς μίαν τῶν διαγωνίων του.

1708. (1744). Νά διαιρεθῆ δοθὲν παραλληλόγραμμον εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη δι' εὐθείας παραλλήλου πρὸς δοθείσαν εὐθείαν.

1709. (1745). Δοθὲν παραλληλόγραμμον νά διαιρεθῆ εἰς τρία μέρη ἰσοδύναμα δι' εὐθειῶν ἀγομένων ἕκ τινος τῶν κορυφῶν του.

1710. (1746). Νά διαιρεθῆ δοθὲν τραπέζιον εἰς τρία ἰσοδύναμα μέρη δι' εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι συναντοῦν τὰς βάσεις του.

1711. (1747). Νά διαιρεθῆ δοθὲν τραπέζιον, δι' εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὰς βάσεις, εἰς δύο μέρη ἀνάλογα πρὸς τὰς βάσεις του Β καὶ β.

1712 (1748). Νά διαιρεθῆ δοθὲν τραπέζιον, δι' εὐθείας παραλλήλου πρὸς τὰς βάσεις, εἰς δύο μέρη ἔχοντα λόγον $\mu : \nu$.

1713. (1749). Νά διαιρεθῆ ἓνα τετράπλευρον εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη, δι' εὐθείας διερχομένης διὰ μιᾶς τῶν κορυφῶν του.

1714. (1750). Δοθὲν τετράπλευρον (ἢ δοθὲν πολύγωνον) νά διαιρεθῆ εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα δι' εὐθείας, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ δοθὲν σημείου, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν του.

1715. (1751). Νά διαιρεθῆ δοθεὶς κύκλος, δι' ἀκτίων, εἰς τέσσαρα μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 3, 4, 8, 9.

1716. (1752). Νά διαιρεθῆ δοθεὶς κύκλος, εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη δι' ἑνὸς ὁμοκέντρου κύκλου.

1717. (1753). Νά διαιρεθῆ δοθεὶς κύκλος δι' ἑνὸς ὁμοκέντρου κύκλου εἰς μέρη ἀνάλογα πρὸς δύο εὐθείας μ καὶ ν .

1718. (1754). Νά διαιρεθῆ δοθεὶς κύκλος εἰς μέσον καὶ ἄκρον λόγον δι' ἑνὸς ὁμοκέντρου κύκλου.

1719. (1755). Νά διαιρεθῆ ἓνας κύκλος εἰς τρία μέρη ἀνάλογα τῶν μ , ν , ρ , διὰ δύο ὁμοκέντρων περιφερειῶν.

1720. (1756). Νά διαιρεθῆ ἓνας κύκλος εἰς τρία ἰσοδύναμα μέρη διὰ δύο περιφερειῶν, αἱ ὁποῖαι ἐφάπτονται εἰς δοθὲν σημεῖον τοῦ δοθέντος κύκλου.

Β' Ὁμάς. 1721. (1757). Δίδεται ἓνα παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ. Νά εὐρεθῆ ἐπὶ τῆς διαγωνίου ΑΓ ἓνα σημεῖον Ο τοιοῦτον ὥστε, ἂν φέρωμεν τὰς εὐθείας ΟΑ, ΟΒ, ΟΔ, νά διαιρηθῆ τὸ παραλληλόγραμμον εἰς τρία ἰσοδύναμα μέρη.

1722. (1758). Αἱ πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ εἶναι $AB=8$, $AG=5$, $BG=7$. Νά εὐρεθῆ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ ἓνα σημεῖον Δ μεταξὺ Α καὶ Β καὶ ἓνα σημεῖον Ε ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΓ μεταξὺ Α καὶ Γ καὶ τοιαῦτα, ὥστε τὸ τρίγωνον ΑΔΕ καὶ τὸ τετράπλευρον ΔΕΓΒ νά ἔχουν τὴν αὐτὴν περίμετρον καὶ τὸ αὐτὸ ἔμβαδόν.

1723. (1759) Ἐνὸς τριγώνου ΑΒΓ δίδεται ἡ βᾶσις $BG=12$ μ. καὶ τὸ ὕψος $AD=8$ μέτρα. Νά εὐρεθῆ ἐπὶ τῆς βάσεως ἓνα σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο τριγῶνων ΑΒΜ καὶ ΑΜΓ νά εἶναι διπλάσιον τοῦ ὀρθογωνίου, τὸ ὁποῖον ἔχει διαστάσεις τὰ τμήματα ΒΜ καὶ ΜΓ.

1724. (1760). Δίδεται ἓνα ἰσοπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ. Νά ἀχθῆ ἀπὸ τὸ μέσον Ο τῆς ΒΓ, μία τέμνουσα, ἡ ὁποία συναπτᾷ τὴν πλευρὰν ΑΒ εἰς τὸ ση-

μείον M , καὶ τὴν προέκτασιν τῆς AG εἰς τὸ σημεῖον N καὶ τοιαύτη, ὥστε νὰ εἶναι $\acute{\epsilon}\mu\beta.OMB + \acute{\epsilon}\mu\beta.ONG = \acute{\epsilon}\mu\beta.ABG$.

1725. (1761) Ἐπὶ τῶν πλευρῶν AB, BG, GA ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου ABG πλευρᾶς a , λαμβάνομεν τὰ μήκη $AA' = BB' = GG' = x$ κατὰ τὰς φορὰς AB, BG, GA ἀντιστοίχως. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ x , ὥστε νὰ εἶναι

$$\frac{\acute{\epsilon}\mu\beta. A'B'G'}{\acute{\epsilon}\mu\beta. ABG} = \frac{1}{2}.$$

1726. (1762). Ἀπὸ ἕνα σημεῖον M , τὸ ὅποιον κεῖται ἐπὶ μιᾶς πλευρᾶς δοθέντος παραλληλογράμμου $ABGD$, νὰ ἀχθῇ μία τέμνουσα EMZ , ἡ ὁποία νὰ ὀρίζῃ μὲ τὰς πλευρὰς AB καὶ AD ἕνα τρίγωνον ἰσοδύναμον μὲ τὸ παραλληλόγραμμον.

1727. (1763). Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Σ νὰ ἀχθῇ τέμνουσα τὰς πλευρὰς δοθείσης γωνίας οὕτως, ὥστε τὸ ἔμβαδὸν τοῦ τριγώνου, τὸ ὅποιον σχηματίζει ἡ τέμνουσα μὲ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας, νὰ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ δοθὲν τετράγωνον.

1728. (1764). Δίδεται κύκλος O ἀκτίνοσ R . Νὰ ὀρισθῇ ἕνα σημεῖον M , ἔκτος τοῦ κύκλου, τοιοῦτον ὥστε, ἐὰν ἀχθοῦν αἱ ἐφαπτόμεναι MA καὶ MB εἰς τὸν κύκλον O , τὸ ἔμβαδὸν τοῦ τριγώνου MAB νὰ ἔχη λόγον k πρὸς τὸ ἔμβαδὸν τοῦ τριγώνου OAB .

1729. (1765). Νὰ εὐρεθῇ ἐπὶ τῆς διαμέτρου AB δοθέντος κύκλου ἕνα σημεῖον τοιοῦτον, ὥστε αἱ ἡμιπεριφέρειαι, αἱ ὁποῖαι γράφονται ἑκατέρωθεν τῆς AB μὲ διαμέτρους τὰς AG καὶ GB , νὰ διαιροῦν τὸ ἔμβαδὸν τοῦ κύκλου εἰς δύο μέρη ἔχοντα λόγον $\mu : \nu$.

Γ' Ὁμάς. 1730. (1766). Νὰ μετασχηματισθῇ ἕνα ὀρθογώνιον τρίγωνον εἰς ἰσοδύναμον ἰσοσκελὲς τρίγωνον καὶ τὸ ὅποιον νὰ ἔχη μὲ αὐτὸ μίαν κοινὴν γωνίαν.

1731. (1767). Νὰ μετασχηματισθῇ δοθὲν τρίγωνον ABG εἰς ἰσοσκελὲς τρίγωνον, ἰσοδύναμον πρὸς τὸ δοθὲν καὶ τὸ ὅποιον νὰ ἔχη μὲ αὐτὸ κοινὴν τὴν γωνίαν A .

1732. (1768). Νὰ μετασχηματισθῇ τυχὸν τρίγωνον ABG εἰς ἰσοδύναμον ἰσόπλευρον τρίγωνον.

1733. (1769). Νὰ μετασχηματισθῇ δοθὲν κανονικὸν πολύγωνον, εἰς ἄλλο ἰσοδύναμον κανονικὸν πολύγωνον καὶ τὸ ὅποιον νὰ ἔχη διπλάσιον ἀριθμὸν πλευρῶν.

1734. (1770). Νὰ μετασχηματισθῇ δοθὲν πολύγωνον μὲ 2ν πλευρὰς εἰς ἄλλο ἰσοδύναμον πολύγωνον μὲ ν πλευρὰς.

Δ' Ὁμάς. 1735. (1771). Εἰς δοθὲν τρίγωνον, νὰ ἐγγραφῇ ἕνα ὀρθογώνιον, ἰσοδύναμον μὲ δοθὲν τετράγωνον λ^2 .

1736. (1772). Εἰς δοθὲν τρίγωνον νὰ ἐγγραφῇ ἕνα ὀρθογώνιον τοιοῦτον, ὥστε τὸ τρίγωνον, τὸ ὅποιον κεῖται ἀνωθεν τοῦ ὀρθογωνίου νὰ ἔχη λόγον πρὸς τὸ ὀρθογώνιον ἴσον μὲ $\mu : \nu$.

1737. (1773). Εἰς ἕνα τετράγωνον πλευρᾶς a , νὰ ἐγγραφῇ ἕνα ἄλλο τετράγωνον, τοῦ ὁποῖου τὸ ἔμβαδὸν νὰ εἶναι β^2 .

1738. (1774). Εἰς δοθὲν τετράγωνον, νὰ ἐγγραφῇ ὀρθογώνιον, ὅμοιον πρὸς δοθὲν ὀρθογώνιον καὶ νὰ εὐρεθῇ τὸ ἔμβαδὸν αὐτοῦ.

1739. (1775). Εἰς δοθέντα κύκλον νὰ ἐγγραφῆ ὀρθογώνιον, ἔχον ἐμβαδὸν ἴσον πρὸς τὸ ἐμβαδὸν δοθέντος τετραγώνου. (Πανεπιστήμιον Θεσσαλονίκης).

1740. (1776). Εἰς δοθέντα κύκλον, νὰ ἐγγραφῆ ἓνα τετράπλευρον, ἂν γνωρίζωμεν τὰς διαγωνίους καὶ τὸ ἐμβαδὸν του.

1741. (1777). Νὰ ἐγγραφῆ εἰς δοθὲν τρίγωνον, ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχη μέγιστον ἐμβαδόν.

1742. (1778). Νὰ εὐρεθῆ τὸ μέγιστον ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον δυνάμεθα νὰ ἐγγράψωμεν εἰς δοθὲν τετράγωνον.

1743. (1779). Εἰς δοθὲν τρίγωνον νὰ ἐγγραφῆ ἓνα τετράγωνον. Ποῖον εἶναι τὸ μεγαλύτερον ἐκ τῶν τριῶν τετραγώνων, τὰ ὁποῖα δυνάμεθα νὰ ἐγγράψωμεν εἰς τὸ τρίγωνον;

1744. (1780). Εἰς δοθὲν ἡμικύκλιον ἀκτίνος ρ , νὰ ἐγγραφῆ τὸ μέγιστον τραπέζιον. Νὰ εὐρεθῆ ἡ περίμετρος αὐτοῦ καὶ τὸ ἐμβαδόν του. Νὰ ἐγγραφῆ εἰς τὸ οὕτω ἐγγραφέν τραπέζιον, ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποῖου τὸ ἐμβαδὸν νὰ ἰσοῦται μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ τραπέζιου. Διερεύνησις. (Σχολὴ Εὐελπίδων).

Ε' Ὁμάς. 1745. (1781). Νὰ περιγραφῆ περὶ δοθὲν ὀρθογώνιον ἓνα ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποῖου τὸ ἐμβαδὸν νὰ εἶναι μ^2 .

1746. (1782). Νὰ περιγραφῆ περὶ κύκλον ἀκτίνος R ῥόμβος, τοῦ ὁποῖου τὸ ἐμβαδὸν νὰ εἶναι μ^2 .

1747. (1783). Νὰ περιγραφῆ περὶ κύκλον ἀκτίνος R ἓνα ἰσοσκελὲς τραπέζιον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχη ἐμβαδὸν μ^2 .

1748. (1784). Νὰ περιγραφῆ περὶ ἡμικύκλιον ἀκτίνος R ἓνα ὀρθογώνιον τραπέζιον, τοῦ ὁποῖου τὸ ἐμβαδὸν νὰ εἶναι μ^2 .

1749. (1785). Νὰ περιγραφῆ περὶ δοθέντα κύκλον, ἰσοσκελὲς τρίγωνον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχη τὸ ἐλάχιστον ἐμβαδόν.

ΣΤ' Ὁμάς. 1750. (1786). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα ἰσόπλευρον τρίγωνον, ἰσοδύναμον μὲ δοθὲν ὀρθογώνιον.

1751. (1787). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα ἰσόπλευρον τρίγωνον, ἰσοδύναμον μὲ δοθὲν τρίγωνον.

1752. (1788). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν τὰς γωνίας του καὶ τὸ ἐμβαδόν του.

1753. (1789). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον, ὅμοιον πρὸς δοθὲν τρίγωνον καὶ ἰσοδύναμον πρὸς δοθὲν τετράγωνον.

1754. (1790). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον, ἂν γνωρίζωμεν μίαν γωνίαν, τὴν διχοτόμον τῆς καὶ τὸ ἐμβαδόν του.

1755. (1791). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν τὸ ὕψος $\nu\alpha$, τὸ ἄθροισμα $\beta + \gamma = \lambda$ καὶ τὸ ἐμβαδόν του E .

Ζ' Ὁμάς. 1756. (1792). Μεταξὺ τῶν τριγώνων, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν κορυφῆς, ποῖον εἶναι ἐκεῖνο, τὸ ὁποῖον ἔχει τὸ μεγαλύτερον ἐμβαδόν;

1757. (1793). Μεταξὺ ὅλων τῶν τριγώνων, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ἐμβαδόν, τὴν μικροτέραν περίμετρον ἔχει τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνον.

1758. (1794). Ἀπὸ ἓνα σημεῖον Σ , τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς κύκλου O , νὰ ἀχθῆ μία τέμνουσα ΣAB οὕτως, ὥστε τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου OAB νὰ εἶναι μέγιστον.

Η' Ὁμάς. 1759. (1795). Νὰ ὑπολογισθῆ, συναρτήσῃ τῶν πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου $AB\Gamma$, τὸ ἔμβαδὸν τοῦ τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τοὺς πόδας τῶν διχοτομουσῶν τὰς γωνίας τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$.

1760. (1796). Ἐὰν α, β, γ εἶναι τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τριγώνου $AB\Gamma$, καὶ M, N, Λ αἱ προβολαὶ τοῦ κέντρου βάρους Z αὐτοῦ ἐπὶ τὰς πλευρὰς AG, BG, AB , νὰ εὐρεθῆ τὸ ἔμβαδὸν τοῦ τριγώνου MNA , συναρτήσῃ τῶν α, β, γ .

1761. (1797). Ἀκολουθοῦντες τὴν περίμετρον δοθέντος τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ χωρίζομεν κάθε πλευρὰν τοῦ εἰς δύο μέρη, τὰ ὁποῖα ἔχουν λόγον $\mu : \nu$. Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ἔμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου, τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως, συναρτήσῃ τοῦ ἔμβαδοῦ E τοῦ $AB\Gamma\Delta$.

1762. (1798). Αἱ πλευραὶ τριῶν κανονικῶν ὀκταγώνων εἶναι ἀντιστοιχῶς $12 \mu, 16 \mu, \text{ καὶ } 48 \mu$. Νὰ ὑπολογισθῆ :

1ον. ἡ πλευρὰ καὶ τὸ ἔμβαδὸν τοῦ κανονικοῦ ὀκταγώνου, τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὰ τρία πρῶτα.

2ον. τὸ ἔμβαδὸν τοῦ κύκλου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸ τελευταῖον αὐτὸ πολύγωνον.

Θ' Ὁμάς. 1763. (1799). Νὰ ἀποδειχθῆ διὰ τῶν ἔμβαδῶν ἡ ἄσκησις 270.

1764. (1800). Νὰ ἀποδειχθῆ διὰ τῶν ἔμβαδῶν ἡ ἄσκησις 271.

1765. (1801). Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἑνὸς σημείου, τὸ ὁποῖον κεῖται εἰς τὸ ἔσωτερικὸν ἑνὸς ἰσοπλεύρου πολυγώνου, ἀπὸ τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου αὐτοῦ εἶναι σταθερὸν, δηλ. ἀνεξάρτητον τῆς θέσεως τοῦ σημείου.

1766. (1802). Ἐὰν α καὶ β εἶναι αἱ πλευραὶ δύο τετραγώνων, τὰ ὁποῖα εἶναι ἰσοδύναμα μὲ τὰ τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν βάσεις ἀντιστοιχῶς τὰς βάσεις ἑνὸς τραπεζίου καὶ ὡς ἀπέναντι κορυφὰς τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων του, νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὸ τραπεζίον αὐτὸ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τετράγωνον πλευρᾶς $\alpha + \beta$.

1767. (1803). Δίδεται ἕνα τρίγωνον $AB\Gamma$ καὶ μία εὐθεΐα xy , ἡ ὁποία δὲν τέμνει τὸ τρίγωνον· ἔὰν φέρωμεν τὰς καθέτους $AA', BB', \Gamma\Gamma'$ ἐπὶ τὴν xy , νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τρίγωνον $A''B''\Gamma''$, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς κορυφὰς τὰ μέσα τῶν καθέτων αὐτῶν, εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ $AB\Gamma$.

1768. (1804). Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὸ ἔμβαδὸν ἑνὸς τραπεζίου εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετραπλάσιον τοῦ ἔμβαδοῦ τοῦ τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς κορυφὰς τὰ μέσα τῶν διαγωνίων του καὶ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του.

1769. (1805). Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὸ ἔμβαδὸν ἑνὸς τετραπλεύρου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἡμίθροισμα τῶν δύο γινομένων, τὰ ὁποῖα σχηματίζομεν, ἂν λάβωμεν τὰς δύο ἀπέναντι πλευρὰς του καὶ πολλαπλασιάσωμεν ἐκάστην ἐξ αὐτῶν ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν τῆς ἀπὸ τοῦ μέσου τῆς ἄλλης.

1770. (1806). Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὸ ἔμβαδὸν ἑνὸς τετραπλεύρου εἶναι τετραπλάσιον τοῦ ἔμβαδοῦ τοῦ τριγώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τὰ μέσα τῶν διαγωνίων του καὶ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν δύο ἀπέναντι πλευρῶν του.

1771. (1807). Ἀπὸ τὸ μέσον ἐκάστης τῶν διαγωνίων ἑνὸς τετραπλεύρου φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ἄλλην διαγώνιον καὶ συνδέομεν τὴν τομὴν τῶν παραλλήλων αὐτῶν μὲ τὰ μέσα τῶν τεσσάρων πλευρῶν του. Νὰ ἀποδειχθῆ,

ὅτι τὸ τετράπλευρον διηρέθη εἰς τέσσαρα ἰσοδύναμα μέρη.

1772. (1808). Δίδεται ἓνα τετράπλευρον ΑΒΓΔ καὶ ἀπὸ τὸ μέσον Ε τῆς διαγωνίου ΒΔ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν ἄλλην διαγώνιον ΑΓ, ἣ ὅποια τέμνει τὴν γραμμὴν ΔΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Ζ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΓΖ διαιρεῖ τὸ τετράπλευρον εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη.

1773. (1809). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν ἐνὸς κανονικοῦ, ὀκταγώνου ἔγγεγραμμένου εἰς ἓνα κύκλον εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογώνου, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς διαστάσεις τὰς πλευράς τῶν τετραγώνων, ἔγγεγραμμένου καὶ περιγεγραμμένου περὶ τὸν αὐτὸν κύκλον.

1774. (1810). Δίδεται ἓνα τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἐξωτερικῶς αὐτοῦ ἓνα τόξον περιφέρειας ΒΜΓ, τὸ ὁποῖον ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν χορδὴν ΒΓ. Φέρομεν τὴν ΑΜ, ἣ ὅποια συνδέει τὸ Α μὲ τὸ μέσον Μ τοῦ τόξου ΒΓΜ καὶ ἔπειτα ἀπὸ τὸ μέσον Α' τῆς ΒΓ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΜ, ἣ ὅποια τέμνει τὴν γραμμὴν ΒΑΓ εἰς τὸ σημεῖον Δ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΜΔ διαιρεῖ τὴν ἐπιφάνειαν ΑΒΜΓΑ εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη.

1775. (1811). Ἀπὸ ἓνα σημεῖον Α μιᾶς περιφέρειας λαμβάνομεν ἓνα τόξον ΑΒ=90° καὶ πρὸς τὴν αὐτὴν διεύθυνσιν ἓνα ἄλλο τόξον ΑΓ=60° φέρομεν τὴν ΓΒ καὶ τὴν ΑΔ παράλληλον πρὸς τὴν ΓΒ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ κυκλικὸν τμήμα ΑΔΒΓ εἶναι τὸ τρίτον τοῦ κύκλου.

1776. (1812). Δύο κύκλοι Ο καὶ Ο' ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς ἀπὸ τὸ σημεῖον Α τῆς ἐπαφῆς των φέρομεν μίαν τέμνουσαν ΒΑΒ'. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ ἐμβαδὰ τῶν δύο κυκλικῶν τμημάτων, τὰ ὁποῖα ὀρίζονται ὑπὸ τῶν χορδῶν ΑΒ' καὶ ΑΒ καὶ τὰ ὁποῖα κείνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτῶν, εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰ τετράγωνα τῶν ἀκτίων τῶν κύκλων αὐτῶν.

'Ασκήσεις ἐπὶ τοῦ Γ' καὶ Δ' βιβλίου πρὸς γενικὴν ἐπανάληψιν

Α' Ὁμάς. 1777. (1813). Δίδεται ἓνα τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἓνα σημεῖον Δ ἐπὶ τῆς ΒΓ. Ἀπὸ τὰς κορυφὰς τοῦ τριγώνου φέρομεν παραλλήλους πρὸς μίαν δοθεῖσαν εὐθεῖαν χγ. Ἡ παράλληλος, ἣ ὅποια ἄγεται ἀπὸ τὸ Α συναντᾷ τὴν ΒΓ εἰς τὸ Α' καὶ αἱ δύο ἄλλαι, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὰς Β καὶ Γ συναντοῦν τὴν ΑΔ εἰς τὰ σημεῖα Β' καὶ Γ'. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον Α'Β'Γ' εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ΑΒΓ.

1778. (1814). Διαιροῦμεν τὴν πλευρὰν ΒΓ ἐνὸς τριγώνου ΑΒΓ εἰς τρία ἴσα μέρη ΒΔ=ΔΕ=ΕΓ. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Μ τῆς ΔΕ φέρομεν τὴν ΑΜ καὶ ἀπὸ τὰ Δ καὶ Ε παραλλήλους πρὸς τὴν ΑΜ, αἱ ὁποῖαι τέμνουσιν τὴν ΑΒ εἰς τὸ Δ' καὶ τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ε'. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΜΔ' καὶ ΜΕ' διαιροῦσιν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἰς τρία ἰσοδύναμα μέρη.

1779. (1815). Δίδεται ἓνα τρίγωνον ΑΒΓ, Ο ἓνα σημεῖον ἐντὸς τοῦ τριγώνου καὶ τρία σημεῖα Α', Β', Γ', τὰ ὁποῖα κείνται ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ. Ἐὰν ΑΑ'', ΒΒ'', ΓΓ'' εἶναι αἱ παράλληλοι πρὸς τὰς ΟΑ', ΟΒ', ΟΓ' καὶ περατοῦμεναι εἰς τὰς πλευράς, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι

$$\frac{ΟΑ'}{ΑΑ''} + \frac{ΟΒ'}{ΒΒ''} + \frac{ΟΓ'}{ΓΓ''} = 1.$$

1780. (1816). Ἐπὶ τῶν πλευρῶν AB, AG ἑνὸς τριγώνου ABG καὶ ἔξωτερικῶς τοῦ τριγώνου κατασκευάζομεν παραλληλόγραμμα $ABDE, AGZ\Theta$. Ἐὰν H εἶναι ἡ τομὴ τῶν εὐθειῶν DE καὶ $Z\Theta$, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἑμβαδῶν τῶν παραλληλογράμμων αὐτῶν εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἑμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου $BGKL$, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς διαδοχικὰς πλευρὰς τὴν BG καὶ τὴν παράλληλον καὶ ἴσην πρὸς τὴν AH .

Β' Ὁμάς. 1781. (1817). Ἐνας ἄγρὸς ἔχει σχῆμα τραπεζίου $ABGD$, τοῦ ὁποῖου αἱ βάσεις εἶναι $AB=60$ μ., $GD=48$ μ. καὶ τοῦ ὕψους $v=52$ μ. Μία ὁδὸς πλάτους 8 μ. ἔχει χαραχθῆ ἐντὸς τοῦ ἄγρου παραλλήλως πρὸς τὰς βάσεις καὶ διαιρεῖ τὸν ἄγρον εἰς δύο μέρη, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸ αὐτὸ ἑμβαδόν. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἑμβαδὸν τοῦ ἑνὸς ἐκ τῶν δύο μερῶν.

1782. (1818). Ἐνὸς τραπεζίου $ABGD$ δίδονται αἱ βάσεις $AB=180$ μ., $GD=110$ μ. τὸ ὕψος $EZ=60$ μ. καὶ ἡ πλευρὰ $BD=75$ μ.

1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ AD .

2ον. Νὰ ἀχθῆ μία παράλληλος MN πρὸς τὰς βάσεις καὶ τοιαύτη, ὥστε τὸ ἑμβαδὸν τοῦ μέρους $ABNM$ νὰ εἶναι ἴσον μὲ 4000 τ.μ.

3ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις EH τῆς MN ἀπὸ τὴν AB καὶ τὸ μήκος τῆς MN .

1783. (1819). Εἰς ἓνα κύκλον O ἀκτίνος R ἐγγράφομεν ἓνα ἰσοσκελὲς τραπέζιον $ABGD$. Ἡ διαγώνιος AG σχηματίζει μίαν γωνίαν 45° μὲ τὴν βάσιν AB καὶ μίαν γωνίαν 30° μὲ τὴν πλευρὰν AD . Νὰ ὑπολογισθοῦν:

1ον. τὰ μέτρα τῶν τόξων, τὰ ὁποῖα ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰς πλευρὰς τοῦ τραπεζίου καὶ αἱ γωνίαι τῶν διαγωνίων του.

2ον. τὸ ἑμβαδὸν τοῦ τραπεζίου. Ἐφαρμογὴ: $R=1,40$ μέτρα.

1784. (1820). Εἰς ἓνα τρίγωνον ABG δίδεται τὸ ὕψος $AD=4$ μ. καὶ τὰ τμήματα $BD=3$ μ. καὶ $DG=7,5$ μ., τὰ ὁποῖα ὀρίζει ἡ AD ἐπὶ τῆς πλευρᾶς BG .

1ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ AB, AG , τὸ ἑμβαδὸν τοῦ τριγώνου ABG καὶ τὰ δύο ἄλλα ὕψη του BE καὶ GZ .

2ον. Ἐγγράφομεν εἰς τὸ τρίγωνον ABG ἓνα ὀρθογώνιον $KLMN$, τοῦ ὁποῖου ἡ βάσις AM κεῖται ἐπὶ τῆς πλευρᾶς BG . Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἑμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου αὐτοῦ, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ὕψος MN εἶναι ἴσον μὲ 2 μέτρα.

1785. (1821). Εἰς ἓνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ABG φέρομεν τὴν εὐθείαν DE παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν BG καὶ ἐφαπτομένην τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς τὸ τρίγωνον αὐτό. Νὰ ὑπολογισθοῦν, συναρτήσῃ τὸ ὕψος v τοῦ τριγώνου καὶ τῆς ἀκτίνος ρ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου:

1ον. ἡ περίμετρος τοῦ τραπεζίου $ABGE$.

2ον. τὸ ἑμβαδὸν τοῦ τραπεζίου αὐτοῦ. Τί γίνονται οἱ τύποι τῆς περιμέτρου καὶ τοῦ ἑμβαδοῦ, ὅταν τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσόπλευρον. Ἐφαρμογὴ: $v=150$ μ. καὶ τὸ τρίγωνον εἶναι ἰσόπλευρον.

1786. (1822). Εἰς ἓνα ἰσοσκελὲς τραπέζιον $ABGD$ εἶναι: $AB=30$ μ., $GD=20$ μ., $BG=AD=15$ μ.

1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἑμβαδὸν τοῦ τραπεζίου.

2ον. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς βάσεως AB πρέπει νὰ φέρωμεν παράλληλον MN πρὸς τὴν AB οὕτως, ὥστε τὰ ἑμβαδὰ τῶν τραπεζίων $AMNG$ καὶ $MABN$ νὰ ἔχουν λόγον 2:3.

1787. (1823). Εἰς ἓνα ἰσοσκελὲς τραπέζιον ΑΒΓΔ αἱ μὴ παράλληλοι πλευραὶ τοῦ ΑΔ καὶ ΒΓ εἶναι ἴσαι μὲ τὴν μικρὰν βᾶσιν τοῦ ΔΓ=12 ἔκ. Αἱ γωνίαι τοῦ Α καὶ Β εἶναι 60° ἑκάστη.

ἰον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος ΔΗ, τὸ ἔμβαδὸν τοῦ τραπέζιου καὶ ἡ διαγώνιος ΒΔ.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΑΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ.

Γ' Ὅμας. 1788. (1824). Δίδεται ἡ βᾶσις ΒΓ=2α καὶ τὸ ὕψος ΑΗ=υ ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ. Νὰ ὀρισθῇ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΒ ἓνα σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε ἐὰν φέρωμεν τὴν ΜΝ παράλληλον πρὸς τὴν ΒΓ καὶ τὴν ΜΔ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ, τὸ ἔμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου τραπέζιου ΜΝΓΔ νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ ἔμβαδου τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

1789. (1825) Δίδονται δύο εὐθεῖαι Χ καὶ Υ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ Ο. Δύο εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ σταθεροῦ μήκους ὀλισθαίνουν ἀντιστοιχῶς ἐπὶ τῶν Χ καὶ Υ, οὕτως ὥστε τὸ σημεῖον Ο νὰ μένη εἰς τὸ ἐσωτερικὸν ἑκάστου ἐξ αὐτῶν. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἔμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου ΑΓ'ΒΔ μένει σταθερόν.

Δ' Ὅμας. 1790. (1826). Δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Β καὶ ζητεῖται ὁ τόπος τοῦ σημείου Μ, τοῦ ὁποίου ἡ ἀπόστασις ΑΜ νὰ ἔχη δοθέντα λόγον πρὸς τὴν ἀπόστασιν τοῦ σημείου Β ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν ΑΜ.

1791. (1827). Ἐξ ἑνὸς σημείου Α, κειμένου ἐκτὸς κύκλου Ο, φέρομεν μίαν τέμνουσαν αὐτοῦ ΑΒΓ. Εἰς τὰ δύο σημεῖα Β καὶ Γ τῆς τομῆς τῆς περιφερείας φέρομεν δύο ἑφαπτομένας αὐτῆς ΒΜ καὶ ΓΜ. Νὰ εὐρεθῇ ἡ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τῆς τομῆς τῶν ἑφαπτομένων τούτων.

1792. (1828). Δίδεται ἓνα ὀρισμένον σημεῖον Ρ καὶ μία περιφέρεια Ο. Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς περιφερείας Ο ἓνα τυχὸν σημεῖον Μ καὶ ἐπὶ τῆς ΡΜ ἓνα ἄλλο σημεῖον Μ' τοιοῦτον, ὥστε τὸ γινόμενον ΡΜ×ΡΜ' νὰ εἶναι σταθερόν. Νὰ εὐρεθῇ ὁ τόπος τοῦ Μ', ὅταν τὸ Μ διαγράφῃ τὴν περιφέρειαν Ο.

1793. (1829). Νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων των ἀπὸ τὰς κορυφὰς ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου ΑΒΓ, νὰ ἰσοῦται μὲ k^2 .

1794. (1830). Δύο κύκλοι μεταβλητοὶ ἐφάπτονται μιᾶς σταθερᾶς εὐθείας, ὁ μὲν πρῶτος εἰς τὸ σταθερὸν σημεῖον Α, ὁ δὲ δεῦτερος εἰς τὸ σταθερὸν σημεῖον Β. Νὰ εὐρεθῇ ὁ τόπος τῶν κοινῶν σημείων τῶν δύο κύκλων, ὅταν ὁ λόγος τῶν ἀκτίων των εἶναι σταθερός.

1795. (1831). Δίδονται δύο ἀπέναντι πλευραὶ ΑΒ καὶ ΓΔ ἑνὸς τετραπλεύρου, αἱ ὁποῖαι προεκτείνονται τέμνονται εἰς ἓνα σημεῖον Ο. Μία ἐκ τῶν πλευρῶν ἢ ΑΒ εἶναι ὀρισμένη, ἢ δὲ ἄλλη ΓΔ στρέφεται περὶ τὸ Ο. Ποῖος εἶναι ὁ τόπος τοῦ σημείου Μ εἰς τὸ ὁποῖον τέμνονται αἱ δύο ἄλλαι πλευραὶ ΑΓ καὶ ΒΔ καὶ ὁ τόπος τοῦ σημείου τῆς τομῆς Μ' τῶν διαγωνίων ΑΔ καὶ ΒΓ.

1796. (1832). Δίδονται τρία σημεῖα Α, Β, Γ, κείμενα ἐπὶ μιᾶς εὐθείας (τὸ Γ εὐρίσκεται μεταξὺ τῶν Α καὶ Β). Φέρομεν ἀπείρους περιφερείας διερχομένας διὰ τῶν σημείων Α καὶ Β. Συνδέομεν τὸ σημεῖον Γ μὲ τὰ σημεῖα τομῆς Δ καὶ Δ' μιᾶς ἐκ τῶν περιφερειῶν τούτων Ο καὶ τῆς καθέτου ἐκ τοῦ μέσου Κ

τῆς AB. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων Μ καὶ Μ', εἰς τὰ ὁποῖα αἱ εὐθεῖαι ΓΔ καὶ ΓΔ' συναντοῦν τὴν περιφέρειαν αὐτήν, ὅταν τὸ κέντρον τοῦ κύκλου Ο μετατίθεται.

Ε' Ὁμάς. 1797. (1833). Δίδεται ἓνα τρίγωνον ABΓ, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ AB εἶναι μεγαλυτέρα τῆς πλευρᾶς ΑΓ. Ἐπὶ τῆς AB καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΒΑ λαμβάνομεν μῆκη $AE = AD = ΑΓ$.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία ΒΔΓ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς γωνίας ΒΑΓ.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\gamma\omega\nu.ΒΕΓ = \gamma\omega\nu. \frac{A}{2} + 1$ ὀρθ.

3ον. Ἐὰν $ΑΓ = \alpha$ καὶ $\gamma\omega\nu.ΒΑΓ = 120^\circ$, νὰ ὑπολογισθοῦν, συναρτήσῃ τοῦ α , ὁ λόγος $\frac{\Gamma\Delta^2}{\Gamma E^2}$, αἱ εὐθεῖαι ΓΔ, ΓΕ, ἡ κάθετος ΓΗ ἐπὶ τὴν ΒΔ καὶ τὸ ἔμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΕΓΔ.

1798. (1834). Δίδεται ἓνα τρίγωνον ABΓ καὶ Θ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέσων του. Προεκτείνομεν τὴν διάμεσον ΑΔ κατὰ μῆκος ΔΖ = ΔΘ.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον ΒΘΖ εἶναι ὁμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον τὸ ὁποῖον δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν μὲ τὰς τρεῖς διαμέσους τοῦ τριγώνου ABΓ.

2ον. Ἐξ αὐτοῦ νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἔμβαδὸν τοῦ τριγώνου, τὸ ὁποῖον κατασκευάζεται μὲ πλευρὰς τὰς τρεῖς διαμέσους εἶναι ἴσον μὲ τὰ $\frac{3}{4}$ τοῦ ἔμβადου τοῦ τριγώνου ABΓ.

1799. (1835). Δίδεται ἓνα ἰσόπλευρον τρίγωνον ABΓ πλευρᾶς α . Ἐκ τοῦ σημείου Γ φέρομεν τὴν Γχ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ. Ἐπὶ τοῦ ὕψους ΑΔ τοῦ τριγώνου ABΓ λαμβάνομεν ἓνα σημεῖον Ο τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι $ΑΟ = 2 \cdot ΟΔ$. Φέρομεν τὴν ΒΟ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν Γχ εἰς τὸ σημεῖον Ε.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΕΓ εἶναι ἰσοσκελές.

2ον. Νὰ δευχθῇ, ὅτι τὸ τετράπλευρον ABΓΕ εἶναι ἑγγράψιμον εἰς κύκλον.

3ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ΒΕ καὶ ΓΕ συναρτήσῃ τῆς πλευρᾶς ΒΓ = α .

4ον. Νὰ προσδιορισθῇ τὸ κέντρον καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτίς τῆς ἑγγεγραμμένης περιφερείας εἰς τὸ τετράπλευρον ABΓΕ.

1800. (1836). Δίδεται τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον ABΓ πλευρᾶς α . Φέρομεν τὴν διχοτόμον Γχ τῆς ἐξωτερικῆς γωνίας Γ καὶ τὴν κάθετον ΑΔ ἐπὶ τὴν Γχ.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ εὐθεῖαι AB καὶ Γχ εἶναι παράλληλοι.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΒΔ εἶναι ὀρθογώνιον.

3ον. Ἐστω ΑΗ τὸ ὕψος τοῦ τριγώνου ABΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΓΗ καὶ ΑΓΔ εἶναι ἴσα.

4ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν, συναρτήσῃ τοῦ α , τὰ μῆκη ΓΔ, ΑΔ, ΒΔ

5ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΒΓΔ.

1801. (1837), Ἐνα ἰσόπλευρον τρίγωνον ABΓ πλευρᾶς α εἶναι ἑγγεγραμμένον εἰς ἓνα κύκλον Ο. Λαμβάνομεν ἓνα σημεῖον Μ ἐπὶ τοῦ τόξου ΒΓ καὶ φέρομεν τὰς ΜΑ, ΜΒ, ΜΓ. Ἡ ΜΑ τέμνει τὴν ΒΓ εἰς τὸ σημεῖον Δ καὶ ἔστω ὅτι $ΜΔ = \lambda$, $ΜΒ = \mu$, $ΜΓ = \mu'$. Ἐστω Ε ἓνα σημεῖον τῆς ΜΑ τοιοῦτον, ὥστε $\gamma\omega\nu.ΜΒΕ = 60^\circ$.

1ον. Νὰ συγκριθῆ ἡ ΜΕ πρὸς τὸ μ, ἢ ΕΒ πρὸς τὸ μ'.

2ον. Νὰ συγκριθοῦν τὰ τρίγωνα ΒΜΑ καὶ ΔΜΓ· ἐξ αὐτοῦ νὰ ἐξαχθῆ μία σχέσις μεταξὺ τῶν μ, μ', λ.

3ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ μ, μ', λ εἰς τὴν περιπτώσιν καθ' ἣν $\mu = \mu'$, συναρτήσῃ τοῦ α, καὶ νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ἔμβαδὸν τοῦ ΑΒΜΓ.

1802. (1838). Ἐνα ἰσοπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἕνα κύκλον Ο ἀκτίνοσ Α. Αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ τοῦ τριγώνου αὐτοῦ τέμνοντι τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε.

1ον. Ποία εἶναι ἡ θέσις τοῦ Δ καὶ ποία ἡ θέσις τοῦ Ε ἐπὶ τῶν τόξων ΑΓ καὶ ΑΒ; Ποῖον εἶναι τὸ μήκος τῆσ χορδῆσ ΑΕ, συναρτήσῃ τοῦ R.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι αἱ διχοτόμοι ΒΔ καὶ ΓΕ τῶν γωνιῶν Β καὶ Γ τέμνονται εἰς τὸ κέντρον τοῦ κύκλου.

3ον. Ποία εἶναι ἡ φύσις τοῦ τετραπλεύρου ΑΕΔΟ. Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ἔμβαδὸν του.

4ον. Φέρομεν τὰς ἐφαπτομένασ τοῦ κύκλου Ο εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Σ. Ποία εἶναι ἡ φύσις τοῦ τριγώνου ΒΓΣ;

5ον. Ποῦ εὐρίσκεται τὸ σημεῖον τῆσ τομῆσ Θ τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν ΓΒΣ καὶ ΒΓΣ;

1803. (1839). Εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ φέρομεν τὸ ὕψοσ ΑΗ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ. Ἀπὸ τὸ Η φέρομεν τὰσ καθέτουσ ΗΜ καὶ ΗΝ ἐπὶ τὰσ ΑΒ καὶ ΑΓ ἀντιστοιχώσ.

1ον. Ἐὰν $ΗΒ = \alpha$ καὶ $ΗΒ = \beta$, νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ μήκη ΑΗ, ΜΝ, ΑΒ, ΑΓ.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῆ ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΓ, ΒΜΗ, ΗΝΓ, ΑΜΝ εἶναι ὅμοια. Νὰ ὑπολογισθῆ ὁ λόγοσ τοῦ ἔμβαδοῦ ἐκάστου τῶν τριῶν τελευταίων τριγώνων πρὸσ τὸ ἔμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἐξ αὐτῶν συνάγομεν, ὅτι τὸ ἔμβαδὸν τοῦ ΜΑΝ εἶναι μέσοσ ἀνάλογοσ μεταξὺ τῶν ἔμβαδῶν ΒΜΗ καὶ ΗΝΓ.

3ον. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι ὁ κύκλοσ, ὁ ὁποῖοσ γράφεται μὲ διάμετρον τὴν ΒΗ ἐφάπτεται τῆσ ΜΝ εἰς τὸ Μ καὶ ὁ κύκλοσ, ὁ ὁποῖοσ γράφεται μὲ διάμετρον τὴν ΗΓ ἐφάπτεται τῆσ ΜΝ εἰς τὸ Ν.

1804. (1840). Δίδεται τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποῖου αἱ κάθετοι πλευραὶ εἶναι $ΑΒ = \gamma$ καὶ $ΑΓ = \beta$. Φέρομεν τὴν διχοτόμον ΑΔ τῆσ ὀρθῆσ γωνίασ Α, ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν ὑποτείνουσαν εἰς τὸ Δ. Ἐκ τοῦ Γ φέρομεν τὴν ΓΕ παράλληλον πρὸσ τὴν ΔΑ, ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν προέκτασιν τῆσ ΒΑ εἰς τὸ Ε.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι $ΑΕ = ΑΓ$ καὶ νὰ ὑπολογισθῆ ἡ ΓΕ.

2ον. Νὰ ὑπολογισθῆ ἡ ΑΔ.

3ον. Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ἔμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ΑΔΓΕ.

1805. (1841). Μὲ ὑποτείνουσασ τὰσ καθέτουσ πλευράσ $ΑΒ = \gamma$ καὶ $ΑΓ = \beta$, ἐνόσ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζομεν, ἐξωτερικῶσ τοῦ τριγώνου, τὰ ὀρθογώνια ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΑΔΒ καὶ ΑΕΓ.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὰ σημεῖα Ε, Α, Δ κεῖνται ἐπ' εὐθείασ γραμμῆσ.

2ον. Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ἔμβαδὸν τοῦ τραπεζίου ΓΕΑΒ.

3ον. Ἐὰν Μ εἶναι τὸ μέσοσ τῆσ ΒΓ, φέρομεν τὰσ ΜΔ καὶ ΜΕ. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι ἡ γωνία ΕΜΔ εἶναι ὀρθή.

4ον. Προεκτείνωμεν τὰς ΔΕ καὶ ΒΓ μέχρι τῆς συναντήσεώς των εἰς τὸ σημεῖον Ζ. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ λόγοι $\frac{ΖΓ}{ΖΒ}$ καὶ $\frac{ΖΓ}{ΒΓ}$.

1806. (1842). Δίδεται τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ. Φέρομεν τὸ ὕψος ΑΔ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ. Κατάσκευάζομεν, συμμετρικῶς ὡς πρὸς τὴν ΑΒ, τὸ τρίγωνον ΑΒΕ ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον ΑΔΒ καὶ συμμετρικῶς πρὸς τὴν ΑΓ τὸ τρίγωνον ΑΓΖ ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον ΑΓΔ.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὰ τρία σημεῖα Ε, Α, Ζ κεῖνται ἐπ' εὐθείας καὶ ὅτι τὸ τετράπλευρον ΕΒΓΖ εἶναι ὀρθογώνιον τραπέζιον.

2ον. Ἐάν εἶναι ΑΓ=β καὶ ΑΒ=γ, νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ἔμβαδὸν τοῦ τραπέζιου καὶ τὸ ὕψος του ΕΖ.

3ον. Ποία σχέσις πρέπει νὰ ὑπάρχη μεταξὺ τῶν μηκῶν β καὶ γ, ἵνα γων.ΖΓΒ=60°.

1807. (1843). Δίδεται ἓνα ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ (Α=90°) καὶ διαιροῦμεν τὴν ΑΒ εἰς ν ἴσα μέρη ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὴν ΑΓ. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἔμβαδά τῶν ν μερῶν εἰς τὰ ὅποια διηρέσθη τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ νὰ ἐξαχθῆ ἐξ αὐτοῦ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ν πρώτων περιττῶν ἀριθμῶν εἶναι ἴσον μὲ ν². Ἐφαρμογὴ: Νὰ γίνῃ τὸ σχῆμα καὶ ἡ ἀπόδειξις διὰ ν=6.

1808. (1844). Δίδεται τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α. Φέρομεν τὸ ὕψος ΑΔ καὶ μὲ κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτίνα τὴν ΑΔ γράφομεν περιφέρειαν. Ἐκ τῶν κορυφῶν Β καὶ Γ φέρομεν ἐφαπτομένας τῆς περιφερείας Α, αἱ ὅποια ἐφάπτονται αὐτῆς εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ ἀντιστοιχοῦσιν.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι αἱ ἐφαπτόμεναι ΒΕ καὶ ΓΖ εἶναι παράλληλοι καὶ ὅτι ἡ ΕΖ εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου Α.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι $ΒΕ \times ΓΖ = \frac{1}{4} \overline{ΕΖ}^2$.

3ον. Φέρομεν τὴν ΔΕ, ἡ ὅποια τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ Μ καὶ τὴν ΔΖ, ἡ ὅποια τέμνει τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ν. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι αἱ ΜΝ καὶ ΑΔ εἶναι ἴσαι.

4ον. Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ἔμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΕΔΖ, ἐάν εἶναι ΑΒ=6 ἐκ. καὶ ΑΓ=8 ἐκ.

1809. (1845). Δίδεται τετράγωνον ΑΒΓΔ πλευρᾶς α. Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΒΓ λαμβάνομεν τμήματα $ΑΕ=ΒΖ=\frac{2}{3} α$.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΖ καὶ ΔΕ τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Μ καθέτως.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΕΜ εἶναι ὅμοιον πρὸς τὸ τρίγωνον ΑΕΔ. Νὰ εὑρεθῆ ὁ λόγος τῆς ὁμοιότητος καὶ νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ἔμβαδὸν τοῦ ΑΕΜ.

3ον. Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ἔμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου ΔΜΖΓ, συναρτήσῃ τοῦ α.

1810. (1846). Ἐπὶ τῶν πλευρῶν ΑΔ καὶ ΔΓ ἐνὸς τετραγώνου ΑΒΓΔ πλευρᾶς α λαμβάνομεν μήκη $ΑΕ=ΔΖ=\frac{α}{3}$.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒΕ καὶ ΑΔΖ εἶναι ἴσα καὶ ὅτι ἡ ΑΖ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΕ.

2ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ΒΕ καὶ τὸ ἔμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΕ, συναρτή-
σει τοῦ α.

3ον. Ἐὰν Η εἶναι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ΑΖ καὶ ΒΕ, νὰ ὑπολογι-
σθοῦν τὰ ἔμβαδὰ τῶν τριγώνων ΑΕΗ καὶ ΑΗΒ. Ἐφαρμογή: $\alpha=6$ μ.

1811. (1847). Δίδεται ἓνα τετράγωνον ΑΒΓΔ πλευρᾶς α. Προεκτείνομεν
τὰς πλευρὰς ΒΓ καὶ ΓΔ κατὰ τὰς φορὰς ΒΓχ καὶ ΓΔυ καὶ ἐπὶ τῶν προεκτά-
σεων αὐτῶν λαμβάνομεν τμήματα ΒΜ=β καὶ ΔΝ=β, ($\beta > \alpha$). Φέρομεν τὰς ΑΝ
καὶ ΑΜ καὶ κατασκευάζομεν τὸ παραλληλόγραμμον ΑΜΖΝ.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ παραλληλόγραμμον αὐτὸ εἶναι τετράγωνον.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ Ζ κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας $\gamma Γχ$
καὶ ὅτι ἡ γωνία ΑΓΖ εἶναι ὀρθή. Ἀντιστρόφως, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ Ζ
κεῖται ἐπὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας $\gamma Γχ$, νὰ ὀρισθῇ ἡ θέσις τοῦ Μ καὶ νὰ
κατασκευασθῇ τὸ τετράγωνον.

3ον. Ἐστω Ο τὸ μέσον τῆς ΑΖ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τετράπλευρον
ΒΟΖΓ εἶναι ἓνα τραπέζιον καὶ νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ βάσεις, τὸ ἔμβαδόν του
καὶ ἡ διαγώνιος ΒΖ, συναρτήσει τῶν α καὶ β.

1812. (1848). Ἡ γωνία Α ἐνὸς ρόμβου ΑΒΓΔ εἶναι 120° . Συνδέομεν δι'
εὐθείας τὰ μέσα Μ καὶ Ν τῶν πλευρῶν ΒΑ καὶ ΒΓ. Ἐπίσης συνδέομεν τὰ
μέσα Ρ καὶ Σ τῶν πλευρῶν ΔΑ καὶ ΔΓ· τέλος συνδέομεν τὰ σημεῖα Α καὶ Ν.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἑξάγωνον ΑΡΣΓΝΜ εἶναι κανονικόν.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΑΝ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ.

3ον. Ὑποθέτομεν, ὅτι $AB=2\alpha$ · νὰ ὑπολογισθῇ, συναρτήσει τοῦ α, τὸ ἔμ-
βαδὸν τοῦ ρόμβου.

1813. (1849). Αἱ πλευραὶ ἐνὸς παραλληλογράμμου ἔχουν μήκη α καὶ β, ἡ
δὲ μεγαλυτέρα διαγώνιος του ἔχει μήκος γ.

1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔμβαδὸν τῆς στεφάνης, ἡ ὁποία περιέχεται με-
ταξὺ τῶν δύο περιφερειῶν, αἱ ὁποῖαι ἔχουν διαμέτρους τὴν μεγαλυτέραν καὶ
μικροτέραν διαγώνιον τοῦ παραλληλογράμμου.

2ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τῆς χορδῆς τοῦ μεγαλυτέρου κύκλου, ἡ
ὁποία ἐφάπτεται τῆς περιφερείας τοῦ μικροτέρου κύκλου.

1814. (1850). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι κάθε παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ περιγε-
γραμμένον περὶ ἓνα κύκλον, εἶναι ρόμβος.

1ον. Μεταξὺ τῶν διαγώνιων ΑΓ καὶ ΒΔ τοῦ ρόμβου αὐτοῦ, νὰ ἀποδει-
χθῇ ἡ σχέσις $\frac{1}{ΑΓ^2} + \frac{1}{ΒΔ^2} = \frac{1}{4R^2}$, ὅπου R παριστάνει τὴν ἀκτίνα τοῦ κύκλου.

2ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαγώνιοι ΑΓ καὶ ΒΔ, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ
πλευρὰ τοῦ ρόμβου εἶναι ἴση με $\frac{4R\sqrt{3}}{3}$.

3ον. Ἐὰν παραστήσωμεν με Ε καὶ Ε' τὰ ἔμβαδὰ τοῦ παραλληλογράμμου
ΑΒΓΔ καὶ ἐκείνου, τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς, νὰ ἀποδειχθῇ,
ὅτι τὸ γινόμενον $E \times E'$ εἶναι σταθερόν.

4ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ τοῦ δευτέρου παραλληλογράμμου, εἰάν
ἡ πλευρὰ τοῦ ρόμβου εἶναι ἴση με $\frac{4R\sqrt{3}}{3}$.

1815. (1851). Εἰς ἓνα τραπέζιον ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου αἱ βάσεις εἶναι ΑΒ=α, ΓΔ=β φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΕΖ, ἡ ὅποια συνδέει τὰ μέσα τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του. Ἡ ΕΖ τέμνει τὴν διαγώνιον ΑΓ εἰς τὸ Θ καὶ τὴν ΒΔ εἰς τὸ Η. Νὰ ἀποδειχθῇ :

1ον. ὅτι $EZ = \frac{\alpha + \beta}{2}$.

2ον. ὅτι $\Theta H = \frac{\alpha - \beta}{2}$.

3ον. ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν ἐμβαδῶν τῶν τραπεζίων ΑΒΖΕ καὶ ΕΖΓΔ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΒΔΘ.

1816. (1852). Τραπεζίου ΑΒΓΔ δίδεται ἡ μεγάλη βάσις ΑΒ=4α, ἡ μὴ παράλληλος πλευρὰ ΑΔ=2α καὶ αἱ γωνίαι Α=60° καὶ Β=45°.

1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ συναρτήσῃ τοῦ α, τὸ ὕψος, ἡ βάσις ΓΔ καὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραpezίου.

2ον. Ἐπὶ τῆς βάσεως ΑΒ λαμβάνομεν ἓνα σημεῖον Μ ἀπέχον τοῦ Α ἀπόστασιν $AM = \frac{3\alpha}{2}$. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς βάσεως ΓΔ ἓνα σημεῖον Ν τοιοῦτον, ὥστε τὰ τραπέζια ΑΜΝΔ καὶ ΜΒΓΝ νὰ εἶναι ἰσοδύναμα.

1817. (1853). Ἐνας κῆπος ἔχει σχῆμα ἐνὸς τραpezίου ΑΒΓΔ. Ἡ μεγάλη βάσις ΑΒ εἶναι ἴση μὲ 2α, ἡ μικρὰ βάσις ΓΔ εἶναι ἴση μὲ 2β. Αἱ γωνίαι Α καὶ Β εἶναι 60° ἑκάστη.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ πλευραὶ ΑΔ καὶ ΒΓ εἶναι ἴσαι καὶ νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος των.

2ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κήπου.

3ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τῆς παραλλήλου ΕΖ πρὸς τὰς βάσεις του, ἡ ὅποια διαιρεῖ τὸ τραπέζιον εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη.

4ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΟΑΒ, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν, ἐὰν προεκτείνωμεν τὰς μὴ παραλλήλους πλευρὰς του μέχρι τῆς συναντήσεώς των εἰς τὸ σημεῖον Ο. Ἐφαρμογή: 2α=82 μ., 2β=38 μ.

1818. (1854). Εἰς ἓνα ἰσοσκελὲς τραπέζιον ΑΒΓΔ συνδέομεν τὰ μέσα Ε, Ζ, Η, Θ τῶν πλευρῶν του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΕΖΗΘ εἶναι ρόμβος.

2ον. Ποία σχέσις πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν πλευρῶν τοῦ ἰσοσκελοῦς τραpezίου, ἵνα ὁ ἐγγεγραμμένος ρόμβος εἶναι ἓνα τετράγωνον.

3ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραpezίου, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν α=3,45 μ. τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου. (Φυσικὸν τμ. Παν. Ἀθηνῶν).

1819. (1855). Δίδεται ἓνα ὀρθογώνιον τραπέζιον ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου αἱ βάσεις εἶναι ΑΒ=α, ΓΔ=β καὶ τοῦ ὁποίου ἡ μὴ κάθετος πρὸς τὰς βάσεις πλευρὰ εἶναι ἴση μὲ α+β.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἥμισυ τῆς πλευρᾶς ΑΔ εἶναι μέσον ἀνάλογον πρὸς τὰς βάσεις.

2ον. Ἐστω Ε ἓνα σημεῖον τῆς ΒΓ καὶ τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι ΒΕ=α. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον ΔΕΑ εἶναι ὀρθογώνιον.

3ον. Ἐὰν Ο εἶναι τὸ μέσον τῆς ΑΔ, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΔΕ καὶ ΟΓ εἶναι κάθετοι ἀναμεταξύ των. Ὅμοίως καὶ αἱ εὐθεῖαι ΑΕ καὶ ΟΒ εἶ-

ναί κάθετοι ἀναμεταξὺ των. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τῆς γωνίας ΒΟΓ.

1820. (1856). Εἰς ἓνα δισορθογώνιον τραπέζιον ΑΒΓΔ (Α=Δ=90°), τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος εἶναι ἴσον μὲ α, αἱ βάσεις του εἶναι ΑΒ=α₁, ΓΔ=α₂, ὅπου α₁ καὶ α₂ εἶναι αἱ ρίζαι τῆς ἑξισώσεως $x^2 - 4αx + 2α^2 = 0$.

1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπέζιου.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τραπέζιον αὐτὸ εἶναι περιγεγραμμένον περὶ κύκλον.

3ον. Νὰ εὐρεθῇ ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΔ ἓνα σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε ἐάν φέρωμεν τὰς εὐθείας ΜΒ καὶ ΜΓ, τὰ τρίγωνα ΑΜΒ καὶ ΔΜΓ νὰ εἶναι ἰσοδύναμα.

4ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΒΜΓ.

1821. (1857). Εἰς ἓνα τραπέζιον ΑΒΓΔ (ΑΒ ἡ μεγάλη βάση) φέρομεν τὰς διαγωνίους ΑΓ καὶ ΒΔ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς ἓνα σημεῖον Ο καὶ γνωρίζομεν, ὅτι τὸ ἐμβ. τριγ.ΟΑΒ=α² καὶ ἐμβ. τριγ.ΓΟΔ=β². Νὰ ἀποδειχθῇ :

1ον. ὅτι τὰ τρίγωνα ΟΔΑ καὶ ΟΒΓ εἶναι ἰσοδύναμα.

2ον. ὅτι ἐμβ. τριγ.ΟΔΑ=αβ.

3ον. ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπέζιου εἶναι ἴσον μὲ (α+β)².

4ον. Προεκτείνομεν τὰς μὴ παραλλήλους πλευρὰς ΑΔ καὶ ΒΓ μέχρι τῆς συναντήσεώς των εἰς ἓνα σημεῖον Σ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἐμβ. τριγ.ΣΔΓ=β² $\frac{α+β}{α-β}$

καὶ ὅτι ἐμβ. τριγ.ΣΑΒ=α² $\frac{α+β}{α-β}$. Ἐφαρμογή: α²=9 τ.μ., β²=4 τ.μ.

1822. (1858). Ἐνας ἄγρὸς σχήματος τραπέζιου ΑΒΓΔ πρόκειται νὰ μοιρασθῇ μεταξὺ τριῶν κληρονόμων εἰς μέρη ἀντιστρόφως ἀνάλογα τῶν ἡλικιῶν των, διὰ παραλλήλων εὐθειῶν πρὸς τὰς βάσεις του ΑΒ καὶ ΓΔ καὶ οὕτως, ὥστε τὸ μεγαλύτερον μέρος νὰ συνορεύῃ μὲ τὴν μεγάλην βάση καὶ τὸ μικρότερον μὲ τὴν μικρὰν βάση. Αἱ ἡλικίαι τῶν κληρονόμων εἶναι 6 ἔτη, 9 ἔτη 12 ἔτη.

1ον. Νὰ σημειωθοῦν αἱ γεωμετρικαὶ κατασκευαί, τὰς ὁποίας πρέπει νὰ κάμωμεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ἀγροῦ διὰ νὰ εὐρωμεν τὰς δύο γραμμὰς τοῦ διαχωρισμοῦ τοῦ ἀγροῦ.

2ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριῶν μερῶν, ἐάν γνωρίζωμεν τὴν μὴ παράλληλον πλευρὰν ΒΓ=400 μ. καὶ τὴν ἀπόστασιν ΟΗ=45 μ. τοῦ μέσου Ο τῆς ΑΔ ἀπὸ τὴν πλευρὰν ΒΓ.

ΣΤ' Ὀμάς. **1823.** (1859). Δίδεται μία εὐθεῖα χγ καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Β πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς χγ. Ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β φέρομεν τὰς καθέτους ΑΑ' καὶ ΒΒ' πρὸς τὴν χγ.

1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπέζιου ΑΒΒ'Α', ἂν γνωρίζωμεν ὅτι ΑΒ=10 ἑκ., ΒΒ'=10 ἑκ. καὶ ΑΑ'=5 ἑκ.

2ον. Νὰ εὐρεθῇ ἡ φύσις τοῦ τριγώνου ΑΒΒ'.

3ον. Ὅρίζομεν τὸ συμμετρικὸν Α'' τοῦ σημείου Α πρὸς τὴν χγ καὶ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν Α''Β, ἡ ὁποία τέμνει τὴν χγ εἰς τὸ Γ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι γων.ΑΓx=γων.ΒΓy.

1824. (1860). Ἐκατέρωθεν μιᾶς εὐθείας ΑΒ=α κατασκευάζομεν ἓνα ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἓνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΔ, (ΒΑ=ΒΔ), τοῦ ὁποίου ἡ γων.ΑΒΔ=30°. Φέρομεν τὴν ΔΗ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ.

1ον. Νὰ ὑπολογισθῆ, συναρτήσῃ τοῦ α , τὸ μῆκος ΔH καὶ τὸ ἔμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου $\Gamma\Delta\text{B}$.

2ον. Ἡ παράλληλος, ἡ ἀγομένη ἐκ τοῦ Δ πρὸς τὴν AB συναντᾷ τὴν προέκτασιν τῆς GB εἰς τὸ M . Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ BM , GM καὶ τὸ ἔμβαδὸν τοῦ τριγώνου GAM συναρτήσῃ τοῦ α .

3ον. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὸ τρίγωνον GAM εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ τετράπλευρον $\text{G}\Delta\text{B}$.

4ον. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι ἡ περιφέρεια διαμέτρου AB ἐφάπτεται τῆς ΔM καὶ διέρχεται διὰ τῶν μέσων τῶν $\text{B}\Gamma$, GA καὶ AD .

1825. (1861). Ἐπὶ εὐθείας λαμβάνομεν τὰ σημεῖα A , B , G , Δ , οὕτως ὥστε νὰ εἶναι $\text{AB}=\text{B}\Gamma=\text{G}\Delta=\alpha$. Μὲ πλευρὰν τὴν $\text{B}\Gamma$ κατασκευάζομεν τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον BGE . Φέρομεν τὴν AE , ἡ ὁποία προεκτεινομένη τέμνει τὴν κάθετον τὴν ἀγομένην ἐκ τοῦ Δ ἐπὶ τὴν AD εἰς τὸ σημεῖον Z .

1ον. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι $\text{AE}=\text{EZ}$.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι ἡ BE εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν GZ .

3ον. Νὰ ἀποδειχθῆ ὅτι τὸ τετράπλευρον $\text{E}\Gamma\Delta\text{Z}$ εἶναι ἔγγραψιμον εἰς κύκλον. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι ἡ γωνία A εἶναι 30° .

4ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν, συναρτήσῃ τοῦ α , αἱ AE , AZ , ZA , ZG καὶ τὸ ἔμβαδὸν τῶν τριγώνων ABE , AEG , AZG , AZA .

1826. (1862). Ἐπὶ μιᾶς εὐθείας xy λαμβάνομεν κατὰ σειρὰν τὰ σημεῖα A , Δ , M , N , B .

1ον. Νὰ κατασκευασθῆ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον AGM , τὸ ὁποῖον νὰ ἔχη ὑποτείνουσαν τὴν AM καὶ ὡς ὕψος τὸ GA .

2ον. Νὰ κατασκευασθῆ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον BAM , τὸ ὁποῖον νὰ ἔχη ὑποτείνουσαν τὴν BM καὶ τὴν AN ὡς διχοτόμον τῆς γωνίας Δ .

3ον. Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ἔμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου $\text{AB}\Delta\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι $\text{AB}=16\mu$. καὶ ὅτι τὰ τμήματα AA , AM , MN , NB σχηματίζουν ἀριθμητικὴν πρόοδον, τῆς ὁποίας ὁ λόγος εἶναι ἴσος μὲ 2 μέτρα.

1827. (1863). Δίδεται ἓνα τετράπλευρον $\text{AB}\Gamma\Delta$ καὶ μία εὐθεῖα XY . Ἀπὸ τὰς ἀπέναντι κορυφὰς A καὶ Γ φέρομεν παραλλήλους πρὸς τὴν XY , αἱ ὁποῖαι τέμνουσιν τὴν BD εἰς τὰ A' καὶ G' καὶ ἀπὸ τὰς κορυφὰς B καὶ Δ παραλλήλους πρὸς τὴν XY , αἱ ὁποῖαι τέμνουσιν τὴν AG εἰς τὰ B' καὶ Δ' . Νὰ ἀποδειχθῆ:

1ον. ὅτι τὰ ζεύγη τῶν τριγώνων $\text{OB}\Gamma$ καὶ $\text{OB}'\Gamma'$, $\text{O}\Delta\Delta$ καὶ $\text{O}\Delta'\Delta'$, OAB καὶ $\text{O}\Delta\text{B}'$, $\text{O}\Gamma\Delta$ καὶ $\text{O}\Gamma'\Delta'$ εἶναι ἰσοδύναμα.

2ον. ὅτι τὸ τετράπλευρον $\text{A}'\text{B}'\Gamma'\Delta'$ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ $\text{AB}\Gamma\Delta$.

Z' Ὁμάς. 1828. (1864). Ἀπὸ ἓνα σημεῖον A μιᾶς περιφέρειας O ἀκτίνος R φέρομεν δύο χορδὰς AB καὶ AG ἴσας μὲ τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου, τοῦ ἔγγεγραμμένου εἰς τὴν αὐτὴν περιφέρειαν. Ἀπὸ τὸ σημεῖον B φέρομεν τὴν χορδὴν BA ἴσην μὲ τὴν πλευρὰν κανονικοῦ ἑξαγώνου, ἔγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον O καὶ προεκτείνομεν αὐτὴν κατὰ μῆκος $\Delta\text{Z}=\text{BA}$. Τέλος φέρομεν τὴν εὐθεῖαν GZ , ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν O εἰς τὸ σημεῖον E .

1ον. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὸ τρίγωνον $\text{B}\Gamma\text{Z}$ εἶναι ἰσόπλευρον.

2ον. Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ἔμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου $\text{B}\Gamma\text{E}\Delta$.

1829. (1865). Δίδεται ἡμικυκλίωτος O διαμέτρου $\text{AB}=3\alpha$ καὶ ἓνα σημεῖον Σ ἐπὶ τῆς ἡμικυκλίωτος.

1ον. Νὰ ἀχθῆ μία εὐθεῖα $\Gamma\Delta=\alpha$, παράλληλος πρὸς τὴν AB καὶ τεμνοῦσα

τὰς πλευρὰς ΣΑ καὶ ΣΒ τοῦ τριγώνου ΣΑΒ εἰς τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ ἀντιστοίχως.

2ον. Ἐστω Μ τὸ μέσον τῆς ΓΔ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τμήμα ΟΜ εἶναι σταθερόν, οἰαδήποτε καὶ εἴαν εἶναι ἡ θέσις τοῦ Σ ἐπὶ τῆς ἡμιπεριφέρειας. Κατόπιν τούτου νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ Μ, ὅταν τὸ Σ διαγραφῇ τὴν ἡμιπεριφέρειαν.

3ον. Ὑποθέτομεν, ὅτι $\gamma\omega\nu.ΑΒΣ=30^\circ$ φέρομεν τὴν ΔΕ παράλληλον τῆς ΣΑ καὶ ΔΗ παράλληλον τῆς ΓΕ. α) Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΓΕΗΔ εἶναι ῥόμβος. β) Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ περιφέρεια, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τῶν σημείων Δ, Ε, Β εἶναι ἐφαπτομένη τῆς ΔΑ. γ) Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΓΑΗΔ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, ὁ ὁποῖος ἐφάπτεται τῆς ΔΒ δ) Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΣΓΔ.

1830. (1866). Εἰς κύκλον Ο ἀκτίνος R φέρομεν δύο χορδὰς ΑΒ καὶ ΓΔ παραλλήλους καὶ κειμένας ἐκατέρωθεν τοῦ κέντρου Ο καὶ ἴσας ἀντιστοίχως μετὰς πλευρὰς ἑνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου καὶ ἑνὸς κανονικοῦ ἑξαγώνου, ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον Ο.

1ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ τοῦ τραπεζίου ΑΒΔΓ, τὸ ὕψος του καὶ τὸ ἐμβαδὸν του.

2ον. Φέρομεν τὰς χορδὰς ΑΔ καὶ ΒΓ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ε. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ σημεῖον Ε κεῖται ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΘΚ, τῆς καθεῖ του ἐπὶ τὰς χορδὰς ΑΒ καὶ ΓΔ. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου ΑΕΒ καὶ αἱ διαγώνιοι ΑΔ καὶ ΒΓ.

3ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων ΑΕΒ καὶ ΓΕΔ καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν αὐτῶν.

4ον. Ἐκ τοῦ Ε φέρομεν τὴν ΕΔ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓ. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι τοῦ τριγώνου ΑΕΓ, αἱ πλευραὶ του καὶ τὸ ὕψος του ΕΔ.

1831. (1867). Εἰς κύκλον Ο ἀκτίνος R ἐγγράφομεν ἕνα κανονικὸν ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ καὶ τὰ δύο ἰσόπλευρα τρίγωνα ΑΓΕ καὶ ΒΔΖ.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ κοινὸν μέρος ΗΘΙΚΑΜ τῶν δύο ἰσοπλεύρων αὐτῶν τριγώνων εἶναι ἕνα κανονικὸν ἑξάγωνον.

2ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν, τὸ περιεχόμενον μεταξὺ τοῦ δοθέντος κύκλου καὶ τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου ΗΘΙΚΑΜ.

1832. (1868). Δίδεται ἡμιπεριφέρεια διαμέτρου ΑΒ=2R. Φέρομεν τὴν χορδὴν ΓΔ=R, παράλληλον τῆς ΑΒ.

1ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι καὶ αἱ μὴ παράλληλοι πλευραὶ τοῦ τραπεζίου ΑΒΔΓ.

2ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν, συναρτήσει τῆς ἀκτίνος R, αἱ διαγώνιοι ΑΔ καὶ ΒΓ τοῦ τραπεζίου.

3ον. Αἱ διαγώνιοι τοῦ τραπεζίου τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ε, αἱ δὲ μὴ παράλληλοι πλευραὶ του τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ζ. Νὰ ὑπολογισθοῦν, συναρτήσει τῆς R, τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριγώνων ΓΖΔ, ΓΕΔ, ΑΕΒ.

1833. (1869). Ἡ περιφέρεια, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον τὸ ὕψος ΑΔ ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τὴν πλευρὰν ΑΒ εἰς τὸ Β' καὶ τὴν πλευρὰν ΑΓ εἰς τὸ Γ'. Φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας τῆς περιφέρειας αὐτῆς εἰς τὰ σημεῖα Β' καὶ Γ', οἱ ὁποῖαι τέμνουσιν τὴν ὑποτεινούσαν ΒΓ εἰς τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν ἀντιστοίχως.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΑΒ'ΔΓ' εἶναι ὀρθογώνιον.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΒ'Γ' καὶ ΑΒΓ εἶναι ὁμοία.

3ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $MN = \frac{BG}{2}$.

4ον. Νὰ συγκριθῇ τὸ ἔμβασδὸν τοῦ τραπεζίου Β'ΜΝΓ' πρὸς τὸ ἔμβασδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

1834. (1870). Δύο περιφέρειαι Ο καὶ Ο' ἀκτίνων R καὶ R' ἀντιστοιχοῦν τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β εἰς τρόπον, ὥστε ἡ γωνία ΟΑΟ' νὰ εἶναι ὀρθή.

1ον. Ἐστω Μ τὸ μέσον τῆς ΟΟ'. Φέρομεν τὴν ΑΜ καὶ ἐκ τοῦ Α κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΜ, ἡ ὁποία ὀρίζει ἐπὶ τῆς περιφερείας Ο τὴν χορδὴν ΑΓ καὶ ἐπὶ τῆς περιφερείας Ο' τὴν χορδὴν ΑΔ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ΑΓ=ΑΔ.

2ον. Φέρομεν τὰς ΟΖ καὶ Ο'Η κάθετους ἐπὶ τὴν ΓΑΔ, τὴν ΑΕ κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΟ' καὶ τὴν ΟΘ κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΖ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ τρίγωνα ΑΕΜ καὶ Ο'ΘΟ εἶναι ὅμοια.

3ον. Ἐὰν R=6 ἐκ. καὶ R'=4,5 ἐκ. νὰ ὑπολογισθοῦν: ἡ διάκεντρος ΟΟ', ἡ ΑΜ, ἡ ΟΘ καὶ ἡ χορδὴ ΑΓ.

1835. (1871). Δίδεται ἡμικυκλίαι διαμέτρου ΑΒ=2R. Ἐπὶ τῆς διαμέτρου ΑΒ λαμβάνομεν ἓνα σημεῖον Γ τοιοῦτον, ὥστε ΑΓ=x. Μὲ διαμέτρους τὰς ΑΓ καὶ ΓΒ γράφομεν ἡμικυκλίαι, κειμένας ἐντὸς τῆς δοθείσης ἡμικυκλείας.

1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ, συναρτήσῃ τῶν R καὶ x, τὸ ἔμβασδὸν τῆς ἐπιφανείας, ἡ ὁποία περιέχεται μεταξὺ τῶν τριῶν ἡμικυκλείων.

2ον. Ἐὰν $2R=5$ ἐκμ. νὰ εὑρεθῇ διὰ ποίαν τιμὴν τοῦ x τὸ ἔμβασδὸν τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς εἶναι ἴσον μὲ τὰ $\frac{8}{25}$ τοῦ ἔμβασδοῦ τοῦ ἡμικυκλίου διαμέτρου ΑΒ.

3ον. Τὸ ἔμβασδὸν τῆς ἐπιφανείας, τῆς περιεχομένης μεταξὺ τῶν τριῶν ἡμικυκλείων, δύναται νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἡμισυ τοῦ ἔμβασδοῦ τοῦ ἡμικυκλίου διαμέτρου ΑΒ; Ποία θὰ εἶναι τότε ἡ θέσις τοῦ Γ;

1836. (1872). Δύο κύκλοι Ο καὶ Ο' ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς τὸ σημεῖον Α. Φέρομεν τὴν κοινὴν ἐξωτερικὴν ἐφαπτομένην ΒΒ'.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΟ', ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ Α, διέρχεται ἐκ τοῦ μέσου Μ τῆς ΒΒ'.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον ΟΜΟ' εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Μ.

3ον. Ἐὰν ἡ ἀκτίς τοῦ κύκλου Ο εἶναι 3R, τοῦ δὲ κύκλου Ο' εἶναι R, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία ΒΟΟ'=60° καὶ γων.ΟΟ'Β'=120°. Νὰ ὑπολογισθῇ: α) ἡ ΒΒ', β) τὸ ἔμβασδὸν τοῦ τριγώνου ΟΜΟ', γ) τὸ ἔμβασδὸν τοῦ μέρους, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῆς κοινῆς ἐφαπτομένης ΒΒ' καὶ τῶν τόξων ΒΑ καὶ ΑΒ'.

1837. (1873). Δίδεται μία περιφέρεια Ο διαμέτρου ΑΒ=2R καὶ ἡ ἐφαπτομένη χγ εἰς τὸ σημεῖον Α τῆς περιφερείας αὐτῆς.

1ον. Ἀπὸ τὸ σημεῖον Β φέρομεν μίαν τυχούσαν τέμνουσαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν περιφέρειαν εἰς τὸ Μ καὶ τὴν χγ εἰς τὸ Ν. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $BM \times BN = BA^2$.

2ον. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ περιφέρεια, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ Μ καὶ ἐφάπτεται τῆς χγ εἰς τὸ Ν. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ περιφέρεια αὐτὴ ἐφάπτεται τῆς Ο.

3ον. Ἐὰν ΑΒ=ΑΝ=8 ἐκ. νὰ καθορισθοῦν αἱ λεπτομέρειαι τοῦ σχήματος, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῶν δύο περιφερείων καὶ τῆς κοινῆς ἐφαπτομένης χγ.

1838. (1874). Δίδεται τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ ὀρθογώνιον εἰς τὸ A , τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι $B\Gamma = \alpha$, $\Gamma A = \beta$, $AB = \gamma$. Μὲ διάμετρον τὴν $B\Gamma$ γράφομεν περιφέρειαν O . Μὲ διαμέτρους τὰς καθέτους πλευρὰς AB καὶ $A\Gamma$ γράφομεν ἡμιπεριφέρειας κειμένας ἐκτὸς τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$.

1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ, συναρτήσῃ τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου, τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο μηνίσκων τῶν περιεχομένων μεταξύ τῶν δύο ἡμιπεριφερειῶν καὶ τῆς περιφερείας O .

2ον. Νὰ συγκριθῇ τὸ ἔξαγόμενον αὐτὸ πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$.

3ον. Ἐὰν τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ἐνὸς ἐκ τῶν ἡμικυκλίων εἶναι τριπλάσιον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ἄλλου, νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ β καὶ γ συναρτήσῃ τοῦ α .

4ον. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ὀξεῖαι γωνίαι B καὶ Γ καὶ τὸ ἐμβαδὸν ὀλοκλήρου τοῦ σχήματος συναρτήσῃ τοῦ α .

1839. (1875). Δίδεται ἓνα ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$, τοῦ ὁποίου ἡ ὑποτείνουσα $B\Gamma = 2\alpha$ καὶ $\gamma\omega\nu. B = 90^\circ$. Μὲ διαμέτρους τὰς $B\Gamma$ καὶ $A\Gamma$ γράφομεν ἡμιπεριφερείας κέντρων Δ καὶ E καὶ κειμένας ἐκτὸς τοῦ δοθέντος τριγώνου. Φέρομεν ἔπειτα τὰς ἐφαπτομένας $Z\Theta$ καὶ $H\Theta$ τῶν ἡμιπεριφερειῶν Δ καὶ E , παραλλήλους ἀντιστοίχως πρὸς τὰς πλευρὰς $B\Gamma$ καὶ $A\Gamma$ τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$, αἱ ὁποῖα τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Θ .

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τετράπλευρον $\Theta H \Delta Z$ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

2ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ μήκη τῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου αὐτοῦ.

3ον. Νὰ ὑπολογισθῇ, συναρτήσῃ τοῦ α , τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μικτογράμμου σχήματος, τοῦ περιεχομένου μεταξύ τῶν ἐφαπτομένων ΘZ καὶ ΘH καὶ τῶν τόξων ΓZ καὶ ΓH .

1840. (1876). Ἐνα τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον O , ἀκτίνος R . Ἡ πλευρὰ AB εἶναι ἴση μὲ τὴν πλευρὰν κανονικοῦ ἔξαγώνου, ἡ δὲ $B\Gamma$ εἶναι ἴση μὲ τὴν πλευρὰν ἰσοπλεύρου τριγώνου, ἐγγεγραμμένων εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον O .

1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τρίτη πλευρὰ τοῦ τριγώνου καὶ τὸ ἐμβαδὸν του, συναρτήσῃ τῆς ἀκτίνος R .

2ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τοῦ τριγώνου καὶ τοῦ κύκλου.

3ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ καὶ τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου, τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν αὐτὸν κύκλον O .

4ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῶν κυκλικῶν τμημάτων, τὰ ὁποῖα ὀρίζονται ὑπὸ τῶν τριῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$.

1841. (1877). Δίδεται ἓνα ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον OAB , εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι $OA = OB = \alpha$. Γράφομεν ἓνα τόξον κύκλου AMB , τὸ ὁποῖον ἐφάπτεται τῶν πλευρῶν τῆς ὀρθῆς γωνίας O εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B . Γράφομεν ἔπειτα ἓνα δευτέρον τόξον ANB , τὸ ὁποῖον ἐφάπτεται τῶν διχοτόμων τῶν γωνιῶν A καὶ B εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B . Ἐστω Γ τὸ κέντρον τοῦ δευτέρου κύκλου. Νὰ ὑπολογισθοῦν :

1ον. ἡ ἀπόστασις ΓH τοῦ Γ ἀπὸ τὴν πλευρὰν AB .

2ον. ἡ ἀκτίς τοῦ δευτέρου κύκλου.

3ον. τὸ ἐμβαδὸν $AMBNA$, τὸ ὁποῖον περιλαμβάνεται μεταξύ τῶν δύο τόξων AMB καὶ ANB .

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ

ΤΟΥ ΤΡΙΤΟΥ ΚΑΙ ΤΕΤΑΡΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

1. Μετρικαὶ σχέσεις εἰς τὸ τρίγωνον καὶ εἰς τὸ τετράπλευρον

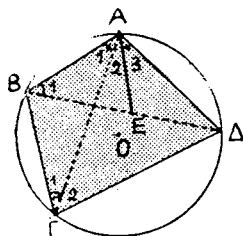
566. 1ον Θεώρημα τοῦ Πτολεμαίου. *Εἰς ἓνα τετράπλευρον ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον, τὸ γινόμενον τῶν διαγωνίων του εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν ἀπέναντι πλευρῶν του.*

Ἐπίπεδος: Ἐστω τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ (Σχ. 392), τὸ ὁποῖον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον Ο καὶ ΑΓ, ΒΔ αἱ διαγώνιοί του.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι:

$$ΑΓ \times ΒΔ = ΑΒ \times ΓΔ + ΒΓ \times ΑΔ.$$

Ἀπόδειξις: Ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α φέρομεν μίαν εὐθεῖαν ΑΕ, ἣ ὁποία νὰ σχηματίζῃ μὲ τὴν πλευρὰν ΑΔ μίαν γωνίαν Α₂ ἴσην μὲ τὴν γωνίαν Α₁. Ἡ ΑΕ τέμνει τὴν διαγώνιον ΒΔ εἰς τὸ σημεῖον Ε. Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΕΔ εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουν $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$, ἐκ κατασκευῆς καὶ $\widehat{\Gamma}_1 = \widehat{\Delta}_1$, διότι εἶναι ἐγγεγραμμένα καὶ βαίνουν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΑΒ.



Σχ. 392.

Ἀπὸ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων αὐτῶν λαμβάνομεν

$$\frac{ΒΓ}{ΕΔ} = \frac{ΑΓ}{ΑΔ} \quad \eta \quad ΒΓ \times ΑΔ = ΑΓ \times ΕΔ \quad (1)$$

Ὄμοιως τὰ τρίγωνα ΑΒΕ καὶ ΑΓΔ εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουν: $\widehat{B}_1 = \widehat{\Gamma}_2$, διότι εἶναι ἐγγεγραμμένα εἰς τὸν κύκλον Ο καὶ βαίνουν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου ΑΔ, καὶ $\widehat{B}_2 = \widehat{\Gamma}_1$, διότι καθεμία ἀπὸ αὐτὰς εἶναι ἄθροισμα τῆς κοινῆς γωνίας Α₂ καὶ τῶν ἴσων γωνιῶν Α₁ καὶ Α₂. Ἀπὸ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων αὐτῶν λαμβάνομεν

$$\frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{ΒΕ}{ΓΔ} \quad \eta \quad ΑΒ \times ΓΔ = ΑΓ \times ΒΕ \quad (2)$$

Προσθέτομεν τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν
 $B\Gamma \times A\Delta + A\beta \times \Gamma\Delta = A\Gamma \times E\Delta + A\Gamma \times BE$ ἢ
 $B\Gamma \times A\Delta + A\beta \times \Gamma\Delta = A\Gamma(E\Delta + BE)$

Ἐπειδὴ $E\Delta + BE = B\Delta$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γράφεται

$$\boxed{B\Gamma \times A\Delta + A\beta \times \Gamma\Delta = A\Gamma \times B\Delta}$$

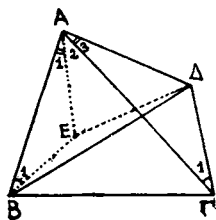
Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: *Εἰς ἓνα τετράπλευρον...*

567. 2ον Θεώρημα (Πτολεμαίου). *Εἰς κάθε τετράπλευρον, τὸ ὁποῖον δὲν εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τοῦ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ γινομένου τῶν διαγωνίων του.*

Ἐπίπεδοι: Ἐστω τὸ τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$ (Σχ. 393), τὸ ὁποῖον δὲν εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι
 $AB \times \Gamma\Delta + B\Gamma \times \Delta A > A\Gamma \times B\Delta$.

Ἀπόδειξις: Ἀπὸ τὴν κορυφὴν A φέρομεν τὴν εὐθεῖαν AE οὕτως, ὥστε ἡ γωνία A_1 νὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν A_3 . Ἐπίσης ἀπὸ τὴν κορυφὴν B φέρομεν τὴν εὐθεῖαν BE οὕτως,



Σχ. 393.

ὥστε $\hat{B}_1 = \hat{B}_3$. Αἱ πλευραὶ AE καὶ BE τέμνον-

ται εἰς ἓνα σημεῖον E , τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τῆς διαγωνίου $B\Delta$, διότι τὸ τετράπλευρον δὲν εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον. Ἐὰν λοιπὸν φέρωμεν τὴν εὐθεῖαν $E\Delta$, θὰ εἶναι $B\Delta < BE + E\Delta$ (1)

Τὰ τρίγωνα ABE καὶ $A\Gamma E$ εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουν γων. $A_1 = \text{γων. } A_3$ καὶ γων. $B_1 = \text{γων. } \Gamma_1$: ἀπὸ τὴν ὁμοιότητα αὐτῶν ἔχομεν

$$\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{BE}{\Gamma E} = \frac{AE}{A\Delta} \quad \text{ἢ} \quad \frac{AB}{A\Gamma} = \frac{BE}{\Gamma\Delta} \quad (2) \quad \text{καὶ} \quad \frac{AB}{A\Gamma} = \frac{AE}{A\Delta} \quad (3)$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν (2) λαμβάνομεν $AB \times \Gamma\Delta = A\Gamma \times BE$ (4)

Τὰ τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $AE\Delta$ εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουν γων. $BAG = \text{γων. } EAD$, διότι καθεμία ἀπὸ αὐτὰς εἶναι ἄθροισμα τῶν ἴσων γωνιῶν A_1 καὶ A_3 καὶ τῆς κοινῆς γωνίας A_2 , καὶ τὰς περιεχούσας αὐτὰς πλευρὰς ἀναλόγους, ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὴν σχέσιν (3). Ἀπὸ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγῶνων αὐτῶν λαμβάνομεν

$$\frac{B\Gamma}{\Delta E} = \frac{A\Gamma}{A\Delta} \quad \text{ἢ} \quad B\Gamma \times A\Delta = A\Gamma \times \Delta E \quad (5)$$

Προσθέτομεν τὰς ἰσότητας (4) καὶ (5) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$AB \times \Gamma\Delta + B\Gamma \times A\Delta = A\Gamma \times BE + A\Gamma \times \Delta E$$

$$\text{ἢ} \quad AB \times \Gamma\Delta + B\Gamma \times A\Delta = A\Gamma(BE + \Delta E) \quad (6)$$

Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν τελευταίαν ἰσότητα τὸ ἄθροισμα $BE + \Delta E$ μὲ τὸ μικρότερόν του $B\Delta$, ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὴν ἀνισότητα (1), ἡ ἰσότης (6) γίνεται $AB \times \Gamma\Delta + B\Gamma \times A\Delta > A\Gamma \times B\Delta$.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: *Εἰς κάθε τετράπλευρον...*

568. Πόρισμα. Ἐὰν εἰς ἓνα τετράπλευρον τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν ἀπέναντι πλευρῶν του εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῶν διαγωνίων του, τὸ τετράπλευρον εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον.

Διότι, ἐὰν τὸ τετράπλευρον δὲν ἦτο ἐγγράψιμον εἰς κύκλον, τὸ ἄθροισμα τῶν γινομένων τῶν ἀπέναντι πλευρῶν του θὰ ἦτο μεγαλύτερον τοῦ γινομένου τῶν διαγωνίων των, τὸ ὁποῖον ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσίν μας.

569. 3ον Θεώρημα (Πτολεμαίου). Ὁ λόγος τῶν διαγωνίων ἑνὸς τετραπλεύρου, ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον, εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν ἀθροισμάτων τῶν γινομένων τῶν πλευρῶν, ποῦ καταλήγουσιν εἰς τὰ ἄκρα των.

Ἐπιπέσεις: Ἐστω τὸ τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον O καὶ $A\Gamma$, $B\Delta$ αἱ διαγώνιοί του.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν ὅτι

$$\frac{A\Gamma}{B\Delta} = \frac{AB \times A\Delta + B\Gamma \times \Gamma\Delta}{AB \times B\Gamma + A\Delta \times \Gamma\Delta}$$

Ἀπόδειξις: Ἐπιπέτομεν, ὅτι τὸ τόξον AB εἶναι μεγαλύτερον τῶν τόξων $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔA .

Ἐπὶ τοῦ τόξου AB λαμβάνομεν τὰ τόξα AE καὶ BZ , ἴσα ἀντιστοίχως πρὸς τὰ τόξα $B\Gamma$ καὶ $A\Delta$. Φέρομεν τὰς χορδὰς ΔE , ΔZ , ΓE , ΓZ καὶ AE , EB .

Ἀπὸ τὰ τετράπλευρα $E\Delta A\Gamma$ καὶ $ZB\Gamma\Delta$ ἔχομεν κατὰ τὸ 1ον θεώρημα τοῦ Πτολεμαίου

$$A\Gamma \times \Delta E = A\Delta \times \Gamma E + AE \times \Gamma\Delta \quad (1)$$

$$B\Delta \times \Gamma Z = B\Gamma \times \Delta Z + \Gamma\Delta \times BZ \quad (2)$$

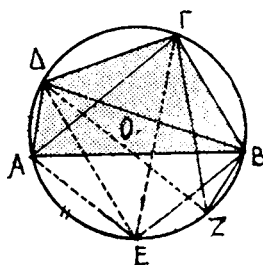
Διαιροῦμεν τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\frac{A\Gamma \times \Delta E}{B\Delta \times \Gamma Z} = \frac{A\Delta \times \Gamma E + AE \times \Gamma\Delta}{B\Gamma \times \Delta Z + \Gamma\Delta \times BZ} \quad (3)$$

Ἐπειδὴ εἰς ἴσα τόξα ἀντιστοιχοῦν ἴσαι χορδαί, θὰ εἶναι

$$\Delta E = \Gamma Z, \quad AE = B\Gamma, \quad BZ = A\Delta, \quad \Gamma E = \Delta Z = AB \quad (4)$$

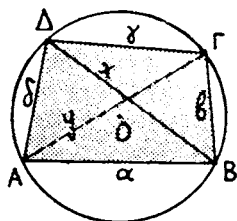
Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (3) τὰς βοηθητικὰς χορδὰς τοῦ κύκλου O , τὰς ἀσχέτους πρὸς τὰ στοιχεῖα τοῦ τετραπλεύρου, διὰ τῶν



Σχ. 394.

ἴσων των, ποὺ δίδουν αἱ ἰσότητες (4) καὶ εἰς τὸ πρῶτον μέλος της τὸ ΓΖ μὲ τὸ ἴσον του ΔΕ καὶ μετὰ τὴν ἀπλοποίησιν λαμβάνομεν

$$\frac{ΑΓ}{ΒΔ} = \frac{ΑΒ \times ΑΔ + ΒΓ \times ΓΔ}{ΑΒ \times ΒΓ + ΑΔ \times ΓΔ}$$



Σχ. 395.

Παρατήρησις: Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ α, β, γ, δ τὰς πλευρὰς τοῦ τετραπλεύρου καὶ μὲ x, y τὰς διαγωνίους του ΒΔ καὶ ΑΓ θὰ ἔχωμεν κατὰ τὰ θεωρήματα 566, 569,

$$\boxed{xy = \alpha\gamma + \beta\delta}, \quad \boxed{\frac{x}{y} = \frac{\alpha\beta + \gamma\delta}{\alpha\delta + \beta\gamma}}$$

Ἐὰν πολλαπλασιάσωμεν τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη, θὰ εὑρωμεν

$$\boxed{x^2 = \frac{(\alpha\gamma + \beta\delta)(\alpha\beta + \gamma\delta)}{\alpha\delta + \beta\gamma}}$$

$$\boxed{y^2 = \frac{(\alpha\gamma + \beta\delta)(\alpha\delta + \beta\gamma)}{\alpha\beta + \gamma\delta}}$$

Ὅμοίως εὐρίσκομεν

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: Ὁ λόγος τῶν διαγωνίων. . .

570. Ἐφαρμογή. Πρόβλημα τῶν τριῶν χορδῶν. Ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν ἀκτίνα R ἐνὸς κύκλου καὶ τὰς χορδὰς α καὶ β δύο τόξων, νὰ ὑπολογισθῇ: 1ον ἡ χορδὴ x τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο αὐτῶν τόξων. 2ον ἡ χορδὴ y τῆς διαφορᾶς τῶν δύο αὐτῶν τόξων.

1ον. Ἐστω ὁ κύκλος Ο ἀκτίνος R καὶ ΑΒ=α, ΑΓ=β δύο χορδαὶ αὐτοῦ (Σχ. 396α).

Φέρομεν τὴν χορδὴν ΒΓ, τῆς ὁποίας ζητεῖται τὸ μῆκος.

Φέρομεν τὴν διάμετρον ΑΔ καὶ τὰς χορδὰς ΒΔ καὶ ΔΓ.

Ἀπὸ τὸ τετράπλευρον ΑΒΔΓ ἔχομεν, κατὰ τὸ 1ον θεώρημα τοῦ Πτολεμαίου

$$ΒΓ \times ΑΔ = ΑΒ \times ΔΓ + ΑΓ \times ΒΔ$$

$$\text{ἢ } ΒΓ \times 2R = \alpha \times ΔΓ + \beta \times ΒΔ \quad (1)$$

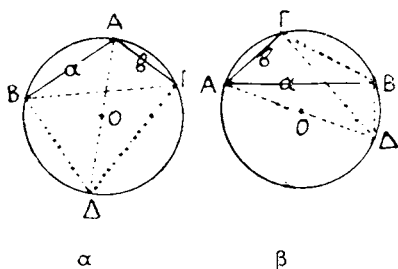
Ἐπολογίζομεν τὰ ΔΓ καὶ ΒΔ.

Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΔ ἔχομεν

$$\overline{ΒΔ}^2 = \overline{ΑΔ}^2 - \overline{ΑΒ}^2 \quad \text{ἢ} \quad \overline{ΒΔ}^2 = 4R^2 - \alpha^2, \quad \text{ἄρα } ΒΔ = \sqrt{4R^2 - \alpha^2}$$

Ὅμοίως ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΓΔ ἔχομεν

$$\overline{ΔΓ}^2 = \overline{ΑΔ}^2 - \overline{ΑΓ}^2, \quad \overline{ΔΓ}^2 = 4R^2 - \beta^2, \quad \text{ἄρα } ΔΓ = \sqrt{4R^2 - \beta^2}$$



Σχ. 396.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὰ ΔΓ καὶ ΒΔ μὲ τὰ ἴσα των καὶ ἔχομεν

$$ΒΓ \times 2R = \alpha \sqrt{4R^2 - \beta^2} + \beta \sqrt{4R^2 - \alpha^2}, \text{ ἄρα } ΒΓ = \frac{\alpha \sqrt{4R^2 - \beta^2} + \beta \sqrt{4R^2 - \alpha^2}}{2R}.$$

2ον. Ἐστωσαν δύο χορδαὶ $AB = \alpha$ καὶ $AG = \beta$, $\alpha > \beta$ τοῦ κύκλου O (Σχ. 396β). Φέρομεν τὴν χορδὴν ΒΓ, τῆς ὁποίας ζητεῖται τὸ μῆκος. Φέρομεν τὴν διάμετρον ΑΔ καὶ τὰς χορδὰς ΓΔ καὶ ΒΔ.

Ἀπὸ τὸ τετράπλευρον ΑΔΒΓ ἔχομεν, κατὰ τὸ θεώρημα τοῦ Πτολεμαίου, $AB \times \Gamma\Delta = ΒΓ \times ΑΔ + ΑΓ \times ΒΔ$ ἢ $\alpha \times \Gamma\Delta = ΒΓ \times 2R + \beta \times ΒΔ$
ἢ $ΒΓ \times 2R = \alpha \times \Gamma\Delta - \beta \times ΒΔ$ (2)

Ἀπὸ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ καὶ ΑΓΔ εὐρίσκομεν

$$\Gamma\Delta = \sqrt{4R^2 - \beta^2}, \quad ΒΔ = \sqrt{4R^2 - \alpha^2}.$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (2) τὰ ΓΔ καὶ ΒΔ μὲ τὰ ἴσα των καὶ ἔχομεν

$$ΒΓ \times 2R = \alpha \sqrt{4R^2 - \beta^2} - \beta \sqrt{4R^2 - \alpha^2}, \text{ ἄρα } ΒΓ = \frac{\alpha \sqrt{4R^2 - \beta^2} - \beta \sqrt{4R^2 - \alpha^2}}{2R}.$$

Ἀσκήσεις: 1842, 1843, 1844, 1845.

571. Θεώρημα τοῦ Euler. *Εἰς κάθε τετράπλευρον τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων πλευρῶν του εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων του, ἠὲξημένον κατὰ τὸ τετραπλάσιον τετράγωνον τῆς εὐθείας, ἣ ὁποία συνδέει τὰ μέσα τῶν διαγωνίων του.*

Ἐπίπεδος: Ἐστω ΑΒΓΔ (Σχ. 397) ἕνα τετράπλευρον, Ε καὶ Ζ τὰ μέσα τῶν διαγωνίων του ΑΓ καὶ ΒΔ. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΕΖ.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν ὅτι

$$\overline{AB^2} + \overline{BG^2} + \overline{\Gamma\Delta^2} + \overline{\Delta A^2} = \overline{AG^2} + \overline{BD^2} + 4\overline{EZ^2}.$$

Ἀπόδειξις: Φέρομεν τὰς εὐθείας ΒΕ καὶ ΔΕ. Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ἡ ΒΕ εἶναι διάμεσός του καὶ κατὰ τὸ θεώρημα τῶν διαμέσων τριγώνου θὰ εἶναι

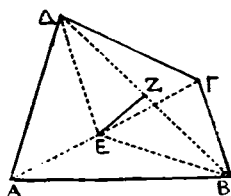
$$\overline{AB^2} + \overline{BG^2} = 2\overline{BE^2} + 2\overline{AE^2} \quad (1)$$

Ὁμοίως εἰς τὸ τρίγωνον ΑΔΓ, ἡ ΔΕ εἶναι διάμεσός του καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι $\overline{\Gamma\Delta^2} + \overline{\Delta A^2} = 2\overline{DE^2} + 2\overline{AE^2}$ (2)

Προσθέτομεν τὰς ἰσοτήτας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\overline{AB^2} + \overline{BG^2} + \overline{\Gamma\Delta^2} + \overline{\Delta A^2} = 2\overline{BE^2} + 2\overline{DE^2} + 4\overline{AE^2} \quad (3)$$

Εἰς τὸ τρίγωνον ΔΕΒ, ἡ ΕΖ εἶναι διάμεσός του καὶ ἐπομένως θὰ



Σχ. 397.

ἔχομεν $\overline{BE}^2 + \overline{AE}^2 = 2\overline{EZ}^2 + 2\overline{ZB}^2$ ἢ $2\overline{BE}^2 + 2\overline{EA}^2 = 4\overline{EZ}^2 + 4\overline{ZB}^2$.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἰσότητος (3) τὸ ἄθροισμα $2\overline{BE}^2 + 2\overline{AE}^2$ μὲ τὸ ἴσον του $4\overline{EZ}^2 + 4\overline{ZB}^2$ καὶ ἔχομεν

$$\overline{AB}^2 + \overline{BG}^2 + \overline{\Gamma\Delta}^2 + \overline{\Delta A}^2 = 4\overline{EZ}^2 + 4\overline{ZB}^2 + 4\overline{AE}^2 \quad (4)$$

Ἐπειδὴ $4\overline{ZB}^2 = (2 \times \overline{ZB})^2 = \overline{BD}^2$ καὶ $4\overline{AE}^2 = (2 \times \overline{AE})^2 = \overline{AG}^2$ ἡ ἰσότης (4) γράφεται

$$\overline{AB}^2 + \overline{BG}^2 + \overline{\Gamma\Delta}^2 + \overline{\Delta A}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{BD}^2 + 4\overline{EZ}^2$$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: *Εἰς κάθε τετράπλευρον. . .*

572. Πόρισμα I. *Εἰς κάθε παραλληλόγραμμον, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τεσσάρων πλευρῶν του εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων του.*

Διότι εἰς τὸ παραλληλόγραμμον τὰ μέσα E καὶ Z τῶν διαγωνίων του συμπίπτουν καὶ ἐπομένως ἡ εὐθεῖα EZ μηδενίζεται. Ὡστε, ἂν ἔχομεν ἓνα παραλληλόγραμμον ABΓΔ θὰ εἶναι

$$\overline{AB}^2 + \overline{BG}^2 + \overline{\Gamma\Delta}^2 + \overline{\Delta A}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{BD}^2.$$

Ἀσκησις: 1846.

573. Θεώρημα τοῦ Stewart (Στούαρτ). *Ἐὰν συνδέσωμεν μὲ εὐθεῖαν τὴν κορυφὴν A ἐνὸς τριγώνου ABΓ μὲ τυχὸν σημεῖον M τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς BG, θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν:*

$$\overline{AB}^2 \cdot \overline{MG} + \overline{AG}^2 \cdot \overline{BM} - \overline{AM}^2 \cdot \overline{BG} = \overline{BM} \cdot \overline{MG} \cdot \overline{BG}.$$

Ἀπόδειξις: Ἀπὸ τὴν κορυφὴν A τοῦ τριγώνου ABΓ φέρομεν τὴν κάθετον AD ἐπὶ τὴν πλευρὰν BG.

Ἡ AM σχηματίζει μὲ τὴν BG δύο γωνίας ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία εἶναι ὀξεῖα καὶ ἡ ἄλλη ἀμβλεῖα.

Εἰς τὸ τρίγωνον ABM, ἡ πλευρὰ AB κεῖται ἀπέναντι τῆς ἀμβλείας γωνίας M_1 καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι (§ 432) $\overline{AB}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{BM}^2 + 2\overline{BM} \cdot \overline{MA}$.

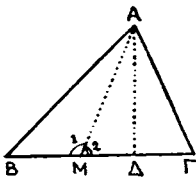
Πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος αὐτῆς ἐπὶ MG καὶ ἔχομεν

$$\overline{AB}^2 \cdot \overline{MG} = \overline{AM}^2 \cdot \overline{MG} + \overline{BM}^2 \cdot \overline{MG} + 2\overline{BM} \cdot \overline{MA} \cdot \overline{MG} \quad (1)$$

Εἰς τὸ τρίγωνον AMΓ, ἡ πλευρὰ AG κεῖται ἀπέναντι τῆς ὀξείας γωνίας M_2 καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι (§ 431)

$$\overline{AG}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{MG}^2 - 2\overline{MG} \cdot \overline{MA}.$$

Πολλαπλασιάζομεν καὶ τὰ δύο μέλη τῆς ἰσότητος αὐτῆς ἐπὶ BM



Σχ. 398.

$$\text{και ἔχομεν } \overline{A\Gamma^2} \cdot \overline{BM} = \overline{AM^2} \cdot \overline{BM} + \overline{M\Gamma^2} \cdot \overline{BM} - 2\overline{M\Gamma} \cdot \overline{M\Delta} \cdot \overline{BM} \quad (2)$$

Προσθέτομεν τὰς ἰσοτήτας (1) και (2) κατὰ μέλη και ἔχομεν

$$\begin{aligned} \overline{AB^2} \cdot \overline{M\Gamma} + \overline{A\Gamma^2} \cdot \overline{BM} &= \overline{AM^2} \cdot \overline{M\Gamma} + \overline{AM^2} \cdot \overline{BM} + \overline{BM^2} \cdot \overline{M\Gamma} + \overline{M\Gamma^2} \cdot \overline{BM} \\ &= \overline{AM^2}(\overline{M\Gamma} + \overline{BM}) + \overline{BM} \cdot \overline{M\Gamma}(\overline{BM} + \overline{M\Gamma}) \\ &= \overline{AM^2} \cdot \overline{B\Gamma} + \overline{BM} \cdot \overline{M\Gamma} \cdot \overline{B\Gamma}. \end{aligned}$$

Μεταφέρουμεν τὸν ὄρον $\overline{AM^2} \cdot \overline{B\Gamma}$ εις τὸ πρῶτον μέλος και ἔχομεν τὴν σχέσηιν

$$\boxed{\overline{AB^2} \cdot \overline{M\Gamma} + \overline{A\Gamma^2} \cdot \overline{MB} - \overline{AM^2} \cdot \overline{B\Gamma} = \overline{BM} \cdot \overline{M\Gamma} \cdot \overline{B\Gamma}}$$

ἣ ὁποία λέγεται *σχέσις τοῦ Stewart*.

**Ἀσκήσεις*: 1847, 1848.

Ἀσκήσεις

1842. (1878). Δίδεται ἓνα ἰσόπλευρον τρίγωνον $AB\Gamma$ και ἓνα σημεῖον O τοῦ ἐπιπέδου του. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι ἡ μεγαλυτέρα τῶν τριῶν ἀποστάσεων $OA, OB, O\Gamma$ εἶναι μικροτέρα ἢ ἴση τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων.

1843 (1879). Ἐνα ἰσόπλευρον τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι ἐγγεγραμμένον εις ἓνα κύκλον O . Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς ἀποστάσεως σημείου M τοῦ τόξου $A\Gamma$ ἀπὸ τῆς κορυφῆς B ὑπερβαίνει τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων τοῦ M ἀπὸ τὰς κορυφὰς A και Γ κατὰ τὸ τετραπλάσιον γινόμενον τῆς ἀκτίνοσ R τοῦ κύκλου ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν ME τοῦ M ἀπὸ τὴν $A\Gamma$.

1844. (1880). Δίδεται ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ἐγγεγραμμένον εις κύκλον O .

1ον. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι ἡ διχοτόμος AD τῆς γωνίας A σχηματίζει μετὴν πλευρὰν $B\Gamma$ δύο γωνίας, τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ ἰσοῦται μετὰ $\widehat{\Gamma} - \widehat{B}$.

2ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ γωνίαι B και Γ , ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι $\widehat{A} = 60^\circ$ και ὅτι $\widehat{\Gamma} - \widehat{B} = 17^\circ$.

3ον. Ἐὰν $\widehat{A} = 60^\circ$ νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι ὁ ἀπόστασις τῆς κορυφῆς A ἀπὸ τοῦ μέσου M τοῦ τόξου $BA\Gamma$ εἶναι ἴση μετὴν διαφορὰν $AB - A\Gamma$ τῶν δύο πλευρῶν τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$.

1845. (1881). Δίδεται τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$, ὀρθογώνιον εις τὸ A . Φέρομεν τὸ ὕψος AH και τὴν διχοτόμον AD τῆς γωνίας A . Ἀπὸ τὸ μέσον M τῆς AD φέρομεν κάθετον ἐπ' αὐτήν, ἡ ὁποία τέμνει τὰς καθέτους πλευρὰς AB και $A\Gamma$ εις τὰ σημεῖα E και Z .

1ον. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὰ σημεῖα A, E, H, Δ, Z κείνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι ὁ λόγος $\frac{EH + HZ}{AH}$ εἶναι σταθερὸς δι' ὅλα τὰ

ὀρθογώνια τρίγωνα.

1846. (1882). Εἰς κάθε τραπέζιον τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν μὴ

παραλλήλων πλευρῶν του, ἠϋξημένον κατὰ τὸ διπλάσιον γινόμενον τῶν βάσεων του, εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων του.

1847. (1883). Δίδεται ἓνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ. Ἀπὸ τὸ ἄκρον Γ τῆς βάσεως του φέρομεν εὐθεΐαν ΓΔ, ἣ ὁποία τέμνει τὴν πλευρὰν ΑΓ ἢ τὴν προέκτασίν της εἰς τὸ Δ. Νὰ δειχθῆ, ὅτι $\overline{\Gamma\Delta}^2 = \overline{BD}^2 + \frac{BG^2 \cdot \Delta A}{AB}$.

1848. (1884). *Θεώρημα τοῦ Compaqnon*. Διαιροῦμεν τὴν ὑποτείνουσαν ΒΓ ἐνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ εἰς τρία ἴσα μέρη ΒΔ=ΔΕ=ΕΓ καὶ φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΔ καὶ ΑΕ. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι $\overline{AD}^2 + \overline{DE}^2 + \overline{AE}^2 = \frac{2}{3} \overline{BG}^2$.

1849. (1885) *Θεώρημα τοῦ Salmon*. Ἐνα τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἔγγεγραμμένον εἰς κύκλον Ο. Φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας τῆς περιφερείας εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, αἱ ὁποῖαι τεμνόμεναι, σχηματίζουν τὸ τρίγωνον ΔΕΖ (ἐφαπτομενικὸν τρίγωνον). Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων τοῦ κέντρου Ο ἀπὸ μιᾶς κορυφῆς τοῦ ἐφαπτομενικοῦ τριγώνου ΔΕΖ καὶ μιᾶς κορυφῆς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ κειμένης ἀπέναντι τῆς πρώτης κορυφῆς, εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν ἀποστάσεων τῶν αὐτῶν κορυφῶν ἀπὸ τῶν ἀπέναντι πλευρῶν ἑκάστου τῶν τριγῶνων αὐτῶν.

1850. (1886). Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ α, β, γ τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, μὲ α', β', γ' τὰς ἀποστάσεις τῶν κορυφῶν Α, Β, Γ ἀπὸ τὸ ὀρθόκέντρον του Η καὶ μὲ R τὴν ἀκτίνα τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου, νὰ ἀποδειχθῆ ὅτι : $\alpha^2 + \alpha'^2 = \beta^2 + \beta'^2 = \gamma^2 + \gamma'^2 = 4R^2$.

1851. (1887). *Θεώρημα τοῦ Euler*. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι εἰς κάθε τρίγωνον ΑΒΓ τὸ τετράγωνον τῆς ἀποστάσεως τοῦ κέντρου τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου ἀκτίνας R ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου ἀκτίνας ρ εἶναι ἴσον μὲ $R^2 - 2R\rho$.

1852. (1888). *Θεώρημα τοῦ Euler*. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι εἰς κάθε τρίγωνον ΑΒΓ τὰ τετράγωνα τῶν ἀποστάσεων τοῦ κέντρου τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου ἀκτίνας R ἀπὸ τῶν κέντρων τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων ἀκτίνων $\rho_\alpha, \rho_\beta, \rho_\gamma$ εἶναι ἴσα, ἀντιστοιχῶς μὲ $R^2 + 2R\rho_\alpha, R^2 + 2R\rho_\beta, R^2 + 2R\rho_\gamma$.

1853. (1889). *Θεώρημα τοῦ Euler*. Νὰ ἀποδειχθῆ ὅτι εἰς κάθε τρίγωνον ΑΒΓ, τὰ τετράγωνα τῶν ἀποστάσεων τοῦ κέντρου τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου ἀκτίνας ρ ἀπὸ τῶν κέντρων τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων ἀκτίνων $\rho_\alpha, \rho_\beta, \rho_\gamma$ εἶναι ἴσα ἀντιστοιχῶς μὲ $4R(\rho_\alpha - \rho), 4R(\rho_\beta - \rho), 4R(\rho_\gamma - \rho)$.

1854. (1890). Δίδεται ἓνας κύκλος Ο ἀκτίνας R καὶ ἓνα σημεῖον Α ἐντὸς αὐτοῦ καὶ εἰς ἀπόστασιν α ἀπὸ τὸ κέντρον Ο. Ἐπὶ τῆς εὐθείας ΟΑ ὀρίζομεν ἓνα σημεῖον Β τοιοῦτον, ὥστε $OA \times OB = R^2$. Νὰ ἀχθῆ ἀπὸ τὸ Β μία τέμνουσα ΒΓΔ τοιαύτη, ὥστε τὸ ἐσωτερικὸν μέρος τῆς ΔΓ νὰ εἶναι ἴσον μὲ ΔΑ.

1855. (1891). Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Σ νὰ ἀχθῆ μία εὐθεΐα, ἣ ὁποία νὰ τέμνη τὰς πλευρὰς γωνίας xOy εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β καὶ τοιαύτη, ὥστε

1ον. $OA \times OB = \overline{AB}^2$.

2ον. $\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 = 2\overline{AB}^2$.

1856. (1892). Δίδονται δύο ὁμόκεντροι περιφέρεαι καὶ ἓνα σημεῖον Σ ἐπὶ

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι κάθε σημεῖον N , τῆς καθέτου ΔT ἐπὶ τὴν AB , εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου· δηλ. ἐὰν φέρωμεν τὰς εὐθείας NA καὶ NB , θὰ δείξωμεν, ὅτι $\overline{NA}^2 - \overline{NB}^2 = k^2$.

Ἀπόδειξις: Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν NO' ἢ NO εἶναι διάμεσος τοῦ τριγώνου NAB καὶ ἐπομένως κατὰ τὸ 2^{ον} θεώρημα τῶν διαμέσων ἐνὸς τριγώνου θὰ εἶναι $\overline{NA}^2 - \overline{NB}^2 = 2AB \cdot O\Delta$ (3)

Ἐπειδὴ $O\Delta = \frac{k^2}{2AB}$, ἡ ἰσότης (3) γράφεται

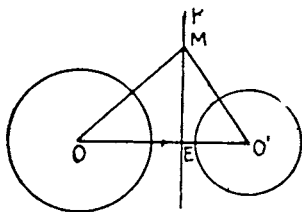
$$\overline{NA}^2 - \overline{NB}^2 = 2AB \cdot \frac{k^2}{2AB} \quad \text{ἢ} \quad \overline{NA}^2 - \overline{NB}^2 = k^2.$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἰσότητα συνάγομεν, ὅτι τὸ τυχὸν σημεῖον N , τῆς καθέτου ΔT ἐπὶ τὴν AB , εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Ἐ γεωμετρικὸς τόπος τῶν...**

575. Θεώρημα. Ἐ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημειῶν τοῦ ἐπιπέδου, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν δυνάμιν πρὸς δύο κύκλους, εἶναι μία εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὴν διάκεντρον τῶν κύκλων.

Ἐπιπέδου: Ἐστώσαν O καὶ O' (Σχ. 400) δύο κύκλοι, ἀκτίων R καὶ R' ἀντιστοίχως καὶ M ἓνα σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν δυνάμιν πρὸς τοὺς κύκλους O καὶ O' .



Σχ. 400.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ σημεῖον M κεῖται ἐπὶ εὐθείας καθέτου ἐπὶ τὴν διάκεντρον OO' .

Ἀπόδειξις: Φέρομεν τὰς εὐθείας MO , MO' καὶ OO' .

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ Δ τὴν δυνάμιν τοῦ σημείου M πρὸς τὸν κύκλον O καὶ μὲ Δ' τὴν δυνάμιν τοῦ σημείου M πρὸς τὸν κύκλον O' , θὰ ἔχωμεν (§ 442)

$$\Delta = \overline{MO}^2 - R^2 \quad \text{καὶ} \quad \Delta' = \overline{MO'}^2 - R'^2$$

Ἐπειδὴ αἱ δυνάμεις Δ καὶ Δ' εἶναι ἴσαι, ἐξ ὑποθέσεως, θὰ εἶναι $\overline{MO}^2 - R^2 = \overline{MO'}^2 - R'^2$ ἢ $\overline{MO}^2 - \overline{MO'}^2 = R^2 - R'^2$.

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἰσότητα παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων τοῦ τυχόντος σημείου M ἀπὸ δύο δοθέντα σημεία O καὶ O' εἶναι ἄσταθερά καὶ ἴση μὲ $R^2 - R'^2$. Ἄρα (§ 574) τὸ σημεῖον M κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου PE ἐπὶ τὴν OO' καὶ ἡ

δποία άγεται από ένα σημείον Ε τής ΟΟ', τὸ ὁποῖον απέχει ἀπὸ τὸ μέσον τής ΟΟ' ἀπόστασιν ἴσην με $\frac{R^2-R'^2}{2 \cdot ΟΟ'}$.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Ἄ γεωμετρικός τόπος τῶν. . .**

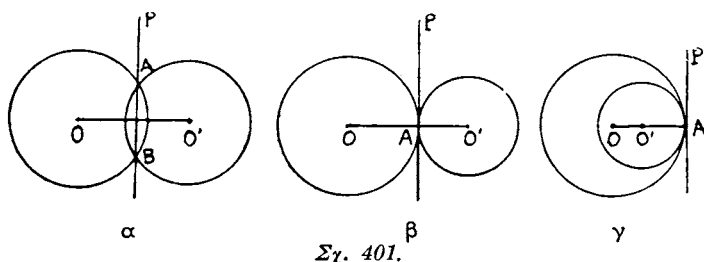
576. Ριζικός άξων. Ἡ εὐθεΐα Ρ, τής ὁποίας κάθε σημείον ἔχει τὴν αὐτὴν δύναμιν πρὸς τοὺς κύκλους Ο καὶ Ο', λέγεται **ριζικός άξων αὐτῶν**.

577. Παρατηρήσεις: I. Ἐὰν οἱ δύο δοθέντες κύκλοι εἶναι ὁμόκεντροι, δὲν ὑπάρχουν σημεΐα, τὰ ὁποῖα γὰ ἔχουν τὴν αὐτὴν δύναμιν πρὸς τοὺς δύο αὐτοὺς κύκλους καὶ ἐπομένως δὲν ὑπάρχει ριζικός άξων αὐτῶν.

II. Ἐὰν οἱ δύο κύκλοι τέμνονται (Σχ. 401α), ὁ ριζικός άξων αὐτῶν εἶναι ἡ κοινὴ χορδὴ τῶν.

Πράγματι· ἔστω ΑΒ ἡ κοινὴ χορδὴ τῶν δύο τεμνομένων κύκλων Ο καὶ Ο'. Ἐπειδὴ τὸ Α κεῖται ἐπὶ τής περιφερείας Ο καὶ ἐπὶ τής περιφερείας Ο', ἡ δύναμις τοῦ Α πρὸς τοὺς κύκλους Ο καὶ Ο' θὰ εἶναι ἴση με μηδέν. Ἐπειδὴ αἱ δυνάμεις τοῦ σημείου Α πρὸς τοὺς κύκλους Ο καὶ Ο' εἶναι ἴσαι, τὸ Α κεῖται ἐπὶ τοῦ ριζικοῦ άξωνος Ρ αὐτῶν. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ τὸ σημείον Β κεῖται ἐπὶ τοῦ ριζικοῦ άξωνος τῶν κύκλων Ο καὶ Ο'. Ἡ χορδὴ λοιπόν ΑΒ, ὡς συνδέουσα δύο σημεΐα Α καὶ Β τοῦ ριζικοῦ άξωνος, συμπίπτει με τὸν ριζικὸν άξωνα τῶν δύο κύκλων.

III. Ἐὰν οἱ δύο κύκλοι ἐφάπτονται (Σχ. 401β, γ), ὁ ριζικός



Σχ. 401.

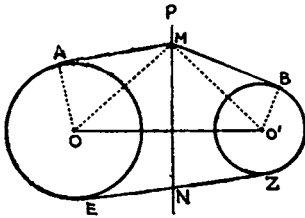
άξων εἶναι ἡ κοινὴ ἐφαπτομένη τῶν εἰς τὸ σημείον τής ἐπαφῆς τῶν.

Πράγματι· ἐὰν ἀχθῆ ἡ κοινὴ ἐφαπτομένη τῶν κύκλων Ο καὶ Ο' εἰς τὸ σημείον Α τής ἐπαφῆς, αὐτὴ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν διάκεντρον ΟΟ' εἰς τὸ σημείον Α. Ἐπειδὴ τὸ Α κεῖται ἐπὶ τῶν περιφερειῶν Ο καὶ Ο', ἔχει δύναμιν μηδέν καὶ πρὸς τὸν κύκλον Ο καὶ πρὸς τὸν κύκλον Ο', δηλ. ἔχει τὴν αὐτὴν δύναμιν πρὸς τοὺς κύκλους αὐτούς. Ἐπο-

μένως τὸ σημεῖον Α κείται ἐπὶ τοῦ ριζικοῦ ἄξονος ΡΑ τῶν δύο κύκλων Ο καὶ Ο'.

578. Θεώρημα. Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἄγονται ἴσαι ἐφαπτόμεναι πρὸς δύο κύκλους, εἶναι ὁ ριζικὸς ἄξων τῶν κύκλων αὐτῶν.

Ὑπόθεσις: Ἐστωσαν οἱ κύκλοι Ο καὶ Ο' καὶ Μ ἓνα τυχὸν σημεῖον τοῦ τόπου.



Σχ. 402.

Ἀπὸ τὸ Μ φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας ΜΑ καὶ ΜΒ πρὸς τοὺς κύκλους Ο καὶ Ο' καὶ ἔστω ὅτι εἶναι

$$MA = MB \quad \eta \quad \overline{MA}^2 = \overline{MB}^2 \quad (1).$$

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ σημεῖον Μ κείται ἐπὶ τοῦ ριζικοῦ ἄξονος τῶν κύκλων Ο καὶ Ο'.

Ἀπόδειξις: Γνωρίζομεν (§ 444), ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς ἐφαπτομένης ἑνὸς κύκλου, ἣ ὁποῖα ἄγεται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον, παριστάνει τὴν δύναμιν τοῦ σημείου αὐτοῦ πρὸς τὸν κύκλον. Ἀπὸ τὴν ἰσότητα (1) συνάγομεν, ὅτι τὸ σημεῖον Μ ἔχει ἴσας δυνάμεις πρὸς τοὺς κύκλους Ο καὶ Ο' καὶ ἐπομένως κείται ἐπὶ τοῦ ριζικοῦ ἄξονος αὐτῶν.

Τὸ τυχὸν λοιπὸν σημεῖον Μ τοῦ τόπου κείται ἐπὶ τοῦ ριζικοῦ ἄξονος τῶν κύκλων Ο καὶ Ο' καὶ ἐπομένως ὁ ζητούμενος τόπος εἶναι ὁ ριζικὸς ἄξων τῶν κύκλων αὐτῶν.

Ἐδείχθη λοιπὸν, ὅτι: Ὁ γεωμετρικὸς τόπος. . .

579. Πόρισμα. Ὁ ριζικὸς ἄξων δύο κύκλων διχοτομεῖ τὰς κοινὰς ἐφαπτομένας αὐτῶν.

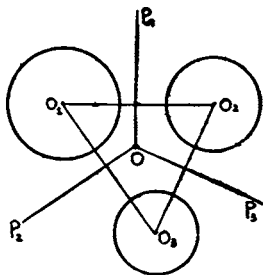
Πράγματι ἔστω Ν (Σχ. 402) τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον ὁ ριζικὸς ἄξων Ρ τῶν κύκλων Ο καὶ Ο' τέμνει τὴν κοινὴν ἐφαπτομένην ΕΖ αὐτῶν ὅτε ἡ ΝΕ εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου Ο καὶ ἡ ΝΖ εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου Ο', αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ ἓνα σημεῖον τοῦ ριζικοῦ ἄξονος τῶν καὶ ἐπομένως κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα, θὰ εἶναι ΝΕ=ΝΖ.

580. Θεώρημα. Οἱ ριζικοὶ ἄξονες τριῶν κύκλων, λαμβανόμενων ἀνὰ δύο, τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

Ὑπόθεσις: Ἐστωσαν O_1, O_2, O_3 τὰ κέντρα τριῶν κύκλων, P_1 ὁ ριζικὸς ἄξων τῶν κύκλων O_1 καὶ O_2 , P_2 ὁ ριζικὸς ἄξων τῶν κύκλων O_1 καὶ O_3 καὶ P_3 ὁ ριζικὸς ἄξων τῶν κύκλων O_2 καὶ O_3 .

Συμπέρασμα: Θα δείξωμεν, ότι οί ριζικοί αὐτοὶ ἄξωνες τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

Ἀπόδειξις: Οἱ ριζικοί ἄξωνες P_1 καὶ P_2 τέμνονται εἰς ἓνα σημεῖον O , ὡς κάθετοι ἐπὶ τὰς τεμνομένας διακέντρους O_1O_2 καὶ O_1O_3 . Τὸ O , ὡς σημεῖον τοῦ ριζικοῦ ἄξωνος P_1 ἔχει ἴσας δυνάμεις πρὸς τοὺς κύκλους O_1 καὶ O_2 . Ὅμοίως τὸ O , ὡς σημεῖον τοῦ ριζικοῦ ἄξωνος P_2 , ἔχει ἴσας δυνάμεις πρὸς τοὺς κύκλους O_1 καὶ O_3 .



Σχ. 403.

Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν μὲ $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ τὰς δυνάμεις τοῦ σημείου O πρὸς τοὺς κύκλους O_1, O_2, O_3 θὰ εἶναι κατὰ τὰ ἀνωτέρω, $\Delta_1 = \Delta_2$ καὶ $\Delta_1 = \Delta_3$. Ἀπὸ τὰς ἰσότητας αὐτὰς λαμβάνομεν $\Delta_2 = \Delta_3$. Ἀπὸ τὴν τελευταίαν ἰσότητα συνάγομεν, ὅτι τὸ σημεῖον O ἔχει ἴσας δυνάμεις πρὸς τοὺς κύκλους O_2 καὶ O_3 καὶ ἐπομένως εἶναι σημεῖον τοῦ ριζικοῦ ἄξωνος P_3 .

Ἔστω οἱ ριζικοί ἄξωνες P_1, P_2, P_3 διέρχονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον O .

Ἐδείχθη λοιπὸν, ὅτι: **Οἱ ριζικοί ἄξωνες τριῶν. . .**

581. Ριζικὸν κέντρον τριῶν κύκλων. Τὸ κοινὸν σημεῖον O τῶν ριζικῶν ἄξωνων τριῶν κύκλων, λαμβανομένων ἀνὰ δύο, λέγεται **ριζικὸν κέντρον** τῶν τριῶν αὐτῶν κύκλων.

582. Πόρισμα I. Ὅταν τρεῖς κύκλοι τέμνονται ἀνὰ δύο, αἱ κοιναὶ χορδαὶ τῶν τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

Πράγματι· ἐπειδὴ οἱ κύκλοι τέμνονται ἀνὰ δύο, αἱ κοιναὶ χορδαὶ τῶν ἀνὰ δύο εἶναι ριζικοὶ ἄξωνες (§ 577 II), ἐπομένως κατὰ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα θὰ τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

583. Πόρισμα II. Ὅταν τρεῖς κύκλοι ἐφάπτονται ἀνὰ δύο, αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ τρία σημεῖα ἐπαφῆς τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

Πράγματι· ἐπειδὴ οἱ κύκλοι ἐφάπτονται ἀνὰ δύο, ἡ κοινὴ ἐφαπτομένη αὐτῶν, ἀνὰ δύο εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς, εἶναι ριζικός ἄξων (§ 577 III)· ὥστε αἱ τρεῖς αὐταὶ ἐφαπτόμεναι εἶναι ριζικοὶ ἄξωνες καὶ ἐπομένως τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

584. Παρατηρήσεις: I. Ἐὰν τὰ τρία κέντρα τῶν κύκλων O_1, O_2, O_3 κείνται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς, οἱ τρεῖς ριζικοὶ ἄξωνες, εἶναι, γενικῶς παράλληλοι καὶ διάφοροι.

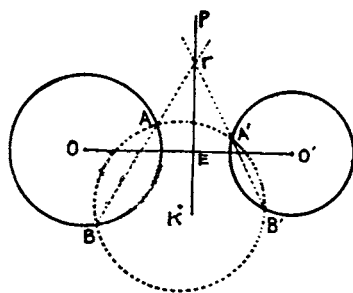
Ἄλλά, ἐὰν δύο ἐξ αὐτῶν συμπίπτουν, ὅλα τὰ σημεῖα τῶν ἔχουν τὴν αὐτὴν δύναμιν καὶ πρὸς τοὺς τρεῖς κύκλους καὶ ἐπομένως εἶναι σημεῖα καὶ τοῦ τρίτου ριζικοῦ ἄξονος.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν οἱ τρεῖς ριζικοὶ ἄξονες συμπίπτουν. Τοῦτο συμβαίνει π.χ. ὅταν οἱ τρεῖς κύκλοι ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα.

II. Ἀπὸ τὴν ἀνωτέρω παρατήρησιν συνάγομεν, ὅτι, ἐὰν δύο σημεῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν δύναμιν πρὸς τρεῖς κύκλους, οἱ τρεῖς αὐτοὶ κύκλοι ἔχουν τὸν αὐτὸν ριζικὸν ἄξονα καὶ ἐπομένως τὰ κέντρα τῶν κεῖνται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς.

585. Πρόβλημα. *Νὰ κατασκευασθῇ ὁ ριζικός ἄξων δύο κύκλων.*

Κατασκευή: Διὰ τὸ νὰ κατασκευάσωμεν τὸν ριζικὸν ἄξονα δύο κύκλων O καὶ O' ἐργαζόμεθα ὡς ἐξῆς:



Σχ. 404.

Γράφομεν ἓνα τρίτον κύκλον K , τοῦ ὁποίου ἡ περιφέρεια νὰ τέμνη τὰς περιφερείας τῶν κύκλων O καὶ O' , ἔστω εἰς τὰ σημεῖα A, B καὶ A', B' · φέρομεν τὰς χορδὰς AB καὶ $A'B'$, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς ἓνα σημεῖον Γ · ἀπὸ τὸ Γ φέρομεν τὴν κάθετον PGE ἐπὶ τὴν διάκεντρον OO' · ἡ PGE εἶναι ὁ ζητούμενος ριζικός ἄξων.

Ἀπόδειξις: Ἡ κοινὴ χορδὴ AB τῶν δύο κύκλων O καὶ K εἶναι ριζικός ἄξων αὐτῶν· ὁμοίως ἡ κοινὴ χορδὴ $A'B'$ τῶν δύο κύκλων O' καὶ K εἶναι ριζικός ἄξων αὐτῶν.

Ἐπομένως ἡ τομὴ Γ τῶν ριζικῶν αὐτῶν ἄξόνων εἶναι τὸ ριζικὸν κέντρον τῶν τριῶν κύκλων O, O', K . Ἡ καθέτος λοιπὸν PGE ἐπὶ τὴν OO' , ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ ριζικὸν κέντρον Γ τῶν τριῶν κύκλων εἶναι ὁ ριζικός ἄξων τῶν δύο κύκλων.

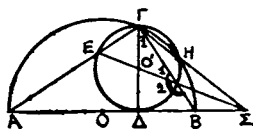
586. Ἐφαρμογὴ. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Γ μιᾶς ἡμιπεριφερείας O διαμέτρου AB φέρομεν τὴν κάθετον $\Gamma\Delta$ ἐπὶ τὴν AB . Μὲ διάμετρον τὴν $\Gamma\Delta$ κατασκευάζομεν περιφέρεια O' , ἡ ὁποία τέμνει τὴν χορδὴν $A\Gamma$ εἰς τὸ E , τὴν ΓB εἰς τὸ Z καὶ τὴν ἡμιπεριφέρεια εἰς τὸ H . *Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ εὐθεῖαι AB, EZ καὶ ΓH τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.*

Ἄρκει νὰ δεῖξωμεν, ὅτι αἱ εὐθεῖαι $AB, EZ, \Gamma H$ (Σχ. 405) εἶναι ριζικοὶ ἄξονες τριῶν περιφερειῶν, αἱ ὁποῖαι τέμνονται ἀνά δύο.

Ἡ εὐθεῖα ΓΗ εἶναι κοινὴ χορδὴ τῶν κύκλων Ο καὶ Ο' καὶ ἐπομένως εἶναι ριζικός άξων αὐτῶν.

Θὰ δεῖξωμεν τώρα, ὅτι τὸ τετράπλευρον ΑΕΖΒ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ δεῖξωμεν, ὅτι αἱ γωνίαι Α καὶ Ζ, εἶναι ἴσαι.

Πράγματι· ἡ γωνία ΑΓΒ εἶναι ὀρθή, ὡς ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ ἡμικύκλιον Ο' ἄρα καὶ ἡ ΕΓΖ εἶναι ὀρθή· ἐπομένως ἡ ΕΖ εἶναι διάμετρος τοῦ κύκλου Ο' καὶ διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον Ο'. Τὸ τρίγωνον λοιπὸν Ο'ΓΖ εἶναι ἰσοσκελές, διότι Ο'Γ=Ο'Ζ,



Σχ. 405.

ὡς ἀκτῖνες τοῦ κύκλου Ο' καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι $\widehat{\Gamma}_1 = \widehat{Z}_1$. Ἀλλὰ $\widehat{\Gamma}_1 = \widehat{A}$, διότι ἔχουν τὰς πλευράς των καθέτους μίαν πρὸς μίαν· ἄρα καὶ ἡ γωνία Ζ, θὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν Α. Τὸ τετράπλευρον λοιπὸν ΑΕΖΒ εἶναι ἐγγράψιμον εἰς κύκλον καὶ ἐπομένως ἡ ΕΖ εἶναι κοινὴ χορδὴ τοῦ κύκλου Ο' καὶ τοῦ κύκλου ΑΕΖΒ. Ἡ ΕΖ, ὡς κοινὴ χορδὴ δύο κύκλων εἶναι ριζικός άξων αὐτῶν.

Ὅμοιως ἡ ΑΒ εἶναι κοινὴ χορδὴ τῶν κύκλων Ο καὶ ΑΕΖΒ καὶ ἐπομένως εἶναι ριζικός άξων αὐτῶν.

Ὡστε αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΕΖ, ΓΗ εἶναι ριζικοί άξονες τριῶν κύκλων Ο, Ο', ΑΕΖΒ, οἱ ὅποιοι τέμνονται ἀνὰ δύο καὶ ἐπομένως (§ 583), τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

Ἀσκήσεις

Α' Ὁμάς. 1857. (1893). Δίδονται τρεῖς κύκλοι Α, Β, Γ ἀκτίνων ἀντιστοίχως α, β, γ, οἱ ὅποιοι ἔχουν κοινὸν ριζικὸν άξωνα, τὴν κοινὴν χορδὴν των ΕΕ', τὸ δὲ Γ εἶναι τὸ μέσον τῆς ΑΒ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν δυνάμεων τυχόντος σημείου Ρ πρὸς τοὺς κύκλους Α καὶ Β εἶναι διπλάσιον τῆς δυνάμεως τοῦ Ρ πρὸς τὸν κύκλον Γ.

1858. (1894). Ἐὰν αἱ περιφέρειαι δύο κύκλων Κ καὶ Λ τέμνονται, ἡ δύναμις τυχόντος σημείου Μ τῆς μιᾶς πρὸς τὸν ἄλλου κύκλον εἶναι ἴση μὲ τὸ διπλάσιον γινόμενον τῆς ἀποστάσεως τῶν κέντρων Κ καὶ Λ τῶν κύκλων ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν τοῦ σημείου αὐτοῦ ἀπὸ τὸν ριζικὸν άξωνα τῶν κύκλων αὐτῶν.

1859. (1895). Ἐνα τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἕνα κύκλον Ο. Ἐὰν Μ εἶναι τὸ μέσον τοῦ τόξου ΒΑΓ, καὶ ἀχθοῦν αἱ χορδαὶ ΜΒ καὶ ΜΑ, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $AB \times AG = \overline{MB}^2 - \overline{MA}^2$.

1860. (1896). Εἰς τυχὸν σημεῖον Μ μιᾶς περιφερείας (Κ, R) φέρομεν ἐφαπτομένην ΜΝ=δ καὶ εἰς ἕνα σημεῖον Μ' μιᾶς ἄλλης περιφερείας (Λ, ρ) φέρομεν ἐφαπτομένην Μ'Ν'=δ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι οἱ κύκλοι (Κ, KN) καὶ (Λ, ΛΝ') ἔχουν κοινὸν ριζικὸν άξωνα πρὸς τοὺς κύκλους (Κ, R) καὶ (Λ, ρ).

1861. (1897). Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι ἡ διαφορὰ τῶν δυνάμεων πρὸς δύο κύκλους σημείου κειμένου ἐκτὸς τοῦ ριζικοῦ ἄξονος τῶν κύκλων τούτων, ἰσοῦται πρὸς τὸ διπλάσιον τῆς διακέντρου των ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν τοῦ σημείου ἀπὸ τοῦ ριζικοῦ ἄξονός των.

1862. (1898). Ἐπὶ τῆς πλευρᾶς AB παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ θεωροῦμεν δύο σημεία A' , B' κινούμενα ἐπ' αὐτῆς καὶ φέρομεν τὰς $\Gamma A'$ καὶ $\Delta B'$, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ E . Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι ὁ ριζικός ἄξων τῶν κύκλων K καὶ Λ , ἐξ ὧν ὁ πρῶτος διέρχεται διὰ A , A' , E , ὁ δὲ δεῦτερος διὰ τῶν B , B' , E , κινεῖται παραλλήλως πρὸς ἑαυτόν.

1863. (1899). Δίδονται τρεῖς κύκλοι K , Λ , M τεμνόμενοι εἰς τὰ σημεία A , B καὶ κινήτων σημείον N , κινούμενον ἐπὶ τῆς περιφερείας M . Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι ὁ λόγος τῶν δυνάμεων τοῦ N πρὸς τοὺς κύκλους K , Λ εἶναι σταθερός.

***B'* Ὁμάς. 1864.** (1900). Νὰ εὑρεθῆ ὁ γεωμετρικός τόπος τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν, αἱ ὁποῖαι τέμνουν εἰς δύο ἴσα μέρη τὰς περιφερείας δύο κύκλων.

1865. (1901). Νὰ εὑρεθῆ ὁ γεωμετρικός τόπος τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν, αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ δοθέν σημείον B καὶ τέμνουν κατὰ διάμετρον δοθείσαν περιφέρειαν Λ .

1866. (1902). Δίδεται μία περιφέρεια O καὶ ἓνα σημείον Γ ἐντὸς τῆς περιφερείας. Ἀπὸ τὸ Γ φέρομεν τυχοῦσαν τέμνουσαν, ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ A καὶ B . Μὲ κέντρον τὸ A καὶ ἀκτίνα $A\Gamma$ γράφομεν περιφέρειαν ἐπίσης μὲ κέντρον τὸ B καὶ ἀκτίνα $B\Gamma$ γράφομεν ἄλλην περιφέρειαν. Φέρομεν τὰς κοινὰς ἐξωτερικὰς ἐφαπτομένας ΔE καὶ ZH πρὸς τὰς δύο αὐτὰς περιφερείας. Νὰ εὑρεθῆ ὁ γεωμετρικός τόπος τοῦ μέσου M τῆς κοινῆς ἐφαπτομένης ΔE , ὅταν ἡ τέμνουσα AB μεταβάλλεται.

1867. (1903). Δύο περιφέρειαι K καὶ Λ τέμνονται εἰς τὰ σημεία A καὶ A_1 . Ἀπὸ τὸ A φέρομεν τέμνουσαν $AG\Gamma'$, ἡ ὁποία τέμνει τὰς περιφερείας K καὶ Λ εἰς τὰ σημεία Γ καὶ Γ' . Νὰ εὑρεθῆ ὁ τόπος τοῦ μέσου M τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος $\Gamma\Gamma'$, ὅταν ἡ τέμνουσα $AG\Gamma'$ στρέφεται περὶ τὸ A .

1868. (1904). Ἀπὸ δοθέν σημείον A φέρομεν τυχοῦσαν τέμνουσαν AMN δοθέντος κύκλου (K , α), ἡ ὁποία στρέφεται περὶ τὴν A καὶ μὲ διαμέτρους τὰς AM καὶ AN γράφομεν περιφερείας, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν δοθείσαν περιφέρειαν K εἰς τὰ σημεία M' καὶ N' . Νὰ εὑρεθῆ ὁ γεωμετρικός τόπος τοῦ σημείου P τῆς τομῆς τῶν χορδῶν MM' καὶ NN' .

1869. (1905). Δίδονται κύκλος K καὶ δύο σημεία A καὶ B , τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐκτὸς τοῦ κύκλου ἀπὸ τὸ A φέρομεν τυχοῦσαν τέμνουσαν AMN τοῦ κύκλου K , ἡ ὁποία στρέφεται περὶ τὸ A . Εἰς τὰ σημεία M καὶ N τῆς τεμνούσης AMN καὶ τῆς περιφερείας K φέρομεν καθέτους ἐπὶ τὰς εὐθείας BM καὶ BN , αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημείον P . Νὰ εὑρεθῆ ὁ τόπος τοῦ σημείου P .

1870. (1906). Ἀπὸ σταθερὸν σημείον Γ , τὸ ὅποσον κεῖται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως δοθέντος εὐθυγράμμου τμήματος AB φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας $\Gamma\Delta$ καὶ $\Gamma\Delta'$ πρὸς δύο κύκλους, οἱ ὁποῖοι διέρχονται ἀπὸ τὰ σημεία A καὶ B . Νὰ εὑρεθῆ ὁ γεωμετρικός τόπος τῶν σημείων ἐπαφῆς Δ καὶ Δ' καὶ τοῦ μέσου τῆς $\Delta\Delta'$.

1871. (1907). Νὰ εὑρεθῆ ὁ γεωμετρικός τόπος τῶν κέντρων τῶν κύκλων, οἱ ὁποῖοι τέμνουν εἰς δύο ἴσα μέρη τὰς περιφερείας δύο δοθέντων κύκλων (K , R) καὶ (Λ' , R').

1872. (1908). 'Από δοθέν σημείον Ρ άγεται τέμνουσα ΡΑΑ' δοθέντος κύκλου (Κ, R), ή όποία στρέφεται περι τόν Ρ. Νά εύρεθῆ ὁ γεωμετρικός τόπος τοῦ σημείου Μ κατά τόν όποιον ή έφαπτομένη τοῦ κύκλου εἰς τόν Α, τέμνει τήν παράλληλον πρὸς τήν έφαπτομένην αὐτοῦ εἰς τόν Α', ή όποία άγεται ἀπό τόν Ρ.

Γ' Όμάς. 1873. (1909). Νά γραφῆ περιφέρεια, ή όποία νά διέρχεται ἀπό δύο δοθέντα σημεία Α και Β και νά τέμνη κατά διάμετρον δοθείσαν περιφέρειαν Κ.

1874. (1910). Νά γραφῆ περιφέρεια, ή όποία νά τέμνη κατά διάμετρον τρεῖς δοθείσας περιφερείας.

1875. (1911). Νά γραφῆ περιφέρεια, ή όποία νά διέρχεται ἀπό δοθέν σημείον Α και νά τέμνη κατά διάμετρον δύο δοθέντας κύκλους.

1876. (1912). Δίδονται οἱ κύκλοι Κ, Λ και τά σημεία Α, Β, Μ και ζητεῖται νά γραφῆ περιφέρεια διερχομένη διὰ τοῦ Μ και τοιαύτη, ὥστε ὁ ριζικός άξων τῆς ζητουμένης και τῆς Κ νά διέρχεται διὰ τοῦ Α, ὁ δὲ ριζικός άξων τῆς ἰδίας και τῆς Λ νά διέρχεται διὰ τοῦ Β.

1877. (1913). Νά γραφῆ περιφέρεια, ή όποία νά ἔχη κέντρον δοθέν σημείον Α και ή όποία νά τέμνη δύο τεμνομένης περιφερείας Κ και Λ οὔτως, ὥστε τόν ένα ἀπό τά σημεία Β τῆς τομῆς τῶν Κ και Λ και τά σημεία Δ και Ε τῆς τομῆς τῶν Κ και Λ και τῆς ζητουμένης περιφερείας νά κείνται ἐπ' εὐθείας.

Δ' Όμάς. 1878. (1914). Δίδονται δύο κύκλοι Ο και Ο', οἱ όποιοι ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς και ζητεῖται νά εύρεθῆ ἐπὶ τοῦ ριζικοῦ άξονός των ένα σημείον Α τοιοῦτον, ὥστε αἱ έφαπτόμεναι ΑΒ και ΑΒ', αἱ όποιαί άγονται ἀπό τόν σημείον αὐτό πρὸς τοὺς δύο κύκλους, νά σχηματίζουν ὀρθήν γωνίαν.

1879. (1915). 'Από δοθέν σημείον Γ τῆς προεκτάσεως τῆς διακέντρου ΚΔ δύο κύκλων Κ και Λ νά άχθῆ τέμνουσα αὐτῶν τοιαύτη, ὥστε αἱ χορδαί ΑΒ και ΔΕ τῶν κύκλων Κ και Λ νά εἶναι ἴσαι.

1880. (1916). Εἰς δοθέντα κύκλον νά ἐγγραφῆ τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ όποίου μία πλευρά νά διέρχεται ἀπό δοθέν σημείον Μ, ή ἄλλη ἀπό δοθέν σημείον Ν και ή τρίτη νά εἶναι παράλληλος πρὸς τήν εὐθείαν ΜΝ.

1881. (1917). 'Επὶ τῶν πλευρῶν ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάζομεν ἐξωτερικῶς τρίγωνα ΑΒΔ, ΒΓΕ, και ΓΑΖ τοιαῦτα, ὥστε ΑΖ=ΑΔ, ΒΔ=ΒΕ, ΓΕ=ΓΖ. Νά ἀποδειχθῆ, ὅτι :

1ον. Αἱ κάθετοι, αἱ όποιαί άγονται ἀπό τὰς κορυφάς Α, Β και Γ ἀντιστοιχῶς ἐπὶ τὰς ΖΔ, ΔΕ, και ΕΖ τέμνονται εἰς τόν αὐτό σημείον.

2ον. Αἱ κάθετοι, αἱ όποιαί άγονται ἀπό τά Δ, Ε και Ζ ἀντιστοιχῶς ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ τέμνονται εἰς τόν αὐτό σημείον.

1882. (1918). Δίδονται δύο κύκλοι Ζ και Λ ἀκτίων R και R' και σημείον Ο, τόν όποιον κείται ἐκτός αὐτῶν. Νά άχθῆ ἀπό τόν Ο μία τέμνουσα τοιαύτη, ὥστε αἱ χορδαί, αἱ ἀποτεμνόμεναι ὑπὸ τῶν περιφερειῶν, νά εἶναι ἴσαι.

3. Περιφέρεια τεμνόμεναι ὀρθογωνίως

587. Όρισμός. Ἔστωσαν δύο περιφέρεια Ο και Ο' (Σχ. 406), αἱ όποιαί τέμνονται εἰς τά σημεία Α και Β. Εἰς τόν σημείον Α τῆς

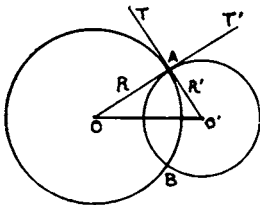
τομῆς των φέρομεν τὴν AT ἑφαπτομένην τοῦ κύκλου O καὶ τὴν AT' ἑφαπτομένην τοῦ κύκλου O' .

Ἐὰν ἡ γωνία TAT' εἶναι ὀρθή, λέγομεν, ὅτι αἱ περιφέρειαι τῶν κύκλων O καὶ O' τέμνονται ὀρθογωνίως ἢ ὅτι εἶναι ὀρθογωνικαί· ὥστε :

Λέγομεν, ὅτι: **Δύο περιφέρειαι τέμνονται ὀρθογωνίως ἢ ὅτι εἶναι ὀρθογωνικαί, ἐὰν αἱ ἑφαπτόμεναι αὐτῶν εἰς ἓνα ἀπὸ τὰ σημεία τῆς τομῆς των σχηματίζουσι ὀρθὴν γωνίαν.**

588. Θεώρημα. Ἐὰν δύο περιφέρειαι τέμνονται ὀρθογωνίως, αἱ ἑφαπτόμεναι αὐτῶν εἰς ἓνα ἀπὸ τὰ σημεία τῆς τομῆς των, διέρχονται ἀπὸ τὰ κέντρα τῶν περιφερειῶν αὐτῶν καὶ ἀντιστρόφως.

Ἐπιπέδουσι: Ἐστωσαν αἱ περιφέρειαι O καὶ O' (Σχ. 406), αἱ ὁποῖαι τέμνονται ὀρθογωνίως.



Σχ. 406.

Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι αἱ ἑφαπτόμεναι αὐτῶν AT καὶ AT' εἰς τὸ σημεῖον τῆς τομῆς των A , διέρχονται ἀπὸ τὰ κέντρα O καὶ O' τῶν περιφερειῶν αὐτῶν.

Ἀπόδειξις: Ἐξ ὑποθέσεως ἡ γωνία TAT' εἶναι ὀρθή. Ἐπίσης ἡ γωνία OAT εἶναι ὀρθή, διότι ἡ ἑφαπτομένη AT εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἄκρον τῆς ἀκτίνος OA . Αἱ γωνίαι λοιπὸν OAT

καὶ TAT' εἶναι ἐφεξῆς παραπληρωματικαὶ καὶ ἐπομένως αἱ μὴ κοιναὶ πλευραὶ των OA καὶ AT' κεῖνται ἐπ' εὐθείας· ὥστε ἡ OAT' εἶναι εὐθεῖα. Ἐδείχθη λοιπὸν, ὅτι ἡ ἑφαπτομένη AT' διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον O .

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ ἡ AT διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον O' τῆς περιφερείας O' .

Ἀντιστρόφως. Ἐπιπέδουσι: Ἐστω, ὅτι αἱ περιφέρειαι O καὶ O' τέμνονται εἰς τὰ σημεία A καὶ B καὶ ὅτι αἱ ἑφαπτόμεναι AT καὶ AT' εἰς τὸ σημεῖον A , διέρχονται ἀπὸ τὰ κέντρα O καὶ O' .

Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι αἱ περιφέρειαι O καὶ O' τέμνονται ὀρθογωνίως, δηλ. θὰ δεῖξωμεν, ὅτι ἡ γωνία TAT' εἶναι ὀρθή.

Ἀπόδειξις: Ἡ ἑφαπτομένη $O'AT$ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα OA καὶ ἐπομένως ἡ γωνία TAT' εἶναι ὀρθή.

Ἐδείχθη λοιπὸν, ὅτι: **Ἐὰν δύο περιφέρειαι...**

589. Πρόρισμα I Διὰ τὰ τέμνοντα ὀρθογωνίως δύο περιφέρειαι πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ τετράγωνον τῆς ἀποστάσεως τῶν

κέντρων των να είναι ἴσον με τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀκτίων των.

Ἐὰν φέρωμεν τὴν διάκεντρον OO' (Σχ. 406) τῶν κύκλων O καὶ O' , ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $OA O'$ ἔχομεν

$$\overline{OO'}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{O'A}^2 \quad (1)$$

Ἐὰν καλέσωμεν R, R' τὰς ἀκτίνας τῶν κύκλων O καὶ O' καὶ δ τὴν ἀπόστασιν OO' τῶν κέντρων των, ἡ (1) γράφεται

$$\delta^2 = R^2 + R'^2.$$

590. Πόρισμα II. Ἀπὸ τὴν σχέσιν $\delta^2 = R^2 + R'^2$, τὴν ὁποίαν εὐρήκαμεν εἰς τὸ προηγούμενον πόρισμα λαμβάνομεν

$$R^2 = \delta^2 - R'^2 \quad (1) \quad \text{καὶ} \quad R'^2 = \delta^2 - R^2 \quad (2)$$

Ἐπειδὴ ἡ ἰσότης (1) παριστάνει τὴν δύναμιν τοῦ σημείου O πρὸς τὴν περιφέρειαν O' , συνάγομεν, ὅτι:

Διὰ τὰ τέμνοντα ὀρθογωνίως δύο περιφέρειαι πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτίνος τῆς μιᾶς νὰ εἶναι ἴσον μετὰ τὴν δύναμιν τοῦ κέντρου πρὸς τὴν ἄλλην περιφέρειαν.

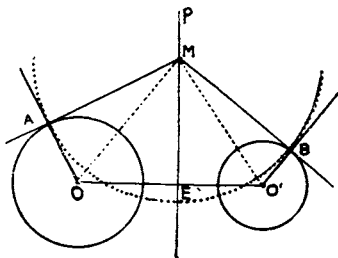
591. Θεώρημα. Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν, ἐκάστη τῶν ὁποίων τέμνει ὀρθογωνίως δύο δοθείσας περιφέρειας, εἶναι ὁ ριζικὸς ἄξων τῶν δύο αὐτῶν περιφερειῶν.

Ἐπιπέδου: Ἐστω M (Σχ. 407) τὸ κέντρον μιᾶς περιφέρειας, ἡ ὁποία τέμνει ὀρθογωνίως δύο δοθείσας περιφέρειας (O, R) καὶ (O', R') εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B ἀντιστοίχως.

Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι τὸ σημεῖον M κεῖται ἐπὶ τοῦ ριζικοῦ ἄξωνος τῶν περιφερειῶν O καὶ O' .

Ἀπόδειξις: Τὸ M εἶναι προφανῶς σημεῖον τοῦ τόπου.

Ἐπειδὴ ἡ περιφέρεια M τέμνει ὀρθογωνίως τὰς περιφέρειας O καὶ O' , αἱ ἐφαπτόμεναι αὐτῶν AM καὶ BM , εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B ἀντιστοίχως, διέρχονται ἀπὸ τὸ κέντρον M . Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $MA = MB$, ὡς ἀκτίνες τῆς περιφέρειας M , θὰ εἶναι καὶ $\overline{MA}^2 = \overline{MB}^2$. Ἀλλὰ \overline{MA}^2 παριστᾷ τὴν δύναμιν τοῦ σημείου M πρὸς τὸν κύκλον O καὶ \overline{MB}^2 τὴν δύναμιν τοῦ σημείου M πρὸς τὸν κύκλον O' . Ἐπειδὴ αἱ δυνάμεις τοῦ σημείου M πρὸς τοὺς κύκλους O καὶ O' εἶναι ἴσαι, ἔπεται (§ 578) ὅτι τὸ M κεῖται ἐπὶ τοῦ ριζικοῦ ἄξωνος PME .



Σχ. 407.

Ἀντιστρόφως. Ὑπόθεσις: Ἐστω M τυχὸν σημεῖον τοῦ ριζικοῦ ἄξονος PE τῶν κύκλων O καὶ O' .

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ M εἶναι κέντρον περιφερείας, ἣ ὁποία τέμνει ὀρθογωνίως τὰς περιφερείας O καὶ O' .

Ἀπόδειξις: Ἀπὸ τὸ M φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας MA καὶ MB πρὸς τὰς περιφερείας O καὶ O' . Ἐπειδὴ τὸ M εἶναι σημεῖον τοῦ ριζικοῦ ἄξονος PE τῶν κύκλων O καὶ O' , αἱ ἐφαπτόμεναι MA καὶ MB αὐτῶν εἶναι ἴσαι· ἦτοι εἶναι $MA=MB$.

Ἡ περιφέρεια λοιπόν, ἣ ὁποία ἔχει κέντρον τὸ M καὶ ἀκτίνα MA διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα A καὶ B .

Ἐὰν φέρωμεν τὰς ἀκτίνας OA καὶ $O'B$, αὗται θὰ εἶναι κάθετοι ἀντιστοίχως, ἐπὶ τὰς ἐφαπτομένας MA καὶ MB καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι ἐφαπτόμεναι τῆς περιφερείας M .

Παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ ἐφαπτόμεναι OA καὶ AM τῶν περιφερειῶν M καὶ O εἰς τὸ σημεῖον τῆς τομῆς A , ὡς καὶ αἱ ἐφαπτόμεναι $O'B$ καὶ BM τῶν περιφερειῶν M καὶ O' εἰς τὸ σημεῖον B σχηματίζουσι ὀρθὴν γωνίαν· ἄρα ἡ περιφέρεια M τέμνει ὀρθογωνίως τὰς περιφερείας O καὶ O' .

Ἀφοῦ λοιπόν τὸ τυχὸν σημεῖον M τοῦ ριζικοῦ ἄξονος PE τῶν περιφερειῶν O καὶ O' εἶναι κέντρον περιφερείας, ἣ ὁποία τέμνει ὀρθογωνίως τὰς δοθείσας περιφερείας O καὶ O' ἔπεται, ὅτι ὁ ζητούμενος γεωμετρικὸς τόπος εἶναι ὁ ριζικὸς ἄξων τῶν περιφερειῶν O καὶ O' .

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Ὁ γεωμετρικὸς τόπος. . .**

Παρατήρησις. Ἐὰν αἱ περιφέρειαι O καὶ O' τέμνονται, ὁ ζητούμενος γεωμετρικὸς τόπος εἶναι τὸ μέρος τοῦ ριζικοῦ ἄξονος, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τῶν δύο τεμνομένων κύκλων.

592. Πρόβλημα. *Τὸ ριζικὸν κέντρον τριῶν κύκλων, δταν τοῦτο κεῖται ἐκτὸς τῶν κύκλων, εἶναι κέντρον περιφερείας, ἣ ὁποία τέμνει ὀρθογωνίως τὰς περιφερείας αὐτῶν.*

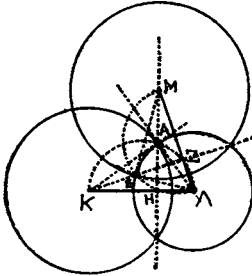
Ἐστω O τὸ ριζικὸν κέντρον τῶν τριῶν κύκλων O_1, O_2, O_3 (Σχ.403). Λέγομεν, ὅτι τὸ O εἶναι κέντρον περιφερείας, ἣ ὁποία τέμνει ὀρθογωνίως τὰς περιφερείας O_1, O_2, O_3 .

Τὸ O , ὡς σημεῖον τοῦ ριζικοῦ ἄξονος P_1 τῶν κύκλων O_1 καὶ O_2 , εἶναι κέντρον περιφερείας O , ἣ ὁποία τέμνει ὀρθογωνίως τὰς περιφερείας O_1 καὶ O_2 .

Ἡ περιφέρεια O , ὡς ἔχουσα τὸ κέντρον τῆς O ἐπὶ τοῦ ριζικοῦ ἄξονος P_3 τῶν κύκλων O_2 καὶ O_3 θὰ τέμνη ὀρθογωνίως τὰς περιφε-

594. Πρόβλημα II. *Νὰ γραφοῦν τρεῖς κύκλοι, οἱ ὅποιοι νὰ ἔχουν ὡς κέντρα, ἀντιστοίχως, τὰ δοθέντα σημεῖα K, Λ, M καὶ οἱ ὅποιοι νὰ τέμνονται, ἀνὰ δύο, ὀρθογωνίως.*

Τὸ κέντρον M (Σχ. 409) τοῦ κύκλου, ὁ ὁποῖος τέμνει ὀρθογωνίως τοὺς κύκλους K καὶ Λ κεῖται ἐπὶ τοῦ ριζικοῦ ἄξονος αὐτῶν. Ἐπειδὴ δὲ ὁ ριζικός ἄξων τῶν κύκλων K καὶ Λ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν διάκεντρον αὐτῶν $K\Lambda$ ἔπεται, ὅτι οὗτος εἶναι ἕνα ἀπὸ τὰ ὕψη MH τοῦ τριγώνου $MK\Lambda$.



Σχ. 409.

Ἐστω A τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν τεμνομένων περιφερειῶν K καὶ Λ .

Ἐπειδὴ οἱ κύκλοι K καὶ Λ τέμνονται ὀρθογωνίως, αἱ ἐφαπτόμεναι αὐτῶν εἰς τὸ A σχηματίζουν ὀρθὴν γωνίαν καὶ διέρχονται ἀπὸ τὰ κέντρα K καὶ Λ .

Ἐπειδὴ ἡ γωνία $K\Lambda A$ εἶναι ὀρθή, ἡ κορυφή της κεῖται ἐπὶ ἡμιπεριφέρειας, ἡ

ὁποία ἔχει διάμετρον τὴν $K\Lambda$. Τὸ σημεῖον A ὀρίζεται λοιπόν, ὡς τομὴ τῆς ἡμιπεριφέρειας αὐτῆς καὶ τῆς καθέτου MH , ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ M ἐπὶ τὴν $K\Lambda$. Μὲ κέντρα λοιπόν τὰ K καὶ Λ καὶ ἀκτίνας ἀντιστοίχως τὰς KA καὶ ΛA γράφομεν περιφέρειας, αἱ ὁποῖαι τέμνονται ὀρθογωνίως.

Ἐπειδὴ ὁ κύκλος K τέμνει ὀρθογωνίως τοὺς κύκλους Λ καὶ M , τὸ κέντρον του K κεῖται ἐπὶ τοῦ ριζικοῦ ἄξονος τῶν κύκλων Λ καὶ M . Ἄλλὰ ὁ ριζικός ἄξων τῶν κύκλων Λ καὶ M εἶναι τὸ ὕψος KZ τοῦ τριγώνου $K\Lambda M$.

Μὲ διάμετρον τὴν ΛM γράφομεν ἡμιπεριφέρειαν, ἡ ὁποία τέμνει τὴν KZ εἰς τὸ σημεῖον E , ὅποτε ἡ γωνία $ME\Lambda$ εἶναι ὀρθή, ὡς ἐγγεγραμμένη εἰς ἡμικύκλιον. Ὁ κύκλος λοιπόν, ὁ ὁποῖος ἔχει κέντρον τὸ M καὶ ἀκτίνα ME τέμνει ὀρθογωνίως τοὺς κύκλους K καὶ Λ . Ὡστε αἱ ζητούμεναι περιφέρειαι εἶναι αἱ (K, KA) , $(\Lambda, \Lambda A)$ καὶ (M, ME) .

Ἀσκήσεις

A' Ὁμάς. 1883. (1919). Νὰ εὑρεθῇ τὸ ριζικὸν κέντρον τριῶν κύκλων K, Λ, M , ἕκαστος τῶν ὁποίων τέμνει ὀρθογωνίως τοὺς δύο ἄλλους.

1884. (1920). Ἐὰν δύο περιφέρειαι τέμνονται ὀρθογωνίως, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τυχοῦσα διάμετρος τῆς μιᾶς διαιρεῖται ἁρμονικῶς ὑπὸ τῆς ἄλλης.

1885. (1921). Ἐὰν Δ καὶ E εἶναι ἀντιστοίχως τὰ σημεῖα τομῆς τῆς πλευ-

ρᾶς ΒΓ ἑνὸς τριγώνου ΑΒΓ ὑπὸ τῶν διχοτόμων τῆς ἑσωτερικῆς καὶ ἐξωτερικῆς γωνίας τοῦ Α, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ περιφέρειαι, αἱ περιγεγραμμέναι περὶ τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΔΕ τέμνονται ὀρθογωνίως.

1886. (1922). Εἰς περιφέρειαν Κ ἄγεται ἡ χορδὴ ΑΒ καὶ ἡ κάθετος ἐπ' αὐτὴν διάμετρος ΓΔ· ἐπὶ τῆς περιφέρειας Κ λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον Μ καὶ φέρομεν τὰς ΜΑ καὶ ΜΒ, αἱ ὁποῖαι τέμνουσι ἀντιστοίχως τὴν ΓΔ εἰς τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ· νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ, περὶ τὸ τρίγωνον ΕΜΖ, περιγεγραφομένη περιφέρεια τέμνει τὴν Κ ὀρθογωνίως.

Β' Ὁμάς. 1887. (1923). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν, αἱ ὁποῖαι τέμνουσι τὴν περιφέρειαν Β κατὰ διάμετρον καὶ τὴν περιφέρειαν Α ὀρθογωνίως.

1888. (1924). Μὲ κέντρον δοθὲν σημεῖον Α, νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ τέμνη ὀρθογωνίως δοθεῖσαν περιφέρειαν Ο.

1889. (1925). Νὰ γραφῇ περιφέρεια τοιαύτη, ὥστε αἱ ἐφαπτόμεναι, αἱ ἀγόμεναι ἀπὸ τὰς τρεῖς κορυφὰς ἑνὸς τριγώνου νὰ εἶναι ἴσαι μεταξὺ των, ἢ νὰ εἶναι ἴσαι μὲ δοθέντα μήκη.

1890. (1926). Νὰ γραφῇ περιφέρεια, διερχομένη διὰ δύο σημείων Α καὶ Β καὶ τέμνουσα ὀρθογωνίως δοθεῖσαν περιφέρειαν.

1891. (1927). Νὰ γραφῇ περιφέρεια μὲ δοθεῖσαν ἀκτῖνα ρ, ἐφαπτομένη δοθείσης περιφέρειας Α καὶ τέμνουσα ὀρθογωνίως ἄλλην περιφέρειαν Β.

1892. (1928). Νὰ γραφῇ περιφέρεια ἔχουσα τὸ κέντρον τῆς ἐπὶ δοθείσης εὐθείας χγ καὶ τέμνουσα δύο περιφέρειας, τὴν μίαν ὀρθογωνίως καὶ τὴν ἄλλην κατὰ διάμετρον.

1893. (1929). Νὰ γραφῇ περιφέρεια τέμνουσα ὀρθογωνίως δύο δοθείσας περιφέρειας Α καὶ Β καὶ κατὰ διάμετρον τρίτην περιφέρειαν Γ.

1894. (1930). Νὰ γραφῇ περιφέρεια, διερχομένη διὰ δοθέντος σημείου Α, τέμνουσα ὀρθογωνίως δοθεῖσαν περιφέρειαν Β καὶ κατὰ διάμετρον ἄλλην περιφέρειαν Γ.

1895. (1931). Νὰ γραφῇ περιφέρεια τέμνουσα ὀρθογωνίως δοθεῖσαν περιφέρειαν Α καὶ κατὰ διάμετρον δύο δοθείσας περιφέρειας Β καὶ Γ.

1896. (1932). Ἐπὶ εὐθυγράμμου τμήματος ΑΒ δίδεται σημεῖον Γ. Μὲ κέντρα τὰ Α καὶ Β καὶ ἀκτῖνας ΑΒ καὶ ΒΓ γράφομεν ἀντιστοίχως περιφέρειας. Νὰ γραφῇ περιφέρεια τέμνουσα ὀρθογωνίως τὰς δύο προηγουμένας περιφέρειας καὶ τοιαύτη, ὥστε τὰ τμήματα ΑΓ καὶ ΒΓ νὰ φαίνωνται ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς ὑπὸ τὴν αὐτὴν γωνίαν. (Πολυτεχνεῖον).

1897. (1933). Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ ἔχη τὸ κέντρον τῆς ἐπὶ δοθείσης εὐθείας χγ καὶ ἡ ὁποία νὰ τέμνη δύο δοθείσας περιφέρειας κατὰ διάμετρον. (Πολυτεχνεῖον).

1898. (1934). Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα Α καὶ Β καὶ νὰ τέμνη ὀρθογωνίως δοθεῖσαν περιφέρειαν (Κ, ρ).

1899. (1935). Νὰ γραφῇ περιφέρεια, ἡ ὁποία νὰ ἔχη δοθεῖσαν ἀκτῖνα ρ, νὰ διέρχεται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Α καὶ νὰ τέμνη ὀρθογωνίως ἄλλην δοθεῖσαν περιφέρειαν Κ.

1900. (1936). Νὰ γραφοῦν τρεῖς κύκλοι, οἱ ὁποῖοι νὰ τέμνονται ἀνά δύο

Φέρομεν τὴν ἡμιευθεῖαν OA καὶ ὀρίζομεν ἐπ' αὐτῆς (§ 595) ἓνα σημεῖον A τοιοῦτον, ὥστε $\frac{OA'}{OA} = k$.

Τὸ σημεῖον A' λέγεται **εὐθέως ὁμοιόθετον** τοῦ σημείου A .

Ἐὰν προεκτείνωμεν τὴν ἡμιευθεῖαν OA , κατ' ἀντίθετον φορὰν (Σχ. 411 β) καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεως λάβωμεν ἓνα σημεῖον A' τοιοῦτον, ὥστε νὰ εἶναι $\frac{OA'}{OA} = k$, τὸ σημεῖον A' ὀνομάζεται **ἀντιθέτως ὁμοιόθετον τοῦ σημείου A** .

Τὸ ὀρισμένον σημεῖον O λέγεται **κέντρον ὁμοιοθεσίας**, ὁ δὲ ἀριθμὸς k **λόγον ὁμοιοθεσίας**.

Ἐὰν ἐνώσωμεν μὲ εὐθείας τὸ σημεῖον O (Σχ. 411 α) μὲ ὅλα τὰ σημεῖα A, B, Γ, \dots τοῦ σχήματος (Σ) καὶ ἐπὶ τῶν ἡμιευθειῶν $OA, OB, O\Gamma, \dots$ λάβωμεν τμήματα $OA', OB', O\Gamma', \dots$, τοιαῦτα, ὥστε νὰ εἶναι

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{O\Gamma'}{O\Gamma} = \dots = k$$

τὸ σύνολον τῶν σημείων A', B', Γ', \dots ἀποτελεῖ ἓνα σχῆμα (Σ'), τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται **εὐθέως ὁμοιόθετον** τοῦ σχήματος (Σ) πρὸς **κέντρον ὁμοιοθεσίας** τὸ O καὶ **λόγον ὁμοιοθεσίας** k .

Ἐὰν προεκτείνωμεν τὰς ἡμιευθείας $OA, OB, O\Gamma, \dots$ (Σχ. 411 β) κατ' ἀντίθετον φορὰν καὶ ἐπὶ τῶν προεκτάσεων λάβωμεν τμήματα $OA', OB', O\Gamma', \dots$ τοιαῦτα, ὥστε νὰ εἶναι

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{O\Gamma'}{O\Gamma} = \dots = k$$

τὸ σύνολον τῶν σημείων A', B', Γ', \dots ἀποτελεῖ ἓνα ἄλλο σχῆμα (Σ''), τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται **ἀντιθέτως ὁμοιόθετον** τοῦ σχήματος (Σ) πρὸς **κέντρον ὁμοιοθεσίας** τὸ O καὶ **λόγον ὁμοιοθεσίας** k .

Τὰ σημεῖα A καὶ A' λέγονται **ὁμόλογα σημεῖα** καὶ αἱ εὐθεῖαι OA, OA' λέγονται **ὁμόλογοι ἀκτῖνες ὁμοιοθεσίας**. Αἱ εὐθεῖαι $OA, OB, \dots OA', OB', \dots$ λέγονται, ἀπλῶς **ἀκτῖνες ὁμοιοθεσίας**.

Ἐὰν $k > 0$, ἡ ὁμοιοθεσία λέγεται **εὐθεῖα ἢ θετικὴ ὁμοιοθεσία** (Σχ. 411 α: $k = \frac{3}{5}$).

Ἐὰν $k < 0$, ἡ ὁμοιοθεσία λέγεται **ἀντίθετος ἢ ἀρνητικὴ ὁμοιοθεσία** (Σχ. 411 β: $k = -\frac{2}{3}$).

597. Θεώρημα. *Τὰ ὁμοιόθετα σχήματα Σ' καὶ Σ'' ἐνὸς σχήματος Σ εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὸ κέντρον ὁμοιοθεσίας καὶ ἐπομένως ἴσα μεταξύ των.*

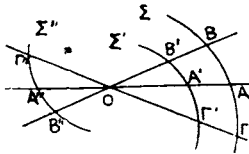
Ἐστω A ἓνα τυχὸν σημεῖον τοῦ σχήματος Σ (Σχ. 412). Εἰς τὸ σημεῖον A ἀντιστοιχοῦν τὰ ὁμόλογα σημεῖα A' καὶ A'' τῶν ὁμοιοθέτων σχημάτων Σ' καὶ Σ'' μὲ λόγον ὁμοιοθεσίας k (ἀπόλυτος τιμῆ). Ἐξ ὑποθέσεως λοιπὸν εἶναι $\frac{OA'}{OA} = k$ καὶ $\frac{OA''}{OA} = k$.

Ἀπὸ τὰς ἰσοτήτας αὐτὰς λαμβάνομεν

$$OA' = k \cdot OA \quad \text{καὶ} \quad OA'' = k \cdot OA \quad (1)$$

Ἐπειδὴ τὰ δεύτερα μέλη τῶν ἰσοτήτων (1) εἶναι ἴσα, θὰ εἶναι ἴσα καὶ τὰ πρῶτα μέλη των· δηλ. θὰ εἶναι

$$OA' = OA''.$$



Σχ. 412.

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ O εἶναι τὸ μέσον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος $A'A''$ καὶ ἐπομένως τὰ σημεῖα A' καὶ A'' καὶ συνεπῶς καὶ τὰ σχήματα Σ' καὶ Σ'' εἶναι συμμετρικὰ πρὸς κέντρον συμμετρίας τὸ O .

Τὰ σχήματα Σ' καὶ Σ'' , ὡς συμμετρικὰ πρὸς κέντρον συμμετρίας, εἶναι ἴσα.

Ἐδείχθη λοιπὸν, ὅτι: **Τὰ ὁμοιοθέτα σχήματα. . .**

Παρατήρησις. Τὸ ἀνωτέρω θεώρημα μᾶς εὐκολύνει εἰς τὴν κατασκευὴν τοῦ σχήματος, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀντιθέτως ὁμοιοθέτον ἑνὸς δοθέντος σχήματος.

Πράγματι· ὅταν κατασκευάσωμεν τὸ εὐθέως ὁμοιοθέτον ἑνὸς σχήματος Σ , στρέφομεν τὸ σχῆμα αὐτὸ περὶ τὸ O , ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου του, κατὰ 180° καὶ οὕτω ἔχομεν τὸ ἀντιθέτως ὁμοιοθέτον σχῆμα τοῦ δοθέντος σχήματος μὲ τὸν αὐτὸν λόγον ὁμοιοθεσίας.

598. Θεώρημα. *Τὸ ὁμοιοθέτον μιᾶς εὐθείας πρὸς κέντρον ὁμοιοθεσίας, τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἐπ' αὐτῆς, εἶναι μία εὐθεῖα παράλληλος πρὸς αὐτήν.*

Ἐστω E μία εὐθεῖα (Σχ. 413), O τὸ κέντρον ὁμοιοθεσίας καὶ k ὁ λόγος τῆς ὁμοιοθεσίας. Εἰς τυχὸν σημεῖον M τῆς εὐθείας E ἀντιστοιχεῖ ἓνα σημεῖον M' τοιοῦτον, ὥστε $\frac{OM'}{OM} = k$ (1).

Ὁμοίως εἰς ἓνα ἄλλο σημεῖον N τῆς E ἀντιστοιχεῖ ἓνα σημεῖον N' τοιοῦτον, ὥστε $\frac{ON'}{ON} = k$ (2)

Ἀπὸ τὰς ἰσοτήτας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι $\frac{OM'}{OM} = \frac{ON'}{ON}$.

Ἡ τελευταία ἰσότης δεικνύει, κατὰ τὸ ἀντίστροφον θεώρημα τοῦ Θαλῆ, ὅτι ἡ $M'N'$ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν MN .

μέρους τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον ὁρίζουν αἱ παράλληλοι (Σχ. 414α) καὶ ἄρνητική, ἐὰν τὸ O κεῖται μεταξὺ αὐτῶν (Σχ. 414β).

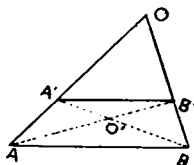
Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: *Δύο εὐθεῖαι παράλληλοι. . .*

600. Πέρισμα I. *Τὸ ὁμοιόθετον σχῆμα μιᾶς γωνίας εἶναι μία γωνία ἴση μὲ τὴν δοθεῖσαν.*

Πράγματι· ἡ προκύπτουσα γωνία ἔχει τὰς πλευράς της παραλλήλους μίαν πρὸς μίαν καὶ μὲ τὴν αὐτὴν φοράν, εἰς τὴν θετικὴν ὁμοιοθεσίαν ἢ μὲ ἀντίθετον φοράν εἰς τὴν ἄρνητικὴν ὁμοιοθεσίαν.

601. Πέρισμα II. *Τὸ ὁμοιόθετον σχῆμα ἐνὸς εὐθύγραμμου τμήματος AB , εἶναι ἓνα εὐθύγραμμον τμήμα $A'B'$ παράλληλον καὶ τοιοῦτον, ὥστε $\frac{A'B'}{AB} = k$, ὅπου k εἶναι ὁ λόγος τῆς ὁμοιοθεσίας.*

Πράγματι· ἐὰν λάβωμεν τυχὸν σημεῖον O ἐκτὸς τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος AB καὶ φέρομεν τὰς εὐθεῖας OA καὶ OB , εὐρίσκομεν, κατὰ τὸ θεώρημα τῆς § 598, ὅτι εἰς τὸ εὐθύγραμμον τμήμα AB μιᾶς εὐθεῖας ἀντιστοιχεῖ ἓνα εὐθύγραμμον τμήμα $A'B'$ παράλληλον πρὸς τὸ AB .



Σχ. 415.

Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα OAB καὶ $OA'B'$ εἶναι ὁμοία, θὰ ἔχωμεν

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA} = k \quad (\text{διὰ τὴν θετικὴν ὁμοιοθεσίαν})$$

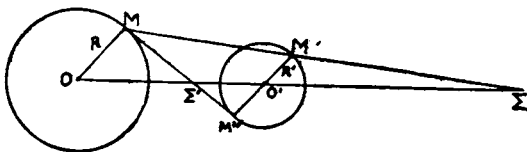
καὶ
$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{O'A'}{O'A} = k \quad (\text{διὰ τὴν ἄρνητικὴν ὁμοιοθεσίαν}).$$

602. Πέρισμα III. *Τὸ ὁμοιόθετον σχῆμα ἐνὸς πολυγώνου εἶναι πολύγωνον ὁμοιον πρὸς αὐτό.*

Πράγματι· ἐπειδὴ τὰ πολύγωνα εἶναι ὁμοιόθετα, δύο ὁμόλογοι πλευραὶ των εἶναι εὐθύγραμμα τμήματα ὁμοιόθετα καὶ δύο ὁμόλογοι γωνίαι των εἶναι ὁμοιόθετοι γωνίαι. Ὡστε τὰ πολύγωνα αὐτὰ ἔχουν τὰς πλευράς των ἀναλόγους, μὲ λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῆς ὁμοιοθεσίας καὶ τὰς ὁμολόγους γωνίας των ἴσας.

603. Θεώρημα. *Τὸ ὁμοιόθετον σχῆμα μιᾶς περιφερείας κύκλου, ἢ ὁποία ἔχει κέντρον τὸ O καὶ ἀκτίνα R , πρὸς κέντρον ὁμοιοθεσίας ἓνα σημεῖον Σ καὶ λόγον ὁμοιοθεσίας k , εἶναι μία περιφέρεια κύκλου, ἢ ὁποία ἔχει κέντρον, τὸ ὁμοιοθέτως ὁμόλογον τοῦ κέντρου O καὶ ἀκτίνα ἴσην μὲ $R.k$.*

Ἐστω ὁ κύκλος O ἀκτῖνος R , Σ τὸ κέντρον τῆς ὁμοιοθεσίας καὶ k ὁ δοθεὶς λόγος ὁμοιοθεσίας. Φέρομεν μίαν τυχοῦσαν ἀκτίνα OM τοῦ κύκλου O καὶ τὰς εὐθείας ΣM καὶ ΣO . Ἐπὶ τῆς ΣM εὐρίσκομεν ἓνα σημεῖον M' τοιοῦτον, ὥστε $\frac{\Sigma M'}{\Sigma M} = k$ (1). Ἐπίσης ἐπὶ τῆς εὐθείας ΣO λαμβάνομεν ἓνα ση-



Σχ. 416.

μεῖον O' τοιοῦτον, ὥστε $\frac{\Sigma O'}{\Sigma O} = k$ (2). Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν $O'M'$.

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι

$$\frac{\Sigma M'}{\Sigma M} = \frac{\Sigma O'}{\Sigma O} = k \quad (3)$$

Ἡ σχέση (3) δεικνύει, ὅτι ἡ εὐθεῖα $O'M'$ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν OM καὶ ἐπομένως τὰ τρίγωνα $\Sigma O'M'$ καὶ ΣOM εἶναι ὅμοια. Ἀπὸ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων αὐτῶν λαμβάνομεν $\frac{O'M'}{OM} = \frac{\Sigma O'}{\Sigma O}$ (4)

Ἐπειδὴ $OM=R$ καὶ $\frac{\Sigma O'}{\Sigma O} = k$, ἐκ κατασκευῆς, ἡ σχέση (4) γράφεται $\frac{O'M'}{R} = k$ ἢ $O'M'=Rk$.

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ σημεῖον M' , τὸ ὁμοιόθετον τοῦ τυχόντος σημείου M τῆς περιφερείας O , ἀπέχει ἀπὸ τὸ σταθερὸν σημεῖον O' , ἀπόστασιν σταθερὰν καὶ ἴσην μὲ $R \cdot k$. Ἄρα τὸ M' κεῖται ἐπὶ περιφερείας κύκλου, ἡ ὁποία γράφεται μὲ κέντρον τὸ O' καὶ μὲ ἀκτίνα ἴσην μὲ $R \cdot k$.

Ἐδείχθη λοιπὸν, ὅτι: **Τὸ ὁμοιόθετον σχῆμα. . .**

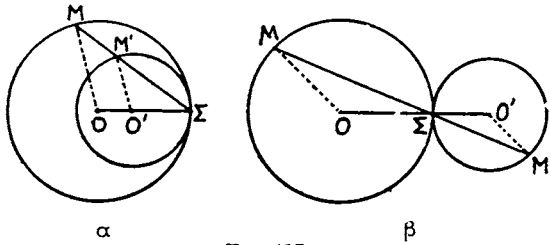
604. Παρατηρήσεις. Εἰς τὴν θετικὴν ὁμοιοθεσίαν, αἱ ἀκτῖνες OM' καὶ OM εἶναι παράλληλοι καὶ ἔχουν τὴν αὐτὴν φοράν. Εἰς τὴν ἀρνητικὴν ὁμοιοθεσίαν, μὲ κέντρον ὁμοιοθεσίας τὸ σημεῖον Σ' , αἱ ὁμόλογοι ἀκτῖνες OM καὶ OM'' εἶναι παράλληλοι καὶ ἔχουν ἀντίθετον φοράν.

Τὸ σημεῖον Σ λέγεται **ἐξωτερικὸν κέντρον ὁμοιοθεσίας** καὶ τὸ Σ' **ἐσωτερικὸν κέντρον ὁμοιοθεσίας**.

I. Ἐὰν τὸ κέντρον Σ τῆς ὁμοιοθεσίας συμπίπτει μὲ τὸ κέντρον O (Σχ. 417a), τότε θὰ συμπίπτῃ καὶ μὲ τὸ O' καὶ αἱ δύο περιφέρειαι εἶναι ὁμόκεντροι, οἷοσδήποτε καὶ ἂν εἶναι ὁ λόγος τῆς ὁμοιοθεσίας ($\pm k$).

II. Ἐὰν τὸ κέντρον Σ τῆς ὁμοιοθεσίας κεῖται ἐπὶ τῆς περιφε-

ρείας O (Σχ. 417 β), τότε τὸ Σ κείται καὶ ἐπὶ τῆς περιφερείας O' . Αἱ δύο περιφέρειαι O καὶ O' , ἔχουν τότε ἓνα κοινὸν σημεῖον Σ ἐπὶ τῆς διακέντρου. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν αἱ περιφέρειαι ἐφάπτονται



Σχ. 417.

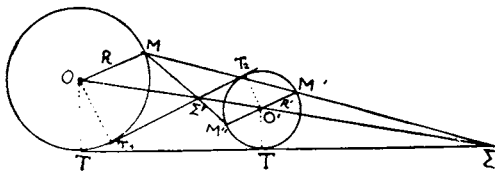
ἐξωτερικῶς, ἂν ἡ ὁμοιοθεσία εἶναι θετική (Σχ. 417α) καὶ ἐξωτερικῶς, ἂν ἡ ὁμοιοθεσία εἶναι ἀρνητική (Σχ. 417β).

605. Θεώρημα. (Ἀντίστροφον). Δύο τυχοῦσαι περιφέρειαι κύκλων δύνανται νὰ θεωρηθοῦν ὡς σχήματα εὐθέως ἢ ἀντιθέτως ὁμοιόθετα.

Ἐστωσαν O καὶ O' δύο περιφέρειαι (Σχ. 418) ἀκτίνων R καὶ R' . Ἐπὶ τῆς περιφερείας O λαμβάνομεν τυχὸν σημεῖον M καὶ φέρομεν τὴν ἀκτίνα OM .

Ἐπίσης φέρομεν τὴν ἀκτίνα $O'M'$ παράλληλον πρὸς τὴν OM καὶ τῆς αὐτῆς φοράς.

Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν MM' , ἡ ὁποία προεκτει-



Σχ. 418.

νομένη τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς διακέντρου OO' εἰς τὸ σημεῖον Σ .

Εἰς τὸ τρίγωνον ΣOM , ἡ $O'M'$ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν OM καὶ ἐπομένως τὰ τρίγωνα $\Sigma O'M'$ καὶ ΣOM εἶναι ὅμοια ἀπὸ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων αὐτῶν ἔχομεν

$$\frac{\Sigma M'}{\Sigma M} = \frac{\Sigma O'}{\Sigma O} = \frac{O'M'}{OM} = \frac{R'}{R} \quad (1).$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ σημεῖον Σ , τὸ ὁποῖον κείται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς διακέντρου OO' , εἶναι τοιοῦτον, ὥστε ὁ λόγος $\frac{\Sigma O'}{\Sigma O}$ τῶν ἀποστάσεων του ἀπὸ τὰ ὠρισμένα σημεῖα O' καὶ O , εἶναι σταθερὸς καὶ ἴσος μετὰ $\frac{R'}{R}$. Ἄρα (§ 383) τὸ Σ εἶναι τελείως ὠρισμένον. Ἐπίσης ἀπὸ

τὴν σχέσιν (1) συνάγομεν, ὅτι ἡ ΣM , ἡ ὁποία εἶναι τυχοῦσα τέμνουσα τῶν περιφερειῶν O καὶ O' καὶ ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ ὄρισμένον σημεῖον Σ , συναντᾷ τὰς περιφερείας τῶν δύο κύκλων εἰς σημεῖα M καὶ M' τοιαῦτα, ὥστε

$$\frac{\Sigma M'}{\Sigma M} = \frac{R'}{R}.$$

Συνεπῶς, κατὰ τὸν ὄρισμὸν τῶν εὐθέως ὁμοιοθέτων σχημάτων, αἱ περιφερείαι O καὶ O' εἶναι εὐθέως ὁμοιόθετοι μὲ κέντρον ὁμοιοθεσίας τὸ σημεῖον Σ καὶ λόγον ὁμοιοθεσίας $\frac{R'}{R} = k$.

2^ο. Ἐὰν φέρωμεν τὴν ἀκτῖνα $O'M''$ παράλληλον πρὸς τὴν OM καὶ μὲ ἀντίθετον φορὰν καὶ φέρομεν τὴν MM'' , αὕτη θὰ συναντήσῃ τὴν OO' εἰς ἓνα σημεῖον Σ' . Ἐὰν ἐργασθῶμεν, ὡς ἀνωτέρω, θὰ εὐρωμεν τὴν σχέσιν $\frac{\Sigma'M''}{\Sigma'M} = \frac{\Sigma'O'}{\Sigma'O} = \frac{O'M'}{OM} = \frac{R'}{R}$.

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν συνάγομεν, ὅτι τὸ σημεῖον Σ' εἶναι ὄρισμένον ἐπὶ τῆς OO' καὶ ὅτι ἡ $\Sigma'M$, ἡ ὁποία εἶναι τυχοῦσα τέμνουσα ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ Σ' , συναντᾷ τὰς περιφερείας τῶν δύο κύκλων εἰς δύο σημεῖα M καὶ M'' τοιαῦτα, ὥστε $\frac{\Sigma'M''}{\Sigma'M} = \frac{R'}{R}$. Συνεπῶς αἱ δύο περιφερείαι O καὶ O' εἶναι ἀντιθέτως ὁμοιόθετοι μὲ κέντρον ὁμοιοθεσίας τὸ Σ' καὶ λόγον ὁμοιοθεσίας $\frac{R'}{R}$.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Δύο τυχοῦσαι περιφερείαι. . . .**

606. Παρατήρησις. Ἐστω TT' (Σχ. 418) ἡ κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη τῶν περιφερειῶν O καὶ O' . Ἐὰν φέρωμεν τὰς ἀκτῖνας OT καὶ $O'T'$ εἰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς, αἱ ἀκτῖνες αὐταὶ θὰ εἶναι παράλληλοι, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν TT' . Ἐπειδὴ δὲ εἶναι καὶ $\frac{O'T'}{OT} = \frac{R'}{R}$, ἡ εὐθεῖα TT' διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Σ .

Ὁμοίως, ἐὰν φέρωμεν τὴν ἐσωτερικὴν ἐφαπτομένην T_1T_2 καὶ τὰς ἀκτῖνας OT_1 καὶ $O'T_2$ εἰς τὰ σημεῖα ἐπαφῆς, αἱ OT_1 καὶ $O'T_2$ εἶναι παράλληλοι καὶ ἔχουν ἀντίθετον φορὰν καὶ ἐπειδὴ εἶναι $\frac{O'T_2}{OT_1} = \frac{R'}{R}$, ἡ εὐθεῖα T_1T_2 διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Σ' .

Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα Σ καὶ Σ' δύνανται νὰ κατασκευασθοῦν εὐκόλως (§ 596) δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν τὰς κοινὰς ἐξωτερικὰς καὶ ἐσωτερικὰς ἐφαπτομένας δύο περιφερειῶν, ὅπως κατασκευάζομεν τὴν ἐφαπτομένην μιᾶς περιφερείας ἀπὸ δοθῆν σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἔκτος τοῦ κύκλου.

607. Ἐφαρμογαί. Πρόβλημα I. Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον A , τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς γωνίας xOy , νὰ ἀχθῆ μία τέμνουσα $AB\Gamma$ τὰς πλευρὰς Oy καὶ Ox τῆς γωνίας εἰς τὰ σημεῖα B καὶ Γ καὶ ταυαύτη, ὥστε $B\Gamma = 2AB$ (Σχ. 419).

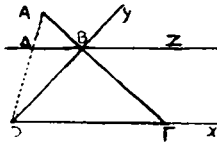
Ἀνάλυσις: Ἀπὸ τὴν δοθεῖσαν σχέσιν λαμβάνομεν

$$\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{1}{2} \quad (1).$$

Κατὰ γνωστὴν ιδιότητα τῶν ἀναλογιῶν ἡ σχέσις (1) γράφεται

$$\frac{AB}{AB+B\Gamma} = \frac{1}{1+2} \quad \eta \quad \frac{AB}{A\Gamma} = \frac{1}{3}.$$

Ἀπὸ τὴν τελευταίαν σχέσιν συνάγομεν, ὅτι τὰ σημεῖα B καὶ Γ εἶναι ὁμοιόθετα, μὲ κέντρον ὁμοιοθεσίας τὸ A καὶ λόγον ὁμοιοθεσίας $\frac{1}{3}$.



Σχ. 419.

Ἐπειδὴ τὸ Γ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας Ox , τὸ ὁμοιόθετόν του B θὰ κεῖται (§ 598) ἐπὶ εὐθείας Z παραλλήλου πρὸς τὴν Ox , ἡ ὁποία θὰ εἶναι ὁμοιόθετος τῆς Ox μὲ κέντρον ὁμοιοθεσίας τὸ A καὶ λόγον $\frac{1}{3}$.

Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν AO , ἡ ὁποία τέμνει τὴν Z εἰς τὸ σημεῖον Δ . Τὰ σημεῖα Δ καὶ O εἶναι ὁμοιόθετα, διότι κεῖνται ἐπὶ ὁμοιοθέτων σχημάτων καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι $\frac{A\Delta}{AO} = \frac{1}{3}$. Τὸ Δ λοιπὸν ὀρίζεται ἀπὸ τὴν τελευταίαν σχέσιν καὶ ἐπομένως καὶ ἡ παράλληλος ΔZ , ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ Δ .

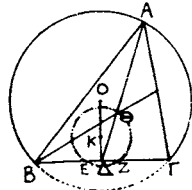
Σύνθεσις: Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν AO καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς σημεῖον Δ τοιοῦτον, ὥστε $\frac{A\Delta}{AO} = \frac{1}{3}$. Ἀπὸ τὸ Δ φέρομεν παράλληλον πρὸς τὴν Ox , ἡ ὁποία τέμνει τὴν Oy εἰς τὸ σημεῖον B : φέρομεν τὴν εὐθεῖαν AB , ἡ ὁποία προεκτεινομένη τέμνει τὴν Ox εἰς τὸ Γ . Λέγομεν, ὅτι ἡ $AB\Gamma$ εἶναι ἡ ζητούμενη τέμνουσα.

Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι Ox καὶ ΔZ εἶναι παράλληλοι, εἶναι ὁμοιόθετοι (§ 599) πρὸς κέντρον A καὶ λόγον ὁμοιοθεσίας $\frac{1}{3}$, διότι ἐκ κατασκευῆς εἶναι $\frac{A\Delta}{AO} = \frac{1}{3}$. Τὰ σημεῖα λοιπὸν B καὶ Γ , τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐπ' αὐτῶν καὶ ἐπὶ ὁμολόγων ἀκτίνων AB , $A\Gamma$ εἶναι ὁμοιόθετα καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{1}{3}$. Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν λαμβάνομεν, κατὰ γνωστὴν ιδιότητα τῶν ἀναλογιῶν

$$\frac{AB}{A\Gamma-AB} = \frac{1}{3-1} \quad \eta \quad \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{1}{2} \quad \eta \quad B\Gamma = 2AB.$$

608. Πρόβλημα II. *Νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν διαμέσων τριγώνου, τοῦ ὁποίου ἡ βᾶσις καὶ ἡ ἀπέναντι αὐτῆς γωνία εἶναι σταθεραί.*

Ἀνάλυσις: Ἐστω ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$ (Σχ. 420), τοῦ ὁποίου ἡ βᾶσις $B\Gamma$ εἶναι σταθερὰ καὶ ἡ γωνία A εἶναι σταθερὰ καὶ ἴση μὲ ω . Ἐπειδὴ ἡ $B\Gamma$ φαίνεται ἀπὸ τὸ A ὑπὸ γωνίαν σταθεράν, ἡ κορυφή A κεῖται ἐπὶ τόξου κυκλικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον γράφεται μὲ χορδὴν τὴν $\{B\Gamma$ καὶ δέχεται γωνίαν ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ω . Ἐστω O τὸ κέντρον τοῦ κυκλικοῦ αὐτοῦ τμήματος καὶ R ἡ ἀκτίς του. Φέρομεν τὴν διάμεσον AD καὶ ἔστω Θ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέσων. Τὸ Θ εἶναι σημεῖον τοῦ ζητουμένου τόπου. Ἐπειδὴ τὸ Θ



Σχ. 420.

εἶναι σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέσων τριγώνου, θὰ εἶναι $\frac{\Delta\Theta}{\Delta A} = \frac{1}{3}$. Παρατηροῦμεν, ὅτι τὰ σημεῖα Θ καὶ A εἶναι ὁμοιόθετα μὲ κέντρον ὁμοιοθεσίας τὸ Δ καὶ λόγον ὁμοιοθεσίας $\frac{1}{3}$.

Ἐπειδὴ τὸ σημεῖον A κεῖται ἐπὶ τοῦ τόξου $BA\Gamma$ τοῦ κύκλου O καὶ τὸ ὁμοιόθετόν του Θ θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ σχήματος, τὸ ὁποῖον εἶναι εὐθέως ὁμοιόθετον τῆς περιφερείας O μὲ κέντρον ὁμοιοθεσίας τὸ Δ καὶ μὲ λόγον ὁμοιοθεσίας $\frac{1}{3}$, καὶ τὸ ὁποῖον εἶναι (§ 603) τόξον περιφερείας, ἡ ὁποία ἔχει κέντρον τὸ σημεῖον K , τὸ ὁμοιόθετον τοῦ Δ καὶ ἀκτίνα ἴσην $R \cdot \frac{1}{3}$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν τὴν κάτωθι κατασκευήν:

Σύνθεσις: Μὲ χορδὴν τὴν $B\Gamma$ κατασκευάζομεν ἓνα τόξον κυκλικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον νὰ δέχεται γωνίαν ἴσην μὲ τὴν δοθεῖσαν γωνίαν ω . Ἐστω O τὸ κέντρον τοῦ τόξου αὐτοῦ καὶ R ἡ ἀκτίς του. Ἐπειτα κατασκευάζομεν τὸ ὁμοιόθετον σχῆμα τοῦ τόξου $BA\Gamma$ μὲ κέντρον ὁμοιοθεσίας τὸ Δ καὶ λόγον $\frac{1}{3}$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἓνα τόξον $E\Theta Z$ κύκλου, ὃ ὁποῖος ἔχει τὸ κέντρον του K ἐπὶ τῆς εὐθείας OD καὶ τοιοῦτον ὥστε $\frac{\Delta K}{\Delta O} = \frac{1}{3}$ καὶ ἀκτίνα ἴσην μὲ $R \cdot \frac{1}{3}$.

Λέγομεν, ὅτι τὸ τόξον $E\Theta Z$ εἶναι ὁ ζητούμενος γεωμετρικὸς τόπος.

Ἀπόδειξις: Τὸ τυχὸν τρίγωνον $AB\Gamma$ ἔχει βᾶσιν τὴν $B\Gamma$, ἡ ὁποία ἐλήφθη σταθερὰ καὶ τὴν ἀπέναντι γωνίαν A σταθεράν, διότι ἡ κορυφή τῆς A κεῖται ἐπὶ τόξου κυκλικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον γράφεται μὲ χορ-

δὴν τὴν ΒΓ καὶ δέχεται γωνίαν ἴσην μὲ ω. Φέρομεν τὴν διάμεσον ΑΔ, ἡ ὁποία τέμνει τὸ τόξον ΕΘΖ εἰς τὸ σημεῖον Θ. Τὰ σημεῖα Θ καὶ Α, ὡς κείμενα ἐπὶ ὁμοιοθέτων τόξων καὶ ἐπὶ ὁμολόγων ἀκτίνων ὁμοιοθεσίας, εἶναι ὁμοιόθετα καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι $\frac{\Delta\Theta}{\Delta A} = \frac{1}{3}$. Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν συνάγομεν, ὅτι τὸ Θ εἶναι σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

Ἀσκήσεις

Α' Ὀμάς. 1906. (1942). Ἐὰν δύο κανονικὰ πολύγωνα εἶναι εὐθέως ὁμοιόθετα, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ κέντρα τῶν καὶ τὸ κέντρον ὁμοιοθεσίας τῶν κείνται ἐπ' εὐθείας.

1907. (1943). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι δύο εὐθέως ὁμοιόθετα κανονικὰ πολύγωνα, μὲ ἄρτιον πλῆθος πλευρῶν, ἔχουν ἓνα ἐσωτερικὸν καὶ ἓνα ἐξωτερικὸν κέντρον ὁμοιοθεσίας.

1908. (1944). Ἐνὸς κύκλου Ο δίδεται μία διάμετρος τοῦ ΑΒ καὶ μία χορδὴ ΓΔ. Ἐστῶσαν Ε καὶ Ζ τὰ συμμετρικὰ σημεῖα τοῦ Α, ὡς πρὸς κέντρον συμμετρίας τὰ Γ καὶ Δ. Φέρομεν τὴν κάθετον ΒΜ ἐπὶ τὴν ΓΔ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν εὐθείαν ΕΖ εἰς τὸ Μ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ σημεῖα Α, Μ καὶ τὸ μέσον Ν τῆς ΓΔ κείνται ἐπ' εὐθείας.

1909. (1945). Ἐνα τρίγωνον ΟΑΒ κινεῖται ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ μένον πάντοτε ὁμοιον πρὸς δοθὲν τρίγωνον. Ἡ κορυφὴ Ο εἶναι ὠρισμένη, ἡ δὲ κορυφὴ Α γράφει μίαν δοθεῖσαν γραμμὴν (α). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ κορυφὴ Β γράφει μίαν γραμμὴν (β) ὁμοιόθετον τῆς (α).

1910. (1946). Δίδονται δύο περιφέρειαι Κ καὶ Κ'. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου, τῆς εὐθείας ὁμοιοθεσίας τῶν, ἀπὸ μίαν κοινὴν ἐσωτερικὴν ἐφαπτομένην εἶναι ἀνεξάρτητος τῶν κέντρων τῶν κύκλων. Ὁμοίως καὶ ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου τῶν, τῆς ἀντιστρόφου ὁμοιοθεσίας, ἀπὸ μίαν ἐξωτερικὴν ἐφαπτομένην.

1911. (1947). Δίδεται ἓνα τετράπλευρον ΑΒΓΔ, ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον Κ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν γωνιῶν, τῶν σχηματιζομένων ὑπὸ τῶν μὴ διαδοχικῶν πλευρῶν καὶ ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία συνδέει τὰ μέσα τῶν διαγωνίων τοῦ τετραπλεύρου, τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

1912. (1948). Ἐστῶσαν Α', Β', Γ' τὰ συμμετρικὰ σημεῖα ἐνὸς σημείου Ο τοῦ ἐπιπέδου, ὡς πρὸς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ ἐνὸς τριγώνου ΑΒΓ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι :

1ον. Αἱ εὐθεῖαι ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ' τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον Ρ.

2ον. Ὄταν τὸ σημεῖον Ο γράφῃ ἓνα σχῆμα, τὸ Ρ γράφει ἓνα σχῆμα ὁμοιόθετον τοῦ σχήματος αὐτοῦ.

1913. (1949). Εἰς δύο περιφερείας Λ καὶ Ν, τεμνομένας ὑπὸ τῆς διακέντρου τῶν κατὰ σειρὰν εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, Α', Β', φέρομεν τυχούσας ἀκτίνων ΑΜ, ΝΜ' ὁμορροπούς. Φέρομεν τὰς ΑΜ καὶ Β'Μ', αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ρ' ἐπίσης καὶ τὰς ΜΒ καὶ Μ'Α', αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ Κ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΡΚ στρέφεται περὶ σταθερὸν σημεῖον.

B' Ὁμάς. 1914. (1950). Ἐπὶ μιᾶς περιφερείας O λαμβάνομεν ἓνα σταθερὸν σημεῖον A καὶ ἓνα μεταβλητὸν σημεῖον B . Νὰ εὐρεθῆ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῆς τομῆς τῆς χορδῆς AB καὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας AOB .

1915. (1951). Δίδεται περιφέρεια K καὶ διάμετρος AB . ἀπὸ τὸ A φέρομεν τυχοῦσαν χορδὴν AG καὶ ἐπὶ τῆς προεκτάσεώς της λαμβάνομεν τμήμα $ΓΔ=AG$. Νὰ εὐρεθῆ ὁ τόπος τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν εὐθειῶν $KΔ$ καὶ $BΓ$, ὅταν ἡ $ΔA$ στρέφεται περὶ τὸ A .

1916. (1952). Εἰς ἓνα τετράπλευρον $ABΓΔ$ ἡ πλευρὰ $AB=a$ μένει ἀκίνητος, αἱ δὲ $BΓ, ΓΔ, ΔΓ$ ἔχουν ἀντιστοίχως μήκη β, δ, γ . Νὰ εὐρεθῆ ὁ γεωμετρικὸς τόπος :

1ον. τοῦ μέσου τῆς διαγωνίου BD .

2ον. τοῦ μέσου τῆς εὐθείας, ἡ ὁποία συνδέει τὰ μέσα τῶν διαγωνίων τοῦ τετραπλεύρου, ὅταν ἡ $ΔΓ$ στρέφεται περὶ τὸ G .

1917. (1953). Δύο κύκλοι διαμέτρων AB καὶ AG ἐφάπτονται ἐσωτερικῶς εἰς τὸ A . Διὰ τοῦ A φέρομεν μεταβλητὴν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία τέμνει τὸν πρῶτον κύκλον εἰς τὸ B' καὶ τὸν δεύτερον εἰς τὸ G' . Νὰ εὐρεθῆ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου τῆς τομῆς M τῶν $BΓ'$ καὶ $G'B'$.

1918. (1954). Δίδεται περιφέρεια O . Σενδέομεν δι' εὐθείας ὠρισμένον σημεῖον A μὲ ἓνα ἄλλο σημεῖον B , τὸ ὁποῖον γράφει τὴν περιφέρειαν O . Νὰ εὐρεθῆ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῆς AB καὶ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας AOB .

1919. (1955). Ἀπὸ τὸ κοινὸν σημεῖον A , δύο τεμνομένων περιφερειῶν, φέρομεν μίαν μεταβλητὴν τέμνουσαν, ἡ ὁποία τέμνει τὰς περιφερείας εἰς τὰ σημεῖα M καὶ N . Νὰ εὐρεθῆ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου P , τὸ ὁποῖον διαίρει τὴν MN κατὰ δοθέντα λόγον.

1920. (1956). Δύο περιφέρειαι, τῶν ὁποίων τὰ κέντρα εἶναι σταθερὰ, μεταβάλλονται οὕτως, ὥστε ὁ λόγος τῶν ἀκτίων των νὰ εἶναι σταθερὸς. Νὰ εὐρεθῆ ὁ γεωμετρικὸς τόπος ἐκάστου τῶν σημείων ἐπαφῆς τῆς κοινῆς ἐφαπτομένης των.

1921. (1957). Δίδονται δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι Ox, Oy . Ἀπὸ τυχὸν σημείον M τῆς y φέρομεν κάθετον MA ἐπὶ τὴν Ox καὶ ἐπὶ τῆς παραλλήλου πρὸς τὴν Ox , τῆς ἀγομένης ἐκ τοῦ M , λαμβάνομεν τμήμα $MB=MA$. νὰ εὐρεθῆ ὁ τόπος τοῦ σημείου B .

1922. (1958). Νὰ εὐρεθῆ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῆς πλευρᾶς AG ἐνὸς τριγώνου $ABΓ$ ὑπὸ τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας B , ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ βᾶσις $BΓ$ εἶναι ὠρισμένη κατὰ τὴν θέσιν, ἡ δὲ πλευρὰ AB εἶναι σταθερὰ κατὰ τὸ μέγεθος.

1923. (1959). Δίδονται δύο κύκλοι, οἱ ὁποῖοι ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς τὸ σημεῖον A . Ἀπὸ τὸ A φέρομεν μίαν τέμνουσαν MAN , ἡ ὁποία στρέφεται περὶ τὸ A καὶ ἡ ὁποία τέμνει τὰς περιφερείας τοῦ κύκλου εἰς τὰ σημεῖα M καὶ N . Νὰ εὐρεθῆ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κορυφῶν B καὶ $Γ$ τῶν δύο ἰσοπλευρῶν τριγώνων, τὰ ὁποῖα κατασκευάζονται μὲ πλευρὰν τὴν MN .

1924. (1960). Νὰ εὐρεθῆ ὁ τόπος τῶν τομῶν τῶν διαμέσων τῶν τριγώνων, τὰ ὁποῖα ἔχουν ὠρισμένην βᾶσιν κατὰ τὴν θέσιν καὶ τὸ μέγεθος καὶ τῶν ὁποίων ἡ ἀπέναντι κορυφὴ ἐκάστου προβάλλεται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον τῆς βάσεως.

1925. (1961). Νὰ εὐρεθῆ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν

διαμέσων ἑνὸς τριγώνου $AB\Gamma$, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ $B\Gamma$ εἶναι ὠρισμένη κατὰ τὴν θέσιν, ἡ δὲ πλευρὰ AB εἶναι σταθερὰ κατὰ τὸ μήκος.

1926. (1962). Ποῖος ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τῆς τομῆς τῶν διαμέσων τῶν τριγώνων, τῶν ἐχόντων βάσιν δοθὲν τμήμα AB καὶ ἔμβασον k^2 .

1927. (1963). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν κορυφῶν A τῶν τριγώνων $AB\Gamma$, τὰ ὁποῖα ἔχουν κοινὴν τὴν πλευρὰν $B\Gamma$ κατὰ τὴν θέσιν καὶ τὸ μέγεθος καὶ τὴν διάμεσον BM ἴσην πρὸς δοθὲν μήκος μ .

1928. (1964). Ἐνὸς μεταβλητοῦ τραπέζιου $AB\Gamma\Delta$ αἱ βάσεις του AB καὶ $\Gamma\Delta$ εἶναι σταθεραὶ κατὰ τὸ μέγεθος ἡ δὲ πλευρὰ $A\Delta$ εἶναι ὠρισμένη κατὰ τὴν θέσιν. Νὰ εὑρεθῇ:

1ον. ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων του.

2ον. ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ μέσου N τῆς πλευρᾶς του $B\Gamma$.

1929. (1965). Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων τραπέζιου, τοῦ ὁποίου αἱ βάσεις ἔχουν ἀντιστοίχως μήκη B, β ἐκ τῶν ὁποίων ἡ B μένει ἀκίνητος, τὸ δὲ μήκος τῆς μιᾶς ἐκ τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν εἶναι α .

1930. (1966). Ἐνὸς μεταβλητοῦ τραπέζιου $AB\Gamma\Delta$, ἡ βάσις AB εἶναι ὠρισμένη κατὰ τὸ μέγεθος καὶ τὴν θέσιν, ἡ βάσις $\Gamma\Delta$ εἶναι σταθερὰ κατὰ τὸ μήκος καὶ ἡ κορυφή του Δ γράφει δοθεῖσαν περιφέρειαν με κέντρον O .

1ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων του $B\Delta$ καὶ $A\Gamma$.

2ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῆς τομῆς τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του.

1931. (1967). Ἐνὸς τραπέζιου $AB\Gamma\Delta$ δίδονται αἱ βάσεις $AB=\alpha, \Gamma\Delta=\beta$ καὶ ὁ λόγος $\frac{\mu}{\nu}$ τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν των. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων του.

1932. (1968). Ἐνὸς τραπέζιου $AB\Gamma\Delta$ ἡ βάσις $AB=\alpha$ εἶναι σταθερὰ κατὰ τὴν θέσιν καὶ τὸ μέγεθος, ἐνῶ ἡ ἄλλη βάσις $\Gamma\Delta=\beta$ καὶ ἡ πλευρὰ $A\Delta=\gamma$ ἔχουν σταθερὰ μήκη.

1ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν μὴ παραλλήλων πλευρῶν του.

2ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων του.

1933. (1969). Αἱ προσκείμεναι πλευραὶ ἑνὸς τετραπλεύρου εἶναι ἴσαι ἀνὰ δύο καὶ μία πλευρὰ του εἶναι ὠρισμένη. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ τετράπλευρον αὐτὸ ἐφάπτεται σταθερῶς δύο περιφερειῶν καὶ νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τῶν κέντρων τῶν περιφερειῶν αὐτῶν.

1934. (1970). Δίδεται περιφέρεια O καὶ μία διάμετρος τῆς AB ὠρισμένη κατὰ τὴν θέσιν. Φέρομεν μίαν τυχοῦσαν ἀκτίνα OG κινητὴν καὶ ἀπὸ τὸ Γ κάθετον $\Gamma\Delta$ ἐπὶ τὴν AB . Ἐπὶ τῆς OG λαμβάνομεν μήκος OM τοιοῦτον, ὥστε

$$\frac{OM}{\Gamma\Delta} = \frac{\mu}{\nu}. \text{ Νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ } M.$$

1935. (1971). Δίδεται ἕνας κύκλος O καὶ H ἕνα σημεῖον ἐντὸς αὐτοῦ.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὑπάρχει ἀπειρία τριγώνων ἐγγεγραμμένων, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸ H ὡς σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ὑψῶν.

2ον. Νά εὐρεθοῦν οἱ τόποι τῶν μέσων τῶν πλευρῶν καὶ τῶν ποδῶν τῶν ὑψῶν τῶν τριγῶνων αὐτῶν.

1936. (1972). Δίδεται κύκλος O καὶ μία χορδὴ τοῦ AB ὠρισμένη κατὰ τὴν θέσιν καὶ τὸ μέγεθος καὶ ὑποθέτομεν, ὅτι ἓνα σημεῖον M κινεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ. Μὲ πλευρὰς τὰς AB καὶ AM κατασκευάζομεν παραλληλόγραμμα.

1ον. Νά εὐρεθῆ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῆς τετάρτης κορυφῆς N τῶν παραλληλογράμμων αὐτῶν.

2ον. Νά εὐρεθῆ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῆς τομῆς τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου NMB .

3ον. Νά εὐρεθῆ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ κέντρου τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας περὶ τὸ τρίγωνον NMB .

1937. (1973). Δίδεται περιφέρεια κύκλου O , ἓνα σημεῖον A ἐντὸς αὐτῆς καὶ ἔστω B ἓνα τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας. Φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην BT τῆς περιφερείας καὶ κατασκευάζομεν ἓνα ὀρθογώνιον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχη πλευρὰν τὴν AB καὶ μία διαγωνίός του νὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης BT . Νά εὐρεθῆ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῆς τετάρτης κορυφῆς M τοῦ ὀρθογωνίου, ὅταν τὸ B κινῆται ἐπὶ τῆς περιφερείας O .

1938. (1974). Δίδεται κύκλος O καὶ ἓνα σημεῖον Σ ἐκτὸς αὐτοῦ. Φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην ΣA καὶ μίαν μεταβλητὴν τέμνουσαν $\Sigma B\Gamma$. Νά εὐρεθῆ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ κέντρου βάρους τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$.

1939. (1975). Δίδεται ἓνα ἰσοπλευρον τρίγωνον $AB\Gamma$ καὶ ὁ κύκλος O , ὁ ὁποῖος ἐφάπτεται τῶν πλευρῶν AB καὶ $A\Gamma$ εἰς τὰ σημεῖα B καὶ Γ . Συνδέομεν μὲ εὐθεῖαν τυχὸν σημεῖον M τοῦ τόξου, τὸ ὁποῖον εὐρίσκεται ἐντὸς τοῦ τριγώνου μὲ τὰ σημεῖα B καὶ Γ . Αἱ εὐθεῖαι BM καὶ ΓM τέμνουσι τὰς $A\Gamma$ καὶ AB εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ E ἀντιστοίχως.

1ον. Νά ἀποδειχθῆ, ὅτι τὸ ἄθροισμα $BE + \Delta A$ εἶναι σταθερόν.

2ον. Νά εὐρεθοῦν οἱ τόποι τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν ὑψῶν, τῶν διαμέσων, τοῦ κέντρου τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περὶ τὸ τρίγωνον AEG .

1940. (1976). Δίδεται κύκλος K καὶ ἡ χορδὴ AB ἀντιστοιχοῦσα εἰς τεταρτημόριον ἀπὸ τὸ A φέρομεν ἄλλην χορδὴν AZ στρεφομένην περὶ τὸ A · νά εὐρεθῆ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῆς τετάρτης κορυφῆς H τοῦ παραλληλογράμμου, τοῦ κατασκευαζομένου ἐπὶ τῶν AB καὶ AZ .

1941. (1977). Νά εὐρεθῆ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων ἐπαφῆς τῶν ἐφαπτομένων ὄλων τῶν κύκλων, τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς δοθεῖσαν γωνίαν A καὶ αἱ ὁποῖαι εἶναι παράλληλοι πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν Σ .

1942. (1978). Δύο κύκλοι K καὶ Λ ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς τὸ A · φέρομεν τυχοῦσαν χορδὴν AB τοῦ κύκλου Λ καὶ ἐπὶ τὴν AB τὴν κάθετον χορδὴν $A\Gamma$ τοῦ κύκλου K . Νά εὐρεθῆ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῆς προβολῆς τοῦ A ἐπὶ τὴν $B\Gamma$.

Γ Ὁμάς. 1943. (1979). Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον P , τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς περιφερείας νὰ ἀχθῆ τέμνουσα PAB αὐτῆς τοιαύτη, ὥστε νὰ εἶναι $\frac{PA}{PB} = \frac{3}{4}$.

1944. (1980). Δίδεται ἓνα σημεῖον P καὶ τρεῖς ἡμιευθεῖαι OX, OY, OZ · Νά ἀχθῆ ἀπὸ τὸ P μία τέμνουσα $PAB\Gamma$, ἡ ὁποία τέμνει τὴν OX εἰς τὸ A ,

την ΟΥ εις τὸ Β και τὴν ΟΖ εις τὸ Γ και τοιαύτη, ὥστε $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{2}{3}$.

1945. (1981). Ἀπὸ τὸ κοινὸν σημεῖον δύο τεμνομένων περιφερειῶν, νὰ ἀχθῆ μία τέμνουσα τὰς περιφερείας εις τὰ σημεῖα Γ και Β και τοιαύτη, ὥστε $AB=2AG$.

1946. (1982). Δίδεται μία εὐθεῖα Χ και ἑκατέρωθεν αὐτῆς ἓνα σημεῖον Λ και μία περιφέρεια Κ, ἡ ὁποία δὲν τέμνει τὴν Χ. Νὰ ἀχθῆ ἀπὸ τὸ Λ μία εὐθεῖα, ὁ ὁποία νὰ τέμνη τὴν Χ εις τὸ Μ και τὴν περιφέρειαν Κ εις τὸ Ν και τοιαύτη, ὥστε $\frac{AM}{AN} = \frac{1}{3}$.

1947. (1983). Δίδονται τρεῖς εὐθεῖαι Χ, Υ, Ζ, αἱ ὁποῖαι τέμνονται ἀνὰ δύο και ζητεῖται νὰ ἀχθῆ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν Ε, ἡ ὁποία νὰ διχοτομηται ὑπὸ τῶν Χ, Υ, Ζ.

1948. (1984). Δίδονται δύο ὁμόκεντροι περιφέρειαι και ζητεῖται νὰ ἀχθῆ ἀπὸ δοθὲν σημεῖον τῆς μιᾶς ἐξ αὐτῶν ἓνα εὐθύγραμμον τμήμα, τὸ ὁποῖον νὰ τριχοτομεῖται ὑπ' αὐτῶν.

1949. (1985). Εἰς δοθέντα κύκλον Κ νὰ ἀχθῆ χορδὴ, τριχοτομουμένη ὑπὸ δύο διδομένων ἀκτίνων ΚΑ, ΚΒ αὐτοῦ.

1950. (1986). Ἀπὸ τὰς κορυφὰς δοθέντος τριγώνου ΑΒΓ νὰ ἀχθοῦν τρεῖς παράλληλοι μεταξύ των εὐθεῖαι, ἔχουσαι δεδομένα μήκη μ, ν, ρ, ὅπου $\mu > \nu > \rho$ και τῶν ὁποίων τὰ ἄκρα νὰ κείνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθεῖας.

Δ' Ὁμάς. 1951. (1987). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἔαν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν ΒΓ=α, τὴν γωνίαν Α=ω και τὴν διάμεσον ΒΜ=μ.

1952. (1988). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον ΑΒΓ, τοῦ ὁποίου γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν ΒΓ=α, τὸ ἄθροισμα $\beta + \gamma = \lambda$ τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν και τὴν διχοτόμον ΑΔ=δ.

1953. (1989). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν θέσιν τῆς κορυφῆς Α, τὸ σημεῖον Ζ τῆς τομῆς τῶν διαμέσων του και ὅτι αἱ δύο ἄλλαι κορυφαὶ του κείνται ἐπὶ δύο εὐθειῶν Χ και Υ.

1954. (1990). Νὰ κατασκευασθῆ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὰς διαμέσους του μ_β και μ_γ .

1955. (1991). Νὰ κατασκευασθῆ τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὴν πλευρὰν ΒΓ=α τὴν γωνίαν Β=φ και τὴν γωνίαν ΒΜΓ=ω, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ διάμεσος ΒΜ μετὰ τὴν πλευρὰν ΑΓ.

1956. (1992). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τετράπλευρον, ἑγγράψιμον εἰς κύκλον, ἂν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν Α=ω, τὴν διαγώνιον ΒΔ=δ, τὴν γωνίαν ΑΒΔ=φ και τὸν λόγον $\frac{\mu}{\nu}$ τῶν τμημάτων εἰς τὰ ὁποῖα ἡ διαγώνιος ΑΓ διαιρεῖται ὑπὸ τῆς ΒΔ.

1957. (1993). Εἰς δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἑγγραφῆ ἓνα τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ μία κορυφὴ νὰ εἶναι δοθὲν σημεῖον Δ τῆς πλευρᾶς ΒΓ, ἡ ἀπέναντι τῆς κορυφῆς αὐτῆς πλευρὰ νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν Χ και νὰ φαίνεται ἀπὸ τὸ Δ ὑπὸ δοθεῖσαν γωνίαν ω.

1958. (1994). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἂν γνωρίζωμεν τὰς πλευρὰς του ΑΒ=γ, ΑΓ=β και τὴν διχοτόμον ΑΔ=δ τῆς γωνίας Α.

1959. (1995). Να κατασκευασθῆ ἓνα τρίγωνον ΑΒΓ, ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν γωνίαν $A=\omega$ καὶ τὰς διαμέσους τοῦ $ΒΔ=\mu$ καὶ $ΓΕ=\nu$.

1960. (1996). Νὰ ἐγγραφῆ τετράγωνον εἰς τὸ κοινὸν μέρος δύο ἴσων κύκλων Κ καὶ Λ ἀκτίων R, τῶν ὁποίων ἡ περιφέρεια ἐκάστου διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τοῦ ἄλλου.

1961. (1997). Εἰς δοθὲν τετράπλευρον ΑΒΓΔ νὰ ἐγγραφῆ παραλληλόγραμμον, ἔχον κέντρον δοθὲν σημεῖον Κ.

1962. (1998). Εἰς δοθὲν τρίγωνον ΑΒΓ νὰ ἐγγραφῆ ἄλλο τρίγωνον ΔΕΖ, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι μία τῶν κορυφῶν του εἶναι δοθὲν σημεῖον Δ τῆς ΒΓ, ἢ ἀπέναντι αὐτῆς πλευρὰ εἶναι παράλληλος πρὸς δοθείσαν εὐθείαν Χ καὶ ὅτι ὁ λόγος τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν ΔΕ καὶ ΔΖ εἶναι ἴσος πρὸς $\frac{2}{3}$.

Ε' Όμάς. 1963. (1999). Ἐπι δοθείσης περιφερείας Κ νὰ εὐρεθῆ σημεῖον Μ τοιοῦτον, ὥστε αἱ χορδαὶ ΜΒ καὶ ΜΑ, αἱ ὁποῖαι συνδέουσι τὸ Μ μετὰ δύο δοθέντα σημεῖα Α καὶ Β τῆς περιφερείας, νὰ τέμνουσι δοθείσαν διάμετρον ΓΔ εἰς δύο σημεῖα Ε καὶ Ζ ἀντιστοίχως καὶ τοιαῦτα, ὥστε $\frac{ΚΕ}{ΚΖ} = \frac{2}{3}$.

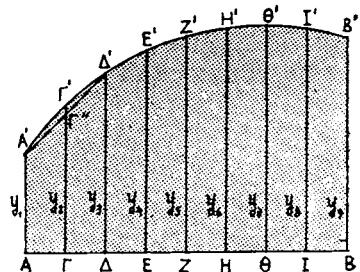
1964. (2000). Δίδονται τρεῖς εὐθεῖαι ΟΧ, ΟΥ, ΟΖ, ἀγόμεναι ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο. Νὰ γραφῆ περιφέρεια ἐφαπτομένη τῆς ΟΧ, ἔχουσα τὸ κέντρον τῆς ἐπὶ τῆς ΟΥ, καὶ ἀπετέμνουσα ἀπὸ τῆς ΟΖ χορδὴν ἴσην μετὰ δοθὲν μῆκος λ.

1965. (2001). Νὰ γραφῆ περιφέρεια ἐφαπτομένη δοθείσης εὐθείας Χ καὶ δοθείσης περιφερείας Κ καὶ διερχομένη διὰ δοθέντος σημείου Ρ.

4. Υπολογισμός τοῦ έμβαδού ενός μεικτογράμμου σχήματος

609. Τύπος τοῦ Simpson. Ἔστω ὅτι θέλομεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ έμβαδὸν τοῦ μεικτογράμμου σχήματος ΑΒΒ'Α'.

Χωρίζομεν τὴν ΑΒ εἰς ἄρτιον πλῆθος ἴσων εὐθυγράμμων τμημάτων, ἔστω εἰς ὀκτώ. Ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως Γ, Δ, Ε, . . . φέρομεν τὰς καθέτους ΓΓ', ΔΔ', . . . πρὸς τὴν ΑΒ, αἱ ὁποῖαι τέμνουσι τὴν καμπύλην Α'Β' εἰς τὰ σημεῖα Γ', Δ', . . . Παριστάνομεν μετὰ y_1, y_2, y_3, \dots τὰς καθέτους (τεταγμένες) ΑΑ', ΓΓ', ΔΔ', . . . καὶ μετὰ τὰ ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα, ΑΓ, ΓΔ, . . .



Σχ. 421.

Ἐπομένως ὑπολογίζομεν τὸ έμβαδὸν τοῦ μεικτογράμμου τραπέζιου ΑΔΔ'Α'. Τὸ έμβαδὸν αὐτοῦ εἶναι ἴσον μετὰ

$$\begin{aligned} \frac{y_1+y_8}{2} \cdot 2\delta &= (y_1+y_8)\delta = \frac{\delta}{3}(3y_1+3y_8) = \\ &= \frac{\delta}{3}(y_1+y_8+2y_1+2y_8) = \frac{\delta}{3}(y_1+y_8+4\Gamma\Gamma''). \end{aligned}$$

Ἐὰν τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως τῆς AB ἦσαν τὸ ἕνα πλησίον τοῦ ἄλλου, θὰ ἠδυνάμεθα νὰ ὑποθέσωμεν τὰ μέρη τῆς καμπύλης $A'\Delta'$, $\Delta'Z'$, . . . ὡς εὐθύγραμμα τμήματα καὶ νὰ λάβωμεν $\Gamma\Gamma''=y_2$. Θὰ εἶναι τότε

$$\text{ἐμβ } A\Delta\Delta'A' = \frac{\delta}{3}(y_1+y_8+4y_2) \quad (1)$$

Ὅμοίως εὐρίσκομεν ὅτι

$$\text{ἐμβ. } \Delta Z Z'\Delta' = \frac{\delta}{3}(y_3+y_7+4y_4) \quad (2)$$

$$\text{ἐμβ. } Z\Theta\Theta'Z' = \frac{\delta}{3}(y_5+y_6+4y_6) \quad (3)$$

$$\text{ἐμβ } \Theta B B'\Theta' = \frac{\delta}{3}(y_7+y_8+4y_8) \quad (4)$$

Προσθέτοντες τὰν ἰσότητας (1), (2), (3), (4) κατὰ μέλη καὶ παριστάνοντες μὲ E τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μεικτογράμμου μέρους, εὐρίσκομεν

$$E = \frac{\delta}{3}(y_1+y_8+2y_3+2y_5+2y_7+4y_2+4y_4+4y_6+4y_8).$$

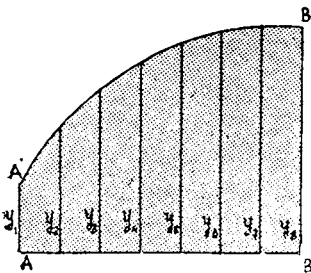
Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ k τὸ ἄθροισμα τῶν ἄκρων τεταγμένων y_1 καὶ y_8 , μὲ Λ τὸ ἄθροισμα τῶν τεταγμένων τῆς περιττῆς τάξεως καὶ μὲ M τὸ ἄθροισμα τῶν τεταγμένων τῆς ἀρτίας τάξεως θὰ εἶναι

$$E = \frac{\delta}{3}(k+2\Lambda+4M).$$

Αὐτὸς εἶναι ὁ τύπος τοῦ Simpson.

Ἐὰν αἱ δύο ἀκραῖαι τεταγμένα εἶναι μηδέν, ὁ τύπος τοῦ Simpson γίνεται $E = \frac{2}{3}\delta(\Lambda+2M)$, διότι $k=0$.

610. Μέθοδος τῶν τραπεζῶν. Ὅταν δὲν θέλωμεν νὰ ὑπολογίσωμεν τὸ ἐμβαδὸν ἐνὸς μεικτογράμμου σχήματος μὲ μεγάλην ἀκρίβειαν, χρησιμοποιοῦμεν τὴν ἀκόλουθον μέθοδον, ἣ ὁποία λέγεται *μέθοδος τῶν τραπεζῶν*.



Σχ. 422.

Πρὸς τοῦτο διαιροῦμεν τὴν AB εἰς ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα, ἔστω εἰς 7 καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως φέρομεν καθέτους ἐπὶ τὴν AB.

Ἄν θεωρήσωμεν, ὡς εὐθύγραμμα

τιμήματα τὰς καμπύλας πλευρᾶς τῶν τραπεζίων, ποὺ σχηματίζονται, θὰ εἶναι

$$E = \frac{\delta}{2} [(y_1 + y_2) + (y_2 + y_3) + (y_3 + y_4) + (y_4 + y_5) + (y_5 + y_6) + (y_6 + y_7) + (y_7 + y_8)]$$

$$\eta \quad E = \delta \left(\frac{y_1}{2} + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7 + \frac{y_8}{2} \right).$$

Σημ. Ἐὰν $y_1 = y_8 = 0$ τότε θὰ εἶναι

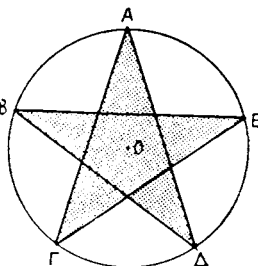
$$E = \delta (y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7).$$

Δηλ.: Τὸ ἔμβαδὸν τοῦ μεικτογράμμου μέρους εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τεταγμένων ἐπὶ τὴν κοινὴν ἀπόστασίν των.

5. Ἄστεροειδῆ κανονικά πολύγωνα

611. Ἄστεροειδῆ κανονικά πολύγωνα. Ἐὰν διαιρέσωμεν μίαν περιφέρειαν εἰς n ἴσα μέρη καὶ συνδέσωμεν μὲ εὐθείας τὰ διαδοχικὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως, θὰ σχηματισθῆ ἓνα κυρτὸν κανονικὸν πολύγωνον. Ἐὰν ὁμως συνδέσωμεν τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως ἀνὰ 2, ἢ ἀνὰ 3, ἢ ἀνὰ 4, ..., οὕτως ὥστε κάθε χορδὴ νὰ ἀντιστοιχῆ εἰς 2, ἢ 3, ἢ 4 διαιρέσεις καὶ ἐπανέλθωμεν εἰς τὸ σημεῖον ἀπὸ τοῦ ὁποῖον ἀνεχωρήσαμεν, δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν μίαν κανονικὴν *κλειστὴν* τεθλασμένην γραμμὴν μὲ n πλευρᾶς, ἣ ὁποία ὀνομάζεται *ἀστεροειδῆς κανονικὴ τεθλασμένη γραμμὴ*, ἣ δὲ ἐπιφάνεια τὴν ὁποίαν περικλείει ὀνομάζεται *ἀστεροειδῆς κανονικὸν πολύγωνον*.

Π.χ. ἂν διαιρέσωμεν τὴν περιφέρειαν O (Σχ. 423) εἰς 5 ἴσα μέρη $AB, B\Gamma, \dots$ καὶ συνδέσωμεν μὲ εὐθείας τὰ σημεῖα A, B, Γ, \dots τῆς διαιρέσεως ἀνὰ 2 μέχρις, ὅτου ἐπανέλθωμεν εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἀναχωρήσεως, λαμβάνομεν τὸ *κανονικὸν ἀστεροειδῆς πεντάγωνον* $ΑΓΕΒΔΑ$.



Σχ. 423.

Τὰ ἔστεροειδῆ πολύγωνα, τὰ ὁποῖα σχηματίζονται κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον, εἶναι κανονικά, διότι αἱ πλευραὶ των εἶναι ἴσαι, ὡς χορδαὶ ἴσων τόξων καὶ αἱ γωνίαι των εἶναι ἴσαι, διότι εἶναι ἐγγεγραμμένα καὶ βαίνουν ἐπὶ ἴσων τόξων.

Παρατήρησις. Εἰς τὸ ἀστεροειδῆς πεντάγωνον $ΑΓΕΒΔΑ$ (Σχ. 423) ἡ χορδὴ $ΑΓ$ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ τόξον $ΑΒΓ$, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπὸ 2 διαιρέσεις καὶ εἰς τὸ τόξον $ΓΔΕΑ$, τὸ ὁποῖον ἀποτελεῖται ἀπὸ 3, δηλ. $(5-2)$ διαιρέσεις. Ἄν λοιπὸν συνδέσωμεν τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως, εἴτε ἀνὰ 2, εἴτε ἀνὰ $5-2$, λαμβάνομεν τὸ αὐτὸ πολύγωνον.

Ὅμοιως, ἂν διαιρέσωμεν μίαν περιφέρειαν εἰς 10 ἴσα μέρη καὶ συνδέσωμεν μὲ εὐθείας τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως, εἴτε ἀνὰ 3, εἴτε ἀνὰ 10—3, δηλ. ἀνὰ 7, λαμβάνομεν τὸ αὐτὸ κανονικὸν ἄστεροειδὲς δεκάγωνον (Σχ. 424).

Γενικῶς, ἂν διαιρέσωμεν τὴν περιφέρειαν εἰς v ἴσα μέρη καὶ συνδέσωμεν μὲ εὐθείας τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως εἴτε ἀνὰ μ , εἴτε ἀνὰ $v-\mu$ λαμβάνομεν τὸ αὐτὸ κανονικὸν ἄστεροειδὲς πολύγωνον· διότι ἡ χορδὴ, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς μ διαιρέσεις ἀπὸ τὸ ἓνα μέρος, ἀντιστοιχεῖ εἰς $v-\mu$ διαιρέσεις ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος.

612. Θεώρημα. Ἐὰν μία περιφέρεια διαιρεθῇ εἰς v ἴσα μέρη καὶ συνδέσωμεν τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως ἀνὰ μ , θὰ σχηματισθῇ ἓνα ἄστεροειδὲς κανονικὸν πολύγωνον μὲ v πλευράς, δταν ὁ ἀριθμὸς μ εἶναι πρῶτος πρὸς τὸ v .

Ἐὰν συνδέσωμεν μὲ εὐθείας τὰ v διαδοχικὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως, κάθε χορδὴ ἀντιστοιχεῖ εἰς ἓνα τόξον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον μὲ τὸ $\frac{1}{v}$ τῆς περιφερείας. Ἐὰν συνδέσωμεν τὰ v σημεῖα τῆς διαιρέσεως ἀνὰ 2, κάθε χορδὴ ἀντιστοιχεῖ εἰς ἓνα τόξον ἴσον μὲ τὰ $\frac{2}{v}$ τῆς περιφερείας καὶ γενικῶς, ἂν συνδέσωμεν τὰ v σημεῖα τῆς διαιρέσεως ἀνὰ μ , κάθε χορδὴ θὰ ἀντιστοιχῇ εἰς ἓνα τόξον ἴσον μὲ τὰ $\frac{\mu}{v}$ τῆς περιφερείας.

Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι πρέπει νὰ φέρωμεν x χορδὰς διὰ νὰ ἐπανέλθωμεν εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἀναχωρήσεως. Ἐπειδὴ εἰς κάθε χορδὴν ἀντιστοιχοῦν τὰ $\frac{\mu}{v}$ τῆς περιφερείας, εἰς τὰς x χορδὰς θὰ ἀντιστοιχοῦν τὰ $\frac{\mu}{v} \times x$ τῆς περιφερείας. Ἀλλὰ τὸ γινόμενον $\frac{\mu \times x}{v}$ πρέπει νὰ εἶναι ἴσον μὲ ἓνα ἀκέραιον ἀριθμὸν k περιφερειῶν· δηλ. πρέπει νὰ εἶναι

$$\frac{\mu x}{v} = k \quad (1)$$

Διὰ νὰ εἶναι τὸ κλάσμα $\frac{\mu x}{v}$ ἴσον μὲ ἓνα ἀκέραιον ἀριθμὸν k , πρέπει ὁ παρονομαστής του v νὰ διαιρῇ ἀκριβῶς τὸν ἀριθμητὴν του μx .

Ἐδῶ διακρίνομεν δύο περιπτώσεις:

1ον. Οἱ ἀριθμοὶ μ καὶ v εἶναι πρῶτοι μεταξὺ των.

Ἐπειδὴ ὁ v διαιρεῖ τὸ γινόμενον $\mu \cdot x$ δύο παραγόντων καὶ εἶναι πρῶτος πρὸς τὸν μ , πρέπει νὰ διαιρῇ τὸν ἄλλον παράγοντα x · ἥτοι πρέπει νὰ εἶναι $x = \text{πολ.}v$. Ἡ μικροτέρα λοιπὸν τιμὴ, τὴν ὁποῖαν δύναται νὰ λάβῃ ὁ x εἶναι v .

Διὰ $x=v$ (2), ἡ ἰσότης (1) δίδει $\mu=k$ (3).

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (2) καὶ (3) συνάγομεν, ὅτι τὸ πολύγωνον θὰ ἔχη v πλευράς καὶ ὅτι διὰ v ὰ κατασκευασθῆ τὸ πολύγωνον αὐτὸ πρέπει v ὰ διατρέξωμεν τὴν περιφέρειαν μ φορὰς.

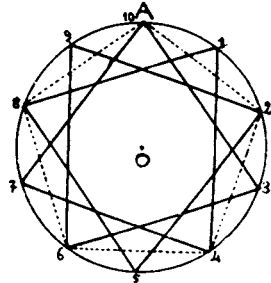
2ον. Οἱ ἀριθμοὶ v καὶ μ δὲν εἶναι πρῶτοι μεταξὺ τῶν.

Ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ v καὶ μ δὲν εἶναι πρῶτοι μεταξὺ τῶν, θὰ ἔχουν ἓνα μ.κ.δ. ἔστω τὸν δ . Τὰ πηλίκα ὁμοῦ τῶν ἀριθμῶν v καὶ μ διὰ τοῦ δ , δηλ. τὰ $\frac{v}{\delta}$ καὶ $\frac{\mu}{\delta}$ θὰ ἦσαν πρῶτα μεταξὺ τῶν.

Ἄν θέσωμεν $\frac{v}{\delta}=v'$ καὶ $\frac{\mu}{\delta}=\mu'$ καὶ ἐργασθῶμεν, ὅπως εἰς τὴν 1ην περίπτωσιν θὰ εὗρωμεν, ὅτι $x=v'=\frac{v}{\delta}$ καὶ $k=\mu'=\frac{\mu}{\delta}$, δηλ. τὸ πολύγωνον θὰ ἔχη $\frac{v}{\delta}$ πλευράς,

Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι διὰ v ὰ ἔχη τὸ πολύγωνον v πλευράς, πρέπει οἱ ἀριθμοὶ v καὶ μ v ὰ εἶναι πρῶτοι μεταξὺ τῶν.

Παράδειγμα. Ἐὰν διαιρέσωμεν τὴν περιφέρειαν O εἰς $v=10$ ἴσα μέρη καὶ συνδέσωμεν τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως ἀνά $\mu=3$, λαμβάνομεν ἓνα κανονικὸν ἀστεροειδὲς δεκάγωνον. Ἐδῶ εἶναι $v=10$, $\mu=3$ καὶ οἱ ἀριθμοὶ 10 καὶ 3 εἶναι πρῶτοι μεταξὺ τῶν.



Σχ. 424.

Ἐὰν ὁμοῦ συνδέσωμεν τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως ἀνά 2 λαμβάνομεν ἓνα κυρτὸν καὶ ὄχι ἀστεροειδὲς κανονικὸν πεντάγωνον. Ἐδῶ οἱ ἀριθμοὶ $v=10$ καὶ $\mu=2$ δὲν εἶναι πρῶτοι μεταξὺ τῶν.

Ἐὰν συνδέσωμεν τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως ἀνά 4 λαμβάνομεν ἓνα κανονικὸν ἀστεροειδὲς πεντάγωνον καὶ ὄχι δεκάγωνον. Ἐδῶ οἱ ἀριθμοὶ $v=10$, $\mu=4$ δὲν εἶναι πρῶτοι μεταξὺ τῶν.

Παρατήρησις. Ἀπὸ τὸ προηγούμενον θεώρημα συνάγομεν, ὅτι δυνατόν ἐστὶν v ὰ κατασκευάσωμεν τόσα ἀστεροειδῆ κανονικά πολύγωνα μὲ v πλευράς, ὅσοι εἶναι οἱ ἀριθμοὶ τῆς σειρᾶς

$$1, 2, 3, 4, \dots, v-1.$$

οἱ ὁποῖοι εἶναι πρῶτοι πρὸς τὸν v .

Ἄλλὰ, ὅπως ἀνεφέραμεν εἰς τὴν παρατήρησιν τῆς § 611 λαμβάνομεν τὸ αὐτὸ κανονικὸν πολύγωνον μὲ v πλευράς, εἴτε συνδέοντες τὰ

σημεῖα τῆς διαιρέσεως ἀνά μ , εἴτε ἀνά $\nu - \mu$. Ἐπομένως ὁ πραγματικὸς ἀριθμὸς τῶν ἀστεροειδῶν κανονικῶν πολυγώνων μὲ ν πλευρὰς εἶναι ἴσος μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀκεραίων, οἱ ὅποιοι περιέχονται εἰς τὴν σειρὰν $1, 2, 3, \dots, \frac{\nu-1}{2}$ καὶ οἱ ὅποιοι εἶναι πρῶτοι πρὸς τὸν ν .

Ὁ κάτωθι πίναξ μᾶς δεικνύει τὰ σπουδαιότερα κανονικά πολύγωνα, κυρτὰ ἢ ἀστεροειδῆ, τὰ ὅποια σχηματίζονται, ἐὰν διαιρέσωμεν τὴν περιφέρειαν εἰς ν ἴσα μέρη καὶ συνδέσωμεν τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως ἀνά μ .

Τιμαὶ τοῦ		Σχηματιζόμενα κανονικά πολύγωνα
ν	μ	
3	1	Ἴσόπλευρον τρίγωνον
4	1	Τετράγωνον
5	1 2	Κανονικὸν πεντάγωνον κυρτὸν » » ἀστεροειδές
6	1	Κανονικὸν ἑξάγωνον
8	1 3	Κανονικὸν ὀκτάγωνον κυρτὸν » » ἀστεροειδές
10	1 3	Κανονικὸν δεκάγωνον κυρτὸν » » ἀστεροειδές
12	1 5	Κανονικὸν δωδεκάγωνον κυρτὸν » » ἀστεροειδές
15	1	} Κανονικὸν δεκαπεντάγωνον κυρτὸν Τρία κανονικά δεκαπεντάγωνα ἀστεροειδῆ
	2	
	4	
	7	

Ἄσκησης. 1966. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ τοῦ ἀστεροειδοῦς κανονικοῦ ὀκταγώνου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον, συναρτήσῃ τῆς ἀκτίνου του R .

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΟΣ ΠΙΝΑΞ
ΤΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ ΛΥΣΕΩΝ ΤΩΝ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

Εἰς τὰς σελίδας 152—154 τοῦ Α' βιβλίου ἔχομεν ἀναγράψει τὰς κυριωτέρας μεθόδους ἀποδείξεως, τὰς ὁποίας ἐχρησιμοποίησαμεν κατὰ τὴν ἀπόδειξιν θεωρημάτων ἢ τὴν λύσιν γεωμετρικῶν προβλημάτων. Κατωτέρω θὰ συμπληρώσωμεν τὸν πίνακα ἐκεῖνον, διὰ τῆς προσθήκης καὶ νέων προτάσεων, τὰς ὁποίας ἐχρησιμοποίησαμεν εἰς τὸ Β', Γ' καὶ Δ' βιβλίον τῆς Γεωμετρίας.

Γωνίαι ἴσαι :

Διὰ τὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι δύο γωνίαι εἶναι ἴσαι, πρέπει νὰ ἀποδείξωμεν :

- 1ον. Ὅτι εἶναι ἄθροισμα ἢ διαφορά γωνιῶν ἀντιστοίχως ἴσων.
- 2ον. Ὅτι εἶναι συμπληρωματικαὶ ἢ παραπληρωματικαὶ ἴσων γωνιῶν.
- 3ον. Ὅτι εἶναι κατὰ κορυφὴν γωνίαι.
- 4ον. Ὅτι εἶναι παρὰ τὴν βᾶσιν γωνίαι ἰσοσκελοῦς τριγώνου.
- 5ον. Ὅτι εἶναι ὁμόλογοι γωνίαι ἴσων τριγώνων.
- 6ον. Ὅτι εἶναι ἐντὸς ἐναλλάξ γωνίαι, ἐκτὸς ἐναλλάξ γωνίαι, ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίαι, ποῦ σχηματίζονται ὑπὸ δύο παραλλήλων καὶ μιᾶς τεμνοῦσης.
- 7ον. Ὅτι εἶναι γωνίαι, τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶναι παράλληλοι καὶ ἔχουν τὴν αὐτὴν φοράν ἢ ἀντίθετον φοράν.
- 8ον. Ὅτι εἶναι ὀξείαι ἢ ἀμβλείαι γωνίαι, τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶναι κάθετοι.
- 9ον. Ὅτι εἶναι συμμετρικαὶ γωνίαι ὡς πρὸς κέντρον ἢ πρὸς ἄξονα.
- 10ον. Ὅτι, κατὰ ἓνα γενικὸν τρόπον, εἶναι τὰ ἄκρα μιᾶς σειρᾶς ἴσων γωνιῶν.
- 11ον. Ὅτι εἶναι ἐγγεγραμμένα γωνίαι, αἱ ὁποῖαι βαίνουν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ τόξου.
- 12ον. Ὅτι ἡ μία εἶναι γωνία σχηματιζομένη ὑπὸ χορδῆς καὶ ἐφαπτομένης καὶ ἡ ἄλλη εἶναι ἐγγεγραμμένη, ἢ ὁποῖα βαίνει ἐπὶ τοῦ τόξου τοῦ περιεχομένου μεταξύ τῶν πλευρῶν τῆς πρώτης.
- 13ον. Ὅτι ἡ μία εἶναι γωνία ἐνὸς τετραπλεύρου ἐγγεγραμμένου εἰς κύκλον καὶ ἡ ἄλλη εἶναι ἡ ἐξωτερικὴ γωνία τῆς ἀπέναντι κορυφῆς.
- 14ον. Ὅτι ἡ μία εἶναι μία γωνία, σχηματιζομένη ὑπὸ μιᾶς πλευρᾶς καὶ μιᾶς διαγωνίου ἐνὸς τετραπλεύρου ἐγγεγραψίμου εἰς κύκλον καὶ ἡ ἄλλη εἶναι ἡ γωνία, ἢ σχηματιζομένη ὑπὸ τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς καὶ τῆς ἄλλης διαγωνίου.
- 15ον. Εἶναι αἱ ὁμόλογοι γωνίαι δύο ὁμοίων τριγώνων, ἢ γενικῶς δύο ὁμοίων εὐθυγράμμων σχημάτων.

Ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα :

Διὰ τὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι δύο εὐθύγραμμα τμήματα εἶναι ἴσα, πρέπει νὰ ἀποδείξωμεν :

- 1ον. Ὅτι εἶναι ἄθροισμα ἢ διαφορά εὐθυγράμμων τμημάτων ἀντιστοίχως ἴσων.
- 2ον. Ὅτι εἶναι δύο ὁμόλογοι πλευραὶ δύο ἴσων τριγώνων.
- 3ον. Ὅτι εἶναι αἱ ἀπέναντι πλευραὶ παραλληλογράμμου.
- 4ον. Ὅτι εἶναι αἱ διαγώνιοι ἐνὸς ὀρθογωνίου.
- 5ον. Ὅτι εἶναι τμήματα παραλλήλων, περιεχομένων μεταξύ παραλλήλων εὐθειῶν.
- 6ον. Ὅτι εἶναι δύο εὐθύγραμμα τμήματα συμμετρικὰ πρὸς ἄξονα ἢ πρὸς κέντρον.

7ον. Ὅτι εἶναι αἱ δύο πλευραὶ ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου.

8ον. Ὅτι εἶναι τὰ δύο τμήματα τῆς βάσεως ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζεται ἡ βᾶσις ἀπὸ τὸ ὕψος τοῦ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ἢ ἀπὸ τὴν διχοτόμον τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς του.

9ον. Ὅτι, κατὰ ἓνα γενικὸν τρόπον, εἶναι τὰ ἄκρα μιᾶς σειρᾶς ἴσων εὐθύγραμμων τμημάτων.

10ον. Ὅτι εἶναι δύο ἀκτίνες ἢ δύο διαμέτροι τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἢ δύο ἴσων κύκλων.

11ον. Ὅτι εἶναι χορδαὶ τοῦ αὐτοῦ κύκλου ἢ ἴσων κύκλου, αἱ ὁποῖαι ἀπέχουν ἀπὸ τὸ κέντρον ἀποστάσεις ἴσας.

12ον. Ὅτι εἶναι χορδαὶ ἴσων τόξων.

13ον. Ὅτι εἶναι ἐφαπτόμεναι τῆς αὐτῆς περιφερείας, ἀγόμεναι ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον.

Ἴσοσκελὲς τρίγωνον :

Διὰ τὴν ἀποδείξωμεν, ὅτι ἓνα τρίγωνον εἶναι ἰσοσκελὲς πρέπει τὴν ἀποδείξωμεν :

1ον. Ὅτι ἔχει δύο πλευρὰς ἢ δύο γωνίας ἴσας.

2ον. Ὅτι ἔχει ἓνα ἄξονα συμμετρίας.

3ον. Ὅτι ἡ διχοτόμος μιᾶς γωνίας του εἶναι συγχρόνως καὶ ὕψος αὐτοῦ.

Ἡ διχοτόμος μιᾶς γωνίας του εἶναι καὶ διάμεσός του.

Ἡ διχοτόμος μιᾶς γωνίας του εἶναι καὶ μεσοκάθετος τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς.

Ἐνα ὕψος του εἶναι καὶ διάμεσός του, αἱ ὁποῖαι ἀπὸ τὴν αὐτὴν κορυφὴν.

Ἐνα ὕψος του εἶναι καὶ μεσοκάθετος τῆς ἀντιστοίχου πλευρᾶς.

Μία διάμεσός του εἶναι καὶ μεσοκάθετος τῆς πλευρᾶς.

Ὀρθογώνιον τρίγωνον :

Διὰ τὴν ἀποδείξωμεν, ὅτι ἓνα τρίγωνον εἶναι ὀρθογώνιον πρέπει τὴν ἀποδείξωμεν :

1ον. Ὅτι ἔχει μίαν γωνίαν ὀρθήν.

2ον. Ὅτι αἱ δύο γωνίαι του εἶναι συμπληρωματικαί.

3ον. Ὅτι ἡ διάμεσος ἢ ὁποῖα ἀγεται ἀπὸ μίαν κορυφὴν εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ἀντιστοίχου πλευρᾶς.

4ον. Ὅτι εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς ἓνα ἡμικύκλιον.

5ον. Ὅτι ἔχει μίαν γωνίαν 60° καὶ αἱ πλευραὶ, πὺ περιέχουν τὴν γωνίαν αὐτὴν εἶναι τοιαῦται, ὥστε ἡ μία εἶναι διπλασία τῆς ἄλλης.

6ον. Ὅτι τὸ τετράγωνον μιᾶς πλευρᾶς του εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν του.

7ον. Ὅτι τὸ ὕψος, τὸ ἀντιστοιχοῦν εἰς μίαν πλευρὰν του, εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν δύο τμημάτων, τὰ ὁποῖα ὀρίζει ἐπὶ τῆς πλευρᾶς αὐτῆς (τὸ ἔξεταζόμενον τρίγωνον εἶναι ὀξυγώνιον).

8ον. Ὅτι ἡ μία πλευρὰ του εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ μιᾶς ἄλλης πλευρᾶς καὶ τῆς προβολῆς τῆς πρώτης ἐπὶ τὴν δευτέραν (τὸ ἔξεταζόμενον τρίγωνον εἶναι ὀξυγώνιον).

9ον. Τὸ ἐμβαδόν του εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου δύο πλευρῶν του.

Εὐθεῖαι κάθετοι :

Διὰ τὴν ἀποδείξωμεν, ὅτι δύο εὐθεῖαι εἶναι κάθετοι μεταξύ των, πρέπει τὴν ἀποδείξωμεν :

1ον. Ὅτι ἡ μία τῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζουν εἶναι ὀρθή,

(πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι εἶναι 90° ἢ ὅτι εἶναι ἴση μὲ μίαν ἄλλην ὀρθὴν γωνίαν ταῦ σχήματος ἢ ὅτι εἶναι ἡ τρίτη γωνία ἑνὸς τριγώνου, τοῦ ὁποῖου αἱ δύο ἄλλαι γωνίαι εἶναι συμπληρωματικαί).

2ον. Ὅτι εἶναι διχοτόμοι δύο ἐφεξῆς παραπληρωματικῶν γωνιῶν.

3ον. Ὅτι ἡ μία εὐθεῖα εἶναι ἡ βᾶσις ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου καὶ ἡ ἄλλη εἶναι ἡ μεσοκάθετος τῆς βάσεως ἢ ἡ διχοτόμος τῆς γωνίας τῆς κορυφῆς του.

4ον. Ὅτι ἡ μία εὐθεῖα εἶναι παράλληλος πρὸς μίαν κάθετον πρὸς τὴν ἄλλην εὐθεῖαν.

5ον. Ὅτι εἶναι δύο πλευραὶ ἴσων γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰς δύο ἄλλας πλευράς των ἀντιστοίχως καθέτους καὶ αἱ γωνίαι ἔχουν τὴν αὐτὴν φοράν πρὸς τὰς τελευταίας πλευράς.

6ον. Ὅτι ἡ μία εὐθεῖα συνδέει δύο συμμετρικὰ σημεῖα πρὸς τὴν ἄλλην εὐθεῖαν.

7ον. Ὅτι εἶναι διαγώνιοι ἑνὸς ρόμβου ἢ τετραγώνου.

8ον. Ὅτι ἡ μίτα εἶναι μία πλευρὰ ἑνὸς τριγώνου, ἡ ἄλλη εἶναι ἡ εὐθεῖα, ποῦ συνδέει τὴν ἀπέναντι κορυφὴν μὲ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ὕψων, ποῦ ἄγονται ἀπὸ τὰς ἄλλας κορυφὰς τοῦ τριγώνου.

9ον. Ὅτι ἡ μία εἶναι ἐφαπτομένη μιᾶς περιφερείας καὶ ἡ ἄλλη εἶναι ἀκτίς, ἡ ὁποία καταλήγει εἰς τὸ σημεῖον τῆς ἐπαφῆς.

10ον. Ὅτι ἡ μία εἶναι μία χορδὴ ἑνὸς κύκλου καὶ ἡ ἄλλη εἶναι :

α) εἴτε ἡ διάμετρος, ποῦ διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον τῆς χορδῆς·

β) εἴτε ἡ διάμετρος, ποῦ διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον τοῦ ἀντιστοίχου τόξου.

γ) εἴτε ἡ εὐθεῖα, ποῦ συνδέει τὰ μέσα τῶν δύο τόξων, ποῦ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν χορδὴν αὐτήν·

δ) εἴτε ἡ εὐθεῖα, ποῦ συνδέει τὸ μέσον τῆς χορδῆς μὲ τὸ μέσον ἑνὸς ἐκ τῶν δύο τόξων, ποῦ ἀντιστοιχοῦν εἰς τὴν χορδὴν αὐτήν.

11ον. Ὅτι ἡ μία εἶναι ἡ εὐθεῖα, ποῦ συνδέει ἕνα σημεῖον, κείμενον ἐκτὸς κύκλου, μὲ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου καὶ ἡ ἄλλη εἶναι ἡ εὐθεῖα, ποῦ συνδέει τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῶν ἐφαπτομένων, ποῦ ἄγονται ἀπὸ τὸ σημεῖον πρὸς τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου.

12ον. Ὅτι ἡ μία εἶναι ἕνα εὐθύγραμμον τμήμα καὶ ἡ ἄλλη ἡ εὐθεῖα, ποῦ συνδέει δύο σημεῖα, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἰσάκεις ἀπὸ τὰ ἄκρα τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος.

13ον. Ὅτι ἡ μία εἶναι ἡ διάκεντρος δύο περιφερειῶν καὶ ἡ ἄλλη ὁ ριζικός ἄξων των.

Εὐθεῖαι παράλληλοι :

Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι δύο εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι μεταξὺ των, πρέπει νὰ ἀποδείξωμεν :

1ον. Ὅτι εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.

2ον. Ὅτι εἶναι κάθετοι πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.

3ον. Ὅτι σχηματίζουν μὲ μίαν τέμνουσαν :

δύο ἐντὸς ἐναλλάξ γωνίας ἴσας·

ἢ δύο ἐκτὸς ἐναλλάξ γωνίας ἴσας·

ἢ δύο ἐντὸς ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας ἴσας·

ἢ δύο ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας παραπληρωματικὰς·

ἢ δύο ἐκτὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας παραπληρωματικὰς.

4ον. Ὅτι εἶναι δύο πλευραὶ δύο ἴσων γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰς πλευράς των παραλλήλους καὶ αἱ γωνίαι ἔχουν τὴν αὐτὴν φοράν, ὡς πρὸς τὰς τελευταίας πλευράς.

5ον. Ὅτι ἡ μία εἶναι ἡ βᾶσις ἑνὸς τριγώνου καὶ ἡ ἄλλη εἶναι ἡ εὐθεῖα, ποῦ συνδέει τὰ μέσα τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

6ον. Ὅτι εἶναι εὐθεῖα, συνδέουσα ἀντιστοίχως δύο ζεύγη σημείων συμμετρικῶν πρὸς τὸν αὐτὸν ἄξονα.

7ον. Ὅτι δύο σημεία τῆς μιᾶς ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὴν ἄλλην εὐθεῖαν.

8ον. Ὅτι ὀρίζουν ἐπὶ δύο τεμνομένων εὐθειῶν μὲ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν τμήματα ἀνάλογα, κείμενα κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον.

Παραλληλόγραμμο :

Διὰ τὴν ἀποδείξωμεν, ὅτι ἓνα τετράπλευρον εἶναι παραλληλόγραμμο πρέπει νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι :

1ον. Αἱ ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ εἶναι παράλληλοι ἀνὰ δύο.

2ον. Αἱ ἀπέναντι γωνίαι τοῦ εἶναι ἴσαι ἀνὰ δύο.

3ον. Αἱ ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ εἶναι ἴσαι ἀνὰ δύο.

4ον. Δύο ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι.

5ον. Αἱ διαγωνιοὶ τοῦ διχοτομοῦνται.

Ὀρθογώνιον :

Διὰ τὴν ἀποδείξωμεν, ὅτι ἓνα τετράπλευρον εἶναι ὀρθογώνιον, πρέπει νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι εἶναι παραλληλόγραμμο καὶ :

1ον. Ὅτι ἔχει μίαν γωνίαν ὀρθήν.

2ον. Ὅτι ἔχει τὰς δύο διαγωνίους τοῦ ἴσας.

3ον. Ὅτι εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον.

Δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι εἶναι ἓνα τετράπλευρον, τὸ ὁποῖον ἔχει τρεῖς ὀρθὰς γωνίας.

Ρόμβος :

Διὰ τὴν ἀποδείξωμεν, ὅτι ἓνα τετράπλευρον εἶναι ῥόμβος πρέπει νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι εἶναι παραλληλόγραμμο καὶ :

1ον. Ὅτι ἔχει δύο διαδοχικὰς πλευρὰς ἴσας.

2ον. Ὅτι ἔχει δύο διαγωνίους καθέτους.

3ον. Ὅτι ἡ μία διαγωνιὸς τοῦ εἶναι διχοτόμος μιᾶς τῶν γωνιῶν τοῦ.

Δυνάμεθα ἐπίσης νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι εἶναι ἓνα τετράπλευρον, τὸ ὁποῖον ἔχει καὶ τὰς τέσσαρας πλευρὰς τοῦ ἴσας.

Τετραγώνον :

Διὰ τὴν ἀποδείξωμεν ὅτι ἓνα τετράπλευρον εἶναι τετραγώνον, πρέπει νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι εἶναι καὶ ὀρθογώνιον καὶ ῥόμβος.

Διχοτόμος τῆς γωνίας :

Α'. Διὰ τὴν ἀποδείξωμεν, ὅτι μία ἡμιευθεῖα εἶναι διχοτόμος μιᾶς γωνίας, πρέπει νὰ ἀποδείξωμεν :

1ον. Ὅτι αὐτὴ σχηματίζει δύο γωνίας ἴσας μὲ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας.

2ον. Ὅτι ἓνα ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας.

Β'. Διὰ τὴν ἀποδείξωμεν, ὅτι μία ἡμιευθεῖα εἶναι διχοτόμος μιᾶς γωνίας ἐνὸς τριγώνου, πρέπει νὰ ἀποδείξωμεν :

1ον. Ὅτι συνδέει τὴν κορυφὴν μιᾶς γωνίας μὲ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ἐσωτερικῶν διχοτόμων τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν.

2ον. Ὅτι συνδέει τὴν κορυφὴν μιᾶς γωνίας μὲ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ἔξωτερικῶν διχοτόμων τῶν δύο ἄλλων γωνιῶν.

3ον. Ὅτι χωρίζει τὴν ἀπέναντι πλευρὰν εἰς δύο μέρη ἀνάλογα τῶν πλευρῶν, πού περιέχουν τὴν ἡμιευθεῖαν αὐτὴν.

Σημεῖα κείμενα ἐπὶ εὐθείας :

A'. Διὰ τὸ ἀποδείξωμεν, ὅτι τρία σημεῖα A, B, Γ κείνται ἐπ' εὐθείας.

1ον. Δυνάμεθα νὰ συνδέσωμεν τὰ σημεῖα B καὶ Γ μὲ τὸ σημεῖον A καὶ νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι τὰ εὐθύγραμμα τμήματα AB καὶ $A\Gamma$ κείνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας.

α) Ἐὰν τὰ σημεῖα B καὶ Γ κείνται ἐκατέρωθεν τοῦ A δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι ἡ γωνία $BA\Gamma$ εἶναι πεπλατυσμένη ἢ ὅτι, ἐὰν $X\psi$ εἶναι μία εὐθεῖα διερχομένη διὰ τοῦ A , αἱ γωνίαι BAX καὶ $\Gamma A\psi$ εἶναι ἴσαι.

β) Ἐὰν τὰ σημεῖα B καὶ Γ κείνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ A δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι, ἐὰν AX εἶναι μία ἡμιευθεῖα, ὀγκομένη ἀπὸ τὸ A , αἱ γωνίαι BAX καὶ ΓAX εἶναι ἴσαι.

γ) Δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι τὰ τμήματα AB καὶ $A\Gamma$ εἶναι παράλληλα ἢ κάθετα ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.

2ον. Δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι καὶ τὰ τρία σημεῖα κείνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ γεωμετρικοῦ τόπου, ὅταν ὁ τόπος αὐτὸς εἶναι μία εὐθεῖα,

3ον. Ἐὰν τὸ σημεῖον Γ κείται ἐπὶ μιᾶς γραμμῆς E , δυνάμεθα νὰ φέρωμεν τὴν εὐθεῖαν AB . Ἡ εὐθεῖα αὕτη τέμνει τὴν γραμμὴν E εἰς ἓνα σημεῖον Γ' . Ἐὰν τὰ σημεῖα Γ καὶ Γ' συμπίπτουν, τότε τὰ σημεῖα A, B, Γ κείνται ἐπ' εὐθείας.

4ον. Δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι δύο ἀπὸ τὰ σημεῖα εἶναι συμμετρικὰ μιᾶς συμμετρίας, τῆς ὁποίας τὸ τρίτον σημεῖον εἶναι κέντρον συμμετρίας.

5ον. Δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι δύο ἀπὸ τὰ σημεῖα αὐτὰ εἶναι ὁμοιόθετα μιᾶς ὁμοιοθεσίας, τῆς ὁποίας τὸ τρίτον σημεῖον εἶναι τὸ κέντρον ὁμοιοθεσίας.

6ον. Διὰ τὸ δεῖξωμεν ὅτι δύο σημεῖα μιᾶς περιφερείας καὶ τὸ κέντρον αὐτῆς κείνται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς, πρέπει νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι τὰ δύο σημεῖα εἶναι τὰ μέσα δύο τόξων, ποῦ ἀντιστοιχοῦν εἰς μίαν χορδὴν, ἢ ὅτι αἱ χορδαί, ποῦ συνδέουν τὰ σημεῖα αὐτὰ μὲ τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας σχηματίζουν ὀρθὴν γωνίαν,

B'. Διὰ τὸ ἀποδείξωμεν, ὅτι τέσσαρα σημεῖα A, B, Γ, Δ κείνται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς πρέπει νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι τὰ τρία ἀπὸ τὰ σημεῖα αὐτὰ κείνται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς καὶ ἔπειτα τὸ τέταρτον σημεῖον καὶ δύο ἐκ τῶν τριῶν πρώτων κείνται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς.

Σημεῖα κείμενα ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας :

A'. Διὰ τὸ ἀποδείξωμεν ὅτι τέσσαρα σημεῖα A, B, Γ, Δ κείνται ἐπὶ περιφερείας δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν :

1ον. Ὅτι αἱ ἀπέναντι γωνίαι τοῦ τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ εἶναι παραπληρωματικά.

2ον. Ὅτι μία γωνία τοῦ τετραπλεύρου εἶναι ἴση μὲ τὴν ἐξωτερικὴν γωνίαν τῆς ἀπέναντι κορυφῆς.

3ον. Ὅτι μία γωνία, σχηματιζομένη ἀπὸ μίαν πλευρὰν καὶ μίαν διαγώνιον τοῦ τετραπλεύρου εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν, ποῦ σχηματίζεται ἀπὸ τὴν ἀπέναντι πλευρὰν καὶ τὴν ἄλλην διαγώνιον.

4ον. Ὅτι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς δύο ἀπέναντι πλευρῶν, π.χ. τὸν AB καὶ $\Gamma\Delta$, ὀρίζει τμήματα τοιαῦτα, ὥστε νὰ εἶναι $\Sigma A \times \Sigma B = \Sigma \Gamma \times \Sigma \Delta$.

5ον. Ὅτι τὸ σημεῖον S τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων τοῦ $A\Gamma$ καὶ $B\Delta$ διαιρεῖ τὰς διαγώνιους εἰς τμήματα τοιαῦτα, ὥστε νὰ εἶναι

$$\Sigma A \times \Sigma \Gamma = \Sigma B \times \Sigma \Delta.$$

6ον. Τὰ τέσσαρα σημεῖα ἀπέχουν ἰσάκεις ἀπὸ ἑνὸς ἄλλο σημεῖου.

7ον. Ὅτι τὰ τέσσαρα σημεῖα ἀνήκουν εἰς ἓνα τόπον, ὁ ὁποῖος εἶναι μία περιφέρεια κύκλου.

Β'. Διὰ τὴν ἀποδείξωμεν ὅτι πέντε σημεῖα A, B, Γ, Δ, E κείνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας πρέπει νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι τέσσαρα ἀπὸ τὰ σημεῖα αὐτὰ κείνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς περιφερείας καὶ ὅτι τὸ πέμπτον καὶ τρία ἀπὸ τὰ τέσσαρα πρῶτα σημεῖα κείνται ἐπὶ μιᾶς περιφερείας, ἢ ὅποια συμπίπτει μὲ τὴν πρώτην, διότι ἔχουν τρία κοινὰ σημεῖα μὲ αὐτήν.

Εὐθεῖαι τεμνόμεναι :

Διὰ τὴν ἀποδείξωμεν ὅτι τρεῖς εὐθεῖαι τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον δυνάμεθα νὰ ἀπαδείξωμεν :

1ον. Ὅτι δύο ἐκ τῶν εὐθειῶν αὐτῶν τέμνουν τὴν τρίτην εὐθεῖαν εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

2ον. Ὅτι δύο σημεῖα τῆς μιᾶς καὶ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν δύο ἄλλων εὐθειῶν κείνται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς.

3ον. Ὅτι αἱ τρεῖς αὐταὶ εὐθεῖαι εἶναι αἱ τρεῖς διάμεσοι ἑνὸς τριγώνου, εἴτε αἱ τρεῖς μεσοκάθετοι τῶν πλευρῶν, εἴτε αἱ τρεῖς διχοτόμοι τῶν γωνιῶν του, εἴτε τὰ τρία ὕψη του.

Περιφέρειαι ἐφαπτόμεναι :

Διὰ τὴν ἀποδείξωμεν, ὅτι δύο περιφέρειαι ἐφάπτονται, δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν :

1ον. Ὅτι ἡ διάκεντρος τῶν εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων τῶν.

2ον. Ὅτι ἔχουν ἓνα κοινὸν σημεῖον, τὸ ὁποῖον κείνται ἐπὶ τῆς διακέντρον τῶν.

3ον. Ὅτι ἔχουν εἰς ἓνα σημεῖον κοινήν ἐφαπτομένην.

Περιφέρειαι τεμνόμεναι :

Διὰ τὴν δεῖξωμεν, ὅτι δύο περιφέρειαι τέμνονται, δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν :

1ον. Ὅτι ἡ διάκεντρος τῶν εἶναι μεγαλυτέρα τοῦ ἄθροισματος τῶν ἀκτίνων τῶν καὶ μικροτέρα τῆς διαφορᾶς τῶν.

2ον. Ὅτι ἔχουν ἓνα κοινὸν σημεῖον, τὸ ὁποῖον κείνται ἐκτὸς τῆς διακέντρον τῶν.

Ἐφαπτομένη μιᾶς περιφερείας :

Διὰ τὴν ἀποδείξωμεν, ὅτι μία εὐθεῖα εἶναι ἐφαπτομένη μιᾶς περιφερείας, δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν :

1ον. Ὅτι εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἄκρον μιᾶς ἀκτίνος.

2ον. Ὅτι σχηματίζει μὲ μίαν χορδὴν μίαν γωνίαν, ἢ ὅποια ἔχει μέτρον ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ μέτρου τοῦ τόξου, ποῦ ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν χορδὴν.

3ον. Ὅτι εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ μιᾶς ὀλοκλήρου τεμνούσης, ἢ ὅποια ἄγεται ἀπὸ ἓνα σημεῖον τὸ ὁποῖον κείνται ἐκτὸς τῆς περιφερείας καὶ τοῦ ἐκτὸς μέρους τῆς τεμνούσης αὐτῆς.

ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ

ΒΙΒΛΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ ΕΥΘΕΙΑΙ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄

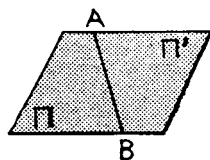
ΤΟΜΗ ΕΥΘΕΙΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΩΝ

1. Ὅρισμοὶ

613. Ἐπίπεδον. Σύμφωνα με τὸν ὁρισμὸν, τὸν ὁποῖον ἐδώσαμεν εἰς τὴν § 18, *ἐπίπεδον* καλεῖται *μία ἀπεριόριστος ἐπιφάνεια ἐπὶ τῆς ὁποίας ἢ εὐθεΐα, ἢ ὁποία συνδέει δύο τυχόντα σημεῖα τῆς ἐπιφανείας, κεῖται ὁλόκληρος ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας.*

Παραδεχόμεθα χωρὶς ἀπόδειξιν τὴν ὑπαρξιν μιᾶς τοιαύτης ἐπιφανείας.

Κατὰ τὸν ὁρισμὸν αὐτόν, τὸ ἐπίπεδον εἶναι *μία ἀπεριόριστος ἐπιφάνεια, ἢ ὁποία ἐκτείνεται πρὸς ὅλα τὰ μέρη*· δὲν δυνάμεθα λοιπὸν νὰ παραστήσωμεν ἐπὶ ἐνὸς φύλλου χάρτου ἢ ἐπὶ τοῦ πίνακος, παρὰ ἓνα μέρος τοῦ ἐπιπέδου· συνήθως παριστάνομεν ἓνα ἐπίπεδον μετὰ ἓνα παραλληλόγραμμον καὶ τὸ ὀνομάζομεν μετὰ ἓνα γράμμα, τὸ ὁποῖον θέτομεν εἰς μίαν γωνίαν τοῦ παραλληλογράμμου. Π.χ. λέγομεν τὸ ἐπίπεδον Π (Σχ. 425).



Σχ. 425.

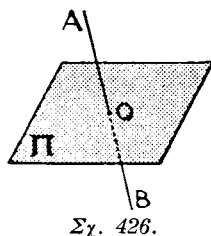
Κάθε ἐπίπεδον χωρίζει τὸ διάστημα, τὸ ὁποῖον μᾶς περιβάλλει, εἰς δύο μέρη· εἶναι φανερόν, ὅτι δὲν δυνάμεθα νὰ μεταβῶμεν ἀπὸ τὸ ἓνα μέρος εἰς τὸ ἄλλο, χωρὶς νὰ διαπεράσωμεν τὸ ἐπίπεδον.

614. Ἡμιεπίπεδον. *Μία ἀπεριόριστος εὐθεΐα AB (Σχ. 425), ἢ ὁποία κεῖται ἐπὶ ἐνὸς ἐπιπέδου Π , χωρίζει αὐτὸ εἰς δύο μέρη, τὰ ὁποῖα λέγονται ἡμιεπίπεδα.*

Π.χ. ἡ εὐθεΐα AB χωρίζει τὸ ἐπίπεδον Π εἰς τὰ ἡμιεπίπεδα AB Π καὶ AB Π' . Ἡ εὐθεΐα AB λέγεται *ἀρχικὴ εὐθεΐα* τῶν δύο ἡμιεπιπέδων.

615. Σχετικά θέσεις εὐθείας καὶ ἐπιπέδου. Αἱ ἀμοιβαῖαι θέσεις μιᾶς εὐθείας καὶ ἑνὸς ἐπιπέδου εἶναι αἱ ἑξῆς:

1ον. Ἡ εὐθεῖα δύναται νὰ κείται ὀλόκληρος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (Σχ. 425).



Σχ. 426.

2ον. Ἡ εὐθεῖα καὶ τὸ ἐπίπεδον ἔχουν ἓνα μόνον κοινὸν σημεῖον.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν (Σχ. 426) ἡ εὐθεῖα AB λέγεται *τέμνουσα* τοῦ ἐπιπέδου, τὸ δὲ κοινὸν σημεῖον O τῆς εὐθείας καὶ τοῦ ἐπιπέδου λέγεται *ἴχνος* ἢ *ποὺς* τῆς εὐθείας.

3ον. Ἡ εὐθεῖα καὶ τὸ ἐπίπεδον δὲν ἔχουν κανένα κοινὸν σημεῖον. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἡ εὐθεῖα λέγεται *παράλληλος* πρὸς τὸ ἐπίπεδον.

2. Προσδιορισμός ἑνὸς ἐπιπέδου

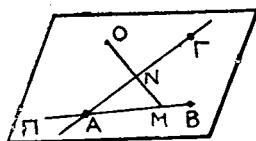
616. Θεώρημα. Τρία σημεῖα, τὰ ὁποῖα δὲν κείνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας, ὀρίζουν τὴν θέσιν ἑνὸς καὶ μόνου ἐπιπέδου.

Ἐπιθέσεις: Ἐστώσαν τρία σημεῖα A, B, Γ (Σχ. 427), τὰ ὁποῖα δὲν κείνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ σημεῖα A, B, Γ ὀρίζουν, πρῶτον, τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου.

Ἀπόδειξις: Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν AB.

Ἄς φαντασθῶμεν ἓνα ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον διέρχεται ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν AB καὶ ἃς περιστρέψωμεν τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ περὶ τὴν AB, ὅπως περιστρέφομεν μίαν θύραν περὶ τοὺς στρόφιγγάς της. Εἶναι φανερόν, ὅτι κατὰ τὴν περιστροφήν του τὸ ἐπίπεδον αὐτό, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀπεριόριστον, θὰ συναντήσῃ διαδοχικῶς ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ διαστήματος· θὰ ἔλθῃ λοιπὸν στιγμή κατὰ τὴν ὁποίαν τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ θὰ συναντήσῃ καὶ τὸ σημεῖον Γ. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὸ ἐπίπεδον αὐτό, θὰ διέρχεται καὶ ἀπὸ τὰ τρία σημεῖα A, B, Γ.



Σχ. 427.

Ὡστε ὑπάρχει ἓνα ἐπίπεδον, ἔστω τὸ Π, τὸ ὁποῖον διέρχεται ἀπὸ τὰ τρία σημεῖα A, B, Γ.

2ον Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν τώρα, ὅτι δὲν ὑπάρχει ἄλλο ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον νὰ διέρχεται ἀπὸ τὰ τρία αὐτὰ σημεῖα A, B, Γ.

Ἀπόδειξις: Ἄς υποθέσωμεν, ὅτι ὑπάρχει καὶ ἓνα ἄλλο ἐπίπεδον Π',

τὸ ὁποῖον νὰ διέρχεται ἀπὸ τὰ τρία αὐτὰ σημεῖα A, B, Γ . Λέγομεν, ὅτι τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Π' ταυτίζονται καὶ ἀποτελοῦν ἓνα μόνον ἐπίπεδον.

Διὰ νὰ τὸ ἀποδείξωμεν, ἀρκεῖ νὰ δεῖξωμεν, ὅτι κάθε τυχὸν σημείον τοῦ ἐνὸς ἐπιπέδου εἶναι σημεῖον καὶ τοῦ ἄλλου ἐπιπέδου.

Ἐν πρώτοις παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ εὐθεῖαι $AB, A\Gamma$ κείνται καὶ ἐπὶ τῶν δύο ἐπιπέδων Π καὶ Π' , διότι ἐξ ὑποθέσεως τὰ σημεῖα A, B, Γ κείνται καὶ ἐπὶ τῶν δύο ἐπιπέδων.

Ἐστω τώρα O ἓνα τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου Π . Συνδέομεν μὲ εὐθεῖαν τὸ O μὲ τυχὸν σημεῖον M τῆς εὐθείας AB : ἡ εὐθεῖα OM εἶναι φανερόν, ὅτι θὰ κείται ὀλόκληρος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π καὶ συνεπῶς θὰ συναντήσῃ τὴν εὐθεῖαν $A\Gamma$ τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ εἰς ἓνα σημεῖον N .

Ἐπειδὴ τὰ σημεῖα M καὶ N εἶναι σημεῖα τῶν εὐθειῶν AB καὶ $A\Gamma$, αἱ ὁποῖαι κείνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π' , ἡ εὐθεῖα MN κείται ὀλόκληρος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π' καὶ ἐπομένως καὶ τὸ σημεῖον τῆς O κείνται ἐπὶ τοῦ Π' .

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ τυχὸν σημεῖον O τοῦ ἐπιπέδου Π εἶναι καὶ σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου Π' . Τὰ ἐπίπεδα λοιπὸν Π καὶ Π' ἔχουν ὅλα τὰ σημεῖα τῶν κοινὰ καὶ ἐπομένως ταυτίζονται καὶ ἀποτελοῦν ἓνα καὶ μόνον ἐπίπεδον.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Τρία σημεῖα, τὰ ὁποῖα. . .**

Παρατήρησις. Κατὰ τὴν ἀπόδειξιν τοῦ προηγουμένου θεωρήματος παρεδέχθημεν, ὅτι ἡ εὐθεῖα OM συναντᾷ τὴν $A\Gamma$, ἐπειδὴ κείνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου Π . Θὰ ἠδύναντο ὅμως, ἐξαιρετικῶς, νὰ ἦσαν παράλληλοι. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν θὰ ἔπρεπε νὰ λάβωμεν ἓνα ἄλλο σημεῖον τῆς AB καὶ ἡ ἀπόδειξις θὰ ὑφίστατο.

617. Πρόρισμα I. Μία εὐθεῖα καὶ ἓνα σημεῖον ἐκτὸς αὐτῆς, ὁρίζουν τὴν θέσιν ἐνὸς καὶ μόνου ἐπιπέδου.

Ἐπίδειξις: Ἐστω μία εὐθεῖα AB (Σχ. 427) καὶ ἓνα σημεῖον Γ ἐκτὸς τῆς AB .

Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι ἡ AB καὶ τὸ σημεῖον Γ ὁρίζουν ἓνα ἐπίπεδον.

Ἀπόδειξις: Ἐὰν λάβωμεν δύο τυχόντα σημεῖα A καὶ B τῆς εὐθείας AB καὶ τὸ σημεῖον Γ , θὰ ἔχωμεν τρία σημεῖα A, B, Γ , τὰ ὁποῖα δὲν κείνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας καὶ τὰ ὁποῖα, ὅπως ἐδείξαμεν (§ 616) ὁρίζουν τὴν θέσιν ἐνὸς ἐπιπέδου.

Θὰ δεῖξωμεν τώρα, ὅτι ἡ εὐθεῖα AB καὶ τὸ σημεῖον Γ ὁρίζουν ἓνα καὶ μόνον ἐπίπεδον.

Πράγματι κάθε ἄλλο ἐπίπεδον P , τὸ ὁποῖον θὰ εἶχε τὴν εὐθεῖαν AB καὶ τὸ σημεῖον Γ , θὰ περιεῖχε τὰ τρία σημεῖα A, B, Γ καὶ συνεπῶς θὰ συνέπιπτε μὲ τὸ ἐπίπεδον Π (§ 616).

Σημ. Τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον ὀρίζουν μία εὐθεῖα AB καὶ ἓνα σημεῖον Γ παρίσταται μὲ τὸν συμβολισμόν (AB, Γ) .

618. Πόρισμα II. Δύο τεμνόμενα εὐθεῖαι ὀρίζουν τὴν θέσιν ἑνὸς καὶ μόνου ἐπιπέδου.

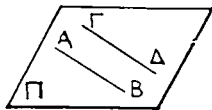
Ἐστωσαν αἱ εὐθεῖαι AB καὶ $A\Gamma$ (Σχ. 427), αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον A .

Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς εὐθείας AB ἓνα τυχόν σημεῖον B καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας $A\Gamma$ ἓνα τυχόν σημεῖον Γ . Ἀπὸ τὰ τρία σημεῖα A, B, Γ διέρχεται ἓνα ἐπίπεδον Π . Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ κείνται αἱ εὐθεῖαι AB καὶ $A\Gamma$ καὶ ἐπομένως αἱ εὐθεῖαι αὐταὶ ὀρίζουν ἓνα ἐπίπεδον.

Θὰ δεῖξωμεν τώρα, ὅτι αἱ εὐθεῖαι αὐταὶ ὀρίζουν ἓνα καὶ μόνον ἐπίπεδον. Πράγματι· κάθε ἄλλο ἐπίπεδον P ἐπὶ τοῦ ὁποῖου θὰ ἔκειντο αἱ εὐθεῖαι AB καὶ $A\Gamma$ θὰ περιεῖχε τὰ τρία σημεῖα A, B, Γ καὶ συνεπῶς θὰ συνέπιπτε μὲ τὸ ἐπίπεδον Π .

619. Πόρισμα III. Δύο εὐθεῖαι παράλληλοι ὀρίζουν τὴν θέσιν ἑνὸς καὶ μόνου ἐπιπέδου.

Ἐστωσαν αἱ δύο παράλληλοι εὐθεῖαι AB καὶ $\Gamma\Delta$. Κατὰ τὸν ὀρισμὸν τῶν παραλλήλων εὐθειῶν, αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι κείνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου· ὥστε διὰ τῶν παραλλήλων αὐτῶν διέρχεται ἓνα ἐπίπεδον Π .



Σχ. 428.

Θὰ δεῖξωμεν τώρα, ὅτι αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι AB καὶ $\Gamma\Delta$ ὀρίζουν τὴν θέσιν ἑνὸς μόνου ἐπιπέδου.

Διότι, ἐὰν λάβωμεν ἐπὶ τῆς εὐθείας AB δύο τυχόντα σημεῖα A καὶ B καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας $\Gamma\Delta$ ἓνα τυχόν σημεῖον Γ , κάθε ἄλλο ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον θὰ περιεῖχε τὰς εὐθείας AB καὶ $\Gamma\Delta$, θὰ περιεῖχε καὶ τὰ τρία σημεῖα A, B, Γ καὶ συνεπῶς θὰ συνέπιπτε μὲ τὸ ἐπίπεδον Π , τὸ ὁποῖον ὀρίζουν αἱ AB καὶ $\Gamma\Delta$.

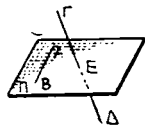
620. Σχετικαὶ θέσεις δύο εὐθειῶν τοῦ διαστήματος. Ἐστωσαν δύο εὐθεῖαι AB καὶ $\Gamma\Delta$ (Σχ. 429). Ἡ εὐθεῖα AB καὶ τυχόν σημεῖον E τῆς $\Gamma\Delta$ ὀρίζουν ἓνα ἐπίπεδον Π . Δύο περιπτώσεις δύνανται νὰ παρουσιασθοῦν:

1ον. Ἡ $\Gamma\Delta$ κείται ἐπὶ τοῦ Π . Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν αἱ

AB και $\Gamma\Delta$, ως κείμενοι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, εἶναι παράλληλοι ἢ τέμνονται.

2ον. Ἡ $\Gamma\Delta$ δὲν κεῖται ἐπὶ τοῦ Π . Εἰς τὴν περιπτώσιν αὐτὴν δὲν ὑπάρχει κανένα ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον νὰ περιέχῃ τὰς AB καὶ $\Gamma\Delta$.

Ἐὰν ὑπῆρχε ἓνα τοιοῦτον ἐπίπεδον, ὡς περιέχον τὴν εὐθεῖαν AB καὶ τὸ σημεῖον E , θὰ συνέπιπτε μὲ τὸ ἐπίπεδον Π . Ἀλλὰ τοῦτο ἀντίκειται πρὸς τὴν ὑπόθεσίν μας.



Σχ. 429.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι δύο εὐθεῖαι δύνανται νὰ καταλάβουν μεταξύ των τὰς κάτωθι τρεῖς θέσεις:

1ον. Νὰ εἶναι παράλληλοι.

2ον. Νὰ τέμνονται.

3ον. Νὰ μὴ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου (νὰ εἶναι ἀσύμβατοι).

3. Τομή δύο ἐπιπέδων

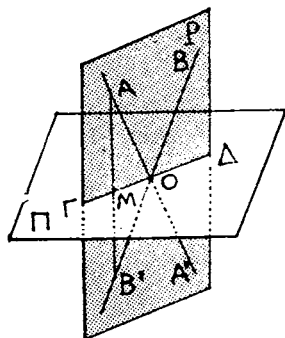
621. Τομή δύο ἐπιπέδων. Τὸ σύνολον τῶν κοινῶν σημείων δύο ἐπιπέδων λέγεται **τομή** τῶν ἐπιπέδων.

622. Θεώρημα. Ἐὰν δύο διάφορα ἐπίπεδα ἔχουν ἓνα κοινὸν σημεῖον, ἔχουν καὶ ἄλλα κοινὰ σημεία καὶ ἡ τομή των εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ.

Ἐπίπεδοι: Ἐστώσαν δύο ἐπίπεδα Π καὶ P , τὰ ὁποῖα ἔχουν ἓνα κοινὸν σημεῖον O .

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ ἐπίπεδα αὐτὰ ἔχουν καὶ ἄλλα κοινὰ σημεία καὶ ὅτι ἡ τομή των εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ.

Ἀπόδειξις: Ἀπὸ τὸ κοινὸν σημεῖον O φέρομεν δύο τυχούσας εὐθεῖας AOA' καὶ BOB' , αἱ ὁποῖαι νὰ κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου P . Ἐστώσαν OA, OB τὰ μέρη τῶν εὐθειῶν αὐτῶν, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἄνωθεν τοῦ ἐπιπέδου Π καὶ OA', OB' τὰ μέρη αὐτῶν, τὰ ὁποῖα κεῖνται κάτωθι τοῦ



Σχ. 430.

ἐπιπέδου Π . Συνδέομεν μὲ εὐθεῖαν ἓνα τυχὸν σημεῖον A τῆς ἡμιευθείας OA μὲ τυχὸν σημεῖον B' τῆς ἡμιευθείας OB' . Ἐπειδὴ τὸ σημεῖον A κεῖται ἄνωθεν τοῦ ἐπιπέδου Π καὶ τὸ σημεῖον B' κεῖται κά-

τωθι τοῦ ἐπιπέδου Π , ἢ εὐθεία AB' θὰ διαπεράσῃ, ἀναγκαστικῶς, τὸ ἐπίπεδον Π εἰς ἓνα σημεῖον του, ἔστω τὸ M . Τὸ σημεῖον M εἶναι προφανῶς κοινὸν σημεῖον τῶν ἐπιπέδων Π καὶ P (τοῦ μὲν Π ἐξ ὑποθέσεως, τοῦ δὲ P , διότι εἶναι σημεῖον τῆς εὐθείας AB' τοῦ ἐπιπέδου P). Ὡστε τὰ ἐπίπεδα Π καὶ P ἔχουν καὶ ἓνα ἄλλο κοινὸν σημεῖον M , ἐκτὸς τοῦ O , καὶ ἐπομένως θὰ ἔχουν κοινὰ καὶ ὅλα τὰ σημεία τῆς εὐθείας $\Gamma\Delta$, ἢ ὁποῖα συνδέει τὰ σημεία O καὶ M .

Τὰ ἐπίπεδα Π καὶ P δὲν δύνανται νὰ ἔχουν ἄλλο κοινὸν σημεῖον, τὸ ὁποῖον νὰ κεῖται ἐκτὸς τῆς εὐθείας $\Gamma\Delta$, διότι τότε θὰ συνέπιπτον (§ 617).

Ἄσκήσεις

A' Ὁμάς. 1967. (2003). Πῶς δυνάμεθα νὰ διακρίνωμεν, ἂν ἓνα σημεῖον κεῖται ἢ ὄχι ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου δύο τεμνομένων εὐθειῶν;

1968. (2004). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τρεῖς εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι τέμνονται ἀνὰ δύο, κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ἢ διέρχονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον.

1969. (2005). Ἐὰν ν εὐθεῖαι τέμνονται ἀνὰ δύο, χωρὶς νὰ διέρχωνται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον, αἱ εὐθεῖαι αὗται ὀρίζουν τὴν θέσιν ἑνὸς μόνου ἐπιπέδου.

1970. (2006). Νὰ δεიχθῇ, ὅτι ἐπίπεδον καὶ περιφέρεια κύκλου δύναται νὰ ἔχουν δύο τὸ πολὺ κοινὰ σημεία.

1971. (2007). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι δύο ἴσοι κύκλοι καὶ οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὸ αὐτὸ κέντρον, ἀλλὰ δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, ἔχουν δύο κοινὰ σημεία.

B' Ὁμάς. 1972. (2008). Δίδονται τέσσαρες εὐθεῖαι A, B, Γ, Δ . Αἱ εὐθεῖαι A καὶ B εἶναι παράλληλοι. Νὰ κατασκευασθῇ μία εὐθεῖα, ἢ ὁποῖα νὰ συναντᾷ καὶ τὰς τέσσαρας εὐθείας.

1973. (2009). Τὸ αὐτὸ πρόβλημα ἔὰν αἱ εὐθεῖαι A καὶ B τέμνονται.

1974. (2010). Νὰ ἀχθῇ ἀπὸ ἓνα σημείου M μία εὐθεῖα, ἢ ὁποῖα νὰ συναντᾷ δοθείσαν E καὶ ἓνα δοθέντα κύκλον O .

1975. (2011). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἔὰν τρία ἐπίπεδα τέμνονται ἀνὰ δύο, αἱ τομαὶ των διέρχονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον ἢ εἶναι παράλληλοι ἀνὰ δύο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

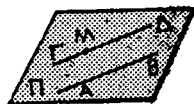
ΕΥΘΕΙΑΙ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΙ

623. Ὅρισμός. Δύο εὐθεῖαι τοῦ διαστήματος εἶναι παράλληλοι, ἂν κείνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ δὲν ἔχουν κανένα κοινὸν σημεῖον, ὅσον καὶ ἂν προεκταθῶν.

624. Θεώρημα. Ἀπὸ δοθέν σημείου, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτός εὐθείας δυνάμεθα νὰ φέρωμεν μίαν εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν καὶ μίαν μόνον.

Ὑπόθεσις: Ἐστω μία εὐθεῖα AB (Σχ. 431) καὶ ἓνα σημεῖον M ἐκτός αὐτῆς.

1^{ον} Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι ἀπὸ τὸ M δυνάμεθα νὰ φέρωμεν μίαν παράλληλον πρὸς τὴν AB καὶ μίαν μόνον.



Σχ. 431.

Ἀπόδειξις: Ἡ εὐθεῖα AB καὶ τὸ σημεῖον M ὀρίζουν ἓνα ἐπίπεδον Π . Εἰς τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ δυνάμεθα φέρωμεν μίαν εὐθεῖαν $M\Delta$ παράλληλον πρὸς τὴν AB καὶ μίαν μόνον (Εὐκλείδειον αἴτημα).

Ὡστε δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἀπὸ τὸ σημεῖον M μίαν εὐθεῖαν $M\Delta$ παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν AB .

2^{ον} Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξωμεν τώρα, ὅτι ἀπὸ τὸ M δὲν δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἄλλην εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν AB .

Ἀπόδειξις: Διότι κάθε ἄλλη εὐθεῖα, ἡ ὁποία θὰ ἦτο παράλληλος πρὸς τὴν AB καὶ θὰ ἦγετο ἀπὸ τὸ M εἰς τὸ διάστημα, θὰ ὄριζε μὲ τὴν AB ἓνα ἐπίπεδον P . Τὸ ἐπίπεδον P , ὡς περιέχον τὴν AB καὶ τὸ σημεῖον M , θὰ συνέπιπτε μὲ τὸ ἐπίπεδον Π . Συνεπῶς μία τοιαύτη παράλληλος θὰ συνέπιπτε μὲ τὴν $M\Delta$.

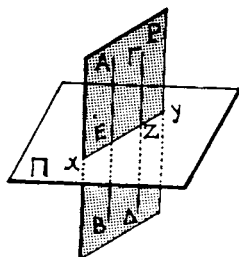
Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: Ἀπὸ δοθέν σημείου. . .

625. Θεώρημα. Ὄταν δύο εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι, κάθε ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν μίαν ἐξ αὐτῶν, θὰ τέμνη καὶ τὴν ἄλλην.

Ὑπόθεσις: Ἐστώσαν δύο παράλληλοι εὐθεῖαι AB καὶ $\Gamma\Delta$ (Σχ. 432) καὶ ἓνα ἐπίπεδον Π , τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν AB εἰς ἓνα σημεῖον E .

Συμπέρασμα: Θα δείξωμεν, ὅτι τὸ Π τέμνει καὶ τὴν $\Gamma\Delta$.

Ἀπόδειξις: Αἱ εὐθεΐαι AB καὶ $\Gamma\Delta$, ὡς παράλληλοι, ὁρίζουν τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου P , τὸ ὁποῖον εἶναι διάφορον τοῦ Π , ἐπειδὴ τὸ Π δὲν περιέχει τὴν AB .



Σχ. 432.

Τὰ ἐπίπεδα Π καὶ P , ὡς ἔχοντα ἓνα κοινὸν σημεῖον E , θὰ τέμνονται κατὰ μίαν εὐθεΐαν,

ἔστω τὴν EZ . Εἰς τὸ ἐπίπεδον P , ἡ εὐθεΐα

EZ , ὡς τέμνουσα τὴν AB , θὰ τέμνη καὶ τὴν παράλληλόν της $\Gamma\Delta$ (§ 125) εἰς ἓνα ὠρισμένον

σημεῖον Z . Ὡστε τὸ σημεῖον Z εἶναι κοινὸν τοῦ ἐπιπέδου Π καὶ τῆς εὐθεΐας $\Gamma\Delta$.

Ἐξ ἄλλου ἡ $\Gamma\Delta$ δὲν δύναται νὰ κεῖται ὁλόκληρος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π , διότι τότε τὸ ἐπίπεδον Π , ὡς περιέχον τὴν εὐθεΐαν $\Gamma\Delta$ καὶ τὸ σημεῖον E , θὰ συνέπιπτε μὲ τὸ ἐπίπεδον P καὶ συνεπῶς, θὰ περιεῖχε τὴν εὐθεΐαν AB ὁλόκληρον, τὸ ὁποῖον ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσίν μας.

Ἐδείχθη λοιπὸν, ὅτι: **Ἐὰν δύο εὐθεΐαι. . .**

626. Θεώρημα. Δύο εὐθεΐαι παράλληλοι πρὸς τρίτην εἶναι καὶ μεταξύ των παράλληλοι.

Ἐπίδοσις: Ἐστωσαν αἱ εὐθεΐαι AB καὶ $\Gamma\Delta$ (Σχ. 433), αἱ ὁποῖαι εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν EZ .



Σχ. 433.

Συμπέρασμα: Θα δείξωμεν, ὅτι αἱ AB καὶ $\Gamma\Delta$ εἶναι παράλληλοι.

Ἀπόδειξις: Ἐν πρώτοις αἱ εὐθεΐαι AB καὶ $\Gamma\Delta$

δὲν δύναται νὰ συναντῶνται, διότι, ἐὰν εἶχον ἓνα κοινὸν σημεῖον O , τότε θὰ εἶχομεν δύο παραλλήλους ἀπὸ τὸ σημεῖον O πρὸς τὴν εὐθεΐαν EZ , τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον (§ 624).

2ον Συμπέρασμα: Θα δείξωμεν τώρα, ὅτι αἱ AB καὶ $\Gamma\Delta$ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

Ἀπόδειξις: Ἡ εὐθεΐα AB καὶ ἓνα σημεῖον Γ τῆς $\Gamma\Delta$ ὁρίζουν ἓνα ἐπίπεδον Π : λέγομεν, ὅτι ὁλόκληρος ἡ εὐθεΐα $\Gamma\Delta$ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ. Διότι, ἐὰν ἡ $\Gamma\Delta$ δὲν ἔκειτο ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π , τὸ

Ἐπίδοθ.	$AB // \Gamma\Delta$ Π τέμνει τὴν AB
Συμπ.	Π τέμνει τὴν $\Gamma\Delta$

Ἐπίδοθ.	$AB // EZ$ $\Gamma\Delta // EZ$
Συμπ.	$AB // \Gamma\Delta$

Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι ἡ ΓΔ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ.

Ἀπόδειξις: Ἐν πρώτοις αἱ εὐθεῖαι ΓΔ καὶ ΑΒ κεῖνται ἐξ ὑποθέσεως ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου Ρ.

Ἐπίπ.	ΑΒ//Π
	Ἐπίπ. Ρ διέρχ. διὰ ΑΒ ΓΔ τομῆ τῶν Π καὶ Ρ
Συμπ.	ΑΒ//ΓΔ

Ἐπειτα αἱ εὐθεῖαι αὐταὶ δὲν δύνανται νὰ συναντῶνται. Διότι, ἐὰν εἶχον ἓνα κοινὸν σημεῖον, τὸ σημεῖον αὐτὸ θὰ ἀνῆκε καὶ εἰς τὴν εὐθεῖαν ΑΒ καὶ εἰς τὸ ἐπίπεδον Π. Ἄλλὰ τοῦτο εἶναι ἀδύνατον, ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΑΒ ὑπετέθη παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π. Ὡστε ἡ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΓΔ.

Ἐδείχθη λοιπὸν, ὅτι: **Ἐὰν μία εὐθεῖα ΑΒ. . .**

630. Θεώρημα. Ἐὰν μία εὐθεῖα ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς ἓνα ἐπίπεδον Π (Σχ. 434), ἡ παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου Π, κεῖται ὁλόκληρος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ.

Ἐπίπ. Ἐστω Μ ἓνα τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου Π· ἀπὸ τὸ σημεῖον Μ φέρομεν μίαν εὐθεῖαν ΜΔ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ.

Ἐπίπ.	ΑΒ//Π
	Μ σημεῖον τοῦ Π ΓΜΔ//ΑΒ
Συμπ.	ΓΜΔ κεῖται ἐπὶ Π

Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι ἡ ΜΔ κεῖται ὁλόκληρος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π.

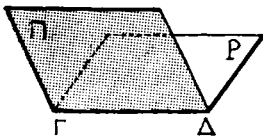
Ἀπόδειξις: Ἡ εὐθεῖα ΑΒ καὶ τὸ σημεῖον Μ ὁρίζουν ἓνα ἐπίπεδον Ρ, τὸ ὁποῖον τέμνει τὸ ἐπίπεδον Π κατὰ μίαν εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ (§ 629)· ἡ εὐθεῖα αὕτη πρέπει, ἀναγκαστικῶς, νὰ συμπίπτῃ μὲ τὴν ΜΔ, διότι (§ 624) ἀπὸ ἓνα σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἔκτος εὐθείας μία καὶ μόνον παράλληλος ἄγεται πρὸς τὴν εὐθεῖαν αὐτήν· ὥστε ἡ ΜΔ κεῖται ὁλόκληρος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π.

Ἐδείχθη λοιπὸν, ὅτι: **Ἐὰν μία εὐθεῖα. . .**

631. Πρόρισμα. Ἐὰν δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα, εἶναι παράλληλα πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν, ἡ τομὴ τῶν εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν αὐτήν.

Α ————— Β

Ἐπίπ. Ἐστω, ὅτι ἡ εὐθεῖα ΑΒ (Σχ. 435)



Ἐπίπ.	ΓΔ τομῆ ἐπίπ. Π καὶ Ρ
	Π//ΑΒ Ρ//ΑΒ
Συμπ.	ΓΔ//ΑΒ

Σχ. 435.

εἶναι παράλληλος πρὸς τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Ρ, τὰ ὁποῖα τέμνονται κατὰ τὴν εὐθεῖαν ΓΔ.

Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι ἡ AB εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$.

Ἀπόδειξις: Ἐὰν ἀπὸ ἓνα σημείου Γ τῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων Π καὶ P φέρωμεν μίαν παράλληλον πρὸς τὴν AB , αὕτη ἢ παράλληλος (§ 630) θὰ κεῖται καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου P καὶ ἐπομένως θὰ συμπίπτῃ μὲ τὴν τομὴν τῶν $\Gamma\Delta$.

Ὡστε ἡ $\Gamma\Delta$ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν AB .

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Ἐὰν δύο τεμνόμενα. . .**

Ἀσκήσεις

Α' Ὁμάς. 1976. (2012). Ἐὰν εὐθεῖα εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τομὴν δύο ἐπιπέδων, εἶναι παράλληλος καὶ πρὸς τὰ ἐπίπεδα αὐτὰ ἢ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν (Σχ. 435).

1977. (2013). Ἐὰν δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα Π καὶ P διέρχωνται ἀντιστοίχως ἀπὸ δύο παραλλήλους εὐθείας AB καὶ $\Gamma\Delta$, ἡ τομὴ τῶν EZ εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς AB καὶ $\Gamma\Delta$.

1978. (2014). Αἱ τομαὶ ἐπιπέδων, τὰ ὅποια διέρχονται διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας, ὑπὸ ἄλλου ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον εἶναι παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν αὐτήν, εἶναι εὐθεῖαι παράλληλοι.

1979. (2015). Δίδεται ἓνα σημεῖον O καὶ αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι E_1, E_2, E_3, \dots . Τὰ ἐπίπεδα OE_1, OE_2, \dots τέμνουν ἓνα δοθὲν ἐπίπεδον Π . Νὰ εὐρεθῇ ποίαν λεπτομέρειαν παρουσιάζουν αἱ τομαὶ τῶν ἐπιπέδων αὐτῶν;

Β' Ὁμάς. 1980. (2016). Ἀπὸ ἓνα σημεῖον O νὰ ἀχθῇ ἓνα ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς μίαν δοθεῖσαν εὐθεῖαν E . Πόσας λύσεις ἔχει τὸ πρόβλημα;

1981. (2017). Δίδονται δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι AB καὶ $\Gamma\Delta$. Νὰ ἀχθῇ διὰ τῆς AB ἓνα ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$.

1982. (2018). Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς δύο δοθείσας εὐθείας.

1983. (2019). Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον O νὰ ἀχθῇ μία εὐθεῖα παράλληλος πρὸς δύο δοθέντα ἐπίπεδα.

1984. (2020). Δίδονται τρεῖς τυχοῦσαι εὐθεῖαι E_1, E_2, E_3 . Νὰ ἀχθῇ διὰ τῆς E_1 ἓνα ἐπίπεδον Π_1 καὶ διὰ τῆς E_2 ἓνα ἐπίπεδον Π_2 , εἰς τρόπον ὥστε τὰ ἐπίπεδα Π_1 καὶ Π_2 νὰ τέμνωνται κατὰ μίαν εὐθεῖαν παράλληλον πρὸς τὴν E_3 .

1985. (2021). Δίδονται δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα Π καὶ P καὶ ἓνα σημεῖον O τοῦ ἐπιπέδου Π . Νὰ ἀχθῇ ἀπὸ τὸ O μία εὐθεῖα, ἡ ὅποια νὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ Π καὶ νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ P .

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄.

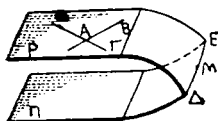
ΠΑΡΑΛΛΗΛΑ ΕΠΙΠΕΔΑ

632. Ὅρισμός. Λέγομεν, *δι δύο επίπεδα εἶναι παράλληλα*, διαν δὲν ἔχουν κανένα κοινὸν σημεῖον, ὅσον καὶ ἂν προεκταθοῦν.

Τὸ κάτωθι θεώρημα δεικνύει τὴν ὑπαρξιν παραλλήλων ἐπιπέδων.

633. Θεώρημα. Δύο τεμνόμενα εὐθεῖαι AB καὶ $A\Gamma$ (Σχ. 436) παράλληλοι πρὸς ἓνα ἐπίπεδον Π , ὀρίζουν ἓνα δεύτερον ἐπίπεδον P , παράλληλον πρὸς τὸ Π .

Ἀπόδειξις: Ἐὰν τὰ ἐπίπεδα Π καὶ P εἶχον ἓνα κοινὸν σημεῖον Δ , θὰ ἐτέμοντο κατὰ μίαν εὐθεῖαν ΔE (§ 622).



Ὑπόθ.	$AB // \Pi$ $A\Gamma // \Pi$ AB τέμν. $\Gamma\Delta$
Συμπ.	Ἐπίπ. εὐθ. $(AB, \Gamma\Delta) // \Pi$

Σχ. 436.

Ἡ εὐθεῖα αὐτὴ θὰ συνήντα τὴν μίαν τοῦλάχιστον ἐκ τῶν εὐθειῶν, ἔστω τὴν AB , εἰς ἓνα σημεῖον O , τὸ ὁποῖον θὰ ἦτο κοινὸν σημεῖον τῆς εὐθείας AB καὶ τοῦ ἐπιπέδου Π . Ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἀδύνατον, διότι ἡ AB ὑπετέθη παράλληλος πρὸς τὸ Π .

Ὡστε τὰ ἐπίπεδα Π καὶ P δὲν ἔχουν κανένα κοινὸν σημεῖον καὶ ἐπομένως εἶναι παράλληλα.

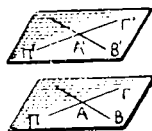
Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: *Δύο τεμνόμενα εὐθεῖαι. . .*

634. Πόρισμα. Ἐὰν δύο ἐπίπεδα Π καὶ P εἶναι παράλληλα, κάθε εὐθεῖα AB τοῦ ἐπιπέδου P εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ Π .

Ἀπόδειξις: Διότι, ἐὰν ἡ AB ἔτεμε τὸ ἐπίπεδον Π , τὸ σημεῖον τῆς τομῆς θὰ ἀνῆκε καὶ εἰς τὰ δύο ἐπίπεδα Π καὶ P : ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἀδύνατον, διότι τὰ ἐπίπεδα αὐτὰ ὑπετέθησαν παράλληλα.

635. Θεώρημα. Τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Π' δύο γωνιῶν BAG καὶ $B'A'\Gamma'$, τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶναι ἀντιστοιχῶς παράλληλοι, εἶναι παράλληλα.

Ἀπόδειξις: Ἡ εὐθεῖα $A'B'$ (Σχ. 437), ὡς παράλληλος πρὸς τὴν AB , εἶναι παράλληλος καὶ πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π (§ 628). Ὀμοίως ἡ εὐθεῖα $A'\Gamma'$, ὡς παράλληλος πρὸς τὴν $A\Gamma$, εἶναι παράλληλος καὶ πρὸς



Σχ. 437.

τὸ ἐπίπεδον Π. Τὸ ἐπίπεδον λοιπὸν Π', τῶν τεμνομένων εὐθειῶν Α'Β' καὶ Α'Γ', εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π, διότι αἱ τεμνόμεναι εὐθεῖαι Α'Β' καὶ Α'Γ' εἶναι παράλληλοι πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π (§ 633).

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: *Τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Π' δύο γωνιῶν...*

636. Παρατήρησις. Διὰ νὰ εἶναι δύο ἐπίπεδα Π καὶ Ρ παράλληλα, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ ἓνα ἐξ αὐτῶν (π.χ. τὸ Ρ) νὰ περιέχῃ δύο εὐθείας παραλλήλους πρὸς τὸ ἄλλο.

Ἀπόδειξις: Ἐὰν δύο ἐπίπεδα Π καὶ Ρ εἶναι παράλληλα, δύο εὐθεῖαι τοῦ ἐπιπέδου Ρ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὸ Π (§ 634) καὶ ἀντιστρόφως. Ἐὰν ἓνα ἐπίπεδον Ρ περιέχῃ δύο εὐθείας παραλλήλους πρὸς ἓνα ἐπίπεδον Π, τὸ ἐπίπεδον Ρ εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π (§ 633).

637. Θεώρημα. Αἱ τομαὶ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπὸ τρίτου εἶναι παράλληλοι.

Ἐπιπέδα Π καὶ Ρ δύο παράλληλα ἐπίπεδα καὶ ΑΒ, καὶ ΓΔ αἱ τομαὶ αὐτῶν ὑπὸ ἑνὸς τρίτου ἐπιπέδου Σ (Σχ. 438).

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι παράλληλοι.

Ἀπόδειξις: Αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Σ καὶ ἐπομένως ἢ θὰ τέμνωνται ἢ θὰ εἶναι παράλληλοι.

Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ ἐτέμνοντο εἰς ἓνα σημεῖον Ο, τὸ σημεῖον αὐτό, ὡς σημεῖον τῶν ΑΒ καὶ ΓΔ, θὰ ἦτο καὶ σημεῖον τῶν ἐπιπέδων Π καὶ Ρ, ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖνται αἱ εὐθεῖαι αὐταί. Ἀλλὰ τότε τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Ρ, ὡς ἔχοντα κοινὸν τὸ σημεῖον Ο, θὰ ἐτέμνοντο. Ἀλλὰ τοῦτο εἶναι ἀδύνατον, διότι ἐξ ὑποθέσεως τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Ρ εἶναι παράλληλα.

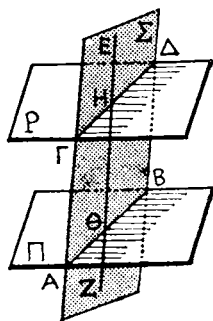
Ὡστε αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ δὲν τέμνονται καὶ ἐπομένως εἶναι παράλληλοι.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: *Αἱ τομαὶ δύο παραλλήλων...*

638. Θεώρημα. Παράλληλοι εὐθεῖαι, περιεχόμεναι μεταξὺ παραλλήλων ἐπιπέδων, εἶναι ἴσαι.

Ἐπιπέδα Π καὶ Ρ δύο παράλληλα ἐπίπεδα καὶ ΑΓ καὶ ΒΔ (Σχ. 438) αἱ ὁποῖαι περιέχονται μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων Π καὶ Ρ.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι $ΑΓ = ΒΔ$.



Σχ. 438.

Ἀπόδειξις : Αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι ΑΓ καὶ ΒΔ ὀρίζουν ἓνα ἐπίπεδον Σ, τὸ ὁποῖον τέμνει τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Ρ κατὰ τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ ΓΔ, αἱ ὁποῖαι εἶναι παράλληλοι, ὡς τομαὶ παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπὸ τρίτου (§ 637). Τὸ τετράπλευρον λοιπὸν ΑΒΔΓ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι ἔχει τὰς ἀπέναντι πλευράς του παραλλήλους. Ἄρα θὰ εἶναι ΑΓ=ΒΔ, ὡς ἀπέναντι πλευραὶ παραλληλογράμμου.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Παράλληλοι εὐθεῖαι. . .**

639. Θεώρημα. Ἀπὸ τυχὸν σημείου Ο (Σχ. 439), τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς ἐπιπέδου Π, δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἐπίπεδον Ρ παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π καὶ ἓνα μόνον.

Ὑπόθεσις : Ἐστω Ο ἓνα σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου Π.

1ον Συμπέρασμα : Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἀπὸ τὸ Ο διέρχεται ἓνα ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸ Π.

Ἀπόδειξις : Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π φέρομεν δύο τεμνομένας εὐθείας ΑΒ καὶ ΑΓ καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο φέρομεν τὰς εὐθείας ΟΔ καὶ ΟΕ παραλλήλους ἀντιστοίχως πρὸς τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ. Αἱ εὐθεῖαι ΟΔ καὶ ΟΕ, ὡς τεμνόμεναι, ὀρίζουν ἓνα ἐπίπεδον Ρ, τὸ ὁποῖον εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ Π (§ 633).

2ον Συμπέρασμα : Θὰ δείξωμεν τώρα, ὅτι ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο δὲν δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἄλλο ἐπίπεδον ἐκτὸς τοῦ Ρ, παράλληλον πρὸς τὸ Π.

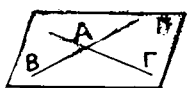
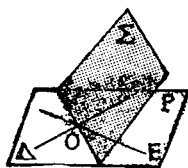
Ἀπόδειξις : Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἀπὸ τὸ Ο διέρχεται καὶ ἓνα δεύτερον ἐπίπεδον Σ, παράλληλον πρὸς τὸ Π. Ἐπειδὴ τὸ ἐπίπεδον Π εἶναι παράλληλον πρὸς τὰ ἐπίπεδα Ρ καὶ Σ, αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΑΓ τοῦ Π θὰ ἦσαν παράλληλοι πρὸς τὰ ἐπίπεδα Ρ καὶ Σ (§ 635).

Ἄλλὰ τότε αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι ΟΔ καὶ ΟΕ πρὸς τὰς ΑΒ καὶ ΑΓ, θὰ ἔκειντο καὶ εἰς τὰ δύο ἐπίπεδα Ρ καὶ Σ (§ 630). Τὰ ἐπίπεδα λοιπὸν Ρ καὶ Σ θὰ συμπίπτουν, διότι καὶ τὰ δύο περιέχουν τὰς τεμνομένας εὐθείας ΟΔ καὶ ΟΕ.

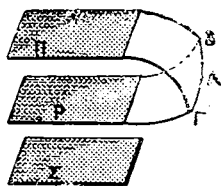
Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Ἀπὸ τυχὸν σημείου. . .**

640. Πρόρισμα I. Δύο ἐπίπεδα Π καὶ Ρ, παράλληλα πρὸς τρίτον ἐπίπεδον Σ, εἶναι παράλληλα μεταξύ των.

Ἀπόδειξις : Ἐὰν τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Ρ (Σχ. 440) εἶχον ἓνα κοινὸν σημεῖον Α, θὰ ἦγοντο



Σχ. 439.



Σχ. 440.

ἀπὸ τὸ σημεῖον Α δύο ἐπίπεδα παράλληλα πρὸς τὸ Σ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον (§ 639).

641. Πέριομα II. Ἐὰν δύο ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα, κάθε ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὸ ἓνα θὰ τέμνη καὶ τὸ ἄλλο·

Ἐπιπέδου: Ἐστῶσαν τὰ παράλληλα ἐπίπεδα Π καὶ Ρ (Σχ. 439) καὶ ἔστω, ὅτι ἓνα τρίτον ἐπίπεδον Σ τέμνει τὸ Ρ.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ Σ τέμνει καὶ τὸ Π.

Ἀπόδειξις: Ἐστω Ο ἓνα κοινὸν σημεῖον τῶν ἐπιπέδων Ρ καὶ Σ.

Ἐὰν τὸ Σ δὲν ἔτεμνε τὸ Π, θὰ ἦτο παράλληλον πρὸς αὐτὸ καὶ θὰ ἤγοντο ἀπὸ τὸ Ο δύο ἐπίπεδα, τὰ Ρ καὶ Σ, παράλληλα πρὸς τὸ Π, τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον (§ 639).

642. Θεώρημα. Ἐὰν ἀπὸ ἓνα σημείου Ο, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς ἐνὸς ἐπιπέδου Π, φέρωμεν παραλλήλους πρὸς τὸ ἐπίπεδον αὐτό, ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν παραλλήλων αὐτῶν εἶναι ἓνα ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον ἄγεται ἀπὸ τὸ Ο καὶ εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ Π.

Ἐπιπέδου: Ἐστω Ο ἓνα σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου Π. Ἀπὸ τὸ Ο φέρομεν εὐθείας ΟΔ, ΟΕ, . . . , παραλλήλους πρὸς τὸ Π.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΟΔ, ΟΕ, . . . , κεῖνται ἐπὶ ἐνὸς ἐπιπέδου, παραλλήλου πρὸς τὸ Π.

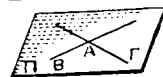
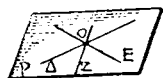
Ἀπόδειξις: Ἐδείξαμεν (§ 639), ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΟΔ καὶ ΟΕ (Σχ. 441), αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο, παραλλήλως πρὸς δύο τυχούσας εὐθείας ΑΒ καὶ ΑΓ τοῦ ἐπιπέδου Π, ὁρίζουν ἓνα ἐπίπεδον Ρ, παράλληλον πρὸς τὸ Π.

Κάθε ἄλλη εὐθεῖα, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ Ο παραλλήλως πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π, πρέπει νὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Ρ.

Διότι, ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι μία ἀπὸ τὰς εὐθείας αὐτὰς ἔστω ἡ ΟΖ δὲν ἔκειτο ἐπὶ τοῦ Ρ, τότε ἡ εὐθεῖα ΟΖ καὶ μία ἄλλη εὐθεῖα, παράλληλος πρὸς τὸ Π, ἔστω ἡ ΟΕ, θὰ ὄριζον ἓνα ἄλλο ἐπίπεδον Σ παράλληλον πρὸς τὸ Π. Τὰ ἐπίπεδα ὁμως Ρ καὶ Σ θὰ συνέπιπτον, διότι ἀπὸ ἓνα σημείου Ο δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἓνα καὶ μόνον ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸ Π (§ 639).

Ὡστε ἡ εὐθεῖα ΟΖ καὶ γενικῶς κάθε ἄλλη εὐθεῖα, ποὺ ἄγεται ἀπὸ τὸ Ο καὶ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π, κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Ρ, παραλλήλου πρὸς τὸ Π.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: Ἐὰν ἀπὸ ἓνα σημείου. . .



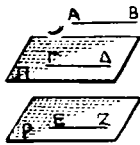
Σχ. 441.

643. Πρόρισμα I. Ἐὰν δύο επίπεδα Π καὶ P εἶναι παράλληλα, κάθε εὐθεῖα AB παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π , εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἄλλο ἐπίπεδον P .

Ἐπιπέδου: Ἐστῶσαν τὰ παράλληλα ἐπίπεδα Π καὶ P καὶ ὅτι μία εὐθεῖα AB εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ Π .

Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι ἡ AB εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ P .

Ἀπόδειξις: Ἡ AB (Σχ. 442), ὡς παράλληλος πρὸς τὸ Π , θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς μίαν εὐθεῖαν $\Gamma\Delta$ τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ. Ἐπίσης ἡ AB θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς μίαν εὐθεῖαν EZ , ἡ ὁποία κεῖται ἐπὶ τοῦ P καὶ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$. Ἀλλὰ τότε ἡ AB ὡς παράλληλος πρὸς τὴν EZ θὰ εἶναι παράλληλος καὶ πρὸς τὸ ἐπίπεδον P .



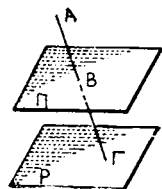
Σχ. 442.

644. Πρόρισμα II. Ἐὰν δύο ἐπίπεδα Π καὶ P εἶναι παράλληλα, κάθε εὐθεῖα AB , ἡ ὁποία τέμνει τὸ ἓνα ἐπίπεδον π.χ. τὸ Π , τέμνει καὶ τὸ ἄλλο ἐπίπεδον P .

Ἐπιπέδου: Ἐστῶσαν τὰ παράλληλα ἐπίπεδα Π καὶ P καὶ ὅτι μία εὐθεῖα AB τέμνει τὸ Π .

Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι ἡ AB τέμνει καὶ τὸ ἐπίπεδον P .

Ἀπόδειξις: Ἐὰν ἡ AB (Σχ. 443) δὲν ἔτεμνε τὸ P θὰ ἦτο παράλληλος πρὸς τὸ P καὶ ἐπομένως θὰ ἔκειτο ἐπὶ τοῦ Π , ὡς διερχομένη διὰ τοῦ σημείου B τοῦ ἐπιπέδου Π . Ἀλλὰ τοῦτο ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσίν μας.



Σχ. 443.

Ὡστε ἡ AB τέμνει καὶ τὸ P .

Ἀσκήσεις: 1986, 1987, 1988, 1989, 1990, 1991, 1992.

645. Θεώρημα. Δύο γωνίαι, αἱ ὁποῖαι δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰς πλευρὰς των παραλλήλους μίαν πρὸς μίαν καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς, εἶναι ἴσαι.

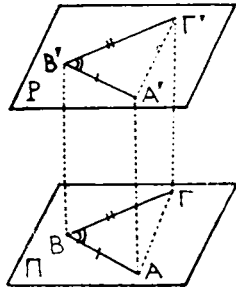
Ἐπιπέδου: Ἐστῶσαν αἱ γωνίαι $AB\Gamma$ καὶ $A'B'\Gamma'$ (Σχ. 444), αἱ ὁποῖαι δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ ἔχουν τὰς πλευρὰς BA καὶ $B\Gamma$ παραλλήλους καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς, ἀντιστοίχως πρὸς τὰς πλευρὰς $B'A'$ καὶ $B'\Gamma'$.

Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι $\gamma\omega\nu.AB\Gamma = \gamma\omega\nu.A'B'\Gamma'$.

Ἀπόδειξις: Ἐπὶ τῶν πλευρῶν τῶν δύο γωνιῶν λαμβάνομεν μῆκη $BA = B'A'$ καὶ $B\Gamma = B'\Gamma'$ καὶ φέρομεν τὰς εὐθεῖας BB' , AA' , $\Gamma\Gamma'$, $A\Gamma$

καὶ $A'Γ'$. Τὸ τετράπλευρον $BAA'B'$ εἶναι παραλληλόγραμμον, διότι αἱ δύο ἀπέναντι πλευραὶ τοῦ BA καὶ $B'A'$ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι. Ἄρα καὶ αἱ πλευραὶ BB' καὶ AA' θὰ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι.

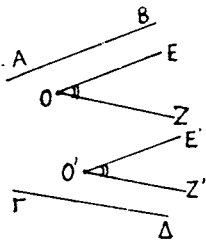
Ὅμοίως καὶ τὸ τετράπλευρον $BΓΓ'B'$ εἶναι παραλληλόγραμμον διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ ἐπομένως αἱ πλευραὶ BB' καὶ $ΓΓ'$ θὰ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι. Ἐπειδὴ αἱ εὐθεῖαι AA' καὶ $ΓΓ'$ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι πρὸς τὴν BB' , θὰ εἶναι καὶ μεταξύ των ἴσαι καὶ παράλληλοι. Ἀλλὰ τότε τὸ τετράπλευρον $AΓΓ'A'$ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι $AΓ=A'Γ'$. Παρατηροῦμεν, ὅτι τὰ τρίγωνα $ABΓ$ καὶ $A'B'Γ'$ ἔχουν καὶ τὰς τρεῖς πλευράς των ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ ἐπομένως εἶναι ἴσα. Ἄρα θὰ εἶναι καὶ $\gamma\omega\nu.ABΓ=\gamma\omega\nu.A'B'Γ'$.



Σχ. 444.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Δύο γωνίαι, αὐτὴν . . .**

646. Γωνίαι δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν. Ὀνομάζομεν **γωνίαν δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν**, τὴν γωνίαν, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ παράλληλοι πρὸς τὰς εὐθεῖας αὐτάς, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τυχόν σημείου τοῦ χώρου.



Σχ. 445.

Π.χ. ἡ γωνία τῶν ἀσυμβάτων εὐθειῶν AB καὶ $ΓΔ$ (Σχ. 445) εἶναι ἡ γωνία EOZ , ἐὰν αἱ OE καὶ OZ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς AB καὶ $ΓΔ$ ἀντιστοίχως.

Ἡ γωνία τῶν εὐθειῶν AB καὶ $ΓΔ$ εἶναι ἡ αὐτή, οἷονδήποτε καὶ ἂν εἶναι τὸ σημεῖον τοῦ χώρου, ἀπὸ τοῦ ὁποῖον φέρομεν τὰς παράλληλους πρὸς τὰς AB καὶ $ΓΔ$.

Πράγματι· ἐὰν φέρωμεν τὰς $O'E'$ καὶ $O'Z'$ παράλληλους πρὸς τὰς AB καὶ $ΓΔ$ ἀπὸ ἑνὸς ἄλλο σημείου O' τοῦ χώρου, αἱ γωνίαι O καὶ O' τοῦ χώρου, εἶναι ἴσαι (§ 645), διότι αἱ πλευραὶ των εἶναι ἀνὰ δύο παράλληλοι μεταξύ των, ὡς παράλληλοι ἀντιστοίχως πρὸς τὰς AB καὶ $ΓΔ$.

Ἐὰν ἡ γωνία EOZ (Σχ. 445) εἶναι ὀρθή, τότε αἱ ἀσύμβατοι εὐθεῖαι AB καὶ $ΓΔ$ λέγονται **κάθετοι μεταξύ των** ἢ **ὀρθογώνιοι εὐθεῖαι**.

Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι: **Δύο εὐθεῖαι κάθετοι μεταξύ των δὲν κείνται γενικῶς ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.**

Ἐὰν δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι εἶναι ὀρθογώνιοι, εἶναι φανερόν, ὅτι κάθε παράλληλος εὐθεῖα πρὸς τὴν μίαν ἐξ αὐτῶν εἶναι κάθετος πρὸς τὴν ἄλλην ἢ πρὸς κάθε παράλληλον τῆς ἄλλης.

Σημ. Εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ γωνία δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν δὲν ἀλλάσσει καὶ ὅταν τὸ σημεῖον O κεῖται ἐπὶ μιᾶς τῶν εὐθειῶν αὐτῶν.

647. Θεώρημα. Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνονται ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων, τέμνονται εἰς μέρη ἀνάλογα.

Ἐπιπέδουσι: Ἐστωσαν αἱ εὐθεῖαι XY καὶ $K\Lambda$, αἱ ὁποῖαι τέμνουσιν τὰ παράλληλα ἐπίπεδα Π, P, Σ, T , εἰς τὰ σημεῖα A, B, Γ, Δ ἢ XY καὶ εἰς τὰ σημεῖα A', B', Γ', Δ' ἢ $K\Lambda$.

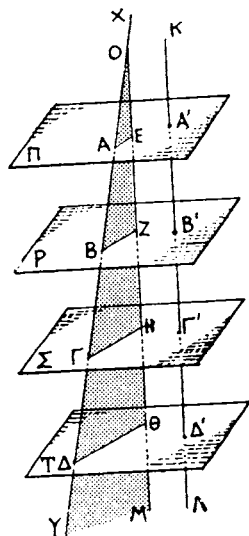
Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'}$.

Ἀπόδειξις: Ἀπὸ ἓνα σημεῖον O τῆς XY φέρομεν εὐθεῖαν OM παράλληλον πρὸς τὴν $K\Lambda$, ἡ ὁποία τέμνει τὰ ἐπίπεδα Π, P, Σ, T εἰς τὰ σημεῖα E, Z, H, Θ ἀντιστοίχως. Αἱ εὐθεῖαι OY καὶ OM , ὡς τεμνόμεναι, ὀρίζουσιν τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου (OY, M), τὸ ὁποῖον τέμνει τὰ ἐπίπεδα Π, P, Σ, T κατὰ τὰς παραλλήλους (§ 637) $AE, BZ, \Gamma H, \Delta\Theta$. Εἰς τὸ ἐπίπεδον (OY, M) αἱ εὐθεῖαι OY καὶ OM τέμνονται ὑπὸ τῶν παραλλήλων εὐθειῶν $AE, BZ, \Gamma H, \Delta\Theta$, ἄρα θὰ τέμνονται εἰς μέρη ἀνάλογα· δηλ. θὰ εἶναι

$$\frac{AB}{EZ} = \frac{B\Gamma}{ZH} = \frac{\Gamma\Delta}{H\Theta} \quad (1)$$

Ἀλλὰ $EZ = A'B'$, $ZH = B'\Gamma'$, $H\Theta = \Gamma'\Delta'$, ὡς παράλληλοι περιεχόμενοι μεταξὺ παραλλήλων ἐπιπέδων (§ 638). Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὰ $EZ, ZH, H\Theta$ μὲ τὰ ἴσα τῶν καὶ ἔχομεν

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'}$$



Σχ. 446.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνονται. . .

Ἀσκήσεις: 1993, 1994.

Ἀσκήσεις

1986. (2022). Ἀπὸ δοθέν σημεῖον δυνάμεθα νὰ φέρομεν ἓνα ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς δύο ἀσυμβάτους εὐθείας.

1987. (2023). Νὰ ἀχθοῦν δύο ἐπίπεδα παράλληλα, τὰ ὁποῖα νὰ διέρχωνται, ἀνά ἓνα, ἀπὸ δύο δοθείσας ἀσυμβάτους εὐθείας.

1988. (2024). Ἀπὸ δοθέν σημεῖον O , τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτός δοθέντος ἐπι-

πέδου Π , νά ἀχθῆ εὐθεία παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π καὶ ἡ ὁποία νά συναντᾷ δοθεῖσαν εὐθείαν E .

1989. (2025). Νά ἀχθῆ μία εὐθεία παράλληλος πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον καὶ τέμνουσα δύο δοθείσας εὐθείας.

1990. (2026). Ἐκ δοθὲν σημείου O νά ἀχθῆ μία εὐθεία, ἡ ὁποία νά συναντᾷ δύο εὐθείας X καὶ Y , αἱ ὁποῖαι δὲν κείνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

1991. (2027). Δίδονται μία περιφέρεια καὶ δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι. Νά ἀχθῆ μία εὐθεία, ἡ ὁποία νά συναντᾷ τὰς τρεῖς αὐτὰς γραμμάς.

1992. (2028). Νά εὐρεθῆ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν ἄκρων ἴσων παραλλήλων εὐθυγράμμων τμημάτων, τῶν ἀγομένων ἀπὸ τὰ διάφορα σημεία ἑνὸς ἐπιπέδου πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου.

1993. (2029). Δύο ἐπίπεδα Π καὶ P εἶναι παράλληλα καὶ ἀπέχουν μεταξύ των 15 ἑκ. Ἐκ δοθὲν σημείου A , τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἀπὸ τὸ Π 8 ἑκ. φέρομεν εὐθείαν, ἡ ὁποία τέμνει τὸ Π εἰς τὸ σημεῖον Γ καὶ τὸ P εἰς τὸ B . Ἐάν εἶναι $AB=30$ ἑκ. τὰ ὑπολογισθοῦν τὰ $A\Gamma$ καὶ ΓB .

1994. (2030). Μία εὐθεία τέμνει τρία παράλληλα ἐπίπεδα εἰς τὰ σημεία A, B, Γ καὶ μία ἄλλη εἰς τὰ σημεία E, Z, H . Ἐάν εἶναι $AB=6$ ἑκ., $B\Gamma=10$ ἑκ. καὶ $EZ=14$ ἑκ., νά ὑπολογισθοῦν τὰ μήκη τῶν EH καὶ ZH .

Άσκήσεις πρὸς επανάληψιν

Α΄ Ομάς. 1995. (2031). Δίδονται εἰς τὸν κῶρον δύο σημεία O καὶ O' καὶ δύο εὐθεῖαι E καὶ E' . Νά ἀχθοῦν δύο εὐθεῖαι OA καὶ $O'A'$, αἱ ὁποῖαι νά εἶναι παράλληλοι μεταξύ των, ὅπου A καὶ A' εἶναι σημεία τῶν εὐθειῶν E καὶ E' ἀντιστοιχῶς.

1996. (2032). Διὰ δοθείσης εὐθείας νά ἀχθῆ ἓνα ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον νά τέμνῃ δύο δοθέντα ἐπίπεδα κατὰ δύο παραλλήλους εὐθείας.

1997. (2033). Δίδεται ἓνα σημεῖον M , ἓνα ἐπίπεδον Π καὶ μία εὐθεία E παράλληλος πρὸς τὸ Π καὶ ζητεῖται νά ἀχθῆ ἐκ τοῦ σημείου M μία εὐθεία, ἡ ὁποία νά συναντᾷ τὴν E καὶ τὸ ἐπίπεδον εἰς δύο σημεία, τὰ ὁποῖα νά ἀπέχουν ἀπόστασιν δοθείσαν λ .

1998. (2034). Δίδεται ἓνα ἐπίπεδον Π καὶ ἐκτὸς αὐτοῦ ἓνα εὐθύγραμμον τμήμα AB . Νά ἀχθοῦν διὰ τῶν A καὶ B δύο παράλληλοι εὐθεῖαι τοιαῦται, ὥστε τὰ ἴχνη των A' καὶ B' ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π , νά ὀρίζουν ἓνα εὐθύγραμμον τμήμα $A'B'$ ἴσον, παράλληλον καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς μετὰ δοθὲν εὐθύγραμμον τμήμα $\alpha\beta$ τοῦ ἐπιπέδου Π .

Β΄ Ομάς. 1999. (2035). Νά κατασκευασθῆ ἓνα εὐθύγραμμον τμήμα AB , τὸ ὁποῖον νά ἔχη τὸ ἓνα ἄκρον του A ἐπὶ δοθείσης εὐθείας E , τὸ ἄλλο ἄκρον B ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου Π καὶ τοῦ ὁποίου τὸ μέσον νά εἶναι δοθὲν σημεῖον O .

2000. (2036). Νά κατασκευασθῆ μία εὐθεία, ἡ ὁποία νά συναντᾷ δύο ἄλλας εὐθείας E_1, E_2 , αἱ ὁποῖαι δὲν κείνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ νά εἶναι παράλληλος πρὸς τρίτην δοθείσαν εὐθείαν Δ , ἡ ὁποία δὲν εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς E_1 καὶ E_2 .

2001. (2037). Δίδονται ἓνα ἐπίπεδον Π , δύο εὐθεῖαι του E καὶ E' , αἱ ὁποῖαι τέμνονται ἐκτὸς τοῦ φύλλου σχεδιάσεως καὶ ἓνα σημεῖον O ἐκτὸς τοῦ

ἐπιπέδου Π. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ εὐθεία, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ Ο καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν Ε καὶ Ε'.

2002. (2038). Δίδονται δύο παράλληλα ἐπίπεδα Π καὶ Ρ. Ἐπὶ τοῦ Π λαμβάνομεν τρία σημεῖα Α, Β, Γ καὶ ἐπὶ τοῦ Ρ ἄλλα τρία σημεῖα Α', Β', Γ'. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ τομὴ τῶν ἐπιπέδων ΑΑ'Γ' καὶ ΒΒ'Γ'.

2003. (2039). Νὰ κατασκευασθῇ μία εὐθεία, παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν εὐθείαν Ε καὶ ἡ ὁποία νὰ συναντᾷ δύο περιφερεῖας Ο καὶ Ο' κειμένας ἐπὶ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων Π καὶ Π'.

2004. (2040). Δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι Χ καὶ Ψ τέμνουν δοθὲν ἐπίπεδον Π εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα εὐθύγραμμον τμήμα ΜΝ δοθέντος μήκους λ, παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π καὶ ἔχον τὰ ἄκρα του ἐπὶ τῶν Χ καὶ Ψ.

Γ' Ὁμάς. **2005.** (2041). Δίδονται δύο εὐθεῖαι Χ, Υ αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς ἓνα σημεῖον Ο καὶ μία τρίτη εὐθεία Ζ, ἡ ὁποία τέμνει τὸ ἐπίπεδον τῶν δύο εὐθειῶν εἰς ἓνα σημεῖον Σ. Ποῖος εἶναι ὁ τόπος τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι συναντοῦν τὰς τρεῖς αὐτὰς εὐθείας.

2006. (2042). Δίδονται δύο εὐθεῖαι Οχ καὶ Ου καὶ μία τρίτη εὐθεία Ζ, ἡ ὁποία δὲν τέμνει τὰς δύο πρῶτας. Ἐπὶ τῆς Ζ λαμβάνομεν ἓνα μεταβλητὸν σημεῖον Μ. Νὰ εὐρεθῇ ὁ τόπος τῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων (Οχ, Μ) καὶ (Ου, Μ), ὅταν τὸ Μ γράφῃ τὴν εὐθείαν Ζ.

2007. (2043). Δίδεται ἓνα ἐπίπεδον Π, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ δύο σημεῖα Α καὶ Β καὶ ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου ἓνα σημεῖον Ο. Ποῖος εἶναι ὁ τόπος τῆς τομῆς ΟΔ δύο ἐπιπέδων, τὰ ὁποῖα διέρχονται ἀντιστοίχως ἀπὸ τὰς εὐθείας ΟΑ καὶ ΟΒ καὶ τέμνουν τὸ ἐπίπεδον Π κατὰ δύο παραλλήλους εὐθείας πρὸς τὴν ΟΔ.

2008. (2044). Δίδονται, ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου Π, δύο εὐθεῖαι Ε καὶ Ε', αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Ο, καὶ ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου δύο σημεῖα Α καὶ Α' (ἢ ΑΑ' δὲν εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ Π). Διὰ τῆς εὐθείας ΑΑ' φέρομεν τυχὸν ἐπίπεδον Ρ, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν Ε εἰς τὸ Β καὶ τὴν Ε' εἰς τὸ Β'.

1ον. Νὰ εὐρεθῇ ὁ τόπος τῆς τομῆς Μ τῶν εὐθειῶν ΑΒ καὶ Α'Β' καὶ ὁ τόπος τῆς τομῆς Ν τῶν ΑΒ' καὶ Α'Β.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεία ΜΝ διέρχεται ἀπὸ ἓνα ὠρισμένον σημεῖον.

2009. (2045). Ἐὰν διαιρέσωμεν κατὰ δοθέντα λόγον μ:ν, ὅλας τὰς εὐθείας, αἱ ὁποῖαι περιέχονται μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων Π καὶ Ρ, ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τῆς διαιρέσεως εἶναι ἓνα ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὰ Π καὶ Ρ.

2010. (2046). Νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν μέσων εὐθυγράμμων τμημάτων, τὰ ὁποῖα εἶναι παράλληλα πρὸς δοθεῖσαν εὐθείαν καὶ περατοῦνται εἰς δύο δοθέντα ἐπίπεδα

2011. (2047). Νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα χωρίζουν κατὰ τὸν δοθέντα λόγον τὰ εὐθύγραμμα τμήματα, τὰ ὁποῖα περιλαμβάνονται μεταξὺ ἑνὸς σημείου Ο καὶ ἑνὸς δοθέντος ἐπιπέδου Π.

2012. (2048). Δίδεται μία περιφέρεια Ο καὶ ἓνα σημεῖον Σ ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου τῆς. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα χωρίζουν κατὰ τὸν δοθέντα λόγον τὰ εὐθύγραμμα τμήματα, τὰ ὁποῖα ὀρίζονται ὑπὸ τοῦ σημείου Σ καὶ ὄλων τῶν σημείων τῆς περιφερείας.

2013. (2049). Δίδονται δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι $x'x$ καὶ $y'y$. Συνδέομεν μὲ

εὐθείαν τυχὸν σημείον A τῆς $x'x$ μὲ τυχὸν σημείον B τῆς $y'y$. Ποῖος εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τὰ ὅποια διαιροῦν τὴν AB κατὰ δοθέντα λόγον $\mu : \nu$.

2014. (2050). Τὰ σημεία A καὶ B γράφουν ἀντιστοίχως δύο δοθείσας εὐθείας X καὶ Y εἰς τρόπον, ὥστε ἡ εὐθεῖα AB νὰ μένη παράλληλος πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τὰ ὅποια χωρίζουν τὴν AB κατὰ δοθέντα λόγον $\mu : \nu$.

2015. (2051). Δίδονται τρεῖς εὐθεῖαι X, Y, Z , αἱ ὁποῖαι δὲν κεῖνται ἀνά δύο ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Ἐνα ἐπίπεδον Π τέμνει αὐτάς εἰς τὰ σημεία A, B, Γ . Νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$, ὅταν τὸ Π μετατίθεται, μένον παράλληλον πρὸς τὴν ἀρχικὴν τοῦ θέσιν.

2016. (2052). Δίδονται δύο παράλληλα ἐπίπεδα Π καὶ Π' , ἐπὶ τοῦ Π ἔνα εὐθύγραμμον τμήμα $OA = a$ καὶ ἐπὶ τοῦ Π' ἔνα εὐθύγραμμον τμήμα $O'A' = a'$. Τὰ τμήματα αὐτὰ εἶναι ὀρθογώνια καὶ στρέφονται ἀντιστοίχως ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου των περὶ τὰ σταθερὰ ἄκρα των O καὶ O' , μένοντα ὀρθογώνια. Νὰ εὐρεθῇ ὁ τόπος τοῦ μέσου M τῆς AA' .

2017. (2053). Δίδονται δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα Π καὶ P καὶ ἔνα σημείον O . Νὰ εὐρεθῇ ὁ τόπος τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ τὸ O καὶ εἶναι τοιαῦται, ὥστε τὸ O νὰ εἶναι τὸ μέσον τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων, τὰ ὅποια ὀρίζονται ἐπὶ τῶν εὐθειῶν αὐτῶν ὑπὸ τῶν δύο ἐπιπέδων.

Δ' Ὁμάς. 2018. (2054). Τρεῖς εὐθεῖαι OX, OY, OZ διαπεροῦν δύο παράλληλα ἐπίπεδα Π καὶ Π' εἰς τὰ σημεία A, B, Γ καὶ A', B', Γ' , ἀντιστοίχως. Νὰ συγκριθοῦν τὰ δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $A'B'\Gamma'$.

2019. (2055). Ἀπὸ τὰς κυρυφᾶς ἑνὸς παραλληλογράμμου, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου P , φέρομεν εὐθείας παραλλήλους, ἴσας καὶ κειμένας πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου. Ποῖον σχῆμα ὀρίζουν τὰ ἄκρα τῶν εὐθειῶν αὐτῶν καὶ ποίαν σχέσιν ἔχει τὸ σχῆμα αὐτὸ πρὸς τὸ δοθὲν παραλληλόγραμμον;

2020. (2056). Ἐὰν δύο τυχούσαι εὐθεῖαι $AB\Gamma$ καὶ $A'B'\Gamma'$ εἶναι τοιαῦται ὥστε νὰ εἶναι $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{A'B'}{B'\Gamma'}$, αἱ εὐθεῖαι $AA', BB', \Gamma\Gamma'$ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.

2021. (2057). Εἰς ἕνα στρεβλὸν* τετράπλευρον αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰ μέσα τῶν μὴ διαδοχικῶν πλευρῶν του καὶ ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει τὰ μέσα τῶν διαγωνίων του τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημείον, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ μέσον ἐκάστης ἐξ αὐτῶν.

2022. (2058). Δίδονται τέσσαρα σημεία A, B, Γ, Δ , τὰ ὅποια δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ ἕξ ἐπίπεδα, τὰ ὅποια διέρχονται ἀπὸ δύο τυχόντα ἐκ τῶν σημείων αὐτῶν καὶ τὸ μέσον τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος, τὸ ὁποῖον ὀρίζουν τὰ δύο ἄλλα σημεία τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημείον.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι συνδέουν καθένα ἀπὸ τὰ σημεία αὐτὰ μὲ τὸ σημείον τῆς τομῆς τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου, πού

* Ἐνα πολύγωνον λέγεται *στρεβλόν*, ὅταν αἱ κορυφαὶ του δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

σχηματίζουν τὰ τρία ἄλλα σημεῖα, τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

Ε' Ὁμάς. 2023. (2059). Ἐὰν δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $A'B'\Gamma'$, τὰ ὁποῖα δὲν κείνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου εἶναι τοιοῦτα, ὥστε αἱ $B\Gamma, B'\Gamma'$ νὰ τέμνονται, ὅπως ἐπίσης καὶ αἱ εὐθεῖαι $\Gamma A, \Gamma'A'$ καὶ $AB, A'B'$, νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. ὅτι αἱ τρεῖς εὐθεῖαι $AA', BB', \Gamma\Gamma'$ διέρχονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον ἢ εἶναι παράλληλοι ἀνά δύο.

2ον. ὅτι τὰ σημεῖα τῆς τομῆς τῶν $B\Gamma$ καὶ $B'\Gamma'$, τῶν ΓA καὶ $\Gamma'A'$ καὶ τῶν AB καὶ $A'B'$ κείνται ἐπ' εὐθείας.

2024. (2060). Ἐὰν δύο τρίγωνα, $AB\Gamma$ καὶ $A'B'\Gamma'$, τὰ ὁποῖα δὲν κείνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ἔχουν τὰς πλευράς των παραλλήλους μίαν πρὸς μίαν, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι $AA', BB', \Gamma\Gamma'$, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰς κορυφὰς τῶν παραλλήλων πλευρῶν τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον ἢ ἐξαιρετικῶς εἶναι παράλληλοι.

2025. (2061). Ἐπὶ τριῶν εὐθειῶν Ox, Oy, Oz τοῦ χώρου λαμβάνομεν τρία εὐθύγραμμα τμήματα $AA', BB', \Gamma\Gamma'$ κείμενα ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν Ox, Oy, Oz . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ κοινὰ σημεῖα τῶν εὐθειῶν AB καὶ $A'B', B\Gamma$ καὶ $B'\Gamma', \Gamma A$ καὶ $\Gamma'A'$ κείνται ἐπ' εὐθείας.

2026. (2062). Δίδονται εἰς τὸν χωρὸν δύο εὐθύγραμμα τμήματα AB καὶ $\Gamma\Delta$ καὶ ὑποθέτομεν, ὅτι δὲν δυνάμεθα νὰ τὰ προεκτείνωμεν καὶ ὅτι δὲν γνωρίζομεν, ἄν, προεκτεινόμενα, τέμνονται. Πῶς δυνάμεθα νὰ προσδιορίσωμεν, ἂν τὰ τέσσαρα σημεῖα A, B, Γ, Δ κείνται ἢ ὄχι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου;

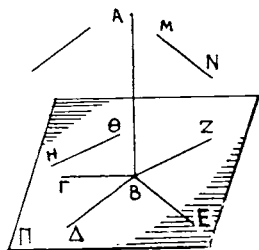
2027. (2063). Δίδονται ἓνα ἐπίπεδον Π , ἓνα σημεῖον O , τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τοῦ Π καὶ δύο παράλληλοι εὐθεῖαι E_1 καὶ E_2 . Νὰ ἐξετασθῇ, ἂν αἱ τομαὶ τοῦ ἐπιπέδου Π καὶ τῶν ἐπιπέδων OE_1 καὶ OE_2 εἶναι παράλληλοι ἢ τέμνονται.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄.
ΕΥΘΕΙΑ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΟΝ ΚΑΘΕΤΑ

648. Εὐθεΐα κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον. Λέγομεν, ὅτι μία εὐθεΐα, εἶναι **κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον** ὅταν εἶναι κάθετος ἐπὶ ὅλας τὰς εὐθεΐας τοῦ ἐπιπέδου, αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ τὸν πόδα τῆς.

Π.χ. ἐὰν ἡ εὐθεΐα AB (Σχ. 447) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς εὐθεΐας $BΓ$, $BΔ$, BE , τοῦ ἐπιπέδου Π , θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π .

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ἐπίσης, ὅτι καὶ τὸ ἐπίπεδον Π εἶναι **κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεΐαν AB** καὶ ἀκόμη, ὅτι ἡ εὐθεΐα AB καὶ τὸ ἐπίπεδον Π εἶναι **κάθετα μεταξύ των**.



Σχ. 447.

649. Παρατήρησις. Ὄταν μία εὐθεΐα AB εἶναι κάθετος ἐπὶ ἓνα ἐπίπεδον Π , εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ κάθε εὐθεΐαν $HΘ$ τοῦ ἐπιπέδου Π ἢ ἐπὶ κάθε εὐθεΐαν MN παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π .

Πράγματι· ἐὰν ἀπὸ τὸ B φέρωμεν τὴν BZ παράλληλον πρὸς τὴν $HΘ$, ἡ BZ θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ Π (§ 630) καὶ ἡ γωνία ABZ θὰ εἶναι ἡ γωνία τῶν ἀσυμβάτων εὐθειῶν AB καὶ $HΘ$. Ἀλλὰ ἡ AB , ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ Π , ἐξ ὑποθέσεως, θὰ εἶναι κάθετος, κατὰ τὸν ὅρισμόν τῆς καθέτου εὐθείας ἐπὶ ἐπίπεδον, καὶ ἐπὶ τὴν BZ . Ἡ γωνία λοιπὸν ABZ εἶναι ὀρθή, ἄρα καὶ ἡ ἴση τῆς (§ 646) γωνία τῶν ἀσυμβάτων εὐθειῶν AB καὶ $HΘ$ εἶναι ὀρθή. Ἐπομένως ἡ AB εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεΐαν $HΘ$ τοῦ ἐπιπέδου Π .

Ὡστε ἡ εὐθεΐα AB , ἡ κάθετος ἐπὶ τὸ Π , εἶναι ὀρθογώνιος πρὸς ὅλας τὰς εὐθεΐας τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ.

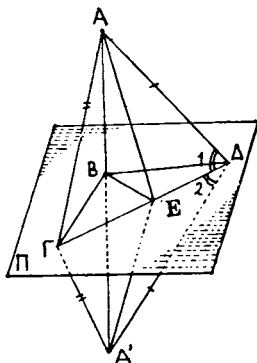
Ἐπίσης, ἐὰν ἀπὸ τὸ B φέρωμεν τὴν BE παράλληλον πρὸς τὴν MN , ἡ BE θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π (§ 630) καὶ ἀποδεικνύομεν ὁμοίως, ὅτι ἡ AB εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν MN .

650. Εὐθεΐα πλαγία πρὸς ἐπίπεδον. Κάθε εὐθεΐα, ἡ ὁποία συναντᾷ ἓνα ἐπίπεδον καὶ δὲν εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτό, λέγεται **πλαγία πρὸς ἐπίπεδον**.

651. Θεώρημα. Κάθε εὐθεΐα, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ δύο τεμνομένης εὐθείας εἰς τὸ σημεῖον τῆς τομῆς των, εἶναι κάθετος και ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον ὀρίζουν αἱ τεμνόμεναι αὐταὶ εὐθεΐαι.

Ἐπιπέδου: Ἐστω, ὅτι ἡ εὐθεΐα AB (Σχ. 448) εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς εὐθείας $BΓ$ και BA εἰς τὸ σημεῖον B τῆς τομῆς των.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ AB εἶναι κάθετος και ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π τῶν εὐθειῶν αὐτῶν.



Σχ. 448.

Ἀπόδειξις: Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ AB εἶναι κάθετος ἐπὶ τυχούσαν εὐθεΐαν τοῦ ἐπιπέδου Π , διερχομένην διὰ τοῦ B , ἔστω ἐπὶ τὴν BE .

Φέρομεν τὴν εὐθεΐαν $ΓΔ$, ἡ ὁποία τέμνει τὴν BE , ἔστω εἰς τὸ σημεῖον E . Προεκτείνωμεν τὴν εὐθεΐαν AB και ἐπὶ τῆς προεκτάσεως λαμβάνομεν τμήμα $BA' = AB$. Φέρομεν τὰς εὐθείας $AΓ$, $A'E$, $AΔ$ και τὰς $A'Γ$, $A'E$, $A'Δ$.

Ἐπειδὴ ἡ $ΓB$ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν AA' εἰς τὸ μέσον αὐτῆς θὰ εἶναι $ΓA = ΓA'$. Ὀμοίως θὰ εἶναι και $ΔA = ΔA'$.

Τὰ τρίγωνα $AΓΔ$ και $A'ΓΔ$ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν και τὰς τρεῖς πλευρὰς των ἴσας μίαν πρὸς μίαν· τὴν $ΓΔ$ κοινήν, $ΓA = ΓA'$ και $ΔA = ΔA'$, ὡς ἐδείχθη ἀνωτέρω· ἄρα θὰ ἔχουν και $\gamma\omega\nu.\Delta_1 = \gamma\omega\nu.\Delta_2$.

Τὰ τρίγωνα $AΕΔ$ και $A'ΕΔ$ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς πλευρὰς $ΔA = ΔA'$, ὡς ἐδείχθη, τὴν πλευρὰν $ΔE$ κοινήν και $\gamma\omega\nu.\Delta_1 = \gamma\omega\nu.\Delta_2$. Ἄρα θὰ εἶναι και $EA = EA'$.

Ἐπειδὴ $EA = EA'$, τὸ τρίγωνον $AΕA'$ εἶναι ἰσοσκελὲς και ἐπομένως ἡ διάμεσός του EB εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν AA' εἰς τὸ μέσον τῆς. Ὄστε ἡ AB εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν BE .

Παρατηροῦμεν, ὅτι ἡ εὐθεΐα AB εἶναι κάθετος ἐπὶ τυχούσαν εὐθεΐαν τοῦ ἐπιπέδου Π , διερχομένην διὰ τοῦ B . Ἄρα θὰ εἶναι κάθετος και ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π .

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Κάθε εὐθεΐα...**

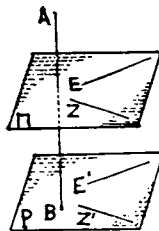
652. Σπουδαία παρατήρησις. Ἐχοντες ὑπ' ὄψει τὸ ἀνωτέρω θεώρημα και τὴν § 649 συνάγομεν, ὅτι:

Διὰ νὰ εἶναι μία εὐθεΐα κάθετος ἐπὶ ἓνα ἐπίπεδον, πρέπει και ἄρκει νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ δύο εὐθείας, μὴ παραλλήλους,

αἱ ὁποῖαι κείνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ ἢ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὸ ἐπίπεδον αὐτό.

653. Θεώρημα. Ἐὰν δύο ἐπίπεδα Π καὶ P (Σχ. 449), εἶναι παράλληλα, κάθε εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὸ ἓνα εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἄλλο.

Ἐπίπεδοι: Ἐστωσαν τὰ παράλληλα ἐπίπεδα Π καὶ P καὶ ὅτι ἡ εὐθεῖα AB εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ Π .



Σχ. 449.

Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξωμεν ὅτι ἡ AB εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ P .

Ἀπόδειξις: Ἡ εὐθεῖα AB , ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ Π , θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ δύο εὐθεῖας του, τὰς E καὶ Z . Εἰς τὸ ἐπίπεδον P φέρομεν τὰς εὐθεῖας E' καὶ Z' , παραλλήλους ἀντιστοίχως πρὸς τὰς E καὶ Z . Ἡ AB , ὡς κάθετος ἐπὶ τὰς E καὶ Z ,

Ἐπίπεδοι.	$\Pi // P$
Ἐπίπεδοι.	$AB \perp \Pi$
Συμπ.	$AB \perp P$

θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὰς παραλλήλους τῶν E' καὶ Z' καὶ ἐπομένως κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον P , ἐπὶ τῶν ὁποίων κείνται αἱ E' καὶ Z' .

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: Ἐὰν δύο ἐπίπεδα. . . .

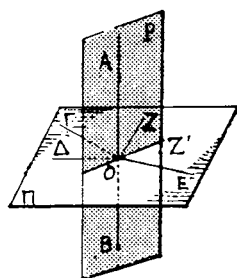
654. Θεώρημα. Ὅλαι αἱ κάθετοι εὐθεῖαι ἐπὶ δοθεῖσαν εὐθεῖαν, εἰς δοθὲν σημεῖον αὐτῆς, κείνται ἐπὶ ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

Ἐπίπεδοι: Ἐστω μία εὐθεῖα AB καὶ O ἓνα σημεῖον της. Ἀπὸ τὸ O φέρομεν τὰς καθέτους OG, OD, OE, \dots ἐπὶ τὴν AB .

Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι αἱ OG, OD, OE, \dots κείνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν AB .

Ἀπόδειξις: Αἱ εὐθεῖαι OG καὶ OD , ὡς τεμνόμεναι, ὀρίζουν τὴν θέσιν ἑνὸς ἐπιπέδου Π . Ἐπειδὴ ἡ AO εἶναι κάθετος, ἐξ ὑποθέσεως, ἐπὶ τὰς εὐθεῖας OG, OD εἰς τὴν τομὴν τῶν O , θὰ εἶναι (§ 651) κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδόν τῶν Π .

2ον Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξωμεν τώρα, ὅτι ὅλαι αἱ ἄλλαι εὐθεῖαι, OE, OZ, \dots κείνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π .



Σχ. 450.

Ἀπόδειξις: Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι μία ἀπὸ αὐτὰς τὰς εὐθεῖας, ἔστω ἡ OZ , δὲν κείται ἐπὶ τοῦ Π . Φέρομεν τὸ ἐπίπεδον P τῶν εὐ-

θειῶν AO καὶ OZ . Τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ τέμνει τὸ ἐπίπεδον Π κατὰ μίαν εὐθείαν, ἔστω κατὰ τὴν OZ' . Ἐπειδὴ ἡ AO εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π , ὡς ἐδείχθη, θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν OZ' · ἀλλ' ἐξ ὑποθέσεως καὶ ἡ OZ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν AO εἰς τὸ σημεῖον O . Θὰ εἴχομεν λοιπὸν δύο κάθετους, τὰς OZ καὶ OZ' ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθείαν AO εἰς ἓνα σημεῖον τῆς O , καὶ κειμένας ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου P . Ἀλλὰ αὐτὸ εἶναι ἄτοπον. Εἰς τὸ ἄτοπον αὐτὸ ἐπέσαμεν, διότι ὑπεθέσαμεν, ὅτι ἡ OZ δὲν κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π .

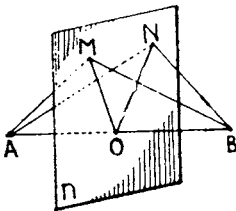
Ὡστε ἡ OZ κεῖται ἐπὶ τοῦ Π .

Ἐδείχθη λοιπὸν, ὅτι: **Ὅλαι αἱ κάθετοι εὐθεῖαι...**

655. Συμπέρασμα. Ἀπὸ τὸ ἀνωτέρω θεώρημα συνάγομεν, ὅτι: **Μία εὐθεῖα, ἡ ὁποία στρέφεται περὶ ἓνα σημεῖον O καὶ μένει κάθετος ἐπὶ μίαν εὐθείαν OA , παράγει ἓνα ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθείαν αὐτήν.**

656. Πρόβλημα. **Νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τύπος τῶν σημείων τοῦ χώρου, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ δύο δοθέντα σημεία.**

Ἐστῶσαν A καὶ B τὰ δοθέντα σημεία καὶ M ἓνα τυχὸν σημεῖον τοῦ ζητουμένου τόπου. Ἐὰν φέρωμεν τὰς εὐθείας MA καὶ MB , θὰ εἶναι ἐξ ὑποθέσεως, $MA=MB$. Φέρομεν τὴν εὐθείαν AB . Ἐπειδὴ $MA=MB$, τὸ M κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου MO εἰς τὸ μέσον O τῆς AB .



Σχ. 451.

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὸ τυχὸν σημεῖον M τοῦ τόπου κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου ἐπὶ τὴν AB εἰς τὸ μέσον αὐτῆς. Ἐπειδὴ αἱ κάθετοι ἐπὶ μίαν εὐθείαν εἰς ἓνα σημεῖον τῆς ὀρίζουσιν (§ 655) ἓνα ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθείαν, ἔπεται ὅτι

τὸ M κεῖται ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου Π , τὸ ὁποῖον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθείαν AB εἰς τὸ μέσον αὐτῆς.

Ἀντιστρόφως: Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι κάθε σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου Π ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰ σημεία A καὶ B .

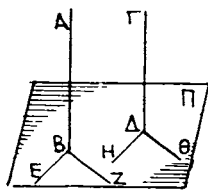
Ἐστω N ἓνα τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου Π . Φέρομεν τὰς εὐθείας NA , NB καὶ NO . Ἐπειδὴ ἡ AO εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π , θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν εὐθείαν ON . Ὡστε ἡ ON εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθείαν AB εἰς τὸ μέσον τῆς καὶ ἐπόμενος θὰ εἶναι $NA=NB$. Ὡστε τὸ τυχὸν σημεῖον N τοῦ ἐπιπέδου Π ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰ σημεία A καὶ B καὶ ἐπομένως εἶναι σημεῖον τοῦ τόπου.

Ὁ ζητούμενος λοιπὸν τόπος εἶναι ἓνα ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν AB , ἢ ὅποια συνδέει τὰ δοθέντα σημεῖα A καὶ B καὶ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς.

Ἄσκησεις : 2028, 2029.

657. Θεώρημα. Ἐὰν ἓνα ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπὶ μίαν ἐκ δύο παραλλήλων εὐθειῶν, εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ τὴν ἄλλην εὐθεῖαν.

Ἐπίπεδοις : Ἐστῶσαν αἱ παράλληλοι εὐθεῖαι AB καὶ $\Gamma\Delta$ (Σχ. 452) καὶ ὅτι τὸ ἐπίπεδον Π εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν AB .



Σχ. 452.

Συμπέρασμα : Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι τὸ Π εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ τὴν $\Gamma\Delta$.

Ἄπόδειξις : Ἐπειδὴ ἢ AB συναντᾷ τὸ ἐπίπεδον Π καὶ ἢ παραλλήλος τῆς $\Gamma\Delta$ θὰ συναντᾷ τὸ Π ,

Ἐπίπεδοις.	$AB // \Gamma\Delta$ $\Pi \perp AB$
Συμπ.	$\Pi \perp \Gamma\Delta$

ἔστω εἰς τὸ σημεῖον Δ (§ 625). Ἀπὸ τὸν πόδα B τῆς AB φέρομεν δύο τυχούσας εὐθείας BE , BZ τοῦ ἐπιπέδου Π καὶ ἀπὸ τὸν πόδα Δ τῆς $\Gamma\Delta$ φέρομεν τὰς ΔH καὶ $\Delta\Theta$ παραλλήλους ἀντιστοίχως πρὸς τὰς BE καὶ BZ , αἱ ὅποια θὰ κείνται ἐπὶ τοῦ Π .

Ἐπειδὴ ἢ AB εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ Π , θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὰς εὐθείας BE καὶ BZ · αἱ γωνίαι λοιπὸν ABE καὶ ABZ εἶναι ὀρθαί· ἄρα καὶ αἱ ἴσαι πρὸς αὐτὰς (§ 645) γωνίαι $\Gamma\Delta H$ καὶ $\Gamma\Delta\Theta$ εἶναι ὀρθαί. Ἡ εὐθεῖα λοιπὸν $\Gamma\Delta$ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς εὐθείας ΔH καὶ $\Delta\Theta$ καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π αὐτῶν. Τὸ ἐπίπεδον λοιπὸν Π εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ τὴν $\Gamma\Delta$.

Ἐδείχθη λοιπὸν, ὅτι : Ἐὰν ἓνα ἐπίπεδον. . . .

658. Πρόβλημα. Ἀπὸ ἓνα τυχὸν σημεῖον O , νὰ ἀχθῇ ἓνα ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ δοθεῖσαν εὐθεῖαν AB .

Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις :

I. Τὸ σημεῖον O κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας AB . Ἀπὸ τὸ O φέρομεν τὰς καθέτους OG καὶ OD (Σχ. 453) ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν AB . Ἐπειδὴ ἢ AO εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς OG καὶ OD ἐκ κατασκευῆς, εἰς τὸ σημεῖον O τῆς τομῆς των, θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδόν των Π . Ὡστε ἢ εὐθεῖα AB εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π . Ἄρα καὶ τὸ ἐπίπεδον Π εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν AB , εἰς τὸ σημεῖον O .

Θὰ δείξωμεν τώρα, ὅτι ἀπὸ τὸ σημεῖον O δὲν δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἄλλο ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν AB .

Πράγματι· ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι ὑπάρχει καὶ ἓνα ἄλλο ἐπίπεδον P , τὸ ὁποῖον διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον O καὶ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν AB . Ἄν φέρωμεν τὸ ἐπίπεδον Σ , τὸ ὁποῖον ὀρίζουν αἱ εὐθεῖαι AB καὶ OD , αὐτὸ θὰ τέμνῃ τὸ ἐπίπεδον Π κατὰ τὴν εὐθεῖαν OD καὶ τὸ ἐπίπεδον P κατὰ μίαν εὐθεῖαν, ἔστω κατὰ τὴν OD' . Ἐπειδὴ ἡ AO εἶναι ἔξ ὑποθέσεως κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον P , θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν OD' . Ἀλλὰ ἔξ ὑποθέσεως καὶ ἡ OD εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν AO . Παρατηροῦμεν, λοιπόν, ὅτι αἱ εὐθεῖαι OD καὶ OD' κείνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου Σ καὶ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν AO , εἰς τὸ αὐτὸ

σημεῖον τῆς O . Τοῦτο ὅμως εἶναι ἀδύνατον· ἄρα δὲν δυνάμεθα νὰ φέρωμεν καὶ ἄλλο ἐπίπεδον, ἔκτος τοῦ Π , κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν AB .

II. Τὸ σημεῖον O κεῖται ἔκτος τῆς εὐθείας AB (Σχ. 454). Ἀπὸ τὸ δοθὲν σημεῖον O φέρομεν μίαν εὐθεῖαν $A'OB'$ παράλληλον πρὸς τὴν AB καὶ ἓνα ἐπίπεδον Π κάθετον ἐπὶ τὴν $A'OB'$ εἰς τὸ O (I περίπτωσης). Τὸ ἐπίπεδον Π , ὡς κάθετον ἐπὶ τὴν $A'OB'$ ἐκ κατασκευῆς, εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλόν τῆς AB (§ 657).

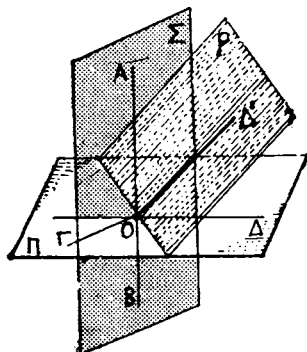
Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἀπὸ τὸ O δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἓνα μόνον ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν AB .

Πράγματι, κάθε ἄλλο ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν AB καὶ ἀγόμενον ἀπὸ τὸ σημεῖον O θὰ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν $A'OB'$ καὶ ἐπομένως θὰ συμπίπτῃ μὲ τὸ Π .

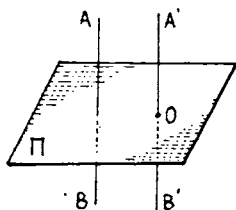
659. Θεώρημα. Δύο ἐπίπεδα κάθετα ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν εἶναι παράλληλα.

Ἐπίπεδοι: Ἐστω, ὅτι τὰ ἐπίπεδα Π καὶ P (Σχ. 455) εἶναι κάθετα ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν AB .

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ ἐπίπεδα αὐτὰ εἶναι παράλληλα.

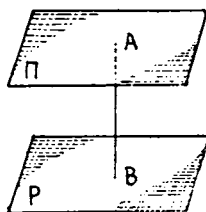


Σχ. 453.



Σχ. 454.

Ἀπόδειξις: Τὰ ἐπίπεδα Π καὶ P δὲν δύνανται νὰ τέμνονται διότι, ἐὰν ἐτέμνοντο, θὰ εἶχομεν ἀπὸ ἓνα σημείου τῆς τομῆς των δύο ἐπίπεδα κάθετα ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν AB , τὸ ὁποῖον εἶναι ἀδύνατον (§ 658, II). Ὡστε τὰ ἐπίπεδα Π καὶ P εἶναι παράλληλα.



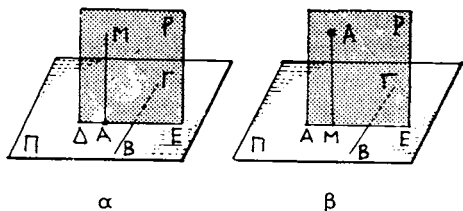
Ἑπόθ.	$\Pi \perp AB$ $P \perp AB$
Συμπ.	$\Pi // P$

Σχ. 455.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Δύο ἐπίπεδα κάθετα...**

660. Πρόβλημα. Ἀπὸ δοθέν σημεῖον A νὰ ἀχθῆ μία εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ ἓνα ἐπίπεδον Π .

Ἐστω, ὅτι τὸ σημεῖον A κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π (Σχ. 456 α) ἢ ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου Π (Σχ. 456 β). Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π φέρομεν μίαν τυχούσαν εὐθεῖαν $BΓ$ καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον A ἓνα ἐπίπεδον P κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν $BΓ$ (§ 658 II), τὸ ὁποῖον τέμνει τὸ ἐπίπεδον Π κατὰ τὴν εὐθεῖαν $ΔΕ$. Ἐπειτα, εἰς τὸ ἐπίπεδον P καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον A , φέρομεν τὴν εὐθεῖαν AM κάθετον ἐπὶ τὴν τομῆν $ΔΕ$ τῶν δύο ἐπιπέδων Π καὶ P .

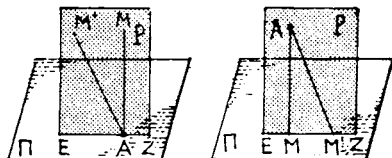


Σχ. 456.

Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι ἡ εὐθεῖα AM εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π .

Ἀπόδειξις: Ἡ εὐθεῖα $BΓ$ ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον P , ἐκ κατασκευῆς, εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν AM τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ. Ὡστε ἡ AM εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν $BΓ$ · ἀλλὰ ἡ AM εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν $ΔΕ$ ἐκ κατασκευῆς. Ἐπομένως ἡ AM , ὡς κάθετος ἐπὶ δύο εὐθείας $BΓ$ καὶ $ΔΕ$, μὴ παράλληλους, τοῦ ἐπιπέδου Π εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ (§ 652).

Θὰ δεῖξωμεν τώρα, ὅτι δὲν δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἄλλην κάθετον AM' ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π , ἐκτὸς τῆς AM .



Σχ. 457.

Ἀπόδειξις: Τὸ ἐπίπεδον P τῶν εὐθειῶν AM καὶ AM' (Σχ. 457), τέμνει τὸ ἐπίπε-

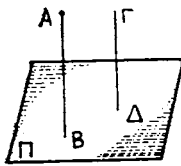
δον Π κατὰ μίαν εὐθεῖαν, ἔστω τὴν EZ . Ἐὰν αἱ AM καὶ AM' ἦσαν

κάθετοι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π , θὰ ἦσαν κάθετοι καὶ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν του EZ . Ἄλλὰ εἰς τὸ ἐπίπεδον P μίαν μόνον κάθετον δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἀπὸ τὸ σημεῖον A ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν EZ .

Ὡστε ἡ AM' δὲν εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν EZ καὶ ἐπομένως δὲν θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π .

661. Θεώρημα. Δύο εὐθεῖαι κάθετοι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον εἶναι παράλληλοι.

Ἐπιπέδου: Ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι AB καὶ $\Gamma\Delta$ (Σχ. 458), αἱ ὁποῖαι εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον Π .



Σχ. 458.

Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι αἱ AB καὶ $\Gamma\Delta$ εἶναι παράλληλοι.

Ἀπόδειξις: Ἐὰν ἀπὸ ἓνα σημείου A τῆς εὐθεῖας AB φέρωμεν μίαν παράλληλον πρὸς

τὴν $\Gamma\Delta$, αὐτὴ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π (§ 657), διότι καὶ ἡ παράλληλός της $\Gamma\Delta$ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ Π .

Ἡ παράλληλος ὁμως αὐτὴ συμπίπτει μὲ τὴν εὐθεῖαν AB , διότι ἀπὸ τὸ σημεῖον A δὲν δυνάμεθα νὰ φέρωμεν παρὰ μίαν μόνον κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π (§ 660). Ὡστε αἱ εὐθεῖαι AB καὶ $\Gamma\Delta$ εἶναι παράλληλοι.

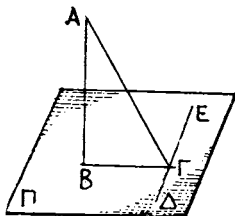
Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: Δύο εὐθεῖαι κάθετοι: . . .

Ἀσκήσεις: 2030, 2031, 2032.

Θεωρήματα τῶν τριῶν καθέτων

662. Θεώρημα I. Ἐὰν ἀπὸ τὸν πόδα B μιᾶς εὐθεῖας AB καθέτου ἐπὶ ἐπίπεδον Π , φέρωμεν μίαν κάθετον $B\Gamma$ ἐπὶ μίαν τυχούσαν εὐθεῖαν ΔE τοῦ ἐπιπέδου Π , ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει τὸ σημεῖον Γ μὲ τυχὸν σημεῖον τῆς εὐθεῖας AB , εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΔE .

Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι ἡ εὐθεῖα $A\Gamma$ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΔE .



Σχ. 459.

Ἀπόδειξις: Ἡ εὐθεῖα ΔE εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν $B\Gamma$, ἔξ ὑποθέσεως καὶ ἐπὶ τὴν AB , διότι ἡ AB , ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π

εἶναι κάθετος (§ 649) καὶ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ΔE τοῦ ἐπιπέδου Π .

Ἐπιπέδου.	$AB \perp \Pi$ $\Delta E \text{ κείται ἐπὶ } \Pi$
Συμπ.	$B\Gamma \perp \Delta E$ $A\Gamma \perp \Delta E$

Ἐπειδὴ λοιπὸν ἡ ΔΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ δύο εὐθείας ΒΓ' καὶ ΑΒ, μὴ παραλλήλους, εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν ΑΒΓ (§ 652). Ἡ ΔΕ, ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ κάθε εὐθείαν τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ καὶ ἐπομένως καὶ ἐπὶ τὴν εὐθείαν ΓΑ, ἡ ὁποία συνδέει τὸ σημεῖον Γ μὲ τυχὸν σημεῖον τῆς ΑΒ.

Ἐδείχθη λοιπὸν, ὅτι: *Ἐὰν ἀπὸ τὸν πόδα. . .*

663. Θεώρημα II. (*Ἀντίστροφον*). *Ἐὰν ἀπὸ ἓνα σημεῖον Α, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς ἐπιπέδου Π φέρωμεν τὴν κάθετον ΑΒ πρὸς τὸ ἐπίπεδον καὶ τὴν κάθετον ΑΓ πρὸς μίαν εὐθείαν ΔΕ τοῦ ἐπιπέδου Π, ἡ εὐθεῖα ΒΓ, ἡ ὁποία συνδέει τοὺς πόδας τῶν δύο αὐτῶν καθέτων, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΕ.*

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ ΒΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΕ.

Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π, θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν ΔΕ.

Ὡστε αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΔΕ εἶναι κάθετοι μεταξύ των (§ 649).

Ἐκτὸς αὐτοῦ ἡ ΔΕ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΑΓ ἕξ ὑποθέσεως· ἄρα ἡ ΔΕ, ὡς κάθετος ἐπὶ τὰς ΑΒ καὶ

ΑΓ, εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν ΑΒΓ καὶ ἐπομένως καὶ ἐπὶ τὴν εὐθείαν ΒΓ, ἡ ὁποία κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ.

Ἐδείχθη λοιπὸν, ὅτι: *Ἐὰν ἀπὸ ἓνα σημεῖον. . .*

Ἀσκήσεις: 2035, 2036, 2037, 2038.

Κάθετος καὶ πλάγιαι πρὸς ἐπίπεδον.

664. Θεώρημα. *Ἐὰν ἀπὸ ἓνα σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς ἐπιπέδου, φέρωμεν τὴν κάθετον πρὸς τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ καὶ διαφόρους πλαγίας πρὸς τὸ ἐπίπεδον αὐτό:*

1ον. Ἡ κάθετος εἶναι μικροτέρα ἀπὸ κάθε πλαγίαν.

2ον. Δύο πλάγιαι, τῶν ὁποίων οἱ πόδες ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὸν πόδα τῆς καθέτου εἶναι ἴσαι.

3ον. Δύο πλάγιαι, τῶν ὁποίων οἱ πόδες ἀπέχουν ἄνισον ἀπὸ τὸν πόδα τῆς καθέτου, εἶναι ἄνισοι καὶ μεγαλυτέρα εἶναι ἐκείνη, τῆς ὁποίας ὁ πὺξ ἀπέχει περισσότερον ἀπὸ τὸν πόδα τῆς καθέτου.

Ἐστω ἓνα ἐπίπεδον Π καὶ ἓνα σημεῖον Α, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τοῦ Π.

<i>Ἐπὶ τὸν πόδα.</i>	Α κεῖται ἐκτὸς ἐπιπ. Π ΑΒ ⊥ Π ΔΕ εὐθεῖα τοῦ Π ΑΓ ⊥ ΔΕ
<i>Συμπ.</i>	ΒΓ ⊥ ΔΕ

1η Ὑπόθεσις: Ἀπὸ τὸ Α φέρομεν τὴν κάθετον ΑΒ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π καὶ τὴν πλάγιαν ΑΓ πρὸς αὐτό.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι $AB < AG$.

Ἀπόδειξις: Ἐὰν φέρωμεν τὴν εὐθεϊαν ΒΓ εἰς τὸ ἐπίπεδον Π, ἡ ΑΒ ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ Π, εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν εὐθεϊαν ΒΓ τοῦ ἐπιπέδου. Τὸ τρίγωνον λοιπὸν ΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ ἐπομένως ἡ κάθετος πλευρά του ΑΒ εἶναι μικροτέρα τῆς ὑποτείνουσας του ΑΓ.

Ὡστε εἶναι $AB < AG$.

Ὑπόθεσις 2α: Ἀπὸ τὸ σημεῖον Α φέρομεν τὴν κάθετον ΑΒ καὶ τὰς πλάγιας ΑΓ καὶ ΑΖ καὶ ἔστω ὅτι εἶναι $B\Gamma = BZ$.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι $AG = AZ$.

Ἀπόδειξις: Τὰ ὀρθογώνια τρί-

γωνα ΑΒΓ καὶ ΑΒΖ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς κάθετους πλευράς των ἴσας, τὴν ΑΒ κοινὴν καὶ $B\Gamma = BZ$, ἔξ ὑποθέσεως ἄρα θὰ εἶναι καὶ $AG = AZ$.

Ὑπόθεσις 3η: Ἀπὸ τὸ σημεῖον Α φέρομεν τὴν κάθετον ΑΒ καὶ τὰς πλάγιας ΑΓ καὶ ΑΕ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π. Ἐστω ὅτι εἶναι $BE > B\Gamma$.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι $AE > AG$.

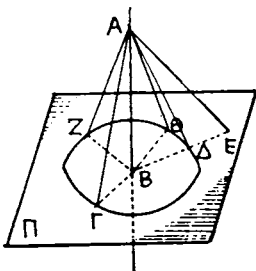
Ἀπόδειξις: Ἐπὶ τῆς εὐθεΐας ΒΕ λαμβάνομεν ἓνα τμήμα $B\Delta = B\Gamma$ καὶ φέρομεν τὴν ΑΔ· αἱ πλάγια ΑΔ καὶ ΑΓ εἶναι ἴσαι, διότι $B\Delta = B\Gamma$. Εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΒΕ, ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθεϊαν ΒΕ καὶ αἱ ΑΔ καὶ ΑΕ πλάγιαι πρὸς αὐτήν. Ἐπειδὴ $BE > B\Delta$ θὰ εἶναι $AE > AD$ (§ 99). Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἀνισότητα αὐτὴν τὸ ΑΔ μὲ τὸν ἴσον του ΑΓ καὶ ἔχομεν $AE > AG$.

Ἐδείχθη λοιπὸν, ὅτι: Ἐὰν ἀπὸ ἓνα σημεῖον. . .

665. Θεώρημα. (Ἀντίστροφον). 1ον. Ἐὰν μία εὐθεΐα ΑΒ εἶναι ἡ μικροτέρα ἀπὸ δὺς τὰς εὐθεΐας, τὰς ὁποίας δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἀπὸ ἓνα σημεῖον Α τοῦ χώρου εἰς ἓνα ἐπίπεδον Π, ἡ ΑΒ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π.

2ον. Ἐὰν δύο πλάγιαι πρὸς ἐπίπεδον, ἀγόμεναι ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου, εἶναι ἴσαι, οἱ πόδες των ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὸν πόδα τῆς καθέτου.

3ον. Ἐὰν δύο πλάγιαι πρὸς ἐπίπεδον, ἀγόμεναι ἐκ τοῦ αὐτοῦ σημείου, εἶναι ἀνισοί, οἱ πόδες των ἀπέχουν ἀνισον ἀπὸ τὸν



Σ.χ 460.

πόδα τῆς καθέτου καὶ περισσότερον ἀπέχει ὁ πὸς τῆς μεγαλυτέρας πλαγίας.

Αἱ ἀντίστροφοι αὐταὶ προτάσεις ἀποδεικνύονται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ὅπως ἀπεδείχθησαν αἱ ἀνάλογοι ἀντίστροφοι προτάσεις εἰς τὴν Ἐπίπεδον Γεωμετρίαν (§ 100).

666. Πόρισμα. Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν ποδῶν ὄλων τῶν ἴσων πλαγίων, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ ἓνα σημεῖον *A* πρὸς ἓνα ἐπίπεδον *Π*, εἶναι μία περιφέρεια κύκλου, ἡ ὁποία ἔχει κέντρον τὸν πόδα τῆς καθέτου, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ σημεῖον *A* ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον *Π*.

Ἀπόδειξις: Οἱ πόδες τῶν ἴσων πλαγίων ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὸν πόδα τῆς καθέτου (§ 664. 2^{ον}) καὶ ἐπομένως κείνται ἐπὶ τῆς περιφέρειας, ἡ ὁποία ἔχει κέντρον τὸν πόδα τῆς καθέτου (Σχ. 460).

667. Ὅρισμός. Ἄξων ἑνὸς κύκλου, λέγεται ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου καὶ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτοῦ.

668. Ἀπόστασις σημείου ἀπὸ ἐπίπεδον. Ἀπόστασιν σημείου ἀπὸ ἐπίπεδον ὀνομάζομεν τὸ μῆκος τῆς καθέτου, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ σημεῖον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον.

Π.χ. ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου *A* (Σχ. 460) ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον *Π* εἶναι τὸ μῆκος τοῦ εὐθυγραμμοῦ τμήματος *AB*.

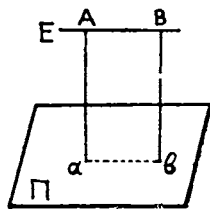
669. Θεώρημα. Ἐὰν μία εὐθεῖα εἶναι παράλληλος πρὸς ἐπίπεδον, ὅλα τὰ σημεῖα τῆς εὐθείας αὐτῆς ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον.

Ἐπίδειξις: Ἐστω *E* μία εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον *Π* (Σχ. 461). Λαμβάνομεν δύο τυχόντα σημεῖα *A* καὶ *B* τῆς εὐθείας *E* καὶ φέρομεν τὰς καθέτους *Aa* καὶ *Bb* ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον *Π*.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι $Aa = Bb$.

Ἀπόδειξις: Αἱ εὐθεῖαι *Aa* καὶ *Bb* εἶναι παράλληλοι, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον *Π* (§ 661). Αἱ *Aa* καὶ *Bb*, ὡς παράλληλοι, ὀρίζουν ἓνα ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὸ ἐπίπεδον *Π* κατὰ εὐθεῖαν *αβ* παράλληλον πρὸς τὴν *AB* (§ 629). Αἱ εὐθεῖαι *Aa* καὶ *Bb* εἶναι λοιπὸν ἴσαι, ὡς περιεχόμεναι μεταξὺ τῶν παραλλήλων εὐθειῶν *AB* καὶ *αβ*.

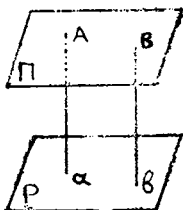
Ἐδείχθη λοιπὸν, ὅτι: Ἐὰν μία εὐθεῖα. . . .



Σχ. 461.

670. Ἀπόστασις εὐθείας ἀπὸ ἓνα ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς αὐτήν. Ὅταν μία εὐθεΐα εἶναι παράλληλος πρὸς ἓνα ἐπίπεδον, ὀνομάζομεν ἀπόστασιν αὐτῆς τῆς εὐθείας ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον, τὴν ἀπόστασιν τυχόντος σημείου τῆς εὐθείας αὐτῆς ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον.

671. Θεώρημα. Ἐὰν δύο ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα, ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ ἑνὸς ἐπιπέδου ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀπόστασιν ἀπὸ τὸ ἄλλο ἐπίπεδον.



Σχ. 462.

Ἐπίπεδοι: Ἐστωσαν δύο παράλληλα ἐπίπεδα Π καὶ Ρ (Σχ. 462) καὶ Αα, Ββ αἱ ἀποστάσεις δύο τυχόντων σημείων Α καὶ Β τοῦ ἐπιπέδου Π ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον Ρ.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι $Aa = Bb$.

Ἀπόδειξις: Αἱ εὐθεΐαι Αα καὶ Ββ εἶναι παράλληλοι, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον Ρ. Εἶναι δὲ καὶ ἴσαι, ὡς παράλληλοι περιεχόμενοι

μεταξὺ παραλλήλων ἐπιπέδων (§ 638).

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Ἐὰν δύο ἐπίπεδα...**

672. Ἀπόστασις παραλλήλων ἐπιπέδων. Ἀπόστασιν δύο παραλλήλων ἐπιπέδων ὀνομάζομεν τὴν ἀπόστασιν τυχόντος σημείου τοῦ ἑνὸς ἐπιπέδου ἀπὸ τὸ ἄλλο ἐπίπεδον.

Ἀσκήσεις: 2039, 2040, 2041, 2042, 2043.

Κοινή κάθετος δύο άσυμβάτων εὐθειῶν

673. Θεώρημα. Ἐὰν δύο εὐθεΐαι εἶναι άσύμβατοι:

1ον. Ὑπάρχει μία εὐθεΐα καὶ μία μόνη, ἡ ὁποία συναντᾷ τὰς δύο αὐτὰς εὐθεΐας καὶ εἶναι κάθετος ἐπὶ αὐτὰς.

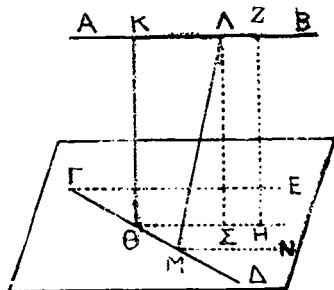
2ον. Αὕτη ἡ κοινή κάθετος εἶναι ἡ μικροτέρα ἀπόστασις τῶν δύο αὐτῶν εὐθειῶν.

Ἐπίπεδοι: Ἐστωσαν αἱ δύο άσύμβατοι εὐθεΐαι ΑΒ καὶ ΓΔ (Σχ. 463).

Συμπέρασμα 1ον: Θὰ δείξωμεν, ὅτι ὑπάρχει κοινή κάθετος τῶν εὐθειῶν αὐτῶν.

Ἀπόδειξις: Ἀπὸ τυχόν σημείων Γ τῆς ΓΔ φερομεν μίαν εὐθεΐαν ΓΕ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ.

Αἱ ΓΔ καὶ ΓΕ ὀρίζουν ἓνα ἐπί-



Σχ. 463.

πεδον Π , τὸ ὁποῖον εἶναι παράλληλον πρὸς τὴν AB , διότι ἡ AB εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν $ΓΕ$, ἐκ κατασκευῆς. Ἀπὸ τυχὸν σημείον Z τῆς AB φέρομεν τὴν κάθετον ZH ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π καὶ ἀπὸ τὸ H φέρομεν τὴν παράλληλον $H\Theta$ πρὸς τὴν AB , ἡ ὁποία θὰ κεῖται ὁλόκληρος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π (§ 630) καὶ συνεπῶς θὰ τέμνη τὴν $ΓΔ$ εἰς ἓνα σημεῖον Θ .

Αἱ AB καὶ ΘH , ὡς παράλληλοι, ὀρίζουν ἓνα ἐπίπεδον $AZH\Theta$ ἐπὶ τοῦ ὁποίου κεῖται καὶ ἡ εὐθεῖα ZH , ὡς συνδέουσα δύο σημεῖα του Z καὶ H . Τέλος ἀπὸ τὸ σημεῖον Θ φέρομεν τὴν ΘK παράλληλον πρὸς τὴν HZ , ἡ ὁποία θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $AZH\Theta$ καὶ συνεπῶς θὰ συναντᾷ τὴν AB εἰς ἓνα ὠρισμένον σημεῖον, ἔστω τὸ K .

Λέγομεν, ὅτι ἡ $K\Theta$ εἶναι ἡ ζητούμενη κοινή κάθετος τῶν εὐθειῶν AB καὶ $ΓΔ$.

Πράγματι· ἡ ZH εἶναι, ἐκ κατασκευῆς, κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π · ἄρα καὶ ἡ παράλληλός της $K\Theta$, θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ Π (§ 657). Ἡ $K\Theta$, ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π , θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς εὐθείας $\Theta\Delta$ καὶ ΘH . Ἐπειδὴ ἡ $K\Theta$ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΘH θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλόν της AB . Ὡστε ἡ $K\Theta$ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς AB καὶ $ΓΔ$.

Συμπέρασμα 2ον: Θὰ δείξωμεν τώρα, ὅτι δὲν ὑπάρχει ἄλλη κοινή κάθετος τῶν εὐθειῶν AB καὶ $ΓΔ$.

Ἀπόδειξις: Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι ὑπάρχει καὶ ἄλλη μία κοινή κάθετος τῶν εὐθειῶν AB καὶ $ΓΔ$ καὶ ἔστω, ὅτι αὕτη εἶναι ἡ ΛM · ἀπὸ τὸ M φέρομεν τὴν MN παράλληλον πρὸς τὴν AB , ἡ ὁποία θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π (§ 630). Ἐπειδὴ ἡ ΛM εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν AB , θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλόν της MN · ἀλλὰ ἡ ΛM εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν $\Delta\Gamma$, ἐξ ὑποθέσεως· ἄρα ἡ ΛM , ὡς κάθετος ἐπὶ τὰς $ΓΔ$ καὶ MN , θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π καὶ ἐπομένως παράλληλος πρὸς τὴν $K\Theta$. Αἱ $K\Theta$ καὶ ΛM , ὡς παράλληλοι θὰ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου $K\Theta M\Lambda$. Ἐπειδὴ τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ περιέχει τὰ σημεῖα K , Λ τῆς εὐθείας AB καὶ τὰ Θ , M τῆς εὐθείας $ΓΔ$, θὰ περιέχη καὶ τὰς εὐθείας αὐτὰς AB καὶ $ΓΔ$ · τοῦτο ὁμως εἶναι ἀδύνατον, διότι ἐξ ὑποθέσεως αἱ εὐθεῖαι AB καὶ $ΓΔ$ εἶναι ἀσύμβατοι. Ὡστε ἡ ΛM δὲν δύναται νὰ εἶναι κοινή κάθετος τῶν εὐθειῶν AB καὶ $ΓΔ$.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι δὲν ὑπάρχει ἄλλη κοινή κάθετος τῶν εὐθειῶν AB καὶ $ΓΔ$ ἐκτὸς τῆς $K\Theta$.

Συμπέρασμα 3ον: Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ κοινή κάθετος $K\Theta$ τῶν εὐθειῶν AB καὶ $ΓΔ$ εἶναι μικροτέρα ἀπὸ κάθε ἄλλην εὐθειαν, ἔστω

τὴν ΛM , ἡ ὁποία συνδέει ἕνα τυχὸν σημεῖον Λ τῆς AB μὲ τυχὸν σημεῖον M τῆς $\Gamma\Delta$ · δηλ. θὰ δείξωμεν, ὅτι $\text{K}\Theta < \Lambda\text{M}$.

Ἀπόδειξις: Ἐκ τὸ Λ φέρομεν τὴν $\Lambda\text{Σ}$ κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π · ἡ $\Lambda\text{Σ}$ θὰ εἶναι διάφορος τῆς ΛM · διότι ἡ ΛM δὲν εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π , ὅπως ἐδείχθη ἀνωτέρω. Ἐπειδὴ ἡ $\Lambda\text{Σ}$ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ Π καὶ ἡ ΛM πλαγία πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π , θὰ εἶναι (§ 664)

$$\Lambda\text{Σ} < \Lambda\text{M} \quad (1)$$

Ἄλλὰ ἐπειδὴ $\Lambda\text{Σ} = \text{K}\Theta$, ὡς ἀποστάσεις τῆς εὐθείας AB ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον Π , ἡ ἰσότης (1) γράφεται $\text{K}\Theta < \Lambda\text{M}$.

Ἐδείχθη λοιπὸν, ὅτι: *Ἐὰν δύο εὐθεῖαι εἶναι. . .*

674. Ἀπόστασις δύο άσυμβάτων εὐθειῶν. *Τὸ μῆκος τῆς κοινῆς καθέτου δύο άσυμβάτων εὐθειῶν ὀνομάζεται ἀπόστασις δύο άσυμβάτων εὐθειῶν*

Οὕτω ἡ ἀπόστασις τῶν άσυμβάτων εὐθειῶν AB καὶ $\Gamma\Delta$ (§χ. 463) εἶναι τὸ μῆκος τῆς κοινῆς καθέτου $\text{K}\Theta$ αὐτῶν. Ἐπειδὴ $\text{K}\Theta = \text{ZH}$ συναγομεν, ὅτι διὰ τὰ εὗρωμεν τὴν ἀπόστασιν δύο άσυμβάτων εὐθειῶν AB καὶ $\Gamma\Delta$ ἀρκεῖ νὰ εὗρωμεν τὴν ἀπόστασιν τυχόντος σημείου Z τῆς AB ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον Π , τὸ ὁποῖον διέρχεται ἀπὸ τὴν ἄλλην εὐθειαν $\Gamma\Delta$ καὶ εἶναι παράλληλον πρὸς τὴν πρώτην εὐθειαν AB .

Ἀσκήσεις

2028. (2064). Νὰ εὗρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων ἑνὸς ἐπιπέδου, τὰ ὁποῖα, ἀπέχουν ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ δύο δοθέντα σημεία, τὰ ὁποῖα δὲν κείνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου.

2029. (2065). Δίδονται δύο σημεία A καὶ B καὶ μία εὐθεῖα E , ἡ ὁποία κεῖται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ἐπὶ τοῦ ὁποίου κείνται τὰ A καὶ B . Νὰ εὗρεθῇ ἐπὶ τῆς E ἕνα σημεῖον Γ τοιοῦτον, ὥστε τὸ τρίγωνον $\text{AB}\Gamma$ νὰ εἶναι ἰσοσκελές.

2030. (2066). Ἐὰν εὐθεῖα εἶναι πλαγία πρὸς ἐπίπεδον, εἶναι κάθετος ἐπὶ μίαν καὶ μόνον μίαν, εὐθειαν τοῦ ἐπιπέδου.

2031. (2067). Ὅταν μία εὐθεῖα καὶ ἕνα ἐπίπεδον εἶναι κάθετα μεταξύ των, κάθε εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθειαν, εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον ἢ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου.

2032. (2068). Ἐκ δύο δοθέν σημείων O νὰ ἀχθῇ μία εὐθεῖα, ἡ ὁποία νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ δύο δοθείσας E_1 καὶ E_2 .

2033. (2069). Νὰ δευχθῇ, ὅτι εὐθεῖα καὶ ἐπίπεδον, κάθετα ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθειαν, εἶναι παράλληλα.

2034. (2070). Νὰ δευχθῇ, ὅτι εὐθεῖα καὶ ἐπίπεδον, κάθετα ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον, εἶναι παράλληλα.

2035. (2071) Ἐκ τὴν κορυφῆν A ἑνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου $\text{AB}\Gamma$ φέρομεν κάθετον AE ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου.

1ον. Ἐὰν Δ εἶναι τὸ μέσον τῆς βάσεως $\text{B}\Gamma$ νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ εὐθεῖα $\text{E}\Delta$ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν $\text{B}\Gamma$.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΒΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΕΑΔ.

2036. (2072). Ἐνα ἐπίπεδον Π στρέφεται περὶ μίαν εὐθεῖαν $\kappa\upsilon$. Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Ο φέρομεν καθέτους ἐπὶ τὸ κινητὸν ἐπίπεδον εἰς τὰς διαφόρους θέσεις του. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν καθέτων αὐτῶν.

2037. (2073). Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Ο ἑνὸς ἐπιπέδου Π, νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου Π, ἣ ὅποια νὰ ἀπέχη ἀπόστασιν λ ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Α, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ.

2038. (2074). Νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν ποδῶν τῶν καθέτων, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Α ἐπὶ ὅλας τὰς εὐθείας ἑνὸς ἐπιπέδου Π, αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον του Γ

2039. (2075). Νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου, ἕκαστος τῶν ὁποίων ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰς κορυφὰς δοθέντος τριγώνου.

2040. (2076). Νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου, ἕκαστον τῶν ὁποίων ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰς πλευρὰς ἑνὸς τριγώνου.

2041. (2077). Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι μια εὐθεῖα ΟΔ, ἣ ὅποια σχηματίζει ἴσας γωνίας μὲ τρεῖς ἡμιευθείας Οκ, Ογ, Οζ ἑνὸς ἐπιπέδου, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτό.

2042. (2078). Νὰ εὐρεθῇ ἓνα σημεῖον, τὸ ὁποῖον νὰ ἀπέχη ἴσον ἀπὸ τέσσαρα δοθέντα σημεῖα.

2043. (2079). Ἐνα σημεῖον Α ἀπέχει 8 ἐκ. ἀπὸ ἐπίπεδον Π. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων Μ τοῦ ἐπιπέδου, διὰ τὰ ὁποῖα εἶναι $AM=10$ ἐκ.

Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν

Α' Ὁμάς. **2044.** (2080). Νὰ ἀχθῇ μία εὐθεῖα, ἣ ὅποια νὰ διέρχεται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Α, νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον Π καὶ νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ δοθείσαν εὐθεῖαν Ε.

2045. (2081). Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Ο ἑνὸς ἐπιπέδου Π νὰ ἀχθῇ μία εὐθεῖα, ἣ ὅποια νὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ Π καὶ νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ μίαν εὐθεῖαν Ε τοῦ χώρου.

2046. (2082). Ἐπὶ δοθέντος ἐπιπέδου Π, νὰ ἀχθῇ μία εὐθεῖα, ἣ ὅποια νὰ ἀπέχη ἀποστάσεις λ καὶ λ' ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα Α καὶ Β, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου Π.

2047. (2083). Νὰ ἀχθοῦν τέσσαρα ἐπίπεδα Π, Ρ, Σ, Τ, παράλληλα, τὰ ὁποῖα νὰ ἰσαπέχουν καὶ νὰ διέρχωνται ἀντιστοίχως ἀπὸ τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ.

2048. (2084). Δίδονται ἓνα σημεῖον Α καὶ μία εὐθεῖα Ε. Νὰ ἀχθῇ ἀπὸ τὸ Α ἓνα ἐπίπεδον Ρ καὶ ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν Ε ἓνα ἐπίπεδον Σ οὕτως, ὥστε τὰ δύο αὐτὰ ἐπίπεδα νὰ εἶναι παράλληλα καὶ νὰ ἀπέχουν μεταξύ των ἀπόστασιν λ .

2049. (2085). Δίδονται ἓνα σημεῖον Ο καὶ δύο ἐπίπεδα Π καὶ Ρ. Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα εὐθύγραμμον τμήμα ΟΑ, τὸ ὁποῖον νὰ περιέχεται μεταξύ τοῦ Ο καὶ τοῦ Π, νὰ εἶναι παράλληλον πρὸς τὸ Ρ καὶ νὰ ἔχη δοθὲν μήκος λ .

2050. (2086). Δίδεται ἓνα τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἓνα σημεῖον Ο ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τριγώνου. Νὰ ἀχθῇ ἓνα ἐπίπεδον Π, τὸ ὁποῖον νὰ διέρχεται ἀπὸ τὸ Ο καὶ νὰ ἀπέχη ἴσον ἀπὸ τὰς κορυφὰς Α, Β, Γ τοῦ τριγώνου.

2051. (2087). Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Ο νὰ ἀχθῇ ἓνα ἐπίπεδον Π, τὸ ὁποῖον νὰ εἶναι παράλληλον πρὸς δοθείσαν εὐθεῖαν Ε καὶ νὰ ἀπέχη ἀπόστασιν λ ἀπὸ τὴν Ε.

B' Ὀμάς. 2052. (2888). Νὰ εὐρεθῆ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων ἑνὸς ἐπιπέδου, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ δοθῆν σημείου, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου.

2053. (2089). Νὰ εὐρεθῆ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν μέσων τῶν εὐθυγράμμων τμημάτων, τῶν περιεχομένων μεταξὺ δύο οἰωνδήποτε εὐθειῶν X καὶ Ψ τοῦ χώρου.

2054. (2090). Νὰ εὐρεθῆ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν ποδῶν τῶν καθέτων τῶν ἀγομένων ἀπὸ δοθῆν σημείου A ἐπὶ ὅλας τὰς εὐθείας ἑνὸς ἐπιπέδου Π , αἱ ὁποῖαι εἶναι παράλληλοι πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου.

2055 (2091). Νὰ εὐρεθῆ ὁ τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ δύο παραλλήλους εὐθείας.

2056. (2092). Νὰ εὐρεθῆ ὁ τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν δοθεῖσαν ἀπόστασιν λ ἀπὸ δοθῆν ἐπίπεδον Π .

2057. (2893). Νὰ εὐρεθῆ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν ποδῶν τῶν καθέτων, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ δοθῆν σημείου A ἐπὶ ὅλα τὰ ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα διέρχονται ἀπὸ δοθεῖσαν εὐθεῖαν X .

2058. (2094). Δίδονται δύο εὐθεῖαι παράλληλοι E καὶ E' . Ποῖος εἶναι ὁ τόπος τῶν σημείων M , τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἀπόστασιν λ ἀπὸ τὴν E καὶ ἀπόστασιν λ' ἀπὸ τὴν E' .

2059. (2095). Νὰ εὐρεθῆ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων ἑνὸς ἐπιπέδου Π ἐκ τῶν ὁποίων βλέπομεν ὑπὸ ὀρθὴν γωνίαν ἕνα εὐθύγραμμον τμήμα AB , τὸ ὁποῖον δὲν κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π .

2060. (2096). Δίδονται τρεῖς εὐθεῖαι παράλληλοι X, Ψ, Z , αἱ ὁποῖαι δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Νὰ εὐρεθῆ ὁ τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὰ τρία ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα ὀρίζουν αἱ εὐθεῖαι αὐταὶ ἀνά δύο.

2061. (2097). Δίδεται μία ὀρθὴ γωνία AOB , ἡ ὁποία ἔχει τὴν πλευρὰν OA , καὶ μόνον αὐτὴν παράλληλον πρὸς ἕνα δοθῆν ἐπίπεδον Π . Ποῖος εἶναι ὁ τόπος τῶν σημείων Σ τοιούτων, ὥστε τὰ ἐπίπεδα ΣOA καὶ ΣOB τέμνουν τὸ ἐπίπεδον Π κατὰ δύο ὀρθογωνίους εὐθείας.

2062. (2098). Δίδονται δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι AB καὶ $\Gamma\Delta$. Μία τρίτη εὐθεῖα MN κινεῖται κατὰ μῆκος τῆς AB καὶ παραλλήλως πρὸς τὴν $\Gamma\Delta$. Νὰ εὐρεθῆ ὁ τόπος, τὸν ὁποῖον γράφει ἡ MN .

2063. (2099). Νὰ εὐρεθῆ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο παράλληλα ἐπίπεδα εἶναι ἴσος μὲ $\mu : \nu$.

2064. (2100). Νὰ εὐρεθῆ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα χωρίζουν κατὰ δοθέντα λόγον $\mu : \nu$, τὰ εὐθύγραμμα τμήματα, τὰ περιεχόμενα μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων.

2065. (2101). Δίδονται δύο ἐπίπεδα Π καὶ P καὶ μία εὐθεῖα X . Ἀπὸ ἕνα μεταβλητὸν σημείου M τῆς X φέρομεν ἐπίπεδα παράλληλα ἀντιστοιχῶς πρὸς τὰ ἐπίπεδα Π καὶ P . Νὰ εὐρεθῆ ὁ τόπος τῆς τομῆς των, ὅταν τὸ M γράφῃ τὴν X .

2066. (2102). Νὰ εὐρεθῆ ὁ τόπος τῶν σημείων M τοῦ χώρου, τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο δοθέντα σημεία A καὶ B νὰ εἶναι ἴση μὲ k^2 .

2067. (2103). Νὰ εὐρεθῆ ὁ τόπος τῶν σημείων ἑνὸς ἐπιπέδου Π , τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο δοθέντα σημεία

A καὶ B, τὰ ὁποῖα κείνται ἐκτὸς τοῦ Π, νὰ εἶναι ἴσον μὲ k^2 .

2068. (2104). Νὰ εὐρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων ἐνὸς ἐπιπέδου Π, τῶν ὁποίων ἡ διαφορά τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα A καὶ B, τὰ ὁποῖα κείνται ἐκτὸς τοῦ Π, νὰ εἶναι ἴση μὲ k^2 .

2069. (2105). Νὰ εὐρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων M ἐνὸς ἐπιπέδου Π, τῶν ὁποίων ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα A καὶ B, τὰ ὁποῖα δὲν κείνται ἐπὶ τοῦ Π, εἶναι ἴσος μὲ δοθέντα λόγον $\mu : \nu$.

2070. (2106). Δίδεται ἓνα ἐπίπεδον Π, μία εὐθεῖα OX, ἡ ὁποία τέμνει τὸ Π εἰς τὸ O, μία μεταβλητὴ εὐθεῖα OM, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ O καὶ κείται ἐπὶ τοῦ Π, καὶ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν OM' οὕτως, ὥστε ἡ OX νὰ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας MOM'. Νὰ εὐρεθῇ ὁ τόπος τῆς εὐθείας OM'.

2071. (2107). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ἐνὸς στρεβλοῦ τετραπλεύρου ABΓΔ εἶναι κορυφαὶ παραλληλογράμμου. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ κέντρου τοῦ παραλληλογράμμου αὐτοῦ, διὰ τὸ ἐπίπεδον ABΓ μένῃ ὠρισμένον, ἡ δὲ κορυφή Δ γράφῃ δοθεῖσαν εὐθεῖαν X.

2072. (2108). Εἰς ἓνα ἐπίπεδον Π θεωροῦμεν ἓνα κύκλον O διαμέτρου AB. Ἐστω M ἓνα τυχόν σημεῖον τῆς περιφέρειας του. Φέρομεν τὴν AΣ κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π καὶ ἔπειτα τὰς εὐθείας ΣB, ΣM. Φέρομεν ἐπίσης τὴν AΓ κάθετον ἐπὶ τὴν ΣB καὶ τὴν AN κάθετον ἐπὶ τὴν ΣM. Νὰ ἀποδειχθῇ :

1ον. ὅτι $\gamma\omega\nu.\Sigma MB=90^\circ$.

2ον. ὅτι $\overline{\Sigma A}^2=\Sigma N.\Sigma M=\Sigma \Gamma.\Sigma B$.

3ον. ὅτι τὰ τρίγωνα ΣΓN καὶ ΣMB εἶναι ὅμοια.

4ον. ὅτι $\gamma\omega\nu.\Sigma \Gamma N=90^\circ$.

5ον. ὅτι ἡ ΣΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον NΓA.

6ον. ὅτι $\gamma\omega\nu.\Gamma'NA=90^\circ$.

7ον. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου N, ἔὰν τὸ σημεῖον M γράφῃ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου O.

Γ' Ὁμάς. 2073. (2109). Νὰ εὐρεθῇ ἡ μικροτέρα καὶ ἡ μεγαλυτέρα ἀποστάσις ἐνὸς δοθέντος σημείου ἀπὸ δοθεῖσαν περιφέρειαν.

2074. 1ον. Ἴνα ἓνα ἐπίπεδον Π, ἀπέχη ἴσον ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα A καὶ B, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὸ ἐπίπεδον νὰ εἶναι παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν AB ἢ νὰ διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον τῆς AB.

2ον. Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα ἐπίπεδον τὸ ὁποῖον νὰ διέρχεται ἀπὸ μίαν δοθεῖσαν εὐθεῖαν E καὶ νὰ ἀπέχη ἴσον ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα.

2075. (2111). Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα ἐπίπεδον Π, τὸ ὁποῖον νὰ ἀπέχη ἴσον ἀπὸ τέσσαρα δοθέντα σημεῖα A, B, Γ, Δ, τὰ ὁποῖα δὲν κείνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

2076. (2112). Δίδονται δύο σημεῖα A καὶ B, τὰ ὁποῖα κείνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος δοθέντος ἐπιπέδου Π. Νὰ εὐρεθῇ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π ἓνα σημεῖον M, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὰ σημεῖα A καὶ B, νὰ εἶναι ἐλάχιστον.

2077. (2113). Δίδονται εἰς τὸ διάστημα μία ὠρισμένη εὐθεῖα xy καὶ δύο σημεῖα A καὶ B, τὰ ὁποῖα δὲν κείνται ἐπὶ τῆς xy. Ἐπὶ τῆς εὐθείας xy κινεῖται ἓνα σημεῖον M. Ποῦ πρέπει νὰ τοποθετηθῇ τὸ σημεῖον M διὰ νὰ εἶναι :

1ον. Τὸ ἄθροισμα $MA+MB$ ἐλάχιστον ;

2ον. Ἡ διαφορά τῶν MA καὶ MB μεγίστη ;

2078. (2114). Δίδονται δύο τεμνόμεναι καὶ ὀρθογώνιοι εὐθεῖαι Ox καὶ Oy

καὶ ἓνα σημεῖον Σ, τὸ ὅποιον κείται ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου τῶν Οχ καὶ Ογ. Νὰ εὐρεθῇ ἐπὶ τῆς Οχ ἓνα σημεῖον Α καὶ ἐπὶ τῆς Ογ ἓνα σημεῖον Β τοιαῦτα, ὥστε ἡ γωνία ΑΣΒ νὰ εἶναι ὀρθή καὶ ἡ ΑΒ ἐλαχίστη.

Δ' **Ἔσθ. 2079.** (2115). Διὰ νὰ εἶναι δύο εὐθεῖαι ὀρθογώνιοι, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ δυνάμεθα νὰ φέρωμεν ἀπὸ τὴν μίαν ἐξ αὐτῶν ἓνα ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ἄλλην.

2080. (2116). Αἱ κάθετοι, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Μ ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα διέρχονται ἀπὸ δοθείσαν εὐθεῖαν ΑΒ, κείνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

2081. (2117). Διὰ νὰ ἀπέχουν δύο σημεῖα ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ μίαν εὐθεῖαν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ αἱ ἀποστάσεις ἐκάστου ἐξ αὐτῶν ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὅποιον ὀρίζει ἡ εὐθεῖα καὶ τὸ ἄλλο σημεῖον, νὰ εἶναι ἴσα.

2082. (2118). Δίδονται τρία ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἓνα κοινὸν ἄκρον.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἀπὸ τὰ μὴ κοινὰ ἄκρα τῶν Α, Β, Γ διέρχεται μία περιφέρεια.

2ον. Ἐὰν τὰ ΟΑ καὶ ΟΒ εἶναι ὠρισμένα κατὰ τὴν θέσιν καὶ τὸ ΟΓ λαμβάνει ὅλας τὰς δυνατὰς διευθύνσεις, ποῖος εἶναι ὁ τόπος τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου αὐτοῦ.

2083. (2119). 1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι διὰ νὰ εἶναι ὀρθογώνια δύο εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι $\overline{ΓΑ}^2 - \overline{ΓΒ}^2 = \overline{ΔΑ}^2 - \overline{ΔΒ}^2$.

2ον. Στριζόμενοι εἰς τὴν ιδιότητα αὐτήν, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἐὰν ἔχωμεν τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ τὰ ὁποῖα δὲν κείνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ ἔαν δύο ἀπὸ τὰς τρεῖς ομάδας (ΑΒ, ΓΔ), (ΑΓ, ΒΔ), (ΑΔ, ΒΓ) σχηματίζουν ὀρθογώνια τμήματα, τὰ εὐθύγραμμα τμήματα καὶ τῆς τρίτης ομάδος θὰ εἶναι ἐπίσης ὀρθογώνια.

2084. (2120). Δίδονται δύο εὐθύγραμμα τμήματα ΑΒ καὶ Α'Β', τὰ ὁποῖα δὲν κείνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ ἡ τομὴ Ε τῶν ἐπιπέδων τῶν καθέτων εἰς τὰ μέσα τῶν ΑΑ' καὶ ΒΒ'. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι :

1ον. κάθε σημεῖον τῆς Ε ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰς εὐθείας ΑΒ καὶ Α'Β'.

2ον. αἱ ΑΒ καὶ Α'Β' σχηματίζουν γωνίας ἴσας μὲ τὴν εὐθεῖαν Ε.

2085. (2121). Εἰς ἓνα ἐπίπεδον Π δίδεται μία εὐθεῖα Ε καὶ ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου ἓνα σημεῖον Ο. Συνδέομεν μὲ εὐθεῖαν τὸ σημεῖον Ο μὲ τυχὸν σημεῖον Α τῆς εὐθείας Ε καὶ ἐξετάζομεν τὸ ἐπίπεδον Ρ, τὸ κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΑ εἰς τὸ Ο. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ τομὴ Ε' τῶν ἐπιπέδων Π καὶ Ρ διέρχεται ἀπὸ ἓνα ὠρισμένον σημεῖον, ὅταν τὸ Α διαγράφη τὴν εὐθεῖαν Ε.

2086. (2122). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς ἓνα στρεβλὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ :

1ον. Τὰ ἐξ ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα εἶναι κάθετα εἰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του καὶ τῶν διαγωνίων του, διέρχονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον.

2ον. Αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰ μέσα τῶν μὴ διαδοχικῶν πλευρῶν του καὶ ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποῖα συνδέει τὰ μέσα τῶν διαγωνίων του τέμνονται εἰς ἓνα σημεῖον, τὸ ὅποιον εἶναι τὸ μέσον ἐκάστης ἐξ αὐτῶν.

3ον. Τὰ ἐξ ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα ἄγονται ἀπὸ τὰ μέσα ἐκάστης πλευρᾶς, καθετῶς ἐπὶ τὴν ἄπέναντι πλευρᾶν καὶ ἀπὸ τὸ μέσον ἐκάστης διαγωνίου, καθέτως ἐπὶ τὴν ἄλλην διαγωνίον, διέρχονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄.

ΔΙΕΔΡΟΙ ΓΩΝΙΑΙ-ΕΠΙΠΕΔΑ ΚΑΘΕΤΑ

1. Διεδροι γωνίαι

675. Όρισμοί. Οἱ δύο συνεχόμενοι τοῖχοι μιᾶς αἰθούσης σχηματίζουν ἓνα σχῆμα, τὸ ὁποῖον λέγεται **διεδρος γωνία**.

Γενικῶς: **Διεδρος γωνία** λέγεται τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον σχηματίζουν δύο ἡμιεπίπεδα, τὰ ὁποῖα ἔχουν κοινὴν τὴν ἀρχικὴν εὐθεῖαν των.

Ἡ κοινὴ ἀρχικὴ εὐθεῖα τῶν ἡμιεπιπέδων ὀνομάζεται **ἀκμὴ τῆς διεδρου γωνίας**, τὰ δὲ ἡμιεπίπεδα, τὰ ὁποῖα τὴν σχηματίζουν, ὀνομάζονται **ἔδραι τῆς διεδρου**.

Οὕτω τὰ δύο ἡμιεπίπεδα $AB\Gamma$ καὶ ABP (Σχ. 464 α) σχηματίζουν μίαν διεδρον γωνίαν, ἣ ὅποια ἔχει ἀκμὴν τὴν εὐθεῖαν AB καὶ ἔδρας τὰ ἡμιεπίπεδα $AB\Gamma$, ABP .

Μία διεδρος γωνία ὀνομάζεται μὲ τὰ δύο γράμματα τῆς ἀκμῆς τῆς.

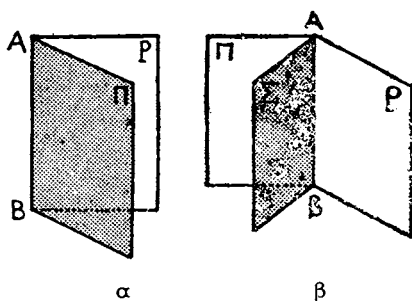
Ἐὰν ὅμως πολλαὶ διεδροι ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀκμὴν, τότε ὀνομάζομεν κάθε διεδρον μὲ τέσσαρα γράμματα, τὰ ὁποῖα θέτομεν δύο ἐπὶ τῆς ἀκμῆς των καὶ ἓνα ἐπὶ ἐκάστης ἔδρας τῆς. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὅμως πρέπει νὰ διαβάζομεν τὰ γράμματα τῆς ἀκμῆς εἰς τὸ μέσον.

Π.χ. ἡ διεδρος γωνία, ἣ ὅποια σχηματίζεται ἀπὸ τὰ ἡμιεπίπεδα $AB\Gamma$ καὶ ABP , διαβάζεται: διεδρος AB ἢ διεδρος ΓABP καὶ γράφεται: διεδρ. AB ἢ διεδρ. $\Gamma - AB - P$.

Δύο διεδροι γωνίαι εἶναι ἴσοι, ὅταν ἡ μία τιθεμένη ἐπὶ τῆς ἄλλης ἐφαρμοδῆξαι καὶ ἀποτελῆ μίαν μόνον διεδρον γωνίαν.

Δύο διεδροι γωνίαι λέγονται ἐφεξῆς, ἐὰν ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀκμὴν, μίαν κοινὴν ἔδραν καὶ τὰς μὴ κοινὰς ἔδρας ἐκατέρωθεν τῆς κοινῆς.

Π.χ. αἱ δύο διεδροι $\Gamma - AB - \Sigma$ καὶ $\Sigma - AB - P$ (Σχ. 464 β) εἶναι ἐφεξῆς διεδροι γωνίαι.



Σχ. 464.

676. Ἄθροισμα δύο διέδρων γωνιῶν. Διὰ νὰ εὐρωμεν τὸ ἄθροισμα δύο διέδρων γωνιῶν, θέτομεν τὴν μίαν πλησίον τῆς ἄλλης, ὥστε νὰ γίνουν ἐφεξῆς. Ἐπειτα παραλείπομεν τὴν κοινὴν ἕδραν των καὶ ἡ διέδρος, ἡ ὁποία σχηματίζεται ἀπὸ τὰς δύο ἄλλας ἕδρας, εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο διέδρων γωνιῶν.

Π.χ. ἡ διέδρος γωνία Π-ΑΒ-Ρ εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν διέδρων Π-ΑΒ-Σ καὶ Σ-ΑΒ-Ρ (Σχ. 464 β).

677. Διχοτόμον ἐπίπεδον. Διχοτόμον ἐπίπεδον μιᾶς διέδρου γωνίας λέγεται, τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον ἀγεται ἀπὸ τὴν ἀκμὴν τῆς διέδρου γωνίας καὶ χωρίζει αὐτὴν εἰς δύο ἴσας διέδρους γωνίας.

Π.χ. τὸ ἐπίπεδον Σ (Σχ. 464 β) θὰ εἶναι διχοτόμον ἐπίπεδον τῆς διέδρου γωνίας Π-ΑΒ-Ρ, ἐὰν εἶναι διέδρ. Π-ΑΒ-Σ = διέδρ. Σ-ΑΒ-Ρ.

678. Κατὰ κορυφὴν διέδροι γωνία. Δύο διέδροι γωνίαὶ λέγονται κατὰ κορυφὴν διέδροι γωνίαὶ, ἐὰν ἔχουν κοινὴν τὴν ἀκμὴν καὶ αἱ ἕδραι τῆς μιᾶς εἶναι προεκτάσεις τῶν ἕδρῶν τῆς ἄλλης.

Π.χ. αἱ διέδροι γωνίαὶ Π-ΑΒ-Ρ καὶ Π-ΑΒ-Ρ' εἶναι (Σχ. 465) κατὰ κορυφὴν διέδροι γωνίαὶ.

679. Ἐπίπεδος γωνία διέδρου γωνίας.

Ἐστω μία διέδρος γωνία Π-ΑΒ-Ρ (Σχ. 466).

Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Ο τῆς ἀκμῆς τῆς ΑΒ φέρομεν τὰς καθέτους ΟΓ καὶ ΟΔ ἐπὶ τὴν ἀκμὴν

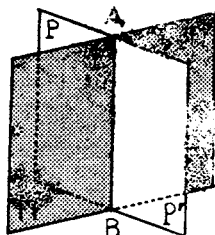
τῆς ΑΒ καὶ κειμένας ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν ἕδρῶν τῆς Π καὶ Ρ.

Ἡ γωνία ΓΟΔ, ἣ ὁποία σχηματίζεται κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον, λέγεται ἀντιστοίχος ἐπίπεδος γωνία τῆς διέδρου γωνίας Π-ΑΒ-Ρ.

Ἐπειδὴ αἱ ΟΓ καὶ ΟΔ δύνανται νὰ θεωρηθοῦν, ὡς τομαὶ τῶν ἕδρῶν Π καὶ Ρ τῆς διέδρου ΑΒ ὑπὸ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὴν ἀκμὴν τῆς ΑΒ, δυνάμεθα νὰ δώσωμεν τὸν ἑξῆς ὀρισμὸν:

Ἀντιστοίχος ἐπίπεδος γωνία μιᾶς διέδρου γωνίας ἢ ἀπλῶς ἐπίπεδος γωνία μιᾶς διέδρου γωνίας λέγεται ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ τομαὶ τῶν ἕδρῶν τῆς ἐπὶ ἐνὸς ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὴν ἀκμὴν τῆς.

Τὸ μέγεθος τῆς ἐπιπέδου γωνίας μιᾶς διέδρου γωνίας εἶναι τὸ αὐτό, οἷονδήποτε καὶ ἂν εἶναι τὸ σημεῖον τῆς ἀκμῆς τῆς, τὸ ὁποῖον λαμβάνεται ὡς κορυφὴ τῆς γωνίας.



Σχ. 465.

Δύο διέδροι γωνίαὶ λέγονται κατὰ κορυφὴν διέδροι γωνίαὶ, ἐὰν ἔχουν κοινὴν τὴν ἀκμὴν καὶ αἱ ἕδραι τῆς μιᾶς εἶναι προεκτάσεις τῶν ἕδρῶν τῆς ἄλλης.

Π.χ. αἱ διέδροι γωνίαὶ Π-ΑΒ-Ρ καὶ Π-ΑΒ-Ρ' εἶναι (Σχ. 465) κατὰ κορυφὴν διέδροι γωνίαὶ.

679. Ἐπίπεδος γωνία διέδρου γωνίας.

Ἐστω μία διέδρος γωνία Π-ΑΒ-Ρ (Σχ. 466).

Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Ο τῆς ἀκμῆς τῆς ΑΒ φέρομεν τὰς καθέτους ΟΓ καὶ ΟΔ ἐπὶ τὴν ἀκμὴν

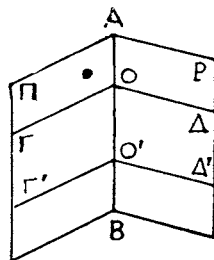
τῆς ΑΒ καὶ κειμένας ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν ἕδρῶν τῆς Π καὶ Ρ.

Ἡ γωνία ΓΟΔ, ἣ ὁποία σχηματίζεται κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον, λέγεται ἀντιστοίχος ἐπίπεδος γωνία τῆς διέδρου γωνίας Π-ΑΒ-Ρ.

Ἐπειδὴ αἱ ΟΓ καὶ ΟΔ δύνανται νὰ θεωρηθοῦν, ὡς τομαὶ τῶν ἕδρῶν Π καὶ Ρ τῆς διέδρου ΑΒ ὑπὸ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὴν ἀκμὴν τῆς ΑΒ, δυνάμεθα νὰ δώσωμεν τὸν ἑξῆς ὀρισμὸν:

Ἀντιστοίχος ἐπίπεδος γωνία μιᾶς διέδρου γωνίας ἢ ἀπλῶς ἐπίπεδος γωνία μιᾶς διέδρου γωνίας λέγεται ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ τομαὶ τῶν ἕδρῶν τῆς ἐπὶ ἐνὸς ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὴν ἀκμὴν τῆς.

Τὸ μέγεθος τῆς ἐπιπέδου γωνίας μιᾶς διέδρου γωνίας εἶναι τὸ αὐτό, οἷονδήποτε καὶ ἂν εἶναι τὸ σημεῖον τῆς ἀκμῆς τῆς, τὸ ὁποῖον λαμβάνεται ὡς κορυφὴ τῆς γωνίας.



Σχ. 466.

Ἐὰν φέρωμεν εἰς ἄλλο σημεῖον O' τῆς ἀκμῆς AB (Σχ. 466) ἕνα ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν AB , θὰ λάβωμεν μίαν δευτέραν ἐπίπεδον γωνίαν $\Gamma'O'\Delta'$ τῆς διέδρου γωνίας AB . Ἡ γωνία $\Gamma'O'\Delta'$ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἐπίπεδον γωνίαν $\Gamma O\Delta$, διότι αἱ πλευραὶ των εἶναι παράλληλοι, ὡς τομαὶ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων $\Gamma O\Delta$ καὶ $\Gamma'O'\Delta'$ ὑπὸ τρίτου, καὶ ἔχουν τὴν αὐτὴν φορᾶν.

Ὡστε: **Ὅλαι αἱ ἐπίπεδοι γωνίαὶ μιᾶς διέδρου γωνίας εἶναι ἴσαι.**

Σχέσεις μεταξύ τῶν διέδρων καὶ τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν των

680. Θεώρημα. Ἐὰν δύο διέδροι γωνίαὶ εἶναι ἴσαι καὶ αἱ ἐπίπεδοι γωνίαὶ των εἶναι ἴσαι καὶ ἀντιστρόφως.

Ἐπίπεδοι γωνίαὶ: Ἐστωσαν αἱ ἴσαι διέδροι γωνίαὶ $\Pi - AB - P$ καὶ $\Pi' - A'B' - P'$.

Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι αἱ ἐπίπεδοι γωνίαὶ των εἶναι ἴσαι.

Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ αἱ διέδροι γωνίαὶ AB καὶ $A'B'$ εἶναι ἴσαι, ἐφαρμόζουν, εἴαν η μία τεθῆ ἐπὶ τῆς ἄλλης. Ἐὰν λοιπὸν φέρωμεν ἕνα ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν κοινὴν ἀκμὴν των AB , ἡ ἐπίπεδος γωνία τῆς μιᾶς, θὰ εἶναι ἐπίπεδος γωνία καὶ τῆς ἄλλης, ἐφ' ὅσον αἱ ἕδραι τῶν διέδρων ἔχουν συμπέσει.

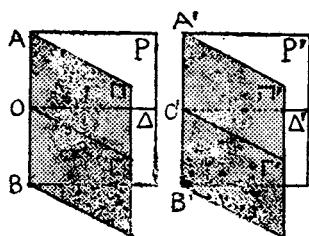
Ἐπομένως αἱ δύο ἐπίπεδοι γωνίαὶ τῶν διέδρων αὐτῶν εἶναι ἴσαι.

Ἀντιστρόφως. Ἐὰν αἱ ἐπίπεδοι γωνίαὶ δύο διέδρων γωνιῶν εἶναι ἴσαι καὶ αἱ διέδροι γωνίαὶ εἶναι ἴσαι.

Ἐπίπεδοι γωνίαὶ: Ἐστωσαν αἱ διέδροι γωνίαὶ AB καὶ $A'B'$, τῶν ὁποίων αἱ ἐπίπεδοι γωνίαὶ $\Gamma O\Delta$ καὶ $\Gamma'O'\Delta'$ (Σχ. 467) εἶναι ἴσαι.

Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι αἱ διέδροι αὐταὶ γωνίαὶ εἶναι ἴσαι.

Ἀπόδειξις: Λαμβάνομεν (νοερωῶς) τὴν διέδρου γωνίαν $\Pi' - A'B' - P'$ καὶ τὴν θέτομεν ἐπὶ τῆς $\Pi - AB - P$ οὕτως, ὥστε ἡ γωνία $\Gamma'O'\Delta'$ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης τῆς γωνίας $\Gamma O\Delta$. Ἀλλὰ τότε ἡ ἀκμὴ $A'B'$, ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον $\Gamma'O'\Delta'$ θὰ συμπέσῃ μὲ τὴν ἀκμὴν AB , ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον $\Gamma O\Delta$ εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον O . Ἐπομένως ἡ ἕδρα Π' , ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπὸ τὰς δύο τεμνομένας εὐθείας $A'B'$ καὶ $O'\Gamma'$ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἕδρας Π , ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὰς εὐθείας AB καὶ $O\Gamma$. Ὁμοίως, διὰ τὸν αὐτὸν λόγον, καὶ ἡ ἕδρα



Σχ. 467.

γωνίας ἴσας μὲ τὸ νιστόν μέρος τῆς γωνίας Γ'Ο'Δ'. Ἐὰς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ γωνία ΓΟΔ περιέχει μ ἀπὸ τὰς γωνίας αὐτάς, ἀλλὰ δὲν περιέχει μ+1· τότε ἡ γωνία ΓΟΔ θὰ εἶναι

$$\mu \cdot \frac{\widehat{\Gamma'Ο'Δ'}}{\nu} < \widehat{\GammaΟΔ} < (\mu+1) \cdot \frac{\widehat{\Gamma'Ο'Δ'}}{\nu} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\mu}{\nu} < \frac{\widehat{\GammaΟΔ}}{\widehat{\Gamma'Ο'Δ'}} < \frac{\mu+1}{\nu} \quad (1).$$

Φέρομεν ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα διέρχονται ἀπὸ τὴν ἀκμὴν Α'Β' καὶ ἀπὸ τὰς εὐθείας, αἱ ὁποῖαι διαιροῦν τὴν γωνίαν Γ'Ο'Δ' εἰς ἴσα μέρη. Ὅμοίως φέρομεν ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα διέρχονται ἀπὸ τὴν ἀκμὴν ΑΒ καὶ ἀπὸ τὰς εὐθείας, τὰς ὁποῖας ἐφέραμεν εἰς τὴν γωνίαν ΓΟΔ. Τὰ ἐπίπεδα αὐτὰ διαιροῦν τὰς διέδρους γωνίας Α'Β' καὶ ΑΒ εἰς ἄλλας διέδρους γωνίας, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἴσαι μεταξύ των, διότι αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι γωνίαι των εἶναι ἴσαι· ἡ διέδρος Α'Β' περιέχει ν ἀπὸ τὰς ἴσας αὐτάς διέδρους καὶ ἡ διέδρος ΑΒ περιέχει μ ἀπὸ τὰς ἴσας αὐτάς διέδρους γωνίας, ἀλλὰ δὲν περιέχει μ+1· θὰ εἶναι λοιπὸν

$$\frac{\mu}{\nu} < \frac{\text{διεδρ. ΑΒ}}{\text{διεδρ. Α'Β'}} < \frac{\mu+1}{\nu} \quad (2).$$

Ἀπὸ τὰς σχέσεις (1) καὶ (2) παρατηροῦμεν, ὅτι οἱ λόγοι $\frac{\widehat{\GammaΟΔ}}{\widehat{\Gamma'Ο'Δ'}}$ καὶ $\frac{\text{διεδρ. ΑΒ}}{\text{διεδρ. Α'Β'}}$ περιέχονται μεταξύ τῶν αὐτῶν τιμῶν $\frac{\mu}{\nu}$ καὶ $\frac{\mu+1}{\nu}$, αἱ ὁποῖαι διαφέρουν κατὰ $\frac{1}{\nu}$.

Ἄλλὰ ἡ διαφορὰ αὐτῆ δύναται νὰ γίνῃ ὅσονδῆποτε μικρὰ καὶ ἂν θέλωμεν, ἀρκεῖ νὰ διαιρέσωμεν τὴν γωνίαν Γ'Ο'Δ' εἰς ἕνα μεγάλον ἀριθμὸν ἴσων μερῶν. Οἱ λόγοι λοιπὸν αὐτοί, οἱ ὁποῖοι περιέχονται μεταξύ δύο τιμῶν $\frac{\mu}{\nu}$ καὶ $\frac{\mu+1}{\nu}$, αἱ ὁποῖαι διαφέρουν τόσον ὀλίγον, ὅσον θέλωμεν, θὰ διαφέρουν μεταξύ των κατὰ μίαν ποσότητα, ἡ ὁποία τείνει πρὸς τὸ μηδὲν καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι ἴσοι· ἄρα θὰ εἶναι

$$\frac{\text{διεδρ. ΑΒ}}{\text{διεδρ. Α'Β'}} = \frac{\widehat{\GammaΟΔ}}{\widehat{\Gamma'Ο'Δ'}}.$$

Ἐδείχθη λοιπὸν, ὅτι: Ὁ λόγος δύο. . . .

682. Θεώρημα. *Τὸ μέτρον μιᾶς διέδρου γωνίας εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ μέτρον τῆς ἐπιπέδου γωνίας τῆς, ἐὰν ληφθῇ ὡς μονὰς τῶν διέδρων γωνιῶν ἢ διέδρος γωνία, ἡ ὁποία ἔχει ἀντίστοιχον ἐπίπεδον γωνίαν τὴν μονάδα τῶν γωνιῶν.*

Γνωρίζομεν, ὅτι μεταξύ τῶν διέδρων γωνιῶν ΑΒ καὶ Α'Β' (Σχ. 468) καὶ τῶν ἀντίστοιχων ἐπιπέδων γωνιῶν ΓΟΔ καὶ Γ'Ο'Δ' ὑπάρχει

ἡ σχέσις:

$$\frac{\text{διεδρ. ΑΒ}}{\text{διεδρ. Α'Β'}} = \frac{\widehat{\GammaΟΔ}}{\widehat{\Gamma'Ο'Δ'}} \quad (1)$$

Ἐὰν ἡ γωνία Γ'Ο'Δ' ληφθῇ ὡς μονὰς τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν, τότε

ἡ διέδρος γωνία $A'B'$ θὰ εἶναι ἡ μονὰς τῶν διέδρων γωνιῶν. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὁ πρῶτος λόγος τῆς ἰσότητος (1) παριστάνει τὸ μέτρον τῆς διέδρου γωνίας $\Pi \cdot AB \cdot P$ καὶ ὁ δεύτερος λόγος αὐτῆς παριστάνει τὸ μέτρον τῆς ἐπιπέδου γωνίας $\Gamma\Omega\Delta$. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ γράψωμεν :

μέτρον διέδρ. $\Pi \cdot AB \cdot P$ = μέτρον ἐπιπέδου γων. $\Gamma\Omega\Delta$

683. Ὅρισμοί. Μία διέδρος γωνία εἶναι ὀρθή, ὀξεῖα ἢ ἀμβλεῖα, ἐὰν καὶ ἡ ἀντίστοιχος ἐπίπεδός της εἶναι ὀρθή, ὀξεῖα ἢ ἀμβλεῖα.

Δύο διέδροι γωνίαί εἶναι συμπληρωματικά, ἐὰν αἱ ἐπίπεδοί γωνίαί των εἶναι συμπληρωματικά.

Δύο διέδροι γωνίαί εἶναι παραπληρωματικά, ἐὰν αἱ ἐπίπεδοι γωνίαί των εἶναι παραπληρωματικά.

Παρατήρησις. Αἱ κατωτέρω προτάσεις ἀποδεικνύονται κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ὅπως ἀπεδείχθησαν αἱ ἀντίστοιχοι προτάσεις εἰς τὴν Ἐπιπεδομετρίαν.

1ον. Δύο διέδροι κατὰ κορυφὴν γωνίαί εἶναι ἴσαι.

2ον. Ὄταν δύο διέδροι εἶναι κατὰ κορυφὴν, τὰ διχοτομοῦντα αὐτὰς ἐπίπεδα συμπίπτουν.

3ον. Δύο ἐφεξῆς διέδροι γωνίαί, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰς μὴ κοινὰς ἔδρας των ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, εἶναι παραπληρωματικά.

Ἀντιστρόφως. Ἐὰν δύο ἐφεξῆς διέδροι γωνίαί εἶναι παραπληρωματικά, αἱ μὴ κοινὰί ἔδραι των κείνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

4ον. Ὄταν δύο ἐφεξῆς διέδροι εἶναι παραπληρωματικά, τὰ διχοτομοῦντα αὐτὰς ἐπίπεδα σχηματίζουν μίαν διέδρον ὀρθήν.

5ον. Τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον διχοτομεῖ μίαν διέδρον γωνίαν, εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὰς ἔδρας τῆς διέδρου.

Κάθετα ἐπίπεδα

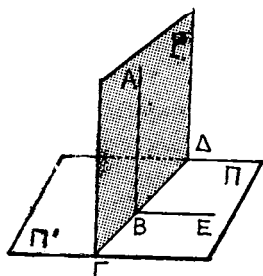
864. Ὅρισμός. Δύο ἐπίπεδα εἶναι κάθετα μεταξύ των, ὅταν σχηματίζουν μίαν ὀρθὴν διέδρον γωνίαν

865. Θεώρημα. Ἐὰν μία εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον, κάθε ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον διέρχεται ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν αὐτήν, εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον.

Ἐπιπέδουσις : Ἐστω ἡ εὐθεῖα AB , ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π (Σχ. 469) καὶ P ἓνα τυχὸν ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον διέρχεται ἀπὸ τὴν AB .

Συμπέρασμα: Θα δείξωμεν, ότι τὸ ἐπίπεδον P εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π.

Ἀπόδειξις: Ἐστω ΓΔ ἡ τομὴ τῶν ἐπιπέδων Π καὶ P· ἀπὸ τὸν πόδα B τῆς



Σχ. 469.

Ἐπίπεδον P	$AB \perp \Pi$
Ἐπίπεδον Π	P διέρχ. διὰ AB
Συμπ.	$P \perp \Pi$

καθέτου AB φέρομεν τὴν εὐθεῖαν BE τοῦ ἐπιπέδου Π, κάθετον ἐπὶ τὴν ΓΔ. Ἡ εὐθεῖα AB, ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς εὐθείαις ΓΔ καὶ BE· ἡ γωνία ABE, τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν ΓΔ καὶ κείνται ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων Π καὶ P, εἶναι ἡ ἐπίπεδος γωνία τῆς διέδρου γωνίας P-ΓΔ-Π, ἡ ὁποία σχηματίζεται ἀπὸ τὰ δύο ἐπίπεδα Π καὶ P. Ἐπειδὴ ἡ γωνία ABE εἶναι ὀρθή καὶ ἡ ἀντίστοιχος διέδρος γωνία P-ΓΔ-Π θὰ εἶναι ὀρθή· ἐπομένως τὰ ἐπίπεδα Π καὶ P εἶναι κάθετα μεταξύ των.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Ἐὰν μὴ εὐθεῖα...**

686. Θεώρημα. Ἐὰν δύο ἐπίπεδα εἶναι κάθετα μεταξύ των καὶ ἀχθῆ μὴ τυχοῦσα εὐθεῖα, ἡ ὁποία νὰ κείται ἐπὶ τοῦ ἐνὸς ἐπιπέδου καὶ νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν τομὴν των, ἡ εὐθεῖα αὐτὴ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἄλλο ἐπίπεδον.

Ἐπίπεδα: Ἐστώσαν Π καὶ P (Σχ. 469) δύο κάθετα ἐπίπεδα καὶ AB μὴ εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου P, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν τομὴν ΓΔ τῶν δύο ἐπιπέδων.

Συμπέρασμα: Θα δείξωμεν, ὅτι ἡ AB εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ Π.

Ἀπόδειξις: Ἀπὸ τὸν πόδα τῆς εὐθείας AB φέρομεν, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π, τὴν εὐθεῖαν BE κά-

Ἐπίπεδον P	$P \perp \Pi$
Ἐπίπεδον Π	ΓΔ τομὴ τῶν P καὶ Π AB εὐθ. ἐπιπέδου P \perp ΓΔ
Συμπ.	$AB \perp \Pi$

θετον ἐπὶ τὴν ΓΔ. Ἐπειδὴ αἱ BE καὶ BA εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν ἀκμὴν ΓΔ καὶ κείνται, ἀντιστοίχως, ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων Π καὶ P, ἡ γωνία ABE εἶναι ἡ ἐπίπεδος γωνία τῆς διέδρου γωνίας P-ΓΔ-Π. Ἐπειδὴ, ἐξ ὑποθέσεως, τὰ ἐπίπεδα Π καὶ P εἶναι κάθετα, ἡ διέδρος γωνία P-ΓΔ-Π εἶναι ὀρθή· ἄρα καὶ ἡ ἀντίστοιχος ἐπίπεδος γωνία τῆς ABE εἶναι ὀρθή. Ἀλλὰ τότε ἡ AB θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν BE· ἐπειδὴ

δὲ εἶναι καί, ἐξ ὑποθέσεως, κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν $\Gamma\Delta$, θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π τῶν εὐθειῶν αὐτῶν.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Ἐὰν δύο ἐπίπεδα. . .**

687. Θεώρημα. Ὅταν δύο ἐπίπεδα εἶναι κάθετα μεταξύ των, κάθε εὐθεΐα, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τυχὸν σημεῖον τοῦ ἑνὸς ἐπιπέδου, κάθετος ἐπὶ τὸ ἄλλο ἐπίπεδον, κείται ἐπὶ τοῦ πρώτου ἐπιπέδου.

Ἐπιπέδοις: Ἐστῶσαν Π καὶ P (Σχ. 469) δύο κάθετα ἐπίπεδα καὶ A ἓνα τυχὸν σημεῖον ἐπιπέδου P .

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ κάθετος, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ σημεῖον A ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π , κείται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου P .

Ἐπόθ.	$P \perp \Pi$ A σημεῖον τοῦ P $AB \perp \Pi$
Συμπ.	AB κείται ἐπὶ P

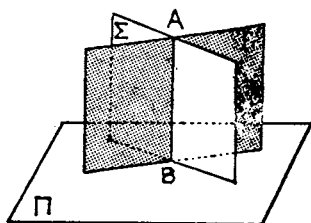
Ἀπόδειξις: Ἐὰν ἀπὸ τὸ σημεῖον A φέρωμεν μίαν εὐθεΐαν AB τοῦ ἐπιπέδου P , κάθετον ἐπὶ τὴν τομὴν $\Gamma\Delta$ τῶν δύο ἐπιπέδων Π καὶ P , ἡ εὐθεΐα αὐτὴ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π (§ 686).

Ἐπειδὴ δὲ ἀπὸ ἓνα σημεῖον, τὸ ὁποῖον κείται ἐκτὸς ἐπιπέδου, δυνάμεθα νὰ φέρωμεν μίαν καὶ μόνον κάθετον ἐπὶ ἐπίπεδον ἔπεται, ὅτι ἡ κάθετος, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ A ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π , συμπίπτει μὲ τὴν εὐθεΐαν AB καὶ ἐπομένως κείται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου P .

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Ὅταν δύο ἐπίπεδα. . .**

688. Θεώρημα. Ἐνα ἐπίπεδον, κάθετον ἐπὶ δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα, εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ τὴν τομὴν των.

Ἐπιπέδοις: Ἐστω Π ἓνα ἐπίπεδον (Σχ. 470), τὸ ὁποῖον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα P καὶ Σ , τὰ ὁποῖα τέμνονται κατὰ τὴν εὐθεΐαν AB .



Σχ. 470.

Ἐπόθ.	AB τομὴ ἐπιπ. P καὶ Σ $\Pi \perp P$ $\Pi \perp \Sigma$
Συμπ.	$\Pi \perp AB$

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ ἐπίπεδον Π εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν AB .

Ἀπόδειξις: Ἐὰν ἀπὸ τυχὸν σημεῖον A τῆς εὐθείας AB φέρωμεν μίαν κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π , ἡ εὐθεΐα αὐτὴ θὰ κείται καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου P καὶ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Σ (§ 687) καὶ ἐπομένως θὰ συμπίπτῃ μὲ τὴν τομὴν των AB . Ὡστε ἡ εὐθεΐα AB εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π .

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Ἐνα ἐπίπεδον κάθετον. . .**

689. Πόρισμα. Κάθε ἐπίπεδον Π κάθετον ἐπὶ τὴν τομὴν AB δύο ἐπιπέδων P καὶ Σ εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ ἕνασιν ἐξ αὐτῶν.

Ἀσκήσεις: 2087, 2088, 2089, 2090.

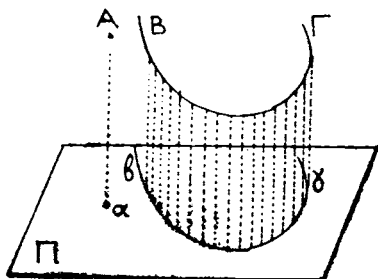
Ὁρθή προβολή ἐπὶ ἐπίπεδον

690. Ὁρθή προβολή σημείου ἢ σχήματος ἐπὶ ἐπίπεδον.

Ἐστω ἕνα ἐπίπεδον Π καὶ A ἕνα σημεῖον ἐκτὸς αὐτοῦ (Σχ. 471).

Ἀπὸ τὸ A φέρομεν τὴν κάθετον Aa ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον. Τὸ σημεῖον a , δηλ. ὁ πούς τῆς καθέτου Aa ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π , λέγεται **ὀρθή προβολή** ἢ ἀπλῶς **προβολή** τοῦ σημείου A ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π .

Ἡ προβολή ἑνὸς σχήματος $B\Gamma$ ἐπὶ ἕνα ἐπίπεδον Π εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τύπος τῶν προβολῶν ὅλων τῶν σημείων τοῦ σχήματος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτό.



Σχ. 471.

Π.χ. Ἡ $B\gamma$ εἶναι ἡ προβολή τοῦ σχήματος $B\Gamma$ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π .

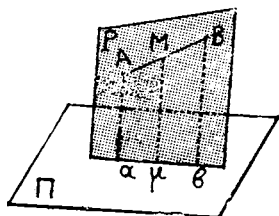
Τὸ ἐπίπεδον Π ἐπὶ τοῦ ὁποίου προβάλλονται τὰ σημεῖα ἢ τὰ σχήματα, λέγεται **προβολικὸν ἐπίπεδον**, ἢ δὲ κάθετος Aa λέγεται **προβάλλουσα τοῦ σημείου A** .

691. Θεώρημα. Ἡ προβολή μιᾶς εὐθείας ἐπὶ ἕνα ἐπίπεδον εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ.

Ἐπίπεδον Π τὸ προβολικὸν ἐπίπεδον καὶ AB μία εὐθεῖα, πλαγία πρὸς τὸ ἐπίπεδον αὐτό.

Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι ἡ προβολή τῆς AB ἐπὶ τὸ Π εἶναι εὐθεῖα γραμμὴ.

Ἀπόδειξις: Ἀπὸ τυχὸν σημείου A τῆς εὐθείας AB φέρομεν τὴν κάθετον Aa ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π . Αἱ εὐθεῖαι AB καὶ Aa ὀρίζουν ἕνα ἐπίπεδον P , κάθετον ἐπὶ



Σχ. 472.

τὸ Π . Τὰ ἐπίπεδα Π καὶ P τέμνονται κατὰ μίαν εὐθεῖαν $αβ$. Ἐστω τώρα ἕνα τυχὸν σημεῖον M τῆς εὐθείας AB . ἂν ἀπὸ τὸ M φέρωμεν κάθετον $M\mu$ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π , ἢ κάθετος αὐτῆ θὰ κεῖται ὀλόκληρος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου P καὶ ἐπομένως ἡ προβολή μ τοῦ σημείου M θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας $αβ$.

Ἔστω λοιπὸν τὰ σημεῖα τῆς εὐθείας AB ἔχουν τὰς προβολὰς των ἐπὶ τῆς εὐθείας $αβ$ καὶ ἐπομένως ἡ προβολὴ τῆς εὐθείας AB εἶναι ἡ εὐθεῖα $αβ$.

Ἐδείχθη λοιπὸν, ὅτι: **Ἡ προβολὴ μιᾶς εὐθείας. . . .**

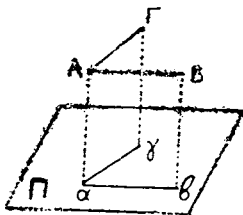
Παρατήρησις. Ἐὰν ἡ εὐθεῖα AB εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π , ἡ προβολὴ τῆς ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ θὰ εἶναι ἓνα σημεῖον: ὁ ποὺς τῆς AB ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π .

Ἐὰν ἡ εὐθεῖα AB εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π , ἡ προβολὴ τῆς $αβ$ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεῖαν.

Ἀσκήσεις: 2901, 2092, 2093, 2094, 2095, 2096.

692. Θεώρημα. Ἡ προβολὴ μιᾶς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον εἶναι παράλληλον πρὸς μιαν ἐκ τῶν πλευρῶν τῆς εἶναι ὀρθή γωνία.

Ἐπίπεδος: Ἐστω ἡ ὀρθή γωνία $BA\Gamma$ (Σχ. 473), τῆς ὁποίας ἡ πλευρὰ AB εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π καὶ $βαγ$ ἡ προβολὴ τῆς ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π .



Σχ. 473.

Ἐπίπεδος.	γων. $BA\Gamma$ = ὀρθή
	$AB \parallel \Pi$
Συμπ.	γων. $βαγ$ = προβ. τῆς $BA\Gamma$
Συμπ.	γων. $βαγ$ = ὀρθή

Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι ἡ γωνία $βαγ$ εἶναι ὀρθή.

Ἀπόδειξις: Ἡ εὐθεῖα $Aα$, ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π , εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν $αβ$, ἄρα καὶ ἐπὶ τὴν παράλληλόν τῆς $αβ$: ἄλλα ἡ BA εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν $A\Gamma$, διότι ἡ γωνία $BA\Gamma$ εἶναι ὀρθή. Ἡ εὐθεῖα λοιπὸν BA , ὡς κάθετος ἐπὶ τὰς δύο εὐθείας $Aα$ καὶ $A\Gamma$ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν $\Gamma Aα$: ἄλλα τότε καὶ ἡ παράλληλός τῆς $αβ$ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν $αγ$: ὥστε ἡ γωνία $βαγ$ εἶναι ὀρθή.

Ἐδείχθη λοιπὸν, ὅτι: **Ἡ προβολὴ μιᾶς ὀρθῆς γωνίας. . . .**

693. Θεώρημα. (1ον. Ἀντίστροφον). Ἐὰν μιὰ γωνία $BA\Gamma$ ἔχη μιαν ἀπὸ τὰς πλευράς τῆς AB παράλληλον πρὸς τὸ προβολικὸν ἐπίπεδον Π καὶ ἐὰν ἡ γωνία αὐτὴ προβάλλεται κατὰ ὀρθὴν γωνίαν $βαγ$, ἡ γωνία $BA\Gamma$ εἶναι ὀρθή (Σχ. 473).

Ἐπίπεδος: Ἐστω ἡ γωνία $BA\Gamma$, ἡ ὁποία ἔχει τὴν πλευρὰν AB παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π καὶ ἡ ὁποία προβάλλεται πρὸς τὸ Π κατὰ τὴν ὀρθὴν γωνίαν $βαγ$.

Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι ἡ γωνία $BA\Gamma$ εἶναι ὀρθή.

Ἀπόδειξις: Ἡ εὐθεῖα $αβ$, ὡς κάθετος ἐπὶ τὰς εὐθείας $αγ$ καὶ $Aα$ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον $\Gamma Aαγ$: ἄρα καὶ ἡ παράλληλός τῆς BA θὰ

εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτό· ἢ ΒΑ, ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΓΑγ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν εὐθείαν ΑΓ καὶ ἐπομένως ἡ γωνία ΒΑΓ εἶναι ὀρθή.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: *Ἐὰν μία γωνία. . .*

694. Θεώρημα. (2ον. Ἀντίστροφον). *Ἐὰν μία ὀρθὴ γωνία ΒΑΓ προβάλλεται ἐπὶ ἓνα ἐπίπεδον Π κατὰ ὀρθὴν γωνίαν βαγ, ἢ μία, τουλάχιστον, ἀπὸ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας ΒΑΓ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π.* (473).

Ἐπίπεδοι: Ἐστω ἡ ὀρθὴ γωνία ΒΑΓ, βαγ ἡ προβολὴ τῆς ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π καὶ ἔστω ὅτι βαγ=ὀρθὴ καὶ ὅτι ἡ πλευρὰ ΑΓ τῆς ὀρθῆς γωνίας ΒΑΓ δὲν εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π.

Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι ἡ ἄλλη πλευρὰ ΑΒ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ Π.

Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ ἡ αγ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς εὐθείας αβ καὶ Αα, θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον βαΑΒ καὶ ἐπομένως καὶ ἐπὶ τὴν εὐθείαν ΑΒ τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ· αὐτὴ εὐθεῖα λοιπόν αγ καὶ ΒΑ εἶναι κάθετοι μεταξύ των. Ἀλλὰ ἡ ΒΑ εἶναι κάθετος, ἐξ ὑποθέσεως, καὶ ἐπὶ τὴν εὐθείαν ΑΓ. Ἐπειδὴ ἡ εὐθεῖα ΒΑ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς δύο, μὴ παραλλήλους, εὐθείας ΑΓ καὶ αγ, εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν ΓΑγ· ἢ εὐθεῖα λοιπόν ΒΑ, ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΓΑγ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ εὐθείαν Αα· αὐτὴ εὐθεῖα ΒΑ καὶ βα, ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν αὐτὴν εὐθείαν Αα, εἶναι παράλληλοι. Ἡ εὐθεῖα ΒΑ, ὡς παράλληλος πρὸς τὴν εὐθείαν βα τοῦ ἐπιπέδου Π εἶναι παράλληλος καὶ πρὸς ἐπίπεδον Π.

Ἐπίπεδοι.	γων.ΒΑΓ=γων.βαγ=ὀρθή γων.βαγ=προβολὴ τῆς γων.ΒΑΓ ἐπὶ τὸ Π
Συμπ.	ΑΒ//Π

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: *Ἐὰν μία ὀρθὴ γωνία. . .*

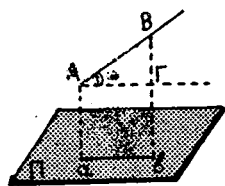
Ἀσκήσεις: 2097, 2098, 2099.

Γωνία μιᾶς εὐθείας καὶ ἑνὸς ἐπιπέδου

695. Κλίσις εὐθείας πρὸς ἐπίπεδον. Ἐστω ΑΒ μία εὐθεῖα πλαγία πρὸς ἓνα ἐπίπεδον Π (Σχ. 475) καὶ Βα ἡ προβολὴ τῆς ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτό. Ἡ γωνία ΑΒα, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ εὐθεῖα ΑΒ μὲ τὴν προβολὴν τῆς Βα, λέγεται *γωνία τῆς εὐθείας ΑΒ καὶ τοῦ ἐπιπέδου Π*, ἢ *κλίσις τῆς εὐθείας ΑΒ πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π*.

Γενικῶς: *Κλίσις εὐθείας πρὸς ἐπίπεδον* λέγεται ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζει ἡ εὐθεῖα μὲ τὴν προβολὴν τῆς ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον.

Διὰ νὰ εὐρωμεν τὴν κλίσιν μιᾶς εὐθείας ΑΒ (Σχ. 474) πρὸς ἓνα ἐπίπεδον, εἰς περιπτώ-



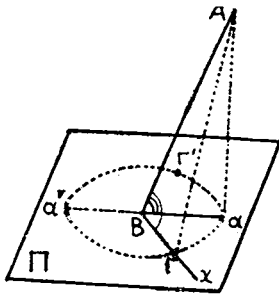
Σχ. 474.

σιν κατὰ τὴν ὁποίαν ἡ εὐθεΐα AB εἶναι μὲν πλαγία πρὸς τὸ ἐπίπεδον, ἀλλὰ τέμνει αὐτὸ ἐκτὸς τοῦ φύλλου σχεδίασεως, ἐργαζόμεθα ὡς ἐξῆς :

Ἐκ τυχόν σημείου A τῆς εὐθείας AB (Σχ. 474) φέρομεν τὴν παράλληλον $AΓ$ πρὸς τὴν προβολὴν τῆς $αβ$. Ἡ γωνία $BAΓ = \omega$ εἶναι ἡ ζητούμενη κλίσις.

696. Θεώρημα. Ἡ ὀξεῖα γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζει μία εὐθεΐα, πλαγία πρὸς ἐπίπεδον, μὲ τὴν προβολὴν τῆς ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτό, εἶναι ἡ μικροτέρα γωνία, ἀπὸ ὄσας τὰς γωνίας, τὰς ὁποίας σχηματίζει αὐτὴ μὲ τυχούσαν ἄλλην εὐθεΐαν τοῦ ἐπιπέδου.

Ἐπιπέδου Π καὶ α ἡ προβολὴ τυχόντος σημείου τῆς A ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π .



Σχ. 475.

Ἐπειδὴ ἡ προβολὴ τοῦ σημείου B ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π εἶναι αὐτὸ τοῦτο τὸ σημεῖον B , ἡ προβολὴ τῆς εὐθείας AB εἶναι ἡ εὐθεΐα Ba .

Συμπέρασμα : Ἐὰν φέρωμεν τυχούσαν εὐθεΐαν Bx τοῦ ἐπιπέδου Π , θὰ δειξωμεν, ὅτι ἡ γωνία ABa εἶναι μικροτέρα τῆς γωνίας ABx .

Ἀπόδειξις : Ἐπὶ τῆς εὐθείας Bx λαμβάνομεν τμῆμα $BΓ = Ba$ καὶ φέρομεν τὴν εὐθεΐαν $AΓ$. Τὰ δύο τρίγωνα ABa καὶ

$ABΓ$ ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας μίαν πρὸς μίαν : τὴν πλευρὰν AB κοινήν, τὰς πλευρὰς $Ba = BΓ$ ἐκ κατασκευῆς, ἀλλὰ ἡ τρίτη πλευρὰ Aa τοῦ πρώτου τριγώνου εἶναι μικροτέρα τῆς τρίτης πλευρὰς $AΓ$ τοῦ δευτέρου τριγώνου, διότι ἡ Aa εἶναι κάθετος καὶ ἡ $AΓ$ πλαγία πρὸς τὸ ἐπίπεδον ἄρα τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ἄνισα καὶ ἐπομένως ἡ γωνία ABa εἶναι μικροτέρα τῆς γωνίας $ABΓ$.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι : Ἡ ὀξεῖα γωνία. . .

Παρατήρησις. Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π (Σχ. 475) γράφομεν τὴν περιφέρειαν, ἡ ὁποία ἔχει κέντρον τὸ σημεῖον B καὶ ἀκτῖνα τὴν Ba . Ὄταν τὸ σημεῖον Γ κινῆται ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτῆς, μεταξὺ τοῦ σημείου α καὶ τοῦ σημείου α' , τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ ἄλλο ἄκρον τῆς διαμέτρου $\alpha\alpha'$, ἡ ἀπόστασις $\alpha\Gamma$ τοῦ Γ ἀπὸ τὸν πόδα α τῆς καθέτου Aa αὐξάνει καὶ συνεπῶς αὐξάνει καὶ ἡ πλαγία $AΓ$, ὁπότε θὰ αὐξάνῃ καὶ ἡ γωνία $ABΓ$.

Ἐὰν λάβωμεν ἐπὶ τῆς περιφερείας αὐτῆς δύο σημεῖα Γ καὶ Γ' συμμετρικὰ πρὸς τὴν διάμετρον $\alpha\alpha'$, αἱ πλάγιοι $AΓ$ καὶ $AΓ'$ εἶναι ἴσαι καὶ ἐπομένως καὶ αἱ γωνίαι $ABΓ$ καὶ $ABΓ'$ εἶναι ἴσαι.

Ἀσκήσεις : 2100, 2101, 2102, 2103, 2104.

697. Θεώρημα. Ἐὰν δύο ἐπιπέδα Π καὶ P τέμνονται, αἱ εὐθεῖαι τοῦ ἐπιπέδου P , αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν τὴν μεγαλύτεραν γωνίαν μὲ τὸ ἐπίπεδον Π εἶναι ἐκεῖναι, αἱ ὁποῖαι εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν τομὴν των. (Σχ. 476).

Υπόθεσις: Ἐστω xy ἡ τομὴ τῶν ἐπιπέδων Π καὶ P . Εἰς τὸ ἐπίπεδον P φέρομεν τὴν εὐθείαν AB κάθετον ἐπὶ τὴν xy καὶ τὴν πλαγίαν AG πρὸς τὴν xy · ἀπὸ τὸ A φέρομεν τὴν κάθετον $A\alpha$ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π · αἱ εὐθεῖαι $B\alpha$ καὶ $\Gamma\alpha$ εἶναι αἱ προβολαὶ τῶν εὐθειῶν AB καὶ AG ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον καὶ ἐπομένως αἱ γωνίαι $AB\alpha$ καὶ $A\Gamma\alpha$ εἶναι αἱ κλίσεις τῶν εὐθειῶν AB καὶ AG πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π .

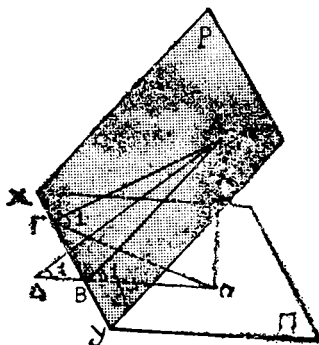
Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι ἡ γωνία $AB\alpha$ εἶναι μεγαλύτερα τῆς γωνίας $A\Gamma\alpha$.

Ἀπόδειξις: Ἡ εὐθεῖα aB εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν xy , κατὰ τὸ ἀντίστροφον θεώρημα τῶν τριῶν καθέτων, ὁπότε ἡ εὐθεῖα $a\Gamma$ θὰ εἶναι πλαγία πρὸς τὴν xy · ἄρα ἡ $a\Gamma$ εἶναι μεγαλύτερα τῆς aB . Ἐπὶ τῆς εὐθείας aB λαμβάνομεν ἕνα μῆκος $a\Delta = a\Gamma$ καὶ φέρομεν τὴν εὐθείαν $A\Delta$. Τὸ σημεῖον Δ θὰ κεῖται προφανῶς ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς aB .

Τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα $Aa\Gamma$ καὶ $Aa\Delta$ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς καθέτους πλευράς των ἴσας δηλ. ἔχουν τὴν Aa κοινὴν καὶ $a\Gamma = a\Delta$ ἐκ κατασκευῆς· ἄρα τὰ τρίγωνα αὐτὰ θὰ ἔχουν ἴσας καὶ τὰς γωνίας $A\Gamma\alpha$ καὶ $A\Delta\alpha$. Ἀλλὰ εἰς τὸ τρίγωνον $A\Delta B$, ἡ ἔξωτερικὴ γωνία του $AB\alpha$ εἶναι μεγαλύτερα τῆς γωνίας $A\Delta\alpha$ καὶ ἐπομένως εἶναι μεγαλύτερα καὶ τῆς γωνίας $A\Gamma\alpha$, ἡ ὁποία εἶναι ἴση μὲ τὴν $A\Delta\alpha$. Ὡστε εἶναι $\gamma\omega\nu.AB\alpha > \gamma\omega\nu.A\Gamma\alpha$.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: Ἐὰν δύο ἐπιπέδα Π καὶ P . . .

Σημ. Ὅταν τὸ ἐπίπεδον Π εἶναι ὀριζόντιον, ἡ εὐθεῖα AB λαμβάνε τὸ ὄνομα: *γραμμὴ μεγίστης κλίσεως τοῦ ἐπιπέδου P*



Σχ. 476.

Ἀσκήσεις

2087. (2123). Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον O , νὰ ἀχθῆ νὰ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ δοθὲν ἐπίπεδον Π καὶ παράλληλον πρὸς δοθεῖσαν εὐθείαν E .

2088. (2124). Δίδεται μία εὐθεῖα AB καὶ ἕνα ἐπίπεδον Π . Νὰ ἀχθῆ ἕνα ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον νὰ διέρχεται ἀπὸ τὴν AB καὶ νὰ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π .

2089. (2125). Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι, ἐὰν μία εὐθεῖα εἶναι πλαγία πρὸς ἐπίπεδον, διέρχεται δι' αὐτῆς ἕνα καὶ μόνον ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὸ δοθὲν ἐπίπεδον.

2090. (2126). Ἐὰν ἕνα ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκμὴν διέδρου γωνίας εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ τὰς ἔδρας τῆς.

2091. (2127). Νὰ ἀποδειχθῆ ὅτι αἱ προβολαὶ παραλλήλων εὐθειῶν ἐπὶ ἕνα ἐπίπεδον εἶναι παράλληλοι· ἐὰν αἱ εὐθεῖαι εἶναι ἴσαι, αἱ προβολαὶ των εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι.

2092. (2128). Νὰ ἀποδειχθῆ ὅτι αἱ δύο προβολαὶ ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος ἐπὶ δύο παράλληλα ἐπίπεδα εἶναι ἴσαι.

2093. (2129). 1ον. Νὰ ἀποδειχθῆ: ὅτι τὸ μέσον ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος προβάλλεται εἰς τὸ μέσον τῆς προβολῆς του.

2ον. Ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν προβολὴν ἑνὸς τριγώνου ἐπὶ ἓνα ἐπίπεδον, νὰ κατασκευασθοῦν αἱ προβολαὶ τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου.

2094. (2130). Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι ἡ προβολὴ παραλληλογράμμου ἐπὶ ἐπίπεδον εἶναι παραλληλόγραμμον. Νὰ κατασκευασθῆ ἡ προβολὴ τοῦ κέντρου τοῦ παραλληλογράμμου.

2095. (2131). Τὸ ἄκρον εὐθείας AB μήκους 53 ἐκ. ἀπέχουν 48 ἐκ. καὶ 20 ἐκ. ἀπὸ ἓνα ἐπίπεδον Π . Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ μήκος τῆς προβολῆς τῆς AB ἐπὶ τὸ Π .

2096. (2132). Τὰ ἄκρα μιᾶς εὐθείας AB ἀπέχουν ἀπὸ ἓνα ἐπίπεδον 44 ἐκ. καὶ 11 ἐκ. Ἐὰν ἡ προβολὴ τῆς AB ἐπὶ ἓνα ἐπίπεδον Π εἶναι 56 ἐκ., νὰ ὑπολογισθῆ τὸ μήκος τῆς εὐθείας AB .

2097. (2133). Μία γωνία εἶναι ὀξεῖα ἢ ἀμβλεία, ἔαν καὶ ἡ προβολὴ τῆς ἐπὶ ἓνα ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς μίαν πλευρὰν τῆς, εἶναι ὀξεῖα ἢ ἀμβλεία.

2098. (2134). Διὰ τὰ τέμνη ἓνα ἐπίπεδον μίαν διέδρον ὀρθὴν γωνίαν κατὰ ὀρθὴν γωνίαν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἡ τομὴ του μὲ μίαν ἀπὸ τὰς ἑδρας τῆς διέδρου νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκμὴν τῆς διέδρου.

2099. (2135). Ἡ προβολὴ μιᾶς ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ ἓνα ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον δὲν εἶναι παράλληλον πρὸς καμμίαν ἀπὸ τὰς πλευρὰς τῆς εἶναι μία ἀμβλεία γωνία, ἔαν τὸ προβολικὸν ἐπίπεδον τέμνη τὰς δύο πλευρὰς τῆς ὀρθῆς γωνίας ἢ τὰς προεκτάσεις των, καὶ μία ὀξεῖα γωνία, ἔαν τὸ προβολικὸν ἐπίπεδον τέμνη τὴν μίαν ἐκ τῶν πλευρῶν καὶ τὴν προέκτασιν τῆς ἄλλης.

2100. (2136). Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ κλίσις μιᾶς εὐθείας εἰς ἓνα ἐπίπεδον, ἵνα ἡ προβολὴ τῆς εὐθείας εἶναι ἴση μὲ τὸ ἥμισυ τῆς εὐθείας;

2101. (2137). Νὰ ὑπολογισθῆ ἡ προβολὴ μιᾶς εὐθείας $AB = a$ ἐπὶ ἓνα ἐπίπεδον, ἔαν ἡ κλίσις τῆς εἶναι: 1ον 30° ; 2ον 45° ; 3ον 60° ;

2102. (2138). Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ μήκος μιᾶς εὐθείας AB , ἔαν ἡ προβολὴ τῆς ἐπὶ ἐπίπεδον εἶναι a καὶ ἡ κλίσις τῆς πρὸς τὸ ἐπίπεδον εἶναι: 1ον 30° ; 2ον 45° ; 3ον 60° ;

2103. (2139). Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι αἱ κλίσεις εὐθείας πρὸς παράλληλα ἐπίπεδα εἶναι ἴσαι.

2104. (2140). Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον ἐπιπέδου νὰ ἀχθῆ εὐθεῖα, ἡ ὁποία νὰ ἔχη δοθεῖσαν κλίσιν ω πρὸς τὸ ἐπίπεδον αὐτό.

Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν ἐπὶ τοῦ Ε' Κεφαλαίου

Α' Ὁμάς. 2105. (2141). Ἐὰν τρία σημεῖα μιᾶς εὐθείας E ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ μίαν εὐθείαν E' , αἱ εὐθεῖαι E καὶ E' εἶναι παράλληλοι.

2106. (2142). Δίδονται δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα Π καὶ P καὶ μία εὐθεῖα, ἡ ὁποία τέμνει τὸ Π εἰς τὸ A καὶ τὸ P εἰς τὸ B . Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον διχοτομεῖ τὴν διέδρον (Π, P) διαιρεῖ τὴν AB εἰς τμήματα ἀνάλογα πρὸς τὰς ἀποστάσεις τῶν A καὶ B ἀπὸ τὴν τομὴν τῶν ἐπιπέδων Π καὶ P .

2107. (2143). Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα Π καὶ P καὶ τὰ

ἐπίπεδα Σ, Τ, τὰ ὅποια διχοτομοῦν τὰς διέδρους, τὰς ὁποίας σχηματίζουν τὰ Π καὶ Ρ, ὁρίζουν, ἐπὶ τυχούσης τεμνουσῆς αὐτά, τέσσαρα σημεῖα, τὰ ὅποια σχηματίζουν ἀρμονικὴν διαιρέσιν.

2108. (2144). Ἐὰν μία εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ ἓνα ἐπίπεδον Ρ, ἡ προβολὴ τῆς ἐπὶ τυχὸν ἐπίπεδον Π εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν τομὴν τῶν ἐπιπέδων Π καὶ Ρ.

2109. (2145). Διὰ τὴν ἐπιπέδου Π ἐπιπέδου Ρ, ἡ προβολὴ τῆς ἐπὶ τυχὸν ἐπίπεδον Π εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν τομὴν τῶν ἐπιπέδων Π καὶ Ρ.

2110. (2146). Δίδονται δύο ἐπίπεδα κάθετα μεταξύ των. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι διὰ τὴν εὐθεῖα τοῦ ἑνὸς καὶ μία εὐθεῖα τοῦ ἄλλου ἐπιπέδου ὀρθογώνιοι, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἢ μία τουλάχιστον ἐκ τῶν εὐθειῶν αὐτῶν νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν τομὴν τῶν δύο ἐπιπέδων.

2111. (2147). Ἴνα μία εὐθεῖα Ε σχηματίξῃ γωνίας ἴσας μὲ δύο ἐπίπεδα Π καὶ Ρ, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἓνα ἢ τὸ ἄλλο ἐπίπεδα, πού διχοτομοῦν τὴν διέδρον γωνίαν τῶν ἐπιπέδων Π καὶ Ρ ἢ νὰ κείται ἐπὶ τοῦ ἑνὸς ἢ τοῦ ἄλλου τῶν ἐπιπέδων αὐτῶν.

2112. (2148). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι: 1ον. ὁ λόγος τῶν προβολῶν δύο εὐθυγράμμων τμημάτων τῆς αὐτῆς εὐθείας ἐπὶ ἓνα ἐπίπεδον εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν δοθέντων εὐθυγράμμων τμημάτων.

2ον. ἡ προβολὴ τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν διαμέσων ἑνὸς τριγώνου ἐπὶ ἓνα ἐπίπεδον, εἶναι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου προβολῆς.

2113. (2149). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς ἓνα στρεβλὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ, τὸ ὅποιον ἔχει τὰς μὴ διαδοχικὰς πλευρὰς του ἴσας, ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει τὰ μέσα τῶν διαγωνίων του, εἶναι κοινὴ κάθετος ἐπὶ τὰς διαγωνίους αὐτάς.

2114 (2150). Δίδεται ἓνα εὐθύγραμμον τμήμα ΑΒ, τοῦ ὁποίου τὰ ἄκρα Α καὶ Β κείνται ἐπὶ τῶν ἑδρῶν Π καὶ Ρ μιᾶς διέδρου γωνίας (Π, Ρ). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἐὰν αἱ ἀποστάσεις τῶν Α καὶ Β ἀπὸ τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Ρ εἶναι ἴσαι, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τυχόντος σημείου Μ τοῦ ΑΒ ἀπὸ τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Ρ εἶναι σταθερόν.

2115. (2151). Εἰς τὸ ἐσωτερικὸν μιᾶς διέδρου γωνίας (Π, Ρ) δίδονται δύο σημεῖα Α καὶ Β, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὰς δύο ἑδρας Π καὶ Ρ εἶναι τὸ αὐτό. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἐὰν ἓνα σημεῖον Μ κινῆται ἐπὶ τῆς εὐθείας ΑΒ, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεών του ἀπὸ τὰς ἑδρας Π καὶ Ρ μένει σταθερόν.

Β' Ὁμάς. **2116.** (2152). Νὰ εὐρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων, τὰ ὅποια ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ δύο τεμνομένης εὐθείας.

2117. (2153). Νὰ εὐρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων, τὰ ὅποια ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὰς ἑδρας διέδρου γωνίας.

2118. (2154). Τὰ τρία ἐπίπεδα Π, Ρ, Σ τέμνονται εἰς ἓνα σημεῖον Ο. Νὰ εὐρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων, τὰ ὅποια ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὰ τρία αὐτὰ ἐπίπεδα.

2119. (2155). Νὰ εὐρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα νὰ εἶναι ἴσος μὲ $\mu : \nu$.

2120. (2156). Νὰ εὐρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα

τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα εἶναι ἴσον μὲ δοθὲν μῆκος λ.

2121. (2157). Δίδονται δύο τεμνόμεναι εὐθείαι Χ'ΟΧ καὶ Ψ'ΟΨ. Ποῖος εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ τὸ σημεῖον Ο καὶ σχηματίζουν ἴσας γωνίας μὲ τὰς δύο δοθείσας εὐθείας.

2122. (2158). Νὰ εὐρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων ἐνὸς ἐπιπέδου Π τοιούτων, ὥστε αἱ εὐθείαι, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰ σημεῖα αὐτὰ μὲ δύο δοθέντα σημεῖα Α καὶ Β, τὰ ὁποῖα κείνται ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου, νὰ ἔχουν τὴν αὐτὴν κλίσιν πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π.

2123. (2159). Νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Ο καὶ τῶν ὁποίων ἡ μικροτέρα ἀπόστασις ἀπὸ δοθείσαν εὐθεῖαν Α ἔχει δοθὲν μῆκος λ.

2124. (2160). Νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος, τὸν ὁποῖον γράφει τὸ μέσον Μ ἐνὸς εὐθυγράμμου τμήματος σταθεροῦ μήκους, τοῦ ὁποίου τὰ ἄκρα κινουῦνται ἐπὶ δύο ὀρθογωνίων εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι δὲν κείνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

2125. (2161). Νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον Ο καὶ σχηματίζουν ἴσας γωνίας μὲ δύο δοθέντα ἐπίπεδα.

2126. (2162). Δίδονται δύο εὐθείαι Χ καὶ ΑΖ καὶ ἓνα ἐπίπεδον Π κάθετον ἐπὶ τὴν Χ. Διὰ τῆς Χ φέρομεν ἓνα μεταβλητὸν ἐπίπεδον Ρ καὶ διὰ τῆς ΑΖ ἓνα μεταβλητὸν ἐπίπεδον Σ κάθετον ἐπὶ τὸ Ρ. Νὰ εὐρεθῇ ὁ τόπος τοῦ σημείου εἰς τὸ ὁποῖον συναντᾶ τὸ ἐπίπεδον Π ἢ τομῆ τῶν δύο ἐπιπέδων Ρ καὶ Σ.

2127. (2163). Ἀπὸ τὰς ἴσας πλευρὰς ἐνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) φέρομεν τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Ρ κάθετα ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου. Κάθε ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον ἄγεται ἀπὸ τὴν βάσιν ΒΓ ὀρίζει ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων Π καὶ Ρ τὰς πλευρὰς ἐνὸς ἰσοσκελοῦς τριγώνου Α'ΒΓ', τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν ΒΓ.

1ον. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν διαμέσων καὶ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν ὑψῶν τῶν τριγώνων Α'ΒΓ'.

2ον. Νὰ εὐρεθῇ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα ἢ ἡ διαφορὰ τῶν ἀποστάσεών των ἀπὸ τὰ ὠρισμένα ἐπίπεδα, εἶναι σταθερόν.

Γ' Ὁμάς. 2128. (2164). Δίδεται μία διεδρος (Π, Ρ), ἓνα σημεῖον Α ἐπὶ τῆς ἑδρας Π καὶ ἓνα σημεῖον Β ἐπὶ τῆς ἑδρας Ρ. Νὰ ἀχθῇ ἓνα ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον νὰ διέρχεται ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν ΑΒ καὶ νὰ τέμνη τὴν διεδρον γωνίαν κατὰ ὀρθὴν γωνίαν.

2129. (2165). Δίδεται ἓνα ὀξυγώνιον τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ ὀρισθῇ ἓνα ἐπίπεδον Π παράλληλον πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ εἰς τρόπον, ὥστε ἡ γωνία ΒΑΓ νὰ προβάλλεται ἐπὶ τοῦ Π κατὰ ὀρθὴν γωνίαν.

2130. (2166). Δίδεται ἓνα τυχὸν τρίγωνον ΑΒΓ. Νὰ ὀρισθῇ ἓνα ἐπίπεδον Π οὔτως, ὥστε αἱ προβολαὶ τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ νὰ εἶναι ἴσαι.

2131. (2167). Νὰ προσδιορισθοῦν τὰ ἐπίπεδα ἐπὶ τῶν ὁποίων ἓνα στρεβλὸν τετράπλευρον προβάλλεται κατὰ ἓνα παραλληλόγραμμον.

2132. (2168). Ἀπὸ δοθὲν σημεῖον O , τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ δοθέντος ἐπιπέδου Π , νὰ ἀχθῇ μία εὐθεῖα OX , ἡ ὁποία νὰ σχηματίσῃ δοθεῖσαν γωνίαν μὲ μιαν πλαγίαν OA πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π .

2133. (2169). Διὰ δοθείσης εὐθείας OA , πλαγίας πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον Π , νὰ ἀχθῇ ἓνα ἐπίπεδον, τοῦ ὁποίου ἡ κλίσις πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π νὰ εἶναι ἴση μὲ δοθεῖσαν γωνίαν ω .

2134. (2170). Δίδονται δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα Π καὶ P καὶ ζητεῖται νὰ ἀχθῇ εἰς τὸ ἐπίπεδον P καὶ ἀπὸ ἓνα σημεῖον O , τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τοῦ P , μία εὐθεῖα, τῆς ὁποίας ἡ κλίσις πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π νὰ εἶναι ἴση μὲ δοθεῖσαν γωνίαν ω .

Δ' Ὁμάς. 2135. (2171). Δίδεται δίεδρος γωνία (Π, P) καὶ μία εὐθεῖα AB ἐπὶ τῆς ἔδρας Π . Νὰ εὐρεθῇ ἐπὶ τῆς ἔδρας P ἓνα σημεῖον Γ τοιοῦτον, ὥστε τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ νὰ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Γ καὶ ἰσοσκελὲς ἢ νὰ εἶναι ἰσόπλευρον.

2136. (2172). Δίδεται μία δίεδρος γωνία Π - XY - P καὶ μία ἡμιευθεῖα OG , ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ ἓνα σημεῖον O τῆς ἀκμῆς XY . Νὰ κατασκευασθῇ ἓνα ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον νὰ διέρχεται ἀπὸ τὴν OG καὶ νὰ τέμνῃ τὰς ἔδρας τῆς διέδρου κατὰ μίαν γωνίαν, τῆς ὁποίας ἡ διχοτόμος νὰ εἶναι ἡ OG .

2137. (2173). Δίδονται τρεῖς τεμνόμενα εὐθεῖαι XOX' , YOY' , ZOZ' , αἱ ὁποῖαι δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Νὰ κατασκευασθῇ μία εὐθεῖα, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ τὸ σημεῖον O καὶ νὰ σχηματίσῃ ἴσας γωνίας μὲ τὰς τρεῖς δοθείσας εὐθείας.

2138. (2174). Δίδεται ἓνα ἐπίπεδον Π , μία εὐθεῖα E παράλληλος πρὸς τὸ Π , ἡ ὁποία προβάλλεται ἐπὶ τοῦ Π κατὰ τὴν εὐθειαν E' καὶ ἓνα σημεῖον O τοῦ χώρου καὶ ζητεῖται νὰ εὐρεθῇ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π ἓνα σημεῖον O' τοιοῦτον, ὥστε ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου O ἀπὸ ἓνα τυχὸν σημείου M τῆς E νὰ εἶναι σταθερῶς ἴση μὲ τὴν ἀπόστασιν τοῦ O' ἀπὸ τὴν προβολὴν M' τοῦ M ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π .

2139. (2175). Νὰ κατασκευασθῇ μία εὐθεῖα, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον O καὶ νὰ σχηματίσῃ ἴσας γωνίας μὲ τρία δοθέντα ἐπίπεδα Π, P, Σ .

2140. (2176). Δίδονται τρία ἐπίπεδα Π, P, Σ τεμνόμενα εἰς τὸ O καὶ ζητεῖται νὰ κατασκευασθοῦν τὰ ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν κλίσιν πρὸς τὰ τρία αὐτὰ ἐπίπεδα.

2141. (2177). Δίδονται εἰς τὸ διάστημα τέσσαρες εὐθεῖαι A, B, Γ, Δ καὶ ζητεῖται νὰ κατασκευασθῇ μία εὐθεῖα X παράλληλος πρὸς τὴν Δ καὶ τῆς ὁποίας αἱ βραχύτεραι ἀποστάσεις ἀπὸ τὰς εὐθείας A, B καὶ Γ νὰ εἶναι ἴσαι.

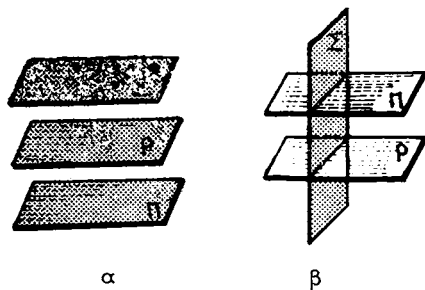
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΣΤ΄.

ΣΤΕΡΕΑΙ ΓΩΝΙΑΙ

698. Ἀμοιβαῖαι θέσεις τριῶν ἐπιπέδων. Ἐστωσαν τρία ἐπίπεδα Π , P , Σ . Γνωρίζομεν, ὅτι δύο ἐπίπεδα ἔστω τὰ Π καὶ P , δύνανται:

- 1ον. *Νὰ εἶναι παράλληλα.*
- 2ον. *Νὰ τέμνονται καὶ*
- 3ον. *Νὰ συμπίπτουν.*

Διὰ τὰ εὗρωμεν τὴν σχετικὴν θέσιν τῶν τριῶν ἐπιπέδων, ἀρκεῖ



Σχ. 477.

νὰ ἐξετάσωμεν τὴν θέσιν τοῦ τρίτου ἐπιπέδου Σ πρὸς τὰ δύο ἄλλα ἐπίπεδα:

I. Τὰ ἐπίπεδα Π καὶ P εἶναι παράλληλα.

Τὸ τρίτον ἐπίπεδον Σ :

1ον. Δύναται νὰ εἶναι παράλληλον πρὸς τὰ Π καὶ P (Σχ. 477 α).

2ον. Δύναται νὰ τέμνη τὰ ἐπίπεδα Π καὶ P (Σχ. 477 β). Αἱ τομαὶ τῶν ἐπιπέδων Π καὶ P ὑπὸ τοῦ Σ εἶναι παράλληλοι.

3ον. Δύναται νὰ συμπίπτῃ μὲ ἓνα ἀπὸ τὰ ἐπίπεδα αὐτά, ἔστω μὲ τὸ P .

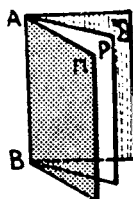
II. Τὰ ἐπίπεδα Π καὶ P τέμνονται.

Τὸ τρίτον ἐπίπεδον Σ :

1ον. Δύναται νὰ διέρχεται ἀπὸ τὴν τομὴν αὐτῶν AB (Σχ. 478), ὅποτε θὰ εἶναι ἐκτὸς τῆς διέδρου γωνίας $\Pi \cdot AB \cdot P$, πού σχηματίζουν τὰ Π καὶ P ἢ καὶ ἐντὸς αὐτῆς.

2ον. Δύναται νὰ τέμνη τὰ ἐπίπεδα Π καὶ P , χωρὶς νὰ τέμνη καὶ τὴν τομὴν τῶν AB (Σχ. 479 α, β).

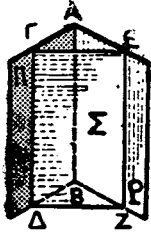
Εἰ τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ἢ AB , ὡς παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον Σ , εἶναι παράλληλος καὶ πρὸς τὰς τομὰς $\Gamma\Delta$ καὶ EZ (Σχ. 479 α, β).



Σχ. 478.

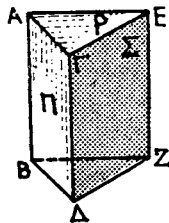
3ον, Δύναται νά τέμνη τά ἐπίπεδα Π καί P καί νά τέμνη καί τήν τομήν των AB (Σχ. 480).

Π.χ. οί δύο συνεχόμενοι τοίχοι μιᾶς αἰθούσας καί τὸ πάτωμα αὐτῆς. Εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν τά ἐπίπεδα τέμνονται ἀνά δύο καί αἱ

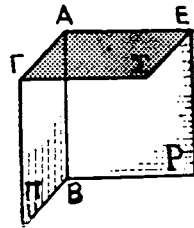


α

Σχ. 479.



β



Σχ. 480.

τομαί $ΑΓ$ καί $ΑΕ$ τῶν ἐπιπέδων Π καί P ὑπὸ τοῦ Σ διέρχονται ἀπὸ ἓνα σημεῖον A , τὸ ὁποῖον εἶναι κοινὸν τῶν τριῶν ἐπιπέδων.

699. Τί εἶναι τριέδρος γωνία; Εἶδομεν ἀνωτέρω (II 3ον), ὅτι τά ἐπίπεδα Π, P καί Σ δύναται νά τέμνῳνται ἀνά δύο καί νά διέρχῳνται ἀπὸ ἓνα κοινὸν σημεῖον A (Σχ. 480).

Τά τρία αὐτά ἐπίπεδα, τά ὁποῖα ἔχουν ἓνα κοινὸν σημεῖον καί περατοῦνται εἰς τὰς τομάς των, περικλείουν ἓνα μέρος τοῦ ἀπείρου διαστήματος, τὸ ὁποῖον λέγεται **τριέδρος γωνία**.

Τὸ κοινὸν σημεῖον A τῶν ἐπιπέδων Π, P, Σ λέγεται **κορυφή** τῆς τριέδρου γωνίας.

Τά ἐπίπεδα Π, P καί Σ λέγονται **ἔδραι** αὐτῆς καί αἱ ἡμιενθεῖαι AB, AG, AE , κατὰ τὰς ὁποίας τέμνονται τά ἐπίπεδα Π, P, Σ λέγονται **ἀκμαί** αὐτῆς.

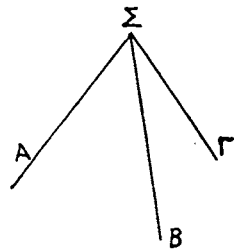
Μία τριέδρος γωνία, ἡ ὁποία ἔχει κορυφήν τὸ Σ καί ἀκμαῖς τὰς $\Sigma A, \Sigma B, \Sigma \Gamma$ (Σχ. 481) γράφεται $\Sigma.AB\Gamma$.

Εἰς κάθε τριέδρον διακρίνομεν:

1ον. Τὰς γωνίας, αἱ ὁποῖαι περιέχονται μεταξὺ δύο διαδοχικῶν ἀκμῶν καί τὰς ὁποίας ὀνομάζομεν **ἔδρας ἢ ἐπιπέδους γωνίας** τῆς τριέδρου.

Π.χ. Ἐδραι τῆς τριέδρου γωνίας $\Sigma.AB\Gamma$ εἶναι αἱ γων. $A\Sigma B$, γων. $B\Sigma \Gamma$, γων. $\Gamma\Sigma A$.

2ον. Τὰς διέδρους γωνίας, αἱ ὁποῖαι περιέχονται μεταξὺ δύο



Σχ. 481.

διαδοχικῶν ἑδρῶν καὶ ἔχουν ὡς ἀκμὰς τὰς ἀκμὰς τῆς τριέδρου γωνίας.

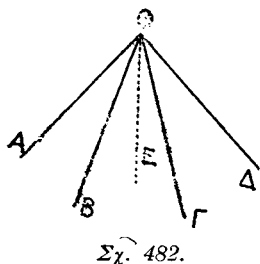
Αἱ διέδρου γωνίαι μιᾶς τριέδρου γωνίας παρίστανται μὲ τὰς ἀκμὰς ΣΑ, ΣΒ, ΣΓ ἢ ἀπλῶς μὲ Α, Β, Γ καὶ αἱ ἀπέναντι τῶν διέδρων ἑδραὶ τῆς μὲ τὰ μικρὰ γράμματα α, β, γ ἀντιστοίχως.

Μία τριέδρος γωνία λέγεται **τρισορθογώνιος**, ὅταν αἱ τρεῖς ἑδραὶ τῆς εἶναι ὀρθαὶ γωνίαι.

Οἱ συνεχόμενοι τοῖχοι μιᾶς αἰθοῦσης σχηματίζουν μίαν τρισσορθογώνιον τριέδρον γωνίαν.

700. Στερεὰ ἢ πολυεδρική γωνία. Τὸ μέρος τοῦ ἀπείρου διαστήματος, τὸ ὁποῖον περικλείεται ἀπὸ τρία ἢ περισσότερα ἐπιπέδα, τὰ ὁποῖα ἔχουν κοινὸν σημεῖον καὶ περατοῦνται εἰς τὰς διαδοχικὰς τομὰς των, λέγεται **στερεὰ ἢ πολυεδρική γωνία**.

Ὅπως εἰς τὴν τριέδρον γωνίαν, οὕτω καὶ εἰς κάθε πολυεδρικήν γωνίαν Ο.ΑΒΓΔΕ (Σχ. 482) διακρίνομεν τὴν κορυφήν τῆς Ο, τὰς ἑδρας τῆς ἢ ἐπιπέδους γωνίας τῆς ΑΟΒ, ΒΟΓ, ΓΟΔ, ΔΟΕ, ΕΟΑ, τὰς ἀκμὰς τῆς ΟΑ, ΟΒ, . . . τὰς διέδρους γωνίας τῆς ΟΑ, ΟΒ, . . .



Διὰ τὸ νὰ ὀνομάσωμεν μίαν στερεὰν γωνίαν ἢ ἔκφωνοῦμεν μόνον τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς τῆς ἢ ἔκφωνοῦμεν πρῶτον τὸ γράμμα τῆς κορυφῆς τῆς καὶ ἔπειτα κατὰ σειράν, ἀνὰ ἓνα τὰ γράμματα, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐπὶ τῶν ἀκμῶν τῆς.

Π.χ. λέγομεν ἢ στερεὰ γωνία Ο.ΑΒΓΔΕ καὶ γράφομεν: στερεὰ γωνία Ο.ΑΒΓΔΕ.

Μία στερεὰ γωνία λέγεται **τριέδρος**, **τετράεδρος** κλπ., ἐὰν ἔχη **τρεῖς**, **τέσσαρας** κλπ. ἑδρας.

Μία στερεὰ γωνία λέγεται **κυρτή**, ἐὰν κάθε ἑδρα τῆς, προεκτεινομένη, ἀφίγη ὀλόκληρον τὴν στερεὰν γωνίαν πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς. Μία τριέδρος γωνία εἶναι πάντοτε κυρτή.

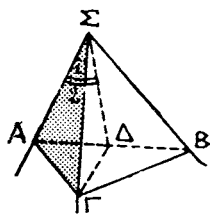
701. Θεώρημα. *Κάθε ἑδρα τριέδρου στερεᾶς γωνίας εἶναι μικρότερα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων, καὶ μεγαλ- τῆς διαφ-των*
 Ὑπόθεσις: Ἐστω ἢ τριέδρος στερεὰ γωνία Σ.ΑΒΓ καὶ ΑΣΒ ἢ μεγαλυτέρα ἑδρα αὐτῆς.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι: $\widehat{ΑΣΒ} < \widehat{ΑΣΓ} + \widehat{ΓΣΒ}$.

Ἀπόδειξις: Εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΣΒ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΣΔ οὕτως, ὥστε νὰ σχηματίζη μὲ τὴν εὐθεῖαν ΣΑ γωνίαν ΑΣΔ ἴσην μὲ τὴν γω-

νίαν ΑΣΓ. Ἐπειδὴ ἡ ἔδρα ΑΣΒ εἶναι, ἐξ ὑποθέσεως μεγαλύτερα τῆς ἔδρας ΑΣΓ, ἡ εὐθεία ΣΔ θὰ κείται ἐντὸς τῆς γωνίας ΑΣΒ. Ἐπὶ τῶν εὐθειῶν ΣΔ καὶ ΣΓ λαμβάνομεν δύο μήκη ἴσα, ΣΔ=ΣΓ. Διὰ τῆς εὐθείας ΔΓ φέρομεν ἓνα ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὰς ἀκμὰς ΣΑ καὶ ΣΒ εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Β, καὶ ἔστωσαν ΑΓ, ΓΒ, ΒΑ αἱ τομαὶ τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ καὶ τῶν ἐδρῶν τῆς τριέδρου Σ.

Τὰ σχηματισθέντα τρίγωνα ΑΣΓ καὶ ΑΣΔ ἔχουν τὰς γωνίας Σ₁ καὶ Σ₂ ἴσας ἐκ κατασκευῆς, τὴν πλευρὰν ΣΑ κοινὴν καὶ τὰς πλευρὰς ΣΓ=ΣΔ ἐκ κατασκευῆς· ἄρα θὰ εἶναι ἴσα καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι ΑΔ=ΑΓ.



Σχ. 483.

Εἰς τὸ τρίγωνον ΑΒΓ ἔχομεν

$$AB < AG + GB \quad \eta \quad AD + DB < AG + GB \quad (1)$$

Ἀφαιροῦμεν καὶ ἀπὸ τὰ δύο μέλη τῆς ἀνισότητος (1) τὰ ἴσα τμήματα ΑΔ καὶ ΑΓ καὶ λαμβάνομεν $DB < GB$ (2)

Τὰ τρίγωνα ΣΓΒ καὶ ΣΔΒ ἔχουν τὴν πλευρὰν ΣΒ κοινὴν, τὴν ΣΓ=ΣΔ καὶ τὴν ΔΒ μικροτέραν τῆς ΒΓ· ἄρα τὰ τρίγωνα αὐτὰ εἶναι ἄνισα καὶ ἀέναντι τῆς μικροτέρας πλευρᾶς θὰ κείται μικροτέρα γωνία· ἦτοι θὰ εἶναι $\widehat{\Delta\Sigma B} < \widehat{\Gamma\Sigma B}$.

Προσθέτομεν καὶ εἰς τὰ δύο μέλη τῆς ἀνισότητος αὐτῆς τὰς ἴσας γωνίας ΑΣΔ καὶ ΑΣΓ καὶ ἔχομεν

$$\widehat{A\Sigma\Delta} + \widehat{\Delta\Sigma B} < \widehat{A\Sigma\Gamma} + \widehat{\Gamma\Sigma B} \quad \eta \quad \widehat{A\Sigma B} < \widehat{A\Sigma\Gamma} + \widehat{\Gamma\Sigma B}.$$

Ἐδείχθη λοιπὸν, ὅτι: **Κάθε ἔδρα τριέδρου στερεᾶς γωνίας...**

702. Θεώρημα. *Εἰς κάθε κυρτὴν πολυεδρικήν γωνίαν, τὸ ἄθροισμα τῶν ἐδρῶν τῆς εἶναι μικρότερον τῶν τεσσάρων ὀρθῶν.*

Ἐπίδειξις: Ἐστω μία κυρτὴ πολυεδρική γωνία Ο.ΑΒΓΔΕ (Σχ. 484) καὶ ΑΟΒ, ΒΟΓ, ... αἱ ἔδραι τῆς.

Συμπέρασμα: Ἐάν παραστήσωμεν μὲ Σ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐδρῶν τῆς ΑΟΒ, ΒΟΓ, ... εἰς ὀρθὰς γωνίας, θὰ δεῖξωμεν, ὅτι $\Sigma < 4$ ὀρθ.

Ἀπόδειξις: Φέρομεν ἓνα ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον νὰ τέμνη ὅλας τὰς ἀκμὰς τῆς πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς κορυφῆς Ο καὶ ἔστω ΑΒΓΔΕ ἡ τομὴ τῆς πολυεδρικῆς γωνίας ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ.

Γνωρίζομεν (§ 701) ὅτι κάθε ἔδρα τριέδρου στερεᾶς γωνίας, εἶναι μικρότερα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων.

Οὕτω ἀπὸ τὴν τριέδρου Α.ΒΟΕ ἔχομεν

$$\widehat{ΕΑΒ} < \widehat{ΟΑΕ} + \widehat{ΟΑΒ} \tag{1}$$

Ὅμοιως ἀπὸ τὰς τριέδρους Β.ΓΟΑ, Γ.ΔΟΒ, Δ.ΕΟΓ, ... ἔχομεν

$$\widehat{ΑΒΓ} < \widehat{ΟΒΑ} + \widehat{ΟΒΓ} \tag{2}$$

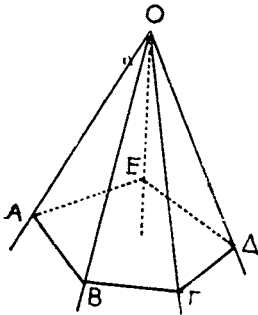
$$\widehat{ΒΓΔ} < \widehat{ΟΓΒ} + \widehat{ΟΓΔ} \tag{3}$$

.....

Προσθέτομεν τὰς ἀνισότητας (1), (2), (3)... κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\widehat{ΕΑΒ} + \widehat{ΑΒΓ} + \widehat{ΒΓΔ} + \dots < \widehat{ΟΑΕ} + \widehat{ΟΑΒ} + \widehat{ΟΒΑ} + \widehat{ΟΒΓ} + \widehat{ΟΓΒ} + \widehat{ΟΓΔ} + \dots \tag{4}$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι εἰς τὸ πρῶτον μέλος τῆς ἀνισότητος (4) ἔχομεν τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου ΑΒΓΔΕ, . . . τῆς τομῆς. Ἐὰν ν εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τοῦ πολυγώνου αὐτοῦ (ἴσος μὲ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀκμῶν τῆς στερεᾶς γωνίας), τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ πολυγώνου αὐτοῦ θὰ εἶναι ἴσον μὲ $2ν - 4$ ὀρθάς. Εἰς τὸ δεῦτερον μέλος τῆς ἀνισότητος (4) ἔχομεν τὸ ἄθροισμα τῶν παρὰ τὴν βάσιν γωνιῶν τῶν τριγώνων, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰς κορυφὰς τῶν εἰς τὸ σημεῖον Ο' τὸ ἄθροισμα αὐτὸ εἶναι ἴσον μὲ $2ν - \Sigma$ ὀρθάς. Ἡ ἀνισότης (4) δύνатаι λοιπὸν νὰ γραφῆ:



Σχ. 484.

$(2ν - 4) \text{ ὀρθ.} < (2ν - \Sigma) \text{ ὀρθ.}$ ἢ $-4 \text{ ὀρθ.} < -\Sigma \text{ ὀρθ.}$ ἢ $\Sigma < 4 \text{ ὀρθ.}$

Ἐδείχθη λοιπὸν, ὅτι: **Εἰς κάθε κυρτὴν πολυεδρικήν. . .**

Ἀσκήσεις: 2142, 2143, 2144, 2145.

Κατασκευή τριέδρου στερεάς γωνίας

703. Πρόβλημα. *Νὰ κατασκευασθῆ τριέδρος στερεὰ γωνία, τῆς ὁποίας δίδονται αἱ τρεῖς ἔδραι τῆς α, β, γ.*

Ἐστω, ὅτι ἡ β εἶναι ἡ μεγαλυτέρα ἔδρα.

Διὰ νὰ ἔχη τὸ πρόβλημα λύσιν πρέπει (§ 701, 702) νὰ εἶναι

$$\beta < \alpha + \gamma \text{ καὶ } \alpha + \beta + \gamma < 4 \text{ ὀρθ.}$$

Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς μεγαλυτέρας γωνίας ΑΣΓ=β κατασκευάζομεν τὰς γωνίας ΑΣΕ=α καὶ ΓΣΔ=γ. Μὲ κέντρον τὸ Σ καὶ ἀκτίνα οἰανδήποτε γράφομεν περιφέρειαν, ἡ ὁποία τέμνει τὰς πλευρὰς τῶν γωνιῶν α, β, γ, ἔστω εἰς τὰ σημεία Ε, Α, Γ, Δ.

Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν α, β, γ εἶναι μικρότερον τῶν 4 ὀρθῶν γωνιῶν, τὸ ἄθροισμα τῶν τόξων $EA, AG, \Gamma\Delta$ θὰ εἶναι μικρότερον περιφερείας.

Ἀπὸ τὰ σημεῖα E καὶ Δ φέρομεν καθέτους $E\Theta$ καὶ ΔK ἐπὶ τὰς ΣA καὶ $\Sigma \Gamma$, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὴν περιφέρειαν εἰς τὰ σημεῖα E' καὶ Δ' .

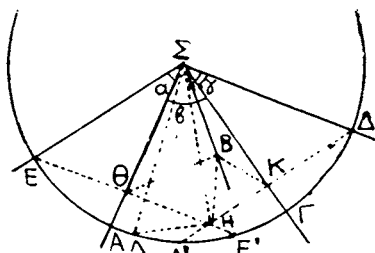
Ἐπειδὴ αἱ ἀκτῖνες ΣA καὶ $\Sigma \Gamma$ εἶναι κάθετοι ἀντιστοίχως ἐπὶ τὰς χορδὰς EE' καὶ $\Delta\Delta'$ θὰ εἶναι

$$\widehat{EA} = \widehat{AE'} \quad \text{καὶ} \quad \widehat{\Delta\Gamma} = \widehat{\Gamma\Delta'}$$

Ἐπειδὴ ἡ ἔδρα $A\Sigma\Gamma$ εἶναι μικρότερα τοῦ ἄθροίσματος τῶν δύο ἄλλων θὰ εἶναι

$$\widehat{A\Gamma} < \widehat{EA} + \widehat{\Gamma\Delta} \quad \eta \quad \widehat{A\Gamma} < \widehat{AE'} + \widehat{\Gamma\Delta'}$$

Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα τῶν τόξων AE' καὶ $\Gamma\Delta'$ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τόξου $A\Gamma$, τὸ σημεῖον Δ' θὰ κεῖται μεταξὺ τῶν A καὶ E' ἐπομένως αἱ χορδαὶ EE' καὶ $\Delta\Delta'$ τέμνονται εἰς ἓνα σημεῖον H , τὸ ὁποῖον κεῖται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς περιφερείας Σ .



Σχ. 485.

Φέρομεν τὴν ΣH καὶ τὴν $H\Lambda$ κάθετον ἐπὶ τὴν ΣH μέτρως, ὅτου συναντήσῃ τὴν περιφέρειαν εἰς ἓνα σημεῖον Λ . Ἀπὸ τὸ H φέρομεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου καὶ ἐπὶ τῆς καθέτου αὐτῆς λαμβάνομεν ἓνα μῆκος $H\beta = H\Lambda$. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν $\Sigma\beta$.

Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι ἡ τριέδρος $\Sigma.AB\Gamma$ εἶναι ἡ ζητούμενη.

Πράγματι τὰ τρίγωνα $\Sigma H\beta$ καὶ $\Sigma H\Lambda$ εἶναι ἴσα, διότι εἶναι ὀρθογώνια εἰς τὸ H καὶ ἔχουν τὰς καθέτους πλευράς των, ἴσας ἤτοι τὴν ΣH κοινὴν καὶ $H\beta = H\Lambda$ ἐκ κατασκευῆς· ἄρα θὰ εἶναι καὶ $\Sigma\beta = \Sigma\Lambda$, δηλ. ἡ $\Sigma\beta$ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτίνα τοῦ κύκλου ($\Sigma, \Sigma\Lambda$).

Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν $\beta\Theta$ αὕτη εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΣA κατὰ τὸ θεώρημα τῶν τριῶν καθέτων ($H\beta$ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου, ἢ $H\Theta$ κάθετος ἐπὶ τὴν ΣA · ἄρα ἡ $\beta\Theta$ κάθετος ἐπὶ τὴν ΣA). Τὸ τρίγωνον λοιπὸν $\Sigma\Theta\beta$ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Θ .

Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα $\Sigma\beta\Theta$ καὶ $\Sigma\Theta E$ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὴν κάθετον πλευρὰν $\Sigma\Theta$ κοινὴν καὶ τὰς ὑποτείνουσας των $\Sigma\beta$ καὶ ΣE ἴσας, ὡς ἀκτίνας τοῦ κύκλου Σ · ἄρα θὰ εἶναι

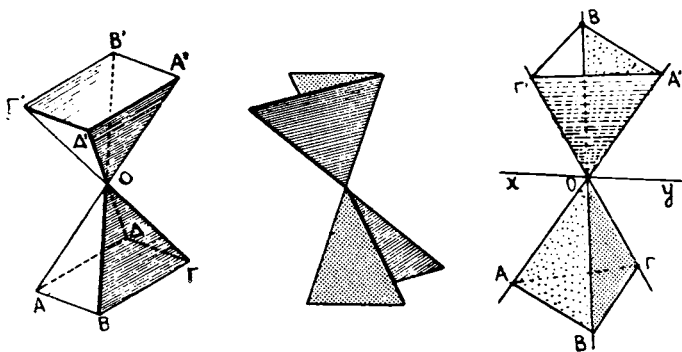
$$\gamma\omega\nu.\Theta\Sigma\beta = \gamma\omega\nu.E\Sigma\Theta \quad \eta \quad \gamma\omega\nu.A\Sigma\beta = \gamma\omega\nu.E\Sigma A = \alpha.$$

Ὅμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι ἡ γωνία $B\Sigma\Gamma$ εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν $\Gamma\Sigma\Delta = \gamma$.

Ὅστε ἡ τριέδρος $\Sigma.AB\Gamma$ ἔχει τὰς τρεῖς ἔδρας τῆς ἴσας μὲ τὰς τρεῖς δοθείσας ἔδρας α, β, γ καὶ ἐπομένως εἶναι ἡ ζητούμενη.

Συμμετρικαὶ στερεαὶ γωνίαι

704. Συμμετρικαὶ στερεαὶ γωνίαι. Ἐὰν προεκτείνωμεν τὰς ἀκμὰς μιᾶς στερεᾶς γωνίας π.χ. τῆς τριέδρου $O.AB\Gamma$ (Σχ. 486) πρὸς



Σχ. 486.

τὸ μέρος τῆς κορυφῆς τῆς O , σχηματίζεται μία νέα τριέδρος γωνία $O.A'B'\Gamma'$, ἡ ὁποία λέγεται **συμμετρικὴ** τῆς πρώτης, ἢ **κατὰ κορυφήν** αὐτῆς.

Εἶναι φανερόν, ὅτι καὶ ἡ $O.AB\Gamma$ εἶναι συμμετρικὴ τῆς $O.A'B'\Gamma'$.

Αἱ συμμετρικαὶ στερεαὶ γωνίαι ἔχουν ὅλα τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα τῶν ἴσων πράγματι, αἱ ἔδραι τῆς τριέδρου $O.AB\Gamma$ εἶναι ἴσαι, μία πρὸς μίαν, πρὸς τὰς ἔδρας τῆς συμμετρικῆς τῆς $O.A'B'\Gamma'$, (π.χ.

$\widehat{AOB} = \widehat{A'O'B'}$, ὡς κατὰ κορυφήν γωνίαι). Ἐπίσης αἱ διέδροι γωνίαι τῶν εἶναι μία πρὸς μίαν ἴσαι (π.χ. διέδρ. $OA =$ διέδρ. OA') ὡς κατὰ κορυφήν διέδροι γωνίαι.

Ἐὰν καὶ ἔχουν ὅλα τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα τῶν ἴσων ἕνα πρὸς ἓνα, **αἱ δύο αὐταὶ τριέδροι γωνίαι δὲν εἶναι ἴσαι**, δηλ. δὲν δύναται νὰ ἐφαρμοσθῇ (νοεῶς) ἡ μία ἐπὶ τῆς ἄλλης.

Πράγματι. 1^{ον}. Ἐὰν φαντασθῶμεν, ὅτι τὸ ἐπίπεδον $AO\Gamma$ συμπίπτῃ μὲ τὸ ἐπίπεδον τοῦ φύλλου σχεδιάσεως, τότε ἡ ἔδρα $A'O\Gamma'$ κεῖται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, ἡ ἀκμὴ OB κεῖται ἔμπροσθεν αὐτοῦ καὶ ἡ OB' ὀπίσθεν αὐτοῦ. Ἐὰν στρέψωμεν τὴν τριέδρον $O.A'B'\Gamma'$ περὶ τὸ

σημείον O κατὰ 180° , οὕτως ὥστε ἡ ἔδρα $A'OG'$ νὰ ὀλισθαίνη ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς, τότε ἡ ἀκμὴ OA' θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ἀκμῆς OA , ἡ OG' θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς OG , ἀλλὰ ἡ ἀκμὴ OB' , ἡ ὁποία κατὰ τὴν κίνησιν τῆς τριέδρου ἐξακολουθεῖ νὰ κεῖται κάτω τοῦ ἐπιπέδου τῆς σχεδιάσεως, δὲν θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς OB , ἡ ὁποία κεῖται ἄνω τοῦ ἐπιπέδου τῆς σχεδιάσεως· αἱ τριέδροι λοιπὸν $O.AB\Gamma$ καὶ $O.A'B'\Gamma'$ δὲν ἐφαρμόζονται καὶ ἐπομένως δὲν εἶναι ἴσαι.

2ον. Ἐὰν ἡ τριέδρος γωνία $O.A'B'\Gamma'$ στραφῇ περὶ τὴν διχοτόμον xy τῆς ἐπιπέδου γωνίας $AO\Gamma'$ κατὰ 180° , ἡ OG' θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς OA καὶ ἡ OA' θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς OG καὶ ἐπομένως ἡ ἔδρα $\Gamma'OA'$ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἔδρας $AO\Gamma'$ · ἀλλὰ ἡ τρίτη ἀκμὴ OB' , ἡ ὁποία ἔκειτο ὀπισθεν τοῦ ἐπιπέδου τῆς σχεδιάσεως $AO\Gamma$, θὰ λάβῃ θέσιν ἄνω τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ, ὅπως εἶναι καὶ ἡ OB . Ἐν τούτοις αἱ δύο τριέδροι δὲν συμπίπτουν γενικῶς, διότι ἡ διέδρος OG' δὲν εἶναι, γενικῶς, ἴση μὲ τὴν διέδρον OA καὶ ἐπομένως τὸ ἐπίπεδον $\Gamma'OB'$ δὲν θὰ λάβῃ τὴν διεύθυνσιν τοῦ ἐπιπέδου AOB · ὁμοίως τὸ ἐπίπεδον $A'OB'$ δὲν θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $BO\Gamma$ καὶ ἐπομένως ἡ ἀκμὴ OB' δὲν θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς OB .

705. Παρατήρησις. Διὰ νὰ ἐφαρμόσῃ ἡ τριέδρος $O.A'B'\Gamma'$ ἐπὶ τῆς συμμετρικῆς τῆς $O.AB\Gamma$ πρέπει αἱ διέδροι γωνία OA καὶ OG' νὰ εἶναι ἴσαι· εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν αἱ τέσσαρες διέδροι γωνία OA , OG , OA' , OG' εἶναι ὅλαι ἴσαι μεταξύ των καὶ ὅταν μετὰ τὴν περιστροφὴν περὶ τὴν xy , ἐφαρμόσῃ ἡ OG' ἐπὶ τῆς OA , ἡ OA' ἐπὶ τῆς OG , τὸ ἐπίπεδον $\Gamma'OB'$ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου AOB καὶ τὸ ἐπίπεδον $A'OB'$ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ GOB καὶ ἐπομένως ἡ ἀκμὴ OB' θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ἀκμῆς OB · ἐξ αὐτοῦ συνάγομεν, ὅτι :

Δύο συμμετρικαὶ τριέδροι γωνία ἐφαρμόζονται μεταξύ των, ὅταν ἡ μία ἐξ αὐτῶν ἔχη δύο διέδρους γωνίας ἴσας.

706. Ἴσοσκελῆς τριέδρος γωνία. Μία τριέδρος γωνία λέγεται ἰσοσκελῆς, ἐὰν ἔχη δύο διέδρους γωνίας ἴσας.

Ἐχοντες ὑπ' ὄψει τὴν § 705 δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν, ὅτι :

Ἡ ἰσοσκελῆς τριέδρος γωνία εἶναι ἴση μὲ τὴν συμμετρικὴν τῆς· καὶ κάθε τριέδρος, ἡ ὁποία εἶναι ἴση μὲ τὴν συμμετρικὴν τῆς εἶναι ἰσοσκελῆς.

707. Θεώρημα. Ἐὰν μία τριέδρος γωνία εἶναι ἰσοσκελῆς, αἱ ἔδραι τῆς, αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἀπέναντι τῶν ἴσων διέδρων γωνιῶν τῆς, εἶναι ἴσαι.

Ἐπίπεδοι: Ἐστω ἡ τριέδρος γωνίας $O.AB\Gamma$ (Σχ. 486) ἡ ὁποία ἔχει τὰς διέδρους γωνίας OA καὶ OB ἴσας.

Συμπέρασμα: Ἐὰν δείξωμεν, ὅτι $\widehat{BO\Gamma} = \widehat{AO\Gamma}$.

Ἀπόδειξις: Ἐστω $O.A'B'\Gamma'$ ἡ συμμετρικὴ τῆς τριέδρου γωνίας $O.AB\Gamma$. Ὅπως ἐδείξαμεν προηγουμένως (§ 705), ἐὰν στρέψωμεν τὴν τριέδρον γωνίαν $O.A'B'\Gamma'$ περὶ τὴν διχοτόμον $\chi\psi$ τῆς ἐπιπέδου γωνίας $AO\Gamma'$ κατὰ 180° , αὐτὴ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς τριέδρου $O.AB\Gamma$ καὶ ἐπομένως ἡ $O\Gamma'$ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς OA , ἡ OA' ἐπὶ τῆς OB καὶ ἡ OB' ἐπὶ τῆς OB . Ἀλλὰ τότε ἡ ἔδρα $\Gamma'OB'$ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἔδρας AOB καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι ἴση μὲ αὐτὴν· δηλ. θὰ εἶναι $\widehat{\Gamma'OB'} = \widehat{AOB}$ (1)

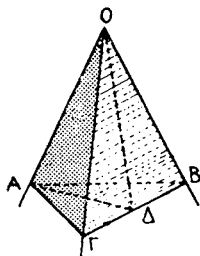
Ἀλλὰ $\widehat{\Gamma'OB'} = \widehat{BO\Gamma}$ (2), ὡς κατὰ κορυφὴν.

Ἀπὸ τὰς ἰσοτήτας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι $\widehat{BO\Gamma} = \widehat{AO\Gamma}$.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Ἐὰν μία τριέδρος γωνία. . .**

708. Θεώρημα. Ἐὰν, εἰς μίαν τριέδρον γωνίαν, δύο διέδρου εἶναι ἄνισοι καὶ αἱ ἔδραι, αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἀπέναντι τῶν διέδρων αὐτῶν εἶναι ἄνισοι καὶ ἀπέναντι τῆς μεγαλυτέρας διέδρου κεῖται μεγαλυτέρα ἔδρα.

Ἐπίπεδοι: Ἐστω ἡ τριέδρος γωνία $O.AB\Gamma$ (Σχ. 487) εἰς τὴν ὁποίαν ὑποθέτομεν, ὅτι εἶναι: $\text{διέδρ. } OA > \text{διέδρ. } OB$.



Σχ. 487.

Συμπέρασμα: Ἐὰν δείξωμεν, ὅτι $\widehat{\Gamma OB} > \widehat{AO\Gamma}$.

Ἀπόδειξις: Διὰ τῆς ἀκμῆς OA φέρομεν ἕνα ἐπίπεδον OAD , τὸ ὁποῖον νὰ σχηματίζῃ μὲ τὴν ἔδραν AOB μίαν διέδρον γωνίαν ἴσην μὲ τὴν διέδρον $OB\Gamma$: τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ θὰ πέσῃ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς διέδρου OA καὶ θὰ τέμνῃ τὴν ἔδραν $BO\Gamma$ κατὰ τὴν εὐθεῖαν OD , ἡ ὁποία θὰ κεῖται ἐντὸς τῆς γωνίας $BO\Gamma$.

Εἰς τὴν τριέδρον $O.AB\Delta$ αἱ διέδρου OA καὶ OB εἶναι ἴσαι καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι ἴσαι καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτῶν ἔδραι ΔOB καὶ $AO\Delta$ · δηλ. θὰ εἶναι

$$\widehat{\Delta OB} = \widehat{AO\Delta} \quad (1)$$

Ἀλλὰ εἰς τὴν τριέδρον $O.A\Gamma\Delta$ εἶναι

$$\widehat{AO\Delta} + \widehat{\Gamma O\Delta} > \widehat{AO\Gamma}.$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἀνισότητα αὐτὴν τὴν $AO\Delta$ μὲ τὴν ἴσην τῆς ΔOB καὶ ἔχομεν $\widehat{\Delta OB} + \widehat{\Gamma O\Delta} > \widehat{AO\Gamma}$ ἢ $\widehat{\Gamma OB} > \widehat{AO\Gamma}$.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Ἐὰν εἰς μίαν τριέδρον. . .**

709. Θεωρήματα ἀντίστροφα. Εἰς τὰ δύο προηγουμένα θεωρήματα ἀντιστοιχοῦν τὰ κάτωθι δύο ἀντίστροφα θεωρήματα:

I. Ἐὰν εἰς μίαν τριέδρον γωνίαν, δύο ἔδραι τῆς εἶναι ἴσαι, αἱ διέδρου, αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἀπέναντι αὐτῶν, εἶναι ἴσαι.

Διότι, εάν αἱ διέδροι ἦσαν ἄνισοι καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτῶν ἔδραι θὰ ἦσαν ἄνισοι (§ 708) τοῦτο ὁμῶς ἀντιβαίνει εἰς τὴν ὑπόθεσιν μας.

II. Ἐὰν εἰς μίαν τριέδρον, δύο ἔδραι εἶναι ἄνισοι καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτῶν διέδροι εἶναι ἄνισοι καὶ ἀπέναντι τῆς μεγαλύτερας ἔδρας κεῖται ἡ μεγαλύτερα διέδρος.

*Υπόθεσις: Ἐστω ὅτι εἶναι $\widehat{BOG} > \widehat{AOG}$ (Σχ. 487).

Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι, θὰ εἶναι καὶ διέδρ. $OA >$ διέδρ. OB .

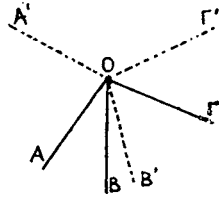
*Απόδειξις: Ἐὰν ἦτο διέδρ. $OA =$ διέδρ. OB , θὰ ἦτο (§ 707) καὶ $\widehat{BOG} = \widehat{AOG}$, τὸ ὁποῖον ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν.

Ἐὰν ἦτο διέδρ. $OA <$ διέδρ. OB , θὰ ἦτο καὶ $\widehat{BOG} < \widehat{AOG}$, τὸ ὁποῖον πάλιν ἀντίκειται εἰς τὴν ὑπόθεσιν μας· ὥστε εἶναι διέδρ. $OA >$ διέδρ. OB .

*ΑΣΚΗΣΕΙΣ: 2146, 2147, 2148, 2149, 2150, 2151.

Τριέδροι παραπληρωματικοί γωνία

710. Τριέδροι παραπληρωματικοί γωνία. Ἐστω μία τριέδρος γωνία $O.ABG$ ἀπὸ τὴν κορυφὴν O φέρομεν τὴν ἡμιευθεῖαν OA' κάθετον ἐπὶ τὴν ἔδραν BOG καὶ κειμένην πρὸς τὸ μέρος τῆς ἀκμῆς OA · ἔπειτα τὴν ἡμιευθεῖαν OB' κάθετον ἐπὶ τὴν ἔδραν GOA καὶ κειμένην πρὸς τὸ μέρος τῆς ἀκμῆς OB · καὶ τέλος τὴν ἡμιευθεῖαν OG' κάθετον ἐπὶ τὴν ἔδραν AOB καὶ κειμένην πρὸς τὸ μέρος τῆς ἀκμῆς OG · αἱ ἡμιευθεῖαι αὐταὶ OA' , OB' , OG' σχηματίζουν μίαν τριέδρον γωνίαν $O.A'B'G'$, ἡ ὁποία λέγεται **παραπληρωματικῶς** τῆς τριέδρου γωνίας $O.ABG$.



Σχ. 488.

711. Παρατήρησις: Αἱ ἡμιευθεῖαι OA' , OB' , OG' , ὅπως ἤχθησαν ἀνωτέρω, σχηματίζουν μίαν πραγματικὴν τριέδρον γωνίαν.

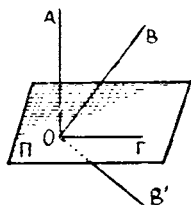
Πράγματι· αἱ OA' , OB' , OG' δὲν δύνανται νὰ συμπέσουν, διότι τότε αἱ τρεῖς ἔδραι BOG , GOA , AOB θὰ ἔκειντο ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Ἐπειτα αἱ τρεῖς αὐταὶ ἡμιευθεῖαι δὲν δύνανται νὰ κείνται ἐπὶ ἐνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, διότι τότε αἱ τρεῖς ἔδραι τῆς τριέδρου $O.ABG$ θὰ ἦσαν κάθετοι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ καὶ θὰ περιεῖχον τὴν κάθετον, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ σημεῖον O ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ.

712. Λήμμα I*. Ἐὰν ἀπὸ τυχὸν σημείου ἐνὸς ἐπιπέδου

* Λήμμα λέγεται ἓνα θεώρημα ἢ ἓνα πρόβλημα, τὸ ὁποῖον χρησιμεύει εἰς τὴν ἀπόδειξιν ἢ τὴν λύσιν ἐνὸς ἄλλου σπουδαιότερου θεωρήματος ἢ προβλήματος.

φέρωμεν δύο ἡμιευθείας, μίαν κάθετον καὶ μίαν πλαγίαν πρὸς τὸ ἐπίπεδον αὐτό, ἡ γωνία τῶν δύο ἡμιευθειῶν εἶναι ὀξεῖα, ἐὰν αἱ ἡμιευθεῖαι αὐταὶ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου, καὶ ἀμβλεῖα, ἐὰν αἱ ἡμιευθεῖαι κεῖνται ἐκατέρωθεν τοῦ ἐπιπέδου καὶ ἀντιστρόφως.

1^{ον}. Ἐστω OA (Σχ. 489) μία ἡμιευθεῖα κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π καὶ OB μία πλαγία πρὸς τὸ ἐπίπεδον αὐτό. Ἐστω OG ἡ προβολὴ τῆς OB ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π . Ἡ γωνία AOG εἶναι ὀρθή.



Σχ. 489.

Ἐὰν ἡ πλαγία OB κεῖται πρὸς τὸ μέρος πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται ἡ OA , ἐν σχέσει πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π , ἡ ἡμιευθεῖα OB εἶναι εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς ὀρθῆς γωνίας AOG καὶ ἐπομένως ἡ γωνία AOB εἶναι ὀξεῖα.

Ἐὰν ἡ πλαγία OB' κεῖται πρὸς τὸ ἄλλο μέρος τοῦ ἐπιπέδου Π , ἡ OB' εὐρίσκεται ἐξωτερικῶς τῆς ὀρθῆς γωνίας AOG καὶ ἐπομένως ἡ γωνία AOB' εἶναι ἀμβλεῖα.

2^{ον}. Ἀντιστρόφως. Ἐὰν ἀπὸ τυχόν σημεῖον ἐνὸς ἐπιπέδου φέρωμεν δύο ἡμιευθείας, τὴν μίαν κάθετον καὶ τὴν ἄλλην πλαγίαν πρὸς τὸ ἐπίπεδον αὐτό, αἱ δύο αὐταὶ ἡμιευθεῖαι κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου, ἐὰν σχηματίζουν ὀξεῖαν γωνίαν καὶ ἐκατέρωθεν τοῦ ἐπιπέδου, ἐὰν σχηματίζουν ἀμβλεῖαν γωνίαν.

Πράγματι ἔστω, ὅτι ἡ γωνία AOB εἶναι ὀξεῖα· αἱ ἡμιευθεῖαι OA καὶ OB κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου Π · διότι, ἐὰν ἔκειντο ἐκατέρωθεν αὐτοῦ, τότε ἡ γωνία AOB θὰ ἦτο ἀμβλεῖα, ὅπως ἐδείχθη ἄνωτέρω, τὸ ὁποῖον ἀντιβαίνει εἰς τὴν ὑπόθεσίν μας· ὥστε αἱ ἡμιευθεῖαι κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου Π .

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι, ἐὰν ἡ γωνία AOB' εἶναι ἀμβλεῖα αἱ ἡμιευθεῖαι OA καὶ OB' κεῖνται ἐκατέρωθεν τοῦ ἐπιπέδου Π .

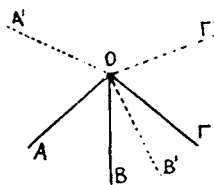
713. Θεώρημα. Ἐὰν ἡ τριέδρος γωνία $O.A'B'G'$ (Σχ. 490), εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς τριέδρου $O.ABG$, θὰ εἶναι ἀντιστρόφως καὶ ἡ τριέδρος γωνία $O.ABG$ παραπληρωματικὴ τῆς τριέδρου $O.A'B'G'$.

Διὰ νὰ ἀποδειχθῇ τὸ θεώρημα αὐτὸ πρέπει νὰ ἀποδείξωμεν:

1^{ον}. Ὅτι μία τυχοῦσα ἀκμὴ OA εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἀπέναντι ἕδραν $B'OG'$.

2^{ον}. Ὅτι ἡ ἀκμὴ αὐτὴ κεῖται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται ἡ OA' , ἐν σχέσει πρὸς τὴν ἕδραν $B'OG'$.

Ἀπόδειξις: Ἐξ ὑποθέσεως ἡ τριέδρος $O.A'B'Γ'$ εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς τριέδρου $O.ABΓ$. ἄρα ἡ OB' , ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον $ΓOA$, θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν OA . Ἐπίσης ἡ OG' ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον AOB εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν OA . Ἄρα ἡ OA , ὡς κάθετος ἐπὶ τὰς εὐθείας OB' καὶ OG' , εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον $B'OG'$. Ἐπειδὴ ἡ OA' εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον $BOΓ$ καὶ κεῖται πρὸς τὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ, πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται ἡ OA , ἡ γωνία AOA' εἶναι ὀξεῖα (§ 712, 1ον). Ἐπειδὴ ἡ OA εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον $B'OG'$, καὶ σχηματίζει μὲ τὴν πλαγίαν OA' πρὸς τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ μίαν ὀξεῖαν γωνίαν, ἔπεται (§ 712, 2ον), ὅτι ἡ OA κεῖται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου $B'OG'$, πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται ἡ ἀκμὴ OA . Ὡστε ἡ ἀκμὴ OA εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἕδραν $B'OG'$, καὶ κεῖται πρὸς τὸ μέρος τῆς ἕδρας, πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται ἡ OA' .



Σχ. 490.

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι ἡ OB εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἕδραν $Γ'OA$ καὶ κεῖται πρὸς τὸ μέρος τῆς ἕδρας αὐτῆς, πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται ἡ OB' καὶ τέλος, ὅτι ἡ OG εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἕδραν $A'OB'$ καὶ κεῖται πρὸς τὸ μέρος τῆς ἕδρας αὐτῆς, πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται ἡ OG' .

Ἡ τριέδρος λοιπὸν $O.ABΓ$ εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς $O.A'B'Γ'$, διότι δύναται νὰ κατασκευασθῇ ἀπὸ αὐτὴν, ὅπως ἡ $O.A'B'Γ'$ κατασκευάσθη ἀπὸ τὴν $O.ABΓ$.

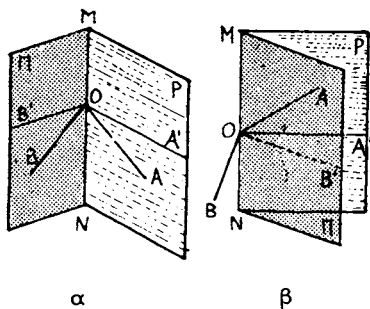
Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Ἐὰν ἡ τριέδρος γωνία $O.A'B'Γ'$ εἶναι....**

714. Λήμμα. Ἐὰν ἀπὸ τυχὸν σημείου O τῆς ἀκμῆς MN μιᾶς διέδρου γωνίας $\Pi \cdot MN \cdot P$, φέρωμεν τὴν ἡμιευθεῖαν OA κάθετον ἐπὶ τὴν ἕδραν Π καὶ κειμένην πρὸς τὸ μέρος πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται ἡ ἕδρα P καὶ τὴν ἡμιευθεῖαν OB κάθετον ἐπὶ τὴν ἕδραν P καὶ κειμένην πρὸς τὸ μέρος τῆς ἄλλης ἕδρας Π , ἡ γωνία AOB τῶν δύο αὐτῶν ἡμιευθειῶν εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς ἐπιπέδου γωνίας τῆς διέδρου $\Pi \cdot MN \cdot P$ (Σχ. 491).

Ἐπίσημις: Αἱ ἡμιευθεῖαι OA καὶ OB , ὡς κάθετοι ἐπὶ τὴν MN ὀρίζουν ἓνα ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκμὴν MN , τὸ ὁποῖον τέμνει τὰς ἕδρας Π καὶ P τῆς διέδρου $\Pi \cdot MN \cdot P$ κατὰ τὰς εὐθείας OB' καὶ OA' , αἱ ὁποῖαι εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὴν MN . Ἡ γωνία $A'OB'$ εἶναι ἡ ἀντίστοιχος ἐπίπεδος γωνία τῆς διέδρου $\Pi \cdot MN \cdot P$.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\widehat{AOB} + \widehat{A'OB'} = 2$ ὄρθα.

Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ ἡ OA εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν εὐθείαν OB' . Ἐπίσης ἡ OB , ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον P , εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν OA' .



Σχ. 491.

(Σχ. 491 α) εἶναι ὀξεία, αἱ ἡμιευθεῖαι OA' καὶ OB' κεῖνται ἐξωτερικῶς τῆς γωνίας AOB καὶ ἐπομένως ἡ γωνία $A'OB'$ εἶναι μεγαλύτερα τῆς γωνίας AOB

Ἐὰν ἡ γωνία AOB εἶναι ἀμβλεῖα (Σχ. 491 β), αἱ ἡμιευθεῖαι OA' καὶ OB' κεῖνται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας AOB καὶ ἐπομένως ἡ γωνία $A'OB'$ εἶναι μικροτέρα τῆς γωνίας AOB . ὥστε καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις αἱ γωνίαι AOB καὶ $A'OB'$ εἶναι ἄνισοι· ἐπομένως εἶναι παραπληρωματικοί.

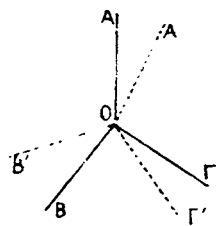
715. Θεώρημα. Ἐὰν δύο τριέδροι γωνία εἶναι παραπληρωματικοί, κάθε διέδρος γωνία τῆς μιᾶς ἐκ τῶν τριέδρων αὐτῶν, εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς ἀπέναντι ἕδρας εἰς τὴν ἄλλην τριέδρον.

Ἐπίδειξις: Ἐστωσαν αἱ παραπληρωματικοί τριέδροι γωνία $O.AB\Gamma$ καὶ $O.A'B'\Gamma'$. Ἐὰν λάβωμεν μίαν τοῦσαν διέδρον τῆς πρώτης, ἔστω τὴν OA , ἡ ἀπέναντι αὐτῆς ἕδρα τῆς ἄλλης τριέδρου εἶναι ἡ $B'OG'$.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$\text{διέδρ. } OA + \widehat{B'OG'} = 2 \text{ ὀρθαί.}$$

Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ αἱ τριέδροι γωνία $O.AB\Gamma$ καὶ $O.A'B'\Gamma'$ εἶναι παραπληρωματικοί, ἡ ἡμιευθεῖα OB' εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἕδραν $AO\Gamma$ καὶ κεῖται πρὸς τὸ μέρος τῆς ἀκμῆς OB · ἡ OB' εἶναι λοιπὸν κάθετος ἐπὶ τὴν ἕδραν $AO\Gamma$ τῆς διέδρου γωνίας $B-OA-\Gamma$ καὶ κεῖται πρὸς τὸ μέρος τῆς ἕδρας AOB τῆς διέδρου αὐτῆς. Ὀμοίως ἡ



Σχ. 492.

ΟΓ' είναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἔδραν ΑΟΒ τῆς αὐτῆς διέδρου Β-ΟΑ-Γ καὶ κείται πρὸς τὸ μέρος τῆς ἔδρας ΑΟΓ. Ὡστε ἡ γωνία Β'ΟΓ' εἶναι, κατὰ τὸ λῆμμα τῆς § 714, παραπληρωματικὴ τῆς ἐπιπέδου γωνίας, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν διέδρον γωνίαν· δηλ. εἶναι

ἐπίπ. γων. διέδρ. ΟΑ + Β'ΟΓ' = 2 ὀρθ. ἢ διέδρ. ΟΑ + Β'ΟΓ' = 2 ὀρθ.
Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι

διέδρ ΟΒ + Γ'ΟΑ' = 2 ὀρθ. καὶ διέδρ. ΟΓ + Α'ΟΒ' = 2 ὀρθ.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Ἐὰν δύο τριέδροι γωνίας...**

Παρατήρησις. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$ τὰς ἔδρας, μὲ \hat{A} , \hat{B} , $\hat{\Gamma}$ τὰς διέδρους γωνίας μιᾶς τριέδρου γωνίας Ο.ΑΒΓ καὶ μὲ $\hat{\alpha}'$, $\hat{\beta}'$, $\hat{\gamma}'$, \hat{A}' , \hat{B}' , $\hat{\Gamma}'$ τὰ ἀντίστοιχα στοιχεῖα τῆς παραπληρωματικῆς τριέδρου Ο.Α'Β'Γ', θὰ ἔχωμεν τὰς σχέσεις:

$$\begin{array}{lll} \hat{\alpha} + \hat{A} = 2 \text{ ὀρθ.} & \hat{\beta} + \hat{B} = 2 \text{ ὀρθ.} & \hat{\gamma} + \hat{\Gamma} = 2 \text{ ὀρθ.} \\ \hat{\alpha}' + \hat{A}' = 2 \text{ ὀρθ.} & \hat{\beta}' + \hat{B}' = 2 \text{ ὀρθ.} & \hat{\gamma}' + \hat{\Gamma}' = 2 \text{ ὀρθ.} \end{array}$$

716. Θεώρημα. *Εἰς κάθε τριέδρον γωνίαν:*

1ον. *Τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν διέδρων τῆς εἶναι μεγαλύτερον τῶν 2 ὀρθῶν γωνιῶν καὶ μικρότερον τῶν 6 ὀρθῶν.*

2ον. *Ἐὰν μία διέδρος ἀύξηθῇ κατὰ δύο ὀρθὰς γωνίας, ὑπερβαίνει τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων διέδρων.*

Ἐπιπέδου: Ἐστω ἡ τριέδρος γωνία Ο.ΑΒΓ.

1ον. Συμπέρασμα: Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ \hat{A} , \hat{B} , $\hat{\Gamma}$ τὰς τρεῖς διέδρους γωνίας τῆς τριέδρου γωνίας Ο.ΑΒΓ, θὰ δείξωμεν, ὅτι $2 \text{ ὀρθ.} < \hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} < 6 \text{ ὀρθ.}$

Ἀπόδειξις: Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ $\hat{\alpha}'$, $\hat{\beta}'$, $\hat{\gamma}'$ τὰς ἔδρας τῆς παραπληρωματικῆς τῆς τριέδρου γωνίας, θὰ ἔχωμεν (§ 715 παρατήρησις).

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} + \hat{\alpha}' = 2 \text{ ὀρθ.} \\ \hat{B} + \hat{\beta}' = 2 \text{ ὀρθ.} \\ \hat{\Gamma} + \hat{\gamma}' = 2 \text{ ὀρθ.} \end{array} \right\} \hat{\eta} \left. \begin{array}{l} \hat{A} = 2 \text{ ὀρθ.} - \hat{\alpha}' \\ \hat{B} = 2 \text{ ὀρθ.} - \hat{\beta}' \\ \hat{\Gamma} = 2 \text{ ὀρθ.} - \hat{\gamma}' \end{array} \right\} \quad (1)$$

Προσθέτομεν τὰς ἰσότητας (1) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 6 \text{ ὀρθ.} - (\hat{\alpha}' + \hat{\beta}' + \hat{\gamma}') \quad (2)$$

Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα $(\hat{\alpha}' + \hat{\beta}' + \hat{\gamma}')$ εἶναι μεγαλύτερον τοῦ μηδενὸς καὶ μικρότερον τῶν 4 ὀρθῶν γωνιῶν (§ 702) συνάγομεν ἀπὸ τὴν

σχέσιν (2) ὅτι τὸ ἄθροισμα $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma}$ εἶναι μικρότερον τῶν 6 ὀρθῶν καὶ μεγαλύτερον τῶν 2 ὀρθῶν γωνιῶν· δηλ. εἶναι

$$2 \text{ ὀρθ.} < \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} < 6 \text{ ὀρθ.}$$

2ον. Συμπέρασμα: Ἐστω A ἡ μικροτέρα διέδρος μιᾶς τριέδρου γωνίας. Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι $\widehat{A} + 2 \text{ ὀρθ.} > \widehat{B} + \widehat{\Gamma}$.

Ἀπόδειξις: Γνωρίζομεν ὅτι κάθε ἔδρα τριέδρου γωνίας εἶναι μικρότερα τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων ἐδρῶν· δηλ. ὅτι εἶναι

$$\widehat{\alpha} < \widehat{\beta} + \widehat{\gamma} \quad (3)$$

Ἀλλὰ ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) λαμβάνομεν

$$\widehat{\alpha} = 2 \text{ ὀρθ.} - \widehat{A}, \quad \widehat{\beta} = 2 \text{ ὀρθ.} - \widehat{B}, \quad \widehat{\gamma} = 2 \text{ ὀρθ.} - \widehat{\Gamma}.$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (3) τὰς $\widehat{\alpha}$, $\widehat{\beta}$, $\widehat{\gamma}$ μὲ τὰ ἴσα τῶν καὶ ἔχομεν

$$2 \text{ ὀρθ.} - \widehat{A} < 2 \text{ ὀρθ.} - \widehat{B} + 2 \text{ ὀρθ.} - \widehat{\Gamma} \quad \eta \quad \boxed{\widehat{A} + 2 \text{ ὀρθ.} > \widehat{B} + \widehat{\Gamma}}$$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Εἰς κάθε τριέδρον γωνίαν...**

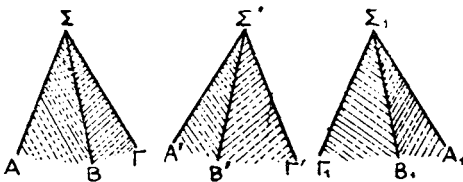
Ἀσκήσεις: 2152, 2153, 2154, 2155, 2156, 2157, 2158.

Περιπτώσεις ισότητος τῶν τριέδρων γωνιῶν

717. Προσανατολισμός τριέδρων γωνιῶν. Ἐστῶσαν αἱ τριέδροι γωνίαι Σ.ΑΒΓ καὶ Σ'.Α'Β'Γ' (Σχ. 492).

Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι δύο παρατηρηταὶ ἔχουν τοποθετηθῆ ἔμπροσθεν τῶν ἀκμῶν ΣΑ καὶ Σ'Α' τῶν τριέδρων αὐτῶν οὕτως, ὥστε αἱ κεφαλαὶ τῶν νὰ εὐρίσκονται εἰς τὰ σημεῖα Σ καὶ Σ' καὶ οἱ πόδες τῶν εἰς τὰ σημεῖα Α καὶ Α' ἀντιστοίχως καὶ ὅτι παρατηροῦν καὶ οἱ δύο εἰς τὸ ἔσωτερικὸν τῶν τριέδρων αὐτῶν γωνιῶν. Ἐάν

καὶ οἱ δύο παρατηρηταὶ ἔχουν πρὸς τὰ δεξιὰ τῶν τὰς ἀκμὰς ΣΒ καὶ Σ'Β' καὶ πρὸς τὰ ἀριστερά τῶν τὰς ἀκμὰς ΣΓ καὶ Σ'Γ', θὰ λέγωμεν, ὅτι αἱ δύο αὐταὶ τριέδροι ἔχουν τὸν αὐτὸν προσανατολισμόν. Εἰς τὴν ἐναντίαν περίπτωσιν θὰ λέγωμεν, ὅτι αἱ τριέδροι δὲν ἔχουν τὸν αὐτὸν προσανατολισμόν.



Σχ. 492.

Π.χ. αἱ τριέδροι $\Sigma.AB\Gamma$ καὶ $\Sigma'.A'B'\Gamma'$ ἔχουν τὸν αὐτὸν προσανατολισμόν, ἐνῶ αἱ τριέδροι $\Sigma.AB\Gamma$ καὶ $\Sigma_1.A_1B_1\Gamma_1$ (Σχ. 492) δὲν ἔχουν τὸν αὐτὸν προσανατολισμόν.

Σημ. Ὅταν γράφωμεν μίαν τριέδρον γωνίαν $\Sigma.AB\Gamma$, θεωροῦμεν, ὅτι ἡ ἀκμὴ ΣA εἶναι ἡ πρώτη ἀκμὴ, ἡ ΣB ἡ δευτέρα καὶ ἡ $\Sigma \Gamma$ ἡ τρίτη.

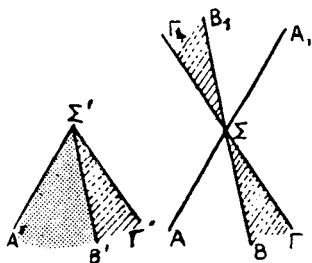
718. Θεώρημα. Περιπτώσεις I. Δύο τριέδροι γωνίαι, αἱ ὁποῖαι ἔχουν μίαν ἕδραν ἴσην καὶ τὰς προσκειμένας εἰς αὐτὴν διέδρους ἴσας μίαν πρὸς μίαν, εἶναι ἴσαι μὲν, ἐὰν ἔχουν τὸν αὐτὸν προσανατολισμόν, συμμετρικαὶ δέ, ἐὰν δὲν ἔχουν τὸν αὐτὸν προσανατολισμόν.

1ον. Αἱ τριέδροι ἔχουν τὸν αὐτὸν προσανατολισμόν.

Ἐπιπέδου: Ἐστῶσαν αἱ δύο τριέδροι γωνίαι $\Sigma.AB\Gamma$ καὶ $\Sigma'.A'B'\Gamma'$ (Σχ 493), αἱ ὁποῖαι ἔχουν $\Lambda\Sigma\Gamma = A'\Sigma'\Gamma'$, διέδρ. $\Sigma A =$ διέδρ. $\Sigma'A'$ καὶ διέδρ. $\Sigma\Gamma =$ διέδρ. $\Sigma'\Gamma'$.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ τριέδροι αὐταὶ εἶναι ἴσαι.

Ἀπόδειξις: Λαμβάνομεν τὴν τριέδρον $\Sigma'.A'B'\Gamma'$ καὶ τὴν θέτομεν (νοτρῶς) ἐπὶ τῆς τριέδρου $\Sigma.AB\Gamma$ οὕτως, ὥστε ἡ ἕδρα $A'\Sigma'\Gamma'$ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης τῆς ἕδρας $\Lambda\Sigma\Gamma$. Ἐπειδὴ αἱ τριέδροι αὐταὶ ἔχουν τὸν αὐτὸν προσανατολισμόν, αἱ ἀκμαὶ $\Sigma'B'$ καὶ ΣB θὰ πέσουν πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου $\Lambda\Sigma\Gamma$.



Σχ. 493.

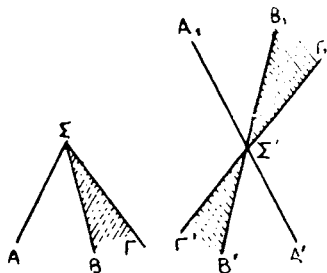
Ἐπειδὴ ἡ διέδρος $\Sigma'A'$ εἶναι ἴση μὲ τὴν διέδρον ΣA , τὸ ἐπίπεδον $A'\Sigma'B'$ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $\Lambda\Sigma B$. Ἐπίσης, ἐπειδὴ ἡ διέδρος $\Sigma'\Gamma'$ εἶναι ἴση μὲ τὴν διέδρον $\Sigma\Gamma$, τὸ ἐπίπεδον $\Gamma'\Sigma'B'$ θὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $\Gamma\Sigma B$. Ὡστε τὰ δύο ἐπίπεδα $A'\Sigma'B'$ καὶ $\Gamma'\Sigma'B'$ ἐφαρμόζουσι ἐπὶ τῶν δύο ἐπιπέδων $\Lambda\Sigma B$ καὶ $\Gamma\Sigma B$ καὶ ἐπομένως καὶ ἡ τομὴ $\Sigma'B'$ τῶν δύο πρώτων ἐπιπέδων θὰ ἐφαρμόσῃ μὲ τὴν τομὴν ΣB τῶν δύο δευτέρων ἐπιπέδων. Αἱ τριέδροι λοιπὸν γωνίαι $\Sigma.AB\Gamma$ καὶ $\Sigma'.A'B'\Gamma'$ ἐφαρμόζουσι καὶ ἐπομένως εἶναι ἴσαι.

2ον. Αἱ τριέδροι δὲν ἔχουν τὸν αὐτὸν προσανατολισμόν.

Ἐπιπέδου: Ἐστῶσαν αἱ τριέδροι $\Sigma.AB\Gamma$ καὶ $\Sigma'.A'B'\Gamma'$ (Σχ. 494), αἱ ὁποῖαι δὲν ἔχουν τὸν αὐτὸν προσανατολισμόν.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ τριέδρος $\Sigma.AB\Gamma$ εἶναι συμμετρικὴ τῆς τριέδρου $\Sigma'.A'B'\Gamma'$.

Ἀπόδειξις: Λαμβάνομεν τὴν συμμετρικὴν $\Sigma'.A_1B_1\Gamma_1$ τῆς $\Sigma'.A'B'\Gamma'$. Αἱ τριέδροι $\Sigma'.A_1B_1\Gamma_1$ καὶ $\Sigma.AB\Gamma$ ἔχουν τότε τὸν αὐτὸν προσανατολισμὸν καὶ ἐπομένως αἱ τριέδροι αὐταὶ εἶναι ἴσαι.



Σχ. 494.

Ἐπειδὴ δὲ ἡ $\Sigma'.A_1B_1\Gamma_1$ εἶναι συμμετρικὴ τῆς $\Sigma'.A'B'\Gamma'$ καὶ ἡ ἴση τῆς $\Sigma.AB\Gamma$ θὰ εἶναι συμμετρικὴ τῆς $\Sigma'.A'B'\Gamma'$.

Ἐδείχθη λοιπὸν, ὅτι: **Δύο τριέδροι γωνίαι, αἱ ὁποῖαι...**

719. Θεώρημα. Περίπτωσης II. Δύο τριέδροι, αἱ ὁποῖαι ἔχουν δύο ἕδρας ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ τὴν ὑπ' αὐτῶν περιεχομένην διέδρον

γωνίαν ἴσην, εἶναι ἴσαι μὲν, ἐὰν ἔχουν τὸν αὐτὸν προσανατολισμὸν, συμμετρικαὶ δέ, ἐὰν δὲν ἔχουν τὸν αὐτὸν προσανατολισμὸν.

1ον. Αἱ τριέδροι ἔχουν τὸν αὐτὸν προσανατολισμὸν.

Ἐπιπέδουσι: Ἐστῶσαν αἱ δύο τριέδροι γωνίαι $\Sigma.AB\Gamma$ καὶ $\Sigma'.A'B'\Gamma'$ (Σχ. 493), αἱ ὁποῖαι ἔχουν $\widehat{A\Sigma B} = \widehat{A'\Sigma'B'}$, $\widehat{A\Sigma\Gamma} = \widehat{A'\Sigma'\Gamma'}$ καὶ διέδρ. $\Sigma A =$ διέδρ. $\Sigma'A'$.

Συμπέρασμα: Ἐὰν δείξωμεν, ὅτι αἱ τριέδροι αὐταὶ εἶναι ἴσαι.

Ἀπόδειξις: Λαμβάνομεν τὴν τριέδρον $\Sigma'.A'B'\Gamma'$ καὶ τὴν θέτομεν ἐπὶ τῆς τριέδρου $\Sigma.AB\Gamma$ οὕτως, ὥστε ἡ ἕδρα $A'\Sigma'\Gamma'$ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης τῆς $A\Sigma\Gamma$. Ἐπειδὴ αἱ διέδροι γωνίαι $\Sigma'A'$ καὶ ΣA εἶναι ἴσαι, τὸ ἐπίπεδον τῆς ἕδρας $A'\Sigma'B'$ θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς ἕδρας $A\Sigma B$ καὶ ἐπειδὴ ἐξ ἄλλου ἡ ἕδρα $A'\Sigma'B'$ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἕδραν $A\Sigma B$, ἡ ἀκμὴ $\Sigma'B'$ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς ἀκμῆς ΣB . Ἀλλὰ τότε αἱ δύο τριέδροι συμπίπτουν καὶ ἐπομένως εἶναι ἴσαι.

2ον. Αἱ τριέδροι δὲν ἔχουν τὸν αὐτὸν προσανατολισμὸν.

Ἡ ἀπόδειξις γίνεται ὅπως εἰς τὴν προηγουμένην περίπτωσιν (§ 718).

Ἐδείχθη λοιπὸν, ὅτι: **Δύο τριέδροι, αἱ ὁποῖαι...**

720. Θεώρημα. Περίπτωσης III. Δύο τριέδροι γωνίαι, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὸν αὐτὸν προσανατολισμὸν, εἶναι ἴσαι, ἐὰν ἔχουν τὰς τρεῖς ἕδρας τῶν ἴσας μίαν πρὸς μίαν.

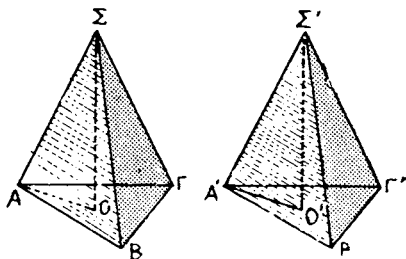
Ἐπιπέδουσι: Ἐστῶσαν αἱ δύο τριέδροι γωνίαι $\Sigma.AB\Gamma$ καὶ $\Sigma'.A'B'\Gamma'$

(Σχ. 495), αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὸν αὐτὸν προσανατολισμὸν καὶ εἰς τὰς ὁποίας εἶναι :

$$\widehat{A\hat{\Sigma}B} = \widehat{A'\hat{\Sigma}'B'}, \quad \widehat{B\hat{\Sigma}\Gamma} = \widehat{B'\hat{\Sigma}'\Gamma'}, \quad \widehat{\Gamma\hat{\Sigma}A} = \widehat{\Gamma'\hat{\Sigma}'A'}.$$

Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι αἱ τριέδροι αὐταὶ εἶναι ἴσαι.

Ἀπόδειξις: Ἐπὶ τῶν ἑξ ἄκμῶν λαμβάνομεν ἴσα μῆκη $\Sigma A, \Sigma B, \Sigma \Gamma, \Sigma' A', \Sigma' B', \Sigma' \Gamma'$ καὶ φέρομεν τὰς εὐθείας $AB, B\Gamma, \Gamma A, A'B', B'\Gamma', \Gamma'A'$. Τὰ δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΣAB καὶ $\Sigma' A'B'$ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν μίαν γωνίαν ἴσην περιεχομένην μεταξὺ δύο πλευρῶν ἴσων ἄρα θὰ εἶναι $AB = A'B'$. Ὀμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι $B\Gamma = B'\Gamma'$ καὶ $\Gamma A = \Gamma'A'$. Ἀλλὰ τότε τὰ τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $A'B'\Gamma'$ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς πλευράς των ἴσας μίαν πρὸς μίαν. Ἀπὸ τὰς κορυφὰς Σ καὶ Σ' φέρομεν τὰς καθέτους ΣO καὶ $\Sigma'O'$ ἐπὶ τὰ ἐπιπέδα $AB\Gamma$ καὶ $A'B'\Gamma'$. Ἐπειδὴ αἱ πλάγιοι $\Sigma A, \Sigma B, \Sigma \Gamma$ εἶναι ἴσαι, θὰ εἶναι $OA = OB = O\Gamma$ καὶ ἐπομένως τὸ O



Σχ. 495.

εἶναι τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περὶ τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$.

Ὀμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι τὸ O' εἶναι τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περὶ τὸ τρίγωνον $A'B'\Gamma'$. Ἐπειδὴ τὰ τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $A'B'\Gamma'$ εἶναι ἴσα, αἱ ἀκτῖνες OA καὶ $O'A'$ τῶν περιγεγραμμένων κύκλων εἶναι ἴσαι, δηλ. εἶναι $OA = O'A'$. Ἀλλὰ τότε τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΣOA καὶ $\Sigma'O'A'$ εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς ὑποτείνουσας των ἴσας, $\Sigma A = \Sigma'A'$ καὶ μίαν κάθετον πλευρὰν ἴσην, $OA = O'A'$. Ἄρα θὰ εἶναι καὶ $\Sigma O = \Sigma'O'$.

Λαμβάνομεν τώρα τὴν τριέδρον $\Sigma' A'B'\Gamma'$ καὶ τὴν θέτομεν (νοερῶς) ἐπὶ τῆς τριέδρου $\Sigma AB\Gamma$ οὕτως, ὥστε τὸ τρίγωνον $A'B'\Gamma'$ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τοῦ ἴσου τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$. Τότε τὸ κέντρον O' θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ O . Αἱ δύο κορυφαὶ Σ καὶ Σ' θὰ κείνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου $AB\Gamma$, διότι ἄλλως αἱ τριέδροι δὲν θὰ εἶχον τὸν αὐτὸν προσανατολισμὸν. Ἐπειδὴ αἱ $O'S'$ καὶ $O\Sigma$ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον $AB\Gamma$ εἰς τὸ σημεῖον O , ἢ $O'S'$ θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς $O\Sigma$ καὶ ἐπειδὴ εἶναι $O'S' = O\Sigma$, ὡς ἐδείχθη ἀνωτέρω, ἢ κορυφῆ Σ' θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς κορυφῆς Σ . Ἀλλὰ τότε αἱ ἄκμαι $\Sigma'A', \Sigma'B', \Sigma'\Gamma'$ θὰ ἐφαρμόσουν ἀντιστοιχῶς ἐπὶ τῶν ἄκμῶν $\Sigma A, \Sigma B, \Sigma \Gamma$ καὶ ἡ τριέδρος

$\Sigma'.\Lambda.\text{B}'\Gamma'$ θὰ ἐφαρμύσῃ ἐπὶ τῆς τριέδρου $\Sigma.\text{A.B}\Gamma$. Ἐπειδὴ αἱ τριέδροι αὐταὶ ἐφαρμύζουσι εἶναι ἴσαι.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: *Δύο τριέδροι γωνίαι, αἱ ὁποῖαι. . .*

Παρατήρησις. Ἐὰν αἱ δύο τριέδροι $\Sigma\text{A}\text{B}\Gamma$ καὶ $\Sigma'\Lambda\text{B}'\Gamma'$ δὲν εἶχον τὸν αὐτὸν προσανατολισμὸν (Σχ. 494), τότε ἡ μία τριέδρος εἶναι ἴση μὲν τὴν συμμετρικὴν τῆς ἄλλης.

721. Θεώρημα. *Δύο τριέδροι, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰς διέδρους τῶν γωνίας ἴσας μίαν πρὸς μίαν, εἶναι ἴσαι μὲν, ἐὰν ἔχουν τὸν αὐτὸν προσανατολισμὸν, συμμετρικαὶ δέ, ἐὰν δὲν ἔχουν τὸν αὐτὸν προσανατολισμὸν.*

Ἐπίδησις: Ἐστῶσαν αἱ τριέδροι Σ καὶ Σ' , αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰς διέδρους γωνίας τῶν ἴσας μίαν πρὸς μίαν.

Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξωμεν ὅτι αἱ τριέδροι Σ καὶ Σ' εἶναι ἴσαι, ἐὰν ἔχουν τὸν αὐτὸν προσανατολισμὸν, συμμετρικαὶ δέ, ἐὰν δὲν ἔχουν τὸν αὐτὸν προσανατολισμὸν.

Ἀπόδειξις: Ἐὰν αἱ τριέδροι Σ καὶ Σ' (Σχ. 495) ἔχουν τὰς διέδρους γωνίας τῶν ἴσας μίαν πρὸς μίαν, αἱ παραπληρωματικαὶ τῶν τριέδρων Σ_1 καὶ Σ'_1 θὰ ἔχουν τὰς ἑδρας τῶν ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι ἴσαι ἢ συμμετρικαὶ (§ 720). Αἱ δύο παραπληρωματικαὶ τριέδροι Σ_1 καὶ Σ'_1 , ὡς ἴσαι ἢ συμμετρικαὶ, θὰ ἔχουν τὰς διέδρους τῶν ἴσας. Ἀλλὰ ἀφοῦ αἱ διέδροι τῶν Σ_1 καὶ Σ'_1 εἶναι ἴσαι, αἱ παραπληρωματικαὶ αὐτῶν, δηλ. αἱ δοθεῖσαι τριέδροι Σ καὶ Σ' , θὰ ἔχουν τὰς ἑδρας τῶν ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ θὰ εἶναι ἴσαι ἢ συμμετρικαὶ.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: *Δύο τριέδροι, αἱ ὁποῖαι. . .*

Ἀσκήσεις

2142. (2178). Δύο ἑδραι τριέδρου γωνίας εἶναι 58° καὶ 127° . Μεταξὺ ποιῶν τιμῶν περιέχεται ἡ τρίτη ἑδρα τῆς;

2143. (2179). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι κάθε ἑδρα πολυέδρου στερεᾶς γωνίας εἶναι μικρότερα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἄλλων ἐδρῶν τῆς.

2144. (2180). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν ἑνὸς στρεβλοῦ τετραπλεύρου εἶναι μικρότερον τῶν τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν.

2145. (2181). Ἐὰν φέρωμεν μίαν ἡμιευθεῖαν OX εἰς τὸ ἐσωτερικὸν μιᾶς τριέδρου γωνίας $\text{O.AB}\Gamma$ θὰ ἔχωμεν

$$\widehat{\text{XOB}} + \widehat{\text{XOG}} < \widehat{\text{AOB}} + \widehat{\text{AOG}}.$$

2146. (2182). Εἰς μίαν ἰσοσκελεῖ τριέδρου γωνίαν, τὸ ἐπίπεδον τὸ ὁποῖον διχοτομεῖ τὴν διέδρον, ἢ ὁποῖα περιέχεται μεταξὺ τῶν ἴσων ἐδρῶν τῆς, εἶναι

κάθετον ἐπὶ τὴν ἔδραν, ἢ ὁποία κεῖται ἀπέναντι τῆς διέδρου αὐτῆς.

2147. (2183). Μία τριέδρος εἶναι ἰσοσκελῆς, ἐὰν τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον διχοτομεῖ μίαν διέδρον γωνίαν τῆς, εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ἀπέναντι ἔδραν.

2148. (2184). Εἰς μίαν ἰσοσκελῆ τριέδρον γωνίαν τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον ἄγεται ἀπὸ τὴν κοινὴν ἀκμὴν τῶν δύο ἴσων ἐδρῶν τῆς, καθέτως ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς ἀπέναντι ἔδρας, διέρχεται ἀπὸ τὴν διχοτόμον τῆς ἔδρας αὐτῆς.

2149. (2185). Μία τριέδρος γωνία εἶναι ἰσοσκελῆς, ἐὰν τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον ἄγεται ἀπὸ μίαν ἀπὸ τὰς ἀκμὰς τῆς, καθέτως ἐπὶ τὴν ἀπέναντι ἔδραν τῆς, διέρχεται ἀπὸ τὴν διχοτόμον τῆς ἔδρας αὐτῆς.

2150. (2186). Ἐὰν εἰς μίαν τριέδρον γωνίαν δύο ἐπίπεδοι γωνίαι τῆς εἶναι ὀρθαὶ καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτῶν κείμεναι διέδροι εἶναι ὀρθαὶ καὶ ἀντιστροφῶς.

2151. (2187). Ἐὰν, εἰς μίαν τριέδρον γωνίαν $O.AB\Gamma$, ἡ ἀκμὴ OG σχηματίζῃ μὲ τὴν διχοτόμον OA τῆς ἀπέναντι ἔδρας, μίαν γωνίαν ἴσην μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ἔδρας αὐτῆς, ἡ διέδρος Γ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα $A+B$ τῶν δύο ἄλλων διέδρων γωνιῶν.

2152. (2188). Ἄν δύο τριέδροι ἔχουν τὰς διέδρους γωνίας τῶν ἴσας μίαν πρὸς μίαν, αἱ παραπληρωματικαὶ τῶν θὰ ἔχουν τὰς ἐπιπέδους τῶν ἴσας μίαν πρὸς μίαν.

2153. (2189). Ἄν δύο τριέδροι ἔχουν τὰς ἔδρας τῶν ἴσας μίαν πρὸς μίαν, αἱ παραπληρωματικαὶ τῶν ἔχουν τὰς διέδρους τῶν ἴσας μίαν πρὸς μίαν.

2154. (2190). Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἔδρα $BO\Gamma = \alpha$ μιᾶς τριέδρου $O.AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ διέδρος A εἶναι ὀρθὴ καὶ ὅτι αἱ ἔδραι $AO\Gamma = \beta$ καὶ $AOB = \gamma$ εἶναι γωνίαι 45° .

2155. (2191). Εἰς μίαν μίαν τριέδρον $O.AB\Gamma$ γνωρίζωμεν τὴν ἔδραν $\alpha = 90^\circ$ καὶ τὰς διέδρους $B = \Gamma = 135^\circ$. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διέδρος A .

2156. (2192). Εἰς μίαν τριέδρον γωνίαν μία ἔδρα τῆς τοῦλάχιστον εἶναι μικροτέρα τῶν 120° καὶ μία διέδρός τῆς τοῦλάχιστον εἶναι μεγαλυτέρα τῶν 60° .

2157. (2193). Δίδεται μία πολυέδρος στερεὰ γωνία μὲ n ἔδρας. Νὰ ἀποδειχθῇ: 1ον. ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν διέδρων γωνιῶν τῆς περιέχεται μεταξὺ $2n$ καὶ $2(n-2)$ ὀρθῶν διέδρων γωνιῶν.

2ον. ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐξωτερικῶν διέδρων τῆς εἶναι μικρότερον τῶν τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν.

2158. (2194). Μία τριέδρος $O.XYZ$ ἔχει τὰς ἀκμὰς OX, OY ὠρισμένας καὶ τὰς ἔδρας τῆς $\widehat{XOZ}, \widehat{YOZ}$ μεταβλητάς, ἀλλὰ παραπληρωματικὰς. Νὰ εὐρεθῇ ὁ τόπος τῆς ἀκμῆς OZ .

Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν ἐπὶ τοῦ ΣΤ' Κεφαλαίου

A' Ὁμάς. 2159. (2195). Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζει μία ἡμιευθεῖα OX , ἢ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν O μιᾶς τριέδρου $O.AB\Gamma$ εἰς τὸ ἑσωτερικὸν τῆς τριέδρου αὐτῆς, μὲ τὰς τρεῖς ἀκμὰς, περιέχεται μεταξὺ τοῦ ἄθροίσματος τῶν ἐδρῶν τῆς τριέδρου καὶ τοῦ ἡμισυτοῦ αὐτῶν.

2160. (2196). Εἰς κάθε τριέδρον γωνίαν, τὰ ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα διχοτομοῦν τὰς διέδρους γωνίας τῆς, τέμνονται κατὰ τὴν αὐτὴν εὐθεΐαν.

2161. (2197). Δίδεται μία τριέδρος $O.AB\Gamma$ εἰς τὴν ὁποίαν ἡ διέδρος Γ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα $A+B$ τῶν δύο ἄλλων διέδρων. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ἀκμή OG σχηματίζει μὲ τὴν διχοτόμον OD τῆς ἀπέναντι ἕδρας μίαν γωνίαν ἴσην μὲ τὸ ἥμισυ τῆς ἕδρας αὐτῆς.

2162. (2198). Εἰς κάθε τριέδρον γωνίαν, τὰ ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα διέρχονται ἀπὸ τὰς ἀκμὰς τῆς καὶ ἀπὸ τὰς διχοτόμους τῶν ἀπέναντι ἕδρῶν τῆς, τέμνονται κατὰ τὴν αὐτὴν εὐθεΐαν.

2163. (2199). Εἰς μίαν τριέδρον γωνίαν, τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον περιέχει μίαν ἀκμὴν τῆς καὶ τὴν ἐσωτερικὴν διχοτόμον τῆς ἀπέναντι ἕδρας καὶ τὰ δύο ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα ὀρίζονται, ἕκαστον, ἀπὸ μίαν ἐκ τῶν δύο ἄλλων ἀκμῶν καὶ ἀπὸ τὴν ἐξωτερικὴν διχοτόμον τῆς ἀπέναντι ἕδρας, τέμνονται κατὰ μίαν εὐθεΐαν.

2164. (2200). Εἰς μίαν τριέδρον: $1ov.$ αἱ διχοτόμοι δύο ἕδρῶν καὶ ἡ διχοτόμος τῆς ἐφεξῆς παραπληρωματικῆς γωνίας τῆς τρίτης ἕδρας, κείνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

$2ov.$ αἱ διχοτόμοι τῶν ἐφεξῆς παραπληρωματικῶν γωνιῶν τῶν τριῶν ἕδρῶν τῆς κείνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

2165. (2201). Εἰς κάθε τριέδρον γωνίαν, τὰ ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα εἶναι κάθετα ἐπὶ τὰς ἕδρας τῆς καὶ διέρχονται ἀπὸ τὰς διχοτόμους τῶν ἕδρῶν αὐτῶν, τέμνονται κατὰ τὴν αὐτὴν εὐθεΐαν.

2166. (2202). Ἡ τομὴ μιᾶς ὀρθογωνίου τριέδρου γωνίας (δηλ. μιᾶς τριέδρου τῆς ὁποίας μία διέδρος εἶναι ἴση μὲ ὀρθήν) ὑπὸ ἐνὸς ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ μίαν ἐκ τῶν ἀκμῶν τῆς, εἶναι ἓνα ὀρθογώνιον τρίγωνον.

2167. (2203). Εἰς κάθε τριέδρον γωνίαν, τὰ ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα διέρχονται ἀπὸ τὰς ἀκμὰς τῆς καὶ εἶναι κάθετα ἐπὶ τὰς ἀπέναντι ἕδρας τῆς, τέμνονται κατὰ τὴν αὐτὴν εὐθεΐαν.

2168. (2204). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι: $1ov.$ ἡ προβολὴ τῆς κορυφῆς O μιᾶς τρισσορθογωνίου τριέδρου γωνίας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὰς ἀκμὰς τῆς εἰς τὰ σημεῖα A, B, Γ , συμπίπτει μὲ τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$.

$2ov.$ τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ ἔχει ὅλας τὰς γωνίας του ὀξείας.

2169. (2205). Ἐάν, ἀπὸ ἓνα σημεῖον, τὸ ὁποῖον κείται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν μιᾶς πολυέδρου γωνίας, φέρωμεν καθέτους ἐπὶ ὅλας τὰς ἕδρας τῆς, ἡ νέα πολυέδρος γωνία εἶναι παραπληρωματικὴ τῆς πρώτης.

2170. (2206). Ἐπὶ τῶν ἀκμῶν μιᾶς τριέδρου γωνίας λαμβάνομεν τρία σημεῖα A, B, Γ καὶ ἔστω H ἡ προβολὴ τῆς κορυφῆς O τῆς τριέδρου $O.AB\Gamma$ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον $AB\Gamma$. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ τρίγωνον AOB εἶναι μέσον ἀνάλογον μεταξὺ τῶν τριγώνων $AB\Gamma$ καὶ HAB .

Β' Ὁμάς. **2171.** (2207). Ποῖος εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὰς τρεῖς ἕδρας μιᾶς τριέδρου γωνίας.

2172. (2208). Ποῖος εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὰς τρεῖς ἀκμὰς μιᾶς τριέδρου γωνίας.

2173. (2209). Τέμνομεν μίαν τριέδρον $O.XYZ$ μὲ ἓνα μεταβλητὸν ἐπίπεδον καὶ ἔστω $AB\Gamma$ ἡ τομὴ τῆς. Νὰ εὐρεθῇ ὁ τόπος τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$:

$1ov.$ ὅταν τὰ σημεῖα A καὶ B εἶναι ὄρισμένα.

$2ov.$ ὅταν τὸ A εἶναι ὄρισμένον.

Γ' Ὁμάς. 2174. (2210). Δίδεται ἓνα ἐπίπεδον Π καὶ δύο εὐθεῖαι ΟΑ καὶ ΟΒ, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὸ Π εἰς τὸ σημεῖον Ο. Νὰ εὐρεθῇ ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π μία εὐθεῖα ΟΓ τοιαύτη, ὥστε τὰ ἐπίπεδα ΟΑΓ καὶ ΟΒΓ νὰ εἶναι ὀρθογώνια.

2175. (2211). Νὰ κατασκευασθῇ μία τρισσορθογώνιος τριέδρος γωνία, τῆς ὁποίας αἱ ἀκμαὶ νὰ διέρχωνται ἀπὸ τρία δοθέντα σημεῖα Α, Β, Γ.

2176. (2212). Νὰ κατασκευασθῇ μία τρισσορθογώνιος τριέδρος γωνία, τῆς ὁποίας αἱ ἀκμαὶ νὰ ἔχουν, ὡς προβολάς ἐπὶ ἓνα ἐπίπεδον, τρεῖς δοθείσας τεμνομένης ἡμιευθείας.

2177. (2213). Δίδεται μία τριέδρος Ο.ΧΥΖ καὶ εἰς τὸ ἑσωτερικὸν αὐτῆς ἓνα σημεῖον Θ. Νὰ τμηθῇ ἡ τριέδρος αὐτὴ ὑπὸ ἑνὸς ἐπιπέδου οὕτω, ὥστε ἡ τομὴ ΑΒΓ νὰ ἔχῃ τὸ σημεῖον Θ ὡς σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέσων τῆς.

2178. (2614). 1ον. Νὰ τμηθῇ μία τρισσορθογώνιος τριέδρος γωνία Ο.ΧΥΖ ὑπὸ ἑνὸς ἐπιπέδου οὕτως, ὥστε ἡ τομὴ ΑΒΓ νὰ εἶναι ἴση μὲ δοθὲν τρίγωνον.

2ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ $OA=x$, $OB=y$, $OG=z$, ἐὰν δίδωνται αἱ πλευραὶ $a=244$ ἐκ., $\beta=267$ ἐκ., $\gamma=125$ ἐκ. τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

2179. (2215). Νὰ τμηθῇ δοθεῖσα τετράεδρος στερεὰ γωνία, εἰς τρόπον, ὥστε ἡ τομὴ νὰ εἶναι ἓνα παραλληλόγραμμον.

Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν ἐπὶ τοῦ Ε' Βιβλίου

Α' Ὁμάς. 2180. (2216). Δίδονται δύο τρίγωνα ΑΒΓ, Α'Β'Γ', τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν πλευρὰν ΒΓ κοινὴν καὶ Η, Η' τὰ ὀρθόκεντρά των. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἐὰν ἡ Α'Α εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ, ἡ ΗΗ' εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Α'Β'Γ'.

2181. (2217). Δίδονται δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι Χ, Υ, τῶν ὁποίων αἱ προβολαὶ ἐπὶ ἓνα ἐπίπεδον εἶναι παράλληλοι. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὅλαι αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι συναντοῦν τὰς Χ καὶ Υ καὶ αἱ ὁποῖαι εἶναι παράλληλοι πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π συναντοῦν μίαν εὐθεῖαν, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ Π.

2182. (2218). Δίδονται δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι ΟΧ καὶ ΟΥ καὶ ἡ κάθετος ΟΖ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδόν των κατασκευάζομεν τὰ συμμετρικὰ Μ' καὶ Μ'' ἐνὸς τυχόντος σημείου Μ πρὸς ἄξονας συμμετρίας τὰς ΟΧ καὶ ΟΥ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ Μ'Μ'' εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον ΧΟΥ καὶ ὅτι ἡ διέδρος Μ-ΟΖ-Μ'' εἶναι διπλασία τῆς Χ-ΟΖ-Υ.

2183. (2219). Δίδεται μία διέδρος γωνία Π-ΑΒ-Ρ. Ἀπὸ τυχὸν σημείου Ο τῆς ἀκμῆς ΑΒ φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΟΓ πλαγίαν πρὸς τὴν ΑΒ καὶ κειμένην ἐπὶ τῆς ἑδρας Ρ καὶ τὴν ΟΔ κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκμὴν ΑΒ καὶ κειμένην ἐπὶ τῆς ἑδρας Π. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ σχηματιζομένη γωνία ΓΟΔ εἶναι μεγαλύτερα, ἴση ἢ μικροτέρα τῆς ἐπιπέδου γωνίας τῆς διέδρου, καθόσον ἡ διέδρος γωνία εἶναι ὀξεῖα, ὀρθὴ ἢ ἀμβλεία.

2184. (2220). Δίδεται ἓνας κύκλος διαμέτρου ΑΒ. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΧ καὶ ΒΥ καθέτους ἐπὶ τὴν διάμετρον ΑΒ οὕτως, ὥστε νὰ σχηματίζουν ἴσας γωνίας ω μὲ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου καὶ νὰ μὴν εἶναι παράλληλοι. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι κάθε εὐθεῖα, ἡ ὁποία συναντᾷ τὰς δύο αὐτὰς εὐθείας καὶ τὸν κύκλον, σχηματίζει τὴν αὐτὴν γωνίαν ω μὲ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου καὶ προβάλλεται ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ κατὰ μίαν ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου.

2185. (2221). Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι κάθε εὐθεία, ἡ ὁποία τέμνει τὰς ἔδρας μιᾶς διέδρου γωνίας εἰς σημεῖα, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὴν ἰσχυρὴν τῆς διέδρου αὐτῆς, σχηματίζει ἴσας γωνίας μὲ ἐκάστην τῶν ἐδρῶν καὶ ἀντιστρόφως.

2186. (2222). Δίδονται δύο ὀρθογώνιοι εὐθείαι E καὶ E' , ἡ κοινὴ κάθετός τῶν $AA' = a$ καὶ ἓνα εὐθύγραμμον τμήμα MM' σταθεροῦ μήκους λ , τὸ ὁποῖον ὀλισθαίνει διὰ τῶν ἄκρων του ἐπὶ τῶν εὐθειῶν E καὶ E' . Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι:

1ον. ἡ MM' σχηματίζει μὲ τὴν AA' μίαν γωνίαν σταθεράν.

2ον. τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν 6 τμημάτων, ποῦ συνδέουν τὰ σημεῖα A, A', M, M' ἀνὰ δύο, μένει σταθερόν.

B' Ὁμάς. 2187. (2223). Ἐὰν δύο στρεβλά τετράπλευρα $AB\Gamma\Delta$ καὶ $A'B'\Gamma'\Delta'$ ἔχουν τὰς πλευράς τῶν παραλλήλους μίαν πρὸς μίαν, αἱ εὐθεῖαι $AA', BB', \Gamma\Gamma', \Delta\Delta'$ αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰς κορυφὰς τῆς τομῆς τῶν παραλλήλων πλευρῶν τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον ἢ ἐξαιρετικῶς εἶναι παράλληλοι.

2188. (2224). Δίδονται πέντε ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα OA, OB, OG, OD, OE , τὰ ὁποῖα ἔχουν ἓνα κοινὸν ἄκρον καὶ δὲν κείνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι οἱ κύκλοι (A, B, Γ) καὶ (A, Δ, E) ἔχουν καὶ ἓνα δευτερόν σημεῖον κοινόν.

2189. (2225). Ἐὰν μ καὶ μ' εἶναι αἱ προβολαὶ ἑνὸς σημείου M ἐπὶ δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα Π καὶ P , αἱ προβολαὶ τῶν μ καὶ μ' ἐπὶ τὴν τομὴν XY τῶν ἐπιπέδων αὐτῶν συμπίπτουν καὶ ἀντιστρόφως.

Γ' Ὁμάς. 2190. (2226). Νὰ εὐρεθῆ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον O καὶ ἐπὶ τὰς ὁποίας εὐθείας δύο δοθέντα εὐθύγραμμα τμήματα νὰ ἔχουν ἴσας προβολάς.

2191. (2227). Δίδονται δύο εὐθεῖαι E καὶ E' ὀρθογώνιοι καὶ ἓνα ἐπίπεδον Π , τὸ ὁποῖον διέρχεται ἀπὸ τὴν E' καὶ εἶναι παράλληλον πρὸς τὴν E . Νὰ εὐρεθῆ ὁ τόπος τῶν σημείων M τοῦ ἐπιπέδου Π , τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὰς εὐθείας E καὶ E' νὰ εἶναι ἴσον μὲ k^2 .

2192. (2228). Μία εὐθεῖα μετακινεῖται, μένουσα παράλληλος πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον οὕτως, ὥστε τὰ ἄκρα τῆς νὰ κείνται ἐπὶ δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν AB καὶ $\Gamma\Delta$. Νὰ εὐρεθῆ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τοῦ μέσου τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος, τοῦ περιλαμβανομένου μεταξὺ τῶν εὐθειῶν AB καὶ $\Gamma\Delta$.

2193. (2229). Εἰς ἓνα ὠρισμένον ἐπίπεδον Π , μία γωνία xOy σταθεροῦ μεγέθους στρέφεται περὶ τὴν κορυφὴν τῆς O . Ἀπὸ ἓνα σημεῖον A , τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου Π , φέρομεν τὰς καθέτους AB καὶ $A\Gamma$ ἐπὶ τὰς πλευράς Ox καὶ Oy . Νὰ εὐρεθῆ ὁ τόπος τοῦ μέσου M τῆς $B\Gamma$.

2194. (2230). Μία εὐθεῖα μετακινεῖται μένουσα παράλληλος πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον οὕτως, ὥστε τὰ ἄκρα τῆς νὰ κείνται ἐπὶ δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν. Νὰ εὐρεθῆ ὁ τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα διαιροῦν τὴν κινήτην αὐτὴν εὐθεῖαν κατὰ δοθέντα λόγον.

2195. (2231). Δίδεται μία διέδρος γωνία καὶ ἓνα σημεῖον A τῆς ἀκμῆς τῆς EZ . Ἀπὸ τὸ σημεῖον A φέρομεν ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα τέμνουν τὰς ἔδρας τῆς διέδρου κατὰ εὐθείας καθέτους. Νὰ προσδιορισθοῦν τὰ ἐπίπεδα αὐτὰ καὶ νὰ εὐρεθῆ ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν ποδῶν τῶν καθέτων, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἐπ' αὐτὰ ἀπὸ ἓνα ἄλλο σημεῖον B τῆς ἀκμῆς EZ .

Δ' Ὁμάς. 2196. (2232). Δίδονται δύο ἐπίπεδα Π καὶ Π' , τὰ ὁποῖα τέμνον-

ται κατὰ τὴν εὐθείαν XY καὶ ἓνα ἐπίπεδον Π'' , τὸ ὁποῖον συναντᾷ τὴν XY . Νὰ κατασκευασθῇ ἡ προβολὴ μ'' ἐπὶ τοῦ Π'' ἑνὸς σημείου, ἂν γνωρίζωμεν μόνον τὰς προβολὰς μ καὶ μ' τοῦ σημείου αὐτοῦ ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Π' .

2197. (2233). Ἐὰν ἀπὸ τὴν κορυφὴν μιᾶς τρισσορθογωνίου τριέδρου γωνίας φέρωμεν εἰς τὸ ἔσωτερικόν της μίαν ἡμιευθεῖαν :

1ον. τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζει αὕτη μὲ τὰς ἀκμὰς καὶ μὲ τὰς ἔδρας εἶναι ἴσον μὲ τρεῖς ὀρθὰς γωνίας.

2ον. τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζει αὕτη μὲ τὰς ἀκμὰς εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζει αὕτη μὲ τὰς ἔδρας.

2198. (2234). Δίδεται μία τετράεδρος γωνία $O.XYZT$ εἰς τὴν ὁποίαν αἱ ἀπέναντι ἔδραι εἶναι ἴσαι. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι :

1ον αἱ ἀπέναντι διέδροι εἶναι ἴσαι.

2ον. τὰ δύο ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα διέρχονται ἀπὸ τὰς ἀπέναντι ἀκμὰς της (διαγώνια ἔδραι) τέμνονται κατὰ μίαν εὐθείαν OO' , ἡ ὁποία εἶναι διχοτόμος ἑκάστης τῶν ἔδρων αὐτῶν.

3ον. κάθε ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν OO' τέμνει τὴν τετράεδρον κατὰ ἓνα παραλληλόγραμμον. Νὰ ἐξαχθῇ ἐκ τῆς τελευταίας ιδιότητος ἡ κατασκευὴ τῶν τετραέδρων γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰς ἀπέναντι ἔδρας τῶν ἴσας.

2199. (2235). Εἰς ἓνα ἐπίπεδον Π γράφομεν ἓνα κύκλον O διαμέτρου AB καὶ φέρομεν τὴν κάθετον εἰς τὸ A ἐπὶ τὸ Π' ἐπὶ τῆς καθέτου αὐτῆς λαμβάνομεν ἓνα τυχόν σημεῖον Γ . Συνδέομεν μὲ εὐθεῖαν τὸ Γ μὲ τυχόν σημεῖον M τῆς περιφερείας O .

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ GM εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν BM .

2ον. Νὰ δείξετε, καὶ νὰ ἐξηγήσετε διατί, καὶ πού εὐρίσκονται ἐπὶ τοῦ σχήματος : α) ἡ γωνία τῆς εὐθείας GM καὶ τοῦ ἐπιπέδου Π' β) μία ἐπίπεδος γωνία, ἀντίστοιχος τῆς διέδρου, τῆς σχηματιζομένης ἀπὸ τὰ ἡμιεπίπεδα BMA καὶ $BM\Gamma'$ γ) μία γραμμὴ μεγίστης κλίσεως τοῦ ἐπιπέδου ΓBM ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π' δ) ἡ κοινὴ κάθετος τῶν εὐθειῶν ΓA καὶ BM ε) τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰ τέσσαρα σημεῖα Γ, A, B καὶ M .

(Baccalauréat Grenoble)

2200. (2236). Δίδεται ἓνα ὀρθογώνιον $AB\Gamma\Delta$ πλευρῶν $AB=a$ καὶ $B\Gamma=b$ καὶ αἱ κάθετοι E καὶ E' ἐπὶ τὸ ἐπίπεδόν του, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ . Ἐστῶσαν M καὶ N δύο σημεῖα μεταβλητὰ, τὸ μὲν M ἐπὶ τῆς E καὶ τὸ N ἐπὶ τῆς E' καὶ τοιαῦτα, ὥστε αἱ BM καὶ AN νὰ εἶναι σταθερῶς κάθετοι μεταξὺ τῶν.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ BM εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον BAN καὶ ὅτι ἡ AN εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ABM . Ἐξ αὐτοῦ συνάγομεν, ὅτι τὰ διάφορα τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ὡς κορυφὰς τρία ἀπὸ τὰ τέσσαρα σημεῖα A, B, M καὶ N εἶναι ὀρθογώνια καὶ ὅτι τὸ μέσον Θ τῆς MN ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰ τέσσαρα σημεῖα A, B, M καὶ N .

2ον. Νὰ εὐρεθῇ ὁ τόπος τοῦ Θ , ὅταν τὰ M καὶ N κινούνται ἐπὶ τῶν E καὶ E' .

3ον. Θέτομεν $\Gamma M=x$ καὶ $\Delta N=y$. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι : $xy=\beta^2$.

(Baccalauréat Grenoble)

2201. (2237). Δίδεται εἰς ἓνα ἐπίπεδον Π ἓνα ἰσόπλευρον τρίγωνον $B\Gamma\Delta$

πλευρᾶς α. Ἐκ τὸ κέντρον τοῦ Η ὑψοῦμεν κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π.

1ον. Νὰ προσδιορισθῇ ἐπὶ τῆς καθέτου αὐτῆς ἓνα σημεῖον Α τοιοῦτον, ὥστε τὰ μήκη ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ νὰ εἶναι ἴσα μὲ α.

2ον. Ἐστω Ο τὸ μέσον τῆς ΑΗ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ τριέδρος Ο.ΒΓΔ εἶναι τρισορθογώνιος.

3ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι ὀρθογώνιοι.

4ον. Ἐνα σημεῖον Μ γράφει τὴν ΑΒ πῶς μεταβάλλεται τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΓΜΔ; Διὰ ποίαν θέσιν τοῦ Μ τὸ ἐμβαδὸν αὐτὸ εἶναι ἐλάχιστον; ποία εἶναι τότε ἡ τιμὴ του;

2202. Δίδεται ἡ τρισορθογώνιος στερεὰ γωνία Κ.ΑΒΓ καὶ ΑΒΓ μία τυχοῦσα ἐπίπεδος τομὴ αὐτῆς. Ἐάν κ εἶναι ἡ προβολὴ τῆς κορυφῆς Κ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ νὰ ἀποδειχθῇ:

1ον. ὅτι τὸ κ εἶναι ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

2ον. ὅτι $\frac{\text{ἐμβ. ΑΒΓ}}{\text{ἐμβ. ΑΚΒ}} = \frac{\text{ἐμβ. ΑΚΒ}}{\text{ἐμβ. ΑκΒ}}$.

3ον. ὅτι $(\text{ἐμβ. ΑΒΓ})^2 = (\text{ἐμβ. ΑΚΒ})^2 + (\text{ἐμβ. ΑΚΓ})^2 + (\text{ἐμβ. ΒΚΓ})^2$.

ΒΙΒΛΙΟΝ ΕΚΤΟΝ

ΠΟΛΥΕΔΡΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄

ΠΡΙΣΜΑΤΑ - ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΑ

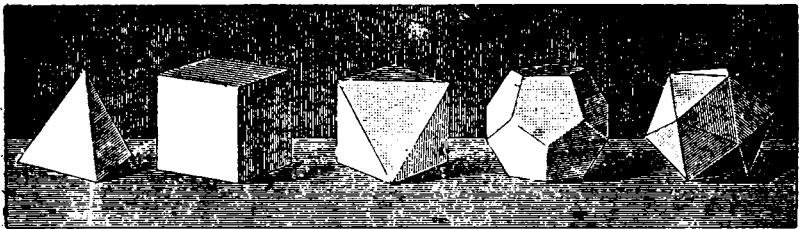
722. Πολύεδρον. Ἐνα στερεόν, τὸ ὁποῖον περικλείεται ἀπὸ ὅλα τὰ μέρη του μὲ ἐπίπεδα, λέγεται **πολύεδρον** (Σχ. 496).

Εἰς ἕ.α πολύεδρον διακρίνομεν :

Τὰς ἔδρας του, δηλ. τὰ πολύγωνα, πὸν περικλείουν τὸ πολύεδρον.

Τὰς ἀκμάς του, δηλ. τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου αὐτοῦ· κάθε ἀκμὴ εἶναι κοινὴ εἰς δύο συνεχόμενας ἔδρας.

Τὰς κορυφάς του, δηλ. τὰ ἄκρα τῶν ἀκμῶν του· κάθε κορυφὴ εἶναι κοινὴ εἰς τρεῖς τοῦλάχιστον συνεχόμενας ἔδρας.



Τετράεδρον Ἑξάεδρον Ὀκτάεδρον Δωδεκάεδρον Εἰκοσάεδρον

Σχ. 496.

Τὰς διέδρους γωνίας τοῦ πολυέδρου, δηλ. τὰς διέδρους, πὸν σχηματίζονται ἀπὸ δύο ἔδρας μὲ κοινήν ἀκμὴν.

Τὰς πολυέδρους γωνίας του, δηλ. τὰς στερεὰς γωνίας, πὸν σχηματίζονται ἀπὸ πολλὰς ἔδρας, αἱ ὁποῖαι ἔχουν μίαν κοινήν κορυφὴν.

Τὰς διαγωνίους του, δηλ. τὰ εὐθύγραμμα τμήματα, πὸν συνδέουν δύο κορυφάς, αἱ ὁποῖαι δὲν κείνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἔδρας.

Ἐνα πολύεδρον λέγεται **τετράεδρον, πεντάεδρον, ἑξάεδρον, ...** ἐὰν ἔχη 4, 5, 6, ... ἔδρας.

Τὸ ἀπλούστερον ἀπὸ ὅλα τὰ πολύεδρα εἶναι τὸ τετράεδρον.

723. Πολύεδρα κυρτά. Ἐνα πολυέδρον λέγεται **κυρτόν**, ὅταν κάθε ἔδρα του προεκτεινομένη ἀφήγη τὸ πολυέδρον πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος της.

Τομὴ ἐνὸς κυρτοῦ πολυέδρου ὑπὸ ἐνὸς ἐπιπέδου εἶναι τὸ σύνολον τῶν σημείων τῆς ἐπιφανείας τοῦ πολυέδρου, τὰ ὁποῖα κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου.

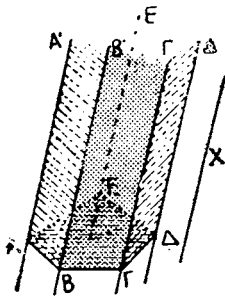
Αὕτη ἡ τομὴ εἶναι ἓνα πολύγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει, ὡς πλευρὰς τὰς τομὰς τῶν ἐδρῶν τοῦ πολυέδρου ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου καὶ ὡς κορυφὰς τὰς τομὰς τῶν ἀκμῶν τοῦ πολυέδρου ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου.

724. Πολύεδρα ἴσα. Δύο πολυέδρα εἶναι ἴσα, ὅταν τὸ ἓνα τιθέμενον (νοεῶς) ἐπὶ τοῦ ἄλλου ἐφαρμόζη.

Διὰ τὰ ἐφαρμόζον δύο πολυέδρα, πρέπει αἱ κορυφαὶ των νὰ ἐφαρμόζον, διότι τότε ἐφαρμόζον καὶ αἱ ἀκμαὶ των καὶ αἱ ἔδραι των.

Πρίσματα

725. Πρισματικὴ ἐπιφάνεια. **Πρισματικὴ ἐπιφάνεια** λέγεται ἡ ἐπιφάνεια, τὴν ὁποίαν παράγει μία εὐθεΐα, ἡ ὁποία μένει παραλλήλος πρὸς δοθεῖσαν εὐθεΐαν καὶ ἡ ὁποία, κινουμένη, στηρίζεται σταθερῶς ἐπὶ τῆς περιμέτρου ἐνὸς πολυγώνου.



Σχ. 497.

Ἐστω ἓνα πολυγώνον ΑΒΓΔΕ (Σχ. 497) καὶ μία εὐθεΐα Χ, ἡ ὁποία δὲν κεῖται ἐπὶ τοῦ πολυγώνου· ἀπὸ τὰς κορυφὰς Α, Β, Γ, Δ, Ε φέρομεν τὰς παραλλήλους ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ', ΔΔ', ΕΕ' πρὸς τὴν εὐθεΐαν Χ. Ἡ πρισματικὴ ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία παράγεται ἀπὸ μίαν εὐθεΐαν, ἡ ὁποία εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν εὐθεΐαν Χ καὶ κινεῖται σταθερῶς ἐπὶ τῆς περιμέτρου τοῦ

πολυγώνου ΑΒΓΔΕ, ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ μέρη ἐπιπέδων, τὰ ὁποῖα περατοῦνται εἰς δύο παραλλήλους εὐθεΐας, ὅπως εἶναι τὸ μέρος τὸ περιλαμβανόμενον μεταξὺ τῶν παραλλήλων ΑΑ' καὶ ΒΒ'.

Αὐτὰ τὰ μέρη τῶν ἐπιπέδων εἶναι αἱ **παράπλευροι ἔδραι** τῆς πρισματικῆς ἐπιφανείας.

Αἱ τομαὶ τῶν παραπλεύρων ἐδρῶν λέγονται **παράπλευροι ἀκμαὶ** τῆς πρισματικῆς ἐπιφανείας.

726. Θεώρημα. Αἱ τομαὶ μιᾶς πρισματικῆς ἐπιφανείας ὑπὸ

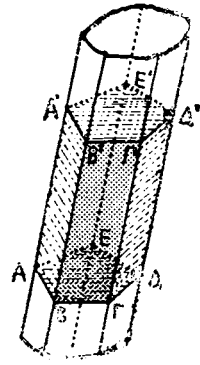
παράλληλων επιπέδων είναι πολύγωνα ἴσα· (τὰ ἐπίπεδα δὲν εἶναι παράλληλα πρὸς τὰς ἀκμὰς τῆς).

Ἐπίπεδοι: Ἐστώσαν $ΑΒΓΔΕ$ καὶ $Α'Β'Γ'Δ'Ε'$ (Σχ. 498) αἱ τομαὶ μιᾶς πρισματικῆς ἐπιφανείας ὑπὸ δύο ἐπιπέδων παράλληλων.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ πολύγωνα $ΑΒΓΔΕ$ καὶ $Α'Β'Γ'Δ'Ε'$.

Ἀπόδειξις: Αἱ πλευραὶ $ΑΒ$ καὶ $Α'Β'$ εἶναι παράλληλοι, ὡς τομαὶ παράλληλων ἐπιπέδων ὑπὸ τρίτου· ἀλλὰ καὶ αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ $ΑΑ'$ καὶ $ΒΒ'$ εἶναι παράλληλοι· τὸ τετράπλευρον λοιπὸν $ΑΒΒ'Α'$ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι $ΑΒ=Α'Β'$. Ὀμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι $ΒΓ=Β'Γ'$, $ΓΔ=Γ'Δ'$, ...

Ἄλλα τὰ πολύγωνα $ΑΒΓΔΕ$ καὶ $Α'Β'Γ'Δ'Ε'$ ἔχουν καὶ τὰς γωνίας των ἴσας μίαν πρὸς μίαν· δηλ. τὴν $Α=Α'$, $Β=Β'$, $Γ=Γ'$ διότι αἱ πλευραὶ των εἶναι παράλληλοι καὶ ἔχουν τὴν αὐτὴν φορῆν.



Σχ. 498.

Τὰ δύο λοιπὸν πολύγωνα εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὰς πλευράς των ἴσας, μίαν πρὸς μίαν καὶ τὰς περιεχομένας ὑπὸ τῶν πλευρῶν αὐτῶν γωνίας ἴσας ἀντιστοίχως.

Ἐδείχθη λοιπὸν, ὅτι: **Αἱ τομαὶ μιᾶς πρισματικῆς ...**

727 Κάθετος τομή. Κάθετος τομή μιᾶς πρισματικῆς ἐπιφανείας λέγεται ἡ τομή τῆς ἐπιφανείας αὐτῆς ὑπὸ ἐνὸς ἐπιπέδου κάθετου ἐπὶ τὰς ἀκμὰς τῆς.

Ἀπὸ τὸ προηγουμένον θεώρημα συνάγομεν, ὅτι: **ὅλαι αἱ κάθετοι τομαὶ μιᾶς πρισματικῆς ἐπιφανείας εἶναι ἴσαι.**

728. Πρίσμα. Πρίσμα λέγεται τὸ πολύεδρον, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ μιᾶς πρισματικῆς ἐπιφανείας καὶ δύο παράλληλων ἐπιπέδων· (τὰ ἐπίπεδα δὲν πρέπει νὰ εἶναι παράλληλα πρὸς τὰς ἀκμὰς τῆς πρισματικῆς ἐπιφανείας).

Π.χ. τὸ πολύεδρον $ΑΒΓΔΕΑ'Β'Γ'Δ'Ε'$ (Σχ. 498) εἶναι ἓνα πρίσμα.

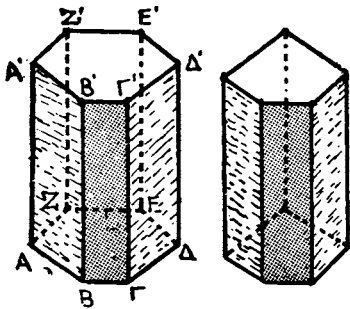
Αἱ τομαὶ τῆς πρισματικῆς ἐπιφανείας ὑπὸ τῶν δύο παράλληλων ἐπιπέδων λέγονται **βάσεις** τοῦ πρίσματος.

Π.χ. βάσεις τοῦ πρίσματος $ΑΒΓΔΕΑ'Β'Γ'Δ'Ε'$ εἶναι αἱ ἔδραι $ΑΒΓΔΕ$ καὶ $Α'Β'Γ'Δ'Ε'$.

Αἱ βάσεις ἐνὸς πρίσματος εἶναι πολύγωνα ἴσα, ὡς τομαὶ πρισματικῆς ἐπιφανείας ὑπὸ παράλληλων ἐπιπέδων (§ 726)

Αἱ ἄλλαι ἔδραι τοῦ πρίσματος, ἐκτὸς τῶν δύο βάσεων του, λέγονται **παράπλευροι ἔδραι**.

Αἱ παράπλευροι ἔδραι ἑνὸς πρίσματος εἶναι παραλληλόγραμμα (§ 726) καὶ ἀποτελοῦν τὴν **παράπλευρον ἐπιφάνειαν τοῦ πρίσματος**.



Πρίσματα

Σχ. 499.

Παράπλευροι ἄκμαὶ πρίσματος λέγονται αἱ ἄκμαὶ τοῦ πρίσματος, αἱ ὁποῖαι δὲν κεῖνται ἐπὶ τῶν βάσεων των.

Π.χ. παράπλευροι ἄκμαὶ τοῦ πρίσματος ΑΒΓ... (Σχ. 499) εἶναι αἱ εὐθεῖαι ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ', ΔΔ', ...

Ὅσαι αἱ παράπλευροι ἄκμαὶ ἑνὸς πρίσματος εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι (§ 726).

Τὸ κοινὸν μῆκος τῶν ἄκμῶν αὐτῶν λέγεται **ἄκμη τοῦ πρίσματος**.

Ὑψος ἑνὸς πρίσματος λέγεται ἡ ἀπόστασις τῶν δύο βάσεων του.

Ἐνα πρίσμα λέγεται **ὀρθόν**, ἐὰν αἱ παράπλευροι ἄκμαὶ του εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς βάσεις του.

Ἐὰν ἓνα πρίσμα εἶναι ὀρθόν, αἱ παράπλευροι ἔδραι του εἶναι ὀρθογώνια.

Ἐνα πρίσμα λέγεται **πλάγιον**, ἐὰν αἱ παράπλευροι ἄκμαὶ του εἶναι πλάγια πρὸς τὰς βάσεις του.

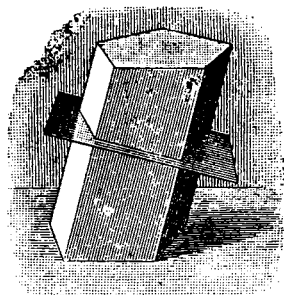
Ἐὰν ἓνα πρίσμα εἶναι πλάγιον αἱ παράπλευροι ἔδραι του εἶναι παραλληλόγραμμα.

Ἐνα πρίσμα λέγεται **τριγωνικόν, τετραγωνικόν, πενταγωνικόν κλπ.** ἐὰν αἱ βάσεις του εἶναι τρίγωνα, τετράπλευρα, πεντάγωνα κλπ.

Κάθετος τομὴ ἑνὸς πρίσματος λέγεται ἡ κάθετος τομὴ (§ 727) τῆς πρισματικῆς ἐπιφανείας, ἡ ὁποία τὸ σχηματίζει (Σχ. 500).

Ἐνα πρίσμα λέγεται **κανονικόν**, ἐὰν εἶναι ὀρθόν καὶ ἐὰν ἡ βάση του εἶναι ἓνα κανονικόν πολύγωνον.

Διὰ τὰ ὀνομάσωμεν ἓνα πρίσμα, ἀπαγγέλλομεν κατὰ σειράν τὰ γράμματα τῶν δύο βάσεων του



Σχ. 500.

Π.χ. λέγομεν τὸ πρίσμα ΑΒΓΔΕΖΑ'Γ'Δ'Ε'Ζ' (Σχ. 499).

Δυνάμεθα ὅμως νὰ ὀνομάσωμεν ἓνα πρίσμα καὶ μὲ δύο μόνον γράμματα, τὰ ὁποῖα ὅμως δὲν πρέπει νὰ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἑδρας.

Π.χ. λέγομεν: τὸ πρίσμα ΑΕ' ἀντὶ νὰ εἴπωμεν τὸ πρίσμα ΑΒΓΔΕΖΑ'Β'Γ'Δ'Ε'Ζ'.

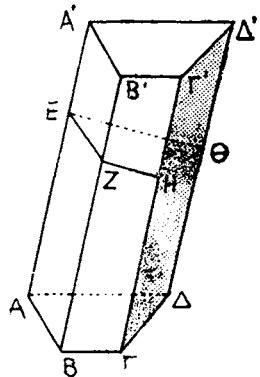
Ἀσκήσεις: 2203, 2204, 2205, 2206.

729. Ὅρισμός. Ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας ἐνὸς πολυέδρου ὀνομάζομεν τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν ὄλων τῶν ἐδρῶν του.

730. Πρόβλημα. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας ἐνὸς πρίσματος συναρτήσῃ τῆς περιμέτρου μιᾶς καθέτου τομῆς του καὶ τῆς ἀκμῆς του.

Ἐστω τὸ πρίσμα ΑΒΓΔΑ'Β'Γ'Δ' (Σχ. 501) καὶ ΕΖΗΘ μία κάθετος τομὴ του. Τὸ ἐμβαδὸν Ε τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ δοθέντος πρίσματος ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τῶν τεσσάρων παραπλεύρων ἐδρῶν του, αἱ ὁποῖαι εἶναι παραλληλόγραμμα· δηλ. εἶναι
 $E = \text{ἐμβ. } ΑΒΒ'Α' + \text{ἐμβ. } ΒΓΓ'Β' + \text{ἐμβ. } ΓΔΔ'Γ' + \text{ἐμβ. } ΔΑΑ'Δ'$ (1)

Ἐπειδὴ ἡ ΕΖΗΘ εἶναι ἡ κάθετος τομὴ τοῦ πρίσματος, αἱ πλευραὶ τῆς τομῆς αὐτῆς εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὰς παραπλεύρους ἀκμὰς τοῦ πρίσματος. Δυνάμεθα λοιπὸν νὰ θεωρήσωμεν τὰς πλευρὰς τῆς καθέτου αὐτῆς τομῆς ὡς ὕψη τῶν παραλληλογράμμων, ὅποτε αἱ βάσεις των θὰ εἶναι αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ τοῦ πρίσματος. Θὰ εἶναι λοιπὸν
 $\text{ἐμβ. } ΑΒΒ'Α' = ΑΑ' \times ΕΖ$
 Ὅμοίως εὐρίσκομεν, $\text{ἐμβ. } ΒΓΓ'Β' = ΒΒ' \times ΖΗ$
 $\text{ἐμβ. } ΓΔΔ'Γ' = ΓΓ' \times ΗΘ$
 καὶ $\text{ἐμβ. } ΔΑΑ'Δ' = ΔΔ' \times ΘΕ$



Σχ. 501.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὰ ἐμβαδὰ τῶν παραλληλογράμμων μὲ τὰ ἴσα των καὶ ἔχομεν

$$E = ΑΑ' \times ΕΖ + ΒΒ' \times ΖΗ + ΓΓ' \times ΗΘ + ΔΔ' \times ΘΕ.$$

Ἐπειδὴ $ΑΑ' = ΒΒ' = ΓΓ' = ΔΔ'$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γράφεται
 $E = ΑΑ' \times ΕΖ + ΑΑ' \times ΖΗ + ΑΑ' \times ΗΘ + ΑΑ' \times ΘΕ =$
 $= ΑΑ' \times (ΕΖ + ΖΗ + ΗΘ + ΘΕ).$

Ἐπειδὴ $ΑΑ' =$ παράπλευρος ἀκμὴ καὶ $(ΕΖ + ΖΗ + ΗΘ + ΘΕ) =$ περίμετρος καθέτου τομῆς τοῦ πρίσματος συνάγομεν, ὅτι:

Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας ἐνὸς πρίσματος εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς περιμέτρου μιᾶς καθέτου τομῆς του ἐπὶ τὴν ἀκμὴν του.

731. Πόρισμα. Ἐὰν τὸ πρίσμα εἶναι ὀρθόν, ἢ κάθετος τομὴ του εἶναι ἴση μὲ τὴν βᾶσιν του καὶ ἡ ἀκμὴ του εἶναι ἴση μὲ τὸ ὕψος του. Ἐπομένως συνάγομεν, ὅτι :

Τὸ ἔμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας ἑνὸς ὀρθοῦ πρίσματος εἶναι ἴσον μὲ τὴν περίμετρον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

732. Ἐμβαδὸν ὀλικῆς ἐπιφανείας ἑνὸς πρίσματος. Ἐὰν εἰς τὸ ἔμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας ἑνὸς πρίσματος προσθῶμεν τὸ ἔμβαδὸν τῶν δύο βάσεών του, λαμβάνομεν τὸ ἔμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος.

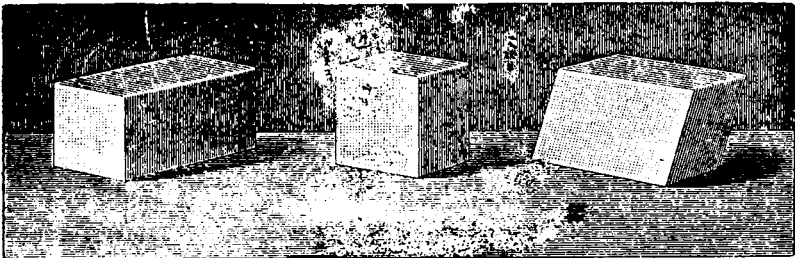
Ἀσκήσεις : 2207, 2208, 2209, 2210, 2211, 2212, 2213.

Παραλληλεπίπεδα

733. Παραλληλεπίπεδον. Κάθε πρίσμα, τοῦ ὁποίου αἱ βάσεις εἶναι παραλληλόγραμμα, λέγεται *παραλληλεπίπεδον*.

Ὅλαι αἱ ἔδραι ἑνὸς παραλληλεπίπεδου εἶναι παραλληλόγραμμα (Σχ. 502).

Ἐνα παραλληλεπίπεδον δύναται νὰ εἶναι *ὀρθόν* ἢ *πλάγιον*. Εἰς τὸ ὀρθὸν παραλληλεπίπεδον αἱ παράπλευροι ἔδραι του εἶναι ὀρθογώνια.



Ὄρθογων. παραλληλεπίπεδον

Κύβος

Πλάγιον παραλληλεπίπεδον

Σχ. 502.

Μεταξὺ τῶν ὀρθῶν παραλληλεπίπεδων διακρίνομεν τὸ *ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον* (Σχ. 502), τοῦ ὁποίου αἱ βάσεις εἶναι ὀρθογώνια. Ὅλαι αἱ ἔδραι ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπίπεδου εἶναι ὀρθογώνια.

734. Κύβος. *Κύβος* λέγεται τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, τοῦ ὁποίου ὅλαι αἱ ἔδραι εἶναι τετράγωνα (Σχ. 502).

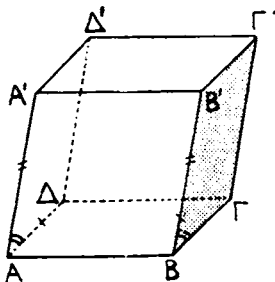
Εἶναι φανερόν, ὅτι ὅλαι αἱ ἀκμαὶ ἑνὸς κύβου εἶναι ἴσαι. Δύο κύβοι, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀκμὴν, εἶναι ἴσοι.

735. Θεώρημα. *Αί άπέναντι έδραι ένός παραλληλεπιπέδου είναι ίσαι και παράλληλοι.*

Υπόθεσις: Έστω τó παραλληλεπίπεδον ΑΒΓΔΑ'Β'Γ'Δ' (Σχ.503).

Συμπέρασμα: Θα δείξωμεν, ότι αί άπέναντι έδραι του είναι ίσαι και παράλληλοι.

Απόδειξις: Αί άπέναντι έδραι ΑΔΔ'Α' και ΒΓΓ'Β' έχουν: τās πλευράς ΑΔ και ΒΓ ίσας και παραλλήλους, ως άπέναντι πλευράς τού παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ' τās πλευράς ΑΑ' και ΒΒ' ίσας και παραλλήλους, ως άπέναντι πλευράς τού παραλληλογράμμου ΑΒΒ'Α' και τās γωνίαι Α'ΑΔ και Β'ΒΓ' ίσας, διότι αί πλευραί των είναι παράλληλοι και έχουν τήν αὐτήν φοράν. Αί έδραι λοιπόν είναι ίσαι, ως παραλληλόγραμμα, τά όποια έχουν δύο πλευράς ίσας, μίαν πρὸς μίαν και τήν υπ' αὐτῶν περιεχομένην γωνίαν ίσην.



Σχ. 503.

Έπειδή αί γωνίαι Α'ΑΔ και Β'ΒΓ' έχουν τās πλευράς των παραλλήλους μίαν πρὸς μίαν, τά επίπεδα, επί τῶν όποίων κείνται, είναι παράλληλα (§ 635) άρα αί έδραι ΑΔΔ'Α' και ΒΓΓ'Β' είναι παράλληλοι. Όμοίως άποδεικνύομεν, ότι και αί άλλαι άπέναντι έδραι τού παραλληλεπιπέδου είναι ίσαι και παράλληλοι.

Έδείχθη λοιπόν, ότι: **Αί άπέναντι έδραι. . .**

Παρατήρησις. Έκ τού άνωτέρω θεωρήματος συνάγομεν, ότι:

Είς ένα παραλληλεπίπεδον δυνάμεθα νά θεωρήσωμεν ως βάσεις του δύο τυχούσας άπέναντι έδρας.

736. Θεώρημα. *Αί τέσσαρες διαγώνιοι ένός παραλληλεπιπέδου διχοτομοῦνται.*

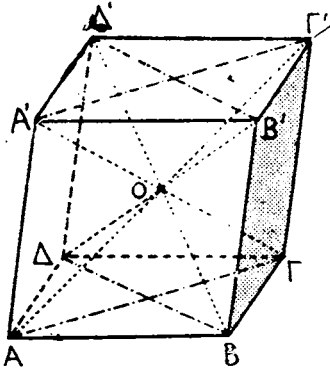
Υπόθεσις: Έστω τó παραλληλεπίπεδον ΑΒΓΔΑ'Β'Γ'Δ' (Σχ.504) και ΑΓ', ΒΔ', ΓΑ', ΔΒ' αί τέσσαρες διαγώνιοί του.

Συμπέρασμα: Θα δείξωμεν, ότι αί διαγώνιοι αὐταί τέμνονται εις τó αὐτό σημείον, τó όποϊον είναι τó μέσον έκάστης εξ αὐτῶν.

Απόδειξις: Άρκεί νά δείξωμεν, ότι τά μέσα δύο εξ αὐτῶν τῶν διαγωνίων, π.χ. τῶν ΒΔ' και ΔΒ', συμπίπτουν.

Πράγματι' εἰν φέρωμεν τās εὐθείαι ΒΔ και Β'Δ', τó τετράπλευρον ΒΒ'Δ'Δ είναι παραλληλόγραμμον, διότι αί δύο άπέναντι πλευραί

του BB' και $\Delta\Delta'$ είναι ἴσαι και παράλληλοι, ὡς παράπλευροι ἄκμαι παραλληλεπιπέδου. Αἱ BD' και $\Delta B'$ είναι διαγώνιοι τοῦ παραλληλογράμμου και ἐπομένως διχοτομοῦνται· δηλ. είναι

$$BO=OD', \quad \Delta O=OB'.$$


Σχ. 504.

Ὅμοιως εὐρίσκομεν, ὅτι ἡ διαγώνιος AG' τέμνει ἐπίσης τὴν διαγώνιον $\Delta B'$ εἰς τὸ μέσον της O και ὅτι ἡ διαγώνιος $A'G$ τέμνει τὴν διαγώνιον $\Delta B'$ εἰς τὸ μέσον της O . Ὅστε αἱ τέσσαρες διαγώνιοι τοῦ παραλληλεπιπέδου τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον O , τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ μέσον ἐκάστης ἐξ αὐτῶν.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Αἱ τέσσαρες διαγώνιοι...**

737. Κέντρον παραλληλεπιπέδου. Τὸ κοινὸν σημεῖον τῆς τομῆς τῶν τεσσάρων διαγωνίων ἐνὸς παραλληλεπιπέδου λέγεται **κέντρον τοῦ παραλληλεπιπέδου**.

Ἀσκήσεις: 2214.

738. Ὅρισμός. Διαστάσεις ἐνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι τὰ μήκη τῶν τριῶν ἄκμῶν του, αἱ ὁποῖαι ἔχουν κοινήν κορυφήν.

Π.χ. εἰς τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον $AB\Gamma\Delta A'B'\Gamma'\Delta'$ (Σχ. 505) διαστάσεις του εἶναι τὰ μήκη τῶν ἄκμῶν ΔA , $\Delta\Gamma$, $\Delta\Delta'$.

Συνήθως αἱ διαστάσεις ἐνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου λέγονται **μῆκος**, **πλάτος** και **ὑψος** ἢ **βάθος** τοῦ παραλληλεπιπέδου.

Εἶναι φανερόν, ὅτι: δύο ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰς διαστάσεις των ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, εἶναι ἴσα.

739. Θεώρημα. *Εἰς κάθε ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον:*

1^{ον}. *Αἱ διαγώνιοί του εἶναι ἴσαι.*

2^{ον}. *Τὸ τετράγωνον μιᾶς διαγωνίου του εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τριῶν διαστάσεών του.*

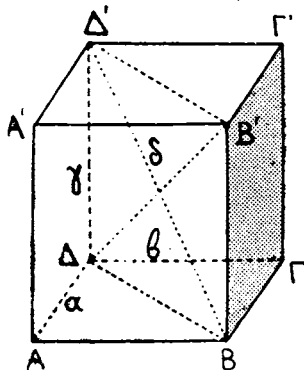
Ἐπίσης: Ἐστω τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον $AB\Gamma\Delta A'B'\Gamma'\Delta'$ (Σχ. 505) και AG' , BA' , $\Gamma A'$, $\Delta B'$ αἱ διαγώνιοί του.

1^{ον}. **Συμπέρασμα:** Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ διαγώνιοί του εἶναι ἴσαι.

Ἀπόδειξις: Φέρομεν τὰς εὐθείας BD και $B'\Delta'$ · ἐπειδὴ τὸ δοθὲν παραλληλεπίπεδον εἶναι ὀρθογώνιον, αἱ ἄκμαι του $B'B$ και $\Delta'\Delta$ εἶναι

κάθετοι ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως $AB\Gamma\Delta$ καὶ ἐπομένως εἶναι κάθετοι καὶ ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν BD' ἐπειδὴ δὲ αἱ ἄκμαι BB' καὶ $\Delta\Delta'$ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, τὸ τετράπλευρον $BB'\Delta'\Delta$ εἶναι ὀρθογώνιον· ἄρα αἱ διαγώνιοι τοῦ BD' καὶ $\Delta B'$ εἶναι ἴσαι.

Ὅμοιως ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ αἱ διαγώνιοι τοῦ AG' καὶ $\Gamma A'$ εἶναι ἴσαι, ὡς διαγώνιοι τοῦ ὀρθογωνίου $AG\Gamma'A'$. Ἐπειδὴ ὅμως τὰ ὀρθογώνια $AG\Gamma'A'$ καὶ $B\Delta\Delta'B'$ εἶναι ἴσα καὶ αἱ διαγώνιοι των θὰ εἶναι ἴσαι· ὥστε αἱ τέσσαρες διαγώνιοι AG' , $B\Delta'$, $\Gamma A'$ καὶ $\Delta B'$ τοῦ παραλληλεπίπεδου εἶναι ἴσαι μεταξύ των.



Σχ. 505.

2ον. **Συμπέρασμα:** Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ α, β, γ τὰς τρεῖς διαστάσεις $\Delta A, \Delta\Gamma, \Delta\Delta'$ τοῦ παραλληλεπίπεδου AG' (Σχ. 505) καὶ μὲ δ τὴν διαγώνιον του, θὰ δείξωμεν, ὅτι $\delta^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$.

Ἀπόδειξις: Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $\Delta'\Delta B$ ἔχομεν

$$\overline{\Delta'B}^2 = \overline{\Delta\Delta'}^2 + \overline{\Delta B}^2 \quad \eta \quad \delta^2 = \gamma^2 + \overline{\Delta B}^2 \quad (1)$$

Ἀλλὰ ἡ ΔB εἶναι ἡ ὑποτείνουσα τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΔAB καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι

$$\overline{\Delta B}^2 = \overline{\Delta A}^2 + \overline{AB}^2 \quad \eta \quad \Delta B^2 = \alpha^2 + \beta^2.$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὸ ΔB^2 μὲ τὸ ἴσον του καὶ ἔχομεν

$$\delta^2 = \gamma^2 + \alpha^2 + \beta^2 \quad \eta \quad \boxed{\delta^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \quad (2)$$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Εἰς κάθε ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον.**

Σημ. Ἐὰν τὸ δοθὲν παραλληλεπίπεδον εἶναι κύβος, αἱ τρεῖς διαστάσεις του α, β, γ εἶναι ἴσαι καὶ ἐπομένως ὁ τύπος (2) γράφεται

$$\delta^2 = \alpha^2 + \alpha^2 + \alpha^2 \quad \eta \quad \boxed{\delta^2 = 3\alpha^2}, \quad \alpha\alpha \quad \boxed{\delta = \alpha\sqrt{3}}.$$

Ἀσκήσεις: 2215, 2216, 2217, 2218, 2219, 2220, 2221, 2222, 2223, 2224.

Μέτρησις πρισμάτων - παραλληλεπίπεδων

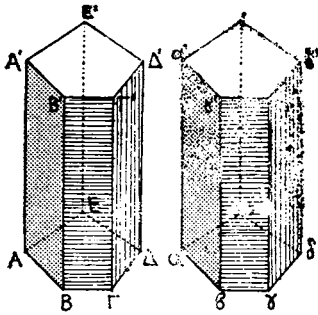
740. Θεώρημα. Δύο ὀρθὰ πρίσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη εἶναι ἴσα.

Ἐπίπεδοι: Ἐστώσαν τὰ ὀρθὰ πρίσματα $\Lambda\Delta'$ καὶ $\alpha\delta'$ (Σχ. 506)

τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴσας τὰς βάσεις ΑΒΓΔΕ καὶ αβγδε καὶ ἴσα τὰ ὕψη ΑΑ' καὶ αα'.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ πρίσματα αὐτὰ εἶναι ἴσα.

Ἀπόδειξις: Λαμβάνομεν (νοεῶς) τὸ πρίσμα αδ' καὶ τὸ θέτομεν ἐπὶ τοῦ πρίσματος ΑΔ' οὕτως, ὥστε ἡ βᾶσις του αβγδε νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης τῆς ΑΒΓΔΕ.



Σχ. 506.

Τότε ἡ ἀκμὴ αα', ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος αδ', θὰ συμπέσῃ μὲ τὴν ΑΑ', ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως ΑΒΓΔΕ εἰς τὸ σημεῖον Α (§ 660)· ἐπειδὴ εἶναι ΑΑ' = αα', ἔξ ὑποθέσεως, τὸ σημεῖον α' θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Α'. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι τὸ ση-

μεῖον β' θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ Β', τὸ σημεῖον γ' ἐπὶ τοῦ Γ' κλπ. Ἐπειδὴ αἱ κορυφαὶ τῶν δύο πρισμάτων συμπίπτουν μία πρὸς μίαν, τὰ δύο πρίσματα συμπίπτουν καὶ ἐπομένως εἶναι ἴσα.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: *Δύο ὀρθὰ πρίσματα...*

741. Πόρισμα. Δύο ὀρθογώνια παραλληλεπιπεδα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη εἶναι ἴσα.

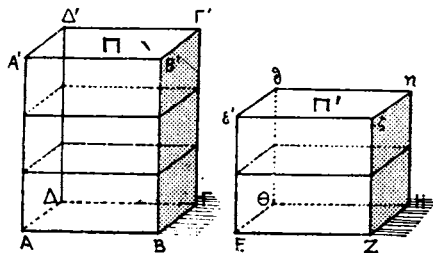
Διότι τὰ ὀρθογώνια παραλληλεπιπεδα εἶναι ὀρθὰ πρίσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη.

742. Θεώρημα. Ὁ λόγος δύο ὀρθογωνίων παραλληλεπιπέδων, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν, εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν ὕψων των.

Ἐπίθεσις: Ἐστώσαν τὰ ὀρθογώνια παραλληλεπιπεδα ΑΓ' καὶ Εη (Σχ. 507), τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴσας τὰς βάσεις των ΑΒΓΔ καὶ ΕΖΗΘ καὶ διάφορα ὕψη ΑΑ' = v καὶ Εε' = v'.

Συμπέρασμα: Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ Π καὶ Π' τὰ ὀρθογώνια παραλληλεπιπεδα ΑΓ' καὶ Εη, θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$\frac{\Pi}{\Pi'} = \frac{v}{v'}$$



Σχ. 507.

Ἀπόδειξις: Ὑποθέτομεν, ὅτι τὰ ὕψη v καὶ v' ἔχουν ἓνα κοινὸν μέτρον, τὸ ὁποῖον χωρεῖ 3 φορὰς εἰς τὸ ὕψος v καὶ 2 φορὰς εἰς τὸ ὕψος v' . Ἀλλὰ τότε θὰ εἶναι $\frac{v}{v'} = \frac{3}{2}$ (1)

Διαιροῦμεν τὸ ὕψος $AA' = v$ εἰς 3 ἴσα μέρη καὶ τὸ ὕψος $E\epsilon' = v'$ εἰς 2 ἴσα μέρη· ὅλα τὰ τμήματα τῶν ὑψῶν αὐτῶν θὰ εἶναι ἴσα. Ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως φέρομεν ἐπίπεδα παράλληλα πρὸς τὰς βάσεις $AB\Gamma\Delta$ καὶ $EZH\Theta$. Τὰ ἐπίπεδα αὐτὰ διαιροῦν τὸ πρῶτον παραλληλεπίπεδον AG' εἰς 3 ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα καὶ τὸ δεῦτερον παραλληλεπίπεδον $E\eta$ εἰς 2 ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα. Ὅλα αὐτὰ τὰ παραλληλεπίπεδα εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν ἴσας βάσεις καὶ ἴσα ὕψη (§ 740)· ἀλλὰ τότε θὰ εἶναι $\frac{\Pi}{\Pi'} = \frac{3}{2}$ (2)

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι

$$\frac{\Pi}{\Pi'} = \frac{v}{v'} \quad (3)$$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Ὁ λόγος δύο ὀρθογωνίων παραλλήλεπ...**

Σημ. Ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι τὰ ὕψη AA' καὶ $E\epsilon'$ δὲν ἔχουν ἓνα κοινὸν μέτρον, τότε ἐργαζόμεθα ὅπως εἰργάσθημεν εἰς τὴν (§ 507, 2ον) διὰ τὰ ἔμβαδὰ δύο ὀρθογωνίων, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴσας βάσεις καὶ ἀποδεικνύομεν, κατ' ἀνάλογον τρόπον, τὴν σχέσιν (3).

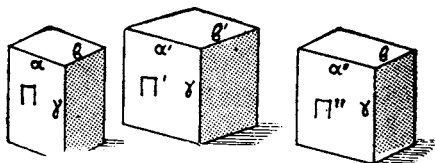
743. Πόρισμα. Ἐπειδὴ τὰ ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴσας βάσεις, ἔχουν δύο διαστάσεις ἴσας, τὸ μῆκος καὶ τὸ πλάτος, συνάγομεν, ὅτι:

Ὁ λόγος δύο ὀρθογωνίων παραλληλεπιπέδων, τὰ ὁποῖα ἔχουν δύο διαστάσεις ἴσας, εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν τρίτων διαστάσεών των.

744. Θεώρημα. Ὁ λόγος δύο ὀρθογωνίων παραλληλεπιπέδων, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴσα ὕψη, εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν βάσεών των.

Ὑπόθεσις: Ἐστῶσαν τὰ ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα Π καὶ Π' , τὰ ὁποῖα ἔχουν, ὡς διαστάσεις τὸ πρῶτον α, β, γ καὶ τὸ δεῦτερον α', β', γ .

Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι $\frac{\Pi}{\Pi'} = \frac{\alpha \times \beta}{\alpha' \times \beta'}$.



Σχ. 508.

Ἀπόδειξις: Φανταζόμεθα ἓνα τρίτον ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον Π'' , τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς δια-

στάσεις α' , β , γ , δηλ. αἱ δύο διαστάσεις του εἶναι ἴσαι με δύο διαστάσεις τοῦ πρώτου παραλληλεπιπέδου.

Ἐπειδὴ τὰ ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα Π καὶ Π'' ἔχουν δύο διαστάσεις β καὶ γ ἴσας, θὰ ἔχουν λόγον ἴσον με τὸν λόγον τῶν τρίτων διαστάσεών των (§ 743) δηλ. θὰ εἶναι $\frac{\Pi}{\Pi''} = \frac{\alpha}{\alpha'}$ (1)

Ἐπειδὴ τὰ ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα Π'' καὶ Π' ἔχουν δύο διαστάσεις α' καὶ γ ἴσας, θὰ ἔχουν λόγον ἴσον με τὸν λόγον τῶν τρίτων διαστάσεών των, δηλ. θὰ εἶναι $\frac{\Pi''}{\Pi'} = \frac{\beta}{\beta'}$ (2)

Πολλαπλασιάζομεν τὰς ἰσότητες (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\frac{\Pi}{\Pi''} \times \frac{\Pi''}{\Pi'} = \frac{\alpha}{\alpha'} \times \frac{\beta}{\beta'} \quad \eta \quad \frac{\Pi}{\Pi'} = \frac{\alpha \times \beta}{\alpha' \times \beta'}$$

Ἐδείχθη λοιπόν. ὅτι: Ὁ λόγος δύο ὀρθογωνίων. . .

745. Πόρισμα. Ἀπὸ τὴν τελευταίαν σχέσιν τοῦ προηγουμένου θεωρήματος συναγομεν, ὅτι:

Ὁ λόγος δύο ὀρθογωνίων παραλληλεπιπέδων, τὰ ὁποῖα ἔχουν μίαν διάστασιν ἴσην, εἶναι ἴσος με τὸν λόγον τῶν γινομένων τῶν δύο ἄλλων διαστάσεών των.

746. Θεώρημα. Ὁ λόγος δύο ὀρθογωνίων παραλληλεπιπέδων εἶναι ἴσος με τὸν λόγον τῶν γινομένων τῶν τριῶν διαστάσεών των.

Ἐπιπέδουσι: Ἐστωσαν τὰ ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα Π καὶ Π' ,

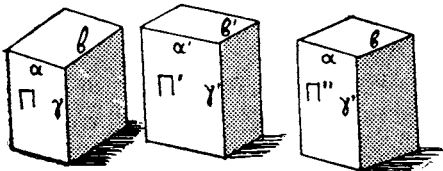
τὰ ὁποῖα ἔχουν, ὡς διαστάσεις, τὸ πρῶτον α, β, γ καὶ τὸ δεύτερον α', β', γ' .

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\frac{\Pi}{\Pi'} = \frac{\alpha \times \beta \times \gamma}{\alpha' \times \beta' \times \gamma'}$.

Ἀπόδειξις: Φανταζόμεθα ἕνα τρίτον ὀρθογώνιον παρα-

λληλεπίπεδον Π'' , τὸ ὁποῖον ἔχει διαστάσεις α, β, γ' δηλ. αἱ δύο διαστάσεις του α καὶ β εἶναι ἴσαι με δύο διαστάσεις τοῦ πρώτου καὶ ἡ τρίτη διάστασις του γ' εἶναι ἴση με μίαν διάστασιν τοῦ δευτέρου.

Ἐπειδὴ τὰ ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα Π καὶ Π'' ἔχουν δύο διαστάσεις α καὶ β ἴσας, ὁ λόγος των εἶναι ἴσος με τὸν λόγον τῶν τρίτων διαστάσεών των (§ 743) δηλ. θὰ εἶναι $\frac{\Pi}{\Pi''} = \frac{\gamma}{\gamma'}$ (1)



Σχ. 509.

Ἐπίσης ἐπειδὴ τὰ παραλληλεπίπεδα Π'' καὶ Π' ἔχουν μίαν διάστασιν ἴσην γ' , ὁ λόγος των εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τοῦ γινομένου τῶν δύο ἄλλων διαστάσεων (§ 745)· δηλ. θὰ εἶναι $\frac{\Pi''}{\Pi'} = \frac{\alpha \times \beta}{\alpha' \times \beta'}$ (2)

Πολλυπλασιάζομεν τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\frac{\Pi}{\Pi'} \times \frac{\Pi''}{\Pi'} = \frac{\gamma}{\gamma'} \times \frac{\alpha \times \beta}{\alpha' \times \beta'} \quad \eta \quad \frac{\Pi}{\Pi'} = \frac{\alpha \times \beta \times \gamma}{\alpha' \times \beta' \times \gamma'}$$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Ὁ λόγος δύο ὀρθογωνίων παραλληλ...**

Ἀσκήσεις: 2225, 2226.

747. Μονὰς ὄγκου. Διὰ νὰ μετρήσωμεν (§ 32) τὸν ὄγκον ἐνὸς σώματος, δηλ. τὸν χῶρον, τὸν ὁποῖον καταλαμβάνει τὸ σῶμα αὐτὸ εἰς τὸ διάστημα, λαμβάνομεν ὡς μονάδα μετρήσεως τὸν ὄγκον ἐνὸς κύβου, τοῦ ὁποῖου ἡ ἀκμὴ εἶναι ἴση μὲ τὴν μονάδα τοῦ μήκους.

Ἄν λάβωμεν ὡς μονάδα μήκους τὸ μέτρον, ἡ μονὰς τῶν ὄγκων θὰ εἶναι ἕνας κύβος, τοῦ ὁποῖου ἡ ἀκμὴ εἶναι ἴση μὲ ἕνα μέτρον· ἡ μονὰς αὐτὴ τῶν ὄγκων θὰ λέγεται *κυβικὸν μέτρον*.

Ἐὰν λάβωμεν ὡς μονάδα μήκους τὸ δεκατόμετρον, τὸ ἑκατοστόμετρον, τὸ χιλιοστόμετρον, ἡ μονὰς τῶν ὄγκων θὰ εἶναι ἕνας κύβος, ὁ ὁποῖος θὰ ἔχη ἀκμὴν ἴσην, ἀντιστοίχως, μὲ ἕνα δεκατόμετρον (παλάμην), ἕνα ἑκατοστόμετρον, ἕνα χιλιοστόμετρον καὶ θὰ λέγεται κατὰ σειρὰν *κυβικὸν δεκατόμετρον*, *κυβικὸν ἑκατοστόμετρον*, *κυβικὸν χιλιοστόμετρον*.

748. Ὅγκος σώματος. Τὸ ἐξαγόμενον τῆς συγκρίσεως ἐνὸς σώματος πρὸς τὴν μονάδα τῶν ὄγκων, δηλ. ὁ **ἀριθμὸς** πὸν ἐκφράζει πόσας φορὰς τὸ δοθὲν σῶμα περιέχει τὴν μονάδα τῶν ὄγκων ἢ τὰ μέρη αὐτῆς, λέγεται **ὄγκος** τοῦ σώματος.

Παρατήρησις. Εἶναι φανερόν, ὅτι δύο πολύεδρα καὶ γενικῶς δύο σώματα εἶναι **ισοδύναμα**, εἰὰν ἔχουν τὸν αὐτὸν ὄγκον.

Δύο πολύεδρα κλπ. ἴσα, εἶναι προφανῶς **ισοδύναμα**, ἀλλὰ δύο πολύεδρα κλπ. δύνανται νὰ εἶναι **ισοδύναμα**, χωρὶς νὰ εἶναι ἴσα.

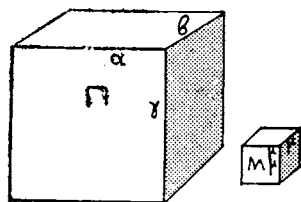
749. Θεώρημα. Ὁ ὄγκος ἐνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τῶν τριῶν διαστάσεων των.

Ἐπιπέδου: Ἐστω τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον Π , τὸ ὁποῖον ἔχει διαστάσεις α , β , γ .

Συμπέρασμα: Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ V τὸν ὄγκον του θὰ δειξωμεν, ὅτι $V = \alpha \times \beta \times \gamma$.

Ἀπόδειξις: Ὑποθέτομεν, ὅτι αἱ διαστάσεις α , β , γ τοῦ ὀρθογω-

νίου παραλληλεπιπέδου Π ἔμετρήθησαν μετὰ τὴν μονάδα μ τοῦ μήκους. Ἡ μονὰς τῶν ὄγκων θὰ εἶναι τότε ἕνας κύβος M , τοῦ ὁποῦοι ἡ πλευρὰ θὰ εἶναι ἴση μετὰ μ .



Σχ. 510.

Ἐπειδὴ καὶ ὁ κύβος M εἶναι ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, ὁ λόγος τῶν ὀρθογωνίων παραλληλεπιπέδων Π καὶ M θὰ εἶναι ἴσος μετὰ τὸν λόγον τῶν γινομένων τῶν τριῶν διαστάσεών των· δηλ. θὰ εἶναι

$$\frac{\Pi}{M} = \frac{\alpha \times \beta \times \gamma}{\mu \times \mu \times \mu}$$

Ἐπειδὴ ὁ κύβος M εἶναι ἡ μονὰς τῶν ὄγκων, ὁ λόγος $\frac{\Pi}{M}$ παριστάνει τὸν ὄγκον τοῦ παραλληλεπιπέδου Π καὶ ἐπειδὴ $\mu = \mu = \mu = 1$, ἡ ἰσότης (1) γράφεται

$$\text{ὄγκ. παραλληλεπιπέδου } \Pi = \frac{\alpha \times \beta \times \gamma}{1 \times 1 \times 1} \quad \eta \quad \boxed{V = \alpha \times \beta \times \gamma}$$

Ἐδείχθη λοιπὸν, ὅτι: *Ὁ ὄγκος ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλ...*

750. Παρατήρησις. Ὅπως ἀνεφέραμεν καὶ εἰς τὴν § 510 παρ., ὅταν λέγωμεν: ὁ ὄγκος ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσος μετὰ τὸ γινόμενον τῶν τριῶν διαστάσεών του ἔννοοῦμεν, ὅτι: ὁ ἀριθμὸς ὁ ὁποῖος μειρεῖ τὸν ὄγκον τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσος μετὰ τὸ γινόμενον τῶν ἀριθμῶν, οἱ ὁποῖοι μετροῦν τὰς τρεῖς διαστάσεις του.

751. Πόρισμα I. Ἡ ἰσότης $V = \alpha \times \beta \times \gamma$ δύναται νὰ γραφῆι:

$$V = (\alpha \times \beta) \times \gamma.$$

Ἐπειδὴ τὸ γινόμενον $(\alpha \times \beta)$ παριστάνει τὸ ἔμβασον τῆς βάσεως τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου καὶ τὸ γ τὸ ὕψος του συνάγομεν, ὅτι:

Ὁ ὄγκος ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσος μετὰ τὸ γινόμενον τοῦ ἔμβασοῦ τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Δηλ. $\boxed{\text{Ὁ γκ. ὀρθ. παραλληλεπ.} = \text{ἔμβ. βάσεως} \times \text{ὑψος}}$

752. Πόρισμα II. Ὁ ὄγκος ἑνὸς κύβου εἶναι ἴσος μετὰ τὴν τρίτην δύναμιν τῆς ἀκμῆς του.

Ὁ κύβος εἶναι ἕνα ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, τοῦ ὁποῦοι αἱ τρεῖς διαστάσεις εἶναι ἴσαι. Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν μετὰ V τὸν ὄγκον του καὶ μετὰ a τὴν ἀκμὴν του θὰ εἶναι

$$V = a \times a \times a \quad \eta \quad \boxed{\text{ὄγκ. κύβου} = a^3}$$

Σημ. Ἡ τρίτη δύναμις ἑνὸς ἀριθμοῦ λέγεται καὶ **κύβος τοῦ ἀριθμοῦ αὐτοῦ**, διότι δίδει τὸν ὄγκον ἑνὸς κύβου, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκμὴ εἶναι ἴση μὲ τὸν ἀριθμὸν.

Ἀσκήσεις: 2227, 2228, 2229, 2230, 2231, 2232, 2233, 2234, 2235.

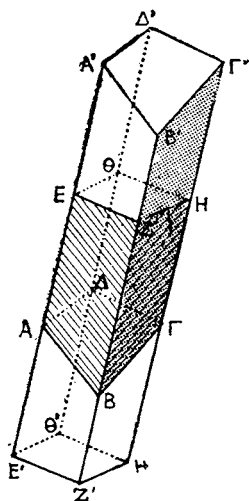
753. Θεώρημα. Κάθε πλάγιον πρίσμα εἶναι ἰσοδύναμον μὲ ὀρθὸν πρίσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς βάσιν τὴν κάθετον τομὴν τοῦ πλαιγίου πρίσματος καὶ ὡς ὕψος τὴν παράπλευρον ἀκμὴν του.

Ὑποθέσεις: Ἐστω τὸ πλάγιον πρίσμα $ΑΒΓΔΑ'Β'Γ'Δ'$ καὶ $ΕΖΗΘ$ μία κάθετος τομὴ αὐτοῦ.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ πρίσμα $ΑΓ'$ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ πρίσμα, ποῦ ἔχει βάσιν τὴν $ΕΖΗΘ$ καὶ παράπλευρον ἀκμὴν τὴν $ΑΑ'$.

Ἀπόδειξις: Ὑποθέτομεν, ὅτι ἡ κάθετος τομὴ $ΕΖΗΘ$ δὲν συναντᾷ τὴν βάσιν $ΑΒΓΔ$ τοῦ πλαιγίου πρίσματος (Σχ. 511).

Προεκτείνωμεν τὰς παραπλεύρους ἀκμὰς τοῦ πλαιγίου πρίσματος κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν. Ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ἀκμῆς $ΕΑ$ λαμβάνομεν ἓνα τμήμα $ΕΕ'$ ἴσον μὲ τὴν ἀκμὴν $Α'Α$ τοῦ πλαιγίου πρίσματος· ἀπὸ τὸ σημεῖον $Ε'$ φέρομεν μίαν δευτέραν κάθετον τομὴν $Ε'Ζ'Η'Θ'$ καὶ οὕτω σχηματίζεται ἓνα ὀρθὸν πρίσμα $Ε'Ζ'Η'Θ'ΕΖΗΘ$, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς βάσιν τὴν κάθετον τομὴν $ΕΖΗΘ$ τοῦ πλαιγίου πρίσματος καὶ ὡς ὕψος τὴν παράπλευρον ἀκμὴν $ΕΕ'$, ἡ ὁποία εἶναι ἴση ἕκ κατασκευῆς μὲ τὴν παράπλευρον ἀκμὴν τοῦ πλαιγίου πρίσματος. Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὸ ὀρθὸν πρίσμα $Ε'Η$ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ πλάγιον πρίσμα $ΑΓ'$.



Σχ. 511.

Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸ σχῆμα 511 τὸ πλάγιον πρίσμα $ΑΓ'$ καὶ τὸ ὀρθὸν πρίσμα $Ε'Η$ ἀποτελοῦνται ἀπὸ τὸ κοινὸν στερεὸν $ΑΒΓΔΕΖΗΘ$ καὶ ἀπὸ τὰ δύο μὴ κοινὰ στερεὰ $Ε'Ζ'Η'Θ'ΑΒΓΔ$ καὶ $ΕΖΗΘΑ'Β'Γ'Δ'$. Διὰ τὸ ἀποδείξωμεν τώρα, ὅτι τὸ πλάγιον πρίσμα καὶ τὸ ὀρθὸν πρίσμα εἶναι ἰσοδύναμα ἀρκεῖ νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι τὰ δύο αὐτὰ στερεὰ $Ε'Ζ'Η'Θ'ΑΒΓΔ$ καὶ $ΕΖΗΘΑ'Β'Γ'Δ'$ εἶναι ἴσα.

Πρὸς τοῦτο λαμβάνομεν (νοερώς) τὸ στερεὸν $E'Z'H'\Theta'$ $AB\Gamma\Delta$ καὶ τὸ θέτομεν ἐπὶ τοῦ στερεοῦ $EZH\Theta A'B'\Gamma'\Delta'$ οὕτως, ὥστε ἡ ἔδρα $E'Z'H'\Theta'$ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ἴσης τῆς ἔδρας $EZH\Theta$. Τότε ἡ ἀκμὴ $E'A$, ὡς κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον $E'Z'H'\Theta'$ εἰς τὸ σημεῖον E' θὰ πέσῃ ἐπὶ τῆς καθέτου EA' ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον $EZH\Theta$ εἰς τὸ σημεῖον E . Ἐπειδὴ δὲ αἱ ἀκμαὶ $E'A$ καὶ EA' εἶναι ἴσαι, ὡς διαφορὰ τῶν ἴσων ἀκμῶν $E'E$ καὶ AA' ἀπὸ τῶν ὁποίων ἀφηρέθη τὸ κοινὸν τμήμα AE , τὸ σημεῖον A θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ A' .

Ὅμοιως ἀποδεικνύεται, ὅτι αἱ ἀκμαὶ $Z'B$, $H'\Gamma$, $\Theta'\Delta$ θὰ πέσουν ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν ἀκμῶν ZB' , $H\Gamma'$, $\Theta\Delta'$ καὶ τὰ σημεῖα B , Γ , Δ , θὰ πέσουν ἐπὶ τῶν σημείων B' , Γ' , Δ' . Ἐπειδὴ αἱ κορυφαὶ τῶν δύο στερεῶν $E'Z'H'\Theta'AB\Gamma\Delta$ καὶ $EZH\Theta A'B'\Gamma'\Delta'$ συμπίπτουν, μία πρὸς μίαν, τὰ στερεὰ οὐτὰ ἐφαρμόζουσι καὶ ἐπομένως εἶναι ἴσα.

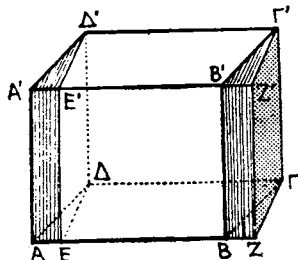
Παρατηροῦμεν λοιπὸν, ὅτι τὸ πλάγιον πρίσμα καὶ τὸ ὀρθὸν πρίσμα ἀποτελοῦνται ἀπὸ ἴσα μέρη καὶ ἐπομένως εἶναι ἰσοδύναμα.

Ἐδείχθη λοιπὸν, ὅτι: **Κάθε πλάγιον πρίσμα...**

754. Θεώρημα. Ὁ ὄγκος ἐνὸς παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις, καθόσον τὸ παραλληλεπίπεδον εἶναι ὀρθὸν ἢ πλάγιον.

1η. Ὑπόθεσις: Ἐστω τὸ ὀρθὸν παραλληλεπίπεδον $AB\Gamma\Delta A'B'\Gamma'\Delta'$



Σχ. 512.

ἢ AG' , τοῦ ὁποίου ἡ βάση εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον $AB\Gamma\Delta$ καὶ ὕψος τὸ AA' .

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι:

$\text{ὄγκος } \overline{AG'} = \text{ἐμβ. } AB\Gamma\Delta \times AA'$.

Ἀπόδειξις: Κατασκευάζομεν τὸ ὀρθογώνιον $\Delta EZ\Gamma$, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς βάσιν τὴν πλευρὰν $\Delta\Gamma$ τοῦ παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ καὶ ὡς ὕψος τὸ ὕψος ΔE τοῦ παραλληλογράμμου αὐτοῦ. Κατασκευάζο-

μεν ἔπειτα τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον $EZ\Gamma\Delta E'Z'\Gamma'\Delta'$, τὸ ὁποῖον ἔχει τὸ αὐτὸ ὕψος μὲ τὸ δοθὲν παραλληλεπίπεδον. Τὰ δύο παραλληλεπίπεδα $AB\Gamma\Delta A'B'\Gamma'\Delta'$ καὶ $EZ\Gamma\Delta E'Z'\Gamma'\Delta'$ εἶναι ἰσοδύναμα, διότι ἕκαστον τούτων ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ κοινὸν στερεὸν $EB\Gamma\Delta E'B'\Gamma'\Delta'$ καὶ ἀπὸ τὰ ἴσα τριγωνικὰ πρίσματα $AE\Delta A'E'\Delta'$ καὶ $BZ\Gamma B'Z'\Gamma'$. Τὰ τριγωνικὰ αὐτὰ πρίσματα εἶναι ἴσα (§ 740) διότι εἶναι ὀρθὰ καὶ ἔχουσι ἴσας βάσεις, τὰ τρίγωνα $AE\Delta$ καὶ $BZ\Gamma$ καὶ ἴσα ὕψη $AA' = BB'$.

Ἄλλὰ (§ 749) ὁ ὄγκος τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ΕΖΓΔΕ'Ζ'Γ'Δ', καὶ ἐπομένως καὶ τοῦ ἰσοδυνάμου του ὀρθοῦ παραλληλεπιπέδου ΑΒΓΔΑ'Β'Γ'Δ', εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ΕΖΓΔ ἐπὶ τὸ ὕψος του, δηλ. μὲ ἔμβ. ΕΖΓΔ×ΔΔ'.

$$\Theta\acute{\alpha} \text{ εἶναι λοιπὸν ὄγκ. ΑΓ}' = \text{ἔμβ. ΕΖΓΔ} \times \Delta\Delta' \quad (1)$$

Ἐπειδὴ αἱ βάσεις ΕΖΓΔ καὶ ΑΒΓΔ εἶναι ἰσοδύναμοι καὶ ΔΔ' = ΑΑ', ἡ ἰσότης (1) γράφεται ὄγκ. ΑΓ}' = ἔμβ. ΑΒΓΔ×ΑΑ'.

2α. Ὑπόθεσις: Ἐστω τὸ πλάγιον παραλληλεπίπεδον ΑΒΓΔΑ'Β'Γ'Δ' (Σχ. 513), τοῦ ὁποίου ἡ βάση εἶναι τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ.

Συμπέρασμα: Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ υ τὸ ὕψος τοῦ παραλληλεπιπέδου θὰ δεῖξωμεν, ὅτι ὄγκ. ΑΓ}' = ἔμβ. ΑΒΓΔ×υ.

Ἀπόδειξις: Τὸ δοθὲν παραλληλεπίπεδον ΑΓ}' δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν ὡς ἓνα πλάγιον πρίσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει βάση τὴν ΔΑΑ'Δ' καὶ ὡς παράπλευρον ἀκμὴ τὴν ΑΒ.

Ἄλλὰ τὸ παραλληλεπίπεδον αὐτό, ὡς πλάγιον πρίσμα, εἶναι ἰσοδύναμον (§ 753) μὲ ἓνα ὀρθὸν πρίσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει βάση τὴν κάθετον τομὴν ΚΛΜΝ καὶ ὡς ὕψος τὴν παράπλευρον ἀκμὴν ΑΒ.

Ἄλλὰ ἡ κάθετος τομὴ ΚΛΜΝ εἶναι ἓνα παραλληλόγραμμον, διότι

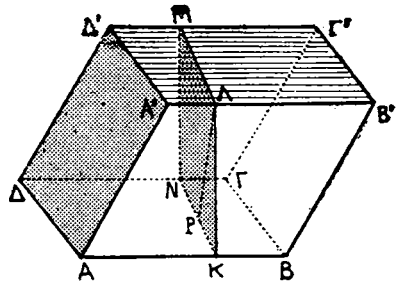
αἱ ἀπέναντι πλευραὶ του ΚΛ, ΝΜ καὶ ΚΝ, ΛΜ εἶναι παράλληλοι, ὡς τομαὶ παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπὸ τρίτου καὶ ἐπομένως τὸ ὀρθὸν αὐτὸ πρίσμα εἶναι ἓνα ὀρθὸν παραλληλεπίπεδον. Ὁ ὄγκος αὐτοῦ καὶ ἐπομένως καὶ τοῦ ἰσοδυνάμου του ΑΓ}' θὰ εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τῆς βάσεώς του ΚΛΜΝ ἐπὶ τὸ ὕψος του ΑΒ, δηλ. θὰ εἶναι

$$\text{ὄγκ. ΑΓ}' = \text{ἔμβ. ΚΛΜΝ} \times \text{ΑΒ} \quad (2)$$

Ἐὰν λάβωμεν ὡς βάση τοῦ παραλληλογράμμου ΚΛΜΝ τὴν πλευρὰν ΚΝ, ὕψος του θὰ εἶναι ἡ ΛΡ καὶ ἐπομένως τὸ ἔμβადόν του θὰ εἶναι ἴσον μὲ ΚΝ×ΛΡ. Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν ἰσότητα (2) τὸ ἔμβ.ΚΛΜΝ μὲ τὸ ἴσον του ΚΝ×ΛΡ, ἡ ἰσότης (2) γράφεται

$$\text{ὄγκος ΑΓ}' = \text{ΚΝ} \times \text{ΛΡ} \times \text{ΑΒ} \quad \text{ἢ} \quad \text{ὄγκος ΑΓ}' = (\text{ΑΒ} \times \text{ΚΝ}) \times \text{ΛΡ} \quad (3)$$

Ἐπειδὴ ἡ ΚΛΜΝ εἶναι κάθετος τομὴ τοῦ ΑΓ}', ἡ ΝΚ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἀκμὴν ΑΒ καὶ ἐπομένως ἡ ΚΝ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ὕψος τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Ἐπομένως τὸ γινόμενον (ΑΒ×ΚΝ)



Σχ. 513.

παριστάνει τὸ ἔμβασδὸν τῆς βάσεως $AB\Gamma\Delta$ δηλ. εἶναι

$$(AB \times KN) = \text{ἔμβ. } AB\Gamma\Delta.$$

Ἐπίσης ἐπειδὴ τὸ ἐπίπεδον $KLMN$ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον $AB\Gamma\Delta$, ἢ εὐθεῖα AP , ἢ ὁποῖα κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $KLMN$ καὶ εἶναι, ἐκ κατασκευῆς, κάθετος ἐπὶ τὴν τομὴν KN τῶν ἐπιπέδων $AB\Gamma\Delta$ καὶ $KLMN$, θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον $AB\Gamma\Delta$ (§ 686)· ἐπομένως ἡ AP εἶναι τὸ ὕψος v τοῦ παραλληλεπιπέδου AG' . Ἄν ἀντι καταστήσωμεν εἰς τὴν ἰσότητα (β) τὸ $(AB \times KN)$ μὲ τὸ ἴσον του ἔμβ. $AB\Gamma\Delta$ καὶ τὸ AP μὲ τὸ ἴσον του v , ἔχομεν

$$\text{ὄγκ. } AG' = \text{ἔμβ. } AB\Gamma\Delta \times v$$

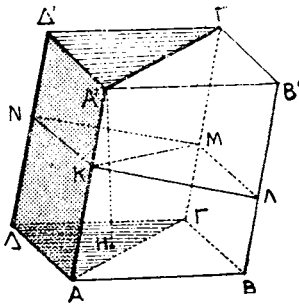
Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: Ὁ ὄγκος ἑνὸς παραλληλεπιπέδου...

755. Θεώρημα. Τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον διέρχεται ἀπὸ δύο ἀπέναντι ἀκμῶν ἑνὸς παραλληλεπιπέδου, διαιρεῖ τὸ παραλληλεπίπεδον εἰς δύο τριγωνικὰ πρίσματα ἰσοδύναμα.

Ἐπίπεδος: Ἐστω τὸ παραλληλεπίπεδον $AB\Gamma\Delta A'B'\Gamma'\Delta'$. Φέρομεν τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον διέρχεται ἀπὸ τὰς δύο ἀπέναντι ἀκμῶν AA' καὶ $\Gamma\Gamma'$ καὶ τὸ ὁποῖον διαιρεῖ τὸ παραλληλεπίπεδον AG' εἰς τὰ δύο στερεὰ $AB\Gamma A'B'\Gamma'$ καὶ $A\Delta\Gamma A'\Delta'\Gamma'$.

1ον. Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ στερεὰ αὐτὰ εἶναι τριγωνικὰ πρίσματα ἰσοδύναμα.

Ἀπόδειξις: Τὸ στερεὸν $AB\Gamma A'B'\Gamma'$ εἶναι τριγωνικὸν πρῖσμα, διότι αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ τοῦ AA' , BB' , $\Gamma\Gamma'$ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι, ὡς παράπλευροι ἀκμαὶ τοῦ παραλληλεπιπέδου AG' καὶ αἱ



Σχ. 514.

τριγωνικαὶ βάσεις του $AB\Gamma$ καὶ $A'B'\Gamma'$ εἶναι παράλληλοι, ὡς μέρη τῶν παραλλήλων βάσεων τοῦ αὐτοῦ παραλληλεπιπέδου. Ὅμοιως ἀποδεικνύεται, ὅτι καὶ τὸ στερεὸν $A\Delta\Gamma A'\Delta'\Gamma'$ εἶναι τριγωνικὸν πρῖσμα.

2ον. Συμπέρασμα: Τώρα θὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι τὰ τριγωνικὰ αὐτὰ πρίσματα εἶναι ἰσοδύναμα.

Ἀπόδειξις: Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις, καθ' ὅσον τὸ παραλληλεπίπεδον AG' εἶναι ὀρθὸν ἢ πλάγιον.

I. Ἐὰν τὸ δοθὲν παραλληλεπίπεδον AG' εἶναι ὀρθὸν καὶ τὰ τριγωνικὰ πρίσματα $AB\Gamma A'B'\Gamma'$ καὶ $A\Delta\Gamma A'\Delta'\Gamma'$ εἶναι ὀρθά. Ἀλλὰ τὰ

δύο αὐτὰ ὀρθὰ πρίσματα ἔχουν ἴσας τὰς βάσεις των ΑΒΓ καὶ ΑΔΓ, ὡς ἡμίση τοῦ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ καὶ ἴσα τὰ ὕψη των ΑΑ' καὶ ΒΒ'. ἄρα θὰ εἶναι ἴσα (§ 740) καὶ ἐπομένως καὶ ἰσοδύναμα.

II. Ἐὰν τὸ δοθὲν παραλληλεπίπεδον ΑΓ' εἶναι πλάγιον, καὶ τὰ δύο τριγωνικὰ πρίσματα ΑΒΓΑ'Β'Γ' καὶ ΑΔΓΑ'Δ'Γ' εἶναι πλάγια. Φέρομεν τὴν κάθετον τομὴν ΚΛΜΝ τοῦ παραλληλεπιπέδου ΑΓ' ἢ κάθετος αὐτῆ τομῆ εἶναι ἓνα παραλληλόγραμμον, διότι αἱ ἀπέναντι πλευραὶ του εἶναι παράλληλοι, ὡς τομαὶ παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπὸ τρίτου. Τὸ ἐπίπεδον λοιπὸν ΑΑ'Γ'Γ' διαιρεῖ τὸ παραλληλόγραμμον ΚΛΜΝ εἰς δύο ἴσα τρίγωνα ΚΛΜ καὶ ΚΝΜ, τὰ ὅποια εἶναι αἱ κάθετοι τομαὶ τῶν τριγωνικῶν πρισμάτων ΑΒΓΑ'Β'Γ' καὶ ΑΔΓΑ'Δ'Γ' ἀντιστοιχῶς.

Ἄλλὰ τότε τὸ πλάγιον τριγωνικὸν πρίσμα ΑΒΓΑ'Β'Γ' εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ὀρθὸν πρίσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν τὴν κάθετον τομὴν ΚΛΜ καὶ ὕψος ἴσον μὲ τὴν παράπλευρον ἀκμὴν ΑΑ'. Ὀμοίως τὸ πλάγιον τριγωνικὸν πρίσμα ΑΔΓΑ'Δ'Γ' εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ὀρθὸν πρίσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν τὴν κάθετον τομὴν ΚΝΜ καὶ ὕψος ἴσον μὲ τὴν παράπλευρον ἀκμὴν ΑΑ'. Ἐπειδὴ τὰ δύο αὐτὰ ὀρθὰ πρίσματα ἔχουν ἴσας βάσεις, τὰς ΚΛΜ καὶ ΚΝΜ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος ΑΑ', εἶναι ἴσα καὶ ἐπομένως καὶ ἰσοδύναμα. Ἄλλὰ τότε καὶ τὰ δύο πλάγια τριγωνικὰ πρίσματα ΑΒΓΑ'Β'Γ' καὶ ΑΔΓΑ'Δ'Γ', τὰ ὅποια εἶναι ἀντιστοιχῶς ἰσοδύναμα μὲ τὰ ὀρθὰ τριγωνικὰ πρίσματα, θὰ εἶναι ἰσοδύναμα.

Ἐδείχθη λοιπὸν, ὅτι: **Τὸ ἐπίπεδον τὸ ὁποῖον...**

756. Θεώρημα. Ὁ ὄγκος ἐνὸς πρισματος εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις, καθόσον τὸ πρίσμα εἶναι τριγωνικὸν ἢ τυχὸν πρίσμα.

I. Τὸ πρίσμα εἶναι τριγωνικόν.

Ἐπίδοσις: Ἐστω τὸ τριγωνικὸν πρίσμα ΑΒΓΑ'Β'Γ' (Σχ. 514), τοῦ ὁποίου ἡ βάση εἶναι τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ τὸ ὕψος του ΑΗ.

Συμπέρασμα: Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ V τὸν ὄγκον του, θὰ δείξωμεν, ὅτι $V = \text{ἐμβ. ΑΒΓ} \times \text{Α'Η}$.

Ἀπόδειξις: Κατασκευάζομεν τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΒΓΔΑ'Β'Γ'Δ' τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς βάσιν τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ, τὸ ὁποῖον κατασκευάζεται μὲ πλευρὰς τὰς ΑΒ καὶ ΒΓ καὶ ὡς ὕψος τὸ ὕψος Α'Η τοῦ τριγωνικοῦ πρισματος. Τὸ παραλληλεπίπεδον αὐτὸ ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ δύο τριγωνικὰ πρίσματα ΑΒΓΑ'Β'Γ' καὶ ΑΔΓΑ'Δ'Γ', τὰ ὅποια ἰσοδύναμα (§ 755). Συνεπῶς τὸ τριγωνικὸν πρίσμα ΑΒΓΑ'Β'Γ' εἶναι

τὸ ἥμισυ τοῦ παραλληλεπιπέδου $ΑΓ'$ καὶ ἐπομένως ὁ ὄγκος του θὰ εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ὄγκου τοῦ παραλληλεπιπέδου $ΑΓ'$. Ἐπειδὴ ὁ ὄγκος τοῦ παραλληλεπιπέδου $ΑΓ'$ εἶναι ἴσος μὲ ἔμβ. $ΑΒΓΔ \times Α'Η$ ἔπεται, ὅτι ὁ ὄγκος V τοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος θὰ εἶναι :

$$V = \frac{1}{2} \text{ ἔμβ. } ΑΒΓΔ \times Α'Η \quad \text{ἢ} \quad V = \text{ ἔμβ. } ΑΒΓ \times Α'Η.$$

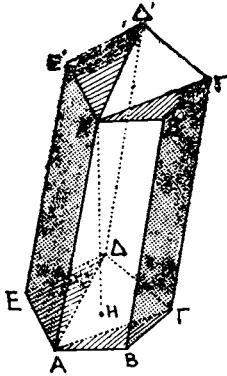
II. Τὸ πρίσμα εἶναι τυχόν.

Ἐπίπεδοι: Ἐστω τώρα τὸ τυχὸν πρίσμα $ΑΒΓΔΕΑ'Β'Γ'Δ'Ε'$ (Σχ. 515) τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι τὸ πολύγωνον $ΑΒΓΔΕ$ καὶ ὕψος του τὸ $Α'Η$.

Συμπέρασμα: Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ V τὸν ὄγκον του θὰ δεῖξωμεν, ὅτι

$$V = \text{ ἔμβ. } ΑΒΓΔΕ \times Α'Η.$$

Ἀπόδειξις: Δυνάμεθα νὰ χωρίσωμεν τὸ δοθὲν πρίσμα εἰς τριγωνικὰ πρίσματα, ὅπως ἔχωρίσαμεν ἓνα τυχὸν πολύγωνον εἰς τρίγωνα. Πρὸς τοῦτο φέρομεν τὰ διαγώνια ἐπίπεδα $ΑΑ'Γ'Γ'$, $ΑΑ'Δ'Δ'$, τὰ ὁποῖα χωρίζουν τὸ δοθὲν πρίσμα εἰς τὰ τριγωνικὰ πρίσματα $ΑΒΓΑ'Β'Γ'$, $ΑΓΔΑ'Γ'Δ'$, $ΑΔΕΑ'Δ'Ε'$. Τὰ τριγωνικὰ αὐτὰ πρίσματα ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος $Α'Η$ καὶ βάσεις



Σχ. 515.

ἀντιστοίχως τὰς $ΑΒΓ$, $ΑΓΔ$, $ΑΔΕ$.

Ὁ ὄγκος V τοῦ δοθέντος πρίσματος εἶναι προφανῶς ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων ὄλων αὐτῶν τῶν τριγωνικῶν πρισματων· δηλ. εἶναι

$$V = \text{ ὄγκ. } ΑΒΓΑ'Β'Γ' + \text{ ὄγκ. } ΑΓΔΑ'Γ'Δ' + \text{ ὄγκ. } ΑΔΕΑ'Δ'Ε' \quad (1)$$

$$\text{ Ἐπειδὴ } \quad \text{ ὄγκ. } ΑΒΓΑ'Β'Γ' = \text{ ἔμβ. } ΑΒΓ \times Α'Η,$$

$$\text{ ὄγκ. } ΑΓΔΑ'Γ'Δ' = \text{ ἔμβ. } ΑΓΔ \times Α'Η$$

$$\text{ καὶ } \quad \text{ ὄγκ. } ΑΔΕΑ'Δ'Ε' = \text{ ἔμβ. } ΑΔΕ \times Α'Η$$

καὶ ἰσότης (1) γράφεται :

$$V = \text{ ἔμβ. } ΑΒΓ \times Α'Η + \text{ ἔμβ. } ΑΓΔ \times Α'Η + \text{ ἔμβ. } ΑΔΕ \times Α'Η$$

$$\text{ ἢ } \quad V = (\text{ ἔμβ. } ΑΒΓ + \text{ ἔμβ. } ΑΓΔ + \text{ ἔμβ. } ΑΔΕ) \times Α'Η$$

$$\text{ ἢ } \quad V = \text{ ἔμβ. } ΑΒΓΔΕ \times Α'Η \quad \text{ ἢ } \quad \boxed{\text{ ὄγκ. πρίσμ. } = \text{ ἔμβ. βασ. } \times \text{ ὕψος}}$$

Ἐδείχθη λοιπόν. ὅτι: Ὁ ὄγκος ἑνὸς πρίσματος...

757. Πορίσματα. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ B τὸ ἔμβαδὸν τῆς βάσεως ἑνὸς πρίσματος, μὲ $υ$ τὸ ὕψος του καὶ μὲ V τὸν ὄγκον του θὰ ἔχωμεν τὸν τύπον :

$$\boxed{V = B \cdot υ}$$

Ἄπο τὸν τύπον αὐτὸν συνάγομεν ἀμέσως, ὅτι :

I. Δύο πρισματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν βάσεις ἰσοδυνάμους καὶ ἴσα ὕψη, εἶναι ἰσοδύναμα.

II. Δύο πρισματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἰσοδυνάμους βάσεις, εἶναι ὡς τὰ ὕψη των.

III. Δύο πρισματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴσα ὕψη, εἶναι ὡς αἱ βάσεις των.

Ἀσκήσεις

2203. (2239). Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὸ ὕψος πλαγίου πρισματος εἶναι μικρότερον τῶν παραπλευρῶν ἀκμῶν του.

2204. (2240). Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ ἐνὸς πρισματος ἔχουν τὴν αὐτὴν κλίσιν πρὸς τὰς βάσεις του.

2205. (2241). Κάθε τομὴ πρισματος ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὰς παραπλευροὺς ἀκμὰς εἶναι παραλληλόγραμμον.

2206. (2242). Δύο διαγώνια ἐπίπεδα πρισματος, (δηλ. τὰ ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα διέρχονται ἀπὸ δύο μὴ διαδοχικὰς παραπλευροὺς ἀκμὰς) τέμνονται κατὰ εὐθεῖαν παράλληλον καὶ ἴσην πρὸς τὰς παραπλευροὺς ἀκμὰς του.

2207. (2243). Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας ἐνὸς ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρισματος, ἐὰν αἱ ἀκμαὶ τῆς βάσεως του εἶναι 18 ἐκ., 24 ἐκ., 30 ἐκ. καὶ τὸ ὕψος τοῦ πρισματος εἶναι 64 ἐκ.

2208. (2244). Ἡ βάσις ἐνὸς ὀρθοῦ πρισματος εἶναι ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς 0,60 μ. καὶ τὸ ὕψος του 2,4 μ. Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλευροῦ ἐπιφανείας καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας τοῦ πρισματος.

2209. (2245). Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας ἐνὸς κανονικοῦ ἑξαγωνικοῦ πρισματος, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ βάσις του εἶναι ἑγγεγραμμένη εἰς κύκλον ἀκτίνος 12 ἐκ. καὶ τὸ ὕψος του εἶναι 0,60 μ.

2210. (2246). Τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ἐὰν ὑποθέσωμεν, ὅτι ἡ βάσις του εἶναι ἰσόπλευρον τρίγωνον ἑγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον αὐτόν.

2211. (2247). Τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ἐὰν ἡ βάσις του εἶναι τετράγωνον ἑγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον αὐτόν.

2212. (2248). Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας ἐνὸς κανονικοῦ τετραγωνικοῦ πρισματος, μὲ ὅλας τὰς ἀκμὰς του, ἴσας εἶναι 61,44 τ. ἐκ. Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ὕψος τοῦ πρισματος.

2213. (2249). Ἡ βάσις ἐνὸς ὀρθοῦ πρισματος εἶναι ὀρθογώνιον, τοῦ ὁποίου τὸ μῆκος του εἶναι διπλάσιον τοῦ πλάτους του. Ἐὰν τὸ ὕψος τοῦ πρισματος εἶναι 5 μ. καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας του 76 τ.μ. νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαστάσεις τῆς βάσεως καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλευροῦ ἐπιφανείας τοῦ πρισματος.

2214. (2250). Κάθε εὐθεῖα, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον ἐνὸς παραλληλεπιπέδου καὶ περατοῦται εἰς τὴν ἐπιφάνειάν του διχοτομεῖται ὑπὸ τοῦ κέντρον.

2215. (2251). Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλευροῦ ἐπιφανείας ἐνὸς κύβου εἶναι 289 τ.μ. Νὰ ὑπολογισθῆ ἡ ἀκμὴ τοῦ κύβου αὐτοῦ.

2216. (2252). Διὰ τὰ βάψωμεν τὰς ἔδρας ἑνὸς κυβικοῦ δοχείου ἐπληρώσαμεν 1080 δοχ. πρὸς 125 δοχ. τὸ τ.μ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκμὴ τοῦ δοχείου.

2217. (2253). Αἱ διαστάσεις ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι 12 ἐκ., 8 ἐκ. καὶ 20 ἐκ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διαγωνίος του καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας.

2218. (2254). Ἡ ἀκμὴ ἑνὸς κύβου εἶναι 40 ἐκ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διαγωνίος του.

2219. (2255). Τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς ἔδρας ἑνὸς κύβου εἶναι 72,25 τ.μ. Πόση εἶναι ἡ διαγωνίος του.

2220. (2256). Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κύβου εἶναι 486 τ.ἐκ. Πόση εἶναι ἡ διαγωνίος του ;

2221. (2257). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κύβου, ἂν γνωρίζωμεν :

1ον. τὴν διαγωνίον του.

2ον. τὴν διαγωνίον μιᾶς ἔδρας του.

3ον. τὴν διαγωνίον ἑνὸς διαγωνίου ἐπιπέδου του.

4ον. τὴν περίμετρον ἑνὸς διαγωνίου ἐπιπέδου του.

2222. (2258). Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι 1550 τ.ἐκ. καὶ αἱ τρεῖς διαστάσεις του εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 5. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαστάσεις του.

2223. (2259). Ἐὰν αἱ διαγωνιοὶ ἑνὸς παραλληλεπιπέδου εἶναι ἴσαι, τὸ παραλληλεπίπεδον αὐτὸ εἶναι ὀρθογώνιον.

2224. (2260). Ἐὰν εἰς ἓνα τετραγωνικὸν πρίσμα τρεῖς διαγωνιοὶ του διέρχονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον, ἡ τετάρτη διαγωνίος διέρχεται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον καὶ τὸ πρίσμα εἶναι ἓνα παραλληλεπίπεδον.

2225. (2261). Νὰ εὔρεθῇ ὁ λόγος δύο ὀρθογωνίων παραλληλεπιπέδων, ἐὰν τὰ ὕψη των εἶναι 3,2 μ. καὶ αἱ διαστάσεις τῶν βάσεων των εἶναι τοῦ μὲν πρώτου 1,5 μ. καὶ 3 μ. τοῦ δὲ δευτέρου 4,5 μ. καὶ 6 μ.

2226. (2262). Αἱ διαστάσεις δύο ὀρθογωνίων παραλληλεπιπέδων εἶναι τοῦ μὲν πρώτου 4 μ., 6 μ., 8 μ. τοῦ δὲ ἄλλου 8 μ., 12 μ., 16 μ. Νὰ εὔρεθῇ ὁ λόγος τῶν δύο αὐτῶν παραλληλεπιπέδων.

2227. (2263). Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κύβου εἶναι 90,25 τ.ἐκ. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ κύβου καὶ ἡ διαγωνίος του.

2228. (2264). Ὁ ὄγκος ἑνὸς κύβου εἶναι 5 κ.μ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διαγωνίος του καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας του.

2229. (2265). Διὰ τὰ καλύψωμεν τὸ ἐσωτερικὸν ἑνὸς κυβικοῦ κιβωτίου, χωρὶς πῶμα, ἐχρησιμοποίησαμεν 0,882 τ.μ. ἡχάρτου. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ κιβωτίου αὐτοῦ ;

2230. (2266). Ἡ διαγωνίος ἑνὸς κύβου εἶναι 5 μ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας του καὶ ὁ ὄγκος του.

2231. (2267). Τὸ ἐσωτερικὸν ἑνὸς κιβωτίου, τὸ ὁποῖον ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἔχει 1 μ. μήκος, 0,75 μ. πλάτος καὶ 0,50 μ. ὕψος. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος του εἰς κυβ. δεκατόμετρα.

2232. (2268). Μία δοκὸς ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Τὸ μήκος της εἶναι 5 μ., τὸ πλάτος της εἶναι $\frac{3}{50}$ τοῦ μήκους της καὶ τὸ πάχος

της είναι τὰ $\frac{4}{5}$ τοῦ πλάτους της. Νὰ ὑπολογισθῆ ὁ ὄγκος καὶ τὸ βάρος της, ἂν τὸ εἰδικὸν βάρος τοῦ ξύλου εἶναι 0,75.

2233. (2269). Ἐνα δοχεῖον, τὸ ὁποῖον ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου χωρεῖ 7,200 κ.μ. ὕδατος. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαστάσεις του, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ μῆκος του εἶναι διπλάσιον τοῦ πλάτους καὶ τὸ βάθος του τὰ $\frac{2}{3}$ τοῦ μήκους του.

2234. (2270). Τὸ ἑσωτερικὸν ἑνὸς κιβωτίου, τὸ ὁποῖον ἔχει σχῆμα ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου ἔχει μῆκος 75 ἑκ. καὶ πλάτος 40 ἑκ. Νὰ ὑπολογισθῆ ἡ χωρητικότης τοῦ κιβωτίου, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ διαγώνιος του εἶναι 90 ἑκ.

2235. (2271). Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ἔμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας καὶ ὁ ὄγκος ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ὕψος του εἶναι 65 ἑκ., τὸ πλάτος του 40 ἑκ. καὶ ἡ διαγώνιος τῆς βάσεώς του 89 ἑκ.

2236. (2272). Ἡ βάσις ἑνὸς ὀρθοῦ τριγωνικοῦ πρισματος εἶναι ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς 40 ἑκ. καὶ τὸ ὕψος του εἶναι ἴσον μὲ τὴν πλευρὰν τῆς βάσεως. Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ἔμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας του καὶ ὁ ὄγκος του.

2237. (2273). Ἡ βάσις ἑνὸς πρισματος εἶναι ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς a καὶ τὸ ὕψος τοῦ πρισματος εἶναι ἴσον μὲ τὸ διπλάσιον τοῦ ὕψους τῆς βάσεως. Νὰ ὑπολογισθῆ ὁ ὄγκος τοῦ πρισματος. Ἐφαρμογή: $a=3,6$ μ.

2238. (2274). Ἡ βάσις ἑνὸς ὀρθοῦ πρισματος εἶναι ῥόμβος, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι 16 ἑκ. καὶ ἡ μικρότερα διαγώνιος του 30 ἑκ. Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ἔμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας του καὶ ὁ ὄγκος του, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ὕψος του εἶναι ἴσον μὲ τὴν μεγαλύτεραν διαγώνιον του.

2239. (2275). Ἡ βάσις ἑνὸς πρισματος εἶναι τετράγωνον, ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον ἀκτίνας 2 μέτρων. Τὸ ὕψος τοῦ πρισματος εἶναι ἴσον μὲ τὴν διαγώνιον τοῦ τετραγώνου τῆς βάσεως. Νὰ ὑπολογισθῆ ὁ ὄγκος τοῦ πρισματος.

2240. (2276). Νὰ ὑπολογισθῆ ὁ ὄγκος καὶ τὸ ἔμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κανονικοῦ ἑξαγωνικοῦ πρισματος, ἂν τὸ ὕψος του εἶναι 90 ἑκ. καὶ ἡ βάσις του εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς ἕνα κύκλον ἀκτίνας 15 ἑκ.

2241. (2277). Τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ἂν ἡ βάσις του εἶναι τὸ ἰσόπλευρον τρίγωνον, τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον αὐτόν.

2242. (2278). Τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ἂν ἡ βάσις του εἶναι τὸ τετράγωνον, τὸ ἐγγεγραμμένον εἰς τὸν κύκλον αὐτόν.

2243. (2279). Νὰ ὑπολογισθῆ ὁ ὄγκος ἑνὸς ὀρθοῦ πρισματος, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον, ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον ἀκτίνας 0,80 μ. καὶ τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος εἶναι πενταπλάσιον τοῦ ἀποστήματος τοῦ τριγώνου τῆς βάσεως.

2244. (2280). Ὁ ὄγκος ἑνὸς κανονικοῦ ἑξαγωνικοῦ πρισματος εἶναι 408,2 κ.ἑκ. καὶ τὸ ἔμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας του 240 τ.ἑκ. Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ὕψος του καὶ ἡ πλευρὰ τῆς βάσεώς του.

2245. (2281). Νὰ ὑπολογισθῆ ἡ ἀκτίς ἑνὸς κύκλου, εἰς τὸν ὁποῖον εἶναι ἐγγεγραμμένη ἡ βάσις ἑνὸς κανονικοῦ ἑξαγωνικοῦ πρισματος, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ πρισματος αὐτοῦ εἶναι 50 κ.ἑκ. καὶ ὅτι τὸ ὕψος του εἶναι διπλάσιον τῆς ἀκτίνας τοῦ κύκλου.

2246. (2282). Τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ἂν ἡ βάσις του εἶναι ἕνα ἰσόπλευρον τρίγωνον.

2247. (2283). Τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ἐὰν ἡ βάσις τοῦ εἶναι ἓνα τετράγωνον.

2248. (2284). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κανονικοῦ ἑξαγωνικοῦ πρίσματος, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ εἶναι 45 κ.έκ. καὶ ὅτι τὸ ἀπόστημα τῆς βάσεώς του εἶναι 8 ἐκ.

2249. (2285). Τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ἐὰν ἡ βάσις τοῦ εἶναι ἰσόπλευρον τρίγωνον.

2250. (2286). Τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ἐὰν ἡ βάσις τοῦ εἶναι ἓνα τετράγωνον.

2251. (2287). Τὸ ἔμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κανονικοῦ ἑξαγωνικοῦ πρίσματος εἶναι 5 τ.μ. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ὕψος τοῦ εἶναι διπλάσιον τῆς πλευρᾶς τῆς βάσεώς του.

Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν ἐπὶ τοῦ Α' Κεφαλαίου

Α' Ὁμάς. 2252. (2288). Ἡ παράπλευρος ἀκμὴ ἑνὸς κανονικοῦ τετραγωνικοῦ πρίσματος εἶναι διπλασία τῆς πλευρᾶς τῆς βάσεώς του καὶ τὸ ἔμβαδὸν τῆς παραπλευροῦ ἐπιφανείας τοῦ εἶναι διπλάσιον τοῦ ἔμβαδου ἑνὸς τετραγώνου πλευρᾶς a . Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος καὶ ὁ ὄγκος τοῦ.

2253. (2280). Μία δεξαμενὴ ἔχει τὸ σχῆμα ἑνὸς κανονικοῦ ἑξαγωνικοῦ πρίσματος. Ὁ πυθμὴν τῆς δεξαμενῆς εἶναι ὀριζόντιος καὶ τὸ ὕψος τοῦ νεροῦ, ποὺ περιέχει, εἶναι 0,80 μ. Ἄν ρίψωμεν ἓνα κυβικὸν λίθον ἀκμῆς 0,75 μ., τὸ ἐπίπεδον τοῦ νεροῦ ὑψώνεται κατὰ 6 χιλιοστόμ. Νὰ ὑπολογισθῇ :

1ον. ὁ ὄγκος τοῦ νεροῦ, τὸ ὅποῖον ἔχει ἡ δεξαμενὴ.

2ον. ἡ πλευρὰ τῆς ἑξαγωνικῆς βάσεως τῆς.

Β' Ὁμάς. 2254. (2290). Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαστάσεις ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπίπεδου, ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν ὀλικὴν ἐπιφάνειάν του, ἴσην μὲ 108 τ.μ., τὴν διαγώνιον τῆς βάσεως ἴσην μὲ 5 μέτρα καὶ τὸ ἄθροισμα 13 μ. τῶν τριῶν διαστάσεων.

2255. (2291). Τὸ ἄθροισμα τῶν 12 ἀκμῶν ὀρθογωνίου παραλληλεπίπεδου εἶναι 68 μέτρα. Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τριῶν διαστάσεών του εἶναι 109 μέτρα καὶ τὸ ἔμβαδὸν τῆς βάσεώς του 18 τετρ. μέτρα. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ τρεῖς διαστάσεις του.

2256. (2292). Αἱ τρεῖς ἀκμαὶ AB, AD, AE ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπίπεδου $ABΓΔΕΖΗΘ$, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὴν κορυφὴν A , εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀριθμῶν 3, 4 καὶ 5 καὶ ἡ ὀλικὴ ἐπιφάνειά του εἶναι 2150 τ. ἐκ.

1ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ τρεῖς ἀκμαὶ AB, AD, AE .

2ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ τρεῖς πλευραὶ $AZ, ZΘ, ΘA$ τοῦ τριγώνου $AZΘ$.

2257. (2293). Ἐνα πλάγιον παραλληλεπίπεδον ἔχει ὡς βάσιν ἓνα ὀρθογώνιον $ABΓΔ$, τοῦ ὁποῖου ἡ περίμετρος εἶναι 80 μέτρα· ὁ λόγος τῶν διαστάσεων τοῦ ὀρθογωνίου αὐτοῦ εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τοῦ 12 πρὸς 20. Ἡ παράπλευρος ἀκμὴ AE εἶναι ἴση μὲ 30 μέτρ. καὶ προβάλλεται ἐπὶ τοῦ ἐπίπεδου τῆς βάσεως κατὰ τὸ ἥμισυ τῆς διαγώνιου AG .

1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔμβαδὸν τῆς βάσεως $ABΓΔ$.

2ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος καὶ ἡ ὀλικὴ ἐπιφάνεια τοῦ παραλληλεπίπεδου.

2258. (2294). Ἐνα ὀρθὸν πρῖσμα ἔχει βάσιν ἓνα κανονικὸν ὀκτάγωνον ἀκτίνας R καὶ ὕψος ἴσον μὲ τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς ἓνα κύκλον τῆς αὐτῆς ἀκτίνας. Νὰ ὑπολογισθῇ συναρτήσῃ τῆς ἀκτίνας R :

1ον. τὸ ἔμβαδὸν τῆς βάσεως τοῦ πρίσματος.

2ον. ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ.

3ον. τὸ ἔμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας του. Ἐφαρμογὴ διὰ $R=0,28 \mu$.

Γ' Ὀμάς. 2259. (2295). Νά ἀποδειχθῆ, ὅτι ὁ ὄγκος ἑνὸς τριγωνικοῦ πρίσματος εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου μιᾶς παραπλεύρου ἕδρας του ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν αὐτῆς τῆς ἕδρας ἀπὸ τὴν ἀπέναντι ἀκμῆν.

2260. (2296). Νά ἀποδειχθῆ, ὁ ὄγκος ἑνὸς πρίσματος, τοῦ ὁποίου ἡ κάθετος τεμῆ εἶναι ἓνα πολύγωνον, περιγεγραμμένον περὶ κύκλον, εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τοῦ ἔμβαδου τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας του ἐπὶ τὴν ἀκτίνα τοῦ κύκλου.

2261. (2297). Δίδονται τρεῖς εὐθεῖαι παράλληλοι, αἱ ὁποῖαι δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Ἐπὶ τῶν παραλλήλων αὐτῶν ὀλισθαίνουν τρία ἴσα εὐθύγραμμα τμήματα AA' , BB' , GG' . Νά ἀποδειχθῆ, ὅτι ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος $ABGA'B'G'$ μένουں σταθερά.

2262. (2298). Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τῶν κορυφῶν ἑνὸς παραλληλεπίπεδου ἀπὸ ἓνα ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον δὲν τέμνει τὸ παραλληλεπίπεδον, εἶναι ἴσον μὲ τὸ ὀκταπλάσιον τῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων του ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον αὐτό.

2263. (2299). Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγῶνων τῶν προβολῶν ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος ἐπὶ τρεῖς εὐθείας, αἱ ὁποῖαι εἶναι ὀρθογώνιοι ἀνά δύο, εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ εὐθυγράμμου αὐτοῦ τμήματος.

2264. (2300). Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγῶνων τῶν προβολῶν ἑνὸς εὐθυγράμμου τμήματος ἐπὶ τρία ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα εἶναι ὀρθογώνια ἀνά δύο, εἶναι ἴσον μὲ τὸ διπλάσιον τετραγῶνον τοῦ εὐθυγράμμου αὐτοῦ τμήματος.

2265. (2301). Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγῶνων τῶν ἀποστάσεων τυχόντος σημείου ἀπὸ τὰς ὀκτὼ κορυφὰς ἑνὸς παραλληλεπίπεδου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ὀκταπλάσιον τοῦ τετραγῶνου τῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου αὐτοῦ ἀπὸ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων, ἠῦξημένον κατὰ τὸ ἡμίθροισμα τῶν τετραγῶνων τῶν διαγωνίων. (Σχολὴ Εὐελπίδων 1933).

2266. (2302). Νά ἀποδειχθῆ, ὅτι εἰς κάθε παραλληλεπίπεδον, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγῶνων τῶν ἔμβαδῶν τῶν τομῶν, ἑκτὸ τῶν ἕξ διαγωνίων ἐπιπέδων, εἶναι ἴσον μὲ τὸ διπλάσιον τοῦ ἄθροίσματος τῶν τετραγῶνων τῶν ἔμβαδῶν τῶν ἕδρῶν.

2267. (2303). Νά ἀποδειχθῆ, ὅτι εἰς ἓνα κύβον: 1ον. αἱ ἀκμαὶ ἔχουν τὴν αὐτὴν κλίσιν πρὸς μίαν οἰανδήποτε διαγωνίον του.

2ον. αἱ προβολαὶ τῶν ἀκμῶν ἐπὶ μίαν τυχούσαν διαγωνίον του εἶναι ἴσαι μὲ τὸ τρίτον τῆς διαγωνίου.

2268. (2304). Νά ἀποδειχθῆ, ὅτι εἰς ἓνα τετραγωνικὸν πρίσμα, τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγῶνων τῶν δώδεκα ἀκμῶν του ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγῶνων τῶν τεσσάρων διαγωνίων του ἠῦξημένον κατὰ τὸ ὀκταπλάσιον τετραγῶνον τῶν ἀποστάσεων τῶν μέσων τῶν διαγωνίων του. Τί δυνάμεθα νὰ εἴπωμεν, ἔάν τὸ πρίσμα εἶναι παραλληλεπίπεδον;

2269. (2305). Δίδεται τὸ παραλληλεπίπεδον $ABΓΔA'B'Γ'D'$ καὶ μία διαγωνίος του $AΓ'$. Νά ἀποδειχθῆ, ὅτι τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον ὀρίζουν τὰ ἄκρα τῶν ἀκμῶν, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὸ A καὶ τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον ὀρίζουν

τὰ ἄκρα τῶν ἀκμῶν, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὸ Γ', διαιροῦν τὴν ΑΓ' εἰς τρία ἴσα μέρη.

Δ' Ὁμάς. 2270. (2306). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς ἓνα τετραγωνικὸν πρῶσιμα :
1ον. αἱ διαγώνιοι σχηματίζουν δύο ὁμάδας εὐθειῶν τεμνομένων.

2ον. ἡ ἀπόστασις τῶν κοινῶν σημείων τῶν ἰσοῦται μὲ τὴν ἀπόστασιν τῶν μέσων τῶν διαγωνίων τῆς βάσεως.

3ον. Νὰ χρησιμοποιηθῇ ἡ ἰδιότης αὐτῆ διὰ νὰ εὐρεθῇ ἡ ἀναγκαία καὶ ἰκανὴ συνθήκη, ἵνα τὸ πρῶσιμα εἶναι παραλληλεπίπεδον.

2271. (2307). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς ἓνα τριγωνικὸν πρῶσιμα :

1ον. ἀπέναντι ἴσων παραπλεύρων ἑδρῶν κείνται διέδροι ἴσαι.

2ον' εἰς τὴν μεγαλυτέραν ἑδραν, κείται μεγαλυτέρα διέδρος.

3ον. τὸ ἐμβαδὸν ἐκάστης τῶν ἑδρῶν εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν δύο ἄλλων.

2272. (2308). Δίδεται μία πρισματικὴ ἐπιφάνεια, τῆς ὁποίας ἡ κάθετος τομὴ εἶναι ἓνα τρίγωνον ΑΒΓ, πλευρῶν α, β, γ. Λαμβάνομεν ἐπὶ τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς τομῆς τὰ μήκη $AA' = x$, $BB' = y$, $ΓΓ' = \omega$. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ x , y , ω εἰς τρόπον, ὥστε αἱ τρεῖς παράπλευροι ἑδρα τοῦ στερεοῦ ΑΒΓΑ'Β'Γ' νὰ εἶναι ἰσοδύναμοι. Νὰ διερευνηθῇ καὶ νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἐὰν τὸ πρόβλημα αὐτὸ ἔχη 1 λύσιν, θὰ ἔχη ἀπειρίαν λύσεων καὶ ὅτι ὅλα τὰ ἐπίπεδα Α'Β'Γ', τὰ ὁποῖα λαμβάνομεν κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον, διέρχονται ἀπὸ μίαν καὶ τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν.

2273. (2309). Δίδεται τὸ παραλληλεπίπεδον ΑΒΓΔΑ'Β'Γ'Δ'.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὰ ἐπίπεδα Α'ΓΒ', Α'ΓΓ', καὶ Α'ΓΒ τέμνουν τὸ ἐπίπεδον Δ'ΑΒ' κατὰ τὰς διαμέσους τοῦ τριγώνου Δ'ΑΒ'.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ Α'Γ τέμνει τὸ ἐπίπεδον Δ'ΑΒ' εἰς τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου Δ'ΑΒ'.

3ον. Φέρομεν τὸ ἐπίπεδον Γ'ΔΒ, τὸ ὁποῖον τέμνει τὸ παραλληλεπίπεδον κατὰ τὸ τρίγωνον Γ'ΔΒ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ διάμεσοι τῶν τριγώνων Δ'ΑΒ' καὶ Γ'ΔΒ εἶναι παράλληλοι ἀνά δύο καὶ ὅτι τὰ ἐπίπεδα τῶν τριγώνων αὐτῶν εἶναι παράλληλα.

2274. (2310). Δίδεται ἓνα παραλληλεπίπεδον ΑΒΓΔΑ'Β'Γ'Δ'.

1ον. Ἐὰν δύο προσκείμεναι ἑδραι τοῦ εἶναι ἰσοδύναμοι, ἡ κάθετος τομὴ τοῦ παραλληλεπίπεδου, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν κοινὴν ἀκμὴν, ἔστω τὴν ΑΑ', εἶναι ῥόμβος καὶ ἀντιστρόφως. Τὰ δύο διαγώνια ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα διέρχονται, τὸ ἓνα ἀπὸ τὴν ἀκμὴν ΑΑ' καὶ τὸ ἄλλο ἀπὸ τὴν ἀκμὴν ΒΒ', διχοτομοῦν τὰς ἀντιστοίχους διέδρους καὶ εἶναι ὀρθογώνια καὶ ἀντιστρόφως. Τὸ κέντρον τοῦ παραλληλεπίπεδου ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰς τέσσαρας ἑδρας, αἱ ὁποῖαι περιέχουν τὴν ΑΑ' ἢ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὴν ΑΑ' καὶ ἀντιστρόφως.

2ον. Ἐὰν αἱ ἑξ ἑδραι εἶναι ἰσοδύναμοι, αἱ κάθετοι τομαί, αἱ κάθετοι ἐπὶ τὰς τρεῖς διευθύνσεις τῶν ἀκμῶν, εἶναι ῥόμβοι καὶ ἀντιστρόφως. Τὰ ἑξ διαγώνια ἐπίπεδα διχοτομοῦν τὰς ἀντιστοίχους διέδρους καὶ εἶναι ὀρθογώνια ἀνά δύο, καὶ ἀντιστρόφως. Τὸ κέντρον τοῦ παραλληλεπίπεδου ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰς ἑξ ἑδρας καὶ ἀντιστρόφως.

Ε' Ὁμάς. 2275. (3211). Δίδονται τρεῖς εὐθεῖαι X, Y, Z ἐκ τῶν ὁποίων δύο οἰαδήποτε δὲν κείνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου' νὰ κατασκευασθῇ ἓνα πα-

ριλληλεπίπεδον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχῃ μίαν ἀκμὴν ἐπὶ ἐκάστης τῶν εὐθειῶν αὐτῶν.

2276. (2312). Ἐὰν ἀπὸ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων ἐνὸς κύβου φέρωμεν ἓνα ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ μίαν διαγώνιον, ἡ τομὴ τοῦ κύβου, ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ, εἶναι ἓνα κανονικὸν ἑξάγωνον

2277. (2313). Νὰ τμηθῇ κύβος δι' ἐπιπέδου οὕτως, ὥστε ἡ τομὴ του νὰ εἶναι τετράγωνον (δύο περιπτώσεις).

2278. (2314). Νὰ τμηθῇ κύβος δι' ἐπιπέδου οὕτως, ὥστε ἡ τομὴ του νὰ εἶναι ἰσόπλευρον τρίγωνον.

2279. (2315). Νὰ τμηθῇ κύβος δι' ἐπιπέδου οὕτως, ὥστε ἡ τομὴ του νὰ εἶναι ἰσοσκελὲς τρίγωνον.

2280. (2316). Νὰ τμηθῇ κύβος δι' ἐπιπέδου οὕτως, ὥστε ἡ τομὴ του νὰ εἶναι κανονικὸν ἑξάγωνον.

2281. (2317). Νὰ τμηθῇ τυχὸν τριγωνικὸν πρίσμα δι' ἐπιπέδου εἰς τρόπον, ὥστε ἡ τομὴ του νὰ εἶναι ἓνα ἰσόπλευρον τρίγωνον.

2282. (3318). Δίδεται μία πρισματικὴ ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία ἔχει ὡς κάθετον τομὴν ἓνα τετράγωνον ΑΒΓΔ. Ἐπὶ τῶν τριῶν ἀκμῶν λαμβάνομεν τὰ μήκη $AK = \alpha$, $BL = \beta$ καὶ $GM = \gamma$ καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓΔ. Ποία σχέσις πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν α, β, γ , ἵνα ἡ τομὴ ΚΛΜΝ τῆς πρισματικῆς ἐπιφανείας ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου ΚΛΜ εἶναι ἓνας ῥόμβος;

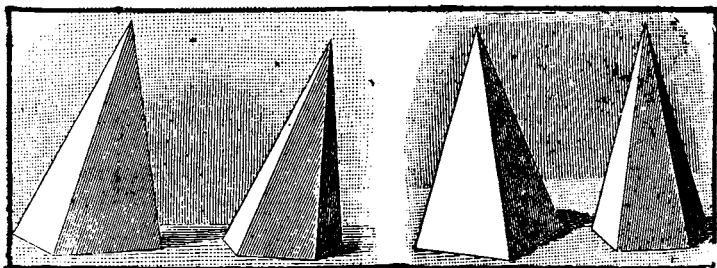
2283. (2319). Μία πρισματικὴ ἐπιφάνεια ἔχει ὡς κάθετον τομὴν ἓνα ἰσὸ πλευρον τρίγωνον ΑΒΓ πλευρᾶς α . Ἐπὶ τῶν ἀκμῶν τῶν ἀγομένων ἐκ τῶν Β καὶ Γ καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓ ὀρίζομεν τὰ σημεῖα Β' καὶ Γ' τοιαῦτα, ὥστε νὰ εἶναι $BB' = y$ καὶ $GG' = x$. Ποία σχέσις πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν x καὶ y , ἵνα τὸ τρίγωνον Α'Β'Γ' εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Γ'.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄.

ΠΥΡΑΜΙΔΕΣ

Ὅρισμοὶ καὶ ιδιότητες

758. Πυραμὶς. Τὸ πολύεδρον $\Sigma\text{ΑΒΓΔΕ}$ (Σχ. 517), περικλείεται ἀπὸ τὰς τριγωνικὰς ἑδρας $\Sigma\text{ΑΒ}$, $\Sigma\text{ΒΓ}$, . . . , αἱ ὁποῖαι ἔχουν κοινὴν κορυφὴν τὸ Σ , καὶ ἀπὸ τὴν ἑδραν ΑΒΓΔΕ , τῆς ὁποίας αἱ πλευραὶ εἶναι βάσεις τῶν τριγωνικῶν ἑδρῶν $\Sigma\text{ΑΒ}$, $\Sigma\text{ΒΓ}$, Τὸ πολύεδρον αὐτὸ λέγεται *πυραμὶς*.



Πυραμίδες

Σχ. 516.

Γενικῶς: *Πυραμὶς* λέγεται τὸ πολύεδρον, τοῦ ὁποίου μία ἑδρα εἶναι τυχόν πολύγωνον, τὸ ὁποῖον ὀνομάζεται *βάσις τῆς πυραμίδος*, αἱ δὲ ἄλλαι ἑδραι του εἶναι τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἔχουν κοινὴν κορυφὴν *κειμένην*, ἐκτὸς τοῦ πολυγώνου, καὶ ὡς βάσεις ἔχουν τὰς πλευρὰς τοῦ πολυγώνου.

Ἡ κοινὴ κορυφὴ τῶν τριγωνικῶν ἑδρῶν τῆς πυραμίδος λέγεται *κορυφὴ τῆς πυραμίδος*.

Π.χ. τὸ στερεὸν $\Sigma\text{ΑΒΓΔΕ}$ (Σχ. 517) εἶναι μία πυραμὶς· βάσις τῆς εἶναι τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ καὶ κορυφὴ τῆς τὸ σημεῖον Σ .

Εἶναι φανερόν, ὅτι μία πυραμὶς δύναται νὰ προκύψῃ καὶ ἀπὸ μίαν στερεὰν πολυεδρικήν γωνίαν, ἂν κόψωμεν αὐτὴν μὲ ἓνα ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον νὰ συναντᾷ ὅλας τὰς ἀκμὰς τῆς.

Τὸ μέρος τῆς στερεᾶς αὐτῆς γωνίας, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ

τῆς κορυφῆς τῆς στερεᾶς γωνίας καὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς τομῆς, εἶναι μίᾳ **πυραμῖς**.

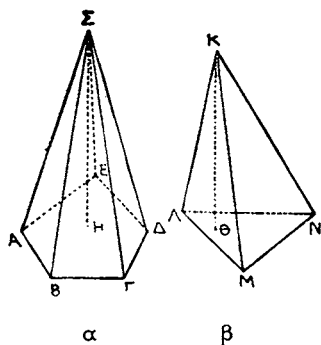
Ὑψος **πυραμίδος** λέγεται ἡ ἀπόστασις τῆς κορυφῆς τῆς ἀπὸ τὴν βάσιν τῆς.

Π.χ. ὕψος τῆς πυραμίδος ΣΑΒΓΔΕ (Σχ. 517) εἶναι τὸ ΣΗ.

Αἱ ἀκμαὶ τῆς πυραμίδος, αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς, λέγονται **παράπλευροι ἀκμαί**.

Αἱ τριγωνικαὶ ἔδραι τῆς, αἱ ὁποῖαι διέρχονται ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς, λέγονται **παράπλευροι ἔδραι τῆς**.

Π.χ. παράπλευροι ἀκμαὶ τῆς πυραμίδος ΣΑΒΓΔΕ εἶναι αἱ ἀκμαὶ ΣΑ, ΣΒ, ΣΓ, ΣΔ, ΣΕ καὶ παράπλευροι ἔδραι τῆς αἱ ΣΑΒ, ΣΒΓ, ΣΓΔ, ΣΔΕ καὶ ΣΕΑ.



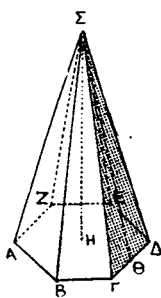
Σχ. 517.

Μία **πυραμῖς** λέγεται **τριγωνική, τετραγωνική, πενταγωνική** κλπ. ἐὰν ἡ βάση τῆς εἶναι ἓνα τρίγωνον, ἓνα τετράπλευρον, ἓνα πεντάγωνον κλπ.

Μία **τριγωνική πυραμῖς** λέγεται καὶ **τετράεδρον** (Σχ. 517 β).

Ὡς βάσιν ἑνὸς τετραέδρου δυνάμεθα νὰ λάβωμεν οἰανδήποτε ἔδραν τοῦ καὶ ὡς κορυφὴν, τὴν κορυφὴν, ἢ ὁποῖα κεῖται ἀπέναντι τῆς βάσεως.

759. Κανονικαὶ πυραμίδες. Μία **πυραμῖς** λέγεται **κανονική**, ἐὰν ἡ βάση τῆς εἶναι ἓνα κανονικὸν πολύγωνον, τοῦ ὁποῖου τὸ κέντρον συμπίπτει μὲ τὸν πόδα τῆς καθέτου, ἢ ὁποῖα ἄγεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν τῆς πυραμίδος ἐπὶ τὴν βάσιν τῆς.



Σχ. 518.

Π.χ. ἡ πυραμῖς ΣΑΒΓΔΕΖ (Σχ. 518) εἶναι κανονική πυραμῖς.

Εἰς μίαν **κανονικὴν πυραμίδα** ὅλαι αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ τῆς εἶναι ἴσαι, ὡς πλάγια τῶν ὁποίων οἱ πόδες ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὸν πόδα τῆς καθέτου.

Ἐπίσης: ὅλαι αἱ παράπλευροι ἔδραι τῆς εἶναι ἰσοσκελῆ τρίγωνα ἴσα μεταξὺ των, διότι ἔχουν τὰς τρεῖς πλευράς των ἴσας, μίαν πρὸς μίαν.

Τὸ ὕψος ἑνὸς ἐκ τῶν ἰσοσκελῶν αὐτῶν τριγῶνων λέγεται **ἀπόστημα** τῆς κανονικῆς πυραμίδος.

Π.χ. ἀπόστημα τῆς κανονικῆς πυραμίδος ΣΑΒΓΔΕΖ εἶναι τὸ ΣΘ.

Ἀσκήσεις: 2284, 2285, 2286, 2287.

760. Θεώρημα. Ἐὰν μία πυραμὶς τμηθῆ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν της :

1ον. Αἱ παράπλευροι ἔδραι της καὶ τὸ ὕψος της τέμνονται εἰς μέρη ἀνάλογα.

2ον. Ἡ τομὴ εἶναι ἓνα πολύγωνον ὁμοιον πρὸς τὴν βάσιν της.

3ον. Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τῆς τομῆς καὶ τῆς βάσεως εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων τῶν ἀπὸ τῆν κορυφῆν τῆς πυραμίδος.

Ἐπιπέδου : Ἐστω ἡ πυραμὶς ΣΑΒΓΔ (Σχ. 519) φέρομεν ἓνα ἐπίπεδον παραλλήλον πρὸς τὴν βάσιν της ΑΒΓΔ τὸ ὁποῖον τέμνει τὰς παραπλεύρους ἀκμὰς της εἰς τὰ σημεῖα α, β, γ, δ, καὶ τὸ ὕψος της ΣΗ εἰς τὸ σημεῖον Η'.

1ον. Συμπέρασμα : Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι

$$\frac{\Sigma\alpha}{\Sigma\Lambda} = \frac{\Sigma\beta}{\Sigma\Bpsilon} = \frac{\Sigma\gamma}{\Sigma\Gamma} = \frac{\Sigma\delta}{\Sigma\Delta} = \frac{\Sigma\text{H}'}{\Sigma\text{H}}.$$

Ἀπόδειξις : Αἱ εὐθεῖαι αβ καὶ ΑΒ εἶναι παράλληλοι, ὡς τομαὶ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων αβγδ καὶ ΑΒΓΔ ὑπὸ τοῦ τρίτου ἐπιπέδου ΣΑΒ. Τὰ τρίγωνα λοιπὸν Σαβ καὶ ΣΑΒ εἶναι ὁμοια καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι

$$\frac{\Sigma\alpha}{\Sigma\Lambda} = \frac{\Sigma\beta}{\Sigma\Bpsilon} = \frac{\alpha\beta}{\text{ΑΒ}} \quad (1)$$

Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι τὰ τρίγωνα Σβγ καὶ ΣΒΓ, εἶναι ὁμοια ἔτισης ὅτι τὰ τρίγωνα Σγδ καὶ ΣΓΔ, εἶναι ὁμοια.

Ἀπὸ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων Σβγ καὶ ΣΒΓ ἔχομεν

$$\frac{\Sigma\beta}{\Sigma\Bpsilon} = \frac{\Sigma\gamma}{\Sigma\Gamma} = \frac{\beta\gamma}{\text{ΒΓ}} \quad (2)$$

Ἐπίσης ἀπὸ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων Σγδ καὶ ΣΓΔ ἔχομεν

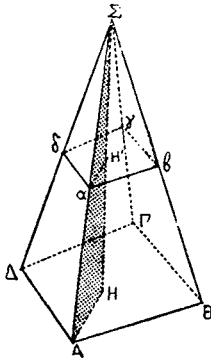
$$\frac{\Sigma\gamma}{\Sigma\Gamma} = \frac{\Sigma\delta}{\Sigma\Delta} = \frac{\gamma\delta}{\text{ΓΔ}} \quad (3)$$

καὶ τέλος ἀπὸ τὴν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων Σδα καὶ ΣΔΑ ἔχομεν

$$\frac{\Sigma\delta}{\Sigma\Delta} = \frac{\Sigma\alpha}{\Sigma\Lambda} = \frac{\delta\alpha}{\text{ΔΑ}} \quad (4)$$

Τὸ ἐπίπεδον ΣΑΗ τέμνει τὰ παράλληλα ἐπίπεδα αβγδ καὶ ΑΒΓΔ κατὰ τὰς παραλλήλους εὐθεῖας αΗ' καὶ ΑΗ. Τὰ τρίγωνα λοιπὸν ΣαΗ' καὶ ΣΑΗ εἶναι ὁμοια καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι

$$\frac{\Sigma\alpha}{\Sigma\Lambda} = \frac{\Sigma\text{H}'}{\Sigma\text{H}} \quad (5)$$



Σχ. 519.

Ἀπὸ τὰς σχέσεις (1), (2), (3), (4), (5) συνάγομεν, ὅτι

$$\frac{\Sigma\alpha}{\Sigma\Lambda} = \frac{\Sigma\beta}{\Sigma\text{B}} = \frac{\Sigma\gamma}{\Sigma\Gamma} = \frac{\Sigma\delta}{\Sigma\Delta} = \frac{\Sigma\text{H}'}{\Sigma\text{H}}.$$

2ον. *Συμπέρασμα*: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ πολύγωνα αβγδ καὶ ΑΒΓΔ εἶναι ὅμοια.

Ἀπόδειξις: Τὰ πολύγωνα αὐτὰ ἔχουν τὰς ὁμολόγους πλευράς των παραλλήλους, ὅπως ἐδείχθη ἀνωτέρω, καὶ τῆς αὐτῆς φορᾶς· ἄρα αἱ ὁμόλογοι γωνίαί των πολυγώνων αὐτῶν εἶναι ἴσαι. Ἐξ ἄλλου ἀπὸ τὰς σχέσεις (1), (2), (3), (4), (5) συνάγομεν, ὅτι

$$\frac{\alpha\beta}{\text{AB}} = \frac{\beta\gamma}{\text{B}\Gamma} = \frac{\gamma\delta}{\Gamma\Delta} = \frac{\delta\alpha}{\Delta\text{A}}.$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι τὰ πολύγωνα αβγδ καὶ ΑΒΓΔ ἔχουν τὰς ὁμολόγους γωνίας ἴσας καὶ τὰς ὁμολόγους πλευράς ἀναλόγους· ἄρα εἶναι ὅμοια.

3ον. *Συμπέρασμα*: Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\frac{\acute{\epsilon}\mu\beta. \alpha\beta\gamma\delta}{\acute{\epsilon}\mu\beta. \text{AB}\Gamma\Delta} = \frac{\overline{\Sigma\text{H}'^2}}{\overline{\Sigma\text{H}^2}}$.

Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ τὰ πολύγωνα αβγδ καὶ ΑΒΓΔ εἶναι ὅμοια, ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν των εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν τετραγώνων τῶν ὁμολόγων πλευρῶν των. Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$\frac{\acute{\epsilon}\mu\beta. \alpha\beta\gamma\delta}{\acute{\epsilon}\mu\beta. \text{AB}\Gamma\Delta} = \frac{\overline{\alpha\beta^2}}{\overline{\Sigma\text{H}^2}} \quad (6)$$

Ἐπειδὴ $\frac{\alpha\beta}{\text{AB}} = \frac{\Sigma\alpha}{\Sigma\Lambda} = \frac{\Sigma\text{H}'}{\Sigma\text{H}}$, ὁπότε θὰ εἶναι καὶ $\frac{\overline{\alpha\beta^2}}{\overline{\text{AB}^2}} = \frac{\overline{\Sigma\text{H}'^2}}{\overline{\Sigma\text{H}^2}}$, ἢ

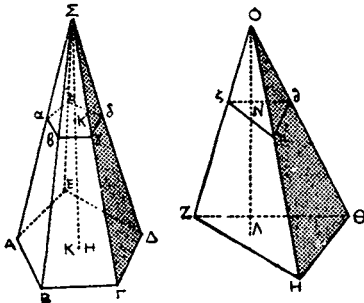
ἰσότης (6) γράφεται $\frac{\acute{\epsilon}\mu\beta. \alpha\beta\gamma\delta}{\acute{\epsilon}\mu\beta. \text{AB}\Gamma\Delta} = \frac{\overline{\Sigma\text{H}'^2}}{\overline{\Sigma\text{H}^2}}$.

Ἐδείχθη λοιπὸν, ὅτι: *Ἐὰν μία πυραμῖς. . .*

761. Πόρισμα. *Ἐὰν δύο πυραμίδες ἔχουν ἴσα ὕψη καὶ βάσεις ἰσοδύναμους καὶ τμηθοῦν ὑπὸ ἐπιπέδων, τὰ ὁποῖα εἶναι παράλληλα πρὸς τὰς βάσεις τῶν πυραμίδων καὶ ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὰς κορυφάς των, αἱ τομαὶ τῶν δύο αὐτῶν πυραμίδων εἶναι ἰσοδύναμοι.*

Ἐπίδοξις: Ἐστωσαν δύο τυχοῦσαι πυραμίδες ΣΑΒΓΔΕ καὶ ΟΖΗΘ (Σχ. 520) αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰ ὕψη των ΣΚ καὶ ΟΛ ἴσα καὶ τὰς βάσεις των ΑΒΓΔΕ καὶ ΖΗΘ ἰσοδύναμους. Ἐστωσαν ἐπίσης αἱ τομαὶ αὐτῶν αβγδε καὶ ζηθ, αἱ ὁποῖαι εἶναι παράλληλοι πρὸς τὰς βάσεις τῶν πυραμίδων καὶ ἀπέχουν ἀπὸ τὰς κορυφάς των ἀποστάσεις ΣΚ' καὶ ΟΛ' ἴσας.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ τομαὶ αβγδε καὶ ζηθ εἶναι ἰσοδύναμοι.



Σχ. 520.

Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ ἡ τομὴ αβγδε εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν ΑΒΓΔΕ τῆς πυραμίδος Σ, θὰ εἶναι (§ 760, 3ον)

$$\frac{\text{ἐμβ. αβγδε}}{\text{ἐμβ. ΑΒΓΔΕ}} = \frac{\overline{\Sigma\text{Κ}'^2}}{\overline{\Sigma\text{Κ}^2}} \quad (1)$$

Ὁμοίως καὶ ἀπὸ τὴν πυραμίδα Ο ἔχομεν

$$\frac{\text{ἐμβ. ζηθ}}{\text{ἐμβ. ΖΗΘ}} = \frac{\overline{\text{ΟΛ}'^2}}{\overline{\text{ΟΛ}^2}} \quad (2)$$

Ἐπειδὴ ἐξ ὑποθέσεως εἶναι $\Sigma\text{Κ} = \text{ΟΛ}$ καὶ $\Sigma\text{Κ}' = \text{ΟΛ}'$, τὰ δευτέρα μέλη τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) εἶναι ἴσα καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι ἴσα καὶ τὰ πρῶτα μέλη των· δηλ. θὰ εἶναι

$$\frac{|\text{ἐμβ. αβγδε}|}{\text{ἐμβ. ΑΒΓΔΒ}} = \frac{\text{ἐμβ. ζηθ}}{\text{ἐμβ. ΖΗΘ}} \quad (3)$$

Ἄλλ' ἐξ ὑποθέσεως αἱ βάσεις ΑΒΓΔΕ καὶ ΖΗΘ τῶν δύο πυραμίδων εἶναι ἰσοδύναμοι· ἄρα αἱ παρονομασταὶ τῶν ἴσων κλασμάτων τῆς σχέσεως (3) εἶναι ἴσοι καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι καὶ οἱ ἀριθμηταὶ των ἴσοι· δηλ. θὰ εἶναι ἐμβ. αβγδε = ἐμβ. ζηθ.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Ἐὰν δύο πυραμίδες ἔχουν...**

Μέτρησις τῶν πυραμίδων

762. Ὅρισμός. Ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας μιᾶς πυραμίδος ὀνομάζομεν τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν τῆς.

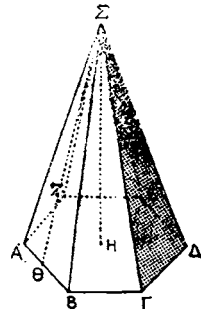
Ἐὰν εἰς τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας μιᾶς πυραμίδος προσθέσωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς της, θὰ ἔχωμεν τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας της.

763. Πρόβλημα. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας μιᾶς κανονικῆς πυραμίδος, συναρτηθῆσει τῆς πλευρᾶς τῆς βάσεώς της καὶ τοῦ παραπλεύρου ὕψους της.

Ἐστω ἡ κανονικὴ πυραμὶς ΣΑΒΓΔΕΖ (Σχ. 521), τῆς ὁποίας ἡ βάσις εἶναι ἓνα κανονικὸν πολύγωνον ΑΒΓΔΕ... μὲ ν πλευρᾶς. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας μιᾶς κανονικῆς πυραμίδος ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ ἐμβαδὸν τῶν ν ἰσοσκελῶν τριγώνων (ἔδῳ $n=6$), ΣΑΒ,

ΣΒΓ,...., τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴσας βάσεις ΑΒ, ΒΓ,.... τὰς ἴσας πλευράς τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος καὶ ἴσα ὕψη, τὸ παραπλευρον ὕψος ΣΘ τῆς κανονικῆς πυραμίδος. Ἐπειδὴ τὸ ἔμβαδὸν ἑνὸς ἀπὸ τὰ ἴσα αὐτὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα, π.χ. τοῦ τριγώνου ΣΑΒ, εἶναι ἴσον μὲ $\frac{ΑΒ \times \Sigma\Theta}{2}$, τὸ ἔμβαδὸν τῶν ν ἴσων τριγώνων, δηλ. τὸ ἔμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τῆς πυραμίδος, θὰ εἶναι $\frac{ΑΒ \times \Sigma\Theta}{2} \times \nu$. Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν μὲ Ε τὸ ἔμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τῆς πυραμίδος Σ, θὰ εἶναι

$$E = \frac{ΑΒ \times \Sigma\Theta}{2} \times \nu \quad \eta \quad E = \frac{(ΑΒ \times \nu) \times \Sigma\Theta}{2} \quad (1)$$



Σχ. 521.

Ἐπειδὴ ΑΒΧν παριστάνει τὴν περίμετρον τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος καὶ ΣΘ τὸ παράπλευρον ὕψος τῆς, ἡ ἰσότης

(1) γράφεται

$$E = \frac{\text{περίμετρος βάσεως} \times \text{παράπλευρον ὕψος}}{2}$$

Ὡστε: *Τὸ ἔμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας μιᾶς κανονικῆς πυραμίδος εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἡμισυ τοῦ γινομένου τῆς περιμέτρου τῆς βάσεώς τῆς ἐπὶ τὸ παράπλευρον ὕψος τῆς.*

Ἀσκήσεις: 2288, 2289, 2290, 2291, 2292, 2293, 2294, 2295, 2296, 2297.

764. Ὅγκος πυραμίδος. Θεώρημα. Δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες, αἱ ὁποῖαι ἔχουν βάσεις ἰσοδυνάμους καὶ ἴσα ὕψη εἶναι ἰσοδύναμοι.

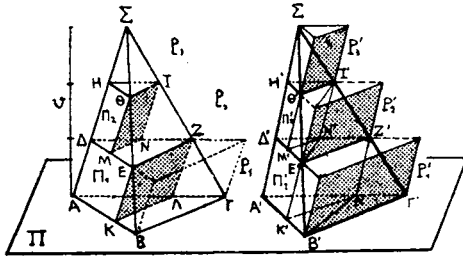
Ἐπίπεδοι: Ἐστωσαν δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες ΣΑΒΓ καὶ Σ'Α'Β'Γ', αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὰς βάσεις τῶν ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' ἰσοδυνάμους καὶ τὰ ὕψη τῶν ἴσα μὲ ν.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι αἱ πυραμίδες αὐταὶ εἶναι ἰσοδύναμοι.

Ἀπόδειξις: Τοποθετοῦμεν τὰς βάσεις τῶν δύο πυραμίδων Σ καὶ Σ' ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπίπεδου Π. Διαιροῦμεν ἔπειτα τὸ κοινὸν ὕψος τῶν ν εἰς ν ἴσα μέρη (ἔδῳ ν=3) καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως φέρομεν ἐπίπεδα παράλληλα πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π. Τὰ παράλληλα αὐτὰ ἐπίπεδα θὰ διαιρέσουν τὰς παραπλεύρους ἀκμὰς τῶν πυραμίδων εἰς ν ἴσα μέρη (§ 760, 1ον), δηλ. θὰ εἶναι ΑΔ=ΔΗ=ΗΣ=Α'Δ'=Δ'Η'=Η'Σ'. Ἐπειδὴ αἱ βάσεις ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' τῶν δύο πυραμίδων εἶναι ἰσοδύ-

ναμοι καὶ αἱ τομαὶ τῶν, ὑπὸ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων, θὰ εἶναι ἰσοδύναμοι μία πρὸς μίαν (§ 761) δηλ. ἡ τομὴ ΔΕΖ θὰ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν τομὴν Δ'Ε'Ζ', ἢ ΗΘΙ μὲ τὴν Ε'Θ'Ι' κ.ο.κ.

Ἀπὸ τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ φέρομεν τὰς παραλλήλους ΕΚ καὶ ΖΛ



Σχ. 522.

πρὸς τὴν ἀκμὴν ΣΑ, αἱ ὁποῖαι τέμνουσιν τὰς ἀκμὰς ΑΒ καὶ ΑΓ εἰς τὰ σημεῖα Κ καὶ Λ. Φέρομεν τὴν εὐθεῖαν ΚΛ καὶ σχηματίζεται τὸ πρίσμα ΔΕΖΑΚΛ. Ὀμοίως ἀπὸ τὰ σημεῖα Ε' καὶ Ζ' φέρομεν τὰς παραλλήλους Ε'Κ' καὶ Ζ'Λ', αἱ ὁποῖαι

τέμνουσιν τὰς ἀκμὰς Α'Β' καὶ Α'Γ' εἰς τὰ σημεῖα Κ' καὶ Λ'. ἂν φέρωμεν τὴν Κ'Λ' σχηματίζεται τὸ πρίσμα Δ'Ε'Ζ'Α'Κ'Λ'. Τὰ δύο πρίσματα ΔΕΖΑΚΛ καὶ Δ'Ε'Ζ'Α'Κ'Λ' (τὰ ὁποῖα παριστάνομεν μὲ τὰ γράμματα Π₁ καὶ Π₁') εἶναι ἰσοδύναμα, διότι ἔχουσι τὰς βάσεις τῶν ΔΕΖ καὶ Δ'Ε'Ζ' ἰσοδύναμους καὶ ἴσα ὕψη.

Ἐπίσης μὲ βάσεις τὰ τρίγωνα ΗΘΙ καὶ Η'Θ'Ι' κατασκευάζομεν, κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, τὰ δύο τριγωνικὰ πρίσματα ΗΘΙΔΜΝ καὶ Η'Θ'Ι'Δ'Μ'Ν' (ἢ Π₂ καὶ Π₂'), τὰ ὁποῖα θὰ εἶναι ἰσοδύναμα, διότι ἔχουσι τὰς βάσεις τῶν ΗΘΙ καὶ Η'Θ'Ι' ἰσοδύναμους καὶ ἴσα ὕψη.

Ἐπειδὴ τὰ πρίσματα, ποὺ κατασκευάσθησαν κατ' αὐτὸν τὸν τρόπον, εἶναι ἰσοδύναμα ἀνὰ δύο, τὸ ἄθροισμα s_2 τῶν ἐγγεγραμμένων πρισματῶν Π₁, Π₂, . . . εἰς τὴν πρώτην πυραμίδα εἶναι τὸ αὐτὸ μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν πρισματῶν Π₁', Π₂' τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς τὴν δευτέραν πυραμίδα.

Εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ κοινὸν αὐτὸ ἄθροισμα $s_2 = \Pi_1 + \Pi_2$ τῶν ἐγγεγραμμένων πρισματῶν εἶναι μικρότερον ἀπὸ τὸν ὄγκον ἐκάστης ἐκ τῶν δύο πυραμίδων.

Κατασκευάζομεν τώρα τρία τριγωνικὰ πρίσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουσι βάσεις, ἀντιστοίχως, τὰς ΑΒΓ, ΔΕΖ, ΗΘΙ καὶ παραπλεύρους ἀκμὰς τὰς ΑΔ, ΔΗ, ΗΣ, καὶ τὰ ὁποῖα παριστάνομεν μὲ τὰ Π₁, Π₂, Π₃. Αὐτὰ τὰ τρία πρίσματα, συνολικῶς, σχηματίζουν ἓνα **περιγεγραμμένον** στερεόν, τὸ ὁποῖον εἶναι μεγαλύτερον τῆς πυραμίδος ΣΑΒΓ καὶ ἐπομένως ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ αὐτοῦ εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν ὄγκον τῆς πυραμίδος Σ.

Ἐάν ἐργασθῶμεν ὁμοίως καὶ εἰς τὴν πυραμίδα Σ'Α'Β'Γ', θὰ λάβωμεν ἓνα περιγεγραμμένον στερεόν, τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ περιγεγραμμένον εἰς τὴν πρώτην πυραμίδα στερεόν, διότι τὰ τριγωνικὰ πρίσματα, ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἀποτελοῦνται τὰ δύο αὐτὰ στερεά, ἔχουν, ἀνὰ δύο, βάσεις ἰσοδυνάμους καὶ ἴσα ὕψη.

Εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ κοινὸν ἄθροισμα $S_3 = P_1 + P_2 + P_3$ τῶν ὄγκων τῶν δύο αὐτῶν στερεῶν εἶναι μεγαλύτερον ἀπὸ τὸν ὄγκον ἐκάστης ἐκ τῶν δύο πυραμίδων.

Ἄν λοιπὸν παραστήσωμεν μὲ V καὶ V' τοὺς ὄγκους τῶν δύο πυραμίδων Σ καὶ Σ' , οἱ ὄγκοι αὐτοὶ V καὶ V' θὰ περιέχωνται μεταξὺ τῶν S_3 καὶ s_3 καὶ ἐπομένως ἡ διαφορὰ $V - V'$ τῶν ὄγκων τῶν θὰ εἶναι μικροτέρα τῆς διαφορᾶς $S_3 - s_3$, δηλ. τῆς

$$(P_1 + P_2 + P_3) - (\Pi_1 + \Pi_2).$$

Ἄλλὰ τὸ πρῖσμα Π_1 εἶναι ἴσον δὲ τὸ πρῖσμα P_2 , διότι ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν ΔEZ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος $\frac{v}{3}$. Ὅμοίως τὰ πρίσματα P_3 καὶ Π_2 εἶναι ἴσα, διότι ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν $H\Theta I$ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος $\frac{v}{3}$.

Ἄλλὰ τότε ἡ διαφορὰ $S_3 - s_3$ εἶναι ἴση μὲ τὸ πρῖσμα P_1 τοῦ ὁποίου ὁ ὄγκος εἶναι ἴσος μὲ: $\epsilon\mu\beta.AB\Gamma \times \frac{v}{3}$.

Ὡστε ἡ διαφορὰ $V - V'$ τῶν ὄγκων τῶν δύο πυραμίδων εἶναι μικροτέρα τῆς διαφορᾶς $S_3 - s_3$, δηλ. τῆς τιμῆς: $\epsilon\mu\beta.AB\Gamma \times \frac{v}{3}$.

Ἐάν, τώρα διαιρέσωμεν τὸ ὕψος v τῆς πυραμίδος εἰς n ἴσα μέρη, καὶ ὄχι εἰς 3 καὶ κατασκευάσωμεν εἰς ἐκάστην πυραμίδα $n-1$ ἑσωτερικὰ πρίσματα καὶ n ἔξωτερικὰ πρίσματα καὶ ἐργασθῶμεν ὡς ἄνωτέρω, ἀποδεικνύομεν ὁμοίως, ὅτι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν ὄγκων V καὶ V' τῶν δύο πυραμίδων εἶναι μικροτέρα τοῦ γινομένου: $\epsilon\mu\beta.AB\Gamma \times \frac{v}{v}$.

Ἄλλὰ τὸ γινόμενον αὐτὸ δύναται νὰ γίνῃ μικρότερον παντὸς ἀριθμοῦ, διότι ἀποτελεῖται ἀπὸ τὴν σταθερὰν ποσότητα, $\epsilon\mu\beta.AB\Gamma$ καὶ ἀπὸ τὴν μεταβλητὴν ποσότητα $\frac{v}{v}$, ἡ ὁποία δύναται νὰ γίνῃ ὅσον θέλομεν μικρά, ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν τὸ n ἀρκετὰ μεγάλο, δηλ. νὰ διαιρέσωμεν τὸ ὕψος v εἰς πολλὰ ἴσα μέρη.

Ὅταν τὸ n τείνῃ εἰς τὸ ἄπειρον, τότε ἡ μεταβλητὴ ποσότης $\frac{v}{v}$ τείνει πρὸς τὸ μηδέν καὶ ἐπομένως καὶ τὸ γινόμενον $\epsilon\mu\beta.AB\Gamma \times \frac{v}{v}$ τείνει εἰς τὸ μηδέν. Ἄλλὰ τότε ἡ διαφορὰ $V - V'$ τῶν ὄγκων τῶν δύο

πυραμίδων τείνει πρὸς τὸ μηδὲν καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι $V - V' = 0$ ἢ $V = V'$, δηλ. αἱ δύο πυραμίδες ἔχουν ἴσους ὄγκους, δηλ. εἶναι ἰσοδύναμοι.

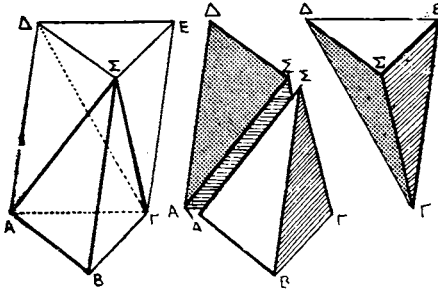
Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Δύο τριγωνικαὶ πυραμίδες...**

765. Θεώρημα. Ὁ ὄγκος μιᾶς πυραμίδος εἶναι ἴσος μὲ τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεώς της ἐπὶ τὸ ὕψος της.

Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις, καθόσον ἡ πυραμὶς εἶναι τριγωνικὴ ἢ πολυγωνικὴ.

Ἐστω μία τριγωνικὴ πυραμὶς $\Sigma AB\Gamma$.

1η. Ὑπόθεσις: Ἀπὸ τὰς κορυφὰς A καὶ Γ φέρομεν τὰς εὐθείας $A\Delta$ καὶ ΓE ἴσας καὶ παραλλήλους πρὸς τὴν ΣB καὶ σχηματίζομεν ἓνα τριγωνικὸν πρίσμα $AB\Gamma\Delta\Sigma E$, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχη βάσιν τὴν $AB\Gamma$ καὶ παράπλευρον ἀκμὴν τὴν ΣB . Τὸ πρίσμα αὐτὸ ἔχει τὴν αὐτὴν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος μὲ τὴν πυραμίδα.



Σχ. 523.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν τώρα, ὅτι ἡ πυραμὶς εἶναι τὸ τρίτον τοῦ πρίσματος αὐτοῦ.

Ἀπόδειξις: Ἐὰν ἀποκόψωμεν ἀπὸ τὸ πρίσμα αὐτὸ τὴν πυραμίδα $\Sigma AB\Gamma$, θὰ μείνῃ ἡ τετραγωνικὴ πυραμὶς

$\Sigma A\Gamma E\Delta$, ἡ ὁποία ἔχει βάσιν τὸ παραλληλόγραμμον $A\Gamma E\Delta$ καὶ κορυφὴν τὸ Σ . Φέρομεν τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Δ, Σ, Γ : τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ διαιρεῖ τὴν τετραγωνικὴν πυραμίδα εἰς δύο τριγωνικὰς πυραμίδας $\Sigma\Delta A\Gamma$ καὶ $\Sigma\Delta E\Gamma$. Αἱ δύο αὐταὶ πυραμίδες εἶναι ἰσοδύναμοι μεταξύ των, διότι ἔχουν ἴσας βάσεις, τὰ ἴσα τρίγωνα $\Delta A\Gamma$ καὶ $\Delta E\Gamma$, ὡς ἡμίση τοῦ αὐτοῦ παραλληλογράμμου $\Delta A\Gamma E$ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος, τὴν κάθετον, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Σ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον $A\Gamma E\Delta$.

Ἄλλὰ ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς $\Sigma\Delta E\Gamma$ δύναται νὰ θεωρηθῇ, ὅτι ἔχει βάσιν τὸ τρίγωνον $\Delta\Sigma E$ καὶ κορυφὴν τὸ σημεῖον Γ : ἀλλὰ τότε ἡ πυραμὶς αὐτὴ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν πυραμίδα $\Sigma AB\Gamma$, διότι αἱ βάσεις των $\Delta\Sigma E$ καὶ $AB\Gamma$ εἶναι ἴσαι, ὡς ἀπέναντι βάσεις τοῦ πρίσματος, καὶ ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος, τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος.

Τὸ πρίσμα λοιπόν $AB\Gamma\Delta\Sigma E$ ἀποτελεῖται ἀπὸ τρεῖς πυραμίδας, αἱ ὁποῖαι εἶναι ἰσοδύναμοι μὲ τὴν πυραμίδα $\Sigma AB\Gamma$: ἄρα ἡ πυραμὶς

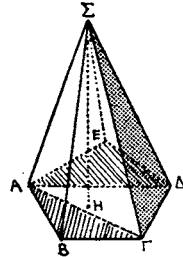
ΣΑΒΓ εἶναι τὸ τρίτον τοῦ πρίσματος αὐτοῦ.

Ἐπειδὴ ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος ΑΒΓΔΣΕ εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἔμβραδοῦ τῆς βάσεώς του ΑΒΓ ἐπὶ τὸ ὕψος του υ, ἔπεται ὅτι ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος ΣΑΒΓ εἶναι ἴσος μὲ $\frac{1}{3}$ ἔμβ.ΑΒΓ×υ.

2α. Ὑπόθεσις: Ἐστω μία πολυγωνικὴ πυραμὶς ΣΑΒΓΔΕ (Σχ. 524), ἣ ὁποία ἔχει βάσιν τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ καὶ ὕψος τὸ ΣΗ.

Συμπέρασμα: Ἄν παραστήσωμεν μὲ V τὸν ὄγκον τῆς πυραμίδος αὐτῆς, θὰ δεῖξωμεν, ὅτι

$$V = \frac{1}{3} \text{ ἔμβ. ΑΒΓΔΕ} \times \Sigma\text{Η.}$$



Σχ. 524.

Ἀπόδειξις: Φέρομεν τὰς διαγωνίους ΑΓ, ΑΔ τῆς βάσεως ΑΒΓΔΕ καὶ τὰ ἐπίπεδα ΣΑΓ καὶ ΣΑΔ. Τὰ ἐπίπεδα αὐτὰ χωρίζουν τὴν δοθεῖσαν πυραμίδα εἰς τὰς τριγωνικὰς πυραμίδας ΣΑΒΓ, ΣΑΓΔ καὶ ΣΑΔΕ, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ὡς ὕψος τὸ ὕψος ΣΗ τῆς δοθείσης πυραμίδος. Ὁ ὄγκος V τῆς πυραμίδος ΣΑΒΓΔΕ ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸν ὄγκον τῶν τριῶν αὐτῶν τριγωνικῶν πυραμίδων, δηλ. εἶναι

$$V = \text{ὄγκ. ΣΑΒΓ} + \text{ὄγκ. ΣΑΓΔ} + \text{ὄγκ. ΣΑΔΕ} \quad (1)$$

Ἐπειδὴ κατὰ τὴν πρώτην περίπτωσιν εἶναι

$$\text{ὄγκ. ΣΑΒΓ} = \frac{1}{3} \text{ ἔμβ. ΑΒΓ} \times \Sigma\text{Η,}$$

$$\text{ὄγκ. ΣΑΓΔ} = \frac{1}{3} \text{ ἔμβ. ΑΓΔ} \times \Sigma\text{Η}$$

$$\text{καὶ ὄγκ. ΣΑΔΕ} = \frac{1}{3} \text{ ἔμβ. ΑΔΕ} \times \Sigma\text{Η}$$

ἢ ἰσότης (1) γίνεται

$$V = \frac{1}{3} \text{ ἔμβ. ΑΒΓ} \times \Sigma\text{Η} + \frac{1}{3} \text{ ἔμβ. ΑΓΔ} \times \Sigma\text{Η} + \frac{1}{3} \text{ ἔμβ. ΑΔΕ} \times \Sigma\text{Η}$$

$$\text{ἢ } V = \frac{1}{3} (\text{ἔμβ. ΑΒΓ} + \text{ἔμβ. ΑΓΔ} + \text{ἔμβ. ΑΔΕ}) \times \Sigma\text{Η}$$

$$\text{ἢ } \boxed{V = \frac{1}{3} \text{ ἔμβ. ΑΒΓΔΕ} \times \Sigma\text{Η}}$$

Ἐδείχθη λοιπὸν, ὅτι: Ὁ ὄγκος μιᾶς πυραμίδος. . . .

766. Περίσματα. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ B τὸ ἔμβραδόν τῆς βάσεως μιᾶς πυραμίδος, μὲ υ τὸ ὕψος τῆς καὶ μὲ V τὸν ὄγκον τῆς, θὰ

ἔχωμεν τὸν τύπον

$$\boxed{V = \frac{1}{3} B \cdot \upsilon}$$

Ἔχοντες ὑπ' ὄψει τὸν τύπον αὐτὸν συνάγομεν :

I. Δύο πυραμίδες, αἱ ὁποῖαι ἔχουν βάσεις ἰσοδυνάμους καὶ ἴσα ὕψη, εἶναι ἰσοδύναμοι.

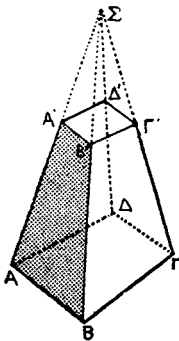
II. Δύο πυραμίδες, αἱ ὁποῖαι ἔχουν βάσεις ἰσοδυνάμους, ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν ὕψων τοῦ.

III. Δύο πυραμίδες, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ἴσα ὕψη, ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν βάσεων τῶν.

Ἄσκησεις : 2298, 2299, 2300, 2301, 2302, 2303, 2304,
2305, 2306, 2307, 2308, 2309, 2310, 2311,
2312, 2313, 2314.

Κόλουρος πυραμίδας

767. Κόλουρος πυραμίδας. Ἐστω ἡ πυραμὶς $\Sigma\text{ΑΒΓΔ}$ (Σχ. 525) καὶ Α'Β'Γ'Δ' ἡ τομὴ τῆς ὑπὸ ἐνὸς ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν τῆς. Τὸ πολυέδρον ΑΒΓΔΑ'Β'Γ'Δ' λέγεται **κόλουρος πυραμίδας**.



Σχ. 525.

Γενικῶς : **Κόλουρος πυραμίδας** λέγεται τὸ μέρος τῆς πυραμίδος τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῆς βάσεώς τῆς καὶ τῆς τομῆς τῆς ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν.

Ἡ βάση μιᾶς πυραμίδος καὶ ἡ τομὴ τῆς ὑπὸ τοῦ παραλλήλου ἐπιπέδου λέγονται **βάσεις** τῆς κολούρου πυραμίδος.

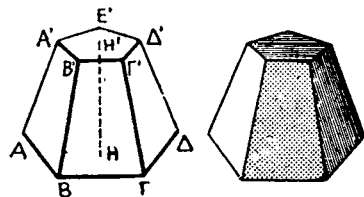
Π.χ. αἱ ΑΒΓΔ καὶ Α'Β'Γ'Δ' (Σχ. 525) εἶναι αἱ βάσεις τῆς κολούρου πυραμίδος ΑΒΓΔΑ'Β'Γ'Δ' .

Αἱ βάσεις μιᾶς κολούρου πυραμίδος εἶναι πολύγωνα ὁμοία (§ 760, 2ον).

Αἱ ἄλλαι ἔδραι τῆς κολούρου πυραμίδος, ἐκτὸς τῶν δύο βάσεων, λέγονται **παράπλευροι ἔδραι** τῆς.

Αἱ παράπλευροι ἔδραι κολούρου πυραμίδος εἶναι τραπέζια.

Π.χ. παράπλευραι ἔδραι τῆς κολούρου πυραμίδος ΑΒΓΔΑ'Β'Γ'Δ' εἶναι αἱ ΑΒΒ'Α' , ΒΓΓ'Β' , ΓΔΔ'Γ' , ΔΑΑ'Δ' .



Κόλουρος πυραμίδας

Σχ. 526.

Ὑψος μιᾶς κολούρου πυραμίδος λέγεται ἡ ἀπόστασις τῶν δύο βάσεων τῆς.

Μία κόλυρος πυραμίς είναι κανονική, ἂν προκύπτῃ ἀπὸ κανονικὴν πυραμίδα.

Αἱ παράπλευροι ἔδραι μιᾶς κανονικῆς κολύρου πυραμίδος εἶναι ἰσοσκελῆ τραπέζια ἴσα μεταξύ των.

Τὸ ὕψος ἐνὸς ἐκ τῶν ἴσων τραπεζίων λέγεται ἀπόστημα ἢ παράπλευρον ὕψος τῆς κολύρου πυραμίδος.

768. Ὅρισμός. Ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας μιᾶς κολύρου πυραμίδος ὀνομάζομεν τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν παραπλεύρων ἐδρῶν τῆς.

769. Πρόβλημα. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας μιᾶς κανονικῆς κολύρου πυραμίδος συναρτήσῃ τῶν πλευρῶν τῶν βάσεων τῆς καὶ τοῦ παραπλεύρου ὕψους τῆς.

Ἐστω μία κανονικὴ κόλυρος πυραμίς $ΑΒΓΔΕΑ'Β'Γ'Δ'Ε'$, τῆς ὁποίας αἱ βάσεις εἶναι κανονικὰ πολύγωνα μὲ n πλευράς, ἐδῶ $n=5$. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τῆς κολύρου αὐτῆς πυραμίδος ἀποτελεῖται ἀπὸ τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν n ἴσων τραπεζίων $ΑΒΒ'Α'$, $ΒΓΓ'Β'$, ..., τὰ ὁποῖα ἔχουν βάσεις τὰς πλευράς τῶν βάσεων τῆς κολύρου πυραμίδος καὶ ὕψη ἴσα, μὲ τὸ παράπλευρον ὕψος $ΗΘ$.

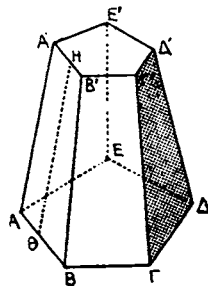
Ἐπειδὴ τὸ ἐμβαδὸν ἐνὸς ἀπὸ τὰ ἴσα αὐτὰ τραπέζια, π.χ. τοῦ τραπεζίου, $ΑΒΒ'Α'$, εἶναι ἴσον μὲ $\frac{1}{2}(ΑΒ+Α'Β') \times ΗΘ$, τὸ ἐμβαδὸν τῶν n ἴσων τραπεζίων, δηλ. τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τῆς κολύρου πυραμίδος, θὰ εἶναι $\frac{1}{2}(ΑΒ+Α'Β') \times ΗΘ \times n$.

Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν μὲ E τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τῆς κολύρου πυραμίδος $ΑΒΓΔΕΑ'Β'Γ'Δ'Ε'$, θὰ εἶναι $E = \frac{1}{2}(ΑΒ+Α'Β') \times ΗΘ \times n$ ἢ $E = \frac{1}{2}(ΑΒ \cdot n + Α'Β' \cdot n) \times ΗΘ$ (1)

Ἐπειδὴ $ΑΒ \cdot n$ καὶ $Α'Β' \cdot n$ παριστάνουν τὰς περιμέτρους τῶν βάσεων τῆς κολύρου αὐτῆς πυραμίδος καὶ $ΗΘ$ τὸ παράπλευρον ὕψος τῆς ἔπεται ὅτι, ἐὰν παραστήσωμεν μὲ Π καὶ Π' τὰς περιμέτρους τῶν βάσεων τῆς, θὰ ἔχωμεν τὸν τύπον

$$E = \frac{1}{2}(\Pi + \Pi') \times ΗΘ$$

Ὡστε: Τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας μιᾶς κανο-



Σχ. 527.

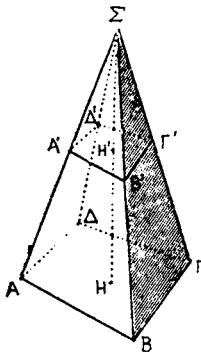
νικής κολούρου πυραμίδος εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν περιμέτρων τῶν βάσεων τῆς ἐπὶ τὸ παράπλευρον ὕψος τῆς.

770. Ἐμβαδὸν ὀλικῆς ἐπιφανείας κολούρου πυραμίδος. Ἐὰν εἰς τὸ ἔμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας μιᾶς κολούρου πυραμίδος προσθέσωμεν τὸ ἔμβαδὸν τῶν δύο βάσεων τῆς, θὰ ἔχωμεν τὸ ἔμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας τῆς. Δηλ. εἶναι

$$\boxed{\text{ἐμβ. ὀλ. ἐπιφ. κολ. πυρ.} = \text{ἐμβ. παρ. ἐπιφ.} + \text{ἐμβ. 2 βάσεων} \quad | .$$

Ἀσκήσεις: 2315, 2316, 2317, 2318.

771. Ὀγκος κολούρου πυραμίδος. Πρόβλημα. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος μιᾶς κολούρου πυραμίδος.



Σχ. 528.

Ἐστωσαν Β, β αἱ βάσεις (Σχ. 528) μιᾶς κολούρου πυραμίδος ΑΒΓΔΕΑ'Β'Γ'Δ'Ε'. Ἡ κολούρος αὐτῆς πυραμίδος δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς διαφορὰ τῶν δύο πυραμίδων ΣΑΒΓΔΕ καὶ ΣΑ'Β'Γ'Δ'Ε'. Ἐὰν ΣΗ καὶ ΣΗ' εἶναι τὰ ὕψη τῶν πυραμίδων αὐτῶν, τὸ ὕψος τῆς κολούρου πυραμίδος θὰ εἶναι

$$\Sigma\text{H} - \Sigma\text{H}' = \text{H}'\text{H} = v.$$

Ἄν καλέσωμεν V τὸν ὄγκον τῆς κολούρου αὐτῆς πυραμίδος, τότε :

$$V = \text{ὄγκ. πυρ. } \Sigma\text{ΑΒΓΔΕ} - \text{ὄγκ. πυρ. } \Sigma\text{Α}'\text{Β}'\text{Γ}'\text{Δ}'\text{Ε}'$$

$$\text{ἢ} \quad V = \frac{1}{3} \text{B} \cdot \Sigma\text{H} - \frac{1}{3} \beta \cdot \Sigma\text{H}' \quad (1)$$

$$\text{Ἐπειδὴ (} \S \text{ 760, 3ον)} \quad \frac{\beta}{\text{B}} = \frac{\Sigma\text{H}'^2}{\Sigma\text{H}^2}, \quad \text{θὰ εἶναι} \quad \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\text{B}}} = \frac{\Sigma\text{H}'}{\Sigma\text{H}}$$

$$\text{ἢ} \quad \frac{\Sigma\text{H}}{\sqrt{\text{B}}} = \frac{\Sigma\text{H}'}{\sqrt{\beta}}$$

Κατὰ γνωστὴν ιδιότητα τῶν ἴσων κλασμάτων, ἡ προηγουμένη σχέσηις γράφεται

$$\frac{\Sigma\text{H}}{\sqrt{\text{B}}} = \frac{\Sigma\text{H}'}{\sqrt{\beta}} = \frac{\Sigma\text{H} - \Sigma\text{H}'}{\sqrt{\text{B}} - \sqrt{\beta}} = \frac{v}{\sqrt{\text{B}} - \sqrt{\beta}}.$$

Ἄπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν λαμβάνομεν

$$\Sigma\text{H} = \frac{v \cdot \sqrt{\text{B}}}{\sqrt{\text{B}} - \sqrt{\beta}} \quad \text{καὶ} \quad \Sigma\text{H}' = \frac{v \cdot \sqrt{\beta}}{\sqrt{\text{B}} - \sqrt{\beta}} \quad (2)$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὰ ὕψη ΣΗ καὶ ΣΗ' μὲ τὰ ἴσα των, ποὺ δίδουν αἱ ἰσότητες (2) καὶ ἔχομεν

$$V = \frac{1}{3} \text{B} \cdot \frac{v \sqrt{\text{B}}}{\sqrt{\text{B}} - \sqrt{\beta}} - \frac{1}{3} \beta \cdot \frac{v \sqrt{\beta}}{\sqrt{\text{B}} - \sqrt{\beta}} \quad \text{ἢ} \quad V = \frac{1}{3} v \cdot \frac{\text{B}\sqrt{\text{B}} - \beta\sqrt{\beta}}{\sqrt{\text{B}} - \sqrt{\beta}} \quad (3)$$

Ἐπειδὴ τὸ πηλίκον τοῦ $B\sqrt{B} - \beta\sqrt{\beta}$ διὰ τοῦ $\sqrt{B} - \sqrt{\beta}$ εἶναι $B + \sqrt{B\beta} + \beta$, ἡ ἰσότης (3) γράφεται $V = \frac{1}{3}v(B + \sqrt{B\beta} + \beta)$.

Δηλ. εἶναι $\boxed{\text{Ὀγκ. κολ. πυρ.} = \frac{1}{3}v(B + \beta + \sqrt{B\beta})}$.

Ὁ τελευταῖος τύπος γράφεται

$$\text{ὄγκ. κολ. πυρ.} = \frac{1}{3} Bv + \frac{1}{3} \beta v + \frac{1}{3} \sqrt{B\beta} \cdot v \quad (4)$$

Ἐπειδὴ τὸ $\sqrt{B\beta}$ παριστάνει τὴν μέσσην ἀνάλογον τῶν δύο βάσεων B καὶ β , ὁ τύπος (4) ἐκφράζει, ὅτι :

Ὁ ὄγκος μιᾶς κολούρου πυραμίδος εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τριῶν πυραμίδων, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ὡς ὕψος τὸ ὕψος τῆς κολούρου πυραμίδος καὶ ὡς βάσεις ἢ μὲν μία τὴν κάτω βάσιν τῆς κολούρου πυραμίδος, ἢ ἄλλη τὴν ἄνω βάσιν αὐτῆς καὶ ἢ τρίτη τὴν μέσσην ἀνάλογον τῶν δύο αὐτῶν βάσεων.

Ὁ ἀνωτέρω τύπος, ποῦ δίδει τὸν ὄγκον μιᾶς κολούρου πυραμίδος, προκύπτει καὶ γεωμετρικῶς ὡς φαίνεται εἰς τὸ κατωτέρω θεώρημα :

772. Θεώρημα. Μία κόλουρος πυραμὶς εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τριῶν πυραμίδων, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ὡς ὕψος τὸ ὕψος τῆς κολούρου πυραμίδος καὶ ὡς βάσεις, ἢ μὲν μία τὴν κάτω βάσιν τῆς κολούρου πυραμίδος, ἢ ἄλλη τὴν ἄνω βάσιν αὐτῆς καὶ ἢ τρίτη τὴν μέσσην ἀνάλογον τῶν δύο αὐτῶν βάσεων.

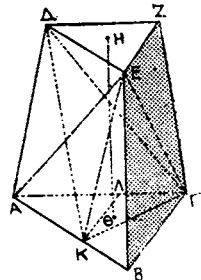
Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις, καθόσον ἡ κόλουρος πυραμὶς εἶναι *τριγωνικὴ* ἢ *πολυγωνικὴ*.

1η. Ὑπόθεσις : Ἐστω ἡ τριγωνικὴ κόλουρος πυραμὶς $AB\Gamma\Delta EZ$ (Σχ. 529).

Συμπέρασμα : Θα δεῖξωμεν, ὅτι ἡ κόλουρος αὐτῆ πυραμὶς εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὸ ἄθροισμα τριῶν πυραμίδων. . .

Ἀπόδειξις : Φέρομεν τὸ ἐπίπεδον $AE\Gamma$. τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ χωρίζει τὴν κόλουρον πυραμίδα εἰς δύο πυραμίδας : εἰς τὴν τριγωνικὴν πυραμίδα $EAB\Gamma$ καὶ εἰς τὴν τετραγωνικὴν πυραμίδα $EA\Delta Z\Gamma$.

Ἐὰν φέρωμεν τὸ ἐπίπεδον $\Delta E\Gamma$, ἡ τετραγωνικὴ πυραμὶς $EA\Delta Z\Gamma$ χωρίζεται εἰς τὰς δύο τριγωνικὰς πυραμίδας $E\Delta Z\Gamma$ καὶ $E\Delta A\Gamma$.



Σχ. 529.

Οὕτω ἡ κόλουργος πυραμῖς ΑΒΓΔΕΖ εἶναι ἄθροισμα τῶν τριῶν πυραμίδων ΕΑΒΓ, ΕΔΖΓ καὶ ΕΔΑΓ.

Ἡ πρώτη πυραμῖς ΕΑΒΓ ἔχει κορυφὴν τὸ Ε καὶ βάσιν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ· ἐπομένως τὸ ὕψος τῆς εἶναι ἴσον μετὰ τὸ ὕψος τῆς κολούρου πυραμίδος καὶ ἡ βάσις τῆς εἶναι ἡ κάτω βάσις ΑΒΓ τῆς κολούρου πυραμίδος.

Ἡ δευτέρα πυραμῖς ΕΔΖΓ δύναται νὰ θεωρηθῆ ὡς μία πυραμῖς, ἡ ὁποία ἔχει κορυφὴν τὸ σημεῖον Γ καὶ βάσιν τὸ τρίγωνον ΔΕΖ· ἀλλὰ τότε ἡ πυραμῖς αὐτὴ ἔχει ὡς βάσιν τὴν ἄνω βάσιν τῆς κολούρου πυραμίδος καί, ὡς ὕψος τὸ ὕψος τῆς κολούρου.

Ἐξετάσωμεν τώρα τὴν τρίτην πυραμίδα ΕΔΑΓ. Ἀπὸ τὸ σημεῖον Ε φέρομεν μίαν παράλληλον πρὸς τὴν εὐθεῖαν ΔΑ, ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν ΑΒ εἰς τὸ σημεῖον Κ· ἐὰν φέρωμεν τὴν εὐθεῖαν ΔΚ, παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ πυραμίδες ΕΔΑΚ καὶ ΚΑΔΓ εἶναι ἰσοδύναμοι, διότι ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν, τὸ τρίγωνον ΑΔΓ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος, διότι αἱ κορυφαὶ τῶν Ε καὶ Κ κείνται ἐπὶ μιᾶς εὐθείας ΕΚ παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν. Ἀλλὰ ἡ πυραμῖς ΚΑΔΓ δύναται νὰ θεωρηθῆ, ὅτι ἔχει κορυφὴν τὸ σημεῖον Δ καὶ ὡς βάσιν τὸ τρίγωνον ΑΚΓ· μένει λοιπὸν τώρα νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΚΓ εἶναι μέσον ἀνάλογον μεταξὺ τῶν δύο βάσεων τῆς κολούρου πυραμίδος.

Πρὸς τοῦτο ἀπὸ τὸ σημεῖον Κ φέρομεν μίαν εὐθεῖαν ΚΛ παράλληλον πρὸς τὴν πλευρὰν ΒΓ, ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν ΑΓ εἰς τὸ σημεῖον Λ. Τὸ σχηματισθὲν τρίγωνον ΑΚΛ εἶναι ἴσον μετὰ τὸ τρίγωνον ΔΕΖ, διότι ἔχουν τὰς πλευρὰς ΑΚ καὶ ΑΕ ἴσας, ὡς παραλλήλους περιεχομένας μεταξὺ παραλλήλων καὶ τὰς ὁμολόγους γωνίας τῶν ἴσας, διότι αἱ πλευραὶ τῶν εἶναι παράλληλοι καὶ ἔχουν τὴν αὐτὴν φοράν.

Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΑΚΓ ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος, τὴν ἀπόστασιν τῆς κοινῆς κορυφῆς Γ ἀπὸ τὰς βάσεις τῶν ΑΒ καὶ ΑΚ· ἄρα ἔχουν λόγον ἴσον μετὰ τὸν λόγον τῶν βάσεων τῶν· δηλ. εἶναι

$$\frac{ΑΒΓ}{ΑΚΓ} = \frac{ΑΒ}{ΑΚ} \quad (1)$$

Ὅμοίως τὰ τρίγωνα ΑΚΓ καὶ ΑΚΛ ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος, τὴν ἀπόστασιν τῆς κοινῆς κορυφῆς τῶν Κ ἀπὸ τὰς βάσεις τῶν ΑΓ καὶ ΑΛ· ἄρα θὰ ἔχουν λόγον ἴσον μετὰ τὸν λόγον τῶν βάσεων τῶν· δηλ. θὰ εἶναι

$$\frac{ΑΚΓ}{ΑΚΛ} = \frac{ΑΓ}{ΑΛ} \quad (2)$$

Ἐπειδὴ ἡ ΚΛ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ΒΓ, θὰ εἶναι

$$\frac{ΑΒ}{ΑΚ} = \frac{ΑΓ}{ΑΛ}.$$

Ἀπὸ τὴν ἰσότητα αὐτὴν συνάγομεν, ὅτι τὰ δευτέρω μέλη τῶν ἰσοτήτων (1) καὶ (2) εἶναι ἴσα· ἄρα θὰ εἶναι ἴσα καὶ τὰ πρώτω μέλη των,

δηλ. θὰ εἶναι
$$\frac{ΑΒΓ}{ΑΚΓ} = \frac{ΑΚΓ}{ΑΚΓ} \quad (3)$$

Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον ΑΚΛ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τρίγωνον ΔΕΖ, ἡ

ἰσότης (3) γράφεται
$$\frac{ΑΒΓ}{ΑΚΓ} = \frac{ΑΚΓ}{ΔΕΖ}.$$

Ἡ τελευταία ἰσότης δεικνύει, ὅτι τὸ τρίγωνον ΑΚΓ εἶναι μέσον ἀνάλογον μεταξὺ τῶν τριγώνων ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ.

Ὡστε ἡ βάση τῆς τρίτης πυραμίδος εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν δύο βάσεων τῆς κολούρου πυραμίδος.

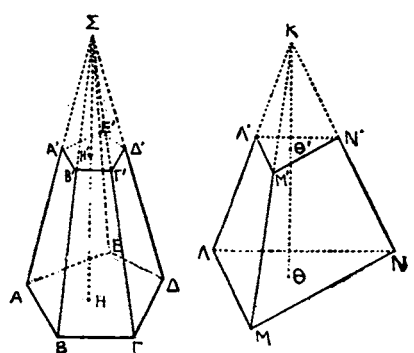
Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι ἡ κόλυρος πυραμίδος ΑΒΓΔΕΖ ἀποτελεῖται ἀπὸ τρεῖς πυραμίδας, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος, τὸ ὕψος τῆς κολούρου πυραμίδος καὶ ὡς βάσεις: ἡ πρώτη τὴν κάτω βάση ΑΒΓ, ἡ δευτέρα τὴν ἄνω βάση ΔΕΖ καὶ ἡ τρίτη τὴν μέση ἀνάλογον τῶν δύο αὐτῶν βάσεων.

2α. Ὑπόθεσις: Ἐστω ἡ πολυγωνικὴ κόλυρος πυραμίδος ΑΒΓΔΕΑ'Β'Γ'Δ'Ε' (Σχ. 530).

Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξωμεν ὅτι ἡ κόλυρος αὐτὴ πυραμίδος εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὸ ἄθροισμα τριῶν πυραμίδων. . . .

Ἀπόδειξις: Ἡ κόλυρος αὐτὴ πυραμίδος εἶναι ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν πυραμίδων ΣΑΒΓΔΕ καὶ ΣΑ'Β'Γ'Δ'Ε'.

Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως ΑΒΓΔΕ λαμβάνομεν ἓνα τρίγωνον ΛΜΝ ἰσοδύναμον μὲ τὸ πολύγωνον ΑΒΓΔΕ καὶ κατασκευάζομεν τὴν πυραμίδα ΚΛΜΝ, ἡ ὅποια νὰ ἔχη βάση τὸ τρίγωνον αὐτὸ καὶ ὕψος ἴσον μὲ τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος ΣΑΒΓΔΕ.



Σχ. 530.

Αἱ δύο πυραμίδες ΣΑΒΓΔΕ καὶ ΚΛΜΝ εἶναι ἰσοδύναμοι, διότι ἔχουν βάσεις ἰσοδύναμοι καὶ ὕψη ἴσα. (§ 764).

Τὸ ἐπίπεδον Α'Β'Γ'Δ'Β', προεκτεινόμενον ὀρίζει ἐπὶ τῆς πυραμίδος ΚΛΜΝ μίαν τομὴν Λ'Μ'Ν', ἡ ὅποια εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὸ πολύγωνον Α'Β'Γ'Δ'Ε' καὶ ἐπομένως αἱ δύο πυραμίδες ΚΛ'Μ'Ν' καὶ ΣΑ'Β'Γ'Δ'Ε' εἶναι ἰσοδύναμοι. Ἀλλὰ τότε αἱ δύο κόλυροι πυραμίδος

δες $\Lambda\text{M}\text{N}\Lambda'\text{M}'\text{N}'$ καὶ $\text{A}\text{B}\text{G}\Delta\text{E}\Lambda'\text{B}'\text{G}'\Delta'\text{E}'$ εἶναι ἰσοδύναμοι, ὡς διαφορὰ ἰσοδυνάμων, ἀντιστοιχῶς, πυραμίδων. Παρατηροῦμεν, ὅτι αἱ δύο αὐταὶ κόλουροι πυραμίδες ἔχουν ἴσα ὕψη καὶ αἱ βάσεις τῶν εἶναι ἀντιστοιχῶς ἰσοδύναμοι· ἐπομένως τὸ θεώρημα, τὸ ὁποῖον ἀπεδείχθη διὰ τὴν κόλουρον τριγωνικὴν πυραμίδα, ἐπεκτείνεται καὶ εἰς τὴν κόλουρον πυραμίδα μὲ πολυγωνικὰς βάσεις.

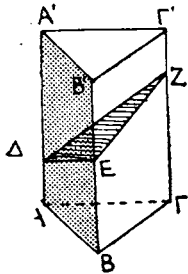
Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: *Μία κόλουρος πυραμὶς εἶναι...*

Ἀσκήσεις: 2319, 2320, 2321, 2322, 2323, 2324, 2325.

Κολοβὸν πρίσμα

773. Κολοβὸν πρίσμα. Ἐστω ἓνα πρίσμα $\text{A}\text{B}\text{G}\Lambda'\text{B}'\text{G}'$ (Σχ. 531) καὶ $\Delta\text{E}\text{Z}$ μία τομὴ αὐτοῦ, ἣ ὁποία δὲν εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις του. Τὰ πολύεδρα $\text{A}\text{B}\text{G}\Delta\text{E}\text{Z}$ καὶ $\Lambda'\text{B}'\text{G}'\Delta\text{E}\text{Z}$ λέγονται **κολοβὰ πρίσματα**.

Γενικῶς: **Κολοβὸν πρίσμα** λέγεται τὸ στερεόν, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ μιᾶς πρισματικῆς ἐπιφανείας καὶ δύο τομῶν αὐτῆς, αἱ ὁποῖαι δὲν εἶναι παράλληλοι καὶ δὲν ἔχουν κανένα κοινὸν σημεῖον. Αἱ δύο αὐταὶ τομαὶ λέγονται **βάσεις τοῦ κολοβοῦ πρίσματος**.



Σχ. 531.

Π.χ. Εἰς τὸ κολοβὸν πρίσμα $\text{A}\text{B}\text{G}\Delta\text{E}\text{Z}$ βάσεις του εἶναι αἱ ABG καὶ $\Delta\text{E}\text{Z}$.

Ἐνα κολοβὸν πρίσμα λέγεται ὀρθόν, ἂν αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ του εἶναι κάθετοι, ἐπὶ τὴν μίαν βάσιν του.

774. Θεώρημα. Ἐνα κολοβὸν τριγωνικὸν πρίσμα εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἄθροισμα τριῶν πυραμίδων, αἱ ὁποῖαι ἔχουν κοινὴν βάσιν, τὴν μίαν ἀπὸ τὰς βάσεις τοῦ κολοβοῦ πρίσματος καὶ ὡς κορυφὰς ἀντιστοιχῶς, τὰς τρεῖς κορυφὰς τῆς ἄλλης βάσεώς του.

Ἐπόθεσις: Ἐστω τὸ κολοβὸν πρίσμα $\text{A}\text{B}\text{G}\Delta\text{E}\text{Z}$ (Σχ. 532).

Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι τὸ κολοβὸν αὐτὸ πρίσμα εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν πυραμίδων $\Delta.\text{A}\text{B}\text{G}$, $\text{E}.\text{A}\text{B}\text{G}$, $\text{Z}.\text{A}\text{B}\text{G}$.

Ἀπόδειξις: Φέρομεν τὸ ἐπίπεδον $\text{A}\text{E}\text{G}'$ τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ χωρίζει τὸ κολοβὸν πρίσμα εἰς δύο πυραμίδας: εἰς τὴν τριγωνικὴν πυραμίδα $\text{E}\text{A}\text{B}\text{G}$ καὶ εἰς τὴν τετραγωνικὴν πυραμίδα $\text{E}\text{A}\text{G}\text{Z}\Delta$.

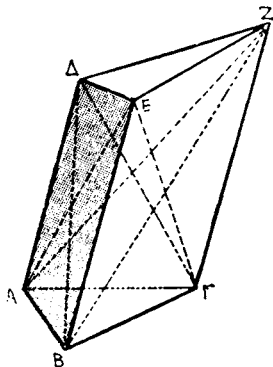
Ἐὰν φέρωμεν τὸ ἐπίπεδον $\Delta\text{E}\text{G}$, ἡ τετραγωνικὴ πυραμὶς $\text{E}\text{A}\text{G}\text{Z}\Delta$ χωρίζεται εἰς τὰς δύο τριγωνικὰς πυραμίδας $\text{E}\Delta\text{A}\text{G}$ καὶ $\text{E}\Delta\text{Z}\text{G}$. Οὕτω

τὸ κολοβὸν πρίσμα εἶναι ἄθροισμα τῶν τριῶν πυραμίδων ΕΑΒΓ, ΕΔΑΓ καὶ ΕΔΖΓ.

Ἡ πρώτη πυραμὶς ΕΑΒΓ ἔχει, ὡς βάσιν τὴν βάσιν ΑΒΓ τοῦ κολοβοῦ πρίσματος καὶ ὡς κορυφὴν τὴν κορυφὴν Ε τῆς ἄλλης βάσεώς του.

Ἐὰν φέρωμεν τὴν εὐθεῖαν ΔΒ, ἡ δευτέρα πυραμὶς ΕΔΑΓ εἶναι ἰσοδύναμος μετὰ τὴν πυραμίδα ΒΔΑΓ, διότι ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν ΔΑΓ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος, διότι αἱ κορυφαὶ τῶν Ε καὶ Β κεῖνται ἐπὶ εὐθείας ΕΒ παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν ἄλλὰ ἡ τριγωνικὴ πυραμὶς ΒΔΑΓ δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς μία πυραμὶς, ἡ ὁποία ἔχει βάσιν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ὡς κορυφὴν τὸ σημεῖον Δ.

Ἐὰν φέρωμεν τὰς εὐθείας ΖΒ καὶ ΖΑ, ἡ τρίτη πυραμὶς ΕΔΖΓ εἶναι ἰσοδύναμος μετὰ τὴν ΒΔΖΓ, διότι ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν ΔΖΓ καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος, διότι αἱ κορυφαὶ τῶν Ε καὶ Β κεῖνται ἐπὶ εὐθείας ΕΒ παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν. Ἀλλὰ ἡ πυραμὶς ΒΔΖΓ δύναται νὰ θεωρηθῇ, ὅτι ἔχει βάσιν τὴν ΒΖΓ καὶ κορυφὴν τὸ Δ ἄλλὰ τότε ἡ πυραμὶς αὕτη



Σχ. 532.

ΔΒΖΓ εἶναι ἰσοδύναμος μετὰ τὴν πυραμίδα ΑΒΖΓ, διότι ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν ΒΖΓ καὶ αἱ κορυφαὶ τῶν Δ καὶ Α κεῖνται ἐπὶ εὐθείας ΔΑ παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν ΒΖΓ. Ἀλλὰ ἡ τελευταία πυραμὶς ΑΒΖΓ δύναται νὰ θεωρηθῇ, ὅτι ἔχει βάσιν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ καὶ κορυφὴν τὸ Ζ.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι τὸ κολοβὸν πρίσμα ΑΒΓΔΕΖ εἶναι ἰσοδύναμον μετὰ τὸ ἄθροισμα τριῶν πυραμίδων, αἱ ὁποῖαι ἔχουν κοινὴν βάσιν τὴν ΑΒΓ καὶ ὡς κορυφάς, ἀντιστοίχως, τὰς κορυφάς Δ, Ε, Ζ τῆς ἄλλης βάσεως.

775. Ὅγκος ἐνὸς ὀρθοῦ κολοβοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος.

Ἐὰν τὸ κολοβὸν πρίσμα εἶναι ὀρθόν, ὡς πρὸς τὴν βάσιν ΑΒΓ, αἱ ἄκμαι ΔΑ, ΕΒ, ΖΓ εἶναι τὰ ὕψη τῶν τριῶν πυραμίδων, ἀπὸ τὰς ὁποίας ἀποτελεῖται τὸ κολοβὸν πρίσμα. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὁ ὄγκος V τοῦ κολοβοῦ πρίσματος θὰ εἶναι :

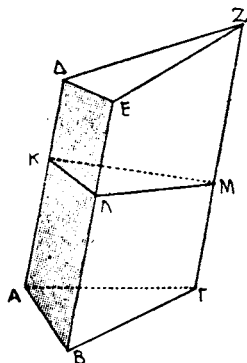
$$V = \text{ὄγκ. πυρ. } \Delta ΑΒΓ + \text{ὄγκ. πυρ. } ΕΑΒΓ + \text{ὄγκ. πυρ. } ΖΑΒΓ \\ = \frac{1}{3} \text{ ἔμβ. } ΑΒΓ \times ΔΑ + \frac{1}{3} \text{ ἔμβ. } ΑΒΓ \times ΕΒ + \frac{1}{3} \text{ ἔμβ. } ΑΒΓ \times ΖΓ$$

ἢ

$$V = \frac{1}{3} \text{ ἔμβ. } ΑΒΓ \times (ΔΑ + ΕΒ + ΖΓ)$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι:

Ἐστὸς ὁ ὄγκος ἐνὸς ὀρθοῦ κολοβοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἕνα τρίτον τοῦ γινομένου τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεώς του, ἢ ὅποια εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς παραπλεύρους ἀκμὰς του, ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τριῶν παραπλεύρων ἀκμῶν του.



Σχ. 533.

776. Ὅγκος ἐνὸς πλαγίου κολοβοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος. Ἐστω ἕνα πλάγιον κολοβὸν τριγωνικὸν πρίσμα ΑΒΓΔΕΖ (Σχ. 533) καὶ ΚΛΜ μία κάθετος τομὴ του. Ἡ κάθετος τομὴ ΚΛΜ χωρίζει τὸ κολοβὸν τριγωνικὸν πρίσμα εἰς δύο ὀρθὰ τριγωνικὰ πρίσματα ΚΛΜΑΒΓ καὶ ΚΛΜΔΕΖ. Ἐπομένως ὁ ὄγκος V τοῦ δοθέντος κολοβοῦ πρίσματος εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν δύο αὐτῶν ὀρθῶν κολοβῶν πρίσμάτων. Δηλ. εἶναι

$$V = \delta\gamma\kappa.ΚΛΜΑΒΓ + \delta\gamma\kappa.ΚΛΜΔΕΖ \quad (1)$$

$$\eta \quad V = \frac{1}{2} \epsilon\mu\beta.ΚΛΜ \times (ΚΑ + ΛΒ + ΜΓ) + \frac{1}{3} \epsilon\mu\beta.ΚΛΜ \times (ΚΔ + ΛΕ + ΜΖ)$$

$$\eta \quad V = \frac{1}{3} \epsilon\mu\beta.ΚΛΜ \times (ΚΑ + ΛΒ + ΜΓ + ΚΔ + ΛΕ + ΜΖ) \quad (2)$$

Ἐπειδὴ $ΚΑ + ΚΔ = ΑΔ$, $ΛΒ + ΛΕ = ΒΕ$, $ΜΖ + ΜΓ = ΓΖ$, ἡ ἰσότης (2) γίνεται $V = \frac{1}{3} \epsilon\mu\beta.ΚΛΜ \times (ΑΔ + ΒΕ + ΓΖ)$.

Ὡστε: Ὁ ὄγκος ἐνὸς πλαγίου τριγωνικοῦ κολοβοῦ πρίσματος εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἕνα τρίτον τοῦ γινομένου τοῦ ἐμβαδοῦ μιᾶς κάθετου τομῆς του ἐπὶ τὸ ἄθροισμα τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν του.

777. Ὅγκος πολυγωνικοῦ κολοβοῦ πρίσματος. Ἐὰν θέλωμεν νὰ εὐρωμεν τὸν ὄγκον ἐνὸς κολοβοῦ πολυγωνικοῦ πρίσματος, χωρίζομεν αὐτὸ εἰς τριγωνικὰ κολοβὰ πρίσματα καὶ προσθέτομεν τοὺς ὄγκους των.

Ἀσκήσεις: 2327, 2328, 2329.

778. Ἐφαρμογή. Κυβισμὸς σωροῦ ἄμμου. Πρόβλημα. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος ἐνὸς κολοβοῦ τετραγωνικοῦ πρίσματος ΑΒΓΔΑ'Β'Γ'Δ', τοῦ ὁποίου δύο ἔδραι εἶναι ὀρθογώνια, τὰ ὅποια δὲν εἶναι ὁμοία, καὶ τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶναι παράλληλοι ἀντιστοίχως.

Ἐστώσαν ΑΒΓΔ καὶ Α'Β'Γ'Δ' (Σχ. 534) αἱ βάσεις τοῦ κολοβοῦ πρίσματος ΑΓ'. Αἱ ἄλλαι τέσσαρες παράπλευροι ἔδραι του εἶναι τραπέζια.

Φέρομεν ἓνα ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὰς ἀκμὰς ΑΒ, ΓΔ, Α'Β', Γ'Δ'. Τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ ὀρίζει ἓνα τραπέζιον ΚΛΜΝ, τὸ ὁποῖον εἶναι ἡ κάθετος τομὴ τοῦ στερεοῦ ΑΓ'.

Φέρομεν ἐπίσης ἓνα ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον διέρχεται ἀπὸ τὰς ἀκμὰς Α'Β' καὶ ΔΓ καὶ τὸ ὁποῖον διαιρεῖ τὸ στερεὸν εἰς δύο κολοβά τριγωνικὰ πρίσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν, ὡς καθέτους τομὰς, τὸ πρῶτον τὸ τρίγωνον ΚΛΝ καὶ τὸ δεῦτερον τὸ τρίγωνον ΛΜΝ.

Ὁ ὄγκος τοῦ κολοβοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος ΑΔΑ'ΒΓΒ' εἶναι (§ 701) ἴσος μὲ

$$\frac{1}{3} \text{ ἔμβ.ΚΛΜ} \times (\text{ΑΒ} + \text{ΓΔ} + \text{Α'Β'})$$

καὶ ὁ ὄγκος τοῦ Α'ΔΔ'Β'ΓΓ' εἶναι ἴσος μὲ

$$\frac{1}{3} \text{ ἔμβ.ΛΜΝ} \times (\text{Α'Β'} + \text{ΔΓ} + \text{Δ'Γ'})$$

Ἐπομένως ὁ ὄγκος V ὀλοκλήρου τοῦ στερεοῦ εἶναι ἴσος μὲ

$$V = \text{ἔμβ.ΚΛΜ} \times \frac{\text{ΑΒ} + \text{ΓΔ} + \text{Α'Β'}}{3} + \text{ἔμβ.ΛΜΝ} \times \frac{\text{Α'Β'} + \text{ΓΔ} + \text{Δ'Γ'}}{3} \quad (1)$$

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ α καὶ β τὰς διαστάσεις ΑΒ καὶ ΑΔ τῆς βάσεως ΑΒΓΔ, μὲ α', β' τὰς διαστάσεις Α'Β' καὶ Α'Δ' τῆς ἄνω βάσεως καὶ μὲ υ τὸ ὕψος τοῦ στερεοῦ, δηλ. τὴν ἀπόστασιν ΝΗ τῶν παραλλήλων βάσεων ΑΒΓΔ καὶ Α'Β'Γ'Δ', ὅα εἶναι :

$$\text{ἔμβ.ΚΛΜ} = \frac{1}{2} \text{ΚΛ} \times \text{ΝΗ} = \frac{1}{2} \beta \upsilon \quad \text{ἢ} \quad \text{ἔμβ.ΛΜΝ} = \frac{1}{2} \text{ΜΝ} \times \text{ΝΗ} = \frac{1}{2} \beta' \upsilon$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὰ ἔμβ.ΚΛΜ κλπ. ... μὲ τὰς τιμὰς τῶν καὶ ἔχομεν

$$V = \frac{\beta \upsilon}{2} \times \frac{\alpha + \alpha + \alpha'}{3} + \frac{\beta' \upsilon}{2} \times \frac{\alpha' + \alpha' + \alpha}{3}$$

$$\text{ἢ} \quad V = \frac{\beta \upsilon}{2} \times \frac{2\alpha + \alpha'}{3} + \frac{\beta' \upsilon}{2} \times \frac{2\alpha' + \alpha}{3}$$

ἢ

$$V = \frac{\upsilon}{6} [\beta(2\alpha + \alpha') + \beta'(2\alpha' + \alpha)]$$

Σημ. Ὁ ἀνωτέρω τύπος χρησιμοποιεῖται, εἰς τὴν πράξιν, διὰ τὸν κυβισμόν τοῦ σωροῦ τῆς ἄμμου ἢ τῶν χαλικίων.

779. Πρισματοειδῆ πολύεδρα. Πρισματοειδῆς πολύεδρον.

Πρισματοειδῆς λέγεται τὸ κυρτὸν πολύεδρον, τοῦ ὁποῖου δύο ἔδραι (βάσεις) εἶναι τυχόντα πολύγωνα, τὰ ὁποῖα κείνται ἐπὶ παραλλήλων ἐπιπέδων καὶ αἱ ἄλλαι ἔδραι (παράπλευροι ἔδραι) εἶναι τρίγωνα ἢ τραπέζια, αἱ ὁποῖαι ἔχουν ὡς κορυφὰς τὰς κορυφὰς ἐκάστης βάσεως.

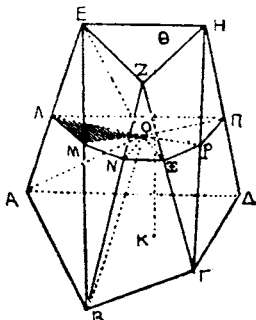
Π.χ. τὸ πολύεδρον ΑΒΓΔΕΒΗ (Σχ. 535) εἶναι πρισματοειδῆς· αἱ βά-

σεις του εἶναι τὸ τετράπλευρον $ΑΒΓΔ$ καὶ τὸ τρίγωνον $ΕΖΗ$. αἱ παράπλευροι ἔδραι του εἶναι τὰ τρίγωνα $ΕΑΒ$, $ΒΖΕ$, $ΖΒΓ$, $ΓΖΗ$, $ΗΓΔ$ καὶ τὸ τραπέζιον $ΑΔΗΕ$.

Ἡ ἀπόστασις $ΘΚ$ τῶν παραλλήλων βάσεων τοῦ πρισματοειδοῦς λέγεται ὕψος αὐτοῦ.

780. Θεώρημα. Ὁ ὄγκος ἐνὸς πρισματοειδοῦς εἶναι ἴσος μὲ $\frac{v}{6}(B+B'+4B'')$, ὅπου v παριστάνει τὸ ὕψος τοῦ πρισματοειδοῦς, B καὶ B' τὰ ἔμβαδὰ τῶν δύο βάσεων του καὶ B'' τὸ ἔμβαδὸν τῆς τομῆς τοῦ πρισματοειδοῦς ὑπὸ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον εἶναι παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις του καὶ ἀπέχει ἴσον ἀπὸ αὐτὰς.

Ἐστω τὸ πρισματοειδὲς πολυέδρον $ΑΒΓΔΕΖΗ$ καὶ $ΛΜΝΞΡΠ$ ἡ τομὴ του ὑπὸ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον εἶναι παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις του $ΑΒΓΔ$ καὶ $ΕΖΗ$ καὶ ἀπέχει ἴσον ἀπὸ αὐτὰς. Ἐστω, ὅτι $\text{ἔμβ.} ΑΒΓ=B$ καὶ $\text{ἔμβ.} ΕΖΗ=B'$. Εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς τομῆς λαμβάνομεν τυχὸν σημείον O καὶ φέρομεν τὰς εὐθείας, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὸ σημεῖον O μὲ τὰς κορυφὰς τοῦ στερεοῦ. Τὸ πρισματοειδὲς χωρίζεται εἰς πυραμίδας, αἱ ὁποῖαι ἔχουν κοινὴν κορυφὴν τὸ O καὶ βάσεις τὰς διαφόρους ἔδρας τοῦ πρισματοειδοῦς.



Σχ. 535.

Δύο ἐκ τῶν πυραμίδων αὐτῶν, αἱ ὁποῖαι ἔχουν, ὡς βάσεις, τὰς βάσεις $ΑΒΓΔ$ καὶ $ΕΖΗ$ ἔχουν ὕψη ἴσα μὲ $\frac{v}{2}$ καὶ ἐπομέ-

ως ἔχουν ὄγκους ἀντιστοίχως, ἴσους μὲ $\frac{Bv}{6}$ καὶ $\frac{B'v}{6}$. Μένει τώρα νὰ ἀποδείξωμεν, ὅτι ὅλαι αἱ ἄλλαι πυραμίδες, αἱ ὁποῖαι ἔχουν βάσεις τὰς παραπλεύρους ἔδρας τοῦ πρισματοειδοῦς ἔχουν ὄγκον ἴσον μὲ $\frac{4B''v}{6}$.

Ἐστω ἡ πυραμὶς $OABE$, ἡ ὁποία ἔχει βάσιν τὸ τρίγωνον $ΕΑΒ$, τὴν μίαν ἀπὸ τὰς ἔδρας τοῦ πολυέδρου καὶ ἔστω $ΛΜ$ ἡ τομὴ τοῦ τριγώνου αὐτοῦ ὑπὸ τῆς τομῆς $ΛΜΝ \dots Π$. Ἐπειδὴ τὰ σημεία $Λ$ καὶ $Μ$ εἶναι τὰ μέσα τῶν ἀκμῶν $ΕΑ$ καὶ $ΕΒ$, τὸ ἔμβαδὸν τοῦ τριγώνου $ΕΛΜ$ εἶναι τὸ τέταρτον τοῦ ἔμβαδου τοῦ τριγώνου $ΕΑΒ$.

Ἐάν συγκρίνωμεν τώρα τὰ τετράεδρα $OEAB$ καὶ $OEΛΜ$ παρατηροῦμεν, ὅτι ἔχουν κοινὴν κορυφὴν τὸ O καὶ τὸ ἔμβαδὸν τῆς βάσεως $ΕΑΒ$ τοῦ πρώτου εἶναι τετραπλάσιον τοῦ ἔμβαδου τῆς βάσεως $ΕΛΜ$ τοῦ δευτέρου. Ἐπομένως ὁ ὄγκος τῆς πρώτης πυραμίδος θὰ εἶναι τετραπλάσιος τοῦ ὄγκου τῆς δευτέρας πυραμίδος, δηλ. θὰ εἶναι

$$\text{ὄγκ. } OEAB=4 \times \text{ὄγκ. } OEΛΜ \quad (1)$$

Ἄλλὰ δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν, ὅτι τὸ τετράεδρον $OEΛΜ$ ἔχει κο-

ρυφήν τὸ Ε καὶ βάσιν τὴν ΟΛΜ, ὁπότε τὸ ὕψος τοῦ θά εἶναι $\frac{υ}{2}$ καὶ ἔπο
μένως ὁ ὄγκος τοῦ θά εἶναι $\frac{1}{3} \cdot \frac{υ}{2} \cdot \text{έμβ.ΟΛΜ}$ δηλ. θά εἶναι

$$\text{ὄγκ. ΟΕΛΜ} = \frac{υ}{6} \cdot \text{έμβ.ΟΛΜ}.$$

Ἄντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὸν ὄγκ. ΟΕΛΜ μὲ τὴν τιμὴν τοῦ
καὶ ἔχομεν $\text{ὄγκ. ΟΕΑΒ} = 4 \cdot \text{έμβ. ΟΛΜ} \times \frac{υ}{6}$.

Ἐργαζόμενοι ὁμοίως εὐρίσκομεν, ὅτι

$$\text{ὄγκ. ΟΒΕΖ} = 4 \cdot \text{έμβ. ΟΜΝ} \times \frac{υ}{6}.$$

Ἐπομένως τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων ὄλων τῶν πυραμίδων, ποῦ ἔχουν
κορυφήν τὸ Ο καὶ βάσεις τὰς παραπλεύρους ἔδρας τοῦ πρισματοειδοῦς,
θά εἶναι ἴσον μὲ $4 \times \frac{υ}{6} (\text{έμβ.ΟΛΜ} + \text{έμβ.ΟΜΝ} + \dots)$ ἢ $4 \times \frac{υ}{6} \times \Sigma'$.

Ἐπομένως ὁ ὄγκος V ὁλοκλήρου τοῦ πρισματοειδοῦς θά εἶναι ἴσος μὲ

$$V = \frac{Bυ}{6} + \frac{B'υ}{6} + \frac{4υB''}{6} \quad \text{ἢ} \quad \boxed{V = \frac{υ}{6} (B + B' + 4B'')}$$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Ἄ ὄγκος ἐνὸς πρισματοειδοῦς. . .**

Σημ. Διὰ τὰς παραπλεύρους ἔδρας, αἱ ὁποιαὶ εἶναι τραπέζια, ἡ ἀπό-
δειξις εἶναι ἡ αὐτή, διότι δυνάμεθα νὰ φέρωμεν μίαν διαγώνιον τοῦ, ὁπότε
χωρίζεται τὸ τραπέζιον εἰς δύο τρίγωνα.

Ἄσκήσεις: 2330, 2331, 2332, 2333, 2334.

Ἄσκήσεις

2284. (2320). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος μιᾶς κανονικῆς ἑξαγωνικῆς πυρα-
μίδος καὶ τὸ ἀπόστημά της (παράπλευρον ὕψος), ἐὰν ἡ πλευρὰ τῆς βάσεώς της
εἶναι α καὶ ἡ παράπλευρος ἀκμὴ της λ.

2285. (2321). Τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ἐὰν ἡ κανονικὴ πυραμὶς εἶναι τριγωνικὴ.

2286. (2322). Τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ἐὰν ἡ κανονικὴ πυραμὶς εἶναι τετραγωνικὴ.

2287. (2323). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ κανονικῆς πυρα-
μίδος ἔχουν τὴν αὐτὴν κλίσιν πρὸς τὴν βάσιν της.

2288. (2324). Ἡ βάσις μιᾶς κανονικῆς πυραμίδος εἶναι ἓνα τετράγωνον
πλευρᾶς 0,40 μ. καὶ ἡ παράπλευρος ἀκμὴ της 0,70 μ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔμβα-
δὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας της καὶ τὸ ἔμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας της.

2289. (2325). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔμβαδὸν μιᾶς στέγης, ἡ ὁποία ἔχει τὸ
σχῆμα κανονικῆς πενταγωνικῆς πυραμίδος, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ ἀκμὴ τῆς
βάσεώς της εἶναι 1,40 καὶ ἡ παράπλευρος ἀκμὴ της εἶναι 8,40 μ.

2290. (2326). Ἡ βάσις μιᾶς κανονικῆς πυραμίδος εἶναι ἓνα ἰσόπλευρον
τρίγωνον. Τὸ ἀπόστημα τῆς πυραμίδος αὐτῆς εἶναι 1,20 μ. καὶ τὸ ἔμβαδὸν τῆς
παραπλεύρου ἐπιφανείας της 1,84 τ.μ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ τῆς βάσεώς της.

2291. (2327). Ἡ βάσις μιᾶς κανονικῆς πυραμίδος εἶναι ἓνα κανονικὸν
ἑξάγωνον πλευρᾶς 15 ἔκ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἀπόστημά της (παράπλευρον ὕψος),

ἀν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ἔμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας της εἶναι 15 τ. δεκατόμετρα.

2292. (2328). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος μιᾶς κανονικῆς ἐξαγωνικῆς πυραμίδος, ἐὰν ἡ ἀκμὴ τῆς βάσεώς της εἶναι a καὶ ἡ παράπλευρος ἐπιφάνειά της E .

2293. (2329). Τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ἐὰν ἡ κανονικὴ πυραμὶς εἶναι τριγωνικὴ.

2294. (2330). Τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ἐὰν ἡ κανονικὴ πυραμὶς εἶναι τετραγωνικὴ.

2295. (2331). Ἡ βάσις μιᾶς κανονικῆς πυραμίδος εἶναι ἓνα τετράγωνον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔμβαδὸν τῆς βάσεως αὐτῆς, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ἀπόστημα τῆς πυραμίδος εἶναι 10 ἑκ. καὶ τὸ ἔμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας της 168 τ. ἑκ.

2296. (2332). Τὸ ἔμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας μιᾶς κανονικῆς ἐξαγωνικῆς πυραμίδος εἶναι 3,20 τ.μ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ παράπλευρος ἀκμὴ της, ἐὰν τὸ ἀπόστημα τῆς εἶναι 0,80 μ.

2297. (2333). Ἡ βάσις μιᾶς κανονικῆς πυραμίδος εἶναι ἓνα ἐξάγωνον πλευρᾶς 3 μ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος, τὸ ὁποῖον πρέπει νὰ ἔχῃ ἡ πυραμὶς αὐτή, ἵνα τὸ ἔμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας της εἶναι δεκαπλάσιον τοῦ ἔμβαδου τῆς βάσεώς της.

2298. (2334). Ἡ μεγαλύτερα πυραμὶς τῆς Αἰγύπτου ἔχει βάσιν ἓνα τετράγωνον πλευρᾶς 234 μ. καὶ τὸ ὕψος της εἶναι 146 μ. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος της.

2299. (2335). Ἡ βάσις μιᾶς κανονικῆς πυραμίδος εἶναι ἓνα ἐξάγωνον πλευρᾶς 8 ἑκ καὶ τὸ ὕψος της 5 δεκατόμ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας της, τὸ ἔμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας της καὶ ὁ ὄγκος της.

2300. (2336). Ἡ βάσις μιᾶς κανονικῆς πυραμίδος εἶναι τετράγωνον πλευρᾶς 0,40 μ. καὶ ἡ παράπλευρος ἀκμὴ της 1,10 μ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος καὶ ὁ ὄγκος της.

2301. (2337). Εἷς ἓνα κύκλον ἀκτῖνος 1 μ ἐγγράφομεν ἓνα ἰσόπλευρον τρίγωνον. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος μιᾶς πυραμίδος, ἡ ὁποία ἔχει ὕψος 3 μ. καὶ βάσιν τὸ ἰσόπλευρον αὐτὸ τρίγωνον.

2302. (2338). Τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ἐὰν ἡ βάσις εἶναι τὸ ἐγγεγραμμένον κανονικὸν ἐξάγωνον.

2303. (2339). Ἡ βάσις μιᾶς κανονικῆς πυραμίδος εἶναι ἓνα ἐξάγωνον πλευρᾶς a , καὶ τὸ ὕψος της u . Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ της, τὸ ἔμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας της καὶ ὁ ὄγκος της. Ἐφαρμογή: $a=2$ μ., $u=10$ μ.

2304. (2340). Μία κανονικὴ ἐξαγωνικὴ πυραμὶς ἔχει ὄγκον 1 κ.μ. καὶ τὸ ὕψος της εἶναι 0,50 μ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ τῆς βάσεώς της.

2305. (2341). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος μιᾶς πυραμίδος, ἡ ὁποία ἔχει ὄγκον 650 κ. δεκατόμ. καὶ τῆς ὁποίας ἡ βάσις εἶναι ἓνα τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ βάσις εἶναι 50 ἑκ. καὶ τὸ ὕψος του 0,26 μ.

2306. (2342). Μία κανονικὴ πυραμὶς ἔχει βάσιν ἓνα ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς 7 ἑκ. καὶ ὄγκον 75 κ. ἑκ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος της.

2307. (2343). Μία κανονικὴ πυραμὶς ἔχει βάσιν ἓνα ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς a . Αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ της σχηματίζουν γωνίαν 60° μὲ τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος, ἡ παράπλευρος ἐπιφάνειά της καὶ ὁ ὄγκος της. Ἐφαρμογή: $a=12$ ἑκ.

2308. (2344). Μία τετραγωνική πυραμίς έχει τὸν αὐτὸν ὄγκον, τὸν ὁποῖον ἔχει ἓνα ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, τοῦ ὁποῖου τὸ μῆκος εἶναι 2,40 μ., τὸ πλάτος 1,45 μ. καὶ τὸ ὕψος 1,60 μ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ὕψος τῆς εἶναι 5 μ.

2309. (2345). Τὸ ἔμβαδὸν τῆς παραπλευροῦ ἐπιφανείας μιᾶς κανονικῆς τριγωνικῆς πυραμίδος εἶναι πενταπλάσιον τοῦ ἔμβαδοῦ τῆς βάσεώς της, καὶ ἡ πλευρὰ τῆς βάσεώς της εἶναι 4,25 μ. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τῆς.

2310. (2346). Μία κανονικὴ πυραμίς ἔχει βάσιν ἓνα τετράγωνον, τοῦ ὁποῖου ἡ διαγώνιος ἔχει μῆκος a . Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας καὶ ὁ ὄγκος τῆς, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ παράπλευρος ἀκμὴ εἶναι ἴση μὲ a .

2311. (2347). Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος καὶ τὸ ἔμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας ἐνὸς κανονικοῦ τετραέδρου ἀκμῆς a . Ἐφαρμογή: $a=8$ ἐκ.

2312. (2348). Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος καὶ τὸ ἔμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας ἐνὸς κανονικοῦ τετραέδρου, τοῦ ὁποῖου τὸ ὕψος εἶναι v . Ἐφαρμογή: $v=0,50$ μ.

2313. (2349). Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τοῦ ὄγκου κύβου πρὸς τὸν ὄγκον κανονικοῦ τετραέδρου, τὸ ὁποῖον κατασκευάζεται μὲ τὴν διαγώνιον μιᾶς τῶν ἐδρῶν τοῦ κύβου.

2314. (2350). Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ὄγκων μιᾶς κανονικῆς ἐξαγωνικῆς πυραμίδος, τῆς ὁποίας ἡ πλευρὰ τῆς βάσεως εἶναι a καὶ τὸ ὕψος a , πρὸς ἓνα κανονικὸν τετραέδρον ἀκμῆς a .

2315. (2351). Αἱ βάσεις μιᾶς κανονικῆς κολούρου πυραμίδος εἶναι τετράγωνα πλευρῶν 80 ἐκ. καὶ 60 ἐκ. καὶ τὸ παράπλευρον ὕψος τῆς εἶναι 1 μετρ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔμβαδὸν τῆς παραπλευροῦ ἐπιφανείας τῆς καὶ τὸ ἔμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας τῆς.

2316. (2352). Αἱ βάσεις μιᾶς κανονικῆς κολούρου πυραμίδος εἶναι ἰσόπλευρα τρίγωνα πλευρῶν 1,20 μ. καὶ 0,95 καὶ ἡ παράπλευρος ἀκμὴ τῆς 1,40 μ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔμβαδὸν τῆς παραπλευροῦ ἐπιφανείας τῆς καὶ τὸ ἔμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας τῆς.

2317. (2353). Τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ἂν αἱ βάσεις εἶναι τετράγωνα.

2318. (2354). Τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ἂν αἱ βάσεις εἶναι κανονικὰ ἐξάγωνα.

2319. (2354'). Αἱ βάσεις μιᾶς κανονικῆς κολούρου πυραμίδος εἶναι ἐξάγωνα πλευρῶν 0,35 μ. καὶ 0,28 μ. καὶ τὸ ὕψος τῆς εἶναι 1,80 μ. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τῆς.

2320. (2355). Τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ἂν αἱ βάσεις τῆς εἶναι ἰσόπλευρα τρίγωνα.

2321. (2356). Τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ἂν αἱ βάσεις τῆς εἶναι τετράγωνα.

2322. (2357). Αἱ βάσεις μιᾶς κανονικῆς κολούρου πυραμίδος εἶναι τετράγωνα πλευρῶν 70 ἐκ. καὶ 60 ἐκ. καὶ ἡ παράπλευρος ἀκμὴ τῆς εἶναι 64,7 ἐκ. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τῆς.

2323. (2358). Τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ἂν αἱ βάσεις τῆς εἶναι ἰσόπλευρα τρίγωνα.

2324. (2359). Τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ἂν αἱ βάσεις τῆς εἶναι κανονικὰ ἐξάγωνα.

2325. (2360). Ἡ κάτω βάση μιᾶς κανονικῆς κολούρου πυραμίδος εἶναι ἓνα τετράγωνον πλευρᾶς 2,40 μ. τὸ παράπλευρον ὕψος τῆς εἶναι 1,10 μ. καὶ ἡ παράπλευρος ἀκμὴ τῆς εἶναι 1,30 μ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔμβαδὸν τῆς παραπλευροῦ ἐπιφανείας τῆς, τὸ ἔμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας τῆς καὶ ὁ ὄγκος τῆς.

2326. (2361). Αἱ βάσεις μιᾶς κολούρου πυραμίδος εἶναι τετράγωνα πλευ-

ρῶν 0,75 μ. καὶ 0,30 μ. ὁ ὄγκος τῆς εἶναι 5 κ.μ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος τῆς.

2327. (2362). Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος ἑνὸς κολοβοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος, ἂν γνωρίζωμεν. ὅτι ἡ κάθετος τομῆ τοῦ εἶναι ἓνα τρίγωνον, τοῦ ὁποίου. ἡ βάσις εἶναι 64 ἕκ. καὶ τὸ ὕψος τοῦ 65 ἕκ. καὶ ὅτι αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ τοῦ εἶναι 1,20 μέτρα, 1,35 μέτρα καὶ 1,44 μέτρα.

2328. (2363). Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος ἑνὸς κολοβοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος, ἂν αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ τοῦ εἶναι 1,15 μέτρα, 1,24 μέτρα καὶ 1,30 μέτρα καὶ ἡ κάθετος τομῆ εἶναι ἓνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ περιμέτρος εἶναι 2,10 μέτρα καὶ ἡ ἄνισος πλευρὰ τοῦ 0,50 μέτρα.

2329. (2364). Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος ἑνὸς κολοβοῦ πρίσματος, ἂν αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ τοῦ εἶναι 1,40 μέτρα, 1,52 μέτρα καὶ 1,55 μέτρα καὶ ἡ κάθετος τομῆ τοῦ εἶναι ἓνα ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ ὑποτείνουσα εἶναι 0,72 μέτρα.

2330. (2365). Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος ἑνὸς σωροῦ ἄμμου 0,80 μέτρ. ὕψους καὶ τοῦ ὁποίου αἱ διαστάσεις τῆς κάτω βάσεως εἶναι 2,40 μέτρα, 1,80 μέτρα καὶ τῆς ἄνω βάσεως εἶναι 1,40 μέτρα καὶ 0,90 μέτρα.

2331. (2366). Μία ὁδὸς πρέπει νὰ στρωθῇ μὲ 500 κυβ. μέτρα χαλίκια. Πόσους δρόμους θὰ κάμωμεν, διὰ νὰ μεταφέρωμεν τὰ χαλίκια αὐτά, μὲ μίαν χειράμαξαν, τῆς ὁποίας τὸ βάθος εἶναι 0,30 μ. καὶ αἱ διαστάσεις τοῦ πυθμένος εἶναι 0,80 μ. καὶ 0,50 μ. καὶ τοῦ ἀνοικτοῦ μέρους τῆς εἶναι 0,90 μ. καὶ 0,70 μ.;

2332. (2367). Μία τάφος ἔχει βάθος 0,70 μ. καὶ περιέχει νερὸ ὕψους 0,35 μ. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ νεροῦ, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι αἱ διαστάσεις τοῦ πυθμένος εἶναι 6 μ. καὶ 0,50 μ. καὶ τοῦ ἀνοίγματός τῆς εἶναι 6,30 μ. καὶ 0,64 μ.

2333. (2368). Ἔχουμεν σκάψει μίαν τάφρον βάθους 0,60 μ. Τὸ ἀνοιγμὰ τῆς ἔχει μῆκος 3,50 μέτρα καὶ πλάτος 0,80 μέτρα καὶ ὁ πυθμὴν τῆς ἔχει μῆκος 2,90 μέτρα καὶ πλάτος 0,60 μέτρα. Πόσους δρόμους θὰ κάμωμεν διὰ νὰ μεταφέρωμεν τὸ χῶμα τῆς τάφρου αὐτῆς μὲ μίαν χειράμαξαν, τῆς ὁποίας τὸ βάθος εἶναι 0,40 μ. καὶ αἱ διαστάσεις τοῦ μὲν πυθμένος τῆς εἶναι 0,70 μ. καὶ 0,50 μ. καὶ τοῦ ἀνοικτοῦ μέρους τῆς εἶναι 0,80 μ. καὶ 0,60 μ., ἂν γνωρίζωμεν ὅτι, κατὰ τὴν ἐξαγωγήν, τὸ χῶμα ὑφίσταται μίαν ἐξόγκωσιν ἴσην μὲ 1/10 τοῦ ὄγκου τοῦ.

2334. (2369). Δύο ἰσόπλευρα τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' κεῖνται ἐπὶ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων εἰς τρόπον, ὥστε αἱ κορυφαὶ τοῦ ἑνὸς καὶ οἱ πόδες τῶν καθέτων, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ τὰς κορυφὰς τοῦ δευτέρου ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ πρώτου, εἶναι κορυφαὶ ἑνὸς κανονικοῦ ἐξαγώνου Αβ'Γα'Βγ'. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΒ', ΑΓ', ΒΓ', ΒΑ', ΓΑ', ΓΒ' καὶ ζητεῖται νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ ΑΒΓΑ'Β'Γ'.

Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν ἐπὶ τοῦ Β' Κεφαλαίου

Α' Ὁμάς. 2335. (2370). Μία κανονικὴ πυραμὶς ἔχει βάσιν ἓνα ἐξάγωνον πλευρᾶς 2 μ. Τὸ ὕψος τῆς εἶναι 12 μ. Νὰ ὑπολογισθοῦν :

1ον ἡ παράπλευρος ἀκμὴ τῆς.

2ον. τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τῆς.

3ον. τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας τῆς.

4ον. ὁ ὄγκος τῆς.

δον. τὸ ἔμβαδὸν τῆς τομῆς τῆς πυραμίδος ὑπὸ ἐνὸς ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον ἀπέχει 4 μέτρα ἀπὸ τὴν κορυφήν της.

βον. αἱ παράπλευροι ἄκμαι καὶ ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος, ἡ ὁποία περιέχεται μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς κορυφῆς της.

2336. (2371). Ἡ βάσις μιᾶς κανονικῆς πυραμίδος εἶναι ἓνα ἰσόπλευρον τρίγωνον, ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον ἀκτίνος 1,7 μ. Τὸ ἔμβαδὸν τῆς παραπλευροῦ ἐπιφανείας τῆς πυραμίδος αὐτῆς εἶναι διπλάσιον τοῦ ἔμβαδου τῆς βάσεώς της. Νὰ ὑπολογισθῇ :

1ον. ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος.

2ον. τὸ βῆρος ἐνὸς κύβου μεταλλικοῦ, ὁ ὁποῖος ἔχει διαγώνιον τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος. Τὸ εἰδικὸν βῆρος τοῦ μετάλλου εἶναι 7,49.

2337. (2372). Δίδεται ἓνα ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ πλευρᾶς α. Φέρομεν τὴν διάμετρον ΑΔ τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τρίγωνον κύκλου καὶ ἀπὸ τὸ Δ ὑποψῆμεν κάθετον ΔΣ=α ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας τῆς πυραμίδος Σ.ΑΒΓ.

Β' Ὁμάς. 2338. (2373). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔμβαδὸν τῆς παραπλευροῦ ἐπιφανείας καὶ τὸ ἔμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας μιᾶς κολούρου πυραμίδος μὲ βάσεις τετράγωνα, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ πλευρὰ τῆς μεγάλης βάσεως εἶναι 2,10 μέτρα, ὅτι τὸ ἔμβαδὸν τῆς μικρᾶς βάσεως εἶναι τὸ ἓνα τρίτον τοῦ ἔμβαδου τῆς μεγάλης βάσεως καὶ ὅτι τὸ παράπλευρον ὕψος της εἶναι 3,50 μέτρα.

2339. (2374). Τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ἐὰν ἡ μικρὰ βάσις εἶναι ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς 45 ἐκ., ἡ μεγάλη βάσις εἶναι διπλασία τῆς μικρᾶς καὶ τὸ παράπλευρον ὕψος της εἶναι 1,30 μ.

2340 (2375). Ἐνας ὀβελίσκος ἔχει τὸ σχῆμα μιᾶς κολούρου πυραμίδος μὲ βάσιν τετράγωνον ἢ πλευρὰ τῆς κάτω βάσεώς του εἶναι 1,50 μέτρα, τῆς ἄνω βάσεώς του εἶναι 0,80 μέτρα καὶ τὸ ὕψος του εἶναι 15 μέτρα. Ἡ κολούρος αὐτῆς πυραμίδος καταλήγει εἰς μίαν πυραμίδα, τῆς ὁποίας αἱ παράπλευροι ἔδραι της εἶναι ἰσόπλευρα τρίγωνα. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος καὶ τὸ ἔμβαδὸν τῆς παραπλευροῦ ἐπιφανείας τοῦ ὀβελίσκου αὐτοῦ.

2341. (2376). Δίδεται μία κανονικὴ πυραμὶς, ἡ ὁποία ἔχει ὕψος υ καὶ ἡ βάσις της εἶναι ἓνα ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς α. Ἡ πυραμὶς αὐτὴ τέμνεται ὑπὸ ἐνὸς ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν της καὶ τὸ ὁποῖον διαιρεῖ τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος εἰς δύο ἴσα μέρη. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τῆς κολούρου πυραμίδος, ἡ ὁποία θὰ προκύψῃ.

2342. (2377). Τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ἐὰν ἡ βάσις τῆς πυραμίδος εἶναι τετράγωνον.

2343. (2378). Τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ἐὰν ἡ βάσις τῆς πυραμίδος εἶναι κανονικὸν ἑξάγωνον.

2344. (2379). Μία κανονικὴ πυραμὶς ἔχει βάσιν ἓνα ἑξάγωνον πλευρᾶς α=2 ἐκ. καὶ ὕψος υ=10 ἐκ.

1ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ παράπλευροι ἄκμαι της, ἡ παράπλευρος ἐπιφάνειά της καὶ ὁ ὄγκος της.

2ον. Τέμνομεν τὴν πυραμίδα αὐτὴν δι' ἐνὸς ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἀπὸ τὴν κορυφήν υ'=4 ἐκ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔμβαδὸν τῆς τομῆς, τὸ μήκος τῶν ἀκμῶν της καὶ ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος, ἡ ὁποία κεῖται ἄνω τοῦ ἐπιπέδου τῆς τομῆς.

Γ' Ὁμάς. 2345. (2380). Δίδεται ἕνας ρόμβος ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου αἱ διαγώνιοι ΑΓ καὶ ΒΔ ἔχουν μήκη $ΑΓ=2α$, $ΒΔ=2β$. Ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Γ φέρομεν, πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ρόμβου, τὰς καθέτους ΑΕ=υ καὶ ΓΖ=υ' ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ ρόμβου. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου ΔΕΒΖ.

2346. (2381). Τέμνομεν μίαν κόλυρον πυραμίδα μὲ ἕνα ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις τῆς καὶ τοῦ ὁποίου ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ τὰς βάσεις τῆς εἶναι ἴσος μὲ $μ:ν$. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔμβαδὸν τῆς τομῆς, ἐάν γνωρίζωμεν τὰ ἔμβαδά Β καὶ β τῶν βάσεων τῆς.

2347. (2382) Δίδεται μία κανονικὴ πυραμὶς, τῆς ὁποίας ἡ βάση εἶναι ἕνα ἰσοπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς α' τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος εἶναι 2α.

1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος.

2ον. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς κορυφῆς πρέπει νὰ φέρωμεν ἕνα ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν βάση, ἵνα τὸ ἔμβαδὸν τῆς τομῆς εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ἔμβαδοῦ τῆς βάσεως; Νὰ ὑπολογισθῇ ἔπειτα ὁ ὄγκος τῆς κολούρου πυραμίδος, ἡ ὁποία θὰ προκύψῃ. Ἐφαρμογὴ $α=5 μ$.

2348. (2383). Δίδεται τὸ κανονικὸν τετραέδρον ΑΒΓΔ ἀκμῆς α.

1ον. Συνδέομεν τὴν κορυφὴν Α μὲ τὸ μέσον Ε τῆς ἀκμῆς ΓΔ' νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μήκος ΑΕ.

2ον. Διὰ τῆς ΑΕ φέρομεν ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν ΒΔ εἰς ἕνα σημεῖον Ζ, τοιοῦτον, ὥστε ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος ΑΔΕΖ νὰ εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ὄγκου τῆς πυραμίδος ΑΒΓΕΖ. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ μήκη τῶν ΔΖ, ΑΖ.

Δ' Ὁμάς. 2349. (2384). Δίδεται ἕνα ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον ΑΒΓΔΑ'Β'Γ'Δ'. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου ΑΒ'ΓΔ' εἶναι ἴσος μὲ τὸ τρίτον τοῦ ὄγκου τοῦ παραλληλεπιπέδου (τὸ τετραέδρον ΑΒ'ΓΔ' λέγεται ἔγγεγραμμένον εἰς τὸ παραλληλεπίπεδον).

2350. (2385). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὁ ὄγκος ἐνὸς τετραέδρου ΑΒΓΔ εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἕκτον τοῦ γινομένου τῆς μικροτέρας ἀποστάσεως τῶν δύο ἀέναντι ἀκμῶν ΑΒ καὶ ΓΔ ἐπὶ τὸ ἔμβαδὸν τοῦ παραλληλογράμμου, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι ἴσαι καὶ παράλληλοι πρὸς τὰς ἀκμὰς αὐτάς.

2351. (2386). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὁ ὄγκος ἐνὸς τετραέδρου εἶναι ἴσος μὲ τὸ τρίτον τοῦ γινομένου μιᾶς ἀκμῆς τοῦ ἐπὶ τὸ ἔμβαδὸν τοῦ τριγώνου προβολῆς τοῦ στερεοῦ ἐπὶ ἕνα ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκμὴν αὐτήν.

2352. (2387). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς κάθε κανονικὸν τετραέδρον τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τυχόντος σημείου κειμένου εἰς τὸ ἔσωτερικὸν αὐτοῦ ἀπὸ τὰς τέσσαρας ἑδρας του εἶναι σταθερόν.

2353. (2388). Ἐάν μία πυραμὶς ἔχῃ βάσιν ἕνα τραπέζιον, ὁ ὄγκος τῆς εἶναι ἴσος μὲ τὸ τρίτον τοῦ γινομένου τοῦ ἄθροίσματος τῶν βάσεων τοῦ τραπέζιου ἐπὶ τὸ ἔμβαδὸν τοῦ τριγώνου, κατὰ τὸ ὁποῖον προβάλλεται ἡ πυραμὶς ἐπὶ ἕνα ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν βάση τοῦ τραπέζιου.

2354. (2389). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὁ λόγος τῶν ὄγκων δύο τετραέδρων, τὰ ὁποῖα ἔχουν μίαν τρίεδρον γωνίαν ἴσην, εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν γινομένων τῶν τριῶν ἀκμῶν τῶν τριέδρων αὐτῶν.

2355. (2390). Δίδεται ἡ πυραμὶς ΣΑΒΓΔ, τῆς ὁποίας ἡ βάση ΑΒΓΔ εἶναι τετράγωνον πλευρᾶς α καὶ τῆς ὁποίας τὸ ὕψος εἶναι 2α. Φέρομεν ἕνα ἐπίπεδον Π διερχόμενον διὰ τῆς πλευρᾶς ΒΓ' καὶ διὰ τοῦ μέσου Ε τῆς ἀκμῆς ΣΑ, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν ἀκμὴν ΣΔ εἰς τὸ σημεῖον Ζ.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι ἡ τομὴ ΕΒΓΖ εἶναι ἕνα τραπέζιον.

2ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ παράπλευροι ἄκμαι του.

3ον. Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τραπέζιου ΕΒΓΖ.

2356. (2391). Δίδεται ἕνα τετράγωνον ΑΒΓΔ πλευρᾶς α. Ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Γ φέρομεν καθέτους Αχ καὶ Γυ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τετραγώνου καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτοῦ καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῶν μῆκη ΑΕ ἴσον μὲ τὴν διαγώνιον τοῦ τετραγώνου καὶ ΓΖ ἴσον μὲ τὰ $\frac{3}{2}$ τῆς διαγωνίου αὐτῆς.

1ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ τοῦ τραπέζιου ΑΓΖΕ.

2ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ΒΕ καὶ ΒΖ καὶ νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὸ τρίγωνον ΒΕΖ εἶναι ὀρθογώνιον εἰς τὸ Ε.

3ον. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι ἡ ΕΖ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΒΕΔ καὶ νὰ ὑπολογισθῆ ὁ ὄγκος τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος, ἡ ὁποία ἔχει κορυφᾶς τὰ σημεῖα Ζ, Ε, Β, Δ. Ἐφαρμογή: $a=4,20$ μ.

2357. (2392). Δίδεται ἕνα τετράγωνον ΑΒΓΔ ἀπὸ τὰς ἀπέναντι κορυφᾶς Α καὶ Γ τοῦ τετραγώνου αὐτοῦ φέρομεν, πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τετραγώνου, τὰς καθέτους ΑΚ καὶ ΓΛ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τετραγώνου. Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ΑΚ ἕνα σημεῖον Α', τοῦ ὁποίου ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ τετραγώνου νὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου καὶ ἐπὶ τῆς ΓΛ ἕνα σημεῖον Γ', τοῦ ὁποίου ἡ ἀπόστασις ἀπὸ τὸ σημεῖον Α' νὰ εἶναι διπλασία τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι ἡ Α'Γ' εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΒΔΑ'.

2ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν, συναρτήσῃ τῆς πλευρᾶς α τοῦ τετραγώνου, οἱ ὄγκοι τῶν τετραέδρων Α'ΑΒΔ, Γ'ΓΒΔ, Γ'Α'ΒΔ.

2358. (2393). Ἡ βᾶσις ἐνὸς ὀρθοῦ πρίσματος εἶναι ἕνας ῥόμβος ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου αἱ διαγώνιοι ΑΓ καὶ ΒΔ ἔχουν μῆκη 2α καὶ α. Ἐπὶ τῶν παραπλεύρων ἄκμῶν του λαμβάνομεν μῆκη ΑΑ'=3α, ΒΒ'=4α, ΓΓ'=α.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῆ ὅτι τὸ τρίγωνον Β'Α'Γ' εἶναι ὀρθογώνιον καὶ ὅτι τὸ ἐπίπεδον Α'Β'Γ' διέρχεται ἀπὸ τὸ Δ.

2ον. Νὰ ὑπολογισθῆ ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ ΑΒΓΔΑ'Β'Γ'Δ'.

3ον. Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας τοῦ στερεοῦ αὐτοῦ.

Ε' Ομάς. 2359. (2394). Ἐπὶ τῶν ἄκμῶν μιᾶς τρισσορθογωνίου στερεᾶς γωνίας Ο, λαμβάνομεν μῆκη ΟΑ=α, ΟΒ=β, ΟΓ=γ. Νὰ ὑπολογισθῆ :

1ον. ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου ΟΑΒΓ.

2ον. τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

3ον. ἡ ἀπόστασις τοῦ σημείου Ο ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ.

2360. (2395). Δίδεται ἡ τριέδρος στερεὰ γωνία Σ, τῆς ὁποίας ἐκάστη ἔδρα εἶναι ἴση μὲ 60°. Ἐπὶ μιᾶς ἄκμῆς τῆς λαμβάνομεν μῆκος ΣΑ=α καὶ ἐκ τοῦ Α φέρομεν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ἄκμην ΣΑ, τὸ ὁποῖον τέμνει τὰς ἄλλας ἄκμας τῆς τριέδρου εἰς τὰ σημεῖα Β καὶ Γ. Νὰ ὑπολογισθοῦν :

1ον. αἱ ἄκμαι τοῦ τετραέδρου ΣΑΒΓ.

2ον. ἡ ὀλικὴ ἐπιφάνειά του.

3ον. ὁ ὄγκος του.

4ον. τὸ ὕψος του ΑΗ, τὸ ὁποῖον ἄγεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν Α.

2361. (2396). Ἀπὸ τὰ μέσα τῶν τριῶν ἄκμῶν ἐνὸς κύβου, αἱ ὁποῖαι καταλήγουσιν εἰς τὴν αὐτὴν κορυφὴν, φέρομεν ἕνα ἐπίπεδον :

1ον. Νὰ ἀναγνωρισθῆ ἡ φύσις τῶν στερεῶν, τὰ ὁποῖα χωρίζει τὸ ἐπίπεδον.

2ον. Ὁ λόγος τῶν ὄγκων τῶν δύο αὐτῶν στερεῶν.

3ον. Ὁ λόγος τῶν ἐπιφανειῶν τῶν στερεῶν αὐτῶν, μὴ συμπεριλαμβανομένης τῆς ἐπιφανείας τῆς τομῆς.

4ον. Νὰ ὑπολογισθῆ ὁ ὄγκος τοῦ μικροτέρου στερεοῦ, καὶ τὸ ὕψος του, τὸ ὅποion εἶναι κἀθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς τομῆς, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ ἀκμὴ τοῦ κύβου εἶναι 0,24 μ.

2362. (2397). Αἱ ἀκμαὶ ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ' ἐνὸς τετραέδρου ΟΑΒΓ εἶναι κἀθετοι ἀνά δύο. Φέρομεν τὸ ὕψος ΟΗ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΟΑΒ καὶ τὴν εὐθείαν ΓΗ. Ἐὰν ἡ ὀλικὴ ἐπιφάνεια τοῦ τετραέδρου εἶναι ἴση μὲ 680 τ. ἐκ. καὶ αἱ ἀκμαὶ ΟΑ καὶ ΟΒ εἶναι 15 ἐκ. καὶ 20 ἐκ., νὰ ὑπολογισθοῦν:

1ον. τὸ μῆκος ΟΗ.

2ον. τὸ μῆκος ΟΓ=x.

2363. (2398). Μία τριγωνικὴ πυραμὶς ΚΑΒΓ ἔχει ὡς βάσιν ἓνα τρίγωνον ΑΒΓ, ὀρθογώνιον εἰς τὸ Α, καὶ ὡς κορυφὴν ἓνα σημεῖον Κ, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τῆς κἀθέτου, ἡ ὁποῖα ἄγεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Α ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ. Ἡ ὑποτείνουσα ΒΓ εἶναι ἴση μὲ 25 μ. Αἱ προβολαὶ ΒΔ καὶ ΓΔ τῶν κἀθέτων πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν, ἔχουν διαφορὰν 7 μέτρα. Τὸ ὕψος ΚΑ τῆς πυραμίδος εἶναι ἴσον μὲ ΑΒ+ΑΓ. Νὰ ὑπολογισθῆ ὁ ὄγκος καὶ ἡ ὀλικὴ ἐπιφάνεια τῆς πυραμίδος.

2364. (2399). Νὰ ἀποδειχθῆ ὁ ὄγκος μιᾶς κολούρου πυραμίδος, ἡ ὁποῖα ἔχει ὕψος v , βάσεις Β καὶ β δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $V = \frac{v}{6}(B + \beta + 4\beta')$, ὅπου β' παριστάνει τὸ ἔμβαδὸν τῆς τομῆς τῆς πυραμίδος ὑπὸ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον διέρχεται ἀπὸ τὰ μέσα τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν τῆς. (Σχολὴ Δοκίμων 1935).

2365 (2400). Μία πυραμὶς Σ.ΑΒΓΔ ἔχει ὡς βάσιν ἓνα τετράγωνον ΑΒΓΔ πλευρᾶς a καὶ ὡς παραπλεύρους ἕδρας ἰσοπλευρὰ τρίγωνα.

1ον. Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ἔμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας τῆς.

2ον. Ἐπὶ τῶν ἀκμῶν ΣΑ καὶ ΣΒ λαμβάνομεν μῆκη ΣΑ'=ΣΒ'=x καὶ ἐπὶ τῶν ἀκμῶν ΣΓ, ΣΔ τὰ μῆκη ΣΓ'=ΣΔ'=y. Νὰ ὑπολογισθοῦν συναρτήσει τῶν x καὶ y αἱ πλευραὶ τοῦ τραπέζιου Α'Β'Γ'Δ', τὸ ὕψος του καὶ τὸ ἔμβαδὸν του.

2366. (2401). Δίδεται μία πυραμὶς Σ.ΑΒΓΔ, τῆς ὁποίας ἡ βάσις εἶναι τετράγωνον ΑΒΓΔ πλευρᾶς a . Ἡ ἀκμὴ ΣΔ εἶναι κἀθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως καὶ ἔχει μῆκος v . Ἀπὸ ἓνα σημεῖον Κ τῆς ΣΔ φέρομεν ἓνα ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν πυραμίδα κατὰ τὸ τετράγωνον ΚΛΜΝ. Κατασκευάζομεν τὸ ὀρθὸν πρίσμα, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς μίαν βάσιν του τὸ ΚΛΜΝ καὶ τοῦ ὁποῖου ἡ ἄλλη βάσις κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓΔ. Θέτομεν ΣΚ=x.

1ον. Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ἔμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας τοῦ πρίσματος συναρτήσει τῶν a , v καὶ x .

2ον. Νὰ ἐξετασθῆ, ἐὰν τὸ ἔμβαδὸν αὐτὸ ἔχει ἓνα μέγιστον.

2367. (2402). Δύο ὀρθὰ πρίσματα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ὡς βάσεις κανονικὰ πολύγωνα n πλευρῶν ἔχουν ἀποστήματα a καὶ a' καὶ ὕψη v καὶ v' . Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι, ἐὰν ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τῶν ὀλικῶν ἐπιφανειῶν των εἶναι ἴσος μὲ

τὸν λόγον τῶν ὄγκων των, θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν $\frac{1}{v} - \frac{1}{v'} = \frac{1}{a'} - \frac{1}{a}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ'
ΟΜΟΙΑ ΠΟΛΥΕΔΡΑ

781. Ὅμοια πολύεδρα. Ὅμοια πολύεδρα λέγονται τὰ πολύεδρα, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰς ἔδρας των ὁμοίας, μίαν πρὸς μίαν, καὶ ὁμοίως κειμένας καὶ τὰς στερεὰς γωνίας των ἴσας, μίαν πρὸς μίαν.

Αἱ στερεαὶ γωνίαι δύο ὁμοίων πολυέδρων, αἱ ὁποῖαι σχηματίζονται ὑπὸ ὁμοίων ἐδρῶν, λέγονται **ὁμόλογοι στερεαὶ γωνίαι**.

Ὅμόλογοι κορυφαὶ δύο ὁμοίων πολυέδρων εἶναι αἱ κορυφαὶ τῶν ὁμολόγων στερεῶν γωνιῶν κλπ.

Ἐκ τῶν ὁρισμῶν τῶν ὁμοίων πολυέδρων συνάγομεν, ὅτι :

I. Αἱ ὁμόλογοι διέδροι γωνίαι δύο ὁμοίων πολυέδρων εἶναι ἴσαι· διότι αἱ διέδροι αὐταὶ γωνίαι εἶναι διέδροι γωνίαι στερεῶν γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι δύνανται νὰ ἐφαρμοσθῶσιν.

II. Αἱ ὁμόλογοι ἄκμαι δύο ὁμοίων πολυέδρων εἶναι ἀνάλογοι· διότι αἱ ὁμόλογοι ἄκμαι δύο ὁμοίων πολυέδρων εἶναι πλευραὶ ὁμοίων πολυγώνων τὰ ὁποῖα συνδέονται μεταξύ των μὲ κοινὰς πλευρὰς καὶ ἔχουν τὸν αὐτὸν λόγον ὁμοιότητος· ἐπομένως ὁ λόγος δύο τυχουσῶν ὁμολόγων ἄκμῶν εἶναι σταθερὸς.

Ὁ σταθερὸς λόγος τῶν ὁμολόγων ἄκμῶν δύο ὁμοίων πολυέδρων λέγεται **λόγος τῆς ὁμοιότητος τῶν πολυέδρων**.

782. Θεώρημα. Ἐὰν μία πυραμὶς τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν της, σχηματίζεται μία δευτέρα πυραμὶς, ἡ ὁποία εἶναι ὁμοία πρὸς τὴν πρώτην.

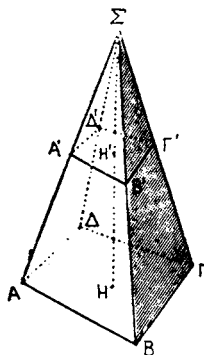
Ἐπίθεσις: Ἐστω ἡ πυραμὶς Σ ΑΓΔ (Σχ. 536) καὶ Α'Β'Γ'Δ' ἡ τομὴ της ὑπὸ ἐνὸς ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν της ΑΒΓΔ.

Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι αἱ πυραμίδες Σ Α'Β'Γ'Δ καὶ Σ ΑΒΓΔ εἶναι ὁμοίαι.

Ἀπόδειξις: Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ νὰ δεῖξωμεν, ὅτι αἱ δύο αὐταὶ πυραμίδες ἔχουν τὰς ὁμολόγους ἔδρας των ὁμοίας, μίαν πρὸς μίαν, καὶ τὰς ὁμολόγους στερεὰς γωνίας των ἴσας, μίαν πρὸς μίαν.

Πράγματι· ἡ τομὴ Α'Β'Γ'Δ', ὡς παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν ΑΒΓΔ, εἶναι ὁμοία πρὸς αὐτὴν (§ 760. 2^{ον}).

Ἐπειδὴ ἡ $A'B'$ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν AB , ὡς τομαὶ παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπὸ τρίτου, τὰ τρίγωνα $\Sigma A'B'$ καὶ ΣAB εἶναι ὅμοια. Αἱ παράπλευροι λοιπὸν ἔδραι $\Sigma A'B'$ καὶ ΣAB εἶναι ὅμοιαι. Ὀμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι αἱ παράπλευροι ἔδραι $\Sigma B'\Gamma'$, $\Sigma \Gamma'\Delta'$, $\Sigma \Delta'A'$ τῆς πυραμίδος $\Sigma A'B'\Gamma'$ εἶναι ὅμοιαι, ἀντιστοίχως, πρὸς τὰς παραπλεύρους ἔδρας $\Sigma B\Gamma$, $\Sigma \Gamma\Delta$, $\Sigma \Delta A$ τῆς πυραμίδος $\Sigma AB\Gamma\Delta$.



Σχ. 536.

Ἡ στερεὰ γωνία Σ εἶναι κοινὴ καὶ εἰς τὰς δύο πυραμίδας. Αἱ τρίεδροι γωνίαι A' καὶ A εἶναι ἴσαι (§ 720), διότι ἔχουν τὸν αὐτὸν προσανατολισμὸν καὶ αἱ τρεῖς ἔδραι τῶν εἶναι, ἀντιστοίχως, ἴσαι μία πρὸς μίαν, ὡς γωνίαι ὁμοίων πολυγώνων· δηλ. εἶναι

$$\widehat{\Sigma A'B'} = \widehat{\Sigma AB}, \widehat{\Sigma A'\Delta'} = \widehat{\Sigma A\Delta}, \widehat{\Delta'A'B'} = \widehat{\Delta AB}.$$

Ὀμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ αἱ στερεαὶ γωνίαι B', Γ', Δ' εἶναι ἀντιστοίχως ἴσαι πρὸς τὰς στερεὰς γωνίας B, Γ, Δ .

Ὡστε αἱ δύο πυραμίδες $\Sigma A'B'\Gamma'\Delta'$ καὶ $\Sigma AB\Gamma\Delta$ ἔχουν τὰς ὁμολόγους ἔδρας τῶν ὁμοίας, μίαν πρὸς μίαν, καὶ τὰς ὁμολόγους στερεὰς γωνίας τῶν ἴσας καὶ ἐπομένως εἶναι ὅμοιαι.

Ἐδείχθη λοιπὸν, ὅτι: **Ἐὰν μία πυραμὶς. . . .**

783. Πόρισμα. Ἐὰν δύο πυραμίδες εἶναι ὅμοιαι, ὁ λόγος τῶν ὑψῶν τῶν εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον δύο ὁμολόγων ἀκμῶν τῶν.

Ἐπίπεδοι: Ἐστῶσαν ΣH καὶ $\Sigma H'$ τὰ ὑψη τῶν ὁμοίων πυραμίδων $\Sigma AB\Gamma\Delta$ καὶ $\Sigma A'B'\Gamma'\Delta'$.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι $\frac{\Sigma H'}{\Sigma H} = \frac{\Sigma A'}{\Sigma A} = \frac{A'B'}{A'B} = \dots$

Ἀπόδειξις: Τὸ ἐπίπεδον $A\Sigma H$ τέμνει τὰς βάσεις τῶν δύο πυραμίδων κατὰ τὰς εὐθείας AH καὶ $A'H'$. Αἱ εὐθεῖαι αὗται εἶναι παράλληλοι, ὡς τομαὶ παραλλήλων ἐπιπέδων ὑπὸ τρίτου. Τὰ τρίγωνα λοιπὸν $\Sigma A'H'$ καὶ ΣAH εἶναι ὅμοια καὶ ἐπομένως ἔχομεν

$$\frac{\Sigma H'}{\Sigma H} = \frac{\Sigma A'}{\Sigma A} \quad (1)$$

Ἄλλὰ $\frac{\Sigma A'}{\Sigma A} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'\Gamma'}{B\Gamma} = \dots$ (§ 760. 1^{ov}).

Ἐπομένως ἡ ἰσότης (1) γίνεται $\frac{\Sigma H'}{\Sigma H} = \frac{\Sigma A'}{\Sigma A} = \frac{A'B'}{AB} = \dots$

Ἐδείχθη λοιπὸν, ὅτι: **Ἐὰν δύο πυραμίδες. . . .**

Σημ. Εἰς τὸ σχῆμα ν' ἀχθοῦν αἱ εὐθεῖαι AH καὶ $A'H'$.

784. Θεώρημα. Δύο τετράεδρα είναι όμοια, εάν έχουν δύο έδρας όμοιας μίαν προς μίαν και όμοίως κειμένας και την ύπ' αυτών περιεχομένην διέδρον γωνίαν ίσην.

Υπόθεσις: “Εστωσαν τὰ τετράεδρα $\Sigma AB\Gamma$ και $\Sigma' A'B'\Gamma'$ (Σχ. 537), τὰ όποία έχουν τὰς διέδρους ΣA και $\Sigma' A'$ ίσας και τὰς δύο έδρας ΣAB και $\Sigma A\Gamma$ όμοιας αντίστοιχως προς τὰς έδρας $\Sigma' A'B'$ και $\Sigma' A'\Gamma'$.

Συμπέρασμα: Θα δείξωμεν, ότι τὰ τετράεδρα αυτά είναι όμοια.

Απόδειξις: Θετόμεν, νοερώς, τὸ τετράεδρον $\Sigma' A'B'\Gamma'$ ἐπὶ τοῦ $\Sigma AB\Gamma$ οὔτως, ὥστε ἡ διέδρος $\Sigma' A'$ νὰ ἐφαρμόσῃ ἐπὶ τῆς ίσης τῆς διέδρου ΣA και ἔστω, ὅτι θὰ λάβῃ τὴν θέσιν ΣA_1 . Ἐπειδὴ ἡ γωνία $A'S'B'$ εἶναι ἴση μὲ τὴν $A\Sigma B$, ἡ ἀκμὴ $\Sigma'B'$ θὰ λάβῃ τὴν διεύθυνσιν τῆς ΣB και τὸ σημεῖον B' θὰ ἔλθῃ εἰς τὸ B_1 . Ὄμοίως, ἐπειδὴ ἡ γωνία $A'\Sigma'\Gamma'$ εἶναι ἴση μὲ τὴν $A\Sigma\Gamma$, ἡ ἀκμὴ $\Sigma'\Gamma'$ θὰ λάβῃ τὴν διεύθυνσιν τῆς $\Sigma\Gamma$ και τὸ σημεῖον Γ' θὰ ἔλθῃ εἰς τὸ Γ_1 . Οὕτω τὸ τετράεδρον $\Sigma' A'B'\Gamma'$ θὰ λάβῃ τὴν θέσιν $\Sigma A_1 B_1 \Gamma_1$ και ἐπομένως τὰ τετράεδρα $\Sigma' A'B'\Gamma'$ και $\Sigma A_1 B_1 \Gamma_1$ εἶναι ἴσα. Ἀλλὰ ἐπειδὴ ἡ γωνία $\Sigma A_1 B_1$ ἢ ἡ $\Sigma' A'B'$ εἶναι ἴση μὲ τὴν ΣAB , ἡ εὐθεῖα $A_1 B_1$ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν AB . Ὄμοίως ἐπειδὴ ἡ γωνία $\Sigma A_1 \Gamma_1$ ἢ ἡ $\Sigma' A'\Gamma'$ εἶναι ἴση μὲ τὴν γωνίαν $\Sigma A\Gamma$, ἡ εὐθεῖα $A_1 \Gamma_1$ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν $A\Gamma$. Οὕτω, αἱ πλευραὶ τῆς γωνίας $\Gamma_1 A_1 B_1$ εἶναι ἀντιστοιχως παράλληλοι πρὸς τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας ΓAB και κατὰ συνέπειαν τὰ ἐπίπεδά των $A_1 B_1 \Gamma_1$ και $AB\Gamma$ εἶναι παράλληλα (§ 635). Ἐπομένως κατὰ τὸ προηγούμενον θεώρημα (§ 782) ἡ πυραμὶς $\Sigma A_1 B_1 \Gamma_1$ ἢ ἡ ἴση τῆς $\Sigma' A'B'\Gamma'$ εἶναι όμοία πρὸς τὴν πυραμίδα $\Sigma AB\Gamma$.

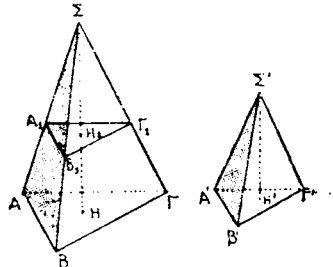
Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Δύο τετράεδρα εἶναι. . .**

785. Θεώρημα. Δύο όμοια πολύεδρα δύναται νὰ χωρισθοῦν εἰς ἰσάριθμα τετράεδρα όμοια, ἓνα πρὸς ἓνα, και όμοίως κείμενα.

Υπόθεσις: “Εστωσαν τὰ όμοια πολύεδρα AH και $A'H'$ (Σχ. 538). Φέρομεν τὰ ἐπίπεδα $AZ\Gamma$ και $A'Z'\Gamma'$. Τὰ ἐπίπεδα αυτά ἀποκόπτουν, ἀπὸ τὰ δύο αυτά πολύεδρα, τὰ τετράεδρα $ZAB\Gamma$ και $Z'A'B'\Gamma'$.

Συμπέρασμα: Θα δείξωμεν ὅτι τὰ τετράεδρα αυτά εἶναι όμοια.

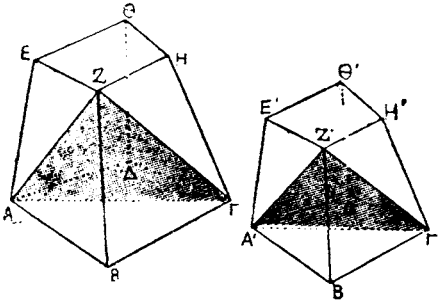
Απόδειξις: Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ τετράεδρα αυτά έχουν δύο



Σχ. 537.

ἔδρας ὁμοίας, μίαν πρὸς μίαν καὶ τὰς ὑπ' αὐτῶν περιεχομένας διέδρους γωνίας ἴσας.

Πράγματι τὰ τετράεδρα $ZAB\Gamma$ καὶ $Z'A'B'\Gamma'$ ἔχουν τὰς διέδρους γωνίας ZB καὶ $Z'B'$ ἴσας, διότι εἶναι ὁμόλογοι διέδρου γωνίαί τῶν ὁμοίων πολυέδρων AH καὶ $A'H'$. Ἐπίσης ἔχουν τὰς ἔδρας ZAB καὶ $Z'A'B'$ ὁμοίας καὶ ὁμοίως κειμένας, διότι εἶναι τρίγωνα ὁμοία, εἰς τὰ ὁποῖα ἐχωρίσθησαν τὰ ὁμοία τετράπλευρα $ABZE$ καὶ $A'B'Z'E'$ ὑπὸ τῶν ὁμολόγων διαγωνίων AZ καὶ $A'Z'$ καὶ τέλος ἔχουν τὰς ἔδρας $ZB\Gamma$ καὶ $Z'B'\Gamma'$ ὁμοίας καὶ ὁμοίως κειμένας, διὰ τὸν αὐτὸν λόγον. Ἄρα (§ 784) τὰ τετράεδρα αὐτὰ εἶναι ὁμοία.



Σχ. 538.

Ἐὰν ἀποκόψωμεν ἀπὸ τὰ ὁμοία πολυέδρα AH καὶ $A'H'$ τὰ ὁμοία τετράεδρα $ZAB\Gamma$ καὶ $Z'A'B'\Gamma'$, τὰ ἀπομένοντα πολυέδρα εἶναι ὁμοία. Πράγματι· αἱ νέαι ἔδραι τῶν ZAG καὶ $Z'A'\Gamma'$ εἶναι ὁμοία, ὡς ὁμόλογοι ἔδραι τῶν ὁμοίων τετραέδρων $ZAB\Gamma$ καὶ $Z'A'B'\Gamma'$.

Ἐπίσης αἱ νέαι ἔδραι ZEA καὶ $Z'E'A'$ εἶναι ὁμοία, διότι εἶναι μέρη ὁμοίων πολυγώνων $ABZE$ καὶ $A'B'Z'E'$, τὰ ὁποῖα ἐχωρίσθησαν εἰς ὁμοία τρίγωνα ὑπὸ τῶν διαγωνίων AE καὶ $A'Z'$. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον καὶ αἱ νέαι ἔδραι ZHG καὶ $Z'H'\Gamma'$ καθὼς καὶ αἱ ἔδραι $AL\Gamma$ καὶ $A'\Delta'\Gamma'$ εἶναι ὁμοία καὶ ὁμοίως κείμενα. Ὡστε αἱ νέαι ἔδραι τῶν πολυέδρων, πὸ ἀπομένον, εἶναι ἀντιστοίχως ὁμοία.

Τὰ ἀπομένοντα πολυέδρα ἔχουν καὶ τὰς στερεὰς γωνίας τῶν ἴσας μίαν πρὸς μίαν.

Πράγματι· αἱ νέαι στερεαὶ γωνίαί Z καὶ Z' εἶναι ἴσαι, ὡς ὑπόλοιπα τῶν ἴσων στερεῶν γωνιῶν Z καὶ Z' τῶν πολυέδρων AH καὶ $A'H'$ ἀπὸ τὰς ὁποίας ἀφηρέθησαν αἱ ἴσαι τριέδρου γωνίαί Z καὶ Z' τῶν ὁμοίων τετραέδρων $ZAB\Gamma$ καὶ $Z'A'B'\Gamma'$. Ὁμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι καὶ αἱ νέαι στερεαὶ γωνίαί A καὶ A' , καθὼς αἱ Γ καὶ Γ' τῶν πολυέδρων, πὸ μένου, εἶναι ἴσαι. Ὡστε τὰ πολυέδρα τὰ ὁποῖα μένου, μετὰ τὴν ἀφαίρεσιν τῶν δύο ὁμοίων τετραέδρων, ἔχουν τὰς στερεὰς γωνίας τῶν ἴσας μίαν πρὸς μίαν καὶ τὰς ὁμολόγους ἔδρας τῶν ὁμοίας καὶ ἐπομένως εἶναι ὁμοία.

Ἐὰν ἐπαναλάβωμεν τὴν αὐτὴν ἐργασίαν ἐπὶ τῶν νέων πολυέδρων ΖΔ καὶ Ζ'Δ', θὰ ἀποσπᾶσωμεν δύο ἄλλα τετράεδρα ὅμοια καὶ θὰ μείνουν δύο στερεά, τὰ ὁποῖα θὰ εἶναι ὅμοια. Συνεχίζομεν ἔπειτα τὴν ἐργασίαν αὐτὴν μέχρις, ὅτου τὰ ἀπομένοντα στερεὰ γίνουν δύο τετράεδρα.

Ὡστε τὰ ἀρχικά πολύεδρα ΑΗ καὶ Α'Η' δύνανται νὰ χωρισθοῦν εἰς ἰσάριθμα τετράεδρα ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Δύο ὅμοια πολύεδρα...**

786. Θεώρημα. (Ἀντίστροφον). Ἐὰν δύο πολύεδρα ἀποτελοῦνται ἀπὸ ἰσάριθμα τετράεδρα, ὅμοια ἓνα πρὸς ἓνα καὶ ὁμοίως κείμενα, τὰ πολύεδρα αὐτὰ εἶναι ὅμοια.

Ἀπόδειξις: Αἱ στερεαὶ γωνίαι τῶν δύο πολυέδρων θὰ εἶναι ἴσαι, διότι θὰ ἀποτελοῦνται ἀπὸ τὸ αὐτὸ πλῆθος διέδρων γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι θὰ εἶναι ἴσαι ἀντιστοιχῶς καὶ θὰ κείνται ὁμοίως· αἱ ἔδραι τῶν δύο πολυέδρων θὰ εἶναι ὅμοιαι, μία πρὸς μίαν, διότι ἀποτελοῦνται ἀντιστοιχῶς ἀπὸ ὅμοια τρίγωνα καὶ ὁμοίως κείμενα.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Ἐὰν δύο πολύεδρα...**

787. Θεώρημα. Ὁ λόγος τῶν ὄγκων δύο ὁμοίων πολυέδρων εἶναι ἴσος μὲ τὸν κύβον τοῦ λόγου τῆς ὁμοιότητός των.

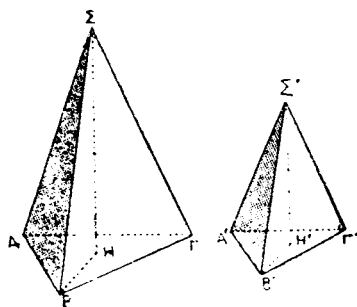
Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις, καθόσον τὰ ὅμοια πολύεδρα εἶναι τετράεδρα ἢ τυχόντα πολύεδρα.

I. Τὰ ὅμοια πολύεδρα εἶναι τετράεδρα.

Ἐπίθεσις: Ἐστῶσαν τὰ ὅμοια τετράεδρα ΣΑΒΓ καὶ Σ'Α'Β'Γ'

Συμπέρασμα: Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ V καὶ V' τοὺς ὄγκους των καὶ μὲ k τὸν λόγον τῆς ὁμοιότητός των, θὰ δεῖξωμεν, ὅτι

$$\frac{V}{V'} = k^3.$$



Σχ. 539.

Ἀπόδειξις: Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ B τὸ ἔμβαδόν τῆς βάσεως ΑΒΓ τῆς πυραμίδος ΣΑΒΓ καὶ μὲ v τὸ ὕψος της θὰ εἶναι (§ 766).

$$V = \frac{1}{3} Bv \quad (1)$$

Ὅμοίως, ἐὰν παραστήσωμεν μὲ B' τὸ ἔμβαδόν τῆς βάσεως Α'Β'Γ' τῆς πυραμίδος Σ'Α'Β'Γ' καὶ μὲ v' τὸ ὕψος της Σ'Η', θὰ εἶναι

$$V' = \frac{1}{3} B'v' \quad (2)$$

Διαιροῦμεν τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\frac{V}{V'} = \frac{Bv}{B'v'} \quad \eta \quad \frac{V}{V'} = \frac{B}{B'} \times \frac{v}{v'} \quad (3)$$

Ἐπειδὴ αἱ βάσεις $AB\Gamma$ καὶ $A'B'\Gamma'$ εἶναι ὅμοιαι, ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τῶν B καὶ B' εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν τετραγώνων δύο ὁμολόγων πλευρῶν ἢ μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ λόγου τῆς ὁμοιότητός των·

δηλ. θὰ εἶναι

$$\frac{B}{B'} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2} = k^2.$$

Ἐπίσης ἐπειδὴ τὰ τετράεδρα εἶναι ὅμοια, τὰ ὕψη των θὰ ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον δύο ὁμολόγων ἀκμῶν των (§ 783) δηλ. θὰ εἶναι

$$\frac{v}{v'} = \frac{AB}{A'B'} = k.$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (3) τοὺς λόγους $\frac{B}{B'}$ καὶ $\frac{v}{v'}$ διὰ τῶν ἴσων των καὶ ἔχομεν $\frac{V}{V'} = k^2 \cdot k$ ἢ $\frac{V}{V'} = k^3$.

II. Τὰ ὅμοια πολύεδρα εἶναι τυχόντα.

Ἐπιπέσεις: Ἐστωσαν δύο ὅμοια πολύεδρα Π καὶ Π' .

Συμπέρασμα: Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ V καὶ V' τοὺς ὄγκους των καὶ μὲ k τὸν λόγον τῆς ὁμοιότητός των, θὰ δεῖξωμεν πάλιν, ὅτι

$$\frac{V}{V'} = k^3.$$

Ἀπόδειξις: Γνωρίζομεν, ὅτι δύο ὅμοια πολύεδρα δύνανται νὰ χωρισθοῦν εἰς ἰσάριθμα τετράεδρα, ὅμοια καὶ ὁμοίως κείμενα· ἔστωσαν λοιπὸν T, T_1, T_2, \dots οἱ ὄγκοι τῶν τετραέδρων εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζεται τὸ πρῶτον πολύεδρον Π καὶ T', T'_1, T'_2, \dots οἱ ὄγκοι τῶν ὁμοίων τετραέδρων, εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζεται τὸ δεύτερον πολύεδρον Π' . Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ k τὸν λόγον τῆς ὁμοιότητος τῶν πολυέδρων Π καὶ Π' , ὁ λόγος τῆς ὁμοιότητος τῶν ὁμοίων τετραέδρων θὰ εἶναι ὁ αὐτὸς k (§ 781 II).

Ἐπειδὴ ὁ λόγος τῶν ὄγκων δύο ὁμοίων τετραέδρων εἶναι ἴσος μὲ τὸν κύβον τοῦ λόγου τῆς ὁμοιότητός των, θὰ ἔχομεν

$$\frac{T}{T'} = k^3, \quad \frac{T_1}{T'_1} = k^3, \quad \frac{T_2}{T'_2} = k^3, \dots$$

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας αὐτὰς συνάγομεν

$$\frac{T}{T'} = \frac{T_1}{T'_1} = \frac{T_2}{T'_2} \dots = k^3 \quad (1)$$

Κατὰ τὴν ιδιότητα τῶν ἴσων κλασμάτων ἢ σχέσις (1) γράφεται

$$\frac{T+T_1+T_2+\dots}{T'+T'_1+T'_2+\dots} = k^3 \quad (2)$$

Ἐπειδὴ τὸ ἄθροισμα $T+T_1+T_2+\dots$ παριστάνει τὸν ὄγκον V τοῦ πολυέδρου Π καὶ τὸ ἄθροισμα $T'+T_1'+T_2'+\dots$ παριστάνει τὸν ὄγκον V' τοῦ πολυέδρου Π' , ἡ ἰσότης (2) γράφεται $\frac{V}{V'} = k^3$.

Ὡστε καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις εἶναι $\frac{V}{V'} = k^3$.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Ὁ λόγος τῶν ὄγκων...**

788. Παρατήρησις. Εἶναι φανερόν, ὅτι: **Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τῶν ὀλικῶν ἐπιφανειῶν δύο ὁμοίων πολυέδρων εἶναι ἴσος μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ λόγου τῆς ὁμοιότητός των.**

Ἀσκήσεις

Α' Ὁμάς. 2368. (2403). Αἱ ὁμόλογοι ἀκμαὶ δύο ὁμοίων πολυέδρων ἔχουν λόγον 3:4. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἐπιφανειῶν των καὶ ὁ λόγος τῶν ὄγκων των.

2369. (2404). Ἐὰν ἡ ἀκμὴ μιᾶς πυραμίδος εἶναι x , ποία εἶναι ἡ ὁμόλογος ἀκμὴ ἄλλης πυραμίδος, ὁμοίας πρὸς τὴν πρώτην:

1ον. ἐὰν ἔχη διπλασίαν ἐπιφάνειαν;

2ον. ἐὰν ἔχη διπλάσιον ὄγκον;

2370. (2405). Κύβος ἔχει ἀκμὴν a μέτρα. Πόση εἶναι ἡ ἀκμὴ τριπλασίου κύβου;

2371. (2406). Τὸ ὕψος κανονικῆς ἑξαγωνικῆς πυραμίδος εἶναι u , ἡ δὲ πλευρὰ τῆς βάσεώς της a . Ποῖαι αἱ διαστάσεις, ὁμοίας πυραμίδος πρὸς αὐτήν, καὶ τῆς ὁμοίας ὁ ὄγκος εἶναι τὸ $1/v$ τῆς πρώτης; Ἐφαρμογή: $u=6$ μ., $a=4$ μ. καὶ $v=10$.

Ὁμάς Β'. 2372. (2407). Ἡ παράπλευρος ἀκμὴ μιᾶς πυραμίδος εἶναι λ . Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς κορυφῆς πρέπει νὰ τμηθῇ ἡ ἀκμὴ αὐτὴ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν της, ὥστε νὰ χωρίσῃ τὴν πυραμίδα:

1ον. εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα.

2ον. εἰς δύο μέρη ἔχοντα λόγον k . Ἐφαρμογή: $\lambda=4$ μ. καὶ $k=3:4$.

2373. (2408). Κατὰ ποίον λόγον πρέπει νὰ τμηθῶν αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ μιᾶς κολούρου πυραμίδος ὑπὸ ἐνὸς ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὰς βάσεις, ἵνα ἡ παράπλευρος ἐπιφάνειά της διαιρεθῇ εἰς δύο μέρη ἔχοντα λόγον μ πρὸς ν .

2374. (2409). Ἡ ἀκμὴ ΣA μιᾶς πυραμίδος εἶναι λ καὶ ὁ ὄγκος της V . Ἐπὶ τῆς ἀκμῆς ΣA λαμβάνομεν ἓνα μῆκος $\Sigma A'=\lambda'$ καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον A' φέρομεν ἓνα ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν της. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τῆς κολούρου πυραμίδος, ποὺ θὰ προκύψῃ. Ἐφαρμογή: $\lambda=10$ μ., $V=8$ κ.μ. καὶ $\lambda'=6$ μ.

2375. (2410). Αἱ βάσεις μιᾶς κολούρου πυραμίδος εἶναι ἰσόπλευρα τρίγωνα πλευρῶν a καὶ b' τέμνομεν τὸ στερεὸν αὐτὸ μὲ ἓνα ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις του καὶ λαμβάνομεν μίαν τομὴν πλευρᾶς γ . Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν

ὄγκων τῶν δύο κολούρων πυραμίδων, πού θά προκύψουν. Ἐφαρμογή: $\alpha=3$ μ., $\beta=1$ μ., $\gamma=2,30$ μ.

2376. (2411). Τό ὕψος μιᾶς κολούρου πυραμίδος εἶναι ν καί αἱ βάσεις της δύο κανονικά ἑξάγωνα πλευρῶν α καί β . Ἐάν φέρωμεν ἓνα ἐπίπεδον, παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις της, ἡ τομή της εἶναι ἓνα κανονικὸν ἑξάγωνον πλευρᾶς γ .

1ον. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς ἄνω βάσεως πρέπει νὰ κεῖται τὸ τέμνον ἐπίπεδον;

2ον. Νὰ εὔρεθῇ ὁ λόγος τῶν δύο κολούρων πυραμίδων.

2377. (2412). Δίδεται μία πυραμὶς $\Sigma AB\Gamma \dots$ καὶ τὸ ὕψος της $\Sigma O'$ ἐπὶ τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν λαμβάνομεν $\Sigma A' = \frac{\Sigma A}{3}$, $\Sigma B' = \frac{\Sigma B}{3}, \dots$ καὶ ἐπὶ τοῦ ὕψους καὶ ἀπὸ τὸν πόδα O καὶ πρὸς τὴν φορᾶν $O\Sigma$ λαμβάνομεν τμήμα $O\hat{\Sigma}' = \frac{O\Sigma}{3}$. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τῶν ὀλικῶν ἐπιφανειῶν τῶν πυραμίδων $\Sigma A'B'\Gamma' \dots$ καὶ $\Sigma AB\Gamma \dots$ καὶ ὁ λόγος τῶν ὄγκων των.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Δ΄.

ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΕΙΣ ΤΟΝ ΧΩΡΟΝ

789. Συμμετρία εἰς τὸν χώρον. Εἰς τὸν χώρον διακρίνομεν τρία εἶδη συμμετρίας :

Τὴν συμμετρίαν πρὸς μίαν εὐθεΐαν.

Τὴν συμμετρίαν πρὸς ἓνα σημεῖον, καὶ

Τὴν συμμετρίαν πρὸς ἓνα ἐπίπεδον.

Περὶ τῆς συμμετρίας πρὸς εὐθεΐαν (πρὸς ἄξονα) καὶ πρὸς σημεῖον (κέντρον συμμετρίας) ἐκάμαμεν λόγον εἰς τὰς § 151—159 τῆς ἐπιπεδομετρίας. Οἱ ὁρισμοὶ καὶ ιδιότητες, τὰς ὁποίας ἐγνωρίσαμεν ἐκεῖ, ἰσχύουν καὶ διὰ τὰ σχήματα, πού δὲν ἔχουν τὰ σημεῖα τῶν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

Περὶ τῆς συμμετρίας πρὸς ἐπίπεδον θὰ κάμωμεν λόγον κατωτέρω.

790. Συμμετρία πρὸς ἐπίπεδον. Δύο σημεῖα M καὶ M' λέγονται **συμμετρικὰ πρὸς ἓνα ἐπίπεδον Π** , ἐὰν τὸ ἐπίπεδον Π εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεΐαν MM' , ἢ ὁποία συνδέει τὰ σημεῖα αὐτὰ εἰς τὸ μέσον αὐτῆς.

Τὸ ἐπίπεδον Π λέγεται **ἐπίπεδον συμμετρίας**.

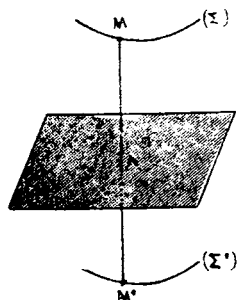
Ἐὰν τὸ σημεῖον M (Σχ. 540) γράψῃ ἓνα σχῆμα (Σ), τὸ συμμετρικόν του σημεῖον M' , θὰ γράψῃ ἓνα σχῆμα (Σ'), τὸ ὁποῖον λέγεται **συμμετρικὸν τοῦ Σ πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π** .

791. Θεώρημα. Δύο σχήματα **συμμετρικὰ πρὸς τρίτον, ὡς πρὸς δύο διάφορα κέντρα, εἶναι ἴσα.**

Ἐπιθέσεις: Ἐστώσαν δύο σχήματα Σ' καὶ Σ'' , τὰ ὁποῖα εἶναι συμμετρικὰ τοῦ αὐτοῦ σχήματος Σ πρὸς κέντρα συμμετρίας τὰ O καὶ O' ἀντιστοίχως (Σχ. 541).

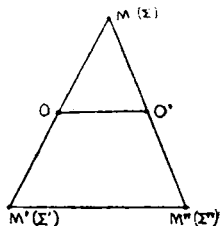
Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ σχήματα Σ' καὶ Σ'' εἶναι ἴσα.

Ἀπόδειξις: Ἐστω M ἓνα τυχόν σημεῖον τοῦ σχήματος (Σ) καὶ



Σχ. 540.

M', M'' τὰ συμμετρικὰ τοῦ M πρὸς τὰ δύο κέντρα O καὶ O' . Ἐάν φέρωμεν τὰς εὐθείας OO' καὶ MM'' , ἡ εὐθεῖα $M'M''$ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν OO' καὶ διπλασία τῆς OO' (§ 221). Ἐάν λοιπὸν μεταθέσωμεν τὸ σχῆμα (Σ') εἰς τρόπον, ὥστε τὰ σημεία του νὰ γράφουν ἓνα τμήμα παράλληλον πρὸς τὸ OO' καὶ διπλάσιον τοῦ OO' , τὸ σημεῖον M' θὰ πέσῃ ἐπὶ τοῦ M'' καὶ συνεπῶς τὸ σχῆμα (Σ') θὰ ἐφαρμοσθῇ ἐπὶ τοῦ σχήματος (Σ''). Ἄρα τὰ σχήματα (Σ') καὶ (Σ'') εἶναι ἴσα.



Σχ. 541.

Ἐδείχθη λοιπὸν, ὅτι: **Δύο σχήματα συμμετρικά. . .**

792. Θεώρημα. Δύο σχήματα συμμετρικὰ πρὸς τρίτον, τὸ μὲν ἓνα πρὸς κέντρον, τὸ δὲ ἄλλο πρὸς ἐπίπεδον, εἶναι ἴσα μεταξύ των.

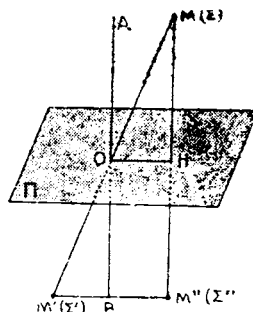
Ἐπιπέδου: Ἐστωσαν δύο σχήματα (Σ') καὶ (Σ'') (Σχ. 542), τὰ ὁποῖα εἶναι συμμετρικὰ τοῦ αὐτοῦ σχήματος (Σ), τὸ μὲν πρῶτον πρὸς τὸ σημεῖον O , τὸ δὲ δεύτερον πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π .

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ σχήματα Σ' καὶ Σ'' εἶναι ἴσα.

Ἀπόδειξις: Ἐστωσαν M ἓνα σημεῖον τοῦ σχήματος (Σ) καὶ M' καὶ M'' τὰ συμμετρικὰ τοῦ M πρὸς τὸ σημεῖον O καὶ πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π ἀντιστοίχως.

Ἐπειδὴ τὰ συμμετρικὰ σχήματα πρὸς δοθὲν τρίτον σχῆμα, ὡς πρὸς δύο διάφορα κέντρα, εἶναι ἴσα (§ 791), δυνάμεθα νὰ θεωρήσωμεν, ὅτι τὸ σημεῖον O κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π .

Ἀπὸ τὸ σημεῖον O φέρομεν τὴν κάθετον AOB ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π . Τὸ ἐπίπεδον $MM'M''$ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π , διότι διέρχεται ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν MM'' , ἡ ὁποῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ Π , ἐξ ὑποθέσεως. Ἄρα τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ θὰ περιέχῃ καὶ τὴν εὐθεῖαν AOB . Αἱ εὐθεῖαι MM'' καὶ AB εἶναι παράλληλοι, διότι κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου $MM''O$ καὶ εἶναι κάθετοι ἐπὶ τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον Π . Εἰς τὸ τρίγωνον $MM'M''$, ἡ εὐθεῖα OB εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν MM'' καὶ διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον O τῆς πλευρᾶς MM'' . Ἄρα ἡ OB διέρχεται ἀπὸ τὸ μέσον τῆς τρίτης πλευρᾶς τοῦ



Σχ. 542.

τριγώνου, δηλ. εἶναι $M'B = BM''$. παρατηροῦμεν, ὅτι τὰ σημεῖα M' καὶ M'' εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὴν εὐθεῖαν AOB . Ἐπειδὴ τὰ τυχόντα σημεῖα M' καὶ M'' τῶν σχημάτων (Σ') καὶ (Σ'') εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὴν εὐθεῖαν AB καὶ τὰ σχήματα αὐτὰ (Σ') καὶ (Σ'') εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν καὶ ἐπομένως εἶναι ἴσα (§ 155).

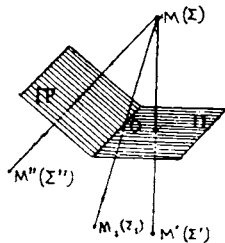
Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Δύο σχήματα συμμετρικά...**

793. Πόρισμα. *Δύο σχήματα (Σ') καὶ (Σ'') συμμετρικὰ πρὸς τρίτον σχῆμα, πρὸς δύο διάφορα ἐπίπεδα Π καὶ Π' , εἶναι ἴσα μεταξύ των.*

Ἀπόδειξις: Διότι τὰ δύο αὐτὰ σχήματα εἶναι ἴσα μὲ τὸ συμμετρικὸν τοῦ Σ πρὸς τυχὸν σημεῖον O τῆς τομῆς τῶν δύο ἐπιπέδων Π καὶ Π' .

Σημ. Ἐὰν τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Π' εἶναι παράλληλα, λαμβάνομεν ἕνα τρίτον ἐπίπεδον P , τὸ ὁποῖον νὰ τέμνη τὰ Π καὶ Π' . Ἐὰν τὸ συμμετρικὸν σχῆμα τοῦ (Σ) πρὸς τὸ τρίτον αὐτὸ ἐπίπεδον εἶναι τὸ (Σ''') , θὰ εἶναι κατὰ τὸ ἄνωτέρω πόρισμα, $(\Sigma') = (\Sigma''')$ καὶ $(\Sigma'') = (\Sigma''')$.

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας αὐτὰς συνάγομεν, ὅτι $(\Sigma') = (\Sigma'')$.



Σχ. 543.

794. Σπουδαία παρατήρησις. Ἀπὸ τὰ δύο προηγούμενα θεωρήματα συνάγομεν, ὅτι: Ὅλα τὰ σχήματα τὰ συμμετρικὰ πρὸς δοθὲν σχῆμα, εἴτε πρὸς τυχόντα σημεῖα, εἴτε πρὸς τυχόντα ἐπίπεδα, εἶναι ἴσα μεταξύ των καὶ μόνον κατὰ τὴν θέσιν διαφέρουν.

Αὕτη ἡ παρατήρησις μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ἐκλέγωμεν, κατὰ βούλησιν, τὸ εἶδος τῆς συμμετρίας, διὰ νὰ ἀποδείξωμεν μίαν τυχούσαν ιδιότητα δύο συμμετρικῶν σχημάτων.

795. Θεώρημα. *Τὸ συμμετρικὸν σχῆμα ἐνὸς ἐπιπέδου σχήματος εἶναι ἕνα ἐπίπεδον σχῆμα, ἴσον μὲ τὸ πρῶτον.*

Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν τὸ θεώρημα αὐτὸ λαμβάνομεν, ὡς ἐπίπεδον συμμετρίας, τὸ ἐπίπεδον τοῦ σχήματος, ὁπότε τὸ σχῆμα αὐτὸ συμπίπτει μὲ τὸ συμμετρικὸν του.

Ἰδιαιτέρας περιπτώσεις:

Τὸ συμμετρικὸν σχῆμα μιᾶς εὐθείας εἶναι μία εὐθεῖα.

Τὸ συμμετρικὸν σχῆμα ἐνὸς εὐθυγράμμου τμήματος εἶναι ἕνα εὐθύγραμμον τμήμα, ἴσον μὲ τὸ δοθὲν.

Τὸ συμμετρικὸν σχῆμα μιᾶς γωνίας εἶναι μία γωνία, ἴση μὲ τὴν δοθεῖσαν.

Τὸ συμμετρικὸν σχῆμα ἑνὸς ἐπιπέδου εἶναι ἓνα ἐπίπεδον.

Τὸ συμμετρικὸν σχῆμα μιᾶς διέδρου γωνίας εἶναι μία διέδρος γωνία, ἴση μὲ τὴν δοθεῖσαν.

Εἰς τὴν περιπτώσιν τῆς διέδρου γωνίας λαμβάνομεν, ὡς ἐπίπεδον συμμετρίας, μίαν ἕδραν τῆς διέδρου γωνίας.

796. Θεώρημα. Δύο πολύεδρα συμμετρικὰ ἔχουν τὰς ὁμολόγους ἕδρας τῶν ἴσας καὶ τὰς ὁμολόγους διέδρους γωνίας τῶν ἴσας.

Ἀπόδειξις: Αἱ ὁμολόγοι ἕδραι εἶναι ἐπίπεδα σχήματα συμμετρικὰ καὶ ἐπομένως ἴσα. Αἱ ὁμολόγοι διέδροι γωνίαι, τῶν δύο πολυέδρων εἶναι ἴσαι, διότι σχηματίζονται, ἀντιστοιχῶς, ἀπὸ ἐπίπεδα συμμετρικά. Ἐξ ἄλλου τὸ συμμετρικὸν σχῆμα μιᾶς διέδρου γωνίας εἶναι μία διέδρος γωνία, ἴση μὲ αὐτήν. Ἀλλὰ τὰ δύο αὐτὰ πολύεδρα δὲν δύνανται νὰ ἐφαρμόσουν, διότι αἱ ὁμολόγοι διέδροι γωνίαι δὲν ἔχουν τὸν αὐτὸν προσανατολισμόν.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Δύο πολύεδρα συμμετρικά. . . .**

797. Θεώρημα. Δύο συμμετρικὰ πολύεδρα εἶναι ἰσοδύναμα.

Διακρίνομεν δύο περιπτώσεις :

I. Τὰ δοθέντα πολύεδρα εἶναι πυραμίδες.

Ἐπιπέδου: Ἐστώσαν κατ' ἀρχῆς δύο συμμετρικαὶ πυραμίδες $\Sigma AB\Gamma$ καὶ $\Sigma' AB\Gamma$.

Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι αἱ πυραμίδες αὐταὶ εἶναι ἰσοδύναμοι.

Ἀπόδειξις: Ἐὰν λάβωμεν, ὡς ἐπίπεδον συμμετρίας, τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως $AB\Gamma$, αἱ δύο πυραμίδες $\Sigma AB\Gamma$ καὶ $\Sigma' AB\Gamma$ ἔχουν τὴν αὐτὴν βάσιν $AB\Gamma$ καὶ ἴσα ὕψη, τὰ ὕψη ΣH καὶ $\Sigma' H$, διότι αἱ κορυφαὶ τῶν Σ καὶ Σ' εἶναι συμμετρικαὶ πρὸς τὴν βάσιν $AB\Gamma$. ἄρα αἱ πυραμίδες αὐταὶ εἶναι ἰσοδύναμοι.

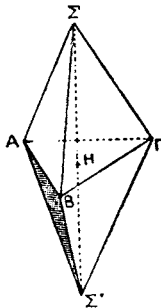
II. Τὰ δοθέντα πολύεδρα εἶναι τετράεδρα.

Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξωμεν τώρα, ὅτι δύο συμ-

μετρικὰ πολύεδρα εἶναι ἰσοδύναμα.

Ἀπόδειξις: Τὰ συμμετρικὰ πολύεδρα δύνανται νὰ χωρισθοῦν εἰς ἰσοαριθμὸς συμμετρικὰς πυραμίδας. Ἐπειδὴ αἱ συμμετρικαὶ πυραμίδες εἶναι ἰσοδύναμοι, μία πρὸς μίαν καὶ ὁλόκληρα τὰ πολύεδρα θὰ εἶναι ἰσοδύναμα.

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Δύο συμμετρικὰ πολύεδρα. . . .**



Σχ. 544.

798. Κέντρον συμμετρίας ἐνὸς σχήματος. Λέγομεν, ὅτι ἓνα σημεῖον O εἶναι κέντρον συμμετρίας ἐνὸς σχήματος, ὅταν τὰ σημεῖα τοῦ σχήματος αὐτοῦ εἶναι, ἀνὰ δύο, συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ σημεῖον O .

799. Ἐπίπεδον συμμετρίας ἐνὸς σχήματος. Λέγομεν, ὅτι ἓνα ἐπίπεδον Π εἶναι ἐπίπεδον συμμετρίας ἐνὸς σχήματος, ὅταν τὰ σημεῖα τοῦ σχήματος αὐτοῦ εἶναι, ἀνὰ δύο, συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π .

Κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον ὀρίζομεν καὶ τὸν ἄξονα συμμετρίας ἐνὸς σχήματος.

Ἄσκήσεις

A' Ὁμάς. 2378. (2413). Δύο εὐθεῖαι συμμετρικαὶ πρὸς ἐπίπεδον ἔχουν ἴσας κλίσεις πρὸς τὸ ἐπίπεδον.

2379. (2414). Ἐάν δύο ἐπίπεδα εἶναι συμμετρικὰ πρὸς τρίτον, ἡ διέδρος γωνία τῶν δύο πρώτων διχοτομεῖται ὑπὸ τοῦ τρίτου.

2380. (2415). 1ον. Ἐάν ἓνα σχῆμα Σ εἶναι συμμετρικὸν πρὸς ἐπίπεδον Π καὶ πρὸς σημεῖον O , εἶναι συμμετρικὸν καὶ πρὸς ἄξονα xy .

2ον. Ἐάν ἓνα σχῆμα Σ εἶναι συμμετρικὸν πρὸς ἐπίπεδον Π καὶ πρὸς ἄξονα xy , εἶναι συμμετρικὸν καὶ πρὸς σημεῖον O .

3ον. Ἐάν ἓνα σχῆμα Σ εἶναι συμμετρικὸν πρὸς σημεῖον O καὶ πρὸς ἄξονα xy , εἶναι συμμετρικὸν καὶ πρὸς ἐπίπεδον.

2381. (2416). Ὅταν ἓνα σχῆμα Σ ἔχη ἓνα ἐπίπεδον συμμετρίας Π καὶ ἓνα ἄξονα συμμετρίας X , ὁ ὁποῖος δὲν εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτό, θὰ ἔχη ἓνα δευτέρον ἄξονα συμμετρίας, συμμετρικὸν τοῦ πρώτου πρὸς τὸ ἐπίπεδον.

2382. (2417). Ἐάν ἓνα σχῆμα εἶναι συμμετρικὸν πρὸς τὰς τρεῖς ἕδρας μιᾶς τρισσορθογωνίου τριέδρου γωνίας, θὰ εἶναι συμμετρικὸν πρὸς τὰς ἀκμὰς καὶ πρὸς τὴν κορυφὴν τῆς τριέδρου αὐτῆς.

B' Ὁμάς. 2383. (2418). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἓνα κανονικὸν τετράεδρον ἔχει ἕξ ἐπίπεδα συμμετρίας καὶ τρεῖς ἄξονας συμμετρίας.

2384. (2419). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἓνας κύβος ἔχει ἓνα κέντρον συμμετρίας, ἑννέα ἐπίπεδα συμμετρίας καὶ ἑννέα ἄξονας συμμετρίας.

2385. (2420). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἐάν ἓνα τετράεδρον ἔχη ἓνα ἄξονα συμμετρίας, θὰ ἔχη δύο ζεύγη ἀπέναντι ἀκμῶν ἴσα καὶ ἀντιστρόφως.

2386. (2421). Ἐνα τετράεδρον, τὸ ὁποῖον ἔχει δύο ἄξονας συμμετρίας, ἔχει τὰς ἀπέναντι ἀκμὰς ἴσας εἰς ἕκαστον τῶν τριῶν ζευγῶν ἐπίσης ἔχει ἓνα τρίτον ἄξονα συμμετρίας καὶ οἱ τρεῖς αὐτοὶ ἄξονες τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον καὶ εἶναι κάθετοι ἀνὰ δύο Ἄντιστρόφως, ἐάν ἓνα τετράεδρον ἔχη τὰς ἀπέναντι ἀκμὰς ἴσας, αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν, εἶναι τρεῖς ἄξονες συμμετρίας τοῦ στερεοῦ καὶ οἱ ἄξονες αὐτοὶ εἶναι κάθετοι ἀνὰ δύο.

2387. (2422). Ἐάν ἓνα κυρτὸν πολυέδρον ἔχη ἓνα κέντρον συμμετρίας,

κάθε ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον αὐτό, διαιρεῖ τὸ πολυέδρον εἰς δύο στερεὰ ἰσοδύναμα καὶ ἀντιστρόφως.

Γ' Ὁμάς. 2388. (2423). Ἐὰν δύο σχήματα (Σ_1) καὶ (Σ_2) εἶναι συμμετρικά ἐνὸς τρίτου σχήματος (Σ), τὸ μὲν ἓνα ὡς πρὸς ἐπίπεδον, τὸ δὲ ἄλλο ὡς πρὸς ἄξονα κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτό, θὰ εἶναι συμμετρικά μεταξὺ των ὡς πρὸς σημεῖον.

2389. (2424). Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι δύο σχήματα (Σ_1) καὶ (Σ_2) συμμετρικά τοῦ αὐτοῦ σχήματος (Σ), τὸ μὲν πρῶτον πρὸς ἄξονα OZ , τὸ δὲ δεύτερον πρὸς σημεῖον O τοῦ ἄξονος αὐτοῦ, εἶναι συμμετρικά μεταξὺ των πρὸς ἐπίπεδον.

2390. (2425). Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι, ἐὰν ἓνα σχῆμα ἔχη δύο κέντρα συμμετρίας, θὰ ἔχη ἄπειρα τοιαῦτα, τὰ ὁποῖα θὰ κεῖνται ἐπὶ τῆς εὐθείας, τὴν ὁποῖαν ὀρίζουν τὰ δύο πρῶτα.

2391. (2426). Ἐὰν ἓνα σχῆμα Σ ἔχη δύο ἐπίπεδα συμμετρίας Π' καὶ Π'' κάθετα μεταξὺ των, θὰ ἔχη καὶ ἓνα ἄξονα συμμετρίας, τὴν τομὴν xy τῶν ἐπιπέδων Π' καὶ Π'' καὶ ἀντιστρόφως, ἐὰν ἓνα σχῆμα Σ ἔχη ἓνα ἐπίπεδον συμμετρίας Π' καὶ ἓνα ἄξονα συμμετρίας xy , ὁ ὁποῖος κεῖται ἐπὶ τοῦ Π , θὰ ἔχη καὶ ἓνα ἐπίπεδον Π'' συμμετρίας, τὸ ὁποῖον διέρχεται ἀπὸ τὴν xy καὶ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ Π' .

2392. (2427). Νὰ κατασκευασθοῦν τὰ τετράεδρα, τὰ ὁποῖα ἔχουν :

1ον. Ἐνα ἐπίπεδον συμμετρίας.

2ον. Δύο ἐπίπεδα συμμετρίας.

3ον. Τρία ἐπίπεδα συμμετρίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Ε΄.

ΓΕΝΙΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΠΟΛΥΕΔΡΩΝ

800. Σχέσις μεταξύ τοῦ πλήθους τῶν ἑδρῶν, τῶν ἀκμῶν καὶ τῶν κορυφῶν ἑνὸς πολυέδρου. Εἰς κάθε πολυέδρον διακρίνομεν τὰς *ἑδρας* του, αἱ ὁποῖαι εἶναι εὐθύγραμμα ἐπίπεδα σχήματα, τὰς *ἀκμὰς* του, αἱ ὁποῖαι εἶναι εὐθύγραμμα τμήματα καὶ τὰς *κορυφὰς* του, αἱ ὁποῖαι εἶναι αἱ κορυφαὶ τῶν στερεῶν γωνιῶν τοῦ πολυέδρου. Ἐπειδὴ αἱ ἀκμαὶ ἑνὸς πολυέδρου εἶναι πλευραὶ τῶν ἑδρῶν του καὶ αἱ κορυφαὶ του εἶναι τὰ ἄκρα τῶν ἀκμῶν του, οἱ ἀριθμοὶ E, A, K , οἱ ὅποιοι παριστάνουν, ἀντιστοίχως, τὸ πλῆθος τῶν ἑδρῶν, τῶν ἀκμῶν καὶ τῶν κορυφῶν ἑνὸς πολυέδρου, δὲν εἶναι ἀνεξάρτητοι μεταξύ των. Ἡ ἀξιοσημειώτος σχέσις, ἣ ὁποία ὑπάρχει μεταξύ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἑδρῶν, τῶν ἀκμῶν καὶ τῶν κορυφῶν ἑνὸς πολυέδρου, ἐκφράζεται ὑπὸ τοῦ κατωτέρω θεωρήματος, τὸ ὅποιον ὀφείλεται εἰς τὸν Euler.

801. Θεώρημα τοῦ Euler. *Εἰς κάθε πολυέδρον τὸ ἄθροισμα τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἑδρῶν του καὶ τοῦ ἀριθμοῦ τῶν κορυφῶν του εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τοῦ ἀριθμοῦ τῶν ἀκμῶν του καὶ τοῦ ἀριθμοῦ 2.*

Ἐπιπέδωσις: Ἐστω E τὸ πλῆθος τῶν ἑδρῶν ἑνὸς πολυέδρου, K τὸ πλῆθος τῶν κορυφῶν του, καὶ A τὸ πλῆθος τῶν ἀκμῶν του.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι $E + K = A + 2$.

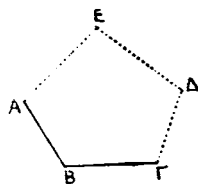
Ἀπόδειξις: Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἀφαιροῦμεν ἀπὸ τὸ δοθὲν πολυέδρον πρῶτον μίαν ἑδραν του, ἔπειτα μίαν δευτέραν ἑδραν, ἣ ὁποία νὰ συνάπτεται μὲ τὴν πρῶτην, ἔπειτα μίαν τρίτην ἑδραν, ἣ ὁποία νὰ συνάπτεται μὲ τὴν δευτέραν κ.ο.κ. μέχρις, ὅτου ἀφαιρεθῇ καὶ ἡ τελευταία ἑδρα τοῦ πολυέδρου. Κατὰ τὴν ἀφάιρσιν τῶν ἑδρῶν του, διαδοχικῶς, τὸ ἀπομένον στερεὸν εἶναι ἕνα συνεχές, ἀλλὰ *ἀνοικτὸν* στερεόν.

Εἶναι φανερόν, ὅτι, ἐὰν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸ πολυέδρον τὴν πρῶτην ἑδραν του, δὲν θὰ ἀφαιρεθῇ ἀπὸ τὸ πολυέδρον, οὔτε ἀκμή, οὔτε κορυφή· ἐπομένως ἡ ἀπομένουσα πολυεδρική ἐπιφάνεια θὰ ἔχη τὸσας ἀκμὰς καὶ κορυφὰς, ὅσας εἶχε τὸ ἀρχικόν πολυέδρον, ἀλλὰ μίαν ἑδραν ὀλιγώτερον. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ α_1 τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀκμῶν (πλευρῶν) τῆς πρῶτης ἑδρας καὶ μὲ κ_1 τὸν ἀριθμὸν τῶν κορυφῶν της, θὰ εἶναι

$$\alpha_1 = \kappa_1 \quad \text{ἢ} \quad \alpha_1 - \kappa_1 = 0 \quad (1)$$

Ἐὰν ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸ πολυέδρον μίαν ἄλλην ἑδραν του, τὴν δευτέραν ἢ τὴν τρίτην κλπ., ἐκτὸς τῆς τελευταίας ἑδρας του, ἣ ἀπομένουσα πολυεδρική ἐπιφάνεια χάνει μίαν ἀκμὴν περισσότερον ἀπὸ ὅσας κορυφὰς

χάνει. Διότι, ἐάν ὑποθέσωμεν ὅτι θέλομεν νὰ ἀφαιρέσωμεν τὴν ἔδραν ΑΒΓΔΕ (Σχ. 545) ἢ ὁποία συνάπτεται μὲ τὴν ἀπομένουςαν πολυεδρικήν ἐπιφάνειαν μὲ τὰς ἀκμὰς ΑΒ, ΒΓ, εἶναι φανερόν ὅτι, ἐάν ἀφαιρεθῇ ἡ ἔδρα αὕτη, θὰ ἀφαιρεθοῦν ἀπὸ τὴν πολυεδρικήν ἐπιφάνειαν *τρεῖς ἀκμαί*, αἱ ΑΕ, ΕΔ, ΔΓ καὶ μόνον *δύο κορυφαί*, αἱ Ε καὶ Δ.



Σχ. 545.

Ἐάν λοιπὸν παραστήσωμεν μὲ $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \dots$ τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀκμῶν (πλευρῶν) τῆς δευτέρας, τρίτης, τετάρτης, ... ἔδρας καὶ μὲ $\kappa_2, \kappa_3, \kappa_4 \dots$ τὸν ἀριθμὸν τῶν κορυφῶν τῶν, ἀντιστοίχως, θὰ εἶναι

$$\alpha_2 - \kappa_2 = 1 \quad (2)$$

$$\alpha_3 - \kappa_3 = 1 \quad (3)$$

$$\alpha_4 - \kappa_4 = 1 \quad (4)$$

.....

Ἐάν τέλος ἀφαιρέσωμεν ἀπὸ τὸ πολυέδρον καὶ τὴν τελευταίαν ἔδραν του, θὰ ἀφαιρεθοῦν τόσαι ἀκμαί, ὅσαι καὶ κορυφαί· ἐάν λοιπὸν παραστήσωμεν μὲ α_n τὸν ἀριθμὸν τῶν ἀκμῶν τῆς τελευταίας ἔδρας τοῦ πολυέδρου καὶ μὲ κ_n τὸν ἀριθμὸν τῶν κορυφῶν τῆς, θὰ εἶναι

$$\alpha_n - \kappa_n = 0 \quad (5)$$

Προσθέτομεν τὰς ἰσότητας (1), (2), (3), (4), ... (5) κατὰ μέλη καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψει, ὅτι εἰς τὸ δεῦτερον μέλος ὑπάρχουν τόσαι μονάδες 1, ὡς προσθετοί, ὅσον εἶναι τὸ πλῆθος Ε τῶν ἔδρων τοῦ πολυέδρου πλὴν δύο μονάδες, δηλ. τὸ ἄθροισμα τῶν δευτέρων μελῶν τῶν ἰσοτήτων αὐτῶν εἶναι $E-2$, θὰ ἔχωμεν

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \dots + \alpha_n) - (\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4 + \dots + \kappa_n) = E - 2 \quad (6)$$

Ἄλλὰ τὸ ἄθροισμα $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n$ παριστάνει τὸ πλῆθος ὄλων τῶν ἀκμῶν τοῦ πολυέδρου, δηλ. τὸν ἀριθμὸν Α, καὶ τὸ ἄθροισμα $\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \dots + \kappa_n$ παριστάνει τὸ πλῆθος ὄλων τῶν κορυφῶν τοῦ πολυέδρου, δηλ. τὸν ἀριθμὸν Κ· ἐπομένως ἡ ἰσότης (6) γράφεται

$$A - K = E - 2 \quad \text{ἢ} \quad K + E = A + 2.$$

Ἐδείχθη λοιπὸν, ὅτι: *Εἰς κάθε πολυέδρον...*

802. Κανονικὰ πολυέδρα. Ἐνα πολυέδρον λέγεται *κανονικόν*, ὅταν ὅλαι αἱ στερεαὶ γωνίαι του εἶναι ἴσαι καὶ ὅλαι αἱ ἔδραι του εἶναι ἴσα κανονικὰ πολύγωνα.

Ὁ κύβος, τὸ κανονικὸν τετράεδρον, εἶναι κανονικὰ πολυέδρα.

Ἐκ τοῦ ὀρισμοῦ τῶν κανονικῶν πολυέδρων συνάγομεν, ὅτι: *Ὅλαι αἱ ἀκμαὶ ἐνὸς κανονικοῦ πολυέδρου εἶναι ἴσαι· ὁμοίως ὅλαι αἱ διέδροι γωνίας του εἶναι ἴσαι.*

803. Εἶδη καὶ πλῆθος κανονικῶν πολυέδρων. Ἄς ὑποθέσωμεν, ὅτι ἓνα κανονικὸν πολυέδρον ἔχει Ε ἔδρας καὶ Κ στερεᾶς γωνίας.

Ἐάν παραστήσωμεν μὲ x τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν ἐκάστης ἔδρας τοῦ πολυέδρου, αἱ Ε ἔδραι του θὰ ἔχουν xE πλευράς· ἐπειδὴ αἱ πλευραὶ αὗται συνάπτονται ἀνά δύο καὶ σχηματίζουν μίαν ἀκμὴν τοῦ πολυέδρου, ὁ πραγματικὸς ἀριθμὸς τῶν ἀκμῶν Α τοῦ πολυέδρου θὰ εἶναι

$$xE : 2, \quad \text{δηλ.} \quad \theta\acute{\alpha} \quad \epsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota \quad A = \frac{xE}{2}.$$

Ἐπειδὴ κάθε ἔδρα ἔχει x γωνίας, ὅσος δηλ. εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν της, αἱ E ἔδραι θὰ ἔχουν xE γωνίας. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ y τὸν ἀριθμὸν τῶν γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι συνέρχονται εἰς ἐκάστην κορυφήν, διὰ νὰ σχηματίσουν μίαν στερεάν γωνίαν του, αἱ xE γωνίαι θὰ σχηματίσουν τόσας σεερεὰς γωνίας, ὅσας φορές ὁ y χωρεῖ εἰς τὸν ἀριθμὸν xE , δηλ. θὰ σχηματίσουν $\frac{xE}{y}$ στερεὰς γωνίας· ἀλλὰ τότε θὰ εἶναι $K = \frac{xE}{y}$.

Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὸν τύπον $K+E=A+2$, τὰ K καὶ A μὲ τὰς τιμὰς των, λαμβάνομεν

$$\frac{xE}{y} + E = \frac{xE}{2} + 2 \quad \eta \quad E = \frac{4y}{2(x+y) - xy} \quad (1)$$

Ἐπειδὴ οἱ ἀριθμοὶ E, x, y πρέπει νὰ εἶναι ἀκέραιοι καὶ θετικοί, πρέπει νὰ εἶναι

$$2(x+y) - xy > 0 \quad (2)$$

Λύοντες τὴν ἀνισότητα αὐτὴν, ὡς πρὸς y , λαμβάνομεν

$$y < \frac{2x}{x-2} \quad \eta \quad y < 2 + \frac{4}{x-2} \quad (3)$$

Διὰ νὰ εἶναι θετικὸν τὸ κλάσμα $\frac{4}{x-2}$ πρέπει νὰ εἶναι $x \geq 3$.

Ἐὰν $x \geq 3$, ἡ ἀνισότης (3) δίδει $y < 6$ · ὥστε ὁ y πρέπει νὰ εἶναι μικρότερος τοῦ 6.

Ἄν λύσωμεν τὴν ἀνισότητα (2), ὡς πρὸς x , εὐρίσκομεν, κατὰ τὸν αὐτὸν τρόπον, ὅτι ὁ ἀριθμὸς x πρέπει νὰ εἶναι μικρότερος τοῦ 6.

Ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι δὲν ὑπάρχουν κυρτὰ πολύεδρα, τῶν ὁποίων ἐκάστη ἔδρα νὰ ἔχη περισσοτέρας τῶν πέντε πλευρῶν καὶ τῶν ὁποίων ἐκάστη στερεὰ γωνία νὰ σχηματίζεται ἀπὸ περισσοτέρας τῶν πέντε ἔδρων (γωνιῶν).

Κατὰ τὰ ἀνωτέρω δὲν δυνάμεθα νὰ δώσωμεν εἰς τὸν x καὶ y ἄλλας τιμὰς ἐκτὸς τῶν τιμῶν 3, 4, 5.

I. Ἐὰν λάβωμεν $x=3$, ἡ ἰσότης (1) δίδει $E = \frac{4y}{6-y}$ (4)

Διὰ $y=3, 4, 5$, ἡ (4) δίδει $E=4, 8, 20$.

Ὡστε μὲ $x=3$, δηλ. μὲ *ἰσόπλευρα τρίγωνα*, δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν τρία κανονικὰ πολύεδρα: τὸ *τετράεδρον*, τὸ *οκτάεδρον*, καὶ τὸ *εἰκοσάεδρον*.

II. Ἐὰν λάβωμεν $x=4$, ἡ ἰσότης (1) δίδει $E = \frac{2y}{4-y}$ (5)

Ἐδῶ δὲν δυνάμεθα νὰ δώσωμεν εἰς τὸν y ἄλλην τιμὴν ἐκτὸς $y=3$. Ἐπομένως διὰ $y=3$, ἡ ἰσότης (5) δίδει $E=6$.

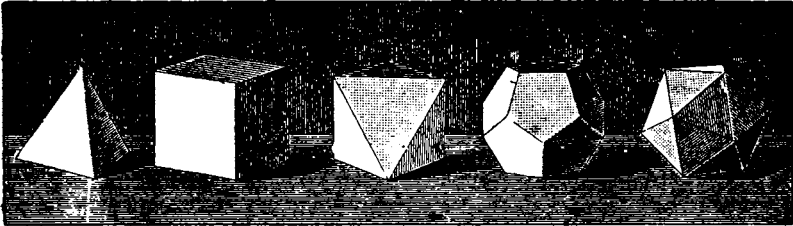
Ὡστε μὲ $x=4$, δηλ. μὲ *τετράγωνα*, δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν ἕνα μόνον κανονικὸν πολύεδρον, τὸν *κύβον*.

III. Ἐὰν λάβωμεν $x=5$, ἡ ἰσότης (1) δίδει $E = \frac{4y}{10-3y}$ (6)

Ἐδῶ δὲν δυνάμεθα νὰ δώσωμεν εἰς τὸν y ἄλλην τιμὴν ἐκτὸς τῆς τιμῆς $y=3$ · ἐπομένως διὰ $y=3$, ἡ ἰσότης (6) δίδει $E=12$.

Ὡστε μὲ $x=5$, δηλ. μὲ *κανονικὰ πεντάγωνα*, δυνάμεθα νὰ κατασκευάσωμεν μόνον ἕνα κανονικὸν πολύεδρον, τὸ *δωδεκάεδρον*.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι: *πέντε μόνον κανονικά πολύεδρα ὑπάρχουν*: τὸ τετράεδρον, τὸ ἑξάεδρον (ὁ κύβος), τὸ ὀκτάεδρον, τὸ δωδεκάεδρον καὶ τὸ εἰκοσάεδρον (Σχ. 546).



Καν. Τετράεδρον, Ἑξάεδρον, Ὀκτάεδρον, Δωδεκάεδρον, Εἰκοσάεδρον
Σχ. 546.

Ὁ κάτωθι πίναξ δίδει τὰς ἀντιστοίχους τιμὰς τῶν E, K, A, x, y τῶν πέντε κανονικῶν πολυέδρων.

Κανονικά πολύεδρα	E	K	A	x	y
Τετράεδρον	4	4	6	3	3
Ἑξάεδρον (κύβος) . . .	6	8	12	4	3
Ὀκτάεδρον	8	6	12	3	4
Δωδεκάεδρον	12	20	30	5	3
Εἰκοσάεδρον.	20	12	30	3	5

Ἀσκήσεις

2393. (2428). Τὰ μέσα τῶν ἀκμῶν κανονικοῦ τετραέδρου ἀκμῆς a εἶναι κορυφαὶ ἐνὸς κανονικοῦ ὀκταέδρου. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκμὴ τοῦ ὀκταέδρου.

2394. (2429). Αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὰς ἀπέναντι κορυφὰς κανονικοῦ ὀκταέδρου εἶναι ἴσαι καὶ κάθετοι μεταξύ των (ἄξονες ὀκταέδρου).

2395. (2430). Κάθε τομὴ κανονικοῦ ὀκταέδρου, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ δύο ἄξονάς του, εἶναι τετράγωνον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις δύο ἀπέναντι κορυφῶν του.

Ἀσκήσεις πρὸς γενικὴν ἐπανάληψιν ἐπὶ τοῦ τετάρτου βιβλίου

Α' Ὅμάς. 2396. (2431). Ὁ ὄγκος ἐνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι V , αἱ δὲ διαστάσεις του ἀνάλογοι τῶν ἀριθμῶν λ, μ, ν . Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαστάσεις του. Ἐφαρμογή: $V=3,84$ κ. μέτρα $\lambda=3, \mu=4, \nu=5$.

2397. (2432). Δίδεται ἓνα κανονικὸν τετράεδρον $\Sigma\text{ΑΒΓ}$, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκμὴ ἔχει μῆκος a καὶ ζητεῖται νὰ ὑπολογισθῇ:

1ον. ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου αὐτοῦ.

2ον. τὸ μήκος τῆς εὐθείας MN, ἡ ὁποία συνδέει τὰ μέσα τῶν δύο ἀπέναντι ἀκμῶν ΣΑ καὶ ΒΓ.

3ον. εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς κορυφῆς Σ πρέπει νὰ ἀχθῆ ἓνα ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν ΑΒΓ, ἵνα τὸ στερεὸν διαιρεθῆ εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη; Ἐφαρμογὴ: $\alpha=2$ μ.

2398. (2433). Εἰς μίαν τριγωνικὴν πυραμίδα ΣΑΒΓ, αἱ ἕδραι ΣΒΓ καὶ ΑΒΓ εἶναι ἰσόπλευρα τρίγωνα πλευρᾶς 2α καὶ σχηματίζουν μεταξύ των μίαν γωνίαν 60° .

1ον. Νὰ ὑπολογισθῆ ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος συναρτήσῃ τοῦ α.

2ον. Συνδέομεν τὸ μέσον Μ τῆς ΣΑ μὲ τὸ μέσον Ν τῆς ΒΓ. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι ἡ εὐθεῖα MN εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΣΑ καὶ ἐπὶ τὴν ΒΓ. Νὰ ὑπολογισθῆ ἡ MN

2399. (2434). Ἐπὶ τῶν ἀκμῶν μιᾶς τριέδρου γωνίας Σ, τῆς ὁποίας αἱ τρεῖς ἕδραι εἶναι ἴσαι μὲ 60° ἐκάστη, λαμβάνομεν τὰ μήκη ΣΑ=α, ΣΒ=β, ΣΓ=γ. Νὰ ὑπολογισθῆ ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου ΣΑΒΓ.

2400. (2435). Μία πενταγωνικὴ πυραμὶς εἶναι τοιαύτη, ὥστε αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ τῆς εἶναι ἴσαι μὲ τὴν πλευρὰν τῆς βάσεως. Νὰ ὑπολογισθῆ ὁ ὄγκος τῆς συναρτήσῃ τῆς ἀκμῆς τῆς.

2401. (2436). Μία κόλουρος κανονικῆς πυραμὶς ἔχει βάσεις κανονικὰ ὀκτάγωνα πλευρῶν α καὶ β' αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ ἔχουν ἓνα μήκος γ. Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ἔμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας καὶ ὁ ὄγκος τῆς κολούρου αὐτῆς πυραμίδος.

2402. (2437). Τέμνομεν ἓνα κύβον ἀκμῆς α μὲ ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα διέρχονται ἀπὸ τὰ μέσα τῶν ἀκμῶν. αἱ ὁποῖαι καταλήγουν εἰς ἐκάστην κορυφὴν καὶ λαμβάνομεν τὸ στερεὸν, τὸ ὁποῖον μένει, ἐὰν ἀφαιρέσωμεν τὰς ὀκτὼ πυραμίδας, αἱ ὁποῖαι θὰ προκύψουν οὕτω. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἀκμαί, τὸ ἔμβαδὸν καὶ ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ αὐτοῦ.

2403. (2438). Δίδεται ἓνα παραλληλεπίπεδον καὶ τὸ ὀκτάεδρον, τὸ ὁποῖον ἔχει ὡς κορυφὰς τὰ κέντρα τῶν ἑδρῶν τοῦ παραλληλεπιπέδου. Νὰ εὐρεθῆ ὁ λόγος τῶν ὄγκων τῶν δύο αὐτῶν στερεῶν.

2404. (2439). Ποῖαι σχέσεις ὑπάρχουν μεταξύ ἑνὸς τετραέδρου ΣΑΒΓ, τοῦ ὀκταέδρου, τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τὰ μέσα Δ, Ε, Ζ, Η, Θ, Ι τῶν ἐξ ἀκμῶν καὶ τοῦ παραλληλεπιπέδου ΣΑΒΓσαβγ, τὸ ὁποῖον λαμβάνομεν, ἐὰν φέρωμεν ἀπὸ κάθε ἀκμῆν τοῦ τετραέδρου ἓνα παράλληλον ἐπίπεδον πρὸς τὴν ἀπέναντι ἀκμῆν;

2405. (2440). Νὰ ὑπολογισθῆ ἡ ἀπόστασις μιᾶς κορυφῆς ἑνὸς τετραέδρου ἀπὸ τὰ μέσα τῶν διαφόρων ἑδρῶν του καὶ ἀκμῶν του.

2406. (2441). Τὸ αὐτὸ πρόβλημα διὰ τὸ κανονικὸν ἑξάεδρον.

Β' Ὁμάς. 2407. (2442). Κατὰ ποῖον λόγον πρέπει νὰ τμηθοῦν αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ μιᾶς πυραμίδος ὑπὸ ἑνὸς ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν, ἵνα ἡ παράπλευρος ἐπιφανεία τῆς διαιρεθῆ εἰς δύο μέρη, τὰ ὁποῖα νὰ ἔχουν λόγον $\mu : \nu$. Ἐφαρμογὴ $\mu=2, \nu=3$.

2408. (2443). Δίδεται μία κόλουρος πυραμὶς, τῆς ὁποίας μία παράπλευρος ἀκμῆ εἶναι δ μ. Νὰ διαιρεθῆ ἡ κόλουρος αὐτῆς πυραμὶς εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη ὑπὸ ἑνὸς ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὰς βάσεις τῆς. ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι

δύο ὁμόλογοι πλευραὶ τῶν βάσεως ἔχουν μῆκη 3 μετρ. καὶ 2 μέτρα.

2409. (2444). Νὰ διαιρεθῆ ἡ προηγουμένη κόλουρος πυραμὶς εἰς τρία ἰσοδύναμα μέρη.

2410. (2445). Νὰ διαιρεθῆ ἡ προηγουμένη κόλουρος πυραμὶς εἰς δύο μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 2 καὶ 3.

2411. (2446). Νὰ διαιρεθῆ ἡ ὀλικὴ ἐπιφάνεια μιᾶς κανονικῆς τετραγωνικῆς πυραμίδος εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα ὑπὸ ἑνὸς ἐπιπέδου, τὸ ὅποιον νὰ διέρχεται ἀπὸ μίαν πλευρὰν τῆς βάσεώς της. (Πολυτεχνεῖον).

2412. (2447). Ἡ βάση μιᾶς πυραμίδος εἶναι ἓνα παραλληλόγραμμον. Νὰ χωρισθῆ ὁ ὄγκος της εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα μὲ ἓνα ἐπίπεδον τὸ ὅποιον νὰ διέρχεται ἀπὸ μίαν πλευρὰν τῆς βάσεώς της.

2413. (2448). Νὰ τμηθῆ μία κόλουρος πυραμὶς μὲ ἓνα ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις της εἰς τρῶπον, ὥστε αἱ ὀλικά ἐπιφάνειαι τῶν δύο κολούρων πυραμίδων, πού θὰ προκύψουν, νὰ εἶναι ἴσαι.

2414. (2449). Δίδεται μία κόλουρος τριγωνικὴ πυραμὶς. Νὰ ἀχθῆ ἀπὸ μίαν ἀκμὴν τῆς βάσεώς της ἓνα ἐπίπεδον, τὸ ὅποιον νὰ χωρίζῃ τὴν κόλουρον αὐτὴν πυραμίδα εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα.

2415. (2450). Νὰ ἀχθῆ ἀπὸ μίαν παράπλευρον ἀκμὴν ἑνὸς τριγωνικοῦ κολοβοῦ πρίσματος ἓνα ἐπίπεδον, τὸ ὅποιον νὰ χωρίζῃ τὸν ὄγκον του εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη.

2416. (2451). 1ον. Νὰ τμηθῆ ἓνα τετράεδρον οὕτως, ὥστε ἡ τομὴ του νὰ εἶναι ἓνα παραλληλόγραμμον· ὑπάρχουν τρεῖς διευθύνσεις ἐπιπέδων.

2ον. Νὰ εὔρεθῆ διὰ καθεμίαν ἀπὸ τὰς διευθύνσεις αὐτὰς τὸ παραλληλόγραμμον, τὸ ὅποιον ἔχει τὸ μέγιστον ἐμβαδόν.

3ον. Νὰ τμηθῆ τὸ τετράεδρον δι' ἑνὸς ἐπιπέδου οὕτως, ὥστε ἡ τομὴ νὰ εἶναι ἓνας ῥόμβος καὶ νὰ ὑπολογισθῆ ἡ πλευρὰ τοῦ ῥόμβου συναρτήσῃ τῶν ἀκμῶν τοῦ τετράεδρου.

Γ' Ὀμάς. 2417. (2452). Δίδεται ἓνα τετράεδρον ΣΑΒΓ καὶ τὰ σημεῖα Α', Β' ἐπὶ τῶν ἀκμῶν ΣΑ καὶ ΣΒ ἀντιστοίχως. Νὰ εὔρεθῆ ἐπὶ τῆς ἀκμῆς ΣΓ ἓνα σημεῖον Γ' τοιοῦτον, ὥστε ὁ λόγος τῶν ὄγκων τοῦ ΣΑ'Β'Γ' πρὸς τὸν ὄγκον τοῦ ΣΑΒΓ νὰ εἶναι ἴσος μὲ $\mu : \nu$.

2418. (2453). Νὰ εὔρεθῆ εἰς τὸ ἔσωτερικὸν ἑνὸς τετράεδρου ἓνα σημεῖον, τοιοῦτον ὥστε, ἂν τὸ συνδέσωμεν δι' εὐθειῶν μὲ τὰς τέσσαρας κορυφάς, τὸ τετράεδρον νὰ διαιρῆται εἰς τέσσαρα ἰσοδύναμα τετράεδρα.

2419. (2454). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τετράεδρον, ἂν γνωρίζωμεν τὰς ἀποστάσεις τῶν μέσων τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν καὶ τὰς γωνίας, τὰς ὁποίας σχηματίζουν μεταξύ των αἱ τρεῖς αὐταὶ εὐθεῖαι.

2420. (2455). Νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τετράεδρον, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι τὰ μέσα τεσσάρων ἀκμῶν του εἶναι τὰ σημεῖα Κ, Λ, Μ, Ν, τὰ ὅποια δὲν κείνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

2421. (2456). Νὰ κατασκευασθῆ τὸ παραλληλεπίπεδον, τὸ περιγεγραμμένον περὶ ἓνα τετράεδρον, δηλ. νὰ εἶναι τοιοῦτον, ὥστε αἱ ἕδραι τοῦ παραλληλεπίπεδου νὰ περιέχουν ἑκάστην ἀκμὴν τοῦ τετράεδρου.

2422. (2457). Ἐὰν κόψωμεν ἓνα τετράεδρον μὲ ἓνα ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς δύο ἀπέναντι ἀκμάς του, ἡ τομὴ εἶναι ἓνα παραλληλόγραμμον. Νὰ σπου-

δασθῆ ἢ μεταβολὴ τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ παραλληλογράμμου αὐτοῦ.

Δ' Ὁμάς. 2423. (2458). Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τῶν κορυφῶν ἑνὸς τετραέδρου ἀπὸ ἓνα ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον δὲν τέμνει τὸ τετράεδρον, εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετραπλάσιον τῆς ἀποστάσεως τοῦ μέσου τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος, τὸ ὁποῖον συνδέει τὰ μέσα δύο ἀπέναντι ἀκμῶν του, ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον αὐτό.

2424. (2459). Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι εἰς κάθε τετράεδρον αἱ τρεῖς εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι συνδέουσιν τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν τέμνονται εἰς ἓνα σημεῖον *O*, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ μέσον ἐκάστης ἐξ αὐτῶν.

2425. (2460). Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι εἰς κάθε τετράεδρον τὰ ἐξ ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα ἄγονται ἀπὸ μίαν ἀκμὴν καὶ ἀπὸ τὸ μέσον τῆς ἀπέναντι ἀκμῆς, τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον *O*.

2426. (2461). Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι εἰς κάθε τετράεδρον αἱ τέσσαρες εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι συνδέουσιν κάθε κορυφὴν του μὲ τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέσων τῆς ἀπέναντι ἕδρας, τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον *O*, τὸ ὁποῖον κεῖται εἰς τὸ τέταρτον ἐκάστης τῶν εὐθειῶν αὐτῶν ἀπὸ τῆς ἕδρας· (τὸ σημεῖον *O* λέγεται *κέντρον βάρους* τοῦ ὄγκου τοῦ τετραέδρου).

2427. (2462). Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὰ ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα διχοτομοῦν τὰς διέδρους γωνίας ἑνὸς τετραέδρου, τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

2428. (2463). Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὰ ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα εἶναι κάθετα εἰς τὰ μέσα τῶν ἀκμῶν ἑνὸς τετραέδρου, τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

2429. (2464). Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι εἰς κάθε τετράεδρον τὰ ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα ἄγονται ἀπὸ τὰ μέσα τῶν ἀκμῶν του, καθέτως ἐπὶ τὰς ἀπέναντι ἀκμάς, τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

2430. (2465). Αἱ κάθετοι, αἱ ὁποῖαι ἄγονται, ἐπὶ ἐκάστην ἕδραν ἑνὸς τετραέδρου, ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περὶ ἐκάστην ἕδραν, τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

2431. (2466). Τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον διχοτομεῖ μίαν διέδρον γωνίαν ἑνὸς τετραέδρου, χωρίζει τὴν ἀπέναντι ἀκμὴν εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἕδρῶν, αἱ ὁποῖαι πρόσκεινται εἰς τὴν διέδρον αὐτήν.

2432. (2467). Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι αἱ προβολαὶ τῆς κορυφῆς *A* ἑνὸς τετραέδρου *ΑΒΓΔ* ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα διχοτομοῦν ἐσωτερικῶς καὶ ἐξωτερικῶς τὰς διέδρους *ΒΓ*, *ΓΔ*, *ΔΒ* κείνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

2433 (2468). Ἐὰν ἀπὸ τὴν εὐθεῖαν *ΔΕ*, ἡ ὁποῖα συνδέει τὰ μέσα τῶν δύο ἀπέναντι ἀκμῶν *ΣΑ* καὶ *ΒΓ* ἑνὸς τετραέδρου *ΣΑΒΓ* φέρωμεν ἓνα τυχὸν ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν *ΣΒ* εἰς τὸ *Z* καὶ τὴν *ΑΓ* εἰς τὸ *Θ*, νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὸ τμήμα *ZΘ* διαιρεῖται ὑπὸ τῆς *ΔΕ* εἰς δύο ἴσα μέρη.

2434. (2469). Εἰς ἓνα τετράεδρον, ἵνα αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι συνδέουσιν κάθε κορυφὴν του μὲ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὴν ἀπέναντι ἕδραν, τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ τὰ τρία γινόμενα τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν νὰ εἶναι ἴσα.

2435. (2470). Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι εἰς ἓνα κανονικὸν τετράεδρον *ΣΑΒΓ*, κάθε πλευρὰ τῆς βάσεως *ΑΒΓ* φαίνεται ἀπὸ τὸ μέσον *Μ* τοῦ ὕψους *ΣΗ*, ὑπὸ ὀρθὴν γωνίαν.

2436. (2471). Ἐὰν ἀπὸ τὰ τρία ζεύγη ἀπέναντι ἀκμῶν ἑνὸς τετραέδρου, δύο ζεύγη εἶναι ὀρθογώνια, τότε θὰ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ τὸ τρίτον ζεύγος.

(Ἐνα τοιοῦτον τετράεδρον λέγεται *ὀρθογώνιον τετράεδρον*).

2437. (2472). Ἐὰν αἱ ἀπέναντι ἄκμαι ἑνὸς τετραέδρου εἶναι ὀρθογώνιοι, οἱ πόδες τῶν ὑψῶν τοῦ τετραέδρου εἶναι τὰ ὀρθόκεντρα τῶν ἐδρῶν τῶν.

2438. (2473). Ἐὰν εἰς ἓνα τετράεδρον ὁ πούς ἑνὸς ὑψους τοῦ εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τῆς ἀντιστοίχου ἐδρας, τὸ τετράεδρον ἔχει τὰς ἀπέναντι ἄκμας τοῦ ὀρθογωνίου· ἐξ αὐτοῦ συνάγομεν τὴν κατασκευὴν τῶν τετραέδρων, τὰ ὁποῖα ἔχουν τὰς ἀπέναντι ἄκμας ὀρθογωνίους.

2439. (2474). Εἰς κάθε τετράεδρον, τοῦ ὁποῖου αἱ ἀπέναντι ἄκμαι εἶναι ὀρθογώνιοι :

1ον. τὰ τέσσαρα ὕψη τοῦ τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον καὶ ἀντιστρόφως.

2ον. αἱ κοίται κάθετοι ἐπὶ τὰς ἀπέναντι ἄκμας διέρχονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον.

2440. (2475). Εἰς ἓνα τετράεδρον ΑΒΓΔ :

1ον. ἐὰν δύο ὕψη συναντῶνται, τότε θὰ συναντῶνται καὶ τὰ δύο ἄλλα.

2ον. ἐὰν τὸ ἓνα ἀπὸ τὰ ὕψη τοῦ συναντᾷ δύο ἄλλα, τότε τὰ τέσσαρα ὕψη διέρχονται ἀπὸ τὸ αὐτὸ σημεῖον. (Ἄνωτ. Γεωπονικὴ Σχολὴ 1945).

2441. (2476). Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι κάθε τετράεδρον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὰς τέσσαρας τριέδρους γωνίας ἴσας, ἔχει τὰς ἀπέναντι ἄκμας τοῦ ἴσας.

2442. (2477). Κάθε ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον διέρχεται ἀπὸ τὰ μέσα δύο ἀπέναντι ἄκμῶν ἑνὸς τετραέδρου, χωρίζει τὸ τετράεδρον εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη.

2443. (2478). Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι εἰς κάθε τετράεδρον :

1ον. τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀπέναντι ἄκμῶν δύο ζευγῶν εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀπέναντι ἄκμῶν τοῦ τρίτου ζεύγους, ἠδὲ καὶ ἡ ἑξήμενον κατὰ τὸ τετραπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς ἀποστάσεως τῶν μέσων τῶν δύο τελευταίων ἄκμῶν.

2ον. τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν 6 ἄκμῶν εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετραπλάσιον τοῦ ἄθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν τριῶν εὐθύγραμμων τμημάτων, τὰ ὁποῖα συνδέουν τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι ἄκμῶν.

2444. (2479). Εἰς κάθε κανονικὸν τετράεδρον ΣΑΒΓ :

1ον. αἱ ἀπέναντι ἄκμαι ΣΑ καὶ ΒΓ εἶναι ὀρθογώνιοι.

2ον. ἐὰν ἀπὸ τὴν κορυφὴν Σ φέρωμεν τὴν ΣΕ ἴσην καὶ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΒ καὶ τὴν ΣΖ ἴσην καὶ παράλληλον πρὸς τὴν ΑΓ, τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον εἶναι κάθετον εἰς τὸ μέσον τῆς ΣΖ, διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα Γ καὶ Ε.

2445. (2480). Ἐὰν ἀπὸ τὴν κορυφὴν Σ ἑνὸς τετραέδρου ΣΑΒΓ φέρωμεν μίαν εὐθεῖαν ΣΔ, ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν βάσιν εἰς τὸ Δ καὶ ἡ ὁποία σχηματίζει ἴσας γωνίας μὲ τὰ ἐπίπεδα ΣΑΒ, ΣΒΓ καὶ ΣΓΑ καὶ συνδέσωμεν τὰς κορυφὰς τῆς βάσεως ΑΒΓ μὲ τὸ σημεῖον Δ, νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὰ ἔμβαδά τῶν τριγώνων ΔΑΒ, ΔΒΓ καὶ ΔΑΓ εἶναι ἀνάλογα πρὸς τὰς προκειμένας ἐδρας τοῦ τετραέδρου.

2446. (2481). Ὄταν ἡ κάθετος τομὴ ἑνὸς πρίσματος εἶναι ἓνα ἰσόπλευρον πολύγωνον, τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἑνὸς σημείου, τὸ ὁποῖον κεῖται εἰς τὸ ἔσωτερον τοῦ στερεοῦ, ἀπὸ τὰς παραπλεύρους ἐδρας τοῦ καὶ ἀπὸ τὰς βάσεις του, εἶναι σταθερόν.

2447. (2482). Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὰ μέσα τῶν ἄκμῶν ἑνὸς τετραέδρου εἶναι κορυφαὶ ἑνὸς ὀκταέδρου, τοῦ ὁποῖου ὁ ὄγκος εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἥμιον τοῦ ὄγκου τοῦ τετραέδρου.

2448. (2483). Δίδονται τρεῖς παράλληλοι εὐθεῖαι X, Y, Z, αἱ ὁποῖαι δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου· ἐπὶ τῆς X λαμβάνομεν ἓνα τμήμα AB=λ, ἐπὶ τῆς Y ἓνα σημεῖον Γ καὶ ἐπὶ τῆς Z ἓνα σημεῖον Δ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου ABΓΔ μένει σταθερός, ὅταν τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ ὀλισθαίνουν ἐπὶ τῶν παραλλήλων, ἐπὶ τῶν ὁποίων κεῖνται, καὶ ὅτι ὁ ὄγκος του εἶναι ἀνάλογος τοῦ λ.

2449. (2484). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι κάθε τετραέδρον ἔχει ἓνα περιγεγραμμένον παραλληλεπίπεδον· ἀλλὰ κάθε παραλληλεπίπεδον ἔχει δύο ἐγγεγραμμένα τετραέδρα, τὰ ὁποῖα λέγονται *συζυγῆ*. Ἐὰν δίδεται τὸ ἓνα ἐξ αὐτῶν τῶν τετραέδρων, νὰ κατασκευασθῇ τὸ ἄλλο.

2450. (2485). Εἰς μίαν κόλουρον τριγωνικὴν πυραμίδα, αἱ εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι συνδέουσι τὰς κορυφὰς μιᾶς βάσεως μὲ τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν τῆς ἄλλης βάσεως, τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

2451. (2486). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι αἱ τέσσαρες διαγώνιοι μιᾶς κολούρου πυραμίδος, τῆς ὁποίας αἱ βάσεις εἶναι παραλληλόγραμμα, τέμνονται εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

2452. (2487). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὁ ὄγκος ἑνὸς κολοβοῦ πρίσματος, τοῦ ὁποίου ἡ κάθετος τομῆ εἶναι ἓνα παραλληλόγραμμον, εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἔμβαδου τῆς καθέτου τομῆς ἐπὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἄθροισματος τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν του.

2453. (2488). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὁ ὄγκος ἑνὸς κολοβοῦ τριγωνικοῦ πρίσματος εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἔμβαδου τῆς καθέτου τομῆς του ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν τῶν κέντρων βάρους τῶν δύο βάσεων.

2454. (2489). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὁ ὄγκος, ἑνὸς κολοβοῦ παραλληλεπίπεδου εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἡμισφαιροῦσματος τῶν ἐμβαδῶν τῶν δύο παραλλήλων ἐδρῶν του ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν των.

2455. (2490). Εἰς ἓνα τριγωνικὸν κολοβὸν πρίσμα, τὰ σημεῖα τῆς τομῆς τῶν διαγωνίων τῶν παραπλεύρων ἐδρῶν καὶ τὰ σημεῖα τῆς τομῆς τῶν πλευρῶν τῶν βάσεών του, προεκτεινομένων, κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

2456. (2491). Ἐὰν ἀπὸ ἓνα σημεῖον O, τὸ ὁποῖον κεῖται εἰς τὸ ἔσωτερικὸν μέρος τῆς βάσεως ABΓ ἑνὸς τετραέδρου ΣΑΒΓ, φέρωμεν τὰς παραλλήλους OA', OB', OΓ' πρὸς τὰς ἀκμὰς ΣΑ, ΣΒ, ΣΓ μέχρι, ὅτου συναντήσουν τὰς ἔδρας ΣΒΓ, ΣΓΑ, ΣΑΒ, θὰ εἶναι $\frac{OA'}{\Sigma A} + \frac{OB'}{\Sigma B} + \frac{O\Gamma'}{\Sigma \Gamma} = 1$.

2457. (2492). Εἰς ἓνα τρισσορθογώνιον τετραέδρον :

1ον. τὸ ἔμβαδὸν μιᾶς ἔδρας τῆς τρισσορθογωνίου τριέδρου εἶναι μέσον ἀνάλογον μεταξὺ τῆς ὑποτείνουσης ἔδρας καὶ τοῦ ἔμβαδου τῆς προβολῆς τῆς ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν ἔδραν.

2ον. τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἐδρῶν τῆς τρισσορθογωνίου τριέδρου εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετράγωνον τοῦ ἔμβαδου τῆς ὑποτείνουσης ἔδρας.

3ον. ἐὰν α, β, γ εἶναι αἱ τρεῖς ἀκμαὶ τῆς τρισσορθογωνίου τριέδρου καὶ υ τὸ ὕψος τοῦ τετραέδρου ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν, θὰ εἶναι

$$\frac{1}{u^2} = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}.$$

2458. (2493). Δίδεται ἓνα τετραέδρον ABΓΔ καὶ ἓνα σημεῖον O εἰς τὸ

ἔσωτερικὸν τοῦ τετραέδρου. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΑΟ, ΒΟ, ΓΟ, ΔΟ, αἱ ὁποῖαι τέμνουσιν τὰς ἀπέναντι ἕδρας εἰς τὰ σημεῖα Α', Β', Γ', Δ'. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι

$$\frac{OA'}{AA'} + \frac{OB'}{BB'} + \frac{OG'}{GG'} + \frac{OD'}{DD'} = 1.$$

2459. (2494). Δίδεται μία κανονικὴ τριγωνικὴ πυραμὶς ΣΑΒΓ. Ἐὰν ἀπὸ τυχόν σημείου Ο' τοῦ ὕψους τῆς ΣΟ φέρωμεν ἓνα τυχόν ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὰς ἀκμὰς τῆς τριέδρου γωνίας Σ εἰς τὰ σημεῖα Α', Β', Γ', θὰ εἶναι

$$\frac{1}{\Sigma A'} + \frac{1}{\Sigma B'} + \frac{1}{\Sigma \Gamma'} = \text{σταθερόν.}$$

2460. (2495). Δίδεται μία κανονικὴ πυραμὶς ΣΑΒΓΔ, τὸ ὕψος τῆς ΣΟ καὶ ἓνα σημεῖον Ο' ἐπὶ τοῦ ΣΟ' φέρομεν ἓνα ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον διέρχεται ἀπὸ τὸ Ο' καὶ τέμνει τὰς παραπλευροὺς ἀκμὰς τῆς εἰς τὰ σημεῖα Α', Β', Γ', Δ'. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὰ ἀθροίσματα $\frac{1}{\Sigma A'} + \frac{1}{\Sigma \Gamma'}$, $\frac{1}{\Sigma B'} + \frac{1}{\Sigma \Delta'}$ εἶναι ἴσα καὶ μένουσιν σταθερά, ὅταν ἡ διεύθυνσις τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου μεταβάλλεται.

Ε' Ὁμάς. 2461. (2496). Τὸ ἀθροίσμα τῶν διέδρων, τὰς ὁποίας σχηματίζουν αἱ παράπλευροι ἕδραι ἑνὸς τριγωνικοῦ πρίσματος μὲ μίαν ἀπὸ τὰς βάσεις του, περιέχεται μεταξὺ δύο ὀρθῶν καὶ τεσσάρων ὀρθῶν γωνιῶν.

2462. (2497). Δίδεται ἓνα κανονικὸν τετράεδρον ΑΒΓΔ καὶ τὸ ὕψος του ΑΑ'. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι ἡ τριέδρος γωνία, ἡ ὁποία ἔχει κορυφὴν τὸ μέσον Ο τῆς ΑΑ' καὶ τῆς ὁποίας αἱ ἀκμαὶ διέρχονται ἀπὸ τὰ Β, Γ, Δ εἶναι τρισσορθογώνιος. (Πολυτεχνεῖον).

2463. (2498). Δίδεται ἓνα κανονικὸν τετράεδρον ΑΒΓΔ καὶ κατασκευάζομεν τὸ τρίγωνον Β'Γ'Δ', τὸ ὁποῖον ἔχει, ὡς μέσα τῶν πλευρῶν του, τὰς κορυφὰς Β, Γ καὶ Δ. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὸ τετράεδρον ΑΒ'Γ'Δ' εἶναι τρισσορθογώνιον.

2464. (2499). Δίδεται ἓνα τετράεδρον ΣΑΒΓ, τρισσορθογώνιον εἰς τὸ Σ. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι αἱ προβολαὶ τοῦ ὕψους ΣΔ ἐπὶ τὰς ἀκμὰς τῆς τριέδρου Σ, εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰ ἔμβαδά τῶν ἕδρῶν ΣΒΓ, ΣΓΑ, ΣΑΒ τῆς τριέδρου αὐτῆς.

2465. (2500). Δίδεται ἓνα τετράεδρον ΣΑΒΓ καὶ τὰ μέσα Α', Β', Γ' τῶν ἀκμῶν του ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι, ἐὰν τὸ τετράεδρον αὐτὸ εἶναι τρισσορθογώνιον εἰς τὸ Σ, τὸ τετράεδρον ΣΑ'Β'Γ' ἔχει τὰς ἀπέναντι ἀκμὰς ἴσας καὶ ἀντιστροφῶς. Ἐφαρμόζοντες τὴν ιδιότητα αὐτήν, νὰ κατασκευασθῆ ἓνα τετράεδρον, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχη τὰς ἀπέναντι ἀκμὰς του ἴσας, ἂν γνωρίζωμεν τὰ μήκη α, β, γ τῶν ἀκμῶν αὐτῶν καὶ νὰ ὑπολογισθῆ ὁ ὄγκος του. (Σχολή Εὐελπίδων 1934).

2466. (2501). Αἱ τρεῖς πλευραὶ τῆς βάσεως ἑνὸς τετραέδρου, τοῦ ὁποίου ἡ ἀπέναντι τῆς βάσεως στερεὰ γωνία εἶναι τρισσορθογώνιος, ἔχουσιν μήκη α, β, γ. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ τρεῖς ἄλλαι ἀκμαὶ τοῦ τετραέδρου καὶ ὁ ὄγκος του.

ΣΤ' Ὁμάς. 2467. (2502). Δίδεται ἓνα τετράεδρον ΑΒΓΔ καὶ ζητεῖται νὰ εὗρεθῆ ὁ τόπος τῶν σημείων Μ τοιοῦτων, ὥστε νὰ εἶναι

$$\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 = \overline{MG}^2 + \overline{MD}^2.$$

2468. (2503). Ἐνα τετράεδρον τέμνεται ὑπὸ ἑνὸς ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον στρέφεται περὶ μίαν ἀκμὴν του. Νὰ εὗρεθῆ :

1ον. ὁ τόπος τοῦ σημείου τῆς τομῆς τῶν διαμέσων τῆς τομῆς.

2ον. ὁ τόπος τῶν ποδῶν τῶν ὑψῶν τῆς τομῆς αὐτῆς·

2469. (2504). Ἐνα κινητὸν ἐπίπεδον τέμνει μίαν τριέδρον Σ κατὰ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$. Νὰ εὐρεθῇ ὁ τόπος τοῦ κέντρου βάρους Θ τοῦ τριγώνου:

1ον. ὅταν ἡ κορυφή A μένη σταθερά.

2ον. ὅταν ἡ πλευρὰ AB μένη σταθερά.

2470. (2505). Νὰ εὐρεθῇ ὁ τόπος τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι ἄγονται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον O καὶ αἱ ὁποῖαι διαπεροῦν τὰς ἕδρας μιᾶς δοθείσης διέδρου γωνίας εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B καὶ τοιαῦτα, ὥστε $OA : OB = \text{σταθερόν}$.

Z' Ὁμάς. 2471. (2506). Δίδεται ἡ τριέδρος γωνία Σyxz εἰς τὴν ὁποίαν εἶναι:

$$\widehat{y\Sigma x} = 60^\circ, \quad \widehat{y\Sigma z} = \widehat{z\Sigma x} = 45^\circ.$$

Ἐπὶ τῆς ἀκμῆς Σz λαμβάνομεν τμῆμα $\Sigma A = a$ καὶ ἀπὸ τὸ A φέρομεν ἓνα ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ΣA , τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν Σx εἰς τὸ B καὶ τὴν Σy εἰς τὸ Γ .

1ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ τρεῖς πλευραὶ τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$. Νὰ ὀρισθῇ τὸ εἶδος τοῦ τριγώνου αὐτοῦ καὶ τὸ εἶδος τῆς τριέδρου, ἡ ὁποία ἔχει κορυφὴν τὸ A .

2ον. Ἐπὶ τὸ A φέρομεν κάθετον AD ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον $B\Sigma\Gamma$ · νὰ ὑπολογισθῇ ἡ AD .

2472. (2507). Μία κανονικὴ πυραμὶς, μὲ βάσιν ὀκτάγωνον, τέμνεται ὑπὸ ἐπίπεδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν. Ἐὰν γνωρίζωμεν τὸ ἀπόστημα (παράπλευρον ὕψος) a τῆς βάσεως καὶ τὸ ὕψος u τῆς πυραμίδος καὶ ὅτι ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια τῆς προκυπτούσης μικρᾶς πυραμίδος εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς βάσεως τῆς μεγάλης πυραμίδος, ζητεῖται νὰ ὑπολογισθῇ:

1ον. εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς μεγάλης πυραμίδος διέρχεται τὸ τέμνον ἐπίπεδον.

2ον. ὁ ὄγκος τῆς μεγάλης πυραμίδος. Ἐφαρμογή: $a = u = 1 \mu$.

2473. (2508). Κύβος ἀκμῆς a στηρίζεται ἐπὶ τῆς ἕδρας $AB\Gamma\Delta$. Αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ του εἶναι AA' , BB' , $\Gamma\Gamma'$, $\Delta\Delta'$. Τέμνομεν τὸν κύβον αὐτὸν μὲ ἓνα ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον διέρχεται ἀπὸ τὰς κορυφὰς B , Γ' , Δ .

1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος ἐκάστης τῶν δύο πυραμίδων $AA'B'\Delta'$ καὶ $\Gamma'B\Gamma\Delta$ καὶ ὁ ὄγκος τοῦ μέρους τοῦ κύβου τοῦ περιλαμβανομένου μεταξὺ τῶν δύο τεμνόντων ἐπιπέδων. Πρὸς ποίους ἀκεραίους ἀριθμοὺς οἱ τρεῖς αὐτοὶ ὄγκοι εἶναι ἀνάλογοι.

2ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ὀλικὴ ἐπιφάνεια τῶν τριῶν αὐτῶν στερεῶν.

3ον. Νὰ ἀποδειχθῇ: α) ὅτι τὰ δύο τέμνοντα ἐπίπεδα $AB'\Delta'$ καὶ $B\Gamma\Delta$ εἶναι παράλληλα· β) ὅτι εἶναι κάθετα ἐπὶ τὴν διαγώνιον $A'\Gamma$. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ διαγώνιος αὐτῆ διαιρεῖται εἰς τρία ἴσα μέρη ἀπὸ τὰ δύο αὐτὰ ἐπίπεδα.

2474. (2509). Μία τριγωνικὴ πυραμὶς $\Sigma AB\Gamma$ ἔχει βάσιν ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ὀρθογώνιον εἰς τὸ A καὶ ἡ κορυφή τῆς Σ κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ Γ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον $AB\Gamma$.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ἀκμὴ AB εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν $A\Sigma$ καὶ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον $\Sigma A\Gamma$. Ποία εἶναι ἡ τιμὴ τῆς ἐπιπέδου γωνίας, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν διέδρον, ἡ ὁποία σχηματίζεται ἀπὸ τὰς ἕδρας ΣAB καὶ $\Sigma A\Gamma$.

2ον. Ἐπὶ τὸ σημεῖον Γ φέρομεν ἓνα ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκμὴν

ΣΒ, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν ΣΑ εἰς τὸ Α' καὶ τὴν ΣΒ εἰς τὸ Β'. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΓΑ' εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΣΑΒ.

3ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ ΓΑ'Β'ΑΒ, εἰάν εἶναι $AB=AG=\Sigma\Gamma=\alpha$.

2475. (2510). Δίδεται ἡ τρισσορθογώνιος στερεὰ γωνία Οxyz. Εἰς τὸ ἐπίπεδον yOx κατασκευάζομεν ἕνα τεταρτοκύκλιον Ο ἀκτίνοσ α. Ἐστω Γ τὸ σημεῖον τῆς Oz τοιαύτου, ὥστε $OG=\alpha$. Φέρομεν μίαν ἐφαπτομένην ΑΒ εἰς τὸ τεταρτοκύκλιον.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} = \frac{1}{OM^2}$, ἐνθα Μ εἶναι τὸ σημεῖον ἐπαφῆς.

2ον. Ἐάν $OB=2\alpha$, νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου Ο ΑΒΓ.

3ον. Ἐάν Η εἶναι ὁ πούς τῆς καθέτου. ἡ ὁποία ἀγεται ἀπὸ τὸ Ο ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ, νὰ εὔρεθῇ ὁ τόπος τοῦ σημείου αὐτοῦ Η, ὅταν ἡ ΑΒ κινῆται εἰς τὸ ἐπίπεδον xOy καὶ μένει πάντοτε ἐφαπτομένη τοῦ τεταρτοκυκλίου.

2476. (2511). Ἐπὶ τῶν τριῶν ἀκμῶν μιᾶς τρισσορθογωνίου τριέδρου στερεᾶς γωνίας λαμβάνομεν μήκη $OA=4\alpha$, $OB=OG=3\alpha\sqrt{2}$.

1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου ΟΑΒΓ καὶ τὸ ἔμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

2ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις τῆς κορυφῆς Ο ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου.

3ον. Ἐστω Η τὸ σημεῖον, εἰς τὸ ὁποῖον συναντᾷ τὴν βάσιν ΑΒΓ, τὸ ὕψος ΟΗ. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΑΗ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΒΓ.

4ον. Ἀπὸ ἕνα σημεῖον Μ τῆς ΟΑ τοιοῦτου, ὥστε $MA=x$ φέρομεν ἕνα ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸ ΒΟΓ, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν ΑΒ εἰς τὸ Ν καὶ τὴν ΑΓ εἰς τὸ Ρ. Νὰ προσδιορισθῇ τὸ x, ἵνα ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος ΑΜΝΡ εἶναι τὸ 1/8 τοῦ ὄγκου τοῦ τετραέδρου ΟΑΒΓ.

2477. (2512). Δίδεται μία τριγωνικὴ πυραμὶς ΟΑΒΓ, τῆς ὁποίας ἡ κορυφή Ο εἶναι τρισσορθογώνιος. Νὰ ἀποδειχθῇ :

1ον. ὅτι ἡ προβολὴ Η τῆς κορυφῆς Ο ἐπὶ τὴν βάσιν ΑΒΓ εἶναι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ὑψῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

2ον. ὅτι κάθε παράπλευρος ἔδρα τῆς πυραμίδος εἶναι μέση ἀνάλογος τῆς βάσεως καὶ τῆς προβολῆς τῆς ἐπὶ τὴν βάσιν αὐτῆν.

3ον. ὅτι τὸ τετράγωνον τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν παραπλεύρων ἔδρων.

4ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος, ἂν γνωρίζωμεν ὅτι $OA=\alpha$, $OB=\beta$, $OG=\gamma$ καὶ νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος ΟΗ= ν συναρτήσῃ τῶν α, β, γ .

2478. (2513). Μία κανονικὴ πυραμὶς ΣΑΒΓΔ ἔχει βάσιν ἕνα τετράγωνον ΑΒΓΔ πλευρᾶς α καὶ ὕψος $\Sigma O = \frac{\alpha}{2}$.

1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος καὶ αἱ ἀκμαί τῆς.

2ον. Νὰ εὔρεθοῦν αἱ διέδροι γωνίας, τὰς ὁποίας σχηματίζουν αἱ παράπλευροι ἔδραι, μὲ τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως.

3ον. Λαμβάνομεν τὰ συμμετρικὰ σημεῖα Α', Β', Γ', Δ' τῶν σημείων Α, Β, Γ, Δ πρὸς τὴν κορυφήν Σ. Ποῖον εἶναι τὸ στερεόν, τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφᾶς

τὰς Α, Β, Γ, Δ, Α', Β', Γ', Δ'. Ποῖος εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ αὐτοῦ καὶ ὁ λόγος τοῦ πρὸς τὸν ὄγκον τῆς πυραμίδος.

2479. (2514). Ἡ βᾶσις μιᾶς κανονικῆς πυραμίδος ΣΑΒΓΔ εἶναι τετράγωνον πλευρᾶς α, ἡ δὲ παράπλευρος ἀκμὴ τῆς ΣΒ εἶναι ἴση μὲ β.

1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος καὶ ἡ ὀλικὴ ἐπιφάνειά τῆς.

2ον. Κόπτομεν τὴν πυραμίδα αὐτὴν μὲ ἓνα ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν βᾶσιν τῆς, τὸ ὅποιον ἄγεται ἀπὸ τὸ μέσον τοῦ ὕψους τῆς· νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος καὶ ἡ ὀλικὴ ἐπιφάνεια τῆς κολούρου πυραμίδος, ἡ ὁποία προκύπτει·

2480. (2515). Δίδεται τὸ ὀρθογώνιον καὶ ἰσοσκελὲς τρίγωνον ΑΒΓ, (ΑΒ=ΑΓ=α). Ἀπὸ τὸ Β φέρομεν κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς τμῆμα ΒΟ=α√2 καὶ φέρομεν τὰς ΟΑ καὶ ΟΓ.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὅλαι αἱ ἔδραι τοῦ τετραέδρου ΟΑΒΓ εἶναι ὀρθογώνια τρίγωνα.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ΓΑ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΟΒΑ καὶ ὅτι τὸ ὕψος ΒΗ τοῦ τριγώνου ΑΒΟ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΟΑΓ.

3ον. Νὰ ὑπολογισθῇ, συναρτήσῃ τοῦ α, ὁ ὄγκος καὶ ἡ ὀλικὴ ἐπιφάνεια τετραέδρου ΟΑΒΓ.

2481. (2516). Δίδεται ἓνα τετράγωνον ΑΒΓΔ πλευρᾶς 20 ἐκ. Ἀπὸ τὰς κορυφὰς τοῦ τετραγώνου φέρομεν καθέτους ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτοῦ καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος αὐτοῦ καὶ ἐπὶ τῶν καθέτων αὐτῶν λαμβάνομεν τμήματα ΑΑ'=30 ἐκ., ΒΒ'=10 ἐκ. καὶ ΓΓ'=40 ἐκ. Τὸ ἐπίπεδον Α'Β'Γ' τέμνει τὴν κάθετον, ἡ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ σημεῖον Δ εἰς τὸ σημεῖον Δ'.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ Α'Β'Γ'Δ' εἶναι ἓνα παραλληλόγραμμον, ὅτι τὸ κέντρον του προβάλλεται εἰς τὸ κέντρον τοῦ τετραγώνου καὶ ὅτι ἡ ΒΔ εἶναι ὀρθογώνιος πρὸς τὴν Α'Γ'.

2ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ΔΔ' καὶ ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ Α'Β'Γ'Δ'ΑΒΓΔ.

3ον. Τὸ ἐπίπεδον Α'Β'Γ' κινεῖται περὶ τὴν διαγώνιον Α'Γ', ἡ ὁποία εἶναι ὠρισμένη. Νὰ προσδιορισθῇ τὸ Β' εἰς τρόπον, ὥστε τὸ τετράπλευρον Α'Β'Γ'Δ' νὰ εἶναι α') ὀρθογώνιον, β') ῥόμβος. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ΒΒ' καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις.

2482. (2517). Δίδεται ἓνα τετράεδρον ΣΑΒΓ εἰς τὸ ὅποιον εἶναι

$$\widehat{ΑΣΒ} = \widehat{ΒΣΓ} = \widehat{ΓΣΑ} = 30^\circ \text{ καὶ } ΣΑ = ΣΒ = ΣΓ = λ :$$

1ον. Νὰ προσδιορισθοῦν τὰ σημεῖα Β' ἐπὶ τῆς ΣΒ καὶ Γ' ἐπὶ τῆς ΣΓ εἰς τρόπον, ὥστε τὸ τρίγωνον ΑΒ'Γ' νὰ εἶναι ἐλάχιστον;

2ον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τῶν δύο μερῶν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ τετραέδρου, εἰς τὰ ὅποια διαιρεῖται αὕτη ὑπὸ τοῦ τριγώνου ΑΒ'Γ'.

Η' Ομάς. **2483.** (2518). Ποῖος εἶναι τὸ μέγιστον πρῖσμα, τὸ ὅποιον δυναμέθα νὰ ἀποσπᾶσμεν ἀπὸ μίαν πυραμίδα δι' ἑνὸς ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βᾶσιν τῆς.

2484. (2519). Δίδεται ἓνα τετράεδρον ΑΒΓΔ' νὰ εὑρεθῇ ἓνα σημεῖον Μ, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεών του ἀπὸ τὰς τέσσαρας κορυφὰς του, νὰ εἶναι ἐλάχιστον.

2485. (2520). Ἐπὶ τῶν ἀκμῶν μιᾶς τριέδρου Ο, τῆς ὁποίας αἱ ἔδραι εἶναι ἴσαι, λαμβάνομεν μῆκην ΟΑ=ΟΒ=ΟΓ=λ. Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ κοινὴ τιμὴ τῶν ἐδρῶν αὐτῶν, ἵνα :

1ον. τὸ ἔμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τοῦ τετραέδρου ΟΑΒΓ, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν βᾶσιν τὴν ΑΒΓ, εἶναι μέγιστος;

2ον. ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου αὐτοῦ εἶναι μέγιστος;

2486. (2521). Δίδεται μία τρισσορθογώνιος τριέδρος Οxyz καὶ ἓνα σημεῖον Κ ἐντὸς αὐτῆς καὶ τοιοῦτον, ὥστε αἱ ἀποστάσεις του ἀπὸ τὰς ἕδρας Οyz, Οzx, Οxy εἶναι α, β, γ. Ἀπὸ τὸ Κ φέρομεν ἓνα ἐπίπεδον Π, τὸ ὁποῖον τέμνει τὰς ἀκμὰς Οx, Οy, Οz εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $\frac{\alpha}{OA} + \frac{\beta}{OB} + \frac{\gamma}{OG} = 1$, καὶ ἀντιστρόφως.

2ον. Πῶς πρέπει νὰ ἐκλεγῇ τὸ ἐπίπεδον Π, ἵνα ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου ΟΑΒΓ εἴναι ἐλάχιστος;

2487. (2522). Διὰ τῶν πλευρῶν, μήκους α, ἑνὸς κανονικοῦ ἑξαγώνου ΑΒΓΔΕΖ φέρομεν 6 καθέτους ἕδρας ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ ἑξαγώνου, τὰς ΑΒΑ'Β', ΒΓΒ'Γ', ..., καὶ λαμβάνομεν τρεῖς ἀκμὰς ΑΑ'=ΓΓ'=ΕΕ'=β. Ἐπειτα ἀπὸ τὸ σημεῖον Σ τοῦ ἄξονος τοῦ ἑξαγώνου, τὸ ὁποῖον κεῖται εἰς ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς βάσεως, μεγαλυτέραν τῆς β καὶ ἀπὸ ἐκάστην τῶν εὐθειῶν Α'Γ', Γ'Ε', Ε'Α' φέρομεν ἐπίπεδα. Τὰ τρία ἐπίπεδα ΣΑ'Γ', ΣΓ'Ε', ΣΕ'Α' τέμνουσιν εἰς τὰ σημεῖα Β', Δ', Ζ', τὰς ἀκμὰς ΒΒ', ΔΔ', ΖΖ' καὶ ὀρίζουσιν οὕτω ἓνα στερεόν.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ δεκαέδρου αὐτοῦ εἶναι ἀνεξάρτητος τῆς θέσεως τοῦ Σ ἐπὶ τοῦ ἄξονος.

2ον. Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ θέσις τοῦ Σ, ἵνα ἡ ἐπιφάνεια τοῦ δεκαέδρου εἶναι ἐλάχιστη, (παραδεχόμεθα ὅτι τὰ α καὶ β ἔχουν ὀρισθῆ εἰς τρόπον, ὥστε νὰ ὑπάρχη ἐλάχιστος).

ΒΙΒΛΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ

ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ - ΚΩΝΟΣ - ΣΦΑΙΡΑ

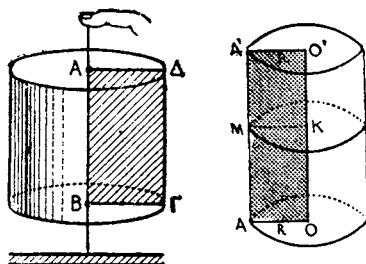
ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Α΄ ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ

Όροι και ιδιότητες

804. Κύλινδρος. *Κύλινδρος λέγεται τὸ στερεόν, τὸ ὁποῖον παράγεται ἀπὸ ἓνα ὀρθογώνιον $ΑΟΟ'Α'$, τὸ ὁποῖον στρέφεται περὶ μίαν πλευράν του, ἔστω τὴν $ΟΟ'$, κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, μέχρις ὅτου ἐπανέλθῃ εἰς τὴν ἀρχικὴν του θέσιν.*

Ἡ πλευρὰ $ΟΟ'$ τοῦ ὀρθογωνίου $ΑΟΟ'Α'$, περὶ τὴν ὁποίαν γίνεται ἡ στροφή του*, πρέπει νὰ μένῃ ἀμετάθετος κατὰ τὴν στροφήν τοῦ ὀρθογωνίου καὶ λέγεται **ἄξων τοῦ κυλίνδρου**.

Κατὰ τὴν στροφήν τοῦ ὀρθογωνίου, αἱ ἴσαι πλευραὶ $ΟΑ$ καὶ $Ο'Α'$ μένουσιν κάθετοι ἐπὶ τὸν ἄξονα $ΟΟ'$ καὶ σταθεραὶ κατὰ τὸ μέγεθος· διὰ τοῦτο γράφουσιν κύκλους ἴσους καὶ καθέτους ἐπὶ τὸν ἄξονα $ΟΟ'$



Σχ. 547.

Οἱ κύκλοι αὐτοὶ $(Ο, ΟΑ)$ καὶ $(Ο', Ο'Α')$ λέγονται **βάσεις** τοῦ κυλίνδρου καὶ ἡ ἀκτίς των R λέγεται **ἀκτίς** τοῦ κυλίνδρου.

Ἡ ἀπόστασις $ΟΟ'$ τῶν δύο βάσεων τοῦ κυλίνδρου λέγεται **ὑψος** αὐτοῦ.

Ἡ τετάρτη πλευρὰ $ΑΑ'$, κατὰ τὴν κίνησιν τοῦ ὀρθογωνίου $ΑΟΟ'Α'$, μένει παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα $ΟΟ'$ καὶ γράφει μίαν καμπύλην ἐπιφάνειαν, ἡ ὁποία λέγεται **κυρτὴ ἐπιφάνεια** τοῦ κυλίνδρου. Ἡ πλευρὰ αὐτὴ $ΑΑ'$, ἡ ὁποία γράφει τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου λέγεται **γενέτειρα**.

* Ὅπου ἀναφέρονται στερεὰ ἐκ περιστροφῆς πρέπει νὰ θεωρῆται, ὅτι ἡ εὐθεῖα περὶ τὴν ὁποίαν γίνεται ἡ στροφή, εἶναι ἀμετάθετος.

805. Κάθετος τομὴ κυλίνδρου. Κάθετος τομὴ ἑνὸς κυλίνδρου λέγεται ἡ τομὴ τοῦ κυλίνδρου ὑπὸ ἑνὸς ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονά του.

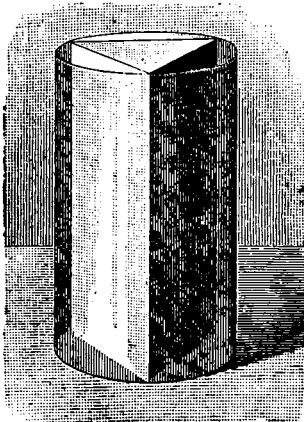
Εἶναι φανερόν, ὅτι: Ἡ κάθετος τομὴ ἑνὸς κυλίνδρου εἶναι κύκλος ἴσος καὶ παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις του.

Πράγματι ἔαν ἀπὸ τυχὸν σημεῖον M τῆς γενετείρας AA' (Σχ. 547) τοῦ κυλίνδρου, φέρωμεν κάθετον MK ἐπὶ τὸν ἄξονά του OO' , ἡ MK παράγει, κατὰ τὴν στροφὴν τοῦ ὀρθογωνίου $AOO'A'$, ἓνα ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα καὶ ἐπομένως παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις τοῦ κυλίνδρου· ἐπειδὴ δὲ ἡ KM μένει σταθερά, καὶ ἴση μὲ $OA = R$, τὸ σημεῖον M γράφει, εἰς τὸ ἐπίπεδον αὐτό, μιαν περιφέρειαν κύκλου, ἡ ὁποία ἔχει κέντρον τὸ K καὶ ἀκτίνα ἴσην μὲ τὴν ἀκτίνα R τοῦ κυλίνδρου.

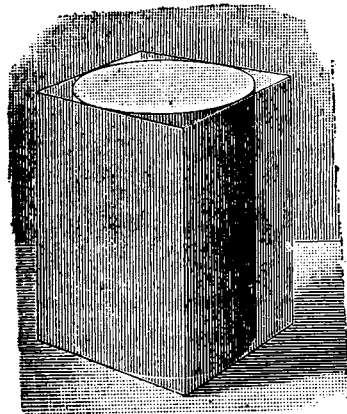
Σημ. Ἐὰν φέρωμεν ἓνα ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον νὰ διέρχεται ἀπὸ τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου, εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ τομὴ τοῦ κυλίνδρου, ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ, εἶναι ἓνα ὀρθογώνιον διπλάσιον τοῦ ὀρθογωνίου $AOO'A'$, τὸ ὁποῖον παράγει τὸν κύλινδρον.

Ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κυλίνδρου

806. Ἐγγεγραμμένα καὶ περιγεγραμμένα ὀρθὰ πρίσματα εἰς κύλινδρον. Ἐνα ὀρθὸν πρίσμα λέγεται ἐγγεγραμμένον εἰς ἓνα



Ἐγγεγραμμένον πρίσμα
Σχ. 548.



Περιγεγραμμένον πρίσμα
Σχ. 549.

κύλινδρον, ἔαν αἱ βάσεις του εἶναι ἐγγεγραμμέναι εἰς τὰς βάσεις τοῦ κυλίνδρου (Σχ. 548).

Ἐνα ὀρθὸν πρίσμα λέγεται περιγεγραμμένον περὶ κύλινδρον, ἐὰν αἱ βάσεις του εἶναι περιγεγραμμέναι περὶ τὰς βάσεις τοῦ κυλίνδρου (Σχ. 549).

807. Ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἐνὸς κυλίνδρου. Ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἐνὸς κυλίνδρου ὀνομάζομεν τὸ ὄριον πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει τὸ ἔμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας ἐνὸς ὀρθοῦ κανονικοῦ πρίσματος, ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύλινδρον, διὰ τὸ ἄριθμὸς τῶν πλευρῶν τῶν βάσεων του διπλασιάζεται ἀπεριορίστως.

808. Πρόβλημα. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἐνὸς κυλίνδρου, ἂν γνωρίζωμεν τὴν ἀκτῖνα τῆς βάσεώς του καὶ τὸ ὕψος του.

Κατὰ τὸν ὀρισμὸν, ποῦ ἐδώσαμεν εἰς τὴν § 807, πρέπει νὰ εὐρωμεν τὸ ὄριον πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει τὸ ἔμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας ἐνὸς ὀρθοῦ κανονικοῦ πρίσματος ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύλινδρον.

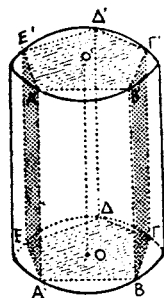
Πρὸς τοῦτο ἐγγράφομεν εἰς τὸν κύλινδρον $A\Delta'$ (Σχ. 550) ἓνα κανονικὸν ὀρθὸν πρίσμα $AB\Gamma\Delta E A' B' \Gamma' \Delta' E'$.

Γνωρίζομεν (§ 731) ὅτι τὸ ἔμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας ἐνὸς πρίσματος εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς περιμέτρου τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του· δηλ. εἶναι

ἔμβ. παραπλ. ἐπιφ. πρίσμ. = περίμετρ. βάσεως \times ὕψος.

Ἐὰν διπλασιάζωμεν ἀπεριορίστως τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τῶν βάσεων τοῦ πρίσματος αὐτοῦ, ἢ περίμετρος τῆς βάσεώς του τείνει πρὸς ἓνα ὄριον, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου· τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος μένει σταθερὸν καὶ ἴσον μὲ τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου. Ἀλλὰ τότε τὸ ἔμβαδὸν τῶν παραπλεύρων ἐπιφανειῶν τῶν πρισματίων, τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς τὸν κύλινδρον αὐτόν, ἔχει ἓνα ὄριον ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ μήκους τῆς περιφερείας τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Ἀλλὰ αὐτὸ τὸ ὄριον εἶναι, ἐξ ὀρισμοῦ, τὸ ἔμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου· δηλ. θὰ εἶναι:



Σχ. 550.

ἔμβ. κυρτ. ἐπιφ. κυλίνδρ. = μῆκος περιφερ. βάσ. \times ὕψος

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι :

Τὸ ἔμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κυλίνδρου εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ μήκους τῆς περιφερείας τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν μὲ R τὴν ἀκτῖνα τοῦ κυλίνδρου, μὲ u τὸ ὕψος του, τότε τὸ μήκος τῆς περιφερείας του θὰ εἶναι $2\pi R$ καὶ τὸ ἔμβαδὸν e τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του θὰ εἶναι
$$e = 2\pi R u$$
.

809. Ἐμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κυλίνδρου.

Ἐὰν εἰς τὸ ἔμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κυλίνδρου προσθέσωμεν τὰ ἔμβαδὰ τῶν δύο βάσεων του, δηλ. $2\pi R^2$, θὰ ἔχωμεν τὸ ἔμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου.

Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν μὲ E τὸ ἔμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κυλίνδρου, θὰ ἔχωμεν

$$E = 2\pi R u + 2\pi R^2 \quad \text{ἢ} \quad E = 2\pi R(u + R)$$

Ἀσκήσεις: 2488, 2489, 2490, 2491, 2492, 2493, 2494, 2495, 2496.

᾽Ογκος κυλίνδρου

810. ᾽Ογκος κυλίνδρου. ᾽Ογκον ἑνὸς κυλίνδρου ὀνομάζομεν τὸ ὄριον, πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει ὁ ὄγκος ἑνὸς ὀρθοῦ κανονικοῦ πρίσματος, ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύλινδρον, διὰ τὸ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῶν βάσεων του διπλασιάζεται ἀπεριορίστως.

811. Πρόβλημα. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος ἑνὸς κυλίνδρου, ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν ἀκτῖνα τῆς βάσεώς του καὶ τὸ ὕψος του.

Κατὰ τὸν ὀρισμὸν, ποὺ ἐδώσαμεν εἰς τὴν § 810, πρέπει νὰ εὔρωμεν τὸ ὄριον πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει ὁ ὄγκος ἑνὸς κανονικοῦ πρίσματος ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύλινδρον, διὰ τὸ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῶν βάσεων του διπλασιάζεται ἀπεριορίστως.

Πρὸς τοῦτο ἐγγράφομεν εἰς τὸν κύλινδρον ἓνα κανονικὸν πρίσμα $ΑΒΓΔΕΑ'Β'Γ'Δ'Ε'$ (Σχ. 550).

Γνωρίζομεν, ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος αὐτοῦ εἶναι ἴσος μὲ
$$\frac{1}{3} \text{ἔμβ.} ΑΒΓΔΕ \times \text{ὕψος.}$$

Ἐὰν διπλασιάζωμεν ἀπεριορίστως τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τῶν βάσεων τοῦ πρίσματος αὐτοῦ, τὸ ἔμβαδὸν τῆς βάσεως $ΑΒΓΔΕ$ ἔχει ὄριον τὸ ἔμβαδὸν τοῦ κύκλου O , ὁ ὁποῖος εἶναι ἡ βάση τοῦ κυλίνδρου,

τὸ ὕψος τοῦ πρίσματος μένει σταθερὸν καὶ ἴσον μὲ τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου· ἐπομένως ὁ ὄγκος τῶν πρισμαίων τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς τὸν κύλινδρον αὐτὸν ἔχει ἓνα ὄριον, ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου ἐπὶ τὸ ὕψος του.

Ἄλλὰ αὐτὸ τὸ ὄριον εἶναι, ἐξ ὀρισμοῦ, ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου· δηλ. θὰ εἶναι :

$$\boxed{\text{ὄγκος κυλίνδρου} = \text{ἐμβ. βασ. κυλίνδρου} \times \text{ὑψος}}.$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι :

Ὁ ὄγκος ἐνὸς κυλίνδρου εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

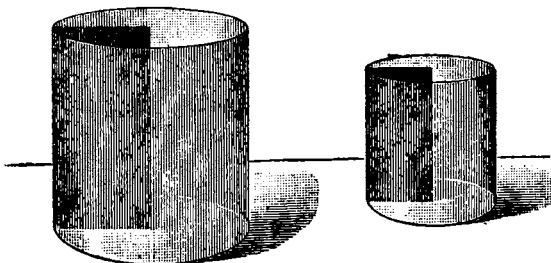
Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν μὲ R τὴν ἀκτίνα τοῦ κυλίνδρου καὶ μὲ υ τὸ ὕψος του, τότε τὸ ἐμβαδὸν τῆς βάσεώς του θὰ εἶναι πR^2 καὶ ἐπομένως ὁ ὄγκος του V θὰ εἶναι ἴσος μὲ

$$\boxed{V = \pi R^2 u}.$$

Ἀσκήσεις : 2497, 2498, 2499, 2500, 2501, 2502, 2503, 2504, 2505, 2506, 2507, 2508.

812. Ὅμοιοι κύλινδροι. Δύο κύλινδροι λέγονται ὅμοιοι, ἐὰν παράγονται ἀπὸ ὁμοία ὀρθογώνια (Σχ. 551).

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν τὰ ὕψη τῶν ὁμοίων κυλίνδρων ἔχουν



Σχ. 551.

λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν ἀκτίνων των, διότι τὰ ὕψη καὶ αἱ ἀκτίνες εἶναι αἱ διαστάσεις δύο ὁμοίων ὀρθογωνίων.

813. Θεώρημα. Τὰ ἐμβαδὰ τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν ἢ τῶν δλικῶν ἐπιφανειῶν δύο ὁμοίων κυλίνδρων ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν τετραγώνων τῶν ὕψων των ἢ μὲ τὸν λόγον τῶν τετραγώνων τῶν ἀκτίνων των.

Ἐπίδοσεις : Ἐστωσαν ε καὶ ε' τὰ ἐμβαδὰ τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν δύο ὁμοίων κυλίνδρων, υ, υ' τὰ ὕψη των καὶ R, R' αἱ ἀκτίνες των ἀντιστοιχῶς.

Συμπέρασμα: Θα δείξωμεν ὅτι $\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} = \frac{R^2}{R'^2} = \frac{v^2}{v'^2}$.

Ἀπόδειξις: Γνωρίζομεν ὅτι $\varepsilon = 2\pi Rv$ καὶ $\varepsilon' = 2\pi R'v'$.

Διαιροῦμεν τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} = \frac{2\pi Rv}{2\pi R'v'} \quad \eta \quad \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} = \frac{R}{R'} \cdot \frac{v}{v'} \quad (1)$$

Ἐπειδὴ τὰ ὀρθογώνια, τὰ ὁποῖα παράγουν τοὺς ὁμοίους κυλίνδρους εἶναι ὅμοια, θὰ εἶναι $\frac{R}{R'} = \frac{v}{v'}$ (2)

ἐπειδὴ ἡ ἰσότης (1) γράφεται $\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} = \frac{R^2}{R'^2} = \frac{v^2}{v'^2}$.

Ὅμοιος, ἐὰν παραστήσωμεν μὲ E καὶ E' τὰ ἔμβαδά τῶν ὀλικῶν ἐπιφανειῶν των, θὰ ἔχομεν

$$\frac{E}{E'} = \frac{2\pi R(v+R)}{2\pi R'(v'+R')} \quad \eta \quad \frac{E}{E'} = \frac{R}{R'} \cdot \frac{v+R}{v'+R'} \quad (3)$$

Κατὰ τὴν ιδιότητα τῶν ἴσων κλασμάτων ἢ σχέσις (2) γράφεται

$$\frac{R}{R'} = \frac{v}{v'} = \frac{R+v}{R'+v'} \quad (4)$$

Ἄν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὴν ἰσότητα (3) τὸ $\frac{v+R}{v'+R'}$ μὲ τὰ ἴσα του, πὺ δίδει ἡ σχέσις (4), λαμβάνομεν $\frac{E}{E'} = \frac{R^2}{R'^2} = \frac{v^2}{v'^2}$.

Ἐδείχθη λοιπὸν, ὅτι: *Τὰ ἔμβαδά τῶν κυρτῶν. . .*

814. Θεώρημα. *Οἱ ὄγκοι δύο ὁμοίων κυλίνδρων ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν κύβων τῶν ἀκτίνων των ἢ μὲ τὸν λόγον τῶν κύβων τῶν ὑψῶν των.*

Ἐπίδοσις: Παριστῶμεν μὲ V καὶ V' τοὺς ὄγκους δύο ὁμοίων κυλίνδρων, μὲ v , v' τὰ ὑψη των καὶ μὲ R , R' τὰς ἀκτῖνας των.

Συμπέρασμα: Θα δείξωμεν ὅτι $\frac{V}{V'} = \frac{R^3}{R'^3} = \frac{v^3}{v'^3}$.

Ἀπόδειξις: Γνωρίζομεν ὅτι: $V = \pi R^2 v$ καὶ $V' = \pi R'^2 v'$.

Ἐὰν διαιρέσωμεν τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\frac{V}{V'} = \frac{\pi R^2 v}{\pi R'^2 v'} \quad \eta \quad \frac{V}{V'} = \frac{R^2}{R'^2} \cdot \frac{v}{v'} \quad (1)$$

Ἐπειδὴ $\frac{R}{R'} = \frac{v}{v'}$, διότι οἱ κύλινδροι εἶναι ὅμοιοι, ἡ ἰσότης (1) γίνεται $\frac{V}{V'} = \frac{R^3}{R'^3} = \frac{v^3}{v'^3}$.

Ἐδείχθη λοιπὸν, ὅτι: *Οἱ ὄγκοι δύο ὁμοίων. . .*

Ἀσκήσεις: 2509, 2510.

Ἀσκήσεις

2488. (2523). Θέλομεν νὰ βάψωμεν τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν μιᾶς κυλινδρικῆς στήλης, ἣ ὅποια ἔχει ὕψος 6,60 μ. καὶ διάμετρον βάσεως 0,55 μ. Πόσον θὰ πληρώσωμεν, πρὸς 12,50 δρ. τὸ τετρ. μέτρον.

2489. (2524). Μία κυλινδρική στήλη ἔχει ὕψος 7,40 μ. καὶ ἡ περιφέρεια τῆς βάσεώς της ἔχει μῆκος 1,44 μέτρ. Πόσα μέτρα χάρτου πλάτους 1,20 μ. θὰ χρειασθῶμεν διὰ νὰ καλύψωμεν τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειάν της ;

2490. (2525). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κυλίνδρου, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτίς τῆς βάσεώς του εἶναι 0,30 μ. καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας του 5,60 τετρ. μέτρα.

2491. (2526). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κυλίνδρου, τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος εἶναι 1,50 μέτρα καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας του 10 τετρ. μέτρα.

2492. (2527). Πόση εἶναι ἡ ἀκτίς τῆς βάσεως μιᾶς κυλινδρικῆς δεξαμενῆς, τῆς ὁποίας τὸ βάθος εἶναι 0,80 μ. καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας της 6,28 τετρ. μέτρα ;

2493. (2528). Νὰ ὑπολογισθοῦν ἡ ἀκτίς καὶ τὸ ὕψος ἑνὸς κυλίνδρου, εἰάν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ ἀκτίς του εἶναι διπλασία τοῦ ὕψους του καὶ ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἐμβαδὸν κύκλου ἀκτίνος 5 μέτρων.

2494. (2529). Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κυλίνδρου εἶναι 6 τετρ. μέτρα καὶ ἡ ἀκτίς τῆς βάσεώς του 0,40 μέτρα. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος του.

2495. (2530). Τὰ ἐμβαδὰ τῶν κυρτῶν ἐπιφανεϊῶν δύο κυλίνδρων, οἱ ὁποῖοι ἔχουν ἴσα ὕψη, ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν ἀκτίνων των.

2496. (2531). Τὰ ἐμβαδὰ τῶν κυρτῶν ἐπιφανεϊῶν δύο κυλίνδρων, οἱ ὁποῖοι ἔχουν ἴσας βάσεις, ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν ὕψων των.

2497. (2532). Τὸ ὕψος ἑνὸς κυλίνδρου εἶναι 3,4 μ. καὶ ἡ διάμετρος τῆς βάσεώς του 0,90 μ. Πόσον εἶναι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας του καὶ ὁ ὄγκος του ;

2498. (2533). Ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως ἑνὸς κυλίνδρου εἶναι 3,768 μ. καὶ τὸ ὕψος του 3,20 μ. Πόση εἶναι ἡ ὀλικὴ ἐπιφάνειά του καὶ ὁ ὄγκος του.

2499. (2534). Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος ἑνὸς κυλινδρικοῦ δοχείου, εἰάν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του εἶναι 6,20 τετρ. μέτρα καὶ ἡ ἀκτίς τῆς βάσεώς του 0,60 μέτρ.

2500. (2535). Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κυλίνδρου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς κύκλου ἀκτίνος 2 μ. καὶ τὸ ὕψος του εἶναι 2,40 μέτρα. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου.

2501. (2536). Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος ἑνὸς κυλίνδρου, τοῦ ὁποίου τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του εἶναι 226,08 τετρ. δεκατομ. καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας του 326,56 τετρ. δεκατ.

2502. (2537). Ἐνας κύλινδρος, τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἀκτίνα του, ἔχει ὄγκον 392 τετρ. δεκατ. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος του καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας του ;

2503. (2538). Μία δεξαμενὴ ἔχει σχῆμα κυλίνδρου, τοῦ ὁποίου ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως εἶναι 6,28 μέτρα. Ἡ δεξαμενὴ εἶναι γεμάτη κατὰ τὰ $\frac{4}{5}$ καὶ

περιέχει 12,5564 κ. μέτρα νεροῦ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ βάθος τῆς δεξαμενῆς.

2504. (2539). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος ἐνὸς κυλινδρικοῦ δοχείου ἀκτίνος 45 ἐκ., ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ἐχρειάσθημεν 3,50 τετρ. μέτρα ψευδαργύρου διὰ νὰ τὸ κατασκευάσωμεν (τὸ δοχεῖον ἔχει μίαν μόνον βάσιν).

2505. (2540). Θέλομεν νὰ κατασκευάσωμεν μίαν κυλινδρικήν δεξαμενήν, ἣ ὅποια νὰ χωρῇ 25 κυβ. μέτρ. νερό. Πόσον πρέπει νὰ εἶναι τὸ βάθος τῆς, εἰάν τὸ ἀνοιγμά της εἶναι περιφέρεια κύκλου μήκους 3,20 μέτρων.

2506. (2541). Ἡ ἐσωτερικὴ ἀκτίς ἐνὸς κυλινδρικοῦ πύργου εἶναι 1,40 μέτρα· τὸ πάχος τῶν τοίχων του εἶναι 0,60 μέτρα καὶ ὁ ὄγκος τῶν τοίχων του εἶναι 90 κυβ. μέτρα. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος τοῦ πύργου.

2507. (2542). Τί γίνεται ὁ ὄγκος ἐνὸς κυλίνδρου:

1ον. Ἐὰν διπλασιάσωμεν τὴν ἀκτίνα τῆς βάσεώς του;

2ον. Ἐὰν διπλασιάσωμεν τὸ ὕψος του;

2508. (2543). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὁ ὄγκος ἐνὸς κυλίνδρου εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του ἐπὶ τὸ ἥμισυ τῆς ἀκτίνος του.

2509. (2544). Ἐνας κύλινδρος ἔχει 4 μέτρα ὕψος καὶ ἀκτίνα βάσεως 2 μ. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαστάσεις ἐνὸς κυλίνδρου, ὁμοίου πρὸς τὸν πρῶτον, τοῦ ὁποίου ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια εἶναι τὸ ἓνα τρίτον τῆς ἐπιφανείας τοῦ πρῶτου.

2510. (2545). Ἔχομεν ἓνα κυλινδρικὸν δοχεῖον ἀκτίνος 20 ἐκ. καὶ βάθους 30 ἐκ. Θέλομεν νὰ κατασκευάσωμεν ἓνα ἄλλο δοχεῖον ὁμοιον πρὸς τὸ πρῶτον, τοῦ ὁποίου ὁμως ἡ χωρητικότης νὰ εἶναι τριπλασία. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαστάσεις τοῦ δευτέρου δοχείου.

Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν ἐπὶ τοῦ Α' Κεφαλαίου

Α' Ὁμάς. 2511. (2546). Τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἐνὸς κυλίνδρου εἶναι ϵ καὶ ὁ ὄγκος του V . Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος του καὶ ἡ ἀκτίς τῆς βάσεώς του.

2512. (2547). Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας ἐνὸς κυλίνδρου εἶναι E καὶ τὸ ὕψος του ἴσον μὲ τὴν διάμετρον τῆς βάσεώς του. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος του.

2513. (2548). Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας ἐνὸς κυλίνδρου εἶναι E καὶ ἡ περιφέρεια τῆς βάσεώς του ἔχει μήκος Γ . Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος του.

2514. (2549). Ὁ ὄγκος ἐνὸς κυλίνδρου εἶναι V καὶ τὸ ὕψος του ν . Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας του.

2515. (2550). Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας ἐνὸς κυλίνδρου εἶναι E καὶ τὸ ὕψος του ν . Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτίς του καὶ ὁ ὄγκος του.

Β' Ὁμάς. 2516. (2551). Ἐνα τετράγωνον $ΑΒΓΔ$ πλευρᾶς a στρέφεται περὶ μίαν πλευράν του $ΒΓ$ καὶ παράγει ἓνα κύλινδρον φέρομεν μίαν εὐθείαν $ΜΝ$ παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα $ΒΓ$ καὶ ἐξετάζομεν τὸν κύλινδρον, πού παράγει τὸ ὀρθογώνιον $ΜΒΓΝ$, ὅταν στραφῇ περὶ τὴν $ΒΓ$.

1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ $ΜΒ$ κατὰ τοιοῦτον τρόπον, ὥστε ὁ ὄγκος τοῦ κυλίνδρου, πού παράγει τὸ $ΑΒΓΔ$ νὰ εἶναι διπλάσιος ἀπὸ τὸν ὄγκον τοῦ κυλίνδρου, πού παράγει τὸ $ΜΒΓΝ$.

2ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ $ΜΒ$ οὕτως, ὥστε ἡ ὀλικὴ ἐπιφάνεια τοῦ κυλίνδρου,

ποῦ παράγει τὸ ΑΒΓΔ νὰ εἶναι διπλασία τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας, ποῦ παράγει τὸ ΜΒΓΝ. Νὰ ἐξετασθῇ καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις, ἂν αἱ ἀριθμητικαὶ τιμαὶ τῆς ΜΒ παριστάνουν ἓνα γεωμετρικὸν σχῆμα καὶ νὰ κατασκευασθοῦν γεωμετρικῶς αἱ τιμαὶ τῆς ΜΒ.

2517. (2552). Ἐνα ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ στρέφεται περὶ μίαν εὐθεῖαν ΧΥ, ἣ ὁποία κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ὀρθογωνίου καὶ εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς πλευρὰς ΑΒ καὶ ΓΔ καὶ ἣ ὁποία δὲν τέμνει τὸ ὀρθογώνιον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας καὶ ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ, ποῦ παράγει κατὰ τὴν στροφὴν του, εἶναι ἀντιστοίχως ἴσα μὲ τὰ γινόμενα τῆς περιφερείας, τὴν ὁποίαν γράφει τὸ κέντρον τοῦ ὀρθογωνίου ἐπὶ τὴν περίμετρον ἢ ἐπὶ τὸ ἐμβαδὸν τοῦ ὀρθογωνίου αὐτοῦ.

2518. (2553). Δίδεται μία ὀρθὴ γωνία ΧΟΥ καὶ ἓνα σημεῖον Σ εἰς τὸ ἐσωτερικὸν αὐτῆς καὶ τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἀποστάσεις 2ν ἀπὸ τὰς πλευρὰς τῆς γωνίας· ἀπὸ τὸ Σ φέρομεν μίαν εὐθεῖαν, ἣ ὁποία τέμνει τὴν πλευρὰν ΟΧ εἰς τὸ Α καὶ τὴν ΟΥ εἰς τὸ Β καὶ κατασκευάζομεν τὸ ὀρθογώνιον ΟΑΓΒ. Νὰ ὑπολογισθῇ, συναρτήσῃ τοῦ ν, ὁ λόγος τοῦ ὄγκου πρὸς τὴν ὀλικὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κυλίνδρου, ὁ ὁποῖος παράγεται ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον αὐτό, διὰν στραφῇ περὶ τὴν ΟΥ.

2519. (2554). Νὰ τμηθῇ κύλινδρος, δι' ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν οὕτως, ὥστε ἡ βᾶσις τοῦ κυλίνδρου νὰ εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν δύο μερῶν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του εἰς τὰ ὁποῖα διαιρεῖται αὐτὴ ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου.

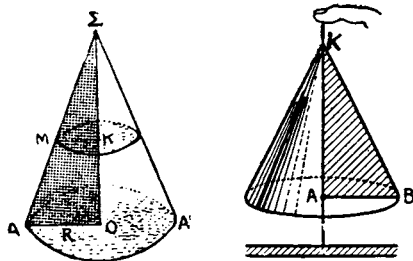
2520. (2555). Ἐνας κῆπος ἔχει σχῆμα ἑνὸς ὀρθογωνίου τριγώνου· ἡ περίμετρος του εἶναι 180 μέτρα. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι σχηματίζουν ἀριθμητικὴν προόδον. Θέλομεν νὰ ἀνοίξωμεν ἓνα πηγάδι κυλινδρικόν, τοῦ ὁποίου ὁ ἄξων νὰ ἀπέχη ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὰς τρεῖς κορυφὰς τοῦ τριγώνου. Πόση θὰ εἶναι αὐτὴ ἡ ἀπόστασις; Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἔξοδα τοῦ πηγαδιοῦ, ἐὰν τὸ βάθος του εἶναι 15 μέτρα, ἡ διάμετρος του 1 μέτρο. καὶ ὁ τοίχος του ἔχει 0,40 μέτρο. πάχος. Γνωρίζομεν, ὅτι διὰ τὸ κτίσιμον πληρώνομεν 70 δραχ. κατὰ κυβικὸν μέτρον καὶ διὰ τὴν ἐξαγωγήν τοῦ χώματος 45 δραχμ. τὸ κυβικὸν μέτρον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Β΄

ΚΩΝΟΣ ΚΑΙ ΚΟΛΟΥΡΟΣ ΚΩΝΟΣ

Ὅρισμοὶ καὶ ἰδιότητες

815. Κώνος. *Κώνος* λέγεται τὸ στερεόν, τὸ ὁποῖον παράγεται ἀπὸ ἓνα ὀρθογώνιον τρίγωνον $\Sigma O A$ (Σχ. 551), τὸ ὁποῖον στρέφεται



Σχ. 551.

περὶ μίαν κάθετον πλευρὰν του, ἔστω τὴν ΣO , κατὰ τὴν αὐτὴν φοράν, μέχρις ὅτου ἐπανεέλθῃ εἰς τὴν ἀρχικὴν του θέσιν.

Ἡ πλευρὰ ΣO τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $\Sigma O A$ περὶ τὴν ὁποίαν γίνεται ἡ στροφή του, πρέπει νὰ μένῃ ἀμετάθετος κατὰ τὴν στροφήν τοῦ

τριγώνου καὶ λέγεται **ἄξων τοῦ κώνου**.

Τὸ σημεῖον Σ λέγεται **κορυφή τοῦ κώνου**.

Κατὰ τὴν στροφήν τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, ἡ πλευρὰ $O A$ μένει κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα ΣO καὶ σταθερὰ κατὰ τὸ μέγεθος· διὰ τοῦτο γράφει ἓνα κύκλον, ὁ ὁποῖος εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸν ἄξονα· ὁ κύκλος αὐτός ($O, O A$) λέγεται **βάσις τοῦ κώνου** καὶ ἡ ἀκτίς του $O A$ λέγεται **ἀκτίς τοῦ κώνου**.

Ἡ ὑποτείνουσα ΣA τοῦ ὀρθ. τριγώνου γράφει μίαν καμπύλην ἐπιφάνειαν, ἡ ὁποία λέγεται **κυρτὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου**.

Ἡ ὑποτείνουσα ΣA λέγεται **γενέτειρα** τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου ἢ καὶ **πλευρὰ** τοῦ κώνου ἢ καὶ **ἀπόστημα** αὐτοῦ.

Ἡ ἀπόστασις τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου ἀπὸ τὴν βάσιν του λέγεται **ὑψος τοῦ κώνου**· π.χ. ὕψος τοῦ κώνου $\Sigma A A'$ εἶναι τὸ ΣO .

816. Κάθετος τομὴ κώνου. *Κάθετος τομὴ* ἐνὸς κώνου λέγεται ἡ τομὴ τοῦ κώνου ὑπὸ ἐνὸς ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὸν ἄξονά του.

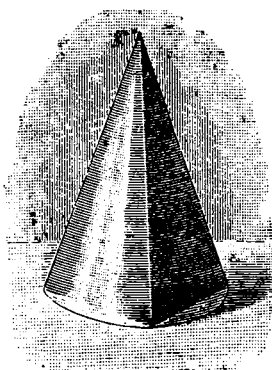
Εἶναι φανερόν, ὅτι: *Ἡ κάθετος τομῆ ἐνὸς κώνου εἶναι ἓνας κύκλος παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν του.*

Πράγματι· ἐὰν ἀπὸ τυχόν σημείου M (Σχ. 551) τῆς πλευρᾶς ΣA τοῦ κώνου Σ φέρωμεν τὴν κάθετον MK ἐπὶ τὸν ἄξονά του, ἢ KM παράγει, κατὰ τὴν στροφὴν τοῦ ὀρθ. τριγώνου ΣOA , ἓνα ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα ΣO καὶ ἐπομένως παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν τοῦ κώνου· ἐπειδὴ δὲ ἡ KM μένει σταθερά, κατὰ τὴν στροφὴν, τὸ σημεῖον M γράφει, εἰς τὸ ἐπίπεδον αὐτό, μίαν περιφέρειαν κύκλου, ἢ ὁποία ἔχει κέντρον τὸ K .

Σημ. Ἐὰν φέρωμεν ἓνα ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον νὰ διέρχεται ἀπὸ τὸν ἄξονα τοῦ κώνου, εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ τομῆ τοῦ κώνου ὑπὸ τοῦ ἐπίπεδου αὐτοῦ εἶναι ἓνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον, διπλάσιον τοῦ ὀρθογ. τριγώνου, τὸ ὁποῖον παράγει τὸν κώνον.

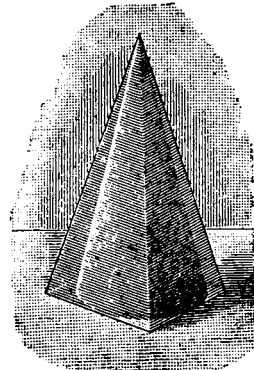
Ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας ἐνὸς κώνου

817. Ἐγγεγραμμένα καὶ περιγεγραμμένα πυραμίδες εἰς κώνον. *Μία πυραμὶς λέγεται ἐγγεγραμμένη εἰς κώνον* (Σχ. 552)



Ἐγγεγραμμένη πυραμὶς

Σχ. 552.



Περιγεγραμμένη πυραμὶς

Σχ. 553.

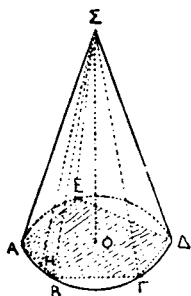
ἐὰν ἡ πυραμὶς αὐτὴ ἔχη κοινὴν κορυφὴν μὲ τὸν κώνον καὶ ἡ βάσις της εἶναι ἐγγεγραμμένη εἰς τὴν βάσιν τοῦ κώνου.

Μία πυραμὶς λέγεται περιγεγραμμένη περὶ κώνον, ἐὰν ἡ πυραμὶς αὐτὴ ἔχη κοινὴν κορυφὴν μὲ τὸν κώνον καὶ ἡ βάσις της εἶναι περιγεγραμμένη περὶ τὴν βάσιν τοῦ κώνου (Σχ. 553).

818. Ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἐνὸς κώνου. Ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἐνὸς κώνου ὀνομάζομεν τὸ ὄριον πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει τὸ ἔμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας μιᾶς κανονικῆς πυραμίδος, ἐγγεγραμμῆς εἰς τὸν κώνον, ἐὰν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῆς βάσεώς της, διπλασιάζεται ἀπεριορίστως.

819. Πρόβλημα. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἐνὸς κώνου, ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν ἀκτίνα τῆς βάσεώς του καὶ τὴν πλευρὰν του.

Ἐστω ὁ κώνος ΣΑΔ (Σχ. 554)· κατὰ τὸν ὁρισμὸν, πὺν ἐδώσαμεν εἰς τὴν § 818, πρέπει νὰ εὑρωμεν τὸ ὄριον πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει τὸ ἔμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας μιᾶς κανονικῆς πυραμίδος, ἐγγεγραμμῆς εἰς τὸν κώνον αὐτόν, ὅταν ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῆς βάσεώς της διπλασιάζεται ἀπεριορίστως.



Σχ. 554.

Πρὸς τοῦτο ἐγγράφομεν εἰς τὸν κώνον μίαν κανονικὴν πυραμίδα ΣΑΒΓΔΕ (Σχ. 554). Γνωρίζομεν (§ 773) ὅτι τὸ ἔμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας μιᾶς κανονικῆς πυραμίδος εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τῆς περιμέτρου τῆς βάσεώς της ἐπὶ τὸ ἀπόστημά της (παράπλευρον ὕψος). Ἐὰν

ΣΗ εἶναι τὸ παράπλευρον ὕψος τῆς κανονικῆς πυραμίδος, θὰ εἶναι :

$$\text{ἔμβ. παρ. ἐπιφ. πυρ.} = \frac{1}{2} \text{περιμέτρου βάσεως} \times \text{ΣΗ.}$$

Ἐὰν διπλασιάζωμεν ἀπεριορίστως τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος, ἡ περίμετρος τῆς βάσεως αὐτῆς τείνει πρὸς ἓνα ὄριον, τὸ ὁποῖον εἶναι τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τῆς βάσεως τοῦ κώνου· τὸ παράπλευρον ὕψος ΣΗ τείνει πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου· ἀλλὰ τότε τὸ ἔμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τῆς πυραμίδος ἔχει ἓνα ὄριον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τοῦ μῆκους τῆς περιφερείας τῆς βάσεως τοῦ κώνου ἐπὶ τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου· ἀλλὰ αὐτὸ τὸ ὄριον εἶναι, ἔξ ὁρισμοῦ, τὸ ἔμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, δηλ. εἶναι :

$$\text{ἔμβ. κυρτ. ἐπιφ. κώνου} = \frac{1}{2} \text{μῆκ. περιφερείας βάσ.} \times \text{πλευρὰν.}$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι :

Τὸ ἔμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἐνὸς κώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ γινομένου τοῦ μῆκους τῆς περιφερείας τῆς βάσεώς του ἐπὶ πλευρὰν του.

Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν μὲ R τὴν ἀκτῖνα τῆς βάσεως ἑνὸς κώνου καὶ μὲ λ τὴν πλευρὰν του, τότε τὸ μῆκος τῆς περιφερείας του θὰ εἶναι $2\pi R$ καὶ τὸ ἔμβαδὸν ϵ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του θὰ εἶναι

$$\epsilon = \frac{1}{2} \cdot 2\pi R \cdot \lambda \quad \text{ἢ} \quad \boxed{\epsilon = \pi R \lambda}.$$

820. Ἐμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κώνου. Ἐὰν εἰς τὸ ἔμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κώνου προσθέσωμεν καὶ τὸ ἔμβαδὸν τῆς βάσεώς του, δηλ. τὸ πR^2 , θὰ ἔχωμεν τὸ ἔμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου.

Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν μὲ E τὸ ἔμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κώνου, θὰ ἔχωμεν

$$E = \pi R \lambda + \pi R^2 \quad \text{ἢ} \quad \boxed{E = \pi R(\lambda + R)}.$$

*Ασκήσεις: 2521, 2522, 2523, 2524, 2525, 2526, 2527, 2528, 2529.

*Ογκος κώνου

821. *Ογκος κώνου. *Ογκον ἑνὸς κώνου ὀνομάζομεν τὸ ὄριον, πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει ὁ ὄγκος μιᾶς κανονικῆς πυραμίδος, ἐγγεγραμμένης εἰς τὸν κώνον, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῆς βάσεώς της διπλασιάζεται ἀπεριορίστως.

822. Πρόβλημα. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος ἑνὸς κώνου, ἐὰν γνωρίζωμεν τὴν ἀκτῖνα τῆς βάσεώς του καὶ τὸ ὕψος του.

Ἐστω ὁ κώνος $\Sigma\Lambda\Delta$ (Σχ. 554)· κατὰ τὸν ὀρισμὸν, πού ἐδώσαμεν εἰς τὴν § 820, πρέπει νὰ εὔρωμεν τὸ ὄριον πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει ἡ ὄγκος μιᾶς κανονικῆς πυραμίδος, ἐγγεγραμμένης εἰς τὸν κώνον, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν της διπλασιάζεται ἀπεριορίστως.

Πρὸς τοῦτο ἐγράφομεν εἰς τὸν κώνον αὐτὸν μίαν κανονικὴν πυραμίδα $\Sigma\Lambda\Gamma\Delta\epsilon$ (Σχ. 554).

Γνωρίζομεν, ὅτι ὁ ὄγκος μιᾶς πυραμίδος εἶναι ἴσος μὲ

$$\frac{1}{3} \text{ ἔμβ. βασ. } \Lambda\Gamma\Delta\epsilon \times \text{ὑψος.}$$

Ἐὰν διπλασιάζωμεν ἀπεριορίστως τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος αὐτῆς, τότε τὸ ἔμβαδὸν τῆς βάσεώς της θὰ ἔχη ἓνα ὄριον, τὸ ὁποῖον θὰ εἶναι τὸ ἔμβαδὸν τοῦ κύκλου O , ὁ ὁποῖος εἶναι ἡ βᾶσις τοῦ κώνου· τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος μένει σταθερὸν καὶ ἴσον μὲ τὸ ὕψος τοῦ κώνου. Ἐπομένως ὁ ὄγκος τῶν πυραμίδων, τῶν

ἔγγεγραμμένων εἰς τὸν κώνον, ἔχει ἓνα ὄριον ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ τρίτου τοῦ ἔμβαδοῦ τῆς βάσεως τοῦ κώνου ἐπὶ τὸ ὕψος του· ἀλλὰ αὐτὸ τὸ ὄριον εἶναι, ἕξ ὀρισμοῦ, ὁ ὄγκος τοῦ κώνου· δηλ. εἶναι

$$\text{ὄγκ. κώνου} = \frac{1}{3} \text{ ἔμβ. βάσεως} \times \text{ὑψος.}$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι :

Ὁ ὄγκος ἐνὸς κώνου εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἓνα τρίτον τοῦ γινομένου τοῦ ἔμβαδοῦ τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ ὕψος του.

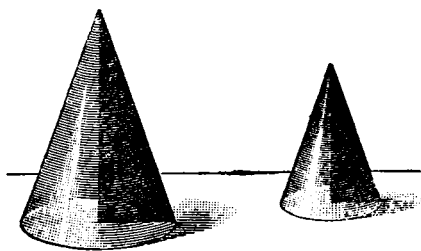
Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν μὲ R τὴν ἀκτῖνα τῆς βάσεως τοῦ κώνου καὶ μὲ υ τὸ ὕψος του, τότε τὸ ἔμβαδὸν τῆς βάσεώς του εἶναι ἴσον

μὲ πR^2 καὶ ἐπομένως εἶναι

$$\text{ὄγκ. κώνου} = \frac{1}{3} \pi R^2 u$$

Ἀσκήσεις : 2530, 2531, 2532, 2533, 2534, 2535, 2536, 2537, 2538, 2539, 2540, 2541, 2542, 2543, 2544, 2545, 2546, 2547, 2548.

823. Ὅμοιοι κώνοι. Δύο κώνοι λέγονται ὅμοιοι, ἐὰν παραγῶνται ἀπὸ ὁμοία ὀρθογώνια τρίγωνα, τὰ ὁποῖα στρέφονται περὶ ὁμολόγους καθέτους πλευράς.



Σχ. 555.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν : Τὰ ὕψη τῶν ὁμοίων κώνων ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν ἀκτίνων των, ἢ μὲ τὸν λόγον τῶν πλευρῶν των.

Διότι εἶναι, ἀντιστοιχῶς, αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ τῶν ὁμοίων τριγώνων, τὰ ὁποῖα παράγουν τοὺς κώνους.

824. Θεώρημα. Τὰ ἔμβαδὰ τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν ἢ τὰ ἔμβαδὰ τῶν ὀλικῶν ἐπιφανειῶν δύο ὁμοίων κώνων ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν των ἢ μὲ τὸν λόγον τῶν τετραγώνων τῶν ἀκτίνων των.

Ἐπίδοξις : Ἐστωσαν ε καὶ ε' τὰ ἔμβαδὰ τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν δύο ὁμοίων κώνων, Ε καὶ Ε' τὰ ἔμβαδὰ τῶν ὀλικῶν ἐπιφανειῶν των, R, R' αἱ ἀκτῖνες των καὶ λ, λ' αἱ πλευραὶ των, ἀντιστοιχῶς.

Συμπέρασμα : Θὰ δείξωμεν ὅτι : $\frac{\epsilon}{\epsilon'} = \frac{E}{E'} = \frac{R^2}{R'^2} = \frac{\lambda^2}{\lambda'^2}$.

*Απόδειξις: α') Γνωρίζομεν ὅτι: $\varepsilon = \pi R \lambda$ καὶ $\varepsilon' = \pi R' \lambda'$.

Διαιροῦμεν τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} = \frac{\pi R \lambda}{\pi R' \lambda'} \quad \eta \quad \frac{\varepsilon}{\varepsilon'} = \frac{R}{R'} \cdot \frac{\lambda}{\lambda'} \quad (1).$$

*Ἐπειδὴ τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα, τὰ ὁποῖα παραγούνη τοὺς κώνους, εἶναι ὁμοία, θὰ εἶναι:

$$\frac{R}{R'} = \frac{\lambda}{\lambda'} \quad (2).$$

ἐπομένως ἡ ἰσότης (1) γράφεται

$$\boxed{\frac{\varepsilon}{\varepsilon'} = \frac{R^2}{R'^2} = \frac{\lambda^2}{\lambda'^2}}.$$

β') Γνωρίζομεν ὅτι:

$$E = \pi R(R + \lambda) \quad \text{καὶ} \quad E' = \pi R'(R' + \lambda').$$

Διαιροῦμεν τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\frac{E}{E'} = \frac{\pi R(R + \lambda)}{\pi R'(R' + \lambda')} \quad \eta \quad \frac{E}{E'} = \frac{R}{R'} \cdot \frac{R + \lambda}{R' + \lambda'} \quad (3).$$

Κατὰ τὴν ιδιότητα τῶν ἴσων κλασμάτων ἡ ἰσότης (2) γράφεται

$$\frac{R}{R'} = \frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{R + \lambda}{R' + \lambda'}.$$

*Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (3) τὸ $\frac{R + \lambda}{R' + \lambda'}$ μὲ τὰ ἴσα του,

ποὺ δίδει ἡ σχέση (4) καὶ ἔχομεν

$$\boxed{\frac{E}{E'} = \frac{R^2}{R'^2} = \frac{\lambda^2}{\lambda'^2}}.$$

*Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: *Τὰ ἔμβαδά τῶν κυρτῶν...*

825. Θεώρημα. *Οἱ ὄγκοι δύο ὁμοίων κώνων ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν κύβων τῶν ἀκτῶν των ἢ τῶν ὕψων των.*

*Υπόθεσις: Παριστῶμεν μὲ V καὶ V' τοὺς ὄγκους δύο ὁμοίων κώνων, μὲ R, R' τὰς ἀκτῖνας των καὶ μὲ v, v' τὰ ὕψη των.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν ὅτι $\frac{V}{V'} = \frac{R^3}{R'^3} = \frac{v^3}{v'^3}$.

*Απόδειξις: Γνωρίζομεν ὅτι:

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 v \quad \text{καὶ} \quad V' = \frac{1}{3} \pi R'^2 v'.$$

Διαιροῦμεν τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν

$$\frac{V}{V'} = \frac{\pi R^2 v}{\pi R'^2 v'} \quad \eta \quad \frac{V}{V'} = \frac{R^2}{R'^2} \cdot \frac{v}{v'} \quad (1)$$

*Ἐπειδὴ $\frac{R}{R'} = \frac{v}{v'}$, ἡ ἰσότης (1) γράφεται

$$\boxed{\frac{V}{V'} = \frac{R^3}{R'^3} = \frac{v^3}{v'^3}}.$$

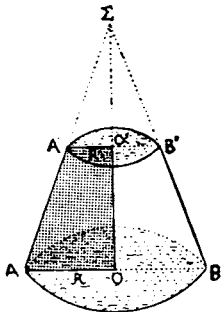
*Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: *Οἱ ὄγκοι δύο ὁμοίων...*

*Ἀσκήσεις: 2549, 2550, 2551, 2552.

Κόλουρος κώνος

826. Κόλουρος κώνος. Κόλουρος κώνος λέγεται τὸ μέρος ἐνὸς κώνου, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῆς βάσεως τοῦ κώνου καὶ ἐνὸς ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάση του (Σχ. 556).

Οἱ δύο παράλληλοι κύκλοι, μεταξὺ τῶν ὁποίων περιέχεται ἕνας κόλουρος κώνος, δηλ. ἡ βάση AB τοῦ κώνου καὶ ἡ τομὴ $A'B'$ αὐτοῦ, ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ παραλλήλου πρὸς τὴν βάση του, λέγονται **βάσεις τοῦ κολούρου κώνου**.



Σχ. 556.

Αἱ ἀκτῖνες τῶν δύο βάσεων αὐτῶν λέγονται **ἀκτῖνες τοῦ κολούρου κώνου**.

Ἡ ἀπόστασις OO' τῶν δύο βάσεων ἐνὸς κολούρου κώνου λέγεται **ὕψος αὐτοῦ**.

Κυρτὴ ἐπιφάνεια ἐνὸς κολούρου κώνου λέγεται τὸ μέρος τῆς ἐπιφανείας του, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῶν δύο βάσεων.

Πλευρὰ κολούρου κώνου λέγεται τὸ μέρος τῆς πλευρᾶς τοῦ ἀρχικοῦ κώνου, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῶν δύο βάσεών του.

Π.χ. πλευρὰ τοῦ κολούρου κώνου $ABB'A'$ εἶναι ἡ $A'A$.

Ὁ κόλουρος κώνος δύναται νὰ παραχθῆ καὶ ἀπὸ ἕνα ὀρθογώνιον τραπέζιον, π.χ. τὸ $AOO'A'$ (Σχ. 556), ἂν αὐτὸ στραφῆ περὶ τὸ ὕψος του OO' , κατὰ τὴν αὐτὴν φορᾶν, μέχρις ὅτου ἐπανέλθῃ εἰς τὴν ἀρχικὴν του θέσιν.

Κατὰ τὴν στροφὴν τοῦ τραπέζιου, αἱ βάσεις του OA καὶ $O'A'$ παράγουν τὰς βάσεις τοῦ κολούρου κώνου καὶ ἡ πλευρὰ AA' τοῦ τραπέζιου γράφει τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κολούρου κώνου.

Ἡ τομὴ κολούρου κώνου, ἡ ὁποία εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς βάσεις του καὶ ἡ ὁποία ἀπέχει ἴσον ἀπὸ αὐτάς, λέγεται **μέση τομὴ τῆς κολούρου κώνου**.

827. Ἐγγεγραμμένοι καὶ περιγεγραμμένοι κόλουροι πυραμίδες εἰς κόλουρον κώνον. Μία κόλουρος πυραμὶς λέγεται **ἐγγεγραμμένη εἰς ἕνα κόλουρον κώνον**, ἐὰν αἱ βάσεις της εἶναι ἐγγεγραμμένοι εἰς τὰς βάσεις τοῦ κολούρου κώνου.

Μία κόλουρος πυραμὶς λέγεται **περιγεγραμμένη περὶ ἕνα κόλουρον κώνον**, ἐὰν αἱ βάσεις της εἶναι περιγεγραμμένοι περὶ τὰς βάσεις τοῦ κολούρου κώνου.

828. Ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἐνὸς κολούρου κώνου. Ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἐνὸς κολούρου κώνου ὀνομάζομεν τὸ ὄριον πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει τὸ ἔμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας μιᾶς κανονικῆς κολούρου πυραμίδος, ἔγγεγραμμένης εἰς τὸν κόλουργον κώνον, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῶν βάσεων τῆς διπλασιάζεται ἀπεριορίστως.

829. Πρόβλημα. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἐνὸς κολούρου κώνου, ἐὰν γνωρίζωμεν τὰς ἀκτῖνας τῶν βάσεων του καὶ τὴν πλευρὰν του.

Ἐγγράφομεν εἰς τὸν κόλουργον κώνον μίαν κανονικὴν κολούρου πυραμίδα ΑΒΓΔΕΑ'Β'Γ'Δ'Ε' (Σχ. 557).

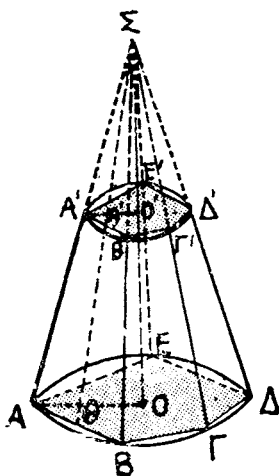
Γνωρίζομεν (§ 769) ὅτι τὸ ἔμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας μιᾶς κολούρου πυραμίδος εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἡμισθροίσματος τῶν περιμέτρων τῶν δύο βάσεων τῆς ἐπὶ τὸ ἀπόστημά της (παράπλευρον ὕψος). Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν μὲ Π καὶ Π' τὰς περιμέτρους τῶν δύο βάσεων τῆς κολούρου πυραμίδος ΑΔ' καὶ ἐὰν ΘΘ' εἶναι τὸ παράπλευρον ὕψος τῆς, θὰ εἶναι :

$$\text{ἐμβ. παραπλ. ἐπιφ. κολ. πυρ.} = \frac{1}{2}(\Pi + \Pi') \times \Theta\Theta'$$

Ἐὰν διπλασιάζωμεν ἀπεριορίστως τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τῶν βάσεων τῆς κολούρου αὐτῆς πυραμίδος, τότε αἱ περιμέτροι τῶν Π καὶ Π' τείνουν πρὸς ὄρια, τὰ ὁποῖα εἶναι, ἀντιστοίχως τὰ μήκη τῶν περιφερειῶν τῶν βάσεων τῆς κολούρου πυραμίδος· τὸ παράπλευρον ὕψος ΘΘ' τείνει πρὸς τὴν πλευρὰν τοῦ κολούρου κώνου. Ἐπομένως τὸ ἔμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τῆς κολούρου πυραμίδος ἔχει ἓνα ὄριον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἡμισθροίσματος τῶν μηκῶν τῶν περιφερειῶν τῶν βάσεων τοῦ κολούρου κώνου ἐπὶ τὴν πλευρὰν του· ἀλλὰ αὐτὸ τὸ ὄριον εἶναι, ἐξ ὀρισμοῦ, τὸ ἔμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κολούρου κώνου· ὥστε :

Τὸ ἔμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἐνὸς κολούρου κώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἡμισθροίσματος τῶν μηκῶν τῶν περιφερειῶν τῶν βάσεων του ἐπὶ τὴν πλευρὰν του.

Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν μὲ R καὶ R' τὰς ἀκτῖνας τῶν δύο



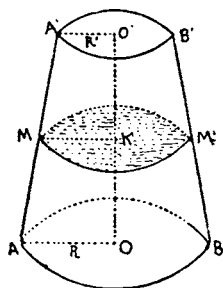
Σχ. 557.

βάσεων τοῦ κολούρου κώνου καὶ μὲ λ τὴν πλευρὰν του, τότε τὸ μῆκος τῶν περιφερειῶν τῶν δύο βάσεων του θὰ εἶναι $2\pi R$ καὶ $2\pi R'$ καὶ τὸ ἔμβαδὸν ε τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του θὰ εἶναι :

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(2\pi R + 2\pi R') \times \lambda \quad \eta$$

$$\text{Ἐμβ. κυρ. ἐπιφ. κολ. κών.} = \pi(R + R')\lambda$$

830. Πόρισμα. Ἐὰν ἀπὸ τὸ μέσον M τῆς πλευρᾶς AA (Σχ. 558) φέρομεν ἓνα ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις τοῦ κολούρου κώνου ABB'A', τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ θὰ ἀπέχῃ ἴσον ἀπὸ τὰς βάσεις καὶ θὰ



Σχ. 558.

τέμνῃ τὸν κόλουρον κώνον κατὰ ἓνα κύκλον MM', τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτίς θὰ εἶναι ἡ KM· ἀλλὰ ἡ ἀκτίς αὐτὴ KM εἶναι διάμεσος τοῦ τραπεζίου AOO'A' καὶ ἐπομένως εἶναι ἴση μὲ τὸ ἡμιᾶθροισμα τῶν βάσεων του R καὶ R'· δηλ. εἶναι $KM = \frac{R+R'}{2}$ ἢ $2KM = R+R'$

Ἐὰν εἰς τὴν ἰσότητα $\varepsilon = \pi(R+R')\lambda$ ἀντικαταστήσωμεν τὸ ἄθροισμα $R+R'$ μὲ τὸ ἴσον του $2KM$ λαμβάνομεν $\varepsilon = 2KM \cdot \pi \cdot \lambda$.

Ἐπειδὴ τὸ γινόμενον $2KM \cdot \pi$ παριστάνει τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου MM', δηλ. τῆς μέσης τομῆς τοῦ κολούρου κώνου ABB'A' συνάγομεν, ὅτι :

Τὸ ἔμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἐνὸς κολούρου κώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ μήκους τῆς περιφερείας τῆς μέσης τομῆς αὐτοῦ ἐπὶ τὴν πλευρὰν του.

831. Ἐμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας ἐνὸς κολούρου κώνου. Ἐὰν εἰς τὸ ἔμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἐνὸς κολούρου κώνου προσθέσωμεν τὸ ἔμβαδὸν τῶν δύο βάσεων του, θὰ ἔχωμεν τὸ ἔμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας τοῦ κολούρου κώνου.

Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν μὲ E τὸ ἔμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας ἐνὸς κολούρου κώνου, θὰ ἔχωμεν

$$\text{Ἐμβ. ὀλ. ἐπιφ. κολ. κώνου} = \pi(R+R')\lambda + \pi R^2 + \pi R'^2$$

*Ασκήσεις : 2553, 2554, 2555, 2556, 2557, 2558.

832. Ὅγκος κολούρου κώνου. Ὅγκον κολούρου κώνου ὀνομάζομεν τὸ ὄριον πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει ὁ ὄγκος μιᾶς κανονικῆς κολούρου πυραμίδος, ἐγγεγραμμένης εἰς τὸν κόλουρον κώνον, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῶν βάσεων τῆς διπλασιάζεται ἀπεριορίστως.

Είναι φανερόν, ὅτι ὁ ὄγκος ἑνὸς κολούρου κώνου $A\Delta\Delta'A'$ δύναται νὰ θεωρηθῆ ὡς διαφορὰ τῶν ὄγκων τῶν κώνων $\Sigma A\Delta$ καὶ $\Sigma A'\Delta'$ (Σχ. 557).

833. Πρόβλημα. *Νὰ υπολογισθῆ ὁ ὄγκος ἑνὸς κολούρου κώνου, ἐὰν γνωρίζωμεν τὰς ἀκτίνιας τῶν βάσεων του καὶ τὸ ὕψος του.*

Ἐστω ὁ κόλουργος κώνος $A\Delta'$ (Σχ. 557), τοῦ ὁποίου αἱ ἀκτίνιας τῶν βάσεων του εἶναι R καὶ R' καὶ τὸ ὕψος του v . Ἐγγράφομεν εἰς τὸν κόλουργον αὐτὸν κώνον μίαν κανονικὴν κόλουργον πυραμίδα $AB\Gamma\Delta E A'B'\Gamma'\Delta'E'$.

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ B καὶ β τὰ ἔμβαδὰ τῶν δύο βάσεων τῆς κολούρου αὐτῆς πυραμίδος καὶ μὲ v τὸ ὕψος της, ὁ ὄγκος της θὰ εἶναι ἴσος μὲ $\frac{1}{3} v(B + \beta + \sqrt{B\beta})$, δηλ. θὰ εἶναι

$$\text{ὄγκ. κολ. πυραμ.} = \frac{1}{3} Bv + \frac{1}{3} \beta v + \frac{1}{3} v\sqrt{B\beta}.$$

Ἐὰν διπλασιάσωμεν ἀπεριορίστως τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τῶν δύο βάσεων τῆς κολούρου αὐτῆς πυραμίδος, τότε τὸ ἔμβαδὸν B τῆς βάσεως της $AB\Gamma\Delta E$ θὰ ἔχη ὄριον τὸ ἔμβαδὸν τοῦ κύκλου O , ὁ ὁποῖος εἶναι ἡ μεγάλη βᾶσις τοῦ κολούρου κώνου καὶ τῆς ὁποίας τὸ ἔμβαδὸν εἶναι πR^2 · τὸ ἔμβαδὸν β τῆς μικρᾶς βάσεως $A'B'\Gamma'\Delta'E'$ τῆς κολούρου πυραμίδος θὰ ἔχη ὄριον τὸ ἔμβαδὸν τοῦ κύκλου O' , ὁ ὁποῖος εἶναι ἡ μικρὰ βᾶσις τοῦ κολούρου κώνου καὶ τῆς ὁποίας τὸ ἔμβαδὸν εἶναι $\pi R'^2$ · τὸ ὕψος v τῆς κολούρου πυραμίδος μένει σταθερὸν καὶ ἴσον μὲ τὸ ὕψος τοῦ κολούρου κώνου.

Ἐπομένως ὁ ὄγκος τῶν κολούρων πυραμίδων, τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς τὸν κόλουργον κώνον, θὰ ἔχη ἓνα ὄριον ἴσον μὲ

$$\frac{1}{3} \pi R^2 \cdot v + \frac{1}{3} \pi R'^2 \cdot v + \frac{1}{3} v \sqrt{\pi R^2 \cdot \pi R'^2}$$

$$\text{ἢ} \quad \frac{1}{3} \pi R^2 v + \frac{1}{3} \pi R'^2 v + \frac{1}{3} \pi R R' v.$$

Ἀλλὰ αὐτὸ τὸ ὄριον, ἐξ ὀρίσμοῦ, εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ κολούρου κώνου· δηλ. θὰ εἶναι :

$$\text{ὄγκ. κολ. κών.} = \frac{1}{3} \pi R^2 v + \frac{1}{3} \pi R'^2 v + \frac{1}{3} \pi R R' v \quad (2)$$

Ἐπειδὴ τὸ $\frac{1}{3} \pi R^2 v$ παριστάνει τὸν ὄγκον ἑνὸς κώνου, ὁ ὁποῖος ἔχει βᾶσιν τὴν κάτω βᾶσιν τοῦ κολούρου κώνου καὶ ὕψος v , τὸ $\frac{1}{3} \pi R'^2 v$ παριστάνει τὸν ὄγκον ἑνὸς κώνου, ὁ ὁποῖος ἔχει βᾶσιν τὴν ἄνω βᾶσιν τοῦ κολούρου κώνου καὶ ὕψος v καὶ τὸ $\frac{1}{3} \pi R R' v$ παριστάνει

τὸν ὄγκον ἐνὸς κώνου, ὁ ὁποῖος ἔχει βάσιν τὴν μέσην ἀνάλογον τῶν δύο βάσεων, πR^2 καὶ $\pi R'^2$, τοῦ κολούρου κώνου καὶ ὕψος u , συνάγομεν, ὅτι :

Ὁ ὄγκος ἐνὸς κολούρου κώνου εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τριῶν κώνων, οἱ ὁποῖοι ἔχουν, ὡς ὕψος τὸ κοινὸν ὕψος τοῦ κολούρου κώνου καὶ ὡς βάσεις ὁ μὲν πρῶτος τὴν ἄνω βάσιν τοῦ κολούρου κώνου, ὁ δεῦτερος τὴν κάτω βάσιν αὐτοῦ καὶ ὁ τρίτος τὴν μέσην ἀνάλογον τῶν δύο αὐτῶν βάσεων.

Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν μὲ V τὸν ὄγκον τοῦ κολούρου κώνου,

ἡ ἰσότης (2) γράφεται : $V = \frac{1}{3} \pi u (R^2 + R'^2 + RR')$.

834. Μέθοδος ἀλγεβρική. Ὁ ὄγκος ἐνὸς κολούρου κώνου, π.χ. τοῦ $\Lambda\Delta\Delta'A'$ (Σχ. 557) (ὅπως καὶ ἡ κυρτὴ ἐπιφάνειά του) δύναται νὰ εὑρεθῇ ἀπ' εὐθείας, ἂν θεωρήσωμεν τὸ στερεὸν αὐτό, ὡς διαφορὰν τῶν κώνων $\Sigma\Lambda\Delta$ καὶ $\Sigma A'\Delta'$.

Πράγματι ἔστωσαν $OA = R$, $O'A' = R'$ αἱ ἀκτίνες τῶν βάσεων τοῦ κολούρου κώνου, ΣO τὸ ὕψος τοῦ κώνου $\Sigma\Lambda\Delta$ καὶ $\Sigma O'$ τὸ ὕψος τοῦ κώνου $\Sigma A'\Delta'$. τότε τὸ ὕψος u τοῦ κολούρου κώνου θὰ εἶναι $\Sigma O - \Sigma O' = u$. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ V τὸν ὄγκον τοῦ κολούρου κώνου $\Lambda\Delta\Delta'A'$ θὰ εἶναι

$$V = \text{ὄγκ. κών. } \Sigma\Lambda\Delta - \text{ὄγκ. κών. } \Sigma A'\Delta'$$

$$\eta \quad V = \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot \Sigma O - \frac{1}{3} \pi R'^2 \cdot \Sigma O' \quad (1)$$

Ἀπὸ τὰ ὁμοία τρίγωνα ΣOA καὶ $\Sigma O'A'$ ἔχομεν $\frac{\Sigma O}{R} = \frac{\Sigma O'}{R'}$.

Κατὰ τὴν ιδιότητα τῶν ἴσων κλασμάτων, ἡ προηγουμένη σχέσις

γράφεται
$$\frac{\Sigma O}{R} = \frac{\Sigma O'}{R'} = \frac{\Sigma O - \Sigma O'}{R - R'} = \frac{u}{R - R'}$$

Ἀπὸ τὴν σχέσιν αὐτὴν λαμβάνομεν

$$\Sigma O = \frac{R u}{R - R'} \quad \text{καὶ} \quad \Sigma O' = \frac{R' u}{R - R'}$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὰ ΣO καὶ $\Sigma O'$ μὲ τὰ ἴσα των καὶ ἔχομεν

$$V = \frac{1}{2} \pi R^2 \cdot \frac{R u}{R - R'} - \frac{1}{3} \pi R'^2 \cdot \frac{R' u}{R - R'} \quad \eta \quad V = \frac{1}{3} \pi u \cdot \frac{R^3 - R'^3}{R - R'} \quad (2)$$

Ἐπειδὴ τὸ πηλίκον τοῦ $R^3 - R'^3$ διὰ τοῦ $R - R'$ εἶναι ἴσον μὲ $R^2 + RR' + R'^2$, ἡ ἰσότης (2) γράφεται $V = \frac{1}{2} \pi (R^2 + R'^2 + RR')$.

Δηλ. εὐρήκαμεν τὸν αὐτὸν τύπον τῆς § 833.

Ἀσκήσεις: 2559, 2560, 2561, 2562, 2563, 2564.

Ἀσκήσεις

2521. (2556). Πόσα μέτρα ὑφάσματος πλάτους 1,40 θὰ χρειασθῶμεν διὰ νὰ κατασκευάσωμεν μίαν κωνικὴν σκηρῆν, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον βάσεως 2,50 μ. καὶ πλευρὰν 2,60 μ. ;

2522. (2557). Ἡ πλευρὰ λ ἐνὸς κώνου εἶναι ἴση μὲ τὴν διάμετρον τῆς βάσεώς του. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του.

2523. (2558). Ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως ἐνὸς κώνου εἶναι 5,40 μ. καὶ ἡ πλευρὰ του εἶναι διπλασία τῆς διαμέτρου του. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου καὶ τὸ ἔμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας του.

2524. (2559). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας ἐνὸς κώνου, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτίς εἶναι 18 ἐκ. καὶ τὸ ἔμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του εἶναι 1,35 τ.μ.

2525. (2560). Ἡ ἀκτίς τῆς βάσεως ἐνὸς κώνου εἶναι 0,60 μέτρα καὶ τὸ ὕψος του 2,5 μέτρα. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ὀλικὴ ἐπιφάνεια τοῦ κώνου.

2526. (2561). Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ ἐνὸς κώνου, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτίς του εἶναι 0,50 μ. καὶ τὸ ἔμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας του 5 τ.μ.

2527. (2562). Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διάμετρος τῆς βάσεως ἐνὸς κώνου, τοῦ ὁποίου τὸ ἔμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας του εἶναι 1 τ.μ. καὶ ἡ πλευρὰ του διπλασία τῆς διαμέτρου του.

2528. (2563). Ἡ ἀκτίς ἐνὸς κώνου εἶναι R καὶ τὸ ὕψος του u. Νὰ εὐρεθῇ ὁ λόγος τοῦ ἔμβαδου τῆς βάσεώς του πρὸς τὸ ἔμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του.

2529. (2564). Ἐνὸς κώνου δίδεται τὸ ὕψος του $u=4$ μέτρ. καὶ ἡ κυρτὴ ἐπιφάνειά του $e=15\pi$ τετρ. μέτρα. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτίς του.

2530. (2565). Ἡ ἀκτίς ἐνὸς κώνου εἶναι 0,45 μ. καὶ τὸ ὕψος του εἶναι 0,95 μ. Πόσος εἶναι ὁ ὄγκος του ;

2531. (2566). Ἡ ἀκτίς ἐνὸς κώνου εἶναι 40,70 ἐκ. καὶ ἡ πλευρὰ του 2 μ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος του, τὸ ἔμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας του καὶ ὁ ὄγκος του.

2532. (2567). Τὸ ὕψος ἐνὸς κώνου εἶναι 5,5 μ. καὶ ἡ πλευρὰ του 7,3 μ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτίς τῆς βάσεώς του, τὸ ἔμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του καὶ ὁ ὄγκος του.

2533. (2568). Τὸ ἔμβαδὸν ἐνὸς ἰσοπλεύρου τριγώνου εἶναι 62,3520 τ.μ. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ κώνου, ὁ ὁποῖος ἔχει ὡς βάσιν τὸν κύκλον τὸν ἐγγεγραμμένον εἰς τὸ τρίγωνον αὐτὸ καὶ ὡς ὕψος τὴν πλευρὰν τοῦ τριγώνου.

2534. (2569). Ἡ περιφέρεια τῆς βάσεως ἐνὸς κώνου εἶναι 5,40 μέτρ. καὶ ἡ πλευρὰ του σχηματίζει μὲ τὴν βάσιν του γωνίαν 60° . Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου καὶ ὁ ὄγκος του.

2535. (2570). Τὸ ἔμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας ἐνὸς κώνου εἶναι $E=8$ τ.μ. καὶ ἡ πλευρὰ του $l=2$ μέτρ. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος του.

2536. (2571). Τὸ ἔμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας ἐνὸς κώνου εἶναι E καὶ ἡ πλευρὰ του εἶναι ἴση μὲ τὴν διάμετρον τῆς βάσεώς του. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος του.

2537. (2572). Τὸ ἔμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἐνὸς κώνου εἶναι ἴσον μὲ

τὸ ἔμβαδὸν ἑνὸς κύκλου ἀκτίνας a . Νὰ ὑπολογισθῇ :

1ον. ὁ ὄγκος τοῦ κώνου, ἐὰν ἡ ἀκτίς του εἶναι R .

2ον. ὁ ὄγκος τοῦ κώνου αὐτοῦ, ἐὰν εἶναι $a=1$ μ. καὶ $R=2/3$.

2538. (2573). Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτίς καὶ τὸ ὕψος ἑνὸς κώνου, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ὁ ὄγκος του εἶναι 1 κ.μ. καὶ ὅτι τὸ ὕψος του εἶναι πενταπλάσιον τῆς ἀκτίνας του.

2539. (2574). Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος ἑνὸς κώνου, τοῦ ὁποίου τὸ ἔμβαδὸν τῆς βάσεως εἶναι $3,768$ τ.μ. καὶ ἡ πλευρὰ του $2,4$ μέτρα.

2540. (2575). Τὸ ὕψος ἑνὸς κώνου εἶναι 4 μ. καὶ ὁ ὄγκος του $12,5$ κ.μ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ πλευρὰ του.

2541. (2576). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος ἑνὸς κώνου, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτίς εἶναι $1,05$ μ. καὶ ὁ ὄγκος του ἴσος μὲ τὸν ὄγκον μιᾶς πυραμίδος, ἡ ὁποία ἔχει βάσιν ἕνα τετράγωνον πλευρᾶς $1,50$ μ. καὶ ὕψος $8,10$ μ.

2542. (2577). Τὸ ὕψος ἑνὸς κώνου εἶναι 12 μ. καὶ ὁ ὄγκος του 80 κ.μ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του.

2543. (2578). Τὸ ὕψος ἑνὸς κώνου εἶναι ἴσον μὲ τὴν διάμετρον τῆς βάσεώς του. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τοῦ ἔμβαδου τῆς βάσεώς του πρὸς τὸ ἔμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του.

2544. (2579). Πόσος γίνεται ὁ ὄγκος ἑνὸς κώνου :

1ον. ἂν διπλασιασθῇ τὸ ὕψος του ;

2ον. ἂν διπλασιασθῇ ἡ ἀκτίς του ;

2545. (2580). Ἡ ἀκμὴ κύβου εἶναι $a=3$ μ. Πόσον εἶναι τὸ ὕψος ἰσοδυναμοῦ κώνου ἀκτίνας $R=2$ μ. ;

2546. (2581). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὁ ὄγκος ἑνὸς κώνου εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἔμβαδου τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου, τὸ ὁποῖον παράγει τὸν κώνον ἐπὶ τὴν περιφέρειαν, τὴν ὁποίαν γράφει τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου αὐτοῦ.

2547. (2582). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὁ ὄγκος ἑνὸς κώνου εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του ἐπὶ τὸ ἕνα τρίτον τῆς ἀποστάσεως τοῦ κέντρου τῆς βάσεώς του ἀπὸ τὴν πλευρὰν τοῦ κώνου.

2548. (2583). Ἐνα ὀρθογώνιον τρίγωνον $ABΓ$ στρέφεται πρῶτον περὶ τὴν πλευρὰν $ΑΓ$ καὶ ἔπειτα περὶ τὴν πλευρὰν $ΑΒ$. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τοῦ πρώτου παραγομένου στερεοῦ πρὸς τὸ δεύτερον.

2549. (2584). Νὰ χωρισθῇ ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια ἑνὸς κώνου, ὑπὸ ἐπιπέδου ἢ ἐπιπέδων παραλλήλων πρὸς τὰς βάσεις του :

1ον. εἰς δύο μέρη ἰσοδύναμα.

2ον. εἰς δύο μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 2 καὶ 3 .

3ον. εἰς τρία ἰσοδύναμα μέρη.

2550. (2585). Ὁ ὄγκος ἑνὸς κώνου εἶναι 6 κ.μ. καὶ τὸ ὕψος του 4 μ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔμβαδὸν τῆς τομῆς τοῦ κώνου, ὑπὸ ἑνὸς ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν του, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἀπὸ τὴν κορυφὴν τοῦ κώνου 3 μέτρα.

2551. (2586). Ἡ ἀκτίς ἑνὸς κώνου εἶναι R καὶ ἡ πλευρὰ του λ . Νὰ διαίρεθῇ ὁ κώνος ὑπὸ ἐπιπέδου ἢ ἐπιπέδων παραλλήλων πρὸς τὴν βάσιν του :

1ον. εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη.

2ον. εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν μ καὶ ν .

3ον. εἰς τρία ἰσοδύναμα μέρη.

4ον. εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 2, 3, 4.

2552. (2587). Ἡ ἀκτίς ἑνὸς κώνου εἶναι R καὶ τὸ ὕψος τοῦ υ.

1ον. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς κορυφῆς πρέπει νὰ φέρωμεν ἓνα ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν βᾶσιν τοῦ, ἵνα ὁ κώνος διαιρεθῆ εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη.

2ον. Τί δυνάμεθα νὰ παρατηρήσωμεν ἀπὸ τὸν εὐρεθέντα τύπον, σχετικῶς μὲ τὴν ἀκτίνα τοῦ κώνου;

3ον. Νὰ ὑπολογισθῆ ἡ ζητούμενη ἀπόστασις κατὰ προσέγγισιν ἑνὸς χιλιοστοῦ, ἐὰν τὸ ὕψος τοῦ κώνου εἶναι 1 μέτρο.

2553. (2588). Ἡ διάμετρος τῆς κάτω βάσεως ἑνὸς κολούρου κώνου εἶναι 0,60 μ. καὶ τῆς μικρᾶς βάσεως 0,15 μ. Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ἔμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ πλευρὰ τοῦ εἶναι 0,21 μ.

2554. (2589). Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ἔμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κολούρου κώνου, τοῦ ὁποίου ἡ περιφέρεια τῆς μέσης τομῆς εἶναι 50 ἑκ. καὶ ἡ πλευρὰ τοῦ 32 ἑκ.

2555. (2590). Τὸ ὕψος ἑνὸς κολούρου κώνου εἶναι 30 ἑκ. καὶ αἱ διάμετροι τῶν βάσεων του 72 ἑκ. καὶ 40 ἑκ. Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ἔμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ.

2556. (2591). Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια ἑνὸς κολούρου κώνου εἶναι 0,3454 τ.μ. καὶ αἱ διάμετροι τῶν βάσεων του 40 ἑκ. καὶ 15 ἑκ. Νὰ ὑπολογισθῆ ἡ πλευρὰ τοῦ καὶ τὸ ὕψος τοῦ.

2557. (2592). Αἱ περιφέρειαι τῶν βάσεων ἑνὸς κολούρου κώνου εἶναι 1,20 μ. καὶ 0,80 μ. καὶ τὸ ἔμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας τοῦ 5 τ.μ. Νὰ ὑπολογισθῆ ἡ πλευρὰ τοῦ.

2558. (2593). Ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια ἑνὸς κολούρου κώνου εἶναι 60 τ.μ. Ἡ ἀκτίς τῆς μιᾶς βάσεως τοῦ εἶναι 3 μ., καὶ ἡ πλευρὰ τοῦ 2 μ. Νὰ ὑπολογισθῆ ἡ ἀκτίς τῆς ἄλλης βάσεως καὶ τὸ ὕψος τοῦ.

2559. (2594). Νὰ ὑπολογισθῆ ἡ χωρητικότης μιᾶς δεξαμενῆς, ἡ ὁποία ἔχει σχῆμα κολούρου κώνου, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι αἱ διάμετροι τῶν βάσεων τῆς εἶναι 5 μέτρα καὶ 3,60 μέτρα καὶ τὸ βάθος τῆς 6,20 μέτρα.

2560. (2595). Αἱ ἀκτίνες τῶν βάσεων ἑνὸς κολούρου κώνου εἶναι R καὶ R' καὶ ἡ πλευρὰ τοῦ λ. Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ὕψος τοῦ, τὸ ἔμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ καὶ ὁ ὄγκος τοῦ. Ἐφαρμογῆ; R=40 ἑκ., R'=20 ἑκ., λ=29 ἑκ.

2561. (2596). Ἐνὸς κολούρου κώνου δίδονται ἡ ἀκτίς R=2 μέτρα τῆς μεγάλης βάσεως, τὸ ὕψος τοῦ υ=1,5 κ.μ. καὶ ὁ ὄγκος τοῦ V=3,5π κ. μέτρα. Νὰ ὑπολογισθῆ ἡ ἀκτίς R' τῆς μικρᾶς βάσεως τοῦ.

2562. (2597) Μία καπνοδόχος, ἡ ὁποία ἔχει σχῆμα κολούρου κώνου, ἔχει ὕψος 24 μέτρα. Ἡ ἐξωτερικὴ περιφέρεια ἔχει μῆκος 19 μέτρα κάτω καὶ 9,50 μέτρα ἄνω. Νὰ ὑπολογισθῆ ὁ ὄγκος τοῦ λιθοκτίστου στερεοῦ, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ πάχος τῶν τοίχων εἶναι 0,80 μέτρα.

2563. (2598). Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἀκτίνες τῶν δύο βάσεων ἑνὸς κολούρου κώνου, ἐὰν γνωρίζωμεν τὸ ὕψος τοῦ υ=1,2 μέτρα, τὴν πλευρὰν τοῦ λ=1,5 μέτρα καὶ τὸν ὄγκον τοῦ V=7,284π κυβ. μέτρα.

2564. (2599). Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἀκτίνες τῶν δύο βάσεων ἑνὸς κολού-

ρου κώνου, τοῦ ὁποίου δίδεται ἡ πλευρὰ λ, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ πλευρὰ αὐτῆ σχηματίζει γωνίαν 60° μετὰ τὴν κάτω βάσιν του καὶ ὅτι ἡ ὀλικὴ ἐπιφάνεια τοῦ κολούρου κώνου εἶναι ἴση μετὰ πλ².

Ἀσκήσεις πρὸς ἐπανάληψιν ἐπὶ τοῦ Α' καὶ Β' Κεφαλαίου

Α' Ὁμάς. 2565. (2600). Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι ὁ ὄγκος ἑνὸς κυλίνδρου εἶναι ἴσος μετὰ τὸ γινόμενον τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας του ἐπὶ τὸ τέταρτον τοῦ ἀρμονικοῦ μέσου τῆς ἀκτίνος καὶ τοῦ ὕψους του. (Ἀρμονικὸς μέσος δύο ἀριθμῶν λέγεται ὁ ἀντίστροφος τοῦ ἀριθμητικοῦ μέσου τῶν ἀνιστρόφων τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν).

2566. (2601). Δίδεται ἓνα κύλινδρος, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτίς εἶναι 4 μ. καὶ τὸ ὕψος του 3. Νὰ ὑπολογισθῆ ἡ ἀκτίς x καὶ τὸ ὕψος y ἑνὸς κυλίνδρου, ὁ ὁποῖος νὰ ἔχῃ τὸ αὐτὸ ἐμβαδὸν ὀλικῆς ἐπιφανείας καὶ τὸν αὐτὸν ὄγκον μετὰ τὸν πρῶτον.

2567. (2602). Ἐνα ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸν ἀξονα ἑνὸς κυλίνδρου τέμνει τὴν βάσιν τοῦ κυλίνδρου κατὰ χορδὴν τεταρτημορίου. Νὰ εὑρεθῆ ὁ λόγος τοῦ μεγαλυτέρου πρὸς τὸ μικρότερον μέρος, εἰς τὰ ὅποια χωρίζεται ὁ κύλινδρος.

Β' Ὁμάς. 2568. (2603). Ἡ διάμετρος τῆς βάσεως ἑνὸς κώνου εἶναι 40 ἐκ. καὶ τὸ ὕψος του 50 ἐκ. Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ὕψος ἑνὸς ἰσοδυναμοῦ πρίσματος, τοῦ ὁποίου ἡ βᾶσις εἶναι τετράγωνον πλευρᾶς 35 ἐκ.

2569. (2604). Αἱ διαστάσεις ἑνὸς ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου εἶναι 5 μ., 6 μ., 8 μ.

1ον. Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ὕψος ἰσοδυναμοῦ κώνου, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτίς εἶναι 5 μ.

2ον. Νὰ ὑπολογισθῆ ἡ ἀκτίς τοῦ ἰσοδυναμοῦ κώνου, τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος εἶναι 6 μέτρα.

2570. (2605). Τὸ ὕψος ἑνὸς κώνου εἶναι u καὶ ἡ ἀκτίς τῆς βάσεώς του R . Ἐγγράφωμεν εἰς τὸν κώνον αὐτὸν μίαν κανονικὴν πυραμίδα ἐξαγωνικὴν. Νὰ ὑπολογισθῆ ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου καὶ τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τῆς πυραμίδος.

2571. (2606), Ἡ ἀκτίς ἑνὸς κυλίνδρου εἶναι ἴση μετὰ τὴν ἀκτίνα R ἑνὸς κώνου. Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ὕψος τοῦ κώνου, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι αἱ κυρταὶ ἐπιφάνειαι τῶν εἶναι ἰσοδύναμοι καὶ τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου εἶναι R .

2572. (2607). Δίδεται ἓνας κώνος καὶ ἓνας κύλινδρος, ἐγγεγραμμένοι εἰς αὐτόν. Νὰ ἐγγραφῆ εἰς τὸν κώνον ἓνας δεύτερος κύλινδρος, ἰσοδύναμος μετὰ τὸν πρῶτον.

2573. (2608). Ἐνας κόλουρος κώνος καὶ ἓνας κύλινδρος ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος $u=3$ μ. καὶ μίαν κοινὴν βάσιν ἀκτίνος $R=2$ μ. Νὰ ὑπολογισθῆ ἡ ἀκτίς τῆς δευτέρας βάσεως τοῦ κολούρου κώνου, ἵνα ὁ ὄγκος του εἶναι ἴσος μετὰ τὰ δύο πέμπτα τοῦ ὄγκου τοῦ κυλίνδρου.

2574. (2609). Κύλινδρος καὶ κόλουρος κώνος ἔχουν κοινὴν μίαν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος. Ποῖος πρέπει νὰ εἶναι ὁ λόγος τῶν ἀκτίνων τῶν βάσεων τοῦ κολούρου κώνου, ἵνα ὁ ὄγκος τοῦ κολούρου κώνου εἶναι τὸ ἡμισυ τοῦ ὄγκου τοῦ κυλίνδρου.

2575. (2610). Αἱ ἀκτίνες τῶν βάσεων ἑνὸς κολούρου κώνου εἶναι R καὶ R' καὶ τὸ ὕψος του v . Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διαφορὰ μεταξὺ τῶν ὀγκων τοῦ κολούρου αὐτοῦ κώνου καὶ τοῦ κυλίνδρου, ὁ ὁποῖος ἔχει βάσιν τὴν μέσην τομῆν τοῦ κολούρου κώνου καὶ ὕψος v . Ἐφαρμογὴ: $R=50$ ἐκ., $R'=40$ ἐκ., $v=24$ ἐκ.

2576. (2611). Αἱ ἀκτίνες τῶν δύο βάσεων ἑνὸς κολούρου κώνου εἶναι $R=3$ μέτρ. καὶ $R'=2$ μέτρ. καὶ τὸ ὕψος του $v=4$ μέτρ. Νὰ ὀρισθῇ ἐπὶ τοῦ ἄξονος τοῦ κολούρου κώνου ἓνα σημεῖον M τοιοῦτον, ὥστε αἱ δύο κῶνοι, οἱ ὁποῖοι ἔχουν κορυφὴν τὸ σημεῖον M καὶ βάσεις ἀντιστοιχῶς τὰς δύο βάσεις τοῦ κολούρου κώνου νὰ ἔχουν:

1ον. ἰσοδυνάμους κυρτὰς ἐπιφανείας.

2ον. νὰ εἶναι ἰσοδύναμοι.

2577. (2612). Νὰ ἐπαληθευθῇ, ὅτι ὁ ὄγκος ἑνὸς κολούρου κώνου εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὀγκων ἑνὸς κώνου καὶ ἑνὸς κυλίνδρου, οἱ ὁποῖοι ἔχουν κοινὸν ὕψος, τὸ ὕψος τοῦ κολούρου κώνου καὶ ὡς ἀκτίνας, ὁ μὲν κύλινδρος τὸ ἡμιἄθροισμα τῶν ἀκτίνων τῶν βάσεων τοῦ κολούρου κώνου καὶ ὁ κῶνος τὴν ἡμιδιαφορὰν τῶν ἀκτίνων αὐτῶν.

2578. (2613). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι οἱ ὄγκοι τοῦ κυλίνδρου, τοῦ κώνου καὶ τοῦ κολούρου κώνου δίδονται ὑπὸ τοῦ τύπου $V = \frac{v}{6}(B + \beta + 4B')$, ὅπου v παριστάνει τὸ ὕψος των, B, β τὰ ἔμβαδὰ τῶν βάσεων καὶ B' τὸ ἔμβαδὸν τῆς μέσης τομῆς των.

Γ' Ὁμάς. 2579. (2614). Δίδεται ἓνας κῶνος ἀκτίνος $R=2$ καὶ ὕψους $v=5$. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπίκεντρος γωνία τοῦ κυκλικοῦ τομέως, ὁ ὁποῖος δύναται νὰ καλύψῃ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου.

2580. (2615). Ἡ ἀκτίς ἑνὸς κώνου εἶναι $2,5$ μ. καὶ ὁ ὄγκος του 30 κ.μ. Νὰ ὑπολογισθῇ:

1ον. τὸ ἔμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του.

2ον. ἡ ἐπίκεντρος γωνία τοῦ κυκλικοῦ τομέως, τὸν ὁποῖον λαμβάνομεν ἂν ἀναπτύξωμεν τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κώνου ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου.

2581. (2616). Ἐνα κωνικὸν δοχεῖον ἐσχηματίσθη μὲ ἓνα κυκλικὸν τομέα ψευδαργύρου 80° καὶ ἀκτίνος 50 ἐκ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ χωρητικότης τοῦ δοχείου.

2582. (2617). Τὸ ἀνάπτυγμα τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κώνου εἶναι ἓνας κυκλικὸς τομεὺς ἀκτίνος $\alpha=5$ ἐκ. καὶ τοῦ ὁποίου ἡ γωνία εἶναι 216° . Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτίς τῆς βάσεως, τὸ ὕψος, τὸ ἔμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας καὶ ὁ ὄγκος τοῦ κώνου.

2583. (2618). Θέλομεν νὰ κατασκευάσωμεν ἓνα ἀμπαζοῦρ, τὸ ὁποῖον νὰ ἔχη σχῆμα κολούρου κώνου, τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος νὰ εἶναι 9 ἐκ. καὶ αἱ διάμετροι τῶν ἀνοικτῶν βάσεῶν του νὰ εἶναι 32 ἐκ. καὶ 8 ἐκ. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαστάσεις τοῦ ἀναπτύγματος τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας· δηλ. ἡ γωνία τῶν κυκλικῶν τομέων, καὶ αἱ ἀκτίνες των.

2584. (2619). Τὸ ἀνάπτυγμα τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κολούρου κώνου εἶναι ἡ διαφορὰ τῶν κυκλικῶν τομέων, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὴν αὐτὴν ἐπίκεντρον γωνίαν $\omega=288^\circ$ καὶ τῶν ὁποίων αἱ ἀκτίνες εἶναι $\alpha=37$ ἐκ. καὶ $\beta=1$ ἐκ. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἀκτίνες τῶν βάσεων καὶ τὸ ὕψος τοῦ κολούρου κώνου.

2585. (2620). Θέλομεν νὰ κατασκευάσωμεν ἓνα δοχεῖον, ποῦ νὰ ἔχη σχῆμα κολούρου κώνου $ABB'A'$ καὶ τὸ ὁποῖον νὰ χωρῇ 4 λίτρα νεροῦ καὶ τοῦ ὁποίου

ἡ διάμετρος τῆς μεγάλης βάσεώς του νὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ ὕψος καὶ ἡ διάμετρος τῆς μικρᾶς βάσεως ἴση μὲ τὸ ἡμισυ τοῦ ὕψους του. Νὰ ὑπολογισθῇ :

1ον. ἡ ἀκτίς τῆς μεγάλης βάσεώς του

2ον. αἱ ἀκτίνες τῶν τῶζων τοῦ κυκλικοῦ τομέως, τὸν ὁποῖον πρέπει νὰ κόψωμεν διὰ νὰ σχηματίσωμεν τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ δοχείου

3ον. ἡ γωνία τοῦ κυκλικοῦ αὐτοῦ τομέως.

Δ' Ὁμάς. 2586. (2621). Τὸ ὕψος ἐνὸς κώνου εἶναι v καὶ ἡ ἀκτίς τῆς βάσεώς του R . Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου πρέπει νὰ κόψωμεν τὸν κώνον μὲ ἓνα ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν του οὕτως, ὥστε ἡ ὀλικὴ ἐπιφάνεια τοῦ μικροῦ κώνου νὰ εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ δοθέντος κώνου. (Λάβετε ὡς ἄγνωστον τὸ ὕψος τοῦ μικροῦ κώνου). Ἐφαρμογὴ: $v=4$ μ., $R=3$ μ.

2587. (2622). Τὸ ὕψος ἐνὸς κώνου OAB εἶναι $v=5$ μέτρα. Εἰς ποίαν ἀπόστασιν ἀπὸ τῆς κορυφῆς του O πρέπει νὰ τμηθῇ οὗτος ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν του, ἵνα ὁ ὄγκος τοῦ κολούρου κώνου $AB\Delta\Gamma$, ποῦ θὰ προκύψῃ, εἶναι μέσος ἀνάλογος μεταξὺ τοῦ δοθέντος κώνου καὶ τοῦ κώνου $O\Gamma\Delta$, ὁ ὁποῖος κείται ἄνωθεν τοῦ κολούρου κώνου.

2588. (2623). Αἱ ἀκτίνες τῶν βάσεων ἐνὸς κολούρου κώνου εἶναι $R=5$ μ., καὶ $R'=2$ μ. Τὸ ὕψος του εἶναι $v=4$ μ. Νὰ χωρισθῇ ὁ κόλουρος αὐτὸς κῶνος ὑπὸ ἐπιπέδου ἢ ἐπιπέδων παραλλήλων πρὸς τὰς βάσεις του :

1ον. εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη.

2ον. εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν μ καὶ ν .

3ον. εἰς τρία ἰσοδύναμα μέρη.

4ον. εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν k , μ , ν .

5ον. εἰς δύο μέρη ἐκ τῶν ὁποίων τὸ ἓνα νὰ ἔχη ὄγκον 3 κυβ. μέτρα.

2589. (2624). Αἱ ἀκτίνες τῶν βάσεων ἐνὸς κολούρου κώνου εἶναι $R=4$ μ. καὶ $R'=1$ μ. καὶ τὸ ὕψος του $v=3$ μ. Νὰ χωρισθῇ ὁ κόλουρος κῶνος ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὰς βάσεις του, εἰς δύο μέρη τοιαῦτα, ὥστε τὸ μέρος, τὸ ὁποῖον πρόκειται εἰς τὴν μεγάλην βάσιν νὰ εἶναι ὀκταπλάσιον τοῦ ἄλλου.

2590. (2625). Αἱ ἀκτίνες τῶν βάσεων ἐνὸς κολούρου κώνου εἶναι R καὶ R' καὶ τὸ ὕψος του v . Νὰ ὀρισθοῦν αἱ ἀκτίνες τῶν δύο τομῶν, αἱ ὁποῖαι χωρίζουν τὸ ὕψος εἰς τρία ἴσα μέρη καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ κολούρου κώνου, ὁ ὁποῖος περιλαμβάνεται μεταξὺ τῶν δύο τομῶν.

2591. (2626). Ἄπὸ κώνου, ὁ ὁποῖος ἔχει πλευρὰν 60 ἑκ. καὶ ἀκτίνα 20 ἑκ. ἀποκόπτεται κῶνος, δι' ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βάσιν του, μὲ πλευρὰν 12 ἑκ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας καὶ ὁ ὄγκος τοῦ προκύπτοντος κολούρου κώνου.

2592. (2627). Αἱ ἀκτίνες τῶν βάσεων ἐνὸς κολούρου κώνου εἶναι 50 ἑκ. καὶ 10 ἑκ. καὶ τὸ ὕψος του 42 ἑκ. Ἀπὸ τὸ μέσον τοῦ ὕψους του φέρομεν ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις του. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας καὶ ὁ ὄγκος τῶν δύο κολούρων κῶνων εἰς τοὺς ὁποίους χωρίζεται ὁ δοθεὶς κόλουρος κῶνος.

2593. (2628). Αἱ ἀκτίνες τῶν βάσεων ἐνὸς κολούρου κώνου εἶναι R καὶ R' καὶ τὸ ὕψος του v . Φέρομεν ἓνα ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις του, τὸ ὁποῖον χωρίζει τὸ στερεὸν εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη.

1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος τοῦ κάτω κολούρου κώνου.

2ον. Νὰ εὐρεθῇ εἰς ποῖον σημεῖον τέμνει τὸ ὕψος του τὸ ἐπίπεδον αὐτό.

3ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς.

2594. (2629). Αἱ ἀκτίνες τῶν βάσεων ἑνὸς κολούρου κώνου εἶναι 4 μ. καὶ 3 μ. καὶ ἡ πλευρὰ του 5 μ. Εἰς ποῖον σημεῖον τῆς πλευρᾶς του πρέπει νὰ φέρωμεν ἓνα ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὰς βάσεις του, τὸ ὁποῖον νὰ διαιρῇ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειάν του :

1ον. εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη.

2ον. εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν μ καὶ ν.

3ον. εἰς τρία μέρη ἀνάλογα τῶν λ, μ, ν.

Ε' Ὁμάς. 2595. (2630). Ἐνα ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ στρέφεται περὶ ἄξονα χγ, ὃ ὁποῖος κεῖται ἐκτὸς τοῦ ὀρθογωνίου, εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν πλευρὰν ΑΒ καὶ ἀπέχει αὐτῆς ἀπόστασιν γ. Νὰ ὑπολογισθῇ, ὃ ὄγκος τοῦ παραγομένου στερεοῦ, ἐὰν εἶναι ΑΒ=α καὶ ΒΓ=β.

2596. (2631). Νὰ ὑπολογισθῇ ὃ ὄγκος, τὸν ὁποῖον παράγει ἓνα ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς α, ἂν στραφῇ περὶ μίαν ἀπὸ τὰς πλευρᾶς του.

2597. (2632). Ἐνα ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ πλευρᾶς α στρέφεται περὶ ἄξονα χγ παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν του ΒΓ καὶ διερχόμενον διὰ τῆς κορυφῆς Α. Νὰ ὑπολογισθῇ ὃ ὄγκος τοῦ παραγομένου στερεοῦ.

2598. (2633). Δίδεται ἓνα ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ πλευρᾶς α. Προεκτείνωμεν τὴν ΒΓ κατὰ μήκος ΓΔ=α καὶ φέρομεν τὴν ΔΧ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΔ. Νὰ ὑπολογισθῇ ὃ ὄγκος τοῦ στερεοῦ, τὸ ὁποῖον παράγει τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, ὅταν τοῦτο στραφῇ περὶ τὴν ΔΧ κατὰ ὀλόκληρον στροφῆν.

2599. (2634). Δίδεται ἓνα ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ πλευρᾶς α. Προεκτείνωμεν τὴν πλευρὰν ΒΓ κατὰ ἓνα μήκος ΓΔ=χ καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον Δ φέρομεν, εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου, μίαν εὐθεῖαν ΧΥ κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ. Στρέφωμεν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ περὶ τὴν ΧΥ κατὰ ὀλόκληρον στροφῆν.

1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ τιμὴ τοῦ χ οὕτως, ὥστε ὃ ὄγκος τοῦ στερεοῦ, τὸ ὁποῖον παράγει τὸ τρίγωνον ΑΒΓ, νὰ εἶναι ἴσος μὲ $\frac{4}{3}\pi\alpha^3$

2ον. Ἀπὸ τὸ μέσον Μ τοῦ ὕψους ΑΗ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ φέρομεν ἓνα ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ΧΥ. Κατὰ ποῖον λόγον, τὸ ἐπίπεδον αὐτό, χωρίζει τὸν ὄγκον τοῦ στερεοῦ, ποὺ παράγει τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

2600. (2635). Ἐνα ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ πλευρᾶς α στρέφεται περὶ μίαν εὐθεῖαν χγ παράλληλον πρὸς τὴν πλευρὰν του ΒΓ, κατὰ ὀλόκληρον στροφῆν. Ἡ εὐθεῖα χγ ἀπέχει ἀπὸ τὴν πλευρὰν ΒΓ ἀπόστασιν ἴσην μὲ τὴν πλευρὰν τοῦ τριγώνου. Νὰ ὑπολογισθῇ ὃ ὄγκος, τὸν ὁποῖον παράγει, κατὰ τὴν στροφῆν του, τὸ τρίγωνον ΑΒΓ.

2601. (2636). Ἐνα κανονικὸν ἑξάγωνον στρέφεται περὶ μίαν πλευρὰν του κατὰ ὀλόκληρον στροφῆν. Νὰ ὑπολογισθῇ ὃ ὄγκος τοῦ παραγομένου στερεοῦ.

2602. (2637). Ἐνα τετράγωνον πλευρᾶς α στρέφεται περὶ μίαν διαγώνιον του. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν καὶ ὃ ὄγκος τοῦ στερεοῦ, ποὺ παράγει.

2603. (2638). Ἐνα ὀρθογώνιον τρίγωνον στρέφεται διαδοχικῶς περὶ τὰς

τρεις πλευράς του. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι οἱ ὄγκοι, τοὺς ὁποίους παράγει, εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογοι τῶν πλευρῶν περὶ τὰς ὁποίας στρέφεται.

2604. (2639). Ἐνα κανονικὸν ἐξάγωνον πλευρᾶς a στρέφεται περὶ μίαν διάμετρόν του. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν καὶ ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ, ποὺ παράγει.

2605. (2640). Ἐνας ῥόμβος, ὁ ὁποῖος ἔχει διαγωνίους ἴσας μὲ $2a$ καὶ $2b$, στρέφεται διαδοχικῶς περὶ τὰς διαγωνίους αὐτάς. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τῶν στερεῶν, ποὺ παράγει.

2606. (2641). Νὰ εὐρεθῇ ὁ λόγος τῶν ὄγκων τῶν στερεῶν, ποὺ παράγει ἓνα παραλληλόγραμμον, ἂν στραφῇ διαδοχικῶς περὶ τὰς δύο προσκειμένας πλευράς του.

2607. (2642). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ κώνου, ποὺ παράγει ἓνα ὀρθογώνιον τρίγωνον, ὅταν στραφῇ περὶ μίαν τῶν καθέτων πλευρῶν του, εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ ὀρθογωνίου αὐτοῦ τριγώνου ἐπὶ τὸ μῆκος τῆς περιφέρειᾶς, τὴν ὁποίαν γράφει τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου.

2608. (2643). Εἰς ἓνα ἰσοπλευρον τρίγωνον ABB' φέρομεν τὸ ὕψος AG , τὸν ἐγγεγραμμένον κύκλον O καὶ τὴν ἐφαπτομένην AD' τοῦ κύκλου O εἰς τὸ σημεῖον Δ , ὅπου τὸ ὕψος AG τέμνει τὴν περιφέρειαν O . Στρέφομεν τὸ σχῆμα περὶ τὴν AG :

1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας καὶ ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ, τὸ ὁποῖον παράγει τὸ σχῆμα $BEE'B'$, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ ἀκτίς τοῦ κύκλου O εἶναι $R=1,20 \mu$.

2ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἐπίκεντρος γωνία τοῦ κυκλικοῦ τομέως, ὁ ὁποῖος εἶναι τὸ ἀνάπτυγμα τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ στερεοῦ, ὁ ὁποῖος παράγει τὸ τρίγωνον BAB' .

ΣΤ' Ὁμάς. 2609. (2644). Δίδεται ἓνας κῶνος ὁ ὁποῖος ἔχει κορυφὴν Σ , ὕψος $\Sigma O = u$ καὶ βάσιν ἓνα κύκλον O ἀκτίνος R . Νὰ προσδιορισθῇ ἡ χορδὴ AB τῆς βάσεως O οὕτως, ὥστε τὸ τρίγωνον ΣAB νὰ ἔχη ἐμβαδὸν μ^2 . Διερεῦνησις.

2610. (2645). Νὰ περιγραφῇ κῶνος ἐκ περιστροφῆς περὶ δοθεῖσαν τριέδρον.

2611. (2646). Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ $V_\alpha, V_\beta, V_\gamma$ τοὺς ὄγκους, ποὺ παράγει ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, ὀρθογώνιον εἰς τὸ A , ἂν στραφῇ διαδοχικῶς περὶ τὰς πλευράς $B\Gamma, \Gamma A, AB$, θὰ ἔχωμεν τὴν σχέσιν $\frac{1}{V_\alpha^2} = \frac{1}{V_\beta^2} + \frac{1}{V_\gamma^2}$.

Ζ' Ὁμάς. 2612. (2647). Αἱ ἀκτῖνες ἑνὸς ξυλίνου κολούρου κώνου εἶναι R καὶ R' καὶ u τὸ ὕψος του. Βυθίζομεν τὸ στερεὸν αὐτὸ κατακορύφως μέσα εἰς καθαρὸ νερό. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος τοῦ μέρους τοῦ στερεοῦ, τὸ ὁποῖον εἶναι βυθισμένον εἰς τὸ νερὸ καὶ ἡ ἀκτίς τῆς τομῆς τοῦ κολούρου κώνου ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ὕγρου. Τὸ εἶδ. βάρος τοῦ στερεοῦ εἶναι $0,728$. Ἐφαρμογή: $R=8$ ἐκ., $R'=5$ ἐκ. καὶ $u=15$ ἐκ.

2613. (2648) Μία δεξαμενὴ, ἡ ὁποία ἔχει τὸ σχῆμα ἀνεστραμμένου κώνου καὶ τῆς ὁποίας τὸ ὕψος εἶναι 4 μέτρα δέχεται τὰ νερὰ τῆς βροχῆς, ἡ ὁποία πίπτει ἐπὶ μιᾶς ὀριζοντίου στέγης 250 τ.μ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτίς τοῦ ἀνοί-

γματος τῆς δεξαμενῆς αὐτῆς, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι μετὰ μίαν συνεχῆ βροχὴν 5 ὥρῶν, τὸ νερὸ ἔφθασε εἰς ὕψος 3,50 μ. μέσα εἰς τὴν δεξαμενὴν. Γνωρίζομεν, ὅτι τὸ ὕψος τοῦ νεροῦ, ποῦ πίπτει ἐπὶ τῆς στέγης, φθάνει εἰς τὸ $\frac{1}{12}$ τοῦ χιλιοστομέτρου κατὰ λεπτὸν τῆς ὥρας.

2614. (2649). Ἐνας κάδος ἀπὸ ψευδάργυρον ἔχει σχῆμα ἐνὸς κολούρου κώνου. Ἡ μεγάλη βάσις του εἶναι ἀνοικτὴ καὶ ἔχει διάμετρον δ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διάμετρος τῆς μικρᾶς βάσεως, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ κάδου εἶναι ἴσος μὲ τὰ $\frac{7}{16}$ τοῦ ὄγκου κυλίνδρου, ὁ ὁποῖος ἔχει βάσιν τὴν μεγάλην βάσιν τοῦ κάδου καὶ τὸ αὐτὸ ὕψος; Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ κάδου καὶ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ ψευδαργύρου, ἡ ὁποία εἶναι ἀναγκαία διὰ τὴν κατασκευὴν τοῦ κάδου.

2615. (2650). Εἰς ἓνα κόλουρον κώνον $ABB'A'$, αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων εἶναι $OA=R$ καὶ $O'A'=R'$ καὶ τὸ ὕψος του $OO'=u$.

1ον. Δίδεται ἓνα σημεῖον O'' , τὸ ὁποῖον διαιρεῖ τὸ ὕψος κατὰ δοθέντα λόγον $\frac{O''O'}{OO'} = \mu$, μικρότερον τῆς μονάδος. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτίς $OT=x$

τῆς τομῆς τοῦ κολ. κώνου ὑπὸ ἐνὸς ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὰς βάσεις του.

2ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἂν τὸ O'' εἶναι τὸ σημεῖον τῆς τομῆς τῶν διαμέσων τοῦ τριγώνου $OA'B'$ καὶ παραστήσωμεν μὲ B τὸ ἔμβαδὸν τῆς βάσεως AOB καὶ μὲ E τὸ ἔμβαδὸν τῆς τομῆς, ἡ ὁποία ἔχει κέντρον τὸ O'' , ὁ ὄγκος τοῦ κολ. κώνου δύναται νὰ ἐκφρασθῇ ὑπὸ τοῦ τύπου $V = \frac{1}{4} u (B+3E)$.

2616. (2651). Εἰς ἓνα κύκλον O ἀκτῖνος R ἐγγράφομεν ἓνα κανονικὸν ἐξάγωνον $ABΓΔEZ$. Φέρομεν τὰς εὐθείας BZ καὶ $ΑΓ$, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον M , τὸ ὁποῖον κεῖται ἐπὶ τῆς καθέτου OH ἐπὶ τὴν πλευρὰν AB . Νὰ ὑπολογισθῇ συναρτήσῃ τῆς ἀκτῖνος R :

1ον. Τὸ ἔμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου MAB καὶ ὁ ὄγκος του.

2ον. Τὸ ἔμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου $MZΓ$ καὶ ὁ ὄγκος του.

3ον. Νὰ ἐπαληθευθοῦν τὰ ἐξαγόμενα μὲ τὴν ὁμοιότητα τῶν παραγομένων στερεῶν.

Η' Ὁμάς. 2617. (2652). Δίδεται ἓνας κύκλος O ἀκτῖνος R καὶ δύο διάμετροι AB καὶ $ΓΔ$ κάθετοι μεταξύ των. Νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ἓνα σημεῖον Σ τοιοῦτον, ὥστε, ἂν φέρωμεν τὰς καθέτους ME καὶ MZ ἐπὶ τὰς διαμέτρους αὐτάς, τὸ ὀρθογώνιον $OEMZ$, στρεφόμενον περὶ μίαν ἀπὸ τὰς πλευράς του, νὰ παράγῃ ἓνα κύλινδρον, τοῦ ὁποῖου ὁ ὄγκος νὰ εἶναι μέγιστος.

2618. (2653). Μεταξὺ τῶν κυλίνδρων, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὸ αὐτὸ ἔμβαδὸν ὀλικῆς ἐπιφανείας $2\pi a^2$, ποῖος ἔχει τὸν μέγιστον ὄγκον; τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ἂν ὑποθέσωμεν, ὅτι οἱ κύλινδροι αὐτοὶ εἶναι ἀνοικτοὶ κατὰ μίαν βάσιν.

2619. (2654). Μεταξὺ ὄλων τῶν κυλίνδρων, οἱ ὁποῖοι εἶναι ἰσοδύναμοι, ποῖος ἔχει τὸ ἐλάχιστον ἔμβαδὸν ὀλικῆς ἐπιφανείας;

2620. (2655). Μεταξὺ ὄλων τῶν κυλίνδρων, τῶν ὁποίων ὁ λόγος τοῦ ὄγκου πρὸς τὸ ἔμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας των, ἔχουν τὴν αὐτὴν τιμὴν k , ποῖος ἔχει τὸν ἐλάχιστον ὄγκον;

2621. (2656). Νὰ ἐγγραφῆ εἰς δοθέντα κῶνον, ἕνας κύλινδρος, τοῦ ὁποίου ἡ ὀλικὴ ἐπιφάνεια νὰ εἶναι μεγίστη.

2622. (2657). Νὰ ἐγγραφῆ εἰς δοθέντα κῶνον ἕνας κύλινδρος, τοῦ ὁποίου ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια νὰ εἶναι μεγίστη.

2623. (2658). Νὰ ἐγγραφῆ εἰς δοθέντα κῶνον ἕνας κύλινδρος, τοῦ ὁποίου ὁ ὄγκος νὰ εἶναι μέγιστος.

2624. (2659). Νὰ περιγραφῆ περὶ δοθέντα κύλινδρον ἕνας κῶνος, τοῦ ὁποίου ὁ ὄγκος νὰ εἶναι ἐλάχιστος.

2625. (2660). Ἀπὸ ὅλους τοὺς κυλίνδρους, οἱ ὅποιοι ἔχουν τὴν αὐτὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν, ποῖος ἔχει τὸν μέγιστον ὄγκον;

2626. (2661). Ἐπὶ ὅλους τοὺς κῶνους, οἱ ὅποιοι ἔχουν τὸ αὐτὸ ἐμβαδὸν κυρτῆς ἐπιφανείας πα², ποῖος ἔχει τὸν μέγιστον ὄγκον;

2627. (2662), Ἐπὶ ὅλους τοὺς κῶνους, οἱ ὅποιοι ἔχουν τὸ αὐτὸ ἐμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας, ποῖος ἔχει τὸν μέγιστον ὄγκον;

2628. (2663). Ποῖος εἶναι ὁ μέγιστος ὄγκος ἐνὸς κῶνου, τοῦ ὁποίου ἡ πλευρὰ εἶναι δοθεῖσα;

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ Γ΄

ΣΦΑΙΡΑ

Ὅρισμοί καὶ ιδιότητες

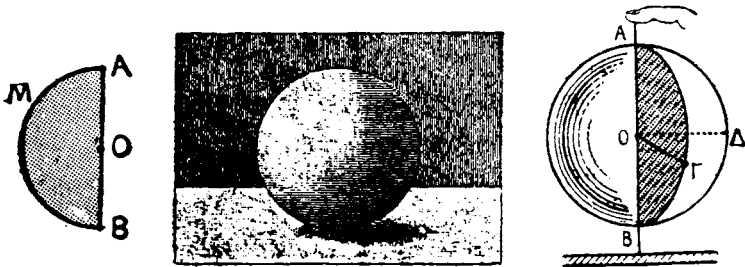
835. Ὅρισμοί. *Σφαῖρα* λέγεται τὸ στερεόν, τοῦ ὁποῖου ὅλα τὰ σημεῖα τῆς ἐπιφανείας του ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ ἓνα σημεῖον, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐντὸς τοῦ στερεοῦ καὶ τὸ ὁποῖον λέγεται **κέντρον**.

Ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει τὸ κέντρον τῆς σφαίρας μὲ ἓνα σημεῖον τῆς ἐπιφανείας τῆς, λέγεται **ἀκτίς**.

Μία εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει δύο σημεῖα τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σφαίρας καὶ διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς, λέγεται **διάμετρος**.

Ἐκ τοῦ ὁρισμοῦ τῆς σφαίρας συνάγομεν, ὅτι :

Ὅλοι αἱ ἀκτῖνες τῆς αὐτῆς σφαίρας εἶναι ἴσαι καὶ μία διάμετρος τῆς εἶναι διπλασία τῆς ἀκτίνος τῆς.



Σχ. 559.

Εἶναι φανερόν, ὅτι : **Δύο σφαῖραι, αἱ ὁποῖαι ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀκτίνα εἶναι ἴσαι.**

Μία σφαῖρα δύναται νὰ παραχθῇ καὶ ἀπὸ ἓνα ἡμικύκλιον ΑΜΒΟΑ (Σχ. 559), ἂν τοῦτο στραφῇ κατὰ τὴν αὐτὴν φορὰν, περὶ τὴν διάμετρον του ΑΟΒ, μέχρις ὅτου ἐπανέλθῃ εἰς τὴν ἀρχικὴν του θέσιν. Κατὰ τὴν στροφὴν ἡ ἡμιπεριφέρεια ΑΜΒ τοῦ ἡμικυκλίου γράφει τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας.

Εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια μιᾶς σφαίρας, εἶναι ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἴσην ἀπόστασιν ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς.

Λέγομεν, ὅτι ἓνα σημεῖον κεῖται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν μιᾶς σφαίρας, ἐὰν ἡ ἀπόστασις του ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας εἶναι μικροτέρα τῆς ἀκτίνος.

Ἐπίσης λέγομεν, ὅτι ἓνα σημεῖον κεῖται ἐκτὸς σφαίρας, ἐὰν ἡ ἀπόστασις του ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς εἶναι μεγαλύτερα τῆς ἀκτίνος.

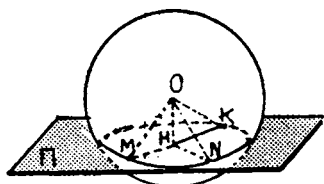
Ἐπίπεδοι τομαὶ μιᾶς σφαίρας

836. Θεώρημα. *Κάθε ἐπίπεδος τομὴ μιᾶς σφαίρας εἶναι κύκλος.*

Ἐπίπεδος: Ἐστω Π ἓνα τυχὸν ἐπίπεδον (Σχ. 560), τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν σφαῖραν O καὶ K, M, N διάφορα σημεῖα τῆς τομῆς τοῦ ἐπιπέδου Π καὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ τομὴ αὐτὴ εἶναι κύκλος.

Ἀπόδειξις: Φέρομεν τὴν κάθετον OH ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π , τὰς ἀκτίνους OK, OM, ON καὶ τὰς εὐθείας HK, HM, HN . Ἐπειδὴ αἱ πλάγαι OK, OM, ON εἶναι ἴσαι, ὡς ἀκτίνες τῆς σφαίρας O , θὰ εἶναι $HK=HM=HN$. Τὰ κοινὰ λοιπὸν σημεῖα K, M, N τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας καὶ τοῦ ἐπιπέδου Π ἀπέχουν ἀπὸ τὸ σημεῖον H ἀποστάσεις ἴσας καὶ ἐπομένως κεῖνται ἐπὶ περιφερείας κύκλου. Ἡ



Σχ. 560.

τομὴ λοιπὸν τῆς σφαίρας καὶ τοῦ ἐπιπέδου Π εἶναι ἓνας κύκλος.

Διερεύνησις: Ἐστω R ἡ ἀκτίς τῆς σφαίρας O , ρ ἡ ἀκτίς τοῦ κύκλου τομῆς καὶ δ ἡ ἀπόστασις OH τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον Π . Ἀπὸ τὸ ὀρθ. τρίγωνον OHM ἔχομεν:

$$\overline{MH}^2 = \overline{OM}^2 - \overline{OH}^2 \quad \eta \quad \rho = \sqrt{R^2 - \delta^2} \quad (1).$$

Διὰ τὰ τέμνη τὸ ἐπίπεδον Π τὴν σφαῖραν O , πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι $\delta < R$.

1ον. Ἐὰν $\delta=0$, δηλ. ἐὰν τὸ τέμνον ἐπίπεδον διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, ἡ (1) δίδει $\rho=R$, δηλ. ἡ ἀκτίς τῆς τομῆς εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτίνα τῆς σφαίρας.

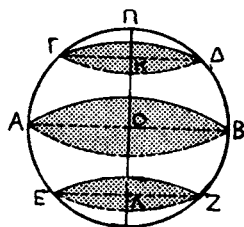
Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν, ὅτι ἡ τομὴ τῆς σφαίρας ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου εἶναι ἓνας μέγιστος κύκλος.

Π.χ. ὁ κύκλος AB εἶναι μέγιστος (Σχ. 561).

Ἐὰν $\delta \neq 0$, ἀλλὰ $< R$, δηλ. ἐὰν τὸ τέμνον ἐπίπεδον δὲν διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, ἡ ἀκτίς ρ τῆς τομῆς εἶναι μικροτέρα τῆς ἀκτίνος R τῆς σφαίρας.

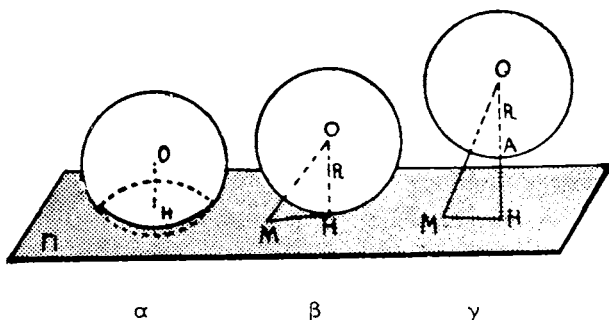
Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν ὅτι ἡ τομὴ τῆς σφαίρας ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου εἶναι ἓνας μικρὸς κύκλος τῆς σφαίρας.

Π.χ. ὁ κύκλος $\Gamma\Delta$ εἶναι μικρὸς κύκλος (Σχ. 561).



Σχ. 561.

2ον. Ἐὰν $\delta = R$, τότε ἡ (1) δίδει $\rho = 0$ καὶ τὸ ἐπίπεδον Π ἔχει ἓνα μόνον κοινὸν σημεῖον μὲ τὴν σφαῖραν. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν, ὅτι τὸ ἐπίπεδον ἐφάπτεται τῆς σφαίρας καὶ τὸ κοινὸν σημεῖον λέγεται σημεῖον ἐπαφῆς (Σχ. 562 β).



Σχ. 562.

3ον. Ἐὰν $\delta > R$, τὸ ἐπίπεδον καὶ ἡ σφαῖρα δὲν ἔχουν κανένα κοινὸν σημεῖον.

Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν λέγομεν, ὅτι τὸ ἐπίπεδον Π κείται ἐκτὸς τῆς σφαίρας (Σχ. 562 γ).

837. Πορίσματα : I. Ἐπειδὴ ἡ ἀκτίς κάθε μεγίστου κύκλου σφαίρας εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτίνα τῆς σφαίρας συναγόμεν, ὅτι :

Οἱ μέγιστοι κύκλοι μιᾶς σφαίρας εἶναι ἴσοι.

II. Ἐπειδὴ τὰ ἐπίπεδα τῶν μεγίστων κύκλων διέρχονται ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, οἱ μέγιστοι κύκλοι τέμνονται κατὰ διάμετρον ὥστε :

Οἱ μέγιστοι κύκλοι μιᾶς σφαίρας διχοτομοῦνται.

III. Τὸ ἐπίπεδον ἐνὸς μεγίστου κύκλου σφαίρας χωρίζει τὴν σφαῖραν εἰς δύο ἴσα μέρη.

Πράγματι τὰ δύο μέρη δύνανται νὰ συμπέσουν, ὅταν θέσωμεν (νοερῶς) τὸ ἓνα ἐπὶ τοῦ ἄλλου. Τὰ δύο αὐτὰ ἴσα μέρη λέγονται *ἡμισφαίρια*.

IV. Δύο μικροὶ κύκλοι, ἴσον ἀπέχοντες ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, εἶναι ἴσοι καὶ ἀντιστρόφως.

Διότι ἔχουν ἴσας ἀκτῖνας.

838. Παράλληλοι κύκλοι. Αἱ τομαὶ σφαίρας ὑπὸ ἐπιπέδων παραλλήλων λέγονται *παράλληλοι κύκλοι* (Σχ. 561).

839. Τομὴ μιᾶς εὐθείας καὶ μιᾶς σφαίρας. Θεώρημα. *Μία εὐθεῖα δὲν δύναται νὰ συναντᾷ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας παρὰ μόνον εἰς δύο σημεῖα.*

Ἀπόδειξις: Κάθε ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον διέρχεται ἀπὸ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν καὶ τέμνει τὴν σφαῖραν τέμνει τὴν ἐπιφάνειάν της κατὰ μίαν περιφέρειαν. Τὰ κοινὰ λοιπὸν σημεῖα τῆς εὐθείας καὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας εἶναι τὰ αὐτὰ μὲ τὰ κοινὰ σημεῖα τῆς εὐθείας καὶ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου τῆς τομῆς. Ἄλλὰ μία εὐθεῖα δὲν δύναται νὰ συναντᾷ μίαν περιφέρειαν παρὰ εἰς δύο μόνον σημεῖα.

Ἐδείχθη λοιπὸν, ὅτι: *Μία εὐθεῖα δὲν δύναται. . .*

840. Πορίσματα: I. *Διὰ τριῶν σημείων A, B, Γ τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σφαίρας διέρχεται ἓνας καὶ μόνος κύκλος.*

Ἀπόδειξις: Τὰ τρία αὐτὰ σημεῖα δὲν κείνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας καὶ ἐπομένως ὀρίζουν ἓνα ἐπίπεδον· τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ τέμνει τὴν σφαῖραν κατὰ ἓνα κύκλον, ὁ ὁποῖος διέρχεται ἀπὸ τὰ τρία σημεῖα A, B, Γ.

II. *Διὰ δύο σημείων A καὶ B τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σφαίρας μὴ κειμένων ἐπὶ τῆς αὐτῆς διαμέτρου, δυνάμεθα νὰ φέρωμεν μίαν περιφέρειαν μεγίστου κύκλου καὶ μίαν καὶ μόνον.*

Ἀπόδειξις: Τὰ δύο σημεῖα A καὶ B καὶ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας ὀρίζουν γενικῶς ἓνα ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν σφαῖραν κατὰ ἓνα μέγιστον κύκλον, ὁ ὁποῖος διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα A καὶ B.

Σημ. Ἐὰν τὰ δοθέντα σημεῖα A καὶ B εἶναι τὰ ἄκρα μιᾶς διαμέτρου τῆς σφαίρας, κάθε ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον διέρχεται ἀπὸ τὴν διάμετρον AB, διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας καὶ συνεπῶς τέμνει τὴν σφαῖραν κατὰ μέγιστον κύκλον. Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὑπάρχουν ἄπειροι μέγιστοι κύκλοι, οἱ ὁποῖοι διέρχονται ἀπὸ τὰ σημεῖα A καὶ B.

Ἀσκήσεις: 2629, 2630, 2631, 2632, 2633, 2634.

Ἐφαπτόμενα εὐθεῖαι καὶ ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα σφαίρας

841. Εὐθεῖα ἐφαπτομένη σφαίρας. Λέγομεν, ὅτι μία εὐθεῖα εἶναι ἐφαπτομένη εἰς μίαν σφαῖραν, ὅταν ἡ εὐθεῖα αὐτὴ ἔχη ἓνα μόνον κοινὸν σημεῖον μὲ τὴ σφαῖραν.

Αὐτὸ τὸ κοινὸν σημεῖον λέγεται σημεῖον ἐπαφῆς.

Ἀπὸ τὴν διερεῦνῃσιν τῆς § 839 συνάγομεν, ὅτι :

Κάθε εὐθεῖα, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ μίαν ἀκτῖνα σφαίρας, εἰς τὸ ἄκρον τῆς, εἶναι ἐφαπτομένη τῆς σφαίρας καὶ ἀντιστρόφως.

842. Ἐπίπεδον ἐφαπτόμενον σφαίρας. Ἐνα ἐπίπεδον λέγεται ἐφαπτόμενον εἰς μίαν σφαῖραν, ὅταν τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ ἔχη ἓνα μόνον κοινὸν σημεῖον μὲ τὴν σφαῖραν.

Τὸ κοινὸν αὐτὸ σημεῖον λέγεται σημεῖον ἐπαφῆς τοῦ ἐφαπτομένου ἐπιπέδου καὶ τῆς σφαίρας.

Ἀπὸ τὴν διερεῦνῃσιν τῆς § 836 συνάγομεν, ὅτι :

Κάθε ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον εἶναι κάθετον ἐπὶ μίαν ἀκτῖνα σφαίρας εἰς τὸ ἄκρον τῆς, εἶναι ἐφαπτόμενον εἰς τὴν σφαῖραν.

Κάθε ἐπίπεδον ἐφαπτόμενον εἰς μίαν σφαῖραν εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα, ἡ ὁποία καταλήγει εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς.

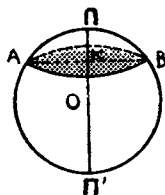
843. Πακράτηρις. Τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον ἐφάπτεται μιᾶς σφαίρας εἰς ἓνα σημεῖον τῆς M , ὡς κάθετον ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα OM , περιέχει ὅλας τὰς εὐθείας τὰς ἐφαπτομένας τῆς σφαίρας εἰς τὸ σημεῖον M , δηλ. εἶναι ὁ τόπος ὄλων τῶν εὐθειῶν τῶν ἐφαπτομένων τῆς σφαίρας εἰς τὸ σημεῖον M .

Πόλοι

844. Πόλοι. Ἐστω AB (Σχ. 563), ἓνας κύκλος μιᾶς σφαίρας O καὶ PKP' μία διάμετρος τῆς σφαίρας κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου. Τὰ ἄκρα Π καὶ Π' τῆς διαμέτρου αὐτῆς λέγονται **πόλοι τοῦ κύκλου AB** .

Οἱ πόλοι Π, Π' ἑνὸς μικροῦ κύκλου AB , τὸ κέντρον K τοῦ κύκλου αὐτοῦ καὶ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας κεῖνται ἐπ' εὐθείας γραμμῆς.

Ἡ διάμετρος $\Pi\Pi'$ τῆς σφαίρας O , ἡ ὁποία περιέχει τοὺς πόλους ἑνὸς κύκλου, λέγεται **ἄξων** αὐτοῦ. Ὡστε:



Σχ. 563.

Πόλοι κύκλου σφαίρας λέγονται τὰ ἄκρα τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου.

Ἄξων κύκλου μιᾶς σφαίρας λέγεται ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας, ἡ ὁποία εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου αὐτοῦ.

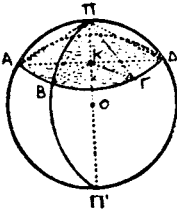
845. Θεώρημα. Κάθε πόλος ἑνὸς κύκλου ἀπέχει ἴσον ἀπὸ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς περιφερείας του.

Ἐπίδειξις: Ἐστώσαν Π καὶ Π' οἱ πόλοι ἑνὸς κύκλου K τῆς σφαίρας O (Σχ. 564). Φέρομεν τὰς εὐθείας $\Pi A, \Pi B, \Pi \Gamma, \dots$, αἱ ὁποῖαι συνδέουν τὸν πόλον Π μὲ τὰ διάφορα σημεῖα A, B, Γ, \dots τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου K .

Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι

$$\Pi A = \Pi B = \Pi \Gamma = \dots$$

Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ ὁ ἄξων $\Pi \Pi'$ τοῦ κύκλου αὐτοῦ, διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον K τοῦ κύκλου αὐτοῦ, αἱ ἀκτίνες του $KA, KB, K\Gamma, \dots$ εἶναι ἴσαι· ἄρα αἱ $\Pi A, \Pi B, \Pi \Gamma, \dots$ εἶναι ἴσαι, ὡς πλάγια τῶν ὁποίων οἱ πόδες ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὸν πόδα K τῆς καθέτου ΠK .



Σχ. 564.

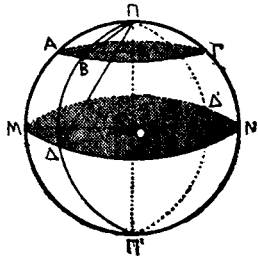
Σημ. Ὅταν ἀναφέρωμεν ἀπλῶς: ὁ πόλος τοῦ κύκλου $AB\Gamma$, θὰ ἔννοοῦμεν τὸν πλησιέστερον πόλον Π πρὸς τὸν κύκλον αὐτόν.

846. Παρατηρήσεις: I. Τὰ τόξα $\Pi A, \Pi B, \Pi \Gamma, \dots$ τῶν μεγίστων κύκλων, τὰ ὁποῖα συνδέουν τὸν πόλον Π μὲ τὰ διάφορα σημεῖα A, B, Γ τοῦ κύκλου K , εἶναι ἴσα, διότι εἶναι τόξα ἴσων χόρδων ἴσων κύκλων.

II. Τὸ προηγούμενον θεώρημα ἰσχύει καὶ ὅταν ὁ μικρὸς κύκλος $AB\Gamma$, γίνῃ μέγιστος κύκλος MAN (Σχ. 565). Εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν αἱ ὀρθαὶ γωνίαι $\Pi OM, \Pi ON, \dots$ εἶναι ἐπίκεντροι γωνίαι τῶν μεγίστων κύκλων $\Pi M\Pi', \Pi N\Pi', \dots$ καὶ ἐπομένως τὰ τόξα $\Pi M, \Pi N, \dots$ εἶναι τεταρτημόρια μεγίστων κύκλων.

847. Πολικὴ ἀπόστασις. Πολικὴ ἀπόστασις ἑνὸς κύκλου, ὁ ὁποῖος ἔχει γραφῆ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σφαίρας, λέγεται ἡ σταθερὰ ἀπόστασις τοῦ πόλου τῆς ἀπὸ τυχόν σημείου τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου αὐτοῦ.

Π.χ. πολικὴ ἀπόστασις τοῦ κύκλου K (Σχ. 565) εἶναι τὸ μήκος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ΠB .



Σχ. 565.

Τὸ τόξον τοῦ μεγίστου κύκλου μιᾶς σφαίρας, τὸ ὁποῖον συνδέει

τὸν πόλον ἐνὸς κύκλου αὐτῆς μὲ τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου αὐτοῦ, λέγεται **σφαιρικὴ ἀκτίς τοῦ κύκλου**.

Π.χ. τὸ τόξον ΠΒ (Σχ. 565) τοῦ μεγίστου κύκλου ΠΒΠ' λέγεται σφαιρικὴ ἀκτίς τοῦ κύκλου Κ.

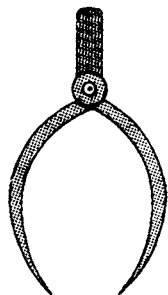
Ἡ σφαιρικὴ ἀκτίς ἐνὸς μεγίστου κύκλου μιᾶς σφαίρας εἶναι ἓνα τεταρτημόριον τῆς περιφερείας του καὶ ἡ πολικὴ ἀπόστασίς του εἶναι ἴση μὲ τὴν χορδὴν τοῦ τόξου αὐτοῦ, δηλ. μὲ τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου, τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν μέγιστον αὐτὸν κύκλον.

Π.χ. τοῦ μεγίστου κύκλου ΜΝ (Σχ. 565) τῆς σφαίρας Ο, σφαιρικὴ ἀκτίς εἶναι τὸ τόξον ΠΒΔ καὶ πολικὴ ἀπόστασις ἡ χορδὴ ΠΔ.

Γραφικαὶ ἐφαρμογαὶ

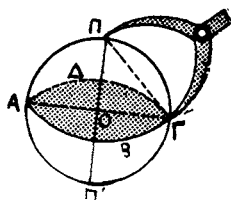
848. Σφαιρικὸς διαβήτης. Διὰ νὰ γράψωμεν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σφαίρας, περιφερείας κύκλων, χρησιμοποιοῦμεν τὸν **σφαιρικὸν διαβήτην** (Σχ. 566), δηλ. ἓνα διαβήτην, τοῦ ὁποίου τὰ σκέλη εἶναι καμπυλωμένα καὶ ἐργαζόμεθα ὡς ἑξῆς :

Στηρίζομεν τὸ ἄκρον τοῦ ἐνὸς σκέλους του εἰς ἓνα σημεῖον τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, τὸ ὁποῖον ἔχομεν ἐκλέξει ὡς πόλον, καὶ περιστρέφομεν τὸ ἄλλο σκέλος του οὕτως, ὥστε τὸ ἄκρον του νὰ ἐγγίξῃ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, ἐπὶ τῆς ὁποίας γράφει μίαν περιφέρειαν κύκλου.



Σχ. 566.

Μὲ πόλον τυχὸν σημεῖον Π τῆς σφαίρας Ο (Σχ. 567) δυνάμεθα νὰ γράψωμεν μίαν ἀπειρίαν κύκλων, τῶν ὁποίων τὰ ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα, ὡς κάθετα ἐπὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον ΠΠ'. Διὰ νὰ γράψωμεν ἓνα μέγιστον κύκλον τῆς σφαίρας Ο, πρέπει νὰ λάβωμεν, ὡς ἄνοιγμα τοῦ διαβήτου, τὴν χορδὴν ἐνὸς τεταρτημορίου ἐνὸς μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας, δηλ. $R\sqrt{2}$. Εἶναι ἀνάγκη λοιπὸν νὰ γνωρίζωμεν τὴν ἀκτίνα R τῆς σφαίρας.

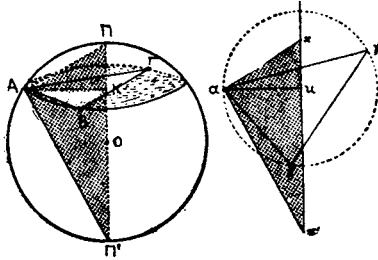


Σχ. 567.

849. Πρόβλημα. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτίς μιᾶς σφαίρας.

Μὲ πόλον τυχὸν σημεῖον Π (Σχ. 568) τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σφαίρας Ο καὶ μὲ ἓνα αὐθαίρετον ἄνοιγμα τοῦ σφαιρικοῦ διαβήτου, γράφομεν ἓνα κύκλον Κ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. Ἐπὶ τῆς περι-

φρείας τοῦ κύκλου K λαμβάνομεν τρία τυχόντα σημεῖα A, B, Γ καὶ μὲ τὴν βοήθειαν τοῦ διαβήτου προσδιορίζομεν τὰ μήκη τῶν χορδῶν $AB, B\Gamma, \Gamma A$. Κατασκευάζομεν ἔπειτα ἐπὶ ἐνὸς φύλλου χάρτου ἕνα τρίγωνον $αβγ$, τοῦ ὁποῦ αἱ πλευραὶ νὰ εἶναι ἴσαι μὲ τὰ τρία μήκη $AB, B\Gamma, \Gamma A$. Προσδιορίζομεν τὸ κέντρον $κ$ τοῦ κύκλου, τοῦ περιγεγραμμέ-



Σχ. 568.

νου περι τὸ τρίγωνον $αβγ$ · ἡ ἀκτὴς κα εἶναι ἴση μὲ τὴν ἀκτῖνα KA τοῦ κύκλου K . Κατασκευάζομεν ἐπὶ τοῦ φύλλου τοῦ χάρτου ἕνα ὀρθ. τρίγωνον $ακπ$ ἴσον μὲ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $AKΠ$. Πρὸς τοῦτο μὲ κέντρον τὸ σημεῖον $α$ καὶ μὲ ἀκτῖνα ἴσην μὲ $ΑΠ$, δηλ. ἴσην μὲ ἕνα ἀνοίγμα τοῦ διαβήτου ἴσον πρὸς ἐκεῖνο,

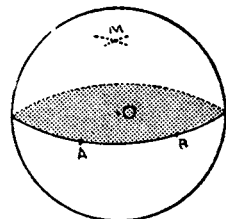
τὸ ὁποῖον ἐχρησιμοποίησαμεν διὰ νὰ γράψωμεν τὸν κύκλον K ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, γράφομεν ἕνα τόξον, τὸ ὁποῖον τέμνει εἰς τὸ σημεῖον $π$, τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν $ακ$ εἰς τὸ σημεῖον $κ$. Φέρομεν ἔπειτα τὴν $απ'$ κάθετον ἐπὶ τὴν $απ$, ἡ ὁποία τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς $πκ$ εἰς τὸ σημεῖον $π'$. Τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $παπ'$ εἶναι ἴσον μὲ τὸ $ΠΑΠ'$, διότι ἔχουν τὰς καθέτους πλευρὰς $πα$ καὶ $ΠΑ$ ἴσας καὶ τὰς ὀξείας γωνίας $π$ καὶ $Π$ ἴσας, ἄρα θὰ ἔχουν καὶ τὰς πλευρὰς $ππ'$ καὶ $ΠΠ'$ ἴσας· συνεπῶς ἡ $ππ'$ εἶναι ἡ διάμετρος τῆς σφαίρας O .

Παρατήρησις. Διὰ νὰ εὗρωμεν πρακτικῶς, τὴν διάμετρον μιᾶς σφαίρας, τοποθετοῦμεν τὴν σφαῖραν μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων καὶ μετροῦμεν τὴν ἀπόστασιν τῶν παραλλήλων αὐτῶν ἐπιπέδων· ἡ ἀπόστασις τῶν αὐτῶν εἶναι ἴση μὲ τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας.

Ἀσκήσεις: 2635, 2636, 2637, 2638, 2639.

850. Πρέβλημα. Ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας δοθείσης σφαίρας O , νὰ γραφῆ περιφέρεια μεγίστου κύκλου, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα τῆς A καὶ B .

Ἐπιλογίζομεν κατ' ἀρχὰς τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας O . Ἐπειτα μὲ πόλους τὰ σημεῖα A καὶ B γράφομεν δύο περιφερείας μεγίστων κύκλων, αἱ ὁποῖαι τέμνονται εἰς δύο σημεῖα M καὶ N . Μὲ πόλον τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ σημεῖα M καὶ N , ἔστω τὸ M , γράφομεν περιφέρειαν μεγίστου κύκλου, ἡ ὁποία θὰ διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα



Σχ. 569.

Α και Β· διότι αἱ ΜΑ και ΜΒ εἶναι χορδαὶ τεταρτημορίου μεγίστου κύκλου.

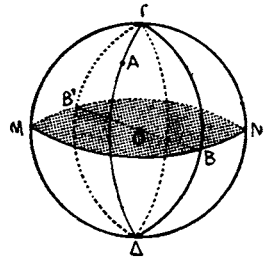
Σημ. Ἐὰν τὰ δοθέντα σημεῖα Α και Β εἶναι τὰ ἄκρα μιᾶς διαμέτρου, οἱ μέγιστοι κύκλοι τῆς σφαίρας, οἱ ὅποιοι γράφονται μὲ πόλους τὰ σημεῖα Α και Β συμπίπτουν. Ἐπομένως, ἐὰν μὲ πόλον τυχὸν σημεῖον τῆς κοινῆς περιφέρειᾶς των γράψωμεν ἓνα μέγιστον κύκλον, ὁ κύκλος αὐτὸς θὰ περάσῃ ἀπὸ τὰ σημεῖα Α και Β· ἔπομένως εἰς τὴν περίπτωσιν αὐτὴν ὑπάρχουν ἄπειροι μέγιστοι κύκλοι, τῶν ὁποίων αἱ περιφέρειαι διέρχονται ἀπὸ τὰ σημεῖα Α και Β.

851. Πρόβλημα. Ἐπι τῆς ἐπιφανείας δοθείσης σφαίρας Ο νὰ γραφῆ περιφέρεια μεγίστου κύκλου, ἡ ὁποία νὰ διέρχεται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον τῆς Α και νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον δοθέντος μεγίστου κύκλου τῆς ΜΝ.

Μὲ πόλον τὸ δοθὲν σημεῖον Α γράφομεν περιφέρειαν μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας Ο ἡ περιφέρεια αὐτὴ τέμνει τὴν περιφέρειαν ΜΝ εἰς δύο σημεῖα Β και Β'. Μὲ πόλον τὸ Β γράφομεν μίαν δευτέραν περιφέρειαν μεγίστου κύκλου ΓΔ, ἡ ὁποία θὰ περάσῃ ἀπὸ τὸ σημεῖον Α. Ἡ περιφέρεια αὐτὴ ΓΑΔΓ εἶναι ἡ ζητούμενη περιφέρεια.

Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ ἡ ΒΑ εἶναι χορδὴ τεταρτημορίου μεγίστου κύκλου σφαίρας, ἡ περιφέρεια ΓΑΔ θὰ περάσῃ ἀπὸ τὸ σημεῖον Α.

Ἐπειδὴ τὸ σημεῖον Β εἶναι πόλος τοῦ μεγίστου κύκλου ΓΑΔ, ἡ διάμετρος ΒΟΒ' εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου αὐτοῦ, και ὁ κύκλος, ὁ ὁποῖος περιέχει τὴν διάμετρον αὐτὴν, εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου ΓΑΔ.



Σχ. 570.

Σχετικά θέσεις δύο σφαιρῶν

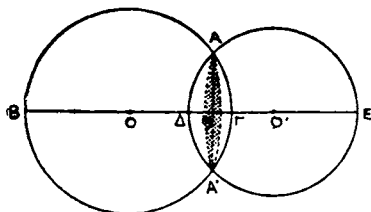
852. Σχετικά θέσεις δύο σφαιρῶν. Ἐστωσαν δύο σφαῖραι Ο και Ο' (Σχ. 571) και ΟΟ' ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει τὰ κέντρα των. Φέρομεν ἓνα ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον νὰ διέρχεται διὰ τῆς εὐθείας ΟΟ'. Τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ τέμνει τὰς δύο σφαῖρας κατὰ μεγίστους κύκλους. Εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ σχετικὴ θέσις τῶν δύο σφαιρῶν ἐξαρτᾶται ἐκ τῆς σχετικῆς θέσεως τῶν περιφερειῶν τῶν δύο αὐτῶν μεγίστων κύκλων.

Ἐὰν οἱ δύο μέγιστοι κύκλοι κεῖνται ὁ ἓνας ἐκτὸς τοῦ ἄλλου, τότε

καὶ αἱ σφαῖραι κείνται ἢ μία ἐκτὸς τῆς ἄλλης.

Ἐὰν οἱ μέγιστοι κύκλοι κείνται ὁ ἕνας ἐντὸς τοῦ ἄλλου, καὶ αἱ σφαῖραι κείνται ἢ μία ἐντὸς τῆς ἄλλης.

Ἐὰν οἱ μέγιστοι κύκλοι ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς ἢ ἐσωτερικῶς,



Σχ. 571.

τότε καὶ αἱ σφαῖραι ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς ἢ ἐσωτερικῶς, δηλ. ἔχουν ἓνα μόνον κοινὸν σημεῖον.

Ἐὰν τέλος οἱ μέγιστοι κύκλοι τέμνονται, καὶ αἱ σφαῖραι τέμνονται.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι αἱ διάφοροι θέσεις δύο σφαιρῶν εἶ-

ναι τόσαι, ὅσαι καὶ αἱ διάφοροι θέσεις, τὰς ὁποίας δύνανται νὰ ἔχουν δύο κύκλοι ἐπὶ ἐνὸς ἐπιπέδου. Ἐπὶ πλεόν αἱ σχέσεις ἰσότητος ἢ ἀνισότητος, αἱ ὁποῖαι ὑπάρχουν μεταξὺ τῆς ἀποστάσεως τῶν κέντρων καὶ τῶν ἀκτίνων τῶν δύο σφαιρῶν, εἶναι αἱ αὐταὶ μὲ ἐκείνας, αἱ ὁποῖαι ὑπάρχουν μεταξὺ τῶν ἀντιστοιχῶν στοιχείων τῶν δύο κύκλων.

853. Θεώρημα. Ἐὰν δύο σφαῖραι τέμνονται, ἡ τομὴ των εἶναι ἓνας κύκλος, τοῦ ὁποίου τὸ ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθείαν, ἡ ὁποία συνδέει τὰ κέντρα των καὶ τοῦ ὁποίου τὸ κέντρον κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας αὐτῆς.

Ἐπίδειξις: Ἐστωσαν O καὶ O' (Σχ. 571) δύο σφαῖραι, αἱ ὁποῖαι τέμνονται.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ τομὴ των εἶναι κύκλος.

Ἀπόδειξις: Φέρομεν τὴν εὐθείαν OO' , ἡ ὁποία συνδέει τὰ κέντρα των καὶ ἓνα ἐπίπεδον Π , τὸ ὁποῖον διέρχεται ἀπὸ τὴν OO' . Τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ τέμνει τὰς σφαῖρας αὐτὰς κατὰ δύο μεγίστους κύκλους, τῶν ὁποίων αἱ περιφέρειαι τέμνονται εἰς δύο σημεῖα A καὶ A' , συμμετρικὰ ὡς πρὸς τὴν OO' .

Ἐὰν τώρα περιστρέψωμεν τὰ ἡμικύκλια $BA\Gamma$ καὶ DAE περὶ τὴν OO' μέχρις, ὅτου ἐπανέλθουν εἰς τὴν ἀρχικὴν θέσιν των, αἱ ἡμιπεριφέρειαι τῶν ἡμικυκλίων αὐτῶν θὰ παραγάγουν τὰς ἐπιφανείας τῶν δύο σφαιρῶν O καὶ O' καὶ τὸ σημεῖον A θὰ γράψῃ τὴν γραμμὴν τῆς τομῆς των. Ἐπειδὴ, κατὰ τὴν στροφὴν αὐτὴν, ἡ ἀπόστασις AM τοῦ σημείου A ἀπὸ τὸν ἄξονα στροφῆς μένει σταθερὰ κατὰ τὸ μέγεθος, τὸ δὲ σημεῖον M μένει ὠρισμένον, ἡ τομὴ τῶν δύο σφαιρῶν εἶναι μία περιφέρεια κύκλου, ἡ ὁποία ἔχει κέντρον τὸ σημεῖον M καὶ ἀκτῖνα τὴν

ΜΑ καὶ τῆς ὁποίας τὸ ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν εὐθεΐαν ΟΟ'.

Ἀσκήσεις: 2640, 2641, 2642, 2643.

Ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σφαίρας

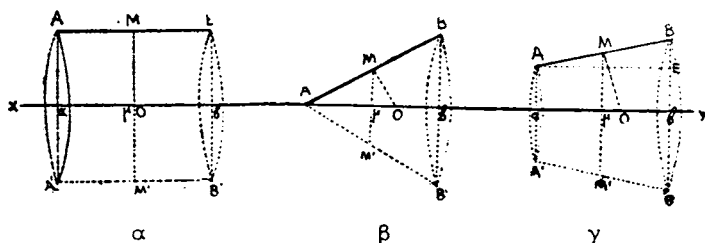
854. **Θεώρημα.** Τὸ ἔμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν παρῶγει ἓνα εὐθύγραμμον τμήμα, τὸ ὁποῖον στρέφεται περὶ ἄξονα, ὃ ὁποῖος κείται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ ὃ ὁποῖος δὲν τέμνει τὸ εὐθύγραμμον τμήμα, εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς προβολῆς τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος ἐπὶ τὸν ἄξονα, ἐπὶ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας, ἣ ὁποία ἔχει ὡς ἀκτίνα τὴν κάθετον, ἣ ὁποία ἄγεται ἀπὸ μέσον τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος μέχρι τοῦ ἄξονος.

Ἐστω ἓνα εὐθύγραμμον τμήμα ΑΒ καὶ ἓνας ἄξων xy.

Διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις:

1ον. Τὸ εὐθύγραμμον τμήμα ΑΒ νὰ εἶναι παράλληλον πρὸς τὸν ἄξονα xy (Σχ. 572 α).

Ἐπίθεσις: Ἐστω ΑΒ ἓνα εὐθύγραμμον τμήμα, τὸ ὁποῖον στρέφεται περὶ τὸν ἄξονα xy. Ἐστω αβ ἡ προβολὴ τοῦ ΑΒ ἐπὶ τὸν xy



Σχ. 572.

καὶ ΜΟ ἡ κάθετος, ἣ ὁποία ἄγεται ἀπὸ τὸ μέσον Μ τοῦ ΑΒ μέχρι τοῦ ἄξονος xy.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν ὅτι:

$$Ἐμβ. \text{ ἐπιφ. γραφ. ὑπὸ } ΑΒ = 2\pi ΜΟ \times \alpha\beta.$$

Ἀπόδειξις: Ἀπὸ τὰ σημεῖα Α καὶ Β φέρομεν τὰς καθέτους Αα καὶ Ββ ἐπὶ τὴν xy. Τὸ τετράπλευρον ΑαβΒ εἶναι ὀρθογώνιον καὶ ἐπομένως ἡ ΑΒ γράφει τὴν ἐπιφάνειαν ἑνὸς κυλίνδρου· ἐπομένως θὰ εἶναι

$$Ἐμβ. \text{ ἐπιφ. } ΑΒ = 2\pi \cdot Αα \times \alpha\beta \quad (1)$$

Ἀπὸ τὸ μέσον Μ τῆς ΑΒ φέρομεν τὴν κάθετον ΜΟ ἐπὶ τὸν ἄξονα xy

Ἐπειδὴ Αα = ΜΟ, ἡ ἰσότης (1) γράφεται:

$$Ἐμβ. \text{ ἐπιφ. } ΑΒ = 2\pi \cdot ΜΟ \times \alpha\beta.$$

2ον. Τὸ εὐθύγραμμον τμήμα AB εἶναι πλάγιον πρὸς τὸν ἄξονα xy καὶ συναντᾷ αὐτὸν εἰς τὸ σημεῖον A (Σχ. 572 β).

Ἀπόδειξις: Ἀπὸ τὸ σημεῖον B φέρομεν τὴν κάθετον $B\beta$ εἰς τὸν ἄξονα xy . Ἐὰν τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\beta$ στραφῇ περὶ τὸν ἄξονα xy , ἡ AB θὰ γράψῃ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν κώνου· ἐπομένως θὰ εἶναι:

$$\text{Ἐμβ. ἐπιφ. } AB = \pi \cdot \beta B \times AB.$$

Ἀπὸ τὸ μέσον M τῆς AB φέρομεν τὴν κάθετον $M\mu$ ἐπὶ τὸν ἄξονα xy καὶ τὴν MO κάθετον ἐπὶ τὴν AB , ἡ ὁποία συναντᾷ τὸν ἄξονα εἰς τὸ σημεῖον O .

Ἐπειδὴ $\beta B = 2 \cdot M\mu$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γράφεται:

$$\text{Ἐμβ. ἐπιφ. } AB = 2\pi \cdot M\mu \times AB \quad (1)$$

Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα $AB\beta$ καὶ $M\mu O$ εἶναι ὅμοια, διότι ἔχουν τὰς πλευράς των κάθετους μίαν πρὸς μίαν· ἀπὸ τὴν ὁμοιότητα αὐτῶν ἔχομεν:

$$\frac{AB}{MO} = \frac{A\beta}{M\mu} \quad \eta \quad AB \times M\mu = A\beta \times MO.$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὸ γινόμενον $M\mu \times AB$ μὲ τὸ ἴσον του $A\beta \times MO$ καὶ ἔχομεν:

$$\text{Ἐμβ. ἐπιφ. } AB = 2\pi \cdot A\beta \times MO \quad \eta \quad \text{Ἐμβ. ἐπιφ. } AB = 2\pi \cdot MO \times A\beta.$$

3ον. Τὸ εὐθύγραμμον τμήμα AB δὲν συναντᾷ τὸν ἄξονα xy (Σχ. 572 γ).

Ἀπόδειξις: Ἀπὸ τὰ σημεῖα A καὶ B φέρομεν τὰς κάθετους Aa καὶ $B\beta$ ἐπὶ τὸν ἄξονα xy . Ἐπίσης ἀπὸ τὸ μέσον M τοῦ AB φέρομεν τὴν κάθετον $M\mu$ ἐπὶ τὸν ἄξονα xy .

Τὸ τετράπλευρον $Aa\beta B$ εἶναι ἓνα ὀρθογώνιον τραπέζιον καὶ ἐπομένως, ἂν στραφῇ περὶ τὸν ἄξονα xy , ἡ πλευρά του AB θὰ γράψῃ τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν ἑνὸς κολούρου κώνου.

Γνωρίζομεν (§ 830) ὅτι τὸ ἔμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας ἑνὸς κολούρου κώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ μήκους τῆς περιφερείας τῆς μέσης τομῆς του ἐπὶ τὴν πλευράν του· δηλ. θὰ εἶναι:

$$\text{Ἐμβ. ἐπιφ. } AB = 2\pi \cdot M\mu \times AB \quad (2)$$

Ἀπὸ τὸ σημεῖον A φέρομεν μίαν παραλλήλον AE πρὸς τὸν ἄξονα xy , ἡ ὁποία συναντᾷ τὴν $B\beta$ εἰς τὸ E . Ἐπίσης ἀπὸ τὸ M φέρομεν τὴν κάθετον MO ἐπὶ τὴν AB , ἡ ὁποία συναντᾷ τὸν ἄξονα εἰς τὸ σημεῖον O . Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα AEB καὶ $M\mu O$ εἶναι ὅμοια, διότι αἱ πλευραὶ των εἶναι κάθετοι μία πρὸς μίαν. Ἀπὸ τὸν ὁμοιότητα τῶν τριγώνων αὐτῶν θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{AB}{MO} = \frac{AE}{M\mu} \quad \eta \quad AB \times M\mu = AE \times MO.$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (2) τὸ γινόμενον $AB \times M\mu$ μὲ τὸ ἴσον του $AE \times MO$ καὶ ἔχομεν :

$$\text{ἔμβ. ἐπιφ. } AB = 2\pi \cdot AE \times MO.$$

Ἐπειδὴ $AE = \alpha\beta$, ἢ προηγουμένη ἰσότης γράφεται

$$\text{ἔμβ. ἐπιφ. } AB = 2\pi \cdot MO \times \alpha\beta.$$

Ἐδείχθη λοιπὸν καὶ εἰς τὰς τρεῖς περιπτώσεις, ὅτι : *Τὸ ἔμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας. . .*

855. Θεώρημα. *Τὸ ἔμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν παράγει μία κανονικὴ κυρτὴ τεθλασμένη γραμμὴ, ἢ ὁποία στρέφεται περὶ ἄξονα, ὁ ὁποῖος κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς, καὶ ὁ ὁποῖος διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς καὶ δὲν τέμνει αὐτήν, εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ μήκους τῆς περιφερείας, ἢ ὁποία εἶναι ἔγγεγραμμένη εἰς τὴν τεθλασμένην αὐτὴν γραμμὴν, ἐπὶ τὴν προβολὴν τῆς γραμμῆς αὐτῆς ἐπὶ τὸν ἄξονα.*

Ἐπιπέδου : Ἐστω ἡ κανονικὴ κυρτὴ τεθλασμένη γραμμὴ $AB\Gamma\Delta$ (Σχ. 573), ἢ ὁ ὁποία στρέφεται περὶ τὸν ἄξονα xy , ὁ ὁποῖος διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς O ἀπὸ τὰ σημεῖα A, B, Γ, Δ φέρομεν τὰς καθέτους $A\alpha, B\beta, \Gamma\gamma, \Delta\delta$ ἐπὶ τὸν ἄξονα xy ἐπίσης φέρομεν τὰ ἀποστήματα OE, OZ, OH τῶν πλευρῶν τῆς τεθλασμένης αὐτῆς γραμμῆς, τὰ ὁποία εἶναι ἴσα, δηλ. εἶναι :

$$OE = OZ = OH.$$

Συμπέρασμα : Θὰ δείξωμεν ὅτι

$$\text{ἔμβ. ἐπιφ. γραφ. ὑπὸ } AB\Gamma\Delta = 2\pi \cdot OE \times \alpha\delta.$$

Ἀπόδειξις : Τὸ ἔμβαδόν, τὸ ὁποῖον παράγει ἡ τεθλασμένη γραμμὴ $AB\Gamma\Delta$ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἔμβαδῶν, ποὺ παράγουν αἱ πλευραὶ τῆς $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta$ δηλ. θὰ εἶναι :

$$\text{Ἐμβ. παραγ. ὑπὸ } AB\Gamma\Delta = \text{ἔμβ. } AB + \text{ἔμβ. } B\Gamma + \text{ἔμβ. } \Gamma\Delta \quad (1)$$

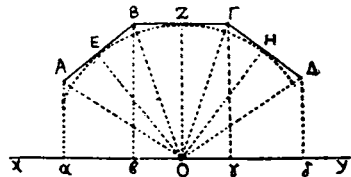
Ἄλλὰ, κατὰ τὸ προηγουμένον θεώρημα, θὰ εἶναι :

$$\text{Ἐμβ. } AB = 2\pi \cdot OE \times \alpha\beta$$

$$\text{Ἐμβ. } B\Gamma = 2\pi \cdot OE \times \beta\gamma$$

$$\text{Ἐμβ. } \Gamma\Delta = 2\pi \cdot OE \times \gamma\delta.$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὰ ἔμβ. AB, \dots μὲ τὰ ἴσα τῶν καὶ ἔχομεν :



Σχ. 573.

- ἔμβ. παραγ. ὑπὸ $AB\Gamma\Delta = 2\pi \cdot OE \times \alpha\beta + 2\pi OE \times \beta\gamma + 2\pi OE \times \gamma\delta$
 ἢ ἔμβ. παραγ. ὑπὸ $AB\Gamma\Delta = 2\pi \cdot OE \times (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\delta)$
 ἢ ἔμβ. παραγ. ὑπὸ $AB\Gamma\Delta = 2\pi \cdot OE \times \alpha\delta.$

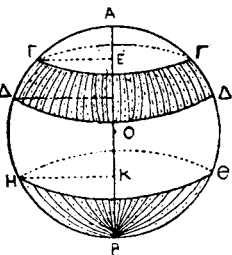
Ἄλλὰ $2\pi \cdot OE$ εἶναι τὸ μῆκος τῆς περιφερείας, τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὴν κανονικὴν τεθλασμένην γραμμὴν καὶ ἀδ ἡ προβολὴ τῆς τεθλασμένης αὐτῆς γραμμῆς ἐπὶ τὸν ἄξονα xy .

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι : *Τὸ ἔμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας. . .*

856. Σφαιρικὴ ζώνη. Ἐστω μία σφαῖρα O καὶ $\Gamma\Gamma'$, $\Delta\Delta'$ αἱ τομαὶ τῆς σφαίρας αὐτῆς ὑπὸ δύο ἐπιπέδων παραλλήλων. Τὸ μέρος τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῶν δύο αὐτῶν παραλλήλων ἐπιπέδων, λέγεται *σφαιρικὴ ζώνη*.

Γενικῶς : Σφαιρικὴ ζώνη λέγεται τὸ μέρος τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σφαίρας, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων.

Τὰ δύο αὐτὰ παράλληλα ἐπίπεδα τέμνουν τὴν σφαῖραν κατὰ δύο κύκλους $\Gamma\Gamma'$ καὶ $\Delta\Delta'$ (Σχ. 574), τῶν ὁποίων τὰ κέντρα E καὶ Z κεῖνται ἐπὶ τῆς διαμέτρου AB , ἡ ὁποία εἶναι ἀκθίος ἐπὶ τὰ τέμνοντα ἐπίπεδα καὶ τῶν ὁποίων αἱ ἀκτίνες εἶναι ἡ EG καὶ $Z\Delta$.



Σχ. 574.

Αἱ περιφέρειαι τῶν δύο αὐτῶν κύκλων λέγονται *βάσεις τῆς σφαιρικῆς ζώνης*.

Μία σφαιρικὴ ζώνη δύναται νὰ παραχθῇ καὶ ἀπὸ ἓνα τόξον τοῦ ἡμικυκλίου, ποὺ παράγει τὴν σφαῖραν, π.χ. τὸ $\Gamma\Delta$, ἂν τοῦτο στραφῇ περὶ τὴν διάμετρον AB . Κατὰ τὴν στροφὴν τὸ ἡμικύκλιον $A\Gamma\Delta B$ παράγει μίαν σφαῖραν, ἡ ἡμιπεριφέρεια $A\Gamma\Delta B$ παράγει τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας, τὸ τόξον $\Gamma\Delta$ παράγει τὴν σφαιρικὴν ζώνην καὶ τὰ σημεῖα Γ καὶ Δ παράγουν τὰς βάσεις τῆς ζώνης.

Ὑψος μιᾶς σφαιρικῆς ζώνης λέγεται ἡ ἀπόστασις τῶν δύο ἐπιπέδων τῶν βάσεων.

Π.χ. ὕψος τῆς ζώνης $\Gamma\Delta\Delta'\Gamma'$ εἶναι ἡ ἀπόστασις EZ .

Ἐὰν τὸ ἓνα ἀπὸ τὰ παράλληλα ἐπίπεδα ἐφάπτεται τῆς σφαίρας, ἡ σφαιρικὴ ζώνη ἔχει μίαν μόνον βάσιν· π.χ. ἡ ζώνη $BH\Theta$ ἔχει μίαν μόνον βάσιν, τὴν $H\Theta$.

Ἡ ζώνη αὐτὴ παράγεται ἀπὸ τὸ τόξον BH , τὸ ὁποῖον στρέφεται περὶ τὴν διάμετρον AB .

Ὑψος τῆς ζώνης ΒΗΘ εἶναι ἡ ἀπόστασις ΒΚ.

Ἐνα τυχὸν ἐπίπεδον ΓΓ' ὀρίζει δύο σφαιρικὰς ζώνας μὲ μίαν βᾶσιν: τὴν σφαιρικὴν ζώνην ΑΓΓ' καὶ τὴν σφαιρικὴν ζώνην ΒΓΓ'.

857. Ἐμβαδὸν σφαιρικῆς ζώνης. Ἐμβαδὸν μιᾶς σφαιρικῆς ζώνης ὀνομάζομεν τὸ ὄριον, πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει τὸ ἔμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, τὴν ὁποῖαν γράφει κανονικὴ κυρτὴ τεθλασμένη γραμμὴ, ἐγγεγραμμένη εἰς τὸ τόξον, τὸ ὁποῖον γράφει τὴν ζώνην, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῆς τεθλασμένης αὐτῆς γραμμῆς διπλασιάζεται ἀπεριορίστως.

858. Πρόβλημα. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔμβαδὸν μιᾶς σφαιρικῆς ζώνης, ἂν γνωρίζωμεν τὸ ὕψος τῆς καὶ τὴν ἀκτίνα τῆς σφαίρας εἰς τὴν ὁποῖαν ἀνήκει.

Ἐστω ΑΔ τὸ τόξον, τὸ ὁποῖον παράγει μίαν ζώνην. Εἰς τὸ τόξον ΑΔ ἐγγράφομεν μίαν κανονικὴν τεθλασμένην γραμμὴν ΑΒΓΔ.

Γνωρίζομεν, ὅτι τὸ ἔμβαδόν, τὸ ὁποῖον παράγει ἡ τεθλασμένη γραμμὴ ΑΒΓΔ, στρεφόμενη περὶ τὴν διάμετρον ΠΠ', εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ μήκους τῆς περιφερείας, τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὴν γραμμὴν αὐτήν, ἐπὶ τὴν προβολὴν τῆς αδ ἐπὶ τὸν ἄξονα· δηλ. εἶναι:

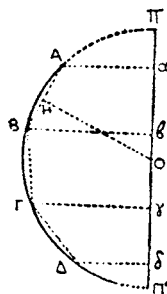
Ἐμβ. παραγ. ὑπὸ ΑΒΓΔ = 2π·ΟΗ × αδ.

Ἐὰν διπλασιάζωμεν ἀπεριορίστως τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τῆς τεθλασμένης γραμμῆς ΑΒΓΔ τότε: τὸ ἀπόστημα ΟΗ ἔχει ὄριον τὴν ἀκτίνα R τοῦ τόξου, τὸ ὁποῖον παράγει τὴν ζώνην καὶ ἐπομένως τὸ μήκος 2π·ΟΗ τῆς περιφερείας, τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὴν τεθλασμένην γραμμὴν, ἔχει ὄριον τὸ μήκος 2πR τῆς περιφερείας ἀκτίνος R· ἡ προβολὴ αδ τῆς κανονικῆς τεθλασμένης γραμμῆς μένει σταθερὰ καὶ ἴση μὲ τὸ ὕψος τῆς ζώνης· ἐπομένως τὸ ἔμβαδόν, τὸ ὁποῖον παράγει ἡ τεθλασμένη αὐτὴ γραμμὴ, ἔχει ὄριον, τὸ ὁποῖον εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ 2πR × υ.

Ἄλλὰ τὸ ὄριον αὐτὸ εἶναι ἕξ ὀρισμοῦ, τὸ ἔμβαδὸν τῆς σφαιρικῆς ζώνης· δηλ. εἶναι:

$$\text{Ἐμβ. σφαιρ. ζώνης} = 2\pi R \times \upsilon$$

Ὡστε: Τὸ ἔμβαδὸν μιᾶς σφαιρικῆς ζώνης εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τοῦ μήκους τῆς περιφερείας ἐνὸς μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας, εἰς τὴν ὁποῖαν ἀνήκει, ἐπὶ τὸ ὕψος τῆς ζώνης.



Σχ. 575.

859. Πόρισμα I. Δύο ἰσοῦψεις ζῶναι τῆς αὐτῆς σφαίρας, ἡ ἴσων σφαιρῶν, εἶναι ἰσοδύναμοι.

Διότι ἔχουν τὸ αὐτὸ ἔμβαδόν.

860. Πόρισμα II. Ὁ λόγος τῶν ἔμβαδῶν δύο ζωνῶν τῆς αὐτῆς σφαίρας, ἡ ἴσων σφαιρῶν, εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν ὕψων τῶν.

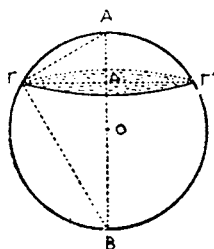
Ἀπόδειξις: Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ E καὶ E' τὰ ἔμβαδὰ δύο ζωνῶν τῆς αὐτῆς σφαίρας ἀκτίνος R καὶ μὲ v καὶ v' τὰ ὕψη τῶν, ἀντιστοίχως, θὰ ἔχωμεν: $E=2\pi Rv$ καὶ $E'=2\pi Rv'$.

Διαιροῦμεν τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν:

$$\frac{E}{E'} = \frac{2\pi Rv}{2\pi Rv'} \quad \eta \quad \frac{E}{E'} = \frac{v}{v'}$$

861. Πόρισμα III. Μία σφαιρική ζώνη μὲ μίαν βάσιν εἶναι ἰσοδύναμος μὲ κύκλον, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀκτῖνα τὴν χορδὴν τοῦ τόξου, τὸ ὁποῖον παράγει τὴν ζώνην.

Ἐστω $ΑΓΓ'$ μία ζώνη, μὲ μίαν βάσιν, τὴν ὁποίαν παράγει τόξον



Σχ. 576.

$ΑΓ$, ἂν τοῦτο στραφῇ περὶ τὴν διάμετρον $ΑΒ$ τῆς σφαίρας O , ἀκτίνος R . Τὸ ὕψος τῆς ζώνης αὐτῆς εἶναι τὸ $ΑΔ$. Θὰ εἶναι λοιπὸν

$$\text{ἔμβ. ζών. } ΑΓΓ' = 2\pi R \times ΑΔ.$$

Ἐπειδὴ $2R=ΑΒ$, ἡ προηγουμένη ἰσότης γράφεται ἔμβ. ζών. $ΑΓΓ' = \pi \times ΑΒ \times ΑΔ$ (1)

Ἐὰν φέρωμεν τὰς χορδὰς $ΑΓ$ καὶ $ΓΒ$ σχηματίζεται τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $ΑΓΔ$ ἀπὸ τὸ ὁποῖον ἔχομεν: $\overline{ΑΓ^2} = ΑΒ \times ΑΔ$.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὸ γινόμενον $ΑΒ \times ΑΔ$ μὲ τὸ ἴσον τοῦ $\overline{ΑΓ^2}$ καὶ ἔχομεν: ἔμβ. ζών. $ΑΓΓ' = \pi \overline{ΑΓ^2}$.

Ἀλλὰ τὸ $\pi \overline{ΑΓ^2}$ παριστάνει τὸ ἔμβαδὸν τοῦ κύκλου, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀκτῖνα τὴν χορδὴν $ΑΓ$.

Ἀσκήσεις: 2644, 2645, 2646, 2647, 2648, 2649, 2650, 2651, 2652, 2653, 2654.

862. Ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας σφαίρας. Ἡ ἐπιφάνεια μιᾶς σφαίρας δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς μία ζώνη, τῆς ὁποίας τὸ ὕψος εἶναι ἴσον μὲ τὴν διάμετρον τῆς σφαίρας. Ἐπομένως τὸ ἔμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου:

$$\text{Ἐμβ. ἐπιφ. σφαιρ.} = 2\pi R \times 2R \quad \eta \quad \boxed{\text{Ἐμβ. ἐπιφ. σφαιρ.} = 4\pi R^2}$$

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι :

Τὸ ἔμβαδόν τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σφαίρας εἶναι ἴσον μὲ τὸ τετραπλάσιον τοῦ ἔμβαδοῦ ἐνὸς μεγίστου κύκλου τῆς.

863. Πέρισμα. Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἐπιφανειῶν δύο σφαιρῶν εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν τετραγώνων τῶν ἀκτίων τῶν.

Ἀπόδειξις: Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ E καὶ E' τὰ ἔμβαδά τῶν ἐπιφανειῶν δύο σφαιρῶν, ἀκτίων R καὶ R' , θὰ ἔχωμεν :

$$E = 4\pi R^2 \quad \text{καὶ} \quad E' = 4\pi R'^2.$$

Διαιροῦμεν τὰς ἰσότητας αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν :

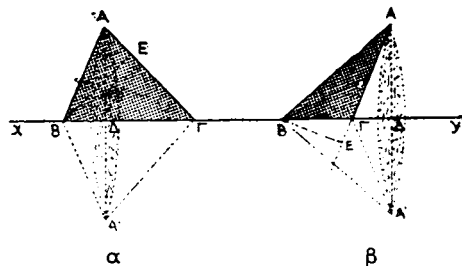
$$\frac{E}{E'} = \frac{4\pi R^2}{4\pi R'^2} \quad \eta \quad \frac{E}{E'} = \frac{R^2}{R'^2}.$$

Ἀσκήσεις: 2655, 2656, 2657, 2658, 2659, 2660, 2661, 2662, 2663, 2664, 2665, 2666, 2667, 2668, 2669, 2670, 2671, 2672.

Όγκος σφαίρας

864. Θεώρημα. Ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ, τὸ ὁποῖον παράγει ἓνα τρίγωνον, τὸ ὁποῖον στρέφεται περὶ ἄξονα, ὃ ὁποῖος κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τριγώνου, διέρχεται ἀπὸ μίαν κορυφὴν τοῦ καὶ δὲν τέμνει αὐτό, εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἔμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας, τὴν ὁποῖαν παράγει ἡ πλευρὰ τοῦ τριγώνου, ἡ ὁποία εὐρίσκεται ἀπέναντι τῆς κορυφῆς, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸν ἄξονα, ἐπὶ τὸ τρίτον τοῦ ἀντιστοίχου, πρὸς τὴν πλευρὰν αὐτήν, ὕψους τοῦ τριγώνου.

Ἐπίπεδος: Ἐστω τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$, τὸ ὁποῖον στρέφεται περὶ ἄξονα xy , ὃ ὁποῖος κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τριγώνου καὶ διέρχεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν τοῦ B . Φέρομεν τὸ ὕψος BE τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$.



Σχ. 577.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$\text{ὄγκ. παραγ. τρ. } AB\Gamma = \text{ἔμβ. ἐπιφ. γραφ. } A\Gamma \times \frac{BE}{3}.$$

Διακρίνομεν τρεῖς περιπτώσεις :

1ον. Μία πλευρὰ τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$, π.χ. ἡ $B\Gamma$, κεῖται ἐπὶ τοῦ ἄξονος xy . (Σχ. 577).

**Απόδειξις*: Φέρομεν τὰ ὕψη AD καὶ BE τοῦ τριγώνου. Ἐὰν αἱ γωνίαι B καὶ Γ τοῦ τριγώνου εἶναι ὀξεῖαι (Σχ. 577 α), ὁ ὄγκος τὸν ὁποῖον παράγει τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$, στρεφόμενον περὶ τὸν ἄξονα xy , εἶναι τὸ ἄθροισμα τῶν κώνων, πού παράγουν τὰ δύο ὀρθογώνια τρίγωνα ADB καὶ $AD\Gamma$. Ἐὰν ὁμοῦς μία ἀπὸ τὰς γωνίας B καὶ Γ εἶναι ἀμβλεῖα, π.χ. ἡ Γ , (Σχ. 577 β), τότε ὁ ὄγκος, τὸν ὁποῖον παράγει τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι ἴσος μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ὄγκων τῶν δύο αὐτῶν κώνων.

Ἐὰν λοιπὸν αἱ γωνίαι B καὶ Γ εἶναι ὀξεῖαι θὰ εἶναι :

$$\delta\gamma\kappa. \text{ παραγ. τριγ. } AB\Gamma = \delta\gamma\kappa. \text{ κών. } BAA' + \delta\gamma\kappa. \text{ κών. } \Gamma AA' \quad (1)$$

$$\text{Ἐπειδὴ} \quad \delta\gamma\kappa. \text{ κών. } BAA' = \frac{1}{3} \pi \overline{AD}^2 \times B\Delta$$

$$\delta\gamma\kappa. \text{ κών. } \Gamma AA' = \frac{1}{3} \pi \overline{AD}^2 \times \Gamma\Delta$$

ἢ ἰσότης (1) γράφεται :

$$\delta\gamma\kappa. \text{ παραγ. τριγ. } AB\Gamma = \frac{1}{3} \pi \overline{AD}^2 \times B\Delta + \frac{1}{3} \pi \overline{AD}^2 \times \Gamma\Delta$$

$$\text{ἢ} \quad \delta\gamma\kappa. \text{ παραγ. τριγ. } AB\Gamma = \frac{1}{3} \pi \overline{AD}^2 (B\Delta + \Gamma\Delta)$$

$$\text{ἢ} \quad \delta\gamma\kappa. \text{ παραγ. τριγ. } AB\Gamma = \frac{1}{3} \pi \overline{AD}^2 \times B\Gamma.$$

Ἐὰν ἡ γωνία Γ εἶναι ἀμβλεῖα, θὰ εἶναι :

$$\delta\gamma\kappa. \text{ παραγ. τριγ. } AB\Gamma = \delta\gamma\kappa. \text{ κών. } BAA' - \delta\gamma\kappa. \text{ κών. } \Gamma AA'$$

$$= \frac{1}{3} \pi \overline{AD}^2 \times B\Delta - \frac{1}{3} \pi \overline{AD}^2 \times \Gamma\Delta$$

$$= \frac{1}{3} \pi \overline{AD}^2 (B\Delta - \Gamma\Delta)$$

$$= \frac{1}{3} \pi \overline{AD}^2 \times B\Gamma.$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις εὐρίσκομεν, ὅτι :

$$\delta\gamma\kappa. \text{ παραγ. τριγ. } AB\Gamma = \frac{1}{3} \pi \overline{AD}^2 \times B\Gamma \quad (2)$$

Ἄλλὰ τὰ γινόμενα $B\Gamma \times AD$ καὶ $A\Gamma \times BE$ εἶναι ἴσα, διότι περιστάνουν τὸ διπλάσιον ἔμβαδὸν τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$.

Ἀντικαθιστῶμεν λοιπὸν εἰς τὴν ἰσότητα (2) τὸ γινόμενον $B\Gamma \times AD$ μὲ τὸ ἴσον του $A\Gamma \times BE$ καὶ ἔχομεν :

$$\delta\gamma\kappa. \text{ παραγ. τριγ. } AB\Gamma = \frac{1}{3} \pi AD \times A\Gamma \times BE \quad (3)$$

Ἄλλὰ τὸ γινόμενον $\pi A\Delta \times A\Gamma$ παριστάνει τὸ ἔμβαδόν, τὸ ὁποῖον γράφει ἡ πλευρὰ $A\Gamma$ ἐνὸς κώνου, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀκτῖνα τὴν $A\Delta$ καὶ πλευρὰν τὴν $A\Gamma$, δηλ. εἶναι :

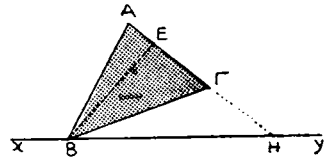
$$\text{ἔμβ. ἔπιφ. γραφ. } A\Gamma = \pi A\Delta \times A\Gamma.$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητά (3) τὸ γινόμενον $\pi A\Delta \times A\Gamma$ μὲ τὸ ἴσον του: ἔμβ. ἔπιφ. γραφ. $A\Gamma$, καὶ ἔχομεν :

$$\text{ὄγκ. παραγ. τριγ. } AB\Gamma = \text{ἔμβ. ἔπιφ. γραφ. } A\Gamma \times \frac{BE}{3}.$$

2ον. Ἡ πλευρὰ $A\Gamma$ τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$, προεκτεινομένη, συναντᾷ τὸν ἄξονα εἰς ἓνα σημεῖον H . (Σχ. 578).

Ὁ ὄγκος τὸν ὁποῖον παράγει τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$, στρεφόμενον περὶ τὸν ἄξονα xy , εἶναι ἴσος μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ὄγκων, ποὺ παράγουν τὰ τρίγωνα ABH καὶ GBH , δηλ. εἶναι :



Σχ. 578.

ὄγκ. παραγ. τριγ. $AB\Gamma =$

$$= \text{ὄγκ. παραγ. τρ. } ABH - \text{ὄγκ. παραγ. τρ. } GBH \quad (4)$$

Ἐπειδὴ, κατὰ τὴν προηγουμένην περίπτωσιν, εἶναι :

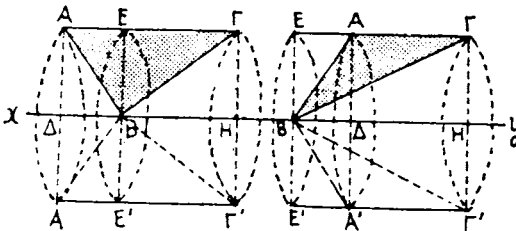
$$\text{ὄγκ. παραγ. τριγ. } ABH = \text{ἔμβ. ἔπιφ. γραφ. } AH \times \frac{BE}{3}$$

$$\text{καὶ } \text{ὄγκ. παραγ. τριγ. } GBH = \text{ἔμβ. ἔπιφ. γραφ. } GH \times \frac{BE}{3},$$

ἡ ἰσότης (4) γράφεται :

$$\begin{aligned} \text{ὄγκ. παρ. τρ. } AB\Gamma &= \text{ἔμβ. ἔπιφ. γρ. } AH \times \frac{BE}{3} - \text{ἔμβ. ἔπιφ. γρ. } GH \times \frac{BE}{3} \\ &= (\text{ἔμβ. ἔπιφ. γρ. } AH - \text{ἔμβ. ἔπιφ. γρ. } GH) \times \frac{BE}{3} \\ &= \text{ἔμβ. ἔπιφ. γραφ. } A\Gamma \times \frac{BE}{3}. \end{aligned}$$

3ον. Ἡ πλευρὰ $A\Gamma$ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸν ἄξονα xy (Σχ. 575).



α

β

Σχ. 579.

Φέρομεν τὸ ὕψος BE καὶ τὰς καθέτους $A\Delta$, GH ἐπὶ τὸν ἄξονα xy .

Ὁ ὄγκος τὸν ὁποῖον παράγει τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$, στρεφόμενον περὶ τὸν ἄξονα xy , εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα (Σχ. 579α) ἢ μὲ τὴν διαφορὰν (Σχ. 579β) τῶν ὄγκων, ποὺ

παράγουν τὰ τρίγωνα ΒΕΓ καὶ ΒΕΑ, καθόσον τὸ σημεῖον Ε πίπτει ἐπὶ τῆς πλευρᾶς ΑΓ ἢ ἐπὶ τῆς προεκτάσεώς της.

Θὰ εἶναι λοιπὸν (Σχ. 579α)

ὄγκ. παραγ. τριγ. ΑΒΓ = ὄγκ. παρ. τριγ. ΒΕΓ + ὄγκ. παρ. τρ. ΒΕΑ (5).

Ἐπειδὴ ὄγκ. παρ. τρ ΒΕΓ = ὄγκ. κυλίνδ. ΕΓΓ'Ε' — ὄγκ. κών. ΒΓΒ'

$$= \pi \overline{ΒΕ}^2 \times ΕΓ - \frac{1}{3} \pi \overline{ΒΕ}^2 \times ΕΓ$$

$$= \frac{2}{3} \pi \overline{ΒΕ}^2 \times ΕΓ$$

καὶ ὄγκ. παρ. τριγ. ΒΕΑ = ὄγκ. κυλίνδ. ΑΕΕ'Α' — ὄγκ. κών. ΒΑΑ'

$$= \pi \overline{ΒΕ}^2 \times ΑΕ - \frac{1}{3} \pi \overline{ΒΕ}^2 \times ΑΕ$$

$$= \frac{2}{3} \pi \overline{ΒΕ}^2 \times ΑΕ,$$

ἢ ἰσότης (5) γράφεται :

$$\text{ὄγκ. παραγ. τριγ. ΑΒΓ} = \frac{2}{3} \pi \overline{ΒΕ}^2 \times ΕΓ + \frac{2}{3} \pi \overline{ΒΕ}^2 \times ΑΕ$$

$$= \frac{2}{3} \pi \overline{ΒΕ}^2 \times (ΕΓ + ΑΕ)$$

$$= \frac{2}{3} \pi \overline{ΒΕ}^2 \times ΑΓ.$$

Ἐὰν τὸ σημεῖον Ε κεῖται ἐπὶ τῆς προεκτάσεως τῆς ΑΓ (Σχ. 578β) εὐρίσκομεν, ὅτι :

$$\text{ὄγκ. παραγ. τριγ. ΑΒΓ} = \frac{2}{3} \pi \overline{ΒΕ}^2 \times (ΕΓ - ΑΕ)$$

$$= \frac{2}{3} \pi \overline{ΒΕ}^2 \times ΑΓ.$$

Παρατηροῦμεν, ὅτι καὶ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις εὐρίσκομεν, ὅτι :

$$\text{ὄγκ. παραγ. τριγ. ΑΒΓ} = \frac{2}{3} \pi \overline{ΒΕ}^2 \times ΑΓ$$

$$\text{ἢ ὄγκ. παραγ. τριγ. ΑΒΓ} = 2\pi \overline{ΒΕ} \times ΑΓ \times \frac{\overline{ΒΕ}}{3} \quad (6)$$

Ἄλλὰ τὸ γινόμενον $2\pi \cdot \overline{ΒΕ} \times ΑΓ$ παριστάνει τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου, ὃ ὁποῖος ἔχει ἀκτῖνα τὴν ΒΕ καὶ ὕψος τὸ ΑΓ καὶ τὸ ὁποῖον ἐμβαδὸν γράφει ἢ πλευρὰ ΑΓ, κατὰ τὴν στροφὴν της, δηλ. εἶναι :

$$2\pi \cdot \overline{ΒΕ} \times ΑΓ = \text{ἐμβ. ἐπιφ. ΑΓ}.$$

Ἄντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (6) τὸ γινόμενον $2\pi \cdot \overline{ΒΕ} \times ΑΓ$ μὲ τὸ ἴσον του καὶ ἔχομεν :

$$\text{ὄγκ. παραγ. τριγ. ΑΒΓ} = \text{ἐμβ. ἐπιφ. γραφ. ΑΓ} \times \frac{\overline{ΒΕ}}{3}.$$

Ἐδείχθη λοιπὸν καὶ εἰς τὰς τρεῖς περιπτώσεις, ὅτι : **Ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ. . . .**

865. Πολυγωνικός τομέυς. Πολυγωνικός τομέυς λέγεται μία επιφάνεια, η οποία περιέχεται μεταξύ μιᾶς πολυγωνικῆς γραμμῆς ἐγγεγραμμῆντος εἰς ἕνα κύκλον καὶ τῶν ἀκτίνων τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου, αἱ ὁποῖαι καταλήγουν εἰς τὰ ἄκρα τῆς γραμμῆς αὐτῆς.

Π.χ. τὸ σχῆμα ΟΑΒΓΔΟ (Σχ. 580) εἶναι ἕνας πολυγωνικός τομέυς.

Ὁ πολυγωνικός τομέυς λέγεται κανονικός, ἐὰν ἡ τετλασμένη γραμμῆ, ἡ ὁποία ἀποτελεῖ τὴν βάσιν του εἶναι κανονική.

866. Θεώρημα. Ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ, τὸ ὁποῖον παράγει ἕνας κανονικός πολυγωνικός τομέυς, ὁ ὁποῖος στρέφεται περὶ μίαν διάμετρον, ἡ ὁποία δὲν τέμνει αὐτόν, εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν γράφει ἡ πολυγωνικὴ γραμμῆ, ἐπὶ τὸ τρίτον τοῦ ἀποστήματός της.

Ἐπίδειξις: Ἐστω ὁ κανονικός πολυγωνικός τομέυς ΟΑΒΓΔΟ (Σχ. 580), ὁ ὁποῖος στρέφεται περὶ τὴν διάμετρον ΠΟΠ'. Φέρομεν τὰς εὐθείας ΟΒ καὶ ΟΓ καὶ χωρίζεται ὁ πολυγωνικός τομέυς εἰς τὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΒΓ, ΟΓΔ, τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα καὶ ἐπομένως τὰ ὕψη των εἶναι ἴσα μὲ τὸ ἀπόστημα ΟΗ τοῦ πολυγωνικοῦ τομέως.

Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξωμεν ὅτι:

$$\text{ὄγκ. παρ. ΟΑΒΓΔΟ} = \text{ἐπιφ. γρ. ΑΒΓΔ} \times \frac{\text{ΟΗ}}{3}.$$

Ἀπόδειξις: Ὁ ὄγκος, τὸν ὁποῖον παράγει ὁ πολυγωνικός αὐτός τομέυς, ἂν στραφῆ περὶ τὴν διάμετρον ΠΟΠ', εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων, ποὺ παράγουν τὰ τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΒΓ, ΟΓΔ· δηλ. εἶναι:

$$\text{ὄγκ. παρ. ΟΑΒΓΔΟ} = \text{ὄγκ. παρ. τριγ. ΟΑΒ} + \text{ὄγκ. παρ. τριγ. ΟΒΓ} + \text{ὄγκ. παρ. τριγ. ΟΓΔ} \quad (1)$$

$$\text{Ἐπειδὴ} \quad \text{ὄγκ. παραγ. τριγ. ΟΑΒ} = \text{ἐπιφ. γρ. ΑΒ} \times \frac{\text{ΟΗ}}{3}$$

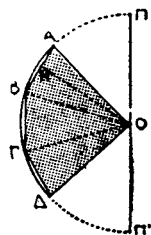
$$\text{ὄγκ. παραγ. τριγ. ΟΒΓ} = \text{ἐπιφ. γρ. ΒΓ} \times \frac{\text{ΟΗ}}{3}$$

$$\text{ὄγκ. παραγ. τριγ. ΟΓΔ} = \text{ἐπιφ. γρ. ΓΔ} \times \frac{\text{ΟΗ}}{3}$$

ἢ ἰσότης (1) γράφεται:

$$\begin{aligned} \text{ὄγκ. παρ. ΟΑΒΓΔΟ} &= \text{ἐπιφ. γρ. ΑΒ} \times \frac{\text{ΟΗ}}{3} + \text{ἐπιφ. γρ. ΒΓ} \times \frac{\text{ΟΗ}}{3} + \text{ἐπιφ. γρ. ΓΔ} \times \frac{\text{ΟΗ}}{3} \\ &= (\text{ἐπιφ. γρ. ΑΒ} + \text{ἐπιφ. γρ. ΒΓ} + \text{ἐπιφ. γρ. ΓΔ}) \times \frac{\text{ΟΗ}}{3} \\ &= \text{ἐπιφ. γραφ. ΑΒΓΔ} \times \frac{\text{ΟΗ}}{3}. \end{aligned}$$

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: Ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ, τὸ ὁποῖον παράγει...

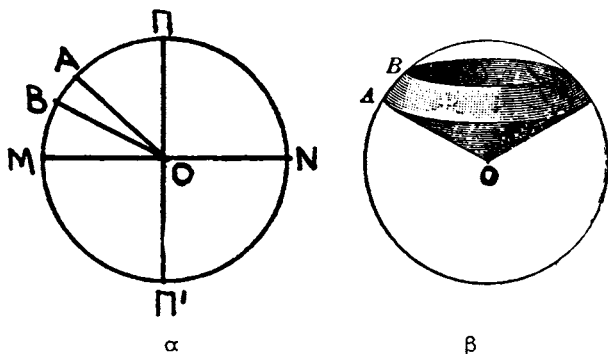


Σχ. 580.

867. Σφαιρικός τομέυς. Ἐστω τὸ ἡμικύκλιον ΠΑΠ' (Σχ. 581) καὶ ΟΑΒΟ ἕνας κυκλικὸς τομέυς. Ἐὰν τὸ ἡμικύκλιον στραφῆ περὶ τὴν διάμετρον ΠΟΠ' κατὰ δλόκληρον στροφῆν, ὁ κυκλικὸς τομέυς παράγει ἕνα στερεόν, τὸ ὁποῖον λέγεται **σφαιρικός τομέυς**.

Γενικῶς: **Σφαιρικός τομέυς** λέγεται τὸ στερεόν, τὸ ὁποῖον παράγεται ἀπὸ ἕνα κυκλικὸν τομέα, ὁ ὁποῖος στρέφεται, κατὰ δλόκληρον στροφῆν, περὶ μίαν διάμετρον, ἣ ὁποία δὲν τέμνει αὐτόν.

Ὁ σφαιρικός αὐτὸς τομέυς περιέχεται μεταξὺ τῶν κώνων, τοὺς ὁποῖους παράγουν αἱ ἀκτίνες ΟΑ καὶ ΟΒ (Σχ. 581), καὶ τῆς σφαι-



Σχ. 581.

ρικής ζώνης τὴν ὁποίαν παράγει τὸν τόξον ΑΒ. Ἡ ζώνη αὐτὴ λέγεται **βάσις τοῦ σφαιρικοῦ τομέως**.

868. Ὀγκος σφαιρικοῦ τομέως. Ὀγκον σφαιρικοῦ τομέως, τὸν ὁποῖον παράγει ἕνας κυκλικὸς τομέυς, στρεφόμενος περὶ μίαν διάμετρον, ὀνομάζομεν τὸ ὄριον, πρὸς τὸ ὁποῖον τείνει ὁ ὄγκος, τὸν ὁποῖον παράγει ἕνας κανονικὸς πολυγωνικὸς τομέυς, ἐγγεγραμμένος εἰς τὸν κυκλικὸν τομέα καὶ ὁ ὁποῖος στρέφεται περὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον, ὅταν ὁ ἀριθμὸς τῶν πλευρῶν τῆς κανονικῆς τεθλασμένης γραμμῆς τοῦ πολυγωνικοῦ τομέως διπλασιάζεται ἀπεριορίστως.

869. Πρέβλημα. Νὰ ὑπολογισθῆ ὁ ὄγκος ἑνὸς σφαιρικοῦ τομέως.

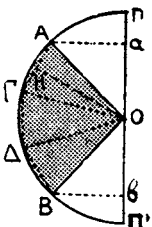
Ἐστω ΟΑΒΟ ἕνας κυκλικὸς τομέυς, ὁ ὁποῖος, στρεφόμενος περὶ τὴν διάμετρον ΠΟΠ', παράγει ἕνα σφαιρικὸν τομέα (Σχ. 582). Ἐγγράφομεν εἰς τὸ τόξον ΑΒ τοῦ κυκλικοῦ τομέως μίαν κανονικὴν τεθλασμένην γραμμὴν ΑΓΔΒ καὶ ἔστω ΟΗ τὸ ἀπόστημά της.

Ἐὰν ὁ πολυγωνικὸς τομέυς ΟΑΓΔΒΟ στραφῆ περὶ τὴν διάμε-

τρον ΠΟΠ', θὰ παραγάγῃ ἓνα στερεόν, τοῦ ὁποίου ὁ ὄγκος εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἔμβραδοῦ τῆς ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν γράφει ἡ τεθλασμένη γραμμὴ ΑΓΔΒ ἐπὶ τὸ τρίτον τοῦ ἀποστήματος ΟΗ· δηλ. εἶναι

$$\text{ὄγκ. πολυγ. τομ. ΟΑΓΔΒΟ} = \text{ἔμβ. ἐπιφ. ΑΓΔΒ} \times \frac{\text{ΟΗ}}{3}.$$

Ἐὰν διπλασιάσωμεν ἀπεριορίστως τὸν ἀριθμὸν τῶν πλευρῶν τῆς κανονικῆς τεθλασμένης γραμμῆς ΑΓΔΒ, τότε ἡ πολυγωνικὴ αὐτῆ γραμμὴ ἔχει ὄριον τὸ τόξον ΑΒ, εἰς τὸ ὁποῖον εἶναι ἐγγεγραμμένη καὶ ἐπομένως τὸ ἔμβραδόν τῆς ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν γράφει, ἔχει ὄριον τὸ ἔμβραδόν τῆς ζώνης, τὴν ὁποίαν παράγει τὸ τόξον ΑΒ Ἐξ ἄλλου τὸ ἀπόστημα ΟΗ ἔχει ὄριον τὴν ἀκτῖνα R τῆς σφαίρας. Ὡστε ὁ ὄγκ. πολυγ. τομ. ΟΑΓΔΒΟ ἔχει ὄριον τὸ γινόμενον τοῦ ἔμβραδοῦ τῆς ζώνης ΑΒ ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτίνος. Ἀλλὰ αὐτὸ τὸ ὄριον εἶναι, ἐξ ὁρισμοῦ, ὁ ὄγκος τοῦ σφαιρικοῦ τομέως καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι :



Σχ. 582.

$$\text{Ὀγκ. σφαιρ. τομ.} = \text{ἔμβ. ζών. ΑΒ} \times \frac{R}{3}.$$

Ἐπειδὴ τὸ ἔμβραδόν ζώνης ΑΒ παριστάνει τὴν βᾶσιν τοῦ σφαιρικοῦ τομέως, συνάγομεν, ὅτι :

Ὁ ὄγκος ἐνὸς σφαιρικοῦ τομέως εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἔμβραδοῦ τῆς βάσεώς του ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτίνος τῆς σφαίρας.

Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ R τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας καὶ μὲ υ τὸ ὕψος τῆς ζώνης ΑΒ, ἡ ὁποία λαμβάνεται, ὡς βᾶσις τοῦ σφαιρικοῦ τομέως, θὰ εἶναι : Ἐμβ. ζών. ΑΒ = 2πRu καὶ ἐπομένως θὰ εἶναι :

$$\text{Ὀγκ. σφαιρ. τομ.} = 2\pi R u \times \frac{R}{3} \quad \text{ἢ} \quad \boxed{\text{ὄγκ. σφαιρ. τομ.} = \frac{2}{3} \pi R^2 u}.$$

870. Ὀγκος σφαίρας. Ὁ ὄγκος σφαίρας ἀκτίνος R εἶναι ἴσος μὲ $\frac{4}{3} \pi R^3$.

Ἀπόδειξις : Ἡ σφαῖρα δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἓνας σφαιρικός τομεύς, ὁ ὁποῖος ἔχει, ὡς ἀντίστοιχον κυκλικὸν τομέα, ἓνα ἡμικύκλιον, τὸ ὁποῖον στρέφεται περὶ τὴν διάμετρόν του. Ἀλλὰ τότε τὸ ἡμικύκλιον παράγει τὴν σφαῖραν. Ἐπομένως, ἐὰν θέλωμεν νὰ εὗρωμεν τὸν ὄγκον μιᾶς σφαίρας, πρέπει νὰ ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὸν τύπον, ὁ ὁποῖος δίδει τὸν ὄγκον ἐνὸς σφαιρικοῦ τομέως, τὸ ὕψος υ μὲ 2R καὶ ἐπομένως θὰ ἔχωμεν :

$${}^{\circ}\text{Ογκ. σφαίρας} = \frac{2}{3}\pi R^2 \cdot 2R \quad \eta \quad \boxed{\delta\gamma\kappa. \sigma\phi\alpha\iota\rho\alpha\varsigma = \frac{4}{3}\pi R^3}.$$

871. Πρόρισμα I. Ὁ ὄγκος σφαίρας διαμέτρου Δ εἶναι ἴσος μὲ $\frac{1}{6}\pi\Delta^3$.

Ἀπόδειξις: Ἐὰν ἀντικαταστήσωμεν εἰς τὸν προηγούμενον τύπον, ὁ ὁποῖος δίδει τὸν ὄγκον μιᾶς σφαίρας, τὴν ἀκτίνα R μὲ $\frac{\Delta}{2}$, θὰ ἔχω-

$$\mu\epsilon\upsilon: \quad {}^{\circ}\text{Ογκ. σφαίρας} = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{\Delta}{2}\right)^3 \quad \eta \quad \boxed{\delta\gamma\kappa. \sigma\phi\alpha\iota\rho\alpha\varsigma = \frac{1}{6}\pi\Delta^3}.$$

872. Πρόρισμα II. Ὁ λόγος τῶν ὄγκων δύο σφαιρῶν εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν κύβων τῶν ἀκτίνων των (ἢ τῶν διαμέτρων των).

Ἀπόδειξις: Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ R καὶ R' τὰς ἀκτίνας δύο σφαιρῶν καὶ μὲ V καὶ V' τοὺς ὄγκους των, θὰ ἔχωμεν:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \text{καὶ} \quad V = \frac{4}{3}\pi R'^3.$$

Διαιροῦμεν τὰς ἰσότητες αὐτὰς κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν:

$$\frac{V}{V'} = \frac{\pi R^3}{\pi R'^3} \quad \eta \quad \boxed{\frac{V}{V'} = \frac{R^3}{R'^3}}.$$

Ἀσκήσεις: 2673, 2674, 2675, 2676, 2677, 2678, 2679, 2680.

Σφαιρικός δακτύλιος

873. Σφαιρικός δακτύλιος. Ἐστω ἓνα ἡμικύκλιον ΠΑΠ' (Σχ. 583) καὶ ΑΜΒΑ ἓνα κυκλικὸν τμήμα. Ἄν τὸ ἡμικύκλιον αὐτὸ στραφῇ περὶ τὴν διάμετρον ΠΟΠ' κατὰ ὀλόκληρον στροφὴν, τὸ κυκλικὸν τμήμα θὰ παραγάγῃ ἓνα στερεόν, τὸ ὁποῖον λέγεται **σφαιρικός δακτύλιος**. Τὸ στερεὸν αὐτὸ ἔχει ὡς ἔξωτερικὴν ἐπιφάνειαν τὴν σφαιρικὴν ζώνην, ποὺ γράφει τὸ τόξον ΑΜΒ, καὶ ὡς ἐσωτερικὴν τὴν κυρτὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κολούρου κώνου, ποὺ γράφει τὸ τραπέζιον ΑΒβα.

Γενικῶς: Σφαιρικός δακτύλιος λέγεται τὸ στερεόν, ποὺ παράγεται ἀπὸ ἓνα κυκλικὸν τμήμα, τὸ ὁποῖον στρέφεται περὶ μίαν διάμετρον τοῦ κύκλου εἰς τὸν ὁποῖον ἀνήκει καὶ ἡ ὁποία δὲν τέμνει αὐτό.

874. Πρόβλημα. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος ἐνὸς σφαιρικοῦ δακτυλίου.

Ἐστω τὸ κυκλικὸν τμήμα ΑΜΒΑ (Σχ. 583) τὸ ὁποῖον στρεφό-

μενον περί τὴν διάμετρον ΠΠ' παράγει ἕνα σφαιρικὸν δακτύλιον. Ἐὰν φέρωμεν τὰς ἀκτῖνας ΟΑ καὶ ΟΒ παρατηροῦμεν, ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ σφαιρικοῦ δακτυλίου θὰ εὐρεθῆ, ἐὰν ἀπὸ τὸν ὄγκον τοῦ σφαιρικοῦ τομέως, ποὺ παράγει ὁ κυκλικὸς τομεὺς ΟΑΜΒΟ, ἀφαιρέσωμεν τὸν ὄγκον τοῦ στερεοῦ, ποὺ παράγει τὸ τρίγωνον ΟΑΒ· δηλ. εἶναι:

$${}^{\circ}\text{Ογκ.σφ.δακτ.ΑΜΒΑ} = \text{ὄγκ.σφ.τομ.ΟΑΜΒΟ} - \text{ὄγκ.παρ.τριγ.ΟΑΒ} \quad (1)$$

Ἐὰν αβ εἶναι ἡ προβολὴ τῆς χορδῆς ΑΒ ἐπὶ τὴν διάμετρον ΠΠ', θὰ εἶναι (869)

$$\text{ὄγκ.σφαιρ.τομ.ΟΑΜΒΟ} = \frac{2}{3}\pi R^2 \times \alpha\beta.$$

Ἐὰν φέρωμεν τὴν κάθετον ΟΗ ἐπὶ τὴν χορδὴν ΑΒ, θὰ εἶναι (§ 864)

$$\text{ὄγκ.παρ.τριγ.ΟΑΒ} = \text{ἐπιφ.ΑΒ} \times \frac{\text{ΟΗ}}{3}$$

καὶ ἐπειδὴ (§ 854)

$$\text{ἐπιφ.ΑΒ} = 2\pi \cdot \text{ΟΗ} \times \alpha\beta$$

θὰ εἶναι:

$$\begin{aligned} \text{ὄγκ.παρ.τριγ.ΟΑΒ} &= 2\pi \cdot \text{ΟΗ} \times \alpha\beta \times \frac{\text{ΟΗ}}{3} \\ &= \frac{2}{3}\pi \overline{\text{ΟΗ}^2} \times \alpha\beta. \end{aligned}$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὰ: ὄγκ.σφ.τομ.ΟΑΜΒΟ καὶ ὄγκ.παρ.τριγ.ΟΑΒ, μὲ τὰ ἴσα των καὶ ἔχομεν:

$$\begin{aligned} \text{ὄγκ.σφαιρ.δακτ.ΑΜΒΑ} &= \frac{2}{3}\pi R^2 \times \alpha\beta - \frac{2}{3}\pi \overline{\text{ΟΗ}^2} \times \alpha\beta \\ &= \frac{2}{3}\pi \times \alpha\beta \times (R^2 - \overline{\text{ΟΗ}^2}) \quad (2) \end{aligned}$$

Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΟΗΑ ἔχομεν:

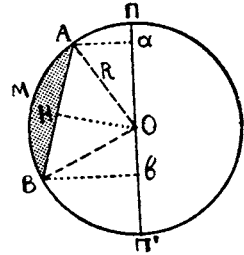
$$R^2 - \overline{\text{ΟΗ}^2} = \overline{\text{ΗΑ}^2} \quad \eta \quad R^2 - \overline{\text{ΟΗ}^2} = \frac{\overline{\text{ΑΒ}^2}}{4}.$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (2) τὴν διαφορὰν $R^2 - \overline{\text{ΟΗ}^2}$ μὲ τὸ ἴσον τῆς καὶ ἔχομεν:

$${}^{\circ}\text{Ογκ.σφαιρ.δακτ.ΑΜΒΑ} = \frac{2}{3}\pi \times \alpha\beta \times \frac{\overline{\text{ΑΒ}^2}}{4}$$

$$\eta \quad \boxed{\text{ὄγκ.σφαιρ.δακτ.ΑΜΒΑ} = \frac{1}{6}\pi \overline{\text{ΑΒ}^2} \times \alpha\beta}$$

Ἐπειδὴ τὸ $\pi \overline{\text{ΑΒ}^2} \times \alpha\beta$ παριστάνει τὸν ὄγκον ἑνὸς κυλίνδρου, ποὺ ἔχει ἀκτῖνα τὴν χορδὴν ΑΒ καὶ ὕψος τὴν προβολὴν αβ τῆς χορδῆς αὐτῆς ἐπὶ τὴν διάμετρον ΠΠ', συνάγομεν, ὅτι:



Σχ. 583.

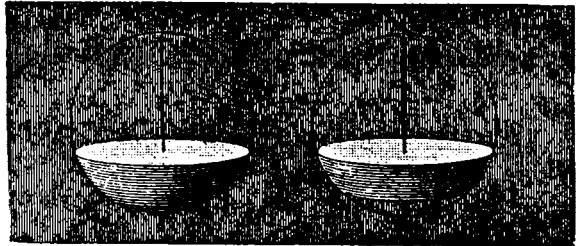
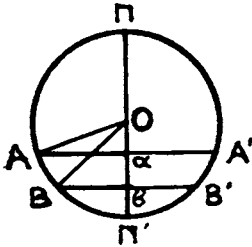
Ὁ ὄγκος ἐνὸς σφαιρικοῦ δακτυλίου εἶναι ἴσος μὲ τὸ ἔκτοιο τοῦ ὄγκου τοῦ κυλίνδρου, ὃ ὁποῖος ἔχει ἀκτῖνα τὴν χορδὴν τοῦ κυκλικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον παράγει τὸν σφαιρικὸν δακτύλιον καὶ ὕψος τὴν προβολὴν τῆς χορδῆς αὐτῆς ἐπὶ τὸν ἀξονα στροφῆς.
Ἄσκήσεις: 2681, 2682, 2683, 2684, 2685, 2686.

Σφαιρικὸν τμήμα

875. Σφαιρικὸν τμήμα. Σφαιρικὸν τμήμα λέγεται τὸ μέρος τῆς σφαίρας, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων, τὰ ὁποῖα τέμνουν τὴν σφαῖραν.

Οἱ δύο κύκλοι τομῆς τῆς σφαίρας ὑπὸ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων λέγονται **βάσεις τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος**.

Ἡ ἀπόστασις τῶν βάσεων τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος λέγεται ὕψος αὐτοῦ.



Σχ. 584.

Π.χ. τὸ τμήμα $ABB'A'$ τῆς σφαίρας O (Σχ. 584) εἶναι ἓνα σφαιρικὸν τμήμα.

Αἱ βάσεις του εἶναι οἱ κύκλοι AA' καὶ BB' καὶ ὕψος του εἶναι ἡ ἀπόστασις $αβ$ τῶν δύο αὐτῶν βάσεων.

Ἐὰν τὸ ἓνα ἀπὸ τὰ ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα τέμνουν τὴν σφαῖραν, ἐφάπτεται τῆς σφαίρας, ὃ ἓνας κύκλος τῆς τομῆς περιορίζεται εἰς ἓνα σημεῖον καὶ ἔχομεν ἓνα σφαιρικὸν τμήμα, τὸ ὁποῖον ἔχει μίαν μόνον βάσιν.

Π.χ. τὸ σφαιρικὸν τμήμα $P'B'B'$ (Σχ. 584) ἔχει μίαν μόνον βάσιν, τὴν $B'B'$. Ὑψος αὐτοῦ εἶναι ἡ ἀπόστασις $P'\beta$.

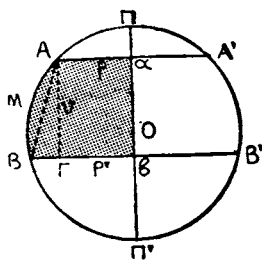
Τὸ σφαιρικὸν τμήμα $ABB'A'$ (Σχ. 585) δύναται νὰ παραχθῆ καὶ ἀπὸ τὸ μικτόγραμμα σχῆμα $ΑΒβαΑ$, ἂν τοῦτο στραφῆ περὶ τὴν διάμετρον $ΠΠ'$, κατὰ ὁλόκληρον στροφῆν. . . .

876. Πρόβλημα. Νὰ ὑπολογισθῆ ὁ ὄγκος ἐνὸς σφαιρικοῦ

τμήματος, συναρτήσῃ τῶν ἀκτίων τῶν βάσεών του καὶ τοῦ ὕψους του.

Ἐστω AMBβa τὸ μικτόγραμμαον τραπέζιον, τὸ ὁποῖον, στρεφόμενον περὶ τὴν διάμετρον ΠΠ', παράγει τὸ σφαιρικὸν τμήμα AMBB'A'. Φέρομεν τὴν χορδὴν AB.

Ὁ ὄγκος τοῦ σφαιρικοῦ αὐτοῦ τμήματος εἶναι ἄθροισμα τῶν ὄγκων τοῦ δακτυλίου, ποῦ παράγει τὸ κυκλικὸν τμήμα AMBA καὶ τοῦ κολούρου κώνου, ποῦ παράγει τὸ τραπεζίον ABβa· δηλ. εἶναι :



Σχ. 585.

$$\text{ὄγκ. σφαιρ. τμήμ.} = \text{ὄγκ. AMBA} + \text{ὄγκ. ABβa} \quad (1)$$

Γνωρίζομεν (§ 874) ὅτι $\text{ὄγκ. AMBA} = \frac{1}{6} \pi \overline{AB}^2 \times \alpha\beta$ (2)

Φέρομεν τὴν κάθετον ΑΓ ἐπὶ τὴν Ββ. Ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΓΒ ἔχομεν :

$$\overline{AB}^2 = \overline{AG}^2 + \overline{BG}^2 \quad (3)$$

Ἐπειδὴ ΑΓ = αβ καὶ ΒΓ = Ββ - Αα, ὁπότε :

$$\overline{BG}^2 = (Ββ - Αα)^2 = \overline{Bβ}^2 - 2Ββ \times Αα + \overline{Αα}^2,$$

ἢ ἰσότης (3) γράφεται : $\overline{AB}^2 = \alpha\beta^2 + \overline{Bβ}^2 - 2Ββ \times Αα + \overline{Αα}^2.$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (2) τὸ \overline{AB}^2 μὲ τὸ ἴσον του καὶ ἔχομεν :

$$\begin{aligned} \text{ὄγκ. AMBA} &= \frac{1}{6} \pi (\alpha\beta^2 + \overline{Bβ}^2 - 2Ββ \times Αα + \overline{Αα}^2) \times \alpha\beta \\ &= \frac{1}{6} \pi \alpha\beta^3 + \frac{1}{6} \pi \times \alpha\beta (\overline{Bβ}^2 - 2Ββ \times Αα + \overline{Αα}^2). \end{aligned}$$

Ἐπίσης γνωρίζομεν (§ 833), ὅτι

$$\text{ὄγκ. ABβa} = \frac{1}{3} \pi \times \alpha\beta \times [\overline{Bβ}^2 + \overline{Αα}^2 + Ββ \times Αα]$$

$$\text{ἢ ὄγκ. ABβa} = \frac{1}{6} \pi \times \alpha\beta \times [2\overline{Bβ}^2 + 2\overline{Αα}^2 + 2Ββ \times Αα].$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὸν ὄγκ. AMBA καὶ ὄγκ. ABβa μὲ τὰ ἴσα των καὶ ἔχομεν :

$$\begin{aligned} \text{Ὁγκ. σφαιρ. τμήμ.} &= \frac{1}{6} \pi \alpha\beta^3 + \frac{1}{6} \pi \times \alpha\beta \times (\overline{Bβ}^2 - 2Ββ \times Αα + \overline{Αα}^2) + \\ &\quad + \frac{1}{6} \pi \times \alpha\beta \times (2\overline{Bβ}^2 + 2\overline{Αα}^2 + 2Ββ \times Αα) \\ &= \frac{1}{6} \pi \alpha\beta^3 + \frac{1}{6} \pi \times \alpha\beta \times (3\overline{Bβ}^2 + 3\overline{Αα}^2) \\ &= \frac{1}{6} \pi \alpha\beta^3 + \frac{1}{2} \pi \overline{Αα}^2 \times \alpha\beta + \frac{1}{2} \pi \overline{Bβ}^2 \times \alpha\beta. \end{aligned}$$

Ἐπειδὴ τὸ $\frac{1}{2}\overline{\alpha\beta}$ παριστάνει τὸν ὄγκον σφαίρας διαμέτρου $\alpha\beta$ καὶ τὰ $\overline{\pi A\alpha^2} \times \alpha\beta$ καὶ $\overline{\pi B\beta^2} \times \alpha\beta$ παριστάνουν τοὺς ὄγκους τῶν κυλίνδρων, ποὺ ἔχουν ὡς ὕψη τὸ κοινὸν ὕψος τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος καὶ ὡς βάσεις τὰς βάσεις, ἀντιστοίχως, τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος συνάγομεν. ὅτι :

Ὁ ὄγκος ἐνὸς σφαιρικοῦ τμήματος εἶναι ἴσος μὲ τὸν ὄγκον μιᾶς σφαίρας, ἡ ὁποία ἔχει ὡς διάμετρον τὸ ὕψος τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος, ἠΰξημένον κατὰ τὸ ἡμίαιθροισμα τῶν ὄγκων δύο κυλίνδρων, οἱ ὅποιοι ἔχουν ὡς ὕψος τὸ κοινὸν ὕψος τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος καὶ ὡς βάσεις, ἀντιστοίχως, τὰς βάσεις τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος.

Ἐὰν λοιπὸν παραστήσωμεν μὲ ρ καὶ ρ' τὰς ἀκτίνας τῶν βάσεων ἐνὸς σφαιρικοῦ τμήματος καὶ μὲ u τὸ ὕψος του, ὁ ὄγκος του θὰ δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου :

$$\text{ὄγκ. σφαιρ. τμήμ.} = \frac{1}{6}\pi u^3 + \frac{1}{2}\pi(\rho^2 + \rho'^2)u$$

877. Ὅγκος σφαιρικοῦ τμήματος μὲ μίαν βάσιν. Ἐὰν ἕνα σφαιρικὸν τμήμα ἔχη μίαν βάσιν, ἢ μία ἀπὸ τὰς ἀκτίνας ρ καὶ ρ' τῶν βάσεων του, ἔστω ἢ ρ' , εἶναι ἴση μὲ μηδὲν καὶ ἐπομένως ὁ προηγούμενος τύπος γίνεται :

$$\text{ὄγκ. σφαιρ. τμήματος} = \frac{1}{6}\pi u^3 + \frac{1}{2}\pi \rho^2 u$$

878. Παρατήρησις. Ὁ ὄγκος ἐνὸς σφαιρικοῦ τμήματος μὲ μίαν βάσιν δύναται νὰ ἐκφρασθῇ καὶ συναρτήσῃ τοῦ ὕψους του καὶ τῆς ἀκτίνος R τῆς σφαίρας, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει.

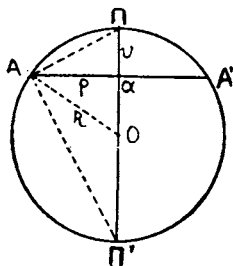
Πράγματι ἔστω $\overline{\pi A A'}$ ἕνα σφαιρικὸν τμήμα μὲ μίαν βάσιν $\overline{A A'}$. Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ u τὸ ὕψος του, θὰ ἔχωμεν (§ 877).

$$\begin{aligned} \text{ὄγκ. σφ. τμήμ.} \overline{\pi A A'} &= \frac{1}{6}\pi u^3 + \frac{1}{2}\pi u \cdot \overline{A\alpha^2} \\ &= \frac{1}{6}\pi u(u^2 + 3\overline{A\alpha^2}) \quad (1) \end{aligned}$$

Ἐὰν φέρωμεν τὰς χορδὰς $\overline{A\Pi}$ καὶ $\overline{A\Pi'}$ θὰ ἔχωμεν, ἀπὸ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον $\overline{\pi A\Pi'}$,

$$\overline{A\alpha^2} = \overline{\pi\alpha} \times \overline{\pi'a} = u(2R - u).$$

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὸ $\overline{A\alpha^2}$ μὲ τὸ ἴσον του καὶ ἔχομεν



Σχ. 586.

$$\delta\gamma\kappa. \sigma\phi. \tau\mu\eta\mu. \Pi\Lambda\Lambda' = \frac{1}{6}\pi v[u^2 + 3v(2R - v)]$$

ἢ

$$\delta\gamma\kappa. \sigma\phi. \tau\mu\eta\mu. \Pi\Lambda\Lambda' = \frac{1}{3}\pi v^2(3R - v)$$

* Ἀσκήσεις: 2687, 2688, 2689, 2690, 2691, 2692.

Ἀσκήσεις

2629. (2664). Εἰς σφαῖραν ἀκτίνος 30 ἑκ. φέρομεν ἕνα ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς 10 ἑκ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔμβαδὸν τῆς τομῆς καὶ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τῆς.

2630. (2665). Εἰς σφαῖραν ἀκτίνος 2 μ. φέρομεν ἕνα ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον τέμνει αὐτὴν κατὰ ἕνα κύκλον, τοῦ ὁποῖου τὸ ἔμβαδὸν εἶναι 9,42 τμ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις τοῦ ἐπιπέδου ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς σφαίρας.

2631. (2666). Μία ἐπίπεδος τομὴ μιᾶς σφαίρας ἔχει ἔμβαδὸν 72π τετρ. ἑκ. καὶ ἀπέχει ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς 16 ἑκ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτίς τῆς σφαίρας.

2632. (2667). Τὸ μῆκος τῆς περιφερείας ἑνὸς μικροῦ κύκλου μιᾶς σφαίρας εἶναι 25, 132 ἑκ. Τὸ κέντρον τῆς σφαίρας ἀπέχει ἀπὸ τὸν κύκλον αὐτὸν 3 ἑκ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔμβαδὸν ἑνὸς μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας αὐτῆς.

2633. (2668). Ἡ διάμετρος μιᾶς σφαίρας εἶναι 4 μέτρον. Διαιροῦμεν τὴν διάμετρον αὐτὴν εἰς πέντε ἴσα μέρη καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως φέρομεν ἐπίπεδα κάθετα ἐπὶ τὴν διάμετρον αὐτὴν. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἔμβαδά τῶν κύκλων τομῆς.

2634. (2669). Αἱ ἀκτίνες δύο παραλλήλων τομῶν μιᾶς σφαίρας εἶναι α καὶ β καὶ ἡ ἀπόστασις τῶν τομῶν αὐτῶν εἶναι δ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτίς τῆς σφαίρας.

2635. (2670). Οἱ πόλοι Π καὶ Π' ἑνὸς κύκλου ἀπέχουν 60 ἑκ. καὶ 80 ἑκ. ἀπὸ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου αὐτοῦ. Ἐὰν εἶναι ΠΠ' = 1 μέτρον, νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔμβαδὸν τοῦ κύκλου αὐτοῦ κατὰ προσέγγισιν 0,01 μ.

2636. (2671). Ἡ ἀκτίς μιᾶς σφαίρας εἶναι 50 ἑκ. Μὲ πόλον τυχὸν σημεῖον τῆς ἐπιφανείας τῆς καὶ μὲ πολικὴν ἀπόστασιν ἴσην μὲ 30 ἑκ. γράφομεν ἕνα κύκλον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔμβαδὸν τοῦ κύκλου αὐτοῦ.

2637. (2672). Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ πολικὴ ἀπόστασις διὰ νὰ γράψωμεν ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σφαίρας ἀκτίνος 1 μ. μίαν περιφέρειαν μήκους 2 μέτρον.

2638. (2673). Ἡ πολικὴ ἀπόστασις τῶν μεγίστων κύκλων σφαίρας εἶναι 8 ἑκ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτίς τῆς σφαίρας αὐτῆς.

2639. (2674). Ἡ σφαιρικὴ ἀκτίς ἑνὸς μεγίστου κύκλου σφαίρας εἶναι 9,42 ἑκ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτίς τῆς σφαίρας αὐτῆς.

2640. (2675). Δύο σφαῖραι ἀκτίνων R καὶ R', (R < R') εἶναι ὁμόκεντροι. Φέρομεν ἕνα ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον ἐφάπτεται τῆς μικροτέρας σφαίρας. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔμβαδὸν τῆς τομῆς τῆς μεγαλυτέρας σφαίρας ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ.

2641. (2676). Ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων. δύο σφαιρῶν εἶναι 10 μέτρον. καὶ αἱ ἀκτίνες τῶν 8 μέτρον. καὶ 6 μέτρον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔμβαδὸν τῆς τομῆς τῶν σφαιρῶν αὐτῶν.

2642. (2677). Δύο σημεῖα A καὶ B ἀπέχουν 5 μέτρον. Ποῖος εἶναι ὁ γεωμε-

τρικὸς τόπος τῶν σημείων, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν 4 μέτρα ἀπὸ τὸ Α καὶ 3 μέτρα ἀπὸ τὸ Β;

2643. (2678). Δύο σφαίραι ἔχουν ἀκτίνας 10 ἑκ. καὶ 8 ἑκ. καὶ τὰ κέντρα των ἀπέχουν 12 ἑκ. Νὰ ἐξετασθῆ, ἐὰν αἱ σφαίραι αὐταὶ τέμνωνται ἢ ὄχι. Ἐὰν τέμνωνται νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ἔμβαδὸν τῆς τομῆς των.

2644. (2679). Ἡ ἀκτίς μιᾶς σφαιρίας εἶναι 2 μέτρο. καὶ τὸ ὕψος μιᾶς ζώνης εἶναι 1,20 μ. Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ἔμβαδὸν τῆς ζώνης αὐτῆς.

2645. (2680). Ἐνα ἐπίπεδον ἀπέχει 6 ἑκ. ἀπὸ τὸ κέντρον σφαιρίας ἀκτίνος 12 ἑκ. Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ἔμβαδὸν τῶν δύο ζωνῶν εἰς τὰς ὁποίας διαιρεῖται ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαιρίας ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ.

2646. (2681). Ἡ διάμετρος μιᾶς σφαιρίας εἶναι 6 μέτρο. Διαιροῦμεν τὴν διάμετρον αὐτὴν εἰς πέντε ἴσα μέρη καὶ ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως φέρομεν ἐπίπεδα κάθετα ἐπὶ τὴν διάμετρον. Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ἔμβαδὸν τῶν διαφόρων ζωνῶν, τὰς ὁποίας ὀρίζουν τὰ ἐπίπεδα αὐτὰ ἐπὶ τῆς σφαιρίας.

2647. (2682). Τὸ ὕψος μιᾶς σφαιρικῆς ζώνης εἶναι 0,32 ἑκ. καὶ τὸ ἔμβαδὸν τῆς 5 τ.μ. Νὰ ὑπολογισθῆ ἡ ἀκτίς τῆς σφαιρίας εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει ἡ ζώνη.

2648. (2683). Εἰς μίαν σφαῖραν ἀκτίνος 0,38 μ., μία ζώνη τῆς ἔχει ἔμβαδὸν 1,20 τ.μ. Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ὕψος τῆς.

2649. (2684). Νὰ εὑρεθῆ τὸ ὕψος μιᾶς σφαιρικῆς ζώνης, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ἔμβαδὸν τῆς εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἔμβαδὸν ἑνὸς μεγίστου κύκλου τῆς σφαιρίας εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει.

2650. (2685). Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ἔμβαδὸν τῆς βάσεως μιᾶς σφαιρικῆς ζώνης, μὲ μίαν βάσιν, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ἔμβαδὸν τῆς εἶναι 1,60 τ.μ. καὶ ἡ ἀκτίς τῆς σφαιρίας εἶναι 2 μέτρο.

2651. (2686). Νὰ ἀποδειχθῆ ἡ ζώνη, τὴν ὁποίαν ὀρίζουν δύο δοθεῖσαι ὁμόκεντροι σφαίραι ἐπὶ μιᾶς τυχούσης σφαιρίας, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὸ κέντρον των, ἔχει σταθερὸν ἔμβαδὸν.

2652. (2687). Σφαῖρα ἀκτίνος R τέμνεται ὑπὸ ἐπιπέδου AB. Νὰ ὑπολογισθῆ ἡ ἀπόστασις $OG = x$ τοῦ ἐπιπέδου ἀπὸ τὸ κέντρον O τῆς σφαιρίας, ἵνα τὸ ἔμβαδὸν τῆς μικροτέρας ζώνης εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἔμβαδὸν τῆς κυριῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου, ὃ ὁποῖος ἔχει κορυφὴν τὸ κέντρον τῆς σφαιρίας καὶ βάσιν τὴν τομὴν τῆς σφαιρίας ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου.

2653. (2688). Νὰ εὑρεθῆ τὸ ἔμβαδὸν τῆς σφαιρικῆς ζώνης μιᾶς σφαιρίας ἀκτίνος R, ἡ ὁποία φωτίζεται ἀπὸ φωτεινὴν πηγὴν, ἡ ὁποία, ἀπέχει ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς σφαιρίας ἀπόστασιν α.

2654. (2689). Δίδεται περιφέρεια διαμέτρου $AB = 2R$. Νὰ προσδιορισθῆ μία χορδὴ ΓΔ κάθετος ἐπὶ τὴν AB καὶ τοιαύτη, ὥστε, ἐὰν στραφῆ τὸ σχῆμα περὶ τὴν διάμετρον AB, ἡ διαφορὰ τῶν ἐμβαδῶν τῶν σφαιρικῶν ζωνῶν, αἱ ὁποῖαι παράγονται ἀπὸ τὰ τόξα ΑΓ καὶ ΓΒ νὰ εἶναι ἴση μὲ τὸ ἔμβαδὸν τοῦ κύκλου διαμέτρου ΓΔ.

2655. (2690). Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ἔμβαδὸν μιᾶς σφαιρίας ἀκτίνος 3 μέτρο.

2656. (2691). Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ἔμβαδὸν μιᾶς σφαιρίας διαμέτρου 5 μέτρο.

2657. (2692). Τὸ ἔμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σφαιρίας εἶναι 28 τ.μ. Πόση εἶναι ἡ ἀκτίς τῆς;

2658. (2693). Τὸ ἔμβαδὸν μιᾶς σφαιρίας εἶναι 7,85 τ.μ. Πόσον εἶναι τὸ μῆκος τῆς περιφερείας ἑνὸς μεγίστου κύκλου τῆς;

2659. (2694). Ἐὰν διπλασιάσωμεν τὴν ἀκτίνα μιᾶς σφαίρας, τί γίνεται τὸ ἔμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς.

2660. (2695). Ἡ ἀκτίς μιᾶς σφαίρας εἶναι 2 μέτρ. Πόση εἶναι ἡ ἀκτίς μιᾶς σφαίρας μὲ διπλασίαν ἐπιφάνειαν;

2661. (2696). Νὰ ἐκφρασθῇ τὸ ἔμβαδὸν μιᾶς σφαίρας, συναρτήσῃ τι μήκους μιᾶς περιφερείας μεγίστου κύκλου τῆς.

2662. (2697). Ἡ ἐπιφάνεια μιᾶς σφαίρας εἶναι διπλασία τῆς ἐπιφανείας μιᾶς ἄλλης σφαίρας. Νὰ εὐρεθῇ ὁ λόγος τῶν ἀκτίνων τῶν.

2663. (2698). Ἡ ἀκτίς μιᾶς σφαίρας εἶναι R. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος μιᾶς ζώνης, μὲ μίαν βάσιν, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι, ἂν τὸ ἔμβαδὸν τῆς ζώνης αὐτῆς αὐξηθῇ κατὰ τὸ ἔμβαδὸν τῆς βάσεώς τῆς, θὰ εἶναι ἴσον μὲ τὰ $7/16$ τοῦ ἔμβαδοῦ τῆς σφαίρας.

2664. (2699). Νὰ διαιρεθῇ ἡ ἐπιφάνεια μιᾶς σφαίρας εἰς δύο ζώνας τοιαύτας, ὥστε ἡ μεγαλύτερα νὰ εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῆς ἐπιφανείας ὁλοκλήρου τῆς σφαίρας καὶ τῆς μικρᾶς ζώνης.

2665. (2700) Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ ἐπιφάνεια, τὴν ὁποίαν παράγει ἓνα ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ, στρεφόμενον περὶ ἄξονα, ὁ ὁποῖος κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου του καὶ δὲν τέμνει τὸ τρίγωνον, εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τῆς περιμέτρου τοῦ τριγώνου αὐτοῦ ἐπὶ τὴν περιφέρειαν, τὴν ὁποίαν γράφει τὸ κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου.

2666. (2701). Δίδονται δύο κύκλοι Ο καὶ Ο', οἱ ὁποῖοι ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς καὶ μία κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη ΑΑ'. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἐὰν τὸ σχῆμα στραφῇ περὶ τὴν διάκεντρον ΟΟ', τὸ ἔμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν παράγει ἡ ΑΑ', εἶναι μέσον ἀνάλογον μεταξὺ τῶν ἔμβαδῶν τῶν σφαιρῶν, ποὺ παράγουν οἱ δύο κύκλοι Ο καὶ Ο'.

2667. (2702). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὁ λόγος τῶν τετραγώνων διαμέτρου σφαίρας καὶ τῆς ἀκμῆς κύβου, ἐγγεγραμμένου εἰς αὐτήν, εἶναι 3 : 1.

2668. (2703). Ἡ ἀκμὴ κύβου εἶναι α. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ διαφορὰ τῶν ἐπιφανειῶν περιγεγραμμένης καὶ ἐγγεγραμμένης σφαίρας εἰς τὸν κύβον αὐτόν.

2669. (2704). Ἐνας κύλινδρος καὶ μία σφαῖρα ἔχουν ἰσοδυνάμους κυρτάς ἐπιφανείας καὶ τὴν αὐτὴν ἀκτίνα. Νὰ εὐρεθῇ ὁ λόγος τῆς ἀκτίνας τῆς σφαίρας πρὸς τὸ ὕψος τοῦ κυλίνδρου.

2670. (2705). Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτίς μιᾶς σφαίρας, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ ἐπιφάνειά τῆς εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν κυρτῶν ἐπιφανειῶν ἑνὸς κυλίνδρου καὶ ἑνὸς κώνου οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος 2 μέτρ. καὶ ὡς κοινήν βάσιν ἓνα κύκλον ἀκτίνας 1 μέτρ. ;

2671. (2706). Δίδεται κώνος, τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος εἶναι ἴσον μὲ τὴν ἀκτίνα $R=3$ τῆς βάσεως. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτίς ἑνὸς κυλίνδρου, ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κώνον καὶ τοιοῦτου, ὥστε ἡ ὀλικὴ ἐπιφάνειά του νὰ εἶναι ἴση μὲ τὴν ἐπιφάνειαν σφαίρας ἀκτίνας 2 μέτρων.

2672. (2707). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ὕψος μιᾶς σφαιρικῆς ζώνης μὲ μίαν βάσιν, ἂν γνωρίζωμεν τὴν ἀκτίνα R τῆς σφαίρας καὶ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῆς ἐπιφανείας τῆς καὶ τῆς βάσεώς τῆς εἶναι πa^2 . Ἐφαρμογὴ $R=0,15$, $\pi a^2=1$ τ.μ.

2673. (2708). Ἡ ἀκτίς μιᾶς σφαίρας εἶναι 30 ἑκ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔμβαδὸν τῆς καὶ ὁ ὄγκος τῆς.

2674. (2709). Ἡ διάμετρος μιᾶς σφαίρας εἶναι 25 ἑκ. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τῆς.

2675. (2710). Ἐνα τόξον 50° μεγίστου κύκλου μιᾶς σφαίρας ἔχει μῆκος 30 ἔκ. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας.

2676. (2711). Ὁ ὄγκος μιᾶς σφαίρας εἶναι 4,20 τ.μ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἄκτις τῆς.

2677. (2712). Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἄκτις μιᾶς σφαίρας, ἐὰν ὁ ὄγκος τῆς καὶ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας ἑνὸς μεγίστου κύκλου τῆς ἔχουν τὴν αὐτὴν ἀριθμητικὴν τιμὴν.

2678. (2713). Ἐνα ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον τέμνει μίαν σφαῖραν ἀπέχει 1,20 μέτρα, ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς. Ἐὰν τὸ ἔμβαδὸν τῆς τομῆς εἶναι 3 τ.μ., νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας.

2679. (2714). Ὁ ὄγκος μιᾶς σφαίρας εἶναι 2 κ.μ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔμβαδὸν τῆς τομῆς τῆς σφαίρας ὑπὸ ἑνὸς ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον ἀπέχει 0,50 μ. ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς.

2680. (2715). Αἱ ἄκτινες τῆς Γῆς, τῆς Σελήνης καὶ τοῦ Ἥλιου εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀριθμῶν 1, 3/11 καὶ 112. Ἐὰν λάβωμεν ὡς μονάδα ὄγκου τὸν ὄγκον τῆς Γῆς, νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ ὄγκοι τῆς Σελήνης καὶ τοῦ Ἥλιου.

2681. (2716). Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος, τὸν ὁποῖον παράγει ἓνα κυκλικὸν τμήμα, τοῦ ὁποίου ἡ χορδὴ εἶναι ἴση μὲ τὴν πλευρὰν τοῦ τετραγώνου, τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς ἓνα κύκλον ἄκτινος 2 μέτρων, ἂν τὸ τμήμα αὐτὸ στραφῇ περὶ τὴν διάμετρον, ἢ ὅποια διέρχεται ἀπὸ τὸ ἓνα ἄκρον τῆς χορδῆς.

2682. (2717). Τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ἐὰν ἡ χορδὴ εἶναι ἡ πλευρὰ τοῦ ἐγγεγραμμένου ἰσοπλεύρου τριγώνου.

2683. (2718). Ἐὰν ἡ χορδὴ εἶναι πλευρὰ κανονικοῦ ἑξαγώνου.

2684. (2719). Ἐὰν ἡ χορδὴ εἶναι πλευρὰ κανονικοῦ δεκαγώνου.

2685. (2720). Ὁ ὄγκος ἑνὸς σφαιρικοῦ δακτυλίου εἶναι 2,5 κ.μ. Ἡ προβολὴ τῆς χορδῆς τοῦ κυκλικοῦ τμήματος, πὺ παράγει τὸν σφαιρικὸν δακτύλιον, εἶναι 1 μέτρον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος τῆς χορδῆς.

2686. (2721). Δίδονται δύο ὁμόκεντροι κύκλοι· εἰς ἕκαστον ἐξ αὐτῶν φέρομεν χορδὰς ἴσας μεταξύ των καὶ παραλλήλους πρὸς μίαν κοινὴν διάμετρον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι οἱ σφαιρικοὶ δακτύλιοι, οἱ ὅποιοι παράγονται ἀπὸ τὰ προκύπτοντα οὕτω κυκλικά τμήματα, στρεφόμενα περὶ μίαν διάμετρον, ἢ ὅποια δὲν τέμνει αὐτά, εἶναι ἰσοδύναμοι.

2687. (2722). Αἱ ἄκτινες τῶν βάσεων ἑνὸς σφαιρικοῦ τμήματος εἶναι 60 ἔκ. καὶ 80 ἔκ. καὶ τὸ ὕψος τοῦ 30 ἔκ. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ.

2688. (2723). Μία σφαῖρα ἄκτινος 3 μέτρων τέμνεται ὑπὸ παραλλήλων ἐπιπέδων, τὰ ὅποια ἀπέχουν ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς 1 μέτρον καὶ 2 μέτρα. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τῶν σφαιρικῶν τμημάτων :

1ον. ἂν τὰ ἐπίπεδα κείνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ κέντρον.

2ον. ἂν κείνται ἐκατέρωθεν τοῦ κέντρον.

2689. (2724). Μία σφαῖρα ἄκτινος 2 μέτρων τέμνεται ὑπὸ ἐπιπέδου, τὸ ὁποῖον ἀπέχει 1 μέτρον ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς. Νὰ ὑπολογισθῇ χωριστὰ ὁ ὄγκος τῶν δύο σφαιρικῶν τμημάτων, πὺ προκύπτουν.

2690. (2725). Τέσσαρα ἐπίπεδα εἶναι κάθετα ἐπὶ μίαν διάμετρον μιᾶς σφαίρας καὶ χωρίζουν αὐτὴν εἰς 5 ἴσα μέρη. Νὰ ὑπολογισθῇ χωριστὰ ὁ ὄγκος τῶν πέντε σφαιρικῶν τμημάτων, πὺ προκύπτουν.

2691. (2726). Νὰ ἐκφρασθῇ ὁ ὄγκος ἑνὸς σφαιρικοῦ τμήματος, διὰ τοῦ

ὑψους του καὶ τῆς διαμέτρου τῆς μέσης τομῆς του (παραλλήλου καὶ ἡ ὁποία ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰς βάσεις).

2692. (2727). Εἰς ἓνα κύκλον Ο ἀκτῖνος R φέρομεν μίαν χορδὴν ΓΔ παραλλήλου πρὸς μίαν διάμετρόν του ΑΒ. Φέρομεν τὰς ἀκτίνας ΟΓ καὶ ΟΔ καὶ στρέφομεν τὸ σχῆμα περὶ τὴν διάμετρον ΑΒ. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μήκος τῆς χορδῆς ΓΔ, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ὁ ὄγκος, τὸν ὅποιον παράγει τὸ κυκλικὸν τμήμα ΓΜΔ εἶναι ἴσος μὲ τὸν ὄγκον, πού παράγει τὸ τρίγωνον ΓΟΔ.

Ἀσκήσεις πρὸς γενικὴν ἐπανάληψιν

Α' Ὁμάς. 2693. (2728). Διὰ τὰ κείνται δύο κύκλοι εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ, ἂν Α καὶ Β εἶναι δύο σημεῖα τῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων τῶν, κάθε σημεῖον νὰ ἔχη τὴν αὐτὴν δύναμιν ὡς πρὸς τοὺς δύο αὐτοὺς κύκλους, ἢ ὅταν τὰ ἐπίπεδα αὐτὰ εἶναι παράλληλα, οἱ δύο αὐτοὶ κύκλοι νὰ ἔχουν τὸν αὐτὸν ἄξονα.

2694. (2729). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἔμβαδὸν μιᾶς σφαίρας, τὸ ἔμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας ἐνὸς ἰσοπλευροῦ κυλίνδρου περιγεγραμμένου περὶ τὴν σφαῖραν καὶ τὸ ἔμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας ἐνὸς ἰσοπλευροῦ κώνου περιγεγραμμένου, εἶναι ἀνάλογα τῶν ἀριθμῶν 4, 6 καὶ 9. (Ἐνας κύλινδρος λέγεται ἰσόπλευρος, ὅταν ἡ τομὴ του ὑπὸ ἐπιπέδου, τὸ ὅποιον διέρχεται ἀπὸ τὸν ἄξονά του εἶναι ἓνα τετράγωνον· ἓνας κῶνος λέγεται ἰσόπλευρος, ὅταν ἡ τομὴ του ὑπὸ ἐπιπέδου, τὸ ὅποιον διέρχεται ἀπὸ τὸν ἄξονά του, εἶναι ἓνα ἰσόπλευρον τρίγωνον).

2695. (2730). Δίδονται δύο κανονικαὶ τεθλασμένοι γραμμαῖ, τῶν ὁποίων αἱ πλευραὶ εἶναι παράλληλοι καὶ ἓκ τῶν ὁποίων ἡ μία εἶναι ἐγγεγραμμένη καὶ ἡ ἄλλη περιγεγραμμένη περὶ μίαν ἡμιπεριφέρειαν. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ σφαιρικὴ ἐπιφάνεια, τὴν ὁποίαν παράγει ἡ ἡμιπεριφέρεια, ἡ ὁποία στρέφεται περὶ τὴν διάμετρον, ἡ ὁποία συνδέει τὰ ἄκρα τῆς, εἶναι μέση ἀνάλογος μεταξὺ τῶν ἐπιφανειῶν, πού παράγουν αἱ δύο τεθλασμένοι γραμμαῖ.

2696. (2731). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὁ ὄγκος V ἐνὸς σφαιρικοῦ τμήματος δίδεται ὑπὸ τοῦ τύπου $V = \frac{v}{6}(\beta + \beta' + 4\beta'')$, ὅπου v εἶναι τὸ ὕψος του, β καὶ β' τὰ ἔμβαδά τῶν βάσεών του καὶ β'' τὸ ἔμβαδὸν τῆς μέσης τομῆς του.

2697. (2732). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὁ ὄγκος ἐνὸς σφαιρικοῦ δακτυλίου εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τῶν δύο τρίτων τοῦ ὕψους του ἐπὶ τὸ ἔμβαδὸν τῆς τομῆς του ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ καθέτου ἐπὶ τὸ ὕψος του εἰς τὸ μέσον.

2698. (2733). Ὁ ὄγκος ἐνὸς σφαιρικοῦ τμήματος εἶναι ἴσος μὲ τὴν διαφορὰν μεταξὺ τοῦ ὄγκου τοῦ κυλίνδρου, ὁ ὁποῖος ἔχει τὸ αὐτὸ ὕψος καὶ βάσιν τὴν τομὴν τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου, τὸ ὅποιον ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰς βάσεις του καὶ τοῦ ἡμίσεος τοῦ ὄγκου τῆς σφαίρας, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον τὸ ὕψος τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος.

2699. (2734). Περὶ ποῖαν πλευρὰν πρέπει νὰ στραφῇ ἓνα τρίγωνον διὰ τὰ δώση τὸν μεγαλύτερον ὄγκον.

2700. (2735). Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ μ τὸ πάχος τοῦ φακοειδοῦς ἀμφιχύρτου κοινοῦ μέρους δύο τεμνομένων σφαιρῶν, μὲ E τὸ ἔμβαδόν του καὶ μὲ V τὸν ὄγκον του, θὰ εἶναι $12V = 3\mu E - \pi\mu^3$.

2701. (2736). Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ φακοειδοῦς ἀμφικύρτου κοινοῦ μέρους δύο τεμνομένων σφαιρῶν ἀκτίνων ρ καὶ ρ' καὶ τῶν ὁμοίων τὸ πάχος εἶναι μ .

2702. (2737). Ἐὰν γνωρίζωμεν τὸν λόγον k τῶν ἐμβαδῶν τῶν ζωνῶν, τὰς ὁποίας ὀρίζει ἐπὶ μιᾶς σφαίρας ἓνα ἐπίπεδον Π , τὸ ὁποῖον τέμνει αὐτήν :

1ον. νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λόγος k' τῶν ὄγκων τῶν σφαιρικῶν τμημάτων, τὰ ὁποῖα ὀρίζονται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου Π .

2ον. νὰ συγκριθοῦν οἱ k καὶ k' .

B' Ὁμάς. 2703. (2738). Ἐνας κυλινδρικός λέβης καταλήγει εἰς δύο ἡμισφαίρια. Ἐὰν ὁ ἄξων του ἔχει μήκος λ , νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαστάσεις τοῦ κυλινδρικοῦ μέρους οὕτως, ὥστε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας τοῦ λέβητος νὰ εἶναι ἴσον μὲ $4\pi a^2$.

2704. (2739). Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτίς τῆς βάσεως καὶ τὸ ὕψος ἑνὸς κώνου, περιγεγραμμένου περὶ σφαῖραν ἀκτίνος R , ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου ἐπαφῆς εἶναι ἴσον μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ἐμβαδῶν τῶν ζωνῶν, πού ὀρίζει.

2705. (2740). Ἐὰν εἰς ἓνα κύλινδρον, τοῦ ὁποίου τὸ ὕψος εἶναι ἴσον μὲ τὴν διάμετρον τῆς βάσεώς του, ἐγγράψωμεν μίαν σφαῖραν καὶ ἓνα κῶνον, οἱ ὄγκοι τῶν τριῶν αὐτῶν στερεῶν εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀριθμῶν $3 : 2 : 1$.

2706. (2741). Ἐὰν εἰς ἓνα κῶνον ἐγγραφῇ σφαῖρα, οἱ ὄγκοι τῶν ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἐπιφανειῶν τῶν.

2707. (2742). Εἰς μίαν σφαῖραν ἀκτίνος R ἐγγράφομεν ἓνα ἰσοπλευρον κῶνον. Εἰς ποῖαν ἀπόστασιν ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας πρέπει νὰ φέρωμεν ἓνα ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν τοῦ κώνου, ἵνα ἡ διαφορὰ τῶν ἐμβαδῶν τῶν τομῶν τῆς σφαίρας καὶ τοῦ κώνου εἶναι :

1ον. ἴση μὲ τὰ τρία τέταρτα τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνὸς κύκλου ἀκτίνος R .

2ον. ἰσοδύναμος μὲ τὴν βάσιν τοῦ κώνου.

2708. (2743). Δίδεται ἓνα ἡμισφαίριον ἀκτίνος R καὶ ὁ ἐγγεγραμμένος εἰς αὐτὸ κῶνος, ὁ ὁποῖος ἔχει βάσιν τὴν βάσιν AB τοῦ ἡμισφαιρίου καὶ κορυφὴν τὸ σημεῖον Σ , ὅπου ἡ κάθετος, ἡ ὁποία ἀγεται ἀπὸ τὸ κέντρον O τοῦ ἡμισφαιρίου ἐπὶ τὴν βάσιν του AB , τέμνει τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ ἡμισφαιρίου. Νὰ ἀχθῇ ἓνα ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου AB οὕτως, ὥστε τὸ ἐμβαδὸν τῆς στεφάνης, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῶν δύο περιφερειῶν, κατὰ τὰς ὁποίας τὸ ἐπίπεδον τέμνει τὸ ἡμισφαίριον καὶ τὸν κῶνον, νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἐμβαδὸν κύκλου ἀκτίνος a . Μέγιστον τοῦ a .

2709. (2744). Εἰς ἓνα κοίλον κῶνον, τοῦ ὁποίου ἄξων εἶναι κατακόρυφος καὶ σχηματίζει γωνίαν 30° μὲ τὴν γενέτειράν του, εἰσάγομεν μίαν σφαῖραν ἀκτίνος $2 \epsilon\kappa$. Νὰ ὑπολογισθῇ :

1ον. ἡ ἀκτίς τῆς περιφερείας ἐπαφῆς τῆς σφαίρας καὶ τοῦ κώνου.

2ον. τὸ ἐμβαδὸν τῆς ζώνης, ἡ ὁποία εἶναι ὄρατὴ ἀπὸ τὴν κορυφὴν τοῦ κώνου.

3ον. ἡ ἀκτίς μιᾶς ἄλλης σφαίρας, ἡ ὁποία εὐρίσκεται ἐντὸς τοῦ κώνου καὶ ἐφάπτεται τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου καὶ τῆς πρώτης σφαίρας.

2710. (2745). Νὰ εὐρεθῇ ἐπὶ μιᾶς σφαίρας ἓνας κύκλος τοιοῦτος, ὥστε ὁ ὄγκος τοῦ κώνου, ὁ ὁποῖος ἔχει βάσιν τὸν κύκλον αὐτὸν καὶ κορυφὴν τὸν ἓνα ἀπὸ τοὺς πόλους του νὰ ἔχη λόγον k πρὸς τὸν ὄγκον τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος τὸ ὁποῖον ἔχει βάσιν τὸν αὐτὸν κύκλον καὶ περιέχει τὸν κῶνον.

2711. (2746). Δίδεται κῶνος ΣAB ἀκτίνος R καὶ ὕψους u . Εἰς τὸν κῶνον

αὐτὸν ἐγγράφομεν σφαῖραν O , ἣ ὁποία ἐφάπτεται τῆς βάσεως τοῦ κώνου εἰς τὸ σημεῖον H .

1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτίς τῆς σφαίρας.

2ον. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς τοῦ κώνου ὑπὸ ἐνὸς ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς τὴν βᾶσιν τοῦ κώνου καὶ ἐφαπτομένου τῆς σφαίρας.

3ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ προκύπτοντος κολούρου κώνου.

2712. (2747). Τέμνομεν μίαν σφαῖραν ἀκτίνος R ὑπὸ ἐνὸς ἐπιπέδου Π , τὸ ὁποῖον ἀπέχει ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς χ . Κατὰ τὴν τομὴν τῆς σφαίρας καὶ τοῦ ἐπιπέδου περιγράφομεν περὶ τὴν σφαῖραν, ἓνα κῶνον, τοῦ ὁποίου ἡ βᾶσις, ἡ παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π , ἐφάπτεται τῆς σφαίρας. Νὰ εὑρεθῇ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου συναρτήσῃ τοῦ χ .

2713. (2748). Μία σφαῖρα ἀκτίνος R στηρίζεται ἐπὶ ἐνὸς ἐπιπέδου Π . Ἐνας κῶνος ἔχει τὴν αὐτὴν ἀκτίνα R καὶ ὕψος u καὶ στηρίζεται, διὰ τῆς βάσεώς του, ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου Π . Τέμνομεν τὰ δύο αὐτὰ στερεὰ δι' ἐνὸς ἐπιπέδου P παραλλήλου πρὸς τὸ Π , τὸ ὁποῖον ἀπέχει τοῦ Π ἀπόστασιν ἴσην μὲ χ .

1ον. Νὰ ἐκφραστοῦν, συναρτήσῃ τῶν R, u, χ , τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τομῶν τῶν δύο στερεῶν ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου P . Νὰ ἐξετασθῇ, ἂν ὁ τύπος αὐτὸς συμφωνῇ ἀκόμη, ὅταν $\chi > u$.

2ον. Ποία σχέσις πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ u καὶ R , ἵνα τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ χ .

2714. (2749). Δίδεται ἡ σφαῖρα O ἀκτίνος R , περιγεγραμμένη περὶ τὸν κόλουρον κῶνον $AB\Gamma\Delta$ καὶ ἡ σφαῖρα Σ ἀκτίνος ρ , ἐγγεγραμμένη εἰς τὸν αὐτὸν κόλουρον κῶνον. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λόγος τῶν ἀκτίνων τῶν βάσεων τοῦ κολούρου κώνου, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ὁ λόγος τῶν ἐπιφανειῶν τῶν δύο σφαιρῶν εἶναι 6 .

2715. (2750). Ὁ ὄγκος μιᾶς σφαίρας, ὁ ὄγκος τοῦ ἰσοπλεύρου κυλίνδρου, τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὴν σφαῖραν καὶ ὁ ὄγκος τοῦ ἰσοπλεύρου κώνου, τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὴν σφαῖραν, εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀριθμῶν $4, 6$ καὶ 9 .

2716. (2751). Μὲ βᾶσιν δοθέντα κύκλον κατασκευάζομεν κύλινδρον, ἡμισφαίριον καὶ κῶνον οὕτως, ὥστε τὰ τρία στερεὰ νὰ ἔχουν τὸ αὐτὸ ὕψος. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὄγκοι τῶν εἶναι μεταξὺ τῶν, ὡς οἱ ἀριθμοὶ $3 : 2 : 1$.

2717. (2752). Ὁ ὄγκος τοῦ ἰσοπλεύρου κυλίνδρου, τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς μίαν σφαῖραν, εἶναι μέσος ἀνάλογος μεταξὺ τοῦ ὄγκου τοῦ ἰσοπλεύρου κώνου τοῦ ἐγγεγραμμένου καὶ τοῦ ὄγκου τῆς σφαίρας.

2718. (2753). Περὶ ἓνα κύκλον ἀκτίνος R περιγράφομεν ἓνα ἰσοπλευρον τρίγωνον καὶ ἓνα τετράγωνον, τοῦ ὁποίου μία πλευρὰ κεῖται ἐπὶ μιᾶς πλευρᾶς τοῦ τριγώνου. Στρέφομεν τὸ σχῆμα περὶ τὸν ἄξονα συμμετρίας του. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας τοῦ παραγομένου κυλίνδρου εἶναι μέσον ἀνάλογον μεταξὺ τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας τοῦ παραγομένου κώνου καὶ τῆς παραγομένης σφαίρας. Νὰ ἀποδειχθῇ τὸ αὐτὸ καὶ διὰ τοὺς ὄγκους τῶν.

2719. (2754). Ὁ ὄγκος ἐνὸς κυλίνδρου, ἐνὸς κώνου ἢ ἐνὸς κολούρου κώνου, περιγεγραμμένων περὶ μίαν σφαῖραν εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας του ἐπὶ τὸ τρίτον τῆς ἀκτίδος σφαίρας.

2720. (2755). Δίδεται μία σφαῖρα, ἓνας κύλινδρος, περιγεγραμμένος περὶ τὴν σφαῖραν αὐτὴν καὶ οἱ δύο κῶνοι, οἱ ὁποῖοι ἔχουν κορυφὴν τὸ κέντρον

τῆς σφαίρας καὶ βάσεις τὰς βάσεις τοῦ κυλίνδρου :

1ον. Ἐὰν φέρωμεν ἓνα τυχὸν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὸν ἄξονα τοῦ σχήματος, νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ τομὴ τῆς σφαίρας εἶναι ἴση μὲ τὴν διαφορὰν τῶν τομῶν τοῦ κυλίνδρου καὶ τοῦ κώνου.

3ον. Ἐὰν φέρωμεν δύο ἐπίπεδα κάθετα ἐπὶ τὸν ἄξονα τοῦ σχήματος, ὁ ὄγκος τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ τῶν δύο ἐπιπέδων εἶναι ἴσος μὲ τὴν διαφορὰν τῶν ὄγκων τῶν ἀντιστοίχων κυλινδρικών καὶ κωνικών τμημάτων.

Γ' Ὀμάς. 2721. (2756). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ὁ λόγος τῶν ὄγκων σφαίρας καὶ τοῦ περιγεγραμμένου περὶ αὐτὴν κύβου εἶναι ἴσος μὲ $\pi : 6$.

2722. (2757). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔμβαδὸν καὶ ὁ ὄγκος μιᾶς σφαίρας, περιγεγραμμένης περὶ ἓνα κύβον ἀκμῆς α .

2723. (2758). Νὰ ἐκφρασθῇ, συναρτήσῃ τῆς ἀκμῆς α ἐνὸς κύβου, τὸ ἔμβαδὸν καὶ ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὸν κύβον καὶ τῆς περιγεγραμμένης περὶ αὐτόν.

2724. (2759). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔμβαδὸν καὶ ὁ ὄγκος μιᾶς σφαίρας περιγεγραμμένης περὶ ἓνα κανονικὸν τετράεδρον ἀκμῆς α .

2725. (2760). Ἐὰν E καὶ V παριστάνουν τὸ ἔμβαδὸν καὶ τὸν ὄγκον ἐνὸς πολυέδρου, περιγεγραμμένου περὶ σφαῖραν ἀκτίνας R , θὰ εἶναι $V = \frac{1}{3} R \times E$.

2726. (2761). Μία κανονικὴ πυραμὶς $AB\Gamma$ ἔχει βάσιν ἓνα ἰσόπλευρον τρίγωνον $AB\Gamma$ πλευρᾶς α καὶ ὕψος $SO = \alpha$.

1ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ παράπλευροι ἀκμαὶ τῆς ΣA , ΣB , $\Sigma \Gamma$ καὶ αἱ γωνίαι τῶν τριγῶνων $\Sigma O A$, $\Sigma O B$, $\Sigma O \Gamma$.

2ον. Λαμβάνομεν ἓνα τυχὸν σημεῖον M τοῦ ὕψους SO · νὰ προσδιορισθῇ ὁ λόγος, ὁ ὁποῖος ὑπάρχει μεταξὺ MS καὶ ἐκάστης τῶν ἀποστάσεων τοῦ M ἀπὸ τὰς ἀκμὰς ΣA , ΣB , $\Sigma \Gamma$.

3ον. Ἐκλέγομεν τὸ σημεῖον M οὕτως, ὥστε $MO = \frac{\alpha}{3}(\sqrt{3}-1)$. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι τὸ σημεῖον M ἀπέχει ἰσάκεις ἀπὸ τὰς ἑξ ἀκμὰς τῆς πυραμίδος, δηλ. τὸ M εἶναι τὸ κέντρον τῆς σφαίρας, ἡ ὁποία ἐφάπτεται τῶν ἑξ ἀκμῶν.

4ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν τὰ ἔμβαδὰ τῶν ζωνῶν, αἱ ὁποῖαι ὀρίζονται εἰς τὴν σφαῖραν αὐτήν, ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως $AB\Gamma$.

2727. (2762). Αἱ βάσεις μιᾶς κανονικῆς κολούρου πυραμίδος εἶναι κανονικά ἑξάγωνα πλευρῶν α καὶ $\alpha/2$. Ὅλοι αἱ κορυφαὶ κεῖνται ἐπὶ μιᾶς σφαίρας Σ , τῆς ὁποίας τὸ κέντρον κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς μεγάλης βάσεως. Νὰ εὐρεθῇ: 1ον. τὸ ὕψος, ἡ ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ.

2ον. ἡ ὀλικὴ ἐπιφάνεια καὶ ὁ ὄγκος τοῦ κολούρου κώνου, τοῦ ὁποίου αἱ βάσεις εἶναι οἱ κύκλοι, οἱ περιγεγραμμένοι εἰς τὰ δύο αὐτὰ ἑξάγωνα.

3ον. ἡ ἐπιφάνεια τῆς ζώνης τῆς σφαίρας Σ , τῆς περιλαμβανομένης μεταξὺ τῶν δύο κύκλων καὶ ὁ ὄγκος τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος τοῦ περιλαμβανομένου μεταξὺ τῶν ἐπιπέδων τῶν κύκλων τούτων.

2728. (2763). Δίδεται μία τετραγωνικὴ πυραμὶς $\Sigma AB\Gamma\Delta$, τῆς ὁποίας ἡ βάση $AB\Gamma\Delta$ εἶναι ἓνα τετράγωνον πλευρᾶς α , ἡ ἔδρα $\Sigma A\Delta$ ἓνα ἰσόπλευρον τρίγωνον καὶ αἱ ἔδραι ΣAB καὶ $\Sigma \Gamma\Delta$ ὀρθογώνια τρίγωνα εἰς τὰ A καὶ Δ .

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ διέδρος γωνία ἀκμῆς $A\Delta$ εἶναι ὀρθή.

2ον. Ἀπὸ τὸ A φέρομεν τὴν κάθετον AB' ἐπὶ τὴν ΣB καὶ ἀπὸ τὸ B' ἓνα

ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν $ΑΒΓΔ$, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν $ΣΑ$ εἰς τὸ $Α'$, τὴν $ΣΓ$ εἰς τὸ $Γ'$ καὶ τὴν $ΣΔ$ εἰς τὸ $Δ'$. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τῆς κο-
λοῦρου πυρραμίδος $Α'Β'Γ'Δ'ΑΒΓΔ$.

3ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ πυραμὶς $ΣΑΒΓΔ$ εἶναι ἑγγράψιμος εἰς μίαν σφαῖραν ἢ νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας αὐτῆς.

4ον. Ἐστωσαν $Μ$ καὶ $Ν$ τὰ μέσα τῶν $ΑΒ$ καὶ $ΓΔ$ · διὰ τῆς $ΜΝ$ φέρομεν ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον $ΣΑΔ$, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν $ΣΒ$ εἰς τὸ $Β''$ καὶ τὴν $ΣΓ$ εἰς τὸ $Γ''$. Ἐπίσης διὰ τῆς $Β'Γ''$ φέρομεν ἐπίπεδον παράλλη-
λον πρὸς τὴν βάσιν $ΑΒΓΔ$, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν $ΣΑ$ εἰς τὸ $Α''$ καὶ τὴν $ΣΔ$ εἰς τὸ $Δ''$. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ ὄγκοι τῶν στερεῶν $ΜΝΒ'Γ'Β''Γ''$, $ΜΝΑΔΒ'Γ'$ καὶ $ΜΝΣΒΒ'Γ''$.

Δ Ὀμάς. 2729. (2764). Ὁ γεωμετρικὸς τόπος τῶν εὐθειῶν, αἱ ὁποῖαι ἐφάπτονται σφαίρας καὶ ἄγονται ἀπὸ ἓνα σημεῖον ἐκτὸς αὐτῆς, εἶναι ἡ κυρτὴ ἐπιφάνεια ἑνὸς κώνου.

2730. (2765). Νὰ εὐρεθῇ ὁ τόπος τῶν κέντρων ἴσων μικρῶν κύκλων σφαίρας.

2731. (2766). Νὰ εὐρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων, ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἄγονται ἴσαι ἐφαπτόμεναι πρὸς δοθεῖσαν σφαῖραν.

2732. (2767). Νὰ εὐρεθῇ ὁ τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου, τῶν ὁποίων τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ δύο δοθέντα σημεία εἶναι ἴσον μὲ k^2 .

2733. (2768). Δίδονται τρία σημεία $Α, Β, Γ$ τοῦ χώρου καὶ ἓνα μεταβλη-
τὸν σημεῖον $Σ$ καὶ ἔστω $ΚΛΜΝ$ ἓνα παραλληλόγραμμον, τοῦ ὁποῖου αἱ κορυ-
φαί εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ στρεβλοῦ τετραπλεύρου $ΒΑΓΣ$. Νὰ εὐ-
ρεθῇ ὁ τόπος τοῦ σημείου $Σ$:

1ον. ὅταν τὸ $ΚΛΜΝ$ εἶναι ἓνας ῥόμβος.

2ον. ὅταν ὁ λόγος τῶν διαγωνίων τοῦ $ΚΛΜΝ$ ἔχει τὴν αὐτὴν δοθεῖσαν τιμὴν k .

2734. (2769). Δίδεται ἓνας κῶνος κορυφῆς $Σ$.

1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι, ἐὰν $ΑΒ$ εἶναι διάμετρος τῆς βάσεώς του, ἡ ὁποία μεταβάλλει διεύθυνσιν, τὸ ἄθροισμα $\overline{ΣΑ}^2 + \overline{ΣΒ}^2$ μένει σταθερὸν καὶ ὅτι αἱ γωνίαι $ΑΣΒ$ εἶναι ὅλαι ὀξεῖαι, ἢ ὅλαι ἀμβλείαι ἢ ὅλαι ὀρθαί.

2ον. Ποῖος εἶναι ὁ τόπος τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου, τοῦ περιγεγραμμένου περὶ τὸ τρίγωνον $ΣΑΒ$.

2735. (2770). Ἐπὶ τῶν ἀκμῶν $ΟΧ, ΟΥ, ΟΖ$ μᾶς τρισσορθογωνίου τριέδρου κινοῦνται τρία σημεία $Α, Β, Γ$ εἰς τρόπον, ὥστε νὰ εἶναι $ΟΑ + ΟΒ + ΟΓ = λ$. Ποῖος εἶναι ὁ τόπος τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας, τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ τετράεδρον $ΟΑΒΓ$; Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ σφαῖρα αὐτὴ διέρχεται ἀπὸ ἓνα δεύ-
τερον ὠρισμένον σημεῖον, ἐκτὸς τοῦ $Ο$.

Ε Ὀμάς. 2736. (2771). Ἐστω $Β'Γ'$ ἡ προβολὴ τῆς διαμέτρου $ΒΓ$ ἑνὸς κύκλου ἀκτίνας $ΟΑ = R$ ἐπὶ τῆς ἐφαπτομένης $ΓΤ'$ εἰς τὸ σημεῖον $Α$. Νὰ εὐρεθῇ διὰ ποίαν θέσιν τῆς διαμέτρου $ΒΓ$, ὁ λόγος τοῦ ἔμβαδου τῆς ὀλικῆς ἐπιφα-
νειᾶς τοῦ κολοῦρου κώνου, πού παράγει τὸ τραπέζιον $ΒΓ'Β'Γ'$, ἂν στραφῇ περὶ τὴν $ΤΤ'$ κατὰ ὀλόκληρον στροφῆν, πρὸς τὸ ἔμβαδὸν τοῦ κύκλου, εἶναι ἴσος μὲ $2λ$. Διερεῦνησις.

2737. (2772). Δίδεται ἓνα ὀρθογώνιον $ΑΒΓΔ$ · ἐπὶ τῆς πλευρᾶς $ΓΔ$ λαμβά-
νομεν τὰ σημεία $Μ$ καὶ $Ν$ καὶ φέρομεν τὰς εὐθείας $ΜΒ$ καὶ $ΝΒ$, αἱ ὁποῖαι διαι-
ροῦν τὸ ὀρθογώνιον εἰς τρία μέρη. Νὰ καθορισθῇ ἡ θέσις τῶν σημείων $Μ$ καὶ $Ν$

ἐπὶ τῆς ΓΔ εἰς τρόπον, ὥστε τὰ τρία μέρη νὰ παράγουν ἰσοδύναμα στερεά, ὅταν τὸ ὀρθογώνιον στρέφεται περὶ τὴν ΑΔ. (Θέσατε $A\Theta = u$, $\Gamma\Delta = R$, $\Delta M = x$, $\Delta N = y$).

2738. (2773). Τὸ ὕψος ἐνὸς τριγώνου ΑΒΓ εἶναι u . Εἰς ἀπόστασιν u' ἀπὸ τὴν βάσιν τοῦ ΒΓ φέρομεν μίαν παράλληλον $\chi\gamma$, ἡ ὁποία τέμνει τὰς δύο πλευράς του εἰς τὰ σημεῖα Δ καὶ Ε. Ποῖα σχέσις πρέπει νὰ ὑπάρχῃ μεταξὺ τῶν u καὶ u' , ἵνα εἶναι ἰσοδύναμα τὰ στερεά, τὰ ὁποῖα παράγουν τὸ τρίγωνον ΑΔΕ καὶ τὸ τραπέζιον ΔΒΓΕ, ἂν στραφοῦν περὶ τὴν $\chi\gamma$. (Πολυτεχνεῖον).

2739. (2774). Νὰ εὐρεθῇ ἓνα ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον τέμνει μίαν σφαιρῶν εἰς τρόπον, ὥστε ὁ ὄγκος ἐνὸς ἐκ τῶν σφαιρικῶν τμημάτων, τὰ ὁποῖα ὀρίζει, νὰ ἔχῃ λόγον k μὲ τὸν ὄγκον τοῦ σφαιρικοῦ τομέως, ὁ ὁποῖος περιέχεται εἰς τὸ αὐτὸ σφαιρικὸν τμήμα.

2740. (2775). Εἰς μίαν περιφέρειαν ἀκτίνας $OA = R$ φέρομεν τὴν ἀκτίνα OB κάθετον ἐπὶ τὴν OA . Νὰ εὐρεθῇ ἐπὶ τοῦ τόξου AB ἓνα σημεῖον M τοιοῦτον, ὥστε, ἐὰν ἐξετάσωμεν τοὺς ὄγκους V καὶ V' τῶν στερεῶν, ποὺ παράγουν τὰ κυκλικὰ τμήματα $A\Gamma M A$ καὶ $M\Delta B M$, στρεφόμενα περὶ τὴν OA καὶ τὸν ὄγκον V'' τῆς σφαιράς ἀκτίνας R , νὰ ἔχωμεν $\frac{V}{2} + V' = \frac{V''}{8}$.

2741. (2776). Δίδεται ἓνα τεταρτοκύκλιον OAB ἀκτίνας $OA = R$. Νὰ προσδιορισθῇ ἐπὶ τοῦ τόξου AB ἓνα σημεῖον M τοιοῦτον, ὥστε, ἂν φέρωμεν τὴν κάθετον $M\Gamma$ ἐπὶ τὴν OA καὶ τὴν κάθετον $M\Delta$ ἐπὶ τὴν OB , οἱ ὄγκοι τῶν στερεῶν, ποὺ παράγουν τὸ μικτόγραμμα σχῆμα $M\Delta B$ καὶ τὸ ὀρθογώνιον $M\Gamma O\Delta$, στρεφόμενα περὶ τὴν OB , νὰ εἶναι ἴσοι.

2742. (2777). Τρία σημεῖα A, B, Γ κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας καὶ εἶναι $AB = \alpha$, $B\Gamma = \beta$. Μὲ διάμετρον τὴν $B\Gamma$ γράφομεν ἓνα ἡμικύκλιον καὶ φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην AD πρὸς αὐτό. Νὰ ὀρισθῇ ἐπὶ τοῦ τόξου $B\Delta$ ἓνα σημεῖον M εἰς τρόπον, ὥστε, ὅταν τὸ σχῆμα στραφῇ περὶ τὴν $A\Gamma$, ὁ ὄγκος, ὁ παραγόμενος ὑπὸ τοῦ τριγώνου MAG , νὰ διαιρῆται εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη ὑπὸ τῆς ζώνης, τὴν ὁποίαν παράγει τὸ τόξον MB . (Ἐὰν ME εἶναι ἡ κάθετος ἐπὶ τὴν $B\Gamma$ λάβετε, ὡς ἄγνωστον τὸ $\Gamma E = x$). Διερεύνησις.

ΣΤ' Ὁμάς. 2743. (2778). Δίδεται περιφέρεια O διαμέτρου $AB = 2R$. Νὰ προσδιορισθῇ μία χορδὴ $\Gamma\Delta$ κάθετος ἐπὶ τὴν AB καὶ τοιαύτη, ὥστε, ἐὰν στραφῇ τὸ σχῆμα περὶ τὴν AB , τὸ ἐμβαδόν, τὸ παραγόμενον ἀπὸ τὸ τόξον $A\Gamma$, νὰ εἶναι ἴσον ἴσον μὲ τὸ ἐμβαδόν, τὸ ὁποῖον παράγει ἡ χορδὴ $B\Gamma$.

2744. (2779). Ἐνα ὀρθογώνιον τραπέζιον ΑΒΓΔ ἔχει ὕψος $AD = u$ καὶ ἐμβαδὸν μ . Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ βάσεις AB καὶ $\Gamma\Delta$ τοῦ τραπέζιου, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι ὁ λόγος τῆς ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν παράγει ἡ πλευρὰ $B\Gamma$, ὅταν τὸ τραπέζιον στραφῇ περὶ τὴν AD , πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ τραπέζιου, εἶναι ἴσος μὲ $\frac{4\pi}{\sqrt{3}}$. Διερεύνησις.

2745. (2780). Δύο κύκλοι O καὶ O' ἀκτίνων R καὶ ρ ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς τὸ σημεῖον A . Φέρομεν τὴν κοινὴν ἐφαπτομένην αὐτῶν $B\Gamma$ καὶ στρέφομεν τοὺς δύο κύκλους περὶ τὴν διάκεντρόν των OO' . Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδόν τῆς ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν παράγει ἡ κοινὴ ἐφαπτομένη $B\Gamma$.

2746. (2781). Δίδεται μία ἡμιπεριφέρεια διαμέτρου $AB = 2R$ καὶ ζητεῖται νὰ ὀρισθῇ ἐπὶ τῆς ἡμιπεριφερείας αὐτῆς ἓνα σημεῖον Δ τοιοῦτον, ὥστε τὰ ἐμβαδά, τὰ ὁποῖα παράγονται ἀπὸ τὸ τόξον ΔA καὶ ἀπὸ τὴν χορδὴν ΔB , ὅταν τὸ

σχῆμα στραφῆ περὶ τὴν AB , νὰ εἶναι ἴσα. (Λάβετε ἄγνωστον τὴν ἀπόστασιν $AG=x$, ὅπου G εἶναι ἡ προβολὴ τοῦ Δ ἐπὶ τὴν AB καὶ ὑπολογίσατε τὴν ἀπόστασιν αὐτὴν κατὰ προσέγγισιν $0,001$, ἂν ὑποθέσετε, ὅτι $R=1$ μέτρο.

2747. (2782). Ἐπὶ ἓνα σημεῖον A , τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς κύκλου O , φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην AB πρὸς τὸν κύκλον αὐτόν. Ποία πρέπει νὰ εἶναι ἡ ἀπόστασις AO , ἵνα, ὅταν τὸ σχῆμα στραφῆ περὶ τὴν AO , τὸ ἔμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν παράγει ἡ AB , νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἥμισυ τοῦ ἔμβαδου, ποὺ παράγει ἡ περιφέρεια O .

2748. (2783). Ἐνα ἰσόπλευρον τρίγωνον πλευρᾶς a στρέφεται περὶ μίαν παράλληλον πρὸς τὴν βάσιν του, ἡ ὁποία διέρχεται ἀπὸ τὴν ἀπέναντι κορυφὴν του. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ παραγομένου στερεοῦ.

2749. (2784). Ἐνα ἰσοσκελὲς τρίγωνον $AB\Gamma$ στρέφεται περὶ ἄξονα, ὁ ὁποῖος εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν βάσιν του $B\Gamma$ καὶ διέρχεται ἀπὸ τὴν κορυφὴν του A . Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ παραγομένου στερεοῦ, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι $B\Gamma=6$ μέτρα καὶ $AB=AG=10$ μέτρα.

2750. (2785). Αἱ πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου $AB\Gamma$ εἶναι $AB=4$ μέτρα, $AG=6$ μέτρα καὶ $B\Gamma=8$ μέτρα. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος, τοῦ παραγομένου στερεοῦ, ἂν τὸ τρίγωνον στραφῆ περὶ τὴν πλευρὰν $B\Gamma$.

2751. (2786). Αἱ πλευραὶ ἑνὸς ὀρθογωνίου ἔχουν μῆκη α καὶ β . Στρέφωμεν τὸ ὀρθογώνιον αὐτὸ περὶ ἄξονα, ὁ ὁποῖος διέρχεται ἀπὸ μίαν κορυφὴν του καὶ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ἀντίστοιχον διαγώνιον του. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ παραγομένου στερεοῦ.

2752. (2787). Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ πλευραὶ ἑνὸς τριγώνου $AB\Gamma$, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι οἱ ὄγκοι τῶν στερεῶν, ποὺ παράγει τὸ τρίγωνον αὐτό, ὅταν στραφῆ διαδοχικῶς περὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς του α , β , γ , εἶναι ἰσοδύναμοι μὲ τοὺς ὄγκους τριῶν σφαιρῶν ἀκτίνων ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 .

2753. (2788). Περὶ ποίαν πλευρὰν πρέπει νὰ στραφῆ ἓνα τρίγωνον διὰ νὰ δώσῃ τὸν μεγαλύτερον ὄγκον.

2754. (2789). Ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ, ποὺ παράγει ἓνα τρίγωνον, τὸ ὁποῖον στρέφεται περὶ ἄξονα, ὁ ὁποῖος κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τριγώνου καὶ δὲν τέμνει αὐτό, εἶναι ἴσος μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἔμβαδου τοῦ τριγώνου ἐπὶ τὴν περιφέρειαν, τὴν ὁποίαν γράφει τὸ κέντρον τοῦ βάρους του.

2755. (2790). Δίδεται ἓνα ἡμικύκλιον διαμέτρου $AB=2R$. Εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B φέρομεν ἐφαπτομένας Ax καὶ By τοῦ ἡμικυκλίου καὶ ἔπειτα μίαν τρίτην ἐφαπτομένην αὐτοῦ, ἡ ὁποία τέμνει τὴν Ax εἰς τὸ Γ καὶ τὴν Ay εἰς τὸ Δ . Νὰ προσδιορισθῇ ἡ ἐφαπτομένη $\Gamma\Delta$, οὕτως ὥστε ὁ ὄγκος, τὸν ὁποῖον παράγει τὸ τραπέζιον $AB\Delta\Gamma$ στρεφόμενον περὶ τὴν AB , νὰ εἶναι μ φορὰς μεγαλύτερος τοῦ ὄγκου σφαιρας ἀκτίνος R . Ἐφαρμογὴ: $\mu=3/2$.

2756. (2791). Ἐνα κυρτὸν πολύγωνον, τὸ ὁποῖον ἔχει ἓνα κέντρον συμμετρίας, στρέφεται περὶ μίαν εὐθεῖαν xy , ἡ ὁποία κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ πολυγώνου καὶ δὲν τέμνει αὐτό. Νὰ ἀποδειχθῇ :

1ον. τὸ ἔμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν παράγουν αἱ πλευραὶ του, εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς περιμέτρου τοῦ πολυγώνου ἐπὶ τὴν περιφέρειαν, τὴν ὁποίαν γράφει τὸ κέντρον συμμετρίας.

2ον. ὁ ὄγκος, τὸν ὁποῖον παράγει ἡ ἐπιφάνεια τοῦ πολυγώνου, εἶναι ἴσος

μὲ τὸ γινόμενον τοῦ ἑμβαδοῦ τοῦ πολυγώνου ἐπὶ τὴν περιφέρειαν, τὴν ὁποίαν γράφει τὸ κέντρον συμμετρίας.

2757. (2792). Δύο κύκλοι O καὶ O' ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς τὸ σημεῖον A . Φέρομεν τὴν κοινὴν ἐξωτερικὴν ἐφαπτομένην αὐτῶν BB' . Ἐὰν στρέψωμεν τὸ σχῆμα αὐτὸ περὶ τὴν διάκεντρον OO' , νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι ὁ ὄγκος, ὁ ὁποῖος περιέχεται μεταξὺ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κολούρου κώνου, ποὺ παράγει ἡ BB' καὶ τῆς σφαιράς, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκουν οἱ κύκλοι τῶν βάσεων τοῦ κολούρου αὐτοῦ κώνου, εἶναι διπλάσιος τοῦ μέρους τοῦ κολούρου κώνου, τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτὸς τῶν σφαιρῶν, ποὺ παράγουν οἱ κύκλοι O καὶ O' .

2758. (2793). Δύο κύκλοι O καὶ O' ἀκτίων α καὶ β ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς τὸ σημεῖον A . Φέρομεν τὴν κοινὴν ἐξωτερικὴν ἐφαπτομένην BB' .

1ον. Νὰ ὑπολογισθῆ ὁ ὄγκος, τὸν ὁποῖον παράγει τὸ τρίγωνον ABB' , ἂν τὸ σχῆμα στραφῆ περὶ τὴν διάκεντρον OO' .

2ον. Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ἑμβαδὸν τοῦ τριγώνου ABB' . Ἐφαρμογή:

$$\alpha = \sqrt{5}, \quad \beta = \sqrt{3}.$$

2759. (2794). Δίδονται δύο περιφέρειαι O καὶ O' ἀκτίων α καὶ β , αἱ ὁποῖαι ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς τὸ σημεῖον Δ . Φέρομεν τὴν κοινὴν ἐξωτερικὴν ἐφαπτομένην AB καὶ τὴν κοινὴν ἐσωτερικὴν ἐφαπτομένην $\Delta\Gamma$, ἡ ὁποία τέμνει τὴν AB εἰς τὸ Γ .

1ον. Νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι τὸ Γ εἶναι μέσον τῆς AB .

2ον. Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ἑμβαδὸν τοῦ τετραπλεύρου $OO'BA$ καὶ ἐξ αὐτοῦ, τοῦ τριγώνου $O\Gamma O'$.

3ον. Νὰ εὑρεθῆ ποία σχέσις πρέπει νὰ ὑπάρχη μεταξὺ τῶν α καὶ β , ἵνα τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν στερεῶν, τῶν παραγομένων ὑπὸ τῶν τριγῶνων OAB καὶ $O'AB$, στρεφομένων ἀντιστοιχῶς περὶ τὴν OA καὶ $O'B$, εἶναι ἴσον μὲ τὸ τέταρτον τοῦ ὄγκου σφαιράς ἀκτίως $(\alpha + \beta)$.

2760. (2795). Δίδεται κύκλος O καὶ μία χορδὴ τοῦ AB περιγράφομεν περὶ τὸν κύκλον αὐτὸν τὸ τρίγωνον $\Sigma\Gamma\Delta$, τὸ ὁποῖον σχηματίζουσιν αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς τὰ σημεῖα A καὶ B καὶ ἡ ἐφαπτομένη $\Gamma\eta\Delta$, ἡ ὁποία εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν AB . Νὰ ὑπολογισθῆ ἡ ἀπόστασις $OE = x$ τοῦ κέντρον O ἀπὸ τὴν χορδὴν AB εἰς τρόπον, ὥστε ὁ ὄγκος τοῦ κώνου, τὸν ὁποῖον παράγει τὸ τρίγωνον $\Sigma\Gamma\eta$, στρεφόμενον περὶ τὴν ΣOH , εἶναι διπλάσιος τοῦ ὄγκου τῆς σφαιράς, τὴν ὁποίαν παράγει ὁ κύκλος O .

2761. (2796). Νὰ χωρισθῆ ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$ ὑπὸ μιᾶς τεμνούσης AD οὕτως, ὥστε οἱ ὄγκοι, οἱ παραγόμενοι ἀπὸ τὰ τρίγωνα $AB\Delta$ καὶ $A\Gamma\Delta$, στρεφόμενα περὶ ἓνα ἄξονα xy , ὁ ὁποῖος κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τριγώνου καὶ δὲν τέμνει τὸ τρίγωνον, νὰ εἶναι ἴσοι.

2762. (2797). Δίδεται ἓνα τρίγωνον $AB\Gamma$, τοῦ ὁποῖου τὸ ὕψος AE εἶναι ἴσον μὲ v τέμνομεν τὸ τρίγωνον αὐτὸ μὲ μίαν παράλληλον $B\Gamma'$ πρὸς τὴν $B\Gamma$, ἡ ὁποία ἀπέχει ἀπὸ τὸ A ἀπόστασιν v' . Νὰ εὑρεθῆ ἡ θέσις μιᾶς εὐθείας xy , ἡ ὁποία εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν $B\Gamma$ καὶ κεῖται ἐκτὸς τοῦ τριγώνου καὶ τοιαύτη, ὥστε, ὅταν τὸ σχῆμα στραφῆ περὶ τὴν xy , οἱ ὄγκοι, οἱ παραγόμενοι ὑπὸ τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ καὶ τοῦ τραπεζίου $BB\Gamma'B'$, νὰ εἶναι ἴσοι.

2763. (2798). Δίδεται ἓνα ἡμικύκλιον διαμέτρου AA' , ἡ ἐφαπτομένη εἰς ἓνα σημεῖον M , ἡ ὁποία συναντᾷ εἰς τὸ σημεῖον B τὴν ἐφαπτομένην τῆς ἡμιπεριφέρειας εἰς τὸ A' φέρομεν τὴν $M\Gamma$ κάθετον ἐπὶ τὴν AA' . Νὰ ὑπολογισθῆ

ἢ $AG=x$ εἰς τρόπον, ὥστε, ὅταν τὸ σχῆμα στραφῆ περὶ τὴν AA' , ὁ λόγος τῶν ὄγκων, ποὺ παράγουν τὰ μικτόγραμμα σχήματα $ABMNA$ καὶ $AGMNA$ νὰ εἶναι ἴσοι μὲ k . Ἐφαρμογή: $k=1/2$.

2764. (2799). Ἀπὸ ἓνα σημεῖον Σ , τὸ ὁποῖον κεῖται ἐκτός κύκλου O , φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας ΣA καὶ ΣB πρὸς τὸν κύκλον. Ἀπὸ τὸ σημεῖον B φέρομεν τὴν κάθετον $B\Gamma$ ἐπὶ τὴν διάμετρον AOA' . Στρέφομεν τὸ σχῆμα περὶ τὴν διάμετρον αὐτὴν· νὰ ἀποδειχθῆ, ὅτι ὁ ὄγκος ὁ παραγόμενος ὑπὸ τοῦ μικτογράφου τριγώνου ΣAMB εἶναι ἴσος μὲ τὸν ὄγκον, ποὺ παράγει τὸ τρίγωνον $\Sigma A\Gamma$.

2765. (2800). Δίδεται ἡμιπεριφέρεια O διαμέτρου $AB=2R$. Νὰ εὐρεθῆ ἐπὶ τῆς ἡμιπεριφέρειας αὐτῆς ἓνα σημεῖον Γ τοιοῦτον, ὥστε, ἂν φέρωμεν τὴν ἐφαπτομένην $\Gamma\Delta$ τῆς ἡμιπεριφέρειας αὐτῆς εἰς τὸ σημεῖον Γ , νὰ τέμνη τὴν διάμετρον AB , προεκτεινομένην, εἰς ἓνα σημεῖον Δ τοιοῦτον, ὥστε $AG=\Gamma\Delta$. Ὅταν προσδιορισθῆ τὸ σημεῖον Γ :

1ον. νὰ ὑπολογισθῆ ὁ ὄγκος, τὸν ὁποῖον παράγει τὸν κυκλικὸν τμήμα $AM\Gamma A$, στρεφόμενον περὶ τὴν AB .

2ον. ὁ ὄγκος, τὸν ὁποῖον παράγει τὸ μικρόγραμμον τρίγωνον $B\Gamma\Delta$, στρεφόμενον περὶ τὴν AB .

2766. (2801). Δίδεται ἓνα ὀρθογωνιον τρίγωνον $AB\Gamma$, τοῦ ὁποίου ἡ γωνία $B=30^\circ$. Μὲ κέντρον τὸ σημεῖον B καὶ ἀκτίνα τὴν BA γράφομεν ἓνα τόξον κύκλου, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν ὑποτείνουσαν $B\Gamma$ εἰς τὸ E . Μὲ κέντρον τὸ Γ καὶ ἀκτίνα τὴν ΓA γράφομεν ἓνα ἄλλο τόξον $A\Delta$, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν $B\Gamma$ εἰς τὸ Δ .

1ον. Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ἔμβαδὸν καὶ ἡ περίμετρος τοῦ μικτογράφου σχήματος $A\Delta E A$.

2ον. Τὸ ἔμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, τὴν ὁποίαν παράγουν τὰ τόξα $A\Delta$ καὶ $A E$, στρεφόμενα περὶ τὴν $B\Gamma$.

3ον. Ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ, ποὺ παράγει τὸ μικτόγραμμον σχῆμα $A\Delta E A$.

2767. (2802). Δίδεται ἓνα ἡμικύκλιον O διαμέτρου $AB=2$. Φέρομεν τὴν χορδὴν AG ἴσην μὲ τὴν πλευρὰν τοῦ ἰσοπλευροῦ τριγώνου, τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τὸν κύκλον O καὶ τὴν χορδὴν $A\Delta$ ἴσην μὲ τὴν πλευρὰν τοῦ ἐγγεγραμμένου τετραγώνου καὶ στρέφομεν ἔπειτα τὸ ἡμικύκλιον περὶ τὴν AB κατὰ ὀλόκληρον στροφῆν. Νὰ ὑπολογισθῆ τὸ ἔμβαδὸν καὶ ὁ ὄγκος, τὸν ὁποῖον παράγει τὸ μικτόγραμμον τρίγωνον $A\Delta\Gamma$. Ἐφαρμογή: $R=25$ ἐκ.

Z' Ὁμάς. 2768. (2804). Μία τρισορθογώνιος στερεὰ γωνία στρέφεται περὶ τὴν κορυφὴν τῆς, ἡ ὁποία εἶναι ὠρισμένη. Αἱ ἀκμαὶ τῆς συναντοῦν μίαν δοθεῖσαν σφαῖραν. Νὰ ἀποδειχθῆ: 1ον. ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν χορδῶν, τὰς ὁποίας τέμνουν ἐπὶ τῆς σφαίρας αἱ τρεῖς ἀκμαὶ τῆς τριέδρου, εἶναι σταθερόν. 2ον. τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν 6 εὐθυγράμμων τμημάτων, τὰ ὁποία περιέχονται μεταξύ τῆς κορυφῆς τῆς τριέδρου καὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας εἶναι σταθερόν. 3ον. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν κύκλων τῆς τομῆς τῆς σφαίρας ὑπὸ τῶν τριῶν ἐδρῶν τῆς τριέδρου εἶναι σταθερόν.

2769. (2805). Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἀκτῖνες τῶν σφαιρῶν, αἱ ὁποῖαι εἶναι περιγεγραμμένα καὶ ἐγγεγραμμένα εἰς μίαν κανονικὴν πυραμίδα, ἡ ὁποία ἔχει ὕψος v καὶ βάσιν ἓνα τετράγωνον πλευρᾶς a .

2770. (2807). Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων καὶ τὸ ὕψος ἑνὸς κολούρου κώνου, ἂν γνωρίζωμεν, ὅτι αἱ ἀκτῖνες αὐταὶ ἔχουν λόγον ἴσον μὲ 4

πρὸς 3, ὅτι ἡ πλευρά του εἶναι ἴση μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν ἀκτίνων τῶν βάσεων του καὶ ὅτι ἡ ὀλικὴ ἐπιφάνειά του εἶναι ἰσοδύναμος μὲ τὴν ἐπιφάνειαν μιᾶς σφαιρῆς ἀκτίνος 6 ἐκ.

2771. (2808). Σφαῖρα O ἀκτίνος R τέμνεται ὑπὸ ἐπιπέδου AB . Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀπόστασις $OE=x$ τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ ἀπὸ τὸ κέντρον O , ἐὰν γνωρίζωμεν ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος AGB εἶναι ἴσος: 1ον. μὲ τὸ διπλάσιον τοῦ ὄγκου τοῦ κώνου AAB . 2ον. μὲ τὸν ὄγκον τοῦ κυλίνδρου, ὁ ὁποῖος ἔχει ἀκτῖνα OE καὶ ὕψος EG . (AB εἶναι ἡ τομὴ τῆς σφαιρῆς καὶ $ΓΔ$ ἡ διάμετρος ἢ κάθετος ἐπὶ τὴν τομὴν AB).

2772. (2809). Δίδεται ἓνα τετράγωνον $ABΓΔ$ πλευρᾶς $2a$ καὶ ἓνα σημεῖον M ἐντὸς αὐτοῦ. Στρέφωμεν τὰ τρίγωνα MAB , $MBΓ$, $MΓΔ$, $MΔA$ ἀντιστοίχως περὶ τὰς AB , $BΓ$, $ΓΔ$, $ΔA$. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων, ποὺ παράγουν τὰ τρίγωνα αὐτὰ καὶ νὰ εὑρεθῇ ὁ τόπος τοῦ σημείου M οὕτως, ὥστε τὸ ἄθροισμα αὐτὸ νὰ ἔχη μίαν καὶ τὴν αὐτὴν δοθεῖσαν τιμὴν $\frac{4}{3} \pi a^2 \beta$.

2773. (2810). Δίδεται ὁ ρόμβος $ABΓΔ$, ὅπου $AB=a$ καὶ $\gamma\omega\nu.A=60^\circ$. 1ον. Νὰ ὑπολογισθοῦν αἱ διαγώνιοί του BD καὶ AG καὶ τὸ ἐμβαδόν του. 2ον. Φέρομεν τυχοῦσαν εὐθείαν xAY , ἡ ὁποία δὲν τέμνει τὸν ρόμβον ἀπὸ τὰ σημεῖα $Γ$, $Δ$, B φέρομεν τὰς καθέτους $ΓZ$, $ΔE$, BH ἐπὶ τὴν xAY . Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι $ΓZ=ΔE+BH$. 3ον. Στρέφωμεν τὸν ρόμβον περὶ τὴν AG κατὰ ὁλόκληρον στροφὴν. Τί στερεὸν νὰ παραχθῇ; Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος καὶ ἡ ἐπιφάνειά του. 4ον. Στρέφωμεν τὸν ρόμβον περὶ τὴν AB . Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ παραγομένου στερεοῦ.

2774. (2811). Εἰς τὸ τραπέζιον $ABΔΓ$ οἱ γωνία A καὶ B εἶναι ὀρθαὶ καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς $ΓΔ$ ἓνα σημεῖον E τοιοῦτον, ὥστε $ΓE=ΓA$ καὶ $ΔE=ΔB$: 1ον. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἡ γωνία AEB εἶναι ὀρθή καὶ ὅτι ἡ $ΓΔ$ εἶναι ἐφαπτομένη τῆς περιφερείας διαμέτρου AB . 2ον. Ἐὰν O εἶναι τὸ μέσον τῆς AB , νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι θὰ εἶναι $ΓA \times ΔB = \overline{OA}^2$. 3ον. Θέτομεν $ΓA=\alpha$, $ΔB=\beta$ καὶ $AB=2R$. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ὀλικὴ ἐπιφάνεια E καὶ ὁ ὄγκος V τοῦ στερεοῦ, τοῦ παραγομένου ὑπὸ τοῦ τραπέζιου, στρεφομένου περὶ τὴν AB . 4ον. Νὰ ἐπαληθευθῇ, ὅτι $V = \frac{1}{2} R \times E$.

2775. (2813). Δίδεται ἓνα ὀρθ. τρίγωνον $ABΓ$, τοῦ ὁποίου αἱ κάθετοι πλευραὶ εἶναι $AB=48$ ἐκ. καὶ $AG=20$ ἐκ. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος καὶ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὀλικῆς ἐπιφανείας τοῦ στερεοῦ, τὸ ὁποῖον παράγει τὸ τρίγωνον αὐτό, ἂν στραφῇ: 1ον. περὶ τὴν πλευρὰν AB . 2ον. περὶ τὴν ὑποτείνουσαν $BΓ$. 3ον. περὶ τὴν εὐθείαν xy , ἡ ὁποία ἀγεται ἀπὸ τὸ σημεῖον $Γ$ καὶ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ὑποτείνουσαν.

2776. (2814). Δίδεται μία σφαῖρα ἀκτίνος R ἐπὶ μιᾶς διαμέτρου AB λαμβάνομεν ἓνα μῆκος $AE=x$ καὶ ἀπὸ τὸ σημεῖον E φέρομεν τὴν κάθετον $ΓEΔ$ ἐπὶ τὴν AB , ἡ ὁποία τέμνει τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαιρῆς εἰς τὰ σημεῖα $Γ$ καὶ $Δ$. Νὰ ἐκφρασθῇ συναρτήσῃ τῶν R καὶ x : 1ον. ὁ λόγος τοῦ ὄγκου τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος $ΓAΔΓ$ πρὸς τὸν ὄγκον τῆς σφαιρῆς, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον τὸ x . 2ον. ὁ λόγος τοῦ ἄλλου σφαιρικοῦ τμήματος $ΓBΔΓ$ πρὸς τὸν ὄγκον τῆς σφαιρῆς, ἡ ὁποία ἔχει διάμετρον τὸ ὕψος αὐτοῦ τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος. 3ον. Νὰ ὀρισθῇ ὁ x εἰς τὸν ὅσον, ὥστε ὁ πρῶτος λόγος νὰ εἶναι τριπλάσιος τοῦ δευτέρου.

2777. (2815). Δίδεται ἡμικύκλιον διαμέτρου $AB=2R$ · προεκτείνομεν τὴν ἀκτίνα OB κατὰ μῆκος $BΓ=R$ καὶ φέρομεν τὴν ἐφαπτομένην $ΓΜ$ τῆς ἡμιπεριφερείας. 1ον. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ μῆκος $ΓΜ$ τῆς ἐφαπτομένης αὐτῆς, ἂν τὸ M εἶναι τὸ σημεῖον ἐπαφῆς. 2ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν, τὰ ὁποῖα παράγουν τὸ τόξον ANM καὶ τὸ εὐθὺ τμήμα $ΓΜ$, ὅταν τὸ σχῆμα στραφῇ περὶ τὴν AG . 3ον. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ, τὸ ὁποῖον παράγει τὸ μικρογράμμου σχῆμα $ΓΜΝAG$, στρεφόμενον περὶ τὴν AG . Ἐφαρμογή $R=2$ μέτρ.

2778. (2816). Δίδεται ἓνα ἡμικύκλιον διαμέτρου $AB=2R$ · ἀπὸ τὸ κέντρον τοῦ O φέρομεν μίαν εὐθεῖαν, ἣ ὁποῖα τέμνει τὴν ἡμιπεριφέρειαν εἰς τὸ $Γ$ καὶ τὴν ἐφαπτομένην εἰς τὸ A εἰς τὸ σημεῖον $Δ$. Νὰ προσδιορισθῇ ἡ διεύθυνσις τῆς τεμνοῦσης $ΟΓΔ$ εἰς τρόπον, ὥστε, ὅταν τὸ σχῆμα στραφῇ περὶ τὴν AB , ὁ λόγος τοῦ ὄγκου, τὸν ὁποῖον παράγει ὁ κυκλικὸς τομεὺς $ΟΑΓΟ$ πρὸς τὸν ὄγκον, τὸν ὁποῖον παράγει τὸ τρίγωνον $ΟΑΔ$ νὰ εἶναι ἴσος μὲ μ . Ἐφαρμογή: $\mu=1/6$.

2779. (2817). Δίδεται μία ὀρθὴ γωνία $ΧΟΥ$ καὶ ἐπὶ τῆς $ΟΧ$ ἓνα σημεῖον A τοιοῦτον, ὥστε $ΟΑ=a$ ἀπὸ ἓνα σημεῖον M , τὸ ὁποῖον κεῖται ἐντὸς τῆς γωνίας φέρομεν τὴν MB κάθετον ἐπὶ τὴν $ΟΥ$, τὴν εὐθεῖαν MA καὶ τὸ τόξον $ΟΓΜ$ τῆς περιφερείας, ἣ ὁποῖα ἐφάπτεται τῆς $ΟΧ$ καὶ διέρχεται ἀπὸ τὸ M . Ἐὰν τὸ σχῆμα στραφῇ περὶ τὴν $ΟΥ$, νὰ εὐρεθῇ ὁ τόπος τοῦ M , ἂν γνωρίζωμεν ὅτι οἱ ὄγκοι οἱ παραγόμενοι ὑπὸ τοῦ τριγώνου $ΟΑΒ$ καὶ τοῦ μικτογράμμου τριγώνου $ΟΑΜΓ$ εἶναι ἰσοδύναμοι.

2780. (2818). Δίδεται ἡμιπεριφέρεια O διαμέτρου $AB=2R$ · ἀπὸ ἓνα σημεῖον $Δ$ τῆς AB φέρομεν κάθετον $ΔΓ$ ἐπ' αὐτήν, ἣ ὁποῖα τέμνει τὴν ἡμιπεριφέρειαν εἰς ἓνα σημεῖον $Γ$ καὶ στρέφομεν τὸ ἡμικύκλιον περὶ τὴν διάμετρον AB κατὰ δλόκληρον στροφῆν. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ $AD=x$, ἴνα: 1ον. ὁ ὄγκος, ὁ παραγόμενος ὑπὸ τοῦ κυκλικοῦ τμήματος $AMΓA$ εἶναι ἴσος μὲ τὸν ὄγκον τοῦ κώνου, τὸν ὁποῖον παράγει τὸ τρίγωνον $ΓΔO$. 2ον. τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν παραγομένων ὑπὸ τῶν κυκλικῶν τμημάτων $AMΓA$ καὶ $ΓNBΓ$ ἴσονται μὲ τὰ $5/8$ τοῦ ὄγκου τῆς σφαίρας, τὴν ὁποίαν παράγει τὸ ἡμικύκλιον AGB . 3ον. τὸ ἄθροισμα τῶν αὐτῶν ὄγκων εἶναι διπλάσιον τοῦ ὄγκου, τὸν ὁποῖον παράγει τὸ τρίγωνον AGB .

2781. (2819). Δίδεται ἡμιπεριφέρεια AMB , διαμέτρου $AOB=2R$. Φέρομεν τὴν ἀκτίνα OG οὕτως, ὥστε νὰ σχηματίσῃ μὲ τὴν OB γωνίαν 45° καὶ μίαν ἐφαπτομένην $ΓΔ$ τῆς περιφερείας εἰς τὸ $Γ$, ἣ ὁποῖα τέμνει τὴν προέκτασιν τῆς OB εἰς τὸ $Δ$. Νὰ ὑπολογισθῇ: 1ον. τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου $ΟΔΓ$. 2ον. τὸ ἐμβαδὸν τοῦ μικτογράμμου μέρους $ΔBG$. 3ον. τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς παραγομένης ὑπὸ τοῦ τόξου $AMΓ$, στρεφόμενου περὶ τὴν AB .

Η' Ὁμάς. 2782. (2820). Διὰ δοθείσης εὐθείας νὰ ἀχθῇ ἓνα ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον νὰ ἐφάπτεται δοθείσης σφαίρας.

2783. (2821). Διὰ δοθείσης εὐθείας νὰ ἀχθῇ ἓνα ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον νὰ τέμνῃ δοθείσαν σφαῖραν οὕτως, ὥστε ἡ τομὴ τῆς νὰ ἔχῃ δοθείσαν ἀκτίνα.

2784. (2822). Ἐπὶ δοθείσης σφαίρας νὰ γραφῇ περιφέρεια κύκλου, ἣ ὁποῖα νὰ ἔχῃ δοθείσαν ἀκτίνα.

2785. (2823). Νὰ κατασκευασθῇ μία σφαῖρα, ἣ ὁποῖα νὰ ἔχῃ δοθείσαν ἀκτίνα καὶ νὰ διέρχεται ἀπὸ τρία σημεῖα.

2786. (2824). Νὰ κατασκευασθῇ μία σφαῖρα, ἣ ὁποῖα νὰ ἔχῃ δοθείσαν

ἄκτινα καὶ νὰ διέρχεται ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα καὶ νὰ ἐφάπτεται εἰς ἓνα ἐπιπέδον.

2787. (2825). Νὰ κατασκευασθῇ μία σφαῖρα, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ δοθεῖσαν ἄκτινα καὶ νὰ διέρχεται ἀπὸ δύο δοθέντα σημεῖα καὶ νὰ ἐφάπτεται δοθείσης σφαιράς.

2788. (2826). Νὰ κατασκευασθῇ μία σφαῖρα, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ δοθεῖσαν ἄκτινα καὶ νὰ διέρχεται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον καὶ νὰ ἐφάπτεται δύο δοθέντων ἐπιπέδων.

2789. (2827). Νὰ κατασκευασθῇ μία σφαῖρα, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ δοθεῖσαν ἄκτινα καὶ νὰ διέρχεται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον καὶ νὰ ἐφάπτεται δύο δοθεισῶν σφαιρῶν.

2790. (2828). Νὰ κατασκευασθῇ μία σφαῖρα, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ δοθεῖσαν ἄκτινα καὶ νὰ διέρχεται ἀπὸ δοθὲν σημεῖον καὶ νὰ ἐφάπτεται δοθέντος ἐπιπέδου καὶ δοθείσης σφαιράς.

2791. (2829). Νὰ κατασκευασθῇ μία σφαῖρα, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ δοθεῖσαν ἄκτινα καὶ νὰ ἐφάπτεται τριῶν ἐπιπέδων.

2792. (2830). Νὰ κατασκευασθῇ μία σφαῖρα, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ δοθεῖσαν ἄκτινα καὶ νὰ ἐφάπτεται τριῶν σφαιρῶν.

2793. (2831). Νὰ κατασκευασθῇ μία σφαῖρα, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ δοθεῖσαν ἄκτινα καὶ νὰ ἐφάπτεται δύο ἐπιπέδων καὶ μιᾶς σφαιράς.

2794. (2832). Νὰ κατασκευασθῇ μία σφαῖρα, ἡ ὁποία νὰ ἔχῃ δοθεῖσαν ἄκτινα καὶ νὰ ἐφάπτεται ἑνὸς ἐπιπέδου καὶ δύο σφαιρῶν.

2795. (2833). Νὰ διαιρεθῇ ἡ ἐπιφάνεια μιᾶς σφαιράς εἰς ἰσοδύναμα μέρη ὑπὸ ἐπιπέδων, τὰ ὁποῖα διέρχονται ἀπὸ δοθεῖσαν εὐθείαν, ἡ ὁποία κεῖται ἐκτὸς τῆς σφαιράς.

2796. (2834). Νὰ προσδιορισθῇ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σφαιράς μία ζώνη μὲ μίαν βάσιν οὕτως, ὥστε τὸ ἔμβασμα τῆς νὰ ἔχῃ λόγον k πρὸς τὸ ἔμβασμα τῆς βάσεώς της.

2797. (2835). Νὰ τμηθῇ μία σφαῖρα ὑπὸ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων, τὰ ὁποῖα νὰ ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὸ κέντρον τῆς σφαιράς εἰς τρόπον, ὥστε τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν τομῶν νὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἔμβασμα τῆς ζώνης, ἡ ὁποία περιέχεται μεταξὺ τῶν δύο ἐπιπέδων.

Θ' Ὁμάς. 2798. (2836). Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι εἰς ἓνα τετράεδρον δυνάμεθα πάντοτε νὰ ἐγγράψωμεν μίαν σφαῖραν (νὰ ἐφάπτεται τῶν ἐδρῶν του).

2799. (2837). Περὶ δοθὲν τετράεδρον δυνάμεθα νὰ περιγράψωμεν σφαῖραν.

2800. (2838). Νὰ ἐγγραφῇ εἰς μίαν σφαῖραν τὸ μέγιστον παραλληλεπίπεδον.

2801. (2839). Νὰ ἐγγραφῇ εἰς μίαν σφαῖραν ὁ μέγιστος κῶνος.

2802. (2840). Νὰ ἐγγραφῇ εἰς μίαν σφαῖραν ὁ μέγιστος κύλινδρος.

2803. (2841). Νὰ περιγραφῇ περὶ δοθεῖσαν σφαῖραν ὁ ἐλάχιστος κῶνος.

2804. (2842). Ἀπὸ τὴν κορυφὴν A ἐνὸς τριγώνου $AB\Gamma$, νὰ ἀχθῇ μία εὐθεῖα $\chi A\gamma$, ἡ ὁποία νὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τριγώνου καὶ νὰ μὴ τέμνῃ αὐτὸ καὶ τοιαύτη, ὥστε ὁ ὄγκος τὸν ὁποῖον παράγει τὸ τρίγωνον αὐτὸ, στρεφόμενον περὶ τὴν $\chi\gamma$, νὰ εἶναι μέγιστος.

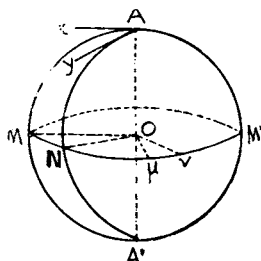
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΣΦΑΙΡΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ ΚΑΙ ΤΡΙΓΩΝΑ

Όρισμοί και ιδιότητες σφαιρικῶν τριγῶνων

879. Γωνία δύο καμπύλων γραμμῶν. Γωνία δύο τεμνομένων καμπύλων λέγεται ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ ἐφαπτόμεναι τῶν καμπύλων αὐτῶν εἰς τὸ σημεῖον τῆς τομῆς των.

Π.χ. ἔστωσαν δύο τόξα AMA' καὶ ANA' (Σχ. 587) τὰ ὁποῖα τέμνονται εἰς τὰ σημεῖα A καὶ A' . Ἐστω Ax ἡ ἐφαπτομένη τοῦ τόξου AMA' εἰς τὸ σημεῖον A καὶ Ay ἡ ἐφαπτομένη τοῦ τόξου ANA' εἰς τὸ σημεῖον A . Ἡ γωνία xAy εἶναι ἡ γωνία τῶν δύο αὐτῶν τεμνομένων τόξων.



Σχ. 587.

Ἐὰν τὰ τόξα AMA' καὶ ANA' εἶναι τόξα περιφερειῶν μεγίστων κύκλων σφαίρας, τότε ἡ γωνία xAy λέγεται **σφαιρικὴ γωνία**.

Τὸ σημεῖον A λέγεται **κορυφὴ τῆς γωνίας** καὶ τὰ τόξα AMA' καὶ ANA' λέγονται **πλευραὶ τῆς γωνίας**.

880. Θεώρημα. Ἡ γωνία δύο τόξων μεγίστων κύκλων μιᾶς σφαίρας :

1ον. **Εἶναι ἴση μετὰ τὴν ἀντίστοιχον ἐπίπεδον γωνίαν τῆς διέδρου γωνίας, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν τὰ ἐπίπεδα τῶν τόξων.**

2ον. **Ἐχει μέτρον, τὸ μέτρον τοῦ τόξου τοῦ μεγίστου κύκλου τῆς σφαίρας, ὃ ὁποῖος γράφεται μετὰ πόλον τὴν κορυφὴν τῆς γωνίας, καὶ τὸ ὁποῖον τόξον περιέχεται μεταξὺ τῶν πλευρῶν τῆς γωνίας.**

Υπόθεσις : Ἐστωσαν τὰ δύο τόξα AMA' καὶ ANA' (Σχ. 587) μεγίστων κύκλων τῆς σφαίρας O καὶ xAy ἡ γωνία τῶν δύο αὐτῶν τόξων.

1ον. **Συμπέρασμα :** Θὰ δείξωμεν, ὅτι ἡ γωνία xAy εἶναι ἴση μετὰ τὴν ἐπίπεδον γωνίαν τῆς διέδρου $M-AA'-N$.

Ἀπόδειξις : Τὰ ἐπίπεδα τῶν τόξων AMA' καὶ ANA' , τεμνόμενα κατὰ τὴν διάμετρον AA' , σχηματίζουν τὴν διέδρον γωνίαν $M-AA'-N$.

Ἡ αA ὡς ἔφαπτομένη τοῦ τόξου AMA' εἰς τὸ σημεῖον A , εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν διάμετρον AA' καὶ κείται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου AMA' . ὁμοίως καὶ ἡ γA εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν διάμετρον AA' , ὡς ἔφαπτομένη τοῦ τόξου ANA' εἰς τὸ σημεῖον A καὶ κείται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ANA' . Ἡ γωνία $\alpha A \gamma$ εἶναι (§ 679) ἡ ἀντίστοιχος ἐπίπεδος γωνία τῆς διέδρου $M - AA' - N$.

2ον. Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξωμεν ὅτι $\widehat{\alpha A \gamma} = \widehat{\text{μέτρο.} MN}$.

Ἀπόδειξις: Ἀπὸ τὸ κέντροn O τῆς σφαίρας φέρομεν ἓνα ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν κοινὴν διάμετρον AA' τῶν δύο τόξων. Τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ τέμνει τὴν σφαῖραν κατὰ ἓνα μέγιστον κύκλον MM' καὶ τὰ ἐπίπεδα $AA'M$ καὶ $AA'N$ κατὰ τὰς εὐθείας OM καὶ ON . Αἱ εὐθεῖαι OM καὶ ON σχηματίζουν μίαν γωνίαν MON , ἡ ὁποία εἶναι ἡ ἀντίστοιχος ἐπίπεδος τῆς διέδρου γωνίας $M - AA' - N$ ἐπειδὴ καὶ ἡ γωνία $\alpha A \gamma$ εἶναι ἡ ἀντίστοιχος ἐπίπεδος γωνία τῆς αὐτῆς διέδρου γωνίας, θὰ εἶναι

$$\widehat{\alpha A \gamma} = \widehat{MON}.$$

Ἀλλὰ ἡ γωνία MON , ὡς ἐπίκεντρος γωνία, ἔχει μέτρον ἴσον μὲ τὸ μέτρον τοῦ τόξου MN τοῦ μεγίστου κύκλου MM' καὶ ἐπομένως καὶ ἡ ἴση τῆς γωνία $\alpha A \gamma$ ἔχει μέτρον ἴσον μὲ τὸ μέτρον τοῦ τόξου MN .

Ἐδείχθη λοιπόν, ὅτι: **Ἡ γωνία δύο τόξων. . .**

881. Πόρισμα I. Ἡ γωνία δύο μεγίστων κύκλων ἔχει μέτρον ἴσον μὲ τὸ μέτρον τοῦ μεγίστου κύκλου, ὃ ὁποῖος συνδέει τοὺς πόλους των.

Ἀπόδειξις: Εἰς τὸ ἐπίπεδον NMM' (Σχ. 587) φέρομεν τὴν Om κάθετον ἐπὶ τὴν OM καὶ τὴν On κάθετον ἐπὶ τὴν ON . Αἱ γωνίαι MON καὶ mon εἶναι ἴσαι, διότι ἔχουν τὰς πλευράς των καθέτους καὶ ἐπομένως τὸ τόξον \widehat{MN} θὰ εἶναι ἴσον μὲ τὸ τόξον \widehat{mn} . Ἐξ ἄλλου τὸ σημεῖον μ εἶναι πόλος τοῦ κύκλου AMA' καὶ τὸ σημεῖον ν εἶναι πόλος τοῦ κύκλου ANA' . Ὡστε ἡ διέδρος γωνία $M - AA' - N$ καὶ ἐπομένως καὶ ἡ γωνία $\alpha A \gamma$ ἔχει τὸ αὐτὸ μέτρον μὲ τὸ τόξον \widehat{mn} , ποὺ συνδέει τοὺς πόλους μ καὶ ν τῶν δύο κύκλων.

882. Πόρισμα II. Διὰ νὰ εἶναι δύο μέγιστοι κύκλοι κάθετοι μεταξύ των, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἕκαστος ἐξ αὐτῶν νὰ περιέχη τὸν πόλον τοῦ ἄλλου.

Τοῦτο εἶναι προφανές.

883. Σφαιρικὸν τρίγωνον. Σφαιρικὸν τρίγωνον λέγεται τὸ μέρος τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σφαίρας, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξύ

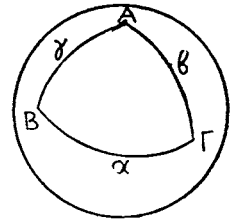
τριῶν τόξων μεγίστων κύκλων, τὰ ὁποῖα ὁμως τόξα εἶναι μικρότερα ἡμιπεριφερείας.

Π.χ. τὸ σχῆμα $AB\Gamma$ (Σχ. 588) εἶναι ἓνα σφαιρικὸν τρίγωνον.

Τὰ τόξα \widehat{AB} , $\widehat{B\Gamma}$, $\widehat{\Gamma A}$, τὰ ὁποῖα εἶναι ἀντιστοίχως μικρότερα ἡμιπεριφερείας, λέγονται **πλευραὶ τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου**.

Τὰ σημεῖα A, B, Γ λέγονται **κορυφαὶ τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου**.

Αἱ γωνίαι $AB\Gamma$, $B\Gamma A$, $\Gamma A B$, τὰς ὁποίας σχηματίζουν αἱ πλευραὶ τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου λέγονται **γωνίαι τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου**. Παριστάνομεν συνήθως μὲ A, B, Γ τὰς γωνίας ἑνὸς σφαιρικοῦ τριγώνου καὶ μὲ α, β, γ τὰς ἀπέναντι αὐτῶν πλευράς.



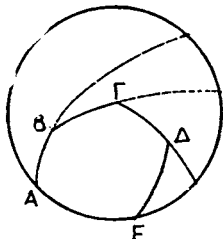
Σχ. 588.

884. Σφαιρικὸν πολύγωνον. Σφαιρικὸν πολύγωνον λέγεται τὸ μέρος τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σφαίρας, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ πολλῶν τόξων μεγίστων κύκλων, τὰ ὁποῖα ὁμως τόξα πρέπει νὰ εἶναι μικρότερα ἡμιπεριφερείας.

Π.χ. τὸ σχῆμα $AB\Gamma\Delta E$ (Σχ. 589) εἶναι ἓνα σφαιρικὸν πολύγωνον.

Τὰ τόξα \widehat{AB} , $\widehat{B\Gamma}$, $\widehat{\Gamma\Delta}$, $\widehat{\Delta E}$, $\widehat{E A}$ εἶναι αἱ **πλευραὶ** του. Αἱ γωνίαι $AB\Gamma$, $B\Gamma\Delta$, ... εἶναι αἱ **γωνίαι** του καὶ τὰ σημεῖα A, B, Γ ... εἶναι αἱ **κορυφαὶ** του.

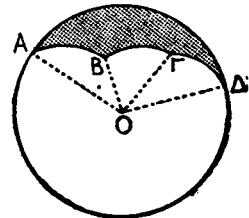
Ἐνα σφαιρικὸν πολύγωνον λέγεται **κυρτόν**, ἐὰν κάθε πλευρά του, προεκτεινομένη οὕτως, ὥστε νὰ σχηματίσῃ ἓνα ὀλόκληρον μέγιστον κύκλον, ἀφίγη ὀλόκληρον τὸ πολύγωνον πρὸς τὸ αὐτὸ ἡμισφαίριον.



Σχ. 589.

885. Σχέσεις μεταξὺ τῶν σφαιρικῶν πολυγώνων καὶ τῶν στερεῶν γωνιῶν. Ἐὰν συνδέσωμεν μὲ εὐθείας τὸ κέντρον O μιᾶς σφαίρας (Σχ. 590) μὲ τὰς κορυφὰς A, B, Γ, Δ ἑνὸς σφαιρικοῦ πολυγώνου $AB\Gamma\Delta$, σχηματίζομεν μίαν στερεᾶν γωνίαν $O.AB\Gamma\Delta$.

τῆς ὁποίας αἱ \widehat{AOB} , $\widehat{BO\Gamma}$, ... ἔχουν τὸ αὐτὸ μέτρον μὲ τὰς πλευρὰς $AB, B\Gamma, \dots$ τοῦ σφαιρικοῦ πολυγώνου, διότι αἱ γωνίαι \widehat{AOB} , $\widehat{BO\Gamma}$, ...

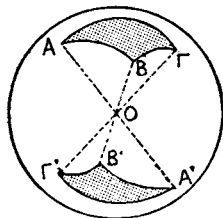


Σχ. 590.

εἶναι ἐπίκεντροι γωνίαι, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰ τόξα (πλευρὰς) $AB, B\Gamma, \dots$

Ἐπίσης αἱ διέδροι γωνίαί τῆς στερεᾶς γωνίας $O.AB\Gamma\Delta$ ἔχουν, κατὰ τὸ θεώρημα τῆς § 880, τὰς ἐπιπέδους γωνίας των ἴσας μὲ τὰς γωνίας τοῦ σφαιρικοῦ πολυγώνου.

Καὶ ἀντιστρόφως, κάθε στερεὰ γωνία, ἡ ὁποία ἔχει τὴν κορυφήν της εἰς τὸ κέντρον μιᾶς σφαίρας, τέμνει τὴν ἐπιφανείαν της κατὰ ἕνα σφαιρικὸν πολυγώνον.



Σχ. 591.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω συνάγομεν, ὅτι: **Εἰς κάθε ιδιότητα τῶν στερεῶν γωνιῶν ἀντιστοιχεῖ μία ἀνάλογος ιδιότης τῶν σφαιρικῶν πολυγώνων.**

Διὰ νὰ ἐκφράσωμεν αὐτὴν τὴν ιδιότητα, ἀρκεῖ νὰ ἀντικαταστάσωμεν, ἀντιστοίχως, τὰς λέξεις ἔδρα καὶ διέδρος γωνία μὲ τὰς λέξεις πλευρὰ καὶ γωνία.

Εἶναι φανερόν, ὅτι τὰ ἀνωτέρω ἐπεκτείνονται καὶ εἰς τὰς τριέδρους γωνίας καὶ εἰς τὰ σφαιρικὰ τρίγωνα.

886. Συμμετρικὰ σφαιρικὰ πολύγωνα. Δύο σφαιρικὰ πολύγωνα ἢ τρίγωνα λέγονται **συμμετρικά**, ὅταν αἱ κορυφαὶ τοῦ ἑνὸς εἶναι **συμμετρικαὶ** τῶν κορυφῶν τοῦ ἄλλου, πρὸς τὸ κέντρον τῆς σφαίρας.

Π.χ. τὰ σφαιρικὰ τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $A'B'\Gamma'$ (Σχ. 591) εἶναι **συμμετρικά**.

Εἰς δύο **συμμετρικά** σφαιρικὰ πολύγωνα ἀντιστοιχοῦν δύο **συμμετρικαὶ** στερεαὶ γωνίαί (§ 885) ἐπομένως:

Δύο συμμετρικὰ σφαιρικὰ πολύγωνα ἔχουν τὰ ὁμόλογα στοιχεῖα των ἴσα, ἀλλὰ δὲν ἐφαρμόζουσι γενικῶς.

887. Ἰδιότητες τῶν σφαιρικῶν τριγώνων καὶ σφαιρικῶν πολυγώνων. Ἀπὸ τὰς γνωστὰς ιδιότητας τῶν τριέδρων καὶ τῶν πολυέδρων γωνιῶν συνάγομεν τὰς κάτωθι ιδιότητας τῶν σφαιρικῶν τριγώνων καὶ τῶν σφαιρικῶν πολυγώνων:

I. **Εἰς κάθε κυρτὸν σφαιρικὸν πολύγωνα, τὸ ἄθροισμα τῶν πλευρῶν του εἶναι μικρότερον τῆς περιφερείας μεγίστου κύκλου** (§ 702).

II. **Κάθε πλευρὰ σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι μικροτέρα τοῦ ἄθροίσματος τῶν δύο ἄλλων** (§ 701).

III. **Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι μεγαλύτερον τῶν δύο ὀρθῶν καὶ μικρότερον τῶν ὅ ὀρθῶν** (§ 716).

Ἐξ αὐτοῦ συνάγομεν, ὅτι ἓνα σφαιρικὸν τρίγωνον δύναται νὰ ἔχη μίαν, δύο ἢ τρεῖς ὀρθὰς γωνίας. Τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον, ποὺ ἔχει τρεῖς ὀρθὰς γωνίας λέγεται **τρισορθόγωνιον**.

IV. **Εἰς κάθε ἰσοσκελὲς σφαιρικὸν τρίγωνον αἱ γωνίαι, αἱ ὁποῖαι κείνται ἀπέναντι τῶν ἴσων πλευρῶν, εἶναι ἴσαι (§ 707) καὶ ἀντιστρόφως (§ 712).**

888 Ἴσότης σφαιρικῶν τριγώνων. Ἐὰν δύο σφαιρικά τρίγωνα εἶναι ἴσα, θὰ εἶναι ἴσαι καὶ αἱ τριέδροι στερεαὶ γωνίαι, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς αὐτά, καὶ ἀντιστρόφως. Αἱ περιπτώσεις λοιπὸν τῆς ἰσότητος τῶν σφαιρικῶν τριγώνων συνάγονται ἀπὸ τὰς περιπτώσεις τῆς ἰσότητος τῶν τριέδρων γωνιῶν· οὕτω :

Δύο σφαιρικὰ τρίγωνα τῆς αὐτῆς σφαίρας ἢ ἴσων σφαιρῶν εἶναι ἴσα, δηλ. ἔχουν ὅλα τὰ ὁμόλογα στοιχεῖα τῶν ἴσων :

1ον. **Ὅταν ἔχουν μίαν πλευρὰν ἴσην καὶ τὰς προσκειμένας εἰς αὐτὴν γωνίας ἴσας μίαν πρὸς μίαν (§ 718).**

2ον. **Ὅταν ἔχουν δύο πλευρὰς ἴσας, μίαν πρὸς μίαν, καὶ τὰς ὑπ' αὐτῶν σχηματιζομένας γωνίας ἴσας (§ 719).**

3ον. **Ὅταν ἔχουν καὶ τὰς τρεῖς πλευρὰς τῶν ἴσας, μίαν πρὸς μίαν (§ 720).**

4ον. **Ὅταν ἔχουν τὰς γωνίας τῶν ἴσας μίαν πρὸς μίαν (§ 721).**

Εἰς ὅλας τὰς ἄνω περιπτώσεις τὰ σφαιρικὰ τρίγωνα εἶναι ἴσα ἢ συμμετρικά, καθόσον ἔχουν τὸν αὐτὸν προσανατολισμὸν ἢ ὄχι.

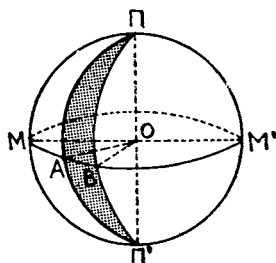
Ἄτρακτοι καὶ σφαιρικοὶ ὄνυχες

889. Ἄτρακτος. Ἄτρακτος λέγεται τὸ μέρος τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σφαίρας, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ δύο ἡμιπεριφερειῶν μεγίστων κύκλων, αἱ ὁποῖαι ἔχουν κοινὴν διάμετρον.

Π.χ. τὸ μέρος ΠΑΠ'ΒΠ (Σχ. 593) τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας Ο εἶναι ἓνας ἄτρακτος.

Τὰ ἡμικύκλια ΠΑΠ καὶ ΠΒΠ' μεγίστων κύκλων, τεμνόμενα κατὰ τὴν διάμετρον ΠΠ', ὀρίζουν μίαν διέδρον γωνίαν Α-ΠΠ'-Β, τῆς ὁποίας ἀκμὴ εἶναι ἡ διάμετρος ΠΠ'.

Ἡ γωνία, τὴν ὁποίαν σχηματίζουν αἱ ἡμιπεριφέρειαι ΠΑΠ' καὶ ΠΒΠ' μεγίστων κύκλων, λέγεται **γωνία τοῦ ἀτράκτου**.



Σχ. 592.

Εἶναι φανερόν, ὅτι ἡ γωνία τοῦ ἄτρακτου ἔχει τὸ αὐτὸ μέτρον μὲ τὸ μέτρον τῆς διέδρου γωνίας, τὴν ὁποίαν ὀρίζουν τὰ ἡμικύκλια, τὰ ὁποῖα σχηματίζουν τὸν ἄτρακτον.

890. Σφαιρικός ὄνυξ. Σφαιρικός ὄνυξ λέγεται τὸ μέρος τῆς σφαίρας, τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ δύο ἡμικυκλίων μεγίστων κύκλων, τὰ ὁποῖα ἔχουν κοινὴν διάμετρον.

Π.χ. τὸ μέρος ΠΑΠ'ΟΠΒΠ' (Σχ. 593) τῆς σφαίρας Ο εἶναι ἕνας σφαιρικός ὄνυξ.

Βάσις σφαιρικοῦ ὄνυχος λέγεται ὁ ἄτρακτος, ὁ ὁποῖος περιέχεται μεταξὺ τῶν δύο ἡμικυκλίων, πὺν σχηματίζουν τὸν σφαιρικὸν ὄνυχα.

Γωνία σφαιρικοῦ ὄνυχος εἶναι ἡ γωνία τῆς βάσεώς του.

Ὁ ἄτρακτος ἢ καὶ ὁ σφαιρικός ὄνυξ λέγεται **ὀρθογώνιος**, **ὀξυγώνιος** ἢ **ἀμβλυγώνιος**, ἐὰν ἡ γωνία των εἶναι ὀρθή, ὀξεῖα ἢ ἀμβλεῖα.

Κάθε ὀρθογώνιος ἄτρακτος εἶναι τὸ ἥμισυ ἡμισφαιρίου καὶ διπλάσιος ἑνὸς τρισσορθογωνίου σφαιρικοῦ τριγώνου.

891. Θεώρημα. Δύο ἄτρακτοι τῆς αὐτῆς σφαίρας ἢ ἴσων σφαιρῶν, οἱ ὁποῖοι ἔχουν ἴσας γωνίας, εἶναι ἴσοι.

Ἀπόδειξις: Ἀφοῦ οἱ ἄτρακτοι εἶναι ἴσοι, θὰ εἶναι ἴσοι καὶ αἱ διέδροι γωνίαί, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς αὐτούς· ὅταν λοιπὸν ἐφαρμόσουν αἱ ἴσαι αὐταὶ διέδροι γωνίαί, θὰ ἐφαρμόσουν καὶ οἱ ἄτρακτοι τῆς αὐτῆς σφαίρας ἢ τῶν ἴσων σφαιρῶν.

892. Θεώρημα. Ὁ λόγος δύο ἄτρακτων τῆς αὐτῆς σφαίρας ἢ ἴσων σφαιρῶν, εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῶν γωνιῶν των.

Ἐπιπέδοις: Ἐστωσαν οἱ δύο ἄτρακτοι ΠΑΠ'ΒΠ καὶ ΠΒΠ'ΓΠ, (Σχ. 593) ἀπὸ τὸ κέντροn Ο τῆς σφαίρας φέρομεν ἕνα ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν διάμετρον ΠΠ', ἡ ὁποία συνδέει τὰ ἄκρα. Αἱ γωνίαί των ἄτρακτων αὐτῶν ἔχουν τὸ αὐτὸ μέτρον, πὺν ἔχουν αἱ ἐπίκεντροι γωνίαί ΑΟΒ καὶ ΒΟΓ ἢ τὰ ἀντίστοιχα τόξα των $\widehat{ΑΒ}$ καὶ $\widehat{ΒΓ}$.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι

$$\frac{\text{ἄτρ. ΠΑΠ'ΒΠ}}{\text{ἄτρ. ΠΒΠ'ΓΠ}} = \frac{\widehat{ΑΟΒ}}{\widehat{ΒΟΓ}}$$

Ἀπόδειξις: Ὑποθέτομεν, ὅτι τὰ δύο αὐτὰ τόξα ἔχουν ἕνα κοινὸν μέτρον, τὸ ὁποῖον περιέχεται 3 φορὰς εἰς τὸ $\widehat{ΑΒ}$ καὶ 2 φορὰς εἰς τὸ $\widehat{ΒΓ}$ · ἄρα θὰ εἶναι:

$$\frac{\widehat{AOB}}{\widehat{BO\Gamma}} = \frac{\widehat{AB}}{\widehat{B\Gamma}} = \frac{3}{2} \quad (1)$$

Ἀπὸ τὰ σημεῖα τῆς διαιρέσεως τῶν τόξων \widehat{AB} καὶ $\widehat{B\Gamma}$ φέρομεν περιφερείας μεγίστων κύκλων, αἱ ἑποῖαι νὰ ἔχουν κοινὴν διάμετρον τὴν ΠΠ'. Αἱ ἡμιπεριφέρειαι αὐταὶ διαιροῦν τὸν ἄτρακτον ΠΑΠ'ΒΠ εἰς τρεῖς ἀτράκτους καὶ τὸν ἄτρακτον ΠΒΠ'ΓΠ εἰς δύο ἀτράκτους. Ὅλοι αὐτοὶ οἱ ἄτρακτοι εἶναι ἴσοι μεταξύ των, διότι καὶ αἱ ἀντίστοιχοι γωνίαι των εἶναι ἴσαι (§ 891)· θὰ εἶναι λοιπὸν

$$\frac{\text{ἄτρ. ΠΑΠ'ΒΠ}}{\text{ἄτρ. ΠΒΠ'ΓΠ}} = \frac{3}{2} \quad (2)$$

Ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2) συνάγομεν, ὅτι

$$\frac{\text{ἄτρ. ΠΑΠ'ΒΠ}}{\text{ἄτρ. ΠΒΠ'ΓΠ}} = \frac{\widehat{AOB}}{\widehat{BO\Gamma}}$$

Τὸ θεώρημα εἶναι ἀληθὲς καὶ ὅταν τὰ τόξα \widehat{AB} καὶ $\widehat{B\Gamma}$ δὲν ἔχουν ἓνα κοινὸν μέτρον· ἀποδεικνύεται δὲ κατὰ τὰ γνωστὰ (§ 681).

893. Πόρισμα I. *Τὸ μέτρον ἐνὸς ἀτράκτου εἶναι ἴσον μὲ τὸ μέτρον τῆς γωνίας του, (ἐὰν ληφθῇ ὡς μονὰς τῶν ἀτράκτων ὁ ὀρθογώνιος ἀτράκτος καὶ ὡς μονὰς τῶν γωνιῶν ἡ ὀρθὴ γωνία).*

Ἡ πρότασις αὐτὴ εἶναι ἄμεσος συνέπεια τῆς προηγουμένης προεάσεως.

894. Πόρισμα II. *Τὸ μέτρον ἐνὸς ἀτράκτου εἶναι ἴσον μὲ τὸ διπλάσιον τοῦ μέτρου τῆς γωνίας του, (ἐὰν ληφθῇ ὡς μονὰς τῶν ἀτράκτων τὸ τρισσορογώνιον σφαιρικὸν τρίγωνον καὶ ὡς μονὰς γωνιῶν ἡ ὀρθὴ γωνία).*

Ὑπόθεσις: Ἐστώσαν Α καὶ Α' δύο ἄτρακτοι καὶ Γ, Γ' αἱ ἀντίστοιχοι γωνίαι των.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν ὅτι: μέτρ. ἄτρ. Α = 2 μέτρ. Γ̂.

Ἀπόδειξις: Γνωρίζομεν (§ 892) ὅτι

$$\frac{\text{ἄτρ. Α}}{\text{ἄτρ. Α'}} = \frac{\widehat{\Gamma}}{\widehat{\Gamma'}} \quad \text{ἄρα} \quad \frac{\text{μέτρ. ἄτρ. Α}}{\text{μέτρ. ἄτρ. Α'}} = \frac{\text{μέτρ. } \widehat{\Gamma}}{\text{μέτρ. } \widehat{\Gamma'}} \quad (1)$$

Ἐὰν λάβωμεν ὡς μονάδα μετρήσεως τῶν γωνιῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν καὶ ὑποθέσωμεν, ὅτι μετρ. Γ̂ = 1, ὁ ἀντίστοιχος ἀτράκτος θὰ εἶναι ὀρθογώνιος καὶ ἑπομένως θὰ εἶναι διπλάσιος τοῦ τρισσορογώνιου τριγώνου, δηλ. θὰ εἶναι μέτρ. ἄτρ. Α' = 2 μονάδες μετρήσεως.

Ἀντικαθιστῶμεν εἰς τὴν ἰσότητα (1) τὰ μετρ. ἄτρ. Α' καὶ μετρ. Γ̂' μὲ τὰ ἴσα των καὶ ἔχομεν

$$\frac{\text{μέτρ. ἄτρ. } A}{2} = \frac{\text{μετρ. } \widehat{\Gamma}}{1} \quad \eta \quad \text{μέτρ. ἄτρ. } A = 2 \cdot \text{μέτρ. } \widehat{\Gamma}.$$

895. Πέρισμα III. Ὁ λόγος τοῦ ἐμβαδοῦ ἐνὸς ἀτράκτου πρὸς τὸ ἐμβαδὸν τῆς σφαίρας εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει, εἶναι ἴσος μὲ τὸν λόγον τῆς γωνίας του πρὸς 4 ὀρθὰς γωνίας.

Ἐστω A ἕνας ἄτρακτος καὶ Γ ἡ γωνία του.

Ἐὰν θεωρήσωμεν τὴν ἐπιφάνειαν τῆς σφαίρας ὡς ἕνα ἄτρακτον, τοῦ ὁποίου ἡ γωνία εἶναι ἴση μὲ 4 ὀρθὰς, θὰ ἔχωμεν (§ 892)

$$\frac{\text{ἄτρ. } A}{\text{σφαῖρ.}} = \frac{\widehat{\Gamma}}{4 \text{ ὀρθ.}} \quad \eta \quad \frac{\text{ἐμβ. ἄτρ. } A}{\text{ἐμβ. σφαῖρ.}} = \frac{\widehat{\Gamma}}{4 \text{ ὀρθ.}} \quad (1)$$

896. Παρατήρησις. Ἐὰν ἡ γωνία τοῦ ἀτράκτου εἶναι ἴση μὲ μ μοίρας καὶ ἡ ἀκτίς τῆς σφαίρας R , τότε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας θὰ εἶναι $4\pi R^2$ καὶ ἐπομένως ἀπὸ τὴν σχέσιν (1) θὰ ἔχωμεν

$$\frac{\text{ἐμβ. ἄτρ. } A}{4\pi R^2} = \frac{\mu}{360^\circ} \quad \eta \quad \boxed{\text{ἐμβ. ἄτρ. } A = \pi R^2 \cdot \frac{\mu}{90}}$$

Ἀσκήσεις

2805. (2843). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἐνὸς ἀτράκτου 63° , ἀν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ ἀκτίς τῆς σφαίρας, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει ὁ ἀτράκτος, εἶναι 1 μ.

2806. (2844). Τὸ ἐμβαδὸν ἐνὸς ἀτράκτου εἶναι 1 τ.μ. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ γωνία του, ἀν γνωρίζωμεν, ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς σφαίρας, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει ὁ ἀτράκτος, εἶναι 9 τ.μ.

897. Παρατήρησις. Ἐὰν δύο ἄτρακτοι τῆς αὐτῆς σφαίρας ἢ ἴσων σφαιρῶν εἶναι ἴσοι, θὰ εἶναι ἴσοι καὶ αἱ ἀντίστοιχοι σφαιρικοὶ ὄνυχες. Ἐπομένως αἱ ἀνωτέρω ιδιότητες τῶν ἀτράκτων ἰσχύουν καὶ διὰ τοὺς σφαιρικοὺς ὄνυχες.

Πέρισμα. Δύο σφαιρικοὶ ὄνυχες ἔχουν λόγον ἴσον μὲ τὸν λόγον τῶν βάσεων των.

898. Ὀγκος σφαιρικοῦ ὄνυχος. Ἡ σφαῖρα δύναται νὰ θεωρηθῇ ὡς ἕνας σφαιρικός ὄνυξ, τοῦ ὁποίου βᾶσις εἶναι ὅλη ἡ ἐπιφάνειά της. Ἐὰν λοιπὸν ἡ γωνία τῆς βάσεως τοῦ σφαιρικοῦ ὄνυχος, δηλ. τοῦ ἀτράκτου, εἶναι 360° , ὁ ὄγκος τοῦ σφαιρικοῦ ὄνυχος θὰ εἶναι ἴσος μὲ τὸν ὄγκον τῆς σφαίρας ἀκτίνοσ R , δηλ. μὲ $\frac{4}{3} \pi R^3$. ἐπομένως, ἐὰν ἡ γωνία τῆς βάσεως τοῦ σφαιρικοῦ ὄνυχος εἶναι μ° , ὁ ὄγκος του θὰ εἶναι ἴσος μὲ

$$\frac{4}{3} \pi R^3 \cdot \frac{\mu}{360} \quad \eta \quad \frac{\pi R^3}{270} \mu.$$

Ὡστε

$$\boxed{\text{ὄγκ. σφαιρ. ὄνυχ.} = \frac{\mu \times \pi R^3}{270} \text{ κυβ. μέτρα}}$$

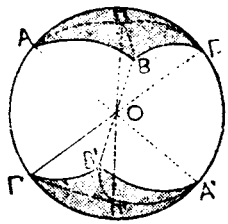
Ἐμβαδὸν σφαιρικοῦ τριγώνου

899. Θεώρημα. Δύο συμμετρικὰ σφαιρικὰ τρίγωνα εἶναι ἰσοδύναμα.

Ἐπίπεδοι: Ἐστωσαν τὰ συμμετρικὰ σφαιρικὰ τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $A'B'\Gamma'$.

Συμπέρασμα: Θὰ δείξωμεν, ὅτι τὰ σφαιρικὰ αὐτὰ τρίγωνα εἶναι ἰσοδύναμα.

Ἀπόδειξις: Ἐστω Π ὁ πόλος τοῦ μικροῦ κύκλου, ὁ ὁποῖος διέρχεται ἀπὸ τὰ σημεῖα A, B, Γ ἂν φέρωμεν τὰ $\widehat{PA}, \widehat{PB}, \widehat{P\Gamma}$ τῶν μεγίστων κύκλων, θὰ εἶναι $\widehat{PA} = \widehat{PB} = \widehat{P\Gamma}$. Φέρομεν τὴν διάμετρον $\widehat{PO\Pi'}$ καὶ τὰ τόξα $\widehat{P'A'}, \widehat{P'B'}, \widehat{P'\Gamma'}$ μεγίστων κύκλων. Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι \widehat{POA} καὶ $\widehat{P'O A'}$ εἶναι ἴσαι, θὰ εἶναι ἴσα καὶ τὰ τόξα



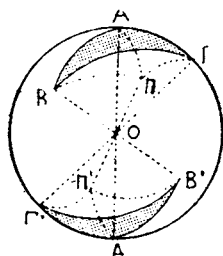
Σχ. 594.

\widehat{PA} καὶ $\widehat{P'A'}$. Ὀμοίως εἶναι $\widehat{PB} = \widehat{P'B'}$ καὶ $\widehat{P\Gamma} = \widehat{P'\Gamma'}$. Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $\widehat{PA} = \widehat{PB} = \widehat{P\Gamma}$ θὰ εἶναι καὶ $\widehat{P'A'} = \widehat{P'B'} = \widehat{P'\Gamma'}$.

Τὰ σφαιρικὰ λοιπὸν τρίγωνα \widehat{PAB} καὶ $\widehat{P'A'B'}$ εἶναι συμμετρικὰ καὶ ἰσοσκελῆ καὶ ἐπομένως εἶναι ἴσα. Ὀμοίως εἶναι ἴσα καὶ τὰ τρίγωνα \widehat{PAG} καὶ $\widehat{P'A'G'}$, καθὼς καὶ τὰ τρίγωνα \widehat{PBG} καὶ $\widehat{P'B'G'}$ διὰ τὸν αὐτὸν λόγον.

Ἄλλὰ τότε τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον $AB\Gamma$, ὡς ἄθροισμα τῶν σφαιρικῶν τριγώνων $\widehat{PAB}, \widehat{PAG}$ καὶ \widehat{PBG} , εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ σφαιρικὸν τρίγωνον $A'B'\Gamma'$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἄθροισμα τῶν σφαιρικῶν τριγώνων $\widehat{P'A'B'}, \widehat{P'A'G'}$ καὶ $\widehat{P'B'G'}$, τὰ ὁποῖα εἶναι ἴσα, ἕνα πρὸς ἕνα, πρὸς τὰ σφαιρικὰ τρίγωνα $\widehat{PAB}, \widehat{PAG}$ καὶ \widehat{PBG} .

900. Παρατήρησις. Ἐὰν ὁ πόλος δὲν ἔκειτο εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$, ἀλλ' ἐκτὸς αὐτοῦ, ὅπως φαίνεται εἰς τὸ σχῆμα 595, θὰ εἶναι



Σχ. 595.

$$\text{τριγ.} AB\Gamma = \text{τριγ.} PAB + \text{τριγ.} PAG - \text{τριγ.} PBG \quad (1)$$

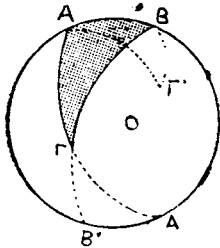
Ὀμοίως θὰ εἶναι

$$\text{τριγ.} A'B'\Gamma' = \text{τριγ.} P'A'B' + \text{τριγ.} P'A'G' - \text{τριγ.} P'B'G' \quad (2)$$

Ἐπειδὴ τὰ ἰσοσκελῆ τρίγωνα $\widehat{PAB}, \widehat{PAG}, \widehat{PBG}$ εἶναι ἴσα ἀντιστοίχως μὲ τὰ τρίγωνα $\widehat{P'A'B'}, \widehat{P'A'G'}, \widehat{P'B'G'}$ συνάγομεν ἀπὸ τὰς ἰσότητας (1) καὶ (2), ὅτι

$$\text{τριγ.} AB\Gamma = \text{τριγ.} A'B'\Gamma'$$

901. Θεώρημα. *Τὸ ἔμβαδὸν ἐνὸς σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μέτρων τῶν γωνιῶν τοῦ ἠλαττωμένου κατὰ 2, (εἰὰν λάβωμεν ὡς μονάδα γωνιῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν καὶ ὡς μονάδα ἔμβαδῶν τὸ ἔμβαδὸν τοῦ τρισσορθογωνίου τριγώνου).*



Σχ. 596.

Ἐπιπέδου: Ἐστὼ ἓνα σφαιρικὸν τρίγωνον $AB\Gamma$ (Σχ. 596).

Συμπέρασμα: Ἐὰν παραστήσωμεν μὲ A, B, Γ τὰ μέτρα τῶν γωνιῶν του, εἰς ὀρθὰς γωνίας, θὰ δεῖξωμεν, ὅτι

$$\text{ἔμβ. σφ. τρ. } AB\Gamma = A + B + \Gamma - 2.$$

Ἀπόδειξις: Συμπληρώνομεν τὸν μέγιστον κύκλον AB καὶ προεκτείνομεν τὰς πλευρὰς $A\Gamma$ καὶ $B\Gamma$ μέχρις, ὅτου συναντήσουν τὸν μέγιστον κύκλον AB εἰς τὰ σημεῖα B' καὶ Γ' . Τὰ τόξα $A\Gamma A'$, $B\Gamma B'$ εἶναι ἡμιπεριφέρειαι μεγίστων κύκλων. Ἐστὼ ἐπίσης Γ' τὸ ἄλλο ἄκρον τῆς διαμέτρου $\Gamma O \Gamma'$.

Ἐπίσης προεκτείνομεν τὰς πλευρὰς ΓA καὶ ΓB μέχρις ὅτου τμηθῶν εἰς τὸ σημεῖον Γ' τὸ ὁποῖον εἶναι ἐκ διαμέτρου ἀντίθετον τοῦ Γ .

Ὁ ἄτρακτος, ὁ ὁποῖος ἔχει γωνίαν τὴν γωνίαν \widehat{A} τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$, ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ σφαιρικὰ τρίγωνα $AB\Gamma$ καὶ $B\Gamma A'$, δηλ. εἶναι

$$\text{ἄτρ. } \widehat{A} = \text{τρ. } AB\Gamma + \text{τρ. } B\Gamma A' \quad (1)$$

$$\text{Ὁμοίως εἶναι} \quad \text{ἄτρ. } \widehat{B} = \text{τρ. } AB\Gamma + \text{τρ. } A\Gamma B' \quad (2)$$

$$\text{ἄτρ. } \widehat{\Gamma} = \text{τρ. } AB\Gamma + \text{τρ. } A\Gamma B'.$$

Ἀλλά, εἰς τὴν τελευταίαν ἰσότητα, τὸ τρίγωνον $AB\Gamma'$, δύναται νὰ ἀντικατασταθῇ μὲ τὸ τρίγωνον $A'B'\Gamma$, τὸ ὁποῖον εἶναι ἰσοδύναμον μὲ τὸ τρίγωνον $AB\Gamma'$ ὡς συμμετρικὸν αὐτοῦ· ἐπομένως ἡ τελευταία αὐτὴ ἰσότης γράφεται

$$\text{ἄτρ. } \widehat{\Gamma} = \text{τρ. } AB\Gamma + \text{τρ. } A'B'\Gamma \quad (3)$$

Προσθέτομεν τὰς ἰσότητας (1), (2), (3) κατὰ μέλη καὶ ἔχοντες ὑπ' ὄψει, ὅτι τὰ τρίγωνα $AB\Gamma$, $B\Gamma A'$, $\Gamma A B'$ καὶ $A'B'\Gamma$ ἀποτελοῦν ἓνα ἀπὸ τὰ δύο ἡμισφαίρια, τὰ ὁποῖα ὀρίζονται ἀπὸ τὸν μέγιστον κύκλον AB , ἔχομεν

$$\text{ἄτρ. } A + \text{ἄτρ. } B + \text{ἄτρ. } \Gamma = \text{ἡμισφ. } AB + 2 \text{ τρ. } AB\Gamma \quad (4)$$

Ἐπειδὴ ἐλήφθη ὡς μονὰς τῶν γωνιῶν ἡ ὀρθὴ γωνία καὶ ὡς μονὰς τῶν ἔμβαδῶν τὸ ἔμβαδὸν τοῦ τρισσορθογωνίου τριγώνου, θὰ εἶναι $\text{ἄτρ. } \widehat{A} = 2\widehat{A}$, $\text{ἄτρ. } \widehat{B} = 2\widehat{B}$, $\text{ἄτρ. } \widehat{\Gamma} = 2\widehat{\Gamma}$ καὶ ἡμισφαίρ. $AB = 4$ τρισσορθο-

γῶνια σφαιρ. τρίγωνα, δηλ. μὲ 4 μονάδας καὶ ἡ ἰσότης (4) γράφεται

$$2\widehat{A} + 2\widehat{B} + 2\widehat{\Gamma} = 4 + 2 \text{ τρ. ABΓ} \quad \eta \quad \text{τριγ. ABΓ} = \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} - 2$$

ἢ

$$\boxed{\text{ἐμβ. τριγ. ABΓ} = \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} - 2}$$

902. Σφαιρική ὑπεροχή. Ἡ διαφορὰ $(\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} - 2)$ ὀρθαὶ γωνίαι λέγεται *σφαιρική ὑπεροχή* τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου.

Ἐκ αὐτοῦ συνάγομεν, ὅτι :

Τὸ ἔμβαδὸν ἑνὸς σφαιρικοῦ τριγώνου εἶναι ἴσον μὲ τὴν σφαιρικήν ὑπεροχὴν του, ἐὰν ὡς μονὰς ἔμβαδῶν ληφθῇ τὸ τρισσορθογώνιον τρίγωνον.

903. Πέρισμα. Ἐπειδὴ τὸ τρισσορθογώνιον τρίγωνον, τὸ ὁποῖον λαμβάνεται ὡς μονὰς τῶν ἐπιφανειῶν τῶν σφαιρικῶν τριγώνων, εἶναι τὸ ὄγδοον τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει τὸ τρίγωνον, συνάγομεν, ὅτι :

Τὸ ἔμβαδὸν τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου, εἰς τετραγωνικὰ μέτρα, εἶναι ἴσον μὲ τὸ γινόμενον τῆς σφαιρικῆς ὑπεροχῆς του ἐπὶ τὸ ἕνα ὄγδοον τοῦ ἔμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

Ἄν λοιπὸν παραστήσωμεν μὲ R τὴν ἀκτίνα τῆς σφαίρας καὶ μὲ A, B, Γ τὰς γωνίας του, εἰς ὀρθὰς γωνίας, θὰ εἶναι :

ἢ

$$\boxed{\text{ἐμβ. σφαιρ. τριγ.} = (\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{\Gamma} - 2) \times \frac{1}{8} 4\pi R^2}$$

$$\boxed{\text{ἐμβ. σφαιρ. τριγ.} = \text{σφαιρ. ὑπεροχή} \times \frac{1}{2} \pi R^2}$$

Παράδειγμα 1^{ον}. Ἐὰν αἱ γωνίαι ἑνὸς σφαιρ. τριγ. ABΓ εἶναι $\widehat{A} = \frac{4}{5}$ ὀρθ., $\widehat{B} = 1$ ὀρθ., $\widehat{\Gamma} = \frac{9}{10}$ ὀρθ., ἡ σφαιρική ὑπεροχή του εἶναι

$$\frac{4}{5} + 1 + \frac{9}{10} - 2 = \frac{7}{10}.$$

Ἐὰν ἡ ἀκτίς τῆς σφαίρας, εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει τὸ τρίγωνον, εἶναι R=1 μ., τὸ ἔμβαδὸν τοῦ τριγώνου ABΓ εἶναι :

$$\text{ἐμβ. σφαιρ. τριγ. ABΓ} = \text{σφαιρ. ὑπεροχ.} \times \frac{1}{2} \pi R^2$$

$$= \frac{7}{10} \times \frac{1}{2} \pi \cdot 1^2 = \frac{7}{20} \pi = 1,055 \text{ τετ. μ.}$$

Παράδειγμα 2^{ον}. Αἱ γωνίαι ἑνὸς σφαιρ. τριγώνου ABΓ εἶναι $\widehat{A} = 109^\circ$, $\widehat{B} = 146^\circ$, $\widehat{\Gamma} = 65^\circ$. Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἔμβαδὸν του, ἐὰν γνωρίζωμεν, ὅτι ἡ ἀκτίς τῆς σφαίρας εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει, εἶναι 2 μ.

Ἐπειδὴ ἡ 1° εἶναι τὸ $\frac{1}{90}$ τῆς ὀρθῆς γωνίας, θὰ εἶναι :

$$\widehat{A} = \frac{109}{90} \text{ ὀρθ.}, \quad \widehat{B} = \frac{146}{90} \text{ ὀρθ.}, \quad \widehat{\Gamma} = \frac{65}{90} \text{ ὀρθ.}$$

καὶ ἐπομένως ἡ σφαιρικὴ ὑπεροχὴ του θὰ εἶναι :

$$\frac{109}{90} + \frac{146}{90} + \frac{65}{90} - 2 = \frac{140}{90} = \frac{14}{9}.$$

Ἄρα θὰ εἶναι :

$$\begin{aligned} \text{ἐμβ. σφ. τριγ. } AB\Gamma &= \text{σφαιρ. ὑπεροχ.} \times \frac{1}{2} \pi R^2 \\ &= \frac{14}{9} \times \frac{1}{2} \pi 2^2 = \frac{28}{9} \pi = 9,7424 \text{ τετρ. μετρ.} \end{aligned}$$

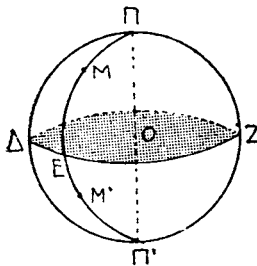
904. Πόρισμα. Τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς σφαιρικοῦ πολυγώνου μὲ n πλευρὰς εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν του ἡλαττωμένον κατὰ $2(n-2)$ ὀρθάς.

Ἀπόδειξις: Ἐὰν ἀπὸ μίαν κορυφὴν τοῦ πολυγώνου φέρωμεν τὰς διαγωνίους του, χωρίζεται τὸ πολύγωνον εἰς $n-2$ σφαιρικὰ τρίγωνα καὶ ἐπομένως τὸ ἐμβαδὸν του εἶναι ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν $n-2$ αὐτῶν τριγώνων.

Ἀσκησις. 2807. (2845). Νὰ ὑπολογισθῇ τὸ ἐμβαδὸν ἑνὸς σφαιρικοῦ τριγώνου $AB\Gamma$, τοῦ ὁποίου αἱ γωνίαι εἶναι 85° , 70° καὶ 78° καὶ ἡ ἀκτίς τῆς σφαίρας ἴση μὲ 2 μέτρ.

Πολικά τρίγωνα

905. Πολικά τρίγωνα. Διὰ νὰ κατανοήσωμεν τὸν ὀρισμὸν τῶν πολικῶν τριγώνων καὶ τὰς ιδιότητας αὐτῶν πρέπει νὰ ἔχωμεν ὑπ' ὄψει μὰς τὰ κάτωθι :



Σχ. 597.

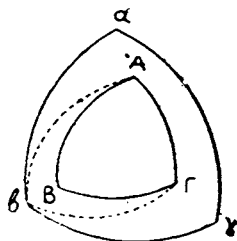
Ἐστω ΔEZ ἕνας μέγιστος κύκλος τῆς σφαίρας O (Σχ. 597), Π ὁ ἕνας ἐκ τῶν πόλων του καὶ M ἕνα τυχὸν σημεῖον τῆς σφαίρας. Ἐὰν τὰ σημεῖα Π καὶ M κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ μεγίστου κύκλου ΔEZ , τὸ μικρότερον τόξον τῆς περιφερείας τοῦ μεγίστου κύκλου, τὸ ὁποῖον συνδέει τὰ σημεῖα Π καὶ M εἶναι μικρότερον τοῦ τεταρτημορίου ΠE . Ἐὰν τὰ σημεῖα Π καὶ M' κεῖνται ἐκατέρωθεν τοῦ

μέγιστου κύκλου ΔEZ , τὸ μικρότερον τόξον τῆς περιφερείας τοῦ μεγίστου κύκλου, τὸ ὁποῖον συνδέει τὰ σημεῖα Π καὶ M' εἶναι μεγαλύτερον τοῦ τεταρτημορίου ΠE .

Ἐστω ἕνα σφαιρικὸν τρίγωνον $AB\Gamma$ (Σχ. 598). Μὲ πόλους τὰς

κορυφάς του A, B, Γ γράφομεν περιφερείας μεγίστων κύκλων ἐπὶ τῆς σφαίρας εἰς τὴν ὁποίαν ἀνήκει τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$. Αἱ τρεῖς αὐταὶ περιφέρειαι διαιροῦν τὴν ἐπιφάνειον τῆς σφαίρας εἰς ὀκτὼ σφαιρικὰ τρίγωνα, ἓκ τῶν ὁποίων τὸ ἕνα ἐξ αὐτῶν τὸ $\alpha\beta\gamma$ λέγεται **πολικὸν** τοῦ $AB\Gamma$ ὡς πολικὸν τρίγωνον θὰ λάβωμεν ἐκεῖνο, τοῦ ὁποίου αἱ πλευραὶ εἶναι μικρότεραι ἡμιπεριφερείας.

Αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου $\alpha\beta\gamma$, τὸ ὅποιον εἶναι πολικὸν τοῦ $AB\Gamma$, ἔχουν πόλους τὰς κορυφάς τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$ καὶ αἱ κορυφαὶ A καὶ α κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς $B\Gamma$, αἱ κορυφαὶ B καὶ β κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς $A\Gamma$ καὶ αἱ κορυφαὶ Γ καὶ γ κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τῆς AB .



Σχ. 599.

906. Θεώρημα. Ἐὰν ἓνα τρίγωνον $\alpha\beta\gamma$ εἶναι πολικὸν ἐνδὸς ἄλλου τριγώνου $AB\Gamma$ καὶ τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι πολικὸν τοῦ $\alpha\beta\gamma$.

Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ τὸ τρίγωνον $\alpha\beta\gamma$ εἶναι πολικὸν τοῦ $AB\Gamma$, αἱ κορυφαὶ A, B, Γ εἶναι πόλοι τοῦ $\alpha\beta\gamma$.

Ἐπειδὴ ἡ κορυφή A εἶναι ἓκ κατασκευῆς πόλος τοῦ τόξου $\beta\gamma$, ἡ ἀπόστασις $A\beta$, δηλ. τὸ τόξον $A\beta$ τοῦ μεγίστου κύκλου, ὃ ὁποῖος συνδέει τὸ A μὲ τὸ σημεῖον β , εἶναι ἓνα τεταρτημόριον. Ὅμοίως ἐπειδὴ τὸ Γ εἶναι πόλος τοῦ τόξου $\alpha\beta$, τὸ τόξον $\Gamma\beta$ τοῦ μεγίστου κύκλου, ὃ ὁποῖος συνδέει τὸ Γ μὲ τὸ β , εἶναι τεταρτημόριον. Ἐπειδὴ τὰ τόξα βA καὶ $\beta\Gamma$ εἶναι τεταρτημόρια μεγίστων κύκλων ἔπεται, ὅτι τὸ σημεῖον β εἶναι πόλος τοῦ τόξου $A\Gamma$.

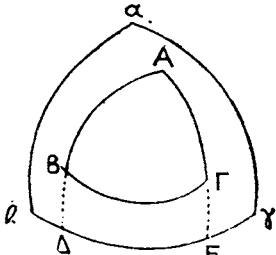
Ἐπὶ πλέον, ἐπειδὴ τὸ β εἶναι ὁ πόλος τοῦ τόξου $A\Gamma$, ὃ ὁποῖος κεῖται πρὸς τὸ μέρος τῆς πλευρᾶς $A\Gamma$, πρὸς τὸ ὅποιον κεῖται καὶ ἡ κορυφή B , τὸ μικρότερον τόξον τοῦ μεγίστου κύκλου, ὃ ὁποῖος συνδέει τὰ σημεῖα β καὶ B εἶναι μικρότερον τεταρτημορίου. Συνεπῶς τὸ σημεῖον β εἶναι ὁ πόλος τοῦ τόξου $A\Gamma$ καὶ ὃ ὁποῖος εὐρίσκεται πρὸς τὸ μέρος τοῦ $A\Gamma$, πρὸς τὸ ὅποιον κεῖται ἡ κορυφή B .

Ὅμοίως ἀποδεικνύομεν, ὅτι τὸ σημεῖον γ εἶναι πόλος τοῦ τόξου AB καὶ κεῖται πρὸς τὸ μέρος τοῦ τόξου AB πρὸς τὸ ὅποιον κεῖται τὸ Γ καὶ τέλος ὅτι τὸ σημεῖον α εἶναι πόλος τοῦ τόξου $B\Gamma$ καὶ κεῖται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ τόξου $B\Gamma$ πρὸς τὸ ὅποιον κεῖται τὸ A .

Τὸ τρίγωνον λοιπὸν $AB\Gamma$ εἶναι πολικὸν τοῦ $\alpha\beta\gamma$.

907. Θεώρημα. Ἐὰν δύο τρίγωνα εἶναι πολικά μεταξύ των, κάθε γωνία τοῦ ἑνὸς ἐξ αὐτῶν καὶ ἡ ἐπίκεντρος γωνία, ἡ ὁποία βαίνει ἐπὶ τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς τοῦ ἄλλου, εἶναι παραπληρωματικά.

Ἐπίθεσις: Ἐστῶσαν τὰ τρίγωνα $ΑΒΓ$ καὶ $αβγ$ (Σχ. 599), τὰ ὁποῖα εἶναι πολικά μεταξύ των.



Σχ. 599.

Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι ἡ γωνία A καὶ ἡ ἐπίκεντρος γωνία, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὴν πλευρὰν $βγ$ εἶναι παραπληρωματικά.

Ἀπόδειξις: Προεκτείνωμεν τὰς πλευρᾶς $ΑΒ$ καὶ $ΑΓ$ μέχρις ὅτου συναντήσουν τὸ τόξον $βγ$, ἔστω εἰς τὰ σημεῖα $Δ$ καὶ $Ε$. Ἐπειδὴ ἡ κορυφή A εἶναι πόλος τοῦ τόξου $βγ$, ἡ γωνία A ἔχει ὡς μέτρον τὸ τόξον $ΔΕ$.

Ὅπως φαίνεται ἀπὸ τὸ σχῆμα ἔχομεν

$$ΔΕ = βΕ + Δγ - βγ \quad \text{ἢ} \quad ΔΕ + βγ = βΕ + Δγ \quad (1)$$

Ἄλλὰ τὸ τόξον $βΕ$ εἶναι τεταρτημόριον περιφερείας, διότι τὸ $β$ εἶναι πόλος τοῦ τόξου $ΑΓΕ$. Ὅμοίως τὸ τόξον $γΔ$ εἶναι τεταρτημόριον περιφερείας, διότι τὸ $γ$ εἶναι πόλος τοῦ τόξου $ΑΒ$ καὶ ἐπομένως ἡ ἰσότης (1) γίνεται:

$$ΔΕ + βγ = 1 \text{ τεταρτημ.} + 1 \text{ τεταρτημ.}$$

$$\text{ἢ} \quad ΔΕ + βγ = 2 \text{ τεταρτημ.}$$

$$\text{ἢ} \quad ΔΕ + βγ = \text{ἡμικυκλίω.} \quad (2)$$

Ἐπειδὴ τὸ τόξον $ΔΕ$ εἶναι τὸ μέτρον τῆς γωνίας A καὶ τὸ τόξον $βγ$ εἶναι τὸ μέτρον τῆς ἐπίκεντρος γωνίας, ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ εἰς τὸ τόξον $βγ$ συνάγομεν ἀπὸ τὴν ἰσότητα (2), ὅτι αἱ δύο αὐταὶ γωνίαι εἶναι παραπληρωματικά.

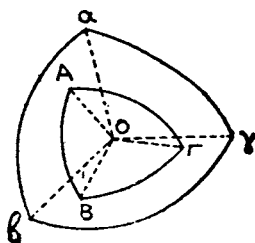
Ὅμοίως ἀποδεικνύομεν τὸ αὐτὸ καὶ διὰ τὰς ἄλλας γωνίας.

908. Θεώρημα. Αἱ τρίεδροι γωνίαι, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς δύο πολικά τρίγωνα, εἶναι παραπληρωματικά.

Ἐπίθεσις: Ἐστῶσαν $ΑΒΓ$ καὶ $αβγ$ (Σχ. 600) δύο πολικά τρίγωνα, τὰ ὁποῖα ἀνήκουν εἰς τὴν σφαιρᾶν O καὶ $OΑΒΓ$, $Oαβγ$ αἱ τρίεδροι γωνίαι, αἱ ὁποῖαι ἀντιστοιχοῦν εἰς τὰ πολικά αὐτὰ τρίγωνα.

Συμπέρασμα: Θὰ δεῖξωμεν, ὅτι αἱ στερεαὶ αὐταὶ γωνίαι εἶναι παραπληρωματικά.

Ἀπόδειξις: Ἐπειδὴ τὸ α εἶναι πῶλος τοῦ τόξου $B\Gamma$, τὰ τόξα αB καὶ $\alpha\Gamma$ εἶναι τεταρτημόρια μεγίστων κύκλων καὶ ἐπομένως αἱ γωνίαι αOB καὶ $\alpha O\Gamma$ εἶναι ὀρθαί. Ἐπειδὴ αἱ γωνίαι αOB καὶ $\alpha O\Gamma$ εἶναι ὀρθαί, ἢ αO εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς OB καὶ $O\Gamma$ καὶ ἐπομένως ἢ αO εἶναι καὶ κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον αὐτῶν $BO\Gamma$. κεῖται δὲ ἢ $O\alpha$ πρὸς τὸ μέρος τῆς ἀκμῆς OA , διότι ἡ γωνία αOA εἶναι ὀξεῖα, διότι τὸ τόξον αA εἶναι μικρότερον τεταρτημορίου.



Σχ. 600.

Ὅμοιως ἀποδεικνύομεν, ὅτι ἢ $O\beta$ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον $AO\Gamma$ καὶ κεῖται πρὸς τὸ μέρος πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται ἢ OB καὶ τέλος ἢ $O\gamma$ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον AOB καὶ φέρεται πρὸς τὸ μέρος πρὸς τὸ ὁποῖον κεῖται ἢ $O\Gamma$.

Αἱ τρίεδροι λοιπὸν $OAB\Gamma$ καὶ $O\alpha\beta\gamma$ εἶναι παραπληρωματικαὶ (§ 907).

ΔΙΟΡΘΩΤΕΑ

<i>Σελίς</i>	<i>Στίχος</i>	<i>Ἄντί</i>	<i>Νά γραφή</i>
375	18	παραλληλογράμμου	ὀρθογ. παραλληλογράμμου
500	8	δύο χορδᾶς	δύο καθέτους χορδᾶς
608	27	δύο εὐθύγραμμα	δύο ἴσα εὐθύγραμμα
646	33	μιᾶς τριέδρου	μιᾶς τρισσορθογωνίου τριέδρου

