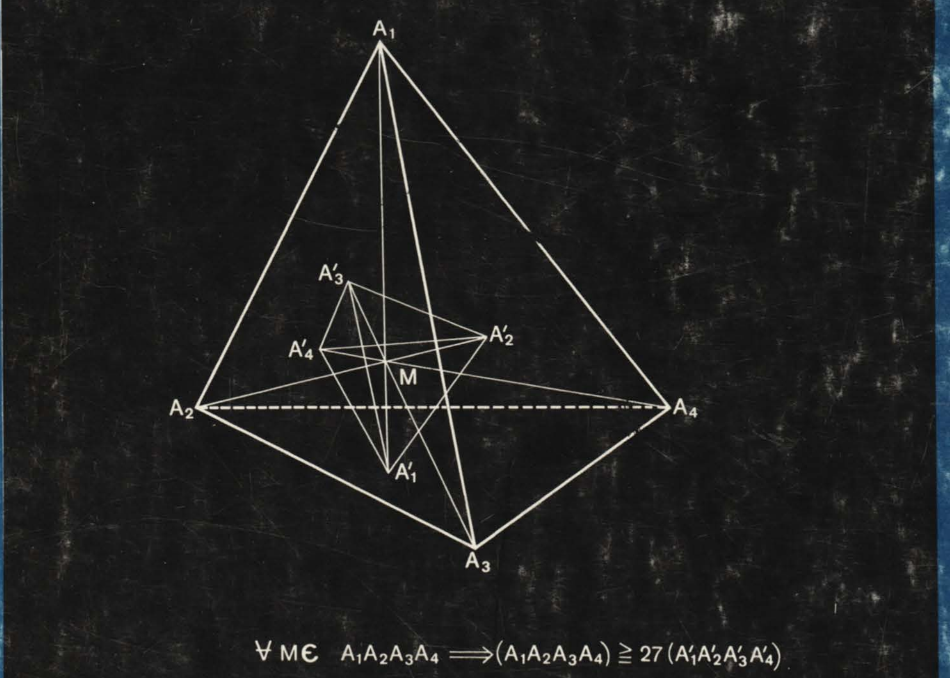
Γ. ΤΣΙΝΤΣΙΦΑ
Σ. ΜΠΑΛΛΗ
Ι. ΖΟΥΡΝΑ

ΣΥΓΧΡΟΝΟΝ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟΝ ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ

ΤΕΥΧΟΣ 3 ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΘΕΩΡΙΑ ΑΣΚΗΣΕΙΣ



Γ. ΤΣΙΝΤΣΙΦΑ
Σ. ΜΠΑΛΛΗ
Ι. ΖΟΥΡΝΑ

ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΘΕΩΡΙΑ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΡΩΤΟΝ

ΕΥΘΕΙΑΙ . ΕΠΙΠΕΔΑ

ΟΡΙΣΜΟΙ. ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

1. Ἕνα ἐπίπεδον εἶναι ὡρισμένον ἀπό:

1.1. τρία σημεῖα μή κείμενα ἐπ' εὐθείας (ἀξίωμα)·

1.2. μίαν εὐθεῖαν καί ἕν σημεῖον μή κείμενον ἐπ' αὐτῆς·

1.3. δύο εὐθείας τεμνομένας·

1.4. δύο εὐθείας παραλλήλους·

1.5. κάθε ἐπίπεδον σχῆμα (π.χ. ἕνα κύκλον).

2. Σχετικαί θέσεις δύο ἐπιπέδων.

2.1. Δύο ἐπίπεδα δύνανται νά συμπίπτουν·

2.2. νά τέμνωνται, ὅτε ἡ τομή των εἶναι εὐθεῖα·

2.3. νά μήν ἔχουν κοινόν σημεῖον. Τότε λέγονται παράλληλα.

3. Σχετικαί θέσεις εὐθείας καί ἐπιπέδου.

3.1. Μία εὐθεῖα δύναται νά κεῖται ἐπί ἑνός ἐπιπέδου.

3.2. Δύναται νά ἔχῃ ἕνα καί μόνον κοινόν σημεῖον μεθ' ἑνός ἐπιπέδου, ὅτε καλεῖται τέμνουσα.

3.3. Δύναται νά μήν ἔχῃ κοινόν σημεῖον μέ ἕν ἐπίπεδον, ὅτε καλεῖται παράλληλος πρός αὐτό.

4. Σχετικαί θέσεις δύο εὐθειῶν.

Δύο εὐθεῖαι δύνανται:

4.1. νά συμπίπτουν·

4.2. νά τέμνωνται·

4.3. νά εἶναι παράλληλοι·

4.4. νά μή κεῖνται ἐπί τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, ὅτε ὀνομάζονται ἀσύμβατοι.

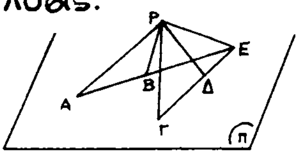
Συμβατάς θά ὀνομάζωμεν δύο εὐθείας κειμένας εἰς τό αὐτό ἐπίπεδον.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ʻΟμάς Α΄.

1. Δίδεται ἐπίπεδον Π καί σημεῖον Ρ ἐκτός αὐτοῦ. Ἄν ΑΒ καί ΓΔ δύο μή παράλληλα εὐθ. τμήματα τοῦ Π, νά ὁρισθῆ ἡ τομή τῶν ἐπιπέδων ΡΑΒ, ΡΓΔ.

Λύσις.



Τά δύο ἐπίπεδα ἔχουν κοινόν τό σημεῖον Ρ, ἄρα τέμνονται κατά μίαν εὐθεῖαν. Αἱ ΑΒ καί ΓΔ τέμνονται εἰς Ε. Τό σημεῖον Ε κεῖται ἐπί ἀμφοτέρων τῶν ἐπιπέδων, ἄρα θά κεῖται ἐπί τῆς τομῆς των. Συνεπῶς, ἡ εὐθεῖα ΡΕ εἶναι ἡ τομή τῶν ἐπιπέδων ΡΑΒ καί ΡΓΔ.

Παρατήρησις. Διά νά εὕρωμεν ἕν σημεῖον τῆς τομῆς δύο ἐπιπέδων, ὀφείλομεν νά ἀναζητήσωμεν δύο εὐθείας ἀνά μίαν ἐφ' ἑκάστου ἐπιπέδου συμβατάς. Ἡ τομή δέ δύο ἐπιπέδων ὁρίζεται συνήθως ἀπό δύο κοινά σημεῖα αὐτῶν.

2. Δείξατε ὅτι ἐπίπεδον Π καί περιφέρεια κύκλου (Κ,R), τῆς ὁποίας τό ἐπίπεδον Ρ δέν ταυτίζεται μέ τό Π, ἔχουν τό πολύ δύο κοινά σημεῖα.

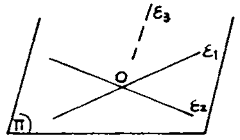
Ἀπόδειξις. Εἶναι δυνατόν νά ἔχωμεν σημεῖα τομῆς τῆς (Κ,R) καί Π μόνον ὅταν Π,Ρ τέμνωνται. Ἔστω ε ἡ εὐθεῖα τομῆς. Ἡ ε ἀνήκουσα εἰς Ρ δύναται νά ἔχῃ μετά τῆς περιφερείας (Κ) τό πολύ δύο κοινά σημεῖα.

Παρατήρησις. Διά νά εὕρωμεν τά σημεῖα τομῆς ἐπιπέδου Π ὑπό ἐπιπέδου σχήματος Σ, τοῦ ὁποίου τό ἐπίπεδον δέν ταυτίζεται μετά τοῦ Π, ἀρκεῖ νά ἀναζητήσωμεν τά σημεῖα τομῆς τῆς κοινῆς εὐθείας ε τῶν δύο ἐπιπέδων μετά τοῦ Σ.

3. α) Τρεῖς εὐθεῖαι τεμνόμεναι ἀνά δύο καί μή κείμεναι ἐπί τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου θά διέρχωνται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου.(1)

Ἀπόδειξις. Ἔστω Π τό ἐπίπεδον τῶν $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. Ἡ τρίτη εὐθεῖα ε_3 ἔχει μετά τοῦ Π ἕν μόνον κοινόν σημεῖον. Ἐπειδή δέ τέ-

(1) Πολύ εὐκόλως διαπιστώνομεν ὅτι τό θεώρημα διατυποῦται ἀκόμη ὡς κάτωθι: Τρεῖς εὐθεῖαι συμβαταί ἀνά δύο καί μή κείμεναι ἐπί τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου θά διέρχωνται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου ἤ θά εἶναι παράλληλοι.



μνει ἀμφοτέρας τὰς $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, θὰ διέρχεται κατ' ἀνάγκην ἀπὸ τὸ σημεῖον τομῆς O αὐτῶν.

β) Τρεῖς εὐθεῖαι τεμνόμεναι ἀνὰ δύο καὶ μὴ διερχόμεναι διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, θὰ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

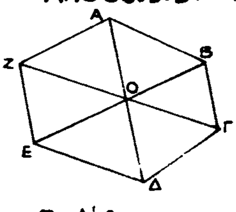
Ἀπόδειξις. Ἔστω Π τὸ ἐπίπεδον τῶν $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ καὶ O τὸ σημεῖον τομῆς των. Ἡ ε_3 ἔχει μετὰ τῆς ε_1 κοινὸν σημεῖον $A \neq O$. Μετὰ τῆς ε_2 κοινὸν σημεῖον $B \neq O$. Κατὰ συνέπειαν ἡ ε_3 συμπίπτει μετὰ τῆς AB, ἡ ὁποία ὡς γνωστὸν κεῖται ἐπὶ τοῦ Π (ἀξίωμα).

Ἀποδείξατε τὴν αὐτὴν πρότασιν διὰ τέσσερας εὐθείας. Γενικεύσατε.

Παρατήρησις. Τὰ δύο αὐτὰ θεωρήματα εἶναι ἐξαιρετικῶς χρήσιμα διὰ τὴν ἀπόδειξιν προτάσεων, καθ' ἃς ζητεῖται νὰ ἀποδειχθῇ α) πεπερασμένου πλήθους εὐθεῖαι διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου β) κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, ὡς φαίνεται εἰς τὰ κάτωθι παραδείγματα.

4. Δίδεται στρεβλὸν ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ, τοῦ ὁποίου αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι ἀνὰ δύο εὐθεῖαι συμβαταί. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ διαγώνιοι αὐτοῦ ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἢ εἶναι παράλληλοι.

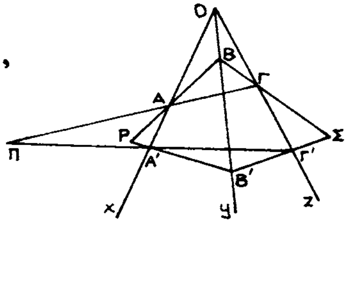
Ἀπόδειξις. Ἐφ' ὅσον ΑΒ καὶ ΔΕ εἶναι συμβαταί, τὸ αὐτὸ θὰ



συμβαίνῃ διὰ τὰς ΑΔ, ΒΕ. Ὁμοίως διὰ τὰς ΓΖ, ΑΔ καὶ ΓΖ, ΕΒ. Ἄρα αἱ τρεῖς εὐθεῖαι ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ θὰ τέμνωνται εἰς ἓν σημεῖον ἢ θὰ εἶναι παράλληλοι.

5. Δίδονται τρεῖς ἡμιευθεῖαι εἰς τὸν χῶρον Ox, Oy, Oz. Ἐπὶ τῆς πρώτης τὰ σημεῖα Α, Α' ἐπὶ τῆς δευτέρας Β, Β' καὶ ἐπὶ τῆς τρίτης Γ, Γ'. Ἐὰν τὰ ἐπίπεδα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' δὲν εἶναι παράλληλα νὰ κατασκευασθῇ ἡ τομὴ των καὶ νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ εὐθεῖαι ΑΒ-Α'Β', ΒΓ-Β'Γ', ΓΑ-Γ'Α' τέμνονται εἰς σημεῖα κείμενα ἐπ' εὐθείας.

Ἀπόδειξις. Αἱ ΑΒ, Α'Β' εἶναι συμβαταί, ἐπειδὴ κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου xOy καὶ ἐφ' ὅσον τὰ ἐπίπεδα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' δὲν εἶναι παράλληλα, θὰ τέμνωνται εἰς τὸ σημεῖον Ρ. Τὸ αὐτὸ



καὶ τὰς ΒΓ, Β΄Γ΄ εἰς τὸ σημεῖον Π καὶ τὰς ΑΓ, Α΄Γ΄ εἰς τὸ σημεῖον Σ. Τὰ σημεῖα Π, Ρ, Σ ἀνήκουν εἰς ἀμφότερα τὰ ἐπίπεδα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄, ἄρα καὶ εἰς τὴν τομὴν αὐτῶν.

Παρατήρησις. Δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι σημεῖα κεῖνται ἐπ' εὐθείας, ἐὰν ἀποδείξωμεν ὅτι τὰ σημεῖα αὐτὰ κεῖνται συγχρόνως ἐπὶ δύο διαφορετικῶν μὴ παραλλήλων ἐπιπέδων.

6. Δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α΄Β΄Γ΄ εἶναι συσχετισμένα εἰς τρόπον ὥστε:

$$A \to A' \qquad AB \to A'B'$$
$$B \to B' \quad \text{καὶ} \quad BΓ \to B'Γ'$$
$$Γ \to Γ' \qquad ΓA \to Γ'A'.$$

Ἐὰν αἱ εὐθεῖαι ΑΒ-Α΄Β΄, ΒΓ-Β΄Γ΄, ΓΑ-Γ΄Α΄ τέμνωνται εἰς σημεῖα Π, Ρ, Σ κείμενα ἐπ' εὐθείας, τότε αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι τὰς ἀντιστοίχους κορυφὰς θὰ διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἢ θὰ εἶναι παράλληλοι. Ἀντιστρόφως.

Ἀπόδειξις. Αἱ ΑΒ-Α΄Β΄, ἐφ' ὅσον τέμνονται, ὁρίζουν ἓν ἐπίπεδον· ἄρα αἱ ΑΑ΄-ΒΒ΄ εἶναι συμβαταί. Τὸ αὐτὸ διὰ τὰς ΒΒ΄-ΓΓ΄, ΓΓ΄-ΑΑ΄. Συνεπῶς, ἐπὶ τῇ βάσει τῆς ἀσκήσεως 3α θὰ διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἢ θὰ εἶναι παράλληλοι.

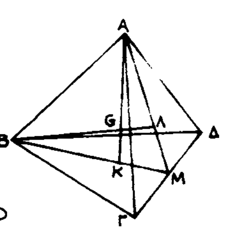
Τὸ ἀντίστροφον τοῦ θεωρήματος ἀποτελεῖ τὸ θέμα τῆς ἀσκήσεως 5.

7. Τρία ἐπίπεδα τέμνονται ἀνὰ δύο. Δείξατε ὅτι αἱ τομαὶ αὐτῶν διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἢ εἶναι παράλληλοι.

Ἀπόδειξις. Ἐὰν $ε_1, ε_2, ε_3$ αἱ εὐθεῖαι τομῆς των, θὰ εἶναι ἀνὰ δύο συμβαταὶ καὶ συμφώνως πρὸς τὴν ἄσκησιν 3α θὰ διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἢ θὰ εἶναι παράλληλοι.

8. Δίδεται στρεβλὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ. Δείξατε ὅτι αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι ἑκάστην κορυφὴν μὲ τὸ κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου τοῦ ἔχοντος κορυφὰς τὰ τρία ἄλλα σημεῖα διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Ἀπόδειξις. Ἔστω Μ τὸ μέσον τῆς ΓΔ, Κ, Λ τὰ κέντρα βάρους τῶν τριγώνων ΓΑΔ, ΓΒΔ. Ἔχομεν $\frac{MΛ}{MA} = \frac{MK}{MB} = \frac{1}{3}$, ὅθεν $KΛ \parallel AB$ καὶ $\frac{KΛ}{AB} = \frac{GK}{GA} = \frac{1}{3}$.



Ἄρα ἡ ΒΛ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου G, ὅπερ χωρίζει τὴν ΚΑ εἰς λόγον 1:3. Τὸ αὐτὸ διά τάς ἀντιστοίχους εὐθείας ἐκ τῶν κορυφῶν Γ,Δ.

Παρατήρησις. Δυνάμεθα νά ἀποδείξωμεν ὅτι εὐθεῖαι διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου ἐάν δείξωμεν ὅτι διαιροῦν εἰς τόν αὐτόν λόγον ἕν εὐθ. τμῆμα.

Ἡ ἀνωτέρω ἄσκησις ἦτο δυνατόν νά λυθῇ καί ἐπί τῇ βάσει τῆς ἀσκήσεως 3α.

Ὁμάς Β΄.

9. Θεωροῦμεν πέντε σημεῖα Α,Β,Γ,Δ,Ε μή κείμενα ἐπί τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καί τά δέκα εὐθ. τμήματα, τά ὁποῖα ὁρίζονται ἀπό τά σημεῖα αὐτά θεωρούμενα ἀνά δύο. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι αἱ δέκα εὐθεῖαι, ἑκάστη τῶν ὁποίων ὁρίζεται ἀπό τό μέσον ἑνός ἐκ τῶν ἀνωτέρω εὐθ. τμημάτων, καί τό κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου, τό ὁποῖον ἔχει κορυφάς τά τρία ἄλλα σημεῖα, διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Ἀπόδειξις. Θέτομεν Μ καί Ν τά μέσα τῶν ΑΒ, ΑΓ καί Κ,Λ τά κέντρα βάρους τῶν τριγώνων ΒΕΔ, ΓΔΕ ἀντιστοίχως. Ἐάν Ζ τό μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος ΕΔ, θά ἔχωμεν:

$$\frac{ZK}{ZB} = \frac{Z\Lambda}{Z\Gamma} = \frac{1}{3} \Longrightarrow K\Lambda \parallel B\Gamma.$$

Ἀλλά εἶναι καί $MN \parallel B\Gamma$, ἤτοι $K\Lambda \parallel MN$ ἤτοι ΜΛ, ΚΝ τέμνονται.

Ἔστω Ρ τό μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος ΓΔ καί Σ τό κ.β. τοῦ τριγώνου ΑΒΕ. Αἱ ΜΛ, ΡΣ κεῖνται ἐπί τοῦ ἐπιπέδου ΜΡΕ καί, ὡς εὐκόλως διαπιστοῦται, τέμνονται εἰς τό ἐσωτερικόν τοῦ τριγώνου ΜΡΕ.

Ἄρα, λοιπόν, δύο τυχοῦσαι, ἐκ τῶν δέκα εὐθειῶν, τέμνονται ἀνά δύο καί βάσει τῆς ἀσκ. 3α θά διέρχωνται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου.

10. Δίδονται τέσσερα σημεῖα Α,Β,Γ,Δ μή κείμενα ἐπί τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Ἐάν Ο τυχόν σημεῖον τοῦ χώρου, θέτομεν $A' = A O \cap B\Gamma\Delta$, $B' = BO \cap \Gamma\Delta A$, $\Gamma' = \Gamma O \cap \Delta AB$, $\Delta' = \Delta O \cap AB\Gamma$. Νά δειχθῇ ὅτι αἱ εὐθεῖαι $AB\Gamma \cap A'B'\Gamma'$, $B\Gamma\Delta \cap B'\Gamma'\Delta'$, $\Gamma\Delta A \cap \Gamma'\Delta'A'$, $\Delta AB \cap \Delta'A'B'$ κεῖνται ἐπί τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

Ἀπόδειξις. Παρατηροῦμεν ὅτι ἀνά δύο αἱ εὐθεῖαι ἔχουν κοινόν σημεῖον, π.χ. αἱ $AB\Gamma \cap A'B'\Gamma'$, $B\Gamma\Delta \cap B'\Gamma'\Delta'$ τέμνονται κατά τό σημεῖον $B\Gamma \cap B'\Gamma'$. Ἐπειδή δέ καί αἱ τέσσερες δέν διέρχονται δι' ἑνός σημείου, ἔπεται (ἀσκ. 3β) ὅτι κεῖνται ἐπί τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

Σημείωσις. Τό ἐν λόγῳ ἐπίπεδον καλεῖται πολικόν ἐπίπεδον τοῦ Ο πρός τό τετράεδρον ΑΒΓΔ. Ταυτίζεται δέ μέ τό πολικόν ἐπίπεδον τοῦ Ο πρός τήν σφαῖραν περί τό ΑΒΓΔ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ

Ὁμάς Α΄.

11. Δείξατε ὅτι αἱ περιφέρειαι δύο ἴσων κύκλων τοῦ αὐτοῦ κέντρου καί τῶν ὁποίων τά ἐπίπεδα δέν συμπίπτουν ἔχουν δύο κοινά σημεῖα.

12. Δίδεται ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ. Ἕνα ἐπίπεδον Π τέμνει τό ἐπίπεδον τοῦ ἑξαγώνου. Νά εὑρεθῆ τό πλῆθος τῶν σημείων τομῆς τῶν εὐθειῶν τῶν ὁριζομένων ὑπό τῶν πλευρῶν καί τῶν διαγωνίων τοῦ ἑξαγώνου μετά τοῦ ἐπιπέδου Π. Γενικεύσατε.

13. Ἐπί ἐπιπέδου Π δίδεται τετράπλευρον ΑΒΓΔ. Ἐάν Ρ τυχόν σημεῖον ἐκτός τοῦ Π λαμβάνομεν ἐπί τῶν ΡΑ, ΡΒ, ΡΓ τά σημεῖα Α΄, Β΄, Γ΄ ἀντιστοίχως, ὥστε αἱ Α΄Β΄, Β΄Γ΄, Γ΄Α΄ νά μήν εἶναι παράλληλοι πρός τάς ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ ἀντιστοίχως. Νά ὁρισθοῦν τά σημεῖα τομῆς τοῦ ἐπιπέδου Α΄Β΄Γ΄ μετά τῶν πλευρῶν τοῦ τετραπλεύρου.

14. Δίδεται ἕνα τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἐπί ἑνός ἐπιπέδου Π. Ἐάν Ρ ἕνα σημεῖον ἐκτός τοῦ ἐπιπέδου, ἐπί τῶν ΡΑ, ΡΒ λαμβάνομεν τά σημεῖα Μ, Ν καί εἰς τό ἐπίπεδον Π τό σημεῖον Σ. Ὑποτίθεται ὅτι ΜΝ δέν εἶναι παράλληλος πρός ΑΒ. Νά εὑρεθῆ ἡ τομή τῶν ἐπιπέδων ΑΒΓΔ, ΡΒΓ, ΡΑΔ, ΡΔΓ μετά τοῦ ΜΝΣ.

15. Δέκα ἐπίπεδα τέμνονται ἀνά δύο χωρίς νά διέρχωνται ἀνά τρία διά τῆς αὐτῆς εὐθείας. Δείξατε ὅτι τέμνονται κατά 45 εὐθείας. Γενικεύσατε. (Παρατηρήσατε ὅτι ἕκαστον ἐπίπεδον τέμνεται ὑπό τῶν ὑπολοίπων κατά ἐννέα εὐθείας).

16. Ἔστωσαν Κ, Λ, Μ, Ν οἱ πόδες τῶν καθέτων τῶν ἀγομένων ἐκ σημείου Ο ἐπί τάς πλευράς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ ἀντιστοίχως, στρεβλοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ. Δείξατε ὅτι: $ΑΚ^2+ΒΛ^2+ΓΜ^2+ΔΝ^2=ΚΒ^2+ΛΓ^2+ΜΔ^2+ΝΑ^2$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΥΤΕΡΟΝ

ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΙ ΕΥΘΕΙΑΙ. ΕΠΙΠΕΔΑ

ΟΡΙΣΜΟΙ. ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

1. Εὐθεῖαι παράλληλοι..

1.1. Ἐάν δύο εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι, κάθε ἐπίπεδον τέμνον τήν μίαν ἐξ αὐτῶν θά τέμνη καί τήν ἄλλην.

1.2. Ἐάν δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα διέρχωνται ἀντιστοίχως διά δύο παραλλήλων εὐθειῶν, ἡ τομή των θά εἶναι ἐπίσης παράλληλος πρός τάς εὐθείας.

1.3. Γωνία δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν ὁρίζεται ὡς ἡ τοιαύτη τῶν παραλλήλων ἐκ τυχόντος σημείου πρός αὐτάς. Ἄν δέ αὕτη εἶναι ὀρθή, τότε αἱ ἀσύμβατοι λέγονται ὀρθογώνιοι ἤ κάθετοι.

2. Εὐθεῖα παράλληλος πρός ἐπίπεδον.

2.1. Εὐθεῖα λέγεται παράλληλος πρός ἐπίπεδον, ἐάν δέν ἔχη κοινόν σημεῖον μέ τό ἐπίπεδον.

2.2. Ἵνα εὐθεῖα εἶναι παράλληλος πρός ἐπίπεδον, πρέπει καί ἀρκεῖ νά εἶναι παράλληλος πρός μίαν τοὐλάχιστον εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου.

2.3. Ἐάν εὐθεῖα εἶναι παράλληλος πρός ἐπίπεδον, θά εἶναι παράλληλος πρός ἀπείρους εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου, οὐχί ὅμως πρός ὅλας.

2.4. Δοθείσης εὐθείας ε παραλλήλου πρός ἐπίπεδον Π, κάθε ἐπίπεδον διερχόμενον διά τῆς ε τέμνει τό Π κατά εὐθεῖαν παράλληλον πρός ε.

2.5. Δοθείσης εὐθείας ε παραλλήλου πρός ἐπίπεδον Π, ἡ διά τυχόντος σημείου τοῦ Π ἀγομένη παράλληλος πρός τήν ε κεῖται ἐπί τοῦ ἐπιπέδου Π.

2.6. Ἐάν εὐθεῖα εἶναι παράλληλος πρός δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα, θά εἶναι παράλληλος πρός τήν τομήν αὐτῶν.

3. Παράλληλα ἐπίπεδα.

3.1. Δύο ἐπίπεδα θά λέγωνται παράλληλα, ἐάν δέν τέμνωνται.

3.2. Ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα δύο ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα, εἶναι ὅπως ἕκαστον ἐπίπεδον περιέχῃ ἓν ζεῦγος τεμνομένων εὐθειῶν παραλλήλων πρὸς ἀντίστοιχον ζεῦγος τοῦ ἄλλου ἐπιπέδου.

3.3. Ἐξ ἑνὸς σημείου κειμένου ἐκτὸς ἐπιπέδου ἄγεται μόνον ἓν παράλληλον ἐπίπεδον πρὸς αὐτό.

3.4. Δύο ἐπίπεδα παράλληλα πρὸς τρίτον εἶναι καὶ μεταξύ των παράλληλα. Ἐὰν ἐπίπεδον τέμνῃ ἄλλο ἐπίπεδον, θὰ τέμνῃ καὶ ὅλα τὰ παράλληλα πρὸς αὐτό. Αἱ τομαὶ δέ, θὰ εἶναι παράλληλοι εὐθεῖαι.

3.5. Τὰ ἐπίπεδα τὰ παράλληλα πρὸς δύο δοθείσας μὴ παραλλήλους εὐθείας εἶναι μεταξύ των παράλληλα.

3.6. Ἐπίπεδα παράλληλα τέμνουν δύο δοθείσας εὐθείας εἰς τὸν χῶρον εἰς μέρη ἀνάλογα.

3.7. Ἐὰν ἐπὶ δύο εὐθειῶν εἰς τὸν χῶρον, ε καὶ ε', ληφθοῦν τὰ σημεῖα $A_1, A_2, A_3, \ldots$ καὶ $A_1', A_2', A_3', \ldots$ ἀντιστοίχως μὲ

$$\frac{A_1A_2}{A_1'A_2'} = \frac{A_2A_3}{A_2'A_3'} = \cdots$$

τότε αἱ εὐθεῖαι $A_1A_1', A_2A_2', A_3A_3', \ldots$ εἶναι παράλληλοι πρὸς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.

3.8. Δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι $\varepsilon, \varepsilon'$ ὁρίζουν ἓν ζεῦγος παραλλήλων ἐπιπέδων Π, Π' ὥστε: $\varepsilon \in \Pi$, $\varepsilon' \in \Pi'$ καὶ $\varepsilon \parallel \Pi'$, $\varepsilon' \parallel \Pi$.

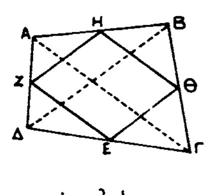
3.9. Ἐὰν Α, Β εἶναι δύο τυχόντα σημεῖα ἐπὶ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων Π, Ρ ἀντιστοίχως, τότε τὰ σημεῖα Μ ἀπὸ τὴν σχέσιν $\frac{AM}{BM} = \frac{\mu}{\nu}$ κεῖνται ὅλα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. (Ὑποτίθεται Μ ἐπὶ τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμὰς Α'.

17. Δείξατε ὅτι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν στρεβλοῦ τετραπλεύρου εἶναι κορυφαὶ παραλληλογράμμου.

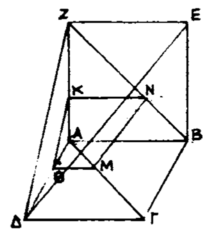
Ἀπόδειξις. Ἡ εὐθεῖα ΗΖ ὡς ἑνοῦσα τὰ μέσα Η καὶ Ζ τῶν πλευρῶν ΑΒ καὶ ΑΔ τοῦ τριγώνου ΒΑΔ εἶναι παράλληλος καὶ ἴση πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς διαγωνίου ΒΔ. Τὸ αὐτὸ διὰ τὴν ΕΘ ἐκ τοῦ τριγώνου ΒΓΔ. Ἤτοι αἱ ΖΗ καὶ ΕΘ εἶναι παράλληλοι καὶ ἴσαι. Παρατηροῦμεν ἀκόμη ὅτι τὸ ἐπίπεδον τοῦ παραλληλογράμμου εἶναι παράλληλον πρὸς τὴν διεύθυνσιν τοῦ



ζευχους τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων πού ὁρίζεται ἀπό τάς διαγωνίους.

18. Ἔστω τά τετράγωνα ΑΒΓΔ καί ΑΒΕΖ μή κείμενα ἐπί τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Ἐπί τῶν διαγωνίων ΑΓ καί ΒΖ λαμβάνομεν τά σημεῖα Μ καί Ν ἀντιστοίχως, ὥστε $\frac{AM}{A\Gamma}=\frac{BN}{BZ}$. Φέρομεν διά τῶν Μ καί Ν τάς παραλλήλους πρός ΑΒ, αἵ ὁποῖαι τέμνουν ἀντιστοίχως τήν ΑΔ εἰς Θ καί τήν ΑΖ εἰς Κ. Δείξατε ὅτι τά ἐπίπεδα ΜΝΚΘ καί ΔΖΕ εἶναι παράλληλα.

Ἀπόδειξις. Ἐκ τῶν δοθεισῶν σχέσεων ἔχομεν $\frac{AM}{A\Gamma}=\frac{A\Theta}{A\Delta}$ καί $\frac{BN}{BZ}=\frac{AK}{AZ}$ ὅθεν καί $\frac{A\Theta}{A\Delta}=\frac{AK}{AZ}$, ἤτοι ΚΘ παράλληλος πρός ΔΖ. Δεδομένου ὅτι καί ἡ ΚΝ εἶναι παράλληλος πρός τήν ΖΕ, ἕπεται ὅτι καί τά ἐπίπεδα ΜΝΚΘ καί ΔΕΖ εἶναι παράλληλα.



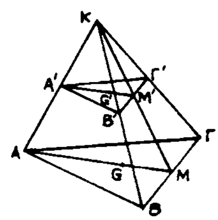
19. Δίδεται ἕνα τρίγωνον ΑΒΓ καί σημεῖον Κ ἐκτός τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ. Ἐπίπεδον Ρ παράλληλον πρός τό ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τάς ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ εἰς Α′, Β′, Γ′ ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι:

1) Αἱ ἀντίστοιχοι διάμεσοι τῶν τριγώνων ΑΒΓ, Α′Β′Γ′ εἶναι παράλληλοι.

2) Ἡ κορυφή Κ καί τά κέντρα βάρους τῶν ΑΒΓ, Α′Β′Γ′ κεῖνται ἐπί τῆς αὐτῆς εὐθείας.

Ἀπόδειξις.

1) Ἔστω Μ, Μ′ τά μέσα τῶν ΒΓ, Β′Γ′, αἵ ὁποῖαι εἶναι, ὡς γνωστόν, παράλληλοι. Θά ἔχωμεν $\frac{B'M'}{BM}=\frac{M'\Gamma'}{M\Gamma}$ καί συμφώνως πρός τό θεώρημα τῆς δέσμης ἡ ΜΜ′ θά διέρχεται διά τοῦ Κ. Κατά συνέπειαν αἱ ΑΜ, Α′Μ′ εἶναι τομαί τοῦ ἐπιπέδου ΑΚΜ μετά τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων ΑΒΓ, Α′Β′Γ′, ἄρα θά εἶναι παράλληλοι.

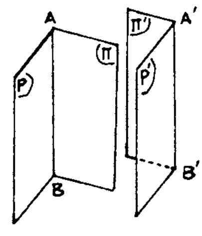


2) Ἄν G, G′ τά κέντρα βάρους, θά ἔχωμεν $\frac{GM}{AG}=\frac{G'M'}{A'G'}=\frac{1}{2}$. Ἄρα, λοιπόν, συμφώνως πάλιν πρός τό θεώρημα τῆς δέσμης ἡ GG′ θά διέρχεται διά τοῦ Κ.

Παρατήρησις. Ἡ ἀπόδειξις τοῦ 2 ἦτο δυνατόν νά γίνῃ καί ὡς ἑξῆς: Ἐάν Ν, Ν′ τά μέσα τῶν ΑΓ, Α′Γ′, τά σημεῖα Κ, G, G′ εὑρίσκονται ἐπί ἀμφοτέρων τῶν ἐπιπέδων ΑΚΜ, ΒΚΝ καί συνεπῶς εἰς τὴν τομήν των.

20. Δύο ἐπίπεδα Π,Ρ τέμνονται κατά τὴν ΑΒ. Τά ἐπίπεδα Π′, Ρ′ εἶναι ἀντιστοίχως παράλληλα πρός τά προηγούμενα καί τέμνονται κατά τὴν Α′Β′. Δείξατε ὅτι ΑΒ καί Α′Β′ εἶναι παράλληλοι.

Ἀπόδειξις. Ἡ εὐθεῖα Α′Β′ εἶναι παράλληλος πρός τό ἐπίπεδον Ρ, ἐφ' ὅσον ἀνήκει εἰς τό Ρ′ καί Ρ,Ρ′ παράλληλα. Ὁμοίως ἡ Α′Β′ εἶναι παράλληλος πρός τό Π. Ἤτοι ἡ Α′Β′, ἐφ' ὅσον εἶναι παράλληλος πρός τά Π, Ρ, θά εἶναι καί πρός τὴν τομήν των.



Παρατήρησις. Δυνάμεθα νά ἀποδείξωμεν ὅτι δύο εὐθεῖαι εἶναι παράλληλοι, ἄν εἶναι τομαί δύο ζευγῶν παραλλήλων ἐπιπέδων.

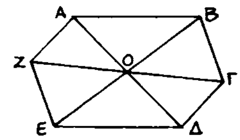
21. Ἐπί ἐπιπέδου Π δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καί σημεῖον Κ μή κείμενον εἰς Π. Ἐάν Μ,Ν ἐπί τῶν ΚΑ,ΚΒ μέ $\frac{KM}{KA}=\frac{KN}{KB}$. Δείξατε ὅτι τό ἐπίπεδον ΜΝΓ τέμνει τό Π κατά εὐθεῖαν παράλληλον πρός ΑΒ.

Ἀπόδειξις. Προφανῶς $MN \parallel AB$. Ἔστω Γx ἡ παράλληλος πρός τάς ΑΒ καί ΜΝ. Αὕτη θά κεῖται ἐπί τῶν ἐπιπέδων Π καί ΜΝΓ, ἤτοι θά συμπίπτῃ πρός τὴν τομήν των.

Παρατήρησις. Ἐάν ἐπί δύο τεμνομένων ἐπιπέδων Π,Ρ κεῖνται ἀντιστοίχως αἱ εὐθεῖαι ε,ε′, παράλληλοι μεταξύ των, θά εἶναι παράλληλοι καί πρός τὴν τομήν τῶν ἐπιπέδων.

22. Δίδεται στρεβλόν ἑξάγωνον ΑΒΓΔΕΖ. Ἐάν αἱ πλευραί ΑΒ καί ΔΕ, ΒΓ καί ΕΖ εἶναι ἴσαι, παράλληλοι καί ἀντιθέτου φορᾶς, αἱ διαγώνιοι ΑΔ,ΒΕ,ΓΖ διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου, τό ὁποῖον εἶναι τό μέσον ἑκάστης, αἱ πλευραί δέ ΓΔ,ΖΑ εἶναι ἴσαι, παράλληλοι καί ἐπίσης ἀντιθέτου φορᾶς.

Ἀπόδειξις. Τό ΑΒΔΕ εἶναι παραλληλόγραμμον καί, ἐφ' ὅσον ΑΒ,ΔΕ ἀντιθέτου φορᾶς, αἱ ΑΔ,ΒΕ εἶναι διαγώνιοι αὐτοῦ. Ἔστω Ο τό σημεῖον τομῆς των.



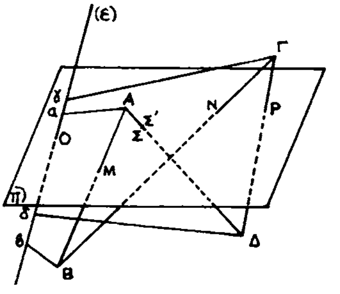
Τό αὐτό διά τό ΒΓΕΖ. Ἄρα ἡ ΓΖ διέρχεται διά τοῦ μέσου τῆς ΒΕ, ἤτοι αἱ ΑΔ, ΒΕ,ΓΖ διέρχονται διά τοῦ Ο, τό ὁποῖον εἶναι τὸ μέσον ἑκάστης. Προφανῶς καὶ τὸ ΑΓΔΖ εἶναι παραλληλόγραμμον καί, ἐπειδὴ ΑΔ, ΓΖ εἶναι διαγώνιοι αὐτοῦ, αἱ ΓΔ, ΖΑ θὰ εἶναι ἀντιθέτου φορᾶς.

ʽΟμὰς Β΄.

23. Δίδεται στρεβλὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ. Ἐπίπεδον Π τέμνει τὰς πλευρὰς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ εἰς τὰ σημεῖα Μ, Ν, Ρ, Σ ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι:

1) $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}\cdot\frac{\overline{NB}}{\overline{N\Gamma}}\cdot\frac{\overline{P\Gamma}}{\overline{P\Delta}}\cdot\frac{\overline{\Sigma\Delta}}{\overline{\Sigma A}}=1$ (1) καὶ 2) Ἀντιστρόφως.

Ἀπόδειξις. 1) Θεωροῦμεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν ε τέμνουσαν τὸ Π εἰς Ο καὶ προβάλλομεν παραλλήλως πρὸς Π τὸ σχῆμα ἐπὶ τῆς ε. Συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα τοῦ Θαλοῦ ἔχομεν:



$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}=\frac{O\alpha}{O\beta}$, $\frac{\overline{NB}}{\overline{N\Gamma}}=\frac{O\beta}{O\gamma}$, $\frac{\overline{P\Gamma}}{\overline{P\Delta}}=\frac{O\gamma}{O\delta}$, $\frac{\overline{\Sigma\Delta}}{\overline{\Sigma A}}=\frac{O\delta}{O\alpha}$.

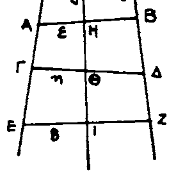
Διὰ πολλαπλασιασμοῦ κατὰ μέλη ἔχομεν τὴν ζητουμένην σχέσιν.

2) Ἀντιστρόφως. Ἔστω ὅτι ὑφισταμένης τῆς σχέσεως (1) τὰ σημεῖα Μ, Ν, Ρ, Σ δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Θεωρῶ τὸ ἐπίπεδον τῶν Μ, Ν, Ρ καὶ ἔστω $\Sigma' = MNP \cap A\Delta$. Βάσει τοῦ πρώτου μέρους $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}\cdot\frac{\overline{NB}}{\overline{N\Gamma}}\cdot\frac{\overline{P\Gamma}}{\overline{P\Delta}}\cdot\frac{\overline{\Sigma'\Delta}}{\overline{\Sigma' A}}=1$ (2). (1), (2) $\Rightarrow \frac{\overline{\Sigma\Delta}}{\overline{\Sigma A}}=\frac{\overline{\Sigma'\Delta}}{\overline{\Sigma' A}}$, ὅθεν $\Sigma \equiv \Sigma'$.

Παρατηρήσεις. 1) Τὸ πρῶτον μέρος ἰσχύει διὰ πᾶν στρεβλὸν πολύγωνον. 2) Τὸ θεώρημα τοῦτο εἶναι γενίκευσις εἰς τὸν χῶρον τοῦ θεωρήματος τοῦ Μενελάου, ὀνομάζεται δὲ **Θεώρημα τοῦ Μενελάου.**

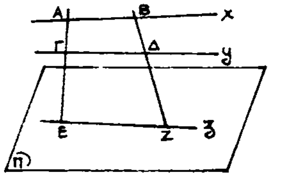
24. Ἐὰν εὐθεῖα μεταβλητὴ συναντᾷ τρεῖς εὐθείας παραλλήλους πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον, τότε τέμνεται ὑπὸ τῶν εὐθειῶν εἰς σταθερὸν λόγον καὶ παραμένει παράλληλος πρὸς σταθερὸν ἐπίπεδον.

Ἀπόδειξις. Ἔστω αἱ x, y, z παράλληλοι πρὸς ἐπίπεδον Π. Ἐὰν ε, η, θ εἶναι τρεῖς εὐθεῖαι, αἱ ὁποῖαι συναντοῦν τὰς προηγουμένας, καὶ θεωρήσωμεν τὰ παράλληλα ἐπίπεδα διὰ τῶν x, y, z πρὸς Π, θὰ ἔχωμεν, συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα τοῦ Θαλοῦ $\frac{AH}{HB}=\frac{\Gamma\Theta}{\Theta\Delta}$, ὅθεν ὁ λόγος κατὰ τὸν ὁποῖον τέμνονται αἱ ε, η, θ εἶναι σταθερός. Θὰ δείξωμεν ὅτι ἡ θ παραμένει παράλληλος πρὸς τὴν οἰκογένειαν τῶν ἐπιπέδων τῶν παραλλήλων πρὸς τὰς ε, η. Ἀρκεῖ $\frac{A\Gamma}{\Gamma E}=\frac{B\Delta}{\Delta Z}$. Διὰ τὸ ἐπίπεδον τῶν y, η ἐφαρμόζομεν τὸ θεώρημα τοῦ Μενελάου εἰς τὸ



στρεβλόν τετράπλευρον ΑΒΖΕ. Θά ἔχωμεν $\frac{ΗΑ}{ΗΒ}\cdot\frac{ΔΒ}{ΔΖ}\cdot\frac{ΙΖ}{ΙΕ}\cdot\frac{ΓΕ}{ΓΑ}=1$, ἀλλά $\frac{ΗΑ}{ΗΒ}=\frac{ΙΕ}{ΙΖ}$, ὅθεν $\frac{ΔΒ}{ΔΖ}=\frac{ΓΑ}{ΓΕ}$.

25. Ἄν εὐθεῖα μεταβλητή κινῆται, ὥστε νά συναντᾷ δύο σταθεράς εὐθείας x,y καί ἐπίπεδον Π μή παράλληλον πρός x ἤ y καί διαιρῆται αὕτη ὑπό τῶν εὐθειῶν καί τοῦ ἐπιπέδου εἰς σταθερόν λόγον, τότε παραμένει παράλληλος πρός σταθερόν ἐπίπεδον.



Ἀπόδειξις. Ἐφ' ὅσον $\frac{ΑΓ}{ΓΕ}=\frac{ΒΔ}{ΔΖ}$, ἡ ΕΖ θά εἶναι παράλληλος πρός ἕν ἐπίπεδον Ρ ἐκ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων πρός τάς x,y, ἤτοι τό σημεῖον Ζ εὑρίσκεται ἐπί τῆς τομῆς τοῦ Π μετά τοῦ παραλλήλου ἐπιπέδου διά τοῦ Ε πρός Ρ. Δηλαδή τό σημεῖον Ζ θά εὑρίσκεται ἐπί εὐθείας z. Ἐπειδή δέ αἱ x,y,z εἶναι παράλληλοι πρός ἕν καί τό αὐτό ἐπίπεδον, βάσει τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως, καί ἡ ΒΖ κινεῖται πάντοτε παραλλήλως πρός τό αὐτό ἐπίπεδον.

Παρατήρησις. Δυνάμεθα νά ἀποδείξωμεν ὅτι εὐθεῖα μεταβλητή παραμένει παράλληλος πρός σταθερόν ἐπίπεδον, ἐάν ἀποδείξωμεν ὅτι τέμνεται εἰς μέρη ἀνάλογα ἀπό δύο σταθεράς εὐθείας τοῦ χώρου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ

Ὁμάς Α΄.

26. Δείξατε ὅτι τά εὐθ. τμήματα, τά ὁποῖα συνδέουν τά μέσα τῶν ἀπέναντι πλευρῶν καί τά μέσα τῶν διαγωνίων στρεβλοῦ τετραπλεύρου, τέμνονται εἰς τό αὐτό σημεῖον, τό ὁποῖον εἶναι καί τό μέσον ἑκάστου. Τί παρατηροῦμεν ἄν δύο ἐκ τῶν ἀπέναντι πλευρῶν εἶναι ἴσαι;

27. Ἐπί τῶν πλευρῶν ΑΒ,ΑΔ,ΓΒ,ΓΔ στρεβλοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ λαμβάνομεν ἀντιστοίχως τά σημεῖα Ε,Ζ,Η,Θ, ὥστε $\frac{ΑΕ}{ΑΒ}=\frac{ΑΖ}{ΑΔ}=\frac{ΓΗ}{ΓΒ}=\frac{ΓΘ}{ΓΔ}$ δείξατε ὅτι τό ΕΖΗΘ εἶναι παραλληλόγραμμον.

28. Δύο εὐθεῖαι Δ,Δ′ εἶναι παράλληλοι πρός ἐπίπεδον Π καί δέν τέμνονται. Μεταβλητή εὐθεῖα ε τέμνει τάς Δ,Δ′ εἰς Μ,Μ′ ἀντιστοίχως καί τό ἐπίπεδον εἰς Ρ. Δείξατε ὅτι ὁ λόγος $\frac{ΜΜ'}{ΜΡ}$

εἶναι σταθερός.

29. Διά τῶν κορυφῶν δοθέντος παραλληλογράμμου φέρομεν τάς παραλλήλους πρός δοθεῖσαν εὐθεῖαν τοῦ χώρου τέμνουσαν τό ἐπίπεδον τοῦ παραλληλογράμμου. Δείξατε ὅτι ἡ τομή τῶν τεσσάρων παραλλήλων ὑπό τυχόντος ἐπιπέδου εἶναι παραλληλόγραμμον.

30. Δίδονται δύο ἡμιευθεῖαι Ax καί By. Ἐκ τοῦ B φέρομεν τήν παράλληλον By' πρός τήν Ax. Ἐπί τῶν Ax, By, By' λαμβάνομεν ἀντιστοίχως τμήματα ἴσα $AM=BN=BP=\delta$. Δείξατε ὅτι, ἄν μεταβάλλεται τό δ, τό ἐπίπεδον MNP παραμένει παράλληλον πρός σταθερόν ἐπίπεδον.

31. Τρεῖς ἡμιευθεῖαι Ox, Oy, Oz δέν κεῖνται ἐπί τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Δείξατε ὅτι αἱ διχοτόμοι τῶν ἐξωτερικῶν γωνιῶν xOy, yOz, zOx κεῖνται ἐπί τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. (Λάβετε τμήματα $OA=OB=O\Gamma$ ἐπί τῶν Ox, Oy, Oz ἀντιστοίχως).

32. Δίδεται ἐπίπεδον Π καί ἐπ' αὐτοῦ τρίγωνον $AB\Gamma$. Ἐάν O τυχόν σημεῖον ἐκτός τοῦ ἐπιπέδου, φέρομεν τάς $OA, OB, O\Gamma$. Ἐκ τοῦ A φέρομεν τήν παράλληλον δ πρός τήν $O\Gamma$. Ἐπίπεδον P παράλληλον πρός Π τέμνει τάς $\delta, OB, O\Gamma$ εἰς τά σημεῖα Δ, E, Z ἀντιστοίχως. Ἐάν M, N, P, Σ τά μέσα τῶν $\Delta E, EZ, B\Gamma, AB$ ἀντιστοίχως, δείξατε ὅτι τό τετράπλευρον $MNP\Sigma$ εἶναι παραλληλόγραμμον.

Ὁμάς Β΄.

33. Δύο εὐθεῖαι μή τεμνόμεναι Δ_1, Δ_2 διέρχονται διά τῶν σημείων A, B ἀντιστοίχως, δοθείσης περιφερείας (K). Μεταβλητή εὐθεῖα δ τέμνει τάς Δ_1, Δ_2, τήν (K) καί σταθερόν ἐπίπεδον P παράλληλον πρός τό ἐπίπεδον τῆς (K). Ἐάν M, N, Λ αἱ τομαί τῶν Δ_1, Δ_2, δ μετά τοῦ ἐπιπέδου P, δείξατε ὅτι ἡ γωνία $\widehat{M\Lambda N}$ εἶναι σταθερά.

34. Ἐπί τριῶν παραλλήλων εὐθειῶν $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ λαμβάνομεν ἀντιστοίχως τά σημεῖα A, A' - B, B' - Γ, Γ'. Ἄν G, G' τά κέντρα βάρους τῶν τριγώνων $AB\Gamma$, $A'B'\Gamma'$ δείξατε ὅτι $3GG' = AA' + BB' + \Gamma\Gamma'$.

35. Δίδεται ἐπίπεδον Π καὶ ἐπ' αὐτὸ τὸ τρίγωνον ΑΒΓ. Ἐπὶ ἐπιπέδου παραλλήλου τὸ εὐθ. τμῆμα ΜΝ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ τομὴ τῶν ἐπιπέδων ΜΒΓ, ΝΑΓ.

36. Δίδονται δύο τρίγωνα ἴσα ΑΒΓ καὶ ΑΒ'Γ' τῶν ὁποίων τὰ ἐπίπεδα δὲν ταυτίζονται. Δείξατε ὅτι αἱ εὐθεῖαι αἱ ἑνοῦσαι τὰ ὁμόλογα σημεῖα των εἶναι παράλληλοι πρὸς σταθερὸν ἐπίπεδον.

37. Δίδεται στρεβλὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ καὶ σημεῖον Ο. Θεωροῦμεν τὰς διχοτόμους τῶν γωνιῶν ΑΟΒ, ΒΟΓ, ΓΟΔ, ΔΟΑ αἱ ὁποῖαι τέμνουν τὰς ἀντιστοίχους πλευρὰς τοῦ τετραπλεύρου εἰς Ε, Ζ, Η, Θ. Δείξατε ὅτι τὰ σημεῖα αὐτὰ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Γενικεύσατε.

38. Δύο στρεβλὰ τετράπλευρα ἔχουν τὰς πλευρὰς των παραλλήλους μίαν πρὸς μίαν. Δείξατε ὅτι αἱ εὐθεῖαι αἱ ἑνοῦσαι τὰς ἀντιστοίχους κορυφὰς διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου ἢ εἶναι παράλληλοι.

39. Δίδεται στρεβλὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ, τοῦ ὁποίου αἱ κορυφαὶ Α, Β, Γ εἶναι σταθεραί. Ἡ τετάρτη κορυφὴ κινεῖται ἐπὶ εὐθείας δ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ συνθήκη, ἵνα τὸ τετράπλευρον ποὺ ἔχει κορυφὰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν εἶναι α) ὀρθογώνιον, β) ῥόμβος, γ) τετράγωνον.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΡΙΤΟΝ

ΚΑΘΕΤΟΤΗΣ

ΟΡΙΣΜΟΙ. ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

1. Εὐθεῖα καὶ ἐπίπεδον.

1.1. Ὁρισμός. Εὐθεῖα λέγεται κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον, ἂν εἶναι κάθετος ἐπὶ πᾶσαν εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου.

1.2. Θεώρημα. Ἵνα εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ δύο εὐθείας μὴ παραλλήλους τοῦ ἐπιπέδου.

1.3. Διὰ σημείου ἄγεται μία καὶ μόνον εὐθεῖα κάθετος ἐπὶ δοθὲν ἐπίπεδον. Διὰ σημείου ἄγεται ἓν καὶ μόνον ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ δοθεῖσαν εὐθεῖαν.

1.4. Ὅλα τὰ σημεῖα τὰ ὁποῖα ἰσαπέχουν ἀπὸ τὰ ἄκρα ἑνὸς εὐθ. τμήματος, κεῖνται ἐπὶ τοῦ μεσοκαθέτου ἐπιπέδου αὐτοῦ.

1.5. Ὅλα τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα ἰσαπέχουν ἀπὸ τὰς κορυφὰς τριγώνου ΑΒΓ κεῖνται ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου τῆς διερχομένης διὰ τοῦ κέντρου τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου αὐτοῦ

1.6. Θεωροῦμεν ἐπίπεδον Π καὶ σημεῖον Α ἐκτὸς αὐτοῦ. Ἄγεται ἡ κάθετος ΑΒ. Ἐὰν Γ, Δ σημεῖα τοῦ ἐπιπέδου, τότε ἂν $ΒΓ > ΒΔ$ καὶ $ΑΓ > ΑΔ$. Ἀντιστρόφως.

Τὰ σημεῖα δὲ Μ διὰ τὰ ὁποῖα $ΑΜ = λ$ κεῖνται ἐπὶ περιφερείας κύκλου $(Β, \sqrt{λ^2 - ΑΒ^2})$.

2. Ὀρθογώνιοι εὐθεῖαι.

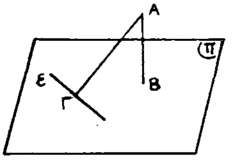
2.1. Ὅλαι αἱ ὀρθογώνιοι εὐθεῖαι διὰ σημείου Α πρὸς δοθεῖσαν εὐθεῖαν ε κεῖνται εἰς τὸ διὰ τοῦ Α κάθετον ἐπίπεδον ἐπὶ τὴν ε.

2.2. Διὰ δοθείσης εὐθείας η καθέτου ἐπὶ τὴν εὐθεῖαν ε ἄγεται ἓν καὶ μόνον ἓν ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ε.

Δοθεισῶν δύο ὀρθογωνίων εὐθειῶν ε, η, ὁρίζεται ἓν ζεῦγος καθέτων ἐπιπέδων Π, Ρ διερχομένων ἀντιστοίχως διὰ τῶν ε, η, ὥστε $Π \perp η$, $Ρ \perp ε$.

2.3. Ἡ ἀναγκαία καὶ ἱκανὴ συνθήκη, ἵνα δύο εὐθ. τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ εἶναι κάθετα εἶναι : $A\Gamma^2 - A\Delta^2 = B\Gamma^2 - B\Delta^2$. (Ἐφαρμόσατε εἰς τὰ τρίγωνα ΓΑΔ, ΓΒΔ τὸ 2ον θεώρημα τῶν διαμέσων).

2.4. Τὸ θεώρημα τῶν τριῶν καθέτων.



Δίδεται ἐπίπεδον Π καὶ εὐθεῖα ε ἐπ' αὐτοῦ. Ἐν σημεῖον Α ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου. Ἐκ τοῦ Α ἄγεται ἡ ΑΒ κάθετος ἐπὶ τὸ Π. Ἐὰν ἐκ τοῦ Α φέρωμεν τὴν ΑΓ κάθετον ἐπὶ τὴν ε, τότε καὶ ΒΓ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ε. Ἀντιστρόφως.

3. Ἡ κοινὴ κάθετος δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν.

Δοθέντων δύο ἀσυμβάτων ε, η ὑπάρχουν ἄπειροι εὐθεῖαι ὀρθογώνιοι ἐπ' ἀμφοτέρας. Πρὸς τοῦτο ἀρκεῖ διὰ τυχόντος σημείου Ο τοῦ χώρου νὰ θεωρήσωμεν τὰς ἡμιευθείας Οx, Οy παραλλήλους ἀντιστοίχως πρὸς ε, η. Κάθε κάθετος εὐθεῖα ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον xΟy εἶναι ὀρθογώνιος πρὸς τὰς ε, η. Ἐκ τοῦ συνόλου τῶν καθέτων εὐθειῶν πρὸς τὰς ε, η ὑπάρχει μία καὶ μόνον, ἥτις τέμνει ἀμφοτέρας. (Εἶναι ἡ τομὴ τῶν διὰ τῶν ε, η καθέτων ἐπιπέδων ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον xΟy). Ἡ εὐθεῖα αὐτὴ καλεῖται κοινὴ κάθετος τῶν ε, η.

Ἐὰν Α σημεῖον τῆς ε καὶ Β σημεῖον τῆς η, τότε τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΒ εἶναι ἐλάχιστον, ἂν ἡ ΑΒ εἶναι ἡ κοινὴ κάθετος τῶν ε, η.

4. Προβολαί

4.1. Ὀρθὴ προβολὴ σημείου Α ἐπὶ ἐπίπεδον Π ἢ εὐθεῖαν ε εἶναι τὸ ἴχνος τῆς καθέτου τῆς ἀγομένης ἐκ τοῦ σημείου Α ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π ἢ τὴν εὐθεῖαν ε.

4.2. Ὀρθὴ προβολὴ σχήματος F ἐπὶ ἐπίπεδον Π εἶναι τὸ σύνολον G τῶν ἰχνῶν τῶν ὀρθῶν προβολῶν τῶν σημείων τοῦ F.

4.3. Ἡ ὀρθὴ προβολὴ ἐπὶ ἐπίπεδον Π :

εὐθείας : εἶναι γενικῶς εὐθεῖα (ἡ ἐξαίρεσις;)

κύκλου : εἶναι γενικῶς ἔλλειψις (ἡ ἐξαίρεσις;)

σφαίρας : εἶναι πάντοτε κύκλος.

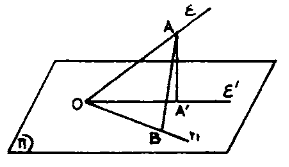
4.4. Ἡ ὀρθὴ προβολὴ ἐπὶ ἐπίπεδον Π παραλλήλων εὐθειῶν εἶναι εὐθεῖαι παράλληλοι.

4.5. Ἡ ὀρθὴ προβολὴ ἐπὶ ἐπίπεδον Π ὀρθῆς γωνίας.

Ἐὰν μία τοὐλάχιστον τῶν πλευρῶν εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον, εἶναι ἐπίσης ὀρθὴ γωνία. Ἐὰν ἀμφότεραι αἱ πλευραὶ τέμνουν τὸ ἐπίπεδον, εἶναι ἀμβλεῖα γωνία. Ἐὰν μόνον μία πλευρὰ τέμνῃ τὸ ἐπίπεδον, εἶναι ὀξεῖα. (Ἐξαιρεῖται ἡ περίπτωσις καθ' ἣν τὸ ἐπίπεδον τῆς γωνίας εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον προβολῆς).

4.6. Ὀνομάζομεν γωνίαν εὐθείας ε καὶ ἐπιπέδου Π (ε μὴ κάθετος ἐπὶ τὸ Π) τὴν ὀξεῖαν γωνίαν τὴν σχηματιζομένην ἀπὸ τὴν ε καὶ τὴν προβολήν της ἐπὶ τὸ Π. Εἶναι δὲ αὕτη ἡ μικροτέρα σχηματιζομένη γωνία ἀπὸ τὴν ε καὶ τυχοῦσαν εὐθεῖαν τοῦ Π.

Ἀπόδειξις. Ἔστω ε' ἡ προβολὴ τῆς ε ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π καὶ η τυχοῦσα εὐθεῖα τοῦ Π. Ἀπὸ τυχὸν σημεῖον Α τῆς ε φέρομεν $AA' \perp \varepsilon'$. Ὡς γνωστὸν AA' θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π. Ἐπὶ τῆς η λαμβάνομεν $OB = OA'$. Διὰ τὰ τρίγωνα AOA', AOB ἔχομεν: $(OA$ κοινή, $OA' = OB$, $AA' < AB) \Rightarrow \widehat{AOA'} < \widehat{AOB}$.



Σημείωσις: Ἐὰν ε κάθετος ἐπὶ τὸ Π ὁρίζομεν ὅτι ἡ γωνία τῆς ε μετὰ τοῦ Π εἶναι 1^L.

4.7. Ἡ προβολὴ $A'B'$ εὐθ. τμήματος AB ἐπὶ ἐπιπέδου Π ἢ ἐπὶ εὐθείας ε εἶναι $A'B' = AB$ συνω, ἔνθα ω ἡ γωνία τῆς AB μετὰ τοῦ Π ἢ τῆς ε. Ἡ προβολὴ F' ἐπιπέδου εὐθυγράμμου σχήματος F ἐπὶ ἐπίπεδον Π εἶναι:

$$\text{ἐμβαδὸν } F' = (\text{ἐμβαδὸν } F)\cdot \text{συνω},$$

ὅπου ω ἡ γωνία τοῦ ἐπιπέδου Π καὶ τοῦ ἐπιπέδου σχήματος.

4.8. Ἄλλα συστήματα προβολῶν.

Προβολὴ σημείου Α ἐπὶ ἐπίπεδον Π παραλλήλως πρὸς εὐθεῖαν η εἶναι τὸ ἴχνος ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π τῆς παραλλήλου ἐκ τοῦ Α πρὸς η. (Ἂν η κάθετος εἰς Π τότε ἔχομεν τὴν ὀρθὴν προβολήν. Ἐὰν η πλαγία πρὸς Π, ἡ προβολὴ ὀνομάζεται συνήθως πλαγία.)

Κεντρικὴ προβολὴ σημείου Α ἐκ σημείου Ρ ἐπὶ ἐπίπεδον Π εἶναι τὸ ἴχνος τῆς εὐθείας ΡΑ ἐπὶ τοῦ Π.

Προβολὴ σημείου Α παραλλήλως πρὸς ἐπίπεδον Π. Θεωροῦμεν διὰ τοῦ Α τὸ παράλληλον ἐπίπεδον πρὸς Π.

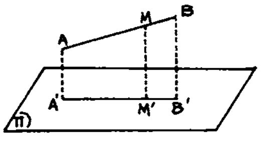
4.9. Ἐὰν Μ σημεῖον τῆς εὐθείας ΑΒ μὲ $\frac{AM}{MB} = \frac{\mu}{\nu}$ καὶ A', B', M' αἱ ὀρθαὶ προβολαὶ ἐπὶ ἐπίπεδον Π ἢ εὐθεῖαν ε θὰ εἶναι

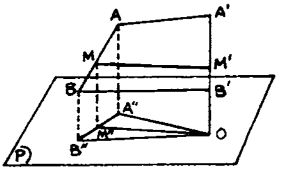
$$\frac{AM}{MB} = \frac{A'M'}{M'B'} = \frac{\mu}{\nu}.$$

Διὰ τὴν περίπτωσιν προβολῆς ἐπὶ ἐπίπεδον θὰ εἶναι καὶ

$$MM' = \frac{\nu\cdot AA' + \mu\cdot BB'}{\nu+\mu}.$$

Διά τήν περίπτωσιν προβολῆς ἐπί εὐθεῖαν ε ἡ ΜΜ′ ὑπολογίζεται ἐκ τοῦ θεωρήματος τοῦ Stewart διά τό τρίγωνον Α″ΟΒ″ τό ὁποῖον λαμβάνομεν ἐκ τῆς ὀρθῆς προβολῆς τοῦ σχήματος ἐπί ἐπίπεδον Ρ κάθετον εἰς ε.





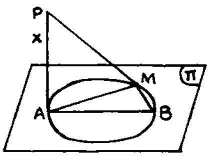
4.10. Ἐάν τρίγωνον προβάλλεται εἰς ἐπίπεδον, ἡ προβολή τοῦ κέντρου βάρους αὐτοῦ ταυτίζεται μέ τό κέντρον βάρους τῆς προβολῆς τοῦ τριγώνου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάς Α′.

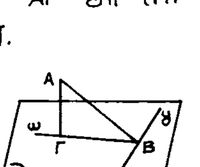
40. Ἐπί ἐπιπέδου Π δίδεται κύκλος διαμέτρου ΑΒ. Ἐάν Ρ τυχόν σημεῖον τῆς εὐθείας Αx τῆς καθέτου ἐπί τό Π καί Μ τυχόν σημεῖον τῆς περιφερείας, δείξατε ὅτι ΡΜ εἶναι κάθετος πρός τήν ΜΒ.

Ἀπόδειξις. Παρατηροῦμεν ὅτι ΡΑ⊥Π καί ΑΜ⊥ΜΒ. Ἄρα, κατά τό θεώρημα τῶν τριῶν καθέτων θά εἶναι καί ΡΜ⊥ΒΜ.



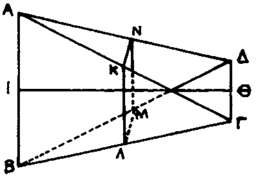
41. Ἐπί ἐπιπέδου Π δίδεται εὐθεῖα xy. Ἐάν Α σημεῖον ἐκτός τοῦ ἐπιπέδου, φέρομεν τήν ΑΒ⊥xy. Ἔστω Βω ἡ κάθετος ἐπί τήν xy εἰς τό ἐπίπεδον Π. Δείξατε ὅτι ἡ κάθετος ΑΓ ἐπί τήν Βω εἶναι συγχρόνως κάθετος καί ἐπί τό ἐπίπεδον Π.

Ἀπόδειξις. Παρατηροῦμεν ὅτι ἡ xy εἶναι κάθετος εἰς τάς ΒΓ καί ΑΒ ἤτοι καί εἰς τό ἐπίπεδον αὐτῶν. Συνεπῶς, ἡ xy εἶναι κάθετος καί ἐπί τήν ΑΓ. Δηλαδή ἡ ΑΓ εἶναι κάθετος ἐπί τήν ΒΓ καί τήν xy, ἄρα καί ἐπί τό ἐπίπεδον Π.



42. Δίδονται δύο ἴσα ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΑΓΒ, ΑΔΒ. Δείξατε ὅτι: α) τά μέσα Κ, Λ, Μ, Ν τῶν ΑΓ, ΒΓ, ΒΔ, ΔΑ κεῖνται ἐπί τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, β) ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία ἑνώνει τά μέσα τῶν ΑΒ καί ΓΔ εἰναι ἡ κοινὴ κάθετος αὐτῶν καὶ ὅτι εἶναι συγχρόνως κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΚΛΜΝ.

Ἀπόδειξις. α) Τὸ εὐθ. τμῆμα ΚΝ ὡς συνδέον τὰ μέσα τῶν ΑΓ, ΑΔ εἶναι παράλληλον καὶ ἴσον πρὸς τὸ ἥμισυ τοῦ ΓΔ. Ὁμοίως διὰ τὸ ΛΜ. Ἤτοι τὸ ΚΛΜΝ εἶναι παραλληλόγραμμον.



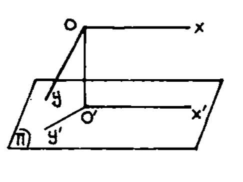
β) Αἱ ΑΘ, ΒΘ εἶναι ἴσαι ὡς ἀντίστοιχοι διάμεσοι τῶν ἰσοσκελῶν ἴσων τριγώνων ΓΑΔ, ΓΒΔ. Ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΘΒ εἶναι ἰσοσκελὲς καὶ ἡ διάμεσος ΘΙ πρὸς τὴν βάσιν αὐτοῦ εἶναι μεσοκάθετος ἐπ' αὐτήν. Διὰ τὸν αὐτὸν λόγον ἡ ΙΘ εἶναι μεσοκάθετος ἐπὶ τὴν ΓΔ. Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι ἡ ΘΙ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΚΛΜΝ, ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσωμεν ὅτι ΚΝ παράλληλος πρὸς ΓΔ, ΚΛ παράλληλος πρὸς ΑΒ.

Παρατήρησις. Διὰ νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι εὐθεῖα εἶναι κάθετος πρὸς ἐπίπεδον, εἶναι ἀρκετὸν νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι αὕτη εἶναι κάθετος πρὸς δύο μὴ παραλλήλους μεταξύ των εὐθείας, ἀλλὰ παραλλήλους πρὸς τὸ ἐπίπεδον.

43. Ἀποδείξατε τὴν πρότασιν 4.5.

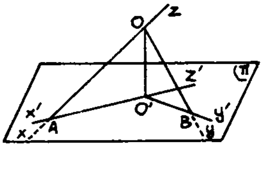
α) Θὰ ἀποδείξωμεν ὅτι ἡ προβολὴ ὀρθῆς γωνίας xOy ἐπὶ ἐπίπεδον Π εἶναι ὀρθὴ γωνία, ἂν μία τοὐλάχιστον τῶν πλευρῶν της εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ Π.

Ἀπόδειξις. Ἔστω $Ox \parallel \Pi$. Ἡ $OO' \perp \Pi$, $Ox \parallel O'x'$. Ἀλλὰ $O'x' \perp OO'$ καὶ $Ox \perp Oy$, ἤτοι καὶ $O'x' \perp Oy$. Κατὰ συνέπειαν ἡ $O'x'$ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς OO' καὶ Oy τοῦ ἐπιπέδου $yOO'y'$, ἤτοι ἡ $O'x'$ θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὴν $O'y'$. Ἡ πρότασις ἰσχύει καὶ ἀντιστρόφως. Δηλαδή, ἐὰν ἡ προβολὴ ὀρθῆς γωνίας ἐπὶ ἐπίπεδον εἶναι ἐπίσης ὀρθὴ γωνία, μία τῶν πλευρῶν της τοὐλάχιστον θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον. Διατί;



β) Ἐὰν ἀμφότεραι αἱ πλευραὶ ὀρθῆς γωνίας τέμνουν ἐπίπεδον Π, τότε ἡ προβολὴ αὐτῆς ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον εἶναι ἀμβλεία γωνία.

Ἀπόδειξις. Ἔστω O' ἡ προβολὴ τοῦ O καὶ A, B τὰ σημεῖα τομῆς τῶν Ox, Oy μετὰ τοῦ ἐπιπέδου προβολῆς Π. Θὰ ἔχωμεν $O'A^2 = OA^2 - OO'^2$, $O'B^2 = OB^2 - OO'^2$ καὶ διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη προκύπτει



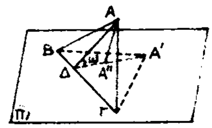
$O'A^2+O'B^2 < OA^2+OB^2 = AB^2$. Κατὰ συνέπειαν βάσει τοῦ 3-6.1 (τεῦχος 1) ἡ πρότασις ἀπεδείχθη.

Ἐὰν μία μόνον πλευρὰ π.χ. ἡ Oy τέμνῃ τὸ ἐπίπεδον (γωνία yOz), τότε ἡ προβολὴ ἡ $y'O'z'$, ἤτοι ὀξεῖα.

Παρατήρησις. Ἀναλόγως δύναται νὰ ἀποδειχθῇ καὶ ἡ προηγουμένη πρότασις α.

Ὡς ἄσκησις νὰ ἐξετασθῇ ἡ ἀντίστροφος πρότασις.

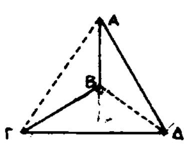
Τὸ αὐτὸ πρόβλημα δύναται νὰ ἀποδειχθῇ· καὶ διὰ τῆς μεθόδου τῆς κατακλίσεως, ἥτις συνίσταται εἰς τὸ ἑξῆς:



Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π κεῖται ἡ πλευρὰ ΒΓ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ὑποθέσωμεν ὅτι τὸ εὐθ. τμῆμα ΒΓ εἶναι σταθερὸν θέσει μεγέθει. Στρέφομεν τὸ τρίγωνον ΑΒΓ περὶ τὴν ΒΓ ἕως ὅτου τὸ ἐπίπεδόν του ταυτισθῇ μὲ τὸ ἐπίπεδον Π. Τὸ σημεῖον Α θὰ συμπέσῃ μὲ τὸ Α' τοῦ Π. Θὰ εἶναι $AB=A'B$ καὶ $A\Gamma=A'\Gamma$, ΑΔ καὶ Α'Δ τὰ ὕψη τῶν δύο τριγώνων, $A\hat{\Delta}A'=\omega$ ἡ γωνία στροφῆς. Τὸ σημεῖον Α κατὰ τὴν στροφὴν κινεῖται ἐπὶ περιφερείας (Δ,ΔΑ), τῆς ὁποίας τὸ ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ΒΓ.

Εἰς τὸ πρόβλημα β. Ἐὰν $B\hat{A}\Gamma=1^L$ καὶ $AA'\perp\Pi$, ὅτε Α'' ἐπὶ τῆς ΔΑ', θὰ ἔχωμεν $\Delta A>\Delta A''$ ἢ Α' ἐκτὸς τοῦ τμήματος ΔΑ'', ὅθεν $B\hat{A''}\Gamma > B\hat{A'}\Gamma=1^L$.

44. Ἐὰν αἱ ἀπέναντι πλευραὶ στρεβλοῦ· τετραπλεύρου εἶναι ὀρθογώνιοι δείξατε ὅτι τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ διὰ τὰς διαγωνίους.



Ἀπόδειξις. 1ος τρόπος. Ἔστω ὅτι $AB\perp\Gamma\Delta$ καὶ $B\Gamma\perp A\Delta$. Θὰ δείξωμεν ὅτι $A\Gamma\perp B\Delta$. Ἀρκεῖ $BA^2-B\Gamma^2=$ $=\Delta A^2-\Delta\Gamma^2$.

Εἶναι γνωστὸν ὅτι $A\Gamma^2-A\Delta^2=B\Gamma^2-B\Delta^2$ (1) καὶ $\Gamma\Delta^2-\Gamma A^2=B\Delta^2-BA^2$ (2). Προσθέτομεν τὰς (1),(2) καὶ ἔχομεν $\Gamma\Delta^2-A\Delta^2=B\Gamma^2-BA^2$.

2ος τρόπος. Φέρατε τὴν κάθετον ΑΗ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΓΒΔ καὶ δείξατε ὅτι τὸ Η εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου ΓΒΔ.

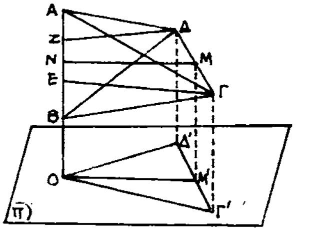
45. Δίδεται ἐπίπεδον Π καὶ τρεῖς ἡμιευθεῖαι αὐτοῦ Ox,Oy, Oz. Ἐὰν ἡ ΟΑ σχηματίζῃ γωνίας $A\hat{O}x=A\hat{O}y=A\hat{O}z$ δείξατε ὅτι $OA\perp\Pi$.

Ἀπόδειξις. Ἐπὶ τῶν Ox,Oy,Oz θεωροῦμεν τὰ σημεῖα Β,Γ,Δ ὥστε $OB=O\Gamma=O\Delta$. Ἐκ τῶν ἴσων τριγώνων ΑΟΒ, ΑΟΓ, ΑΟΔ προκύπτει ὅτι ΑΒ=ΑΓ=ΑΔ. Ἤτοι τὰ σημεῖα Α,Ο ὡς ἀπέχοντα ἴσον ἀπὸ τὰς κορυφὰς τοῦ τριγώνου ΒΓΔ θὰ κεῖνται ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς τὸ Π, τῆς διερχομένης διὰ τοῦ κέντρου τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας.

Παρατήρησις. Δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι εὐθεῖα εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον, ἐὰν δείξωμεν ὅτι σχηματίζει ἴσας γωνίας μὲ τρεῖς εὐθείας παραλλήλους πρὸς τὸ ἐπίπεδον, ἐξ ὧν δύο νὰ μὴν εἶναι παράλληλοι.

46. Δίδονται δύο ἰσοδύναμα τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΒΔ. Δείξατε ὅτι ἡ κοινὴ κάθετος τῶν ΑΒ καὶ ΓΔ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς ΓΔ.

1η ἀπόδειξις. Παρατηροῦμεν ὅτι τὰ ὕψη ΓΕ καὶ ΔΖ τῶν δύο τριγώνων εἶναι ἴσα. Διότι $(ΑΒΓ)=\frac{1}{2}ΑΒ\cdot ΓΕ$, $(ΑΔΒ)=\frac{1}{2}ΑΒ\cdot ΔΖ$ ἢ $ΑΒ\cdot ΓΕ = ΑΒ\cdot ΔΖ$. Προβάλλομεν τὸ σχῆμα ἐπὶ ἐπιπέδου Π καθέτου εἰς τὴν ΑΒ. Θὰ ἔχωμεν $ΓΕ=ΟΓ'$ καὶ $ΔΖ=ΟΔ'$, ὅθεν $Δ'\hat{Ο}Γ'$ ἰσοσκελές. Ἡ ὀρθὴ γωνία ΝΜΓ προβάλλεται κατ' ὀρθὴν δεδομένου ὅτι $ΝΜ\parallel Π$, ἤτοι $ΟΜ'\perp Γ'Δ'$. Ἄρα $Γ'Μ'=Δ'Μ'$. Ἀλλὰ $\frac{ΓΜ}{ΔΜ}=\frac{Γ'Μ'}{Δ'Μ'}$.

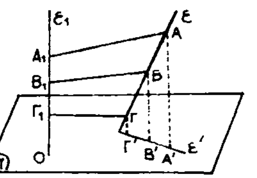


Παρατήρησις. Εἶναι δυνατὸν νὰ ἐπιτύχωμεν τὴν λύσιν προβλήματος διὰ προβολῆς τοῦ σχήματος εἰς καταλλήλως ἐκλεγὲν ἐπίπεδον. Συνήθως ἡ μέθοδος χρησιμοποιεῖται, ὅταν ἔχωμεν δύο ἢ περισσοτέρας εὐθείας καθέτους ἐπὶ δοθεῖσαν εὐθεῖαν τοῦ χώρου.

2α ἀπόδειξις. Ἐὰν Ν τὸ μέσον τῆς ΕΖ καὶ Μ τῆς ΓΔ, δυνάμεθα εὐκόλως ἐκ τῶν ἴσων τριγώνων ΝΕΓ, ΝΖΔ νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι ἡ ΝΜ εἶναι ἡ κοινὴ κάθετος.

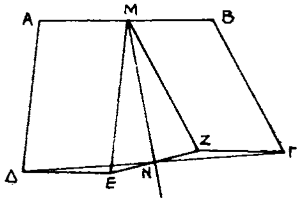
47. Τρία σημεῖα μιᾶς εὐθείας ε ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ ἄλλην εὐθεῖαν $ε_1$. Δείξατε ὅτι ε καὶ $ε_1$ εἶναι παράλληλοι.

Ἀπόδειξις. Ἐφαρμόζομεν τὴν προηγουμένην μέθοδον. Προβάλλομεν τὸ σχῆμα ἐπὶ ἐπιπέδου $Π\perp ε_1$. Θὰ εἶναι $ΟΑ'=ΟΒ'=ΟΓ'$. Ἤτοι τὰ σημεῖα Α',Β',Γ' κεῖνται ἐπὶ τόξου κύκλου. Ἀλλὰ τὰ ἴδια σημεῖα εὑρίσκονται καὶ ἐπὶ τῆς εὐθείας ε' προβολῆς τῆς ε ἐπὶ τὸ Π. Ἄρα δύο ἐξ αὐτῶν κατ' ἀνάγκην θὰ συμπί-



πτουν π.χ. $A' \equiv B'$. Ἄρα ἡ $AB \perp \Pi$.

48. Στρεβλοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι ἴσαι ΒΓ=ΔΑ. Δείξατε ὅτι θὰ ἔχουν ἴσας προβολὰς ἐπὶ τῆς εὐθείας τῆς ἑνούσης τὰ μέσα τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.



Ἀπόδειξις. Σχηματίζομεν τὰ παραλληλόγραμμα ΑΜΕΔ, ΒΜΖΓ, ὅτε τὸ ΔΕΓΖ θὰ εἶναι ἐπίσης παραλληλόγραμμον. Ἤτοι ἡ ΕΖ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου Ν τῆς ΓΔ. Τὸ τρίγωνον ΕΜΖ εἶναι ἰσοσκελὲς καί, συνεπῶς, ἡ ΜΝ τὸ ὕψος διὰ τῆς κορυφῆς. Τὰ εὐθ. τμήματα ΑΔ, ΜΕ ἔχουν ἴσας προβολάς, ὅπως καὶ τὰ ΒΓ, ΜΖ. Τὰ ΜΕ, ΜΖ προβάλλονται ἐπὶ τῆς ΜΝ κατὰ τὸ εὐθ. τμῆμα ΜΝ.

Ὁμὰς Β'.

49. Δίδεται στρεβλὸν ἑξάγωνον $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Ἐὰν $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν του ἀντιστοίχως, δείξατε ὅτι τὰ κέντρα βάρους τῶν δύο τριγώνων $M_1M_3M_5$, $M_2M_4M_6$ συμπίπτουν.

1η ἀπόδειξις. Θεωρήσωμεν ἐπίπεδον Π μὴ τέμνον τὸ ἑξάγωνον καὶ ἔστω A_i' καὶ M_i' αἱ προβολαὶ τῶν A_i καὶ M_i, $i=1,2,\dots,6$ ἀντιστοίχως. Θέσωμεν $A_iA_i' = a_i$ καὶ $M_iM_i' = \mu_i$. Θὰ ἔχωμεν

$$\mu_i = \frac{a_i + a_{i+1}}{2}.$$

Ἔστω G τὸ κέντρον βάρους τοῦ $M_1M_3M_5$ καὶ G' τὸ κέντρον βάρους τοῦ $M_2M_4M_6$. Ἡ ἀπόστασις GO ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον Π εἶναι $GO = \frac{\mu_1+\mu_3+\mu_5}{3} = \frac{\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_3+a_4}{2}+\frac{a_5+a_6}{2}}{3}$ ἤτοι $GO = \frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6}{6}$.

Τὸ αὐτὸ διὰ τὴν ἀπόστασιν τοῦ G'

$$G'O' = \frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6}{6},$$

ἤτοι GO=G'O' καί, ἐπειδὴ τὸ ἐπίπεδον Π εἶναι τυχόν, ἕπεται ὅτι $G \equiv G'$.

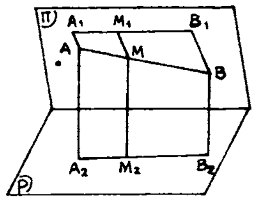
Παρατήρησις. Ἂν τὰ σημεῖα Α, Β εὑρίσκωνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ χώρου πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π_i καὶ ἰσαπέχουν αὐτοῦ, ὁ ἐλάχιστος δείκτης ἵνα συμπίπτουν εἶναι $i=3$. Ἄρα, διὰ νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι δύο σημεῖα συμπίπτουν, εἶναι ἀρκετὸν νὰ δείξωμεν ὅτι αἱ ἀποστάσεις των $a_1, a_2, a_3 - \beta_1, \beta_2, \beta_3$ ὡς πρὸς τρία ἐπίπεδα Π_1, Π_2, Π_3 (ὡς πρὸς ἕκαστον τῶν ὁποίων τὰ σημεῖα κεῖνται πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ χώρου) εἶναι ἴσαι ἀντιστοίχως.

2α ἀπόδειξις. Παρατηροῦμεν ὅτι, ἐὰν Ρ τὸ μέσον τῆς A_3A_6, τὰ $M_1M_2PM_6$, $M_3M_4M_5P$ εἶναι παραλληλόγραμμα, ὅτε τὰ G, G' συμπίπτουν πρὸς τὸ κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου M_1M_4P.

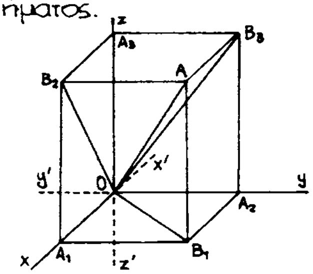
50. Θεωρήσωμεν δύο ἐπίπεδα Π, P καὶ εὐθ. τμῆμα AB, ὥστε ἂν a_1, a_2 αἱ ἀποστάσεις τοῦ A ἀπὸ Π, P καὶ β_1, β_2 τοῦ B νὰ ἔχωμεν $a_1+a_2=\beta_1+\beta_2=\kappa$. Δείξατε ὅτι, ἂν M τυχὸν σημεῖον τῆς εὐθείας AB μὲ μ_1, μ_2 ἀποστάσεις ἀπὸ τῶν Π, P, θὰ ἔχωμεν $\mu_1+\mu_2=\kappa$.

Ἀπόδειξις. Ἔστω $\frac{AM}{BM}=\frac{\mu}{\nu}$. Ὡς γνωστὸν $\mu_1=\frac{\nu a_1+\mu\beta_1}{\nu+\mu}$ καὶ $\mu_2=\frac{\nu a_2+\mu\beta_2}{\nu+\mu}$. Ἄρα εἶναι

$$\mu_1+\mu_2=\frac{\nu(a_1+a_2)+\mu(\beta_1+\beta_2)}{\nu+\mu}=\frac{(\nu+\mu)\kappa}{\nu+\mu}=\kappa.$$



51. α) Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν προβολῶν τυχόντος εὐθ. τμήματος ἐπὶ τριῶν εὐθειῶν καθέτων ἀνὰ δύο ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τοῦ εὐθ. τμήματος. β) Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν προβολῶν τυχόντος εὐθ. τμήματος ἐπὶ τριῶν ἐπιπέδων καθέτων ἀνὰ δύο ἰσοῦται πρὸς τὸ διπλάσιον τετράγωνον τοῦ εὐθ. τμήματος.



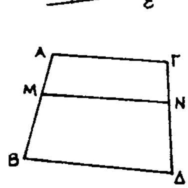
Ἀπόδειξις. Ἔστω $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ τρεῖς εὐθεῖαι ἀνὰ δύο κάθετοι εἰς τὸν χῶρον καὶ εὐθ. τμῆμα MN. Θεωρήσωμεν ἐκ τυχόντος σημείου O τὰς παραλλήλους xOx', yOy', zOz' πρὸς αὐτὰς ἀντιστοίχως καὶ $OA \| = MN$. Θὰ δείξωμεν ὅτι

α) $OA^2=OA_1^2+OA_2^2+OA_3^2$ β) $2\cdot OA^2=OB_1^2+OB_2^2+OB_3^2$.

Τὸ $OA_1B_1A_2A_3AB_3$ εἶναι ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον, ὅθεν $OA^2=OB_1^2+AB_1^2=OA_1^2+OA_2^2+OA_3^2$ καὶ $OB_1^2+OB_2^2+OB_3^2=OA_1^2+OA_2^2+OA_3^2+OA_1^2+$ $+OA_2^2+OA_3^2=2\cdot OA^2$.

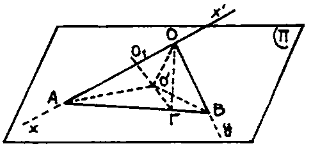
Παρατήρησις. Αἱ τρεῖς εὐθεῖαι xOx', yOy', zOz' ὁρίζουν ἓν σύστημα ὀρθογωνίων συντεταγμένων εἰς τὸν χῶρον. Εἰς κάθε δὲ σημεῖον τοῦ χώρου A δυνάμεθα νὰ ἀντιστοιχίσωμεν μίαν τριάδα ἀριθμῶν, τὰς προβολάς του ἐπὶ τῶν ἀξόνων καὶ ἀντιστρόφως.

52. Δίδονται δύο ἴσα εὐθ. τμήματα $AB=\Gamma\Delta$. Τὰ σημεῖα M, N κινοῦνται ἐπ' αὐτῶν ἀντιστοίχως, ὥστε $AM=\Gamma N$. Δείξατε ὅτι τὸ μεσοκάθετον ἐπίπεδον ἐπὶ τὴν MN διέρχεται διὰ σταθερᾶς εὐθείας ε.



Ἀπόδειξις. Ἄν $AM=0$ καὶ $\Gamma N=0$. Ἤτοι τὸ μεσοκάθετον ἐπίπεδον ἐπὶ τὸ ΑΓ διέρχεται διὰ τῆς ἐν λόγῳ σταθερᾶς ε. Ἐπίσης ἄν $AM=AB$ καὶ $\Gamma N=\Gamma\Delta$, ἄρα καὶ τὸ μεσοκάθετον ἐπίπεδον ἐπὶ τὸ ΓΔ θὰ διέρχεται διὰ τῆς ε. Ἀρκεῖ συνεπῶς νὰ δείξωμεν ὅτι τὸ μεσοκάθετον ἐπίπεδον ἐπὶ τὸ ΜΝ διέρχεται διὰ τῆς εὐθείας τομῆς ε τῶν μεσοκαθέτων ἐπιπέδων ἐπὶ τῶν ΑΓ, ΒΔ. Πρὸς τούτοις, ἄν Ρ τυχὸν σημεῖον τῆς ε, ἔχομεν $\overset{\triangle}{PAB}=\overset{\triangle}{P\Gamma\Delta}$, διότι $PA=P\Gamma$, $PB=P\Delta$ καὶ $AB=\Gamma\Delta$. Ἐπίσης καὶ $\overset{\triangle}{PAM}=\overset{\triangle}{P\Gamma N}$ διότι $PA=P\Gamma$, $AM=\Gamma N$ καὶ $P\hat{A}M=P\hat{\Gamma}N$. Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι καὶ $PM=PN$, ἤτοι τὸ μεσοκάθετον ἐπίπεδον ἐπὶ τὴν ΜΝ περιέχει τὴν ε.

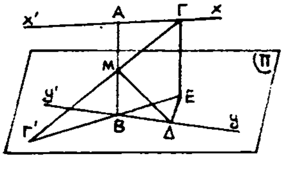
53. Δείξατε ὅτι, ἐὰν ἀμβλείας $x\hat{O}y$ αἱ πλευραὶ τέμνουν ἐπίπεδον, ἡ προβολὴ αὐτῆς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου θὰ εἶναι γωνία $x'O'y' > xOy$. (Ἡ περίπτωσις καθετότητος τῶν δύο ἐπιπέδων ἐξαιρεῖται).



Ἀπόδειξις. Κατάκλισις τοῦ τριγώνου ΑΟΒ εἰς Π. Προφανῶς $O\Gamma > O'\Gamma$ ἤτοι $O_1\Gamma > O'\Gamma$ κατὰ συνέπειαν $A\hat{O'}B > A\hat{O_1}B$.

Τί παρατηροῦμεν διὰ τὴν προβολὴν της $x'\hat{O}y$;

54. Δίδονται δύο ὀρθογώνιοι εὐθεῖαι xx', yy'. Ἔστω ΑΒ ἡ κοινὴ κάθετος αὐτῶν. Ἐὰν Μ τὸ μέσον τῆς ΑΒ, Γ τυχὸν σημεῖον τῆς xx', Δ τυχὸν σημεῖον τῆς yy' δείξατε ὅτι α) $\Gamma\hat{M}\Delta$ ἀμβλεία. β) Ἐὰν τὰ Γ, Δ μεταβάλλονται, ὥστε $\Gamma\hat{M}\Delta=120^\circ$ τότε ἐμβ.$(\Gamma M\Delta)=$σταθ.



Ἀπόδειξις. Θεωρήσωμεν ἐπίπεδον Π διὰ τῆς yy' παράλληλον πρὸς xx'. Συμφώνως πρὸς τὴν ἄσκησιν 53 $\Gamma'\hat{M}\Delta < \Gamma'\hat{B}\Delta = 90^\circ$ ἤτοι $\Gamma'\hat{M}\Delta$ ὀξεία. Εἰς τὸ τρίγωνον ΓΜΔ ἔχομεν $\Gamma\Delta^2=\Gamma M^2+M\Delta^2+\Gamma M\cdot M\Delta$. Ἄν $\Gamma E \perp \Pi$, $\Gamma\Delta^2=\Gamma E^2+\Delta E^2=AB^2+B\Delta^2+BE^2$. Ἀλλὰ $B\Delta^2+\frac{AB^2}{4}=M\Delta^2$ καὶ $BE^2+\frac{AB^2}{4}=M\Gamma^2$ ὅθεν $\Gamma M\cdot M\Delta=\frac{AB^2}{2}$ καὶ ἐπειδὴ καὶ ἡ γωνία ΓΜΔ εἶναι σταθερὰ ἔπεται ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ τριγώνου ΓΜΔ εἶναι σταθερόν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ

Ὁμὰς Α'.

55. Δίδεται ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ. Ἐὰν Ρ σημεῖον ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ, ὥστε τὰ τρίγωνα ΑΡΒ, ΒΡΓ, ΓΡΑ εἶναι ἰσοσκελῆ, δείξατε ὅτι ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία ἑνώνει τὸ σημεῖον Ρ μὲ τὸ κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ.

56. Δίδονται δύο ἰσοσκελῆ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΒΓΔ μὴ κείμενα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Δείξατε ὅτι $ΒΓ \perp ΑΔ$.

57. Δίδεται τετράγωνον ΑΒΓΔ. Εἰς Α, Γ ἄγονται κάθετοι εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ τετραγώνου Ax, $Γy$. Ἐὰν Μ, Ν τυχόντα σημεῖα αὐτῶν, δείξατε ὅτι $ΜΝ \perp ΒΔ$.

58. Δίδεται ἕνα ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ. Εἰς Γ, Δ ὑψοῦμεν τὰς καθέτους ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ ὀρθογωνίου, λαμβάνομεν δὲ ἐπ' αὐτῶν τὰ σημεῖα Μ, Ν ἀντιστοίχως ἑκατέρωθεν τοῦ ἐπιπέδου τοιαῦτα, ὥστε $ΓΒ^2 = ΓΜ \cdot ΔΝ$. Δείξατε ὅτι αἱ ΑΝ καὶ ΒΜ εἶναι ὀρθογώνιοι.

59. Δίδονται τρεῖς ἡμιευθεῖαι Ox, Oy, Oz ὥστε $x\widehat{O}y = x\widehat{O}z$. Ἐπὶ τῶν Oy, Oz λαμβάνομεν τὰ σημεῖα Β, Γ ἀντιστοίχως, ὥστε $ΟΒ = ΟΓ$. Δείξατε ὅτι $ΒΓ \perp Ox$.

60. Δίδεται στρεβλὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ μὲ τὰς ἀπέναντι πλευρὰς του ἴσας. Δείξατε ὅτι ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει τὰ μέσα τῶν διαγωνίων, εἶναι κοινὴ κάθετος αὐτῶν.

61. Δίδεται ἕνα τετράγωνον ΑΒΓΔ πλευρᾶς α καὶ κέντρου Ο. Ἐπὶ τῆς καθέτου Ax ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τετραγώνου λαμβάνομεν τὸ σημεῖον Α', ὥστε $ΑΑ' = \frac{α\sqrt{2}}{2}$, καὶ ἐπὶ τῆς $Γy$, καθέτου ἐπίσης ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τετραγώνου, τὸ σημεῖον Γ', ὥστε $Α'Γ' = 2α$. Τὰ σημεῖα Α', Γ' πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ ἐπιπέδου. Δείξατε ὅτι:

α) ΒΔ κάθετος εἰς τὸ ἐπίπεδον ΑΑ'ΓΓ',
β) ἡ γωνία ΟΑ'Γ' εἶναι ὀρθή,
γ) Α'Γ' εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Α'ΒΔ.

62. Δείξατε ὅτι ἡ προβολὴ γωνίας ἐπὶ ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς μίαν πλευρὰν εἶναι γωνία τοῦ αὐτοῦ εἴδους.

63. Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζει τυχοῦσα εὐθεῖα μὲ δύο κάθετα ἐπίπεδα, εἶναι μικρότερον τῆς ὀρθῆς. (ἡ εὐθεῖα μὴ κάθετος ἐπὶ τὴν τομήν)

64. Ὁρίσατε τὰ ἐπίπεδα ἐπὶ τῶν ὁποίων στρεβλὸν τετράπλευρον προβάλλεται κατὰ παραλληλόγραμμον. (Προβάλλατε ἐπὶ ἐπίπεδον κάθετον εἰς τὴν εὐθεῖαν τὴν ἑνοῦσαν τὰ μέσα δύο ἀπέναντι πλευρῶν).

65. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ προβολὴ ἰσοσκελοῦς τριγώνου ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) ἐπὶ ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν ἐσωτερικὴν ἢ ἐξωτερικὴν διχοτόμον τῆς γωνίας Α εἶναι ἐπίσης ἰσοσκελὲς τρίγωνον.

66. Δίδεται ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ μὲ διαστάσεις α,β. Εἰς τὸ κέντρον αὐτοῦ Ο ὑψοῦμεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδόν του καὶ λαμβάνομεν τὸ σημεῖον Κ, ὥστε ΟΚ=ΑΓ. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀπόστασις τῆς κορυφῆς Α ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον ΚΒΓ.

67. Δίδεται ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ($\hat{A}=90^\circ$). Θεωρήσωμεν τὴν ΡΒ κάθετον εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου. Δείξατε:

α) $AP \perp A\Gamma$.

β) Τὸ κάθετον διὰ τοῦ Β ἐπίπεδον ἐπὶ τὴν ΡΓ τέμνει τὴν ΡΑ εἰς Α΄. Δείξατε ὅτι ΒΑ΄ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΡΑΓ.

68. Τὰ σημεῖα Α,Β κείμενα ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων Ρ,Π ἀντιστοίχως, ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὴν τομὴν τῶν ἐπιπέδων Ρ,Π. Δείξατε ὅτι ταῦτα ἀπέχουν ἴσον καὶ ἀπὸ τὰ ἐπίπεδα Π,Ρ ἀντιστοίχως. Ἀντιστρόφως.

69. Δίδονται δύο τεμνόμενα κατὰ τὴν εὐθεῖαν ε ἐπίπεδα Π,Ρ. Ἐὰν ἡ εὐθεῖα η εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ Π, δείξατε ὅτι ἡ προβολὴ της η΄ ἐπὶ τὸ Ρ θὰ εἶναι κάθετος εἰς τὴν ε.

70. Θεωροῦμεν δύο ἀσυμβάτους εὐθείας ε,ε΄ καὶ τὰ σημεῖα Α,Β,Γ τῆς ε. Φέρομεν τὰς καθέτους ΑΑ΄,ΒΒ΄,ΓΓ΄ ἐπὶ τὴν ε΄. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει τὰ μέσα τῶν ΑΑ΄,ΒΒ΄, διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς ΓΓ΄.

71. Δίδεται ἐπίπεδον Π καὶ εὐθεῖα ε παράλληλος πρὸς αὐτό.

Νά ἀποδειχθῆ ὅτι αἱ ἀποστάσεις τῆς ε ἀπό τῶν εὐθειῶν τοῦ Π τῶν μή παραλλήλων πρός τήν ε εἶναι ἴσαι.

72. Δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι α, β ἔχουν κοινήν κάθετον ΑΒ. Ἐκ τῶν σημείων Μ καί Μ′ τῆς α φέρομεν τάς καθέτους ΜΗ, Μ′Η′ ἐπί τήν β. Δεῖξατε ὅτι $AM < AM' \Leftrightarrow MH < M'H'$.

73. Θεωροῦμεν δύο ἀσυμβάτους εὐθείας α καί β. Ὑποθέτομεν ὅτι τά σημεῖα Μ καί Ν τῆς α ἀπέχουν ἴσον ἀπό τήν β. Δεί-ξατε ὅτι ἡ κοινή κάθετος τῶν α, β διέρχεται διά τοῦ μέσου τοῦ εὐθ. τμήματος ΜΝ.

74. Τρεῖς εὐθεῖαι α, β καί γ εἶναι ἀνά δύο ἀσύμβατοι καί μή παράλληλοι πρός τό αὐτό ἐπίπεδον. Δίδεται ὅτι ἡ γ ἀπέχει ἴσον ἀπό τάς α καί β. Νά δειχθῆ ὅτι ἡ γ κεῖται ἐπί τοῦ ἑ-νός ἤ τοῦ ἄλλου ἐκ τῶν διχοτομούντων ἐπιπέδων τῶν διέδρων Π,Ρ τῶν ἐπιπέδων Π καί Ρ τῶν ἀγομένων διά τῶν α καί β καί παραλλήλων πρός τήν γ ἀντιστοίχως.

Ἀντιστρόφως. Τί συμβαίνει ἄν αἱ α, β, γ εἶναι παράλληλοι πρός τό αὐτό ἐπίπεδον;

75. Ἡ κοινή κάθετος τῶν διαγωνίων στρεβλοῦ τετραπλεύρου εἶναι κάθετος ἐπί τό ἐπίπεδον τοῦ παραλληλογράμμου τοῦ ἔχον-τος κορυφάς τά μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ στρεβλοῦ τετραπλεύρου.

76. Ἐάν εὐθεῖα διαιρεῖ δύο ἀπέναντι πλευράς στρεβλοῦ τε-τραπλεύρου εἰς μέρη ἀνάλογα θά εἶναι κάθετος ἐπί τήν κοι-νήν κάθετον τῶν δύο ἄλλων πλευρῶν.

Ὁμάς Β′.

77. Εἰς κάθε στρεβλόν τετράπλευρον ΑΒΓΔ, δεῖξατε ὅτι: α) τά ἕξ μεσοκάθετα ἐπίπεδα ἐπί τάς πλευράς καί τάς διαγωνίους διέρ-χονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου, β) τά ἕξ ἐπίπεδα τά διερχόμενα διά τοῦ μέσου ἑκάστης πλευρᾶς ἤ διαγωνίου καί κάθετα ἐπί τήν ἀπέναντι πλευράν ἤ διαγώνιον διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ ση-μείου, γ) τά ἕξ ἐπίπεδα τά διερχόμενα διά τοῦ μέσου τῆς κά-θε πλευρᾶς ἤ διαγωνίου καί τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς ἤ διαγωνίου διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου.

78. Δίδεται κύκλος διαμέτρου ΑΒ. Θεωροῦμεν τὰς εὐθείας Αx καὶ Βy καθέτους ἐπὶ τὴν ΑΒ σχηματίζουσας γωνίαν θ μὲ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου καὶ μὴ παραλλήλους. Δείξατε ὅτι κάθε εὐθεῖα, ἡ ὁποία συναντᾶ τὴν περιφέρειαν καὶ τὰς Αx, Βy σχηματίζει μὲ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου τὴν αὐτὴν γωνίαν θ καὶ προβάλλεται ἐπ' αὐτὸ κατὰ ἐφαπτομένην τοῦ κύκλου.

79. Ἵνα ἐπίπεδον σχηματίζῃ ἴσας γωνίας μετὰ δύο τεμνομένων εὐθειῶν, πρέπει καὶ ἀρκεῖ νὰ διέρχεται διὰ τῆς μιᾶς διχοτόμου τῶν γωνιῶν ποὺ σχηματίζουν. Ἐξετάσατε τὸ αὐτὸ πρόβλημα διὰ τρεῖς εὐθείας τεμνομένας ἀνὰ δύο καὶ μὴ κειμένας ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

80. Δίδονται δύο ὀρθογώνιοι εὐθεῖαι xx′ καὶ yy′. Ἔστω ΑΒ ἡ κοινὴ κάθετος αὐτῶν. Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς πρώτης τὰ ἴσα τμήματα ΑΓ = ΑΔ καὶ ἐπὶ τῆς δευτέρας ΒΕ = ΒΖ. Δείξατε ὅτι α) ΓΕ = ΔΖ καὶ β) τὰ δύο αὐτὰ τμήματα εἶναι ἰσοκλινῆ πρὸς τὴν ΑΒ.

81. Δίδονται δύο ὀρθογώνιοι εὐθεῖαι ε, η. Ἔστω ΑΒ ἡ κοινὴ κάθετος αὐτῶν (Α σημεῖον τῆς ε, Β τῆς η). Λαμβάνομεν τὸ σημεῖον Μ ἐπὶ τῆς ε καὶ τὸ σημεῖον Ν ἐπὶ τῆς η.

1) Ὁρίσατε τὴν κοινὴν κάθετον ΚΛ τῶν ΑΒ καὶ ΜΝ (Τὸ Κ ἐπὶ τῆς ΑΒ τὸ Λ ἐπὶ τῆς ΜΝ). 2) Δείξατε ὅτι $\frac{1}{K\Lambda^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{BN^2}$.
3) Δείξατε ὅτι $\frac{KA}{KB} = \frac{\Delta M}{\Lambda N} = \frac{AM^2}{BN^2}$.

82. Τέσσαρα ἐπίπεδα διερχόμενα διὰ εὐθείας ε τέμνονται ὑπὸ δύο εὐθειῶν η, η′ κατὰ τὰ σημεῖα Α, Β, Γ, Δ καὶ Α′, Β′, Γ′, Δ′ ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι ἂν Α, Β - Γ, Δ ἁρμονικὴ τετράς, καὶ Α′, Β′ - Γ′, Δ′ θὰ εἶναι ἐπίσης ἁρμονικὴ τετράς. Γενικῶς (ΑΒΓΔ) = (Α′Β′Γ′Δ′).

83. Τρία ἐπίπεδα παράλληλα Π, Ρ, Σ τέμνονται ἀπὸ τὰς εὐθείας ε, ε′ κατὰ τὰ σημεῖα Α, Β, Γ καὶ Α′, Β′, Γ′ ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι:

$$\frac{\overline{AA'}^2}{\overline{\Gamma A}\cdot\overline{AB}} + \frac{\overline{BB'}^2}{\overline{AB}\cdot\overline{B\Gamma}} + \frac{\overline{\Gamma\Gamma'}^2}{\overline{B\Gamma}\cdot\overline{\Gamma A}} = -1 .$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΤΕΤΑΡΤΟΝ

ΔΙΕΔΡΟΙ ΓΩΝΙΑΙ. ΕΠΙΠΕΔΑ ΚΑΘΕΤΑ

ΟΡΙΣΜΟΙ. ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

1. Δίεδρος γωνία.

1.1. Ὁρισμός. Τὸ κυρτὸν μέρος τοῦ χώρου, τὸ ὁποῖον περατοῦται ἐπὶ δύο ἡμιεπιπέδων μὲ τὴν αὐτὴν ἀρχικὴν εὐθεῖαν. Ἡ εὐθεῖα τομῆς τῶν δύο ἡμιεπιπέδων καλεῖται ἀκμὴ τῆς διέδρου. Τὰ δύο ἡμιεπίπεδα ὀνομάζονται ἕδραι.

1.2. Ἐφεξῆς δίεδροι. Ὀνομάζονται δύο δίεδροι μὲ τὴν αὐτὴν ἀκμὴν καὶ κοινὴν μίαν ἕδραν, ἐνῶ αἱ ἄλλαι ἕδραι των κεῖνται ἑκατέρωθεν τῆς κοινῆς.

1.3. Κατὰ κορυφὴν δίεδροι. Αἱ προεκτάσεις τῶν ἑδρῶν τῆς μιᾶς ταυτίζονται μὲ τὰς ἕδρας τῆς δευτέρας.

2. Ἀντίστοιχος ἐπίπεδος διέδρου.

2.1. Εἶναι ἡ ἐπίπεδος γωνία, ἡ ὁποία σχηματίζεται ἀπὸ τὰς ἡμιευθείας τομῆς ἐπιπέδου καθέτου εἰς τυχὸν σημεῖον τῆς ἀκμῆς τῆς διέδρου μὲ τὰς ἕδρας.

2.2. Ὅλαι αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι διέδρου εἶναι ἴσαι.

2.3. Ἑκάστη δίεδρος μετρεῖται διὰ τοῦ μέτρου τῆς ἀντιστοίχου ἐπιπέδου αὐτῆς.

3. Ἰσότης διέδρων.

3.1. Δύο δίεδροι εἶναι ἴσαι, ὅταν ἔχουν τὰς ἀντιστοίχους ἐπιπέδους γωνίας των ἴσας.

3.2. Αἱ κατὰ κορυφὴν δίεδροι εἶναι ἴσαι.

4. Παραπληρωματικαὶ δίεδροι.

4.1. Δίεδροι, τῶν ὁποίων αἱ ἀντίστοιχοι ἐπίπεδοι εἶναι παραπληρωματικαί.

5. Διχοτομοῦν ἐπίπεδον διέδρου.

5.1. Κάθε δίεδρος ἔχει ἓν διχοτομοῦν ἐπίπεδον.

5.2. Πᾶν σημεῖον τοῦ διχοτομοῦντος ἐπιπέδου ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰς ἕδρας τῆς διέδρου. Ἀντιστρόφως.

6. Ὀρθὴ δίεδρος.

6.1. Εἶναι ἡ δίεδρος, τῆς ὁποίας ἡ ἀντίστοιχος ἐπίπεδος εἶναι ὀρθή.

7. Ἐπίπεδα κάθετα.

7.1. Δύο ἐπίπεδα τεμνόμενα, τῶν ὁποίων ἡ δίεδρος εἶναι ὀρθή, λέγονται κάθετα.

7.2. Ἐὰν δύο ἐπίπεδα εἶναι κάθετα, κάθε εὐθεῖα τοῦ ἑνὸς ἐπιπέδου κάθετος πρὸς τὴν τομὴν θὰ εἶναι κάθετος καὶ ἐπὶ τὸ ἕτερον ἐπίπεδον.

7.3. Ἐὰν εὐθεῖα ε εἶναι κάθετος ἐπὶ ἐπίπεδον Π, κάθε ἐπίπεδον Ρ διερχόμενον διὰ τῆς ε εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ Π.

7.4. Ἐὰν δύο ἐπίπεδα Ρ,Σ εἶναι συγχρόνως κάθετα ἐπὶ ἐπίπεδον Π, καὶ ἡ τομὴ αὐτῶν θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π.

7.5. Διὰ τυχούσης εὐθείας ἄγεται ἓν καὶ μόνον κάθετον ἐπίπεδον ἐπὶ δοθὲν ἐπίπεδον Π.

7.6. Κάθε ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τυχοῦσαν εὐθεῖαν ε ἐπιπέδου Π εἶναι συγχρόνως κάθετον καὶ ἐπὶ τὸ Π.

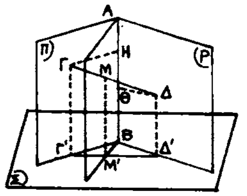
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμὰς Α΄.

84. Δίδονται δύο ἐφεξῆς δίεδροι (ΑΒ,Π,Ρ), (ΑΒ,Ρ,Σ). Νὰ εὑρεθῇ ἡ γωνία τῶν διχοτομούντων ἐπιπέδων αὐτάς. Τί παρατηροῦμεν ἂν αἱ δίεδροι εἶναι παραπληρωματικαί;

Λύσις. Ἔστω ω τὸ μέτρον τῆς (ΑΒ,Π,Ρ) καὶ φ τὸ μέτρον τῆς (ΑΒ,Ρ,Σ). Τὰ διχοτομοῦντα ἐπίπεδα σχηματίζουν γωνίαν, τῆς ὁποίας τὸ μέτρον x εἶναι: $x=\frac{\omega+\varphi}{2}$. Ἐὰν αἱ δίεδροι γωνίαι εἶναι παραπληρωματικαί, $\omega+\varphi=180^\circ$, ὁπόταν $x=90^\circ$, ἤτοι τὰ διχοτομοῦντα ἐπίπεδα εἶναι κάθετα.

85. Δίδεται δίεδρος (ΑΒ,Π,Ρ). Εὐθεῖα ε τέμνει τὰς ἕδρας ἀντιστοίχως εἰς Γ καὶ Δ. Δείξατε ὅτι τὸ διχοτομοῦν ἐπίπεδον τὴν δίεδρον χωρίζει τὴν ΓΔ εἰς δύο τμήματα ἀνάλογα τῶν ἀποστάσεων τῶν Γ,Δ ἀπὸ τὴν ἀκμήν.



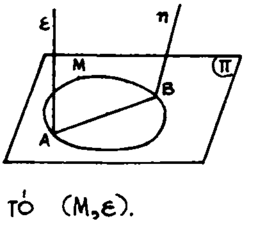
Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν ἐπίπεδον $\Sigma \perp AB$, εἰς τὸ σημεῖον ἔστω Β. Προβάλλομεν τὸ σχῆμα ἐπὶ τοῦ Σ. Εἰς τὸ τρίγωνον Γ'ΒΔ' ἡ ΒΜ' εἶναι διχοτόμος. Ἄρα $\frac{B\Gamma'}{B\Delta'}=\frac{\Gamma'M'}{\Delta'M'}$. Ἀλλὰ ὡς γνωστὸν $\frac{\Gamma M}{\Delta M}=\frac{\Gamma'M'}{\Delta'M'}$, ὅθεν $\frac{\Gamma M}{\Delta M}=\frac{\Gamma H}{\Delta\Theta}$.

Τί παρατηροῦμεν ἂν $\Gamma H=\Delta\Theta$; Ἂν ἡ ΓΔ ἰσοκλινὴς πρὸς τὰς ἕδρας τῆς διέδρου;

86. Δίδεται τετράπλευρον ΑΒΓΔ. Φέρομεν τὰς ΑΑ', ΒΒ', ΓΓ', ΔΔ' καθέτους ἐπὶ τὸ ἐπίπεδόν του. Δείξατε ὅτι τὰ ἐπίπεδα ΑΑ'Γ'Γ, ΒΒ'Δ'Δ τέμνονται κατὰ εὐθεῖαν κάθετον εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ τετραπλεύρου.

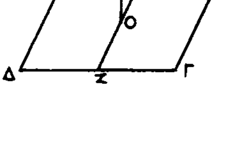
Ἀπόδειξις. Τὰ ἐπίπεδα ΑΑ'Γ'Γ, ΒΒ'Δ'Δ εἶναι κάθετα ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓΔ καὶ κατὰ συνέπειαν ἡ τομὴ αὐτῶν θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ΑΒΓΔ.

87. Ἐπὶ ἐπιπέδου Π δίδεται κύκλος διαμέτρου ΑΒ. Εἰς τὸ Α ὑψοῦμεν τὴν κάθετον ε ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Π. Ἔστω μία εὐθεῖα η, ἡ ὁποία τέμνει εἰς Β τὸ ἐπίπεδον Π καὶ Μ τυχὸν σημεῖον τῆς περιφερείας. Δείξατε ὅτι τὰ ἐπίπεδα τὰ ὁριζόμενα ἀπὸ τὸ σημεῖον Μ καὶ τὰς εὐθείας ε, η εἶναι κάθετα.



Ἀπόδειξις. Παρατηροῦμεν ὅτι $A\widehat{M}B=90°$. Ὅθεν $BM\perp AM$. Ἀλλὰ καὶ $BM\perp\varepsilon$. Ὅθεν ἡ ΒΜ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον (Μ,ε). Ἀλλὰ τότε τὸ ἐπίπεδον (Μ,η), ἐπειδὴ διέρχεται διὰ τῆς ΒΜ, θὰ εἶναι ἐπίσης κάθετον ἐπὶ τὸ (Μ,ε).

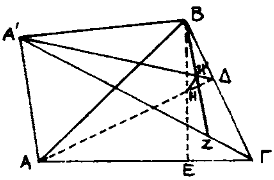
88. Δίδεται τετράγωνον ΑΒΓΔ πλευρᾶς α. Λαμβάνομεν σημεῖον Κ ὥστε $KA=KB=K\Gamma=K\Delta=\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$. Δείξατε ὅτι τὰ ἐπίπεδα ΚΑΒ, ΚΓΔ εἶναι κάθετα.



Ἀπόδειξις. Τὸ σημεῖον Κ προβάλλεται εἰς τὸ κέντρον Ο τοῦ τετραγώνου. Ἡ ἀκμὴ xy τῆς διέδρου γωνίας τῶν ἐπιπέδων ΚΑΒ, ΚΓΔ θὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὰς ΑΒ, ΓΔ. Ἡ ΚΟ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν xy. Θεωροῦμεν τὸ ἐπίπεδον διὰ τῆς ΚΟ τὸ κάθετον ἐπὶ τὴν xy. Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι $\widehat{EKZ}=90^\circ$. Ὑπολογίζομεν τὴν KZ: $KZ^2=K\Delta^2-\Delta Z^2=\frac{3a^2}{4}-\frac{a^2}{4}=\frac{a^2}{2}$. Ὅθεν καὶ $KE^2=\frac{a^2}{2}$. Συνεπῶς $EK^2+ZK^2=EZ^2$.

Ὁμὰς Β′

89. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Εἰς τὸ σημεῖον Α ὑψοῦμεν τὴν κάθετον ΑΑ′ ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ἐὰν Η,Η′ τὰ ὀρθόκεντρα τῶν ΑΒΓ καὶ Α′ΒΓ, δείξατε ὅτι $HH'\perp A'B\Gamma$.



Ἀπόδειξις. Θεωρήσωμεν τὸ διὰ τῆς ΑΑ′ κάθετον ἐπίπεδον ἐπὶ τὴν ΒΓ, ΑΔΑ′. ΑΔ καὶ Α′Δ τὰ ὕψη τῶν τριγώνων ΑΒΓ, Α′ΒΓ ἀντιστοίχως. Ἔστω $BE\perp A\Gamma$, $BZ\perp A'\Gamma$. Προφανῶς $HH'\perp B\Gamma$. Τὸ ἐπίπεδον Α′ΑΓ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ΑΒΓ. Ὅθεν $BE\perp A'A\Gamma$. Συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα τῶν τριῶν καθέτων καὶ $EZ\perp A'\Gamma$. Ἤτοι $A'\Gamma\perp BEZ$. Κατὰ συνέπειαν τὸ ἐπίπεδον $BEZ\perp BA'\Gamma$. Ὅθεν ἡ ΗΗ′ ὡς τομὴ τῶν καθέτων ἐπιπέδων ΑΑ′Δ, ΒΕΖ ἐπὶ τὸ Α′ΒΓ θὰ εἶναι κάθετος ἐπ' αὐτό.

Παρατήρησις. Μία ἀκόμη λύσις εἶναι δυνατὸν νὰ δοθῇ ὡς ἑξῆς: Εἶναι γνωστὸν ὅτι $B\Delta\cdot\Delta\Gamma=\Delta H'\cdot\Delta A'=\Delta H\cdot\Delta A$. Ἤτοι ΑΗΗ′Α′ ἐγγράψιμον, ὅθεν $\widehat{A'H'H}=1^L$. Ἀλλὰ καὶ $HH'\perp B\Gamma$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ

Ὁμὰς Α′.

90. Τὰ διχοτομοῦντα ἐπίπεδα δύο κατὰ κορυφὴν διέδρων συμπίπτουν.

91. Δύο παράλληλα ἐπίπεδα τέμνονται ὑπὸ τρίτου. Δείξατε ὅτι αἱ σχηματιζόμεναι δίεδροι εἶναι ἴσαι ἢ παραπληρωματικαί.

92. Δίδεται ὀρθὴ δίεδρος ἀκμῆς xy. Τὰ σημεῖα Α,Β ἐπὶ τῶν ἑδρῶν της. Φέρομεν τὰς ΑΑ′, ΒΒ′ καθέτους ἀντιστοίχως ἐπὶ τὴν xy. Ἐὰν $AA'=a$, $BB'=\beta$, $A'B'=\gamma$ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ΑΒ.

93. Δίδεται κύκλος (Ο,R). Ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς Ο ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου λαμβάνομεν τὸ σημεῖον Κ, ὥστε $OK=R$. Ἐὰν Μ,Μ′ δύο σημεῖα τῆς περιφερείας καὶ Τ,Τ′ αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς αὐτὰ ἀντιστοίχως, νὰ ὑπολογισθῇ ἡ δίεδρος τῶν ἐπιπέδων (Κ,Τ), (Κ,Τ') εἰς τὰς ἑξῆς περιπτώσεις: α) Μ,Μ' διαμετρικῶς ἀντίθετα, β) $\widehat{MOM'} = 90°$.

94. Δίδεται κανονικὸν ἡμιεξάγωνον ΑΒΓΔ (ΑΔ=2R). Εἰς τὸ σημεῖον Α ὑψοῦμεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς τὸ σημεῖον Κ, ὥστε ΑΚ=R. Ὑπολογίσατε τὸ μέτρον τῶν ὀκτὼ σχηματιζομένων διέδρων.

95. Δίδονται δύο εὐθεῖαι ε,η παράλληλοι πρὸς ἐπίπεδον Π καὶ μὴ παράλληλοι μεταξύ των. Ἐὰν Ρ,Σ ἐπίπεδα ἀντιστοίχως κάθετα ἐπὶ τῶν ε,η, δείξατε ὅτι ἡ τομὴ αὐτῶν εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ Π.

96. Θεωροῦμεν δύο ὀρθογωνίους εὐθείας ε,ε'. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἐπίπεδον διὰ τῆς ε κάθετον ἐπὶ τὴν ε' εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ πᾶν ἐπίπεδον διὰ τῆς ε'.

97. Δίδεται ὀρθογώνιον τρίγωνον ΑΒΓ ($\hat{A}=1^{L}$) καὶ σημεῖον Μ τοῦ χώρου, ὥστε ΜΑ=ΜΒ=ΜΓ. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ ἐπίπεδα ΜΒΓ καὶ ΑΒΓ εἶναι κάθετα.

98. Δίδεται δίεδρος (Π,Ρ) ἀκμῆς α. Διὰ τυχόντος σημείου Ο τῆς α φέρομεν κάθετον εὐθεῖαν η ἐπ' αὐτὴν κειμένην ἐπὶ τοῦ διχοτομοῦντος ἐπιπέδου τὴν δίεδρον. Δείξατε ὅτι κάθε ἐπίπεδον διὰ τῆς η τέμνει τὴν δίεδρον κατὰ γωνίαν xOy διχοτόμου η.

99. Δίδεται ἐπίπεδον Π, τὰ σημεῖα Α,Α' αὐτοῦ καὶ σημεῖον Ο τοῦ χώρου. Ἔστω ω καὶ ω' αἱ κλίσεις τῶν ΟΑ καὶ ΟΑ' ἀντιστοίχως πρὸς τὸ Π. Δείξατε ὅτι $OA<OA' \Leftrightarrow \omega>\omega'$.

100. Δίδονται δύο κάθετα ἐπίπεδα Π καὶ Ρ καὶ εὐθεῖα ε μὲ κλίσεις πρὸς τὰ ἐπίπεδα ἀντιστοίχως $1^{L}-\omega, 1^{L}-\varphi$. Ἐὰν Σ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ τὴν ε, δείξατε ὅτι τοῦτο σχηματίζει μετὰ τῶν Π καὶ Ρ γωνίας ω,φ ἀντιστοίχως.

101. Δύο ἰσόπλευρα τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'ΒΓ εἶναι τοποθετημένα, ὥστε ἡ δίεδρος ΒΓ νὰ εἶναι 45°. Νὰ ὑπολογισθῇ συναρτήσει τῆς πλευρᾶς α 1) τὸ εὐθ. τμῆμα ΑΑ', 2) ἡ ἀπόστασις τῶν εὐθειῶν ΒΓ καὶ ΑΑ'.

102. Ἐάν δύο εὐθεῖαι ε καὶ ε' προβάλλωνται ἐπὶ ἕκαστον ἐκ δύο τεμνομένων ἐπιπέδων Π καὶ Ρ κατά εὐθείας παραλλήλους, τότε καὶ αἱ εὐθεῖαι ε καὶ ε' θά εἶναι παράλληλοι. Ἀντιστρόφως.

103. Δίδεται δίεδρος Π,Ρ καὶ ἔστω ΓΑΔ μία κάθετος τομή αὐτῆς. Θεωροῦμεν τυχοῦσαν τομήν αὐτῆς ΕΑΖ διά τῆς ἡμιευθείας ΑΒ κειμένης εἰς τό ἐσωτερικόν τῆς γωνίας ΓΑΔ. Δείξατε ὅτι $\widehat{EAZ} > \widehat{\Gamma A\Delta}$.

Ὁμάς Β'.

104. Ἔστω ε καὶ ε' δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι τῶν ὁποίων αἱ προβολαί ἐπί ἐπιπέδου Π εἶναι εὐθεῖαι παράλληλοι. Θεωροῦμεν τό σύνολον G τῶν εὐθειῶν αἱ ὁποῖαι τέμνουν τάς ε,ε' καὶ εἶναι παράλληλοι πρός Π. Δείξατε ὅτι ἑκάστη εὐθεῖα τοῦ G τέμνει σταθεράν εὐθεῖαν η κάθετον ἐπί τό Π.

105. Τό τετράγωνον τοῦ ἐμβαδοῦ ἐπιπέδου ἐπιφανείας ἰσοῦται πρός τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν προβολῶν αὐτῆς ἐπί τρία ἐπίπεδα κάθετα ἀνά δύο.

106. Ἐπί τῶν ἑδρῶν Π,Ρ μιᾶς διέδρου γωνίας δίδονται τά σημεῖα Α,Β ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι, ἵνα ἡ ΑΒ εἶναι ἰσοκλινής πρός τάς ἕδρας τῆς διέδρου, πρέπει καὶ ἀρκεῖ αἱ ἀποστάσεις τῶν Α, Β ἀπό τήν ἀκμήν νά εἶναι ἴσαι.

107. Δείξατε ὅτι κάθε εὐθεῖα ἰσοκεκλιμένη πρός τάς ἕδρας μιᾶς διέδρου κεῖται ἐπί ἐπιπέδου παραλλήλου πρός τό διχοτομοῦν τήν δίεδρον ἤ τήν παραπληρωματικήν αὐτῆς. Τί παρατηρεῖτε διά τό ἄθροισμα ἤ τήν διαφοράν τῶν ἀποστάσεων τυχόντος σημείου τῆς ε ἀπό τάς ἕδρας τῆς διέδρου;

108. Δίδεται ἐπίπεδον Π καὶ εὐθεῖα ε αὐτοῦ. Τά σημεῖα Α,Β τοῦ ἐπιπέδου ἀπέχουν ἀπό τήν ε ἀποστάσεις $AA'=\alpha$, $BB'=\beta$. Εἰς τό σημεῖον Α ὑψοῦμεν ἐπί τό Π κάθετον $AK=\upsilon$. Ὑπολογίσατε τήν κοινήν κάθετον τῶν εὐθειῶν ΚΒ καὶ ε.

109. Δίδονται δύο ὀρθογώνιοι εὐθεῖαι ε, η καὶ ἡ κοινὴ κάθετος αὐτῶν $OI=\delta$. Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ε ἑκατέρωθεν τοῦ σημείου O σημεῖα A, B ὥστε $OA=\alpha$, $OB=\beta$. Συνδέομεν τὸ A μὲ τυχὸν σημεῖον M τῆς η. Δείξατε ὅτι: 1) εἰς ἕκαστον σημεῖον M τῆς η ἀντιστοιχεῖ ἓν σημεῖον N τῆς η, ὥστε $AM \perp BN$, 2) τὸ γινόμενον $IN \cdot IM$ παραμένει σταθερόν.

110. Δίδονται δύο ὀρθογώνιοι εὐθεῖαι ε, η καὶ $OI=\alpha$ ἡ κοινὴ κάθετος αὐτῶν. Ἐὰν τὸ σταθερὸν εὐθ. τμῆμα $MN=\lambda$ κινῆται, ὥστε τὰ ἄκρα του νὰ ὀλισθαίνουν ἐπὶ τῶν ε, η ἀντιστοίχως, δείξατε ὅτι: 1) ἡ MN σχηματίζει μετὰ τῆς OI σταθερὰν γωνίαν, 2) $OM^2 + ON^2 + IM^2 + IN^2 =$ σταθερόν.

111. Ἐπὶ ἐπιπέδου Π δίδεται τετράγωνον $AB\Gamma\Delta$, καὶ ἐπὶ τῶν κορυφῶν ὑψοῦμεν τὰς καθέτους $AA', BB', \Gamma\Gamma', \Delta\Delta'$ ἐπὶ τὸ Π. Ἐπὶ τῶν προεκτάσεων τῶν πλευρῶν $\Delta A, \Gamma B$ λαμβάνομεν $AI=\alpha$ καὶ $BK=\beta$. Ἐπίπεδον διὰ τῶν I, K τέμνει τὰς $AA', BB', \Gamma\Gamma', \Delta\Delta'$ εἰς τὰ σημεῖα $A_1, B_1, \Gamma_1, \Delta_1$ ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι: 1) τὸ τετράπλευρον $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$ εἶναι παραλληλόγραμμον, 2) $\frac{AA_1}{\alpha}=\frac{BB_1}{\beta}=\lambda$. 3) Νὰ εὑρεθοῦν αἱ πλευραὶ καὶ αἱ διαγώνιοι τοῦ παραλληλογράμμου συναρτήσει τῶν α, β, λ.

112. Δίδονται τρία ἐπίπεδα Π, P, Σ παράλληλα πρὸς τὴν αὐτὴν εὐθεῖαν ε. Ἐὰν ἐπίπεδον K σχηματίζῃ ἴσας γωνίας πρὸς τὰ τρία ἐπίπεδα Π, P, Σ, τοῦτο θὰ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ε.

113. Διὰ δοθείσης εὐθείας ε μεταβλητὸν ἐπίπεδον τέμνει δύο σταθερὰ ἐπίπεδα Π καὶ P κατὰ τὰς εὐθείας α, β ἀντιστοίχως. Διὰ τῶν α, β ἄγονται τὰ κάθετα ἐπὶ τὰ Π καὶ P ἐπίπεδα τεμνόμενα κατὰ τὴν η. Δείξατε ὅτι ἡ εὐθεῖα η συναντᾷ τρεῖς σταθερὰς εὐθείας.

114. Δίδονται δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι ε καὶ ε', ἐπὶ τῆς ε τὰ σημεῖα A, B, Γ ἐπὶ δὲ τῆς ε' τὰ σημεῖα A', B', Γ'. Νὰ δειχθῇ ὅτι ὅλαι αἱ εὐθεῖαι τοῦ χώρου αἱ διερχόμεναι διὰ σημείου P καὶ τέμνουσαι τὰ ζεύγη (AB', BA'), $(B\Gamma', \Gamma B')$, $(\Gamma A', A\Gamma')$ κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΠΕΜΠΤΟΝ

ΣΤΕΡΕΑΙ ΓΩΝΙΑΙ

ΟΡΙΣΜΟΙ. ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

1. Θεωρήσωμεν πολύγωνον $U = A_1A_2A_3 \cdots A_\nu$ ἐπὶ ἐπιπέδου Π. Σημεῖον Ο ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου. Ἐν σημεῖον Α διαγράφει τὴν περίμετρον τοῦ U. Ἡ ἡμιευθεῖα ΟΑ παράγει ἐπιφάνειαν S, ἥτις χωρίζει τὸν χῶρον εἰς δύο μέρη H_1, H_2. Ὑποθέσωμεν ὅτι ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ U περιέχονται ἐντὸς τοῦ H_1.

1.1. Ὁρισμός: ν-έδρου κυρτῆς πολυεδρικῆς (1) στερεᾶς γωνίας: $\Theta = (O.A_1A_2A_3 \cdots A_\nu) = H_1 \cup S$.

1.2. Κορυφή: τὸ σημεῖον Ο.

1.3. Ἀκμαί: αἱ ἡμιευθεῖαι $OA_1, OA_2, \ldots, OA_\nu$.

1.4. Ἕδραι: ἡ ἐπίπεδοι γωνίαι τῆς πολυέδρου: αἱ γωνίαι $A_1\widehat{O}A_2$, $A_2\widehat{O}A_3, \ldots, A_\nu\widehat{O}A_1$. (2)

1.5. Δίεδροι γωνίαι τῆς πολυέδρου: αἱ σχηματιζόμεναι ἀπὸ δύο διαδοχικὰς ἕδρας.

1.6. Διαγώνια ἐπίπεδα: τὰ ἐπίπεδα τὰ ὁποῖα διέρχονται ἀπὸ δύο μὴ διαδοχικὰς ἀκμάς.

1.7. Μὴ κυρτὴ στερεὰ γωνία: ἡ $\Theta' = H_2 \cup S$. Ἐφεξῆς θὰ ἀσχολούμεθα μόνον μὲ κυρτὰς γωνίας. Λέγοντες δὲ στερεὰν γωνίαν θὰ ἐννοῶμεν κυρτήν.

1.8. Διὰ πᾶσαν στερεὰν γωνίαν Θ: ἂν $A, B \in \Theta$ θὰ εἶναι καὶ $AB \in \Theta$.

2.1. Εἰς πᾶσαν ν-εδρον στερεὰν γωνίαν τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν της εἶναι μικρότερον τῶν 4 ὀρθῶν.

---

(1) Τὴν λέξιν πολυεδρικὴν θὰ τὴν παραλείπωμεν χάριν ἁπλότητος δεδομένου ὅτι ἀναφερόμεθα μόνον εἰς πολυεδρικὰς στερεὰς γωνίας.

(2) Τὸν ὅρον ἕδρα χρησιμοποιοῦμεν ἐπίσης, ὅταν θέλωμεν νὰ ὑποδηλώσωμεν τὸ ἐπίπεδον, ἐπὶ τοῦ ὁποίου εὑρίσκεται ἡ ἐν λόγω ἕδρα.

2.2. Εἰς πᾶσαν ν-έδρον στερεάν γωνίαν τὸ ἄθροισμα τῶν διέδρων της περιέχεται μεταξύ $2\nu-4$ καὶ 2ν ὀρθῶν.

2.3. Εἰς πᾶσαν ν-έδρον στερεάν γωνίαν ἑκάστη ἐπίπεδος αὐτῆς εἶναι μικροτέρα τοῦ ἀθροίσματος τῶν ὑπολοίπων.

3. Τρίεδρος στερεά γωνία $\Theta = (O.AB\Gamma)$.

Διά τῶν A, B, Γ παριστῶμεν τὰς διέδρους ἐπὶ τῶν ἀντιστοίχων ἀκμῶν· διά τῶν α, β, γ τάς ἐπιπέδους γωνίας $BO\Gamma, \Gamma OA, AOB$.

3.1. Ἰσότης. Δύο τρίεδροι θά λέγωνται ἴσαι, ὅταν μετατοπιζόμεναι καταλλήλως εἰς τόν χῶρον συμπίπτουν.(1)

3.2. Δύο τρίεδραι συμμετρικαί πρός ἐπίπεδον ἤ σημεῖον ἔχουν ὅλα τά στοιχεῖα των ἴσα, ἀλλά δέν εἶναι ἴσαι, δηλαδή διά μετατοπίσεως δέν συμπίπτουν.

3.3. Αἱ κατά κορυφήν τρίεδροι δέν εἶναι ἴσαι.

3.4. Δύο τρίεδροι εἶναι ἴσαι ἤ συμμετρικαί, ἐάν ἔχουν:

1) δύο ἕδρας ἴσας καί τήν περιεχομένην δίεδρον ἴσην·

2) ἀπό μίαν ἕδραν ἴσην καί τάς προσκειμένας διέδρους ἴσας·

3) τάς τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας ἴσας (ἕδρας)·

4) τάς τρεῖς διέδρους γωνίας ἴσας.

Παρατήρησις. Εἶναι δυνατόν νά ἀποκλείσωμεν τήν περίπτωσιν τῆς συμμετρικῆς τριέδρου, ἐάν λάβωμεν προσανατολισμένας τριέδρους.

4. Τρίεδροι παραπληρωματικαί.

Θεωρήσωμεν τήν τρίεδρον $\Theta' = (O.A'B'\Gamma')$ μέ OA' κάθετον ἐπί τήν ἕδραν $BO\Gamma$ καί πρός τό μέρος τοῦ ἐπιπέδου $BO\Gamma$, πρός τό ὁποῖον κεῖται ἡ OA, OB' κάθετον ἐπί τήν ΓOA καί πρός τό μέρος τοῦ ἐπιπέδου, πρός τό ὁποῖον κεῖται ἡ OB καί $O\Gamma'$ κάθετον ἐπί τήν AOB καί πρός τό μέρος τοῦ ἐπιπέδου πρός τό ὁποῖον κεῖται ἡ $O\Gamma$. Αἱ τρίεδροι Θ, Θ' ὀνομάζονται παραπληρωματικαί. Ἐάν παραστήσωμεν διά τῶν A', B', Γ' τάς διέδρους τῆς Θ' καί α', β', γ' τάς ἕδρας αὐτῆς, ὑφίστανται αἱ κάτωθι σχέσεις :

---

(1) Χάριν ἁπλότητος διά τήν ἰσότητα τῶν τριέδρων χρησιμοποιοῦμεν τήν ἐνορατικήν θέσιν. Διά τοῦ ὅρου δέ μετατόπισις ἐννοοῦμεν τό γινόμενον μεταφορῶν, στροφῶν καί ἀρτίου πλήθους συμμετριῶν.

$$A+\alpha' = 2^L \qquad \alpha + A' = 2^L$$
$$B+\beta' = 2^L \qquad \beta + B' = 2^L$$
$$\Gamma+\gamma' = 2^L \qquad \gamma + \Gamma' = 2^L.$$

5. Ἀνισοτικαὶ σχέσεις μεταξὺ τῶν στοιχείων τῆς αὐτῆς τριέδρου.

5.1. $2^L < A+B+\Gamma < 6^L$.

5.2. $A+2^L > B+\Gamma$.

5.3. $|\beta-\gamma| < \alpha < \beta+\gamma$.

6.1. Ἐὰν εἰς μίαν τρίεδρον αἱ δύο δίεδροι γωνίαι εἶναι ἴσαι, τότε καὶ αἱ ἀπέναντι αὐτῶν ἕδραι θὰ εἶναι ἐπίσης ἴσαι. Ἀντιστρόφως. Ἡ ἐν λόγῳ τρίεδρος ὀνομάζεται ἰσοσκελής.

6.2. Ἐὰν εἰς μίαν τρίεδρον δύο δίεδροι εἶναι ἄνισοι, καὶ αἱ ἀπέναντι ἕδραι εἶναι ἐπίσης ἄνισοι, ἀπέναντι δὲ τῆς μεγαλυτέρας διέδρου κεῖται ἡ μεγαλυτέρα ἕδρα. Ἀντιστρόφως.

6.3. Ἐὰν δύο τρίεδροι ἔχουν δύο ἕδρας ἴσας καὶ τὰς περιεχομένας διέδρους ἀνίσους θὰ ἔχουν τὰς τρίτας ἕδρας ἐπίσης ἀνίσους, ἀπέναντι δὲ τῆς μεγαλυτέρας διέδρου κεῖται ἡ μεγαλυτέρα ἕδρα.

7. Τρισορθογώνιος τρίεδρος.

7.1. Ὀνομάζεται ἡ τρίεδρος, τῆς ὁποίας ἑκάστη ἀκμὴ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τῶν δύο ἄλλων.

7.2. Διὰ τὴν τρισορθογώνιον τρίεδρον $\theta = (O.AB\Gamma)$, ὅπου A, B, Γ τυχόντα σημεῖα τῶν ἀκμῶν, ἰσχύουν τὰ κάτωθι θεωρήματα:

1) Ἡ προβολὴ H τῆς κορυφῆς O ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον $AB\Gamma$ εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου $AB\Gamma$.

2) Τὸ τρίγωνον $AB\Gamma$ εἶναι πάντοτε ὀξυγώνιον.

3) $(BO\Gamma)^2 = (BH\Gamma)(BA\Gamma)$.

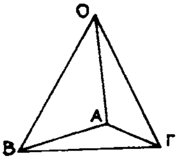
4) $(BO\Gamma)^2 + (\Gamma OA)^2 + (AOB)^2 = (AB\Gamma)^2$.

5) $\dfrac{1}{OH^2} = \dfrac{1}{OA^2} + \dfrac{1}{OB^2} + \dfrac{1}{O\Gamma^2}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμὰς Α'.

115. Εἰς τρίεδρον $(O.AB\Gamma)$ ἡ δίεδρος A εἶναι $90°$ καὶ αἱ $\beta = \gamma = 45°$. Ὑπολογίσατε τὴν ἐπίπεδον γωνίαν A.

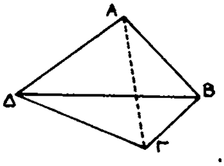


Λύσις. Θεωροῦμεν ὅτι τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ $\perp$ ΟΑ. Ἄρα $\widehat{BA\Gamma}=1^L$. Τὰ τρίγωνα ΟΒΑ, ΟΓΑ εἶναι ἴσα, διότι εἶναι ὀρθογώνια, ἔχουν τὴν ΟΑ κοινὴν καὶ τὰς ὀξείας $\widehat{AOB}=\widehat{AO\Gamma}=45°$. Ὅθεν ΑΒ=ΑΓ=ΟΑ καὶ ΟΒ=ΟΓ=ΟΑ$\sqrt{2}$. Τὸ τρίγωνον ΒΑΓ εἶναι ἐπίσης ὀρθογώνιον ἰσοσκελὲς ἤτοι ΒΓ=ΑΒ$\sqrt{2}$=ΟΑ$\sqrt{2}$, ἄρα τὸ τρίγωνον ΒΟΓ εἶναι ἰσόπλευρον. Ἤτοι $a=60°$.

116. Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζει τυχοῦσα εὐθεῖα μετὰ μιᾶς ἕδρας τρισορθογωνίου στερεᾶς γωνίας καὶ τῆς τρίτης ἀκμῆς, ἰσοῦται πρὸς μίαν ὀρθήν.

Λύσις. Ἔστω (Ο.ΑΒΓ) τρισορθογώνιος στερεὰ γωνία καὶ εὐθεῖα ε. Ἐκ τυχόντος σημείου Ρ τῆς ΟΑ φέρομεν τὴν παράλληλον πρὸς τὴν ε, ἥτις τέμνει τὴν ἕδραν ΒΟΓ εἰς Σ. Προφανῶς ἡ γωνία τῆς ε μετὰ τῆς ἕδρας ΒΟΓ εἶναι ἴση πρὸς τὴν $\widehat{O\Sigma P}$. Ἀλλὰ ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΡΟΣ ἔχομεν $\widehat{OP\Sigma}+\widehat{O\Sigma P}=1^L$.

117. Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν στρεβλοῦ τετραπλεύρου ΑΒΓΔ εἶναι μικρότερον τῶν τεσσάρων ὀρθῶν.



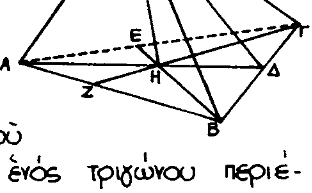
Λύσις. Θεωροῦμεν τὰς τριέδρους (Δ.ΑΒΓ), (Β.ΑΓΔ). Ἐκ τῆς πρώτης ἔχομεν $\widehat{A\Delta\Gamma}<\widehat{A\Delta B}+\widehat{\Gamma\Delta B}$· ἐκ τῆς δευτέρας $\widehat{AB\Gamma}<\widehat{AB\Delta}+\widehat{\Gamma B\Delta}$.

Προσθέτομεν τὰς δύο σχέσεις

$$\widehat{A\Delta\Gamma}+\widehat{AB\Gamma}<\widehat{A\Delta B}+\widehat{AB\Delta}+\widehat{\Gamma B\Delta}+\widehat{\Gamma\Delta B}.$$

Εἰς ἀμφότερα τὰ μέλη προσθέτομεν τὸ ἄθροισμα $\widehat{\Delta AB}+\widehat{\Delta\Gamma B}$· εἰς τὸ δεύτερον μέλος τῆς ἀνισώσεως θὰ ἔχωμεν τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τῶν τριγώνων ΔΑΒ, ΔΓΒ, ἤτοι 4^L.

118. Νὰ ἀποδειχθῇ ἡ πρότασις 7.2.



Ἀπόδειξις. 1) ΟΑ$\perp$ΒΓ, ΟΗ$\perp$ΒΓ, συνεπῶς καὶ ΑΟΗ$\perp$ΒΓ ἤτοι ΒΓ$\perp$ΑΗ. Ὅθεν ΑΗ ἓν τῶν ὑψῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ὁμοίως διὰ τὴν ΒΗ.

2) Προφανῶς ΟΔ$\perp$ΒΓ. Ἐπειδὴ ὅμως τὸ τρίγωνον ΒΟΓ εἶναι ὀρθογώνιον, τὸ Δ θὰ περιέχεται μεταξὺ Β, Γ. Ἄρα τὸ Η ἐντὸς τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Ὅταν ὅμως τὸ ὀρθόκεντρον ἑνὸς τριγώνου περιέ-

χεται ἐντός αὐτοῦ, τό τρίγωνον εἶναι ὀξυγώνιον. (Διατί;) Τό αὐτό ἰσχύει καί διά τό κέντρον τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας. Διατί;)

3) Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΟΔ ($ΑΟ \perp ΟΔ$) ἔχομεν

$ΟΔ^2 = ΔΗ \cdot ΔΑ$ ἤ $\frac{ΟΔ^2 \cdot ΒΓ^2}{4} = \frac{ΔΗ \cdot ΒΓ}{2} \cdot \frac{ΔΑ \cdot ΒΓ}{2}$ ἤ $(ΒΟΓ)^2 = (ΒΗΓ)(ΒΑΓ)$ (1)

4) Διά κυκλικῆς ἐναλλαγῆς τῶν Α, Β, Γ ἐκ τῆς (1) λαμβάνομεν ἀκόμη τούς τύπους:

$$(ΓΟΑ)^2 = (ΓΗΑ)(ΓΒΑ) \quad (2), \quad (ΑΟΒ)^2 = (ΑΗΒ)(ΑΓΒ) \quad (3).$$

Προσθέτομεν τάς (1), (2) καί (3)

$$(ΒΟΓ)^2 + (ΓΟΑ)^2 + (ΑΟΒ)^2 = (ΑΒΓ)\left[(ΒΗΓ) + (ΓΗΑ) + (ΑΗΒ)\right] = (ΑΒΓ)^2.$$

5) Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου ΑΟΔ ἔχομεν

$$\frac{1}{ΟΗ^2} = \frac{1}{ΟΑ^2} + \frac{1}{ΟΔ^2}.$$

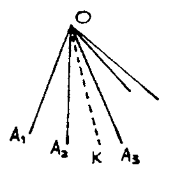
Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΒΟΓ ἔχομεν

$$\frac{1}{ΟΔ^2} = \frac{1}{ΟΒ^2} + \frac{1}{ΟΓ^2}.$$

Προσθέτομεν κατά μέλη καί προκύπτει ἡ ζητουμένη σχέσις.

119. Νά ἀποδειχθῇ ἡ πρότασις 2.2.

Ἀπόδειξις. Ἔστω $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_\nu$ αἱ δίεδροι.



Προφανῶς $A_1 < 2^L$

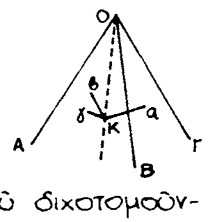
$A_2 < 2^L$

ἤτοι $A_1 + A_2 + \cdots + A_\nu < 2\nu^L$.

$A_\nu < 2^L$

Διά τό ἕτερον σκέλος τῆς ἀνισώσεως θεωροῦμεν ἡμιευθεῖαν ΟΚ ἐντός τοῦ πολυέδρου. Σχηματίζονται αἱ τρίεδροι OA_1KA_2, $OA_2KA_3, \ldots, OA_\nu KA_1$. Δι' ἑκάστην τό ἄθροισμα τῶν διέδρων εἶναι μεγαλύτερον τῶν 2^L. Ἄρα διά τό σύνολον S τῶν διέδρων τῶν ἐν λόγῳ τριέδρων θά ἔχωμεν $S > 2\nu^L$. Ἀλλά $S = A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_\nu + 4^L$ δεδομένου ὅτι τό ἄθροισμα τῶν διέδρων γωνιῶν μέ ἀκμήν τήν ΟΚ εἶναι 4^L, ἤτοι $A_1 + A_2 + \cdots + A_\nu + 4^L > 2\nu^L$ κ.τ.λ.

120. Εἰς πᾶσαν τρίεδρον τά διχοτομοῦντα ἐπίπεδα τάς διέδρους διέρχονται διά τῆς αὐτῆς εὐθείας.



Ἀπόδειξις. Θεωρήσωμεν τά διχοτομοῦντα ἐπίπεδα τάς διέδρους Α, Β. Τέμνονται κατά εὐθεῖαν ΟΚ δεδομένου ὅτι ἔχουν κοινόν σημεῖον το Ο. Τό σημεῖον Κ ὡς ἀνῆκον εἰς τό διχοτομοῦν ἐπίπεδον τήν δίεδρον Α, ἀπέχει ἴσον ἀπό τάς ἕδρας αὐτῆς, ἤτοι Κβ=Κγ. Ἐπίσης ὡς σημεῖον τοῦ διχοτομοῦντος ἐπιπέδου τὴν δίεδρον Β ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰς ἕδρας αὐτῆς, ἤτοι $K\gamma = K\alpha$. Ὅθεν $K\alpha = K\beta$. Ἄρα τὸ σημεῖον Κ εὑρίσκεται καὶ ἐπὶ τοῦ διχοτομοῦντος ἐπιπέδου τὴν δίεδρον Γ.

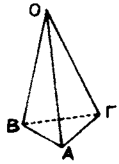
Παρατήρησις. Ἡ μέθοδος διὰ τὴν ἀπόδειξιν εἶναι ἡ αὐτὴ μὲ τὴν μέθοδον δι' ἧς ἀποδεικνύομεν ὅτι αἱ διχοτόμοι, μεσοκάθετοι κ.τ.λ. ἑνὸς τριγώνου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. Βασικῶς γίνεται χρῆσις στοιχειωδῶν γεωμετρικῶν τόπων.

Ἀποδείξατε ὡς ἐφαρμογὴν ὅτι εἰς πᾶσαν τρίεδρον τὰ διχοτομοῦντα ἐπίπεδα τὰς παραπληρωματικὰς δύο διέδρων καὶ τὸ διχοτομοῦν ἐπίπεδον τὴν τρίτην διέρχονται διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας.

Ὁμὰς Β'.

121. Εἰς τρίεδρον (Ο.ΑΒΓ) εἶναι δίεδρος $A = 1^{L}$.(1) Δείξατε ὅτι ἡ τομὴ τῆς τριέδρου ὑπὸ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τυχοῦσαν ἀκμὴν εἶναι ὀρθογώνιον τρίγωνον.

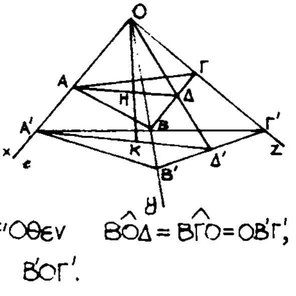
Ἀπόδειξις. Ἐὰν τὸ ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΑ, εἶναι προφανές. Ἔστω ὅτι $AB\Gamma \perp OB$. Ἄρα $OBA \perp AB\Gamma$, διότι ΟΒΑ διέρχεται διὰ τῆς $OB \perp AB\Gamma$. Ἀλλὰ $OBA \perp AO\Gamma$ ἐξ ὑποθέσεως. Ὅθεν ἡ τομὴ τῶν ΑΒΓ, ΑΟΓ θὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ ΟΒΑ, ἤτοι $A\Gamma \perp OBA$, ὅπερ συνεπάγεται καὶ $\widehat{BA\Gamma} = 1^{L}$.



Ἐλέγξατε ἐὰν ἰσχύῃ τὸ ἀντίστροφον.

122. Ἐπὶ τῶν ἀκμῶν Ox, Oy, Oz τρισορθογωνίου στερεᾶς γωνίας (O.xyz) λαμβάνομεν τὰ σημεῖα Α, Α' - Β, Β' - Γ, Γ', ὥστε $OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = O\Gamma \cdot O\Gamma'$. Δείξατε ὅτι ἡ ἐκ τοῦ Ο κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου βάρους τοῦ τριγώνου Α'Β'Γ'.

Ἀπόδειξις. Ἔστω $OH \perp AB\Gamma$. Τὸ σημεῖον Η εἶναι ὡς γνωστὸν τὸ ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. $O\Delta \perp B\Gamma$, διότι $B\Gamma \perp AOH$. Ἀρκεῖ νὰ δείξωμεν ὅτι ἡ ΟΔ τέμνει τὴν Β'Γ' εἰς τὸ μέσον. Ἐκ τῆς σχέσεως $OB \cdot OB' = O\Gamma \cdot O\Gamma'$ προκύπτει τὸ συμπέρασμα ὅτι τὸ τετράπλευρον ΒΓΓ'Β' εἶναι ἐγγράψιμον. Ὅθεν $\widehat{BO\Delta} = \widehat{B\Gamma O} = \widehat{OB'\Gamma'}$, ἄρα ΟΔ' διάμεσος τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου Β'ΟΓ'.

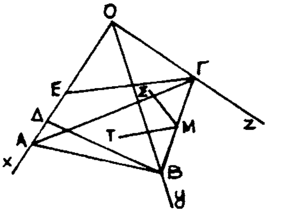


---

(1) Ἡ ἐν λόγῳ τρίεδρος συνήθως ὀνομάζεται ὀρθογώνιος.

123. Ἐπὶ τῶν ἀκμῶν Ox, Oy, Oz τριέδρου (O.xyz) στερεᾶς γωνίας λαμβάνομεν τὰ σημεῖα Α, Β, Γ ἀντιστοίχως, ὥστε (ΒΟΓ)=(ΓΟΑ)==(ΑΟΒ). Δείξατε ὅτι τὰ διχοτομοῦντα ἐπίπεδα τὰς διέδρους διέρχονται διὰ τῶν μέσων τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

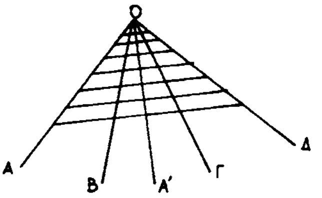
Ἀπόδειξις. (ΑΟΒ)=(ΑΟΓ) ἢ $\frac{ΟΑ\cdot ΒΔ}{2}=\frac{ΟΑ\cdot ΓΕ}{2}$ ἢ ΒΔ=ΓΕ, ὅθεν ἡ ΒΓ ἰσοκλινὴς πρὸς τὰς ἕδρας τῆς διέδρου Α. Ἔστω Μ τὸ μέσον τῆς ΒΓ. Φέρομεν τὰς καθέτους ΜΤ, ΜΣ ἐπὶ τῶν ἑδρῶν τῆς Α. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΜΤΒ, ΜΣΓ εἶναι ἴσα, διότι ΒΜ=ΓΜ καὶ $\widehat{ΜΒΤ}=\widehat{ΜΓΣ}$. Ἄρα τὸ σημεῖον Μ ὡς ἀπέχον ἐξ ἴσου ἀπὸ τὰς ἕδρας τῆς Α κεῖται ἐπὶ τοῦ διχοτομοῦντος ἐπιπέδου ταύτην.



Παρατήρησις. Τὸ πρόβλημα αὐτὸ δύναται νὰ λυθῇ ἐπίσης ἁπλῶς διὰ τῶν ὄγκων τῶν τετραέδρων (Μ.ΑΒΟ), (Μ.ΑΓΟ).

124. Θεωροῦμεν τὴν τρίεδρον (Ο.ΑΒΓ). Ἔστω ΟΑ′ ἡ διχοτόμος τῆς ἕδρας ΒΟΓ. Δείξατε ὅτι $\widehat{ΑΟΑ'} \lesseqgtr \frac{β+γ}{2}$, καθ' ὅσον ἡ $\widehat{ΑΟΑ'}$ εἶναι ὀξεῖα, ὀρθὴ ἢ ἀμβλεῖα.

Ἀπόδειξις. Ἔστω $\widehat{ΑΟΑ'}=ω$ καὶ (Ο.ΔΑ′Γ) ἡ συμμετρικὴ τρίεδρος τῆς (Ο.ΑΑ′Β) πρὸς ΟΑ′. Προφανῶς $γ=\widehat{ΓΟΔ}$. Θέτομεν $α'=\widehat{Α'ΟΔ}$.



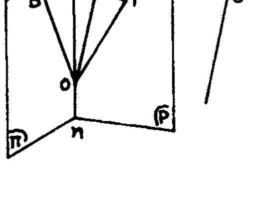
1ª περίπτωσις: $α'<90°$ ὅτε $\widehat{ΑΟΔ}==2α'<180°$ καὶ $\widehat{ΑΟΔ}<\widehat{ΑΟΓ}+\widehat{ΓΟΔ}$ ἢ $2α'<β+γ$.

2ª περίπτωσις: $α'=90°$. Αἱ ΟΑ, ΟΔ κεῖνται ἐπ' εὐθείας ἄρα $\widehat{ΑΟΔ}==\widehat{ΑΟΓ}+\widehat{ΓΟΔ}=2^L$ ἢ $2α'=β+γ$.

3ª περίπτωσις: $\widehat{ΑΟΔ}=4^L-2α'$ (λαμβάνομεν τὴν κυρτὴν γωνίαν). Ἀπὸ τὴν σχέσιν $\widehat{ΑΟΔ}+\widehat{ΑΟΓ}+\widehat{ΓΟΔ}\leqslant 4^L$ προκύπτει $4^L-2α'+β+γ\leqslant 4^L$.

125. Ἡ διαφορὰ τῶν γωνιῶν, ποὺ σχηματίζει τυχοῦσα εὐθεῖα μὲ δύο ἐπίπεδα, εἶναι μικροτέρα ἢ τὸ πολὺ ἴση πρὸς τὴν ὀξεῖαν γωνίαν τῶν ἐπιπέδων.

Ἀπόδειξις. Ἐκ τυχόντος σημείου Ο τῆς τομῆς η τῶν δύο ἐπιπέδων ἄγεται ἡ ΟΑ∥ε. Θεωροῦμεν τὴν δίεδρον η ἡ ὁποία περιέχει τὴν ΟΑ. Ἔστω $x=\widehat{ΑΟΒ}$, $y=\widehat{ΑΟΓ}$ αἱ γωνίαι, τὰς ὁποίας σχηματίζει ἡ ΟΑ μετὰ τῶν Π, Ρ. $2^L-\widehat{ΒΑΓ}=θ$



ἡ γωνία τῶν δύο ἐπιπέδων. Ἐκ τῆς τριέδρου (Α.ΒΟΓ) ἔχομεν $|\widehat{BAO}-\widehat{\Gamma AO}| \leq \widehat{BA\Gamma} \leq \widehat{BAO}+\widehat{\Gamma AO}$ ἢ $|x-y| \leq 2^{L}-\theta \leq 2^{L}-(x+y)$. Ἐάν $\theta<1^{L}$ ἡ δευτέρα ἀνισότης δίδει $x+y \leq \theta$ καὶ κατὰ μείζονα λόγον $|x-y| \leq \theta$. Ἐάν $\theta>1^{L}$ ὅτε ἡ ὀξεῖα γωνία τῶν ἐπιπέδων εἶναι $2^{L}-\theta$, ἡ πρώτη ἀνισότης ἀποδεικνύει τὸ πρόβλημα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ

Ὁμὰς Α΄.

126. Εἰς κάθε τρίεδρον στερεὰν γωνίαν μία τοὐλάχιστον ἕδρα εἶναι μικροτέρα τῶν 120°. Τοὐλάχιστον μία δίεδρος εἶναι μεγαλυτέρα τῶν 60°.

127. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐξωτερικῶν διέδρων πολυέδρου στερεᾶς γωνίας εἶναι μικρότερον τῶν 4^{L}.

128. Μία πολύεδρος στερεὰ γωνία δύναται νὰ ἔχῃ τὸ πολὺ τρεῖς ἕδρας ἀμβλείας καὶ τὸ πολὺ τρεῖς διέδρους ὀξείας.

129. Εἰς πᾶσαν ἰσοσκελῆ τρίεδρον τὸ διχοτομοῦν ἐπίπεδον τῆς διέδρου τῆς σχηματιζομένης ἀπὸ τὰς ἴσας ἕδρας, εἶναι κάθετον εἰς τὴν ἀπέναντι ἕδραν καὶ διέρχεται διὰ τῆς διχοτόμου αὐτῆς. Ἀντιστρόφως.

130. Εἰς τρίεδρον (Ο.ΑΒΓ) $a=90°$, $B=\Gamma=135°$. Νὰ ὑπολογισθῇ ἡ δίεδρος Α. (Θεωρήσατε τὴν παραπληρωματικὴν τρίεδρον).

131. Ἔστω Η τὸ ὀρθόκεντρον ὀξυγωνίου τριγώνου ΑΒΓ. Εἰς τὸ σημεῖον Η ὑψοῦμεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς Ο, ὥστε $HO^2=HA \cdot H\Delta$. ($A\Delta$=ὕψος). Δείξατε ὅτι ἡ τρίεδρος Ο.ΑΒΓ εἶναι τρισορθογώνιος.

132. Εἰς πᾶσαν τρίεδρον διέρχονται διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας:

α) τὰ διχοτομοῦντα ἐπίπεδα τὰς διέδρους·

β) τὰ διχοτομοῦντα ἐπίπεδα τὰς παραπληρωματικὰς δύο διέδρων καὶ τὸ διχοτομοῦν τὴν τρίτην δίεδρον·

γ) τὰ ἐπίπεδα τὰ ὁριζόμενα ἐξ ἑκάστης ἀκμῆς καὶ τῆς διχοτόμου τῆς ἔναντι ἕδρας·

δ) τὰ διερχόμενα διὰ τῆς διχοτόμου ἑκάστης ἕδρας καὶ κάθετα ἐπ' αὐτήν.

Ἀναφέρατε τὰς χαρακτηριστικὰς ἰδιότητας τῶν εὐθειῶν τομῆς εἰς ἑκάστην τῶν ἀνωτέρω περιπτώσεων.

133. Ἀνισωτικαὶ σχέσεις εἰς τὰς τριέδρους.

α) Ἐὰν $\alpha<\beta<\gamma$ καὶ $A<B<\Gamma$. Ἀντιστρόφως.

β) Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζει εὐθεῖα μὲ δύο κάθετα ἐπίπεδα, εἶναι μικρότερον ἢ ἴσον πρὸς μίαν ὀρθήν. (Ἡ περίπτωσις ἰσότητος;)

γ) Ἐὰν ΟΡ ἡμιευθεῖα ἐντὸς τῆς τριέδρου (Ο.ΑΒΓ) καὶ $A,B,\Gamma<1^L$ τότε θὰ εἶναι $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}<\widehat{P O A}+\widehat{P O B}+\widehat{P O \Gamma}<\alpha+\beta+\gamma$.

134. Δίδεται τρίεδρος (Ο.ΑΒΓ). Ἐὰν ἡ ΟΑ σχηματίζῃ μετὰ τῆς διχοτόμου ΟΔ τῆς ἀπέναντι ἕδρας γωνίαν ἴσην πρὸς τὸ ἥμισυ τῆς ἕδρας αὐτῆς, τότε $\Gamma=A+B$. Ἀντιστρόφως.

135. Τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζει ἐπίπεδον μὲ δύο ὀρθογωνίους εὐθείας, εἶναι μικρότερον ἢ τὸ πολὺ ἴσον πρὸς μίαν ὀρθήν.

136. Τέσσερα ἐπίπεδα τέμνονται ἀνὰ δύο χωρὶς νὰ διέρχωνται ἀνὰ τρία διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας. Νὰ εὑρεθῇ εἰς πόσα μέρη χωρίζουν τὸν χῶρον.

Ὁμὰς Β'.

137. Δίδονται δύο τρίεδροι παραπληρωματικαὶ (Ο.ΑΒΓ),(Ο.Α'Β'Γ'). Δείξατε ὅτι: 1) τὰ ἐπίπεδα ΑΟΑ', ΒΟΒ', ΓΟΓ' διέρχονται διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας ΟΡ 2) τὰ ζεύγη τῶν ἐπιπέδων (ΟΒΓ,ΟΒ'Γ'), (ΟΓΑ, ΟΓ'Α'), (ΟΑΒ,ΟΑ'Β') τέμνονται κατὰ τρεῖς εὐθείας κειμένας ἐπὶ ἐπιπέδου καθέτου πρὸς τὴν ΟΡ.

138. Ἔστω Ου ἡμιευθεῖα ἐντὸς τῆς τριέδρου (Ο.ΑΒΓ). Τὰ ἐπίπεδα ΟυΑ, ΟυΒ, ΟυΓ τέμνουν ἀντιστοίχως τὰς ἀπέναντι ἕδρας ΟΒΓ, ΟΓΑ, ΟΑΒ κατὰ τὰς εὐθείας ΟΑ', ΟΒ', ΟΓ'. Δείξατε ὅτι: 1) τὰ ἐπίπεδα ΟΒ'Γ', ΟΓ'Α', ΟΑ'Β' τέμνουν ἀντιστοίχως τὰ ἐπίπεδα ΟΒΓ, ΟΓΑ, ΟΑΒ κατὰ τὰς εὐθείας ΟΑ", ΟΒ", ΟΓ" κειμένας ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου· 2) ἡ δέσμη (ΟΒ,ΟΓ,ΟΑ',ΟΑ") εἶναι ἁρμονική· 3) τὰ ἐπίπεδα ΟΑΑ″, ΟΒΒ″, ΟΓΓ″ διέρχονται διά τῆς αὐτῆς εὐθείας.

139. Εἰς πᾶσαν τρίεδρον διέρχονται διά τῆς αὐτῆς εὐθείας:

α) τά ἐπίπεδα τά διερχόμενα δι' ἑκάστης ἀκμῆς καί κάθετα ἐπί τήν ἀπέναντι ἕδραν·

β) τά ἐπίπεδα τά διερχόμενα διά τῶν διχοτόμων τῶν παραπληρωματικῶν γωνιῶν τῶν δύο ἑδρῶν καί κάθετα πρός αὐτάς ἀντιστοίχως καί τό ἐπίπεδον τό διερχόμενον διά τῆς διχοτόμου τῆς τρίτης ἕδρας καί κάθετον ἐπ' αὐτήν.

Ἀναφέρατε τάς χαρακτηριστικάς ἰδιότητας τῶν εὐθειῶν τομῆς εἰς ἑκάστην τῶν ἀνωτέρω περιπτώσεων.

140. Τό ἄθροισμα τῶν γωνιῶν, τάς ὁποίας σχηματίζει ἑκάστη ἀκμή μετά τῆς ἀπέναντι ἕδρας, περιέχεται μεταξύ τοῦ ἀθροίσματος καί τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν ἑδρῶν.

141. Τρίεδρος μέ δύο ἕδρας παραπληρωματικάς. Ἔστω ἡ τρίεδρος (Ο.ΑΒΓ) καί Ου ἡ διχοτόμος τῆς ἕδρας γ. Ἐπί τῶν ΟΑ, ΟΒ λαμβάνομεν τά σημεῖα Κ, Ρ ὥστε ΟΚ=ΟΡ. Ἐάν Κ′, Ρ′ αἱ προβολαί τῶν Κ, Ρ ἐπί τήν ΟΓ, 1) δείξατε ὅτι αἱ κάτωθι σχέσεις εἶναι ἰσοδύναμοι: α) $\alpha+\beta=\pi$, β) $A+B=\pi$, γ) $Ou\perp O\Gamma$, δ) $\overline{OK'}+\overline{OP'}=0$. 2) Ὑποτίθεται ὅτι ὑφίσταται μία τῶν ἀνωτέρω σχέσεων. Δείξατε ὅτι τό ἐπίπεδον ΟuΓ διχοτομεῖ τήν δίεδρον Γ. 3) Ἐάν K_1 τό συμμετρικόν τοῦ Κ σχετικῶς πρός τό ἐπίπεδον ΟuΓ, δείξατε ὅτι $KP^2 = KK_1^2 + K'P'^2$.

142. Τρίεδρος ἰσοεδρος [1] (τρίεδρος μέ ἴσας ἕδρας). Δείξατε: 1) Ἡ ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα τρίεδρος εἶναι ἰσοεδρος, εἶναι ὅπως αἱ δίεδροι αὐτῆς εἶναι ἴσαι. 2) Ἐάν α τό μέτρον τῶν ἑδρῶν, ἡ δίεδρος Α δίδεται ἀπό τήν σχέσιν $\sigma\upsilon\nu A=\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu\alpha}$.

143. Εἰς κάθε ὀρθογώνιον τρίεδρον τό πλῆθος τῶν ἑδρῶν τῶν μικροτέρων τῆς ὀρθῆς εἶναι περιττός ἀριθμός.

144. Ἡ διαφορά τῶν γωνιῶν, τάς ὁποίας σχηματίζει ἐπίπεδον

---

(1) Ἀναφέρεται εἰς τό μεγαλύτερον μέρος τῆς βιβλιογραφίας ὡς ἰσόπλευρος.

μετά δύο δοθεισῶν εὐθειῶν, εἶναι μικροτέρα ἤ τό πολύ ἴση πρός τήν ὀξεῖαν γωνίαν αὐτῶν.

145. Ἐπί ἐπιπέδου Π δίδεται κύκλος, εἰς τό κέντρον Ο δέ αὐτοῦ ὑψοῦμεν τήν κάθετον ΟΡ. 1) Ἄν ΑΒΓΔ τυχόν ἐγγεγραμμένον εἰς τόν κύκλον Ο τετράπλευρον, διά τήν τετράεδρον στερεάν γωνίαν (Ρ.ΑΒΓΔ) τό ἄθροισμα τῶν δύο ἀπέναντι διέδρων εἶναι ἴσον πρός τό ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων. 2) Ἄν ΑΒΓΔ τυχόν περιγεγραμμένον περί τόν κύκλον Ο τετράπλευρον, διά τήν (Ρ.ΑΒΓΔ) τό ἄθροισμα τῶν δύο ἀπέναντι ἑδρῶν εἶναι ἴσον πρός τό ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΚΤΟΝ

ΠΟΛΥΕΔΡΑ. ΠΡΙΣΜΑΤΑ

ΟΡΙΣΜΟΙ. ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

1. Πολύεδρον: στερεόν περατούμενον ἐπὶ ἐπιπέδων πολυγώνων.

1.1. Στοιχεῖα ἑνὸς πολυέδρου.

Ἕδραι. Ἀκμαί. Κορυφαί. Δίεδροι γωνίαι. Πολύεδροι στερεαὶ γωνίαι. Διαγώνιος: κάθε εὐθ. τμῆμα, τὸ ὁποῖον συνδέει δύο κορυφὰς μὴ κειμένας ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Διαγώνια ἐπίπεδα: τὰ ἐπίπεδα τὰ ὁποῖα διέρχονται διὰ τριῶν κορυφῶν μὴ κειμένων ἐπὶ τῆς αὐτῆς ἕδρας.

1.2. Ὀνομασία πολυέδρου.

Εἴτε διὰ τοῦ πλήθους τῶν ἑδρῶν (τετράεδρον...)

Εἴτε διὰ τῆς μεθόδου κατασκευῆς (πρίσμα...)

1.3. Πολύεδρον F καλεῖται κυρτόν, ἂν διὰ κάθε $A, B \in F$ καὶ $AB \in F$. Αἱ ἕδραι κυρτοῦ πολυέδρου εἶναι κυρτὰ πολύγωνα. Ἡ τομὴ κυρτοῦ πολυέδρου καὶ ἐπιπέδου εἶναι κυρτὸν πολύγωνον. Ἐὰν F_1, F_2 κυρτὰ πολύεδρα, καὶ $F_1 \cap F_2$ ἐπίσης κυρτόν. Εὐθεῖα δὲν δύναται νὰ τέμνῃ τὴν ἐπιφάνειαν κυρτοῦ πολυέδρου εἰς περισσότερα τῶν δύο σημεῖα. Ἐφ' ἑξῆς ἀσχολούμεθα μόνον μὲ κυρτὰ πολύεδρα καὶ χάριν ἁπλότητος συνήθως θὰ παραλείπωμεν τὴν λέξιν "κυρτόν", εἰ μὴ μόνον, ὅταν θέλωμεν νὰ δώσωμεν ἔμφασιν εἰς τὴν κυρτότητα.

2. Πρίσματα.

2.1. Πρισματικὴ ἐπιφάνεια.

Δίδεται πολύγωνον $G = (A_1 A_2 A_3 \cdots A_\nu)$ ἐπίπεδον ἢ στρεβλόν. Εὐθεῖα ε (μὴ παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον τοῦ πολυγώνου G, ἐὰν τοῦτο εἶναι ἐπίπεδον σχῆμα). Σημεῖον P τῆς περιμέτρου τοῦ G. Ἔστω Pn ἡ παράλληλος πρὸς ε. Ἐὰν P διαγράφῃ τὴν περίμετρον τοῦ πολυγώνου G, ἡ Pn γεννᾷ μίαν ἐπιφάνειαν, ἥτις καλεῖται πρισματική.

2.2. Πρίσμα.

Τὸ στερεὸν τὸ ὁποῖον περατοῦται εἰς μίαν πρισματικὴν ἐπιφάνειαν καὶ δύο ἐπιπέδους παραλλήλους τομὰς αὐτῆς (βάσεις τοῦ πρίσματος). Ἐὰν αἱ τομαὶ δὲν εἶναι παράλληλοι, τὸ στερεὸν ὀνομάζεται κολοβὸν πρῖσμα.

2.3. Κάθετος τομὴ πρισματικῆς ἐπιφανείας.

Ἡ τομὴ ὑπὸ ἐπιπέδου καθέτου πρὸς τὴν διεύθυνσιν τῶν ἀκμῶν.

2.4. Ὀρθὸν πρῖσμα.

Ὅταν ἡ παράπλευρος ἀκμὴ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν.

2.5. Κανονικὸν πρῖσμα.

Βάσις κανονικὸν πολύγωνον.

2.6. Ὄγκος πρίσματος. Τὸ γινόμενον τῆς βάσεως ἐπὶ τὸ ὕψος ἢ ἡ κάθετος τομὴ ἐπὶ τὴν παράπλευρον ἀκμήν. Διὰ τὸ τριγωνικὸν πρῖσμα, ἐὰν E_1 μία παράπλευρος ἕδρα καὶ $υ_1$ ἡ ἀπόστασις τῆς ἀπέναντι ἀκμῆς, ἀκόμη ἔχομεν : ὄγκος $= \frac{1}{2} E_1 \cdot υ_1$.

2.7. Ὁ ὄγκος κολοβοῦ πρίσματος ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ μέσου ἀριθμητικοῦ τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν ἐπὶ τὴν κάθετον τομήν.

Διὰ τὸ τριγωνικὸν κολοβὸν πρῖσμα παρατηροῦμεν ὅτι ὁ μέσος ἀριθμητικὸς τῶν ἀκμῶν ἰσοῦται πρὸς τὴν ἀπόστασιν τῶν δύο κέντρων βάρους τῶν βάσεων.

3. Παραλληλεπίπεδον.

3.1. Πρῖσμα τοῦ ὁποίου αἱ βάσεις εἶναι παραλληλόγραμμα.

3.2. Αἱ διαγώνιοι παραλληλεπιπέδου διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, τὸ ὁποῖον διχοτομεῖ ἑκάστην.

3.3. Ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον. Ὀρθὸν παραλληλεπίπεδον μὲ βάσεις ὀρθογώνια

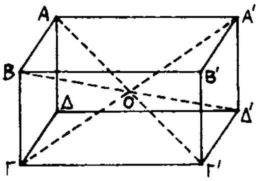
3.4. Ἐὰν $α, β, γ$ τρεῖς ἀκμαὶ διὰ τῆς αὐτῆς κορυφῆς καὶ d ἡ διαγώνιος, τότε $d^2 = α^2 + β^2 + γ^2$.

3.5. Κύβος. Ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον μὲ ἕδρας τετράγωνα. Ἐὰν $α$ ἡ ἀκμή, ἡ διαγώνιος $d = α\sqrt{3}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμὰς Α'.

146. Ἐὰν παραλληλεπιπέδου αἱ διαγώνιοι εἶναι ἴσαι θὰ εἶναι κατ' ἀνάγκην ὀρθογώνιον.



Ἀπόδειξις. Ἔστω Ο τὸ κέντρον τοῦ παραλληλεπιπέδου (σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων). Ὡς γνωστὸν τὸ Ο εἶναι τὸ μέσον ἑκάστης διαγωνίου. Ὅθεν ΟΑ=ΟΒ=ΟΓ=ΟΔ. Τοῦτο σημαίνει ὅτι τὰ Α,Β,Γ,Δ ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὴν προβολὴν τοῦ Ο ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓΔ. Δηλαδὴ τὸ παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς κύκλον.

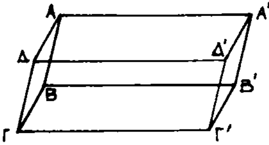
147. Ἐὰν πρίσματος ἔχοντος βάσεις τετράπλευρα αἱ τρεῖς διαγώνιοι διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, καὶ ἡ τετάρτη θὰ διέρχεται ἐπίσης διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, τὸ δὲ πρῖσμα, θὰ εἶναι παραλληλεπίπεδον.

Λύσις. (Ἐπὶ τοῦ προηγουμένου σχήματος, βάσεις ΑΒΓΔ, Α'Β'Γ'Δ'). Ἔστω ΑΓ', ΒΔ', ΓΑ' διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο. Τὸ ΑΑ'Γ'Γ εἶναι παραλληλόγραμμον. Ἄρα ΟΑ=ΟΓ', ΟΓ=ΟΑ'. Τὸ τετράπλευρον ΒΓΔ'Α' εἶναι τραπέζιον καὶ συνεπῶς $\overset{\triangle}{ΒΟΓ} \sim \overset{\triangle}{Δ'ΟΑ'}$, ὅθεν

$$\frac{ΒΟ}{ΟΔ'} = \frac{ΟΓ}{ΟΑ'} = 1,$$

ἤτοι καὶ τὸ ΒΓΔ'Α' εἶναι παραλληλόγραμμον. Ἀλλὰ ΑΔ = Α'Δ', ὅθεν τὸ ΑΒΓΔ εἶναι παραλληλόγραμμον, δηλαδὴ αἱ βάσεις τοῦ πρίσματος εἶναι παραλληλόγραμμα. Συνεπῶς, τὸ πρῖσμα εἶναι παραλληλεπίπεδον καὶ αἱ διαγώνιοί του διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

148. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων παραλληλεπιπέδου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀκμῶν του.



Ἀπόδειξις. Δι' ἕκαστον παραλληλόγραμμον, π.χ. τὸ ΑΒΓΔ ἔχομεν: τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν πλευρῶν. (Θεώρ. διαμέσων εἰς ΑΒΓ). Ὅθεν ἂν $ΑΑ' = x$, $ΑΒ = y$, $ΑΔ = z$, $ΑΓ' = \delta_1$, $ΔΒ' = \delta_2$, $ΓΑ' = \delta_3$, $ΒΔ' = \delta_4$, ἔχομεν:

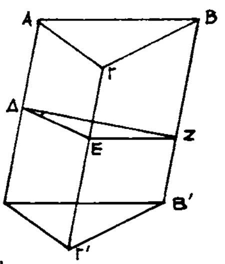
ἐκ τοῦ ΑΓΓ'Α' $\quad 2x^2 + 2ΑΓ^2 = \delta_1^2 + \delta_3^2$

ἐκ τοῦ ΔΒΑ'Δ' $\quad 2x^2 + 2ΔΒ^2 = \delta_2^2 + \delta_4^2$.

Διὰ προσθέσεως κατὰ μέλη $4x^2 + 2(ΑΓ^2 + ΔΒ^2) = \delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \delta_4^2$. Ἀλλὰ $ΑΓ^2 + ΒΔ^2 = 2z^2 + 2y^2$, ὅθεν $\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2 + \delta_4^2 = 4(x^2 + y^2 + z^2)$.

149. Εἰς πᾶν τριγωνικὸν πρῖσμα τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστης παραπλεύρου ἕδρας περιέχεται μεταξὺ τοῦ ἀθροίσματος καὶ τῆς ἀπολύτου τιμῆς τῆς διαφορᾶς τῶν δύο ἄλλων.

Ἀπόδειξις. Ἔστω ΔΕΖ ἡ κάθετος τομή. $\upsilon_\Delta, \upsilon_E, \upsilon_Z$ τὰ ὕψη τοῦ τριγώνου ΔΕΖ. Ἐὰν V ὁ ὄγκος τοῦ πρίσματος, ἔχομεν $2V=(ABB'A')\cdot\upsilon_E=(A\Gamma\Gamma'A')\cdot\upsilon_Z=(B\Gamma\Gamma'B')\cdot\upsilon_\Delta$. Ἀλλὰ διὰ τὸ τρίγωνον ΔΕΖ εἶναι $\Delta Z\cdot\upsilon_E=\Delta E\cdot\upsilon_Z=EZ\cdot\upsilon_\Delta$. Ὅθεν

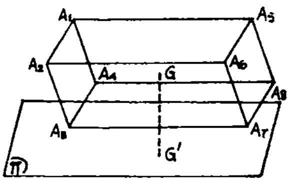


$$\frac{(ABB'A')}{\Delta Z}=\frac{(A\Gamma\Gamma'A')}{\Delta E}=\frac{(B\Gamma\Gamma'B')}{EZ}=\lambda.$$

Ἀλλὰ $|\Delta Z-EZ|<\Delta E<\Delta Z+EZ$ καὶ $|\lambda\cdot\Delta Z-\lambda\cdot EZ|<\lambda\cdot\Delta E<\lambda\cdot\Delta Z+\lambda EZ$, ἤτοι $|(ABB'A')-(B\Gamma\Gamma'B')|<(A\Gamma\Gamma'A')<$ $<(ABB'A')+(B\Gamma\Gamma'B')$.

150. Δίδεται παραλληλεπίπεδον $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ καὶ ἐπίπεδον Π μὴ τέμνον αὐτό. Ἐὰν x_i εἶναι ἡ ἀπόστασις τῆς κορυφῆς A_i ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον Π, δείξατε ὅτι $\sum_{i=1}^{8}x_i=8\cdot GG'$, ὅπου GG' ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου ἀπὸ τὸ Π.

Ἀπόδειξις. Ἔστω A_i' ἡ προβολὴ τῆς κορυφῆς A_i ἐπὶ τοῦ Π. Ἀπὸ τὸ τραπέζιον $A_1A_1'A_7'A_7$ ἔχομεν:

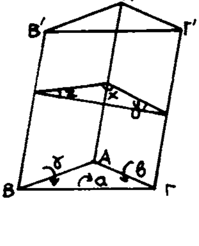


$x_1+x_7=2\cdot GG'$, ὁμοίως
$x_2+x_8=2\cdot GG'$,
$x_3+x_5=2\cdot GG'$,
$x_4+x_6=2\cdot GG'$. Προσθέτομεν κατὰ μέλη.

Ὁμὰς Β'.

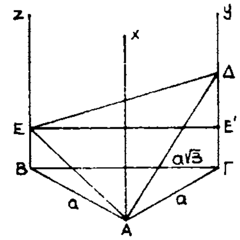
151. Νὰ δειχθῇ ὅτι εἰς πᾶν τριγωνικὸν πρῖσμα τὸ ἄθροισμα τῶν διέδρων γωνιῶν, τὰς ὁποίας σχηματίζουν αἱ παράπλευραι ἕδραι μετὰ τῆς μιᾶς βάσεως, περιέχεται μεταξὺ 2 καὶ 4 ὀρθῶν.

Ἀπόδειξις. Ἔστω α,β,γ αἱ δίεδροι αἱ σχηματιζόμεναι ὑπὸ τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν καὶ τοῦ ΑΒΓ, x,y,z αἱ δίεδροι ἐπὶ τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν. Ἐὰν θεωρήσωμεν τὴν κάθετον τομὴν ε ἐπὶ τῶν ἀκμῶν, διαπιστοῦμεν ὅτι $x+y+z=2^L$. Ἐκ τῆς τριέδρου (Α.ΒΓΑ') ἔχομεν $x+2^L>\beta+\gamma$ (1) καὶ $x+\beta+\gamma>2^L$. Ὁμοίως
$y+2^L>\gamma+\alpha$ καὶ $y+\gamma+\alpha>2^L$. Ὁμοίως
$z+2^L>\alpha+\beta$ καὶ $z+\alpha+\beta>2^L$.



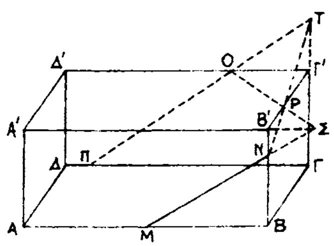
Προσθέτοντες τάς ἀνισότητας τῆς πρώτης στήλης θά ἔχωμεν $4^L > \alpha+\beta+\gamma$. Τό αὐτό διά τάς ἀνισότητας τῆς δευτέρας στήλης καί ἔχομεν $\alpha+\beta+\gamma > 2^L$

152. Τριγωνική πρισματική ἐπιφάνεια $E=(Ax, By, \Gamma z)$ ἔχει κάθετον τομήν ἰσοσκελές τρίγωνον ΑΒΓ μέ $AB=A\Gamma=\alpha$, $B\Gamma=\alpha\sqrt{3}$. Ἐπίπεδον Π διά τοῦ Α τέμνει τήν By εἰς Δ καί τήν Γz εἰς Ε. Ἐάν $\Delta\hat{A}E=90^\circ$, δείξατε ὅτι $B\Delta\cdot\Gamma E=\frac{\alpha^2}{2}$.



Ἀπόδειξις. Θέτομεν $B\Delta=\beta$, $\Gamma E=\gamma$. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΔΑΕ ἔχομεν $\Delta E^2=AE^2+A\Delta^2$ (1). Ἐκ τοῦ $\overset{\triangle}{AB\Delta}$: $A\Delta^2=\alpha^2+\beta^2$, ἐκ τοῦ $\overset{\triangle}{A\Gamma E}$: $AE^2=\alpha^2+\gamma^2$. Φέρομεν τήν $EE'\perp By$. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΕΕ'Δ θά ἔχωμεν: $\Delta E^2=(\alpha\sqrt{3})^2+(\beta-\gamma)^2$ ἤ $\Delta E^2=3\alpha^2+(\beta-\gamma)^2$, ὅθεν ἡ (1) γίνεται $3\alpha^2+(\beta-\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\alpha^2+\gamma^2$ ἤ $\beta\gamma=\frac{\alpha^2}{2}$.

153. Δίδεται παραλληλεπίπεδον ΑΒΓΔΑ'Β'Γ'Δ'. Ἔστω $AB=\alpha$, $A\Delta=\beta$, $AA'=\gamma$. Ἐπίπεδον σ τέμνει τήν ΑΒ εἰς τό μέσον της Μ, τήν ΒΒ' εἰς τό σημεῖον Ν, ὥστε $\frac{NB'}{NB}=\frac{1}{3}$ καί τήν Β'Γ' εἰς τό Ρ. Θέτομεν $B'P=x$. Νά μελετηθῇ ἡ τομή τοῦ παραλληλεπιπέδου ὑπό τοῦ σ.



Λύσις. Τό ἐπίπεδον σ τέμνει τήν Α'Β' εἰς Σ. Θά ἔχωμεν:
$\frac{B'\Sigma}{BM}=\frac{NB'}{NB}=\frac{1}{3}$ ὅθεν $\frac{B'\Sigma}{\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{3}$ ἤ $B'\Sigma=\frac{\alpha}{6}$. Ἡ εὐθεία ΡΣ τέμνει τήν Γ'Δ' εἰς Ο. Τά ὅμοια τρίγωνα Β'ΡΣ, Γ'ΡΟ δίδουν

$$\frac{\Gamma'O}{B'\Sigma}=\frac{\Gamma'P}{B'P} \quad \text{ἤ} \quad \frac{\Gamma'O}{\frac{\alpha}{6}}=\frac{\beta-x}{x} \quad \text{ἤ} \quad \Gamma'O=\frac{\alpha(\beta-x)}{6x}.$$

Ἵνα τό σημεῖον Ο εὑρίσκεται μεταξύ Γ',Δ', πρέπει:

$$\frac{\alpha(\beta-x)}{6x}<\alpha \quad \text{ἤ} \quad x>\frac{\beta}{7}.$$

Ἔστω Τ τό σημεῖον τομῆς τοῦ σ μετά τῆς ΓΓ'. Τά ὅμοια τρίγωνα Β'ΝΡ, Γ'ΤΡ δίδουν:

$$\frac{\Gamma'T}{B'N}=\frac{P\Gamma'}{B'P} \quad \text{ἤ} \quad \frac{\Gamma'T}{\frac{\gamma}{4}}=\frac{\beta-x}{x} \quad \text{ὅθεν} \quad \Gamma'T=\frac{\gamma(\beta-x)}{4x}.$$

Ἡ ΤΟ συναντᾷ τήν ΓΔ εἰς Π. Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΤΓΠ, ΤΓ'Ο ἔχομεν:

$$\frac{\Gamma\Pi}{\Gamma'O}=\frac{\Gamma T}{\Gamma'T} \quad \text{ἤ} \quad \frac{\Gamma\Pi}{\frac{\alpha(\beta-x)}{6x}}=\frac{\gamma+\frac{\gamma(\beta-x)}{4x}}{\frac{\gamma(\beta-x)}{4x}} \quad \text{ἤ} \quad \Gamma\Pi=\frac{\alpha(\beta+3x)}{6x}.$$

Τό Π εὑρίσκεται μεταξύ Γ,Δ, ἐάν

$$\frac{\alpha(\beta+3x)}{6x}<\alpha \quad \text{ἤ} \quad x>\frac{\beta}{3}.$$

Συμπεράσματα:

1) Ἄν $0<x<\frac{6}{7}$ τό ἐπίπεδον σ συναντᾶ τάς ἀκμάς ΑΒ, ΒΒ′, Β′Γ′, Α′Δ′, ΑΔ. Ἡ τομή εἶναι πεντάγωνον.

2) Ἄν $x=\frac{6}{7}$ τό σ διέρχεται διά τοῦ Δ′. Ἡ τομή πεντάγωνον.

3) Ἄν $\frac{6}{7}<x<\frac{6}{3}$ τό σ συναντᾶ τάς ἀκμάς ΑΒ, ΒΒ′, Β′Γ′, Γ′Δ′, Δ′Δ, ΑΔ. Ἡ τομή ἑξάγωνον.

4) Ἄν $x=\frac{6}{3}$ τό σ διέρχεται διά τοῦ Δ. Ἡ τομή πεντάγωνον.

5) Ἄν $\frac{6}{3}<x<6$ τό σ συναντᾶ τάς ἀκμάς ΑΒ, ΒΒ′, Β′Γ′, Γ′Δ′, ΓΔ. Ἡ τομή πεντάγωνον.

6) Ἄν $x=6$ τό σ διέρχεται διά τοῦ Γ′. Ἡ τομή τραπέζιον.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ

Ὁμάς Α′.

154. Πρῖσμα μέ βάσεις τετράπλευρα καί ἀπέναντι παραπλεύρους ἕδρας παραλλήλους εἶναι παραλληλεπίπεδον.

155. Τέμνομεν παραλληλεπίπεδον δι' ἐπιπέδου διερχομένου διά τοῦ κέντρου αὐτοῦ. Δείξατε ὅτι ἡ τομή θά εἶναι παραλληλόγραμμον ἤ ἑξάγωνον μέ ἀπέναντι πλευράς παραλλήλους.

156. Δίδεται πρῖσμα μέ βάσιν τετράπλευρον. Δείξατε ὅτι: 1) αἱ διαγώνιοι σχηματίζουν δύο ζεύγη εὐθειῶν τεμνομένων· 2) τά σημεῖα τομῆς εἶναι τά μέσα τῶν διαγωνίων· 3) τό εὐθ. τμῆμα, τό ὁποῖον συνδέει τά σημεῖα τομῆς, εἶναι παράλληλον πρός τάς βάσεις. 4) Εὕρατε συνθήκην ἱκανήν καί ἀναγκαίαν, ἵνα τό πρῖσμα εἶναι παραλληλεπίπεδον.

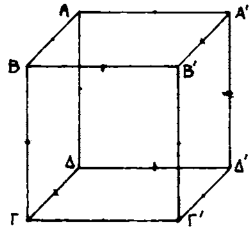
157. Δίδεται παραλληλεπίπεδον ΑΒΓΔΑ′Β′Γ′Δ′. Δείξατε ὅτι: 1) ἡ διαγώνιος ΑΓ′ διέρχεται διά τοῦ κέντρου βάρους τῶν τριγώνων Α′ΒΔ, ΓΒ′Δ′· 2) αὕτη διαιρεῖται ὑπό τῶν ἐπιπέδων τῶν τριγώνων εἰς τρία ἴσα μέρη.

158. Εἰς πᾶν πρῖσμα μέ βάσιν τετράπλευρον, τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν 12 ἀκμῶν ἰσοῦται πρός τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων ηὐξημένον κατά τό ὀκταπλάσιον τετράγωνον τοῦ εὐθ. τμήματος, τό ὁποῖον ἑνώνει τά μέσα αὐτῶν (ἰδέ ἄσκ. 148).

159. Εἰς πᾶν παραλληλεπίπεδον τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἐμβαδῶν τῶν τομῶν ὑπὸ τῶν διαγωνίων ἐπιπέδων τῶν διερχομένων διὰ τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ διπλάσιον ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἑδρῶν.

160. Εἰς πᾶν τριγωνικὸν πρῖσμα δείξατε ὅτι: 1) ἐὰν δύο ἕδραι εἶναι ἴσαι, αἱ ἀπέναντι δίεδροι εἶναι ἐπίσης ἴσαι· 2) ἐὰν δύο ἕδραι εἶναι ἄνισοι, καὶ αἱ ἀπέναντι δίεδροι θὰ εἶναι ἄνισοι, ἀπέναντι δὲ τῆς μεγαλυτέρας ἕδρας θὰ κεῖται ἡ μεγαλυτέρα δίεδρος.

161. Κύβος. Δίδεται κύβος ΑΒΓΔΑ'Β'Γ'Δ' καὶ ΑΓ' διαγώνιος αὐτοῦ.



1) Τὰ μέσα τῶν ἓξ ἀκμῶν, αἱ ὁποῖαι δὲν καταλήγουν οὔτε εἰς Α, οὔτε εἰς Γ', εἶναι κορυφαὶ κανονικοῦ ἑξαγώνου.

2) Ἡ γωνία τυχούσης ἀκμῆς καὶ διαγωνίου εἶναι σταθερά.

3) Ἡ προβολὴ ἑκάστης ἀκμῆς ἐπὶ μίαν διαγώνιον εἶναι σταθερὰ καὶ ἴση πρὸς τὸ τρίτον τῆς διαγωνίου.

4) Τὸ μεσοκάθετον ἐπίπεδον ἐπὶ ἑκάστην διαγώνιον τέμνει τὸν κύβον κατὰ ἑξάγωνον.

5) Ἡ προβολὴ τοῦ κύβου ἐπὶ ἐπίπεδον κάθετον ἐπὶ μίαν διαγώνιον εἶναι κανονικὸν ἑξάγωνον.

162. Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων ἑνὸς σημείου Μ ἀπὸ τῶν κορυφῶν ἑνὸς παραλληλεπιπέδου ἰσοῦται πρὸς τὸ ὀκταπλάσιον τοῦ τετραγώνου τῆς ἀποστάσεως τοῦ σημείου τούτου ἀπὸ τοῦ κοινοῦ σημείου τῶν διαγωνίων τοῦ παραλληλεπιπέδου πλέον τοῦ ἡμίσεως τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν διαγωνίων.

163. Δίδεται τριγωνικὸν πρῖσμα καὶ ἔστω μία τομὴ αὐτοῦ ὑπὸ ἐπιπέδου παραλλήλου πρὸς μίαν παράπλευρον ἕδραν. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τῆς θεωρουμένης παραπλεύρου ἕδρας καὶ τῆς τομῆς ἰσοῦται μὲ τὸν λόγον τῶν ἀποστάσεων τῶν ἐπιπέδων των, ἀπὸ τῆς ἀπέναντι τῆς ἕδρας ἀκμῆς.

164. Διὰ σημείου Ο μιᾶς διαγωνίου ΚΛ κανονικοῦ ὀκταέδρου ἄγεται ἐπίπεδον τέμνον εἰς Α, Β, Γ, Δ τὰς τέσσαρας ἀκμὰς αὐτοῦ τάς ἀγομένας ἐκ τῆς κορυφῆς Κ. Νά δειχθῆ ὅτι τό ἄθροισμα $\frac{1}{KA}+\frac{1}{KB}+\frac{1}{K\Gamma}+\frac{1}{K\Delta}$ εἶναι σταθερόν.

165. Ἄν αἱ τέσσαρες διαγώνιοι ἑνός ἑξαέδρου διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου, αἱ τρεῖς εὐθεῖαι αἱ ὁποῖαι συνδέουν ἀνά δύο τά κοινά σημεῖα τῶν διαγωνίων τῶν ἀπέναντι ἑδρῶν διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Ὁμάς Β΄.

166. Ἄν εἰς ἑξάεδρον αἱ τρεῖς εὐθεῖαι, κατά τάς ὁποίας τέμνονται τά ἐπίπεδα τῶν ἀπέναντι ἑδρῶν αὐτοῦ, κεῖνται ἐπί τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, τά δύο δέ ζεύγη ἀπέναντι ἀκμῶν, αἱ ὁποῖαι καταλήγουν εἰς τήν αὐτήν ἕδραν, περιέχουν εὐθείας συμβατάς, τότε αἱ διαγώνιοι τοῦ ἑξαέδρου διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου.

167. Πρῖσμα ἔχει κάθετον τομήν ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ πλευρᾶς a. Ἐπί τῶν διά τῶν Β,Γ διερχομένων ἀκμῶν καί πρός τό αὐτό μέρος τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓ λαμβάνομεν τά σημεῖα Β΄, Γ΄ ὥστε $BB'=x$, $\Gamma\Gamma'=y$. Δείξατε ὅτι ἄν εἰς τό $\widehat{AB'\Gamma'}$ εἶναι $\hat{\Gamma}'=1^{L}$, τότε $2xy=2y^2+a^2$.

168. Δίδεται τριγωνικόν πρῖσμα καί σημεῖον Ο ἐντός αὐτοῦ. Θεωροῦμεν τά τρία διανύσματα $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ μέ ἀρχήν τό Ο, κάθετα ἐπί τάς παραπλεύρους ἕδρας καί τῶν ὁποίων τά μέτρα εἶναι ἀντιστοίχως ἴσα πρός τά μέτρα τῶν ἐμβαδῶν τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν. Δείξατε ὅτι $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$. Ἡ διαφορετικῶς, δυνάμεθα νά κατασκευάσωμεν τρίγωνον μέ πλευράς a', b', c' ὥστε $\vec{a}=\vec{a}'$, $\vec{b}=\vec{b}'$, $\vec{c}=\vec{c}'$.

169. Τό ἄθροισμα τῶν διέδρων γωνιῶν, τάς ὁποίας σχηματίζουν αἱ παράπλευροι ἕδραι ἑνός κυρτοῦ πολυγωνικοῦ πρίσματος μέ μίαν τῶν βάσεων αὐτοῦ, περιέχεται μεταξύ τῶν 2^{L} καί $2(\nu-1)^{L}$. (Ὑποτίθεται ν ὁ ἀριθμός τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν).

170. Κολοβοῦ πρίσματος ἡ βάσις, αἱ εὐθεῖαι τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν καί ὁ ὄγκος εἶναι σταθερά. Δείξατε ὅτι τό ἐπίπεδον τῆς ἄλλης βάσεως διέρχεται διά σταθεροῦ σημείου.

171. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι οἱονδήποτε κυρτόν πολύεδρον δύναται νά ἀναλυθῆ εἰς κολοβά πρίσματα ἔχοντα τάς παραπλεύρους ἀκμάς αὐτῶν παραλλήλους πρός δοθεῖσαν εὐθεῖαν ε.

172. Θεωροῦμεν ἕνα ὀρθόν κολοβόν πρίσμα $A_1A_2\cdots A_\nu A_1'A_2'\cdots A_\nu'$. Νά δειχθῆ ὅτι: 1) τά μέσα $M_1, M_2, \ldots, M_\nu$ τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν A_1A_1', $A_2A_2', \ldots, A_\nu A_\nu'$ ἀντιστοίχως, εἶναι σημεῖα τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καί 2) ἐάν E καί E' τά ἐμβαδά τῶν βάσεων καί ε τό ἐμβαδόν τοῦ πολυγώνου $M_1M_2\cdots M_\nu$, νά δειχθῆ ὅτι $\varepsilon = \frac{1}{2}\sqrt{3E^2+E'^2}$.

173. Θεωροῦμεν ἐπίπεδον ἀγόμενον διά τοῦ κοινοῦ σημείου Ο τῶν διαγωνίων κανονικοῦ ὀκταέδρου καί τέμνον τάς δώδεκα ἀκμάς ἤ τάς εὐθείας, ἐπί τῶν ὁποίων αὗται κεῖνται. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι τό ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων τῶν οὕτω ὁριζομένων εἴκοσι τεσσάρων εὐθ. τμημάτων εἶναι σταθερόν.

174. Τά ὀκτώ σημεῖα, τά ὁποῖα χωρίζουν εἰς δοθέντα λόγον τά ὀκτώ εὐθ. τμήματα, τά ὁποῖα συνδέουν τάς ἀντιστοίχους κορυφάς δύο παραλληλεπιπέδων, εἶναι κορυφαί παραλληλεπιπέδου.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΒΔΟΜΟΝ

ΠΥΡΑΜΙΔΕΣ. ΣΦΑΙΡΑ

ΟΡΙΣΜΟΙ. ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

1.1. Πυραμίς. Στερεόν περατούμενον κατά μίαν πολυεδρικήν γωνίαν καί είς ἕν ἐπίπεδον τέμνον ὅλας τάς ἀκμάς αὐτῆς.

1.2. Ὄγκος πυραμίδος: $V = \frac{1}{3} B \cdot \upsilon$.

1.3. Κανονική πυραμίς. Βάσις κανονικόν πολύγωνον, προβολή τῆς κορυφῆς εἰς τό κέντρον τῆς βάσεως.

1.4. Τετράεδρον. Τριγωνική πυραμίς. Κανονικόν τετράεδρον: ἕδραι ἰσόπλευρα τρίγωνα.

2. Ὅμοια (ἴσα) πολύεδρα.(1)

Ὀνομάζομεν δύο πολύεδρα ὅμοια (ἴσα) ἐάν ὑφίσταται ἀμφιμονότιμος ἀντιστοιχία, καθ' ἥν αἱ ἀντίστοιχοι ἕδραι εἶναι ὅμοια (ἴσα) πολύγωνα καί αἱ ἀντίστοιχοι στερεαί γωνίαι εἶναι ἴσαι.

Θεωρήματα:

2.1. Ἄν δύο πολύεδρα εἶναι ὅμοια (ἴσα) τότε αἱ ὁμόλογοι δίεδροι εἶναι ἴσαι.

Ὁ λόγος δύο ὁμολόγων εὐθ. τμημάτων εἶναι σταθερός καί ἴσος πρός τόν λόγον ὁμοιότητος τῶν πολυέδρων.

2.2. Κάθε ἐπίπεδον παράλληλον πρός τήν βάσιν πυραμίδος τέμνει ταύτην κατά πυραμίδα ὁμοίαν πρός τήν ἀρχικήν.

2.3. Δύο τετράεδρα εἶναι ὅμοια (ἴσα), ἐάν ἔχουν μίαν δίεδρον ἴσην περιεχομένην μεταξύ ὁμοίων (ἴσων) ἑδρῶν καί ὁμοίως κειμένων.

2.4. Δύο τετράεδρα εἶναι ὅμοια (ἴσα) ἐάν ἔχουν μίαν ἕδραν ἀντιστοίχως ὁμοίαν (ἴσην) καί τάς τρεῖς προσκειμένας διέδρους ἴσας καί ὁμοίως κειμένας.

2.5. Δύο τετράεδρα εἶναι ὅμοια (ἴσα) ἐάν ἔχουν τρεῖς ἕδρας ὁμοίας (ἴσας) καί ὁμοίως κειμένας.

2.6. Ἐάν δύο πολύεδρα εἶναι ὅμοια, χωρίζονται εἰς τόν αὐτόν

---

(1) Δέν διακρίνομεν ἐνταῦθα εὐθεῖαν καί ἀντίστροφον ὁμοιότητα.

ἀριθμόν ὁμοίων τετραέδρων καί ὁμοίως κειμένων. Ἀντιστρόφως.

2.7. Ὁ λόγος τῶν ὄγκων δύο ὁμοίων πολυέδρων εἶναι ἴσος πρός τόν κύβον τοῦ λόγου ὁμοιότητος. Ὁ λόγος τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἐπιφανειῶν εἶναι ἴσος πρός τό τετράγωνον τοῦ λόγου ὁμοιότητος.

3.1. Κολοβή πυραμίς. Στερεόν τό ὁποῖον περιέχεται μεταξύ τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος καί τυχόντος ἐπιπέδου τέμνοντος τάς παραπλεύρους ἀκμάς.

3.2. Κόλουρος πυραμίς. Τό στερεόν τό ὁποῖον περιέχεται μεταξύ τῆς βάσεως τῆς πυραμίδος καί ἐπιπέδου παραλλήλου πρός τήν βάσιν τέμνοντος τάς παραπλεύρους ἀκμάς αὐτῆς.

4. Σφαῖρα.

4.1. Τό σύνολον τῶν σημείων τοῦ χώρου, τά ὁποῖα ἀπέχουν ἀπόστασιν μικροτέραν ἤ ἴσην δοθείσης R ἐξ ἑνός σημείου O. Συμβολισμός $(O,R) = \{M / OM \leq R\}$

4.2. Ἡ τομή σφαίρας ὑπό ἐπιπέδου διερχομένου διά τοῦ κέντρου αὐτῆς μέγιστος κύκλος.

4.3. Ἡ τομή σφαίρας ὑπό ἐπιπέδου μή διερχομένου διά τοῦ κέντρου αὐτῆς μικρός κύκλος.

4.4. Ἡ προβολή τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας ἐπί τοῦ ἐπιπέδου μικροῦ κύκλου συμπίπτει μέ τό κέντρον αὐτοῦ.

4.5. Πόλοι ἑνός κύκλου σφαίρας. Τά ἄκρα τῆς διαμέτρου τῆς σφαίρας τῆς καθέτου ἐπί τό ἐπίπεδον τοῦ κύκλου.

4.6. Ὁ κύκλος ὁ διερχόμενος διά τριῶν σημείων μιᾶς σφαίρας κεῖται ἐπί τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.

4.7. Πᾶν ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον σφαίρας εἶναι κάθετον ἐπί τήν ἀκτῖνα εἰς τό σημεῖον ἐπαφῆς.

4.8. Διά σημείου ἐκτός σφαίρας ἄγονται ἄπειροι ἐφαπτόμεναι, αἱ ὁποῖαι ἀποτελοῦν τάς γενετείρας μιᾶς κωνικῆς ἐπιφανείας. Τά σημεῖα ἐπαφῆς κεῖνται ἐπί μικροῦ κύκλου. Ἐάν τό σημεῖον κινούμενον ἐπί εὐθείας xx' ἀπομακρύνεται εἰς τό ἄπειρον, ἀντί τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας θά ἔχωμεν κυλινδρικήν ἐπιφάνειαν γενετείρας παραλλήλου πρός xx' καί ἀντί μικροῦ κύκλου ἕν μέγιστον κύκλον ἐπιπέδου καθέτου ἐπί τήν xx'.

4.9. Διά εὐθείας xx' μή τεμνούσης σφαῖραν ἄγονται δύο ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα τῆς σφαίρας. Ἐπίσης ὑπάρχουν δύο ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα σφαίρας παράλληλα πρός δοθέν ἐπίπεδον Π.

5. Δύναμις σημείου ὡς πρὸς σφαῖραν.

5.1. Διὰ σημείου A φέρομεν τέμνουσαν σφαίρας (O,R) εἰς B καὶ Γ. Τὸ γινόμενον $\overline{AB}\cdot\overline{A\Gamma}$ εἶναι σταθερὸν ἀνεξάρτητον τῆς τεμνούσης. Ἰσοῦται δὲ πρὸς $\overline{OA}^2-R^2$.

5.2. Ὁρισμός. Ὀνομάζομεν δύναμιν τοῦ σημείου A πρὸς τὴν σφαῖραν (O,R) τὸ σταθερὸν γινόμενον $\overline{AB}\cdot\overline{A\Gamma}$. Συμβολίζομεν $\mathcal{D}_{(O,R)}(A)=\overline{AB}\cdot\overline{A\Gamma}=\overline{OA}^2-R^2$.

5.3. Ἵνα δύο κύκλοι, τῶν ὁποίων τὰ ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα, κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου αὐτῶν, νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰ ἐπίπεδά των.

5.4. Ἵνα δύο κύκλοι, τῶν ὁποίων τὰ ἐπίπεδα τέμνονται, κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ὅλα τὰ σημεῖα τῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων των νὰ ἔχουν τὴν αὐτὴν δύναμιν πρὸς τοὺς κύκλους.

5.5. Θεωρήσωμεν τὰς σφαίρας (O,R) καὶ (O',R'). Σημεῖον M τοῦ χώρου, ω τὸ μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος OO'. Ὁρίζομεν τὸ σημεῖον I τοῦ OO', ὥστε $\overline{\omega I}=\frac{R^2-R'^2}{2\overline{OO'}}$. Ἐὰν P τὸ κάθετον ἐπίπεδον ἐπὶ τὴν OO' διὰ τοῦ I καὶ H ἡ προβολὴ τοῦ M ἐπ' αὐτὸ ἔχομεν:

$$\mathcal{D}_{(O,R)}(M)-\mathcal{D}_{(O',R')}(M)=2\,\overline{OO'}\,\overline{HM} \text{ (τύπος τοῦ Casey).}$$

Ὅθεν, ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ χώρου, τῶν ὁποίων ἡ διαφορὰ τῶν δυνάμεων πρὸς τὰς σφαίρας (O,R) καὶ (O',R') εἶναι σταθερὰ καὶ ἴση πρὸς κ κεῖνται ἐπὶ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὴν OO'. Ἐὰν $\kappa=0$, τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα ἔχουν ἴσας δυνάμεις πρὸς τὰς σφαίρας, κεῖνται ὅλα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου P, τὸ ὁποῖον καλεῖται **ριζικὸν ἐπίπεδον** τῶν δύο σφαιρῶν.

5.6. Τὰ ριζικὰ ἐπίπεδα τριῶν σφαιρῶν διέρχονται δι' εὐθείας καθέτου εἰς τὸ ἐπίπεδον τῶν κέντρων. Ὅλα τὰ σημεῖα τῆς ἐν λόγῳ εὐθείας ἔχουν τὴν αὐτὴν δύναμιν πρὸς τὰς τρεῖς σφαίρας. (Ὑποτίθεται ὅτι τὰ κέντρα τῶν σφαιρῶν δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας).

5.7. Τὰ 6 ριζικὰ ἐπίπεδα τεσσάρων σφαιρῶν, τῶν ὁποίων τὰ κέντρα δὲν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, ὅπερ καλεῖται **ριζικὸν κέντρον** τῶν τεσσάρων σφαιρῶν.

5.8. Δυνάμεθα νὰ ἐπιτύχωμεν μίαν ἐπέκτασιν τῶν ἀνωτέρω θεωρημάτων λαμβάνοντες τὴν ὁριακὴν περίπτωσιν σφαίρας ἀκτῖνος $R=0$ (σημειακὴ σφαῖρα).

6. Σφαῖραι τεμνόμεναι ὀρθογωνίως.

Δύο σφαῖραι λέγομεν ὅτι τέμνονται ὀρθογωνίως, ὅταν τά ἐφαπτόμενα ἐπίπεδά των εἰς ἕν σημεῖον τοῦ κύκλου τομῆς εἶναι κάθετα.

Δύο σφαῖραι θά τέμνωνται ὀρθογωνίως, ὅταν:

6.1. $\Delta_{O'}(O) = R^2$ ·

6.2. $R^2 + R'^2 = OO'^2$ ·

6.3. ἑκάστη διάμετρος τῆς μιᾶς χωρίζεται ἁρμονικῶς ὑπό τῆς ἄλλης.

Αἱ συνθῆκαι ἱκαναί καί ἀναγκαῖαι.

7. Σφαῖρα καί τετράεδρον.

7.1. Διά τῶν κορυφῶν τετραέδρου διέρχεται μία καί μόνον σφαῖρα (περιγεγραμμένη).

7.2. Ὑπάρχει μία καί μόνον σφαῖρα, ἡ ὁποία ἐφάπτεται ἐσωτερικῶς τῶν ἑδρῶν τετραέδρου (ἐγγεγραμμένη).

7.3. Ὑπάρχει μία καί μόνον σφαῖρα, ἥτις ἐφάπτεται ἐξωτερικῶς μιᾶς ἕδρας τετραέδρου καί τῶν προεκτάσεων τῶν ὑπολοίπων (παρεγγεγραμμένη σφαῖρα. Ἐν τῷ συνόλῳ τέσσαρες παρεγγεγραμμέναι σφαῖραι).

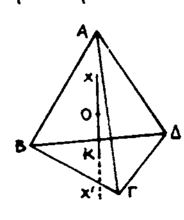
7.4. Ἡ ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα ὑπάρχη σφαῖρα ἐφαπτομένη τῶν ἀκμῶν τετραέδρου, εἶναι ὅπως τό ἄθροισμα τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν εἶναι τό αὐτό διά τά τρία ζεύγη.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάς Α΄.

175. Δείξατε ὅτι τά μεσοκάθετα ἐπίπεδα ἐπί τῶν ἀκμῶν ἑνός τετραέδρου διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου, τό ὁποῖον εἶναι τό κέντρον τῆς περιγεγραμμένης σφαίρας περί τό τετράεδρον.

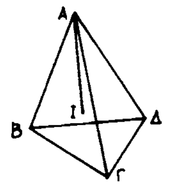
Ἀπόδειξις. Τά μεσοκάθετα ἐπίπεδα ἐπί τῶν πλευρῶν ΒΓ, ΓΔ, ΔΒ τοῦ τριγώνου ΒΓΔ διέρχονται διά τῆς αὐτῆς εὐθείας xx' καθέτου ἐπί τό ἐπίπεδον ΒΓΔ καί διερχομένης διά τοῦ κέντρου Κ τῆς περιγεγραμμένης περιφερείας. Θεωρήσωμεν τό μεσοκάθετον ἐπίπεδον ἐπί τήν ΑΒ. Τό ἐπίπεδον αὐτό τέμνει τήν xx' εἰς σημεῖον Ο. Τό σημεῖον Ο ἀπέχει ἴσον ἀπό τά ἄκρα τῶν εὐθ.



τμημάτων ΑΓ, ΑΔ. Ήτοι τά μεσοκάθετα ἐπίπεδα ἐπί τῶν ἀκμῶν αὐτῶν διέρχονται διά τοῦ Ο. Ἐάν θεωρήσωμεν ἤδη τήν σφαῖραν κέντρου Ο καί ἀκτῖνος ΟΑ, διαπιστοῦμεν ὅτι θά διέρχεται αὕτη διά τῶν ὑπολοίπων κορυφῶν τοῦ τετραέδρου. Διατί εἶναι μοναδική;

176. 1) Τά διχοτομοῦντα ἐπίπεδα τῶν 6 διέδρων ἑνός τετραέδρου διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου. Τό σημεῖον τοῦτο εἶναι τό κέντρον τῆς ἐγγεγραμμένης σφαίρας εἰς τό τετράεδρον.

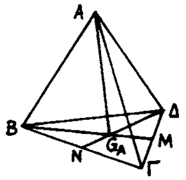
2) Τά τρία διχοτομοῦντα ἐπίπεδα τάς παραπληρωματικάς τῶν διέδρων τῶν προσκειμένων εἰς τήν αὐτήν ἕδραν καί τά τρία διχοτομοῦντα ἐπίπεδα τάς ὑπολοίπους τρεῖς διέδρους ἑνός τετραέδρου διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου, τό ὁποῖον εἶναι τό κέντρον τῆς παρεγγεγραμμένης σφαίρας εἰς τήν ἐν λόγῳ ἕδραν.



Ἀπόδειξις. 1) Ἔστω Ι τό σημεῖον τομῆς τῶν διχοτομούντων ἐπιπέδων τάς διέδρους ΒΓ, ΓΔ, ΔΒ. Τοῦτο ἀπέχει ἴσον ἀπό τάς ἕδρας ΑΒΓ, ΒΓΔ - ΑΔΓ, ΒΓΔ - ΑΒΔ, ΒΓΔ, ἤτοι ἀπό ὅλας τάς ἕδρας τοῦ τετραέδρου. Ἄρα διά τοῦ σημείου τούτου θά διέρχωνται καί τά διχοτομοῦντα ἐπίπεδα τάς διέδρους ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ. Ἐάν δέ θεωρήσωμεν τήν σφαῖραν μέ κέντρον Ι καί ἀκτῖνα τήν ἀπόστασιν τοῦ Ι ἀπό μίαν ἕδραν, παρατηροῦμεν ὅτι ἡ σφαῖρα θά ἐφάπτεται τῶν ἑδρῶν ἐσωτερικῶς; Ἀκόμη ἡ ἐν λόγῳ σφαῖρα εἶναι μοναδική;

Ἡ ἀπόδειξις τῆς 2ας προτάσεως ὁμοίως.

177. Εἰς πᾶν τετράεδρον τά ἐπίπεδα, τά ὁποῖα διέρχονται δι' ἑκάστης ἀκμῆς καί τοῦ μέσου τῆς ἀπέναντι ἀκμῆς, διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου (διάμεσα ἐπίπεδα).



Ἀπόδειξις. Τά ἐπίπεδα ΑΒΜ, ΑΔΝ διέρχονται διά τῆς AG_A, ὅπου G_A τό κέντρον βάρους τῆς ἕδρας ΒΓΔ. Εἶναι γνωστόν ἤδη (ἄσκ. 8) ὅτι τά εὐθ. τμήματα, τά ὁποῖα συνδέουν ἑκάστην κορυφήν τετραέδρου μέ τό κέντρον βάρους τῆς ἔναντι ἕδρας, διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου G, τό ὁποῖον καί τά χωρίζει εἰς σταθερόν λόγον $\frac{3}{4}$, δηλαδή $\frac{AG}{AG_A} = \frac{3}{4}$. Τό σημεῖον G καλεῖται κέντρον βάρους τοῦ τετραέδρου.

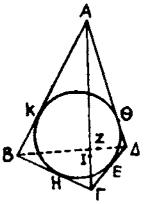
Παρατηρήσεις.

α) Διά τό σημεῖον G ἔχομεν, ὅπως εὐκόλως διαπιστοῦται, $\frac{(G.BΓΔ)}{(A.BΓΔ)}=\frac{1}{4}$.

β) Διά τοῦ σημείου G διέρχονται καί αἱ εὐθεῖαι αἱ ἑνοῦσαι τά μέσα τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν

178. Ἡ ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα ὑπάρχῃ σφαῖρα ἐφαπτομένη τῶν ἀκμῶν τετραέδρου, εἶναι ὅπως τό ἄθροισμα δύο ἀπέναντι ἀκμῶν, δι' ὅλα τά ζεύγη τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν, εἶναι τό αὐτό.

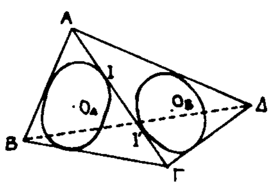
Ἀπόδειξις. Ἀναγκαῖον: Ἔστω Ε,Ζ,Η,Θ,Ι,Κ τά σημεῖα ἐπαφῆς. Ὡς γνωστόν



$$AΘ = AI = AK$$
$$BH = BZ = BK$$
$$ΓH = ΓI = ΓE$$
$$ΔΘ = ΔZ = ΔE.$$

Διά προσθέσεως κατά μέλη ἔχομεν $AΔ+BΓ=AΓ+BΔ=AB+ΓΔ$.

Ἱκανόν: Ἀποδεικνύομεν κατ' ἀρχήν ὅτι οἱ ἐγγεγραμμένοι κύκλοι εἰς τά τρίγωνα ΑΒΓ, ΑΔΓ ἐφάπτονται τῆς ΑΓ εἰς τό αὐτό σημεῖον. Θέσωμεν Ι,Ι′ τά σημεῖα ἐπαφῆς. Θά δείξωμεν ὅτι $AI = AI'$. Ἰσχύει



$$AI = \frac{AB+AΓ-BΓ}{2} \quad καί \quad AI'=\frac{AΔ+AΓ-ΓΔ}{2}.$$

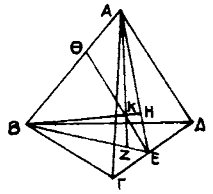
Ἀλλά $BΓ+AΔ=AB+ΓΔ$ ἤ $AB-BΓ=AΔ-ΓΔ$, ὅθεν $AI=AI'$ καί $I\equiv I'$.

Ἐάν O_A, O_B τά κέντρα τῶν ἐγγεγραμμένων κύκλων, τό ἐπίπεδον O_AIO_B εἶναι κάθετον ἐπί τήν ΑΓ. Αἱ κάθετοι διά τῶν O_A, O_B ἐπί τῶν ἀντιστοίχων ἑδρῶν τέμνονται διότι κεῖνται ἐπί τοῦ ἐπιπέδου O_AIO_B. Ὡς γνωστόν ὅμως, τά σημεῖα ἑκάστης ἐξ αὐτῶν ἀπέχουν ἴσον ἀπό τάς πλευράς τοῦ ἀντιστοίχου τριγώνου. Ὑπάρχουν συνολικῶς τέσσαρες εὐθεῖαι τοῦ αὐτοῦ εἴδους. Αὗται τέμνονται ἀνά δύο, χωρίς νά εὑρίσκωνται ἀνά τρεῖς ἐπί τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, ἤτοι θά διέρχωνται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου, ὅπερ θά ἀπέχῃ ἴσον ἀπό τάς ἀκμάς τοῦ τετραέδρου. Τό σημεῖον, λοιπόν, αὐτό εἶναι τό κέντρον σφαίρας ἐφαπτομένης τῶν ἀκμῶν τοῦ τετραέδρου.

179. Ἐάν εἰς τετράεδρον τά δύο ὕψη συναντῶνται, τότε καί τά ἄλλα δύο ὕψη αὐτοῦ ἐπίσης θά συναντῶνται.

Ἀπόδειξις. Ἔστω ΑΖ, ΒΗ, τά δύο ὕψη αὐτοῦ, τά ὁποῖα συναντῶνται εἰς τό σημεῖον Κ. Τό ἐπίπεδον ΑΚΒ τέμνει τήν ΓΔ εἰς Ε καί εἶναι κάθετον ἐπ' αὐτήν. Εἰς τό τρίγωνον ΑΒΕ τό σημεῖον

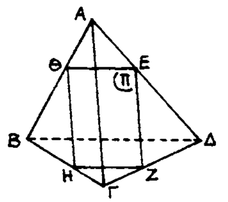
Κ εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον αὐτοῦ καὶ ἡ ΕΚ τὸ τρίτον ὕψος αὐτοῦ. Ἡ ΑΘ⊥ΘΕ,ΓΔ. Ἄρα τὸ ἐπίπεδον ΓΘΔ, ἐπειδὴ εἶναι κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ τομὴν τῶν ἐπιπέδων ΑΒΓ,ΑΒΔ, θὰ εἶναι κάθετον καὶ ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα αὐτά. Τὰ ὕψη ἐκ τῶν Γ,Δ τοῦ τετραέδρου θὰ κεῖνται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου ΓΘΔ (θὰ εἶναι ὕψη τοῦ τριγώνου ΓΘΔ) καὶ συνεπῶς θὰ τέμνωνται.



180. Εἰς τετράεδρον κάθε ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς δύο ἀπέναντι ἀκμὰς τέμνει αὐτὸ κατὰ παραλληλόγραμμον.

Ἀπόδειξις. Ἔστω Π∥ΑΓ,ΒΔ. Ἡ ΘΗ κεῖται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου μετὰ τῆς ΑΓ καί, ἐπειδὴ δὲν τέμνονται, θὰ εἶναι παράλληλοι. Ὁμοίως ΑΓ∥ΕΖ, ΘΕ∥ΒΔ, ΗΖ∥ΒΔ.

Παρατήρησις. Εἶναι δυνατὸν τὸ ΘΕΖΗ νὰ εἶναι τετράγωνον; Πότε;



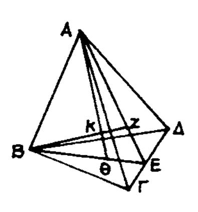
181. Κάθε τετράεδρον εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς παραλληλεπίπεδον, τοῦ ὁποίου αἱ ἓξ διαγώνιοι τῶν ἑδρῶν του (μία ἐφ' ἑκάστης ἕδρας) συμπίπτουν μὲ τὰς ἀκμὰς τοῦ τετραέδρου.

Ἀπόδειξις. Ἐξ ἑκάστης ἀκμῆς τοῦ τετραέδρου θεωροῦμεν τὸ παράλληλον ἐπίπεδον πρὸς τὴν ἀπέναντι ἀκμήν. Τὰ ἓξ ἐπίπεδα τεμνόμενα σχηματίζουν παραλληλεπίπεδον. Ἐπὶ ἑκάστης ἕδρας τοῦ παραλληλεπιπέδου ὑπάρχει ὡς διαγώνιος μία ἀκμὴ τοῦ τετραέδρου.

Παρατήρησις. Τὸ κέντρον βάρους τοῦ τετραέδρου συμπίπτει μὲ τὸ κέντρον τοῦ παραλληλεπιπέδου. Ἀκόμη ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου εἶναι τὸ $\frac{1}{6}$ τοῦ ὄγκου τοῦ παραλληλεπιπέδου.

182. Ἐὰν εἰς τετράεδρον αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι ἑκάστην κορυφὴν μὲ τὸ κέντρον τῆς ἐγγεγραμμένης περιφερείας τῆς ἀπέναντι ἕδρας διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, τὰ γινόμενα τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν εἶναι ἴσα. Ἀντιστρόφως.

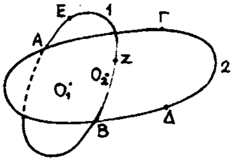
Ἀπόδειξις. Ἔστω Ζ,Θ τὰ κέντρα τῶν ἐγγεγραμμένων κύκλων εἰς τὰ τρίγωνα ΑΓΔ, ΒΓΔ. Αἱ ΑΘ,ΒΖ ὁρίζουν τὸ ἐπίπεδον ΑΒΕ. Αἱ ΑΕ,ΒΕ εἶναι διχοτόμοι τῶν γωνιῶν $\widehat{\Gamma A \Delta}$, $\widehat{\Gamma B \Delta}$. Ἄρα $\frac{А\Gamma}{А\Delta}=\frac{\Gamma E}{E\Delta}$ καὶ $\frac{B\Gamma}{B\Delta}=\frac{\Gamma E}{E\Delta}$ ὅθεν ΑΓ·ΒΔ=ΑΔ·ΒΓ.



Τὸ ἀντίστροφον ἐπαφίεται εἰς τὸν ἀναγνώστην.

183. Ἐὰν ν κύκλοι τέμνωνται ἀνὰ δύο εἰς δύο σημεῖα, θὰ εὑρίσκωνται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς αὐτῆς σφαίρας ἢ ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν τοὺς κύκλους 1,2.



Ἔστω ΑΒ ἡ κοινὴ χορδή. Τὰ κέντρα O_1, O_2, θὰ κεῖνται ἐπὶ τοῦ μεσοκαθέτου ἐπιπέδου Π εἰς τὴν ΑΒ. Ἐὰν θεωρήσωμεν τὰς καθέτους εἰς O_1, O_2 ἐπὶ τὰ ἐπίπεδα τῶν κύκλων 1,2 ἀντιστοίχως, αἱ εὐθεῖαι αὐταὶ εὑρίσκονται ἀμφότεραι ἐπὶ τοῦ Π. Ἄρα θὰ τέμνωνται ἢ θὰ εἶναι παράλληλοι, ἂν τὰ ἐπίπεδα τῶν κύκλων συμπίπτουν. Εἰς τὴν πρώτην περίπτωσιν, ἐὰν Ο τὸ σημεῖον τομῆς των, οἱ κύκλοι 1,2 κεῖνται ἐπὶ σφαίρας (Ο,ΟΑ). Ἐὰν δὲ τυχὼν κύκλος τοῦ συνόλου τέμνει αὐτοὺς εἰς Γ,Δ,Ε,Ζ, προφανῶς οὗτος θὰ κεῖται ἐπὶ τῆς ἐν λόγῳ σφαίρας. Εἰς τὴν δευτέραν περίπτωσιν οἱ κύκλοι 1,2 κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, τὰ σημεῖα Γ,Δ,Ε,Ζ ἐπίσης, ἄρα καὶ ὁ τυχὼν κύκλος τοῦ συνόλου ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

Παρατήρησις. Ἐκ τῆς ἀνωτέρω ἀποδείξεως προκύπτει ὅτι ὁ ν δὲν εἶναι ἀνάγκη νὰ εἶναι πεπερασμένος.

184. Δίδεται κύκλος Ο, σημεῖον Α τῆς περιφερείας αὐτοῦ καὶ σημεῖον Ρ ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου του. Σημεῖον Μ μεταβλητὸν κινεῖται ἐπὶ τῆς περιφερείας. Δείξατε ὅτι ὁ κύκλος ὁ περιγεγραμμένος περὶ τὸ τρίγωνον ΑΡΜ κεῖται ἐπὶ σταθερᾶς σφαίρας.

Ἀπόδειξις. Ὁ κύκλος Ο καὶ τὸ σημεῖον Ρ κεῖνται ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας μιᾶς ἐντελῶς καθωρισμένης σφαίρας. (Διατί;)

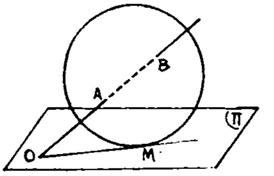
Τὰ σημεῖα Ρ,Α,Μ εἶναι σημεῖα τῆς σφαίρας αὐτῆς, ἄρα καὶ ὁ κύκλος περὶ τὰ Α,Ρ,Μ κεῖται ἐπὶ τῆς σφαίρας.

185. Δίδονται δύο εὐθεῖαι ε,ε′ μὴ κείμεναι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ τὰ σημεῖα Α,Α′ ἐπ' αὐτῶν. Δείξατε ὅτι ὑπάρχει μία καὶ μόνον σφαῖρα ἐφαπτομένη τῶν ε,ε′ εἰς Α,Α′.

Ἀπόδειξις. Τὸ κέντρον τῆς ἐν λόγῳ σφαίρας εἶναι ἐντελῶς καθωρισμένον. Εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ μεσοκαθέτου ἐπιπέδου ἐπὶ τὴν ΑΑ′ καὶ εἰς τὴν τομὴν τῶν διὰ τῶν Α,Α′ καθέτων ἐπιπέδων ἐπὶ τὰς ε,ε′ ἀντιστοίχως.

186. Μεταβλητή σφαῖρα διέρχεται διά δύο σταθερῶν σημείων Α,Β καί ἐφάπτεται σταθεροῦ ἐπιπέδου Π. Δείξατε ὅτι τά σημεῖα ἐπαφῆς κεῖνται ἐπί τῆς περιφερείας ἑνός κύκλου.

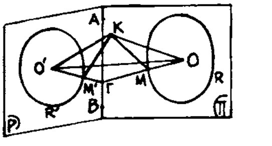
Ἀπόδειξις. Ἔστω Ο τό σημεῖον τομῆς τῆς ΑΒ καί τοῦ ἐπιπέδου Π. Ἔχομεν $\overline{OM}^2=\overline{OA}\cdot\overline{OB}$ ὅθεν $OM=\sqrt{\overline{OA}\cdot\overline{OB}}$. Ἤτοι τό Μ κεῖται ἐπί περιφερείας κέντρου Ο καί ἀκτῖνος ΟΜ.



187. Ἵνα δύο κύκλοι, τῶν ὁποίων τά ἐπίπεδα δέν εἶναι παράλληλα, εὑρίσκωνται ἐπί τῆς αὐτῆς σφαίρας, ἀρκεῖ δύο σημεῖα τῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων των νά ἔχουν τήν αὐτήν δύναμιν πρός τούς κύκλους.

Ἀπόδειξις. $\mathcal{D}_O(A)=\mathcal{D}_{O'}(A)$ ἤ $OA^2-R^2=$ $=O'A^2-R'^2 \Rightarrow OA^2-O'A^2=R^2-R'^2$, ὁμοίως $OB^2-O'B^2=R^2-R'^2 \Rightarrow OA^2-O'A^2=OB^2-O'B^2$, ὅθεν $OO'\perp AB$ (συμφώνως πρός 2.3, κεφάλαιον 3). Θεωροῦμεν διά τῆς ΟΟ' τό κάθετον ἐπίπεδον ΟΓΟ' ἐπί τήν τομήν ΑΒ. Διά τό σημεῖον Γ ἔχομεν $\Gamma O^2-R^2=\Gamma O'^2-R'^2$ (διότι $OO'\perp A\Gamma$). Ἔστω Κ τό σημεῖον τομῆς τῶν καθέτων εἰς Ο,Ο' ἐπί τά ἐπίπεδα τῶν κύκλων. Ἐκ τῶν τριγώνων ΚΟΓ, ΚΟΜ ἔχομεν $K\Gamma^2-KM^2=\Gamma O^2-R^2$. Ἐκ τῶν τριγώνων ΚΟ'Γ, ΚΟ'Μ' $K\Gamma^2-KM'^2=\Gamma O'^2-R'^2$, ὅθεν

$$KM=\sqrt{K\Gamma^2-[\Gamma O^2-R^2]}=\sqrt{K\Gamma^2-[\Gamma O'^2-R'^2]}=KM'.$$



188. Κανονικοῦ τετραέδρου ἀκμῆς α νά ὑπολογισθοῦν: ὁλική ἐπιφάνεια, ὕψος, ὄγκος, ἀκτίς ἐγγεγραμμένης σφαίρας, ἀκτίς περιγεγραμμένης σφαίρας, ἀκτίς παρεγγεγραμμένης σφαίρας, ἀκτίς σφαίρας ἐφαπτομένης τῶν ἀκμῶν.

Λύσις. Ἔστω Κ τό κέντρον τοῦ τριγώνου ΒΔΓ καί Ο τό κέντρον τοῦ τετραέδρου.

Ὁλική ἐπιφάνεια: $E=\alpha^2\sqrt{3}$.

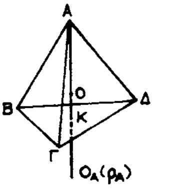
Ὕψος: $AK=\sqrt{\alpha^2-\left(\frac{\alpha}{\sqrt{3}}\right)^2}=\alpha\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Ὄγκος: $V=\frac{1}{3}\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\alpha\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\alpha^3\frac{\sqrt{2}}{12}$.

Ἀκτίς σφαίρας ἐγγεγραμμένης: $OK=\frac{1}{4}AK=\frac{\alpha\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}$.

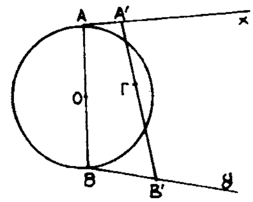
Ἀκτίς σφαίρας περιγεγραμμένης: $OA=\frac{3\alpha\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}$.

Ἀκτίς σφαίρας παρεγγεγραμμένης: $(AB\Gamma\Delta)=(O_A A\Gamma\Delta)+(O_A AB\Gamma)+(O_A AB\Delta)-$ $-(O_A B\Gamma\Delta)$ ἤ $\frac{\alpha^3\sqrt{2}}{12}=\rho_A\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}-\rho_A\frac{1}{3}\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}\Rightarrow\rho_A=\frac{\alpha}{\sqrt{6}}$.



Ἀκτὶς σφαίρας ἐφαπτομένης τῶν ἀκμῶν: εἶναι τὸ ὕψος τοῦ ἰσοσκελοῦς $\overset{\triangle}{AO\Gamma}$ $r=\sqrt{\frac{3a^2}{8}-\frac{a^2}{4}}=\frac{a}{2\sqrt{2}}$.

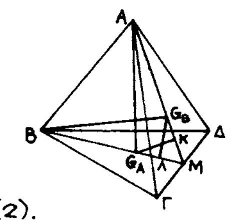
189. Δίδονται δύο ἡμιευθεῖαι Ax, By ὀρθογώνιοι μὲ AB κοινὴν κάθετον. Θεωροῦμεν τὴν σφαῖραν διαμέτρου AB. Ἐὰν μία ἐφαπτομένη τῆς σφαίρας τέμνη τὴν πρώτην ἡμιευθεῖαν εἰς A′ καὶ τὴν δευτέραν εἰς B′, δείξατε ὅτι $AA'\cdot BB'=\frac{AB^2}{2}$. Ἀντιστρόφως.



Ἀπόδειξις. $A'A=A'\Gamma$ καὶ $B'B=B'\Gamma$. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου $A'BB'$ ἔχομεν $A'B'^2=A'B^2+BB'^2$ (1). Ἀλλὰ ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου $\overset{\triangle}{A'AB}$: $A'B^2=AA'^2+AB^2$ (2), ὅθεν ἡ (1) γίνεται: $(AA'+BB')^2=AA'^2+AB^2+BB'^2 \Rightarrow AA'\cdot BB'=\frac{AB^2}{2}$.

Ἀντιστρόφως. Θεωροῦμεν τὰς ἐκ τοῦ A′ ἐφαπτομένας τῆς σφαίρας ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $A'By$. Ἡ μία ἐξ αὐτῶν τέμνει τὴν ἡμιευθεῖαν By, ἔστω εἰς τὸ σημεῖον B″. Βάσει τοῦ προηγουμένου ἔχομεν $AA'\cdot BB''=\frac{AB^2}{2}$. Ἄρα $BB'=BB'' \Rightarrow B'\equiv B''$.

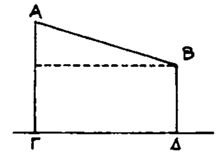
190. Δίδεται τετράεδρον ΑΒΓΔ καὶ G_A, G_B τὰ κέντρα βάρους τῶν ἑδρῶν ΒΓΔ, ΑΓΔ. Θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ ριζικὸν ἐπίπεδον τῶν σφαιρῶν μὲ διαμέτρους AG_A, BG_B εἶναι τὸ ἐκ τοῦ μέσου τῆς ΓΔ ἀγόμενον κάθετον ἐπίπεδον ἐπὶ τὴν AB.



Ἀπόδειξις. Θέτομεν M τὸ μέσον τῆς ΓΔ. Ἡ περιφέρεια διαμέτρου AG_A εἰς τὸ ἐπίπεδον AMB τέμνει τὴν AM εἰς K. Ἡ περιφέρεια διαμέτρου BG_B τέμνει τὴν BM εἰς Λ. Τὸ τετράπλευρον $K\Lambda G_A G_B$ εἶναι ἐγγράψιμον. Ἄρα $MK\cdot MG_B=M\Lambda\cdot MG_A$ (1), ἀλλὰ ὡς γνωστὸν $\frac{MA}{MG_B}=\frac{MB}{MG_A}=\frac{3}{1}$ (2).

(1),(2) $\Rightarrow MK\cdot MA=M\Lambda\cdot MB$. Ἡ τελευταία σχέσις λέγει ὅτι τὸ σημεῖον M εἶναι σημεῖον τοῦ ριζικοῦ ἐπιπέδου τῶν δύο σφαιρῶν. Τὸ κάθετον ἐπίπεδον δὲ διὰ τοῦ M ἐπὶ τὴν διάκεντρον τῶν δύο σφαιρῶν εἶναι προφανῶς κάθετον καὶ ἐπὶ τὴν AB.

191. Δίδονται δύο σφαῖραι (A,α) καὶ (B,β). Ἐὰν ἐπίπεδον Π τέμνη ταύτας κατὰ κύκλους ὀρθογωνίους καὶ ΑΓ, ΒΔ αἱ ἀποστάσεις τῶν A, B ἀπὸ τοῦ Π, νὰ δειχθῇ ὅτι $2A\Gamma\cdot B\Delta=\alpha^2+\beta^2-AB^2$.



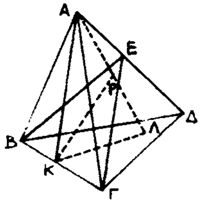
Ἀπόδειξις. Ὑποθέσωμεν ὅτι οἱ κύκλοι τομῆς εἶναι (Γ,γ), (Δ,δ). Θὰ ἔχωμεν $\gamma^2=\alpha^2-A\Gamma^2$, $\delta^2=\beta^2-B\Delta^2$ καὶ $\Gamma\Delta^2=AB^2-(A\Gamma-B\Delta)^2$.

Προσθέτομεν κατὰ μέλη τὰς δύο πρώτας σχέσεις $\gamma^2+\delta^2=\alpha^2+\beta^2-(A\Gamma^2+B\Delta^2)$. Ἀλλὰ $\Gamma\Delta^2=AB^2+2A\Gamma\cdot B\Delta-(A\Gamma^2+B\Delta^2)$. Προφανῶς ὅμως εἶναι $\Gamma\Delta^2=\gamma^2+\delta^2$, ἄρα $2A\Gamma\cdot B\Delta=\alpha^2+\beta^2-AB^2$.

Ὁμὰς Β΄.

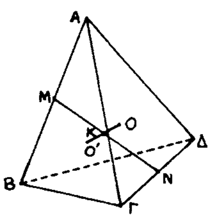
192. Εἰς πᾶν τετράεδρον ΑΒΓΔ αἱ προβολαὶ τῆς κορυφῆς Α ἐπὶ τὰ διχοτομοῦντα ἐπίπεδα τὰς διέδρους ΒΓ, ΓΔ, ΔΒ, ὡς καὶ ἐπὶ τὰ διχοτομοῦντα τὰς παραπληρωματικὰς αὐτῶν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

Ἀπόδειξις. Ἔστω Ρ ἡ προβολὴ τοῦ Α ἐπὶ τοῦ διχοτομοῦντος ἐπιπέδου τὴν δίεδρον ΒΓ. Θεωροῦμεν διὰ τῆς ΑΡ τὸ κάθετον ἐπίπεδον ἐπὶ τὴν ΒΓ. Ἡ ΚΡ εἶναι διχοτόμος τῆς $\widehat{AK\Lambda}$, ὅθεν $AP=P\Lambda$. Τὸ σημεῖον Ρ θὰ κεῖται ἐπὶ τοῦ μεσοκαθέτου ἐπιπέδου τοῦ ἀγομένου ἐπὶ τοῦ ὕψους υ_A. Τὸ αὐτὸ διὰ τὰ ὑπόλοιπα πέντε σημεῖα.



193. Εἰς πᾶν τετράεδρον τὰ ἐπίπεδα τὰ ἀγόμενα διὰ τῶν μέσων τῶν ἀκμῶν καὶ κάθετα ἐπὶ τὰς ἀπέναντι ἀκμὰς διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. (Σημεῖον τοῦ Monge).

Ἀπόδειξις. Ἔστω Ο τὸ κέντρον τῆς περιγεγραμμένης σφαίρας καὶ Κ τὸ κέντρον βάρους τοῦ τετραέδρου (μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος ΜΝ, τὸ ὁποῖον συνδέει τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν). Θεωροῦμεν τὸ συμμετρικὸν Ο΄ τοῦ Ο πρὸς Κ. Τὸ ΜΟΝΟ΄ εἶναι παραλληλόγραμμον καὶ $MO'\parallel ON$. Ἀλλὰ $ON\perp\Gamma\Delta$ (μεσοκάθετος), ὅθεν τὸ ἐκ τοῦ Μ κάθετον ἐπίπεδον ἐπὶ τὴν ΓΔ περιέχει τὸ σημεῖον Ο΄. Τὸ αὐτὸ καὶ διὰ τὰ ἄλλα ἐπίπεδα.

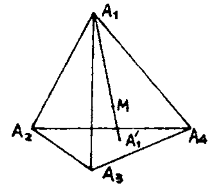


194. Θεωροῦμεν τὸ τετράεδρον $A_1A_2A_3A_4$. Ἔστω Μ τυχὸν σημεῖον. Θέτομεν $A_i'=A_iM\cap\alpha_i$, α_i ἡ ἕδρα ἔναντι τῆς κορυφῆς A_i, $A_iM=x_i$, $MA_i'=u_i$, $(MA_1A_2A_3)=V_4$, $(MA_1A_2A_4)=V_3$, $(MA_1A_3A_4)=V_2$, $(MA_2A_3A_4)=V_1$. Ἀκόμη $(A_1'A_2A_3)=E_{14}$, $(A_1'A_3A_4)=E_{12}$, $(A_1'A_2A_4)=E_{13}$. Θὰ δείξωμεν ὅτι:

1) $\dfrac{x_1}{u_1}=\dfrac{V_2+V_3+V_4}{V_1}$ 2) $\dfrac{V_2}{E_{12}}=\dfrac{V_3}{E_{13}}=\dfrac{V_4}{E_{14}}$.

Ἀπόδειξις. 1) $\dfrac{x_1}{u_1}=\dfrac{V_2}{(MA_1'A_3A_4)}=\dfrac{V_3}{(MA_1'A_2A_4)}=\dfrac{V_4}{(MA_1'A_2A_3)}=$

$$= \frac{V_2+V_3+V_4}{(MA_1'A_3A_4)+(MA_1'A_2A_4)+(MA_1'A_2A_3)} = \frac{V_2+V_3+V_4}{V_1}.$$



$$2)\ \frac{E_{12}}{E_{13}} = \frac{(A_1A_1'A_3A_4)}{(A_1A_1'A_2A_4)} = \frac{(MA_1'A_3A_4)}{(MA_1'A_2A_4)} = \frac{(A_1A_1'A_3A_4)-(MA_1'A_3A_4)}{(A_1A_1'A_2A_4)-(MA_1'A_2A_4)} =$$

$$= \frac{V_2}{V_3}$$

195. Εἰς τὸ προηγούμενον πρόβλημα δείξατε ὅτι:

$$\frac{(A_1'A_2'A_3'A_4')}{(A_1A_2A_3A_4)} = \frac{3u_1u_2u_3u_4}{x_1x_2x_3x_4}.$$

Ἀπόδειξις. $\frac{(MA_1'A_2'A_3')}{V_4} = \frac{u_1u_2u_3}{x_1x_2x_3}$. Ἀλλὰ $\frac{V_4}{V} = \frac{u_4}{u_4+x_4}$, ὅπου $V=(A_1A_2A_3A_4)$, ὅθεν $(MA_1'A_2'A_3') = V\frac{u_1u_2u_3u_4}{x_1x_2x_3(x_4+u_4)}$. Ἄρα $(A_1'A_2'A_3'A_4') = \sum (MA_1'A_2'A_3') = V\frac{u_1u_2u_3u_4}{x_1x_2x_3x_4}\sum\frac{x_1}{x_1+u_1}$. Ἀλλά, ὡς γνωστόν, $\frac{x_1}{u_1} = \frac{V_2+V_3+V_4}{V_1}$, ἄρα $\frac{x_1}{u_1+x_1} = \frac{V_2+V_3+V_4}{V}$ καὶ συνεπῶς $\sum\frac{x_1}{x_1+u_1} = 3$. Τέλος $\frac{(A_1'A_2'A_3'A_4')}{(A_1A_2A_3A_4)} = \frac{3u_1u_2u_3u_4}{x_1x_2x_3x_4}$.

196. Δίδονται πέντε σημεῖα A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 εἰς τὸν χῶρον. Θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων τῶν δυνάμεων ἑκάστου σημείου, πρὸς τὴν σφαῖραν τὴν διερχομένην διὰ τῶν ὑπολοίπων τεσσάρων σημείων, εἶναι ἴσον πρὸς τὸ μηδέν.

Ἀπόδειξις. Θέτομεν $(O_1),(O_2),(O_3),\dots$ καὶ $V_1, V_2, V_3, \dots$ τὰς περιγεγραμμένας σφαίρας καὶ τοὺς ὄγκους (προσημασμένους) τῶν τετραέδρων $A_2A_3A_4A_5$, $A_1A_3A_4A_5$, $A_1A_2A_4A_5, \dots$ ἀντιστοίχως. Τὸ ριζικὸν ἐπίπεδον τῶν $(O_1),(O_5)$ εἶναι τὸ $A_2A_3A_4$. Ἔστω x, y αἱ ἀλγεβρικαὶ ἀποστάσεις τῶν A_1, A_5 ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον. Συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα τοῦ Casey ἔχομεν $\mathcal{D}_{O_1}(A_1) = -x\cdot 2O_1O_5$, $\mathcal{D}_{O_5}(A_5) = -y\cdot 2O_5O_1$. Ἄρα $\frac{\mathcal{D}_{O_5}(A_5)}{\mathcal{D}_{O_1}(A_1)} = -\frac{y}{x} = -\frac{V_1}{V_5}$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν $\frac{\mathcal{D}_{O_5}(A_5)}{\mathcal{D}_{O_2}(A_2)} = -\frac{V_2}{V_5}$, $\frac{\mathcal{D}_{O_5}(A_5)}{\mathcal{D}_{O_3}(A_3)} = -\frac{V_3}{V_5}$, $\frac{\mathcal{D}_{O_5}(A_5)}{\mathcal{D}_{O_4}(A_4)} = -\frac{V_4}{V_5}$. Ἐκ τῶν σχέσεων αὐτῶν καὶ λαμβανομένου ὑπ' ὄψιν ὅτι $V_5 = V_1+V_2+V_3+V_4$ προκύπτει ὅτι $\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{\mathcal{D}_{O_i}(A_i)} = 0$.

197.

Ὁρισμός. Κύκλος θὰ λέγεται ὀρθογώνιος εἰς σφαῖραν (ἢ σφαῖρα ὀρθογώνιος εἰς τὸν κύκλον), ὅταν τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας καὶ εἶναι ἀκόμη ὁ κύκλος ὀρθογώνιος πρὸς τὸν κύκλον τῆς τομῆς τοῦ ἐπιπέδου καὶ τῆς σφαίρας.

1. Θεώρημα. Ἐὰν κύκλος (A) εἶναι ὀρθογώνιος εἰς σφαῖραν (O), τότε καὶ ἡ ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου εἰς τὸ σημεῖον τομῆς τῶν (A) καὶ (O) εἶναι κάθετος εἰς τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς σφαιρας εἰς τὸ αὐτὸ σημεῖον.

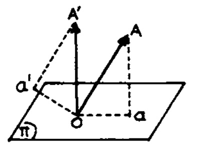
Ἀπόδειξις. Ὁ κύκλος (Α) εἶναι ὀρθογώνιος εἰς τὸν μέγιστον κύκλον (Β) τῆς σφαίρας (Ο). Ἄρα ἡ ἐφαπτομένη τοῦ (Α) εἰς τὸ σημεῖον τομῆς θὰ διέρχεται διὰ τοῦ Ο.

2. Θεώρημα. Ἐὰν κύκλος (Α) εἶναι ὀρθογώνιος εἰς σφαῖραν (Ο), τότε κάθε σφαῖρα (Ο') διὰ τοῦ (Α) θὰ εἶναι ὀρθογώνιος εἰς τὴν (Ο).

Ἀπόδειξις. Θὰ εἶναι $O'A \perp$ ἐπίπεδον (Α). Ἐὰν Μ σημεῖον τομῆς τῶν (Α) καὶ (Ο), $AM \perp OM$. Ἄρα συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα τῶν τριῶν καθέτων $O'M \perp OM$.

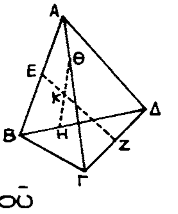
198. Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν προβολῶν τριῶν ἀκτίνων ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ σφαίρας (Ο, R) ἀνὰ δύο καθέτων ἐπὶ τυχόντος ἐπιπέδου ἰσοῦται πρὸς τὸ διπλάσιον τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος.

Ἀπόδειξις. Ἔστω Π τὸ ἐπίπεδον προβολῆς. Θεωροῦμεν $OA' \perp \Pi$ καὶ $OA' = OA$. Ἡ προβολὴ τοῦ ΟΑ ἐπὶ τοῦ Π καὶ ἡ προβολὴ τοῦ ΟΑ' ἐπὶ τοῦ καθέτου ἐπιπέδου εἰς Ο ἐπὶ τὴν ΟΑ εἶναι ἴσαι (διότι $\overset{\triangle}{OAa} = \overset{\triangle}{OA'a'}$). Βασισθῆτε κατόπιν εἰς τὴν ἄσκησιν 51.



199. Δίδεται τετράεδρον ΑΒΓΔ. Ἔστω Ε καὶ Ζ τὰ μέσα τῶν ΑΒ καὶ ΓΔ. Φέρομεν τυχὸν ἐπίπεδον διὰ τῆς ΕΖ, τὸ ὁποῖον τέμνει τὴν ΑΓ εἰς Θ καὶ τὴν ΒΔ εἰς Η. Δείξατε ὅτι ἡ ΕΖ διχοτομεῖ τὸ εὐθ. τμῆμα ΗΘ.

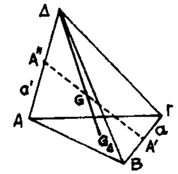
Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν τὸ ζεῦγος τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων διὰ τῶν ΑΓ, ΒΔ. Ἡ ΕΖ εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ μεσοπαραλλήλου ἐπιπέδου. Ἡ ΗΘ τέμνεται ὑπὸ τῆς ΕΖ εἰς σημεῖον Κ κείμενον ἐπὶ τοῦ μεσοπαραλλήλου ἐπιπέδου.



Νὰ ἀποδειχθῇ ἡ ἰδία πρότασις διὰ προβολῆς τοῦ σχήματος ἐπὶ ἐπιπέδου καθέτου ἐπὶ τὴν ΕΖ.

200. Τὸ ἄθροισμα τῶν διαμέσων τετραέδρου περιέχεται μεταξὺ τῶν $\frac{4}{9}$ καὶ τῶν $\frac{2}{3}$ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκμῶν. (Διάμεσος τετραέδρου εἶναι τὸ εὐθ. τμῆμα τὸ ὁποῖον συνδέει μίαν κορυφὴν μὲ τὸ κέντρον βάρους τῆς ἀπέναντι ἕδρας).

Ἀπόδειξις. Ἔστω ΑΒΓΔ τετράεδρον, G τὸ κέντρον βάρους αὐτοῦ, A′ καὶ A″ τὰ μέσα τῶν ΒΓ, ΑΔ. Ἐὰν θέσωμεν $\mu_\alpha, \mu_\beta, \mu_\gamma, \mu_\delta$ τὰς διαμέσους καὶ $ΒΓ=\alpha$, $ΑΒ=\gamma$, $ΑΓ=\beta$, $ΔΑ=\alpha'$, $ΔΒ=\beta'$, $ΔΓ=\gamma'$, θὰ δείξωμεν ὅτι $\frac{4}{9}(\alpha+\beta+\gamma+\alpha'+\beta'+\gamma') < \Sigma\mu_\alpha < \frac{2}{3}(\alpha+\beta+\gamma+\alpha'+\beta'+\gamma')$. Εἰς τὸ τρίγωνον $A''ΔA'$, ὡς γνωστὸν (ἄσκ. 10, Α′ τεῦχος), εἶναι $ΔG < \frac{ΔA'+ΔA''}{2}$ ἢ $\frac{3}{4}\mu_\delta < \frac{\alpha'}{4} + \frac{ΔA'}{2}$. Ἀλλὰ εἰς τὸ $\overset{\triangle}{ΒΔΓ}$ ἔχομεν $ΔA' < \frac{ΒΔ+ΔΓ}{2}$ ὁπότε $\mu_\delta < \frac{\alpha'+\beta'+\gamma'}{3}$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν ἄλλας τρεῖς σχέσεις τῆς ἰδίας μορφῆς καὶ προσθέτομεν κατὰ μέλη. Διὰ τὸ ἀριστερὸν σκέλος τῆς ἀνισότητος, ἐκ τοῦ $\overset{\triangle}{AGΔ}$ ἔχομεν: $AG+GΔ > ΔΑ$ ἢ $\mu_\alpha+\mu_\delta > \frac{4}{3}\alpha'$. Προσθέτομεν τὰς λοιπὰς ὁμοίας σχέσεις.



ΕΙΔΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ ΤΕΤΡΑΕΔΡΑ

201. Ὀρθοκεντρικὸν τετράεδρον.

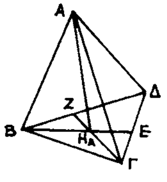
Ὀνομάζομεν ὀρθοκεντρικὸν (ἢ ὀρθογώνιον) τετράεδρον ἐκεῖνο τὸ τετράεδρον, τοῦ ὁποίου αἱ ἀπέναντι ἀκμαὶ εἶναι ἀνὰ δύο ὀρθογώνιοι.

Ὁμὰς Α′.

1. Εἰς τετράεδρον, ἐὰν δύο ζεύγη ἀπέναντι ἀκμῶν περιέχουν εὐθείας καθέτους, καὶ τὸ τρίτον ζεῦγος περιέχει καθέτους εὐθείας.

2. Εἰς τὸ ὀρθοκεντρικὸν τετράεδρον ὁ ποὺς ἑκάστης κορυφῆς ἐπὶ τὴν ἀπέναντι ἕδραν εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον αὐτῆς. Ἀντιστρόφως.(1)

Ἀπόδειξις. Ἔστω $ΑΒ \perp ΓΔ$, $ΑΓ \perp ΒΔ$ καὶ H_A ἡ προβολὴ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ἕδραν ΒΓΔ. Θὰ ἔχωμεν $ΓΔ \perp AH_A$, $ΓΔ \perp ΑΒ \Rightarrow ΓΔ \perp$ ἐπίπεδον BAH_A. Ἤτοι BH_A ὕψος τοῦ τριγώνου ΒΓΔ. Ὁμοίως διὰ τὴν $ΓH_A$. Ὅθεν H_A ὀρθόκεντρον τοῦ τριγώνου ΒΓΔ.



3. Εἰς τὸ ὀρθοκεντρικὸν τετράεδρον τὰ ὕψη διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου (ὀρθόκεντρον). Ἀντιστρόφως.

Αἱ κοιναὶ κάθετοι τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν διέρχονται διὰ τοῦ ση-

---

(1) Τὰ ἀντίστροφα διὰ τὰς ἀσκήσεις ἐπὶ τῶν εἰδικοῦ τύπου τετραέδρων ἐπαφίενται εἰς τὸν ἀναγνώστην.

μείου τομῆς τῶν ὑψῶν.

Ἀπόδειξις. Ἐπὶ τοῦ προηγουμένου σχήματος τὸ ἐπίπεδον ΒΑΕ⊥ΓΔ. Τὸ ἐκ τῆς κορυφῆς Β ἀγόμενον ὕψος τοῦ τετραέδρου τέμνει τὸ ὕψος $ΑΗ_Α$. Ἄρα τὰ ὕψη τοῦ τετραέδρου, τεμνόμενα ἀνὰ δύο καὶ μὴ κείμενα ἀνὰ τρία ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου, θὰ διέρχωνται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

Παρατηροῦμεν ἀκόμη ὅτι ἡ κοινὴ κάθετος τῶν ἀκμῶν ΑΒ, ΓΔ εἶναι τὸ ὕψος ἐκ τῆς κορυφῆς Ε τοῦ τριγώνου ΑΒΕ. Κατὰ συνέπειαν, ἡ κοινὴ κάθετος τῶν δύο ἀπέναντι ἀκμῶν διέρχεται διὰ τοῦ ὀρθοκέντρου τοῦ τετραέδρου, ἄρα αἱ κοιναὶ κάθετοι τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν αὐτοῦ διέρχονται διὰ τοῦ σημείου τομῆς τῶν ὑψῶν.

4. Εἰς τὸ ὀρθοκεντρικὸν τετράεδρον τὰ εὐθ. τμήματα, τὰ ὁποῖα συνδέουν τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν εἶναι ἴσα μεταξύ των. (Ἄρα τὸ κέντρον βάρους ἀπέχει ἴσον ἀπὸ τὰ μέσα τῶν ἀκμῶν). Παρατηρήσατε ὅτι εἶναι διαγώνια ὀρθογωνίων.

5. Τὸ περιγεγραμμένον παραλληλεπίπεδον περὶ ὀρθοκεντρικὸν τετράεδρον ἔχει τὰς ἀκμάς του ἴσας. Δόσατε μέθοδον κατασκευῆς παρομοίων τετραέδρων.

6. Μετρικαὶ σχέσεις.

α) Εἰς τὸ ὀρθοκεντρικὸν τετράεδρον ὁ ὄγκος ἰσοῦται πρὸς τὸ $\frac{1}{6}$ τοῦ γινομένου δύο ἀπέναντι ἀκμῶν ἐπὶ τὴν ἐλαχίστην ἀπόστασιν αὐτῶν.

β) Τὰ ἀθροίσματα τῶν τετραγώνων τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν εἶναι ἴσα.

γ) Τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν γινομένων τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ τετραπλάσιον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν ἑδρῶν.

δ) Τὸ ἄθροισμα τῶν 6 διέδρων καὶ τῶν 12 γωνιῶν, αἱ ὁποῖαι σχηματίζονται ὑφ' ἑκάστης ἀκμῆς καὶ τῶν ἑδρῶν ἐπὶ τῶν ὁποίων περατοῦνται, εἶναι ἴσον πρὸς 12 ὀρθάς.

Ὁμὰς Β'.

7. Εἰς τὸ ὀρθοκεντρικὸν τετράεδρον μία τοὐλάχιστον ἕδρα εἶναι τρίγωνον ὀξυγώνιον. Τί συμπεράσματα ἐξάγετε διὰ τὰς ὑπολοίπους;

Ἐξετάσατε τρεῖς περιπτώσεις: α) Τὸ ὀρθόκεντρον ἐντὸς τοῦ τετραέδρου. β) Ἐκτὸς τοῦ τετραέδρου. γ) Ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας.

8. Εἰς ὀρθοκεντρικὸν τετράεδρον τὰ μέσα τῶν ἀκμῶν καὶ οἱ πόδες τῶν κοινῶν καθέτων τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν εἶναι 12 σημεῖα κείμενα ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας, τῆς ὁποίας κέντρον εἶναι τὸ κέντρον βάρους τοῦ τετραέδρου (πρώτη σφαῖρα τοῦ Euler). Παρατηρήσατε ἀκόμη ὅτι ἡ σφαῖρα αὐτὴ τέμνει ἑκάστην ἕδραν κατὰ τὴν περιφέρειαν Euler αὐτῆς.

9. Εἰς τὸ ὀρθοκεντρικὸν τετράεδρον τὸ κέντρον τῆς περιγεγραμμένης σφαίρας O, τὸ κέντρον βάρους G καὶ τὸ ὀρθόκεντρον H κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας καὶ $OG = GH$. Ἐπὶ τῆς εὐθείας αὐτῆς κεῖται καὶ τὸ σημεῖον τομῆς τῶν καθέτων ἐπὶ τὰς ἕδρας εἰς τὰ κέντρα βάρους αὐτῶν (εὐθεῖα Euler).

10. Εἰς ὀρθοκεντρικὸν τετράεδρον τὰ κέντρα βάρους τῶν ἑδρῶν, τὰ ὀρθόκεντρα αὐτῶν καὶ τὰ σημεῖα, τὰ ὁποῖα διαιροῦν εἰς λόγον 2:1 τὰς ἀποστάσεις τῶν κορυφῶν τοῦ τετραέδρου ἀπὸ τοῦ ὀρθοκέντρου, εἶναι 12 σημεῖα κείμενα ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας, τῆς ὁποίας τὸ κέντρον O' διαιρεῖ τὴν HO εἰς λόγον 2:1 (δευτέρα σφαῖρα Euler).

11. α) Ἐὰν M καὶ N εἶναι οἱ πόδες τῆς κοινῆς καθέτου τοῦ ὀρθοκεντρικοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ τῆς ἀντιστοιχούσης εἰς τὰς ἀκμὰς ΑΒ καὶ ΓΔ, τότε $MA \cdot MB + N\Gamma \cdot N\Delta = MN^2$.

β) Εἰς ὀρθοκεντρικὸν τετράεδρον τὸ τετράγωνον τοῦ διπλασίου τοῦ εὐθ. τμήματος τοῦ ἑνοῦντος τὰ μέσα δύο ἀπέναντι ἀκμῶν ἰσοῦται μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων ἑνὸς ὕψους καὶ τῆς διαμέτρου τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου εἰς τὴν ἀπέναντι ἕδραν.

202. Τρισορθογώνιον τετράεδρον.

Ὀνομάζομεν τρισορθογώνιον τετράεδρον ἐκεῖνο τοῦ ὁποίου ἡ μία τρίεδρος εἶναι τρισορθογώνιος στερεὰ γωνία. Προφανῶς, τὸ τρισορθογώνιον εἶναι ὀρθοκεντρικὸν καὶ κατὰ συνέπειαν ἔχει ὅλας τὰς ἰδιότητας αὐτοῦ.

Διὰ τὸ τρισορθογώνιον τετράεδρον (Ο.ΑΒΓ), ὅπου Ο ἡ κορυφὴ τῆς τρισορθογωνίου, ἤδη εἶναι γνωστά:

α) Ἡ προβολὴ Η τῆς κορυφῆς Ο ἐπὶ τὴν ἀπέναντι ἕδραν ΑΒΓ εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον αὐτῆς (ἰδιότης ἰσχύουσα ἄλλωστε εἰς πᾶν ὀρθοκεντρικόν).

β) Τὸ τρίγωνον ΑΒΓ εἶναι ὀξυγώνιον.

γ) $(ΒΟΓ)^2 = (ΒΗΓ)(ΒΑΓ)$.

δ) $(ΒΟΓ)^2 + (ΓΟΑ)^2 + (ΑΟΒ)^2 = (ΑΒΓ)^2$.

ε) $\frac{1}{ΟΗ^2} = \frac{1}{ΟΑ^2} + \frac{1}{ΟΒ^2} + \frac{1}{ΟΓ^2}$.

Διὰ τὰς ἀποδείξεις ἰδὲ ἄσκ. 118.

Ὁμὰς Α΄.

1. Εἰς τρισορθογώνιον τετράεδρον ΟΑΒΓ, Δ,Ε,Ζ εἶναι τὰ μέσα τῶν πλευρῶν ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Δείξατε ὅτι τὸ τετράεδρον ΟΔΕΖ ἔχει τὰς ἀπέναντι ἀκμὰς ἴσας. Ἀντιστρόφως.

2. Εἰς τρισορθογώνιον τετράεδρον αἱ προβολαὶ τοῦ ὕψους ἐπὶ τὰς παραπλεύρους ἀκμὰς εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἀπέναντι ἑδρῶν πρὸς αὐτάς.

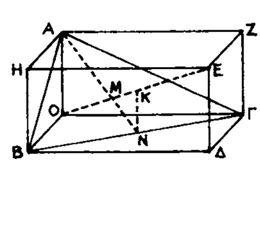
3. Ὁ ὄγκος τρισορθογωνίου τετραέδρου εἶναι ἴσος πρὸς τὸ $\frac{1}{6}$ τοῦ γινομένου τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν.

4. Δίδεται κανονικὸν τετράεδρον ΑΒΓΔ καὶ ἔστω ΑΗ τὸ ὕψος αὐτοῦ. Ἐὰν Ο τὸ μέσον τῆς ΑΗ, δείξατε ὅτι τὸ τετράεδρον ΟΒΓΔ εἶναι τρισορθογώνιον.

5. Δίδεται τρισορθογώνιον τετράεδρον ΟΑΒΓ μὲ ΟΑ=ΟΒ=ΟΓ. Ἐὰν Μ,Ν,Ρ τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ, δείξατε ὅτι τὸ ΟΜΝΡ εἶναι κανονικὸν τετράεδρον.

Ὁμὰς Β΄.

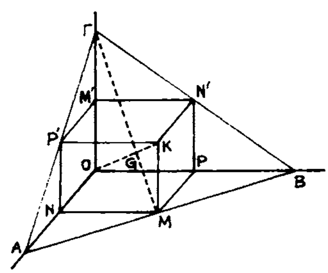
6. Εἰς τρισορθογώνιον τετράεδρον ΟΑΒΓ ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία συνδέει τὴν κορυφὴν Ο μὲ τὸ κέντρον Κ τῆς περιγεγραμμένης σφαίρας, διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου βάρους Μ τῆς βάσεως ΑΒΓ καὶ ἡ ΟΜ ἰσοῦται πρὸς τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς διαμέτρου.



Ἀπόδειξις. Κατασκευάζομεν τὸ ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον μὲ ἀκμὰς ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ. Τὸ κέντρον Κ αὐτοῦ συμπίπτει μὲ τὸ κέντρον τῆς περὶ τὸ ΟΑΒΓ περιγεγραμμένης σφαίρας. Ἔστω N τό μέσον τῆς $ΒΓ$. $KN \parallel OA$ καί $\frac{KN}{OA}=\frac{1}{2}$. Τά τρίγωνα AMO, NMK εἶναι ὅμοια. Ἄρα $\frac{KN}{OA}=\frac{MN}{AM}=\frac{1}{2}$, ἤτοι τό M κέντρον βάρους τοῦ $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$. Ὁμοίως $\frac{KN}{OA}=\frac{KM}{OM}=\frac{1}{2} \Longrightarrow \frac{OM}{KM}=2 \Longrightarrow \frac{OM}{OK}=\frac{2}{3}$, ἤτοι $OM=\frac{2OK}{3}$.

7. Εἰς τρισορθογώνιον τετράεδρον $ΟΑΒΓ$ θεωροῦμεν σφαῖραν διά τῶν $Α, Β, Γ$ καί τέμνουσαν τάς $ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ$ ἀντιστοίχως εἰς $Α', Β', Γ'$. Δείξατε ὅτι τό κέντρον βάρους τοῦ $ΑΒΓ$, τό ὀρθόκεντρον τοῦ $Α'Β'Γ'$, τό σημεῖον $Ο$ καί τό κέντρον τῆς περιγεγραμμένης σφαίρας περί τό $ΟΑΒΓ$ κεῖνται ἐπ' εὐθείας (ἰδέ ἄσκ. 122).

203. Δίδεται σφαῖρα (K,R). Ἡ κορυφή O τῆς τρισορθογωνίου στερεᾶς γωνίας $Oxyz$ κεῖται ἐπί τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας καί παραμένει σταθερά, ἐνῷ ἡ τρισορθογώνιος στρέφεται περί τό O. Ἐάν αἱ ἀκμαί τέμνουν τήν σφαῖραν κατά τά σημεῖα $Α, Β, Γ$, θά δείξωμεν ὅτι τό ἐπίπεδον $ΑΒΓ$ διέρχεται διά σταθεροῦ σημείου.



Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν τά μεσοκάθετα ἐπίπεδα τῶν ἀκμῶν $ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ$. Ἐάν M, M', N, N', P, P' τά μέσα τῶν ἕξ ἀκμῶν, ἡ ὀγδόη κορυφή K τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου $MM'NN'PP'OK$ εἶναι τό κέντρον τῆς περιγεγραμμένης περί τό τετράεδρον $ΟΑΒΓ$ σφαίρας. Θέτομεν $G = OK \cap MΓ$. Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων $KGM, OGΓ$ ἔχομεν $\frac{GM}{GΓ}=\frac{KG}{OG}=\frac{KM}{OΓ}=\frac{1}{2}$, ἤτοι τό σημεῖον G εἶναι τό κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου $ΑΒΓ$ καί παραμένει σταθερόν, διότι διαιρεῖ τό σταθερόν εὐθ. τμῆμα OK εἰς λόγον σταθερόν ($\frac{KG}{OG}=\frac{1}{2}$).

Παρατήρησις. Ἡ ἀκτίς τῆς σφαίρας εἶναι:

$$R=\sqrt{\left(\frac{α}{2}\right)^2+\left(\frac{β}{2}\right)^2+\left(\frac{γ}{2}\right)^2},$$

ὅπου $OA=α, OB=β, OΓ=γ$. Τοῦτο, διότι εἶναι ἡ διαγώνιος τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου $MM'NN'PP'OK$.

204. Τετράεδρα μέ τάς ἀπέναντι ἀκμάς ἴσας. (Ἰσοσκελές ἤ ἰσόεδρον).

Εἰς τετράεδρον μέ τάς ἀπέναντι ἀκμάς ἴσας:

1. Αἱ τέσσαρες ἕδραι εἶναι τρίγωνα ἴσα.

2. Αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν εἶναι κοιναὶ κάθετοι αὐτῶν καὶ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, σχηματίζουσαι τρισορθογώνιον στερεὰν γωνίαν.

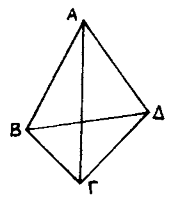
3. Αἱ τέσσαρες τρίεδροι εἶναι ἴσαι.

4. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν ἑκάστης τριέδρου εἶναι 2^L.

5. Αἱ ἕδραι εἶναι ὀξυγώνια τρίγωνα.

6. Αἱ ἀπέναντι δίεδροι εἶναι ἴσαι.

7. Ἑκάστη ἀκμὴ εἶναι ἰσοκλινὴς πρὸς τὰς ἕδρας τῆς διέδρου τῆς ἀπέναντι ἀκμῆς.



Ἀπόδειξις. 1. Ἔχουν τὰς τρεῖς πλευρὰς ἴσας.

2. Ἰδὲ ἄσκ. 26.

3. Ἔχουν τὰς ἐπιπέδους γωνίας ἀντιστοίχως ἴσας.

4. Αἱ ἐπίπεδοι γωνίαι ἑκάστης τριέδρου εἶναι ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς τὰς γωνίας μιᾶς ἕδρας.

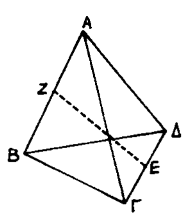
5. Ὡς γνωστὸν $\widehat{ΒΑΓ} < \widehat{ΒΑΔ} + \widehat{ΓΑΔ}$, $\widehat{ΓΑΔ} < \widehat{ΔΑΒ} + \widehat{ΒΑΓ}$, $\widehat{ΒΑΔ} < \widehat{ΓΑΔ} + \widehat{ΒΑΓ}$. Ἀλλὰ $\widehat{ΒΑΓ}, \widehat{ΓΑΔ}, \widehat{ΔΑΒ}$ εἶναι γωνίαι μιᾶς ἕδρας κ.τ.λ.

6. Εἶναι ἀντίστοιχοι γωνίαι τῶν ἴσων τριέδρων.

7. Αἱ ἀποστάσεις τῶν Γ, Δ ἀπὸ τὴν ΑΒ εἶναι ἴσαι.

Παρατήρησις. Αἱ προτάσεις 1,2,3,6 ἰσχύουν καὶ ἀντιστρόφως.

8. Ἐὰν τετραέδρου αἱ ἕδραι εἶναι ἰσοδύναμοι, θὰ εἶναι κατ' ἀνάγκην ἴσαι, δηλαδὴ τὸ τετράεδρον θὰ ἔχῃ τὰς ἀπέναντι ἀκμὰς ἴσας (ἰσοσκελές).



Ἀπόδειξις. Ἔχομεν ἤδη ἀποδείξει (ἄσκ. 46) ὅτι, ἐὰν εἰς τετράεδρον δύο ἕδραι εἶναι ἰσοδύναμοι π.χ. (ΑΒΓ) = (ΑΒΔ), ἡ κοινὴ κάθετος τῶν ΑΒ, ΓΔ διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς ΓΔ. Ἐφ' ὅσον ὅλαι αἱ ἕδραι τοῦ τετραέδρου εἶναι ἰσοδύναμοι, ἕπεται ὅτι αἱ ἑνοῦσαι τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν εἶναι συγχρόνως καὶ κοιναὶ κάθετοι αὐτῶν. Ἐπὶ τοῦ σχήματος ἡ ἑνοῦσα τὰ μέσα Ζ, Ε τῶν ΑΒ, ΓΔ εἶναι καὶ κοινὴ κάθετος αὐτῶν. Θεωροῦμεν τὴν στροφὴν περὶ αὐτήν, τοῦ τριγώνου

ΑΒΓ κατά 180°. Β→Α, Γ→Δ καί ΒΓ→ΑΔ, ἤτοι αἱ ἀπέναντι ἀκμαί εἶναι ἴσαι.

9. Εἰς ἰσοσκελές τετράεδρον τό περιγεγραμμένον παραλληλεπίπεδον εἶναι ὀρθογώνιον. Εἰς τό κανονικόν, κύβος.

10. Εἰς τό ἰσοσκελές τετράεδρον τό κέντρον βάρους, τό κέντρον τῆς ἐγγεγραμμένης καί τό κέντρον τῆς περιγεγραμμένης σφαίρας συμπίπτουν. Ἱκανή συνθήκη ἡ σύμπτωσις δύο ἐκ τῶν τριῶν σημείων.

11. Εἰς ἰσοσκελές τετράεδρον ἑκάστη κορυφή προβάλλεται ἐπί τήν ἀπέναντι βάσιν εἰς σημεῖον συμμετρικόν τοῦ ὀρθοκέντρου ὡς πρός τό κέντρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου. Ἀντιστρόφως. (Ἱκανόν, δύο κορυφαί νά πληροῦν τήν ἰδιότητα).

12. Εἰς ἰσοσκελές τετράεδρον αἱ προβολαί τῶν κορυφῶν ἐπί τάς ἀπέναντι ἕδρας, τά ὀρθόκεντρα τῶν ἑδρῶν καί τά μέσα τῶν ὑψῶν κεῖνται ἐπί τῆς αὐτῆς σφαίρας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ

Ὁμάς Α'.

205. Ἐπί τῶν ἀκμῶν ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ, ΓΔ, ΔΒ, ΒΓ τετραέδρου ΑΒΓΔ λαμβάνομεν ἀντιστοίχως τά σημεῖα E, F, H, I, J, K. Ἄν αἱ εὐθεῖαι EI, FJ, HK διέρχωνται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου, τό αὐτό θά συμβαίνῃ καί διά τάς AI, ΓΗ, ΔF. Ἀντιστρόφως.

206. Εἰς τό τετράεδρον ΑΒΓΔ ὑπάρχει σφαῖρα ἐφαπτομένη τῶν ἕξ ἀκμῶν. Δείξατε ὅτι αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι τά σημεῖα ἐπαφῆς ἐπί τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν, διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου.

207. Τό ἄθροισμα τῶν εὐθ. τμημάτων, τά ὁποῖα συνδέουν τά μέσα τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν τετραέδρου, περιέχεται μεταξύ τοῦ $\frac{1}{4}$ καί τοῦ $\frac{1}{2}$ τοῦ ἀθροίσματος τῶν ἀκμῶν.

208. Δίδεται κύκλος Γ καί σφαῖρα (Ο). Θεωροῦμεν τυχοῦσαν σφαῖραν (Ω) περιέχουσαν τόν Γ. Δείξατε ὅτι τό ἐπίπεδον τομῆς τῶν (Ω),(Ο) διέρχεται διὰ σταθερᾶς εὐθείας.

Ὑπόδειξις. Θεωρήσατε σφαῖραν (Ω′) σταθεράν, περιέχουσαν τὸν Γ. Τὰ ριζικὰ ἐπίπεδα τῶν (Ω),(Ω′),(Ο) διέρχονται διὰ τοῦ ριζικοῦ ἄξονος τῶν τριῶν σφαιρῶν.

209. Ἐπίπεδον πολύγωνον εἶναι α) ἐγγεγραμμένον εἰς σφαῖραν. Δείξατε ὅτι τὰ ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα τῆς σφαίρας εἰς τὰς κορυφὰς διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου. β) περιγεγραμμένον περὶ σφαῖραν. Δείξατε ὅτι τὰ ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα τῆς σφαίρας, τὰ διερχόμενα διὰ τῶν πλευρῶν του, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

210. Θέτομεν Χ καὶ Ζ τὰς ἐπιφανείας τῆς περιγεγραμμένης καὶ ἐγγεγραμμένης ἀντιστοίχως σφαίρας εἰς κανονικὸν τετράεδρον. Ἐὰν Ψ ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας τῆς ἐφαπτομένης τῶν ἀκμῶν, δείξατε ὅτι $X+3Z=4\Psi$. Ὁ τύπος οὗτος ἐξακολουθεῖ νὰ ἰσχύῃ διὰ κανονικὸν ὀκτάεδρον καὶ εἰκοσάεδρον.

211. Σφαῖρα διέρχεται διὰ τῆς κορυφῆς Α παραλληλεπιπέδου ΑΒΓΔΑ′Β′Γ′Δ′ καὶ τέμνει τὰς ἀκμὰς ΑΒ, ΑΔ, ΑΑ′ καὶ τὴν διαγώνιον ΑΓ′ εἰς τὰ σημεῖα Κ,Λ,Μ,Ν ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι:

$$AB\cdot AK + A\Delta\cdot A\Lambda + AA'\cdot AM = A\Gamma'\cdot AN.$$

212. Σφαῖρα μεταβλητὴ διέρχεται διὰ τῶν κορυφῶν Α,Β,Γ τετραέδρου ΑΒΓΔ καὶ τέμνει τὰς ἀκμὰς ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ κατὰ τὰ σημεῖα Α′,Β′,Γ′ ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι τὸ ἐπίπεδον Α′Β′Γ′ παραμένει παράλληλον πρὸς σταθερὸν ἐπίπεδον.

213. Ἔστωσαν δύο κύκλοι (Α),(Β) τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου ἢ τῆς αὐτῆς σφαίρας. Δείξατε ὅτι τὸ ριζικὸν ἐπίπεδον δύο μεταβλητῶν σφαιρῶν διὰ τῶν (Α) καὶ (Β) διέρχεται διὰ σταθερᾶς εὐθείας.

214. Δύο σφαῖραι (Ο,R) καὶ (Ο′,R′) τέμνονται κατὰ κύκλον (Κ,ρ). Δείξατε ὅτι: $4OO'^2\rho^2 = 4R^2R'^2 - (R^2+R'^2-OO'^2)^2$.

215. Νὰ ἐκφρασθῇ ἑκάστη διάμεσος τετραέδρου συναρτήσει τῶν ἀκμῶν.

216. Εἰς τετράεδρον ΑΒΓΔ αἱ διάμεσοι GA, GB, GΓ σχηματίζουν τρισορθογώνιον στερεὰν γωνίαν. Δείξατε ὅτι:

$$2(\alpha^2+\beta^2)=\gamma^2+\gamma'^2,\quad 2(\beta^2+\gamma^2)=\alpha^2+\alpha'^2,\quad 2(\gamma^2+\alpha^2)=\beta^2+\beta'^2.$$

Διὰ τοὺς συμβολισμοὺς ἰδὲ ἄσκ. 200.

217. Ἐὰν Μ τὸ σημεῖον τομῆς τῆς ΔG μετὰ τοῦ ἐπιπέδου $G_\alpha G_\beta G_\gamma$ εἰς τὸ τετράεδρον ΑΒΓΔ, δείξατε ὅτι $\frac{\Delta M}{MG}=8$.

Ὁμὰς Β΄.

218. Εἰς κάθε κολοβὴν τριγωνικὴν πυραμίδα τὰ σημεῖα τομῆς τῶν διαγωνίων τῶν τριῶν παραπλεύρων ἑδρῶν καὶ τὰ σημεῖα τομῆς τῶν ἀντιστοίχων πλευρῶν τῶν βάσεων κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

219. Τρεῖς σφαῖραι ἐφάπτονται δοθέντος ἐπιπέδου εἰς τὰ σημεῖα Α, Β, Γ καὶ μεταξύ των ἀνὰ δύο. Συναρτήσει τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου ΑΒΓ νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκτῖνες των.

220. Θεωρήσωμεν δύο τετράεδρα $A_1A_2A_3A_4$, $A_1'A_2'A_3'A_4'$. Ἐὰν αἱ κάθετοι ἐκ τῶν κορυφῶν A_i ἐπὶ τὰς ἕδρας $A_\kappa'A_\lambda'A_\mu'$, $\kappa,\lambda,\mu\neq i$ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου, δείξατε ὅτι καὶ αἱ κάθετοι ἐκ τῶν A_i' ἐπὶ τὰς ἕδρας $A_\kappa A_\lambda A_\mu$, $\kappa,\lambda,\mu\neq i$ διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

221. Δίδονται δύο τετράεδρα ΑΒΓΔ, Α΄Β΄Γ΄Δ΄, ὥστε αἱ εὐθεῖαι ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄, ΔΔ΄ νὰ τέμνωνται ἀνὰ δύο. Δείξατε ὅτι αἱ τομαὶ τῶν ἀντιστοίχων ἑδρῶν ΑΒΓ, Α΄Β΄Γ΄ – ΒΓΔ, Β΄Γ΄Δ΄, κ.τ.λ. εἶναι τέσσαρες εὐθεῖαι ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

222. Εἰς δοθὲν τετράεδρον ΑΒΓΔ θεωροῦμεν τυχὸν ἐσωτερικὸν σημεῖον Ο. Θεωροῦμεν τὰ τέσσερα διανύσματα μὲ ἀρχὴν τὸ Ο, κάθετα ἐπὶ τὰς ἀντιστοίχους ἕδρας καὶ τῶν ὁποίων τὸ μέτρον εἶναι ἴσον πρὸς τὸ μέτρον τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἀντιστοίχων ἑδρῶν. Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμά των εἶναι μηδέν. Ἢ διαφορετικῶς, ἡ πολυγωνικὴ γραμμή, ἡ ὁποία σχηματίζεται μὲ πλευρὰς παραλλήλους καὶ ἴσας πρὸς τὰ ἐν λόγῳ διανύσματα, εἶναι κλειστή. Τὸ σχηματιζόμενον στρεβλὸν τετράπλευρον λέγεται προσηρτημένον εἰς τὸ τετράεδρον.

223. Ἐάν S τὸ ἄθροισμα τῶν διέδρων γωνιῶν τετραέδρου, ἀποδείξατε ὅτι $4^{L} < S < 6^{L}$.

Ὑπόδειξις. Χρησιμοποιήσατε τὸ προσηρτημένον στρεβλὸν τετράπλευρον.

224. Τὸ ἄθροισμα τῶν διέδρων γωνιῶν πυραμίδος, τῆς ὁποίας ἡ βάσις εἶναι κυρτὸν πολύγωνον μὲ ν πλευράς, περιέχεται μεταξὺ $2(\nu-1)^{L}$ καὶ $2(2\nu-3)^{L}$.

225. Ἐάν εἰς τετράεδρον τὸ ἄθροισμα δύο ἀπέναντι ἀκμῶν εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα δύο ἄλλων ἀπέναντι ἀκμῶν, τὸ αὐτὸ θὰ ἰσχύῃ καὶ διὰ τὰς ἀντιστοίχους διέδρους.

226. Εἰς πᾶν τετράεδρον τὸ ἐμβαδὸν ἑκάστης ἕδρας εἶναι μικρότερον τοῦ ἀθροίσματος τῶν τριῶν ἄλλων.

Ὑπόδειξις. Δύναται νὰ λυθῇ διὰ τοῦ προσηρτημένου στρεβλοῦ τετραπλεύρου ἢ διὰ προβολῶν εἰς τὴν βάσιν.

227. Δίδονται τέσσαρες σφαῖραι εἰς τρόπον, ὥστε κάθε μία νὰ ἐφάπτεται τῶν ὑπολοίπων τριῶν. Δείξατε ὅτι τὰ ἕξ σημεῖα ἐπαφῆς κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς σφαίρας.

228. Δίδεται τρισορθογώνιον τετράεδρον ΟΑΒΓ. Προσδιορίσατε τὸ κέντρον Κ τῆς περιγεγραμμένης σφαίρας. Ἔστω O_1, O_2, O_3 τὰ συμμετρικὰ τοῦ Ο ὡς πρὸς τὰς ἀκμὰς ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ. Τὰ σημεῖα O_1, O_2, O_3 εὑρίσκονται ἐπὶ τῆς περιγεγραμμένης σφαίρας; Εἰς τὸ σημεῖον Ο ἄγονται αἱ ἐφαπτόμεναι τῶν κύκλων ΟΑΒ, ΟΒΓ, ΟΑΓ. Δείξατε ὅτι αἱ τρεῖς αὗται εὐθεῖαι κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

229. Ἡ ἕδρα ΑΒΓ τετραέδρου ΑΒΓΔ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὰς ἕδρας ΑΒΔ, ΑΓΔ. Ἐάν ἡ ἀκμὴ ΒΓ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν ΔΓ, τότε αἱ ἕδραι ΑΔΓ καὶ ΒΔΓ εἶναι κάθετοι.

230. Μὲ κέντρον τὸ μέσον Μ τῆς κοινῆς καθέτου ΓΔ τῶν ἀσυμβάτων εὐθειῶν ΑΓ, ΒΔ, γράφομεν περιφέρειαν κειμένην εἰς τὸ μεσοκάθετον ἐπίπεδον τῆς ΓΔ. Σφαῖρα ἔχουσα τὸ κέντρον της ἐπὶ τῆς προηγουμένης περιφερείας διέρχεται διὰ τῶν Γ, Δ καὶ τέμνει τὰς ἀσυμβάτους εἰς Α καὶ Β. Δείξατε ὅτι τὸ εὐθ. τμη-μα AB διατηρεῖ σταθερόν μέγεθος.

231. Ἔστωσαν D, E, F τρία σημεῖα τῶν ἀκμῶν SA, SB, SC τετραέδρου SABC. Θέτομεν $U = BF \cap CE$, $V = CD \cap AF$, $W = AE \cap B\Delta$. Δείξατε ὅτι: 1) αἱ εὐθεῖαι AU, BV, CW διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου P· 2) αἱ εὐθεῖαι DU, EV, FW διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου Q καί, τέλος, 3) τά σημεῖα P, Q, S κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

232. Ἐπί τῶν ἀκμῶν Ox, Oy, Oz τρισορθογωνίου στερεᾶς γωνίας Oxyz λαμβάνομεν τά εὐθ. τμήματα AA′, BB′, ΓΓ′ ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι τά κέντρα τῶν ὀκτώ σφαιρῶν ΟΑΒΓ, ΟΑ′Β′Γ′, ΟΑ′ΒΓ′, … κεῖνται ἐπί σφαίρας.

233. Ἡ πυραμίς ΜΑΒΓΔ ἔχει βάσιν τό παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ. Ἐάν ἐπίπεδον τέμνη τάς ἀκμάς ΜΑ, ΜΒ, ΜΓ, ΜΔ εἰς τά σημεῖα Κ, Λ, Ρ, Ν, δείξατε ὅτι $\frac{MA}{MK} + \frac{M\Gamma}{MP} = \frac{MB}{M\Lambda} + \frac{M\Delta}{MN}$.

234. Ἔστω τετράεδρον ΑΒΓΔ. Ἐάν αἱ σφαῖραι διαμέτρων ΑΒ, ΓΔ εἶναι ὀρθογώνιοι, ὡς ἐπίσης καί αἱ σφαῖραι διαμέτρων ΑΓ, ΒΔ, δείξατε ὅτι καί αἱ σφαῖραι διαμέτρων ΑΔ, ΒΓ θά εἶναι ἐπίσης ὀρθογώνιοι.

235. Σφαῖρα μεταβλητή S ἔχει τό κέντρον της ἐπί σταθερᾶς σφαίρας Σ καί διέρχεται διά σταθεροῦ σημείου Α. Δείξατε ὅτι τό ριζικόν ἐπίπεδον τῶν S, Σ ἐφάπτεται σταθερᾶς σφαίρας.

236. Ἔστωσαν (α), (β), (γ), (δ) κύκλοι κείμενοι ἀντιστοίχως ἐπί τῶν ἑδρῶν τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ. Ἐάν ἀνά δύο κεῖνται ἐπί τῆς αὐτῆς σφαίρας, δείξατε ὅτι καί οἱ τέσσαρες κεῖνται ἐπί τῆς αὐτῆς σφαίρας.

237. Ἐάν ἕκαστον ἐκ τῶν ἕξ τετραπλεύρων ἑδρῶν ἑνός ἑξαέδρου εἶναι ἐγγράψιμον, τότε αἱ ὀκτώ κορυφαί τοῦ ἑξαέδρου κεῖνται ἐπί μιᾶς σφαίρας.

238. Ἐάν ἐπί ἑκάστης ἀκμῆς τετραέδρου ληφθοῦν δύο σημεῖα εἰς τρόπον, ὥστε τά τέσσερα σημεῖα δύο διαδοχικῶν ἀκμῶν νά εἶναι ὁμοκυκλικά, τά δώδεκα σημειωθέντα ἐπί τῶν ἀκμῶν σημεῖα θὰ κεῖνται ἐπὶ μιᾶς σφαίρας.

239. Τὸ τετράγωνον τῆς ἀποστάσεως τοῦ κέντρου βάρους τετραέδρου ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς περιγεγραμμένης σφαίρας ἰσοῦται πρὸς τὸ τετράγωνον τῆς ἀκτῖνος τῆς ἐν λόγῳ σφαίρας ἐλαττωθὲν κατὰ τὸ ἓν δέκατον ἕκτον τῶν τετραγώνων τῶν ἀκμῶν.

240. Δίδεται τετράεδρον ΑΒΓΔ καὶ σημεῖον Ο τοῦ χώρου. Χωρίζομεν τὰ εὐθ. τμήματα ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ εἰς λόγον $\frac{\mu}{\nu}$. Δείξατε ὅτι αἱ εὐθεῖαι, αἱ συνδέουσαι τὰ κέντρα βάρους τῶν ἑδρῶν ΒΓΔ, ΑΓΔ, ΑΒΔ, ΑΒΓ μὲ τὰ σημεῖα διαιρέσεως τῶν ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ ἀντιστοίχως, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

241. Ἐὰν Δ' τὸ ἴχνος τοῦ ἐκ τῆς κορυφῆς Δ ὕψους ὀρθοκεντρικοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ, τότε αἱ σφαῖραι (ΔΔ'ΑΒ), (ΔΔ'ΒΓ), (ΔΔ'ΓΑ) εἶναι ἴσαι.

242. Εὐθεῖα ἀγομένη ἐκ τῆς κορυφῆς Μ τετραέδρου ΜΑΒΓ τέμνει τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ εἰς σημεῖον Σ καὶ τὰ ἐκ τῶν κορυφῶν Α, Β, Γ ἀγόμενα καὶ παράλληλα πρὸς τὰς ἀπέναντι ἕδρας ἐπίπεδα, εἰς τὰ σημεῖα Δ, Ε, Ζ. Δείξατε ὅτι:

$$\frac{1}{M\Sigma} = \frac{1}{M\Delta} + \frac{1}{ME} + \frac{1}{MZ}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΟΓΔΟΟΝ

ΚΥΛΙΝΔΡΟΣ. ΚΩΝΟΣ

ΟΡΙΣΜΟΙ. ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

1. Κυλινδρική ἐπιφάνεια.

1.1. Θεωρήσωμεν καμπύλην S καί σημεῖον Α αὐτῆς. Ἐκ τοῦ Α ἄγεται παράλληλος xx' πρός σταθεράν εὐθεῖαν ε τοῦ χώρου(1). Ἡ ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία παράγεται ὑπό τῆς xx' ὅταν τό Α διαγράφῃ τήν S, καλεῖται κυλινδρική ἐπιφάνεια.

1.2. Ἡ καμπύλη S καλεῖται ὁδηγός καμπύλη. Ἡ παράλληλος ἐξ ἑκάστου σημείου τῆς καμπύλης πρός ε γενέτειρα τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας.

1.3. Κάθε τομή τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας δι' ἐπιπέδου καλεῖται ἐπίπεδος τομή αὐτῆς. Ἐάν τό ἐπίπεδον εἶναι κάθετον ἐπί τήν γενέτειραν, ἡ τομή καλεῖται κάθετος.

1.4. Εἰς κάθε σημεῖον Α(2) μιᾶς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας ἄγεται ἕν ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον αὐτῆς. Τοῦτο ὁρίζεται ἀπό τήν γενέτειραν τήν διερχομένην διά τοῦ σημείου Α καί τήν ἐφαπτομένην εἰς Α τυχούσης καμπύλης τῆς ἐπιφανείας διερχομένης διά τοῦ σημείου.

1.5. Κάθε ἐπίπεδον διερχόμενον δι' εὐθείας παραλλήλου πρός γενέτειραν τέμνει τήν κυλινδρικήν ἐπιφάνειαν κατά μίαν ἤ περισσοτέρας γενετείρας.

2. Κυκλικός κύλινδρος.

2.1. Ἐάν θεωρήσωμεν ὅτι ἡ ὁδηγός καμπύλη S εἶναι κύκλος, ἡ κυλινδρική ἐπιφάνεια θά ὀνομάζεται κυκλική κυλινδρική ἐπιφάνεια. Τό τμῆμα μιᾶς κυκλικῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας, τό ὁποῖον περιέχεται μεταξύ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων πρός τόν ὁδηγόν κύκλον, περατούμενον ἐπί τῶν ἐπιπέδων αὐτῶν, καλεῖται κυκλικός

---

(1) Ἐάν ἡ S εἶναι ἐπίπεδος τότε ε οὐχί παράλληλος πρός τό ἐπίπεδον αὐτῆς.

(2) Φυσικά ἐνταῦθα δέν γίνεται λόγος δι' ἀνώμαλα σημεῖα.

κύλινδρος.[1]

2.2. Αἱ ἐπίπεδοι ἐπιφάνειαι ἑνός κυλίνδρου ὀνομάζονται βάσεις αὐτοῦ καί εἶναι ἴσαι (προκύπτουν διά μεταφορᾶς), τό τμῆμα δέ τῆς γενετείρας, τό ὁποῖον περιέχεται μεταξύ τῶν δύο βάσεων, ὀνομάζεται ἀκμή τοῦ κυλίνδρου. Ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία διέρχεται ἀπό τά κέντρα τῶν βάσεων κυκλικοῦ κυλίνδρου καλεῖται ἄξ.. αὐτοῦ καί εἶναι παράλληλος πρός τάς γενετείρας. Πᾶσα τομη παράλληλος πρός τάς βάσεις κυκλικοῦ κυλίνδρου εἶναι ἐπίσης κυκλος ἴσος πρός τάς βάσεις (μεταφορά).

2.3. Ἐάν αἱ βάσεις κυκλικοῦ κυλίνδρου συμπίπτουν μέ τήν κάθετον τομήν αὐτοῦ, ἔχομεν τόν ὀρθόν κυκλικόν κύλινδρον.

2.4. Πᾶσα πλαγία τομή ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου ὑπό ἐπιπέδου τέμνοντος ὅλας τάς γενετείρας εἶναι ἔλλειψις.

3. Κυλινδρικός κορμός.

Τό τμῆμα τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας μέ κυκλικόν ὁδηγόν, τό ὁποῖον περατοῦται κατά τήν τομήν αὐτῆς ὑπό ἐπιπέδου παραλλήλου πρός τόν ὁδηγόν καί ἐπί τυχόντος ἐπιπέδου. Διακρίνομεν ἐνταῦθα τόν ὀρθόν κυλινδρικόν κορμόν.

4. Διά τυχόντος ἐξωτερικοῦ σημείου κυκλικῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας ἄγονται δύο ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα αὐτῆς. Ἕκαστον τούτων ἐφάπτεται τῆς κυλινδρικῆς ἐπιφανείας κατά μῆκος μιᾶς γενετείρας, τέμνονται δέ κατά εὐθεῖαν παράλληλον πρός τάς γενετείρας.

5. Κωνική ἐπιφάνεια.

5.1. Θεωρήσωμεν καμπύλην S καί σημεῖον A αὐτῆς. Ἔστω O τυχόν σημεῖον τοῦ χώρου.[2] Ἡ ἐπιφάνεια ἡ ὁποία παράγεται ὑπό τῆς εὐθείας OA, ὅταν τό A διαγράφη τήν S, καλεῖται κωνική ἐπιφάνεια.

5.2. Τό σημεῖον O καλεῖται κορυφή τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας καί ἡ καμπύλη S ὁδηγός καμπύλη αὐτῆς. Ἡ εὐθεῖα OA γενέτειρα τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας. Ἐάν θεωρήσωμεν ἕνα ἐπίπεδον, τό ὁποῖον διέρχεται διά τῆς κορυφῆς καί δέν τέμνει τόν ὁδηγόν (ὑπάρχουν ἄπειρα, διατί;), τό ἐπίπεδον αὐτό χωρίζει τήν ἐπιφά-

---

(1) Θά ἀσχοληθῶμεν μόνον μέ κυκλικούς κυλίνδρους.

(2) Ἐάν S ἐπίπεδος, τό O οὐχί ἐπί τοῦ ἐπιπέδου αὐτῆς.

νειαν εἰς δύο μέρη κείμενα ἑκατέρωθεν αὐτοῦ. Ἕκαστον τούτων ὀνομάζεται χώνη τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας.

5.3. Κάθε τομή τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας δι' ἑνός ἐπιπέδου καλεῖται ἐπίπεδος τομή αὐτῆς. Ἐπίπεδα παράλληλα ἀποτέμνουν ὁμοιόθετα σχήματα πρός Ο.

5.4. Εἰς κάθε σημεῖον[1] Α διάφορον τῆς κορυφῆς Ο κωνικῆς ἐπιφανείας ἄγεται ἕν ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον αὐτῆς. Τοῦτο ὁρίζεται ἀπό τήν γενέτειραν τήν διερχομένην διά τοῦ σημείου Α καί τήν ἐφαπτομένην εἰς Α τυχούσης καμπύλης τῆς ἐπιφανείας διερχομένης διά τοῦ σημείου.

6. Κυκλικός κῶνος.

6.1. Ἐάν θεωρήσωμεν ὅτι ἡ ὁδηγός καμπύλη δ εἶναι κύκλος, ἡ κωνική ἐπιφάνεια θά ὀνομάζεται κυκλική κωνική ἐπιφάνεια. Τό τμῆμα μιᾶς χώνης κυκλικῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, τό ὁποῖον περατοῦται ἐπί ἐπιπέδου παραλλήλου πρός τήν ὁδηγόν, ὀνομάζεται κυκλικός κῶνος.[2]

6.2. Ἡ ἐπίπεδος ἐπιφάνεια κυκλικοῦ κώνου ὀνομάζεται βάσις αὐτοῦ. Τό τμῆμα τῆς γενετείρας, τό ὁποῖον περιέχεται μεταξύ κορυφῆς Ο καί ἑνός σημείου τῆς περιφερείας τῆς βάσεως, ὀνομάζεται ἀκμή αὐτοῦ. Ἡ εὐθεῖα, ἡ ὁποία διέρχεται διά τοῦ κέντρου τῆς βάσεως καί τῆς κορυφῆς Ο τοῦ κώνου, λέγεται ἄξων αὐτοῦ.

6.3. Ἐάν ἡ βάσις κυκλικοῦ κώνου εἶναι κάθετος εἰς τόν ἄξονα, τότε ἔχομεν τόν ὀρθόν κυκλικόν κῶνον. Οὗτος δύναται νά θεωρηθῇ ὅτι προκύπτει διά περιστροφῆς ὀρθογωνίου τριγώνου περί μίαν κάθετον πλευράν του (κῶνος ἐκ περιστροφῆς). Αἱ ἀκμαί ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου εἶναι ἴσαι (ἐνταῦθα χρησιμοποιεῖται συχνά ἀντί τοῦ ὅρου ἀκμή κώνου, πλευρά κώνου). Κάθε ἐπίπεδον διά τοῦ ἄξονος ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου τέμνει αὐτόν κατά δύο γενετείρας, αἱ ὁποῖαι σχηματίζουν σταθεράν γωνίαν. Ἡ γωνία αὐτή καλεῖται **ἄνοιγμα τοῦ κώνου.**

6.4. Πᾶσα τομή ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου ὑπό ἐπιπέδου μή παραλλήλου πρός τήν βάσιν καί τέμνοντος τάς γενετείρας μιᾶς χώνης εἶναι ἔλλειψις.

---

(1) Ἐπίσης ἐνταῦθα δέν γίνεται λόγος δι' ἀνώμαλα σημεῖα.

(2) Θά ἀσχοληθῶμεν μόνον μέ κυκλικούς κώνους.

7. Κόλουρος κῶνος 1^{ου} εἴδους.

Τό τμῆμα τῆς ἐπιφανείας μιᾶς χώνης μέ κυκλικόν ὁδηγόν, τό ὁποῖον περατοῦται ἐπί δύο παραλλήλων ἐπιπέδων πρός τήν ὁδηγόν.

8. Κόλουρος κῶνος 2^{ου} εἴδους.

Ὡς προηγουμένως, ἀλλά ἕκαστον ἐπίπεδον περατοῦται εἰς διαφορετικήν χώνην

Διακρίνομεν ἐνταῦθα τόν ὀρθόν κόλουρον κῶνον.

9. Κωνικός κορμός 1^{ου} καί 2^{ου} εἴδους.

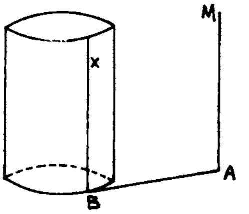
Ὡς προηγουμένως, ἀλλά ἕν ἐκ τῶν ἐπιπέδων οὐχί παράλληλον πρός τό ἐπίπεδον τῆς κυκλικῆς ὁδηγοῦ. Διακρίνομεν τόν ὀρθόν κωνικόν κορμόν.

10. Διά σημείου ἐκτός κυκλικῆς κωνικῆς ἐπιφανείας ἄγονται δύο ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα αὐτῆς κατά μῆκος δύο γενετειρῶν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάς Α΄.

243. Δίδεται κυκλικός κύλινδρος καί σημεῖον Μ ἐκτός αὐτοῦ. Ἐκ τοῦ σημείου Μ φέρομεν τήν παράλληλον πρός τάς γενετείρας, ἥτις τέμνει τό ἐπίπεδον τῆς βάσεως εἰς Α. Ἐκ τοῦ σημείου Α ἄγεται ἐφαπτομένη ΑΒ τῆς κυκλικῆς βάσεως. Δείξατε ὅτι τό ἐπίπεδον τῶν ΑΜ, ΑΒ εἶναι ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τῆς κυκλικῆς βάσεως.

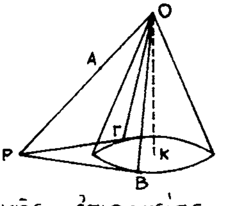


Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν τήν γενέτειραν Βx διά τοῦ σημείου Β. Ἡ εὐθεῖα αὐτή θά εἶναι παράλληλος πρός τήν ΑΜ, ἄρα θά κεῖται ἐπί τοῦ ἐπιπέδου τῶν ΑΜ, ΑΒ. Ἀλλά αἱ Βx, ΒΑ ὁρίζουν τό ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον εἰς Β.

Νά λυθῇ τό παρόμοιον πρόβλημα διά τόν κυκλικόν κῶνον.

244. Δίδεται ὀρθός κυκλικός κῶνος κορυφῆς Ο καί σημεῖον Α ἐκτός αὐτοῦ. Ὡς γνωστόν, διά τοῦ Α ἄγονται δύο ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας ἕκαστον κατά μῆκος μιᾶς γενετείρας. Δείξατε ὅτι ἡ ΟΑ σχηματίζει ἴσας γωνίας μετὰ τῶν δύο γενετειρῶν.

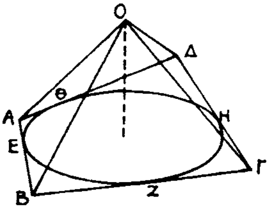
Ἀπόδειξις. Ἔστω Ρ τὸ σημεῖον τομῆς τῆς ΟΑ μετὰ τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως Κ. Ἄγομεν τὰς ἐφαπτομένας ΡΒ, ΡΓ εἰς τὸν κύκλον Κ. Τὰ ἐκ τοῦ Α ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα εἶναι ΟΡΒ, ΟΡΓ. Ταῦτα ἐφάπτονται τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας κατὰ τὰς γενετείρας ΟΒ, ΟΓ. Τὰ ὀρθογώνια τρίγωνα ΟΒΡ, ΟΓΡ εἶναι ἴσα καὶ κατὰ συνέπειαν $\widehat{ΒΟΑ} = \widehat{ΓΟΑ}$.



245. Τετράεδρος στερεὰ γωνία εἶναι περιγεγραμμένη περὶ κωνικὴν ἐπιφάνειαν ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου. Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀπέναντι ἑδρῶν εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων.

Ἀπόδειξις. Ἐκ τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως ἔχομεν:

$$\widehat{ΒΟΕ} = \widehat{ΒΟΖ}$$
$$\widehat{ΓΟΗ} = \widehat{ΓΟΖ}$$
$$\widehat{ΑΟΕ} = \widehat{ΑΟΘ}$$
$$\widehat{ΔΟΗ} = \widehat{ΔΟΘ}.$$

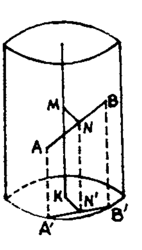


Προσθέτομεν κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν:

$$\widehat{ΑΟΒ} + \widehat{ΓΟΔ} = \widehat{ΒΟΓ} + \widehat{ΑΟΔ}.$$

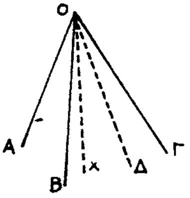
246. Δίδεται ὀρθὸς κυκλικὸς κύλινδρος. Δείξατε ὅτι ἡ κοινὴ κάθετος τοῦ ἄξονος καὶ τυχούσης χορδῆς τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς χορδῆς.

Ἀπόδειξις. Προβάλλομεν τὸ σχῆμα εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως. Ἡ ὀρθὴ γωνία ΜΝΑ προβάλλεται κατ' ὀρθὴν ἐπίσης γωνίαν, δεδομένου ὅτι ἡ ΜΝ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον προβολῆς. Ἄρα $\widehat{ΚΝ'Α'} = 1^{L}$. Ὅθεν τὸ σημεῖον Ν' εἶναι τὸ μέσον τῆς Α'Β'. Ἀλλά, ὡς γνωστόν, κατὰ τὴν ὀρθὴν προβολὴν ἔχομεν $\frac{Α'Ν'}{Ν'Β'} = \frac{ΑΝ}{ΝΒ}$, ὅθεν ΑΝ = ΝΒ.



Παρατήρησις. Πλεῖστα προβλήματα τοῦ κυλίνδρου λύονται διὰ προβολῆς ἐπὶ τῆς βάσεως παραλλήλως πρὸς τὸν ἄξονα, ἐνῷ διὰ τὸν κῶνον διὰ κεντρικῆς προβολῆς ἐκ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως. Ἔτσι ἀνάγονται εἰς προβλήματα ἐπιπεδομετρίας.

247. Δείξατε ὅτι εἰς κάθε τετράεδρον στερεὰν γωνίαν, ἐγγεγραμμένην ἐντὸς μιᾶς χώνης κωνικῆς ἐπιφανείας ἐκ περιστροφῆς, τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἀπέναντι διέδρων ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων.



Ἀπόδειξις. Ὑποθέσωμεν κατ' ἀρχὴν ὅτι ὁ ἄξων Ox τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας περιέχεται ἐντὸς τῆς τετραέδρου. Θὰ ἔχωμεν διὰ τὴν τρίεδρον OxAB: $x\hat{O}A = x\hat{O}B$, ἤτοι δίεδρ. B.OA.x = δίεδρ. A.OB.x. Καὶ κατὰ τὸν ἴδιον τρόπον δίεδρ. Δ.OA.x = δίεδρ. A.OΔ.x

δίεδρ. B.OΓ.x = δίεδρ. Γ.OB.x

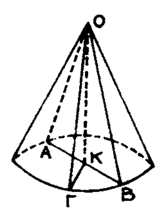
δίεδρ. Δ.OΓ.x = δίεδρ. Γ.OΔ.x.

Προσθέτομεν κατὰ μέλη καὶ ἔχομεν:

δίεδρ. OB + δίεδρ. OΔ = δίεδρ. OA + δίεδρ. OΓ.

Παρομοίως λύεται εἰς περίπτωσιν καθ' ἣν ὁ ἄξων δὲν περιέχεται ἐντὸς τῆς τετραέδρου.

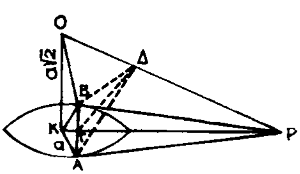
248. Διὰ κάθε κῶνον ἐκ περιστροφῆς νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ ἄνοιγμά του εἶναι μεγαλύτερον τῆς γωνίας δύο τυχουσῶν γενετειρῶν.



Ἀπόδειξις. Ἀρκεῖ νὰ ἀποδείξω ὅτι $A\hat{O}B > B\hat{O}\Gamma$.
Ἀλλὰ $A\hat{O}B = \Gamma\hat{O}K + B\hat{O}K > B\hat{O}\Gamma$.

Ὁμὰς Β'.

249. Ὀρθὸς κυκλικὸς κῶνος ἔχει ὡς ἀκτῖνα βάσεως τὴν πλευρὰν τετραγώνου καὶ ὕψος τὴν διαγώνιον αὐτοῦ. Ἄγονται δύο ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας κάθετα μεταξύ των. Ὑπολογίσατε α) τὴν γωνίαν τῶν δύο γενετειρῶν ἐπαφῆς, β) τὴν δίεδρον γωνίαν τὴν σχηματιζομένην ἀπὸ τὰ ἐπίπεδα τὰ ὁριζόμενα ἀπὸ τὸν ἄξονα καὶ τὰς γενετείρας ἐπαφῆς.



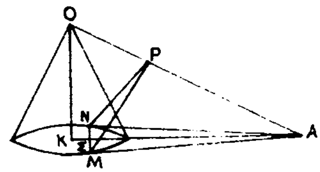
Λύσις. Ἔστω a ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως. Τὸ ὕψος θὰ εἶναι $a\sqrt{2}$. Διὰ τῆς AB φέρομεν τὸ κάθετον ἐπίπεδον AΔB ἐπὶ τὴν OP. Τὸ τρίγωνον AΔB ὀρθογώνιον ἰσοσκελές.

Ἄρα $\Gamma A = \Gamma\Delta$. Ἐὰν $K\Gamma = \beta$ ἔχομεν $A\Gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$, $KP = \frac{\alpha^2}{\beta}$, $OP = \sqrt{2\alpha^2 + \frac{\alpha^4}{\beta^2}}$. Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων $\Gamma P\Delta$, OPK ἔχομεν $\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma P} = \frac{OK}{OP}$ ἢ ἀκόμη $\frac{\alpha^2-\beta^2}{\left(\frac{\alpha^2}{\beta}-\beta\right)^2} = \frac{2\alpha^2}{\alpha^2\left(\frac{2\beta^2+\alpha^2}{\beta^2}\right)}$, ὅθεν $\beta = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \widehat{AKB} = 120^\circ$ καὶ $AB = \alpha\sqrt{3}$.

Ἡ $OA = OB$ ὑπολογιζομένη ἐκ τοῦ AKO, προκύπτει $OA = OB = \alpha\sqrt{3}$, ὅθεν τὸ AOB εἶναι ἰσόπλευρον καὶ α) $\widehat{AOB} = 60^\circ$, β) δίεδρος $KO = \widehat{AKB} = 120^\circ$.

250. Δίδεται ὀρθὸς κυκλικὸς κῶνος μὲ ἀκτῖνα βάσεως α καὶ ὕψος 2α. Ἔστω A σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως εἰς ἀπόστασιν $KA = 4\alpha$ ἀπὸ τὸ κέντρον K τῆς βάσεως. Φέρομεν τὰς ἐφαπτομένας AM, AN εἰς τὴν βάσιν καὶ ἐκ τῶν M καὶ N τὰς καθέτους MP καὶ NP εἰς τὴν OA. Ὑπολογίσατε: 1) συναρτήσει τοῦ α τὰς πλευρὰς τοῦ τριγώνου MPN, 2) τὴν δίεδρον γωνίαν τῶν ἐφαπτομένων ἐπιπέδων τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας διὰ τῆς OA.

Λύσις. $OM = \sqrt{OK^2 + KM^2} = \alpha\sqrt{5}$. $OA = \sqrt{OK^2 + KA^2} = 2\alpha\sqrt{5}$. Εἰς τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον OMA ἡ ὑποτείνουσα OA εἶναι διπλασία τῆς καθέτου OM. Ἄρα $\widehat{OAM} = 30^\circ$. Ὑπολογίζομεν τὴν AM ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου OMA:



$AM = \alpha\sqrt{15}$. Καὶ ἐκ τοῦ MPA: $MP = \frac{AM}{2} = \frac{\alpha}{2}\sqrt{15}$. Ἐὰν Σ τὸ σημεῖον τομῆς τῶν MN, KA ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου KMA ἔχομεν:

$$KM \cdot MA = M\Sigma \cdot KA \quad \text{ἢ} \quad M\Sigma = \frac{KM \cdot MA}{KA} = \frac{\alpha\sqrt{15}}{4} = \frac{MP}{2},$$

ὅθεν τὸ τρίγωνον MNP εἶναι ἰσόπλευρον πλευρᾶς $\frac{\alpha}{2}\sqrt{15}$, ἡ γωνία δὲ $MPN = 60^\circ$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ

Ὁμὰς Α΄.

251. Μελετήσατε τὴν τομὴν εὐθείας καὶ α) κυλινδρικῆς ἐπιφανείας, β) κωνικῆς ἐπιφανείας.

252. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὸ ἐπίπεδον δύο γενετειρῶν ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου εἶναι κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον ὁρίζεται ἀπὸ τὸν ἄξονα αὐτοῦ καὶ τὴν εὐθεῖαν τομῆς τῶν ἐφαπτομένων ἐπιπέδων τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας κατὰ μῆκος τῶν δύο γενετειρῶν.

253. Ἐκ σημείου Α φέρομεν δύο τεμνούσας ΑΒΓ καὶ ΑΒ΄Γ΄ κυλινδρικῆς ἐπιφανείας ὀρθοῦ κυκλικοῦ κυλίνδρου σχηματιζούσας ἴσας γωνίας μὲ τὸν ἄξονα. Δείξατε ὅτι ΑΒ·ΑΓ = ΑΒ΄·ΑΓ΄. (Χρησιμοποιήσατε τριγωνομετρικοὺς ἀριθμούς).

254. Νὰ δειχθῇ ὅτι, ἐὰν τὸ ἄθροισμα δύο ἀπέναντι ἐπιπέδων γωνιῶν τετραέδρου στερεᾶς γωνίας ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων ἀπέναντι ἐπιπέδων γωνιῶν, τότε ἡ τετράεδρος στερεὰ γωνία περιγράφεται περὶ ὀρθὸν κυκλικὸν κῶνον.

Ὁμὰς Β΄.

255. Δίδεται ὀρθὸς κυκλικὸς κῶνος κορυφῆς Ο, ὕψους υ, μὲ βάσιν (Κ,R). Ἐκτὸς τοῦ κύκλου τῆς βάσεως λαμβάνομεν σημεῖον Α, ὥστε ΚΑ = x. Διὰ τῆς εὐθείας ΟΑ ἄγονται τὰ ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας κατὰ μῆκος τῶν γενετειρῶν ΟΒ καὶ ΟΓ. 1) Ὑπολογίσατε συναρτήσει τῶν x, R τὰ τμήματα ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ, καθὼς καὶ τὰς ἀποστάσεις τῶν Β καὶ Γ ἀπὸ τὴν ΟΑ. 2) Ὁρίσατε τὸ x, ὥστε ἡ γωνία τῶν δύο ἐπιπέδων ΟΑΒ, ΟΑΓ νὰ εἶναι ὀρθή. (Διερεύνησις). 3) Προεκτείνομεν τὴν ΑΚ, ἕως ὅτου συναντήσῃ τὸν κύκλον εἰς σημεῖον Δ (τὸ ἕτερον σημεῖον τομῆς) καὶ φέρομεν εἰς τὸν κῶνον τὸ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον κατὰ μῆκος τῆς ΟΔ. Τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ ὁρίζει μετὰ τῶν ΟΑΒ, ΟΑΓ μίαν τρίεδρον. Εἶναι δυνατὸν νὰ ὁρίσωμεν τὸν x, ὥστε ἡ τρίεδρος αὕτη νὰ εἶναι τρισορθογώνιος;

(Διὰ τὸ 2) $x^2 = 2R^2\upsilon^2/(\upsilon^2 - R^2)$. Διὰ τὸ 3) ναί, διὰ $x = 2R$).

256. Τὰ ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα τοῦ περιγεγραμμένου κώνου τριέδρου στερεᾶς γωνίας κατὰ μῆκος τῶν ἀκμῶν αὐτῆς τέμνουν τὰς ἀπέναντι ἕδρας κατὰ συνεπιπέδους εὐθείας.

257. Τὰ τρία ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα ὁρίζονται ἀπὸ τὰς ἀκμὰς τριέδρου στερεᾶς καὶ τὰς γενετείρας ἐπαφῆς μετὰ τῶν ἀπέναντι ἑδρῶν τοῦ ἐγγεγραμμένου κώνου, διέρχονται διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας.

258. Δίδεται πλάγιος κῶνος βάσεως (Ο,R) καὶ κορυφῆς Α. Ἐὰν $M \in (O,R)$, τὸ κάθετον ἐπίπεδον εἰς Μ ἐπὶ τὴν ΑΜ διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου.

259. Δύο κύλινδροι εἶναι περιγεγραμμένοι περὶ σφαῖραν. Νὰ δειχθῇ ὅτι τὰ κοινὰ σημεῖα αὐτῶν εἶναι σημεῖα κείμενα ἐπὶ δύο γνωστῶν ἐπιπέδων. Τὸ αὐτὸ διὰ δύο κώνους.

260. Θεωροῦμεν σφαῖραν (Ο) καὶ τοὺς κύκλους ἐπαφῆς αὐτῆς Γ,Γ′ μὲ δύο περιγεγραμμένους κώνους. Νὰ ἀποδειχθῇ, ὅτι ἵνα οἱ κύκλοι Γ καὶ Γ′ ἐφάπτωνται, πρέπει καὶ ἀρκεῖ ὁ ἕνας τῶν ἀνωτέρω κώνων νὰ περιέχῃ τὴν κορυφὴν τοῦ ἄλλου.

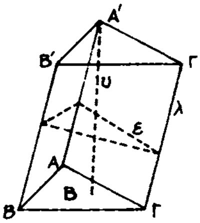
261. Ὀρθὸς κύλινδρος καὶ ὀρθὸς κῶνος ἔχουν τοὺς ἄξονάς των παραλλήλους. Δείξατε ὅτι τὰ σημεῖα τομῆς των εἶναι σημεῖα τῆς αὐτῆς σφαίρας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΝΑΤΟΝ

ΜΕΤΡΗΣΙΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ, ΟΓΚΟΥ

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟΝ

1. Πρῖσμα.



Ὄγκος V.
Βάσις B.
Κάθετος τομή ε.
Ὕψος υ.
Παράπλευρος ἀκμή λ.

1.1. Τυχὸν πρῖσμα.

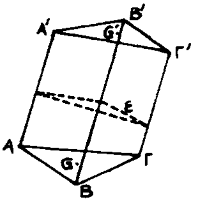
α) $V = B \cdot \upsilon$.

β) $V = \varepsilon \cdot \lambda$.

Διὰ τὸ τριγωνικὸν πρῖσμα ἐπὶ πλέον:

γ) V = ἐμβαδὸν μιᾶς παραπλεύρου ἕδρας × τὸ $\frac{1}{2}$ τῆς ἀποστάσεως τῆς ἀπέναντι ἀκμῆς.

1.2. Κολοβὸν πρῖσμα.



α) V = κάθετος τομὴ ἐπὶ τὸν μέσον ἀριθμητικὸν τῶν παραπλεύρων ἀκμῶν.

$$V = \varepsilon \cdot \frac{AA' + BB' + \Gamma\Gamma'}{3}.$$

β) V = κάθετος τομὴ ἐπὶ τὴν ἀπόστασιν τῶν κέντρων βάρους τῶν βάσεων.

$$V = \varepsilon \cdot GG'.$$

1.3. Παραλληλεπίπεδον διαστάσεων α, β, γ

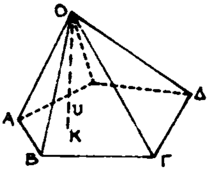
$$V = \alpha\beta\gamma.$$

1.4. Κύβος ἀκμῆς α

$$V = \alpha^3.$$

2. Πυραμίδες.

2.1. Τυχοῦσα πυραμίς.



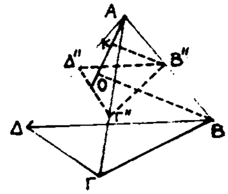
$$V = \frac{1}{3} B \cdot \upsilon.$$

2.2. Τετράεδρον ΑΒΓΔ.

$V = \frac{\mu}{6} AB \cdot \Gamma\Delta \cdot \eta\mu(\widehat{AB, \Gamma\Delta})$, ὅπου μ ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις τῶν ΑΒ, ΓΔ. Ἐὰν τὸ τετράεδρον εἶναι ὀρθοκεντρικὸν ημ$(\widehat{AB,\Gamma\Delta})=1$. Διὰ τὸ τρισορθογώνιον τετράεδρον ΟΑΒΓ (Ο κορυφὴ τῆς τρισορθογωνίου) $V=\frac{1}{6}\,OA\cdot OB\cdot O\Gamma$.

2.3. Κάθε τριγωνικὸν πρῖσμα δύναται νὰ χωρισθῇ εἰς τρεῖς ἰσοδυνάμους πυραμίδας.

2.4. Ἐὰν δύο τετράεδρα ἔχουν ἀπὸ μίαν ἴσην τρίεδρον, τότε ὁ λόγος τῶν ὄγκων των εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον τῶν γινομένων τῶν ἀκμῶν τῶν ἀγομένων ἐκ τῶν κορυφῶν τῶν ἴσων τριέδρων.



Ἀπόδειξις. Ἔστω ΑΒΓΔ, Α'Β'Γ'Δ' τὰ δύο τετράεδρα μὲ τρίεδρ. Α = τρίεδρ. Α'. Λέγομεν ὅτι ἂν V ὁ ὄγκος τοῦ ΑΒΓΔ καὶ V' τοῦ Α'Β'Γ'Δ' θὰ ἔχωμεν:

$$\frac{V}{V'}=\frac{AB\cdot A\Gamma\cdot A\Delta}{A'B'\cdot A'\Gamma'\cdot A'\Delta'}.$$

Λαμβάνομεν ἐπὶ τῶν ΑΒ, ΑΓ, ΑΔ τμήματα ΑΒ'', ΑΓ'', ΑΔ'' ἀντιστοίχως ἴσα πρὸς Α'Β', Α'Γ', Α'Δ'. Τὸ τετράεδρον ΑΒ''Γ''Δ'' εἶναι ἴσον πρὸς τὸ Α'Β'Γ'Δ'. Ἔχομεν:

$$\frac{V}{(AB''\Gamma''\Delta'')}=\frac{(A\Gamma\Delta)\cdot BO}{(A\Gamma''\Delta'')\cdot B''K},\ \text{ἀλλὰ}\ \ \frac{(A\Gamma\Delta)}{(A\Gamma''\Delta'')}=\frac{A\Gamma\cdot A\Delta}{A\Gamma''\cdot A\Delta''}$$

καὶ ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΒΑΟ, Β''ΑΚ ἔχομεν $\frac{BO}{B''K}=\frac{AB}{AB''}$ καὶ ἀντικαθιστοῦμε.

2.5. Κόλουρος πυραμὶς βάσεων Β, β καὶ ὕψους υ.

α) $V=\frac{\upsilon}{3}(B+\beta+\sqrt{B\beta})$.

Ἐὰν κ ὁ λόγος ὁμοιότητος τῶν δύο βάσεων ($\beta=\kappa^2 B$):

β) $V=\frac{B\upsilon}{3}(1+\kappa+\kappa^2)$.

Κόλουρος πυραμὶς 2ου εἴδους (ὅταν τὰ ἐπίπεδα τομῆς εὑρίσκωνται ἑκατέρωθεν τῆς κορυφῆς):

γ) $V=\frac{\upsilon}{3}(B+\beta-\sqrt{B\beta})=\frac{B\upsilon}{3}(1-\kappa+\kappa^2)$.

2.6. Τύπος τοῦ Sarrus.

Ὁ ὄγκος κυρτοῦ πολυέδρου τοῦ ὁποίου αἱ βάσεις Β, Β' εἶναι τυχόντα πολύγωνα ἐπὶ παραλλήλων ἐπιπέδων καὶ αἱ ὑπόλοιπαι ἕδραι τρίγωνα ἢ τραπέζια, ἰσοῦται πρὸς

$$V=\frac{\upsilon}{6}\cdot(B+B'+4B''),$$

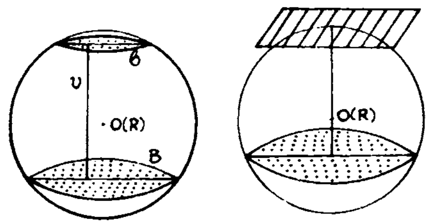
ὅπου υ ἡ ἀπόστασις τῶν δύο παραλλήλων βάσεων Β, Β' καὶ Β'' ἡ μέση τομή.

3. Σφαῖρα.

Ἐμβαδά.

3.1. Σφαιρικὴ ζώνη. Λέγεται τὸ μέρος τῆς ἐπιφανείας μιᾶς σφαίρας τὸ ὁποῖον περιέχεται μεταξὺ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων, ἐκ τῶν ὁποίων τό ἕν τέμνει τήν σφαῖραν, τό ἕτερον τέμνει ἤ ἐφάπτεται αὐτῆς.

Οἱ κύκλοι κατά τούς ὁποίους τέμνουν τά ἐπίπεδα αὐτά τήν σφαῖραν λέγονται βάσεις τῆς σφαιρικῆς ζώνης.



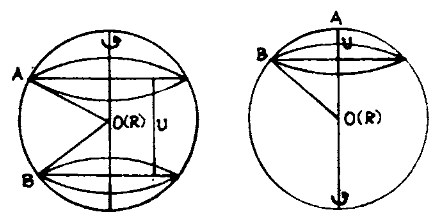
Ἐάν τό ἕν ἐπίπεδον ἐφάπτεται τῆς σφαίρας, ἡ σφαιρική ζώνη ἔχει μόνον μίαν βάσιν. Ἡ ἀπόστασις τῶν δύο παραλλήλων ἐπιπέδων λέγεται ὕψος τῆς ζώνης.

Ἐμβαδόν σφαιρικῆς ζώνης : $E=2\pi R\upsilon$.

3.2. Ἐμβαδόν ἐπιφανείας σφαίρας : $E=4\pi R^2$.

Ὄγκοι.

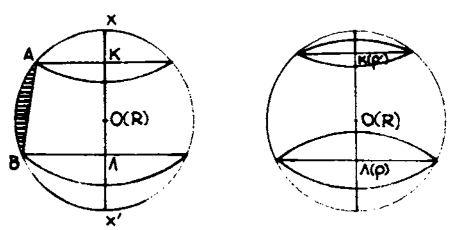
3.3. Σφαιρικός τομεύς. Λέγεται τό στερεόν, τό ὁποῖον παράγεται ἀπό ἕνα κυκλικόν τομέα, ὁ ὁποῖος στρέφεται κατά ὁλόκληρον στροφήν περί μίαν διάμετρον, ἡ ὁποία δέν τέμνει αὐτόν. υ= τό ὕψος τῆς ἀντιστοίχου σφαιρικῆς ζώνης.



Ὄγκος σφαιρικοῦ τομέως: $V=\frac{2}{3}\pi R^2\upsilon$.

3.4. Ὄγκος σφαίρας: $V=\frac{4}{3}\pi R^3$.

3.5. Σφαιρικός δακτύλιος. Λέγεται τό στερεόν τό ὁποῖον παράγεται ἀπό ἕν κυκλικόν τμῆμα τό ὁποῖον στρέφεται περί μίαν διάμετρον τοῦ κύκλου, εἰς τόν ὁποῖον ἀνήκει, καί ἡ ὁποία δέν τέμνει αὐτό.



Ὄγκος σφαιρικοῦ δακτυλίου: $V=\frac{1}{6}\pi AB^2 K\Lambda$.

3.6. Σφαιρικόν τμῆμα. Λέγεται τό μέρος τῆς σφαίρας, τό ὁποῖον περιέχεται μεταξύ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων ἐκ τῶν ὁποίων τό ἕν τέμνει τήν σφαῖραν καί τό ἕτερον τέμνει ἤ ἐφάπτεται αὐτῆς. Οἱ κύκλοι τομῆς λέγονται βάσεις τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος. Ἡ ἀπόστασις τῶν δύο παραλλήλων ἐπιπέδων λέγεται ὕψος.

Ὄγκος σφαιρικοῦ τμήματος:

$$V=\frac{1}{6}\pi\upsilon^3+\frac{1}{2}\pi(\rho^2+\rho'^2)\upsilon$$

Σφαιρικόν τμῆμα μιᾶς βάσεως:

$$V=\frac{\pi\upsilon^2}{3}(3R-\upsilon).$$

4. Κύλινδρος. Κῶνος.

4.1. Ὀρθὸς κυκλικὸς κύλινδρος. Ἐμβαδά.

Ἐμβαδὸν παραπλεύρου ἐπιφανείας:

$$E_\pi=2\pi R\upsilon.$$

Ἐμβαδὸν ὁλικῆς ἐπιφανείας:

$$E_0=2\pi R\upsilon+2\pi R^2=2\pi R(R+\upsilon).$$

Ἀνάπτυγμα τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας: Ὀρθογώνιον διαστάσεων $2\pi R$, υ.

4.2. Κυκλικὸς κύλινδρος. Ὄγκος:

$$V=B\cdot\upsilon=\pi R^2\upsilon.$$

4.3. Κυλινδρικὸς κορμός.

Ἐμβαδὸν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας: E = περίμετρος τῆς καθέτου τομῆς × τὸ μῆκος τοῦ ἄξονος.

Ὄγκος: V = ἐμβαδὸν τῆς καθέτου τομῆς × τὸ μῆκος τοῦ ἄξονος.

4.4. Ὀρθὸς κυκλικὸς κῶνος. Ἐμβαδά.

Ἐμβαδὸν παραπλεύρου ἐπιφανείας:

$$E=\pi R\lambda \quad (\lambda=\text{πλευρά}).$$

Ἐμβαδὸν ὁλικῆς ἐπιφανείας:

$$E=\pi R\lambda+\pi R^2=\pi R(\lambda+R)$$

Ἀνάπτυγμα τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας: Τομεὺς τοῦ ὁποίου ἡ ἐπίκεντρος γωνία ἰσοῦται πρὸς $360^\circ\frac{R}{\lambda}$

4.5. Κυκλικὸς κῶνος. Ὄγκος:

$$V=\frac{1}{3}B\upsilon=\frac{1}{3}\pi R^2\upsilon.$$

4.6. Κόλουρος κῶνος ἐκ περιστροφῆς. (Ἐκ τοῦ ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου).

Παράπλευρος ἐπιφάνεια: $E=\pi(R+R')a$ (a=πλευρά).

Ὄγκος: $V=\frac{\pi\cdot\upsilon}{3}(R^2+R'^2+RR')$.

Ὁ ὄγκος διὰ τὸν κόλουρον κῶνον β΄ εἴδους:

$$V=\frac{\pi\cdot\upsilon}{3}(R^2+R'^2-RR').$$

5. Ἐκ περιστροφῆς στερεά.

5.1. Ὀρθὸς κυκλικὸς κύλινδρος. Ὀρθὸς κυκλικὸς κῶνος. Σφαῖρα.

5.2. Ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ τοῦ παραγομένου ὑπὸ τριγώνου στρεφομένου περὶ ἄξονα διερχόμενον διὰ μιᾶς κορυφῆς του καὶ μὴ ἔχοντα κοινὰ σημεῖα μετὰ τοῦ ἐσωτερικοῦ τοῦ τριγώνου ἰσοῦται πρὸς τὸ $\frac{1}{3}$ τοῦ γινομένου τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας, ἥτις παράγεται ὑπὸ τῆς ἀπέναντι πλευρᾶς ἐπὶ τὸ ἀντίστοιχον ὕψος.

5.3. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, ἥτις παράγεται ὑπὸ ἑνὸς εὐθ. τμήματος στρεφομένου περὶ ἄξονα τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου κ. τέμνοντα τὸ εὐθ. τμῆμα, ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς προβολῆς τοῦ εὐθ. τμήματος ἐπὶ τὸν ἄξονα ἐπὶ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας, τῆς ὁποίας τὸ κέντρον εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ ἄξονος καὶ ἡ ὁποία ἐφάπτεται τοῦ εὐθ. τμήματος εἰς τὸ μέσον αὐτοῦ.

5.4. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας, τῆς παραγομένης ὑπὸ κανονικῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς στρεφομένης περὶ ἄξονα, διερχόμενον διὰ τοῦ κέντρου της καὶ μὴ τέμνοντος αὐτὴν ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τῆς προβολῆς της ἐπὶ τὸν ἄξονα ἐπὶ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας τῆς ἐγγεγραμμένης εἰς τὴν πολυγωνικὴν γραμμήν.

5.5. Θεώρημα Πάππου - Guldin.

Ὁ ὄγκος, ὁ ὁποῖος παράγεται ὑπὸ τυχόντος ἐπιπέδου σχήματος στρεφομένου περὶ ἄξονα τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου καὶ μὴ τέμνοντα τοῦτο, ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τοῦ σχήματος ἐπὶ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας, τὴν ὁποίαν γράφει τὸ κέντρον βάρους αὐτοῦ.

6. Διάφορα θεωρήματα, τὰ ὁποῖα προκύπτουν δι' ἐφαρμογῆς μεθόδων τῆς ὀγκομετρίας εἰς τετράεδρον.

$\alpha, \alpha' - \beta, \beta' - \gamma, \gamma'$ ἀκμαὶ (α, α' ἀπέναντι).

$\upsilon_A, \upsilon_B, \upsilon_\Gamma, \upsilon_\Delta$ ὕψη.

ρ ἀκτὶς ἐγγεγραμμένης σφαίρας.

R ἀκτὶς περιγεγραμμένης σφαίρας.

$\rho_A, \rho_B, \rho_\Gamma, \rho_\Delta$ ἀκτῖνες παρεγγεγραμμένων σφαιρῶν.

V ὄγκος.

$E_A, E_B, E_\Gamma, E_\Delta$ τὰ ἐμβαδὰ τῶν ἑδρῶν.

x, y, z αἱ ἐλάχισται ἀποστάσεις τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν (α, α'), (β, β'), (γ, γ') ἀντιστοίχως.

1) $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\upsilon_A} + \frac{1}{\upsilon_B} + \frac{1}{\upsilon_\Gamma} + \frac{1}{\upsilon_\Delta}$, διὰ τὸ κανονικὸν τετράεδρον $\rho = \frac{\upsilon}{4}$.

2) $\rho_A = \frac{3V}{E_B + E_\Gamma + E_\Delta - E_A}$.

3) $\frac{1}{\rho_A} = \frac{1}{\upsilon_B} + \frac{1}{\upsilon_\Gamma} + \frac{1}{\upsilon_\Delta} - \frac{1}{\upsilon_A}$ (ἄλλοι τρεῖς τύποι διὰ κυκλικῆς ἐν-

αλλαγῆς τῶν δεικτῶν).

4) $\frac{2}{\rho} = \frac{1}{\rho_A} + \frac{1}{\rho_B} + \frac{1}{\rho_\Gamma} + \frac{1}{\rho_\Delta}$ διά τό κανονικόν τετράεδρον $\rho_A = \rho_B = \rho_\Gamma = = \rho_\Delta = \frac{u}{2}$.

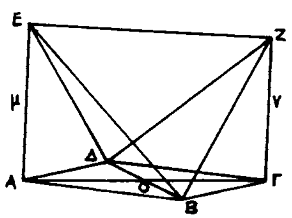
5) $x = \dfrac{12V}{\sqrt{4\alpha^2\alpha'^2 - (\beta^2+\beta'^2-\gamma^2-\gamma'^2)^2}}$.

6) $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{1}{u_A^2} + \frac{1}{u_B^2} + \frac{1}{u_\Gamma^2} + \frac{1}{u_\Delta^2}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

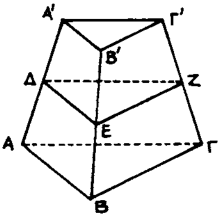
ʽΟμάς Α΄.

262. Δίδεται ρόμβος ΑΒΓΔ μέ διαγωνίους ΑΓ = 2α, ΒΔ = 2β. Εἰς τά Α καί Γ ὑψοῦμεν τάς καθέτους ἐπί τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ καί λαμβάνομεν ἐπ᾽ αὐτῶν ΑΕ = μ καί ΓΖ = ν. Νά ὑπολογισθῆ ὁ ὄγκος τῆς πυραμίδος ΒΔΕΖ.



Λύσις. Τό ἐπίπεδον ΑΓΖΕ εἶναι ἐπίπεδον συμμετρίας τοῦ στερεοῦ ΕΑΒΓΔΖ, ὡς καί τῆς πυραμίδος ΒΔΕΖ. Ἄρα (ΒΔΕΖ) = 2(ΒΟΕΖ). Ἀλλά (ΒΟΕΖ) = (Β.ΑΓΖΕ) − (Ε.ΑΟΒ) − (Ζ.ΒΟΓ) καί (Β.ΑΓΖΕ) $= \frac{1}{3}$(ΑΓΖΕ)·ΟΒ $= \frac{(\mu+\nu)\alpha\beta}{3}$, (Ε.ΑΟΒ) $= \frac{1}{3}$(ΑΟΒ)·μ $= \frac{\mu\alpha\beta}{6}$, (Ζ.ΒΟΓ) $= \frac{1}{3}$(ΒΟΓ)·ν $= \frac{\nu\alpha\beta}{6}$ καί (ΒΔΕΖ) = 2(ΒΟΕΖ) $= \frac{(\mu+\nu)\alpha\beta}{3}$.

263. Κολούρου πυραμίδος τά ἐμβαδά τῶν βάσεων εἶναι Ε, Ε΄. Νά εὑρεθῆ τό ἐμβαδόν τῆς μέσης τομῆς Ε″.



Λύσις. Ἐκ τοῦ τραπεζίου ΑΒΒ΄Α΄ ἔχομεν 2·ΕΔ = ΑΒ + Α΄Β΄. Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΑΒΓ, ΔΕΖ, Α΄Β΄Γ΄ ἔχομεν :

$$\frac{E}{E''} = \frac{AB^2}{\Delta E^2} \Longrightarrow \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{E''}} = \frac{AB}{\Delta E}. \quad (1)$$

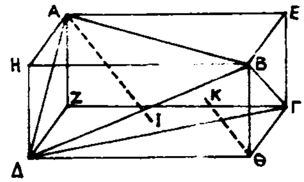
$$\frac{E'}{E''} = \frac{A'B'^2}{\Delta E^2} \Longrightarrow \frac{\sqrt{E'}}{\sqrt{E''}} = \frac{A'B'}{\Delta E} \quad (2)$$

Προσθέτομεν κατά μέλη τάς (1) καί (2)

$$\frac{\sqrt{E}+\sqrt{E'}}{\sqrt{E''}} = \frac{AB+A'B'}{\Delta E} = 2, \text{ ὅθεν } E'' = \frac{(\sqrt{E}+\sqrt{E'})^2}{4}.$$

264. Δείξατε ὅτι τό περιγεγραμμένον παραλληλεπίπεδον περί τετράεδρον ἔχει ὄγκον τριπλάσιον τοῦ τετραέδρου.

Ἀπόδειξις. Ἔστω τό τετράεδρον ΑΒΓΔ καί ΑΕΒΗΖΓΘΔ τό πε-



ριγεγραμμένον παραλληλεπίπεδον. Τὰ ἐπίπεδα ΒΔΓ, ΖΗΕ τριχοτομοῦν τὴν ΑΘ. Ἄρα, ἐὰν ΑΙ, ΘΚ ἀποστάσεις τῶν Α, Θ ἀπὸ ΒΔΓ, ἔχομεν ΑΙ = 2ΚΘ. Ἐὰν V_π = = ὄγκος τοῦ παραλληλεπιπέδου καὶ V_τ = = ὄγκος τοῦ τετραέδρου ἔχομεν:

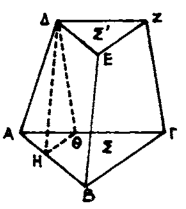
$$V_\pi = 6(\Theta.\mathrm{B}\Gamma\Delta) = 2(\mathrm{B}\Gamma\Delta)\cdot \mathrm{K}\Theta$$

$$V_\tau = \frac{1}{3}(\mathrm{B}\Gamma\Delta)\cdot \mathrm{AI} \quad \text{ἢ} \quad \frac{V_\pi}{V_\tau} = 3.$$

Παρατήρησις. $V_\pi = \frac{x}{2}\,\mathrm{AB}\cdot\Delta\Gamma\cdot \eta\mu(\widehat{\mathrm{AB},\Delta\Gamma})$, ὅπου x ἡ ἀπόστασις τῶν ἐπιπέδων ΑΕΒΗ, ΖΓΘΔ, ἤτοι ἡ κοινὴ κάθετος τῶν ΑΒ, ΓΔ ἄρα

$$V_\tau = \frac{x}{6}\,\mathrm{AB}\cdot\Gamma\Delta\cdot\eta\mu(\widehat{\mathrm{AB},\Gamma\Delta}).$$

265. Δίδεται κόλουρος τριγωνικὴ πυραμὶς μὲ ὕψος υ καὶ βάσεις Σ, Σ΄. Ἐκ τῆς μιᾶς κορυφῆς ἄγεται ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν ἔναντι παράπλευρον ἕδραν ἀποκόπτον ἀπὸ τὸ στερεὸν ἕνα τετράεδρον. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου τούτου.

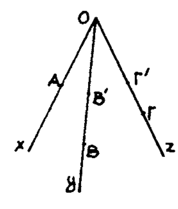


Λύσις. Τὸ ἐπίπεδον ΔΘΗ εἶναι παράλληλον πρὸς τὴν ἕδραν ΕΖΓΒ. Ζητεῖται ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου Δ.ΑΗΘ. Τὰ τρίγωνα ΑΗΘ, ΑΒΓ, ΔΕΖ εἶναι ὅμοια. Ἄρα

$$\frac{\sqrt{(\mathrm{AH\Theta})}}{\sqrt{\Sigma}} = \frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AB}} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\sqrt{(\mathrm{AH\Theta})}}{\sqrt{\Sigma}} = \frac{\mathrm{AB}-\Delta\mathrm{E}}{\mathrm{AB}} = 1-\frac{\Delta\mathrm{E}}{\mathrm{AB}} = 1-\frac{\sqrt{\Sigma'}}{\sqrt{\Sigma}}$$

ἢ $(\mathrm{AH\Theta}) = (\sqrt{\Sigma}-\sqrt{\Sigma'})^2$ καὶ $(\Delta\mathrm{AH\Theta}) = \frac{\upsilon}{3}(\sqrt{\Sigma}-\sqrt{\Sigma'})^2$.

266. Ἐπὶ τῶν ἀκμῶν τριέδρου γωνίας Οxyz, τῆς ὁποίας ἑκάστη ἕδρα εἶναι 60°, λαμβάνομεν τὰ μήκη ΟΑ = α, ΟΒ = β, ΟΓ = γ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου ΟΑΒΓ.



Λύσις. Λαμβάνομεν ἐπὶ τῶν Oy, Oz τὰ σημεῖα Β΄, Γ΄ ἀντιστοίχως ὥστε ΟΒ΄ = ΟΓ΄ = α. Ἄρα τὸ ΟΑΒ΄Γ΄ εἶναι κανονικὸν τετράεδρον καὶ συνεπῶς $(\mathrm{OAB'\Gamma'}) = \frac{\alpha^3\sqrt{2}}{12}$. Τὰ τετράεδρα ΟΑΒΓ, ΟΑΒ΄Γ΄ ἔχουν κοινὴν τρίεδρον καὶ θὰ εἶναι $\frac{(\mathrm{OAB\Gamma})}{(\mathrm{OAB'\Gamma'})} = \frac{\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\cdot\mathrm{O\Gamma}}{\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB'}\cdot\mathrm{O\Gamma'}} = \frac{\beta\gamma}{\alpha^2}$ ἢ $(\mathrm{OAB\Gamma}) = \frac{\alpha\beta\gamma\sqrt{2}}{12}$.

267. Δίδεται ὀρθογώνιον μὲ διαστάσεις α καὶ β. Εἰς τὰ Γ, Δ ὑψοῦμεν καθέτους καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῶν τὰ σημεῖα Μ, Ν ἀντιστοίχως, ὥστε ΒΜ καὶ ΑΝ κάθετοι.

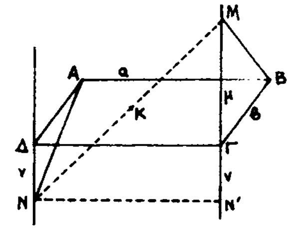
1) Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ ΒΜ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΒΑΝ.

2) Ἐὰν ΓΜ = μ, ΔΝ = ν νὰ εὑρεθῇ τὸ κέντρον τῆς περιγεγραμ-

μένης σφαίρας περὶ τὸ τετράεδρον ΑΜΝΒ καὶ νὰ ὑπολογισθῇ ἡ ἀκτὶς αὐτῆς.

3) Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου ΑΜΝΒ.

Ἀπόδειξις. 1) Προφανῶς $AB \perp BM$ καὶ δεδομένου ὅτι $BM \perp AN$ ἕπεται ὅτι $BM \perp$ ἐπίπ. ΒΑΝ. Ὁμοίως δυνάμεθα νὰ ἀποδείξωμεν ὅτι καὶ $AN \perp BAM$.

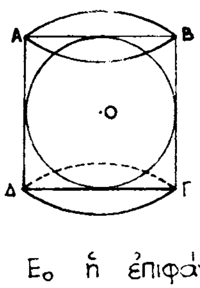


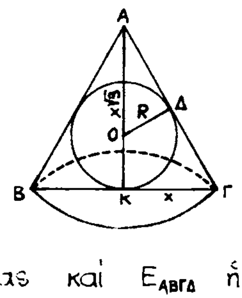
2) Τὸ τρίγωνον ΜΑΝ εἶναι ὀρθογώνιον. Ἐὰν Κ τὸ μέσον τῆς ΜΝ, ἔχομεν ΚΝ=ΚΑ=ΚΜ. Ἐπίσης τὸ τρίγωνον ΜΒΝ εἶναι ὀρθογώνιον, ἄρα ΚΝ=ΚΜ=ΚΒ. Ὅθεν Κ τὸ κέντρον τῆς περιγεγραμμένης σφαίρας. Προβάλλομεν τὸ σημεῖον Ν ἐπὶ τὴν ΓΜ εἰς Ν′. Ἐκ τοῦ ὀρθογωνίου τριγώνου ΜΝ′Ν ἔχομεν $MN=\sqrt{(\mu+\nu)^2+a^2}$, ἄρα ἡ ἀκτὶς τῆς περιγεγραμμένης σφαίρας $R=\frac{1}{2}\sqrt{(\mu+\nu)^2+a^2}$.

3) $(ABMN)=\frac{1}{6}BM\cdot AN\cdot a=\frac{1}{6}\beta(\mu+\nu)a=\frac{a\beta}{6}(\mu+\nu)$.

268. Νὰ ἀποδειχθῇ 1) ὅτι ὁ λόγος τῆς ἐπιφανείας σφαίρας πρὸς τὴν ὁλικὴν ἐπιφάνειαν τοῦ περιγεγραμμένου κυλίνδρου εἶναι $\frac{2}{3}$ καὶ 2) πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ περιγεγραμμένου ἰσοπλεύρου κώνου $\frac{4}{9}$. (Ἰσόπλευρος κῶνος προκύπτει ἐκ τῆς περιστροφῆς τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου περὶ ἓν ὕψος αὐτοῦ).

Ἀπόδειξις.



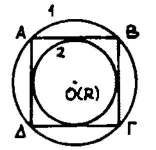


1) Ἔστω E_o ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας καὶ $E_{AB\Gamma\Delta}$ ἡ ἐπιφάνεια τοῦ περιγεγραμμένου κυλίνδρου. Θὰ ἔχωμεν $E_o=4\pi R^2$, $E_{AB\Gamma\Delta}=$ $=4\pi R^2+2\pi R^2=6\pi R^2$, ἄρα $\frac{E_o}{E_{AB\Gamma\Delta}}=\frac{4\pi R^2}{6\pi R^2}=\frac{2}{3}$.

2) Ὑπολογίζομεν τὴν ἀκτῖνα x τῆς βάσεως τοῦ κώνου συναρτήσει τῆς ἀκτῖνος R τῆς σφαίρας. Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΟΑΔ, ΓΑΚ ἔχομεν $\frac{K\Gamma}{O\Delta}=\frac{A\Gamma}{OA}$ ἢ $\frac{x}{R}=\frac{2x}{x\sqrt{3}-R}$ ἢ $x=R\sqrt{3}$. Θὰ ἔχωμεν $E_{AB\Gamma}=9\pi R^2$, ὅθεν $\frac{E_o}{E_{AB\Gamma}}=\frac{4}{9}$.

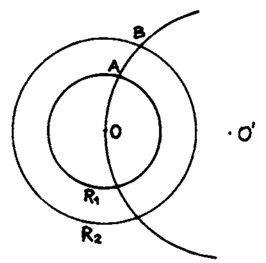
269. Δίδονται δύο σφαῖραι. Ἡ μία εἶναι ἐγγεγραμμένη καὶ ἡ ἄλλη περιγεγραμμένη περὶ κύλινδρον. Δείξατε ὅτι τὰ ἐμβαδὰ τῶν τριῶν ἐπιφανειῶν ἀποτελοῦν ἀριθμητικὴν πρόοδον.

Ἀπόδειξις. Ἔστω R ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως τοῦ κυλίνδρου. (1) ἡ περιγεγραμμένη σφαῖρα, (2) ἡ ἐγγεγραμμένη. $E_{AB\Gamma\Delta} = 2\pi R^2 + 4\pi R^2 = 6\pi R^2$, $E_1 = 4\pi OA^2 = 4\pi(R\sqrt{2})^2 = 8\pi R^2$ καὶ $E_2 = 4\pi R^2$, ἤτοι $2E_{AB\Gamma\Delta} = E_1 + E_2$.



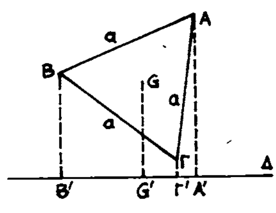
270. Δίδονται δύο ὁμόκεντροι σφαῖραι $(O,R_1),(O,R_2)$. Τρίτη σφαῖρα διέρχεται διὰ τοῦ O καὶ ἀποτέμνεται ὑπὸ τῶν προηγουμένων κατὰ σφαιρικὴν ζώνην ἐμβαδοῦ E. Ὑπολογίσατε τὸ E.

Λύσις. Θεωροῦμεν μίαν τομὴν διὰ τῶν O,O'. Ἔστω E_{OA} ἡ σφαιρικὴ ζώνη μιᾶς βάσεως, ἡ ὁποία παράγεται ὑπὸ τοῦ OA διὰ περιστροφῆς περὶ OO' καὶ E_{OB} ἀντιστοίχως διὰ περιστροφῆς τῆς OB. Ἔχω $E = E_{OB} - E_{OA} = \pi \cdot OB^2 - \pi OA^2 = \pi(R_2^2 - R_1^2)$.



271. Τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας ἐκ τῆς περιστροφῆς ἰσοπλεύρου τριγώνου περὶ εὐθεῖαν τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ καὶ μὴ τέμνουσαν τοῦτο ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῆς περιμέτρου τοῦ τριγώνου ἐπὶ τὸ μῆκος τῆς περιφερείας, τὴν ὁποίαν γράφει τὸ κέντρον βάρους.

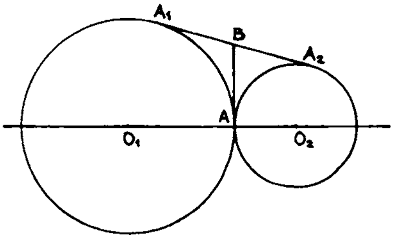
Ἀπόδειξις. Ἔστω Δ τυχοῦσα εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου τοῦ τριγώνου καὶ AA', BB', ΓΓ', GG' αἱ ἀποστάσεις τῶν κορυφῶν καὶ τοῦ κέντρου βάρους ἀπὸ Δ. Διὰ περιστροφῆς τῆς AB σχηματίζεται κόλουρος κῶνος παραπλεύρου ἐπιφανείας $E_{AB} = \pi a(AA'+BB')$. Τὸ αὐτὸ διὰ τὰς BΓ, ΓA καὶ $E_{B\Gamma} = \pi a(BB'+\Gamma\Gamma')$, $E_{\Gamma A} = \pi a(\Gamma\Gamma'+AA')$, ὅθεν $E_{\delta\lambda} = E_{AB} + E_{B\Gamma} + E_{\Gamma A} = 2\pi a(AA'+BB'+\Gamma\Gamma') = 3a \cdot 2\pi GG'$, δεδομένου ὅτι $AA'+BB'+\Gamma\Gamma' = 3GG'$.



272. Ὀρθογώνιον τρίγωνον στρέφεται διαδοχικῶς περὶ τὰς καθέτους πλευρὰς αὐτοῦ AΓ, AB καὶ περὶ τὴν ὑποτείνουσαν BΓ. Ἐὰν $V_{A\Gamma}, V_{AB}, V_{B\Gamma}$ οἱ παραγόμενοι ὄγκοι ἑκάστοτε δείξατε ὅτι $\frac{1}{V_{B\Gamma}^2} = \frac{1}{V_{AB}^2} + \frac{1}{V_{A\Gamma}^2}$.

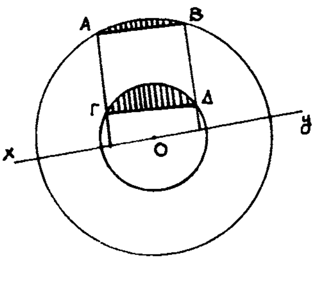
Ἀπόδειξις. $V_{AB} = \frac{1}{3}\pi A\Gamma^2 AB$, $V_{A\Gamma} = \frac{1}{3}\pi AB^2 \cdot A\Gamma$, $V_{B\Gamma} = \frac{1}{3}\pi \upsilon_A^2 \cdot B\Gamma$, κατὰ συνέπειαν $\frac{1}{V_{A\Gamma}^2} + \frac{1}{V_{AB}^2} = \frac{9}{\pi^2 AB^2 A\Gamma^2}\left(\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{A\Gamma^2}\right) = \frac{9}{\pi^2 B\Gamma^2 \upsilon_A^2} \cdot \frac{1}{\upsilon_A^2} = \frac{1}{V_{B\Gamma}^2}$.

273. Δίδονται δύο κύκλοι (O_1, R_1), (O_2, R_2) ἐφαπτόμενοι ἐξωτερικῶς καὶ A_1A_2 κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη αὐτῶν. Τὸ σχῆμα στρέφεται περὶ τὴν OO'. Δείξατε ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας τῆς γραφομένης ὑπὸ τῆς A_1A_2 εἶναι μέσον ἀνάλογον τῶν σφαιρῶν τῶν παραγομένων ὑπὸ τῶν (O_1, R_1), (O_2, R_2).



Ἀπόδειξις. Ὡς γνωστόν, ἡ κοινὴ ἐσωτερικὴ ἐφαπτομένη διέρχεται διὰ τοῦ μέσου τῆς A_1A_2. Ἡ A_1A_2 παράγει τὴν παράπλευρον ἐπιφάνειαν $E_{A_1A_2}$ ἑνὸς κολούρου κώνου. Ὅθεν $E_{A_1A_2} = 2\pi AB \cdot A_1A_2 = \pi \cdot A_1A_2^2$. Ἀλλὰ $A_1A_2^2 = 4R_1R_2$ (ἄσκ. 263, τεῦχος 1) καὶ $E_{A_1A_2} = 4\pi R_1R_2$, $E_{O_1} = 4\pi R_1^2$, $E_{O_2} = 4\pi R_2^2$, $E_{O_1}E_{O_2} = E_{A_1A_2}^2$.

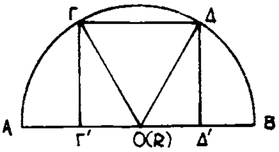
274. Δίδονται δύο κύκλοι ὁμόκεντροι. AB καὶ ΓΔ εἶναι δύο χορδαὶ αὐτῶν παράλληλοι καὶ ἴσαι (ἀντιστοίχως ἐπὶ ἑκάστου). Θεωροῦμεν τὸ σχῆμα περιστρεφόμενον περὶ τυχοῦσαν κοινὴν διάμετρον μὴ τέμνουσαν τὰ κυκλικὰ τμήματα AB, ΓΔ. Δείξατε ὅτι οἱ παραγόμενοι δακτύλιοι ὑπὸ τῶν $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ εἶναι ἴσοι.



Ἀπόδειξις. $V_{AB} = \frac{1}{6}\pi AB^2 \mu$ καὶ $V_{\Gamma\Delta} = \frac{1}{6}\pi \Gamma\Delta^2 \nu$, ὅπου μ, ν αἱ προβολαὶ τῶν AB, ΓΔ ἐπὶ τὸν ἄξονα περιστροφῆς, δηλαδὴ τὴν διάμετρον xy. Ἀλλὰ $AB = \Gamma\Delta$. Ἐπειδὴ δὲ καὶ $AB \parallel \Gamma\Delta$ ἕπεται ὅτι $\mu = \nu$, ἤτοι $V_{AB} = V_{\Gamma\Delta}$.

275. Ἡμιπεριφέρεια διαμέτρου AB χωρίζεται ὑπὸ τῶν σημείων Γ, Δ εἰς τρία ἴσα τόξα καὶ στρέφεται περὶ τὴν AB κατὰ μίαν πλήρη στροφήν. Δείξατε ὅτι: 1) ἡ ζώνη ἡ ὁποία παράγεται ὑπὸ τοῦ μεσαίου τόξου εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων ζωνῶν· 2) ὁ σφαιρικὸς τομεὺς ὁ παραγόμενος ὑπὸ τοῦ μεσαίου τόξου εἶναι ἴσος πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν σφαιρικῶν τομέων τῶν παραγομένων ὑπὸ τῶν δύο ἄλλων τόξων· 3) τὸ σφαιρικὸν τμῆμα τὸ παραγόμενον ὑπὸ τοῦ μεσαίου τόξου εἶναι τὰ $\frac{11}{5}$ τοῦ ἀθροίσματος τῶν σφαιρικῶν τμημάτων τῶν παραγομένων ὑπὸ τῶν ἄλλων τόξων.

Ἀπόδειξις. 1) Ἔστω $E_{\Gamma\Delta}$ τὸ ἐμβαδὸν τῆς ζώνης τῆς παραγομένης ὑπὸ τοῦ τόξου $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$. Ἔχομεν $E_{\Gamma\Delta} = 2\pi R\cdot \Gamma'\Delta'$. Ἀλλὰ $\Gamma'\Delta' = R$ ἤτοι $E_{\Gamma\Delta} = 2\pi R^2$, ἤτοι τὸ ἥμισυ τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας.



2) $V_{\Gamma O\Delta}$ εἶναι ὁ ὄγκος τοῦ σφαιρικοῦ τομέως. $V_{\Gamma O\Delta} = \frac{2}{3}\pi R^2 \cdot \Gamma'\Delta'$ ἢ $V_{\Gamma O\Delta} = \frac{2}{3}\pi R^3$, ἤτοι τὸ ἥμισυ τοῦ ὄγκου τῆς σφαίρας.

3) $V_{\Gamma\Delta}$ ὁ ὄγκος τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος. Αἱ ἀκτῖνες τῶν κύκλων τῆς βάσεως εἶναι $\Gamma\Gamma' = \Delta\Delta' = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. Τὸ ὕψος τοῦ σφαιρικοῦ τμήματος θὰ εἶναι $\Gamma'\Delta' = R$.

$$V_{\Gamma\Delta} = \frac{1}{6}\pi R(R^2 + 3\Gamma\Gamma'^2 + 3\Delta\Delta'^2) = \frac{11}{12}\pi R^3.$$

Θὰ εἶναι δὲ ἀκόμη

$$V_{A\Gamma} + V_{B\Delta} = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{11}{12}\pi R^3 = \frac{5}{12}\pi R^3$$

($V_{A\Gamma}, V_{B\Delta}$ ὁρίζονται ἀναλόγως μὲ $V_{\Gamma\Delta}$).

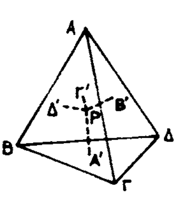
Ἤτοι $\frac{V_{\Gamma\Delta}}{V_{A\Gamma} + V_{B\Delta}} = \frac{11}{5}$.

Διάφοροι προτάσεις ἀποδεικνυόμεναι τῇ βοηθείᾳ τῶν ὄγκων τῶν στερεῶν.

276. Δείξατε ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων τυχόντος σημείου ἐντὸς κανονικοῦ τετραέδρου ἀπὸ τὰς ἕδρας εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ὕψος αὐτοῦ.

Ἀπόδειξις.

Ἔστω $PA', PB', P\Gamma', P\Delta'$ αἱ ἀποστάσεις ἀπὸ τὰς ἕδρας $B\Gamma\Delta, A\Gamma\Delta, AB\Delta, AB\Gamma$. Θὰ ἔχωμεν



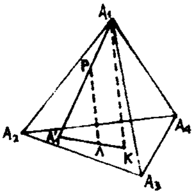
$$\frac{1}{3}(B\Gamma\Delta)\cdot PA' + \frac{1}{3}(A\Gamma\Delta)\cdot PB' + \frac{1}{3}(AB\Delta)P\Gamma' + \frac{1}{3}(AB\Gamma)\cdot P\Delta' = \frac{1}{3}(B\Gamma\Delta)\cdot \upsilon \quad \text{ἢ}$$

$PA' + PB' + P\Gamma' + P\Delta' = \upsilon$. Διότι αἱ παράπλευραι ἕδραι εἶναι ἴσαι.

Παρατήρησις. Τὸ θεώρημα θὰ ἰσχύῃ καὶ διὰ τὸ ἰσοσκελὲς τετράεδρον.

277. Δίδεται τετράεδρον $A_1A_2A_3A_4$. Ἔστω P τυχὸν σημεῖον ἐντὸς αὐτοῦ. Ἡ A_iP τέμνει τὴν ἀπέναντι ἕδραν εἰς τὸ σημεῖον A_i'. Δείξατε ὅτι

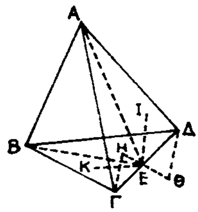
$$\sum_{i=1}^{4} \frac{A_i'P}{A_i'A_i} = 1.$$



Ἀπόδειξις. Θέτομεν $(PA_2A_3A_4)=V_1$ καὶ $(A_1A_2A_3A_4)=V$. Θὰ ἔχωμεν $\frac{V_1}{V}=\frac{P\Lambda}{A_1K}$, ὅπου $P\Lambda, A_1K$ αἱ ἀποστάσεις τῶν P, A_1 ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον $A_2A_3A_4$.

Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων $A_1'P\Lambda, A_1'A_1K$ προκύπτει $\frac{P\Lambda}{A_1K}=\frac{PA_1'}{A_1A_1'}$ ὅθεν $\frac{V_1}{V}=\frac{PA_1'}{A_1A_1'}$ καὶ $\Sigma\frac{V_i}{V}=\Sigma\frac{PA_i'}{A_iA_i'}$. Ἀλλὰ $\Sigma\frac{V_i}{V}=1$.

278. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι τὸ διχοτομοῦν ἐπίπεδον μίαν δίεδρον τετραέδρου χωρίζει τὴν ἀπέναντι ἀκμὴν εἰς μέρη ἀνάλογα τῶν προσκειμένων ἑδρῶν.



Ἀπόδειξις. Τὰ τετράεδρα $E.AB\Gamma$, $E.AB\Delta$ ἔχουν ἴσα ὕψη EK, EI, ἄρα

$$\frac{(E.AB\Gamma)}{(E.AB\Delta)}=\frac{(AB\Gamma)}{(AB\Delta)}. \quad (1)$$

Ἐὰν θεωρήσωμεν τὰ αὐτὰ τετράεδρα μὲ κορυφὰς Γ, Δ θὰ εἶναι

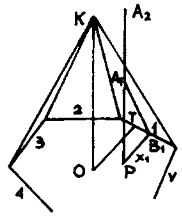
$$\frac{(\Gamma.ABE)}{(\Delta.ABE)}=\frac{\Gamma H}{\Delta\Theta}. \quad (2)$$

Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων $\Gamma EH, \Delta E\Theta$ ἔχομεν $\frac{\Gamma H}{\Delta\Theta}=\frac{\Gamma E}{\Delta E}$. (3)

Ἐκ τῶν σχέσεων (1),(2),(3) προκύπτει $\frac{(AB\Gamma)}{(AB\Delta)}=\frac{\Gamma E}{\Delta E}$.

Ὁμὰς Β΄.

279. Δίδεται κανονικὴ πυραμὶς μὲ βάσιν πολύγωνον μὲ ν πλευράς. Ἔστω P τυχὸν σημεῖον τῆς βάσεως. Φέρομεν εἰς τὸ P τὴν κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ πολυγώνου, ἥτις τέμνει τὰς ἕδρας εἰς $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_\nu$. Δείξατε ὅτι $PA_1+PA_2+\cdots+PA_\nu=2\nu\upsilon$, ὅπου υ τὸ ὕψος τῆς πυραμίδος.



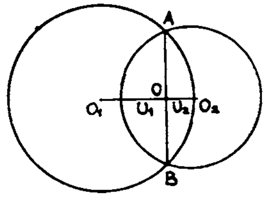
Ἀπόδειξις. Ἔστω $1,2,3,\ldots,\nu$ αἱ πλευραὶ τῆς βάσεως μὲ ἄθροισμα 2τ, καὶ $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\nu$ αἱ ἀποστάσεις τοῦ P ἀπὸ τὰς πλευρὰς ἀντιστοίχως. Εἶναι γνωστὸν ὅτι $x_1+x_2+\cdots+x_\nu=\frac{2E}{a}$, ὅπου a ἡ πλευρὰ τῆς βάσεως. Ἔστω OT ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου τοῦ πολυγώνου ἀπὸ τὴν πλευρὰν 1. Τὰ τρίγωνα KOT, A_1PB_1 εἶναι ὅμοια, ὡς ἐκ τούτου

$$\frac{OK}{OT}=\frac{PA_1}{PB_1} \quad \text{ἢ} \quad \frac{\upsilon}{\rho}=\frac{PA_1}{x_1}$$

ὅπου υ τὸ ὕψος OK καὶ ρ ἡ ἀκτὶς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς τὸ πολύγωνον. Ὁμοίως $A_2PB_2, A_3PB_3, \ldots, A_\nu PB_\nu$ ὅμοια πρὸς KOT. Ἤτοι $\frac{PA_1}{x_1}=\frac{PA_2}{x_2}=\cdots=\frac{PA_\nu}{x_\nu}=\frac{\upsilon}{\rho}$ ἢ $\frac{PA_1+PA_2+\cdots+PA_\nu}{x_1+x_2+\cdots+x_\nu}=\frac{\upsilon}{\rho}$ ἢ

$$PA_1 + PA_2 + \cdots + PA_\nu = \frac{2E\upsilon}{\rho a} = \frac{4\tau\upsilon}{a} = 2\nu\upsilon$$

280. Δίδεται σφαιρικὸς φακὸς πάχους ε, ἐπιφανείας E καὶ ὄγκου V. Δείξατε ὅτι $12V = 3\varepsilon E - \pi\varepsilon^3$.



Ἀπόδειξις. Ὁ ὄγκος V τοῦ φακοῦ εἶναι τὸ ἄθροισμα δύο σφαιρικῶν τμημάτων τῆς αὐτῆς βάσεως. Ἔχομεν $V = \frac{\pi\upsilon_1^2}{3}(3R_1 - \upsilon_1) + \frac{\pi\upsilon_2^2}{3}(3R_2 - \upsilon_2)$ ἢ $V = \pi(\upsilon_1^2 R_1 + \upsilon_2^2 R_2) - \frac{\pi}{3}(\upsilon_1^3 + \upsilon_2^3)$. Ἡ ἐπιφάνεια $E = 2\pi(\upsilon_1 R_1 + \upsilon_2 R_2)$ (1). Ἔχομεν ἀκόμη $OA^2 = \upsilon_1(2R_1 - \upsilon_1) = \upsilon_2(2R_2 - \upsilon_2)$ (2), ἀλλὰ $\upsilon_1 + \upsilon_2 = \varepsilon$. Αἱ σχέσεις (1),(2) γράφονται

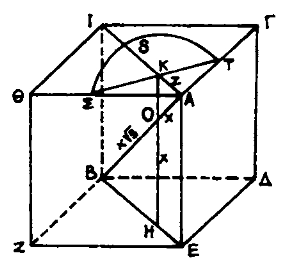
$$\upsilon_1 R_1 + \upsilon_2 R_2 = \frac{E}{2\pi} \qquad \upsilon_1 R_1 - \upsilon_2 R_2 = \frac{\upsilon_1^2 - \upsilon_2^2}{2} \quad \text{καὶ}$$

$$R_1 = \frac{1}{4\upsilon_1}\left(\frac{E}{\pi} + \upsilon_1^2 - \upsilon_2^2\right) \qquad R_2 = \frac{1}{4\upsilon_2}\left(\frac{E}{\pi} + \upsilon_2^2 - \upsilon_1^2\right).$$

Ἀντικαθιστῶντες εἰς τὸν τύπον, ὁ ὁποῖος δίδει τὸν ὄγκον, ἔχομεν μετὰ τὰς πράξεις :

$$V = \frac{E\varepsilon}{4} - \frac{\pi}{12}(\upsilon_1 + \upsilon_2)^3 = \frac{E\varepsilon}{4} - \frac{\pi\varepsilon^3}{12} \quad \text{ἢ} \quad 12V = 3E\varepsilon - \pi\varepsilon^3.$$

281. Ἐντὸς μιᾶς τρισορθογωνίου τριέδρου κύβου ἀκμῆς 1 εἶναι ἐγγεγραμμένη σφαῖρα καὶ διέρχεται διὰ τῆς ἀπέναντι κορυφῆς τοῦ κύβου. Ὑπολογίσατε τὴν ἀκτῖνα τῆς σφαίρας καὶ τὸν λόγον τῶν δύο ἐπιφανειῶν, εἰς τὰς ὁποίας χωρίζει τὴν ἐπιφάνειαν τοῦ κύβου.



Λύσις. Ἔστω (O,x) ἡ ἐν λόγῳ σφαῖρα. $OA = OH = x$. BO θὰ εἶναι ἡ διαγώνιος κύβου ἀκμῆς x, ὅθεν $OB = x\sqrt{3}$ καὶ $AB = \sqrt{3} = x\sqrt{3} + x$ ἢ

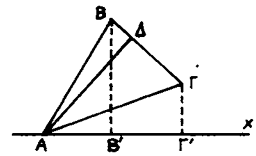
$$x = \frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}.$$

Ἡ σφαῖρα (O,x) τέμνει τὰς ἕδρας ΑΓΙΘ, ΑΓΔΕ, ΑΕΖΘ κατὰ ἴσους κύκλους. Θὰ ὑπολογίσωμεν τὴν ἀκτῖνα z τοῦ (K,z). Ἐκ τῶν ὁμοίων τριγώνων ΚΟΑ, ΗΟΒ ἔχομεν

$$\frac{z}{BH} = \frac{\sqrt{3}}{x\sqrt{3}} \quad \text{ἢ} \quad z = x\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}.$$

Ὁ κύκλος (K,z) τέμνει τὴν ἕδραν ΑΓΙΘ κατὰ τὴν ἡμιπεριφέρειαν ΣδΤ καὶ τὸ τρίγωνον ΣΑΤ, ἤτοι κατὰ ἐπιφάνειαν ἐμβαδοῦ $\frac{\pi z^2}{2} + z^2 = z^2\left(\frac{\pi}{2} + 1\right)$. Συνολικῶς ἡ ἀποτεμνομένη ἐπιφάνεια εἶναι $E = 3z^2\left(\frac{\pi}{2} + 1\right)$.

282. Ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ, τὸ ὁποῖον παράγεται ὑπὸ τριγώνου στρεφομένου περὶ ἄξονα κείμενον εἰς τὸ ἐπίπεδόν του καὶ διερχόμενον διὰ μιᾶς κορυφῆς του, ἰσοῦται πρὸς τὸ γινόμενον τῆς ἐπιφανείας ποὺ παράγει. ἡ πλευρὰ ἡ κειμένη ἔναντι τῆς κορυφῆς, ἀπὸ τὴν ὁποίαν διέρχεται ὁ ἄξων ἐπὶ τὸ τρίτον τοῦ ἀντιστοίχου ὕψους.



Ἀπόδειξις. Θέτομεν V τὸν παραγόμενον ὄγκον, V_{AB} τὸν ὄγκον τοῦ κώνου πλευρᾶς AB, $V_{B\Gamma}$ τὸν ὄγκον τοῦ κολούρου κώνου πλευρᾶς $B\Gamma$ καὶ $V_{A\Gamma}$ τὸν ὄγκον τοῦ κώνου πλευρᾶς $A\Gamma$. Εἶναι $V_{AB} = \frac{1}{3}\pi BB'^2 \cdot AB'$, $V_{B\Gamma} = \frac{1}{3}\pi B'\Gamma'(BB'^2+\Gamma\Gamma'^2+BB'\cdot\Gamma\Gamma')$, $V_{A\Gamma} = \frac{1}{3}\pi \Gamma\Gamma'^2 \cdot A\Gamma'$. Ἀλλὰ προφανῶς $V = V_{AB}+V_{B\Gamma}-V_{A\Gamma}$ ἢ $\frac{3V}{\pi} = BB'^2 \cdot AB' + B'\Gamma' \cdot BB'^2 + B'\Gamma' \cdot BB' \cdot \Gamma\Gamma' + B'\Gamma' \cdot \Gamma\Gamma'^2 - \Gamma\Gamma'^2 \cdot A\Gamma' = BB'[BB'(AB'+B'\Gamma') + B'\Gamma' \cdot \Gamma\Gamma'] + \Gamma\Gamma'^2 \cdot B'\Gamma' - \Gamma\Gamma'^2 \cdot A\Gamma' = BB'[2(AB\Gamma')+2(\Gamma\Gamma'B')] + \Gamma\Gamma'^2 \cdot B'\Gamma' - \Gamma\Gamma'^2 \cdot A\Gamma' = BB'[B\Gamma \cdot A\Delta + A\Gamma' \cdot \Gamma\Gamma'] + \Gamma\Gamma'^2 \cdot B'\Gamma' - \Gamma\Gamma'^2 \cdot A\Gamma' = BB' \cdot B\Gamma \cdot A\Delta + \Gamma\Gamma'[BB' \cdot A\Gamma' + \Gamma\Gamma' \cdot B'\Gamma' - \Gamma\Gamma' \cdot A\Gamma'] = BB' \cdot B\Gamma \cdot A\Delta + \Gamma\Gamma'[2(AB\Gamma') + 2(\Gamma\Gamma'B) - 2(\Gamma\Gamma'A)] = BB' \cdot B\Gamma \cdot A\Delta + \Gamma\Gamma' \cdot B\Gamma \cdot A\Delta$. Ὅθεν:

$$V = \frac{\pi}{3}(BB'+\Gamma\Gamma') \cdot B\Gamma \cdot A\Delta.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ

Ὁμὰς Α′.

283. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ, τὸ ὁποῖον εἶναι διαφορὰ τῶν στερεῶν τῶν παραγομένων διὰ περιστροφῆς περὶ τὴν $B\Gamma$ ἑνὸς τριγώνου $AB\Gamma$ καὶ τοῦ τριγώνου τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν αὐτοῦ.

284. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ, τὸ ὁποῖον παράγει ὀρθογώνιον τρίγωνον $AB\Gamma$ στρεφόμενον περὶ τὴν ἐφαπτομένην τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου εἰς τὴν κορυφὴν A τῆς ὀρθῆς γωνίας, συναρτήσει τῶν πλευρῶν τοῦ τριγώνου. Τὸ αὐτὸ πρόβλημα διὰ τυχὸν τρίγωνον $AB\Gamma$.

285. Ἐὰν α καὶ R εἶναι τὸ ἀπόστημα καὶ ἡ ἀκτὶς κανονικοῦ πολυγώνου, τὸ στερεόν, τὸ ὁποῖον προκύπτει διὰ περιστροφῆς αὐτοῦ περὶ τὴν διάμετρον τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου τὴν διερχομένην διὰ μιᾶς κορυφῆς, ἔχει ἐμβαδὸν τῆς ἐπιφανείας του $\pi(R+\alpha)^2$ ἢ $4\pi R\alpha$, καθ' ὅσον τὸ πολύγωνον ἔχει περιττὸν ἢ ἄρτιον ἀριθμὸν πλευρῶν. Ποῖος εἶναι ὁ τύπος, ὁ ὁποῖος δίδει τὸν ὄγκον τοῦ ἐν λόγῳ στερεοῦ;

286. Εἰς τετράπλευρον ΑΒΓΔ εἶναι $Α = 1^L$, $ΑΒ = ΑΔ = 1$, $ΒΓ = ΔΓ = ΒΔ$. Νά εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ, τό ὁποῖον παράγει τό τετράπλευρον στρεφόμενον περί τήν ΑΒ.

287. Δίδεται ἡμικύκλιον διαμέτρου ΑΒ καί Γ τό μέσον τοῦ τόξου ΑΒ. Φέρομεν εἰς Β τήν ἐφαπτομένην καί θέτομεν Δ τό σημεῖον τομῆς της μετά τῆς ΑΓ. Ἔστω Ε,Ζ τά μέσα τῶν $\overset{\frown}{ΑΓ}$, $\overset{\frown}{ΓΒ}$ ἀντιστοίχως. Ἐάν Κ,Λ,Μ οἱ ὄγκοι τῶν στερεῶν τῶν παραγομένων ὑπό τῶν χωρίων ΑΕΓΑ, ΑΓΖΒΑ, ΒΖΓΔΒ στρεφομένων περί τήν ΑΒ, δείξατε ὅτι:

$$\frac{Κ}{1} = \frac{Λ}{3} = \frac{Μ}{5}.$$

288. Τρίγωνον ΑΒΓ στρέφεται περί τήν ΒΓ. Νά εὑρεθῇ ὁ ὄγκος καί ἡ ἐπιφάνεια τῶν στερεῶν, τά ὁποῖα παράγουν:

1) τό τρίγωνον μέ κορυφάς τά σημεῖα ἐπαφῆς τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου·

2) τό ὀρθικόν τρίγωνον τοῦ ΑΒΓ·

3) τό τρίγωνον μέ κορυφάς τούς πόδας τῶν ἐσωτερικῶν διχοτόμων τοῦ ΑΒΓ·

4) τό τρίγωνον μέ κορυφάς τά κέντρα τῶν παρεγγεγραμμένων κύκλων.

289. Δύο σφαῖραι εἶναι ὁμόκεντροι. Θεωροῦμεν τυχόν ἐπίπεδον ἐφαπτόμενον τῆς μικροτέρας. Νά εὑρεθῇ τό ἐμβαδόν τοῦ ἀποτεμνομένου κύκλου ὑπό τῆς μεγαλυτέρας σφαίρας.

290. Εἰς τετράεδρον ΑΒΓΔ εἶναι Κ,Λ τά μέσα τῶν ἀκμῶν ΑΒ, ΓΔ. Δείξατε ὅτι:

$$4ΚΛ^2 = ΒΓ^2 + ΑΔ^2 + ΑΓ^2 + ΒΔ^2 - ΑΒ^2 - ΓΔ^2.$$

291. Νά δειχθῇ ὅτι εἰς πᾶν τετράεδρον ΟΑΒΓ εἶναι $(ΟΑΒΓ) = κ \cdot ΟΑ \cdot ΟΒ \cdot ΟΓ$ ὅπου κ σταθερός παράγων ἐξαρτώμενος ἐκ τῆς τριέδρου γωνίας Ο.ΑΒΓ.

292. Τετραέδρου ΚΑΒΓ αἱ ἕδραι ΑΒΓ, ΚΒΓ εἶναι ἰσόπλευρα τρίγωνα πλευρᾶς α καί σχηματίζουν δίεδρον γωνίαν 60°. Νά εὑρεθῆ ὁ ὄγκος καί ἡ ἐπιφάνεια τοῦ τετραέδρου.

293. Ἡ ἀκμή κύβου εἶναι α. Νά ὑπολογισθῆ ἡ διαφορά τῶν ἐπιφανειῶν καί τῶν ὄγκων τῆς περιγεγραμμένης καί τῆς ἐγγεγραμμένης σφαίρας.

294. Ἕνας κύλινδρος καί μία σφαῖρα ἔχουν ἰσοδυνάμους κυρτάς ἐπιφανείας καί τήν αὐτήν ἀκτῖνα. Νά εὑρεθῆ ὁ λόγος τῆς ἀκτῖνος τῆς σφαίρας πρός τό ὕψος τοῦ κυλίνδρου.

295. Ἕνα τόξον 50° μεγίστου κύκλου μιᾶς σφαίρας ἔχει μῆκος 30 ἑκατοστῶν. Νά ὑπολογισθῆ ὁ ὄγκος τῆς σφαίρας.

296. Τέσσερα ἐπίπεδα εἶναι κάθετα ἐπί μίαν διάμετρον μιᾶς σφαίρας καί χωρίζουν αὐτήν εἰς 5 ἴσα μέρη. Νά ὑπολογισθῆ ὁ ὄγκος ἑκάστου ἐκ τῶν πέντε σφαιρικῶν τμημάτων τά ὁποῖα προκύπτουν.

297. Εἰς ἕνα κύκλον (O,R) φέρομεν τήν χορδήν ΓΔ παράλληλον πρός μίαν διάμετρον ΑΒ. Φέρομεν τάς ἀκτῖνας ΟΓ καί ΟΔ καί στρέφομεν τό σχῆμα περί τήν διάμετρον ΑΒ. Νά ὑπολογισθῆ τό μῆκος τῆς χορδῆς ΓΔ, ἄν γνωρίζωμεν ὅτι ὁ ὄγκος, τόν ὁποῖον παράγει τό κυκλικόν τμῆμα ΓΜΔ (Μ σημεῖον τοῦ $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$), εἶναι ἴσος μέ τόν ὄγκον, τόν ὁποῖον παράγει τό τρίγωνον ΓΟΔ.

298. Θεωροῦμεν ὀρθόν κῶνον περιγεγραμμένον περί δοθεῖσαν σφαῖραν (O,R). Τό ἐμβαδόν τοῦ κύκλου ἐπαφῆς ἰσοῦται μέ τήν διαφοράν τῶν ἐμβαδῶν τῶν ὑπό τούτου ὁριζομένων ἐπί τῆς σφαίρας μονοβασικῶν σφαιρικῶν ζωνῶν. Νά εὑρεθῆ ἡ ἀκτίς τῆς βάσεως καί τό ὕψος τοῦ κώνου.

299. Ἡ σφαῖρα (O,R) εἶναι περιγεγραμμένη, ἡ δέ (O′,R′) ἐγγεγραμμένη εἰς τόν κόλουρον κῶνον ΑΒΓΔ. Ἐάν ὁ λόγος τῶν ἐπιφανειῶν τῶν δύο σφαιρῶν εἶναι 6, νά εὑρεθῆ ὁ λόγος τῶν ἀκτίνων τῶν βάσεων τοῦ κολούρου κώνου.

300. Ἐξ ἑκάστης κορυφῆς κύβου ἀκμῆς α ἀποκόπτομεν τετράεδρον δι᾽ ἐπιπέδου διερχομένου διά τῶν μέσων τῶν τριῶν ἀκμῶν τῆς ἀντιστοίχου τριέδρου. Νά εὑρεθῆ ὁ ὄγκος τοῦ ἐναπομένοντος στερεοῦ.

301. Ἀποδείξατε ὅτι τά τέσσερα τετράεδρα μέ κορυφήν τό κέντρον βάρους G τετραέδρου καί βάσεις τάς ἕδρας αὐτοῦ εἶναι ἰσοδύναμα.

302. Ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου αἱ διαστάσεις εἶναι α,β,γ. Νά εὑρεθῆ ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ (ὀκταέδρου) τοῦ ἔχοντος κορυφάς τά κέντρα τῶν ἑδρῶν τοῦ παραλληλεπιπέδου.

303. Νά δειχθῆ ὅτι ὁ ὄγκος κολοβοῦ πρίσματος μέ βάσιν παραλληλόγραμμον ἰσοῦται μέ τό γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς καθέτου τομῆς ἐπί τό ἡμιάθροισμα δύο ἀπέναντι ἀκμῶν του.

304. Κανονικῆς ἑξαγωνικῆς πυραμίδος ἡ πλευρά τῆς βάσεως εἶναι α καί μία παράπλευρος ἀκμή εἶναι β. Νά ὑπολογισθῆ ὁ ὄγκος καί τό ἐμβαδόν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας.

305. Νά ὑπολογισθῆ ὁ ὄγκος κανονικῆς ἑξαγωνικῆς πυραμίδος ὕψους υ, τῆς ὁποίας αἱ παράπλευροι ἀκμαί εἶναι διπλάσιοι τῆς πλευρᾶς τῆς βάσεως.

306. Δίδεται κύβος ΑΒΓΔΑ'Β'Γ'Δ' ἀκμῆς α. Θεωροῦμεν τάς δύο πυραμίδας, αἱ ὁποῖαι ἔχουν βάσιν τήν ἕδραν ΑΒΓΔ καί κορυφάς τάς κορυφάς Α',Γ' τῆς ἀπέναντι ἕδρας. Νά ὑπολογισθῆ ὁ ὄγκος τοῦ κοινοῦ μέρους τῶν δύο πυραμίδων.

307. Κολοβόν τριγωνικόν πρίσμα στηρίζεται ἐπί μιᾶς παραπλεύρου ἕδρας αὐτοῦ ΑΒΓΔ, ἡ ὁποία εἶναι ὀρθογώνιον διαστάσεων α,β. Αἱ ἄλλαι παράπλευροι ἕδραι αὐτοῦ, ὡς καί αἱ βάσεις, εἶναι ἰσοκεκλιμέναι πρός τήν ΑΒΓΔ. Νά ὑπολογισθῆ ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ, ἐάν εἶναι ἀκόμη γνωστόν τό μῆκος ΒΕ μιᾶς πλευρᾶς τῆς μιᾶς βάσεως.

308. Δίδεται ρόμβος ΑΒΓΔ μέ διαγωνίους ΑΓ=2α, ΒΔ=α. Ἐπί τῶν καθέτων εἰς Α,Β,Γ ἐπί τό ἐπίπεδον τοῦ ρόμβου λαμβάνομεν πρός τό αὐτό μέρος ΑΑ'=3α, ΒΒ'=4α, ΓΓ'=α. Νά ὑπολογισθῆ ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ ΑΒΓΔΑ'Β'Γ'.

309. Τὰ μέσα τῶν ἀκμῶν τετραέδρου εἶναι κορυφαὶ ὀκταέδρου, τοῦ ὁποίου ὁ ὄγκος εἶναι τὸ ἥμισυ τοῦ ὄγκου τοῦ τετραέδρου.

310. Δίδονται δύο ὀρθογώνια ΑΒΓΔ, Α'Β'Γ'Δ' μὲ τὰς πλευρὰς παραλλήλους ἀντιστοίχως. Ἐὰν ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία ἑνώνει τὰ κέντρα αὐτῶν εἶναι συγχρόνως κάθετος εἰς τὰ ἐπίπεδά των, ὑπολογίσατε τὸν ὄγκον τοῦ στερεοῦ ΑΒΓΔΑ'Β'Γ'Δ' συναρτήσει τῶν διαστάσεων τῶν ὀρθογωνίων α,β καὶ α',β' καὶ τοῦ ὕψους υ τῶν δύο ἐπιπέδων αὐτῶν.

(Ἀποτέλεσμα: $V=\frac{υ}{6}\left[β(2α+α')+β'(2α'+α)\right]$).

311. Δίδεται τρισορθογώνιος στερεὰ γωνία Οxyz. Ἔστω Ι ἓν σημεῖον εἰς τὸ ἐσωτερικὸν αὐτῆς, μὲ ἀποστάσεις α,β,γ ἀπὸ τὰς ἕδρας Oyz, Ozx, Oxy ἀντιστοίχως. Ἐπίπεδον διὰ τοῦ Ι τέμνει τὴν Ox εἰς Α, τὴν Oy εἰς Β, τὴν Oz εἰς Γ. Δείξατε ὅτι:

$$\frac{α}{ΟΑ}+\frac{β}{ΟΒ}+\frac{γ}{ΟΓ}=1$$

312. Τετραέδρου αἱ τέσσαρες ἕδραι εἶναι ἰσοδύναμοι. Δείξατε ὅτι αἱ εὐθεῖαι αἱ ἑνοῦσαι μίαν κορυφὴν μὲ τὸ κέντρον βάρους τῆς ἔναντι ἕδρας εἶναι ἰσοκεκλιμένη πρὸς τὰς ἕδρας τῆς ἀντιστοίχου τριέδρου.

313. Ἐὰν εὐθεῖα διὰ τῆς κορυφῆς Α τετραέδρου ΑΒΓΔ σχηματίζῃ ἴσας γωνίας πρὸς τὰς ἕδρας τῆς τριέδρου Α.ΒΓΔ καὶ τέμνῃ τὴν ἀπέναντι ἕδραν εἰς Α', θὰ εἶναι:

$$\frac{(Α'ΒΓ)}{(ΑΒΓ)}=\frac{(Α'ΓΔ)}{(ΑΓΔ)}=\frac{(Α'ΔΒ)}{(ΑΔΒ)}.$$

314. Ἐὰν δύο τετράεδρα ἔχουν κοινὴν μίαν ἀκμὴν καὶ τὴν δίεδρον αὐτῆς, ὁ λόγος τῶν ὄγκων των εἶναι ἴσος πρὸς τὸν λόγον τῶν γινομένων τῶν ἑδρῶν τῶν περιεχουσῶν τὴν δίεδρον.

315. Νὰ εὑρεθοῦν αἱ ἀκτῖνες R καὶ R' τῶν βάσεων κολούρου κώνου, ὅταν εἶναι υ τὸ ὕψος, λ ἡ πλευρὰ καὶ Ε τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας.

316. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ ὄγκος κώνου ἰσοῦται μὲ τὸ ἐμβαδὸν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας του ἐπὶ τὸ $\frac{1}{3}$ τῆς ἀποστάσεως τοῦ κέντρου τῆς βάσεως ἀπὸ τὴν πλευράν.

317. Ἐὰν εἰς κόλουρον κῶνον εἶναι $\lambda=\rho_1+\rho_2$ καὶ $\upsilon=\sqrt{\rho_1\rho_2}$, ἔνθα ρ_1, ρ_2 αἱ ἀκτῖνες τῶν δύο βάσεων, τότε ὁ ὄγκος θὰ ἰσοῦται μὲ τὸ γινόμενον τοῦ $\frac{1}{6}$ τοῦ ὕψους ἐπὶ τὴν ὁλικὴν ἐπιφάνειαν.

318. Δίδεται ἡμισφαίριον ἀκτῖνος R. Μὲ βάσιν τὴν βάσιν τοῦ ἡμισφαιρίου κατασκευάζομεν κῶνον ἰσοδύναμον πρὸς τὸ ἡμισφαίριον. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἀκτὶς τοῦ κύκλου, κατὰ τὸν ὁποῖον ὁ κῶνος τέμνει τὸ ἡμισφαίριον συναρτήσει τοῦ R.

319. Ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου αἱ διαστάσεις εἶναι α, β, γ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τῆς περιγεγραμμένης σφαίρας καὶ τὰ ἐμβαδὰ τῶν 6 σφαιρικῶν ζωνῶν, αἱ ὁποῖαι ἔχουν μόνον μίαν βάσιν ἐπὶ τῶν ἑδρῶν τοῦ παραλληλεπιπέδου

320. Ποία ἡ σχέσις ἡ ὁποία πρέπει νὰ ὑφίσταται μεταξὺ τῆς ἀκτῖνος τῆς βάσεως καὶ τοῦ ὕψους ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου, ἵνα οὗτος εἶναι περιγεγραμμένος περὶ σφαῖραν; Δείξατε ὅτι ἡ παράπλευρος ἐπιφάνεια τοῦ κώνου εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὴν ἐπιφάνειαν σφαίρας ἐχούσης ἀκτῖνα τὴν πλευράν.

321. Παρατηρητὴς εὑρίσκεται εἰς ὕψος h ἀπὸ τὴν ἐπιφάνειαν τῆς γῆς. Ποία ἡ ἔκτασις τῆς ἐπιφανείας τὴν ὁποίαν δύναται νὰ ἴδῃ;

322. Δίδονται δύο κανονικαὶ πολυγωνικαὶ γραμμαὶ μὲ τὰς πλευρὰς παραλλήλους, ἐκ τῶν ὁποίων ἡ μία ἐγγεγραμμένη καὶ ἡ ἄλλη περιγεγραμμένη εἰς τὴν αὐτὴν ἡμιπεριφέρειαν. Δείξατε ὅτι ἡ σφαιρικὴ ἐπιφάνεια, ἡ ὁποία παράγεται διὰ περιστροφῆς περὶ τὴν διάμετρον, εἶναι μέση ἀνάλογος τῶν ἐπιφανειῶν τῶν παραγομένων ὑπὸ τῶν πολυγωνικῶν γραμμῶν.

323. Ὑπολογίσατε τὴν ἀκτῖνα τῆς βάσεως καὶ τὸ ὕψος ἑνὸς κώνου περιγεγραμμένου περὶ σφαῖραν (O,R), γνωρίζοντες ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τοῦ κύκλου ἐπαφῆς εἶναι ἴσον πρὸς τὴν διαφορὰν τῶν δύο σφαιρικῶν τμημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα χωρίζει ὁ κύκλος οὗτος τὴν σφαῖραν.

324. Ἰσόπλευρον τρίγωνον καὶ τετράγωνον εἶναι περιγεγραμμένα περὶ κύκλον (O,R). Ἡ βάσις τοῦ ἰσοπλεύρου τριγώνου κεῖται ἐπὶ τῆς μιᾶς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου. Τὸ σχῆμα περιστρέφεται περὶ τὸν ἄξονα συμμετρίας του. Σχηματίζεται ἕνας κύλινδρος, ἕνας κῶνος καὶ μία σφαῖρα. Δείξατε ὅτι τὸ ἐμβαδὸν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ κυλίνδρου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῆς ὁλικῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου καὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας. Τὸ αὐτὸ διὰ τοὺς ὄγκους.

325. Σφαῖρα ἀκτῖνος R εἶναι ἐγγεγραμμένη ἐντὸς κώνου ἐκ περιστροφῆς ὕψους υ καὶ ἀκτῖνος βάσεως ρ. Δείξατε ὅτι:

$$\frac{1}{\rho^2}=\frac{1}{R^2}-\frac{2}{R\upsilon}.$$

326. Δίδονται δύο τεμνόμεναι σφαῖραι (O,R) καὶ (O′,R′). Ἐὰν d ἡ ἀπόστασις τῶν κέντρων, νὰ εὑρεθῇ ὁ ὄγκος τοῦ κοινοῦ μέρους.

327. Ὑπολογίσατε τὸν ὄγκον τὸν περιεχόμενον μεταξὺ δύο ἐξωτερικῶς ἐφαπτομένων σφαιρῶν (O,R) καὶ (O′,R′) καὶ τοῦ περιγεγραμμένου κώνου εἰς αὐτάς.

328. Νὰ εὑρεθῇ ἡ συνθήκη μεταξὺ τῶν ἀκτίνων τῶν βάσεων κολούρου κώνου καὶ τοῦ ὕψους αὐτοῦ, ἵνα ἐντὸς τούτου ἐγγράφεται σφαῖρα.

329. Κύλινδρος εἶναι περιγεγραμμένος περὶ σφαῖραν. Τέμνομεν τὴν σφαῖραν καὶ τὸν κύλινδρον διὰ δύο ἐπιπέδων καθέτων ἐπὶ τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου. Δείξατε ὅτι αἱ ἐπιφάνειαι τῆς σφαιρικῆς ζώνης καὶ τοῦ κυλίνδρου αἱ περιεχόμεναι μεταξὺ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων εἶναι ἰσοδύναμοι.

330. Τετράγωνον ΑΒΓΔ στρέφεται περὶ τὴν ΑΒ. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι οἱ ὄγκοι τῶν στερεῶν τῶν παραγομένων ὑπὸ τοῦ τριγώνου ΑΒΔ, τοῦ κυκλικοῦ τμήματος τοῦ ὁριζομένου ὑπὸ τῆς ΒΔ καὶ τοῦ τόξου ΔΒ τοῦ τεταρτοκυκλίου τοῦ ἔχοντος κέντρον τὸ Α καὶ ἀκτῖνα ΑΒ καὶ ὑπὸ τοῦ ὑπολοίπου τμήματος τοῦ τετραγώνου εἶναι ἴσοι.

331. Νά ἀποδειχθῆ ὅτι ὁ ὄγκος V σφαιρικοῦ δακτυλίου δίδεται ἀπό τόν τύπον

$$V = B \cdot \frac{2\upsilon}{3},$$

ὅπου B τό ἐμβαδόν τῆς μέσης τομῆς αὐτοῦ.

332. Δίδεται περιφέρεια O καί σημεῖον A ἐκτός αὐτῆς. Φέρομεν τάς ἐφαπτομένας AB καί $A\Gamma$. Ἔστω Δ ἡ προβολή τοῦ Γ ἐπί τήν BO. Νά δειχθῆ ὅτι, ἐάν στραφῆ τό σχῆμα περί τήν ΔB, ὁ παραγόμενος ὄγκος ὑπό τοῦ μικτογράμμου $BA\Gamma$ εἶναι ἴσος μέ τόν ὄγκον τόν παραγόμενον ὑπό τοῦ τριγώνου $AB\Delta$.

333. Τρίγωνον στρέφεται περί τήν εὐθεῖαν τήν ἑνοῦσαν τά μέσα δύο πλευρῶν αὐτοῦ. Νά εὑρεθῆ ὁ λόγος τῶν ὄγκων τῶν στερεῶν τῶν παραγομένων ὑπό τῶν δύο μερῶν αὐτοῦ.

334. Νά εὑρεθῆ ὁ ὄγκος τοῦ στερεοῦ τοῦ παραγομένου κατά τήν περιστροφήν κανονικοῦ ἑξαγώνου περί μίαν πλευράν αὐτοῦ. Τό αὐτό διά κανονικόν πεντάγωνον καί δεκάγωνον.

335. Κανονικόν ἡμιεξάγωνον πλευρᾶς α στρέφεται περί εὐθεῖαν διερχομένην διά μιᾶς κορυφῆς του καί κάθετον πρός τήν διαγώνιον τήν διερχομένην διά τῆς κορυφῆς αὐτῆς. Νά ὑπολογισθῆ ὁ ὄγκος τοῦ παραγομένου στερεοῦ.

336. Νά εὑρεθῆ ὁ ὄγκος τοῦ κανονικοῦ εἰκοσαέδρου συναρτήσει τῆς ἀκμῆς του.

337. Θεωροῦμεν ὀρθόν κῶνον (K) καί τήν περιγεγραμμένην περί αὐτόν σφαῖραν (O). Ἔστωσαν ρ, υ καί λ ἡ ἀκτίς βάσεως, τό ὕψος καί ἡ πλευρά τοῦ κώνου καί R ἡ ἀκτίς τῆς σφαίρας. Νά δειχθῆ ὅτι:

$$R = \frac{\rho\upsilon}{\rho+\lambda} = \frac{\rho\sqrt{\lambda-\rho}}{\sqrt{\lambda+\rho}}.$$

338. Ὀρθός κόλουρος κῶνος ἔχει ἀκτῖνας βάσεων ρ, ρ', ὕψος υ καί πλευράν λ. Δείξατε ὅτι 1) ἡ ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα ὑπάρχη ἐγγεγραμμένη σφαῖρα, εἶναι $\upsilon^2 = 4\rho\rho'$ καί 2) τό ἐμβαδόν τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας δίδεται ἀπό τόν τύπον $E = \pi\lambda^2$.

Ὁμὰς Β΄.

339. Τρίγωνον στρέφεται διαδοχικῶς περὶ ἑκάστην πλευρὰν του. Ἐὰν οἱ παραγόμενοι ὄγκοι εἶναι $\sqrt{A}, \sqrt{B}, \sqrt{\Gamma}$, νὰ εὑρεθοῦν αἱ πλευραὶ αὐτοῦ.

340. Ὀρθὸς κυκλικὸς κύλινδρος εἶναι περιγεγραμμένος περὶ σφαῖραν (O,R). Θεωροῦμεν κῶνον μὲ κορυφὴν O καὶ βάσιν τὴν βάσιν τοῦ κυλίνδρου.

1) Ἐὰν τμήσωμεν τὰ τρία στερεὰ δι᾽ ἐπιπέδου καθέτου πρὸς τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς τοῦ κυλίνδρου ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν κύκλων τομῆς κώνου καὶ σφαίρας.

2) Ἐὰν τμήσωμεν τὰ τρία στερεὰ διὰ δύο καθέτων ἐπιπέδων ἐπὶ τὸν ἄξονα τοῦ κυλίνδρου, ὁ ὄγκος τοῦ ἀποκοπτομένου μέρους ἀπὸ τὸν κύλινδρον ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν ἀποκοπτομένων μερῶν ἀπὸ τὸν κῶνον καὶ τὴν σφαῖραν.

341. Δύο κύκλοι $(O,R),(O',R')$ ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς εἰς A. Ἔστω BB' ἡ κοινὴ ἐξωτερικὴ ἐφαπτομένη αὐτῶν. Τὸ σχῆμα στρέφεται περὶ τὴν διάκεντρον OO'. Σχηματίζονται δύο σφαῖραι ὑπὸ τῶν (O,R) καὶ (O',R') καὶ εἷς κόλουρος κῶνος ὑπὸ τῆς BB'. Ἔστω (K,ρ) ἡ σφαῖρα, ἥτις περιέχει τὰς βάσεις τοῦ κολούρου κώνου (περιγεγραμμένη). Ἀποδείξατε ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ δακτυλίου τοῦ παραγομένου ὑπὸ τῆς BB' διὰ τὴν σφαῖραν (K) εἶναι ἰσοδύναμος πρὸς τὸ διπλάσιον τοῦ ὄγκου τοῦ μὴ κυρτοῦ στερεοῦ τοῦ παραγομένου ἀπὸ τὰς σφαίρας (O,R) καὶ (O',R') καὶ τῆς κυρτῆς ἐπιφανείας τοῦ κολούρου κώνου.

342. Ἐὰν ἀπὸ τὰς κορυφὰς τετραέδρου φέρωμεν ἐπίπεδα παράλληλα πρὸς τὰς ἀπέναντι ἕδρας, σχηματίζεται νέον τετράεδρον 27 φορὰς μεγαλύτερον τοῦ ἀρχικοῦ.

343. Νὰ δειχθῇ ὅτι πᾶν ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῶν μέσων δύο ἀπέναντι ἀκμῶν τετραέδρου διαιρεῖ τοῦτο εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη.

344. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ ὄγκος V ἑνὸς σφαιρικοῦ τμήματος δίδεται ὑπό τοῦ τύπου:

$$V=\frac{υ}{4}\cdot(β+β'+4β''),$$

ὅπου υ τό ὕψος αὐτοῦ καί β, β', β'' τά ἐμβαδά τῶν βάσεων αὐτοῦ καί τῆς μέσης τομῆς.

345. Ἐπί τῶν τριῶν παραπλεύρων ἑδρῶν ΟΑΒ, ΟΒΓ, ΟΓΑ τῆς τριγωνικῆς πυραμίδος ΟΑΒΓ ὡς βάσεων, κατασκευάζομεν τρία τυχόντα πρίσματα. Ἔστω Κ τό σημεῖον τομῆς τῶν ἄλλων βάσεων αὐτῶν. Νά δειχθῇ ὅτι τό πρῖσμα βάσεως ΑΒΓ καί παραπλεύρων ἀκμῶν ἴσων καί παραλλήλων πρός τήν ΟΚ εἶναι ἰσοδύναμον πρός τό ἄθροισμα τῶν τριῶν πρισμάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΔΕΚΑΤΟΝ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

ΒΑΣΙΚΟΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΤΟΠΟΙ

1. Ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων M τοῦ χώρου πού ἀπέχουν δοθεῖσαν ἀπόστασιν R ἀπό δοθέν σημεῖον O, εἶναι ἐπιφάνεια σφαίρας κέντρου O καί ἀκτῖνος R.

Συμβολισμός : $(O,R)=\{M/OM=R\}$.

2. Ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων M τοῦ χώρου πού ἀπέχουν ἴσον ἀπό τά ἄκρα ἑνός εὐθ. τμήματος AB εἶναι τό μεσοκάθετον ἐπίπεδον εἰς τό τμῆμα AB.

3. Ὁ γεωμ. τόπος τῶν ἐσωτερικῶν σημείων διέδρου, τά ὁποῖα ἀπέχουν ἴσον ἀπό τάς ἕδρας αὐτῆς, εἶναι τό διχοτομοῦν ἐπίπεδον τήν δίεδρον.

4. Ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων M, ἀπό τά ὁποῖα φαίνεται ὑπό ὀρθήν γωνίαν δοθέν εὐθ. τμῆμα AB, εἶναι ἡ ἐπιφάνεια σφαίρας διαμέτρου AB.

5. Δοθέντων δύο παραλλήλων ἐπιπέδων Π, P λαμβάνομεν $A\in\Pi$ καί $B\in P$. Ὁ γεωμ. τόπος $G=\{M/\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}}=\frac{\mu}{\nu}\ \wedge\ M\in$ εὐθείαν $AB\}$ ταυτίζεται πρός ἕν ἐπίπεδον παράλληλον πρός τά προηγούμενα. Ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων M ὥστε $\frac{AM}{MB}=\frac{\mu}{\nu}$ ἀποτελεῖται ἀπό δύο ἐπίπεδα. $(\mu,\nu\in R^{+})$.

6. Δοθέντων τῶν σημείων A, B νά εὑρεθῇ τό σύνολον [1] $G=\{M/AM^2+BM^2=\kappa^2\}$.

Μέρος (α).[2] $\forall M\in G\Rightarrow AM^2+BM^2=\kappa^2$ (1). Εἰς τό $\overset{\triangle}{AMB}$ τό πρῶτον

---

(1) Πολλάκις ἀντί τοῦ ὅρου γεωμ. τόπος, θά χρησιμοποιῶμεν τήν λέξιν σύνολον.

(2) Μέθοδοι διά τήν ἀνεύρεσιν ἑνός γεωμ. τόπου εἰς τεῦχος 2.

θεώρημα τῶν διαμέσων: $AM^2+BM^2=2OM^2+\frac{AB^2}{2}$ (2), ὅπου O τό μέσον τοῦ τμήματος AB. (1),(2) $\Longrightarrow \kappa^2=2OM^2+\frac{AB^2}{2} \Longrightarrow OM=\frac{1}{2}\sqrt{2\kappa^2-AB^2}$. Ἐφ' ὅσον λοιπόν $2\kappa^2-AB^2>0$ θά εἶναι καί $M\in(O,\frac{1}{2}\sqrt{2\kappa^2-AB^2}) \Longrightarrow$ $\Longrightarrow G\subseteq(O,\frac{1}{2}\sqrt{2\kappa^2-AB^2})$ (3).

Μέρος (β). $\forall N\in(O,\frac{1}{2}\sqrt{2\kappa^2-AB^2}) \Longrightarrow ON=\frac{1}{2}\sqrt{2\kappa^2-AB^2}$ (4). Τό πρῶτον θεώρημα τῶν διαμέσων εἰς τό $\overset{\triangle}{ANB}$: $AN^2+BN^2=2ON^2+\frac{AB^2}{2}$ (5).
(4),(5) $\Longrightarrow AN^2+BN^2=2\left[\frac{1}{2}\sqrt{2\kappa^2-AB^2}\right]^2+\frac{AB^2}{2}=\kappa^2 \Longrightarrow N\in G \Longrightarrow (O,\frac{1}{2}\sqrt{2\kappa^2-AB^2})\supseteq G$ (6).
(3),(6) $\Longrightarrow G=(O,\frac{1}{2}\sqrt{2\kappa^2-AB^2})$.

Ἄρα, λοιπόν, ὁ γεωμ. τόπος τῶν σημείων M τοῦ χώρου, τῶν ὁποίων τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων ἀπό δύο δοθέντα σημεῖα A, B εἶναι ἴσον πρός κ^2, εἶναι σφαῖρα μέ κέντρον τό μέσον O τοῦ τμήματος AB καί ἀκτῖνα ἴσην πρός $\frac{1}{2}\sqrt{2\kappa^2-AB^2}$.

7. Δοθέντων τῶν σημείων A, B, νά εὑρεθῇ τό σύνολον $G=\{M/AM^2-BM^2=\kappa^2\}$.

Μέρος (α). $\forall M\in G \Longrightarrow AM^2-BM^2=\kappa^2$ (1). Τό δεύτερον θεώρημα τῶν διαμέσων διά τό $\overset{\triangle}{AMB}$: $AM^2-BM^2=2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{OH}$ (2), ὅπου O τό μέσον τοῦ τμήματος AB καί H ἡ προβολή τοῦ M ἐπί τήν AB.
(1),(2) $\Longrightarrow 2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{OH}=\kappa^2 \Longrightarrow \overline{OH}=\frac{\kappa^2}{2\overline{AB}}$. Ἄρα, λοιπόν, ἄν Π εἶναι τό κάθετον ἐπίπεδον ἐπί τήν AB εἰς H, εἶναι $M\in\Pi$ ἤτοι $G\subseteq\Pi$ (3).

Μέρος (β). $\forall N\in\Pi \Longrightarrow HN\perp AB$. Τό δεύτερον θεώρημα τῆς διαμέσου διά τό $\overset{\triangle}{ANB}$: $AN^2-BN^2=2\cdot\overline{AB}\cdot\overline{OH}$ ἤ $AN^2-BN^2=2\overline{AB}\frac{\kappa^2}{2\overline{AB}}=\kappa^2 \Longrightarrow$ $\Longrightarrow N\in G \Longrightarrow \Pi\subseteq G$ (4). (3),(4) $\Longrightarrow G=\Pi$.

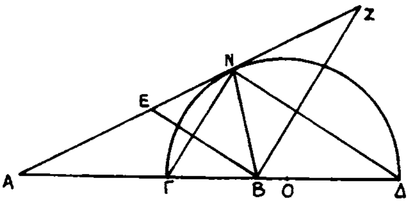
8. Δοθέντων τῶν σημείων A, B, νά εὑρεθῇ τό σύνολον $G=\{M/\frac{AM}{BM}=\frac{\mu}{\nu}\}$.

Μέρος (α). $\forall M\in G \Longrightarrow \frac{AM}{BM}=\frac{\mu}{\nu}$ (1). Χωρίζομεν τό εὐθ. τμῆμα AB μέ τά σημεῖα Γ, Δ (ἐσωτερικῶς καί ἐξωτερικῶς) εἰς λόγον $\frac{\mu}{\nu}$. Ἤτοι $\frac{\overline{A\Gamma}}{\overline{\Gamma B}}=\frac{\overline{A\Delta}}{\overline{\Delta B}}=\frac{\mu}{\nu}$ (2). Τά σημεῖα Γ, Δ, ὡς γνωστόν εἶναι τελείως καθωρισμένα.

Ἐκ τῶν (1),(2) διαπιστώνομεν ὅτι ἡ ΜΓ εἶναι διχοτόμος τῆς $\widehat{AMB}$, ἡ δέ ΜΔ διχοτόμος τῆς παραπληρωματικῆς τῆς $\widehat{AMB}$. Ἄρα $\widehat{\Gamma M\Delta}=1^L$. Ἤτοι τό M κεῖται ἐπί σφαίρας διαμέτρου ΓΔ. Ἐάν εἶναι δέ O τό μέσον τοῦ τμήματος ΓΔ[1], θά ἔχωμεν $M\in(O,\frac{\Gamma\Delta}{2})$ $\Longrightarrow G\subseteq(O,\frac{\Gamma\Delta}{2})$ (3).

---

(1) Ὡς γνωστόν (τεῦχος 2) τό τμῆμα ΓΔ ἰσοῦται πρός $\frac{2\mu\nu\cdot AB}{\mu^2-\nu^2}$ $(\mu>\nu)$.



Μέρος (β). Ἔστω Ν τυχὸν σημεῖον τῆς σφαίρας $(O, \frac{ΓΔ}{2})$. Τὸ ἐπίπεδον ΑΝΒ τέμνει τὴν σφαῖραν κατὰ μέγιστον κύκλον ΓΝΔ ($\widehat{ΓΝΔ} = 1^{L}$). Φέρομεν τὰς ΒΕ, ΒΖ παραλλήλους ἀντιστοίχως πρὸς τὰς ΔΝ, ΓΝ. Ἔχομεν:

$$\frac{AN}{NZ} = \frac{AΓ}{ΓB} = \frac{\mu}{\nu} \ (4) \qquad \frac{AN}{NE} = \frac{AΔ}{ΔB} = \frac{\mu}{\nu} \ (5) \implies NE = NZ,$$

ἤτοι διὰ τὸ ὀρθογώνιον τρίγωνον ΕΒΖ τὸ Ν εἶναι τὸ μέσον τῆς ὑποτεινούσης. Ἄρα ΝΒ=ΝΖ καὶ ἀπὸ τὴν (4) ἔχομεν $\frac{AN}{NB} = \frac{\mu}{\nu}$. Ὅθεν $N \in G \implies (O, \frac{ΓΔ}{2}) \subseteq G$ (6).

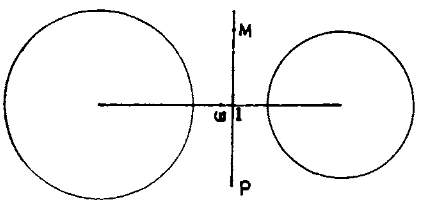
$(3),(6) \implies G = (O, \frac{ΓΔ}{2})$

Ἡ σφαῖρα $(O, \frac{ΓΔ}{2})$ ὀνομάζεται **Ἀπολλώνειος σφαῖρα.**

9. Δοθέντων δύο μὴ ὁμοκέντρων σφαιρῶν (O,R) καὶ (O',R'), νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον G τῶν σημείων, Μ ὥστε $G = \{M / \mathfrak{D}_O(M) = \mathfrak{D}_{O'}(M)\}$.

Μέρος (α). $\forall M \in G \implies OM^2 - R^2 = O'M^2 - R'^2 \implies OM^2 - O'M^2 = R^2 - R'^2$ (1). Εἰς τὸ τρίγωνον ΟΜΟ΄ τὸ δεύτερον θεώρημα τῶν διαμέσων $\overline{OM}^2 - \overline{O'M}^2 = 2\overline{OO'} \cdot \overline{\omega I}$ (2), ὅπου ω τὸ μέσον τοῦ τμήματος ΟΟ΄ καὶ Ι ἡ προβολὴ τοῦ Μ ἐπὶ τὴν ΟΟ΄.

$(1),(2) \implies 2\overline{OO'} \cdot \overline{\omega I} = R^2 - R'^2 \implies \overline{\omega I} = \frac{R^2 - R'^2}{2\overline{OO'}}$ (3).



Τὸ σημεῖον Μ, λοιπόν, προβάλλεται ἐπὶ τῆς ΟΟ΄ εἰς τὸ σταθερὸν σημεῖον Ι. Ἄν, λοιπόν, Ρ τὸ κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΟ΄ ἐπίπεδον εἰς Ι, θὰ εἶναι $M \in P \implies G \subseteq P$ (4).

Μέρος (β). $\forall N \in P$ θὰ εἶναι $NI \perp OO'$. Εἰς τὸ τρίγωνον $\overset{\triangle}{ONO'}$ τὸ δεύτερον θεώρημα τῶν διαμέσων θὰ μᾶς δώσῃ $ON^2 - O'N^2 = 2\overline{OO'} \cdot \overline{\omega I}$ (5).

$(3),(5) \implies ON^2 - O'N^2 = R^2 - R'^2 \implies \mathfrak{D}_O(N) = \mathfrak{D}_{O'}(N) \implies N \in G \implies P \subseteq G$ (6).

$(4),(6) \implies G = P$.

Τὸ ἐπίπεδον Ρ θὰ ὀνομάζεται **ριζικὸν ἐπίπεδον** τῶν δύο σφαιρῶν. (Ἰδὲ τεῦχος 1, 4-3).

10. Δοθέντων τριῶν σφαιρῶν $(O_1,R_1), (O_2,R_2), (O_3,R_3)$, τῶν ὁποίων τὰ κέντρα δὲν κεῖνται ἐπ' εὐθείας, νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον G τῶν σημείων Μ, ὥστε:

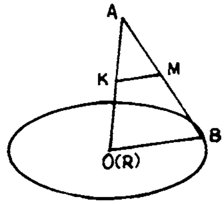
$$G = \{M / \mathfrak{D}_{O_1}(M) = \mathfrak{D}_{O_2}(M) = \mathfrak{D}_{O_3}(M)\}.$$

Εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι τὰ ριζικὰ ἐπίπεδα τῶν τριῶν σφαιρῶν ἀποτελοῦν δέσμην (ἔχουν δηλαδὴ κοινὴν εὐθεῖαν). Ὁ ἄξων τῆς δέσμης ἔχει ἴσας δυνάμεις πρός τάς τρεῖς σφαίρας καί ἀντιστρόφως, ὀνομάζεται δέ **ριζικός ἄξων** τῶν τριῶν σφαιρῶν.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμάς Α'.

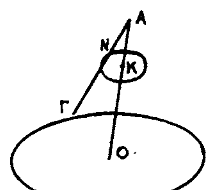
346. Δίδεται περιφέρεια (O,R) καί σημεῖον A τοῦ χώρου. Θεωροῦμεν τυχόν σημεῖον B τῆς (O). Ζητεῖται νά προσδιορισθῆ τό σύνολον G τῶν σημείων M τοῦ εὐθ. τμήματος AB ἀπό τήν σχέσιν $G=\{M/ \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}=\frac{\mu}{\nu},\ \mu,\nu\in R^+,\ \frac{\mu}{\nu}<1\}$.



Μέρος (α). $\forall M\in G \Longrightarrow \frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}=\frac{\mu}{\nu}$ (1). Φέρομεν τήν $MK \| BO$. Θά εἶναι $\frac{\overline{AK}}{\overline{AO}}=\frac{\mu}{\nu}$, ἤτοι τό σημεῖον K ὁρίζεται ἐπί τῆς AO.

$\widehat{MAK} \sim \widehat{BAO} \Longrightarrow \frac{KM}{R}=\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}=\frac{\mu}{\nu} \Longrightarrow KM=R\frac{\mu}{\nu}$ (2).

Ἀλλά τό σημεῖον M εὑρίσκεται καί ἐπί τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ἐκ τοῦ K παραλλήλου πρός τό ἐπίπεδον τοῦ κύκλου. Ἄρα τό M εὑρίσκεται ἐπί περιφερείας κύκλου $(K,R\frac{\mu}{\nu})$ καί τοῦ ὁποίου τό ἐπίπεδον εἶναι παράλληλον πρός τό ἐπίπεδον τοῦ (O,R), ἤτοι $G\subseteq(K,R\frac{\mu}{\nu})$ (3).

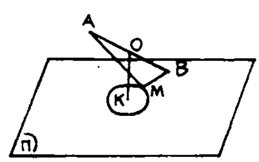


Μέρος (β). $\forall N\in(K,R\frac{\mu}{\nu})$ ἡ AN τέμνει τό ἐπίπεδον τοῦ (O,R) εἰς Γ. Τά παράλληλα ἐπίπεδα τῶν $(K,R\frac{\mu}{\nu})$, (O,R) τέμνονται ὑπό τοῦ $AO\Gamma$ κατά τάς εὐθείας $KN, O\Gamma$. Ἄρα $KN \| O\Gamma \Longrightarrow \widehat{NAK} \sim \widehat{\Gamma AO} \Longrightarrow \frac{KN}{O\Gamma}=\frac{AK}{AO}=\frac{\mu}{\nu} \Longrightarrow$ $\Longrightarrow \frac{\frac{\mu}{\nu}R}{O\Gamma}=\frac{\mu}{\nu} \Longrightarrow O\Gamma=R$ ἤτοι $\Gamma\in(O,R) \Longrightarrow N\in G \Longrightarrow$ $\Longrightarrow (K,\frac{\mu}{\nu}R)\subseteq G$ (4).

$(3),(4) \Longrightarrow G=(K,R\frac{\mu}{\nu})$.

347. Δίδεται ἕν ἐπίπεδον Π καί ἕν εὐθ. τμῆμα AB ἐκτός τοῦ Π. Νά εὑρεθῆ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων M τοῦ Π, ὥστε $\widehat{AMB}=1^L$.

Μέρος (α). Θέτομεν $G=\{M/\widehat{AMB}=1^L\}$.



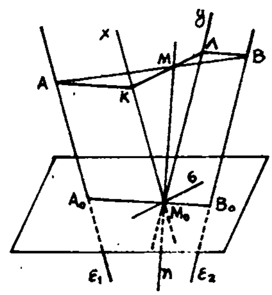
$\forall M\in G \Rightarrow \widehat{AMB}=1^L$. Ἔστω O τό μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος AB. Θά εἶναι $OM=\frac{AB}{2}$. Φέρομεν τήν $OK\perp\Pi$. Τό σημεῖον K εἶναι ὡρισμένον. Τό τμῆμα KM ἰσοῦται πρός τήν πλευράν ὀρθογωνίου τριγώνου μέ ὑποτείνουσαν $\frac{AB}{2}$ καί ἑτέραν κάθετον πλευράν ἴσην πρός OK. (Τοῦτο φαίνεται καί ἀπό τήν σχέσιν $KM=\sqrt{(\frac{AB}{2})^2-OK^2}$).

Ἄρα τὸ M κεῖται ἐπὶ περιφερείας (K,KM).

Μέρος (β). Ἐὰν N τυχὸν σημεῖον τῆς ἐν λόγῳ περιφερείας, εἶναι $O\hat{K}M = O\hat{K}N$, ἤτοι $ON = OM = \frac{AB}{2}$, ὅθεν $A\hat{N}B = 1^{L}$. Ἤτοι ὁ τόπος ταυτίζεται πρὸς τὴν ἀνωτέρω περιφέρειαν.

Σημείωσις. Ὁ κύκλος (K,KM) εἶναι ἡ τομὴ τῆς σφαίρας $(O,\frac{AB}{2})$ μετὰ τοῦ Π.

348. Θεωροῦμεν δύο ἀσυμβάτους εὐθείας $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ καὶ ἓν ἐπίπεδον Π. Ἔστω $A \in \varepsilon_1$, $B \in \varepsilon_2$ ὥστε $AB \parallel \Pi$. Ἂν M σημεῖον τοῦ εὐθ. τμήματος AB καὶ $\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{\mu}{\nu}$. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ σημείου M. $(\mu, \nu \in R^{+})$.



Μέρος (α). Ἔστω ὅτι τὸ Π τέμνει τὰς $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ εἰς A_0, B_0. Ἐκ τοῦ σημείου M_0 τοῦ εὐθ. τμήματος A_0B_0, ὥστε $\frac{\overline{A_0M_0}}{\overline{M_0B_0}} = \frac{\mu}{\nu}$, φέρομεν τὰς x, y παραλλήλους πρὸς τὰς $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ἀντιστοίχως καὶ σχηματίζομεν τὰ παραλληλόγραμμα A_0AKM_0, $B_0B\Lambda M_0$. Θὰ εἶναι

$$\frac{\overline{AK}}{\overline{B\Lambda}} = \frac{\overline{A_0M_0}}{\overline{B_0M_0}} = \frac{\mu}{\nu} = \frac{\overline{AM}}{\overline{BM}},$$

ἤτοι ἡ $K\Lambda$ διέρχεται διὰ τοῦ σημείου M καὶ εἶναι ἀκόμη $\frac{\overline{KM}}{\overline{M\Lambda}} = \frac{\mu}{\nu}$ (1). Ἡ $K\Lambda$ κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου $AKB\Lambda$, τὸ ὁποῖον εἶναι παράλληλον πρὸς Π. Ἄρα ἡ $K\Lambda$ εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν τομὴν τῶν ἐπιπέδων xOy καὶ Π, ἤτοι πρὸς σταθερὰν εὐθεῖαν σ. Ὡς εἶναι γνωστόν, λοιπόν, ἐκ τῆς ἐπιπεδομετρίας ὁ γ. τόπος τοῦ σημείου M τῆς $K\Lambda$ εἶναι εὐθεῖα η.

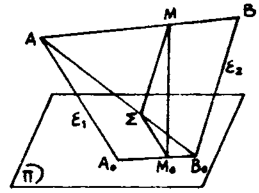
Μέρος (β). Ἐκ τυχόντος σημείου $M \in \eta$ φέρομεν ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π. Τὸ ἐπίπεδον τοῦτο τέμνει τὰς $\varepsilon_1, \varepsilon_2, x, y$ κατὰ τὰ σημεῖα A, B, K, Λ. Προφανῶς εἶναι $AK \parallel A_0B_0$ καὶ $B\Lambda \parallel A_0B_0$, ἤτοι $AK \parallel B\Lambda$. Ὡς γνωστὸν ὅμως ἐκ τῆς ἐπιπεδομετρίας $\frac{\overline{KM}}{\overline{M\Lambda}} = \frac{\mu}{\nu}$. Εἶναι ὅμως καὶ $\frac{\overline{AK}}{\overline{B\Lambda}} = \frac{\overline{A_0M_0}}{\overline{M_0B_0}} = \frac{\mu}{\nu}$, ἄρα ἡ AB διέρχεται διὰ τοῦ σημείου M καὶ εἶναι ἀκόμη $\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{\mu}{\nu}$, ἤτοι ὁ γ. τόπος ταυτίζεται πρὸς τὴν εὐθεῖαν η.

Ἐφαρμογή. Ὡς ἐφαρμογὴ τοῦ ἀνωτέρω νὰ λυθῇ τὸ ἑξῆς πρόβλημα:

Δίδονται τρεῖς εὐθεῖαι εἰς τὸν χῶρον $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ ἀνὰ δύο ἀσύμβατοι. Μεταβλητὸν ἐπίπεδον Π κινεῖται παραλλήλως πρὸς σταθερὸν ἐπίπεδον P καὶ τέμνει τὰς τρεῖς εὐθείας κατὰ τὰ σημεῖα A, B, Γ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ κέντρου βάρους τοῦ τριγώνου

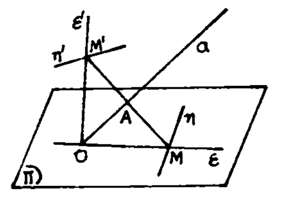
ΑΒΓ.

Σημείωσις. Μία ἄλλη λύσις ὡς ἑξῆς: Ἐπειδὴ $\frac{\overline{AM}}{MB} = \frac{\overline{A_0M_0}}{B_0M_0}$, διὰ τῆς MM_0 διέρχεται ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὰς $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. Θέτομεν Σ τὴν τομὴν τοῦ ἐπιπέδου τούτου μετὰ τῆς AB_0. Εὐκόλως προκύπτει ὅτι τὸ τρίγωνον $M_0\Sigma M$ μένει ὅμοιον πρὸς ἕν καθωρισμένον τρίγωνον καὶ ἡ γωνία $\Sigma M_0 M$ εἶναι σταθερὰ κ.τ.λ.



349. Δίδεται ἐπίπεδον Π καὶ σημεῖον Ο αὐτοῦ. Εὐθεῖα a διέρχεται διὰ τοῦ σημείου Ο. Θεωροῦμεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν ε τοῦ Π διερχομένην διὰ τοῦ σημείου Ο. Νὰ εὑρεθῆ ὁ γ. τόπος τῆς εὐθείας ε', συμμετρικῆς τῆς ε πρὸς a.

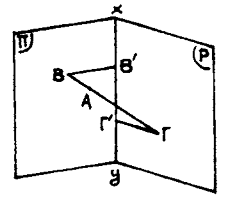
Μέρος (α). Εἰς σημεῖον Α τῆς a φέρομεν τὸ κάθετον ἐπίπεδον Ρ ἐπὶ τὴν ΟΑ. Τοῦτο τέμνει τὰς $\varepsilon, \varepsilon'$ κατὰ τὰ σημεῖα Μ καὶ Μ′ ἀντιστοίχως. Τὸ σημεῖον Μ κεῖται προφανῶς ἐπὶ τῆς τομῆς η τῶν Π καὶ Ρ, ἐπειδὴ δὲ τὸ τρίγωνον ΜΟΜ′ εἶναι ἰσοσκελές, ἕπεται ὅτι τὸ σημεῖον Μ′ γράφει τὴν συμμετρικὴν εὐθεῖαν τῆς η πρὸς Α, ἤτοι τὴν εὐθεῖαν η'. Ὅθεν ἡ ε' κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (O, η'). (Ἀνήκει εἰς δέσμην κέντρου Ο, ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (O,η')).



Μέρος (β). Θεωροῦμεν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου (O, η') τυχοῦσαν εὐθεῖαν ε' τῆς δέσμης κέντρου Ο. Θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ συμμετρικὸν ε τῆς ε' πρὸς a κεῖται ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π. Ἀλλὰ αἱ εὐθεῖαι η καὶ η' εἶναι συμμετρικαὶ πρὸς Α, ἄρα τὸ συμμετρικὸν τοῦ σημείου Μ′ κεῖται ἐπὶ τῆς η.

350. Νὰ εὑρεθῆ ὁ γ. τόπος τῶν εὐθειῶν ποὺ διέρχονται διὰ δοθέντος σημείου Α καὶ σχηματίζουν ἴσας γωνίας μετὰ δύο δοθέντων ἐπιπέδων Π καὶ Ρ.

Μέρος (α). Ἐὰν τὰ ἐπίπεδα Π καὶ Ρ εἶναι παράλληλα, τότε εἶναι προφανὲς ὅτι ὁ τόπος ταυτίζεται πρὸς τὴν κεντρικὴν δέσμην κέντρου Ο. Θεωρήσωμεν ὅτι τὰ Π, Ρ τέμνονται. Ὡς γνωστὸν (ἄσκησις 106), ἐὰν

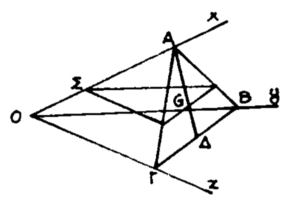


ΒΑΓ μία τῶν ἐν λόγῳ εὐθειῶν, αἱ ἀποστάσεις τῶν Β,Γ ἀπό τήν ἀκμήν xy εἶναι ἴσαι. Ἄρα ἡ εὐθεῖα ΒΑΓ κεῖται εἰς τό ἐπίπεδον τό διερχόμενον διά τοῦ Α καί κάθετον ἤ παράλληλον πρός τό διχοτομοῦν τήν δίεδρον.

Μέρος (β). Εἶναι εὔκολον, ἄς λυθῇ ἀπό τόν μαθητήν.

Ἄρα ὁ γ. τόπος ταυτίζεται πρός τά δύο ἐπίπεδα διά τοῦ Α καί παράλληλα ἀντιστοίχως πρός τά δύο διχοτομοῦντα ἐπίπεδα τάς διέδρους τῶν Π,Ρ.

351. Δίδεται τρίεδρος $Oxyz$ καί σημεῖον Α τῆς Ox. Μεταβλητόν ἐπίπεδον διέρχεται διά τοῦ σημείου Α καί τέμνει τάς Oy, Oz κατά τά σημεῖα Β,Γ. Νά εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ κέντρου βάρους τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.



Μέρος (α). Θέτομεν Π τό ἐκ τοῦ G παράλληλον ἐπίπεδον πρός τό ἐπίπεδον yOz. Ἔστω $Σ = Π \cap Ox$. Ἐκ τοῦ θεωρήματος τοῦ Θαλοῦς ἔχομεν:

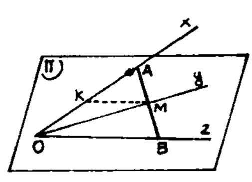
$$\frac{AΣ}{AO} = \frac{AG}{AΔ} = \frac{2}{3},$$

ἤτοι τό Σ σταθερόν, ὅθεν τό G κεῖται εἰς τό ἐκ τοῦ σημείου Σ παράλληλον ἐπίπεδον πρός τό ἐπίπεδον yOz.

Μέρος (β). Ἔστω $G \in Π$. Φέρομεν τήν AG, ἥτις τέμνει τό ἐπίπεδον yOz εἰς τό σημεῖον Δ. Διά τοῦ σημείου Δ φέρομεν τέμνουσαν ΒΓ τάς Oy, Oz, ὥστε $ΔΒ = ΔΓ$. Εἰς τό τρίγωνον ΑΒΓ τό σημεῖον G εἶναι τό κέντρον βάρους, διότι

$$\left(\frac{AG}{AΔ} = \frac{2}{3}\right) \wedge (BΔ = ΔΓ).$$

352. Δίδεται ἐπίπεδον Π καί σημεῖον Ο αὐτοῦ. Θεωροῦμεν σταθεράν ἡμιευθεῖαν Ox ἐκτός τοῦ Π καί μεταβλητήν Oy ἐπί τοῦ Π. Νά εὑρεθῇ τό σύνολον τῶν διχοτόμων Oz τῆς γωνίας xOy.

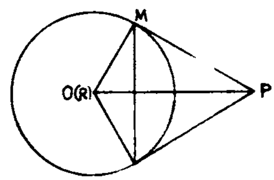


Μέρος (α). Ἔστω Α ἕν σημεῖον τῆς Ox. Φέρομεν $AM \perp Oz$ καί $B = AM \cap Oy$. Τό τρίγωνον ΑΟΒ εἶναι ἰσοσκελές καί $AM = BM$. Ἐάν $KA = KO$, θά εἶναι $KM = \frac{OB}{2} = \frac{OA}{2}$. Ἄρα τό σημεῖον Μ κεῖται ἐπί περιφερείας $(K, \frac{OA}{2})$, τῆς ὁποίας τό ἐπίπεδον εἶναι παράλληλον πρός Π, ἤτοι ἡ Oz γράφει κωνικήν ἐπιφάνειαν (Κ).

Μέρος (β). Ἔστω Oz γενέτειρα τῆς (Κ). Θεωροῦμεν τήν συμμετρικὴν ἡμιευθεῖαν τῆς Ox πρὸς Oz, ἔστω Oy. Θὰ δείξωμεν ὅτι $Oy \in \bar{\Pi}$. Φέρομεν $AM \perp Oz$ καὶ ἔστω $B = AM \cap Oy$. Τὸ τρίγωνον AOB εἶναι ἰσοσκελές, ἄρα $AM = BM$. Ἐπειδὴ $AK = KO$, ἔπεται ὅτι $OB \parallel KM$. Τοῦτο σημαίνει ὅτι $OB \in \Pi$, δεδομένου ὅτι $KM \parallel \Pi$.

353. Δίδονται δύο σταθερὰ σημεῖα O καὶ P. Θεωροῦμεν σφαῖραν κέντρου O καὶ μεταβλητῆς ἀκτῖνος R. Θέτομεν (K) τὸν περιγεγραμμένον κῶνον κορυφῆς P. Εὕρατε τὸν γ. τόπον τοῦ κύκλου ἐπαφῆς τῶν (K), (O,R).

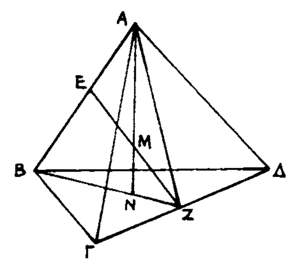
Μέρος (α). Ἔστω M τυχὸν σημεῖον τοῦ κύκλου ἐπαφῆς. Εἶναι $\widehat{OMP} = 1^{L}$, ἤτοι M κεῖται ἐπὶ σφαίρας διαμέτρου OP.



Μέρος (β). Ἔστω M′ τυχὸν σημεῖον τῆς σφαίρας διαμέτρου OP. Εἶναι ἀρκετὸν νὰ δείξωμεν ὅτι $\widehat{OM'P} = 1^{L}$. (Διατί;) Τοῦτο ὅμως εἶναι προφανές.

354. Δίδονται δύο εὐθ. τμήματα AB καὶ ΓΔ. Νὰ εὑρεθῆ τὸ σύνολον τῶν σημείων M τοῦ χώρου, ἀπὸ τὰ ὁποῖα νὰ δύναται νὰ ἀχθῆ μία τοὐλάχιστον εὐθεῖα τέμνουσα τὰ δύο εὐθ. τμήματα.

Μέρος (α). Ἔστω M ἓν σημεῖον τοῦ ζητουμένου συνόλου G, EZ μία τέμνουσα τὰ AB, ΓΔ διερχομένη διὰ τοῦ M. Εἶναι προφανὲς ὅτι ὅλα τὰ σημεῖα τῆς γωνίας AZB, ὡς καὶ τῆς κατὰ κορυφὴν αὐτῆς, εἶναι σημεῖα τοῦ G. Θέτομεν K τὴν ἕνωσιν τοῦ τετραέδρου καὶ τῶν δύο διέδρων (μετὰ τοῦ ἐσωτερικοῦ των) τῶν κατὰ κορυφὴν τῶν διέδρων Α.ΓΔ.Β, Γ.ΑΒ.Δ. Θὰ εἶναι λοιπὸν $G \subseteq K$.



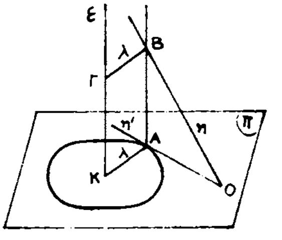
Μέρος (β). Ἔστω $M \in K$. Εἰδικώτερον θεωροῦμεν ὅτι τὸ M εὑρίσκεται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τοῦ τετραέδρου. Θέτομεν $Z = ABM \cap \Gamma\Delta$, $N = BZ \cap AM$. Τὸ σημεῖον M εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ τριγώνου ABZ, ὅτε καὶ N ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ τριγώνου ΓΒΔ, ἤτοι καὶ Z ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ εὐθ. τμήματος ΓΔ. Ἐὰν τὸ M κεῖται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν μιᾶς ἐκ τῶν κατὰ κορυφὴν διέδρων τῶν Α.ΓΔ.Β, Γ.ΑΒ.Δ ἡ ἀπόδειξις παρομοία. Ἄρα καὶ $K \subseteq G$, ἤτοι $G = K$.

Σημείωσις. Νά εὑρεθῆ ἀκόμη τό ὑποσύνολον G_1 τοῦ G τῶν σημείων Μ, ἀπό τά ὁποῖα δυνάμεθα νά φέρωμεν τέμνουσαν ΕΜΖ, ὥστε ΕΜ=ΜΖ.

Ὁμάς Β'.

355. Δίδεται εὐθεῖα ε καί σημεῖον Ο ἐκτός αὐτῆς. Νά εὑρεθῆ τό σύνολον τῶν εὐθειῶν η, ἑκάστη τῶν ὁποίων διέρχεται διά τοῦ Ο καί ἀπέχει ἀπό τήν ε ἀπόστασιν δοθεῖσαν λ.

Μέρος (α). Ἔστω ΒΓ ἡ κοινή κάθετος τῶν ε,η. Διά τοῦ Ο φέρομεν τό κάθετον ἐπίπεδον Π ἐπί τήν ε καί προβάλλομεν τό σχῆμα ἐπί τό Π. Ἐπειδή ΒΓ‖Π, ἕπεται ὅτι ἡ προβολή η' τῆς η ἐφάπτεται κύκλου (Κ,λ). Ἡ η θά ἀνήκη προφανῶς εἰς τήν δέσμην μέ κέντρον τό σημεῖον Ο ἐπί τοῦ



διά τοῦ σημείου Ο ἀγομένου ἐφαπτομένου ἐπιπέδου εἰς τόν κύλινδρον μέ ὁδηγόν (Κ,λ) καί ἄξονα ε.

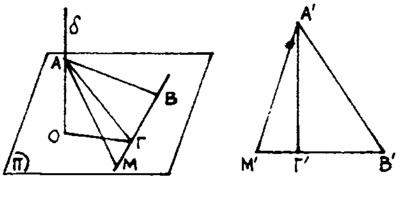
Μέρος (β). Θεωροῦμεν τά ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα διά τοῦ Ο εἰς τόν κύλινδρον μέ ὁδηγόν καμπύλην (Κ,λ) καί ἄξονα ε. Λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῶν τυχοῦσαν εὐθεῖαν η τῆς δέσμης κέντρου Ο (πλήν τῆς κοινῆς ἀκμῆς). Θά δείξωμεν ὅτι ἡ **κοινή** κάθετος τῶν ε,η εἶναι ἴση πρός λ. Πρός τούτοις παρατηροῦμεν ὅτι ἡ κοινή κάθετος τῶν ε,η' (η' ἡ προβολή τῆς η ἐπί τοῦ ἐπιπέδου τοῦ (Κ,λ)) εἶναι ἴση πρός τήν ἀκτῖνα τοῦ κύκλου (Κ,λ), διότι ἡ η' εἶναι ἐφαπτομένη τοῦ κύκλου. Ἀλλά, ἄν ΒΓ ἡ κοινή κάθετος, τό τετράπλευρον ΒΓΚΑ εἶναι ὀρθογώνιον, ἄρα ΒΓ=λ.

356. Δίδεται ἐπίπεδον Π, εὐθεῖα δ κάθετος ἐπί τό Π, καί σημεῖον Β∈Π. Ἔστω Α τυχόν σημεῖον τῆς δ. Θεωροῦμεν τό σημεῖον Μ τοῦ ἐπιπέδου Π, ὥστε τό τρίγωνον ΑΒΜ νά εἶναι ὅμοιον πρός δοθέν τρίγωνον Α'Β'Μ'. Νά εὑρεθῆ ὁ γ. τόπος τοῦ σημείου Μ.

Μέρος (α). Φέρομεν ΟΓ⊥ΒΜ ⟹ ⟹ ΑΓ⊥ΒΜ. Ἔστω Α'Γ'⊥Μ'Β'. Θά εἶναι

$$\frac{ΒΜ}{ΒΓ}=\frac{Β'Μ'}{Β'Γ'}=σταθ.$$

Τό σημεῖον Γ εὑρίσκεται ἐπί κύκλου (C) διαμέτρου ΟΒ, ἄρα τό Μ θά εὑρίσκεται ἐπί τοῦ

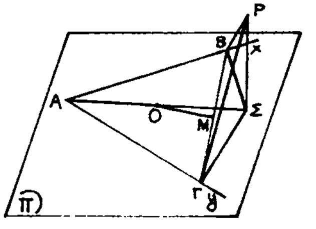


ὁμοιοθέτου τοῦ (C) πρὸς B μὲ λόγον $\frac{BM}{B\Gamma}=\frac{B'M'}{B'\Gamma'}$, ἤτοι ἐπὶ περιφερείας ἔστω (C').

Μέρος (β). Ἔστω $M\in(C')$. Φέρομεν τὴν MB καὶ ἔστω $\Gamma=BM\cap(C)$. Εἰς τὸ ἐπίπεδον (Γ,δ) θεωροῦμεν κύκλον ἀκτῖνος ΓΑ, ὥστε $A\hat{B}\Gamma=\hat{B}'$. Ἡ τομὴ τοῦ ἐν λόγῳ κύκλου καὶ τῆς δ καθορίζει ἓν σημεῖον Α. Θὰ δείξωμεν ὅτι $\overset{\triangle}{ABM}\sim\overset{\triangle}{A'B'M'}$. Τοῦτο ὅμως εἶναι εὔκολον, διότι $A\hat{B}\Gamma\sim A'\hat{B}'\Gamma'$ καὶ $\frac{BM}{B\Gamma}=\frac{B'M'}{B'\Gamma'}$.

357. Δίδεται ἐπίπεδον Π, σημεῖον Α αὐτοῦ καὶ σημεῖον Ρ ἐκτὸς αὐτοῦ. Γωνία $x\hat{A}y=\varphi$ στρέφεται περὶ τὸ Α ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π. Φέρομεν τὰς καθέτους ΡΒ, ΡΓ ἐπὶ τὰς Ax καὶ Ay ἀντιστοίχως. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ μέσου Μ τοῦ εὐθ. τμήματος ΒΓ.

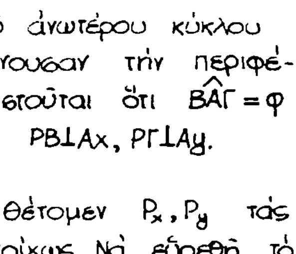
Μέρος (α). Φέρομεν τὴν $P\Sigma\perp\Pi$. Συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα τῶν τριῶν καθέτων θὰ εἶναι $\Sigma B\perp Ax$, $\Sigma\Gamma\perp Ay$. Τὰ σημεῖα Β καὶ Γ κεῖνται ἐπὶ περιφερείας διαμέτρου ΑΣ. Ἡ χορδὴ ΒΓ τῆς ἐν λόγῳ περιφερείας εἶναι σταθερά, διότι ἀντιστοιχεῖ εἰς ἐγγεγραμμένην γωνίαν $B\hat{A}\Gamma=\varphi$. Ἄρα, λοιπόν, καὶ τὸ ἀπόστημα ΟΜ εἶναι γνωστόν, ἤτοι τὸ Μ κεῖται ἐπὶ κύκλου (C) κέντρου Ο (μέσου τῆς ΑΣ) καὶ ἀκτῖνος ΟΜ.



Μέρος (β). Ἔστω Μ τυχὸν σημεῖον τοῦ ἀνωτέρου κύκλου (C). Φέρομεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ΟΜ, τέμνουσαν τὴν περιφέρειαν διαμέτρου ΑΣ εἰς Β,Γ. Εὐκόλως διαπιστοῦται ὅτι $B\hat{A}\Gamma=\varphi$ καὶ ἀπὸ τὸ θεώρημα τῶν τριῶν καθέτων, ὅτι $PB\perp Ax$, $P\Gamma\perp Ay$.

358. Δίδονται δύο τεμνόμεναι εὐθεῖαι x,y. Θέτομεν P_x, P_y τὰς ἀποστάσεις σημείου Μ ἀπὸ τὰς x,y ἀντιστοίχως. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον $G=\{M/\ \frac{P_x}{P_y}=\frac{\mu}{\nu},\ \mu,\nu\in R^+\}$.

Μέρος (α). Ἔστω $O=x\cap y$ καὶ ε ἡ εὐθεῖα ΟΜ. $\forall M\in G\Rightarrow\varepsilon\in G$. Τοῦτο ἀποδεικνύεται εὐκόλως, ἀρκεῖ νὰ λάβωμεν ἓν σημεῖον $M_1\in\varepsilon$ καὶ φέρωμεν τὰς ἀποστάσεις P_{1x}, P_{1y} ἀπὸ τὰς x,y. Σχηματίζονται δύο ὅμοια τρίγωνα καὶ ἔχομεν:

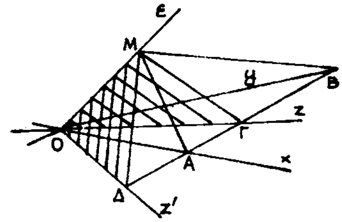


$$\frac{P_{1x}}{P_x}=\frac{P_{1y}}{P_y}=\frac{OM_1}{OM}.$$

Ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου xOy, ὡς εἶναι γνωστόν, ὁ τόπος ἀποτελεῖται ἀπὸ δύο εὐθείας z, z'. Διὰ τυχόντος σημείου $M' \in z$ φέρομεν $AM'B$ τέμνουσαν τὴν xOy. Θέτομεν P'_x, P'_y τὰς ἀποστάσεις τοῦ M' ἀπὸ τὰς x, y καὶ λ, ρ τὰς ἀποστάσεις τοῦ αὐτοῦ σημείου ἀπὸ τὰ ἐπίπεδα $xO\varepsilon, yO\varepsilon$. Θὰ εἶναι

$$\frac{(M'OMA)}{(M'OMB)} = \frac{\lambda(OMA)}{\rho(OMB)} = \frac{(OAM')}{(OBM')} \Longrightarrow \frac{\lambda}{\rho}\cdot\frac{OA\cdot P_x}{OB\cdot P_y} = \frac{OA\cdot P'_x}{OB\cdot P'_y} \Longrightarrow \frac{\lambda}{\rho}\cdot\frac{\mu}{\nu} = \frac{\mu}{\nu} \Longrightarrow \lambda = \rho,$$

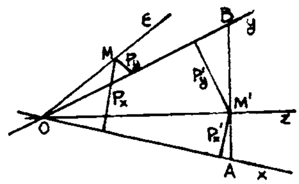
ἤτοι τὸ ἐπίπεδον εOz εἶναι τὸ διχοτομοῦν τὴν δίεδρον ε. Τὸ αὐτὸ συμβαίνει καὶ μὲ τὸ ἐπίπεδον $z'O\varepsilon$. Ἄρα ἡ δίεδρος ε τῆς τριέδρου $Ozz'\varepsilon$ εἶναι ὀρθή. Συμφώνως, λοιπόν, πρὸς τὴν ἄσκησιν 367 τὸ σύνολον τῶν εὐθειῶν ε γράφει μίαν κωνικὴν ἐπιφάνειαν, ἔστω (K).



Μέρος (β). $\forall M \in (K) \Longrightarrow$ εὐθεῖα $OM \in (K)$.
Θέτομεν P_x, P_y τὰς ἀποστάσεις τοῦ M ἀπὸ x, y. Θὰ δείξωμεν ὅτι:

$$\frac{P_x}{P_y} = \frac{\mu}{\nu}.$$

Κατ' ἀρχὴν θὰ δείξωμεν ὅτι τὸ ἐπίπεδον εOz διχοτομεῖ τὴν δίεδρον ε τῆς τριέδρου $Oxy\varepsilon$. Πρὸς τούτοις φέρομεν εἰς M κάθετον ἐπίπεδον ἐπὶ τὴν ε, τὸ ὁποῖον τέμνει τὰς y, z, x, z' εἰς B, Γ, A, Δ ἀντιστοίχως. Εἶναι γνωστὸν ὅτι τὰ σημεῖα $B, A - \Gamma, \Delta$ ἀποτελοῦν ἁρμονικὴν τετράδα.(1) Ἀλλὰ καὶ $\widehat{\Gamma M \Delta} = 1^L$, ὅθεν $\widehat{AM\Gamma} = \widehat{BM\Gamma}$. Ἐὰν ἤδη $M' \in z$ καὶ P'_x, P'_y αἱ ἀποστάσεις του ἀπὸ x, y καὶ λ, ρ $(\lambda = \rho)$ αἱ ἀποστάσεις τοῦ M' ἀπὸ τὰ ἐπίπεδα $xO\varepsilon, yO\varepsilon$ θὰ εἶναι:



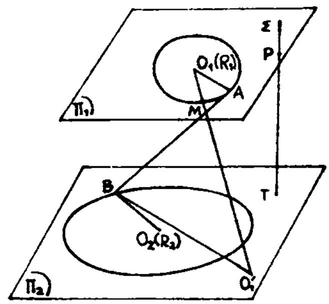
$$\frac{OA}{OB}\cdot\frac{P_x}{P_y} = \frac{OA}{OB}\cdot\frac{P'_x}{P'_y} \Longrightarrow \frac{P_x}{P_y} = \frac{\mu}{\nu}.$$

359. Δίδονται δύο κύκλοι $(O_1, R_1), (O_2, R_2)$, τῶν ὁποίων τὰ ἐπίπεδα εἶναι παράλληλα. Ἐὰν A, B σημεῖα τῶν περιφερειῶν (O_1, R_1), (O_2, R_2) ἀντιστοίχως, νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον G τῶν σημείων M τοῦ εὐθ. τμήματος AB ὥστε $\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}} = \frac{\mu}{\nu}$. $(\mu, \nu \in R^+)$.

Μέρος (α). Ἔστω Π_1, Π_2 τὰ ἐπίπεδα τῶν κύκλων (O_1, R_1), (O_2, R_2). Θέτομεν ΣT τὴν ἀπόστασιν αὐτῶν καὶ λαμβάνομεν τὸ σημεῖον P, ὥστε $\frac{\Sigma P}{PT} = \frac{\mu}{\nu}$. Τὸ σημεῖον M κεῖται ὡς γνωστὸν

---

(1) Εἶναι εὔκολον νὰ ἀποδειχθῇ, ἀρκεῖ ἀπὸ τὰ Γ καὶ Δ νὰ φέρωμεν τὰς καθέτους ἐπὶ τὰς (x) καὶ (y) καὶ νὰ λάβωμεν ὅμοια τρίγωνα.



ἐπὶ ἐπιπέδου Π καθέτου εἰς P ἐπὶ τὴν ΣΤ.[1] Ἔστω $M \in G$ καὶ $O_1' = O_1M \cap \Pi_2$. Εἶναι $\overset{\triangle}{MBO_1'} \sim \overset{\triangle}{MAO_1} \Longrightarrow$ $\Longrightarrow O_1'B = \frac{\nu}{\mu}R_1$.

Διὰ τὰ σημεῖα O_1', O_2, B ἔχομεν · $\left|R_2 - \frac{\nu}{\mu}R_1\right| = \left|O_2B - O_1'B\right| \leqslant O_2O_1' \leqslant O_2B + O_1'B = R_2 + \frac{\nu}{\mu}R_1$.

Ἄρα τὸ σημεῖον O_1' εὑρίσκεται ἐντὸς ἢ εἰς τὰ σύνορα δακτυλίου (C) μὲ ἀκτῖνας τῶν ὁμοκέντρων κύκλων $\left|R_2 - \frac{\nu}{\mu}R_1\right|$ καὶ $R_2 + \frac{\nu}{\mu}R_1$. Κατὰ συνέπειαν τὸ σημεῖον M εὑρίσκεται ἐντὸς ἢ εἰς τὰ σύνορα τοῦ δακτυλίου (C′), ὅστις εἶναι τομὴ τοῦ Π καὶ τῶν δύο κώνων κορυφῆς O_1 καὶ ὁδηγῶν $(O_2, R_2 + \frac{\nu}{\mu}R_1)$, $(O_2, \left|R_2 - \frac{\nu}{\mu}R_1\right|)$.

Μέρος (Β). Ἔστω $M \in (C')$. Ἡ O_1M τέμνει τὸ ἐπίπεδον Π_2 εἰς σημεῖον O_1' τοῦ δακτυλίου (C). Θὰ εἶναι δὲ $\left|R_2 - \frac{\nu}{\mu}R_1\right| \leqslant O_2O_1' \leqslant R_2 + \frac{\nu}{\mu}R_1$ (1). Ὑπολογίζεται εὐκόλως ὅτι ἡ κεντρικὴ προβολὴ ἐκ τοῦ M τοῦ κύκλου (O_1, R_1) εἶναι κύκλος $(O_1', \frac{\nu}{\mu}R_1)$. Ἐκ τῆς (1) εὑρίσκομεν ὅτι οἱ κύκλοι (O_2, R_2), $(O_1', \frac{\nu}{\mu}R_1)$ τέμνονται, ἔστω εἰς B. Ἡ BM, διαπιστοῦται ἀμέσως ὅτι τέμνει τὸν κύκλον (O_1, R_1) εἰς σημεῖον A, εἶναι δὲ $\frac{AM}{MB} = \frac{\mu}{\nu}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ

Ὁμὰς Α′.

360. Ἐπὶ ἐπιπέδου Π δίδονται δύο εὐθεῖαι α, β τεμνόμεναι εἰς O καὶ τὰ σημεῖα A, B ἐκτὸς αὐτοῦ. Τυχὸν ἐπίπεδον διὰ τῶν A, B τέμνει τὰς α, β εἰς Κ, Λ ἀντιστοίχως. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων τομῆς M τῶν ΚΑ, ΛΒ καὶ N τῶν ΚΒ, ΛΑ. Δείξατε ἀκόμη ὅτι ἡ MN διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου.

361. Δίδονται δύο ἐπίπεδα Π, P καὶ εὐθεῖα ε δοθείσης διευθύνσεως. Ἔστω $A = \Pi \cap \varepsilon$, $B = P \cap \varepsilon$. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ μέσου τῆς AB καὶ ἀκόμη ὁ γ. τόπος σημείου M τῆς AB, ὥστε $\frac{AM}{MB} = \frac{\mu}{\nu}$.

362. Ἔστω ε, η δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι, $A \in \varepsilon$, $B \in \eta$. Λαμβάνομεν τὸ σημεῖον M ἀπὸ τὴν σχέσιν $\frac{AM}{MB} = \frac{\mu}{\nu}$. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος

(1) Ὑποτίθεται ὅτι ἡ ἐν λόγῳ πρότασις εἶναι γνωστή.

τοῦ Μ. ($M \in \overline{AB}$, $\mu, \nu \in R^+$).

363. Ἔστω Ο,Ο′ σημεῖα ἀντιστοίχως τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων Π,Π′. Θεωροῦμεν διά τῶν Ο,Ο′ ἡμιευθείας ὀρθογωνίους Οx,Ο′x′ κειμένας ἀντιστοίχως ἐπί τῶν ἐπιπέδων Π,Π′ καί λαμβάνομεν ἐπί τῶν ἐν λόγῳ ἡμιευθειῶν τμήματα ΟΑ,Ο′Α′ ἀντιστοίχως, ὥστε ΟΑ=α, Ο′Α′=α′. Νά εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ μέσου Μ τοῦ τμήματος ΑΑ′.

364. Νά εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν κέντρων τῶν παραλληλογράμμων τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς στρεβλόν τετράπλευρον ΑΒΓΔ.

365. Νά εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος μεταβλητῆς εὐθείας Οx διερχομένης διά τοῦ σημείου τομῆς Ο δύο σταθερῶν εὐθειῶν ε_1 καί ε_2 καί σχηματιζούσης μετ' αὐτῶν ἴσας γωνίας.

366. Δίδονται αἱ εὐθεῖαι xOx′, yOy′. Νά εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου πού ἀπέχουν ἴσον ἀπό τάς εὐθείας.

367. Νά εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῆς ἀκμῆς δύο τεμνομένων καθέτων ἐπιπέδων διερχομένων ἀντιστοίχως διά δύο δοθεισῶν ἀσυμβάτων εὐθειῶν ε_1 καί ε_2.

368. Δίδεται ἐπίπεδον Π καί τά σημεῖα Α,Β ἐκτός αὐτοῦ. Νά εὑρεθοῦν τά σύνολα G_1, G_2, G_3 τῶν σημείων Μ τοῦ Π, ὥστε:
1) $G_1 = \{M \mid AM^2 + BM^2 = \kappa^2\}$, 2) $G_2 = \{M / AM^2 - BM^2 = \kappa^2\}$, 3) $G_3 = \{M / \frac{AM}{BM} = \frac{\mu}{\nu}\}$.

369. Δίδεται ἐπίπεδον Π καί Α,Β σημεῖα αὐτοῦ. Ἐπί τῶν καθέτων τῶν ἀγομένων ἀπό Α καί Β ἐπί τό ἐπίπεδον Π λαμβάνομεν τά σημεῖα Α′,Β′ ἀντιστοίχως. Νά εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων Μ τοῦ ἐπιπέδου, ὥστε $\widehat{AMA'} = \widehat{BMB'}$.

370. Δίδεται ἐπίπεδον Π, ἐπ' αὐτοῦ τό σημεῖον Ο καί Α τυχόν σημεῖον τοῦ χώρου. Θεωροῦμεν τάς διά τοῦ Ο διερχομένας εὐθείας τοῦ ἐπιπέδου. Νά εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν προβολῶν ἐπ' αὐτῶν τοῦ σημείου Α.

371. Δοθέντων τῶν σημείων Α καί Β νά εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ σημείου Μ, ὥστε $\mu\cdot AM^2+\nu\cdot BM^2=\kappa^2$, ὅπου μ,ν δοθέντες ἀριθμοί καί κ δοθέν εὐθ. τμῆμα.

372. Δίδονται τρία σημεῖα Α,Β,Γ. Νά εὑρεθῆ τό σύνολον G τῶν σημείων Μ, ὥστε $G=\{M \mid \mu\cdot AM^2+\nu\cdot BM^2+\rho\cdot \Gamma M^2=\kappa^2\}$, ὅπου μ,ν,ρ δοθέντες ἀριθμοί καί κ δοθέν εὐθ. τμῆμα.

Τό αὐτό πρόβλημα διά τέσσερα σημεῖα Α,Β,Γ,Δ νά προσδιορισθῆ τό σύνολον $G=\{M \mid \mu\cdot AM^2+\nu\cdot BM^2+\rho\cdot \Gamma N^2+\lambda\cdot \Delta M^2=\kappa^2\}$.

373. Τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων σημείου Μ ἀπό τάς κορυφάς παραλληλεπιπέδου εἶναι σταθερόν. Νά εὑρεθῆ ὁ γ. τόπος τοῦ Μ.

374. Δίδεται σταθερά εὐθεῖα ε καί σημεῖον Α. Μεταβλητόν ἐπίπεδον Π διέρχεται διά τῆς ε. Νά εὑρεθῆ ὁ γ. τόπος τῆς προβολῆς τοῦ Α ἐπί τό ἐπίπεδον Π.

375. Δίδονται δύο ἴσα εὐθ. τμήματα ΟΑ καί ΟΒ. Τό σημεῖον Μ μεταβάλλεται ὥστε ΟΑ=ΟΒ=ΟΜ. Νά εὑρεθῆ ὁ γ. τόπος τοῦ κέντρου τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου περί τό τρίγωνον ΑΒΜ.

376. Δίδεται σημεῖον Ο καί δύο εὐθ. τμήματα ΑΒ καί ΓΔ. Νά εὑρεθῆ τό σύνολον τῶν εὐθειῶν xOx' τοῦ χώρου, ἐπί τῶν ὁποίων τά τμήματα ΑΒ καί ΓΔ ἔχουν ἴσας προβολάς.

377. Δίδεται κύκλος (Ο,R) καί σημεῖον Α ἐντός αὐτοῦ. Εἰς τό σημεῖον Α φέρομεν τήν κάθετον Αx ἐπί τό ἐπίπεδον τοῦ κύκλου καί ἐπ' αὐτῆς λαμβάνομεν τό σημεῖον Β. Διά τοῦ Α φέρομεν μεταβλητήν χορδήν ΓΑΔ τοῦ κύκλου (Ο,R). Νά εὑρεθῆ ὁ γ. τόπος τοῦ κέντρου βάρους τοῦ τριγώνου ΒΓΔ.

378. Δίδεται ἐπίπεδον Π καί τέσσερα σημεῖα Α,Β,Γ,Δ κείμενα ἐπ' εὐθείας ἐκτός τοῦ Π. Νά εὑρεθῆ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων Μ τοῦ Π, ὥστε $\widehat{AMB}=\widehat{\Gamma M\Delta}$.

379. Θεωροῦμεν τρεῖς εὐθείας x,y,z παραλλήλους, μή κειμένας ἐπί τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Νά εὑρεθῆ ὁ γ. τόπος α) τῶν σημείων τὰ ὁποῖα ἰσαπέχουν ἀπὸ τὰς τρεῖς εὐθείας, β) τῶ[illegible] σημείων τὰ ὁποῖα ἰσαπέχουν ἀπὸ τὰ τρία ἐπίπεδα τα[illegible] ὁρίζουν ἀνὰ δύο αἱ εὐθεῖαι.

380. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τρία τεμνόμενα ἐπίπεδα.

381. Θεωρήσωμεν p_x, p_y τὰς ἀποστάσεις σημείου M ἀπὸ δύο ἐπίπεδα x καὶ y. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ σύνολα G_1, G_2, G_3, G_4:

1) $G_1 = \{M / p_x + p_y = \lambda\}$,
2) $G_2 = \{M / p_x - p_y = \lambda\}$,
3) $G_3 = \{M / \frac{p_x}{p_y} = \frac{\mu}{\nu}\}$,
4) $G_4 = \{M / \mu \cdot p_x + \nu \cdot p_y = \kappa^2\}$.

382. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν σημείων M, τὰ ὁποῖα ἀπέχουν ἴσον ἀπὸ τὰς ἀκμὰς μιᾶς τριέδρου.

383. Δίδονται δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι α καὶ β καὶ ἓν σημεῖον O. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν εὐθειῶν, ἑκάστη τῶν ὁποίων διέρχεται ἀπὸ τὸ O καὶ σχηματίζει ἴσας γωνίας μετὰ τῶν α καὶ β.

384. Δίδονται δύο ὀρθογώνιοι εὐθεῖαι x καὶ y. Θεωροῦμεν τὸ διὰ τῆς x παράλληλον ἐπίπεδον Π πρὸς τὴν y. Ἐὰν $M \in \Pi$ καὶ p_x, p_y αἱ ἀποστάσεις τοῦ M ἀπὸ τὰς x, y νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον $G = \{M / p_x^2 + p_y^2 = \lambda^2\}$, ὅπου λ δοθὲν εὐθ. τμῆμα.

385. Δίδονται δύο ὀρθογώνιοι εὐθεῖαι x καὶ y. Ἔστω $A \in x$, $B \in y$ καὶ $AB = \lambda$. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ μέσου τοῦ εὐθ. τμήματος AB.

386. Μεταβλητὴ σφαῖρα διέρχεται διὰ δοθέντος κύκλου Γ. Ὁ περιγεγραμμένος περὶ αὐτὴν κῶνος κορυφῆς O κειμένης εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ κύκλου Γ ἐφάπτεται κατὰ τὸν κύκλον C. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ κύκλου C.

387. Μεταβλητὴ σφαῖρα διέρχεται διὰ δοθέντος κύκλου Γ. Εἰς τὰ σταθερὰ σημεῖα A καὶ B τοῦ κύκλου Γ θεωροῦμεν τὰ ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα τῆς σφαίρας. Νά εὑρεθῆ ὁ γ. τόπος τῆς ἀκμῆς αὐτῶν.

388. Νά εὑρεθῆ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων Μ τοῦ χώρου, τῶν ὁποίων ὁ λόγος τῶν δυνάμεων πρός δύο δοθείσας σφαίρας (Ο,R), (Ο′,R′) εἶναι δοθείς.

389. Νά εὑρεθῆ ὁ γ. τόπος τῶν κέντρων τῶν σφαιρῶν τῶν ὀρθογωνίων 1) εἰς δύο δοθείσας σφαίρας, 2) εἰς τρεῖς δοθείσας σφαίρας.

390. Νά εὑρεθῆ ὁ γ. τόπος τῶν κέντρων τῶν σφαιρῶν αἱ ὁποῖαι τέμνουν κατά μέγιστον κύκλον 1) δύο δοθείσας σφαίρας, 2) εἰς [illegible] δοθείσας σφαίρας.

391. Νά εὑρεθῆ ὁ γ. τόπος τῶν κέντρων τῶν σφαιρῶν τῶν διερχομένων [illegible] δύο δοθέντων σημείων καί τεμνουσῶν ὀρθογωνίως δοθεῖσαν [illegible]ραν.

392. Μεταβλητή σφαῖρα διέρχεται διά σταθεροῦ σημείου, ἔχει τό κέντρον της ἐπί σταθεροῦ ἐπιπέδου καί ἐφάπτεται ἑνός ἄλλου σταθεροῦ ἐπιπέδου. Νά εὑρεθῆ ὁ γ. τόπος τοῦ σημείου ἐπαφῆς.

393. Διά τυχόντος κοινοῦ σημείου Α τῆς ἐπιφανείας δύο δοθεισῶν σφαιρῶν ἄγεται τέμνουσα αὐτάς εἰς Β καί Γ ἀντιστοίχως. Νά εὑρεθῆ ὁ γ. τόπος τοῦ μέσου τοῦ τμήματος ΒΓ.

394. Νά εὑρεθῆ ὁ γ. τόπος τοῦ κέντρου βάρους τετραέδρου, τοῦ ὁποίου αἱ τρεῖς κορυφαί εἶναι σταθεραί, ἐνῶ ἡ τετάρτη γράφει εὐθεῖαν ἤ ἐπίπεδον ἤ σφαῖραν.

395. Νά εὑρεθῆ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων τοῦ χώρου, τῶν ὁποίων τό ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀποστάσεων ἀπό τρία δοθέντα σημεῖα εἶναι ἴσον πρός κ^2.

396. Δίδεται κανονικόν τετράεδρον ΑΒΓΔ. Νά δειχθῆ ὅτι τό σύνολον G τῶν σημείων Μ, ὥστε $G=\{M \mid AM^2+BM^2+\Gamma M^2+\Delta M^2=\kappa^2\}$ ταυτίζεται μέ σφαῖραν ἀκτῖνος $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2k^2-3a^2}{2}}$, ὅπου a ἡ ἀκμή.

397. Ἐπίπεδον παράλληλον πρός τήν ἕδραν ΑΒΓ τετραέδρου ΟΑΒΓ τέμνει τάς ἀκμάς ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ εἰς τά σημεῖα Α′, Β′, Γ′. Νά εὑρεθῆ ὁ γ. τόπος τοῦ σημείου τομῆς τῶν ἐπιπέδων Β′Γ′Α, Γ′Α′Β καί Α′Β′Γ.

398. Τά ἄκρα εὐθ. τμήματος σταθεροῦ κατά μῆκος καί διεύθυνσιν κινοῦνται ἐπί δύο δοθέντων σφαιρῶν. Νά εὑρεθῆ ὁ γ. τόπος τῶν ἄκρων τούτων ἐπί τῶν ἐν λόγῳ σφαιρῶν.

399. Δίδονται δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι a καί b, τῶν ὁποίων ΑΒ ἡ κοινή κάθετος ($A\in a$, $B\in b$). Θεωροῦμεν ἐπί τῶν a καί b τά σημεῖα Γ καί Δ ἀντιστοίχως, ὥστε $\frac{ΑΓ}{ΒΔ}=\frac{\mu}{\nu}$. Ἐάν ΝΜ ἡ κοινή κάθετος τῶν ΑΒ, ΓΔ ($M\in ΓΔ$), νά εὑρεθῆ ὁ γ. τόπος τοῦ Μ.

400. Δίδονται αἱ ἡμιευθεῖαι Ox, Oy. Νά εὑρεθῆ τό σύνολον τῶν ἡμιευθειῶν Oz ἀπό τήν σχέσιν $x\hat{O}z + y\hat{O}z = 2^{L}$.

401. Ἐπί τῶν ἀκμῶν Ox καί Oy τριέδρου στερεᾶς γωνίας $Oxyz$ δίδονται ἀντιστοίχως τά σημεῖα Α καί Β. Μεταβλητόν ἐπίπεδον διέρχεται διά τῶν Α, Β καί τέμνει τήν Oz κατά σημεῖον Γ. Νά εὑρεθῆ ὁ γ. τόπος τοῦ κέντρου βάρους τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

402. Δίδεται τρίεδρος $Oxyz$ καί ἔστωσαν p_x, p_y, p_z αἱ ἀποστάσεις σημείου Μ ἀπό τάς ἕδρας τῆς τριέδρου ἀντιστοίχως. Νά εὑρεθῆ τό σύνολον

$$G=\{M \,/\, \frac{p_x}{\lambda}=\frac{p_y}{\mu}=\frac{p_z}{\nu}\},$$

ὅπου λ, μ, ν δοθέντα εὐθ. τμήματα.

403. Δίδεται τετράεδρον ΑΒΓΔ. Νά εὑρεθῆ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων Μ, ὥστε $G=\{M \,/\, AM^2+BM^2=ΓM^2+ΔM^2\}$.

404. Δίδεται τρισορθογώνιος στερεά γωνία Ο.ΑΒΓ. Ὑποθέτομεν ὅτι $ΟΑ=ΟΒ=ΟΓ=a$. Θεωροῦμεν τόν κύκλον (O,a) εἰς τό ἐπίπεδον ΑΟΒ καί εἰς τυχόν σημεῖον Δ τοῦ τόξου ΑΒ φέρομεν τήν ἐφαπτομένην αὐτοῦ, ἡ ὁποία τέμνει τήν εὐθεῖαν ΟΑ εἰς Μ, τήν δέ ΟΒ εἰς Ν. Νά εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ ὀρθοκέντρου τοῦ τριγώνου ΜΓΝ.

405. Δίδεται πυραμίς ΟΑΒΓΔ καί δύο σημεῖα Μ καί Ν τῶν ἀκμῶν ΟΑ καί ΟΒ ἀντιστοίχως. Θεωροῦμεν τυχόν ἐπίπεδον διά τῆς ΜΝ καί ἔστω Ρ καί Σ τά σημεῖα τομῆς αὐτοῦ μετά τῶν ἀκμῶν ΟΓ καί ΟΔ ἀντιστοίχως.

1) Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ εὐθεῖα ΡΣ διέρχεται διά σταθεροῦ σημείου.

2) Νά εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων τομῆς τῶν εὐθειῶν ΜΣ καί ΜΡ.

406. Δίδεται κύλινδρος (Κ) καί σημεῖον Σ. Θεωροῦμεν τυχοῦσαν διά τοῦ Σ τέμνουσαν τοῦ (Κ) εἰς Α καί Β. Νά εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ μέσου τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ.

407. Δίδεται ἐπίπεδον Π. Θεωροῦμεν τούς ὀρθούς κυκλικούς κυλίνδρους ἀκτῖνος R, ἕκαστος τῶν ὁποίων ἐφάπτεται τοῦ Π. Νά εὑρεθῇ τό σύνολον τῶν ἀξόνων αὐτῶν.

408. Δίδεται ἐπίπεδον Π καί εὐθεῖα ε αὐτοῦ. Θεωροῦμεν τούς ὀρθούς κυκλικούς κυλίνδρους, ἕκαστος τῶν ὁποίων ἐφάπτεται τοῦ Π κατά μῆκος τῆς ε. Νά εὑρεθῇ τό σύνολον τῶν ἀξόνων αὐτῶν.

409. Δίδονται δύο παράλληλοι εὐθεῖαι ε καί ε'. Νά εὑρεθῇ τό σύνολον τῶν ἀξόνων τῶν κυλίνδρων μέ γενετείρας τάς ε, ε'.

410. Δίδεται εὐθεῖα ε καί σημεῖον Ο. Νά εὑρεθῇ τό σύνολον τῶν ἀξόνων τῶν ὀρθῶν κυκλικῶν κυλίνδρων τῶν διερχομένων διά τοῦ Ο μέ γενέτειραν ε.

411. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Νά εὑρεθῇ τό σύνολον τῶν σημείων Μ τοῦ χώρου, ἑκάστου τῶν ὁποίων αἱ προβολαί ἐπί τάς πλευράς τοῦ $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ κεῖνται ἐπ' εὐθείας.

412. Δίδεται κύλινδρος (Κ) καί εὐθεῖα ε. Θεωροῦμεν τάς ἐφαπτομένας τοῦ (Κ) τάς παραλλήλους πρός τήν ε. Νά εὑρεθῆ τό σύνολον τῶν ἐν λόγῳ ἐφαπτομένων, ὡς καί ὁ τόπος τῶν σημείων ἐπαφῆς.

413. Δίδονται δύο ἐπίπεδα Π καί Ρ. Νά εὑρεθῆ τό σύνολον τῶν ἀξόνων τῶν κυλίνδρων τῶν ἐφαπτομένων εἰς τά δύο ἐπίπεδα.

414. Δίδεται εὐθεῖα ε καί σημεῖον Α. Διά τοῦ Α θεωροῦμεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν η καί ἔστω ΜΝ ἡ κοινή κάθετος τῶν ε, η ($M\in\eta$, $N\in\varepsilon$). Νά εὑρεθῆ ὁ γ. τόπος τοῦ Μ ὡς καί τοῦ μέσου τοῦ εὐθ. τμήματος ΜΝ.

415. Δίδεται εὐθεῖα ε καί σημεῖον Ο αὐτῆς. Νά εὑρεθῆ τό σύνολον τῶν σημείων Μ, ἑκάστου τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπό Ο καί τῆς εὐθείας ε ἔχουν δοθέντα λόγον $\frac{\mu}{\nu}$.

416. Δύο εὐθεῖαι ε καί ε′ τέμνονται εἰς τό σημεῖον Ο. Νά εὑρεθῆ τό σύνολον τῶν σημείων Μ, τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις x, y, z ἀπό $O, \varepsilon, \varepsilon'$ ἀντιστοίχως εἶναι ἀνάλογοι δοθέντων τμημάτων μ, ν, ρ, ἤτοι τό σύνολον

$$G=\left\{M \,/\, \frac{x}{\mu}=\frac{y}{\nu}=\frac{z}{\rho}\right\}.$$

417. Δίδεται ὀρθός κῶνος (Κ). Νά εὑρεθῆ τό σύνολον τῶν ἀκμῶν τῶν ὀρθῶν διέδρων γωνιῶν, τῶν ὁποίων τά ἐπίπεδα τῶν ἑδρῶν εἶναι ἐφαπτόμενα τοῦ κώνου (Κ).

418. Δίδεται ὀρθός κῶνος (Κ), κορυφῆς Ο. Θεωροῦμεν τυχοῦσαν γενέτειραν ε καί τήν εἰς τό Ο κάθετον η ἐπί τήν ε τήν κειμένην εἰς τό ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τό διερχόμενον διά τῆς ε. Νά εὑρεθῆ τό σύνολον τῶν εὐθειῶν η.

419. Δίδεται ὀρθός κῶνος (Κ) καί σημεῖον Α. Θέτομεν ε τήν εὐθεῖαν τήν κάθετον διά τοῦ Α ἐπί τυχόν ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τοῦ κώνου. Νά εὑρεθῆ τό σύνολον τῶν εὐθειῶν ε.

420. Ἐπὶ τῆς βάσεως (O,R) ὀρθοῦ κυκλικοῦ κώνου (K) κορυφῆς Ω λαμβάνομεν σταθερὸν σημεῖον A καὶ μεταβλητὸν σημεῖον M. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου AΩM

421. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν κέντρων τῶν σφαιρῶν δοθείσης ἀκτῖνος R, ἑκάστη τῶν ὁποίων ἐφάπτεται δύο δοθεισῶν σφαιρῶν.

422. Δίδεται σφαῖρα (O,R) καὶ σημεῖον Σ. Διὰ τοῦ Σ θεωροῦμεν τυχοῦσαν εὐθεῖαν τέμνουσαν τὴν σφαῖραν εἰς A καὶ B. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ μέσου τοῦ εὐθ. τμήματος AB.

423. Δίδεται σφαῖρα (O,R). Νὰ εὑρεθοῦν οἱ γ. τόποι:

1) τῶν μέσων τῶν χορδῶν μήκους λ τῆς σφαίρας·

2) τῶν κέντρων τῶν τομῶν (K) τῆς σφαίρας (O) δοθέντος ἐμβαδοῦ·

3) τῶν κέντρων τῶν τομῶν (K) τῆς σφαίρας (O) μὲ τὰ ἐπίπεδα τὰ διερχόμενα διὰ δοθέντος σημείου (ἢ εὐθείας).

424. Δίδεται πλάγιος κῶνος (K) μὲ βάσιν (O,R). Ἐὰν AB μία διάμετρος τῆς βάσεως καὶ Σ ἡ κορυφὴ τοῦ κώνου, νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ΣAB.

425. Δίδεται ἐπίπεδον Π καὶ σημεῖον A αὐτοῦ. Ἔστω (O,R) τυχοῦσα σφαῖρα ἐφαπτομένη εἰς A τοῦ ἐπιπέδου Π. Ἐὰν M τὸ σημεῖον ἐπαφῆς μετὰ τῆς σφαίρας τοῦ παραλλήλου ἐπιπέδου πρὸς ἓν σταθερὸν ἐπίπεδον P, νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ σημείου M.

426. Ἐπὶ ἐπιπέδου Π δίδεται σημεῖον A. Θεωροῦμεν δύο σφαίρας (O,R), (O′,R′) ἐφαπτομένας μεταξύ των καὶ τοῦ Π εἰς A καὶ B ἀντιστοίχως, ὥστε $R+R'=\lambda$ δοθέν. Νὰ εὑρεθῇ α) ὁ γ. τόπος τοῦ μέσου τῆς διακέντρου καὶ β) ὁ γ. τόπος τοῦ ἀντιδιαμετρικοῦ σημείου τοῦ B.

427. Δίδεται σφαῖρα (O,R) καὶ χορδὴ AB αὐτῆς παράλ ληλος πρός δοθεῖσαν διεύθυνσιν. Νά εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ μέσου τῆς AB.

428. Νά εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν κέντρων τῶν σφαιρῶν, ἑκάστη τῶν ὁποίων ἐφάπτεται δύο δοθεισῶν τεμνομένων εὐθειῶν.

429. Δίδεται σφαῖρα (O,R) καί προσανατολισμένον εὐθύγρ. τμῆμα AB. Ἐκ τυχόντος σημείου Γ τῆς σφαίρας φέρομεν $\Gamma M \overset{\parallel}{=} AB$. Νά εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ M.

430. Δίδεται σφαῖρα (O,R) καί σημεῖον P τοῦ χώρου. Ἐάν A τυχόν σημεῖον τῆς σφαίρας, λαμβάνομεν τό σημεῖον M, ὥστε $\frac{PM}{PA}=\frac{\mu}{\nu}$. Νά εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ σημείου M. ($M\in PA$).

Τό αὐτό πρόβλημα, ἄν ἀντί τῆς σφαίρας ἔχωμεν ἐπίπεδον Π.

431. Δίδεται ἐπίπεδον Π καί σημεῖον P ἐκτός αὐτοῦ. Ἐάν $A\in\Pi$, νά εὑρεθῇ τό σύνολον G τῶν σημείων M, ὥστε $G=\{M \mid \overline{PM}\cdot\overline{PA}=\kappa^2\}$. Τό αὐτό, ἐάν τό ἐπίπεδον Π ἀντικατασταθῇ διά τῆς σφαίρας (O,R). Εἰς τήν περίπτωσιν αὐτήν ποῖος ὁ γ. τόπος, ὅταν τό P κεῖται ἐπί τῆς σφαίρας;

432. Δίδεται κύκλος (O,R) καί σημεῖον P ἐκτός τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ. Ἐάν $A\in(O,R)$, νά εὑρεθῇ τό σύνολον $G=$ $=\{M \mid \overline{PM}\cdot\overline{PA}=\kappa^2\}$.

433. Δίδονται δύο σφαῖραι (O,R),(O′,R′). Νά εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν κέντρων τῶν σφαιρῶν (K,ρ), ἑκάστη τῶν ὁποίων τέμνεται ἀπό τάς (O),(O′) κατά μεγίστους κύκλους.

Νά λυθῇ τό αὐτό πρόβλημα, ἐάν αἱ δοθεῖσαι σφαῖραι εἶναι τρεῖς.

434. Δίδεται ἐπίπεδον Π καί τά σημεῖα A, B ἐκτός τοῦ ἐπιπέδου καί πρός τό αὐτό μέρος τοῦ χώρου. Θεωροῦμεν τυχοῦσαν σφαῖραν διά τῶν A, B ἐφαπτομένην τοῦ Π. Νά εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων ἐπαφῆς.

435. Δίδονται τρία σημεῖα Α,Β,Γ. Θεωροῦμεν ἐπίπεδον Π, ὥστε ἂν ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′ αἱ ἀποστάσεις τῶν Α,Β,Γ νά εἶναι ΑΑ′+ΒΒ′+ΓΓ′=λ. Νά εὑρεθῇ τό σύνολον τῶν ἐπιπέδων Π.
Τό αὐτό πρόβλημα διά δύο σημεῖα Α,Β καί διά τέσσερα σημεῖα Α,Β,Γ,Δ.

436. Δίδεται σφαῖρα (Ο,R) καί εὐθεῖα ε διά τοῦ κέντρου Ο αὐτῆς. Ἐπί τῆς ε καί ἐκτός τῆς σφαίρας θεωροῦμεν ἑκατέρωθεν τοῦ κέντρου τά σημεῖα Α καί Β. Νά εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν κορυφῶν Μ τῶν κώνων, ἕκαστος τῶν ὁποίων εἶναι περιγεγραμμένος περί τήν σφαῖραν καί περιέχει τά σημεῖα Α καί Β.

437. Δίδονται δύο παράλληλα ἐπίπεδα Π,Ρ καί σημεῖον Α μεταξύ αὐτῶν. Ὀνομάζομεν (Ο,R) τυχοῦσαν σφαῖραν διερχομένην διά τοῦ Α καί ἐφαπτομένην τῶν Π,Ρ. Νά εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ Ο, ὡς καί ὁ τόπος τῶν σημείων ἐπαφῆς.

438. Εὐθεῖα ε καί κύκλος (Ο,R) εὑρίσκονται ἐπί τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου Π. Θεωροῦμεν τυχοῦσαν σφαῖραν (ϱ) διά τοῦ (Ο) καί τό ἐφαπτόμενον διά τῆς ε ἐπίπεδον αὐτῆς, ἔστω εἰς σημεῖον Μ. Νά εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ Μ.

439. Δίδεται περιφέρεια (Ο,R) καί δύο σημεῖα Α καί Β αὐτῆς. Θεωροῦμεν τυχοῦσαν σφαῖραν (ϱ) διά τῆς (Ο,R) καί τά ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα αὐτῆς εἰς Α καί Β. Νά εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῆς κοινῆς ἀκμῆς των.

440. Δίδονται δύο ὀρθογώνιοι ἡμιευθεῖαι Αx καί Βy μέ ΑΒ κοινήν κάθετον. Θεωροῦμεν τήν σφαῖραν διαμέτρου ΑΒ καί ἐφαπτομένην αὐτῆς εἰς Μ, τέμνουσαν τάς ἡμιευθείας. Νά εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ Μ.

441. Θεωροῦμεν δύο ὀρθογωνίους εὐθείας ε καί ε′. Ἔστω Αεε, Α′εε′ καί ΑΑ′ παράλληλος πρός σταθερόν ἐπίπεδον Π.

1) Νά εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ κέντρου σφαίρας (Ω) διαμέτρου AA'.

2) Νά δειχθῇ ὅτι ἡ σφαῖρα (Ω) διέρχεται διά σταθεροῦ κύκλου.

442. Δίδονται δύο κάθετα ἐπίπεδα Π, Ρ ἀκμῆς ΑΒ. Θεωροῦμεν τάς ἡμιευθείας Ax, By κειμένας ἐπί τῶν Π, Ρ ἀντιστοίχως καί καθέτους ἐπί τήν ἀκμήν ΑΒ. Ἔστω $M \in Ax$ καί $N \in By$, ὥστε $AM = BN$.

1) Νά εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ κέντρου σφαίρας διαμέτρου ΑΒ.

2) Αἱ ἀνωτέρω σφαῖραι περιέχουν ἕνα γνωστόν κύκλον καί τό ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον αὐτῶν εἰς Α διέρχεται διά σταθερᾶς εὐθείας.

443. Δίδεται σφαῖρα (Ο). Θεωροῦμεν τυχόντα κύλινδρον (Κ) περιγεγραμμένον περί τήν σφαῖραν καί διερχόμενον διά δοθέντος σημείου Α (ἤ ἐφαπτόμενον δοθείσης εὐθείας ε). Νά εὑρεθῇ τό σύνολον τῶν ἀξόνων τῶν (Κ).

444. Δίδεται σφαῖρα (Ο, R) καί σημεῖον Α. Ὀνομάζομεν ε ἑκάστην εὐθεῖαν διά τοῦ Α τοιαύτην, ὥστε τά δι' αὐτῆς ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα τῆς σφαίρας νά εἶναι κάθετα. Νά εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν εὐθειῶν ε, ὡς καί τῶν σημείων ἐπαφῆς.

445. Δίδεται σφαῖρα καί δύο κύκλοι (Γ) καί (Γ') αὐτῆς. Θεωροῦμεν δύο σφαίρας διερχομένας διά τῶν (Γ), (Γ') ἀντιστοίχως καί ἐφαπτομένας ἀλλήλων εἰς Μ. Νά εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ Μ.

446. Νά εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν κέντρων τῶν σφαιρῶν τῶν διερχομένων διά δοθέντων σημείων Α, Β καί τεμνουσῶν ὀρθογωνίως δοθεῖσαν σφαῖραν (Ο, R).

447. Δίδονται δύο μή τεμνόμεναι σφαῖραι (Ο, R), (Ο', R') καί ἐπίπεδον Π. Ἔστω (Ω, ρ) σφαῖρα τέμνουσα ὀρθογωνίως τάς (Ο), (Ο') καί ἐφαπτομένη τοῦ Π εἰς Μ. Νά εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ Μ.

448. Δίδεται σφαῖρα (O,R) καί σημεῖον A αὐτῆς. Θεωροῦμεν κύκλον τῆς σφαίρας διερχόμενον διά τοῦ A δοθείσης ἀκτῖνος λ. Ἐάν M ὁ πόλος τοῦ ἐν λόγῳ κύκλου, νά εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ M.

449. Δίδεται περιφέρεια (O,R) καί διάμετρος AB. Εἰς τό σημεῖον A ὑψοῦμεν τήν κάθετον ἐπί τό ἐπίπεδον τοῦ κύκλου. Ἔστω Γ σταθερόν σημεῖον τῆς καθέτου καί Δ τυχόν σημεῖον τῆς περιφερείας. Φέρομεν τήν $A\Sigma$ κάθετον ἐπί τήν ΓB καί τήν AT κάθετον ἐπί τήν $\Gamma\Delta$. Νά εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ σημείου τομῆς τῶν ΔB καί ΣT.

Ὁμάς Β΄.

450. Δίδεται κύβος $AB\Gamma\Delta A'B'\Gamma'\Delta'$. Θεωροῦμεν τυχόν σημεῖον M τῆς ἀκμῆς AA', τό κέντρον I τοῦ κύκλου τοῦ ἐγγεγραμμένου εἰς τό τρίγωνον $MB\Delta$ καί τήν προβολήν H τῆς κορυφῆς Γ τοῦ κύβου ἐπί τό ἐπίπεδον $MB\Delta$.

1) Νά ἀποδειχθῇ ὅτι $HI = HB = H\Delta$.

2) Νά εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ σημείου I.

451. Δίδονται τρία σημεῖα O, A, B. Ἔστω α, β αἱ ἀποστάσεις τῶν A, B ἀπό εὐθεῖαν x διερχομένην διά τοῦ O. Νά εὑρεθῇ τό σύνολον $G = \{x \mid \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\mu}{\nu}\}$, ὅπου μ, ν δοθέντα εὐθ. τμήματα.

452. Ἐπί ἐπιπέδου τρεῖς ἡμιευθεῖαι διερχόμεναι διά τοῦ αὐτοῦ σημείου O σχηματίζουν μεταξύ των γωνίας 120°. Νά εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος σημείου M τοῦ χώρου, τοῦ ὁποίου αἱ προβολαί ἐπί τῶν τριῶν εὐθειῶν εἶναι κορυφαί τριγώνου δοθέντος ἐμβαδοῦ.

453. Ἐπί τῶν ἀκμῶν Ox, Oy, Oz τριέδρου $Oxyz$ λαμβάνομεν ἀντιστοίχως τά σημεῖα A, B, Γ, ὥστε $OA + OB + O\Gamma = \lambda$. Νά εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ κέντρου τῆς περιγεγραμμένης περί τό τετράεδρον $OAB\Gamma$ σφαίρας.

454. Εἰς τετράπλευρον $AB\Gamma\Delta$ O εἶναι τό σημεῖον τομῆς τῶν διαγωνίων του. Νά εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων M τοῦ χώρου, ὥστε ἑκάστη κάθετος ἐπὶ τὴν ΟΜ τομὴ τῆς πυραμίδος ΜΑΒΓΔ νὰ εἶναι παραλληλόγραμμον.

455. Ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ὀρθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ($A=1^L$) ὑψοῦμεν τὴν κάθετον εἰς τὸ σημεῖον Α καὶ λαμβάνομεν ἐπ' αὐτῆς τυχὸν σημεῖον Α'. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ ὀρθοκέντρου τοῦ τριγώνου ΒΑ'Γ. Τί παρατηρεῖτε, ἐὰν τὸ τρίγωνον δὲν εἶναι ὀρθογώνιον; Ἀκόμη ποῖος ὁ γ. τόπος τοῦ κέντρου βάρους τοῦ Α'ΒΓ εἰς τὰς δύο περιπτώσεις;

456. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῆς κορυφῆς Μ πυραμίδος ΜΑΒΓΔ μὲ σταθερὰν βάσιν τὸ τετράπλευρον ΑΒΓΔ, ἐὰν εἶναι $A\widehat{M}B = \Gamma\widehat{M}\Delta$ καὶ $B\widehat{M}\Gamma = \Delta\widehat{M}A$.

457. Δίδεται εὐθεῖα α. Θεωροῦμεν τυχὸν σημεῖον Μ μιᾶς δοθείσης εὐθείας ε καὶ τὸ συμμετρικὸν Μ' τοῦ Μ πρὸς α. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν σημείων Μ'.

458. Μεταβλητοῦ τετραέδρου εἶναι σταθερὸν τὸ κέντρον βάρους G, μία κορυφή, καὶ τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν τριῶν ἀκμῶν ἐκ τῆς ἐν λόγῳ κορυφῆς. Νὰ ἀποδειχθῇ ὅτι ὁ γ. τόπος τοῦ κέντρου τῆς περιγεγραμμένης περὶ τὸ τετράεδρον σφαίρας εἶναι ἐπίπεδον.

459. Εἰς μεταβλητὸν τετράεδρον ΑΒΓΔ ἡ κορυφὴ Α εἶναι σταθερά, ἐνῷ αἱ ὑπόλοιποι κορυφαὶ κινοῦνται ἐπὶ σταθερᾶς σφαίρας. Ἐὰν $B\Gamma^2 + \Gamma\Delta^2 + \Delta B^2$ σταθερόν, νὰ δειχθῇ ὅτι ὁ γ. τόπος τοῦ κέντρου βάρους τοῦ ΑΒΓΔ εἶναι μία σφαῖρα.

460. Τρία ἐπίπεδα διέρχονται διὰ σημείου Ο. Ἐὰν Α,Β,Γ αἱ προβολαὶ σημείου Μ τοῦ χώρου ἐπὶ τῶν τριῶν ἐπιπέδων, νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ Μ, ὥστε ἡ εὐθεῖα ΟΜ νὰ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον ΑΒΓ.

461. Αἱ τρεῖς κορυφαὶ στρεβλοῦ τετραπλεύρου εἶναι σταθεραί. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῆς τετάρτης κορυφῆς, ὅταν τὸ παραλληλόγραμμον μὲ κορυφὰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ στρεβλοῦ τετραπλεύρου α) ἔχῃ δοθέντα λόγον διαγωνίων, β) ἔχῃ δοθὲν ἐμθαδόν, γ) εἶναι ὅμοιον πρὸς δοθὲν παραλληλόγραμμον.

462. Μεταβλητὸν ἐπίπεδον ΑΒΓ τέμνει τὰς ἀκμὰς τριέδρου ΟΑΒΓ, ὥστε αἱ διαφοραὶ ΟΒ-ΟΑ, ΟΓ-ΟΑ νὰ εἶναι σταθεραί. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ κέντρου βάρους τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

463. Δίδονται τρεῖς σφαῖραι $(O_1,R_1),(O_2,R_2),(O_3,R_3)$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον G τῶν σημείων M, ὥστε:

$$G=\left\{M/\ \frac{\mathcal{D}_{O_1}(M)}{R_1^2}=\frac{\mathcal{D}_{O_2}(M)}{R_2^2}=\frac{\mathcal{D}_{O_3}(M)}{R_3^2}\right\}$$

464. Δίδεται ἡ γωνία $x0y$. Θέτομεν p_x, p_y τὰς προβολὰς τμήματος ΟΜ ἐπὶ τῶν $0x, 0y$. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον G τῶν σημείων M, ὥστε $G=\{M/\ p_x+p_y=\lambda\}$, ὅπου λ δοθὲν μῆκος.

465. Σφαῖρα ἐφάπτεται δύο ἀσυμβάτων εὐθειῶν καὶ ἔχει τὸ κέντρον της ἐπὶ τοῦ μεσοκαθέτου ἐπιπέδου τῆς κοινῆς καθέτου αὐτῶν. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας.

466. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῆς τρίτης κορυφῆς μεταβλητοῦ τριγώνου, τοῦ ὁποίου αἱ δύο κορυφαὶ κεῖνται ἐπὶ δύο δοθέντων ἐπιπέδων, αἱ πλευραὶ του δὲ εἶναι παράλληλοι πρὸς τρεῖς σταθερὰς συνεπιπέδους εὐθείας.

467. Ἐπὶ τῶν ἀκμῶν ΑΔ, ΒΔ, ΓΔ τετραέδρου λαμβάνομεν τὰ σημεῖα Α', Β', Γ' ἀντιστοίχως, ὥστε ΑΑ'=ΒΒ'=ΓΓ'=κ. Ὅταν τὸ κ μεταβάλλεται, τὸ σημεῖον τομῆς τῶν ἐπιπέδων ΒΓΑ', ΓΑΒ', ΑΒΓ' γράφει μίαν εὐθεῖαν.

468. Δίδεται ἐπίπεδον Π καὶ δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι α, α' παράλληλοι πρὸς τὸ Π. Εὐθεῖα ε τέμνει τὰς α, α' καὶ εἶναι κάθετος ἐπὶ τὴν α. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ σημείου τομῆς τῆς ε μετὰ τοῦ Π.

469. Δίδονται δύο εὐθεῖαι α καὶ β καὶ ἕνα σημεῖον Ο. Θεωροῦμεν τὰ εὐθ. τμήματα ΟΜ, ἑκάστου τῶν ὁποίων αἱ προβολαί ἐπί τάς α καί β ἔχουν δοθέν ἄθροισμα λ. Νά εὑρεθῆ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων Μ.

470. Δίδεται τρίεδρος στερεά γωνία Οxyz. Ἐπί τῶν ἀκμῶν λαμβάνομεν τά σημεῖα Α, Β, Γ, ὥστε ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ. Νά εὑρεθῆ ὁ γ. τόπος τοῦ κέντρου βάρους G, τοῦ κέντρου τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου Ο καί τοῦ ὀρθοκέντρου Η τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.

471. Δίδεται περιφέρεια (Ο,R) καί σημεῖον Α αὐτῆς. Φέρομεν εἰς Α τήν κάθετον ἐπί τό ἐπίπεδον τῆς περιφερείας καί λαμβάνομεν τό σημεῖον Β ἐπ' αὐτῆς. Ἐάν ΜΝ μία τυχοῦσα διάμετρος τοῦ κύκλου, εὕρατε τόν γ. τόπον τοῦ ὀρθοκέντρου, ὡς καί τοῦ κέντρου τοῦ περιγεγραμμένου κύκλου τοῦ τριγώνου ΒΜΝ.

472. Δίδεται τρίεδρος στερεά γωνία Οxyz. Νά εὑρεθῆ τό σύνολον τῶν σημείων Μ, τῶν ἐσωτερικῶν τῆς τριέδρου, διά τά ὁποῖα τό ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπό τῶν τριῶν ἑδρῶν τῆς τριέδρου εἶναι δοθέν λ.

473. Δίδονται δύο εὐθ. τμήματα ΑΒ καί ΓΔ καί σημεῖον Ο. Θεωροῦμεν εὐθεῖαν ε διερχομένην διά τοῦ Ο καί ἐπ' αὐτῆς τό εὐθ. τμῆμα ΜΝ, διά τό ὁποῖον οἱ ὄγκοι τῶν τετραέδρων ΑΒΜΝ καί ΓΔΜΝ ἔχουν δοθέντα λόγον κ. Νά εὑρεθῆ τό σύνολον G τῶν εὐθειῶν ε.

474. Δίδεται κύκλος (Ο), μία διάμετρος ΑΑ' αὐτοῦ καί ἐπί τῆς διά τοῦ Α καθέτου ἐπί τό ἐπίπεδον τοῦ (Ο) ἕνα σημεῖον Ρ. Ὀνομάζομεν Ρx τήν διά τοῦ Ρ παράλληλον πρός τήν ΑΑ' καί Β τήν προβολήν τοῦ Α ἐπί τήν ΡΟ. Θεωροῦμεν τά σημεῖα Μ, ἑκάστου τῶν ὁποίων αἱ ἀποστάσεις ἀπό τῶν εὐθειῶν ΡΟ καί Ρx ἔχουν λόγον ἴσον πρός ΑΒ : ΑΡ. Νά εὑρεθῆ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων Μ.

475. Ἐπί ἐπιπέδου Π δίδονται δύο εὐθεῖαι α, β καί σημεῖον Ρ. Θεωροῦμεν τυχόντα κῶνον μέ γενετείρας α, β καί ἐκ τοῦ Ρ τά ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα εἰς τόν κῶνον. Νά εὑρεθῆ τό σύνολον τῶν γενετειρῶν ἐπαφῆς.

476. Ἐπί ἐπιπέδου Π δίδεται σημεῖον O. Ἡμιευθεῖα Ox ἐκτός τοῦ ἐπιπέδου Π, εἶναι σταθερά, ἐνῶ ἡ μεταβλητή ἡμιευθεῖα Oy κεῖται ἐπί τοῦ ἐπιπέδου Π. Νά εὑρεθῇ τό σύνολον τῶν συμμετρικῶν ἡμιευθειῶν τῆς Ox πρός Oy.

477. Δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι AP, BQ διέρχονται ἀπό δύο σταθερά σημεῖα A καί B, ἡ κοινή κάθετος δέ αὐτῶν PQ διέρχεται διά σταθεροῦ σημείου O. Ἐάν ὁ λόγος $\frac{OP}{OQ}$ εἶναι σταθερός, νά εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν P, Q.

478. Δίδεται σφαῖρα (O,R) καί δύο σταθεραί ἐφαπτόμεναι τῆς σφαίρας p, q. Τρίτη ἐφαπτομένη αὐτῆς ἔστω εἰς σημεῖον M, τέμνει τάς p, q. Νά εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ σημείου M.

479. Ἐπί ἐπιπέδου Π δίδονται τά σημεῖα A καί B. Θεωροῦμεν δύο σφαίρας (O,R), (O′,R′) ἐφαπτομένας τοῦ ἐπιπέδου εἰς A καί B ἀντιστοίχως, μέ $\frac{R}{R'}=\frac{\mu}{\nu}$. Νά εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν κύκλων τομῆς.

480. Δίδεται ἡμισφαίριον βάσεως (O,R). Θεωροῦμεν δύο σφαίρας (K,ρ), (Λ,z) ἐφαπτομένας τοῦ ἡμισφαιρίου, τοῦ ἐπιπέδου τῆς βάσεως καί μεταξύ των εἰς M. 1) Νά δειχθῇ ὅτι τό ἐφαπτόμενον εἰς M ἐπίπεδον τῶν σφαιρῶν διέρχεται διά σταθεροῦ σημείου. 2) Νά εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ M.

481. Δίδεται σφαῖρα (O) καί σημεῖα A, B ἐκτός αὐτῆς. Θεωροῦμεν σφαῖραν (K) διερχομένην διά τῶν A, B καί ἐφαπτομένην τῆς (O). Νά εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ σημείου ἐπαφῆς.

482. Δίδεται τρισορθογώνιος τρίεδρος Oxyz. Θεωροῦμεν τά σημεῖα A, B, Γ τῶν ἀκμῶν Ox, Oy, Oz διά τά ὁποῖα εἶναι OA+OB+OΓ = λ.

1) Νά εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας OABΓ.

2) Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ἡ ἐν λόγῳ σφαῖρα διέρχεται καί διά δευτέρου σταθεροῦ σημείου.

483. Δίδονται δύο σφαῖραι $(O_1,R_1),(O_2,R_2)$ καί σημεῖον Α. Θεωροῦμεν σφαῖραν διερχομένην διά τοῦ Α καί ἐφαπτομένην τῶν (O_1,R_1) καί (O_2,R_2) εἰς σημεῖα M_1 καί M_2 ἀντιστοίχως. Νά εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν M_1,M_2.

484. Δίδονται τρεῖς σφαῖραι $(O_1,R_1),(O_2,R_2),(O_3,R_3)$ καί τυχοῦσα σφαῖρα ἐφαπτομένη αὐτῶν εἰς M_1,M_2,M_3 ἀντιστοίχως. Νά εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν M_1,M_2,M_3.

485. Δίδονται δύο τεμνόμεναι ὀρθογωνίως σφαῖραι (O_1,R_1), (O_2,R_2) καί σημεῖον Α. Νά εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν κέντρων τῶν σφαιρῶν τῶν διερχομένων διά τοῦ Α καί τεμνουσῶν τάς $(O_1),(O_2)$ κατά κύκλους ὀρθογωνίους.

486. Δίδεται ἐπίπεδον τετράπλευρον ΑΒΓΔ. Νά εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων Μ, δι' ἕκαστον τῶν ὁποίων ἡ τετράεδρος γωνία Μ.ΑΒΓΔ νά δύναται νά τμηθῇ:

1) κατά ὀρθογώνιον, 2) κατά ρόμβον, 3) κατά τετράγωνον.

Ὑπόδειξις. Ἔστω $E=B\Gamma\cap A\Delta$, $Z=AB\cap\Gamma\Delta$. Ἵνα μία τομή εἶναι παραλληλόγραμμον πρέπει καί ἀρκεῖ νά εἶναι παράλληλος πρός τό ἐπίπεδον τῶν ΕΜ, ΖΜ. Θέτομεν ἀκόμη $H=EZ\cap B\Delta$ καί $I=EZ\cap A\Gamma$. Αἱ διαγώνιοι τῆς τομῆς εἶναι παράλληλοι πρός τάς $MH=EMZ\cap BM\Delta$, $IM=EMZ\cap AM\Gamma$.

487. Δίδονται δύο σφαῖραι $(O_1,R_1),(O_2,R_2)$. Ἔστω Α,Β σημεῖα τῆς ἐπιφανείας τῶν $(O_1,R_1),(O_2,R_2)$ ἀντιστοίχως. Νά εὑρεθῇ τό σύνολον τῶν σημείων Μ, μέσων τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ.

488. Δίδεται σφαῖρα (O,R) καί ἐπίπεδον Π, ἤ εὐθεῖα ε, ἤ εὐθ. τμῆμα ΣΡ. Ἐάν $A\in(O,R)$ καί Β σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου ἤ τῆς εὐθείας ἤ τοῦ εὐθ. τμήματος, νά εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ μέσου τοῦ εὐθ. τμήματος ΑΒ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟΝ ΕΝΔΕΚΑΤΟΝ

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΑΙ

Ἔχομεν ὁρίσει τὴν "γεωμετρικὴν κατασκευὴν" εἰς τὸ 2ον τεῦχος "Γεωμετρικοὶ τόποι καὶ κατασκευαί". Ἐνταῦθα περιοριζόμεθα νὰ εἴπωμεν ὅτι ἐπὶ γνωστοῦ ἐπιπέδου θὰ θεωρῶμεν πραγματοποιήσιμον ἑκάστην γνωστὴν ἐκ τῆς ἐπιπεδομετρίας κατασκευὴν καὶ ἀκόμη δεχόμεθα ὅτι [1] εἶναι γεωμετρικῶς δυνατή:

1) ἡ κατασκευὴ τῆς τομῆς δύο ἐπιπέδων·
2) ἡ κατασκευὴ τῆς τομῆς εὐθείας καὶ ἐπιπέδου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ὁμὰς Α'.

489. Διὰ δοθέντος σημείου Α νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα δύο δοθείσας ἀσυμβάτους εὐθείας ε καὶ ε'.

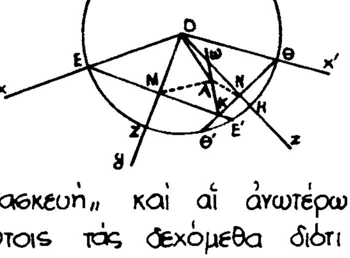
Σύνθεσις. Θεωροῦμεν τὴν τομὴν η τῶν ἐπιπέδων $(A,\varepsilon),(A,\varepsilon')$.

Ἀπόδειξις. Προφανής.

Διερεύνησις. Διὰ νὰ μὴ τέμνῃ μίαν τῶν ε,ε' ἡ τομὴ η τῶν ἐπιπέδων $(A,\varepsilon),(A,\varepsilon')$ θὰ πρέπῃ μία τῶν ε,ε' νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς ἓν ἐκ τῶν $(A,\varepsilon'),(A,\varepsilon)$ ἀντιστοίχως.

490. Κατασκευὴ τριέδρου στερεᾶς γωνίας ἀπὸ τὰς τρεῖς ἐπιπέδους γωνίας αὐτῆς α,β,γ.

Σύνθεσις. Ἐπὶ ἑνὸς γνωστοῦ ἐπιπέδου λαμβάνομεν τὰς διαδοχικὰς γωνίας $y\hat{O}z=\alpha$, $y\hat{O}x=\beta$, $z\hat{O}x'=\gamma$. Μὲ κέντρον Ο καὶ ἀκτῖνα αὐθαίρετον R γράφομεν περιφέρειαν τέμνουσαν τὰς Ox,Oy,Oz,Ox' εἰς



---

[1] Ὁπωσδήποτε ὁ ὅρος "γεωμετρικὴ κατασκευὴ" καὶ αἱ ἀνωτέρω δύο παραδοχαὶ δὲν συσχετίζονται. Ἐν τούτοις τὰς δεχόμεθα διότι οὕτως εὐρύνεται τὸ πεδίον τῶν γεωμετρικῶν κατασκευῶν εἰς τὸν χῶρον.

Ε,Ζ,Η,Θ ἀντιστοίχως. Φέρομεν τάς καθέτους ΕΜ καί ΘΝ ἐπί τάς Οy, Οz ἀντιστοίχως, αἱ ὁποῖαι τέμνουν τήν περιφέρειαν εἰς Ε′, Θ′ καί μεταξύ των εἰς σημεῖον Κ. Εἰς τό σημεῖον Κ ὑψοῦμεν τήν κάθετον ἐπί τό ἐπίπεδον τοῦ κύκλου, ἔστω Κω. Εἰς τό ἐπίπεδον ΘΚω γράφομεν περιφέρειαν (Ν,ΝΘ) τέμνουσαν τήν Κω εἰς Λ. Ἡ ζητουμένη τρίεδρος εἶναι ἡ ΟyzΛ.

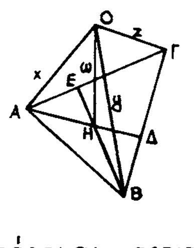
Ἀπόδειξις. Ἡ ΛΝ συμφώνως πρός τό θεώρημα τῶν τριῶν καθέτων εἶναι κάθετος ἐπί τήν ΟΝ. Τά τρίγωνα ΟΝΛ, ΟΝΘ εἶναι ἴσα, διότι εἶναι ὀρθογώνια, ἔχουν τήν ΟΝ κοινήν καί ΝΛ=ΝΘ. Ἄρα $\widehat{ΛΟΝ}=\widehat{zOx'}=\beta$, ΟΛ=ΟΘ. Τά τρίγωνα ΟΜΛ καί ΟΜΕ εἶναι ἴσα, διότι εἶναι ὀρθογώνια ($\widehat{ΟΜΛ}=1^{L}$, συμφώνως πρός τό θεώρημα τῶν τριῶν καθέτων), ἔχουν τήν ΟΜ κοινήν καί εἶναι ΟΛ=ΟΘ==ΟΕ, ὅθεν $\widehat{ΜΟΛ}=\widehat{xOy}=\gamma$.

Διερεύνησις. Διά νά ἔχωμεν λύσιν, θά πρέπῃ α) $\boxed{\alpha+\beta+\gamma<4^{L}}$, β) ΝΛ=ΝΘ>ΝΚ ⟹ ΝΘ′>ΝΚ, ὁμοίως ΜΕ′>ΜΚ, δηλαδή τό σημεῖον τομῆς τῶν ΕΜ, ΘΝ νά εὑρίσκεται ἐντός τοῦ κύκλου Ο. Ἐν τοιαύτῃ περιπτώσει, ἐπειδή $\widehat{Θ'ΟΗ}=\widehat{ΗΟΘ}=\beta$, $\widehat{Ε'ΟΖ}=\widehat{ΖΟΕ}=\gamma$, θά πρέπῃ $\widehat{yOz}<\beta+\gamma$, ἤτοι $\boxed{\alpha<\beta+\gamma}$. Ἀκόμη $\overset{\frown}{ΕΖ}<\overset{\frown}{ΖΗ}+\overset{\frown}{ΗΘ}$ καί $\overset{\frown}{ΘΗ}<\overset{\frown}{ΕΖ}+\overset{\frown}{ΖΗ}$, ἤτοι $\beta-\gamma<\alpha$ καί $\gamma-\beta<\alpha$, ὅθεν $\boxed{|\beta-\gamma|<\alpha}$. Τελικῶς ἔχομεν $\boxed{|\beta-\gamma|<\alpha<\beta+\gamma}$. Πλῆθος λύσεων δύο: ἡ τρίεδρος ΟyzΛ καί ἡ κατά κορυφήν ταύτης.

Ἐφαρμογή. Νά κατασκευασθῇ τρίεδρος ἀπό τάς τρεῖς διέδρους γωνίας αὐτῆς Α,Β,Γ.

491. Νά κατασκευασθῇ τρισορθογώνιος στερεά γωνία Οxyz, τῆς ὁποίας αἱ ἀκμαί Οx,Οy,Οz διέρχονται διά τριῶν δοθέντων σημείων Α,Β,Γ.

Ἀνάλυσις. Ἔστω Ο.ΑΒΓ ἡ ζητουμένη τρισορθογώνιος. Εἶναι γνωστόν ὅτι ἡ προβολή Η τῆς κορυφῆς Ο ἐπί τό ἐπίπεδον τοῦ $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$ ταυτίζεται πρός τό ὀρθόκεντρον τοῦ $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$.



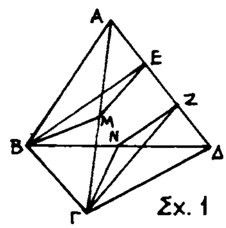
Σύνθεσις. Εὑρίσκομεν τό ὀρθόκεντρον Η τοῦ $\overset{\triangle}{ΑΒΓ}$. Εἰς τό σημεῖον Η θεωροῦμεν τήν κάθετον ἐπί τό ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου, ἔστω Ηω. Εἰς τό ἐπίπεδον (ΑΗ,Ηω) γράφομεν περιφέρειαν διαμέτρου ΑΔ. Ἡ τομή τῆς περιφερείας καί τῆς Ηω μᾶς δίδει τό ζητούμενον σημεῖον.

Ἀπόδειξις. Εἶναι $ΒΓ \perp ΟΗ \wedge ΒΓ \perp ΑΔ \Rightarrow ΒΓ \perp ΟΑ$. Ἀλλὰ ἐκ κατασκευῆς $ΟΑ \perp ΟΔ$, ἄρα $ΟΑ \perp ΒΟΓ$, ἤτοι $\widehat{ΑΟΒ} = 1^L$, $\widehat{ΑΟΓ} = 1^L$. Ὁμοίως εὑρίσκομεν $ΟΒ \perp ΑΓ$, ἐπειδὴ δὲ $ΟΒ \perp ΟΑ$, θὰ εἶναι καὶ $ΟΒ \perp ΑΟΓ$, ἤτοι $\widehat{ΒΟΓ} = 1^L$.

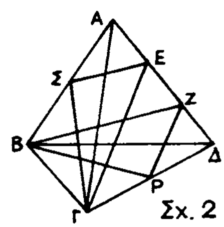
Διερεύνησις. Ἵνα ἔχωμεν λύσιν, πρέπει ἡ Ηω νὰ τέμνῃ τὴν περιφέρειαν, ἤτοι τὸ Η νὰ εἶναι ἐσωτερικὸν σημεῖον τοῦ ὕψους ΑΔ. Ἄρα τὸ τρίγωνον ΑΒΓ πρέπει νὰ εἶναι ὀξυγώνιον.

492. Δίδονται τέσσερα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ μὴ κείμενα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Νὰ κατασκευασθοῦν τέσσερα ἐπίπεδα παράλληλα, ἰσαπέχοντα καὶ διερχόμενα ἀντιστοίχως διὰ τῶν τεσσάρων σημείων.

Σύνθεσις. Λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς ἀκμῆς ΑΔ τὰ σημεῖα Ε, Ζ, ὥστε ΑΕ = ΕΖ = ΖΔ. Ἔστω Μ, Ν τὰ μέσα τῶν ΑΓ, ΒΔ (Σχ. 1). Διὰ τῶν Α καὶ Δ θεωροῦμεν τὰ παράλληλα ἐπίπεδα πρὸς τὰ ΒΜΕ, ΓΝΖ.



Σχ. 1



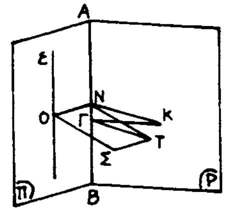
Σχ. 2

Ἀπόδειξις. Εἶναι εὔκολος, ἂς γίνῃ ἀπὸ τὸν μαθητήν.

Διερεύνησις. Ὑπάρχουν ἐν γένει δώδεκα λύσεις. Εἰς τὰ Σχ. 1 καὶ Σχ. 2 φαίνονται αἱ δύο ἐξ αὐτῶν. Ἐὰν ἀντικατασταθῇ ἡ ΑΔ μὲ τὰς ὑπολοίπους πέντε ἀκμάς, εὑρίσκομεν τὰς λοιπὰς δέκα.

493. Δίδεται δίεδρος ΠΑΒΡ. Ἔστω ε εὐθεῖα τοῦ ἐπιπέδου Π, παράλληλος πρὸς τὴν ἀκμὴν ΑΒ καὶ Σ σημεῖον ἐσωτερικὸν τῆς διέδρου. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σημεῖον Κ τῆς ἕδρας Ρ, ὥστε ἡ ἀπόστασις τοῦ Σ ἀπὸ παντὸς σημείου Ο τῆς ε νὰ ἰσοῦται μὲ τὴν ἀπόστασιν τοῦ Κ ἀπὸ τῆς προβολῆς τοῦ Ο ἐπὶ τὴν ΑΒ.

Ἀνάλυσις. Ἔστω Κ τὸ ζητούμενον σημεῖον. Θὰ εἶναι ΣΟ = ΚΝ. Φέρομεν ΣΤ ∥= ΟΝ. Τὸ σημεῖον Τ εἶναι ὡρισμένον, διότι ἡ ἀπόστασις τῶν ε, ΑΒ ἔχει ὡρισμένον μῆκος καὶ διεύθυνσιν. Ἐκ τοῦ παραλληλογράμμου



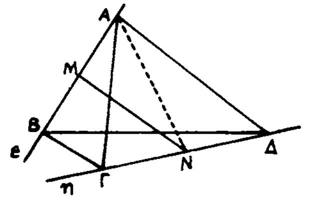
ΟΝΤΣ ⇒ ΤΝ=ΟΣ. Ἄρα ΤΝ=ΚΝ. Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ εὑρεθῇ ἐπὶ τοῦ Ρ σημεῖον Κ ὥστε διὰ πᾶν Ν∈ΑΒ νὰ ἔχωμεν ΤΝ=ΚΝ.

Σύνθεσις. Φέρομεν ΤΓ⊥ΑΒ. Ἐπὶ τῆς καθέτου εἰς Γ ἐπὶ τὴν ΑΒ τῆς κειμένης ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον Ρ λαμβάνομεν ΓΤ=ΓΚ.

Ἀπόδειξις. Τὰ τρίγωνα ΤΓΝ, ΚΓΝ εἶναι προφανῶς ἴσα. Ἄρα ΤΝ=ΚΝ. Ἐκ τοῦ παραλληλογράμμου ΟΝΤΣ, ἔχομεν ὅμως ΣΟ=ΤΝ, ὅθεν ΣΟ=ΚΝ.

Διερεύνησις. Ἔχομεν πάντα μίαν λύσιν.

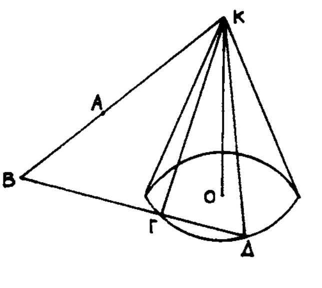
494. Δίδονται δύο ὀρθογώνιοι εὐθεῖαι ε καὶ η. Νὰ κατασκευασθῇ κανονικὸν τετράεδρον, τοῦ ὁποίου αἱ δύο ἀπέναντι ἀκμαὶ νὰ κεῖνται ἐπὶ τῶν ε καὶ η ἀντιστοίχως.



Ἀνάλυσις. Ἔστω ΑΒΓΔ τὸ ζητούμενον κανονικὸν τετράεδρον ἀκμῆς α. Λαμβάνομεν τὰ μέσα Μ,Ν τῶν ΑΒ, ΓΔ. Τὸ εὐθ. τμῆμα ΜΝ εἶναι ἡ ἀπόστασις τῶν ε,η. Τοῦτο εἶναι γνωστόν, διότι δίδονται αἱ εὐθεῖαι ε καὶ η. Ἔστω ΜΝ=λ. Εὐκόλως εὑρίσκεται ὅτι $α=\frac{2λ}{\sqrt{2}}$. Ἄρα ΜΑ= =ΜΒ=ΝΓ=ΝΔ=$\frac{λ}{\sqrt{2}}$.

Σύνθεσις, ἀπόδειξις καὶ διερεύνησις, ἂς γίνουν ἀπὸ τὸν μαθητήν.

495. Δίδεται ὀρθὸς κυκλικὸς κῶνος (Κ) καὶ σημεῖον Α. Νὰ ἀχθῇ διὰ τοῦ Α ἐπίπεδον τέμνον τὸν κῶνον κατὰ δύο γενετείρας τῶν ὁποίων ἡ γωνία νὰ εἶναι ἴση πρὸς φ.

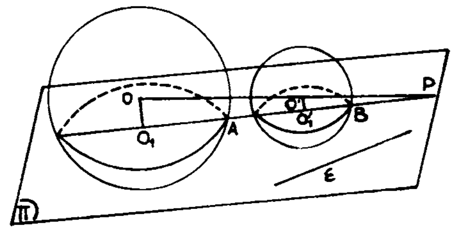


Ἀνάλυσις. Θέτομεν Β τὸ σημεῖον τομῆς τῆς ΚΑ καὶ τοῦ ἐπιπέδου (Ο,R) καὶ Γ,Δ τὰ σημεῖα τομῆς τοῦ ζητουμένου ἐπιπέδου μετὰ τοῦ ὁδηγοῦ κύκλου (Ο,R). Τὸ τρίγωνον ΓΚΔ εἶναι κατασκευάσιμον, διότι εἶναι ἰσοσκελὲς μὲ ἴσας πλευρὰς ΚΓ=ΚΔ=λ (λ ἡ γενέτειρα τοῦ κώνου), ἀκόμη $\widehat{ΓΚΔ}$= =φ (γνωστή). Ἄρα τὸ εὐθ. τμῆμα ΓΔ εἶναι γνωστὸν ἔστω μ. Ἀρκεῖ πρὸς τούτοις διὰ τοῦ σημείου Β νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα ἀποκόπτουσα ἀπὸ τὸν κύκλον (Ο,R) χορδὴν μήκους μ.

Ἡ λύσις τοῦ προβλήματος αὐτοῦ, ἡ ὁποία εἶναι εὔκολος, ἂς γίνη ἀπὸ τὸν μαθητήν.

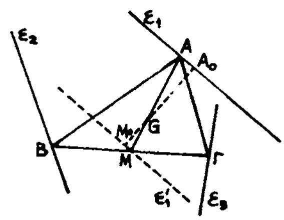
496. Δίδονται δύο σφαῖραι (O,R), (O',R') καὶ εὐθεῖα ε. Ζητεῖται νὰ ἀχθῆ διὰ τῆς ε ἐπίπεδον τέμνον τὰς (O) καὶ (O') ἀντιστοίχως κατὰ τοὺς κύκλους (O_1,R_1) καὶ (O_1',R_1'), ὥστε $\frac{R}{R_1}=\frac{R'}{R_1'}$.

Ἀνάλυσις. Ἔστω Π τὸ ζητούμενον ἐπίπεδον. Θέτομεν $P=\Pi\cap OO'$. Τὰ σημεῖα O_1, O_1', P κεῖνται ἐπ' εὐθείας. Εἶναι $\overset{\triangle}{OO_1A}\sim\overset{\triangle}{O'O_1'B}$. Ἄρα $\frac{O'O_1'}{OO_1}=\frac{R'}{R}$. Ἀλλὰ τότε εἶναι προφανὲς ὅτι καὶ $\frac{O'P}{OP}=\frac{R'}{R}$, ἤτοι τὸ σημεῖον P εἶναι σταθερὸν καὶ τὸ ἐπίπεδον Π καθωρισμένον: (ε, P). Τὸ ὑπόλοιπον μέρος τοῦ προβλήματος εἶναι εὔκολον καὶ ἐπαφίεται διὰ τὸν μαθητήν.



497. Νὰ κατασκευασθῆ τρίγωνον μὲ κορυφὰς ἐπὶ τριῶν ἀσυμβάτων ἀνὰ δύο εὐθειῶν καὶ κέντρον βάρους δοθὲν σημεῖον G.

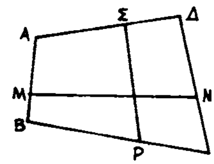
Ἀνάλυσις. Ἔστω ΑΒΓ τὸ ζητούμενον τρίγωνον μὲ κέντρον βάρους τὸ σημεῖον G. Ἐὰν Μ τὸ μέσον τῆς ΒΓ, ἔχομεν $AG=2GM$. Δεδομένου ὅτι $A\in\varepsilon_1$ τὸ Μ εἶναι σημεῖον τῆς ε_1' παραλλήλου πρὸς τὴν ε_1 καὶ ὁριζομένης ὡς κάτωθι. Φέρομεν $GA_0\perp\varepsilon_1$ καὶ λαμβάνομεν ἐπὶ τῆς A_0G σημεῖον M_0, ὥστε $GM_0=\frac{A_0G}{2}$. Ἡ ἐκ τοῦ M_0 παράλληλος πρὸς τὴν ε_1 εἶναι ἡ ζητουμένη ε_1'. Ὑποθέσωμεν ἤδη ὅτι ΣΡ κοινὴ κάθετος τῶν $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ $(\Sigma\in\varepsilon_2, P\in\varepsilon_3)$. Τὸ Μ κεῖται, ὡς εὐκόλως διαπιστοῦται, ἐπὶ τοῦ μεσοκαθέτου ἐπιπέδου ἐπὶ τὴν ΣΡ, ἔστω Π.



Σύνθεσις. Εὑρίσκομεν τὸ σημεῖον $M=\varepsilon_1'\cap\Pi$ καὶ κατόπιν τὸ $B=\varepsilon_2\cap(\varepsilon_3, M)$.

Ἡ ἀπόδειξις καὶ ἡ διερεύνησις ἂς γίνουν ἀπὸ τὸν μαθητήν.

498. Δίδεται στρεβλὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ. Ἐπὶ τῶν ΑΒ καὶ ΓΔ ἀντιστοίχως δύο σημεῖα Μ καὶ Ν, ὥστε $\frac{MA}{MB}=\frac{N\Delta}{N\Gamma}$. Νὰ εὑρεθοῦν ἐπὶ τῶν ΒΓ καὶ ΔΑ δύο σημεῖα Ρ καὶ Σ ἀντιστοιχως, ὥστε ἡ εὐθεία ΡΣ νά εἶναι κάθετος ἐπί τήν ΜΝ καί $\frac{ΡΒ}{ΡΓ}=\frac{ΣΑ}{ΣΔ}$.



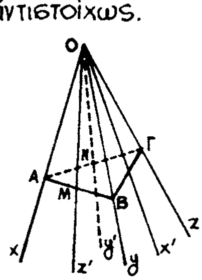
Ἀνάλυσις. Ἔστω Σ,Ρ τά ζητούμενα σημεῖα. Ἐκ τῆς $\frac{ΜΑ}{ΜΒ}=\frac{ΝΔ}{ΝΓ}$ προκύπτει ὅτι ἡ ΜΝ εἶναι παράλληλος πρός τό ἐπίπεδον τό ὁριζόμενον ἀπό τάς διευθύνσεις τῶν ΑΔ, ΒΓ. Ὁμοίως ἐκ τῆς $\frac{ΡΒ}{ΡΓ}=\frac{ΣΑ}{ΣΔ}$ προκύπτει ὅτι ἡ ΡΣ εἶναι παράλληλος πρός τό ἐπίπεδον τό ὁριζόμενον ἀπό τάς διευθύνσεις τῶν ΑΒ, ΓΔ, ἔστω τό (ΑΒ,ΓΔ). Ἀλλά τότε ἡ διεύθυνσις τῆς ΣΡ εἶναι ὡρισμένη ἀπό τήν τομήν δ τοῦ ἐπιπέδου (ΑΒ,ΓΔ) καί τοῦ καθέτου ἐπιπέδου Π ἐπί τήν ΜΝ, ὅτε τό πρόβλημα ἀνάγεται εἰς τήν εὕρεσιν τῶν σημείων Σ,Ρ, ὥστε ΣΡ∥δ.

Σύνθεσις. Θεωροῦμεν τά ἐπίπεδα τά διερχόμενα διά τῶν ΑΔ, ΒΓ καί παράλληλα πρός τήν εὐθεῖαν δ. Ἡ ζητουμένη ΣΡ εἶναι ἡ εὐθεῖα τομῆς των.

Ἀπόδειξις. Πράγματι, ἡ ΣΡ ὡς παράλληλος πρός τό Π εἶναι κάθετος ἐπί τήν ΜΝ, ὡς παράλληλος δέ πρός τό (ΑΒ,ΓΔ) συμφώνως πρός τό θεώρημα τοῦ Θαλοῦ θά εἶναι $\frac{ΑΣ}{ΣΔ}=\frac{ΒΡ}{ΡΓ}$.

Ἡ διερεύνησις ἐπαφίεται εἰς τόν μαθητήν.

499. Νά κατασκευασθῇ τρίεδρος Οxyz ἐκ τῶν διχοτόμων Οx′, Οy′, Οz′ τῶν ἑδρῶν yOz, zOx, xOy αὐτῆς ἀντιστοίχως.



Ἀνάλυσις. Ἔστω Οxyz ἡ ζητουμένη τρίεδρος. Ἐκ σημείου Α τῆς Οx φέρομεν τάς καθέτους ἐπί τάς Οy′, Οz′. Τά τρίγωνα ΑΟΒ, ΑΟΓ εἶναι ἰσοσκελῆ καί τά σημεῖα Μ, Ν εἶναι τά μέσα τῶν βάσεων ΑΒ, ΑΓ αὐτῶν. Ἡ εὐθεῖα ΜΝ∥ΒΓ. Τό ἐπίπεδον τό διερχόμενον διά τῆς Οx′ καί κάθετον ἐπί τήν ἕδραν yOz εἶναι προφανῶς κάθετον ἐπί τήν ΒΓ, ἤτοι καί ἐπί τήν ΜΝ, δηλαδή κάθετον ἐπί τήν ἕδραν y′Οz′. Ἄρα τά ἐπίπεδα τά διερχόμενα διά τῶν διχοτόμων τῶν ἑδρῶν xOy, yOz, zOx καί ἀντιστοίχως κάθετα ἐπ' αὐτάς, εἶναι τά ἐπίπεδα-ὕψη τῆς τριέδρου Οx′y′z′.

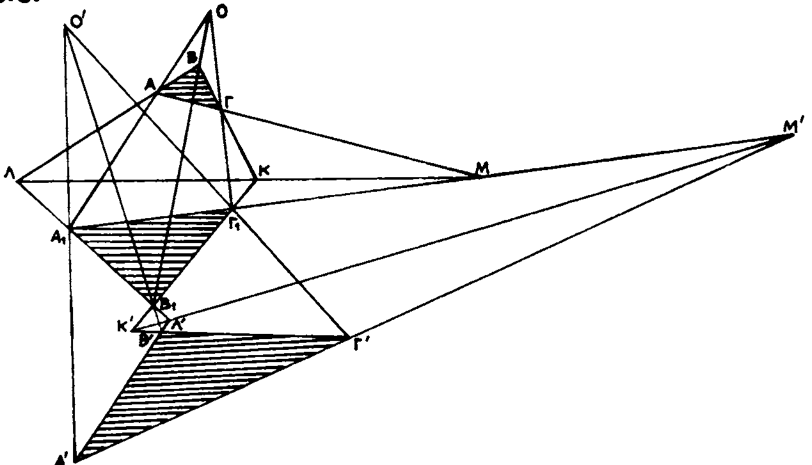
Σύνθεσις. Θεωροῦμεν τά ἐπίπεδα-ὕψη $Π_{x'}, Π_{y'}, Π_{z'}$ τῆς τριέδρου Οx′y′z′ καί ἐκ τῶν ἀκμῶν Οx′, Οy′, Οz′ φέρομεν τά κάθετα ἐπ' αὐτά ἐπίπεδα yOz, zOx, xOy. Ἡ τρίεδρος Οxyz εἶναι ἡ ζητουμένη.

Ἡ ἀπόδειξις καί ἡ διερεύνησις ἄς γίνουν ἀπό τόν μαθητήν.

Ὁμάς Β΄.

500. Δίδονται δύο τρίγωνα $ΑΒΓ, Α'Β'Γ'$ καί ἐπίπεδον Π. Νά κατασκευασθῆ τρίγωνον $Α_1Β_1Γ_1$ ἐπί τοῦ ἐπιπέδου Π, ὥστε αἱ εὐθεῖαι $ΑΑ_1, ΒΒ_1, ΓΓ_1$ νά διέρχωνται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου, τό αὐτό δέ νά συμβαίνη καί διά τάς $Α'Α_1, Β'Β_1, Γ'Γ_1$.

Ἀνάλυσις.



Ἔστω $Α_1Β_1Γ_1$ τό ζητούμενον τρίγωνον. Διά τά τρίγωνα $ΑΒΓ$, $Α_1Β_1Γ_1$ ἰσχύει τό θεώρημα τοῦ Dejark, ἄρα αἱ πλευραί $ΑΒ, Α_1Β_1$ - $ΒΓ, Β_1Γ_1$ - $ΓΑ, Γ_1Α_1$ τέμνονται εἰς σημεῖα $Λ, Κ, Μ$ κείμενα ἐπ' εὐθείας. Τά σημεῖα αὐτά ὅμως εἶναι ὡρισμένα ὡς τομαί τῶν πλευρῶν $ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ$ τοῦ τριγώνου $ΑΒΓ$ μετά τοῦ Π.

Ὁμοίως προσδιορίζονται τά σημεῖα $Λ', Κ', Μ'$ τομαί τῶν $Α'Β', Α_1Β_1$ - $Β'Γ', Β_1Γ_1$ - $Γ'Α', Γ_1Α_1$ ἀντιστοίχως. Αἱ εὐθεῖαι $ΛΛ', ΚΚ', ΜΜ'$ τεμνόμεναι σχηματίζουν τό ζητούμενον τρίγωνον.

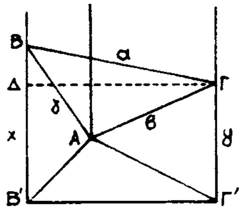
Σύνθεσις. Φέρομεν τάς $ΛΛ', ΚΚ', ΜΜ'$ αἱ ὁποῖαι τεμνόμεναι σχηματίζουν τό ζητούμενον τρίγωνον.

Ἀπόδειξις. Τά τρίγωνα $ΑΒΓ, Α_1Β_1Γ_1$ εἶναι συσχετισμένα κατά Dejark, δηλαδή αἱ ἀντίστοιχοι πλευραί των τέμνονται εἰς σημεῖα κείμενα ἐπ' εὐθείας. Ἄρα αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι τάς ἀντιστοίχους κορυφάς, διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο. Τό αὐτό διά τά τρίγωνα $Α'Β'Γ', Α_1Β_1Γ_1$.

Διερεύνησις. Πρέπει κατ' ἀρχήν νά ὑπάρχουν τά σημεῖα

Λ, Κ, Μ καὶ Λ′, Κ′, Μ′, ἄρα οὐδεμία πλευρὰ τῶν ΑΒΓ, Α′Β′Γ′ δὲν θὰ πρέπῃ νὰ εἶναι παράλληλος πρὸς τὸ ἐπίπεδον Π. Ἀκόμη δὲν θὰ πρέπῃ δύο ἐκ τῶν ΛΛ′, ΚΚ′, ΜΜ′ νὰ εἶναι παράλληλοι.

501. Δοθέντος τριγώνου ΑΒΓ νὰ εὑρεθῇ ἐπίπεδον, ἐπὶ τοῦ ὁποίου τὸ $\widehat{AB\Gamma}$ νὰ προβάλλεται κατὰ ἰσόπλευρον τρίγωνον.



Ἀνάλυσις. Ἔστω Π τὸ ζητούμενον ἐπίπεδον, ἐπὶ τοῦ ὁποίου τὸ $\widehat{AB\Gamma}$ προβάλλεται κατὰ τὸ ἰσόπλευρον $\widehat{AB'\Gamma'}$. Θέτομεν $BB'=x$, $\Gamma\Gamma'=y$. Φέρομεν τὴν $\Gamma\Delta \perp BB'$. Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων $AB'B$, $A\Gamma'\Gamma$, $B\Delta\Gamma$ ἔχομεν: $AB'^2 = AB^2 - x^2$, $A\Gamma'^2 = A\Gamma^2 - y^2$, $\Gamma\Delta^2 = B\Gamma^2 - B\Delta^2$ ἢ $\gamma^2 - x^2 = \beta^2 - y^2 = \alpha^2 - (x-y)^2$ (1).

$$(1) \Longrightarrow y = \frac{\beta^2-\alpha^2+x^2}{2x}, \text{ ὅθεν } \gamma^2 - x^2 = \beta^2 - \frac{(\beta^2-\alpha^2+x^2)^2}{4x^2} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 3x^4 + 2(\beta^2+\alpha^2-2\gamma^2)x^2 - (\beta^2-\alpha^2)^2 = 0. \quad (2)$$

Ἡ πραγματικὴ θετικὴ ρίζα τῆς (2) κατασκευάζεται διὰ τοῦ κανόνος καὶ τοῦ διαβήτου, ἄρα εὑρίσκομεν γεωμετρικῶς τὴν ρίζαν x_0. Μετὰ κατασκευάζεται εὐκόλως ἡ $y_0 = \frac{\beta^2-\alpha^2+x_0^2}{2x_0}$.

Σύνθεσις. Κατασκευάζομεν τὸ τρίγωνον $BB'A$. Οὕτως εὑρίσκομεν τὴν πλευρὰν AB' τοῦ ἰσοπλεύρου $\widehat{AB'\Gamma'}$. Κατασκευάζομεν τὸ ἰσόπλευρον $\widehat{AB'\Gamma'}$, ἐπὶ τοῦ καθέτου ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διὰ τῆς AB', ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον $AB'B$. Κατόπιν κατασκευάζομεν τὸ τρίγωνον $A\Gamma'\Gamma$ καὶ οὕτω προσδιορίζεται ἡ δίεδρος γωνία τῶν ἐπιπέδων $AB\Gamma$, $AB'\Gamma'$.

Ἀπόδειξις. Τὸ κατασκευασθὲν κατὰ τὴν σύνθεσιν τρίγωνον ἔχει πλευρὰς $AB=\gamma$, $A\Gamma=\beta$ ἐκ κατασκευῆς. Ἔστω $B\Gamma=\alpha'$. Εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι ἰσχύει ἡ σχέσις:

$$\gamma^2 - x_0^2 = \beta^2 - y_0^2 = \alpha'^2 - (x_0-y_0)^2. \quad (3)$$

Ἀλλὰ x_0, y_0 εἶναι λύσις τῆς (1). Ἤτοι:

$$\gamma^2 - x_0^2 = \beta^2 - y_0^2 = \alpha^2 - (x_0-y_0)^2. \quad (4)$$

$(3), (4) \Longrightarrow \alpha = \alpha'$.

Διερεύνησις. Ἡ ἐξίσωσις (2) ἔχει διακρίνουσαν:

$$\Delta = (\beta^2+\alpha^2-2\gamma^2)^2 + 3(\beta^2-\alpha^2)^2 > 0.$$

Τὸ γινόμενον τῶν ριζῶν τῆς ἐπιλυούσης εἶναι ἀρνητικόν, ἤτοι ἡ διτετράγωνος ἔχει μίαν πραγματικὴν θετικὴν ρίζαν. Ἄρα, λοιπόν, ὑπάρχει πάντοτε μία ἀκριβῶς λύσις.

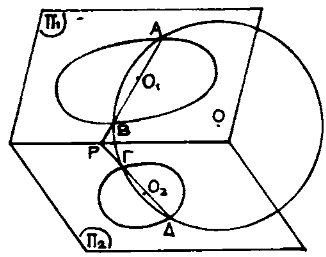
("Αν θεωρήσωμεν τό ἐπίπεδον δι' ἄλλης κορυφῆς, ἡ εὑρισκομένη λύσις εἶναι ἡ ἰδία πρός τήν προηγουμένην).

Κατασκευή τῆς ρίζης τῆς (2). Εὐκόλως δυνάμεθα νά φθάσωμεν εἰς τήν μορφήν:

$$3x^4+2\mu^2x^2-\nu^4=0 \quad (5).$$

Κατασκευάζονται εὐθ. τμήματα κ, λ, ρ, ὥστε $\mu^2=\frac{3}{2}\kappa\rho$, $\nu^2=\lambda\rho\sqrt{3}$, $x^2=\rho y$. Ἡ (5) γίνεται τότε $y(y+\kappa)=\lambda^2$ κ.τ.λ.

502. Δίδονται τρεῖς τυχοῦσαι περιφέρειαι (O_1,R_1), (O_2,R_2), (O_3,R_3) εἰς τόν χῶρον. Νά κατασκευασθῇ τετάρτη περιφέρεια τέμνουσα ἑκάστην ἐκ τῶν προηγουμένων εἰς δύο σημεῖα.



Ἀνάλυσις. Ἔστω (O) ἡ ζητουμένη περιφέρεια καί A,B τά σημεῖα τομῆς της μετά τῆς (O_1), Γ,Δ τά σημεῖα τομῆς μετά τῆς (O_2). Αἱ εὐθεῖαι ΑΒ, ΓΔ κείμεναι ἐπί τοῦ ἐπιπέδου τῆς (O) εἶναι συμβαταί καί ἔστω P τό σημεῖον τομῆς των. Εἶναι $\overline{PB}\cdot\overline{PA}=\overline{P\Gamma}\cdot\overline{P\Delta}$ ἤτοι τό P ἔχει ἴσας δυνάμεις πρός τάς (O_1), (O_2), ὅθεν: $PO_1^2-R_1^2=PO_2^2-R_2^2 \Longrightarrow PO_1^2-PO_2^2=R_1^2-R_2^2$ (1). Διά τό τρίγωνον O_1PO_2 κατά τό 2ον θεώρημα τῶν διαμέσων ἔχομεν $PO_1^2-PO_2^2=2\,\overline{O_1O_2}\,\overline{MN}$, (2) ὅπου M τό μέσον τοῦ τμήματος O_1O_2 καί N ἡ προβολή τοῦ P ἐπί τήν O_1O_2. Ἐκ τῶν (1),(2) $\Longrightarrow \overline{MN}=\dfrac{R_1^2-R_2^2}{2\cdot\overline{O_1O_2}}$, ἤτοι τό P κεῖται ἐπί τοῦ καθέτου ἐπιπέδου εἰς N ἐπί τήν O_1O_2. Ἀλλ', ὡς εἶναι προφανές, τό P κεῖται καί εἰς τήν τομήν τῶν ἐπιπέδων Π_1, Π_2. Ἄρα τό σημεῖον P ὁρίζεται.

Ἐάν ἤδη θεωρήσωμεν τούς κύκλους (O_2), (O_3), ὁρίζουν μέ τόν αὐτόν τρόπον τό σημεῖον Σ, οἱ δέ κύκλοι (O_1), (O_3) τό σημεῖον T.

Σύνθεσις. Κατασκευάζομεν τό τρίγωνον ΡΣΤ. Ἔστω ὅτι ἡ ΤΡ τέμνει τόν (O_1) εἰς Α,Β, ἡ ΡΣ τόν (O_2) εἰς Γ,Δ καί, τέλος, ἡ ΣΤ τόν (O_3) εἰς Ε,Ζ. Ὁ ζητούμενος κύκλος εἶναι ὁ διερχόμενος διά τῶν σημείων Α,Β,Γ,Δ,Ε,Ζ.

Ἀπόδειξις. Ἔχομεν $\overline{PB}\cdot\overline{PA}=\overline{P\Gamma}\cdot\overline{P\Delta}$ ἤτοι ΑΒΓΔ ἐγγράψιμον, ὁμοίως ΓΔΕΖ, ΕΖΑΒ ἐγγράψιμα. Ἐπειδή δέ οἱ ριζικοί ἄξονες τῶν κύκλων ΑΒΓΔ, ΓΔΕΖ, ΕΖΑΒ ἀποτελοῦν τάς πλευράς τοῦ τριγώνου ΡΣΤ, ἕπεται ὅτι οἱ τρεῖς κύκλοι ταυτίζονται.

Διερεύνησις. Διά νά ἔχωμεν μίαν λύσιν, θά πρέπῃ, τό πολύ, ἕν ζεῦγος ἐκ τῶν $(O_1O_2, \Pi_1\cap\Pi_2)$, $(O_2O_3, \Pi_2\cap\Pi_3)$, $(O_3O_1, \Pi_3\cap\Pi_1)$ νά περιέχῃ εὐθείας καθέτους.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ

Ὁμάς Α΄.

503. Ἐπί δοθέντος ἐπιπέδου Π νά εὑρεθῇ σημεῖον ἀπέχον ἴσον ἀπό τρία δοθέντα σημεῖα Α, Β, Γ τοῦ χώρου.

504. Ἐπί δοθείσης περιφερείας νά εὑρεθῇ σημεῖον, τό ὁποῖον νά ἀπέχῃ ἴσον ἀπό δύο δοθέντα σημεῖα Α καί Β τοῦ χώρου.

505. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καί ἐπίπεδον Π. Νά εὑρεθῇ σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου, τό ὁποῖον νά ἀπέχῃ ἴσον ἀπό τάς πλευράς τοῦ τριγώνου.

506. Δίδεται ἐπίπεδον Π, σημεῖον Α αὐτοῦ καί εὐθεῖα ε τέμνουσα τό Π. Νά κατασκευασθῇ εὐθεῖα τοῦ Π διερχομένη διά τοῦ Α καί ὀρθογώνιος πρός τήν ε.

507. Δίδεται ἐπίπεδον Π, σημεῖον Α αὐτοῦ καί σημεῖον Ο ἐκτός αὐτοῦ. Νά κατασκευασθῇ εὐθεῖα ε τοῦ Π διερχομένη διά τοῦ Α καί ἀπέχουσα ἀπόστασιν λ ἀπό τό σημεῖον Ο.

508. Δίδεται ἐπίπεδον Π καί σημεῖα Α, Β ἐκτός αὐτοῦ. Νά κατασκευασθῇ εὐθεῖα ε τοῦ Π ἀπέχουσα ἀπό τά σημεῖα Α καί Β ἀποστάσεις ἴσας πρός λ, μ ἀντιστοίχως.

509. Δίδεται εὐθεῖα ε καί δύο σημεῖα Α καί Β. Διά τῆς εὐθείας ε νά ἀχθῇ ἐπίπεδον Π, ὥστε ὁ λόγος τῶν ἀποστάσεων τῶν Α καί Β ἀπό τό Π νά εἶναι δοθείς $\frac{\mu}{\nu}$.

510. Νά ἀχθῇ ἐπίπεδον διερχόμενον διά τῆς πλευρᾶς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ, ὥστε τό τρίγωνον ΑΒΓ νά προβάλλεται κατά ὀρθογώνιον τρίγωνον.

511. Διά δοθέντος σημείου Α νά ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα δοθεῖσαν εὐθεῖαν ε καὶ δοθέντα κύκλον (O,R).

512. Δίδεται ἕν ζεῦγος παραλλήλων εὐθειῶν ε,ε′ καὶ ἄλλαι δύο τυχοῦσαι εὐθεῖαι η καὶ σ. Νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα καὶ τὰς τέσσαρας ε,ε′,η,σ.

513. Δίδονται τρεῖς εὐθεῖαι ε,η,σ ἀνὰ δύο ἀσύμβατοι. Νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα τέμνουσα τὰς ε,η καὶ παράλληλος πρὸς τὴν σ.

514. Δίδεται σημεῖον Α, ἐπίπεδον Π καὶ εὐθεῖα ε τέμνουσα τὸ Π. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ σημεῖα Μ,Ν ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου Π καὶ τῆς εὐθείας ε ἀντιστοίχως, ὥστε τὸ σημεῖον Α νὰ εἶναι τὸ μέσον τοῦ εὐθ. τμήματος ΜΝ.

515. Δίδονται δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι ε,ε′ καὶ δύο σημεῖα Α καὶ Α′. Διὰ τῶν Α,Α′ νὰ ἀχθοῦν δύο παράλληλοι μεταξύ των τέμνουσαι ἀντιστοίχως τὰς ε καὶ ε′.

516. Δίδεται ἐπίπεδον Π, εὐθεῖα ε παράλληλος πρὸς τὸ Π καὶ σημεῖον Α. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ σημεῖα Μ,Ν ἐπὶ τῶν Π καὶ ε ἀντιστοίχως, ὥστε τὸ εὐθ. τμῆμα ΜΝ νὰ ἰσοῦται πρὸς δοθὲν λ, ἡ εὐθεῖα δὲ ΜΝ νὰ διέρχεται διὰ τοῦ Α.

517. Θεωροῦμεν ἐπίπεδον Π, ἕν εὐθ. τμῆμα ΑΒ ἐπὶ τοῦ Π καὶ ἕν τυχὸν τμῆμα τοῦ χώρου ΓΔ. Διὰ τῶν Γ,Δ νὰ ἀχθοῦν δύο εὐθεῖαι παράλληλοι τέμνουσαι τὸ Π εἰς Α′,Β′, ὥστε τὸ τμῆμα Α′Β′ νὰ εἶναι παράλληλον καὶ ἴσον πρὸς ΑΒ.

518. Δίδεται ἐπίπεδον Π καὶ εὐθεῖα ε τέμνουσα αὐτό. Νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα η παράλληλος πρὸς δοθεῖσαν διεύθυνσιν τέμνουσα τὴν ε εἰς Α καὶ τὸ ἐπίπεδον εἰς Β, ὥστε ΑΒ=λ.

519. Δίδεται ἐπίπεδον Π καὶ δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι ε καὶ ε′ τέμνουσαι τὸ Π. Νὰ εὑρεθοῦν ἐπ᾽ αὐτῶν τὰ σημεῖα Α καὶ Β ἀντιστοίχως, ὥστε ΑΒ∥Π καὶ ΑΒ=λ.

520. Νὰ εὑρεθῇ ἐπίπεδον, ἐπὶ τοῦ ὁποίου δοθεῖσα ὀξεῖα γωνία νὰ προβάλλεται κατ᾽ ὀρθήν.

521. Διά τῆς πλευρᾶς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ νά ἀχθῆ ἐπίπεδον, ἐπί τοῦ ὁποίου τό τρίγωνον ΑΒΓ νά προβάλλεται κατά ἰσοσκελές τρίγωνον.

522. Νά εὑρεθῆ ἐπίπεδον, ἐπί τοῦ ὁποίου ἡ διχοτόμος γωνίας xOy νά προβάλλεται κατά τήν διχοτόμον τῆς γωνίας xOy.

523. Διά δοθέντος σημείου Α νά ἀχθῆ ἐπίπεδον, ὥστε δύο εὐθ. τμήματα ΑΒ καί ΑΓ νά προβάλλωνται ἐπί πάσης εὐθείας αὐτοῦ διερχομένης διά τοῦ Α κατά ἴσα εὐθ. τμήματα.

524. Δίδονται τρία σημεῖα Α,Β,Γ καί σημεῖον Ο ἐκτός τοῦ ἐπιπέδου αὐτῶν. Νά κατασκευασθῆ ἐπίπεδον διερχόμενον διά τοῦ Ο καί ἀπέχον ἴσον ἐκ τῶν Α,Β,Γ.

525. Δίδονται τρία σημεῖα Α,Β,Γ καί εὐθεῖα ε. Νά κατασκευασθῆ ἐπίπεδον Π ἰσαπέχον τῶν Α,Β,Γ καί παράλληλον πρός τήν ε.

526. Ἐπί δύο παραλλήλων ἐπιπέδων Π καί Π′ δίδονται δύο κύκλοι (O,R) καί (O′,R′). Νά εὑρεθοῦν τά σημεῖα Α καί Β ἀντιστοίχως ἐπί τῶν κύκλων, ὥστε ἡ εὐθεῖα ΑΒ νά ἔχη δοθεῖσαν διεύθυνσιν.

527. Ἐπί δύο παραλλήλων ἐπιπέδων Π καί Π′ δίδονται δύο κύκλοι (O,R) καί (O′,R′). Διά δοθέντος σημείου Α νά ἀχθῆ εὐθεῖα ε τέμνουσα τάς περιφερείας τῶν (O,R) καί (O′,R′).

528. Νά εὑρεθῆ ἐπίπεδον, ἐπί τοῦ ὁποίου δοθέν στρεβλόν τετράπλευρον προβάλλεται κατά παραλληλόγραμμον.

529. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καί σημεῖον Σ ἐκτός τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ. Ἐπί τῶν ΣΑ,ΣΒ λαμβάνομεν τά σημεῖα Α′,Β′ ἀντιστοίχως καί ἐπί τοῦ ἐπιπέδου τοῦ ΑΒΓ τό σημεῖον Ο. Νά εὑρεθοῦν αἱ τομαί τοῦ ἐπιπέδου ΟΑ′Β′ μετά τῶν ΑΒ,ΒΓ, ΓΑ καὶ ΣΓ.

530. Δίδεται εὐθεῖα ε καὶ σημεῖον Ο ἐκτὸς αὐτῆς. Νὰ κατασκευασθῇ ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τοῦ Ο καὶ παράλληλον πρὸς τὴν ε καὶ ἀπέχον ἀπ' αὐτῆς ἀπόστασιν ἴσην πρὸς λ.

531. Ἐπὶ ἐπιπέδου Π δίδεται σημεῖον Ο καὶ ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου τὰ σημεῖα Α,Β. Διὰ τοῦ Ο νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα ε τοῦ Π, ὥστε τὰ τμήματα ΟΑ,ΟΒ νὰ προβάλλωνται ἐπ' αὐτῆς κατὰ ἴσα τμήματα.

532. Δίδεται πυραμὶς ΟΑΒΓΔ μὲ βάσιν παραλληλόγραμμον ΑΒΓΔ. Ἡ κορυφὴ Ο προβάλλεται εἰς τὸ ἐπίπεδον τῆς βάσεως κατὰ τὸ κέντρον Κ τοῦ παραλληλογράμμου. Διὰ τῆς ΑΒ νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον διχοτομοῦν τὴν πυραμίδα.

533. Δίδονται τρία σημεῖα Α,Β,Γ καὶ εὐθεῖα ε μὴ κειμένη εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Μ τῆς ε, ὥστε τὸ παραλληλόγραμμον τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν τοῦ στρεβλοῦ τετραπλεύρου ΜΑΒΓ νὰ εἶναι α) ὀρθογώνιον καὶ β) ῥόμβος.

534. Ἐπὶ τῶν παραλλήλων ἐπιπέδων Π καὶ Ρ κεῖνται ἀντιστοίχως τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ ΔΕΖ. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ τομὴ τῶν ἐπιπέδων Π καὶ ΑΔΖ, Ρ καὶ ΒΓΕ. Ἐπίσης ἡ τομὴ τῶν ΑΔΖ καὶ ΒΓΕ

535. Δίδεται στρεβλὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ καὶ ἐπίπεδον Π. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Ο τοῦ χώρου, ἐκ τοῦ ὁποίου ἡ κεντρικὴ προβολὴ τοῦ ΑΒΓΔ ἐπὶ τοῦ Π νὰ δίδῃ παραλληλόγραμμον Α'Β'Γ'Δ'.

536. Δίδονται δύο ἐπίπεδα Π καὶ Ρ καὶ σημεῖον Α. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σημεῖον Β τοῦ Ρ, ὥστε τὸ τμῆμα ΑΒ νὰ εἶναι ἴσον πρὸς δοθὲν λ καὶ παράλληλον πρὸς τὸ Π.

537. Ἐπὶ ἐπιπέδου Π δίδονται τὰ σημεῖα Α καὶ Β. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σημεῖον Γ ἐπὶ ἑτέρου δοθέντος ἐπιπέδου Ρ, ὥστε τὸ τρίγωνον ΑΒΓ νὰ εἶναι α) ὀρθογώνιον ἰσοσκελὲς κατὰ τὴν γωνίαν Γ καὶ β) ἰσόπλευρον

538. Δίδεται δίεδρος $\widehat{\Pi\varepsilon P}$ καὶ $A\in\Pi$, $B\in P$. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον $M\in\varepsilon$, ὥστε $\widehat{AMB}=1^{L}$.

539. Δίδονται δύο τεμνόμενα ἐπίπεδα Π, Ρ καὶ εὐθεῖα ε. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον τῆς ε, τοῦ ὁποίου τὸ ἄθροισμα (ἢ ἡ διαφορὰ) τῶν ἀποστάσεων ἀπὸ Π, Ρ νὰ εἶναι δοθὲν (δοθεῖσα) λ.

540. Ἐπὶ ἐπιπέδου Π δίδεται εὐθεῖα ε καὶ κύκλος (Ο). Ἐὰν Α τυχὸν σημεῖον ἐκτὸς τοῦ Π, νὰ εὑρεθῇ ἐφαπτομένη η τοῦ κύκλου, ὥστε τὰ ἐπίπεδα (Α,η) καὶ (Α,ε) νὰ εἶναι κάθετα.

541. Νὰ κατασκευασθῇ ἐπίπεδον τέμνον τρία δοθέντα ἐπίπεδα ὑπὸ ἴσας γωνίας.

542. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα διερχομένη διὰ δοθέντος σημείου Ο καὶ σχηματίζουσα ἴσας γωνίας μὲ τρεῖς δοθείσας καὶ ἀνὰ δύο ἀσυμβάτους μεταξύ των εὐθείας

543. Δίδεται δίεδρος $\widehat{\Pi\varepsilon P}$ καὶ $O\in\varepsilon$. Θεωροῦμεν τὴν ἡμιευθεῖαν Οz εὑρισκομένην ἐντὸς τῆς τριέδρου. Νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον διὰ τοῦ Ο τέμνον τὰς ἕδρας Π καὶ Ρ ἀντιστοίχως κατὰ τὰς ἡμιευθείας Οx, Οy, ὥστε ἡ Οz νὰ εἶναι διχοτόμος τῆς γωνίας xOy.

544. Δίδονται τρεῖς εὐθεῖαι ε, α, β. Νὰ κατασκευασθῇ ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τῆς ε καὶ τοιοῦτον, ὥστε αἱ α καὶ β νὰ προβάλλωνται κατὰ εὐθείας α′ καὶ β′ παραλλήλους μεταξύ των.

545. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα διερχομένη διὰ δοθέντος σημείου Ο καὶ ἔχουσα ἴσας κλίσεις πρὸς τρία δοθέντα ἐπίπεδα.

546. Νὰ κατασκευασθῇ τρίεδρος στερεὰ γωνία, ἂν $\beta=60^\circ$, $\gamma=60^\circ$, $A=60^\circ$.

547. Δίδεται ὀρθὴ δίεδρος $\widehat{\Pi\varepsilon P}$. Διὰ δοθέντος σημείου A νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα σχηματίζουσα γωνίας ἴσας πρὸς ω καὶ φ μὲ τὰ ἐπίπεδα Π καὶ P ἀντιστοίχως.

548. Διὰ δοθέντος σημείου A νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον P, τὸ ὁποῖον νὰ σχηματίζῃ μετὰ δοθέντος ἐπιπέδου Π γωνίαν ἴσην πρὸς φ.

549. Δίδεται ἐπίπεδον Π, σημεῖον A αὐτοῦ καὶ εὐθεῖα ε μὴ παράλληλος πρὸς τὸ Π. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα η τοῦ Π διερχομένη διὰ τοῦ A τοιαύτη, ὥστε ἡ ἀπόστασίς της ἀπὸ τῆς ε νὰ εἶναι ἴση πρὸς λ.

550. Νὰ κατασκευασθῇ στρεβλὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἀπό: $AB=\alpha$, $B\Gamma=\beta$, $\Gamma\Delta=\gamma$, $AB\perp\Gamma\Delta$, $B\Gamma\perp A\Delta$ καὶ ἀκόμη αἱ κοιναὶ κάθετοι τῶν ἀπέναντι πλευρῶν εἶναι ὀρθογώνιοι.

551. Δίδονται δύο ἐπίπεδα Π, P καὶ εὐθεῖα ε. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ σημεῖα $A\in\Pi$, $B\in P$, ὥστε $AB=\lambda$ καὶ $AB\parallel\varepsilon$.

552. Νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον τὸ ὁποῖον νὰ τέμνῃ δοθεῖσαν δίεδρον κατὰ γωνίαν ἴσην πρὸς δοθεῖσαν.

553. Νὰ κατασκευασθῇ τρίεδρος στερεὰ γωνία ἐκ δύο ἐπιπέδων γωνιῶν τῶν α, β καὶ τῆς διέδρου Γ.

554. Νὰ κατασκευασθῇ τρίεδρος στερεὰ γωνία ἐκ δύο διέδρων γωνιῶν αὐτῆς B, Γ καὶ μιᾶς ἐπιπέδου γωνίας της κειμένης ἔναντι μιᾶς τῶν δοθεισῶν διέδρων π.χ. τῆς B.

555. Νὰ κατασκευασθῇ τρίεδρος ἐκ τῶν:
1) β, γ, B·
2) γ, A, B.

556. Πόσα στοιχεῖα ἐκ τῶν διέδρων καὶ ἑδρῶν ἀπαιτοῦνται διά τήν κατασκευήν ν-έδρου στερεᾶς γωνίας;

557. Νά κατασκευασθῆ τρισορθογώνιος στερεά γωνία $Oxyz$, τῆς ὁποίας αἱ ἀκμαί προβάλλονται ἐπί δοθέντος ἐπιπέδου κατά τρεῖς δοθείσας ἡμιευθείας Ox', Oy', Oz'.

558. Νά κατασκευασθῆ τρισορθογώνιος στερεά γωνία, τῆς ὁποίας αἱ δύο ἀκμαί τέμνουν δοθέν ἐπίπεδον Π κατά δύο δοθέντα σημεῖα Α, Β, ἡ δέ προβολή τῆς κορυφῆς της ἐπί τοῦ Π εἶναι δοθέν σημεῖον Κ.

559. Νά κατασκευασθῆ τρισορθογώνιος στερεά γωνία, τῆς ὁποίας δίδεται ἡ προβολή Κ τῆς κορυφῆς της ἐπί δοθέντος ἐπιπέδου Π, τό ἴχνος μιᾶς ἀκμῆς της ἐπί τοῦ ἰδίου ἐπιπέδου καί ἡ ἀκτίς τοῦ κύκλου τοῦ περιγεγραμμένου περί τό τρίγωνον κατά τό ὁποῖον αἱ ἀκμαί τῆς τριέδρου τέμνουν τό ἐπίπεδον Π.

560. Δίδεται ἐπίπεδον Π καί σημεῖον Ο αὐτοῦ. Δύο εὐθεῖαι, μή κείμεναι ἐπί τοῦ Π, ἔστω y, z, διέρχονται διά τοῦ Ο. Νά εὑρεθῆ εὐθεῖα x διερχομένη διά τοῦ Ο, ὥστε τά ἐπίπεδα Oxy, Oxz νά εἶναι κάθετα ἐπ' ἄλληλα.

561. Νά τμηθῆ τρισορθογώνιος στερεά γωνία $Oxyz$ δι' ἐπιπέδου, ὥστε τό προκύπτον τρίγωνον νά εἶναι ἴσον πρός δοθέν.

562. Δίδεται ἰσοεδρική τρίεδρος στερεά γωνία $Oxyz$. Ἐπί τῶν ἀκμῶν Ox, Oy, Oz νά εὑρεθοῦν τά σημεῖα Α, Β, Γ ἀντιστοίχως, ὥστε τό τρίγωνον ΑΒΓ νά εἶναι ἰσόπλευρον.

563. Νά κατασκευασθῆ στρεβλόν τετράπλευρον ἀπό: $AB=\alpha$, $B\Gamma=\beta$, $\Gamma\Delta=\gamma$, $\Delta A=\delta$, $\widehat{AB\Gamma}=\omega$, $\widehat{B\Gamma\Delta}=\varphi$.

564. Δίδονται δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι ε καί η. Νά εὑρεθοῦν τά σημεῖα $A\in\varepsilon$ καί $B\in\eta$, ὥστε ἡ εὐθεῖα ΑΒ νά σχηματίζῃ μετά τῶν ε καί η δοθείσας γωνίας ω καί φ.

565. Νά τμηθῆ δοθεῖσα τετράεδρος στερεά γωνία ὑπό ἐπιπέδου κατά παραλληλόγραμμον.

566. Δύναται νά ἀχθῆ ἐπίπεδον, τό ὁποῖον νά τέμνη δοθεῖσαν τρισορθογώνιον στερεάν γωνίαν κατά τρίγωνον ἰσοσκελές, ἰσοσκελές ὀρθογώνιον, ἰσόπλευρον, τρίγωνον ἴσον πρός δοθέν ὀξυγώνιον;

567. Δίδεται τετράγωνον ΑΒΓΔ. Διά τοῦ σημείου Α φέρομεν εὐθεῖαν, ὥστε $B\widehat{A}x = \Delta\widehat{A}x = 60°$. Ἐπί τῆς Αx νά εὑρεθῆ σημεῖον Μ, ὥστε $\Delta\widehat{M}B = 90°$.

568. Νά κατασκευασθῆ στρεβλόν τετράπλευρον ἀπό τάς πλευράς ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, τήν γωνίαν ΒΑΔ, γνωστοῦ ὄντος ὅτι αἱ κοιναί κάθετοι τῶν ἀπέναντι πλευρῶν εἶναι ὀρθογώνιοι.

569. Δίδεται τετράεδρον ΟΑΒΓ. Ἐπί τῶν ἀκμῶν ΟΑ, ΟΒ τά σημεῖα Α′, Β′. Νά εὑρεθῆ τό σημεῖον Γ′ ἐπί τῆς ΟΓ, ὥστε τό ἐπίπεδον Α′Β′Γ′ νά χωρίζη τό τετράεδρον εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη.

570. Νά κατασκευασθῆ ἰσοεδρικόν τετράεδρον ἀπό τάς τρεῖς ἀκμάς α, β, γ αὐτοῦ.

571. Νά κατασκευασθῆ τετράεδρον ἐκ τῶν ἕξ ἀκμῶν αὐτοῦ.

572. Νά κατασκευασθῆ τετράεδρον ΟΑΒΓ ἐκ τῶν μέσων τῶν πλευρῶν τοῦ $\widehat{AB\Gamma}$ καί τοῦ μέσου τῆς ΟΑ.

573. Δίδεται τετράεδρον ΑΒΓΔ. Νά εὑρεθῆ σημεῖον Μ ἀπέχον ἀπό τάς ἕδρας α) ἀποστάσεις ἴσας, β) ἀποστάσεις ἀναλόγους τεσσάρων δοθέντων εὐθ. τμημάτων.

574. Νά κατασκευασθῆ ὀρθογώνιον τετράεδρον ἐκ τῶν ἀκμῶν αὐτοῦ.

575. Δίδεται κολοβόν τριγωνικόν πρῖσμα. Νά ἀχθῆ ἐπίπεδον τέμνον τὰς παραπλεύρους ἀκμὰς καὶ τὸ ὁποῖον νὰ χωρίζῃ τὸ πρῖσμα εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη.

576. Δίδεται τριγωνικὸν πρῖσμα καὶ δύο σημεῖα A καὶ B. Διὰ τῶν A, B νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον νὰ χωρίζῃ τὸ στερεὸν εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη.

577. Ἐντὸς τετραέδρου ΑΒΓΔ νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Ο, ὥστε οἱ πυραμίδες ΟΑΒΓ, ΟΒΓΔ, ΟΓΔΑ, ΟΔΑΒ νὰ εἶναι ἰσοδύναμοι.

578. Τρεῖς εὐθεῖαι $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ εἶναι ἀσύμβατοι ἀνὰ δύο. Νὰ κατασκευασθῇ παραλληλεπίπεδον, τοῦ ὁποίου αἱ τρεῖς ἀκμαὶ νὰ κεῖνται ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$.

579. Δίδεται τρίεδρος Oxyz καὶ σημεῖον A εἰς τὸ ἐσωτερικὸν αὐτῆς. Διὰ τοῦ A νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον τέμνον τὴν τρίεδρον κατὰ τρίγωνον κέντρου βάρους A.

580. Διὰ δοθείσης εὐθείας νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον, τὸ ὁποῖον χωρίζει δοθὲν παραλληλεπίπεδον εἰς δύο ἰσοδύναμα μέρη.

581. Νὰ χωρισθῇ παραλληλεπίπεδον εἰς ν ἰσοδύναμα πολύεδρα δι' ἐπιπέδων διερχομένων διὰ τῆς αὐτῆς ἀκμῆς.

582. Δίδονται δύο ὀρθογώνιοι εὐθεῖαι ε, η. Νὰ κατασκευασθῇ κύβος, τοῦ ὁποίου δύο ἀκμαὶ νὰ κεῖνται ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν ε, η.

583. Νὰ κατασκευασθῇ κύβος ἐκ τῆς διαγωνίου αὐτοῦ.

584. Νὰ κατασκευασθῇ ὀρθὸς κύλινδρος, ἐὰν δίδωνται δύο γενέτειραι αὐτοῦ καὶ ἓν σημεῖον τῆς ἐπιφανείας του.

585. Δίδονται δύο ὀρθοὶ κύλινδροι (K) καὶ (K′) καὶ εὐθεῖα ε. Νὰ κατασκευασθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρὸς τὴν ε ἀποτέμνουσα ἀπὸ τοὺς (K) καὶ (K′) χορδὰς μήκους λ καὶ μ ἀντιστοίχως.

586. Δίδονται τρία ἐπίπεδα παράλληλα πρός δοθεῖσαν εὐθεῖαν. Νά κατασκευασθῇ ὀρθός κύλινδρος, τοῦ ὁποίου τά ἐν λόγῳ ἐπίπεδα εἶναι ἐφαπτόμενα.

587. Δίδονται δύο ἐπίπεδα Π καί Ρ καί σημεῖον Α. Νά κατασκευασθῇ ὀρθός κυκλικός κύλινδρος ἐφαπτόμενος τῶν Π, Ρ καί διερχόμενος διά τοῦ Α.

588. Νά κατασκευασθῇ ὀρθός κυκλικός κύλινδρος, τοῦ ὁποίου δίδονται δύο ἐφαπτόμενα ἐπίπεδα Π, Ρ καί μία εὐθεῖα ε ἐφαπτομένη αὐτοῦ.

589. Νά κατασκευασθῇ ὀρθός κυκλικός κύλινδρος, τοῦ ὁποίου δίδεται μία γενέτειρα η καί δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι αὐτοῦ ε καί ε'.

590. Νά κατασκευασθῇ κυκλικός κύλινδρος ἀπό ἕν σημεῖον Α αὐτοῦ, μία ἐφαπτομένη καί τόν ὁδηγόν κύκλον (Ο,R).

591. Νά κατασκευασθῇ κῶνος, τοῦ ὁποίου δίδονται τρεῖς γενέτειραι.

592. Δίδεται κῶνος (Κ) καί εὐθεῖα ε. Νά κατασκευασθῇ τό ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον τοῦ κώνου τό παράλληλον πρός τήν ε.

593. Νά κατασκευασθῇ κῶνος ἐκ περιστροφῆς ἐφαπτόμενος τριῶν δοθέντων ἐπιπέδων (λύσεις τέσσαρες).

594. Νά κατασκευασθῇ κῶνος ἐκ περιστροφῆς, ἄν δίδωνται:

1) ὁ ἄξων z καί δύο σημεῖα Α, Β τοῦ κώνου·

2) ὁ ἄξων z, μία ἐφαπτομένη αὐτοῦ ε καί ἕν σημεῖον αὐτοῦ Α·

3) ὁ ἄξων z, μία ἐφαπτομένη αὐτοῦ ε καί τό ἐπ' αὐτῆς σημεῖον ἐπαφῆς Α.

595. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ. Νά κατασκευασθῇ εὐθεῖα παράλληλος πρός τήν ΒΓ τέμνουσα τά εὐθ. τμήματα ΑΒ, ΑΓ εἰς B' καὶ Γ' ἀντιστοίχως, ὥστε τὰ στερεὰ τὰ παραγόμενα ὑπὸ τῶν σχημάτων $B'A\Gamma'$ καὶ $B'B\Gamma\Gamma'$ κατὰ μία πλήρη περιστροφὴν νὰ εἶναι ἰσοδύναμα.

596. Δίδεται ὀρθὸς κυκλικὸς κῶνος. Νὰ ἀχθοῦν ν-1 ἐπίπεδα παράλληλα πρὸς τὴν βάσιν του (O,R), ὥστε τὰ προκύπτοντα στερεὰ νὰ εἶναι ἰσοδύναμα.

597. Δίδεται σφαῖρα (O,R) καὶ A,B σημεῖα αὐτῆς. Νὰ κατασκευασθῆ κύκλος (Λ,ρ) τῆς (O) ἔχων δοθεῖσαν ἀκτῖνα ρ καὶ διερχόμενος διὰ τῶν A,B.

598. Διὰ δοθέντος σημείου O νὰ ἀχθῆ εὐθεῖα ἀπέχουσα δοθείσας ἀποστάσεις λ καὶ μ ἀπὸ εὐθεῖαν ε τοῦ χώρου καὶ δοθὲν σημεῖον A ἀντιστοίχως.

599. Διὰ δοθέντος σημείου A νὰ ἀχθῆ ἐφαπτομένη σφαίρας (O,R), παράλληλος πρὸς δοθὲν ἐπίπεδον.

600. Νὰ κατασκευασθῆ ἐπίπεδον ἐφαπτόμενον σφαίρας (O,R) καὶ κυλίνδρου (K) (ἢ κώνου (K)).

601. Διὰ δοθείσης εὐθείας νὰ ἀχθῆ ἐπίπεδον τέμνον σφαῖραν (O,R) κατὰ κύκλον ἐμβαδοῦ κ^2.

602. Διὰ δοθέντος σημείου A νὰ ἀχθῆ ἐπίπεδον τέμνον σφαίρας O_1,O_2,O_3 κατὰ κύκλους ἀκτίνων ἀναλόγων τῶν ἀκτίνων τῶν σφαιρῶν O_1,O_2,O_3 ἀντιστοίχως.

603. Νὰ κατασκευασθῆ σφαῖρα ἐγγεγραμμένη εἰς ὀρθὸν κυκλικὸν κῶνον (K) καὶ διερχομένη διὰ δοθέντος σημείου (ἢ ἐφαπτομένη δοθείσης εὐθείας).

Τὸ αὐτὸ πρόβλημα, ἂν ἀντὶ τοῦ κώνου ἔχωμεν κύλινδρον.

604. Δίδονται δύο σφαῖραι (O,R) καὶ (O',R'). Νὰ κατασκευασθῆ ἐπίπεδον παράλληλον πρὸς τὴν διάκεντρον OO' αὐτῶν, ὥστε τὰ μήκη τῶν περιφερειῶν τῶν ἀποκοπτομένων κύκλων νὰ ἔχουν δοθὲν ἄθροισμα.

605. Δίδονται δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι ε καί ε'. Ἐπ' αὐτῶν ἀντιστοίχως τά σημεῖα Α καί Α'. Νά κατασκευασθῆ σφαῖρα ἐφαπτομένη τῶν ε καί ε' εἰς Α καί Α'.

606. Νά κατασκευασθῆ σφαῖρα δοθείσης ἀκτῖνος ρ

1) διερχομένη διά τριῶν δοθέντων σημείων Α,Β,Γ·

2) διερχομένη διά δύο δοθέντων σημείων Α,Β καί ἐφαπτομένη δοθέντος ἐπιπέδου ἤ σφαίρας·

3) διερχομένη διά δοθέντος σημείου Α καί ἐφαπτομένη δύο δοθέντων ἐπιπέδων ἤ δύο δοθεισῶν σφαιρῶν ἤ δοθέντος ἐπιπέδου καί δοθείσης σφαίρας·

4) ἐφαπτομένη τῶν τριῶν ἀκμῶν δοθείσης τριέδρου·

5) ἐφαπτομένη δύο δοθέντων ἐπιπέδων Π,Ρ καί δοθείσης σφαίρας (Ο,R)·

6) ἐφαπτομένη δύο δοθεισῶν σφαιρῶν καί δοθέντος ἐπιπέδου·

7) ἔχουσα τό κέντρον της ἐπί δοθέντος ἐπιπέδου Π καί ἐφαπτομένη δύο δοθεισῶν σφαιρῶν·

8) ἐφαπτομένη τριῶν δοθέντων ἐπιπέδων·

9) ἐφαπτομένη τριῶν δοθεισῶν σφαιρῶν.

607. Νά κατασκευασθῆ σφαῖρα

1) διερχομένη ἀπό τρία δοθέντα σημεῖα Α,Β,Γ καί ἐφαπτομένη εὐθείας ε·

2) ἐφαπτομένη δοθέντος ἐπιπέδου Π εἰς σημεῖον Α αὐτοῦ καί εὐθείας ε.

608. Νά κατασκευασθῆ σφαῖρα

1) ἐφαπτομένη δοθείσης σφαίρας (Ο) καί δοθέντος ἐπιπέδου Π εἰς σημεῖον Α αὐτοῦ·

2) ἐφαπτομένη δοθέντος ἐπιπέδου Π καί δοθείσης σφαίρας εἰς σημεῖον Α αὐτῆς·

3) ἐφαπτομένη δοθείσης σφαίρας (Ο) εἰς σημεῖον Α αὐτῆς καί διερχομένη διά σημείου Β·

4) διερχομένη διά τριῶν δοθέντων σημείων Α,Β,Γ καί ἐφαπτομένη δοθέντος ἐπιπέδου Π·

5) διερχομένη διά δύο δοθέντων σημείων Α,Β καί ἐφαπτομένη δύο δοθέντων ἐπιπέδων Π καί Ρ·

6) ἐφαπτομένη τεσσάρων ἐπιπέδων·

7) διερχομένη διά δοθέντος σημείου καί έφαπτομένη τριών δοθέντων έπιπέδων.

609. Νά κατασκευασθή σφαίρα, τής όποίας δίδεται ένας κύκλος καί τό έφαπτόμενον έπίπεδον αύτής είς σημείον Α τού κύκλου.

610. Νά κατασκευασθή σφαίρα (Κ, ρ) περιέχουσα κύκλον Γ καί τέμνουσα όρθογωνίως δοθείσαν σφαίραν (Ο, R).

611. Νά κατασκευασθή σφαίρα έφαπτομένη δοθέντος έπιπέδου καί τέμνουσα όρθογωνίως τρείς δοθείσας σφαίρας.

612. Νά κατασκευασθή σφαίρα τέμνουσα όρθογωνίως τέσσαρας δοθείσας σφαίρας.

613. Νά κατασκευασθή σφαίρα διερχομένη διά τριών δοθέντων σημείων καί :

1) έφαπτομένη δοθείσης σφαίρας (Ο)·
2) τέμνουσα όρθογωνίως δοθείσαν σφαίραν (Ο)·
3) τέμνουσα δοθείσαν σφαίραν ύπό γωνίαν ω.

614. Δίδονται δύο όμοια τρίγωνα ΑΒΓ καί Α'Β'Γ'. Νά εύρεθή σημείον Μ τού χώρου, ώστε τά τετράεδρα ΜΑΒΓ καί ΜΑ'Β'Γ' νά είναι όμοια.

615. Είς δοθείσαν σφαίραν νά έγγραφή τετράεδρον, τού όποίου δίδονται δύο κορυφαί καί τό κέντρον βάρους του.

Ομάς Β'.

616. Δίδονται τρείς εύθείαι $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ ανά δύο ασύμβατοι. Νά κατασκευασθούν τρία έπίπεδα Π_1, Π_2, Π_3 διερχόμενα άντιστοίχως διά τών $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ καί τεμνόμενα κατά εύθείαν ε.

617. Δίδονται τρείς εύθείαι $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ άνά δύο άσύμβατοι. Νά άχθή εύθεία τέμνουσα αύτάς άντιστοίχως είς A_1, A_2, A_3, ώστε $\frac{A_1A_2}{A_2A_3} = \frac{\mu}{\nu}$.

618. Δίδεται ἐπίπεδον Π καί τρία σημεῖα Α,Β,Γ τοῦ χώρου. Νά εὑρεθῆ σημεῖον Ο τοῦ χώρου, ὥστε ἡ κεντρική προβολή τοῦ ΑΒΓ διά τοῦ Ο νά δίδη τρίγωνον $A_1B_1\Gamma_1$ ὁμοιόθετον πρός δοθέν ἤ ἴσον πρός δοθέν.

619. Δίδεται ἐπίπεδον Π, σημεῖον Ο αὐτοῦ καί εὐθεῖα ε διερχομένη διά τοῦ Ο καί πλαγία πρός τό Π. Νά κατασκευασθῆ εὐθεῖα η τοῦ Π διερχομένη διά τοῦ Ο καί σχηματίζουσα μετά τῆς ε γωνίαν φ δοθεῖσαν.

620. Δίδονται τέσσαρες εὐθεῖαι ε, α,β,γ. Νά ἀχθῆ εὐθεῖα παράλληλος πρός τήν ε καί ἰσαπέχουσα τῶν α,β,γ.

621. Νά τμηθῆ τριγωνική πρισματική ἐπιφάνεια κατά τρίγωνον ὅμοιον πρός δοθέν.

622. Νά κατασκευασθῆ κῶνος ἐκ περιστροφῆς (Κ), ἄν δίδωνται:

1) ὁ ἄξων z καί δύο ἐφαπτόμεναι τεμνόμεναι εἰς σημεῖον Α·

2) δύο γενέτειραι ε,ε' καί μία ἐφαπτομένη η τοῦ κώνου.

623. Ἐπί ἐπιπέδου Π δίδονται δύο τρίγωνα ΑΒΓ, Α'Β'Γ' καί σημεῖον Ο ἐκτός αὐτῶν. Διά τοῦ Ο νά ἀχθῆ εὐθεῖα, περί τήν ὁποίαν, ἄν περιστραφοῦν τά τρίγωνα κατά μίαν ὁλόκληρον στροφήν, τά παραγόμενα στερεά νά εἶναι ἰσοδύναμα (ἤ νά ἔχουν δοθέντα λόγον).

624. Ἐπί σφαίρας (Ο,R) δίδονται δύο σημεῖα Α,Β καί εἷς κύκλος Γ. Νά κατασκευασθῆ ἡ κορυφή κώνου (Κ) περιγεγραμμένου περί τήν σφαῖραν (Ο,R), ὥστε ὁ κύκλος ἐπαφῆς ἔστω (Λ,ρ) νά διέρχεται διά τῶν Α,Β καί νά ἐφάπτεται τοῦ κύκλου Γ.

625. Ἐπί σφαίρας (Ο,R) δίδεται ἕν σημεῖον Α καί δύο κύκλοι Γ_1 καί Γ_2. Νά κατασκευασθῆ ἡ κορυφή ἑνός κώνου (Κ) περιγεγραμμένου περί τήν σφαῖραν καί τοιούτου, ὥστε ὁ κύκλος ἐπαφῆς νά διέρχεται διά τοῦ Α καί νά ἐφάπτεται τῶν $Γ_1, Γ_2$.

626. Ἐπὶ σφαίρας (O,R) δίδονται τρεῖς κύκλοι $Γ_1, Γ_2, Γ_3$. Νὰ κατασκευασθῇ ἡ κορυφὴ κώνου (K) περιγεγραμμένου περὶ τὴν σφαῖραν, ὥστε ὁ κύκλος ἐπαφῆς νὰ ἐφάπτεται τῶν τριῶν περιφερειῶν $Γ_1, Γ_2, Γ_3$.

627. Δίδονται τέσσαρες σφαῖραι. Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον τοῦ ὁποίου αἱ δυνάμεις πρὸς τὰς σφαίρας νὰ εἶναι ἀνάλογοι πρὸς τὰς ἀκτῖνας αὐτῶν ἀντιστοίχως.

628. Δίδονται δύο κύκλοι εἰς τὸν χῶρον. Νὰ κατασκευασθῇ κύκλος ἐφαπτόμενος τῶν ἀνωτέρω.

629. Δίδονται τέσσαρα σημεῖα εἰς τὸν χῶρον. Νὰ κατασκευασθῇ σφαῖρα, ὥστε οἱ κῶνοι μὲ κορυφὰς τὰ ἐν λόγῳ σημεῖα οἱ περιγεγραμμένοι περὶ τὴν ζητουμένην σφαῖραν, νὰ ἔχουν τὸ αὐτὸ ἄνοιγμα.

630. Διὰ δοθείσης εὐθείας $ε$ νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον τέμνον δύο σφαίρας $(O,R), (O',R')$ κατὰ ἴσους κύκλους.

631. Νὰ κατασκευασθῇ κῶνος περιγεγραμμένος περὶ δοθεῖσαν σφαῖραν (O,R) καὶ ἐφαπτόμενος τριῶν δοθεισῶν εὐθειῶν $ε_1, ε_2, ε_3$.

632. Νὰ κατασκευασθῇ σφαῖρα ἔχουσα τὸ κέντρον της ἐπὶ δοθείσης εὐθείας $δ$, ἐφαπτομένη δοθείσης εὐθείας $ε$ καὶ διερχομένης διὰ δοθέντος σημείου A.

633. Νὰ κατασκευασθῇ σφαῖρα:

1) διερχομένη διὰ δύο δοθέντων σημείων A, B, ἐφαπτομένη δοθείσης σφαίρας (O) καὶ δοθέντος ἐπιπέδου $Π$·

2) διερχομένη διὰ δύο δοθέντων σημείων A, B καὶ ἐφαπτομένη δύο δοθεισῶν σφαιρῶν·

3) διερχομένη διὰ δοθέντος σημείου A, ἐφαπτομένη δοθείσης σφαίρας (O) καὶ δύο δοθέντων ἐπιπέδων $Π$ καὶ P·

4) διερχομένη διὰ δοθέντος σημείου A καὶ ἐφαπτομένη τριῶν

σφαιρῶν $(O_1), (O_2), (O_3)$·

5) ἐφαπτομένη δοθείσης σφαίρας (O,R) καὶ τριῶν δοθέντων ἐπιπέδων Π, P, Σ·

6) ἐφαπτομένη τεσσάρων δοθεισῶν σφαιρῶν.

634. Νὰ κατασκευασθῇ σφαῖρα διερχομένη διὰ δύο δοθέντων σημείων καὶ τέμνουσα ὀρθογωνίως δοθέντα κύκλον.

635. Νὰ κατασκευασθῇ σφαῖρα τέμνουσα ὀρθογωνίως δύο δοθέντας κύκλους.

636. Δίδονται δύο σφαῖραι (O,R), (O',R') καὶ ἐπίπεδον Π. Νὰ κατασκευασθῇ σφαῖρα (K,ρ) ἐφαπτομένη τῆς (O',R'), ὥστε τὸ ριζικὸν ἐπίπεδον τῶν (O,R) καὶ (K,ρ) νὰ εἶναι τὸ Π.

637. Νὰ κατασκευασθῇ σφαῖρα ἐφαπτομένη δοθέντος ἐπιπέδου καὶ τέμνουσα ὀρθογωνίως τρεῖς δοθείσας σφαίρας.

638. Νὰ κατασκευασθῇ σφαῖρα ἐφαπτομένη δοθείσης εὐθείας καὶ τέμνουσα ὀρθογωνίως τρεῖς δοθείσας σφαίρας.

639. Νὰ κατασκευασθῇ κύκλος διερχόμενος διὰ δύο δοθέντων σημείων καὶ ἐφαπτόμενος δύο δοθεισῶν σφαιρῶν.

640. Νὰ κατασκευασθῇ σφαῖρα τέμνουσα τέσσαρας δοθείσας σφαίρας ὑπὸ δοθείσας γωνίας.

641. Νὰ κατασκευασθῇ σφαῖρα ἰσογώνιος πρὸς πέντε δοθείσας σφαίρας.

642. Μὲ κέντρον δοθὲν σημεῖον O νὰ κατασκευασθῇ σφαῖρα τέμνουσα δύο δοθείσας ἀσυμβάτους εὐθείας εἰς τέσσερα σημεῖα A, B, Γ, Δ, ὥστε τὸ τετράεδρον $AB\Gamma\Delta$ νὰ ἔχῃ δοθέντα ὄγκον.

643. Νὰ κατασκευασθῇ σφαῖρα ἀποκόπτουσα ἀπὸ τὰς ἕδρας δοθέντος τετραέδρου τέσσαρας ἴσους κύκλους δοθείσης ἀκτῖνος R.

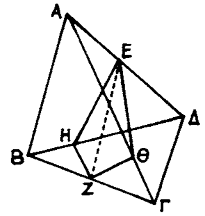
644. Ἐντός τετραέδρου ΑΒΓΔ νά εὑρεθῇ σημεῖον Μ, ὥστε τά παράλληλα ἐπίπεδα πρός τάς ἀντιστοίχους ἕδρας νά τέμνουν τάς ἀντιστοίχους τριέδρους γωνίας κατά ἰσοδύναμα τρίγωνα. Νά εὑρεθῇ τό ἐμβαδόν τῶν ἐν λόγω τριγώνων.

645. Νά κατασκευασθῇ σφαῖρα τέμνουσα ἁρμονικῶς τέσσαρα δοθέντα εὐθ. τμήματα.

646. Δίδονται τέσσαρες σφαῖραι (Α), (Β), (Γ), (Δ). Νά εὑρεθῇ πέμπτη σφαῖρα (Ο), ὥστε τά ριζικά ἐπίπεδα τῶν ζευγῶν (Α), (Ο) - (Β), (Ο) - (Γ), (Ο) - (Δ), (Ο) νά διέρχωνται διά τεσσάρων σημείων Κ, Λ, Μ, Ν ἀντιστοίχως.

ΓΕΝΙΚΑΙ ΑΣΚΗΣΕΙΣ. ΕΙΔΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

647. Ἐάν ἐπίπεδον διαιρῆ δύο ἀπέναντι ἀκμάς τετραέδρου εἰς δοθέντα λόγον, θά διαιρῆ καί τόν ὄγκον τοῦ τετραέδρου εἰς τόν αὐτόν λόγον.



Ἀπόδειξις. Ἔστω τό τετράεδρον ΑΒΓΔ. Συμφώνως πρός τήν ὑπόθεσιν ἔχομεν:

$$\frac{ΑΕ}{ΕΔ}=\frac{ΒΖ}{ΖΓ}=\frac{μ}{ν}.$$

Τό ἐπίπεδον τό διερχόμενον διά τῶν Ε,Ζ τέμνει τήν ΒΔ εἰς Η καί τήν ΑΓ εἰς Θ. Τά δύο μέρη εἰς τά ὁποῖα διαιρεῖται τό τετράεδρον ὑπό τοῦ ἐπιπέδου ΕΘΖΗ ἀποτελοῦνται ἀπό μίαν τετραγωνικήν πυραμίδα καί μίαν τριγωνικήν, ἤτοι τό ΑΒΗΖΘΕ ἀπό τήν ΑΕΘΖΗ καί τήν ΑΒΗΖ καί τό ΓΔΗΖΘΕ ἀπό τήν ΔΕΘΖΗ καί τήν ΓΔΖΘ.

Αἱ δύο τετραγωνικαί πυραμίδες ἔχουν βάσιν τό τετράπλευρον ΕΘΖΗ καί ὁ λόγος τῶν ὑψῶν των εἶναι ὡς ὁ $\frac{ΑΕ}{ΕΔ}$. Ἄρα $(ΑΕΘΖΗ):(ΔΕΘΖΗ)=\frac{μ}{ν}$ (1).

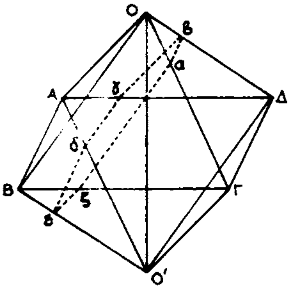
Τά τετράεδρα ΑΒΗΖ καί ΑΒΓΔ ἔχουν τήν τρίεδρον Β κοινήν. Ἄρα $\frac{(ΑΒΗΖ)}{(ΑΒΓΔ)}=\frac{ΑΒ\cdot ΒΗ\cdot ΒΖ}{ΑΒ\cdot ΒΓ\cdot ΒΔ}=\frac{ΒΗ\cdot μ}{ΒΔ(μ+ν)}$ (2). Ὁμοίως $\frac{(ΓΔΖΘ)}{(ΑΒΓΔ)}=\frac{ΓΘ\cdot ν}{ΓΑ(μ+ν)}$ (3).

Ἀλλά ἀπό τό στρεβλόν τετράπλευρον ΑΒΓΔ καί κατά τό θεώρημα τοῦ Μενελάου ἔχομεν $\frac{ΒΗ}{ΒΔ}=\frac{ΓΘ}{ΓΑ}$ (4).

$(2),(3),(4)\Longrightarrow \frac{(ΑΒΗΖ)}{(ΓΔΖΘ)}=\frac{μ}{ν}$ (5).

Τέλος, ἐκ τῶν $(1),(5)\Longrightarrow \frac{(ΑΒΗΖΘΕ)}{(ΓΔΗΖΘΕ)}=\frac{μ}{ν}$.

648. Ἕκαστον ἐπίπεδον παράλληλον πρός μίαν ἕδραν κανονικοῦ ὀκταέδρου τέμνει τήν ἐπιφάνειαν τοῦ στερεοῦ κατά ἑξάγωνον σταθερᾶς περιμέτρου.

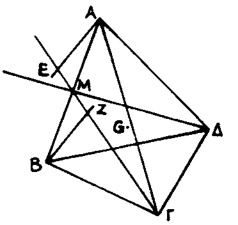


Ἀπόδειξις. Ἔστω τό κανονικόν ὀκτάεδρον ΟΑΒΓΔΟ'. Θεωρήσωμεν τό ἐπίπεδον τό παράλληλον πρός τάς ἕδρας ΟΑΒ, Ο'ΓΔ, τό ὁποῖον συναντᾶ τάς ἀκμάς ΟΓ, ΟΔ, ΑΔ, Ο'Α, Ο'Β, ΒΓ εἰς α, β, γ, δ, ε, ζ ἀντιστοίχως. Εὑρίσκομεν εὐκόλως ὅτι αβ∥ΓΔ, βγ∥ΟΑ, γδ∥Ο'Δ κ.τ.λ. Τοῦτο σημαίνει ὅτι τά τρίγωνα $Oαβ, Δβγ, Aγδ$ κ.τ.λ. εἶναι ἰσόπλευρα,(1) καὶ συνεπῶς $αβ+βγ = OB+BΔ = OΔ$. Ἐργαζόμενοι ὁμοίως διαπιστώνομεν ὅτι ἡ περίμετρος τοῦ $αβγδεζ$ εἶναι ἴση πρὸς τρεῖς φορὰς τὴν ἀκμὴν τοῦ κανονικοῦ ὀκταέδρου.

649. Δίδεται στρεβλὸν τετράπλευρον ΑΒΓΔ καὶ τυχὸν σημεῖον Ο τοῦ χώρου. Τὰ ὁριζόμενα ἐπίπεδα ἀπὸ ἑκάστην πλευρὰν καὶ τὸ σημεῖον Ο τέμνουν τὰς ἀπέναντι πλευρὰς κατὰ τέσσαρα συνεπίπεδα σημεῖα.

Ἀπόδειξις. Θέτομεν $K = ABO \cap ΓΔ$ καὶ $Λ = ΓΔO \cap AB$. Τὸ ἐπίπεδον ΑΒΟΚ περιέχει τὸ σημεῖον Λ. Τὸ ἐπίπεδον ΓΔΟΛ περιέχει τὸ σημεῖον Κ. Ἄρα τὰ σημεῖα Κ, Ο, Λ κεῖνται ἐπ' εὐθείας. Ἐὰν τώρα θέσωμεν καὶ $M = BΓO \cap AΔ$, $N = AΔO \cap BΓ$, θὰ εἶναι καὶ Μ, Ο, Ν ἐπ' εὐθείας, ἤτοι Κ, Λ, Μ, Ν συνεπίπεδα.

650. Ἡ δύναμις ἑκάστης κορυφῆς τετραέδρου πρὸς τὴν σφαῖραν τὴν ὁριζομένην ὑπὸ τοῦ κέντρου βάρους τοῦ τετραέδρου καὶ τῶν ὑπολοίπων τριῶν κορυφῶν εἶναι ἡ αὐτή.



Ἀπόδειξις. Θὰ χρησιμοποιήσωμεν τὸν τύπον τοῦ Casey. Θέτομεν P τὸ κέντρον τῆς σφαίρας GBΓΔ καὶ Q τὸ κέντρον τῆς GΓΔΑ. Τὸ ριζικὸν ἐπίπεδον τῶν δύο σφαιρῶν εἶναι, προφανῶς, τὸ ἐπίπεδον GΓΔ. Θέτομεν ΑΕ καὶ ΒΖ τὰς ἀποστάσεις τῶν Α, Β ἀπὸ τὸ ριζικὸν ἐπίπεδον. Ἔχομεν ὡς γνωστὸν $\mathfrak{D}_P(A) = 2\cdot\overline{EA}\cdot\overline{PQ}$, $\mathfrak{D}_Q(B) = 2\cdot\overline{ZB}\cdot\overline{QP}$.

Ἀλλὰ τὸ ἐπίπεδον GΓΔ διχοτομεῖ τὴν ΑΒ καί, συνεπῶς, αἱ ἀποστάσεις τῶν Α, Β ἀπὸ τὸ ἐπίπεδον αὐτὸ εἶναι ἴσαι. Ἄρα $2\cdot\overline{EA}\cdot\overline{PQ} = 2\cdot\overline{ZB}\cdot\overline{QP}$.

651. Αἱ δύο σφαῖραι αἱ ὁποῖαι ἔχουν διαμέτρους τὰς δύο ἀπέναντι ἀκμὰς ὀρθοκεντρικοῦ τετραέδρου, εἶναι ὀρθογώνιοι.

Ἀπόδειξις. Ἔστω Κ, Λ τὰ μέσα τῶν ΑΒ, ΓΔ ὀρθοκεντρικοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ. Εἶναι γνωστὸν ὅτι $AB^2+ΓΔ^2 = AΔ^2+BΓ^2 = AΓ^2+BΔ^2$ (1) (ἰδὲ ἄσκ. 201, ὁμὰς Α, ἀριθ. 6). Ἀκόμη $4KΛ^2 = BΓ^2+AΔ^2+AΓ^2+BΔ^2-$

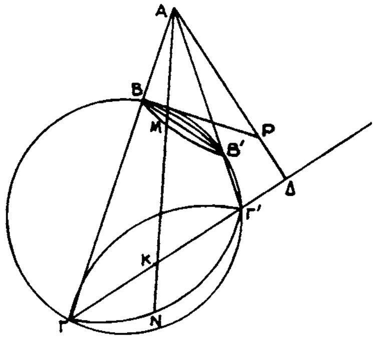
---

(1) Ὡς γνωστόν, τὸ κανονικὸν ὀκτάεδρον ἔχει ἕδρας ὀκτὼ ἰσόπλευρα τρίγωνα.

$-AB^2 - \Gamma\Delta^2$ (2) (ἰδὲ ἄσκ. 290).

Ἐκ τῶν (1),(2) $\Longrightarrow 4\,K\Lambda^2 = AB^2 + \Gamma\Delta^2 \Longrightarrow \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + \left(\frac{\Gamma\Delta}{2}\right)^2 = K\Lambda^2$.

652. Ἐὰν ἡ μία τομὴ σφαίρας μετὰ πλαγίου κώνου εἶναι κύκλος, καὶ ἡ ἄλλη τομὴ θὰ εἶναι ἐπίσης κύκλος.

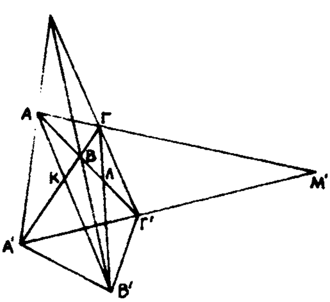


Ἀπόδειξις. Ἔστω (K) ὁ κύκλος τομῆς τῆς σφαίρας καὶ τοῦ κώνου. Φέρομεν τὴν ΑΔ κάθετον ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον τοῦ (K). Θεωροῦμεν τὴν διάμετρον τοῦ (K) τὴν διερχομένην διὰ τοῦ σημείου Δ, ἔστω ΓΓ'. Αἱ ΑΓ καὶ ΑΓ' τέμνουν τὴν σφαῖραν εἰς B, B'. Ἔχομεν $AB\cdot A\Gamma = AB'\cdot A\Gamma'$ (1). Εἰς τὸ B φέρομεν τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΓ, τέμνουσα τὴν ΑΔ εἰς P. Τὸ ΒΡΔΓ εἶναι ἐγγράψιμον, ἄρα $AB\cdot A\Gamma = AP\cdot A\Delta$ (2).

Ἐὰν τώρα M τυχὸν σημεῖον τῆς δευτέρας τομῆς τοῦ κώνου μετὰ τῆς σφαίρας καὶ N τομὴ τῆς (K) μετὰ τῆς εὐθείας AM, θὰ ἔχωμεν $AM\cdot AN = AB\cdot A\Gamma$ (3).

Τελικῶς, ἐκ τῶν (1),(2),(3) προκύπτει ὅτι $AM\cdot AN = AP\cdot A\Delta$, ἤτοι τὸ M κεῖται ἐπὶ σφαίρας διαμέτρου AP, ἡ τομὴ τῆς ὁποίας μετὰ τῆς δοθείσης σφαίρας εἶναι, ὡς γνωστόν, κύκλος.

653. Νὰ δειχθῇ ὅτι εἰς κολοβὴν τριγωνικὴν πυραμίδα τὰ σημεῖα τομῆς τῶν διαγωνίων τῶν παραπλεύρων ἑδρῶν καὶ τὰ σημεῖα τομῆς τῶν πλευρῶν τῶν βάσεων λαμβανομένων ἀνὰ δύο, κεῖνται εἰς τὸ αὐτὸ ἐπίπεδον.



Ἀπόδειξις. Θέτομεν $K = A'B \cap AB'$, $\Lambda = B'\Gamma \cap B\Gamma'$, $M = \Gamma'A \cap \Gamma A'$, $K' = AB \cap A'B'$, $\Lambda' = B\Gamma \cap B'\Gamma'$, $M' = \Gamma A \cap \Gamma'A'$. Θὰ δείξωμεν ὅτι τὰ σημεῖα $K, \Lambda, M, K', \Lambda', M'$ εἶναι συνεπίπεδα. Παρατηροῦμεν ὅτι τὰ σημεῖα K, Λ, M' εὑρίσκονται ἐπὶ τῶν ἐπιπέδων $AB'\Gamma$ καὶ $A'B\Gamma'$, ἤτοι εἰς τὴν τομὴν αὐτῶν. Ἄρα τὰ σημεῖα K, Λ, M' κεῖνται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας. Ὁμοίως τὰ Λ, M, K' καὶ τὰ M, K, Λ', ἤτοι τὰ ἕξ σημεῖα κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου (ἰδὲ ἄσκ. 3.6).

654. Ἔστω ΑΒΓ τυχὸν τρίγωνον καὶ Μ τυχὸν σημεῖον τοῦ χώρου. Δείξατε ὅτι $ΜΑ \cdot ΒΓ < ΜΒ \cdot ΓΑ + ΜΓ \cdot ΑΒ$.

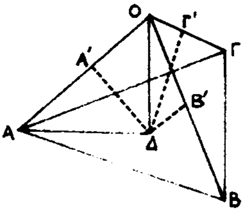
Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν τυχοῦσαν σφαῖραν διὰ τῶν Α, Β, Γ, ἡ ὁποία τέμνει τὰς ΜΑ, ΜΒ, ΜΓ ἔστω εἰς Α′, Β′, Γ′. Ἐὰν $κ^2$ ἡ δύναμις τοῦ σημείου Μ πρὸς τὴν σφαῖραν, ἔχομεν ὡς γνωστὸν (Ἄσκησις 510, τεῦχος 1):

$$Α'Β' = \frac{κ^2}{ΜΑ \cdot ΜΒ} ΑΒ, \quad Β'Γ' = \frac{κ^2}{ΜΒ \cdot ΜΓ} ΒΓ, \quad Γ'Α' = \frac{κ^2}{ΜΓ \cdot ΜΑ} ΓΑ.$$

Ἀλλὰ διὰ τὸ τρίγωνον Α′Β′Γ′ εἶναι $Β'Γ' < Α'Γ' + Α'Β'$, ἤτοι:

$$\frac{κ^2}{ΜΒ \cdot ΜΓ} ΒΓ < \frac{κ^2}{ΜΑ \cdot ΜΒ} \cdot ΑΒ + \frac{κ^2}{ΜΑ \cdot ΜΓ} \cdot ΑΓ \implies ΜΑ \cdot ΒΓ < ΜΒ \cdot ΓΑ + ΜΓ \cdot ΑΒ.$$

655. Δίδεται τρισορθογώνιον τετράεδρον ΟΑΒΓ καὶ ἔστω ΟΔ τὸ ὕψος αὐτοῦ. Νὰ δειχθῇ ὅτι αἱ προβολαὶ τοῦ ὕψους ἐπὶ τὰς ἀκμὰς τῆς τρισορθογωνίου εἶναι ἀνάλογοι τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἀντιστοίχων ἑδρῶν (τῆς τριέδρου).



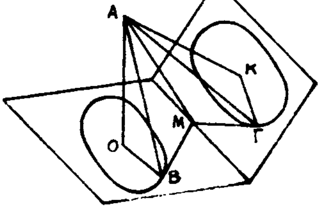
Ἀπόδειξις. Ἔστωσαν Α′, Β′, Γ′ αἱ προβολαὶ τοῦ Δ ἐπὶ τῶν ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ.
$\overset{\triangle}{ΟΔΑ} \implies ΟΔ^2 = ΟΑ' \cdot ΟΑ$ (1). Ἀλλὰ εἶναι
$(ΟΒΓ) = \frac{1}{2} ΟΒ \cdot ΟΓ$ (2).

$$(1),(2) \implies \frac{ΟΑ'}{(ΟΒΓ)} = \frac{2 ΟΔ^2}{ΟΑ \cdot ΟΒ \cdot ΟΓ}.$$

Ἡ τελευταία σχέσις ἀποδεικνύει καὶ τὸ ζητούμενον.

Παρατηρήσατε ὅτι $\frac{2 \cdot ΟΔ^2}{ΟΑ \cdot ΟΒ \cdot ΟΓ} = \frac{ΟΔ}{(ΑΒΓ)}$. (Διατί;)

656. Ἐὰν τὰ κέντρα δύο κύκλων τοῦ χώρου εἶναι προβολαὶ τοῦ αὐτοῦ σημείου Α ἐπὶ τὰ ἐπίπεδά των, ὑπάρχει δὲ ἓν σημεῖον τῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων των μὲ τὴν αὐτὴν δύναμιν πρὸς τοὺς δύο κύκλους, τότε οἱ κύκλοι ἀνήκουν εἰς τὴν αὐτὴν σφαῖραν.

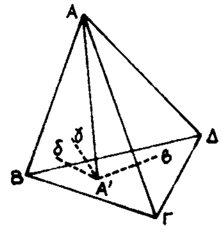


Ἀπόδειξις. Ἔστω Μ τὸ σημεῖον, τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν αὐτὴν δύναμιν πρὸς τοὺς δύο κύκλους. Αἱ ἐφαπτόμεναι ΜΒ καὶ ΜΓ θὰ εἶναι ἴσαι. Συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα τῶν τριῶν καθέτων θὰ εἶναι $Α\hat{Γ}Μ = Α\hat{Β}Μ = 1^L$. Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων τριγώνων ΑΓΜ, ΑΒΜ ἔχομεν $ΑΓ^2 = ΑΜ^2 - ΓΜ^2$ (1), $ΑΒ^2 = ΑΜ^2 - ΒΜ^2$ (2).

Ἐπειδὴ δὲ εἶναι $MB=M\Gamma$, ἕπεται ὅτι καὶ $A\Gamma=AB$. Ὅθεν οἱ κύκλοι ἀνήκουν εἰς τὴν σφαῖραν (A, AB).

657. Διὰ τῆς κορυφῆς A τετραέδρου ΑΒΓΔ φέρομεν εὐθεῖαν ἰσοκεκλιμένην πρὸς τὰς ἕδρας τῆς στερεᾶς γωνίας A τέμνουσαν τὴν ἀπέναντι ἕδραν ΒΓΔ εἰς τὸ σημεῖον A'. Νὰ δειχθῇ ὅτι $\frac{(A'B\Gamma)}{(AB\Gamma)}=\frac{(A'\Gamma\Delta)}{(A\Gamma\Delta)}=\frac{(A'\Delta B)}{(A\Delta B)}$.

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν τὰς ἀποστάσεις $A'\beta, A'\gamma, A'\delta$ ἀπὸ τὰς ἕδρας ΑΓΔ, ΑΒΔ, ΑΒΓ. Ὡς γνωστὸν εἶναι ἴσαι. Θέτομεν δὲ $A'\beta=A'\gamma=A'\delta=\lambda$. Ἐὰν υ τὸ ἐκ τῆς κορυφῆς A ὕψος τοῦ τετραέδρου, ἔχομεν $(AA'B\Gamma)=\frac{1}{3}\upsilon\cdot(A'B\Gamma)$ καὶ $(AA'B\Gamma)=\frac{1}{3}\lambda\cdot(AB\Gamma)$. Ὅθεν :

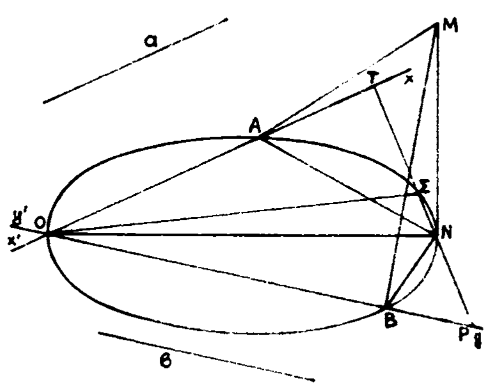


$$\frac{1}{3}\upsilon\cdot(A'B\Gamma)=\frac{1}{3}\lambda\cdot(AB\Gamma)\Rightarrow\frac{(A'B\Gamma)}{(AB\Gamma)}=\frac{\lambda}{\upsilon}.$$

658. Δίδονται δύο εὐθεῖαι α καὶ β καὶ σημεῖον O. Θεωροῦμεν τὰ εὐθ. τμήματα OM, ἑκάστου τῶν ὁποίων αἱ προβολαὶ ἐπὶ τὰς α καὶ β ἔχουν δοθὲν ἄθροισμα λ. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ M.

Μέρος (α). 1) Θεωροῦμεν τὰς α καὶ β παραλλήλους. Ἐκ τοῦ O φέρομεν τὴν εὐθεῖαν xOx' παράλληλον πρὸς τὰς α, β. Ὡς εἶναι γνωστόν, αἱ προβολαὶ ἑνὸς εὐθ. τμήματος ἐπὶ δύο εὐθείας παραλλήλους εἶναι ἴσαι. Ἄρα, λοιπόν, ἡ προβολὴ τοῦ OM ἐπὶ τὴν xOx' εἶναι ἴση πρὸς $\frac{\lambda}{2}$, ἄρα τὸ M κεῖται ἐπὶ δύο καθέτων ἐπιπέδων πρὸς τὴν xOx' καὶ εἰς ἀπόστασιν $\frac{\lambda}{2}$ ἀπὸ τοῦ O.

2) Ἔστω ὅτι αἱ α, β δὲν εἶναι παράλληλοι. Θεωροῦμεν διὰ τοῦ O τὰς εὐθείας $xOx' \parallel \alpha$ καὶ $yOy' \parallel \beta$ καὶ ἔστω ὅτι ἡ προβολὴ N τοῦ M εἰς τὸ ἐπίπεδον xOx', yOy' περιέχεται εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας xOy. Αἱ προβολαὶ τοῦ OM ἐπὶ τὰς α, β εἶναι ἴσαι ἀντιστοίχως πρὸς τὰς προβολὰς τοῦ OM ἐπὶ



τῶν xOx', yOy', ἄρα ἂν A, B αἱ προβολαὶ τοῦ M ἐπὶ τὰς Ox, Oy θὰ εἶναι $OA+OB=\lambda$ (1).

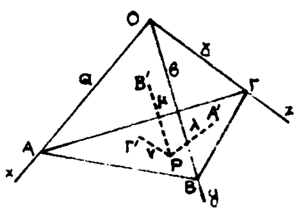
Συμφώνως πρὸς τὸ θεώρημα τῶν τριῶν καθέτων ἔχομεν $NA \perp Ox$, $NB \perp Oy$, ἄρα ὁ κύκλος διαμέτρου ON διέρχεται διὰ τῶν A, B. Ἐπειδὴ ὅμως ἰσχύει ἡ (1) κατὰ τὰ γνωστὰ ἐκ τῆς ἐπιπεδομετρίας ὁ κύκλος διαμέτρου ON θὰ διέρχεται δι' ἑνὸς σταθεροῦ σημείου τῆς διχοτόμου τῆς γωνίας xOy, ἔστω Σ. Ὅθεν, τὸ N εὑρίσκεται ἐπὶ τοῦ εὐθ. τμήματος TP τοῦ καθέτου εἰς Σ ἐπὶ τὴν $O\Sigma$, τοῦ περιεχομένου εἰς τὸ ἐσωτερικὸν τῆς γωνίας xOy. Τὸ σημεῖον M θὰ εὑρίσκεται εἰς τὴν ζώνην τοῦ ἐπιπέδου τὴν ὁριζομένην ἀπὸ τὰς καθέτους εἰς T, P ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον xOy.

Ἐὰν συνεχίσωμεν τὴν αὐτὴν ἐργασίαν διὰ τὰς γωνίας xOy', $x'Oy'$, $x'Oy$, εὑρίσκομεν ὅτι τὸ M κεῖται ἐπὶ ὀρθογωνίου πρισματικῆς ἐπιφανείας.

Μέρος (β). Τὸ ἀντίστροφον τοῦ (1) εἶναι ἁπλόν. Εἰς τὸ (2) τὸ πρόβλημα ἐναπόκειται εἰς τὸ νὰ ἀποδειχθῆ ὅτι ὁ κύκλος ὁ διερχόμενος διὰ τῶν O, Σ, N ἀποτέμνει ἀπὸ τὰς πλευρὰς τῆς xOy τμήματα OA, OB μὲ $OA+OB=\lambda$.

659. Δίδεται τρίεδρος στερεὰ γωνία $Oxyz$ καὶ ἓν σημεῖον P εἰς τὸ ἐσωτερικὸν αὐτῆς. Νὰ ἀχθῆ διὰ τοῦ P ἐπίπεδον τέμνον τὰς Ox, Oy, Oz εἰς A, B, Γ ἀντιστοίχως, ὥστε ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου $OAB\Gamma$ νὰ εἶναι ἐλάχιστος.

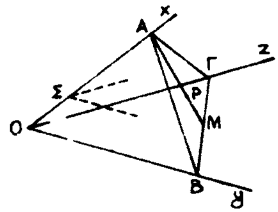
Ἀνάλυσις. Ἔστω $AB\Gamma$ τὸ ζητούμενον ἐπίπεδον. Θέτομεν $OA=\alpha$, $OB=\beta$, $O\Gamma=\gamma$ καὶ τὰς ἀποστάσεις τοῦ P ἀπὸ τὰς ἕδρας $BO\Gamma$, ΓOA, AOB, λ, μ, ν ἀντιστοίχως. Θὰ εἶναι



$(OAB\Gamma) = \frac{\lambda}{3}(BO\Gamma) + \frac{\mu}{3}(\Gamma OA) + \frac{\nu}{3}(AOB)$.

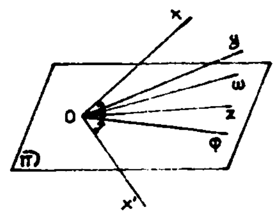
Ἀλλὰ $(OAB\Gamma) = \kappa \cdot \alpha\beta\gamma$ (1) (ἰδὲ κεφ. 9, παράγρ. 2.4), καθὼς καὶ $(BO\Gamma) = \lambda'\beta\gamma$, $(\Gamma OA) = \mu'\gamma\alpha$, $(AOB) = \nu'\alpha\beta$ (ἰδὲ ἄσκησιν 217, τεῦχος 1), ὅθεν $\frac{\lambda\lambda'}{3}\beta\gamma + \frac{\mu\mu'}{3}\alpha\gamma + \frac{\nu\nu'}{3}\alpha\beta = \kappa\alpha\beta\gamma$, ἢ ἂν τεθῆ $\frac{\lambda\lambda'}{3} = \Lambda$, $\frac{\mu\mu'}{3} = M$, $\frac{\nu\nu'}{3} = N$, θὰ ἔχωμεν $\frac{\Lambda}{\alpha} + \frac{M}{\beta} + \frac{N}{\gamma} = \kappa$ (2). Ἀλλὰ τότε τὸ $\frac{\Lambda}{\alpha} \cdot \frac{M}{\beta} \cdot \frac{N}{\gamma}$ γίνεται μέγιστον ἢ τὸ $\alpha\beta\gamma$ ἐλάχιστον, ὅταν $\frac{\Lambda}{\alpha} = \frac{M}{\beta} = \frac{N}{\gamma}$ (3). Τότε ὅμως, ὡς φαίνεται ἐκ τῆς (1), τὸ $(OAB\Gamma)$ ἔχει ἐλάχιστον. Διὰ πολλαπλασιασμοῦ τῆς σχέσεως (3) ἐπὶ $\alpha\beta\gamma$ ἔχομεν $\Lambda\beta\gamma = M\alpha\gamma = N\alpha\beta$ ἢ $\frac{\lambda\lambda'}{3}\beta\gamma = \frac{\mu\mu'}{3}\alpha\gamma = \frac{\nu\nu'}{3}\alpha\beta$ ἢ τελικῶς

$(POAB)=(POB\Gamma)=(POA\Gamma)$ (4). Τά τετράεδρα ΡΟΑΒ, ΡΟΒΓ, ΡΟΑΓ ἔχουν τό αὐτό ἐκ τῆς κορυφῆς Ο ὕψος. Ἄρα θά πρέπη $(APB)=(BP\Gamma)=(\Gamma PA)$, ἤτοι τό σημεῖον Ρ εἶναι τό κέντρον βάρους τοῦ τριγώνου ΑΒΓ.



Σύνθεσις. Φέρομεν διά τοῦ Ρ ἐπίπεδον παράλληλον πρός τό yOz τέμνον τήν Οx εἰς Σ. Λαμβάνομεν $A\Sigma=2\cdot O\Sigma$. Ἡ ΑΡ τέμνει τό ἐπίπεδον yOz εἰς Μ. Διά τοῦ Μ φέρομεν τέμνουσαν ΒΓ, ὥστε $MB=M\Gamma$. Τό ἐπίπεδον ΑΒΓ εἶναι τό ζητούμενον. Εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι τό σημεῖον Ρ εἶναι τό κέντρον βάρους τοῦ $\widehat{AB\Gamma}$.

660. Δίδεται ἐπίπεδον Π καί σημεῖον Ο αὐτοῦ. Ἔστωσαν δύο ἡμιευθεῖαι Οx, Οy μή κείμεναι ἐπ' αὐτοῦ. Ζητεῖται νά προσδιορισθοῦν αἱ ἡμιευθεῖαι Οz, Οω τοῦ ἐπιπέδου, ὥστε α) $x\widehat{O}z+y\widehat{O}z=$ ἐλάχιστον καί β) $|x\widehat{O}\omega-y\widehat{O}\omega|=$ μέγιστον.



Ἀνάλυσις. α) Ἔστω Οz ἡ ζητουμένη ἡμιευθεῖα. Θέτομεν Οx′ τήν συμμετρικήν τῆς Οx πρός Π. Θά εἶναι προφανῶς $x\widehat{O}z=x'\widehat{O}z$.

Ἔχομεν, λοιπόν, $x\widehat{O}z+y\widehat{O}z=x'\widehat{O}z+y\widehat{O}z=$ ἐλάχιστον. Ἀλλ' ὡς γνωστόν $x'\widehat{O}z+y\widehat{O}z\geqslant y\widehat{O}x'$. Ἄρα ἐλάχιστον $(x'\widehat{O}z+y\widehat{O}z)=y\widehat{O}x'$. Τοῦτο ὅμως συμβαίνει, ὅταν $Oz=\Pi\cap x'Oy$.

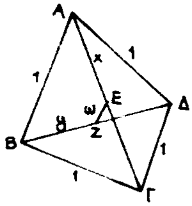
β) Ἔστω Οω ἡ ζητουμένη ἡμιευθεῖα. Θά ἔχωμεν ὅμως $|x\widehat{O}\omega-y\widehat{O}\omega|\leqslant y\widehat{O}x$, ἤτοι μέγιστον $|x\widehat{O}\omega-y\widehat{O}\omega|=y\widehat{O}x$. Τοῦτο ὅμως συμβαίνει, ὅταν $O\omega=\Pi\cap xOy$.

Ἡ σύνθεσις, ἀπόδειξις καί διερεύνησις ἄς γίνουν ἀπό τόν μαθητήν.

661. Τετραέδρου δύο ζεύγη ἀπέναντι πλευρῶν περιέχουν πλευράς μέ μέτρον ἴσον πρός τήν μονάδα. Ἐάν V ὁ ὄγκος του, θά εἶναι:

$$V\leqslant\frac{2\sqrt{3}}{27}.$$

Ἀπόδειξις. Ἔστω $AB=B\Gamma=\Gamma\Delta=\Delta A=1$. Τά τρίγωνα ΒΑΔ, ΒΓΔ εἶναι ἴσα καί ἄν Ε, Ζ τά μέσα τῶν ΑΓ, ΒΔ θά εἶναι $AZ=Z\Gamma$ (ἀντιστοίχως διάμεσοι τῶν ἴσων τριγώνων). Ἄρα καί



$ZE \perp A\Gamma$. Ὁμοίως $EZ \perp B\Delta$, ἤτοι τὸ εὐθ. τμῆμα τὸ ὁποῖον συνδέει τὰ μέσα τῶν $A\Gamma, B\Delta$ εἶναι ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις αὐτῶν. Εἶναι γνωστὸν ὅμως ὅτι $AB^2+B\Gamma^2+\Gamma\Delta^2+\Delta A^2 = A\Gamma^2+B\Delta^2+4EZ^2$ (θεώρ. Euler) ἢ $x^2+y^2+4\omega^2 = 4$ (1). Ἀλλὰ $V=\frac{1}{6}xy\omega$ (2).

$(2) \Longrightarrow 2V=\frac{1}{6}xy(2\omega)$.

Τὰ τετράγωνα ὅμως $x, y, 2\omega$ ἔχουν σταθερὸν ἄθροισμα (1), ἄρα τὸ $2V$ γίνεται μέγιστον, ἂν $x=y=2\omega$ (3).

$(1),(3) \Longrightarrow x=\frac{2}{\sqrt{3}}$ καὶ V μέγιστον $=\frac{2\sqrt{3}}{27}$, ἄρα $V \leqslant \frac{2\sqrt{3}}{27}$.

662. Τὸ θεώρημα τοῦ Euler.

Ἐὰν α εἶναι ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀκμῶν, ε ὁ ἀριθμὸς τῶν ἑδρῶν καὶ κ ὁ ἀριθμὸς τῶν κορυφῶν κυρτοῦ [1] πολυέδρου, θὰ εἶναι:

$$\boxed{\alpha+2=\varepsilon+\kappa}$$

Ἀπόδειξις. Ἐξάγομεν μίαν ἕδραν τοῦ πολυέδρου. Τὸ πλῆθος τῶν ἀκμῶν, κορυφῶν δὲν μετεβλήθη, μόνον αἱ ἕδραι ἠλαττώθησαν κατὰ μίαν. Μετασχηματίζομεν τὸ ἐναπομεῖναν στερεόν, ὥστε ὅλαι αἱ ἕδραι του νὰ εὑρεθοῦν ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.[2] Ὁπωσδήποτε, ἕνας τέτοιος μετασχηματισμὸς μεταβάλλει τὰ μεγέθη τῶν πολυγώνων ἑδρῶν, ἀλλὰ δὲν μεταβάλλει τὸ εἶδος των. Τὸ σχῆμα, τὸ ὁποῖον ἔχομεν λάβει καὶ τὸ ὁποῖον καλοῦμεν ἐπίπεδον δίκτυον τοῦ πολυγώνου, ἔχει τὸ αὐτὸ πλῆθος κορυφῶν μὲ τὸ πολύεδρον. Ἑκάστη ἀκμὴ τοῦ πολυέδρου ἀντιστοιχεῖ μὲ μίαν πλευρὰν πολυγώνου τοῦ ἐπιπέδου δικτύου καί, τέλος, τὸ πλῆθος τῶν πολυγώνων τοῦ ἐπιπέδου δικτύου εἶναι ἴσον πρὸς τὸ πλῆθος τῶν ἑδρῶν μεῖον ἕν. Ἀρκεῖ λοιπὸν νὰ δείξωμεν ὅτι ἰσχύει ὁ τύπος $\kappa-\alpha+\varepsilon=1$,

(1) Τὸ θεώρημα ἰσχύει διὰ τὰ λεγόμενα "ἁπλᾶ πολύεδρα", δηλαδὴ τὰ τοπολογικῶς ἰσοδύναμα πρὸς τὴν σφαῖραν (διὰ συνεχοῦς παραμορφώσεως μετασχηματίζονται εἰς σφαίρας). Εἰδικὴ περίπτωσις ἁπλοῦ πολυέδρου εἶναι τὸ κυρτόν. Ἡ ἀνωτέρω ἀπόδειξις ἀφορᾷ εἰς ἓν ἁπλοῦν πολύεδρον.

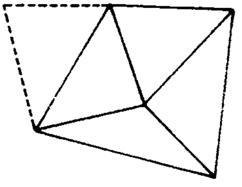
(2) Ἂς φαντασθῶμεν ὅτι τὸ στερεὸν εἶναι κατασκευασμένον ἀπὸ καουτσούκ.

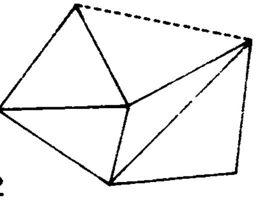
διά τό ἐπίπεδον δίκτυον.

Θεωροῦμεν ἕν τυχόν πολύγωνον μέ πλευράς περισσοτέρας τῶν τριῶν καί φέρομεν μίαν τυχοῦσαν διαγώνιον αὐτοῦ. Οὕτως, εἰς τό δίκτυον ἔχομεν προσθέσει μίαν ἕδραν καί μίαν ἀκμήν, ἤτοι τό $\kappa-\alpha+\varepsilon$ παραμένει ἀναλλοίωτον.

Ἐξακολουθοῦμεν τήν αὐτήν ἐργασίαν, ἕως ὅτου λάβωμεν ἕν δίκτυον τριγώνων (τριγωνικῶν ἑδρῶν).

Δυνάμεθα μέ τούς δύο κατωτέρω τρόπους νά προσθέσωμεν εἰς τό δίκτυον ἀκόμη ἕν τρίγωνον.


Σχ. 1


Σχ. 2

Εἰς τό Σχ. 1 προστίθενται δύο ἀκμαί, μία κορυφή καί μία ἕδρα, ἄρα $\kappa-\alpha+\varepsilon$ ἀναλλοίωτον.

Εἰς τό Σχ. 2 προστίθεται μία ἕδρα, μία ἀκμή, ἤτοι $\kappa-\alpha+\varepsilon$ ἀναλλοίωτον.

Εἶναι εὔκολον, λοιπόν, νά ἴδωμεν ὅτι ἕν δίκτυον τριγώνων προέκυψεν ἀπό ἕν τρίγωνον δι' ἐπαναλήψεως τῶν δύο ἀνωτέρω πράξεων (Σχ. 1, Σχ. 2). Τουτέστιν δι' ἕκαστον τριγωνικόν δίκτυον ἡ ποσότης $\kappa-\alpha+\varepsilon$ εἶναι ἡ αὐτή, ὅση δι' ἕν τρίγωνον, εἰς τό ὁποῖον $\kappa-\alpha+\varepsilon=3-3+1=1$.

663. Εἰς πᾶν πολύεδρον τό ἄθροισμα τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν εἶναι $4\kappa-8$ ὀρθαί.

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμεν ὅτι ἀποσυντίθεται τό πολύεδρον εἰς τάς ε ἕδρας του. Ἐάν ἡ πρώτη ἕδρα ἔχῃ ν_1 πλευράς θά ἔχῃ ἄθροισμα γωνιῶν $2\nu_1-4$ ὀρθάς. Ἡ δευτέρα μέ ν_2 πλευράς ἄθροισμα γωνιῶν $2\nu_2-4$ ὀρθάς, ἡ τρίτη $2\nu_3-4$ ὀρθάς, κ.τ.λ. Τό ἄθροισμα Σ τῶν γωνιῶν τῶν ε ἑδρῶν εἶναι $\Sigma=2(\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_\varepsilon)-4\varepsilon$ (1).

Ἑκάστη ἀκμή τοῦ πολυέδρου ἀνήκει εἰς δύο ἕδρας, ἄρα τό ἄθροισμα α τῶν ἀκμῶν εἶναι $\alpha=\frac{1}{2}(\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_\varepsilon)$ (2).

(1),(2) $\Rightarrow \Sigma=4(\alpha-\varepsilon)$. Ἀλλ' ὡς γνωστόν $\alpha+2=\kappa+\varepsilon$ ἤ $\alpha-\varepsilon=$ $=\kappa-2$, ὅθεν $\Sigma=4\kappa-8$ ὀρθαί.

Κανονικά πολύεδρα

Ἕν κυρτόν πολύεδρον ὀνομάζεται κανονικόν, ἄν, καί μόνον ἄν, αἱ ἕδραι του εἶναι ἴσα κανονικά πολύγωνα καί αἱ πολύεδροι στερεαί γωνίαι του τοῦ αὐτοῦ πλήθους ἑδρῶν.

Ἀποδεικνύεται εὐκόλως ὅτι ὅλαι αἱ δίεδροι καί αἱ πολύεδροι στερεαί γωνίαι εἶναι ἴσαι μεταξύ των.

Πρόβλημα. Νά εὑρεθοῦν τά κανονικά πολύεδρα.

Ἔστω x ὁ ἀριθμός τῶν πλευρῶν ἑκάστης ἕδρας. Θά εἶναι $x \cdot \varepsilon = 2\alpha$ (1).

Ἐάν y τό πλῆθος τῶν ἀκμῶν ἐξ ἑκάστης στερεᾶς γωνίας, θά ἔχωμεν $y \cdot \kappa = 2\alpha$ (2), διότι πάλιν ἑκάστη ἀκμή ὑπολογίζεται δύο φοράς.

Ἀντικαθιστῶντες τάς (1), (2) εἰς τόν τύπον τοῦ Euler ἔχομεν $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha}$ (3).

Εἶναι προφανές ὅτι $x \geqslant 3$, $y \geqslant 3$. Ἐξ ἄλλου, δέν εἶναι δυνατόν νά εἶναι ἀμφότεροι μεγαλύτεροι ἤ ἴσοι τοῦ τέσσερα, διότι $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\alpha}$ (ἄτοπον).

Ἔστω, λοιπόν, ὅτι ὁ ἕνας εἶναι 3, ἤτοι $y=3$.

$(3) \Longrightarrow x=\frac{6\alpha}{\alpha+6}$. Ἀπό τήν τελευταίαν σχέσιν εὑρίσκομεν ὅτι διά $\alpha=6, 12, 30$ ἔχομεν ἀντιστοίχως $x=3, 4, 5$. Ἐάν τώρα θέσωμεν $x=3$, εὑρίσκομεν (συμμετρικῶς) $y=3, 4, 5$. Αἱ δυναταί περιπτώσεις, λοιπόν, εἶναι ἕξ, ἐξαιρουμένης δέ τῆς λύσεως $x=3$, $y=3$, ἡ ὁποία ἐμφανίζεται δύο φοράς, αἱ δυναταί περιπτώσεις εἶναι **πέντε**. Ἄρα, λοιπόν, πέντε τά κανονικά πολύεδρα:

$x=3$, $y=3$: ἕδραι ἰσόπλευρα τρίγωνα, κανονικόν τετράεδρον·
$x=4$, $y=3$: ἕδραι τετράγωνα, κύβος·
$x=5$, $y=3$: ἕδραι κανονικά πεντάγωνα, κανονικόν δωδεκάεδρον·
$x=3$, $y=4$: ἕδραι ἰσόπλευρα τρίγωνα, κανονικόν ὀκτάεδρον·
$x=3$, $y=5$: ἕδραι ἰσόπλευρα τρίγωνα, κανονικόν εἰκοσάεδρον.

Δυνάμεθα εὐκόλως νά προσδιορίσωμεν τό πλῆθος τῶν κανονικῶν πολυέδρων, χωρίς νά χρησιμοποιήσωμεν τό θεώρημα τοῦ Euler, ὡς κάτωθι:

Εἰς ἑκάστην στερεάν γωνίαν τό ἄθροισμα τῶν ἐπιπέδων γωνιῶν της ὀφείλει νά εἶναι μικρότερον τῶν 2π. Ἀλλ' ἐπίσης ἑκάστη στερεά γωνία ἔχει τό ὀλιγώτερον τρεῖς ἕδρας. Ὅθεν, ἑκάστη ἑδρική γωνία θά εἶναι μικροτέρα τῶν

$\frac{2\pi}{3}$. Ἡ γωνία τοῦ κανονικοῦ ἑξαγώνου εἶναι $\frac{2\pi}{3}$. Ἄρα τὸ κανονικὸν πολύεδρον θὰ ἀποτελῆται (ἕδραι) ἀπὸ ἰσόπλευρα τρίγωνα, τετράγωνα, κανονικὰ πεντάγωνα.

Εἰς ἑκάστην κορυφὴν δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχωμεν περισσότερα τῶν τριῶν πενταγώνων. Ἄρα, ἓν κανονικὸν πολύεδρον ἔχει ἕδρας κανονικὰ πεντάγωνα.

Ἐπίσης, δὲν εἶναι δυνατὸν εἰς ἑκάστην κορυφὴν νὰ ἔχωμεν περισσότερα τῶν τριῶν τετράγωνα.

Μὲ ἰσόπλευρα τρίγωνα δυνάμεθα νὰ σχηματίσωμεν τρία κανονικὰ πολύεδρα, διότι $3\frac{\pi}{3}<2\pi$, $4\frac{\pi}{3}<2\pi$, $5\frac{\pi}{3}<2\pi$, ἤτοι συνολικῶς πέντε κανονικὰ πολύεδρα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΛΥΣΙΝ

664. Ἡ κοινὴ κάθετος δύο ὑψῶν τετραέδρου ἀγομένων ἐκ δύο κορυφῶν του εἶναι παράλληλος πρὸς τὴν ἀκμὴν τὴν ὁριζομένην ὑπὸ τῶν δύο ἄλλων κορυφῶν.

665. Εἰς πᾶν τετράεδρον τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων τῶν τριῶν ὑψῶν εἶναι μεγαλύτερον τοῦ ἀντιστρόφου τοῦ τετάρτου ὕψους.

666. Τὰ τέσσαρα ἐπίπεδα, τὰ ὁποῖα ὁρίζονται ἀπὸ τὰ τέσσαρα ὕψη τετραέδρου καὶ τὰ ἀντίστοιχα ὀρθόκεντρα τῶν ἑδρῶν, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

667. Τὰ μεσοκάθετα ἐπίπεδα, εἰς τὰ εὐθ. τμήματα, τὰ ὁποῖα συνδέουν τὸ ὀρθόκεντρον ἑκάστης ἕδρας τετραέδρου μὲ τὴν προβολὴν τοῦ ἀντιστοίχου ὕψους ἐπ' αὐτήν, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

668. Τὰ ἐξωτερικὰ διχοτομοῦντα ἐπίπεδα τὰς διέδρους τετραέδρου τέμνουν τὰς ἀπέναντι ἀκμὰς κατὰ 6 συνεπίπεδα σημεῖα.

669. Ἐὰν δύο ἀκμαὶ τετραέδρου μὲ δοθέντα μήκη κινοῦνται ἐπὶ δύο σταθερῶν εὐθειῶν, ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου παραμένει σταθερός.

670. Ὁ ὄγκος τετραέδρου εἶναι ἴσος πρός τό ἕν τρίτον μιᾶς ἀκμῆς του, ἐπί τήν προβολήν τοῦ τετραέδρου ἐπί ἐπίπεδον κάθετον εἰς τήν ἐν λόγῳ ἀκμήν.

671. Δίδονται τρεῖς παράλληλοι ἀλλά μή συνεπίπεδοι εὐθεῖαι. Ἐπί τῆς πρώτης κεῖται τό εὐθ. τμῆμα $AB=\lambda$ καί ἐπί τῶν ἄλλων τά σημεῖα Γ καί Δ ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ εἶναι σταθερός.

672. Ὁ ὄγκος τετραέδρου εἶναι ἴσος πρός τό γινόμενον τοῦ ἐμβαδοῦ ἑνός παραλληλογράμμου μέ κορυφάς τά μέσα τῶν τεσσάρων ἀκμῶν του ἐπί τά $\frac{2}{3}$ τῆς κοινῆς καθέτου τῶν δύο ὑπολοίπων ἀπέναντι ἀκμῶν.

673. Ἐξ ἑνός σημείου τοῦ χώρου φέρομεν παραλλήλους καί ἴσας πρός τά εὐθ. τμήματα τά ὁποῖα συνδέουν τά μέσα τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν τετραέδρου. Δείξατε ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ προκύπτοντος τετραέδρου εἶναι τό ἥμισυ τοῦ προηγουμένου τετραέδρου.

674. Τό κέντρον τῆς περιγεγραμμένης σφαίρας τρισορθογωνίου τετραέδρου ΟΑΒΓ εἶναι τό συμμετρικόν τοῦ Ο ὡς πρός τό κέντρον βάρους τοῦ τετραέδρου.

675. Τό ὕψος τρισορθογωνίου τετραέδρου εἶναι τό $\frac{1}{3}$ τῆς χορδῆς τήν ὁποίαν ἀποκόπτει ἡ περιγεγραμμένη σφαῖρα ἀπό τήν εὐθεῖαν, ἐπί τῆς ὁποίας κεῖται τό ὕψος.

676. Ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου τῆς περιγεγραμμένης σφαίρας τρισορθογωνίου τετραέδρου ΟΑΒΓ ἀπό τήν βάσιν ΑΒΓ εἶναι ἴση πρός τό ἥμισυ τοῦ ὕψους.

677. Εἰς τό τρισορθογώνιον τετράεδρον ΟΑΒΓ ἡ δύναμις τῆς κορυφῆς Α πρός τόν κύκλον διαμέτρου ΒΓ ἰσοῦται πρός OA^2.

678. Δοθέντος τετραέδρου θεωροῦμεν τά συμμετρικά ἐπίπεδα τῶν ἑδρῶν αὐτοῦ πρός τάς ἀπέναντι κορυφάς. Νά δειχθῆ ὅτι τὸ σχηματιζόμενον τετράεδρον ἔχει τὸ ἴδιον κέντρον βάρους πρὸς τὸ προηγούμενον, ὁ λόγος δὲ τῶν ὄγκων των εἶναι $\frac{1}{7}$.

679. Ἐκ τῶν μέσων δύο διαδοχικῶν ἀκμῶν τετραέδρου φέρομεν τὰς παραλλήλους πρὸς τὰς ἀπέναντι ἀκμὰς ἀντιστοίχως, τεμνομένας ἔστω εἰς τὸ σημεῖον Α. Δείξατε ὅτι τὸ σημεῖον τομῆς τῶν ἐν λόγῳ παραλλήλων κεῖται ἐπὶ τῆς ἐκ τοῦ Α ἀγομένης διαμέσου τοῦ τετραέδρου.-

680. Εἰς τὸ ὀρθοκεντρικὸν τετράεδρον τὸ γινόμενον τῶν εὐθ. τμημάτων, εἰς τὰ ὁποῖα τὸ ὀρθόκεντρον διαιρεῖ τὰ ὕψη, εἶναι σταθερόν.

681. Εἰς τὸ ὀρθοκεντρικὸν τετράεδρον, τρεῖς κορυφαὶ καὶ τὰ ὀρθόκεντρα τῶν ἀπέναντι ἑδρῶν κεῖνται ἐπὶ μιᾶς σφαίρας. Αἱ οὕτω λαμβανόμεναι τέσσαρες σφαῖραι εἶναι ἴσαι.

682. Δίδεται τρισορθογώνιον τετράεδρον ΟΑΒΓ. Ἡ ἐκ τοῦ κέντρου βάρους G κάθετος ἐπὶ τὴν βάσιν ΑΒΓ τέμνει τὰς ἕδρας ΟΑΒ, ΟΒΓ, ΟΓΑ ἀντιστοίχως εἰς Γ′, Α′, Β′. Δείξατε ὅτι $ΓΑ' : ΓΒ' : ΓΓ' = ΟΑ^2 : ΟΒ^2 : ΟΓ^2$.

683. Εἰς τὸ ἰσοσκελὲς τετράεδρον τὸ κέντρον τῆς ἐγγεγραμμένης σφαίρας ταυτίζεται πρὸς τὸ κέντρον βάρους τοῦ τετραέδρου. Ἀντιστρόφως.

684. Τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῆς ἐγγεγραμμένης σφαίρας εἰς ἰσοσκελὲς τετράεδρον μετὰ τῶν ἑδρῶν συμπίπτουν μὲ τὰ κέντρα τῶν περιγεγραμμένων κύκλων τῶν ἑδρῶν.

685. Ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα τετράεδρον εἶναι ἰσοσκελές, εἶναι ὅπως τὰ κέντρα ἐγγεγραμμένης καὶ περιγεγραμμένης σφαίρας συμπίπτουν.

686. Ἐὰν αἱ περίμετροι τῶν τεσσάρων ἑδρῶν τετραέδρου εἶναι ἴσαι, τὸ τετράεδρον θὰ εἶναι ἰσοσκελές.

687. Ἐάν α, β, γ εἶναι αἱ ἀκμαὶ ἰσοσκελοῦς τετραέδρου καὶ R, V, ρ, υ, E εἶναι ἡ ἀκτὶς τῆς περιγεγραμμένης σφαίρας, ὁ ὄγκος, ἡ ἀκτὶς τῆς ἐγγεγραμμένης σφαίρας, τὸ ὕψος καὶ τὸ ἐμβαδὸν μιᾶς ἕδρας τοῦ τετραέδρου, δείξατε ὅτι :

α) $8R^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ ·

β) $72V^2 = 128E^2\rho^2 = 8E^2\upsilon^2 = (\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)(\gamma^2+\alpha^2-\beta^2)(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)$.

688. Εἰς τετράεδρον αἱ κοιναὶ κάθετοι δύο ζευγῶν ἀπέναντι ἀκμῶν ταυτίζονται πρὸς τὰ εὐθ. τμήματα τὰ ὁποῖα συνδέουν τὰ μέσα αὐτῶν. Δείξατε ὅτι τὸ αὐτὸ θὰ συμβαίνη καὶ διὰ τὸ τρίτον.

689. Εἰς τετράεδρον ΟΑΒΓ εἶναι $OA = OB = O\Gamma = d$ καὶ α, β, γ αἱ πλευραὶ τοῦ τριγώνου ΑΒΓ. Δείξατε ὅτι ὁ ὄγκος του V δίδεται ἀπὸ τὸν τύπον :

$$12V = \sqrt{16\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)d^2-\alpha^2\beta^2\gamma^2}\ ,$$

ὅπου $2\tau = \alpha+\beta+\gamma$.

690. Ἐάν M εἶναι τυχὸν σημεῖον τοῦ ἐπιπέδου τοῦ διερχομένου διὰ τοῦ κέντρου τῆς περιγεγραμμένης σφαίρας τετραέδρου ΑΒΓΔ καὶ καθέτου ἐπὶ τὴν διάμεσον ἐκ τῆς κορυφῆς Α, θὰ ἔχωμεν $3AM^2 = BM^2+\Gamma M^2+\Delta M^2$.

691. Ἐπίπεδον τέμνει τὰς τέσσαρας πλευρὰς στρεβλοῦ τετραπλεύρου εἰς τέσσαρα σημεῖα. Δείξατε ὅτι τὰ συμμετρικὰ αὐτῶν ἀντιστοίχως ὡς πρὸς τὰ μέσα τῶν πλευρῶν κεῖνται ἐπὶ ἑνὸς ἐπιπέδου.

692. Δίδεται τετράεδρον ΑΒΓΔ. Αἱ διάμετροι ΑΚ, ΒΛ, ΓΜ, ΔΝ τῆς περιγεγραμμένης σφαίρας τέμνουν τὰς ἀντιστοίχους ἕδρας εἰς Κ′, Λ′, Μ′, Ν′. Δείξατε ὅτι :

α) $\dfrac{K'K}{AK'}+\dfrac{\Lambda'\Lambda}{B\Lambda'}+\dfrac{M'M}{\Gamma M'}+\dfrac{N'N}{\Delta N'} = 2$, β) $\dfrac{AK}{AK'}+\dfrac{B\Lambda}{B\Lambda'}+\dfrac{\Gamma\Lambda}{\Gamma\Lambda'}+\dfrac{\Delta N}{\Delta N'} = 6$.

693. Τὰ ὕψη ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′, ΔΔ′ τετραέδρου ΑΒΓΔ τέμνουν τὴν περιγεγραμμένην σφαῖραν ἀντιστοίχως εἰς Α″, Β″, Γ″, Δ″. Δείξατε ὅτι $\dfrac{AA''}{AA'}+\dfrac{BB''}{BB'}+\dfrac{\Gamma\Gamma''}{\Gamma\Gamma'}+\dfrac{\Delta\Delta''}{\Delta\Delta'} = 6$.

694. Δίδεται τετράεδρον ΑΒΓΔ. Αἱ παράλληλοι ἐκ τῶν κορυφῶν πρὸς δοθεῖσαν διεύθυνσιν τέμνουν τὰς ἀπέναντι ἕδρας εἰς τὰ σημεῖα A', B', Γ', Δ' ἀντιστοίχως. Δεῖξατε ὅτι:

$$(A'B'\Gamma'\Delta') = 3(AB\Gamma\Delta).$$

695. Αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι τὰς κορυφὰς τετραέδρου $AB\Gamma\Delta$ μὲ τὸ κέντρον βάρους G αὐτοῦ, τέμνουν τὴν περιγεγραμμένην σφαῖραν εἰς K, Λ, M, N ἀντιστοίχως. Νὰ δειχθῆ ὅτι:

$$\frac{AG}{GK} + \frac{BG}{G\Lambda} + \frac{\Gamma G}{GM} + \frac{\Delta G}{GN} = 4.$$

696. Ἐπίπεδον διὰ τοῦ κέντρου βάρους τετραέδρου $AB\Gamma\Delta$ τέμνει τὰς ἀκμὰς $\Delta A, \Delta B, \Delta\Gamma$ εἰς τὰ σημεῖα K, Λ, M. Δεῖξατε ὅτι $\frac{AK}{K\Delta} + \frac{B\Lambda}{\Lambda\Delta} + \frac{\Gamma M}{M\Delta} = 1.$

697. Ἐὰν εὐθεῖα συνδέουσα τυχὸν σημεῖον M τοῦ χώρου μὲ τὸ κέντρον βάρους G τετραέδρου $AB\Gamma\Delta$ τέμνη τὰς ἕδρας $B\Gamma\Delta, \Gamma\Delta A, \Delta AB, AB\Gamma$ εἰς τὰ σημεῖα P, Q, R, S ἀντιστοίχως, θὰ ἔχωμεν

α) $\frac{\overline{PM}}{\overline{PG}} + \frac{\overline{QM}}{\overline{QG}} + \frac{\overline{RM}}{\overline{RG}} + \frac{\overline{SM}}{\overline{SG}} = 4,$ β) $\frac{1}{\overline{GP}} + \frac{1}{\overline{GQ}} + \frac{1}{\overline{GR}} + \frac{1}{\overline{GS}} = 0.$

698. Τετράεδρον $KLMN$ εἶναι ἐγγεγραμμένον εἰς τετράεδρον $ABCD$, καὶ O τυχὸν σημεῖον τοῦ χώρου. Ἂν αἱ παράλληλοι AP, BQ, CR, DS πρὸς τὰς εὐθείας OK, OL, OM, ON τέμνουν ἀντιστοίχως τὰς ἕδρας τοῦ $ABCD$ εἰς P, Q, R, S, δεῖξατε ὅτι $\frac{OK}{AP} + \frac{OL}{BQ} + \frac{OM}{CR} + \frac{ON}{DS} = 1.$

699. Ἐπὶ τῆς ἀσκήσεως 194, δεῖξατε ὅτι:

$$12 \leqslant \sum_{i=1}^{4} \frac{x_i}{u_i} \leqslant 81.$$

700. Δύο σφαῖραι ἐφάπτονται. Τρίτη σφαῖρα ἐφάπτεται τῆς διακέντρου τῶν δύο προηγουμένων εἰς τὸ σημεῖον ἐπαφῆς αὐτῶν. Δεῖξατε ὅτι ἡ τρίτη σφαῖρα τέμνει ὀρθογωνίως τὰς ἄλλας.

701. Θεωροῦμεν δύο σφαίρας $(O_1, R_1), (O_2, R_2)$ αἱ ὁποῖαι ἐφάπτονται τῶν ἑδρῶν ἑνὸς τετραέδρου. Νὰ δειχθῆ ὅτι αἱ τέσσαρες προβολαὶ τοῦ μέσου M τῆς διακέντρου ἐπὶ τὰς τέσσαρας ἕδρας τοῦ τετραέδρου εἶναι σημεῖα συνεπίπεδα.

702. Δύο σφαῖραι τέμνονται ὀρθογωνίως. Δείξατε ὅτι ἕκαστον ἐπίπεδον διερχόμενον διὰ τοῦ κέντρου μιᾶς ἐξ αὐτῶν τέμνει τὰς σφαίρας κατὰ κύκλους τεμνομένους ὀρθογωνίως.

703. Μεταβλητὸς κύκλος (O,R) τέμνει δύο σταθεροὺς κύκλους (K,ρ), (K',ρ') εἰς δύο σημεῖα ἕκαστον. Δείξατε ὅτι τὸ ἐπίπεδον τοῦ (O,R) διέρχεται διὰ σταθεροῦ σημείου.

704. Τὸ ριζικὸν κέντρον τῶν παρεγγεγραμμένων σφαιρῶν ἰσοσκελοῦς τετραέδρου συμπίπτει μὲ τὸ κέντρον βάρους αὐτοῦ.

705. Τὸ ριζικὸν κέντρον τεσσάρων ἴσων σφαιρῶν ταυτίζεται πρὸς τὰ κέντρα δύο ἐκ τῶν ἐφαπτομένων σφαιρῶν εἰς τὰς τέσσαρας σφαίρας.

706. Τέσσαρες σφαῖραι, τῶν ὁποίων αἱ ἀκτῖνες εἶναι a, b, c, d ἀντιστοίχως, ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς. Θεωροῦμεν τὴν σφαῖραν ἀκτῖνος r, ἡ ὁποία ἐφάπτεται τῶν προηγουμένων ἐξωτερικῶς. Δείξατε ὅτι $\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r}\sum\frac{1}{a}+\sum\frac{1}{a^2}-\sum\frac{1}{ab}=0$.

707. Τέσσαρες σφαῖραι, μὲ ἀκτῖνας a, b, c, d ἐφάπτονται ἐξωτερικῶς. Ἔστω r ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας ἡ ὁποία τέμνει τὰς προηγουμένας ὀρθογωνίως. Δείξατε ὅτι:

$$\frac{4}{r^2}=2\sum\frac{1}{ab}-\sum\frac{1}{a^2}.$$

708. Μεταβλητὴ σφαῖρα (P) τέμνει δοθεῖσαν σφαῖραν (S') κατὰ μέγιστον κύκλον καὶ ἔχει τὸ κέντρον της ἐπὶ δοθείσης σφαίρας (S). Δείξατε ὅτι τὸ ριζικὸν ἐπίπεδον τῶν (S) καὶ (P) ἐφάπτεται σταθερᾶς σφαίρας ὁμοκέντρου τῆς (S').

709. Ἐὰν ἡ σφαῖρα (A) διέρχεται διὰ τοῦ κέντρου τῆς σφαίρας (B), τότε τὸ ἐπίπεδον, ἐπὶ τοῦ ὁποίου κεῖνται τὰ σημεῖα ἐπαφῆς τῆς (A) μετὰ τοῦ περιγεγραμμένου εἰς τὰς δύο σφαίρας κώνου, ἐφάπτεται τῆς σφαίρας (B).

710. Ἐὰν I εἶναι τὸ κέντρον τῆς ἐγγεγραμμένης σφαίρας εἰς τὸ τετράεδρον ΑΒΓΔ, τὰ κέντρα τῶν τεσσάρων σφαιρῶν ΙΒΓΔ, ΙΓΔΑ, ΙΔΑΒ, ΙΑΒΓ ὁρίζουν σφαῖραν τῆς ὁποίας το κέντρον ταυτίζεται πρὸς τὸ κέντρον τῆς σφαίρας ΑΒΓΔ. Ἐάν μ ἡ ἀκτὶς αὐτῆς τῆς σφαίρας καὶ R, ρ αἱ ἀκτῖνες τῆς περιγεγραμμένης καὶ ἐγγεγραμμένης σφαίρας τοῦ ΑΒΓΔ, θὰ ἔχωμεν $IO^2 = R^2 - 2\mu\rho$.

711. Τετραέδρου αἱ ἀκμαὶ ἐφάπτονται μιᾶς σφαίρας. Δείξατε ὅτι οἱ ἐγγεγραμμένοι κύκλοι τῶν ἑδρῶν κεῖνται ἐπὶ μιᾶς σφαίρας.

712. Τετραέδρου αἱ ἀκμαὶ ἐφάπτονται τῆς αὐτῆς σφαίρας. Δείξατε ὅτι τὰ εὐθ. τμήματα, τὰ ὁποῖα συνδέουν τὰ σημεῖα ἐπαφῆς ἐπὶ τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν, διέρχονται διὰ τοῦ αὐτοῦ σημείου.

713. Τετραέδρου ΑΒΓΔ αἱ ἀκμαὶ ἐφάπτονται μιᾶς σφαίρας. Ἂν αἱ ἐφαπτόμεναι ἐκ τῶν κορυφῶν Α, Β, Γ, Δ εἶναι ἀντιστοίχως p, q, r, s, u ἡ ἀκτὶς τῆς σφαίρας καὶ a, b, c, d αἱ ἀκτῖνες τῶν ἐγγεγραμμένων κύκλων εἰς τὰς ἕδρας, δείξατε:

α) $\Sigma \frac{1}{a^2} = 2\Sigma \frac{1}{pq}$, β) $(ΑΒΓΔ) = \frac{2pqrs}{3u}$.

714. Τετραέδρου αἱ ἀκμαὶ ἐφάπτονται τῆς αὐτῆς σφαίρας. Θεωροῦμεν τὸν ριζικὸν ἄξονα τοῦ περιγεγραμμένου καὶ τοῦ ἐγγεγραμμένου κύκλου εἰς μίαν ἕδραν. Αἱ οὕτως εὑρισκόμεναι τέσσαρες εὐθεῖαι (τέσσαρες ριζικοὶ ἄξονες) διὰ τὰς τέσσαρας ἕδρας εἶναι συνεπίπεδοι.

715. Εἰς τὸ ὀρθοκεντρικὸν τετράεδρον τὸ συμμετρικὸν μιᾶς κορυφῆς ὡς πρὸς τὸ ὀρθόκεντρον κεῖται ἐπὶ τῆς εὐθείας ἡ ὁποία συνδέει τὸ κέντρον τῆς περιγεγραμμένης σφαίρας μὲ τὸ κέντρον βάρους τῆς ἀπέναντι ἕδρας.

716. Εἰς τὸ ὀρθοκεντρικὸν τετράεδρον ἡ εὐθεῖα ἡ ὁποία συνδέει τὸ ὀρθόκεντρον μὲ τὸ κέντρον βάρους μιᾶς ἕδρας διέρχεται διὰ τοῦ ἀντιδιαμετρικοῦ σημείου τῆς ἀντιστοίχου κορυφῆς πρὸς τὴν περιγεγραμμένην σφαῖραν.

717. Εἰς ὀρθοκεντρικὸν τετράεδρον ΑΒΓΔ εἶναι ΑΑ′ τὸ ὕγος καί Η τό ὀρθόκεντρον. Δείξατε ὅτι ἡ ἀπόστασις τοῦ κέντρου τῆς περιγεγραμμένης σφαίρας ἀπό τήν ἕδραν ΒΓΔ εἶναι $\frac{AH-HA'}{2}$.

718. Εἰς τό ὀρθοκεντρικόν τετράεδρον τό γινόμενον δύο ζευγῶν ἀπέναντι ἀκμῶν εἶναι ἀντιστρόφως ἀνάλογον τῶν ἀντιστοίχων ἐλαχίστων ἀποστάσεων αὐτῶν.

719. Δίδεται τό ὀρθοκεντρικόν τετράεδρον ΑΒΓΔ καί τά σημεῖα Α′, Β′, Γ′, Δ′ ἐπί τῶν ἑδρῶν ΒΓΔ, ΔΓΑ, ΓΑΒ, ΑΒΓ ἀντιστοίχως. Νά δειχθῇ ὅτι τό ριζικόν κέντρον τῶν σφαιρῶν (Α,ΑΑ′), (Β,ΒΒ′), (Γ,ΓΓ′), (Δ,ΔΔ′) εἶναι τό ὀρθόκεντρον τοῦ τετραέδρου.

720. Τό ἄθροισμα τῶν δυνάμεων δοθέντος σημείου τοῦ χώρου ὡς πρός τάς δύο σφαίρας μέ διαμέτρους τάς ἀπέναντι ἀκμάς ὀρθοκεντρικοῦ τετραέδρου εἶναι τό αὐτό δι' ὅλα τά ζεύγη τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν.

721. Τά εὐθ. τμήματα, τά ὁποῖα συνδέουν τά μέσα τῶν ὕψῶν ὀρθοκεντρικοῦ τετραέδρου μέ τά κέντρα τῶν περιγεγραμμένων κύκλων τῶν ἀντιστοίχων ἑδρῶν, διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου, τό ὁποῖον διχοτομεῖ ἕκαστον εὐθ. τμῆμα.

722. Τά πέρατα δύο ἀσυμβάτως ὀρθογωνίων διαμέτρων δύο ὀρθογωνίως τεμνομένων σφαιρῶν εἶναι κορυφαί ὀρθοκεντρικοῦ τετραέδρου.

723. Θεωροῦμεν τυχόν ἐπίπεδον, τό ὁποῖον τέμνει τάς ἕδρας ὀρθοκεντρικοῦ τετραέδρου κατά τέσσαρας εὐθείας. Δείξατε ὅτι αἱ προβολαί τοῦ ὀρθοκέντρου ἐπί τάς ἐν λόγω εὐθείας εἶναι σημεῖα συνεπίπεδα.

724. Τό ριζικόν ἐπίπεδον τῶν δύο σφαιρῶν μέ διαμέτρους δύο ἀπέναντι ἀκμάς τετραέδρου διέρχεται διά τοῦ σημείου τοῦ Monge (ἰδέ ἄσκησιν 193).

725. Εἰς ὀρθοκεντρικὸν τετράεδρον ΑΒΓΔ ἐὰν Η εἶναι τὸ ὀρθόκεντρον καὶ R ἡ ἀκτὶς τῆς περιγεγραμμένης σφαίρας, τότε $AH^2 + BH^2 + \Gamma H^2 + \Delta H^2 = 4R^2$.

726. Ἔστω ΑΒΓΔ ἐγγράψιμον τετράπλευρον καὶ Ο τυχὸν σημεῖον μὴ κείμενον ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου αὐτοῦ. Δείξατε ὅτι

α) $AB\cdot B\Delta\cdot A\Delta\cdot O\Gamma^2 + B\Gamma\cdot \Gamma\Delta\cdot \Delta B\cdot OA^2 = AB\cdot B\Gamma\cdot A\Gamma\cdot O\Delta^2 + A\Gamma\cdot \Gamma\Delta\cdot A\Delta\cdot OB^2$ ·

β) $OA^2(B\Gamma\Delta) + O\Gamma^2(AB\Delta) = OB^2(A\Gamma\Delta) + O\Delta^2(AB\Gamma)$.

727. Τὰ τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α′Β′Γ′ εἶναι ἴσα εἰς τὸν χῶρον. Τὰ μεσοκάθετα ἐπίπεδα τῶν ΑΑ′, ΒΒ′, ΓΓ′ τέμνονται εἰς Ρ. Δείξατε ὅτι τὰ τετράεδρα ΡΑΒΓ, ΡΑ′Β′Γ′ εἶναι συμμετρικά.

728. Ἂν αἱ γωνίαι στρεβλοῦ ἑξαγώνου εἶναι ὀρθαί, αἱ κοιναὶ κάθετοι τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν αὐτοῦ εἶναι παράλληλοι πρὸς ἓν ἐπίπεδον.

729. Ὀνομάζομεν μέσην τομὴν τετραέδρου τὴν τομὴν τοῦ τετραέδρου ὑπὸ ἐπιπέδου διερχομένου διὰ τῶν μέσων δύο ἀπέναντι ἀκμῶν. Νὰ δειχθῆ ὅτι εἰς πᾶν τετράεδρον τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν μέσων τομῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ $\frac{1}{4}$ τοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν ἑδρῶν.

730. Τὸ ἄθροισμα τῶν ἀντιστρόφων τῶν τετραγώνων τῶν εὐθ. τμημάτων τὰ ὁποῖα συνδέουν τὰ μέσα τῶν ἀπέναντι ἀκμῶν ἰσοῦται πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν τετραγώνων τῶν ἀντιστρόφων τῶν τεσσάρων ὄγκων τοῦ τετραέδρου.

731. Θεωροῦμεν ἡμικύκλιον διαμέτρου ΑΒ. Τυχοῦσα παράλληλος πρὸς τὴν ΑΒ τέμνει τὴν ἐφαπτομένην εἰς Α τοῦ ἡμικυκλίου εἰς τὸ σημεῖον Γ, τὴν περιφέρειαν δὲ εἰς Δ, Ε. Περιστρέφομεν τὸ σχῆμα περὶ τὴν ἐφαπτομένην. Νὰ δειχθῆ ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν ἐμβαδῶν τῶν ἐπιφανειῶν τῶν γραφομένων ὑπὸ τῶν ἀκτίνων ΟΔ, ΟΕ εἶναι σταθερόν.

732. Δίδεται ὀρθογώνιον ΑΒΓΔ, τὸ ὁποῖον στρέφεται περὶ τὴν ΑΒ. Νὰ ὁρισθοῦν τὰ σημεῖα Ε καὶ Ζ ἐπὶ τῆς ΒΓ, ὥστε, ἂν συνδεθοῦν μὲ τὸ Δ, οἱ ὄγκοι τῶν τριῶν προκυπτόντων στερεῶν νά εἶναι ἴσα.

733. Τό τετράεδρον αβγδ σχηματίζεται ἀπό τάς προβολάς τοῦ σημείου Μ ἐπί τάς ἕδρας τοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ. Ἐάν V ὁ ὄγκος καί $A_1, B_1, \Gamma_1, \Delta_1$ τά ἐμβαδά τῶν ἑδρῶν τοῦ ΑΒΓΔ ἀντιστοίχως καί v ὁ ὄγκος τοῦ αβγδ, δείξατε ὅτι
$$v=\frac{3V^2}{4}\cdot\left[\frac{M\beta\cdot M\gamma\cdot M\delta}{B_1\cdot\Gamma_1\cdot\Delta_1}+\frac{M\alpha\cdot M\gamma\cdot M\delta}{A_1\cdot B_1\cdot\Gamma_1}+\frac{M\alpha\cdot M\beta\cdot M\delta}{A_1\cdot B_1\cdot\Delta_1}+\frac{M\alpha\cdot M\beta\cdot M\gamma}{A_1\cdot B_1\cdot\Gamma_1}\right].$$

734. Εἰς τό τετράεδρον $A_1A_2A_3A_4$ νά δειχθῆ ὅτι:
$$(A_1'A_2'A_3'A_4')=\frac{u_1u_2u_3u_4}{x_1x_2x_3x_4}\cdot\sum_{i=1}^{4}\frac{x_i}{u_i}V_i,$$
(διά τούς συμβολισμούς, ἰδέ ἄσκ. 194).

735. Δίδεται τετράεδρον $A_1A_2A_3A_4$. Θέτομεν $A_i'=OA_i\cap a_i$ ὅπου Ο τό κέντρον τῆς περιγεγραμμένης σφαίρας καί a_i ἡ ἕδρα ἔναντι τῆς κορυφῆς A_i. Δείξατε ὅτι:
$$\frac{(A_1'A_2'A_3'A_4')}{(A_1A_2A_3A_4)}=\frac{a_1a_2a_3a_4}{(a_1+a_2+a_3)(a_1+a_2+a_4)(a_1+a_3+a_4)(a_2+a_3+a_4)}.$$

736. Εἰς τούς συμβολισμούς τῆς ἀσκήσεως 194, θέτομεν $\frac{x_i}{u_i}=\lambda_i$. Νά δειχθῆ ὅτι:
$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3\lambda_4+2(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4)=\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_1\lambda_4+\lambda_2\lambda_3+\lambda_2\lambda_4+\lambda_3\lambda_4+3.$$

737. Εἰς τό κέντρον Ο τετραγώνου ΑΒΓΔ πλευρᾶς α ὑψοῦμεν τήν κάθετον καί λαμβάνομεν ΟΚ= α. Ἐπίπεδον διερχόμενον διά τῆς ΑΒ σχηματίζει μέ τό ἐπίπεδον τοῦ τετραγώνου γωνίαν 45° καί χωρίζει τήν πυραμίδα ΚΑΒΓΔ εἰς δύο μέρη. Νά εὑρεθῆ ὁ λόγος τῶν ὄγκων των.

738. Δίδεται ἰσόπλευρον τρίγωνον ΑΒΓ καί Μ τυχόν σημεῖον τοῦ χώρου. Δείξατε ὅτι μέ πλευράς τά εὐθ. τμήματα ΜΑ, ΜΒ, ΜΓ κατασκευάζεται πάντοτε τρίγωνον.

739. Θεωροῦμεν τά ἐπίπεδα τά σχηματιζόμενα ὑπό μιᾶς διαγωνίου κύβου καί μιᾶς ἀκμῆς, τῆς αὐτῆς διαγωνίου καί μιᾶς διαδοχικῆς πρός τήν προηγουμένην ἀκμῆς. Δείξατε ὅτι τά ἐν λόγῳ ἐπίπεδα σχηματίζουν γωνίαν 120°.

740. Εἰς τήν κολοβήν τριγωνικήν πυραμίδα τά τρία ἐπίπεδα τά ὁριζόμενα ὑπό ἑκάστης κορυφῆς τῆς μιᾶς βάσεως καί τῆς ἀπέναντι ἀκμῆς τῆς ἄλλης βάσεως τέμνονται εἰς ἕν σημεῖον, τό ὁποῖον κεῖται ἐπ' εὐθείας μετά τῶν κέντρων βάρους τῶν δύο βάσεων.

741. Αἱ εὐθεῖαι αἱ συνδέουσαι τά μέσα τῶν πλευρῶν τῆς μιᾶς βάσεως τριγωνικῆς κολούρου πυραμίδος μέ τάς ἀπέναντι κορυφάς τῆς ἑτέρας βάσεως διέρχονται διά τοῦ αὐτοῦ σημείου.

742. Ὁ ὄγκος κολοβοῦ παραλληλεπιπέδου ἰσοῦται πρός τό γινόμενον τῆς μιᾶς βάσεως ἐπί τήν ἀπόστασιν αὐτῆς ἀπό τό κέντρον τῆς ἄλλης βάσεως.

743. Ὁ ὄγκος κολοβοῦ παραλληλεπιπέδου ἰσοῦται πρός τό γινόμενον τοῦ ἡμιαθροίσματος τῶν ἐμβαδῶν δύο παραλλήλων ἑδρῶν του ἐπί τήν ἀπόστασιν αὐτῶν.

744. Δίδονται τρεῖς εὐθεῖαι xOx', yOy', zOz' μή κείμεναι ἐπί τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Ἑκατέρωθεν τοῦ O ἐπί τῆς xx' λαμβάνομεν τά σημεῖα A, A', ἐπί τῆς yy' τά B, B' καί ἐπί τῆς zz' τά $\Gamma\Gamma'$. Ἄν τά AA', BB', $\Gamma\Gamma'$ εἶναι σταθερά κατά μέγεθος καί ἴσα ἀντιστοίχως πρός α, β, γ, νά δειχθῆ ὅτι ὁ ὄγκος τοῦ ὀκταέδρου μέ κορυφάς $A, A', B, B', \Gamma, \Gamma'$ εἶναι σταθερός.

745. Παραλληλεπιπέδου αἱ τρεῖς προσκείμεναι ἀκμαί εἶναι $OA, OB, O\Gamma$ καί $O\Delta$ ἡ διαγώνιος. Ἔστω MN ἕν εὐθ. τμῆμα τοιοῦτον, ὥστε τά εὐθ. τμήματα $OA, OB, O\Gamma, O\Delta$ νά κεῖνται πρός τό αὐτό μέρος τοῦ ἐπιπέδου OMN. Νά δειχθῆ ἡ ἰσότης $(OAMN) + (OBMN) + (O\Gamma MN) = (O\Delta MN)$.

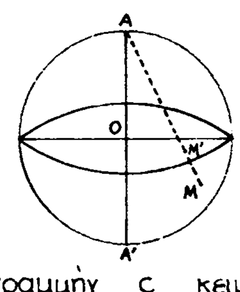
746. Δίδονται τρεῖς σφαῖραι (O_1, R_1), (O_2, R_2), (O_3, R_3). Ἔστω Π_3, Π_1, Π_2 τά ριζικά ἐπίπεδα αὐτῶν ἀντιστοίχως. Ἐάν I_3, I_1, I_2 τά σημεῖα τομῆς τῶν ριζικῶν ἐπιπέδων μετά τῶν ἀντιστοίχων διακέντρων, νά ὑπολογισθῆ τό ἐμβαδόν τοῦ τριγώνου $I_1I_2I_3$.

747. Δίδεται τρισορθογώνιος στερεά γωνία $Oxyz$. Ἐπί τῆς

Oz λαμβάνομεν σημεῖον A καὶ φέρομεν ἐκ τοῦ A τὴν παράλληλον πρὸς τὴν Oy καὶ λαμβάνομεν $AB = OA$. Ἔστω Oω μεταβλητὴ εὐθεῖα εἰς τὸ ἐπίπεδον AOx καὶ H ἡ προβολὴ τοῦ B ἐπὶ τὴν Oω. Ἂν M τὸ σημεῖον τομῆς τῆς BH μετὰ τοῦ ἐπιπέδου xOy καὶ P τῆς AH μὲ τὴν Ox, νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ H, νὰ δειχθῇ ὅτι PM καὶ BA εἶναι παράλληλοι καὶ ὅτι $PM \cdot OA = OP^2$ καὶ ἀκόμη ὅτι ἡ ἐκ τοῦ A κάθετος ἐπὶ τὴν BH εἶναι κάθετος ἐπὶ τὸ ἐπίπεδον OBH.

748. Ἐπὶ δύο παραλλήλων ἐπιπέδων Π καὶ Π′ δίδονται ἀντιστοίχως αἱ περιφέρειαι (O, R) καὶ (O', R') μὲ τὴν συνθήκην ὅτι OO′ εἶναι κάθετος εἰς τὰ ἐπίπεδα. Δύο μεταβλητὰ σημεῖα A καὶ A′ κινοῦνται ἀντιστοίχως ἐπὶ τῶν (O) καὶ (O′), ὥστε αἱ ἀκτῖνες OA καὶ O′A′ νὰ εἶναι ὀρθογώνιοι. Νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ AA′ ἔχει σταθερὸν μῆκος καὶ ὅτι σχηματίζει σταθερὰν γωνίαν μετὰ τῆς OO′. Νὰ δειχθῇ ἀκόμη ὅτι ἡ κοινὴ κάθετος τῶν OO′ καὶ AA′ τέμνει τὴν OO′ εἰς σταθερὸν σημεῖον, ὅτι τὸ μῆκος τῆς ἐλαχίστης ἀποστάσεως τῶν OO′, AA′ εἶναι σταθερὸν καὶ νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τοῦ σημείου τομῆς τῆς κοινῆς καθέτου μετὰ τῆς AA′.

749. Στερεογραφικὴ προβολή. Θεωροῦμεν τὴν σφαῖραν (O) καὶ τὸ ἐπίπεδον P ἑνὸς μεγίστου κύκλου. Ἔστω A εἷς ἐκ τῶν πόλων αὐτοῦ. Εἰς ἕκαστον σημεῖον M τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας (O) ἀντιστοιχοῦμεν τὸ σημεῖον $M' = P \cap AM$. Τὸ σημεῖον τοῦτο M′ καλεῖται **στερεογραφικὴ προβολὴ** τοῦ M. Ἐὰν τὸ σημεῖον M διαγράφῃ μίαν γραμμὴν c κειμένην ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, τὸ M′ γράφει ἐπὶ τοῦ ἐπιπέδου P τὴν στερεογραφικὴν προβολὴν c′ τῆς c.



Δείξατε ὅτι: α) ἡ στερεογραφικὴ προβολὴ κύκλου εἶναι κύκλος ἢ εὐθεῖα· β) ἡ στερεογραφικὴ προβολὴ διατηρεῖ τὰς γωνίας.

Σημείωσις: Ἡ στερεογραφικὴ προβολὴ χρησιμοποιεῖται διά τήν κατασκευήν τῶν χαρτῶν.

750. Ἐπί ἑκάστης ἀκμῆς τετραέδρου λαμβάνομεν τυχόν σημεῖον. Θεωροῦμεν τήν σφαῖραν τήν διερχομένην δι' ἑκάστης κορυφῆς καί τῶν ληφθέντων εἰς τάς ἀκμάς αἱ ὁποῖαι καταλήγουν εἰς αὐτήν τήν κορυφήν σημείων. Αἱ οὕτω λαμβανόμεναι τέσσαρες σφαῖραι ἔχουν κοινόν σημεῖον.

751. Ἐπίπεδον τέμνει τάς ἕδρας ΔΑ, ΔΒ, ΔΓ, ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ τετραέδρου ΑΒΓΔ εἰς τά σημεῖα U, V, W, X, Ψ, Z ἀντιστοίχως. Αἱ εὐθεῖαι AV, BU τέμνονται εἰς E καί αἱ εὐθεῖαι AX, BΨ εἰς F. Νά δειχθῆ ὅτι τά σημεῖα E, F, W κεῖνται ἐπ' εὐθείας. Νά εὑρεθοῦν καί ἄλλαι ἀνάλογοι τριάδες σημείων.

752. Ἐάν εἰς τετράεδρον αἱ περιγεγραμμέναι περιφέρειαι περί τάς δύο ἕδρας εἶναι ὀρθογώνιοι, τότε καί αἱ περιγεγραμμέναι περιφέρειαι περί τάς δύο ἄλλας ἕδρας θά εἶναι ἐπίσης ὀρθογώνιοι.

753. Δύο τετράγωνα ΑΒΓΔ καί ΑΒΕΖ κεῖνται εἰς κάθετα ἐπίπεδα. Λαμβάνομεν ἐπί τῶν ΑΕ καί ΒΔ τά ἴσα τμήματα ΑΜ καί ΒΝ. Νά δειχθῆ ὅτι ἡ ΜΝ παραμένει πάντοτε παράλληλος πρός σταθερόν ἐπίπεδον καί νά εὑρεθῆ ὁ γ. τόπος τοῦ μέσου τῆς ΜΝ. Πότε γίνεται ἐλαχίστη ἡ ΜΝ; Ἀποδείξατε ὅτι διά τήν θέσιν αὐτήν ἡ ΜΝ εἶναι κοινή κάθετος τῶν ΑΓ καί ΒΖ.

754. Πυραμίς ΚΑΒΓΔ ἔχει βάσιν τετράγωνον ΑΒΓΔ πλευρᾶς α. Ἡ $ΚΑ = α\sqrt{3}$ εἶναι κάθετος ἐπί τήν βάσιν. Ἐπίπεδον διερχόμενον διά τῆς ΑΔ τέμνει τήν ΚΒ εἰς Β′ καί τήν ΚΓ εἰς Γ′. Νά δειχθῆ ὅτι τό ΑΒ′Γ′Δ εἶναι δισορθογώνιον τραπέζιον καί νά εὑρεθῆ ὁ γ. τόπος τοῦ σημείου τομῆς τῶν ΔΒ′ καί ΑΓ′ ὅταν μεταβάλλεται ἡ θέσις τοῦ Β′.

755. Δίδεται ὀρθοκεντρικόν τετράεδρον ΑΒΓΔ καί τό ὀρθόκεντρον αὐτοῦ Η κείμενον ἐντός αὐτοῦ. Μέ βάσιν ΒΓΔ κατασκευάζομεν τρισορθογώνιον τετράεδρον ΕΒΓΔ κατά τήν τρίεδρον Ε καί κείμενον ἐκτός τοῦ ΑΒΓΔ. Ὁμοίως κατασκευἄξομεν τὰ τρισορθογώνια τετράεδρα ΚΔΓΑ, ΛΔΒΑ, ΣΒΓΑ κατὰ τὰς τριέδρους Κ, Λ, Σ κείμενα ἐκτὸς τοῦ ΑΒΓΔ. Νὰ δειχθῆ ὅτι: α) $(ΕΒΓΔ)^2 = (ΑΒΓΔ)(ΗΒΓΔ)$, β) $(ΕΒΓΔ)^2 + (ΚΓΔΑ)^2 + (ΛΔΒΑ)^2 + (ΣΒΓΑ)^2 = (ΑΒΓΔ)^2$.

756. Δίδεται τριγωνικὸν πρίσμα ΑΒΓΑ'Β'Γ' καὶ ἔστωσαν Κ καὶ Κ' τὰ κέντρα βάρους τῶν βάσεων ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ' αὐτοῦ καὶ ΣΤ ἕν μῆκος κείμενον ἐπὶ εὐθείας ε, ἡ ὁποία κεῖται στρεβλῶς πρὸς τὰς παραπλεύρους ἀκμὰς τοῦ πρίσματος καὶ δὲν τέμνει αὐτό. Νὰ δειχθῆ ὅτι $(ΣΤΑΑ') + (ΣΤΒΒ') + (ΣΤΓΓ') = 3(ΣΤΚΚ')$.

757. Δίδονται δύο τρίεδροι στερεαὶ γωνίαι ΟΑΒΓ, $Ο_1Α_1Β_1Γ_1$ οὕτως ὥστε τὰ τρία ζεύγη $(ΑΟΒ, Α_1Ο_1Β_1)$, $(ΒΟΓ, Β_1Ο_1Γ_1)$ καὶ $(ΓΟΑ, Γ_1Ο_1Α_1)$ νὰ ὁρίζουν τρεῖς εὐθείας κειμένας ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Νὰ δειχθῆ ὅτι τὰ τρία ζεύγη $(ΟΑ, Ο_1Α_1)$, $(ΟΒ, Ο_1Β_1)$ καὶ $(ΟΓ, Ο_1Γ_1)$ τῶν ἀντιστοίχων αὐτῶν ἀκμῶν ὁρίζουν τρία ἐπίπεδα διερχόμενα διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας.

758. Δοθέντος τετραέδρου σχηματίζομεν ἄλλο διὰ τῶν ἐπιπέδων τῶν συμμετρικῶν τῶν ἑδρῶν ὡς πρὸς τὰς ἀπέναντι κορυφάς. Νὰ εὑρεθῆ ὁ λόγος τῶν ὄγκων τῶν δύο τετραέδρων.

759. Δίδεται κύκλος (Ο,R) καὶ ΟΒ, ΟΓ δύο ἀκτῖνες. Αἱ ἐφαπτόμεναι εἰς Β καὶ Γ τέμνονται εἰς τὸ σημεῖον Α. Θέτομεν α τὴν προβολὴν τῆς χορδῆς ΒΓ ἐπὶ τὴν ἀκτῖνα ΟΒ. Νὰ ὑπολογισθοῦν οἱ ὄγκοι τῶν σχηματιζομένων στερεῶν διὰ περιστροφῆς περὶ τὴν ΟΒ: α) τοῦ χωρίου $\widehat{ΒΓ}ΟΒ$, β) τοῦ χωρίου $Α\widehat{ΒΓ}$.

760. Ἐὰν κύβος ἀκμῆς α πληρωθῆ ὑπὸ ἴσων σφαιρῶν διαμέτρου $\frac{α}{ν}$, τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων τῶν σφαιρῶν αὐτῶν εἶναι ἀνεξάρτητον τοῦ πλήθους αὐτῶν.

761. Ἡ ἱκανὴ καὶ ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα εἷς κόλουρος κῶνος εἶναι περιγράψιμος περὶ σφαῖραν, εἶναι $R_1 + R_2 = λ$, ὅπου R_1, R_2 αἱ ἀκτῖνες τῶν βάσεων καὶ λ ἡ γενέτειρα αὐτοῦ.

762. Εἰς τετράεδρον στερεὰν γωνίαν Οxyzω εἶναι $x\widehat{O}y = y\widehat{O}z = z\widehat{O}\omega = \omega\widehat{O}x = x\widehat{O}z = y\widehat{O}\omega = 60°$. Ἐπὶ τῶν ἀκμῶν Οx, Οy, Οz λαμβάνομεν τὰ σημεῖα Α, Β, Γ ἀντιστοίχως, ὥστε ΟΑ = α, ΟΒ = β, ΟΓ = γ. Ἐὰν Δ τὸ σημεῖον τομῆς τῆς Οω μετὰ τοῦ ἐπιπέδου ΑΒΓ, δείξατε ὅτι $O\Delta = \frac{\alpha\beta\gamma}{\alpha\beta+\beta\gamma-\alpha\gamma}$.

763. Ἐὰν τὸ ἄθροισμα δύο ἀπέναντι ἀκμῶν τετραέδρου εἶναι ἴσον πρὸς τὸ ἄθροισμα τῶν δύο ἄλλων ἀπέναντι ἀκμῶν, νὰ δειχθῇ ὅτι ἡ αὐτὴ σχέσις ὑφίσταται καὶ μετὰ τῶν διέδρων τῶν ἀντιστοίχων ἀκμῶν.

764. Διαιροῦμεν τὰς ἕξ ἀκμὰς ἑνὸς τετραέδρου εἰς δοθέντας λόγους. Νὰ εὑρεθῇ ὁ λόγος τοῦ κυρτοῦ ὀκταέδρου, τὸ ὁποῖον ἔχει κορυφὰς τὰ σημεῖα διαιρέσεως τῶν ἀκμῶν τοῦ τετραέδρου, πρὸς τὸ τετράεδρον.

765. Δίδεται ἰσοσκελὴς τρίεδρος στερεὰ γωνία Οxyz. Νὰ τμηθῇ ὑπὸ ἐπιπέδου, ὥστε ἡ τομὴ νὰ εἶναι ἰσόπλευρον τρίγωνον ἴσον πρὸς δοθέν.

766. Ἔστω Οxyz ἰσοέδρος στερεὰ γωνία. Νὰ εὑρεθοῦν ἐπὶ τῶν ἀκμῶν Οx, Οy, Οz τὰ σημεῖα Α, Β, Γ ἀντιστοίχως, ὥστε τὸ τρίγωνον ΑΒΓ νὰ εἶναι ἴσον πρὸς δοθέν.

767. Διὰ δοθείσης εὐθείας ε νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον τέμνον δοθεῖσαν δίεδρον $\Pi\widehat{x}P$, ὥστε ἡ σχηματιζομένη τρίεδρος νὰ εἶναι ἰσοσκελής.

768. Νὰ κατασκευασθῇ κύλινδρος διερχόμενος διὰ δοθέντος κύκλου καὶ τέμνων δοθὲν ἐπίπεδον κατὰ κύκλον.

769. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν κέντρων τῶν σφαιρῶν (Ω, ρ) τῶν διερχομένων διὰ δύο δοθέντων σημείων Α, Β καὶ τεμνουσῶν ὀρθογωνίως δοθεῖσαν σφαῖραν (Ο, R).

770. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν κέντρων τῶν κύκλων τῶν διερχομένων διὰ δοθέντος σημείου Α καὶ τεμνόντων ὀρθογωνίως δοθεῖσαν σφαῖραν (Ο, R).

771. Θεωροῦμεν τάς σφαίρας τάς ὀρθογωνίους πρός δύο δοθείσας σφαίρας (O,R), (O',R') καί ἐφαπτομένας δοθέντος ἐπιπέδου Π. Νά εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν σημείων ἐπαφῆς.

772. Δίδονται ἐπί ἐπιπέδου Π δύο κύκλοι (O,R) καί (O',R'). Ἔστω ρ ὁ ριζικός ἄξων αὐτῶν. Περί τόν ἄξονα ρ στρέφεται εἰς τόν χῶρον ὁ κύκλος (O',R') κατά τυχοῦσαν γωνίαν φ καί οὕτω λαμβάνει τήν θέσιν κύκλου (Ω,ρ). Νά δειχθῇ ὅτι οἱ κύκλοι (O,R) καί (Ω,ρ) ἀνήκουν εἰς τήν αὐτήν σφαῖραν.

773. Δίδονται δύο σφαῖραι (O,R) καί (O',R'). Θεωροῦμεν ὅλα τά ἐπίπεδα, τά ὁποῖα τέμνουν τάς ἐν λόγῳ σφαίρας κατά κύκλους ὀρθογωνίους. Νά εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν κέντρων τῶν ἐν λόγῳ κύκλων καί ἡ περιβάλλουσα τῶν ἐπιπέδων.

774. Διά δοθείσης εὐθείας νά ἀχθῇ ἐπίπεδον τέμνον δύο δοθείσας σφαίρας κατά κύκλους ὀρθογωνίους.

775. Νά ἀχθῇ διά δοθέντος κύκλου σφαῖρα τέμνουσα δύο δοθείσας σφαίρας κατά κύκλους ὀρθογωνίους.

776. Νά δειχθῇ ὅτι δέν ὑπάρχει πολύεδρον μέ ἑπτά ἀκμάς.

777. Ἐάν εἰς κυρτόν πολύεδρον $F_3, F_4, F_5, \ldots$ εἶναι τό πλῆθος τῶν τριγωνικῶν ἑδρῶν, τῶν τετραπλεύρων ἑδρῶν, τῶν πενταγωνικῶν ἑδρῶν κ.τ.λ. καί $S_3, S_4, S_5, \ldots$ τό πλῆθος τῶν τριέδρων, τετραέδρων, πενταέδρων κ.τ.λ. στερεῶν γωνιῶν, δείξατε ὅτι:

1) $2a = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + \cdots$,
2) $2a = 3S_3 + 4S_4 + 5S_5 + \cdots$,
3) $F_3 + S_3 \geqslant 8$,
4) $3F_3 + 2F_4 + F_5 \geqslant 12$,
5) $3S_3 + 2S_4 + S_5 \geqslant 12$,

ὅπου a τό πλῆθος τῶν ἀκμῶν.

778. Εἰς πᾶν κυρτὸν πολύεδρον:

1) $6\varepsilon - 12 \geqslant 2\alpha \geqslant 3\varepsilon \geqslant \alpha + 6$,

2) $6\kappa - 12 \geqslant 2\alpha \geqslant 3\kappa \geqslant \alpha + 6$,

ὅπου α ὁ ἀριθμὸς τῶν ἀκμῶν, ε ὁ ἀριθμὸς τῶν ἑδρῶν καὶ κ ὁ ἀριθμὸς τῶν κορυφῶν.

779. Πᾶν κυρτὸν πολύεδρον ἔχει τὸ ὀλιγώτερον μίαν ἕδραν τριγωνικὴν ἢ μίαν τρίεδρον στερεὰν γωνίαν.

780. Εἰς πᾶν κυρτὸν πολύεδρον εἶναι ἀδύνατον ὅλαι αἱ ἕδραι του νὰ εἶναι πολύγωνα μὲ περισσοτέρας τῶν πέντε πλευρῶν, ὡς ἐπίσης εἶναι ἀδύνατον ὅλαι αἱ στερεαὶ γωνίαι νὰ ἔχουν περισσοτέρας τῶν πέντε ἑδρῶν.

781. Ἐὰν $F_3, F_4, F_5, \ldots$ εἶναι τὸ πλῆθος τῶν τριγωνικῶν ἑδρῶν, τῶν τετραπλεύρων ἑδρῶν, τῶν πενταγωνικῶν ἑδρῶν κ.τ.λ. καὶ θέσωμεν $F_3 + 2F_4 + 3F_5 + \cdots = L$, $1\cdot 3F_3 + 2\cdot 4F_4 + 3\cdot 5F_5 + \cdots = M$, δείξατε ὅτι $8N = (2+L)(4+L) - 4M$, ὅπου N τὸ πλῆθος τῶν διαγωνίων τοῦ πολυέδρου.

782. Νὰ δειχθῇ ὅτι ὑπάρχουν μόνον δεκαοκτὼ εἴδη πολυέδρων, διὰ τὰ ὁποῖα εἰς ἑκάστην κορυφὴν συμβάλλουν ἕδραι τῆς αὐτῆς τάξεως καὶ τοῦ αὐτοῦ πλήθους.

Ἐπίσης μόνον δεκαοκτὼ εἴδη πολυέδρων, εἰς τὰ ὁποῖα ἑκάστη ἕδρα περιέχει κορυφὰς ἑδρῶν τῆς αὐτῆς τάξεως καὶ τοῦ αὐτοῦ πλήθους.

783. Δίδεται τετράεδρον ΑΒΓΔ. Θεωροῦμεν ἐπίπεδα παράλληλα πρὸς τὰς ἕδρας αὐτοῦ καὶ εἰς ἀποστάσεις λ, μ, ν, ρ ἀντιστοίχως. Τὰ ἐν λόγῳ ἐπίπεδα τεμνόμενα σχηματίζουν ἓν τετράεδρον. Νὰ ὑπολογισθῇ ὁ ὄγκος του.

784. Δίδονται ν εὐθεῖαι εἰς τὸν χῶρον. Νὰ δειχθῇ ὅτι ὑπάρχει ἀπειρία ἐπιπέδων τεμνόντων αὐτάς.

785. Εἰς στρεβλὸν ἑξάγωνον αἱ ἀπέναντι πλευραὶ εἶναι παράλληλοι καὶ ἴσαι. Δείξατε ὅτι τὰ μέσα αὐτῶν κεῖνται ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου.

786. Δίδονται δύο τρίγωνα ΑΒΓ καὶ Α'Β'Γ'. Ἂν τὰ ἐπίπεδα τὰ διερχόμενα διὰ τῶν Α,Β,Γ καὶ κάθετα ἀντιστοίχως ἐπὶ τὰς Β'Γ', Γ'Α', Α'Β' διέρχωνται διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας, τότε καὶ τὰ ἐπίπεδα τὰ διερχόμενα διὰ τῶν Α',Β',Γ' καὶ ἀντιστοίχως κάθετα ἐπὶ τῶν ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ θὰ διέρχωνται ἐπίσης διὰ τῆς αὐτῆς εὐθείας.

787. Ἔστω V ὁ ὄγκος ἑνὸς τετραέδρου καὶ V_1 ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου τὸ ὁποῖον σχηματίζεται, ἂν ἐξ ἑνὸς σημείου Ο ἀχθοῦν ἴσα καὶ παράλληλα τμήματα πρὸς τὰς ἐλαχίστας ἀποστάσεις α, β, γ τῶν ἀπέναντι ἑδρῶν τοῦ τετραέδρου. Θὰ ἔχωμεν $12VV_1 = \alpha^2\beta^2\gamma^2$.

788. Δίδονται δύο παράλληλα ἐπίπεδα Π, Π'. Ἔστω Ο∈Π καὶ Ο'∈Π'. Θεωροῦμεν δύο ὀρθογωνίους εὐθείας τῶν ἐπιπέδων Π, Π' τὰς ΟΑ, Ο'Α' ἀντιστοίχως, ὥστε $OA=\alpha$, $O'A'=\alpha'$. Νὰ εὑρεθῇ ὁ γ. τόπος τῶν μέσων τῶν εὐθ. τμημάτων ΑΑ'.

789. Θεωροῦμεν πέντε ἴσα εὐθ. τμήματα ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ, ΟΕ. Νὰ δειχθῇ ὅτι οἱ κύκλοι ΑΒΓ, ΑΔΕ ἔχουν δύο κοινὰ σημεῖα.

790. Δίδεται σημεῖον Ο καὶ εὐθ. τμήματα ΑΒ καὶ ΓΔ. Ὀνομάζομεν δ πᾶσαν εὐθεῖαν διερχομένην διὰ τοῦ Ο, ἐπὶ τὴν ὁποίαν αἱ προβολαὶ τῶν ἀνωτέρω εὐθ. τμημάτων εἶναι ἴσαι. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σύνολον τῶν εὐθειῶν δ.

791. Δίδονται τέσσαρα σημεῖα Α, Β, Γ, Δ μὴ κείμενα ἐπὶ τοῦ αὐτοῦ ἐπιπέδου. Νὰ κατασκευασθοῦν τρία ἐπίπεδα παράλληλα καὶ ἰσαπέχοντα, ὥστε τὸ ἕνα ἐκ τούτων νὰ περιέχῃ δύο ἀπὸ τὰ δοθέντα, καὶ τὰ ἄλλα δύο ἀνὰ ἓν ἐκ τῶν δύο ἄλλων ἀντιστοίχως.

792. Δίδεται εὐθ. τμῆμα ΑΒ καὶ σφαῖρα (O,R). Νὰ εὑρεθῇ σημεῖον Γ τῆς σφαίρας, ὥστε τὸ τρίγωνον ΑΒΓ νὰ εἶναι ἰσόπλευρον.

793. Δίδεται τρίγωνον ΑΒΓ καὶ ἐπίπεδον Π. Προβάλλομεν τό τρίγωνον ἐπί τοῦ Π ἔστω κατά τό τρίγωνον $\overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$. Τό κέντρον βάρους G τοῦ $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$, δείξατε ὅτι προβάλλεται κατά τό κέντρον βάρους G′ τοῦ $\overset{\triangle}{A'B'\Gamma'}$.

794. Τέσσαρα κανονικά τετράεδρα $A_1B_1\Gamma_1\Delta_1$, $A_2B_2\Gamma_2\Delta_2$, $A_3B_3\Gamma_3\Delta_3$, $A_4B_4\Gamma_4\Delta_4$ εἶναι ὁμοίως προσανατολισμένα εἰς τόν χῶρον. Θέτομεν G_A τό κέντρον βάρους τοῦ τετραέδρου $A_1A_2A_3A_4$, G_B τοῦ $B_1B_2B_3B_4$ κ.τ.λ. Νά δειχθῇ ὅτι τό τετράεδρον $G_AG_BG_\Gamma G_\Delta$ εἶναι κανονικόν.

795. Δίδεται ἐπίπεδον Π, εὐθεῖα ε αὐτοῦ καί δύο σημεῖα Α,Β μή κείμενα ἐπί τοῦ Π. Νά εὑρεθῇ τό σημεῖον $M\in\varepsilon$, ὥστε αἱ ΜΑ, ΜΒ νά ἔχουν ἴσας κλίσεις πρός τό Π.

796. Δίδεται ἐπίπεδον Π καί δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι ε καί η. Ἔστω $A\in\varepsilon$, $B\in\eta$ καί $M=\Pi\cap AB$. Νά εὑρεθῇ τό σύνολον $G=\{M \,/\, \frac{MA}{MB}=\frac{\mu}{\nu}\}$.

797. Δίδεται τρίεδρος Oxyz καί ἔστω Ox′, Oy′, Oz′ αἱ προβολαί τῶν Ox, Oy, Oz ἐπί τῶν ἑδρῶν yOz, zOx, xOy ἀντιστοίχως. Δείξατε ὅτι τά ἐπίπεδα ὕψη τῆς Oxyz εἶναι τά διχοτομοῦντα ἐπίπεδα τάς διέδρους τῆς Ox′y′z′.

798. Θεωροῦμεν τρίεδρον ΟΑΒΓ καί τάς εὐθείας Ox, Oy, Oz καθέτους ἀντιστοίχως ἐπί τάς ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ καί αἱ ὁποῖαι κεῖνται ἀντιστοίχως ἐπί τῶν διχοτομούντων ἐπιπέδων τάς ἐξωτερικάς διέδρους τῆς τριέδρου ΟΑΒΓ. Νά δειχθῇ ὅτι 1) αἱ Ox, Oy, Oz εἶναι συνεπίπεδοι· 2) τό ἐπίπεδον τῶν Ox, Oy, Oz ἔχει τήν αὐτήν κλίσιν πρός τά ἐπίπεδα τῶν ἑδρῶν τῆς τριέδρου ΟΑΒΓ.

799. Νά ἀποδειχθῇ ὅτι ν ἐπίπεδα διερχόμενα διά τοῦ αὐτοῦ σημείου Ο καί κείμενα οὕτως, ὥστε νά μήν ὑπάρχουν τρία ἐξ αὐτῶν διερχόμενα διά τῆς αὐτῆς εὐθείας, χωρίζουν τόν χῶρον εἰς $\nu(\nu-1)+2$ μέρη.

800. Ποῖος ὁ μεγαλύτερος ἀριθμός τῶν μερῶν, εἰς τά ὁποῖα δύναται νά χωρισθῆ ὁ χῶρος ἀπό ν ἐπίπεδα ἤ ν σφαίρας;

801. Δύο σφαῖραι ἐφάπτονται τῶν ἑδρῶν ἑνός τετραέδρου. Ἔστω P τό ριζικόν ἐπίπεδον αὐτῶν. Ἐάν P_1, P_2, P_3, P_4 τά συμμετρικά τοῦ P πρός τάς ἕδρας, νά δειχθῆ ὅτι τά P, P_1, P_2, P_3, P_4 ἐφάπτονται μιᾶς σφαίρας. Νά προσδιορισθῆ τό κέντρον αὐτῆς.

802. Δίδεται τετράεδρον $A_1A_2A_3A_4$ μέ ἰσοδυνάμους ἕδρας. Ἔστω M τυχόν σημεῖον εἰς τό ἐσωτερικόν τοῦ τετραέδρου. Θέτομεν a_i τήν ἕδραν ἔναντι τῆς κορυφῆς A_i, $A_iM = x_i$, p_i τήν ἀπόστασιν τοῦ M ἀπό τήν a_i. Νά δειχθῆ ὅτι $x_1+x_2+x_3+x_4 \geqslant 3(p_1+p_2+p_3+p_4)$.

803. Εἰς τετράεδρον $A_1A_2A_3A_4$ M τυχόν ἐσωτερικόν σημεῖον. Θέτομεν $M_i = A_iM \cap a_i$. Νά δειχθῆ ὅτι:

$$(A_1A_2A_3A_4) \geqslant 27\,(M_1M_2M_3M_4).$$

804. Ἐάν R ἡ ἀκτίς τῆς περιγεγραμμένης σφαίρας τετραέδρου καί ρ ἡ ἀκτίς τῆς ἐγγεγραμμένης σφαίρας, νά δειχθῆ ὅτι $R \geqslant 3\rho$.

805. Ἐντός κανονικοῦ τετραέδρου ΑΒΓΔ πλευρᾶς α, δίδεται σημεῖον M. Νά δειχθῆ ὅτι $MA+MB+M\Gamma+M\Delta \geqslant \alpha\sqrt{6}$.

806. Ἐάν α, β, γ αἱ ἑδρικαί γωνίαι τριέδρου ΟΑΒΓ, δείξατε ὅτι $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha < \frac{4}{3}\pi^2$.

807. Δύο ἰσόπλευρα τρίγωνα ΑΒΓ καί Α΄Β΄Γ΄ εὑρίσκονται ἐπί παραλλήλων ἐπιπέδων. Νά δειχθῆ ὅτι τά τμήματα ΑΑ΄, ΒΒ΄, ΓΓ΄ εἶναι πλευραί τριγώνων.

808. Εἰς ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον τό ἄθροισμα τῶν διαστάσεών του x, y, z εἶναι κ. Ἐάν δ ἡ διαγώνιος, νά δειχθῆ ὅτι $\frac{\kappa}{\sqrt{3}} \leqslant \delta \leqslant \kappa$.

809. Δίδεται ἐπίπεδον Π καί σημεῖα Α, Β ἐκτός αὐτοῦ καὶ πρὸς τὸ αὐτὸ μέρος τοῦ Π. Νὰ εὑρεθῇ α) τὸ σημεῖον Μ τοῦ Π, ὥστε $MA+MB=$ ἐλάχιστον καὶ β) τὸ σημεῖον Ν τοῦ Π, ὥστε $|NA-NB|=$ μέγιστον.

810. Δίδονται δύο ἐπίπεδα Π,Ρ παράλληλα καὶ ἑκατέρωθεν τῆς ζώνης αὐτῶν τὰ σημεῖα Α,Β. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ σημεῖα $M\in\Pi$ καὶ $N\in P$, ὥστε ἡ εὐθεῖα ΜΝ νὰ ἔχη δοθεῖσαν διεύθυνσιν καὶ $AM+MN+NB=$ ἐλάχιστον.

811. Δίδεται δίεδρος $\widehat{\Pi\varepsilon P}$ καὶ σημεῖα Α,Β τοῦ ἐσωτερικοῦ της. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ σημεῖα $M\in\Pi$, $N\in P$ ὥστε $AM+$ $+MN+NB=$ ἐλάχιστον.

812. Ἐπὶ τῶν ἑδρῶν xOy καὶ yOz τριέδρου $Oxyz$ δίδονται δύο σημεῖα Α,Β ἀντιστοίχως. Ἐπὶ τῆς τριέδρου νὰ εὑρεθῇ ὁ συντομώτερος δρόμος ὁ ὁποῖος ἄγει ἀπὸ Α εἰς Β. Τὸ αὐτὸ πρόβλημα διὰ τυχοῦσαν πολύεδρον στερεὰν γωνίαν, ἂν Α,Β δὲν κεῖνται εἰς τὴν αὐτὴν ἕδραν. Ἐπίσης, τὸ ἴδιον πρόβλημα, ἂν τὰ σημεῖα Α,Β κεῖνται ἐπὶ μιᾶς κωνικῆς ἢ κυλινδρικῆς ἐπιφανείας.

813. Δίδεται τρίεδρος στερεὰ γωνία $Oxyz$ καὶ σημεῖον $A\in xOy$. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ σημεῖα Μ,Ν,Ρ τῶν ἀκμῶν Ox, Oy, Oz ἀντιστοίχως, ὥστε $AM+MN+NP+PA=$ ἐλάχιστον.

814. Δίδεται εὐθεῖα ε καὶ σημεῖα Α,Β μὴ κείμενα ἐπ' αὐτῆς. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ σημεῖα Μ καὶ Ν τῆς εὐθείας ε, ὥστε α) $AM+MB=$ ἐλάχιστον καὶ β) $|AN-BN|=$ μέγιστον.

815. Δίδονται τέσσαρα σημεῖα τοῦ χώρου Α,Β,Γ,Δ. Νὰ εὑρεθῇ τὸ σημεῖον Μ, ὥστε $AM^2+BM^2+\Gamma M^2+\Delta M^2=$ ἐλάχιστον.

816. Δίδεται περιφέρεια (Ο) καὶ σημεῖον Α τοῦ χώρου. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ σημεῖα Μ,Ν τῆς περιφερείας (Ο), ὥστε $AM=$ μέγιστον, $AN=$ ἐλάχιστον.

817. Δίδεται ὀρθὴ γωνία xOy καὶ σημεῖον Α ἐκτὸς τοῦ ἐπιπέδου αὐτῆς. Νὰ εὑρεθοῦν τὰ σημεῖα $M\in Ox$, $N\in Oy$, ὥστε $\widehat{MAN} = 1^{L}$ καὶ $MN =$ ἐλάχιστον.

818. Ἐξ ὅλων τῶν πρισμάτων τοῦ αὐτοῦ πλήθους πλευρῶν, τοῦ αὐτοῦ ὕψους καὶ τῆς αὐτῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας, νὰ εὑρεθῇ ἐκεῖνο τὸ ὁποῖον ἔχει τὴν μεγαλυτέραν βάσιν καὶ τὸν μέγιστον ὄγκον.

819. Νὰ τμηθῇ τετράεδρον κατὰ παραλληλόγραμμον μεγίστου ἐμβαδοῦ.

820. Δίδεται ἓν εὐθ. τμῆμα AB καὶ εὐθεῖα ε, ἀσύμβατος πρὸς τὴν εὐθεῖαν AB. Δοθὲν εὐθ. τμῆμα $A'B' = \lambda$ ὀλισθαίνει ἐπὶ τῆς ε. Διὰ ποίαν θέσιν τοῦ $A'B'$ ἡ ὁλικὴ ἐπιφάνεια τοῦ τετραέδρου $ABA'B'$ γίνεται ἐλαχίστη;

821. Νὰ ἀχθῇ ἐπίπεδον διὰ τῶν μέσων E, Z τῶν ἀκμῶν $AB, \Gamma\Delta$ τετραέδρου $AB\Gamma\Delta$, τέμνον τὰς $A\Gamma$ καὶ $B\Delta$ εἰς H, Θ, ὥστε τὸ ἐμβαδὸν τῆς τομῆς $EHZ\Theta$ νὰ εἶναι ἐλάχιστον.

822. Ἐπὶ τῶν ἀκμῶν ἰσοέδρου τριγωνικῆς στερεᾶς γωνίας $Oxyz$ λαμβάνομεν $OA = OB = O\Gamma = \lambda$. Νὰ εὑρεθῇ ἡ ἐπίπεδος γωνία τῆς τριέδρου, ἵνα $(AOB) + (BO\Gamma) + (\Gamma OA) =$ μέγιστον. Τὸ αὐτὸ διὰ τὸν ὄγκον τοῦ τετραέδρου $OAB\Gamma$. (Ἡ τιμὴ τῆς γωνίας $x\widehat{O}y = y\widehat{O}z = z\widehat{O}x$ εἶναι 90° καὶ διὰ τὰς δύο περιπτώσεις).

823. Νὰ εὑρεθῇ ὁ ἐκ περιστροφῆς κύλινδρος μεγίστου ὄγκου ἢ μεγίστης παραπλεύρου ἐπιφανείας, ἂν ἡ ἀκτὶς τῆς βάσεως R καὶ τὸ ὕψος υ συνδέωνται διὰ τῆς σχέσεως $\mu R + \nu\upsilon = \kappa$, ὅπου μ, ν δοθέντες ἀριθμοὶ καὶ κ δοθὲν εὐθ. τμῆμα.

824. Ποῖος ἐξ ὅλων τῶν κυλίνδρων τῶν ἐγγεγραμμένων εἰς δοθέντα κῶνον ἐκ περιστροφῆς ἔχει μεγίστην κυρτὴν ἐπιφάνειαν;

825. Ἐκ τῶν κώνων ἐκ περιστροφῆς τῶν ἐχόντων ἄθροισμα ἀκτῖνος καὶ γενετείρας σταθερόν, ποῖος ἔχει τὴν μεγίστην ἐπιφάνειαν;

826. Ἐκ τῶν κώνων ἐκ περιστροφῆς τῶν ἐχόντων ἄθροισμα ἀκτῖνος καὶ ὕψους σταθερόν, ποῖος ἔχει τὸν μέγιστον ὄγκον;

827. Δίδεται κόλουρος κῶνος ἐκ περιστροφῆς. Ἐὰν Κ,Λ τὰ κέντρα τῶν δύο βάσεων, νὰ εὑρεθοῦν τὰ σημεῖα Μ, Ν τῆς ΚΛ ὥστε α) τὸ ἄθροισμα τῶν ὄγκων δύο κώνων μὲ κορυφὴν τὸ Μ καὶ βάσεις τὰς βάσεις τοῦ κολούρου κώνου νὰ εἶναι μέγιστον· β) τὸ Ν, ὥστε τὸ αὐτὸ ἄθροισμα νὰ εἶναι ἐλάχιστον.

828. Ἐκ τῶν κολούρων κώνων ἐκ περιστροφῆς, σταθεροῦ ὕψους καὶ σταθεροῦ ἀθροίσματος τετραγώνων τῶν ἀκτίνων, ποῖος ἔχει μέγιστον ὄγκον; Ἐὰν τὸ γινόμενον τῶν ἀκτίνων εἶναι σταθερόν, πότε ὁ ὄγκος γίνεται ἐλάχιστος;

829. Διὰ τῆς κορυφῆς Α τριγώνου ΑΒΓ νὰ ἀχθῇ εὐθεῖα, κειμένη εἰς τὸ ἐπίπεδον τοῦ τριγώνου, ὥστε τὸ στερεὸν τὸ προκῦπτον διὰ περιστροφῆς περὶ ταύτην νὰ ἔχῃ μέγιστον ὄγκον.

830. Εἰς δοθεῖσαν σφαῖραν νὰ ἐγγραφῇ κῶνος μεγίστου ὄγκου.

831. Εἰς δοθεῖσαν σφαῖραν νὰ ἐγγραφῇ κύλινδρος μεγίστου ὄγκου.

832. Εἰς δοθεῖσαν σφαῖραν νὰ ἐγγραφῇ κύλινδρος μεγίστης κυρτῆς ἐπιφανείας.

833. Εἰς δοθεῖσαν σφαῖραν νὰ ἐγγραφῇ κῶνος μεγίστης κυρτῆς ἐπιφανείας.

834. Περὶ σφαῖραν νὰ περιγραφῇ κῶνος ἐλαχίστου ὄγκου.

835. Ἐξ ὅλων τῶν σφαιρικῶν τμημάτων τῶν ἐχόντων μίαν βάσιν καὶ τὸ αὐτὸ ἐμβαδὸν ἐπιφανείας, ποῖον ἔχει τὸν μέγιστον ὄγκον;

836. Ἐξ ὅλων τῶν σφαιρικῶν τμημάτων τῶν ἐχόντων μίαν βάσιν καί τόν αὐτόν ὄγκον, ποῖον ἔχει τήν ἐλαχίστην ἐπιφάνειαν;

837. Δίδεται σφαῖρα (O,R) καί ἐπίπεδα Π, P μή τέμνοντα ταύτην. Νά εὑρεθῆ σημεῖον τῆς σφαίρας τοῦ ὁποίου τό ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπό τά ἐπίπεδα νά εἶναι μέγιστον ἤ ἐλάχιστον.

838. Ἐπί δοθέντος ἐπιπέδου νά εὑρεθῆ σημεῖον, τοῦ ὁποίου τό ἄθροισμα τῶν ἀποστάσεων ἀπό δύο δοθείσας εὐθείας νά εἶναι ἐλάχιστον.

839. Δίδεται τρισορθογώνιος στερεά γωνία Oxyz. Θεωροῦμεν τήν σφαῖραν (O,R). Νά ἀχθῆ ἐφαπτόμενον ἐπίπεδον αὐτῆς τέμνον τάς ἀκμάς τῆς τρισορθογωνίου εἰς A, B, Γ, ὥστε ὁ ὄγκος τοῦ τετραέδρου ΟΑΒΓ νά εἶναι ἐλάχιστος.

840. Νά κατασκευασθῆ τρίγωνον, τοῦ ὁποίου ἡ κορυφή A νά εἶναι δοθέν σημεῖον κείμενον εἰς τό ἐσωτερικόν διέδρου στερεᾶς γωνίας, αἱ κορυφαί του B καί Γ νά κεῖνται ἀντιστοίχως ἐπί τῶν ἑδρῶν τῆς διέδρου καί ἡ περίμετρος αὐτοῦ νά εἶναι ἐλαχίστη.

841. Δίδεται τετράεδρος στερεά γωνία Oxyzω καί ἐπί τῆς ἕδρας xOy σημεῖον A. Νά κατασκευασθῆ τετράπλευρον ΑΒΓΔ ἐλαχίστης περιμέτρου, τοῦ ὁποίου αἱ κορυφαί B, Γ, Δ νά κεῖνται ἀντιστοίχως ἐπί τῶν ἑδρῶν yOz, zOω, ωOx.

842. Δίδονται δύο ἀσύμβατοι εὐθεῖαι ε_1 καί ε_2. Ἔστω OI ἡ ἐλαχίστη ἀπόστασις αὐτῶν ($O \in \varepsilon_1$, $I \in \varepsilon_2$). Ἐπί τῆς ε_1 καί ἑκατέρωθεν τοῦ O λαμβάνομεν τά σημεῖα A, B, ὥστε $OA + OB = \lambda$ σταθερόν. Ἐάν M, N σημεῖα τῆς ε_2, ὥστε $AM \perp BN$, νά εὑρεθῆ ἡ θέσις τῶν A, B ἵνα $IM \cdot IN =$ ἐλάχιστον.

843. Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων παραλληλεπιπέδων τῶν ἐχόντων τόν αὐτόν ὄγκον ποῖον ἔχει τήν ἐλαχίστην διαγώνιον;

844. Ὀρθογώνιον παραλληλεπίπεδον διαστάσεων x, y, z καί διαγωνίου δ.

1) $x^{\mu} \cdot y^{\nu} \cdot z^{\rho} = c$ σταθερόν, $\delta =$ ἐλαχίστη;

2) $\delta = c$ σταθερόν, $x^{\mu} \cdot y^{\nu} \cdot z^{\rho} =$ μέγιστον;

845. Ἐκ τῶν πρισμάτων τῶν ἐχόντων $B + \delta =$ σταθερόν ποῖον ἔχει τόν μέγιστον ὄγκον;

846. Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων παραλληλεπιπέδων σταθερᾶς ὁλικῆς ἐπιφανείας ποῖον ἔχει τόν μέγιστον ὄγκον;

847. Ἐκ τῶν ὀρθογωνίων κολοβῶν παραλληλεπιπέδων σταθερᾶς βάσεως καί σταθεροῦ γινομένου τῶν δύο ἀπέναντι ἀκμῶν ποῖον ἔχει ἐλάχιστον ὄγκον;

848. Δίδεται τρίεδρος γωνία $Oxyz$. Νά εὑρεθοῦν ἐπί τῶν ἀκμῶν Ox, Oy, Oz αὐτῆς τά σημεῖα A, B, Γ ἀντιστοίχως, ὥστε τό ἐμβαδόν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας τῆς πυραμίδος $OAB\Gamma$ νά εἶναι δοθέν $3\lambda^2$ καί ὁ ὄγκος αὐτῆς μέγιστος.

849. Θεωροῦμεν τάς τριγωνικάς πυραμίδας $OAB\Gamma$, ἑκάστης τῶν ὁποίων τό ἐμβαδόν τῆς παραπλεύρου ἐπιφανείας εἶναι σταθερόν $3\lambda^2$. Νά εὑρεθῇ ἐκ τούτων ἡ ἔχουσα τόν μέγιστον ὄγκον.

850. Δίδεται τρισορθογώνιος στερεά γωνία $Oxyz$. Ἔστω A, B, Γ τά σημεῖα τῶν Ox, Oy, Oz ἀντιστοίχως καί $OA = x_1$, $OB = y_1$, $O\Gamma = z_1$. Ἐάν α, β, γ αἱ ἀποστάσεις σημείου M, ἐσωτερικοῦ τῆς τριέδρου, ἀπό τά ἐπίπεδα yOz, zOx, xOy ἀντιστοίχως, νά δειχθῇ ὅτι ἡ ἱκανή καί ἀναγκαία συνθήκη, ἵνα τό M κεῖται εἰς τό ἐπίπεδον $AB\Gamma$ εἶναι:

$$\frac{\alpha}{x_1} + \frac{\beta}{y_1} + \frac{\gamma}{z_1} = 1.$$

Ἀκόμη νά εὑρεθῇ τό διά τοῦ M διερχόμενον ἐπίπεδον καί ἀποκόπτον τετράεδρον ἐλαχίστου ὄγκου.

851. Δίδεται τρίεδρος στερεά γωνία $OAB\Gamma$. Ἐάν $OA + OB + O\Gamma = \lambda$ καί (P) παραλληλεπίπεδον μέ ἀκμάς $OA, OB, O\Gamma$, νά εὑρεθῇ ἐκ τῶν (P) ἐκεῖνο τό παραλληλεπίπεδον τό ὁποῖον ἔχει τόν μέγιστον ὄγκον.

852. Ὀρθογωνίου παραλληλεπιπέδου αἱ διαστάσεις x,y,z ἔχουν σταθερόν ἄθροισμα. Νά εὑρεθῇ ἐκεῖνο ἐκ τῶν παραλληλεπιπέδων, τό ὁποῖον ἔχει α) μέγιστον ἐμβαδόν ὁλικῆς ἐπιφανείας, β) τόν μέγιστον ὄγκον.

853. Δίδεται κῶνος ἐκ περιστροφῆς (K) καί εὐθεῖα ε. Νά εὑρεθῇ ἐκ τῶν γενετειρῶν τοῦ κώνου ἡ σχηματίζουσα τήν ἐλαχίστην γωνίαν μέ τήν ε ὡς καί ἡ σχηματίζουσα τήν μεγίστην γωνίαν μέ τήν ε.

854. Δίδεται κῶνος ἐκ περιστροφῆς (K) καί σημεῖον A. Νά εὑρεθῇ σημεῖον B∈(K), ὥστε AB = ἐλάχιστον.

855. Δίδεται ὀρθός κῶνος (K) κορυφῆς K καί ἐπί τοῦ ὁδηγοῦ κύκλου (O) αὐτοῦ σημεῖον A. Νά εὑρεθῇ τό σημεῖον M τοῦ (O), ὥστε (KAM) = μέγιστον.

856. Δίδεται σφαῖρα (O). Νά ἐγγραφῇ εἰς αὐτήν τό κανονικόν τριγωνικόν πρῖσμα, τοῦ ὁποίου ὁ ὄγκος εἶναι μέγιστος.

857. Δίδεται σφαῖρα (O). Νά ἐγγραφῇ παραλληλεπίπεδον μεγίστου ὄγκου.

858. Δίδεται σφαῖρα (O). Νά περιγραφῇ περί αὐτήν τετράεδρον ἐλαχίστου ὄγκου.

859. Ἐξ ὅλων τῶν κώνων τῶν ἐχόντων τόν αὐτόν ὄγκον ποῖος εἶναι ἐκεῖνος, τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτίς τῆς περιγεγραμμένης σφαίρας εἶναι ἐλαχίστη;

860. Ποῖος ἐξ ὅλων τῶν κώνων, τῶν ἐχόντων τήν αὐτήν κυρτήν ἐπιφάνειαν, ἔχει μέγιστον ὄγκον;

861. Ἐξ ὅλων τῶν κώνων τῶν ἐχόντων τόν αὐτόν ὄγκον ποῖος ἔχει τήν ἐλαχίστην ὁλικήν ἐπιφάνειαν;

862. Ποῖος κῶνος ἐκ τῶν περιγραφομένων περὶ δοθέντα κύλινδρον ἔχει τὸν ἐλάχιστον ὄγκον;

863. Ποῖον ἰσοσκελὲς τρίγωνον ἐκ τῶν ἐγγραφομένων εἰς περιφέρειαν δοθείσης ἀκτῖνος ρ, περιστρεφόμενον περὶ τὴν βάσιν του, δίδει τὸν μέγιστον ὄγκον;

864. Ἐξ ὅλων τῶν ὀρθογωνίων, τὰ ὁποῖα ἔχουν σταθερὰν περίμετρον, ποῖον δίδει τὸν μέγιστον ὄγκον, ὅταν περιστραφῇ περὶ μίαν τῶν πλευρῶν του;

865. Ἐξ ὅλων τῶν κυλίνδρων, οἱ ὁποῖοι ἔχουν τὸν αὐτὸν ὄγκον $\pi\alpha^3$, ποῖος εἶναι ἐκεῖνος τοῦ ὁποίου ἡ ἀκτὶς τῆς περιγεγραμμένης σφαίρας εἶναι ἐλαχίστη;

866. Δίδεται τρίεδρος στερεὰ γωνία $Oxyz$. Νὰ ἐγγραφῇ εἰς αὐτὴν ἄλλη τρίεδρος στερεὰ γωνία $Ox'y'z'$, τῆς ὁποίας τὸ ἄθροισμα τῶν ἑδρικῶν γωνιῶν νὰ εἶναι ἐλάχιστον.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ