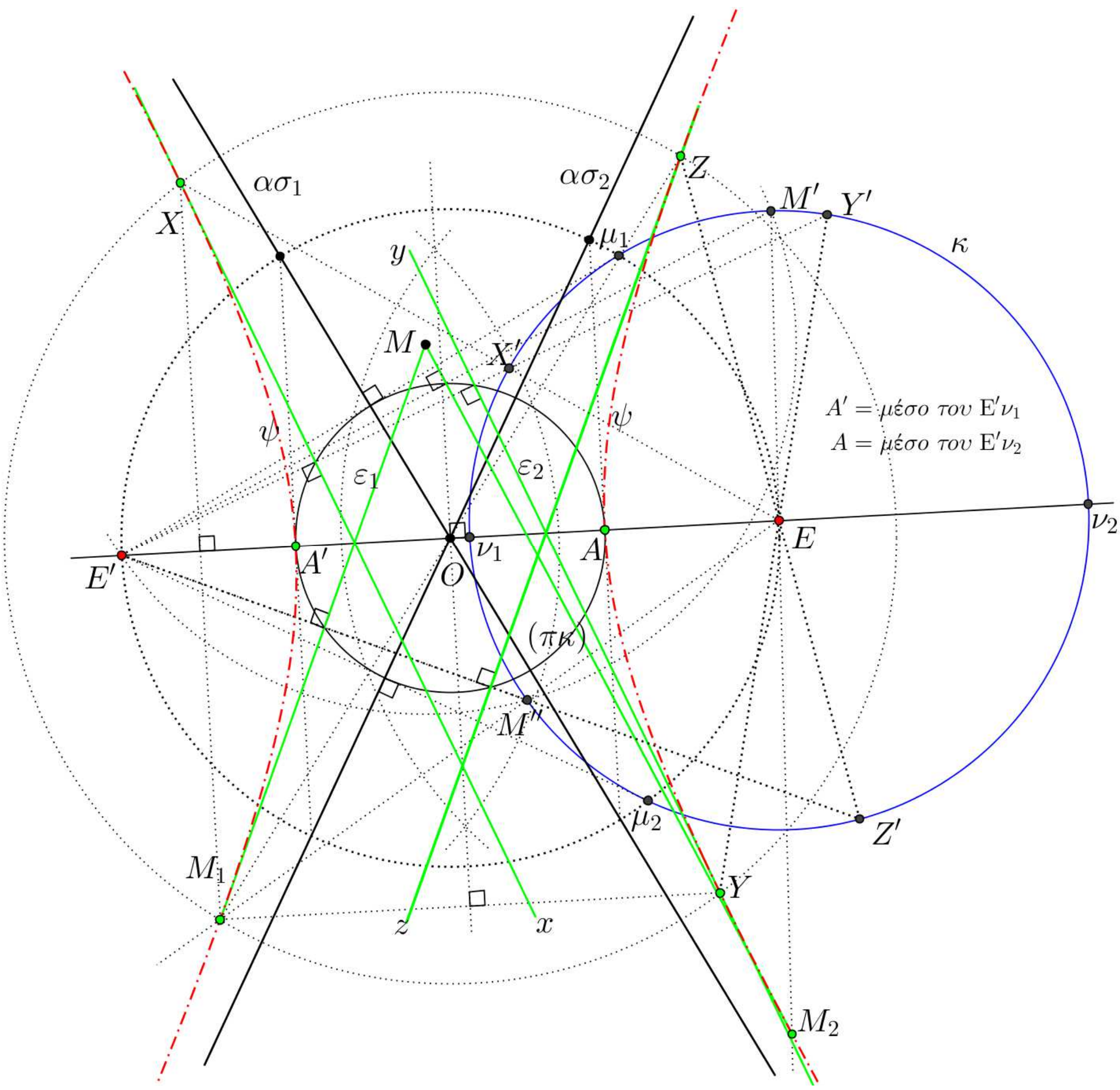
ΚΟΝΤΟΚΩΣΤΑΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ

ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ
(εκδοχή Σεπτεμβρίου 2014)

Ε.Μ.Π.



(παρατηρήσεις για τη βελτίωση των σημειώσεων ευπρόσδεκτες)

ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

§1 Εισαγωγή

Πρόκειται να δώσουμε τον ορισμό των κωνικών τομών και να μελετήσουμε ορισμένες από τις βασικές τους ιδιότητες. Υπάρχουν πολλοί και ποικίλοι ορισμοί τους, αλλά εμείς θα στηριχθούμε σε ένα συγκεκριμένο όμορφο γεωμετρικό ορισμό τους που καθιστά εύκολη τη μελέτη των κύριων γεωμετρικών ιδιοτήτων και χαρακτηριστικών τους. Ο ορισμός αυτός βασίζεται στις εστίες των κωνικών τομών που ήταν γνωστές από την αρχαιότητα, και πιθανολογείται πως ήταν γνωστός στον Απολλώνιο παρότι στα σωζόμενα γραπτά του δεν αναφέρεται ρητώς.

Ο σκοπός μας θα είναι να παραμείνουμε όσο το δυνατό εντός του συνηθισμένου και καλά μελετημένου ευκλείδειου επιπέδου και να εξοικειωθούμε με αρκετές από τις όμορφες μετρικές ιδιότητες των κωνικών τομών. Όμως για λόγους συνοχής και συμπάγειας στην παρουσίαση του θέματος, καθώς και για μια σφαιρικότερη αντίληψη της υπόστασης και των μεταξύ τους σχέσεων των γεωμετρικών αυτών αντικειμένων θα επιχειρήσουμε να χρησιμοποιήσουμε και απλά στοιχεία **προβολικής γεωμετρίας**.

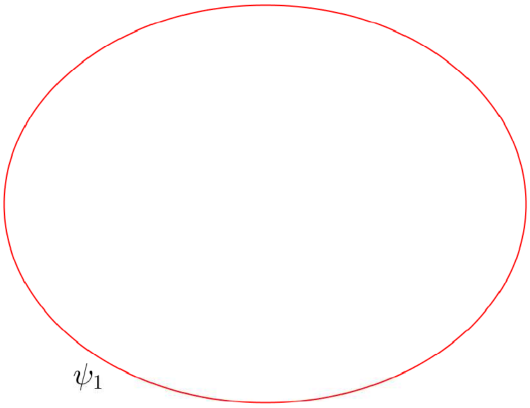
Δηλαδή ενώ οι κωνικές τομές είναι σχήματα που μπορούμε να τα ορίσουμε εντός του **ευκλείδειου επιπέδου**, εμείς θα τα ορίσουμε επίσης και στο **προβολικό επίπεδο** που προκύπτει από το ευκλείδειο με προσάρτηση επ'άπειρων σημείων στις διευθύνσεις των ευθειών του (συμβουλευτείτε τις σχετικές σημειώσεις προβολικής γεωμετρίας). Με τον τρόπο αυτό, θα επιχειρήσουμε να εκμεταλλευτούμε τόσο τις συνηθισμένες μετρικές ιδιότητες του ευκλείδειου επιπέδου εντός του οποίου θα εργαζόμαστε στην πλειοψηφία των περιπτώσεων, όσο και τις προβολικές ιδιότητες των επ'άπειρων σημείων του περιβάλλοντος προβολικού επιπέδου. Θα εργαστούμε λοιπόν σε ένα «**υβρίδιο**» προβολικού επιπέδου με μια δοσμένη σαφή εμφύτευση ενός ευκλείδειου επιπέδου εντός του.

Για τους γνώστες της προβολικής και **αλγεβρικής γεωμετρίας** θα πρέπει να τονίσουμε πως η λέξη «υβρίδιο» δεν πρέπει να παραγνωριστεί: η μελέτη των κωνικών τομών ως αντικείμενα της προβολικής γεωμετρίας, δηλαδή αντικείμενα με προβολικές μονάχα ιδιότητες (αναλλοίωτες από τους προβολικούς μετασχηματισμούς του προβολικού επιπέδου), καθιστά τα αντικείμενα ταυτόσημα! Δηλαδή υπάρχει ένα μόνο είδος κωνικής τομής, και κάθε άλλη προκύπτει από αυτή ως εικόνα μέσω κάποιου προβολικού μετασχηματισμού. Αυτό συμβαίνει διότι το προβολικό επίπεδο είναι ομοιογενής χώρος, δηλαδή δεν υπάρχει διάκριση μεταξύ των σημείων του. Π.χ. δεν υπάρχει διάκρισή τους σε συνηθισμένα ευκλείδεια και επ'άπειρον σημεία. Στην περίπτωσή μας όμως, στο «υβρίδιο» του προβολικού επιπέδου εντός του οποίου θα εργαστούμε, υπάρχουν κωνικές τομές διαφορετικών ειδών. Αυτό συμβαίνει διότι διακρίνουμε τα σημεία του σε δύο είδη (ευκλείδεια και επ'άπειρον) και δεν ενδιαφερόμαστε για τους προβολικούς μετασχηματισμούς του επιπέδου στο οποίο εργαζόμαστε, παρά για τις μετρικές τους ιδιότητες εντός του εμφυτευμένου ευκλείδειου επιπέδου.

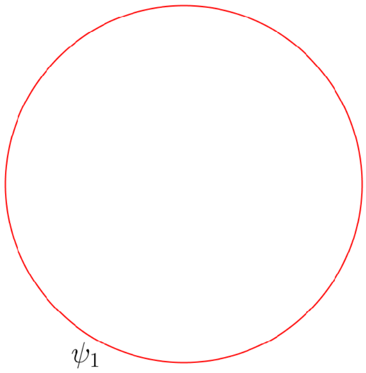
Ας τονιστεί όμως πως ορισμένες φορές η προτιμώμενη εμφύτευση του ευκλείδειου επιπέδου εντός του προβολικού, αντί να επιλύει, δημιουργεί προβλήματα αναφορικά με το «ενιαίο» των ιδιοτήτων των κωνικών τομών. Αυτά είναι περιορισμένα και προκύπτουν κυρίως από την προσπάθεια γενίκευσης καθαρά μετρικών ιδιοτήτων από το ευκλείδειο σε ολόκληρο το προβολικό επίπεδο, κάτι που είναι αδύνατο να επιτευχθεί σε όλες τις περιπτώσεις. Αυτό θα γίνει έντονα φανερό στην περίπτωση της κωνικής τομής που θα ονομάσουμε παραβολή. Θα μπορέσετε να παρατηρήσετε πως τα προβλήματα σχετικά με το ενιαίο θα προκύψουν διότι τις κωνικές τομές θα τις ορίσουμε με τη βοήθεια δυο βασικών σημείων, τις λεγόμενες εστίες τους, και στην περίπτωση της παραβολής θα επιτρέψουμε στη μια εστία να είναι επ'άπειρον σημείο, ενώ στις υπόλοιπες θα απαιτήσουμε αμφότερες οι εστίες τους να είναι ευκλείδεια σημεία.

Με την ευκαιρία ας σημειώσουμε πως υπάρχει κι άλλο μοντέλο του προβολικού επιπέδου, στο οποίο είναι εύκολο να θεωρήσουμε μετρική η οποία προκύπτει από την αντίστοιχη ευκλείδεια μετρική του ευκλείδειου χώρου (τριών διαστάσεων) στον οποίο είναι εμφυτευμένου το μοντέλο. Η γεωμετρία που προκύπτει ονομάζεται **ελλειπτική**. Αυτή όμως η γεωμετρία είναι διαφορετική από τη συνηθισμένη προβολική γεωμετρία (π.χ. έχει διαφορετική ομάδα μετασχηματισμών). Για τους σκοπούς μας, ούτε και η ελλειπτική γεωμετρία θα ήταν πραγματικά χρήσιμη, αλλά φυσικά αν θέλει κανείς μπορεί να τη χρησιμοποιήσει τόσο για τον ορισμό όσο και τη μελέτη των ιδιοτήτων των κωνικών τομών.

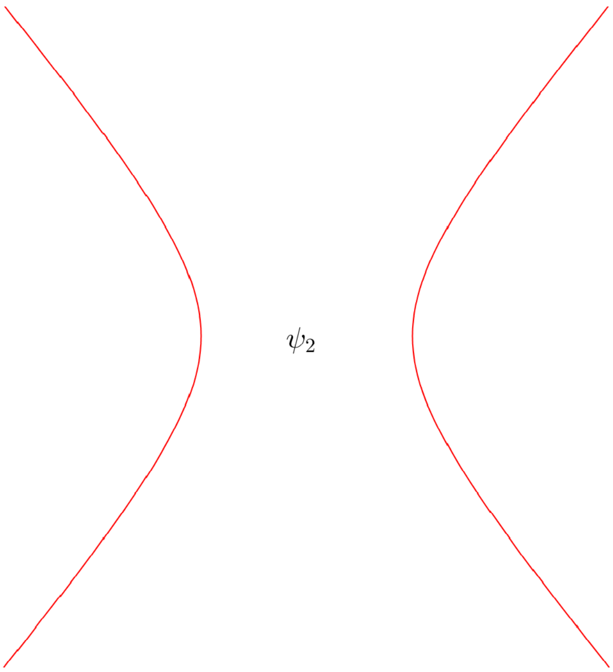
Τα επόμενα σχήματα μας δείχνουν τη μορφή των (μη-τετριμμένων) κωνικών τομών στο ευκλείδειο επίπεδο.



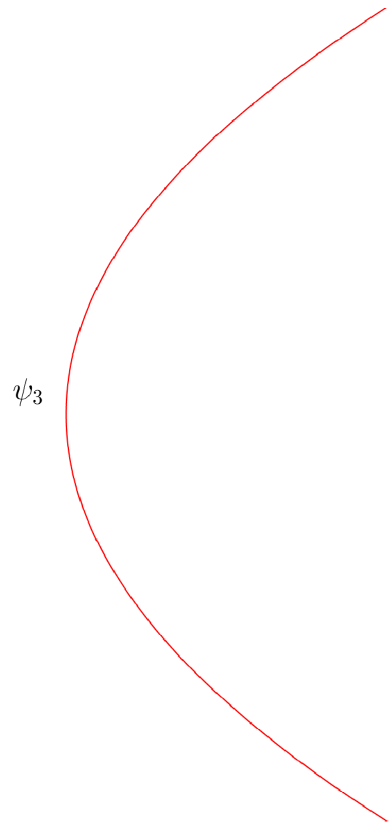
ή



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

Αναφορικά με το προβολικό επίπεδο, θυμηθείτε (σημειώσεις προβολικής γεωμετρίας): υπάρχει ένα επ'άπειρον σημείο για κάθε ευθεία, το οποίο είναι ίδιο για όλες τις παράλληλες μεταξύ τους ευθείες, ενώ δύο επ'άπειρον σημεία για ευθείες με διαφορετικές διευθύνσεις είναι διαφορετικά. Επίσης, όλα τα επ'άπειρον σημεία αποτελούν τη λεγόμενη **επ'άπειρον ευθεία** του προβολικού επιπέδου.

Στο εξής **ε.ε.** θα σημαίνει επεκτεταμένη ευκλείδεια ευθεία, δηλαδή ευθεία του ευκλείδειου επιπέδου επεκτεταμένη με το επ'άπειρον σημείο της εντός του προβολικού επιπέδου.

Στο προβολικό επίπεδο, **κύκλοι** θα ονομάζονται τόσο οι ευκλείδειοι κύκλοι, όσο και όλες οι ευθείες του, δηλαδή οι ε.ε, ενώ την επ'άπειρον ευθεία του προβολικού επιπέδου θα την ονομάζουμε **κατά σύμβαση κύκλο**. Δηλαδή ο κύκλος θα έχει μια γενικευμένη έννοια σε σχέση με αυτή του ευκλείδειου επιπέδου. Για μια ε.ε. θεωρούμενη ως κύκλος, το κέντρο της είναι το επ'άπειρον σημείο της διεύθυνσης της κάθετης στην ευθεία και όταν υπάρχει ανάγκη αναφοράς στην ακτίνα της, αυτή θεωρείται άπειρη. Για την επ'άπειρον ευθεία θεωρούμενη ως κύκλος, η ακτίνα της θεωρείται και πάλι άπειρη. Είναι προτιμότερο να μην ορίσουμε κέντρο για την επ'άπειρον ευθεία για αυτό το μοντέλο του προβολικού επιπέδου στο οποίο εργαζόμαστε. Δύο διακεκριμένους κύκλους στο προβολικό επίπεδο (δηλαδή καθένας τους είναι ευκλείδειος κύκλος ή επεκτεταμένη ευκλείδεια ευθεία) θα τους ονομάζουμε **εφαπτόμενους** όταν είναι εφαπτόμενοι στο ευκλείδειο επίπεδο με τη συνηθισμένη έννοια, ή όταν πρόκειται για δύο επεκτεταμένες ευθείες, παράλληλες εντός του ευκλείδειου επιπέδου. Το μοναδικό κοινό σημείο στην τελευταία περίπτωση είναι το επ'άπειρον σημείο της κοινής διεύθυνσής τους. Δύο μη εφαπτόμενους κύκλους στο προβολικό επίπεδο τους ονομάζουμε **τεμνόμενους**. Την επ'άπειρον ευθεία τη θεωρούμε εφαπτόμενη σε κάθε επεκτεταμένη ευθεία. Παρατηρήστε πως δύο επεκτεταμένες μη παράλληλες ευθείες αποτελούν τεμνόμενους κύκλους στο προβολικό επίπεδο, με ένα μόνο σημείο τομής! Αυτό το φαινόμενο δε συμβαίνει στο ευκλείδειο επίπεδο, και σχετίζεται με το γεγονός πως το προβολικό επίπεδο σε αντίθεση με το ευκλείδειο δεν είναι απλά-συνεκτικός τοπολογικός χώρος. Δηλαδή υπάρχουν σε αυτόν κλειστές καμπύλες (π.χ. κύκλοι) οι οποίες δε συρρικνώνονται σε ένα μοναδικό σημείο με συνεχή κίνηση της καμπύλης εντός του προβολικού επιπέδου. Για τον ενδιαφερόμενο αναγνώστη, η τοπολογία του προβολικού επιπέδου (δηλαδή ουσιαστικά τα ανοιχτά σύνολά του) είναι η αναμενόμενη επαγόμενη τοπολογία του ευκλείδειου επιπέδου. Το ζήτημα όμως είναι τοπολογικό και δεν θα μας απασχολήσει άλλο.

Τα πιο σημαντικά μετρικά ζητήματα που αφορούν το μέγεθος και τη σχετική τοποθέτηση δύο κύκλων είναι η ισότητά τους και η γωνία τους. Στο προβολικό επίπεδο δίνουμε τους ακόλουθους ορισμούς: Δύο κύκλους στο προβολικό επίπεδο θα τους λέμε **ίσους** όταν έχουν ίσες ακτίνες, δηλαδή όταν είναι ίσοι κύκλοι του ευκλείδειου επιπέδου, είτε όταν αμφότεροι είναι ε.ε. ευθείες του προβολικού επιπέδου. Η **γωνία δύο** συνηθισμένων τεμνόμενων **κύκλων** είναι η μικρότερη γωνία των ευθειών επαφής τους σε ένα οποιοδήποτε κοινό τους σημείο. Όταν οι κύκλοι δεν τέμνονται, η γωνία τους ορίζεται να είναι 0, ενώ όταν αυτοί εφάπτονται η γωνία τους είναι και πάλι 0, εξ'ορισμού όταν πρόκειται για επεκτεταμένες ευθείες ή την επ'άπειρον ευθεία, η για ζεύγος ταυτιζόμενων κύκλων.

Ένας ζεύγος επεκτεταμένων ευθειών που αποτελούν παράλληλες ευθείες εντός του ευκλείδειου επιπέδου, ορισμένες φορές το αποκαλούμε ως ζεύγος **παράλληλων ευθειών** στο προβολικό επίπεδο (αντί για ζεύγος εφαπτόμενων κύκλων που αναφέραμε προηγουμένως). Ομοίως η επ'άπειρον ευθεία λέμε πως είναι παράλληλη σε κάθε επεκτεταμένη ευθεία και σε κάθε συνηθισμένο κύκλο. Επίσης λέμε πως δύο συνηθισμένοι και μη τεμνόμενοι κύκλοι είναι παράλληλοι. Εκτός της παραλληλίας, για δύο ε.ε. θα διατηρούμε γενικότερα όλους τους χαρακτηρισμούς τους από το ευκλείδειο επίπεδο. Έτσι π.χ. όταν θα λέμε πως δύο ευθείες είναι **κάθετες** θα εννοούμε πως οι αντίστοιχες ευκλείδειες ευθείες είναι κάθετες. Από κάθε σημείο του ευκλείδειου επιπέδου διέρχεται μοναδική ε.ε. κάθετη σε δοσμένη άλλη ε.ε ευθεία. Στο μοντέλο του προβολικού επιπέδου που χρησιμοποιούμε, είναι καλό να μην επιχειρήσουμε να ορίσουμε ευθεία κάθετη στην επ'άπειρον ευθεία, ούτε και ευθεία κάθετη από επ'άπειρον σημείο σε ε.ε.

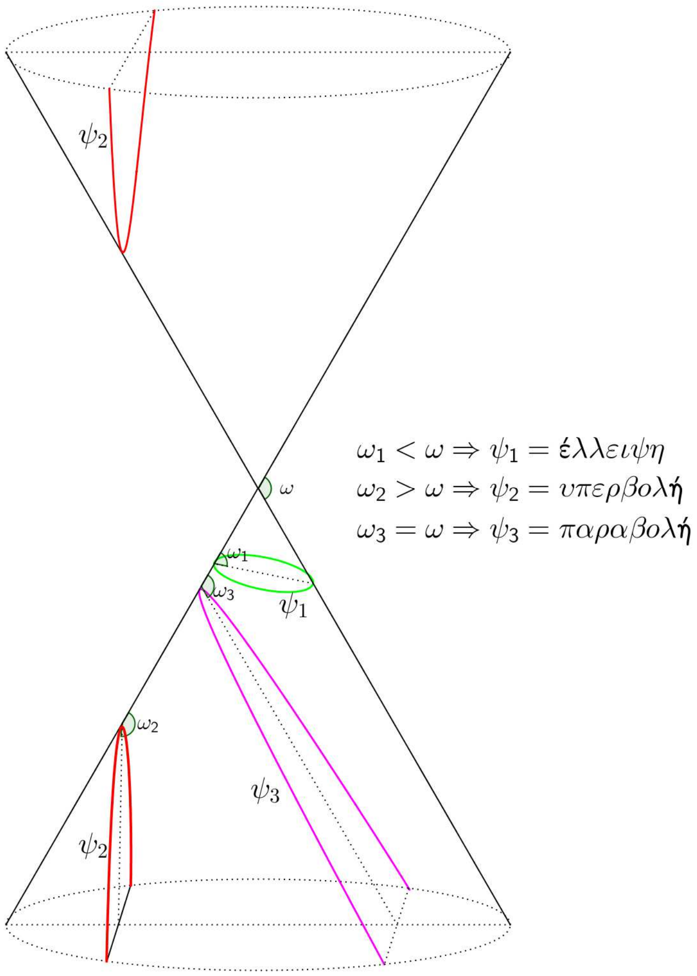
§2 Αρχικός ορισμός των κωνικών τομών

Κωνικές τομές στο ευκλείδειο επίπεδο ονομάζονται οι τομές ενός κώνου με ένα επίπεδο. Αποδεικνύεται πως οι κωνικές τομές είναι των ακόλουθων ειδών: σημείο, ευθεία, δύο διακεκριμένες τεμνόμενες ευθείες, μια κλειστή φραγμένη καμπύλη ψ_1, δύο ανοιχτές και μη φραγμένες καμπύλες ψ_2, μια ανοιχτή και μη φραγμένη καμπύλη ψ_3 (Σχήμα 4).

Τα τρία πρώτα είδη τα ονομάζουμε **τετριμμένες κωνικές τομές**, και τα υπόλοιπα **μη-τετριμμένες**. Τις καμπύλες ψ_1 τις ονομάζουμε **ελλείψεις**, τις ψ_2 **υπερβολές** και τις ψ_3 **παραβολές**. Οι δύο καμπύλες μιας υπερβολής ονομάζονται **κλάδοι** της, και αποδεικνύεται πως δεν έχουν κοινά σημεία στο ευκλείδειο επίπεδο. Αποδεικνύεται πως οι ελλείψεις περιλαμβάνουν τους (ευκλείδειους) κύκλους.

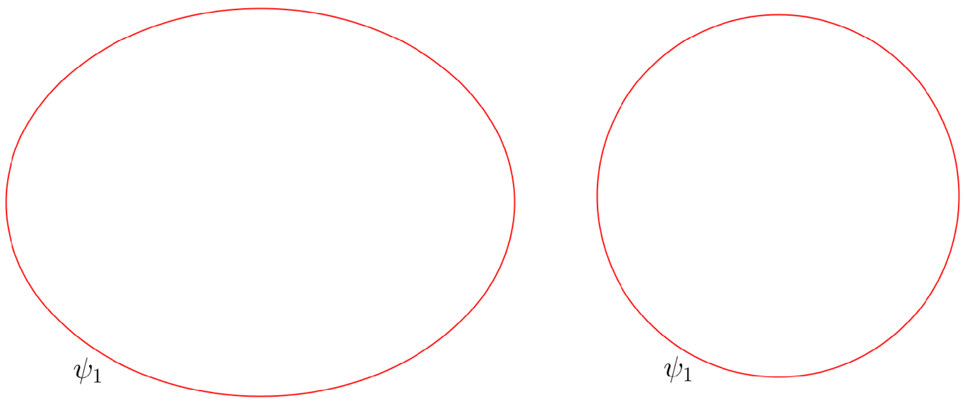
Θεωρώντας το προβολικό επίπεδο αντί του ευκλείδειου στον ορισμό, όλες οι παραπάνω κωνικές τομές είναι κλειστές καμπύλες. Ένα σημείο φυσικά το θεωρούμε ως ιδιάζουσα τετριμμένη καμπύλη. Για τις ευθείες, το ζεύγος ευθειών, τις παραβολές και τις υπερβολές, τα σημεία που τις «κλείνουν» είναι επ'άπειρον σημεία τους. Ιδιαιτέρως για τις ευθείες και το ζεύγος ευθειών τα επ'άπειρον σημεία που τις κλείνουν είναι τα επ'άπειρον σημεία στο προβολικό επίπεδο των αντίστοιχων ευκλείδειων ευθειών. Για την υπερβολή, υπάρχουν δύο διακεκριμένα επ'άπειρον σημεία που ανήκουν στη θήκη και των δύο ευκλείδειων κλάδων της (δηλαδή είναι οριακά σημεία και των δύο κλάδων, στην συνηθισμένη τοπολογία του προβολικού επιπέδου). Τον κάθε ευκλείδειο κλάδο μαζί με τα επ'άπειρον σημεία τον αποκαλούμε προβολικό κλάδο ή ξανά απλώς κλάδο της υπερβολής (βεβαίως αυτή τη φορά στο προβολικό επίπεδο). Για την παραβολή υπάρχει ένα μοναδικό επ'άπειρον σημείο στη θήκη της.

Στο εξής, τις μη τετριμμένες κωνικές τομές θα τις ονομάζουμε απλά ως κωνικές τομές και ορισμένες φορές για συντομία θα γράφουμε απλώς **κ.τ.**

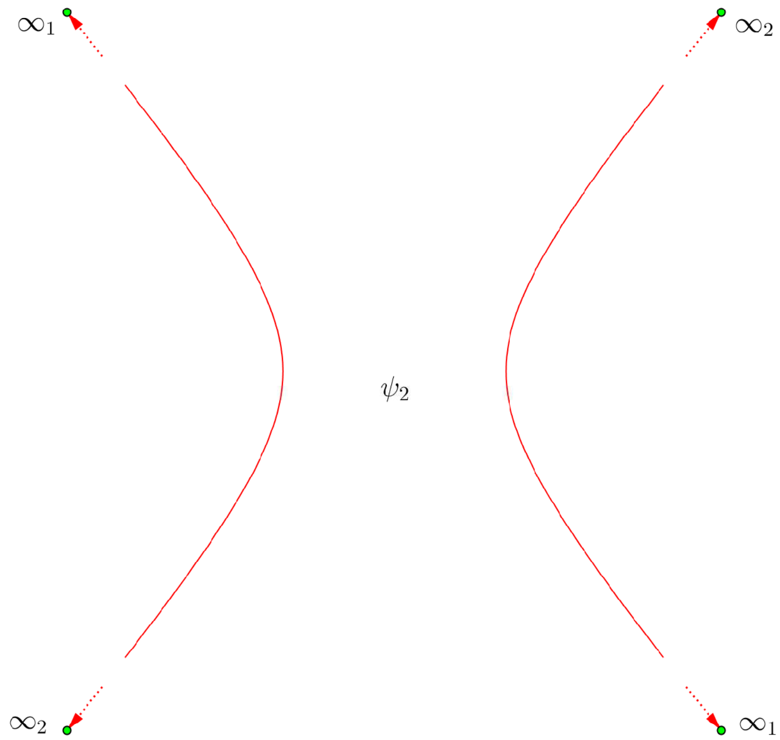


Σχήμα 4

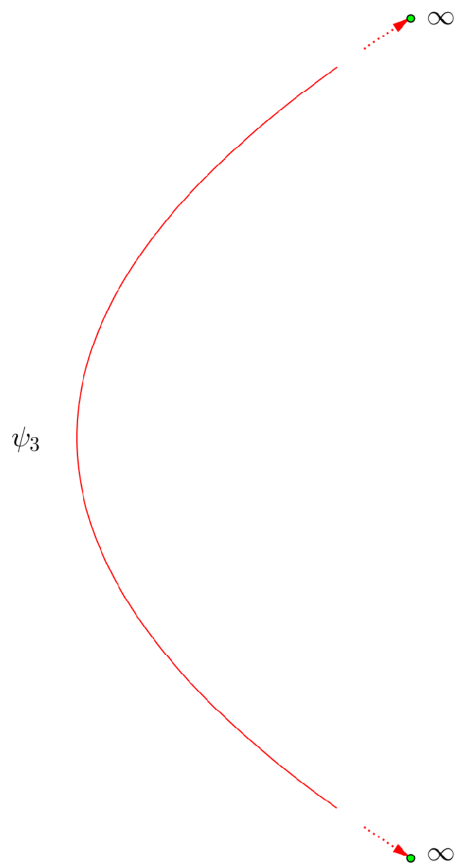
Τα σχήματα που ακολουθούν μας δείχνουν τη μορφή των μη-τετριμμένων κωνικών τομών στο προβολικό επίπεδο. Σε αυτά τονίζεται ιδιαίτερα η θέση των επ'άπειρων σημείων. Καθώς στην έλλειψη δεν υπάρχουν τέτοια σημεία δεν παρατηρείται καμιά διαφορά από το σχήμα στο ευκλείδειο επίπεδο. Στην περίπτωση της υπερβολής, μπορούμε να κινηθούμε επάνω σε οποιονδήποτε ευκλείδειο κλάδο της προς τις δύο κατευθύνσεις του πλησιάζοντας αντιστοίχως σε ένα από τα δύο επ'άπειρον σημεία της. Παρατηρήστε τη σχετική τοποθέτηση των σημείων αυτών επάνω στους δύο (προβολικούς) κλάδους. Στην περίπτωση της παραβολής μπορούμε να κινηθούμε προς οποιαδήποτε από τις δύο κατευθύνσεις της στο ευκλείδειο επίπεδο, πλησιάζοντας στο ίδιο πάντοτε επ'άπειρον σημείο της!



Σχήμα 5



Σχήμα 6



Σχήμα 7

§3 Ένας όμορφος γεωμετρικός ορισμός των μη τετριμμένων κωνικών και κύρια στοιχεία τους

Ο ορισμός των μη τετριμμένων κωνικών τομών που ακολουθεί έχει νόημα στο προβολικό επίπεδο, και με μια ανεπαίσθητη αλλαγή έχει νόημα και εντός του ευκλείδειου επιπέδου. Καθώς στο προβολικό επίπεδο υπάρχουν και επ'άπειρον σημεία εκτός των ευκλείδειων, θα χρειαστούν ορισμένες διευκρινήσεις για να αντιληφθούμε πως πρόκειται για έναν καλώς δοσμένο ορισμό. Τις διευκρινήσεις αυτές τις δίνουμε αμέσως μετά τη διατύπωσή του, ενώ την εξήγηση της ισχύς τους και ορισμένες επιπλέον παρατηρήσεις τις δίνουμε στην §4.

Ορισμός 1. (Μη τετριμμένη) κωνική τομή στο προβολικό επίπεδο ονομάζουμε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων κύκλων διερχόμενων από δοσμένο σημείο E' και εφαπτόμενων δοσμένου κύκλου κ (με κέντρο έστω το σημείο E). Η ίδια κωνική τομή είναι ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων κύκλων διερχόμενων από το σημείο E και εφαπτόμενων δοσμένου γενικευμένου κύκλου κ' κέντρου E και ίσου με τον κ .
Απαιτείται οι κ,κ' να μην διέρχονται από τα E',E αντιστοίχως, τα E',E να μην είναι αμφότερα επ'άπειρον σημεία, κι αν κάποιο από αυτά είναι επ'άπειρον σημείο, έστω το E , απαιτείται ο κ' να μην είναι απλός κύκλος αλλά γενικευμένος, δηλαδή η επ'άπειρον ευθεία.
- **Εστίες** της κ.τ ονομάζουμε τα σημεία E',E .
- **Διευθύνοντες κύκλους** των εστιών E',E ονομάζουμε τους κ',κ αντιστοίχως.
- **Εστιακό άξονας** $\alpha\xi$ ονομάζουμε την ευθεία $E'E$.

Έλλειψη ονομάζουμε την κωνική τομή που έχει εστίες ευκλείδειες, όταν αυτές βρίσκονται στο ίδιο μέρος (δηλαδή στο εσωτερικό) καθενός από τους διευθύνοντες κύκλους (Σχήμα 8). **Υπερβολή** ονομάζουμε την κωνική τομή με εστίες ευκλείδειες, όταν αυτές διαχωρίζονται από καθέναν από τους διευθύνοντες κύκλους (Σχήμα 9-11). **Παραβολή** ονομάζουμε την κωνική τομή για την οποία η μία εστία, είναι επ'άπειρον σημείο (Σχήμα 12). (Ελέγξτε πως δεν υπάρχει άλλη δυνατή περίπτωση, οπότε και δεν υπάρχει άλλο είδος κωνικής.)

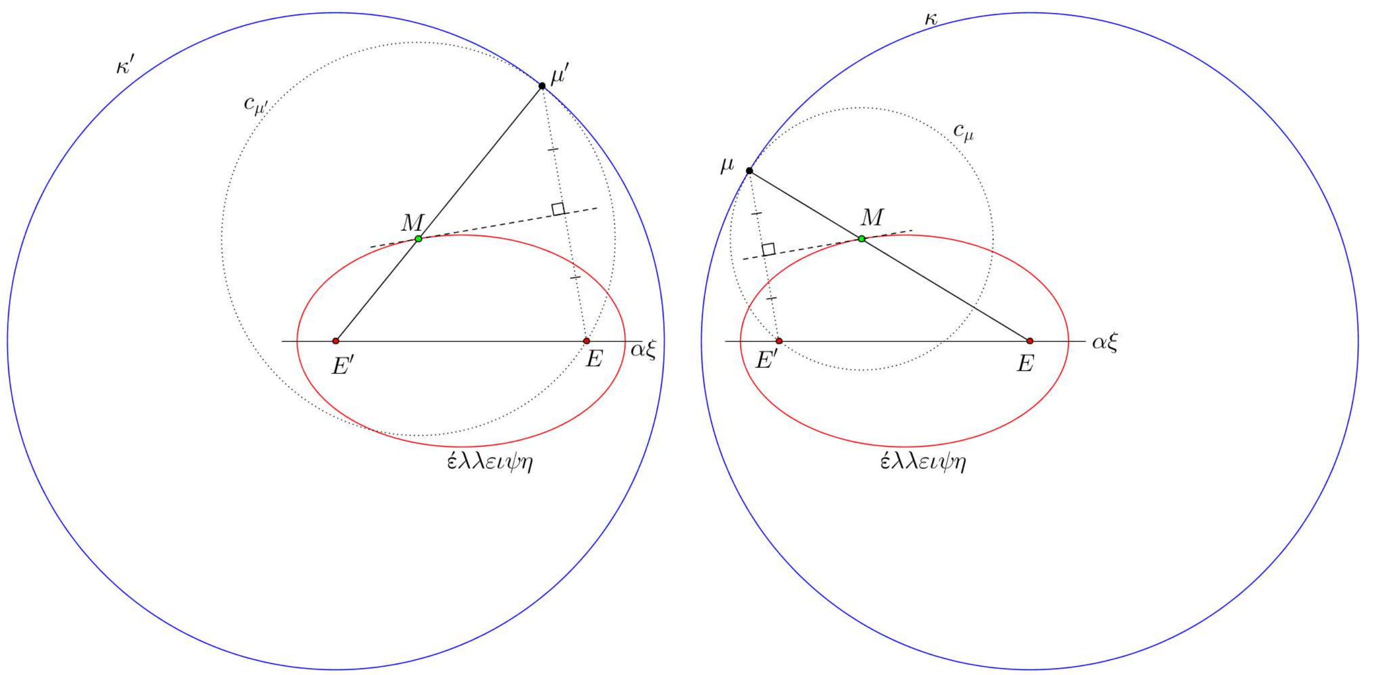
Για το τυχαίο σημείο μ του κύκλου κ, ας σημειώσουμε με c_μ τον εφαπτόμενο κύκλο του ορισμού που εφάπτεται του κ στο σημείο μ. Στην περίπτωση της έλλειψης όλα τα σημεία της και όλοι οι κύκλοι c_μ είναι συνηθισμένοι κύκλοι στο ευκλείδειο επίπεδο. Στην περίπτωση της υπερβολής, όλοι οι κύκλοι c_μ είναι συνηθισμένοι κύκλοι στο ευκλείδειο επίπεδο εκτός των c_{μ_1},c_{μ_2} όπου μ_1,μ_2 τα σημεία επαφής από την E' στον κ. Οι c_{μ_1},c_{μ_2} είναι οι επεκτεταμένες εφαπτόμενες ευθείες από την E' στον κ και τα σημεία της υπερβολής που αποτελούν τα κέντρα των κύκλων αυτών είναι δύο επ'άπειρον σημεία της ∞_1,∞_2 σε διευθύνσεις κάθετες προς τις c_{μ_1},c_{μ_2}. Τέλος στην περίπτωση της παραβολής, όλοι οι κύκλοι c_μ είναι συνηθισμένοι κύκλοι στο ευκλείδειο επίπεδο εκτός του c_{κ_∞} όπου κ_∞ το επ'άπειρον σημείο της ευθείας κ. Ο c_{κ_∞} είναι η επεκτεταμένη παράλληλη ευθεία της κ από την εστία E'. Το κέντρο του κύκλου-ε.ε. c_{κ_∞} είναι το επ'άπειρον σημείο της παραβολής που ορίζει τη διεύθυνση την κάθετη στην c_{κ_∞} δηλαδή στην κ. Θα δούμε στις παρατηρήσεις της §4 πως το σημείο αυτό οφείλει να είναι η εστία E της παραβολής.

Με τα παραπάνω στο μυαλό μας, ας παρατηρήσουμε πως ο ορισμός ουσιαστικά αναφέρεται σε μια ένα προς ένα αντιστοιχία μεταξύ των σημείων M μιας κωνικής τομής ψ και των σημείων μ οποιουδήποτε από τους διευθύνοντες κύκλου της, έστω του κ. Η αντιστοιχία των M,μ είναι η ακόλουθη:
- αν ψ έλλειψη: το M ανήκει στο τμήμα $E\mu$ και είναι το κοινό σημείο του με την ψ .
- αν ψ υπερβολή και μ_1,μ_2 τα σημεία επαφής των εφαπτομένων από την εστία E' στον κ : (α) για τα σημεία μ του μείζονος τόξου $\mu_1\mu_2$, τα αντίστοιχα σημεία M βρίσκονται στην ημιευθεία μE και αποτελούν την τομή της με τον κλάδο της υπερβολής που βρίσκεται πλησιέστερα στην εστία E . (β) Για τα σημεία μ του ελάσσονος τόξου $\mu_1\mu_2$, τα αντίστοιχα σημεία M βρίσκονται στην ημιευθεία $E\mu$ και αποτελούν την τομή της με τον πιο απομακρυσμένο κλάδο της υπερβολής από εστία E . (γ) για τα σημεία μ_1,μ_2, τα αντίστοιχα σημεία M βρίσκονται επάνω στις ευθείες $E\mu_1,E\mu_2$ και είναι τα επ'άπειρον σημεία ∞_1,∞_2 της υπερβολής.
- αν ψ παραβολή: το μ είναι το κοινό σημείο της ευθείας EM με την ψ .

Στο εξής, σε κάθε περίπτωση θα ονομάζουμε τα M, μ **αντίστοιχα** και μπορούμε να συμβολίζουμε τον κύκλο c_μ και ως $c_{(M)}$. Το σημείο M κατασκευάζεται δεδομένου του αντίστοιχου σημείου του μ στον κ, ως η τομή της μεσοκαθέτου του τμήματος $E'\mu$ με την ευθεία $E\mu$. Φυσικά η παραπάνω αντιστοιχία είναι πλήρης μόνο θεωρώντας την κωνική τομή στο προβολικό επίπεδο, και επιτρέποντας στους διευθύνοντες κύκλους να είναι γενικευμένοι, δηλαδή να είναι είτε συνηθισμένοι κύκλοι εντός του ευκλείδειου επιπέδου, είτε επεκτεταμένες ευθείες στο προβολικό. Αυτός είναι ένας πολύ σημαντικός λόγος για να μελετήσουμε τις κωνικές τομές ως σχήματα του προβολικού επιπέδου, και όχι απλώς ως σχήματα του ευκλείδειου.

Για να γίνουν ετούτα διαυγέστερα, μελετήστε τα επόμενα σχήματα. Σε καθένα από αυτά η αντιστοιχία των μ, M δίνει μια «κατασκευή» κάποιας κωνικής τομής. Η «κατασκευή» εδώ έχει την έννοια της κατασκευής με κανόνα και διαβήτη (εκμεταλλευόμενοι τον Ορισμό 1) όποιουδήποτε πεπερασμένου πλήθους σημείων της μ επιθυμούμε, ως αντίστοιχων κάποιων επιλεγμένων από εμάς σημείων M ενός διευθύνοντος κύκλου της. (για ορισμένες ελαφρώς εκτενέστερες παρατηρήσεις σχετικά με τις κατασκευές με κανόνα και διαβήτη ανατρέξτε και αργότερα, στην §7): Για το τυχαίο επιλεγμένο σημείο μ του κ, το M κατασκευάζεται ως τομή της $E\mu$ με τη μεσοκάθετη του τμήματος $E'\mu$. Στην §5 η μεσοκάθετος του τμήματος $E'\mu$ θα ονομαστεί εφαπτόμενη στο σημείο M της κωνικής τομής.

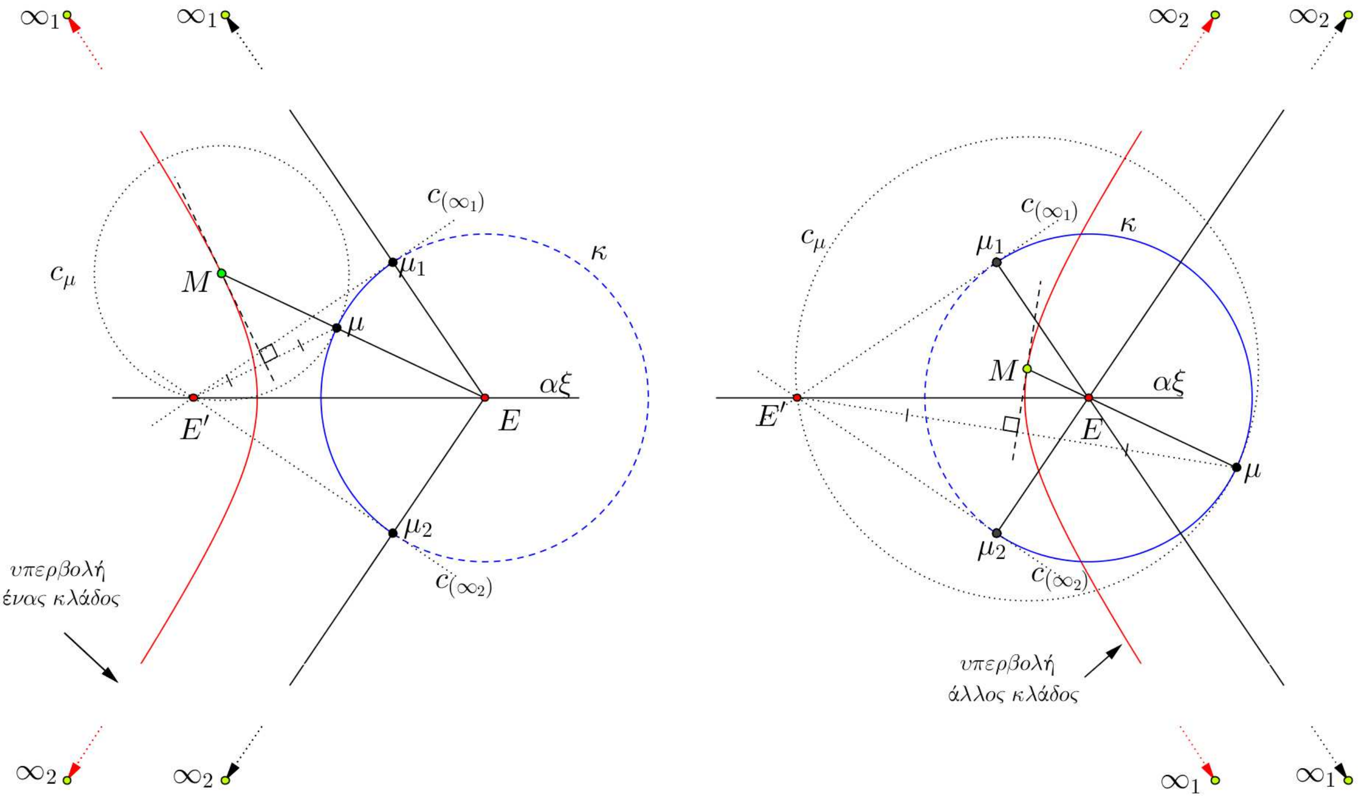
(1) Έλλειψη. Στα δύο σχήματα που ακολουθούν η ίδια έλλειψη «κατασκευάζεται» από καθέναν από τους δύο διευθύνοντες κύκλους της ξεχωριστά. Στο σχήμα σημειώνεται και ο κύκλος c_μ με κέντρο το M και εφαπτόμενος του κ στο αντίστοιχο σημείο M.



Σχήμα 8

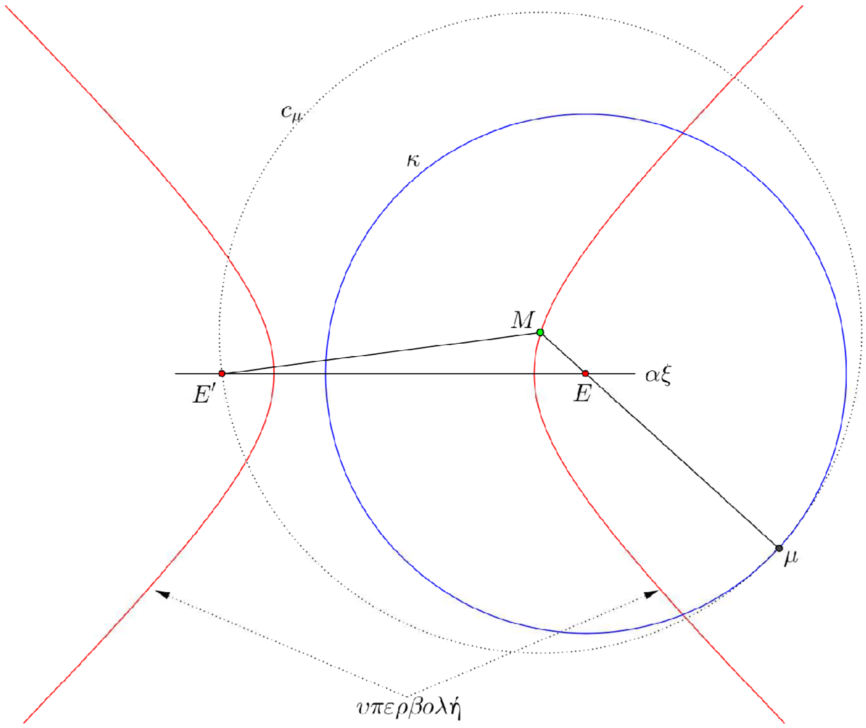
(2) Υπερβολή. Στα δύο σχήματα που ακολουθούν, οι δύο κλάδοι της υπερβολής κατασκευάζονται ξεχωριστά για τα δύο συμπληρωματικά τόξα $\widehat{\mu_1\mu_2}$ του ίδιου διευθύνοντος κύκλου κ. Τα σημεία μ_1, μ_2 είναι τα σημεία επαφής των εφαπτομένων στον κ από την εστία E'. Παρατηρήστε πως για τον δεξιό κλάδο που βρίσκεται πλησιέστερα στην εστία E της οποίας το διευθύνοντα κύκλο χρησιμοποιούμε, τα σημεία M βρίσκονται στην ημιευθεία μE, ενώ για τον αριστερό κλάδο που βρίσκεται πλησιέστερα στην εστία E', τα σημεία M βρίσκονται στην ημιευθεία $E\mu$. Τα δύο επ'άπειρον σημεία βρίσκονται επάνω στις ευθείες $E\mu_1, E\mu_2$, δηλαδή στις οριακές θέσεις

των δύο προηγούμενων περιπτώσεων, που αντιστοιχούν στις οριακές θέσεις μ_1, μ_2 των σημείων μ πάνω στα δύο αντίστοιχα τόξα. Στο σχήμα σημειώνεται και ο κύκλος c_μ με κέντρο το M και εφαπτόμενος του κ στο αντίστοιχο σημείο μ του M.



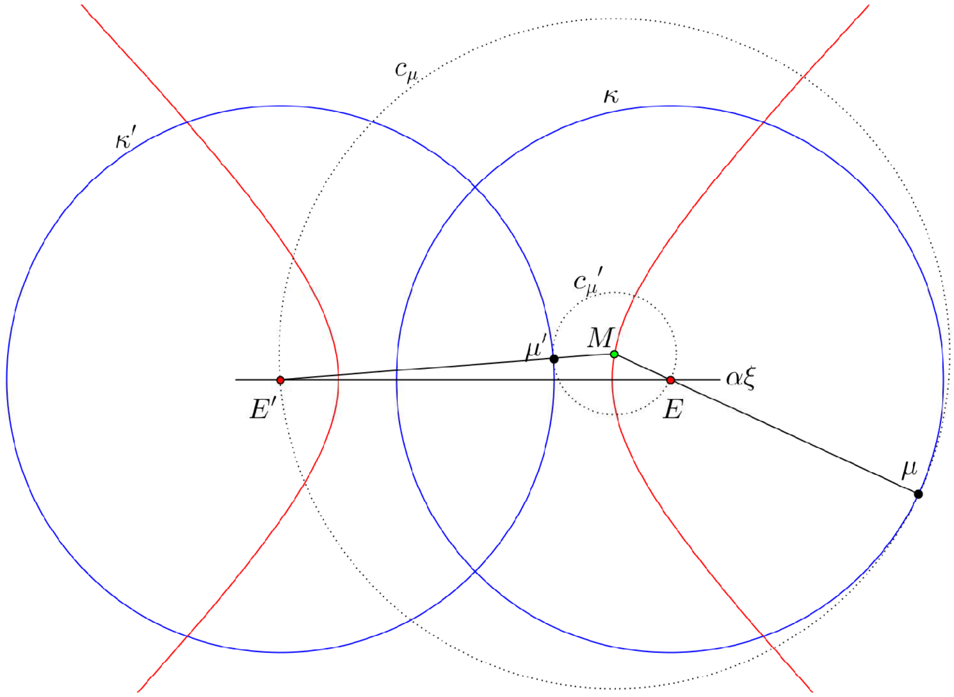
Σχήμα 9

Στο επόμενο σχήμα δίνεται ολόκληρη η προηγούμενη υπερβολή ως παραγόμενη από τον ένα διευθύνοντα κύκλο της κ. Τονίζεται μονάχα κάποιο σημείο M του κλάδου πλησιέστερα στην εστία του δοσμένου διευθύνοντος κύκλου και το αντίστοιχο σημείο του μ στον κ. Στο σχήμα δίνεται επίσης ο κύκλος c_μ κέντρου M, ο οποίος εφάπτεται του κ στο σημείο μ.



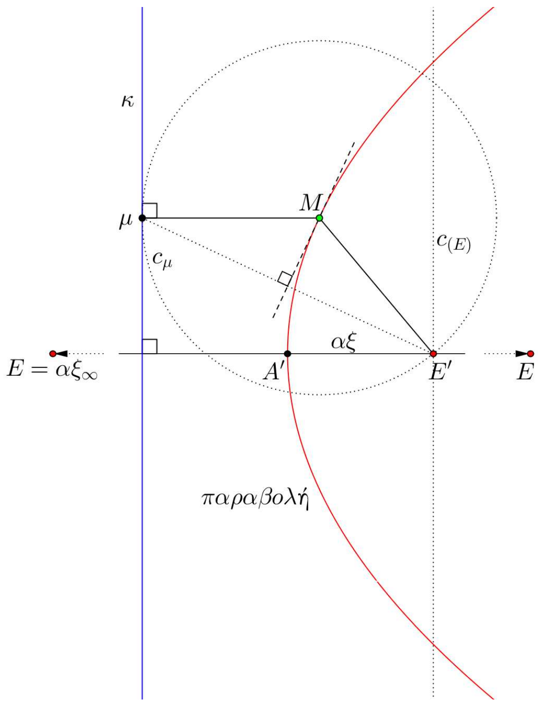
Σχήμα 10

Στο σχήμα που ακολουθεί, η προηγούμενη υπερβολή κατασκευάζεται ολόκληρη για αμφότερους τους διευθύνοντες κύκλους της κ,κ'. Τονίζεται ιδιαιτέρως ένα τυχαία επιλεγμένο σημείο M της υπερβολής και δίνονται τα σημεία μ',μ στους διευθύνοντες κύκλους κ',κ που το παράγουν. Σημειώνονται επίσης οι κύκλοι c_μ, c_μ' με κέντρο το M που εφάπτονται στον διευθύνοντα κύκλο της μιας εστίας (στα μ',μ) και διέρχονται από την άλλη εστία.



Σχήμα 11

(3) Παραβολή. Στο σχήμα που ακολουθεί μια παραβολή κατασκευάζεται από το μοναδικό διευθύνοντα κύκλο-ε.ε. κ που έχει σημεία και στο ευκλείδειο επίπεδο. Ο κ είναι ο διευθύνων κύκλος της μη ευκλείδειας εστίας E. Ο διευθύνων κύκλος κ της επ'άπειρον εστίας E είναι μια επεκτεταμένη ευθεία με διεύθυνση κάθετη σε αυτή που ορίζει το E. Το E είναι και το επ'άπειρον σημείο της παραβολής, καθώς και το επ'άπειρον σημείο $\alpha\xi_\infty$ του άξονα $\alpha\xi$. Στο σχήμα σημειώνεται και ο κύκλος c_μ με κέντρο το M και εφαπτόμενος του κ στο αντίστοιχο σημείο μ του M.



Σχήμα 12

Τελειώνοντας την παράγραφο ας σημειώσουμε πως δεδομένου του σημείου μ ενός διευθύνοντος κύκλου μιας κωνικής τομής, το αντίστοιχό του σημείο M επάνω στην κωνική προκύπτει εύκολα με τον τρόπο που αναφέραμε επανειλημμένα. Το αντίστροφο είναι ελαφρώς πιο σύνθετη υπόθεση: δεδομένου του σημείου M μιας κωνικής τομής, το αντίστοιχό του σημείο μ επάνω στον διευθύνοντα κύκλο κ της εστίας E είναι ένα από τα σημεία τομής του κ με τη γραμμή αντιστοίχισης του M, δηλαδή την ημιευθεία EM για την έλλειψη, την ημιευθεία ME για την υπερβολή και την ευθεία EM για την παραβολή ως εξής

- για την έλλειψη: το μ είναι το κοντινότερο στο M κοινό σημείο του κ με τη γ.α.
- για την υπερβολή: το μ είναι το κοντινότερο στο M κοινό σημείο του κ με τη γ.α. αναλόγως αν το M είναι εσωτερικό ή εξωτερικό του κ
- για την παραβολή: το μ είναι το (μοναδικό) κοινό σημείο του κ με τη γ.α.

§4 Παρατηρήσεις

- Αποδεικνύεται πως οι γεωμετρικοί τόποι του Ορισμού 1 είναι ακριβώς οι καμπύλες που προκύπτουν ως μη-τετριμμένες τομές ενός επιπέδου με ένα κώνο, δηλαδή οι μη-τετριμμένες κωνικές τομές. Ο νέος ορισμός δε χρειάζεται τη βοήθεια του χώρου, περιορίζεται πλήρως στο επίπεδο, και είναι πλήρως γεωμετρικός. Στις §7,8 θα δούμε άλλους δύο ορισμούς των κωνικών τομών με αποκλειστική χρήση του επιπέδου. Για τον αναγνώστη που ενδιαφέρεται ας σημειώσουμε πως υπάρχουν κι άλλοι ορισμοί τους!
- Στην περίπτωση των ελλείψεων, θα συμφωνήσουμε στο εξής να μην ασχοληθούμε ιδιαιτέρως με την ειδική τους περίπτωση όπου οι δύο εστίες ταυτίζονται, οπότε και παρουσιάζονται ως κύκλοι. Όμως καλό είναι να έχουμε στο μυαλό μας την ειδική αυτή περίπτωση κάθε φορά που παρουσιάζεται μια νέα ιδιότητα των ελλείψεων. Στην περίπτωση των υπερβολών και παραβολών οι εστίες τους φυσικά δεν ταυτίζονται ποτέ.
- Είναι σαφές από τον ορισμό της έννοιας του κύκλου στο προβολικό επίπεδο (ευκλείδειος κύκλος ή επεκτεταμένη ευθεία), πως οι διευθύνοντες κύκλοι των δύο ευκλείδειων εστιών οποιασδήποτε έλλειψης ή υπερβολής είναι συνηθισμένος ευκλείδειος κύκλος.
- Ο λόγος που στην περίπτωση της παραβολής ο διευθύνων κύκλος κ' της ευκλείδειας εστίας E' απαιτήθηκε να είναι η επ'άπειρον ευθεία του προβολικού επιπέδου είναι ο εξής: ο κ', ως ίσος με το διευθύνοντα κύκλο κ της μη ευκλείδειας ευθείας E, πρέπει να είναι μια ευθεία του προβολικού επιπέδου, οπότε αν οριζόταν για αυτή ακτίνα, θα έπρεπε να ήταν άπειρη. Δηλαδή θα έπρεπε να βρίσκεται σε άπειρη απόσταση από την E', και η μόνη ευθεία του προβολικού επιπέδου που θα μπορούσε να κατέχει την ιδιότητα αυτή (κατόπιν κατάλληλου ορισμού) είναι η επ'άπειρον ευθεία του.

  Έτσι, οι δύο διευθύνοντες κύκλοι μιας παραβολής είναι ευθείες του προβολικού επιπέδου, και έχουν ένα μοναδικό κοινό σημείο. Με άλλα λόγια είναι εφαπτόμενοι κύκλοι του προβολικού επιπέδου σύμφωνα με τον ορισμό που δώσαμε στην §1. Όταν η κωνική τομή δεν είναι παραβολή, τότε οι δύο διευθύνοντες κύκλοι τέμνονται σε δύο διακεκριμένα σημεία. Επίσης, στην περίπτωση της παραβολής ο διευθύνων κύκλος της ευκλείδειας εστίας περιέχει την επ'άπειρον εστία, ενώ ο διευθύνων κύκλος της επ'άπειρον εστίας δεν περιέχει την ευκλείδεια εστία. Όταν η κωνική τομή δεν είναι παραβολή, κανένας διευθύνων κύκλος δεν περιέχει καμιά εστία.
- Επίσης, η επ'άπειρον εστία E μιας παραβολής ανήκει στην ίδια την παραβολή. Πραγματικά: η ε.ε. ϵ που διέρχεται από την ευκλείδεια εστία E' και είναι παράλληλη στο διευθύνοντα κύκλο κ της E' έχει κέντρο επ'άπειρον σημείο σε διεύθυνση κάθετη στη κ, δηλαδή το E. Επίσης, η ϵ ως ε.ε., έχει μοναδικό κοινό σημείο με την ε.ε. ευθεία κ, δηλαδή τον διευθύνων κύκλο της E. Οπότε οι κύκλοι ϵ, διευθύνων κύκλος κ της E του προβολικού επιπέδου εφάπτονται. Συνεπώς το E πληροί την ιδιότητα των σημείων της παραβολής, και άρα ανήκει σε αυτή.

  Όταν η κωνική τομή όμως δεν είναι παραβολή, οι εστίες της δεν ανήκουν στην κ.τ.
- Για μια έλλειψη, οι κύκλοι με κέντρα τα σημεία της που εφάπτονται στον διευθύνοντα κύκλο (οποιονδήποτε από τους δύο), εφάπτονται σε αυτόν εσωτερικά. Στην περίπτωση της υπερβολής, οι αντίστοιχοι κύκλοι με κέντρα τα σημεία της εφάπτονται σε έναν διευθύνοντα κύκλο εξωτερικά και στον άλλον εσωτερικά. Για την

παραβολή, καθώς οι διευθύνοντες κύκλοι είναι ευθείες, οι επαφές τους με τους κύκλους με κέντρα σε σημεία της παραβολής μπορούν να θεωρηθούν ταυτοχρόνως εσωτερικές και εξωτερικές.

- Ο λόγος που στην παραβολή η μία εστία της είναι επ'άπειρον σημείο είναι πως ο διευθύνοντας κύκλος της θεωρείται επεκτεταμένη ευθεία του προβολικού επιπέδου.
- Για την περίπτωση της παραβολής θα μπορούσαμε να απαιτήσουμε στον ορισμό μας πως δεν υπάρχει παρά μόνο η ευκλείδεια εστία της. Τότε θα έπρεπε να ονομάσουμε την ευθεία κ με ένα άλλο όνομα και να τη χρησιμοποιήσουμε για να ορίσουμε την παραβολή με μικρές αλλαγές του ορισμού μας. Πραγματικά η ευθεία αυτή ονομάζεται διευθετούσα της E', και στα περισσότερα συγγράμματα η παραβολή ορίζεται από τη μοναδική (ευκλείδεια) εστία της και τη διευθετούσα της. Όμως με τον τρόπο αυτό θα σπάζαμε πλήρως την όμορφη ενιαία αντιμετώπιση των τριών ειδών μη τετριμμένων κωνικών τομών. Όπως θα έχουμε την ευκαιρία να διαπιστώσουμε στη μελέτη των ιδιοτήτων των κωνικών τομών μετά τους ορισμούς, είναι πολύ εξυπηρετική η σύμβαση που ήδη κάναμε, δηλαδή να θεωρήσουμε δεύτερη εστία και για την παραβολή, κι ας είναι αυτή ένα επ'άπειρον σημείο. Μάλιστα έχουμε καλούς λόγους να επεκτείνουμε και για την παραβολή, εκτός από την έννοια της δεύτερης εστίας, κι άλλες έννοιες τις οποίες θα ορίσουμε πιο κάτω εύκολα για ελλείψεις και υπερβολές. Αυτό φυσικά θα γίνει χρησιμοποιώντας ολόκληρο το προβολικό επίπεδο στη θέση του ευκλείδειου. Αναπόφευκτα, για ορισμένες έννοιες την επέκταση αυτή την πραγματοποιούμε μονάχα τυπικά, καθώς οι μετρικές ιδιότητες του ευκλείδειου επιπέδου δεν επεκτείνονται πλήρως σε ολόκληρο το περιβάλλον προβολικό.

§5 Άλλα σημαντικά στοιχεία των κωνικών τομών

Εκτός των εστιών, των διεθυνόντων κύκλων και του άξονα, υπάρχουν κι άλλα στοιχεία των κωνικών τομών τα οποία μας ενδιαφέρουν συχνά. Αυτά ορίζονται με κοινό τρόπο για όλα τα είδη κ.τ., αλλά για να το πετύχουμε αυτό συχνά χρειάζεται να προσφύγουμε σε ολόκληρο το προβολικό επίπεδο, ιδίως στην περίπτωση της παραβολής. Ακολουθούν οι ορισμοί των στοιχείων αυτών, ενώ οι απαραίτητες τροποποιήσεις για την περίπτωση της παραβολής αναφέρονται αμέσως μετά στις παρατηρήσεις.

Ορισμός 2. Για μια κωνική τομή ψ με εστίες E',E ονομάζουμε:

- ε**στιακό μήκος** = $2\gamma = E'E$.
- **κέντρο** O = μέσον του $E'E$.
- **κορυφές** A',A = κοινά σημεία της ψ με τον άξονα.
- **πρωτεύων άξονας** π.α. **=** τμήμα $A'A$.
- **μήκος πρωτεύοντος άξονα** = μήκος $A'A = 2\alpha$.
- **πρωτεύων κύκλος** $(\pi\kappa)$ της ψ = κύκλος κέντρου O διερχόμενος από τις κορυφές A',A (δηλαδή κύκλος διαμέτρου $A'A$.
- **μήκος δευτερεύοντος άξονα** = 2β, όπου β = κάθετη πλευρά στο ορθογώνιο τρίγωνο με υποτείνουσα το μεγαλύτερο από τα α,γ και μια κάθετη πλευρά το μικρότερο από αυτά.
- **δευτερεύων άξονας** δ.α. = τμήμα $B'B$, όπου B',B σημεία συμμετρικά ως προς τον άξονα τα οποία ανήκουν στην κάθετη προς τον άξονα ευθεία τη διερχόμενη από το κέντρο O, και $B'B = 2\beta$.
- **δευτερεύων κύκλος** $(\delta\kappa)$ της ψ = κύκλος διαμέτρου $B'B$.
- **διευθετούσες** δ',δ των εστιών E',E = ευθείες κάθετες στον άξονα στα Δ',Δ ώστε $\frac{A'E'}{A'\Delta'} = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{AE}{A\Delta}$ και A',A στο εσωτερικό των τμημάτων $E'\Delta',E\Delta$ αντιστοίχως.
- **εκκεντρότητα** = $\frac{\gamma}{\alpha}$.

Ειδικά για την υπερβολή, υπάρχουν δυο ιδιαίτερες ευθείες που ορίζονται με πολλούς τρόπους και τις οποίες ονομάζουμε ασύμπτωτες.

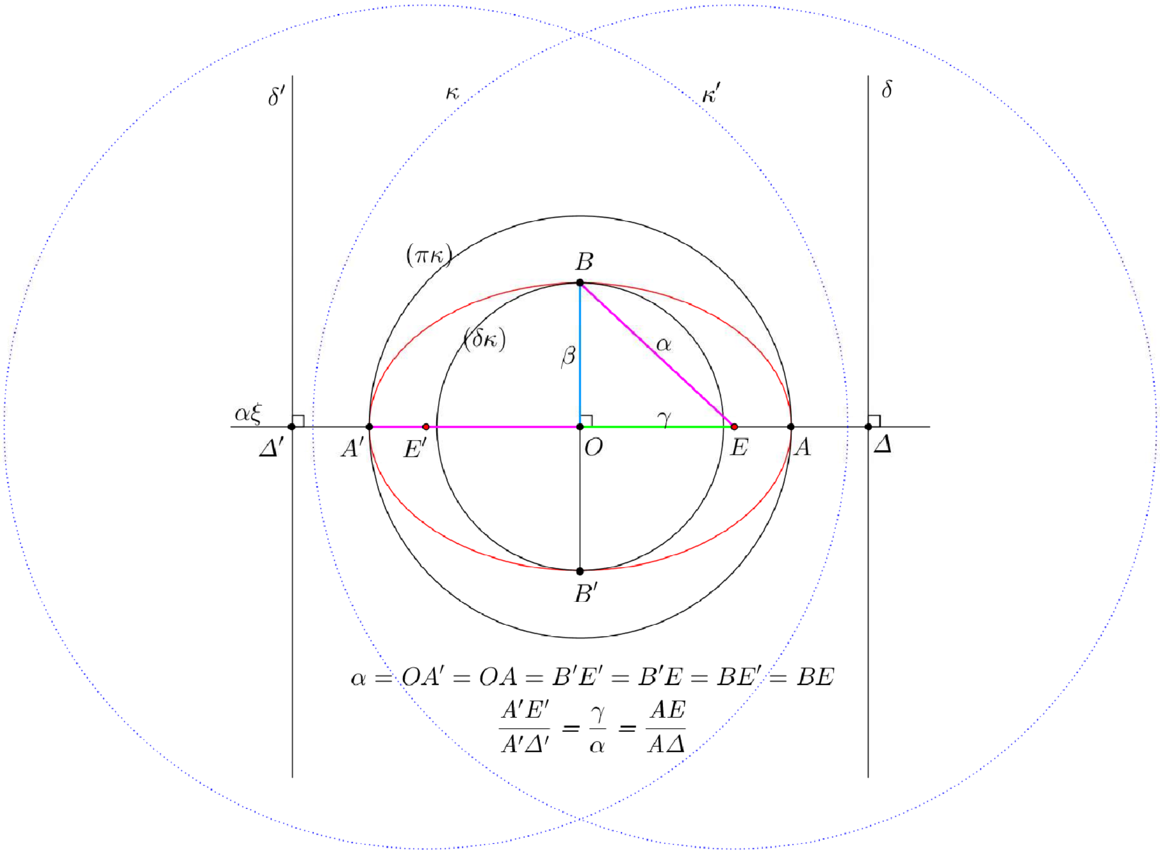
- **ασύμπτωτες υπερβολής** = δύο ευθείες διερχόμενες από το κέντρο οι οποίες δεν έχουν άλλα κοινά σημεία με την υπερβολή εντός του ευκλείδειου επιπέδου, αλλά που διέρχονται από τα επ'άπειρον σημεία της.
- **εστιακή ακτίνα** ονομάζουμε κάθε ευθεία που διέρχεται από κάποια εστία. Για τυχαίο σημείο M διαφορετικό των εστιών, ονομάζουμε εστιακές ακτίνες του M τις δύο ευθείες $E'M, EM$.

Ανακαλώντας την αντιστοιχία σημείων μιας υπερβολής με αυτά ενός διευθύνοντος κύκλου της, έστω δ της εστίας E που αναπτύξαμε προηγουμένως, συμπεραίνουμε πως ασύμπτωτες της υπερβολής είναι ευθείες που διέρχονται από τα επ'άπειρον σημεία των διευθύνσεων των ευθειών ET_1, ET_2, όπου T_1, T_2 τα σημεία επαφής του δ με τις εφαπτόμενες από την εστία E'. Στην πραγματικότητα, μπορούμε να καθορίσουμε ακριβώς τη θέση των ασυμπτώτων παρατηρώντας (δείξτε το) πως οφείλουν να διέρχονται από το κέντρο της υπερβολής. Ως γωνία των ασυμπτώτων ονομάζουμε την κυρτή γωνία που σχηματίζουν και που περιέχει την υπερβολή.

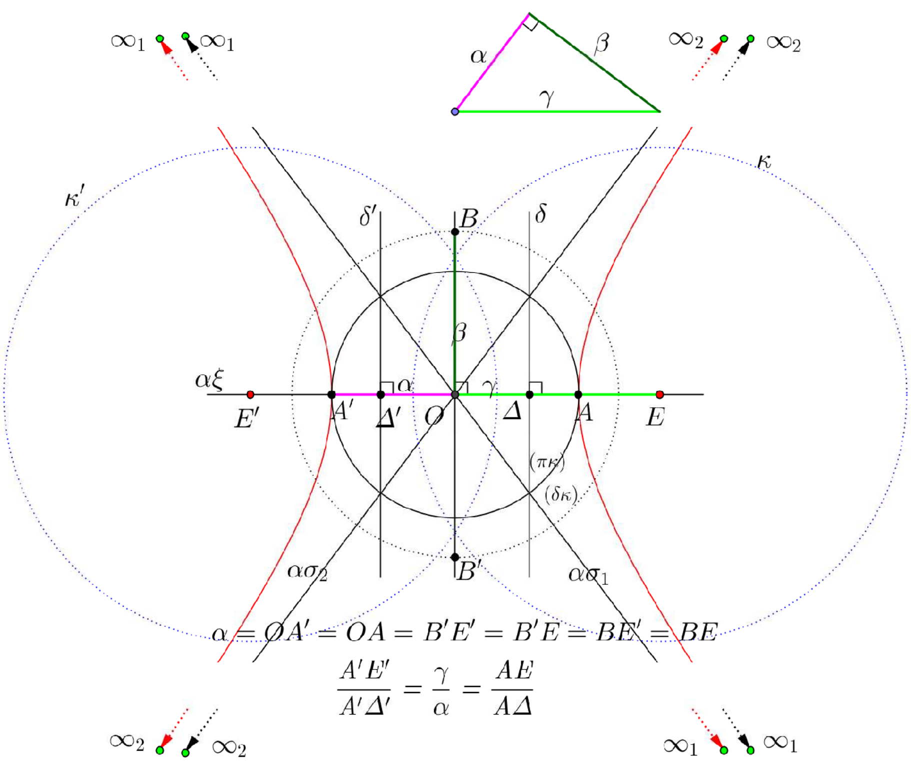
Αποδείξτε όσες μπορείτε από τις ακόλουθες παρατηρήσεις ως Ασκήσεις:
- 2α = ακτίνα διευθύνοντα κύκλου.
- Κέντρο O = μέσον του $E'E$ = μέσον του $A'A$ = μέσον του $\Delta'\Delta$ (όταν $\alpha, \gamma \neq \infty$).
- Επάνω στην ευθεία του κύριου άξονα, η σειρά των κορυφών, των εστιών, του κέντρου και των σημείων των διευθετουσών είναι αυτή των Σχημάτων 13-15.
- Είναι $\Delta'O = \Delta O = \dfrac{\alpha^2}{\gamma}$.
- Όταν κ.τ. = έλλειψη, τότε τα B', B ανήκουν στην κ.τ. και τα ονομάζουμε και **δευτερεύουσες κορυφές** της έλλειψης. Είναι $\alpha > \gamma, \beta = \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2}$ και $\alpha = OA' = OA = B'E' = B'E = BE' = BE$.
- Όταν κ.τ. = υπερβολή, τότε τα B', B δεν ανήκουν στην κ.τ. Είναι $\alpha < \gamma, \beta = \sqrt{\gamma^2 - \alpha^2}$. Όλες οι περιπτώσεις $\alpha < \beta,\ \alpha > \beta,\ \alpha = \beta$ είναι δυνατό να συμβούν. Στην τελευταία περίπτωση η υπερβολή ονομάζεται **ισοσκελής**.
- Όταν κ.τ. = παραβολή με E' την ευκλείδεια εστία και κ τη δοσμένη ευθεία που θεωρείται διευθύνων κύκλος της «άλλης εστίας», τότε όπως αναφέραμε στις παρατηρήσεις του Ορισμού 1, είναι βολικό να ορίσουμε τουλάχιστον την «άλλη εστία», έστω E. Είδαμε εκεί πως η E οφείλει να είναι επ'άπειρον σημείο και να βρίσκεται επάνω στον άξονα ο οποίος ορίζεται ως η ευθεία από το E' η κάθετη στην κ. Επιπλέον, η κορυφή A' ορίζεται χωρίς πρόβλημα ως το ευκλείδειο σημείο τομής του άξονα με την παραβολή. Ο διευθύνων κύκλος κ της επ'άπειρον εστίας ορίζεται και ως η διευθετούσα δ' της ευκλείδειας εστίας E'. Ένας καλός λόγος για τον τελευταίο ορισμό είναι πως αυτή η ευθεία κ είναι κάθετη στον άξονα στο σημείο Δ' που βρίσκεται στη «σωστή» απόσταση από το A', δηλαδή είναι $\dfrac{A'E'}{A'\Delta'}(=1)$ με A' στο εσωτερικό του τμήματος $E'\Delta'$ όπως και στην περίπτωση της έλλειψης και της υπερβολής.
  Τα στοιχεία αυτά είναι συνήθως αρκετά για τη μελέτη της παραβολής. Αν όμως επιμείνουμε σε πλήρη ορισμό και των υπολοίπων, τότε πρέπει να το κάνουμε ως εξής:
  A = το επ'άπειρον σημείο του άξονα, οπότε $A = E = O$, $\gamma = \infty$, $\alpha = \infty$. Ο πρωτεύων κύκλος είναι ο κύκλος κέντρου O ο οποίος διέρχεται μόνο από την ευκλείδεια κορυφή A, δηλαδή η κάθετη ευθεία στον άξονα από στην κορυφή A, η οποία αποτελεί και την εφαπτόμενη στην παραβολή στην κορυφή της A (δες ορισμό των εφαπτομένων πιο κάτω). Επίσης, $\beta = 0$, $B' = B \equiv$ επ'άπειρον σημείο της διεύθυνσης της κάθετης στον άξονα, δευτερεύων κύκλος = τετριμμένος = το σημείο $B' = B$. Τέλος, όπως είδαμε διευθετούσα δ' = διευθύνων κύκλος κ. Οφείλουμε να ορίσουμε και διευθετούσα δ = διευθύνων κύκλος κ' = επ'άπειρον ευθεία, οπότε $\Delta = O = E = A = \alpha\xi_\infty$.

Οι κωνικές τομές παρουσιάζουν και αρκετές ενδιαφέρουσες συμμετρίες:
- Είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία του πρωτεύων άξονά τους.
- Είναι συμμετρικές ως προς τις ευκλείδειες εστίες τους.

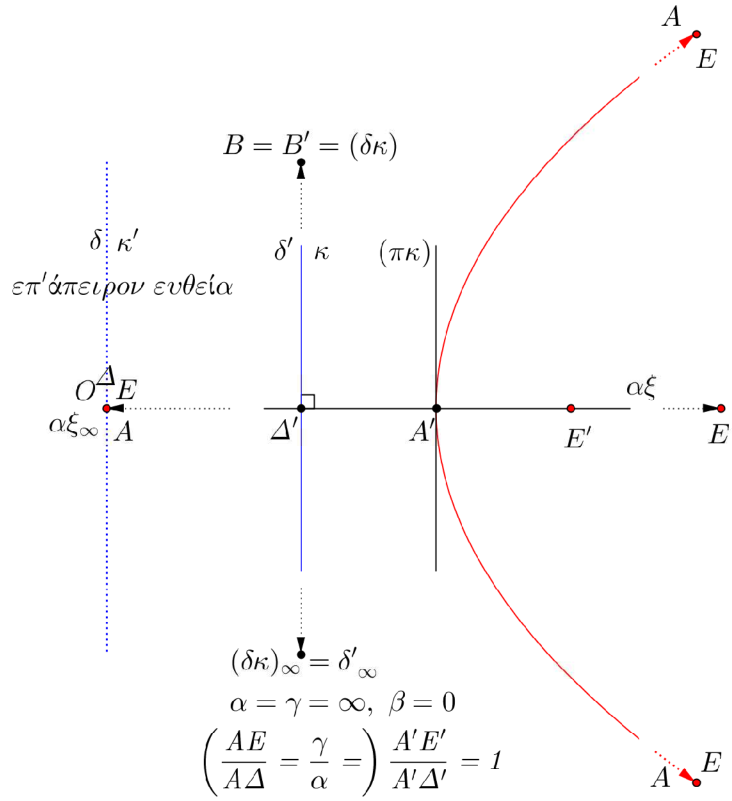
- Είναι συμμετρικές ως προς το κέντρο τους και την ευθεία του δευτερεύοντα άξονά τους (όταν αυτά υπάρχουν στο ευκλείδειο επίπεδο: δηλαδή εδώ μιλάμε για τις ελλείψεις και τις υπερβολές).
- Για την υπερβολή, οι ασύμπτωτές της είναι συμμετρικές ως προς το κέντρο και τους δύο άξονες.



Σχήμα 13



Σχήμα 14



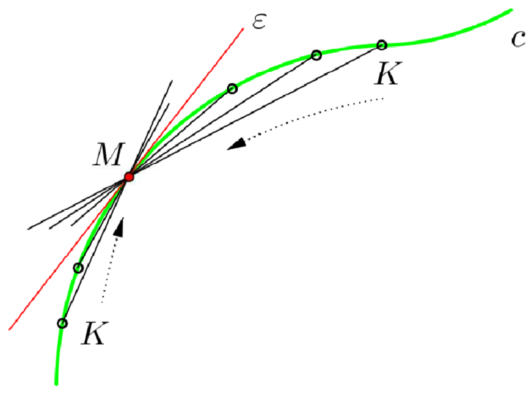
Σχήμα 15

§6 Η έννοια της εφαπτόμενης ευθείας

Στην παράγραφο αυτή θα εξετάσουμε την πολύ χρήσιμη έννοια της εφαπτόμενης ευθείας σε κωνική τομή. Για μια οποιαδήποτε καμπύλη γενικότερα, μια από τις πρώτες διαισθητικές σκέψεις είναι πως θα θέλαμε να ονομάσουμε εφαπτόμενη της καμπύλης σε δοσμένο σημείο της M, εκείνη την ευθεία που διέρχεται από το M και που δεν έχει κανένα άλλο κοινό σημείο με την καμπύλη κοντά στο M. Δυστυχώς έτσι δεν ορίζεται πάντοτε μοναδική εφαπτόμενη (π.χ. κάθε τέμνουσα κύκλου από δοσμένο σημείο θα έπρεπε να θεωρείται εφαπτόμενή του), ενώ κάποιες φορές δεν ορίζεται καμία εφαπτόμενη για καμπύλες που μάλλον θα έπρεπε να έχουν (π.χ. για τα ευθύγραμμα τμήματα ή τις καμπύλες με σημεία αναστροφής των κοίλων τους). Για αυτούς και για άλλους πολλούς λόγους ίσως ο καλύτερος ορισμός των εφαπτομένων δίνεται από την Ανάλυση:

Ορισμός 3. Εφαπτόμενη ευθεία ε μιας καμπύλης c στο σημείο της M ονομάζουμε την οριακή θέση της τέμνουσας ευθείας MK για σημεία K της c, καθώς το K πλησιάζει το M (όταν αυτή υπάρχει).

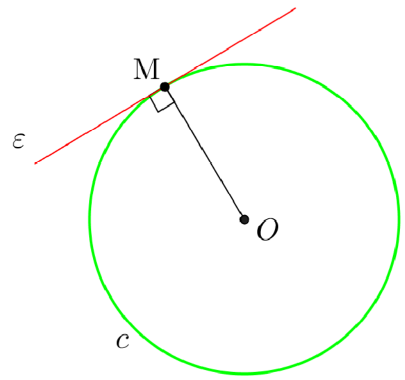
Η έννοια της οριακότητας στον παραπάνω Ορισμό έχει το συνηθισμένο αυστηρό νόημα. Π.χ. σημαίνει πως οι ευθείες MK δημιουργούν με την ε όσο μικρή γωνία επιθυμούμε όταν περιορίζουμε τα σημεία K επί της καμπύλης c αρκούντος κοντά στο M.



Σχήμα 16

Το πλεονέκτημα του παραπάνω Ορισμού είναι πως ενσωματώνει τη διαισθητική μας αντίληψη της εφαπτομένης ως μιας ιδιαίτερης ευθείας που διέρχεται από το δοσμένο σημείο της καμπύλης και που δεν διέρχεται από κανένα άλλο κοντινό του σημείο επάνω στην καμπύλη.

Ιδιαιτέρως για τις κωνικές τομές, υπάρχουν και πολλοί άλλοι ισοδύναμοι και συνάμα πιο γεωμετρικοί ορισμοί για τις εφαπτόμενες τους. Για παράδειγμα, όταν η κωνική τομή είναι ένας κύκλος στο ευκλείδειο επίπεδο κέντρου O, μπορούμε ισοδυνάμως να ορίσουμε την ε ως εφαπτόμενη του κύκλου στο M, ακριβώς όταν η ε είναι κάθετη στην ευθεία OM.



Σχήμα 17

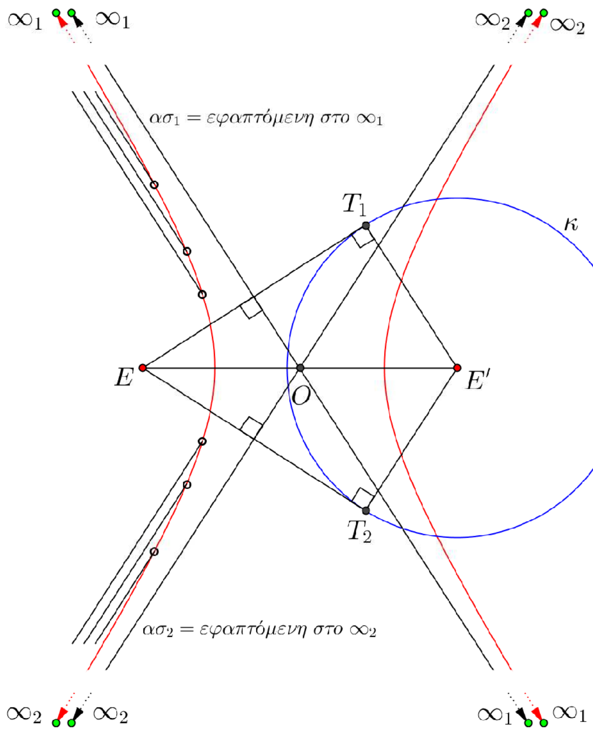
Ένας καθαρά γεωμετρικός ορισμός για τις εφαπτόμενες που αφορά όλες τις κωνικές τομές είναι ο εξής:

Ορισμός 4. Για μια κωνική τομή με εστίες E', E και διευθύνοντα κύκλο κ για την E, ονομάζουμε **εφαπτόμενη ευθεία** της κωνικής στο σημείο M, τη μεσοκάθετη του τμήματος $E'\mu$, όπου μ το αντίστοιχο του M στον διευθύνοντα κύκλο κ της εστίας E (οι διακεκομμένες γραμμές στα Σχήματα 8,9,12 πιο πάνω).

Παρότι δεν θα δώσουμε όλες τις λεπτομέρειες της ισοδυναμίας του γεωμετρικού ορισμού με αυτόν της Ανάλυσης, ας παρατηρήσουμε πως στην περίπτωση π.χ. που η κωνική τομή είναι μια έλλειψη, για οποιοδήποτε άλλο σημείο K της μεσοκάθετης ε του τμήματος $E'\mu$ είναι $KE + KE' = KE + K\mu > E\mu = 2\alpha$, οπότε (σύμφωνα τον ισοδύναμο ορισμό της έλλειψης στην §8) το K δεν είναι σημείο της έλλειψης. Δηλαδή η ευθεία ε έχει μοναδικό κοινό σημείο με την έλλειψη, οπότε αποτελεί καλό υποψήφιο για να είναι εφαπτόμενή της. Δεν είναι δύσκολο να ελέγξουμε πως για όλες τις υπόλοιπες ευθείες από το M υπάρχουν σημεία της έλλειψης αυθαιρέτως κοντά του επάνω τους, γεγονός που αυτομάτως καθιστά την ε ως εφαπτόμενη της έλλειψης στο M. Παρόμοιο σκεπτικό εφαρμόζεται και στις υπόλοιπες κωνικές τομές.

Φυσικά τις εφαπτόμενες ευθείες των κωνικών τομών θέλουμε να τις θεωρούμε στο προβολικό επίπεδο αντί του ευκλείδειου, οπότε να μιλάμε και για εφαπτόμενες στα τυχόν επ'άπειρον σημεία τους. Η επέκταση του ορισμού της Ανάλυσης πραγματοποιείται αφού πρώτα μετατρέψουμε την «οριακή θέση» σε έννοια που έχει νόημα στο προβολικό επίπεδο. Καθώς δεν πρόκειται να ασχοληθούμε με όρια, ας περιοριστούμε στην επέκταση του γεωμετρικού ορισμού με τον εξής, μάλλον ευνόητο, τρόπο:

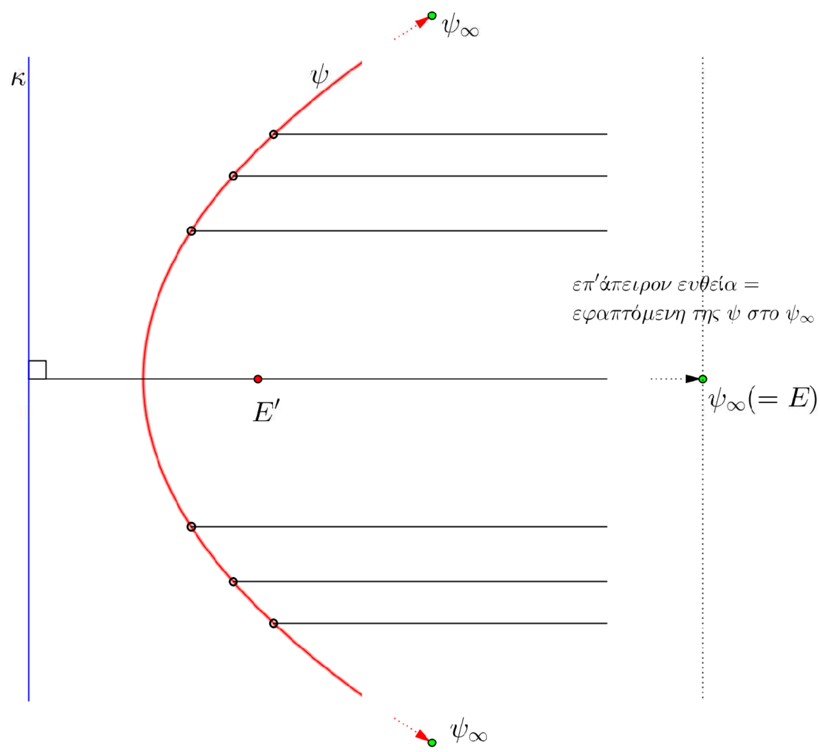
Εφαπτόμενες της υπερβολής στα επ'άπειρον σημεία της, είναι οι κάθετες ευθείες από το κέντρο O προς τις εφαπτόμενες ενός οποιουδήποτε διευθύνοντος κύκλου οι οποίες διέρχονται από την άλλη εστία (Σχήμα 18).



Σχήμα 18

Δηλαδή οι εφαπτόμενες στα δύο επ΄άπειρον σημεία της υπερβολής είναι οι δύο ασύμπτωτές της. Πρόκειται ακριβώς για τις οριακές θέσεις της ακτίνας OM καθώς το σημείο M της υπερβολής απομακρύνεται προς τα επ'άπειρον σημεία της. Έτσι οι εφαπτόμενες στα επ'άπειρον σημεία βρίσκονται στη «σωστή» θέση που απαιτεί π.χ. το Θεώρημα 1 (ιδιότητα της ανάκλασης) που θα συναντήσουμε πιο κάτω.

Για την παραβολή, εφαπτόμενη ευθεία στο μοναδικό επ'άπειρον σημείο της μπορούμε να θεωρήσουμε την επ'άπειρον ευθεία (Σχήμα 19).



Σχήμα 19

Ακολουθούν (χωρίς απόδειξη) μερικές χρήσιμες ιδιότητες των εφαπτόμενων ευθειών μιας κωνικής τομής ψ θεωρούμενης εντός του ευκλείδειου επιπέδου (Σχήματα 20-22):

(1) Υπάρχει μοναδική εφαπτόμενη της ψ διερχόμενη από τυχόν δοσμένο σημείο της.

(2) Κάθε εφαπτόμενη της ψ έχει μοναδικό κοινό σημείο μαζί της.

Το αντίστροφο δεν ισχύει! Όμως:

(3) Μια ευθεία είναι εφαπτόμενη μιας έλλειψης ψ αν και μόνο αν έχει μοναδικό κοινό σημείο μαζί της.

(4) Μια ευθεία είναι εφαπτόμενη μιας παραβολής ψ αν και μόνο αν έχει μοναδικό κοινό σημείο μαζί της και αφήνει ολόκληρη την ψ στο ίδιο ημιεπίπεδο.

(5) Μια ευθεία είναι εφαπτόμενη μιας υπερβολής ψ αν και μόνο αν έχει μοναδικό κοινό σημείο μαζί της και αφήνει έναν ολόκληρο κλάδο της ψ στο ίδιο ημιεπίπεδο.

Το πλήθος των εφαπτομένων σε μια κωνική τομή ψ που διέρχονται από δοθέν σημείο M εκτός της ψ εξαρτάται από τη θέση του M. Συνεπώς είναι καλό να γνωρίζουμε ποιες είναι οι δυνατές θέσεις του M σε σχέση με την ψ (Σχήματα 20-22):

- Η έλλειψη ως κλειστή καμπύλη χωρίζει το ευκλείδειο επίπεδο σε τρία συνεκτικά και ξένα μεταξύ τους μέρη: την ίδια την καμπύλη, το εσωτερικό της, και το εξωτερικό της. Το εσωτερικό της $(E\sigma)_\psi$ είναι φραγμένο χωρίο, ενώ το εξωτερικό $(E\xi)_\psi$ της μη-φραγμένο.
- Η παραβολή (ως μη φραγμένη στο ευκλείδειο επίπεδο, αλλά κλειστή καμπύλη στο προβολικό) χωρίζει το ευκλείδειο επίπεδο σε τρία συνεκτικά μη-φραγμένα και ξένα μεταξύ τους μέρη: την ίδια την καμπύλη, το κυρτό της χωνί $(\kappa\chi)_\psi$ και το μη κυρτό της χωνί $(\mu\kappa\chi)_\psi$.
- Η υπερβολή (ως καμπύλη με δύο μη φραγμένους κλάδους φραγμένη στο ευκλείδειο επίπεδο, αλλά κλειστή καμπύλη στο προβολικό επίπεδο με δύο επιπλέον σημεία) χωρίζει το ευκλείδειο επίπεδο σε τέσσερα συνεκτικά μη-φραγμένα και ξένα μεταξύ τους μέρη: την ίδια την καμπύλη, τα κυρτά χωνιά $(E\sigma)_{1\psi},(E\sigma)_{2\psi}$ των δύο κλάδων της και το μη κυρτό χωνί $(E\xi)_\psi$ μεταξύ των δύο κάδων της.

Σχετικά με το πλήθος των εφαπτόμενων της ψ θεωρούμενης εντός του ευκλείδειου επιπέδου, οι οποίες διέρχονται από το σημείο M ισχύουν τα εξής:

(6) - Αν ψ έλλειψη και $M \in \psi$ τότε υπάρχει μοναδική εφαπτόμενη.
$M \in (E\sigma)_\psi$ τότε δεν υπάρχει εφαπτόμενη.
$M \in (E\xi)_\psi$ τότε υπάρχουν δύο διακεκριμένες εφαπτόμενες.

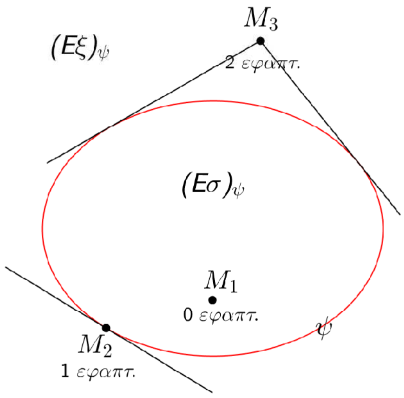
- Αν ψ παραβολή και $M \in \psi$ τότε υπάρχει μοναδική εφαπτόμενη.
$M \in (E\sigma)_\psi$ τότε δεν υπάρχει εφαπτόμενη.
$M \in (E\xi)_\psi$ τότε υπάρχουν δύο διακεκριμένες εφαπτόμενες.

- Αν ψ υπερβολή και $M \in \psi$ τότε υπάρχει μοναδική εφαπτόμενη.
$M \in (E\sigma)_{1\psi} \cup (E\sigma)_{2\psi}$ τότε δεν υπάρχει εφαπτόμενη.
$M \in (E\xi)_\psi$ τότε υπάρχουν δύο διακεκριμένες εφαπτόμενες.

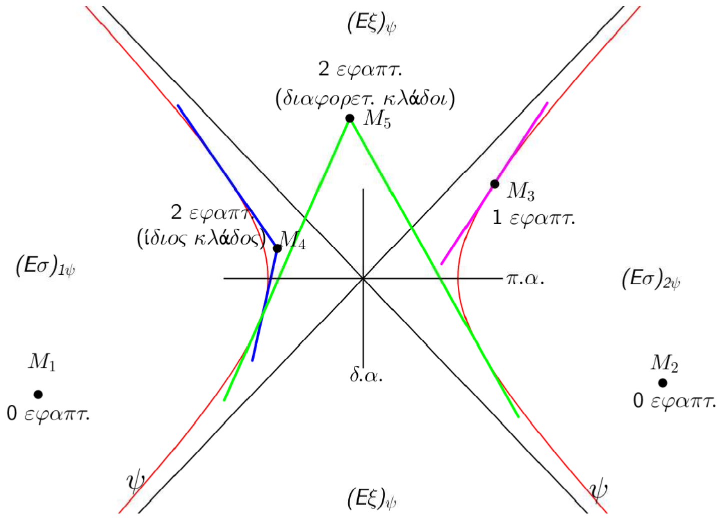
Αν ονομάσουμε $(K)_{1\psi}$ την ένωση των εσωτερικών των γωνιών μεταξύ των ασυμπτώτων $\alpha\sigma_1,\alpha\sigma_2$ που περιέχουν τον δευτερεύοντα άξονα, ομοίως $(K)_{2\psi}$ την ένωση των εσωτερικών των γωνιών μεταξύ των $\alpha\sigma_1,\alpha\sigma_2$ που περιέχουν τον πρωτεύων άξονα, τότε είναι $(K)_{1\psi} \subset (E\xi)_\psi$ και $(E\sigma)_{1\psi} \cup (E\sigma)_{2\psi} \subset (K)_{2\psi}$ και σχετικά με το πλήθος των εφαπτομένων που μας απασχολεί εδώ είναι:

Αν $M \in (K)_{1\psi}$ τότε οι δύο εφαπτόμενες από το M εφάπτονται σε διαφορετικούς κλάδους.

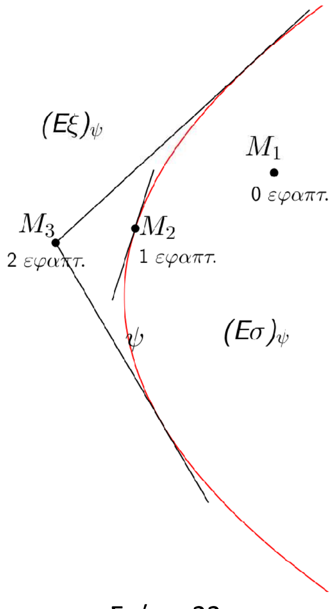
Αν $M \in (K)_{2\psi} - ((E\xi)_{\psi} \cup \psi)$ τότε οι δύο εφαπτόμενες από το M εφάπτονται στον ίδιο κλάδο.



Σχήμα 20



Σχήμα 21



Σχήμα 22

§7 Η σημασία των διευθετουσών και της εκκεντρότητας – νέος ορισμός των κ.τ.

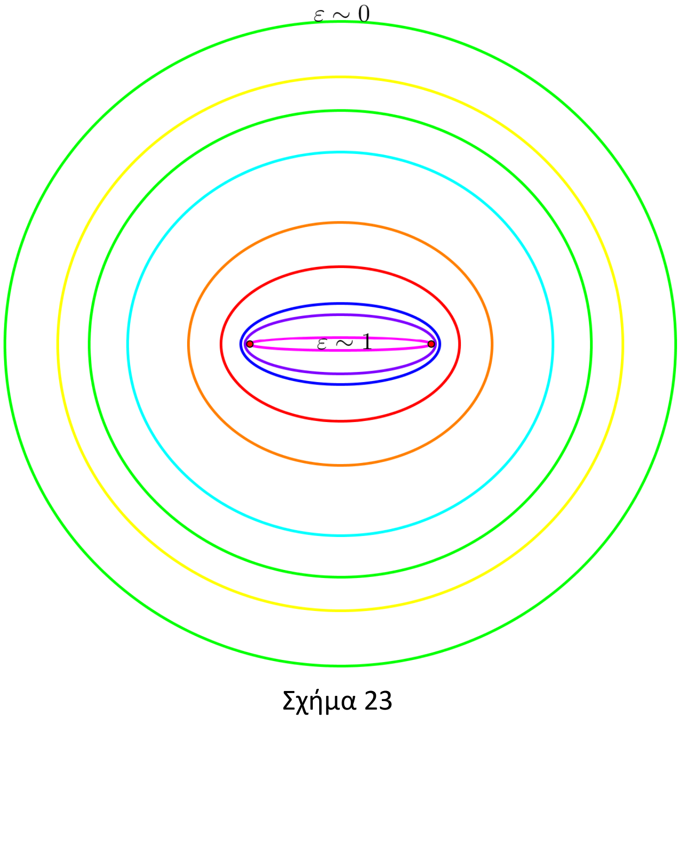
Η διευθετούσα της ευκλείδειας εστίας μιας παραβολής ταυτίζεται με τον διευθύνων κύκλο της μη ευκλείδειας εστίας, οπότε σύμφωνα με τον Ορισμό 1 της παραβολής, αυτή η κωνική τομή ορίζεται ουσιαστικά από την ευκλείδεια εστία της και την αντίστοιχη διευθετούσα της ως το σύνολο των σημείων που ισαπέχουν από τα δύο αυτά στοιχεία (εστία και διευθετούσα). Εναλλακτικά, μπορούμε να πούμε πως παραβολή με δοσμένη εστία E' και διευθετούσα δ' είναι το σύνολο των σημείων M για τα οποία $\frac{d(M,E)}{d(M,\varepsilon)}=1$.

Την παρατήρηση αυτή μπορούμε να την επεκτείνουμε και στην έλλειψη και την υπερβολή για έναν κοινό ορισμό των τριών κωνικών τομών (αποδείξτε τον ακόλουθο ισχυρισμό):

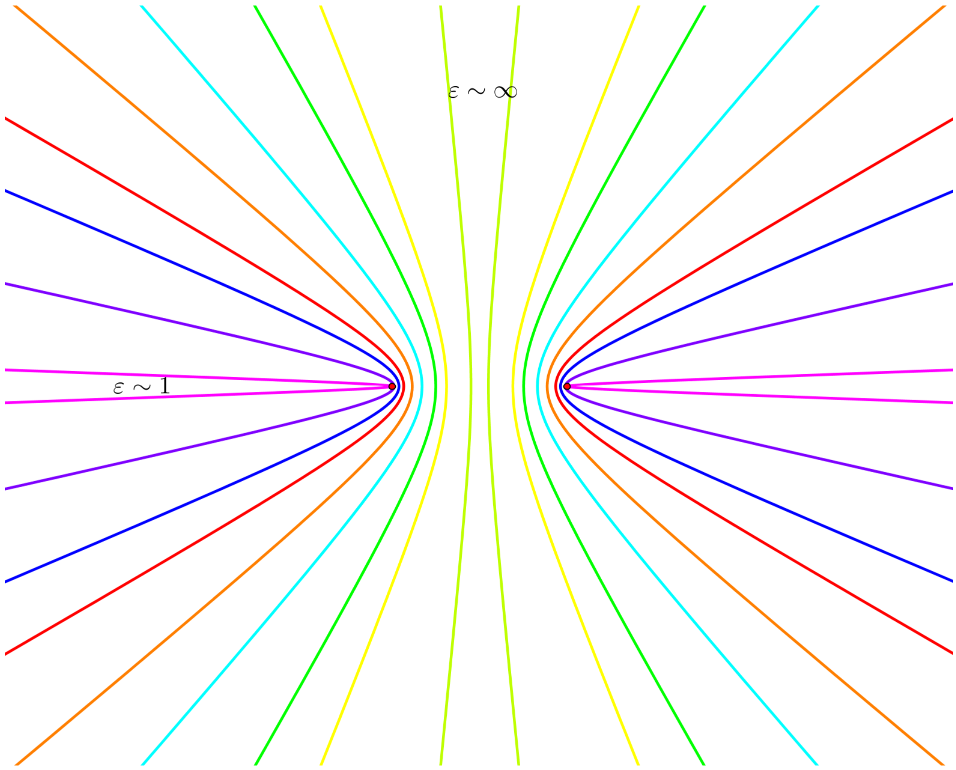
Για δοσμένη εστία E και ευθεία (διευθετούσα) δ που δε διέρχεται από το E, η έλλειψη, η παραβολή και η υπερβολή χαρακτηρίζονται ως το σύνολο των σημείων M του επιπέδου γα τα οποία $\frac{d(M,E)}{d(M,\varepsilon)}=\varepsilon$, όπου ε σταθερά, και είτε $0\le\varepsilon<1$, είτε $\varepsilon=1$, είτε $1<\varepsilon$ αντιστοίχως.

Καθώς η ιδιότητα αυτή χαρακτηρίζει τα τρία είδη (μη-τετριμμένων) κωνικών τομών, μπορούμε να τη χρησιμοποιήσουμε ως νέο ορισμό τους.

Η εκκεντρότητα ε που εμφανίζεται σε αυτή τη χαρακτηριστική ιδιότητα των κωνικών τομών, χρησιμεύει για την άντληση περισσότερων πληροφοριών σχετικά με το σχήμα τους. Συγκεκριμένα, χρησιμεύει για τη διαπίστωση της «στρογγυλότητάς» τους: Για μια έλλειψη, όταν $\varepsilon=0$ πρόκειται για κύκλο, και καθώς το ε μεγαλώνει, το σχήμα της έλλειψης γίνεται συνεχώς και πιο «αιχμηρό»-«ελλειπτικό» με αποτέλεσμα όταν το ε τείνει στο 1, η έλλειψη να τείνει να ταυτιστεί με το ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ των εστιών της. Για την παραβολή η «αιχμηρότητά» της δεν μπορεί φυσικά να ελεγχθεί από την εκκεντρότητα ε αφού αυτή είναι πάντοτε σταθερή, ίση με 1. Όμως για την υπερβολή, καθώς το ε μικραίνει τείνοντας στο 1, η υπερβολή γίνεται όλο και πιο αιχμηρή, τείνοντας στην ευθεία των εστιών της πλην του τμήματος μεταξύ τους. Όταν το ε της υπερβολής μεγαλώνει τείνοντας στο ∞, το σχήμα της γίνεται όλο και πιο «αμβλύ», τείνοντας να καταλάβει δύο φορές τη μεσοκάθετη ευθεία του μικρού άξονά της (μία φορά ο κάθε κλάδος της). Στα Σχήματα 23-24 μπορείτε να διαπιστώσετε οπτικά την αλήθεια των προηγούμενων για δύο συλλογές ελλείψεων και υπερβολών με τα σχήματα κάθε συλλογής **ομοεστιακά**. Μάλιστα θεωρώντας δύο τέτοιες ομοεστιακές συλλογές, μπορείτε και να επιβεβαιώσετε και αυστηρώς πως καθώς η εκκεντρότητα τείνει να πάρει τις οριακές τιμές της σε κάθε περίπτωση, το αντίστοιχο σχήμα της κωνικής τείνει να γίνει αυτό που περιγράψαμε πιο πάνω. Με την ευκαιρία, ποιός θα ήταν κατά τη γνώμη σας ένας καλός και αυστηρώς ορθός ορισμός της «αιχμηρότητας» μιας κωνικής τομής;



Σχήμα 23



Σχήμα 24

Άσκηση 1. Για δοσμένο σημείο E και ευθεία δ που δε διέρχεται από το E, κατασκευάστε μια οικογένεια κωνικών τομών με το E ως εστία και την δ ως διευθετούσα της. Φροντίστε ώστε η οικογένεια αυτή να περιλαμβάνει κωνικές τομές και των τριών ειδών. Παρατηρήστε πως αλλάζει η καμπυλότητα των καμπυλών της οικογένειας με την αλλαγή της εκκεντρότητας τους. Αποδείξτε πως από κάθε σημείο του επιπέδου διέρχεται μια καμπύλη της οικογένειας $\mathcal{A}$ των κωνικών τομών με το E ως εστία και την δ ως διευθετούσα της που περιλαμβάνει όλες τις δυνατές εκκεντρότητες. Δείξτε πως διακεκριμένα μέλη της $\mathcal{A}$ (δηλαδή δύο καμπύλες που δεν ταυτίζονται), δεν έχουν κανένα κοινό σημείο. Δηλαδή τα μέλη της $\mathcal{A}$ καλύπτουν πλήρως το επίπεδο χωρίς επικαλύψεις.

§8 Ένας ακόμη ορισμός των κ.τ

Από τον Ορισμό 1 των κωνικών τομών, προκύπτει αμέσως ένας ακόμη ισοδύναμος ορισμός τους, που είναι πολύ χρήσιμος στην Αναλυτική Γεωμετρία:

Ορισμός 5. Έλλειψη ονομάζουμε το σύνολο των σημείων του επιπέδου που έχουν δοσμένο άθροισμα αποστάσεων από δύο δοσμένα σημεία του επιπέδου, τα οποία ονομάζουμε εστίες της.
Υπερβολή ονομάζουμε το σύνολο των σημείων του επιπέδου που έχουν δοσμένη διαφορά αποστάσεων (κατά απόλυτο τιμή) από δύο δοσμένα σημεία του επιπέδου, τα οποία ονομάζουμε εστίες της.
Παραβολή ονομάζουμε το σύνολο των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από δοσμένο σημείο και δοσμένη ευθεία.

Εδώ όμως χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό αυτό μόνο για την απόδειξη της ισοδυναμίας του γεωμετρικού με τον αναλυτικό ορισμό της έννοιας της εφαπτομένης σε κωνική τομή (§6), ενώ δεν πρόκειται να τον χρησιμοποιήσουμε ξανά.
Ας σημειώσουμε όμως πως το σταθερό άθροισμα αποστάσεων για την έλλειψη, και η σταθερή διαφορά αποστάσεων για την υπερβολή ισούνται με 2α, δηλαδή με το μήκος του πρωτεύοντος άξονά τους, δηλαδή την απόσταση $A'A$ των κορυφών τους A', A που βρίσκονται επάνω στην ευθεία του κύριου άξονά τους.

§8 Ορισμένες κοινές ιδιότητες των κωνικών τομών και σχετικές κατασκευές

Στα επόμενα θεωρούμε κωνικές τομές ψ ορισμένες συνήθως σε πλήρη συμφωνία με τον Ορισμό 1 , δηλαδή από τις εστίες E,E', με την E' ευκλείδεια, και από τον διευθύνοντα κύκλο κ που αντιστοιχεί στην E . Σε κάποιες περιπτώσεις όμως θα ορίζουμε μια κωνική τομή από άλλα στοιχεία της με την έννοια πως η γνώση αυτών των στοιχείων είναι αρκετή για τη γνώση μιας εστίας και του αντίστοιχου διευθύνοντος κύκλου της. Σημειώστε πως στην περίπτωση της παραβολής θεωρώντας την εστία E ως επ'άπειρον σημείο, η γνώση της ισοδυναμεί με γνώση της δοσμένης διεύθυνσης των ευθειών που έχουν το E ως επ΄άπειρον σημείο τους, δηλαδή με τη γνώση της διεύθυνσης του άξονα της παραβολής.

Πρόκειται να αναφερθούμε σε ορισμένες ιδιότητες των μη τετριμμένων κωνικών τομών που ισχύουν και για τα τρία είδη τους. Ενθαρρύνουμε τον αναγνώστη να μελετήσει τις ιδιότητες αυτές στην ειδική περίπτωση που η κωνική τομή είναι ένας συνηθισμένος κύκλος στο ευκλείδειο επίπεδο. Επιπλέον, πρόκειται να χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες αυτές για την πραγματοποίηση ορισμένων κατασκευών.

Οι κατασκευές αυτές θα νοείται πάντοτε πως πραγματοποιούνται με κανόνα και διαβήτη, δηλαδή πως έχουμε δικαίωμα να:

- επιλέγουμε τυχαία κάποιο σημείο επάνω σε δοσμένο γεωμετρικό σχήμα (δηλαδή κάποιο υποσύνολο του επιπέδου). Τα σημεία αυτά τα θεωρούμε ήδη κατασκευασμένα.
- χαράσσουμε την ευθεία μεταξύ δύο κατασκευασμένων σημείων (σε όποια έκταση επιθυμούμε και προς τις δύο κατευθύνσεις). Τις ευθείες αυτές τις θεωρούμε κατασκευασμένες. Τα τμήματα με άκρα δύο οποιαδήποτε κατασκευασμένα σημεία τα θεωρούμε κατασκευασμένα.
- χαράσσουμε τον κύκλο κέντρου κατασκευασμένο σημείο και ακτίνας ίσης με το μήκος κατασκευασμένου τμήματος. Τους κύκλους αυτούς τους θεωρούμε κατασκευασμένους.
- χαράσσουμε τα σημεία τομής (στην περίπτωση που αυτά υπάρχουν), κατασκ. ευθείας με κατασκ. ευθεία, κατασκ. ευθείας με κατασκ. κύκλο και κατασκ. κύκλου με κατασκ. κύκλο.
- πραγματοποιούμε τις παραπάνω ενέργειες-κατασκευές πεπερασμένο πλήθος φορών.

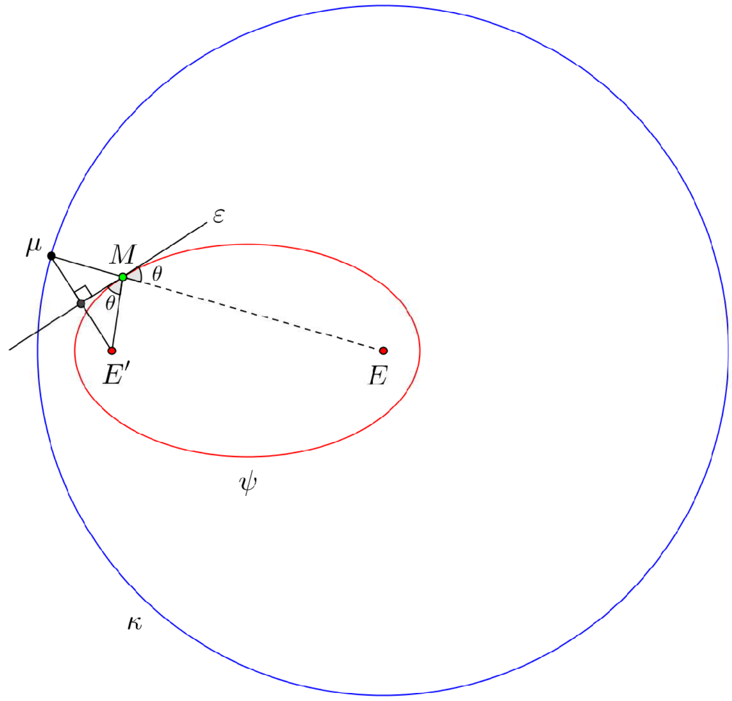
Είναι ενδιαφέρον να τονίσουμε πως εκτός από τους κύκλους, οι άλλες μορφές κωνικών τομών είναι αδύνατο να κατασκευαστούν ολόκληρες με κανόνα και διαβήτη, δεδομένου ενός περιορισμένου πλήθους πληροφοριών που τις καθορίζουν (αυτό αποδεικνύεται), όπως π.χ δεδομένων των εστιών και ενός διευθύνοντος κύκλου. Φυσικά, για κάθε κωνική τομή και ανάλογα με τις πληροφορίες καθορισμού της, μπορούμε πάντοτε να κατασκευάσουμε με κανόνα και διαβήτη όσο μεγάλο αλλά πεπερασμένο πλήθος σημείων της επιθυμούμε! Όταν το πλήθος των κατασκευασμένων σημείων είναι αρκετά μεγάλο και κατάλληλα διάσπαρτο στο επίπεδο, μας δίνεται η οπτική εντύπωση (αλλά πρόκειται απλώς για οφθαλμαπάτη) πως έχουμε κατασκευάσει την κ.τ. ως μια «συνεχόμενη» γραμμή. Αυτό εξάλλου συμβαίνει και με τα αντίστοιχα σχέδια ενός ηλεκτρονικού υπολογιστή. Φυσικά για κάθε πρακτική εφαρμογή, κάτι τέτοιο μας εξυπηρετεί.

Η πρώτη ιδιότητα αφορά τις εφαπτόμενες ευθείες στις κωνικές τομές και αποτελεί απλή αναδιατύπωση του γεωμετρικού ορισμού τους (§6).

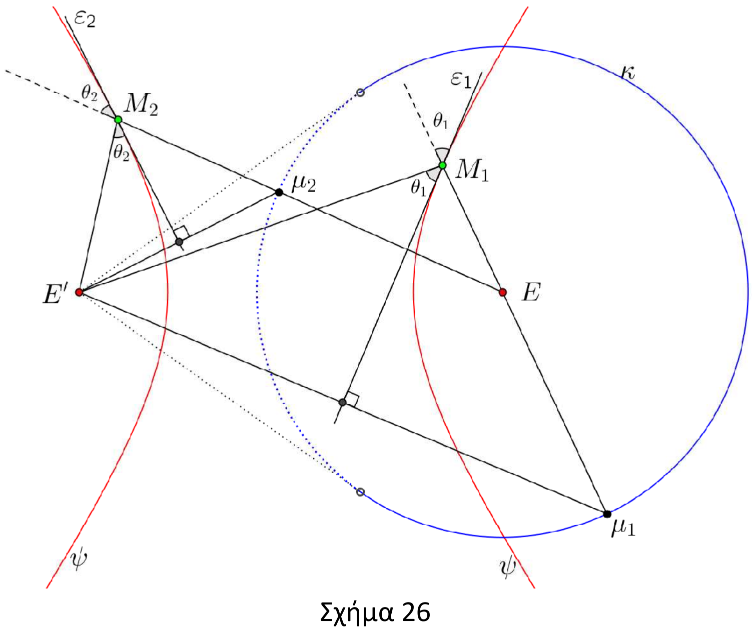
Θεώρημα 1 (Ιδιότητα της ανάκλασης): Το συμμετρικό μιας ευκλείδειας εστίας της κωνικής τομής ως προς τυχαία εφαπτομένη της, ανήκει στο διευθύνοντα κύκλο της άλλης εστίας. Με άλλη διατύπωση: η εφαπτομένη σε τυχαίο σημείο κωνικής τομής, διχοτομεί τη μια γωνία των εστιακών ακτίνων του σημείου επαφής. (Συγκεκριμένα, αν E',E οι εστίες, M το σημείο της κωνικής, και μ το αντίστοιχο του M στο διευθύνοντα κύκλο κ της εστίας E , τότε η γωνία που διχοτομείται είναι η γωνία των ημιευθειών $ME',M\mu$.) (Σχήματα 25-27)

Στην περίπτωση της παραβολής φυσικά αναφερόμαστε στον διευθύνοντα κύκλο της επ'άπειρον εστίας. Για τον καθορισμό της γωνίας που αναφέρει το Θεώρημα πως διχοτομείται δίχως αναφορά στο σημείο μ, υπάρχουν εναλλακτικοί τρόποι για την έλλειψη και την υπερβολή. Για την έλλειψη είναι η γωνία των ημιευθειών $ME', \text{αντικείμενη της } ME$ και η γωνία των ημιευθειών $ME, \text{αντικείμενη της } ME'$, ενώ για την υπερβολή είναι η γωνία των ημιευθειών ME',ME και η γωνία των ημιευθειών $\text{αντικ}ME', \text{αντικ}ME$.

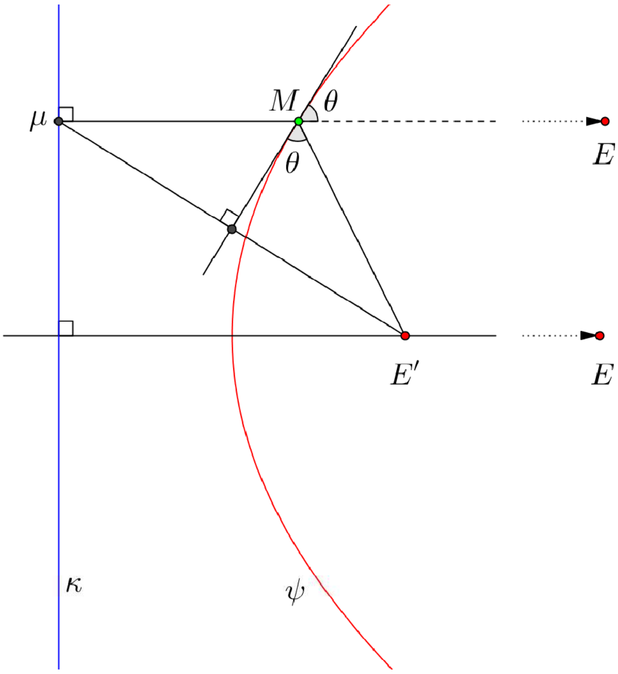
Η ιδιότητα που βεβαιώνει το Θεώρημα πως κατέχουν οι κωνικές τομές ονομάζεται ιδιότητα της ανάκλασης διότι αν E', E οι εστίες της κωνικής και M τυχαίο σημείο της, οι γωνίες που σχηματίζουν οι ημιευθείες ME, ME' με την εφαπτόμενη ε της κωνικής τομής στο M είναι ίσες μεταξύ τους. Αυτό μπορούμε να το ερμηνεύσουμε με φυσικό τρόπο ως εξής: Έστω πως ένας καθρέφτης έχει το σχήμα της κωνικής τομής (αναφερόμαστε στην καμπύλη, κι όχι σε κάποιο «εσωτερικό»), και έστω πως μια ακτίνα φωτός εκπέμπεται από τη μια εστία της (στο επίπεδο της κ.τ.). Φυσικά υποθέτουμε πως η κίνηση της ακτίνας είναι ευθύγραμμη έως ότου χτυπώντας επάνω στην κ.τ.-καθρέφτη ανακλαστεί με γωνία ανάκλασης ίση με τη γωνία πρόσπτωσης (σύμφωνα με τους κανόνες της φυσικής). Επειδή οι γωνίες αυτές μετρώνται ως γωνίες της ευθείας κατά την οποία κινείται το φως, με την εφαπτομένη στην κ.τ., συμπεραίνουμε πως κατά την ανάκλασή της η φωτεινή ακτίνα οφείλει να περάσει (αυτή η αντικείμενή της) από την άλλη εστία! Στο σχήμα οι γωνίες αυτές σημειώνονται ως $\theta, \theta_1, \theta_2$ και η φωτεινή ακτίνα εκπέμπεται από την (ευκλείδεια) εστία E'. Η ανάκλασή της στην εφαπτομένη ε σημειώνεται με διακεκομμένη ευθεία.



Σχήμα 25



Σχήμα 26



Σχήμα 27

Ας χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 1 στα επόμενα προβλήματα κατασκευής:

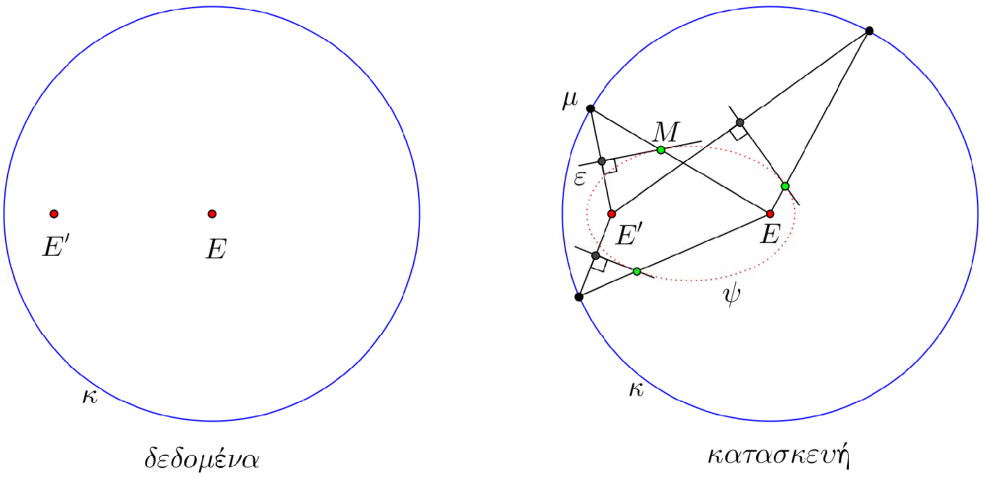
Πρόβλημα 1. Κατασκευή σημείων κωνικής τομής. (Σχήματα 29-30)

Δεδομένα: Εστίες E, E' (όπου E' ευκλείδεια) και διευθύνοντας κύκλος κ μιας κωνικής τομής ψ.

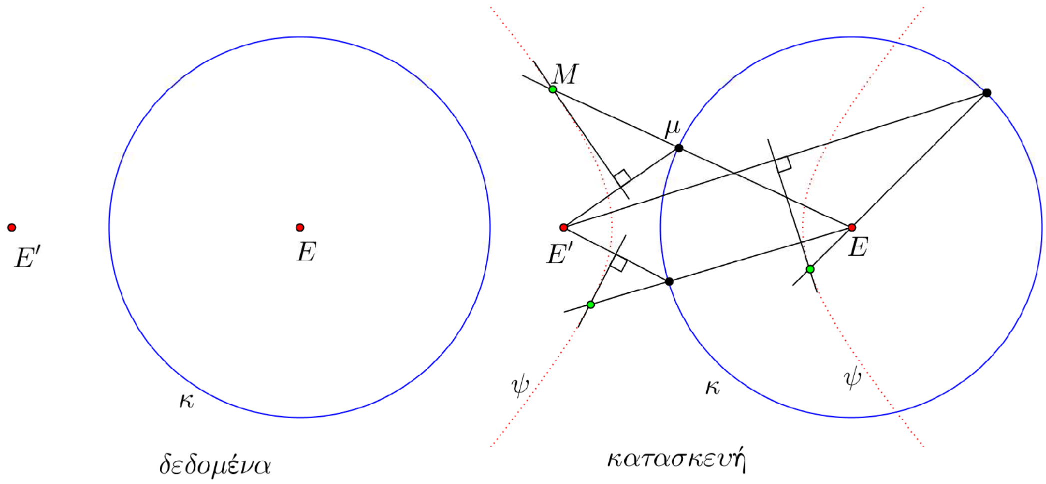
Ζητούμενα: Σημεία M της ψ.

Κατασκευή:

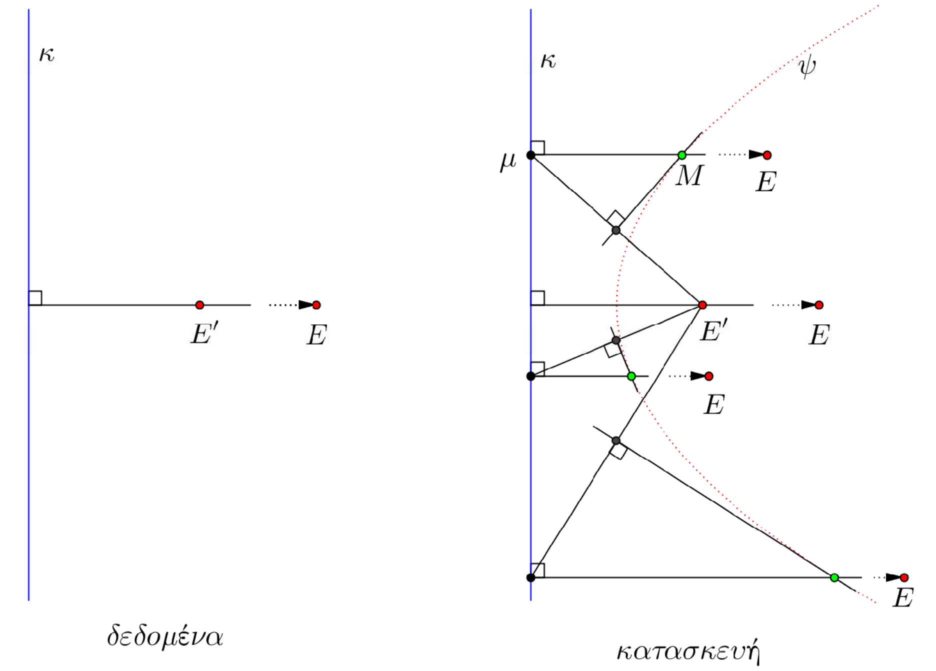
1. μ = τυχαίο σημείο του κύκλου κ.
2. ε = μεσοκάθετος του τμήματος $E'\mu$.
3. $M = \varepsilon \cap E\mu$ = σημείο της ψ.
4. Επαναλαμβάνουμε τα προηγούμενα για τη δημιουργία όσων σημείων της ψ θέλουμε.



Σχήμα 28



Σχήμα 29

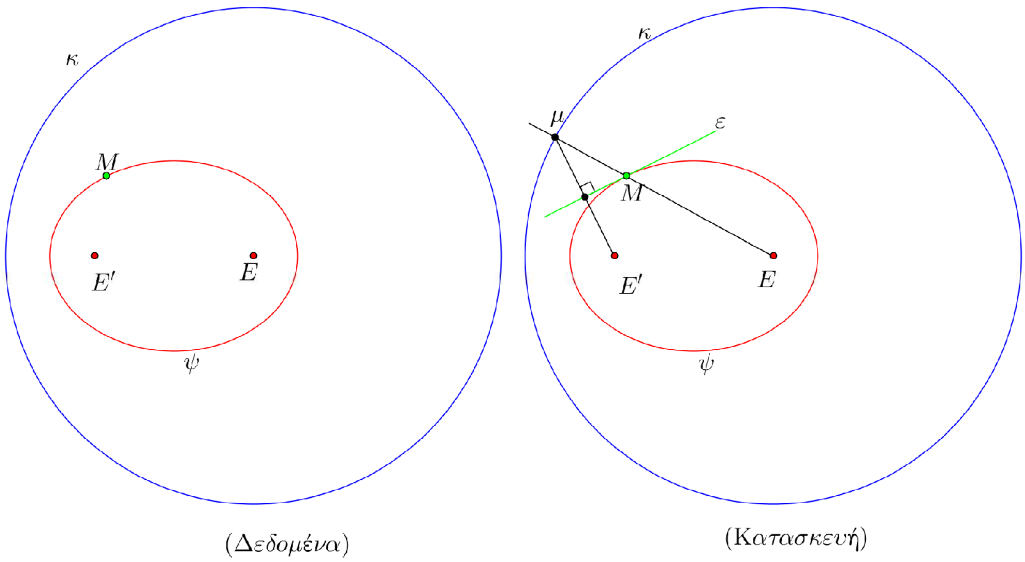


Σχήμα 30

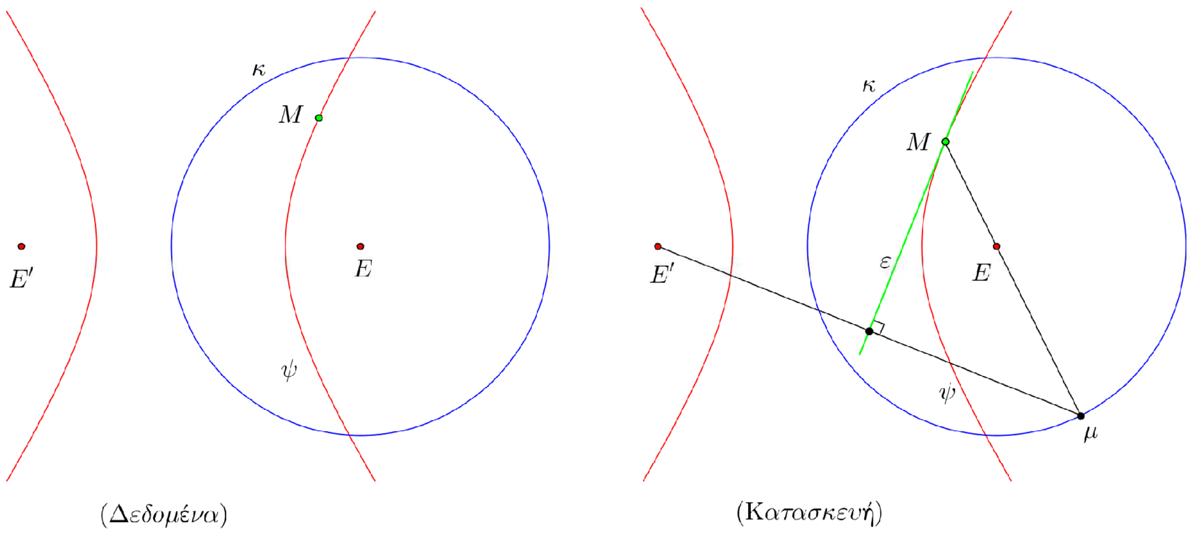
Πρόβλημα 2. Κατασκευή εφαπτομένης κωνικής τομής σε σημείο της. (Σχήματα 31-33)
<u>Δεδομένα</u>: κωνική τομή ψ (με τις εστίες E, E' και το διευθύνοντα κύκλο κ, όπου E' ευκλείδεια), $M \in \psi$.
<u>Ζητούμενα</u>: εφαπτόμενη ευθεία ε της ψ στο M.

<u>Κατασκευή</u>:
1. μ = σημείο τομής της γραμμής αντιστοίχισης EM με τον κ.
2. ε = μεσοκάθετη του τμήματος $E'\mu$.

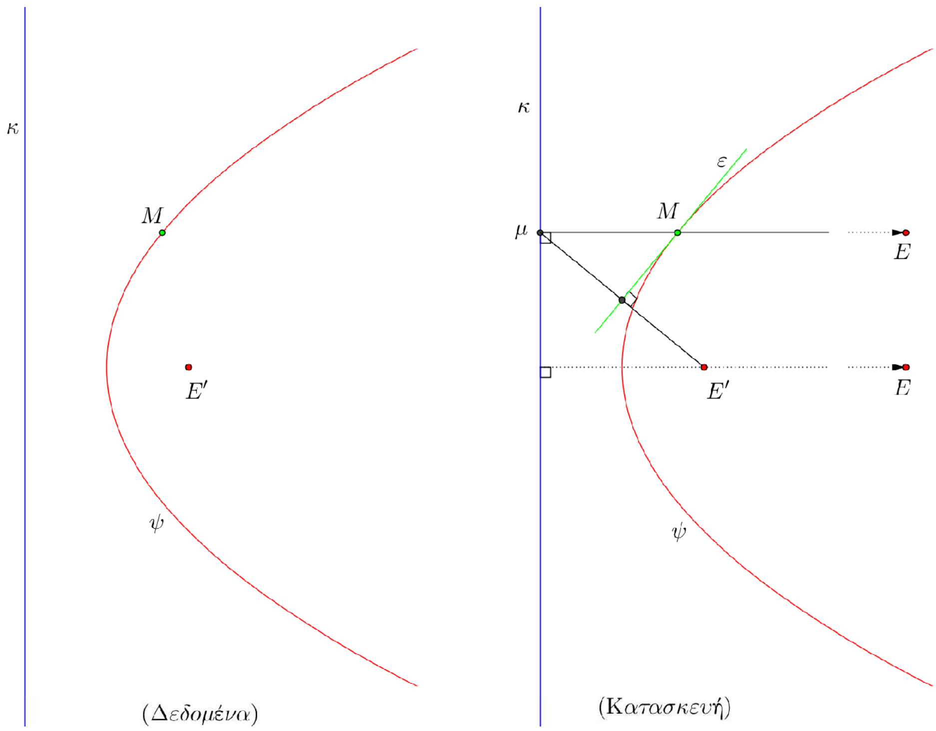
<u>Διερεύνηση</u> (μικρή): Η ευθεία EM έχει με τον κ 1 ή 2 κοινά σημεία μ στο ευκλείδειο επίπεδο και μόνο ένα από αυτά δίνει την ε. Για ψ = παραβολή το μ είναι μοναδικό. Για ψ = έλλειψη, μ = τομή ημιευθείας EM με τον κ. Θυμηθείτε πως για ψ = υπερβολή: για τα M του κλάδου πλησιέστερα στην E το μ είναι το σημείο τομής του κ με την ημιευθεία $E\mu$, ενώ για τα M του κλάδου του πλησιέστερου στην E' το μ είναι το σημείο τομής του κ με την ημιευθεία μE.



Σχήμα 31



Σχήμα 32



Σχήμα 33

Πρόβλημα 3. Κατασκευή εφαπτομένων και σημείων επαφής τους σε κωνική τομή από σημείο εκτός της. (Σχήματα 35-36)

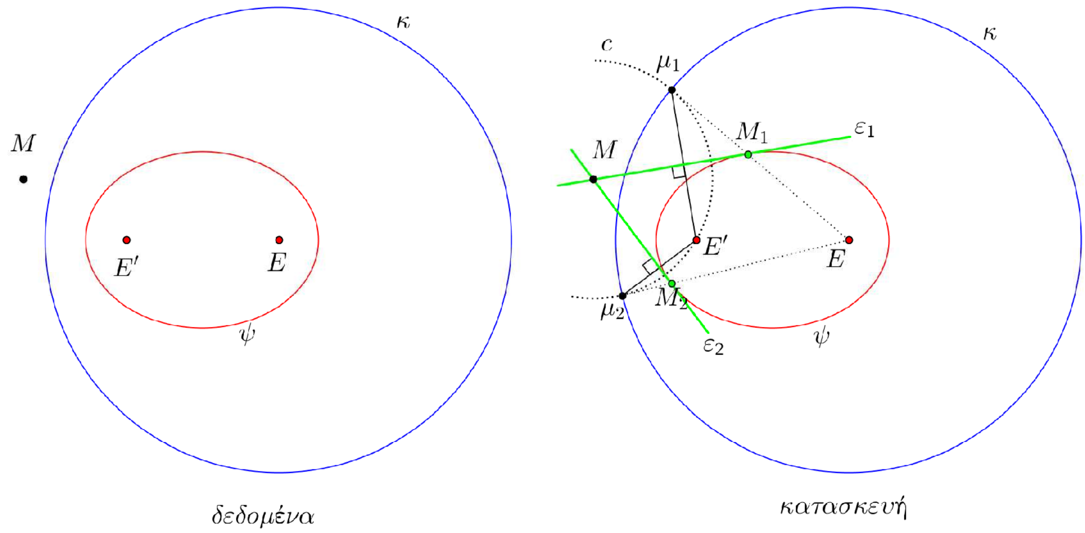
<u>Δεδομένα</u>: κωνική τομή ψ (με τις εστίες E, E' και το διευθύνοντα κύκλο κ, όπου E' ευκλείδεια), $M \notin \psi$.

<u>Ζητούμενα</u>: εφαπτόμενες ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ της ψ από το M και αντίστοιχα σημεία επαφής M_1, M_2.

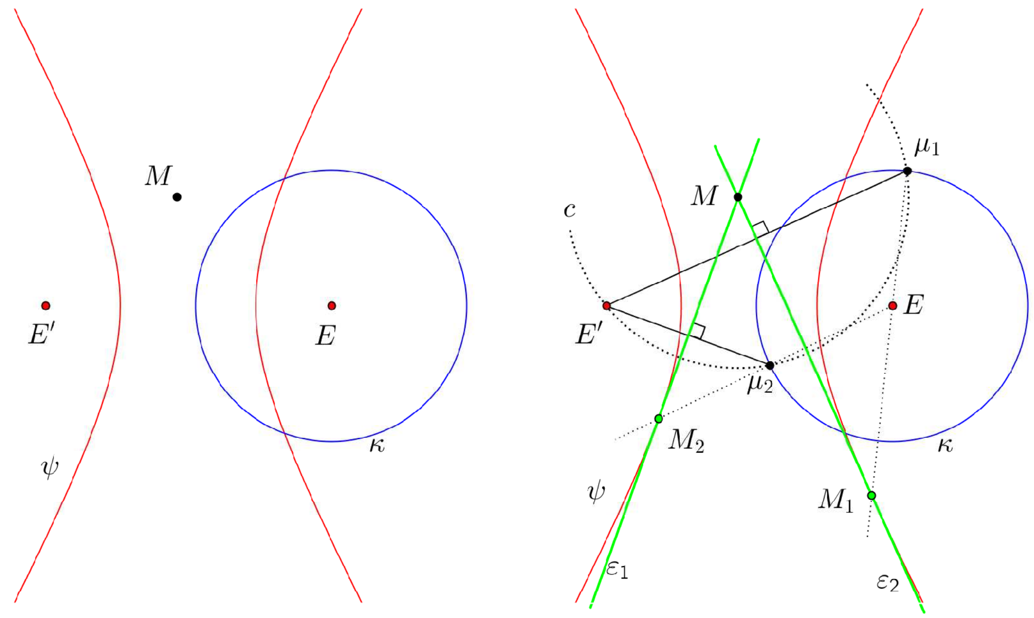
<u>Κατασκευή</u>:

1. μ_1, μ_2 = σημεία τομής του κύκλου $c(M, ME')$ με τον κ.
2. $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ = μεσοκάθετες των τμημάτων $E'\mu_1, E'\mu_2$ αντιστοίχως.
3. $M_1 = \varepsilon_1 \cap E\mu_1,\ M_2 = \varepsilon_2 \cap E\mu_2$.

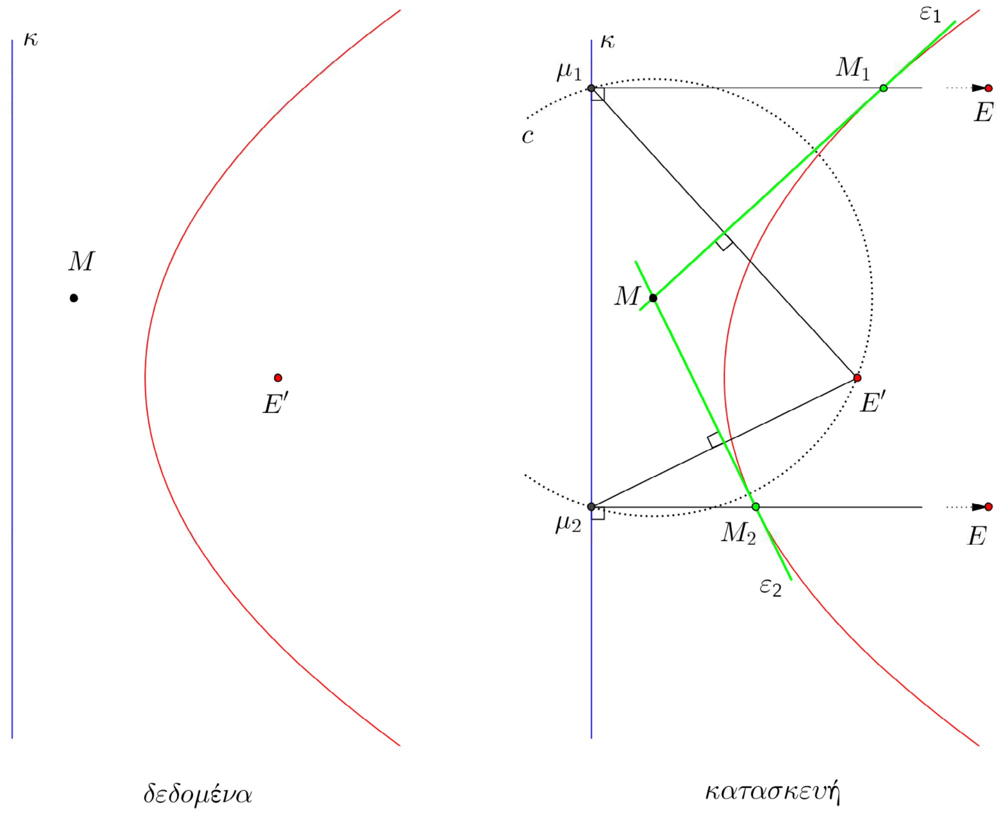
<u>Διερεύνηση</u> (μικρή): Υπάρχουν τόσες λύσεις όσα και τα διακεκριμένα σημεία τομής των κ, c, δηλαδή 0 ή 1 ή 2. Για ψ υπερβολή, αν κάποιο από τα σημεία επαφής ανήκει στον κλάδο τον κοντινότερο στην εστία E', π.χ. το M_2, τότε αυτό ορίζεται μοναδικά ως το σημείο τομής της ευθείας $E\mu_2$ με τον κλάδο αυτό. Όμως αν κάποιο από τα σημεία επαφής ανήκει στον κλάδο τον κοντινότερο στην εστία E, π.χ. το M_1, τότε αυτό ορίζεται μοναδικά ως το σημείο τομής της ημιευθείας (και όχι της ευθείας!) $\mu_1 E$ με τον κλάδο.



Σχήμα 34



Σχήμα 35



Σχήμα 36

Ας δούμε τώρα ένα πρόβλημα σχετικό με τα προηγούμενα τρία, το οποίο είναι ισοδύναμο με ένα από τα 10 περίφημα **Προβλήματα του Απολλωνίου**, δηλαδή τα προβλήματα κατασκευής ενός κύκλου που εφάπτεται ή διέρχεται από τρία δοσμένα σχήματα, καθένα εκ των οποίων είναι κύκλος, σημείο ή ευθεία.

Πρόβλημα 4. Κατασκευή σημείων τομής ευθείας και κωνικής τομής (Σχήματα 37-39)

Δεδομένα: κωνική τομή ψ (με τις εστίες E, E' και το διευθύνοντα κύκλο κ, όπου E' ευκλείδεια), ευθεία ε.

Ζητούμενα: σημεία τομής M_1, M_2 της ψ με την ε.

Κατασκευή:

1. E'' =συμμετρικό του E' ως προς την ε.
2. $1 \in \varepsilon$ τυχαίο, $c(1,1E)$ (1 επιλεγμένο ώστε $\kappa \cap c \neq \varnothing$).
3. $\{2,3\} = \kappa \cap c$.
4. $4 = 23 \cap EE'$.
5. c' = κύκλος διαμέτρου $\overline{41}$.

6 $\{0\} \subseteq c \cap c'$.

7. $\{5,6\} = \kappa \cap c''(4, \overline{40})$.
8. $M_1 = \varepsilon \cap \mu\varepsilon\sigma o\kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau o\varsigma\ \tau o\upsilon\ \overline{E'5}$, $\quad M_2 = \varepsilon \cap \mu\varepsilon\sigma o\kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\tau o\varsigma\ \tau o\upsilon\ \overline{E'6}$.

   Δηλαδή, M_1, M_2 = περίκεντρα τριγώνων $E'E''5$, $E'E''6$ αντιστοίχως.

Για $\psi \neq$ παραβολή, τα τρία βήματα 5,6,7 μπορούν να αντικατασταθούν από τα εξής δύο:

5. c' = κύκλος διαμέτρου $\overline{4E}$.
6. $\{5,6\} = \kappa \cap c'$.

Εξήγηση ορθότητας κατασκευής:

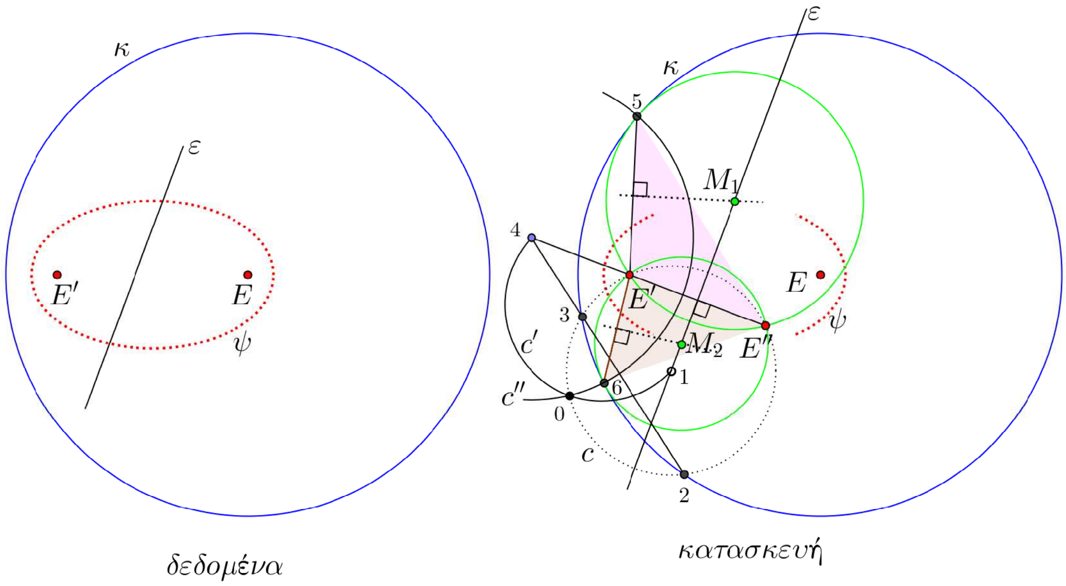
Τα κοινά σημεία της ε με την ψ οφείλουν να ανήκουν στην ε και να αποτελούν κέντρα κύκλων εφαπτόμενων του κ και διερχόμενων από την E. Λόγω της κατασκευής μας είναι $\overline{4E'} \cdot \overline{4E''} = \overline{43} \cdot \overline{42} = \overline{40}^2 = \overline{45}^2 = \overline{46}^2$. Όμως

$\overline{43}\cdot\overline{42}=\overline{45}^2$ συνεπάγεται πως η ευθεία 45 είναι εφαπτομένη του κ στο σημείο 5, ενώ $\overline{4E'}\cdot\overline{4E''}=\overline{45}^2$ συνεπάγεται πως η ευθεία 45 είναι εφαπτομένη του περίκυκλου του τριγώνου $E'E''5$ στο 5, και άρα οι δύο αυτοί κύκλοι εφάπτονται (στο 5). Ομοίως ο κ εφάπτεται με τον περίκυκλο του τριγώνου $E'E''6$ (στο 6). Αφού τα κέντρα M_1, M_2 των περίκυκλων των δύο τριγώνων ανήκουν στην ε και διέρχονται από το E', τα M_1, M_2 είναι τα ζητούμενα σημεία.

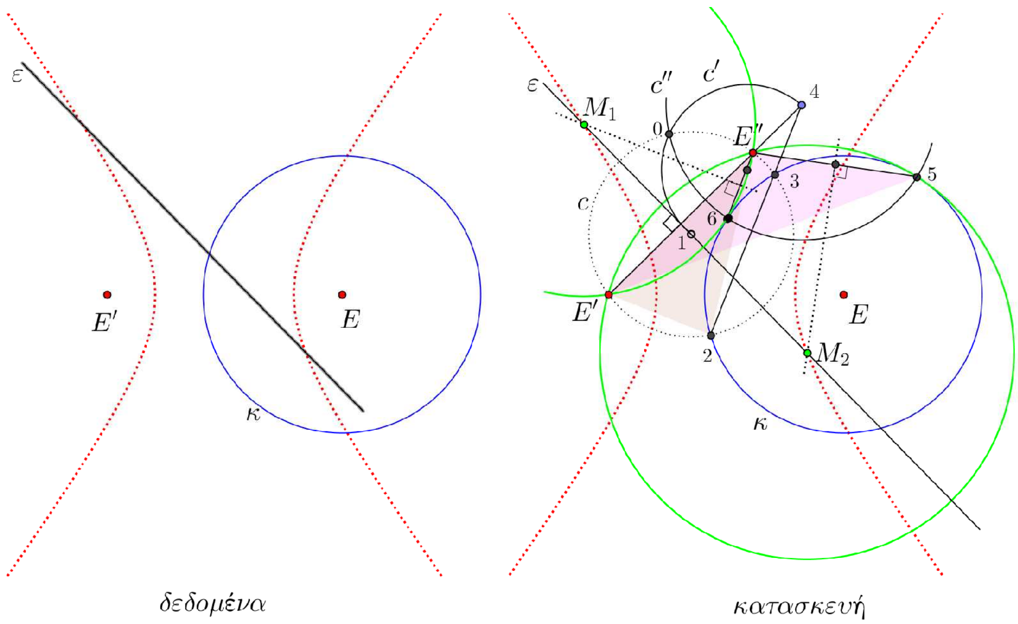
Διερεύνηση: Δική σας…

Άσκηση 2: Δείξτε πως το σημείο 4 της παραπάνω κατασκευής είναι σταθερό (δηλαδή ανεξάρτητο της επιλογής του σημείου 1).

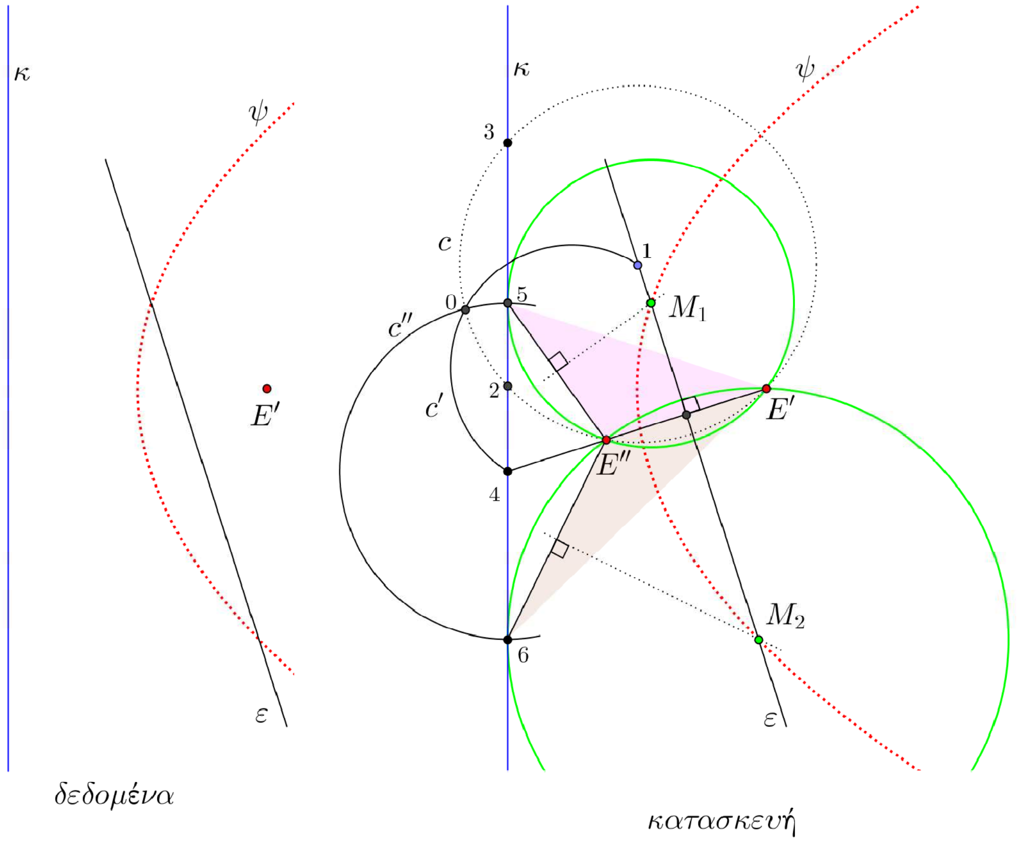
Στα επόμενα σχήματα, η κωνική τομή ψ παρουσιάζεται διάστικτη, ώστε να γίνει αντιληπτό πως δεν ενδιαφερόμαστε να βρούμε την τομή της με την ευθεία ε «με το μάτι». Η κωνική τομή εδώ θεωρείται πως δεν έχει κατασκευαστεί ολόκληρη από τα δεδομένα μας. Να θυμίσουμε πως όπως αναφέραμε πιο πριν, είναι αδύνατο να την κατασκευάσουμε ολόκληρη με κανόνα και διαβήτη, παρά το γεγονός πως μπορούμε να κατασκευάσουμε με κανόνα και διαβήτη οποιοδήποτε πλήθος πεπερασμένων σημείων της επιθυμούμε! Αυτό που ζητάμε στο παρόν Πρόβλημα, είναι να κατασκευάσουμε τα ζητούμενα σημεία τομής με κανόνα και διαβήτη! Θα μπορούσαμε κάλλιστα να αφαιρέσουμε τις γραμμές των κωνικών τομών από το σχέδιο, αλλά με την παρουσία τους η κατασκευή γίνεται πιο κατανοητή.



Σχήμα 37

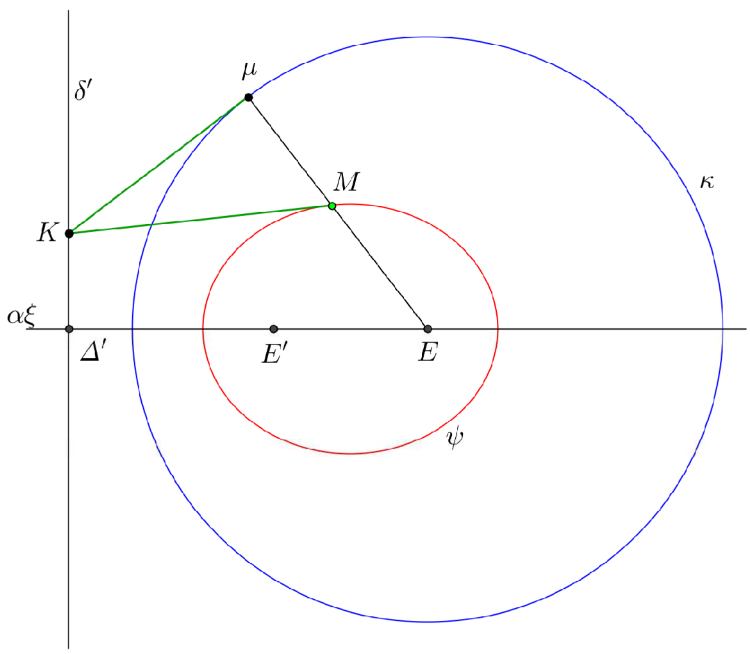


Σχήμα 38

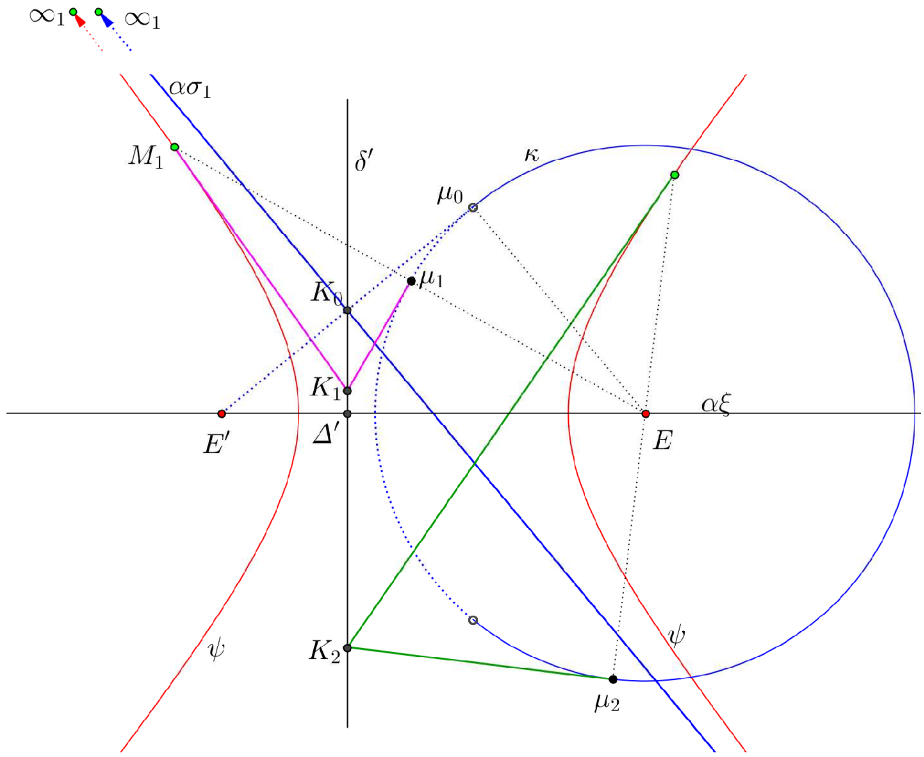


Σχήμα 39

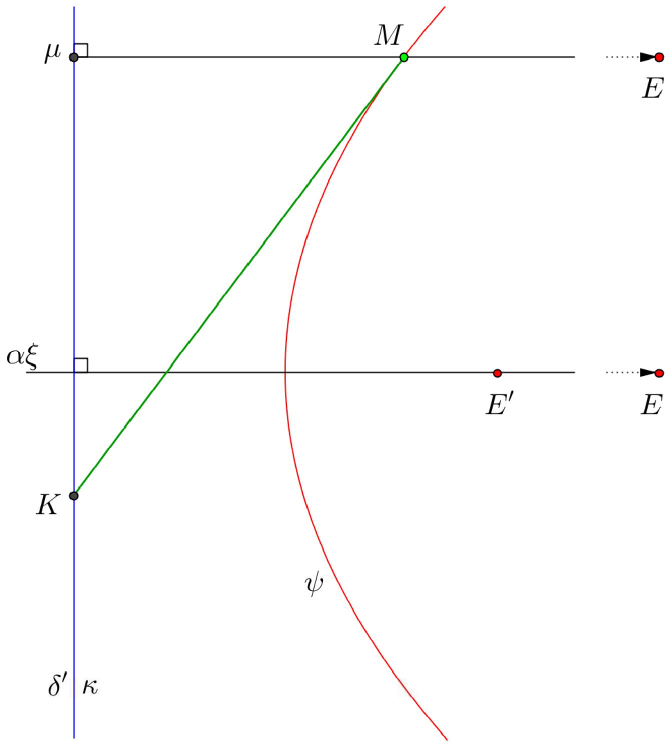
Θεώρημα 2. Οι εφαπτόμενες σε αντίστοιχα σημεία μιας κωνικής τομής και ενός διευθύνοντος κύκλου της, τέμνονται επί της διευθετούσας της άλλης εστίας (Σχήματα 40-42).



Σχήμα 40



Σχήμα 41



Σχήμα 42

Απόδειξη Θεωρήματος 2: Η περίπτωση της παραβολής είναι τετριμμένη, αφού οι κ, δ' ταυτίζονται (όπου E' η ευκλείδεια εστία). (Σχήματα 43-44)

Για την έλλειψη ας παρατηρήσουμε πως το κοινό σημείο K του Σχήματος 43 (ή τα K_1, K_2 στο Σχήμα 44 για την υπερβολή), ανήκει στο ριζικό άξονα των κύκλων $\kappa(E, 2\alpha), c(E', 0)$ (ο δεύτερος τετριμμένος με ακτίνα 0) αφού τα εφαπτόμενα προς αυτούς τμήματα είναι ισομήκη $K\mu = KE'$ (η KM είναι μεσοκάθετος του τμήματος $E'\mu$). Οπότε η κάθετη από το K στη διάκεντρο $E'E$ των δύο κύκλων αποτελεί το ριζικό τους άξονα, και για το κοινό σημείο της Δ' με τη διάκεντρο έχουμε

$$\delta_{\Delta'}(\kappa) = \delta_{\Delta'}(c) \Rightarrow (\Delta' E)^2 - (2\alpha)^2 = (\Delta' E')^2 \Rightarrow (\Delta' E - \Delta' E')(\Delta' E + \Delta' E') = (2\alpha)^2 .$$

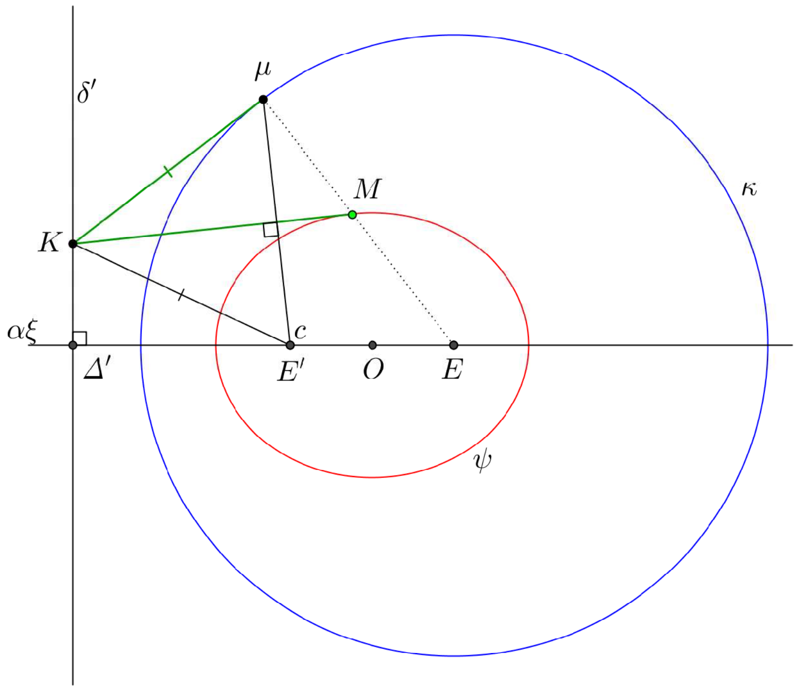
Για έλλειψη συνεχίζουμε ως

$$EE'(\varDelta'E+\varDelta'E')=4\alpha^2 \Rightarrow 2\gamma(2\varDelta'O)=4\alpha^2 \Rightarrow \varDelta'O=\frac{\alpha^2}{\gamma}$$

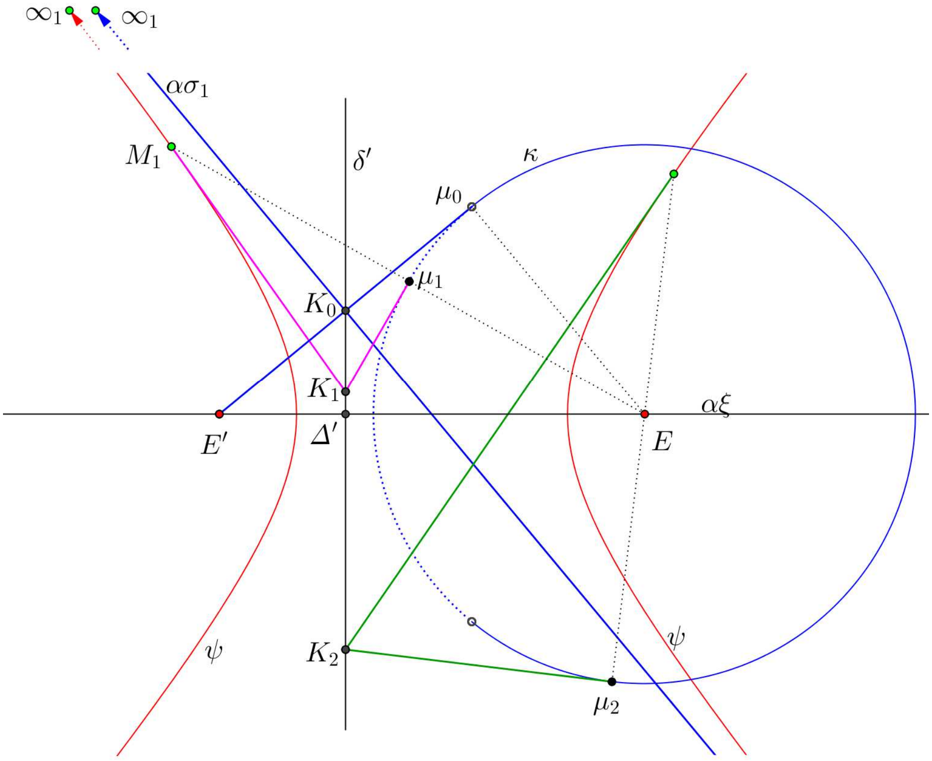
ενώ για υπερβολή ως

$$(\varDelta'E-\varDelta'E')EE'=4\alpha^2 \Rightarrow (2\varDelta'O)2\gamma=4\alpha^2 \Rightarrow \varDelta'O=\frac{\alpha^2}{\gamma}.$$

Και στις δύο περιπτώσεις λοιπόν έχουμε πως το σημείο $\varDelta'$ ταυτίζεται με το ίχνος της διευθετούσας της εστίας E', οπότε η διευθετούσα αυτή ταυτίζεται με το ριζικό άξονα των δύο κύκλων αφού αμφότερες είναι κάθετες στον άξονα στο ίδιο σημείο $\varDelta'$, και το ζητούμενο έχει δειχθεί, εκτός από την ειδική περίπτωση των επ'άπειρων σημείων της υπερβολής. Στην ειδική αυτή περίπτωση, η εφαπτόμενη της υπερβολής σε ένα από τα επ'άπειρον σημεία της, έστω το ∞_1 είναι η ασύμπτωτη $\alpha\sigma_1$ που ορίζει το σημείο αυτό, που αποτελεί ευθεία διερχόμενη από το κέντρο της υπερβολής και παράλληλη της ακτίνας $E\mu_0$ όπου μ_0 το αντίστοιχο του ∞_1 στον κύκλο κ. Το μ_0 είναι σημείο επαφής με τον κ μιας από τις εφαπτόμενες από το E'. Τώρα είναι τετριμμένος υπολογισμός πως η τομή K_0 των $\alpha\sigma_1, E'\mu_0$ προβάλλεται επί του άξονα σε σημείο με απόσταση $\frac{\alpha^2}{\gamma}$ από το O. Δηλαδή το K_0 προβάλλεται επί του $\varDelta'$ οπότε και ανήκει στη διευθετούσα δ'.



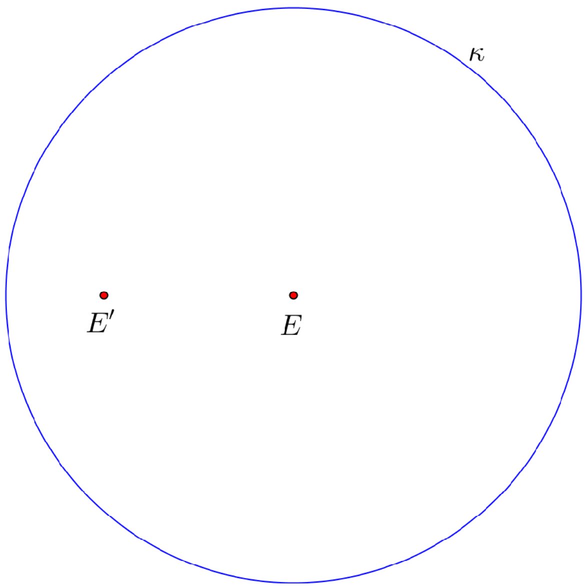
Σχήμα 43



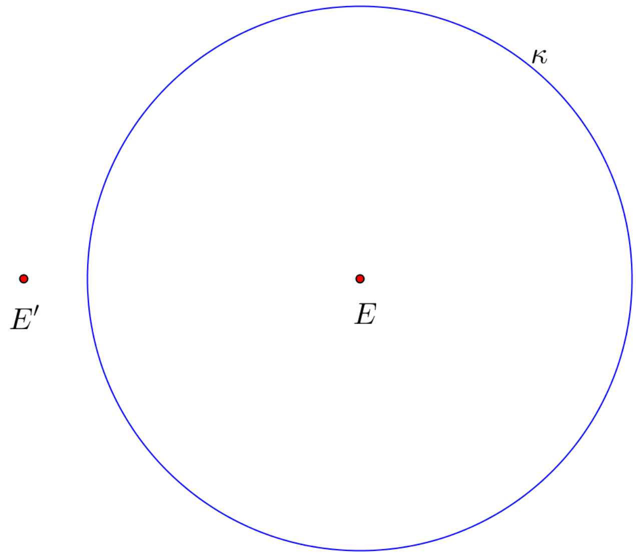
Σχήμα 44

Ως πόρισμα του Θ.2, έχουμε πως για την κατασκευή μιας διευθετούσας κάποιας κ.τ., αρκεί να βρούμε το σημείο τομής της εφαπτόμενης στην κ.τ. και της εφαπτόμενης ενός διευθύνοντος κύκλου της σε ένα ζεύγος αντίστοιχων σημείων τους, για δύο τέτοια ζεύγη σημείων.

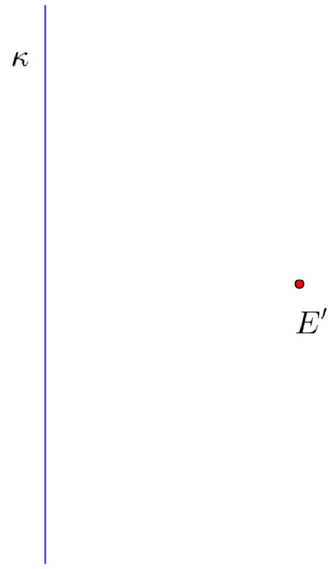
Άσκηση 3: Να κατασκευαστεί η διευθετούσα της κωνικής τομής ψ των επόμενων Σχημάτων που αντιστοιχεί στην εστία E'. Η κωνική τομή καθορίζεται από τις εστίες της E, E' και τον διευθύνοντα κύκλο κ της E.



Σχήμα 45



Σχήμα 46



Σχήμα 47

Τα επόμενα πέντε Θεωρήματα αφορούν εφαπτόμενες των κωνικών τομών και γωνίες που δημιουργούν μεταξύ τους ή με συγκεκριμένες εστιακές ακτίνες. Καλό είναι να έχουμε στο μυαλό μας πως όταν δύο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ τέμνονται σε μοναδικό σημείο, έστω K, οι ημιευθείες των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ με κορυφή το K δημιουργούν τέσσερις κυρτές γωνίες, ανά δύο ίσες ως κατακορυφήν. Στη βιβλιογραφία συνήθως οι δύο μικρότερες από αυτές ονομάζονται γωνία των δύο ευθειών. Όμως για εμάς εδώ θα είναι βολικό να ονομάζουμε και τις τέσσερις ως **γωνίες** των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. Επίσης, τις δύο ευθείες που διχοτομούν τα δύο ζεύγη αυτών των κατακορυφήν γωνιών, θα τις ονομάζουμε **διχοτόμους** των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. Στα Θεωρήματα που ακολουθούν θα δίνουμε από ένα σχήμα για κάθε είδος κωνικής τομής. Εσείς μπορείτε αν επιθυμείτε να μεταβάλλετε το κάθε σχήμα ώστε π.χ. να αφορά άλλη από την επιλεγμένη εστία, ή άλλα από τα επιλεγμένα σημεία επί της κωνικής τομής.

Θεώρημα 3. Οι εφαπτόμενες σε δύο σημεία κωνικής τομής και μια διχοτόμος των ευθειών των εστιακών ακτίνων (από την ίδια εστία) των σημείων αυτών, συντρέχουν. Συγκεκριμένα, η γωνία που διχοτομείται είναι αυτή που περιέχει το σημείο τομής των εφαπτομένων. (Σχήματα 48-50)

Απόδειξη. Για ευκλείδεια εστία, έστω E', έλλειψης ή υπερβολής ή παραβολής: αν M_1, M_2 τα σημεία επαφής και μ_1, μ_2 τα αντίστοιχά τους ως προς το διευθύνοντα κύκλο κ της εστίας E, τότε (για γωνίες)

$$\mu_1 E' \mu_2 = \mu_1 E' K + K E' \mu_2$$

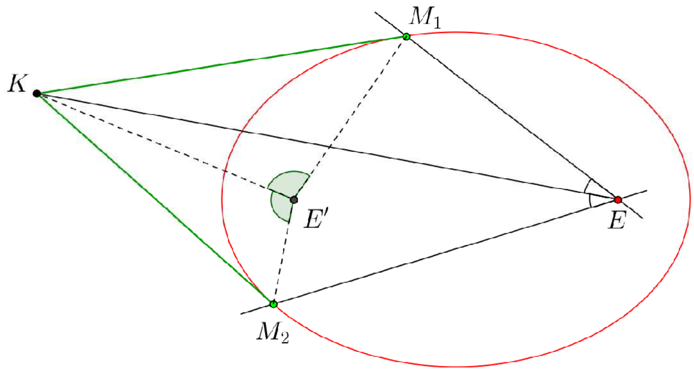
με

$$\mu_1 E'K = E'\mu_1 K = E'\mu_1\mu_2 + \mu_2\mu_1 K = E'\mu_2\mu_1 + \mu_1\mu_2 K = E\mu_2 K = KE'\mu_2$$

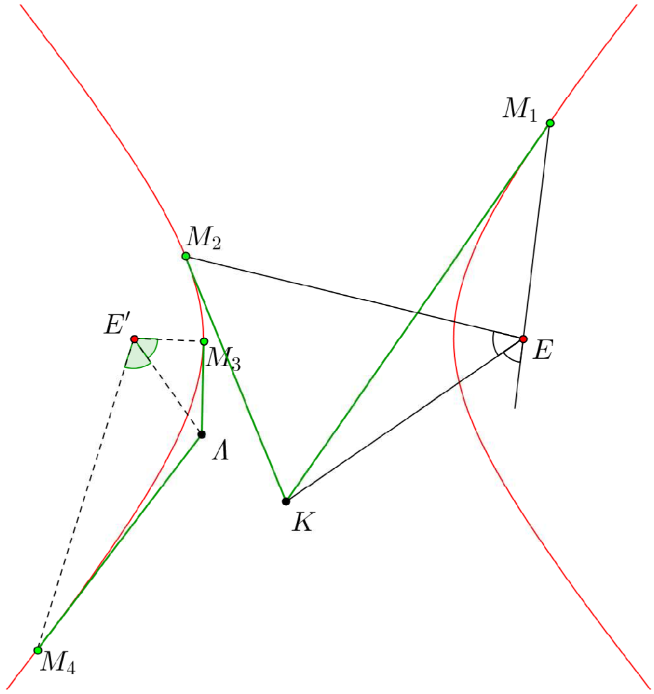
οπότε η $E'K$ διχοτομεί την $\mu_1 E'\mu_2$ στις δύο ίσες γωνίες $\mu_1 E'K, KE'\mu_2$. (Το σκεπτικό φυσικά ισχύει και όταν κάποιο ή αμφότερα τα M_1, M_2 είναι επ'άπειρον σημεία της υπερβολής.)

Για τη μη ευκλείδεια εστία παραβολής το ζητούμενο είναι τετριμμένο.

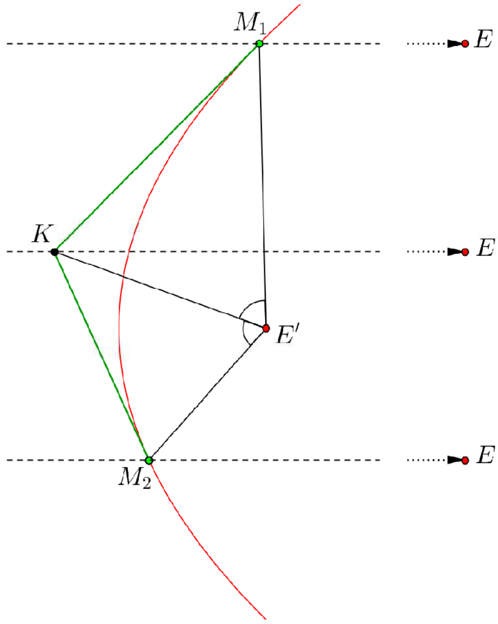
Σημείωση. Για έλλειψη ή υπερβολή και π.χ. για την εστία τους E, έχουμε γρήγορα το ζητούμενο ως εξής: αν M_1, M_2 τα σημεία επαφής και μ_1, μ_2 τα αντίστοιχά τους ως προς το διευθύνοντα κύκλο κ της εστίας E, τότε η ευθεία EK είναι διάκεντρος των κύκλων $\kappa, c(K, KE')$, οπότε διχοτομεί στο E τη γωνία των ακτίνων (ημιευθειών) $E\mu_1, E\mu_2$ του κ ως τα κοινά του σημεία με τον c.



Σχήμα 48



Σχήμα 49

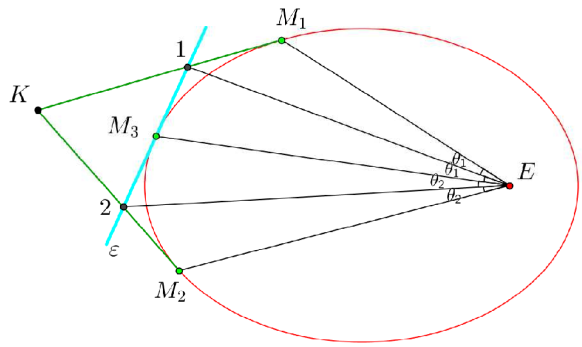


Σχήμα 50

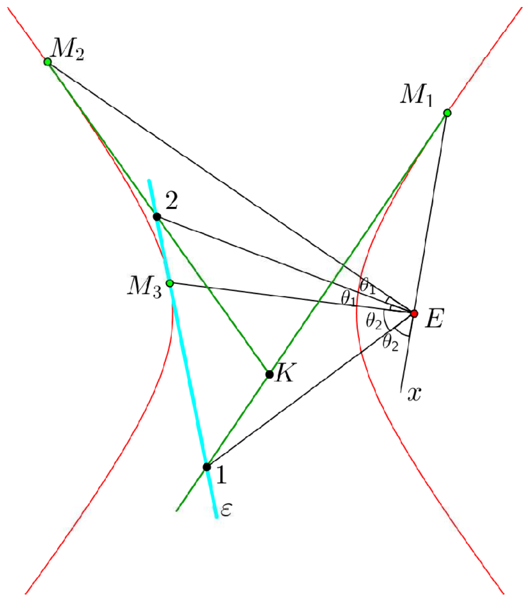
Ως άμεσο πόρισμα του τελευταίου Θεωρήματος έχουμε το ακόλουθο:

Θεώρημα 4. Το τμήμα τυχαίας εφαπτομένης κωνικής τομής που περιλαμβάνεται μεταξύ δύο δοσμένων εφαπτομένων, φαίνεται από κάθε εστία υπό σταθερή κυρτή γωνία, ίση με το μισό της κυρτής γωνίας υπό την οποία φαίνονται από την εστία αυτή τα δύο σημεία επαφής των σταθερών εφαπτομένων (ή το μισό της συμπληρωματικής της στην περίπτωση της υπερβολής με τα σημεία επαφής να βρίσκονται σε διαφορετικούς ευκλείδειους κλάδους) (Σχήματα 51-53).

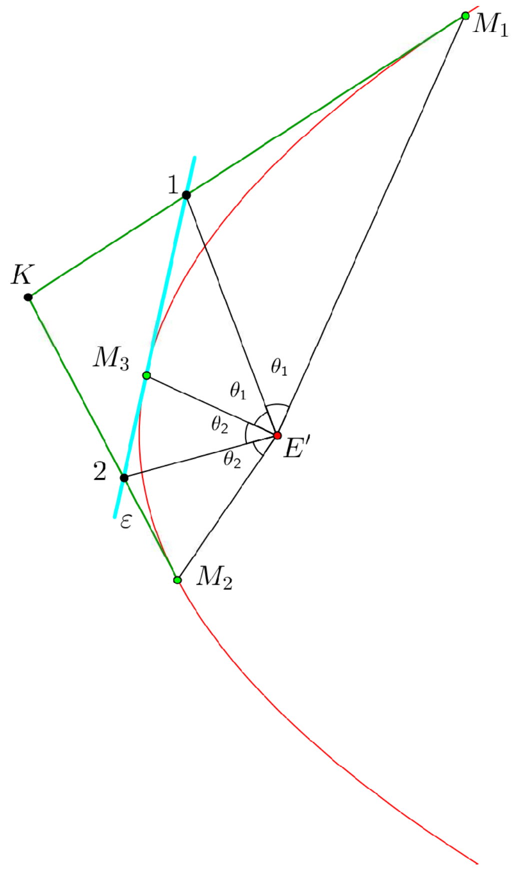
Απόδειξη. Τετριμμένο χρησιμοποιώντας δύο φορές το Θ.3 για τα ζεύγη της νέας εφαπτομένης με καθεμιά από τις αρχικές.



Σχήμα 51



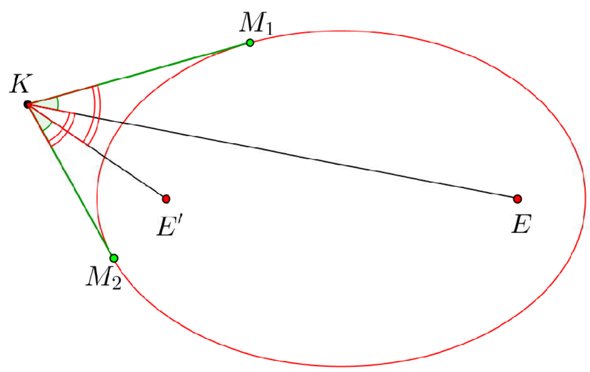
Σχήμα 52



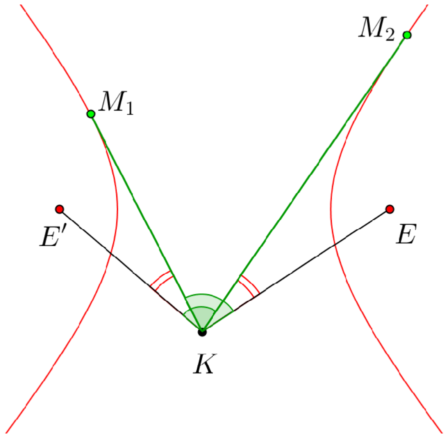
Σχήμα 53

Για το Θεώρημα που ακολουθεί ας θυμήσουμε πως ένα ζεύγος ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ ονομάζεται ισογώνιο ως προς ένα άλλο ζ_1, ζ_2, όταν οι γωνίες της μιας ευθείας ε_1 του πρώτου ζεύγου με τις ζ_1, ζ_2 του δεύτερου είναι ίσες αντιστοίχως με με τις γωνίες της ε_2 με τις ζ_2, ζ_1. Φυσικά η σχέση της ισογωνιότητας είναι αντιμεταθετική, δηλαδή ένα ζεύγος γωνιών είναι ισογώνιο ως προς ένα άλλο, αν και μόνο αν το δεύτερο ζεύγος ευθειών είναι ισογώνιο ως προς το πρώτο. Για το λόγο αυτό, συχνά λέμε απλώς πως δύο τέτοια ζεύγη ευθειών είναι **ισογώνια** μεταξύ τους.

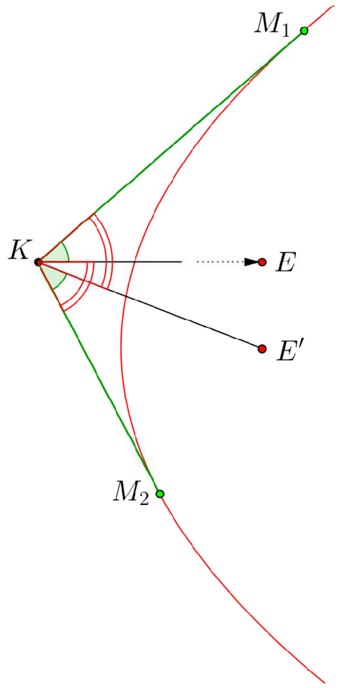
Θεώρημα 5. Οι εστιακές ακτίνες από το σημείο τομής δύο εφαπτομένων κωνικής τομής, είναι ευθείες ισογώνιες ως προς τις εφαπτόμενες αυτές (Σχήματα 54-56).



Σχήμα 54



Σχήμα 55

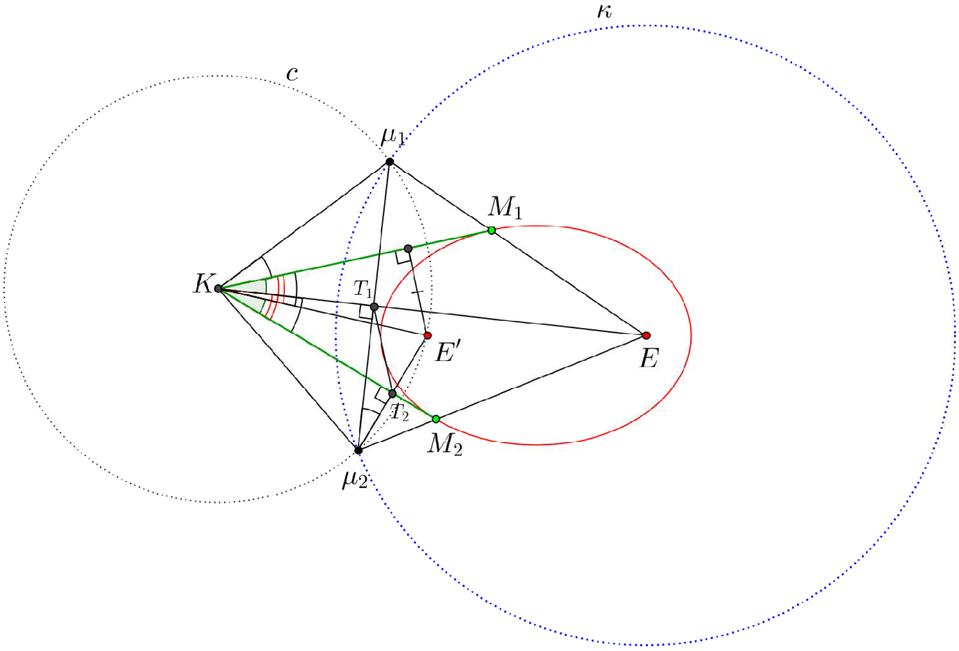


Σχήμα 56

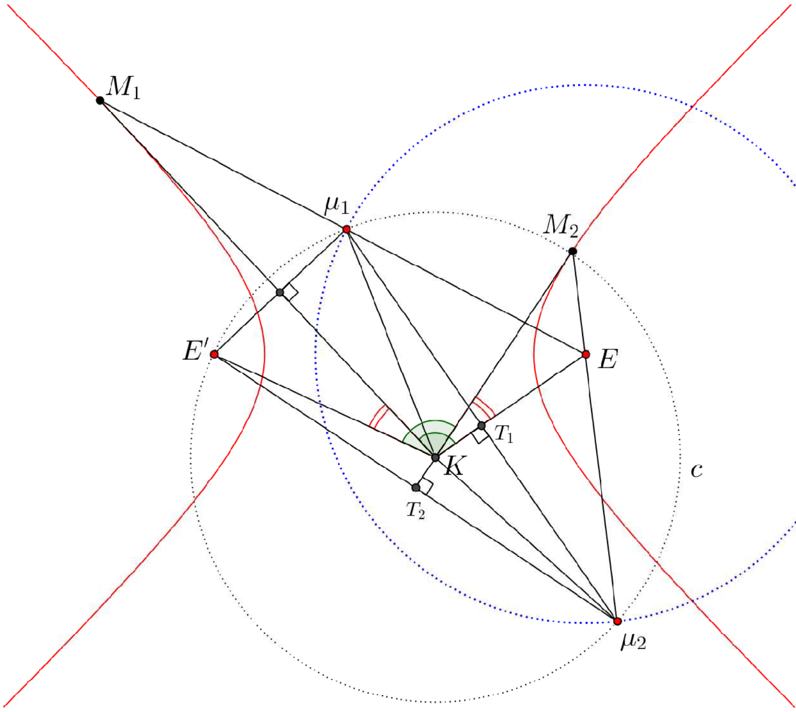
Απόδειξη του Θεωρήματος 5 (Σχήματα 57-59). Έστω M_1, M_2 δύο σημεία της κωνικής τομής και μ_1, μ_2 τα αντίστοιχά τους ως προς τον διευθύνοντα κύκλο κ της εστίας E. Και επίσης K το κοινό σημείο των εφαπτομένων της κωνικής στα M_1, M_2 και $T_1 = KE \cap \mu_1\mu_2, T_2 = KM_2 \cap E'\mu_2$. Έχουμε (για γωνίες):

$$2M_1KE'\left(\overset{M_1K\ \mu\varepsilon\sigma o\kappa.\ \tau\eta\varsigma\ E'\mu_1}{=}\mu_1KE'\overset{\varepsilon\gamma\gamma\varepsilon\gamma\rho\alpha\mu\mu\acute{\varepsilon}\nu\eta-\varepsilon\pi\acute{\iota}\kappa\varepsilon\nu\tau\rho\eta\ \sigma\tau o\nu\ c(K,KE')}{=}2E'\mu_2\mu_1\overset{T_1,K,\mu_2,T_2=o\mu o\kappa\upsilon\kappa\lambda\iota\kappa\acute{\alpha}}{=}\right)=2M_2KE \Rightarrow M_1KE' = M_2KE.$$

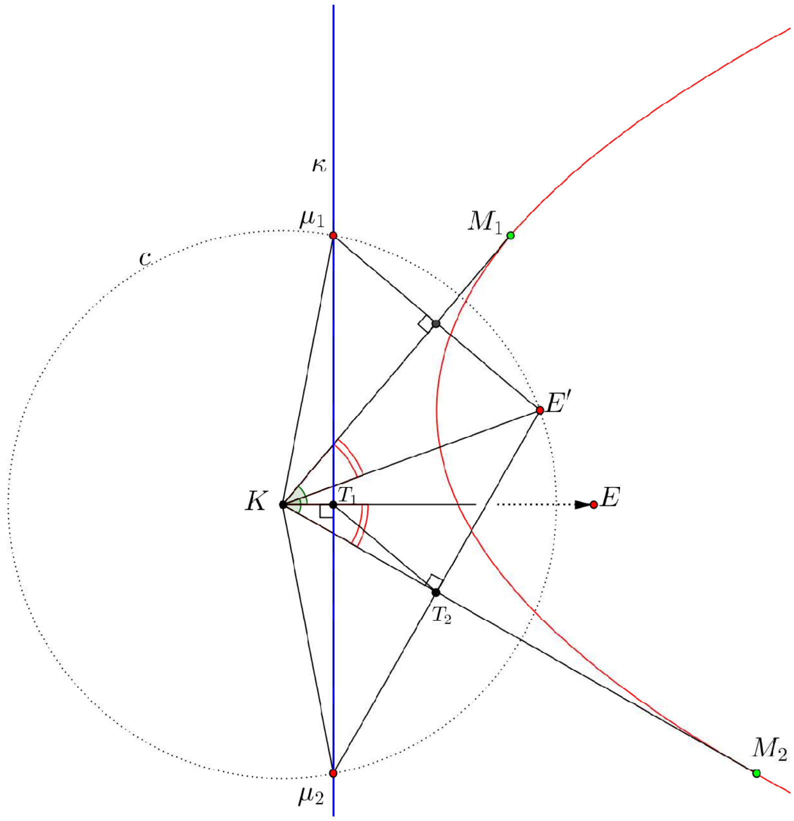
Η σχέση αυτή εκφράζει τη ζητούμενη ισογωνιότητα. Αν επιθυμούμε μπορούμε αμέσως να μετατρέψουμε τη σχέση αυτή σε άλλες ισοδύναμες σχέσεις όπως π.χ. η ισότητα γωνιών $M_1KE = M_2KE'$.



Σχήμα 57



Σχήμα 58



Σχήμα 59

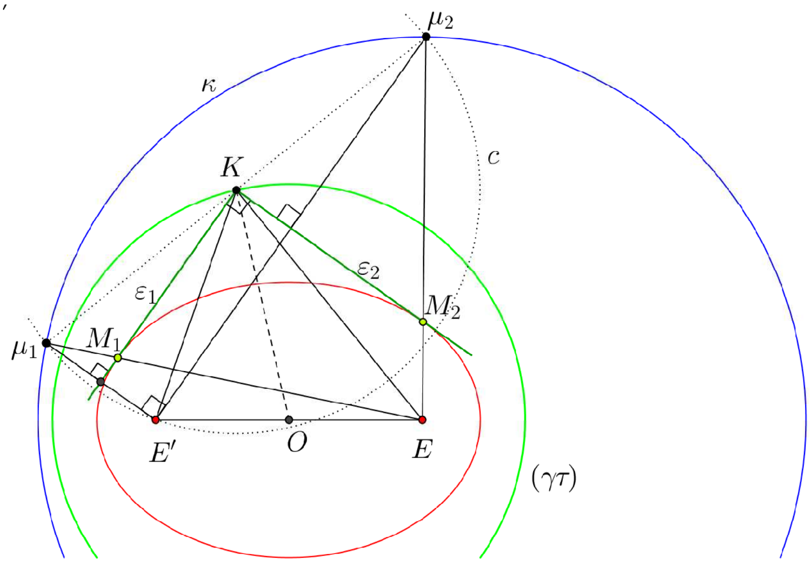
Άσκηση 4. (α) Δώστε δικό σας σχήμα για την απόδειξη του τελευταίου Θεωρήματος στην περίπτωση που οι εφαπτόμενες υπερβολής αφορούν τον ίδιο ευκλείδειο κλάδο της. (β) Πότε δύο εφαπτόμενες μιας κωνικής τομής είναι παράλληλες στο ευκλείδειο επίπεδο;

Θεώρημα 6. Ο γεωμετρικός τόπος της κορυφής ορθής γωνίας της οποίας οι πλευρές εφάπτονται κωνικής τομής είναι κύκλος (του προβολικού επιπέδου) ομόκεντρός της (Σχήματα 60-62). Συγκεκριμένα:

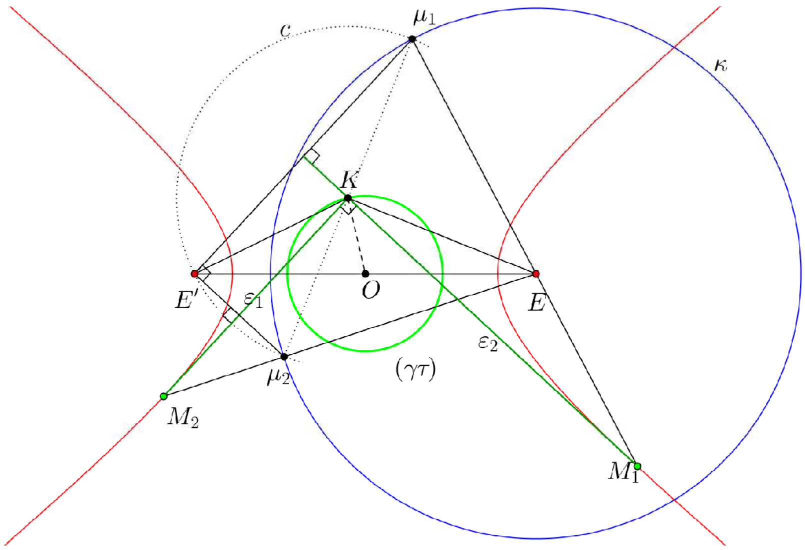
- για έλλειψη ημιαξόνων α, β η ακτίνα του κύκλου ισούται με $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$.
- για υπερβολή ημιαξόνων α, β η ακτίνα του κύκλου ισούται με $\sqrt{\alpha^2-\beta^2}$.
- για παραβολή ο κύκλος ταυτίζεται με το διευθύνοντα κύκλο κ (της μη ευκλείδειας εστίας).

Παρατηρήστε πως στην περίπτωση της υπερβολής όταν $\alpha<\beta$, δεν υπάρχει σημείο από όπου να διέρχονται δύο κάθετες εφαπτόμενες!

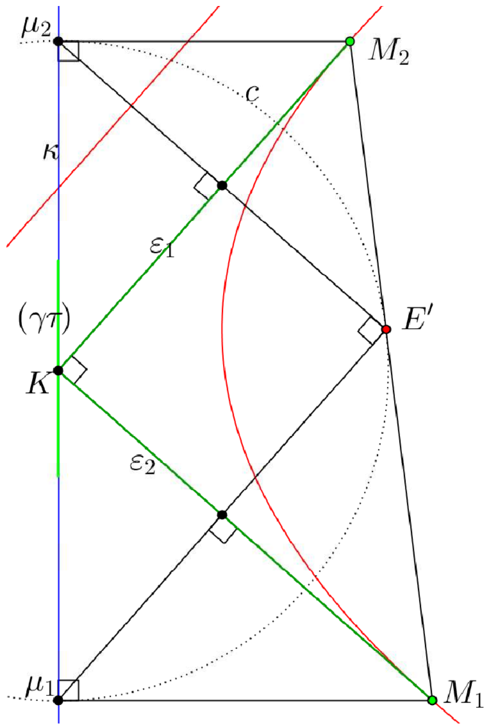
Απόδειξη. Αν M_1, M_2 τα σημεία επαφής των δύο κάθετων μεταξύ τους εφαπτομένων $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ που τέμνονται έστω στο K , και μ_1, μ_2 τα αντίστοιχα σημεία των M_1, M_2 ως προς την αντιστοιχία που επάγει ο διευθύνων κύκλος της εστίας E (μη-ευκλείδεια όταν η κ.τ είναι παραβολή), τότε καθώς $E'\mu_1, E'\mu_2$ κάθετες στις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ αντιστοίχως, προκύπτει $\angle \mu_1 E' \mu_2=\frac{\pi}{2}$. Δηλαδή η εστία E' ανήκει στον κύκλο $c(K, KM_1)$. Οπότε το κέντρο K του κύκλου c είναι το μέσον του τμήματος $\mu_1\mu_2$. Στην περίπτωση που κ.τ. = παραβολή, είναι ευθεία $\mu_1\mu_2=\kappa$ και το ζητούμενο προκύπτει αμέσως. Στις άλλες περιπτώσεις παρατηρήστε πως το τμήμα $\mu_1\mu_2$ είναι χορδή του ευκλείδειου κύκλου κ, οπότε $EK \perp \mu_1\mu_2$ και το ζητούμενο προκύπτει αμέσως από τη σχέση του Πυθαγόρειου Θεωρήματος στο ορθογώνιο τρίγωνο $EK\mu_1$ και του Θεωρήματος διαμέσων στο τρίγωνο EKE'. (Συμπληρώστε τις λεπτομέρειες).



Σχήμα 60



Σχήμα 61



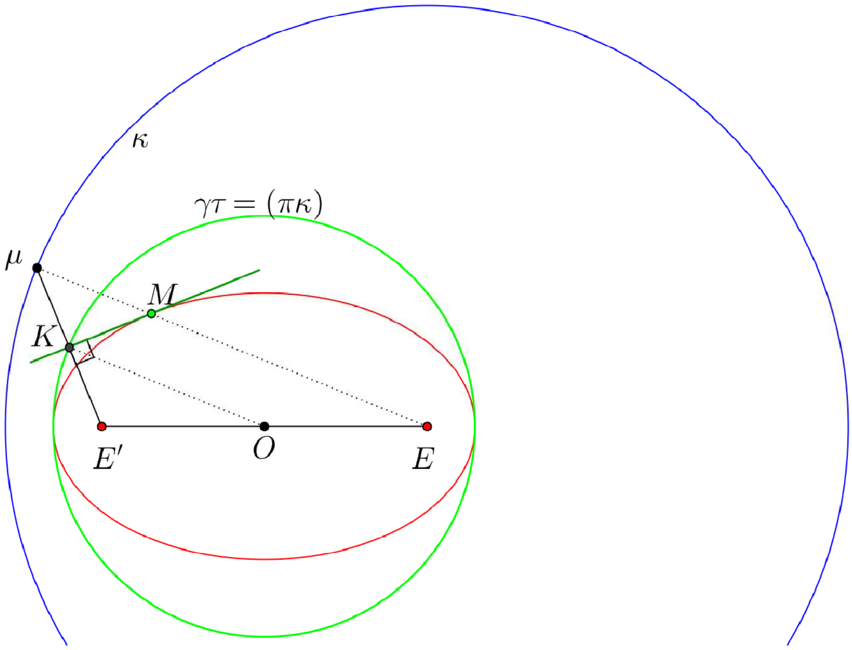
Σχήμα 62

Θεώρημα 7. Ο γεωμετρικός τόπος των προβολών των εστιών (ευκλείδειων) επί των εφαπτομένων κωνικής τομής είναι ο πρωτεύων κύκλος της (Σχήματα 63-65).

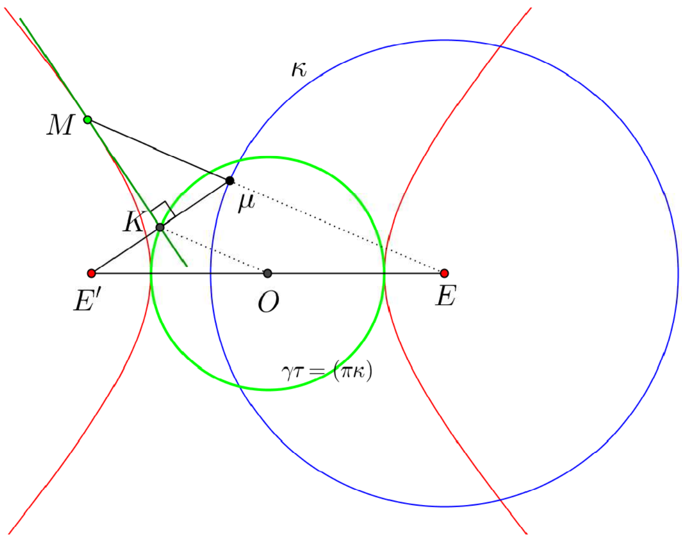
Για μη ευκλείδεια εστία, θυμηθείτε πως δεν ορίζουμε κάθετη από αυτή προς οποιαδήποτε ευθεία του μοντέλου μας για το προβολικό επίπεδο.

Απόδειξη. Αν μ, M τυχαία αντίστοιχα σημεία της κωνικής και του διευθύνοντος κύκλου της εστίας E, η προβολή K της εστίας E' (ευκλείδεια όταν η κ.τ. είναι παραβολή) στην εφαπτόμενη της κ.τ. στο M είναι το μέσον του τμήματος $E'\mu$. Συνεπώς ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος του K είναι η εικόνα του διευθύνοντα κύκλου κ στην ομοιοθεσία $E'\left(M, \frac{1}{2}\right)$, δηλαδή κύκλος με κέντρο το μέσον του $E'E$ και ακτίνα τη μισή του κ.

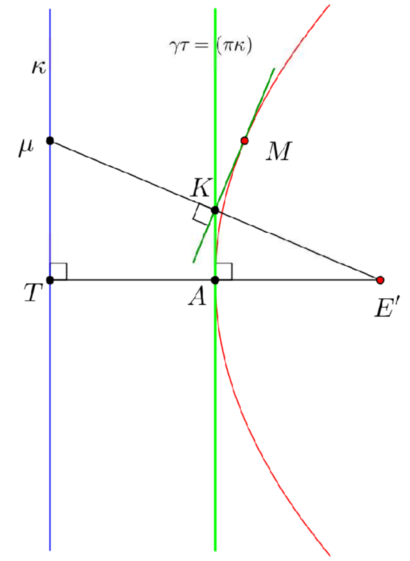
Αυτός είναι ο πρωτεύων κύκλος της κ.τ. (Χωρίς αναφορά σε ομοιοθεσία, παρατηρήστε πως $OK = \frac{EM}{2} = \alpha$.)



Σχήμα 63



Σχήμα 64



Σχήμα 65

Το επόμενο Θεώρημα είναι καθαρά μετρικό και αφορά ουσιαστικά μόνο ελλείψεις και υπερβολές καθώς όπως ξαναθυμηθήκαμε και στο τελευταίο Θεώρημα για την μη ευκλείδεια εστία των παραβολών δεν ορίζουμε ευθεία κάθετη προς δοσμένη άλλη. Αν όμως θεωρήσουμε πως η απόσταση της εστίας αυτής από οποιαδήποτε άλλη ε.ε. είναι άπειρη, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε πως το Θεώρημα ισχύει και για τις παραβολές.

Θεώρημα 7. Το γινόμενο των αποστάσεων των δύο εστιών κωνικής τομής από την τυχαία εφαπτομένη τους ισούται με β^2 (Σχήματα 66-67).

Απόδειξη. Για παραβολές, η απόσταση της ευκλείδειας εστίας από την επ΄άπειρον ευθεία που είναι εφαπτομένη της παραβολής θεωρείται άπειρη, ενώ η απόσταση της άλλης εστίας από την ίδια ευθεία θεωρείται 0 καθώς το σημείο ανήκει σε αυτή. Έτσι για την επ'άπειρον ευθεία η πρόταση ισχύει μόνο κατά σύμβαση. Για τις υπόλοιπες εφαπτομένες της παραβολής, θεωρώντας πως η επ'άπειρον εστία έχει από αυτές απόσταση άπειρη, το ζητούμενο ισχύει τετριμμένα καθώς για την παραβολή $\beta = \infty$.

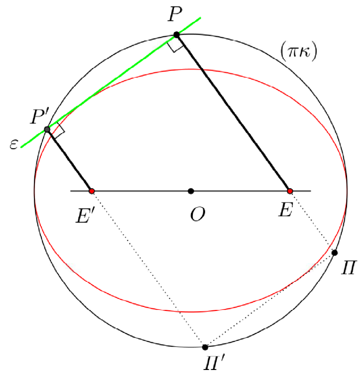
Για ελλείψεις και υπερβολές: έστω P',P οι προβολές των εστιών E',E στην εφαπτομένη ε. Από το προηγούμενο Θεώρημα, Τα P',P ανήκουν στον πρωτεύοντα κύκλο (πτ) και οι ευθείες προβολής $E'P',EP$ αποκόπτουν στον κύκλο αυτό παράλληλες χορδές δημιουργώντας ένα τραπέζιο $P'P\Pi\Pi'$, το οποίο στην πραγματικότητα είναι ορθογώνιο αφού έχει δυο ορθές γωνίες. Η ευθεία $E'E$ που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου που είναι και κέντρο του ορθογωνίου τέμνει συνεπώς τις ευθείες $P'\Pi',P\Pi$ στα $E'E$ ώστε $\overline{EP} = -\overline{E'\Pi'}$ (λαμβάνοντας υπόψη και τους προσανατολισμούς). Όμως το γινόμενο τν αποστάσεων των δύο εστιών $E'E$ από την εφαπτόμενη ε ισούται με

$$\overline{E'P'}\cdot\overline{EP} = \overline{E'P'}\cdot\left(-\overline{E'\Pi}\right) = -\left(\overline{E'P'}\cdot\overline{E'\Pi}\right) = -\Delta(E',(\pi\tau))$$

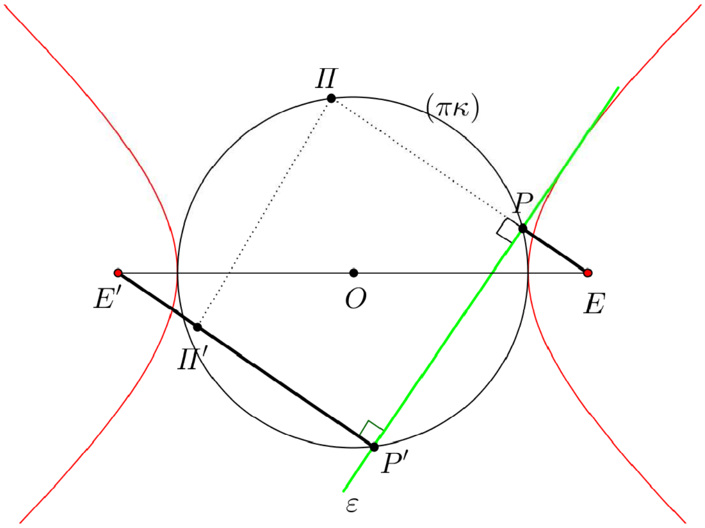
με τον τελευταίο συμβολισμό να δηλώνει τη δύναμη του E' ως προς τον πρωτεύοντα κύκλο (πτ). Καθώς η εκα΄τινα του κύκλου αυτού είναι α, έχουμε

$$-\Delta(E',(\pi\tau)) = -\left(O'E'^2 - \alpha^2\right) = -(\gamma^2 - \alpha^2) = \mp\beta^2$$

Οπότε $E'P'\cdot EP = \beta^2$ όπως ζητείται.



Σχήμα 66



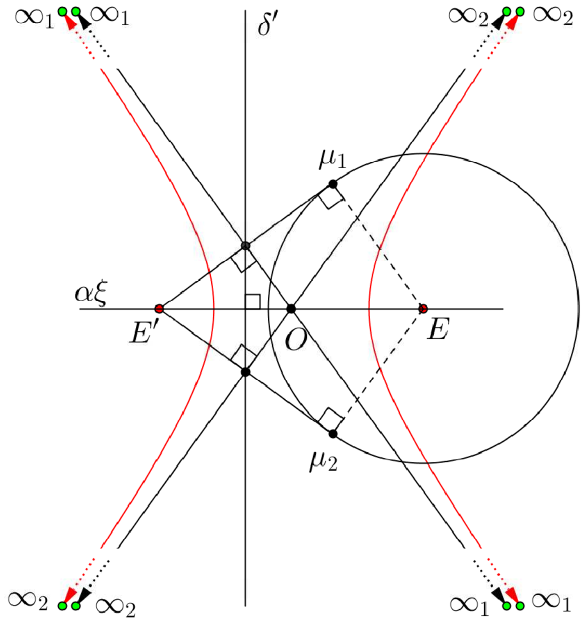
Σχήμα 67

§9 Μερικές ιδιαίτερες ιδιότητες της υπερβολής

Το γεγονός πως για την υπερβολή ορίζουμε ασύμπτωτες ενώ για την έλλειψη και την παραβολή όχι, σημαίνει πως οι ιδιότητες της υπερβολής οι σχετικές με τις ασύμπτωτές της αφορούν αποκλειστικά την ίδια.

Η πρώτη ιδιότητα που αναφέρουμε δεν είναι ιδιαίτερη των υπερβολών, παρά αποτελεί αναδιατύπωση του Θεωρήματος 2 για τις εφαπτόμενες στα επ'άπειρον σημεία μιας υπερβολής, δηλαδή τις ασυμπτώτους της.

Θεώρημα 9. Η εφαπτόμενη σε επ'άπειρον σημείο μιας υπερβολής (δηλαδή μια ασύμπτωτή της) και η εφαπτόμενη στο αντίστοιχα σημείο ενός διευθύνοντος κύκλου της (δηλαδή η κάθετη από την άλλη εστία προς την ασύμπτωτη), τέμνονται επί της διευθετούσας της άλλης εστίας (Σχήμα 68). Με άλλα λόγια:
Οι προβολές των εστιών επί των ασυμπτώτων υπερβολής βρίσκονται στην αντίστοιχη διευθετούσα της.



Σχήμα 68

Το επόμενο Θεώρημα μας δίνει ορισμένες πολύ σημαντικές ιδιότητες της υπερβολής και βασίζεται στο Θεώρημα 1 που σχετίζεται με γωνίες.

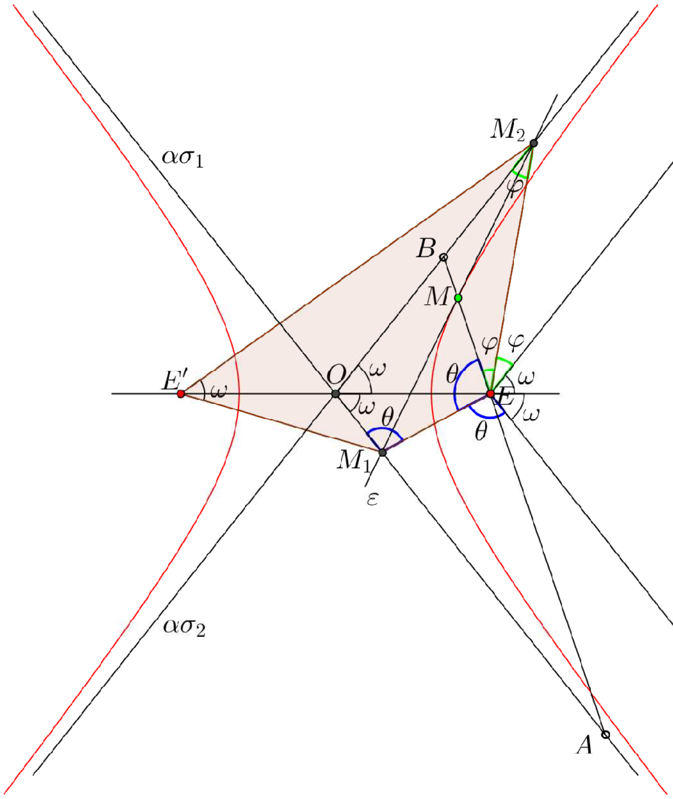
Θεώρημα 10. (α) Αν τυχαία εφαπτομένη υπερβολής τέμνει τις ασύμπτωτες στα M_1, M_2, τότε το τετράπλευρο $E'M_1EM_2$ είναι εγγράψιμο, όπου E_1, E_2 οι εστίες (Σχήμα 69).

(β) Το σημείο επαφής μιας τυχαίας εφαπτομένης υπερβολής, διχοτομεί το τμήμα της εφαπτομένης μεταξύ των ασυμπτώτων της υπερβολής (Σχήμα 69).

(γ) Το τρίγωνο που δημιουργείται από τις δύο ασύμπτωτες και τυχαία εφαπτομένη μιας υπερβολής έχει σταθερό εμβαδόν (Σχήμα 70).

(δ) Σε τυχαία τέμνουσα υπερβολής, τα δύο ευθύγραμμα τμήματα που αποκόπτονται επάνω της μεταξύ της υπερβολής και των ασυμπτώτων είναι ίσα (Σχήμα 70). (Η πρόταση αυτή αποτελεί γενίκευση του μέρους (β) του Θεωρήματος).

Απόδειξη. (α) Έστω πως η δοσμένη εφαπτομένη ε τέμνει την υπερβολή στο χωνί της πλησιέστερα στην εστία E (Σχήμα 69) και τις ασύμπτωτες $\alpha\sigma_1, \alpha\sigma_2$ στα σημεία M_1, M_2. Ας είναι Ex, Ey παράλληλες ημιευθείες από το E προς τις ασύμπτωτες αντιστοίχως οι οποίες ανήκουν στη γωνία των ασυμπτώτων που περιέχει το εν λόγω χωνί της. Θυμηθείτε πως οι ασύμπτωτες αποτελούν επίσης εφαπτομένες της υπερβολής, οπότε ο άξονας που αποτελεί ευθεία από την εστία E προς το σημείο τομής τους, διχοτομεί από το Θεώρημα 3 τη γωνία τους, οπότε διχοτομεί και τη γωνία των Ex, Ey. Εφαρμόζοντας άλλη μια φορά το Θεώρημα 3 για τα ζεύγη εφαπτομένων $(\alpha\sigma_1, \varepsilon)\,(\alpha\sigma_2, \varepsilon)$, έχουμε πως ο άξονας και οι ημιευθείες EM_1, EM_2, Ex, Ey χωρίζουν την πλήρη γωνία περί το E σε τρία ζεύγη γωνιών, με ίσες γωνίες στο κάθε ζεύγος, έστω ω, θ, φ όπως στο Σχήμα. Οπότε η γωνία E του τετραπλεύρου $E'M_1EM_2$ ισούται με $\theta + \varphi$. Όμως το Θεώρημα 3 και πάλι, δίνει πως η γωνία E' του τετραπλεύρου $E'M_1EM_2$ ισούται με ω (μισό της γωνίας των Ex, Ey). Αλλά $(\theta + \varphi) + \omega$ είναι η μισή πλήρης γωνία περί το E, δηλαδή ισούται με π, οπότε το $E'M_1EM_2$ είναι εγγράψιμο.



Σχήμα 69

(β) Ας είναι A, B οι τομές της ευθείες EM με τις ασύμπτωτες $\alpha\sigma_1, \alpha\sigma_2$ (Σχήμα 69). Θέλουμε να δείξουμε ότι $M_1M = MM_2$.

Πράγματι, από Θ. Μενελάου στο τρίγωνο OM_1OM_2 με διατέμνουσα AB έχουμε

$$\frac{OA}{AM_1}\cdot\frac{M_1M}{MM_2}\cdot\frac{M_2B}{BO} = 1 \Rightarrow \frac{M_1M}{MM_2} = \frac{AM_1}{OA}\cdot\frac{BO}{M_2B}.$$

Ας παρατηρήσουμε τώρα πως το τρίγωνο M_1AE είναι ισοσκελές διότι οι εξωτερικές γωνίες του στα M_1, E είναι ίσες με θ η καθεμιά. Οπότε $AM_1 = EA$. Ομοίως $M_2B = EB$. Αλλά από Θ. διχοτόμου στο OAB, με εσωτερική διχοτόμο τον άξονα έχουμε

$$\frac{BO}{OA} = \frac{EB}{EA}$$

και εξαιτίας των δύο τελευταίων σχέσεων

$$\frac{BO}{OA} = \frac{M_2B}{AM_1} \Rightarrow \frac{AM_1}{OA}\cdot\frac{BO}{M_2B} = 1$$

από όπου $\dfrac{M_1M}{MM_2} = \dfrac{AM_1}{OA}\cdot\dfrac{BO}{M_2B} = 1$, δηλαδή το ζητούμενο $M_1M = MM_2$.

(γ) Το εμβαδόν του τριγώνου OM_1M_2 που δημιουργούν οι ασύμπτωτες με την εφαπτομένη ε (Σχήμα 70) ισούται με

$$(OM_1M_2) = \frac{OM_1\cdot OM_2\ sin(O)}{2} = \frac{OM_1\cdot OM_2\ sin(2\omega)}{2}.$$

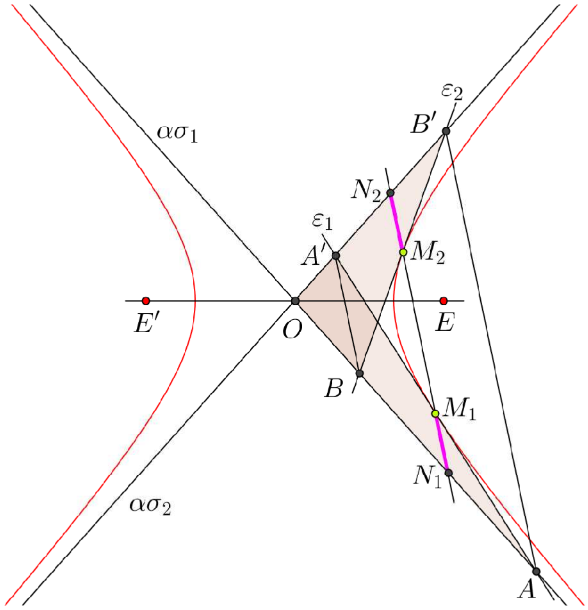
Ας παρατηρήσουμε πως $\triangle OM_1E \approx \triangle OEM_2$ αφού ένα ζεύγος γωνιών του ενός ισούται με ένα του άλλου: στο $\triangle OM_1E$ είναι $O = \omega, M_1 = \theta$ από $Ex \parallel \varepsilon_1$, και στο $\triangle OM_2E$ είναι $O = \omega, M_2 = \varphi$ από $Ex \parallel \varepsilon_1$, οπότε στο $\triangle OM_2E$ είναι και $O = \omega, E = \pi - O - M_2 = \pi - \omega - \varphi = \theta$. Από την ομοιότητα των τριγώνων έχουμε

$$\frac{OM_1}{OE} = \frac{OE}{OM_2} \Rightarrow OM_1\cdot OM_2 = OE^2 = \gamma^2$$

και τότε

$$(OM_1M_2)=\frac{\gamma^2\, sin(2\omega)}{2}=\sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{o}\,.$$

(δ) Ας είναι M_1N_1, M_2N_2 τα τμήματα αυτά επάνω στην τέμνουσα ζ (Σχήμα 70), και έστω $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ οι εφαπτόμενες της υπερβολής στα M_1, M_2 αντιστοίχως. Θα χρειαστούμε επίσης τα σημεία τομής A', A της ε_1 και B', B της ε_2 με τις ασύμπτωτες $\alpha\sigma_1, \alpha\sigma_2$ αντιστοίχως. Η μικρή σειρά των επόμενων παρατηρήσεων οδηγεί στο ζητούμενο:
Από το ζήτημα (γ) τα τρίγωνα $OA'A, OB'B$ είναι ισεμβαδικά, οπότε αφαιρώντας από αυτά το εμβαδόν του OAB προκύπτει πως και τα $A'AB, B'AB$ είναι ισεμβαδικά. Αφού όμως αυτά έχουν κοινή βάση AB, θα έχουν και ίσα ύψη από τα A', B' και συνεπώς $AB \parallel A'B'$. Από το ζήτημα (β) γνωρίζουμε πως τα M_1, M_2 είναι μέσα των τμημάτων $A'A, B'B$ με άκρα στις παράλληλες $AB, A'B'$, οπότε η ευθεία M_1M_2 είναι η μεσοπαράλληλη των παραλλήλων αυτών. Τότε στο τρίγωνο $OA'A$ το τμήμα M_1N_1 είναι παράλληλο στην πλευρά AB, με M_1 μέσον της πλευράς $A'A$, οπότε $M_1N_1=\dfrac{AB}{2}$. Ομοίως $M_2N_2=\dfrac{AB}{2}$ κι έτσι $M_1N_1=M_2N_2$ όπως θέλαμε.



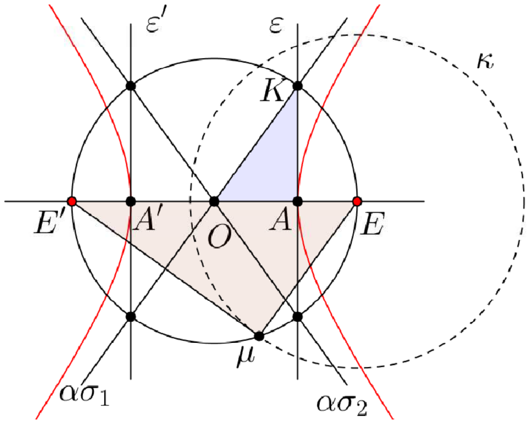
Σχήμα 70

Θεώρημα 11. Οι εφαπτόμενες της υπερβολής στις κορυφές της είναι κάθετες στον άξονά της και τέμνουν τις ασύμπτωτές της σε σημεία του κύκλου με διάμετρο το $E'E$ (E', E οι εστίες).

Απόδειξη. Αν π.χ. ε' η εφαπτομένη στην κορυφή A' (Σχήμα 71) τότε καθώς η υπερβολή είναι συμμετρική ως προς τον άξονά της, η συμμετρική ευθεία $\varepsilon'_{\sigma\upsilon\mu}$ της ε' ως προς τον άξονα οφείλει να αποτελεί και αυτή εφαπτομένη της υπερβολής. Όμως η $\varepsilon'_{\sigma\upsilon\mu}$ διέρχεται από το A' (διότι $A'=\alpha\xi\cap\varepsilon'$), και έτσι από το σημείο αυτό διέρχονται οι εφαπτόμενες $\varepsilon', \varepsilon'_{\sigma\upsilon\mu}$ της υπερβολής. Αφού όμως το A' ανήκει στην υπερβολή, από αυτό διέρχεται μοναδική εφαπτόμενή της. Συνεπώς οι ευθείες $\varepsilon', \varepsilon'_{\sigma\upsilon\mu}$ ταυτίζονται, και επειδή είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα, η ε' είναι η συμμετρική του εαυτού της, που σημαίνει πως είναι κάθετη στον άξονα.
Τώρα ας είναι K το κοινό σημείο της ε με την ασύμπτωτη $\alpha\sigma_1$. Γνωρίζουμε πως η ασύμπτωτη $\alpha\sigma_1$ είναι κάθετη στο ένα εφαπτόμενο τμήμα $E'\mu$ από το E' στο διευθύνοντα κύκλο κ της E. Αφού και η $E\mu \perp E'\mu$, οι $\alpha\sigma_1, E\mu$ είναι παράλληλες, οπότε τα ορθογώνια τρίγωνα $OAK, E\mu E'$ (O το κέντρο της υπερβολής) έχουν μια οξεία γωνία ίση και άρα είναι όμοια. Από την ομοιότητά τους έχουμε

$$\frac{OK}{EE'}=\frac{OA}{E\mu}\Rightarrow\frac{OK}{2\gamma}=\frac{\alpha}{2\alpha}\Rightarrow OK=\gamma$$

και το K ανήκει στον κύκλο κέντρου O και ακτίνας γ, που είναι ακριβώς ο κύκλος διαμέτρου το τμήμα $E'E$.



Σχήμα 71

Ας τελειώσουμε την παράγραφο με δύο κατασκευές, όπου οι ασύμπτωτες υπερβολής θα είναι δοσμένες.

Πρόβλημα 5. Κατασκευή εστιών υπερβολής.

Δεδομένα: ασύμπτωτες $\alpha\sigma_1, \alpha\sigma_2$ υπερβολής ψ και εφαπτόμενη ευθεία ε της ψ.

Ζητούμενα: εστίες E', E της ψ.

Κατασκευή:

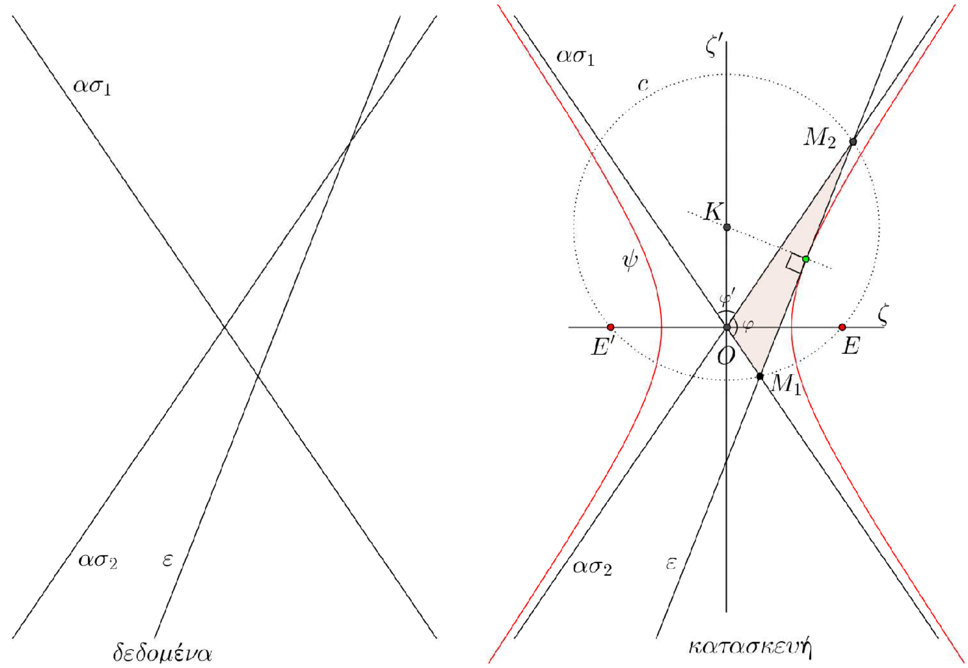
1. O=τομή των $\alpha\sigma_1, \alpha\sigma_2$.
2. M_1, M_2 τομές της ε με τις $\alpha\sigma_1, \alpha\sigma_2$.
3. φ γωνία των $\alpha\sigma_1, \alpha\sigma_2$ που περιέχει το τρίγωνο OM_1M_2 και φ' η γωνία τους που δεν το περιέχει.
4. ζ διχοτόμος της φ, και ζ' διχοτόμος της φ'.
5. K τομής της ζ' με τη μεσοκάθετο στο M_1M_2.
6. E', E = τομές της ζ' με τον κύκλο $c(K, KM_1)$.

Εξήγηση ορθότητας κατασκευής:

Από το Θεώρημα 10 γνωρίζουμε πως τα E', E, M_1, M_2 είναι ομοκυκλικά και άρα το κέντρο K του κύκλου τους οφείλει να βρίσκεται στις μεσοκαθέτους των τμημάτων $E'E, M_1M_2$.

Αφού οι δύο ασύμπτωτες είναι συμμετρικές μεταξύ τους ως προς τον άξονα και τέμνονται στο O, ο άξονας διχοτομεί τη μια γωνία των ασυμπτώτων, και άρα η κάθετη σε αυτόν στο O διχοτομεί την άλλη. Όμως η κάθετη αυτή ως κάθετη στο μέσον O του $E'E$ είναι η μεσοκάθετή του, ενώ ως διχοτόμος της γωνίας των ασυμπτώτων που δεν περιέχει τον άξονα, άρα και το OM_1M_2, είναι η ζ της κατασκευής. Έτσι το σημείο K που κατασκευάστηκε ως τομή της ζ με τη μεσοκάθετη στο M_1M_2 είναι πράγματι το κέντρο του κύκλου των E', E, M_1, M_2. Το τελευταίο βήμα της κατασκευής δίνει τότε πράγματι τη θέση των εστιών επί του άξονα ζ'.

Διερεύνηση: Άσκηση…



Σχήμα 72

Πρόβλημα 6. Κατασκευή υπερβολής.

<u>Δεδομένα</u>: ασύμπτωτες $\alpha\sigma_1, \alpha\sigma_2$ υπερβολής ψ και σημείο M της ψ.

<u>Ζητούμενα</u>: (α) κατασκευή της ψ μέσω κατασκευής επιθυμητού (πεπερασμένου) πλήθους σημείων της. (β) κατασκευή της εφαπτομένης ζ της υπερβολής ψ στο M.

<u>Κατασκευή</u>:

Για το (α).

1. ε = τυχαία ευθεία από το M.
2. M_1, M_2 = τομές της ε με τις $\alpha\sigma_1, \alpha\sigma_2$.
3. M' = σημείο του τμήματος M_1M_2 ώστε $MM_1 = M'M_2$.

Το M' είναι σημείο της ψ.

4. Επαναλαμβάνουμε τα βήματα 1-3 για νέες ευθείες ε.
5. M_0, M'_0 συμμετρικά του M και των M' ως προς το σημείο τομής των $\alpha\sigma_1, \alpha\sigma_2$.

Τα M_0, M'_0 είναι σημεία της ψ.

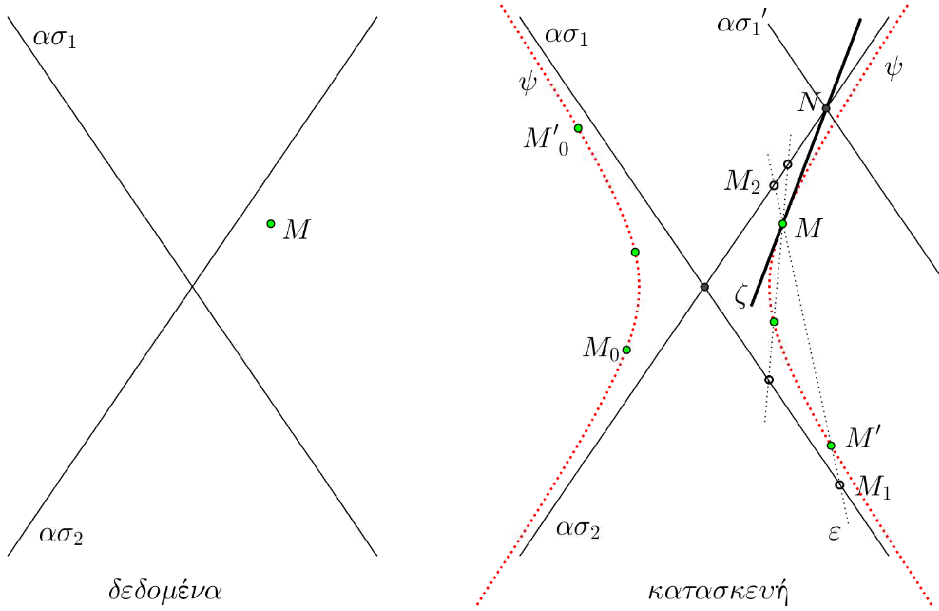
Για το (β).

1. $\alpha\sigma_1'$ = συμμετρική της $\alpha\sigma_1$ ως προς το M.
2. $N = \alpha\sigma_2 \cap \alpha\sigma_1'$.
3. ζ = ευθεία NM.

(Για το (β) αλλιώς: 1. M_1 = τομή της παράλληλης από το M προς την $\alpha\sigma_1$ με την $\alpha\sigma_2$. 2. N = συμμετρικό της τομής των $\alpha\sigma_1, \alpha\sigma_2$ ως προς το M_1. 3. ζ = ευθεία NM.)

<u>Εξήγηση ορθότητας κατασκευής</u>:

Για το (α) η ορθότητα εξηγείται από το Θεώρημα 10(δ), ενώ για το (β) εξηγείται από το Θεώρημα 10(β).



<u>Διερεύνηση</u>: Άσκηση…

Σχήμα 73

§10 Μερικές ιδιαίτερες ιδιότητες της παραβολής

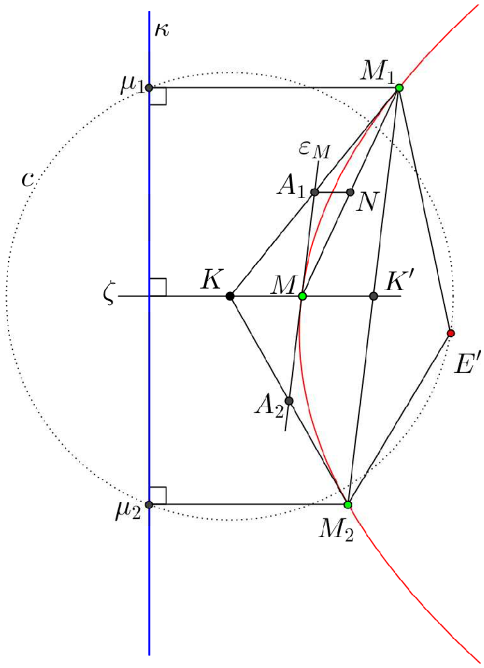
Το γεγονός πως η μια εστία της παραβολής είναι επ'άπειρον σημείο, της προσδίδει ορισμένες όμορφες ιδιότητες για τις οποίες δεν υπάρχουν αντίστοιχες εξίσου όμορφες ιδιότητες της έλλειψης και της υπερβολής. Το λόγο της ύπαρξης τέτοιων ιδιοτήτων μπορούμε να τον αντιληφθούμε π.χ. από την εξής παρατήρηση: αν E η επ'άπειρον εστία της παραβολής και κ ο διευθύνων κύκλος της, για δύο τυχαία αντίστοιχα ως προς τον κ σημεία μ, M, η ευθεία μM είναι παράλληλη στη διεύθυνση που ορίζει η E, δηλαδή παράλληλη στον άξονα. Όμως παρότι για τις ελλείψεις και τις υπερβολές δύο τυχαία αντίστοιχα σημεία μ, M ως προς τον διευθύνοντα κύκλο κ μιας εστίας E, ορίζουν ευθεία μM διερχόμενη από την E, αυτή η ευθεία δεν είναι παράλληλη στον άξονα. Συνεπώς οποιαδήποτε ιδιότητα της παραβολής χρησιμοποιεί την παραλληλία των ευθειών μM με τον άξονα είναι ιδιαίτερη δική της.

Θεώρημα 12. Αν K το κοινό σημείο των εφαπτομένων παραβολής στα σημεία της M_1, M_2, η διάμεσος του τριγώνου KM_1M_2 από το K είναι παράλληλη στον άξονα της παραβολής (Σχήμα 74). Επίσης, το μέσον M της διαμέσου KK' του KM_1M_2 είναι σημείο της παραβολής, και η εφαπτόμενη στο M είναι παράλληλη στο M_1M_2. Το δε τμήμα της τελευταίας εφαπτομένης που αποκόπτεται μεταξύ των εφαπτομένων στα M_1, M_2 διχοτομείται από το M.

Απόδειξη. Αν μ_1, μ_2 τα αντίστοιχα των M_1, M_2 ως προς τον διευθύνοντα κύκλο κ (μια επεκτεταμένη ευθεία) της μη ευκλείδειας εστίας της παραβολής, τότε οι $\mu_1 M_1, \mu_2 M_2$ είναι κάθετες στην κ, δηλαδή παράλληλες μεταξύ τους. Επίσης, τα μ_1, μ_2, E' βρίσκονται στον ίδιο κύκλο c κέντρου K, οπότε η κάθετη από το K στην κ είναι η μεσοκάθετη ζ της χορδής $\mu_1\mu_2$ του c, οπότε είναι παράλληλη στις $\mu_1 M_1, \mu_2 M_2$ και διέρχεται από το μέσον του τμήματος $\mu_1\mu_2$ με άκρα στις $\mu_1 M_1, \mu_2 M_2$. Συνεπώς η ζ είναι η μεσοπαράλληλος των $\mu_1 M_1, \mu_2 M_2$, και επειδή τα M_1, M_2 είναι σημεία των $\mu_1 M_1, \mu_2 M_2$, η ζ διέρχεται από το μέσον του τμήματος M_1M_2. Συνεπώς η ευθεία ζ είναι η ευθεία της διαμέσου του τριγώνου KM_1M_2 από το K, και όπως είδαμε, είναι κάθετη στην κ και άρα παράλληλη στον άξονα.

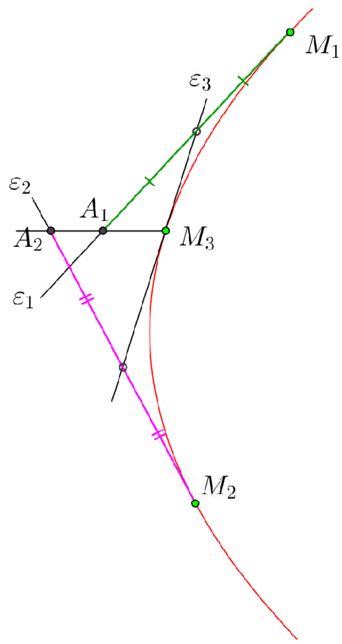
Τώρα, έστω M η τομή της παραβολής με τη διάμεσο του KM_1M_2 και ε_M η εφαπτομένη της παραβολής στο M. Η ε_M διέρχεται από το μέσον A_1 του τμήματος KM_1: αν N είναι το μέσον του τμήματος M_1M, τότε σύμφωνα με ότι αποδείξαμε μόλις προηγουμένως, η ευθεία A_1N είναι παράλληλη στον άξονα της παραβολής, οπότε είναι παράλληλη στις $KM, \mu_1 M_1$ και καθώς διέρχεται από το μέσον N του τμήματος M_1M με άκρα στις $KM, \mu_1 M_1$, αποτελεί την μεσοπαράλληλο τους. Οπότε το A_1 ως κοινό σημείο της μεσοπαραλλήλου A_1N των KM, μ_1M_1 με το τμήμα KM_1 με άκρα στις KM, μ_1M_1, αποτελεί μέσον του τμήματος KM_1.

Με το ίδιο σκεπτικό η εφαπτόμενη ε_M στο M διέρχεται από το μέσον A_2 του τμήματος KM_2, οπότε βρίσκεται επάνω στην ευθεία των μέσων A_1, A_2 των πλευρών KA_1, KA_2 του τριγώνου KM_1M_2, και συνεπώς είναι παράλληλη στην πλευρά M_1M_2 του τριγώνου KM_1M_2, και επίσης πως το M είναι το μέσον του KK'. Επίσης, καθώς KK' διάμεσος του KM_1M_2, έχουμε αμέσως πως M μέσον του τμήματος A_1A_2 που αποκόπτεται από την ε_M μεταξύ των εφαπτομένων στα M_1, M_2.



Σχήμα 74

Άσκηση 5. (Γενίκευση μέρους του Θ. 12) Έστω $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ εφαπτόμενες παραβολής στα σημεία της M_1, M_2, M_3, και έστω A_1, A_2 τα κοινά σημεία των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ με την παράλληλη προς τον άξονα από το M_3. Δείξτε πως η ε_3 διέρχεται από τα μέσα των τμημάτων A_1M_1, A_2M_2. (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το προηγούμενο Θεώρημα. Το Σχήμα 75 δίνει μια από τις δυνατές διατάξεις των σημείων M_1, M_2, M_3 επάνω στην παραβολή. Αποδείξτε το ζητούμενο για όλες τις δυνατές διατάξεις τους.)



Σχήμα 75

Θεώρημα 13. (α) Η μια γωνία δύο εφαπτομένων παραβολής ισούται με το μισό μιας από τις γωνίες υπό τις οποίες φαίνονται από την ευκλείδεια εστία τα σημεία επαφής (Σχήμα 76).
(Συγκεκριμένα, αν M_1, M_2 τα σημεία επαφής και K το κοινό σημείο των εφαπτομένων, τότε θεωρώντας προσανατολισμένες ομόρροπες γωνίες ισχύει $\angle_{\pi\rho} M_1KM_2 = \dfrac{\angle_{\pi\rho} M_1E'M_2}{2}$, όπου K εκτός της $\angle_{\pi\rho} M_1E'M_2$.)
(β) Τα σημεία τομής τριών εφαπτομένων παραβολής και η ευκλείδεια εστία της είναι ομοκυκλικά σημεία (Σχήμα 77).

Απόδειξη. (α) Έστω M_1, M_2 τα σημεία επαφής, K το κοινό σημείο των εφαπτομένων και M_1, M_2 τα αντίστοιχα σημεία των M_1, M_2 ως προς το διευθύνοντα κύκλο (επεκτεταμένη ευθεία) κ της μη ευκλείδειας εστίας E (Σχήμα 76).
Οι γωνίες ω του σχήματος είναι ίσες διότι η KM_1 είναι μεσοκάθετος του $E'M_1$ (Θεώρημα 1), και ομοίως οι γωνίες θ είναι ίσες μεταξύ τους. Οι ίδιες μεσοκάθετες εξασφαλίζουν την ισότητα των δύο γωνιών K_1 καθώς και των δύο γωνιών K_2, οπότε η (μία) γωνία των εφαπτομένων είναι η

$$M_1KM_2 = K_1 + K_2 .$$

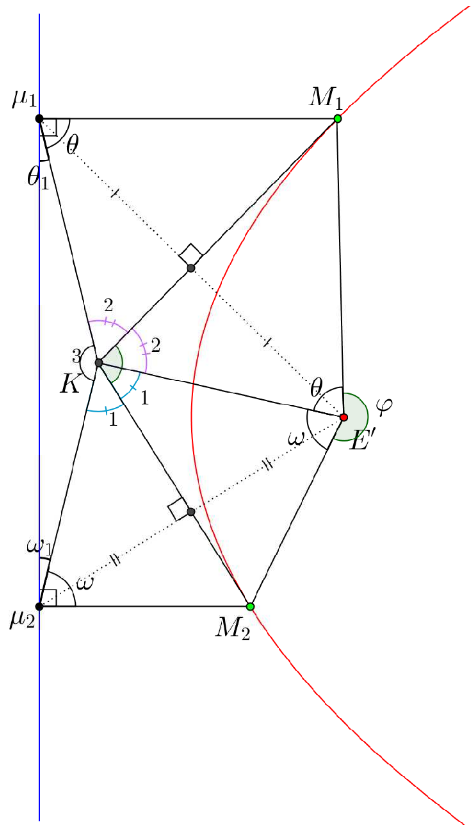
Η γωνία φ είναι η (μία) γωνία υπό την οποία φαίνονται τα σημεία επαφής M_1, M_2 από την ευκλείδεια εστία E' και για τη γωνία αυτή έχουμε

$$\varphi = 2\pi - \omega - \theta .$$

Όμως $\omega = \frac{\pi}{2} - \omega_1, \theta = \frac{\pi}{2} - \theta_1$ διότι οι ευθείες μ_1M_1, μ_2M_2 είναι κάθετες στην κ, οπότε

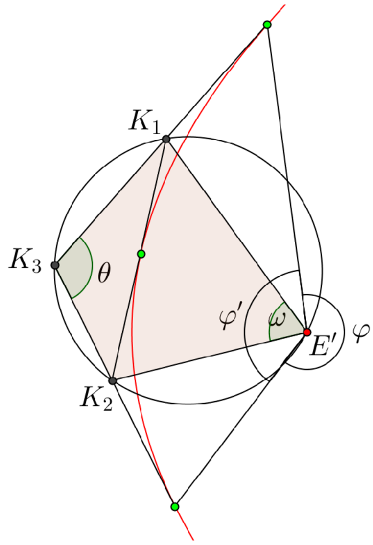
$$\varphi = 2\pi - \omega - \theta = 2\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \omega_1\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right) = \pi + (\omega_1 + \theta_1) \overset{\Delta\mu_1K\mu_2}{=} \pi + (\pi - K_3) = 2\pi - K_3 = 2(K_1 + K_2) = 2M_1KM_2$$

όπως ζητούσαμε.
Ο τελευταίο υπολογισμός διαφέρει ελαφρώς όταν το K βρίσκεται επάνω ή αριστερά από την ευθεία κ, αλλά το αποτέλεσμα είναι το ίδιο.



Σχήμα 76

(β) Είναι (Σχήμα 77) $\varphi' \overset{\Theta.4}{=} 2\omega$ και $\varphi \overset{(\alpha)}{=} 2\theta$ οπότε $2\pi = \varphi' + \varphi \Rightarrow 2\pi = 2\theta + 2\varphi \Rightarrow \pi = \theta + \varphi$ και το $K_3K_1E'K_2$ είναι εγγράψιμο.

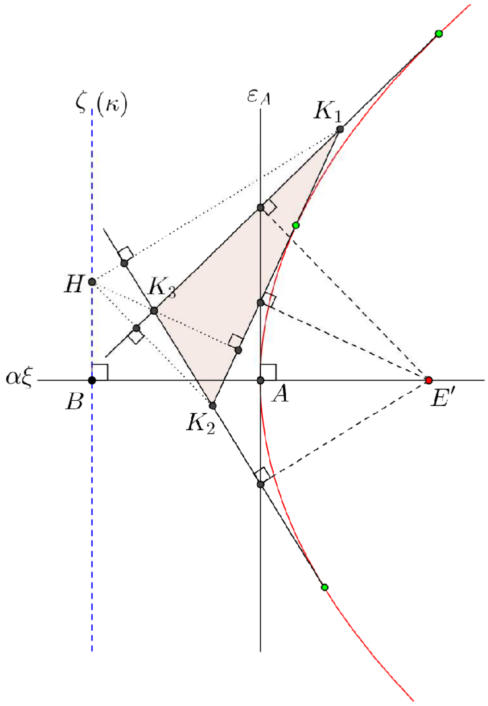


Σχήμα 77

Θεώρημα 14. (α) Το ορθόκεντρο του τριγώνου που ορίζουν τα σημεία τομής τριών εφαπτομένων παραβολής βρίσκεται στον διευθύνοντα κύκλο της μη ευκλείδεια εστίας (δηλαδή στη διευθετούσα της ευκλείδειας εστίας παραβολής). (Σχήμα 78)

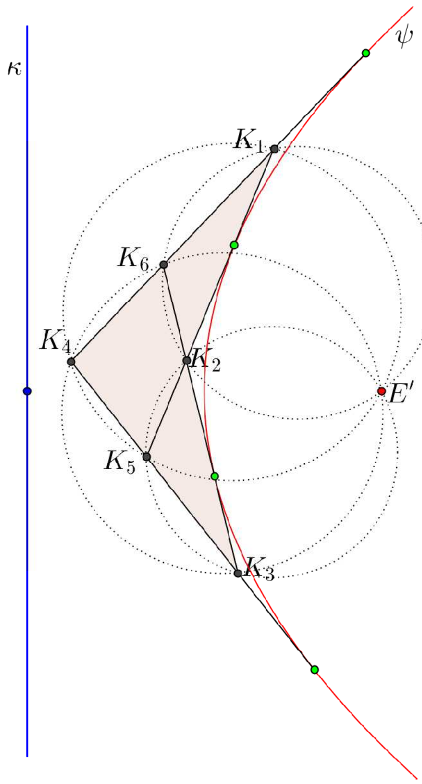
(β) Τέσσερις ανά δύο τεμνόμενες ευθείες και ανά τρεις μη συνευθειακές, εφάπτονται σε μοναδική παραβολή (Σχήμα 79).

Απόδειξη. (α) Σύμφωνα με το Θεώρημα 7 οι προβολές της ευκλείδειας εστίας E' στις εφαπτόμενες ανήκουν στον πρωτεύοντα κύκλο της παραβολής, δηλαδή στην εφαπτόμενη ε_A στην κορυφή της A. Οπότε η ε_A αποτελεί την ευθεία *Simson* του τριγώνου που δημιουργούν τα σημεία τομής K_1, K_2, K_3 τριών εφαπτομένων της παραβολής (Σχήμα 78) για το σημείο E' του περιγεγραμμένου κύκλου του. Αλλά ως γνωστόν, το ορθόκεντρο H του τριγώνου $K_1K_2K_3$ βρίσκεται επί της ομοιόθετης ζ της ε_A στην ομοιοθεσία κέντρου E' και λόγου 2. Η ζ είναι λοιπόν ευθεία παράλληλη στην ε_A και διερχόμενη από το ομοιόθετο B του A στην παραπάνω ομοιοθεσία. Το B είναι λοιπόν σημείο της ημιευθείας $E'A$, ώστε $E'B = 2E'A$, δηλαδή είναι σημείο του άξονα της παραβολής ώστε το A να αποτελεί μέσον του $E'B$. Με άλλα λόγια το B είναι το σημείο τομής του άξονα με το διευθύνοντα κύκλο κ της μη ευκλείδειας εστίας της παραβολής, οπότε οι κάθετες στον άξονα ευθείες ζ, κ οι διερχόμενες από το κοινό σημείο B ταυτίζονται. Αυτό σημαίνει πως το ορθόκεντρο H του τριγώνου $K_1K_2K_3$ όντως ανήκει στον διευθύνοντα κύκλο κ (διευθετούσα δ') της παραβολής.



Σχήμα 78

(β) Σύμφωνα με το ερώτημα (β) του Θεωρήματος 13, αν οι τέσσερις ευθείες εφάπτονται σε κάποια παραβολή, τότε η ευκλείδεια εστία της E' οφείλει να βρίσκεται στους περιγεγραμμένους κύκλους των τριγώνων που ορίζουν τα σημεία τομής τριών οποιωνδήποτε από τις τέσσερις δοσμένες ευθείες (στο Σχήμα 79 αυτά είναι τα $K_1K_2K_6, K_1K_5K_6, K_3K_2K_5, K_3K_2K_5, K_3K_6K_4$).



Σχήμα 79

Τέτοιο κοινό σημείο υπάρχει πράγματι για οποιεσδήποτε τέσσερις ευθείες που ανά δύο τέμνονται και ανά τρεις δε διέρχονται από το ίδιο σημείο. Πρόκειται για το σημείο Miquel του πλήρους τετραπλεύρου που ορίζουν οι τέσσερις ευθείες (στο Σχήμα 79 είναι το $K_1K_2K_3K_4K_5K_6$). Οπότε όλες οι παραβολές που εφάπτονται ταυτοχρόνως στις τέσσερις ευθείες έχουν την ίδια εστία E'. Επιπλέον έχουν και τον ίδιο διευθύνοντα κύκλο κ

της επ'άπειρον εστίας (δηλαδή διευθετούσα δ της ευκλείδειας), διότι σύμφωνα με την απόδειξη του (α) αυτή αποτελεί την ευθεία Simpson του E' ως προς οποιοδήποτε επιλεγμένο από τα τρίγωνα που δημιουργούν τα σημεία τομής των ευθειών (π.χ. το $K_1K_2K_6$). Μάλιστα, καθώς το σημείο E' δεν ταυτίζεται με κάποιο από τα σημεία τομής των ευθειών, δε γίνεται να βρίσκεται επάνω στην ευθεία Simpson που αναφέραμε, δηλαδή στην κοινή διευθετούσα των παραβολών. Όμως γνωρίζουμε πως υπάρχει μοναδική παραβολή ψ με δεδομένη ευκλείδεια εστία και διευθετούσα που δε διέρχεται από την εστία, κι έτσι υπάρχει μοναδική παραβολή που είναι δυνατόν να εφάπτεται στις δοσμένες ευθείες (αυτή όντως εφάπτεται στις δοσμένες ευθείες!...δικαιολογήστε).

Φυσικά μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το τελευταίο Θεώρημα στο επόμενο Πρόβλημα.

Πρόβλημα 7. **Κατασκευή του διευθύνοντα κύκλο της, επ'άπειρον εστίας (δηλαδή της διευθετούσας της ευκλείδειας εστίας), εύρεση της ευκλείδειας εστίας μιας παραβολής.** (Σχήμα 80)

Δεδομένα: τέσσερις εφαπτόμενες $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ της παραβολής ψ.

Ζητούμενα: διευθετούσα $\delta' = \kappa$ ευκλείδειας εστίας, ευκλείδεια εστία E' της ψ.

Κατασκευή :

(α) 1. τ = πλήρες τετράπλευρο των τομών των $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$.

2. H_1, H_2 = ορθόκεντρα δύο τριγώνων του τ.

3. $H_1H_2 = \delta' = \kappa$.

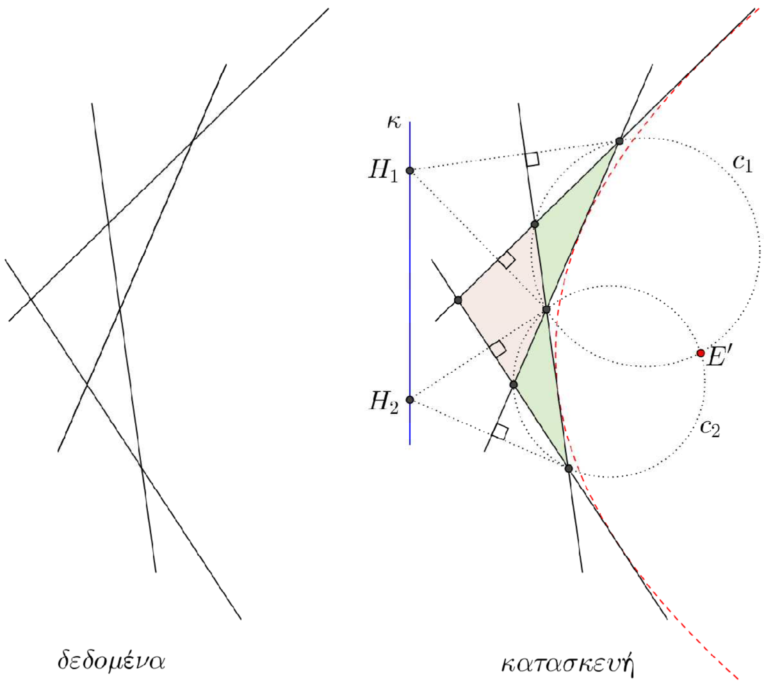
(β) 1. τ = πλήρες τετράπλευρο των τομών των $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$.

2. c_1, c_2 = περιγεγραμμένοι κύκλοι δύο τριγώνων του τ.

3. E' = κοινό σημείο των c_1, c_2 άλλο από τομή των ε_i μεταξύ τους.

Εξήγηση ορθότητας κατασκευής: Άμεσο εξαιτίας του Θεωρήματος 14.

Διερεύνηση: Άσκηση…



Σχήμα 80

Άσκηση 6. Στο Σχήμα 80 σχεδιάστηκε και η παραβολή χωρίς όμως να ζητείται στην εκφώνηση του Προβλήματος 7. Αν ο σχεδιασμός της αποτελέσει μέρος του ζητούμενου, ποια επιπλέον βήματα πρέπει να προστεθούν στην κατασκευή;

Άσκηση 7. Έστω $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ δύο τεμνόμενες ευθείες και M_1, M_2 σημεία των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ αντιστοίχως διάφορα του κοινού τους σημείου. Δείξτε πως υπάρχει μοναδική παραβολή εφαπτόμενη των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ στα M_1, M_2. (Υπόδειξη: Υποθέτοντας πως τέτοια παραβολή υπάρχει, δείξτε πως η εστία της και ο άξονά της καθορίζονται μοναδικά: αν K το κοινό σημείο των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, η διάμεσος του KM_1M_2 είναι παράλληλη στον άξονα, και αν μ_1, μ_2 τα αντίστοιχα των M_1, M_2 επί του διευθύνοντος κύκλου της μη ευκλείδειας εστίας τότε $M\mu_1, M_2\mu_2$ παράλληλες στον άξονα και M_1, M_2 στις μεσοκάθετες των $E'\mu_1, E'\mu_2$. Αυτά καθορίζουν μοναδικά την E', και κατόπιν αυτό καθορίζει μοναδικά τα μ_1, μ_2 δηλαδή τον διευθύνοντα κύκλο $\mu_1\mu_2$ της μη ευκλείδεια εστίας. Δηλαδή αν υπάρχει παραβολή με τις ιδιότητες της Άσκησης, αυτή είναι μοναδική. Μάλιστα η παραβολή που μόλις καθορίσαμε έχει τις ιδιότητες της Άσκησης, δηλαδή πράγματι εφάπτεται στις $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ στ α M_1, M_2 αντιστοίχως… Άρα λοιπόν όντως υπάρχει μοναδική παραβολή με τις ζητούμενες ιδιότητες.)

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

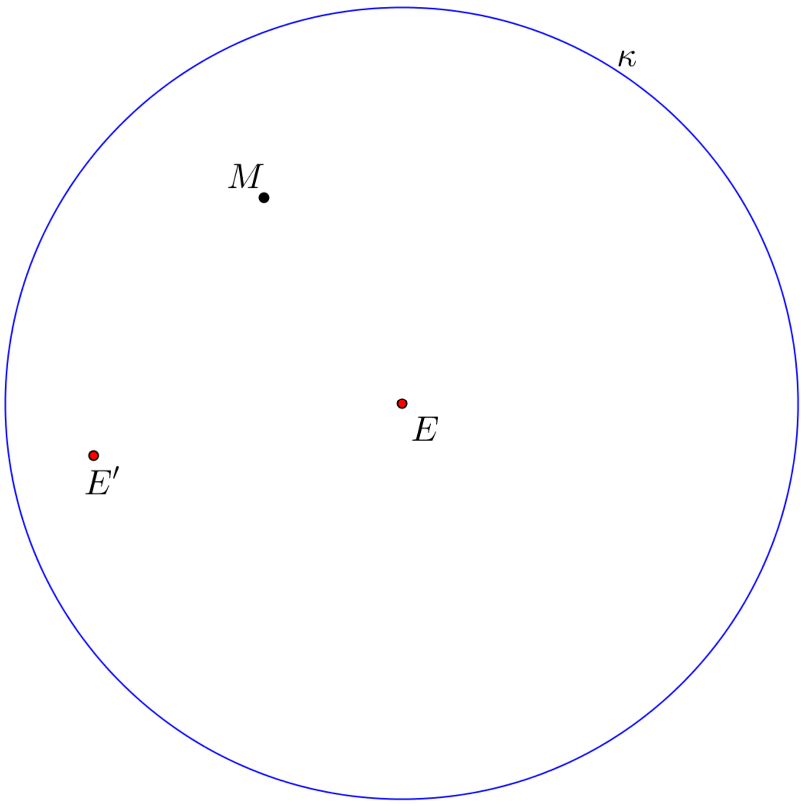
Στις Ασκήσεις που ακολουθούν, λέγοντας να ορισθεί μια κωνική τομή εννοούμε να κατασκευαστούν με κανόνα και διαβήτη οι εστίες της και ο ένας διευθύνοντας κύκλος της. Τα στοιχεία αυτά φυσικά ορίζουν πλήρως την κωνική τομή.

Άσκηση 8. Να οριστεί η έλλειψη ή η υπερβολή όταν δίνονται:
(1) η θέση του μεγάλου άξονα και μία εφαπτόμενη.
(Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το Θ7 για την κατασκευή των προβολών των εστιών επί της εφαπτομένης. Κατόπιν κατασκευάστε τις εστίες ως τομές του μεγάλου άξονα με τις κάθετες στην εφαπτομένη στα σημεία των προβολών που μόλις βρήκατε. Τέλος κατασκευάστε τον διευθύνοντα κύκλο της μιας εστίας με κέντρο αυτή και ακτίνα το μήκος του μεγάλου άξονα.)
(2) το κέντρο, το μήκος του μεγάλου άξονα και δύο εφαπτόμενες.
(3) μία εστία, μία εφαπτόμενη, το μήκος του μεγάλου άξονα και η διεύθυνσή του.
(4) μία εστία και τρεις εφαπτόμενες.
(5) μία εστία, ένα σημείο και δύο εφαπτόμενες.
(6) μία εστία και τρία σημεία.
(7) μία εστία, δύο σημεία και μία εφαπτόμενη.
(8) μία εστία, ένα σημείο και η εφαπτόμενη σε αυτό, και μία ακόμη εφαπτόμενη.

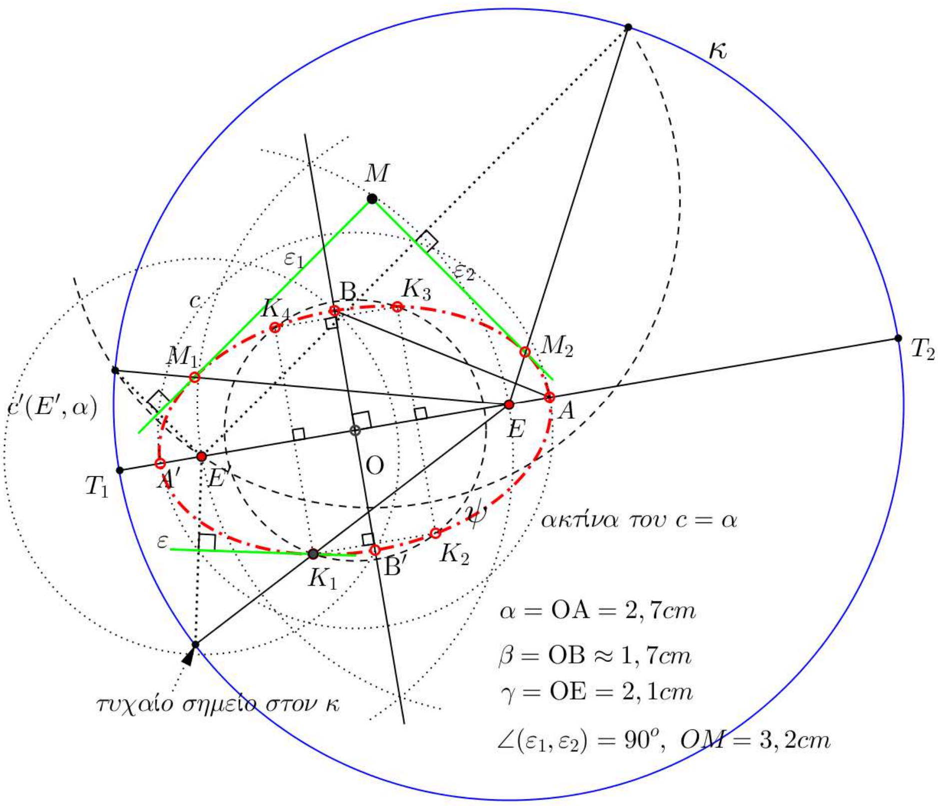
Άσκηση 9. Να οριστεί η υπερβολή όταν δίνονται:
(1) οι ασύμπτωτες και μία εστία.
(2) οι ασύμπτωτες και το μήκος του μεγάλου άξονα.
(3) οι ασύμπτωτες και το μήκος γ.

Άσκηση 10. Να οριστεί η παραβολή όταν δίνονται:
(1) η ευκλείδεια εστία, ο άξονας και μία εφαπτόμενη.
(2) η ευκλείδεια εστία και δύο εφαπτόμενες.
(3) η ευκλείδεια εστία και δύο σημεία.
(4) η ευκλείδεια εστία, ένα σημείο και δύο εφαπτόμενες.
(5) δύο σημεία και ο διευθύνοντας κύκλος της επ'άπειρον εστίας.
(6) διευθύνοντας κύκλος της επ'άπειρον εστίας και δύο εφαπτόμενες
(7) ένα σημείο, ο διευθύνοντας κύκλος της επ'άπειρον εστίας και μία εφαπτόμενη.
(8) η διεύθυνση του άξονα και τρεις εφαπτόμενες.
(9) ο άξονας και δύο μη συμμετρικά σημεία της.

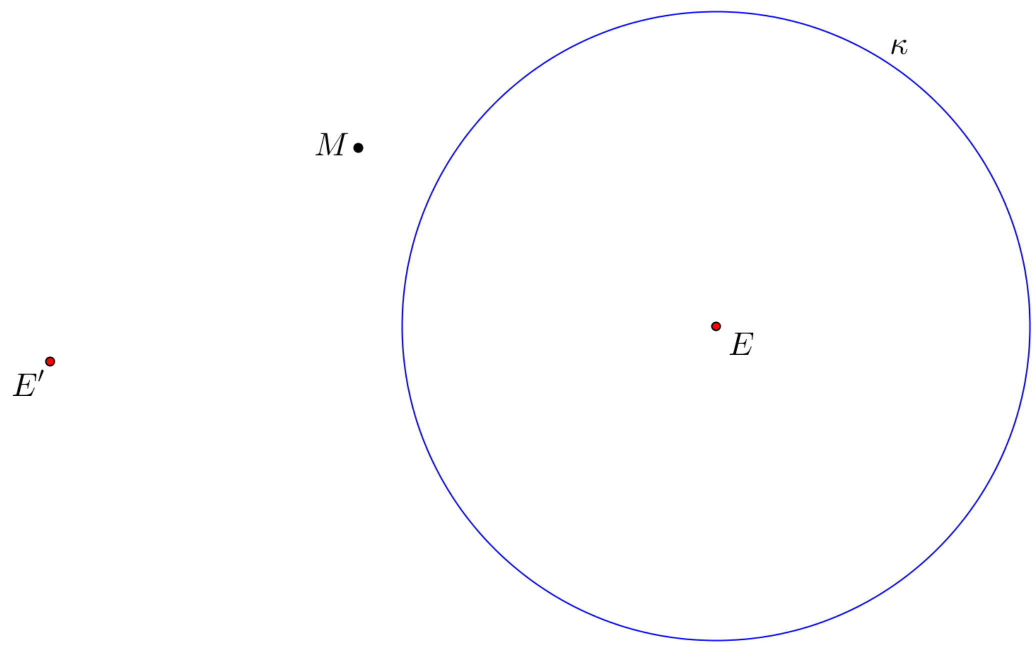
Άσκηση 11. Δίνονται οι εστίες E', E και ο διευθύνοντας κύκλο $\kappa(E, 2\alpha)$ έλλειψης ψ , καθώς και σημείο M του επιπέδου (Σχήμα 81). Να κατασκευάσετε: (α) το κέντρο O , τις κορυφές A', A του μεγάλου και B', B του μικρού άξονα της ψ , (β) τις εφαπτόμενες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ της ψ από το M καθώς και τα σημεία επαφής τους M_1, M_2, (γ) άλλη μια εφαπτόμενη ε της έλλειψης καθώς και το σημείο επαφής της K_1, (δ) τα συμμετρικά K_2, K_3, K_4 του K_1 ως προς τους άξονες και να σχεδιάσετε την ψ . Να μετρήσετε: (ε) τα α, β, γ της ψ σε εκατοστά, (στ) τη γωνία των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ σε μοίρες και την απόσταση OM σε εκατοστά. Τι παρατηρείτε;



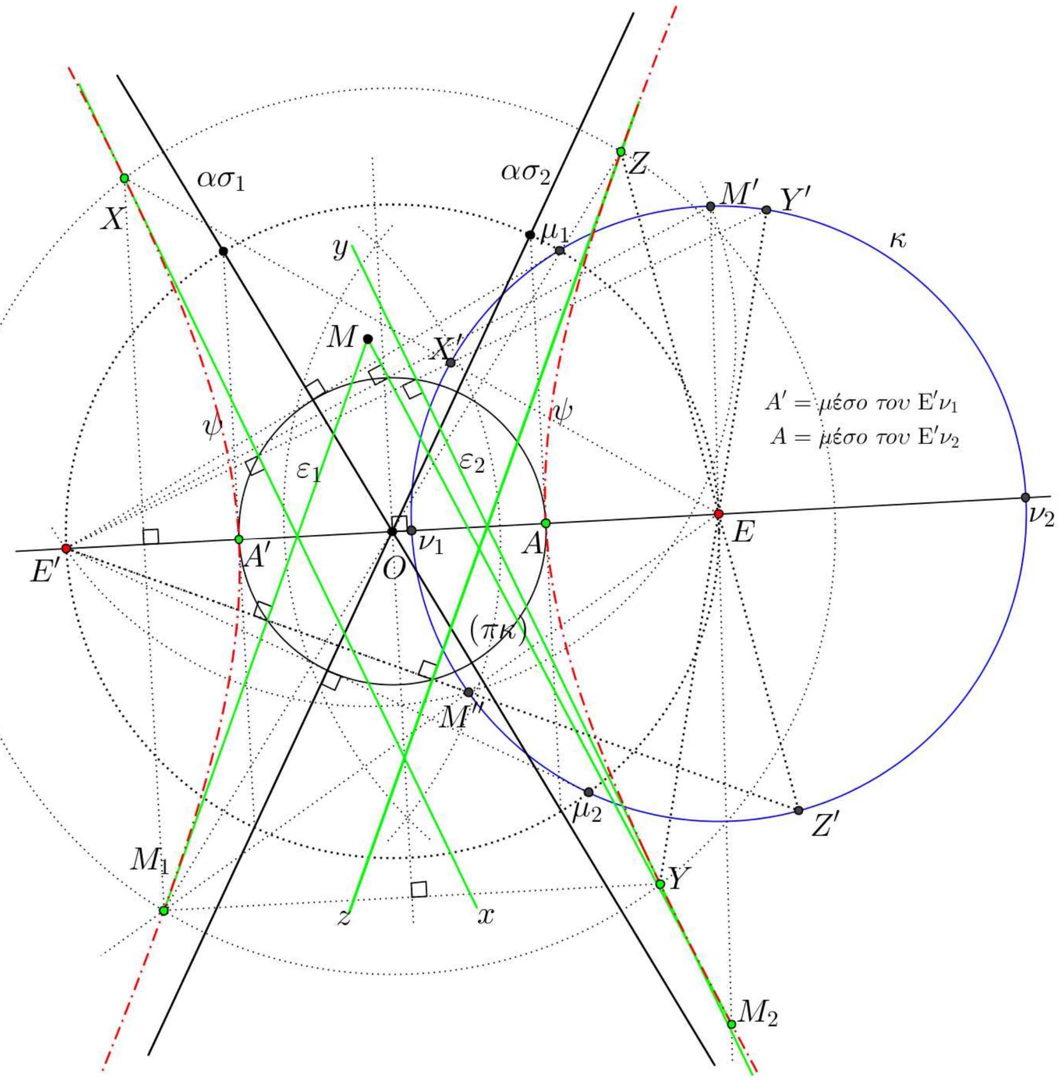
Δεδομένα: Σχήμα 81↑,   Λύση: Σχήμα 82 ↓



Άσκηση 12. Δίνονται οι εστίες E', E και ο διευθύνοντας κύκλος $\kappa(E, 2\alpha)$ υπερβολής ψ, καθώς και σημείο M του επιπέδου (Σχήμα 83). Να κατασκευάσετε: (α) τις κορυφές A', A του άξονα, τις ασύμπτωτες $\alpha\sigma_1, \alpha\sigma_2$, τον πρωτεύοντα κύκλο $(\pi\kappa)$ και το κέντρο O της ψ, (β) τις εφαπτόμενες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ της ψ από το M καθώς και τα σημεία επαφής τους M_1, M_2, (γ) τα συμμετρικά X, Y, Z του M_1 ως προς τους άξονες και το κέντρο της ψ, (δ) τις εφαπτόμενες ευθείες x, y, z της ψ στα X, Y, Z και να σχεδιάσετε την υπερβολή.



Δεδομένα: Σχήμα 83↑, Λύση: Σχήμα 84 ↓



Άσκηση 13. Δίνεται ο διευθύνοντας κύκλος κ της επ'άπειρον εστίας της παραβολής ψ , η εφαπτομένη της ε το σημείο της K καθώς και το σημείο M του επιπέδου (Σχήμα 85).

(α) Κατασκευάστε την ευκλείδεια εστία E', τον άξονα $\alpha\xi$ και την κορυφή A της ψ .

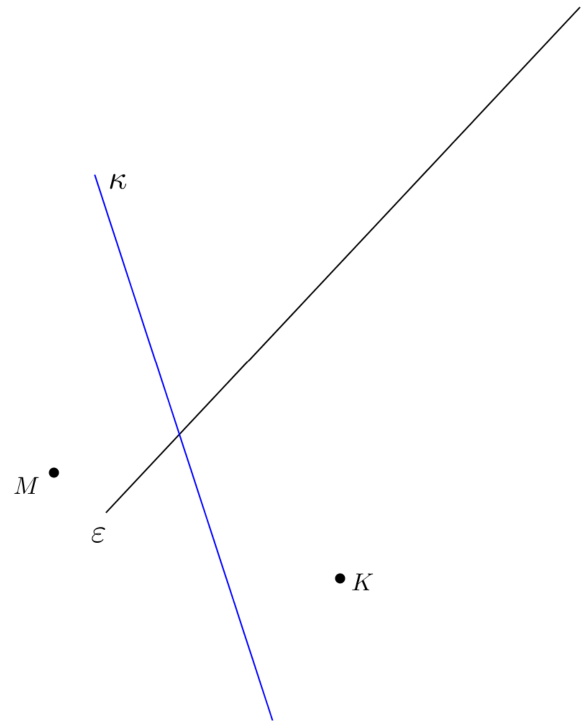
Πόσες λύσεις υπάρχουν; Επιλέξτε μια από αυτές και:

(β) Κατασκευάστε το σημείο επαφής T της ε με την ψ .

(γ) Κατασκευάστε την εφαπτόμενη ζ της ψ στο K .

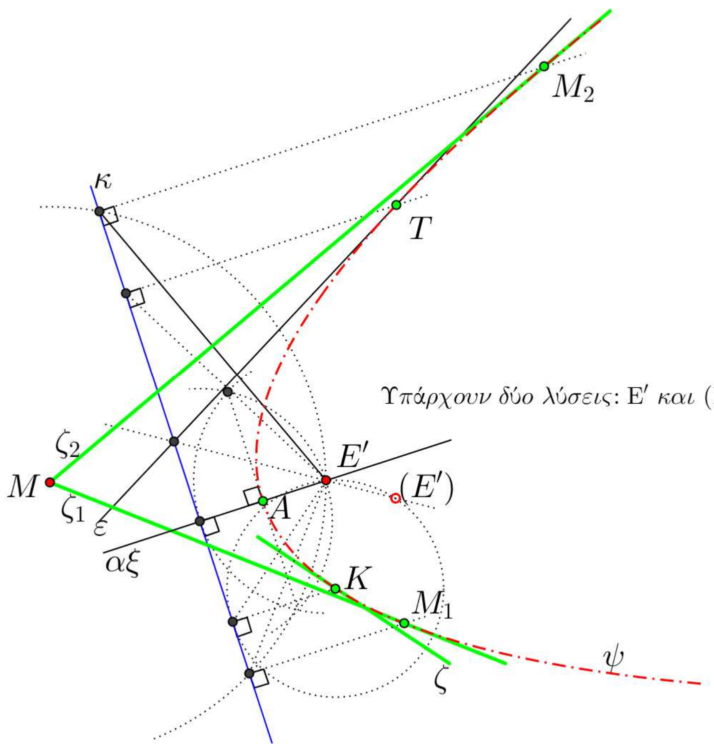
(δ) Κατασκευάστε τις εφαπτόμενες ζ_1,ζ_2 της ψ από το M καθώς και τα σημεία επαφής τους M_1,M_2.

(ε) Σχεδιάστε την παραβολή.



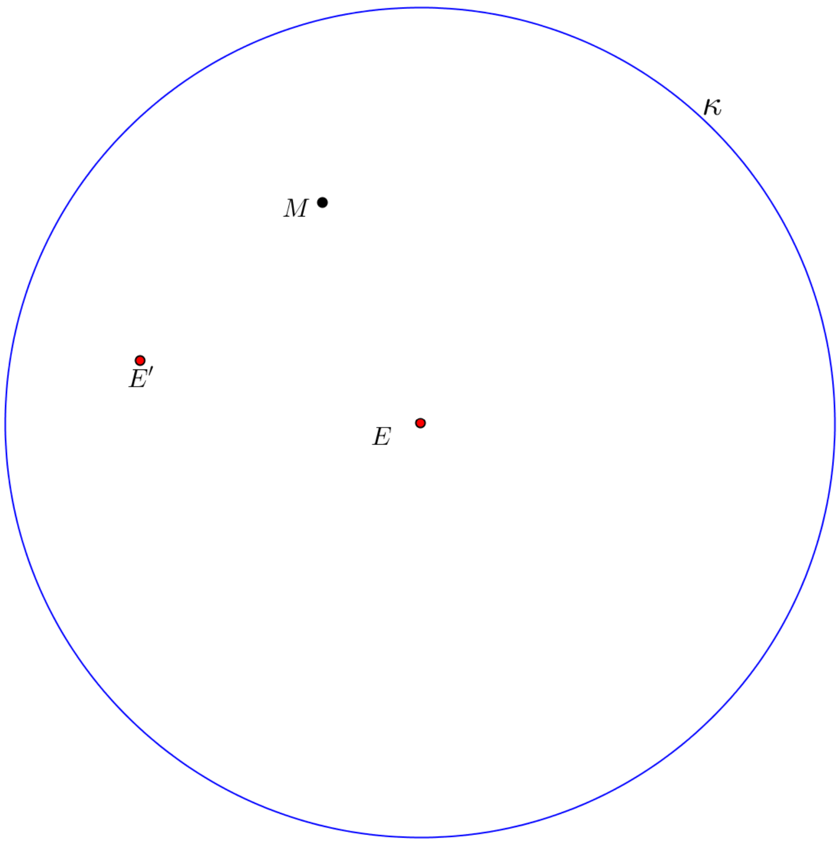
Σχήμα 85

Λύση



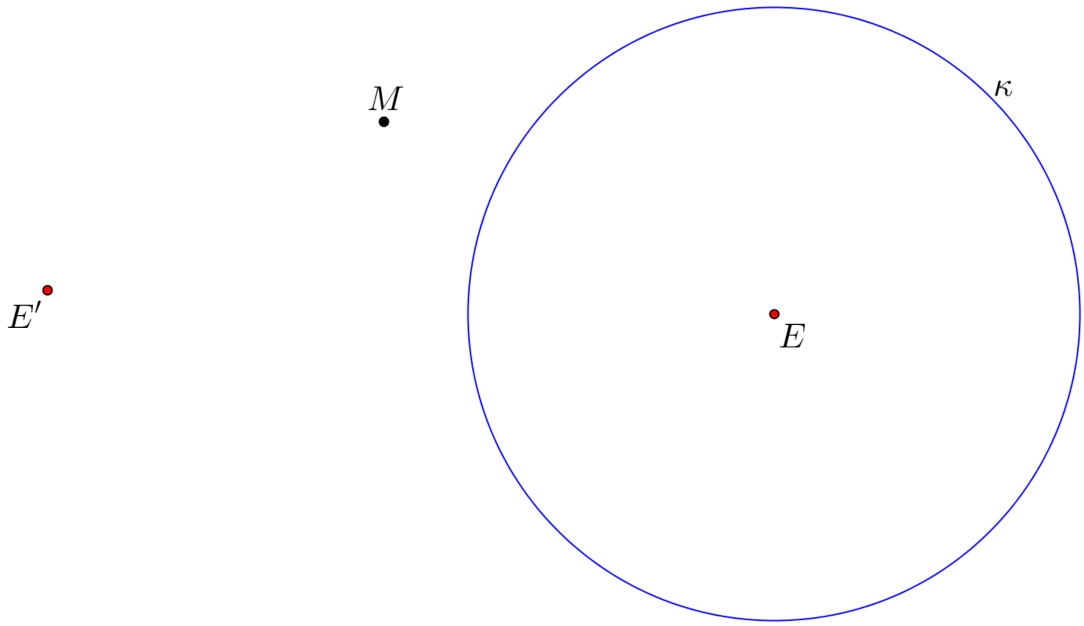
Σχήμα 86

Άσκηση 14. Δίνονται οι εστίες E', E και ο διευθύνοντας κύκλο $\kappa(E, 2\alpha)$ έλλειψης ψ , καθώς και σημείο M του επιπέδου (Σχήμα 87). Να κατασκευάσετε: (α) το κέντρο O , τις κορυφές A', A του μεγάλου και B', B του μικρού άξονα της ψ , (β) τις εφαπτόμενες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ της ψ από το M καθώς και τα σημεία επαφής τους M_1, M_2, (γ) άλλη μια εφαπτόμενη ε της έλλειψης καθώς και το σημείο επαφής της K_1, (δ) τα συμμετρικά K_2, K_3, K_4 του K_1 ως προς τους άξονες και να σχεδιάσετε την ψ . Να μετρήσετε: (ε) τα α, β, γ της ψ σε εκατοστά, (στ) τη γωνία των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ σε μοίρες και την απόσταση OM σε εκατοστά.



Σχήμα 87

Άσκηση 15. Δίνονται οι εστίες E', E και ο διευθύνοντας κύκλος $\kappa(E, 2\alpha)$ υπερβολής ψ, καθώς και σημείο M του επιπέδου (Σχήμα 88). Να κατασκευάσετε: (α) τις κορυφές A', A του άξονα, τις ασύμπτωτες $\alpha\sigma_1, \alpha\sigma_2$, τον πρωτεύοντα κύκλο $(\pi\kappa)$ και το κέντρο O της ψ, (β) τις εφαπτόμενες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ της ψ από το M καθώς και τα σημεία επαφής τους M_1, M_2 (αν βρίσκονται εντός του χαρτιού), (γ) τα συμμετρικά X, Y, Z του M_1 ως προς τους άξονες και το κέντρο της ψ, (δ) τις εφαπτόμενες ευθείες x, y, z της ψ στα X, Y, Z και να σχεδιάσετε την υπερβολή.



Σχήμα 88

Άσκηση 16. Δίνεται ο διευθύνοντας κύκλος κ της επ'άπειρον εστίας της παραβολής ψ, η εφαπτομένη της ε, το σημείο της K καθώς και το σημείο M του επιπέδου (Σχήμα 89).

(α) Κατασκευάστε την ευκλείδεια εστία E', τον άξονα $\alpha\xi$ και την κορυφή A της ψ.

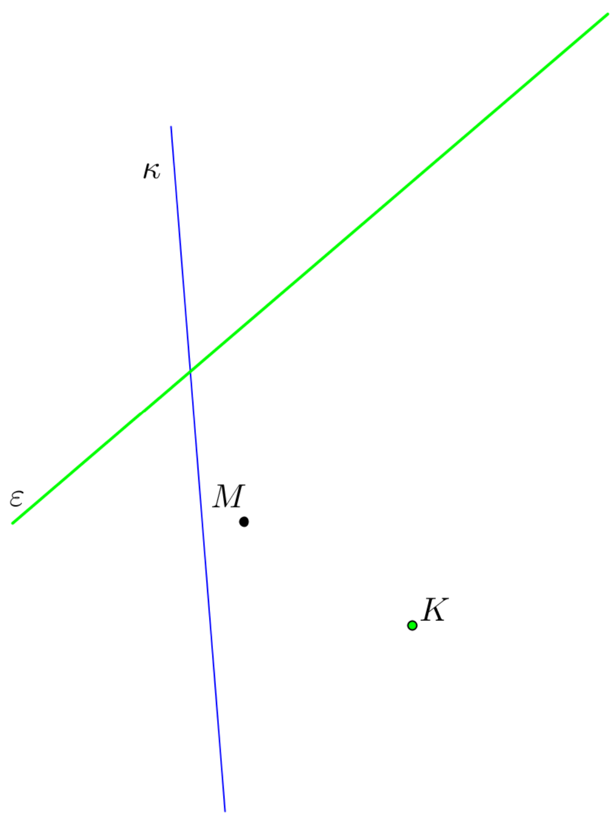
Πόσες λύσεις υπάρχουν; Επιλέξτε μια από αυτές και:

(β) Κατασκευάστε το σημείο επαφής T της ε με την ψ.

(γ) Κατασκευάστε την εφαπτόμενη ζ της ψ στο K.

(δ) Κατασκευάστε τις εφαπτόμενες ζ_1, ζ_2 της ψ από το M καθώς και τα σημεία επαφής τους M_1, M_2.

(ε) Σχεδιάστε την παραβολή.



Σχήμα 89

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ