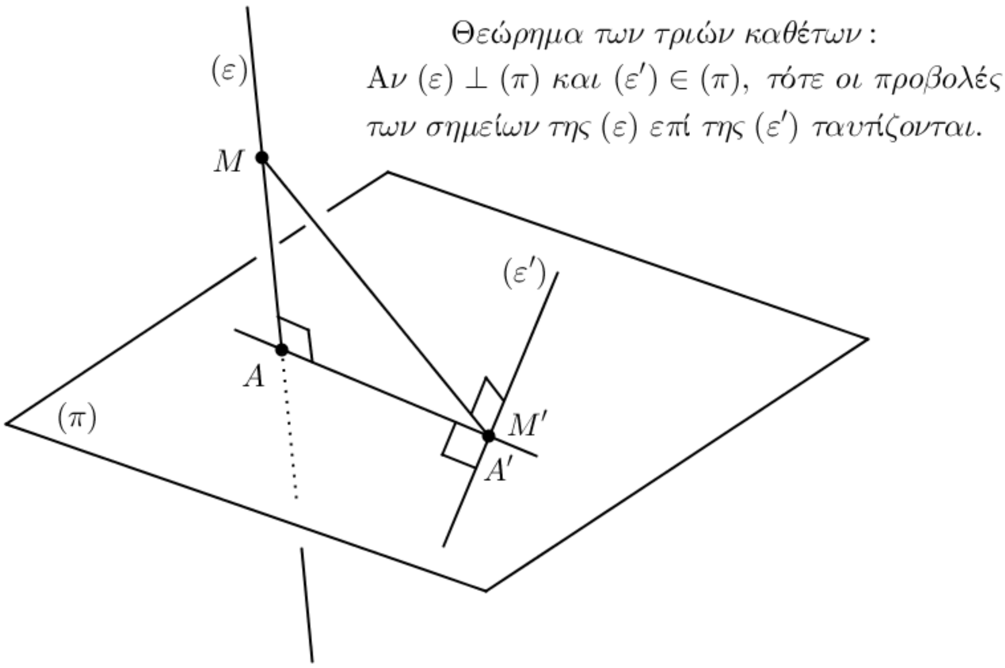
ΚΟΝΤΟΚΩΣΤΑΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΣΤΕΡΕΟΜΕΤΡΙΑΣ

(1η εκδοχή, Σεπτ. 2013)

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
πολιτικών μηχανικών



Στη συνέχεια θα παραθέσουμε χωρίς αποδείξεις ένα σύνολο από Προτάσεις (και αξιώματα) τα οποία θα μας φανούν χρήσιμα για να κατανοήσουμε τις βασικές ιδιότητες των σχημάτων του χώρου. Οι ιδιότητες που πραγματεύονται οι Προτάσεις αφορούν κυρίως την **παραλληλία**, την **καθετότητα** και τις **δίεδρες γωνίες**.

Προτάσεις και αξιώματα:

(1) Κάθε επίπεδο περιέχει άπειρα σημεία και ευθείες, αλλά υπάρχουν και άπειρα σημεία και ευθείες που δεν ανήκουν σε αυτό (Σχ. 1α).

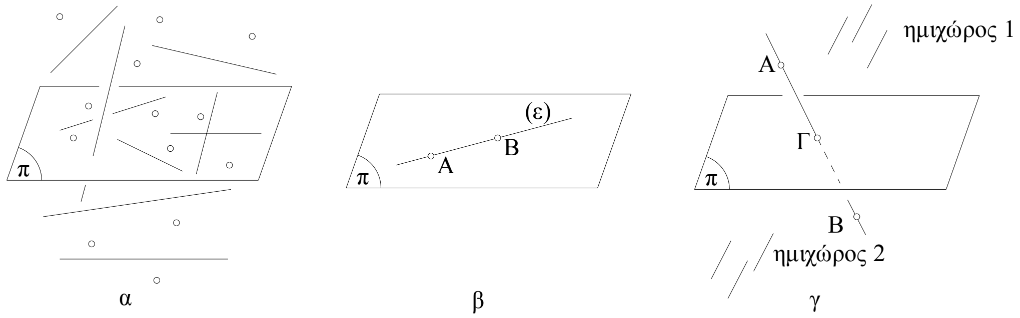
(2) Αν δύο σημεία ανήκουν σε ένα επίπεδο, τότε ολόκληρη η ευθεία που ορίζεται από τα σημεία ανήκει στο επίπεδο Σχήμα 1β).

(3) Κάθε επίπεδο χωρίζει το χώρο σε δύο ημιχώρους που έχουν κοινά μονάχα τα σημεία του επιπέδου. Δύο σημεία σε διαφορετικούς ημιχώρους ως προς το επίπεδο, ορίζουν ευθεία η οποία τέμνει το επίπεδο σε ακριβώς ένα σημείο (Σχήμα 1γ).

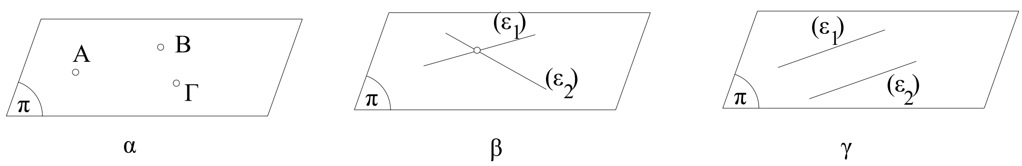
(4) Από τρία διακεκριμένα σημεία του χώρου, διέρχεται ακριβώς ένα επίπεδο (Σχήμα 2α).

(5) Από δύο τεμνόμενες ευθείες διέρχεται ακριβώς ένα επίπεδο (Σχήμα 2β).

(6) Δύο ευθείες του χώρου είναι **παράλληλες** όταν ανήκουν στο ίδιο επίπεδο και είναι παράλληλες. [Ονομάζουμε την τυχαία ευθεία του χώρου, «κατά σύμβαση» παράλληλη στον εαυτό της.] Το σύνολο των ευθειών του χώρου των παραλλήλων σε μια δοσμένη ευθεία το ονομάζουμε **διεύθυνση** της ευθείας. Συχνά συμβολίζουμε τις διευθύνσεις με ένα απλό γράμμα του αλφάβητου, όπως π.χ. το δ. Εδώ, όπως και πιο κάτω, δηλώνουμε πως δύο γεωμετρικά αντικείμενα x, y (π.χ. δύο ευθείες ή μια ευθεία και ένα επίπεδο) είναι παράλληλα γράφοντας $x \parallel y$.



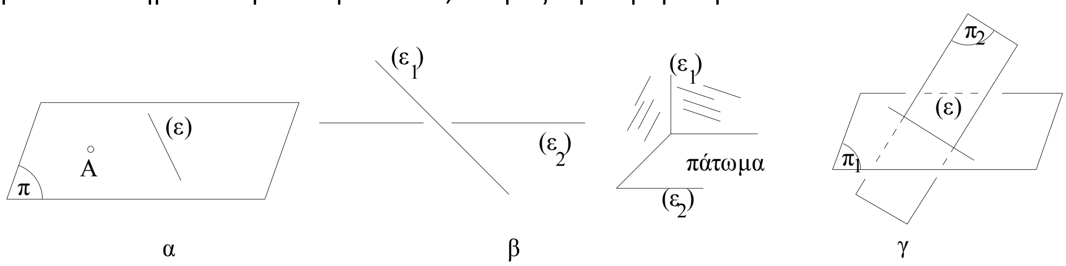
Σχήμα 1



Σχήμα 2

(7) Από δύο παράλληλες ευθείες διέρχεται ακριβώς ένα επίπεδο (Σχήμα 2γ).

(8) Από μία ευθεία και ένα σημείο εκτός αυτής διέρχεται ακριβώς ένα επίπεδο (Σχήμα 3α). **Κάθετη προβολή του σημείου στην ευθεία**, ή απλώς προβολή του, ονομάζεται η προβολή του στην ευθεία θεωρώντας πως ανήκει στο επίπεδο που ορίζει με αυτή. Όταν το σημείο ανήκει στην ευθεία, ονομάζουμε προβολή του τον εαυτό του.



Σχήμα 3

(9) Υπάρχουν δύο ευθείες στο χώρο χωρίς κοινά σημεία οι οποίες δεν είναι ούτε και παράλληλες. Δύο τέτοιες ευθείες τις ονομάζουμε ασύμβατες (Σχήμα 3β).

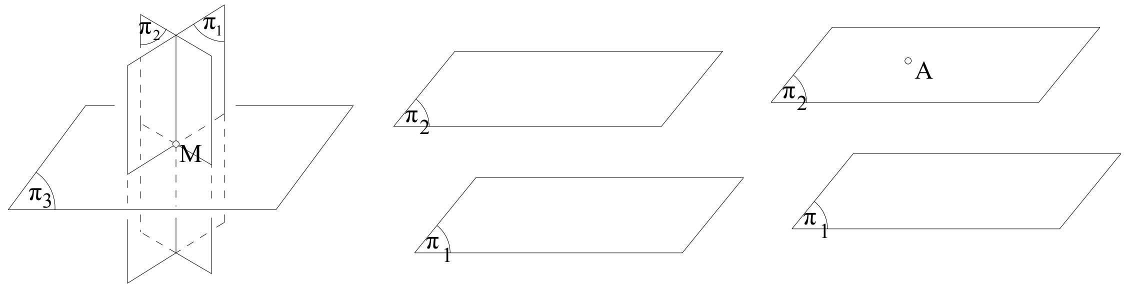
[Οπότε: Δύο διακεκριμένες ευθείες του χώρου είναι είτε τεμνόμενες σε μοναδικό σημείο, είτε παράλληλες, είτε ασύμβατες.]

(9) Δύο διακεκριμένα τεμνόμενα επίπεδα τέμνονται σε μια ευθεία γραμμή (Σχήμα 3γ).

(10) Τρία διακεκριμένα ανά δύο τεμνόμενα επίπεδα σε γενική θέση τέμνονται σε σημείο (Σχήμα 4α). (Γενική θέση σημαίνει πως το κανένα τους δεν κατέχει ειδική θέση ως προς την τομή των δύο άλλων, δηλαδή πως δε διέρχεται από την τομή των δύο άλλων, ούτε και είναι παράλληλο σε αυτή)

(11) Υπάρχουν δύο διακεκριμένα **παράλληλα επίπεδα**, δηλαδή επίπεδα με κανένα κοινό σημείο (Σχήμα 4β).
[Οπότε: Δύο διακεκριμένα επίπεδα είτε είναι παράλληλα είτε τέμνονται κατά μία ευθεία. Ονομάζουμε το τυχαίο επίπεδο, «κατά σύμβαση» παράλληλο στον εαυτό του.]

(12) Από δοθέν σημείο A, διέρχεται μοναδικό επίπεδο παράλληλο προς δοθέν επίπεδο (π) (Σχήμα 4γ).



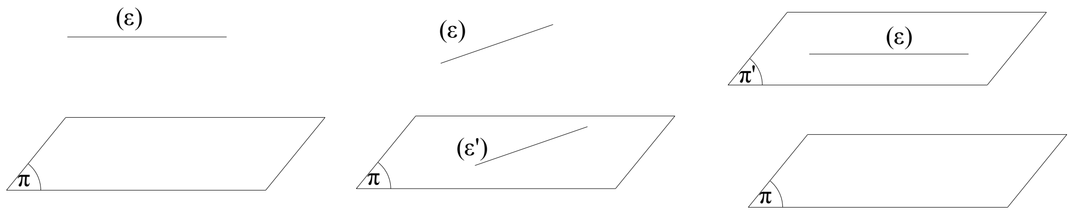
α β γ

Σχήμα 4

(13) Υπάρχουν ευθείες που δεν ανήκουν σε δοθέν επίπεδο και είναι παράλληλες προς αυτό, δηλαδή ευθείες με κανένα κοινό σημείο με αυτό (Σχήμα 5α).
[Οπότε: Μία ευθεία που δεν ανήκει σε ένα επίπεδο, είτε είναι παράλληλη σε αυτό είτε το τέμνει σε μοναδικό σημείο. Τις ευθείες του επιπέδου τις ονομάζουμε «κατά σύμβαση» παράλληλες προς αυτό.]

(14) Αν ευθεία που δεν ανήκει σε επίπεδο είναι παράλληλη προς ευθεία του επιπέδου, τότε είναι και παράλληλη προς το επίπεδο (Σχ. 5β). Οι διευθύνσεις που ορίζουν οι ευθείες ενός επιπέδου ονομάζονται **παράλληλες διευθύνσεις** στο επίπεδο.

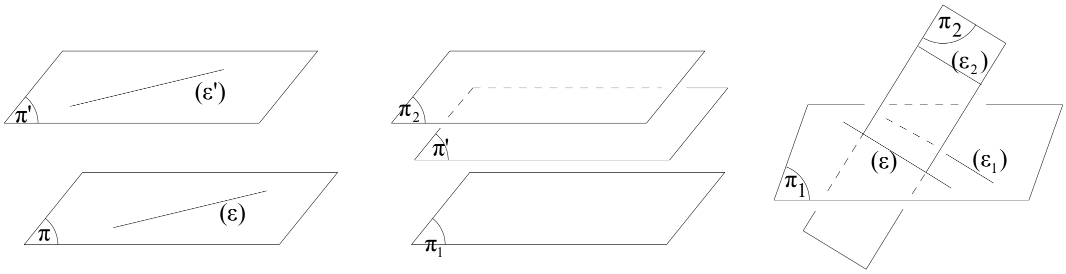
(15) Από δοσμένη ευθεία (ε) που είναι παράλληλη σε επίπεδο (π) διέρχεται μοναδικό επίπεδο (π') παράλληλο προς το (π) (Σχ. 5γ).



α β γ

Σχήμα 1

(16) Αν δύο επίπεδα είναι παράλληλα, τότε κάθε ευθεία που ανήκει σε ένα από αυτά είναι παράλληλη στο άλλο επίπεδο. Επιπλέον, για οποιαδήποτε ευθεία (ε) του ενός επιπέδου, υπάρχει ευθεία (ε') του άλλου, παράλληλη προς την (ε) (Σχήμα 6α).



α β γ

Σχήμα 6

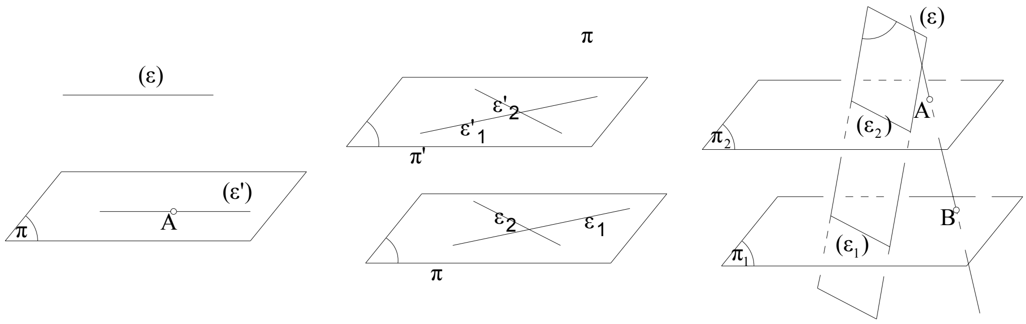
(17) Δύο ευθείες (του χώρου) παράλληλες προς τρίτη είναι παράλληλες και μεταξύ τους.

(18) Δύο επίπεδα παράλληλα προς τρίτο επίπεδο είναι και μεταξύ τους παράλληλα (Σχήμα 6β).

(19) Αν δύο επίπεδα τέμνονται, τότε κάθε ευθεία του ενός επιπέδου που είναι παράλληλη στο άλλο, είναι και παράλληλη στην ευθεία τομής των δύο επιπέδων (Σχήμα 6γ).

(20) Από κάθε σημείο του χώρου εκτός ευθείες, διέρχεται μοναδική ευθεία παράλληλη στη δοσμένη.

(21) Αν ευθεία (ε) είναι παράλληλη σε επίπεδο (π) και το A είναι σημείο του (π) τότε η ευθεία (ε') που διέρχεται από το A και είναι παράλληλη στην (ε) ανήκει στο (π) (Σχήμα 7α).



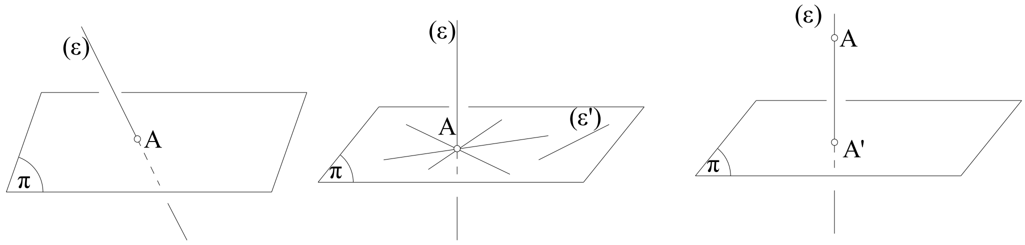
α β γ

Σχήμα 7

(22) Αν δύο τεμνόμενες ευθείες ενός επιπέδου είναι παράλληλες αντιστοίχως προς δύο ευθείες ενός άλλου επιπέδου τότε τα δύο επίπεδα είναι παράλληλα (Σχήμα 7β).

(23) Μία ευθεία που τέμνει ένα επίπεδο, τέμνει και κάθε παράλληλό του. Ομοίως, αν ένα επίπεδο (π) τέμνει ένα άλλο επίπεδο (π_1) τότε τέμνει και οποιοδήποτε επίπεδο (π_2) παράλληλο προς το (π). Επιπλέον οι ευθείες τομής (ε_1) και (ε_2) του (π) με τα (π_1) και (π_2) είναι μεταξύ τους παράλληλες (Σχήμα 7γ).

(24) Αν ευθεία (ε) δεν είναι παράλληλη σε επίπεδο (π) ούτε και ανήκει σε αυτό, τότε έχει μοναδικό κοινό σημείο με το επίπεδο. Ονομάζουμε την (ε) **τέμνουσα** του (π) (Σχήμα 8α). Το κοινό σημείο της τέμνουσας ευθείας (ε) με το επίπεδο το (π) το ονομάζουμε **ίχνος** της (ε) επί του (π).



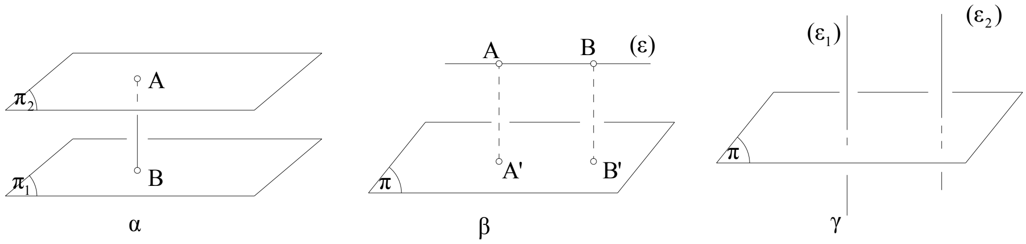
α β γ

Σχήμα 8

Από τυχόν σημείο A επιπέδου (π) διέρχεται μοναδική ευθεία (ε) η οποία είναι κάθετη σε κάθε ευθεία του (π) που διέρχεται από το A. Την (ε) την ονομάζουμε **κάθετη ευθεία του (π) στο A** (ή απλώς **κάθετη στο** (π)), και το (π) το ονομάζουμε κάθετο επίπεδο της (ε) στο A ή απλώς **κάθετο στην (ε)** (Σχήμα 8β) και συμβολίζουμε $(\varepsilon)\perp(\pi)$. Συντόμως, ονομάζουμε την (ε) και το (π) **κάθετα μεταξύ τους**. Κατά σύμβαση, θεωρούμε την (ε) κάθετη σε οποιαδήποτε ευθεία (ε) του (π) και αντιστρόφως. Ονομάζουμε λοιπόν την (ε) και οποιαδήποτε ευθεία (ε) του (π) κάθετες μεταξύ τους. Αν μια τέμνουσα (ε) του επιπέδου (π) δεν είναι κάθετη σε αυτό, την ονομάζουμε **πλάγια** προς το (π).

(25) Από τυχαίο σημείο A εκτός επιπέδου (π) διέρχεται μοναδική ευθεία (ε) κάθετη στο (π). Αν η (ε) τέμνει το (π) στο σημείο A' τότε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AA' ονομάζεται **απόσταση του σημείου A από το επίπεδο** (π) (Σχήμα 8γ). Το μήκος του AA' είναι το μικρότερο από όλα τα μήκη των τμημάτων με ένα άκρο το A και άλλο άκρο σημείο του επιπέδου (π). Το ίχνος της κάθετης από το A στο (π) το ονομάζουμε **ορθή προβολή** (και συχνά απλώς **προβολή**) του A στο (π). Ονομάζουμε **χωρικό σχήμα** είναι κάθε σύνολο σημείων του χώρου. Ονομάζουμε **κάθετη προβολή ενός σχήματος** στο (π), το σύνολο των κάθετων προβολών των σημείων του στο (π). Ονομάζουμε **παράλληλη προβολή** του σημείου A στο επίπεδο (π) κατά διεύθυνση δ (μη παράλληλη του (π)) το ίχνος επί οτυ (π) της ευθείας που διέρχεται από το A και είναι παράλληλη στη διεύθυνση δ. Ονομάζουμε **παράλληλη προβολή ενός σχήματος** στο (π) κατά τη διεύθυνση δ, το σύνολο των παράλληλων προβολών των σημείων του σχήματος στο (π) κατά τη διεύθυνση δ. Φυσικά η ορθή προβολή είναι ειδική περίπτωση της πλάγιας προβολής.

(26) Το μήκος οποιουδήποτε ευθύγραμμου τμήματος με άκρα σε δύο παράλληλα επίπεδα και κάθετο σε αυτά, είναι σταθερό. Το μήκος αυτό ονομάζεται **απόσταση των δύο επιπέδων** (Σχήμα 9α).

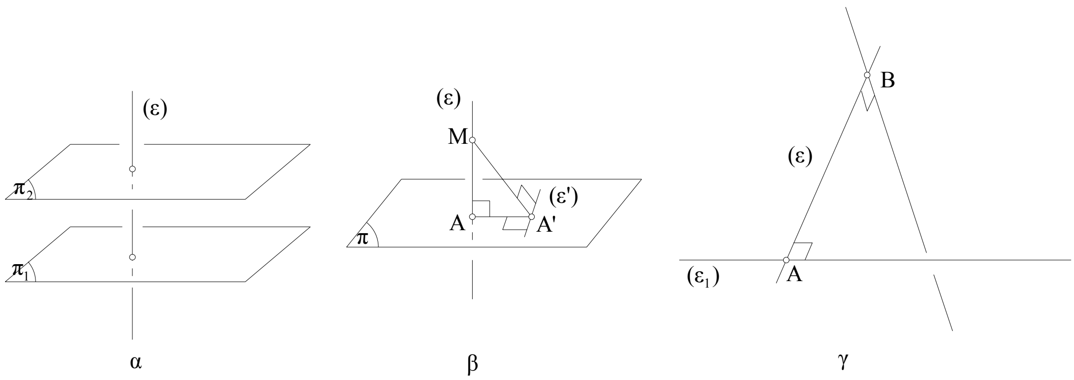


Σχήμα 9

(27) Αν τα διακεκριμένα σημεία έχουν την ίδια απόσταση από ένα επίπεδο και βρίσκονται στον ίδιο ημιχώρο ως προς αυτό, τότε η ευθεία που ορίζουν είναι παράλληλη προς αυτό (Σχήμα 9β).

(28) Δύο ευθείες κάθετες στο ίδιο επίπεδο είναι μεταξύ τους παράλληλες. Αντιστρόφως, αν δύο ευθείες είναι παράλληλες και η μια τους είναι κάθετη σε ένα επίπεδο, τότε και η άλλη είναι κάθετη στο ίδιο επίπεδο (Σχήμα 9γ).

(29) Μία ευθεία κάθετη σε ένα επίπεδο, είναι κάθετη και σε οποιοδήποτε άλλο παράλληλο προς αυτό επίπεδο (Σχήμα 10α).



Σχήμα 10

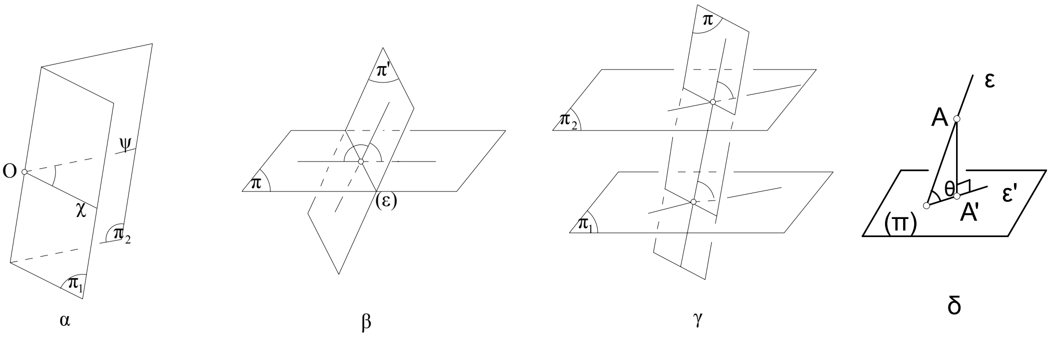
(30) **Θεώρημα των τριών καθέτων:** Έστω (ε) μια ευθεία κάθετη στο επίπεδο (π) και έστω (ε') μια ευθεία του (π). Τότε οι προβολές όλων των σημείων της (ε) επί της (ε') ταυτίζονται (Σχήμα 10β).

Και αντιστρόφως: Αν (ε) μια ευθεία τέμνουσα του επιπέδου (π), (ε') μια ευθεία του (π) και οι προβολές όλων των σημείων της (ε) επί της (ε') ταυτίζονται, τότε η (ε) είναι κάθετη στο (π) (ισχυρότερα: αρκεί να ταυτίζονται οι προβολές δύο σημείων της (ε)). Πόρισμα:

(31) Μία ορθή γωνία με μία πλευρά της παράλληλη σε δοσμένο επίπεδο και καμιά πλευρά της κάθετη σε αυτό, προβάλλεται επί του επιπέδου σε ορθή γωνία (Σχήμα δικό σας).

(32) Αν δύο ευθείες είναι ασύμβατες, τότε υπάρχει μοναδική ευθεία η οποία είναι κάθετη και στις δύο (Σχήμα 10γ). Την ευθεία αυτή την ονομάζουμε **κοινή κάθετη** των δοσμένων.

(33) Δύο ημιεπίπεδα με κοινή την ακμή τους διαμερίζουν το χώρο σε δύο μέρη, καθένα από τα οποία ονομάζεται **διέδρη γωνία** με έδρες τα ημιεπίπεδα και ακμή την κοινή ακμή αυτών. Η ακμή αυτή ονομάζεται **ακμή της κάθε διέδρου**. Οι έδρες αποτελούν μέρος της διέδρου. Τα υπόλοιπα σημεία της διέδρου ονομάζονται **εσωτερικά** της. Όσα σημεία του χώρου δεν ανήκουν στη δίεδρο ονομάζονται **εξωτερικά** της. Αν από το τυχαίο σημείο O της ακμής της διέδρου γωνίας φέρουμε επάνω στις δύο έδρες ημιευθείες $O\chi, O\psi$ κάθετες στην ακμή, τότε η γωνία $\widehat{\chi O\psi}$ που ανήκει στη δίεδρη, ονομάζεται **επίπεδη γωνία της διέδρου** και είναι ανεξάρτητη από την επιλογή του σημείου O (Σχήμα 11α). Δύο δίεδρες ονομάζονται **ίσες μεταξύ τους** όταν οι επίπεδες γωνίες τους είναι ίσες μεταξύ τους˙ διαφορετικά, όταν η επίπεδη γωνία της είναι μεγαλύτερη από της άλλης , η πρώτη ονομάζεται **μεγαλύτερη** της δεύτερης.



Σχήμα 11

(34) Η **γωνία** ή **γωνία κλίσης** ευθείας (ε) και επιπέδου (π) (ή και **γωνία της ευθείας (ε) με το επίπεδο** (π)) (Σχήμα 11δ) είναι η γωνία $\hat{\theta}$ που σχηματίζει η (ε) με την προβολή της (ε') πάνω στο (π). Όταν $(\varepsilon) \parallel (\pi)$ τότε $(\varepsilon) \in (\varepsilon')$ και $\hat{\theta} = 0^o$ (περιλαμβάνουμε και την περίπτωση $(\varepsilon) \in (\pi)$ οπότε τότε $(\varepsilon) \equiv (\varepsilon')$). Όταν $(\varepsilon) \perp (\pi)$ τότε η (ε') εκφυλίζεται σε σημείο και κατά σύμβαση θεωρούμε $\hat{\theta} = 90^0$. Στις υπόλοιπες περιπτώσεις που καλούνται «<u>η γενική περίπτωση</u>», η (ε) και η (ε') έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο, που είναι το ίχνος της (ε) επί του (π). Η γωνία ευθείας και επιπέδου είναι η μικρότερη δυνατή γωνία που σχηματίζει η ευθεία με οποιαδήποτε ευθεία του επιπέδου που διέρχεται από το κοινό της σημείο με αυτό. **Κλίση** μιας ευθείας ως προς ένα επίπεδο ονομάζουμε τον τριγωνομετρικό αριθμό $\varepsilon\varphi\theta$. Όπου $\hat{\theta}$ η γωνία της ευθείας με το επίπεδο.

(35) Δύο τεμνόμενα επίπεδα δημιουργούν τέσσερις διαδοχικές δίεδρες χωρίς κοινά εσωτερικά σημεία, με κοινή ακμή την κοινή ευθεία των επιπέδων, και έδρες τα ημιεπίπεδα που δημιουργεί η κοινή ακμή πάνω σε αυτά (Σχήμα 11β). **Γωνία των δύο επιπέδων** ονομάζεται η μικρότερη επίπεδη γωνία των διέδρων αυτών. Οι τέσσερις επίπεδες γωνίες των διέδρων έρχονται σε ζεύγη ίσων γωνιών που μεταξύ τους είναι παραπληρωματικές. Εναλλακτικά, γωνία δύο επιπέδων ονομάζεται η μικρότερη δίεδρη που δημιουργούν. Στην περίπτωση που τα δύο επίπεδα είναι παράλληλα ορίζουμε κατά σύμβαση ως γωνία τους την $\hat{\omega} = 0^0$ (περιλαμβάνουμε και την περίπτωση που τα επίπεδα ταυτίζονται).

(36) Δύο παράλληλα επίπεδα τέμνονται από τρίτο επίπεδο με την ίδια γωνία (Σχήμα 11γ).

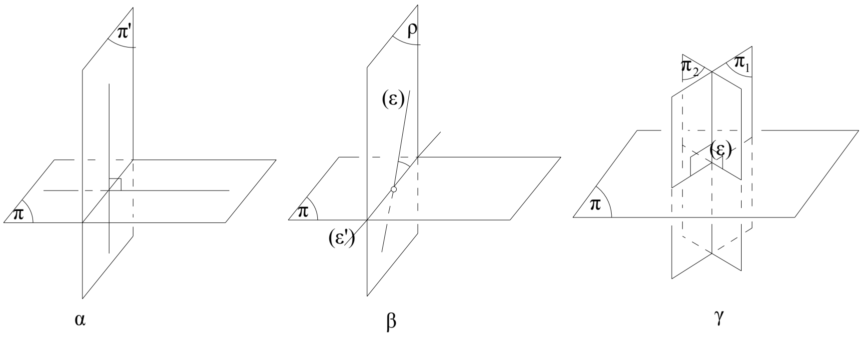
(37) Δύο τεμνόμενα επίπεδα ονομάζονται κάθετα μεταξύ τους όταν οι τέσσερις δίεδρες που δημιουργούν είναι μεταξύ τους ίσες (Σχήμα 12α). Τις δίεδρες αυτές τις ονομάζουμε **ορθές**. Οι επίπεδες γωνίες των ορθών δίεδρων γωνιών είναι ορθές γωνίες.

(38) Από δοσμένη ευθεία (ε) που δεν είναι κάθετη σε δοθέν επίπεδο (π) διέρχεται μοναδικό επίπεδο (ρ) κάθετο προς το (π) (Σχήμα 12β), και είναι το επίπεδο που ορίζει η (ε) και η προβολή της στο (π). Η (ε') είναι το ίχνος του (ρ) επί του (π). Επίσης, κάθε επίπεδο που διέρχεται από δοσμένη ευθεία (ε) που είναι κάθετη σε επίπεδο (π), είναι κάθετο με το (π). Άλλη διατύπωση του τελευταίου:

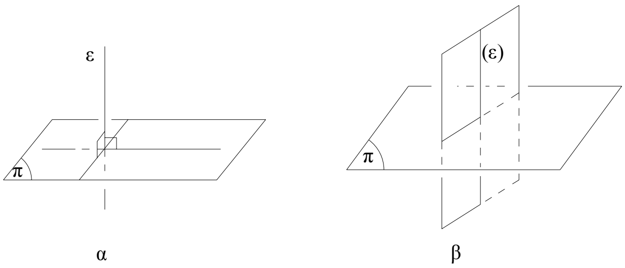
(39) Αν ένα επίπεδο είναι κάθετο σε μια ευθεία, τότε είναι κάθετο και σε κάθε επίπεδο που διέρχεται από την ευθεία (Σχήμα 13β).

(40) Αν δύο τεμνόμενα επίπεδα είναι κάθετα σε τρίτο επίπεδο, τότε και η τομή τους είναι ευθεία κάθετη προς το τρίτο επίπεδο (Σχ. 12γ).

(41) Αν μια ευθεία είναι κάθετη σε δύο ευθείες ενός επιπέδου, τότε είναι κάθετη και στο επίπεδο (Σχήμα 13α).



Σχήμα 12



Σχήμα 13