Περιεχόμενα

[1 Εισαγωγή: Βασικές Έννοιες 3](#_Toc354603768)

[1.1 Ορολογία και Θεμέλια 3](#_Toc354603769)

[*1.1.1* *Το πλήθος των μεταβλητών.* 4](#_Toc354603770)

[*1.1.2* *Η τάξη της ΜΔΕ.* 4](#_Toc354603771)

[*1.1.3* *Γραμμικότητα μιας Μερικής Διαφορικής Εξίσωσης* 4](#_Toc354603772)

[*1.1.4* *Ομογένεια μιας Γραμμικής Μερικής Διαφορικής Εξίσωσης* 5](#_Toc354603773)

[*1.1.5* *Είδη συντελεστών* 6](#_Toc354603774)

[1.2 Η Έννοια της Λύσης 6](#_Toc354603775)

[1.3 Αρχικές και Συνοριακές Συνθήκες 7](#_Toc354603776)

[1.4 Προβλήματα με Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις 9](#_Toc354603777)

[1.4.1 Είδη προβλημάτων 9](#_Toc354603778)

[1.4.2 Καλά Διατυπωμένα Προβλήματα 9](#_Toc354603779)

[2 Η Γραμμική Μερική Διαφορική Εξίσωση β’ Τάξης 11](#_Toc354603780)

[2.1 Ταξινόμηση Γραμμικών ΜΔΕ β’ Τάξης με Κριτήριο το Πρόσημο της Διακρίνουσας 12](#_Toc354603781)

[2.2 Ταξινόμηση Γραμμικών ΜΔΕ β’ Τάξης με Κριτήριο το Πρόσημο των Ιδιοτιμών της 15](#_Toc354603782)

[2.3 Γραμμική Υπερβολική ΜΔΕ β’ τάξης με σταθερούς συντελεστές 16](#_Toc354603783)

[2.3.1 Χαρακτηριστικές Καμπύλες 16](#_Toc354603784)

[2.3.2 Πρώτη Κανονική Μορφή μιας Γραμμικής Υπερβολικής ΜΔΕ β’ Τάξης 19](#_Toc354603785)

[2.3.3 Δεύτερη Κανονική Μορφή μιας Γραμμικής Υπερβολικής ΜΔΕ β’ Τάξης 21](#_Toc354603786)

[2.3.4 Το Πρόβλημα Cauchy και οι Χαρακτηριστικές Καμπύλες 25](#_Toc354603787)

[3 Η Κυματική Εξίσωση σε Μία Χωρική Διάσταση 28](#_Toc354603788)

[3.1 Η Φυσική Προέλευση της Κυματική Εξίσωσης – Η Ταλαντευόμενη Χορδή 28](#_Toc354603789)

[3.2 Η Γενική Λύση του d’ Alembert της Κυματικής Εξίσωσης 30](#_Toc354603790)

[4 Μέθοδοι Επίλυσης Προβλημάτων με ΜΔΕ την Κυματική 33](#_Toc354603791)

[4.1 Το Ομογενές Πρόβλημα Αρχικών Τιμών 34](#_Toc354603792)

[4.1.1 Η μέθοδος d’ Alembert 34](#_Toc354603793)

[4.1.2 Η Μέθοδος Επίλυσης με Μετασχηματισμό Fourier 47](#_Toc354603794)

[4.2 Το Ομογενές Πρόβλημα Αρχικών και Συνοριακών Τιμών 49](#_Toc354603795)

[4.2.1 Το Ομογενές ΠΑΣΤ με Ομογενείς Συνοριακές Συνθήκες 49](#_Toc354603796)

[4.2.2 Το Ομογενές ΠΑΣΤ με Μη Ομογενείς Συνοριακές Συνθήκες 61](#_Toc354603797)

[4.3 Το Μη Ομογενές Πρόβλημα Αρχικών Τιμών 62](#_Toc354603798)

[4.3.1 Το Μη Ομογενές ΠΑΤ με Ομογενείς Αρχικές Τιμές– Η Αρχή Duhamel 62](#_Toc354603799)

[4.3.2 Το Μη Ομογενές ΠΑΤ με Μη Ομογενείς Αρχικές Τιμές 65](#_Toc354603800)

[4.4 Το Μη Ομογενές Πρόβλημα Αρχικών και Συνοριακών Τιμών 66](#_Toc354603801)

[4.4.1 Το Μη-Ομογενές ΠΑΣΤ με Συνοριακές Συνθήκες ανεξάρτητες του χρόνου - Μέθοδος Lagrange 66](#_Toc354603802)

[4.4.2 Μη-Ομογενές ΠΑΣΤ με Μη-Ομογενείς Συνοριακές Συνθήκες 68](#_Toc354603803)

[Ευρετήριο Περιεχομένων 73](#_Toc354603804)

# Εισαγωγή: Βασικές Έννοιες

**Στόχοι:**

Σκοπός της εισαγωγής είναι να παρουσιάσει μερικά θέματα που αφορούν στις Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις (ΜΔΕ) και να σκιαγραφήσει τι θα ακολουθήσει.

**Προσδοκώμενα αποτελέσματα:**

Όταν θα έχετε μελετήσει το μάθημα αυτό, θα μπορείτε να:

* Εξηγήσετε τι εννοούμε με τον όρο Μερική Διαφορική Εξίσωση.
* Να ορίσετε τι είναι γενική λύση μιας ΜΔΕ.
* Να αναγνωρίσετε την κλασσική κυματική εξίσωση.
* Να καταλάβετε ότι η αρχική κατάσταση του συστήματος στις Υπερβολικές ΜΔΕ αποτελεί αναπόσπαστο μέρος των απαιτούμενων πρόσθετων συνθηκών για ένα καλά διατυπωμένο πρόβλημα.
* Να συνειδητοποιήσετε το σημαντικό διαχωρισμό των ΜΔΕ σε γραμμικές και μη-γραμμικές.

## Ορολογία και Θεμέλια

**Τι είναι μια Μερική Διαφορική Εξίσωση;**

Μια **Μερική Διαφορική Εξίσωση** (ΜΔΕ) είναι μια εξίσωση που εμπεριέχει μερικές ... μερικές παραγώγους, σε αντίθεση με τις Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις (ΣΔΕ), όπου η άγνωστη συνάρτηση εξαρτάται μόνο από μία μεταβλητή.

Για να πάρουμε τα πράγματα από την αρχή: μελετάμε πραγματικές συναρτήσεις

όπου είναι ένα ανοιχτό και συνεκτικό υποσύνολο του , που ονομάζεται **τόπος** (domain) και ο δείκτης n είναι (φυσικά) τουλάχιστο ίσο με 2. Τότε μια ΜΔΕ έχει τη **γενική μορφή**

όπου οι δείκτες υποδηλώνουν παραγώγιση στις αντίστοιχες μεταβλητές.

Σημειώσεις:

Η γενική εξίσωση γράφεται με ανεξάρτητες μεταβλητές Όταν υπάρχουν μόνο δύο χωρικοί μεταβλητές συνηθίζεται να γράφουμε .

Σε πολλά προβλήματα που προέρχονται από τη φυσική, μία από τις μεταβλητές συμβολίζει το χρόνο, ως εκ τούτου γράφεται με το σύμβολο .

Για λόγους απλοποίησης της γραφής θέτουμε

Σπουδαία έννοια είναι και το **σύνορο** του πεδίου . Υποθέτουμε ότι το σύνορο είναι λείο, δηλαδή ότι οι συναρτήσεις που το περιγράφουν έχουν συνεχείς παραγώγους πρώτης τάξης.

Είναι σπουδαίο να διακρίνουμε τους τύπους εξισώσεων ως προς κάποιο ιδιαίτερο χαρακτηριστικό τους, γιατί οι μέθοδοι επίλυσης των ΜΔΕ ποικίλλουν ανάλογα με το είδος τους. Σε πρώτη φάση διακρίνουμε τα είδη ως προς τα ακόλουθα χαρακτηριστικά τους:

### Το πλήθος των μεταβλητών.

Το **πλήθος των μεταβλητών** είναι το πλήθος των ανεξάρτητων μεταβλητών. Παραδείγματα:

δύο μεταβλητές, και

τρεις μεταβλητές, , ρ και θ

### Η τάξη της ΜΔΕ.

Με τον όρο **τάξη** μιας ΜΔΕ εννοούμε την τάξη της μέγιστης μερικής παραγώγου της εξίσωσης.

Παραδείγματα:

2ης τάξης

1ης τάξης

3ης τάξης

### Γραμμικότητα μιας Μερικής Διαφορικής Εξίσωσης

Μια ΜΔΕ της μορφής λέγεται **γραμμική** όταν η συνάρτηση F είναι αλγεβρικά γραμμική ως προς την και όλες τις παραγώγους της, και οι συντελεστές της και των παραγώγων της εξαρτώνται αποκλειστικά από τις ανεξάρτητες μεταβλητές.

Παραδείγματα:

Εξετάζουμε τη ΜΔΕ . Ορίζουμε τον διαφορικό τελεστή , οπότε η ΜΔΕ παίρνει τη μορφή . Στο αριστερό μέλος έχουμε ένα γραμμικό διαφορικό τελεστή, ενώ στο δεξί μέλος η συνάρτηση εξαρτάται μόνο από την ανεξάρτητη μεταβλητή . Η εξίσωση είναι γραμμική. Με τον ίδιο τρόπο συμπεραίνουμε ότι η εξίσωση είναι γραμμική.

Ερώτηση κρίσεως τώρα: πώς λέγεται μια ΜΔΕ που δεν είναι γραμμική; Απάντηση: μια ΜΔΕ που δεν είναι γραμμική λέγεται ... **μη – γραμμική**.

Παραδείγματα:

μη - γραμμική

μη – γραμμική

Αλλά έπεται συνέχεια: μια μη – γραμμική ΜΔΕ τάξης m λέγεται **σχεδόν γραμμική** (quasi linear) όταν είναι γραμμική ως προς τις τάξης m παραγώγους της με συντελεστές που εξαρτώνται από τις ανεξάρτητες μεταβλητές και τις παραγώγους με τάξη μικρότερη του m.

Παράδειγμα:

σχεδόν γραμμική

Και τέλος, μια σχεδόν γραμμική ΜΔΕ της τάξης m στην οποία οι συντελεστές των παραγώγων μέγιστης τάξης είναι συναρτήσεις μόνο των ανεξάρτητων μεταβλητών λέγεται **ημι – γραμμική** (semi linear).

Παράδειγμα:

ημι – γραμμική

Επειδή μια εικόνα αξίζει όσο χίλιες λέξεις παρουσιάζουμε εδώ μια αλυσίδα:

 Γραμμική ΜΔΕ Ημι – γραμμική ΜΔΕ Σχεδόν γραμμική ΜΔΕ ΜΔΕ

Σημειώσεις:

* Οι μη – γραμμικές ΜΔΕ είναι γενικά πολύ δυσκολότερα να λυθούν από τις γραμμικές ΜΔΕ, γιατί στις γραμμικές ΜΔΕ ισχύει η **Αρχή της Επαλληλίας** που παίζει σπουδαίο ρόλο στην επίλυση προβλημάτων με ΜΔΕ.
* Ένα μέρος της ποιοτικής θεωρίας των γραμμικών ΜΔΕ μπορεί να μεταφερθεί σε σχεδόν γραμμικές εξισώσεις.

### Ομογένεια μιας Γραμμικής Μερικής Διαφορικής Εξίσωσης

Μια γραμμική ΜΔΕ μπορεί να γραφεί σε μια μορφή όπου το αριστερό μέλος περιέχει

όλους τους όρους με την άγνωστη συνάρτηση και όλες τις παραγώγους της. Αν υπάρχει στο δεξιό μέλος μια συνάρτηση που εξαρτάται από τις ανεξάρτητες μεταβλητές, η ΜΔΕ ονομάζεται **μη-ομογενή** και η συνάρτηση ονομάζεται **πηγή**. Αν δεν υπάρχει δεξιό μέλος, τότε η ΜΔΕ ονομάζεται **ομογενή**.

Παραδείγματα:

1. είναι μη ομογενής ΜΔΕ με συνάρτηση πηγή την .
2. είναι ομογενής ΜΔΕ.

### Είδη συντελεστών

Μια γραμμική ΜΔΕ διακρίνεται ανάλογα με το αν είναι οι συντελεστές της άγνωστης συνάρτησης και των παραγώγων της **σταθεροί** ή **μεταβλητοί**.

## Η Έννοια της Λύσης

**Λύση, λύσεις, λύσεις για όλα τα γούστα...**

**Ορισμός**

Μια συνάρτηση είναι μια **κλασική** **λύση** για μια δεδομένη ΜΔΕ τάξης m αν για κάθε ισχύει ότι και ικανοποιεί σημειακά τη ΜΔΕ.

Σημείωση: Με συμβολίζουμε το χώρο των συναρτήσεων που έχουν συνεχείς παραγώγους τάξης m στο Ω.

Ας κοιτάξουμε τώρα την πραγματική συνάρτηση δύο μεταβλητών . Εύκολα υπολογίζουμε ότι . Συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση είναι μία λύση της ΜΔΕ . Δεν είναι όμως η μοναδική: με μερικές απλές πράξεις επιβεβαιώνουμε ότι η - τελείως διαφορετική - συνάρτηση επαληθεύει επίσης την εξίσωση . Αυτό συμβαίνει επειδή στα επάλληλα στάδια «εξάλειψης» κάθε μερικής παραγώγου εμφανίζεται μια αυθαίρετη «σταθερά» ως προς τη μεταβλητή της παραγώγισης, η οποία όμως μπορεί να εξαρτάται από τις υπόλοιπες μεταβλητές.

Παραδείγματα:

ΜΔΕ , με αυθαίρετη.

ΜΔΕ , με αυθαίρετες.

**Ορισμός**

Ονομάζουμε **γενική λύση** μιας ΜΔΕ τάξης m με n μεταβλητές μια λύση της εξίσωσης που περιέχει m αυθαίρετες συναρτήσεις με (n – 1) μεταβλητές η κάθε μία.

Κάθε λύση που λαμβάνεται από τη γενική λύση με συγκεκριμένη επιλογή των αυθαίρετων συναρτήσεων ονομάζεται **μερική** ή **ειδική** λύση.

Όταν θα λύσουμε παρακάτω την εξίσωση με τη μέθοδο των χαρακτηριστικών θα βρούμε τη γενική λύση. Αναγνωρίζουμε ως ειδικές λύσεις τη ], όπου και και τη , όπου και .

Στο επίπεδο των δεύτερων παραγώγων όμως ταυτίζονται οι δύο λύσεις και της ΜΔΕ . Επομένως, οι πληροφορίες που μας παρέχει η συγκεκριμένη ΜΔΕ δεν αρκούν για να διακρίνουμε την από την . Αλλά, αφού οι ΜΔΕ αναπαριστούν συνήθως κάποιο φυσικό μοντέλο, μας ενδιαφέρει να επιλέξουμε την ειδική συνάρτηση που ικανοποιεί επιπλέον και τις ειδικές απαιτήσεις του συγκεκριμένου προβλήματος της φυσικής που μελετάμε.

Υπάρχουν όμως επίσης λύσεις ΜΔΕ οι οποίες δεν προκύπτουν από τη γενική λύση της εξίσωσης με συγκεκριμένη επιλογή των αυθαίρετων συναρτήσεων. Μια τέτοια λύση ονομάζεται **ιδιάζουσα** λύση και αντιστοιχεί σε περιβάλλουσα μιας παραμετρικής οικογένειας λύσεων που ανήκουν στη Γενική Λύση.

## Αρχικές και Συνοριακές Συνθήκες

Πως όμως μπορούμε να βρούμε τη μία **μοναδική** **λύση** που έχει νόημα σε ένα φυσικό πρόβλημα με ΜΔΕ; Εδώ κάνουν την εμφάνισή τους οι **Βοηθητικές Συνθήκες**: σε κάθε περίπτωση επιβάλλονται μερικές Βοηθητικές Συνθήκες (ΒΣ) που χαρακτηρίζουν το μοντέλο. Διακρίνουμε δύο κατηγορίες ΒΣ:

* **Αρχικές Συνθήκες** (ΑΣ): Αρχικές Συνθήκες ορίζονται συνήθως στο επίπεδο που ορίζει την αρχή του χρόνου και χωρίζει τον τόπο σε δύο υποσύνολα, τα και , που το καθένα τους είναι ανοιχτό και εκτείνεται στο άπειρο. Αφορούν στην κατάσταση του φυσικού συστήματος κατά τη χρονική στιγμή και συνίστανται στον καθορισμό της συνάρτησης ή/και κάποιων παραγώγων της για .
* **Συνοριακές Συνθήκες** (ΣΣ): Οι περισσότερες εφαρμογές των ΜΔΕ περιλαμβάνουν πεδία με σύνορα και είναι σημαντικό να καθορίζονται τα δεδομένα σε αυτές τις θέσεις σωστά. Οι συνθήκες που συσχετίζουν τη λύση της ΜΔΕ με δεδομένα σε κάποιο σύνορο της φυσικής περιοχής του προβλήματος ονομάζονται Συνοριακές Συνθήκες. Οι ΣΣ αφορούν στις χωρικές μεταβλητές. Παράδειγμα: μπορεί να ορίζονται στην επιφάνεια μιας σφαίρας με ακτίνα ρ στον τόπο n.

Ιστορικά, μια από τις πραγματικές σπαζοκεφαλιές στη μελέτη των ΜΔΕ ήταν η κατανόηση των ειδών των Συνοριακών ή Αρχικών Συνθηκών που απαιτούν οι διάφορες ΜΔΕ. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, στη λύση d’ Alembert της κυματικής εξίσωσης με μία χωρική διάσταση απαιτούνται τόσο οι τιμές της συνάρτησης , όσο αυτές της κάθετης παραγώγου της σε μια καμπύλη του επιπέδου ως Αρχικές Συνθήκες για να ορίσουμε τη λύση μοναδικά.

**Τυπικές Βοηθητικές Συνθήκες**

1. Οι **Αρχικές** Συνθήκες είναι συνήθως αυτονόητες.

Αρχικές Συνθήκες όπου δίνονται οι τιμές της συνάρτησης και των καθέτων παραγώγων της σε μια καμπύλη Γ ή σε μια λεία υπερεπιφάνεια S του πεδίου ορισμού σε μια δεδομένη στιγμή, ονομάζονται Συνθήκες Cauchy. Σχεδόν πάντοτε η αρχική στιγμή ορίζεται ως χρόνο μηδέν. Το αντίστοιχο πρόβλημα εύρεσης λύσης μιας ΜΔΕ που ικανοποιεί ταυτόχρονα τέτοιες βοηθητικές συνθήκες ονομάζεται **Πρόβλημα Cauchy**.

1. Υπάρχει μια ποικιλία από **Συνοριακές** Συνθήκες. Μερικές απλές Συνοριακές Συνθήκες που εμφανίζονται συχνά είναι οι εξής:
   1. **Dirichlet**

Η τιμή της λύσης δίνεται πάνω στο σύνορο .

Η συνάρτηση είναι μια δεδομένη συνάρτηση της θέσης πάνω στο σύνορο.

* 1. **Neumann**

Δίνεται η τιμή της κάθετης παραγώγου της λύσης επάνω στο σύνορο .

Εδώ με εννοούμε τη συντεταγμένη που είναι κάθετη στο σύνορο. Επισημαίνουμε ότι ο ορισμός της πάνω στο σύνορο προϋποθέτει την τιμή της παραγώγου στην κατεύθυνση του σύνορο. Για αυτό το λόγο συμπεριλαμβάνουμε μόνο την παράγωγο κάθετη προς το σύνορο στη λίστα των βασικών Συνοριακών Συνθηκών.

* 1. **Robin**

Δίνεται ένας γραμμικός συνδυασμός των τιμών και πάνω στο σύνορο.

Τέτοιες Συνοριακές Συνθήκες χρησιμοποιούνται συχνά σε απλά προβλήματα διάδοσης κυμάτων και υποδεικνύουν ότι δεν μπαίνουν κύματα στο πεδίο από τα εξωτερικά.

Υπάρχει καθαρά μαθηματικός τρόπος για να οδηγηθεί κανείς σε μια πλήρη περιγραφή των Βοηθητικών Συνθηκών που εξασφαλίζουν το μονοσήμαντο της λύσης, αλλά η φυσική προσέγγιση παραμένει απλούστερη. Γενικά, στη φυσική, οι Αρχικές Συνθήκες είναι εξαιρετικά χρήσιμες στην περιγραφή της διάδοσης κυμάτων.

## Προβλήματα με Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

### Είδη προβλημάτων

1. Προβλήματα ΜΔΕ που ζητούν μια λύση όταν δίνεται η αρχική κατάσταση του συστήματος και στα οποία επιδιώκεται να καθοριστούν οι τιμές της λύσης για θετικές τιμές του χρόνου ονομάζονται **Προβλήματα Αρχικών Τιμών** ή **Προβλήματα Cauchy** (ΠΑΤ).
2. Προβλήματα ΜΔΕ που ζητούν μια λύση όταν υπάρχουν συνοριακά δεδομένα ονομάζονται **Προβλήματα Συνοριακών Τιμών** (ΠΣΤ).
3. Και μαντέψτε:

Προβλήματα ΜΔΕ που ζητούν μια λύση όταν υπάρχουν τόσο αρχικά όσο συνοριακά δεδομένα ονομάζονται **Προβλήματα Αρχικών Και Συνοριακών Τιμών** (ΠΑΣΤ).

### Καλά Διατυπωμένα Προβλήματα

Ας θεωρήσουμε ένα ΠΑΣΤ που αποτελείται από μια ΜΔΕ που περιγράφει κάποιο μοντέλο καθώς και από Αρχικές και Συνοριακές Συνθήκες.

**Ορισμός:**

Ονομάζουμε **Δεδομένα** (Data) του συγκεκριμένου ΠΑΣΤ:

* τους συντελεστές της Μερικής Διαφορικής Εξίσωσης.
* τις συναρτήσεις που περιγράφουν τις Αρχικές και τις Συνοριακές Συνθήκες
* τη συνάρτηση πηγής (αν υπάρχει φυσικά).

Με απλά λόγια μπορούμε να πούμε ότι ένα ΠΑΣΤ είναι **καλά διατυπωμένο** αν έχει μία μοναδική λύση που έχει νόημα. Δεν αρκεί να βρούμε μια λύση σε κάποιο ΠΑΣΤ, είναι επίσης σημαντικό να δείξουμε ότι η λύση είναι **μοναδική**. Επιπλέον, για να είμαστε σίγουροι ότι η λύση περιγράφει το φυσικό φαινόμενο που μελετάμε με ικανοποιητικό τρόπο, πρέπει να εξετάσουμε την **εξάρτηση της λύσης από τα δεδομένα του προβλήματος.** Λέγεται ότι μια λύση του προβλήματος εξαρτάται κατά συνεχή τρόπο από τα βοηθητική δεδομένα αν το μέγιστο της μεταβολής της λύσης σε όλο το μπορεί να γίνει όσο μικρό θέλουμε φροντίζοντας ότι το μέγιστο της μεταβολής των δεδομένων σε όλο το είναι αρκετά μικρό, δηλαδή μικρές μεταβολές στα δεδομένα προκαλούν αντίστοιχες μικρές μεταβολές στη λύση. Η ιδιότητα αυτή λέγεται **ευστάθεια**.

**Ορισμός**

Αν ένα ΠΑΣΤ ικανοποιεί τις τρεις συνθήκες:

* **Υπάρχει** μια λύση
* Η λύση είναι **μοναδική**
* Η λύση είναι **ευσταθής**

τότε λέμε ότι το πρόβλημα είναι καλά **διατυπωμένο κατά Hadamard**.

Η διαπίστωση της ευστάθειας είναι απαραίτητη στους αριθμητικούς υπολογισμούς, στους οποίους θα υπάρχουν πάντα σφάλματα στρογγύλευσης ή προσέγγισης των δεδομένων. Αν το ίδιο το πρόβλημα είναι ασταθές, τότε οι αρχικά μικρές αποκλίσεις θα αυξηθούν σε μέγεθος και η αριθμητική λύση δεν θα έχει καμία σχέση με την πραγματική λύση του προβλήματος.

Παρατήρηση:

Πρέπει να υπογραμμίσουμε ότι **δεν** είναι οι ΜΔΕ που είναι καλά διατυπωμένες ή όχι: είναι οι Βοηθητικές Συνθήκες που μαζί με τη ΜΔΕ ορίζουν αν το ΠΑΣΤ που προκύπτει είναι όντως καλά διατυπωμένο.

Κάθε τύπος ΜΔΕ σχετίζεται με ορισμένα ΠΑΣΤ που είναι καλά διατυπωμένα ενώ άλλα σχετιζόμενα προβλήματα δεν είναι. Αυτός είναι άλλος ένας λόγος που τονίζει τη σπουδαιότητα της ταξινόμησης των ΜΔΕ.

Παραδείγματα:

1. Αν σε ένα ΠΑΤ Cauchy τα αρχικά δεδομένα βρίσκονται σε μια χαρακτηριστική καμπύλη, τότε είτε **δεν** υπάρχει λύση στο πρόβλημα, είτε υπάρχουν **άπειρες** λύσεις!
2. Για την κυματική εξίσωση η αρχική κατάσταση του συστήματος αποτελεί μέρος των Βοηθητικών Συνθηκών για ένα καλά διατυπωμένο πρόβλημα. Για την κυματική εξίσωση δεν επιτρέπονται «Τελικές» Συνθήκες, γιατί πρόκειται για εξίσωση που περιγράφει διεργασίες που εξελίσσονται στο χρόνο.

# Η Γραμμική Μερική Διαφορική Εξίσωση β’ Τάξης

**Στόχοι:**

Υπάρχουν τρεις κατηγορίες Γραμμικών ΜΔΕ που **ταξινομούν** προβλήματα της φυσικής στους εξής αντίστοιχους τρεις τύπους: της κυματικής διάδοσης, της διάχυσης και των στάσιμων προβλημάτων. Οι μαθηματικές λύσεις των τριών αυτών τύπων εξισώσεων έχουν ουσιαστικές διαφορές.

Μεγάλο μέρος της θεωρίας των ιδιοτήτων των λύσεων των ΜΔΕ προϋποθέτει ότι η εξίσωση έχει γραφτεί σε μία **κανονική** μορφή. Για να μελετήσουμε λοιπόν μια δεδομένη εξίσωση την μετατρέπουμε σε κανονική μορφή για να επωφεληθούμε από γνωστά αποτελέσματα.

Σκοπός του κεφαλαίου αυτού είναι να ταξινομήσουμε τις γραμμικές ΜΔΕ δεύτερης τάξης σε τρεις τύπους που παραμένουν αναλλοίωτοι κάτω από μια αλλαγή μεταβλητών. Θα συντάξουμε τις δύο εναλλακτικές κανονικές μορφές μιας Υπερβολικής ΜΔΕ και στη συνέχεια θα δείξουμε τη χαρακτηριστική ιδιότητα των Υπερβολικών ΜΔΕ να έχουν δύο διακριτές οικογένειες χαρακτηριστικών καμπυλών.

**Προσδοκώμενα αποτελέσματα:**

Όταν θα έχετε μελετήσει το μάθημα αυτό, θα μπορείτε να:

* Να βρείτε τον τύπο μιας γραμμικής ΜΔΕ β’ τάξης.
* Να προσδιορίσετε τις χαρακτηριστικές καμπύλες μιας Υπερβολικής γραμμικής ΜΔΕ β’ τάξης.
* Να μετασχηματίσετε μια Υπερβολική γραμμική ΜΔΕ β’ τάξης σε 1η ή 2η κανονική μορφή.
* Να καταλάβετε ότι οι χαρακτηριστικές καμπύλες είναι εξαιρετικές υπό την έννοια ότι κατά μήκος μιας τέτοιας καμπύλης το πρόβλημα Cauchy δεν έχει μοναδική λύση.

## Ταξινόμηση Γραμμικών ΜΔΕ β’ Τάξης με Κριτήριο το Πρόσημο της Διακρίνουσας

Οι μη-γραμμικές ΜΔΕ είναι τόσο ποικιλόμορφες ώστε δεν επιδέχονται καμία συστηματική ταξινόμηση, σε αντίθεση με τις γραμμικές ΜΔΕ 2ης τάξης, για τις οποίες υπάρχουν **τρεις χαρακτηριστικές κατηγορίες**: η υπερβολική, η παραβολική και η ελλειπτική.

Η γνώση του τύπου της ΜΔΕ μας επιτρέπει να εφαρμόσουμε δοκιμασμένες μεθόδους μελέτης της. Αυτές οι μέθοδοι διαφέρουν ουσιαστικά ανάλογα με τον τύπο της ΜΔΕ. Ο συγκεκριμένος τύπος μιας ΜΔΕ 2ης τάξης ορίζει το είδος των Αρχικών Συνθηκών ή των Συνοριακών Συνθηκών που βοηθούν με φυσικό τρόπο να καθοριστεί η λύση της με μοναδικό τρόπο.

Η συστηματική ταξινόμηση των γραμμικών ΜΔΕ 2ης τάξης με δύο μεταβλητές που ακολουθεί εμφανίζει πολλές ομοιότητες με την κλασσική ταξινόμηση των τετραγωνικών εξισώσεων κωνικών τομών που γίνεται με βάση τους συντελεστές του κύριου μέρους τους.

Όπως γνωρίζουμε, οι κωνικές τομές ταξινομούνται ανάλογα με το **πρόσημο** της τετραγωνικής **διακρίνουσας** τους:

1. Αυτό παραμένει αναλλοίωτο σε συσχετισμένους μετασχηματισμούς. Επομένως, συσχετισμένες απεικονίσεις μετασχηματίζουν κωνικές σε κωνικές του ίδιου είδους και έτσι δικαιολογείται η κατηγοριοποίησή τους με βάση το πρόσημο της διακρίνουσας.
2. Αυτή η ιδιότητα μας επιτρέπει να κάνουμε **κατάλληλους μετασχηματισμούς συντεταγμένων** ώστε να φέρουμε την εξίσωση σε μία από τις γνωστές κανονικές μορφές:
   * Του κύκλου:
   * Της παραβολής:
   * Της υπερβολής:

Με παρόμοιο τρόπο θα εργαστούμε στην ταξινόμηση των γραμμικών ΜΔΕ 2ης τάξης με δύο ανεξάρτητες μεταβλητές. Εστιάζουμε την προσοχή μας στην πιο γενική γραμμική ΜΔΕ 2ης τάξης με δύο μεταβλητές

(Ε)

στην οποία θεωρούμε ότι οι συντελεστές και ο ανεξάρτητος όρος μπορεί να είναι συνεχείς συναρτήσεις των ανεξάρτητων μεταβλητών αλλά δεν εξαρτώνται από την άγνωστη συνάρτηση . Επίσης υποθέτουμε ότι δεν μηδενίζονται ταυτόχρονα σε κάποιο σημείο του πεδίου ορισμού Ω της (Ε).

**Ορίζουμε** ως **διακρίνουσα Δ** της (Ε) το . Η διακρίνουσα είναι δηλαδή το αντίθετο της ορίζουσας του συμμετρικού **πίνακα των συντελεστών**:

(Εδώ δικαιολογείται η εμφάνιση του παράγοντα 2 στο συντελεστή του όρου που απλουστεύει τους περαιτέρω υπολογισμούς).

**Ορισμοί:**

* Αν στο σημείο η ΜΔΕ (Ε) λέγεται **υπερβολική** στο .
* Αν στο σημείο η ΜΔΕ (Ε) λέγεται **παραβολική** στο .
* Αν στο σημείο η ΜΔΕ (Ε) λέγεται **ελλειπτική** στο .

Η εξίσωση (Ε) λέγεται υπερβολική, παραβολική ή ελλειπτική στον τόπο Ω αν είναι, αντίστοιχα, υπερβολική, παραβολική ή ελλειπτική σε κάθε σημείο του Ω.

Μια εξίσωση (Ε) που μεταβάλλει τον τύπο της στο θεμέλιο πεδίο Ω ονομάζεται ΜΔΕ **μεικτού τύπου**.

Το **πρόσημο** της διακρίνουσας της εξίσωσης (Ε) παραμένει **αναλλοίωτο** σε κατάλληλο μετασχηματισμό: πράγματι, θα εφαρμόσουμε έναν τοπικά αντιστρέψιμο μετασχηματισμό συντεταγμένων με και με Ιακωβιανή . Συμβολίζουμε τη συνάρτηση στην οποία η μετασχηματίζεται με .

Εφαρμόζουμε τον κανόνα της αλυσίδας:

Με αντικατάσταση στην εξίσωση (Ε) βρίσκουμε:

(

όπου οι συντελεστές δίνονται από:

Υπολογίζουμε τη διακρίνουσα (ή μάλλον σας αφήνουμε να την υπολογίσετε ως άσκηση :) ). Αποδεικνύεται ότι

, δηλαδή

Αποδείξαμε το **θεώρημα**:

Το πρόσημο της διακρίνουσας μιας γραμμικής ΜΔΕ 2ης τάξης με 2 ανεξάρτητες μεταβλητές είναι αναλλοίωτο κάτω από μια λεία μη ιδιόμορφη αλλαγή συντεταγμένων.

Το θεώρημα αποκαλύπτει πως το γεγονός ότι η διακρίνουσα είναι θετική, μηδέν ή αρνητική είναι μια εγγενής ιδιότητα της ΜΔΕ που δεν εξαρτάται από το σύστημα συντεταγμένων που χρησιμοποιείται. Δικαιολογείται έτσι η **ταξινόμηση** των ΜΔΕ 2ης τάξης με **κριτήριο το πρόσημο της διακρίνουσάς** τους.

Παραδείγματα:

1. Η **κυματική εξίσωση** έχει

άρα η κυματική εξίσωση είναι **υπερβολική** στο .

1. Η εξίσωση **Tricomi** έχει

άρα η εξίσωση **Tricomi** είναι

* **ελλειπτική** στο άνω ημιεπίπεδο
* **παραβολική** πάνω στην ευθεία
* **υπερβολική** στο κάτω ημιεπίπεδο .

## Ταξινόμηση Γραμμικών ΜΔΕ β’ Τάξης με Κριτήριο το Πρόσημο των Ιδιοτιμών της

Εστιάζουμε την προσοχή μας στην πιο γενική γραμμική ΜΔΕ 2ης τάξης με δύο μεταβλητές και σταθερούς συντελεστές

**(Ε)**

Θεωρούμε τον **πίνακα των συντελεστών** του Κυρίου Μέρους

Υπολογίζουμε τις **ιδιοτιμές** του **συμμετρικού** πίνακα Α από την εξίσωση

Στη Γραμμική Άλγεβρα αποδεικνύεται ότι οι ιδιοτιμές ενός πραγματικού, συμμετρικού πίνακα είναι και αυτές πραγματικές.

Ισχύουν οι σχέσεις

όπου η διακρίνουσα του Κύριου Μέρους της ΜΔΕ. Συμπεραίνουμε ότι μπορούμε να ταξινομήσουμε τις γραμμικές ΜΔΕ β’ τάξης με **κριτήριο το πρόσημο των ιδιοτιμών** τους ως εξής:

* Αν **μη μηδενικές και ετερόσημες**, τότε η ΜΔΕ (Ε) είναι **υπερβολική**.
* Αν τουλάχιστο μία από τις ιδιοτιμές **είναι μηδέν**, τότε η ΜΔΕ (Ε) είναι **παραβολική**.
* Αν **μη μηδενικές και ομόσημες**, τότε η ΜΔΕ (Ε) είναι **ελλειπτική**.

**τιμές των ιδιοτιμών** τους:

Παράδειγμα:

Η **κυματική εξίσωση** έχει

Οι ιδιοτιμές είναι μη – μηδενικές και ετερόσημες, άρα η κυματική εξίσωση είναι **υπερβολική** στο .

## Γραμμική Υπερβολική ΜΔΕ β’ τάξης με σταθερούς συντελεστές

### Χαρακτηριστικές Καμπύλες

Θεωρούμε τη γραμμική ΜΔΕ β’ τάξης

(Ε)

και υποθέτουμε ότι οι συντελεστές είναι σταθεροί.

Γνωρίζουμε ότι ο τύπος της ΜΔΕ δεν μεταβάλλεται όταν εφαρμόζουμε έναν αντιστρέψιμο **μετασχηματισμό συντεταγμένων**  με και με Ιακωβιανή .

Συμβολίζοντας τη συνάρτηση στην οποία η μετασχηματίζεται με και εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας προκύπτει η μετασχηματισμένη εξίσωση

(

όπου οι συντελεστές δίνονται από:

και ό\_μ\_τ\_ σημαίνει όροι μικρότερης τάξης.

Παρατηρούμε ότι οι εκφράσεις για έχουν την ίδια μορφή και διαφέρουν μόνο στο ότι η πρώτη εξίσωση αφορά στη μεταβλητή ενώ η δεύτερη στη μεταβλητή . Το κύριο μέρος της μετασχηματισμένης εξίσωσης ( θα είναι ιδιαίτερα απλό αν μηδενιστούν ταυτοτικά οι συντελεστές . Αυτό ισοδυναμεί με το να λύσουμε την **χαρακτηριστική εξίσωση (Χ)**

στην οποία θέτουμε στη θέση των .

Η χαρακτηριστική εξίσωση προκύπτει δηλαδή αν στο κύριο μέρος της ΜΔΕ

αντικαταστήσουμε .

Οι λύσεις αυτής της εξίσωσης ονομάζονται **χαρακτηριστικές καμπύλες** της ΜΔΕ (Ε). Η εξίσωση είναι ομογενής στις και μπορούμε να τη μεταμορφώσουμε διαιρώντας τα δύο μέλη της με . Βρίσκουμε

Παρατήρηση: μπορούμε να υποθέσουμε ότι . Πραγματικά, αν αλλά μπορούμε να ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία διαιρώντας με . Και αν τότε έχουν ήδη εξαφανιστεί οι όροι .

Ζητάμε να βρούμε συναρτήσεις τέτοιες ώστε ο λόγος ικανοποιεί τη χαρακτηριστική εξίσωση (Χ). Κάνουμε την εξής παρατήρηση: κατά μήκος των καμπυλών ισχύει ότι άρα η κλίση της χαρακτηριστικής καμπύλης δίνεται από τη σχέση

Αντικατάσταση στην εξίσωση (Χ) δίνει την εξίσωση της **διεύθυνσης της χαρακτηριστικής καμπύλης** (**X2**)

Πρόκειται για μια δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς , επομένως μπορεί να έχει 2, 1 ή 0 πραγματικές λύσεις, ανάλογα με το πρόσημο της διακρίνουσας . Λύνοντάς την ως προς βρίσκουμε

Παρατήρηση:

Από κάθε σημείο του Θεμελιώδους Πεδίου περνούν

1. **δύο** χαρακτηριστικές καμπύλες, όταν
2. **μία** χαρακτηριστική καμπύλη, όταν
3. **καμία** χαρακτηριστική καμπύλη, όταν

Συνεπώς,

* οι εξισώσεις **υπερβολικού** τύπου έχουν **δύο** οικογένειες χαρακτηριστικών καμπυλών.
* οι εξισώσεις **παραβολικού** τύπου έχουν μόνο **μία** οικογένεια χαρακτηριστικών καμπυλών.
* οι εξισώσεις **ελλειπτικού** τύπου **δεν** έχουν χαρακτηριστικές καμπύλες.

Για να βρούμε τώρα τις συναρτήσεις και των **χαρακτηριστικών συντεταγμένων** της ΜΔΕ, λύνουμε ως προς με ολοκλήρωση οπότε παρουσιάζονται δύο σταθερές ολοκλήρωσης.

Έπειτα λύνουμε ως προς τις σταθερές και τις αφήνουμε στο δεξί μέρος της αντίστοιχης εξίσωσης. Οι συναρτήσεις των x και y στα αριστερά μέρη δίνουν τις ζητούμενες συναρτήσεις και .

Παράδειγμα:

Προσδιορίστε τον τύπο και τις χαρακτηριστικές καμπύλες της εξίσωσης

Λύση:

1. Οι συντελεστές του κύριου μέρους είναι , άρα και η εξίσωση είναι υπερβολική.
2. Η εξίσωση (Χ2) των διευθύνσεων των χαρακτηριστικών καμπυλών είναι

Λύνουμε τις δύο εξισώσεις ως προς :

και

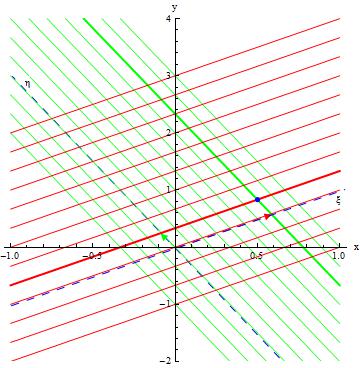
.

Για να βρούμε τις χαρακτηριστικές καμπύλες λύνουμε ως προς τις σταθερές, απομονώνοντάς τες στο δεξιό μέρος της εξίσωσης.

και

.

1. Γραφική παράσταση των χαρακτηριστικών καμπυλών:



### Πρώτη Κανονική Μορφή μιας Γραμμικής Υπερβολικής ΜΔΕ β’ Τάξης

Όπως είδαμε μια γραμμική Υπερβολική ΜΔΕ β’ τάξης μπορεί να απλοποιηθεί με την επιλογή των χαρακτηριστικών καμπυλών ως νέου συστήματος συντεταγμένων.

Έστω

οι εξισώσεις των χαρακτηριστικών καμπυλών. Τότε η εξίσωση

ανάγεται στη μορφή

Διαιρώντας με (που δεν εξαφανίζεται, αλλιώς η εξίσωση δεν θα ήταν υπερβολική) βρίσκουμε την **πρώτη** **κανονική** **μορφή** της.

Η πρώτη κανονική μορφή θα είναι η βάση της μεθόδου επίλυσης του **d’Alembert**.

Αναγωγή στην 1η κανονική μορφή: Μεθοδολογία

1. Λύνουμε την εξίσωση των διευθύνσεων των χαρακτηριστικών καμπυλών.
2. Λύνουμε τις Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις που προκύπτουν.
3. Απομονώνουμε τις σταθερές ολοκλήρωσης στο δεξιό μέρος και ορίζουμε τις νέες χαρακτηριστικές συντεταγμένες.
4. Μετασχηματίζουμε την ΜΔΕ κάνοντας χρήση του κανόνα της αλυσίδας.

Παράδειγμα:

Να βρεθεί η κανονική μορφή με κύριο μέρος τη μεικτή παράγωγο της υπερβολικής γραμμικής ΜΔΕ (Ε)

Η εξίσωση των διευθύνσεων των χαρακτηριστικών καμπυλών είναι

Λύνουμε τις δύο εξισώσεις ως προς :

και

.

Για να βρούμε τις χαρακτηριστικές συντεταγμένες λύνουμε ως προς τις σταθερές, απομονώνοντάς τες στο δεξιό μέρος της εξίσωσης.

και

.



Μετασχηματίζουμε την εξίσωση (Ε). Συμβολίζοντας τη συνάρτηση στην οποία η μετασχηματίζεται με εφαρμόζουμε τον κανόνα της αλυσίδας:

Με αντικατάσταση στην εξίσωση (Ε) προκύπτει:

που είναι η ζητούμενη κανονική μορφή.

Παρατήρηση:

Η γενική υπερβολική εξίσωση έχει στην πραγματικότητα **δύο** κανονικές μορφές. Στη 2η μορφή λείπει ο μεικτός όρος. Μπορούμε να βρούμε τη δεύτερη μορφή με μια επιπλέον απεικόνιση

Συμβολίζουμε τη συνάρτηση στην οποία η μετασχηματίζεται με . Η μετασχηματισμένη εξίσωση γίνεται έτσι

η οποία είναι η **δεύτερη κανονική μορφή** για την υπερβολική εξίσωση.

### Δεύτερη Κανονική Μορφή μιας Γραμμικής Υπερβολικής ΜΔΕ β’ Τάξης

Θα προσπαθήσουμε να απλοποιήσουμε την εξίσωση (Ε) με σταθερούς συντελεστές

με την επιλογή ενός νέου συστήματος συντεταγμένων. Στόχος μας είναι να **απαλλαγούμε από τον όρο με τη μεικτή παράγωγο**.

Για ευκολότερο συμβολισμό και με σκοπό μια απώτερη γενίκευση σε ανεξάρτητες μεταβλητές θα θέσουμε και μετονομάζουμε και τους συντελεστές της ΜΔΕ (**Ε**):

με . Έτσι οι συντελεστές του Κύριου Μέρους σχηματίζουν τον συμμετρικό πίνακα . Έστω ότι οι μεταβλητές και συνδέονται με γραμμικό μετασχηματισμό με πίνακα και .

Τότε

Ο κανόνας της αλυσίδας μας δίνει:

και στη συνέχεια:

Η μετασχηματισμένη εξίσωση γίνεται:

ή

Στην πρώτη παρένθεση αναγνωρίζουμε τα στοιχεία του πίνακα

Σχετικά στοιχεία από τη Γραμμική Άλγεβρα:

Ο πραγματικός συμμετρικός πίνακας των συντελεστών του Κυρίου Μέρους είναι **όμοιος** με ένα **διαγώνιο** πίνακα που έχει στη διαγώνιό του τις **ιδιοτιμές** του. Ο **ορθογώνιος** πίνακας για τον οποίο ισχύει έχει ως στήλες τα δύο ανεξάρτητα **μοναδιαία ιδιοδιανύσματα** του πίνακα . Για τον **ορθογώνιο** πίνακα ισχύει επίσης ότι ο ανάστροφος είναι και ο αντίστροφος, δηλ. . Έτσι .

Συμπέρασμα:

Αρκεί να επιλέξουμε ως πίνακα μετασχηματισμού όπου οι στήλες του πίνακα είναι τα κανονικοποιημένα ιδιοδιανύσματα του πίνακα **A** και οι συντελεστές των θα είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα **A**.

Μεθοδολογία:

1. Προσδιορίζουμε τις ιδιοτιμές του πίνακα .
2. Υπολογίζουμε τα ιδιοδιανύσματα .
3. Σχηματίζουμε τον ορθογώνιο πίνακα των ιδιοδιανυσμάτων.
4. Σχηματίζουμε τον ανάστροφο πίνακα .
5. Ορίζουμε τον γραμμικό μετασχηματισμό .
6. Εκτελούμε την αλλαγή συντεταγμένων. Έχουμε στρέψει το αρχικό σύστημα συντεταγμένων έτσι ώστε να απαλλαγούμε από τον όρο με μεικτή παράγωγο.

Παράδειγμα:

Να βρεθεί η κανονική μορφή με κύριο μέρος δίχως μεικτή παράγωγο της υπερβολικής γραμμικής ΜΔΕ (Ε)

1. , χαρακτηριστική εξίσωση:

επομένως , οι ιδιοτιμές είναι και , άρα η εξίσωση είναι υπερβολική.

1. Στην ιδιοτιμή αντιστοιχεί το ιδιοδιάνυσμα με αντικατάσταση του . , π.χ. , και με κανονικοποίηση

Ανάλογα βρίσκουμε και το δεύτερο κανονικοποιημένο ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή .

1. Σχηματίζουμε τον πίνακα των ιδιοδιανυσμάτων:
2. Σχηματίζουμε τον ανάστροφο πίνακα
3. Ορίζουμε τον γραμμικό μετασχηματισμό .
4. Εκτελούμε την αλλαγή συντεταγμένων.

και μετά από τους υπολογισμούς η εξίσωση () γίνεται:

Στον συντελεστή του αναγνωρίζουμε την 1η ιδιοτιμή, ενώ τον συντελεστή του μπορούμε να τον γράψουμε ως . Το κύριο μέρος της μετασχηματισμένης εξίσωσης είναι λοιπόν όπως το προέβλεπε η θεωρία.

Γίνεται μια περεταίρω κανονικοποίηση που κάνει τους συντελεστές του Κυρίου Μέρους . Ο μετασχηματισμός με τους συντελεστές κλίμακας είναι:

και μας δίνει

Συμπέρασμα:

Κάθε Υπερβολική ΜΔΕ β’ τάξης με δύο ανεξάρτητες μεταβλητές μπορεί να μετατραπεί στη μορφή

Κύριος αντιπρόσωπος αυτής της κατηγορίας είναι η **Κυματική Εξίσωση** σε μία χωρική διάσταση .

### Το Πρόβλημα Cauchy και οι Χαρακτηριστικές Καμπύλες

Μια χαρακτηριστική Ιδιότητα των ... Χαρακτηριστικών Καμπυλών είναι ότι αποτελούν μια εξαίρεση για το πρόβλημα Αρχικών Τιμών Cauchy!

Πράγματι, θα δείξουμε ότι οι χαρακτηριστικές καμπύλες έχουν τη σπουδαία **ιδιότητα** πως αποτελούν μια εξαίρεση για το πρόβλημα Αρχικών Τιμών Cauchy: αν τα αρχικά δεδομένα βρίσκονται σε μια χαρακτηριστική καμπύλη, τότε είτε **δεν** υπάρχει λύση στο πρόβλημα Cauchy, είτε υπάρχουν **άπειρες** λύσεις! Με άλλα λόγια: τότε το ΠΑΤ **δεν είναι καλά διατυπωμένο**.

Ξεκινάμε με την εξίσωση

(Ε)

Ορίζουμε μια λεία καμπύλη με παραμετρικές εξισώσεις

όπου το μήκος τόξου κατά μήκος της καμπύλης .

Υποθέτουμε ότι η λύση είναι γνωστή πάνω στην καμπύλη : και ερευνούμε ποια ακριβώς επιπλέον δεδομένα χρειάζονται κατά μήκος της για να βρούμε μια μοναδική λύση.

Παριστάνουμε με το **εφαπτόμενο** διάνυσμα στην στο σημείο :

Επειδή υποθέσαμε ότι η λύση είναι γνωστή πάνω στην καμπύλη μπορούμε να υπολογίσουμε την παράγωγό της κατά μήκος της

(1)

Στην εξίσωση (1) γνωστές είναι οι τιμές και πάνω στην καμπύλη , ενώ άγνωστες είναι οι τιμές των πρώτων μερικών παραγώγων της .

Αν γνωρίζαμε τις τιμές των και , τότε θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε την τιμή της σε ένα σημείο που βρίσκεται κοντά σε κάποιο σημείο της προσεγγιστικά:

Είναι λοιπόν πρώτο μας μέλημα να υπολογίσουμε και . Φυσικά δεν επαρκούν οι τιμές της και των και για να υπολογίσουμε σε σημεία μακριά από την καμπύλη . Για να πετύχουμε αυτό πρέπει να γνωρίζουμε όλες τις μερικές παραγώγους της , ώστε να βρούμε την μέσω του αναπτύγματος Taylor:

Σ’ αυτή την εξίσωση το σημείο βρίσκεται στη , ενώ ανήκει στο επίπεδο, αλλά όχι στη .

**Υπολογισμός των και**

Αποδεικνύεται ότι μπορούμε να υπολογίσουμε τις πρώτες μερικές παραγώγους της αν γνωρίζουμε επιπλέον την κάθετη παράγωγο της κατά μήκος της .

Παριστάνουμε με το **κάθετο** διάνυσμα στην στο σημείο :

Τότε η κάθετη παράγωγος της στο σημείο είναι:

(2)

Στην εξίσωση (2) γνωστές είναι οι τιμές και πάνω στην καμπύλη , ενώ άγνωστες είναι οι τιμές των πρώτων μερικών παραγώγων της .

Το σύστημα (1), (2) έχει μοναδική λύση ως προς και αφού η ορίζουσα των συντελεστών .

**Υπολογισμός των τριών δεύτερων μερικών παραγώγων**

Έχουμε στη διάθεσή μας τις εξής τρεις εξισώσεις:

(3)

(4)

(Ε)

Το σύστημα (3), (4), (Ε) έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν η ορίζουσα των συντελεστών δεν εξαφανίζεται:

Κατά μήκος της καμπύλης ισχύει ότι , οπότε η συνθήκη που **δεν** εγγυάται μια μοναδική λύση για τις δεύτερης τάξης μερικές παραγώγους γίνεται:

(X2)

και ξαναβρίσκουμε τη χαρακτηριστική εξίσωση της ΜΔΕ (Ε)!

**Συμπέρασμα**

Το πρόβλημα Cauchy έχει τοπικά μοναδική λύση για αρχικά δεδομένα και κατά μήκος μιας **μη** – χαρακτηριστικής καμπύλης.

# Η Κυματική Εξίσωση σε Μία Χωρική Διάσταση

**Στόχοι:**

Σκοπός του μαθήματος είναι να μελετήσουμε λεπτομερώς την απλή κυματική εξίσωση σε μία χωρική διάσταση (γνωστή ως μονοδιάστατη κυματική εξίσωση, αν και έχουμε βεβαίως δύο ανεξάρτητες μεταβλητές, η άλλη είναι απαραίτητα ο χρόνος ).

**Προσδοκώμενα αποτελέσματα:**

Όταν θα έχετε μελετήσει το μάθημα αυτό, θα μπορείτε να:

* Να παράγετε την κυματική εξίσωση για μια ταλαντευόμενη χορδή από τους νόμους του Newton.
* Να κατέχετε τη γενική λύση της κυματικής εξίσωσης με τη μέθοδο του d’ Alembert.
* Να λύσετε το απλό Πρόβλημα Αρχικών Τιμών με τη μέθοδο d’ Alembert.
* Να κατανοήσετε ότι ασυνέχειες μιας λύσης ενός ΠΑΤ που έχουν φυσική σημασία μπορούν να μεταδίδονται μόνο κατά μήκος των χαρακτηριστικών καμπυλών.
* Να κατέχετε την έννοια του **πεδίου εξάρτησης** της λύσης σε ένα σημείο .
* Να κατέχετε την έννοια του **πεδίου επιρροής** ενός διαστήματος σε .

## Η Φυσική Προέλευση της Κυματική Εξίσωσης – Η Ταλαντευόμενη Χορδή

Φαινόμενα ταλαντώσεων και διάδοσης κυμάτων κυβερνώνται από κυματικές εξισώσεις. Με παριστάνουμε τη χρονική μεταβλητή και στην περίπτωση μίας μόνης χωρικής διάστασης η ανεξάρτητη μεταβλητή συμβολίζεται με .

Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα τις ταλαντώσεις μιας τεντωμένης χορδής, όπως η χορδή ενός βιολιού (η κιθάρας αν προτιμάτε), με μήκος . Τότε η κατακόρυφη απόσταση από το βιολί είναι συνάρτηση του χρόνου και της απόστασης από το άκρο της χορδής, οπότε .

U

0

x

A

B

dx

X

u

α

α’

Tx

TA

Ty

TB

T’x

T’y

Θεωρούμε ένα στοιχειώδες τμήμα ΑΒ της χορδής με μήκος που έχει μετατοπιστεί σε απόσταση από την αρχική θέση ισορροπίας. Στο άκρο Α ενεργεί η **τάση** και στο άκρο Β η τάση . Οι x- συνιστώσες και είναι ίσες και αντίθετες γιατί η κίνηση είναι εγκάρσια άρα η διαμήκης συνιστώσα της επιτάχυνσης είναι μηδέν. Η κινούσα δύναμη θα είναι λοιπόν .

Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι τόσο η μετατόπιση όσο και η κλίση των ταλαντώσεων (δηλ. το ) είναι μικρές, τότε θα είναι ανάλογα μικρές οι γωνίες

και ισχύουν οι προσεγγίσεις:

Γράφοντας προκύπτει:

Αυτή η δύναμη, σύμφωνα με το νόμο του Νεύτωνα, είναι ίση με το γινόμενο της μάζας του τμήματος AB της χορδής επί την εγκάρσια επιτάχυνσή της, άρα

όπου  **η γραμμική** **πυκνότητα** της χορδής.

Αν θέσουμε , τότε η εξίσωση ανάγεται στην **πρότυπη** εξίσωση κύματος

Ας υπολογίζουμε τη διάσταση του :[[1]](#footnote-1)

άρα έχει διάσταση ταχύτητας: πρόκειται για την **ταχύτητα διάδοσης** του κύματος.

**Διαισθητική εξήγηση της κυματικής εξίσωσης**

Η έκφραση αντιπροσωπεύει την κατακόρυφη επιτάχυνση της χορδής στο σημείο . Επομένως μπορούμε να ερμηνεύσουμε την εξίσωση λέγοντας ότι η επιτάχυνση σε κάθε σημείο της χορδής προέρχεται από την τάση της χορδής και ότι όσο μεγαλύτερη είναι η κυρτότητα , τόσο μεγαλύτερη είναι και η δύναμη (με σταθερά αναλογίας ).

|  |  |
| --- | --- |
|  | Interpretation.jpg |
|  |

**Σημείωση**

Αφού η τάξη της εξίσωσης (1) ως προς τη χρονική μεταβλητή είναι **δύο**, απαιτούνται δύο αρχικές συνθήκες:

(αρχική θέση)

(αρχική ταχύτητα)

για να ορίσουμε μοναδικά τη λύση για .

## Η Γενική Λύση του d’ Alembert της Κυματικής Εξίσωσης

Θα βρούμε πρώτα τη **γενική λύση** της κυματικής εξίσωσης σε μία χωρική διάσταση (Ε):

Η μέθοδος που θα χρησιμοποιούμε κάνει χρήση των **χαρακτηριστικών συντεταγμένων** που θα φέρουν την εξίσωση (Ε) στην εναλλακτική της 1η κανονική μορφή.

Οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι και οι συντελεστές του κύριου μέρους είναι:

. Η χαρακτηριστική εξίσωση των διευθύνσεων (Χ2) γίνεται:

Οι χαρακτηριστικές συντεταγμένες είναι λοιπόν:

με Ιακωβιανή

Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα

βρίσκουμε τη μετασχηματισμένη εξίσωση ()

Η λύση προκύπτει εύκολα με άμεση ολοκλήρωση:

1. Ως προς : μια αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση του
2. Ως προς ξ: μια αυθαίρετη σταθερή συνάρτηση του , άρα

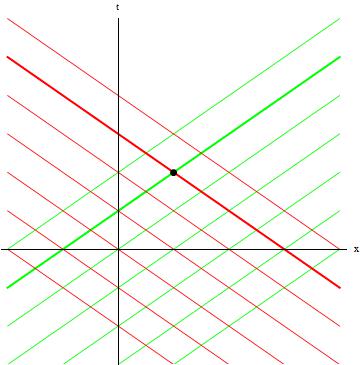
Με αντίστροφο μετασχηματισμό στις αρχικές συντεταγμένες βρίσκουμε τελικά τη **γενική λύση**:

(Λ)

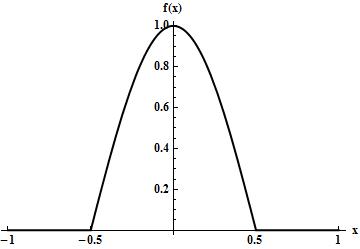
που εμπεριέχει δύο αυθαίρετες συναρτήσεις και **μίας** μεταβλητής.

**Παρατηρήσεις: Λίγη (ουσιαστική) φιλολογία**

* Ο τύπος (Λ) αντιπροσωπεύει μια ακριβή λύση της κυματικής εξίσωσης υπό τον μοναδικό όρο να έχουν οι αυθαίρετες συναρτήσεις και συνεχείς δεύτερες παραγώγους. Αν όμως μια αυθαίρετη συνάρτηση έχει σε κάποιο σημείο μια **ασυνέχεια** τύπου άλματος, τότε η ίδια η λύση έχει προφανώς ένα αντίστοιχο σημείο ασυνέχειας. Η ιδιαίτερη μορφή της λύσης (Λ) καταδεικνύει ότι τέτοιες ασυνέχειες μπορούν να παρουσιαστούν μόνο κατά μήκος των χαρακτηριστικών καμπυλών και . Αφού οι συναρτήσεις και σε ένα ΠΑΤ (όπως θα δούμε στη συνέχεια) υπολογίζονται από τις Αρχικές Συνθήκες, είναι φανερό ότι η λύση δεν μπορεί να είναι πιο λεία από τα **αρχικά δεδομένα** και ότι ενδεχόμενες αρχικές ανωμαλίες στα δεδομένα επιμένουν στο χρόνο και **μεταφέρονται** από την πηγή τους στην αρχή του χρόνου **κατά μήκος των χαρακτηριστικών καμπυλών**.
* Υπάρχουν δύο οικογένειες χαρακτηριστικών καμπυλών, η μία είναι η δέσμη παράλληλων ευθειών με θετική **κλίση**  , ενώ η άλλη δέσμη έχει αρνητική **κλίση**  . Από κάθε σημείο περνούν ακριβώς δύο χαρακτηριστικές καμπύλες.



* Η μέθοδος d’ Alembert εφαρμόζεται σε **μη-φραγμένο** πεδίο, χωρίς εμπόδια από Συνοριακές Συνθήκες.
* Για να κατανοήσουμε βαθύτερα κάποιες **ιδιότητες της γενικής λύσης** (Λ) ας εστιάσουμε πρώτα στην περίπτωση του **απλού τρέχοντος** κύματος που παίρνουμε θέτοντας τη συνάρτηση . Η έκφραση αναφέρεται συχνά ως **φάση** του κύματος. Αν υποθέσουμε ότι την αρχική στιγμή ή λύση δίνεται από τη σχέση:



Εισάγουμε ένα νέο σύστημα αξόνων X,Y με τη μετατόπιση .

Αν δώσουμε μια ομαλή κίνηση στον άξονα με ταχύτητα προς τα δεξιά, δηλαδή θέτουμε , τότε και η κυματομορφή κινείται με ταχύτητα προς τα δεξιά.

|  |  |
| --- | --- |
|  | WaveToRight_t0.jpg |
|  | WaveToRight_t1.jpg |
|  | WaveToRight_t2.jpg |

Επομένως, η συνάρτηση παριστάνει ένα **τρέχον κύμα** που κινείται προς τα **δεξιά** με σταθερή ταχύτητα. Εναλλακτικά μπορούμε να σκεφθούμε ότι η συνάρτηση έχει την ίδια τιμή, , για κάθε σημείο του χωρόχρονου με ιδιότητα . Επομένως, για αυξανόμενο πρέπει επίσης το να αυξάνεται (!) και η συνάρτηση περιγράφει μια μετατόπιση προς τα δεξιά.

Είναι τώρα φανερό ότι η **ταχύτητα διάδοσης ή φάσης**  παριστάνει την ταχύτητα με την οποία θα πρέπει να κινείται ένας παρατηρητής για να παραμένει πάντα στο ίδιο σημείο σχετικά με το κύμα.

Τι παριστάνει τώρα η δεύτερη συνάρτηση της γενικής λύσης, δηλαδή ; ☺

Συμπεραίνουμε ότι η γενική λύση (Λ) είναι η επαλληλία δύο **τρεχόντων κυμάτων** που ταξιδεύουν (traveling waves) στις δύο αντίθετες διευθύνσεις που επιτρέπει το μέσο με (φασική) ταχύτητα .

# Μέθοδοι Επίλυσης Προβλημάτων με ΜΔΕ την Κυματική

**Στόχοι:**

Σκοπός του μαθήματος είναι να μελετήσουμε διάφορες τεχνικές επίλυσης προβλημάτων αρχικών και συνοριακών τιμών που έχουν ως ΜΔΕ την κυματική εξίσωση.

**Προσδοκώμενα αποτελέσματα:**

Όταν θα έχετε μελετήσει το μάθημα αυτό, θα μπορείτε να:

* Να λύσετε το απλό Πρόβλημα Αρχικών Τιμών με τη μέθοδο d’ Alembert.
* Να κατανοήσετε ότι ασυνέχειες μιας λύσης ενός ΠΑΤ που έχουν φυσική σημασία μπορούν να μεταδίδονται μόνο κατά μήκος των χαρακτηριστικών καμπυλών.
* Να κατέχετε την έννοια του **πεδίου εξάρτησης** της λύσης σε ένα σημείο .
* Να κατέχετε την έννοια του **πεδίου επιρροής** ενός διαστήματος σε .
* Να κατανοήσετε τη σημασία της διάκρισης των προβλημάτων σε ομογενή και μη ομογενή.
* Να μπορείτε να εφαρμόσετε τη μέθοδο επίλυσης με ολοκληρωτικούς μετασχηματισμούς Fourier και Laplace.
* Να κατανοήσετε τη σπουδαιότητα της μεθόδου του χωρισμού των μεταβλητών.
* Να κατανοήσετε τι σημαίνουν οι συναρτήσεις βάσης.
* Να κατανοήσετε τη σημασία της αρχής του Duhamel.

## Το Ομογενές Πρόβλημα Αρχικών Τιμών

### Η μέθοδος d’ Alembert

Θεωρούμε το Μη Φραγμένο Πρόβλημα Αρχικών Τιμών:

(Ε)

(ΑΣ)

Αφού η κυματική εξίσωση είναι β’ τάξης στο χρόνο χρειάζονται **δύο Αρχικές Συνθήκες**. Αν η ΜΔΕ περιγράφει τις ταλαντώσεις μιας χορδής, τότε τόσο η αρχική θέση όσο και η αρχική ταχύτητα της χορδής πρέπει να δοθούν σε κάθε σημείο της.

Θα βρούμε τη λύση του ΠΑΤ αντικαθιστώντας τις Αρχικές Συνθήκες στη γενική λύση d’ Alembert.

Αντικατάσταση στη γενική λύση

των δύο Αρχικών Συνθηκών δίνει:

(1)

και

⇒

(2)

Με ολοκλήρωση της (2) βρίσκουμε:

με (3)

Με προσθαφαίρεση των σχέσεων (1) και (3) προκύπτουν:

(4)

(5)

Εφαρμόζουμε στην (4) μια αλλαγή του συμβόλου της μεταβλητής από

(6)

Εφαρμόζουμε αντίστοιχα στην (5) μια αλλαγή του συμβόλου της μεταβλητής από

(7)

Τελικά έχουμε τη **λύση d’ Alembert**:

⇒

|  |
| --- |
|  |

**Ερμηνεία της λύσης**

Η λύση d’ Alembert στο σημείο είναι ο μέσος όρος των αρχικών απομακρύνσεων στα σημεία και αντίστοιχα, τα οποία βρίσκουμε «ταξιδεύοντας» προς τα πίσω στο χρόνο κατά μήκος των χαρακτηριστικών καμπυλών, συν το ολοκλήρωμα της αρχικής ταχύτητας μεταξύ των σημείων αυτών πάνω στην γραμμή της αρχής .

**Παρατηρήσεις:**

* Η ιδιότητα ότι τα αρχικά δεδομένα μεταφέρονται κατά μήκος των χαρακτηριστικών διακρίνει τις Υπερβολικές ΜΔΕ από τις Παραβολικές και Ελλειπτικές ΜΔΕ.
* Αν η και η τότε η λύση που βρήκαμε είναι μια **κλασσική** λύση του Προβλήματος Αρχικών Τιμών.
* Η λύση του ΠΑΤ δεν μπορεί να είναι πιο λεία από την αρχική συνάρτηση : αν η έχει σε κάποιο σημείο μια **ασυνέχεια** τύπου άλματος, τότε η ίδια η λύση έχει προφανώς ένα αντίστοιχο σημείο ασυνέχειας. Η ιδιαίτερη μορφή της λύσης καταδεικνύει ότι τέτοιες αρχικές ασυνέχειες στα δεδομένα επιμένουν στο χρόνο και **μεταφέρονται** από την πηγή τους στην αρχή του χρόνου **κατά μήκος των χαρακτηριστικών καμπυλών**  και .
* Η λύση στο εξαρτάται μόνο από τα δεδομένα στο διάστημα .
* Η στρατηγική της αντικατάστασης της Γενικής Λύσης στις Αρχικές Συνθήκες **δεν** είναι μια κοινή τεχνική στην επίλυση ενός ΠΑΤ. Κανονικά δεν μπορούμε να βρούμε τη γενική λύση μιας ΜΔΕ, και αν ακόμα τη βρίσκαμε, θα είναι υπερβολικά πολύπλοκη για να την αντικαταστήσουμε στις Αρχικές Συνθήκες.

**Παράδειγμα της Λύσης d’ Alembert**

Η κίνηση ενός αρχικού ημιτονικού κύματος.

Θεωρούμε τις Αρχικές Συνθήκες

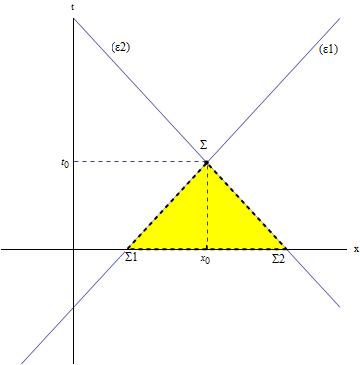
Η λύση d’ Alembert είναι

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Αυτή μπορεί να ερμηνευθεί διαιρώντας την αρχική μορφή σε δύο ίσα μέρη  και |  |  |
| Η μία μορφή (κόκκινη) θα κινείται με ταχύτητα προς τα δεξιά ενώ η δεύτερη μορφή (πράσινη) θα κινείται με ταχύτητα προς τα αριστερά. |  |  |
| Το κύμα της λύσης βρίσκεται προσθέτοντας τα δύο επιμέρους κύματα και είναι σε παχύ μπλε χρώμα στην εικόνα. |  |  |
|  |  |  |

#### Πεδίο Εξάρτησης και Πεδίο Επιρροής

Θεωρούμε ένα σημείο με του επιπέδου και σχεδιάζουμε τις χαρακτηριστικές καμπύλες που διέρχονται από το σημείο .

Ονομάζουμε και τα δύο σημεία τομής των με τον άξονα .



Όπως φαίνεται από τον τύπο του d’ Alembert, η λύση στο σημείο δεν εξαρτάται από όλες τις αρχικές τιμές και , αλλά μόνο από τις τιμές στο διάστημα ανάμεσα στα σημεία και . Το διάστημα αυτό ονομάζεται το **Πεδίο Εξάρτησης** της λύσης στο σημείο .

Αν αρχικά το εσωτερικό του διαστήματος δεν είναι διαταραγμένο, τότε για χρονικό διάστημα το σημείο θα διατηρείται σε κατάσταση ηρεμίας. **Η διαταραχή δεν μπορεί να διαδοθεί πιο γρήγορα από τη φασική ταχύτητα** .

Αντίστροφα, μια διαταραχή που συμβαίνει στο διάστημα τη στιγμή επηρεάζει τη λύση μόνο στην περιοχή μεταξύ των δύο χαρακτηριστικών ευθειών .

a

b

x

t

Η περιοχή αυτή ονομάζεται **Πεδίο Επιρροής**  του διαστήματος .

Παρατηρήσαμε ότι η λύση του Προβλήματος Αρχικών Τιμών εξαρτάται αποκλειστικά από τα αρχικά δεδομένα . Αν αλλάζουν οι συναρτήσεις αλλάζει αυτόματα και η λύση, αλλά ισχύει και το αντίστροφο: διαφορετικές λύσεις αντιστοιχούν σε διαφορετικά αρχικά δεδομένα. Ισχύει δηλαδή η «**αρχή της αιτιότητας**» με βάση την οποία μπορεί να αποδειχθεί ότι το μη φραγμένο ΠΑΤ έχει **μοναδική λύση**.

**Η πεπερασμένη ταχύτητα της διάδοσης.**

Ας κοιτάξουμε ένα ΠΑΤ με Αρχικές Συνθήκες που είναι μηδενικές έξω από κάποια πεπερασμένη περιοχή: π.χ. την κίνηση ενός κύματος με αρχική μορφή τετραγωνική και μηδενική αρχική ταχύτητα

(Ε)

(ΑΣ)

Η λύση d’ Alembert δίνει:

x

t

t2

t1

ε1

ε2

ε’2

ε’1

για στην περιοχή 1

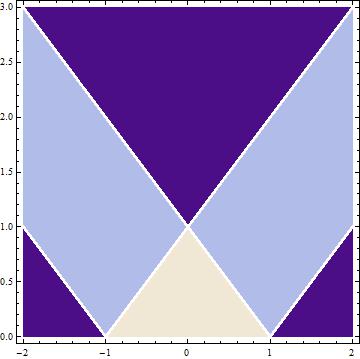
για στην περιοχή 2

για στην περιοχή 3

για στην περιοχή 4

για στις περιοχές 5, 6

Η αρχική συνθήκη είναι ένας ορθογώνιος παλμός με βάση 2 και ύψος 1. Το ορθογώνιο χωρίζεται σε δύο ίσα μέρη με βάση 2, αλλά ύψος . Η μία μορφή ταξιδεύει προς τα αριστερά, η άλλη προς τα δεξιά. Αυτό συνεπάγεται ότι η λύση είναι μηδενική παντού, εκτός μεταξύ των χαρακτηριστικών ευθειών και . Αν τοποθετήσουμε έναν παρατηρητή στο σημείο με στον θετικό άξονα , τότε αυτός αρχικά δεν βλέπει κύμα. Μετά παρατηρεί ένα αιχμηρό μέτωπο κύματος και στη συνέχεια ένα κύμα με ύψος για το χρονικό διάστημα . Τότε το κύμα εξαφανίζεται απότομα. Αυτή είναι μια συμπεριφορά τυπική των λύσεων Υπερβολικών ΜΔΕ σε **περιττές** χωρικές διαστάσεις. Διαφωτιστικό μπορεί να είναι το διάγραμμα ισοϋψών που ακολουθεί.

**

Τα αρχικά δεδομένα δεν γίνονται πιο λεία. Το κύμα έχει ένα αυστηρά ορισμένο χρόνο άφιξης και σε περιττές χωρικές διαστάσεις επίσης ένα αυστηρά ορισμένο χρόνο απομάκρυνσης.

Η λύση ενός ΠΑΤ με Αρχικές Συνθήκες που μηδενίζονται έξω από μια πεπερασμένη περιοχή, στο παράδειγμά μας έξω από το διάστημα , θα είναι και αυτή μηδέν έξω από μια πεπερασμένη περιοχή που επεκτείνεται όμως με το χρόνο. Ο ρυθμός με τον οποίο αυτή η περιοχή αυξάνεται μπορεί να ερμηνευθεί ως την **πεπερασμένη ταχύτητα της διάδοσης** του φαινομένου που μοντελοποιείται από την εξίσωση κύματος.

#### Ενέργεια στην Κυματική Εξίσωση

Θεωρούμε μια άπειρη χορδή με σταθερή γραμμική πυκνότητα και τάση . Η κυματική εξίσωση που περιγράφει τις ταλαντώσεις της χορδής είναι τότε

Αφού η εξίσωση περιγράφει τη μηχανική κίνηση της ταλαντευόμενης χορδής, μπορούμε να υπολογίσουμε την **κινητική ενέργεια** που σχετίζεται με την κίνηση της χορδής.

Θα υποθέσουμε ότι οι Αρχικές Τιμές είναι μηδενικές έξω από ένα μεγάλο διάστημα , ώστε το ολοκλήρωμα της ενέργειας να συγκλίνει χάρη στην πεπερασμένη ταχύτητα διάδοσης του κύματος. Για να εξετάσουμε τη συμπεριφορά της κινητικής ενέργειας στον χρόνο παίρνουμε την παράγωγο ως προς τον χρόνο:

Με χρήση της κυματικής εξίσωσης βρίσκουμε:

Εφαρμόζουμε μερική ολοκλήρωση

Ο πρώτος όρος μηδενίζεται χάρη στην πεπερασμένη ταχύτητα διάδοσης. Μετασχηματίζοντας βρίσκουμε:

Ορίζουμε

οπότε ή

Η ποσότητα που **διατηρείται** είναι η **ολική ενέργεια**  της ταλαντευόμενης χορδής

Η διατήρηση της ενέργειας μας δίνει έναν άμεσο τρόπο να αποδείξουμε ότι η λύση ενός ΠΑΤ με γραμμική ΜΔΕ είναι **μοναδική**:

Θεωρούμε το ΠΑΤ

*(Ε)*

*(ΑΣ)*

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν δύο διαφορετικές λύσεις του ΠΑΤ, οι και .

Η διαφορά τους θα επιλύει την ομογενή κυματική εξίσωση με Αρχικές Συνθήκες:

Η ενέργεια της λύσης τη χρονική στιγμή είναι:

Αυτή η έκφραση της ενέργειας διαφέρει από την παραπάνω ολική ενέργεια στον συντελεστή (γιατί ) και ονομάζεται **πυκνότητα ενέργειας**. Επομένως είναι και αυτή μια ποσότητα που διατηρείται και έτσι θα είναι μηδέν σε κάθε μεταγενέστερο χρόνο. Έχουμε λοιπόν:

Η προς ολοκλήρωση συνάρτηση είναι μη αρνητική, επομένως ο μόνος τρόπος να γίνει το ολοκλήρωμα μηδέν είναι όταν η προς ολοκλήρωση συνάρτηση είναι ομοιόμορφα μηδέν:

Αυτό συνεπάγεται ότι η συνάρτηση παραμένει σταθερή για όλες τις τιμές των , αλλά επειδή η σταθερή τιμή πρέπει να είναι μηδέν. Έτσι

σε αντίθεση με την αρχική υπόθεση ότι και είναι δύο διαφορετικές λύσεις. Συμπεραίνουμε ότι η λύση του ΠΑΤ (Ε) – (ΑΣ) είναι **μοναδική**.

Παρατήρηση:

Για ΠΑΤ με περισσότερες χωρικές διαστάσεις χρησιμοποιούμε μια ανάλογη ενεργειακή μέθοδο για να αποδείξουμε τη μοναδικότητα της λύσης. Οι ενεργειακές μέθοδοι παράγουν από τη ΜΔΕ του ΠΑΤ ένα είδος «ενέργειας» του συστήματος. Αυτή η ενέργεια μπορεί τότε να χρησιμοποιηθεί για να αποδείξουμε την ύπαρξη και / ή τη μοναδικότητα της λύσης, και αν αυτή εξαρτάται κατά συνεχή τρόπο από τα δεδομένα.

#### Η Καλή Διατύπωση του ΠΑΤ

Εύκολα επιβεβαιώνουμε ότι η λύση d’ Alembert (Λ)

ικανοποιεί τόσο την κυματική εξίσωση (Ε)

, ,

όσο τις Αρχικές Συνθήκες (ΑΣ)

άρα εξασφαλίσαμε την **ύπαρξη** λύσης.

Θα αποδείξουμε τη **μοναδικότητα** της λύσης (Λ). Η γενική λύση είναι

και οι Αρχικές Συνθήκες προσδιορίζουν τις συναρτήσεις μοναδικά. Πράγματι, αν είχαμε δύο λύσεις του ΠΑΤ με ίδιες Αρχικές Συνθήκες, οι και αντίστοιχα, τότε η συνάρτηση ικανοποιεί το Πρόβλημα με ομογενείς Αρχικές Συνθήκες:

(Ε)

(ΑΣ)

Μια προφανής λύση είναι και επειδή οι συναρτήσεις ορίζονται μοναδικά από τις Αρχικές Συνθήκες πρέπει , άρα η λύση είναι μοναδική.

Για να αποδείξουμε την **ευστάθεια** της λύσης θεωρούμε δύο λύσεις

με αρχικά δεδομένα και αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι η μεταβολή των αρχικών δεδομένων είναι μικρή, δηλαδή

Υπολογίζουμε την αντίστοιχη μεταβολή της λύσης (Λ):

Επομένως:

Έτσι για κάθε , αν ισχύει , τότε για , και τo Πρόβλημα Αρχικών Τιμών σε μη-φραγμένο πεδίο είναι καλά διατυπωμένο κατά Hadamard.

#### Παραδείγματα ΠΑΤ με τη μέθοδο d’ Alembert

##### Κίνηση ενός κύματος με αρχική μορφή ημιτόνου και μηδενική αρχική ταχύτητα

(Ε)

(ΑΣ)

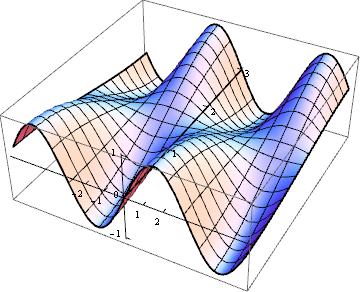
Η λύση d’ Alembert δίνει:

Η λύση ερμηνεύεται ως εξής: διαιρούμε την αρχική μορφή σε δύο ίσα μέρη, και ξανά . Μετά προσθέτουμε τα δύο κύματα που τρέχουν με ταχύτητα προς τα αριστερά το ένα, προς τα δεξιά το άλλο.

Η λύση d’ Alembert στο σημείο είναι ο μέσος όρος των αρχικών απομακρύνσεων στα σημεία και αντίστοιχα, τα οποία βρίσκουμε «ταξιδεύοντας» προς τα πίσω στο χρόνο κατά μήκος των χαρακτηριστικών καμπυλών .

|  |  |
| --- | --- |
|  | ICSine_t0.jpg |
|  | ICSine_t1.jpg |
|  | ICSine_t2.jpg |
|  | ICSine_t3.jpg |

Τρισδιάστατη αναπαράσταση:



##### Κίνηση ενός κύματος με μηδενική αρχική απομάκρυνση αλλά με αρχική ταχύτητα

(Ε)

(ΑΣ)

Η λύση d’ Alembert δίνει:

Η λύση στο σημείο μπορεί να ερμηνευθεί ως ολοκλήρωση της αρχικής ταχύτητας μεταξύ των σημείων και στον αρχικό άξονα . Θέλει προσοχή, γιατί η συνάρτηση μπορεί να εξαφανίζεται σε κάποιο μέρος του διαστήματος ολοκλήρωσης. Ο καλύτερος τρόπος για να εντοπισθούν τα όρια ολοκλήρωσης είναι να σχεδιάσουμε το πεδίο εξάρτησης για σημεία στις έξι περιοχές ανάμεσα και γύρω από τις χαρακτηριστικές καμπύλες.

x

t

για στην περιοχή 1

για στην περιοχή 2

για στην περιοχή 3

για στην περιοχή 4

για στις περιοχές 5, 6

### Η Μέθοδος Επίλυσης με Μετασχηματισμό Fourier

Έστω συνάρτηση στο που έχει συνεχείς παραγώγους κάθε τάξης και που μαζί με όλες τις παραγώγους της τείνει στο μηδέν για ταχύτερα από οποιαδήποτε δύναμη του . Ο **μετασχηματισμός Fourier** της ορίζεται από την εξίσωση:

Για συνάρτηση δύο μεταβλητών, όπως η , η μεταβλητή συμπεριφέρεται ως παράμετρο και ορίζουμε:

Ο **αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier** δίνεται από τη σχέση:

Ο μετασχηματισμός Fourier είναι γραμμικός, επομένως:

Ισχύει η ιδιότητα της **συνέλιξης**:

Μετά από μετασχηματισμό Fourier οι **παράγωγοι** τάξης ως προς γίνονται **πολλαπλασιασμοί** επί τον παράγοντα :

Επομένως:

Ενώ για μερική παραγώγιση ως προς ισχύουν:

**Λύση ενός Ομογενούς ΠΑΤ:**

Κλασσικό πρόβλημα είναι να δείξουμε την ισοδυναμία των μεθόδων στο πρόβλημα d’ Alembert.

Να εφαρμόσετε το μετασχηματισμό Fourier για να λύσετε το παρακάτω πρόβλημα αρχικών τιμών:

Η ΜΔΕ μετασχηματίζεται σε

που είναι μια Συνήθης Διαφορική Εξίσωση ως προς . Η λύση της είναι:

Οι αρχικές συνθήκες θα μας δώσουν τις τιμές των σταθερών .

Επομένως

Από τους πίνακες με ζεύγη μετασχηματισμών Fourier (ή από κάποιο πρόγραμμα υπολογιστικό) βρίσκουμε:

Επομένως

και από τη γραμμικότητα και το θεώρημα της συνέλιξης βρίσκουμε:

οπότε βρίσκουμε:

δηλαδή η γνωστή μας λύση d’ Alembert.

**Σύντομη Θεωρία:**

Διαβάστε για τον μετασχηματισμό Fourier (Δάσιος Γ. &., 1994), Παράρτημα Γ.

Διαβάστε για το συναρτησιακό Dirac (Δάσιος Γ. &., 1994), Κεφάλαιο 4.

## Το Ομογενές Πρόβλημα Αρχικών και Συνοριακών Τιμών

### Το Ομογενές ΠΑΣΤ με Ομογενείς Συνοριακές Συνθήκες

#### Η Μέθοδος του Χωρισμού των Μεταβλητών

Η μέθοδος αυτή είναι ένα είδος τεχνάσματος για να διαχωρίσουμε τις διάφορες διαστάσεις μιας ΜΔΕ στις αντίστοιχες μονοδιάστατες εξισώσεις τους (ΣΔΕ). Λειτουργεί μόνο σε λίγες περιπτώσεις όπου η γεωμετρία του προβλήματος είναι σχετικά κανονική και απλή, αλλά ακόμα και έτσι η μέθοδος είναι αξιόλογη. Ειδικότερα, είναι βασικά ο μόνος τρόπος να βρούμε λύσεις σε μεγαλύτερες διαστάσεις. Ο χωρισμός μεταβλητών οδηγεί σε προβλήματα τύπου **Sturm-Liouville** για κάθε επιμέρους συνάρτηση και μας παρέχει το σύνολο των **ιδιοσυναρτήσεων**. Από αυτές επιλέγουμε τις κατάλληλες ανάλογα με τα Βοηθητικά Δεδομένα του ΠΑΣΤ.

Επί του έργου: όταν θέλουμε να λύσουμε την κυματική εξίσωση σε πεδίο με σύνορα πρέπει να προσδιορίσουμε τα δεδομένα πάνω στα αντίστοιχα σύνορα. Το αντιπροσωπευτικό παράδειγμα είναι η **εγκάρσια** **ταλάντωση μιας πεπερασμένης χορδής**. Εξετάζουμε την περίπτωση μιας πεπερασμένης χορδής με μήκος (το θεμελιώδες διάστημα) της οποίας κρατάμε αμετακίνητα τα άκρα. Η μαθηματική διατύπωση του Προβλήματος Αρχικών και Συνοριακών Συνθηκών (ΠΑΣΤ) είναι:

(Ε)

(ΑΣ)

(ΣΣ)

Θα δούμε ότι τα κύματα δεν φαίνονται να κινούνται πια, λόγω της επανειλημμένης αλληλεπίδρασης με τα σύνορα, αλλά φαίνονται να είναι **στάσιμα** **κύματα**.

Η πρωταρχική μέθοδος αντιμετώπισης προβλημάτων αυτού του τύπου είναι όπως είπαμε η **μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών**. Ωθούμαστε να θεωρήσουμε απλές λύσεις της μορφής , σε μια μορφή δηλαδή στην οποία έχουμε «χωρίσει» την εξάρτηση στη χωρική μεταβλητή από την εξάρτηση στη χρονική μεταβλητή .

Αντικαθιστώντας τη νέα μορφή στην εξίσωση (Ε) παίρνουμε:

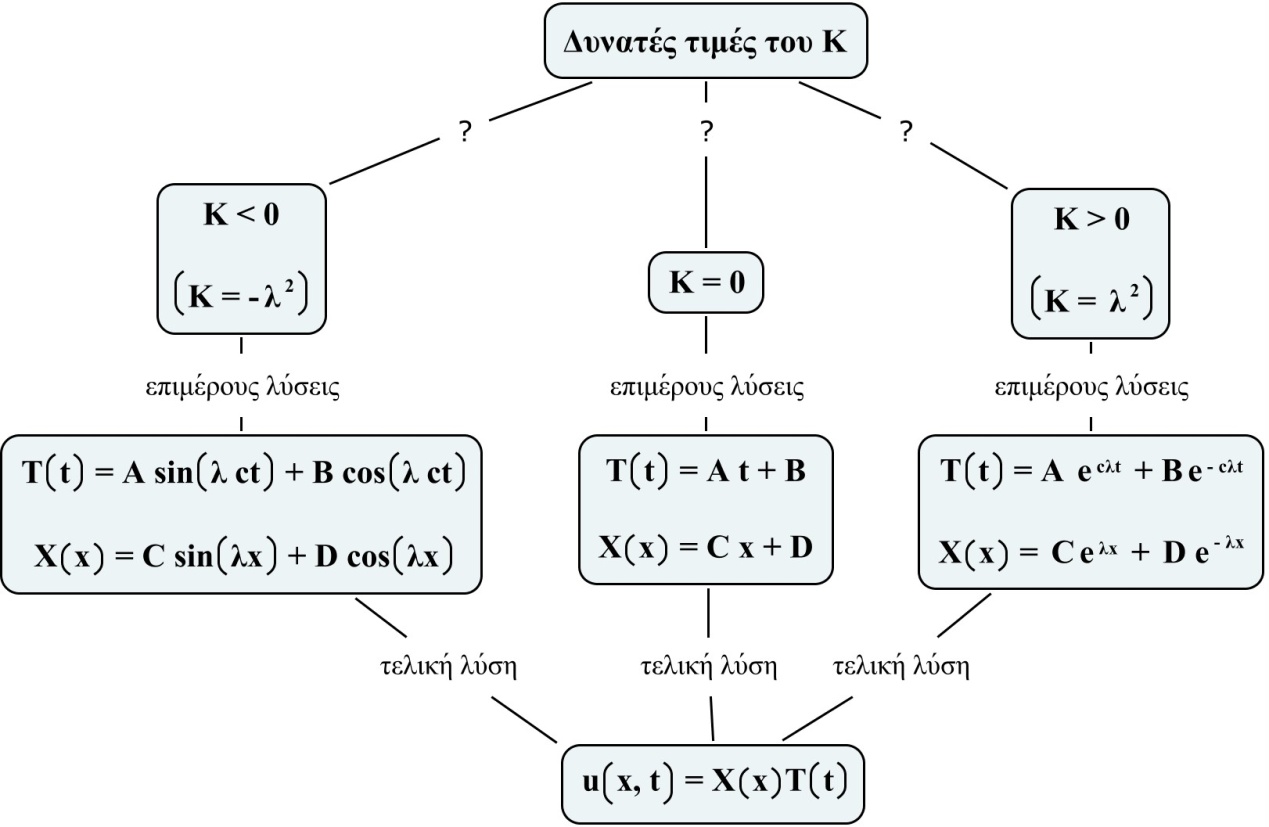
ή διαιρώντας με το γινόμενο

Αφού το αριστερό μέλος της εξίσωσης έχει εξάρτηση μόνο από το και το δεξιό μέλος της εξίσωσης έχει εξάρτηση μόνο από το t συνεπάγεται ότι κάθε μέλος πρέπει να έχει μια κοινή **σταθερή** τιμή, π.χ. . Έχουμε λοιπόν:

και με ταυτόχρονη αντικατάσταση στις Συνοριακές Συνθήκες:

Το χωρικό πρόβλημα είναι ένα πρόβλημα του τύπου Sturm-Liouville. Θα βρούμε τις **ιδιοτιμές** και τις αντίστοιχες **ιδιοσυναρτήσεις**.

Η μορφή των λύσεων εξαρτάται από το πρόσημο του .



Επειδή οι Συνοριακές Συνθήκες είναι περιοδικές απορρίπτονται οι τιμές γιατί τότε η μετατόπιση αυξάνεται απεριόριστα με αυξανόμενο και η χορδή θα «σπάσει». Μόνο η περίπτωση που είναι δεκτή και η γενική λύσηείναι:

Η επιβολή των Συνοριακών Συνθηκών δίνει:

Προφανώς η λύση δεν μπορεί να είναι , αλλιώς θα βρίσκαμε μόνο την τετριμμένη μηδενική λύση. Το χωρικό πρόβλημα θα έχει μη μηδενική λύση μόνον όταν η παράμετρος

και οι τιμές αυτές ονομάζονται **ιδιοτιμές** του προβλήματος. Οι αντίστοιχες σε αυτές λύσεις του χωρικού προβλήματος ονομάζονται **ιδιοσυναρτήσεις** και είναι:

Τώρα μπορούμε για κάθε να λύσουμε το **χρονικό** πρόβλημα (που είναι μια Συνήθης Διαφορική Εξίσωση) ως προς τις συναρτήσεις

Συνδυάζοντας τις επιμέρους λύσεις αποκτούμε μια ακολουθία απλών λύσεων

Καθεμία από αυτές τις συναρτήσεις ικανοποιεί την κυματική εξίσωση (Ε) και τις Συνοριακές Συνθήκες (ΣΣ). Λόγω της **γραμμικότητας** του διαφορικού τελεστή, έπεται ότι η σειρά

ικανοποιεί επίσης την εξίσωση και τις ομογενείς Συνοριακές Συνθήκες. Ο παραπάνω ισχυρισμός ονομάζεται αρχή της υπέρθεσης ή **αρχή της επαλληλίας**.

**Υπολογισμός των συντελεστών**

Για να ικανοποιήσουμε τις Αρχικές Συνθήκες (ΑΣ) απαιτείται επιπλέον να ισχύουν:

Για τον υπολογισμό των συντελεστών πρέπει να αναπτύξουμε τις γνωστές συναρτήσεις σε **σειρά Fourier ημιτόνων** στο θεμελιώδες διάστημα και βρίσκουμε:

**Εναλλακτικά** μπορούμε να κάνουμε χρήση της γνώστης σχέσης **ορθογωνιότητας** των ιδιοσυναρτήσεων:

**Παράδειγμα της μεθόδου**

Βρείτε τη λύση του ΠΑΣΤ

(Ε)

(ΑΣ)

(ΣΣ)

Λύση:

Οι ιδιοτιμές είναι

Οι ιδιοσυναρτήσεις είναι:

Η λύση που ικανοποιεί την κυματική εξίσωση και τις Συνοριακές Συνθήκες (ΣΣ) δίνεται από τη σειρά

Αρκεί να υπολογίσουμε τους συντελεστές .

Από τις σχέσεις **ορθογωνιότητας** βρίσκουμε:

Η λύση επομένως είναι:

**Σύντομη Θεωρία:**

Διαβάστε (Δάσιος Γ. , 2001) 8η διάλεξη: Ιδιοαναπτύγματα.

##### Ιδιομορφές

Η λύση του ΠΑΣΤ με Κυματική Εξίσωση και Ομογενείς Συνοριακές Συνθήκες μπορεί να γραφεί ως σειρά δύο χωρισμένων ιδιοσυναρτήσεων:

οι οποίες λέγονται **ιδιομορφές ταλάντωσης**. (Με τον δείκτη s υποδηλώνουμε την ημιτονική εξάρτηση του χρόνου, ενώ με τον δείκτη c την συνημιτονική εξάρτηση).

Μπορούμε να θεωρήσουμε κάθε ιδιομορφή με δύο “δυϊκούς” τρόπους:

* ως ταλάντωση στο χώρο όπου κάθε σημείο εκτελεί αρμονική ταλάντωση με χρονική περίοδο ή **κυκλική** **συχνότητα**  και πλάτος . Υπενθυμίζουμε ότι η κυκλική συχνότητα δηλώνει το πλήθος των περιόδων σε διάστημα 2π μονάδων χρόνου.
* ως ταλάντωση στο χρόνο με στιγμιότυπα στα οποία σε κάθε χρονική στιγμή η χορδή έχει τη μορφή μιας ημιτονοειδούς καμπύλης με χωρική “περίοδο” ή **κυματικό αριθμό** . Υπενθυμίζουμε ότι ο κυματικός αριθμός δηλώνει το πλήθος των μηκών κύματος σε διάστημα 2π μονάδων μήκους.

Για η συχνότητα της πρώτης ταλάντωσης ονομάζεται **θεμελιώδης συχνότητα** και όλες οι άλλες συχνότητες αποτελούν ακέραια πολλαπλάσια της θεμελιώδους συχνότητας. Αντίστοιχα, για η χωρική “περίοδος” ονομάζεται **θεμελιώδες μήκος** και όλα τα άλλα μήκη για αποτελούν ακέραια υποπολλαπλάσια του θεμελιώδους μήκους. Γενικά, η ιδιομορφή ονομάζεται **θεμελιώδης ιδιομορφή** ή **θεμελιώδης αρμονική**.

**Γραφική παράσταση**

Στην ακόλουθη γραφική παράσταση των πρώτων τριών χωρικών ιδιομορφών αναδεικνύεται η μεταβολή των μορφολογικών χαρακτηριστικών των ιδιομορφών καθώς ανεβαίνει η τάξη . Ισχύει το **θεώρημα των κόμβων**, σύμφωνα με το οποίο ο αριθμός των κόμβων – δηλαδή των δεσμικών σημείων μηδενισμού της λύσης στο εσωτερικό του βασικού διαστήματος L – αυξάνει κατά μονάδα καθώς προχωράμε από την πρώτη ιδιοσυνάρτηση προς τις ανώτερες.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | |  |  |  |  | | 0 | Harmonic_1_0.jpg | Harmonic_2_0.jpg | harmonic_3_0.jpg | | 0.4 | Harmonic_1_04.jpg | Harmonic_2_04.jpg | harmonic_3_04.jpg | | 0.8 | Harmonic_1_08.jpg | Harmonic_2_08.jpg | harmonic_3_08.jpg | | 1.2 | Harmonic_1_12.jpg | Harmonic_2_12.jpg | harmonic_3_12.jpg | | 1.6 | Harmonic_1_16.jpg | Harmonic_2_16.jpg | harmonic_3_16.jpg | | 2 | Harmonic_1_20.jpg | Harmonic_2_20.jpg | harmonic_3_20.jpg | | 2.4 | Harmonic_1_24.jpg | Harmonic_2_24.jpg | harmonic_3_24.jpg | |  |

Κάθε λύση του προβλήματος της πεπερασμένης χορδής αποτελείται από έναν άπειρο ή πεπερασμένο γραμμικό συνδυασμό από ιδιομορφές, με συντελεστές βάρους τους που καθορίζονται από τις αρχικές συνθήκες .

**Παρατήρηση**

Η λύση μπορεί να διατυπωθεί ως σειρά ιδιοσυναρτήσεων της μορφής

η οποία υποδεικνύει τη γενική μορφή της αρμονικής χρονικής εξάρτησης που “κρύβεται” πίσω από τις χρονικές ιδιολύσεις της κυματικής εξίσωσης . Πάλι φαίνεται ότι η λύση μπορεί να θεωρηθεί ως άπειρο ή πεπερασμένο άθροισμα ταλαντώσεων με διαφορετική συχνότητα και διαφορετικό κυματικό αριθμό .

##### Οι τέσσερις συναρτήσεις βάσης

(Λίγα ακόμα παιχνίδια με τις ιδιομορφές...)

Στη γενική λύση του ΠΑΣΤ: οι σταθερές αντιπροσωπεύουν τα πλάτη των ιδιομορφών. Ας άρουμε προσωρινά τη δυσπιστία μας ότι φυσικά μεγέθη μπορούν να εκφραστούν με μιγαδικά μεγέθη και ας δούμε τι συμβαίνει όταν εκφράζουμε τη **χρονική** ιδιοσυνάρτηση σε ισοδύναμη μιγαδική μορφή.

Σύμφωνα με τις γνωστές σχέσεις:

βρίσκουμε

με και .

Ομοίως, η **χωρική** ιδιοσυνάρτηση έχει την ισοδύναμη μιγαδική μορφή . Συνδυάζοντας βρίσκουμε τη λύση

οπότε η γενική λύση μπορεί να εκφραστεί ως άπειρο γραμμικό συνδυασμό των **τεσσάρων συναρτήσεων βάσης**

Φυσικές ιδιότητες αντιστοιχούν βεβαίως πάντα σε πραγματικές εκφράσεις, αλλά συχνά είναι πιο εύκολα να κάνουμε υπολογισμούς χρησιμοποιώντας τις μιγαδικές εκφράσεις, τις οποίες αργότερα μετατρέπουμε πάλι σε πραγματικές ποσότητες.

Οι τέσσερις συναρτήσεις βάσης του ΠΑΣΤ με κυματική ΜΔΕ φανερώνουν την περιοδικότητά τους στο χώρο και στον χρόνο. Αυτή η περιοδικότητα ρυθμίζεται από τη σχέση μεταξύ των παραμέτρων .

##### Η Σχέση Διασποράς

Όπως στη γενική λύση d’ Alembert παρατηρούμε και εδώ ότι, για σταθερό, οι δύο συναρτήσεις έχουν σταθερή “φάση”. Όσο το αυξάνεται πρέπει και το να αυξάνεται, οπότε αν παριστάνει μια διαταραχή, αυτή πρέπει να διαδίδεται προς τα δεξιά. Αντίστοιχα, για σταθερό, οι δύο συναρτήσεις έχουν σταθερή “φάση”. Όσο το αυξάνεται πρέπει το να μειώνεται, οπότε αν παριστάνει μια διαταραχή, αυτή πρέπει να διαδίδεται προς τα αριστερά.

Το μέτρο της ταχύτητας διάδοσης είναι σε κάθε περίπτωση .

Η **διάδοση** μιας διαταραχής μπορεί λοιπόν να περιγραφεί από συναρτήσεις της μορφής όπου σταθερό, ή εναλλακτικά από συναρτήσεις της μορφής , πάντα με σταθερό. Αυτές οι συναρτήσεις περιγράφουν κύματα (αφού είναι λύσεις της κυματικής εξίσωσης) με **επίπεδο** μέτωπο: υπενθυμίζεται ότι μέτωπο ενός κύματος είναι ο γεωμετρικός τόπος όλων των σημείων τα οποία πάλλονται στην ίδια σταθερή φάση.

**Παρατήρηση:**

Οι συναρτήσεις λέγονται **επίπεδα κύματα** και αποτελούν τη βάση του χώρου των λύσεων της κυματικής εξίσωσης. Για αυτό το λόγο μπορούν να χρησιμοποιηθούν εξ’ αρχής σε αναζήτηση λύσεων ενός κυματικού ΠΑΣΤ.

Η λύση του ΠΑΣΤ είναι γραμμικός συνδυασμός απείρων επίπεδων κυμάτων με παραμέτρους εφόσον ικανοποιηθεί για κάθε η εξίσωση

δηλαδή με αντικατάσταση στη ΜΔΕ βρίσκουμε:

, άρα η σχέση που συνδέει τον κυματικό αριθμό και την κυκλική συχνότητα είναι

Αυτή η σχέση λέγεται **σχέση διασποράς**.

**Μία χρήσιμη παρατήρηση:**

Έστω , με σταθερό πλάτος. Τότε ισχύουν οι σχέσεις

Παρατηρούμε δηλαδή ότι ο τελεστής της μερικής παραγώγισης ως προς αντιστοιχεί σε πολλαπλασιασμό επί , με τη χρονική συχνότητα, ενώ ο τελεστής της μερικής παραγώγισης ως προς αντιστοιχεί σε πολλαπλασιασμό επί με τη χωρική πυκνότητα (τον κυματάριθμο).

Η σχέση διασποράς περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο το μέσο διάδοσης επιτρέπει στις ιδιοσυναρτήσεις (κυματικές ιδιομορφές ) να ταξιδεύουν.

Προσέξτε: κάθε ιδιομορφή ταξιδεύει με τη “δική της” φασική ταχύτητα , με τον περιορισμό της αντίστοιχης σχέσης διασποράς. Στο ΠΑΣΤ που συζητάμε ισχύει ότι .

Η “κλίση” της συχνότητας ως προς τον κυματικό αριθμό συνδέει τις γειτονικές φασικές ταχύτητες και ορίζει την “ομαδική ταχύτητα” .

#### Η Μέθοδος Επίλυσης με Μετασχηματισμό Laplace

Έστω συνάρτηση στο που ορίζεται για και είναι εκθετικού τύπου, δηλαδή υπάρχουν θετικές σταθερές τέτοιες ώστε

Ο **μετασχηματισμός Laplace** της ορίζεται από την εξίσωση:

Ο μετασχηματισμός Laplace έχει ένα πλεονέκτημα σε σχέση με τον μετασχηματισμό Fourier γιατί εμπεριέχει τον παράγοντα απόσβεσης ο οποίος μας επιτρέπει να μετασχηματίσουμε περισσότερες συναρτήσεις.

Για συνάρτηση δύο μεταβλητών, όπως η , η μεταβλητή συμπεριφέρεται ως παράμετρο και ορίζουμε:

Ο **αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace** δίνεται από τη σχέση:

Ο μετασχηματισμός Laplace είναι γραμμικός, επομένως:

Ισχύει η ιδιότητα της **συνέλιξης**:

Μετά από μετασχηματισμό Laplace ο **παράγωγος** πρώτης τάξης ως προς δίνεται από τον εξής τύπο:

και γενικά ισχύει ο εξής κανόνας μετασχηματισμού για παράγωγο τάξης :

Επομένως:

Ενώ για μερική παραγώγιση ως προς ισχύουν:

**Λύση ενός ΠΑΣΤ:**

Να εφαρμόσετε το μετασχηματισμό Laplace για να λύσετε το παρακάτω πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών:

,

,

Η ΜΔΕ μετασχηματίζεται σε

ή

με Συνοριακή Συνθήκη

που είναι μια Συνήθης Διαφορική Εξίσωση ως προς .

Η λύση της δίνεται από τη συνάρτηση

Επειδή απαιτούμε ότι η λύση είναι φραγμένη στο άπειρο έπεται ότι .

Η Συνοριακή Συνθήκη καθορίζει τη σταθερά :

Επομένως η λύση του μετασχηματισμένου προβλήματος είναι:

Από τους πίνακες με ζεύγη μετασχηματισμών Laplace βρίσκουμε τη λύση του αρχικού προβλήματος:

**Σύντομη Θεωρία:**

Διαβάστε για τον μετασχηματισμό Laplace (Δάσιος Γ. &., 1994), Παράρτημα Γ.

### Το Ομογενές ΠΑΣΤ με Μη Ομογενείς Συνοριακές Συνθήκες

Προβλήματα με μη-ομογενείς συνοριακές συνθήκες που δεν εξαρτώνται από τον χρόνο μπορούν πάντα να αναχθούν σε άλλα με ομογενείς συνθήκες, επομένως η επίλυσή τους μπορεί να γίνει με την ίδια μέθοδο.

**Παράδειγμα:**

(Ε)

(ΑΣ)

(ΣΣ)

Η βασική ιδέα είναι η **αντικατάσταση**

στην οποία οι δύο νέες συναρτήσεις και υποτίθενται λύσεις της εξίσωσης (Ε) οπότε και η θα είναι επίσης λύση, αφού η κυματική εξίσωση είναι γραμμική και ομογενής. Υποθέτουμε επιπλέον ότι

* η ικανοποιεί τις μη-ομογενείς ΣΣ
* οπότε η θα ικανοποιεί την ομογενή μορφή τους.

Σε ότι αφορά τις Αρχικές Συνθήκες

* η συνάρτηση αφήνεται ελεύθερη
* ενώ η συνάρτηση πρέπει αναγκαστικά να ικανοποιεί τις Αρχικές Σχέσεις:

Ζητούμε προφανώς μια οποιαδήποτε λύση του προβλήματος

Η απλούστερη όλων είναι η λύση που δεν εξαρτάται από το χρόνο οπότε θα ισχύει:

και από τις μη-ομογενείς ΣΣ

Στη συνέχεια επιλύουμε το ΠΑΣΤ για τη συνάρτηση με ομογενείς ΣΣ με τον γνωστό τρόπο.

(Ε)

(ΑΣ)

(ΣΣ)

Παρατήρηση:

Αν όμως οι Συνοριακές Συνθήκες δεν είναι σταθερές, επιβάλλεται να βρούμε ένα κατάλληλο μετασχηματισμό που τις κάνει ανεξάρτητες του χρόνου.

## Το Μη Ομογενές Πρόβλημα Αρχικών Τιμών

### Το Μη Ομογενές ΠΑΤ με Ομογενείς Αρχικές Τιμές– Η Αρχή Duhamel

Θεωρούμε το **μη-ομογενές** πρόβλημα με **ομογενείς** Αρχικές Συνθήκες:

Θα αποδείξουμε ότι μπορούμε να βρούμε τη λύση εισάγοντας ένα ομογενές ΠΑΤ στο οποίο όμως κάνει την εμφάνισή της μια νέα παράμετρος .

**Αρχή Duhamel**

Σύμφωνα με την αρχή του Duhamel αναζητούμε τη λύση του μη ομογενούς ΠΑΤ σαν μια συνεχή επαλληλία (ολοκλήρωμα) λύσεων ενός παραμετροποιημένου προβλήματος με μια συνεχή **παράμετρο**  που μεταβάλλεται στο διάστημα . Έστω λοιπόν ότι η λύση του ΠΑΤ είναι της μορφής

όπου για κάθε παριστάνουμε με τη λύση του σχετιζόμενου **ομογενούς** προβλήματος **παλμού** με **μη-ομογενείς** Αρχικές Συνθήκες:

Πρόκειται δηλαδή για μια οικογένεια προβλημάτων αρχικών τιμών ως προς την παράμετρο , ενώ οι Αρχικές Συνθήκες ορίζονται για .

Παρατήρηση

Αν θέλουμε οι αρχικές συνθήκες να αναφέρονται στην αρχή του χρόνου και όχι στη χρονική στιγμή μετατρέπουμε το πρόβλημα μέσω του μετασχηματισμού μετατόπισης

στο πρόβλημα

Θα αποδείξουμε με αντικατάσταση ότι μια λύση του αρχικού προβλήματος δίνεται από το ολοκλήρωμα

Απόδειξη:

Παρατηρούμε ότι και με τον τύπο του Leibniz

Επομένως με δεύτερη παραγώγιση

και παραγώγιση ως προς

Συνδυάζοντας βρίσκουμε:

ή, από τον τρόπο ορισμού της συνάρτησης



Ερμηνεία της λύσης:

Η αρχή του Duhamel λέει πώς η λύση του μη-ομογενούς προβλήματος με ομογενείς αρχικές συνθήκες για μπορεί να υπολογιστεί λύνοντας τη σχετιζόμενη μονοπαραμετρική οικογένεια των επιμέρους προβλημάτων όπου οι αρχικές συνθήκες δεν περιγράφονται πια τη χρονική στιγμή , αλλά τη στιγμή του παρελθόντος που καθορίζει η τιμή της παραμέτρου για κάθε πρόβλημα της οικογένειας. Κάθε ΠΑΤ της οικογένειας έχει ομογενή ΜΔΕ και λύνεται με τις γνωστές μεθόδους.

Παράδειγμα:

Χρησιμοποιήστε την Αρχή του Duhamel για να λύσετε το μη-ομογενές ΠΑΤ

Λύση:

Σχηματίζουμε το παραμετροποιημένο πρόβλημα παλμών:

το οποίο λύνεται με τον γνωστό τύπο του d’ Alembert και δίνει

Επομένως

και

Αν τώρα υποθέσουμε ότι η είναι μια παράγουσα της βρίσκουμε:

### Το Μη Ομογενές ΠΑΤ με Μη Ομογενείς Αρχικές Τιμές

Δίνεται το μη-ομογενές ΠΑΤ με μη-ομογενείς Αρχικές Τιμές

Λύση:

Αντικαθιστούμε το αρχικό πρόβλημα με δύο απλούστερα. Με την αρχή της επαλληλίας θα βρούμε την τελική λύση. Συγκεκριμένα:

Θέτουμε όπου

* επιλύει το μη ομογενές πρόβλημα με ομογενείς Αρχικές Τιμές:

* επιλύει το ομογενές πρόβλημα με μη ομογενείς Αρχικές Τιμές:

Για το μη ομογενές πρόβλημα σχηματίζουμε το παραμετροποιημένο πρόβλημα παλμών:

το οποίο λύνεται με τον γνωστό τύπο του d’ Alembert και δίνει

Επομένως

και

Για το ομογενές πρόβλημα εφαρμόζουμε τον τύπο του d’ Alembert.

Η τελική λύση είναι:

## Το Μη Ομογενές Πρόβλημα Αρχικών και Συνοριακών Τιμών

### Το Μη-Ομογενές ΠΑΣΤ με Συνοριακές Συνθήκες ανεξάρτητες του χρόνου - Μέθοδος Lagrange

Παίρνουμε ως παράδειγμα το εξής ΠΑΣΤ:

**,**

Θα αντιμετωπίσουμε το Μη Ομογενές Πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών με τη μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών.

**1ο Βήμα:**

Αρχικά λύνουμε το **αντίστοιχο ομογενές** πρόβλημα για τη **χωρική** εξάρτηση:

,

Βρίσκουμε τις ιδιοτιμές

και τις αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις:

**2ο Βήμα:**

Εκφράζουμε τη λύση του αρχικού προβλήματος αρχικών και συνοριακών τιμών με το ανάπτυγμα

και αντικαθιστούμε στην ΜΔΕ, έχοντας πάρει το ημιτονικό ανάπτυγμα Fourier της στο διάστημα

με συντελεστές

Καταλήγουμε, με επιχειρήματα ορθογωνιότητας, στη συνήθη διαφορική εξίσωση β’ τάξης

που περιγράφει τη χρονική εξάρτηση των όρων του αναπτύγματος .

Η λύση της δίνεται (με τη μέθοδο μεταβολής των παραμέτρων) από τη σχέση:

και απομένει να γίνει ο προσδιορισμός των συντελεστών .

**3ο Βήμα:**

Μετασχηματισμός των αρχικών συνθηκών:

Επιβάλλεται να αναπτύξουμε τις στο ίδιο σύστημα ιδιοσυναρτήσεων που γεννά το ομογενές πρόβλημα, δηλ.

Από τις αρχικές σχέσεις και με επιχειρήματα ορθογωνιότητας συμπεραίνουμε:

Η τελική λύση προσδιορίζεται πλήρως από τη σειρά , εφόσον τόσο οι συναρτήσεις όσο και οι συναρτήσεις είναι γνωστές.

Η μέθοδος που ακολουθήσαμε είναι ανάλογη της μεθόδου **Lagrange** στις ΣΔΕ και είναι γνωστή ως μέθοδο **ανάπτυξης σε ιδιοσυναρτήσεις**.

### Μη-Ομογενές ΠΑΣΤ με Μη-Ομογενείς Συνοριακές Συνθήκες

Να λύσετε το μη-ομογενές πρόβλημα αρχικών τιμών με χρονοεξαρτώμενες συνοριακές συνθήκες:

( 1 )

( 2 )

( 3 )

( 4 )

( 5 )

Όπου είναι μια σταθερά.

**Λύση**

Για να προκύψει ένα πρόβλημα στο οποίο οι συνοριακές συνθήκες είναι ανεξάρτητες από το χρόνο θέτω

( 6 )

και

( 7 )

οπότε

και το αντίστοιχο ΠΣΤ για το είναι:

( 1’ )

( 2’ )

( 3’ )

Αρχικά επιλύουμε το αντίστοιχο **ομογενές** πρόβλημα για τη **χωρική** εξάρτηση και υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές και ιδιοσυναρτήσεις του, δηλ. τις λύσεις του ΠΣΤ:

( 1’’)

( 2’’)

( 3’’)

Η λύση είναι

Οι ιδιολύσεις λοιπόν είναι

Εκφράζω τη λύση της εξίσωσης ( 1’ ) σύμφωνα με τη μέθοδο Lagrange με το ανάπτυγμα

και αντικαθιστώ τη λύση στην (1’): ,

και προκύπτει:

( 8 )

Παίρνουμε το ημιτονικό ανάπτυγμα Fourier της συνάρτησης στο διάστημα :

με συντελεστές ( 9 )



 (10)

Η σύγκριση των (8), (9) και (10) δίνει τη μη ομογενή ΣΔΕ β’ τάξης:

 (11)

Η **λύση** της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης είναι



ενώ μια **ειδική λύση** της (11) είναι



που δίνει 

και μας δίνει



Η λύση της ΣΔΕ (11) είναι λοιπόν:



Η αρχική σχέση (4) , 

δίνει  (12)

και επειδή  έπεται

 (13)

Επιβάλλεται να πάρουμε το **ημιτονικό ανάπτυγμα Fourier** της συνάρτησης  στο διάστημα :

 με συντελεστές ( 14 )

 (15)

Η σύγκριση των σχέσεων (12) έως (15) δίνει με **επιχειρήματα ορθογωνιότητας**:



Η αρχική σχέση ( 5 ) , 

δίνει



 (16)

και επειδή  έπεται



 (17)

Επιβάλλεται να πάρουμε το **ημιτονικό ανάπτυγμα Fourier** της συνάρτησης  στο διάστημα :

 με συντελεστές ( 18 )

 (19)

Η σύγκριση των σχέσεων (16) έως (19) δίνει με **επιχειρήματα** **ορθογωνιότητας**:



Η **λύση** του αρχικού προβλήματος γίνεται τελικά:



με συντελεστές

 και 

# Ευρετήριο Περιεχομένων

**1η Κανονική** **μορφή** 19

**2η Κανονική Μορφή** 22

**Dirichlet** 8

**Neumann** 9

**Robin** 9

**Sturm-Liouville** 50

**Αρχή Duhamel** 63

**Αρχή της αιτιότητας** 39

**Αρχή της επαλληλίας** 53

**Αρχικές Συνθήκες** 7

**Βοηθητικές Συνθήκες** 7, 8, 11

**Γενική λύση** 7

**Γενική μορφή** 3

**Γραμμικότητα** 4

**Δεδομένα** 10

**Διακρίνουσα Δ** 13

**Ελλειπτική ΜΔΕ** 13

**Ενέργεια** 42

**Επίπεδα κύματα** 58

**Ευστάθεια** 10

**Ημι – γραμμική ΜΔΕ** 5

**Ιδιάζουσα** **λύση** 7

**Ιδιομορφές ταλάντωσης** 55

**Ιδιοτιμές** 52

**Ιδιοτιμή** 15

**Καλά διατυπωμένο ΠΑΣΤ** 10

**Κλασική** **λύση** 6

**Κυματικός αριθμός** 55

**Λύση d’ Alembert** 35

**Μεικτού τύπου ΜΔΕ** 13

**Μετασχηματισμός Fourier** 48

**Μετασχηματισμός Laplace** 59

**Ομογενή**ς ΜΔΕ 6

**Ορθογωνιότητα** 53

**Παραβολική ΜΔΕ** 13

**Πεδίο Εξάρτησης** 38

**Πεδίο Επιρροής** 39

**Πηγή** 6

**Πίνακας των συντελεστών** 15

**Πλήθος των μεταβλητών** 4

**Πρόβλημα Cauchy** 8

**Στάσιμα** **κύματα** 51

**Συναρτήσεις βάσης** 57

**Συνέλιξη** 48

**Συνοριακές Συνθήκες** 8

**Σύνορο** 4

**Σχεδόν γραμμική ΜΔΕ** 5

**Σχέση διασποράς** 59

**Τάξη** 4

**Ταξινόμηση** 12, 13, 14

**Ταχύτητα διάδοσης** 30

**Τόπος** 3

**Τρέχον** **(οδεύον ) κύμα** 32

**Υπερβολική ΜΔΕ** 13

**Φάση κύματος** 32

**Χαρακτηριστικές καμπύλες** 17

**Χαρακτηριστικές συντεταγμένες** 18

**Χαρακτηριστική εξίσωση** 16

# Αναφορές

Farlow, S. J. (1993). *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers.* New York: Dover Publications, Inc.

Logan, J. D. (2005). *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά.* Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Thoe, E. C. (1986). *Introduction to Partial Differential Equations with Applications.* New York: Dover Publications, Inc.

www.math.ucsb.edu/~birnir/books/pde1.ps. (n.d.).

Δάσιος, Γ. &. (1994). *Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις.* Αθήνα.

Δάσιος, Γ. (2001). *Δέκα Διαλέξεις Εφαρμοσμένων Μαθηματικών.* Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Τραχανάς, Σ. (2007). *Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις.* Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

1. M = mass = μάζα, L = length = μήκος, T = time = χρόνος [↑](#footnote-ref-1)