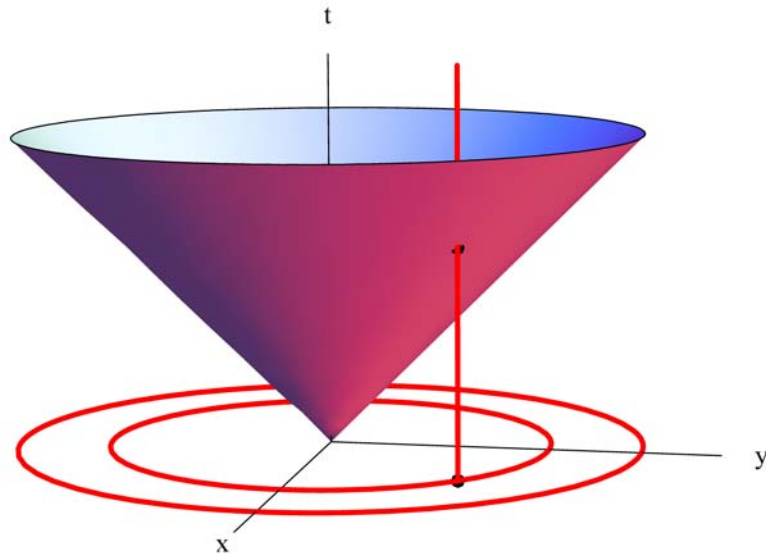


ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ  
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

*Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις*  
Τόμος Β΄



Δημήτρης Τσουμπελής

ΠΑΤΡΑ 2010



## Πρόλογος

Τούτο το (δεύτερο) μέρος του βοηθήματος *Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις* στοχεύει στο να οδηγήσει τον αναγνώστη στο ... ανοιχτό πέλαγος. Εκεί όπου ο χώρος-υπόβαθρο είναι πολυδιάστατος, οι συνοριακές συνθήκες (μπορεί να) δίνονται σε υπερεπιφάνειες, οι αρχικές σε μη συμπαγείς περιοχές και, τέλος, οι συναρτήσεις-λύσεις δεν είναι υποχρεωτικά αυστηρές ή κλασικές.

Βέβαια, τα προβλήματα συνοριακών και αρχικών τιμών που αναλύονται κάπως συστηματικά στις σελίδες αυτού του τόμου είναι οι κλασικές εξισώσεις των Laplace-Poisson, της διάχυσης ή της θερμότητας και η κυματική ή εξίσωση του d' Alembert, που είναι οικείες στον αναγνώστη από τον πρώτο τόμο. Και τα μόνα εννοιολογικά σύμπλοκα που θα μπορούσε κανείς να τα χαρακτηρίσει σαν όντως καινούργια είναι οι συναρτήσεις Green, οι γενικευμένες συναρτήσεις ή κατανομές και οι μετασχηματισμοί Fourier. Συνεπώς, και στον δεύτερο τόμο περιοριζόμαστε σε προβλήματα που έχουν ως βασικό χαρακτηριστικό την γραμμικότητα.

Έτσι, η επέκταση της συζήτησής μας σε μη γραμμικές εξισώσεις εξέλιξης και μη γραμμικές εξισώσεις ελλειπτικού τύπου πρέπει να μετατεθεί στις σελίδες του τρίτου τόμου αυτού του συγγράμματος. Ωστόσο, κάποια προετοιμασία για το πέρασμα στο χώρο της μη γραμμικότητας γίνεται ήδη στις σελίδες που ακολουθούν. Χωρίς να το αναφέρουμε ρητά, προθερμαίνουμε τον φίλο αναγνώστη (και τη φίλη αναγνώστρια, βέβαια –δυστυχώς η ελληνική γλώσσα, και όχι μόνο, επιμένει στις διακρίσεις και δυσκολεύει την συστηματική αναφορά της) για να μπορέσει να ανταπεξέλθει ευκολότερα στις δυσκολίες των μη γραμμικών εξισώσεων, αφιερώνοντας πολλές από τις σελίδες αυτού του τόμου στις μιγαδικές συναρτήσεις. Ειδικότερα, τα ολοκληρώματα τύπου Cauchy, οι σχέσεις Plemelj-Sokhotski και άλλες έννοιες και μέθοδοι της μιγαδικής ανάλυσης που παρουσιάζουμε στο δεύτερο κεφάλαιο και φαίνονται ως πλεονασμός από την άποψη των αναγκών αυτού του τόμου είναι απαραίτητες στη διατύπωση και λύση των προβλημάτων  $\bar{\partial}$  (ντι μπαρ) και Riemann-Hilbert. Τα τελευταία αποτελούν βασικά εργαλεία της σύγχρονης ανάλυσης των μη γραμμικών μερικών διαφορικών εξισώσεων.

Για την αρχική παραγωγή αυτού του τόμου, στηρίχτηκα στη βοήθεια των τότε συνεργατών μου και σήμερα διδασκτόρων Παύλου Ξενιτίδη και Τάσου Τόγκα. Η τωρινή του μορφή οφείλει πολλά στον συνεργάτη μου και υποψήφιο διδάκτορα Σωτήρη Ρίζο-Κωνσταντίνου. Τους ευχαριστώ θερμά κι από τη θέση αυτή.

Πάτρα, Σεπτέμβρης 2010

Δημήτρης Γ&Σ Τσουμπελής

# Περιεχόμενα

<b>Κεφάλαιο VII.....</b>	<b>1</b>
Θεμελιακές λύσεις της εξίσωσης Laplace.....	1
1. Βαθμωτά και διανυσματικά πεδία στο επίπεδο.....	1
2. Βαθμωτά και διανυσματικά πεδία στο χώρο.....	17
3. Κλίση, απόκλιση, στροβιλισμός.....	24
4. Το στατικό ηλεκτρομαγνητικό πεδίο.....	32
5. Το χρονικά μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο.....	41
6. Οι εξισώσεις Laplace και Poisson στον $\mathbb{R}^n$ .....	47
7. Θεμελιακές λύσεις της εξίσωσης Laplace.....	54
8. Οι ταυτότητες Green και οι συνέπειές τους.....	57
9. Το θεώρημα της ολοκληρωτικής αναπαράστασης αρμονικών συναρτήσεων.....	61
10. Συναρτήσεις Green.....	67
11. Η μέθοδος των ειδώλων.....	70
12. Ο τύπος του Poisson.....	78
13. Συνέπειες του τύπου Poisson.....	88
<b>Κεφάλαιο VIII.....</b>	<b>93</b>
Ο φανταστικός κόσμος των Laplace, Cauchy και Riemann.....	93
1. Μιγαδικές Συναρτήσεις.....	93
2. Δυναμοσειρές-Αναλυτικές Συναρτήσεις.....	103
3. Ολομορφικές Συναρτήσεις.....	109
4. Τομές και κλαδικά σημεία.....	120
5. Cauchy-ολογία.....	132
6. Ολομορφικές Συναρτήσεις και η εξίσωση Laplace.....	154
7. Σύμμορφοι μετασχηματισμοί και λύσεις ΠΣΤ.....	168
8. Ανώμαλα σημεία και ολοκληρωτικά υπόλοιπα.....	188
<b>Κεφάλαιο IX.....</b>	<b>215</b>
Μετασχηματισμοί Fourier.....	215
1. Από τις σειρές στους μετασχηματισμούς Fourier.....	215
2. Ο ευθύς και ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier.....	218
3. Ιδιότητες των μετασχηματισμών Fourier.....	229
4. Υπολογισμός του μετασχηματισμού Fourier μέσω επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων στο μιγαδικό επίπεδο.....	240
5. Η έννοια της συνέλιξης δύο συναρτήσεων.....	252

6. Μετασχηματισμοί Fourier ημιτόνου-συνημιτόνου.....	257
7. Μετασχηματισμοί Fourier πολλών μεταβλητών .....	260
8. Επίλυση του ΠΑΤ για την εξίσωση της διάχυσης στην πραγματική ευθεία .....	263
9. Το ΠΑΤ για την κυματική εξίσωση .....	274
10. ΠΑΣΤ για την εξίσωση της διάχυσης .....	279
11. Πολυδιάστατα προβλήματα αρχικών τιμών .....	287
<b>Κεφάλαιο X.....</b>	<b>291</b>
Μετασχηματισμός Laplace.....	291
1. Άλλοι ολοκληρωτικοί μετασχηματισμοί .....	291
2. Ο μετασχηματισμός Laplace.....	294
3. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace .....	301
4. Επίλυση του ΠΑΤ για την εξίσωση της διάχυσης .....	309
5. Επίλυση του ΠΑΣΤ για την εξίσωση της διάχυσης .....	315
<b>Κεφάλαιο XI.....</b>	<b>319</b>
Γενικευμένες Συναρτήσεις.....	319
1. Το όνειρο του Dirac .....	319
2. Γενικευμένες Συναρτήσεις (κατανομές) στον $\mathbb{R}$ .....	327
3. Γενικευμένες συναρτήσεις (κατανομές) στον $\mathbb{R}^n$ .....	343
4. Παράγωγοι κατανομών .....	350
5. Μετασχηματισμοί και τανυστικό γινόμενο κατανομών.....	359
6. Ακολουθίες και σειρές κατανομών.....	371
7. Ήπιες κατανομές .....	384
8. Μετασχηματισμοί Fourier ήπιων κατανομών .....	392
9. Μετασχηματισμός Fourier και ακολουθίες ήπιων κατανομών .....	399
<b>Κεφάλαιο XII.....</b>	<b>405</b>
Θεμελιικές λύσεις και συναρτήσεις Green Εξισώσεων Εξέλιξης .....	405
1. Η πενιά του Τσιτσάνη .....	405
2. Διαφορικές εξισώσεις κατανομών .....	409
3. Συναρτήσεις Green για συμπαγείς περιοχές .....	413
4. Συναρτήσεις Green για μη φραγμένες περιοχές .....	424
5. Θεμελιικές λύσεις εξισώσεων εξέλιξης .....	431
6. Το ΠΑΤ για την κυματική εξίσωση στον $\mathbb{R}^3$ .....	454

<b>Παράρτημα.....</b>	<b>460</b>
Σύνοψη διανυσματικής ανάλυσης .....	460
1. Grad, div, curl σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες του $E^3$ .....	460
2. Γενικοί μετασχηματισμοί συντεταγμένων .....	465
3. Συντελεστές κλίμακας και μετρική .....	470
4. Γενικός ορισμός των τελεστών grad, div, curl και $\Delta$ .....	472
<b>Αναφορές.....</b>	<b>481</b>



# Θεμελιακές λύσεις της εξίσωσης Laplace

Στο Εδάφιο 6 του Κεφάλαιου V (*Η μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών*) ασχοληθήκαμε με το πρόβλημα συνοριακών τιμών της εξίσωσης Laplace στο επίπεδο και δώσαμε, ορισμένες φορές χωρίς απόδειξη, κάποια γενικά χαρακτηριστικά των αντίστοιχων λύσεων.

Επιπλέον, στο Εδάφιο 2 του Κεφάλαιου VI (*Πολυδιάστατα προβλήματα αρχικών-συνοριακών τιμών*) κατασκευάσαμε λύσεις ανάλογων προβλημάτων συνοριακών τιμών για την εξίσωση Laplace στον Ευκλείδειο τρισδιάστατο χώρο.

Ο στόχος του παρόντος κεφάλαιου είναι διπλός. Από τη μια, θέλουμε να αναλύσουμε τα προηγούμενα αποτελέσματα με ενιαίο τρόπο, έτσι ώστε να γενικευτούν και να ισχύουν ανεξάρτητα από τη διάσταση του χώρου. Από την άλλη, σκοπεύουμε να εισαγάγουμε ορισμένες καινούργιες έννοιες, όπως αυτές της θεμελιακής λύσης και της συνάρτησης Green, οι οποίες δεσπόζουν σε όλες τις γραμμικές μερικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές και όχι μόνο στις ελλειπτικές, στις οποίες, βέβαια, η εξίσωση (του) Laplace διατηρεί εξέχουσα θέση.

## 1. Βαθμωτά και διανυσματικά πεδία στο επίπεδο

Όπως σημειώσαμε από την πρώτη στιγμή που αναφερθήκαμε στην εξίσωση (του) Laplace, αυτή συνδέεται άρρηκτα με τις ιδιότητες των διανυσματικών πεδίων, τα οποία συναντάμε πολύ συχνά στις εφαρμογές της. Γι' αυτό, θα ξεκινήσουμε τη συστηματική μελέτη της εξίσωσης Laplace, υπενθυμίζοντας κάποια βασικά στοιχεία της διανυσματικής ανάλυσης.

Ας υποθέσουμε, λοιπόν, ότι θέλουμε να μελετήσουμε τη ροή ενός λεπτού στρώματος κάποιου ρευστού, το οποίο κινείται πάνω σε μια επίπεδη πλάκα. Αυτό σημαίνει ότι, από φυσική άποψη, το αντικείμενο της μελέτης μας καταλαμβάνει ένα τμήμα αυτού που ονομάζουμε Ευκλείδειο επίπεδο. Για λόγους που θα φανούν καθαρά σε λίγο, το *Ευκλείδειο επίπεδο* θα το συμβολίζουμε, προσωρινά τουλάχιστον, με  $\mathbb{E}^2$ . Τα βασικά στοιχεία του  $\mathbb{E}^2$  είναι οι ευθείες, τα σημεία, η απόσταση δύο σημείων και ότι άλλο έχουμε μάθει από το γυμνάσιο.

Από την άλλη, με  $\mathbb{R}^2$  εννοούμε πάντα το σύνολο των δια(τε)ταγμένων ζευγαριών πραγματικών αριθμών. Ωστόσο, στα προηγούμενα κεφάλαια, χρησιμοποιήσαμε επανειλημμένα



τη φράση "το Ευκλείδειο επίπεδο  $\mathbb{R}^2$ ". Αυτό υπονοεί ότι, με κάποιο τρόπο, είχαμε ταυτίσει το σύνολο  $\mathbb{R}^2$  με το γεωμετρικό αντικείμενο  $\mathbb{E}^2$ . Άρα, είναι καιρός να περιγράψουμε ρητά τη διαδικασία που οδηγεί σε μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ανάμεσα σ' αυτά τα δύο μαθηματικά αντικείμενα.

Για το σκοπό αυτό, θεωρούμε δύο κάθετες μεταξύ τους ευθείες του  $\mathbb{E}^2$ , τις  $x$  και  $y$ , οι οποίες τέμνονται στο σημείο  $O$ . Αυτές τις ευθείες θα τις λέμε **ορθογώνιο σύστημα αξόνων με αρχή το  $O$** . Με τη γεωμετρική κατασκευή που περιγράψαμε στο Εδάφιο I-4, το τυχαίο σημείο  $p$  του  $\mathbb{E}^2$  αντιστοιχίζεται αυτόματα σε δύο πραγματικούς αριθμούς, τους  $x(p)$  και  $y(p)$ . Το ζευγάρι  $(x(p), y(p))$  καθορίζεται μονοσήμαντα από το σημείο  $p$  και αντίστροφα. Οι αριθμοί  $x(p)$  και  $y(p)$  αναφέρονται από κει και πέρα ως **Καρτεσιανές συντεταγμένες** του σημείου  $p$ .

Το γεγονός ότι η αντιστοίχιση των στοιχείων του  $\mathbb{E}^2$  μ' εκείνα του  $\mathbb{R}^2$  προϋποθέτει την επιλογή ενός συγκεκριμένου ζευγαριού τεμνόμενων ευθειών κάνει αμέσως φανερή την αλήθεια της ακόλουθης πρότασης: Υπάρχουν άπειρες αμφιμονοσήμαντες αντιστοιχίες των συνόλων  $\mathbb{E}^2$  και  $\mathbb{R}^2$ . Συνακόλουθα, υπάρχουν άπειρα συστήματα Καρτεσιανών συντεταγμένων - όσα είναι και τα ζευγάρια ορθογώνιων ευθειών του  $\mathbb{E}^2$ .

Από τον ορισμό τους, οι Καρτεσιανές συντεταγμένες δύο τυχαίων σημείων του Ευκλείδειου επιπέδου συνδέονται με μία σχέση, η οποία αποτελεί το θεμελιακό χαρακτηριστικό των συντεταγμένων αυτού του είδους. Πιο συγκεκριμένα, αν το ζευγάρι  $(x_1, y_1)$  αποτελεί τις συντεταγμένες ενός σημείου  $p_1$  του  $\mathbb{E}^2$  και το  $(x_2, y_2)$  εκείνες του σημείου  $p_2$ , τότε η απόσταση,  $d(p_1, p_2)$ , των παραπάνω σημείων είναι ίση με

$$d(p_1, p_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} . \quad (1.1)$$

Θυμίζουμε ότι, με **απόσταση δύο σημείων** εννοούμε πάντα το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος που τα ενώνει. Άρα, η (1.1) δεν είναι παρά το **Πυθαγόρειο Θεώρημα**, διατυπωμένο μέσω των συντεταγμένων των σημείων  $p_1$  και  $p_2$ .

Ειδικότερα, η απόσταση του σημείου  $p \in \mathbb{E}^2$  με συντεταγμένες  $(x, y)$  από την αρχή των Καρτεσιανών συντεταγμένων,  $O$ , δίνεται από τον τύπο

$$d(O, p) = \sqrt{x^2 + y^2} . \quad (1.2)$$

Όπως βέβαια τονίσαμε νωρίτερα, συστήματα Καρτεσιανών συντεταγμένων του Ευκλείδειου επιπέδου υπάρχουν άπειρα. Εκείνο, λοιπόν, που εννοούμε λέγοντας ότι η σχέση (1.1) χαρακτηρίζει αυτά τα συστήματα είναι το εξής: Η (1.1) ισχύει εάν και μόνο όταν οι συντεταγμένες στις οποίες περιγράφεται ο χώρος  $\mathbb{E}^2$  είναι Καρτεσιανές.

Συνεπώς, αν σε κάποιο Καρτεσιανό σύστημα, διαφορετικό από εκείνο που έδωσε τους αριθμούς  $(x_1, y_1)$  και  $(x_2, y_2)$ , τα ίδια σημεία  $p_1$  και  $p_2$  έχουν συντεταγμένες  $(x'_1, y'_1)$  και  $(x'_2, y'_2)$ , αντίστοιχα, τότε

$$d(p_1, p_2) = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2} . \quad (1.3)$$

Από τη σύγκριση των (1.1) και (1.3) αμέσως έπεται ότι

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = (x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2. \quad (1.4)$$

Αυτή η ισότητα εκφράζει με συμπεκνωμένο τρόπο τη σχέση δύο τυχαίων μελών της κλάσης των συντεταγμένων που ονομάσαμε Καρτεσιανές. Αν θέσουμε

$$\Delta x := x_2 - x_1, \quad \Delta y := y_2 - y_1, \quad (1.5)$$

τότε μπορούμε να γράψουμε την προηγούμενη σχέση στη μορφή

$$\boxed{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2} \quad (1.6)$$

Συνεπώς, η χαρακτηριστική ιδιότητα των Καρτεσιανών συντεταγμένων του  $\mathbb{E}^2$  διατυπώνεται και με τον ακόλουθο τρόπο: Ο μετασχηματισμός  $(x, y) \rightarrow (x', y')$  που οδηγεί από ένα σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων σ' ένα δεύτερο της ίδιας κλάσης αφήνει την έκφραση  $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$  *αναλλοίωτη*.

Όταν, λοιπόν, αναφερόμαστε στο *Ευκλείδειο επίπεδο*  $\mathbb{R}^2$ , εννοούμε πως τα στοιχεία του  $\mathbb{R}^2$  αντιστοιχούν στις Καρτεσιανές συντεταγμένες των σημείων του  $\mathbb{E}^2$ , ως προς κάποιο ορθογώνιο σύστημα αξόνων. Συνακόλουθα, με κάθε στοιχείο  $(a, b)$  του  $\mathbb{R}^2$  θα συνδέουμε αυτόματα και δύο γεωμετρικές εικόνες: (α) Το σημείο  $p$  του  $\mathbb{E}^2$  που έχει συντεταγμένες  $(a, b)$  στο συγκεκριμένο σύστημα αξόνων και (β) Το προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα που οδηγεί από την αρχή των αξόνων,  $O$ , στο σημείο  $p$ .

Όπως γνωρίζουμε, τα στοιχεία του  $\mathbb{R}^2$  ονομάζονται και *διανύσματα*. Συχνά, τα διανύσματα συμβολίζονται με ένα μόνο γράμμα που, είτε το τυπώνουμε έντονα, ή προσθέτουμε στο πάνω μέρος του ένα βέλος. Έτσι, λέμε, για παράδειγμα, "δίνεται το διάνυσμα  $V = (a, b)$  ή  $\vec{V} = (a, b)$ ".

Η γεωμετρική ερμηνεία του  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  που μόλις περιγράψαμε εξηγεί το γιατί, ως *μέτρο ή μήκος* του διανύσματος  $V = (a, b)$  ορίζεται ο μη αρνητικός αριθμός

$$\|V\| := (a^2 + b^2)^{1/2}. \quad (1.7)$$

(Εμείς θα προτιμήσουμε το απλούστερο σύμβολο  $|V|$ ).

Με την ευκαιρία, θυμίζουμε ότι, ένα διάνυσμα που έχει μοναδιαίο μήκος λέγεται *κανονικό*. Θυμίζουμε επίσης ότι, με *εσωτερικό γινόμενο* των διανυσμάτων  $V = (a, b)$  και  $W = (c, d)$  εννοούμε τον αριθμό

$$V \cdot W := a c + b d. \quad (1.8)$$

Εύκολα δείχνει κανείς ότι

$$V \cdot W := |V| |W| \cos \theta, \quad (1.9)$$

όπου  $\theta$  η γωνία που ορίζεται από τα βέλη (προσανατολισμένα ευθύγραμμα τμήματα) τα οποία αντιστοιχούν στα διανύσματα  $V$  και  $W$ . Εύλογα, λοιπόν, τα διανύσματα  $V$ ,  $W$  χαρακτηρίζονται ως (μεταξύ τους) *ορθογώνια*, αν το εσωτερικό γινόμενό τους μηδενίζεται.

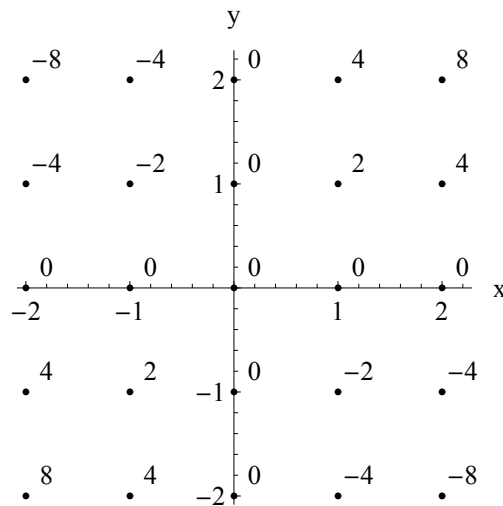
Ας θεωρήσουμε τώρα τη συνάρτηση  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  που έχει ως πεδίο ορισμού ολόκληρο το επίπεδο  $\mathbb{R}^2$  και τύπο  $f(x, y) = 2xy$ . Επειδή τα στοιχεία του  $\mathbb{R}$  ονομάζονται και *βαθμωτά*

(scalars), η παραπάνω  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ονομάζεται **βαθμωτό πεδίο** (scalar field) του  $\mathbb{R}^2$ .

Γενικότερα, μπορούμε να θεωρήσουμε βαθμωτά πεδία που ορίζονται μόνο σε μια περιοχή του επίπεδου, αντί σε ολόκληρο τον  $\mathbb{R}^2$ . Ένα παράδειγμα αποτελεί η συνάρτηση  $h: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $h(x, y) = 1 + x + y$  και πεδίο ορισμού την ορθογώνια περιοχή  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$ . Συχνά, βαθμωτά πεδία αυτού του είδους χρησιμεύουν στην αναπαράσταση μιας φυσικής ποσότητας, γ.π. της θερμοκρασίας, σε μια γεωγραφική περιοχή που αντιστοιχεί στη γεωμετρική περιοχή  $\Omega$ .

Άλλοτε, πάλι, ο περιορισμός σε κάποιο γνήσιο υποσύνολο  $\Omega$  του  $\mathbb{R}^2$  επιβάλλεται από το γεγονός ότι ο τύπος της συνάρτησης που περιγράφει το πεδίο δεν έχει νόημα σε όλα τα σημεία του επίπεδου. Για παράδειγμα, ο τύπος  $g(x, y) = 1 / (x^2 + y^2)$  δεν έχει νόημα στο σημείο  $(x, y) = (0, 0)$ . Συνεπώς, αυτός ο τύπος μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον ορισμό του βαθμωτού πεδίου  $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  στην περιοχή  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  ή σε κάποιο τμήμα αυτής της περιοχής, όχι όμως και σ' ολόκληρο τον  $\mathbb{R}^2$ . Ανάλογα, ο τύπος  $\varphi(x, y) = 1 / (x - y)$  δεν έχει νόημα κατά μήκος της ευθείας  $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$ . Άρα, με αυτό τον τύπο μπορούμε να ορίσουμε ένα βαθμωτό πεδίο μόνο σε κάποιο υποσύνολο της (μη συνεκτικής) περιοχής  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ .

Υπάρχουν πολλοί τρόποι για να δώσουμε μια γραφική αναπαράσταση ενός βαθμωτού πεδίου στον  $\mathbb{R}^2$ . Ένας απ' αυτούς έγκειται στο να καταγράψουμε την τιμή της αντίστοιχης συνάρτησης  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  σε ορισμένα από τα σημεία της περιοχής  $\Omega$ , όπως γίνεται στο Σχ.1.1 για την  $f(x, y) = 2xy$ .



**Σχ. 1.1** Γραφική παράσταση του βαθμωτού πεδίου  $f(x, y) = 2xy$ . Δίπλα σε καθένα από τα σημεία  $(x, y)$  που δηλώνονται με στίγμα, σημειώνεται η τιμή της συνάρτησης  $f(x, y) = 2xy$ .

Πολλές φυσικές ποσότητες που αφορούν μιαν επίπεδη περιοχή προσδιορίζονται με τη βοήθεια δύο συναρτήσεων και όχι μιας μόνο. Ας σκεφτούμε και πάλι το παράδειγμα του λεπτού στρώματος υγρού που κινείται πάνω σε μιαν επίπεδη πλάκα. Για να προσδιορίσουμε την ταχύτητα των στοιχείων του υγρού, θα πρέπει, για κάθε  $(x, y) \in \Omega$ , να δώσουμε το μέτρο και την κατεύθυνση της ταχύτητας του στοιχείου  $\sigma$  του υγρού το οποίο, τη στιγμή που μας

ενδιαφέρει, βρίσκεται στο σημείο  $(x, y)$ . Η κατεύθυνση προσδιορίζεται δίνοντας την ημιευθεία  $E(x, y)$  που ξεκινάει από το σημείο  $(x, y)$  και πάνω στην οποία κινείται προς στιγμή το  $\sigma$ .

Η ταχύτητα του στοιχείου  $\sigma$  του ρευστού, το οποίο βρίσκεται προς στιγμή στο σημείο  $(x, y)$ , συμβολίζεται συνήθως με  $V(x, y)$  ή με  $\vec{V}(x, y)$ . Ο μη αρνητικός αριθμός που προσδιορίζει το μέτρο της  $V(x, y)$  συμβολίζεται συνήθως με  $\|V(x, y)\|$ , αλλά εμείς θα προτιμήσουμε το απλούστερο σύμβολο  $|V(x, y)|$ .

Για να προσδιορίσουμε την κατεύθυνση της ταχύτητας  $V(x, y)$ , αρκεί να δώσουμε τη γωνία  $\theta(x, y)$  που σχηματίζει η παραπάνω ημιευθεία  $E(x, y)$  με τον άξονα  $x$ . Να λοιπόν δύο συναρτήσεις με τις οποίες μπορεί να προσδιοριστεί πλήρως η ταχύτητα του ρευστού στην περιοχή  $\Omega$ : Το ζευγάρι  $(|V(x, y)|, \theta(x, y))$ .

Όμως, από το ζευγάρι των συναρτήσεων  $|V(x, y)|$  και  $\theta(x, y)$  αυτόματα ορίζεται και το ζευγάρι  $(V_x(x, y), V_y(x, y))$ , όπου

$$V_x(x, y) := |V(x, y)| \cos \theta(x, y), \quad V_y(x, y) := |V(x, y)| \sin \theta(x, y). \quad (1.10)$$

Αντίστροφα, από τις (1.10) και τη θεμελιακή σχέση

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1. \quad (1.11)$$

αμέσως συνάγεται ότι

$$V_x^2(x, y) + V_y^2(x, y) = |V(x, y)|^2, \quad \tan \theta(x, y) = \frac{V_y(x, y)}{V_x(x, y)}. \quad (1.12)$$

Συνακόλοθα,

$$|V(x, y)| = [V_x^2(x, y) + V_y^2(x, y)]^{1/2}, \quad \theta(x, y) = \tan^{-1} \left[ \frac{V_y(x, y)}{V_x(x, y)} \right]. \quad (1.13)$$

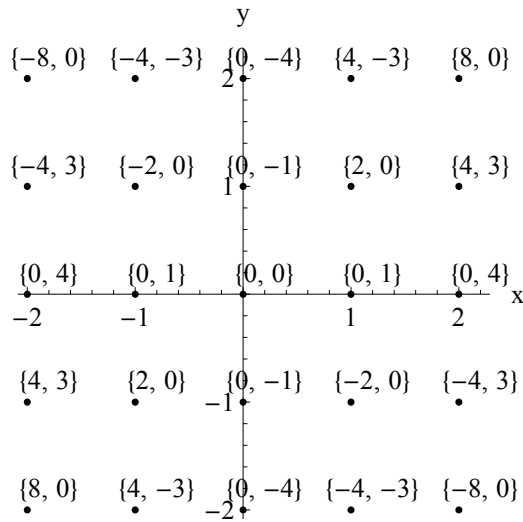
Αυτό σημαίνει ότι το ζευγάρι των συναρτήσεων  $(V_x(x, y), V_y(x, y))$  προσδιορίζει πλήρως το  $(|V(x, y)|, \theta(x, y))$ .

Η ταχύτητα ενός ρευστού σε μια επίπεδη περιοχή  $\Omega$  είναι ένα παράδειγμα αυτών που ονομάζουμε διανυσματικές συναρτήσεις ή διανυσματικά πεδία. Γενικότερα λοιπόν, με **διανυσματικό πεδίο** (vector field) στην περιοχή  $\Omega$  θα εννοούμε μian απεικόνιση  $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ , η οποία προσδιορίζεται μέσω δύο βαθμωτών συναρτήσεων  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  και  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , οπότε η τιμή της  $V$  στο σημείο  $(x, y) \in \Omega$  είναι το ζευγάρι των πραγματικών αριθμών  $V(x, y) := (f(x, y), g(x, y))$ . Οι αριθμοί  $f(x, y)$ ,  $g(x, y)$  ονομάζονται **συνιστώσες** του διανύσματος  $V(x, y)$ , στην κατεύθυνση  $x$  και  $y$ , αντίστοιχα.

Για να κατασκευάσουμε μια γραφική αναπαράσταση ενός διανυσματικού πεδίου  $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ , μπορούμε να ακολουθήσουμε το παράδειγμα της γραφικής παράστασης του βαθμωτού πεδίου που δώσαμε νωρίτερα. Πιο συγκεκριμένα, αν η συνάρτηση  $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  ορίζεται από τις  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  και  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ , τότε αρκεί να δώσουμε τις τιμές του ζευγαριού  $(f(x, y), g(x, y))$  σε ορισμένα σημεία της περιοχής  $\Omega$ .

Αυτό γίνεται στο Σχ. 1.2, υποθέτοντας ότι η συνάρτηση  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ορίζεται από τον

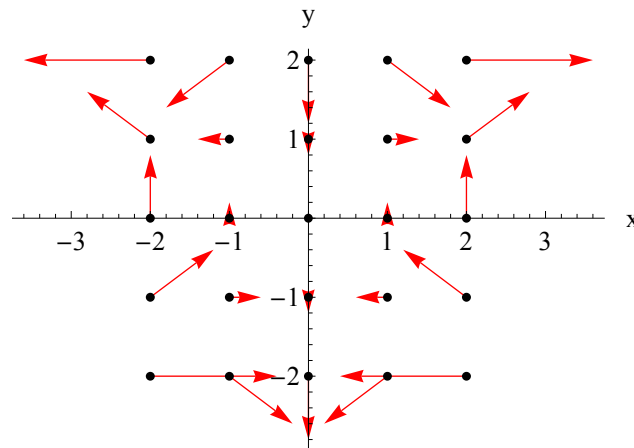
τύπο  $f(x, y) = 2xy$ , ενώ η  $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  ορίζεται από τον τύπο  $g(x, y) = x^2 - y^2$ , οπότε  $V(x, y) = (f(x, y), g(x, y)) = (2xy, x^2 - y^2)$ .



**Σχ. 1.2** Γραφική παράσταση του διανυσματικού πεδίου  $V(x, y) = (2xy, x^2 - y^2)$ .

Το ζευγάρι  $\{a, b\}$  δίπλα στο σημείο (στίγμα) με συντεταγμένες  $(x, y)$  δηλώνει την τιμή των συναρτήσεων  $f(x, y) = 2xy$  και  $g(x, y) = x^2 - y^2$  στο συγκεκριμένο σημείο.

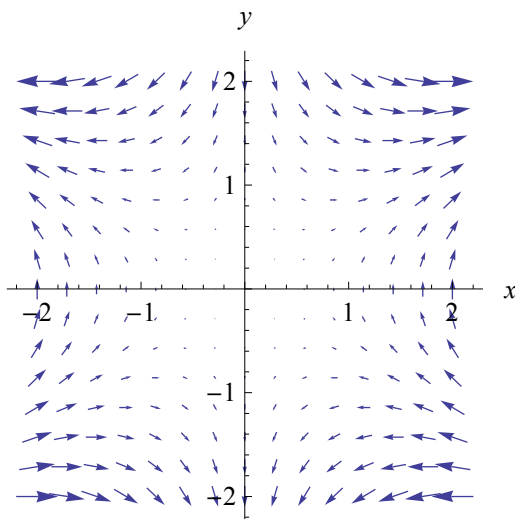
Εναλλακτικά, μπορούμε, στα επιλεγμένα σημεία της περιοχής  $\Omega$ , να κατασκευάσουμε βελάκια, που ξεκινάνε από το σημείο  $(x, y)$  και καλήγουν στο  $(x, y) + V(x, y)$ , όπως στο Σχ.1.3. Αυτός είναι και ο πιο συνηθισμένος τρόπος αναπαράστασης ενός διανυσματικού πεδίου.



**Σχ. 1.3** Εναλλακτική γραφική παράσταση του διανυσματικού πεδίου  $V(x, y) = (2xy, x^2 - y^2)$ .

Στο σημείο  $(x, y)$ , κατασκευάζεται ένα βέλος με αφετηρία το  $(x, y)$  και τέρμα το σημείο  $(x + f(x, y), y + g(x, y)) = (x + 2xy, y + x^2 - y^2)$ .

Με τη βοήθεια των σύγχρονων υπολογιστών, ακόμα και "προσωπικών" (PCs), μπορούμε να κατασκευάσουμε σχεδιαγράμματα που, σαν το προηγούμενο, δείχνουν βέλη τα οποία παριστάνουν τις τιμές του πεδίου σε ορισμένα, αλλά πολύ περισσότερα, σημεία. Το αποτέλεσμα μιας τέτοιας κατασκευής φαίνεται στο Σχ. 1.4.

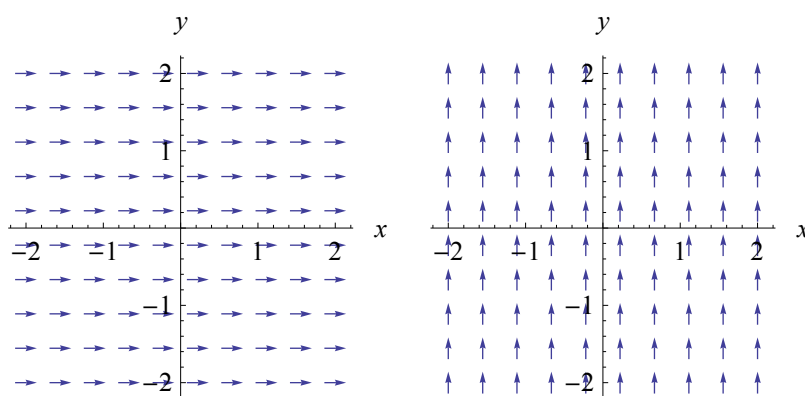


**Σχ. 1.4** Γραφική αναπαράσταση του διανυσματικού πεδίου  $V(x, y) = (2xy, x^2 - y^2)$  στην περιοχή  $\Omega_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2\}$

Ένα διανυσματικό πεδίο λέγεται **ομογενές** όταν είναι της μορφής  $V(x, y) = (a, b)$  όπου  $a, b$  τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί. Το απλούστερο δυνατό πεδίο αυτού του είδους είναι το μηδενικό:  $V(x, y) = \mathbf{0} := (0, 0)$ . Δύο άλλα ομογενή διανυσματικά πεδία, ξεχωριστής σημασίας, είναι τα εξής:

$$e_x(x, y) := (1, 0), \quad e_y(x, y) := (0, 1). \tag{1.14}$$

Η γραφική τους αναπαράσταση με βέλη δίνεται στο Σχ. 1.5.



**Σχ. 1.5** Γραφική αναπαράσταση των ομομογενών διανυσματικών πεδίων  $e_x(x, y) := (1, 0)$  και  $e_y(x, y) := (0, 1)$  στην περιοχή  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2\}$ .

Ας θυμηθούμε τώρα ότι με **γινόμενο του αριθμού (βαθμωτού) λ με το διάνυσμα**  $V = (a, b)$  εννοούμε το διάνυσμα

$$\lambda V := (\lambda a, \lambda b). \tag{1.15}$$

Με βάση αυτή την έννοια και τις (1.14), μπορούμε να γράφουμε κάθε διανυσματικό πεδίο  $V(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$  στην ακόλουθη μορφή

$$V(x, y) = f(x, y) e_x(x, y) + g(x, y) e_y(x, y). \tag{1.16}$$

Αυτή η σχέση θα πρέπει να εννοείται με τον ακόλουθο τρόπο: Θεωρούμε ότι το επίπεδο  $\mathbb{R}^2$  είναι πάντα εφοδιασμένο με δύο διανυσματικά πεδία, τα  $\mathbf{e}_x(x, y)$  και  $\mathbf{e}_y(x, y)$ . Με άλλα λόγια, θεωρούμε ότι σε κάθε σημείο  $(x, y)$  του  $\mathbb{R}^2$  στέκεται ένα ζευγάρι από βέλη που αντιστοιχεί στο ζευγάρι  $(\mathbf{e}_x(x, y), \mathbf{e}_y(x, y))$ . Σύμφωνα λοιπόν με την (1.16), κάθε άλλο διάνυσμα  $\mathbf{V}(x, y)$  που δίνεται στο ίδιο σημείο γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των  $\mathbf{e}_x(x, y)$  και  $\mathbf{e}_y(x, y)$ . Αυτή η διαπίστωση δηλώνεται με το να πούμε ότι το ζευγάρι  $(\mathbf{e}_x(x, y), \mathbf{e}_y(x, y))$  αποτελεί **βάση** του χώρου των διανυσμάτων που ορίζονται στο σημείο  $(x, y)$ .

Ας παρατηρήσουμε τώρα ότι τα διανύσματα  $\mathbf{e}_x(x, y)$  και  $\mathbf{e}_y(x, y)$  που ορίσαμε παραπάνω είναι κανονικά και μεταξύ τους ορθογώνια. Γι' αυτό, η βάση  $(\mathbf{e}_x(x, y), \mathbf{e}_y(x, y))$  χαρακτηρίζεται ως **ορθοκανονική**.

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι η βάση  $(\mathbf{e}_x(x, y), \mathbf{e}_y(x, y))$  δεν είναι η μοναδική. Μάλιστα, δεν είναι πάντα και η πιο βολική για να εκφράσουμε το τυχαίο διανυσματικό πεδίο ως γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων της. Οποιοδήποτε άλλο ζευγάρι διανυσματικών πεδίων,  $(\mathbf{e}_1(x, y), \mathbf{e}_2(x, y))$ , μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως βάση. Αρκεί τα στοιχεία του να είναι μη μηδενικά και μη συγγραμμικά σε όλα τα σημεία της περιοχής  $\Omega$  που μας ενδιαφέρει.

Με άλλα λόγια, τα πεδία  $\mathbf{e}_1(x, y)$  και  $\mathbf{e}_2(x, y)$  θα πρέπει να είναι τέτοια που, σε κανένα σημείο της  $\Omega$ , δεν είναι το ένα πολλαπλάσιο του άλλου. Ισοδύναμα, δεν θα πρέπει να υπάρχει συνάρτηση  $\lambda(x, y)$  τέτοια που το  $\mathbf{e}_2(x, y) = \lambda(x, y) \mathbf{e}_1(x, y)$ ,  $\forall (x, y) \in \Omega$ . Αλλά, ούτε και συνάρτηση  $\mu(x, y)$  τέτοια που το  $\mathbf{e}_1(x, y) = \mu(x, y) \mathbf{e}_2(x, y)$ . Δύο πεδία τα οποία πληρούν αυτή τη συνθήκη ονομάζονται **γραμμικά ανεξάρτητα** (το ένα από το άλλο).

Θεωρήστε για παράδειγμα τα πεδία

$$\mathbf{e}_1(x, y) := (e^y, 0), \quad \mathbf{e}_2(x, y) := (x, 1). \quad (1.17)$$

Εύκολα αποδεικνύει κανείς ότι αυτά τα πεδία είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Άρα αποτελούν βάση. Αυτή η βάση δεν είναι ορθοκανονική, αφού

$$\mathbf{e}_1(x, y) \cdot \mathbf{e}_1(x, y) = e^{2y}, \quad \mathbf{e}_1(x, y) \cdot \mathbf{e}_2(x, y) = x e^y, \quad \mathbf{e}_2(x, y) \cdot \mathbf{e}_2(x, y) = x^2 + 1. \quad (1.18)$$

Ένας συστηματικός τρόπος για την κατασκευή βάσεων είναι αυτός που στηρίζεται στα εναλλακτικά συστήματα συντατεγμένων, με τα οποία μπορούμε να προσδιορίζουμε τα σημεία μιας επίπεδης περιοχής.

Για να περιγράψουμε αυτό τον τρόπο αναλυτικά, χρειάζεται να υπενθυμίσουμε ότι, μια ομαλή παραμετρική καμπύλη ορίζει, σε κάθε σημείο της (εικόνας της), ένα διάνυσμα. Είναι αυτό που ονομάζουμε εφαπτόμενο. Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι η καμπύλη  $\Gamma$  ορίζεται από τις σχέσεις  $x = X(s)$ ,  $y = Y(s)$ ,  $s \in I_s$ , και διέρχεται από το σημείο  $(x_0, y_0)$  του  $\mathbb{R}^2$ . Αυτό σημαίνει ότι, στο διάστημα μεταβολής  $I_s$  της παραμέτρου  $s$ , υπάρχει ένα σημείο  $s_0$  τέτοιο που  $(x_0, y_0) = (X(s_0), Y(s_0))$ . Το εφαπτόμενο διάνυσμα της  $\Gamma$  στο τυχαίο σημείο της,  $(x, y)$ , ορίζεται από τον τύπο

$$\mathbf{v}(x, y) = (\dot{X}(s), \dot{Y}(s)), \quad (1.19)$$

όπου η τελεία πάνω από το σύμβολο της συνάρτησης δηλώνει την παράγωγο.

Ειδικότερα, στο συγκεκριμένο σημείο  $(x_0, y_0) \in \Gamma$ , το εφαπτόμενο διάνυσμα είναι ίσο με  $\mathbf{v}(x_0, y_0) = (\dot{X}(s_0), \dot{Y}(s_0))$ . Αυτό το διάνυσμα μπορούμε να το παριστάνουμε με ένα βέλος που έχει ως βάση το σημείο  $(x_0, y_0)$  και κορυφή το σημείο  $(x_0, y_0) + \mathbf{v}(x_0, y_0)$ .

### Παράδειγμα 1.1

Το απλούστερο δυνατό παράδειγμα "παραμετρικής καμπύλης" αποτελεί η ευθεία  $\Gamma$  που διέρχεται από το σημείο  $(x_0, y_0)$  και είναι παράλληλη προς τον άξονα  $x$ . Αυτή μπορεί να περιγραφεί από τις σχέσεις  $x = x_0 + (s - s_0)$ ,  $y = y_0$ , οπότε

$$\mathbf{v}(x, y) = (1, 0). \quad (1.20)$$

Αν αφήσουμε την παράμετρο  $y_0$  να διατρέξει όλη την πραγματική ευθεία, τότε οι σχέσεις  $x = x_0 + (s - s_0)$ ,  $y = y_0$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , δε θα περιγράφουν μία μόνο ευθεία, αλλά το σύνολο των ευθειών που είναι παράλληλες προς τον άξονα  $x$ . Σ' αυτή την περίπτωση, ο τύπος (1.20) περιγράφει το ομογενές διανυσματικό πεδίο που νωρίτερα ονομάσαμε  $\mathbf{e}_x(x, y)$ .

Με ανάλογο τρόπο, αν για "καμπύλη  $\Gamma$ " πάρουμε την ευθεία που διέρχεται από το σημείο  $(x_0, y_0)$  και είναι παράλληλη προς τον άξονα  $y$ , τότε  $x = x_0$ ,  $y = y_0 + (t - t_0)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Σε τούτη την περίπτωση,

$$\mathbf{v}(x, y) = (0, 1). \quad (1.21)$$

Αφήνοντας τώρα την παράμετρο  $y_0$  να διατρέξει όλη την πραγματική ευθεία, βλέπουμε ότι οι σχέσεις  $x = x_0$ ,  $y = y_0 + (t - t_0)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , περιγράφουν το σύνολο των ευθειών που είναι παράλληλες προς τον άξονα  $y$ . Αυτό σημαίνει ότι ο τύπος (1.21) περιγράφει το ομογενές διανυσματικό πεδίο που ονομάσαμε  $\mathbf{e}_y(x, y)$ .

■

Ας υποθέσουμε τώρα ότι, για να περιγράψουμε κάποιο φυσικό πρόβλημα στην περιοχή  $\Omega$  του Ευκλείδειου επιπέδου, αντί για τις Καρτεσιανές συντεταγμένες  $x, y$ , είναι βολικότερο να χρησιμοποιήσουμε κάποιες άλλες, ας τις πούμε  $r, s$ . Το γεγονός ότι πρόκειται για νέες συντεταγμένες, σημαίνει ότι, ανάμεσα στις πραγματικές μεταβλητές  $r, s$  και τις  $x, y$  υπάρχει μια σχέση της μορφής

$$x = X(r, s), \quad y = Y(r, s), \quad (1.22)$$

με τα εξής χαρακτηριστικά:

(α) Οι συναρτήσεις  $X(r, s), Y(r, s)$  έχουν ως κοινό πεδίο ορισμού ένα ανοιχτό υποσύνολο  $\Omega'$  του  $\mathbb{R}^2$ . Αναλυτικότερα, το  $\Omega' = I_r \times I_s$ , όπου  $I_r, I_s$  τα διαστήματα μεταβολής των παραμέτρων  $r$  και  $s$ , αντίστοιχα.

(β) Οι  $X(r, s), Y(r, s)$  ανήκουν στην κλάση  $C^1(\Omega')$  και είναι τέτοιες που η **ορίζουσα Jacobi**

$$J(r, s) := \det \begin{pmatrix} \partial_r X & \partial_r Y \\ \partial_s X & \partial_s Y \end{pmatrix}, \quad (1.23)$$

είναι μη μηδενική σε όλα τα σημεία της περιοχής  $\Omega'$ . (Σημ. με  $\partial_r X, \partial_s X$  συμβολίζουμε τις



μερικές παραγώγους πρώτης τάξης της συνάρτησης  $X(r, s)$ , ως προς τις μεταβλητές  $r$  και  $s$ , αντίστοιχα).

Οι (1.22) ορίζουν αυτόματα δύο οικογένειες παραμετρικών καμπυλών, ας τις ονομάσουμε  $\Gamma_s$  και  $\Gamma_r$ , αντίστοιχα. Κατά μήκος μιας καμπύλης της οικογένειας  $\Gamma_s$  μεταβάλλεται μόνο η  $r$ , ενώ η παράμετρος  $s$  μένει σταθερή. Άρα, το διανυσματικό πεδίο που ορίζεται από αυτή την οικογένεια δίνεται από τον τύπο

$$\mathbf{e}_r = \partial_r X(r, s) \mathbf{e}_x + \partial_r Y(r, s) \mathbf{e}_y. \quad (1.24)$$

Ανάλογα, το διανυσματικό πεδίο που ορίζεται από τις καμπύλες  $\Gamma_r$ , κατά μήκος των οποίων μένει σταθερή η παράμετρος  $r$ , ορίζεται από τον τύπο

$$\mathbf{e}_s = \partial_s X(r, s) \mathbf{e}_x + \partial_s Y(r, s) \mathbf{e}_y. \quad (1.25)$$

Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό των πινάκων, μπορούμε να γράψουμε τις δύο προηγούμενες σχέσεις στη μορφή

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_r X & \partial_r Y \\ \partial_s X & \partial_s Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

Με αυτόν ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, αμέσως συμπεραίνουμε ότι τα διανυσματικά πεδία  $\mathbf{e}_r$  και  $\mathbf{e}_s$  είναι γραμμικά ανεξάρτητα σε όλη την περιοχή  $\Omega'$ . Άρα, σε κάθε σημείο της περιοχής  $\Omega$ , το ζευγάρι  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_s)$  αποτελεί βάση.

Αυτό σημαίνει ότι, κάθε διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{V}(x, y)$  που ορίζεται στην περιοχή  $\Omega$  μπορεί να γραφτεί είτε στη μορφή

$$\mathbf{V} = V_x \mathbf{e}_x + V_y \mathbf{e}_y \quad (1.27)$$

είτε στην

$$\mathbf{V} = V_r \mathbf{e}_r + V_s \mathbf{e}_s. \quad (1.28)$$

Για να βρούμε τις συνιστώσες  $V_r$  και  $V_s$  του  $\mathbf{V}(x, y)$  ως προς τη βάση  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_s)$ , αρκεί να αντικαταστήσουμε τις σχέσεις (1.24) και (1.25) στην (1.28). Αυτή η αντικατάσταση δίνει

$$\mathbf{V} = V_r (\partial_r X \mathbf{e}_x + \partial_r Y \mathbf{e}_y) + V_s (\partial_s X \mathbf{e}_x + \partial_s Y \mathbf{e}_y). \quad (1.29)$$

Ισοδύναμα,

$$\mathbf{V} = (V_r \partial_r X + V_s \partial_s X) \mathbf{e}_x + (V_r \partial_r Y + V_s \partial_s Y) \mathbf{e}_y. \quad (1.30)$$

Συγκρίνοντας τις (1.27) και (1.30) συμπεραίνουμε ότι

$$V_x = V_r \partial_r X + V_s \partial_s X, \quad V_y = V_r \partial_r Y + V_s \partial_s Y. \quad (1.31)$$

Αυτό το γραμμικό σύστημα λύνεται πολύ εύκολα ως προς τις ποσότητες  $V_r$  και  $V_s$ . Αξίζει, ωστόσο, να παρατηρήσουμε ότι, με το συμβολισμό πινάκων, το σύστημα (1.31) γράφεται στη μορφή

$$\begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_r X & \partial_s X \\ \partial_r Y & \partial_s Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_r \\ V_s \end{pmatrix}. \quad (1.32)$$

Σημειώστε, τώρα, ότι

$$\begin{pmatrix} \partial_r X & \partial_s X \\ \partial_r Y & \partial_s Y \end{pmatrix} = A^T, \quad (1.33)$$

όπου

$$A := \begin{pmatrix} \partial_r X & \partial_r Y \\ \partial_s X & \partial_s Y \end{pmatrix} \quad (1.34)$$

και με  $A^T$  εννοούμε τον ανάστροφο του πίνακα  $A$ .

Από την άλλη, η (1.32) μας επιτρέπει να συμπεράνουμε αμέσως ότι

$$\begin{pmatrix} V_r \\ V_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_r X & \partial_s X \\ \partial_r Y & \partial_s Y \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} \equiv (A^T)^{-1} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix}. \quad (1.35)$$

όπου με  $P^{-1}$  εννοούμε τον αντίστροφο του τυχαίου ομαλού πίνακα  $P$ . Και ο πίνακας  $A^T$  είναι ομαλός ή αντιστρέψιμος, γιατί

$$\det A^T = \det A \equiv J(r, s) \neq 0, \quad \forall (r, s) \in \Omega'. \quad (1.36)$$

Επιπλέον,

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T. \quad (1.37)$$

Άρα, με τα παραπάνω έχουμε αποδείξει την

### Πρόταση 1.1

Ο πίνακας που περιγράφει τον μετασχηματισμό  $(V_x, V_y) \rightarrow (V_r, V_s)$  των συνιστωσών ενός διανυσματικού πεδίου είναι ο ανάστροφος του αντίστροφου του πίνακα ο οποίος περιγράφει τον μετασχηματισμό  $(e_x, e_y) \rightarrow (e_r, e_s)$  των αντίστοιχων βάσεων.

■

Ας υποθέσουμε, κλείνοντας, ότι ο αντίστροφος,  $(x, y) \rightarrow (r, s)$ , του μετασχηματισμού  $(r, s) \rightarrow (x, y)$  περιγράφεται από τις σχέσεις

$$r = R(x, y), \quad s = S(x, y). \quad (1.38)$$

Αυτό σημαίνει ότι

$$X(R(x, y), S(x, y)) = x, \quad Y(R(x, y), S(x, y)) = y. \quad (1.39)$$

Συνακόλουθα, ο κανόνας της αλυσίδας οδηγεί αμέσως στα εξής αποτελέσματα.

$$1 = \frac{\partial x}{\partial x} = \partial_r X \partial_x R + \partial_s X \partial_x S, \quad (1.40)$$

$$0 = \frac{\partial y}{\partial x} = \partial_r Y \partial_x R + \partial_s Y \partial_x S, \quad (1.41)$$

$$0 = \frac{\partial x}{\partial y} = \partial_r X \partial_y R + \partial_s X \partial_y S, \quad (1.42)$$

$$1 = \frac{\partial y}{\partial y} = \partial_r Y \partial_y R + \partial_s Y \partial_y S. \quad (1.43)$$

Με το συμβολισμό των πινάκων, αυτές οι τέσσερις σχέσεις γράφονται στη μορφή

$$\begin{pmatrix} \partial_x R & \partial_x S \\ \partial_y R & \partial_y S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_r X & \partial_r Y \\ \partial_s X & \partial_s Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.44)$$

Αυτό σημαίνει ότι

$$A^{-1} \equiv \begin{pmatrix} \partial_r X & \partial_r Y \\ \partial_s X & \partial_s Y \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \partial_x R & \partial_x S \\ \partial_y R & \partial_y S \end{pmatrix}, \quad (1.45)$$

οπότε

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T = \begin{pmatrix} \partial_x R & \partial_y R \\ \partial_x S & \partial_y S \end{pmatrix}. \quad (1.46)$$

Κατά συνέπεια,

$$\begin{pmatrix} V_r \\ V_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x R & \partial_y R \\ \partial_x S & \partial_y S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix}. \quad (1.47)$$

### Άσκηση

Να δειχτεί ότι

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x R & \partial_x S \\ \partial_y R & \partial_y S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_s \end{pmatrix} \quad (1.48)$$

Δηλαδή,

$$\mathbf{e}_x = \partial_x R \mathbf{e}_r + \partial_x S \mathbf{e}_s, \quad \mathbf{e}_y = \partial_y R \mathbf{e}_r + \partial_y S \mathbf{e}_s. \quad (1.49)$$

■

Ας υποθέσουμε για παράδειγμα ότι α) Το σημείο  $O'$  στο οποίο τέμνονται οι δυο ευθείες που ορίζουν το σύστημα  $\Sigma'$  έχει συντεταγμένες  $(a, b)$  ως προς το  $\Sigma$  και β) Οι παραπάνω ευθείες είναι παράλληλες και ομόρροπες προς εκείνες που ορίζουν το  $\Sigma$ . Τότε,

$$x = x' + a, \quad y = y' + b. \quad (1.50)$$

Αν από την άλλη, αν το σημείο  $O'$  ταυτίζεται με την αρχή  $O$  των αξόνων του  $\Sigma$ , αλλά οι άξονες του  $\Sigma'$  έχουν προκύψει στρίβοντας εκείνους του  $\Sigma$  κατά γωνία  $\theta$  με τον ίδιο τρόπο που γυρίζουν οι δείχτες ενός ρολογιού, τότε

$$x = x' \cos \theta - y' \sin \theta, \quad y = x' \sin \theta + y' \cos \theta. \quad (1.51)$$

### Παράδειγμα 1.2

Οι *πολικές συντεταγμένες*,  $(r, \theta)$ , του Ευκλείδειου επίπεδου συνδέονται με τις Καρτεσιανές,  $(x, y)$  μέσω των σχέσεων

$$x = X(r, \theta) := r \cos \theta, \quad y = Y(r, \theta) := r \sin \theta. \quad (1.52)$$

Από αυτές τις σχέσεις αμέσως έπεται ότι

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad \frac{y}{x} = \tan \theta. \quad (1.53)$$

Συνακόλουθα, όλα τα σημεία του επιπέδου με το ίδιο  $r$  βρίσκονται πάνω σε έναν κύκλο ακτίνας  $r$  με κέντρο την αρχή  $(x, y) = (0, 0)$  των Καρτεσιανών αξόνων. Αντίθετα, όλα τα σημεία με το ίδιο  $\theta$  βρίσκονται πάνω σε μια ημιευθεία  $E$ , με κλίση  $\tan \theta$  ως προς τον θετικό ημιάξονα  $x$ . Με άλλα λόγια, η ημιευθεία  $E$  προκύπτει στρίβοντας τον θετικό ημιάξονα  $x$  κατά γωνία  $\theta$ , αντίθετα προς τη φορά των δειχτών ενός ρολογιού.

Από την προηγούμενη παρατήρηση συνάγεται αμέσως και το ακόλουθο συμπέρασμα: Οι σχέσεις (1.52) περιγράφουν δύο οικογένειες παραμετρικών καμπυλών του Ευκλείδειου επιπέδου. Η πρώτη, ας την πούμε  $\Gamma_r$ , αποτελείται από ομόκεντρους κύκλους και τα μέλη της διακρίνονται από τις τιμές του  $r$ . Κατά μήκος κάθε συγκεκριμένου μέλους αυτής της οικογένειας μεταβάλλεται μόνο η παράμετρος  $\theta$ . Η δεύτερη οικογένεια "παραμετρικών καμπυλών", ας την ονομάσουμε  $\Gamma_\theta$ , αποτελείται από τις ημιευθείες που έχουν ως κοινή αφετηρία το σημείο  $(x, y) = (0, 0)$ . Τα μέλη αυτής της οικογένειας διακρίνονται με τη βοήθεια της μεταβλητής  $\theta$  και, κατά μήκος κάθε μέλους της ξεχωριστά μεταβάλλεται μόνο η παράμετρος  $r$ .

Στην προκείμενη περίπτωση,

$$A := \begin{pmatrix} \partial_r X & \partial_r Y \\ \partial_\theta X & \partial_\theta Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -r \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \quad (1.54)$$

Συνεπώς, η ορίζουσα Jacobi του μετασχηματισμού  $(r, \theta) \rightarrow (x, y)$  είναι ίση με

$$J(r, s) := \det A = r. \quad (1.55)$$

Αυτό σημαίνει ότι, για κάθε  $r > 0$ , ο μετασχηματισμός  $(r, \theta) \rightarrow (x, y)$  είναι τοπικά αντιστρέψιμος. Δηλαδή, υπάρχουν ανοιχτά διαστήματα  $I_r$  και  $I_\theta$ , των μεταβλητών  $r$  και  $\theta$ , αντίστοιχα, με την ακόλουθη ιδιότητα: Στο ανοιχτό υποσύνολο  $\Omega' = I_r \times I_s$  του  $\mathbb{R}^2$ , η απεικόνιση  $\Phi: \Omega' \rightarrow \mathbb{R}^2$  που ορίζεται από τις (1.52) είναι 1-1.

Το γεγονός ότι η συνάρτηση  $\tan \theta$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $(-\pi/2, \pi/2)$  υποδεικνύει την επιλογή

$$I_r = (0, \infty), \quad I_\theta = (-\pi/2, \pi/2). \quad (1.56)$$

Τότε οι (1.53) οδηγούν αμέσως στην ακόλουθη μορφή της απεικόνισης  $\Phi^{-1}$ :

$$r = R(x, y) := \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \Theta(x, y) := \tan^{-1}(y/x). \quad (1.57)$$

Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να καλύψουμε και τις υπόλοιπες περιοχές του ανοιχτού συνόλου  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , στο οποίο περιέχονται οι καμπύλες  $\Gamma_\theta$  και  $\Gamma_r$ .

Σύμφωνα, τώρα, με την ανάλυση που προηγήθηκε, τα διανυσματικά πεδία που ορίζουν οι οικογένειες  $\Gamma_\theta$  και  $\Gamma_r$  δίνονται από τους τύπους

$$\mathbf{e}_r = \cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y \quad (1.58)$$

και

$$\mathbf{e}_\theta = -r \sin \theta \mathbf{e}_x + r \cos \theta \mathbf{e}_y, \quad (1.59)$$

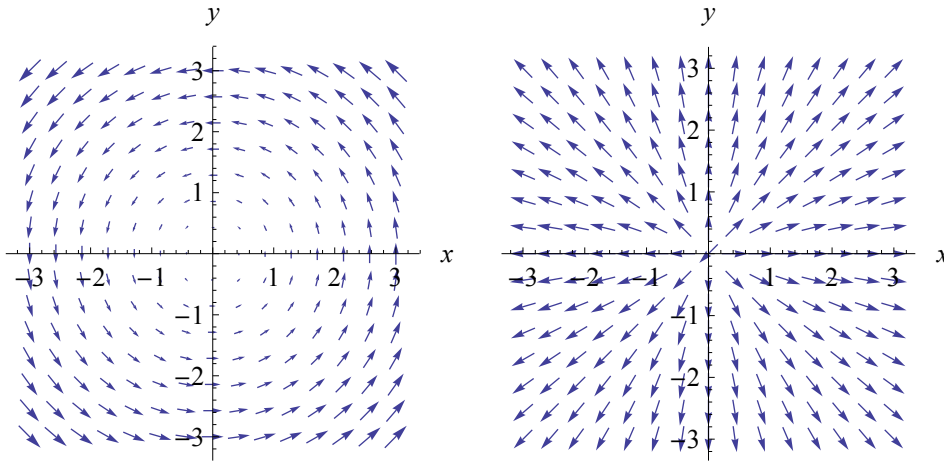
αντίστοιχα. Σημειώστε ότι, χρησιμοποιώντας τη σχέση ανάμεσα στις  $(r, \theta)$  και  $(x, y)$ , μπορού-

με να γράφουμε αυτά τα πεδία και στη μορφή

$$\mathbf{e}_r(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{e}_x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{e}_y. \quad (1.60)$$

$$\mathbf{e}_\theta(x, y) = -y \mathbf{e}_x + x \mathbf{e}_y. \quad (1.61)$$

Η γραφική τους αναπαράσταση με βέλη δίνεται στο Σχ. 1.5.



**Σχ. 1.6** Γραφική αναπαράσταση των μη ομομογενών διανυσματικών πεδίων  $\mathbf{e}_\theta(x, y) = -r \sin \theta \mathbf{e}_x + r \cos \theta \mathbf{e}_y$ , αριστερά, και  $\mathbf{e}_r(x, y) = \cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y$ , δεξιά, στην περιοχή  $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2\}$ .

Τα διανυσματικά πεδία  $\mathbf{e}_r(x, y)$  και  $\mathbf{e}_\theta(x, y)$  που μόλις κατασκευάσαμε ως αντίστοιχα των πολικών συντεταγμένων είναι μεταξύ τους ορθογώνια σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού τους,  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ . Το πρώτο είναι κανονικό, όχι όμως και το δεύτερο. Συγκεκριμένα, από τους τύπους (1.58) και (1.59) αμέσως συνάγεται ότι

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r = 1, \quad \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\theta = 0, \quad \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\theta = r^2. \quad (1.62)$$

Όντας ορθογώνια, τα διανυσματικά πεδία  $\mathbf{e}_r(x, y)$ ,  $\mathbf{e}_\theta(x, y)$  είναι και γραμμικά ανεξάρτητα (άσκηση). Συνεπώς, μπορεί να χρησιμοποιηθούν ως βάση για κάθε διανυσματικό πεδίο που ορίζεται στην περιοχή  $\Omega$ .

Αυτό σημαίνει ότι, κάθε διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{V}(x, y)$

$$\mathbf{V}(x, y) = V_x(x, y) \mathbf{e}_x + V_y(x, y) \mathbf{e}_y, \quad (1.63)$$

που ορίζεται στην περιοχή  $\Omega$ , μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\mathbf{V} = V_r \mathbf{e}_r + V_\theta \mathbf{e}_\theta. \quad (1.64)$$

Για να βρούμε τις συνιστώσες του  $\mathbf{V}(x, y)$  ως προς τη βάση  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta)$ , μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο (1.47), που, στην περίπτωσή μας, γίνεται

$$\begin{pmatrix} V_r \\ V_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x R & \partial_y R \\ \partial_x \Theta & \partial_y \Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix}. \quad (1.65)$$

Αναλυτικότερα,

$$\begin{pmatrix} V_r \\ V_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix}, \quad (1.66)$$

οπότε,

$$V_r = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} V_x + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} V_y, \quad V_\theta = -\frac{y}{x^2+y^2} V_x + \frac{x}{x^2+y^2} V_y. \quad (1.67)$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να λύσουμε το σύστημα (1.58)-(1.59) ως προς τα  $e_x, e_y$ , για να καταλήξουμε, αρχικά, στις ακόλουθες σχέσεις

$$e_x = \cos \theta e_r - \frac{1}{r} \sin \theta e_\theta, \quad e_y = \sin \theta e_r + \frac{1}{r} \cos \theta e_\theta. \quad (1.68)$$

Συνεπώς, το διανυσματικό πεδίο  $V(x, y) = V_x e_x + V_y e_y$  γράφεται και σαν

$$V(x, y) = V_x \left( \cos \theta e_r - \frac{1}{r} \sin \theta e_\theta \right) + V_y \left( \sin \theta e_r + \frac{1}{r} \cos \theta e_\theta \right). \quad (1.69)$$

Με άλλα λόγια,

$$V(x, y) = (\cos \theta V_x + \sin \theta V_y) e_r + \left( -\frac{1}{r} \sin \theta V_x + \frac{1}{r} \cos \theta V_y \right) e_\theta. \quad (1.70)$$

Ισοδύναμα,

$$V(x, y) = V_r e_r + V_\theta e_\theta, \quad (1.71)$$

όπου,

$$V_r = \cos \theta V_x + \sin \theta V_y, \quad V_\theta = \frac{1}{r} (-\sin \theta V_x + \cos \theta V_y). \quad (1.72)$$

Αν λάβουμε υπόψη τις  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ , θα διαπιστώσουμε αμέσως ότι οι (1.72) είναι ταυτόσημες με τις (1.67).

Οι σχέσεις (1.62) δείχνουν καθαρά ότι η βάση  $(e_r, e_\theta)$  μπορεί εύκολα να μετατραπεί σε ορθοκανονική. Συγκεκριμένα, θέτοντας

$$\hat{e}_r := e_r, \quad \hat{e}_\theta := r^{-1} e_\theta, \quad (1.73)$$

καταλήγουμε στην ορθοκανονική βάση  $(\hat{e}_r, \hat{e}_\theta)$ . Συνακόλουθα, η (1.71) μετατρέπεται στην

$$V(x, y) = \hat{V}_r \hat{e}_r + \hat{V}_\theta \hat{e}_\theta, \quad (1.74)$$

όπου τώρα,

$$\hat{V}_r = \cos \theta V_x + \sin \theta V_y, \quad \hat{V}_\theta = \sin \theta V_x + \cos \theta V_y. \quad (1.75)$$

Οι συναρτήσεις  $\hat{V}_r, \hat{V}_\theta$  είναι αυτές που αναφέρονται στη βιβλιογραφία ως *συνιστώσες του διανυσματικού πεδίου  $V$  στις πολικές συντεταγμένες*.

■

## Ασκήσεις

1.1 Οι συντεταγμένες  $(\eta, \xi)$  συνδέονται με τις Καρτεσιανές  $(x, y)$  μέσω των σχέσεων

$$\eta = x + y, \quad \xi = x - y.$$

- (i) Να χαρακτηθούν ορισμένες από τις καμπύλες  $\eta = \text{σταθ.}$  και  $\xi = \text{σταθ.}$  στο ίδιο διάγραμμα  $x, y$ .
- (ii) Να υπολογιστούν τα διανυσματικά πεδία  $\mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\xi$  και τα εσωτερικά τους γινόμενα.
- (iii) Να εκφραστεί το διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{V}(x, y) = (x^2 - y^2)\mathbf{e}_x + 2xy\mathbf{e}_y$  στη βάση  $(\mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\xi)$ .

1.2 Οι συντεταγμένες  $(\eta, \zeta)$  του επίπεδου ορίζονται μέσω των σχέσεων

$$\eta = x^2 - y^2, \quad \zeta = 2xy,$$

με τις Καρτεσιανές  $(x, y)$ .

- (i) Από τις οικογένειες των καμπυλών  $\eta = \text{σταθ.}$  και  $\zeta = \text{σταθ.}$ , δείξτε ορισμένα αντιπροσωπευτικά μέλη στο Καρτεσιανό διάγραμμα  $x, y$ .
- (ii) Είναι τα διανυσματικά πεδία  $\mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta$  ομογενή;
- (iii) Να εκφραστεί το διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{V}(x, y) = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$  στη βάση  $(\mathbf{e}_\eta, \mathbf{e}_\zeta)$ .

1.3 Η απεικόνιση που ορίζει την αντικατάσταση των Καρτεσιανών συντεταγμένων  $(x, y)$  του  $\mathbb{E}^2$  από τις  $(r, s)$  καθορίζεται από τις σχέσεις

$$x = rs, \quad y = r(1 - s^2)^{1/2}.$$

- (i) Να υπολογιστεί η ορίζουσα Jacobi του μετασχηματισμού  $(r, s) \rightarrow (x, y)$ .
- (ii) Να κατασκευαστεί μια γραφική παράσταση των διανυσματικών πεδίων  $\mathbf{e}_r(x, y)$  και  $\mathbf{e}_s(x, y)$ .
- (iii) Να προσδιοριστεί η περιοχή του  $\mathbb{E}^2$  στην οποία τα διανύσματα  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_s)$  αποτελούν βάση.
- (iv) Να κατασκευαστεί η ορθοκανονική βάση  $(\hat{\mathbf{e}}_r, \hat{\mathbf{e}}_s)$  που αντιστοιχεί στην  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_s)$ .
- (v) Να εκφραστεί το διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{V}(x, y) = y\mathbf{e}_x - x\mathbf{e}_y$  στη βάση  $(\hat{\mathbf{e}}_r, \hat{\mathbf{e}}_s)$ .

1.4 Να επαναληφθεί η προηγούμενη άσκηση για τις συντεταγμένες  $(r, s)$  του  $\mathbb{E}^2$  που ορίζονται από τις παρακάτω σχέσεις

$$(i) \quad x = rs, \quad y = (1 - r^2)^{1/2} (1 - s^2)^{1/2},$$

$$(ii) \quad x = \frac{\sinh s}{\cosh s - \cos r}, \quad y = \frac{\sin r}{\cosh s - \cos r}.$$

1.5 Οι πολικές συντεταγμένες των σημείων  $p_1$  και  $p_2$  του  $\mathbb{E}^2$  είναι  $(r, \theta)$  και  $(r + \Delta r, \theta + \Delta \theta)$ , αντίστοιχα. Δείξτε ότι, αν οι ποσότητες  $|\Delta r|$  και  $|\Delta \theta|$  είναι αρκετά μικρές, τότε

$$\boxed{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \simeq (\Delta r)^2 + r^2(\Delta \theta)^2} \quad (1.76)$$

όπου  $(\Delta x, \Delta y)$  οι διαφορές των Καρτεσιανών συντεταγμένων των  $p_1, p_2$ .

## 2. Βαθμωτά και διανυσματικά πεδία στο χώρο

Δύο Ευκλείδεια επίπεδα που έχουν ως μόνο κοινό στοιχείο μια ευθεία γραμμή οδηγούν αμέσως στη έννοια του τρισδιάστατου Ευκλείδειου χώρου,  $\mathbb{E}^3$ . Ως βασικά στοιχεία του  $\mathbb{E}^3$  μπορούμε και πάλι να θεωρούμε τα σημεία και τις ευθείες. Τρεις ευθείες  $x$ ,  $y$  και  $z$  του  $\mathbb{E}^3$  που τέμνονται στο σημείο  $O$  και δεν είναι συνεπίπεδες αποτελούν αυτό που ονομάζουμε **σύστημα αξόνων**. Ένα σύστημα αξόνων που ανά δύο είναι κάθετοι ο ένας στον άλλο λέγεται Καρτεσιανό.

Ακριβώς όπως στην περίπτωση του  $\mathbb{E}^2$ , ένα Καρτεσιανό σύστημα αξόνων του τρισδιάστατου Ευκλείδειου χώρου μας επιτρέπει να ορίσουμε μια αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ανάμεσα στον  $\mathbb{E}^3$  και το σύνολο των δια(τε)ταγμένων τριάδων πραγματικών αριθμών,  $\mathbb{R}^3$ . Με αυτό τον τρόπο, κάθε διάνυσμα  $V = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  παριστάνει ένα σημείο του  $\mathbb{E}^3$  και, ταυτόχρονα, το προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα ή βέλος που οδηγεί από την αρχή  $(x, y, z) = (0, 0, 0)$  των Καρτεσιανών αξόνων στο σημείο  $(x, y, z) = (a, b, c)$ .

Η χαρακτηριστική ιδιότητα των Καρτεσιανών συντεταγμένων του  $\mathbb{E}^3$  εκφράζεται από τον τύπο που δίνει την απόσταση  $d(p_1, p_2)$  δύο τυχαίων σημείων του,  $p_1$  και  $p_2$ , συναρτήσσει των συντεταγμένων τους,  $(x_1, y_1, z_1)$  και  $(x_2, y_2, z_2)$ :

$$d(p_1, p_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (2.1)$$

Αυτός ο τύπος εκφράζει το Πυθαγόρειο θεώρημα στον  $\mathbb{E}^3$  μέσω των Καρτεσιανών συντεταγμένων των σημείων του. Άρα, ισχύει αναγκαστικά και σε όλα τα συστήματα αυτής της κατηγορίας. Αν λοιπόν οι συντεταγμένες των  $p_1$  και  $p_2$  σε κάποιο άλλο Καρτεσιανό σύστημα είναι  $(x'_1, y'_1, z'_1)$  και  $(x'_2, y'_2, z'_2)$ , αντίστοιχα, τότε

$$d(p_1, p_2) = \sqrt{(x'_2 - x'_1)^2 + (y'_2 - y'_1)^2 + (z'_2 - z'_1)^2}. \quad (2.2)$$

Κατά συνέπεια το άθροισμα των τετραγώνων των διαφορών συντεταγμένων

$$\Delta x := x_2 - x_1, \quad \Delta y := y_2 - y_1, \quad \Delta z := z_2 - z_1, \quad (2.3)$$

παραμένει αναλλοίωτο:

$$\boxed{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2} \quad (2.4)$$

Ανάλογα, οι έννοιες που ορίσαμε για τα στοιχεία του  $\mathbb{R}^2$  μεταφέρονται αυτόματα στον  $\mathbb{R}^3$ . Ειδικότερα, **μήκος του διανύσματος**  $V = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  ονομάζουμε τον μη αρνητικό αριθμό

$$\|V\| := (a^2 + b^2 + c^2)^{1/2}, \quad (2.5)$$

τον οποίο θα συμβολίζουμε και με  $|V|$ . Από την άλλη, με **εσωτερικό γινόμενο** των διανυσμάτων  $V = (a, b, c)$  και  $W = (d, e, f)$  εννοούμε τον αριθμό

$$V \cdot W := a d + b e + c f. \quad (2.6)$$

Όταν ο διανυσματικός χώρος  $\mathbb{R}^3$  θεωρείται πως έχει την επιπλέον δομή που του



προσθέτουν οι έννοιες του εσωτερικού γινόμενου και του μήκους, τότε ουσιαστικά ταυτίζεται με τον  $\mathbb{E}^3$  και γι' αυτό αναφέρεται ως **Ευκλείδειος χώρος**  $\mathbb{R}^3$ .

Ας υποθέσουμε τώρα ότι οι συναρτήσεις  $V_x(x, y, z)$ ,  $V_y(x, y, z)$  και  $V_z(x, y, z)$  έχουν ως κοινό πεδίο ορισμού τους το ανοιχτό υποσύνολο  $\Omega$  του  $\mathbb{R}^3$ . Τότε η τριάδα

$$V(x, y, z) := (V_x(x, y, z), V_y(x, y, z), V_z(x, y, z)) \quad (2.7)$$

ονομάζεται **διανυσματικό πεδίο** στην περιοχή  $\Omega$ .

Όταν οι συναρτήσεις που το απαρτίζουν είναι σταθερές, το διανυσματικό πεδίο λέγεται **ομογενές**. Για παράδειγμα, τα διανυσματικά πεδία

$$\mathbf{e}_x(x, y, z) = (1, 0, 0), \quad \mathbf{e}_y(x, y, z) = (0, 1, 0), \quad \mathbf{e}_z(x, y, z) = (0, 0, 1) \quad (2.8)$$

είναι ομογενή. Επιπλέον, είναι ορθοκανονικά και μας επιτρέπουν να γράφουμε το τυχαίο διανυσματικό πεδίο  $V(x, y, z)$  στη μορφή

$$V(x, y, z) = V_x(x, y, z) \mathbf{e}_x + V_y(x, y, z) \mathbf{e}_y + V_z(x, y, z) \mathbf{e}_z. \quad (2.9)$$

### Παράδειγμα 2.1

Θεωρούμε το ανοιχτό υποσύνολο  $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$  του Ευκλείδειου τρισδιάστατου χώρου και θέτουμε

$$r := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (2.10)$$

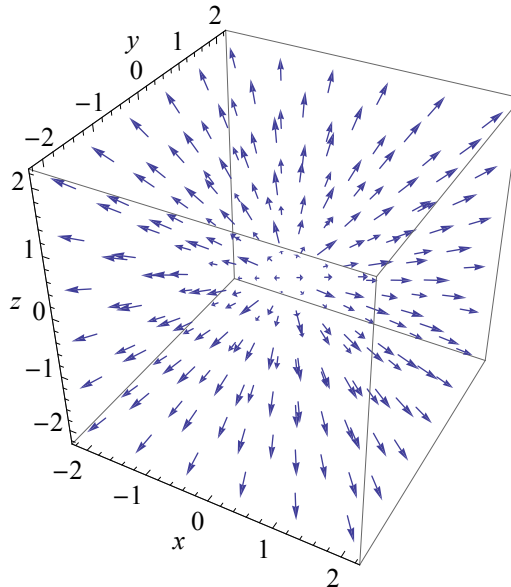
Το διανυσματικό πεδίο

$$V(x, y, z) = \frac{x}{r} \mathbf{e}_x + \frac{y}{r} \mathbf{e}_y + \frac{z}{r} \mathbf{e}_z \quad (2.11)$$

είναι ομαλό σε κάθε σημείο του ανοιχτού σύνολου  $\Omega$ . Για να πάρουμε μια εποπτική εικόνα αυτού του πεδίου, μπορούμε να περιοριστούμε στην κυβική περιοχή

$$\tilde{\Omega} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2, -2 \leq z \leq 2, r \neq 0\} \quad (2.12)$$

και, με τη βοήθεια ενός υπολογιστή, να κατασκευάσουμε το Σχ. 2.1. Τα βέλη που βλέπουμε σε ορισμένα από τα σημεία αυτής της περιοχής κατασκευάζονται με το γνωστό μας τρόπο: Αυτό που έχει τη βάση του στο σημείο  $(a, b, c) \in \tilde{\Omega}$  παριστάνει το προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα το οποίο ξεκινάει από το  $(a, b, c)$  και φτάνει στο σημείο  $(a, b, c) + V(a, b, c)$ .



Σχ. 2.1 . Γραφική αναπαράσταση του διανυσματικού πεδίου  $V(x, y, z) = (x/r, y/r, z/r)$ ,

■

Είναι φανερό ότι η ορθοκανονική βάση  $(e_x, e_y, e_z)$  είναι άρρηκτα δεμένη με το Καρτεσιανό σύστημα αξόνων  $x y z$  του  $\mathbb{E}^3$  που αντιστοιχεί στον Ευκλείδειο χώρο  $\mathbb{R}^3$ . Ωστόσο, οι Καρτεσιανές συντεταγμένες δεν αποτελούν πάντα τη βέλτιστη επιλογή για την περιγραφή και ανάλυση ενός γεωμετρικού ή φυσικού προβλήματος. Έχουμε ήδη αρκετή πείρα από τα συστήματα που ονομάζονται κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες, αντίστοιχα.

Στη γενικότερη περίπτωση, μπορούμε να θεωρήσουμε τρεις σχέσεις της μορφής

$$x = X(r, s, t), \quad y = Y(r, s, t), \quad z = Z(r, s, t), \quad r \in I_1, \quad s \in I_2, \quad t \in I_3, \quad (2.13)$$

όπου  $I_1, I_2$  και  $I_3$  τρία ανοιχτά διαστήματα της πραγματικής ευθείας και  $X, Y, Z$  μια τυχαία τριάδα ομαλών συναρτήσεων. Αυτές οι σχέσεις ορίζουν μια απεικόνιση  $\Phi: \Omega' \rightarrow \Omega$  του ανοιχτού υποσύνολου  $\Omega' := I_1 \times I_2 \times I_3$  του  $\mathbb{R}^3$  σε κάποιο υποσύνολο  $\Omega$  του Ευκλείδειου χώρου  $\mathbb{R}^3$ . Αν υποθέσουμε ότι η ορίζουσα Jacobi

$$J(r, s, t) := \det \begin{pmatrix} \partial_r X & \partial_r Y & \partial_r Z \\ \partial_s X & \partial_s Y & \partial_s Z \\ \partial_t X & \partial_t Y & \partial_t Z \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

είναι μη μηδενική σε όλα τα σημεία του  $\Omega'$ , τότε η απεικόνιση  $\Phi: \Omega' \rightarrow \Omega$  είναι τοπικά (ή τμηματικά) αντιστρέψιμη. Σ' αυτή την περίπτωση, λοιπόν, οι μεταβλητές  $r, s, t$  προσδιορίζουν μονοσήμαντα τα σημεία της περιοχής του  $\mathbb{E}^3$  που απεικονίζεται στο σύνολο  $\Omega$ . Άρα, μπορεί να χρησιμοποιηθούν για να "χαρτογραφηθεί" η πιο πάνω περιοχή, τόσο καλά όσο το επιτρέπουν οι  $x, y, z$ . Με άλλα λόγια, οι  $r, s, t$  αποτελούν συντεταγμένες, ισότιμες προς τις Καρτεσιανές.

Από την άλλη, είναι φανερό ότι, για κάθε συγκεκριμένη επιλογή του ζευγαριού  $(s, t)$ , οι σχέσεις (1.88) ορίζουν μια παραμετρική καμπύλη  $\Gamma_{(s,t)}$  του  $\mathbb{R}^3$ , με παράμετρο τη συντε-

ταγμένη  $r$ . Ανάλογα, όταν τα ζευγάρια  $(r, t)$  και  $(r, s)$  θεωρούνται σταθερά, οι σχέσεις (1.88) ορίζουν τις παραμετρικές καμπύλες  $\Gamma_{(r,t)}$  και  $\Gamma_{(r,s)}$ , αντίστοιχα.

Συνεπώς, τα εφαπτόμενα διανύσματα των καμπυλών που ανήκουν στις παραπάνω οικογένειες ορίζονται από τους τύπους

$$\mathbf{e}_r = \partial_r X(r, s, t) \mathbf{e}_x + \partial_r Y(r, s, t) \mathbf{e}_y + \partial_r Z(r, s, t) \mathbf{e}_z, \quad (2.15)$$

$$\mathbf{e}_s = \partial_s X(r, s, t) \mathbf{e}_x + \partial_s Y(r, s, t) \mathbf{e}_y + \partial_s Z(r, s, t) \mathbf{e}_z, \quad (2.16)$$

και

$$\mathbf{e}_t = \partial_t X(r, s, t) \mathbf{e}_x + \partial_t Y(r, s, t) \mathbf{e}_y + \partial_t Z(r, s, t) \mathbf{e}_z, \quad (2.17)$$

αντίστοιχα.

Εννοείται πως, στον πρώτο από αυτούς τους τύπους, δε μεταβάλλεται η τιμή των παραμέτρων  $(s, t)$ , στον δεύτερο η τιμή των  $(r, t)$  και στον τρίτο μένει σταθερή η τιμή των  $(r, s)$ . Ωστόσο, αν στον πρώτο τύπο αφήσουμε τις παραμέτρους  $(s, t)$  να σαρώσουν ολόκληρο το διάστημα τιμών τους,  $I_2 \times I_3$ , τότε αυτός ορίζει ένα διανυσματικό πεδίο που καλύπτει ολόκληρη την περιοχή  $\Omega$ . Το ίδιο προφανώς ισχύει και για τους τύπους (1.91) και (1.92). Άρα, οι παραπάνω τύποι ορίζουν τρία διανυσματικά πεδία στην περιοχή  $\Omega$ , τα οποία έχουν την ακόλουθη σημαντική ιδιότητα: Σε κάθε σημείο  $(x, y, z) \in \Omega$ , τα διανύσματα  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_s, \mathbf{e}_t)$  είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Κι αυτό γιατί, όπως έχουμε υποθέσει, ο ορίζουσα Jacobi δε μηδενίζεται.

Χρησιμοποιώντας πίνακες, μπορούμε να δώσουμε στις παραπάνω σχέσεις τη μορφή

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_s \\ \mathbf{e}_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_r X & \partial_r Y & \partial_r Z \\ \partial_s X & \partial_s Y & \partial_s Z \\ \partial_t X & \partial_t Y & \partial_t Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Αφού  $J(r, s, t) \neq 0$ , αυτή αντιστρέφεται αμέσως. Ωστόσο, ακολουθώντας τη διαδικασία που περιγράψαμε αναλυτικά στις δύο διαστάσεις, μπορούμε να γράψουμε την αντίστροφη σε μια πιο εύγλωττη μορφή. Πιο συγκεκριμένα, αν γράψουμε την αντίστροφη της απεικόνισης  $\Phi: \Omega' \rightarrow \Omega$  στη μορφή

$$r = R(x, y, z), \quad s = S(x, y, z), \quad t = T(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \Omega, \quad (2.19)$$

τότε ο κανόνας της αλυσίδας οδηγεί στο ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$\begin{pmatrix} \partial_r X & \partial_r Y & \partial_r Z \\ \partial_s X & \partial_s Y & \partial_s Z \\ \partial_t X & \partial_t Y & \partial_t Z \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \partial_x R & \partial_x S & \partial_x T \\ \partial_y R & \partial_y S & \partial_y T \\ \partial_z R & \partial_z S & \partial_z T \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

Συνεπώς,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x R & \partial_x S & \partial_x T \\ \partial_y R & \partial_y S & \partial_y T \\ \partial_z R & \partial_z S & \partial_z T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_s \\ \mathbf{e}_t \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

Τέλος, το τυχαίο διανυσματικό πεδίο  $V(x, y, z)$  στην περιοχή  $\Omega$  μπορεί να γραφτεί είτε ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$  όπως στην (2.6), είτε ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_s, \mathbf{e}_t)$ , δηλαδή στη μορφή

$$\mathbf{V} = V_r(r, s, t) \mathbf{e}_r + V_s(r, s, t) \mathbf{e}_s + V_t(r, s, t) \mathbf{e}_t. \quad (2.22)$$

Η αντικατάσταση της (2.21) στην (2.6) οδηγεί αμέσως στο συμπέρασμα ότι,

$$\begin{pmatrix} V_r \\ V_s \\ V_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x R & \partial_y R & \partial_z R \\ \partial_x S & \partial_y S & \partial_z S \\ \partial_x T & \partial_y T & \partial_z T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι, αν θέσουμε

$$A := \begin{pmatrix} \partial_r X & \partial_r Y & \partial_r Z \\ \partial_s X & \partial_s Y & \partial_s Z \\ \partial_t X & \partial_t Y & \partial_t Z \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} \partial_x R & \partial_y R & \partial_z R \\ \partial_x S & \partial_y S & \partial_z S \\ \partial_x T & \partial_y T & \partial_z T \end{pmatrix}, \quad (2.24)$$

τότε

$$B = (A^{-1})^T. \quad (2.25)$$

Με άλλα λόγια, ισχύει και στις τρεις διαστάσεις ο κανόνας που αποδείξαμε για τις δύο: Ο πίνακας  $B$  που περιγράφει τον μετασχηματισμό  $(V_x, V_y, V_z) \rightarrow (V_r, V_s, V_t)$  των συνιστωσών ενός διανυσματικού πεδίου είναι ο ανάστροφος του αντίστροφου εκείνου που περιγράφει τον μετασχηματισμό  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z) \rightarrow (\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_s, \mathbf{e}_t)$  των αντίστοιχων βάσεων.

### Παράδειγμα 2.2

Οι λεγόμενες *σφαιρικές συντεταγμένες*  $(r, \theta, \varphi)$  του  $\mathbb{E}^3$  συνδέονται με τις Καρτεσιανές μέσω των τύπων

$$\begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi, & y &= r \sin \theta \sin \varphi, & z &= r \cos \theta, \\ r &\in (0, \infty), & \theta &\in (0, \pi), & \varphi &\in (0, 2\pi). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Η αντικατάσταση  $(r, s, t) \rightarrow (r, \theta, \varphi)$  στους γενικούς τύπους που βρήκαμε πιο πάνω οδηγεί αμέσως στο εξής αποτέλεσμα:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_\varphi \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ r \cos \theta \cos \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & -r \sin \theta \\ -r \sin \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

Συνεπώς,

$$J(r, \theta, \varphi) := \det(A) = r^2 \sin \theta \quad (2.28)$$

Με βάση τα παραπάνω και χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία, καταλήγουμε στην

$$(A^{-1})^T = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ r^{-1} \cos \theta \cos \varphi & r^{-1} \cos \theta \sin \varphi & -r^{-1} \sin \theta \\ -r^{-1} \sin \theta \sin \varphi & r^{-1} \sin \theta \cos \varphi & 0 \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

οπότε,

$$\begin{pmatrix} V_r \\ V_\theta \\ V_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ r^{-1} \cos \theta \cos \varphi & r^{-1} \cos \theta \sin \varphi & -r^{-1} \sin \theta \\ -r^{-1} \sin \theta \sin \varphi & r^{-1} \sin \theta \cos \varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

Σημειώστε ότι τα διανύσματα της βάσης  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$  είναι μεταξύ τους ορθογώνια, αλλά μόνο το  $\mathbf{e}_r$  είναι κανονικό:

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r = 1, \quad \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\theta = r^2, \quad \mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{e}_\varphi = r^2 \sin^2 \theta, \quad (2.31)$$

$$\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\theta = 0, \quad \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\varphi = 0, \quad \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\varphi = 0. \quad (2.32)$$

Ωστόσο, η βάση  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$  μετατρέπεται εύκολα σε ορθοκανονική. Αρκεί να θέσουμε

$$\hat{\mathbf{e}}_r = \mathbf{e}_r, \quad \hat{\mathbf{e}}_\theta = \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta, \quad \hat{\mathbf{e}}_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \mathbf{e}_\varphi. \quad (2.33)$$

Χρησιμοποιώντας την ορθοκανονική βάση  $(\hat{\mathbf{e}}_r, \hat{\mathbf{e}}_\theta, \hat{\mathbf{e}}_\varphi)$ , μπορούμε να γράψουμε το τυχαίο διανυσματικό πεδίο  $V$  στη μορφή

$$V = \hat{V}_r(r, \theta, \varphi) \hat{\mathbf{e}}_r + \hat{V}_\theta(r, \theta, \varphi) \hat{\mathbf{e}}_\theta + \hat{V}_\varphi(r, \theta, \varphi) \hat{\mathbf{e}}_\varphi. \quad (2.34)$$

Προφανώς,

$$\hat{V}_r = V_r, \quad \hat{V}_\theta = r V_\theta, \quad \hat{V}_\varphi = r \sin \theta V_\varphi. \quad (2.35)$$

### Παράδειγμα 2.3

Στις βάσεις  $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$  και  $(\hat{\mathbf{e}}_r, \hat{\mathbf{e}}_\theta, \hat{\mathbf{e}}_\varphi)$  που αντιστοιχούν στις σφαιρικές συντεταγμένες του  $\mathbb{E}^3$ , το διανυσματικό

$$V(x, y, z) = \frac{x}{r} \mathbf{e}_x + \frac{y}{r} \mathbf{e}_y + \frac{z}{r} \mathbf{e}_z \quad (2.36)$$

παίρνει την ακόλουθη απλή μορφή:

$$V(x, y, z) = \mathbf{e}_r = \hat{\mathbf{e}}_r. \quad (2.37)$$

Κι αυτό γιατί, σύμφωνα με τον τύπο (2.27)

$$\mathbf{e}_r = \sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z. \quad (2.38)$$

Από την άλλη, οι σχέσεις (2.26) συνεπάγονται ότι

$$\sin \theta \cos \varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin \theta \sin \varphi = \frac{y}{r}, \quad \cos \theta = \frac{z}{r}. \quad (2.39)$$

Η αντικατάσταση των τελευταίων στην προηγούμενη έκφραση οδηγεί αμέσως στην (2.36).

## Ασκήσεις

2.1 α) Να παρασταθεί γραφικά το διανυσματικό πεδίο,

$$V(x, y, z) = y \mathbf{e}_x - x \mathbf{e}_y,$$

όπου  $(x, y, z)$  Καρτεσιανές συντεταγμένες του  $\mathbb{E}^3$ .

β) Να εκφραστεί το παραπάνω πεδίο στην ορθοκανονική βάση,  $(\hat{\mathbf{e}}_r, \hat{\mathbf{e}}_\theta, \hat{\mathbf{e}}_\varphi)$ , των σφαιρικών συντεταγμένων.

**2.2** Η απεικόνιση που ορίζει την αντικατάσταση των Καρτεσιανών συντεταγμένων  $(x, y, z)$  του  $\mathbb{E}^3$  από τις  $(r, s, t)$  καθορίζεται από τις σχέσεις

$$x = \cosh r \cos s, \quad y = \sinh r \sin s, \quad t = z.$$

- (i) Να υπολογιστεί η ορίζουσα Jacobi του μετασχηματισμού  $(r, s, t) \rightarrow (x, y, z)$ .
- (ii) Να κατασκευαστεί μια γραφική παράσταση των διανυσματικών πεδίων  $e_r(x, y, z)$ ,  $e_s(x, y, z)$  και  $e_t(x, y, z)$ .
- (iii) Να προσδιοριστεί η περιοχή του  $\mathbb{E}^3$  στην οποία τα διανύσματα  $(e_r, e_s, e_t)$  αποτελούν βάση.
- (iv) Να κατασκευαστεί η ορθοκανονική βάση  $(\hat{e}_r, \hat{e}_s, \hat{e}_t)$  που αντιστοιχεί στην  $(e_r, e_s, e_t)$ .
- (v) Να εκφραστεί το διανυσματικό πεδίο  $V(x, y, z) = xy e_x + yz e_y + xz e_z$  στη βάση  $(\hat{e}_r, \hat{e}_s, \hat{e}_t)$ .

**2.3** Να επαναληφθεί η προηγούμενη άσκηση για τις συντεταγμένες  $(r, s, t)$  του  $\mathbb{E}^3$  που ορίζονται από τις παρακάτω σχέσεις

- (i)  $x = rs \cos t, y = rs \sin t, t = \frac{1}{2}(r^2 - s^2)$
- (ii)  $x = \cosh r \cos s \cos t, y = \cosh r \cos s \sin t, z = \sinh r \sin(s)$ .

**2.5** Οι σφαιρικές συντεταγμένες των σημείων  $p_1$  και  $p_2$  του  $\mathbb{E}^2$  είναι  $(r, \theta, \varphi)$  και  $(r + \Delta r, \theta + \Delta \theta, \varphi + \Delta \varphi)$ , αντίστοιχα. Δείχτε ότι, αν οι ποσότητες  $|\Delta r|$ ,  $|\Delta \theta|$  και  $|\Delta \varphi|$  είναι αρκετά μικρές, τότε

$$\boxed{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \simeq (\Delta r)^2 + r^2(\Delta \theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta (\Delta \varphi)^2} \quad (2.40)$$

όπου  $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$  οι διαφορές των Καρτεσιανών συντεταγμένων των  $p_1, p_2$ .

### 3. Κλίση, απόκλιση, στροβιλισμός

Ας υποθέσουμε ότι οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  υπάρχουν σε κάθε σημείο της περιοχής  $\Omega$  του τρισδιάστατου Ευκλείδειου χώρου  $\mathbb{R}^3$ . Με άλλα λόγια, ας υποθέσουμε ότι ορίζονται οι συναρτήσεις  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , και  $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , όπου  $f(x, y, z) = \partial_x \varphi(x, y, z)$ ,  $g(x, y, z) = \partial_y \varphi(x, y, z)$  και  $h(x, y, z) = \partial_z \varphi(x, y, z)$ , αντίστοιχα.

Τότε, στην περιοχή  $\Omega$ , εκτός από το βαθμωτό πεδίο  $\varphi$ , αυτόματα ορίζεται κι ένα διανυσματικό, το  $(f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z))$ . Αυτό το πεδίο ονομάζεται **κλίση** (gradient) **του βαθμωτού πεδίου**  $\varphi$  και συνήθως συμβολίζεται με  $\nabla \varphi$  ή  $\text{grad } \varphi$ . Έτσι, σε κάθε ομαλό βαθμωτό πεδίο  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  αντιστοιχεί το διανυσματικό πεδίο  $\nabla \varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ , όπου

$$\nabla \varphi(x, y, z) \equiv \text{grad } \varphi(x, y, z) := (\partial_x \varphi(x, y, z), \partial_y \varphi(x, y, z), \partial_z \varphi(x, y, z)) \quad (3.1)$$

Ισοδύναμα,

$$\nabla \varphi(x, y, z) := \partial_x \varphi(x, y, z) \mathbf{e}_x + \partial_y \varphi(x, y, z) \mathbf{e}_y + \partial_z \varphi(x, y, z) \mathbf{e}_z \quad (3.2)$$

όπου  $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$  η καθιερωμένη ορθοκανονική βάση του Ευκλείδειου τρισδιάστατου χώρου:

$$\mathbf{e}_x(x, y, z) := (1, 0, 0), \quad \mathbf{e}_y(x, y, z) := (0, 1, 0), \quad \mathbf{e}_z(x, y, z) := (0, 0, 1) \quad (3.3)$$

#### Παράδειγμα 3.1

Η κλίση του ομαλού βαθμωτού πεδίου  $\varphi(x, y, z) = x y z$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , είναι το διανυσματικό πεδίο

$$\nabla \varphi(x, y, z) = (y z, x z, x y) \equiv y z \mathbf{e}_x + x z \mathbf{e}_y + x y \mathbf{e}_z \quad (3.4)$$

Με ανάλογο τρόπο, σε κάθε ομαλό διανυσματικό πεδίο  $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  αντιστοιχεί ένα βαθμωτό πεδίο, το  $\text{div } V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , που ονομάζεται **απόκλιση** (divergence) **του**  $V$ . Η απόκλιση του διανυσματικού πεδίου  $V$  συμβολίζεται και με  $\nabla \cdot V$  και ορίζεται με τον ακόλουθο τρόπο:

Αν

$$V(x, y, z) = f(x, y, z) \mathbf{e}_x + g(x, y, z) \mathbf{e}_y + h(x, y, z) \mathbf{e}_z, \quad (3.5)$$

τότε

$$\nabla \cdot V(x, y, z) \equiv \text{div } V(x, y, z) := \partial_x f(x, y, z) + \partial_y g(x, y, z) + \partial_z h(x, y, z). \quad (3.6)$$

#### Παράδειγμα 3.2

Η απόκλιση του διανυσματικού πεδίου  $V$

$$V(x, y, z) = x y \mathbf{e}_x + y z \mathbf{e}_y + z x \mathbf{e}_z \quad (3.7)$$

είναι το βαθμωτό πεδίο

$$\nabla \cdot V(x, y, z) = y + z + x. \quad (3.8)$$

Σε κάθε ομαλό διανυσματικό πεδίο  $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  αντιστοιχεί αυτόματα κι ένα διανυ-

σματικό πεδίο, το  $\text{curl } V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ , που ονομάζεται **στροβιλισμός** (vorticity) του  $V$ . Ο στροβιλισμός του διανυσματικού πεδίου  $V$ , που συμβολίζεται και με  $\nabla \times V$ , ορίζεται ως εξής.

Αν

$$V(x, y, z) = f(x, y, z) \mathbf{e}_x + g(x, y, z) \mathbf{e}_y + h(x, y, z) \mathbf{e}_z, \quad (3.9)$$

τότε

$$\nabla \times V \equiv \text{curl } V := (\partial_y h - \partial_z g) \mathbf{e}_x + (\partial_z f - \partial_x h) \mathbf{e}_y + (\partial_x g - \partial_y f) \mathbf{e}_z. \quad (3.10)$$

### Παράδειγμα 3.3

Ο στροβιλισμός του διανυσματικού πεδίου

$$V(x, y, z) = x y \mathbf{e}_x + y z \mathbf{e}_y + z x \mathbf{e}_z \quad (3.11)$$

είναι το διανυσματικό πεδίο

$$\nabla \times V = -y \mathbf{e}_x - z \mathbf{e}_y - x \mathbf{e}_z. \quad (3.12)$$

■

Είναι φανερό ότι οι παραπάνω διαδικασίες παραγωγής ενός πεδίου από ένα άλλο μπορεί να συνδυαστούν για να δώσουν ολόκληρες αλυσίδες από πεδία που ορίζονται στην ίδια περιοχή  $\Omega$  του  $\mathbb{R}^3$ . Με την προϋπόθεση, βέβαια, ότι οι παράγωγοι των συναρτήσεων που υπεισέρχονται στον ορισμό κάθε κρίκου της αλυσίδας υπάρχουν. Διαφορετικά, κάθε κρίκος ορίζεται σε όλο και μικρότερα υποσύνολα της περιοχής  $\Omega$ .

Για παράδειγμα, αν υποθέσουμε ότι οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης  $\partial_x^2 \varphi$ ,  $\partial_y^2 \varphi$  και  $\partial_z^2 \varphi$  της συνάρτησης  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  υπάρχουν σε κάθε σημείο της περιοχής  $\Omega$ , τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε την απόκλιση της κλίσης του βαθμωτού πεδίου  $\varphi$ :

$$\nabla \cdot (\nabla \varphi) := \partial_x (\partial_x \varphi) + \partial_y (\partial_y \varphi) + \partial_z (\partial_z \varphi) \equiv \partial_x^2 \varphi + \partial_y^2 \varphi + \partial_z^2 \varphi. \quad (3.13)$$

Ο τελευταίος συνδυασμός των μερικών παραγώγων δεύτερης τάξης ενός βαθμωτού πεδίου  $\varphi$  συναντιέται συχνά στην ανάλυση των πεδίων και γι' αυτό αναφέρεται με ξεχωριστό σύμβολο και όνομα. Λέγεται **πεδίο Laplace** (Λαπλάς) του  $\varphi$  και συμβολίζεται με  $\nabla^2 \varphi$  ή με  $\Delta \varphi$ . Με άλλα λόγια,

$$\nabla^2 \varphi \equiv \Delta \varphi := \partial_x^2 \varphi + \partial_y^2 \varphi + \partial_z^2 \varphi. \quad (3.14)$$

Έτσι, η προηγούμενη σχέση μπορεί πλέον να γραφτεί σαν

$$\nabla \cdot (\nabla \varphi) = \nabla^2 \varphi \quad (3.15)$$

Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να κατασκευάσουμε τον στροβιλισμό της κλίσης του βαθμωτού πεδίου  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Χρησιμοποιώντας τους αντίστοιχους ορισμούς, βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \varphi) = & [\partial_y (\partial_z \varphi) - \partial_z (\partial_y \varphi)] \mathbf{e}_x + \\ & [\partial_z (\partial_x \varphi) - \partial_x (\partial_z \varphi)] \mathbf{e}_y + [\partial_x (\partial_y \varphi) - \partial_y (\partial_x \varphi)] \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (3.16)$$

Όμως, για μια συνάρτηση με συνεχείς παραγώγους δεύτερης τάξης, η σειρά παραγωγής δεν παίζει κανένα ρόλο. Άρα, και οι τρεις συνιστώσες του τελευταίου διανύσματος μηδενίζονται ταυτοτικά. Με άλλα λόγια,



$$\boxed{\nabla \times (\nabla \varphi) \equiv \text{curl}(\text{grad } \varphi) = \mathbf{0}} \quad (3.17)$$

Δηλαδή, ο στροβιλισμός της κλίσης ενός βαθμωτού πεδίου  $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  είναι μηδενικός σε κάθε σημείο της περιοχής  $\Omega$  όπου το πεδίο  $\varphi$  είναι ομαλό.

### Παράδειγμα 3.4

(i) Ας θεωρήσουμε το βαθμωτό πεδίο  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$f(x, y, z) = r := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (3.18)$$

Η κλίση αυτού του πεδίου ορίζεται μόνο στο υποσύνολο  $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$  και δίνεται από την έκφραση

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{x}{r} \mathbf{e}_x + \frac{y}{r} \mathbf{e}_y + \frac{z}{r} \mathbf{e}_z. \quad (3.19)$$

Από την ταυτότητα που μόλις αποδείξαμε έπεται αμέσως ότι  $\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}$  σε κάθε σημείο της περιοχής  $\Omega$ .

(ii) Γενικεύοντας, ας θεωρήσουμε ένα βαθμωτό πεδίο  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$f(x, y, z) = F(r), \quad r := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (3.20)$$

όπου  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  διαφορίσιμη συνάρτηση. Τότε,

$$\nabla f(x, y, z) = F'(r) \left( \frac{x}{r} \mathbf{e}_x + \frac{y}{r} \mathbf{e}_y + \frac{z}{r} \mathbf{e}_z \right), \quad (3.21)$$

όπου  $F'(r)$  η πρώτη παράγωγος της  $F(r)$ .

Ανάλογα με το ποια είναι ακριβώς η συνάρτηση  $F$ , το διανυσματικό πεδίο  $\nabla \varphi$  ορίζεται σ' όλο τον  $\mathbb{R}^3$  ή μόνο σε κάποιο υποσύνολό του.

Αν γ.π.  $F(r) = r^2$ , τότε  $f(x, y, z) = F(r) = x^2 + y^2 + z^2$ . Άρα η κλίση του πεδίου  $f$  δίνεται από τον τύπο  $\nabla f(x, y, z) = 2(x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z)$  και ορίζεται σε κάθε σημείο του  $\mathbb{R}^3$ .

Αντίθετα, όταν  $F(r) = 1/r$ , τότε η κλίση του πεδίου  $f$  ορίζεται μόνο στην περιοχή  $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$  και δίνεται από την έκφραση  $\nabla f(x, y, z) = -r^{-3}(x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z)$ . Και στις δυο περιπτώσεις, βέβαια,  $\nabla \times (\nabla \varphi) \equiv \text{curl}(\text{grad } f) = \mathbf{0}$ . ■

### Παράδειγμα 3.5

Μια συγκεκριμένη φυσική κατάσταση που αντιστοιχεί στην τελευταία περίπτωση του παραδείγματος 3.4 είναι αυτή ενός ηλεκτρισμένου σωμάτιου το οποίο ακινητεί στην αρχή των αξόνων. Αν το ηλεκτρικό φορτίο του σωμάτιου είναι ίσο με  $Q$ , τότε με τον όρο **ηλεκτρικό δυναμικό** (electric potential) εννοούμε το βαθμωτό πεδίο

$$\Phi(x, y, z) = \frac{Q}{r}, \quad (x, y, z) \in \Omega := \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \quad (3.22)$$

Το αντίστοιχο **ηλεκτρικό πεδίο**  $\mathbf{E}$  ορίζεται από τη σχέση

$$\mathbf{E}(x, y, z) := -\nabla\Phi(x, y, z) \quad (3.23)$$

Συνεπώς,

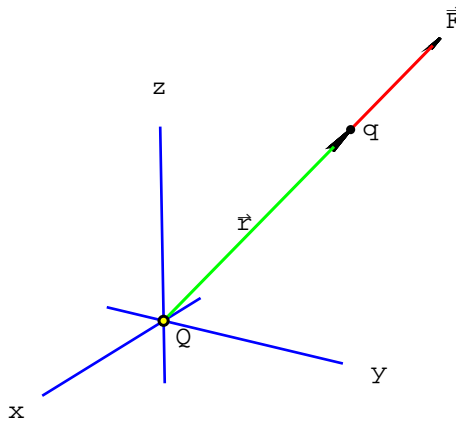
$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{Q}{r^3} (x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z) \quad (3.24)$$

Σύμφωνα με τη φυσική θεωρία του ηλεκτρισμού, σε ένα δεύτερο σωματίο με φορτίο  $q$  που βρίσκεται στο σημείο  $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ , ασκείται η δύναμη

$$\mathbf{F}(x, y, z) = q \mathbf{E}(x, y, z) = \frac{Qq}{r^3} (x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z) \quad (3.25)$$

Αυτή η σχέση εκφράζει τον λεγόμενο **νόμο (του) Coulomb** (Κουλόμ).

Το Σχ. 3.1 δίνει μια γραφική αναπαράσταση της φυσικής διάταξης που μόλις περιγράψαμε. Για την κατασκευή του, έχουμε υποθέσει ότι τα φορτία  $Q$  και  $q$  έχουν το ίδιο πρόσημο. Στην αντίθετη περίπτωση, η δύναμη  $\mathbf{F}$  έχει φορά προς το  $Q$ .



**Σχ. 3.1.** Το βέλος  $\vec{F}$  παριστάνει την ηλεκτρική δύναμη που ασκεί το φορτισμένο σώμα  $Q$  στο σώμα  $q$ , το οποίο βρίσκεται στο σημείο  $\vec{r}$  του  $\mathbb{R}^3$  (στην περίπτωση που  $Qq > 0$ ).

Η γενικότερη διάταξη φαίνεται στο Σχ. 3.2. Πρόκειται για την περίπτωση όπου το φορτίο  $Q$  ακινητεί στο τυχαίο σημείο  $\xi = (a, b, c)$ . Τότε, το ηλεκτρικό δυναμικό  $\Phi$  στο σημείο  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  δίνεται από τον τύπο

$$\Phi(x, y, z) = \frac{Q}{|\mathbf{r} - \xi|}, \quad (3.26)$$

όπου

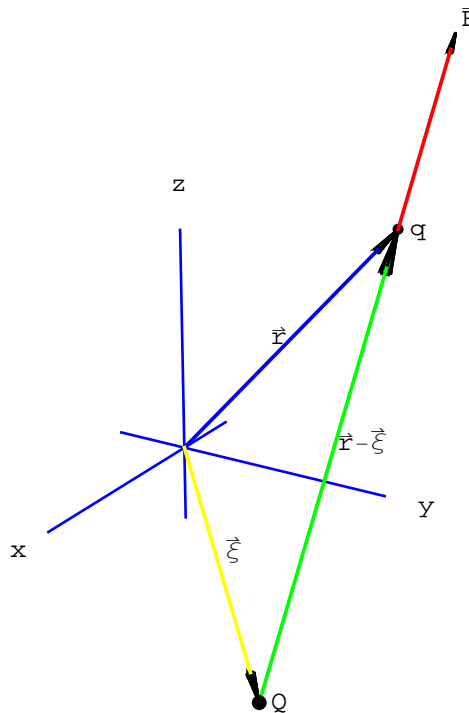
$$|\mathbf{r} - \xi| := \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}. \quad (3.27)$$

Συνεπώς, το αντίστοιχο ηλεκτρικό πεδίο  $\mathbf{E}$  είναι ίσο με

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{Q}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|^3} [(x-a)\mathbf{e}_x + (y-b)\mathbf{e}_y + (z-c)\mathbf{e}_z] \equiv Q \frac{\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|^3}. \quad (3.28)$$

Συνακόλουθα, ο νόμος του Coulomb παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = q \mathbf{E}(x, y, z) = Qq \frac{\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}}{|\mathbf{r} - \boldsymbol{\xi}|^3}. \quad (3.29)$$



**Σχ. 3.2** Το βέλος  $\vec{F}$  παριστάνει την ηλεκτρική δύναμη που ασκεί το φορτισμένο σώμα  $Q$  στο σώμα  $q$ , όταν το πρώτο βρίσκεται στο σημείο  $\boldsymbol{\xi}$  του  $\mathbb{R}^3$  και το δεύτερο στο  $\vec{r}$ .

Η σχέση (3.17) που αποδείξαμε νωρίτερα μπορεί να διατυπωθεί κι ως εξής : Αν δοθεί το ομαλό διανυσματικό πεδίο  $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  και υπάρχει βαθμωτό πεδίο  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  τέτοιο που  $V = \nabla \varphi$ , τότε  $\nabla \times V = \mathbf{0}$  σε κάθε σημείο της περιοχής  $\Omega$ .

Το ιδιαίτερο σημαντικό γεγονός είναι ότι ισχύει, εν μέρει, και το αντίστροφο:

### Πρόταση 3.1

Ας υποθέσουμε ότι ο στροβιλισμός του διανυσματικού πεδίου  $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  μηδενίζεται σε κάθε σημείο του ανοιχτού συνόλου  $\Omega$ . Τότε, υπάρχει μια οικογένεια ανοιχτών συνόλων,  $\{\Omega_j\}_{j=1}^n$ , και αντίστοιχα βαθμωτά πεδία,  $\{\varphi_j\}_{j=1}^n$ , με την ακόλουθες ιδιότητες:

(i) Η ένωση των συνόλων  $\Omega_j$  δίνει την περιοχή  $\Omega$ :  $\bigcup_{j=1}^n \Omega_j = \Omega$ .

(ii)  $V(x, y, z) = \nabla \varphi_j(x, y, z)$   $\in \Omega_j$ .

**Παρατήρηση.** Το πλήθος  $n$  των περιοχών που χρειαζόμαστε καθορίζεται από την τοπολογία του συνόλου  $\Omega$ . Στην απλούστερη δυνατή περίπτωση,  $n = 1$ . Για λεπτομέρειες, παραπέμπουμε

σ' ένα από τα πολλά συγγράμματα διαφορικής τοπολογίας.

■

Σε κάθε περίπτωση, η συνάρτηση  $\phi_j$  ονομάζεται **βαθμωτό δυναμικό του διανυσματικού πεδίου  $V$** , στην περιοχή  $\Omega_j$

Ένα άλλο πεδίο που μηδενίζεται ταυτοτικά είναι η απόκλιση του στροβιλισμού ενός διανυσματικού πεδίου  $V$ . Με άλλα λόγια, για κάθε ομαλό διανυσματικό πεδίο  $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  ισχύει ότι

$$\boxed{\nabla \cdot (\nabla \times V) \equiv \operatorname{div}(\operatorname{curl} v) = 0} \quad (3.30)$$

Αυτή η ταυτότητα αποδεικνύεται εύκολα με βάση τους αντίστοιχους ορισμούς. Εδώ θα περιοριστούμε στο να την εκφράσουμε με τη μορφή της ακόλουθης πρότασης. Αν δοθεί ένα ομαλό διανυσματικό πεδίο  $W : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  και υπάρχει ένα άλλο διανυσματικό πεδίο  $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  τέτοιο που  $W = \nabla \times V$ , τότε  $\nabla \cdot W = 0$  σε κάθε σημείο της περιοχής  $\Omega$ .

Και αυτής της πρότασης ισχύει το αντίστροφο, με την εξής περιορισμένη έννοια:

### Πρόταση 3.2

Ας υποθέσουμε ότι η απόκλιση του διανυσματικού πεδίου  $W : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  μηδενίζεται σε κάθε σημείο του ανοιχτού συνόλου  $\Omega$ . Τότε, υπάρχει μια οικογένεια ανοιχτών συνόλων,  $\{\Omega_j\}_{j=1}^n$ , και αντίστοιχα διανυσματικά πεδία,  $\{V_j\}_{j=1}^n$ , με την ακόλουθες ιδιότητες:

(i) Η ένωση των συνόλων  $\Omega_j$  δίνει την περιοχή  $\Omega$ :  $\bigcup_{j=1}^n \Omega_j = \Omega$ .

(ii)  $W(x, y, z) = \nabla \times V_j(x, y, z) \in \Omega_j$ .

Το πεδίο  $V_j$  ονομάζεται **διανυσματικό δυναμικό του πεδίου  $W$**  στην περιοχή  $\Omega_j$ .

Κλείνουμε τη σύντομη εισαγωγή μας στις ιδιότητες των διανυσματικών πεδίων, παραθέτοντας, χωρίς απόδειξη, και το ακόλουθο βασικό αποτέλεσμα:

### Πρόταση 3.3

Κάθε ομαλό διανυσματικό πεδίο  $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  μπορεί να εκφραστεί, τμηματικά τουλάχιστον, ως το άθροισμα δύο άλλων, των  $V_1$  και  $V_2$ , από τα οποία, το πρώτο είναι **αστρόβιλο** ( $\nabla \times V_1 = \mathbf{0}$ ) και το δεύτερο **ασυμπίεστο** ( $\nabla \cdot V_2 = 0$ ).

Οι όροι αστρόβιλο και ασυμπίεστο προέρχονται από τη φυσική των ρευστών, η οποία αποτελεί, όχι μόνο την πηγή και των υπόλοιπων όρων της διανυσματικής ανάλυσης, αλλά και ένα από τα σημαντικότερα πεδία εφαρμογής της. Εμείς θα δούμε αναλυτικά μια σπουδαία εφαρμογή, ειδικότερα της τελευταίας πρότασης, στη φυσική του ηλεκτρομαγνητισμού. Οι λεπτομέρειες δίνονται στο εδάφιο που ακολουθεί.

Στο μεταξύ, θα σημειώσουμε ότι οι ορισμοί που δώσαμε παραπάνω για την κλίση, την απόκλιση, τον στροβιλισμό και το πεδίο Laplace είχαν ως βάση τις Καρτεσιανές συντεταγμένες του Ευκλείδειου τρισδιάστατου χώρου,  $\mathbb{E}^3$ . Από την άλλη, όπως ήδη τονίσαμε επανειλημμένα, η ανάλυση των βαθμωτών και διανυσματικών πεδίων είναι συχνά βολικότερη στο πλαίσιο άλλων συστημάτων συντεταγμένων. Άρα, η χρήση αυτών των συστημάτων επιβάλλει

να βρούμε την έκφραση των παραπάνω εννοιών και σε μη Καρτεσιανές συντεταγμένες. Ο τρόπος με τον οποίο μεταφέρονται οι έννοιες της κλίσης, απόκλισης κλπ σε μη Καρτεσιανά συστήματα συντεταγμένων εξετάζεται μεθοδικά σε όλα τα συγγράμματα που είναι αφιερωμένα στη διανυσματική ανάλυση. Ωστόσο, για διευκόλυνση του αναγνώστη, στο τέλος αυτού του κεφαλαίου, δίνουμε μια συνοπτική περιγραφή όλων των σχετικών αποτελεσμάτων.

## Ασκήσεις

**3.1** Να υπολογιστεί η κλίση,  $\nabla u$ , καθενός από τα ακόλουθα βαθμωτά πεδία. (Το πεδίο ορισμού τους εκτείνεται σε όλο το ανοιχτό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^3$ , στο οποίο έχει νόημα η αντίστοιχη έκφραση). Στη συνέχεια, να υπολογιστεί η απόκλιση και ο στροβιλισμός του διανυσματικού πεδίου  $\nabla u$ .

(i)  $u(x, y, z) = x y^2 + y z^2 + x^2 z$ ,

(ii)  $u(x, y, z) = \frac{xyz}{r}$ ,  $r := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,

(iii)  $u(x, y, z) = \begin{cases} 1, & 0 \leq r < a \\ \frac{a}{r}, & r \geq a \end{cases}$

(iv)  $u(x, y, z) = Q\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$ ,  $r_1 := \sqrt{x^2 + y^2 + (z-a)^2}$ ,  $r_2 := \sqrt{x^2 + y^2 + (z+a)^2}$

(v)  $u(x, y, z) = \frac{e^{-r}}{r}$ ,

(vi)  $u(x, y, z) = e^{-(x^2+y^2)}$ .

**3.2** Να υπολογιστεί η απόκλιση,  $\nabla \cdot \mathbf{v}$ , και ο στροβιλισμός,  $\nabla \times \mathbf{v}$ , καθενός από τα παρακάτω διανυσματικά πεδία. (Το πεδίο ορισμού τους εκτείνεται σε όλο το ανοιχτό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^3$ , στο οποίο έχει νόημα η αντίστοιχη έκφραση). Στη συνέχεια, να υπολογιστεί η κλίση του βαθμωτού πεδίου  $\nabla \cdot \mathbf{v}$  και η απόκλιση του διανυσματικού πεδίου  $\nabla \times \mathbf{v}$ .

(i)  $\mathbf{v}(x, y, z) = (x y^2 z, x y z^2, x^2 y z)$

(ii)  $\mathbf{v}(x, y, z) = \frac{1}{r}(x, y, z)$ ,  $r := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,

(iii)  $\mathbf{v}(x, y, z) = e^{-r}(x, y, z)$ ,

(iv)  $\mathbf{v}(x, y, z) = (y, 1, 0)$ .

**3.3** Ξεκινώντας από τη σχέση

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

ανάμεσα στις Καρτεσιανές συντεταγμένες,  $(x, y, z)$ , του Ευκλείδειου τρισδιάστατου χώρου, και τις κυλινδρικές,  $(r, \theta, z)$ , και τους ορισμούς των τελεστών της κλίσης,  $\nabla$ , της απόκλισης,  $\nabla \cdot$ , του στροβιλισμού,  $\nabla \times$ , και του Laplace,  $\Delta$ , κατασκευάστε τη μορφή αυτών των τελεστών στις κυλινδρικές συντεταγμένες.

Υπόδειξη. Βλ. Παράρτημα.

### 3.4 Ξεκινώντας από τη σχέση

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta,$$

ανάμεσα στις Καρτεσιανές συντεταγμένες,  $(x, y, z)$ , του Ευκλείδειου τρισδιάστατου χώρου, και τις σφαιρικές,  $(r, \theta, \varphi)$ , και τους ορισμούς των τελεστών της κλίσης,  $\nabla$ , της απόκλισης,  $\nabla \cdot$ , του στροβιλισμού,  $\nabla \times$ , και του Laplace,  $\Delta$ , κατασκευάστε τη μορφή αυτών των τελεστών στις σφαιρικές συντεταγμένες.

Υπόδειξη. Βλ. Παράρτημα.

**3.5** α) Να εκφραστούν τα βαθμωτά πεδία της Άσκ. 3.1 σε σφαιρικές συντεταγμένες.

β) Να υπολογιστεί η κλίση,  $\nabla u$ , καθενός από τα παραπάνω πεδία, καθώς και η απόκλιση και ο στροβιλισμός του διανυσματικού πεδίου  $\nabla u$ , χρησιμοποιώντας την έκφραση των αντίστοιχων τελεστών στις σφαιρικές συντεταγμένες.

Υπόδειξη. Βλ. Παράρτημα.

**3.6** α) Να εκφραστούν τα διανυσματικά πεδία της Άσκ.2 σε σφαιρικές συντεταγμένες.

β) Να υπολογιστεί η απόκλιση,  $\nabla \cdot \mathbf{v}$ , και ο στροβιλισμός,  $\nabla \times \mathbf{v}$ , καθενός από τα παραπάνω πεδία, καθώς και η κλίση του βαθμωτού πεδίου  $\nabla \cdot \mathbf{v}$  και η απόκλιση του διανυσματικού πεδίου  $\nabla \times \mathbf{v}$ , χρησιμοποιώντας τη μορφή των αντίστοιχων τελεστών στις σφαιρικές συντεταγμένες.

Υπόδειξη. Βλ. Παράρτημα.

## 4. Το στατικό ηλεκτρομαγνητικό πεδίο

Σύμφωνα με τη θεωρία που είχε ήδη αναπτυχθεί στα μέσα του 19<sup>ου</sup> αιώνα, τα ηλεκτρικά και μαγνητικά φαινόμενα στα οποία δεν εμφανίζεται χρονική μεταβολή μπορεί να περιγραφτούν με τη βοήθεια ενός αστρόβιλου πεδίου,  $\mathbf{E}$ , κι ενός ασυμπίεστου,  $\mathbf{B}$ , που τα ονομάζουμε **ηλεκτρικό** και **μαγνητικό πεδίο**, αντίστοιχα.

Η απόκλιση του πρώτου από αυτά τα πεδία προσδιορίζεται από την κατανομή του ηλεκτρικού φορτίου στο χώρο. Η τελευταία δίνεται από την συνάρτηση  $\rho: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  που ονομάζεται **πυκνότητα του ηλεκτρικού φορτίου**.

Αναλυτικότερα, το ηλεκτρικό πεδίο περιγράφεται από λύσεις των εξισώσεων

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad (4.1)$$

Η συνάρτηση  $\rho(x, y, z)$  μηδενίζεται έξω από το σώμα  $\Sigma$  (ή τα σώματα) που φέρει το ηλεκτρικό φορτίο. Εκεί, αλλά και σε κάθε σημείο του χώρου όπου  $\rho(x, y, z) = 0$ , και η δεύτερη από τις διανυσματικές εξισώσεις (4.1) γίνεται ομογενής.

Η μονάδα μέτρησης του ηλεκτρικού φορτίου στο σύστημα που θα υιοθετήσουμε είναι η esu (electrostatic unit = **ηλεκτροστατική μονάδα**), που συμβολίζεται και με sCoul (static Coulomb = στατικό Κουλόμπ(π)). Η esu ορίζεται με βάση τον τύπο  $|\mathbf{F}| = Qq/r^2$  για το μέτρο της δύναμης που ασκεί ένα σημειακό φορτίο  $Q$  σ' ένα δεύτερο, το  $q$ , το οποίο βρίσκεται σε απόσταση  $r$  από το πρώτο. Αυτό σημαίνει ότι

$$(\text{esu})^2 = \text{cm}^2 \cdot \text{dyne} = \text{gr} \cdot \text{cm}^3 / \text{sec}^2. \quad (4.2)$$

Αν το ηλεκτρικό φορτίο στο τυχαίο σημείο  $(x, y, z)$  του σώματος  $\Sigma$  κινείται με ταχύτητα  $\mathbf{v}(x, y, z)$ , τότε λέμε ότι στο  $(x, y, z)$  υπάρχει **ηλεκτρικό ρεύμα με πυκνότητα**

$$\mathbf{J}(x, y, z) = \rho(x, y, z) \mathbf{v}(x, y, z). \quad (4.3)$$

Ωστόσο, σε κάποιο σημείο ή σε μια περιοχή μπορεί να υπάρχει ηλεκτρικό ρεύμα, ακόμα και όταν η πυκνότητα του φορτίου είναι μηδενική. Αυτό το φαινόμενο οφείλεται στο γεγονός ότι το ηλεκτρικό φορτίο δεν είναι μόνο θετικό, όπως συμβαίνει με τη μάζα ενός σώματος, αλλά και αρνητικό. Με άλλα λόγια, το πεδίο τιμών της συνάρτησης  $\rho$  δεν περιορίζεται στο θετικό τμήμα της πραγματικής ευθείας,  $\mathbb{R}$ .

Σαν αποτέλεσμα, η ακόλουθη φυσική κατάσταση είναι δυνατή: Στο τυχαίο σημείο  $(x, y, z)$  του σώματος  $\Sigma$ , το θετικό φορτίο έχει πυκνότητα  $\rho_+(x, y, z)$  και ταχύτητα  $\mathbf{v}_+(x, y, z)$ . Στο ίδιο σημείο, υπάρχει αρνητικό φορτίο με την ίδια πυκνότητα, αλλά με ταχύτητα αντίθετη από εκείνη του θετικού φορτίου. Αυτό σημαίνει ότι,  $\rho_-(x, y, z) = -\rho_+(x, y, z)$  και  $\mathbf{v}_-(x, y, z) = -\mathbf{v}_+(x, y, z)$ .

Τότε στο σημείο  $(x, y, z) \in \Sigma$  το συνολικό φορτίο μηδενίζεται:

$$\rho(x, y, z) = \rho_+(x, y, z) + \rho_-(x, y, z) = 0. \quad (4.4)$$

Αλλά, δεν ισχύει το ίδιο και για το ρεύμα:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(x, y, z) &= \rho_+(x, y, z) \mathbf{v}_+(x, y, z) + \rho_-(x, y, z) \mathbf{v}_-(x, y, z) \\ &= 2 \rho_+(x, y, z) \mathbf{v}_+(x, y, z). \end{aligned}$$

Σε κάθε περίπτωση (ή, αν προτιμάτε να φαίνεστε λόγιοι, εν πάση περιπτώσει. Όχι όμως, "εν μπας περιπτώσει" που λένε τελευταία οι εννιά στους δέκα Έλληνες. Με τέτοια αδιαφορία για τα ζητήματα της γλώσσας, δεν ... πας πουθενά!) στη γειτονιά κάθε σώματος στο οποίο εμφανίζεται ηλεκτρικό ρεύμα υπάρχει μαγνητικό πεδίο. Το τελευταίο περιγράφεται από λύσεις των ΜΔΕ

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}} \quad (4.6)$$

Εδώ, η σταθερή  $c$  έχει διάσταση ταχύτητας και, σε πάρα πολύ καλή προσέγγιση, είναι ίση με  $c = 3 \cdot 10^{10}$  cm/sec. Όπως θα δούμε στο επόμενο εδάφιο, αντιπροσωπεύει την ταχύτητα των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων (άρα και του φωτός) στο κενό.

Από τον ορισμό της πυκνότητας του ηλεκτρικού ρεύματος έπεται ότι η διάσταση της ποσότητας  $\mathbf{J}(x, y, z)$  είναι εκείνη του γινόμενου (πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου)·(ταχύτητα), δηλαδή  $(\text{esu} / \text{cm}^3) \cdot (\text{cm} / \text{sec}) = \text{esu} / (\text{cm}^2 \cdot \text{sec})$ .

Ανάλογα, οι εξισώσεις (3.1) και (3.4) δείχνουν ότι το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο έχουν την ίδια διάσταση,  $\text{esu} / \text{cm}^2$ .

Μια άλλη μορφή των εξισώσεων του στατικού ηλεκτρομαγνητισμού προκύπτει με την εισαγωγή δυναμικών για τα πεδία  $\mathbf{E}$  και  $\mathbf{B}$ .

Σχετικά με το πρώτο απ' αυτά τα δύο διανυσματικά πεδία, παρατηρούμε το εξής:

Η εξίσωση  $\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0}$  συνεπάγεται ότι, τοπικά τουλάχιστον, υπάρχει ένα βαθμωτό πεδίο  $\Phi(x, y, z)$ , τέτοιο που

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi. \quad (4.7)$$

Σημειώνουμε ότι το αρνητικό πρόσημο σ' αυτή τη σχέση είναι απλώς καθιερωμένη σύμβαση και προχωράμε στην αντικατάστασή της στην  $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$ . Το αποτέλεσμα είναι η εξίσωση Poisson:

$$\nabla^2\Phi = -4\pi\rho. \quad (4.8)$$

Ανάλογα, η εξίσωση  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  συνεπάγεται ότι, τοπικά τουλάχιστον, υπάρχει ένα διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{A}(x, y, z)$ , τέτοιο που

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (4.9)$$

Η αντικατάσταση αυτής της έκφρασης για το μαγνητικό πεδίο στην εξίσωση  $\nabla \times \mathbf{B} = (4\pi/c)\mathbf{J}$  δίνει την

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}. \quad (4.10)$$

Τώρα, είναι εύκολο να δειχτεί ότι

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}, \quad (4.11)$$



όπου το σύμβολο  $\nabla^2 \mathbf{A}$  έχει το ακόλουθο νόημα: Αν  $\mathbf{A} = X \mathbf{e}_x + Y \mathbf{e}_y + Z \mathbf{e}_z$  τότε

$$\nabla^2 \mathbf{A} := \nabla^2 X \mathbf{e}_x + \nabla^2 Y \mathbf{e}_y + \nabla^2 Z \mathbf{e}_z. \quad (4.12)$$

Κατά συνέπεια, η εξ. (4.10) είναι ισοδύναμη με την

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}. \quad (4.13)$$

Θα δείξουμε ευθύς αμέσως ότι, χωρίς βλάβη της γενικότητας, το δυναμικό  $\mathbf{A}$  μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ . Με βάση αυτή την επιλογή, η προηγούμενη εξίσωση γίνεται

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}. \quad (4.14)$$

Ας υποθέσουμε, λοιπόν, ότι έχουμε βρει μια λύση της εξ. (4.14) η οποία δεν πληροί τη συνθήκη  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ . Δηλαδή,  $\nabla \cdot \mathbf{A} = \sigma$ , όπου  $\sigma(x, y, z) \neq 0$ . Τότε, επιλέγουμε μια τυχαία ομαλή λύση  $\Psi(x, y, z)$  της εξίσωσης Poisson  $\nabla^2 \Psi = -\sigma$  και ορίζουμε το καινούργιο διανυσματικό δυναμικό  $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla \Psi$ . Η απόκλιση και ο στροβιλισμός του πεδίου  $\mathbf{A}'$  πληρούν τις συνθήκες

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla^2 \Psi = 0. \quad (4.15)$$

και

$$\nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla \Psi) = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (4.16)$$

αντίστοιχα. Κατά συνέπεια, η αντικατάσταση της έκφρασης  $\mathbf{A} = \mathbf{A}' - \nabla \Psi$  στο αριστερό μέλος εξ. (4.13) δίνει το εξής αποτέλεσμα:

$$\nabla[\nabla \cdot (\mathbf{A}' - \nabla \Psi)] - \nabla^2 (\mathbf{A}' - \nabla \Psi) = -\nabla(\nabla^2 \Psi) - \nabla^2 \mathbf{A}' + \nabla^2 (\nabla \Psi) = -\nabla^2 \mathbf{A}'. \quad (4.17)$$

Άρα, η (4.13) γίνεται

$$\nabla^2 \mathbf{A}' = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}. \quad (4.18)$$

Από την άλλη, η (4.16) δείχνει ότι, το μαγνητικό πεδίο που αντιστοιχεί στο τροποποιημένο δυναμικό  $\mathbf{A}'$  είναι ίδιο μ' εκείνο που αντιστοιχεί στο αρχικό  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{B}' := \nabla \times \mathbf{A}' = \mathbf{B}. \quad (4.19)$$

Με άλλα λόγια, έχουμε πλέον αποδείξει ότι, το δυναμικό  $\mathbf{A}$  του μαγνητικού πεδίου  $\mathbf{B}$  μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε να αποτελεί λύση της (τριάδας των εξισώσεων Poisson) (4.14).

#### Παράδειγμα 4.1

Ας υποθέσουμε ότι η πυκνότητα του ηλεκτρικού φορτίου ενός σφαιρικού μη μεταλλικού σώματος ακτίνας  $a$  είναι σταθερή. Θέλουμε να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο σε κάθε σημείο του χώρου, όταν το συνολικό φορτίο της σφαίρας είναι  $Q$ .

*Λύση*

Για ευκολία, υποθέτουμε ότι το κέντρο της φορτισμένης σφαίρας ταυτίζεται με την αρχή των αξόνων του Καρτεσιανού συστήματος  $xyz$ . Αφού ο όγκος της σφαίρας είναι ίσος με

$V = (4/3) \pi a^3$ , η πυκνότητα του φορτίου στο εσωτερικό της θα είναι ίση με  $\rho_0 = 3 Q / 4 \pi a^3$ . Συνακόλουθα, η συνάρτηση  $\rho(x, y, z)$  έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\rho(x, y, z) = \begin{cases} \rho_0, & r < a \\ 0, & r > a \end{cases} \quad (4.20)$$

όπου  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

Θα πρέπει να είναι προφανές ότι, τόσο το ηλεκτρικό δυναμικό,  $\Phi$ , όσο και το ηλεκτρικό πεδίο,  $\mathbf{E}$ , θα εξαρτιώνται μόνο από την απόσταση  $r$  του τυχαίου σημείου  $(x, y, z)$  από το κέντρο της σφαίρας και όχι από τις επιμέρους τιμές των Καρτεσιανών συντεταγμένων αυτού του σημείου. Γι' αυτό μεταφερόμαστε στις σφαιρικές συντεταγμένες  $(r, \theta, \varphi)$ , οπότε η συνάρτηση του δυναμικού  $\Phi(x, y, z)$  μετατρέπεται στην  $\Psi(r, \theta, \varphi)$ . Αφού, όπως επισημάναμε, το δυναμικό θα εξαρτιέται μόνο από το  $r$ , έπεται ότι  $\Psi(r, \theta, \varphi) = R(r)$ .

Στις σφαιρικές συντεταγμένες, ο τελεστής Laplace έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\nabla^2 = \partial_r^2 + \frac{2}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\varphi^2. \quad (4.21)$$

Συνεπώς, η συνάρτηση  $R(r)$  πρέπει να είναι λύση της συνήθους διαφορικής εξίσωσης (ΣΔΕ)

$$R'' + 2 r^{-1} R' = \alpha(r) := \begin{cases} -4 \pi \rho_0, & r < a \\ 0, & r > a \end{cases} \quad (4.22)$$

Θέτουμε  $R' = \psi$ , οπότε η τελευταία εξίσωση γίνεται

$$\psi' + 2 \psi / r = \alpha(r). \quad (4.23)$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δυο μέλη αυτής της εξίσωσης με  $r^2$ , παίρνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$r^2 \psi' + 2 r \psi \equiv (r^2 \psi)' = r^2 \alpha(r). \quad (4.24)$$

Όταν  $\alpha(r) = -4 \pi \rho_0$ , η λύση της (4.24) δίνεται από τη σχέση

$$r^2 \psi = -\frac{4 \pi \rho_0}{3} r^3 + C_1 \Leftrightarrow \psi := R' = -\frac{4 \pi \rho_0}{3} r + \frac{C_1}{r^2}. \quad (4.25)$$

Ολοκληρώνοντας άλλη μια φορά, βρίσκουμε ότι

$$R(r) = -\frac{2 \pi \rho_0}{3} r^2 - \frac{C_1}{r} + C_2. \quad (4.26)$$

Προφανώς, αυτή η έκφραση δεν έχει νόημα στο  $r = 0$ , παρά μόνο όταν  $C_1 \equiv 0$ . Με άλλα λόγια, οι λύσεις που παραμένουν φραγμένες καθώς πλησιάζουμε το  $r = 0$  από τα δεξιά είναι της μορφής

$$R(r) = -\frac{2 \pi \rho_0}{3} r^2 + C_2 = -\frac{Q}{2 a^3} r^2 + C_2, \quad r < a. \quad (4.27)$$

Με ανάλογο τρόπο βρίσκουμε ότι,

$$R(r) = -\frac{C_1}{r} + C_3, \quad r > a. \quad (4.28)$$

Χωρίς να επηρεάζεται το τελικό αποτέλεσμα, μπορούμε να θέσουμε  $C_3 = 0$ . Αν απαιτήσουμε η  $R(r)$  και η παράγωγός της να είναι συνεχείς στο  $r = a$ , τότε οι λύσεις που βρήκαμε πιο πάνω θα πρέπει να πληρούν και τις εξής συνθήκες:

$$-\frac{Q}{2a} + C_2 = -\frac{C_1}{a}, \quad -\frac{Q}{a^2} = \frac{C_1}{a^2}. \quad (4.29)$$

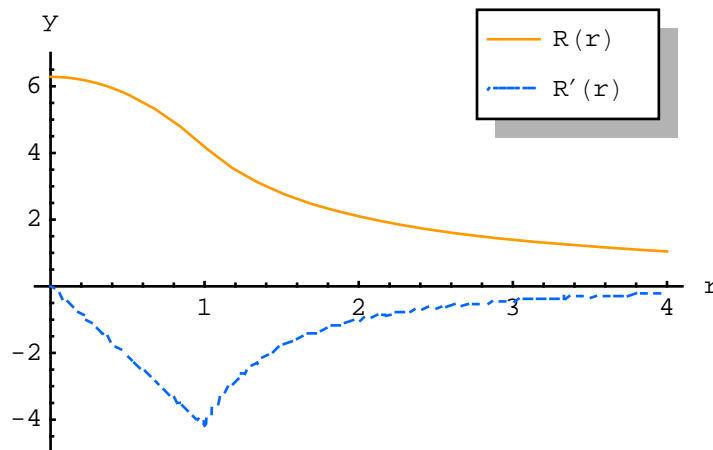
Άρα,

$$C_1 = -Q, \quad C_2 = \frac{3Q}{2a} \quad (4.30)$$

και η τελική μορφή της  $R(r)$  γίνεται

$$R(r) = \begin{cases} \frac{Q}{2a^3} (3a^2 - r^2), & r \leq a \\ \frac{Q}{r}, & r > a \end{cases} \quad (4.31)$$

Η συμπεριφορά της συνάρτησης  $R(r)$  και της παραγώγου αναδειχονται καθαρά στο Σχ. 4.1.



**Σχ. 4.1** Το γράφημα της συνάρτησης  $R(r)$  που ορίζεται από τον τύπο (4.31) και της παραγώγου της,  $R'(r)$ , όταν  $a = 1$ ,  $\rho_0 = 1$ .

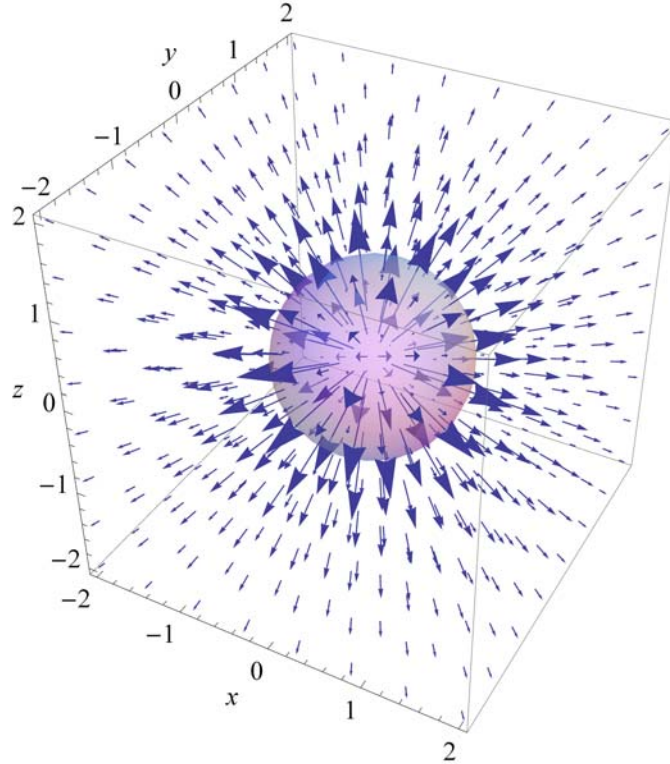
Αρκεί, τώρα, να θυμηθούμε τη σχέση  $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$  για να διαπιστώσουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο που παράγεται από την ομοιόμορφα φορτισμένη σφαίρα δίνεται από την ακόλουθη έκφραση:

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \begin{cases} \frac{Q}{a^3} \mathbf{r}, & r \leq a \\ \frac{Q}{r^3} \mathbf{r}, & r > a \end{cases}, \quad \mathbf{r} = x \mathbf{e}_x + y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z. \quad (4.32)$$

Από τη σύγκριση αυτής της έκφρασης με την (3.24), συνάγεται ότι στο "κενό", δηλαδή στην περιοχή  $r > a$ , το πεδίο που οφείλεται στη φορτισμένη σφαίρα είναι ίδιο μ' εκείνο ενός

σωμάτιου το οποίο βρίσκεται στο κέντρο της και έχει φορτίο ίσο προς το συνολικό φορτίο της σφαίρας.

Στο Σχ. 4.2 δείχνουμε το ηλεκτρικό πεδίο (4.32) στο εσωτερικό και λίγο έξω από την ομοιόμορφα φορτισμένη μοναδιαία σφαίρα.



Σχ. 4.2 Γραφική αναπαράσταση του ηλεκτρικού πεδίου που παράγει μια ομοιόμορφα φορτισμένη μοναδιαία σφαίρα.

■

### Παράδειγμα 4.2

Θεωρούμε έναν κυλινδρικό αγωγό ρεύματος με ακτίνα διατομής  $a$ . Ηλεκτρικό ρεύμα σταθερής πυκνότητας  $J_0$  διατρέχει τον αγωγό στην κατεύθυνση του άξονα συμμετρίας του. Ζητιέται να υπολογιστεί το μαγνητικό πεδίο σε κάθε σημείο του χώρου.

*Λύση*

Θεωρούμε ότι ο άξονας συμμετρίας του αγωγού ταυτίζεται με τον άξονα  $z$  του Καρτεσιανού συστήματος  $x y z$ . Έτσι, η διανυσματική συνάρτηση της πυκνότητας του ρεύματος παίρνει την ακόλουθη μορφή

$$J_x(x, y, z) = J_y(x, y, z) = 0, \quad J_z(x, y, z) = \begin{cases} J_0, & r \leq a \\ 0, & r > a \end{cases} \quad (4.33)$$

όπου  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Συνακόλουθα, η εξίσωση (4.14) γίνεται

$$\nabla^2 A_x = 0, \quad \nabla^2 A_y = 0, \quad \nabla^2 A_z = \begin{cases} -\frac{4\pi}{c} J_0, & r \leq a \\ 0, & r > a \end{cases} \quad (4.34)$$

Επειδή εκείνο που μας ενδιαφέρει είναι το μαγνητικό πεδίο  $\mathbf{B}$ , δε χάνουμε σε γενικότητα αν επιλέξουμε την τετριμμένη λύση  $A_x(x, y, z) = A_y(x, y, z) = 0$  για τις δύο πρώτες των (4.34). Από την άλλη, η κυλινδρική μορφή της πηγής (αγωγού) ωθεί στην εισαγωγή των κυλινδρικών συντεταγμένων  $(r, \varphi, z)$ . Σ' αυτές, ο τελεστής Laplace έχει την ακόλουθη μορφή

$$\nabla^2 = \partial_r^2 + \frac{1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \partial_\varphi^2 + \partial_z^2. \quad (4.35)$$

Τώρα, αν συμβολίσουμε με  $H(r, \varphi, z)$  τη συνάρτηση  $A_z(x, y, z)$  στις κυλινδρικές συντεταγμένες, αν δηλαδή  $H(r, \varphi, z) = A_z(x, y, z)$ , τότε από τα δοσμένα του προβλήματος αναμένουμε ότι  $H(r, \varphi, z) = R(r)$ . Συνεπώς, η τρίτη από τις ΜΔΕ (4.34) ανάγεται στη ΣΔΕ

$$R'' + \frac{1}{r} R' = \beta(r) := \begin{cases} -\frac{4\pi}{c} J_0, & r \leq a \\ 0, & r > a \end{cases} \quad (4.36)$$

Ισοδύναμα,

$$(r R')' = r \beta(r). \quad (4.37)$$

Αυτή ολοκληρώνεται εύκολα και δίνει

$$R(r) = \begin{cases} -\frac{\pi}{c} J_0 r^2 + C_1 \ln r + C_2, & r \leq a \\ C_3 \ln r + C_4, & r > a \end{cases} \quad (4.38)$$

Η λογαριθμική συνάρτηση απειρίζεται τόσο για  $r \rightarrow 0$ , όσο και για  $r \rightarrow \infty$ . Όμως, δεν ισχύει το ίδιο και για την παράγωγό της, που μας χρειάζεται για τον υπολογισμό του μαγνητικού πεδίου. Αυτή μηδενίζεται καθώς το  $r \rightarrow \infty$ . Γι' αυτό, επιλέγουμε τη σταθερή ολοκλήρωσης  $C_1$  να είναι ίση με το μηδέν. Επιπλέον, απαιτούμε από την  $R(r)$  να είναι ομαλή στο  $r = a$ , πράγμα που ισοδυναμεί με τις ακόλουθες συνθήκες:

$$-\frac{\pi}{c} J_0 a^2 + C_2 = C_3 \ln a + C_4, \quad -\frac{2\pi}{c} J_0 a = C_3 \frac{1}{a}. \quad (4.39)$$

Κατά συνέπεια, η (4.38) γίνεται

$$R(r) = \begin{cases} -\frac{\pi}{c} J_0 r^2 + C_2, & r \leq a \\ -\frac{2\pi}{c} J_0 a^2 \ln(r/a) - \frac{\pi}{c} J_0 a^2 + C_2, & r > a \end{cases} \quad (4.40)$$

Το εμβαδόν της διατομής του αγωγού είναι ίσο με  $\pi a^2$ . Το γινόμενο  $I = \pi a^2 J_0$  δίνει το ρεύμα του αγωγού. Επιπλέον, δεν επηρεάζουμε το μαγνητικό πεδίο αν θέσουμε  $C_2 = 0$ . Από αυτές τις παρατηρήσεις έπεται ότι η λύση μας για το διανυσματικό δυναμικό  $\mathbf{A}$  παίρνει την ακόλουθη τελική μορφή:

$$A_x(x, y, z) = A_y(x, y, z) = 0, \quad A_z(x, y, z) = \begin{cases} -\frac{I}{c} \left(\frac{r}{a}\right)^2, & r \leq a \\ -\frac{I}{c} [1 + 2 \ln(r/a)], & r > a \end{cases} \quad (4.41)$$

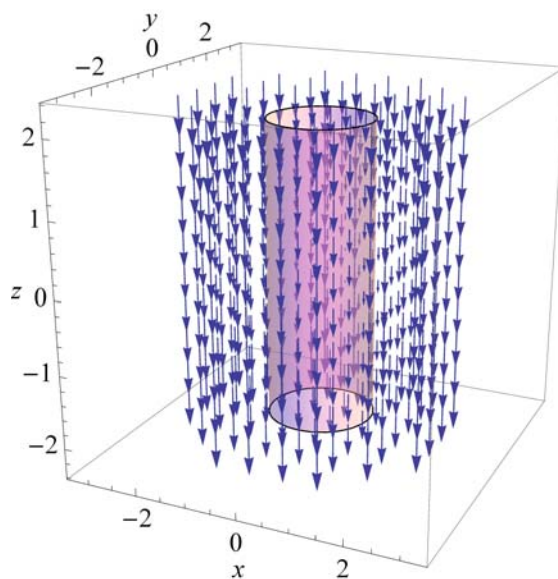
Τέλος, από τον τύπο  $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$  και τις (4.41), βρίσκουμε ότι οι συνιστώσες του μαγνητικού πεδίου έχουν ως εξής:

$$\mathbf{B}_x(x, y, z) = \begin{cases} -\frac{2I}{c} \frac{y}{a^2}, & r \leq a \\ -\frac{2I}{c} \frac{y}{r^2}, & r > a \end{cases} .$$

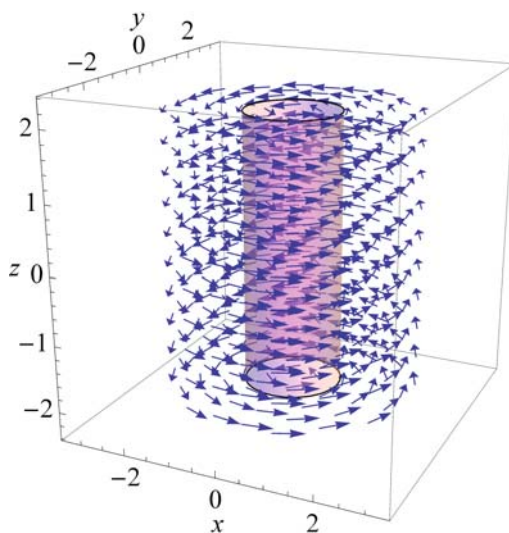
$$\mathbf{B}_y(x, y, z) = \begin{cases} \frac{2I}{c} \frac{x}{a^2}, & r \leq a \\ \frac{2I}{c} \frac{x}{r^2}, & r > a \end{cases}$$

$$\mathbf{B}_z(x, y, z) = 0 .$$

Στο επόμενο και στο μεθεπόμενο σχήμα δείχνουμε, αντίστοιχα, μια ποιοτική εικόνα των διανυσματικών πεδίων  $\mathbf{A}$  και  $\mathbf{B}$  αυτού του παραδείγματος.



Σχ. 4.3 Γραφική αναπαράσταση του διανυσματικού πεδίου  $\mathbf{A}$  που ορίζεται από τον τύπο (4.41).



Σχ. 4.4 Γραφική αναπαράσταση του διανυσματικού πεδίου  $\mathbf{B}$  που ορίζεται από τον τύπο (4.42).

■

Κλείνουμε αυτό το εδάφιο σημειώνοντας ότι, σύμφωνα με την κλασική θεωρία, ένα σωματίο  $\sigma$  με ηλεκτρικό φορτίο  $q$ , το οποίο κινείται σε περιοχή όπου υπάρχει μαγνητικό πεδίο, υφίσταται δύναμη ίση προς  $(q/c) \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ . Σ' αυτό τον τύπο, η έκφραση  $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$  δηλώνει το εξωτερικό γινόμενο του διανύσματος της ταχύτητας,  $\mathbf{v}$ , που έχει το  $\sigma$  κάποια χρονική στιγμή  $t$  με το διάνυσμα του μαγνητικού πεδίου,  $\mathbf{B}(x, y, z)$ , στο σημείο από το οποίο διέρχεται το  $\sigma$  εκείνη τη στιγμή.

Έτσι, η συνολική δύναμη που ασκείται σ' ένα φορτισμένο σωματίο το οποίο κινείται σε περιοχή ηλεκτρομαγνητικού πεδίου δίνεται από τον **τύπο (των) Laplace-Lorentz**

$$\mathbf{F} = q \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right). \quad (4.43)$$

## Ασκήσεις

**4.1** Η πυκνότητα του ηλεκτρικού φορτίου ενός σφαιρικού σώματος ακτίνας  $a$  περιγράφεται από τη συνάρτηση

$$\rho(x, y, z) = \rho_0 \left( 1 - \frac{r}{a} \right), \quad r := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq a.$$

α) Να προσδιοριστεί η φυσική σημασία της παραμέτρου  $\rho_0$ .

β) Να λυθεί την αντίστοιχη εξίσωση Poisson, για κάθε  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

γ) Να υπολογιστεί το ηλεκτρικό πεδίο σε κάθε σημείο του χώρου, συναρτήσει της ακτίνας  $a$  και του συνολικού φορτίου  $Q$  της σφαίρας.

**4.2** Η πυκνότητα του ηλεκτρικού φορτίου ενός σφαιρικού κελύφους, που έχει εσωτερική ακτίνα  $a$  και εξωτερική  $b$ , είναι σταθερή.

α) Να λυθεί την αντίστοιχη εξίσωση Poisson, για κάθε  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

β) Να υπολογιστεί το ηλεκτρικό πεδίο σε κάθε σημείο του χώρου, συναρτήσει των  $a, b$  και του συνολικού φορτίου  $Q$  του κελύφους.

**4.3** Ένας άπειρος κυλινδρικός αγωγός ακτίνας  $a$  φέρει ηλεκτρικό ρεύμα. Αν θεωρήσουμε ότι ο άξονας συμμετρίας του αγωγού ταυτίζεται με τον άξονα  $z$  του Καρτεσιανού συστήματος  $x y z$ , η πυκνότητα του ρεύματος στο εσωτερικό του κύλινδρου περιγράφεται από την διανυσματική συνάρτηση

$$\mathbf{J}(x, y, z) = J_0 (1 - e^{r/a}) \mathbf{e}_z, \quad r := \sqrt{x^2 + y^2}.$$

α) Να υπολογιστεί το μαγνητικό δυναμικό  $\mathbf{A}(x, y, z)$  σε κάθε σημείο  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

β) Να υπολογιστεί το μαγνητικό πεδίο που παράγει ο αγωγός σε κάθε σημείο του χώρου.

## 5. Το χρονικά μεταβαλλόμενο ηλεκτρομαγνητικό πεδίο

Όταν οι λεγόμενες *πηγές του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου*,  $\rho$  και  $\mathbf{J}$ , αλλάζουν με την πάροδο του χρόνου, δεν μπορεί παρά να μεταβάλλεται και το ίδιο το πεδίο. Με άλλα λόγια, όταν  $\rho = \rho(x, y, z, t)$  και  $\mathbf{J} = \mathbf{J}(x, y, z, t)$ , τότε υποχρεωτικά  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, y, z, t)$  και  $\mathbf{B} = \mathbf{B}(x, y, z, t)$ . Το ερώτημα που προκύπτει σ' αυτή την περίπτωση είναι κατά πόσο οι εξισώσεις για το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο που εξαρτιέται από το χρόνο είναι ίδιες μ' εκείνες του στάσιμου.

Κάτι τέτοιο δεν αποκλείεται από μαθηματική άποψη. Αλλά, θα σήμαινε ότι κάθε αλλαγή στην κατανομή των φορτίων και των ρευμάτων θα επέφερε μια ακαριαία αλλαγή του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου σε όλη την περιοχή του  $\mathbb{R}^3$  στην οποία αυτό το πεδίο οριζόταν αρχικά. Ισοδύναμα, το ηλεκτρικό πεδίο θα παρέμενε ανεξάρτητο από το μαγνητικό, οπότε μια τοπική αλλαγή του ενός δεν θα επηρέαζε το άλλο.

Ο ρυθμός με τον οποίο αλλάζει τοπικά το ηλεκτρικό πεδίο εκφράζεται από την παράγωγο του ως προς το χρόνο, δηλαδή από την ποσότητα  $\partial_t \mathbf{E}(x, y, z, t)$ . Ανάλογα, ο ρυθμός αλλαγής του μαγνητικού πεδίου εκφράζεται από τη μερική παράγωγο  $\partial_t \mathbf{B}(x, y, z, t)$ . Έτσι, το ερώτημα αν οι τοπικές αλλαγές του ηλεκτρικού πεδίου επηρεάζουν το μαγνητικό και αντίστροφα ισοδυναμεί με το ερώτημα αν οι ποσότητες  $\partial_t \mathbf{E}$  και  $\partial_t \mathbf{B}$  υπεισέρχονται στις εξισώσεις πεδίου. Η απάντηση που δόθηκε στο τελευταίο ερώτημα από τους φυσικούς του 19<sup>ου</sup> αιώνα είναι καταφατική και, στην τελική της μορφή, εκφράζεται από το ακόλουθο σύστημα γραμμικών ΜΔΕ πρώτης τάξης:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{B}, & \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi \rho, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{E} \end{aligned} \quad (5.1)$$

Αυτές είναι οι περίφημες *εξισώσεις (του) Maxwell*. Δύο από τις βασικές τους συνέπειες είναι ο νόμος της διατήρησης του ηλεκτρικού φορτίου και η ύπαρξη ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων.

Ο *νόμος της διατήρησης του ηλεκτρικού φορτίου* εκφράζεται από τη σχέση

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (5.2)$$

που αποδείχεται ως εξής. Με βάση την ταυτότητα  $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = 0$ , η τελευταία από τις εξισώσεις Maxwell οδηγεί στην  $4\pi \nabla \cdot \mathbf{J} + \nabla \cdot (\partial_t \mathbf{E}) = 0$ . Αυτή η σχέση είναι ισοδύναμη με την  $4\pi \nabla \cdot \mathbf{J} + \partial_t (\nabla \cdot \mathbf{E}) = 0$ , αφού η σειρά παραγωγίσισης μιας ομαλής συνάρτησης δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα. Τέλος, η χρήση της δεύτερης από τις εξισώσεις Maxwell οδηγεί αμέσως στην εξίσωση διατήρησης του φορτίου.

Για να δούμε τη δεύτερη συνέπεια των εξισώσεων Maxwell, ξεκινάμε από την  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ . Αυτή συνεπάγεται ότι, τοπικά τουλάχιστον, υπάρχει ένα χρονικά εξαρτώμενο διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{A}(x, y, z, t)$ , τέτοιο που

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (5.3)$$



Στη συνέχεια, αντικαθιστούμε την τελευταία σχέση στην πρώτη εξίσωση Maxwell και, χρησιμοποιώντας την ισότητα  $\partial_t (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \times (\partial_t \mathbf{A})$ , καταλήγουμε στην

$$\nabla \times \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{A} \right) = 0. \quad (5.4)$$

Με τη σειρά της, η (5.4) συνεπάγεται ότι, τοπικά τουλάχιστον, υπάρχει ένα χρονικά εξαρτώμενο βαθμωτό πεδίο  $\Phi(x, y, z, t)$ , τέτοιο που

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{A} = -\nabla \Phi. \quad (5.5)$$

(Το αρνητικό πρόσημο είναι θέμα σύμβασης). Ισοδύναμα,

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{A} - \nabla \Phi. \quad (5.6)$$

Στο σημείο αυτό ανοίγουμε παρένθεση για να επισημάνουμε το εξής: Από τη στιγμή που έχουμε έναν τρόπο για να προσδιορίζουμε το ζευγάρι των δυναμικών  $(\mathbf{A}, \Phi)$ , οι εξισώσεις (5.3) και (5.6) μας επιτρέπουν να βρίσκουμε τα πεδία  $\mathbf{E}$  και  $\mathbf{B}$  με απλή παραγωγή. Από την άλλη, υπάρχει τρόπος για να προσδιορίζουμε τα δυναμικά  $\mathbf{A}, \Phi$  και δίνεται ευθύς αμέσως.

Η αντικατάσταση της έκφρασης (5.6) για το ηλεκτρικό πεδίο  $\mathbf{E}$  στη δεύτερη εξίσωση Maxwell δίνει την

$$\nabla \cdot \left( \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{A} + \nabla \Phi \right) = -4\pi\rho. \quad (5.7)$$

Όμως,  $\nabla \cdot (\nabla \Phi) = \nabla^2 \Phi$ . Άρα, η προηγούμενη αξίσωση γράφεται και σαν

$$\nabla \cdot \left( \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{A} \right) + \nabla^2 \Phi = -4\pi\rho. \quad (5.8)$$

Τέλος, η αντικατάσταση των εκφράσεων για τα πεδία  $\mathbf{E}$  και  $\mathbf{B}$  στην τελευταία εξίσωση Maxwell δίνει την

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} - \frac{1}{c} \partial_t \left( \frac{1}{c} \partial_t \mathbf{A} + \nabla \Phi \right). \quad (5.9)$$

Η ταυτότητα  $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$  μας επιτρέπει να γράψουμε αυτή την εξίσωση στη μορφή

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{A} - \nabla \left( \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \partial_t \Phi \right) = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad (5.10)$$

και να παρατηρήσουμε τα ακόλουθα: Με δοσμένες τις συναρτήσεις  $\rho$  και  $\mathbf{J}$ , οι εξ. (5.8) και (5.10) αποτελούν ένα σύστημα τεσσάρων ΜΔΕ δεύτερης τάξης για την τετράδα των συναρτήσεων που ορίζουν τα δυναμικά  $\mathbf{A}$  και  $\Phi$ . Επειδή αυτές οι εξισώσεις είναι συζευγμένες, η επίλυση του συστήματος (5.8)-(5.10) είναι πολύ δύσκολη υπόθεση. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, όμως, τα πράγματα δεν είναι τόσο περίπλοκα όσο φαίνονται αρχικά. Για να το διαπιστώσουμε, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι, αν έλειπε ο όρος  $c^{-1} \partial_t \mathbf{A} + \nabla \Phi$  από την (5.10), όχι μόνο αυτή η ίδια θα ήταν απλούστερη, αλλά θα έπαυε να είναι και συζευγμένη με την εξ. (5.8).

Ας υποθέσουμε, λοιπόν, ότι, υπάρχουν λύσεις του συστήματος (5.8)-(5.10) που σέβονται τη συνθήκη

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \partial_t \Phi = 0} \quad (5.11)$$

Τότε, η εξ. (5.10) γίνεται

$$\boxed{\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}} \quad (5.12)$$

ενώ η (5.8) ανάγεται στην

$$\boxed{\nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \Phi = -4\pi \rho} \quad (5.13)$$

Το αποτέλεσμα είναι καταπληκτικό! Γιατί, όχι μόνο άρθηκε η σύζευξη των τριών εξισώσεων για το διανυσματικό δυναμικό  $\mathbf{A}$  από εκείνη για το βαθμωτό  $\Phi$ , αλλά και οι τέσσερες εξισώσεις ανάχθηκαν σε μία - στη γραμμική διαφορική **εξίσωση (του) *d' Alembert*** (Ντ' Αλαμπέρ), που είναι γνωστή και ως **κυματική εξίσωση**. Εννοούμε την ΜΔΕ

$$c^2 \nabla^2 u - \partial_t^2 u = f, \quad (5.14)$$

στην οποία η  $f = f(x, y, z, t)$  είναι κάποια γνωστή συνάρτηση και  $u = u(x, y, z, t)$  η άγνωστη.

Κι αυτό γιατί, όπως έχουμε ήδη τονίσει, η (5.12) δεν είναι παρά μια συντομογραφία για τρεις εξισώσεις - μία για κάθε μια από τις τρεις συνιστώσες του πεδίου  $\mathbf{A}$ . Αν γ.π. συμβολίσουμε τις τελευταίες με  $(A_x, A_y, A_z)$  και τις αντίστοιχες συνιστώσες της πυκνότητας ρεύματος  $\mathbf{J}$  με  $(J_x, J_y, J_z)$ , τότε η (5.12) αποτελεί την απλουστευμένη γραφή των τριών εξισώσεων

$$\begin{aligned} c^2 \nabla^2 A_x - \partial_t^2 A_x &= -4\pi c J_x, \\ c^2 \nabla^2 A_y - \partial_t^2 A_y &= -4\pi c J_y, \\ c^2 \nabla^2 A_z - \partial_t^2 A_z &= -4\pi c J_z. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Προφανώς, μένει να εξετάσουμε κατά πόσο οι λύσεις που σέβονται τη συνθήκη (5.11) είναι αρκετά γενικές, ώστε να περιγράφουν κάθε ηλεκτρομαγνητικό, όπως αυτό ορίζεται από τις εξισώσεις Maxwell. Για το σκοπό αυτό, ας υποθέσουμε ότι το ζευγάρι  $(\mathbf{A}, \Phi)$  παριστάνει μια λύση του αρχικού (περίπλοκου) συστήματος εξισώσεων για τα δυναμικά και ότι αυτή η λύση δε σέβεται τη συνθήκη (5.11). Τότε, μπορούμε να επιλέξουμε μίαν, αρχικά τυχαία, ομαλή συνάρτηση  $\Psi(x, y, z, t)$  και να κατασκευάσουμε το καινούργιο ζευγάρι δυναμικών,  $(\mathbf{A}', \Phi')$ , θέτοντας

$$\mathbf{A}' := \mathbf{A} + \nabla \Psi, \quad \Phi' := \Phi - \frac{1}{c} \partial_t \Psi. \quad (5.16)$$

Αν, στη συνέχεια, επιβάλουμε στο ζευγάρι  $(\mathbf{A}', \Phi')$  να σέβεται τη συνθήκη

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' + \frac{1}{c} \partial_t \Phi' = 0, \quad (5.17)$$

θα καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι, η συνάρτηση  $\Psi(x, y, z, t)$  οφείλει να είναι λύση της εξίσωσης

$$c^2 \nabla^2 \Psi - \partial_t^2 \Psi = 0. \quad (5.18)$$

Όμως, η (5.18) δεν είναι παρά η ομογενής εξίσωση d' Alembert. Υποθέτουμε, λοιπόν, ότι η συνάρτηση  $\Psi$  είναι μια λύση της ομογενούς κυματικής εξίσωσης και, από το αρχικό ζευγάρι δυναμικών  $(\mathbf{A}, \Phi)$ , κατασκευάζουμε το  $(\mathbf{A}', \Phi')$  σύμφωνα με τις (5.16). Αντικαθιστώντας τις εκφράσεις

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' - \nabla \Psi, \quad \Phi = \Phi' + \frac{1}{c} \partial_t \Psi \quad (5.19)$$

στις εξισώσεις (5.8) και (5.10) και λαβαίνοντας υπόψη την (5.17), διαπιστώνουμε αμέσως ότι το ζευγάρι  $(\mathbf{A}', \Phi')$  λύνει τις απλουστευμένες εξισώσεις (5.12) και (5.13) (άσκηση).

Από την άλλη μεριά,

$$\mathbf{B}' := \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times (\mathbf{A} + \nabla \Psi) = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}, \quad (5.20)$$

$$\mathbf{E}' := -\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{A}' - \nabla \Phi' = -\frac{1}{c} \partial_t (\mathbf{A} + \nabla \Psi) - \nabla \left( \Phi - \frac{1}{c} \partial_t \Psi \right) = -\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{A} - \nabla \Phi = \mathbf{E}. \quad (5.21)$$

Αυτό σημαίνει ότι, από την άποψη του υπολογισμού του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, τα ζευγάρια  $(\mathbf{A}', \Phi')$  και  $(\mathbf{A}, \Phi)$  είναι ισοδύναμα. Όποιο από τα δύο κι αν χρησιμοποιήσουμε, θα καταλήξουμε στις ίδιες ακριβώς εκφράσεις για τα πεδία  $\mathbf{E}$  και  $\mathbf{B}$ . Αυτή η δυνατότητα επιλογής διαφορετικών ζευγαριών δυναμικών χωρίς επίπτωση στα πεδία  $\mathbf{E}$  και  $\mathbf{B}$  ονομάζεται *ελευθερία βαθμίδας* (gauge freedom) ή *συμμετρία βαθμίδας* (gauge symmetry) των εξισώσεων Maxwell. Αποτελεί μian από τις σημαντικότερες έννοιες της σύγχρονης θεωρητικής φυσικής.

Επανερχόμενοι στις εξ. (5.12) και (5.13), τονίζουμε και πάλι ότι, τόσο το βαθμωτό δυναμικό  $\Phi$ , όσο και κάθε μία από τις συνιστώσες του διανυσματικού δυναμικού  $\mathbf{A}$ , οφείλουν να είναι λύσεις της εξίσωσης d' Alembert (5.14). Όμως, η τελευταία ανάγεται στην (ομογενή) κυματική εξίσωση

$$c^2 \nabla^2 u - \partial_t^2 u = 0, \quad (5.22)$$

όταν ο λεγόμενος *όρος εξαναγκασμού*,  $f$ , μηδενίζεται ταυτοτικά. Συνακόλουθα, σε μια χωρική περιοχή  $\Omega$  στην οποία τόσο η πυκνότητα ηλεκτρικού φορτίου,  $\rho$ , όσο και η πυκνότητα ηλεκτρικού ρεύματος,  $\mathbf{J}$ , μηδενίζονται, οι ΜΔΕ για τα δυναμικά ανάγονται στην εξ. (5.22).

Αυτό σημαίνει ότι, στον κενό χώρο που περιβάλλει τα σώματα-φορείς των ηλεκτρικών φορτίων και ρευμάτων, οι μεταβολές του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου διαδίνονται με ταχύτητα ίση προς την σταθερή  $c$  που εμφανίζεται στην εξ. (5.22). Αυτή η ταχύτητα έχει μετρηθεί πειραματικά και έχει βρεθεί να είναι ίδια με την ταχύτητα με την οποία διαδίδεται το φως στο κενό. Γι' αυτό λέμε ότι, τα σώματα στα οποία παρουσιάζεται μεταβολή των ηλεκτρικών φορτίων και ρευμάτων εκπέμπουν *ηλεκτρομαγνητικά κύματα* που διαδίνονται με την ταχύτητα του φωτός στο κενό.

Τέτοια ακριβώς είναι τα κύματα που εκπέμπουν σήμερα οι κεραίες των ραδιοφωνικών και τηλεοπτικών σταθμών, οι κεραίες της κινητής τηλεφωνίας, αλλά και τα κινητά τηλέφωνα. Ηλεκτρομαγνητικά κύματα, όμως, εκπέμπονται και όταν γυρίζουμε τον διακόπτη του ρεύματος στο σπίτι μας, για να ανάψουμε ή να σβήσουμε μια λάμπα, ή οποιαδήποτε ηλεκτρική συσκευή. Τέλος, το ίδιο το φως που εκπέμπει μια αναμμένη λάμπα ή οποιαδήποτε άλλη φωτεινή πηγή θεωρείται ως ηλεκτρομαγνητικό κύμα που παράγεται από την αναταραχή των ηλεκτρικά φορτισμένων σωματίων (ηλεκτρονίων) που περιέχουν τα άτομα της πηγής.

## Ασκήσεις

**5.1** Το διανυσματικό δυναμικό ενός επίπεδου ηλεκτρομαγνητικού κύματος περιγράφεται από τη συνάρτηση

$$\mathbf{A} = A_0 \sin(kx - \omega t) \mathbf{e}_x$$

όπου  $k$ ,  $\omega$  σταθερές, με  $\omega > 0$ .

α) Να εξηγηθεί η φυσική σημασία των σταθερών  $k$ ,  $\omega$ .

β) Να δειχτεί ότι

$$|k| = \frac{\omega}{c}.$$

γ) Να επιλεγεί το πρόσημο του  $k$ , έτσι ώστε το κύμα να διαδίδεται προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα  $x$ .

β) Να δειχτεί ότι, χωρίς βλάβη της γενικότητας, το αντίστοιχο βαθμωτό δυναμικό δίνεται από την έκφραση

$$\Phi = A_0 \sin(kx - \omega t)$$

Υπόδειξη. Επιλέξτε τη βαθμίδα στην οποία

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \partial_t \Phi = 0$$

και λάβετε υπόψη ότι κάθε αρμονική συνάρτηση που είναι φραγμένη σε κάθε σημείο του  $\mathbb{R}^3$  είναι σταθερή.

γ) Υπολογίστε το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο που αντιστοιχούν στο δοσμένο ηλεκτρομαγνητικό κύμα.

**5.2** Το διανυσματικό δυναμικό ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος στο κενό δίνεται από την έκφραση

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$$

όπου  $\mathbf{A}_0$  και  $\mathbf{k}$  σταθερά διανύσματα,  $\mathbf{x} := (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$  το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{x}$  και  $\omega$  θετική σταθερή.

α) Να δειχτεί ότι

$$|\mathbf{k}| = \frac{\omega}{c}.$$

β) Ναδειχτεί ότι, χωρίς βλάβη της γενικότητας, το αντίστοιχο βαθμωτό δυναμικό δίνεται από την έκφραση

$$\Phi = \frac{k}{|\mathbf{k}|} \cdot \mathbf{A}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}$$

Υπόδειξη. Επιλέξτε τη βαθμίδα στην οποία

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \partial_t \Phi = 0$$

και λάβετε υπόψη ότι κάθε αρμονική συνάρτηση που είναι φραγμένη σε κάθε σημείο του  $\mathbb{R}^3$  είναι σταθερή.

γ) Υπολογίστε το ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο που αντιστοιχούν στο δοσμένο ηλεκτρομαγνητικό κύμα.

δ) Δείχτε ότι οι κατευθύνσεις του ηλεκτρικού πεδίου, του μαγνητικού πεδίου και της διάδοσης του κύματος,  $\frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|}$ , είναι μεταξύ τους ορθογώνιες.

**5.3** Υποθέστε ότι το βαθμωτό δυναμικό  $\Phi(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{x} := (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , ενός χρονικά μεταβαλλόμενου ηλεκτρομαγνητικού πεδίου στο κενό είναι της μορφής

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = f(r) e^{i\omega t}, \quad r := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

α) Να βρεθεί και να λυθεί η διαφορική εξίσωση που καθορίζει τη συνάρτηση  $f(r)$ .

β) Να δοθεί η φυσική ερμηνεία του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου που αντιστοιχεί στις λύσεις της παραπάνω εξίσωσης.

## 6. Οι εξισώσεις Laplace και Poisson στον $\mathbb{R}^n$

Την εξίσωση Poisson (Πουασόν) την συναντήσαμε, στη μορφή  $\nabla^2 \Phi = -4\pi\rho$ , στο εδάφιο που ήταν αφιερωμένο στον κλασικό ηλεκτρομαγνητισμό. Πρόκειται για την απλούστερη δυνατή, γραμμική, μη ομογενή ΜΔΕ ελλειπτικού τύπου. Η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση, φέρει το όνομα του Laplace (Λαπλάς) και, στη συνέχεια, θα την γράφουμε στη μορφή

$$\Delta u(\mathbf{x}) = 0. \quad (6.1)$$

Με τη διαφορά ότι, από τώρα και στο εξής, το σύμβολο  $(\mathbf{x})$  θα δηλώνει το τυχαίο σημείο  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ενός ανοιχτού υποσύνολου  $\Omega$  του Ευκλείδειου χώρου  $\mathbb{R}^n$ , χωρίς περιορισμό στο  $n$ .

Το μήκος του  $\mathbf{x}$  θα το συμβολίζουμε με  $|\mathbf{x}|$ . Με άλλα λόγια,

$$|\mathbf{x}| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}. \quad (6.2)$$

Αυτός ο συμβολισμός είναι απόλυτα συμβατός και με το γεγονός ότι το  $|\mathbf{x}|$  συνήθως δηλώνει την απόλυτη τιμή ενός στοιχείου του  $\mathbb{R} \equiv \mathbb{R}^1$ .

Ένα *διανυσματικό πεδίο*, δηλαδή μια απεικόνιση  $\mathbf{w} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ , θα συμβολίζεται και με  $\mathbf{w}(\mathbf{x})$ . Δηλαδή,

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}) \equiv (w_1(\mathbf{x}), w_2(\mathbf{x}), \dots, w_n(\mathbf{x})), \quad (6.3)$$

όπου  $w_j(\mathbf{x})$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , συγκεκριμένες συναρτήσεις  $n$  ανεξάρτητων μεταβλητών (και ίσως μερικών ακόμη παραμέτρων). Οι τελεστές της κλίσης,  $\nabla$ , της απόκλισης  $\nabla \cdot$  και του Laplace,  $\Delta$ , ορίζονται με απλή επέκταση των τύπων που δώσαμε στις περιπτώσεις  $n = 2$  και  $n = 3$ .

Σε ότι ακολουθεί, το υποσύνολο  $\Omega$  του  $\mathbb{R}^n$  συνήθως θα είναι μια περιοχή με απλή γεωμετρία, γ.π. ένα ανοιχτό και συνεκτικό υποσύνολο σαν αυτό που περιέχεται σ' ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, μια σφαίρα και άλλα κανονικά σχήματα του  $\mathbb{R}^3$ . Με  $\partial\Omega$  θα συμβολίζουμε το σύνορο αυτής της περιοχής. Με άλλα λόγια,

$$\partial\Omega := \overline{\Omega} \setminus \Omega^\circ \quad (6.4)$$

όπου  $\overline{\Omega}$  το *ολοκλήρωμα* (ή κλειστή θήκη), δηλαδή το σύνολο των οριακών σημείων (limit points) του  $\Omega$  και  $\Omega^\circ$  το *εσωτερικό* του. Αυτό σημαίνει ότι ένα σημείο  $\mathbf{x}$  του  $\mathbb{R}^n$  ανήκει στο σύνορο του  $\Omega$  εάν έχει την ακόλουθη ιδιότητα: Κάθε ανοιχτή σφαίρα  $B_r(\mathbf{x})$  ακτίνας  $r$  με κέντρο το σημείο  $\mathbf{x}$ , εκτός από το ίδιο το  $\mathbf{x}$ , περιέχει σημεία τόσο από το εσωτερικό όσο και από το συμπλήρωμα  $\Omega^c := \mathbb{R}^n \setminus \Omega$  του  $\Omega$ .

Για να κάνουμε τη ζωή μας πιο εύκολη, θα απαιτήσουμε από το ανοιχτό υποσύνολο  $\Omega$  του  $\mathbb{R}^n$  να πληροί και άλλες προϋποθέσεις. Συγκεκριμένα, θέλουμε

(i) Το οικόπεδο να είναι... πανταχόθεν ελεύθερο. Δηλαδή, να μην είναι τα διάφορα τμήματα του  $\Omega$  ασφυκτικά το ένα δίπλα στο άλλο, σαν τις σύγχρονες πολυκατοικίες σε όλες τις πόλεις της Ελλάδας! Ο ... πολεοδομικός μας κανονισμός, λοιπόν, επιβάλλει την εξής ιδιότητα:

$$\partial\Omega = \partial(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}). \quad (6.5)$$

Γι' αυτόν το λόγο, το οικόπεδο  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ , όπου

$$\begin{aligned}\Omega_1 &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < a, 0 < y < b\}, \\ \Omega_2 &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < 2a, 0 < y < b\},\end{aligned}\tag{6.6}$$

δεν θεωρείται οικοδομήσιμο!

(ii) Το σύνορο  $\partial\Omega$  να είναι **τμηματικά ομαλό** (κλάσης  $C^k$ ,  $k \geq 1$ ). Δηλαδή, να είναι ενιαίο και λείο, ή να προκύπτει από την ένωση πεπερασμένου πλήθους τμημάτων, καθένα από τα οποία έχει τα χαρακτηριστικά μιας ομαλής καμπύλης ή επιφάνειας.

(iii) Αν  $\partial\Omega_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , είναι ένα από τα τμήματα του συνόρου, τότε σε κάθε σημείο  $\mathbf{x}$  του  $\partial\Omega_j$  να ορίζεται σαφώς ένα μοναδιαίο διάνυσμα  $\mathbf{v}_j(\mathbf{x})$  που είναι κάθετο στην "επιφάνεια"  $\partial\Omega_j$ , με φορά προς το εξωτερικό του  $\Omega$ .

(iv) Εκεί όπου τα τμήματα ενώνονται, να μη σχηματίζονται σουβλερές μύτες ή κοφτερές αιχμές.

Για να δώσουμε μια μαθηματική έκφραση και στις παραγράφους (ii-iv) του ... πολεοδομικού κανονισμού μας, ας υποθέσουμε ότι

α) Η συνάρτηση  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  είναι κλάσης  $C^k$ ,  $k \geq 1$ ,

β) Το σύνολο  $\Sigma := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : F(\mathbf{x}) = 0\}$  δεν είναι κενό και

γ) Η κλίση της  $F$  είναι μη μηδενική σε κάθε σημείο του  $\Sigma$ :  $\nabla F(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{x} \in \Sigma$ .

Τότε το υποσύνολο  $\Sigma$  ονομάζεται **υπερεπιφάνεια κλάσης  $C^k$  του  $\mathbb{R}^n$** .

Είναι φανερό ότι, το διάνυσμα  $\nabla F(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \Sigma$ , είναι κάθετο στην υπερεπιφάνεια. Αυτό μας επιτρέπει να κατασκευάσουμε αμέσως στο ίδιο σημείο ένα μοναδιαίο διάνυσμα,  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ , προς την ίδια ή την αντίθετη κατεύθυνση με το διάνυσμα  $\nabla F(\mathbf{x})$ .

Έτσι λοιπόν, η παράγραφος (ii) του κανονισμού απαιτεί από κάθε τμήμα  $\partial\Omega_j$  του συνόρου να έχει τη δομή μιας υπερεπιφάνειας κλάσης  $C^k$ ,  $k \geq 1$ . Αν αυτό το τμήμα ορίζεται μέσω της συνάρτησης  $F_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , αν δηλαδή  $\partial\Omega_j \subset \Sigma_j := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : F_j(\mathbf{x}) = 0\}$ , τότε το διάνυσμα  $\nabla F_j(\mathbf{x}) / |\nabla F_j(\mathbf{x})|$ , ή το αντίθετό του, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για καλυφθεί η απαίτηση της παραγράφου (iii). Τέλος, αν το σημείο  $\mathbf{x} \in \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j$ , με  $i \neq j$ , τότε, η παράγραφος (iv) δεν επιτρέπει στα διανύσματα  $\mathbf{v}_i(\mathbf{x})$  και  $\mathbf{v}_j(\mathbf{x})$  να είναι παράλληλα.

Κάθε περιοχή του  $\mathbb{R}^n$  που σέβεται όλους τους όρους του κανονισμού μας θα λέγεται ... **κανονική**.

### Παράδειγμα 6.1

(i) Αν  $\mathbf{x} \equiv (x, y, z)$  είναι Καρτεσιανές συντεταγμένες του  $\mathbb{R}^3$  και  $r := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , τότε το ανοιχτό σύνολο  $\Omega := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq r < a\}$  παριστάνει το εσωτερικό μιας σφαίρας ακτίνας  $a$  που έχει το κέντρο της στην αρχή των αξόνων. Το σύνορο του  $\Omega$  είναι η επιφάνεια αυτής της σφαίρας:  $\partial\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : r = a\}$ .

Είναι προφανές ότι, θέτοντας  $F(\mathbf{x}) = r - a$ , μπορούμε να περιγράψουμε το σύνορο  $\partial\Omega$  ως μια ισοσταθμική επιφάνεια της συνάρτησης  $F(\mathbf{x})$ :  $\partial\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : F(\mathbf{x}) = 0\}$ .

Τότε,  $\nabla F(\mathbf{x}) = (x/r, y/r, z/r) \equiv \mathbf{x}/r$  και άρα  $\nabla F(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{x}/a \neq \mathbf{0}$  όταν το  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ . Στην προκειμένη περίπτωση, το μοναδιαίο διάνυσμα  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  που είναι κάθετο στην επιφάνεια  $\partial\Omega$  κι έχει φορά προς το εξωτερικό της περιοχής  $\Omega$  ταυτίζεται με την κλίση  $\nabla F(\mathbf{x})$  της συνάρτησης μέσω της οποίας ορίζεται το σύνορο.

(ii) Είναι φανερό ότι, παραλείποντας τη συντεταγμένη  $z$  στο προηγούμενο παράδειγμα, καταλήγουμε αμέσως στον κυκλικό δίσκο  $\Omega := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq r < a\}$  του Ευκλείδειου επίπεδου. Το σύνορο αυτού του δίσκου δεν είναι βέβαια επιφάνεια, αλλά ο κύκλος  $\partial\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : r = a\}$ .

Αν, αντί να μειώσουμε, αυξήσουμε τη διάσταση του περιβάλλοντα χώρου, μπορούμε αμέσως να κατασκευάσουμε μια "υπερ-σφαίρα". Συγκεκριμένα, και για  $n > 3$ , θέτουμε

$$r \equiv |\mathbf{x}| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}, \quad (6.7)$$

οπότε το σύνολο

$$\partial\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : F(\mathbf{x}) \equiv r - a = 0\} \quad (6.8)$$

αποτελείται από όλα τα σημεία του  $\mathbb{R}^n$  που βρίσκονται σε απόσταση  $a$  από την αρχή των αξόνων,  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Συνεπώς, το  $\partial\Omega$  είναι μια υπερεπιφάνεια που χωρίζει την σφαιρική περιοχή

$$\Omega := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : 0 \leq r < a\} \quad (6.9)$$

από τον υπόλοιπο  $n$ -διάστατο χώρο.

Επειδή διευκολύνει τη γραφή των τύπων που ακολουθούν, εισάγουμε σε τούτο το σημείο τον εξής συμβολισμό:

$$\partial_j := \frac{\partial}{\partial x_j}. \quad (6.10)$$

Έτσι,

$$\partial_j r = \frac{x_j}{r} \quad (6.11)$$

και άρα

$$\nabla r := (\partial_1 r, \partial_2 r, \dots, \partial_n r) = \frac{1}{r} (x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv \frac{\mathbf{x}}{r}. \quad (6.12)$$

Συνακόλουθα, για  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ , το διάνυσμα  $\nabla F(\mathbf{x})$  γίνεται

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{a}. \quad (6.13)$$

Το τελευταίο είναι προφανώς μοναδιαίο, κάθετο στη σφαιρική υπερεπιφάνεια  $\partial\Omega$  και με το βλέμμα στραμμένο ... στο άπειρο.

(ii) Θεωρούμε δύο ομόκεντρες σφαίρες ακτίνας  $a$  και  $b > a$ , αντίστοιχα. Η μεταξύ τους περιοχή είναι το ανοιχτό σύνολο

$$\Omega := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : a < |\mathbf{x} - \xi| < b\} \quad (6.14)$$

με σύνορο το



$$\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2, \quad \partial\Omega_1 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x} - \xi| = a\}, \quad \partial\Omega_2 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x} - \xi| = b\}. \quad (6.15)$$

Η έκφραση για το μοναδιαίο, κάθετο προς το σύνορο και προς τα έξω διάνυσμα αλλάζει, ανάλογα με το σε ποιο από τα δύο τμήματα του συνόρου βρισκόμαστε:

$$\mathbf{v}_1(\mathbf{x}) = -\frac{\mathbf{x}}{a}, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_1, \quad \mathbf{v}_2(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{b}, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_2. \quad (6.16)$$

(iii) Το σύνολο

$$\Omega := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}| < a, z > 0\} \quad (6.17)$$

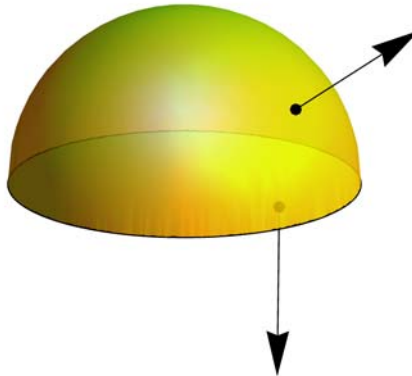
αποτελεί ένα ανοιχτό ημισφαίριο ακτίνας  $a$ . Η ένωση των συνόλων

$$\partial\Omega_1 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}| = a, z \geq 0\}, \quad \partial\Omega_2 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}| \leq a, z = 0\}, \quad (6.18)$$

ορίζει το σύνορο του ημισφαιρίου. Προφανώς,

$$\mathbf{v}_1(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{a}, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_1, \quad \mathbf{v}_2(\mathbf{x}) = (0, 0, -1), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_2. \quad (6.19)$$

Στο Σχ. 6.1, δείχνουμε το κλειστό ημισφαίριο  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$  και το κάθετο διάνυσμα σε δύο αντιπροσωπευτικά σημεία της επιφάνειάς του,  $\partial\Omega$ .



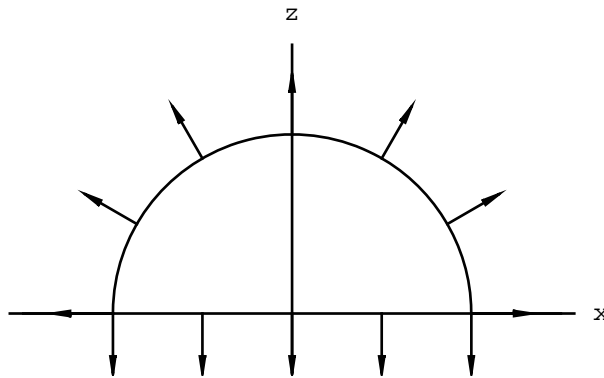
**Σχ. 6.1.** Το κάθετο διάνυσμα σε δύο σημεία της ημισφαιρικής επιφάνειας.

Προφανώς,

$$\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}| = a, z = 0\}. \quad (6.20)$$

Με άλλα λόγια, τα δύο τμήματα του συνόρου συναντιούνται κατά μήκος του κύκλου  $C$  του επίπεδου  $xy$ , ο οποίος έχει ακτίνα  $a$  και κέντρο στην αρχή των αξόνων. Είναι φανερό πως, καθώς πλησιάζουμε σ' αυτό τον κύκλο από τη μεριά του τμήματος  $\partial\Omega_1$ , το  $\mathbf{v}_1(\mathbf{x})$  καταλήγει σε διάνυσμα του επίπεδου  $xy$  που βλέπει προς το εξωτερικό του κύκλου  $C$ . Αντίθετα, καθώς πλησιάζουμε στον κύκλο  $C$  από την πλευρά του τμήματος  $\partial\Omega_2$ , το διάνυσμα  $\mathbf{v}_2(\mathbf{x})$  παραμένει παράλληλο προς τον άξονα  $z$  και με φορά "προς τα κάτω". Άρα, σε κάθε σημείο  $\mathbf{x} \in C$  τα

διανύσματα  $\mathbf{v}_1(\mathbf{x})$  και  $\mathbf{v}_2(\mathbf{x})$  σχηματίζουν ορθή γωνία. Αυτό που μόλις περιγράψαμε φαίνεται καθαρότερα, αν εξετάσουμε την τομή του ημισφαιρίου  $\bar{\Omega}$  μ' ένα κατακόρυφο επίπεδο, γ.π. με το επίπεδο  $xz$ . Το αποτέλεσμα φαίνεται στο Σχ. 6.2.



**Σχ. 6.2.** Το κάθετο διάνυσμα σε διάφορα σημεία μιας κατακόρυφης τομής της ημισφαιρικής επιφάνειας.

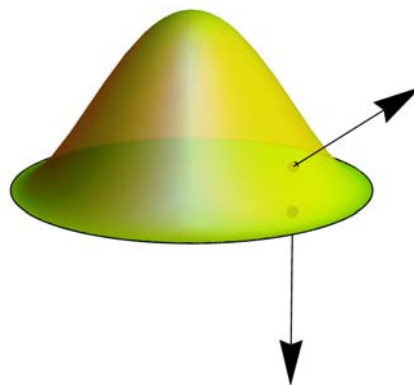
(iv) Ως παράδειγμα τρισδιάστατης περιοχής που **δεν** πληροί τις προϋποθέσεις για να χαρακτηριστεί κανονική, θεωρούμε το φραγμένο σύνολο

$$\Omega := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < (1 - x^2 - y^2)^2\}.$$

Πρόκειται για την περιοχή ανάμεσα στο επίπεδο  $x - y$  και το γράφημα της συνάρτησης

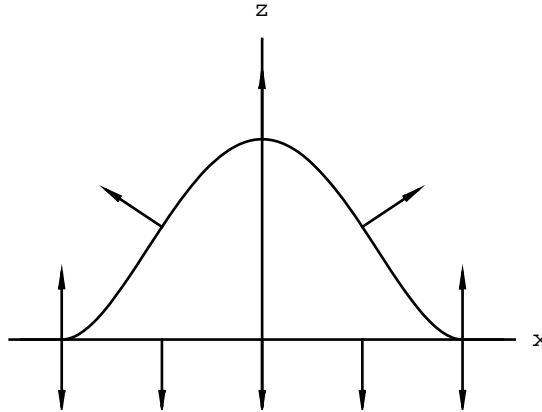
$$f(x, y) = (1 - x^2 - y^2)^2, \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

Η περιοχή  $\Omega$ , καθώς και το κάθετο διάνυσμα σε δύο σημεία της επιφάνειάς της, φαίνεται στο Σχ. 6.3.



**Σχ. 6.3.** Το κάθετο διάνυσμα σε δύο σημεία της επιφάνειας που αποτελείται από το γράφημα της συνάρτησης  $f(x, y) = (1 - x^2 - y^2)^2$ ,  $x^2 + y^2 \leq 1$ , και τον δίσκο  $x^2 + y^2 \leq 1$  του επίπεδου  $x - y$ .

Στο Σχ. 6.4, δείχνουμε την τομή της κλειστής περιοχής  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$  με το επίπεδο  $x-z$ , καθώς και το κάθετο διάνυσμα σε διάφορα σημεία της επιφάνειας  $\partial\Omega$ . Εκεί, φαίνεται καθαρά ότι, το πάνω τμήμα της επιφάνειας συναντιέται με τη βάση με τρόπο ώστε να σχηματίζεται κοφτερό χεΐλος. Αυτή η "καταστροφική" ιδιότητα αντιστοιχεί στο ακόλουθο γεγονός: Στον κύκλο  $x^2 + y^2 = 1, z = 0$ , το κάθετο στην επιφάνεια διάνυσμα που ορίζεται με βάση το πάνω τμήμα της είναι κατακόρυφο (και κοιτάει προς τα πάνω). Το ίδιο ισχύει και για κείνο που ορίζεται από την βάση (μόνο που αυτό βλέπει προς τα κάτω).



**Σχ. 6.4.** Το κάθετο διάνυσμα σε αντιπροσωπευτικά σημεία της επιφάνειας που αποτελείται από έναν κυκλικό δίσκο και το γράφημα της συνάρτησης  $f(x, y) = (1 - x^2 - y^2)^2, x^2 + y^2 \leq 1$ .

(vi) Το ανοιχτό παραλληλεπίπεδο με πλευρές μήκους  $2a, 2b$  και  $2c$ , αντίστοιχα, μπορεί να περιγραφεί ως το σύνολο

$$\Omega := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| < a, |y| < b, |z| < c\}$$

με σύνορο το

$$\partial\Omega = \bigcup_{j=1}^6 \partial\Omega_j,$$

όπου

$$\partial\Omega_1 := \{x \in \mathbb{R}^3 : x = -a, |y| \leq b, |z| \leq c\},$$

$$\partial\Omega_2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : x = a, |y| \leq b, |z| \leq c\},$$

$$\partial\Omega_3 := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq a, y = -b, |z| \leq c\},$$

$$\partial\Omega_4 := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq a, y = b, |z| \leq c\},$$

$$\partial\Omega_5 := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq a, |y| \leq b, z = -c\}$$

$$\partial\Omega_6 := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq a, |y| \leq b, z = c\}.$$

Αφήνουμε για άσκηση την κατασκευή των αντίστοιχων διανυσμάτων  $\mathbf{v}_j(\mathbf{x})$  και της εξακρίβωσης ότι πληρούν την προϋπόθεση (iv) του ... πολεοδομικού κανονισμού.

■

## Ασκήσεις

**6.1** Θεωρήστε το εξής ανοιχτό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^3$

$$\Omega = \{ \mathbf{x} \equiv (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < a^2, z < (a^2 - x^2 - y^2)^2 \}$$

α) Να προσδιοριστεί το σύνορο  $\partial\Omega$  της περιοχής  $\Omega$ .

β) Να υπολογιστεί το προς τα έξω μοναδιαίο διάνυσμα  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  σε κάθε  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ .

γ) Να εξεταστεί αν η περιοχή  $\Omega$  πληροί τις προϋποθέσεις (i)-(iv) του "πολεοδομικού κανονισμού".

**6.2** Θεωρήστε το εξής ανοιχτό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^3$

$$\Omega := \{ \mathbf{x} \equiv (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < b, z > \sqrt{x^2 + y^2} \}$$

α) Προσδιορίστε το σύνορο  $\partial\Omega$  της περιοχής  $\Omega$ .

β) Ποιές από τις τις προϋποθέσεις (i)-(iv) της κανονικής περιοχής πληροί η  $\Omega$ ;

**6.3** α) Προσδιορίστε το σύνορο  $\partial\Omega$  της περιοχής

$$\Omega := \{ \mathbf{x} \equiv (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < a < z < b, z > \sqrt{x^2 + y^2} \}$$

β) Υπολογίστε το προς τα έξω μοναδιαίο διάνυσμα  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  σε κάθε  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ .

γ) Είναι η περιοχή  $\Omega$  κανονική;

**6.4** α) Προσδιορίστε το σύνορο  $\partial\Omega$  της περιοχής

$$\Omega := \{ \mathbf{x} \equiv (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < b, z > x^2 + y^2 \}$$

β) Υπολογίστε το προς τα έξω μοναδιαίο διάνυσμα  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  σε κάθε  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ .

γ) Είναι η περιοχή  $\Omega$  κανονική;

**6.5** α) Προσδιορίστε την επιφάνεια  $\partial\Omega$  που περιβάλλει την περιοχή

$$\Omega := \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : -(1 - x^2 - y^2)^2 < z < (1 - x^2 - y^2)^2 \}$$

β) Υπολογίστε το προς τα έξω μοναδιαίο διάνυσμα  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  σε κάθε  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ .

γ) Κατασκευάστε ένα σχήμα που να δείχνει την τομή της επιφάνειας  $\partial\Omega$  με το επίπεδο  $y - z$  και το κάθετο στην  $\partial\Omega$  μοναδιαίο διάνυσμα  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  σε ορισμένα σημεία της τομής.

δ) Δείχτε ότι η περιοχή  $\Omega$  δεν είναι κανονική.

## 7. Θεμελιακές λύσεις της εξίσωσης Laplace

Στο προηγούμενο εδάφιο δείξαμε ότι οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης της βαθμωτής συνάρτησης

$$r(\mathbf{x}) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}, \quad (7.1)$$

είναι ίσες με

$$\partial_j r(\mathbf{x}) = \frac{x_j}{r}, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad \mathbf{x} \in \Omega = \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}. \quad (7.2)$$

Από την τελευταία σχέση και την προφανή

$$\partial_k(x_j) = \delta_{jk} := \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases} \quad (7.3)$$

αμέσως συνάγεται ότι

$$\partial_k(\partial_j r) = \partial_k\left(\frac{x_j}{r}\right) = \frac{\partial_k(x_j)}{r} + x_j \partial_k\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\delta_{jk}}{r} - \frac{x_j x_k}{r^3} \quad (7.4)$$

Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι, η συνάρτηση  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  είναι κλάσης  $C^2$  και **σφαιρικά συμμετρική**. Αυτό σημαίνει ότι η  $f$  εξαρτιέται μόνο από την απόσταση  $|\mathbf{x}|$  του σημείου  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  από την αρχή των αξόνων. Με άλλα λόγια, υπάρχει συνάρτηση  $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , τέτοια ώστε

$$f(\mathbf{x}) = \phi(r). \quad (7.5)$$

Σ' αυτή την περίπτωση, οι (7.2), (7.4) οδηγούν αμέσως στα εξής αποτελέσματα:

$$\partial_j f(\mathbf{x}) = \phi'(r) \partial_j r = \phi'(r) \frac{x_j}{r}, \quad (7.6)$$

$$\partial_k(\partial_j f) = \phi''(r) \partial_k r \partial_j r + \phi'(r) \partial_k(\partial_j r) = \phi''(r) \frac{x_j x_k}{r} + \phi'(r) \left( \frac{\delta_{jk}}{r} - \frac{x_j x_k}{r^3} \right). \quad (7.7)$$

Συνακόλουθα,

$$\Delta f(\mathbf{x}) \equiv \sum_{j=1}^n \partial_j(\partial_j f) = \sum_{j=1}^n \left[ \phi''(r) \frac{x_j^2}{r^2} + \phi'(r) \left( \frac{\delta_{jj}}{r} - \frac{x_j^2}{r^3} \right) \right]. \quad (7.8)$$

Όμως,

$$\sum_{j=1}^n x_j^2 = r^2, \quad \sum_{j=1}^n \delta_{jj} = n. \quad (7.9)$$

Άρα,

$$\sum_{j=1}^n \partial_j(\partial_j f) = \phi''(r) \frac{r^2}{r^2} + \phi'(r) \left( \frac{n}{r} - \frac{r^2}{r^3} \right). \quad (7.10)$$

Αυτό σημαίνει ότι έχουμε αποδείξει το

**Λήμμα 7.1**

Αν η συνάρτηση  $f(\mathbf{x})$  είναι κλάσης  $C^2(\mathbb{R}^n)$  και της μορφής  $f(\mathbf{x}) = \phi(r)$ , όπου  $r := |\mathbf{x}|$ , τότε

$$\Delta f(\mathbf{x}) = \phi''(r) + \frac{n-1}{r} \phi'(r), \quad r \neq 0. \quad (7.11)$$

■

Αυτό το αποτέλεσμα μας επιτρέπει να κατασκευάσουμε όλες τις σφαιρικά συμμετρικές λύσεις της εξίσωσης του Laplace στον  $\mathbb{R}^n$ , για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ :

**Θεώρημα 7.1**

Η συνάρτηση  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  αποτελεί σφαιρικά συμμετρική λύση της εξίσωσης  $\Delta f(\mathbf{x}) = 0$ , εάν και μόνο όταν, στο ανοιχτό σύνολο  $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ ,

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} C \ln r + \tilde{C}, & n = 2 \\ \frac{C}{2-n} r^{2-n} + \tilde{C}, & n > 2 \end{cases} \quad (7.12)$$

όπου  $C, \tilde{C}$  τυχαίες σταθερές.

Απόδειξη

Από τον περιορισμό της σφαιρικής συμμετρίας έπεται ότι ισχύει η (7.5). Αλλά τότε, η (7.11) συνεπάγεται ότι

$$\Delta f(\mathbf{x}) = 0 \Leftrightarrow \phi''(r) + \frac{n-1}{r} \phi'(r) = 0. \quad (7.13)$$

Αν θέσουμε  $\psi(r) := \phi'(r)$ , η τελευταία ΣΔΕ γίνεται

$$\psi'(r) + (n-1)r^{-1}\psi(r) = 0. \quad (7.14)$$

Αυτή ολοκληρώνεται αμέσως για να δώσει  $\psi(r) = Cr^{1-n}$ . Δηλαδή,  $\phi'(r) = Cr^{1-n}$ . Αλλά, κι αυτή η ΣΔΕ ολοκληρώνεται αμέσως για να δώσει το δεξί μέλος της (7.12). Αρκεί μόνο να προσέξουμε ότι  $\phi'(r) = Cr^{-1}$ , όταν το  $n = 2$ .

■

**Παρατήρηση**

(i) Οι λύσεις (7.12) χαρακτηρίζονται ως σφαιρικά συμμετρικές για τον εξής προφανή λόγο: Παίρνουν την ίδια τιμή σε όλα τα σημεία του  $\mathbb{R}^n$  που έχουν κοινή απόσταση από την αρχή των αξόνων. Άρα, στην περίπτωση του  $\mathbb{R}^3$ , αυτά τα σημεία συναποτελούν μια σφαιρική επιφάνεια με κέντρο το σημείο  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Όταν το  $n > 3$ , το αντίστοιχο υποσύνολο του  $\mathbb{R}^n$  ονομάζεται **σφαιρική υπερεπιφάνεια**. Τέλος, στην ειδικότερη περίπτωση  $n = 2$  τα σημεία που έχουν την ίδια απόσταση από την αρχή των αξόνων αποτελούν έναν κύκλο.

(ii) Η ανάλυση που οδήγησε στις λύσεις (7.12) δεν επηρεάζεται στο παραμικρό αν, αντί για λύσεις που εξαρτιώνται μόνο από την απόσταση του σημείου  $\mathbf{x}$  από την αρχή των αξόνων, αναζητήσουμε λύσεις που εξαρτιώνται μόνο από την απόσταση του  $\mathbf{x}$  από ένα άλλο συγκεκριμένο σημείο  $\xi \neq \mathbf{0}$  του  $\mathbb{R}^n$ . Οι αντίστοιχες λύσεις λέγονται **σφαιρικά συμμετρικές ως προς**

$$f(\mathbf{x}) = \begin{cases} C \ln |\mathbf{x} - \xi| + \tilde{C}, & n = 2 \\ \frac{C}{2-n} |\mathbf{x} - \xi|^{2-n} + \tilde{C}, & n > 2 \end{cases} \quad (7.15)$$

Σε κάθε περίπτωση, το σημείο  $\xi$  ονομάζεται **κέντρο ή πόλος των λύσεων** που εξαρτώνται μόνο από τον συνδυασμό  $|\mathbf{x} - \xi|$ .

(iii) Για λόγους που θα αναδειχτούν με σαφήνεια στα επόμενα, οι σφαιρικά συμμετρικές ονομάζονται και **θεμελιακές λύσεις της εξίσωσης Laplace**.

(iv) Αξίζει να σημειωθεί ότι, στην περίπτωση του  $\mathbb{R}^3$ , η θεμελιακή λύση της εξίσωσης  $\Delta f(\mathbf{x}) = 0$  είναι της μορφής

$$f(\mathbf{x}) = \frac{C}{r} + \tilde{C}. \quad (7.16)$$

Αν παραβλέψουμε τη σταθερή  $\tilde{C}$ , η οποία δεν επηρεάζει την κλίση της  $f(\mathbf{x})$ , η πιο πάνω λύση είναι ταυτόσημη με το ηλεκτρικό δυναμικό

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{Q}{|\mathbf{x} - \xi|}, \quad \mathbf{x} \in \Omega := \mathbb{R}^3 \setminus \{\xi\}, \quad (7.17)$$

που αντιστοιχεί σε ένα σωματίο με φορτίο  $Q$  τοποθετημένο στο σημείο  $\xi$ . Αυτή η σύνδεση των θεμελιακών λύσεων της εξίσωσης Laplace με το ηλεκτρικό δυναμικό που αντιστοιχεί σε ένα φορτισμένο σωματίο διευκολύνει σημαντικά την κατασκευή πιο σύνθετων λύσεων της παραπάνω εξίσωσης.

## Ασκήσεις

7.1 Να κατασκευαστούν οι σφαιρικά συμμετρικές λύσεις της ΜΔΕ

$$\Delta u(\mathbf{x}) + \lambda u(\mathbf{x}) = 0, \quad \lambda > 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2.$$

7.2 Να λυθεί η προηγούμενη άσκηση όταν το  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , με  $n \geq 3$ .

7.3 Να κατασκευαστούν οι σφαιρικά συμμετρικές λύσεις της ΜΔΕ

$$\Delta u(\mathbf{x}) - \lambda u(\mathbf{x}) = 0, \quad \lambda > 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2.$$

7.4 Να λυθεί η προηγούμενη άσκηση όταν το  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , με  $n \geq 3$ .

## 8. Οι ταυτότητες Green κι οι συνέπειές τους

Το Θεώρημα (του) Gauss και τις ταυτότητες (του) Green τις συναντήσαμε ήδη στα εδάφια IV.11 και VI.1 του Τόμου Α'. Ωστόσο, για να διατηρήσουμε την αυτονομία αυτού του τόμου, τις παρουσιάζουμε, συνοπτικά, και στο παρόν εδάφιο.

Ας υποθέσουμε, λοιπόν, ότι το διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{w}(\mathbf{x})$  είναι κλάσης  $C^m$  στο ανοιχτό υποσύνολο  $U$  του  $\mathbb{R}^3$  και πως το ολοκλήρωμα  $\bar{\Omega}$  του ανοιχτού υποσύνολου  $\Omega$  περιέχεται στο  $U$ . Τότε, λέμε ότι το  $\mathbf{w} \in C^m(\bar{\Omega})$ . Πιο συγκεκριμένα, ας υποθέσουμε ότι το  $\mathbf{w} \in C^1(\bar{\Omega})$  και πως το  $\Omega$  αποτελεί μια φραγμένη **κανονική περιοχή**, με την έννοια ότι τηρεί τις προϋποθέσεις του κανονισμού του Εδάφιου 6. Τότε ισχύει το κλασικό **θεώρημα (του) Gauss ή της απόκλισης**, δηλαδή η ταυτότητα

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{w} dV = \int_{\partial\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} dS \quad (8.1)$$

Ωστόσο, είναι πολύ εύκολο να αποδείξει κανείς ότι η (8.1), που είναι ταυτόσημη με την

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{w} dV = \int_{\partial\Omega} \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} dS, \quad (8.2)$$

δεν ισχύει μόνο στον  $\mathbb{R}^3$ , αλλά σε κάθε  $\mathbb{R}^n$ , με  $n \geq 2$ . Απλώς, στη γενική περίπτωση το αριστερό μέλος της (8.1) συμβολίζει ένα  $n$ -πλό ολοκλήρωμα Riemann, ενώ το δεξί συμβολίζει ένα **υπερεπιφανειακό ολοκλήρωμα**. Το τελευταίο, είναι ένα  $(n-1)$ -πλό ολοκλήρωμα που ορίζεται με τρόπο ακριβώς ανάλογο προς εκείνον που οδηγεί στα διπλά επιφανειακά ολοκληρώματα της συνήθους ανάλυσης στον  $\mathbb{R}^3$ .

Σε κάθε περίπτωση, εκείνο που αξίζει να σημειώσουμε είναι ότι, το θεώρημα της απόκλισης συνδέει τη συμπεριφορά ενός διανυσματικού πεδίου στο εσωτερικό μιας φραγμένης περιοχής  $\Omega$  του  $\mathbb{R}^n$  με τις τιμές του ίδιου πεδίου στην (υπερ)επιφάνεια  $\partial\Omega$ , η οποία αποτελεί το σύνορο της περιοχής  $\Omega$ .

### Οι ταυτότητες του Green

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{w}$  ορίζεται μέσω των δύο βαθμωτών  $u$  και  $\varphi$  ως εξής:

$$\mathbf{w} = u \nabla \varphi, \quad u \in C^1(\bar{\Omega}), \varphi \in C^2(\bar{\Omega}). \quad (8.3)$$

Τότε το πεδίο  $\mathbf{w} \in C^1(\bar{\Omega})$  και η αντικατάστασή του στον τύπο (8.2) του θεωρήματος Gauss δίνει

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (u \nabla \varphi) dV = \int_{\partial\Omega} (u \nabla \varphi) \cdot \mathbf{v} dS \quad (8.4)$$

Όμως, ένας απλός υπολογισμός δείχνει ότι

$$\nabla \cdot (u \nabla \varphi) = \nabla u \cdot \nabla \varphi + u \nabla \cdot (\nabla \varphi) = \nabla u \cdot \nabla \varphi + u \Delta \varphi. \quad (8.5)$$

Αν λοιπόν αντικαταστήσουμε αυτό το αποτέλεσμα στο αριστερό μέλος της (8.3) και στο δεξί της θέσουμε



$$\mathbf{v} \cdot \nabla \varphi \equiv \partial_{\mathbf{v}} \varphi, \quad (8.6)$$

θα καταλήξουμε στη σχέση

$$\int_{\Omega} (u \Delta \varphi + \nabla u \cdot \nabla \varphi) dV = \int_{\partial\Omega} u \partial_{\mathbf{v}} \varphi dS \quad (8.7)$$

Αυτή ονομάζεται **πρώτη ταυτότητα (του) Green**.

Αν ξαναγράψουμε την (8.6) θέτοντας  $(u, \varphi) \rightarrow (\varphi, u)$  και αφαιρέσουμε το αποτέλεσμα από την αρχική έκφραση, θα καταλήξουμε στην

$$\int_{\Omega} (u \Delta \varphi - \varphi \Delta u) dV = \int_{\partial\Omega} (u \partial_{\mathbf{v}} \varphi - \varphi \partial_{\mathbf{v}} u) dS \quad (8.8)$$

Αυτή είναι η **δεύτερη ταυτότητα (του) Green**.

Τέλος, ως **τρίτη ταυτότητα (του) Green** συχνά αναφέρεται η σχέση

$$\int_{\Omega} \Delta \varphi dV = \int_{\partial\Omega} \partial_{\mathbf{v}} \varphi dS \quad (8.9)$$

που προκύπτει θέτοντας  $u = 1$  στην (8.6).

### Άμεσες συνέπειες των ταυτοτήτων Green

#### α) Αναγκαία συνθήκη για το πρόβλημα Neumann για την εξίσωση Laplace

Κάθε συνάρτηση κλάσης  $C^2(\Omega)$  που είναι ταυτόχρονα και λύση της εξίσωσης Laplace καλείται **αρμονική στην περιοχή  $\Omega$** . Από την τρίτη ταυτότητα Green αμέσως έπεται ότι,

Οι συνοριακές τιμές μιας συνάρτησης  $\varphi \in C^2(\bar{\Omega})$  που είναι **αρμονική στην φραγμένη περιοχή  $\Omega$**  οφείλουν να τηρούν την ολική συνθήκη

$$\int_{\partial\Omega} \partial_{\mathbf{v}} \varphi dS = 0. \quad (8.10)$$

#### Παράδειγμα 8.1

Θεωρούμε την περιοχή

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < a, 0 < y < b, 0 < z < c\}$$

που περιέχεται σε ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο διαστάσεων  $a \times b \times c$ . Το ΠΣΤ

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad (x, y, z) \in \Omega,$$

$$\partial_z u(x, y, c) = \sin \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{b} y, \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b$$

$$\partial_{\mathbf{v}} u = 0 \text{ σε κάθε άλλο σημείο της επιφάνειας } \partial\Omega,$$

δεν έχει λύση.

Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι,

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \partial_\nu \varphi \, dS &= \int_0^b \int_0^c [-\partial_x u(0, y, z) + \partial_x u(a, y, z)] \, dy \, dz \\ &+ \int_0^a \int_0^c [-\partial_y u(x, 0, z) + \partial_y u(x, b, z)] \, dx \, dz \\ &+ \int_0^a \int_0^b [-\partial_z u(x, y, 0) + \partial_z u(x, y, c)] \, dx \, dy \\ &= \int_0^a \int_0^b \sin \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{b} y \, dx \, dy = \frac{4ab}{\pi^2} \neq 0, \end{aligned}$$

πράγμα που αντίκειται στη συνθήκη (8.10). ■

### β) Μοναδικότητα της λύσης των τριών θεμελιακών ΠΣΤ για την εξίσωση Poisson

#### Θεώρημα 8.1

Υποθέτουμε ότι η  $\Omega$  είναι μια φραγμένη, κανονική περιοχή με σύνορο κλάσης  $C^2$ . Αν οι συναρτήσεις  $h, f$  είναι συνεχείς και η  $\gamma$  συνεχής και μη αρνητική (όχι όμως ταυτοτικά μηδενική), τότε, το πρόβλημα *Dirichlet*

$$\Delta u = h(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad u = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (8.11)$$

καθώς και το πρόβλημα *Robin*,

$$\Delta u = h(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \partial_\nu u + \gamma(\mathbf{x})u = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (8.12)$$

επιδέχονται μία το πολύ λύση κλάσης  $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ .

#### Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι τόσο η  $u_1$  όσο και η  $u_2$  είναι λύσεις του προβλήματος Robin. Τότε η διαφορά τους,  $v = u_1 - u_2$ , αποτελεί λύση του ΠΣΤ

$$\Delta v = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \partial_\nu v + \gamma(\mathbf{x})v = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (8.13)$$

Αν στην 1<sup>η</sup> ταυτότητα Green θέσουμε  $u = \varphi = v$ , θα πάρουμε

$$\int_{\Omega} (v \Delta v + \nabla v \cdot \nabla v) \, dV = \int_{\partial\Omega} v \partial_\nu v \, dS. \quad (8.14)$$

Λαβαίνοντας υπόψη τις (8.13), γράφουμε αυτή τη σχέση στη μορφή

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla v \, dV = - \int_{\partial\Omega} \gamma v^2 \, dS. \quad (8.15)$$

Τώρα, το αριστερό μέλος της (8.15) δεν μπορεί να είναι αρνητικό:

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla v \, dV \equiv \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dV \geq 0. \quad (8.16)$$

Από την άλλη μεριά, η υπόθεση ότι  $\gamma(\mathbf{x}) \geq 0, \mathbf{x} \in \partial\Omega$ , έχει την εξής συνέπεια για το δεξί μέλος της (8.15):

$$- \int_{\partial\Omega} \gamma v^2 \, dS \leq 0. \quad (8.17)$$

Συνακόλουθα,

$$\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dV = 0 \quad (8.18)$$

και, άρα,  $|\nabla v(\mathbf{x})| = 0$ , για κάθε  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Αλλά, τότε,  $\nabla v(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ , κι αυτό σημαίνει ότι η  $v$

Όμως, έχουμε επίσης υποθέσει ότι η  $v \in C^1(\overline{\Omega})$ . Α fortiori, η συνάρτηση  $v$  είναι συνεχής στο σύνολο  $\overline{\Omega}$ . Από αυτή την ιδιότητα και το προηγούμενο συμπέρασμα αμέσως συνάγεται ότι η  $v$  έχει την ίδια τιμή σε ολόκληρη την περιοχή  $\overline{\Omega}$ .

Για τον ίδιο λόγο, η υπόθεση ότι η  $v \in C^1(\overline{\Omega})$ , σε συνδυασμό με το αποτέλεσμα ότι  $\nabla v(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  για κάθε  $\mathbf{x} \in \Omega$ , συνεπάγεται ότι  $\nabla v = \mathbf{0}$  και στα σημεία της (υπερ)επιφάνειας  $\partial\Omega$ . Όμως, τότε, ο πρώτος όρος της συνθήκης Robin  $\partial_\nu v + \gamma(\mathbf{x})v = 0$ ,  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ , μηδενίζεται, πράγμα που οδηγεί στο ακόλουθο συμπέρασμα: Στα σημεία του σύνορου  $\partial\Omega$  στα οποία  $\gamma(\mathbf{x}) > 0$ , η συνάρτηση  $v$  αναγκαστικά μηδενίζεται. Αλλά ήδη γνωρίζουμε ότι η  $v$  διατηρεί την ίδια τιμή σε κάθε σημείο της περιοχής  $\overline{\Omega}$ . Συνεπώς,  $v(\mathbf{x}) = 0$  για κάθε  $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}$ . ■

## Θεώρημα 8.2

Αν η  $\Omega$  είναι μια φραγμένη, κανονική περιοχή και **το πρόβλημα Neumann**

$$\Delta u = h(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega, \quad \partial_\nu u = f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (8.19)$$

επιδέχεται δύο λύσεις κλάσης  $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ , αυτές θα διαφέρουν το πολύ κατά μία σταθερή ποσότητα. Σε κάθε περίπτωση, αυτό το πρόβλημα αποκλείεται να έχει ακόμα και μία λύση αυτού του είδους, αν οι (δοσμένες) συναρτήσεις  $h(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$  και  $f(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$  δεν πληρούν τη συνθήκη

$$\int_{\Omega} h(\mathbf{x}) dV = \int_{\partial\Omega} f(\mathbf{x}) dS. \quad (8.20)$$

### Απόδειξη

Αφήνεται για άσκηση. ■

## Ασκήσεις

**8.1** Διατυπώστε ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών τύπου Neumann για μια σφαιρική περιοχή του  $\mathbb{R}^3$ , το οποίο δεν επιδέχεται λύση.

**8.2** Αποδείξτε το Θεώρημα 8.2.

## 9. Το θεώρημα της ολοκληρωτικής αναπαράστασης αρμονικών συναρτήσεων

Από τις ταυτότητες του Green που αποδείξαμε στο προηγούμενο εδάφιο οδηγούμαστε αμέσως στο εξής σημαντικό αποτέλεσμα:

### Λήμμα 9.1

Ας υποθέσουμε ότι η  $\varphi \in C^2(\bar{\Omega})$ , όπου  $\Omega$  μια κανονική περιοχή του  $\mathbb{R}^n$ , και  $u(\mathbf{x}, \xi)$  κάποια από τις θεμελιακές λύσεις της εξίσωσης Laplace. Δηλαδή,

$$u(\mathbf{x}, \xi) = \begin{cases} C \ln |\mathbf{x} - \xi| + \tilde{C}, & n = 2 \\ \frac{C}{2-n} |\mathbf{x} - \xi|^{2-n} + \tilde{C}, & n > 2 \end{cases} \quad (9.1)$$

όπου  $C, \tilde{C}$  τυχαίες σταθερές.

Τότε, σε οποιοδήποτε σημείο  $\xi \in \Omega$  ισχύει η σχέση

$$\int_{\Omega} u(\mathbf{x}, \xi) \Delta \varphi(\mathbf{x}) dV = C \omega_n \varphi(\xi) + \int_{\partial \Omega} [u(\mathbf{x}, \xi) \partial_{\nu} \varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}) \partial_{\nu} u(\mathbf{x}, \xi)] dS \quad (9.2)$$

όπου

$$\omega_n := \frac{2 \pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \quad (9.3)$$

**Σημείωση.** Η σταθερή  $\omega_n$  εκφράζει το (υπερ-)εμβαδό της σφαιρικής (υπερ-)επιφάνειας  $|\mathbf{x}| = 1$  του  $\mathbb{R}^n$ , την οποία θα συμβολίζουμε με  $S_1^{n-1}$ . Στον τύπο για την  $\omega_n$ , το  $\Gamma(z)$  συμβολίζει τη **συνάρτηση γάμμα του Euler**,

$$\Gamma(z) := \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt. \quad (9.4)$$

Επισημαίνουμε ότι, από τον ορισμό της συνάρτησης γάμμα αμέσως συνάγεται ότι

$$\Gamma(z+1) = z \Gamma(z). \quad (9.5)$$

Επιπλέον, δύο αξιοσημείωτες τιμές αυτής της συνάρτησης είναι οι

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(1) = 1. \quad (9.6)$$

### Απόδειξη του λήμματος

Για ευκολία, υποθέτουμε ότι το σημείο  $\xi$  ταυτίζεται με την αρχή των αξόνων. Αφαιρώντας από την περιοχή  $\Omega$  μια σφαίρα,  $B_{\varepsilon}$ , που έχει αρκετά μικρή ακτίνα,  $\varepsilon$ , και το κέντρο της στην αρχή των αξόνων, καταλήγουμε στην υπο-περιοχή  $\Omega'$ . Η επιφάνεια  $\partial B_{\varepsilon}$  της μικρής σφαίρας μαζί με την επιφάνεια,  $\partial \Omega$ , της περιοχής  $\Omega$  αποτελούν το σύνορο της  $\Omega'$ . Έτσι, στην περιοχή  $\Omega'$ , ισχύει η 2η ταυτότητα Green που παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$\int_{\Omega'} (u \Delta \varphi - \varphi \Delta u) dV = \int_{\partial \Omega} (u \partial_{\nu} \varphi - \varphi \partial_{\nu} u) dS + \int_{\partial B_{\varepsilon}} (u \partial_{\nu} \varphi - \varphi \partial_{\nu} u) dS. \quad (9.7)$$

Αλλά  $\Delta u = 0$  σε κάθε σημείο της  $\Omega'$ . Άρα, η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$\int_{\Omega'} u \Delta \varphi dV = \int_{\partial\Omega} (u \partial_\nu \varphi - \varphi \partial_\nu u) dS + \int_{\partial B_\varepsilon} (u \partial_\nu \varphi - \varphi \partial_\nu u) dS. \quad (9.8)$$

Τώρα, όταν η  $u$  είναι μια λύση της εξίσωσης Laplace σφαιρικά συμμετρική ως προς την αρχή των αξόνων, τότε

$$u(\mathbf{x}) = \psi(r). \quad (9.9)$$

Στην επιφάνεια της σφαίρας ακτίνας  $\varepsilon$ ,

$$\partial_\nu = \mathbf{v} \cdot \nabla = -\partial_r, \quad u(\mathbf{x}) = \psi(\varepsilon), \quad \partial_\nu u(\mathbf{x}) = -\psi'(\varepsilon). \quad (9.10)$$

Συνεπώς,

$$\int_{\partial B_\varepsilon} (u \partial_\nu \varphi - \varphi \partial_\nu u) dS = -\psi(\varepsilon) \int_{|x|=\varepsilon} \partial_r \varphi dS + \psi'(\varepsilon) \int_{|x|=\varepsilon} \varphi dS. \quad (9.11)$$

Σύμφωνα με την υπόθεση, η  $\varphi \in C^2(\bar{\Omega})$ . Άρα, και η  $\partial_r \varphi(\mathbf{x})$  είναι συνεχής στην περιοχή  $\Omega$ . Συνακόλουθα, ο περιορισμός των  $\varphi(\mathbf{x})$  και  $\partial_r \varphi(\mathbf{x})$  στο συμπαγές σύνολο  $\partial B_\varepsilon$  οδηγεί σε συνεχείς συναρτήσεις. Κατά συνέπεια, για καθεμιά από τις  $|\varphi(\mathbf{x})|$  και  $|\partial_r \varphi(\mathbf{x})|$ , υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της επιφάνειας  $\partial B_\varepsilon$ , στο οποίο η συνάρτηση παίρνει τη μέγιστη τιμή της. Αυτό μας επιτρέπει να εισαγάγουμε την ποσότητα

$$M := \max_{x \in \partial B_\varepsilon} |\partial_r \varphi(\mathbf{x})| \quad (9.12)$$

και να προχωρήσουμε στην ακόλουθη εκτίμηση: Το (υπερ-)εμβαδόν της (υπερ-)σφαιρικής επιφάνειας  $S_r^{n-1}$  είναι ίσο με

$$E(S_r^{n-1}) := \int_{|x|=r} dS = r^{n-1} \omega_n. \quad (9.13)$$

Άρα,

$$\left| \psi(\varepsilon) \int_{|x|=\varepsilon} \partial_r \varphi dS \right| \leq |\psi(\varepsilon)| M \int_{|x|=\varepsilon} dS = |\psi(\varepsilon)| M \varepsilon^{n-1} \omega_n. \quad (9.14)$$

Τώρα, ανάλογα με τη διάσταση του χώρου στον οποίο ανήκει η περιοχή  $\Omega$ ,

$$\psi(r) = C \ln r + \tilde{C}, \quad \psi'(r) = C r^{-1}, \quad \text{αν } n = 2, \quad (9.15)$$

ή

$$\psi(r) = C \frac{r^{2-n}}{2-n} + \tilde{C}, \quad \psi'(r) = C r^{1-n}, \quad \text{αν } n > 2. \quad (9.16)$$

Συνεπώς,

$$|\psi(\varepsilon)| \varepsilon^{n-1} = |C \ln \varepsilon + \tilde{C}| \varepsilon, \quad \text{αν } n = 2, \quad (9.17)$$

ή

$$|\psi(\varepsilon)| \varepsilon^{n-1} = \left| C \frac{\varepsilon^{2-n}}{2-n} + \tilde{C} \right| \varepsilon^{n-1}, \quad \text{αν } n > 2. \quad (9.18)$$

Αυτό σημαίνει ότι

$$|\psi(\varepsilon)| \varepsilon^{n-1} \rightarrow 0, \text{ καθώς το } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (9.19)$$

οπότε και

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \psi(\varepsilon) \int_{|x|=\varepsilon} \partial_r \varphi dS \right] = 0. \quad (9.20)$$

Ερχόμαστε τώρα στο δεύτερο ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους της (9.11). Αφού η  $\varphi$  είναι κλάσης  $C^1(\bar{\Omega})$ , μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα μέσης τιμής για να συμπεράνουμε ότι

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi(0) + \sum_{i=1}^n x_i \partial_i \varphi(\lambda \mathbf{x}), \quad \lambda \in (0, 1), \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}. \quad (9.21)$$

Συνακόλουθα, αν θέσουμε

$$N := \max_{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}, i=1, \dots, n} |\partial_i \varphi(\mathbf{x})| \quad (9.22)$$

και λάβουμε υπόψη ότι

$$|x_i| \leq \varepsilon, \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}, \quad (9.23)$$

αμέσως θα καταλήξουμε στην ακόλουθη εκτίμηση:

$$\left| \varphi(\mathbf{x}) - \varphi(0) \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \max |\partial_i \varphi| \leq n \varepsilon N. \quad (9.24)$$

Άρα

$$\begin{aligned} \left| \psi'(\varepsilon) \int_{|x|=\varepsilon} [\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(0)] dS \right| &\leq \left| \psi'(\varepsilon) \right| \int_{|x|=\varepsilon} n \varepsilon N dS = \\ \left| \psi'(\varepsilon) \right| n \varepsilon N \int_{|x|=\varepsilon} dS &= \left| \psi'(\varepsilon) \right| n \varepsilon N \varepsilon^{n-1} \omega_n = \left| \psi'(\varepsilon) \right| n N \varepsilon^n \omega_n \end{aligned} \quad (9.25)$$

Αλλά, νωρίτερα, σημειώσαμε ότι

$$\psi'(r) = \begin{cases} C r^{-1}, & n = 2 \\ C r^{1-n}, & n > 2 \end{cases} \quad (9.26)$$

Άρα,

$$\left| \psi'(\varepsilon) \right| \varepsilon^n = \begin{cases} |C| \varepsilon^{-1} \varepsilon^2 = |C| \varepsilon, & n = 2 \\ |C| \varepsilon^{1-n} \varepsilon^n = |C| \varepsilon, & n > 2 \end{cases} \quad (9.27)$$

Αυτό σημαίνει ότι

$$\left| \psi'(\varepsilon) \int_{|x|=\varepsilon} [\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(0)] dS \right| \leq n N |C| \varepsilon \omega_n. \quad (9.28)$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi'(\varepsilon) \int_{|x|=\varepsilon} \varphi(\mathbf{x}) dS &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi'(\varepsilon) \int_{|x|=\varepsilon} \varphi(0) dS \\ &= \omega_n \varphi(0) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon^{n-1} C \varepsilon^{1-n}) = C \omega_n \varphi(0). \end{aligned} \quad (9.29)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon} (u \partial_\nu \varphi - \varphi \partial_\nu u) dS = C \omega_n \varphi(0). \quad (9.30)$$

Τέλος, στο όριο  $\varepsilon \rightarrow 0$  η περιοχή  $\Omega'$  ταυτίζεται με την  $\Omega$ . Άρα, στο ίδιο όριο η (9.8) γίνεται

$$\int_\Omega u \Delta \varphi dV = \int_{\partial \Omega} (u \partial_\nu \varphi - \varphi \partial_\nu u) dS + C \omega_n \varphi(0) \quad (9.31)$$

που είναι ταυτόσημη με την (9.2), όταν το  $\xi = \mathbf{0}$ .

Το λήμμα που μόλις αποδείξαμε οδηγεί αμέσως στο

**Θεώρημα 9.1** (Θεώρημα της αναπαράστασης αρμονικών συναρτήσεων)

Αν η  $\varphi(\mathbf{x}) \in C^2(\bar{\Omega})$  είναι αρμονική στην περιοχή  $\Omega$ , τότε μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{1}{C \omega_n} \int_{\partial \Omega} [\varphi(\xi) \partial_\nu u(\xi, \mathbf{x}) - u(\xi, \mathbf{x}) \partial_\nu \varphi(\xi)] dS_\xi, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (9.32)$$

όπου  $u(\mathbf{x}, \xi)$  σφαιρικά συμμετρική λύση με πόλο στο σημείο  $\xi$ .

Απόδειξη

Το ότι η  $\varphi(\mathbf{x})$  είναι αρμονική σημαίνει ότι  $\Delta \varphi(\mathbf{x}) = 0$ . Άρα, σύμφωνα με το προηγούμενο λήμμα,

$$C \omega_n \varphi(\xi) + \int_{\partial \Omega} [u(\mathbf{x}, \xi) \partial_\nu \varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}) \partial_\nu u(\mathbf{x}, \xi)] dS = 0, \quad \xi \in \Omega. \quad (9.33)$$

Συνεπώς,

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{C \omega_n} \int_{\partial \Omega} [\varphi(\mathbf{x}) \partial_\nu u(\mathbf{x}, \xi) - u(\mathbf{x}, \xi) \partial_\nu \varphi(\mathbf{x})] dS = 0, \quad \xi \in \Omega. \quad (9.34)$$

Η αντικατάσταση  $(\mathbf{x}, \xi) \rightarrow (\xi, \mathbf{x})$  μετατρέπει την τελευταία σχέση στην

$$\varphi(\mathbf{x}) = \frac{1}{C \omega_n} \int_{\partial \Omega} [\varphi(\xi) \partial_\nu u(\xi, \mathbf{x}) - u(\xi, \mathbf{x}) \partial_\nu \varphi(\xi)] dS_\xi, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (9.35)$$

Όμως, σύμφωνα με τον ορισμό της, η συνάρτηση  $u(\xi, \mathbf{x})$  εξαρτιέται μόνο από τον συνδυασμό  $|\mathbf{x} - \xi|$ . Συνεπώς,  $u(\xi, \mathbf{x}) = u(\mathbf{x}, \xi)$  και, άρα η

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{C \omega_n} \int_{\partial \Omega} [\varphi(\mathbf{x}) \partial_\nu u(\mathbf{x}, \xi) - u(\mathbf{x}, \xi) \partial_\nu \varphi(\mathbf{x})] dS = 0, \quad \xi \in \Omega. \quad (9.36)$$

**Ορισμός.** Ας υποθέσουμε ότι η  $B_r(\mathbf{x})$  είναι μια σφαίρα ακτίνας  $r$  με κέντρο το σημείο  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  κι ότι η  $f: \partial B_r(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbb{R}$ . Τότε, μέση τιμή της  $f$  στη σφαιρική επιφάνεια  $S_r^{n-1}(\mathbf{x}) := \partial B_r(\mathbf{x})$

ονομάζεται η ποσότητα

$$\langle f \rangle := \frac{1}{E} \int_{S_r^{n-1}(\mathbf{x})} f(\xi) d S_\xi, \quad (9.37)$$

όπου

$$E = r^{n-1} \omega_n \quad (9.38)$$

το "εμβαδόν" της σφαιρικής επιφάνειας  $S_r^{n-1}(\mathbf{x})$ .

**Θεώρημα 9.2** (Θεώρημα μέσης τιμής του Gauss)

Αν η  $\varphi(\mathbf{x})$  είναι αρμονική στην περιοχή  $\Omega$  και η σφαίρα  $\bar{B}_r(\mathbf{x})$  περιέχεται στην  $\Omega$  τότε

$$\varphi(\mathbf{x}) = \langle \varphi \rangle. \quad (9.39)$$

Απόδειξη

Για ευκολία θεωρούμε ότι το σημείο  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  ταυτίζεται με την αρχή των αξόνων. Συνεπώς, εκείνο που πρέπει να δείξουμε είναι ότι

$$\varphi(0) = \langle \varphi \rangle, \quad (9.40)$$

ανεξάρτητα από την τιμή της ακτίνας  $r$ .

Τώρα, από το θεώρημα της αναπαράστασης έπεται ότι

$$\varphi(0) = \frac{1}{C \omega_n} \int_{\partial B_r(\mathbf{0})} [\varphi(\xi) \partial_\nu u(0, \xi) - u(0, \xi) \partial_\nu \varphi(\xi)] d S_\xi \quad (9.41)$$

όπου  $u$  θεμελιακή λύση. Άρα  $u(0, \xi) = \psi(r)$ ,  $\partial_\nu u(0, \xi) = \psi'(r)$ , οπότε

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= \frac{1}{C \omega_n} \int_{\partial B_r(\mathbf{0})} [\varphi(\xi) \psi'(r) - \psi(r) \partial_\nu \varphi(\xi)] d S_\xi \\ &= \frac{1}{C \omega_n} \left\{ \psi'(r) \int_{\partial B_r(\mathbf{0})} \varphi(\xi) d S_\xi - \psi(r) \int_{\partial B_r(\mathbf{0})} \partial_\nu \varphi(\xi) d S_\xi \right\} \end{aligned} \quad (9.42)$$

Χρησιμοποιώντας την ολική σχέση

$$\int_{\partial B_r(\mathbf{0})} \partial_\nu \varphi(\xi) d S_\xi = 0 \quad (9.43)$$

που βρήκαμε ότι ισχύει για τις αρμονικές συναρτήσεις, αμέσως συμπεραίνουμε ότι

$$\varphi(0) = \frac{\psi'(r)}{C \omega_n} \int_{\partial B_r(\mathbf{0})} \varphi(\xi) d S_\xi. \quad (9.44)$$

Όμως,

$$\psi'(r) = C r^{1-n}. \quad (9.45)$$

Άρα,

$$\varphi(0) = \frac{1}{r^{n-1} \omega_n} \int_{\partial B_r(\mathbf{0})} \varphi(\xi) d S_\xi. \quad (9.46)$$



Αλλά, αυτή είναι ταυτόσημη με την (9.40). ■

## Ασκήσεις

**9.1** α) Επινοήστε τουλάχιστον τρεις (3) διαφορετικούς τρόπους για να υπολογίσετε το μήκος της περιφέρειας ενός κύκλου ακτίνας  $r$  του Ευκλείδειου επίπεδου, καθώς και το εμβαδό του κυκλικού δίσκου που περιέχεται στον κύκλο.

β) Να γίνει το ίδιο για το εμβαδόν μιας σφαιρικής επιφάνειας ακτίνας  $r$  του  $\mathbb{R}^3$ , καθώς και τον όγκο της σφαιρικής περιοχής που βρίσκεται στο εσωτερικό της επιφάνειας.

γ) Με βάση τα δύο προηγούμενα αποτελέσματα, υπολογίστε το "εμβαδόν" μιας σφαιρικής υπερεπιφάνειας ακτίνας  $r$  του  $\mathbb{R}^n$ , καθώς και τον "όγκο" της σφαιρικής περιοχής που βρίσκεται στο εσωτερικό της υπερεπιφάνειας.

**9.2** Θεωρήστε το ακόλουθο πρόβλημα Dirichlet:

$$\Delta u = 0,$$

στο εσωτερικό του ορθού κώνου

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = h(a - r)\}, \quad r := \sqrt{x^2 + y^2}, \quad b, h > 0,$$

και

$$u(x, y, 0) = f(r), \quad u(x, y, z) = 0 \text{ σε κάθε άλλο σημείο του συνόρου } \partial\Omega.$$

Η συνάρτηση  $f(r)$  υποτίθεται να είναι συνεχής στο διάστημα  $0 \leq r \leq a$ , με  $f(0) = 0$ .

α) Να εξεταστεί εάν το πιο πάνω πρόβλημα συνοριακών τιμών είναι επιλύσιμο.

β) Για να απαντήσει στο προηγούμενο ερώτημα, κάποιος θα μπορούσε να ξεκινήσει με το ansatz  $u = R(r)Z(z)$ . Πού οδηγεί αυτή η υπόθεση εργασίας;

**9.3** Δείχτε ότι κάθε μια από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι αρμονική. Στη συνέχεια, επαληθεύστε το θεώρημα μέσης τιμής του Gauss για καθένα από τα σημεία  $p_1, p_2$ .

(i)  $u(x, y) = x^2 - y^2$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $p_1 = (0, 0)$ ,  $p_2 = (0, 2)$ .

(ii)  $u(x, y) = xy$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $p_1 = (0, 0)$ ,  $p_2 = (-1, -1)$ .

(iii)  $u(x, y) = \frac{2-x}{x^2-4x+y^2+4}$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(2, 0)\}$ ,  $p_1 = (0, 0)$ ,  $p_2 = (2, 1)$ .

(iv)  $u(x, y) = \frac{y}{x^2-4x+y^2+4}$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(2, 0)\}$ ,  $p_1 = (0, 0)$ ,  $p_2 = (2, -1)$ .

## 10. Συναρτήσεις Green

Θεωρούμε μια φραγμένη περιοχή (ανοιχτό και συνεκτικό σύνολο)  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  με ομαλό σύνορο  $\partial\Omega$  και μια συνάρτηση  $u(\mathbf{x})$  που είναι αρμονική σε κάθε σημείο της  $\Omega$  και κλάσης  $C^2$  στην συμπαγή περιοχή  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ . Σύμφωνα με το θεώρημα της αναπαράστασης, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη θεμελιακή λύση της εξίσωσης Laplace

$$F(\mathbf{x}, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln |\mathbf{x} - \xi|, & n = 2 \\ \frac{1}{(2-n)\omega_n} |\mathbf{x} - \xi|^{2-n}, & n > 2 \end{cases} \quad (10.1)$$

για να γράψουμε την  $u(\mathbf{x})$  στη μορφή

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega} [u(\xi) \partial_\nu F(\mathbf{x}, \xi) - F(\mathbf{x}, \xi) \partial_\nu u(\xi)] dS_\xi, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (10.2)$$

Η παραπάνω σχέση δίνει την εντύπωση πως, αν είναι γνωστές οι τιμές που παίρνει η  $u(\mathbf{x})$  και η εγκάρσια παράγωγός της στο σύνορο της περιοχής  $\Omega$ , τότε μπορούμε να υπολογίσουμε την  $u(\mathbf{x})$  σε κάθε σημείο  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Όμως, αυτό το συμπέρασμα έρχεται σε αντίθεση με τα θεωρήματα που αποδείξαμε ως συνέπειες των ταυτοτήτων Green. Γνωρίζουμε, δηλαδή, ότι, αν υπάρχει λύση της εξίσωσης Laplace στην περιοχή  $\Omega$ , τότε αυτή καθορίζεται πλήρως από τις συνοριακές τιμές της, **μόνο**. Η ίδια λύση καθορίζεται σχεδόν μονοσήμαντα, δηλαδή με απροσδιοριστία μιας σταθερής, **μόνο** από τις τιμές της εγκάρσιας προς το σύνορο παραγώγου της.

Κατά συνέπεια, η (10.2) δεν μπορεί να θεωρηθεί ως λύση των προβλημάτων συνοριακών τιμών τύπου Dirichlet ή Neumann για την εξίσωση Laplace στην περιοχή  $\Omega$ . Ωστόσο, η παραπάνω σχέση μπορεί να χησιμεύσει ως οδηγός για την επίλυση αυτών των προβλημάτων. Γιατί, μας λέει καθαρά πως, **αν** η  $F(\mathbf{x}, \xi)$  μηδενίζεται για κάθε  $\xi \in \partial\Omega$ , τότε

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega} u(\xi) \partial_\nu F(\mathbf{x}, \xi) dS_\xi, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (10.3)$$

Σύμφωνα μ' αυτή τη σχέση, η αρμονική συνάρτηση  $u(\mathbf{x})$  προσδιορίζεται μονοσήμαντα σε κάθε εσωτερικό σημείο της περιοχής  $\Omega$  αμέσως μόλις δοθούν οι τιμές της στο σύνορο αυτής της περιοχής. Γιατί, η συνάρτηση  $F(\mathbf{x}, \xi)$  είναι ήδη γνωστή και, άρα, το ίδιο ισχύει και για την  $\partial_\nu F(\mathbf{x}, \xi)$ . Με άλλα λόγια, **αν** η  $F(\mathbf{x}, \xi)$  μηδενιζόταν στο σύνορο της περιοχής  $\Omega$ , τότε ο τύπος (10.3) θα αποτελούσε τη λύση του προβλήματος Dirichlet για την εξίσωση Laplace σ' αυτή την περιοχή.

Ανάλογα, **αν**, αντί για την ίδια την  $F(\mathbf{x}, \xi)$ , μηδενιζόταν η εγκάρσια παράγωγός της σε κάθε  $\xi \in \partial\Omega$ , τότε η (10.2) θα αναγόταν στην

$$u(\mathbf{x}) = - \int_{\partial\Omega} F(\mathbf{x}, \xi) \partial_\nu u(\xi) dS_\xi, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (10.4)$$

Αυτός ο τύπος θα μας έδινε τη λύση του προβλήματος Neumann για την εξίσωση Laplace στην περιοχή  $\Omega$ . Γιατί, μας λέει ότι, αν δοθούν οι τιμές της εγκάρσιας παραγώγου της  $u(\mathbf{x})$  στο

σύνορο της περιοχής  $\Omega$ , τότε μπορούμε να υπολογίσουμε την  $u(\mathbf{x})$  σε κάθε  $\mathbf{x} \in \Omega$ , μέσω ενός (υπερ-)επιφανειακού ολοκληρώματος.

Δυστυχώς, οι  $F(\mathbf{x}, \xi)$  και  $\partial_\nu F(\mathbf{x}, \xi)$  δεν μηδενίζονται όταν το  $\xi \in \partial\Omega$ . Αυτό φαίνεται καθαρά από τον τύπο (10.1). Άρα, οι υποθέσεις που οδήγησαν στις (10.3) και (10.4), αντίστοιχα, είναι αδύνατο να ισχύουν. Με άλλα λόγια, οι τύποι (10.3) και (10.4) δεν είναι δυνατό να εκφράζουν τις λύσεις των προβλημάτων Dirichlet και Neumann, αντίστοιχα.

Ωστόσο, υπάρχει λύση στο αδιέξοδο που μόλις περιγράψαμε κι αυτή βασίζεται στην ακόλουθη παρατήρηση: Το δεξί μέλος της (10.2) δεν επηρεάζεται καθόλου, αν η  $F(\mathbf{x}, \xi)$  αντικατασταθεί από το άθροισμα  $F(\mathbf{x}, \xi) + h(\xi)$ , αρκεί η συνάρτηση  $h(\mathbf{x})$  να είναι αρμονική σε ολόκληρη την περιοχή  $\bar{\Omega}$ . Για τον εξής απλό λόγο: Αν, όπως έχουμε ήδη υποθέσει για την  $u(\mathbf{x})$ , η  $h(\mathbf{x})$  ανήκει στην κλάση  $C^2(\bar{\Omega})$ , τότε ισχύει η δεύτερη ταυτότητα του Green. Δηλαδή,

$$\int_{\partial\Omega} [u(\xi) \partial_\nu h(\xi) - h(\xi) \partial_\nu u(\xi)] d S_\xi = \int_{\Omega} [u(\mathbf{x}) \Delta h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x}) \Delta u(\mathbf{x})] d V. \quad (10.5)$$

Αλλά, εμείς εξετάζουμε την περίπτωση όπου οι συναρτήσεις  $u(\mathbf{x})$  και  $h(\mathbf{x})$  είναι αρμονικές στην περιοχή  $\Omega$ . Δηλαδή,  $\Delta h(\mathbf{x}) = \Delta u(\mathbf{x}) = 0$ ,  $\forall \mathbf{x} \in \Omega$ . Άρα, το δεξί μέλος της (10.5) μηδενίζεται ταυτοτικά, πράγμα που σημαίνει ότι

$$\int_{\partial\Omega} [u(\xi) \partial_\nu h(\xi) - h(\xi) \partial_\nu u(\xi)] d S_\xi = 0. \quad (10.6)$$

Σύμφωνα με την προηγούμενη ανάλυση, η πρόσθεση της αρμονικής συνάστησης  $h(\mathbf{x})$  στη θεμελική λύση  $F(\mathbf{x}, \xi)$  θα φέρει το επιθυμητό αποτέλεσμα, μόνο αν, είτε το ίδιο το άθροισμα  $F(\mathbf{x}, \xi) + h(\xi)$ , είτε η εγκάρσια παράγωγός του μηδενίζεται στο σύνορο της περιοχής  $\Omega$ .

Μένοντας στην πρώτη περίπτωση, σημειώνουμε ότι η απαίτηση  $F(\mathbf{x}, \xi) + h(\xi) = 0$ ,  $\forall \mathbf{x} \in \Omega$ , όταν το  $\xi \in \partial\Omega$  δεν μπορεί να ικανοποιηθεί, παρά μόνο όταν και η συνάρτηση  $h$  έχει ρητή εξάρτηση από το  $\mathbf{x}$ . Γι' αυτό, από τώρα και στο εξής, θα τη γράφουμε στη μορφή  $H(\mathbf{x}, \xi)$ . Συνεπώς, η  $H(\mathbf{x}, \xi)$  θα πρέπει να είναι τέτοια που

(i) Το άθροισμα

$$G(\mathbf{x}, \xi) := F(\mathbf{x}, \xi) + H(\mathbf{x}, \xi) \quad (10.7)$$

μηδενίζεται σε κάθε  $\mathbf{x} \in \Omega$ , όταν το  $\xi \in \partial\Omega$ .

(ii) Η  $h(\xi) := H(\mathbf{x}, \xi)$  ανήκει στην κλάση  $C^2(\bar{\Omega})$  και, στο εσωτερικό της περιοχής  $\bar{\Omega}$  είναι αρμονική:

$$\Delta h(\xi) \equiv \Delta_\xi H(\mathbf{x}, \xi) = 0, \quad \xi \in \Omega. \quad (10.8)$$

Όταν μια συνάρτηση  $H(\mathbf{x}, \xi)$  με τις παραπάνω ιδιότητες υπάρχει, τότε η  $G(\mathbf{x}, \xi)$  ονομάζεται **συνάρτηση Green για το πρόβλημα Dirichlet της εξίσωσης Laplace στην περιοχή  $\Omega$** .

Θα πρέπει να τονίσουμε ότι η εύρεση της  $H(\mathbf{x}, \xi)$  και, άρα, η κατασκευή της συνάρτησης Green δεν είναι εύκολη υπόθεση. Γιατί, ουσιαστικά, το να βρούμε τη συνάρτηση  $H(\mathbf{x}, \xi)$  ισοδυναμεί με το να λύσουμε το πρόβλημα Dirichlet  $\Delta_\xi H(\mathbf{x}, \xi) = 0$ ,  $\xi \in \Omega$ ,  $H(\mathbf{x}, \xi) = -F(\mathbf{x}, \xi)$ ,  $\xi \in \partial\Omega$ . Από την άλλη, η λύση αυτού του προβλήματος είναι ο αρχικός

στόχος της ανάλυσής μας. Άρα, η αναζήτηση της συνάρτησης  $H(x, \xi)$ , ως μέσου για την επίλυση του αρχικού προβλήματος Dirichlet, μοιάζει με την προσπάθεια του σκύλου που κυνηγάει την ουρά του.

Παρ' όλ' αυτά, σε ορισμένες περιπτώσεις, η κατασκευή της συνάρτησης Green γίνεται εφικτή με σχετικά απλές μεθόδους. Αυτό συμβαίνει όταν η γεωμετρία της περιοχής  $\Omega$  είναι απλή. Το πότε και το πώς ακριβώς συμβαίνει κάτι τέτοιο, θα φανεί καθαρότερα από τα συγκεκριμένα παραδείγματα που θα εξετάσουμε αργότερα.

Στο μεταξύ, συνοψίζουμε το βασικό αποτέλεσμα της ως τώρα ανάλυσής μας: Από τη στιγμή που θα έχουμε βρει την αντίστοιχη συνάρτηση Green, η λύση του προβλήματος Dirichlet

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad u(x) = f(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad (10.9)$$

κατασκευάζεται αμέσως, χρησιμοποιώντας τον τύπο

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} f(\xi) \partial_\nu G(x, \xi) dS_\xi. \quad (10.10)$$

Γιατί, τότε, χάρη στις ιδιότητες της  $G(x, \xi)$  που πήρε τη θέση της  $F(x, \xi)$ , οι προϋποθέσεις που οδηγούν στη σχέση (10.3) πληρούνται.

## Ασκήσεις

**10.1** Θεωρήστε δύο διαφορετικά σημεία  $\xi_1, \xi_2$  της φραγμένης περιοχής  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  που έχει για σύνορο την ομαλή (υπερ)επιφάνεια  $\partial\Omega$ . Χρησιμοποιώντας, τη 2<sup>η</sup> ταυτότητα Green, δείχτε ότι, αν  $G(x, \xi_1), G(x, \xi_2)$  είναι συναρτήσεις Green για το πρόβλημα Dirichlet της  $\Delta u = 0$  στην περιοχή  $\Omega$ , τότε  $G(\xi_1, \xi_2) = G(\xi_2, \xi_1)$ .

**10.2** Να δειχτεί ότι το πρόβλημα Neumann για την εξίσωση Poisson,

$$\Delta u = h(x), \quad x \in \Omega, \quad \partial_\nu u(x) = g(x), \quad x \in \partial\Omega, \quad (10.11)$$

μπορεί να έχει λύση μόνο στην περίπτωση που

$$\int_{\partial\Omega} g(x) dS = \int_{\Omega} h(x) dV. \quad (10.12)$$

## 11. Η μέθοδος των ειδώλων

Μια αρκετά εύχρηστη μέθοδος κατασκευής συναρτήσεων Green είναι αυτή που στηρίζεται στη φυσική ερμηνεία των θεμελιακών λύσεων της εξίσωσης Laplace στο πλαίσιο του ηλεκτρισμού. Θυμίζουμε, σχετικά, ότι η θεμελιακή λύση της εξίσωσης Laplace στον τρισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο, στη μορφή,

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{Q}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|}, \quad \mathbf{x} \in \Omega := \mathbb{R}^3 \setminus \{\boldsymbol{\xi}\}, \quad (11.1)$$

παριστάνει το δυναμικό για το ηλεκτρικό πεδίο ενός σωματίου με φορτίο  $Q$ , το οποίο ακινητεί στο σημείο  $\boldsymbol{\xi}$ .

Από την άλλη, η εξίσωση Laplace είναι γραμμική και ομογενής. Άρα, ισχύει γι' αυτήν η *αρχή της επαλληλίας*: Ο γραμμικός συνδυασμός οποιουδήποτε αριθμού λύσεων της αποτελεί επίσης λύση. Ειδικότερα, αν  $\Phi_1(\mathbf{x})$  είναι το ηλεκτρικό δυναμικό που οφείλεται στο φορτίο  $Q_1$ , το οποίο βρίσκεται στη θέση  $\boldsymbol{\xi}_1$ , και  $\Phi_2(\mathbf{x})$  το δυναμικό που οφείλεται στο φορτίο  $Q_2$ , το οποίο βρίσκεται στη θέση  $\boldsymbol{\xi}_2$ , τότε το συνολικό δυναμικό δίνεται από η συνάρτηση

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{Q_1}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_1|} + \frac{Q_2}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_2|}, \quad \mathbf{x} \in \Omega := \mathbb{R}^3 \setminus \{\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2\}, \quad (11.2)$$

που είναι αρμονική στο ανοιχτό υποσύνολο  $\Omega$  του  $\mathbb{R}^3$ .

Η κατασκευή συναρτήσεων Green με βάση την "ηλεκτρισμένη" ερμηνεία των θεμελιακών λύσεων της εξίσωσης Laplace ονομάζεται *μέθοδος των ειδώλων*. Το γιατί φαίνεται καθαρά από το επόμενο κίολας παράδειγμα.

### Παράδειγμα 11.1

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να βρούμε τη συνάρτηση Green που είναι κατάλληλη για την επίλυση του προβλήματος Dirichlet

$$\Delta u(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (11.3)$$

όταν η περιοχή  $\Omega$  είναι το μισό του  $\mathbb{R}^3$ . Πιο συγκεκριμένα, αν  $(x, y, z)$  είναι Καρτεσιανές συντεταγμένες του τρισδιάστατου Ευκλείδειο χώρου, τότε

$$\Omega := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}. \quad (11.4)$$

Υποθέτουμε, επιπλέον, ότι, τόσο η συνεχής συνάρτηση  $f(\mathbf{x})$  που ορίζει τις συνοριακές τιμές της άγνωστης  $u(\mathbf{x})$ , όσο και η ίδια η  $u(\mathbf{x})$ , μηδενίζονται, καθώς η απόσταση  $r \equiv |\mathbf{x}|$  από την αρχή των αξόνων απειρίζεται.

Θα πρέπει, βέβαια, να παρατηρήσουμε ότι, το πρόβλημα που μόλις διατυπώσαμε δεν ταιριάζει στο θεωρητικό πλαίσιο στο οποίο ορίσαμε τις συναρτήσεις Green. Γιατί, βασική προϋπόθεση της αντίστοιχης ανάλυσης ήταν πως η περιοχή  $\Omega$  είναι φραγμένη. Ωστόσο, τα συμπεράσματα αυτής της ανάλυσης ισχύουν και στην περίπτωση που εξετάζουμε, αν την δούμε ως την οριακή έκδοση,  $a \rightarrow \infty$ , του ακόλουθου προβλήματος συνοριακών τιμών:

$$\Delta u(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega_a, \quad u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega_a, \quad (11.5)$$

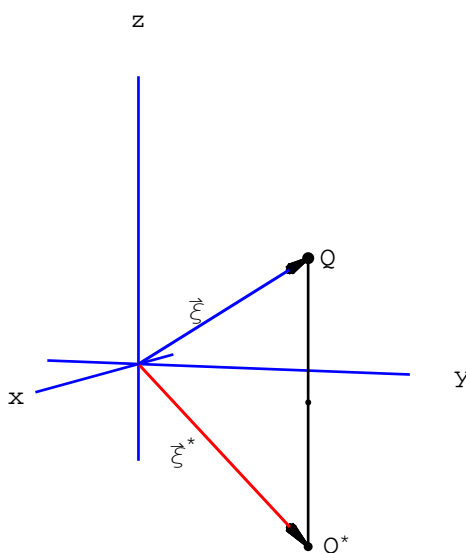
$$\Omega_a := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0, r < a\}. \quad (11.6)$$

Προφανώς, το συμπαγές (κλειστό και φραγμένο) σύνολο  $\overline{\Omega}_a$  είναι ένα ημισφαίριο ακτίνας  $a$ , με την επίπεδη πλευρά του να κείται στο επίπεδο  $z = 0$ . Αυτή η περιοχή πληροί όλες τις προϋποθέσεις για να ισχύουν τα αποτελέσματα του προηγούμενου εδάφιου. Από την άλλη, στο όριο  $a \rightarrow \infty$ , το εσωτερικό αυτού του ημισφαίριου ταυτίζεται με το τμήμα  $z > 0$  του  $\mathbb{R}^3$ . Συνακόλουθα, η συνάρτηση Green για το πρόβλημα Dirichlet (11.5-6) ανάγεται σ' εκείνη του προβλήματος (11.3-4).

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι ένα σωματίο  $\sigma$  με φορτίο  $Q$  στέκεται στο σημείο  $\xi = (a, b, c)$  της περιοχής  $\Omega$ . Τότε, το ηλεκτρικό δυναμικό του  $\sigma$  μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως η θεμελιακή λύση της εξίσωσης Laplace και, άρα να θέσουμε

$$F(\mathbf{x}, \xi) = \frac{Q}{|\mathbf{x} - \xi|}, \quad \xi \in \Omega. \quad (11.7)$$

Ας φανταστούμε τώρα ότι το επίπεδο  $z = 0$  καλύπτεται από έναν καθρέφτη. Τότε το είδωλο  $\sigma^*$  του  $\sigma$  εμφανίζεται στη το σημείο  $\xi^* = (a, b, -c)$ , όπως στο Σχ. 11.1.



**Σχ. 11.1** Το φορτίο  $Q$  στη θέση  $\xi=(a,b,c)$  και το είδωλό του,  $Q^*$ , στη θέση  $\xi^*=(a,b,-c)$ .

Αν υποθέσουμε ότι το  $\sigma^*$  είναι ένα πραγματικό σωματίο με φορτίο  $Q^*$ , τότε το αντίστοιχο δυναμικό δίνεται από τη συνάρτηση

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{Q^*}{|\mathbf{x} - \xi^*|}. \quad (11.8)$$

Θα δείξουμε ότι, με κατάλληλη επιλογή του  $Q^*$ , το συνολικό ηλεκτρικό δυναμικό των  $\sigma$  και  $\sigma^*$ , το οποίο θα γράψουμε στη μορφή

$$G(\mathbf{x}, \xi) = \frac{Q}{|\mathbf{x} - \xi|} + \frac{Q^*}{|\mathbf{x} - \xi^*|}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}, \quad (11.9)$$

αποτελεί τη συνάρτηση Green που αναζητάμε. Με άλλα λόγια, το ηλεκτρικό δυναμικό του είδωλου παίζει το ρόλο της συνάρτησης  $H(\mathbf{x}, \xi)$  στην κατασκευή της συνάρτησης Green.

Πραγματικά, αφού το σημείο  $\xi^*$  βρίσκεται έξω από την περιοχή  $\overline{\Omega}$ , η συνάρτηση  $\Phi(\mathbf{x})$  είναι αρμονική στην  $\overline{\Omega}$  και μάλιστα κλάσης  $C^\infty(\overline{\Omega})$ . Από την άλλη, το σύνορο της περιοχής  $\Omega$  είναι το επίπεδο  $z = 0$ . Συνεπώς, όταν το  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ , τότε  $\mathbf{x} = (x, y, 0)$  και, άρα,

$$|\mathbf{x} - \xi| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + c^2}, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega. \quad (11.10)$$

Συνακόλουθα,

$$|\mathbf{x} - \xi^*| = |\mathbf{x} - \xi|, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega. \quad (11.11)$$

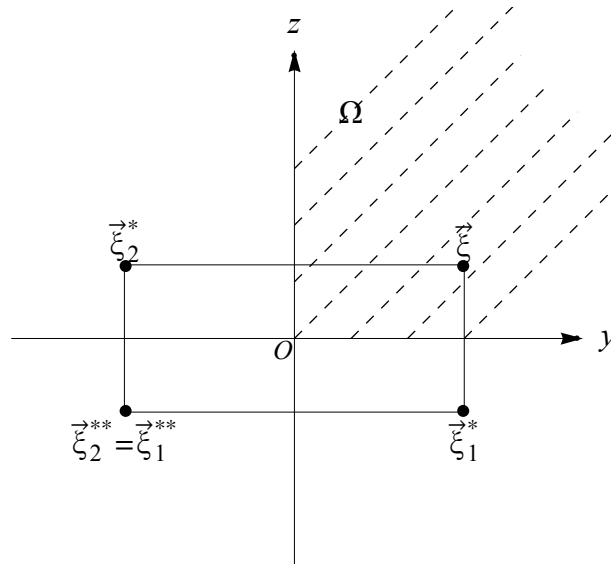
Για να εξασφαλίσουμε λοιπόν ότι η  $G(\mathbf{x}, \xi)$  μηδενίζεται όταν το  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ , αρκεί να επιλέξουμε το  $Q^*$  ίσο με το  $Q$ , σε απόλυτη τιμή, και αντίθετο, σε πρόσημο. Η επιλογή  $Q^* = -Q$  μετατρέπει την  $G(\mathbf{x}, \xi)$  της (11.9) στην

$$G(\mathbf{x}, \xi) = \frac{Q}{|\mathbf{x} - \xi|} - \frac{Q}{|\mathbf{x} - \xi^*|}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}, \quad (11.12)$$

που ικανοποιεί όλα τα κριτήρια της συνάρτησης Green για την περιοχή  $\Omega$ . ■

### Παράδειγμα 11.2

Ας υποθέσουμε ότι  $\Omega := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y > 0, z > 0\}$  και ότι το  $\xi = (a, b, c) \in \Omega$ . Ένα σωματίο με φορτίο  $Q$  στο  $\xi$  θα παράγει είδωλα στα σημεία  $\xi_1^* = (a, b, -c)$  και  $\xi_2^* = (a, -b, c)$ , ως προς τους καθρέφτες  $z = 0$ , και  $y = 0$ , αντίστοιχα. Παραλείποντας τη μεταβλητή  $x$  που δεν παίζει κανένα ρόλο στην κατασκευή μας, καταλήγουμε στο Σχ. 11.2.



**Σχ. 11.2** Το φορτίο  $Q$  στη θέση  $\xi = (a, b, c)$  και τα είδωλά του,  $Q^*$ , ως προς τα επίπεδα  $xy$  και  $xz$ .

Με τη σειρά τους τα είδωλα  $Q_1^*$  και  $Q_2^*$  εμφανίζουν είδωλα στις θέσεις  $\xi_1^{**} = (a, -b, -c)$  και  $\xi_2^{**} = (a, -b, -c)$ , αντίστοιχα. Προφανώς, λόγω της γεωμετρίας της  $\Omega$ , τα νοητά, φορτία  $Q_1^{**}$  και  $Q_2^{**}$  βρίσκονται στην ίδια θέση  $\xi_1^{**} = \xi_2^{**}$ . Έτσι, το σύνολο  $\{\xi, \xi_1^*, \xi_2^*, \xi_1^{**} = \xi_2^{**}\}$  είναι κλειστό ως προς όλους τους δυνατούς κατοπισμούς στο νοητό καθρέφτη διπλής όψης

$$\partial\Omega := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0, y \geq 0\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0, z \geq 0\}.$$

Το συνολικό δυναμικό του φορτίου  $Q$ , των ειδώλων του και των ειδώλων των ειδώλων του δίνεται από το άθροισμα

$$G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{Q}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|} + \frac{Q_1^*}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_1^*|} + \frac{Q_2^*}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_2^*|} + \frac{Q_1^{**}}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_1^{**}|}, \quad (11.13)$$

όπου  $\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x} \in \bar{\Omega}$ . Η επιβολή της συνθήκης  $G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = 0$  για κάθε  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ , οδηγεί μονοσήματα στο αποτέλεσμα

$$Q_1^* = Q_2^* = -Q_1^{**} = -Q, \quad (11.14)$$

και άρα στον πλήρη προσδιορισμό της  $G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$ .

Το αποτέλεσμα (11.14) μπορεί να παραχθεί αναλυτικά από τη συνοριακή συνθήκη. Ωστόσο, προκύπτει πολύ ευκολότερα αν σκεφτούμε ότι ένα  $Q_1^* = -Q$  αναιρεί το αποτέλεσμα του  $Q$  κατά μήκος της πλευράς  $z = 0$ , ενώ ένα  $Q_2^* = -Q$  αναιρεί το αποτέλεσμα του  $Q$  κατά μήκος της πλευράς  $y = 0$ . Τέλος, ένα  $Q_1^{**} = -Q_1^*$  αναιρεί, τόσο το αποτέλεσμα του  $Q_1^*$  κατά μήκος της πλευράς  $y = 0$ , όσο και εκείνο του  $Q_2^*$  κατά μήκος της  $z = 0$ , αφού  $Q_2^* = -Q$  και άρα  $Q_1^{**} = -Q_2^*$ .

■

### Παράδειγμα 11.3

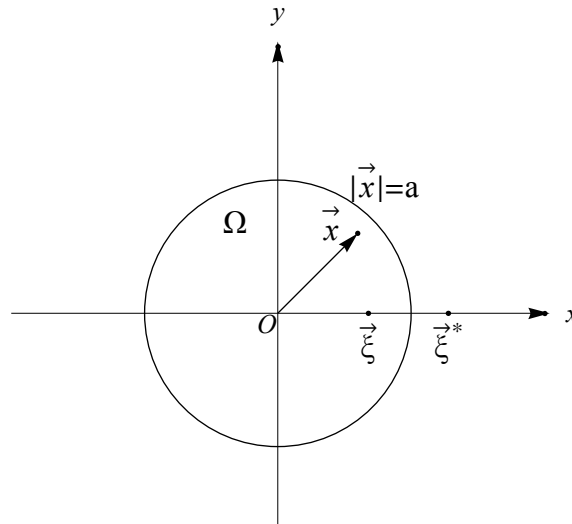
Θεωρούμε τη σφαιρική περιοχή  $\Omega := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}| \leq a\}$  του  $\mathbb{R}^n$ , με  $n \geq 2$ . Το Σχ. 11.3 δείχνει την τομή αυτής της περιοχής με το επίπεδο  $xy$ , οπότε στην περίπτωση  $n = 2$  έχουμε και πιστή απεικόνιση της ίδιας της  $\Omega$ .

Ξεκινώντας, για λόγους εύκολης εποπτείας, με την υπόθεση ότι το  $n = 3$ , τοποθετούμε ένα φορτίο  $Q = 1$  στη θέση  $\boldsymbol{\xi} \in \Omega$ . Το δυναμικό που αντιστοιχεί στο φορτίο είναι ίσο με

$$F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|}, \quad \mathbf{x} \neq \boldsymbol{\xi}. \quad (11.15)$$

Η συμμετρία της διάταξης μας επιτρέπει να υποθέσουμε ότι το  $\boldsymbol{\xi}$  βρίσκεται πάνω σ' έναν από τους άξονες του Καρτεσιανού συστήματος που έχει την αρχή του στο κέντρο της σφαίρας. Γιατί, αν αυτό δεν ίσχυε για την αρχική επιλογή του  $\boldsymbol{\xi}$ , θα μπορούσαμε να αλλάξουμε τους άξονες, έτσι ώστε ένας απ' αυτούς να είναι συγγραμμικός με το  $\boldsymbol{\xi}$ . Αν λοιπόν επιλέξουμε το  $\boldsymbol{\xi}$  να είναι συγγραμμικό με τον άξονα  $x$ , καταλήγουμε στο Σχ. 11.3.





**Σχ. 11.3** Η θέση,  $\xi^*$ , του φορτίου  $Q$  στο εσωτερικό της σφαιρικής επιφάνειας  $|x| = a$  και του είδωλού του,  $\xi^*$ .

Θέλουμε τώρα να τοποθετήσουμε ένα φορτίο  $Q^*$  σ' ένα σημείο  $\xi^*$  της περιοχής  $\mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$  που ν' αναίρει το αποτέλεσμα του  $Q$  σε κάθε σημείο της σφαιρικής επιφάνειας  $|x| = a$ . Η πείρα που αποκομίσαμε από τα δύο προηγούμενα παραδείγματα ίσως μας ωθούσε να σκεφτούμε ότι αρκεί να πάρουμε το  $Q^* = -Q$  και να το τοποθετήσουμε πάνω στην ίδια ακτίνα που συνδέει το  $x = 0$  με το  $\xi$  και σε απόσταση από το σημείο όπου αυτή η ακτίνα τέμνει τον καθρέφτη  $|x| = a$  ίση με  $a - |\xi|$ .

Όμως, γνωρίζουμε καλά ότι ... οι σφαιρικοί καθρέφτες παραμορφώνουν την εικόνα. Δηλαδή, όσο καλά κι αν κατάφερνε μια τέτοια επιλογή να μηδενίσει το συνολικό αποτέλεσμα των  $Q$  και  $Q^*$  στη γειτονιά του σημείου της  $\partial\Omega$  όπου η ακτινική ευθεία τέμνει την  $\partial\Omega$ , θα οδηγούσε σε πλήρη αποτυχία στο υπόλοιπο τμήμα της  $\partial\Omega$ . Γιατί, είναι αδύνατο δύο σημεία  $\xi$  και  $\xi^*$  που βρίσκονται στο εσωτερικό και το εξωτερικό της σφαίρας, αντίστοιχα, να έχουν την ίδια απόσταση από κάθε σημείο  $x$  της  $|x| = a$ .

Από την άλλη μεριά, η ίδια η συμμετρία της διάταξης μας πείθει ότι τα  $\xi$  και  $\xi^*$  δεν μπορεί παρά να βρίσκονται πάνω στην ίδια ακτίνα. Θα υιοθετήσουμε αυτό το διαισθητικό συμπέρασμα σαν υπόθεση εργασίας και θα κρίνουμε την ορθότητά του από το τελικό αποτέλεσμα. Θεωρούμε, λοιπόν, ότι για  $\xi \neq \mathbf{0}$ , η συνάρτηση Green έχει τη μορφή

$$G(x, \xi) = \frac{1}{|x - \xi|} + \frac{Q^*}{|x - \xi^*|}, \quad (11.16)$$

όπου

$$\xi^* = \lambda \xi, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (11.17)$$

Επιβάλλουμε, στη συνέχεια, τη συνθήκη μηδενισμού της  $G$  στα σημεία του σύνορου  $\partial\Omega$ , οπότε παίρνουμε

$$Q^* |x - \xi| = -|x - \lambda \xi|, \quad \text{για } |x| = a. \quad (11.18)$$

Τετραγωνίζοντας αυτή τη σχέση οδηγούμαστε στην

$$Q^{*2} (|\mathbf{x}|^2 - 2 \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi} + |\boldsymbol{\xi}|^2) = |\mathbf{x}|^2 - 2 \lambda \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi} + \lambda^2 |\boldsymbol{\xi}|^2, \quad (11.19)$$

όπου  $\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi}$  το εσωτερικό γινόμενο των  $\mathbf{x}$ ,  $\boldsymbol{\xi}$ . Δηλαδή  $\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi} = a |\boldsymbol{\xi}| \cos \theta$ , με  $\theta$  τη γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα  $\mathbf{x}$  και  $\boldsymbol{\xi}$ . Όταν το  $\mathbf{x}$  είναι ομόρροπο προς το  $\boldsymbol{\xi}$ , τότε  $\theta = 0$  και άρα  $\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi} = a |\boldsymbol{\xi}|$ . Στην αντίθετη περίπτωση,  $\theta = \pi$ , οπότε  $\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\xi} = -a |\boldsymbol{\xi}|$ . Γράφοντας την (11.18) και (11.19) γι' αυτές τις δύο περιπτώσεις, παίρνουμε

$$Q^{*2} (a^2 - 2 a |\boldsymbol{\xi}| + |\boldsymbol{\xi}|^2) = a^2 - 2 \lambda a |\boldsymbol{\xi}| + \lambda^2 |\boldsymbol{\xi}|^2, \quad (11.20)$$

$$Q^{*2} (a^2 + 2 a |\boldsymbol{\xi}| + |\boldsymbol{\xi}|^2) = a^2 + 2 \lambda a |\boldsymbol{\xi}| + \lambda^2 |\boldsymbol{\xi}|^2. \quad (11.21)$$

Από αυτό το ζευγάρι εξισώσεων αμέσως συνάγεται ότι

$$\lambda = Q^{*2} = \frac{a^2}{|\boldsymbol{\xi}|^2}, \quad (11.22)$$

και, άρα,

$$\boldsymbol{\xi}^* = \frac{a^2}{|\boldsymbol{\xi}|^2} \boldsymbol{\xi}, \quad Q^* = -\frac{a}{|\boldsymbol{\xi}|}. \quad (11.23)$$

Ας σημειώσουμε τώρα ότι, από την πρώτη των (11.23) έπεται ότι

$$|\boldsymbol{\xi}^*| |\boldsymbol{\xi}| = a^2. \quad (11.24)$$

Αυτή ακριβώς είναι η σχέση που χαρακτηρίζει δύο σημεία που βρίσκονται πάνω στην ίδια ακτινική ημιευθεία και ονομάζονται **αντίστροφα (το ένα του άλλου)** ως προς τη σφαιρική επιφάνεια  $|\mathbf{x}| = a$ .

Ας σημειώσουμε, επίσης, ότι η πρώτη των (11.23) ισχύει και στην περίπτωση όπου  $n > 3$ , ενώ η δεύτερη γίνεται

$$Q^* = -(a/|\boldsymbol{\xi}|)^{n-2}. \quad (11.25)$$

Συμπερασματικά, η συνάρτηση Green για την περιοχή  $|\mathbf{x}| \leq a$  του  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$ , γράφεται σαν

$$G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = -\frac{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^{2-n}}{2-n} + \frac{[|(\mathbf{x}/a) - (\boldsymbol{\xi}/|\boldsymbol{\xi}|)]|^{2-n}}{2-n}, \quad \boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{0}, \quad (11.26)$$

Όσο αφορά την περίπτωση όπου το  $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$ , οπότε το δυναμικό  $F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$  γίνεται  $F(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = 1/|\mathbf{x}|$  (για  $n = 3$ ), παρατηρούμε ότι  $F(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = a^{-1}$ , όταν το  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ . Άρα, αρκεί να επιλέξουμε ως αρμονική συνάρτηση  $H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})$  τη σταθερή ποσότητα  $-a^{-1}$ , για να εξασφαλίσουμε το μηδενισμό της  $G(\mathbf{x}, \mathbf{0})$ , όταν το  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ . Γενικεύοντας αυτή την παρατήρηση για  $n \geq 3$ , παίρνουμε

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = \frac{1}{2-n} (a^{2-n} - |\mathbf{x}|^{2-n}). \quad (11.27)$$

Τέλος, για ν' αντιμετωπίσουμε την περίπτωση όπου  $n = 2$ , θα μπορούσαμε να ξεκινήσουμε από τη θεμελιακή λύση

$$F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \ln |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|, \quad \boldsymbol{\xi} \neq \mathbf{0}. \quad (11.28)$$

Τότε, θα περιμέναμε ότι, η πρόσθετη πηγή στο αντίστροφο του  $\xi$ , ως προς τον κύκλο  $|x| = a$ , σημείο  $\xi^*$ , θα ήταν της μορφής

$$H_0(x, \xi) = Q^* \ln |x - \xi^*|. \quad (11.29)$$

Έτσι, θα 'μενε να προσδιοριστεί το  $Q^*$  από τη συνθήκη  $F(x, \xi) + H_0(x, \xi) = 0$  για  $|x| = a$ .

Ωστόσο, εξετάζοντας την περίπτωση του Σχ. 5.3 με  $x = a$  στις (11.28) και (11.29), βρίσκουμε ότι

$$F(a, \xi) = \ln |a - \xi|, \quad H_0(a, \xi) = Q^* \ln \left[ \frac{a}{\xi} (a - \xi) \right]. \quad (11.30)$$

Από αυτές γίνεται φανερό ότι είναι αδύνατο να βρεθεί  $Q^*$  τέτοιο ώστε  $F(a, \xi) + H_0(a, \xi) = 0$ .

Όμως, σε κάθε θεμελιακή λύση μπορούμε να προσθέσουμε μια σταθερή ποσότητα και πάλι να έχουμε θεμελιακή λύση με τον ίδιο πόλο. Με οδηγό την (11.30), αντικαθιστούμε την  $H_0(x, \xi)$ , με  $Q^* = -1$ , από την

$$H_1(x, \xi) = -\ln |x - \xi^*| + \ln (a / |\xi|). \quad (11.31)$$

Έτσι, από τις (11.28) και (11.31) καταλήγουμε στη συνάρτηση Green

$$G(x, \xi) = F(x, \xi) + H_1(x, \xi) = \ln \left( \frac{a}{|\xi|} \frac{|x - \xi|}{|x - \xi^*|} \right). \quad (11.32)$$

Όσο αφορά την περίπτωση  $\xi = \mathbf{0}$ , μπορούμε να επαναλάβουμε το συλλογισμό που οδήγησε στην (11.27) για να πάρουμε

$$G(x, \mathbf{0}) = \ln \frac{|x|}{a}. \quad (11.33)$$

## Ασκήσεις

**11.1** Να κατασκευαστεί η συνάρτηση Green για το πρόβλημα Dirichlet της  $\Delta u = 0$ , στην περιοχή  $y > 0$  του  $\mathbb{R}^2$ , με τη μέθοδο των ειδώλων.

**11.2** Να κατασκευαστεί η συνάρτηση Green για το τεταρτημόριο  $x > 0, y > 0$  του  $\mathbb{R}^2$ , με τη μέθοδο των ειδώλων.

**11.3** Να επαναληφθεί η προηγούμενη άσκηση για τη σφηνοειδή περιοχή  $r > 0, 0 < \theta < \pi/4$  του  $\mathbb{R}^2$ , όπου  $(r, \theta)$  είναι οι πολικές συντεταγμένες.

**11.4** Θεωρήστε τη λωρίδα  $0 < x < a$  του  $\mathbb{R}^3$ .

(i) Δείχτε ότι η αντίστοιχη συνάρτηση Green προκύπτει από την υπέρθεση των δυναμικών ενός άπειρου, αλλά αριθμήσιμου, συνόλου φορτισμένων σωματιών.

(ii) Προσδιορίστε τη θέση και το φορτίο καθενός απ' αυτά τα σωματίδια με τη μορφή ακολουθίας.

(iii) Δείχτε ότι η αντίστοιχη σειρά, που δίνει τη συνάρτηση Green, συγκλίνει.

**11.5** Να κατασκευαστεί η συνάρτηση Green για το πρόβλημα Dirichlet

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in \Omega := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |x| > a > 0\}$$

$$u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \text{ δοσμένη, για } |\mathbf{x}| = a$$

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} u(\mathbf{x}) = 0$$

**11.6** Να κατασκευαστεί η συνάρτηση Green για το πρόβλημα Dirichlet της εξίσωσης Laplace στο ημισφαίριο  $\Omega := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < |\mathbf{x}| < a, z > 0\}$ .

**11.7** Ως *συνάρτηση Neumann* για την εξίσωση Laplace σε μια περιοχή  $\Omega$ , ορίζεται η θεμελιακή λύση που σέβεται τη συνοριακή συνθήκη

$$\partial_\nu G(\mathbf{x}, \xi) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad \xi \in \Omega.$$

(i) Αναπτύξτε το φυσικό συλλογισμό που οδηγεί στο αποτέλεσμα

$$G(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{|\mathbf{x} - \xi|} + \frac{1}{|\mathbf{x} - \xi^*|},$$

όπου  $\xi^* = (a, b, -c)$  για  $\xi = (a, b, c)$ , για τη συνάρτηση Neumann του  $\mathbb{R}_+^3$ .

**11.8** Με βάση τον ορισμό και τη μέθοδο που υποδειχνεται στην προηγούμενη άσκηση, να κατασκευαστεί η συνάρτηση Neumann

(i) Για έναν κυκλικό δίσκο ακτίνας  $a$ .

(ii) Για μια σφαιρική περιοχή του  $\mathbb{R}^3$ .

## 12. Ο τύπος του Poisson

Έχοντας κατασκευάσει τη συνάρτηση Green για το πρόβλημα Dirichlet σε δοσμένη περιοχή  $\Omega$  του  $\mathbb{R}^n$  μπορούμε να εκμεταλλευτούμε τον τύπο της αναπαράστασης στη μορφή (5.9) για να δώσουμε και τη λύση του ίδιου του προβλήματος Dirichlet. Πιο συγκεκριμένα, ας υποθέσουμε ότι η περιοχή  $\Omega$  έχει ομαλό σύνορο  $\partial\Omega$  και ότι έχει δοθεί για λύση το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\Delta u(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (12.1)$$

$$u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (12.2)$$

όπου  $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$  συγκεκριμένη συνάρτηση, συνεχής στο σύνολο  $\partial\Omega$ . Με άλλα λόγια, ζητείται να βρεθεί μια συνάρτηση  $u$  που να είναι αρμονική στην περιοχή  $\Omega$ , συνεχής σ' ολόκληρη την  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$  και τέτοια που ο περιορισμός της στο υποσύνολο  $\partial\Omega$  της  $\bar{\Omega}$  ταυτίζεται με την προκαθορισμένη συνάρτηση  $f$ .

Σύμφωνα, λοιπόν, με την εξίσωση (5.9), αν η  $u \in C^2(\Omega)$  και  $G$  η συνάρτηση Green για τη δοσμένη περιοχή  $\Omega$ , τότε ο περιορισμός της  $u$  στο σύνορο  $\partial\Omega$  συνδέεται με τη  $u$  στο εσωτερικό  $\Omega$ , με τη σχέση που εκφράζει ο τύπος

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega} u(\xi) \frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{x}, \xi) dS_\xi. \quad (12.3)$$

Άρα, θα περίμενε κανείς ότι η αντικατάσταση της  $u$  στο επιφανειακό ολοκλήρωμα (12.3) από τη δοσμένη  $f$  δίνει και τη λύση του προβλήματος Dirichlet (12.1-2). Θα δούμε ότι, κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις, οι προσδοκίες μας επαληθεύονται πλήρως. Προσωρινά, πρέπει να παρατηρήσουμε ότι το πρόβλημα Dirichlet απαιτεί η  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ , ενώ η (12.3) ισχύει (για μας) κάτω από την αυστηρότερη προϋπόθεση ότι η  $u \in C^2(\bar{\Omega})$ .

Μετά από αυτές τις γενικές επισημάνσεις, στρεφόμαστε πλέον στη συγκεκριμένη περίπτωση της περιοχής

$$\Omega := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}| < a\}, \quad (12.4)$$

που έχει ως σύνορο την σφαιρική επιφάνεια

$$\partial\Omega = S_a^{n-1} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}| = a\}. \quad (12.5)$$

Σ' ένα σύστημα Καρτεσιανών συντεταγμένων  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , με αρχή το κέντρο της σφαίρας  $S_a^{n-1}$ , το μοναδιαίο κάθετο στην επιφάνεια διάνυσμα είναι ίσο με

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega. \quad (12.6)$$

Συνακόλουθα, αν η συνάρτηση  $g \in C^1(\bar{\Omega})$ , τότε

$$\frac{\partial g}{\partial n}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{n}(\mathbf{x}) \cdot \nabla g(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{|\mathbf{x}|} \frac{\partial g}{\partial x_i}(\mathbf{x}). \quad (12.7)$$

Ειδικότερα, αν για  $g(\mathbf{x})$  πάρουμε τη συνάρτηση Green,  $G(\mathbf{x}, \xi)$ , με  $\xi \in \Omega$ , τότε

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{x}, \xi) &\equiv n(\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x}, \xi) = \\ &\sum_i \frac{x_i}{|\mathbf{x}|} \frac{\partial G}{\partial x_i}(\mathbf{x}, \xi) = \sum_i \frac{x_i}{|\mathbf{x}|} \left[ \frac{\partial F}{\partial x^i}(\mathbf{x}, \xi) + \frac{\partial H}{\partial x_i}(\mathbf{x}, \xi) \right]. \end{aligned} \quad (12.8)$$

Σύμφωνα τώρα με την (11.26),

$$F(\mathbf{x}, \xi) = \frac{|\mathbf{x} - \xi|^{2-n}}{(2-n)\omega_n}, \quad H(\mathbf{x}, \xi) = \frac{((|\xi|/a)|\mathbf{x} - \xi^*|)^{2-n}}{(2-n)\omega_n}, \quad (12.9)$$

όπου  $n \geq 3$  και ο αριθμητικός συντελεστής επιλέχτηκε έτσι που να ισχύει ο τύπος της αναπαράστασης ακριβώς στη μορφή (9.32).

Παρατηρούμε, ότι από την άποψη της μερικής παραγωγίσης ως προς  $x_i$ , οι ποσότητες  $|\mathbf{x} - \xi|$  και  $|\mathbf{x} - \xi^*|$  συμπεριφέρονται σαν την  $r = |\mathbf{x}|$ . Για την τελευταία γνωρίζουμε ότι  $\partial r / \partial x_i = x_i / r$  και άρα εύκολα από τις (12.9) βρίσκουμε πως

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(\mathbf{x}, \xi) = \frac{x_i - \xi_i}{\omega_n |\mathbf{x} - \xi^*|^n}, \quad \frac{\partial H}{\partial x_i}(\mathbf{x}, \xi) = \left( \frac{|\xi|}{a} \right)^{2-n} \frac{x_i - \xi_i}{\omega_n |\mathbf{x} - \xi^*|^n}. \quad (12.10)$$

Από την άλλη, εύκολα επαληθεύει κανείς ότι ο ορισμός  $\xi^* = (a^2 / |\xi|^2) \xi$  του  $\xi^*$  συνεπάγεται ότι

$$|\mathbf{x} - \xi^*| = \frac{a}{|\mathbf{x}|} |\mathbf{x} - \xi|, \quad \text{όταν } |\mathbf{x}| = a. \quad (12.11)$$

Άρα από τον συνδυασμό των (12.8), (12.10) και (12.11) έπεται ότι

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{x}, \xi) \right]_{|\mathbf{x}|=a} &= \frac{1}{\omega_n a} \left[ \left\{ \frac{a^2 - \mathbf{x} \cdot \xi}{|\mathbf{x} - \xi|^n} - \left( \frac{a}{|\xi|} \right)^{n-2} \frac{a^2 - \vec{x} \cdot \xi^*}{|\mathbf{x} - \xi^*|^n} \right\} \right]_{|\mathbf{x}|=a} = \\ &= \frac{1}{\omega_n a} \left[ \left\{ \frac{a^2 - \mathbf{x} \cdot \xi}{|\mathbf{x} - \xi|^n} - \frac{|\xi|^2 - \mathbf{x} \cdot \xi}{|\mathbf{x} - \xi|^n} \right\} \right]_{|\mathbf{x}|=a} \\ &= \frac{a^2 - |\mathbf{x}|^2}{\omega_n a |\mathbf{x} - \xi|^n}. \end{aligned} \quad (12.12)$$

Αφήνουμε σαν άσκηση την επαλήθευση του γεγονότος ότι οι (12.10), άρα και η (12.12), ισχύουν κι όταν  $n = 2$ , για να συγκεντρώσουμε το συνολικό αποτέλεσμα στο

**Θεώρημα 12.1** (Τύπος Poisson)

(i) Για μια συνάρτηση  $u$ , αρμονική στη σφαιρική περιοχή  $\Omega := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}| < a\}$  και  $C^2(\bar{\Omega})$ , ισχύει ο ολοκληρωτικός τύπος του Poisson

$$u(\mathbf{x}) = \int_{|\xi|=a} P(\mathbf{x}, \xi) u(\xi) dS_{\xi}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (12.13)$$

όπου ο λεγόμενος **πυρήνας Poisson**,  $P(\mathbf{x}, \xi)$ , δίνεται από την έκφραση

$$P(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{\omega_n a} \frac{a^2 - |\mathbf{x}|^2}{|\mathbf{x} - \xi|^n}. \quad (12.14)$$

(ii) Η συνάρτηση

$$u(\mathbf{x}) = \int_{|\xi|=a} P(\mathbf{x}, \xi) f(\xi) dS_\xi, \quad (12.15)$$

αποτελεί τη μοναδική λύση κλάσης  $C^2(\overline{\Omega})$  του προβλήματος Dirichlet (12.1-2) για τη σφαιρική περιοχή  $\Omega$ .

### Απόδειξη

Το πρώτο μέρος του θεωρήματος είναι άμεση απόρροια του τύπου της αναπαράστασης (12.3) και της εξ. (12.12). Αρκεί να θυμηθούμε τη συμμετρία  $G(\mathbf{x}, \xi) = G(\xi, \mathbf{x})$  της συνάρτησης Green, για να βεβαιωθούμε πως η αντικατάσταση της (12.12) στην (12.3) δίνει τις (12.13-14).

Το δεύτερο πάλι μέρος του θεωρήματος προκύπτει από την αντικατάσταση της  $u$  στο συνοριακό ολοκλήρωμα της (12.13) από τον περιορισμό της  $u|_{\partial\Omega} = f$  στο σύνορο.

Τέλος, η μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος Dirichlet για την εξίσωση Laplace έχει ήδη αποδειχτεί σε προηγούμενο εδάφιο. ■

Μπορούμε να δείξουμε ότι η (12.15) δίνει τη μοναδική λύση του προβλήματος Dirichlet και στη γενικότερη περίπτωση στην οποία απαιτείται η  $u$  να ανήκει στην ευρύτερη κλάση συναρτήσεων  $C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ . Πριν, όμως, παρουσιάσουμε την απόδειξη, αξίζει να δώσουμε την αναλυτική μορφή του τύπου Poisson στις περιπτώσεις  $n = 2$  και  $3$ .

### Παράδειγμα 12.1

Με  $(r, \theta)$  τις γνωστές πολικές συντεταγμένες του  $\mathbb{R}^2$ , θέτουμε

$$\mathbf{x} = (x, y) \Leftrightarrow (r, \theta), \quad \xi = (\eta, \xi) \Leftrightarrow (\rho, \phi) \quad (12.16)$$

Σημειώνουμε πρώτα ότι

$$|\mathbf{x} - \xi|^2 = |\mathbf{x}|^2 - 2\mathbf{x} \cdot \xi + |\xi|^2 = r^2 - 2ar \cos(\phi - \theta) + a^2, \quad (12.17)$$

όταν  $|\xi| = a$ . Επίσης, σ' αυτή την περίπτωση  $dS_\xi = a d\phi$ . Έτσι οι (12.13-14) δίνουν

$$u(r, \theta) = \frac{a^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{v(a, \phi)}{r^2 - 2ar \cos(\phi - \theta) + a^2} d\phi, \quad r < a \quad (12.18)$$

όπου  $v(r, \theta) = u(x, y)$ .

### Παράδειγμα 6.2

Στην περίπτωση του  $\mathbb{R}^3$  εισάγουμε σφαιρικές συντεταγμένες  $(r, \theta, \phi)$  και θέτουμε

$$\mathbf{x} = (x, y, z) \Leftrightarrow (r, \theta, \phi), \quad \xi = (\eta, \xi, \zeta) \Leftrightarrow (\rho, \tilde{\theta}, \tilde{\phi}). \quad (12.19)$$

Αν  $\psi$  είναι η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα  $\mathbf{x}$  και  $\xi$  τότε, για  $\rho = a$ , θα έχουμε

$$|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| = r^2 - 2 a r \cos(\psi) + a^2, \quad (12.20)$$

όπου  $\psi = \psi(\theta, \phi, \tilde{\theta}, \tilde{\phi})$ .

Γράφοντας την έκφραση της  $u$  στις σφαιρικές συντεταγμένες σαν  $u(r, \theta, \phi)$  και λαβαίνοντας υπόψη ότι  $d S_{\xi} = \rho^2 \sin \tilde{\theta} d \tilde{\theta} d \tilde{\phi}$ , καταλήγουμε στον τύπο

$$u(r, \theta, \phi) = \frac{a(a^2 - r^2)}{4 \pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{u(a, \tilde{\theta}, \tilde{\phi})}{[r^2 - 2 a r \cos(\psi) + a^2]^{3/2}} d \tilde{\theta} d \tilde{\phi}, \quad r < a \quad (12.21)$$

Κλείνουμε αυτό το εδάφιο με την απόδειξη του ισχυρισμού ότι η δουλειά που προηγήθηκε καλύπτει και τη γενικότερη περίπτωση του προβλήματος Dirichlet για την εξίσωση Laplace σε μια σφαιρική περιοχή του  $\mathbb{R}^n$ . Η απόδειξη στηρίζεται στο προκαταρκτικό

**Θεώρημα 12.2** (Ιδιότητες του πυρήνα Poisson)

Ο πυρήνας Poisson που ορίζεται στην (12.14) έχει τις ακόλουθες ιδιότητες

(i)  $P(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) > 0$ , όταν  $|\mathbf{x}| < a$  και  $|\boldsymbol{\xi}| = a$ .

(ii) Αν το  $\boldsymbol{\xi}_0 \in \partial \Omega$  και το  $\mathbf{x} \in \Omega$ , τότε

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \boldsymbol{\xi}_0} P(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = 0, \quad (12.22)$$

ομοιόμορφα για όλα τα  $\boldsymbol{\xi}$  του σύνορου που ικανοποιούν τη συνθήκη  $|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_0| > \delta > 0$ .

(iii) Για κάθε  $\mathbf{x} \in \Omega$ ,

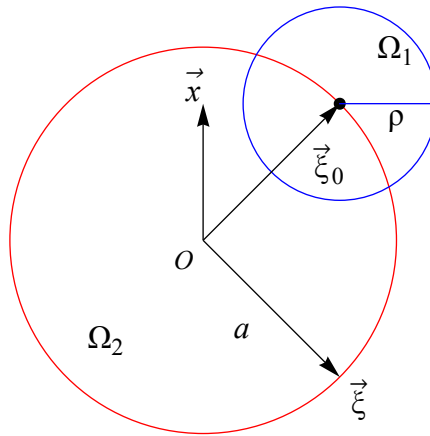
$$\int_{|\boldsymbol{\xi}|=a} P(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) d S_{\xi} = 1. \quad (12.23)$$

Απόδειξη

(i) Προφανής από τον τύπο (12.14) του πυρήνα του Poisson.

(ii) Θεωρούμε ένα σημείο  $\boldsymbol{\xi}_0$  της επιφάνειας της σφαίρας  $|\mathbf{x}| = a$  και, με κέντρο το  $\boldsymbol{\xi}_0$ , κατασκευάζουμε μια σφαιρική επιφάνεια ακτίνας  $\rho$ , όπως στο Σχ. 12.1. Είναι φανερό ότι, για οποιοδήποτε  $\varepsilon > 0$ , μπορούμε να διαλέξουμε το  $\rho = \min(\delta/2, \varepsilon)$  οπότε η συνθήκη  $|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_0| \leq \rho$  θα συνεπάγεται ότι  $|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}| \geq \delta/2$ . Άρα, η ποσότητα  $|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|^{-n}$  θα παραμένει θετική και φραγμένη καθώς το  $\mathbf{x} \rightarrow \boldsymbol{\xi}_0$ . Στο ίδιο όριο ο αριθμητής μηδενίζεται αφού  $|\boldsymbol{\xi}_0| = a$ .





**Σχ. 12.1** Οι περιοχές  $\Omega_1$  και  $\Omega_2$  που ορίζονται από τις δυο σφαιρικές επιφάνειες, ακτίνας  $a$  και  $\rho$ , αντίστοιχα, που έχουν τα κέντρα τους στα σημεία  $O$  και  $\xi_0$ .

(iii) Η συνάρτηση  $u(\mathbf{x}) = 1$  για κάθε  $\mathbf{x} \in \bar{\Omega}$  είναι κλάσης  $C^2(\bar{\Omega})$ . Άρα ισχύει γι' αυτήν ο τύπος Poisson που αμέσως δίνει την (12.21).

■

**Θεώρημα 12.3** (Λύση κλάσης  $C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  του προβλήματος Dirichlet)

Η συνάρτηση (12.15) δίνει τη μοναδική λύση κλάσης  $C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  του προβλήματος Dirichlet (12.1-2) για τη σφαιρική περιοχή  $\Omega := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x}| < a, n \geq 2\}$ .

Απόδειξη

Για  $\mathbf{x} \neq \xi$ , πυρήνας Poisson είναι αρμονική συνάρτηση, από την κατασκευή του. Συνεπώς,

$$\Delta_{\mathbf{x}} \int_{|\xi|=a} P(\mathbf{x}, \xi) f(\xi) dS_{\xi} = \int_{|\xi|=a} \Delta_{\mathbf{x}} P(\mathbf{x}, \xi) f(\xi) dS_{\xi} = 0 \quad (12.24)$$

και άρα η εξίσωση (12.15) πραγματικά ορίζει μια συνάρτηση  $u$  που είναι αρμονική στην περιοχή  $\Omega$ .

Μένει ν' αποδείξουμε ότι η συνάρτηση  $u$  που ορίζεται από τον τύπο Poisson στην  $\Omega$  επεκτείνεται με συνεχή τρόπο στην  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$  και ότι  $u|_{\partial\Omega} = f$ . Για το σκοπό αυτό σημειώνουμε πρώτα ότι η ιδιότητα (iii) του πυρήνα Poisson μας επιτρέπει να γράψουμε την  $f$  ως εξής:

$$f(\xi_0) = f(\xi_0) \int_{|\xi|=a} P(\mathbf{x}, \xi) dS_{\xi} = \int_{|\xi|=a} P(\mathbf{x}, \xi) f(\xi_0) dS_{\xi} \quad (12.25)$$

Άρα

$$u(\mathbf{x}) - f(\xi_0) = \int_{|\xi|=a} P(\mathbf{x}, \xi) [f(\xi) - f(\xi_0)] dS_{\xi} = I_1 + I_2 \quad (12.26)$$

όπου

$$I_1 = \int_{\substack{|\xi|=a \\ \xi \in \partial\Omega_1}} P(\mathbf{x}, \xi)[f(\xi) - f(\xi_0)] d S_\xi \quad (12.27)$$

και

$$I_2 = \int_{\substack{|\xi|=a \\ \xi \in \partial\Omega_2}} P(\mathbf{x}, \xi)[f(\xi) - f(\xi_0)] d S_\xi \quad (12.28)$$

όπου, όπως στο Σχ. 12.1,  $\Omega_1 = \Omega \cap B(\xi_0, \delta)$ ,  $\Omega_2 = \Omega - \Omega_1$ .

Τώρα, επειδή η  $f$  είναι συνεχής στο συμπαγές σύνολο  $\partial\Omega$ , έπεται ότι είναι και ομοιόμορφα συνεχής στο  $\partial\Omega$ . Δηλαδή, για κάθε  $\varepsilon > 0$  υπάρχει  $\delta > 0$ , το οποίο εξαρτιέται μόνο από το  $\varepsilon$ , τέτοιο που

$$|f(\xi) - f(\xi_0)| \leq \varepsilon, \text{ όταν } |\xi - \xi_0| \leq \delta(\varepsilon). \quad (12.29)$$

Παίρνοντας αυτό το  $\delta$  να είναι η ακτίνα της σφαίρας που έχει κέντρο το  $\xi_0 \in \partial\Omega$  και ορίζει την περιοχή  $\Omega_1$ , θα έχουμε

$$|I_1| \leq \varepsilon \int_{\substack{|\xi|=a \\ \xi \in \partial\Omega_1}} |P(\mathbf{x}, \xi)| d S_\xi \leq \varepsilon, \quad (12.30)$$

λόγω των ιδιοτήτων (i) και (iii) του πυρήνα Poisson.

Το συνοριακό ολοκλήρωμα  $I_2$ , τώρα, θα έχουμε  $|\xi - \xi_0| > \delta(\varepsilon)$ . Άρα, μπορούμε να επικαλεστούμε την ιδιότητα (ii) του πυρήνα Poisson για να συμπεράνουμε ότι για  $|\mathbf{x} - \xi_0| \leq \delta'$ , με  $\delta' < \delta(\varepsilon)$  και αρκετά μικρό, μπορούμε να κάνουμε την ποσότητα  $P(\mathbf{x}, \xi)$  οσοδήποτε μικρή θέλουμε. Με άλλα λόγια, υπάρχει  $\delta'$  τέτοιο που

$$|\mathbf{x} - \xi| \leq \delta' \implies P(\mathbf{x}, \xi) \leq \varepsilon' \equiv \frac{\varepsilon}{2 M \alpha^{n-1} \omega_n}, \quad (12.31)$$

όπου

$$M := \max_{\xi \in \partial\Omega} |f(\xi)|. \quad (12.32)$$

Τότε όμως το

$$|I_2| \leq \int_{\substack{|\xi|=a \\ \xi \in \partial\Omega_1}} P(\mathbf{x}, \xi) (|f(\xi)| + |f(\xi_0)|) d S_\xi \leq \quad (12.33)$$

$$\int_{\substack{|\xi|=a \\ \xi \in \partial\Omega_1}} P(\mathbf{x}, \xi) d S_\xi \leq 2 M \frac{\varepsilon}{2 M \alpha^{n-1} \omega_n} \alpha^{n-1} \omega_n = \varepsilon.$$

Συνακόλουθα,

$$|u(\mathbf{x}) - f(\xi_0)| \leq |I_1| + |I_2| \leq 2 \varepsilon. \quad (12.34)$$

Αυτό αποδειχνει ότι το

$$\lim_{x \in \Omega \rightarrow \xi \in \partial \Omega} u(x) = f(\xi_0). \quad (12.35)$$

Συνεπώς, η συνάρτηση  $u: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  που ορίζεται από τον τύπο (12.15) στο εσωτερικό  $\Omega$  της σφαίρας  $\bar{\Omega}$  και την  $u(x) = f(x)$  για  $x$  στο σύνορο  $\partial \Omega$  της  $\bar{\Omega}$  είναι αρμονική στην  $\Omega$  και κλάσης  $C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ . Ότι είναι και η μοναδική λύση αυτού του είδους αποδείχτηκε νωρίτερα. ■

Θα πρέπει εδώ να σημειωθεί ότι η απόδειξη της ύπαρξης της λύσης του προβλήματος του Dirichlet για την  $\Delta u = 0$  σε σφαιρική περιοχή του  $\mathbb{R}^n$  που μόλις παρουσιάσαμε, είναι καθαρά κατασκευαστική. Δηλαδή, αφού βρήκαμε τη συνάρτηση Green για τη συγκεκριμένη περιοχή, μπορέσαμε να κατασκευάσουμε μια συγκεκριμένη συνάρτηση που είναι λύση της εξίσωσης Laplace και σέβεται τη συνοριακή συνθήκη.

Ωστόσο, αυτό το "επίτευγμα" οφείλεται στην απλότητα της γεωμετρίας της δοσμένης περιοχής. Κατά συνέπεια, όταν η γεωμετρία της περιοχής  $\Omega$  είναι περίπλοκη, δεν μπορούμε να ελπίζουμε στη δυνατότητα αναλυτικής κατασκευής της συνάρτησης Green. Σ' αυτές τις περιπτώσεις, είμαστε υποχρεωμένοι να επινοήσουμε διαφορετικού είδους μεθόδους για την απόδειξη της ύπαρξης λύσεων του αντίστοιχου προβλήματος συνοριακών τιμών.

Τέτοιες γενικές και μη-κατασκευαστικές μέθοδοι υπάρχουν από καιρό στη βιβλιογραφία. Παραείναι, όμως, σύνθετες για να παρουσιαστούν σε τούτο το εισαγωγικό βιβλίο ΜΔΕ. Γι' αυτό, θα αρκεστούμε στην ακόλουθη αισιόδοξη παρατήρηση, που δείχνει ότι η αποτελεσματικότητα των μεθόδων που έχουμε ήδη αναπτύξει δεν είναι τόσο περιορισμένη όσο φαίνεται από πρώτη ματιά.

Πολλές φορές, λοιπόν, μια περιοχή  $\Omega$ , της οποίας η γεωμετρία είναι περίπλοκη, μπορεί να μετασχηματιστεί ή ν' απεικονιστεί σε άλλη πολύ απλούστερη, την  $\tilde{\Omega}$ . Αν, λοιπόν, γνωρίζουμε τη λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών για κάποια συγκεκριμένη ΜΔΕ στην  $\tilde{\Omega}$  και την απεικόνιση  $F := \Omega \rightarrow \tilde{\Omega}$ , τότε είναι αρκετά εύκολο να αποδείξουμε την ύπαρξη λύσης του αντίστοιχου προβλήματος στην  $\Omega$  και, ίσως, να κατασκευάσουμε αυτή τη λύση. Στο επόμενο κεφάλαιο θα δούμε πολλά παραδείγματα αυτής της μεθόδου.

Εδώ θα περιοριστούμε στο να καταγράψουμε, χωρίς απόδειξη, ένα γενικό αποτέλεσμα σύνθετων μεθόδων που αναφέρθηκαν νωρίτερα, το οποίο αφορά φραγμένες περιοχές, καθώς και στην παρουσίαση της λύσης του προβλήματος Dirichlet για μια περιοχή που δεν είναι φραγμένη.

**Θεώρημα 12.4** (Ύπαρξη λύσης του προβλήματος Dirichlet για τη  $\Delta u = 0$  σε φραγμένες περιοχές του  $\mathbb{R}^n$ )

Ας υποτεθεί ότι η  $\Omega$  είναι φραγμένη περιοχή του  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , με ομαλό (κλάσης  $C^2$ ) σύνορο  $\partial \Omega$ . Τότε, για οποιαδήποτε  $f \in C^0(\partial \Omega)$ , υπάρχει μοναδική αρμονική συνάρτηση  $u$  που ανήκει στην κλάση  $C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  και πληροί την συνθήκη  $u = f$  στο σύνορο  $\partial \Omega$ . ■

**Παράδειγμα 12.3** (Λύση του προβλήματος Dirichlet στον  $\mathbb{R}_+^3$ )

Παρόλο που η περιοχή  $\mathbb{R}_+^3 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}$  δεν είναι φραγμένη, η οριακή διαδικασία που περιγράψαμε στο Παράδειγμα 11.1 μας επιτρέπει να ελπίζουμε ο τύπος αναπαράστασης (12.3) οδηγεί στη λύση του προβλήματος Dirichlet για την  $\Delta u = 0$  και σ' αυτή την περίπτωση.

Από το Παράδειγμα 11.1, γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση Green για την περιοχή  $\Omega = \mathbb{R}_+^3$  δίνεται από την

$$4\pi G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|} - \frac{1}{|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}^*|}, \quad (12.36)$$

όπου  $\boldsymbol{\xi} = (a, b, c)$ ,  $\boldsymbol{\xi}^* = (a, b, -c)$  και ο συντελεστής  $(1/4\pi) \equiv (1/\omega_3)$  εισάχθηκε για να ισχύει ο τύπος της αναπαράστασης στη μορφή (12.3).

Το σύνορο  $\partial\Omega$  της  $\Omega$  είναι το επίπεδο  $z = 0$ . Άρα το προς τα έξω εγκάρσιο στην  $\partial\Omega$  μοναδιαίο διάνυσμα  $\mathbf{n} = (0, 0, -1)$ . Συνεπώς,

$$\frac{\partial}{\partial n} \equiv \mathbf{n} \cdot \nabla \equiv -\frac{\partial}{\partial z}, \quad (12.37)$$

κι άρα

$$\begin{aligned} & 4\pi \frac{\partial}{\partial n_x} G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi})|_{z=0} \\ &= -4\pi \frac{\partial}{\partial z} \left\{ [(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{-1/2} - [(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z+c)^2]^{-1/2} \right\}_{z=0} \\ &= \frac{8\pi c}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + c^2]^{3/2}}. \end{aligned} \quad (12.38)$$

Σημειώστε, τώρα, ότι η (12.3) είναι ταυτόσημη με την

$$u(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\partial\Omega} u(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial n_x} G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) dS_x \quad (12.39)$$

Από την άλλη, η συνάρτηση Green είναι συμμετρική:  $G(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}) = G(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})$ . Κατά συνέπεια, η αντιακατάσταση  $\boldsymbol{\xi} \rightarrow (x, y, z)$  οδηγεί αμέσως στον τύπο

$$u(x, y, z) = \frac{z}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(a, b)}{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2]^{3/2}} da db, \quad z > 0 \quad (12.40)$$

όπου  $f$  συνοριακή τιμή της  $u$ , δηλαδή

$$f(x, y) = u(x, y, 0). \quad (12.41)$$

Αφήνουμε για άσκηση την απόδειξη ότι, πραγματικά, η συνάρτηση (12.40) αποτελεί λύση της εξίσωσης Laplace στον  $\mathbb{R}_+^3$  και σέβεται τη συνοριακή συνθήκη  $u(x, y, 0) = f(x, y)$ , όπου  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  συνεχής και φραγμένη.

## Ασκήσεις

1. Ν' αποδειχτούν οι σχέσεις (12.10).

2. (Αρχή της ανάκλασης)

Υποθέτουμε ότι το  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  είναι τέτοιο που  $r \equiv |\mathbf{x}| \neq 0$ . Σαν αντίστροφο ή είδωλο του  $\mathbf{x}$  ως προς τη σφαιρική επιφάνεια  $|\mathbf{x}| = a$ , ορίσαμε το  $\mathbf{x}^* = (a/r)^2 \mathbf{x}$ . Κατά συνέπεια, η περιοχή  $\Omega^* \subset \mathbb{R}^n$  λέγεται αντίστροφη ή είδωλο της  $\Omega$  ως προς τη σφαίρα  $|\mathbf{x}| = a$ , αν  $\Omega^* := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{y} = \mathbf{x}^*, \mathbf{x} \in \Omega\}$ .

(i) Να δειχτεί ότι, αν η  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  είναι αρμονική στην  $\Omega$  τότε η  $u^* : \Omega^* \rightarrow \mathbb{R}$  που ορίζεται από τον τύπο

$$u^*(\mathbf{x}) = \left(\frac{a}{r}\right)^{n-2} u(\mathbf{x}^*), \quad \mathbf{x} \in \Omega^*, \quad (12.42)$$

είναι αρμονική στην  $\Omega^*$ .

(ii) Να κατασκευαστεί η λύση του προβλήματος Dirichlet για την  $\Delta u = 0$  στην περιοχή  $|\mathbf{x}| > a > 0$ , χρησιμοποιώντας μόνο τον τύπο Poisson και το προηγούμενο αποτέλεσμα. Πιο συγκεκριμένα, να δειχτεί ότι η λύση δίνεται από τον τύπο

$$u^*(\mathbf{x}) = \int_{|\xi|=a} P^*(\mathbf{x}, \xi) f(\xi) dS_\xi, \quad |\mathbf{x}| < a, \quad (12.43)$$

όπου

$$P^*(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{\omega_n a} \frac{|\mathbf{x}|^2 - a^2}{|\mathbf{x} - \xi|^n}. \quad (12.44)$$

3. (i) Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση Green που κατασκευάσατε στην άσκηση 11.2, δείξτε ότι μια αναπαράσταση της λύσης του προβλήματος Dirichlet

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$$

$$u(x, 0) = f(x),$$

όπου  $f(x)$  συνεχής και φραγμένη συνάρτηση, δίνεται από τον τύπο

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y f(\xi)}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi. \quad (12.45)$$

(ii) Δείξτε ότι η παραπάνω έκφραση πραγματικά αποτελεί λύση του δοσμένου προβλήματος συνοριακών τιμών.

(iii) Να υπολογιστεί η  $u(x, y)$  για την περίπτωση όπου  $f(x) \equiv 1$ .

4. Να δειχτεί ότι η συνάρτηση  $u$  που ορίζεται στην (12.40) πραγματικά αποτελεί λύση του προβλήματος Dirichlet της  $\Delta u = 0$  στον  $\mathbb{R}_+^3$ , όταν η  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχής και φραγμένη.

5. Να λυθεί το πρόβλημα Neumann

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}_+^2$$

$$u_y(x, 0) = g(x).$$

Υπόδειξη:  $\Delta(u_y) = (\Delta u)_y$  και άσκ. 4.

### 13. Συνέπειες του τύπου του Poisson

Χρησιμοποιώντας τον τύπο Poisson μπορεί κανείς ν' αποδείξει, χωρίς μεγάλη δυσκολία, μια σειρά από αξιοσημείωτες ιδιότητες των αρμονικών συναρτήσεων, πέρα από εκείνες που έχουμε ήδη παρουσιάσει. Μια απ' αυτές είναι η

#### Πρόταση 13.1 (Ανισότητα του Harnack)

Αν  $\Delta u(\mathbf{x}) = 0$ ,  $u(\mathbf{x}) > 0$  και  $u(\mathbf{x}) \in C^2$  για κάθε  $\mathbf{x}$  στην ανοιχτή και φραγμένη περιοχή  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , τότε

$$\left(\frac{a}{a+r}\right)^{n-2} \frac{a-r}{a+r} u(\xi_0) \leq u(\xi) \leq \left(\frac{a}{a-r}\right)^{n-2} \frac{a+r}{a-r} u(\xi_0) \quad (13.1)$$

για κάθε σημείο  $\xi$  στο εσωτερικό μιας σφαίρας ακτίνας  $a$  με κέντρο το  $\xi_0$  η οποία περιέχεται εξ ολοκλήρου στην  $\Omega$ , δηλαδή όταν  $r := |\xi - \xi_0| < a$ .

#### Απόδειξη

Ας σημειώσουμε πρώτ' απ' όλα, ότι αρκεί ν' αποδείξουμε την ανισότητα Harnack για την περίπτωση όπου  $\xi_0 = \mathbf{0}$ , δηλαδή την περίπτωση που η  $\Omega$  είναι μια γειτονιά της αρχής Καρτεσιανών αξόνων του  $\mathbb{R}^n$ . Τότε η (13.1) γίνεται

$$\left(\frac{a}{a+|\xi|}\right)^{n-2} \frac{a-|\xi|}{a+|\xi|} u(\mathbf{0}) \leq u(\xi) \leq \left(\frac{a}{a-|\xi|}\right)^{n-2} \frac{a+|\xi|}{a-|\xi|} u(\mathbf{0}) \quad (13.2)$$

και η γενικότερη περίπτωση καλύπτεται με απλή μεταφορά της αρχής των αξόνων στο  $\xi_0$ .

Σύμφωνα, λοιπόν, με τον τύπο του Poisson,

$$u(\xi) = \int_{|\mathbf{x}|=a} P(\mathbf{x}, \xi) u(\mathbf{x}) dS_{\mathbf{x}}, \quad \text{για } |\xi| < a \quad (13.3)$$

όπου

$$P(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{a \omega_n} \frac{a^2 - |\xi|^2}{|\mathbf{x} - \xi|^n}. \quad (13.4)$$

Είναι προφανές ότι, για  $|\mathbf{x}|=a$  και  $|\xi| < a$ , ο πυρήνας  $P$  είναι θετικός. Από την άλλη μεριά,

$$\begin{aligned} |\mathbf{x} - \xi|^2 &= |\mathbf{x}|^2 + |\xi|^2 - 2|\mathbf{x}||\xi| \cos \psi = 2a|\xi| - 2a|\xi| \cos \psi \\ &= a^2 + |\xi|^2 - 2a|\xi| \cos \psi, \end{aligned} \quad (13.5)$$

όπου  $\psi$  η γωνία μεταξύ  $\mathbf{x}$  και  $\xi$ . Άρα,

$$a - |\xi| \leq |\mathbf{x} - \xi| \leq a + |\xi|. \quad (13.6)$$

Έτσι, από την (13.4) βρίσκουμε ότι

$$\frac{1}{a \omega_n} \frac{a - |\xi|}{|\mathbf{x} + \xi|^{n-1}} u \leq u(\xi) \leq \frac{1}{a \omega_n} \frac{a + |\xi|}{|\mathbf{x} - \xi|^{n-1}} u. \quad (13.7)$$

όπου

$$v := \int_{|\mathbf{x}|=a} u(\mathbf{x}) dS. \quad (13.8)$$

Όμως από το θεώρημα μέσης τιμής του Gauss έπεται ότι το  $v$  γράφεται σαν

$$v := E(S_a^{n-1}) \langle u \rangle (\mathbf{0}, a) = a^{n-1} \omega_n u(\mathbf{0}). \quad (13.9)$$

Αρκεί, λοιπόν,  $v$  αντικαστήσουμε την (13.9) στην (13.7) για να καταλήξουμε στην (13.2). ■

Μία άλλη ιδιότητα των αρμονικών συναρτήσεων που απορρέει από τον τύπο Poisson κι έχει ιδιαίτερη σημασία για τον τρόπο με τον οποίο η λύση του προβλήματος Dirichlet εξαρτιέται από τις συνοριακές συνθήκες είναι η ακόλουθη:

**Θεώρημα 13.1** (Θεώρημα ομοιόμορφης σύγκλισης του Weierstrass)

Ας υποθέσουμε ότι

(i) Η ακολουθία  $\{u_m(\mathbf{x})\}$  αποτελείται από συναρτήσεις που είναι αρμονικές στη φραγμένη περιοχή  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  και συνεχείς στο ολοκλήρωμα  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$  της  $\Omega$ .

(ii) Η ακολουθία συνεχών συναρτήσεων  $\{f_m(\mathbf{x})\}$ ,  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ , συγκλίνει ομοιόμορφα στη συνάρτηση  $f(\mathbf{x})$ .

Τότε η πρώτη ακολουθία συγκλίνει στην  $\bar{\Omega}$ , ομοιόμορφα, προς μια συνάρτηση  $u(\mathbf{x})$  που είναι αρμονική στην  $\Omega$ , συνεχής στην  $\bar{\Omega}$  και ίση με την  $f(\mathbf{x})$  σε κάθε σημείο του σύνορου  $\partial\Omega$  της  $\Omega$ .

Απόδειξη

Προφανώς, εάν  $\Delta u_m = 0$  όταν  $\mathbf{x} \in \Omega$  και  $u_m \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ , το ίδιο θα συμβαίνει και με τη διαφορά  $u_k - u_m$  οποιωνδήποτε δύο στοιχείων της ακολουθίας  $\{u_m\}$ . Από την αρχή του μέγιστου έπεται ότι

$$|u_k - u_m| \leq \max |f_k - f_m|, \quad (13.10)$$

ενώ από την ομοιόμορφη σύγκλιση της ακολουθίας  $\{f_m\}$  έπεται ότι υπάρχει κάποιος ακέραιος  $m_0$  τέτοιος που

$$|f_k - f_m| < \varepsilon, \quad (13.11)$$

για κάθε  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$  εάν  $k, m \geq m_0$ . Συνδυάζοντας τις (13.11) και (13.10) συμπεραίνουμε ότι η ποσότητα  $|u_k - u_m|$  μπορεί να γίνει οσοδήποτε μικρή θέλουμε επιλέγοντας κατάλληλα το ζευγάρι  $(k, m)$ , ανεξάρτητα από το  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ . Αυτό όμως σημαίνει ότι η ακολουθία  $\{u_m\}$  συγκλίνει στην περιοχή  $\bar{\Omega}$  ομοιόμορφα. Κατά συνέπεια η συνάρτηση  $u = \lim(u_m)$  είναι συνεχής στην  $\bar{\Omega}$  και μάλιστα  $f(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ .

Ας επιλέξουμε τώρα το σύστημα συντεταγμένων μας έτσι που η αρχή του να βρίσκεται στο εσωτερικό της  $\Omega$ . Τότε, με κατάλληλα επιλογή του  $a \in \mathbb{R}_+$ , όλα τα σημεία με  $|\mathbf{x}| \leq a$  θα βρίσκονται στο εσωτερικό της  $\Omega$ . Για κάθε μια από τις αρμονικές συναρτήσεις  $\{u_m\}$  μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο Poisson για να γράψουμε



$$u_m(\xi) = \int_{|x|=a} P(x, \xi) u_m(x) dS_x, \text{ για } |\xi| < a \quad (13.12)$$

και για το όριό τους

$$u(\xi) = \int_{|x|=a} P(x, \xi) u(x) dS_x, \text{ για } |\xi| < a. \quad (13.13)$$

Άρα  $\Delta_\xi u(\xi) = 0$  και, επομένως, η  $u$  είναι αρμονική στο εσωτερικό της σφαίρας με ακτίνα  $a$  με κέντρο το τυχαίο σημείο της  $\Omega$  που πήραμε για αρχή των αξόνων. Επειδή αυτό θα ισχύει και για κάθε άλλο σημείο στο εσωτερικό της  $\Omega$ , έπεται ότι  $\Delta u(x) = 0$  για κάθε  $x \in \Omega$ . ■

Η τελευταία από τις ιδιότητες των αρμονικών συναρτήσεων που αποδειχονται με βάση τον τύπο Poisson στην οποία θ' αναφερθούμε είναι η αναλυτικότητά τους. Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι, για παράδειγμα, η πραγματική συνάρτηση  $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  λέγεται **αναλυτική στο σημείο**  $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$  όταν η σειρά

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{klm} (x-x_0)^k (y-y_0)^l (z-z_0)^m, \quad (13.14)$$

όπου  $k, l$  και  $m$  μη-αρνητικοί ακέραιοι και  $\{C_{klm}\}$  πραγματικοί, συγκλίνει στην  $u(x, y, z)$  για κάθε  $\mathbf{x}$  στη γειτονιά του  $\mathbf{x}_0$ . Ισοδύναμα, η  $u(x)$  είναι αναλυτική στο  $\mathbf{x}_0$  εάν υπάρχει σφαίρα ακτίνας  $a$ , κέντρου  $\mathbf{x}_0$  και τέτοια που

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{klm} (x-x_0)^k (y-y_0)^l (z-z_0)^m \quad (13.15)$$

για κάθε  $\mathbf{x}$  στο εσωτερικό της σφαίρας. Λέμε ότι η  $u(x)$  είναι αναλυτική στην ανοιχτή περιοχή  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  και γράφουμε  $u(x) \in C^\omega(\Omega)$  όταν η  $u$  είναι αναλυτική σε κάθε σημείο της  $\Omega$ . Ο αντίστοιχος ορισμός για **πραγματικές αναλυτικές συναρτήσεις** με πεδίο ορισμού κάποια ανοιχτή περιοχή του  $\mathbb{R}^n$ , όπου  $n$  οποιοσδήποτε φυσικός αριθμός, είναι προφανής.

Παραθέτουμε, λοιπόν, χωρίς απόδειξη το

### Θεώρημα 13.2 (Αναλυτικότητα αρμονικών συναρτήσεων)

Κάθε συνάρτηση  $u$  που είναι αρμονική σε μια περιοχή (ανοιχτό και συνεκτικό υποσύνολο)  $\Omega$  του  $\mathbb{R}^n$  είναι και αναλυτική στο  $\Omega$ . Ισχύει, δηλαδή, η συνεπαγωγή

$$\Delta u(x) = 0, \quad u \in C^2(\Omega) \Rightarrow u \in C^\omega(\Omega) \quad (13.16)$$

#### Απόδειξη

(Βλ. Courant-Hilbert II, σελ. 269, John, σελ. 98).

## Ασκήσεις

1. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Harnack, δείχτε ότι: Μια μη-αρνητική συνάρτηση που είναι αρμονική σε κάθε φραγμένη περιοχή του  $\mathbb{R}^n$  είναι σταθερή.

2. Ν' αποδειχτεί το

**Θεώρημα σύγκλισης του Harnack**

Αν η ακολουθία  $\{u_m(\mathbf{x})\}$  αποτελείται από αρμονικές συναρτήσεις που συγκλίνουν σ' ένα σημείο της περιοχής  $\Omega$  που είναι φραγμένη και συνάμα  $u_m(\mathbf{x}) \leq u_{m+1}(\mathbf{x})$  σε κάθε σημείο  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ , τότε

- (i) Η δοσμένη ακολουθία συγκλίνει σε κάθε κλειστό υποσύνολο της  $\Omega$ ,
- (ii) Η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη και
- (iii) Η συνάρτηση στην οποία συγκλίνει η  $\{u_m\}$  είναι αρμονική.

3. (i) Υποθέστε ότι η  $u(x, y, z)$  είναι αρμονική στην ανοιχτή και φραγμένη περιοχή  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Θεωρήστε ότι  $\mathbf{x}_0 \in \Omega$  κι ότι η ανοιχτή σφαίρα  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < a$  περιέχεται στην  $\Omega$ . Αποδείξτε ότι

$$\left| u_x(\mathbf{x}) \right| \leq \frac{3M}{a}$$

όπου  $M$  το μέγιστο της  $u(x, y, z)$  πάνω στη σφαιρική επιφάνεια  $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| = a$ , κι ότι το ίδιο ισχύει και για τις υπόλοιπες μερικές παραγώγους της  $u(x, y, z)$ .

(ii) Θεωρήστε το σύνολο  $\Gamma := \{u(\mathbf{x})\}$  των αρμονικών συναρτήσεων στην  $\Omega$  που είναι ομοιόμορφα φραγμένες, δηλαδή αυτές για τις οποίες υπάρχει ένας θετικός αριθμός  $M$  τέτοιος που  $|u(\mathbf{x})| \leq M$  για κάθε  $u \in \Gamma$  και κάθε  $\mathbf{x} \in \Omega$ . Δείξτε ότι σε κάθε κλειστό τμήμα της  $\Omega$  είναι ομοιόμορφα φραγμένα και τα σύνολα  $\Gamma_x := \{u_x(\mathbf{x})\}$ ,  $\Gamma_y := \{u_y(\mathbf{x})\}$  και  $\Gamma_z := \{u_z(\mathbf{x})\}$ .



# Ο φανταστικός κόσμος των Laplace, Cauchy και Riemann

Το παρόν κεφάλαιο παίζει τον ρόλο του συνδετικού κρίκου, με την εξής έννοια: Από τη μια, θέλουμε να διευρύνουμε το είδος των περιοχών του Ευκλείδειου επίπεδου στις οποίες η λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών για την εξίσωση Laplace μπορεί να κατασκευαστεί αναλυτικά. Για το σκοπό αυτό θα χρησιμοποιήσουμε εκτεταμένα την μέθοδο της απεικόνισης μιας περιοχής σε μια άλλη, στην οποία αναφερθήκαμε στο Κεφάλαιο VII. Από αυτή την άποψη, το παρόν κεφάλαιο έχει το πρόσωπό του στραμμένο στο προηγούμενο. Από την άλλη, θέλουμε να συγκετρώσουμε σ' αυτό το κεφάλαιο εκείνες τις έννοιες και μεθόδους της μιγαδικής ανάλυσης, οι οποίες χρησιμοποιούνται συχνά-πυκνά στα επόμενα. Από αυτή την άποψη, το παρόν κεφάλαιο αποτελεί εισαγωγή σ' εκείνα που ακολουθούν.

Όσο αφορά το περιεχόμενο, ο αναγνώστης δεν θα πρέπει να περιμένει συναντήσει τίποτα το ουσιαστικά καινούργιο στις επόμενες σελίδες. Γιατί, βασικά, αυτές αποτελούν μια περίληψη των όσων έχει γνωρίσει στις σελίδες των συγγραμμάτων που παρουσιάζουν, ακόμη και εισαγωγικά, τις "συναρτήσεις μιας μιγαδικής μεταβλητής". Αν, λοιπόν, "ιώθει άνετος" στο χώρο της μιγαδικής ανάλυσης, ο αναγνώστης μας μπορεί να προσπεράσει αυτό το κεφάλαιο και να το θυμάται μόνο όταν θέλει να φρεσκάρει τη μνήμη του σχετικά με κάποιον όρο, τύπο ή έννοια που θα συναντήσει στα επόμενα.

## 1. Μιγαδικές συναρτήσεις

Το βασικό αντικείμενο αυτού του κεφαλαίου αποτελεί ο Ευκλείδειος χώρος  $\mathbb{R}^2$ , αλλά με διαφορετικό όνομα και σύμβολο: Το **μιγαδικό επίπεδο**,  $\mathbb{C}$ . Για να γίνουμε σαφέστεροι, θυμίζουμε ότι η μεταμφίεση του  $\mathbb{R}^2$  σε  $\mathbb{C}$  επιβάλλεται κυρίως όταν δίνεται έμφαση στην πράξη του πολλαπλασιασμού δύο στοιχείων του  $\mathbb{R}^2$  που ξαναδίνει ένα στοιχείο του ίδιου χώρου.

Πιο συγκεκριμένα, ως **γινόμενο** των στοιχείων  $z = (x, y)$  και  $w = (s, t)$  του  $\mathbb{R}^2$  ορίζεται το ζευγάρι των πραγματικών αριθμών  $z w := (x s - y t, x t + y s)$ .

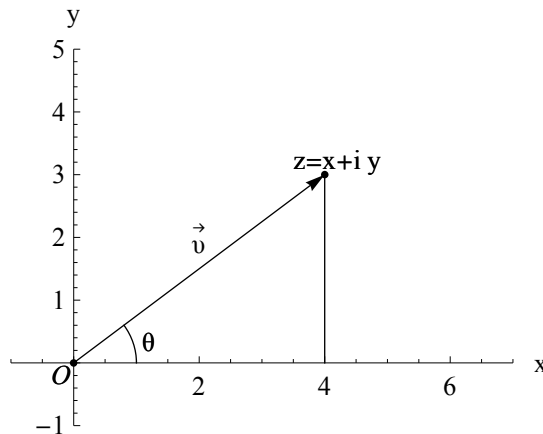
Στην έκδοση  $\mathbb{C}$  του  $\mathbb{R}^2$ , το ζευγάρι των πραγματικών αριθμών  $(x, y)$  ονομάζεται **μιγαδικός αριθμός** και συμβολίζεται με  $x + i y$ . Με άλλα λόγια,

$$z = x + iy \in \mathbb{C} \Leftrightarrow z = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (1.1)$$

Το πρώτο στοιχείο του  $z = (x, y)$  αναφέρεται ως πραγματικό και το δεύτερο ως φανταστικό μέρος του  $z = x + iy$  και συμβολίζονται με  $\operatorname{Re} z$  και  $\operatorname{Im} z$ , αντίστοιχα. Τέλος, το στοιχείο  $\bar{z} := x - iy$  του  $\mathbb{C}$  ονομάζεται **μιγαδικός συζυγής** του  $z = x + iy$ . Με βάση αυτό τον συμβολισμό, η πράξη του πολλαπλασιασμού των στοιχείων  $z = x + iy$  και  $w = s + it$  του  $\mathbb{C}$  παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$z = x + iy, \quad w = s + it \Rightarrow zw = (xs - yt) + i(xt + ys) \quad (1.2)$$

Η καθιερωμένη γραφική παράσταση του μιγαδικού αριθμού  $z = x + iy$  είναι ίδια μ' εκείνη του διανύσματος  $(x, y)$ : Αφού επιλέξουμε το ζευγάρι των ορθογώνιων αξόνων που ορίζει την αντιστοιχία των σημείων του Ευκλείδειου επίπεδου προς το σύνολο  $\mathbb{R}^2$ , κατασκευάζουμε ένα βέλος  $\vec{v}$ , το οποίο ξεκινάει από το σημείο  $(0, 0)$  και καταλήγει στο σημείο  $(x, y)$ , όπως στο Σχ. 1.1.



Σχ. 1.1 Γραφική παράσταση του στοιχείου  $z = x + iy$  του χώρου  $\mathbb{C}$ .

Προφανώς, το μήκος του βέλους  $\vec{v}$  είναι ίσο με  $r$ , όπου

$$r := \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (1.3)$$

Όταν το αντίστοιχο  $x \neq 0$ , η εφαπτόμενη της γωνίας  $\theta$  που σχηματίζει το παραπάνω βέλος με τον θετικό άξονα  $x$  είναι ίση με

$$\tan \theta = \frac{y}{x}. \quad (1.4)$$

Συνεπώς,

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta. \quad (1.5)$$

Από την ορισμό του γινόμενου που δώσαμε παραπάνω αμέσως έπεται ότι

$$z \bar{z} = x^2 + y^2. \quad (1.6)$$

Άρα, η **απόλυτη τιμή**  $|z| := \sqrt{z \bar{z}}$  του  $z = x + iy$  ταυτίζεται με την απόσταση  $r := \sqrt{x^2 + y^2}$  του σημείου  $(x, y)$  από την αρχή  $(0, 0)$  των Καρτεσιανών αξόνων  $x, y$ . Συνάμα, από τις (1.5) έπεται ότι ο  $z = x + iy$  μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta). \quad (1.7)$$

Τότε, η γωνία  $\theta$  ονομάζεται **όρισμα** του  $z$  και συμβολίζεται με  $\arg z$ .

Βέβαια, τόσο από το σχήμα όσο και από την (1.7) φαίνεται καθαρά ότι το όρισμα του  $z$  δεν ορίζεται μονοσήμαντα. Γιατί, οι συναρτήσεις  $\cos \theta$  και  $\sin \theta$  είναι  $2\pi$ -περιοδικές. Δηλαδή,  $\cos(\theta + 2\kappa\pi) = \cos \theta$ ,  $\sin(\theta + 2\kappa\pi) = \sin \theta$ , για κάθε  $\kappa \in \mathbb{Z}$ . Αυτός είναι ο λόγος που συχνά επιλέγεται ένα ημίκλειστο διάστημα  $I_p$ , σαν τα  $[0, 2\pi)$  και  $(-\pi, \pi]$ , και το όρισμα του  $z$  γράφεται στη μορφή

$$\arg z = \text{Arg } z + 2\kappa\pi, \quad \text{Arg } z \in I_p, \quad \kappa \in \mathbb{Z}. \quad (1.8)$$

Τότε, η γωνία  $\text{Arg } z$  ονομάζεται **κύρια τιμή του ορίσματος** του  $z$ .

Συνήθως, για τον μιγαδικό αριθμό  $\cos \theta + i \sin \theta$  χρησιμοποιείται η συντομογραφία  $e^{i\theta}$ . Έτσι, ο μιγαδικός αριθμός  $z = x + iy$  γράφεται και στη μορφή

$$z = r e^{i\theta}, \quad e^{i\theta} := \cos \theta + i \sin \theta. \quad (1.9)$$

Αυτός ο τρόπος γραφής είναι πολύ βολικός στους υπολογισμούς, γιατί η έκφραση  $e^{i\theta}$  έχει τις ιδιότητες της πραγματικής εκθετικής συνάρτησης. Ειδικότερα,  $e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$ , όπως εύκολα αποδειχνεται χρησιμοποιώντας τις τριγωνομετρικές ταυτότητες

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2, \quad (1.10)$$

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2. \quad (1.11)$$

Αποκαλέσαμε την έκφραση  $e^{i\theta}$  απλώς συντομογραφία του  $\cos \theta + i \sin \theta$ , γιατί δεν έχουμε ορίσει ακόμη το αντίστοιχο της συνάρτησης  $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  στο μιγαδικό επίπεδο,  $\mathbb{C}$ . Γενικότερα, δεν έχουμε ως τώρα μελετήσει καμία συνάρτηση που έχει ως πεδίο ορισμού κάποιο υποσύνολο του  $\mathbb{C}$ .

Ας θεωρήσουμε λοιπόν οποιαδήποτε έκφραση  $f(z)$ , η οποία, με βάση τις αλγεβρικές πράξεις των μιγαδικών αριθμών, έχει σαφές νόημα για κάθε  $z$  που ανήκει στο υποσύνολο  $S$  του  $\mathbb{C}$ . Αυτό σημαίνει ότι, για κάθε  $z \in S$ , η έκφραση  $f(z)$  προσδιορίζει κάποιον μιγαδικό αριθμό, μονοσήμαντα. Τότε, λέμε ότι, στο  $S$ , έχουμε ορίσει μια **μιγαδική συνάρτηση**. Κάθε συνάρτηση αυτού του είδους λέγεται και απεικόνιση του  $S$  στο  $\mathbb{C}$ , πράγμα που συμβολίζεται με την αλυσίδα  $f: S \rightarrow \mathbb{C}$ .

### Παράδειγμα 1.1

(i)  $f(z) = 2z - 3z^2$ ,  $z \in S = \mathbb{C}$ .

$$(ii) f(z) = \frac{1}{z(z-1)}, \quad z \in S = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}.$$

$$(iii) f(z) = \frac{1}{z^2+1}, \quad z \in S = \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}.$$

$$(iv) f(z) = \begin{cases} \frac{1}{z+i}, & \text{Im } z > 0 \\ \frac{1}{z-i}, & \text{Im } z < 0 \end{cases} \quad S = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z \neq 0\}.$$

■

Βασικά, μια μιγαδική συνάρτηση δεν είναι παρά ένα ζευγάρι πραγματικών συναρτήσεων δύο μεταβλητών. Γιατί, η αντικατάσταση  $z \rightarrow x + iy$  στην έκφραση  $f(z)$  μετατρέπει την τελευταία σε μία της μορφής  $u(x, y) + i v(x, y)$ :

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y) \quad (1.12)$$

Οι πραγματικές συναρτήσεις  $u, v$  που ορίζονται με αυτό τον τρόπο αναφέρονται ως πραγματικό και φανταστικό μέρος, αντίστοιχα, της μιγαδικής συνάρτησης  $f(z)$ :

$$u(x, y) = \text{Re}[f(z)], \quad v(x, y) = \text{Im}[f(z)]. \quad (1.13)$$

### Παράδειγμα 1.2

(i) Αν  $f(z) = z^2$ , τότε  $f(z) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ , οπότε

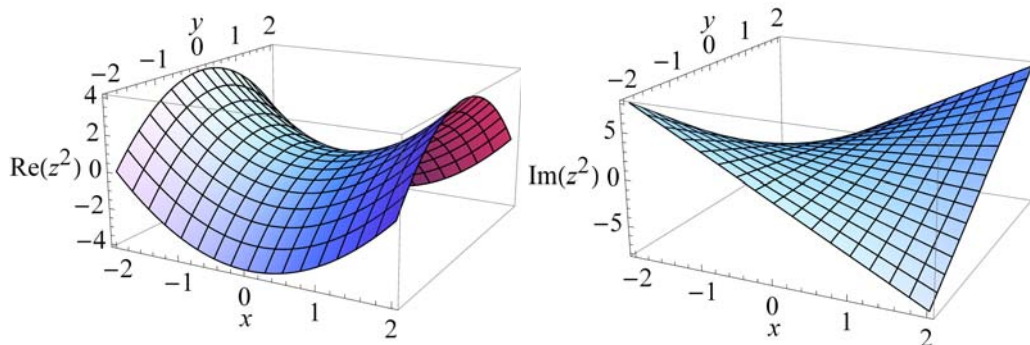
$$u(x, y) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = 2xy, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

(ii) Αν  $f(z) = \frac{1}{z}$ ,  $z \neq 0$ , τότε  $f(z) = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$ , οπότε

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad v(x, y) = -\frac{y}{x^2+y^2}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

■

Αυτή η παρατήρηση οδηγεί αμέσως σε έναν από τους τρόπους με τους οποίους μπορούμε να κατασκευάσουμε μια γραφική αναπαράσταση της μιγαδικής συνάρτησης  $f(z)$ . Έγκειται στην ταυτόχρονη κατασκευή των γραφημάτων των αντίστοιχων πραγματικών συναρτήσεων  $u(x, y)$  και  $v(x, y)$ , όπως στο Σχ. 1.2.



Σχ. 1.2 Γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(z) = z^2$ ,  $z = x + iy$ .

Αριστερά, φαίνεται το γράφημα της συνάρτησης  $u(x, y) = \operatorname{Re}[f(z)] = x^2 - y^2$   
και δεξιά εκείνο της  $v(x, y) = \operatorname{Im}[f(z)] = 2xy$ .

■

Το γεγονός ότι μια μιγαδική συνάρτηση είναι ταυτόσημη με ένα ζευγάρι πραγματικών συναρτήσεων που έχουν κοινό πεδίο ορισμού, μας επιτρέπει να μεταφέρουμε όλες τις έννοιες της πραγματικής ανάλυσης, όπως εκείνη της συνέχειας, στο χώρο των μιγαδικών συναρτήσεων. Μόνο η διατύπωση είναι κάπως διαφορετική.

Ξεκινώντας από τις βασικές τοπολογικές έννοιες που απαιτούνται για τον ορισμό των αναλυτικών ιδιοτήτων μιας συνάρτησης, θα υπενθυμίσουμε ότι, στο Ευκλείδειο επίπεδο, με ανοιχτό δίσκο ακτίνας  $r$  και κέντρο το σημείο  $(x_0, y_0)$  εννοούμε το υποσύνολο

$$D_r(x_0, y_0) := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < r \right\} \quad (1.14)$$

Το αντίστοιχο υποσύνολο των μιγαδικών αριθμών ονομάζεται **ανοιχτός δίσκος του μιγαδικού επιπέδου**, ακτίνας  $r$  με κέντρο το σημείο  $z_0 = x_0 + iy_0$ , και περιγράφεται με τον ακόλουθο τρόπο:

$$D_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}. \quad (1.15)$$

Το υποσύνολο  $S$  του  $\mathbb{C}$  ονομάζεται **ανοιχτό** αν για κάθε  $z \in S$  υπάρχει ανοιχτός δίσκος  $D_r(z)$  ο οποίος περιέχεται εξ ολοκλήρου στο  $S$ . Ένα υποσύνολο  $S$  λέγεται **κλειστό** αν το συμπλήρωμά του,  $\mathbb{C} \setminus S$ , είναι ανοιχτό. Με ανάλογο τρόπο, δηλαδή μεταγράφοντας τους αντίστοιχους ορισμούς από τον  $\mathbb{R}^2$ , ορίζουμε τα φραγμένα, συμπαγή κ.λπ. υποσύνολα του  $\mathbb{C}$ .

Ένας μιγαδικός αριθμός  $z_0$  ονομάζεται **οριακό σημείο** του υποσύνολου  $S$  του  $\mathbb{C}$  αν για κάθε  $r > 0$ , ο δίσκος  $D_r(z_0)$  περιέχει και σημεία του  $S$  διαφορετικά από το  $z_0$ . Ας υποθέσουμε, λοιπόν, ότι

(i) Το  $z_0$  είναι κάποιο από τα οριακά σημεία του πεδίου ορισμού,  $S$ , της μιγαδικής συνάρτησης  $f(z)$  και

(ii) Υπάρχει ένας μιγαδικός αριθμός  $w$ , τέτοιος που, για οποιοδήποτε  $\varepsilon > 0$ , μπορούμε να βρούμε έναν θετικό αριθμό  $\delta(\varepsilon)$ , τέτοιον ώστε  $|f(z) - w| < \varepsilon$ , για κάθε  $z$  που ανήκει στο  $S$  και είναι τέτοιο που  $0 < |z - z_0| < \delta(\varepsilon)$ .

Σ' αυτή την περίπτωση λέμε ότι, καθώς το  $z$  πλησιάζει το  $z_0$ , η  $f(z)$  **συγκλίνει στον αριθμό**  $w$  και γράφουμε

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w. \quad (1.16)$$

Ο αριθμός  $w$  ονομάζεται **όριο** της  $f(z)$  στο  $z_0$ .

Αν το σημείο  $z_0$  ανήκει στο πεδίο ορισμού της  $f(z)$  και το όριο της  $f(z)$  στο  $z_0$  υπάρχει, τότε αμέσως μπαίνει το ερώτημα τι σχέση έχει ο αριθμός  $f(z_0)$  με τον  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ . Σε



ορισμένες περιπτώσεις,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0). \quad (1.17)$$

Τότε λέμε ότι η συνάρτηση  $f(z)$  είναι **συνεχής στο σημείο**  $z_0$ . Η  $f(z)$  λέγεται **συνεχής** (σκέτα) μόνο όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της. Μπορεί κανείς να δείξει ότι η  $f: S \rightarrow \mathbb{C}$  είναι συνεχής εάν και μόνο όταν, η αντίστροφη εικόνα κάθε ανοιχτού υποσύνολου του  $f(S) := \{w \in \mathbb{C} : w = f(z)\}$  είναι ανοιχτό υποσύνολο του  $S$ .

### Παράδειγμα 1.3

(i) Κάθε πολυωνυμική συνάρτηση, δηλαδή κάθε συνάρτηση της μορφής

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n, \quad z \in \mathbb{C},$$

όπου  $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$  τυχαίοι μιγαδικοί αριθμοί, είναι συνεχής.

(ii) Η συνάρτηση  $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ ,  $z \in S = \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ , είναι επίσης συνεχής. Τα  $z_1 = i$ ,  $z_2 = -i$  αποτελούν οριακά σημεία του πεδίου ορισμού της  $f(z)$  και τα όρια  $\lim_{z \rightarrow z_1} f(z)$ ,  $\lim_{z \rightarrow z_2} f(z)$  δεν υπάρχουν.

■

Η έννοια της σύγκλισης χρησιμοποιείται και στην περίπτωση μιας άπειρης ακολουθίας μιγαδικών αριθμών, που συνήθως συμβολίζεται με  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ , ή, απλούστερα, με  $\{a_n\}$ . Λέμε, λοιπόν, ότι η ακολουθία  $\{a_n\}$  συγκλίνει στον αριθμό  $a$ , αν για κάθε  $\varepsilon > 0$ , μπορούμε να βρούμε έναν φυσικό αριθμό  $N(\varepsilon)$  με την εξής ιδιότητα: Αν ο δείκτης  $n > N(\varepsilon)$ , τότε  $|a_n - a| < \varepsilon$ .

Σ' αυτή την περίπτωση γράφουμε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \text{ή} \quad a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \quad (1.18)$$

και ονομάζουμε τον μιγαδικό αριθμό  $a$  **όριο της ακολουθίας**  $a_n$ .

Η ακολουθία μιγαδικών αριθμών  $\{a_n\}$  λέγεται **ακολουθία Cauchy ή θεμελιακή** αν για κάθε  $\varepsilon > 0$ , υπάρχει φυσικός αριθμός  $N(\varepsilon)$  με την εξής ιδιότητα: Αν οι δείκτες  $m, n > N(\varepsilon)$ , τότε  $|a_m - a_n| < \varepsilon$ . Βασικό χαρακτηριστικό του  $\mathbb{C}$  είναι ότι, από τοπολογική άποψη, αυτός ο χώρος είναι **πλήρης**. Δηλαδή, μια ακολουθία συγκλίνει εάν και μόνο όταν είναι Cauchy.

**Άσκ.** Να δειχτεί η ισοδυναμία. Βλ. Silverman, σ. 17.

Μόλις μας δοθεί μια ακολουθία μιγαδικών αριθμών, η  $\{a_n\}$ , μπορούμε αμέσως να κατασκευάσουμε μια νέα ακολουθία, την  $\{s_n\}$ , θέτοντας

$$s_n = \sum_{m=1}^n a_m. \quad (1.19)$$

Η  $\{s_n\}$  ονομάζεται **ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της**  $\{a_n\}$ . Το όριο της πρώτης, καθώς το  $n \rightarrow \infty$ , συμβολίζεται με  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ . Δηλαδή,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{k \rightarrow \infty} s_k. \quad (1.20)$$

#### Παράδειγμα 1.4

(i) Η σειρά που αντιστοιχεί στην ακολουθία  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{i/n^2\}_{n=1}^{\infty}$  συγκλίνει:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{n^2} = i \frac{\pi^2}{6} \quad (1.21)$$

(ii) Αντίθετα η σειρά που αντιστοιχεί στην ακολουθία  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{i/n\}_{n=1}^{\infty}$  **αποκλίνει** (δεν συγκλίνει).

(iii) Το ίδιο ισχύει για η σειρά που αντιστοιχεί στην ακολουθία  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{i^n\}_{n=1}^{\infty}$ .

■

Μια σειρά από θεωρήματα μας επιτρέπουν ν' αποφαινόμεστε σχετικά γρήγορα αν μια σειρά συγκλίνει ή αποκλίνει. Αντιπροσωπευτικά είναι τα δύο που ακολουθούν.

#### Θεώρημα 1.1 (Αναγκαία συνθήκη σύγκλισης)

Αν η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  συγκλίνει, τότε αναγκαστικά  $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

##### Απόδειξη

Σύμφωνα με τον ορισμό που δώσαμε παραπάνω, η σύγκλιση της σειράς  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  είναι ταυτόσημη με τη σύγκλιση της ακολουθίας των μερικών αθροισμάτων,  $\{s_n\}$ , της  $\{a_n\}$ . Αφού λοιπόν συγκλίνει, η ακολουθία  $\{s_n\}$  είναι Cauchy. Συνεπώς,  $|s_n - s_m| \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0$ . Θέτοντας  $m = n - 1$ , αμέσως βρίσκουμε ότι  $|a_n| = |s_n - s_{n-1}| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

■

#### Θεώρημα 1.2 (Επάρκεια της απόλυτης σύγκλισης)

Αν η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  συγκλίνει, τότε συγκλίνει και η  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

##### Απόδειξη

Θέτουμε  $S_n := \sum_{m=1}^n |a_m|$ . Η σύγκλιση της σειράς  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  είναι ταυτόσημη με τη σύγκλιση της ακολουθίας  $\{S_n\}$ . Συνακόλουθα, η  $\{S_n\}$  είναι μια ακολουθία Cauchy. Αυτό σημαίνει ότι, για κάθε  $\varepsilon > 0$ , υπάρχει φυσικός αριθμός  $N(\varepsilon)$ , τέτοιος ώστε  $|S_n - S_m| < \varepsilon$ , αν  $n, m > N(\varepsilon)$ .

Από την άλλη,  $s_n := \sum_{m=1}^n a_m$ . Συνεπώς, για  $m, n$  αρκετά μεγάλα και  $n > m$ ,

$$\left| s_n - s_m \right| = \left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^n \left| a_k \right| = \left| S_n - S_m \right| < \varepsilon.$$

Αυτό σημαίνει ότι και η  $\{s_n\}$  είναι μια ακολουθία Cauchy. Άρα συγκλίνει, οπότε το ίδιο ισχύει και για την  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

■

Με βάση το τελευταίο θεώρημα, μια σειρά από κριτήρια σύγκλισης, γνωστά από την πραγματική ανάλυση, μεταφέρονται αυτούσια στις σειρές μιγαδικών αριθμών.

**Κριτήριο της σύγκρισης.** Αν η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} r_n$  συγκλίνει, όπου  $\{r_n\}$  ακολουθία μη αρνητικών (πραγματικών) αριθμών, και  $|a_n| < r_n$  για κάθε  $n$  μεγαλύτερο από κάποιον φυσικό αριθμό,  $N$ , τότε η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  συγκλίνει.

**Κριτήριο του λόγου ή (του) d' Alembert.** Υποθέτουμε ότι η ακολουθία  $\{a_n\}$  δεν περιέχει μηδενικούς όρους.

(i) Αν

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \quad (1.22)$$

τότε η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  συγκλίνει.

(ii) Αν

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1 \quad (1.23)$$

τότε η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  αποκλίνει.

**Κριτήριο της ρίζας ή (του) Cauchy.**

(i) Αν το

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} < 1. \quad (1.24)$$

τότε η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  συγκλίνει.

(ii) Αν το

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{1/n} > 1 \quad (1.25)$$

τότε η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  αποκλίνει.

## Ασκήσεις

1.1 Να δειχτεί ότι για κάθε ζευγάρι μιγαδικών αριθμών  $(z_1, z_2)$  ισχύουν οι ανισότητες

$$\left| |z_1| - |z_2| \right| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad (1.26)$$

**1.2** Να δειχτεί ότι η ακολουθία των μιγαδικών αριθμών  $\{z_n\}$  συγκλίνει εάν και μόνο όταν συγκλίνουν οι ακολουθίες των πραγματικών αριθμών  $\{\operatorname{Re}(z_n)\}$  και  $\{\operatorname{Im}(z_n)\}$  και

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z = x + iy \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(z_n) = x, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im}(z_n) = y. \quad (1.27)$$

για κάθε ζευγάρι μιγαδικών αριθμών  $(z_1, z_2)$  ισχύουν οι ανισότητες

**1.3** Να προσδιοριστούν οι πραγματικές συναρτήσεις  $u(x, y) = \operatorname{Re}[f(z)]$ ,  $v(x, y) = \operatorname{Im}[f(z)]$  για κάθε μια από τις τέσσερες μιγαδικές συναρτήσεις  $f(z)$  του Παραδείγματος (1.1) και να κατασκευαστούν τα γραφήματά τους.

**1.4** Θεωρήστε τους μιγαδικούς αριθμούς  $z_1, z_2$ . Δείχτε ότι, αν

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i\theta_2}, \quad 0 < r_1 < r_2,$$

τότε,

$$\operatorname{Re}\left(\frac{z_2 + z_1}{z_2 - z_1}\right) = \frac{|z_2| - |z_1|}{|z_2 - z_1|} = \frac{r_2^2 - r_1^2}{r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) + r_1^2}$$

**1.5** Να προσδιοριστούν τα οριακά σημεία καθενός από τα παρακάτω υποσύνολα  $S$  του  $\mathbb{C}$

- (i)  $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ , (ii)  $S = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z < -1\}$ , (iii)  $S = \{z \in \mathbb{C} : z \neq i\}$ ,  
 (iv)  $S = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : xy > 0\}$ , (v)  $S = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : |x + y| < 1\}$ .

**1.6** Να δειχτεί ότι ένα υποσύνολο  $S$  του  $\mathbb{C}$  είναι κλειστό εάν και μόνο όταν περιέχει όλα τα οριακά σημεία του.

**1.7** N' αποδειχτούν οι ακόλουθες προτάσεις

- (i) Το  $z \in \mathbb{C}$  είναι οριακό σημείο του  $S \subset \mathbb{C}$  εάν και μόνο όταν υπάρχει ακολουθία,  $\{z_n\}$ , διακριτών σημείων του  $S$  η οποία συγκλίνει στο  $z$ .  
 (ii) Το  $z = 1$  είναι όριο της ακολουθίας  $\{e^{i\pi/n}\}_{n=1}^{\infty}$  και, συνάμα, οριακό σημείο του υποσύνολου  $S = \{z \in \mathbb{C} : z = e^{i\pi/n}\}$  του  $\mathbb{C}$ .

**1.8** Θεωρήστε τις ακολουθίες μιγαδικών αριθμών  $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$  που ορίζονται από τους τύπους

$$(i) z_n = i + 4 \frac{n-1}{n^2}, \quad (ii) z_n = 2 e^{-i\pi/n} \quad (iii) z_n = i + \frac{2}{n+1} e^{i\pi/n}$$

Για κάθε περίπτωση ξεχωριστά, να υπολογιστεί το όριο της ακολουθίας, αφού προσδιοριστούν γραφικά τα πρώτα τέσσερα μέλη της στο διάγραμμα  $x y$  του μιγαδικού επίπεδου  $\mathbb{C}$ .

**1.9** Να δειχτεί ότι,

- (i) Η ακολουθία  $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ ,  $z_n = \frac{z^n}{n!}$  συγκλίνει για  $\forall z \in \mathbb{C}$ .  
 (ii) Η ακολουθία  $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ ,  $z_n = z^n$  συγκλίνει, αν  $|z| < 1$ , και αποκλίνει, αν  $|z| > 1$ .  
 (iii) Η ακολουθία  $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ ,  $z_n = \frac{(z-i)^{2n+1}}{(2n+1)!}$  συγκλίνει για  $\forall z \in \mathbb{C}$ .

(iv) Η ακολουθία  $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ ,  $z_n = \frac{(z+i)^{2n}}{(2n+1)!}$  συγκλίνει για  $\forall z \in \mathbb{C}$ .

**1.10** Να δειχτεί ότι,

(i) Η σειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ , συγκλίνει για  $\forall z \in \mathbb{C}$ .

(ii) Η σειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  συγκλίνει, αν  $|z| < 1$ , και αποκλίνει, αν  $|z| > 1$ .

(iii) Η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2z+i)^n}{n^2}$ , συγκλίνει για  $\forall z \in \mathbb{C}$ .

## 2. Δυναμοσειρές - Αναλυτικές συναρτήσεις

Με *ακολουθία μιγαδικών συναρτήσεων* εννοούμε μια αριθμήσιμη οικογένεια συναρτήσεων με κοινό πεδίο ορισμού,  $S \subset \mathbb{C}$ , που τα μέλη της μπορεί να τεθούν, ένα προς ένα, σε αντιστοιχία με τα μέλη του σύνολου των φυσικών αριθμών,  $\mathbb{N}$ . Οι ακολουθίες συναρτήσεων συνήθως συμβολίζονται με  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  ή  $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ , όπου με  $f_n$  εννοείται μια απεικόνιση της μορφής  $f_n : S \rightarrow \mathbb{C}$ . Γι' αυτό, συχνά προτιμάται ο εναλλακτικός συμβολισμός  $f_n(z)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

### Παράδειγμα 2.1

Η ακολουθία

$$f_n(z) = z^n, \quad z \in \mathbb{C}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

θα παίξει σημαντικό ρόλο στα επόμενα. Το ίδιο ισχύει και για την ακολουθία

$$f_n(z) = \frac{1}{n!} z^n, \quad z \in \mathbb{C}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2)$$

■

Είναι προφανές ότι, για κάθε συγκεκριμένη τιμή της μεταβλητής  $z$ , μια ακολουθία μιγαδικών συναρτήσεων ανάγεται σε μια ακολουθία μιγαδικών αριθμών. Άρα, αμέσως εγείρεται το ερώτημα αν η αντίστοιχη σειρά συγκλίνει. Για παράδειγμα, η ακολουθία που έχει ως μέλη τις συναρτήσεις  $f_n(z) = z^n$  ανάγεται στην ακολουθία αριθμών  $a_n = 1/2^n$ , όταν το  $z = 1/2$ .

Γενικότερα, αφήνοντας την ανεξάρτητη μεταβλητή  $z$  να διατρέξει όλο το πεδίο ορισμού (των μελών) της ακολουθίας  $f_n(z)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , καταλήγουμε στην έννοια της σειράς μιγαδικών συναρτήσεων που συμβολίζεται με  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ . Μια σειρά αυτού του είδους μπορεί να συγκλίνει σε ορισμένα σημεία του κοινού πεδίου ορισμού των  $f_n(z)$  και ν' αποκλίνει σε άλλα.

### Παράδειγμα 2.2

(i) Η ακολουθία των συναρτήσεων  $f_n(z) = z^n$ ,  $z \in \mathbb{C}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , οδηγεί στη σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (2.3)$$

Η παραπάνω σειρά συγκλίνει για κάθε  $z$  που βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου  $|z| = 1$  και αποκλίνει για κάθε  $z$  που βρίσκεται στο εξωτερικό αυτού του κύκλου. Αυτό το συμπέρασμα συνάγεται αμέσως από το κριτήριο του λόγου.

Μάλιστα, για κάθε  $z$  με  $|z| < 1$ , η παραπάνω σειρά συγκλίνει στον μιγαδικό αριθμό  $1/(1-z)$ :

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad |z| < 1. \quad (2.4)$$

Απόδειξη

Θέτουμε

$$s_n := \sum_{m=0}^{n-1} z^m = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}, \quad (2.5)$$

οπότε

$$(1 - z) s_n = 1 - z^n. \quad (2.6)$$

Συνακόλουθα,

$$s_n = \frac{1 - z^n}{1 - z}, \quad z \neq 1. \quad (2.7)$$

Από την άλλη, εύκολα δείχνει κανείς ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z^n = 0 \quad \text{όταν} \quad |z| < 1. \quad (2.8)$$

Συνεπώς

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{1 - z}, \quad |z| < 1. \quad (2.9)$$

Με βάση αυτό το αποτέλεσμα, μπορούμε να πούμε ότι, στο εσωτερικό του κύκλου  $|z| = 1$ , η σειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$  ταυτίζεται με τη "γνωστή" συνάρτηση  $f(z) = 1/(1 - z)$ .

(ii) Σύμφωνα με το κριτήριο του λόγου, η σειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$ , που αντιστοιχεί στην ακολουθία των συναρτήσεων  $f_n(z) = z^n/n!$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , συγκλίνει για κάθε  $z \in \mathbb{C}$ . Κατά συνέπεια, ορίζει μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο. Αυτή η συνάρτηση έχει καθιερωθεί με το όνομα **(μιγαδική) εκθετική** και το σύμβολο  $\exp$ . Με άλλα λόγια

$$\exp(z) \equiv e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (2.10)$$

Το γεγονός ότι ταυτίζεται με την γνωστή πραγματική εκθετική συνάρτηση όταν το  $\text{Im } z = 0$  εξηγεί την επωνυμία της.

■

Σε τούτο το σημείο, θα πρέπει να τονίσουμε το εξής: Όταν λέμε ότι η σειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$  συγκλίνει σε κάθε σημείο ενός υποσύνολου,  $\Sigma$ , του κοινού πεδίου ορισμού,  $S$ , των μελών της ακολουθίας  $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ , εννοούμε ότι ο έλεγχος της σύγκλισης των μερικών αθροισμάτων  $s_n(z) := \sum_{m=0}^n f_m(z)$  έχει γίνει σε κάθε σημείο του  $\Sigma$ , ξεχωριστά. Με άλλα λόγια, όταν γράφουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(z) = f(z), \quad z \in \Sigma, \quad (2.11)$$

εννοούμε ότι, για κάθε συγκεκριμένο  $z \in \Sigma$ , υπάρχει ένας **αντίστοιχος** φυσικός αριθμός  $N$ , τέτοιος που  $|s_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ , αν το  $n > N$ . Δηλαδή, ο αριθμός  $N$  που εξασφαλίζει ότι η

απόσταση  $|s_n(z) - f(z)|$  είναι μικρότερη από το δοσμένο  $\varepsilon$  μπορεί να είναι διαφορετικός σε διαφορετικά σημεία του  $\Sigma$ . Αυτό το γεγονός, συνήθως, δηλώνεται ρητά, γράφοντας  $N = N(\varepsilon, z)$ .

Ωστόσο, υπάρχουν περιπτώσεις όπου, για δοσμένο  $\varepsilon$ , ο απαιτούμενος  $N$  είναι ίδιος σε όλα τα σημεία του  $\Sigma$ . Τότε λέμε ότι έχουμε να κάνουμε με **ομοιόμορφη σύγκλιση**. Για διάκριση, η σύγκλιση με τη γενικότερη έννοια αναφέρεται ως **σημειακή σύγκλιση**.

Γενικά, η εξακρίβωση ότι μια δοσμένη σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα είναι αρκετά δύσκολη υπόθεση. Ωστόσο, σε πολλές περιπτώσεις, η σειρά που μας ενδιαφέρει ικανοποιεί τις προϋποθέσεις για να ισχύει το επόμενο θεώρημα, το οποίο συνήθως αναφέρεται επώνυμα, ως κριτήριο ομοιόμορφης σύγκλισης του Βάιερστρας.

**Θεώρημα 2.1** (Κριτήριο  $M$  του Weierstrass)

Ας υποθεθεί ότι (i) Η σειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ , όπου  $M_n \geq 0$ , συγκλίνει. (ii) Σε κάθε σημείο  $z$  ενός υποσύνολου  $\Sigma$  του κοινού πεδίου ορισμού τους, οι συναρτήσεις  $\{f_n\}$  πληρούν τη συνθήκη  $f_n(z) \leq M_n$ . Τότε, η σειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$  συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα στο  $\Sigma$ .

Απόδειξη

Αφού η σειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$  συγκλίνει και  $M_n \geq 0$ , μπορούμε να επιλέξουμε το  $m$  αρκετά μεγάλο, ώστε να ισχύει η εκτίμηση

$$\left| \sum_{n=0}^{k+m} M_n - \sum_{n=0}^k M_n \right| = \left| \sum_{n=m+1}^{k+m} M_n \right| = \sum_{n=m+1}^{k+m} M_n < \varepsilon. \quad (2.12)$$

Συνακόλουθα, για κάθε  $\varepsilon > 0$ , οσοδήποτε μικρό, υπάρχει ένας φυσικός αριθμός  $N(\varepsilon)$ , τέτοιος που, αν  $m > N(\varepsilon)$ , τότε

$$\left| \sum_{n=0}^{k+m} f_n(z) - \sum_{n=0}^k f_n(z) \right| = \left| \sum_{n=m+1}^{k+m} f_n(z) \right| \leq \sum_{n=m+1}^{k+m} |f_n(z)| \leq \sum_{n=m+1}^{k+m} M_n < \varepsilon. \quad (2.13)$$

Αυτό σημαίνει ότι, σε κάθε  $z \in \Sigma$ , η σειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$  συγκλίνει απόλυτα. Όμως, ο αριθμός  $N(\varepsilon)$  που εξασφαλίζει την εκτίμηση (2.13) είναι ανεξάρτητος από το  $z$ . Αυτό σημαίνει ότι η σειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$  συγκλίνει ομοιόμορφα στο σύνολο  $\Sigma$ . ■

Οι δύο σειρές που εξετάσαμε στο προηγούμενο παράδειγμα ανήκουν στην κατηγορία που ονομάζουμε δυναμοσειρές. Γενικότερα, με τον όρο **δυναμοσειρά** εννοούμε μian έκφραση της μορφής

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad z_0, z \in \mathbb{C}, \quad (2.14)$$

όπου  $c_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , μια συγκεκριμένη ακολουθία μιγαδικών αριθμών και  $z_0$  ένα συγκεκριμένο στοιχείο του  $\mathbb{C}$ . Το τελευταίο ονομάζεται **κέντρο της δυναμοσειράς**.



Όπως φάνηκε καθαρά στην περίπτωση της  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ , μια δυναμοσειρά συνήθως συγκλίνει μόνο σε ένα γνήσιο υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου,  $\mathbb{C}$ . Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο εισάγουμε την έννοια της ακτίνας σύγκλισης της δυναμοσειράς (2.14). Πιο συγκεκριμένα, θέτουμε  $r := |z - z_0|$  και εξετάζουμε το σύνολο  $I$  των τιμών του  $r$  για τις οποίες η σειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^n r^n$  συγκλίνει. Αν το  $I$  είναι φραγμένο, τότε **ακτίνα σύγκλισης** της παραπάνω σειράς ονομάζουμε τον αριθμό  $R := \sup \{I\}$ . Διαφορετικά, λέμε ότι η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς είναι άπειρη.

**Παρατήρηση.** α) Στη διατύπωση και απόδειξη προτάσεων, θα χρησιμοποιούμε δυναμοσειρές με κέντρο το  $z_0 = 0$ . β) Για να έχει νόημα η έκφραση  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  για κάθε  $z \in \mathbb{C}$  και όταν  $n = 0$ , υιοθετείται η σύμβαση  $z^0 = 1$ , ακόμη και για  $z = 0$ .

### Παράδειγμα 2.3

(i) Η σειρά  $1 + z + 2^2 z^2 + \dots + n^n z^n + \dots$  συγκλίνει μόνο στο  $z = 0$ : Για  $n$  αρκετά μεγάλο  $n|z| > 2$  και άρα  $|n^n z^n| = n^n |z^n| > 2^n$ , για κάθε  $z \neq 0$ . Δηλαδή, ο  $n$ -στός όρος της σειράς απειρίζεται καθώς το  $z \rightarrow \infty$ . Άρα, η παραπάνω σειρά δεν μπορεί να συγκλίνει.

(i) Και οι τρεις σειρές

$$1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots, \quad 1 + z + \frac{z^2}{2} + \dots + \frac{z^n}{n} + \dots, \quad 1 + z + \frac{z^2}{2^2} + \dots + \frac{z^n}{n^2} + \dots$$

έχουν ακτίνα σύγκλισης ίση με τη μονάδα. Η πρώτη αποκλίνει για κάθε σημείο του κύκλου  $|z| = 1$ , η τρίτη συγκλίνει σε κάθε σημείο αυτού του κύκλου και η δεύτερη συγκλίνει σε ορισμένα σημεία και αποκλίνει σε άλλα.

### Θεώρημα 2.2

Μια δυναμοσειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  με ακτίνα σύγκλισης  $R$  συγκλίνει απόλυτα για κάθε  $z \in \mathbb{C}$  με  $|z| < R$  και αποκλίνει αν  $|z| > R$ .

#### Απόδειξη

Στο σημείο  $z = 0$ , η σειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  συγκλίνει αυτόματα, γιατί εκεί ανάγεται στον αριθμό  $c_0$ . Υποθέτουμε λοιπόν ότι  $z \neq 0$  και θεωρούμε την ακολουθία  $\{|c_n|^{1/n}\}$ . Αν η τελευταία δεν είναι φραγμένη, τότε το ίδιο θα ισχύει και για την  $\{|c_n z^n|^{1/n}\}$ , οπότε η σειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  θα αποκλίνει. Στην αντίθετη περίπτωση, όταν δηλαδή η ακτίνα σύγκλισης είναι μη μηδενική, το συμπέρασμα του θεωρήματος συνάγεται από το κριτήριο του λόγου.

Το επόμενο θεώρημα είναι ξεχωριστής σημασίας. Γιατί, μας λέει πως η σύγκλιση μιας δυναμοσειράς στην περιοχή  $|z| < R$  είναι κάτι παραπάνω από σημειακή. Αυτό το αποτέλεσμα αποτελεί τη βάση για τον ορισμό της σημαντικότερης οικογένειας μιγαδικών συναρτήσεων, αυτών που θα ονομάσουμε αναλυτικές.

**Θεώρημα 2.3**

Μια δυναμοσειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  με ακτίνα σύγκλισης  $R > 0$  συγκλίνει **ομοιόμορφα** σε κάθε κλειστό δίσκο με κέντρο το σημείο  $z = 0$  και ακτίνα  $r < R$ , άρα και σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του ανοιχτού δίσκου  $D_R(0)$ .

Απόδειξη

Θεωρούμε τον κλειστό δίσκο  $\bar{D}_r(0) := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ . Για κάθε  $z$  που ανήκει σ' αυτό τον δίσκο,  $|c_n z^n| \leq |c_n| r^n$ . Αν λοιπόν το  $r < R$ , τότε από το προηγούμενο θεώρημα αμέσως έπεται ότι η σειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n z^n|$  συγκλίνει. Αυτό όμως σημαίνει ότι η σειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$  πληροί το κριτήριο  $M$  του Weierstrass και, άρα, στον κλειστό δίσκο  $\bar{D}_r(0)$ , η σύγκλιση της είναι ομοιόμορφη. ■

Από τα προηγούμενα έπεται ότι κάθε δυναμοσειρά της μορφής  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$  με ακτίνα σύγκλισης  $R > 0$  ορίζει αυτόματα μια συνάρτηση στον ανοιχτό δίσκο  $D_R(z_0)$ . Κάθε συνάρτηση αυτού του είδους ονομάζεται **αναλυτική στην περιοχή**  $D_R(z_0)$ .

Ένας εναλλακτικός ορισμός της αναλυτικότητας ξεκινάει από μια δοσμένη συνάρτηση  $f(z)$ , με πεδίο ορισμού κάποιο υποσύνολο  $S$  του μιγαδικού επίπεδου. Αν υπάρχει δυναμοσειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$  που συγκλίνει στην  $f(z)$  σε κάθε σημείο ενός ανοιχτού δίσκου  $D_r(z_0)$  που καλύπτεται από το  $S$ , η  $f(z)$  καλείται **αναλυτική στο σημείο**  $z_0$ . Λέμε πως η  $f(z)$  είναι **αναλυτική** (σκέτα), όταν είναι αναλυτική σε κάθε σημείο του  $S$ .

## Ασκήσεις

**2.1** Να υπολογιστεί το όριο των σειρών

$$(i) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{2^n}, \quad (ii) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{2^{2n}}, \quad (iii) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{i\pi/4}}{2^n},$$

$$(iv) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!}, \quad (v) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\pi)^n}{n!}, \quad (vi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-i)^n}{n!}.$$

**2.2** Να υπολογιστεί το όριο των παρακάτω σειρών, στα σημεία όπου αυτές συγκλίνουν.

$$(i) \sum_{n=0}^{\infty} (z-1)^n, \quad (ii) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1), \quad (iii) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z+i),$$

$$(iv) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{n!}, \quad (v) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z-1)^n}{n!}, \quad (vi) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (z+i)^n}{n!}.$$

**2.3** Να δειχτεί ότι η ακτίνα σύγκλισης των σειρών

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2},$$

είναι ίση με τη μονάδα.

**2.4** Να υπολογιστεί η ακτίνα σύγκλισης των σειρών

$$(i) \sum_{n=0}^{\infty} n! z^n, \quad (ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^\alpha}, \quad \alpha \geq 0, \quad (iii) \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!},$$

$$(iv) \sum_{n=0}^{\infty} (z+i)^n, \quad (v) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n, \quad (vi) \sum_{n=0}^{\infty} (n+k^n) z^n, \quad k \in \mathbb{C}.$$

**2.5** Να δειχτεί ότι οι παρακάτω σειρές συγκλίνουν

$$(i) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!}, \quad (ii) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^\alpha}, \quad \alpha \geq 0, \quad (iii) \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}.$$

**2.6** Να δειχτεί ότι οι παρακάτω μιγαδικές συναρτήσεις είναι αναλυτικές στο πεδίο ορισμού τους,  $\Omega$ . Για κάθε περίπτωση, να κατασκευαστεί η αντίστοιχη δυναμοσειρά με κέντρο το σημείο  $z_0$  και να προσδιοριστεί η ακτίνα σύγκλισής της.

$$(i) f(z) = \frac{1}{z}, \quad \Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad z_0 = 1.$$

$$\text{Υπόδειξη. } \frac{1}{z} = \frac{1}{z-1+1} = \frac{1}{1-(1-z)}$$

$$(ii) f(z) = \frac{1}{z}, \quad \Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad z_0 = i.$$

$$(iii) f(z) = \frac{1}{z-1}, \quad \Omega = \mathbb{C} \setminus \{1\}, \quad z_0 = 2.$$

$$(iv) f(z) = z e^z, \quad \Omega = \mathbb{C}, \quad z_0 = 1$$

$$(v) f(z) = \begin{cases} \frac{1}{z+i}, & \text{Im } z > 0 \\ \frac{1}{z-i}, & \text{Im } z < 0 \end{cases} \quad \Omega = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z \neq 0\}, \quad z_0 = i.$$

### 3. Ολομορφικές συναρτήσεις

Ως τώρα, μια θεμελιακή έννοια της μαθηματικής ανάλυσης, αυτή της παραγώγου μιας συνάρτησης, δεν έκανε ακόμα την εμφάνισή της. Ο λόγος είναι ότι η μεταφορά αυτής της έννοιας από τις συναρτήσεις μιας πραγματικής μεταβλητής στις συναρτήσεις μιας μιγαδικής μεταβλητής απαιτεί μεγαλύτερη προσοχή.

Ας υποθέσουμε, λοιπόν, ότι το  $z$  είναι ένα εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της μιγαδικής συνάρτησης  $f : S \rightarrow \mathbb{C}$ . Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον ανοιχτός δίσκος  $D_r(z)$  ο οποίος περιέχεται στο υποσύνολο  $S$  του  $\mathbb{C}$ . Ακολουθώντας τον αντίστοιχο ορισμό της πραγματικής ανάλυσης, θα λέγαμε ότι, **παράγωγος της συνάρτησης  $f : S \rightarrow \mathbb{C}$  στο σημείο  $z \in S$**  είναι ο μιγαδικός αριθμός

$$f'(z) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}, \quad (3.1)$$

όταν το πιο πάνω όριο υπάρχει. Και πραγματικά, αυτός είναι ο ορισμός της παραγώγου που υιοθετεί και η μιγαδική ανάλυση.

Ωστόσο, η φαινομενική ταυτότητα της (3.1) με την αντίστοιχη για την παράγωγο μιας συνάρτησης μιας πραγματικής μεταβλητής αίρεται, αμέσως μόλις συνειδητοποιήσουμε ότι το  $h$  δηλώνει έναν τυχαίο, ουσιαστικά, μιγαδικό αριθμό. Γιατί, ο μόνος περιορισμός στον οποίο υπόκειται αυτή η ποσότητα είναι ότι  $0 < |h| < r$ , έτσι ώστε το σημείο  $z+h$  να βρίσκεται μέσα στον δίσκο  $D_r(z)$ . Συνεπώς, το όριο που εμφανίζεται στην (3.1) πρέπει να υπάρχει ανεξάρτητα από την κατεύθυνση από την οποία πλησιάζουμε το σημείο  $z$ . Με άλλα λόγια, η (3.1) εμπλέκει άπειρα σε πλήθος όρια, που όλα πρέπει να υπάρχουν και να συμφωνούν μεταξύ τους.

Η εικόνα γίνεται σαφέστερη αν γράψουμε αναλυτικά την μιγαδική μεταβλητή  $z$  στη μορφή  $z = x + iy$ , τη συνάρτηση  $f(z)$  στη μορφή  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  και την παράμετρο  $h$  σαν  $h = s + it$ . Τότε,

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{1}{s+it} ([u(x+s, y+t) + i v(x+s, y+t)] - [u(x, y) + i v(x, y)]). \quad (3.2)$$

Συνακόλουθα,

$$f'(z) = \lim_{(s,t) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{s+it} ([u(x+s, y+t) - u(x, y)] + i[v(x+s, y+t) - v(x, y)]). \quad (3.3)$$

Αφού το όριο (3.3) πρέπει να υπάρχει και να είναι ανεξάρτητο από την επιλογή του ζευγαριού  $(s, t)$ , με μόνη προϋπόθεση ότι  $0 < \sqrt{s^2 + t^2} < r$ , μπορούμε να θέσουμε  $t = 0$ . Τότε, η (3.3) γίνεται

$$f'(z) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{[u(x+s, y) - u(x, y)] + i[v(x+s, y) - v(x, y)]}{s}. \quad (3.4)$$

Αλλά αυτό σημαίνει ότι

$$f'(z) = \partial_x u(x, y) + i \partial_x v(x, y) \quad (3.5)$$

Για τον ίδιο λόγο, μπορούμε να θέσουμε  $s = 0$ , οπότε η (3.3) γίνεται

$$f'(z) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{[u(x, y+t) - u(x, y)] + i[v(x, y+t) - v(x, y)]}{it}. \quad (3.6)$$

Αυτό σημαίνει ότι

$$f'(z) = -i \partial_y u(x, y) + \partial_y v(x, y) \quad (3.7)$$

Από τις σχέσεις (3.5) και (3.7) συνάγεται αμέσως το ακόλουθο συμπέρασμα. Όταν στο σημείο  $z$  η παράγωγος  $f'(z)$  της  $f(z)$  υπάρχει, τότε

(i) Στο αντίστοιχο σημείο  $(x, y)$  του  $\mathbb{R}^2$  υπάρχουν και οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης των πραγματικών συναρτήσεων  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$ , οι οποίες αποτελούν το πραγματικό και φανταστικό μέρος, αντίστοιχα, της  $f(z)$ ,

(ii) Οι πιο πάνω μερικές παράγωγοι πληρούν τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\partial_x u(x, y) = \partial_y v(x, y), \quad \partial_y u(x, y) = -\partial_x v(x, y) \quad (3.8)$$

Αυτές οι σχέσεις, οι οποίες αποτελούν αναγκαία συνέπεια της ύπαρξης της  $f'(z)$ , ονομάζονται **συνθήκες (των) Cauchy-Riemann**. Το καταπληκτικό είναι ότι, αυτές οι συνθήκες είναι και ικανές να εξασφαλίσουν την ύπαρξη της παραγώγου της  $f(z)$  στο σημείο  $z = x + iy$ . Αλλά, με την προϋπόθεση ότι, στο σημείο  $(x, y)$ , οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης των συναρτήσεων  $u$ ,  $v$  είναι συνεχείς.

Όταν η παράγωγος της συνάρτησης  $f : S \rightarrow \mathbb{C}$  υπάρχει στο σημείο  $z \in S$ , τότε λέμε ότι η  $f$  είναι **διαφορίσιμη ή παραγωγίσιμη στο  $z$** . Λέγεται **ολομορφική στο σημείο  $z$** , αν είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο ενός ανοιχτού δίσκου  $D_r(z)$ , ο οποίος περιέχεται στο  $S$ . Τέλος, η  $f(z)$  χαρακτηρίζεται ως **ολομορφική στην περιοχή  $\mathcal{R}$**  αν είναι ολομορφική σε κάθε σημείο της  $\mathcal{R}$ .

**Παρατήρηση.** Στην παλιότερη βιβλιογραφία, αντί του όρου ολομορφική (holomorphic), χρησιμοποιούσαν τον όρο αναλυτική (analytic). Εμείς θα κάνουμε τη διάκριση των δύο όρων μέχρις ότου αποδείξουμε ότι κάθε αναλυτική συνάρτηση είναι ολομορφική και αντίστροφα.

### Παράδειγμα 3.1

(i-α) Η παράγωγος της συνάρτησης  $f(z) = z$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , προκύπτει αμέσως από τον ορισμό:

$$f'(z) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z+h-z}{h} = 1, \quad \text{για κάθε } z \in \mathbb{C}. \quad (3.9)$$

Εναλλακτικά,  $f(z) = z = x + iy$ . Άρα,  $u(x, y) = x$ ,  $v(x, y) = y$ . Σύμφωνα λοιπόν με τους τύπους (3.5) και (3.7)

$$f'(z) = \partial_x u(x, y) + i \partial_x v(x, y) = 1 \quad (3.10)$$

και

$$f'(z) = -i \partial_y u(x, y) + \partial_y v(x, y) = 1, \quad (3.11)$$

αντίστοιχα.

Άρα, η  $f(z) = z$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , είναι ολομορφική σε ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο.

(i-β)  $f(z) = z^2$ ,  $z \in \mathbb{C}$ . Σύμφωνα με τον αντίστοιχο ορισμό,

$$f'(z) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z+h)^2 - z^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2zh + h^2}{h} = 2z, \text{ για κάθε } z \in \mathbb{C}. \quad (3.12)$$

Εναλλακτικά,  $f(z) = z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ . Άρα,  $u(x, y) = x^2 - y^2$ ,  $v(x, y) = 2xy$ . Χρησιμοποιώντας τους τύπους (3.5) και (3.7), βρίσκουμε ότι

$$f'(z) = \partial_x u(x, y) + i \partial_x v(x, y) = 2x + 2iy = 2z \quad (3.13)$$

και

$$f'(z) = -i \partial_y u(x, y) + \partial_y v(x, y) = 2iy + 2x = 2z, \quad (3.14)$$

αντίστοιχα.

Άρα, και η  $f(z) = z^2$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , είναι ολομορφική σε ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο.

(i-γ) Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε την παράγωγο της  $f(z) = z^n$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , όπου  $n$  τυχαίος φυσικός αριθμός, και να δούμε ότι είναι ολομορφική σε ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιώντας τον τύπο του δυωνυμικού αναπτύγματος

$$(z+h)^n = \sum_{m=0}^n \frac{n!}{m!(n-m)!} z^{n-m} h^m \quad (3.15)$$

εύκολα βρίσκουμε ότι  $f'(z) = n z^{n-1}$ .

(ii-α) Η συνάρτηση  $f(z) = z^{-1}$ ,  $z \in S = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  είναι ολομορφική σε όλο το πεδίο ορισμού της και  $f'(z) = -z^{-2}$ :

$$f'(z) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(z+h)^{-1} - z^{-1}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z - (z+h)}{h z (z+h)} = -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{z(z+h)}. \quad (3.16)$$

(ii-β) Γενικότερα, η συνάρτηση  $f(z) = z^{-n}$ ,  $z \in S = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , είναι ολομορφική σε όλο το  $S$  και  $f'(z) = -n z^{-(n+1)}$ .

(iii) Και ... φαρμακερό. Η συνάρτηση  $f(z) = \bar{z}$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , **δεν είναι πουθενά ολομορφική!** Γιατί,  $f(z) = x - iy$  και, αν ήταν διαφορίσιμη, οι συνθήκες Cauchy-Riemann θα έδιναν

$$f'(z) = \partial_x u(x, y) + i \partial_x v(x, y) = 1 \quad (3.17)$$

και

$$f'(z) = -i \partial_y u(x, y) + \partial_x v(x, y) = -i, \quad (3.18)$$

αντίστοιχα. ■

Από τον ορισμό της, η διαδικασία της παραγώγισης έχει ορισμένα χαρακτηριστικά με πρώτο και κύριο τη γραμμικότητα. Αναλυτικότερα,

(i) Αν οι συναρτήσεις  $f, g: S \rightarrow \mathbb{C}$  είναι διαφορίσιμες στο σημείο  $z \in S$  και  $F = c_1 f + c_2 g$ , όπου  $c_1, c_2$  τυχαίοι μιγαδικοί αριθμοί, τότε η συνάρτηση  $F$  είναι επίσης διαφορίσιμη στο  $z$  και

$$F'(z) = c_1 f'(z) + c_2 g'(z). \quad (3.19)$$

(ii) (**Κανόνας του Leibniz**) Κάτω από τις ίδιες προϋποθέσεις, η  $G = f g$  είναι διαφορίσιμη στο  $z$  και

$$G'(z) = f'(z) g(z) + f(z) g'(z). \quad (3.20)$$

(iii) (**Κανόνας της αλυσίδας**). Αν η συνάρτηση  $H: S \rightarrow \mathbb{C}$  προκύπτει από τη σύνθεση  $f \circ g$  των  $f: T \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $g: S \rightarrow \mathbb{C}$ , η  $g$  είναι διαφορίσιμη στο  $z$  και η  $f$  στο  $g(z) \in T$ , τότε

$$H'(z) = f'(g(z)) g'(z). \quad (3.21)$$

### Παράδειγμα 3.2

(i) Από τη γραμμικότητα της παραγώγισης αμέσως έπεται ότι, κάθε πολυωνυμική συνάρτηση, δηλαδή κάθε συνάρτηση της μορφής

$$Q(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (3.22)$$

όπου  $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$  τυχαίοι μιγαδικοί αριθμοί, είναι διαφορίσιμη και

$$Q'(z) = c_1 + 2 c_2 z + \dots + n c_n z^{n-1}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (3.23)$$

Άρα, κάθε πολυωνυμική συνάρτηση είναι ολομορφική σε όλο το μιγαδικό επίπεδο.

(ii-α) Θεωρούμε και πάλι την συνάρτηση  $Q(z)$  του μέρους (i) που είναι πολυώνυμο βαθμού  $n$  ως προς το  $z$ . Σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας, η εξίσωση  $Q(z) = 0$  έχει  $n$  (μιγαδικές ρίζες),  $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ , ορισμένες από τις οποίες μπορεί να μην είναι απλές. Συνεπώς, η σύνθεση  $g = f \circ Q$  της  $Q(z)$  με την

$$f(z) = \frac{1}{z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad (3.24)$$

ορίζεται στο υποσύνολο  $\mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$  του μιγαδικού επιπέδου. Πιο συγκεκριμένα,

$$g(z) = (f \circ Q)(z) = f(Q(z)) = \frac{1}{Q(z)}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n\}. \quad (3.25)$$

Από τον κανόνα της αλυσίδας αμέσως έπεται ότι

$$g'(z) = f'(Q(z)) Q'(z) = -Q^{-2}(z) Q'(z) \equiv -\frac{Q'(z)}{Q^2(z)}. \quad (3.26)$$

Συνεπώς, η συνάρτηση  $Q^{-1}(z)$  είναι ολομορφική στο σύνολο  $\mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ .

(ii-β) Μια συνάρτηση λέγεται **ρητή** αν είναι της μορφής

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \quad (3.27)$$

όπου  $P(z)$  και  $Q(z)$  πουλυωνυμικές συναρτήσεις, βαθμού  $m$  και  $n$ , αντίστοιχα. Αφού η  $f(z)$  γράφεται ως γινόμενο,  $f(z) = P(z) Q^{-1}(z)$ , μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα του Leibniz για να βρούμε ότι

$$f'(z) = P'(z) Q^{-1}(z) - P(z) Q^{-2}(z) Q'(z) = \frac{Q(z) P'(z) - P(z) Q'(z)}{Q^2(z)}. \quad (3.28)$$

Συνεπώς, κάθε ρητή συνάρτηση είναι ολομορφική σε όλο το μιγαδικό επίπεδο, με εξαίρεση τα σημεία στα οποία ο παρονομαστής μηδενίζεται. ■

**Θεώρημα 3.1** (Οι αναλυτικές συναρτήσεις είναι ολομορφικές)

Κάθε δυναμοσειρά με ακτίνα σύγκλισης  $R > 0$  είναι ολομορφική στον ανοιχτό δίσκο  $D_R(z_0)$ . Αν

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad z \in D_R(z_0), \quad (3.29)$$

τότε

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z - z_0)^{n-1}, \quad z \in D_R(z_0). \quad (3.30)$$

Δηλαδή, η παράγωγος της  $f(z)$  δίνεται από τη σειρά που προκύπτει παραγωγίζοντας, όρο προς όρο, τη σειρά που ορίζει την  $f(z)$ .

Απόδειξη

Αφήνεται στον πρόθυμο αναγνώστη, ως άσκηση, με την ακόλουθη υπόδειξη: Ομοιόμορφη σύγκλιση. ■

Η βαρύνουσα σημασία του Θεωρήματος 3.1 έγκειται στο γεγονός ότι μας επιτρέπει να παραγάγουμε τις ιδιότητες των μιγαδικών συναρτήσεων τις οποίες έχουμε ορίσει μέσω δυναμοσειρών που έχουν μη μηδενική ακτίνα σύγκλισης.

### Παράδειγμα 3.3

(i) Στο προηγούμενο εδάφιο ορίσαμε την μιγαδική εκθετική συνάρτηση με τον ακόλουθο τρόπο:



$$\exp(z) \equiv e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (3.31)$$

Αφού η  $\exp(z)$  έχει άπειρη ακτίνα σύγκλισης (είναι αναλυτική σε όλο το μιγαδικό επίπεδο), το προηγούμενο θεώρημα συνεπάγεται ότι

$$\exp'(z) \equiv (e^z)' := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (3.32)$$

Όμως, η αντικατάσταση  $n = m + 1$  οδηγεί αμέσως στο ακόλουθο συμπέρασμα:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!} \quad (3.33)$$

Συνεπώς

$$\exp'(z) = \exp(z), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (3.34)$$

■

Ας σημειωθεί ότι, η αντικατάσταση  $z \rightarrow az$ , όπου  $a$  συγκεκριμένος μιγαδικός αριθμός, οδηγεί στην οικογένεια των εκθετικών συναρτήσεων

$$\exp(az) \equiv e^{az} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(az)^n}{n!}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (3.35)$$

που έχουν τις ίδιες, ουσιαστικά, ιδιότητες με την  $\exp(z)$ . Εύκολα, για παράδειγμα, αποδειχεται ότι

$$\exp'(az) = a \exp(az), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (3.36)$$

Αυτό το αποτέλεσμα μας επιτρέπει να αποδείξουμε τη θεμελιακή σχέση

$$e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}. \quad (3.37)$$

### Απόδειξη

Θεωρούμε την οικογένεια των συναρτήσεων

$$f(z) := e^{az} e^{-az}, \quad (3.38)$$

όπου  $a$  τυχαίος μιγαδικός αριθμός. Από τον κανόνα του Leibniz συνάγεται ότι

$$f'(z) = (e^{az})' e^{-az} + e^{az} (e^{-az})' = (a-a) e^{az} e^{-az} = 0. \quad (3.39)$$

Άρα, η  $e^{az} e^{-az}$  είναι ανεξάρτητη από το  $z$ . Από την άλλη, ο ορισμός της  $\exp(z)$  συνεπάγεται ότι  $\exp(0) = 1$ . Συνακόλουθα,  $e^{az} e^{-az} = (e^{az} e^{-az})|_{z=1} = (e^{az} e^{-az})|_{z=0} = e^0 e^0 = 1$ .

Δείξαμε λοιπόν ότι

$$e^a e^{-a} = 1, \quad \forall a \in \mathbb{C}. \quad (3.40)$$

Από αυτήν έπεται ότι η  $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$  είναι ισοδύναμη προς την  $e^{-z_1} e^{-z_2} e^{z_1+z_2} = 1$ . Άρα, αρκεί να αποδείξουμε ότι η τελευταία ισχύει. Για το σκοπό αυτό, θεωρούμε την οικογένεια των συναρτήσεων

$$g(z) := e^{-az} e^{-bz} e^{(a+b)z}, \quad (3.41)$$

όπου  $(a, b)$  τυχαίο ζευγάρι μιγαδικών αριθμών. Με τον ίδιο όπως παραπάνω τρόπο, εύκολα δείχνει κανείς ότι  $g'(z) = 0$ . Συνεπώς,  $g(1) = g(0)$ , πράγμα που σημαίνει ότι

$$e^{-a} e^{-b} e^{a+b} = 1, \quad \forall a, b \in \mathbb{C}. \quad (3.42)$$

■

Ως τώρα, δεν έχουμε κάνει λόγο για τις μιγαδικές συναρτήσεις που αντιστοιχούν στις τριγωνομετρικές  $\cos x$  και  $\sin x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Αλλά, στο μεταξύ, έχουμε εισαγάγει τις συναρτήσεις της μορφής  $\exp(az)$ , όπου  $a$  τυχαίος μιγαδικός αριθμός. Αυτές, λοιπόν, μας επιτρέπουν να υιοθετήσουμε τους ορισμούς

$$\cos z := \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z := \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (3.43)$$

και να αποδείξουμε ότι οι ιδιότητες αυτών των νέων συναρτήσεων δικαιολογούν την επωνυμία τους  $\cos$  και  $\sin$ , αντίστοιχα.

Η πρώτη από αυτές τις ιδιότητες προκύπτει αμέσως από τους ορισμούς (3.43) και την (3.36):

$$\cos' z = -\sin z, \quad \sin' z = \cos z, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (3.44)$$

Δηλαδή, οι συναρτήσεις  $\cos z$ ,  $\sin z$  είναι ολομορφικές σε όλο το μιγαδικό επίπεδο.

Η αναλυτική μορφή αυτών των συναρτήσεων προκύπτει από την η αντικατάσταση της (3.35) στους ορισμούς τους:

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (3.45)$$

Χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία μπορούμε να αποδείξουμε ότι οι μιγαδικές συναρτήσεις  $\cos z$ ,  $\sin z$  πληρούν και την ταυτότητα

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (3.46)$$

Συγκεκριμένα, από τις (3.43) αμέσως έπεται ότι

$$\cos^2 z + \sin^2 z = \frac{(e^{iz} + e^{-iz})^2}{4} - \frac{(e^{iz} - e^{-iz})^2}{4} = \quad (3.47)$$

$$\frac{e^{iz} e^{iz} + 2 e^{iz} e^{-iz} + e^{-iz} e^{-iz}}{4} - \frac{e^{iz} e^{iz} - 2 e^{iz} e^{-iz} + e^{-iz} e^{-iz}}{4} = e^{iz} e^{-iz}. \quad (3.48)$$

Αρκεί λοιπόν να χρησιμοποιήσουμε την (3.40), για να καταλήξουμε στην (3.46).

Από τις (3.43) αμέσως συνάγεται ότι

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (3.49)$$

Αυτή τη σχέση, για  $z \in \mathbb{R}$ , τη χρησιμοποιήσαμε στο πρώτο εδάφιο απλώς ως συντομογραφία. Τώρα πλέον, φαίνεται καθαρά ότι είναι άμεση απόρροια του ορισμού των μιγαδικών συναρτήσεων  $\exp$ ,  $\cos$  και  $\sin$ . Συνάμα, η (3.49) οδηγεί στο συμπέρασμα ότι και οι τρεις αυτές συναρτήσεις είναι περιοδικές.

Για ν' αποδείξουμε αυτή την ιδιότητα, θα σημειώσουμε αρχικά ότι οι συντελεστές της δυναμοσειράς  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n / n!$  είναι πραγματικοί. Αυτό συνεπάγεται ότι

$$\overline{\exp z} = \exp(\bar{z}), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (3.50)$$

Από την άλλη, είναι γνωστό ότι η πραγματική εκθετική συνάρτηση είναι παντού θετική:  $\exp x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ . Άρα,

$$|\exp z| = \sqrt{\exp(z + \bar{z})} = \exp(\operatorname{Re} z) > 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}. \quad (3.51)$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι, υπάρχει κάποιος μιγαδικός αριθμός  $a$ , τέτοιος που  $\exp(z + a) = \exp z$ . Όμως,  $\exp(z + a) = \exp z \exp a$ . Άρα, η προηγούμενη σχέση είναι ισοδύναμη με την  $\exp a = 1$ . Αλλά τότε,  $|\exp a| = \exp(\operatorname{Re} a) = 1$ . Συνεπώς,  $\operatorname{Re} a = 0$ , πράγμα που σημαίνει ότι  $a = i\theta, \theta \in \mathbb{R}$ .

Με αυτό τον τρόπο, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι, αν υπάρχει κάποιος μιγαδικός αριθμός  $a$ , τέτοιος που  $\exp(z + a) = \exp z$ , τότε αυτός πρέπει αναγκαστικά να είναι της μορφής  $a = i\theta, \theta \in \mathbb{R}$ , και να πληροί τη συνθήκη  $\exp a = 1$ . Με βάση τον τύπο (3.49), αυτό το συμπέρασμα διατυπώνεται ως εξής:

$$\cos \theta + i \sin \theta = 1, \quad \theta \in \mathbb{R}. \quad (3.52)$$

Αναγκαστικά, λοιπόν,  $\cos \theta = 1, \sin \theta = 0$ . Όμως, αυτό το ζευγάρι εξισώσεων έχει λύσεις και μάλιστα άπειρες, τις  $\theta = 2\kappa\pi, \kappa \in \mathbb{Z}$ .

Με άλλα λόγια, έχουμε πλέον αποδείξει ότι

$$\exp(z + 2\kappa\pi i) = \exp z, \quad \kappa \in \mathbb{Z}. \quad (3.53)$$

Αυτό σημαίνει ότι η μιγαδική συνάρτηση  $\exp z$  είναι όντως περιοδική με περίοδο  $2\pi i$ . Άμεση απόρροια αυτού του γεγονότος και των ορισμών (3.43) είναι ότι οι μιγαδικές συναρτήσεις  $\cos z$  και  $\sin z$  είναι επίσης περιοδικές, αλλά με περίοδο  $2\pi$ .

Με τη βοήθεια της μιγαδικής εκθετικής συνάρτησης μπορούμε να επεκτείνουμε στο μιγαδικό επίπεδο και πολλές άλλες συναρτήσεις που μας είναι γνωστές από την πραγματική ανάλυση. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελούν το υπερβολικό συνημίτονο και το υπερβολικό ημίτονο που ορίζονται, αντίστοιχα, με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\cosh z := \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \sinh z := \frac{e^z - e^{-z}}{2i}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (3.54)$$

Η ταυτότητα

$$\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (3.55)$$

και άλλες χαρακτηριστικές ιδιότητες αυτών των συναρτήσεων, όπως οι

$$\cosh' z = \sinh z, \quad \sinh' z = \cosh z, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (3.56)$$

αποδείχονται εύκολα, με τον τρόπο που εξηγήσαμε παραπάνω.

Κλείνουμε αυτό το εδάφιο με την ακόλουθη επισήμανση. Όπως ήδη αναφέραμε και θα φανεί ακόμη καθαρότερα στα επόμενα, συχνά είναι βολικότερο να παριστάνουμε τον μιγαδικό αριθμό  $z = x + iy$  στη μορφή  $z = r e^{i\theta}$ . Τότε, η συνάρτηση  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  μετατρέπεται στην

$$f(z) = U(r, \theta) + i V(r, \theta), \quad (3.57)$$

όπου  $U(r, \theta), V(r, \theta)$  η μορφή των συναρτήσεων  $u(x, y), v(x, y)$  στις πολικές συντεταγμένες. Σ' αυτές τις περιπτώσεις, μπορούμε να υπολογίσουμε την παράγωγο της  $f(z)$  χρησιμοποιώντας τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης των συναρτήσεων  $U(r, \theta)$  και  $V(r, \theta)$ . Αφήνουμε για άσκηση την απόδειξη ότι οι τύποι που αντικαθιστούν τους (3.5) και (3.7) είναι οι

$$f'(z) = \left[ \cos \theta \partial_r U(r, \theta) - \frac{\sin \theta}{r} \partial_\theta U(r, \theta) \right] + i \left[ \cos \theta \partial_r V(r, \theta) - \frac{\sin \theta}{r} \partial_\theta V(r, \theta) \right] \quad (3.58)$$

και

$$f'(z) = \left[ \sin \theta \partial_r V(r, \theta) + \frac{\cos \theta}{r} \partial_\theta V(r, \theta) \right] - i \left[ \sin \theta \partial_r U(r, \theta) + \frac{\cos \theta}{r} \partial_\theta U(r, \theta) \right], \quad (3.59)$$

αντίστοιχα.

## Ασκήσεις

**3.1** Να δειχτεί ότι, αν  $f(z) = z^n, n = 0, 1, \dots$ , τότε  $f'(z) = n z^{n-1}$ .

**3.2** Να δειχτεί ότι η συνάρτηση  $f(z) = |z|$  δεν είναι διαφορίσιμη.

**3.3** Οι τελεστές  $(\partial, \bar{\partial}) \equiv (\partial_z, \bar{\partial}_z)$  ορίζονται ως εξής:

$$\partial \equiv \partial_z := \frac{1}{2} (\partial_x - i \partial_y), \quad \bar{\partial} \equiv \bar{\partial}_z := \frac{1}{2} (\partial_x + i \partial_y) \quad (3.60)$$

Στην αγγλική βιβλιογραφία, ο πρώτος αναφέρεται ως τελεστής  $D$  (**ντι**) κι ο δεύτερος ως  $D$  - bar (**ντι μπαρ**), από το bar=παύλα.

α) Να δειχτεί ότι η μιγαδική συνάρτηση  $f(z)$  είναι ολομορφική στο ανοιχτό υποσύνολο  $\Omega$  του  $\mathbb{C}$  εάν και μόνον όταν  $\bar{\partial} f(z) = 0$  σε κάθε  $z \in \Omega$ .

β) Να δειχτεί ότι οι συναρτήσεις  $f(z) = |z|^2$ ,  $f(z) = \operatorname{Re} z$  και  $f(z) = \operatorname{Im} z$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , δεν είναι ολομορφικές.

γ) Να δειχτεί ότι  $\bar{\partial} e^{-|z|} = -\frac{z}{2|z|} e^{-|z|}$ .

**3.4** Να υπολογιστεί η παράγωγος των παρακάτω μιγαδικών συναρτήσεων και να προσδιοριστεί το ανοιχτό υποσύνολο του  $\mathbb{C}$  στο οποίο είναι ολομορφικές.

$$(i) f(z) = \frac{z}{z^2 - 3z + 2}, \quad (ii) f(z) = \frac{1}{z^2 - (2-i)z - 2i}, \quad (iii) f(z) = \frac{z}{z^2 - 3iz - 2}.$$

$$(iv) f(z) = \frac{z}{z^3 + 1}, \quad (v) f(z) = \frac{z^2 + 1}{z^4 + 1}, \quad (vi) f(z) = \frac{z+1}{z^3 + 8}.$$

$$(vii) f(z) = \begin{cases} \frac{1}{z+i}, & \operatorname{Im} z > 0 \\ \frac{1}{z-i}, & \operatorname{Im} z < 0 \end{cases}$$

**3.5** Υποθέστε ότι η συνάρτηση  $f(z)$ ,  $z \in S \subset \mathbb{C}$ , είναι συνεχής και η  $g(z)$  ολομορφική στο ανοιχτό υποσύνολο  $\Omega$ , το οποίο περιέχει την εικόνα  $f(S)$  του  $S$ . Να δειχτεί ότι, αν η  $g$  είναι η αντίστροφη της  $f$ , αν δηλαδή  $g(f(z)) = z$ ,  $\forall z \in S$ , τότε, σε κάθε σημείο  $z_0$ , το οποίο πληροί τη συνθήκη  $g'(f(z_0)) \neq 0$ , η  $f(z)$  είναι διαφορίσιμη και

$$f'(z_0) = \frac{1}{g'(f(z_0))}. \quad (3.61)$$

Υπόδειξη. Για κατάλληλο  $h \in \mathbb{C}$ , με  $|h|$  είναι αρκετά μικρό, αν το  $z_0 \in S$ , τότε το  $z_0 + h \in S$  και  $f(z_0 + h) \neq f(z_0)$ . Άρα,

$$1 = \frac{g(f(z_0 + h)) - g(f(z_0))}{h} = \frac{g(f(z_0 + h)) - g(f(z_0))}{f(z_0 + h) - f(z_0)} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

**3.6** α) Ν' αποδειχτεί το Θεώρημα 3.1.

β) Να δειχτεί ότι ο τύπος (3.30) γενικεύεται με τον ακόλουθο τρόπο: Η παράγωγος τάξης  $m$  της συνάρτησης  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$  είναι ίση με

$$f^{(m)}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{(n-m)!} c_n (z - z_0)^{n-1}, \quad z \in D_R(z_0). \quad (3.62)$$

**3.7** Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της προηγούμενης άσκησης, δείχτε ότι

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}, \quad \frac{1}{(1-z)^3} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{2} z^{n-2}, \quad |z| < 1.$$

**3.8** Να υπολογιστεί η παράγωγος των παρακάτω μιγαδικών συναρτήσεων και να προσδιοριστεί το ανοιχτό υποσύνολο του  $\mathbb{C}$  στο οποίο είναι ολομορφικές.

$$(i) f(z) = e^{z^2}, \quad (ii) f(z) = \frac{e^z}{z}, \quad (iii) f(z) = \frac{e^z}{(z+1)^2}.$$

**3.9** Ν' αποδειχτούν οι σχέσεις (3.55) και (3.56).

**3.10** Να υπολογιστεί η παράγωγος των παρακάτω μιγαδικών συναρτήσεων και να προσδιοριστεί το ανοιχτό υποσύνολο του  $\mathbb{C}$  στο οποίο είναι ολομορφικές.

$$(i) f(z) = \tanh z := \frac{\sinh z}{\cosh z}, \quad (ii) f(z) = z \tanh(z - i), \quad (iii) f(z) = \tanh \frac{1}{z+i}$$

**3.11** Να παραχτούν οι τύποι (3.58) και (3.59) για την παράγωγο της  $f(z)$  στις πολικές συντεταγμένες.

**3.12** Χρησιμοποιώντας τον τύπο (3.58) ή (3.59), υπολογίστε την παράγωγο των παρακάτω μιγαδικών συναρτήσεων στις πολικές συντεταγμένες,  $(r, \theta)$ , στις οποίες  $z = r e^{i\theta}$ .

$$(i) f(z) = \frac{1}{z}, \quad (ii) f(z) = \frac{1}{z^2+1}, \quad (iii) f(z) = \frac{z}{z^3+1}.$$

$$(iv) f(z) = \frac{e^{iz}}{z}, \quad (v) f(z) = \sin 2z, \quad (vi) f(z) = \tanh z.$$

$$(vii) f(z) = \begin{cases} \frac{1}{z+1+i}, & \operatorname{Re} z < 0 \\ \frac{1}{z-1-i}, & \operatorname{Re} z > 0 \end{cases}$$

## 4. Τομές και κλαδικά σημεία

Οι περισσότερες μιγαδικές συναρτήσεις που ορίσαμε ως τώρα δεν απεικονίζουν τα σημεία του πεδίου ορισμού τους,  $S \subset \mathbb{C}$ , στα σημεία του πεδίου τιμών τους,  $\tilde{S} := f(S)$ , ένα προς ένα (1-1). Αυτό είναι προφανές για συναρτήσεις που είναι περιοδικές, όπως η  $\exp: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Το ίδιο ισχύει και για άλλες, απλούστερες, ολομορφικές συναρτήσεις. Για παράδειγμα, η  $f(z) = z^2$  παίρνει τη ίδια τιμή στο  $z$  και  $-z$ , τη στιγμή που το  $z \neq -z$ , όταν το  $z \neq 0$ . Σ' αυτές τις περιπτώσεις, είναι αδύνατο να βρούμε μια συνάρτηση  $g$ , που να έχει ως πεδίο ορισμού ολόκληρο το  $\tilde{S}$  και την ιδιότητα  $g(f(z)) = z, \forall z \in S$ . Δηλαδή, η  $f$  δεν είναι αντιστρέψιμη.

Για να δούμε το ίδιο πράγμα από διαφορετική σκοπιά, ας ονομάσουμε την τιμή της συνάρτησης  $f: S \rightarrow \mathbb{C}$ , στο τυχαίο  $z \in S$ ,  $w$ . Δηλαδή,  $w = f(z)$ . Από τον ορισμό της συνάρτησης έπεται ότι, αμέσως μόλις δοθεί ο αριθμός  $z$ , ο  $w$  προσδιορίζεται μονοσήμαντα. Αν όμως επιλεγεί ο  $w$  και ζητηθεί ο  $z$ , η σχέση  $w = f(z)$  αποκτάει το νόημα μιας εξίσωσης. Δηλαδή, μιας ισότητας που ισχύει για ορισμένες τιμές του άγνωστου, τις οποίες και πρέπει να βρούμε.

### Παράδειγμα 4.1

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να λύσουμε  $w = z^2$  ως προς το  $z$ . Προφανώς, όταν το  $w = 0$ , τότε το  $z = 0$  (και αντίστροφα). Για να μελετήσουμε την περίπτωση όπου το  $z \neq 0$ , μπορούμε να γράψουμε τον μιγαδικό αριθμό  $z$  στη μορφή  $z = r e^{i\theta}$  και τον  $w$  στη μορφή  $w = R e^{i\Theta}$ , όπου  $R > 0$  και  $0 \leq \Theta < 2\pi$ . Τότε,  $z^2 = r^2 e^{2i\theta}$  και, άρα,

$$w = z^2 \iff R e^{i\Theta} = r^2 e^{2i\theta}. \quad (4.1)$$

Αφού

$$|R e^{i\Theta}| = R, \quad |r^2 e^{2i\theta}| = r^2, \quad (4.2)$$

αμέσως έπεται ότι

$$r = \sqrt{R}. \quad (4.3)$$

Άρα, μένει να προσδιορίσουμε τη γωνία  $\theta$  από τη σχέση

$$e^{i\Theta} = e^{2i\theta}. \quad (4.4)$$

Προφανώς, μία λύση αυτής της εξίσωσης είναι η  $\theta = \Theta/2$ . Ωστόσο, η  $e^{ix}$  είναι  $2\pi$ -περιοδική. Συνεπώς,

$$e^{2i\theta} = e^{2i(\theta+m\pi)}, \quad (4.5)$$

για κάθε ακέραιο  $m$ . Αυτό σημαίνει ότι η (4.4) επιδέχεται άπειρες λύσεις, τις

$$\theta = \frac{\Theta}{2} + m\pi, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (4.6)$$

Με βάση τα προηγούμενα αποτελέσματα, θα λέγαμε τελικά ότι,

$$z = \sqrt{w} = \sqrt{R} e^{i(\Theta+2m\pi)/2}, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (4.7)$$

Αυτή η σχέση, μπορεί να βάλει κάποιον στον πειρασμό να πει ότι, σε αντίθεση με τις αρχικές μας επισημάνσεις, τελικά βρήκαμε τη συνάρτηση  $g$  που αντιστρέφει την  $f(z) = z^2$ . Είναι η  $g(w) = \sqrt{w}$ . Ωστόσο, η αναλυτική έκφραση της  $\sqrt{w}$  που δίνεται στην (4.7) δείχνει καθαρά ότι δεν έχουμε να κάνουμε με συνάρτηση: Για κάθε συγκεκριμένο  $w$ , δηλαδή για κάθε συγκεκριμένο ζευγάρι  $(R, \Theta)$ , η (4.7) **δεν** μας δίνει έναν μόνο μιγαδικό αριθμό. Αν για παράδειγμα  $w = 1$ , ή  $(R, \Theta) = (1, 0)$ , τότε  $z = 1$ , αν το  $m = 0$ , και  $z = -1$ , όταν το  $m = 1$ .

Παρ' όλ' αυτά, ο τύπος  $\sqrt{w} = \sqrt{R} e^{i(\Theta+2m\pi)/2}$  έχει καθιερωθεί ως η **τετραγωνική ρίζα** του μιγαδικού αριθμού  $w = R e^{i\Theta}$ , οπότε, στη μιγαδική ανάλυση, μιλάει κανείς για **πλειότιμες συναρτήσεις**. Προφανώς, αυτός ο όρος είναι τελείως αντιφατικός, αφού κάθε συνάρτηση είναι εξ ορισμού μονότιμη.

Για να αρθεί αυτή η αντίφαση, έχει εισαχθεί η έννοια των κλάδων μιας πλειότιμης συνάρτησης, που, στο παράδειγμά μας, δηλώνει το εξής: Η τυχαία επιλογή του ακέραιου  $m$  στον τύπο  $\sqrt{w} = \sqrt{R} e^{i(\Theta+2m\pi)/2}$ ,  $0 \leq \Theta < 2\pi$ , οδηγεί είτε στους μιγαδικούς αριθμούς που παράγονται από την έκφραση  $\sqrt{R} e^{i\Theta/2}$  είτε σ' εκείνους που προκύπτουν από την  $e^{i(\Theta+2\pi)/2}$ . Γι' αυτό λέμε ότι, η πλειότιμη συνάρτηση  $\sqrt{w}$  έχει δύο κλάδους οι οποίοι περιγράφονται, αντίστοιχα, από τις εκφράσεις

$$(\sqrt{w})_0 := \sqrt{R} e^{i\Theta/2}, \quad (\sqrt{w})_1 := \sqrt{R} e^{i(\pi+\Theta/2)}, \quad 0 \leq \Theta < 2\pi. \quad (4.8)$$

Κάθε μια από αυτές ορίζει μια συνάρτηση, με τη συνηθισμένη έννοια.

Για να δούμε με μεγαλύτερη σαφήνεια την έννοια των κλάδων, θα εισαγάγουμε την ακόλουθη ορολογία. Το σύνολο των τιμών που παίρνει ο μιγαδικός αριθμός  $z$  θα το λέμε **μιγαδικό επίπεδο  $z$**  και θα το συμβολίζουμε με  $\mathbb{C}_z$ . Ανάλογα, το σύνολο τιμών του μιγαδικού αριθμού  $w$  θα το λέμε **μιγαδικό επίπεδο  $w$**  και θα το συμβολίζουμε με  $\mathbb{C}_w$ . Με άλλα λόγια,

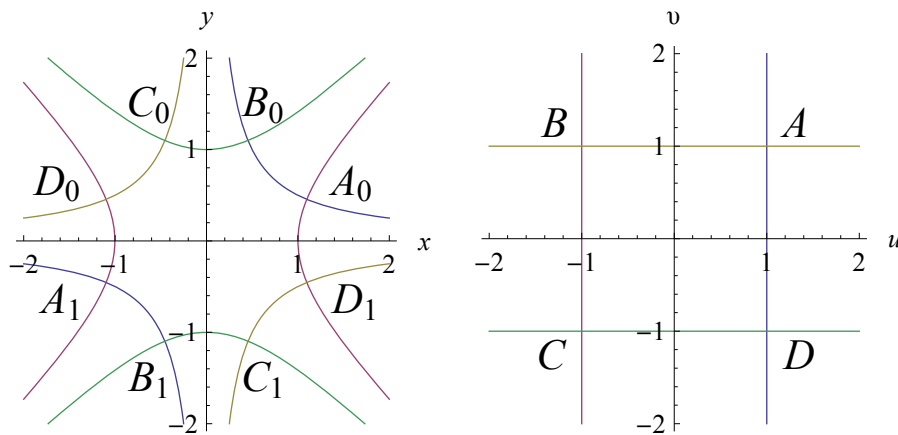
$$\mathbb{C}_z := \{z = x + iy : (x, y) \in \mathbb{R}^2\}, \quad \mathbb{C}_w := \{w = u + iv : (u, v) \in \mathbb{R}^2\}. \quad (4.9)$$

Από αυτή τη σκοπιά, κάθε συνάρτηση  $f(z)$ , με πεδίο ορισμού κάποιο υποσύνολο  $S$  του  $\mathbb{C}_z$ , απεικονίζει το σημείο  $z$  στο σημείο  $w = f(z)$  του  $\mathbb{C}_w$  και, άρα, το  $S$  στο υποσύνολο  $\tilde{S} := f(S)$  του  $\mathbb{C}_w$ .

Ο κλάδος λοιπόν  $(\sqrt{w})_0$  της  $\sqrt{w}$  μπορεί να θεωρηθεί ως η αντίστροφη συνάρτηση της  $f(z) = z^2$ , όταν η τελευταία περιοριστεί στο υποσύνολο  $S_0$ , το οποίο απαρτίζεται από το τμήμα  $y = \text{Im } z > 0$  του μιγαδικού επιπέδου  $\mathbb{C}_z$  και τον θετικό ημιάξονα  $x$ . Ανάλογα, ο κλάδος  $(\sqrt{w})_1$  της  $\sqrt{w}$  μπορεί να θεωρηθεί ως η αντίστροφη συνάρτηση της  $f(z) = z^2$ , όταν αυτή περιοριστεί στο υποσύνολο  $S_1$ , το οποίο απαρτίζεται από τον αρνητικό ημιάξονα  $x$  και το τμήμα  $y = \text{Im } z < 0$  του  $\mathbb{C}_z$ .



Αυτή η διαπίστωση φαίνεται καθαρά, αν κατασκευάσουμε την αντίστροφη εικόνα ορισμένων από τις ευθείες  $u = \text{σταθ.}$  και  $v = \text{σταθ.}$  του μιγαδικού επίπεδου  $\mathbb{C}_w$ . Υπενθυμίζουμε ότι, αν αναλυθεί στο πραγματικό και φανταστικό της μέρος, η σχέση  $w = z^2$  ανάγεται στο ζευγάρι  $u = x^2 - y^2$ ,  $v = 2xy$ . Συνεπώς, η ευθεία  $u = 1$  του  $\mathbb{C}_w$ , για παράδειγμα, αντιστοιχεί στο υποσύνολο του  $\mathbb{C}_z$  που ορίζεται από τη συνθήκη  $x^2 - y^2 = 1$ . Προφανώς, αυτό το υποσύνολο αποτελείται από δύο υπερβολές, συμμετρικά τοποθετημένες ως προς τον άξονα  $y$ . Η πρώτη διέρχεται από το σημείο  $(x, y) = (1, 0)$ , ενώ η δεύτερη από το  $(x, y) = (-1, 0)$ , όπως δείχνουμε στο Σχ. 4.1.



**Σχ. 4.1** Στο αριστερό μέρος του σχήματος φαίνονται οι αντίστροφες εικόνες των τεσσάρων ευθειών  $u = \pm 1$  και  $v = \pm 1$  του επίπεδου  $u-v$ .

Ανάλογα, η ευθεία  $u = -1$  του  $\mathbb{C}_w$  αντιστοιχεί στο υποσύνολο του  $\mathbb{C}_z$  που ορίζεται από τη συνθήκη  $x^2 - y^2 = -1$ . Και πάλι, αυτό το υποσύνολο αποτελείται από δύο υπερβολές, συμμετρικές ως προς τον άξονα  $x$ : Την υπερβολή που διέρχεται από το σημείο  $(x, y) = (0, 1)$  και περιέχεται στο τμήμα  $y \geq 1$  του  $\mathbb{C}_z$ , κι εκείνη που διέρχεται από το σημείο  $(x, y) = (0, -1)$ .

Οι ευθείες  $v = 1$  και  $v = -1$ , από την άλλη μεριά, αντιστοιχούν στα δύο ζευγάρια υπερβολών του επίπεδου  $\mathbb{C}_z$  που ορίζονται από τις συνθήκες  $2xy = \pm 1$ . Αυτές που ορίζονται από τη συνθήκη  $2xy = 1$  περιέχονται στο πρώτο και στο τρίτο τεταρτημόριο του  $\mathbb{C}_z$  και διέρχονται από τα σημεία  $(x, y) = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$  και  $(x, y) = (-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ , αντίστοιχα. Εκείνες που ορίζονται από τη συνθήκη  $2xy = -1$  περιέχονται στο δεύτερο και το τέταρτο τεταρτημόριο του  $\mathbb{C}_z$  και διέρχονται, αντίστοιχα, από τα σημεία  $(x, y) = (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$  και  $(x, y) = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ .

Οι αντιστοιχία των ευθειών  $u = \pm 1$  και  $v = \pm 1$  του επίπεδου  $\mathbb{C}_w$  προς τις υπερβολές του επίπεδου  $\mathbb{C}_z$  που μόλις περιγράψαμε μας επιτρέπει να βρούμε αμέσως τα σημεία του  $\mathbb{C}_z$  τα οποία αντιστοιχούν στις κορυφές του τετράγωνου  $ABCD$ , όπου τέμνονται οι ευθείες  $u = \pm 1$  και  $v = \pm 1$ . Όπως φαίνεται καθαρά και στο Σχ. 4.1, κάθε μία από αυτές τις κορυφές αντιστοιχεί σε δύο σημεία του επίπεδου  $\mathbb{C}_z$ , τα οποία δηλώνονται με το γράμμα που προσδιορίζει την κορυφή του τετράγωνου στο επίπεδο  $\mathbb{C}_w$ . Κατά συνέπεια, το ίδιο το τετράγωνο  $ABCD$  έχει δύο

προ-εικόνες στο επίπεδο  $\mathbb{C}_z$ . Με τη διαφορά ότι αυτές οι προεικόνες δεν αποτελούν κλειστά σχήματα.

Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι κινούμαστε κατά μήκος των πλευρών του τετράγωνου  $ABCD$ , ξεκινώντας από το σημείο  $(u, v) = (1, 0)$ , με κατεύθυνση προς την κορυφή  $A$ . Σύμφωνα με τον κλάδο  $(\sqrt{w})_0$ , η εικόνα μας στο επίπεδο  $\mathbb{C}_z$  θα ξεκινήσει από το σημείο  $(x, y) = (1, 0)$  και θα προχωρήσει προς το σημείο  $A_0$ , κινούμενη κατά μήκος της υπερβολής  $x = (1 + y^2)^{1/2}$  που διέρχεται από αυτά τα δύο σημεία. Όταν εμείς περάσουμε τις κορυφές  $B, C, D$  και αρχίσουμε να κατευθυνόμαστε προς το αρχικό σημείο  $(u, v) = (1, 0)$ , η εικόνα μας, κινούμενη πάντα κατά μήκος των υπερβολών του επιπέδου  $\mathbb{C}_z$  που αντιστοιχούν στις πλευρές του τετράγωνου  $ABCD$ , θα έχει περάσει από τα σημεία  $B_0, C_0, D_0$  και θα κατευθύνεται προς το σημείο  $(x, y) = (-1, 0)$ ! Αφού αυτό το σημείο είναι διαφορετικό από το  $(x, y) = (1, 0)$ , φαίνεται πως η εικόνα μας αδυνατεί να επιστρέψει εκεί απ' όπου ξεκίνησε.

Ωστόσο, όπως στα περισσότερα προβλήματα, έτσι και γι' αυτό υπάρχει λύση. Η εικόνα μας μπορεί να επιστρέψει στο σημείο από το οποίο ξεκίνησε με τη βοήθεια του κλάδου  $(\sqrt{w})_1$ . Γιατί, σύμφωνα με την  $(\sqrt{w})_1$ , το σημείο  $(x, y) = (-1, 0)$  αποτελεί την εικόνα του σημείου  $(u, v) = (1, 0)$ . Αν λοιπόν εμείς, αφού φτάσουμε στο  $(u, v) = (1, 0)$ , συνεχίσουμε να κινούμαστε και προχωρήσουμε γι' άλλη μια φορά προς  $A$ , τότε η εικόνα μας θα κινηθεί από το  $(x, y) = (-1, 0)$  προς το  $A_1$ . Κι όταν, αφού ξαναπεράσουμε από τις κορυφές  $B, C, D$ , επιστρέψουμε στο  $(u, v) = (1, 0)$ , η εικόνα μας θα έχει περάσει από τα σημεία  $B_1, C_1, D_1$  για να επιστρέψει τελικά στο  $(x, y) = (1, 0)$ .

Η διαδικασία που μόλις περιγράψαμε αποτελεί τη βάση για την εισαγωγή της έννοιας της κλαδικής τομής. Πιο συγκεκριμένα, για να μην εκνευριστεί η εικόνα μας από το γεγονός ότι εμείς, μετά από μια περιφορά κατά μήκος των πλευρών του τετράγωνου  $ABCD$  επιστρέφουμε στο σημείο από το οποίο ξεκινήσαμε, ενώ αυτή όχι, υιοθετούμε την ακόλουθη σύμβαση. Λέμε ότι τα σημεία που βρίσκονται ακριβώς πάνω από τον θετικό ημιάξονα  $u$  δε συνορεύουν με αυτά που βρίσκονται ακριβώς από κάτω. Γιατί, τάχα, κατά μήκος του θετικού ημιάξονα  $u$  έχει ανοίξει μία τάφος την οποία δεν μπορούμε να υπερπηδήσουμε. Αν το επιχειρήσουμε, θα βρεθούμε ... στον άλλο κόσμο. Συνεπώς, αφού ολοκληρώσαμε τη διαδρομή μας γύρω από τετράγωνο και νομίζαμε ότι επιστρέψαμε στο αρχικό σημείο  $(u, v) = (1, 0)$ , κάναμε λάθος. Δίκηο είχε η εικόνα μας και όχι εμείς.

Αν επιμείνουμε ότι κάποιος άλλος παραλογίζεται και όχι εμείς, η σύμβαση θα μας δώσει την ακόλουθη εξήγηση: Όταν νομίζατε ότι επιστρέψατε στο ίδιο σημείο του επιπέδου  $\mathbb{C}_w$ , στην πραγματικότητα, περάσατε σε ένα άλλο μιγαδικό επίπεδο, πανομοιότυπο με το  $\mathbb{C}_w$ . Για να τα διακρίνετε, σας παρακαλούμε να ονομάσετε το πρώτο  $(\mathbb{C}_w)_0$  και το δεύτερο  $(\mathbb{C}_w)_1$ . Η μετάβαση από το ένα στο άλλο γίνεται μόνο από τα σημεία του θετικού ημιάξονα  $u$ . Είναι το υποσύνολο που λέγεται **τομή**.

Η πρώτη σας λοιπόν βόλτα γύρω από το τετράγωνο  $ABCD$  έγινε στο επίπεδο  $(\mathbb{C}_w)_0$ , ενώ η δεύτερη στο  $(\mathbb{C}_w)_1$ . Απλώς η τομή έχει την εξής μαγική ιδιότητα: Όταν την διασχίζετε, περνάτε αμέσως από το ένα επίπεδο στο άλλο. Αν αυτό σας θυμίζει κάτι από τα χαρακτηριστικά του Escher, θα μας καταλάβετε καλύτερα. Διαφορετικά, συμβουλευτείτε ... την εγκυκλοπαίδεια. Σε κάθε περίπτωση, δίκηο έχει η εικόνα σας και όχι εσείς!

Τα δύο μιγαδικά επίπεδα που ενώνονται κατά μήκος της τομής ονομάζονται **φύλλα (του) Riemann** της "πλειότιμης συνάρτησης"  $\sqrt{w}$ . Βέβαια, θα πρέπει να σημειώσουμε ότι, τα φύλλα Riemann μιας πλειότιμης συνάρτησης και η τομή τους δεν είναι γεωμετρικά αντικείμενα που ορίζονται μονοσήμαντα. Τα μόνα στοιχεία που επιβάλλονται από τη συνάρτηση είναι (α) το πλήθος των φύλλων και (β) το σημείο (ή τα σημεία) από το οποίο υποχρεωτικά ξεκινάει η τομή. Το πρώτο καθορίζεται την αρχική συνάρτηση  $f(z)$  την οποία η πλειότιμη  $g(w)$  προσπαθεί να αντιστρέψει. Αν η  $f(z)$  είναι  $n$ -προς-ένα, τότε χρειαζόμαστε  $n$  φύλλα Riemann. Το δεύτερο στοιχείο που καθορίζεται από την αρχή είναι το σημείο ή τα σημεία στα οποία η  $g(w)$  παρουσιάζει ... κλαδική συμπεριφορά.

Με αυτό τον όρο βέβαια δεν εννοούμε ούτε τις συντεχνιακές αγκυλώσεις που εμφανίζονται σε κάποια στρώματα εργαζόμενων ούτε την τάση των κυβερνητικών κομμάτων να διορίζουν τους δημόσιους υπάλληλους μέσω των κλαδικών τους οργανώσεων στα συνδικάτα τα οποία ελέγχουν. Έτσι κι αλλιώς, όλοι γνωρίζουμε ότι τέτοιες συμπεριφορές αποτελούν, ιδιαίτερα στη χώρα μας, παρελθόν. Εδώ βασιλεύει η αζοκρατία (sic). Με κλαδική συμπεριφορά εννοούμε λοιπόν αυτό που είδαμε να συμβαίνει όταν περιδιαβήκαμε το τετράγωνο  $ABCD$  τους επίπεδου  $\mathbb{C}_w$ : Μετά από μια πλήρη περιφορά γύρω από το τετράγωνο, η συνάρτηση  $\sqrt{w}$  δεν απανήλθε στην αρχική τιμή της.

Θα πρέπει εδώ να σημειώσουμε ότι το φαινόμενο που παρατηρήσαμε δεν είχε τίποτε να κάνει με το ότι πορευτήκαμε κατά μήκος των πλευρών ενός τετράγωνου. Το ίδιο θα συνέβαινε και αν ακολουθούσαμε οποιαδήποτε άλλη κλειστή καμπύλη,  $\Gamma$ , με την εξής προϋπόθεση: Το σημείο  $w = 0$  βρίσκεται στο εσωτερικό της  $\Gamma$ . Με άλλα λόγια, η μη επάνοδος της  $\sqrt{w}$  στην αρχική της τιμή οφείλεται στο ότι περιστραφήκαμε γύρω από το σημείο  $w = 0$ . Γι' αυτό το λόγο το  $w = 0$  ονομάζεται **κλαδικό σημείο** της συνάρτησης  $\sqrt{w}$ .

Όπως λοιπόν λέγαμε νωρίτερα, η τομή που πρέπει να κάνουμε στο επίπεδο  $\mathbb{C}_w$  για να ορίσουμε τους κλάδους της  $\sqrt{w}$  δεν είναι υποχρεωτικά κατά μήκος του τμήματος  $u \geq 0$  του άξονα  $u$ . Οποιαδήποτε άλλη ημιευθεία ξεκινάει από το σημείο  $w = 0$  αποτελεί ισότιμη επιλογή. Για παράδειγμα, η τομή μπορεί να γίνει κατά μήκος του τμήματος  $u \leq 0$  του άξονα  $u$ , ή κατά μήκος του τμήματος  $v \leq 0$  του άξονα  $v$ , κλπ. Μόνο που, για κάθε μια από αυτές τις επιλογές, θα πρέπει να προσαρμόζουμε κατάλληλα το διάστημα τιμών της γωνίας  $\Theta$  που υπεισέρχεται στην περιγραφή του μιγαδικού αριθμού  $w = u + iv$  μέσω πολικών συντεταγμένων. Έτσι, αν συνεχίζουμε να ορίζουμε τη γωνία  $\Theta$  με βάση τον θετικό ημιάξονα  $u$  και η τομή αποτελείται από τον αντίθετο ημιάξονα, τότε μια από τις δυνατές επιλογές του εύρους τιμών της  $\Theta$  είναι η  $-\pi < \Theta \leq \pi$ . Σ' αυτή την περίπτωση, οι δυο κλάδοι της  $\sqrt{w}$  θα ορίζονται από τις σχέσεις

$$(\sqrt{w})_0 = \sqrt{R} e^{i\Theta/2}, \quad (\sqrt{w})_1 = \sqrt{R} e^{i(\pi+\Theta/2)}, \quad -\pi < \Theta \leq \pi. \quad (4.10)$$

**Παρατήρηση.** Τα δύο φύλλα Riemann της  $\sqrt{w}$  που ορίσαμε αρχικά μπορεί να θεωρηθεί πως αντιστοιχούν σε δύο ζώνες του  $\mathbb{R}^2$ . Στην πρώτη  $0 < R < \infty$ ,  $0 \leq \Theta < 2\pi$ . Στη δεύτερη,  $0 < R < \infty$ ,  $2\pi \leq \Theta < 4\pi$ . Η κάτω πλευρά  $\Theta = 0$  της πρώτης ταυτίζεται με την πάνω πλευρά  $\Theta = 4\pi$  της δεύτερης. Όλα τα σημεία της αριστερής πλευράς αυτών των ζωνών ταυτίζονται το ένα με το άλλο και αντιστοιχούν στο σημείο  $w = 0$ . Όταν οι κλάδοι ορίζονται από τις (4.10) οι δυο παραπάνω ζώνες προσδιορίζονται από τις συνθήκες  $-\pi < \Theta \leq \pi$  και  $\pi < \Theta \leq 3\pi$ , αντίστοιχα. ■

Στρέφοντας την προσοχή μας στη γενικότερη περίπτωση, θεωρούμε μια συνάρτηση  $f(z)$  που είναι ολομορφική στην περιοχή (στο ανοιχτό και συνεκτικό υποσύνολο)  $\Omega$  του μιγαδικού επίπεδου  $\mathbb{C}_z$ . Αν η απεικόνιση  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}_w$  δεν είναι 1-1, τότε η αντίστροφη συνάρτηση είναι αναγκαστικά πλειότιμη. Σ' αυτή την περίπτωση, είμαστε υποχρεωμένοι είτε να διαμερίσουμε την περιοχή  $\Omega$  σε ένα αριθμήσιμο υποσύνολο υπο-περιοχών, είτε να θεωρήσουμε  $m$  αντίγραφα της ίδιας περιοχής. Σε καθένα από αυτά τα τμήματα ή τα αντίγραφα, ας τα πούμε  $\{\Omega_m\}$ , μπορεί τότε να οριστεί μια απεικόνιση  $f_m : \Omega_m \rightarrow \mathbb{C}_w$  που αντιστοιχεί στην αρχική  $f(z)$  και είναι αντιστρέψιμη.

#### Παράδειγμα 4.2

Κλασικό παράδειγμα ολομορφικής συνάρτησης που η αντίστροφή της έχει άπειρους κλάδους είναι η εκθετική. Θυμίζουμε ότι, η  $f(z) = \exp z$ ,  $z \in \mathbb{C}_z$ , είναι περιοδική με περίοδο  $2i\pi$ . Αυτός είναι ο λόγος που η αντίστροφή της έχει άπειρους κλάδους. Για να τους βρούμε αναλυτικά, ας εξετάσουμε και πάλι την εξίσωση  $w = \exp z$ . Αν γράψουμε τον μιγαδικό αριθμό  $w = u + iv$  στη μορφή  $w = R e^{i\Theta}$ , η παραπάνω σχέση γίνεται

$$R e^{i\Theta} = e^{x+iy}. \quad (4.11)$$

Αφού  $|R e^{i\Theta}| = R$ ,  $|e^{x+iy}| = e^x$ , αμέσως συμπεραίνουμε ότι

$$e^x = R, \quad e^{iy} = e^{i\Theta}. \quad (4.12)$$

Συνεπώς,

$$x = \ln R, \quad y = \Theta + 2m\pi, \quad m \in \mathbb{Z}. \quad (4.13)$$

Η πλειότιμη συνάρτηση  $g(w)$  που ορίζεται από τον τύπο  $g(w) = \ln R + i(\Theta + 2m\pi)$  συμβολίζεται με  $\ln w$ . Άρα, οι λύσεις που βρήκαμε για την εξίσωση  $w = \exp z$  είναι άπειρες και δίνονται από τον τύπο

$$z = \ln w := \ln R + i(\Theta + 2m\pi), \quad m \in \mathbb{Z} \quad (4.14)$$

Με άλλα λόγια η συνάρτηση  $\ln w$  έχει άπειρους κλάδους.

Ας συμβολίσουμε με  $(\ln w)_m$  την έκφραση που προκύπτει από την  $\ln R + i(\Theta + 2m\pi)$  όταν επιλεγεί συγκεκριμένη τιμή του ακέραιου  $m$ . Για παράδειγμα,  $(\ln w)_0 = \ln R + i\Theta$ , ενώ  $(\ln w)_{-1} = \ln R + i(\Theta - 2\pi)$  και  $(\ln w)_1 = \ln R + i(\Theta + 2\pi)$ . Η  $(\ln w)_m$  είναι μια συνάρτηση (για πλεονασμό, θα την λέγαμε μονότιμη) που δίνει την αντίστροφη της  $w = \exp z$ , στο τμήμα  $\Omega_m$  του μιγαδικού επιπέδου  $\mathbb{C}_z$ . Για να προσδιορίσουμε επακριβώς τις περιοχές  $\Omega_m$ , θα πρέπει αρχικά να επιλέξουμε το διάστημα τιμών της γωνιακής μεταβλητής  $\Theta$ . Βέβαια, το μήκος αυτού του διαστήματος είναι πάντα  $2\pi$ . Αν, για παράδειγμα, πούμε ότι  $0 \leq \Theta < 2\pi$ , τότε οι περιοχές  $\Omega_m$  είναι οι οριζόντιες λωρίδες στις οποίες χωρίζεται το επίπεδο  $\mathbb{C}_z$  από τις ευθείες  $y = 2m\pi$ .

Ο περιορισμός  $0 \leq \Theta < 2\pi$  δηλώνει, επίσης, ότι η τομή του επιπέδου  $\mathbb{C}_w$ , κατά μήκος της οποίας ενώνονται τα άπειρα φύλλα Riemann, ξεκινάει από το σημείο  $(u, v) = (0, 0)$  και καλύπτει όλο τον θετικό ημιάξονα  $u$ . Το  $(u, v) = (0, 0)$  ή  $w = 0$  αποτελεί το κλαδικό σημείο της πλειότιμης συνάρτησης  $\ln w$ . Κάθε περιστροφή γύρω από αυτό το σημείο οδηγεί στο αμέσως ανώτερο ή κατώτερο φύλλο Riemann, ανάλογα με το αν διασχίζουμε την τομή από τα κάτω προς τα πάνω ή αντίστροφα.

Για να δούμε αυτή τη συμπεριφορά της  $\ln w$  καθαρότερα, ας θεωρήσουμε την ακόλουθη κίνηση. Αρχικά, βρισκόμαστε στο σημείο  $(u, v) = (1, 0)$  του  $(\mathbb{C}_w)_0$ , δηλαδή του φύλλου Riemann που αντιστοιχεί στην επιλογή  $m = 0$ . Μετά ξεκινάμε και, ακολουθώντας την φορά που είναι αντίθετη προς την κίνηση των δειχτών ενός ρολογιού, προχωράμε κατά μήκος ενός κύκλου με κέντρο το σημείο  $w = 0$ . Αυτό σημαίνει ότι, σε όλη τη διάρκεια της πορείας μας, το  $R$  παραμένει σταθερό και ίσο με τη μονάδα. Αντίθετα, η γωνία  $\Theta$  όλο αυξάνει και, από μηδενική που ήταν αρχικά, πλησιάζει την τιμή  $2\pi$ , καθώς εμείς πλησιάζουμε τον θετικό άξονα  $u$  από τα κάτω.

Αφού σε όλη τη διάρκεια της κίνησής μας βρισκόμαστε μέσα στο φύλλο Riemann  $(\mathbb{C}_w)_0$ , η κίνηση της εικόνας μας στο επίπεδο  $\mathbb{C}_z$  περιγράφεται από τη μεταβολή του  $z = (\ln w)_0$ . Όμως,  $R = 1$  και άρα  $(\ln w)_0 = \ln R + i\Theta = i\Theta$ . Συνεπώς,  $z = x + iy = i\Theta$ . Αυτό σημαίνει ότι η κίνηση της εικόνας μας γίνεται κατά μήκος του φανταστικού άξονα:  $x = 0$ ,  $y = \Theta$ . Με το που θα ακουμπήσουμε την τομή, στο σημείο  $(u, v) = (1, 0)$ , θα έχουμε μπει στο φύλλο Riemann  $(\mathbb{C}_w)_1$ . Από κει κι ύστερα, η κίνησή μας κατά μήκος του ίδιου κύκλου και με την ίδια φορά θα απεικονίζεται στο επίπεδο  $\mathbb{C}_z$  μέσω της συνάρτησης  $(\ln w)_1$ . Αυτό σημαίνει ότι  $z = \ln R + i(\Theta + 2\pi) = i(\Theta + 2\pi)$ , οπότε  $x = 0$ ,  $y = \Theta + 2\pi$ ,  $0 \leq \Theta < 2\pi$ . Δηλαδή, η εικόνα μας, αφού διασχίσει τη γραμμή  $y = 2\pi$ , θα συνεχίσει να κινείται κατά μήκος του άξονα  $y$ . Εάν, αφού ολοκληρώσουμε τη δεύτερη περιφορά μας γύρω από το σημείο  $w = 0$ , διασχίσουμε την τομή στο σημείο  $(u, v) = (1, 0)$ , θα μπούμε στο φύλλο Riemann  $(\mathbb{C}_w)_2$ .

Προφανώς, η επανάληψη της ίδιας κίνησης θα οδηγήσει στα φύλλα  $(\mathbb{C}_w)_3$ ,  $(\mathbb{C}_w)_4$  κλπ. Αντίστοιχα, η εικόνα μας στο επίπεδο  $\mathbb{C}_z$  θα περνάει διαδοχικά στις ζώνες  $\Omega_3$ ,  $\Omega_4$  κλπ. Αν βέβαια αντιστρέψουμε τη φορά της κίνησής μας, τότε, κάθε φορά που διασχίζουμε την τομή, θα περνάμε σε φύλλα Riemann με μικρότερο δείκτη  $m$  και η εικόνα μας σε χαμηλότερες ζώνες.



Θα πρέπει τώρα να τονίσουμε ότι η σχέση των επίπεδων  $\mathbb{C}_z$  και  $\mathbb{C}_w$  είναι τελείως συμμετρική. Αυτό σημαίνει ότι η αντιστροφή  $(z, w) \rightarrow (w, z)$  δεν αλλάζει την ουσία των πραγμάτων. Συνεπώς, μπορούμε, για παράδειγμα, να μιλάμε για την (πλειότιμη) συνάρτηση  $f(z) = \ln z$  που έχει προκύψει από την αντιστροφή της ολομορφικής συνάρτησης  $g(w) = \exp w$ . Σ' αυτή την περίπτωση, η τομή θα πρέπει να γίνει στο επίπεδο  $\mathbb{C}_z$  και τα αντίστοιχα φύλλα Riemann θα πρέπει να συμβολίζονται με  $(\mathbb{C}_z)_m$ .

Επιπλέον, θα πρέπει να τονιστεί ότι μια πλειότιμη συνάρτηση δεν έχει αναγκαστικά ένα μόνο κλαδικό σημείο. Το επόμενο παράδειγμα είναι αντιπροσωπευτικό.

**Παράδειγμα 4.3**

Η συνάρτηση

$$f(z) = \sqrt{z^2 - 1} \tag{4.15}$$

είναι πλειότιμη, με δύο κλαδικά σημεία, τα  $z = \pm 1$ .

Αυτό το συμπέρασμα μπορεί κανείς να το συναγάγει με δύο τρόπους. Ο πρώτος στηρίζεται στην παρατήρηση ότι η  $f(z)$  αποτελεί τη σύνθεση της ολομορφικής συνάρτησης  $G(z) = z^2 - 1$  με την πλειότιμη συνάρτηση  $F(s) = \sqrt{s}$ . Όπως διαπιστώσαμε νωρίτερα, το  $s = 0$  αποτελεί κλαδικό σημείο της δεύτερης. Αλλά το σημείο  $s = 0$  αντιστοιχεί σε δύο σημεία του επίπεδου  $\mathbb{C}_z$ , τα  $z = \pm 1$ .

Ο δεύτερος τρόπος για να δούμε ότι η  $f(z) = \sqrt{z^2 - 1}$  έχει δύο κλαδικά σημεία είναι να τη γράψουμε στη μορφή

$$f(z) = \sqrt{z_+ z_-}, \tag{4.16}$$

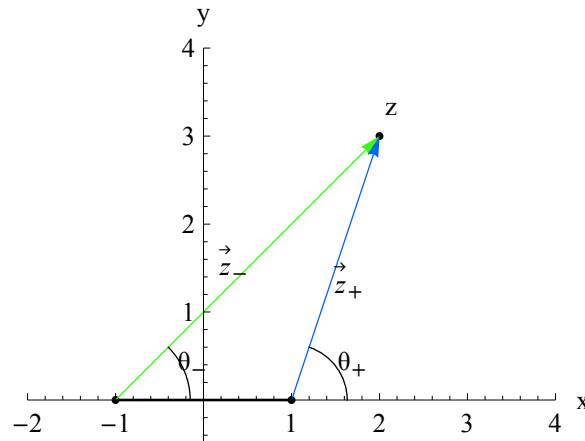
όπου

$$z_+ := z - 1 = x - 1 + iy, \quad z_- := z + 1 = x + 1 + iy. \tag{4.17}$$

Το διάνυσμα που παριστάνει τον  $z_+$  συνδέει το σημείο  $(x, y) = (1, 0)$  του  $\mathbb{C}_z$  με το σημείο  $z$ . Έχει μήκος  $R_+ = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2}$  και σχηματίζει γωνία  $\theta_+ = \arctan[y/(x - 1)]$  με το τμήμα  $x > 1$  του άξονα  $x$ , όπως στο Σχ 4.2. Άρα, μπορούμε να γράψουμε τον  $z_+$  στη μορφή  $z_+ = R_+ e^{i\theta_+}$ .

Ανάλογα, το διάνυσμα που παριστάνει τον  $z_-$  συνδέει το σημείο  $(x, y) = (-1, 0)$  του  $\mathbb{C}_z$  με το σημείο  $z$ . Αυτό έχει μήκος  $R_- = \sqrt{(x + 1)^2 + y^2}$  και η γωνία που σχηματίζει με το τμήμα  $x > -1$  του άξονα  $x$  είναι ίση με  $\theta_- = \arctan[y/(x + 1)]$ . Άρα, μπορούμε να γράψουμε τον  $z_-$  στη μορφή  $z_- = R_- e^{i\theta_-}$ . Κατά συνέπεια,

$$f(z) = \sqrt{R_+ e^{i\theta_+} R_- e^{i\theta_-}} = \sqrt{R_+ R_-} e^{i(\theta_+ + \theta_-)/2}. \tag{4.18}$$



**Σχ. 4.2** Τα διανύσματα  $z_{\pm} = z \mp 1$  και η τομή που ενώνει τα σημεία  $z = \mp 1$ .

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το σημείο  $z$  διαγράφει έναν ολόκληρο κύκλο με κέντρο το σημείο  $(x, y) = (1, 0)$  και ακτίνα  $R_+ < 2$ . Στη διάρκεια αυτής της κίνησης, οι ποσότητες  $R_-$  και  $\theta_-$  αυξομειώνονται, αλλά τελικά επιστρέφουν στην αρχική τους τιμή. Αντίθετα, η γωνία  $\theta_+$  μεταβάλλεται μονότονα, με τρόπο ώστε να μειωθεί συνολικά κατά  $2\pi$ , αν κίνηση ακολουθεί τη φορά των δεικτών ενός ρολογιού, ή να αυξηθεί αυξηθεί κατά τα  $2\pi$ , στην αντίθετη περίπτωση. Συνεπώς, ο παράγοντας  $e^{i\theta_+/2}$ , άρα και ολόκληρη η  $f(z)$  θα έχει μεταβληθεί κατά  $e^{\mp i\pi} = -1$ . Κι αυτό, παρά το γεγονός ότι το  $z$  επανήλθε στην αρχική του θέση!

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο μια πλήρης περιφορά κατά μήκος ενός κύκλου με κέντρο το σημείο  $(x, y) = (-1, 0)$  και ακτίνα  $R_- < 2$ , θα αλλάξει το το πρόσημο του παράγοντα  $e^{i\theta_-/2}$  αφήνοντας του υπόλοιπους αμετάβλητους. Αυτό όμως σημαίνει ότι και πάλι η τιμή της  $f(z)$  θα έχει μεταβληθεί κατά έναν παράγοντα  $-1$ .

Θα πρέπει να είναι φανερό ότι οι κινήσεις που μόλις περιγράψαμε δεν είναι υποχρεωτικό να γίνουν κατά μήκος κύκλων που έχουν ακτίνα μικρότερη από την απόσταση των σημείων  $(x, y) = (1, 0)$  και  $(x, y) = (-1, 0)$ . Το ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα επιφέρει και η κίνηση κατά μήκος οποιασδήποτε άλλης κλειστής καμπύλης. Με την προϋπόθεση, βέβαια, ότι αυτή περικλείνει μόνο ένα από τα παραπάνω σημεία.

Γιατί, εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι, αν η κλειστή καμπύλη περιέχει και τα δύο σημεία  $(x, y) = (1, 0)$  και  $(x, y) = (-1, 0)$ , τότε η  $f(z)$  θα επανέλθει στην αρχική της τιμή. Και ο λόγος είναι απλός: Σε μια τέτοια κίνηση, μεταβάλλονται κατά  $2\pi$  και οι δύο γωνίες  $\theta_+$  και  $\theta_-$ . Άρα το άθροισμα  $\theta_+ + \theta_-$  αλλάζει κατά ένα πολλαπλάσιο του  $4\pi$ , πράγμα που σημαίνει ότι ο παράγοντας  $e^{i(\theta_+ + \theta_-)/2}$  παραμένει αμετάβλητος.

Οι προηγούμενες παρατηρήσεις δείχνουν καθαρά ότι τα  $z = 1$  και  $z = -1$  αποτελούν κλαδικά σημεία της συνάρτησης  $f(z) = \sqrt{z^2 - 1}$  κι ότι αυτή είναι δίκλαδη. Για να ορίσουμε με σαφήνεια του δυο της κλάδους, ας υποθέσουμε ότι η απαραίτητη τομή του επίπεδου  $\mathbb{C}_z$  γίνεται κατά μήκος του ευθύγραμμου τμήματος

$$L := \{z = x + iy \in \mathbb{C}_z : -1 \leq x \leq 1, y = 0\} \quad (4.19)$$

που ενώνει το σημείο  $z = -1$  με το  $z = 1$ . Τότε, ως πεδίο ορισμού του πρώτου κλάδου μπορούμε να θεωρήσουμε το ανοιχτό σύνολο  $\Omega_1$  που απομένει, αν από το μιγαδικό επίπεδο  $\mathbb{C}_z$  αφαιρέσουμε το ευθύγραμμο τμήμα  $L: \Omega_1 = \mathbb{C}_z \setminus L$ . Οι τιμές αυτού του κλάδου δίνονται από τον τύπο

$$f_1(z) = \sqrt{R_+ R_-} e^{i(\theta_+ + \theta_-)/2}, \quad R_+, R_- > 0, \quad 0 \leq \theta_+, \theta_- < 2\pi. \quad (4.20)$$

Για να φανεί καθαρά η ασυνέχεια της  $f_1(z)$  στα σημεία της τομής, σημειώστε ότι στο πάνω μέρος της τομής  $\theta_+ = \pi, \theta_- = 0$ . Άρα, σ' αυτό το μέρος, η  $f_1(z) = i\sqrt{R_+ R_-}$ . Για να φτάσουμε στο κάτω μέρος της τομής δεν θα πρέπει να την διασχίσουμε. Μόνο έτσι θα παραμείνουμε στον ίδιο κλάδο. Συνεπώς, η γωνία  $\theta_-$  θα πρέπει να αυξηθεί κατά  $2\pi$ . Άρα, στο κάτω μέρος της τομής, η  $f_1(z) = \sqrt{R_+ R_-} e^{i(\pi + 2\pi)/2} = -i\sqrt{R_+ R_-}$ .

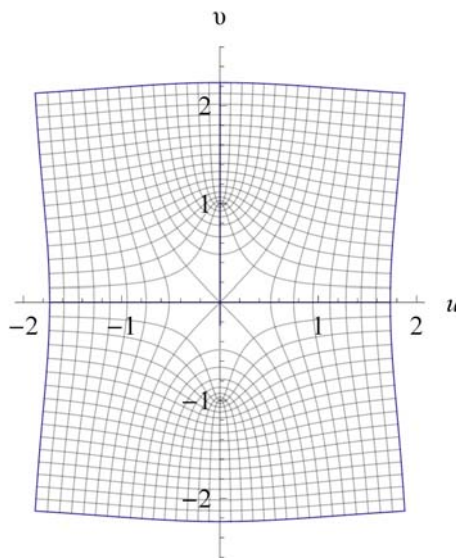
Από αυτή την παρατήρηση συνάγεται αμέσως και ποιος πρέπει να είναι ο τύπος για τον δεύτερο κλάδο της  $f(z) = \sqrt{z^2 - 1}$ . Γιατί, οι τιμές στις οποίες καταλήγει η  $f(z)$  όταν πλησιάζουμε την τομή από το εσωτερικό του ενός κλάδου θα πρέπει να είναι ίδιες με τις τιμές με τις οποίες ξεκινάει η  $f(z)$  όταν διασχίσουμε την τομή και μπούμε στον άλλο κλάδο. Συνεπώς,

$$f_2(z) = -\sqrt{R_+ R_-} e^{i(\theta_+ + \theta_-)/2}, \quad R_+, R_- > 0, \quad 0 \leq \theta_+, \theta_- < 2\pi. \quad (4.21)$$

Όσο αφορά το πεδίο ορισμού,  $\Omega_2$ , της  $f_2(z)$ , αυτό δεν είναι παρά ένα άλλο αντίγραφο του συνόλου  $\mathbb{C}_z \setminus L$ , πανομοιότυπο με το  $\Omega_1$ .

Στο Σχ. 4.3 δείχνουμε την εικόνα των ευθειών  $x = \text{σταθ.}$  και  $y = \text{σταθ.}$  του επίπεδου  $\mathbb{C}_z$  στο επίπεδο  $\mathbb{C}_w$ . Σημειώστε ότι η εικόνα  $\Omega'_1 = f_1(\Omega_1)$  της περιοχής  $\Omega_1$  αποτελείται από το ανοιχτό σύνολο που απομένει αν από το μιγαδικό επίπεδο  $\mathbb{C}_w$  αφαιρέσουμε το ευθύγραμμο τμήμα  $L'$ , το οποίο ενώνει τα σημεία  $(u, v) = (0, -1)$  και  $(u, v) = (0, 1)$ :

$$\Omega'_1 = \mathbb{C}_w \setminus L', \quad L' := \{w = u + iv \in \mathbb{C}_w : u = 0, -1 \leq v \leq 1\}. \quad (4.22)$$



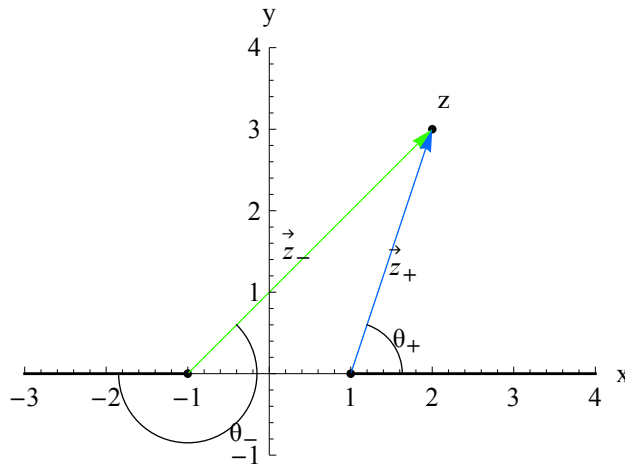
Σχ. 4.3 Η εικόνα των ευθειών  $x = \text{σταθ.}$  και  $y = \text{σταθ.}$  του επίπεδου  $\mathbb{C}_z$  στο επίπεδο  $\mathbb{C}_w$ .



Στο επόμενο σχήμα δείχνουμε μια εναλλακτική επιλογή της τομής για τη δίκλαδη συνάρτηση  $f(z) = \sqrt{z^2 - 1}$ . Τώρα, η τομή αποτελείται από δύο ημιευθείες που ξεκινάνε από τα κλαδικά σημεία  $z = -1$  και  $z = 1$  και "κατακαλύγουν" στο  $-\infty$  και  $\infty$ , αντίστοιχα:

$$\tilde{L} := \{z = x + iy \in \mathbb{C}_z : x \leq -1 \vee x \geq 1, y = 0\} \quad (4.23)$$

Θα μπορούσαμε λοιπόν να πούμε ότι, και πάλι, η τομή  $\tilde{L}$  ενώνει τα δύο κλαδικά σημεία, αλλά "μέσω του απείρου". Σε κάθε περίπτωση, αυτή η επιλογή εξαφανίζει την ασυνέχεια της  $f(z) = \sqrt{z^2 - 1}$  κατά μήκος της παλιάς τομής,  $L$ , για να τη μεταφέρει στο υπόλοιπο της πραγματικής ευθείας,  $\tilde{L}$ .



**Σχ. 4.4** Τα διανύσματα  $z_{\pm} = z \mp 1$  και η τομή που ενώνει τα σημεία  $z = \mp 1$  "μέσω του απείρου".

Όσο αφορά τους τύπους της  $f(z) = \sqrt{z^2 - 1}$  με τη νέα επιλογή της τομής, αυτοί τροποποιούνται για να γίνουν

$$f_1(z) = \sqrt{R_+ R_-} e^{i(\theta_+ + \theta_-)/2}, \quad R_+, R_- > 0, \quad 0 \leq \theta_+ < 2\pi, \quad -\pi < \theta_- \leq \pi, \quad (4.24)$$

και

$$f_2(z) = -\sqrt{R_+ R_-} e^{i(\theta_+ + \theta_-)/2}, \quad R_+, R_- > 0, \quad 0 \leq \theta_+ < 2\pi, \quad -\pi < \theta_- \leq \pi, \quad (4.25)$$

αντίστοιχα. ■

## Ασκήσεις

**4.1** Να κατασκευαστεί η αντίστροφη της συνάρτησης  $f(z) = z^3$ .

**4.2** Να κατασκευαστεί η αντίστροφη της συνάρτησης  $f(z) = z^4$ .

**4.3** Να υπολογιστούν οι τιμές και των δύο κλάδων της συνάρτησης  $f(z) = \sqrt{z}$  στα σημεία  $z_1 = 4$ ,  $z_2 = 4i$ ,  $z_3 = -4$ ,  $z_4 = -4i$  και  $z_5 = 9(1+i)$ , όταν

α) Η τομή είναι κατά μήκος του θετικού ημιάξονα  $x$ , οπότε  $z = x + iy = r e^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ .

β) Η τομή είναι κατά μήκος του αρνητικού ημιάξονα  $x$ , οπότε  $z = x + iy = r e^{i\theta}$ ,  $-\pi < \theta \leq \pi$ .

**4.4** Να υπολογιστούν οι τιμές των τριών κλάδων  $m = 0, \pm 1$ , της συνάρτησης  $f(z) = \ln z$  στα σημεία  $z_1 = e$ ,  $z_2 = ei$ ,  $z_3 = -e$ ,  $z_4 = -ei$  και  $z_5 = e(1+i)$ , όταν

α) Η τομή είναι κατά μήκος του θετικού ημιάξονα  $x$ , οπότε  $z = x + iy = r e^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ .

β) Η τομή είναι κατά μήκος του αρνητικού ημιάξονα  $x$ , οπότε  $z = x + iy = r e^{i\theta}$ ,  $-\pi < \theta \leq \pi$ .

**4.5** Να υπολογιστούν οι τιμές και των δύο κλάδων της συνάρτησης  $f(z) = \sqrt{z^2 - 1}$  στα σημεία  $z_1 = 2$ ,  $z_2 = 1+i$ ,  $z_3 = 0$ ,  $z_4 = 1-i$  και  $z_5 = -2$ , όταν

α) Η τομή του επίπεδου  $\mathbb{C}_z$  είναι αυτή του Σχ. 4.3.

β) Η τομή είναι εκείνη του Σχ. 4.4.

**4.6 α)** Να προσδιοριστούν οι κλάδοι και κατάλληλες τομές της συνάρτησης  $f(z) = \sqrt{z^2 + 1}$ .

β) Να υπολογιστούν οι τιμές της παραπάνω συνάρτησης στα σημεία  $z_1 = 1$ ,  $z_2 = 1+2i$ ,  $z_3 = 2i$ ,  $z_4 = -1+2i$ ,  $z_5 = -1$  και  $z_6 = 0$ .

## 5. Cauchy-ολογία

Είναι καιρός να εξετάσουμε την αντίστροφη έννοια της παραγώγου μιας μιγαδικής συνάρτησης, αυτή του ολοκληρώματος. Γι' άλλη μια φορά, το γεγονός ότι μια μιγαδική συνάρτηση,  $f(z)$ , αποτελεί στην ουσία ένα ζευγάρι πραγματικών συναρτήσεων δύο πραγματικών μεταβλητών, υποδείχνει ότι, με κάποιο τρόπο, πρέπει να μειώσουμε τις ανεξάρτητες μεταβλητές από δύο σε μία. Αυτός ο στόχος επιτυγχάνεται μέσω της έννοιας της καμπύλης του μιγαδικού επίπεδου  $\mathbb{C}_z$ .

Ας υποθέσουμε, αρχικά, ότι οι συναρτήσεις  $\gamma_1(t)$  και  $\gamma_2(t)$  έχουν ως κοινό πεδίο ορισμού κάποιο διάστημα  $I$  της πραγματικής ευθείας και είναι συνεχείς. Τότε η απεικόνιση  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  που ορίζεται από τον τύπο

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \equiv \gamma_1(t) \mathbf{e}_x + \gamma_2(t) \mathbf{e}_y, \quad t \in I, \quad (5.1)$$

ονομάζεται (*παραμετρική*) *καμπύλη του  $\mathbb{R}^2$* . Θυμίζουμε ότι

$$\mathbf{e}_x := (1, 0), \quad \mathbf{e}_y := (0, 1). \quad (5.2)$$

Συχνά, γίνεται διάκριση ανάμεσα στη συνάρτηση  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  και την εικόνα,  $\Gamma = \gamma(I)$ , του διαστήματος  $I$  στο Ευκλείδειο επίπεδο,  $\mathbb{R}^2$ . Πιο συγκεκριμένα, το σύνολο

$$\Gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \gamma_1(t), y = \gamma_2(t), t \in I\} \quad (5.3)$$

αναφέρεται ως *ίχνος της καμπύλης  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$* .

Ο βασικός λόγος αυτής της διάκρισης είναι ότι, τις περισσότερες φορές, η απεικόνιση  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  δεν είναι 1-1. Για παράδειγμα, η

$$\gamma(t) = \cos t \mathbf{e}_x + \sin t \mathbf{e}_y, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (5.4)$$

απεικονίζει την πραγματική ευθεία στον μοναδιαίο κύκλο  $x^2 + y^2 = 1$  του  $\mathbb{R}^2$ . Λόγω της περιοδικότητας των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, κάθε σημείο του κύκλου  $x^2 + y^2 = 1$  αντιστοιχεί σ' ένα άπειρο πλήθος διαφορετικών τιμών της παραμέτρου  $t$ , που διαφέρουν μεταξύ τους κατά ένα ακέραιο πολλαπλάσιο του  $2\pi$ .

Για ευκολία, εμείς θα χρησιμοποιούμε τον όρο καμπύλη αδιακρίτως, τόσο για τη συνάρτηση  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  όσο και για το ίχνος της.

Ωστόσο, είναι σημαντικό να διακρίνουμε κάποια ιδιαίτερα χαρακτηριστικά των παραμετρικών καμπυλών. Για το σκοπό αυτό, χρησιμοποιούμε μια σειρά από όρους. Για παράδειγμα, μια παραμετρική καμπύλη  $\Gamma$  που ορίζεται από τη διανυσματική συνάρτηση  $\gamma(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , λέγεται *κλειστή* αν  $\gamma(a) = \gamma(b)$  και *ανοιχτή* όταν  $\gamma(a) \neq \gamma(b)$ . Και στις δυο αυτές περιπτώσεις, μπορεί να υπάρχουν ενδιάμεσες τιμές της παραμέτρου  $t$ , στις οποίες η συνάρτηση  $\gamma(t)$  επανέρχεται στην ίδια τιμή. Αν κάτι τέτοιο δεν συμβαίνει, τότε λέμε ότι η  $\Gamma$  είναι *απλή καμπύλη*.

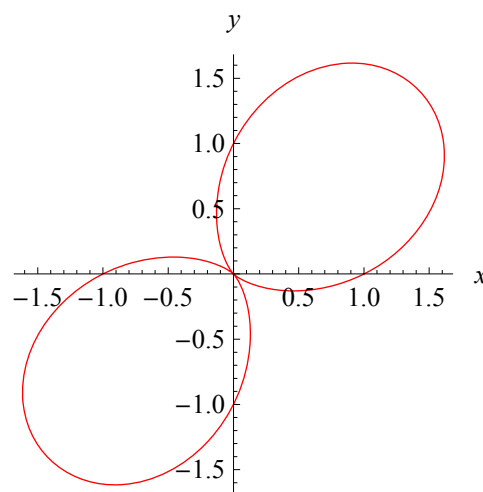
### Παράδειγμα 5.1

(i) Αν περιορίσουμε την παράμετρο  $t$  στο διάστημα  $I_1 = [0, \pi]$ , τότε η παραμετρική καμπύλη που ορίζεται στην (5.4) είναι απλή και ανοιχτή. Αν περιορίσουμε το  $t$  στο διάστημα  $I_2 = [0, 2\pi]$ , τότε η καμπύλη είναι απλή και κλειστή. Προφανώς, τα ίχνη,  $\Gamma_1 = \gamma(I_1)$  και  $\Gamma_2 = \gamma(I_2)$ , αυτών των παραμετρικών καμπυλών είναι, αντίστοιχα, ένα ημικύκλιο κι ένας ολόκληρος κύκλος μοναδιαίας ακτίνας.

(ii) Η παραμετρική καμπύλη

$$\gamma(t) = (1 + \sin 2t) (\cos t \mathbf{e}_x + \sin t \mathbf{e}_y), \quad t \in [0, 2\pi], \quad (5.5)$$

είναι κλειστή, αφού  $\gamma(0) = \gamma(2\pi) = \mathbf{e}_x$ , όχι όμως και απλή. Αυτό φαίνεται καθαρά από το ίχνος της,  $\Gamma = \gamma([0, 2\pi])$  που δείχνουμε στο Σχ. 5.1.



Σχ. 5.1 Το ίχνος,  $\Gamma$ , της παραμετρικής καμπύλης που ορίζεται στην (5.5).

Σημειώστε, επίσης, ότι κάθε παραμετρική καμπύλη θεωρείται **προσανατολισμένη**. Ως **θετική κατεύθυνση** πάνω στην καμπύλη θεωρείται, συμβατικά, αυτή που αντιστοιχεί στην αύξηση των τιμών της παραμέτρου. Ωστόσο, πάντα μπορούμε ν' αντιστρέψουμε τον προσανατολισμό μιας καμπύλης, μέσω της αντικατάστασης  $t \rightarrow -t$ . Προφανώς, οι παραμετρικές καμπύλες  $\gamma(t)$  και  $\gamma(-t)$  έχουν το ίδιο ίχνος. Γενικότερα, αν  $\gamma_1(t)$ ,  $t \in I_1$ , και  $\gamma_2(\tau)$ ,  $\tau \in I_2$ , είναι δύο παραμετρικές καμπύλες, με ίχνη  $\Gamma_1 = \gamma_1(I_1)$  και  $\Gamma_2 = \gamma_2(I_2)$ , αντίστοιχα, και  $t = f(\tau)$ , όπου  $f(\tau)$  μια διαφορίσιμη συνάρτηση της οποίας η παράγωγος είναι μη μηδενική σε όλα τα σημεία του  $I_2$ , τότε  $\Gamma_1 = \Gamma_2$ .

Ένα σημαντικό τοπολογικό αποτέλεσμα, το οποίο οφείλουμε στον Emile Jordan, είναι αυτό που γενικεύει την εικόνα που έχουμε για τον μοναδιαίο κύκλο του προηγούμενου παραδείγματος.

#### Λήμμα 5.1 (Θεώρημα Jordan)

Κάθε απλή κλειστή καμπύλη,  $\Gamma$ , χωρίζει το επίπεδο σε δύο ζένες μεταξύ τους περιοχές που έχουν την  $\Gamma$  ως κοινό σύνορο. Η μία από αυτές, την οποία θα συμβολίζουμε με  $\Omega_+$ , είναι φραγμένη και,

συμβατικά, λέγεται **εσωτερικό της  $\Gamma$** , ενώ η δεύτερη,  $\Omega_-$ , είναι μη φραγμένη και ονομάζεται **εξωτερικό της  $\Gamma$** .

**Παρατήρηση.** (i) Η παράμετρος που υπεισέρχεται στον ορισμό της καμπύλης  $\Gamma$  μπορεί να επιλεγεί με τρόπο ώστε, καθώς κινούμαστε προς την θετική κατεύθυνση της  $\Gamma$ , η φραγμένη περιοχή  $\Omega_+$  να βρίσκεται στα αριστερά μας. (ii) Το θεώρημα του Jordan για τις απλές κλειστές καμπύλες θα το χρησιμοποιήσουμε συχνά στα επόμενα, χωρίς να το αναφέρουμε ρητά. Όσο αφορά την απόδειξή του, αυτή ξεφεύγει από το πλαίσιο αυτού του βοηθήματος, οπότε ο αναγνώστης θα πρέπει να την αναζητήσει στη σχετική βιβλιογραφία. (iii) Μια απλή κλειστή καμπύλη του  $\mathbb{R}^2$  λέγεται και **βρόχος**.

Η έννοια της απλής κλειστής καμπύλης (βρόχου) χρησιμεύει και στον ορισμό κάποιων τοπολογικών χαρακτηριστικών υποσύνολων του Ευκλείδειου επίπεδου. Για παράδειγμα, μια περιοχή  $\Omega$  του  $\mathbb{R}^2$  λέγεται **απλά συνεκτική** (simply connected) αν το εσωτερικό κάθε απλής κλειστής καμπύλης της  $\Omega$  περιέχεται στην  $\Omega$ . Διαφορετικά η περιοχή ονομάζεται **πολλαπλά συνεκτική** (multiply connected).

### Παράδειγμα 5.2

(i) Ολόκληρος ο  $\mathbb{R}^2$  αποτελεί μια απλά συνεκτική περιοχή. Το ανοιχτό υποσύνολο  $\Omega$  που απομένει, όταν από τον  $\mathbb{R}^2$  αφαιρέσουμε ένα σημείο είναι πολλαπλά συνεκτικό.

(ii) Το εσωτερικό ενός ανοιχτού δίσκου αποτελεί απλά συνεκτική περιοχή. Αν του αφαιρέσουμε κάποιο σημείο, καταλήγουμε σε πολλαπλά συνεκτική περιοχή.

(iii) Κάθε **ανοιχτός δακτύλιος**, δηλαδή κάθε υποσύνολο του  $\mathbb{R}^2$  της μορφής

$$\Delta_{r,R}(a, b) := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : r < [(x-a)^2 + (y-b)^2]^{1/2} < R \right\}, \quad (5.6)$$

είναι μια πολλαπλά συνεκτική περιοχή.

Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι οι συναρτήσεις  $\gamma_1(t)$  και  $\gamma_2(t)$  είναι διαφορίσιμες. Τότε, για κάθε  $t \in I$ , ορίζεται το διάνυσμα

$$\boldsymbol{\gamma}'(t) = \gamma_1'(t) \mathbf{e}_x + \gamma_2'(t) \mathbf{e}_y, \quad (5.7)$$

που λέγεται **εφαπτόμενο διάνυσμα της  $\Gamma$ , στο σημείο  $\boldsymbol{\gamma}(t)$** . Όταν οι  $\gamma_1(t)$  και  $\gamma_2(t)$  είναι συνεχώς διαφορίσιμες και το  $\boldsymbol{\gamma}'(t)$  δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο της  $\Gamma$ , η καμπύλη αναφέρεται ως **ομαλή**. Προφανώς, η συνθήκη ότι το  $\boldsymbol{\gamma}'(t) \neq \mathbf{0}$  για κάθε  $t \in I$  είναι ισοδύναμη με την

$$|\boldsymbol{\gamma}'(t)| := \sqrt{[\gamma_1'(t)]^2 + [\gamma_2'(t)]^2} \neq 0, \quad \forall t \in I. \quad (5.8)$$

Η καμπύλη  $\Gamma$  χαρακτηρίζεται ως **τμηματικά ομαλή**, αν κάθε φραγμένο διάστημα  $[a, b] \subset I$  μπορεί να διαμεριστεί σε ένα πεπερασμένο πλήθος διαδοχικών υποδιαστημάτων, της μορφής  $[a, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_n, b]$ , σε καθένα από τα οποία η  $\Gamma$  είναι ομαλή.

Προφανώς, όταν η  $\Gamma$  είναι τμηματικά ομαλή, τότε το ολοκλήρωμα

$$L_{[a,b]} := \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{[\gamma_1'(t)]^2 + [\gamma_2'(t)]^2} dt. \quad (5.9)$$

συγκλίνει σε κάθε φραγμένο διάστημα  $[a, b] \subset I$  και δίνει αυτό που ονομάζουμε **μήκος του τμήματος**  $\Gamma_{[a,b]} := \gamma([a, b])$  της  $\Gamma$ .

Ας υποθέσουμε, τώρα οι συναρτήσεις  $A(x, y)$  και  $B(x, y)$  έχουν ως πεδίο ορισμού το ανοιχτό υποσύνολο  $\Omega$  του  $\mathbb{R}^2$ , το οποίο καλύπτει την ομαλή καμπύλη  $\Gamma$ . Τότε, σε κάθε σημείο της  $\Gamma$ , το διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{V}(x, y) := A(x, y) \mathbf{e}_x + B(x, y) \mathbf{e}_y, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (5.10)$$

ανάγεται στο διάνυσμα

$$\mathbf{v}(t) = A(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \mathbf{e}_x + B(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \mathbf{e}_y, \quad t \in I. \quad (5.11)$$

Προφανώς, όταν οι συναρτήσεις  $A(x, y)$  και  $B(x, y)$  είναι συνεχείς, τότε και οι συνιστώσες του  $\mathbf{v}(t)$  είναι συνεχείς συναρτήσεις του  $t$ . Σ' αυτή τη περίπτωση, η συνάρτηση

$$\mathbf{v}(t) \cdot \gamma'(t) = A(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \gamma_1'(t) + B(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \gamma_2'(t), \quad t \in I, \quad (5.12)$$

είναι συνεχής, οπότε το ολοκλήρωμα

$$\int_a^b \mathbf{v}(t) \cdot \gamma'(t) dt \quad (5.13)$$

υπάρχει.

Συνήθως, το παραπάνω ολοκλήρωμα γράφεται στη μορφή

$$\int_{\Gamma} A(x, y) dx + B(x, y) dy \quad (5.14)$$

και ονομάζεται **επικαμπύλιο ολοκλήρωμα**. Με άλλα λόγια,

$$\int_{\Gamma} A(x, y) dx + B(x, y) dy := \int_a^b \mathbf{v}(t) \cdot \gamma'(t) dt. \quad (5.15)$$

Δηλαδή, η έκφραση (5.14) είναι απλώς μια **συντομογραφία**. Δεν έχει νόημα από μόνη της και, όταν τη γράφουμε, υπονοείται ότι, το  $(x, y)$  συμβολίζει ένα ζευγάρι συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής.

Συχνά, για λόγους ευκολίας, το σύμβολο με το οποίο δηλώνονται οι συντεταγμένες του  $\mathbb{R}^2$  χρησιμοποιείται και για τις συναρτήσεις που ορίζουν την καμπύλη  $\Gamma$ . Αυτό σημαίνει ότι

$$(x, y) := (x(t), y(t)), \quad (5.16)$$

οπότε,

$$dx := x'(t) dt, \quad dy := y'(t) dt. \quad (5.17)$$

Σ' αυτή την περίπτωση,

$$\int_{\Gamma} A(x, y) dx + B(x, y) dy := \int_a^b [A(x(t), y(t)) x'(t) + B(x(t), y(t)) y'(t)] dt. \quad (5.18)$$

Η αντιστοιχία του  $\mathbb{R}^2$  προς το μιγαδικό επίπεδο  $\mathbb{C}_z$  μας επιτρέπει να μεταφέρουμε την έννοια του επικαμύλιου ολοκληρώματος στις μιγαδικές συναρτήσεις. Πρώτ' απ' όλα, το γεγονός ότι κάθε στοιχείο  $z$  του  $\mathbb{C}_z$  γράφεται στη μορφή  $z = x + iy$ , όπου  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , συνεπάγεται αμέσως το εξής: Κάθε παραμετρική καμπύλη  $(x, y) = (x(t), y(t))$  του  $\mathbb{R}^2$  ορίζει ένα υποσύνολο του  $\mathbb{C}_z$ , το οποίο περιγράφεται από τη σχέση  $z = z(t)$ , όπου

$$z(t) = x(t) + iy(t), \quad t \in I. \quad (5.19)$$

Αυτό το υποσύνολο θα το ονομάζουμε *παραμετρική καμπύλη του  $\mathbb{C}_z$*  και θα το συμβολίζουμε όπως το αντίστοιχό του στον  $\mathbb{R}^2$ .

Επιπλέον, η σύμβαση που χρησιμοποιούμε για ένα επικαμύλιο ολοκλήρωμα στον  $\mathbb{R}^2$  εξηγεί αμέσως και το νόημα της έκφρασης  $\int_{\Gamma} f(z) dz$ , όπου  $f(z)$  μια μιγαδική συνάρτηση. Πιο συγκεκριμένα, από το γεγονός ότι η  $f(z)$  γράφεται πάντα στη μορφή

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (5.20)$$

αμέσως έπεται ότι

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(z) dz &\equiv \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt \\ &:= \int_a^b [u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))] (x'(t) + iy'(t)) dt. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Άρα,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(z) dz &:= \int_a^b [u(x(t), y(t)) x'(t) - v(x(t), y(t)) y'(t)] dt \\ &\quad + i \int_a^b [v(x(t), y(t)) x'(t) + u(x(t), y(t)) y'(t)] dt. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Ισοδύναμα,

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_a^b R(t) dt + i \int_a^b I(t) dt, \quad (5.23)$$

όπου,

$$R(t) := \operatorname{Re}[f(z(t)) z'(t)], \quad I(t) := \operatorname{Im}[f(z(t)) z'(t)]. \quad (5.24)$$

Αυτό δείχνει καθαρά ότι, το *επικαμύλιο ολοκλήρωμα μιας μιγαδικής συνάρτησης*,  $\int_{\Gamma} f(z) dz$ , ανάγεται σε δύο συνηθισμένα πραγματικά ολοκληρώματα.

Από αυτή την παρατήρηση συνάγονται αμέσως δύο βασικά συμπεράσματα:

### Θεώρημα 5.1

Αν η  $f(z)$  είναι συνεχής σε μια περιοχή  $\Omega$  που καλύπτει την (τμηματικά) ομαλή καμπύλη  $\Gamma$ , τότε

το ολοκλήρωμα  $\int_{\Gamma} f(z) dz$  υπάρχει και

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq M L, \quad (5.25)$$

όπου  $L$  το μήκος της καμπύλης  $\Gamma$  και

$$M := \max_{z \in \Gamma} |f(z)|. \quad (5.26)$$

### Απόδειξη

Αφού η  $f(z)$  είναι συνεχής και οι συναρτήσεις  $x(t)$ ,  $y(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , συνεχώς διαφορίσιμες, οι πραγματικές συναρτήσεις  $R(t)$  και  $I(t)$  στη σχέση (5.23) είναι συνεχείς. Συνεπώς και τα δύο ολοκληρώματα στο δεξί μέλος της (5.23) υπάρχουν (συγκλίνουν).

Από την άλλη, οι πραγματικές συναρτήσεις  $\operatorname{Re}[f(z(t))]$  και  $\operatorname{Im}[f(z(t))]$  είναι συνεχείς στο κλειστό και φραγμένο διάστημα  $[a, b]$  της πραγματικής ευθείας. Συνεπώς, το ίδιο ισχύει και για την  $|f(z(t))|$ . Άρα, υπάρχει σημείο  $t_0 \in [a, b]$  στο οποίο η  $|f(z(t))|$  παίρνει τη μέγιστη τιμή της,  $M$ . Ισοδύναμα, η  $|f(z)|$  παίρνει τη μέγιστη τιμή της,  $M$ , σε κάποιο σημείο της καμπύλης  $\Gamma$ . Κατά συνέπεια,

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \equiv \left| \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(z(t)) z'(t)| dt \quad (5.27)$$

$$\leq M \int_a^b |z'(t)| dt = M \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt = M L. \quad (5.28)$$

■

### Παράδειγμα 5.3

(i) Θεωρούμε την καμπύλη  $\Gamma$  που ορίζεται από τον τύπο

$$z(t) = \begin{cases} t, & -2 \leq t \leq -1 \\ \cos \pi t + i \sin \pi t, & -1 \leq t \leq 0 \end{cases}$$

Αν  $f(z) = z$ , τότε

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(z) dz &= \int_{\Gamma} z dz \equiv \int_{-2}^{-1} f(z(t)) z'(t) dt + \int_{-1}^0 f(z(t)) z'(t) dt = \\ &= \int_{-2}^{-1} t dt + \int_{-1}^0 (\cos \pi t + i \sin \pi t) (-\pi \sin \pi t + i \pi \cos \pi t) dt = \\ &= \int_{-2}^{-1} t dt + \pi \int_{-1}^0 (-\sin 2\pi t + i \cos 2\pi t) dt = \frac{1}{4} + 0 = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

(ii) Ας ονομάσουμε  $C_{r, \Delta\theta}$  το τόξο με γωνιακό άνοιγμα  $\Delta\theta$  ενός κύκλου ακτίνας  $r$  με κέντρο το σημείο  $z = 0$ . Παραμετρικά, το  $C_{r, \Delta\theta}$  ορίζεται από τη σχέση

$$z(\theta) = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r e^{i\theta}, \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2,$$

όπου  $\theta_2 - \theta_1 = \Delta\theta$ , με  $0 < \Delta\theta \leq 2\pi$ .



Το ολοκλήρωμα της συνάρτησης  $f(z) = z^{-1}$  κατά μήκος του τόξου  $C_{r,\Delta\theta}$  είναι ίσο με

$$\int_{C_{r,\Delta\theta}} \frac{1}{z} dz \equiv \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{r e^{i\theta}} r e^{i\theta} i d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} i d\theta = i \Delta\theta. \quad (5.29)$$

■

Ας υποθέσουμε τώρα ότι τα σημεία  $z_1, z_2$  ανήκουν στην περιοχή  $\Omega$  του μιγαδικού επιπέδου  $\mathbb{C}_z$ , η οποία αποτελεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f(z)$ . Τότε η έκφραση

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz, \quad (5.30)$$

που συχνά χρησιμοποιούμε στην πραγματική ανάλυση και ονομάζουμε ορισμένο ολοκλήρωμα δεν έχει, γενικά, κανένα απολύτως νόημα. Γι' αυτό, την χρησιμοποιούμε στη μιγαδική ανάλυση μόνο κάτω από τις εξής προϋποθέσεις:

- (i) Όταν έχουμε εκ των προτέρων δηλώσει ότι αποτελεί συντομογραφία για το ολοκλήρωμα της  $f(z)$  κατά μήκος μιας συγκεκριμένης παραμετρικής καμπύλης  $z = z(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ , που συνδέει το σημείο  $z_1 = z(a)$  με το  $z_2 = z(b)$ .
- (ii) Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της  $f(z)$  είναι το ίδιο για όλες ανεξαιρέτως τις καμπύλες της περιοχής  $\Omega$ , οι οποίες συνδέουν τα σημεία  $z_1$  και  $z_2$ .

Το επόμενο θεώρημα περιγράφει ένα πολύ σημαντικό αποτέλεσμα που στηρίζεται στην προϋπόθεση (ii). Το σύμβολο  $\oint_{\Gamma} f(z) dz$  που εμφανίζεται στη διατύπωσή του χρησιμοποιείται για να τονίσουμε ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα αφορά μια κλειστή καμπύλη. Στα επόμενα, θα χρησιμοποιούμε συχνά και τα σύμβολα

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz, \quad \oint_{\Gamma} f(z) dz.$$

Το πρώτο σημαίνει ότι η επικαμπύλια ολοκλήρωση γίνεται στη θετική κατεύθυνση μιας κλειστής καμπύλης Jordan, δηλαδή αυτή που αφήνει το εσωτερικό της καμπύλης στα αριστερά μας. Το δεύτερο δηλώνει πως η ολοκλήρωση γίνεται ακολουθώντας την αρνητική κατεύθυνση της καμπύλης, ή την φορά των δειχτών ενός ρολογιού.

## Θεώρημα 5.2

Υποθέτουμε ότι η  $f(z)$  είναι συνεχής στην περιοχή (ανοιχτό και συνενκτικό υποσύνολο)  $\Omega$  του  $\mathbb{C}_z$ . Τότε, υπάρχει ολομορφική συνάρτηση  $F(z)$ , τέτοια που  $F'(z) = f(z)$ , εάν και μόνο όταν

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0, \quad (5.31)$$

για κάθε κλειστή (τμηματικά) ομαλή καμπύλη  $\Gamma$  που περιέχεται στην  $\Omega$ .

### Απόδειξη

Για να δείξουμε την αναγκαιότητα της συνθήκης (5.31), υποθέτουμε ότι υπάρχει ολομορφική συνάρτηση  $F(z)$ , τέτοια που  $F'(z) = f(z)$ ,  $\forall z \in \Omega$ . Στη συνέχεια, θεωρούμε μια τυχαία κλειστή

καμπύλη  $\Gamma \subset \Omega$ , η οποία περιγράφεται από τη σχέση  $z = z(t)$ ,  $t \in [a, b]$ .

Κατά μήκος της  $\Gamma$ , η  $F(z)$  ανάγεται στη συνάρτηση  $G(t) = F(z(t))$ . Η  $G(t)$ , που γράφεται στη μορφή

$$G(t) = R(t) + iI(t), \quad t \in [a, b], \quad (5.32)$$

είναι συνεχώς διαφορίσιμη. Επιπλέον,  $G(b) = G(a)$ , γιατί η  $\Gamma$  είναι κλειστή, πράγμα που σημαίνει ότι  $z(b) = z(a)$ .

Από τον κανόνα της αλυσίδας αμέσως έπεται ότι

$$G'(t) = F'(z(t)) z'(t). \quad (5.33)$$

Άρα,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(z) dz &= \int_{\Gamma} F'(z) dz = \int_a^b F'(z(t)) z'(t) dt = \int_a^b G'(t) dt \\ &= \int_a^b R'(t) dt + i \int_a^b I'(t) dt = [R(b) - R(a)] + i[I(b) - I(a)] = G(b) - G(a) = 0. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Για ν' αποδείξουμε την επάρκεια της συνθήκης (5.31), επιλέγουμε ένα συγκεκριμένο σημείο  $z_0$  της περιοχής  $\Omega$  και, μέσα στην  $\Omega$ , κατασκευάζουμε μια ομαλή καμπύλη  $\Gamma_1$ , η οποία ξεκινάει από το  $z_0$  και καταλήγει στο τυχαίο σημείο  $z$ .

Στη συνέχεια, ορίζουμε την ποσότητα  $F(z)$

$$F(z) := \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta \equiv \int_{\Gamma_1} f(z) dz. \quad (5.35)$$

Θα δείξουμε ότι αυτή η ποσότητα εξαρτιέται τελικά μόνο από  $z$  και, άρα, η  $F(z)$  είναι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ολόκληρη την περιοχή  $\Omega$ . Για το σκοπό αυτό, θεωρούμε μια δεύτερη καμπύλη, την  $\Gamma_2$ , η οποία ξεκινάει από το  $z$  και καταλήγει στο  $z_0$ . Προφανώς, η ένωση των  $\Gamma_1$  και  $\Gamma_2$  αποτελεί μια τμηματικά ομαλή κλειστή καμπύλη που περιέχεται στην  $\Omega$ .

Σύμφωνα με την υπόθεση,

$$\int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz + \int_{\Gamma_2} f(z) dz = 0, \quad (5.36)$$

Όμως,

$$\int_{\Gamma_2} f(z) dz = - \int_{-\Gamma_2} f(z) dz \equiv \int_{\tilde{\Gamma}_2} f(z) dz, \quad (5.37)$$

όπου με  $\tilde{\Gamma}_2 := -\Gamma_2$  εννοούμε την καμπύλη που διαφέρει από  $\Gamma_2$  μόνο ως προς τον προσανατολισμό. Από τις δυο τελευταίες σχέσεις αμέσως έπεται ότι

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz = \int_{\tilde{\Gamma}_2} f(z) dz. \quad (5.38)$$

Αλλά, από την κατασκευή τους, οι  $\Gamma_1$  και  $\tilde{\Gamma}_2$  είναι δυο τυχαίες ομαλές καμπύλες της  $\Omega$ , με μόνο κοινό χαρακτηριστικό ότι έχουν ως αφετηρία το σημείο  $z_0$  και τέρμα το  $z$ . Άρα, η (5.37) σημαίνει ότι η  $F(z)$  της (5.34), την οποία ορίσαμε χρησιμοποιώντας τη συγκεκριμένη καμπύλη  $\Gamma_1$ , δεν εξαρτιέται τελικά από τον δρόμο που οδηγεί από το (σταθερό) σημείο  $z_0$  στο (μεταβλητό)  $z$ .

Μένει να δείξουμε ότι η  $F(z)$  είναι διαφορίσιμη και ότι  $F'(z) = f(z)$ ,  $\forall z \in \Omega$ . Για το σκοπό αυτό, θυμίζουμε ότι η  $\Omega$  είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του  $\mathbb{C}_z$ . Άρα, για οποιοδήποτε  $z \in \Omega$ , υπάρχει ανοιχτός δίσκος,  $D_r(z)$ , ο οποίος περιέχεται στην  $\Omega$ . Θεωρούμε, λοιπόν, έναν τέτοιο δίσκο και το τυχαίο σημείο του,  $z_1 = z + h$ , όπου  $h \neq 0$ . Τότε,

$$F(z_1) = \int_{z_0}^{z_1} f(\zeta) d\zeta, \quad (5.39)$$

όπου η ολοκλήρωση γίνεται κατά μήκος μιας καμπύλης  $\Gamma_3$  της  $\Omega$  που ξεκινάει από το  $z_0$  και καταλήγει στο  $z_1$ . Έχοντας αποδείξει ότι το τελικό αποτέλεσμα δεν εξαρτιέται από τη μορφή της καμπύλης, επιλέγουμε ως  $\Gamma_3$  την ένωση της  $\Gamma_1$  με το ευθύγραμμο τμήμα,  $[z, z_1]$ , που οδηγεί από το  $z$  στο  $z_1$ . Τώρα, λοιπόν,

$$F(z_1) = \int_{\Gamma_1 \cup [z, z_1]} f(\zeta) d\zeta = \int_{\Gamma_1} f(\zeta) d\zeta + \int_{[z, z_1]} f(\zeta) d\zeta. \quad (5.40)$$

Συνεπώς,

$$F(z_1) - F(z) = \int_{[z, z_1]} f(\zeta) d\zeta. \quad (5.41)$$

Από την άλλη, ευθύγραμμο τμήμα  $[z, z_1]$  μπορεί να παρασταθεί παραμετρικά με τον ακόλουθο τρόπο:  $z(t) = z + th$ ,  $t \in [0, 1]$ . Άρα,

$$\int_{[z, z_1]} 1 d\zeta = \int_0^1 z'(t) dt = h \int_0^1 dt = h. \quad (5.42)$$

Συνακόλουθα,

$$f(z) = f(z) \frac{1}{h} \int_{[z, z_1]} 1 d\zeta = \frac{1}{h} \int_{[z, z_1]} f(\zeta) d\zeta. \quad (5.43)$$

Από τα προηγούμενα αποτελέσματα αμέσως έπεται ότι

$$\frac{F(z_1) - F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h} \int_{[z, z_1]} [f(\zeta) - f(z)] d\zeta. \quad (5.44)$$

Άρα,

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_{[z, z+h]} [f(\zeta) - f(z)] d\zeta \right| \quad (5.45)$$

$$\leq \frac{1}{|h|} \int_{[z, z+h]} |f(\zeta) - f(z)| |d\zeta| = \frac{1}{|h|} M |h| = M, \quad (5.46)$$

όπου

$$M := \max_{\zeta \in [z, z+h]} |f(\zeta) - f(z)|. \quad (5.47)$$

Όμως, η  $f(z)$  είναι συνεχής. Άρα, το  $M \rightarrow 0$  καθώς το  $h \rightarrow 0$ . Συνεπώς,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z), \quad (5.48)$$

πράγμα που σημαίνει ότι η παράγωγος της  $F(z)$  υπάρχει και είναι ίση προς τη δοσμένη  $f(z)$ . ■

**Παρατήρηση.** Όπως και στην πραγματική ανάλυση, μια διαφορίσιμη συνάρτηση  $F(z)$ , της οποίας η παράγωγος είναι ίση προς δοσμένη συνάρτηση  $f(z)$ , λέγεται **αόριστο ολοκλήρωμα ή παράγουσα της  $f(z)$** . Συνεπώς, το αποτέλεσμα που μόλις αποδείξαμε είναι το ακριβές ανάλογο του θεμελιώδους θεωρήματος της πραγματικής ανάλυσης. Γιατί, μας λέει ουσιαστικά ότι, κάθε συνεχής συνάρτηση  $f(z)$  έχει μία τουλάχιστον παράγουσα, αυτή που δίνεται από το "ορισμένο ολοκλήρωμα"

$$F(z) := \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta. \quad (5.49)$$

Στην πραγματικότητα, αυτός ο τύπος οδηγεί αμέσως σε άπειρες σε πλήθος παράγουσες, αφού κάθε συνάρτηση της μορφής

$$F(z) := \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta + c, \quad (5.50)$$

όπου  $c$  τυχαία μιγαδική σταθερή, έχει ως παράγωγο την  $f(z)$ . Σημειώστε, τέλος, ότι από την (5.49) έπεται ότι  $F(z_0) = c$ . Άρα, η (5.49) γράφεται και στη μορφή

$$F(z) = F(z_0) + \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta. \quad (5.51)$$

■  
Όπως τονίσαμε, το κύριο αποτέλεσμα του προηγούμενου θεωρήματος έχει ως προϋπόθεση τον μηδενισμό των επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων για κάθε βρόχο που περιέχεται στην περιοχή  $\Omega$ . Άρα, το Θεώρ. 5.2 δεν είναι και πολύ χρήσιμο από πρακτική άποψη, όσο δεν έχουμε στη διάθεσή μας ένα απλό κριτήριο, που θα μας δείχνει αμέσως ότι η βασική προϋπόθεση ικανοποιείται. Το επόμενο θεώρημα παρέχει ένα τέτοιο κριτήριο και, γι' αυτόν τουλάχιστο το λόγο, μπορεί να χαρακτηριστεί ως το σημαντικότερο θεώρημα της μιγαδικής ανάλυσης.

### Θεώρημα 5.3 (Ολοκληρωτικό θεώρημα του Cauchy)

Αν η συνάρτηση  $f(z)$  είναι ολομορφική στην απλά συνεκτική περιοχή  $\Omega$  του  $\mathbb{C}_z$ , τότε

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0, \quad (5.52)$$

για οποιαδήποτε απλή κλειστή καμπύλη  $\Gamma$  της  $\Omega$ .

### Απόδειξη

Η απόδειξη αυτού του θεμελιακού αποτελέσματος στη γενική περίπτωση είναι αρκετά περίπλοκη. Γι' αυτό, εδώ θα περιοριστούμε στο να αποδείξουμε την ισχύ του κάτω από αυστηρότερες προϋποθέσεις.

Πιο συγκεκριμένα, θα υποθέσουμε ότι η  $\Gamma$  είναι τμηματικά ομαλή και πως ορίζεται από την σχέση  $z(s) = x(s) + i y(s)$ ,  $s \in [a, b]$ , όπου  $s$  η παράμετρος μήκους τόξου. Αυτό σημαίνει ότι το μέτρο  $|\gamma'(s)|$  του εφαπτόμενου διανύσματος  $\gamma'(s) = x'(s) \mathbf{e}_x + y'(s) \mathbf{e}_y$  της αντίστοιχης καμπύλης  $\gamma(s) = x(s) \mathbf{e}_x + y(s) \mathbf{e}_y$  του  $\mathbb{R}^2$  είναι ίσο με τη μονάδα για κάθε  $s \in [a, b]$ . Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(z) dz &:= \int_{\Gamma} f(z(s)) z'(s) ds = \\ &\int_a^b [u(x(s), y(s)) x'(s) - v(x(s), y(s)) y'(s)] ds \\ &+ i \int_a^b [v(x(s), y(s)) x'(s) + u(x(s), y(s)) y'(s)] ds. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Είναι προφανές ότι το διάνυσμα

$$\mathbf{n}(s) := y'(s) \mathbf{e}_x - x'(s) \mathbf{e}_y \quad (5.54)$$

είναι κάθετο στο εφαπτόμενο διάνυσμα  $\gamma'(s)$ , σε κάθε σημείο της καμπύλης  $\Gamma$ . Από την άλλη, εύκολα επαληθεύεται ότι το  $\mathbf{n}(s)$  είναι μοναδιαίο και βλέπει προς το εξωτερικό της  $\Gamma$ .

Με την βοήθεια του  $\mathbf{n}(s)$ , η (5.53) γράφεται στη μορφή

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} \mathbf{X}(s) \cdot \mathbf{n}(s) ds + i \int_{\Gamma} \mathbf{Y}(s) \cdot \mathbf{n}(s) ds, \quad (5.55)$$

όπου

$$\mathbf{X}(x, y) := -v(x, y) \mathbf{e}_x - u(x, y) \mathbf{e}_y, \quad \mathbf{Y}(x, y) := u(x, y) \mathbf{e}_x - v(x, y) \mathbf{e}_y. \quad (5.56)$$

Τα διανυσματικά πεδία  $\mathbf{X}(x, y)$  και  $\mathbf{Y}(x, y)$  είναι τόσο ομαλά όσο και η  $f$ . Ας υποθέσουμε, λοιπόν, ότι η  $f$  είναι ολομορφική στην απλά συνεκτική περιοχή  $\Omega$  και ότι η παράγωγός της,  $f'$ , είναι συνεχής. Τότε τα  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$  είναι κλάσης  $C^1$  στην  $\Omega$  και άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα του Green. Έτσι, η (5.54) γίνεται

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(z) dz &= \int_D \nabla \cdot \mathbf{X} dx dy + i \int_D \nabla \cdot \mathbf{Y} dx dy = \\ &= - \int_D (v_x + u_y) dx dy + i \int_D (u_x - v_y) dx dy, \end{aligned} \quad (5.57)$$

όπου  $D \subset \Omega$  το εσωτερικό της καμπύλης  $\Gamma$ . Όμως, αφού η  $f$  είναι ολομορφική, οι  $u, v$

ικανοποιούν τις συνθήκες Cauchy-Riemann και άρα το τελευταίο μέλος της (5.57) μηδενίζεται. ■

**Παρατήρηση.** Το Θεώρημα Cauchy παρουσιάζεται σε ποικίλες εκδόσεις που διαφέρουν ως προς τις απαιτήσεις για την  $f$  και τη γεωμετρία της καμπύλης  $\Gamma$ . ■

Καινούργιες συναρτήσεις μιας μιγαδικής μεταβλητής ορίζονται και με την "ολοκλήρωση μιας συνάρτησης δύο μιγαδικών μεταβλητών ως προς μια από αυτές". Τα εισαγωγικά τονίζουν το γεγονός που επισημάναμε πριν λίγο, ότι δηλαδή, τα ολοκληρώματα στη μιγαδική ανάλυση είναι βασικά επικαμπύλια και μόνο κάτω από ειδικές συνθήκες αποκτάει νόημα το σύμβολο  $\int_{\Gamma} f(z) dz$  κι η αντίστοιχη έκφραση "ολοκλήρωση της  $f$  ως προς  $z$ ".

Με ανάλογο τρόπο, αν η  $f(z, \zeta)$  είναι συνάρτηση δύο μιγαδικών μεταβλητών, αν δηλαδή  $f: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , τότε το σύμβολο  $\int f(z, \zeta) d\zeta$  δεν έχει γενικά νόημα. Ας υποθέσουμε όμως ότι η  $f(z, \zeta)$  έχει ως πεδίο ορισμού το σύνολο  $S = S_z \times S_\zeta$ , όπου  $S_z, S_\zeta \subset \mathbb{C}$ , και, για κάθε  $z \in S_z$ , είναι συνεχής συνάρτηση του  $\zeta$ . Τότε για κάθε καμπύλη  $\Gamma_\zeta$  του  $S_\zeta$ , η έκφραση

$$F(z) := \int_{\Gamma_\zeta} f(z, \zeta) d\zeta, \quad z \in S_z, \quad (5.58)$$

έχει σαφές νόημα και ορίζει μια συνάρτηση  $F: S_z \rightarrow \mathbb{C}$ . Ανάλογα, αν για κάθε  $\zeta \in S_\zeta$  η  $f(z, \zeta)$  είναι συνεχής στο  $S_z$  και η  $\Gamma_z$  είναι καμπύλη που περιέχεται στο  $S_z$ , τότε ο τύπος

$$G(z) := \int_{\Gamma_z} f(z, \zeta) dz, \quad \zeta \in S_\zeta, \quad (5.59)$$

ορίζει μια συνάρτηση  $G: S_\zeta \rightarrow \mathbb{C}$ . Αν μάλιστα η  $f$  είναι συνεχής στο  $S$  τότε το ακόλουθο θεώρημα εξασφαλίζει επιπλέον ιδιότητες των  $F$  και  $G$ .

#### Θεώρημα 5.4

Αν η  $f$  της προηγούμενης παραγράφου είναι συνεχής στο  $S = S_z \times S_\zeta$ , όπου  $S_z, S_\zeta$  ανοιχτά υποσύνολα του  $\mathbb{C}$ , τότε, οι συναρτήσεις  $F$  και  $G$  είναι συνεχείς στα  $S_z$  και  $S_\zeta$ , αντίστοιχα. Επιπλέον,

$$\int_{\Gamma_z} F(z) dz = \int_{\Gamma_\zeta} F(\zeta) d\zeta,$$

που σημαίνει ότι

$$\int_{\Gamma_z} \left\{ \int_{\Gamma_\zeta} f(z, \zeta) d\zeta \right\} dz = \int_{\Gamma_\zeta} \left\{ \int_{\Gamma_z} f(z, \zeta) dz \right\} d\zeta \quad (5.60)$$

#### Απόδειξη

Το θεώρημα ανάγεται εύκολα σε γνωστά θεωρήματα της πραγματικής ανάλυσης που αφορούν ολοκληρώματα του τύπου

$$\int_0^1 A(x, y, t) dt, \int_0^1 \left\{ \int_0^1 B(s, t) dt \right\} ds, \quad (5.61)$$

όπου  $A$  συνεχής στο υποσύνολο  $\Omega_{x,y} \times [0, 1]$ , με  $\Omega_{x,y}$  ανοιχτό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^2$ , και  $B$  συνεχής στο συμπαγές υποσύνολο  $[0, 1] \times [0, 1]$  του  $\mathbb{R}^2$ .

Η αναγωγή προκύπτει θέτοντας  $z = x + iy$ ,  $\zeta = \eta + i\xi$ , οπότε

$$f(z, \zeta) = u(x, y, \eta, \zeta) + i v(x, y, \eta, \zeta).$$

Με κατάλληλη επιλογή των παραμέτρων, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι  $\Gamma_z$  και  $\Gamma_\zeta$  ορίζονται από τις σχέσεις  $z = x(s) + iy(s)$ ,  $0 \leq s \leq 1$  και  $\zeta = \eta(t) + i\xi(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , αντίστοιχα. Τότε η (5.58) γίνεται

$$\begin{aligned} F(z) &= \int_0^1 [u(x, y, t) \eta'(t) - v(x, y, t) \xi'(t)] dt + i \int_0^1 [u(x, y, t) \xi'(t) - v(x, y, t) \eta'(t)] dt \\ &= \int_0^1 A(x, y, t) dt + i \int_0^1 B(x, y, t) dt, \end{aligned}$$

όπου  $u(x, y, t) := u(x, y, \eta(t), \xi(t))$ .

Από την υπόθεση ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $S$  έπεται ότι οι  $A$  και  $B$  είναι συνεχείς στο υποσύνολο  $S_z \times [0, 1]$  του  $\mathbb{R}^3$ . Θεωρούμε το τυχαίο σημείο  $z_0 = x_0 + iy_0$  του  $S_z$  κι έναν κλειστό δίσκο  $\bar{D}_r(z_0)$  με κέντρο το  $z_0$  και ακτίνα  $r$  που περιέχεται στο  $S_z$ . Η  $A$  είναι συνεχής στο συμπαγές υποσύνολο  $K := \bar{D}_r(z_0) \times [0, 1]$  του  $\mathbb{R}^3$  και άρα ομοιόμορφα συνεχής στο  $K$ .

Αυτό σημαίνει ότι για δοσμένο  $\varepsilon > 0$  υπάρχει  $\delta > 0$ , ανεξάρτητο από το  $(x_0, y_0, t_0)$  του  $K$ , τέτοιο που, αν  $|(x, y, t) - (x_0, y_0, t_0)| < \delta$ , τότε  $|A(x, y, t) - A(x_0, y_0, t_0)| < \varepsilon$ . Συνακόλουθα,

$$\left| \int_0^1 A(x, y, t) dt - \int_0^1 A(x_0, y_0, t) dt \right| \leq \int_0^1 |A(x, y, t) - A(x_0, y_0, t)| dt < \varepsilon,$$

αν  $|(x, y) - (x_0, y_0)| < \delta$ .

Με τον ίδιο τρόπο εκτιμάμε την ποσότητα  $\left| \int_0^1 G(x, y, t) dt - \int_0^1 G(x_0, y_0, t) dt \right|$  για να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι

$$|F(z) - F(z_0)| < \varepsilon \text{ αν } |z - z_0| < \delta(\varepsilon).$$

Αυτό σημαίνει ότι η  $F$  είναι συνεχής στο τυχαίο σημείο  $z_0$  της περιοχής  $S_z$  και άρα σε όλη την  $S_z$ .

Το δεύτερο συμπέρασμα του θεωρήματος αφήνεται στον αναγνώστη για άσκηση. ■

Επιβάλλοντας ορισμένες επιπλέον συνθήκες στην  $f(z, \zeta)$  του προηγούμενου θεωρήματος οδηγούμαστε σε πολύτιμα για τα επόμενα αποτελέσματα:

**Θεώρημα 5.5** (Κανόνας του Leibnitz)

Θεωρούμε ένα τόξο ή βρόχο  $\Gamma$  και τη συνάρτηση  $f : \Omega \times \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ , όπου  $\Omega := \mathbb{C} \setminus \Gamma$ . Αν η  $f$  είναι συνεχής (στο  $\Omega \times \Gamma$ ) και το ίδιο ισχύει και για την  $f_z : \Omega \times \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ , όπου

$$f_z(z, \zeta) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h, \zeta) - f(z, \zeta)}{h}, \quad z \in \Omega, \zeta \in \Gamma, \quad (5.62)$$

τότε η

$$F(z) := \int_{\Gamma} f_z(z, \zeta) d\zeta \quad (5.63)$$

είναι ολομορφική στην περιοχή  $\Omega$ , και

$$F'(z) = \varphi(z) := \int_{\Gamma} f_z(z, \zeta) d\zeta \quad (5.64)$$

Απόδειξη

Η συνέχεια της  $\varphi$  στην περιοχή  $\Omega$  είναι άμεση απόρροια του προηγούμενου θεωρήματος. Ταυτόχρονα, το ίδιο θεώρημα, συνδυαζόμενο μ' εκείνο του αόριστου ολοκληρώματος, συνεπάγεται ότι για κάθε βρόχο  $\Gamma_0$  που περιέχεται στο ανοιχτό σύνολο  $\Omega$ ,

$$\int_{\Gamma_0} \varphi(z) dz = \int_{\Gamma_0} \left\{ \int_{\Gamma} f_z(z, \zeta) d\zeta \right\} dz = \int_{\Gamma} \left\{ \int_{\Gamma_0} f_z(z, \zeta) dz \right\} d\zeta.$$

Τότε, όμως, το θεώρημα του αόριστου ολοκληρώματος συνεπάγεται ότι η ολομορφική συνάρτηση  $\Phi := \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  που ορίζεται από τον τύπο

$$\Phi(z) := \int_{z_0}^z \varphi(w) dw,$$

έχει για παράγωγο την  $\varphi$ . Έτσι,

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \int_{z_0}^z \left\{ \int_{\Gamma} f_w(w, \zeta) d\zeta \right\} dw = \int_{\Gamma} \left\{ \int_{z_0}^z f_w(w, \zeta) dz \right\} d\zeta = \\ &= \int_{\Gamma} [f(z, \zeta) - f(z_0, \zeta)] d\zeta = F(z) - F(z_0). \end{aligned}$$

Κατά συνέπεια,  $F'(z) = \Phi'(z) = \varphi(z)$ , κι έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη του θεωρήματος. ■

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν συναρτήσεις που ορίζονται όπως στο προηγούμενο θεώρημα, αλλά με  $f(z, \zeta)$  της ειδικής μορφής  $\varphi(\zeta)(\zeta - z)^{-1}$ . Αναλυτικότερα, ονομάζουμε **ολοκλήρωμα τύπου Cauchy** τη συνάρτηση

$$F(z) := \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad (5.65)$$

όπου  $\varphi := \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$  συνεχής παντού πάνω στην απλή καμπύλη  $\Gamma$  και  $z \in \Omega = \mathbb{C} \setminus \Gamma$ .



Το επόμενο θεώρημα συνδέει τις τιμές μιας ολομορφικής συνάρτησης στο εσωτερικό ενός βρόχου με τις τιμές της ίδιας συνάρτησης πάνω στο βρόχο. Όπως θα δούμε αργότερα, αυτή η σύνδεση οδηγεί στη λύση ενός προβλήματος συνοριακών τιμών.

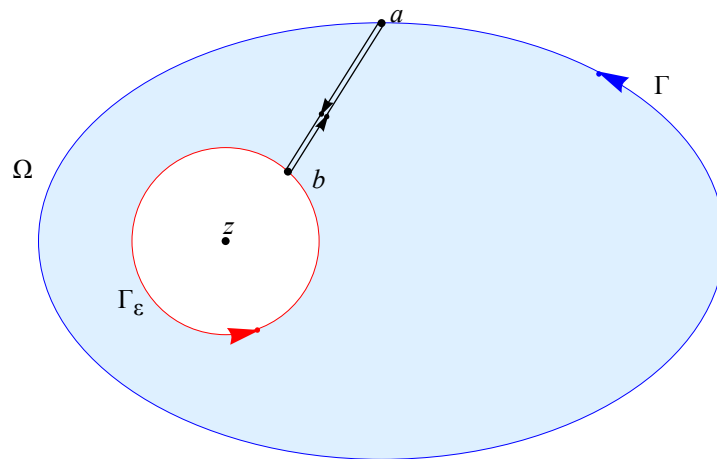
**Θεώρημα 5.6** (Ολοκληρωτικός τύπος Cauchy)

Αν η  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  είναι ολομορφική στην απλά συνεκτική περιοχή  $\Omega$  και  $\Gamma$  βρόχος που περιέχεται στην  $\Omega$ , τότε για κάθε  $z$  στο εσωτερικό του  $\Gamma$  ισχύει ότι

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad (5.66)$$

Απόδειξη

Θεωρούμε έναν κυκλικό βρόχο  $\Gamma_\varepsilon$  ακτίνας  $\varepsilon > 0$  με κέντρο το  $z$ . Για αρκετά μικρό  $\varepsilon$ , ο βρόχος  $\Gamma_\varepsilon$  βρίσκεται στο εσωτερικό του  $\Gamma$ , όπως στο Σχ. 5.2.



**Σχ. 5.2** Ο βρόχος,  $\Gamma$ , στο εσωτερικό του οποίου βρίσκεται ο κύκλος  $\Gamma_\varepsilon$  με κέντρο το σημείο  $z$ . Η συνάρτηση  $f(z)$  είναι αναλυτική πάνω στην κλειστή καμπύλη  $\Gamma \cup [a, b] \cup (-\Gamma_\varepsilon) \cup [b, a]$ , καθώς και στο εσωτερικό της.

Επιπλέον,

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \oint_{\Gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (5.67)$$

Αυτό το αποτέλεσμα προκύπτει αμέσως μόλις θεωρήσουμε το σχήμα και παρατηρήσουμε ότι η  $f(\zeta)/(\zeta - z)$  είναι ολομορφική συνάρτηση στο ανοιχτό σύνολο  $\Omega \setminus \{z\}$ . Αν ενώσουμε τα σημεία  $a$  του  $\Gamma$  και  $b$  του  $\Gamma_\varepsilon$  με το προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα  $[a, b]$  τότε ο βρόχος  $\Gamma_0 := \Gamma \cup [a, b] \cup (-\Gamma_\varepsilon) \cup [b, a]$  περιέχεται στο  $\Omega \setminus \{z\}$ . Συνεπώς,  $\oint_{\Gamma_0} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0$ . Ισοδύναμα,

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \oint_{\Gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0,$$

γιατί, η ολοκλήρωση κατά μήκος του  $[a, b]$  δίνει το αντίθετο αποτέλεσμα εκείνης κατά μήκος

του  $[b, a]$ .

Τώρα,

$$f(z) = f(z) \left[ \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right]$$

Αυτό το αποτέλεσμα προκύπτει αμέσως θέτοντας  $\Delta\theta = 2\pi$  στον τύπο (5.29) που ισχύει ανεξάρτητα από τη θέση του κέντρου του κύκλου. Η επαλήθευση αυτού του γεγονότος είναι απλή άσκηση.

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \left| f(z) - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right| &= \left| f(z) - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_\varepsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right| = \\ &= \left| \frac{1}{2\pi i} \left\{ \oint_{\Gamma_\varepsilon} \frac{f(z) - f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right\} \right| \leq \frac{1}{2\pi\varepsilon} M 2\pi\varepsilon = M, \end{aligned}$$

όπου  $M = \max_{\zeta \in \Gamma_\varepsilon} |f(z) - f(\zeta)|$ .

Όμως η  $f$  είναι συνεχής στην περιοχή  $\Omega$  και άρα το  $M \rightarrow 0$  καθώς το  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Αυτό ολοκληρώνει και την απόδειξη. ■

Αρκεί τώρα να συνδυάσουμε τον τύπο Cauchy με το θεώρημα Cauchy-Leibnitz για να καταλήξουμε στο επόμενο θεμελιακό αποτέλεσμα:

**Θεώρημα 5.7** (Τύπος Cauchy-Leibnitz για τις παραγώγους ολομορφικής συνάρτησης)

Αν η συνάρτηση  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  είναι ολομορφική στο ανοιχτό σύνολο  $\Omega$ , τότε έχει παραγώγους κάθε τάξης που, με τη σειρά τους, είναι ολομορφικές συναρτήσεις και μπορεί να υπολογιστούν χρησιμοποιώντας τον τύπο

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (5.68)$$

όπου  $\Gamma$  τυχαίος βρόχος του  $\Omega$  με την εξής ιδιότητα: Το εσωτερικό του,  $E$ , περιέχεται στο σύνολο  $\Omega$  και το  $z$  ανήκει στο  $E$ . ■

Το θεώρημα που ακολουθεί ολοκληρώνει την απόδειξη του προαναγγελθέντος αποτελέσματος ότι

**Οι έννοιες της αναλυτικότητας και της ολομορφίας είναι ισοδύναμες  
σε ένα ανοιχτό υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου.**

Θα συμβολίζουμε το χώρο των αναλυτικών συναρτήσεων στο  $\Omega$ , με  $H(\Omega)$ .

**Θεώρημα 5.7** (Οι ολομορφικές συναρτήσεις είναι και αναλυτικές)

Κάθε συνάρτηση  $f$  που είναι ολομορφική στον ανοιχτό δίσκο  $D_r(0)$  αναπτύσσεται σε συγκλίνουσα δυναμοσειρά. Πιο συγκεκριμένα,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad |z| < r \quad (5.69)$$

όπου

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0). \quad (5.70)$$

Απόδειξη

Θεωρούμε τον κύκλο  $\Gamma := \{z \in \mathbb{C} : |z| = r_1 < r\}$ . Από τον τύπο Cauchy έπεται ότι για κάθε  $z$  στο εσωτερικό του  $\Gamma$ ,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Από την άλλη

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta} \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} = \frac{1}{\zeta} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^n,$$

όπου η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη για  $\zeta \in \Gamma$ . Αυτό μας επιτρέπει να ολοκληρώσουμε τη σειρά όρο προς όρο και, χρησιμοποιώντας τύπο (5.68), να βρούμε ότι

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$

■

## Ασκήσεις

**5.1** Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα  $\int_{\Gamma} f(z) dz$ , όπου  $f(z) = (z - i)^{-1}$  και  $\Gamma$  το ίχνος της παραμετρικής καμπύλης

$$\gamma(t) = \begin{cases} t, & t \in I_1 = [-2r, 0] \\ -r(\cos t + i \sin t), & t \in I_2 = [0, \pi] \end{cases}$$

για τις περιπτώσεις  $0 < r < 1$  και  $r > 1$ .

**5.2 α)** Να προσδιοριστεί γεωμετρικά το ίχνος  $\Gamma$  της παραμετρικής καμπύλης

$$\gamma(t) = \begin{cases} t, & t \in I_1 = [0, 1] \\ 1 + i(t - 1), & t \in I_2 = [1, 2] \\ 1 + i - (t - 2), & t \in I_3 = [2, 3] \\ i - i(t - 3), & t \in I_4 = [3, 4] \end{cases}$$

β) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα  $\int_{\Gamma} f(z) dz$ , όταν  $f(z) = (2z - i)^{-1}$ .

**5.3** Το ίχνος  $\Gamma_0$  της απλής παραμετρικής καμπύλης  $\gamma_0$  είναι ο κύκλος ακτίνας  $r_0$  με κέντρο το  $z = 0$ , κατά μήκος του οποίου  $|z| = r_0$ . Ανάλογα, το ίχνος της παραμετρικής καμπύλης  $\gamma_1$  είναι ο κύκλος  $\Gamma_1$ , που ορίζεται από τη συνθήκη  $|z - z_0| = r_1$ . Να δείχτεί ότι τα ολοκλήρωμα  $\int_{\Gamma_0} z^{-1} dz$  και  $\int_{\Gamma_1} (z - z_1)^{-1} dz$  είναι ανεξάρτητα από την ακτίνα των αντίστοιχων κύκλων και μεταξύ τους ίσα.

**5.4** Χρησιμοποιήστε το συμβολισμό της Άσκ. 3.2 για να δείξετε ότι ο τύπος (5.57) του θεωρήματος Green γράφεται σαν

$$\boxed{\int_{\Gamma} f(z) dz = 2i \int_D \bar{\partial} f(z) dx dy} \quad (5.71)$$

**5.5** Να υπολογιστούν οι τιμές και των δύο κλάδων της συνάρτησης  $f(z) = \sqrt{z^2 - 1}$  στα σημεία  $z_1 = 2$ ,  $z_2 = 1 + i$ ,  $z_3 = 0$ ,  $z_4 = 1 - i$  και  $z_5 = -2$ , όταν

α) Η τομή του επίπεδου  $\mathbb{C}_z$  είναι αυτή του Σχ. 4.3.

β) Η τομή είναι εκείνη του Σχ. 4.4.

**5.5** Χρησιμοποιήστε το θεώρημα Cauchy για να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα, όπου  $\Gamma(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| = r > 0\}$ .

$$\int_{\Gamma(1,2)} z^3 dz, \quad \int_{\Gamma(0,1/2)} \frac{dz}{1-z}, \quad \int_{\Gamma(1,1)} \frac{dz}{1+e^z}, \quad \int_{\Gamma(1,2)} \frac{\sin z}{z} dz.$$

**5.6** Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα, όπου  $\Gamma(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| = r > 0\}$ , χρησιμοποιώντας τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy ή τον τύπο των παραγώγων

$$\int_{\Gamma(i,1)} \frac{z}{z^2 + 1} dz, \quad \int_{\Gamma(-i,1)} \frac{e^z}{z^2 + 1} dz, \quad \int_{\Gamma(0,1)} \frac{e^z}{z^2} dz.$$

**5.7** (Θεώρημα μέσης τιμής)

Υποθέτουμε ότι η  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  είναι αναλυτική στην περιοχή  $\Omega \subset \mathbb{C}$  και ότι το  $z_0 \in \Omega$ . Χρησιμοποιήστε τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy για να δείξετε ότι

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta, \quad (5.72)$$

όπου  $r > 0$  η ακτίνα ενός κλειστού δίσκου  $\bar{D}_r(z_0)$  που περιέχεται στην  $\Omega$ . Εξηγήστε γιατί το δεξί μέλος αυτής της σχέσης αντιπροσωπεύει τη μέση τιμή της  $f$  πάνω στον κύκλο  $|z - z_0| = r$ .

**5.8** (Ολοκληρωτικός τύπος του Poisson)

Υποθέτουμε ότι η  $f$  είναι αναλυτική στον δίσκο κλειστό  $\bar{D}_a(0)$ , το  $z_0 \neq 0$  κι ανήκει στον  $D_a(0)$ , ενώ το  $z_0^* = a^2 / \bar{z}_0$ .

α) Δείχτε ότι για  $|z_0^*| > a$

$$\oint_{\Gamma(0,a)} \frac{f(z)}{z - z_0^*} dz = 0$$

και

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma(0,a)} f(z) \frac{z - z_0^*}{(z - z_0)(z - z_0^*)} dz.$$

β) Δείχτε ότι η αντικατάσταση  $z_0 = r_0 \exp(i\theta_0)$ ,  $z = a \exp(i\theta)$  στον προηγούμενο τύπο οδηγεί στον

$$f(r_0 e^{i\theta_0}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(a^2 - r_0^2) f(a e^{i\theta})}{a^2 - 2ar_0 \cos(\theta - \theta_0) + r_0^2} d\theta,$$

που με τη σειρά του οδηγεί στον ολοκληρωτικό τύπο Poisson (βλ. Εδάφιο V-6).

### 5.9 (Δείκτης καμπύλης)

Αν η  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  είναι μια τμηματικά  $C^1$  κλειστή καμπύλη και το σημείο  $a \in \mathbb{C}$  δεν ανήκει στο ίχνος  $\Gamma$  της  $\gamma$ , τότε ο αριθμός

$$n(\gamma, a) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z - a} \quad (5.73)$$

ονομάζεται *δείκτης της  $\gamma$  ως προς το σημείο  $a$* , ή *αριθμός περιέλιξης της  $\gamma$  γύρω από το  $a$* .

α) Να δειχτεί ότι ο  $n(a, \gamma)$  είναι ακέραιος.

Υπόδειξη: Υποθέστε ότι η  $\gamma$  είναι ομαλή και θεωρήστε τη συνάρτηση  $g := [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  όπου

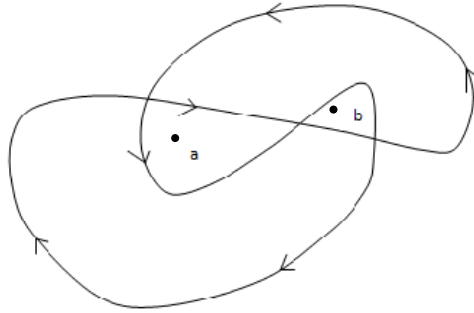
$$g(t) = \int_0^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - a} ds.$$

Η  $\exp[-g](\gamma - a)$  είναι σταθερή.

β) Η καμπύλη  $\gamma^{-1} \equiv -\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  προκύπτει από την αναπαραμετροποίηση  $-\gamma(t) = \gamma(1 - t)$  της  $\gamma$ . Δείχτε ότι καθώς η παράμετρος  $t$  διατρέχει το διάστημα  $[0, 1]$  από το  $t = 0$  στο  $t = 1$ , η εικόνα  $-\gamma(t)$  διατρέχει το ίχνος  $\Gamma$  σε αντίθετη φορά από εκείνη που το διατρέχει η  $\gamma(t)$ . Δείχτε επίσης ότι  $n(-\gamma, a) = -n(\gamma, a)$ .

γ) Να υπολογιστεί ο δείκτης  $n(\gamma, 0)$  της  $\gamma := [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ , όπου  $\gamma(t) = \cos(2\pi m t) + i \sin(2\pi m t)$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ .

δ) Να δειχτεί ότι  $n(\gamma, a) = n(\gamma, b) = 0$  όπου  $\gamma$  είναι η καμπύλη της οποίας το ίχνος φαίνεται στο σχήμα



### 5.10 α) Εκτίμηση Cauchy παραγώγων ολομορφικής συνάρτησης

Υποθέστε ότι η  $f$  είναι ολομορφική στο δίσκο  $D(a, r)$  κι ότι  $|f(z)| \leq M$  για κάθε  $z \in D(a, r)$ . Δείχτε ότι

$$\left| f^{(n)}(a) \right| \leq \frac{n! M}{r^n}. \quad (5.74)$$

### β) Θεώρημα Liouville

Μια συνάρτηση λέγεται **ακέραια** αν είναι αναλυτική σε όλο το μιγαδικό επίπεδο. Δείχτε ότι μια ακέραια συνάρτηση που είναι φραγμένη, είναι σταθερή.

5.11 Υποτίθεται ότι η  $f \in H(\Omega)$ , όπου  $\Omega$  είναι περιοχή (ανοιχτό και συνεκτικό υποσύνολο) του  $\mathbb{C}$ . Ν' αποδειχτεί ότι οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες.

α)  $f = 0$ .

β) Ο πυρήνας της  $f$ ,  $K(f) := \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$ , έχει οριακό σημείο που περιέχεται στην  $\Omega$ .

γ) Υπάρχει σημείο  $a \in \Omega$  τέτοιο που  $f^{(n)}(a) = 0$ , για κάθε  $n \geq 0$

Υπόδειξη

1) Η (α) προφανώς συνεπάγεται τις (β) και (γ).

2) Για τη συνεπαγωγή (β)  $\Rightarrow$  (γ) : Αν το  $a$  είναι το οριακό σημείο του πυρήνα, τότε η συνέχεια της  $f$  συνεπάγεται ότι  $f(a) = 0$ . Υποθέστε, λοιπόν, ότι υπάρχει  $n \geq 1$  τέτοιο που  $f(a) = f'(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0$ , αλλά  $f^{(n)}(a) \neq 0$ .

Δείχτε ότι η  $g(z) := \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z-a)^{k-n}$  είναι αναλυτική σ' ένα δίσκο  $D_r(a)$  κι ότι  $g(a) \neq 0$  και συνάμα  $g(a) = 0$ .

3) Για τη συνεπαγωγή (γ)  $\Rightarrow$  (α) : Δείχτε ότι το  $\Omega_0 := \{z \in \Omega : f^{(n)}(z) = 0, n \geq 0\}$  είναι ανοιχτό και κλειστό υποσύνολο της  $\Omega$ , ενώ  $\Omega_1 \neq \emptyset$ .

### 5.12 (Θεώρημα της ταυτότητας)

Δείχτε ότι το προηγούμενο αποτέλεσμα συνεπάγεται ότι

α) Αν οι  $f$  και  $g$  είναι ολομορφικές στην περιοχή  $\Omega \subset \mathbb{C}$  τότε  $f \equiv g$  εάν και μόνο όταν το σύνολο  $\{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$  έχει οριακό σημείο στην  $\Omega$ .

β) Αν  $f, g \in H(\Omega)$  και  $f = g$  σε κάθε σημείο ενός δίσκου  $D(a, r)$  που περιέχεται στην  $\Omega$  του  $\mathbb{C}$ ,

τότε  $f = g$  σε ολόκληρη την  $\Omega$ .

γ) Αν  $f \in H(\Omega)$  και  $f(a) = 0$ , όπου  $a$  σημείο της περιοχής  $\Omega$ , τότε υπάρχει  $r > 0$  τέτοιο που  $f(z) \neq 0$  για κάθε σημείο του δίσκου  $D(a, r)$  άλλο από το  $a$ . Με άλλα λόγια, τα μηδενικά μιας ολομορφικής συνάρτησης είναι απομονωμένα.

**5.13** Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα της προηγούμενης άσκησης και κατάλληλες σχέσεις γνωστές από την πραγματική ανάλυση για να δείξετε ότι

$$(i) e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \quad (ii) \cos^2 z + \sin^2 z = 1, \quad z \in \mathbb{C}.$$

**5.14 α)** (Θεώρημα τοπικού μέγιστου απόλυτης τιμής)

Η  $f \in H(D(a, r))$  και  $|f(z)| < |f(a)|$  για κάθε  $z \in D(a, r)$ . Να δειχθεί ότι η  $f$  είναι σταθερή.

Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε το θεώρημα μέσης τιμής της Άσκ.6, για να δείξετε ότι

$$\int_0^{2\pi} [ |f(a)| - |f(a + \rho e^{i\theta})| ] d\theta = 0, \quad 0 < \rho < r.$$

β) (Θεώρημα μέγιστου απόλυτης τιμής)

Η  $f \in H(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$  όπου  $\Omega$  φραγμένη περιοχή του  $\mathbb{C}$ . Να δειχθεί ότι η  $|f|$  παίρνει τη μέγιστη τιμή της, οπωσδήποτε στο σύνορο,  $\bar{\partial}\Omega$ , της  $\Omega$ .

γ) Δείχτε ότι το αποτέλεσμα (β) συνεπάγεται την ασθενή αρχή του μέγιστου-ελάχιστου για μια συνάρτηση που είναι αρμονική στην περιοχή  $\Omega$ .

**5.15** Ν' αναπτυχθούν σε δυναμοσειρά στη γειτονιά του αντίστοιχου σημείου  $z_0$  οι παρακάτω συναρτήσεις. Σε κάθε περίπτωση να προσδιοριστεί η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς.

$$(i) f(z) = e^z, \quad z_0 = i, \quad (ii) f(z) = \ln z, \quad z_0 = 1,$$

$$(iii) f(z) = \frac{1}{z-1}, \quad z_0 = i, \quad (iv) f(z) = \frac{1}{z^2+1}, \quad z_0 = 1,$$

$$(iv) f(z) = \frac{z_0}{z^2+a^2}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad z_0 \text{ τυχαίο σημείο του } \mathbb{C}, \text{ διαφορετικό από το } a.$$

**5.16** Θεωρήστε τη συνάρτηση  $f: D_r(0) \rightarrow \mathbb{C}$  με τύπο

$$f(z) = \frac{z+z_0}{z-z_0}, \quad |z| = r.$$

Δείχτε ότι

$$(i) f(z_0) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z_0}{z}\right)^n,$$

$$(ii) \text{ Αν } z_0 = r_0 e^{i\theta_0}, \quad z = r e^{i\theta}, \text{ τότε}$$

$$\operatorname{Re} f(z_0) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_0}{r}\right)^n \cos n(\theta_0 - \theta).$$

**5.16** (Θεώρημα του Morera)

Να δειχτεί ότι, αν η  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  είναι συνεχής στην περιοχή  $\Omega$  και  $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$  για κάθε τμηματικά ομαλή καμπύλη  $\Gamma$  που περιέχεται στην  $\Omega$ , τότε  $f \in H(\Omega)$ .



## 6. Ολομορφικές συναρτήσεις και η εξίσωση Laplace

Το Θεώρημα 5.6 που εξασφαλίζει την ύπαρξη των παραγώγων κάθε τάξης μιας ολομορφικής ή αναλυτικής συνάρτησης μας παρέχει μια αστείρευτη πηγή αυστηρών λύσεων της εξίσωσης Laplace στον  $\mathbb{R}^2$ : Κάθε συνάρτηση  $f$  που είναι διαφορίσιμη σε κάποιο ανοιχτό υποσύνολο  $\Omega$  του μιγαδικού επίπεδου  $\mathbb{C}$  ορίζει δύο λύσεις της εξίσωσης Laplace  $\Delta u = 0$  στο αντίστοιχο υποσύνολο του  $\mathbb{R}^2$ :

**Θεώρημα 6.1** (Αρμονικές συναρτήσεις από ολομορφικές)

Αν η  $f \in H(\Omega)$ , όπου  $\Omega$  τυχαίο ανοιχτό υποσύνολο του  $\mathbb{C}$ , τότε οι συναρτήσεις  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  που ορίζονται από την έκφραση

$$f(z) = u(x, y) + i v(x, y), \quad z = x + i y \in \Omega \quad (6.1)$$

είναι αρμονικές στο υποσύνολο  $\Omega$  του  $\mathbb{R}^2$ .

Απόδειξη

Η  $f$ , ως ολομορφική μιγαδική συνάρτηση, έχει παραγώγους κάθε τάξης. Συνεπώς, οι  $u$  και  $v$  έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους κάθε τάξης (γιατί;). Επιπλέον, οι πρώτης τάξης παράγωγοι των  $u$  και  $v$  πληρούν τις συνθήκες Cauchy-Riemann

$$u_x(x, y) = v_y(x, y), \quad u_y(x, y) = -v_x(x, y), \quad (6.2)$$

σε κάθε σημείο  $(x, y)$  του  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Παραγωγίζοντας την πρώτη των (6.2) ως προς  $x$  και τη δεύτερη ως προς  $y$ , παίρνουμε

$$u_{xx}(x, y) = v_{yx}(x, y), \quad u_{yy}(x, y) = -v_{xy}(x, y). \quad (6.3)$$

Όμως, η  $v \in C^2(\Omega)$  και άρα  $v_{xy}(x, y) = v_{yx}(x, y)$  σε κάθε σημείο του  $\Omega$ . Άρα, οι (6.3) συνεπάγονται ότι

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega. \quad (6.4)$$

Με ανάλογο τρόπο βρίσκουμε ότι

$$v_{xx}(x, y) + v_{yy}(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega. \quad (6.5)$$

■

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, οι αρμονικές συναρτήσεις  $u, v$  του προηγούμενου θεωρήματος ονομάζονται συζυγείς η μία της άλλης. Το θεώρημα, λοιπόν, εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός ζευγαριού συζυγών αρμονικών συναρτήσεων από την ύπαρξη μιας ολομορφικής συνάρτησης.

Από πρακτική άποψη, όμως, ενδιαφέρον παρουσιάζει και το αντίστροφο πρόβλημα: Αν γνωρίζουμε μια συνάρτηση  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  που είναι αρμονική στο ανοιχτό υποσύνολο  $\Omega$  του  $\mathbb{R}^2$ , μπορούμε να κατασκευάσουμε μια δεύτερη συνάρτηση  $v: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  που είναι αρμονική στο ίδιο

σύνολο  $\Omega$  και συζυγής της  $u$ ; Η απάντηση που δίνεται σ' αυτό το ερώτημα από το θεώρημα που ακολουθεί καλύπτει πλήρως τις ανάγκες των εφαρμογών που θα μας απασχολήσουν.

**Θεώρημα 6.2** (Κατασκευή συζυγούς αρμονικής)

Αν η συνάρτηση  $u$  είναι αρμονική σε έναν ανοιχτό δίσκο του του  $\mathbb{R}^2$  ή σε ολόκληρο τον  $\mathbb{R}^2$ , τότε υπάρχει συνάρτηση  $v$  που είναι αρμονική στην ίδια περιοχή και συζυγής της  $u$ .

Απόδειξη

Αν  $\mathbf{x}_0 = (a, b)$  είναι το κέντρο του δίσκου  $D_r(\mathbf{x}_0)$  στον οποίο η  $u$  είναι αρμονική και  $\mathbf{x} = (x, y)$  είναι ένα άλλο σημείο του ίδιου δίσκου, τότε

(α) Υπάρχει δίσκος  $D_\rho(\mathbf{x})$ , τέτοιος που το συμπαγές σύνολο  $\bar{D}_\rho(\mathbf{x})$  περιέχεται ολόκληρο στον  $D(\mathbf{x}_0, r)$  και

(β) Τα ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν το  $\mathbf{x}_0 = (a, b)$  με το  $\mathbf{x}_1 = (a, y)$  κι αυτό με το  $\mathbf{x} = (x, y)$ , αντίστοιχα, περιέχονται στο δίσκο  $D_r(\mathbf{x}_0)$  (γιατί;).

Ας υποθέσουμε ότι η συζυγής της  $u$  υπάρχει κι ας την ονομάσουμε  $v$ . Τότε η  $v$  πρέπει να σέβεται τις συνθήκες Cauchy-Riemann (C-R) και άρα να είναι λύση της ΜΔΕ

$$v_y(x, y) = u_x(x, y), \quad (x, y) \in D_r(\mathbf{x}_0).$$

Ολοκληρώνοντας αυτή τη σχέση κατά μήκος του ευθύγραμμου τμήματος  $x = x_0$  παίρνουμε

$$v(x, y) = \int_{y_0}^y u_x(x, t) dt + \phi(x). \quad (6.6)$$

Από το γεγονός ότι η δοσμένη  $u$  είναι κλάσης  $C^2$  στον δίσκο  $D_r(\mathbf{x}_0)$  και τον κανόνα του Leibnitz για την παραγωγήση ολοκληρωμάτων έπεται ότι

$$\begin{aligned} v_x(x, y) &= \int_{y_0}^y u_{xx}(x, t) dt + \phi'(x) = - \int_{y_0}^y u_{tt}(x, t) dt + \phi'(x) \\ &= -u_y(x, y) + u_y(x, y_0) + \phi'(x). \end{aligned} \quad (6.7)$$

Άρα, για να πληροί η  $v(x, y)$  και τη συνθήκη C-R  $v_x = -u_y$  στο, θα πρέπει η  $\phi$  να είναι λύση της ΣΔΕ  $\phi'(x) = -u_y(x, y_0)$ . Συνεπώς,

$$\phi(x) = - \int_{x_0}^x u_y(t, y_0) dt + \text{σταθ}. \quad (6.8)$$

Ο συνδυασμός των (6.6) και (6.8) δίνει

$$v(x, y) = \int_{y_0}^y u_x(x, t) dt - \int_{x_0}^x u_y(t, y_0) dt + v(x_0, y_0). \quad (6.9)$$

Εύκολα επαληθεύεται ότι η  $v$  που ορίζεται από την (6.9) πληροί τις συνθήκες C-R και άρα είναι αρμονική στον  $D_r(\mathbf{x}_0)$  και συζυγής της  $u$ .

■

**Παράδειγμα 6.1**

(i) Η  $u(x, y) = x y$  είναι αρμονική σε όλο τον  $\mathbb{R}^2$ , αφού  $u_x(x, y) = y$ ,  $u_y(x, y) = x$ . Για να βρούμε τη συζυγή της, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο (6.9). Ωστόσο, για λόγους εξάσκησης, λύνουμε από την αρχή το σύστημα των ΜΔΕ πρώτης τάξης (συνθήκες C-R)

$$v_x(x, y) = -x, \quad v_y(x, y) = y.$$

Από την πρώτη από αυτές, αμέσως έπεται ότι

$$v(x, y) = -\frac{1}{2} x^2 + g(y).$$

Συνεπώς,

$$v_y(x, y) = g'(y).$$

Για να συμφωνεί αυτή η σχέση με την  $v_y(x, y) = y$ , θα πρέπει η  $g'(y) = y$ . Άρα,  $g(y) = c + y^2/2$ , οπότε

$$v(x, y) = \frac{1}{2} (y^2 - x^2) + c.$$

(ii) Όπως γνωρίζουμε, η  $u(x, y) = \ln(x^2 + y^2)^{1/2}$  είναι αρμονική στο ανοιχτό υποσύνολο  $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$  του  $\mathbb{R}^2$ . Υπάρχει αρμονική συνάρτηση στην περιοχή  $\Omega$  που να είναι συζυγής της  $u$ ;

Αν υπήρχε τέτοια συνάρτηση, τότε η  $f = u + i v$  θα ήταν αναλυτική στην  $\Omega$  και θα μας επέτρεπε να ορίσουμε μια λογαριθμική συνάρτηση στην  $\Omega$ . Όμως, έχουμε ήδη αποδείξει πως μια τέτοια (μονότιμη!) συνάρτηση δεν είναι δυνατόν να κατασκευαστεί.

Αξίζει, πάντως, να εξετάσουμε πού οδηγούν οι συνθήκες C-R σ' αυτή την περίπτωση. Από τον ορισμό της  $u$  έπεται ότι

$$u_x = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad u_y = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad x^2 + y^2 \neq 0.$$

Η πρώτη από αυτές τις σχέσεις και η συνθήκη C-R  $u_x = v_y$  οδηγούν στο συμπέρασμα ότι,  $v(x, y) = \arctan(y/x) + \phi(x)$ . Η δεύτερη, σε συνδυασμό με τη συνθήκη C-R  $u_y = -v_x$ , συνεπάγεται ότι

$$v(x, y) = \arctan(y/x) + c.$$

Όμως, η γωνία  $\theta(x, y) = \arctan(y/x)$  πρέπει να περιοριστεί σε κάποιο διάστημα της μορφής  $[\theta_0, \theta_0 + 2\pi)$  για να βρίσκεται σε 1-1 αντιστοιχία με τα σημεία του κύκλου  $x^2 + y^2 = r^2$ . Για παράδειγμα, η επιλογή  $c = 0$  και  $\arctan(\xi) \in (-\pi, \pi)$

$$v(x, y) = \theta(x, y), \tag{6.10}$$

όπου  $\theta$  είναι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα  $\mathbf{x} = (x, y)$  με τον άξονα  $x$ .

Αυτή η επιλογή δεν οδηγεί παρά στη γνωστή μας συνάρτηση

$$\ln z = u(x, y) + i v(x, y) = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z \quad (6.11)$$

όπου το  $z$  περιορίζεται πλέον στη περιοχή  $\tilde{\Omega} = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : y = 0, x \leq 0\}$ .

■

Στρέφοντας, πλέον, την προσοχή μας σε φυσικές εφαρμογές, ας υποθέσουμε ότι το διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{v}(x, y) = v_1(x, y) \mathbf{e}_x + v_2(x, y) \mathbf{e}_y, \quad (6.12)$$

αντιπροσωπεύει την ταχύτητα ενός ρευστού σε κάποια συγκεκριμένη περιοχή του χώρου. Προφανώς, έχουμε να κάνουμε με την περίπτωση όπου οι καμπύλες που διαγράφουν τα στοιχεία του ρευστού είναι επίπεδες, η ροή δεν αλλάζει με το χρόνο και είναι της ίδιας μορφής σε όλα τα επίπεδα που είναι εκάρσια προς τη χωρική κατεύθυνση  $z$  ενός Καρτεσιανού συστήματος  $x y z$ .

Σ' αυτή, λοιπόν, την περίπτωση ο στροβιλισμός του ρευστού στο σημείο  $(x, y)$  είναι κάθετος προς το επίπεδο  $x y$ . Συγκεκριμένα,

$$\nabla \times \mathbf{v}(x, y) = \omega \mathbf{e}_z, \quad (6.13)$$

όπου

$$\omega(x, y) = v_{1x} - v_{2y}. \quad (6.14)$$

Ταυτόχρονα, η απόκλιση του ρευστού στο  $(x, y)$  είναι ίση με

$$\nabla \cdot \mathbf{v}(x, y) = v_{1x} + v_{2y}. \quad (6.15)$$

Αν, λοιπόν,

$$\omega(x, y) = 0 \Leftrightarrow v_{1x}(x, y) = v_{2y}(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \quad (6.16)$$

όπου  $\Omega$  μια περιοχή του  $\mathbb{R}^2$ , τότε μπορούμε, γενικά, να βρούμε μια συνάρτηση  $\phi(x, y)$  τέτοια που

$$\mathbf{v} = \nabla \phi \Leftrightarrow v_1 = \phi_x, \quad v_2 = \phi_y, \quad \text{όταν } (x, y) \in \Omega. \quad (6.17)$$

Σ' αυτή την περίπτωση ονομάζουμε τη  $\phi$  **δυναμικό ταχύτητας**.

Αν στην ίδια περιοχή  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ , οπότε λέμε πως το ρευστό είναι **ασυμπίεστο**, τότε η αντικατάσταση της (6.17) στην έκφραση (6.15) για την απόκλιση δίνει

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0. \quad (6.18)$$

Άρα στην  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  η  $\phi(x, y)$  είναι αρμονική συνάρτηση.

Ας υποθέσουμε, στη συνέχεια, ότι η  $\psi(x, y)$  είναι αρμονική συζυγής της  $\phi(x, y)$ . Τότε, η

$$f(z) := \phi(x, y) + i \psi(x, y) \quad (6.19)$$

είναι ολομορφική στην περιοχή του μιγαδικού επιπέδου  $\mathbb{C}$  που αντιστοιχεί στην  $\Omega$ . Συνακόλουθα,

$$f'(z) = \phi_x + i \psi_x. \quad (6.20)$$

Από τις συνθήκες C-R έπεται ότι η τελευταία εξίσωση μπορεί να γραφτεί και στη μορφή

$$f'(z) = \phi_x - i \phi_y. \quad (6.21)$$

Άρα

$$\overline{f'(z)} = \phi_x + i \phi_y. \quad (6.22)$$

Από τη σύγκριση των (6.17) και (6.22) συνάγεται ότι

$$u_1 = \operatorname{Re} \overline{f'}, \quad u_2 = \operatorname{Im} \overline{f'} \quad (6.23)$$

Με άλλα λόγια, έχουμε στη διάθεσή μας μία μονοσήμαντη αντιστοιχία ανάμεσα στις δύο συνιστώσες του διανυσματικού πεδίου  $\mathbf{u}(x, y)$  από τη μια, και το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της μιγαδικής συνάρτησης  $\overline{f'(z)}$ , από την άλλη. Με βάση αυτή την αντιστοιχία, μπορούμε να θεωρούμε τη μιγαδική συνάρτηση

$$u(z) := \overline{f'(z)} \quad (6.24)$$

ισοδύναμη προς το διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{u}$  του  $\mathbb{R}^2$ . Έτσι, θα μιλάμε στη συνέχεια για την "ταχύτητα του ρευτιστού  $u(z)$ ". Για τον ίδιο λόγο η  $f(z)$  θα αναφέρεται και σαν **μιγαδικό δυναμικό ταχύτητας**.

Από την άλλη μεριά, οι συνθήκες C-R συνεπάγονται η κλίση,  $\nabla \psi = \psi_x \mathbf{e}_x + \psi_y \mathbf{e}_y$ , του πεδίου  $\psi(x, y)$  μπορεί να γραφτεί και στη μορφή

$$\nabla \psi = -\phi_y \mathbf{e}_x + \phi_x \mathbf{e}_y. \quad (6.25)$$

Άρα

$$\nabla \phi \cdot \nabla \psi = \phi_x (-\phi_y) + \phi_y \phi_x = 0. \quad (6.26)$$

Αυτό σημαίνει ότι

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \psi = 0 \quad (6.27)$$

και άρα σε κάθε σημείο  $(x, y)$  της περιοχής  $\Omega$  του  $\mathbb{R}^2$  το διάνυσμα  $\mathbf{u}(x, y)$  εφάπτεται στην καμπύλη  $\psi(x, y) = \text{σταθ.}$  που διέρχεται από το  $(x, y)$ . Με άλλα λόγια, οι καμπύλες

$$\psi(x, y) = c, \quad c \in \mathbb{R} \quad (6.28)$$

είναι ολοκληρωτικές καμπύλες του πεδίου  $\mathbf{u}$ . Γι' αυτό οι καμπύλες που ορίζονται από την (6.28) ονομάζονται **γραμμές ροής** και η συνάρτηση  $\psi$  **συνάρτηση ροής**. Στο πλαίσιο αυτής της ορολογίας, οι καμπύλες του  $\mathbb{R}^2$  που ορίζονται από τη σχέση  $\phi(x, y) = \text{σταθ.}$  ονομάζονται **ισοδυναμικές επιφάνειες**. Από την (6.27) γίνεται φανερό ότι οι γραμμές ροής τέμνουν τις ισοδυναμικές επιφάνειες κατά ορθή γωνία.

**Παράδειγμα 6.2**

Το απλούστερο παράδειγμα δισδιάστατης στάσιμης ροής είναι αυτό που αντιστοιχεί σ' ένα  $\nu$  σταθερής κατεύθυνσης και μέτρου. Αν διαλέξουμε τον άξονα  $x$  του Καρτεσιανού συστήματος  $x y$  να ταυτίζεται με την κατεύθυνση της ροής όπως στο Σχ. 6.1, το μιγαδικό δυναμικό θα δίνεται από την έκφραση

$$f(z) = k z, \quad k \in \mathbb{R}^+. \quad (6.29)$$

Γιατί τότε,

$$\nu(z) := \overline{f'(z)} = k \Leftrightarrow \nu_1 = \operatorname{Re} \nu = k, \quad \nu_2 = \operatorname{Im} \nu = 0. \quad (6.30)$$

Σ' αυτή την περίπτωση

$$\phi(x, y) = \operatorname{Re} f(z) = k x, \quad \psi(x, y) = \operatorname{Im} f(z) = k y. \quad (6.31)$$

Άρα οι ισοδυναμικές επιφάνειες δίνονται από τη συνθήκη

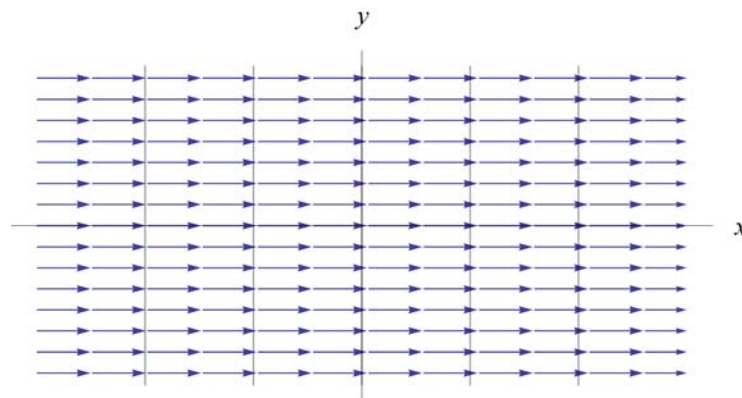
$$k x = \text{σταθ.} \quad (6.32)$$

Το απλούστερο παράδειγμα δισδιάστατης στάσιμης ροής είναι αυτό που αντιστοιχεί σ' ένα  $\nu$  σταθερής κατεύθυνσης και μέτρου. Αν διαλέξουμε τον άξονα  $x$  του Καρτεσιανού συστήματος  $x y$  να ταυτίζεται με την κατεύθυνση της ροής όπως στο Σχ. 6.1, το μιγαδικό δυναμικό θα δίνεται από την έκφραση

και άρα αντιστοιχούν στις ευθείες  $x = \text{σταθ.}$  του επιπέδου  $x y$ . Από την άλλη, οι γραμμές ροής ορίζονται από τη σχέση

$$k y = \text{σταθ.} \quad (6.33)$$

και άρα είναι οι ευθείες  $y = \text{σταθ.}$  του ίδιου επιπέδου.



**Σχ. 6.1** Οι ισοδυναμικές επιφάνειες και γραμμές ροής του μιγαδικού δυναμικού (6.29).

Είναι φανερό ότι η  $f(z) = k z$  είναι αναλυτική σ' ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο (ακέραια). Είναι το ίδιο φανερό ότι η ροή που αντιστοιχεί σ' αυτή τη συνάρτηση δεν μπορεί να αντιπροσωπεύει την κίνηση ενός πραγματικού ρευστού, αφού στον φυσικό κόσμο τα ρευστά καταλαμβάνουν κάποια φραγμένη περιοχή του  $\mathbb{R}^3$ , οπότε οι γραμμές ροής είναι υποχρεωμένες

να καμπυλώνουν. Εκείνο που δεν είναι τόσο προφανές είναι το γεγονός ότι η ροή που αντιστοιχεί στην  $f(z) = k z$  είναι συνάμα εξαιρετικά ρεαλιστική.

Αυτός ο ισχυρισμός, που φαίνεται να αντιφάσκει με την προηγούμενη διαπίστωση ότι η ροή που εξετάζουμε δεν είναι ρεαλιστική, στηρίζεται στην ακόλουθη παρατήρηση. Αν  $(x_0, y_0)$  είναι ένα ομαλό σημείο του διανυσματικού πεδίου  $\mathbf{v}(x, y)$ , πράγμα που σημαίνει ότι το  $z_0 = x_0 + i y_0$  είναι ομαλό σημείο της  $f(z)$ , τότε μπορούμε να διαλέξουμε τον θετικό αριθμό  $\delta$  αρκετά μικρό ώστε στο δίσκο  $\bar{D}_\delta(z_0)$  η ροή που αντιστοιχεί στο  $\mathbf{v}$  να είναι της μορφής (6.33). Τον έλεγχο αυτού του ισχυρισμού τον αφήνουμε στον αναγνώστη.

### Παράδειγμα 6.3

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(z) = \lambda \ln z \quad (6.34)$$

όπου  $\lambda$  μη μηδενική πραγματική παράμετρος. Τότε

$$(\ln z)' = \frac{1}{z} \quad (6.35)$$

και άρα η  $f(z)$  ορίζει ένα μιγαδικό δυναμικό στο οποίο αντιστοιχεί η ταχύτητα

$$\mathbf{v}(z) := \overline{f'(z)} = \frac{\lambda}{\bar{z}} = \frac{\lambda z}{\bar{z} z} = \frac{\lambda(x + i y)}{r^2}. \quad (6.36)$$

Το δυναμικό ροής και η συνάρτηση ροής δίνονται από τις συναρτήσεις

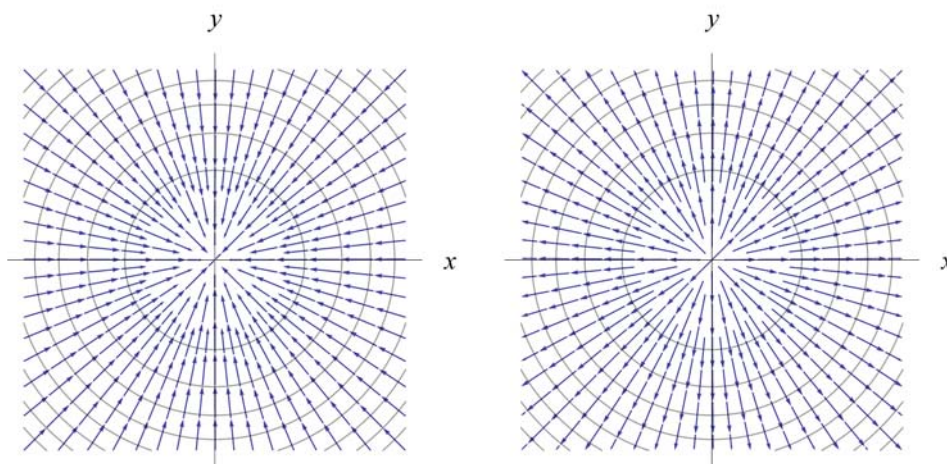
$$\phi(x, y) = \operatorname{Re} f(z) = \lambda \ln r \quad (6.37)$$

και

$$\psi(x, y) = \operatorname{Im} f(z) = \lambda \theta \quad (6.38)$$

αντίστοιχα.

Η τελευταία από αυτές τις σχέσεις δείχνει ότι οι γραμμές ροής είναι οι ημιευθείες  $\theta = \text{σταθ.}$  που ξεκινάνε από το ανώμαλο σημείο  $z = 0$ . Η (6.36) από την άλλη μεριά δείχνει καθαρά ότι το ρευστό κινείται προς το  $z = 0$ , όταν η σταθερή  $\lambda$  είναι αρνητική, ενώ απομακρύνεται από το  $z = 0$  όταν η  $\lambda$  είναι θετική. Αντίστοιχα, λοιπόν, το  $z = 0$  είναι μια **ρουφήχτρα**, όπου καταλήγει κι εξαφανίζεται το ρευστό ή μια **πηγή**, από την οποία συνεχώς αναβλύζει ρευστό το οποίο κινούμενο ακτινικά καταλήγει στο άπειρο. Ορισμένες από τις γραμμές ροής και τις ισοδυναμικές επιφάνειες που αντιστοιχούν στο δυναμικό παριστάνονται στο Σχ. 6.2.



**Σχ. 6.2** Οι ισοδυναμικές επιφάνειες και γραμμές ροής του μιγαδικού δυναμικού (6.34). Το αριστερό σχήμα αντιστοιχεί σε ρουφήχτρα και το δεξί σε πηγή.

**Παράδειγμα 6.4**

Η συνάρτηση  $f(z)$  που δίνεται από την (6.34) αντιστοιχεί και σε μια άλλη ροή. Συγκεκριμένα, αν αντικαταστήσουμε την παράμετρο  $\lambda$  από την  $-ik$ , όπου  $k \in \mathbb{R}^+$ , η  $f(z)$  της (6.34) γίνεται

$$f(z) = -ik \ln z. \tag{6.39}$$

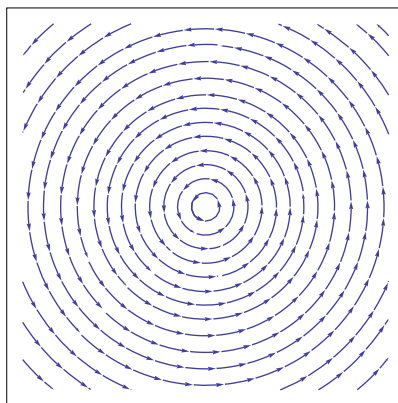
Ισοδύναμα,

$$f(z) = -k(i \ln r - \theta), \tag{6.40}$$

οπότε

$$\phi = \text{Re } f(z) = -k\theta, \quad \psi = \text{Im } f(z) = -k \ln r. \tag{6.41}$$

Άρα, σ' αυτή την περίπτωση οι γραμμές ροής  $\psi = \text{σταθ.}$  είναι ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο το ανώμαλο σημείο  $z = 0$ . Η αντίστοιχη ροή ονομάζεται **στρόβιλος** με κέντρο το σημείο  $(x, y) = (0, 0)$  και φαίνεται στο Σχ. 6.3. Ακριβέστερα, ο στρόβιλος έχει ως άξονα την ευθεία που διέρχεται από τον  $(x, y) = (0, 0)$  και είναι κάθετη στο επίπεδο  $x y$ .



**Σχ. 6.3** Οι γραμμές ροής του στρόβιλου που αντιστοιχεί στο μιγαδικού δυναμικού (6.39).



Παρατήρηση 1<sup>η</sup>

Θεωρούμε μια κλειστή καμπύλη  $C$  στην περιοχή ορισμού της ταχύτητας  $v(z) := \overline{f'(z)}$ . Από τη σχέση

$$\int_C \mathbf{v} dz = \int_C (v_1 - i v_2) d(x + i y) = \int_C (v_1 dx + v_2 dy) + i \int_C (v_1 dy - v_2 dx) \quad (6.42)$$

έπεται ότι

$$\int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} = \operatorname{Re} \left( \int_C \mathbf{v} dz \right) \quad (6.43)$$

$$\int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \operatorname{Im} \left( \int_C \mathbf{v} dz \right) \quad (6.44)$$

όπου τα μοναδιαία διανύσματα  $\mathbf{t}$  και  $\mathbf{n}$  είναι, αντίστοιχα, εφαπτόμενο και κάθετο στη  $C$ , δηλαδή

$$\mathbf{t} ds = (dx, dy) \quad (6.45)$$

και

$$\mathbf{n} ds = (dy, -dx). \quad (6.46)$$

Από την άλλη μεριά,

$$\int_C \mathbf{v} dz = \int_C f'(z) dz. \quad (6.47)$$

Κατά συνέπεια, αν η  $f(z)$ , και άρα και η παράγωγός της,  $f'(z)$ , είναι αναλυτική τόσο κατά μήκος της  $C$  όσο και στην περιοχή που αυτή περικλείει, τότε το δεξί μέλος της (6.47) μηδενίζεται. Σ' αυτή, λοιπόν, την περίπτωση μηδενίζονται τα αριστερά μέλη των (6.43), (6.44).

Αντίθετα, αν η  $f(z)$  είναι αναλυτική κατά μήκος της  $C$  αλλά η  $C$  περικλείει τα σημεία ανωμαλίας της  $f(z)$ , τότε το δεξί μέλος της (6.47) γενικά δε μηδενίζεται. Έτσι, αν στο Παράδειγμα 6.3 υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα της  $f'(z)$  κατά μήκος ενός κύκλου με κέντρο το  $z = 0$  και ακτίνα  $a > 0$ , θα βρούμε

$$\int_{|x|=a} v dz = i 2 \pi \lambda. \quad (6.48)$$

Από αυτή και τις (6.44) και (6.44) έπεται ότι

$$\int_{|x|=a} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} = 0, \quad \int_{|x|=a} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 2 \pi \lambda. \quad (6.49)$$

Με τον ίδιο τρόπο, για τη ροή του Παραδείγματος 6.4,

$$\int_{|x|=a} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} = 2 \pi k, \quad \int_{|x|=a} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0. \quad (6.50)$$

Προτρέπουμε τον αναγνώστη να αναλύσει τη φυσική και μαθηματική σημασία αυτών των αποτελεσμάτων, αφού λάβει υπόψη και τις υπόλοιπες παρατηρήσεις που ακολουθούν.

*Παρατήρηση 2<sup>η</sup>*

Από την (6.43) είναι φανερό ότι το πραγματικό μέρος του μιγαδικού δυναμικού  $f(z)$  που αναλύθηκε στο Παράδειγμα 6.3 δεν είναι άλλο από τη βασική λύση της εξίσωσης του Laplace στον  $\mathbb{R}^2$  με πόλο το σημείο  $\xi = (0, 0)$ .

*Παρατήρηση 3<sup>η</sup>*

Η φυσική σημασία των μιγαδικών δυναμικών που εξετάζουμε σ' αυτό το εδάφιο δεν περιορίζεται στην περιγραφή στάσιμων διδιάστατων ροών. Έτσι, το διάνυσμα  $v(x, y)$  μπορεί να αντιστοιχεί σ' ένα στατικό ηλεκτρικό ή μαγνητικό, για παράδειγμα, πεδίο. Θυμίζουμε ότι ένα στατικό ηλεκτρικό πεδίο,  $E(x)$  ικανοποιεί τις εξισώσεις Maxwell

$$\nabla \cdot E = 4\pi \rho(x), \quad \nabla \times E = 0, \quad (6.51)$$

όπου  $\rho(x)$  πυκνότητα φορτίου στο σημείο  $x$  στο  $\mathbb{R}^3$ . Όταν η κατανομή φορτίων είναι ανεξάρτητη από μια από τις τρεις χωρικές διαστάσεις, όπως και στην περίπτωση ενός ομοιόμορφα φορτισμένου σύρματος που σε κάποια προσέγγιση μπορεί να θεωρηθεί ότι ορίζει μια άπειρη ευθεία, τότε καταλήγουμε σ' ένα πεδίο του  $\mathbb{R}^2$  της μορφής

$$E(x, y) = E_1(x, y) e_x + E_2(x, y) e_y, \quad (6.52)$$

και οι (6.57) γίνονται

$$E_{1,x} + E_{2,y} = 4\pi \lambda(x, y) \text{ και } E_{2,x} - E_{1,y} = 0, \quad (6.53)$$

όπου  $\lambda(x, y)$  το φορτίο ανά μονάδα μήκους στην εγκάρσια προς το επίπεδο  $xy$  κατεύθυνση (γραμμική πυκνότητα). Αφού  $\nabla \times E = 0$ , μπορούμε να θέσουμε

$$(E_1, E_2) = -(\phi_x, \phi_y) \quad (6.54)$$

(το αρνητικό πρόσημο αποτελεί συμβατική επιλογή). Τότε, από την (6.53), βλέπουμε αμέσως ότι το δυναμικό  $\phi(x, y)$  είναι αρμονική συνάρτηση σ' όλα τα σημεία  $(x, y)$  του  $\mathbb{R}^2$  όπου  $\lambda(x, y) = 0$ . Συνεπώς, κάθε μιγαδική συνάρτηση  $f(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$  που είναι αναλυτική στην περιοχή του  $\Omega$  του  $\mathbb{R}^2$  αντιστοιχεί σ' ένα στατικό ηλεκτρικό πεδίο στην  $\Omega$ , ενώ τα σημεία όπου η  $f(z)$  παύει να είναι αναλυτική περιμένουμε ότι θ' αντιστοιχούν τα φορτισμένα τμήματα του εγκάρσιου προς το επίπεδο  $xy$  κυλινδρικού σώματος.

Με ανάλογο τρόπο, οι εξισώσεις Maxwell για ένα στατικό μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται από ηλεκτρικά ρεύματα της μορφής

$$J(x) = J_3(x, y) e_z \quad (6.55)$$

ανάγονται στη μορφή

$$B_{1,x} + B_{2,y} = 0 \quad (\nabla \cdot B = 0) \quad (6.56)$$

και

$$B_{2,x} - B_{1,y} = \frac{4\pi}{c} J_3(x, y) \quad \left( \nabla \times B = \frac{4\pi}{c} J \right). \quad (6.57)$$

Έτσι, σε μια περιοχή  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  όπου  $J_3(x, y) = 0$ , μπορούμε να θέσουμε

$$(B_1, B_2) = (\phi_x, \phi_y) \quad (6.58)$$

όπου η  $\phi(x, y)$  είναι αρμονική συνάρτηση. Στην περίπτωση αυτή, περιμένουμε ότι η αντίστοιχη συνάρτηση  $f(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$  παύει να είναι αναλυτική εκεί όπου το επίπεδο  $xy$  διαπερνιέται από τους αγωγούς των ηλεκτρικών ρευμάτων.

### Παρατήρηση 3<sup>η</sup>

Το άθροισμα των συναρτήσεων  $f_1(z)$  και  $f_2(z)$  είναι μια αναλυτική συνάρτηση στην τομή των περιοχών  $\Omega_1$  και  $\Omega_2$  όπου οι  $f_1$  και  $f_2$  είναι αναλυτικές, αντίστοιχα. Αυτή η παρατήρηση, που αντιστοιχεί στη γραμμικότητα της εξίσωσης Laplace, μας επιτρέπει να κατασκευάζουμε εύκολα νέα και περιπλοκότερα μιγαδικά δυναμικά από γνωστά απλούστερα, όπως στο

### Παράδειγμα 6.5

Το άθροισμα των μιγαδικών δυναμικών  $f_1 = z$  και  $f_2 = z^{-1}$  δίνει το δυναμικό

$$f(z) = z + \frac{1}{z}, \quad (6.59)$$

το οποίο μπορεί να γραφεί και σαν

$$\begin{aligned} f(z) &= r e^{i\theta} + (r e^{i\theta})^{-1} = r e^{i\theta} + \frac{1}{r} e^{-i\theta} = \\ &= \left(r + \frac{1}{r}\right) \cos \theta + i \left(r - \frac{1}{r}\right) \sin \theta. \end{aligned} \quad (6.60)$$

Άρα,

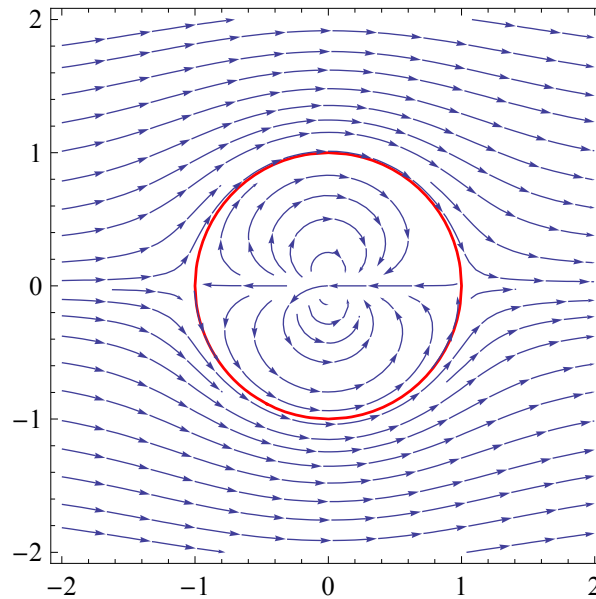
$$v(z) := \overline{f'(z)} = 1 - \frac{1}{z^2} = 1 - \frac{e^{-2i\theta}}{r^2} = \left(1 - \frac{\cos 2\theta}{r^2}\right) - i \frac{\sin 2\theta}{r^2}. \quad (6.61)$$

Από αυτή την έκφραση φαίνεται καθαρά ότι  $v = (1, 0)$  για πολύ μεγάλα  $r$ , δηλαδή ασυμπτωτικά, η ροή γίνεται ομοιόμορφη και παράλληλη προς τον άξονα  $x$ , όπως στο Παράδειγμα 6.2.

Για μια λεπτομερέστερη περιγραφή της ροής στην περιοχή όπου το  $r$  είναι της τάξης της μονάδας, στρεφόμαστε στη συνάρτηση ροής

$$\psi(x, y) = \operatorname{Im} f = \left(r - \frac{1}{r}\right) \sin \theta \quad (6.62)$$

κι εξετάζουμε τις καμπύλες  $\psi = \text{σταθ}$ . Μια απ' αυτές προσδιορίζεται από την επιλογή  $\psi = 0$ . Από την (6.62) έπεται ότι η  $\psi$  μηδενίζεται όταν  $r = 1$ , ή και  $\theta = 0, \pi$ . Για  $r = 1$  παίρνουμε ένα κύκλο μοναδιαίο με κέντρο το  $(x, y) = (0, 0)$ , ενώ οι τιμές  $\theta = 0, \pi$  δίνουν τον άξονα  $x$ . Αυτό σημαίνει ότι η γραμμή ροής  $\psi = 0$  διακλαδώνεται στα σημεία  $(x, y) = (-1, 0)$  και  $(x, y) = (1, 0)$ , όπως στο Σχ. 6.4. Σ' αυτό το σχήμα παριστάνονται μερικές από τις γραμμές ροής στην περιοχή  $-2 < x < 2, -2 < y < 2$ .



Σχ. 6.4 Οι γραμμές ροής που αντιστοιχούν στο μιγαδικό δυναμικό (6.59).

**Παράδειγμα 6.6**

Από το Σχ. 6.4 και μόνο, μπορεί κανείς να συμπεράνει ότι η λεγόμενη *ανακύκλωση* ή *κυκλοφορία* του ρευστού γύρω από την περιοχή  $r < 0$ , δηλαδή το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$R := \int_{r=a \geq 1} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} ds \tag{6.63}$$

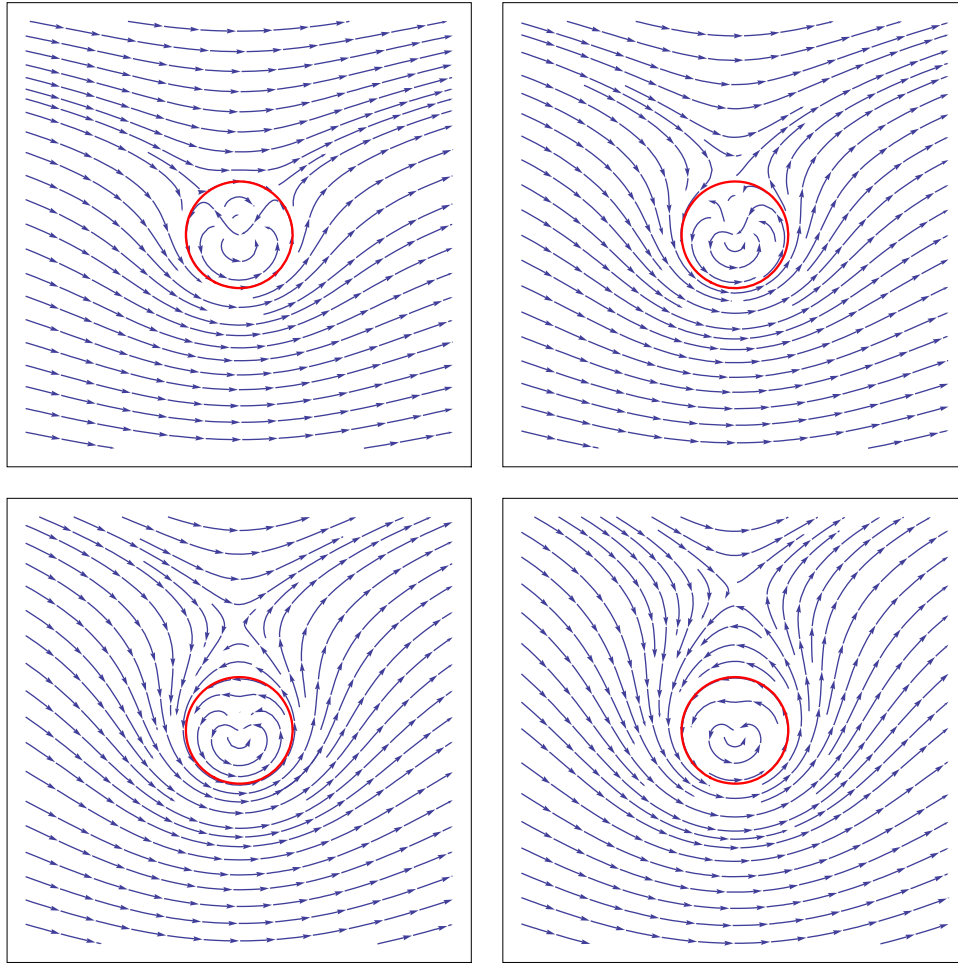
μηδενίζεται για τη ροή που αντιστοιχεί στο δυναμικό (6.59).

Από την άλλη μεριά, η (6.63) δίνει την τιμή  $2k\pi$  για την κυκλοφορία της ροής που μελετήσαμε στο Παράδειγμα 6.4, αν την υπολογίσουμε κατά μήκος ενός βρόχου που περικλείει τον κύκλο  $r \leq 1$ .

Έτσι, μπορούμε αμέσως να κατασκευάσουμε ένα δυναμικό που η αντίστοιχη ροή μοιάζει σ' εκείνη του προηγούμενου παραδείγματος, αλλά η κυκλοφορία της γύρω από το  $(x, y) = (0, 0)$  είναι μη-μηδενική. Αρκεί, για το σκοπό αυτό, να προσθέσουμε στο δυναμικό (6.59) το (6.39). Μ' αυτό τον τρόπο, καταλήγουμε στην έκφραση

$$f(z) = z + \frac{1}{z} - i \frac{K}{2\pi} \ln z \tag{6.64}$$

όπου  $K = 2\pi k$ . Το Σχ. 6.5 δίνει τις γραμμές της ροής για μια αύξουσα τετράδα τιμών της ανακύκλωσης γύρω από το  $(0,0)$ .



Σχ. 6.5 Οι γραμμές ροής που αντιστοιχούν στο μιγαδικό δυναμικό (6.64), για  $K/\pi=3,4,5,6$ .

## Ασκήσεις

6.1 Χρησιμοποιώντας τον ορισμό των τελεστών  $\partial$ ,  $\bar{\partial}$  που δόθηκε στην Άσκηση 3.3, ναδειχτεί πως, αν  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ , τότε

$$\partial \bar{\partial} f(z) = \bar{\partial} \partial f(z) = \frac{1}{4} (\Delta u(x, y) + i \Delta v(x, y)) \quad (6.65)$$

6.2 Για τις ροές που αντιστοιχούν στα παρακάτω μιγαδικά δυναμικά, προσδιορίστε αναλυτικά τις ισοδυναμικές επιφάνειες, τις γραμμές ροής και την ταχύτητα  $\mathbf{v}(x, y)$  και κατασκευάστε το αντίστοιχο γράφημα.

$$(i) f(z) = iz, \quad (ii) f(z) = z^2, \quad (iii) f(z) = z + z^2, \quad (iv) f(z) = z^4, \quad (v) f(z) = iz^3.$$

6.3 Προσδιορίστε αναλυτικά τις ισοδυναμικές επιφάνειες, τις γραμμές ροής και την ταχύτητα  $\mathbf{v}(x, y)$  που αντιστοιχούν μιγαδικό δυναμικό  $f(z) = d/z$ . Κατασκευάστε μια γραφική αναπαράσταση του διανυσματικού πεδίου  $\mathbf{v}(x, y)$ .

6.4 α) Προσδιορίστε το μιγαδικό δυναμικό  $f(z)$  που αντιστοιχεί σε μια πηγή στο σημείο  $(x, y) = (-a, 0)$ ,  $a > 0$ , και μια ρουφήχτρα στο  $(x, y) = (a, 0)$ , η οποία έχει την ίδια, σε απόλυτη

τιμή, *παροχή* με την πηγή. Ως μέτρο της παροχής θεωρήστε το ολοκλήρωμα

$$\Pi := \int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds, \quad (6.66)$$

όπου  $C$  ένας κύκλος που περιέχει μόνο την πηγή ή τη ρουφήχτρα, αντίστοιχα. Στη συνέχεια, βρείτε τις γραμμές ροής και κατασκευάστε μια γραφική αναπαράσταση του διανυσματικού πεδίου  $\mathbf{v}(x, y)$ .

β) Θεωρήστε το όριο  $a \rightarrow 0$  του μιγαδικού δυναμικού  $f(z)$  που κατασκευάσατε, όταν το γινόμενο  $a\Pi$  διατηρείται σταθερό, και συγκρίνετέ το δυναμικό  $f(z) = d/z$  της προηγούμενης άσκησης. Με βάση το αποτέλεσμα της σύγκρισης, δώστε μια φυσική ερμηνεία του δυναμικού  $f(z) = d/z$ ;

γ) Προσδιορίστε το ηλεκτροστατικό πεδίο,  $\mathbf{E}(x, y)$ , που αντιστοιχεί στα μιγαδικά δυναμικά των μερών (α) και (β) της άσκησης.

**6.5** Να δοθεί η φυσική ερμηνεία του μιγαδικού δυναμικού  $f(z) = \cos^{-1} z$  από τη σκοπιά (i) των ομαλών διδιάστατων ροών, (ii) των ηλεκτροστατικών και (iii) των μαγνητοστατικών πεδίων.

## 7. Σύμμορφοι μετασχηματισμοί και λύσεις ΠΣΤ

Είναι καιρός να δούμε τον τρόπο με τον οποίο ο μετασχηματισμός μια περιοχής,  $\Omega$ , του μιγαδικού επιπέδου σε μια άλλη,  $\Omega^*$ , διευκολύνει τη λύση ενός προβλήματος συνοριακών για την εξίσωση Laplace.

Βασικό εργαλείο στη μέθοδο που περιγράφεται στα επόμενα είναι ο μετασχηματισμός της  $\Omega$  στην  $\Omega^*$  μέσω μιας αναλυτικής συνάρτησης,  $f$ . Γενικά, η ποιότητα ενός μετασχηματισμού  $\Omega \rightarrow \Omega^* = f(\Omega)$  αναδειχεται σαφέστερα όταν περιορίσουμε την  $f$  σε ειδικά υποσύνολα της περιοχής  $\Omega$ . Αρχίζουμε, λοιπόν, την παρουσίαση της μεθόδου αναλύοντας τον περιορισμό της  $f$  σε ομαλές καμπύλες της  $\Omega$ .

Ας υποθέσουμε, ότι η απεικόνιση  $\gamma : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  είναι κλάσης  $C^1(I)$  και ορίζεται από τη σχέση  $z = z(t) = x(t) + i y(t)$ . Αν το  $t_0 \in I$ , τότε την παράγωγο της  $\gamma$  στο  $t_0$ , δηλαδή την ποσότητα

$$z'(t_0) = x'(t_0) + i y'(t_0) \quad (7.1)$$

θα την αναφέρουμε ως **εφαπτόμενο διάνυσμα της καμπύλης**  $C = \gamma(I)$  στο σημείο  $z_0 = z(t_0)$ . Είναι προφανές ότι η ποσότητα

$$\arg z'(t_0) = \arctan(y'(t_0)/x'(t_0)) \quad (7.2)$$

αντιστοιχεί στη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα  $z'(t_0)$  με το θετικό άξονα  $x$ .

Ας θεωρήσουμε, τώρα, τις ομαλές καμπύλες  $C_1$  και  $C_2$  που ορίζονται, αντίστοιχα, από τις

$$z = z_1(t) = x_1(t) + i y_1(t), \quad z = z_2(t) = x_2(t) + i y_2(t) \quad (7.3)$$

κι ας υποθέσουμε ότι οι  $C_1$  και  $C_2$  τέμνονται στο σημείο  $z_0$ , ότι δηλαδή  $z_1(t_0) = z_2(t_0) = z_0$ . Από την προηγούμενη παράγραφο συμπεραίνουμε αμέσως ότι η γωνία  $\alpha(z_0)$  που σχηματίζουν μεταξύ τους τα εφαπτόμενα διανύσματα των  $C_1$  και  $C_2$  στο σημείο  $z_0$  δίνεται από την έκφραση

$$\alpha(z_0) := \arg z_2'(t_0) - \arg z_1'(t_0). \quad (7.4)$$

Τονίζουμε ότι, με τον τρόπο που ορίζεται εδώ, η γωνία που σχηματίζουν τα δύο διανύσματα είναι προσανατολισμένη. Η θετική της φορά είναι από το  $z_1'(t_0)$  προς το  $z_2'(t_0)$ .

Ας θεωρήσουμε, στη συνέχεια, δύο αντίγραφα του μιγαδικού επιπέδου, τα  $\mathbb{C}$  και  $\mathbb{C}^*$ , όπου

$$\mathbb{C}_z := \{z = x + i y : (x, y) \in \mathbb{R}^2\}, \quad \mathbb{C}_w := \{w = u + i v : (u, v) \in \mathbb{R}^2\}, \quad (7.5)$$

καθώς και την απεικόνιση  $f := \mathbb{C}_z \rightarrow \mathbb{C}_w$ , όπου  $f(z)$  μια συνάρτηση που είναι ολομορφική στην περιοχή  $\Omega$  του  $\mathbb{C}_z$ . Τότε

$$w = f(z) = u(x, y) + i v(x, y) \quad (7.6)$$

και άρα η εικόνα μιας καμπύλης  $z = z(t)$  του  $\mathbb{C}_z$  περιγράφεται από τη σχέση  $w = w(t) \equiv f(z(t))$ .

Ειδικότερα, οι εικόνες  $C_1^* := f(C_1)$  και  $C_2^* := f(C_2)$  των καμπυλών  $C_1$  και  $C_2$  που ορίζονται στην (7.3) περιγράφονται από τις σχέσεις

$$w = w_1(t) = f(z_1(t)), \quad w = w_2(t) = f(z_2(t)). \quad (7.7)$$

Οι  $C_1^*$  και  $C_2^*$  τέμνονται στο σημείο  $w_0 = f(z_0)$  και τα εφαπτόμενα διανύσματά τους σχηματίζουν γωνία  $\alpha^*(w_0)$ , βλ. Σχ.7.1, όπου

$$\alpha^*(w_0) := \arg w_2'(t_0) - \arg w_1'(t_0). \quad (7.8)$$

Όμως,

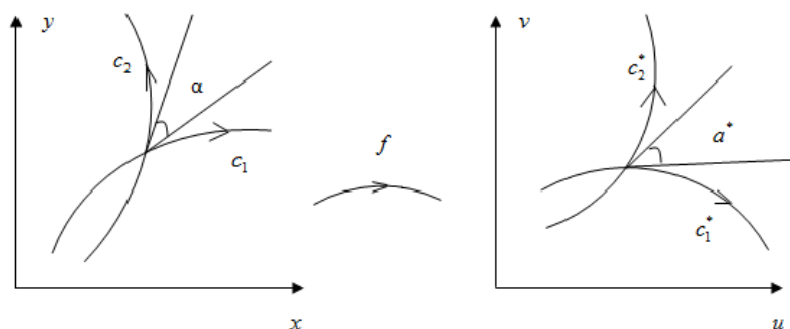
$$w'(t_0) = f'(z_0) z'(t_0) \quad (7.9)$$

και

$$f'(z_0) = |f'(z_0)| \exp[i \arg f'(z_0)], \quad z'(t_0) = |z'(t_0)| \exp[i \arg z'(t_0)] \quad (7.10)$$

Άρα,

$$\arg w'(t_0) := \arg f'(z_0) + \arg z'(t_0), \quad (7.11)$$



**Σχ. 7.1** Η απεικόνιση  $z \rightarrow w = f(z)$  μετατρέπει την γωνία  $\alpha$  που σχηματίζουν τα εφαπτόμενα διανύσματα δύο καμπυλών που τέμνονται σε  $\alpha^*$ . Γενικά,  $\alpha^* \neq \alpha$ .

Υποθέτοντας ότι  $f'(z_0) \neq 0$ , για να είναι τα εφαπτόμενα διανύσματα των  $C_1^*$  και  $C_2^*$  στο  $w_0$  διακριτά, βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \alpha^*(w_0) &= [\arg f'(z_0) + \arg z_2'(t_0)] - [\arg f'(z_0) + \arg z_1'(t_0)] = \\ &= \arg z_2'(t_0) - \arg z_1'(t_0) \end{aligned} \quad (7.12)$$

ή

$$\alpha^*(w_0) = \alpha(z_0). \quad (7.13)$$

Μια απεικόνιση ενός χώρου  $X$  στο χώρο  $Y$  ονομάζεται **σύμμορφος μετασχηματισμός** όταν η γωνία υπό την οποία τέμνονται δύο καμπύλες  $C_1$  και  $C_2$  του  $X$  είναι ίση προς τη γωνία υπό την οποία τέμνονται οι εικόνες τους στον  $Y$ . Με βάση, λοιπόν, τις προηγούμενες παρατηρήσεις, καταλήγουμε στο ακόλουθο αποτέλεσμα:

**Θεώρημα 7.1** (Οι αναλυτικές συναρτήσεις ορίζουν σύμμορφους μετασχηματισμούς)



Ο μετασχηματισμός  $f : \{z = x + i y\} \rightarrow \{w = u + i v\}$  που ορίζεται από μια αναλυτική συνάρτηση  $f$  είναι σύμμορφος στα σημεία του μιγαδικού επιπέδου όπου  $f'(z) \neq 0$ .

### Απόδειξη

Η συνθήκη  $f'(z_0) \neq 0$  εξασφαλίζει ότι ο μετασχηματισμός  $z \rightarrow w = f(z)$  είναι 1-1 και άρα αντιστρέψιμος στη γειτονιά του  $z_0$ . Με άλλα λόγια, υπάρχει μια συνάρτηση  $F(w)$  τέτοια που  $F(w_0) = z_0$ , όταν  $w_0 = f(z_0)$ , και το ίδιο ισχύει για τα γειτονικά σημεία του  $z_0$ . Επιπλέον, η  $F(w)$  είναι διαφορίσιμη στο  $w_0$  και μάλιστα

$$F'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}, \quad \text{όταν } w_0 = f(z_0). \quad (7.14)$$

Αυτές οι διαπιστώσεις αποδεικνύονται ακριβώς όπως στην πραγματική ανάλυση. Ας γράψουμε, για παράδειγμα το μετασχηματισμό  $z \rightarrow w = f(z)$  στη μορφή  $(x, y) \rightarrow (u, v)$ , όπου  $u = u(x, y)$ ,  $v = v(x, y)$  και οι συναρτήσεις  $u, v$  ορίζονται από την  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ . Τότε, από τις συνθήκες C-R έπεται ότι

$$|f'(z)|^2 = |u_x + i v_y|^2 = u_x^2 + v_y^2 = u_x v_y - u_y v_x. \quad (7.15)$$

Το τελευταίο μέλος αυτής της αλυσίδας ισοτήτων δεν είναι άλλο από την ορίζουσα Jacobi  $\partial(u, v)/\partial(x, y)$  του μετασχηματισμού  $(x, y) \rightarrow (u, v)$ . Άρα, η συνθήκη  $f'(z_0) \neq 0$  ισοδυναμεί με το μη μηδενισμό αυτής της ορίζουσας Jacobi στο  $(x_0, y_0)$ . Τότε, όμως, ο αντίστροφος του μετασχηματισμού  $(x, y) \rightarrow (u, v)$  όχι μόνο υπάρχει, αλλά και οι δυο συναρτήσεις που τον εκφράζουν είναι συνεχώς διαφορίσιμες. ■

Όσο αφορά τη λύση της εξίσωσης Laplace στο επίπεδο, η σημασία των σύμμορφων μετασχηματισμών προκύπτει από το

### **Θεώρημα 7.2** (Οι σύμμορφοι μετασχηματισμοί διατηρούν την αρμονία)

Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση  $\phi(x, y)$  είναι αρμονική στη περιοχή  $\Omega$  του  $\mathbb{R}^2$  κι ότι η συνάρτηση  $f(z)$  είναι αναλυτική με  $f'(z) \neq 0$  στην περιοχή του μιγαδικού επιπέδου που αντιστοιχεί στην  $\Omega$  μέσω της  $z = x + i y$ . Αν γράψουμε τον αντίστροφο του μετασχηματισμού  $(x, y) \rightarrow (u, v)$  στη μορφή

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad (7.16)$$

τότε η συνάρτηση

$$\Phi(u, v) := \phi(x(u, v), y(u, v)) \quad (7.17)$$

είναι αρμονική στην περιοχή  $f(\Omega)$ .

### Απόδειξη

Θεωρήστε τη συνάρτηση  $\psi(x, y)$  που είναι συζυγής αρμονική της  $\phi(x, y)$ . Η μιγαδική συνάρτηση  $h(z)$ , όπου

$$h(z) = \phi(x, y) + i \psi(x, y) \quad (7.18)$$

είναι αναλυτική. Αφού η παράγωγος της  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  δε μηδενίζεται στην περιοχή  $\Omega$ , έπεται ότι η  $F(w) = x(u, v) + i y(u, v)$  είναι διαφορίσιμη στην περιοχή  $f(\Omega)$  του επιπέδου  $u v$  και άρα αναλυτική εκεί πέρα. Η σύνθεση αναλυτικών συναρτήσεων είναι αναλυτική και άρα η  $G(w)$ , όπου

$$G(w) = (h \circ F)(w) = \phi(x(u, v), y(u, v)) + i \psi(x(u, v), y(u, v)) \quad (7.19)$$

είναι αναλυτική στην περιοχή  $f(\Omega)$ . Τότε όμως τόσο το πραγματικό της μέρος όσο και το φανταστικό είναι αρμονικές συναρτήσεις.

■

Με βάση το Θεώρημα 7.2, μπορούμε συχνά να απλοποιήσουμε ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών για την εξίσωση  $\Delta \phi(x, y) = 0$  στην περιοχή  $\Omega$  του επιπέδου  $x y$ , μετατρέποντάς το σε πρόβλημα συνοριακών τιμών για την εξίσωση  $\Delta \Phi(u, v) = 0$  στην περιοχή  $f(\Omega)$  του επιπέδου  $u v$ , όπου  $f$  ο κατάλληλος σύμμορφος μετασχηματισμός. Είναι φανερό ότι η εύρεση του κατάλληλου σύμμορφου μετασχηματισμού που αποτελεί το κλειδί για την απλοποίηση του προβλήματος δεν είναι πάντα εύκολη υπόθεση. Ακόμα και όταν είναι εφικτή, προϋποθέτει εκτεταμένη σχετική πείρα. Οι λεπτομέρειες της παραπάνω μεθόδου επεξηγούνται στα παραδείγματα που ακολουθούν.

### Παράδειγμα 7.1

Η απεικόνιση

$$z \rightarrow w = f(z) = e^z \quad (7.20)$$

παίρνει τη μορφή

$$u + i v = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y) \quad (7.21)$$

αν θέσουμε  $z = x + i y$ ,  $w = u + i v$ ,

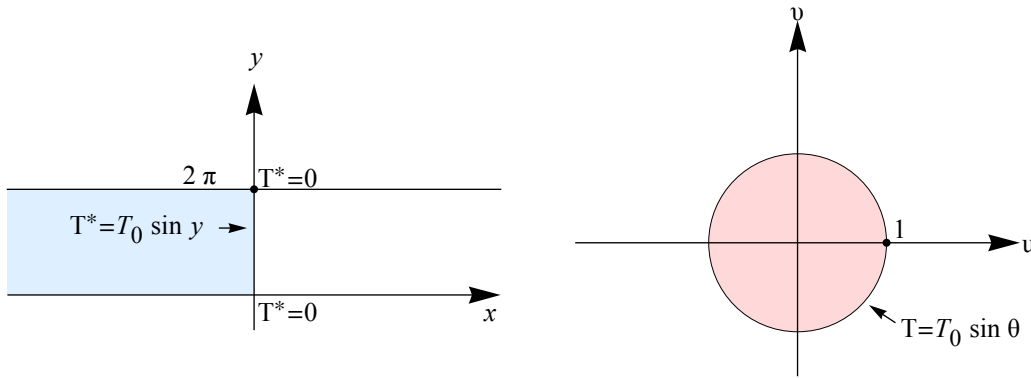
και

$$R e^{i\theta} = e^x e^{iy} \quad (7.22)$$

αν γράψουμε το μιγαδικό αριθμό  $w$  στην τριγωνομετρική του μορφή  $w = R e^{i\theta}$ .

Από την (7.22) γίνεται φανερό ότι οι ευθείες  $x = \text{σταθ.}$  του επιπέδου  $\mathbb{C}_z$  απεικονίζονται στους κύκλους  $R = (u^2 + v^2)^{1/2} = e^x$  του επιπέδου  $\mathbb{C}_w$ . Πιο συγκεκριμένα, το τμήμα  $0 \leq y \leq 2\pi$  της ευθείας  $x = x_0$  αντιστοιχεί σ' ολόκληρο τον κύκλο  $R = e^{x_0}$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  του επιπέδου  $\mathbb{C}_w$ . Προφανώς,  $R < 1$ ,  $R = 1$  και  $R > 1$  όταν  $x_0 < 0$ ,  $x_0 = 0$  και  $x_0 > 0$ , αντίστοιχα.

Άρα το τμήμα  $x < 0$  της λωρίδας  $0 \leq y \leq 2\pi$  αντιστοιχεί στο εσωτερικό του κλειστού δίσκου  $0 \leq R \leq 1$  και το τμήμα  $x > 0$  της παραπάνω λωρίδας στο εξωτερικό αυτού του δίσκου, όπως στο Σχ. 7.2.



**Σχ. 7.2** Η απεικόνιση  $z \rightarrow w = e^z$  μετατρέπει το τμήμα  $x < 0$  ( $x > 0$ ) της λωρίδας  $0 < y < 2\pi$  στο εσωτερικό (εξωτερικό) του κύκλου  $u^2 + v^2 = 1$ .

Η συνάρτηση  $f(z) = \exp(z)$  είναι αναλυτική και  $f'(z) \neq 0$  σ' ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο  $\mathbb{C}_z$ . Άρα ο μετασχηματισμός (7.22) είναι σύμμορφος κι ο αντίστροφός του υπάρχει για κάθε  $w$ .

Μπορούμε να κατασκευάσουμε τον αντίστροφο του (7.22) τμηματικά χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση  $\ln w$ . Συγκεκριμένα, αν θέσουμε

$$z = F(w) = \ln w = \ln R + i\theta, \quad R > 0, \quad 0 < \theta < 2\pi, \quad (7.23)$$

θα έχουμε την αντίστροφη της απεικόνισης  $z \rightarrow w = f(z)$  για όλο το μιγαδικό επίπεδο  $w$  εκτός από τον πραγματικό ημιάξονα  $L := \{(u, v) : u \geq 0, v = 0\}$ .

Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι μας έχει δοθεί το εξωτερικό πρόβλημα Dirichlet

$$\Delta T(u, v) = 0, \quad (7.24)$$

$$T(u, v)|_{R=1} = T_0 \sin \theta, \quad \theta = \tan^{-1} \left( \frac{v}{u} \right), \quad (7.25)$$

$$|T(u, v)| \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty, \quad (7.26)$$

όπου  $T_0$  δοσμένη σταθερή. Από τη σκοπιά της φυσικής, η συνάρτηση  $T(u, v)$  θα μπορούσε να παριστάνει τη θερμοκρασία στο περιβάλλον ενός (άπειρου μήκους) κυλίνδρου μοναδιαίας ακτίνας. Έτσι, το δοσμένο πρόβλημα έγκειται στον προσδιορισμό της θερμοκρασίας του περιβάλλοντος όταν είναι γνωστή η θερμοκρασία της επιφάνειας του κυλίνδρου.

Με βάση το μετασχηματισμό (7.23), το παραπάνω πρόβλημα στο επίπεδο  $uv$  μετατρέπεται στο ακόλουθο πρόβλημα στο επίπεδο  $xy$

$$\Delta S(x, y) = 0, \quad x > 0, \quad 0 < y < 2\pi \quad (7.27)$$

$$S(x, 0) = S(x, 2\pi) = 0, \quad x > 0, \quad S(0, y) = T_0 \sin y, \quad (7.28)$$

$$|S(x, y)| \rightarrow 0, \quad \text{για } 0 < y < 2\pi, \quad x \rightarrow \infty, \quad (7.29)$$

όπου

$$S(x, y) = T(u(x, y), v(x, y)). \quad (7.30)$$

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών, εύκολα βρίσκουμε ότι η λύση του προβλήματος (7.27-29) δίνεται από την έκφραση

$$S(x, y) = T_0 e^{-x} \sin y, \quad (7.31)$$

πράγμα που επαληθεύεται άμεσα. Όμως, από την (7.26) έπεται ότι

$$e^x = R = \sqrt{u^2 + v^2}, \quad \sin y = \sin \theta = \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \quad (7.32)$$

και άρα η (7.31) μπορεί να γραφτεί και σαν

$$T(u, v) = S(x(u, v), y(u, v)) = \frac{T_0 v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \quad (7.33)$$

Μ' αυτό τον τρόπο ολοκληρώθηκε η λύση του αρχικού προβλήματος, η οποία μπορεί προφανώς να γραφτεί και στη μορφή

$$\Theta(R, \theta) := T(u(R, \theta), v(R, \theta)) = T_0 \frac{\sin \theta}{R}. \quad (7.34)$$

Από την τελευταία έκφραση γίνεται φανερό ότι, στην προκειμένη περίπτωση, το αρχικό πρόβλημα θα μπορούσε να έχει λυθεί εύκολα με αντικατάσταση των μεταβλητών  $u$  και  $v$  από τις  $R, \theta$ , όπως υπαγορεύει η γεωμετρία της φυσικής διάταξης. Όμως, ο περίπλοκος τρόπος επίλυσης που ακολουθήσαμε παραπάνω διατηρεί την αξία του, γιατί αντιμετωπίζει το "αρχικό" και το "τροποποιημένο" πρόβλημα ισότιμα.

Συγκεκριμένα, η γεωμετρία του αρχικού φυσικού προβλήματος θα μπορούσε να είναι αυτή που αντιστοιχεί στο επίπεδο  $x y$  του σχήματος 7.2. Θα μπορούσαν δηλαδή να μας ζητάνε τη θερμοκρασία στο εσωτερικό μιας μεταλλικής πλάκας της οποίας η διατομή περιγράφεται από τη λωρίδα  $x \geq 0, 0 \leq y \leq 2\pi$  του επιπέδου  $x y$ , όταν η θερμοκρασία στα επιφανειακά της επίπεδα είναι αυτή που δείχνουμε στο αριστερό μέρος του σχήματος 7.2. Γνωρίζοντας ότι αυτή η λωρίδα μπορεί ν' απεικονιστεί σύμμορφα στο εξωτερικό του δίσκου  $0 \leq R \leq 1$  του επιπέδου  $u v$ , είμα- στε σε θέση να δώσουμε αμέσως τη λύση του παραπάνω προβλήματος, με βάση τη λύση (7.33) του αντίστοιχου προβλήματος στο επίπεδο  $u v$ .

■

## Παράδειγμα 7.2

Η σχέση

$$w = \cosh z = \frac{1}{2} (e^z + e^{-z}) \quad (7.35)$$

ορίζει μια σύμμορφη απεικόνιση του μιγαδικού επιπέδου  $\mathbb{C}_z$  στο μιγαδικό επίπεδο  $\mathbb{C}_w$ , στην οποία η λωρίδα  $x \geq 0, 0 \leq y \leq \pi$  του επιπέδου  $x y$  έχει για εικόνα το τμήμα  $v \geq 0$  του επιπέδου  $u v$ . Αυτό γίνεται φανερό ευθύς μόλις παρατηρήσουμε ότι

$$\sinh z = \frac{1}{2} (e^z - e^{-z}) = -i \sin(iz), \quad \cosh z = \cos(iz). \quad (7.36)$$

Γιατί, τότε, η (7.35) γίνεται

$$\begin{aligned} w = \cos(iz) &= \cos(ix - y) = \cos(ix) \cos(y) + \sin(ix) \sin(y) \\ &= \cosh x \cosh y + i \sinh x \sinh y. \end{aligned} \quad (7.37)$$

Συνεπώς,

$$u = \cosh x \cosh y, \quad v = \sinh x \sinh y. \quad (7.38)$$

Από τη δεύτερη των (7.38) βλέπουμε ότι  $v > 0$ , όταν το σημείο  $(x, y)$  ανήκει στην ανοιχτή λωρίδα  $\Omega = \{(x, y) : x > 0, 0 < y < \pi\}$ . Επιπλέον, οι (7.38) δείχνουν καθαρά ότι το σύνορο  $\partial\Omega$  της  $\Omega$  απεικονίζεται στην ευθεία  $v = 0$  του επιπέδου  $uv$ , αφού

$$x \geq 0, y = 0 \Leftrightarrow u \geq 0, v = 0, \quad (7.39)$$

$$x = 0, 0 \leq y < \pi \Leftrightarrow -1 \leq u \leq 1, v = 0, \quad (7.40)$$

$$x \geq 0, y = \pi \Leftrightarrow u \leq -1, v = 0. \quad (7.41)$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι μας έχει δοθεί για λύση το παρακάτω πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\Delta T(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega \quad (7.42)$$

$$T(x, 0) = T(x, \pi) = 0, \quad x > 0, \quad (7.43)$$

$$T(0, y) = T_0 = \text{σταθ.}, \quad 0 < y < \pi. \quad (7.44)$$

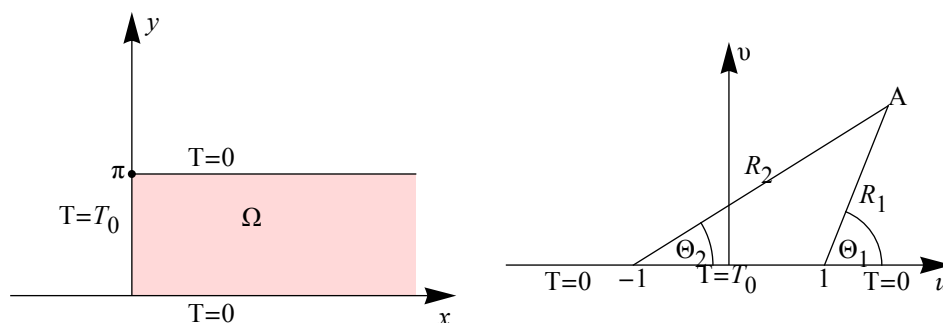
Αφού η απεικόνιση  $z \rightarrow w = \cosh z$  είναι σύμμορφη, η συνάρτηση  $T^*(u, v) = T(x(u, v), y(u, v))$  θα είναι και αυτή αρμονική και άρα το πρόβλημα (7.42-44) παίρνει τη μορφή

$$\Delta T^*(u, v) = 0, \quad v > 0, \quad (7.45)$$

$$T^*(u, 0) = 0, \quad |u| > 1, \quad T^*(u, 0) = T_0, \quad |u| < 1, \quad (7.46)$$

στο επίπεδο  $uv$ . Αυτό το πρόβλημα μπορεί να λυθεί αμέσως με βάση την ακόλουθη παρατήρηση.

Θεωρούμε το τυχαίο σημείο  $A = (u, v) \Leftrightarrow w = u + iv$  και τα ευθύγραμμα τμήματα που ενώνουν το  $A$  με τα σημεία  $(u, v) = (1, 0)$  και  $(u, v) = (-1, 0)$ , αντίστοιχα, όπως στο δεξί μέρος του σχήματος 7.3.



**Σχ. 7.3** Η συνάρτηση  $w = \cosh z$  απεικονίζει το τμήμα  $x > 0$  της λωρίδας  $0 < y < \pi$  στο τμήμα  $v = \text{Im } w > 0$  του μιγαδικού επίπεδου  $\mathbb{C}_w$ .

Ο μιγαδικός αριθμός  $w$  που αντιστοιχεί στο  $A$  μπορεί να γραφτεί σαν

$$w = 1 + R_1 e^{i\theta_1} \quad (7.47)$$

αλλά και με τη μορφή

$$w = -1 + R_2 e^{i\theta_2}, \quad (7.48)$$

όπου  $\theta_1, \theta_2 \in [0, \pi]$ . Άρα

$$\frac{w-1}{w+1} = \frac{R_1}{R_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}, \quad (7.49)$$

οπότε

$$H^*(w) := \ln \frac{w-1}{w+1} = \ln \left| \frac{R_1}{R_2} \right| + i(\theta_1 - \theta_2). \quad (7.50)$$

Αλλά η συνάρτηση  $H^*(w)$  είναι αναλυτική για  $w \neq 1, -1$ . Έτσι, το φανταστικό μέρος  $(\theta_1 - \theta_2)$  είναι μια αρμονική συνάρτηση των πραγματικών μεταβλητών  $u$  και  $v$  και το ίδιο ισχύει για την

$$T^*(u, v) = \frac{T_0}{\pi} (\theta_1 - \theta_2) = \frac{T_0}{\pi} \text{Im } H^*(w). \quad (7.51)$$

Με τη βοήθεια του Σχ. 7.3 εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι η  $T^*(u, v)$  που δίνεται από αυτή την εξίσωση ικανοποιεί και τις συνοριακές συνθήκες (7.46), οπότε δίνει και τη συνολική λύση του προβλήματος (7.42-44).

Για να επιστρέψουμε στο αρχικό πρόβλημα, παρατηρούμε ότι

$$H(z) = H^*(w(z)) = \ln \frac{\cosh z - 1}{\cosh z + 1} = \ln \tanh^2 \left( \frac{z}{2} \right) \quad (7.52)$$

και άρα

$$T(x, y) = \frac{T_0}{\pi} \text{Im } H(z) = \text{Im} \frac{2 T_0}{\pi} \left\{ \ln \tanh \left( \frac{z}{2} \right) \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2 T_0}{\pi} \operatorname{Im} \left\{ \ln \tanh\left(\frac{z}{2}\right) + i \arg \left[ \tanh\left(\frac{z}{2}\right) \right] \right\} \\
&= \frac{2 T_0}{\pi} \tan^{-1} \left[ \frac{\operatorname{Im} \left( \tanh\left(\frac{z}{2}\right) \right)}{\operatorname{Re} \left( \tanh\left(\frac{z}{2}\right) \right)} \right].
\end{aligned}$$

Όμως,

$$\tanh\left(\frac{z}{2}\right) \equiv \frac{\sinh\left(\frac{z}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{z}{2}\right)} = \frac{\sinh\left(\frac{z}{2}\right) \overline{\cosh\left(\frac{z}{2}\right)}}{\cosh\left(\frac{z}{2}\right) \overline{\cosh\left(\frac{z}{2}\right)}} = \frac{\sinh x + i \sin y}{\cosh x + \cos y}. \quad (7.54)$$

Άρα, η (7.53) γίνεται

$$T(x, y) = \frac{2 T_0}{\pi} \tan^{-1} \left[ \frac{\sin y}{\sinh x} \right]. \quad (7.55)$$

■

Θα κλείσουμε τη βιαστική περιήγησή μας στο χώρο των σύμμορφων μετασχηματισμών παρουσιάζοντας τη σχέση τους με το ζήτημα της κατασκευής της συνάρτησης Green για το πρόβλημα Laplace-Dirichlet στο επίπεδο. Αυτή η σχέση στηρίζεται στο περίφημο θεώρημα της σύμμορφης απεικόνισης του Riemann. Ο χώρος και ο στόχος αυτού του συγγράματος μας περιορίζουν στο να το διατυπώσουμε μόνο και να δώσουμε ένα αντιπροσωπευτικό παράδειγμα.

### Θεώρημα 7.3 (Θεώρημα του Riemann για σύμμορφες απεικονίσεις)

Ας υποθέσουμε ότι το  $\Omega$  είναι γνήσιο, ανοιχτό και απλά συνεκτικό υποσύνολο του μιγαδικού επιπέδου  $\mathbb{C}_z$ . Αν το  $z_0$  είναι ένα τυχαίο σημείο του  $\Omega$ , τότε υπάρχει αναλυτική συνάρτηση  $f(z)$ , με τη βοήθεια της οποίας, μπορούμε ν' απεικονίσουμε την περιοχή  $\Omega$  στο μιγαδικό επίπεδο  $\mathbb{C}_w$  με τρόπο ώστε,

(i) Το σημείο  $z_0$  ν' απεικονίζεται στην αρχή των αξόνων του  $\mathbb{C}_w$ :  $f(z_0) = 0$ .

(ii) Η απεικόνιση να είναι αμφιμονοσήμαντη.

(iii) Η περιοχή  $\Omega$  ν' απεικονίζεται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου με κέντρο το σημείο  $w = 0$ :  $f(\Omega) = \{w : |w| < 1\}$ .

#### Απόδειξη

Βλ. Conway, σ. 160 & 277, Tichmarsh, σ. 207

■

Το γεγονός ότι η απεικόνιση  $w = f(z)$  του θεωρήματος Riemann είναι 1-1 και  $f(z_0) = 0$  μας επιτρέπει να την γράψουμε στη μορφή

$$w = f(z) = (z - z_0) g(z), \quad (7.56)$$

όπου  $g(z)$  αναλυτική και  $g(z) \neq 0$  σε κάθε  $z \in \Omega$ . Αν, επιπλέον, γράψουμε το μιγαδικό αριθμό  $w$  στη μορφή

$$w = e^{-U-iV}, \quad U, V \in \mathbb{R}, \quad (7.57)$$

θα έχουμε

$$U = -\ln|w| = -\ln|g(z)| - \ln|z - z_0|. \quad (7.58)$$

Ο πρώτος όρος στο τελευταίο μέλος της (7.58) είναι μια αρμονική συνάρτηση στην περιοχή του επιπέδου  $\mathbb{R}^2$  που αντιστοιχεί η  $\Omega$ , γιατί είναι το πραγματικό μέρος της αναλυτικής συνάρτησης  $-\ln(g(z))$ . Από την άλλη μεριά,

$$-\ln|z - z_0| = -\ln|r| \equiv -\ln[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^{1/2}. \quad (7.59)$$

Στην τελευταία εξίσωση αναγνωρίζουμε τη βασική λύση με πόλο στο  $(x_0, y_0)$  της εξίσωσης Laplace  $\Delta u(x, y) = 0$ . Συνεπώς, η  $U$  θα ήταν η συνάρτηση Green για το πρόβλημα Dirichlet για την εξίσωση Laplace στην περιοχή  $\Omega$  του  $\mathbb{R}^2$ , αν ίσχυε ότι  $U = 0$  όταν  $z \in \partial\Omega$ .

Αλλά, αυτό όντως ισχύει, αφού  $f(\partial\Omega) = \{w : |w| = 1\}$  και, άρα,  $\ln|w| = 0$  για κάθε  $z \in \partial\Omega$ .

Συμπερασματικά, η εύρεση της  $f(z)$  που υπεισέρχεται στο θεώρημα Riemann για δοσμένη περιοχή  $\Omega$  ισοδυναμεί με την κατασκευή της συνάρτησης Green  $G(x, y | x_0, y_0)$  της εξίσωσης Laplace στην αντίστοιχη περιοχή του  $\mathbb{R}^2$ , που ορίζεται από τη σχέση  $z = x + iy$ . Μια ειδική περίπτωση παρουσιάζεται στο

### Παράδειγμα 7.3

Μια πολύ ενδιαφέρουσα οικογένεια σύμμορφων απεικονίσεων είναι οι **γραμμικοί κλασματικοί μετασχηματισμοί**

$$z \rightarrow w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (7.60)$$

όπου  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ , και

$$ad - bc \neq 0. \quad (7.61)$$

Από την (7.60) εύκολα βρίσκουμε ότι

$$f'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}, \quad (7.62)$$

από την οποία γίνεται φανερό ότι η συνθήκη (7.61) εξασφαλίζει το σύμμορφο των μετασχηματισμών (7.60).

Δεν είναι δύσκολο ν' αποδείξει κανείς ότι οι παραπάνω μετασχηματισμοί απεικονίζουν το σύνολο των κύκλων κι ευθειών του μιγαδικού επιπέδου  $\mathbb{C}_z$  στο σύνολο των κύκλων κι ευθειών του μιγαδικού επιπέδου  $\mathbb{C}_w$ .

Ας πάρουμε, για παράδειγμα, την περίπτωση



$$w = f(z) = \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}, \quad z_0 = x_0 + i y_0, \quad y_0 > 0, \quad (7.63)$$

που αντιστοιχεί στην επιλογή

$$a = c = 1, \quad b = -z_0, \quad d = -\bar{z}_0. \quad (7.64)$$

Σ' αυτή την περίπτωση  $ad - bc = 2i y_0 \neq 0$  και

$$f'(z) = \frac{2i y_0}{(z - \bar{z}_0)^2}. \quad (7.65)$$

Από την (7.63) έπεται ότι

$$w = \frac{x - z_0}{x - \bar{z}_0}, \quad \text{όταν } z = x, \quad (7.66)$$

και άρα

$$|w|^2 = \frac{x - z_0}{x - \bar{z}_0} \frac{x - \bar{z}_0}{x - z_0} = 1, \quad \text{όταν } z = x. \quad (7.67)$$

Ταυτόχρονα

$$w_0 = f(z_0) = 0 \quad (7.68)$$

και, άρα, η  $f(z)$  που δίνεται από την (7.63) απεικονίζει, αμφιμονοσήμαντα, την περιοχή  $\Omega := \{z = x + i y, y > 0\}$  στον ανοιχτό δίσκο  $D_1(0) := \{w = u + i v : |w| < 1\}$  και το σύνορο της  $\Omega$ ,  $\partial\Omega := \{z : y = 0\}$ , στον κύκλο  $\partial D_1(0) := \{w : |w| = 1\}$ .

Συγκρίνοντας την (7.66) με την (7.56), συμπεραίνουμε ότι η παραπάνω  $f(z)$  είναι η αναλυτική συνάρτηση που υπεισέρχεται στο θεώρημα Riemann με

$$g(z) = \frac{1}{z - \bar{z}_0} \quad (7.69)$$

Είναι φανερό ότι αυτή η  $g(z)$  είναι αναλυτική στην περιοχή  $\Omega$  αφού οι συνθήκες  $y > 0$  για  $z \in \Omega$  και  $y_0 > 0$  εξασφαλίζουν ότι  $z \neq \bar{z}_0$ , πάντοτε.

Συνδυάζοντας τις (7.54) και (7.58) βρίσκουμε, τέλος, ότι η συνάρτηση Green για το ημι-επίπεδο  $y > 0$  δίνεται από την έκφραση

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = -\ln \left| \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \right|, \quad \mathbf{x} = (x, y), \quad \mathbf{x}_0 = (x_0, y_0), \quad y, y_0 > 0. \quad (7.70)$$

Δηλαδή,

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = -\frac{1}{2} \ln \frac{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}{(x - x_0)^2 + (y + y_0)^2}. \quad (7.71)$$

## Ασκήσεις

7.1 Θεωρήστε το μετασχηματισμό  $(x, y) \rightarrow (u, v)$  που ορίζεται από τη σύμμορφη απεικόνιση  $w = f(z)$ ,  $z \in \Omega$ , όπου  $z = x + iy$ ,  $w = u + iv$ . Να δειχτεί ότι, αν η  $\phi(x, y) \in C^2(\Omega)$ , τότε

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = |f'(z)|^2 (\Phi_{uu} + \Phi_{vv}),$$

όπου

$$\Phi(u, v) := \phi(x(u, v), y(u, v)),$$

Στη συνέχεια, να εξηγηθεί γιατί αυτό το αποτέλεσμα αποτελεί εναλλακτική απόδειξη του θεωρήματος ότι οι σύμμορφοι μετασχηματισμοί διατηρούν την αρμονία.

7.2 Δίνεται η απεικόνιση

$$w = z^n, \quad n = 2, 3, 4.$$

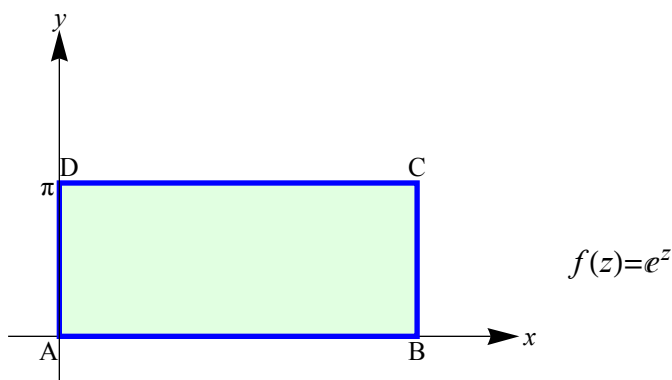
όπου  $z = x + iy$ ,  $w = u + iv$ .

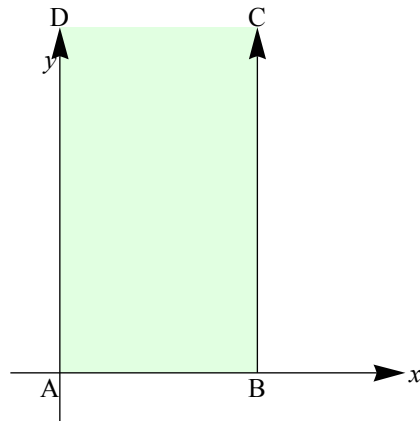
α) Να προσδιοριστούν τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου  $z$  στα οποία η παραπάνω απεικόνιση δεν είναι σύμμορφη.

β) Να δειχτεί ότι η εικόνα της περιοχής  $0 \leq \arg z \leq \pi/4$  του επιπέδου  $z$  αποτελείται από το άνω μισό ( $v \geq 0$ ) του επιπέδου  $w$ .

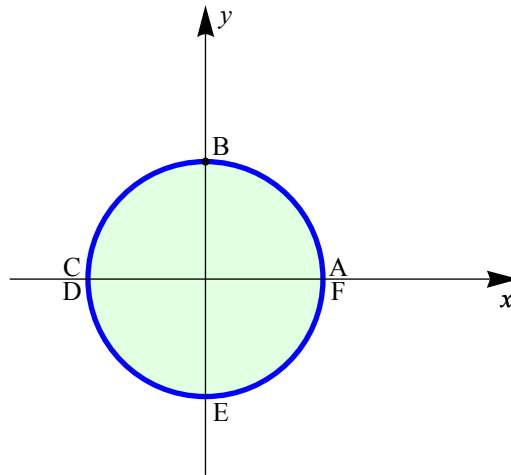
γ) Για  $n = 2$ , να προσδιοριστεί το είδος των καμπυλών του επιπέδου  $uv$  που αντιστοιχούν στις ευθείες  $x = \text{σταθ.}$  και  $y = \text{σταθ.}$  του επιπέδου  $xy$ .

7.3 Σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις να προσδιοριστεί η εικόνα  $\Omega^*$  της περιοχής  $\Omega$  του επιπέδου  $xy$  που προκύπτει μέσω της απεικόνισης  $z = x + iy \rightarrow w = f(z)$ ,  $w = u + iv$ . Ειδικότερα, να προσδιοριστούν οι εικόνες  $A^*$ ,  $B^*$ ,  $C^*$ , ..., των σημείων  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , ..., του σύνορου της  $\Omega$ . Σε κάθε περίπτωση, να εξεταστεί εάν η απεικόνιση είναι σύμμορφη στην περιοχή  $\Omega$  η οποία προσδιορίζεται με τη σκιαγράμμιση στο αντίστοιχο σχήμα.

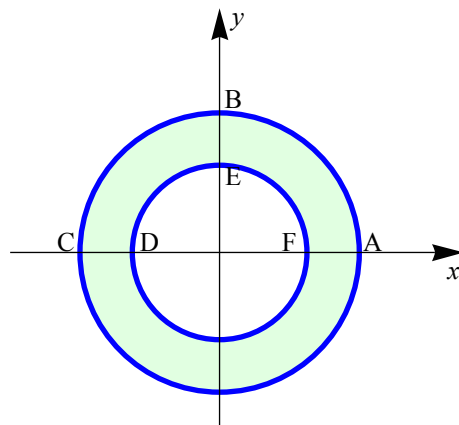




$$f(z) = -\cos\left(\frac{\pi}{a} z\right)$$



$$f(z) = \frac{i(a-z)}{a+z}$$



$$f(z) = \frac{z-a}{a z-1}$$

$$F = (b, 0)$$

$$a \in \mathbb{R}, 1 < a < b^{-1}$$

7.4 Σ' αυτή την άσκηση  $z = x + i y = r e^{i\theta}$ ,  $w = u + i v = \rho e^{i\varphi}$ .

α) Ναδειχτεί ότι οι απεικονίσεις

$$(i) w = z + a, \quad (ii) w = b z \quad \text{και} \quad (iii) w = z^{-1}, \quad \text{με } a, b \in \mathbb{C},$$

αντιπροσωπεύουν, αντίστοιχα,

(i) Μία μετάθεση κατά  $|a|$  στην κατεύθυνση  $\arg a$ .

(ii) Μία στροφή κατά γωνία  $\arg b$ , συνδυασμένη με μια αλλαγή κλίμακας κατά ένα παράγοντα  $|b|$ , και

(iii) Αντιστροφή ως προς τον κύκλο  $|z| = 1$ , συνδυασμένη με κατοπτρισμό ως προς τον άξονα  $x$  ( $y \rightarrow -y$ ).

β) Να δειχτεί ότι μια ευθεία στο επίπεδο  $x y$  μπορεί να περιγραφεί από την εξίσωση

$$r \cos(\theta - \theta_0) = p, \quad (*)$$

όπου  $p$  απόσταση του σημείου  $(x, y) = (0, 0)$  από την ευθεία και  $\theta_0$  η γωνία που σχηματίζει με το θετικό ημιάξονα  $x$  ένα διάνυσμα που ξεκινάει από το  $(x, y) = (0, 0)$  κι είναι κάθετο προς τη δοσμένη ευθεία.

Να δειχτεί επίσης ότι ένας κύκλος ακτίνας  $a$  με κέντρο το σημείο  $(x_0, y_0) = (r_0 \cos\theta_0, r_0 \sin\theta_0)$  περιγράφεται από την εξίσωση

$$r^2 - 2 r r_0 \cos(\theta - \theta_0) + r_0^2 - a^2 = 0. \quad (**)$$

γ) Να δειχθεί ότι η εικόνα της ευθείας (\*) κατά την απεικόνιση  $z \rightarrow w = z^{-1}$  είναι η καμπύλη

$$\rho = \frac{1}{p} \cos(\varphi + \theta_0)$$

κι η εικόνα του κύκλου (\*\*) είναι η καμπύλη

$$(r_0^2 - a^2) \rho^2 - 2 \rho r_0 \cos(\varphi + \theta_0) + 1 = 0.$$

Με βάση το προηγούμενο αποτέλεσμα αιτιολογήστε το συμπέρασμα ότι, κατά την απεικόνιση  $z \rightarrow w = z^{-1}$ , οι ευθείες και κύκλοι του επιπέδου  $z$  που δε διέρχονται από την αρχή των αξόνων μετατρέπονται σε κύκλους του επιπέδου  $w$ , ενώ οι ευθείες και οι κύκλοι που διέρχονται από την αρχή των αξόνων μετατρέπονται σε ευθείες.

**7.5** Θεωρήστε τους γραμμικούς κλασματικούς μετασχηματισμούς

$$z \rightarrow w = \frac{a z + b}{c z + d}, \quad (*)$$

του παραδείγματος 7.3.

α) Να δειχτεί ο αντίστροφος του παραπάνω μετασχηματισμού είναι ο

$$w \rightarrow z = \frac{-d w + b}{c w - a}.$$

β) Να δειχτεί ότι κάθε απεικόνιση της μορφής (\*) είναι σύνθεση γραμμικών απεικονίσεων της μορφής

$$z \rightarrow a z, \quad z \rightarrow z + b, \quad z \rightarrow \frac{1}{z}$$

όπου  $a, b \in \mathbb{C}$ .

γ) Να δειχτεί ότι το σύνολο των κύκλων κι ευθειών του επιπέδου  $x y$  περιγράφεται από την συνθήκη

$$\alpha z \bar{z} + \beta z + \bar{\beta} \bar{z} + \gamma = 0$$

όπου  $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{C}$ .

δ) Με βάση το προηγούμενο αποτέλεσμα, ή τ' αποτελέσματα της προηγούμενης άσκησης, δείξτε ότι κατά τις γραμμικές κλασματικές απεικονίσεις (\*) το σύνολο των κύκλων κι ευθειών του επιπέδου  $z$  (ή  $x y$ ) απεικονίζεται στο σύνολο των ευθειών και κύκλων του επιπέδου  $w$  (ή  $u v$ ).

**7.6** Να δειχτεί ότι η σύνθεση των απεικονίσεων

$$z \rightarrow t = f(z) = z^3, \quad t \rightarrow w = g(t) = i \frac{t-1}{t+1},$$

δίνει την απεικόνιση

$$z \rightarrow w = i \frac{z^3 - 1}{z^3 + 1}, \quad (*)$$

κατά την οποία η σφαιροειδής περιοχή  $-\pi/6 \leq \arg z \leq \pi/6$  του επιπέδου  $z$  μετατρέπεται στον κλειστό δίσκο  $|w| \leq 1$  του επιπέδου  $w$ . Σε ποιά σημεία του επιπέδου  $z$  δεν είναι η (\*) σύμμορφη;

**7.7** Δίνονται οι απεικονίσεις

$$z \rightarrow t = f(z) = \frac{1+z}{1-z}, \quad t \rightarrow w = g(t) = t^2.$$

Να βρεθούν οι εικόνες της περιοχής  $D = \{z: |z| \leq 1, \operatorname{Im} z \geq 0\}$  του μιγαδικού επιπέδου  $z$  στα επίπεδα  $t$  και  $w$  κατά τις απεικονίσεις  $z \rightarrow t = f(z)$  και  $z \rightarrow w = h(z)$ , αντίστοιχα, όπου  $h = g \circ f$ .

**7.8 α)** Με βάση το παράδειγμα 7.2 ή τον τύπο (7.66) δείξτε ότι η συνάρτηση

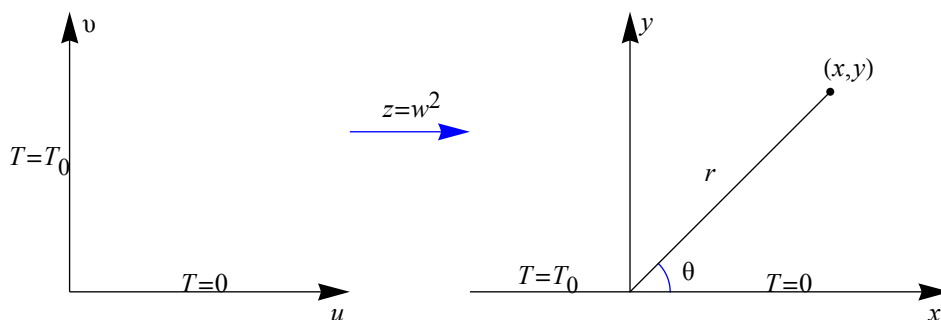
$$T(x, y) = \frac{T_0}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{T_0}{\pi} \theta$$

με  $0 \leq \theta \leq \pi$ , αποτελεί λύση του προβλήματος

$$\Delta T(x, y) = 0, \quad \text{όταν } y > 0,$$

$$T(x, 0) = \begin{cases} 0, & \text{όταν } x > 0 \\ T_0, & \text{όταν } x < 0 \end{cases}$$

β) Χρησιμοποιήστε την απεικόνιση του σχήματος



για να λύσετε το ΠΣΤ

$$\Delta T(x, y) = 0, \text{ όταν } u, v > 0,$$

$$T(u, 0) = 0, \text{ όταν } u > 0,$$

$$T(0, v) = T_0, \text{ όταν } v > 0.$$

**7.9** Με τη βοήθεια του μέρους (α) της προηγούμενης άσκησης και της απεικόνισης

$$z = \frac{w - i}{w + i}$$

Να λυθεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\Delta \phi(x, y) = 0, \text{ όταν } x^2 + y^2 < 1$$

$$\phi(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{όταν } x^2 + y^2 = 1, y < 0 \\ \phi_0, & \text{όταν } x^2 + y^2 = 1, y > 0 \end{cases}$$

**7.10** Δίνεται το πρόβλημα Dirichlet

$$\Delta V(x, y) = 0, \text{ όταν } (x, y) \in \Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < a, y > 0\}$$

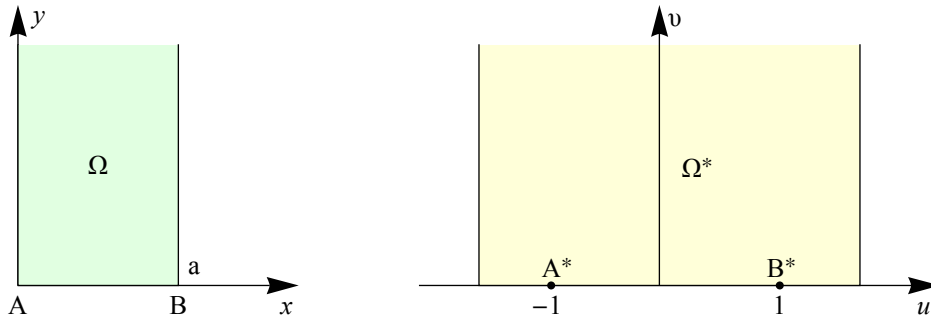
$$V(x, 0) = V, \text{ όταν } 0 < x < a$$

$$V(0, y) = V(a, y) = 0, \text{ όταν } y > 0$$

$$V(x, y) \rightarrow 0, \text{ όταν } 0 < x < a \text{ και } y \rightarrow \infty.$$

α) Να λυθεί το παραπάνω πρόβλημα με τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών.

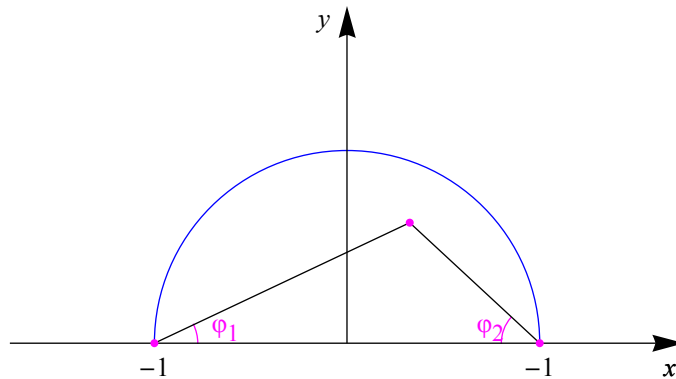
β) Να λυθεί το ίδιο πρόβλημα με τη μέθοδο των σύμμορφων απεικονίσεων. Συγκεκριμένα, να προσδιοριστεί η σύμμορφη απεικόνιση  $z \rightarrow w = f(z)$  μέσω της οποίας η περιοχή  $\Omega$  απεικονίζεται στο τμήμα  $v > 0$  του επιπέδου  $uv$ , όπως στο επόμενο σχήμα. Αφού λυθεί το αντίστοιχο πρόβλημα συνοριακών τιμών στο επίπεδο  $uv$  να κατασκευαστεί η λύση του αρχικού προβλήματος χρησιμοποιώντας την αντίστροφη της απεικόνισης  $w = f(z)$ .



7.11 α) Ναδειχτεί ότι η συνάρτηση

$$\begin{aligned} V(x, y) &= \frac{2V_0}{\pi} [\varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y)] = \frac{2V_0}{\pi} \left[ \arctan \frac{y}{1-x} + \arctan \frac{y}{1+x} \right] = \\ &= \frac{2V_0}{\pi} \arctan \frac{2y}{1-x^2-y^2}, \quad (*) \end{aligned}$$

όπου  $0 \leq \arctan a < \pi/2$  και οι γωνιακές συναρτήσεις  $\varphi_1(x, y)$ ,  $\varphi_2(x, y)$  ορίζονται στο επόμενο σχήμα,



αποτελεί λύση του προβλήματος Dirichlet,

$$\Delta V(x, y) = 0, \text{ όταν } (x, y) \in \Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1, y > 0\}$$

$$V(x, 0) = V, \text{ όταν } 0 < x < a$$

$$V(x, 0) = 0, \text{ όταν } -1 < x < 1,$$

$$V(x, y) = V_0, \text{ όταν } x^2 + y^2 = 1 \text{ και } y > 0.$$

Να εξηγηθεί η σημασία των διαδοχικών ισοτήτων στην (\*)

β) Με τη βοήθεια του προηγούμενου αποτελέσματος και της απεικόνισης  $z \rightarrow w = \exp(\pi z/b)$ , να λυθεί το ΠΣΤ

$$\Delta V(x, y) = 0, \text{ όταν } (x, y) \in \Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, 0 < y < b\}$$

$$V(x, 0) = V, \text{ όταν } 0 < x < a$$

$$V(x, 0) = V(x, b) = 0, \text{ όταν } x > 0,$$

$$V(0, y) = V_0, \text{ όταν } 0 < y < b.$$

Συκρίνετε το αποτέλεσμα σας με την εξίσωση 7.51.

**7.12** Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του χωρισμού των μεταβλητών, δείξτε ότι η συνάρτηση

$$V(x, y) = \frac{4 V_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m} \sin\left(\frac{m \pi x}{a}\right) \frac{\sinh(m \pi y/a)}{\sinh(m \pi b/a)}, \quad m = 2n - 1, \quad n = 1, 2, \dots$$

αποτελεί λύση του προβλήματος Dirichlet

$$\Delta V(x, y) = 0, \text{ όταν } (x, y) \in \Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < a, 0 < y < b\}$$

$$V(0, y) = V(a, y) = 0, \text{ όταν } 0 < y < b$$

$$V(x, 0) = 0, \text{ όταν } 0 < x < a$$

$$V(x, b) = V_0, \text{ όταν } 0 < x < a.$$

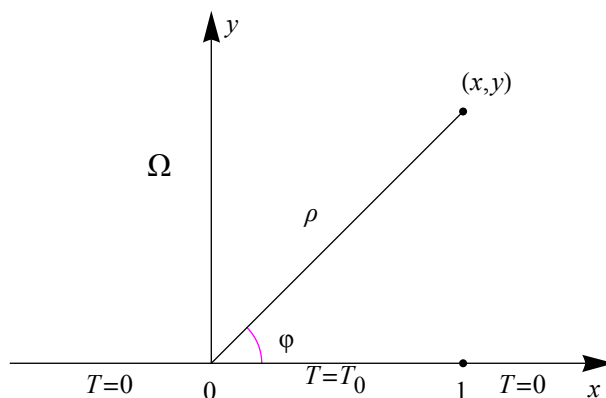
Με τη βοήθεια του προηγούμενου αποτελέσματος και της απεικόνισης  $z \rightarrow w = \exp(\pi z/b)$ , να λυθεί το ΠΣΤ

$$\Delta V(x, y) = 0, \text{ όταν } (x, y) \in \Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < \sqrt{x^2 + y^2} < R, y > 0\}$$

$$V(x, y) = 0, \text{ για κάθε σημείο της } \Omega, \text{ εκτός από το τμήμα } -R < x < -1, y = 0, \\ \text{όπου } V(x, y) = V_0.$$

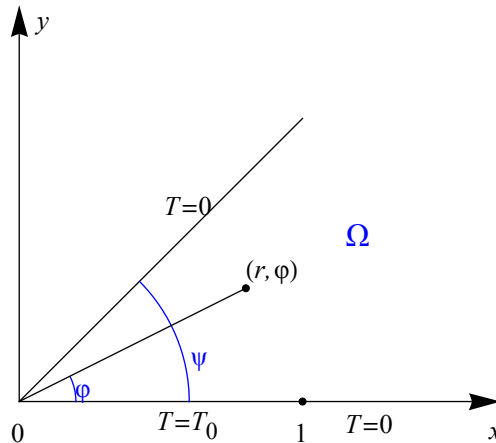
**7.13** α) Στο παρακάτω σχήμα η ανοιχτή περιοχή  $\Omega$  αποτελείται από το τμήμα  $y > 0$  του επιπέδου  $x y$ . Η θερμοκρασία  $T(x, y)$  στην περιοχή  $\Omega$  ικανοποιεί την εξίσωση του Laplace  $\Delta T(x, y) = 0$  και τις συνοριακές συνθήκες  $T(x, 0) = 0$  για  $x < 0$ ,  $T(x, 0) = T_0$  για  $0 < x < 1$  και  $T(x, 0) = 0$  για  $x > 1$ . Επιπλέον,  $T(x, y) \rightarrow 0$  για  $\rho \rightarrow \infty$ . Να δειχτεί ότι

$$T(x, y) = T^*(\rho, \varphi) \equiv \frac{T_0}{\pi} \operatorname{arccot}\left(\frac{\rho - \cos \varphi}{\sin \varphi}\right), \quad 0 < \operatorname{arccot}(a) < \pi.$$



β) Στο επόμενο σχήμα η περιοχή  $\Omega$  αποτελείται από το σφηνοειδές τμήμα  $0 < \theta < \psi$  του επιπέδου  $x y$ .





Με τη βοήθεια του προηγούμενου αποτελέσματος και της κατάλληλης απεικόνισης  $z \rightarrow w = f(z)$ , να λυθεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών  $\Delta T(x, y) = 0$  για  $(x, y) \in \Omega$ ,  $T(x, 0) = T_0$  για  $0 < x < 1$  και  $T(x, y) = 0$  στο υπόλοιπο του συνόρου της  $\Omega$ . Ναδειχτεί ότι η λύση μπορεί να τεθεί στη μορφή

$$T(x, y) = T^*(r, \theta) \equiv \frac{T_0}{\pi} \operatorname{arccot} \left( \frac{r^{\pi/\psi} - \cos(\pi \theta / \psi)}{\sin(\pi \theta / \psi)} \right).$$

**7.14 α)** Θεωρήστε την ανοιχτή και συνεκτική περιοχή  $\Omega$  του  $\mathbb{R}^2$  της οποίας το σύνορο αποτελείται από την τμηματικά ομαλή καμπύλη  $\partial\Omega$ . Ναδειχτεί ότι το πρόβλημα Neumann

$$\begin{aligned} \Delta V(x, y) &= 0, \quad (x, y) \in \Omega, \\ \frac{\partial V}{\partial n} &\equiv \mathbf{n} \cdot \nabla V = g(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

ανάγεται σε αυτή την περίπτωση σ' ένα πρόβλημα Dirichlet της μορφής

$$\begin{aligned} \Delta u(x, y) &= 0, \quad (x, y) \in \Omega, \\ u(x, y) &= f(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

κι αντίστροφα.

*Υπόδειξη:* Θεωρήστε ένα ζευγάρι  $(u, v)$  από συζυγείς αρμονικές συναρτήσεις κλάσης  $C^1(\Omega)$  και δείχτε ότι κατά μήκος της συνοριακής καμπύλης  $\partial\Omega$ ,

$$\frac{\partial V}{\partial n} = - \frac{\partial u}{\partial s} \equiv \mathbf{t} \cdot \nabla u,$$

όπου  $\mathbf{t}$  το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα, και

$$\frac{\partial u}{\partial n} \equiv \frac{\partial V}{\partial s}.$$

β) Με βάση το παραπάνω αποτέλεσμα και τον τύπο (7.66) δείχτε πως, για την περιοχή  $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ , η λύση του πιο πάνω προβλήματος Neumann δίνεται από την έκφραση

$$V(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln[(x - \xi)^2 + y^2] g(\xi) d\xi + C,$$

όπου  $C$  πραγματική σταθερή.

γ) Να δειχτεί ότι ο τύπος Poisson για το πρόβλημα Neumann στην περιοχή  $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2 + y^2} < a\}$  δίνεται από την έκφραση

$$V(r, \theta) = -\frac{a}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln[a^2 - 2ar \cos(\theta - \psi) + r^2] g(\psi) d\psi + V_0,$$

όπου  $V_0$  πραγματική σταθερή.

## 8. Ανώμαλα σημεία και ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Συχνά, μια συνάρτηση  $f(z)$  είναι ολομορφική (αναλυτική) σε κάποιο ανοιχτό υποσύνολο  $\Omega$  του μιγαδικού επιπέδου  $\mathbb{C}_z$ , όχι όμως και σ' ένα οριακό σημείο,  $z_0$ , της  $\Omega$ , που δεν ανήκει στην  $\Omega$ . Κάτι τέτοιο συμβαίνει, για παράδειγμα, με τη συνάρτηση  $f(z) = z^{-1}$  στο  $z_0 = 0$ . Τότε το  $z_0$  ονομάζεται **σημείο ιδιομορφίας ή ανωμαλίας της  $f(z)$** . Για συντομία, λέγεται και **ανώμαλο σημείο της συνάρτησης**.

Τα σημεία ιδιομορφίας μιας ολομορφικής συνάρτησης  $f(z)$  ταξινομούνται, αρχικά, σε δύο κύριες κατηγορίες: Τα απομονωμένα (ή μεμονωμένα) και τα μη-απομονωμένα. Το ανώμαλο σημείο  $z_0$  λέγεται **απομονωμένο**, αν υπάρχει ανοιχτός δίσκος  $D_r(z_0)$  που δεν περιέχει άλλο ανώμαλο σημείο της  $f(z)$ . Διαφορετικά, λέγεται **μη-απομονωμένο**. Για παράδειγμα, το  $z_0 = 0$  είναι ένα απομονωμένο σημείο ανωμαλίας τόσο της  $f(z) = z^{-1}$ , όσο και των συναρτήσεων  $f(z) = z^{-1} \sin z$  και  $f(z) = \sin(z^{-1})$ .

Από την άλλη, εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι, οι τρεις συναρτήσεις που μόλις αναφέραμε διαφέρουν ριζικά μεταξύ τους, ως προς τον τρόπο με τον οποίο συμπεριφέρονται, καθώς πλησιάζουμε το σημείο ανωμαλίας  $z_0 = 0$ . Πιο συγκεκριμένα, η  $f(z) = z^{-1} \sin z$  επεκτείνεται άμεσα, έτσι που να γίνει ολομορφική σε όλο το μιγαδικό επίπεδο. Γιατί, εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι η συνάρτηση  $g(z)$  με τύπο  $g(0) = 1$ ,  $g(z) = z^{-1} \sin z$ ,  $\forall z \neq 0$ , είναι αναλυτική σε όλο το μιγαδικό επίπεδο  $\mathbb{C}_z$ . Επιπλέον, η  $g(z) = f(z)$  σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού,  $\Omega = \mathbb{C}_z \setminus \{0\}$ , της δεύτερης. Με αυτό τον τρόπο, η ανωμαλία της  $f(z) = z^{-1} \sin z$  έχει ουσιαστικά αρθεί ή απαλειφθεί. Γι' αυτό, το σημείο  $z_0 = 0$  αναφέρεται ως **απαλείψιμο σημείο ανωμαλίας της συγκεκριμένης συνάρτησης**.

Στην περίπτωση της  $f(z) = z^{-1}$ , παρατηρούμε την ακόλουθη συμπεριφορά: Καθώς το  $z \rightarrow 0$ , η  $f(z) \rightarrow \infty$ . Δηλαδή, για κάθε θετικό αριθμό  $M$ , οσοδήποτε μεγάλο, υπάρχει ένα  $\delta > 0$ , τέτοιο που, αν η  $|z| < \delta$ , τότε  $|f(z)| > M$ . Την ίδια συμπεριφορά δείχνει κάθε συνάρτηση της μορφής  $f(z) = (z - z_0)^{-n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , καθώς πλησιάζουμε το  $z_0$ , κι ακόμη γενικότερα, κάθε συνάρτηση της μορφής  $f(z) = (z - z_0)^{-n} g(z)$ , όπου  $g(z)$  τυχαία συνάρτηση, αναλυτική σε μια περιοχή  $\Omega$  στην οποία περιόχεται το  $z_0$ . Σ' αυτές τις περιπτώσεις, λέμε ότι το σημείο  $z_0$  είναι **πόλος τάξης  $n$**  της  $f(z)$ .

Τέλος, στην περίπτωση της  $f(z) = \sin(z^{-1})$  δεν μπορούμε ούτε να άρουμε την ανωμαλία στο  $z = 0$  ούτε υπάρχει φυσικός αριθμός  $n$ , τέτοιος που η  $g(z) := z^n f(z)$  να είναι αναλυτική σε όλο το μιγαδικό επίπεδο. Κάθε σημείο αυτού του είδους ονομάζεται **σημείο ουσιαστικής ανωμαλίας της  $f(z)$** .

Η ταξινόμηση των απομονωμένων σημείων ανωμαλίας μπορεί να γίνει με αυστηρότερο τρόπο, χρησιμοποιώντας το επόμενο

**Θεώρημα 8.1** (Ανάπτυγμα Laurent ολομορφικής συνάρτησης)

Υποθέτουμε ότι η  $f(z)$  είναι ολομορφική σε κάποιον ανοιχτό δακτύλιο με κέντρο το σημείο  $z_0$ , δηλαδή σε κάποιο υποσύνολο της μορής

$$\Delta_{r,R}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}, \quad (8.1)$$

όπου  $r \geq 0$ . Τότε, υπάρχουν θετικοί αριθμοί  $a, b$ , όπου  $r < a < b < R$ , τέτοιοι που, σε κάθε σημείο  $z$  του κλειστού δακτύλιου  $a \leq |z - z_0| \leq b$ , η  $f(z)$  γράφεται στη μορφή

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n. \quad (8.2)$$

όπου

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad r < \rho < R. \quad (8.3)$$

*Διευκρίνιση.* Η ισότητα (8.2) σημαίνει ότι οι σειρές  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$  και  $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} (z - z_0)^{-n}$  συγκλίνουν απόλυτα και ομοιόμορφα στις συναρτήσεις  $f_+(z)$  και  $f_-(z)$ , αντίστοιχα, που έχουν ως άθροισμα την  $f(z)$ .

*Ορολογία.* Η σειρά (8.2) ονομάζεται **ανάπτυγμα Laurent της  $f(z)$  στη γειτονιά του σημείου  $z_0$ .**

Απόδειξη

Η απόδειξη αυτού του θεωρήματος είναι απλή, αλλά εκτενής. Την αφήνουμε για άσκηση του αναγνώστη, σημειώνοντας ότι περιέχεται σε όλα τα σχετικά συγγράμματα που αναφέρουμε στη Βιβλιογραφία. ■

Επιστρέφοντας στην ταξινόμηση των ανωμαλιών, θυμίζουμε ότι ο μιγαδικός αριθμός  $z_0$  λέγεται απομονωμένο σημείο ανωμαλίας της  $f(z)$  αν η τελευταία είναι αναλυτική σε κάποιον ανοιχτό δίσκο με κέντρο το  $z_0$ , όχι όμως και στο ίδιο το  $z_0$ . Όμως, αν από τον ανοιχτό δίσκο  $D_R(z_0)$  αφαιρέσουμε το σημείο  $z_0$ , θα πάρουμε ... έναν τρύπιο ανοιχτό δίσκο, δηλαδή, τον ανοιχτό δακτύλιο  $\Delta_{0,R}(z_0) = D_R(z_0) \setminus z_0$ . Άρα, οι προϋποθέσεις του θεωρήματος (8.1) ισχύουν και η  $f(z)$  γράφεται στη μορφή (8.2). Μπορούμε, λοιπόν, να διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

- (i) Όλες οι σταθερές  $c_n$  με δείκτη  $n \leq -1$  μηδενίζονται. Τότε το  $z_0$  λέγεται **απαλείψιμο ανώμαλο σημείο** της  $f(z)$ .
- (ii) Όλες οι σταθερές  $c_n$  με δείκτη  $n \leq -m$ , όπου  $m$  κάποιος φυσικός αριθμός (θετικός ακέραιος) μηδενίζονται. Σ' αυτή την περίπτωση, το  $z_0$  λέγεται **πόλος τάξης  $m$**  της  $f(z)$ .
- (iii) Όλες οι σταθερές  $c_n$  με αρνητικό δείκτη είναι μη μηδενικές. Τότε το  $z_0$  λέγεται **ουσιαστικό ανώμαλο σημείο** της  $f(z)$ .

Ο συντελεστής  $c_{-1}$  του αναπτύγματος Laurent παίζει ξεχωριστό ρόλο στην ανάλυση μιας ολομορφικής συνάρτησης  $f(z)$  που έχει απομονωμένα σημεία ανωμαλίας. Αν το  $z_0$  είναι

ένα από αυτά τα σημεία, τότε ο συντελεστής  $c_{-1}$  του αντίστοιχου αναπτύγματος Laurent ονομάζεται **ολοκληρωτικό υπόλοιπο της  $f(z)$  στο  $z_0$**  και συμβολίζεται με  $\text{Res}(f, z_0)$ . Βασικής σημασίας, ιδιαίτερα από την άποψη των εφαρμογών, είναι το

**Θεώρημα 8.2** (Ολοκληρωτικών υπολοίπων του Cauchy)

Θεωρούμε μια κλειστή απλή καμπύλη  $C$  που βρίσκεται μέσα στην περιοχή  $\Omega$ , στην οποία η συνάρτηση  $f(z)$  είναι αναλυτική. Αν  $\{z_j\}_{j=1}^n$  είναι το σύνολο των πόλων της  $f(z)$  που ανήκουν στο εσωτερικό της καμπύλης  $C$ , τότε

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \text{Res}(f, z_j). \quad (8.4)$$

Απόδειξη

Θεωρούμε το συγκεκριμένο σημείο  $z = z_j$ . Αφού είναι απομονωμένο σημείο ανωμαλίας, υπάρχει ένας θετικός αριθμός  $R_j$ , τέτοιος που, ο δίσκος  $D_{R_j}(z_j)$  να περιέχεται στην  $\Omega$  και κάθε άλλο ανώμαλο σημείο της  $f(z)$  να βρίσκεται έξω από το σύνορο,  $C_j$ , του  $D_{R_j}(z_j)$ . Από τον ορισμό του  $\text{Res}(f, z_j)$  αμέσως έπεται ότι

$$2\pi i \text{Res}(f, z_j) = \oint_{C_j} f(z) dz, \quad (8.5)$$

Αρκεί, λοιπόν, να επαναλάβουμε για κάθε πόλο  $z_j$  το στρατήγημα που οδήγησε στην απόδειξη του ολοκληρωτικού τύπου του Cauchy, για να καταλήξουμε στο αποτέλεσμα (8.4) ■

Ο τύπος (8.4) είναι ιδιαίτερα χρήσιμος για τον υπολογισμό επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων μιγαδικών συναρτήσεων και, μέσω αυτών, των πιο δύσκολων ολοκληρωμάτων που συναντάμε στην πραγματική ανάλυση. Η αποτελεσματική αξιοποίηση του παραπάνω τύπου προϋποθέτει μια γρήγορη μέθοδο υπολογισμού των ολοκληρωτικών υπολοίπων της  $f(z)$  στα απομονωμένα σημεία ανωμαλίας που βρίσκονται στο εσωτερικό της καμπύλης  $C$ . Ιδιαίτερα χρήσιμα, από αυτή την άποψη, είναι τα επόμενα δύο αποτελέσματα.

**Θεώρημα 8.3** (Ολοκληρωτικά υπόλοιπα σε πόλους)

Αν το σημείο  $z_0$  είναι πόλος τάξης  $m$  της  $f(z)$ , τότε

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-z_0)^m f(z)] \quad (8.6)$$

Απόδειξη

Στον δακτύλιο  $0 < |z - z_0| < r$ , με ακτίνα  $r$  αρκετά μικρή, η  $f(z)$  αναπτύσσεται σε σειρά Laurent της μορφής

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n. \quad (8.7)$$

Συνεπώς, η  $g(z) := (z-z_0)^m f(z)$  γράφεται σαν

$$g(z) = c_{-m} + \cdots + c_{-1}(z-z_0)^{m-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^{n+m}, \quad (8.8)$$

και, άρα, είναι ολομορφική στον ίδιο δακτύλιο. Όμως, η  $g(z)$  επεκτείνεται αμέσως και γίνεται ολομορφική στο δίσκο  $D_r(z_0)$ , με το να θέσουμε  $g(z_0) = c_{-m}$ . Από την (8.8) συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{d z^{m-1}} [g(z)] = (m-1)! c_{-1} \quad (8.9)$$

που είναι ταυτόσημη με την (8.6).

### Πόρισμα 8.1 (Ολοκληρωτικό υπόλοιπο σε απλό πόλο)

Αν  $f(z) = g(z)/h(z)$ , όπου οι συναρτήσεις  $g(z)$ ,  $h(z)$  είναι ολομορφικές στον ανοιχτό δίσκο  $D_r(z_0)$  και  $g(z_0) \neq 0$ ,  $h(z_0) = 0$ ,  $h'(z_0) \neq 0$ , τότε

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} \quad (8.10)$$

### Απόδειξη

Είναι απλή κι αφήνεται για άσκηση. ■

### Παράδειγμα 8.1

(i) Η συνάρτηση

$$f(z) = \frac{e^z}{(z^2+1)^2}$$

έχει πόλους δεύτερης τάξης στα σημεία  $z = \pm i$ . Σύμφωνα με τον τύπο (8.6),

$$\begin{aligned} \text{Res}(f, i) &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{d z} \left[ (z-i)^2 \frac{e^z}{(z^2+1)^2} \right] \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{d z} \left[ \frac{e^z}{(z+i)^2} \right] = \lim_{z \rightarrow i} \left[ \frac{e^z}{(z+i)^2} - \frac{2e^z}{(z+i)^3} \right] = -\frac{(1+i)e^i}{4}. \end{aligned}$$

Ανάλογα,

$$\text{Res}(f, -i) = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{d}{d z} \left[ (z+i)^2 \frac{e^z}{(z^2+1)^2} \right] = -\frac{(1-i)e^{-i}}{4}.$$

(ii) Η συνάρτηση

$$f(z) = \frac{e^z}{\sin z}$$

έχει απλούς πόλους στα σημεία  $z_j = j\pi$ ,  $j \in \mathbb{Z}$ . Από την (8.10) έπεται ότι

$$\text{Res}(f, j\pi) = \frac{e^{j\pi}}{\cos j\pi} = (-1)^j e^{j\pi}.$$

■

Μια από τις σημαντικότερες εφαρμογές του θεωρήματος των ολοκληρωτικών υπολοίπων είναι ο υπολογισμός δύσκολων ολοκληρωμάτων πραγματικών συναρτήσεων. Συχνά, αυτά τα ολοκληρώματα είναι καταχρηστικά ή κύριας τιμής. Γι' αυτό, υπενθυμίζουμε τους αντίστοιχους ορισμούς.

(i) Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση  $f(x)$ , με πεδίο ορισμού το διάστημα  $[a, \infty)$ , είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε φραγμένο διάστημα της μορφής  $[a, b]$ . Τότε, ως **καταχρηστικό** ή **γενικευμένο ολοκλήρωμα (πρώτου είδους)** της  $f(x)$  στο διάστημα  $[a, \infty)$  ονομάζεται ο αριθμός

$$\int_a^\infty f(x) dx := \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx, \quad (8.11)$$

όταν το πιο πάνω όριο υπάρχει. Παράδειγμα:  $\int_0^\infty (1+x^2)^{-1} dx$ .

(ii) Αν η συνάρτηση  $f(x)$ , με πεδίο ορισμού το φραγμένο διάστημα  $(a, b]$ , είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα της μορφής  $[a+\varepsilon, b]$ ,  $\varepsilon > 0$ , τότε **καταχρηστικό ολοκλήρωμα (δευτέρου είδους)** της  $f(x)$  στο διάστημα  $[a, b]$  ονομάζεται ο αριθμός

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx, \quad (8.12)$$

όταν το πιο πάνω όριο υπάρχει. Παράδειγμα:  $\int_1^2 (x-1)^{-1} dx$ .

(iii) Ο συνδυασμός των δύο προηγούμενων περιπτώσεων οδηγεί στο **διπλά καταχρηστικό ολοκλήρωμα**

$$\int_a^\infty f(x) dx := \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ b \rightarrow \infty}} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx, \quad (8.13)$$

μιας συνάρτησης  $f(x)$ , που έχει ως πεδίο ορισμού το διάστημα  $(a, \infty)$  και είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα της μορφής  $[a+\varepsilon, b]$ ,  $\varepsilon > 0$ . Παράδειγμα:  $\int_0^\infty (x-1)^{-2} dx$ .

(iv) Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση  $f(x)$  έχει ως πεδίο ορισμού ένα υποσύνολο του  $\mathbb{R}$  της μορφής  $[a, b] \cup (b, c]$  και είναι ολοκληρώσιμη σε όλα τα διαστήματα της μορφής  $[a, b-\varepsilon]$ ,  $[b+\varepsilon, c]$ . Τότε, **ολοκλήρωμα κύριας τιμής του Cauchy** της  $f(x)$  στο διάστημα  $[a, c]$ , ονομάζεται ο αριθμός PV  $\int_a^c f(x) dx$ , που ορίζεται που ορίζεται με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\text{PV} \int_a^c f(x) dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx + \int_{b+\varepsilon}^c f(x) dx \right]. \quad (8.14)$$

Παράδειγμα:  $\text{PV} \int_{-1}^2 (x-1)^{-1} dx$ .

(v) Για μια συνάρτηση  $f(x)$  που ορίζεται σε ολόκληρη την πραγματική ευθεία, **ολοκλήρωμα κύριας τιμής του Cauchy** ονομάζεται ο αριθμός

$$\text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx := \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ \int_{-R}^R f(x) dx \right]. \quad (8.15)$$

Παράδειγμα:  $\text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ ,  $f(x) = \sin x/x$ ,  $x \neq 0$ ,  $f(0) = 1$ .

**Παρατήρηση.** Στους προηγούμενους ορισμούς, συνάρτηση  $f(x)$  μπορεί να παίρνει μιγαδικές τιμές. Γενικότερα, η ολοκλήρωση μπορεί να αναφέρεται σε μια καμπύλη,  $\Gamma$ , του μιγαδικού επίπεδου (ή του  $\mathbb{R}^2$ ). Αν, για παράδειγμα, η  $\Gamma$  ορίζεται παραμετρικά από τη σχέση  $z = z(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , και η  $f(z)$  παρουσιάζει ανωμαλία στο σημείο  $z_0 = z(t_0)$ , τότε

$$\text{PV} \int_{\Gamma} f(z) dz := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma \setminus D_{\varepsilon}(z_0)} f(z) dz. \quad (8.16)$$

■

Όπως και στην περίπτωση των ακολουθιών και των σειρών, υπάρχουν ορισμένα κριτήρια που μας επιτρέπουν να εξακριβώσουμε γρήγορα αν κάποιο καταχρηστικό ολοκλήρωμα συγκλίνει. Τα δύο που ακολουθούν είναι αντιπροσωπευτικά:

α) Το **κριτήριο του Cauchy**: Το καταχρηστικό ολοκλήρωμα  $\int_a^{\infty} f(x) dx$  συγκλίνει εάν και μόνο όταν, για κάθε  $\varepsilon > 0$ , οσοδήποτε μικρό, μπορούμε να βρούμε έναν αριθμό  $R_0 \in (a, \infty)$ , τέτοιον που, αν  $R_1, R_2 > R_0$ , τότε  $\left| \int_{R_1}^{R_2} f(x) dx \right| < \varepsilon$ .

β) Το **κριτήριο της σύγκρισης**: Αν οι συναρτήσεις  $f(x)$ ,  $g(x)$  παίρνουν μη αρνητικές τιμές στο διάστημα  $[a, \infty)$  και υπάρχει σταθερή  $M$ , τέτοια που  $f(x) \leq M g(x)$ ,  $\forall x \in [a, \infty)$ , τότε η σύγκλιση του ολοκληρώματος  $\int_a^{\infty} g(x) dx$  συνεπάγεται τη σύγκλιση του  $\int_a^{\infty} f(x) dx$ .

**Παρατήρηση.** Κριτήρια που αφορούν τα καταχρηστικά ολοκληρώματα πρώτου είδους, σαν αυτά που μόλις παραθέσαμε, μετατρέπονται εύκολα σε κριτήρια σύγκλισης των καταχρηστικών ολοκληρωμάτων δεύτερου είδους. Αν, για παράδειγμα, η συνάρτηση  $f(x)$  παρουσιάζει ιδιομορφία στο αριστερό άκρο του διαστήματος  $[a, b]$ , τότε η αντικατάσταση  $x = a + t^{-1}$  μετατρέπει το διάστημα  $a < x \leq b$  στο  $(b-a)^{-1} \leq t < \infty$  και τη συνάρτηση  $f(x)$  στην

$$g(t) := f(a + t^{-1}).$$

Έτσι, το καταχρηστικό ολοκλήρωμα δεύτερου είδους για την  $f(x)$  μετατρέπεται σε πρώτου είδους για την  $g(t)$ :



$$\int_a^b f(x) dx = \int_{1/(b-a)}^{\infty} g(t) dt.$$

■

### Παράδειγμα 8.2

Ενώ φαίνεται απλό, το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \sin \theta} d\theta$$

είναι δύσκολο να υπολογιστεί με τις συνηθισμένες τεχνικές της πραγματικής ανάλυσης.

Αντίθετα, μπορεί να υπολογιστεί πολύ εύκολα, αν μετατραπεί σε επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στο μιγαδικό επίπεδο. Για τον σκοπό αυτό, παρατηρούμε αρχικά ότι,

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Από την άλλη, η σχέση

$$z = z(\theta) = e^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

ορίζει παραμετρικά τον μοναδιαίο κύκλο  $|z| = 1$  του μιγαδικού επιπέδου  $\mathbb{C}_z$ . Από αυτή τη σχέση αμέσως έπεται ότι

$$z'(\theta) = i e^{i\theta} = i z(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Συνακόλουθα

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \sin \theta} d\theta &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \sin \theta} \frac{i e^{i\theta}}{i e^{i\theta}} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \frac{z-z^{-1}}{2i}} \frac{1}{iz} z'(\theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{2}{4iz + z^2 - 1} z'(\theta) d\theta = \oint_{|z|=1} \frac{2}{z^2 + 4iz - 1} dz. \end{aligned}$$

Η συνάρτηση

$$f(z) := \frac{2}{z^2 + 4iz - 1}$$

έχει απλούς πόλους στα σημεία  $z_1 = -i + i\sqrt{3}$ ,  $z_2 = -i - i\sqrt{3}$ . Από αυτά, μόνο το  $z_2$  βρίσκεται μέσα στον κύκλο  $|z| = 1$ . Συνεπώς,

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \sin \theta} d\theta = \oint_{|z|=1} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, z_2) = 2\pi i \frac{2}{z_1 - z_2} = \frac{4\pi i}{2i\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

Συνεπώς,

$$\frac{1}{2 + \sin \theta} = \frac{2iz}{z^2 + 4iz - 1}, \quad z = e^{i\theta}.$$

Με άλλα λόγια, η συνάρτηση  $(2 + \sin \theta)^{-1}$  μπορεί να θεωρηθεί ως ο περιορισμός της

$$f(z) := \frac{2iz}{z^2 + 4iz - 1}$$

πάνω στον μοναδιαίο κύκλο  $|z| = 1$  του μιγαδικού επίπεδου  $\mathbb{C}_z$ , κατά μήκος του οποίου  $z = z(\theta) = e^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

Από τη άλλη μεριά, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της τυχαίας συνάρτησης  $f(z)$  κατά μήκος αυτού του κύκλου είναι ίσο με

$$\oint_{|z|=1} f(z) dz = \int_0^{2\pi} f(z(\theta)) z'(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} f(z(\theta)) i e^{i\theta} d\theta.$$

Συνακόλουθα,

$$\oint_{|z|=1} \frac{f(z)}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z(\theta))}{z(\theta)} z'(\theta) d\theta = i \int_0^{2\pi} f(z(\theta)) d\theta.$$

Άρα, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης  $f(z)$  κατά τα μήκος του κύκλου  $z = e^{i\theta}$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2 + \sin \theta} d\theta = \oint_{|z|=1} \frac{2}{z^2 + 4iz - 1} dz$$

Η συνάρτηση

$$g(z) := \frac{2}{z^2 + 4iz - 1}$$

έχει απλούς πόλους στα σημεία  $z_1 = -i + i\sqrt{3}$ ,  $z_2 = -i - i\sqrt{3}$ . Από αυτά μόνο το  $z_2$  βρίσκεται μέσα στον κύκλο  $|z| = 1$ . Συνεπώς,

$$\oint_{|z|=1} \frac{2}{z^2 + 4iz - 1} dz = 2\pi i \operatorname{Res}(g, z_2) = 2\pi i \frac{2}{z_1 - z_2} = \frac{4\pi i}{2i\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

■

### Παράδειγμα 8.3

Το καταχρηστικό ολοκλήρωμα

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4} dx.$$

οπωσδήποτε συγκλίνει (γιατί;). Δηλαδή, το όριο

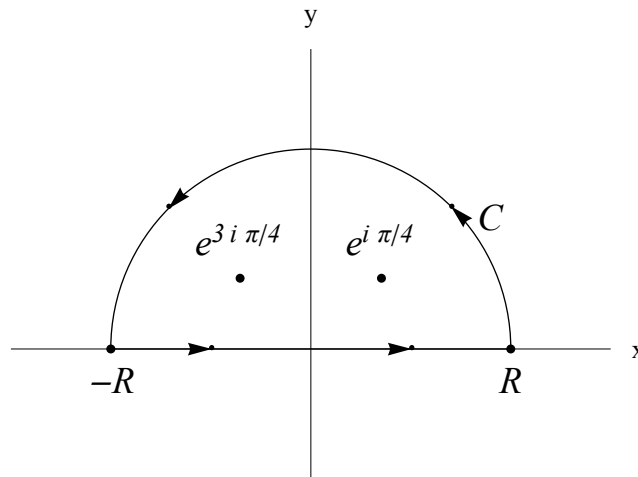
$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{1}{1+x^4} dx$$

υπάρχει. Για να το υπολογίσουμε, αρχικά παρατηρούμε ότι, η προς ολοκλήρωση συνάρτηση

είναι άρτια. Συνεπώς,

$$\int_0^R \frac{1}{1+x^4} dx = \frac{1}{2} \int_{-R}^R \frac{1}{1+x^4} dx.$$

Στη συνέχεια, κατασκευάζουμε ένα ημικύκλιο  $C_+$  που έχει ως διάμετρο το διάστημα  $[-R, R]$  του άξονα  $x$  και βρίσκεται στο τμήμα  $y = \text{Im } z \geq 0$  του μιγαδικού επιπέδου  $\mathbb{C}_z$ , όπως στο Σχ. 8.1.



**Σχ. 8.1** Η καμπύλη  $C = [-R, R] \cup C_+$ , όπου  $C_+$  το ημικύκλιο που έχει ως διάμετρο το τμήμα  $[-R, R]$  του άξονα  $x$ .

Η καμπύλη  $C = [-R, R] \cup C_+$  είναι κλειστή και προφανώς

$$\oint_C \frac{1}{1+z^4} dz = \int_{-R}^R \frac{1}{1+x^4} dx + \int_{C_+} \frac{1}{1+z^4} dz.$$

Τώρα, η συνάρτηση  $f(z) = (1+z^4)^{-1}$  είναι μερομορφική, με απλούς πόλους στα σημεία όπου  $z^4 = -1$ . Δηλαδή, εκεί όπου  $r^4 e^{4i\theta} = e^{i\pi}$ . Αυτή η συνθήκη ορίζει τέσσερα σημεία που βρίσκονται πάνω στον μοναδιαίο κύκλο και είναι τα εξής:  $z_1 = e^{i\pi/4}$ ,  $z_2 = e^{3i\pi/4}$ ,  $z_3 = e^{5i\pi/4}$  και  $z_4 = e^{7i\pi/4}$ . Αν, λοιπόν, η ακτίνα  $R$  είναι μεγαλύτερη από την μονάδα, τότε στο εσωτερικό της καμπύλης  $C$  βρίσκονται μόνο τα  $z_1$  και  $z_2$ , και άρα

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{1}{1+z^4} dz &= 2\pi i \sum_{j=1}^2 \text{Res}(f, z_j) = 2\pi i \sum_{j=1}^2 \frac{1}{4z_j^3} = i \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{e^{3i\pi/4}} + \frac{1}{e^{9i\pi/4}} \right) \\ &= i \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{e^{3i\pi/4}} + \frac{1}{e^{i\pi/4}} \right) = \pi \sin(\pi/4) = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

Από την άλλη, πάνω στο ημικύκλιο  $C_+$ , το  $z = R e^{i\theta}$ . Συνεπώς, για κάθε  $R > 1$ ,

$$M := \max_{z=R e^{i\theta}} \left| \frac{1}{1+z^4} \right| = \frac{1}{R^4 - 1}.$$

Άρα,

$$\left| \int_{C_+} \frac{1}{1+z^4} dz \right| \leq M L = \frac{1}{R^4-1} \pi R$$

κι αυτό σημαίνει ότι

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_+} \frac{1}{1+z^4} dz = 0$$

Συνακόλουθα,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_C \frac{1}{1+z^4} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{1}{1+x^4} dx.$$

Όμως, η τιμή του επικαμπύλιου ολοκληρώματος στα αριστερά είναι ανεξάρτητη από την ακτίνα  $R$ , όταν το  $R > 1$ . Τελικά,

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{-R}^R \frac{1}{1+x^4} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \oint_C \frac{1}{1+z^4} dz = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

■

### Παρατήρηση

Τα επιχειρήματα που χρησιμοποιήσαμε στο προηγούμενο παράδειγμα γενικεύονται αμέσως και οδηγούν στο ακόλουθο αποτέλεσμα:

### Θεώρημα 8.4

Αν στη ρητή συνάρτηση

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \quad (8.17)$$

- (i) Ο παρονομαστής δεν έχει πραγματικές ρίζες,
- (ii) Ο βαθμός του πολυώνυμου  $Q$  υπερβαίνει εκείνον του  $P$  τουλάχιστον κατά μία μονάδα,

τότε

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \oint_C \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \operatorname{Res} \left\{ \frac{P(z)}{Q(z)}, z_j^+ \right\}, \quad (8.18)$$

όπου  $\{z_j^+\}$  είναι τα σημεία όπου μηδενίζεται η  $Q(z)$  στο πάνω μιγαδικό επίπεδο.

### Απόδειξη

Αφήνεται για άσκηση.

■

Όπως γνωρίζει από την πείρα του ο αναγνώστης, η συνάρτηση  $\sin x/x$  κάνει πολύ συχνά την εμφάνισή της στην πραγματική ανάλυση. Το ίδιο ισχύει και για το καταχρηστικό ολοκλήρωμά της,  $\int_0^{\infty} (\sin x/x) dx$ . Το τελευταίο, στη γενικότερη μορφή  $\int_0^{\infty} (\sin kx/x) dx$ , θα παίζει σημαντικό ρόλο στο επόμενο κεφάλαιο.

Γι' αυτό, θα χρησιμοποιήσουμε εργαλεία της μιγαδικής ανάλυσης που έχουμε ήδη αναπτύξει για ν' αποδείξουμε ότι

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin kx}{x} dx = \begin{cases} \pi/2, & k > 0 \\ -\pi/2, & k < 0 \end{cases} \quad (8.19)$$

Στην απόδειξη του τύπου (8.19) θα χρειαστούμε δύο αποτελέσματα. Το πρώτο είναι ότι το καταχρηστικό ολοκλήρωμα  $\int_0^{\infty} \sin x/x dx$  συγκλίνει (βλ. γ.π. Shilov, σελ. 439). Το δεύτερο αποτέλεσμα αφορά τη συμπεριφορά της συνάρτησης  $\sin x/x$  στο διάστημα  $[0, \pi/2]$  και περιέχεται στο

### Λήμμα 8.1

$$\sin x \geq \frac{2}{\pi} x, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \quad (8.20)$$

#### Απόδειξη

Θεωρούμε την συνάρτηση

$$g(x) := \frac{\pi}{2} \frac{\sin x}{x}, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Προφανώς,  $g(\pi/2) = 1$ , ενώ

$$g'(x) = \frac{\pi}{2} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\pi}{2x^2} \gamma(x),$$

όπου

$$\gamma(x) := x \cos x - \sin x.$$

Τώρα,  $\gamma(\pi/2) = -1$  και

$$\gamma'(x) := -x \sin x.$$

Άρα, η  $\gamma(x)$  παραμένει αρνητική σ' όλο το διάστημα  $(0, \pi/2]$ . Συνακόλουθα, η  $g(x)$  είναι φθίνουσα στο ίδιο διάστημα, πράγμα που σημαίνει ότι  $g(x) \geq 1$ , για  $x \in (0, \pi/2]$ . ■

Σημειώνουμε τώρα ότι η αντικατάσταση  $x \rightarrow kx$  μετατρέπει το ολοκλήρωμα  $\int_0^{\infty} (\sin kx/x) dx$  στο  $\text{sgn}(k) \int_0^{\infty} (\sin x/x) dx$ , όπου  $\text{sgn}(k)$  το πρόσημο της σταθερής  $k$ . Από την άλλη, η συνάρτηση  $(\sin x/x)$  είναι άρτια. Συνεπώς,

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \quad (8.21)$$

Από την άλλη,  $\sin x = \text{Im } e^{ix}$ . Άρα,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ \int_{-R}^R \text{Im} \left( \frac{e^{ix}}{x} \right) dx \right] \quad (8.22)$$

Η τελευταία παρατήρηση μας υποδειχνει να μελετήσουμε το ολοκλήρωμα της

συνάρτησης  $e^{iz}/z$  κατά μήκος μιας κλειστής καμπύλης,  $C$ , η οποία αποτελείται από το τμήμα  $[-R, R]$  του άξονα  $x$  και ένα ημικύκλιο  $C_R$  που έχει ως διάμετρο το πιο πάνω διάστημα.

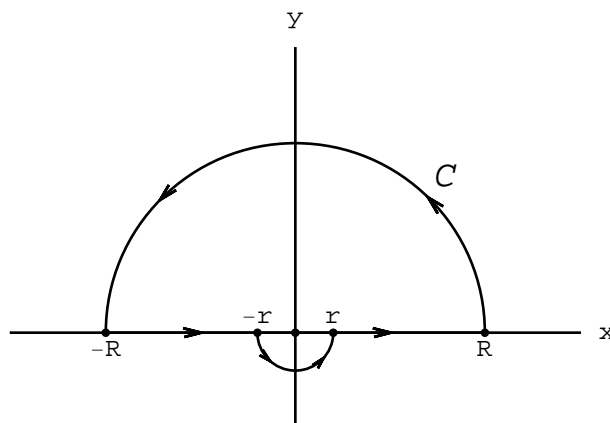
Για να δούμε πώς πρέπει να κατασκευάσουμε την καμπύλη  $C$ , θα πρέπει αρχικά να σημειώσουμε ότι, πάνω σ έναν κύκλο ακτίνας  $r$  με κέντρο την αρχή των αξόνων, το  $z = r e^{i\theta}$ . Συνεπώς,

$$|e^{iz}| = |e^{ir(\cos\theta + i\sin\theta)}| = |e^{ir\cos\theta}| |e^{-r\sin\theta}| = e^{-r\sin\theta}. \quad (8.23)$$

Άρα,  $|e^{iz}| \leq 1$ , αν  $\sin\theta \geq 0$ . Διαφορετικά, η συνάρτηση  $|e^{iz}|$  δεν παραμένει φραγμένη.

Από την άλλη, η  $e^{iz}/z$  είναι αναλυτική σε όλο το μιγαδικό επίπεδο, εκτός από το σημείο  $z = 0$ , όπου έχει πόλο πρώτης τάξης.

Τελικά, οι προηγούμενες παρατηρήσεις μας οδηγούν στο να επιλέξουμε ως  $C$  την καμπύλη που αποτελείται από την ένωση των τμημάτων  $[-R, -r]$  και  $[r, R]$  του άξονα  $x$ , ενός ημικύκλιου  $C_r$  που έχει ως διάμετρο το διάστημα  $[-r, r]$  και περιέχεται στο τμήμα  $y = \text{Im } z \leq 0$  μιγαδικού επιπέδου  $C_z$  και ενός ημικύκλιου  $C_R$  που βρίσκεται στο τμήμα  $y = \text{Im } z \geq 0$ . Η τμηματικά ομαλή, απλή καμπύλη  $C = [-R, -r] \cup C_r \cup [r, R] \cup C_R$  φαίνεται στο Σχ. 8.2.



Σχ. 8.2 Η κλειστή καμπύλη  $C$  κατά μήκος της οποίας υπολογίζεται το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z} dz.$$

Σύμφωνα με τον τύπο του Cauchy,

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z} dz = 2\pi i \text{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z}, 0\right) = 2\pi i.$$

Από την άλλη,

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{-r}^r \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz.$$

Αφού το αριστερό μέλος αυτής της ισότητας είναι ίσο με  $2\pi i$  ανεξάρτητα από τις τιμές των θετικών παταμέτρων  $r, R$ , συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{R \rightarrow \infty, r \searrow 0} \left[ \int_{-R}^r \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{-R}^r \frac{e^{ix}}{x} dx \right] + \lim_{r \searrow 0} \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z} dz + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 2\pi i.$$

Τώρα,

$$\int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{C_r} \frac{e^{ir(\cos\theta + i\sin\theta)}}{r e^{i\theta}} i r e^{i\theta} d\theta = i \int_{\pi}^{2\pi} e^{ir\cos\theta - r\sin\theta} d\theta.$$

Η προς ολοκλήρωση συνάρτηση είναι συνεχής στο διάστημα  $[\pi, 2\pi]$ . Άρα, υπάρχει  $\theta_0 \in [\pi, 2\pi]$ , τέτοιο που

$$\int_{\pi}^{2\pi} e^{ir\cos\theta - r\sin\theta} d\theta = \pi e^{ir\cos\theta_0 - r\sin\theta_0}.$$

Συνεπώς,

$$\lim_{r \searrow 0} \int_{C_r} \frac{e^{iz}}{z} dz = i\pi.$$

Για το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στο ημικύκλιο  $C_R$  η ακόλουθη εκτίμηση είναι προφανής:

$$\left| \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz \right| = \left| i \int_0^{\pi} e^{iR\cos\theta - R\sin\theta} d\theta \right| \leq \int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta} d\theta$$

Από την άλλη

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} e^{-R\sin\theta} d\theta &= \int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\theta} d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} e^{-R\sin\theta} d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\theta} d\theta - \int_{\pi/2}^0 e^{-R\sin(\pi-\varphi)} d\varphi, \quad \theta = \pi - \varphi \\ &= \int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\theta} d\theta + \int_0^{\pi/2} e^{-R\sin(\pi-\varphi)} d\varphi \\ &= \int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\theta} d\theta + \int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\varphi} d\varphi = 2 \int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\theta} d\theta. \end{aligned}$$

Από το Λήμμα 8.1 έπεται ότι

$$\int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\theta} d\theta \leq \int_0^{\pi/2} e^{-2R\theta/\pi} d\theta = \frac{\pi}{2} \frac{e^{-R} - 1}{R}$$

Αλλά, η τελευταία έκφραση μηδενίζεται καθώς το  $R \rightarrow \infty$ . Συνεπώς,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0,$$

Τα δύο προηγούμενα συμπεράσματα για την ασυμπτωτική συμπεριφορά των ολοκληρωμάτων κατά μήκος των κυκλικών τόξων  $C_r$  και  $C_R$  συνεπάγονται ότι

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty, \\ r > 0}} \left[ \int_{-R}^r \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{-R}^r \frac{e^{ix}}{x} dx \right] = \pi i.$$

Άρα,

$$\text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} e^{ix} dx := \lim_{\substack{R \rightarrow \infty, \\ r > 0}} \left[ \int_{-R}^r \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{-R}^r \frac{e^{ix}}{x} dx \right] = \pi i.$$

Ισοδύναμα,

$$\text{PV} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \right) = \pi i,$$

πράγμα που σημαίνει ότι,

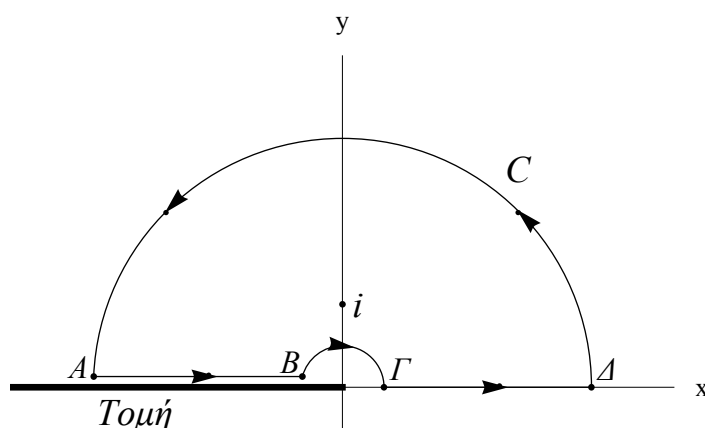
$$\text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x} dx = 0, \quad \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi. \tag{8.24}$$

Το καταχρηστικό ολοκλήρωμα  $\int_0^{\infty} \cos x/x dx$  δεν συγκλίνει. Αυτό φαίνεται καθαρά από το γεγονός ότι  $\cos x = 1 + O(x^2)$  στη γειτονιά του  $x = 0$ . Άρα, η πρώτη από τις σχέσεις (8.24) δεν μπορεί να μεταφραστεί σε αποτέλεσμα που αφορά το ολοκλήρωμα  $\int_0^{\infty} \cos x/x dx$ . Αντίθετα, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, το  $\int_0^{\infty} \sin x/x dx$  συγκλίνει και, άρα, η δεύτερη από τις (8.24) δίνει το αποτέλεσμα που θέλαμε να αποδείξουμε. ■

### Παράδειγμα 8.4

Σε τούτο το παράδειγμα θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx = 0. \tag{8.25}$$



Σχ. 8.3 Η κλειστή καμπύλη C κατά μήκος της οποίας υπολογίζεται το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\oint_C \frac{\ln z}{1+z^2} dz.$$



Για το σκοπό αυτό, ολοκληρώνουμε τη συνάρτηση

$$f(z) := \frac{\ln z}{1+z^2} \quad (8.26)$$

κατά μήκος της κλειστής καμπύλης  $C$  του Σχ. 8.3. Η  $C$  αποτελείται από τα ευθύγραμμα τμήματα  $AB$  και  $\Gamma\Delta$  και τα ημικύκλια  $C_r$  και  $C_R$ . Τα πρώτα αντιστοιχούν στα τμήματα  $[-R, -r]$  και  $[r, R]$  του άξονα  $x$ . Από τα δεύτερα, το  $C_r$  έχει ακτίνα  $r < 1$  και διάμετρο το διάστημα  $[-r, r]$ , ενώ το  $C_R$  έχει ακτίνα  $R > 1$  διάμετρο το διάστημα  $[-R, R]$ .

Όπως γνωρίζουμε, το  $z = 0$  είναι κλαδικό σημείο της συνάρτησης  $\ln z$ . Γι αυτό αφαιρούμε το τμήμα  $x \leq 0$  του άξονα των πραγματικών,  $L$ , και περιοριζόμαστε στον κλάδο που ορίζεται από τον τύπο

$$\ln z := \ln |z| + i\theta, \quad -\pi < \theta < \pi. \quad (8.27)$$

Με αυτό τον τρόπο καταλήγουμε σε μια (μονότιμη) συνάρτηση που είναι αναλυτική σε όλο το ανοιχτό υποσύνολο  $\mathbb{C}_z \setminus L$  του μιγαδικού επιπέδου  $\mathbb{C}_z$ . Συνακόλουθα, η  $f(z)$  είναι μερομορφική στο υποσύνολο  $\mathbb{C}_z \setminus L$ , με απλούς πόλους στα σημεία  $z = \pm i$ .

Από την κατασκευή της, η καμπύλη  $C$  περιέχει μόνο τον πόλο  $z = i$ . Συνεπώς,

$$\oint_C \frac{\ln z}{1+z^2} dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{\ln z}{1+z^2}, i\right) = 2\pi i \frac{\ln i}{2i} = \frac{\pi^2}{2} i.$$

Από την άλλη μεριά,

$$\oint_C \frac{\ln z}{1+z^2} dz = \int_A^B \frac{\ln z}{1+z^2} dz + \int_{C_r} \frac{\ln z}{1+z^2} dz + \int_\Gamma^\Delta \frac{\ln z}{1+z^2} dz + \int_{C_R} \frac{\ln z}{1+z^2} dz.$$

Μένοντας αρχικά στο μέρος του επικαμπύλιου ολοκληρώματος που αφορά τα ευθύγραμμα τμήματα  $AB$  και  $\Gamma\Delta$ , σημειώνουμε ότι το πρώτο βρίσκεται ακριβώς πάνω από την τομή. Άρα, για τα σημεία του  $AB$  μπορούμε να θέσουμε  $\theta = \pi$ , οπότε, το

$$\begin{aligned} \int_A^B \frac{\ln z}{1+z^2} dz + \int_\Gamma^\Delta \frac{\ln z}{1+z^2} dx &= \int_{-R}^{-r} \frac{\ln |x| + i\pi}{1+x^2} dx + \int_r^R \frac{\ln x}{1+x^2} dx \\ &= i\pi \int_r^R \frac{1}{1+x^2} dx + 2 \int_r^R \frac{\ln x}{1+x^2} dx. \end{aligned}$$

Κατά μήκος των κυκλικών τόξων, μπορούμε να εκτιμήσουμε το μέτρο της προς ολοκλήρωσης συνάρτησης, ανάλογα με το μέγεθος της αντίστοιχης ακτίνας:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\ln z}{1+z^2} \right| &= \left| \frac{\ln r + i\theta}{1+r^2 e^{2i\theta}} \right| \leq \frac{\ln r + \pi}{r^2 - 1}, \quad r > 1, \\ \left| \frac{\ln z}{1+z^2} \right| &= \left| \frac{\ln r + i\theta}{1+r^2 e^{2i\theta}} \right| \leq \frac{|\ln r| + \pi}{1-r^2}, \quad r < 1. \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\left| \int_{C_r} \frac{\ln z}{1+z^2} dz \right| \leq \frac{|\ln r| + \pi}{1-r^2} \pi r \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0,$$

$$\left| \int_{C_R} \frac{\ln z}{1+z^2} dz \right| \leq \frac{\ln R + \pi}{R^2 - 1} \pi R \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Από τα προηγούμενα αποτελέσματα συνάγεται ότι,

$$\lim_{r \searrow 0} \left[ \int_A^B \frac{\ln z}{1+z^2} dz + \int_{C_r} \frac{\ln z}{1+z^2} dz + \int_{\Gamma} \frac{\ln z}{1+z^2} dz + \int_{C_R} \frac{\ln z}{1+z^2} dz \right] =$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty, r \searrow 0} \left[ i\pi \int_r^R \frac{1}{1+x^2} dx + 2 \int_r^R \frac{\ln x}{1+x^2} dx \right] \equiv i\pi \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx + 2 \int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2} dx.$$

Άρα,

$$\frac{\pi^2}{2} i = i\pi \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx + 2 \int_0^\infty \frac{\ln x}{1+x^2} dx.$$

Όμως,

$$i\pi \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi^2}{2} i.$$

Συνεπώς, η ταυτότητα (8.25) ισχύει. ■

### Παράδειγμα 8.5

Μια άλλη χρήσιμη ταυτότητα που μπορεί να αποδειχτεί μέσω της επικαμπύλιας ολοκλήρωσης στο μιγαδικό επίπεδο είναι η ακόλουθη.

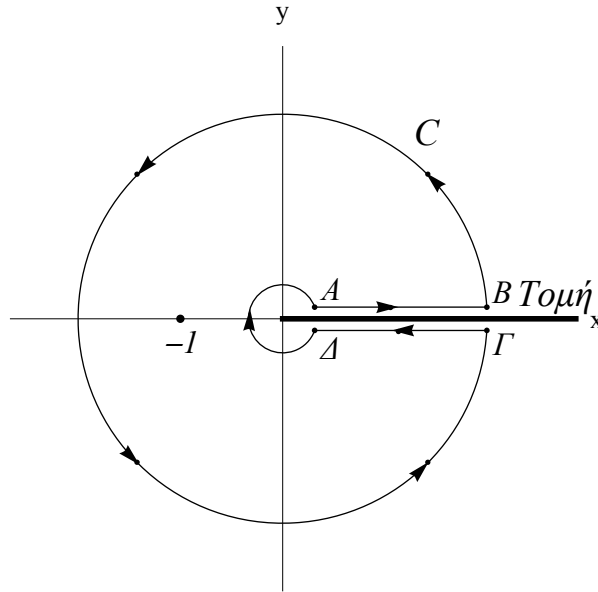
$$\int_0^\infty \frac{1}{x^a(1+x)} dx = \frac{\pi}{\sin \pi a}, \quad a \in (0, 1). \quad (8.28)$$

Θα πρέπει αρχικά να σημειωθεί ότι και για τη συνάρτηση  $z^{-a}$ ,  $a \in (0, 1)$ , το  $z = 0$  είναι κλαδικό σημείο. Κι αυτό γιατί, η οι μη ακέραιες δυνάμεις ορίζονται μέσω της λογαριθμικής. Έτσι, η

$$z^{-a} := e^{-a \ln z}. \quad (8.29)$$

Από την άλλη, η  $(1+z)^{-1}$  έχει απλό πόλο στο  $z = -1$ . Γι αυτό, στην προκείμενη περίπτωση, διαλέγουμε την τομή,  $L$ , κατά μήκος του τμήματος  $x \geq 0$ , όπως στο Σχ. 8.4, και τον κλάδο που ορίζεται από τον τύπο

$$\ln z := \ln |z| + i\theta, \quad 0 < \theta < 2\pi. \quad (8.30)$$



Σχ. 8.4 Η κλειστή καμπύλη  $C$  κατά μήκος της οποίας υπολογίζεται το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\oint_C \frac{\ln z}{1+z^2} dz.$$

Συνακόλουθα, η συνάρτηση

$$f(z) := \frac{1}{z^a(1+z)} \quad (8.31)$$

είναι μερομορφική στο ανοιχτό υποσύνολο  $\mathbb{C}_z \setminus L$  του μιγαδικού επίπεδου  $\mathbb{C}_z$ .

και, σύμφωνα με τον τύπο του Cauchy,

Με αυτό τον τρόπο καταλήγουμε σε μια (μονότιμη) συνάρτηση που είναι αναλυτική σε όλο το ανοιχτό υποσύνολο  $\mathbb{C}_z \setminus L$  του μιγαδικού επίπεδου  $\mathbb{C}_z$ . Συνακόλουθα, η  $f(z)$  είναι μερομορφική στο υποσύνολο  $\mathbb{C}_z \setminus L$ , με απλούς πόλους στα σημεία  $z = \pm i$ .

Όπως δείχνει καθαρά το σχήμα, η καμπύλη  $C$  αποτελείται από δύο ευθύγραμμα τμήματα, τα  $AB$  και  $\Gamma\Delta$ , που βρίσκονται ακριβώς πάνω και κάτω από την τομή, αντίστοιχα, και δύο κυκλικά τόξα, τα  $C_r$  και  $C_R$ , που έχουν ως κέντρο το  $z = 0$  και ενώνουν τα σημεία  $A, \Delta$  και  $B, \Gamma$ , αντίστοιχα. Η ακτίνα,  $r$ , του  $C_r$  είναι μικρότερη της μονάδας, ενώ εκείνη του  $C_R$  μεγαλύτερη. Άρα, η  $C$  περιέχει τον πόλο  $z = -1$ .

Σύμφωνα, λοιπόν, με τον τύπο του Cauchy,

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^a(1+z)}, -1\right) = 2\pi i \frac{1}{(-1)^a} = 2\pi i e^{-i\pi a}.$$

Από την άλλη μεριά,

$$\oint_C f(z) dz = \int_A^B f(z) dz + \int_{C_R} f(z) dz + \int_\Gamma^\Delta f(z) dz + \int_{C_r} f(z) dz.$$

Τώρα, κατά μήκος του ευθύγραμμου τμήματος  $AB$ , η γωνία  $\theta$  διαφέρει απειροελάχιστα από το μηδέν. Μάλιστα, μπορούμε να την επιλέξουμε ίση με το μηδέν, γιατί η  $f(z)$  τείνει σε συγκεκριμένο όριο καθώς πλησιάζουμε την τομή από τα πάνω. Με άλλα λόγια, μπορούμε να θέσουμε  $\theta = 0$ , όταν το  $z \in AB$ , και, ανάλογα,  $\theta = 2\pi$ , όταν το  $z \in \Gamma\Delta$ .

Με αυτό τον τρόπο,  $\ln z = \ln x$  στο τμήμα  $AB$ , ενώ  $\ln z = \ln x + 2i\pi$  στο τμήμα  $\Gamma\Delta$ . Συνεπώς,

$$z^{-a} = e^{-a \ln x} = x^{-a}, \quad z \in AB, \quad z^{-a} = e^{-a(\ln x + 2i\pi)} = x^{-a} e^{-2i\pi a}, \quad z \in \Gamma\Delta.$$

Άρα,

$$\begin{aligned} \int_A^B f(z) dz + \int_\Gamma^\Delta f(z) dz &= \\ \int_r^R \frac{1}{x^a(1+x)} dx + \int_R^r \frac{e^{-2i\pi a}}{x^a(1+x)} dx &= (1 - e^{-2i\pi a}) \int_r^R \frac{1}{x^a(1+x)} dx. \end{aligned}$$

Από την άλλη, κατά μήκος ενός κύκλου ακτίνας  $r$  με κέντρο το  $z = 0$ ,

$$\left| \frac{1}{z^a(1+z)} \right| = \left| \frac{1}{e^{a(\ln r + i\theta)}(1 + r e^{i\theta})} \right| = \frac{1}{r^a} \frac{1}{|1 + r e^{i\theta}|}.$$

Συνεπώς,

$$\left| \frac{1}{z^a(1+z)} \right| \leq \frac{1}{r^a(r-1)}, \quad r > 1, \quad \left| \frac{1}{z^a(1+z)} \right| \leq \frac{1}{r^a(1-r)}, \quad r < 1.$$

Οι προηγούμενες εκτιμήσεις, σε συνδυασμό με τον περιορισμό  $a \in (0, 1)$ , οδηγούν στο συμπέρασμα ότι,

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_r} \frac{1}{z^a(1+z)} dz \right| &\leq \frac{2\pi r}{r^a(1-r)} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0, \\ \left| \int_{C_R} \frac{\ln z}{1+z^2} \right| &\leq \frac{2\pi R}{R^a(R-1)} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Από τα προηγούμενα αποτελέσματα συνάγεται ότι,

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{R \rightarrow \infty, \\ r \searrow 0}} \left[ \int_A^B f(z) dz + \int_{C_R} f(z) dz + \int_\Gamma^\Delta f(z) dz + \int_{C_r} f(z) dz \right] &= \\ \lim_{\substack{R \rightarrow \infty, \\ r \searrow 0}} \left[ (1 - e^{-2i\pi a}) \int_r^R \frac{1}{x^a(1+x)} dx \right] &\equiv (1 - e^{-2i\pi a}) \int_0^\infty \frac{1}{x^a(1+x)} dx. \end{aligned}$$

Κατά συνέπεια,

$$(1 - e^{-2i\pi a}) \int_0^\infty \frac{1}{x^a(1+x)} dx = 2\pi i e^{-i\pi a}.$$

Ισοδύναμα

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^a(1+x)} dx = \frac{2\pi i e^{-i\pi a}}{1 - e^{-2i\pi a}} \equiv \frac{\pi}{\sin \pi a}.$$

■

Το τελευταίο παράδειγμα είναι αντιπροσωπευτικό μιας κατάστασης που θα μας απασχολήσει εκτενώς στη συνέχεια. Πρόκειται για τον ορισμό μιας μιγαδικής συνάρτησης μέσω ενός καταχρηστικού ολοκληρώματος ή ολοκληρώματος κύριας τιμής. Στο πιο παράδειγμα ορίστηκε η συνάρτηση  $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  μέσω του τύπου

$$f(a) := \int_0^{\infty} g(x, a) dx \equiv \int_0^{\infty} \frac{1}{x^a(1+x)} dx, \quad a \in (0, 1), \quad (8.32)$$

και τελικά αποδείχτηκε ότι  $f(a) = \pi / \sin \pi a$ . Έτσι, στη συγκεκριμένη περίπτωση μπορούμε να πούμε ότι η (8.23) δίνει μian ολοκληρωτική αναπαράσταση της συνάρτησης  $f(x) = \pi / \sin \pi x$ ,  $x \in (0, 1)$ .

Γενικότερα, ένας τύπος της μορφής

$$f(z) := \int_a^{\infty} g(x, z) dx, \quad z \in \Omega \subset \mathbb{C}, \quad (8.33)$$

μπορεί να είναι ο μοναδικός τρόπος ορισμού της συνάρτησης  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ . Τότε, είμαστε υποχρεωμένοι να συναγάγουμε τις ιδιότητες της  $f$  από εκείνες της  $g(x, z)$ . Θα πρέπει, για παράδειγμα, να μπορούμε να αποφανθούμε αν η  $f$  είναι αναλυτική ή όχι στο σύνολο  $\Omega$ . Κάτι τέτοιο εμπλέκει προφανώς την αλλαγή σειράς των οριακών διαδικασιών της παραγωγίσιμης και της ολοκλήρωσης, άρα, και την έννοια της ομοιόμορφης σύγκλισης. Έτσι, οδηγούμαστε στους ορισμούς και τα θεωρήματα που ακολουθούν.

(i) **Ομοιόμορφη σύγκλιση καταχρηστικών ολοκληρωμάτων.** Ας υποθέσουμε ότι για κάθε  $z \in \Omega \subset \mathbb{C}$  το καταχρηστικό ολοκλήρωμα στην (8.33) συγκλίνει. Θα λέμε ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη στο  $\Omega$ , αν για κάθε  $\varepsilon > 0$ , οσοδήποτε μικρό, υπάρχει ένα  $R_0 > a$ , ανεξάρτητο από το  $z$ , τέτοιο που

$$\left| f(z) - \int_a^R g(x, z) dx \right| \equiv \left| \int_R^{\infty} g(x, z) dx \right| < \varepsilon, \quad (8.34)$$

για κάθε  $R \geq R_0$ .

(ii) **Κριτήριο του Cauchy για την ομοιόμορφη σύγκλιση καταχρηστικών ολοκληρωμάτων.** Το καταχρηστικό ολοκλήρωμα (8.33) συγκλίνει ομοιόμορφα στο υποσύνολο  $\Omega$ , εάν και μόνο όταν για κάθε  $\varepsilon > 0$ , οσοδήποτε μικρό, υπάρχει ένα  $R_0$ , ανεξάρτητο από το  $z$ , τέτοιο ώστε

$$\left| \int_{R_1}^{R_2} g(x, z) dx \right| < \varepsilon, \quad (8.35)$$

για κάθε  $R_1, R_2 \geq R_0$ .

(iii) **Κανονική σύγκλιση.** Αν το καταχρηστικό ολοκλήρωμα στην (8.33) συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές (κλειστό και φραγμένο) υποσύνολο μιας περιοχής  $\Omega$  του  $\mathbb{C}$ , τότε θα λέμε ότι το παραπάνω ολοκλήρωμα συγκλίνει κανονικά στο  $\Omega$ .

**Θεώρημα 8.5** (Η κανονική σύγκλιση συνεπάγεται ολομορφία)

Ας υποθέσουμε ότι

(i) Για κάθε συγκεκριμένο  $x \in [a, \infty)$ , η  $g(x, z)$  είναι αναλυτική συνάρτηση του  $z$  στην περιοχή  $\Omega$  του  $\mathbb{C}$ .

(ii) Η  $g(x, z)$  και η μερική παράγωγός της  $g_z(x, z)$  είναι συνεχείς σε κάθε σύνολο της μορφής  $[a, R] \times \overline{D}_r(z_0)$ , όπου  $\overline{D}_r(z_0)$  ένας κλειστός δίσκος ακτίνας  $r$  με κέντρο το τυχαίο σημείο  $z_0$  της περιοχής  $\Omega$ .

(iii) Το καταχρηστικό ολοκλήρωμα στην (8.33) συγκλίνει κανονικά στο  $\Omega$ .

Τότε, η  $f(z)$  που ορίζεται στην (8.33) είναι αναλυτική στην  $\Omega$  και

$$f'(z) := \int_a^\infty g_z(x, z) dx, \quad z \in \Omega. \quad (8.36)$$

### Απόδειξη

Ορίζουμε την ακολουθία των συναρτήσεων  $\{f_n\}$ , θέτοντας

$$f_n(z) := \int_a^{x_n} g(x, z) dx, \quad z \in \Omega, \quad (8.37)$$

όπου  $\{x_n\}$  μια τυχαία ακολουθία σημείων του διαστήματος  $(a, \infty)$ , τέτοια που  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ . Από τον κανόνα του Leibniz έπεται ότι οι  $f_n(z)$  είναι ολομορφικές στην περιοχή  $\Omega$ , με παράγωγο

$$f'_n(z) = \int_a^{x_n} g_z(x, z) dx, \quad z \in \Omega. \quad (8.38)$$

Από την άλλη, σύμφωνα με την υπόθεση, το καταχρηστικό ολοκλήρωμα

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^{x_n} g(x, z) dx \quad (8.39)$$

συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο της περιοχής  $\Omega$ . Άρα, το ίδιο ισχύει και για την ακολουθία των συναρτήσεων  $f_n(z)$  που ορίζονται από την (8.37). Τότε, όμως, το θεώρημα που ακολουθεί συνεπάγεται ότι οι ακολουθίες  $\{f_n\}$  και  $\{f'_n\}$  συγκλίνουν σε ολομορφικές συναρτήσεις που δεν είναι άλλες από τις  $f$  και  $f'$ , αντίστοιχα.

**Θεώρημα 8.6** (Θεώρημα του Weierstrass)

Θεωρούμε μιαν ακολουθία,  $\{f_n\}$ , από συναρτήσεις που είναι αναλυτικές στην περιοχή  $\Omega \subset \mathbb{C}$ . Αν η  $\{f_n\}$  συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές (κλειστό και φραγμένο) υποσύνολο του  $\Omega$ , τότε

(i) Η συνάρτηση  $f$  στην οποία συγκλίνει η  $\{f_n\}$  είναι αναλυτική στην  $\Omega$ ,

(ii) Για κάθε  $m \in \mathbb{N}$ , η ακολουθία  $\{f_n^{(m)}\}$  που ορίζεται από τις παραγώγους τάξης  $m$  των  $f_n$  συγκλίνει κανονικά στην  $f^{(m)}$ .

### Απόδειξη

Θεωρούμε το τυχαίο σημείο  $z$  της περιοχής  $\Omega$  και μιαν απλή κλειστή καμπύλη (βρόχο)  $\Gamma$  της  $\Omega$  που περιέχει το  $z$ . Αν συμβολίσουμε με  $\delta$  την απόσταση του  $z$  από την  $\Gamma$ , αν δηλαδή

$$\delta := \min_{\zeta \in \Gamma} |\zeta - z|,$$

τότε  $\delta > 0$  και  $0 < |\zeta - z|^{-1} \leq \delta^{-1}$ ,  $\forall \zeta \in \Gamma$ .

Η καμπύλη  $\Gamma$  αποτελεί ένα συμπαγές υποσύνολο του  $\mathbb{C}$  και ο περιορισμός της  $f_n$  στην  $\Gamma$  είναι μια συνεχής συνάρτηση, η  $f_n|_{\Gamma}$ . Το ίδιο ισχύει και για την  $(\zeta - z)^{-1} f_n|_{\Gamma}$ . Συνεπώς, η ακολουθία  $\{(\zeta - z)^{-1} f_n(\zeta)\}$ ,  $\zeta \in \Gamma$ , συγκλίνει ομοιόμορφα στην  $(\zeta - z)^{-1} f(\zeta)$ ,  $\zeta \in \Gamma$ . Αυτό μας επιτρέπει να αλλάξουμε τη σειρά των διαδικασιών ολοκλήρωση-όριο κι έτσι να βρούμε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Όμως οι  $f_n$  είναι αναλυτικές σε όλη την περιοχή  $\Omega$  που περιέχει την  $\Gamma$ . Άρα, σύμφωνα με τον τύπο του Cauchy,

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f_n(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f_n(z).$$

Έτσι, η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Αν συμβολίσουμε με  $D$  το εσωτερικό της  $\Gamma$ , τότε το σύνολο  $\bar{D} := D \cup \Gamma$  είναι συμπαγές. Άρα, η ακολουθία  $\{f_n\}$  συγκλίνει ομοιόμορφα στο  $\bar{D}$ . Ειδικότερα,  $f_n(z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(z)$ ,  $z \in D$ , οπότε το προηγούμενο αποτέλεσμα παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Αυτή η σχέση ισχύει για κάθε  $z \in \Omega$  και οποιονδήποτε βρόχο της περιοχής  $\Omega$  στο εσωτερικό του οποίου περιέχεται το  $z$ . Συνεπώς, η  $f(z)$  είναι ολομορφική στην  $\Omega$ .

Το δεύτερο σκέλος του θεωρήματος αποδεικνύεται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο και, γι' αυτό, αφήνεται προς άσκηση.

## Ασκήσεις

**8.1** Ν' αναπτυχθούν σε σειρά Laurent με κέντρο το σημείο  $z_0$  οι ακόλουθες συναρτήσεις. Σε κάθε περίπτωση, να προσδιοριστεί ο δακτύλιος  $\Delta_{r,R}(z_0)$  στον οποίο ισχύει το ανάπτυγμα.

$$(i) f(z) = \frac{1}{z(1-z)^2}, \quad z_0 = 0, \quad (ii) f(z) = \frac{1}{z(1-z)}, \quad z_0 = 1/2,$$

$$(iii) f(z) = \cot z, \quad z_0 = 0, \quad (iv) f(z) = \frac{e^z - 1}{e^z + 1}, \quad z_0 = i\pi,$$

**8.2** α) Να κατασκευαστούν τα αναπτύγματα Laurent της  $f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$  στους δακτύλιους  $\Delta_{0,1}(0)$  και  $\Delta_{1,1}(0)$ , αντίστοιχα.

β) Να γίνει το ίδιο για την  $f(z) = \frac{1}{(1-z^2)^2}$  στους δακτύλιους  $\Delta_{0,2}(-1)$  και  $\Delta_{0,2}(1)$ .

**8.3** Οι σειρές  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$  και  $\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}$  ονομάζονται, αντίστοιχα, **κανονικό μέρος** και **κύριο μέρος** της σειράς Laurent  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$ . Να προσδιοριστεί το κύριο μέρος της σειράς Laurent με το σημείο  $z_0$  καθεμιάς από τις παρακάτω συναρτήσεις.

$$(i) f(z) = \frac{1}{z \sin z}, \quad z_0 = 0, \quad (ii) f(z) = \frac{1}{1-z}, \quad z_0 = 1, \quad (iii) f(z) = e^{1/z}, \quad z_0 = 0,$$

$$(iv) f(z) = \frac{e^z + 1}{e^z - 1}, \quad z_0 = 2\pi i, \quad (v) f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + b^2}, \quad z_0 = ib, \quad b > 0.$$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n. \quad (8.40)$$

**8.4** Προσδιορίστε τη θέση και το είδος των σημείων ανωμαλίας των παρακάτω συναρτήσεων.

$$(i) f(z) = \frac{1}{z^2(z+2)^2}, \quad (ii) f(z) = \frac{z}{\sin z}, \quad (iii) f(z) = e^{-z} + \frac{1}{z^2+1}$$

$$(iv) f(z) = \cot z + \frac{1}{z^4+1}, \quad (v) f(z) = \frac{e^{-z}}{z^3+1}.$$

**8.5** Να υπολογιστούν τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα των παρακάτω συναρτήσεων στα απομονωμένα σημεία ανωμαλίας τους.

$$(i) f(z) = \frac{z}{\sin z}, \quad (ii) f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2+b^2}, \quad a \in \mathbb{C}, \quad (iii) f(z) = z^n \sin\left(\frac{1}{z}\right), \quad n \in \mathbb{N},$$

$$(iv) f(z) = \frac{e^{az}}{1+e^z}, \quad a \in \mathbb{R}, \quad (v) f(z) = \frac{z^a}{(z+1)^2}, \quad a \in (-1, 1).$$

**8.6** Θεωρήστε τη συνάρτηση  $f(x) = x^{-1}$ ,  $x \in [-1, 0) \cup (0, 1]$ .

α) Δείχτε ότι

$$\text{PV} \int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = 0. \quad (8.41)$$

β) Εξηγήστε γιατί η η συνάρτηση  $f_{(\lambda)}(x) = \frac{x}{x^2+\lambda^2}$ ,  $\lambda > 0$ , μπορεί να θεωρηθεί ως εξομάλυνση της  $f(x) = x^{-1}$ , αν το  $\lambda$  επιλεγεί αρκετά μικρό. Κατασκευάστε το γράφημα των  $f(x)$  και  $f_{(\lambda)}(x)$  σε κοινό διάγραμμα.



γ) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα  $\int_{-1}^1 f_{(\lambda)}(x) dx$  και συγκρίνετε το αποτέλεσμα με την (8.41) στο όριο  $\lambda \rightarrow 0$ .

**8.7** Γενικεύοντας την ανάλυση της προηγούμενης άσκησης, θεωρήστε τη συνάρτηση  $f(x) = (x - x_0)^{-1}$ ,  $x \in [a, x_0) \cup (x_0, b]$ .

α) Δείχτε ότι

$$\text{PV} \int_a^b \frac{1}{x - x_0} dx = \ln \frac{b - x_0}{x_0 - a}. \quad (8.42)$$

β) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_a^b \frac{f_{(\lambda)}(x)}{x - x_0} dx, \quad f_{(\lambda)}(x) = \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + \lambda^2}, \quad \lambda > 0,$$

και συγκρίνετε το αποτέλεσμα με την (8.42), στο όριο  $\lambda \rightarrow 0$ .

**8.8** Υποθέστε ότι η συνάρτηση  $f(x)$  είναι κλάσης  $C^1$  στο διάστημα  $[a, b]$  κι ότι το  $x_0 \in (a, b)$ . Δείχτε ότι

α) Το καταχρηστικό ολοκλήρωμα

$$\int_{x_0}^y \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} dx$$

συγκλίνει, για κάθε  $y \in [a, b]$ .

β) Το ολοκλήρωμα κύριας τιμής  $\text{PV} \int_a^b \frac{f(x)}{x - x_0} dx$  είναι ίσο με

$$\text{PV} \int_a^b \frac{f(x)}{x - x_0} dx = \int_a^b \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} dx + f(x_0) \ln \frac{b - x_0}{x_0 - a} \quad (8.43)$$

**8.9** Η συνάρτηση  $F(z)$  ορίζεται από τον τύπο

$$F(z) := \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \Omega_{\pm}, \quad (8.44)$$

όπου

$$f(z) = \frac{1 + z^2}{z},$$

$C$  ο μοναδιαίος κύκλος  $|z| = 1$  και  $\Omega_+$  ( $\Omega_-$ ) το εσωτερικό (εξωτερικό, αντίστοιχα) του κύκλου.

α) Να βρεθεί ο τύπος της  $F(z)$  στις περιοχές  $\Omega_{\pm}$  του μιγαδικού επιπέδου  $\mathbb{C}_z$ .

β) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα κύριας τιμής

$$\text{PV} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta, \quad z_0 \in C.$$

γ) Να δειχτεί ότι,

$$F_+(z_0) - F_-(z_0) = f(z_0), \quad (8.45)$$

$$F_+(z_0) + F_-(z_0) = \frac{1}{\pi i} \text{PV} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta, \quad (8.46)$$

όπου

$$F_+(z_0) := \lim_{\Omega_+ \ni z \rightarrow z_0} F(z), \quad F_-(z_0) := \lim_{\Omega_- \ni z \rightarrow z_0} F(z), \quad (8.47)$$

και, άρα, στην προκειμένη περίπτωση, επαληθεύονται οι *σχέσεις Plemelj-Sokhotski*

$$F_{\pm}(z_0) = \pm \frac{1}{2} f(z_0) + \frac{1}{2\pi i} \text{PV} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta \quad (8.48)$$

**8.10.** Ο άξονας των πραγματικών,  $x$ , χωρίζει το μιγαδικό επίπεδο  $\mathbb{C}_z$  στο πάνω,  $\Omega_+$ , και κάτω,  $\Omega_-$ , μέρος αντίστοιχα. Στις ξένες μεταξύ τους περιοχές  $\Omega_{\pm}$ , η συνάρτηση  $F(z)$  ορίζεται από τον τύπο

$$F(z) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - z} dx, \quad z \in \Omega_{\pm}, \quad (8.49)$$

όπου

$$f(x) = \frac{2}{1 + x^2}.$$

α) Να δειχτεί ότι,

$$F(z) = \frac{i}{z \pm i}, \quad z \in \Omega_{\pm}. \quad (8.50)$$

β) Να δειχτεί ότι,

$$F_+(x_0) - F_-(x_0) = f(x_0), \quad x_0 \in \mathbb{R} \quad (8.51)$$

$$F_+(x_0) + F_-(x_0) = \frac{1}{\pi i} \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - x_0} dx, \quad x_0 \in \mathbb{R} \quad (8.52)$$

όπου ο συμβολισμός είναι αυτός της προηγούμενης άσκησης, και, άρα, επαληθεύονται οι *σχέσεις Plemelj-Sokhotski*

$$F_{\pm}(x_0) = \pm \frac{1}{2} f(x_0) + \frac{1}{2\pi i} \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{x - x_0} dx, \quad x_0 \in \mathbb{R}. \quad (8.53)$$

γ) Υποθέστε, τώρα, ότι η συνάρτηση  $f(x)$ , είναι τυχαία, αλλά πληροί τη συνθήκη Lipschitz  $|f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|$ , όπου  $k$  θετική σταθερή και  $|f(x)| \rightarrow 0$ , καθώς το  $|x| \rightarrow \infty$ . Δείχτε ότι οι σχέσεις (8.51-3) εξακολουθούν να ισχύουν.

**8.11** Να δειχτεί ότι

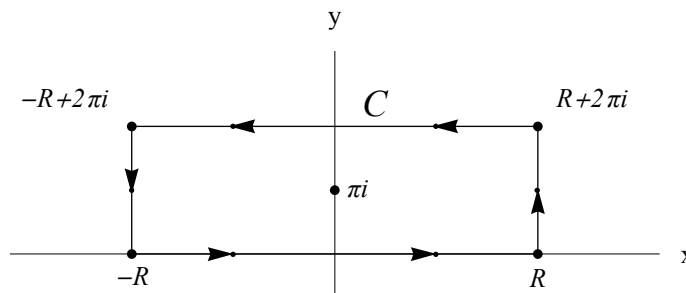
$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{-a}, \quad a > 0. \quad (8.54)$$

**8.12** Να δειχτεί ότι

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-a}, \quad a > 0. \quad (8.55)$$

**8.13** Με τη βοήθεια του Σχ.8.5, δείχτε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1 + e^x} dx = \frac{\pi}{\sin \pi a}, \quad a \in (0, 1). \quad (8.56)$$



**Σχ. 8.5** Η κλειστή καμπύλη  $C$  για την παραγωγή της ταυτότητας (8.56).

**8.14** Με τη βοήθεια του Σχ. 8.3, να δειχτεί ότι

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(1 + x^2)^2} dx = -\frac{\pi}{4}. \quad (8.57)$$

**8.15** (i) Για θετικές τιμές της μεταβλητής  $z$ , η συνάρτηση γάμμα (του Euler) ορίζεται από το καταχρηστικό ολοκλήρωμα

$$\Gamma(z) := \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx, \quad z > 0. \quad (8.58)$$

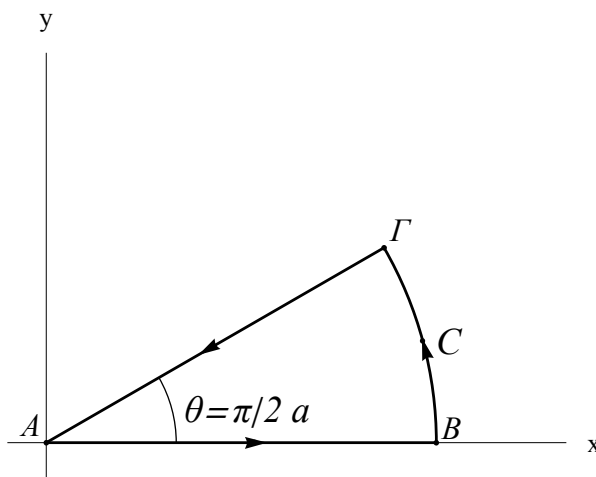
Να δειχτεί ότι,

$$\int_0^{\infty} e^{-x^a} dx = \frac{1}{a} \Gamma\left(\frac{1}{a}\right), \quad a > 0. \quad (8.59)$$

β) Ολοκληρώνοντας την συνάρτηση  $f(z) = \exp(iz^a)$  κατά μήκος της κλειστής καμπύλης  $C$  του Σχ. 8.5, η οποία αποτελεί το σύνορο ενός κυκλικού τομέα με γωνιακό άνοιγμα  $\theta = 2\pi/a$ , δείχτε ότι,

$$\int_0^{\infty} \cos(x^a) dx = \frac{1}{a} \Gamma\left(\frac{1}{a}\right) \cos \frac{\pi}{2a}, \quad a > 1 \quad (8.60)$$

$$\int_0^{\infty} \sin(x^a) dx = \frac{1}{a} \Gamma\left(\frac{1}{a}\right) \sin \frac{\pi}{2a}, \quad a > 1 \quad (8.61)$$

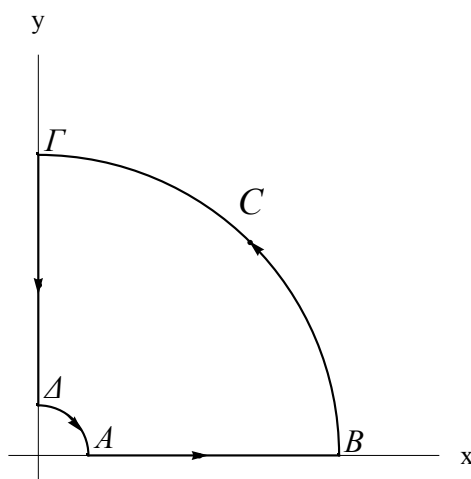


**Σχ. 8.5** Η κλειστή καμπύλη  $C$  κατά μήκος της οποίας υπολογίζεται το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα  $\oint e^{iz^a} dz$ .

**8.16** Τα τμήματα  $AB$  και  $\Gamma\Delta$  της κλειστής καμπύλης  $C$  του Σχ. 8.6 είναι κυκλικά τόξα, ακτίνας  $R$  και  $r$ , αντίστοιχα. Ολοκληρώνοντας την συνάρτηση  $f(z) = z^{a-1} \exp(iz)$  κατά μήκος της  $C$ , δείχτε ότι,

$$\int_0^\infty x^{a-1} \cos(x) dx = \Gamma(a) \cos \frac{\pi a}{2}, \quad a \in (0, 1), \quad (8.62)$$

$$\int_0^\infty x^{a-1} \sin(x) dx = \Gamma(a) \sin \frac{\pi a}{2}, \quad a \in (0, 1). \quad (8.63)$$



**Σχ. 8.6** Η κλειστή καμπύλη  $C$  κατά μήκος της οποίας υπολογίζεται το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα  $\oint z^{a-1} e^{iz^a} dz$ .

**8.17** Η συνάρτηση

$$F(z) := \int_0^\infty e^{-tz} f(t) dt \quad (8.64)$$

ονομάζεται **μετασχηματισμός Laplace** της  $f(t)$ ,  $t \in [0, \infty)$ . Αποδείχτε την

**Πρόταση 8.1**

Αν η  $f(t)$  είναι τμηματικά συνεχής σε κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα της πραγματικής ημιευθείας  $[0, \infty)$  και υπάρχουν σταθερές  $M > 0$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , τέτοιες ώστε  $|f(t)| \leq M e^{at}$ , τότε η  $F(z)$  είναι ολομορφική στο τμήμα  $\operatorname{Re} z > a$  του μιγαδικού επίπεδου  $C_z$ .

**8.18** Η συνάρτηση

$$F(z) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixz} f(x) dx \quad (8.65)$$

ονομάζεται *μετασχηματισμός Fourier* της  $f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Αποδείχτε την

**Πρόταση 8.2**

Αν η  $f(x)$  είναι τμηματικά συνεχής σε κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα της πραγματικής ευθείας και υπάρχουν σταθερές  $L, M > 0$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ , τέτοιες ώστε  $|f(x)| \leq L e^{ax}$ ,  $x \geq 0$ ,  $|f(x)| \leq M e^{bx}$ ,  $x \leq 0$ , τότε η  $F(z)$  είναι ολομορφική στη λωρίδα  $a < \operatorname{Im} z < b$  του μιγαδικού επίπεδου  $C_z$ .

# Μετασχηματισμοί Fourier

## 1. Από τις σειρές στους μετασχηματισμούς Fourier

Ένα από τα πρώτα προβλήματα αρχικών τιμών που αναλύσαμε αφορούσε την εξίσωση της διάχυσης ή θερμότητας σε ένα φραγμένο διάστημα της πραγματικής ευθείας. Για την ακρίβεια, αυτό που επιλύσαμε για πρώτη φορά ήταν ένα πρόβλημα αρχικών-συνοριακών συνθηκών (ΠΑΣΤ). Συγκεκριμένα, η άγνωστη συνάρτηση,  $u(x, t)$ , εκτός από το να είναι λύση της ΜΔΕ

$$u_t = u_{xx}, \quad (1.1)$$

στην χωρο-χρονική περιοχή  $0 < x < a, t > 0$ , όφειλε να σέβεται τις εξής συνθήκες:

- (i) Την αρχική  $u(x, 0) = f(x)$ , όπου  $f(x)$  δοσμένη συνάρτηση, συνεχής στο διάστημα  $0 \leq x \leq a$ .
- (ii) Δύο συνοριακές, δηλαδή δύο συνθήκες που αφορούσαν τις τιμές της  $u(x, t)$  στα άκρα του χωρικού διαστήματος  $0 \leq x \leq a$ . Το απλούστερο παράδειγμα ήταν εκείνο των ομογενών συνθηκών  $u(0, t) = u(a, t) = 0$ , για κάθε  $t \geq 0$ .

Για να αντιμετωπίσουμε το παραπάνω ΠΑΣΤ, αρχικά κατασκευάσαμε μια οικογένεια λύσεων που σέβονται μόνο τις συνοριακές συνθήκες. Η παραγωγή αυτών των λύσεων στηρίχτηκε στη μέθοδο του διαχωρισμού των μεταβλητών. Δηλαδή, στην υπόθεση ότι η λύση είναι της μορφής  $u(x, t) = X(x)T(t)$ . Η αντικατάσταση αυτής της έκφρασης στην (1.1) οδηγεί αμέσως στο σύστημα

$$X''(x) = \lambda X(x), \quad (1.2)$$

$$T'(t) = \lambda T(t), \quad (1.3)$$

όπου  $\lambda$  τυχαία σταθερή.

Η δεύτερη από αυτές τις ΣΔΕ λύνεται αμέσως για να δώσει το εξής αποτέλεσμα:  $T(t) = T(0) \exp(\lambda t)$ . Συνεπώς, για να είναι η συνάρτηση  $T(t)$ , άρα και η  $u(x, t) = X(x)T(t)$ , φραγμένη στο διάστημα  $t \geq 0$ , η παράμετρος  $\lambda$  θα πρέπει να μην παίρνει θετικές τιμές. Δηλαδή,  $\lambda \leq 0$ .

Μπορούμε λοιπόν να θέσουμε  $\lambda = -k^2$ , όπου  $k$  τυχαίος πραγματικός αριθμός, οπότε η (1.2) γίνεται  $X'' = -k^2 X$ . Η γενική λύση αυτής της εξίσωσης είναι της μορφής  $X(x) = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx$ , όπου  $c_1, c_2$  τυχαίες σταθερές. Από την άλλη, για τις λύσεις της

μορφής  $u(x, t) = X(x)T(t)$ , οι συνοριακές συνθήκες  $u(0, t) = u(a, t) = 0$  ανάγονται στις  $X(0) = X(a) = 0$ . Συνεπώς, η παράμετρος  $k$  περιορίζεται στις τιμές  $k_n = n(\pi/a)$ , όπου  $n$  ακέραιος, και η  $X(x)$  στη μορφή  $X(x) = c_2 \sin k_n x$ . Συμπερασματικά, οι λύσεις που σέβονται τις συνοριακές συνθήκες είναι της μορφής

$$u_n(x, t) = A_n \sin k_n x e^{-k_n^2 t}. \quad (1.4)$$

Η κατασκευή της λύσης του αρχικά δοσμένου ΠΑΣΤ στηρίχτηκε στην υπέρθεση τέτοιων λύσεων. Δηλαδή, στην υπόθεση ότι, με κατάλληλη επιλογή των σταθερών  $A_n$ , η λύση του ΠΑΣΤ μπορεί να γραφτεί με τη μορφή της σειράς

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin k_n x e^{-k_n^2 t}. \quad (1.5)$$

Η επιλογή των κατάλληλων συντελεστών  $A_n$  υποβάλλεται από την αρχική συνθήκη, που σύμφωνα με την (1.5), γίνεται

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin k_n x = f(x). \quad (1.6)$$

Αν, λοιπόν, αυτή η σειρά συγκλίνει στη δοσμένη συνάρτηση  $f(x)$ , τότε η παραπάνω διαδικασία οδηγεί σε λύσεις του ΠΑΣΤ για την εξίσωση της διάχυσης με ομογενείς συνοριακές συνθήκες. Τις προϋποθέσεις που εξασφαλίζουν την επιθυμητή σύγκλιση, δηλαδή την αναπαράσταση της  $f(x)$  με τη μορφή σειράς Fourier, τις μελετήσαμε διεξοδικά σε προηγούμενο κεφάλαιο.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι μας έχει δοθεί προς λύση το ίδιο πρόβλημα, αλλά με την εξής βασική διαφορά: Η χωρική μεταβλητή  $x$  δεν περιορίζεται σ' ένα φραγμένο διάστημα, παρά διατρέχει όλη την πραγματική ευθεία. Τότε, η παράμετρος  $k$  δεν έχει κανένα λόγο να περιοριστεί στις διακριτές τιμές  $k_n = n(\pi/a)$ . Συνεπώς, κάθε λύση της μορφής

$$u_k(x, t) = (A \sin k x + B \cos k x) e^{-k^2 t}, \quad k \in \mathbb{R}, \quad (1.7)$$

είναι αποδεκτή. Συνακόλουθα, η υπέρθεση (το άθροισμα) τέτοιου είδους λύσεων παίρνει πλέον τη μορφή ενός ολοκληρώματος:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} [A(k) \sin k x + B(k) \cos k x] e^{-k^2 t} dk. \quad (1.8)$$

Τέλος, η αρχική συνθήκη γίνεται

$$u(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} [A(k) \sin k x + B(k) \cos k x] dk = f(x). \quad (1.9)$$

Άρα, στα προβλήματα αρχικών τιμών (ΠΑΤ), στα οποία η χωρική μεταβλητή διατρέχει όλη την πραγματική ευθεία, το βασικό μαθηματικό πρόβλημα παίρνει διαφορετική μορφή. Γίνεται το διπλό ζήτημα που συμπυκνώνεται στην σχέση (1.9). Γιατί, το ολοκλήρωμα που εμφανίζεται στην παραπάνω σχέση είναι καταχρηστικό. Άρα, είμαστε υποχρεωμένοι να εξετάσουμε τις προϋποθέσεις, κάτω από τις οποίες αυτό το ολοκλήρωμα συγκλίνει. Από την άλλη, ακόμα και όταν το παραπάνω ολοκλήρωμα συγκλίνει, οπότε και ορίζει κάποια συνάρτηση  $F(x)$ , αυτό δε σημαίνει ότι η  $F(x)$  ταυτίζεται με την αρχικά δοσμένη  $f(x)$ . Με άλλα λόγια, θα πρέπει να απαντήσουμε στο ερώτημα κατά πόσο μια τυχαία, ουσιαστικά, συνάρτηση με πεδίο

ορισμού ολόκληρη την πραγματική ευθεία μπορεί να γραφτεί με τη μορφή του παραπάνω ολοκληρώματος.

Όπως και τα ανάλογα ζητήματα που αφορούν τη σειρά (1.6), αυτά που έχουν να κάνουν με το ολοκλήρωμα (1.9) συνδέονται με το όνομα του Fourier (Φουριέ). Πιο συγκεκριμένα, τα ερωτήματα που θέσαμε παραπάνω ανήκουν στην περιοχή των μαθηματικών που φέρει τον τίτλο *Μετασχηματισμοί Fourier*. Σε αυτό το αντικείμενο είναι αφιερωμένο το πρώτο μέρος του παρόντος κεφάλαιου. Το δεύτερο μέρος του επικεντρώνεται στην ανάλυση της τεχνικής με την οποία οι μετασχηματισμοί Fourier οδηγούν στην επίλυση ΠΑΤ εξισώσεων εξέλιξης, σαν αυτά που περιγράψαμε για την εξίσωση της διάχυσης.



## 2. Ο ευθύς και αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier

Όπως επισημάναμε στο προηγούμενο εδάφιο, το πρώτο ερώτημα στο οποίο πρέπει ν' απαντήσουμε είναι αν μια συνάρτηση  $f(x)$ , με πεδίο ορισμού ολόκληρη την πραγματική ευθεία, μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [A(k) \sin kx + B(k) \cos kx] dk. \quad (2.1)$$

Σε λίγο, θα διαπιστώσουμε ότι, για μια πολύ μεγάλη κλάση συναρτήσεων, η απάντηση στο παραπάνω ερώτημα είναι θετική. Προς το παρόν, θα σημειώσουμε ότι η σχέση (2.1) είναι ίδια με την

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ A(k) \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} + B(k) \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} \right] dk. \quad (2.2)$$

Όμως, η παράμετρος ολοκλήρωσης  $k$  διατρέχει όλη την πραγματική ευθεία. Άρα, με την αντικατάσταση  $k \rightarrow -k$ , μπορούμε να μετατρέψουμε τους όρους που περιέχουν τη συνάρτηση  $\exp(-ikx)$  σε όρους που περιέχουν την  $\exp(ikx)$ . Αναλυτικότερα,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ -A(k) \frac{e^{-ikx}}{2i} + B(k) \frac{e^{-ikx}}{2} \right] dk &= - \int_{\infty}^{-\infty} \left[ -A(-k) \frac{e^{ikx}}{2i} + B(-k) \frac{e^{ikx}}{2} \right] dk \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ -A(-k) \frac{e^{ikx}}{2i} + B(-k) \frac{e^{ikx}}{2} \right] dk. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Με αυτό τον τρόπο, η (2.1) γίνεται

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} C(k) e^{ikx} dk, \quad (2.4)$$

όπου

$$C(k) := \sqrt{2\pi} \left[ \frac{A(k) - A(-k)}{2i} + \frac{B(k) + B(-k)}{2} \right]. \quad (2.5)$$

Το λόγο για τον οποίο εισαγάγαμε τον παράγοντα  $1/\sqrt{2\pi}$  θα τον εξηγήσουμε αναλυτικότερα στη συνέχεια. Προς το παρόν, θα σημειώσουμε μόνο ότι, η συνάρτηση  $C(k)$  παίρνει μιγαδικές τιμές και πως, η σχέση (2.4) ορίζει αυτό που θα ονομάσουμε αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier.

Γιατί, πρώτα θα μελετήσουμε τον "ευθύ" μετασχηματισμό Fourier, που, στο παρόν σύγγραμμα, ορίζεται με τον ακόλουθο τρόπο:

**Μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης**  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  θα ονομάζεται η συνάρτηση

$$F(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (2.6)$$

Είναι προφανές ότι η νέα συνάρτηση  $F$  ορίζεται μόνο για τις τιμές της παραμέτρου  $k$  για τις οποίες το γενικευμένο ή καταχρηστικό ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος της (2.6) συγκλίνει.

Αυτό σημαίνει ότι, το πεδίο ορισμού της  $F$  μπορεί να είναι κενό. Όλα εξαρτώνται από τη συγκεκριμένη συνάρτηση  $f(x)$  και τον ορισμό

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx := \lim_{(a,b) \rightarrow (-\infty, \infty)} \int_a^b g(x) dx \quad (2.7)$$

του γενικευμένου ή καταχρηστικού ολοκληρώματος Riemann.

**Παρατήρηση.** Η φράση "στο παρόν σύγγραμμα" θέλει να τονίσει το εξής:

Σε αντίθεση με την προσέγγιση που ακολουθείται εδώ και σε πολλές άλλες παρουσιάσεις των μετασχηματισμών Fourier (Φουριέ), πολλά συγγράμματα βασίζουν τον ορισμό αυτών των μετασχηματισμών στην έννοια του ολοκληρώματος Lebesgue (Λεμπέγκ). Στη δεύτερη κατηγορία συγγραμμάτων ανήκουν τα, κατά τα άλλα, υπέροχα

1. G. B. Folland, *Introduction to Partial Differential Equations*, 2nd ed., Princeton Univ. Press, 1995,
2. L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, (Graduate Studies in Mathematics Vol. 19) 1998.

Αυτή η διαφοροποίηση είναι ιδιαίτερα σημαντική στη λογική διάταξη των επιχειρημάτων με τα οποία αποδειχεται το ένα ή το άλλο ειδικό αποτέλεσμα.

Επιπλέον, ορισμένοι συγγραφείς παραλείπουν τον συντελεστή  $1/\sqrt{2\pi}$  μπροστά από το ολοκλήρωμα (2.6). Άλλοι, πάλι, μέσα στο ολοκλήρωμα, χρησιμοποιούν τον παράγοντα  $\exp(ikx)$ , αντί για τον  $\exp(-ikx)$ . Αυτές οι διαφοροποιήσεις είναι τελείως ασήμαντες, για τον εξής απλό λόγο: Αν

$$\tilde{F}(k) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ikx} dx, \quad (2.8)$$

τότε από τη σύγκριση των (2.6) και (2.8) αμέσως έπεται ότι

$$\tilde{F}(k) = \sqrt{2\pi} F(-k). \quad (2.9)$$

Άρα, οι συναρτήσεις  $F(k)$  και  $\tilde{F}(k)$  αλληλοκαθορίζονται μονοσήμαντα. ■

Συνήθως, η νέα συνάρτηση που ορίζει η (2.6) συμβολίζεται με  $\hat{f}$ . Με άλλα λόγια, ο ορισμός (2.6) γράφεται στη μορφή

$$\hat{f}(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \quad (2.10)$$

Αν συμβολίσουμε με  $\mathcal{F}$  τη διαδικασία που οδηγεί από τη συνάρτηση  $f$  στη συνάρτηση  $\hat{f}$ , τότε μπορούμε να δούμε τον μετασχηματισμό Fourier ως μian απεικόνιση:

$$\mathcal{F} : f \rightarrow \hat{f} = \mathcal{F}(f). \quad (2.11)$$

Από αυτή την άποψη, η συνάρτηση  $\hat{f}$  είναι η εικόνα της  $f$ .

Με λίγα λόγια, το πεδίο ορισμού της απεικόνισης  $\mathcal{F}$  είναι ένας χώρος συναρτήσεων. Για να συνειδητοποιήσουμε ότι αυτός ο χώρος είναι τεράστιος, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι

περιέχει κάθε απόλυτα ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Θυμίζουμε ότι η  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  λέγεται **απόλυτα ολοκληρώσιμη** όταν το (καταχρηστικό) ολοκλήρωμα  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$  υπάρχει, δηλαδή όταν

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty. \quad (2.12)$$

Αυτό συνήθως δηλώνεται γράφοντας  $f \in L^1(\mathbb{R})$  και, τότε, η συνάρτηση  $\hat{f} = \mathcal{F}(f)$  ορίζεται, για κάθε  $k \in \mathbb{R}$ , τουλάχιστον.

Γιατί, όταν ο αριθμός  $k$  είναι πραγματικός, τότε  $|e^{-ikx}| = 1$ . Συνακόλουθα,

$$\lim_{(a,b) \rightarrow (-\infty, \infty)} \int_a^b |f(x) e^{-ikx}| dx = \lim_{(a,b) \rightarrow (-\infty, \infty)} \int_a^b |f(x)| dx < \infty. \quad (2.13)$$

Άρα, όταν η  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , το καταχρηστικό ολοκλήρωμα  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) e^{-ikx}| dx$  συγκλίνει, οπότε το ίδιο ισχύει και για το ολοκλήρωμα  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$ .

**Παρατήρηση.** (i) Για κάποιον ανεξήγητο λόγο, η πρόταση που μόλις αποδείξαμε συχνά παρεξηγείται. Θεωρείται πως λέει ότι, "μόνο οι απόλυτα ολοκληρώσιμες συναρτήσεις έχουν μετασχηματισμό Fourier". Αυτή η ερμηνεία είναι τελείως αυθαίρετη. Το να είναι η  $f(x)$  απόλυτα ολοκληρώσιμη αποτελεί ικανή, όχι όμως και αναγκαία συνθήκη, για να συγκλίνει το ολοκλήρωμα που ορίζει την  $\hat{f}(k)$ , για κάθε  $k \in \mathbb{R}$ . Αυτό αναδειχεται ρητά κι από την κατασκευή του μετασχηματισμού Fourier συναρτήσεων που δεν είναι απόλυτα ολοκληρώσιμες, στα παραδείγματα που θα δώσουμε αργότερα. (ii) Τις περισσότερες φορές, το ολοκλήρωμα που ορίζει την  $\hat{f}(k)$  συγκλίνει και για μιγαδικές τιμές του  $k$ . Μάλιστα, η  $\hat{f}(k)$  καταλήγει να είναι ομομορφική σε κάποιο μη φραγμένο υποσύνολο του μιγαδικού επίπεδου  $\mathbb{C}_k$ . ■

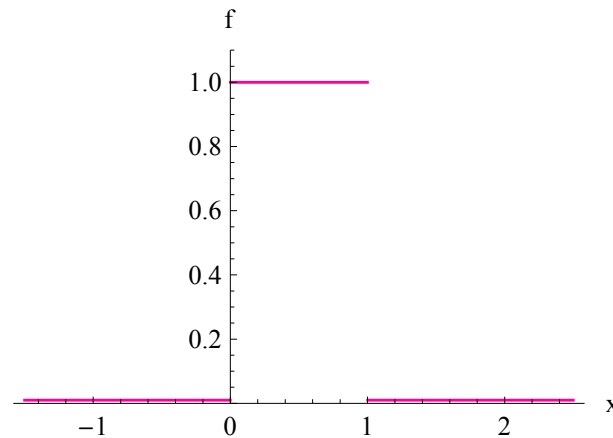
Γενικά, ο υπολογισμός του μετασχηματισμού Fourier μιας συνάρτησης  $f$  είναι δύσκολη υπόθεση. Τις περισσότερες φορές, απαιτεί τη χρήση των εργαλείων της μιγαδικής ανάλυσης κι αυτό θα φανεί καθαρά στα συγκεκριμένα παραδείγματα που θα μελετήσουμε αργότερα.

Θα ξεκινήσουμε, όμως, με κάτι απλό:

### Παράδειγμα 2.1

Στο Σχ. 2.1 φαίνεται το γράφημα της συνάρτησης  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  που ορίζεται ως εξής:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x \notin [0, 1] \end{cases} \quad (2.14)$$



Σχ. 2.1 Το γράφημα της συνάρτησης  $f(x)$  που ορίζεται στην (2.14)

Επειδή η δοσμένη συνάρτηση μηδενίζεται έξω από το φραγμένο διάστημα  $[0, 1]$ , το ολοκλήρωμα που ορίζει τον μετασχηματισμό της ανάγεται σε σύνηθες. Συγκεκριμένα,

$$\hat{f}(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-ikx} dx. \quad (2.15)$$

Συνεπώς,

$$\hat{f}(k) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, & k = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{1-e^{-ik}}{ik} \right), & k \neq 0 \end{cases}. \quad (2.16)$$

Όμως,

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-ik}}{ik} = 1. \quad (2.17)$$

Άρα, το προηγούμενο αποτέλεσμα μπορεί να γραφτεί στην απλούστερη μορφή

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1 - e^{-ik}}{ik} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{\sin k}{k} - i(1 - \cos k) \right]. \quad (2.18)$$

**Παρατήρηση.** Η  $f$  αυτού του παραδείγματος 2.1 δεν είναι καν συνεχής. Αντίθετα, η  $\hat{f}$  είναι ομαλότατη. Στην πραγματικότητα, η  $\hat{f}$  είναι ολομορφική σε όλο το μιγαδικό επίπεδο.

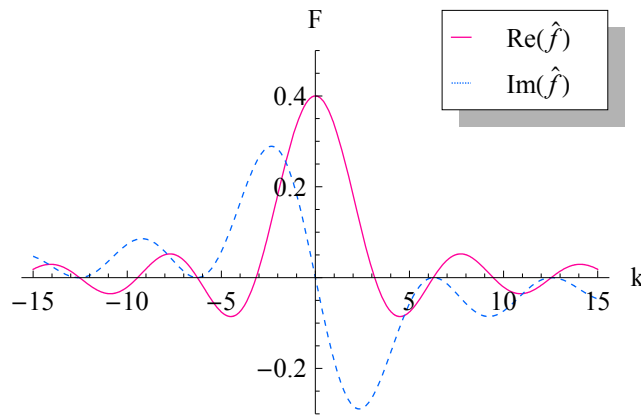
Ειδικότερα, αν υποθέσουμε ότι το  $k \in \mathbb{R}$ , τότε, τόσο το πραγματικό μέρος,

$$\operatorname{Re}[\hat{f}(k)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin k}{k}, \quad (2.19)$$

της  $\hat{f}(k)$ , όσο και το φανταστικό της,

$$\operatorname{Im}[\hat{f}(k)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\cos k - 1), \quad (2.20)$$

είναι συναρτήσεις κλάσης  $C^\infty(\mathbb{R})$ , όπως φαίνεται και στο Σχ. 2.2.



**Σχ. 2.2** Το γράφημα του πραγματικού και του φανταστικού μέρους του μετασχηματισμού Fourier της συνάρτησης (2.14), όταν το  $k \in \mathbb{R}$ .

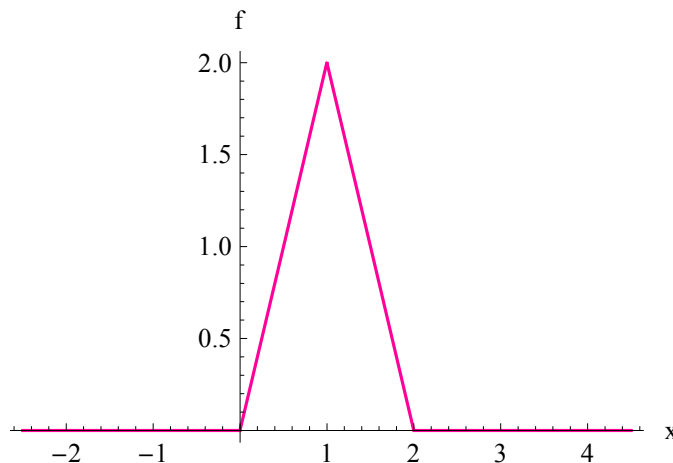
Αυτό το αποτέλεσμα αναδειχνει ένα γενικότερο χαρακτηριστικό των συναρτήσεων που συνδέονται μέσω του μετασχηματισμού Fourier. Δηλαδή, οι  $f$  και  $\hat{f}$  δεν ανήκουν υποχρεωτικά στην ίδια κατηγορία συναρτήσεων, από την άποψη της ομαλότητας.

### Παράδειγμα 2.2

Σε αντίθεση με την προηγούμενη, η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2(2-x), & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & x \notin [0, 2] \end{cases} \quad (2.21)$$

είναι συνεχής (βλ. Σχ. 2.3).



**Σχ. 2.3.** Το γράφημα της συνάρτησης που ορίζεται στην (2.21).

Από την άλλη, η τωρινή  $f(x)$  δεν είναι τμηματικά σταθερή. Γι' αυτό, ο υπολογισμός του μετασχηματισμού Fourier είναι λίγο πιο περίπλοκος:

$$\begin{aligned}\hat{f}(k) &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \int_0^1 2x e^{-ikx} dx + \int_1^2 2(2-x) e^{-ikx} dx \right].\end{aligned}\quad (2.22)$$

Τώρα, η κατά παράγοντες ολοκλήρωση δίνει το εξής αποτέλεσμα:

$$\begin{aligned}\int_a^b x e^{-ikx} dx &= \int_a^b x \partial_x \left( -\frac{e^{-ikx}}{ik} \right) dx = \frac{i}{k} \left[ x e^{-ikx} \Big|_a^b - \int_a^b e^{-ikx} dx \right] \\ &= \frac{i}{k} \left( x e^{-ikx} + \frac{e^{-ikx}}{ik} \right) \Big|_a^b = \frac{i}{k} e^{-ikx} \left( x - \frac{i}{k} \right) \Big|_a^b \\ &= \frac{1}{k^2} e^{-ikx} (ikx + 1) \Big|_a^b = \frac{1}{k^2} [e^{-ikb} (ikb + 1) - e^{-ika} (ika + 1)]\end{aligned}\quad (2.23)$$

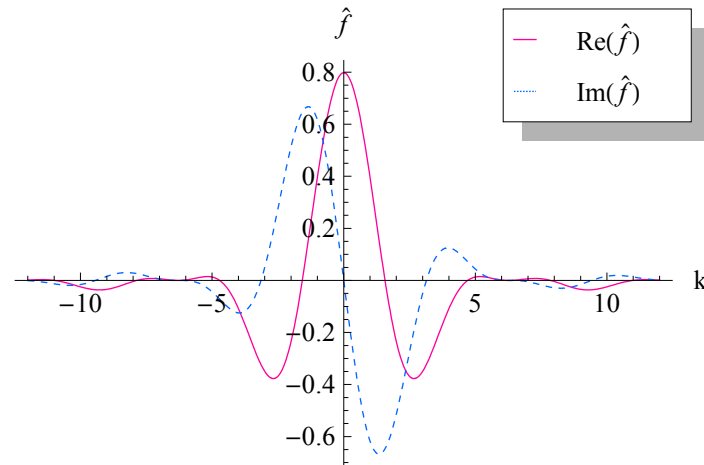
Άρα,

$$\begin{aligned}\hat{f}(k) &= \sqrt{2/\pi} \frac{1}{k^2} [e^{-ik} (ik + 1) - 1] - \sqrt{2/\pi} \frac{2e^{-ikx}}{ik} \Big|_1^2 \\ &\quad - \sqrt{2/\pi} \frac{1}{k^2} [e^{-2ik} (2ik + 1) - e^{-ik} (ik + 1)] \\ &= \sqrt{2/\pi} \frac{1}{k^2} [e^{-ik} (ik + 1) - 1] + \sqrt{2/\pi} \frac{2i(e^{-2ik} - e^{-ik})}{k} \\ &\quad - \sqrt{2/\pi} \frac{1}{k^2} [e^{-2ik} (2ik + 1) - e^{-ik} (ik + 1)]\end{aligned}\quad (2.24)$$

Απλοποιώντας την τελευταία έκφραση, καταλήγουμε στο εξής αποτέλεσμα:

$$\hat{f}(k) = -\sqrt{2/\pi} \frac{1}{k^2} (1 - e^{-ik})^2. \quad (2.25)$$

Στο Σχ. 2.4 δείχνουμε τα γραφήματα του πραγματικού και του φανταστικού μέρους της  $\hat{f}(k)$  σε μια γειτονιά του  $k = 0$ , για πραγματικές τιμές της παραμέτρου  $k$ .

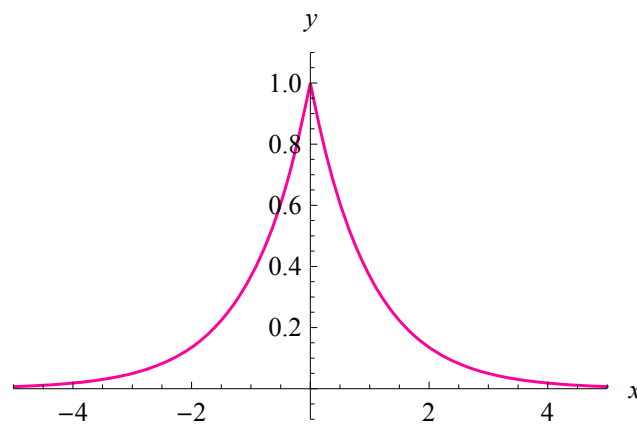


**Σχ. 2.4** Το γράφημα του πραγματικού και του φανταστικού μέρους του μετασχηματισμού Fourier της συνάρτησης (2.21), όταν το  $k \in \mathbb{R}$ .

#### Παράδειγμα 2.4

Ας υποθέσουμε ότι ο τύπος της  $f$  είναι

$$f(x) = e^{-|x|}. \quad (2.26)$$



**Σχ. 2.5** Το γράφημα της συνάρτησης  $f(x) = e^{-|x|}$ .

Σύμφωνα με τον ορισμό,

$$\hat{f}(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx-|x|} dx. \quad (2.27)$$

Αν υποθέσουμε ότι το  $k \in \mathbb{R}$ , τότε,

$$\int_{-\infty}^0 e^{-ikx+x} dx = \int_{-\infty}^0 e^{-(ik-1)x} dx = \int_0^{\infty} e^{(ik-1)x} dx = -\frac{1}{ik-1}. \quad (2.28)$$

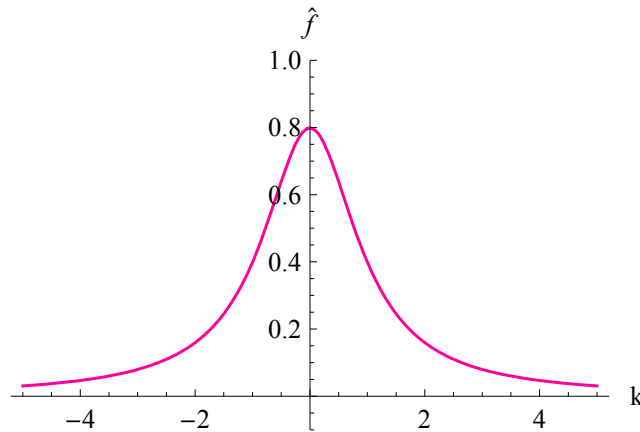
Ανάλογα,

$$\int_0^{\infty} e^{-ikx-x} dx = \int_0^{\infty} e^{-(ik+1)x} dx = \frac{1}{ik+1}. \quad (2.29)$$

Συνεπώς,

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{1}{ik+1} - \frac{1}{ik-1} \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{k^2+1}, \quad k \in \mathbb{R}. \quad (2.30)$$

Θα πρέπει και πάλι να σημειωθεί ότι, ενώ η αρχική συνάρτηση,  $f(x)$ , δεν είναι καν διαφορίσιμη (είναι μόνο συνεχής, βλ. Σχ. 2.5), ο μετασχηματισμός της,  $\hat{f}(k)$ , ανήκει στην κλάση  $C^\infty(\mathbb{R})$  (βλ. Σχ. 2.6). Μάλιστα, ως μιγαδική συνάρτηση, η  $\hat{f}(k)$  είναι μερομορφική, με πόλους στα σημεία  $k = \pm i$ .



Σχ. 2.6 Το γράφημα του μετασχηματισμού Fourier της συνάρτησης  $f(x) = e^{-|x|}$ , όταν το  $k \in \mathbb{R}$ .

Όπως ήδη αναφέραμε, **αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης**  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ονομάζεται η συνάρτηση  $\check{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  με τύπο

$$\check{g}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{ikx} dk \quad (2.31)$$

Η απεικόνιση  $g \rightarrow \check{g}$  που ορίζεται μ' αυτό τον τρόπο, είναι συχνά, αλλ' όχι πάντα, η αντίστροφη της  $\mathcal{F} : f \rightarrow \hat{f}$ . Αυτός είναι ο λόγος που την ονομάζουμε αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier και τη συμβολίζουμε με  $\mathcal{F}^{-1}$ :

$$\mathcal{F}^{-1} : g \rightarrow \check{g} = \mathcal{F}^{-1}(g). \quad (2.32)$$

Με άλλα λόγια, για μια μεγάλη οικογένεια συναρτήσεων, ας την πούμε **χώρο Fourier**,  $\Phi$ , ισχύει η εξής συνεπαγωγή:

$$f \in \Phi \Rightarrow \check{\hat{f}} = f \quad (\Leftrightarrow \mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F} = \text{id}). \quad (2.33)$$

### Παράδειγμα 2.5

Όπως δείξαμε λίγο παραπάνω, ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης  $f(x) = e^{-|x|}$  δίνει την

$$\hat{f}(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{k^2+1}.$$

Στο μεθεπόμενο εδάφιο θα αποδείξουμε ότι



$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k^2+1} dk = \sqrt{2\pi} e^{-|x|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Άρα,

$$\check{f}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} dk = e^{-|x|}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Με άλλα λόγια  $\check{\check{f}}(x) = f(x)$ . Αυτό σημαίνει ότι, στην προκειμένη περίπτωση, ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης που δίνει ο μετασχηματισμός Fourier της  $f(x)$  οδηγεί στην αρχική συνάρτηση, ακριβώς. ■

**Παρατήρηση.** Σε ορισμένα συγγράμματα, ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier ορίζεται με τον ακόλουθο (ή άλλον, ισοδύναμο) τρόπο:

$$F(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) e^{-ikx} dx \right] \quad (2.34)$$

Θα πρέπει, λοιπόν, να σημειώσουμε ότι, το τελευταίο ολοκλήρωμα δεν είναι ταυτόσημο με το

$$\lim_{(a,b) \rightarrow (-\infty, \infty)} \int_a^b f(x) e^{-ikx} dx. \quad (2.35)$$

Το πρώτο ονομάζεται **ολοκλήρωμα κύριας τιμής** και μπορεί να υπάρχει, δηλαδή να συγκλίνει, ενώ το δεύτερο να αποκλίνει. Αντίθετα, όταν το δεύτερο συγκλίνει, τότε και το πρώτο συγκλίνει, υποχρεωτικά, και είναι μεταξύ τους ίσα. ■

## Ασκήσεις

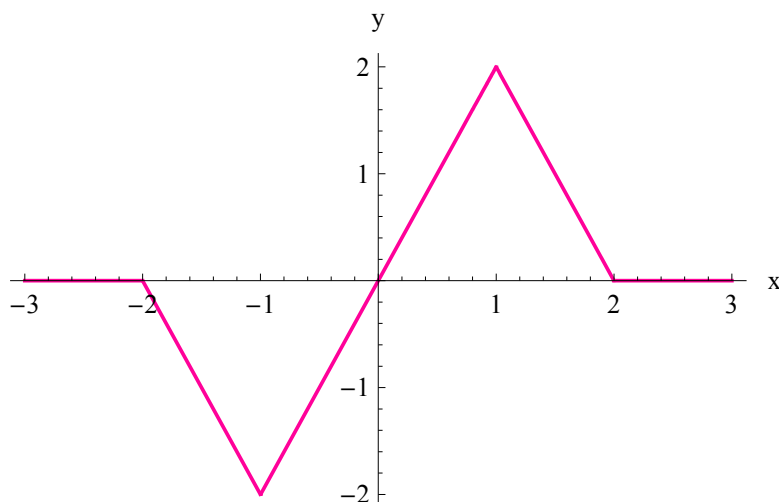
**2.1** Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} 3, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & x \notin [1, 2] \end{cases}$$

**2.2** Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης

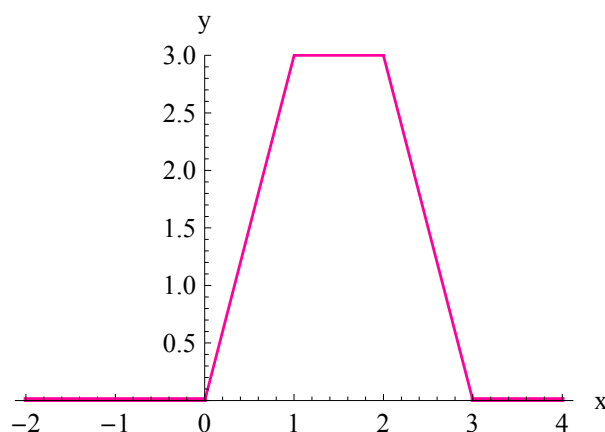
$$f(x) = \begin{cases} 2(1 - |x|), & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & x \notin [-1, 1] \end{cases}$$

**2.3** α) Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier την συνάρτησης,  $f(x)$ , της οποίας το γράφημα δίνεται στο επόμενο σχήμα.

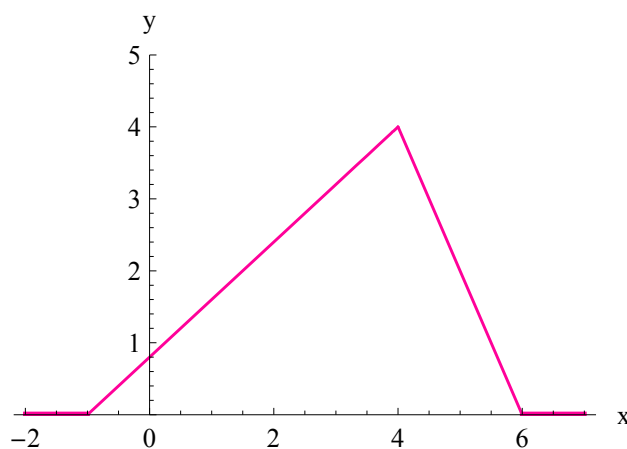


β) Να κατασκευαστεί το γράφημα της  $\hat{f}(k)$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

**2.4** Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης,  $f(x)$ , της οποίας το γράφημα δίνεται στο επόμενο σχήμα.



**2.5** Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης,  $f(x)$ , της οποίας το γράφημα δίνεται στο επόμενο σχήμα.



**2.6** Να κατασκευαστεί το γράφημα την συνάρτησης  $f(x) = x e^{-|x|}$  και να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός της, κατά Fourier.

- 2.7 (i) Να υπολογιστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης  $f(x)$  που δίνεται στην Άσκ. 2.1.
- (ii) Το ίδιο για την  $f(x)$  της Άσκ. 2.2. (iii) Το ίδιο για την  $f(x)$  της Άσκ. 2.3. (iv) Το ίδιο για την  $f(x)$  της Άσκ. 2.4. (v) Το ίδιο για την  $f(x)$  της Άσκ. 2.5. (vi) Το ίδιο για την  $f(x)$  της Άσκ. 2.6.

### 3. Ιδιότητες των μετασχηματισμών Fourier

Η ξεχωριστή σημασία του μετασχηματισμού Fourier, ιδιαίτερα στις εφαρμογές, οφείλεται σε μια σειρά από ιδιότητες, οι περισσότερες από τις οποίες συνάγονται αμέσως από τον ορισμό του. Η σημαντικότερη είναι η *γραμμικότητα*, η οποία σημαίνει το εξής:

Αν οι μετασχηματισμοί Fourier  $\hat{f}$ ,  $\hat{g}$  των συναρτήσεων  $f$ ,  $g$  υπάρχουν και  $h = a f + b g$ , όπου  $a$ ,  $b$  τυχαίοι (μιαδικοί) αριθμοί, τότε

$$\hat{h} = a \hat{f} + b \hat{g}. \quad (3.1)$$

*Απόδειξη*

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} h(x) e^{-ikx} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} [a f(x) + b g(x)] e^{-ikx} dx = \\ &= a \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx + b \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-ikx} dx. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύει κανείς και τις επόμενες ιδιότητες:

(i) Αν  $g(x) = f(x - a)$ , τότε

$$\hat{g}(k) = e^{-ika} \hat{f}(k).$$

(ii) Αν  $g(x) = f(ax)$ , όπου  $a$  τυχαίος μη μηδενικός πραγματικός, τότε

$$\hat{g}(k) = \frac{1}{|a|} \hat{f}(k/a).$$

(iii) Αν  $g(x) = e^{iax} f(x)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , τότε

$$\hat{g}(k) = \hat{f}(k - a).$$

(iv) Αν η  $f(x)$  είναι άρτια, αν δηλαδή  $f(-x) = f(x)$ , τότε

$$F(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos kx dx.$$

(v) Αν η  $f(x)$  είναι άρτια, αν δηλαδή  $f(-x) = -f(x)$ , τότε

$$F(k) = -i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin kx dx.$$

Εκτός των άλλων, οι παραπάνω ιδιότητες μας επιτρέπουν να υπολογίζουμε εύκολα τον μετασχηματισμό Fourier σύνθετων συναρτήσεων από εκείνο άλλων, απλούστερων. Το επόμενο παράδειγμα είναι αντιπροσωπευτικό.

#### Παράδειγμα 3.1

Όπως θα δείξουμε στο αμέσως επόμενο εδάφιο, ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.3)$$

είναι ίσος με

$$\hat{f}(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|k|}, \quad k \in \mathbb{R}. \quad (3.4)$$

Με βάση αυτό το αποτέλεσμα και την ιδιότητα (iii), είναι εύκολο να υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Fourier των συναρτήσεων  $\cos a x / (1 + x^2)$  και  $\sin a x / (1 + x^2)$ , για κάθε τιμή της πραγματικής παραμέτρου  $a$ . Γιατί, αν θέσουμε

$$g(x) = \frac{e^{i a x}}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.5)$$

τότε

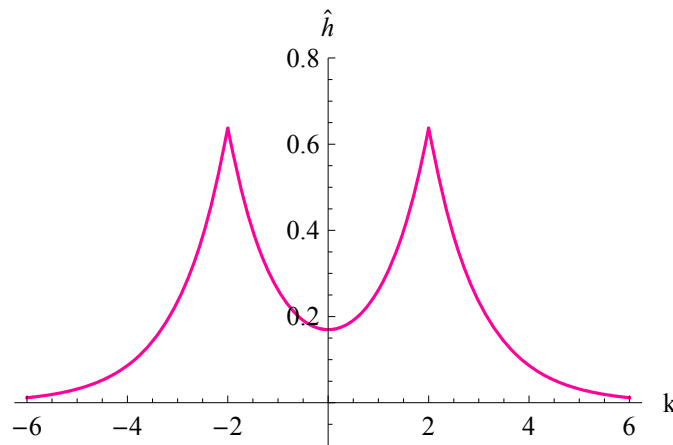
$$\hat{g}(k) = \hat{f}(k - a) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|k-a|}. \quad (3.6)$$

Συνεπώς, αν

$$h(x) = \frac{\cos a x}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.7)$$

τότε

$$\hat{h}(k) = \frac{1}{2} [\hat{f}(k - a) + \hat{f}(k + a)] = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (e^{-|k-a|} + e^{-|k+a|}) \quad (3.8)$$



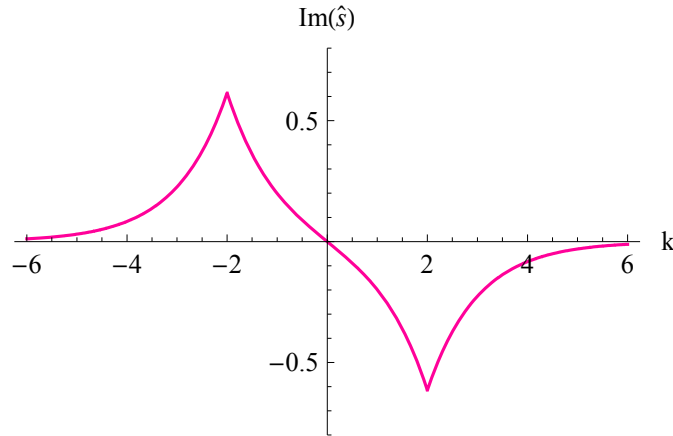
**Σχ. 3.1.** Το γράφημα του μετασχηματισμού Fourier,  $\hat{h}(k)$ , της συνάρτησης  $h(x) = (1 + x^2)^{-1} \cos a x$ , όταν το  $k \in \mathbb{R}$ , για  $a = 2$ .

Ανάλογα, όταν

$$s(x) = \frac{\sin a x}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.9)$$

τότε,

$$\hat{s}(k) = \frac{1}{2i} [\hat{f}(k - a) - \hat{f}(k + a)] = \frac{1}{2i} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (e^{-|k-a|} - e^{-|k+a|}). \quad (3.10)$$



**Σχ. 3.2.** Το γράφημα του (φανταστικού μέρους του) μετασχηματισμού Fourier,  $\hat{s}(k)$ , της συνάρτησης  $s(x) = (1 + x^2)^{-1} \sin a x$ , όταν το  $k \in \mathbb{R}$ , για  $a = 2$ .

Όταν η  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , τότε η συνάρτηση  $\hat{f}(k)$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , είναι συνεχής και φραγμένη. Την απόδειξη αυτού του συμπεράσματος την αφήνουμε για άσκηση κι επικεντρώνουμε την προσοχή μας σε μια πιο χρήσιμη ιδιότητα.

Ας υποθέσουμε ότι η  $f$  είναι συνεχώς διαφορίσιμη και φθίνει αρκετά γρήγορα, καθώς το  $|x| \rightarrow \infty$ . Πιο συγκεκριμένα, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει θετική σταθερή  $C$ , τέτοια ώστε

$$|x^3 f(x)| \leq C. \quad (3.11)$$

Επιλέγουμε τώρα έναν τυχαίο θετικό αριθμό  $R$  και παρατηρούμε ότι,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |x f(x)| dx &= \int_{-\infty}^{-R} |x f(x)| dx + \int_{-R}^R |x f(x)| dx + \int_R^{\infty} |x f(x)| dx \leq \\ &\int_{-\infty}^{-R} C x^{-2} dx + \int_{-R}^R |x f(x)| dx + \int_R^{\infty} C x^{-2} dx = \\ &C R^{-1} + \int_{-R}^R |x f(x)| dx + C R^{-1} < \infty. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Κατά συνέπεια, για κάθε  $k \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \partial_k [f(x) e^{-ikx}] dx &= \int_{-\infty}^{\infty} [-ix f(x) e^{-ikx}] dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} |-ix f(x) e^{-ikx}| dx = \\ &\int_{-\infty}^{\infty} |x f(x)| dx < \infty. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Με άλλα λόγια, το ολοκλήρωμα  $\int_{-\infty}^{\infty} \partial_k [f(x) e^{-ikx}] dx$  συγκλίνει ομοιόμορφα ως προς την πραγματική παράμετρο  $k$ . Συνεπώς,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \partial_k [f(x) e^{-ikx}] dx = \partial_k \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (3.14)$$

Αυτό σημαίνει ότι, πρώτο, ο μετασχηματισμός Fourier  $\hat{f}(k)$  της  $f(x)$  είναι μια συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση και, δεύτερο, ότι

$$\hat{f}'(k) := \partial_k \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [-ix f(x) e^{-ikx}] dx. \quad (3.15)$$

Με άλλα λόγια,

$$\boxed{\hat{f}'(k) = \mathcal{F}[-ix f(x)]} \quad (3.16)$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η συνάρτηση  $f \in C^n(\mathbb{R})$  (έχει συνεχείς παραγώγους μέχρι τάξης  $n$ ) κι ότι υπάρχουν θετικές σταθερές  $C_n$ , τέτοιες ώστε

$$|x^{n+2} f(x)| \leq C_n. \quad (3.17)$$

Τότε, η προηγούμενη απόδειξη μπορεί να επαναληφθεί κατά γράμμα για να δώσει το ακόλουθο αποτέλεσμα: Η συνάρτηση  $\hat{f} \in C^n(\mathbb{R})$  και

$$\boxed{\hat{f}^{(n)}(k) = \mathcal{F}[(-ix)^n f(x)]} \quad (3.18)$$

### Παράδειγμα 3.2

Εκτός από τη θεωρητική του αξία, το προηγούμενο αποτέλεσμα έχει και μεγάλη πρακτική χρησιμότητα. Για παράδειγμα, μας επιτρέπει να υπολογίσουμε αμέσως τον μετασχηματισμό Fourier κάθε συνάρτησης της μορφής  $g(x) = x^n e^{-x^2}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό της  $f(x) = e^{-x^2}$ .

Γιατί, είναι προφανές ότι, η  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$  και φθίνει ταχύτερα από κάθε αρνητική δύναμη του  $x$ . Από την άλλη,

$$\hat{f}(k) = \frac{e^{-k^2/4}}{\sqrt{2}}, \quad (3.19)$$

πράγμα που θ' αποδείξουμε σύντομα. Συνεπώς,

$$\hat{g}(k) = (-i)^{-n} \hat{f}^{(n)}(k) = (-i)^{-n} \frac{d}{dk^n} \left( \frac{e^{-k^2/4}}{\sqrt{2}} \right). \quad (3.20)$$

Ειδικότερα,

$$g(x) = x e^{-x^2} \Rightarrow \hat{g}(k) = i \hat{f}'(k) = -\frac{i}{2\sqrt{2}} k e^{-k^2/4}. \quad (3.21)$$

■

Το προηγούμενο αποτέλεσμα αφορά τις παραγώγους του μετασχηματισμού Fourier  $\hat{f}(k)$  μιας συνάρτησης  $f(x)$  που ανήκει στην κλάση  $C^n(\mathbb{R})$  και φθίνει γρήγορα, καθώς το  $x \rightarrow \pm\infty$ . Ένα άλλο, εξ ίσου σημαντικό, αποτέλεσμα αφορά τον μετασχηματισμό Fourier των παραγώγων της  $f(x)$ . Για να γίνουμε πιο συγκεκριμένοι, ας σημειώσουμε αρχικά ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f'(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \{ \partial_x [e^{-ikx} f(x)] - \partial_x (e^{-ikx}) f(x) \} dx. \quad (3.22)$$

Συνεπώς,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f'(x) dx = [e^{-ikx} f(x)]_{-\infty}^{\infty} + ik \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) dx = ik \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) dx. \quad (3.23)$$

Με άλλα λόγια,

$$\boxed{\mathcal{F}[f'(x)] = (ik) \hat{f}(k)} \quad (3.24)$$

Η επαγωγική διαδικασία οδηγεί αμέσως στο ακόλουθο γενικότερο αποτέλεσμα: Αν η συνάρτηση  $f \in C^n(\mathbb{R})$  και οι  $f^{(m)}(x)$ ,  $m = 0, 1, \dots, n-1$ , μηδενίζονται καθώς το  $|x| \rightarrow \infty$ , τότε,

$$\boxed{\mathcal{F}[f^{(n)}(x)] = (ik)^n \hat{f}(k)} \quad (3.25)$$

### Παράδειγμα 3.3

Η συνάρτηση  $g(x) = x e^{-x^2}$  είναι προφανώς ίση με  $-(1/2) f'(x)$ , όπου  $f(x) = e^{-x^2}$ . Με βάση λοιπόν την (3.24) (και την (3.19)), συμπεραίνουμε ότι

$$\hat{g}(k) = -\frac{1}{2} \mathcal{F}[f'(x)] = -\frac{1}{2} ik \hat{f}(k) = -\frac{1}{2} ik \frac{e^{-k^2/4}}{\sqrt{2}} = -\frac{i}{2\sqrt{2}} k e^{-k^2/4}. \quad (3.26)$$

Όπως αναμενόταν, αυτό το αποτέλεσμα είναι ίδιο μ' εκείνο του προηγούμενου παραδείγματος. ■

Στο πλαίσιο των μετασχηματισμών Fourier μια ειδική κατηγορία ομαλών συναρτήσεων παίζει ξεχωριστό ρόλο. Πρόκειται για τις συναρτήσεις που, τόσο οι ίδιες, όσο και οι παράγωγοί τους κάθε τάξης, φθίνουν ταχύτερα από οποιαδήποτε αρνητική δύναμη της ανεξάρτητης μεταβλητής.

Με άλλα λόγια, η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ανήκει στην οικογένεια που αναφέραμε, αν είναι κλάσης  $C^\infty(\mathbb{R})$  και υπάρχουν σταθερές  $M_{lm}$  τέτοιες που

$$|x^l f^{(m)}(x)| \leq M_{lm}, \quad l, m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.27)$$

Αυτό ισχύει στην περίπτωση της  $f(x) = e^{-x^2}$ , για παράδειγμα, όχι όμως και για τη συνάρτηση  $g(x) = (1+x^2)^{-1}$ .

Το υποσύνολο των συναρτήσεων  $C^\infty(\mathbb{R})$  που μόλις ορίσαμε θα δηλώνεται από τώρα και στο εξής με το σύμβολο  $C_\downarrow^\infty(\mathbb{R})$  και τα μέλη του θα λέγονται **συναρτήσεις ταχείας πτώσης**. Το πρώτο από τα δύο βασικά χαρακτηριστικά αυτών των συναρτήσεων περιγράφεται στο επόμενο θεώρημα και είναι άμεση απόρροια των αποτελεσμάτων που μόλις αποδείξαμε.

### Θεώρημα 3.1

Αν η συνάρτηση  $f \in C_\downarrow^\infty(\mathbb{R})$ , τότε το ίδιο ισχύει και για την  $\hat{f}$ .

#### Απόδειξη

Από την υπόθεση ότι η  $f \in C_\downarrow^\infty(\mathbb{R})$  αμέσως έπεται ότι, για κάθε  $k \in \mathbb{R}$ , το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{\infty} (-ix)^n e^{-ikx} f(x) dx \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \partial_k^n [e^{-ikx} f(x)] dx \quad (3.28)$$



συγκλίνει και μάλιστα ομοιόμορφα ως προς την παράμετρο  $k$ . Συνεπώς, ο τύπος (3.18) ισχύει για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , πράγμα που σημαίνει ότι ο μετασχηματισμός Fourier της  $f(x)$  ανήκει στην κλάση  $C^\infty(\mathbb{R})$ .

Μένει να δείξουμε ότι υπάρχουν σταθερές  $M_{lm}$  τέτοιες ώστε

$$|k^l \hat{f}^{(m)}(k)| \leq M_{lm}. \quad (3.29)$$

Για το σκοπό αυτό, παρατηρούμε αρχικά ότι, η σχέση  $\mathcal{F}[f^{(n)}(x)] = (ik)^n \hat{f}(k)$  ισχύει για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ . Άρα,

$$\begin{aligned} \hat{f}^{(m)}(k) &= \mathcal{F}[(-ix)^m f(x)] \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} (-ix)^m f(x) dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x \left( \frac{1}{-ik} e^{-ikx} \right) (-ix)^m f(x) dx = \left( \frac{1}{-ik} e^{-ikx} \right) [(-ix)^m f(x)] \Big|_{-\infty}^{\infty} \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{-ik} e^{-ikx} \right)' [(-ix)^m f(x)] dx = \\ &= \frac{1}{ik} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} [(-ix)^m f(x)]' dx \end{aligned} \quad (3.30)$$

Επαναλαμβάνοντας την κατά παράγοντες ολοκλήρωση, καταλήγουμε στον τύπο

$$\hat{f}^{(m)}(k) = (ik)^{-l} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \psi_{lm}(x) dx, \quad (3.31)$$

όπου

$$\psi_{lm}(x) := \frac{d^l}{dx^l} [(-ix)^m f(x)]. \quad (3.32)$$

Ας θυμηθούμε, τώρα, ότι η  $f(x)$  είναι κλάσης  $C_\downarrow^\infty(\mathbb{R})$ . Άρα, το ίδιο θα ισχύει και για κάθε μια από τις συναρτήσεις  $\psi_{lm}(x)$ . Συνακόλουθα,

$$C_{lm} := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} |\psi_{lm}(x)| dx < \infty. \quad (3.33)$$

Αλλά τότε, από τον τύπο (3.31) αμέσως έπεται ότι

$$|k^l \hat{f}^{(m)}(k)| \leq C_{lm}. \quad (3.34)$$

Αυτό σημαίνει ότι, πραγματικά, η συνάρτηση  $\hat{f}(k)$  ανήκει στο χώρο  $C_\downarrow^\infty(\mathbb{R})$ . ■

### Παράδειγμα 3.4

Προφανώς, κάθε μια από τις συναρτήσεις  $f_\lambda(x) = e^{-\lambda x^2}$ ,  $\lambda > 0$ , ανήκει στο χώρο  $C_\downarrow^\infty(\mathbb{R})$ . Από την άλλη, όπως θ' αποδείξουμε σύντομα,

$$\hat{f}_\lambda(k) = \frac{e^{-k^2/4\lambda}}{\sqrt{2\lambda}}. \quad (3.35)$$

Από αυτόν τον τύπο και είναι φανερό ότι και οι συναρτήσεις  $\hat{f}_\lambda$  ανήκουν στην κλάση  $C_\downarrow^\infty(\mathbb{R})$ , όπως ακριβώς προβλέπεται από το προηγούμενο θεώρημα. ■

Η σπουδαιότερη ίσως ιδιότητα των συναρτήσεων που απαρτίζουν τον χώρο  $C_\downarrow^\infty(\mathbb{R})$  είναι η ακόλουθη: Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier του μετασχηματισμού Fourier,  $\hat{f}$ , οποιασδήποτε  $f \in C_\downarrow^\infty(\mathbb{R})$  ταυτίζεται με την  $f$ .

Δεν αποκλείεται η προηγούμενη πρόταση να μοιάζει με πομπώδη ταυτολογία. Γιατί, συνήθως, αυτός που ονομάζεται αντίστροφος μετασχηματισμός "ακυρώνει" τον ευθύ και αυτόματα μας γυρίζει στην αφετηρία. Είμαστε λοιπόν υποχρεωμένοι να θυμίσουμε ότι **αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της τυχαίας συνάρτησης**  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ονομάζεται το καταχρηστικό ολοκλήρωμα

$$\check{g}(x) \equiv \mathcal{F}^{-1}(g)(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iyx} g(y) dy. \quad (3.36)$$

Συνεπώς, αν για  $g$  επιλέξουμε τον μετασχηματισμό Fourier  $\hat{f} \equiv \mathcal{F}(f)$  της τυχαίας συνάρτησης  $f$ , τίποτα στον ορισμό (3.36) δεν εξασφαλίζει εκ των προτέρων ότι, πρώτον, το ολοκλήρωμα συγκλίνει και, δεύτερο, η συνάρτηση που ορίζεται μ' αυτό τον τρόπο ταυτίζεται με την  $f$ . Γι' αυτό, η επόμενη πρόταση περιγράφει ένα σημαντικό αποτέλεσμα και επάξια φέρει τον τίτλο του θεωρήματος.

**Θεώρημα 3.2**

Αν η  $f \in C_\downarrow^\infty(\mathbb{R})$ , τότε

$$\boxed{\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) = f} \quad (3.37)$$

Απόδειξη

Από το προηγούμενο θεώρημα γνωρίζουμε ότι η  $\hat{f} \in C_\downarrow^\infty(\mathbb{R})$ . Συνεπώς, το ολοκλήρωμα

$$\tilde{f}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \hat{f}(k) dk. \quad (3.38)$$

υπάρχει και ορίζει μια συνάρτηση που επίσης ανήκει στην κλάση  $C_\downarrow^\infty(\mathbb{R})$ . Μένει να δείξουμε ότι  $\tilde{f}(x) = f(x)$ .

Αφού συγκλίνει, το καταχρηστικό ολοκλήρωμα (3.38) είναι ίσο προς το αντίστοιχο ολοκλήρωμα κύριας τιμής. Δηλαδή,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \hat{f}(k) dk = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^n e^{ikx} \hat{f}(k) dk. \quad (3.39)$$

Από την άλλη,  $|1 - |k|/n| \leq 1$ , για  $-n \leq k \leq n$ . Συνεπώς,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^n e^{ikx} \hat{f}(k) dk = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^n e^{ikx} \hat{f}(k) \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) dk. \quad (3.40)$$

Τέλος,

$$\hat{f}(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik\xi} f(\xi) d\xi. \quad (3.41)$$

Άρα,

$$\tilde{f}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-\xi)} f(\xi) \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) d\xi dk \quad (3.42)$$

Στην (3.42), το εσωτερικό ολοκλήρωμα συγκλίνει ομοιόμορφα ως προς την παράμετρο  $k$ . Συνεπώς, μπορούμε να αλλάξουμε τη σειρά ολοκλήρωσης κι έτσι να καταλήξουμε στην

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \int_{-n}^n \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) e^{ik(x-\xi)} dk d\xi = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \frac{1}{\pi} \frac{1 - \cos n(x-\xi)}{n(x-\xi)^2} d\xi. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Απομένει να δείξουμε ότι το τελευταίο όριο υπάρχει και είναι ίσο με την  $f(x)$ . Για το σκοπό αυτό, εξετάζουμε τις ιδιότητες των συναρτήσεων

$$\gamma_n(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1 - \cos nx}{n x^2}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.44)$$

Αρχικά σημειώνουμε ότι, για  $x$  πολύ μικρό σε απόλυτη τιμή,

$$\cos nx = 1 - \frac{1}{2} n^2 x^2 + O(x^4). \quad (3.45)$$

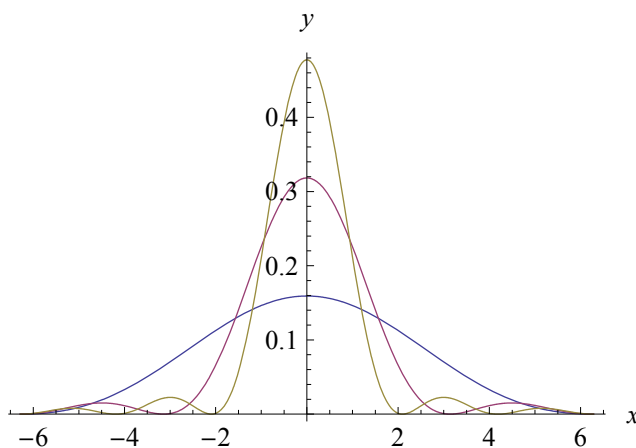
Συνεπώς

$$\lim_{x \rightarrow 0} \gamma_n(x) = \frac{n}{2\pi}. \quad (3.46)$$

Από την άλλη,  $|\cos nx| \leq 1$ . Αν λοιπόν θέσουμε  $\gamma_n(0) = n/2\pi$ , τότε ο τύπος (3.44) ορίζει μια ακολουθία άρτιων συναρτήσεων που δεν παίρνουν αρνητικές τιμές, το μέγιστό τους βρίσκεται στο  $x = 0$  και, σε απόλυτη τιμή, φθίνουν όπως η  $x^{-2}$ . Άρα, είναι και ολοκληρώσιμες. Μάλιστα, μπορεί εύκολα να δείξει κανείς ότι οι συναρτήσεις  $\gamma_n(x)$  είναι ομαλές, δηλαδή ότι ανήκουν στην κλάση  $C^\infty(\mathbb{R})$ , και ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} \gamma_n(x) dx = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.47)$$

Το γράφημα των τριών πρώτων μελών της παραπάνω ακολουθίας φαίνεται στο επόμενο σχήμα.



Σχ. 3.3. Το γράφημα των τριών πρώτων μελών της ακολουθίας συναρτήσεων (3.44).

Θεωρούμε τώρα μια συνεχή, φραγμένη και ολοκληρώσιμη συνάρτηση  $f(x)$ . Από την ιδιότητα (3.47) αμέσως έπεται ότι

$$f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(0) \gamma_n(x) dx. \quad (3.48)$$

Συνεπώς,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \gamma_n(x) dx - f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} [f(x) - f(0)] \gamma_n(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \gamma_n(x) dx, \quad (3.49)$$

όπου

$$\varphi(x) := f(x) - f(0). \quad (3.50)$$

Από την άλλη,  $\gamma_n(x) \geq 0$ . Άρα

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x) \gamma_n(x)| dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)| \gamma_n(x) dx. \quad (3.51)$$

Όντας συνεχής σε όλη την πραγματική ευθεία, η  $\varphi(x)$  είναι ομοιόμορφα συνεχής σε κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα. Αυτό σημαίνει ότι, για κάθε  $\varepsilon > 0$ , οσοδήποτε μικρό, υπάρχει ένα  $\delta > 0$  τέτοιο ώστε

$$|\varphi(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in [-\delta, \delta]. \quad (3.52)$$

Από την άλλη, το γεγονός ότι η  $f(x)$  είναι φραγμένη συνεπάγεται ότι το ίδιο ισχύει και για την  $\varphi(x)$ . Δηλαδή,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)| = M < \infty. \quad (3.53)$$

Με βάση αυτές τις παρατηρήσεις, γράφουμε το δεξί μέλος της (3.51) στη μορφή

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)| \gamma_n(x) dx = I_1 + I_2 + I_3 \quad (3.54)$$

όπου

$$I_1 := \int_{-\infty}^{-\delta} |\varphi(x)| \gamma_n(x) dx, \quad I_2 := \int_{-\delta}^{\delta} |\varphi(x)| \gamma_n(x) dx, \quad (3.55)$$

$$I_3 := \int_{\delta}^{\infty} |\varphi(x)| \gamma_n(x) dx.$$

Προφανώς,

$$I_1 \leq M \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_n(x) dx, \quad I_3 \leq M \int_{\delta}^{\infty} \gamma_n(x) dx, \quad (3.56)$$

ενώ από την (3.53) αμέσως συνάγεται ότι

$$I_2 \leq \varepsilon M \int_{-\delta}^{\delta} \gamma_n(x) dx \leq \varepsilon M. \quad (3.57)$$

Από την άλλη, η αλλαγή μεταβλητής  $x \rightarrow y = nx$  οδηγεί στο ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$\int_{\delta}^{\infty} \gamma_n(x) dx \equiv \int_{\delta}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{1 - \cos nx}{n x^2} dx = \int_{n\delta}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{1 - \cos y}{y^2} dy \equiv \int_{n\delta}^{\infty} \gamma_1(y) dy \quad (3.58)$$

Όμως, το γεγονός ότι η  $\gamma_1(y)$  είναι ολοκληρώσιμη συνεπάγεται ότι το τελευταίο ολοκλήρωμα γίνεται όσο μικρό θέλουμε, αν επιλέξουμε το  $n$  αρκετά μεγάλο.

Συνολικά, το άθροισμα των ολοκληρωμάτων  $I_1$ ,  $I_2$  και  $I_3$  γίνεται απειροστά μικρό καθώς το  $n \rightarrow \infty$ , πράγμα που σημαίνει ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f(0)| \gamma_n(x) dx = 0. \quad (3.59)$$

Συνεπώς,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \gamma_n(x) dx = f(0). \quad (3.60)$$

Εύκολα τώρα διαπιστώνει κανείς ότι το επιχειρήμα που οδήγησε στην τελευταία σχέση δεν επηρεάζεται καθόλου αν, αντί για το σημείο  $x = 0$ , επιλέξουμε το τυχαίο σημείο  $x = \zeta$  της πραγματικής ευθείας και αντικαταστήσουμε τις  $\gamma_n(x)$  από τις  $\gamma_n(x - \zeta)$ . Με άλλα λόγια,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \gamma_n(x - \zeta) dx = f(\zeta). \quad (3.61)$$

Με βάση το προηγούμενο αποτέλεσμα, η (3.60) γίνεται

$$\tilde{f}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \gamma_n(\xi - x) d\xi = f(x) \quad (3.62)$$

κι έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη του θεωρήματος. ■

## Ασκήσεις

**3.1** Ν' αποδειχτούν οι ιδιότητες (i)-(v) του μετασχηματισμού Fourier.

**3.2** Να δειχτεί ότι, αν η  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , τότε η  $\hat{f}(k)$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , είναι συνεχής και φραγμένη.

**3.3** Να δειχτεί πως, αν η  $f \in C_{\downarrow}^{\infty}(\mathbb{R})$ , τότε

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}(f))(x) = f(-x).$$

Μπορείτε να βρείτε μια κλάση συναρτήσεων, ευρύτερη από την  $C_{\downarrow}^{\infty}(\mathbb{R})$ , για την οποία ισχύει

αυτό το αποτέλεσμα;

**3.4** Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier των παρακάτω συναρτήσεων, χρησιμοποιώντας αποκλειστικά και μόνο τ' αποτελέσματα του προηγούμενου εδάφιου και τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier που δόθηκαν στο παρόν (δηλαδή, **χωρίς να υπολογίσετε κάποιο ολοκλήρωμα**).

$$(i) f(x) = \begin{cases} 3, & x \in [1, 3] \\ 0, & x \notin [1, 3] \end{cases} \quad (ii) f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-2, 1] \cup [1, 2] \\ 0, & x \notin [-2, 1] \cup [1, 2] \end{cases}$$

$$(iii) f(x) = e^{-|x-2|}, \quad (iv) f(x) = 3e^{-|x-2|} - 2e^{-|x-3|}.$$

$$(v) f(x) = 4(e^{-|x+4|} - e^{-|x-4|}), \quad (vi) f(x) = 6(e^{-|x+5|} + e^{-|x-5|}).$$

$$(vii) f(x) = e^{-3|x-2|}, \quad (viii) f(x) = e^{-3|x|} \sin x \cos x, \quad (ix) f(x) = e^{-|x-3|} \cos 2x.$$

$$(x) f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in [0, \pi] \\ 0, & x \notin [0, \pi] \end{cases} \quad (xi) f(x) = \begin{cases} \cos 2x, & x \in [-\pi, \pi] \\ 0, & x \notin [-\pi, \pi] \end{cases}$$

**3.5** Να γίνει το ίδιο για τις συναρτήσεις

$$(i) (2 - 3x)e^{-3x^2}, \quad (ii) 6x(6x - 5)e^{-3x^2}, \quad (iii) e^{-x^2+2x}, \quad (iv) (1 - 2x + x^2)e^{-x^2+2x}.$$

**3.6** Να προσδιοριστούν οι τιμές των παραμέτρων  $a$  και  $b$ , έτσι ώστε ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης

$$u(x) = a e^{-b x^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

να είναι ο ταυτοτικός. Δηλαδή, έτσι ώστε να ισχύει η ισότητα

$$\mathcal{F}[u(x)] = u(k).$$

**3.7** Η συνάρτηση  $\operatorname{sech}(\sqrt{\pi/2} x)$  παραμένει αναλλοίωτη κατά τον μετασχηματισμό Fourier, δηλαδή,

$$\mathcal{F}[\operatorname{sech}(\sqrt{\pi/2} x)] = \operatorname{sech}(\sqrt{\pi/2} k)$$

α) Χρησιμοποιώντας αυτό αποτέλεσμα, προσδιορίστε τον μετασχηματισμό Fourier των παρακάτω συναρτήσεων, **χωρίς να υπολογίσετε κάποιο ολοκλήρωμα**.

$$(i) f_1(x) = 3 \operatorname{sech}(x - 2), \quad (ii) f_2(x) = \operatorname{sech} x \tanh x,$$

$$(iii) f_3(x) = x \operatorname{sech} x, \quad (iv) f_4(x) = x^2 \operatorname{sech} x,$$

β) Να κατασκευαστεί το γράφημα των  $\{f_i(x), \hat{f}_i(k)\}, i = 1, 2, 3, 4$ .

## 4. Υπολογισμός του μετασχηματισμού Fourier μέσω επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων στο μιγαδικό επίπεδο

Όπως ήδη τονίσαμε, ο υπολογισμός του μετασχηματισμού Fourier ακόμη και απλών συναρτήσεων είναι συνήθως δύσκολη υπόθεση. Για την αντιμετώπιση αυτού το προβλήματος, ουσιαστικά, είμαστε υποχρεωμένοι να στραφούμε στις μεθόδους της μιγαδικής ανάλυσης. Το πώς ακριβώς χρησιμοποιούνται αυτές οι μέθοδοι διευκρινίζεται στα παραδείγματα που ακολουθούν.

### α) Μετασχηματισμός Fourier ομαλών συναρτήσεων

#### Παράδειγμα 4.1

Θεωρούμε την ομαλή και φραγμένη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}. \quad (4.1)$$

Για  $k = 0$ , ο μετασχηματισμός Fourier της  $f(x)$  δίνεται από την έκφραση

$$\hat{f}(0) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx. \quad (4.2)$$

Τώρα,

$$\int_a^b \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(b) - \arctan(a). \quad (4.3)$$

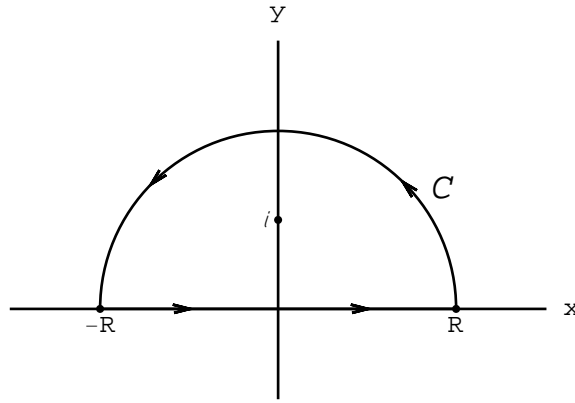
Συνεπώς,

$$\lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow \infty}} \int_a^b \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow \infty}} [\arctan(b) - \arctan(a)] = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi. \quad (4.4)$$

Όμως, για τον υπολογισμό της  $\hat{f}(k)$  όταν  $k \neq 0$ , θα πρέπει να στραφούμε στο μιγαδικό επίπεδο. Από το προηγούμενο αποτέλεσμα έπεται ότι το ολοκλήρωμα  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$  συγκλίνει για κάθε  $k \in \mathbb{R}$ . Συνεπώς, μπορούμε να το υπολογίσουμε μέσω του αντίστοιχου καταχρηστικού:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{e^{-ikx}}{1+x^2} dx. \quad (4.5)$$

Για να υπολογίσουμε το τελευταίο, θεωρούμε την κλειστή καμπύλη  $C$  που ορίζεται από την ένωση του τμήματος  $[-R, R]$  του άξονα  $x$  με ένα ημικύκλιο  $C_R$  το οποίο έχει το τμήμα  $[-R, R]$  ως διάμετρο. Όπως θα δείξουμε ευθύς αμέσως, όταν το  $k > 0$ , η κατάλληλη επιλογή του  $C_R$  είναι αυτή που δείχνουμε στο Σχ. 4.1.



**Σχ. 4.1.** Η κλειστή καμπύλη  $C$  προκύπτει από την ένωση του τμήματος  $[-R, R]$  του άξονα  $x$  με το ημικόκλιο  $C_R$ .

Προφανώς,

$$\oint_C \frac{e^{-ikz}}{1+z^2} dz = \int_{-R}^R \frac{e^{-ikx}}{1+x^2} dx + \int_{C_R} \frac{e^{-ikz}}{1+z^2} dz. \quad (4.6)$$

Το αριστερό μέλος αυτής της σχέσης υπολογίζεται εύκολα, γιατί η  $\eta$  συνάρτηση  $\frac{e^{-ikz}}{1+z^2}$  είναι αναλυτική σ' όλο το μιγαδικό επίπεδο, εκτός από τα σημεία  $z = \pm i$ , όπου έχει απλούς πόλους. Άρα το μόνο που μένει είναι να εκτιμήσουμε τη συμπεριφορά του ολοκληρώματος κατά μήκος του κυκλικού τόξου  $C_R$ .

Γράφουμε, λοιπόν, τη μιγαδική μεταβλητή  $z$  στη μορφή

$$z \equiv x + iy = r e^{i\theta} \equiv r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (4.7)$$

και παρατηρούμε ότι, για  $k \in \mathbb{R}$ ,

$$|e^{-ikz}| = |e^{-ikr(\cos \theta + i \sin \theta)}| = |e^{-ikr \cos \theta}||e^{kr \sin \theta}| = e^{kr \sin \theta}. \quad (4.8)$$

Συνεπώς,

$$|e^{-ikz}| \leq 1, \quad \text{αν } k \sin \theta \leq 0. \quad (4.9)$$

Από την άλλη,

$$\begin{aligned} |1+z^2| &= \sqrt{(1+z^2)(1+\bar{z}^2)} = \sqrt{(1+r^2 e^{2i\theta})(1+r^2 e^{-2i\theta})} \\ &= \sqrt{1+2r^2 \cos 2\theta + r^4} \geq \sqrt{1-2r^2 + r^4} = |r^2 - 1|. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Αν, λοιπόν,  $k \sin \theta \leq 0$ , τότε κατά μήκος ενός κύκλου ακτίνας  $R > 1$ ,

$$\left| \frac{e^{-ikz}}{1+z^2} \right| \leq \left| \frac{1}{1+z^2} \right| \leq \frac{1}{R^2 - 1} < \frac{1}{R^2} \quad (4.11)$$

και, άρα,

$$\left| \int_{C_R} \frac{e^{-ikz}}{1+z^2} dz \right| < \frac{1}{R^2} \pi R = \frac{\pi}{R}. \quad (4.12)$$

Αυτό σημαίνει ότι το ολοκλήρωμα  $\int_{C_R} \frac{e^{-ikz}}{1+z^2} dz$  μηδενίζεται καθώς η ακτίνα  $R \rightarrow \infty$ .



Όταν η παράμετρος  $k$  είναι αρνητική, η συνθήκη  $k \sin \theta \leq 0$  καλύπτεται αν το  $\sin \theta \geq 0$ . Αυτό ισχύει κατά μήκος ενός κυκλικού τόξου που βρίσκεται στο πάνω μιγαδικό επίπεδο. Άρα, στην περίπτωση  $k < 0$ , η κλειστή καμπύλη  $C$  πρέπει να κατασκευαστεί όπως στο Σχ. 4.1. Αυτή η καμπύλη περιέχει μόνο τον πόλο  $z = i$ , οπότε

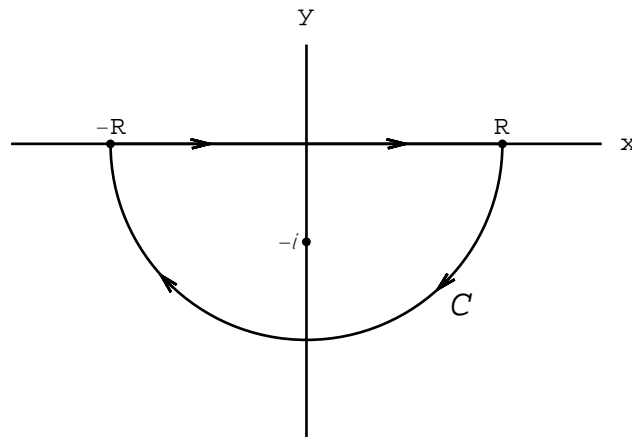
$$\oint_C \frac{e^{-ikz}}{1+z^2} dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{-ikz}}{1+z^2}, z=i\right) = 2\pi i \frac{e^{-ki}}{2i} = \pi e^k. \quad (4.13)$$

Από την (4.6) και το προηγούμενο αποτέλεσμα αμέσως έπεται ότι

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{e^{-ikx}}{1+x^2} dx = \oint_C \frac{e^{-ikz}}{1+z^2} dz = \pi e^k, \quad k < 0. \quad (4.14)$$

Ανάλογα, όταν η παράμετρος  $k$  είναι θετική, η συνθήκη  $k \sin \theta \leq 0$  καλύπτεται αν το  $\sin \theta \leq 0$ . Αυτό ισχύει όταν το κυκλικό τόξο  $C_R$  περιέχεται στο κάτω μιγαδικό επίπεδο, οπότε η κλειστή καμπύλη  $C$  πρέπει να κατασκευαστεί όπως στο Σχ. 4.2. Σημειώστε πως, τώρα, ο προσανατολισμός της  $C$  είναι αρνητικός, οπότε

$$\oint_C \frac{e^{-ikz}}{1+z^2} dz = -2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{-ikz}}{1+z^2}, z=-i\right) = -2\pi i \frac{e^{-ik(-i)}}{-2i} = \pi e^{-k}. \quad (4.15)$$



Σχ. 4.2 Η καμπύλη  $C$  για το επικαμπύλιο οκλήρωμα (4.15)

Συνακόλουθα,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{e^{-ikx}}{1+x^2} dx = \oint_C \frac{e^{-ikz}}{1+z^2} dz = \pi e^{-k}, \quad k > 0. \quad (4.16)$$

Συγκεντρώνοντας τα προηγούμενα αποτελέσματα, καταλήγουμε στη σχέση

$$\hat{f}(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} e^{-ikx} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|k|}, \quad k \in \mathbb{R}. \quad (4.17)$$

Τα επιχειρήματα που οδήγησαν στην (4.17) γενικεύονται εύκολα για να καλύψουν όλες τις περιπτώσεις όπου  $f(x)$  είναι ρητή συνάρτηση, με παρονομαστή που δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο της πραγματικής ευθείας. Το γενικότερο αποτέλεσμα περιγράφεται στο

#### Θεώρημα 4.1

Αν

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad (4.18)$$

όπου  $P, Q$  πολυώνυμα, και

(i) Ο παρονομαστής δεν έχει πραγματικές ρίζες,

(ii) Ο βαθμός του πολυώνυμου  $Q$  υπερβαίνει εκείνον του  $P$  τουλάχιστον κατά μια μονάδα, τότε ο μετασχηματισμός Fourier της  $f$  υπάρχει για κάθε πραγματικό  $k \neq 0$  και δίνεται από τον τύπο

$$\hat{f}(k) = \sqrt{2\pi} i \sum_{j=1}^n \operatorname{Res} \left\{ \frac{P(z)}{Q(z)} e^{-ikz}, z_j \right\}, \quad k < 0, \quad (4.19)$$

$$\hat{f}(k) = -\sqrt{2\pi} i \sum_{j=1}^n \operatorname{Res} \left\{ \frac{P(z)}{Q(z)} e^{-ikz}, z_j^* \right\}, \quad k > 0, \quad (4.20)$$

όπου  $\{z_j, z_j^*\}$  είναι τα σημεία όπου μηδενίζεται η  $Q(z)$  στο πάνω και κάτω μιγαδικό επίπεδο, αντίστοιχα.

Απόδειξη

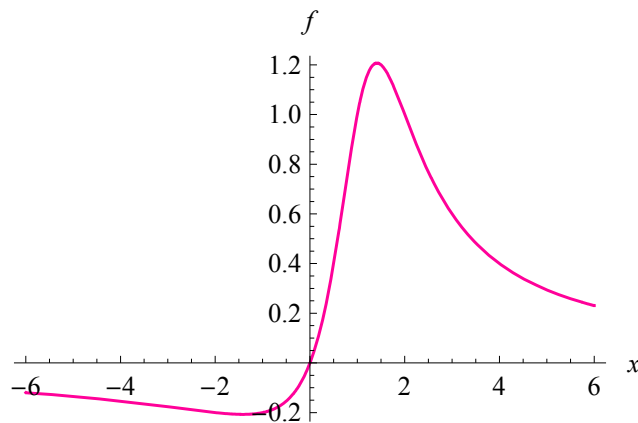
Αυτή συνάγεται εύκολα από το Θεώρημα 8.4 (βλ. και Shilon, σελ.454). ■

#### Παράδειγμα 4.2

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 4.1, μπορούμε να υπολογίσουμε εύκολα τον μετασχηματισμό Fourier της ρητής συνάρτησης

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 2x + 2} \quad (4.21)$$

της οποίας το γράφημα φαίνεται στο Σχ. 4.3.



Σχ. 4.3 Το γράφημα της συνάρτησης  $f(x) = x(x^2 - 2x + 2)^{-1}$ .

Σ' αυτή την περίπτωση

$$P(z) = z, \quad Q(z) = z^2 - 2z + 2, \quad (4.22)$$

οπότε η  $f(z)$  έχει απλούς πόλους στα σημεία  $z = 1 \pm i$ . Ισοδύναμα,

$$\{z_j\} = \{1 + i\}, \quad \{z_j^*\} = \{1 - i\}. \quad (4.23)$$

Σύμφωνα με τον τύπο (4.19),

$$\begin{aligned}\hat{f}(k) &= \sqrt{2\pi} i \operatorname{Res} \left\{ \frac{z}{z^2 - 2z + 2} e^{-ikz}, 1+i \right\}, \\ &= \sqrt{2\pi} i \frac{1+i}{(1+i) - (1-i)} e^{-i(1+i)k} = \sqrt{\pi/2} (1+i) e^{(1-i)k}, \quad k < 0.\end{aligned}\quad (4.24)$$

Από την άλλη, ο τύπος (4.20) δίνει

$$\begin{aligned}\hat{f}(k) &= -\sqrt{2\pi} i \operatorname{Res} \left\{ \frac{z}{z^2 - 2z + 2} e^{-ikz}, 1-i \right\} \\ &= -\sqrt{2\pi} i \frac{1-i}{(1-i) - (1+i)} e^{-i(1-i)k} = \sqrt{\pi/2} (1-i) e^{-(1+i)k}, \quad k > 0.\end{aligned}\quad (4.25)$$

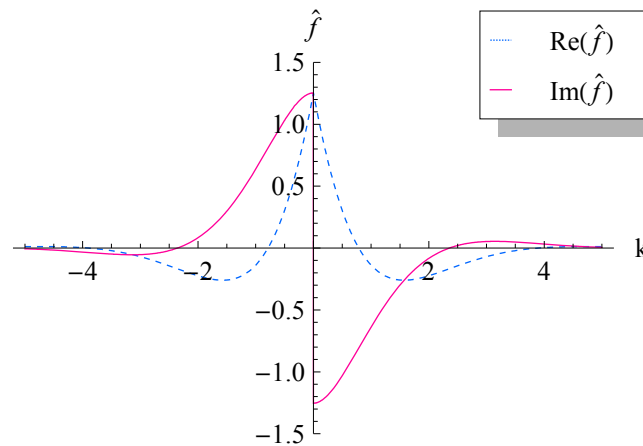
Συνολικά,

$$\hat{f}(k) = \sqrt{\pi/2} [H(-k)(1+i)e^{(1-i)k} + H(k)(1-i)e^{-(1+i)k}], \quad (4.26)$$

όπου

$$H(k) = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ 1, & k \geq 0 \end{cases} \quad (4.27)$$

Το γράφημα της συνάρτησης  $\hat{f}(k)$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , στη γειτονιά του  $k = 0$  φαίνεται στο Σχ. 4.4.



**Σχ. 4.4** Το γράφημα του πραγματικού και του φανταστικού μέρους του μετασχηματισμού Fourier  $\hat{f}(k)$  της συνάρτησης  $f(x) = x(x^2 - 2x + 2)^{-1}$ .

### Παράδειγμα 4.3

Ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης

$$f(x) = e^{-\lambda x^2}, \quad \lambda > 0, \quad (4.28)$$

εμφανίζεται σε πολλές περιπτώσεις -ειδικότερα στην ανάλυση της εξίσωσης της διάχυσης.

Σύμφωνα με τον ορισμό μας,

$$\hat{f}(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2 - ikx} dx. \quad (4.29)$$

Τώρα,

$$\lambda x^2 + i k x =$$

$$] - (i k / 2 \lambda)^2] = \lambda [x + (i k / 2 \lambda)]^2 + (k^2 / 4 \lambda).$$

Άρα,

$$\hat{f}(k) = \frac{e^{-k^2/4\lambda}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda[x+(i k/2\lambda)]^2} dx. \quad (4.31)$$

Η αλλαγή

$$x \rightarrow \sqrt{\lambda} x \quad (4.32)$$

μετατρέπει την (4.31) στην

$$\hat{f}(k) = \frac{e^{-k^2/4\lambda}}{\sqrt{2\pi\lambda}} I(\mu), \quad (4.33)$$

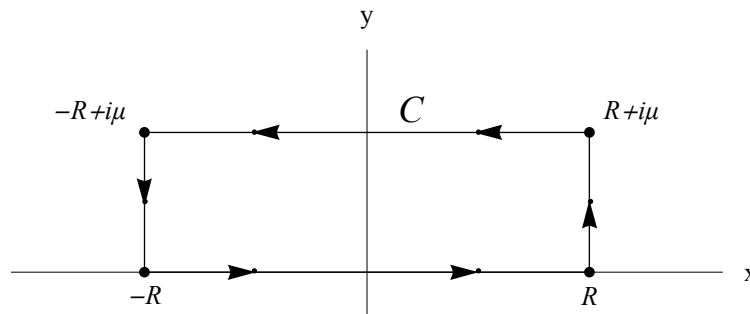
όπου

$$I(\mu) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+i\mu)^2} dx, \quad \mu := k/2\sqrt{\lambda}. \quad (4.34)$$

Όπως γνωρίζουμε, όταν το  $\mu = 0$ , το ολοκλήρωμα  $I(\mu)$  συγκλίνει στον αριθμό  $\sqrt{\pi}$ :

$$I(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \quad (4.35)$$

Για να υπολογίσουμε το  $I(\mu)$  όταν  $\mu \neq 0$ , υποθέτουμε πρώτα ότι  $\mu > 0$ . Στη συνέχεια, θεωρούμε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο  $C$  του επίπεδου  $C_k$ , το οποίο έχει ως κορυφές τα σημεία  $(-R, 0)$ ,  $(R, 0)$ ,  $(R, \mu)$  και  $(-R, \mu)$  (βλ. Σχ. 4.5).



Σχ. 4.5. Το παραλληλόγραμμο κατά μήκος του οποίου υπολογίζεται το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα (4.36)

Η συνάρτηση  $e^{-z^2}$  είναι αναλυτική σε όλο το μιγαδικό επίπεδο. Άρα, το ολοκλήρωμά της κατά μήκος του παραλληλόγραμμου  $C$  μηδενίζεται:

$$\begin{aligned} \oint_C e^{-z^2} dz &= \int_{-R}^R e^{-x^2} dx + i \int_0^\mu e^{-(R+iy)^2} dy \\ &+ \int_R^{-R} e^{-(x+i\mu)^2} dx + i \int_\mu^0 e^{-(-R+iy)^2} dy = 0. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Ισοδύναμα,

$$\int_{-R}^R e^{-x^2} dx - \int_{-R}^R e^{-(x+i\mu)^2} dx + i \int_0^\mu e^{-(R+iy)^2} dy - i \int_0^\mu e^{-(-R+iy)^2} dy = 0. \quad (4.37)$$

Τώρα

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\mu e^{-(\pm R+iy)^2} dy \right| &\leq \int_0^\mu |e^{-(\pm R+iy)^2}| dy \\ &= \int_0^\mu e^{-(R^2-y^2)} dy = e^{-R^2} \int_0^\mu e^{y^2} dy \leq \mu e^{\mu^2-R^2}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Συνεπώς,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\mu e^{-(\pm R+iy)^2} dy = 0, \quad (4.39)$$

και, άρα,

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+i\mu)^2} dx. \quad (4.40)$$

Αλλά αυτό σημαίνει ότι

$$I(\mu) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+i\mu)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \quad (4.41)$$

Συνεπώς,

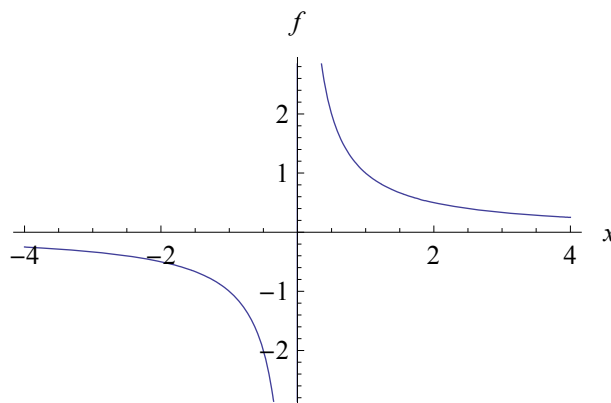
$$\hat{f}(k) = \frac{e^{-k^2/4\lambda}}{\sqrt{2\lambda}}. \quad (4.42)$$

### β) Μετασχηματισμός Fourier ανώμαλων συναρτήσεων

Αν κοιτάξουμε έναν πίνακα μετασχηματισμών Fourier, είναι πιθανό να βρούμε και το μετασχηματισμό συναρτήσεων οι οποίες χαρακτηρίζονται από μη ολοκληρώσιμες ανωμαλίες. Αντιπροσωπευτικό παράδειγμα αποτελεί η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad (4.43)$$

της οποίας το γράφημα στη γειτονιά του μηδενός φαίνεται στο Σχ. 4.6:



Σχ. 4.6 Το γράφημα της συνάρτησης που ορίζεται στην (4.43)

Οι περισσότεροι από τους σχετικούς πίνακες δίνουν την ακόλουθη συνάρτηση ως μετασχηματισμό Fourier της  $f(x) = x^{-1}$ :

$$\hat{f}(k) = -i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sgn} k, \quad (4.44)$$

Εδώ, με  $\operatorname{sgn}$  συμβολίζουμε τη **συνάρτηση πρόσημο**

$$\operatorname{sgn} k := \begin{cases} -1, & k < 0 \\ 0, & k = 0 \\ 1, & k > 0 \end{cases} \quad (4.45)$$

Το ίδιο αποτέλεσμα δίνουν και για προγράμματα αυτόματων συμβολικών υπολογισμών σαν το *Mathematica*.

Σύμφωνα όμως, με τον Shilon (βλ. υποσημείωση στη σελ. 455), το ολοκλήρωμα  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} / x dx$  δεν υπάρχει. Κατά συνέπεια, το αποτέλεσμα που δίνουν οι πίνακες μετασχηματισμών Fourier και το *Mathematica* θα πρέπει να θεωρηθεί ως λανθασμένο!

Η εξήγηση αυτού του παράδοξου δεν είναι και τόσο δύσκολη. Πραγματικά, ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης  $f(x) = x^{-1}$  δεν υπάρχει, έτσι όπως τον ορίσαμε αρχικά. Για τον απλό λόγο ότι, όπως τονίζει ο Shilon, το ολοκλήρωμα  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} / x dx$  **δεν** συγκλίνει.

Ένας τρόπος για να δοθεί νόημα στο αποτέλεσμα του *Mathematica* και των καθιερωμένων πινάκων μετασχηματισμών Fourier είναι να θεωρήσουμε το παραπάνω ολοκλήρωμα ως κύριας τιμής.

Για να ριξουμε στο παράδοξο που εντοπίσαμε άπλετο φως, θα εξετάσουμε το παράδειγμα της συνάρτησης (4.43) αναλυτικότερα. Όταν το  $k = 0$ , ο μετασχηματισμός Fourier της  $f(x) = x^{-1}$  ορίζεται κανονικά από την έκφραση

$$\hat{f}(0) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} dx. \quad (4.46)$$

Όμως, αυτό το καταχρηστικό ολοκλήρωμα **δεν** συγκλίνει.

Αντίθετα, το όριο

$$\operatorname{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} dx := \lim_{r \searrow 0} \left[ \int_{-R}^{-r} \frac{1}{x} dx + \int_r^R \frac{1}{x} dx \right] \quad (4.47)$$

υπάρχει και είναι ίσο με το μηδέν.

Από την άλλη, όπως δείξαμε αναλυτικά στο Εδάφιο VIII-8,

$$\operatorname{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} e^{ix} dx := \lim_{r \searrow 0} \left[ \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx \right] = \pi i. \quad (4.48)$$

Η αντικατάσταση  $x \rightarrow kx$ ,  $k \neq 0$ , μετατρέπει το προηγούμενο αποτέλεσμα στο

$$\operatorname{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} e^{ikx} dx = (\operatorname{sgn} k) \pi i. \quad (4.49)$$

Άρα, **αν** για το μετασχηματισμό Fourier της ανώμαλης συνάρτησης  $f(x) = x^{-1}$ , υιοθε-

τήσουμε τον ορισμό

$$\hat{f}(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} e^{-ikx} dx \quad (4.50)$$

τότε το αποτέλεσμα (4.44) ισχύει. ■

#### Παράδειγμα 4.4

Με ανάλογο τρόπο ορίζεται ο μετασχηματισμός Fourier μιας συνάρτησης με περισσότερους από έναν πραγματικούς πόλους. Για παράδειγμα, αν οι αριθμοί  $a, b$  είναι πραγματικοί και διαφορετικοί ο ένας από τον άλλο, τότε η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)(x-b)} \quad (4.51)$$

έχει απλούς πόλους στα σημεία  $a$  και  $b$  του άξονα  $x$ . Ειδικότερα, η

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1} \quad (4.52)$$

έχει απλούς πόλους στα σημεία  $x = \pm 1$ . Γι' αυτό θέτουμε

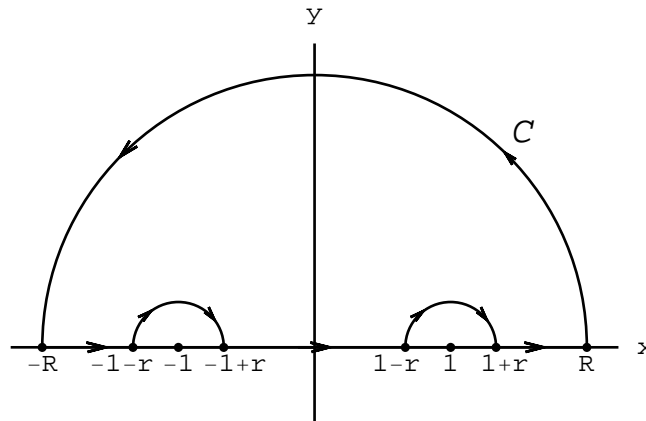
$$\begin{aligned} \hat{f}(k) &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - 1} e^{-ikx} dx \\ &:= \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ r \searrow 0}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \int_{-R}^{-1-r} \frac{e^{-ikx}}{x^2 - 1} dx + \int_{-1+r}^{1-r} \frac{e^{-ikx}}{x^2 - 1} dx + \int_{1+r}^R \frac{e^{-ikx}}{x} dx \right] \end{aligned} \quad (4.53)$$

και υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα της συνάρτησης

$$f(z) := \frac{e^{-ikz}}{z^2 - 1} \quad (4.54)$$

κατά μήκος της κατάλληλης κλειστής καμπύλης,  $C$ , του μιγαδικού επιπέδου  $C_z$ .

Όταν το  $k < 0$ , μια επιλογή για την  $C$  είναι αυτή που δείχνουμε στο Σχ. 4.7.



Σχ. 4.7 Η κλειστή καμπύλη  $C$ , κατά μήκος της οποίας υπολογίζεται το ολοκλήρωμα (4.56).

Η καταλληλότητα της παραπάνω καμπύλης συνάγεται από τις ακόλουθες παρατηρήσεις: Η  $f(z)$  που ορίσαμε στην (4.55) είναι αναλυτική σε όλο το μιγαδικό επίπεδο, με εξαίρεση τα σημεία  $z = \pm 1$  όπου έχει απλούς πόλους. Από την άλλη, όταν το  $k \in \mathbb{R}$ , τότε

$$|e^{-ikz}| = |e^{-ik|z|(\cos\theta + i\sin\theta)}| = e^{k|z|\sin\theta}. \quad (4.55)$$

Άρα, η συνάρτηση  $e^{-ikz} \rightarrow 0$  καθώς το  $|z| \rightarrow \infty$ , αρκεί το γινόμενο  $k \sin\theta$  να είναι αρνητικό. Για  $k < 0$ , αυτό ισχύει στο πάνω ημιεπίπεδο, όπου  $\sin\theta > 0$ .

Αφού η συνάρτηση  $f(z)$  είναι αναλυτική, τόσο επάνω όσο και στο εσωτερικό της καμπύλης  $C$ , το θεώρημα Cauchy ισχύει και δίνει το εξής αποτέλεσμα:

$$\oint \frac{e^{-ikz}}{z^2 - 1} dz = 0. \quad (4.56)$$

Από την άλλη

$$\begin{aligned} \oint \frac{e^{-ikz}}{z^2 - 1} dz &= \int_{-R}^{-1-r} \frac{e^{-ikx}}{x^2 - 1} dx + \int_{C_{r(-1)}} \frac{e^{-ikz}}{z^2 - 1} dz + \int_{-1+r}^{1-r} \frac{e^{-ikx}}{x^2 - 1} dx \\ &+ \int_{C_{r(1)}} \frac{e^{-ikz}}{z^2 - 1} dz + \int_{1+r}^R \frac{e^{-ikx}}{x^2 - 1} dx + \int_{C_R} \frac{e^{-ikz}}{z^2 - 1} dz \end{aligned} \quad (4.57)$$

όπου  $C_r(\pm 1)$  είναι τα ημικύκλια ακτίνας  $r < 1$  με κέντρο τα σημεία  $x = \pm 1$ , αντίστοιχα, και  $C_R$  το μεγάλο ημικύκλιο που έχει ως διάμετρο το τμήμα  $[-R, R]$  του άξονα  $x$ . Συνεπώς,

$$\begin{aligned} &\int_{-R}^{-1-r} \frac{e^{-ikx}}{x^2 - 1} dx + \int_{-1+r}^{1-r} \frac{e^{-ikx}}{x^2 - 1} dx + \int_{1+r}^R \frac{e^{-ikx}}{x^2 - 1} dx \\ &= - \int_{C_{r(-1)}} \frac{e^{-ikz}}{z^2 - 1} dz - \int_{C_{r(1)}} \frac{e^{-ikz}}{z^2 - 1} dz + \int_{C_R} \frac{e^{-ikz}}{z^2 - 1} dz. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Με βάση την προηγούμενη παρατήρηση, το τελευταίο ολοκλήρωμα μηδενίζεται καθώς η ακτίνα  $R$  του μεγάλου ημικύκλιου τείνει στο άπειρο.

Όσο αφορά την ολοκλήρωση κατά μήκος των μικρών ημικύκλιων  $C_r(\pm 1)$ , μπορούμε να στηριχτούμε στο εξής γενικό αποτέλεσμα:

#### Λήμμα 4.1

Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση  $f(z)$  έχει πόλο στο σημείο  $z_0$  κι ότι  $C_r$  είναι ένα κυκλικό τόξο ακτίνας  $r$  με κέντρο το  $z_0$  και γωνιακό άνοιγμα  $\Delta\varphi$ . Τότε

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{C_r} f(z) dz = i \Delta\varphi \operatorname{Res}\{f(z), z_0\}, \quad (4.59)$$

όπου η ολοκλήρωση γίνεται στην κανονική κατεύθυνση (αντίθετη από τη φορά των δεικτών του ρολογιού).

Κατά συνέπεια,



$$\lim_{r \searrow 0} \int_{C_r(\pm 1)} \frac{e^{-ikz}}{z^2 - 1} dz = i\pi \operatorname{Res} \left\{ \frac{e^{-ikz}}{z^2 - 1}, \pm 1 \right\} = i\pi \frac{e^{\mp ik}}{(\pm 2)}, \quad (4.60)$$

με την προϋπόθεση ότι η επικαμπύλια ολοκλήρωση γίνεται στην θετική κατεύθυνση. Αν, λοιπόν, λάβουμε υπόψη ότι, τα ημικύκλια  $C_r(\pm 1)$  το Σχ. 4.7 έχουν αρνητικό προσανατολισμό, θα καταλήξουμε στο εξής συμπέρασμα:

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \lim_{r \searrow 0} \left[ \int_{-R}^{-1-r} \frac{e^{-ikx}}{x^2 - 1} dx + \int_{-1+r}^{1-r} \frac{e^{-ikx}}{x^2 - 1} dx + \int_{1+r}^R \frac{e^{-ikx}}{x} dx \right] \\ = - \left( i\pi \frac{e^{-ik}}{2} - i\pi \frac{e^{ik}}{2} \right) \equiv -\pi \sin k. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Συνδυάζοντας αυτό το αποτέλεσμα με τον ορισμό (4.54), καταλήγουμε στην

$$\hat{f}(k) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \sin k, \quad k < 0. \quad (4.62)$$

Για να καλύψουμε την περίπτωση όπου η παράμετρος  $k$  είναι θετική, αρκεί να επαναλάβουμε την προηγούμενη ανάλυση, χρησιμοποιώντας την κλειστή καμπύλη του κάτω ημιεπίπεδου, η οποία προκύπτει από τον αντικατοπτρισμό της  $C$  ως προς τον άξονα  $x$ . Με αυτό τον τρόπο θα βρούμε ότι

$$\hat{f}(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sin k, \quad k > 0. \quad (4.63)$$

Συμπερασματικά, ο ορισμός (4.53) για τον μετασχηματισμό Fourier της ανώμαλης συνάρτησης  $f(x) = (x^2 - 1)^{-1}$  οδηγεί στο εξής αποτέλεσμα:

$$\hat{f}(k) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sgn} k \sin k. \quad (4.64)$$

## Ασκήσεις

4.1 Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier των συναρτήσεων

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 5}, \quad g(x) = \frac{x}{x^2 + 4x + 5}.$$

4.2 Ν' αποδειχτεί το Θεώρημα 4.1.

4.3 Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης  $f(x) = \operatorname{sech}(ax)$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , με τη μέθοδο της επικαμπύλιας ολοκλήρωσης στο μιγαδικό επίπεδο.

4.3 Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier των συναρτήσεων

$$f(x) = \frac{x}{x^4 + 1}, \quad g(x) = \frac{x^2}{x^4 + 1}.$$

4.4 Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier των παρακάτω συναρτήσεων.

$$f(x) = \frac{x}{p(x)}, \quad g(x) = \frac{x^2}{p(x)}, \quad \text{όπου } p(x) := x^4 - 10x^3 + 39x^2 - 70x + 50.$$

4.5 Ν' αποδειχτεί το Λήμμα 4.1.

4.6 Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier των συναρτήσεων

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + x - 6}, \quad g(x) = \frac{x}{x^2 + x - 6}, \quad h(x) = \frac{2x - 1}{x^2 + x - 6}.$$

4.7 Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier των συναρτήσεων

$$f(x) = \frac{1}{x^3 - 3x + 2}, \quad g(x) = \frac{x}{x^3 - 3x + 2}.$$

4.8 Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier των συναρτήσεων

$$f(x) = \frac{x}{x^3 - 7x^2 + 16x - 10}, \quad g(x) = \frac{x^2}{x^3 - 7x^2 + 16x - 10}.$$

4.9 Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier των συναρτήσεων

$$f(x) = \frac{x^2}{x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 16x + 8}, \quad g(x) = \frac{x^3}{x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 16x + 8}.$$

## 5 Η έννοια της συνέλιξης δύο συναρτήσεων

Μια άλλη σημαντική ιδιότητα των μετασχηματισμών Fourier, ιδιαίτερα από την άποψη των εφαρμογών, έχει να κάνει με την συνέλιξη δύο συναρτήσεων. Με *συνέλιξη των συναρτήσεων*  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  εννοούμε το ολοκλήρωμα  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) dy$ , το οποίο συμβολίζεται με  $f * g$ .

Με άλλα λόγια,

$$h = f * g \Leftrightarrow h(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) dy \quad (5.1)$$

Η αντικατάσταση της μεταβλητής ολοκλήρωσης  $y$  από την  $z := x - y$  οδηγεί αμέσως στην ακόλουθη σχέση:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) g(x-z) dz. \quad (5.2)$$

Ισοδύναμα,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(x-y) f(y) dy, \quad (5.3)$$

πράγμα που σημαίνει ότι

$$f * g = g * f \quad (5.4)$$

Η συνέλιξη δύο συναρτήσεων ορίζεται κάτω από αρκετά χαλαρές προϋποθέσεις. Αρκεί, για παράδειγμα, η  $f$  να είναι φραγμένη και η  $g$  απόλυτα ολοκληρώσιμη, ή αντίστροφα. Γιατί, τότε, υπάρχει ένας μη αρνητικός αριθμός  $M$ , τέτοιος που  $|f(x)| < M, \forall x \in \mathbb{R}$ . Συνεπώς,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-y) g(y)| dy \leq M \int_{-\infty}^{\infty} |g(y)| dy < \infty. \quad (5.5)$$

Αυτό σημαίνει ότι το ολοκλήρωμα που ορίζει την  $f * g$  συγκλίνει απόλυτα και, άρα, συγκλίνει.

### Παράδειγμα 5.1

(i) Αν  $f(x) = \sin x, \quad g(x) = \frac{1}{1+x^2}$

τότε

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) dy = \frac{\pi}{e} \sin x.$$

(ii) Αν  $f(x) = \cos x, \quad g(x) = \frac{1}{1+x^2}$

τότε

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) dy = \frac{\pi}{e} \cos x.$$

(iii) Αν  $f(x) = \sin x \cos x, \quad g(x) = e^{-x^2}$

τότε

$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) dy = \frac{\sqrt{\pi}}{e} \sin 2x.$$

■

Ας υποθέσουμε τώρα ότι οι  $f, g$  είναι φραγμένες και απόλυτα ολοκληρώσιμες. Τότε, μπορεί να δειχτεί πως το ίδιο ισχύει και για την  $h = f * g$ . Σ' αυτή την περίπτωση, οι μετασχηματισμοί Fourier και των τριών αυτών συναρτήσεων υπάρχουν. Και μάλιστα, μεταξύ τους, υπάρχει η εξής απλή σχέση:

$$\hat{h} \equiv (f * g)^\wedge = \sqrt{2\pi} \hat{f} \hat{g} \iff \mathcal{F}(h) = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}(f) \mathcal{F}(g) \quad (5.6)$$

Παρόλο που αυτή η σχέση ισχύει σε κάθε περίπτωση όπου οι  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ , εμείς θ' αποδείξουμε την ισχύ της κάτω από λίγο αυστηρότερες προϋποθέσεις. Για το σκοπό αυτό, αρχικά θα παρατηρήσουμε ότι

$$\hat{h}(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) dy \right\} e^{-ikx} dx. \quad (5.7)$$

Από την άλλη,  $e^{-ikx} = e^{-ik(x-y)} e^{-iky}$ . Συνεπώς, η (5.7) γράφεται σαν

$$\hat{h}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) e^{-ik(x-y)} e^{-iky} g(y) dy \right\} dx. \quad (5.8)$$

Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι οι  $f, g$  είναι τέτοιες που η σειρά ολοκλήρωσης μπορεί να αντιστραφεί. Αυτό ισχύει, για παράδειγμα, όταν οι  $f, g$  ανήκουν στην κλάση  $C_c^\infty(\mathbb{R})$ . Τότε, η προηγούμενη σχέση μετατρέπεται στην

$$\hat{h}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) e^{-ik(x-y)} dx \right\} e^{-iky} g(y) dy. \quad (5.9)$$

Με την αλλαγή μεταβλητής  $x \rightarrow z = x - y$ , η τελευταία γίνεται

$$\hat{h}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-ikz} dz \right\} g(y) e^{-iky} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) g(y) e^{-iky} dy. \quad (5.10)$$

Συνεπώς,

$$\hat{h}(k) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(k) \hat{g}(k). \quad (5.11)$$

### Παράδειγμα 5.2

(i) Αν  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

τότε

$$h(x) := (f * f)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) f(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+(x-y)^2} \frac{1}{1+y^2} dy.$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα υπολογίζεται χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία και δίνει

$$h(x) = \frac{2\pi}{x^2+4}.$$

Εύκολα επίσης βρίσκουμε ότι

$$\hat{h}(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{x^2+4} e^{-ikx} dx = \frac{\pi^{3/2}}{\sqrt{2}} e^{-2|k|}.$$

Σύμφωνα με τον τύπο (5.5), η  $\hat{h}(k)$  που μόλις βρήκαμε θα πρέπει να είναι ίση με  $\sqrt{2\pi} [\hat{f}(k)]^2$ . Και, πραγματικά, έτσι έχουν τα πράγματα, γιατί, ήδη γνωρίζουμε ότι (βλ. Παράδειγμα 4.1)

$$\hat{f}(k) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-|k|}.$$

(ii) Αν 
$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad g(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x \notin [0, 1] \end{cases}$$

τότε

$$h(x) := (f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) dy = \int_{x-1}^x \frac{1}{y^2+1} dy = \tan^{-1}(x) - \tan^{-1}(x-1)$$

Από το γεγονός ότι

$$\hat{f}(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|k|}, \quad \hat{g}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin k + i(\cos k - 1)}{k},$$

αμέσως συνάγεται το ακόλουθο συμπέρασμα:

$$\hat{h}(k) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(k) \hat{g}(k) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin k + i(\cos k - 1)}{k} e^{-|k|}.$$

Αφήνουμε για άσκηση την επαλήθευση του ότι, ο απ' ευθείας υπολογισμός του μετασχηματισμού Fourier της  $h(x)$  δίνει το ίδιο αποτέλεσμα. ■

## Ασκήσεις

**5.1** Να υπολογιστούν αναλυτικά όλα τα αποτελέσματα των παραδειγμάτων 5.1 και 5.2.

**5.2** Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις,

α) Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier των  $f, g$ , αφού πρώτα ελεγχθεί αν οι παραπάνω συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες.

β) Να υπολογιστεί η συνέλιξη,  $h := f * g$ , των  $f, g$  και να εξεταστεί αν είναι ολοκληρώσιμη.

γ) Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier της  $h$ , χρησιμοποιώντας πρώτα τον τύπο

$$\hat{h}(k) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(k) \hat{g}(k) \text{ κι ύστερα τον ορισμό } \hat{h}(k) = \left(1 / \sqrt{2\pi}\right) \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx.$$

(i)  $f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad g(x) = \begin{cases} 1 - |x| & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & x \notin [-1, 1] \end{cases}$

(ii)  $f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad g(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & x \notin [-1, 1] \end{cases}$

(iii)  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad g(x) = \begin{cases} 1 - |x| & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & x \notin [-1, 1] \end{cases}$

(iv)  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad g(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & -1 \leq x \leq 1 \\ 0 & x \notin [-1, 1] \end{cases}$

**5.3** α) Να προσδιοριστούν συνθήκες που αρκεί να πληρούν οι  $f, g$ , ώστε η αλλαγή της σειράς ολοκλήρωσης που κάναμε στην (5.8) να είναι θεμιτή.

β) Να δειχτεί ότι η σχέση (5.5) ισχύει σε κάθε περίπτωση όπου οι  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ .

## 6 Μετασχηματισμοί Fourier ημιτόνου - συνημιτόνου

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  είναι περιττή, δηλαδή ότι

$$f(-x) = -f(x). \quad (6.1)$$

Τότε, από τη μια μεριά,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx = \int_{-\infty}^0 f(x) e^{-ikx} dx + \int_0^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (6.2)$$

Από την άλλη, η αντικατάσταση  $x \rightarrow -x$  δείχνει ότι

$$\int_{-\infty}^0 f(x) e^{-ikx} dx = - \int_{-\infty}^0 f(-x) e^{ikx} dx = - \int_0^{\infty} f(x) e^{ikx} dx. \quad (6.3)$$

Συνεπώς

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx = - \int_0^{\infty} f(x) (e^{ikx} - e^{-ikx}) dx = -2i \int_0^{\infty} f(x) \sin kx dx. \quad (6.4)$$

Αυτό σημαίνει ότι

$$\hat{f}(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx = -i F_s(k), \quad (6.5)$$

όπου

$$F_s(k) \equiv [\mathcal{F}_s(f)](k) := \sqrt{2/\pi} \int_0^{\infty} f(x) \sin kx dx \quad (6.6)$$

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται το ακόλουθο αποτέλεσμα: Αν η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  είναι άρτια, αν δηλαδή

$$f(-x) = f(x), \quad (6.7)$$

τότε

$$\hat{f}(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx = F_c(k) \quad (6.8)$$

όπου

$$F_c(k) \equiv [\mathcal{F}_c(f)](k) := \sqrt{2/\pi} \int_0^{\infty} f(x) \cos kx dx \quad (6.9)$$

Είναι φανερό ότι τα ολοκληρώματα (6.6) και (6.9) έχουν νόημα για κάθε συνάρτηση με πεδίο ορισμού την πραγματική ημιευθεία  $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ . Όταν συγκλίνουν, ονομάζονται, αντίστοιχα, **μετασχηματισμός Fourier ημιτόνων** και **μετασχηματισμός Fourier συνημιτόνων** της  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ . Προφανώς, μια ικανή συνθήκη σύγκλισης των παραπάνω ολοκληρωμάτων είναι η

$$\int_0^{\infty} |f(x)| dx < \infty. \quad (6.10)$$

Όταν αυτή η συνθήκη σχύει, το δηλώνουμε γράφοντας  $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ .

**Παράδειγμα 6.1**

(i) Αν

$$f(x) = e^{-x}.$$

τότε

$$[\mathcal{F}_s(f)](k) = \sqrt{2/\pi} \frac{k}{k^2 + 1}, \quad [\mathcal{F}_c(f)](k) = \sqrt{2/\pi} \frac{1}{k^2 + 1}.$$

(ii) Αν

$$f(x) = \begin{cases} x(1-x), & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

τότε

$$[\mathcal{F}_s(f)](k) = \sqrt{2/\pi} \frac{2 - 2 \cos k - k \sin k}{k^3}, \quad [\mathcal{F}_c(f)](k) = \sqrt{2/\pi} \frac{2 \sin k - k \cos k - k}{k^3}.$$

■

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ , που ανήκει στην κλάση  $L^1(\mathbb{R}_+)$ , είναι συνεχώς διαφορίσιμη κι ότι η  $f' \in L^1(\mathbb{R}_+)$ . Τότε υπάρχουν οι μετασχηματισμοί ημιτόνων και συνημιτόνων τόσο της  $f$ , όσο και της  $f'$ . Μάλιστα, ανάμεσα στις  $\mathcal{F}_s(f)$ ,  $\mathcal{F}_c(f)$  και  $\mathcal{F}_s(f')$ ,  $\mathcal{F}_c(f')$  υπάρχουν απλές σχέσεις, που εντοπίζονται εύκολα ως εξής:

Η υπόθεση ότι η  $f$  είναι συνεχώς διαφορίσιμη μας επιτρέπει να ολοκληρώσουμε κατά παράγοντες και να δούμε ότι

$$\begin{aligned} \sqrt{2/\pi} \int_0^\infty f(x) \sin kx \, dx &= \sqrt{2/\pi} \left[ -\frac{1}{k} f(x) \cos kx \Big|_0^\infty + \frac{1}{k} \int_0^\infty f'(x) \cos kx \, dx \right] \\ &= \sqrt{2/\pi} \left[ \frac{1}{k} f(0) + \frac{1}{k} \int_0^\infty f'(x) \cos kx \, dx \right] \\ &= \frac{1}{k} \left[ \sqrt{2/\pi} f(0) + \sqrt{2/\pi} \int_0^\infty f'(x) \cos kx \, dx \right]. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Αυτό σημαίνει πως, για κάθε  $k \neq 0$ ,

$$[\mathcal{F}_s(f)](k) := \frac{1}{k} \left[ \sqrt{2/\pi} f(0) + \mathcal{F}_c(f')(k) \right]. \quad (6.12)$$

Ισοδύναμα,

$$\boxed{\mathcal{F}_c(f')(k) = k [\mathcal{F}_s(f)](k) - \sqrt{2/\pi} f(0)} \quad (6.13)$$

Με ανάλογο τρόπο βρίσκουμε τη σχέση

$$\boxed{\mathcal{F}_s(f')(k) = -k [\mathcal{F}_c(f)](k)} \quad (6.14)$$

Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί επαγωγικά, με τρόπο ώστε να δώσει τους μετασχηματισμούς Fourier ημιτόνων και συνημιτόνων της παραγώγου τάξης  $n$  της  $f(x)$ . Με την προϋπόθεση, βέβαια, ότι η τελευταία υπάρχει, είναι (τμηματικά, τουλάχιστον) συνεχής



και ανήκει στην κλάση  $L^1(\mathbb{R}_+)$ . Για παράδειγμα, ο συνδυασμός των (6.13) και (6.14) οδηγεί αμέσως στους τύπους

$$\mathcal{F}_c(f'')(k) = -k^2 [\mathcal{F}_c(f)](k) - \sqrt{2/\pi} f'(0) \quad (6.15)$$

$$\mathcal{F}_s(f'')(k) = -k^2 [\mathcal{F}_s(f)](k) + \sqrt{2/\pi} f(0)k \quad (6.16)$$

Ως *αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier ημιτόνου* της τυχαίας συνάρτησης  $g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$  ορίζεται η συνάρτηση

$$[\mathcal{F}_s^{-1}(g)](x) := \sqrt{2/\pi} \int_0^\infty g(k) \sin kx \, dk, \quad (6.17)$$

όταν, βέβαια, το τελευταίο ολοκλήρωμα συγκλίνει.

Ανάλογα, *αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier συνημιτόνου* της  $g$  ονομάζεται η συνάρτηση

$$[\mathcal{F}_c^{-1}(g)](x) := \sqrt{2/\pi} \int_0^\infty g(k) \cos kx \, dk. \quad (6.18)$$

### Παράδειγμα 6.2

(i) Αν

$$g(k) = \sqrt{2/\pi} \frac{k}{k^2+1}.$$

τότε

$$[\mathcal{F}_s^{-1}(g)](0) = 0, \quad [\mathcal{F}_s^{-1}(g)](x) = e^{-x}, \quad x > 0.$$

**Παρατήρηση.** Η  $g(k)$  δεν είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα  $[0, \infty)$ . Επιπλέον, αξίζει να σημειωθεί ότι

$$[\mathcal{F}_s^{-1}(g)](0) = 0 \neq [\mathcal{F}_s^{-1}(g)](0+).$$

(ii) Αν

$$g(k) = \sqrt{2/\pi} \frac{1}{k^2+1}$$

τότε

$$[\mathcal{F}_c^{-1}(g)](x) = e^{-x}, \quad x \geq 0.$$

(iii) Αν

$$g(k) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2/\pi}}{\sqrt{1-k^2}}, & 0 \leq k < 1 \\ 0, & k \geq 1 \end{cases}$$

τότε

$$[\mathcal{F}_c^{-1}(g)] = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos(kx)}{\sqrt{1-k^2}} \, dk.$$

Η τελευταία έκφραση αποτελεί μία από τις ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις της συνάρτησης

Bessel πρώτου είδους και μηδενικής τάξης,  $J_0(x)$ .

## Ασκήσεις

6.1 (i) Να δειχτεί ότι

$$[\mathcal{F}_s(f''')](k) = k^3 \mathcal{F}_c(f)(k) + \sqrt{2/\pi} k f'(0),$$

$$[\mathcal{F}_c(f''')](k) = -k^3 \mathcal{F}_s(f)(k) - \sqrt{2/\pi} [f''(0) + k f'(0)].$$

(ii) Να παραχθούν ανάλογοι τύποι για τους μετασχηματισμούς Fourier ημιτόνων και συνημιτόνων της παραγώγου  $f^{(n)}$  της  $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ , για τυχαίο  $n \in \mathbb{N}$ .

6.2 Να υπολογιστούν οι αντίστροφοι μετασχηματισμοί Fourier ημιτόνων και συνημιτόνων των ακόλουθων συναρτήσεων

(i)  $f(k) = e^{-k^2/2}, \quad k \in \mathbb{R}_+$

(ii)  $f(k) = a k e^{-k^2/2} + b \sin 2k, \quad k \in \mathbb{R}_+$

(iii)  $f(k) = \begin{cases} k(1-k)^2, & 0 \leq k \leq 1 \\ 0, & k > 1 \end{cases}$

(iv)  $f(k) = \begin{cases} 0, & 0 \leq k < a \\ c(k-a)(b-k), & a \leq k \leq b \\ 0, & k > b \end{cases}$

6.3 Να δειχτεί ότι

$$\frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\cos(kx)}{\sqrt{1-k^2}} dk = J_0(x)$$

6.4 Δείχτε ότι

$$\int_0^\infty \hat{f}_c(k) \hat{g}_c(k) \cos kx \, dk = \frac{1}{2} \int_0^\infty g(s)[f(|x-s|) + f(x+s)] \, ds,$$

$$\int_0^\infty \hat{f}_s(k) \hat{g}_c(k) \sin kx \, dk = \frac{1}{2} \int_0^\infty f(s)[g(|x-s|) - g(x+s)] \, ds,$$

όπου  $\hat{f}_s = \mathcal{F}_s(f)$ ,  $\hat{f}_c = \mathcal{F}_c(f)$ ,  $\hat{g}_c = \mathcal{F}_c(g)$ .

## 7 Μετασχηματισμοί Fourier συναρτήσεων πολλών μεταβλητών

Η έννοια του μετασχηματισμού Fourier γενικεύεται αμέσως, για να καλύψει συναρτήσεις πολλών μεταβλητών. Συγκεκριμένα, ας υποθέσουμε ότι η  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  κι ας συμβολίσουμε το τυχαίο στοιχείο του  $n$ -διάστατου χώρου  $\mathbb{R}^n$  με  $\mathbf{x}$ . Δηλαδή,

$$\mathbf{x} := (x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (7.1)$$

Ας συμβολίσουμε, επίσης, το εσωτερικό γινόμενο των τυχαίων διανυσμάτων  $\mathbf{k}$  και  $\mathbf{x}$  με  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$ . Με άλλα λόγια,

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} := k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_n x_n. \quad (7.2)$$

Τότε, ως **μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης  $f(\mathbf{x})$**  ορίζεται το ολοκλήρωμα

$$\hat{f}(\mathbf{k}) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}. \quad (7.3)$$

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι το ολοκλήρωμα στον ορισμό (7.3) είναι  $n$ -πλό, αλλά ο συμβολισμός μας διαφέρει από τον συμβατικό. Για να τον διευκρινίσουμε, στις περιπτώσεις  $n=2$  και  $n=3$ , μπορούμε να θέσουμε  $(x_1, x_2) = (x, y)$  και  $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ , αντίστοιχα, οπότε

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \equiv \int_{\mathbb{R}^2} \int f(x, y) dx dy \quad (7.4)$$

και

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \equiv \int_{\mathbb{R}^3} \int \int f(x, y, z) dx dy dz. \quad (7.5)$$

Σε κάθε περίπτωση\*, εκείνο που έχει σημασία είναι ότι το  $n$ -πλό ολοκλήρωμα (7.3) δεν συγκλίνει για τυχαία  $f(\mathbf{x})$  και οποιοδήποτε  $\mathbf{k}$ . Σίγουρα, πάντως, συγκλίνει για κάθε  $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^n$ , όταν η συνάρτηση  $f(\mathbf{x})$  είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη, δηλαδή τέτοια ώστε

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(\mathbf{x})| d\mathbf{x} < \infty. \quad (7.6)$$

Σ' αυτή την περίπτωση θα λέμε ότι η  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ .

■

### Παράδειγμα 7.1

Η συνάρτηση

$$f(\mathbf{x}) = e^{-\lambda r^2}, \quad \lambda > 0, \quad r := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \quad (7.7)$$

ανήκει στην κλάση  $L^1(\mathbb{R}^n)$ , για τον εξής απλό λόγο: Το **επάλληλο** ολοκλήρωμα

$$I_\varepsilon := \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)} dx_1 dx_2 \dots dx_n \quad (7.8)$$

συγκλίνει και η τιμή του υπολογίζεται εύκολα, γιατί ανάγεται σε γινόμενο γνωστών παρα-

γόντων:

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x_1^2} dx_1 \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x_2^2} dx_2 \right) \cdots \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x_n^2} dx_n \right) \\ &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2} dx \right)^n = \left( \sqrt{\pi/\lambda} \right)^n \equiv (\pi/\lambda)^{n/2}. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Από την άλλη, η δοσμένη  $f(x)$  παίρνει μόνο θετικές τιμές. Συνεπώς, στην περίπτωση που εξετάζουμε, το πολλαπλό ολοκλήρωμα (7.6) συγκλίνει και είναι ίσο με το επάλληλο (7.8) (**θεώρημα του Fubini**):

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\lambda r^2} dx = (\pi/\lambda)^{n/2}. \quad (7.10)$$

Από αυτό το γεγονός αμέσως συνάγεται ότι ο μετασχηματισμός Fourier,  $\hat{f}(\mathbf{k})$ , της συνάρτησης (7.7) ορίζεται για κάθε  $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^n$ . Μάλιστα, για τον ίδιο όπως παραπάνω λόγο, υπολογίζεται και πολύ εύκολα:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\mathbf{k}) &:= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\lambda r^2} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda(x_1^2 + \cdots + x_n^2) - i(k_1 x_1 + \cdots + k_n x_n)} dx_1 \cdots dx_n \\ &= \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x_1^2 - i k_1 x_1} dx_1 \right) \cdots \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x_n^2 - i k_n x_n} dx_n \right) \\ &= \frac{e^{-k_1^2/4\lambda}}{\sqrt{2\lambda}} \cdots \frac{e^{-k_n^2/4\lambda}}{\sqrt{2\lambda}} = \frac{e^{-(k_1^2 + \cdots + k_n^2)/4\lambda}}{(2\lambda)^{n/2}}. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Με άλλα λόγια,

$$\boxed{f(x) = e^{-\lambda|x|^2}, \lambda > 0 \Rightarrow \hat{f}(\mathbf{k}) = \frac{e^{-|\mathbf{k}|^2/4\lambda}}{\sqrt{2\lambda}}} \quad (7.12)$$

Με ανάλογο τρόπο γενικεύονται όλες οι άλλες έννοιες και αποτελέσματα που συναντήσαμε στους μετασχηματισμούς Fourier μιας μεταβλητής. Για παράδειγμα, ως **αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης**  $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  ορίζεται η συνάρτηση

$$\check{g}(\mathbf{x}) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}^n} g(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{k}. \quad (7.13)$$

Και πάλι, κάτω από συγκεκριμένες προϋποθέσεις, απεικόνιση  $g \rightarrow \check{g}$  που ορίζεται μ' αυτό τον τρόπο, είναι η αντίστροφη της  $\mathcal{F}: f \rightarrow \hat{f}$ . Γι' αυτό, τη συμβολίζουμε με  $\mathcal{F}^{-1}$ .

Ως τελευταίο παράδειγμα των εννοιών και αποτελεσμάτων που γενικεύονται άμεσα από τον  $\mathbb{R}$  στον  $\mathbb{R}^n$ ,  $n > 1$ , αναφέρουμε τη συνέλιξη των συναρτήσεων  $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ ,

$$h = f * g \Leftrightarrow h(\mathbf{x}) := \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) g(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (7.14)$$

και τον τύπο

$$\hat{h} \equiv (f * g)^\wedge = \sqrt{2\pi} \hat{f} \hat{g} \Leftrightarrow \mathcal{F}(h) = (2\pi)^{n/2} \mathcal{F}(f) \mathcal{F}(g) \quad (7.15)$$

για τη σχέση των μετασχηματισμών Fourier των  $f$ ,  $g$  και  $f * g$ .

## Ασκήσεις

**7.1** Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις,

α) Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier των  $f$ ,  $g$ , αφού πρώτα ελεγχθεί αν οι παραπάνω συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες.

β) Να υπολογιστεί η συνέλιξη,  $h := f * g$ , των  $f$ ,  $g$  και να εξεταστεί αν είναι ολοκληρώσιμη.

γ) Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier της  $h$ .

(i)  $f(x, y) = e^{-|x|-|y|}$ ,  $g(x, y) = e^{-x^2-y^2}$

(ii)  $f(x, y) = \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}$ ,  $g(x, y) = e^{-x^2-y^2}$

(iii)  $f(x, y) = r(x) s(y)$ ,  $r(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & x \notin [0, 1] \end{cases}$ ,  $s(x) = \begin{cases} 1 & -1 \leq x \leq 0 \\ 0 & x \notin [-1, 0] \end{cases}$ ,  $g(x, y) = e^{-x^2-y^2}$

**7.2** Να δειχτεί ότι ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης

$$f(x, y) = e^{-r}, \quad r := \sqrt{x^2 + y^2},$$

δίνεται από την

$$\hat{f}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(k^2+1)^{3/2}}, \quad k := |\mathbf{k}|.$$

*Υπόδειξη:* Ο άξονας  $x$  του Καρτεσιανού συστήματος  $x y$  μπορεί να επιλεγεί παράλληλος προς το διάνυσμα  $\mathbf{k} = (k_1, k_2)$ . Με αυτό τον τρόπο  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} = k r \cos \theta$ . Στις πολικές συντεταγμένες

$$\iint_{\mathbb{R}^2} F(x, y) dx dy = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \tilde{F}(r, \theta) r d\theta dr = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \tilde{F}(r, \theta) r dr d\theta.$$

*Επισήμανση:* Ίσως χρειαστείτε το εξής αποτέλεσμα: Μία από τις (πολλές) ολοκληρωτικές αναπαράστασεις της συνάρτησης Bessel πρώτου είδους και μηδενικής τάξης είναι η

$$J_0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i r \cos \theta} d\theta \quad (7.16)$$

**7.3** Να δειχτεί ότι η σχέση (7.15) ισχύει σε κάθε περίπτωση όπου οι  $f$ ,  $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ .

## 8 Επίλυση του προβλήματος αρχικών τιμών για την εξίσωση της διάχυσης στην πραγματική ευθεία

Οι μετασχηματισμοί Fourier αποτελούν ένα από τα σημαντικότερα εργαλεία για την επίλυση προβλημάτων αρχικών ή και συνοριακών τιμών που αφορούν γραμμικές εξισώσεις εξέλιξης. Βασική προϋπόθεση για τη χρήση τους είναι οι χωρικές μεταβλητές να διατρέχουν ένα μη φραγμένο διάστημα της πραγματικής ευθείας.

Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι θέλουμε να βρούμε λύσεις της εξίσωσης της διάχυσης (ή της θερμότητας)

$$u_t = u_{xx}, \quad (8.1)$$

στη χωροχρονική περιοχή  $\Omega := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : t > 0\}$ , που σέβονται την αρχική συνθήκη

$$u(x, 0) = f(x), \quad -\infty < x < \infty. \quad (8.2)$$

Η αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος στην πιο γενική δυνατή περίπτωση, είναι αρκετά δύσκολη. Γι' αυτό, επιβάλλουμε μια σειρά από βολικούς, αλλά ρεαλιστικούς περιορισμούς, όπως το να είναι η δοσμένη συνάρτηση  $f(x)$  απόλυτα ολοκληρώσιμη. Αυτό μας επιτρέπει να θεωρήσουμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier της  $f(x)$ , δηλαδή η συνάρτηση

$$\hat{f}(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (8.3)$$

ορίζεται για κάθε  $k \in \mathbb{R}$ .

Στη συνέχεια, επεκτείνουμε τον περιορισμό ότι η  $f \in L^1(\mathbb{R})$  και στις χωρικές παραγώγους της άγνωστης συνάρτησης  $u(x, t)$ , μέχρι και δεύτερης τάξης. Με άλλα λόγια, υποθέτουμε ότι, για κάθε  $t > 0$ , οι συναρτήσεις  $u(x, t)$ ,  $u_x(x, t)$  και  $u_{xx}(x, t)$  είναι απόλυτα ολοκληρώσιμες ως προς τη μεταβλητή  $x$ . Μια συνθήκη που αρκεί γι' αυτή την ιδιότητα είναι η εξής: Η  $u \in C^2(\Omega)$  και, για κάθε συγκεκριμένο  $t > 0$ , οι συναρτήσεις  $u(x, t)$ ,  $u_x(x, t)$  και  $u_{xx}(x, t)$  φθίνουν ταχύτερα από κάθε αρνητική δύναμη του  $|x|$ , καθώς το  $|x| \rightarrow \infty$ .

Οι παραπάνω προϋποθέσεις εξασφαλίζουν ότι,

α) Ο μετασχηματισμός Fourier της  $u(x, t)$  ως προς τη μεταβλητή  $x$ , δηλαδή η συνάρτηση

$$\hat{u}(k, t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-ikx} dx, \quad (8.4)$$

ορίζεται για κάθε  $k \in \mathbb{R}$ .

β) Η σχέση (1.4) αντιστρέφεται για να δώσει

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k, t) e^{ikx} dk \quad (8.5)$$

και

γ) Ο τελεστής της μερικής παραγώγου ως προς τη μεταβλητή  $x$ , μπορεί να μπει μέσα στο ολοκλήρωμα.

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
u_x(x, t) &:= \partial_x \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k, t) e^{ikx} dk \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x [\hat{u}(k, t) e^{ikx}] dk \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k, t) i k e^{ikx} dk, \\
u_{xx}(x, t) &:= \partial_x^2 \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k, t) e^{ikx} dk \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x^2 [\hat{u}(k, t) e^{ikx}] dk \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k, t) (ik)^2 e^{ikx} dk.
\end{aligned} \tag{8.7}$$

Εμείς θα υποθέσουμε ότι το ίδιο μπορεί να γίνει και με τον τελεστή της μερικής παραγώγου ως προς τη μεταβλητή  $t$ . Αυτό μας επιτρέπει να γράψουμε τη σχέση

$$u_t(x, t) := \partial_t \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k, t) e^{ikx} dk \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \partial_t \hat{u}(k, t) e^{ikx} dk. \tag{8.8}$$

και να συμπεράνουμε το εξής: Η αντικατάσταση των (8.7) και (8.8) στην (8.1) οδηγεί στην

$$\int_{-\infty}^{\infty} \partial_t \hat{u}(k, t) e^{ikx} dk = - \int_{-\infty}^{\infty} k^2 \hat{u}(k, t) e^{ikx} dk. \tag{8.9}$$

Ισοδύναμα,

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\partial_t \hat{u}(k, t) + k^2 \hat{u}(k, t)] e^{ikx} dk = 0. \tag{8.10}$$

Προφανώς, για να μηδενίζεται το αριστερό μέλος της (8.10), αρκεί η  $\hat{u}(k, t)$  να είναι λύση της ΣΔΕ

$$\partial_t \hat{u}(k, t) + k^2 \hat{u}(k, t) = 0, \tag{8.11}$$

για κάθε  $k \in \mathbb{R}$ . Όμως η τελευταία λύνεται αμέσως για να δώσει

$$\hat{u}(k, t) = c(k) e^{-k^2 t}. \tag{8.12}$$

Αυτό το αποτέλεσμα δείχνει καθαρά ότι, η "σταθερή ολοκλήρωσης"  $c(k)$  προδιορίζεται από την αρχική τιμή της  $\hat{u}(k, t)$ :

$$\hat{u}(k, 0) = c(k). \tag{8.13}$$

Από την άλλη, ο συνδυασμός των (8.3) και (8.4) μας λέει ότι

$$\hat{u}(k, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \equiv \hat{f}(k). \tag{8.14}$$

Συνεπώς,  $c(k) = \hat{f}(k)$  και, άρα,

$$\hat{u}(k, t) = \hat{f}(k) e^{-k^2 t}. \tag{8.15}$$

Έχοντας προσδιορίσει τον μετασχηματισμό Fourier της  $u(x, t)$ , ως προς τη μεταβλητή  $x$ , για κάθε  $t > 0$ , μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την (8.5) για να υπολογίσουμε την ίδια την

$u(x, t)$ . Αυτός ο υπολογισμός απλουστεύεται, αν παρατηρήσουμε ότι, σύμφωνα με την (8.15), η  $\hat{u}(k, t)$  είναι το γινόμενο δύο μετασχηματισμών Fourier.

Πιο συγκεκριμένα, στο Παράδειγμα 4.3, δείξαμε ότι,  $\mathcal{F}(e^{-\lambda x^2}) = (1/\sqrt{2\lambda}) e^{-k^2/4\lambda}$ , για κάθε  $\lambda > 0$ . Συνεπώς,

$$e^{-k^2 t} = \hat{K}(k, t), \quad (8.16)$$

όπου με  $\hat{K}(k, t)$  εννοούμε τον μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης

$$K(x, t) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (8.17)$$

ως προς τη μεταβλητή  $x$ .

Αφού λοιπόν,  $\hat{u}(k, t) = \hat{f}(k) \hat{K}(k, t)$ , μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο της συνέλιξης,  $(f * K)^\wedge = \sqrt{2\pi} \hat{f} \hat{K}$ , για να συμπεραίνουμε ότι

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y, t) f(y) dy, \quad t > 0. \quad (8.18)$$

Δηλαδή,

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-(x-y)^2/4t} f(y) dy, \quad t > 0 \quad (8.19)$$

Η συνάρτηση  $K(x, t)$  ονομάζεται **πυρήνας (του) Gauss** και παίζει σημαντικό ρόλο σε πολλούς τομείς των εφαρμοσμένων μαθηματικών.

Από τη σκοπιά το προβλήματος που μελετάμε, ιδιαίτερη σημασία έχουν ορισμένες ιδιότητες του πυρήνα Gauss, ανάμεσα στις οποίες και οι εξής:

(i) Η συνάρτηση  $K(x, t)$  αποτελεί ομαλή λύση της εξίσωσης της διάχυσης. Δηλαδή, η  $K \in C^\infty(\Omega)$  και

$$K_t = K_{xx}. \quad (8.20)$$

(ii) Για κάθε  $t > 0$ , η  $K(x, t)$  είναι ομαλή συνάρτηση της μεταβλητής  $x$ , που μηδενίζεται ταχύτερα από κάθε αρνητική δύναμη του  $|x|$ , καθώς το  $|x| \rightarrow \infty$ . Επιπλέον,

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x, t) dx = 1. \quad (8.21)$$

(iii) Η  $K(x, t)$  παίρνει μόνο θετικές τιμές, σε όλο το πεδίο ορισμού της.

Αυτές οι ιδιότητες του πυρήνα Gauss μας επιτρέπουν ν' αποδείξουμε ότι

α) Η συνάρτηση  $u(x, t)$  που ορίζεται στον τύπο (8.19) είναι πραγματικά μια ομαλή λύση της εξίσωσης της διάχυσης.

β) Όταν η συνάρτηση  $f(x)$  είναι συνεχής και φραγμένη, η παραπάνω  $u(x, t)$  συγκλίνει στην  $f(x)$  καθώς πλησιάζουμε τον άξονα  $x$  από το εσωτερικό της περιοχής  $\Omega$ . Με άλλα λόγια, η  $u(x, t)$  που ορίζεται στην (8.19) αποτελεί λύση του ΠΑΤ (8.1-2).

Για τους παραπάνω λόγους, η συνάρτηση  $K(x, t)$  αποκαλείται **θεμελιακή λύση της εξίσωσης της διάχυσης**. Όπως θα φανεί και από την ανάλυση των πιο σύνθετων προβλημάτων



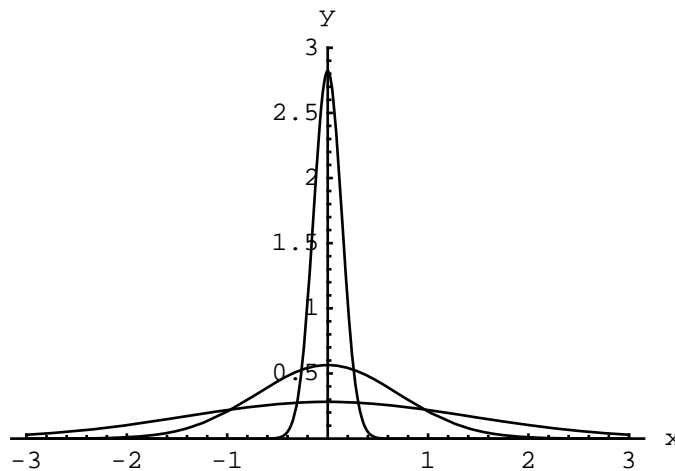
αρχικών-συνοριακών τιμών που θα παρουσιάσουμε αργότερα, η  $K(x, t)$  αξίζει αυτό τον χαρακτηρισμό, με το παραπάνω. ■

Προτού στραφούμε στην αυστηρή απόδειξη του ότι η (8.19) ορίζει μια λύση του ΠΑΤ (8.1-2), αξίζει να σταθούμε για λίγο ακόμη στις ιδιότητες του πυρήνα Gauss και σε ορισμένα παραδείγματα εφαρμογής του τύπου (8.19).

Αρχικά, λοιπόν, σημειώνουμε ότι η  $K(x, t)$  μπορεί να θεωρηθεί ως μια οικογένεια συναρτήσεων του  $x$ , με τη χρονική μεταβλητή  $t$  στο ρόλο της παραμέτρου που διακρίνει τα μέλη αυτής της οικογένειας.

Ειδικότερα, όταν το  $t = 1/4$ , τότε η  $K(x, t)$  δεν διαφέρει ουσιαστικά από τη γνωστή συνάρτηση  $e^{-x^2}$ . Γιατί,  $K(x, 1/4) = (1/\sqrt{\pi})e^{-x^2}$ . Αλλά και για τιμές της παραμέτρου  $t$  μεγαλύτερες από το  $1/4$ , η  $K(x, t)$  παραμένει ποιοτικά ίδια με την  $e^{-x^2}$ , με την εξής μόνο διαφορά. Η μέγιστη τιμή της, που βρίσκεται στο  $x = 0$  και είναι ίση με  $(1/\sqrt{4\pi t})$ , όλο και μειώνεται καθώς το  $t$  μεγαλώνει. Ταυτόχρονα, το πλάτος του γραφήματος της  $K(x, t)$  αυξάνει, επειδή το  $t$  βρίσκεται στον παρονομαστή του εκθέτη στον παράγοντα  $e^{-x^2/4t}$ .

Για τους ίδιους λόγους, η  $K(x, t)$  συμπεριφέρεται ανάποδα, καθώς το  $t$  μικραίνει και τείνει προς το μηδέν: Το μέγιστο της  $K(x, t)$  αυξάνει χωρίς φραγμό, ενώ το πλάτος του γραφήματός της όλο και μειώνεται. Αυτή η συμπεριφορά φαίνεται καθαρά και στο Σχ. 8.1.



**Σχ. 8.1** Το γράφημα της  $K(x, t)$  για τρεις διαφορετικές τιμές της παραμέτρου  $t$ :  
 $t = 1, t = 1/4$  και  $t = 1/100$ . ■

Ας έρθουμε τώρα σε παραδείγματα εφαρμογής του τύπου (8.19), αφού πρώτα σημειώσουμε το εξής. Ο παραπάνω τύπος έχει νόημα ακόμη και όταν η  $f(x)$  δεν είναι συνεχής. Αυτό φαίνεται καθαρά στο

### Παράδειγμα 8.1

Υποθέτουμε ότι η αρχική θερμοκρασία (ή κατανομή του διαχεόμενου υλικού) περιγράφεται από την τμηματικά συνεχή συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-1, 1] \\ 0, & x \notin [-1, 1] \end{cases}$$

Τότε, ο τύπος (8.19) οδηγεί αμέσως στη συνάρτηση

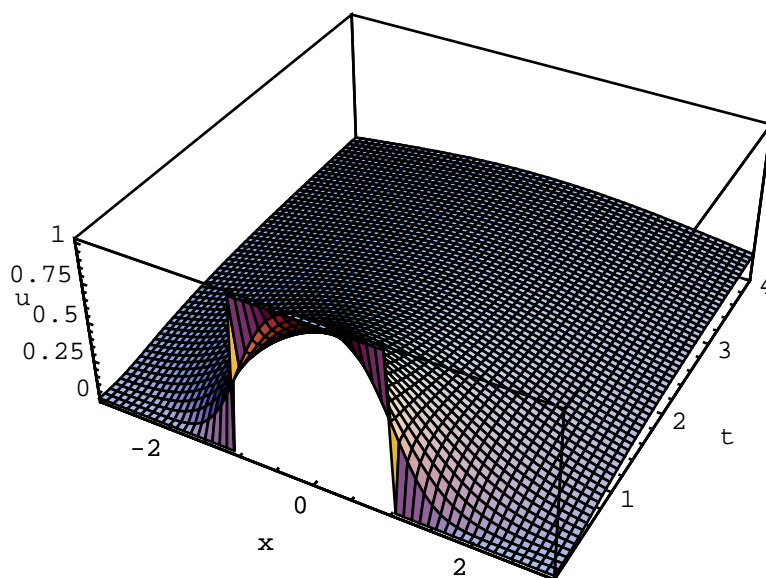
$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{x+1}{\sqrt{4t}} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{x-1}{\sqrt{4t}} \right) \right],$$

που εύκολα αποδεικνύεται ότι αποτελεί κλασική λύση της  $u_t = u_{xx}$ .

Η παραπάνω έκφραση για την  $u(x, t)$  δείχνει, πρώτα και κύρια ότι, η θερμοκρασία  $u(x, t)$  είναι μια ομαλή συνάρτηση του  $x$ , για οσοδήποτε μικρό  $t > 0$ . Με άλλα λόγια, η εξίσωση της θερμότητας (ή διάχυσης) έχει την ιδιότητα να εξομαλύνει την θερμοκρασία (ή πυκνότητα του διαχεόμενου υλικού) σε απειροελάχιστο χρονικό διάστημα.

Η παραπάνω έκφραση δείχνει επίσης ότι, σε κάθε χωρικό σημείο  $x$ , η θερμοκρασία (ή πυκνότητα του διαχεόμενου υλικού) μηδενίζεται καθώς το  $t \rightarrow \infty$ .

Τα χαρακτηριστικά της εξέλιξης της θερμοκρασίας που μόλις επισημάναμε αναδείχονται καθαρά στο Σχ. 8.2.



**Σχ. 8.2** Το γράφημα της  $u(x, t)$  που ορίζεται από τον τύπο (8.19) όταν η  $f(x) = 1$ , για  $x \in [-1, 1]$ , και μηδενίζεται, διαφορετικά.

### Παράδειγμα 8.2

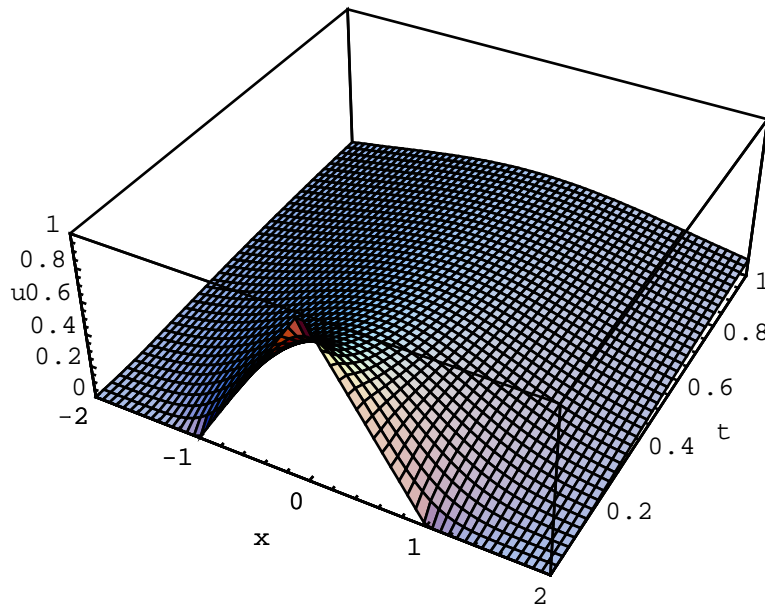
Υποθέτουμε ότι, τη χρονική στιγμή  $t = 0$ , η θερμοκρασία  $u(x, t)$  περιγράφεται από τη συνεχή συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & x \in [-1, 1] \\ 0, & x \notin [-1, 1] \end{cases}$$

Τότε, η λύση που ορίζεται από τύπο (8.19) για κάθε  $t > 0$  δίνεται από την

$$u(x, t) = \sqrt{t/\pi} \left[ e^{-(x-1)^2/4t} - 2e^{-x^2/4t} + e^{-(x+1)^2/4t} \right] \\ + \frac{1}{2} \left[ (x-1) \operatorname{erf} \left( \frac{x-1}{2\sqrt{t}} \right) - 2x \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{t}} \right) + (x+1) \operatorname{erf} \left( \frac{x+1}{2\sqrt{t}} \right) \right]$$

Από το γράφημα αυτής της συνάρτησης που δίνεται στο Σχ. 8.3 φαίνεται καθαρά ότι η εξέλιξη της θερμοκρασίας  $u(x, t)$  έχει τα ίδια ποιοτικά χαρακτηριστικά μ' εκείνη του προηγούμενου παραδείγματος.



**Σχ. 8.3** Το γράφημα της  $u(x, t)$  που ορίζεται από τον τύπο (8.19) όταν η  $f(x) = 1 - |x|$ , για  $x \in [-1, 1]$ , και μηδενίζεται, διαφορετικά.

Κλείνουμε αυτό το εδάφιο, με την απόδειξη ότι η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο (8.19) αποτελεί αυστηρή λύση του ΠΑΤ (8.1-2). Ακριβέστερα, θα δείξουμε ότι ισχύει το ακόλουθο

### Θεώρημα 8.1

Αν η συνάρτηση  $f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  είναι συνεχής και φραγμένη, τότε,

(i) Η συνάρτηση  $u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y, t) f(y) dy$ , αποτελεί λύση της εξίσωσης της διάχυσης στην περιοχή  $\Omega := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : -\infty < x < \infty, t > 0\}$ .

(ii) Η παραπάνω  $u(x, t)$  είναι κλάσης  $C^\infty(\Omega)$  και γίνεται συνεχής στο ολοκλήρωμα  $\bar{\Omega}$  της χωροχρονικής περιοχής  $\Omega$ , όταν επεκταθεί με τον ακόλουθο τρόπο:

$$u(x, t) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y, t) f(y) dy, & t > 0 \\ f(x), & t = 0 \end{cases} \quad (8.22)$$

### Απόδειξη

Η απόδειξη του θεωρήματος θα στηριχτεί στο επόμενο

### Λήμμα 8.1

Θεωρούμε την κλειστή και φραγμένη περιοχή

$$\Sigma = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : -R \leq x \leq R, c \leq t \leq d, R > 0, c > 0\}$$

και τον τυχαίο αριθμό  $\gamma > 1$ . Τότε, υπάρχει σταθερή  $C > 0$ , που εξαρτιέται από τις παραμέτρους  $R, c, d$  και  $\gamma$ , τέτοια ώστε

- (i)  $0 < K(x-y, t) \leq C e^{-y^2/4\gamma d}$ ,
- (ii)  $|K_x(x-y, t)| \leq C e^{-y^2/4\gamma d}$ ,
- (iii)  $|K_t(x-y, t)| = |K_{xx}(x-y, t)| \leq C e^{-y^2/4\gamma d}$

#### Απόδειξη

Είναι φανερό πως, αν το σημείο  $(x, t) \in \Sigma$ , τότε

$$K(x-y, t) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-(x-y)^2/4t} \leq \frac{1}{\sqrt{4\pi c}} e^{-(x-y)^2/4d}.$$

Από την άλλη,

$$\begin{aligned} e^{-(x-y)^2/4d} &= e^{-(x^2-2xy+y^2)/4d} = e^{-x^2} e^{xy/2d} e^{-y^2/4d} \\ &\leq e^{xy/2d} e^{-y^2/4d} \leq e^{R|y|/2d} e^{-y^2/4d} = e^{R|y|/2d} e^{-\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)y^2/4d} e^{-y^2/4\gamma d}. \end{aligned}$$

Συνακόλουθα,

$$K(x-y, t) \leq S(R, c, d, \gamma, y) e^{-y^2/4\gamma d},$$

όπου

$$S(R, c, d, \gamma, y) := \frac{1}{\sqrt{4\pi c}} e^{[2R|y|-(1-1/\gamma)y^2]/4d}$$

Τώρα, η  $S(R, c, d, \gamma, y)$  είναι συνεχής συνάρτηση του  $y$ . Επιπλέον, για αρκετά μεγάλο  $|y|$  ο τελευταίος παράγοντας της  $S(R, c, d, \gamma, y)$  δεσπόζει. Άρα

$$\lim_{|y| \rightarrow \infty} S(R, c, d, \gamma, y) = 0.$$

Κατά συνέπεια, η  $S(R, c, d, \gamma, y)$  είναι φραγμένη. Αν λοιπόν θέσουμε

$$C_1(R, c, d, \gamma) := \sup_{y \in \mathbb{R}} S(R, c, d, \gamma, y),$$

τότε μπορούμε να γράψουμε την παραπάνω εκτίμηση της  $K(x-y, t)$  στη μορφή

$$K(x-y, t) \leq C_1(R, c, d, \gamma) e^{-y^2/4\gamma d}.$$

Ανάλογα, από το γεγονός ότι

$$K_x(x-y, t) = -\frac{x-y}{2t} K(x-y, t)$$

και την εκτίμηση της  $K(x-y, t)$  αμέσως συνάγεται ότι

$$\begin{aligned} \left| K_x(x-y, t) \right| &= \left| \frac{x-y}{2t} \right| K(x-y, t) \leq \left| \frac{x-y}{2d} \right| K(x-y, t) \\ &\leq \frac{R+|y|}{2d} S(R, c, d, \gamma, y) e^{-y^2/4\gamma d}. \end{aligned}$$

Συνακόλουθα,

$$\left| K_x(x-y, t) \right| \leq C_2(R, c, d, \gamma) e^{-y^2/4\gamma d},$$

όπου

$$C_2(R, c, d, \gamma) := \sup_{y \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{R+|y|}{2d} S(R, c, d, \gamma, y) \right\}.$$

Με τον ίδιο τρόπο, οι αντίστοιχοι τύποι για τις  $K_t(x-y, t)$ ,  $K_{xx}(x-y, t)$  οδηγούν στην εκτίμηση

$$\left| K_t(x-y, t) \right| = \left| K_{xx}(x-y, t) \right| \leq C_3(R, c, d, \gamma) e^{-y^2/4\gamma d}.$$

Θέτοντας  $C := \max \{C_1, C_2, C_3\}$  έχουμε το αποτέλεσμα που περιγράφεται στο λήμμα.

■

Επανερχόμαστε στο θεώρημα και αρχικά σημειώνουμε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/4\gamma d} dy < \infty.$$

Άρα, από τις εκτιμήσεις του λήμματος και το κριτήριο  $M$  του Weierstrass έπεται ότι τα ολοκληρώματα  $\int_{-\infty}^{\infty} K_t(x-\xi, t) d\xi$  και  $\int_{-\infty}^{\infty} K_{xx}(x-\xi, t) d\xi$  συγκλίνουν ομοιόμορφα στο παραλληλόγραμμο  $\Sigma$  και, a posteriori, σε κάθε συμπαγές υποσύνολο της περιοχής  $\Omega$ .

Όταν η  $f(x)$  είναι φραγμένη, το ίδιο προφανώς ισχύει και για τα ολοκληρώματα  $\int_{-\infty}^{\infty} K_t(x-y, t) f(y) dy$  και  $\int_{-\infty}^{\infty} K_{xx}(x-y, t) f(y) dy$ .

Από αυτό το συμπέρασμα αμέσως έπεται ότι

$$u_t = \int_{-\infty}^{\infty} K_t(x-y, t) f(y) dy, \quad u_{xx} = \int_{-\infty}^{\infty} K_{xx}(x-y, t) f(y) dy,$$

Άρα,

$$u_t - u_{xx} = \int_{-\infty}^{\infty} \{K_t(x-y, t) - K_{xx}(x-y, t)\} f(y) dy = 0,$$

γιατί ο πυρήνας Gauss αποτελεί λύση της εξίσωσης της διάχυσης. Με αυτό τον τρόπο ολοκληρώνεται η απόδειξη του ότι η συνάρτηση  $u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y, t) f(y) dy$  αποτελεί λύση της εξίσωσης  $u_t - u_{xx} = 0$  στην ανοιχτή περιοχή  $\Omega$ .

Τώρα, από την ιδιότητα  $\int_{-\infty}^{\infty} K(x, t) dx = 1$  του πυρήνα Gauss αμέσως έπεται ότι

$$\begin{aligned} u(x, t) - f(a) &= \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y, t) f(y) dy - f(a) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y, t) [f(y) - f(a)] dy. \end{aligned}$$

Όπως έχουμε ήδη σημειώσει, η συνάρτηση  $K(x-y, t)$  είναι παντού θετική. Από την άλλη, έχουμε υποθέσει ότι η  $f(x)$  είναι φραγμένη, δηλαδή υπάρχει θετικός αριθμός  $M$ , τέτοιος ώστε  $|f(x)| \leq M$  για κάθε  $x$ . Άρα

$$\begin{aligned} |u(x, t) - f(a)| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y, t) |f(y) - f(a)| dy \\ &\leq 2M \int_{-\infty}^{\infty} K(x-y, t) dy = 2M. \end{aligned}$$

Στην πραγματικότητα, μπορούμε να κάνουμε μια πολύ αυστηρότερη εκτίμηση της διαφοράς  $u(x, t) - f(a)$ . Για το σκοπό αυτό, σπάμε την πραγματική ευθεία σε τρία τμήματα, τα  $(-\infty, a - \delta)$ ,  $[a - \delta, a + \delta]$  και  $(a + \delta, \infty)$ . Με αυτό τον τρόπο, η διαφορά  $u(x, t) - f(a)$  γράφεται στη μορφή

$$u(x, t) - f(a) = I_1 + I_2$$

όπου

$$\begin{aligned} I_1 &:= \int_{|y-a| < \delta} K(x-y, t) [f(y) - f(a)] dy, \\ I_2 &:= \int_{|y-a| \geq \delta} K(x-y, t) [f(y) - f(a)] dy. \end{aligned}$$

Τώρα, αφού η  $f(x)$  είναι συνεχής στον  $\mathbb{R}$ , θα είναι ομοιόμορφα συνεχής στο κλειστό διάστημα  $[a - \delta, a + \delta]$ . Δηλαδή, για οποιοδήποτε  $\varepsilon > 0$ , υπάρχει  $\delta(\varepsilon) > 0$ , τέτοιο που  $|f(y) - f(a)| < \varepsilon$ , για κάθε  $y \in [a - \delta, a + \delta]$ . Άρα, για το ολοκλήρωμα  $I_1$  έχουμε την εκτίμηση

$$|I_1| \leq \varepsilon \int_{|y-a| < \delta} K(x-y, t) dy \leq \varepsilon$$

Από την άλλη, είναι φανερό πως

$$|I_2| \leq 2M \int_{|y-a| \geq \delta} K(x-y, t) dy.$$

Επιπλέον, αν το  $t$  επιλεγεί αρκετά μικρό και το  $x$  πολύ κοντά στο  $a$ , τότε το τελευταίο ολοκλήρωμα μπορεί να γίνει όσο μικρό θέλουμε. Κι ο λόγος είναι ο εξής:

$$I := \int_{|y-a| \geq \delta} K(x-y, t) dy = I_- + I_+.$$

όπου

$$I_- := \int_{-\infty}^{y=a-\delta} \frac{e^{-(x-y)^2/4t}}{\sqrt{4\pi t}} dy, \quad I_+ := \int_{y=a+\delta}^{\infty} \frac{e^{-(x-y)^2/4t}}{\sqrt{4\pi t}} dy$$

Αν θέσουμε

$$z = \frac{y-x}{\sqrt{4t}},$$

τότε το  $z = (a \pm \delta - x) / \sqrt{4t}$  όταν το  $y = a \pm \delta$  και τα ολοκληρώματα  $I_{\pm}$  γίνονται

$$I_- = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{z=(a-\delta-x)/\sqrt{4t}} e^{-z^2} dz, \quad I_+ = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{z=(a+\delta-x)/\sqrt{4t}}^{\infty} e^{-z^2} dz.$$

Όταν, λοιπόν, το  $x$  είναι πολύ κοντά στο  $a$ , όταν γ.π.  $a - \delta/2 \leq x \leq a + \delta/2$ , τότε  $a - \delta - x \leq -\delta/2$  και  $a + \delta - x \geq \delta/2$ . Αφού η προς ολοκλήρωση ποσότητα είναι θετική, για τα ολοκληρώματα  $I_{\pm}$  ισχύει η ακτίμηση

$$I_- \leq \int_{-\infty}^{z=-\delta/2\sqrt{4t}} \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}} dz \quad I_+ \leq \int_{z=\delta/2\sqrt{4t}}^{\infty} \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}} dz.$$

Κατά συνέπεια,

$$I = I_- + I_+ \leq \int_{z=\delta/\sqrt{4t}}^{\infty} \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}} dz.$$

Όμως, το καταχρηστικό ολοκλήρωμα  $\int_0^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi$  συγκλίνει (στον αριθμό  $\sqrt{\pi}/2$ ). Άρα

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_R^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = 0.$$

Αυτό συνεπάγεται ότι, για  $t$  αρκετά μικρό,

$$I \leq \int_{z=\delta/\sqrt{4t}}^{\infty} \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}} dz < \varepsilon$$

Το συνολικό συμπέρασμα της παραπάνω ανάλυσης είναι ότι η ποσότητα  $|u(x, t) - f(a)|$  μπορεί να γίνει οσοδήποτε μικρή θέλουμε, αρκεί το σημείο  $(x, t) \in \Omega$  να επιλεγεί πολύ κοντά στο  $x = a$  της ευθείας  $t = 0$ , δηλαδή του άξονα  $x$ , που αποτελεί και το σύνορο της περιοχής  $\Omega$ . Με άλλα λόγια η  $u(x, t) \rightarrow f(a)$  καθώς το  $(x, t) \rightarrow (a, 0)$ , από την πλευρά  $t > 0$ , πράγμα που αποδεικνύει ότι η συνάρτηση (8.19) είναι όντως συνεχής στο ολοκλήρωμα  $\bar{\Omega}$  της χωροχρονικής περιοχής  $\Omega$ . ■

**Παρατήρηση.** Η (8.19) δεν αποτελεί την τη μοναδική λύση του ΠΑΤ (8.1-2). Στην πραγματικότητα, αυτό το ΠΑΤ επιδέχεται άπειρες λύσεις. Από την άλλη, αν περιοριστούμε στις φραγμένες λύσεις, τότε το παραπάνω ΠΑΤ δεν επιδέχεται λύση άλλη από την (8.19). Με άλλα λόγια, η τελευταία αποτελεί την μοναδική **φραγμένη** λύση του ΠΑΤ που μελετήσαμε. Για την απόδειξη αυτού του ισχυρισμού παραπέμπουμε στη βιβλιογραφία (βλ. γ.π. Guenter-Lee, σελ. 166-178). ■

## Ασκήσεις

**8.1** Αποδείξτε ότι

- (i)  $K_t = K_{xx}$ , δηλαδή ότι, πραγματικά, ο πυρήνας Gauss αποτελεί λύση της εξίσωσης της διάχυσης.
- (ii) Για κάθε  $t > 0$ ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x, t) dx = 1.$$

**8.2** (i) Να παραχθεί αναλυτικά ο τύπος της συνάρτησης  $u(x, t)$  που δίνεται στο παράδειγμα 8.1.

(ii) Να επαληθευτεί ότι η παραπάνω  $u(x, t)$  αποτελεί, πραγματικά, λύση της εξίσωσης της

διάχυσης.

(iii) Ναδειχτεί ότι η παραπάνω  $u(x, t) \rightarrow f(a)$  καθώς το  $(x, t) \rightarrow (a, 0)$  από την πλευρά  $t > 0$ .

**8.3** Να επαναληφθεί η προηγούμενη άσκηση για τη συνάρτηση  $u(x, t)$  που δίνεται στο παράδειγμα 8.2.

**8.4** Να κατασκευαστεί η λύση του ΠΑΤ

$$u_t = u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \quad u(x, 0) = e^{-x^2}, \quad -\infty < x < \infty,$$

και να κατασκευαστεί το γράφημά της.

**8.5** Να κατασκευαστεί η λύση του ΠΑΤ

$$u_t = u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \quad u(x, 0) = f(x), \quad -\infty < x < \infty,$$

για την περίπτωση όπου

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x \in [-1, 1] \\ 0, & x \notin [-1, 1] \end{cases}$$

**8.6 (i)** Να υπολογιστεί η συνάρτηση  $u(x, t)$  που ορίζεται από τον τύπο (8.19), όταν

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

(ii) Να κατασκευαστεί το γράφημα της  $u(x, t)$ ,  $t \geq 0$ .

(iii) Να υπολογιστεί η  $u_x(x, t)$ ,  $t > 0$  και να σχολιαστεί η σχέση της με τον πυρήνα Gauss.



## 9 Το πρόβλημα αρχικών τιμών για την κυματική εξίσωση

Ας έρθουμε τώρα στο πρόβλημα αρχικών τιμών (ΠΑΤ) για την κυματική εξίσωση, όταν η χωρική μεταβλητή  $x$  διατρέχει όλη την πραγματική ευθεία. Πρόκειται για το πρόβλημα της εύρεσης λύσεων της ΜΔΕ

$$u_{tt} - u_{xx} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (9.1)$$

οι οποίες σέβονται τις αρχικές συνθήκες

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (9.2)$$

Όπως και στην περίπτωση του ΠΑΤ για την εξίσωση της διάχυσης, μπορούμε ν' αντιμετωπίσουμε το παραπάνω πρόβλημα, ακολουθώντας τα εξής βήματα:

### Βήμα 1ο

Υποθέτουμε ότι η λύση  $u(x, t)$  υπάρχει και έχει τις εξής ιδιότητες:

α) Για κάθε συγκεκριμένο  $t > 0$ , η  $u(x, t)$  είναι ομαλή και φθίνει γρηγορότερα από κάθε αρνητική δύναμη του  $|x|$ , καθώς το  $|x| \rightarrow \infty$ .

β) Το ίδιο ακριβώς ισχύει και για τις χωρικές παραγώγους,  $u_x(x, t)$  και  $u_{xx}(x, t)$ , της άγνωστης συνάρτησης  $u(x, t)$ .

Αυτή η (βασική) υπόθεση εξασφαλίζει δύο πράγματα. Πρώτο, ότι ο μετασχηματισμός Fourier της  $u(x, t)$  ως προς τη μεταβλητή  $x$ , δηλαδή η συνάρτηση

$$\hat{u}(k, t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-ikx} dx, \quad (9.3)$$

ορίζεται για κάθε  $k \in \mathbb{R}$ . Δεύτερο και, για τη μέθοδο επίλυσης του ΠΑΤ, σημαντικότερο: Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της  $\hat{u}(k, t)$  ως προς τη μεταβλητή  $k$  ταυτίζεται με την  $u(x, t)$ :

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k, t) e^{ikx} dk. \quad (9.4)$$

Από την παραπάνω υπόθεση εύκολα συνάγεται και το ακόλουθο συμπέρασμα:

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, t) &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \partial_x^2 \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k, t) e^{ikx} dk = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x^2 \{ \hat{u}(k, t) e^{ikx} \} dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (ik)^2 \hat{u}(k, t) e^{ikx} dk \end{aligned} \quad (9.5)$$

Το ότι τα παραπάνω συμπεράσματα προκύπτουν από τη βασική μας υπόθεση θα το αποδείξουμε αυστηρά σε επόμενο εδάφιο. Προς το παρόν, μας ενδιαφέρει μόνο το αν, κάνοντας μια σειρά από υποθέσεις, μπορούμε να κατασκευάσουμε λύσεις της κυματικής εξίσωσης, κατάλληλες για την αντιμετώπιση του ΠΑΤ (9.1-2). Γι' αυτό το λόγο, προσθέτουμε και την υπόθεση ότι,

$$\begin{aligned}
 u_{tt}(x, t) &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \partial_t^2 \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k, t) e^{ikx} dk = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \partial_t^2 \{ \hat{u}(k, t) e^{ikx} \} dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}_{tt}(k, t) e^{ikx} dk.
 \end{aligned}$$

Βήμα 2ο

Αντικαθιστούμε τις τελευταίες ολοκληρωματικές αναπαραστάσεις των  $u_{tt}(x, t)$  και  $u_{xx}(x, t)$  στην εξίσωση (8.1). Με αυτό τον τρόπο οδηγούμαστε στο εξής αποτέλεσμα:

$$\hat{u}_{tt}(k, t) + k^2 \hat{u}(k, t) = 0. \quad (9.7)$$

Η τελευταία είναι μια απλή γραμμική ΣΔΕ δεύτερης τάξης, της οποίας η γενική λύση είναι της μορφής

$$\hat{u}(k, t) = A(k) \cos kt + B(k) \sin kt. \quad (9.8)$$

Στην (9.8) οι συντελεστές  $A(k)$  και  $B(k)$  είναι αυθαίρετοι, εκτός εάν η  $\hat{u}(k, t)$  οφείλει να σέβεται και κάποιες επιπλέον συνθήκες. Στην περίπτωση που εξετάζουμε ισχύει το δεύτερο: Από τις αρχικές συνθήκες (9.2) και την αναπαράσταση (9.3) αμέσως έπεται ότι η  $\hat{u}(k, t)$  θα πρέπει να είναι τέτοια που

$$\hat{u}(k, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \equiv \hat{f}(k), \quad (9.9)$$

$$\hat{u}_t(k, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-ikx} dx \equiv \hat{g}(k). \quad (9.10)$$

Όμως, σύμφωνα με την (9.8),

$$\hat{u}(k, 0) = A(k), \quad \hat{u}_t(k, 0) = k B(k). \quad (9.11)$$

Άρα, οι συντελεστές  $A(k)$  και  $B(k)$  δεν μπορεί να είναι αυθαίρετοι παρά τέτοιοι ώστε

$$A(k) = \hat{f}(k), \quad k B(k) = \hat{g}(k). \quad (9.12)$$

Συνακόλουθα,

$$\hat{u}(k, t) = \hat{f}(k) \cos kt + \frac{1}{k} \hat{g}(k) \sin kt. \quad (9.13)$$

Βήμα 3ο

Έχοντας προσδιορίσει πλήρως τον μετασχηματισμό Fourier,  $\hat{u}(k, t)$ , της άγνωστης συνάρτησης  $u(x, t)$ , μπορούμε εύκολα να κατασκευάσουμε και την ίδια την  $u(x, t)$ . Η αντικατάσταση της (9.13) στην (9.4) δίνει

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \hat{f}(k) \cos kt + \frac{1}{k} \hat{g}(k) \sin kt \right] e^{ikx} dk. \quad (9.14)$$

Όμως,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) \cos kt e^{ikx} dk &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) \frac{e^{ikt} + e^{-ikt}}{2} e^{ikx} dk = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) \frac{1}{2} [e^{ik(x+t)} + e^{ik(x-t)}] dk. \end{aligned} \quad (9.15)$$

Ουσιαστικά, το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της  $\hat{f}(k)$ . Αφού, λοιπόν,  $(1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikz} dk = f(z)$ , η (9.15) μας λέει ότι

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) \cos kt e^{ikx} dk = \frac{1}{2} [f(x+t) + f(x-t)]. \quad (9.16)$$

Με ανάλογο τρόπο βρίσκουμε ότι,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k} \hat{g}(k) \sin kt e^{ikx} dk &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2ik} \hat{g}(k) [e^{ikt} - e^{-ikt}] e^{ikx} dk = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2ik} \hat{g}(k) [e^{ik(x+t)} - e^{ik(x-t)}] dk. \end{aligned} \quad (9.17)$$

Ας θυμηθούμε τώρα πως, από τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier έπεται και η εξής ιδιότητα: Αν  $G'(x) = g(x)$ , αν δηλαδή η συνάρτηση  $G(x)$  είναι ένα αόριστο ολοκλήρωμα της  $g(x)$ , τότε

$$\hat{G}(k) = \frac{1}{ik} \hat{g}(k). \quad (9.18)$$

Αυτό σημαίνει ότι

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2ik} \hat{g}(k) [e^{ik(x+t)} - e^{ik(x-t)}] dk &= \\ \int_{-\infty}^{\infty} \hat{G}(k) [e^{ik(x+t)} - e^{ik(x-t)}] dk &= \frac{1}{2} [G(x+t) - G(x-t)] \end{aligned} \quad (9.19)$$

Από την άλλη, το γεγονός ότι  $G'(x) = g(x)$  μας επιτρέπει να εκφράσουμε τη τελευταία

$$G(x+t) - G(x-t) = \int_{x-t}^{x+t} g(\xi) d\xi. \quad (9.20)$$

Συνεπώς,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2ik} \hat{g}(k) [e^{ik(x+t)} - e^{ik(x-t)}] dk = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(\xi) d\xi. \quad (9.21)$$

Συγκεντρώνοντας τα προηγούμενα αποτελέσματα, μπορούμε πλέον να πούμε ότι η

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left[ f(x+t) + f(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} g(\xi) d\xi \right] \quad (9.22)$$

ενδέχεται ν' αποτελεί λύση του ΠΑΤ (9.1-2).

Το γεγονός ότι  $u(x, t)$  που ορίζεται από την (9.22) όντως αποτελεί κλασική λύση του ΠΑΤ (9.1-2), και μάλιστα τη μοναδική αυτού του είδους, αποδειχνεται πολύ εύκολα. Με την προϋπόθεση, βέβαια, ότι οι συναρτήσεις που ορίζουν τα αρχικά δοσμένα είναι αρκετά ομαλές. Πιο συγκεκριμένα, αρκεί η  $f \in C^2(\mathbb{R})$  και η  $g \in C^1(\mathbb{R})$ . Γιατί, ο από παλιά γνωστός μας τύπος του d' Alembert, (9.22), δείχνει καθαρά ότι η  $u(x, t)$  ορίζεται μονοσήμαντα από τις συναρτήσεις  $f(x)$  και  $g(x)$ . Από την άλλη, το ότι η συνάρτηση  $u(x, t)$  που ορίζεται από τον ίδιο τύπο είναι λύση κλάσης  $C^2(\mathbb{R}^2)$  της κυματικής εξίσωσης επαληθεύεται σε δύο μόνο γραμμές.

## Ασκήσεις

**9.1** Αποδείξτε ότι, αν η  $f \in C^2(\mathbb{R})$  και η  $g \in C^1(\mathbb{R})$ , τότε η συνάρτηση  $u(x, t)$  που ορίζεται από τον τύπο (9.22) αποτελεί κλασική λύση της κυματικής εξίσωσης.

**9.2** Να υπολογιστεί η συνάρτηση  $u(x, t)$  που ορίζεται από τον τύπο (9.22), όταν  $f(x) = e^{-x^2}$ ,  $g(x) = 0$ . Στη συνέχεια να επαληθευτεί ότι η  $u(x, t)$  που βρήκατε αποτελεί λύση της κυματικής εξίσωσης και να κατασκευαστεί το γράφημά της.

**9.3** Να υπολογιστεί η συνάρτηση  $u(x, t)$  που ορίζεται από τον τύπο (9.22), όταν  $f(x) = 0$ ,  $g(x) = e^{-x^2}$ . Στη συνέχεια, να επαληθευτεί ότι η  $u(x, t)$  που βρήκατε αποτελεί λύση της κυματικής εξίσωσης και να κατασκευαστεί το γράφημά της.

**9.4** Να υπολογιστεί η συνάρτηση  $u(x, t)$  που ορίζεται από τον τύπο (9.22), όταν

$$f(x) = \begin{cases} (1-x^2)^2, & x \in [-1, 1] \\ 0, & x \notin [-1, 1] \end{cases}$$

και  $g(x) = 0$ . Να διερευνηθεί αν η  $u(x, t)$  που βρήκατε αποτελεί κλασική της κυματικής εξίσωσης και να κατασκευαστεί το γράφημά της.

**9.5** Να υπολογιστεί η συνάρτηση  $u(x, t)$  που ορίζεται από τον τύπο (9.22), όταν  $f(x) = 0$  και

$$g(x) = \begin{cases} (1-x^2)^2, & x \in [-1, 1] \\ 0, & x \notin [-1, 1] \end{cases}$$

Να διερευνηθεί αν η  $u(x, t)$  που βρήκατε αποτελεί κλασική της κυματικής εξίσωσης και να κατασκευαστεί το γράφημά της.

**9.6** Να υπολογιστεί η συνάρτηση  $u(x, t)$  που ορίζεται από τον τύπο (9.22), όταν

$$f(x) = \begin{cases} 1-|x|, & x \in [-1, 1] \\ 0, & x \notin [-1, 1] \end{cases}$$

και  $g(x) = 0$ . Να διερευνηθεί αν η  $u(x, t)$  που βρήκατε αποτελεί κλασική της κυματικής εξίσωσης και να κατασκευαστεί το γράφημά της.

**9.7** Να υπολογιστεί η συνάρτηση  $u(x, t)$  που ορίζεται από τον τύπο (9.22), όταν  $f(x) = 0$  και

$$g(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & x \in [-1, 1] \\ 0, & x \notin [-1, 1] \end{cases}$$

Να διερευνηθεί αν η  $u(x, t)$  που βρήκατε αποτελεί κλασική της κυματικής εξίσωσης και να κατασκευαστεί το γράφημά της.

**9.8** Να υπολογιστεί η συνάρτηση  $u(x, t)$  που ορίζεται από τον τύπο (9.22), όταν

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

και  $g(x) = 0$ . Να διερευνηθεί αν η  $u(x, t)$  που βρήκατε αποτελεί κλασική της κυματικής εξίσωσης και να κατασκευαστεί το γράφημά της.

**9.9** Να υπολογιστεί η συνάρτηση  $u(x, t)$  που ορίζεται από τον τύπο (9.22), όταν  $f(x) = 0$  και

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

Να διερευνηθεί αν η  $u(x, t)$  που βρήκατε αποτελεί κλασική της κυματικής εξίσωσης και να κατασκευαστεί το γράφημά της.

## 10 Προβλήματα αρχικών-συνοριακών τιμών για την εξίσωση της διάχυσης

Θεωρούμε τώρα το πρόβλημα το οποίο απαρτίζεται από την εξίσωση της διάχυσης

$$u_t = u_{xx}, \quad (x, t) \in \Omega := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, t > 0\}, \quad (10.1)$$

την αρχική συνθήκη

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \geq 0, \quad (10.2)$$

και τη συνοριακή

$$u(0, t) = g(t), \quad t \geq 0. \quad (10.3)$$

Θα δείξουμε ότι αυτό το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών (ΠΑΣΤ) μπορεί να λυθεί με τη βοήθεια μετασχηματισμών Fourier ημιτόνων.

Για το σκοπό αυτό, θ' ακολουθήσουμε μια προσέγγιση, λίγο διαφορετική από εκείνη με την οποία επιλύσαμε τα δύο προηγούμενα προβλήματα. Πιο συγκεκριμένα, θα ξεκινήσουμε μετασχηματίζοντας κατά Fourier, όχι την άγνωστη συνάρτηση  $u(x, t)$ , αλλά την ίδια την εξίσωση που θέλουμε να λύσουμε.

Αναλυτικότερα, το πρώτο βήμα της νέας μας προσέγγισης είναι να πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη της (10.1) με τον παράγοντα  $\sqrt{2/\pi} \sin kx$  και, στη συνέχεια, να τα ολοκληρώσουμε από το μηδέν ως το άπειρο:

$$\sqrt{2/\pi} \int_0^\infty \sin kx u_t dx = \sqrt{2/\pi} \int_0^\infty \sin kx u_{xx} dx. \quad (10.4)$$

Βέβαια, για να κάνουμε αυτό το βήμα, υποθέτουμε ότι, κάθε χρονική στιγμή  $t > 0$ , οι συναρτήσεις  $u_t(x, t)$  και  $u_{xx}(x, t)$  είναι τέτοιες που τα ολοκληρώματα της (10.4) συγκλίνουν. Αυτό συμβαίνει ακόμα και όταν οι παραπάνω συναρτήσεις είναι μόνο απόλυτα ολοκληρώσιμες. Εμείς, ωστόσο, θα υποθέσουμε ότι είναι πολύ βολικότερες.

Συγκεκριμένα, θα υποθέσουμε ότι,

(i) Οι συναρτήσεις  $u(x, t)$ ,  $u_x(x, t)$  και  $u_{xx}(x, t)$ ,  $t = \text{σταθ.}$ , είναι συνεχείς σε όλο το διάστημα  $x \geq 0$  και μηδενίζονται γρήγορα καθώς το  $x \rightarrow \infty$ .

(ii) Η λύση  $u(x, t)$  που αναζητάμε είναι τέτοια που

$$\int_0^\infty \sin kx u_t(x, t) dx = \partial_t \int_0^\infty \sin kx u(x, t) dx \quad (10.5)$$

Αυτή η υπόθεση οδηγεί αμέσως στα εξής αποτελέσματα:

Το πρώτο είναι πως το αριστερό μέλος της (10.4) είναι ίσο με

$$\sqrt{2/\pi} \int_0^\infty \sin kx u_t dx = \partial_t \hat{u}(k, t) \quad (10.6)$$

όπου

$$\hat{u}(k, t) := \sqrt{2/\pi} \int_0^\infty \sin kx u(x, t) dx. \quad (10.7)$$

Το δεύτερο αφορά το δεξί μέλος της (10.4) και λέει ότι

$$\begin{aligned}
\sqrt{2/\pi} \int_0^\infty \sin kx u_{xx} dx &= \sqrt{2/\pi} \left[ \sin kx u_x \Big|_0^\infty - k \int_0^\infty \cos kx u_x dx \right] \\
&= -\sqrt{2/\pi} k \int_0^\infty \cos kx u_x dx \\
&= -\sqrt{2/\pi} k \left[ \cos kx u \Big|_0^\infty + k \int_0^\infty \sin kx u dx \right] \\
&= -\sqrt{2/\pi} k \left[ -u(0, t) + k \int_0^\infty \sin kx u dx \right] \\
&= \sqrt{2/\pi} k u(0, t) - k^2 \sqrt{2/\pi} \int_0^\infty \sin kx u dx \\
&= \sqrt{2/\pi} k u(0, t) - k^2 \hat{u}(k, t).
\end{aligned}$$

Συνεπώς, η (10.4) γίνεται

$$\partial_t \hat{u}(k, t) = \sqrt{2/\pi} k u(0, t) - k^2 \hat{u}(k, t). \quad (10.9)$$

Με άλλα λόγια, ο μετασχηματισμός Fourier ημιτόνων ως προς τη χωρική μεταβλητή έχει μετατρέψει την ΜΔΕ  $u_t = u_{xx}$  σε μια γραμμική, μη ομογενή ΣΔΕ δεύτερης τάξης για τη συνάρτηση  $\hat{u}(k, t)$ .

Όταν η συνοριακή συνθήκη στο  $x = 0$  είναι ομογενής, όταν δηλαδή  $u(0, t) = 0$ , η παραπάνω ΣΔΕ ανάγεται στην ομογενή

$$\partial_t \hat{u}(k, t) = -k^2 \hat{u}(k, t). \quad (10.10)$$

Αυτή λύνεται αμέσως για να δώσει

$$\hat{u}(k, t) = A(k) e^{-k^2 t}. \quad (10.11)$$

Αντίθετα, όταν η συνοριακή συνθήκη στο  $x = 0$  είναι της μορφής

$$u(0, t) = g(t), \quad t \geq 0, \quad (10.12)$$

θα πρέπει να λύσουμε την μη ομογενή ΣΔΕ

$$\partial_t \hat{u}(k, t) = \sqrt{2/\pi} k g(t) - k^2 \hat{u}(k, t). \quad (10.13)$$

Η λύση της τελευταίας κατασκευάζεται με τη βοήθεια της λύσης της ομογενούς και δίνεται από τον τύπο

$$\hat{u}(k, t) = A(k) e^{-k^2 t} + e^{-k^2 t} \int_0^t e^{k^2 \tau} \left[ \sqrt{2/\pi} k g(\tau) \right] d\tau. \quad (10.14)$$

Δηλαδή,

$$\hat{u}(k, t) = A(k) e^{-k^2 t} + \sqrt{2/\pi} k \int_0^t g(\tau) e^{-k^2(t-\tau)} d\tau. \quad (10.15)$$

**Παρατήρηση.** Στο βαθμό που η  $g(t)$  είναι ολοκληρώσιμη, το τελευταίο ολοκλήρωμα συγκλίνει και όταν το  $t \rightarrow \infty$ .

Από την έκφραση που μόλις βρήκαμε για τον μετασχηματισμό Fourier ημιτόνων  $\hat{u}(k, t)$  της  $u(x, t)$  αμέσως έπεται ότι

$$\hat{u}(k, 0) = A(k). \quad (10.16)$$

Από την άλλη, ο ορισμός της  $\hat{u}(k, t)$  συνεπάγεται ότι

$$\hat{u}(k, 0) = \sqrt{2/\pi} \int_0^\infty \sin k x u(x, 0) dx. \quad (10.17)$$

Ισοδύναμα,

$$\hat{u}(k, 0) = \sqrt{2/\pi} \int_0^\infty \sin k x f(x) dx \equiv \hat{f}_s(k). \quad (10.18)$$

Συνεπώς, η (10.15) γίνεται

$$\hat{u}(k, t) = \hat{f}_s(k) e^{-k^2 t} + \sqrt{2/\pi} k \int_0^t g(\tau) e^{-k^2(t-\tau)} d\tau. \quad (10.19)$$

Έχοντας υπολογίσει την  $\hat{u}(k, t)$  μπορούμε να την αντιστρέψουμε κατά Fourier και να ελπίζουμε ότι η συνάρτηση

$$u(x, t) = \sqrt{2/\pi} \int_0^\infty \hat{u}(k, t) \sin k x dk. \quad (10.20)$$

αποτελεί λύση του αρχικού ΠΑΣΤ.

Η αντικατάσταση της (10.19) στην (10.20) οδηγεί στην

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sqrt{2/\pi} \int_0^\infty \left[ \hat{f}_s(k) e^{-k^2 t} + \sqrt{2/\pi} k \int_0^t g(\tau) e^{-k^2(t-\tau)} d\tau \right] \sin k x dk \\ &= \sqrt{2/\pi} \int_0^\infty \hat{f}_s(k) e^{-k^2 t} \sin k x dk + (2/\pi) \int_0^\infty k \int_0^t g(\tau) e^{-k^2(t-\tau)} \sin k x d\tau dk. \end{aligned} \quad (10.21)$$

Τώρα, αν η αντιστροφή της σειράς ολοκλήρωσης επιτρέπεται, ο πρώτος όρος της τελευταίας έκφρασης γίνεται

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \hat{f}_s(k) e^{-k^2 t} \sin k x dk &= \sqrt{2/\pi} \int_0^\infty \left[ \int_0^\infty f(y) \sin k y dy \right] e^{-k^2 t} \sin k x dk \\ &= \sqrt{2/\pi} \int_0^\infty f(y) \left[ \int_0^\infty \sin k y e^{-k^2 t} \sin k x dk \right] dy \end{aligned} \quad (10.22)$$

Όμως,

$$\int_0^\infty \sin k y e^{-k^2 t} \sin k x dk = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-k^2 t} [\cos k(x-y) - \cos k(x+y)] dk. \quad (10.23)$$

Από την άλλη,

$$\int_0^\infty e^{-k^2 t} \cos k x dk = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty e^{-k^2 t} e^{-ikx} dk = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{4t}} e^{-x^2/4t}. \quad (10.24)$$

Άρα,

$$\int_0^\infty \sin k y e^{-k^2 t} \sin k x dk = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{4t}} e^{-(x-y)^2/4t} - \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{4t}} e^{-(x+y)^2/4t} \right]. \quad (10.25)$$



Συνακόλουθα,

$$\begin{aligned} \sqrt{2/\pi} \int_0^\infty \hat{f}_s(k) e^{-k^2 t} \sin k x d k &= \sqrt{2/\pi} \int_0^\infty \hat{f}_s(k) e^{-k^2 t} \sin k x d k \\ &= (2/\pi) \int_0^\infty f(y) \left\{ \frac{1}{2} \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{4t}} e^{-(x-y)^2/4t} - \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{4t}} e^{-(x+y)^2/4t} \right] \right\} d y \\ &= \int_0^\infty f(y) \left[ \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-(x-y)^2/4t} - \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-(x+y)^2/4t} \right] d y \end{aligned} \quad (10.26)$$

Τώρα, στρεφόμαστε στον όρο

$$u_2 := (2/\pi) \int_0^\infty k \int_0^t g(\tau) e^{-k^2(t-\tau)} \sin k x d \tau d k. \quad (10.27)$$

και παρατηρούμε ότι, **αν** επιτρέπεται η αντιστροφή της σειράς ολοκλήρωσης, αυτός γράφεται σαν,

$$u_2 = (2/\pi) \int_0^t g(\tau) \left[ \int_0^\infty k e^{-k^2(t-\tau)} \sin k x d k \right] d \tau. \quad (10.28)$$

Επιπλέον,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty k e^{-k^2(t-\tau)} \sin k x d k &= - \int_0^\infty \frac{1}{2(t-\tau)} \partial_k \left[ e^{-k^2(t-\tau)} \right] \sin k x d k \\ &= - \frac{1}{2(t-\tau)} \left[ e^{-k^2(t-\tau)} \sin k x \Big|_0^\infty - x \int_0^\infty e^{-k^2(t-\tau)} \cos k x d k \right] \\ &:= \frac{x}{2(t-\tau)} \int_0^\infty e^{-k^2(t-\tau)} \cos k x d k = \frac{x}{2(t-\tau)} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{4(t-\tau)}} e^{-x^2/4(t-\tau)}. \end{aligned} \quad (10.29)$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} u_2 &= (2/\pi) \int_0^t g(\tau) \left[ \int_0^\infty k e^{-k^2(t-\tau)} \sin k x d k \right] d \tau \\ &= (2/\pi) \int_0^t g(\tau) \left[ \frac{x}{2(t-\tau)} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{4(t-\tau)}} e^{-x^2/4(t-\tau)} \right] d \tau \\ &= x \int_0^t g(\tau) \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-\tau)^3}} e^{-x^2/4(t-\tau)} d \tau. \end{aligned} \quad (10.30)$$

Το συνολικό συμπέρασμα της προηγούμενης ανάλυσης είναι ότι, κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις, η συνάρτηση

$$u(x, t) = \int_0^\infty f(y) \left[ \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-(x-y)^2/4t} - \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-(x+y)^2/4t} \right] dy + \int_0^t g(\tau) \frac{x}{\sqrt{4\pi(t-\tau)^3}} e^{-x^2/4(t-\tau)} d\tau. \quad (10.31)$$

αποτελεί λύση του ΠΑΣΤ.

Κλείνοντας σημειώνουμε ότι η λύση που βρήκαμε γράφεται και στην μορφή

$$u(x, t) = \int_0^\infty [K(x-y, t) - K(x+y, t)] f(y) dy + \int_0^t J(x, t-\tau) g(\tau) d\tau \quad (10.32)$$

όπου,

$$K(x, t) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t}, \quad J(x, t) := \frac{x}{\sqrt{4\pi t^3}} e^{-x^2/4t}. \quad (10.33)$$

**Παρατήρηση.** Θα πρέπει να σημειωθεί ότι, στην περίπτωση που η  $g(t)$  μηδενίζεται ταυτοτικά, ο τύπος (10.32) ανάγεται στον

$$u^f(x, t) := \int_0^\infty [K(x-y, t) - K(x+y, t)] f(y) dy. \quad (10.34)$$

Από αυτή την έκφραση και το γεγονός ότι η συνάρτηση  $K(x, t)$  είναι άρτια ως προς το  $x$  αμέσως έπεται ότι

$$u^f(0, t) = \int_0^\infty [K(-y, t) - K(y, t)] f(y) dy = 0, \quad t > 0. \quad (10.35)$$

Από την άλλη μεριά, στηριζόμενοι στην ανάλυση του πρώτου εδάφιου, μπορούμε εύκολα ν' αποδείξουμε την

**Πρόταση 10.1**

Αν η  $f(x)$ ,  $x > 0$ , είναι συνεχής και το  $a > 0$ , τότε η  $u^f(x, t)$  συγκλίνει στην  $f(a)$ , καθώς το  $(x, t) \rightarrow (a, 0)$  από το εσωτερικό της περιοχής  $\Omega := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, t > 0\}$ . Με άλλα λόγια, η συνάρτηση  $u^f(x, t)$  αποτελεί λύση του ΠΑΣΤ

$$u_t = u_{xx}, \quad (x, t) \in \Omega, \quad u(x, 0) = f(x), \quad x > 0, \quad u(0, t) = 0, \quad t > 0. \quad (10.36)$$

Ανάλογα, όταν η  $f(x)$  μηδενίζεται ταυτοτικά, τότε ο τύπος (10.32) ανάγεται στον

$$u^g(x, t) := \int_0^t J(x, t-\tau) g(\tau) d\tau = x \int_0^t \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-\tau)^3}} e^{-x^2/4(t-\tau)} g(\tau) d\tau. \quad (10.37)$$

Η τελευταία έκφραση δίνει αρχικά την εντύπωση ότι  $u^g(0, t) = 0$ . Ωστόσο, η παραγωγή του τύπου (10.32) στηρίχτηκε στην υπόθεση ότι  $(x, t) \in \Omega$  και, άρα, η άμεση αντικατάσταση  $x = 0$  δεν επιτρέπεται. Εκείνο που οφείλουμε να εξετάσουμε είναι η συμπεριφορά της  $u^g(x, t)$  καθώς το  $x \rightarrow 0$  από τα δεξιά. Τότε, με λίγη προσοχή, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι ισχύει η

### Πρόταση 10.2

Αν η  $g(t)$ ,  $t > 0$ , είναι συνεχής και φραγμένη, τότε η  $u^g(x, t)$  συγκλίνει στην  $g(T)$ , καθώς το  $(x, T) \rightarrow (0, T)$  από το εσωτερικό της περιοχής  $\Omega := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, t > 0\}$ . Με άλλα λόγια, η συνάρτηση  $u^g(x, t)$  αποτελεί λύση του ΠΑΣΤ

$$u_t = u_{xx}, \quad (x, t) \in \Omega, \quad u(x, 0) = 0, \quad x > 0, \quad u(0, t) = g(t), \quad t > 0. \quad (10.38)$$

Από τον τύπο (10.32) γίνεται φανερό ότι βασικό ρόλο στη συμπεριφορά της  $u^g(x, t)$  παίζει ο πυρήνας  $J(x, t - \tau)$ . Κι από τις ιδιότητες του τελευταίου καθοριστική είναι η ακόλουθη:

$$\int_0^t J(t - \tau, x) d\tau = \operatorname{erfc}\left(x / \sqrt{4t}\right) \quad (10.39)$$

Για ν' αποδείξουμε την (10.39), εισάγουμε τη μεταβλητή

$$s = \frac{x}{\sqrt{4(t - \tau)}}, \quad t > \tau > 0, \quad (10.40)$$

και, χωρίς δυσκολία, καταλήγουμε στη σχέση

$$\int_0^t \frac{x}{\sqrt{4\pi(t - \tau)^3}} e^{-x^2/4(t - \tau)} d\tau = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x/\sqrt{4t}}^{\infty} e^{-s^2} ds. \quad (10.41)$$

Όμως, από τον ορισμό

$$\operatorname{erf}(z) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-s^2} ds \quad (10.42)$$

της συνάρτησης σφάλματος συμπεραίνουμε ότι  $\operatorname{erf}(\infty) = 1$ . Άρα,

$$\operatorname{erfc}(z) := 1 - \operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( \int_0^{\infty} e^{-s^2} ds - \int_0^z e^{-s^2} ds \right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-s^2} ds. \quad (10.43)$$

Τέλος, η σύγκριση των (10.40) και (10.43) οδηγεί αμέσως στην (10.39).

Από τη σχέση (10.39) αμέσως έπεται ότι

$$\int_0^{\infty} J(x, t - \tau) d\tau = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-s^2} ds = 1. \quad (10.44)$$

Συνακόλουθα,

$$\begin{aligned} \int_t^{\infty} J(x, t - \tau) d\tau &= \int_0^{\infty} J(x, t - \tau) d\tau - \int_0^t J(x, t - \tau) d\tau \\ &= 1 - \operatorname{erfc}\left(x / \sqrt{4t}\right) = \operatorname{erf}\left(x / \sqrt{4t}\right). \end{aligned} \quad (10.45)$$

Τώρα,

$$\begin{aligned}
u^g(x, t) - g(t) &= \int_0^t J(x, t - \tau) g(\tau) d\tau - g(t) \\
&= \int_0^t J(x, t - \tau) g(\tau) d\tau - g(t) \int_0^\infty J(x, t - \tau) d\tau \\
&= \int_0^t J(x, t - \tau)[g(\tau) - g(t)] d\tau - g(t) \int_t^\infty J(x, t - \tau) d\tau
\end{aligned}$$

Όμως, από την (10.45) συνάγεται ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(t) \int_t^\infty J(x, t - \tau) d\tau = \lim_{x \rightarrow 0^+} [g(t) \operatorname{erf}\left(x / \sqrt{4t}\right)] = 0. \quad (10.47)$$

Άρα,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [u^g(x, t) - g(t)] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^t J(x, t - \tau)[g(\tau) - g(t)] d\tau \quad (10.48)$$

Ας υποθέσουμε, τώρα ότι το  $\delta \in (0, t)$  κι ας γράψουμε το τελευταίο ολοκλήρωμα στη μορφή

$$\int_0^t J(x, t - \tau)[g(\tau) - g(t)] d\tau = \left( \int_0^{t-\delta} + \int_{t-\delta}^t \right) J(x, t - \tau)[g(\tau) - g(t)] d\tau. \quad (10.49)$$

Σύμφωνα με την (10.39),

$$\int_0^{t-\delta} J(t - \tau | x) d\tau = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4\delta}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4t}}\right), \quad x > 0, \quad t > \delta > 0. \quad (10.50)$$

Άρα,

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^{t-\delta} J(x, t - \tau)[g(\tau) - g(t)] d\tau \right| &\leq \int_0^{t-\delta} J(x, t - \tau) |g(\tau) - g(t)| d\tau \\
&\leq 2M \int_0^{t-\delta} J(x, t - \tau) d\tau = 2M \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4\delta}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4t}}\right) \right],
\end{aligned} \quad (10.51)$$

όπου  $M$  το φράγμα της  $|g(t)|$ . Συνεπώς,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_0^{t-\delta} J(x, t - \tau)[g(\tau) - g(t)] d\tau = 0. \quad (10.52)$$

Από την άλλη, αφού η  $g(t)$  είναι συνεχής, το  $\delta$  μπορεί να επιλεγεί έτσι ώστε  $|g(\tau) - g(t)| < \varepsilon$  για  $t - \delta \leq \tau \leq t$ . Με αυτό τον τρόπο οδηγούμαστε στην εκτίμηση

$$\begin{aligned}
\left| \int_{t-\delta}^t J(x, t - \tau)[g(\tau) - g(t)] d\tau \right| &\leq \int_{t-\delta}^t J(x, t - \tau) |g(\tau) - g(t)| d\tau \leq \\
&2\varepsilon x \int_{t-\delta}^t \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-\tau)^3}} e^{-x^2/4(t-\tau)} d\tau.
\end{aligned} \quad (10.53)$$

Τώρα, η συνάρτηση

$$h(t - \tau, x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi(t - \tau)^3}} e^{-x^2/4(t - \tau)} \quad (10.54)$$

είναι θετική και συνεχής στο διάστημα  $t - \delta \leq \tau < t$  και τείνει στο μηδέν καθώς το  $\tau \rightarrow t -$ . Άρα παραμένει φραγμένη. Αν λοιπόν θέσουμε

$$H := \sup_{\tau \in [t - \delta, t)} h(t - \tau, x) \quad (10.55)$$

θα καταλήξουμε στην εκτίμηση

$$\int_{t - \delta}^t \frac{1}{\sqrt{4\pi(t - \tau)^3}} e^{-x^2/4(t - \tau)} d\tau \leq \delta H. \quad (10.56)$$

Συνακόλουθα, η (10.53) γίνεται

$$\left| \int_{t - \delta}^t J(x, t - \tau)[g(\tau) - g(t)] d\tau \right| \leq 2\varepsilon \delta H x \quad (10.57)$$

και άρα,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_{t - \delta}^t J(x, t - \tau)[g(\tau) - g(t)] d\tau = 0. \quad (10.58)$$

## Ασκήσεις

*Σημείωση.* Σε όλα τα προβλήματα αρχικών-συνοριακών τιμών (ΠΑΣΤ) που δίνονται στις επόμενες ασκήσεις το  $\Omega$  παριστάνει το ανοιχτό τεταρτημόριο  $\Omega := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, t > 0\}$  του  $\mathbb{R}^2$ .

**10.1** Να λυθεί το ΠΑΣΤ

$$u_t = u_{xx}, \quad (x, t) \in \Omega, \quad u(x, 0) = 1 - e^{-x}, \quad x > 0, \quad u(0, t) = 0, \quad t > 0,$$

και να κατασκευαστεί το γράφημα της  $u(x, t)$  που βρήκατε.

**10.2** Να λυθεί το ΠΑΣΤ

$$u_t = u_{xx}, \quad (x, t) \in \Omega, \quad u(x, 0) = 0, \quad x > 0, \quad u(0, t) = 1, \quad t > 0,$$

και να κατασκευαστεί το γράφημα της  $u(x, t)$  που βρήκατε.

**10.3** Να λυθεί το ΠΑΣΤ

$$u_t = u_{xx}, \quad (x, t) \in \Omega, \quad u(x, 0) = e^{-x}, \quad x > 0, \quad u(0, t) = 1, \quad t > 0,$$

και να κατασκευαστεί το γράφημα της  $u(x, t)$  που βρήκατε.

**10.4** Ξεκινώντας από τον μετασχηματισμό Fourier συνημιτόνων της εξίσωσης  $u_t = u_{xx}$ , κατασκευάστε λύσεις της στην περιοχή  $\Omega$ , οι οποίες είναι συμβατές με τις συνθήκες

$$u(x, 0) = f(x), \quad x > 0, \quad u_x(0, t) = g(t), \quad t > 0.$$

## 11 Πολυδιάστατα προβλήματα αρχικών τιμών

Με τη βοήθεια των μετασχηματισμών Fourier μπορούμε να αντιμετωπίσουμε προβλήματα αρχικών ή και συνοριακών τιμών που αφορούν συναρτήσεις πολλών μεταβλητών. Βασική προϋπόθεση για την αποτελεσματικότητα αυτής της μεθόδου είναι οι συντελεστές της αντίστοιχης ΜΔΕ να είναι σταθεροί.

Το απλούστερο ίσως πρόβλημα αυτού του είδους αφορά την εξίσωση της διάχυσης σε  $n > 1$  χωρικές διαστάσεις. Συγκεκριμένα, ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να βρούμε λύσεις της ΜΔΕ

$$u_t = \Delta u, \quad (11.1)$$

στην περιοχή

$$\Omega := \{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0\}, \quad (11.2)$$

που είναι συμβατές με την αρχική συνθήκη

$$u(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (11.3)$$

Για ν' αντιμετωπίσουμε αυτό το πρόβλημα, κάνουμε αρχικά μια σειρά από βολικές υποθέσεις, όπως στην περίπτωση που η άγνωστη συνάρτηση εξαρτιόταν από μία μόνο χωρική μεταβλητή. Πιο συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι

(i) Η δοσμένη συνάρτηση  $f(\mathbf{x})$  είναι συνεχής και απόλυτα ολοκληρώσιμη, δηλαδή ότι  $f \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ .

(ii) Η λύση  $u(\mathbf{x}, t)$  που αναζητάμε είναι ομαλή και, για κάθε  $t > 0$ , οι χωρικές παράγωγοι της  $u(\mathbf{x}, t)$  μέχρι και δεύτερης τάξης μηδενίζονται ταχύτερα από κάθε αρνητική δύναμη του  $|\mathbf{x}|$ , καθώς το  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ .

(iii) Η  $u_t(\mathbf{x}, t)$  μηδενίζεται, ομοιόμορφα ως προς το  $\mathbf{x}$ , καθώς η χρονική μεταβλητή  $t \rightarrow \infty$ .

Με αυτές τις προϋποθέσεις, μπορούμε να προχωρήσουμε απρόσκοπτα στα εξής βήματα:

α) Να μετασχηματίσουμε κατά Fourier την εξίσωση  $u_t - \Delta u = 0$ , ως προς τις χωρικές μεταβλητές:

$$(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} [u_t(\mathbf{x}, t) - \Delta u(\mathbf{x}, t)] d\mathbf{x} = 0. \quad (11.4)$$

Με βάση τις συνθήκες τις οποίες πληροί η  $u(\mathbf{x}, t)$ , από την προηγούμενη σχέση καταλήγουμε στην ΣΔΕ

$$\hat{u}_t(\mathbf{k}, t) + k^2 \hat{u}(\mathbf{k}, t) = 0, \quad k := |\mathbf{k}|, \quad (11.5)$$

για τον μετασχηματισμό Fourier

$$\hat{u}(\mathbf{k}, t) := (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} u(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}, \quad t > 0, \quad (11.6)$$

της άγνωστης συνάρτησης  $u(\mathbf{x}, t)$ .

β) Να λύσουμε την (11.5) και να βρούμε ότι

$$\hat{u}(\mathbf{k}, t) = c(\mathbf{k}) e^{-k^2 t}. \quad (11.7)$$

γ) Να συγκρίνουμε την τελευταία με την

$$\hat{u}(\mathbf{k}, 0) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} u(\mathbf{x}, 0) d\mathbf{x} = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (11.8)$$

που συνάγεται από τις (11.3), (11.6), και να συμπεράνουμε ότι

$$\hat{u}(\mathbf{k}, t) = \hat{f}(\mathbf{k}) e^{-k^2 t}. \quad (11.9)$$

δ) Ν' αντιστρέψουμε κατά Fourier την  $\hat{u}(\mathbf{k}, t)$  για να καταλήξουμε στην

$$u(\mathbf{x}, t) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \hat{u}(\mathbf{k}, t) d\mathbf{k} = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}-k^2 t} \hat{f}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}. \quad (11.10)$$

ε) Ν' αντικαταστήσουμε την αναλυτική έκφραση του μετασχηματισμού Fourier  $\hat{f}(\mathbf{k})$  της  $f(\mathbf{x})$  στην προηγούμενη σχέση και να πάρουμε την

$$u(\mathbf{x}, t) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \left[ \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})-k^2 t} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \right] d\mathbf{k}. \quad (11.11)$$

στ) Ν' αντιστρέψουμε τη σειρά ολοκλήρωσης, ώστε να γράψουμε την τελευταία στη μορφή

$$u(\mathbf{x}, t) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \left[ \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})-k^2 t} d\mathbf{k} \right] f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (11.12)$$

ζ) Να παρατηρήσουμε ότι το εσωτερικό πολλαπλό ολοκλήρωμα στην (5.12) ανάγεται σε γινόμενο παραγόντων της μορφής

$$I_j := (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ik_j(x_j-y_j)-k_j^2 t} d k_j, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (11.13)$$

η) Να χρησιμοποιήσουμε το γνωστό αποτέλεσμα

$$I_j = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-(x_j-y_j)^2/4t} \quad (11.14)$$

για να πάρουμε ως τελικό αποτέλεσμα την αναπαράσταση

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2/4t} f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad (11.15)$$

για τη συνάρτηση που (ενδέχεται να) αποτελεί λύση του ΠΑΤ (11.1-3).

Είναι προφανές ότι η συνάρτηση που μόλις βρήκαμε γράφεται στη μορφή

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^n} K(\mathbf{x}-\mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad K(\mathbf{x}) := \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|\mathbf{x}|^2/4t} \quad (11.16)$$

Αυτή είναι πανομοιότυπη μ' εκείνη που βρήκαμε στην περίπτωση της μιας χωρικής μεταβλητής. Γι' αυτό, το επόμενο θεώρημα, το οποίο γενικεύει το αντίστοιχο για  $n = 1$ , αποδειχεται με τον ίδιο, ουσιαστικά, τρόπο.

### Θεώρημα 11.1

Αν η συνάρτηση  $f(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  είναι συνεχής και φραγμένη, τότε

(i) Η συνάρτηση  $u(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^n} K(\mathbf{x}-\mathbf{y}, t) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}$ , αποτελεί λύση της εξίσωσης της διάχυσης στην περιοχή  $\Omega := \{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, t > 0\}$ .

(ii) Η παραπάνω  $u(\mathbf{x}, t)$  είναι κλάσης  $C^\infty(\Omega)$  και γίνεται συνεχής στο ολοκλήρωμα  $\bar{\Omega}$  της χωροχρονικής περιοχής  $\Omega$ , όταν επεκταθεί με τον ακόλουθο τρόπο:

$$u(\mathbf{x}, t) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^n} K(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, & t > 0 \\ f(\mathbf{x}), & t = 0 \end{cases} \quad (11.17)$$

(iii) Αυτή είναι και η μοναδική φραγμένη λύση του ΠΑΤ  $u_t = \Delta u$ ,  $(\mathbf{x}, t) \in \Omega$ ,  $u(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x})$ ,  $t = 0$ . ■

## Ασκήσεις

**11.1** Δείχτε αναλυτικά τον τρόπο με τον οποίο καταλήγουμε από την (11.4) στην (11.5).

**11.2** Δείχτε ότι

(i) Ο πυρήνας Gauss  $K(\mathbf{x}) := (4\pi t)^{-n/2} e^{-|\mathbf{x}|^2/4t}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , αποτελεί λύση της εξίσωσης της διάχυσης  $K_t = \Delta K$ .

(ii) Για κάθε  $t > 0$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^n} K(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} = 1.$$

**11.3** Να επαναληφθεί η προηγούμενη άσκηση για τη συνάρτηση  $u(x, t)$  που δίνεται στο παράδειγμα 1.2.

**11.4** Να κατασκευαστεί η λύση του ΠΑΤ

$$u_t = u_{xx} + u_{yy}, \quad -\infty < x, y < \infty, \quad t > 0, \quad u(x, y, 0) = e^{-(x^2+y^2)}, \quad -\infty < x, y < \infty.$$

**11.5** Να κατασκευαστεί η συνάρτηση  $u(x, y, t)$  που ορίζεται από τον τύπο (4.15) και ναδειχτεί αναλυτικά ότι αποτελεί λύση της ΜΔΕ  $u_t = u_{xx} + u_{yy}$ , στην περιοχή  $-\infty < x, y < \infty$ ,  $t > 0$ .

**11.6** Να κατασκευαστούν λύσεις του προβλήματος συνορικών τιμών

$$\Delta u := u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0, \quad -\infty < x, y < \infty, \quad z > 0,$$

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \quad |u(x, y, z)| \rightarrow 0, \quad \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \infty,$$

ξεκινώντας με τον μετασχηματισμό Fourier της εξίσωσης  $\Delta u = 0$  ως προς τις μεταβλητές  $x$  και  $y$ .





# Μετασχηματισμός Laplace

## 1. Άλλοι ολοκληρωτικοί μετασχηματισμοί

Η προσπάθεια επίλυσης προβλημάτων αρχικών-συνοριακών τιμών (ΠΑΣΤ) που αφορούν τις γραμμικές εξισώσεις της Μαθηματικής Φυσικής συχνά οδηγεί σε ολοκληρωτικούς μετασχηματισμούς διαφορετικούς από εκείνους του Fourier. Όλα εξαρτιώνται από τη γεωμετρία του της περιοχής  $\Omega$  του  $\mathbb{R}^n$  στην οποία αναφέρεται η δοσμένη εξίσωση, ή, αν προτιμάτε, από το διάστημα του  $\mathbb{R}$  το οποίο διατρέχει κάθε μια από τις ανεξάρτητες μεταβλητές. Από μια άλλη σκοπιά, ο ολοκληρωτικός μετασχηματισμός που αναδύεται κατά την επίλυση ενός ΠΑΣΤ καθορίζεται από τις ιδιότητες των αντίστοιχων χαρακτηριστικών λύσεων ή ιδιοσυναρτήσεων.

Για να γίνουμε σαφέστεροι, ας θεωρήσουμε το ακόλουθο πρόβλημα συνοριακών τιμών (ΠΣΤ):

$$\Delta u(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\}, \quad (1.1)$$

$$u(x, y, 0) = f(r), \quad r := \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (1.2)$$

$$|u(\mathbf{x})| \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0. \quad (1.3)$$

όπου  $f(r)$ ,  $r \geq 0$ , μια συνεχής συνάρτηση που μηδενίζεται καθώς το  $r \rightarrow \infty$ .

Το γεγονός ότι, σύμφωνα με τη συνθήκη (1.2), η  $u(x, y, z)$  ανάγεται σε μια συνάρτηση του  $r$  στο σύνορο,  $\partial\Omega$ , της περιοχής  $\Omega$ , υποδειχνει ότι

α) Η λύση,  $u(x, y, z)$ , του δοσμένου ΠΣΤ θα εξαρτιέται μόνο από την απόσταση,  $r$ , του σημείου  $(x, y, z)$  από τον άξονα  $z$  και την τιμή της συντεταγμένης  $z$ .

β) Καταλληλότερες για την ανάλυση αυτού του ΠΣΤ είναι οι κυλινδρικές συντεταγμένες,  $(r, \theta, z)$ .

Αν λοιπόν θέσουμε  $U(r, \theta, z) = u(x, y, z)$  και υιοθετήσουμε την υπόθεση ότι  $U(r, \theta, z) = V(r, z)$ , τότε η εξίσωση Laplace, (1.1), θα πάρει την ακόλουθη μορφή:

$$V_{rr} + \frac{1}{r} V_r + V_{zz} = 0. \quad (1.4)$$

Μπορούμε, τώρα, να αναζητήσουμε λύσεις της (1.4) της μορφής

$$V(r, z) = R(r) Z(z). \quad (1.5)$$

Η αντικατάσταση της (1.5) στην (1.4) οδηγεί στο σύστημα των ΣΔΕ

$$R'' + \frac{1}{r} R' - \lambda R = 0, \quad Z'' = \lambda Z, \quad (1.6)$$

όπου  $\lambda$  η γνωστή "παράμετρος διαχωρισμού".

Το σύστημα (1.6) επιδέχεται λύσεις για κάθε  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Ωστόσο, η συνθήκη (1.3) απαιτεί από την  $Z(z)$  να μηδενίζεται καθώς το  $z \rightarrow \infty$ . Άρα, η παράμετρος  $\lambda$  πρέπει να περιοριστεί σε θετικές τιμές. Επιπλέον, από το σύνολο των λύσεων  $Z = c_1 e^{kz} + c_2 e^{-kz}$  της  $Z'' = k^2 Z$ , όπου  $k = \sqrt{\lambda} > 0$ , κατάλληλες είναι μόνο εκείνες με  $c_1 = 0$ .

Συνακόλουθα, η πρώτη από τις ΣΔΕ (1.6) ανάγεται στην

$$r R'' + R' - k^2 r R = 0, \quad r > 0. \quad (1.7)$$

Αυτή δεν είναι άλλη από την εξίσωση Bessel που συναντήσαμε στο Εδάφιο VI-2, στο πλαίσιο της ανάλυσης του προβλήματος Dirichlet για την εξίσωση Laplace στο εσωτερικό ενός κύλινδρου. Η γενική λύση της (1.7) είναι της μορφής

$$R = C_1 J_0(kr) + C_2 Y_0(kr), \quad (1.8)$$

όπου  $J_0(\xi)$ ,  $Y_0(\xi)$  οι λεγόμενες συναρτήσεις Bessel (πρώτου είδους) και Neumann, αντίστοιχα, μηδενικής τάξης. Όπως σημειώσαμε στο Εδάφιο VI-2, η συνάρτηση Neumann δεν παραμένει φραγμένη καθώς το  $\xi$  πλησιάζει στο μηδέν. Συνεπώς, από τις λύσεις της μορφής (1.8) θα πρέπει να επιλέξουμε εκείνες με  $C_2 = 0$ .

Το συνολικό συμπέρασμα της προηγούμενης ανάλυσης είναι το εξής: Η ΜΔΕ (1.4) επιδέχεται λύσεις της μορφής (1.5), που είναι φραγμένες και μηδενίζονται, καθώς είτε το  $r$  είτε το  $z$  τείνει στο άπειρο, κι αυτές δίνονται από τις συναρτήσεις

$$V_{(k)} = A(k) J_0(kr) e^{-kz}, \quad k > 0. \quad (1.9)$$

Αξίζει εδώ να σημειώσουμε τη διαφορά των λύσεων (1.9) από εκείνες στις οποίες θα καταλήγαμε, αν η περιοχή  $\Omega$  ήταν το εσωτερικό ενός κύλινδρου ακτίνας  $a$ . Όπως είδαμε στο Εδάφιο VI-2, η συνθήκη μηδενισμού των λύσεων στην πλευρική επιφάνεια του κύλινδρου, όπου το  $r = a$ , οδηγεί στην "κβάντιση" της παραμέτρου  $k$ , δηλαδή στον περιορισμό της στις τιμές  $k_n = \xi_n / a$ , όπου  $\xi_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , τα σημεία μηδενισμού της  $J_0(\xi)$ . Αντίθετα, στην περίπτωση που εξετάζουμε τώρα, η παράμετρος  $k$  διατρέχει ελεύθερα ολόκληρη την ημιευθεία  $k > 0$ .

Κατά συνέπεια, η λύση του ΠΣΤ (1.1-3) θα πρέπει να κατασκευαστεί με υπέρθεση όλων των λύσεων (1.9), χωρίς καμία εξαίρεση:

$$V(r, z) = \int_0^\infty A(k) J_0(kr) e^{-kz} dk. \quad (1.10)$$

Αν αυτή η αναπαράσταση της λύσης είναι σωστή, τότε η συνοριακή συνθήκη (1.3), που ισοδυναμεί με την  $V(r, 0) = f(r)$ , ανάγεται στην

$$\int_0^{\infty} A(k) J_0(k r) d k = f(r). \quad (1.11)$$

Στην ουσία, η (1.11) παριστάνει το ανάπτυγμα της δοσμένης συνάρτησης  $f(r)$  στη βάση των συναρτήσεων  $J_0(k r)$  και είναι το ολοκληρωτικό ανάλογο αυτού που στο Εδάφιο VI-2 ονομάσαμε σειρά Fourier-Bessel. Ωστόσο, η (1.11) συνήθως γράφεται σε κάπως διαφορετικότερη μορφή και αναφέρεται με άλλο όνομα.

Πιο συγκεκριμένα, θέτοντας  $A(k) = k F(k)$ , η εξίσωση (1.11) γίνεται

$$\int_0^{\infty} F(k) J_0(k r) k d k = f(r). \quad (1.12)$$

Βέβαια, παρόλο που άλλαξε μορφή, το πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε παραμένει ουσιαστικά το ίδιο: Για να βρούμε τους συντελεστές  $A(k)$  του αναπτύγματος (1.10), πρέπει να λύσουμε μια ολοκληρωτική εξίσωση. Απλώς, η μορφή (1.12) διευκολύνει τη λύση του προβλήματος κι αυτό οφείλεται στο ακόλουθο γεγονός: Όταν το  $k \neq l$ , οι συναρτήσεις  $J_0(k r)$ ,  $J_0(l r)$  είναι μεταξύ τους ορθογώνιες, αλλά με συνάρτηση βάρους την  $\rho(r) = r$ :

$$\int_0^{\infty} J_0(k r) J_0(l r) r d r = 0, \quad k \neq l. \quad (1.13)$$

Χρησιμοποιώντας αυτή την ιδιότητα, μπορεί κανείς να δείξει ότι η λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης (1.12) δίνεται από τον τύπο

$$F(k) = \int_0^{\infty} f(r) J_0(k r) r d r. \quad (1.14)$$

Συνεπώς, η λύση του ΠΣΤ δίνεται τελικά από την έκφραση

$$V(r, z) = \int_0^{\infty} k F(k) J_0(k r) e^{-k z} d k, \quad (1.15)$$

όπου η συνάρτηση  $F(k)$  καθορίζεται από την δοσμένη  $f(r)$  μέσω του ολοκληρώματος (1.14).

Η συνάρτηση  $F(k)$  που ορίζεται από τον τύπο (1.14) λέγεται **μετασχηματισμός Hankel** της  $f(r)$ . Η (1.12) δείχνει καθαρά ότι ο **αντίστροφος μετασχηματισμός Hankel** είναι της ίδιας μορφής με τον ευθύ, όπως ακριβώς συμβαίνει και με τους μετασχηματισμούς Fourier ημιτόνων και συνημιτόνων.

Αυτό δεν ισχύει για τον ολοκληρωτικό μετασχηματισμό στον οποίο είναι αφιερωμένο το κύριο μέρος του παρόντος εδάφιου. Πρόκειται για τον μετασχηματισμό που φέρει το όνομα του Laplace και, όπως εκείνος του Fourier, αναδύεται στις εφαρμογές πολύ συχνότερα από άλλους επώνυμους.

## 2. Ο μετασχηματισμός Laplace

Προφανώς, το ολοκλήρωμα  $\int_0^{\infty} e^{-t} dt$  συγκλίνει και μάλιστα

$$I_0 := \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1 \quad (2.1)$$

Από αυτή την παρατήρηση αμέσως έπεται ότι, για κάθε  $z > 0$ , συγκλίνει και το ολοκλήρωμα  $\int_0^{\infty} e^{-zt} dt$ . Γιατί, με την αλλαγή  $t \rightarrow z\tau$  της μεταβλητής ολοκλήρωσης, προκύπτει αμέσως το εξής αποτέλεσμα:

$$\int_0^{\infty} e^{-zt} dt = \frac{1}{z} \int_0^{\infty} e^{-\tau} d\tau = -\frac{1}{z\tau} e^{-\tau} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{z}. \quad (2.2)$$

Από την άλλη, ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες, εύκολα διαπιστώνουμε ότι, για κάθε θετικό ακέραιο  $n$ ,

$$I_n := \int_0^{\infty} e^{-\tau} \tau^n d\tau = -\tau^n e^{-\tau} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\tau} n\tau^{n-1} d\tau = n \int_0^{\infty} e^{-\tau} \tau^{n-1} d\tau. \quad (2.3)$$

Δηλαδή,

$$I_n = n I_{n-1}. \quad (2.4)$$

Συνακόλουθα,

$$I_n = n I_{n-1} = n(n-1) I_{n-2} = n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1 I_0 = n! I_0 = n!. \quad (2.5)$$

Θέτοντας  $\tau = tz$ , αμέσως βρίσκουμε ότι

$$\int_0^{\infty} e^{-zt} t^n dt = z^{-(n+1)} \int_0^{\infty} e^{-\tau} \tau^n d\tau. \quad (2.6)$$

Συνεπώς,

$$\int_0^{\infty} e^{-zt} t^n dt = \frac{n!}{z^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.7)$$

Γενικότερα, ολοκληρώματα της μορφής

$$\tilde{f}(z) := \int_0^{\infty} e^{-zt} f(t) dt \quad (2.8)$$

συγκλίνουν για μια κλάση συναρτήσεων πολύ ευρύτερη από τις πολυωνυμικές, ακόμη και όταν η παράμετρος  $z$  παίρνει μιγαδικές τιμές.

Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι η  $f(t)$  υπακούει στον ακόλουθο περιορισμό: Υπάρχουν σταθερές  $a \in \mathbb{R}$  και  $C \in \mathbb{R}_+$ , τέτοιες που

$$|f(t)| \leq C e^{at}, \quad t \geq 0. \quad (2.9)$$

Τότε, γράφοντας τον μιγαδικό αριθμό  $z$  στη μορφή

$$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad (2.10)$$

διαπιστώνουμε ότι

$$|e^{-zt} f(t)| = e^{-xt} |f(t)| \leq C e^{-(x-a)t}. \quad (2.11)$$

Συνεπώς, για κάθε  $z \in \mathbb{C}$  με  $x := \operatorname{Re} z > a$ ,

$$\int_0^\infty |e^{-zt} f(t)| dt \leq \int_0^\infty C e^{-(x-a)t} dt = -\frac{C}{x-a} e^{-(x-a)t} \Big|_0^\infty = \frac{C}{x-a}. \quad (2.12)$$

Δηλαδή, το ολοκλήρωμα  $\int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt$  συγκλίνει απόλυτα και, άρα, συγκλίνει. Επιπλέον, η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη ως προς το  $z$  σε κάθε συμπαγές υποσύνολο της περιοχής  $\operatorname{Re} z > a$  του μιγαδικού επίπεδου  $\mathbb{C}_z$ . (Ας σημειωθεί ότι η πιο πάνω περιοχή αντιστοιχεί στο τμήμα  $\Omega_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > a\}$  του Ευκλείδειου επίπεδου).

Μάλιστα, το ίδιο ισχύει και για το ολοκλήρωμα  $\int_0^\infty \partial_z [e^{-zt} f(t)] dt$ , αφού

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |\partial_z [e^{-zt} f(t)]| dt &= \int_0^\infty |z e^{-zt} f(t)| dt \leq \\ &\int_0^\infty C (x^2 + y^2)^{1/2} e^{-(x-a)t} dt = \frac{C(x^2 + y^2)^{1/2}}{x-a}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Αυτό συνεπάγεται ότι

$$\tilde{f}'(z) := \partial_z \int_0^\infty e^{-zt} f(t) dt = - \int_0^\infty z e^{-zt} f(t) dt. \quad (2.14)$$

Δηλαδή η παράγωγος  $\tilde{f}'(z)$  της μιγαδικής συνάρτησης  $\tilde{f}(z)$  υπάρχει σε κάθε  $z$  με  $\operatorname{Re} z > a$ . Συνεπώς, η  $\tilde{f}(z)$  ορίζεται και είναι ολομορφική σε όλη την περιοχή  $\operatorname{Re} z > a$ , τουλάχιστον.

Και λέμε τουλάχιστον, γιατί η  $\tilde{f}(z)$  μπορεί να είναι ολομορφική σε ευρύτερες περιοχές του  $\mathbb{C}_z$ . Αυτό φαίνεται αμέσως από το πρώτο κίολας από τα παραδείγματα που δώσαμε παραπάνω: Στην περίπτωση της συνάρτησης  $f(t) = 1$ , η παράμετρος  $a = 0$ . Άρα, η προηγούμενη ανάλυση εξασφαλίζει ότι η  $\tilde{f}(z)$  είναι ολομορφική στο ημιεπίπεδο  $\operatorname{Re} z > 0$ . Όμως, σύμφωνα με την (2.2), όταν  $f(t) = 1$ , τότε η  $\tilde{f}(z) = z^{-1}$  που είναι ολομορφική στην ευρύτερη περιοχή  $\mathbb{C}_z \setminus \{0\}$  και όχι μόνο στο ημιεπίπεδο  $\operatorname{Re} z > 0$ .

Με βάση τους προηγούμενους υπολογισμούς και τη γραμμικότητα της ολοκλήρωσης, συνάγουμε και το ακόλουθο αποτέλεσμα: Όταν η  $f(t)$  είναι ένα πολυώνυμο βαθμού  $n$ , δηλαδή της μορφής

$$f(t) = \sum_{m=0}^n c_m t^m, \quad (2.15)$$

τότε

$$\tilde{f}(z) = \sum_{m=0}^n c_m \frac{m!}{z^{m+1}}. \quad (2.16)$$

Προφανώς, η συνάρτηση  $\tilde{f}(z)$  είναι ολομορφική σε όλο το μιγαδικό επίπεδο  $\mathbb{C}_z$ , εκτός από το σημείο  $z = 0$ . Το τελευταίο είναι πόλος τάξης  $(m + 1)$  της  $\tilde{f}(z)$ .

Η απεικόνιση  $\mathcal{L}: f \rightarrow \tilde{f}$  που ορίζεται στην (2.8) ονομάζεται **μετασχηματισμός Laplace** και συναντιέται σε πολλές εφαρμογές και ιδιαίτερα στον τομέα των διαφορικών εξισώσεων. Η συνάρτηση  $\tilde{f}(z) \equiv (\mathcal{L} f)(z)$  αναφέρεται ως **μετασχηματισμός Laplace της  $f(t)$** .

Στην πραγματικότητα, ο μετασχηματισμός Laplace αποτελεί μίαν ειδική περίπτωση των μετασχηματισμών Fourier που εισαγάγαμε σε προηγούμενο εδάφιο κι αυτό προκύπτει άμεσα από την εξής παρατήρηση: Όταν η συνάρτηση  $f(t)$  μηδενίζεται για κάθε  $t < 0$ , τότε ο αντίστοιχος μετασχηματισμός Fourier,

$$\hat{f}(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) dx, \quad (2.17)$$

ανάγεται στο ολοκλήρωμα

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-ikx} f(x) dx. \quad (2.18)$$

Από την άλλη, η αντικατάσταση

$$z = ik \quad (2.19)$$

μετατρέπει τον μετασχηματισμό Laplace της  $f(t)$ ,

$$\tilde{f}(z) := \int_0^{\infty} e^{-zt} f(t) dt, \quad (2.20)$$

στη συνάρτηση

$$\tilde{f}(ik) := \int_0^{\infty} e^{-ikt} f(t) dt. \quad (2.21)$$

Από τη σύγκριση των (2.18) και (2.21) αμέσως συνάγεται ότι,

$$\boxed{\tilde{f}(ik) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(k)} \quad (2.22)$$

Θα πρέπει, βέβαια, να σημειώσουμε πως, όταν η παράμετρος  $z \in \mathbb{C}$ , τότε το ίδιο ισχύει και για την  $k = -iz$ . Μάλιστα, αν γράψουμε τον μιγαδικό αριθμό  $z = x + iy$  στη μορφή  $z = r e^{i\theta}$ , όπου  $r, \theta$  πολικές συντεταγμένες, θα δούμε ότι  $k = -iz = r e^{i(\theta - \pi/2)}$ . Αυτό σημαίνει ότι ο μιγαδικός αριθμός  $k$  προκύπτει στρίβοντας (το βέλος που παριστάνει) τον  $z$  κατά  $90^\circ$ , με τη φορά των δεικτών ενός ρολογιού. Συνακόλουθα, η σχέση (2.22) ισχύει μόνο στο βαθμό που έχουμε επεκτείνει τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier σε μιγαδικές τιμές της παραμέ-

τρού  $k$ . Γιατί, το  $k \in \mathbb{R}$  εάν και μόνον όσο η παράμετρος  $z$  παραμένει πάνω στον άξονα των φανταστικών αριθμών του μιγαδικού επίπεδου  $\mathbb{C}_z$ .

Σε κάθε περίπτωση, η (2.22) μας επιτρέπει να υπολογίζουμε τον μετασχηματισμό Laplace κάθε συνάρτησης  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ , με πεδίο ορισμού το σύνολο των μη αρνητικών αριθμών,  $\mathbb{R}_+$ , από τον αντίστοιχο μετασχηματισμό Fourier και αντίστροφα.

Μια σειρά από ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace προκύπτουν αμέσως από τον ορισμό του. Για να παραθέσουμε ορισμένες από αυτές, υιοθετούμε τον συμβολισμό του Folland και ονομάζουμε  $\mathcal{E}$  την κλάση των τμηματικά συνεχών συναρτήσεων που έχουν ως πεδίο ορισμού την ημιευθεία  $[0, \infty)$  και πληρούν τη συνθήκη (2.9).

Θα πρέπει, βέβαια, να σημειώσουμε ότι κάθε συνάρτηση  $F(t)$  που έχει ως πεδίο ορισμού ολόκληρη την πραγματική ευθεία μπορεί να ενταχθεί στην κατηγορία  $\mathcal{E}$ , αρκεί να υπακούει στον περιορισμό  $|F(t)| \leq C e^{at}$ , στο διάστημα  $t \geq 0$ . Γιατί, τότε, η συνάρτηση  $f(t) := F(t)$ ,  $t \geq 0$ , ανήκει στην κλάση  $\mathcal{E}$ , αυτομάτως.

Αντίστροφα, κάθε συνάρτηση  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$  που ανήκει στην κλάση  $\mathcal{E}$  μπορεί να μετατραπεί σε μια που έχει ως πεδίο ορισμού ολόκληρη την πραγματική ευθεία, θέτοντας

$$F(t) := H(t) f(t), \quad \text{όπου } H(t) := \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases} \quad (2.23)$$

Η πρώτη και κύρια ιδιότητα του μετασχηματισμού Laplace είναι η γραμμικότητά του: Αν ο μετασχηματισμός Laplace των συναρτήσεων  $f, g$  υπάρχει, τότε

$$\mathcal{L}(\kappa f + \lambda g) = \kappa \mathcal{L} f + \lambda \mathcal{L} g \quad (2.24)$$

για οποιοδήποτε ζευγάρι σταθερών  $\kappa, \lambda$ . Με την ακόλουθη προϋπόθεση: Το πεδίο ορισμού της  $\tilde{f} = \mathcal{L} f$  δεν είναι ξένο από το πεδίο ορισμού της  $\tilde{g} = \mathcal{L} g$ .

Γιατί, τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων  $\tilde{f} = \mathcal{L} f$  και  $\tilde{g} = \mathcal{L} g$  είναι, γενικά, διαφορετικά. Για παράδειγμα, αν οι συναρτήσεις  $f, g$  ανήκουν στην κλάση  $\mathcal{E}$ , τότε υπάρχουν δύο ζευγάρια σταθερών, ας τα πούμε  $\{C_1, a_1\}$  και  $\{C_2, a_2\}$ , αντίστοιχα, τέτοια που  $|f(t)| \leq C_1 e^{a_1 t}$  και  $|g(t)| \leq C_2 e^{a_2 t}$ , για κάθε  $t \in \mathbb{R}_+$ . Συνακόλουθα, η  $\tilde{f}$  είναι ολομορφική στο τμήμα  $\text{Re } z > a_1$  του μιγαδικού επίπεδου  $\mathbb{C}_z$ , τουλάχιστον, ενώ η  $\tilde{g}$  είναι ολομορφική στο τμήμα  $\text{Re } z > a_2$ , τουλάχιστον. Γενικά,  $a_1 \neq a_2$ .

Ωστόσο, αν θέσουμε  $a = \max\{a_1, a_2\}$ ,  $C = \max\{C_1, C_2\}$ , τότε οι  $f, g$  θα πληρούν τις συνθήκες  $|f(t)| \leq C e^{at}$  και  $|g(t)| \leq C e^{at}$ . Συνεπώς, η (2.24) θα ισχύει οπωσδήποτε στο τμήμα  $\text{Re } z > a$  του μιγαδικού επίπεδου  $\mathbb{C}_z$ , όπου και οι δύο συναρτήσεις  $\tilde{f}$  και  $\tilde{g}$  ορίζονται και είναι αναλυτικές.

Από τις υπόλοιπες ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace ιδιαίτερα χρήσιμες είναι οι ακόλουθες:

$$\mathcal{L}[f(kt)] = k^{-1} \mathcal{L}f(k^{-1}z), \quad k > 0, \quad (2.25)$$



$$\mathcal{L}[e^{ct} f(t)] = \mathcal{L} f(z - c), \quad c \in \mathbb{C}, \quad (2.26)$$

$$\mathcal{L}[H(t - b) f(t - b)] = e^{-bz} \mathcal{L} f(z), \quad b > 0, \quad (2.27)$$

$$\mathcal{L}[t f(t)] = -(\mathcal{L} f)'(z). \quad (2.28)$$

$$\mathcal{L}[f'(t)] = z \mathcal{L} f(z) - f(0). \quad (2.29)$$

Η τελευταία ισχύει, με την προϋπόθεση ότι η  $f$  είναι συνεχής, με τμηματικά συνεχή παράγωγο στο  $[0, \infty)$  και η  $f' \in \mathcal{E}$ .

Επιπλέον,

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(s) ds\right] = z^{-1} \mathcal{L} f(z) \quad (2.30)$$

και, αν η  $t^{-1} f(t) \in \mathcal{E}$ , τότε

$$\mathcal{L}[t^{-1} f(t)] = \int_z^\infty \mathcal{L} f(s) ds, \quad (2.31)$$

όπου η ολοκλήρωση γίνεται κατά μήκος οποιασδήποτε καμπύλης του μιγαδικού επίπεδου, που ξεκινάει από το  $z$  και κατά μήκος της οποίας το  $\text{Im } s$  παραμένει φραγμένο, ενώ το  $\text{Re } s \rightarrow \infty$ .

Με εξαίρεση την τελευταία, όλες οι παραπάνω ιδιότητες αποδειχονται πολύ εύκολα. Το ίδιο ισχύει και για τη σχέση

$$\mathcal{L}(f * g) = (\mathcal{L} f)(\mathcal{L} g), \quad (2.32)$$

όπου  $f * g$  η συνέλιξη δύο συναρτήσεων  $f, g$  που ανήκουν στην κλάση  $\mathcal{E}$ . Αυτή μπορεί να θεωρηθεί ως παράγωγο της αντίστοιχης σχέσης που αποδείξαμε για τους μετασχηματισμούς Fourier. Το μόνο που αξίζει να σημειώσουμε είναι το εξής: Επειδή οι  $f, g$  μηδενίζονται όταν το όρισμά τους γίνεται αρνητικό, η συνέλιξή τους ανάγεται σε ένα συνηθισμένο, αντί για καταχρηστικό, ολοκλήρωμα:

$$(f * g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau) g(\tau) d\tau = \int_0^t f(t - \tau) g(\tau) d\tau. \quad (2.33)$$

Αυτό το γεγονός συνεπάγεται ότι, αν οι  $f, g \in \mathcal{E}$ , τότε το ίδιο ισχύει και για την συνέλιξή τους.

Οι παραπάνω ιδιότητες, σε συνδυασμό με πίνακες σαν αυτόν που ακολουθεί, μας επιτρέπουν να υπολογίσουμε αρκετά εύκολα τον μετασχηματισμό Laplace ακόμη και περίπλοκων συναρτήσεων. Ωστόσο, από τη σκοπιά των εφαρμογών, ιδιαίτερα χρήσιμα είναι τα πακέτα αυτόματων αλγεβρικών υπολογισμών, σαν τα *Mathematica* και *Maple*.

$f(t)$	$\tilde{f}(z)$
1	$z$
$t^n, n \in \mathbb{N},$	$\frac{n!}{z^{n+1}}$
$t^\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -2, \dots\}$	$\frac{\Gamma(\lambda+1)}{z^{\lambda+1}}$
$t^\lambda e^{-at}$	$\frac{\Gamma(\lambda+1)}{(z+a)^{\lambda+1}}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{a^2+z^2}$
$\cos(at)$	$\frac{z}{a^2+z^2}$
$e^{-at} \sin(bt)$	$\frac{b}{b^2+(z+a)^2}$
$e^{-at} \cos(bt)$	$\frac{z+a}{b^2+(z+a)^2}$
$\sinh(at)$	$\frac{z}{z^2-a^2}$
$\cosh(at)$	$\frac{z}{z^2-a^2}$
$\operatorname{erf}(a\sqrt{t})$	$\frac{ a }{z\sqrt{a^2+z}}$

## Ασκήσεις

**2.1** Να προσδιοριστεί ποιες από της παρακάτω συναρτήσεις, με πεδίο ορισμού το διάστημα  $[0, \infty)$ , ανήκουν στην κλάση  $\mathcal{E}$ .

(i)  $f(t) = \sqrt{t}$ , (ii)  $g(t) = t e^t$ , (iii)  $h(t) = t e^{t^2}$ ,

(iv)  $f(t) = t \ln t$ , (v)  $g(t) = t \sin(t^2)$ , (vi)  $h(t) = (1 - 2t + 3t^2) e^{3t}$ .

**2.2** Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace,  $\tilde{f}(z)$ , των παρακάτω συναρτήσεων, με βάση τον αντίστοιχο ορισμό. Σε κάθε περίπτωση, να ελεγχθεί αν η  $f \in \mathcal{E}$  και να προσδιοριστεί η περιοχή στην οποία η  $\tilde{f}(z)$  είναι ολομορφική.

(i)  $f(t) = \sqrt{t}$ , (ii)  $f(t) = 1/\sqrt{t}$ , (iii)  $f(t) = t^\lambda, \lambda \notin \{-1, -2, -3, \dots\}$ ,

(iv)  $f(t) = \sin t$ , (v)  $f(t) = \cos t$ , (vi)  $f(t) = t \sin t$ ,

(vii)  $f(t) = \sinh t$ , (viii)  $f(t) = \cosh t$ , (ix)  $f(t) = t \cosh t$ ,

**2.3** N' αποδειχτούν οι σχέσεις (2.25) - (2.29).

**2.4** N' αποδειχτούν οι σχέσεις (2.30) και (2.31).

**2.5** Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Laplace των παρακάτω συναρτήσεων, χρησιμοποιώντας αποκλειστικά και μόνο τ' αποτελέσματα της Άσκ. 2.2 και τις σχέσεις (2.25) - (2.29).

$$(i) f(t) = H(t-1)\sqrt{t-1} + H(t-2)\sqrt{t-2},$$

$$(ii) f(t) = \sinh 3t / \sqrt{t}, \quad (iii) f(t) = t^{-3} \sinh 3t - 4t^5 \cosh(t-3),$$

$$(iv) f(t) = 2 \sin 2t + 3t \cos 3t, \quad (v) f(t) = t \cos(t-4) + (t-5) \sin t,$$

### 3. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace

Όπως ήδη αναφέραμε, ο μετασχηματισμός Laplace μπορεί να θεωρηθεί ως ειδική περίπτωση του μετασχηματισμού Fourier. Έτσι, γενικά και ειδικά αποτελέσματα που έχουν αποδειχτεί για τον δεύτερο μπορεί να μεταφερθούν αμέσως στον πρώτο. Για παράδειγμα, στηριζόμενοι στο αντίστοιχο αποτέλεσμα για τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier, μπορούμε ν' αποδείξουμε την ακόλουθη βασική πρόταση:

**Θεώρημα 3.1.** *Ας υποθέσουμε ότι η  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$  πληροί τη συνθήκη  $|f(t)| \leq C e^{at}$  και είναι τμηματικά συνεχής στο διάστημα  $[0, \infty)$ . Αν το  $b > a$ , τότε*

$$\frac{1}{2}[f(t-) + f(t+)] = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iR}^{b+iR} \tilde{f}(z) e^{zt} dz, \quad (3.1)$$

$\forall t \in [0, \infty)$ . Ειδικότερα, το δεξί μέλος της (3.1) είναι ίσο με  $(1/2) f(0+)$  στο  $t = 0$ .

**Πόρισμα 3.1.** *Αν οι  $f, g$  πληρούν τις συνθήκες του θεωρήματος και  $\tilde{f}(z) = \tilde{g}(z)$ , τότε  $f(t) = g(t)$ , σε κάθε σημείο  $t \in \mathbb{R}_+$  όπου και οι δύο είναι συνεχείς.*

Από το προηγούμενο θεώρημα οδηγούμαστε στο να υιοθετήσουμε ως **αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace** την απεικόνιση  $\mathcal{L}^{-1} : g \rightarrow \mathcal{L}^{-1} g$  που ορίζεται από τον τύπο

$$\mathcal{L}^{-1} g(t) := \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iR}^{b+iR} g(z) e^{zt} dz. \quad (3.2)$$

Το λεγόμενο **ολοκλήρωμα (του) Bromwitz** που εμφανίζεται στο δεξί μέλος αυτού του τύπου υπολογίζεται κατά μήκος μιας ευθείας, η οποία είναι παράλληλη προς τον άξονα των φανταστικών του μιγαδικού επιπέδου  $\mathbb{C}_z$  και αφήνει όλες της ανωμαλίες της  $g(z)$  στ' αριστερά της. Η ακριβέστερη περιγραφή της θα γίνει σαφής από τα παραδείγματα που ακολουθούν.

#### Παράδειγμα 3.1

Η συνάρτηση

$$g(z) = \frac{z}{z^2 + m^2} \quad (3.3)$$

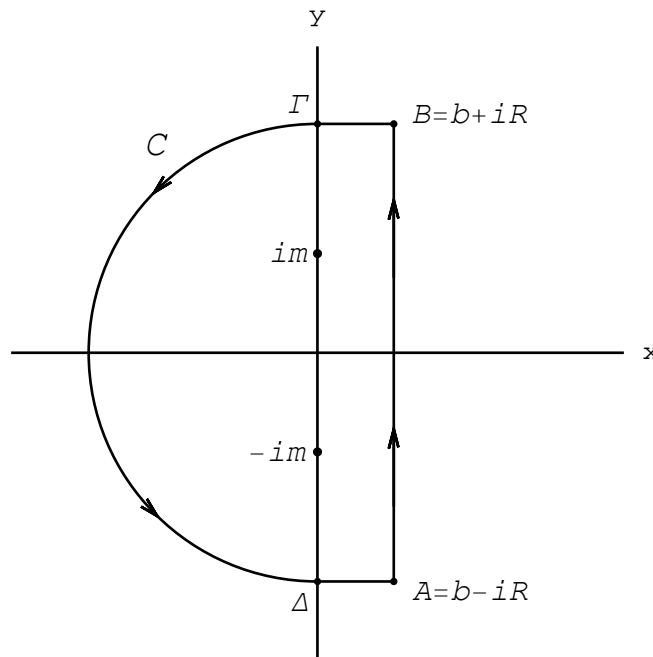
είναι μερομορφική, με πόλους στα σημεία  $z_1 = im$  και  $z_2 = -im$ .

Αν η σταθερή  $m$  είναι πραγματική, μπορούμε να τη θεωρήσουμε θετική, χωρίς βλάβη της γενικότητας. Τότε, τα σημεία  $z_1$  και  $z_2$  βρίσκονται πάνω στον άξονα των φανταστικών,  $y$ , όπως στο Σχ. 3.1. Σ' αυτή την περίπτωση, η παράμετρος  $b$  στο ολοκλήρωμα Bromwitz μπορεί να είναι οποιοσδήποτε θετικός αριθμός.

Στην περίπτωση που η σταθερή  $m$  έχει και μη μηδενικό φανταστικό μέρος, οπότε  $m = \lambda + i\nu$ ,  $\nu \neq 0$ , οι πόλοι της  $g(z)$  βρίσκονται στα σημεία  $z_1 = im = -\nu + i\lambda$ , και  $z_2 = -im = \nu - i\lambda$ . Σ' αυτή την περίπτωση, η παράμετρος  $b$  θα πρέπει να επιλεγεί μεγαλύτερη από την  $|\nu|$ .

Σε κάθε περίπτωση, επιλέγουμε την (αρχική) τιμή της παραμέτρου  $R$  μεγαλύτερη από το μέτρο  $|m| = \sqrt{\lambda^2 + \nu^2}$  της σταθερής  $m$  και κατασκευάζουμε το προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  που οδηγεί από το σημείο  $A = b - iR$  στο  $B = b + iR$ . Στη συνέχεια, ενώνουμε τα δύο άκρα αυτού του ευθύγραμμου τμήματος με μια τμηματικά ομαλή καμπύλη,  $C_2$ , με τρόπο ώστε να σχηματιστεί ένας κλειστός δρόμος  $C$  που περικλείνει τους πόλους.

Μια από τις πολλές κατάλληλες επιλογές για την τμηματικά ομαλή καμπύλη  $C_2$  που ενώνει τα σημεία  $A$  και  $B$  φαίνεται στο Σχ. 3.1. Αποτελείται από το οριζόντιο ευθύγραμμο τμήμα  $B\Gamma$ , το ημικύκλιο  $\Gamma\Delta$  και, τέλος, το οριζόντιο ευθύγραμμο τμήμα  $\Delta A$ .



**Σχ. 3.1.** Ο κλειστός δρόμος  $C$ , κατά μήκος του οποίου υπολογίζεται το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα  $\oint_C g(z) e^{zt} dz$  της (3.4).

Η επιλογή να βρίσκεται το τμήμα  $C_2$  της κλειστής καμπύλης  $C$  προς τ'αριστερά του του ευθύγραμμου τμήματος  $AB$  υπαγορεύεται από την εξής λογική: Αφού η  $g(z)$  είναι μερομορφική, για κάθε κλειστή καμπύλη  $C$  που παρακάμπτει τους πόλους της, ισχύει ότι

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C g(z) e^{zt} dz = \sum_j \text{Res} [g(z) e^{zt}, z_j]. \quad (3.4)$$

Σ' αυτή τη σχέση, το σύνολο  $\{z_j\}$  αποτελείται από τους πόλους της  $g(z)$  που βρίσκονται στο εσωτερικό της περιοχής την οποία περιβάλλει η  $C$ .

Από την άλλη,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint g(z) dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_A^B g(z) dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} g(z) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iR}^{b+iR} g(z) e^{zt} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} g(z) e^{zt} dz \end{aligned} \quad (3.5)$$

Συνεπώς,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iR}^{b+iR} g(z) e^{zt} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} g(z) e^{zt} dz = \sum_j \text{Res} [g(z) e^{zt}, z_j]. \quad (3.6)$$

Η  $g(z)$  είναι μια απλή ρητή συνάρτηση. Έτσι, τα υπόλοιπά της στους πόλους υπολογίζονται εύκολα. Άρα, και το όριο του πρώτου ολοκληρώματος στην (3.6), καθώς το  $R \rightarrow \infty$ , υπολογίζεται εύκολα, μόλις καθοριστεί η συμπεριφορά του δεύτερου.

Τώρα, από την πολική μορφή  $z = r e^{i\theta}$  του τυχαίου μιγαδικού αριθμού  $z$  (που δηλώνει πως η  $|z| = r$ ) συνάγεται ότι

$$\begin{aligned} \left| \frac{z}{z^2 + m^2} \right| &= \left| \frac{r e^{i\theta}}{r^2 e^{2i\theta} + m^2} \right| = \left| \frac{r e^{i\theta}}{r^2 e^{2i\theta} + m^2} \frac{r e^{-i\theta}}{r^2 e^{-2i\theta} + m^2} \right|^{1/2} \\ &= \frac{r}{[r^4 + m^4 + 2r^2 m^2 \cos(2\theta)]^{1/2}} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Από την άλλη, έχουμε υποθέσει πως το  $m > 0$ . Συνεπώς, η  $g(z)$  παραμένει φραγμένη στην περιοχή  $r > |m|$  και μάλιστα

$$|g(z)| \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0. \quad (3.8)$$

Οι προηγούμενες παρατηρήσεις οδηγούν αμέσως στα εξής συμπεράσματα:

(i) Κατά μήκος του τμήματος  $B\Gamma$ , το  $z = x + iR$ , οπότε

$$\begin{aligned} \left| \int_B^\Gamma g(z) e^{zt} dz \right| &\leq \int_B^\Gamma |g(z)| |e^{zt}| dz \leq \\ \max_{z \in B\Gamma} |g(z)| \int_B^\Gamma e^{xt} dx &= \max_{z \in B\Gamma} |g(z)| \frac{e^{bt} - 1}{t}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Αφού το  $b$  είναι σταθερό και η  $|z| = \sqrt{x^2 + R^2} \rightarrow \infty$ , καθώς το  $R \rightarrow \infty$ , οι (3.8) και (3.9) συνεπάγονται ότι

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_B^\Gamma \frac{z}{z^2 + m^2} e^{zt} dz = 0, \quad t > 0. \quad (3.10)$$

(ii) Ανάλογα, κατά μήκος ευθύγραμμου τμήματος  $\Delta A$ , το  $z = x - iR$ , οπότε

$$\left| \int_{\Delta}^A g(z) e^{z t} d z \right| \leq \int_{\Delta}^A |g(z)| |e^{z t}| d z \leq \max_{z \in \Delta A} |g(z)| \int_{\Delta}^A e^{x t} d x = \max_{z \in \Delta A} |g(z)| \frac{e^{b t} - 1}{t}. \quad (3.11)$$

Συνεπώς,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Delta}^A \frac{z}{z^2 + m^2} e^{z t} d z = 0, \quad t > 0. \quad (3.12)$$

(iii) Κατά μήκος του κυκλικού τόξου  $\Gamma \Delta$ , το  $z = R e^{i \theta}$ , οπότε  $|e^{z t}| = e^{t R \cos \theta}$ , με τη γωνία  $\theta$  να διατρέχει το διάστημα  $[\pi/2, 3\pi/2]$ . Συνεπώς, για  $t > 0$ , ο εκθέτης της  $e^{t R \cos \theta}$  παραμένει αρνητικός σε όλο το ανοιχτό διάστημα  $\pi/2 < \theta < 3\pi/2$ . Αυτό το γεγονός, σε συνδυασμό με τη συμπεριφορά της  $|g(z)|$  που αναφέραμε νωρίτερα, συνεπάγεται ότι

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|z|=R} \frac{z}{z^2 + m^2} e^{z t} d z = 0, \quad t > 0. \quad (3.13)$$

Από τα προηγούμενα αποτελέσματα αμέσως συνάγεται ότι

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iR}^{b+iR} g(z) e^{z t} d z &= \text{Res} [g(z) e^{z t}, z_1] + \text{Res} [g(z) e^{z t}, z_2] \\ &= \frac{z_1}{z_1 - z_2} e^{z_1 t} + \frac{z_2}{z_2 - z_1} e^{z_2 t} = \frac{1}{2} e^{i m t} + \frac{1}{2} e^{-i m t} = \cos m t \end{aligned} \quad (3.14)$$

Με άλλα λόγια,

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{z}{z^2 + m^2} \right] (t) = \cos m t} \quad (3.15)$$

■

### Παράδειγμα 3.2

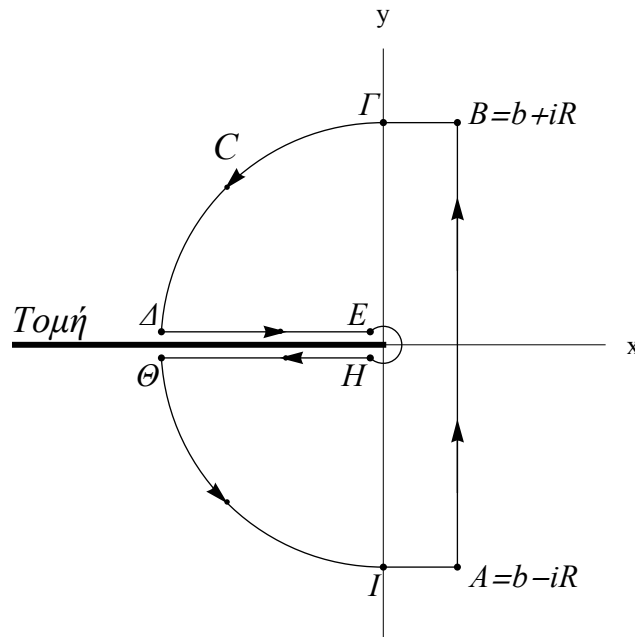
Για τη συνάρτηση

$$g(z) = \frac{e^{-a \sqrt{z}}}{\sqrt{z}}, \quad a > 0 \quad (3.16)$$

το  $z = 0$  είναι κλαδικό σημείο. Αν λοιπόν από το μιγαδικό επίπεδο  $\mathbb{C}_z$  αφαιρέσουμε την ημιευθεία  $L := \{z = x + i y : x = \text{Re } z < 0\}$ , τότε η  $g(z)$  μπορεί να γίνει ολομορφική και μονότιμη σε όλη την περιοχή  $\mathbb{C}_z \setminus L$ . Για το σκοπό αυτό αρκεί να περιοριστούμε σε κάποιον συγκεκριμένο κλάδο της. Εμείς θα επιλέξουμε αυτόν που δίνει  $\sqrt{z} = 1$ , όταν  $z = 1$ .

Για να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace αυτής της συνάρτησης, προσθέτουμε στο ευθύγραμμο  $C_1$  που ενώνει τα σημεία  $A = b - i R$  και  $B = b + i R$ ,  $b > 0$ , μια

καμπύλη  $C_2$ , με τρόπο ώστε να σχηματιστεί ένας κλειστός δρόμος  $C$  που παρακάμπτει την τομή. Μια επιλογή για την  $C_2$  είναι αυτή που δείχνουμε στο Σχ. 3.2.



**Σχ. 3.2.** Ο κλειστός δρόμος  $C$  που χρησιμοποιούμε για τον υπολογισμό του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace της συνάρτησης  $e^{-a\sqrt{z}} / \sqrt{z}$ .

Αναλυτικότερα, η  $C_2$  αποτελείται από τα ευθύγραμμα τμήματα  $B\Gamma$ ,  $\Delta E$ ,  $H\Theta$  και  $IA$ , που είναι παράλληλα προς τον άξονα  $x$ , και τα κυκλικά τόξα  $\Gamma\Delta$ ,  $EH$ , και  $\Theta I$ . Η ακτίνα του τελευταίου είναι ίση με  $\varepsilon$ , όπου  $\varepsilon < b < R$ .

Το γεγονός ότι η  $g(z)$  είναι ολομορφική (αναλυτική) στην περιοχή  $C_z \setminus L$  συνεπάγεται ότι (Θεώρημα Cauchy)

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C g(z) e^{zt} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iR}^{b+iR} g(z) e^{zt} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} g(z) e^{zt} dz = 0. \quad (3.17)$$

Άρα,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iR}^{b+iR} g(z) e^{zt} dz = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} g(z) e^{zt} dz. \quad (3.18)$$

Συνακόλουθα,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iR}^{b+iR} g(z) e^{zt} dz = \lim_{R \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0} \frac{i}{2\pi} \int_{C_2} g(z) e^{zt} dz. \quad (3.19)$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας την πολική μορφή  $z = r e^{i\theta}$  αμέσως συμπεραίνουμε ότι



$$|g(z)| = \left| \frac{e^{-a\sqrt{z}}}{\sqrt{z}} \right| = \left| \frac{e^{-a\sqrt{r} e^{i\theta/2}}}{\sqrt{r} e^{i\theta/2}} \right| = \frac{e^{-a\sqrt{r} \cos(\theta/2)}}{\sqrt{r}}. \quad (3.20)$$

Αφού το  $a > 0$ , η (3.20) σημαίνει ότι η  $|g(z)|$  παραμένει φραγμένη σε όλη την περιοχή  $r > 0$ ,  $-\pi < \theta < \pi$ , και μηδενίζεται καθώς το  $r \rightarrow \infty$ . Άρα

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} \frac{e^{-a\sqrt{z}}}{\sqrt{z}} e^{zt} dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Theta} \frac{e^{-a\sqrt{z}}}{\sqrt{z}} e^{zt} dz = 0, \quad t > 0. \quad (3.21)$$

Από την άλλη,

$$\begin{aligned} \left| \int_E^H g(z) e^{zt} dz \right| &\leq \int_E^H |g(z) e^{zt}| dz \leq \max_{|z|=\varepsilon} |g(z) e^{zt}| \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon d\theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} e^{\varepsilon t} 2\pi\varepsilon = 2\pi\sqrt{\varepsilon} e^{\varepsilon t}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Συνεπώς,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_E^H g(z) e^{zt} dz = 0. \quad (3.23)$$

Με τον ίδιο τρόπο, συμπεραίνουμε ότι η συνεισφορά των ευθύγραμμων τμημάτων  $BF$  και  $IA$  μηδενίζεται καθώς το  $R \rightarrow \infty$ .

Μένει να υπολογίσουμε τη συνεισφορά των ευθύγραμμων τμημάτων  $\Delta E$  και  $H\Theta$  που είναι παράλληλα προς την τομή  $L$ .

Αρχικά, θα σημειώσουμε ότι, η απόσταση των παραπάνω ευθύγραμμων τμημάτων από την τομή  $L$  μπορεί να θεωρηθεί μηδενική. Αυτό σημαίνει ότι η γωνία  $\theta$  παίρνει την τιμή  $\pi$  στο τμήμα  $\Delta E$  και  $-\pi$  στο τμήμα  $H\Theta$ .

Συνεπώς, κατά μήκος του  $\Delta E$ , το  $z = x = r e^{i\pi} = -r$ . Άρα,  $\sqrt{z} = \sqrt{r} e^{i\pi/2} = i\sqrt{r}$  και έτσι,

$$\begin{aligned} \int_{\Delta}^E g(z) e^{zt} dz &= \int_{\Delta}^E \frac{e^{-a\sqrt{z}}}{\sqrt{z}} e^{zt} dz = \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{-a\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} e^{xt} dx \\ &= - \int_R^{\varepsilon} \frac{e^{-ia\sqrt{r}}}{i\sqrt{r}} e^{-tr} dr = -i \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{ia\sqrt{r}}}{\sqrt{r}} e^{-tr} dr. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Ανάλογα, κατά μήκος του  $H\Theta$ ,  $z = x = r e^{-i\pi} = -r$ ,  $\sqrt{z} = \sqrt{r} e^{-i\pi/2} = -i\sqrt{r}$  και, άρα,

$$\begin{aligned} \int_H^\Theta g(z) e^{zt} dz &= \int_{-\varepsilon}^{-R} \frac{e^{-a\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} e^{xt} dx = - \int_{-\varepsilon}^{-R} \frac{e^{-ia\sqrt{r}}}{i\sqrt{r}} e^{-tr} dr \\ &= -i \int_\varepsilon^R \frac{e^{-ia\sqrt{r}}}{\sqrt{r}} e^{-tr} dr. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Συνακόλουθα,

$$\left( \int_\Delta^E + \int_H^\Theta \right) g(z) e^{zt} dz = -i \int_\varepsilon^R \frac{e^{ia\sqrt{r}} + e^{-ia\sqrt{r}}}{\sqrt{r}} e^{-tr} dr. \quad (3.26)$$

Αλλά, τότε,

$$\lim_{R \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_\Delta^E + \int_H^\Theta \right) g(z) e^{zt} dz = -i \int_0^\infty \frac{e^{ia\sqrt{r}} + e^{-ia\sqrt{r}}}{\sqrt{r}} e^{-tr} dr. \quad (3.27)$$

Το συνολικό συμπέρασμα της προηγούμενης ανάλυσης είναι ότι

$$\lim_{R \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} g(z) e^{zt} dz = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{e^{ia\sqrt{r}} + e^{-ia\sqrt{r}}}{\sqrt{r}} e^{-tr} dr. \quad (3.28)$$

Με την αλλαγή μεταβλητής  $r = s^2$ , αμέσως βρίσκουμε ότι

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{e^{ia\sqrt{r}} + e^{-ia\sqrt{r}}}{\sqrt{r}} e^{-tr} dr = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos(as) e^{-ts^2} ds. \quad (3.29)$$

Από την άλλη,

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos(as) e^{-ts^2} ds = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-ias} e^{-ts^2} ds. \quad (3.30)$$

Όμως, το τελευταίο ολοκλήρωμα το έχουμε υπολογίσει επανηλειμμένα. Ουσιαστικά, πρόκειται για τον μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης  $e^{-ts^2}$  και γνωρίζουμε ότι

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{-ias} e^{-ts^2} ds = \frac{e^{-a^2/4t}}{\sqrt{\pi t}}. \quad (3.31)$$

Συμπερασματικά,

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{e^{-a\sqrt{z}}}{\sqrt{z}} \right] (t) = \frac{e^{-a^2/4t}}{\sqrt{\pi t}}} \quad (3.32)$$

■

## Ασκήσεις

**3.1** Να υπολογιστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace των παρακάτω συναρτήσεων:

$$(i) g(z) = \frac{1}{z^2+4}, \quad (ii) g(z) = \frac{1}{z^2-2z+5}, \quad (iii) g(z) = \frac{z}{z^2+2z+5}$$

$$(iv) g(z) = \frac{1}{z^2-4}, \quad (v) g(z) = \frac{1}{z^2+4z+3}, \quad (vi) g(z) = \frac{z}{z^2+4z+3}$$

$$(vii) g(z) = \frac{1}{z^3+8}, \quad (viii) g(z) = \frac{z}{z^3+6z^2+13z+10}, \quad (ix) g(z) = \frac{z^2}{z^3+6z^2+13z+10}$$

$$(x) g(z) = \frac{1}{z^4+16}, \quad (xi) g(z) = \frac{1}{z^4-2z^3+2z^2-10z+25}, \quad (xii) g(z) = \frac{z}{z^4-2z^3+2z^2-10z+25}.$$

**3.2** Να υπολογιστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace των παρακάτω συναρτήσεων.

$$(i) g(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}, \quad (ii) g(z) = \frac{1}{\sqrt{z-1}}, \quad (iii) g(z) = \frac{1}{\sqrt{z+i}}$$

$$(iv) g(z) = e^{-a\sqrt{z}}, \quad (v) g(z) = e^{-a\sqrt{z+1}}, \quad (vi) g(z) = e^{-a\sqrt{z-i}}, \quad a > 0.$$

$$(vii) g(z) = \frac{1}{z} e^{-a\sqrt{z}}, \quad (viii) g(z) = \frac{1}{z^{3/2}} e^{-a\sqrt{z}}, \quad (ix) g(z) = \frac{1}{z^2} e^{-a\sqrt{z}}, \quad a > 0.$$

## 4. Επίλυση του ΠΑΤ για την εξίσωση της διάχυσης

Ο μετασχηματισμός Laplace είναι ένα από τα πιο αποτελεσματικά εργαλεία για την επίλυση προβλημάτων αρχικών τιμών, τόσο εκείνων που αφορούν συνήθεις διαφορικές εξισώσεις (ΣΔΕ), όσο κι αυτών που συνδέονται με τις μερικές. Και στις δυο περιπτώσεις, η εφαρμογή της αντίστοιχης μεθόδου προϋποθέτει ότι η προς επίλυση εξίσωση είναι γραμμική με σταθερούς συντελεστές.

Η τεχνική επίλυσης προβλημάτων αρχικών τιμών (ΠΑΤ) με τη χρήση του μετασχηματισμού Laplace είναι πανομοιότυπη εκείνης που στηρίζεται στον μετασχηματισμό Fourier. Η μόνη διαφορά βρίσκεται στο γεγονός ότι, η ανεξάρτητη μεταβλητή ως προς την οποία μετασχηματίζουμε κατά Laplace δεν μπορεί να διατρέχει ολόκληρη την πραγματική ευθεία, αλλά να περιορίζεται στο υποσύνολο  $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$ .

Για να δούμε τις λεπτομέρειες αυτής της τεχνικής, θα επιστρέψουμε στο ΠΑΤ

$$u_t = u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \quad (4.1)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (4.2)$$

για την εξίσωση της διάχυσης.

Επειδή, λοιπόν, η χρονική μεταβλητή  $t$  περιορίζεται στο διάστημα  $[0, \infty)$ , μπορούμε να μετασχηματίσουμε κατά Laplace τις συναρτήσεις που υπεισέρχονται στην ΜΔΕ  $u_t = u_{xx}$  ως προς  $t$ . Αυτή η ενέργεια, βέβαια, στηρίζεται στην ακόλουθη

**Υπόθεση εργασίας:** Οι συναρτήσεις που ορίζονται από τις  $u(x, t)$ ,  $u_t(x, t)$ ,  $u_x(x, t)$  και  $u_{xx}(x, t)$ , όταν το  $x$  θεωρείται σταθερό, ανήκουν στην κλάση  $\mathcal{E}$ .

Αυτή η υπόθεση οδηγεί αμέσως στα εξής συμπεράσματα:

α) Ο μετασχηματισμός Laplace,

$$\tilde{u}(x, z) := \int_0^\infty e^{-zt} u(x, t) dt, \quad (4.3)$$

της άγνωστης συνάρτησης  $u(x, t)$  ως προς τη μεταβλητή  $t$  ορίζεται για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  και  $\operatorname{Re} z > a$ .

β) Το ίδιο ισχύει και για τον μετασχηματισμό της εξίσωσης  $u_t = u_{xx}$ , δηλαδή

$$\int_0^\infty e^{-zt} u_t(x, t) dt = \int_0^\infty e^{-zt} u_{xx}(x, t) dt. \quad (4.4)$$

Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες το αριστερό μέλος της (4.4), βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-zt} u_t(x, t) dt &= \\ e^{-zt} u(x, t) \Big|_0^\infty + z \int_0^\infty e^{-zt} u(x, t) dt &= -u(x, 0) + z \tilde{u}(x, z). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Λαβαίνοντας υπόψη και την αρχική συνθήκη (4.2) αυτή γίνεται

$$\int_0^{\infty} e^{-zt} u_t(x, t) dt = -f(x) + z\tilde{u}(x, z). \quad (4.6)$$

Για να προχωρήσουμε, είναι απαραίτητο να υιοθετήσουμε μία επιπλέον υπόθεση. Συγκεκριμένα, θα υποθέσουμε ότι το ολοκλήρωμα που εμφανίζεται στο δεξί μέλος της (4.4) συγκλίνει ομοιόμορφα ως προς τη μεταβλητή  $x$ . Αυτή η υπόθεση μας επιτρέπει να συμπεράνουμε ότι

$$\int_0^{\infty} e^{-zt} u_{xx}(x, t) dt = \partial_x^2 \left[ \int_0^{\infty} e^{-zt} u(x, t) dt \right] \equiv \tilde{u}_{xx}(x, z). \quad (4.7)$$

Σύμφωνα, λοιπόν, με τις (4.6) και (4.7), η (4.4) γράφεται πλέον σαν

$$\tilde{u}_{xx}(x, z) - z\tilde{u}(x, z) = -f(x). \quad (4.8)$$

Η τελευταία είναι μια μη ομογενής γραμμική ΣΔΕ δεύτερης τάξης για την  $\tilde{u}(x, z)$ , στην οποία η μεταβλητή  $z$  παίζει το ρόλο της παραμέτρου (σταθερής).

Η κλασική μέθοδος επίλυσης μιας ΣΔΕ της μορφής (4.8) ξεκινάει με την εύρεση δύο γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων της αντίστοιχης ομογενούς. Ένας εναλλακτικός τρόπος, προσαρμοσμένος στις ανάγκες της παρούσας ανάλυσης υποδειχνεται στην Άσκ. 4.1.

Αφού θεωρούμε ότι  $z \neq 0$ , δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (4.8), όταν  $f(x) \equiv 0$ , είναι προφανώς οι

$$\tilde{u}_1 = e^{\lambda x}, \quad \tilde{u}_2 = e^{-\lambda x}, \quad \lambda := \sqrt{z}. \quad (4.9)$$

Αυτό σημαίνει ότι η γενική λύση της  $\tilde{u}_{xx}(x, z) - z\tilde{u}(x, z) = 0$  είναι της μορφής

$$\tilde{u}_0 = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x}. \quad (4.10)$$

Όσο αφορά τη γενική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης (4.8), αυτή απαρτίζεται από την γενική λύση (4.10) της ομογενούς και μια ειδική λύση της (4.8). Η τελευταία μπορεί να αναζητηθεί στη μορφή

$$\tilde{u} = C_1(x) e^{\lambda x} + C_2(x) e^{-\lambda x}. \quad (4.11)$$

Αυτός ο τρόπος εύρεσης μιας ειδικής λύσης της μη ομογενούς εξίσωσης, που είναι γνωστός ως **μέθοδος της μεταβολής των παραμέτρων**, οδηγεί στο ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$C_1(x) = \int_a^x \frac{f(y) u_2(y)}{W(u_1, u_2)} dy, \quad C_2(x) = - \int_a^x \frac{f(y) u_1(y)}{W(u_1, u_2)} dy. \quad (4.12)$$

Στα παραπάνω ολοκληρώματα, το  $a$  παριστάνει έναν τυχαίο πραγματικό αριθμό και η έκφραση  $W(u_1, u_2)$  την ορίζουσα Wronski των λύσεων  $\tilde{u}_1(x, z)$  και  $\tilde{u}_2(x, z)$  της ομογενούς.

Στην περίπτωση μας,

$$W(u_1, u_2) := \tilde{u}_1 \partial_x \tilde{u}_2 - (\partial_x \tilde{u}_1) \tilde{u}_2 = -2\lambda. \quad (4.13)$$

Συνεπώς,

$$C_1(x) = -\frac{1}{2\sqrt{z}} \int_a^x f(y) e^{-\lambda y} dy, \quad C_2(x) = \frac{1}{2\sqrt{z}} \int_a^x f(y) e^{\lambda y} dy. \quad (4.14)$$

Συμπερασματικά, η γενική λύση της μη ομογενούς ΣΔΕ (4.8) είναι της μορφής

$$\tilde{u} = e^{\lambda x} \left[ c_1 - \frac{1}{2\lambda} \int_a^x f(y) e^{-\lambda y} dy \right] + e^{-\lambda x} \left[ c_2 + \frac{1}{2\lambda} \int_a^x f(y) e^{\lambda y} dy \right]. \quad (4.15)$$

Ωστόσο, οι λύσεις που μας ενδιαφέρουν είναι αυτές που παραμένουν φραγμένες καθώς το  $x \rightarrow \pm\infty$  και, ειδικότερα, όταν το  $\lambda > 0$ . Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι η (4.15) οδηγεί αμέσως στις

$$e^{-\lambda x} \tilde{u} = c_1 - \frac{1}{2\lambda} \int_a^x f(y) e^{-\lambda y} dy + c_2 e^{-2\lambda x} + \frac{e^{-\lambda x}}{2\lambda} \int_a^x f(y) e^{-\lambda(x-y)} dy \quad (4.16)$$

και

$$e^{\lambda x} \tilde{u} = c_1 e^{2\lambda x} - \frac{e^{\lambda x}}{2\lambda} \int_a^x f(y) e^{\lambda(x-y)} dy + c_2 + \frac{1}{2\lambda} \int_a^x f(y) e^{\lambda y} dy. \quad (4.17)$$

Αν λοιπόν υποθέτουμε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| dy < \infty, \quad (4.18)$$

τότε από την (4.16) θα πάρουμε το εξής αποτέλεσμα:

$$0 = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\lambda x} \tilde{u} = c_1 - \frac{1}{2\lambda} \int_a^x f(y) e^{-\lambda y} dy. \quad (4.19)$$

Συνεπώς, η σταθερή  $c_1$  θα πρέπει να επιλεγεί ίση με

$$c_1 = \frac{1}{2\lambda} \int_a^x f(y) e^{-\lambda y} dy. \quad (4.20)$$

Ανάλογα, η (4.17) οδηγεί στο συμπέρασμα ότι

$$0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\lambda x} \tilde{u} = c_2 + \frac{1}{2\lambda} \int_a^{-\infty} f(y) e^{\lambda y} dy. \quad (4.21)$$

Άρα,

$$c_2 = -\frac{1}{2\lambda} \int_a^{-\infty} f(y) e^{\lambda y} dy \quad (4.22)$$

Με βάση τα παραπάνω αποτελέσματα, η λύση (4.15) παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{aligned} \tilde{u} = e^{\lambda x} & \left[ \frac{1}{2\lambda} \int_a^{\infty} f(y) e^{-\lambda y} dy - \frac{1}{2\lambda} \int_a^x f(y) e^{-\lambda y} dy \right] \\ & + e^{-\lambda x} \left[ -\frac{1}{2\lambda} \int_a^{-\infty} f(y) e^{\lambda y} dy + \frac{1}{2\lambda} \int_a^x f(y) e^{\lambda y} dy \right] \end{aligned} \quad (4.23)$$

Ισοδύναμα,

$$\tilde{u} = \frac{1}{2\lambda} \left\{ \int_x^\infty f(y) e^{\lambda(x-y)} dy - \int_{-\infty}^x f(y) e^{-\lambda(x-y)} dy \right\} \quad (4.24)$$

Με άλλα λόγια,

$$\tilde{u} = \frac{1}{2\lambda} \int_{-\infty}^\infty f(y) e^{-\lambda|x-y|} dy. \quad (4.25)$$

Τελικά, επαναφέροντας στο προσκήνιο την παράμετρο  $z$ , παίρνουμε την ακόλουθη έκφραση για τον μετασχηματισμό Laplace της άγνωστης συνάρτησης  $u(x, t)$  ως προς τη μεταβλητή  $t$ :

$$\tilde{u}(x, z) = \frac{1}{2\sqrt{z}} \int_{-\infty}^\infty f(y) e^{-\sqrt{z}|x-y|} dy. \quad (4.26)$$

Έχοντας βρει τον μετασχηματισμό Laplace μιας λύσης,  $u(x, t)$ , του ΠΑΤ (4.1-2), δεν μένει παρά να υπολογίσουμε τον αντίστροφό του. Από τον ορισμό του τελευταίου έπεται ότι

$$u(x, t) = (\mathcal{L}^{-1} \tilde{u})(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \tilde{u}(x, z) e^{zt} dz. \quad (4.27)$$

Συνεπώς,

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \left[ \frac{1}{2\sqrt{s}} \int_{-\infty}^\infty f(y) e^{-\sqrt{s}|x-y|} dy \right] e^{zt} dz. \quad (4.28)$$

Σε τούτο το σημείο κάνουμε την τελευταία μας υπόθεση: Θεωρούμε ότι η σειρά ολοκλήρωσης δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα, οπότε η (4.28) μετατρέπεται στην

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi i} \int_{-\infty}^\infty \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{s}} e^{zt-\sqrt{s}|x-y|} dz \right] f(y) dy. \quad (4.29)$$

Ισοδύναμα,

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{\sqrt{z}} e^{-\sqrt{z}|x-y|} \right] f(y) dy. \quad (4.30)$$

Όμως, τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace που εμφανίζεται στην τελευταία έκφραση τον υπολογίσαμε στο Παράδειγμα 2.2. Με βάση εκείνο το αποτέλεσμα,

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{\sqrt{z}} e^{-\sqrt{z}|x-y|} \right] = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-(x-y)^2/4t}. \quad (4.31)$$

Άρα,

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-(x-y)^2/4t} f(y) dy. \quad (4.32)$$

Όπως αναμενόταν, η λύση του ΠΑΤ (4.1-2), στην οποία οδηγηθήκαμε μέσω του μετασχηματισμού Laplace, είναι ίδια μ' εκείνη που βρήκαμε χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό Fourier.

## Ασκήσεις

### 4.1 Δίνεται η ΣΔΕ

$$f''(x) - f(x) = e^{-x^2}.$$

Να βρεθούν οι λύσεις της παραπάνω ΣΔΕ που παραμένουν φραγμένες καθώς το  $|x| \rightarrow \infty$ .

*Υπόδειξη:* Να χρησιμοποιηθεί η ακόλουθη

**Μέθοδος:** Μετασχηματίζουμε την ίδια την εξίσωση κατά Fourier και υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις  $f(x)$  και  $f'(x)$  μηδενίζονται καθώς το  $|x| \rightarrow \infty$ .

### 4.2 Δίνεται η ΣΔΕ

$$f''(x) - 4f(x) = s(x),$$

όπου  $s(x)$ ,  $-\infty < x < \infty$ , συνεχής συνάρτηση που μηδενίζεται καθώς το  $|x| \rightarrow \infty$ . Να βρεθούν οι λύσεις της παραπάνω ΣΔΕ που παραμένουν φραγμένες καθώς το  $|x| \rightarrow \infty$ , με τη μέθοδο που υποδειχεται στην προηγούμενη άσκηση.

### 4.3 α) Θεωρήστε τη ΣΔΕ

$$f''(x) - z^2 f(x) = s(x), \quad (*)$$

όπου  $z > 0$  και  $s(x)$ ,  $-\infty < x < \infty$ , συνεχής συνάρτηση που μηδενίζεται καθώς το  $|x| \rightarrow \infty$ . Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της Άσκ. 4.1, αποδείξτε την

#### Πρόταση 4.1

Οι λύσεις της (\*) που μένουν φραγμένες καθώς το  $|x| \rightarrow \infty$  δίνονται από τον τύπο

$$f(x) = \frac{1}{2z} \int_{-\infty}^{\infty} s(y) e^{-z|x-y|} dy.$$

### β) Θεωρήστε τη ΣΔΕ

$$f''(x) - z f(x) = s(x), \quad (**)$$

όπου  $z$  πραγματική σταθερή και  $s(x)$ ,  $-\infty < x < \infty$ , συνεχής συνάρτηση που μηδενίζεται καθώς το  $|x| \rightarrow \infty$ . Δείξτε ότι ισχύει η

#### Πρόταση 4.2

Οι λύσεις της (\*\*) που μένουν φραγμένες καθώς το  $|x| \rightarrow \infty$ , όταν  $Re \sqrt{z} > 0$ , δίνονται από τον τύπο

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{z}} \int_{-\infty}^{\infty} s(y) e^{-\sqrt{z}|x-y|} dy.$$

### 4.4 Να λυθεί το ΠΑΤ,

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad -\infty < x < \infty,$$

χρησιμοποιώντας τη μέθοδο με την οποία λύσαμε στο παρόν εδάφιο το ΠΑΤ για την εξίσωση



της διάχυσης.

**4.5** Χρησιμοποιώντας την ίδια μέθοδο και κατάλληλες υποθέσεις για τη συνάρτηση εξαναγκασμού  $s(x, t)$ , δείξτε ότι η λύση του ΠΑΤ

$$u_{tt} = u_{xx} + s(x, t), \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < \infty,$$

δίνεται από τον τύπο

$$u(x, t) = -\frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-t+s}^{x+t-s} s(y, s) dy ds.$$

**4.6** Θεωρήστε το ΠΑΤ

$$u_{xx} = \alpha u_{tt} + \beta u_t,$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad -\infty < x < \infty$$

όπου  $\alpha, \beta$  θετικές σταθερές και  $f(x), g(x)$  φραγμένες συναρτήσεις που ανήκουν στις κλάσεις  $C^2(\mathbb{R})$  και  $C^1(\mathbb{R})$ , αντίστοιχα.

α) Να δοθεί μια φυσική ερμηνεία των παραμέτρων  $\alpha$  και  $\beta$ .

β) Να λυθεί το παραπάνω ΠΑΤ με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace.

γ) Να υπολογιστεί το όριο  $\alpha \rightarrow 0$  της λύσης που βρήκατε και να σχολιαστεί το αποτέλεσμα με βάση την ερμηνεία της παραμέτρου  $\alpha$ .

**4.7** Να κατασκευαστεί μια ολοκληρωτική αναπαράσταση λύσεων του ΠΑΤ

$$u_t = a u_{xxx},$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad -\infty < x < \infty,$$

όπου  $f(x)$  ομαλή και φραγμένη συνάρτηση, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace.

## 5. Επίλυση του ΠΑΣΤ για την εξίσωση της διάχυσης

Εφαρμόζοντας την ίδια τεχνική που χρησιμοποιήσαμε στο προηγούμενο εδάφιο, μπορούμε να λύσουμε και το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών (ΠΑΣΤ)

$$u_t = u_{xx}, \quad x > 0, \quad t > 0, \quad (5.1)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x \geq 0, \quad (5.2)$$

$$u(0, t) = g(t), \quad t \geq 0. \quad (5.3)$$

Υποθέσαμε ότι η αρχική συνθήκη είναι ομογενής, γιατί, τ' αποτελέσματα του προηγούμενου εδαφίου καλύπτουν αμέσως την περίπτωση όπου η (5.2) δίνει τη θέση της στην  $u(x, 0) = f(x)$ ,  $x \geq 0$ . Το μόνο που χρειάζεται να κάνουμε είναι να επεκτείνουμε την δοσμένη  $f(x)$  σε όλη την πραγματική ευθεία, έτσι που να είναι περιττή. Τότε, η λύση που δίνεται από τον τύπο (4.32) πληροί την μη ομογενή αρχική συνθήκη  $u(x, 0) = f(x)$ ,  $x \geq 0$ , και την ομογενή συνοριακή  $u(0, t) = 0$ ,  $t \geq 0$ . Η υπέρθεση αυτής της λύσης με τη λύση του ΠΑΣΤ (5.1-3) δίνει τη λύση του ΠΑΣΤ στην περιοχή  $x > 0$ ,  $t > 0$ , όταν τόσο η αρχική όσο και η συνοριακή συνθήκη είναι μη ομογενείς.

Για να προχωρήσουμε στην επίλυση του ΠΑΣΤ (5.1-3) με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace, θα υποθέσουμε αρχικά ότι η  $g(t)$  ανήκει στην κλάση  $\mathcal{E}$ . Επιπλέον, θα θεωρήσουμε ότι ισχύουν όλες οι άλλες προϋποθέσεις που επέτρεψαν τους χειρισμούς που κάναμε στο προηγούμενο εδάφιο. Ειδικότερα, θα υποθέσουμε ότι,

α) Η λύση  $u(x, t)$  που αναζητάμε παραμένει φραγμένη καθώς το  $x \rightarrow \infty$  και

β) Για κάθε  $x > 0$ , όλες οι συναρτήσεις  $u(x, t)$ ,  $u_t(x, t)$ ,  $u_x(x, t)$  και  $u_{xx}(x, t)$  ανήκουν στην κλάση  $\mathcal{E}$ .

Με αυτό τον τρόπο, ο μετασχηματισμός Laplace της  $u_t = u_{xx}$  οδηγεί αμέσως στην ομογενή ΣΔΕ

$$\tilde{u}_{xx}(x, z) - z \tilde{u}(x, z) = 0, \quad x > 0, \quad (5.4)$$

όπου και πάλι

$$\tilde{u}(x, z) := \int_0^\infty e^{-zt} u(x, t) dt. \quad (5.5)$$

Από τη μορφή

$$\tilde{u}(x, z) = c_1 e^{\sqrt{z} x} + c_2 e^{-\sqrt{z} x} \quad (5.6)$$

της γενικής λύσης της (5.4) φαίνεται καθαρά ότι, για  $\operatorname{Re} \sqrt{z} > 0$ , η  $\tilde{u}(x, z)$  δεν παραμένει φραγμένη καθώς το  $x \rightarrow \infty$ , παρά μόνο όταν η  $c_1 = 0$ . Με αυτή την επιλογή, η (5.6) ανάγεται στην

$$\tilde{u}(x, z) = c_2 e^{-\sqrt{z} x}, \quad (5.7)$$

οπότε,

$$\tilde{u}(0, z) = c_2. \quad (5.8)$$

Όμως, από την (5.5) και την αρχική συνθήκη (5.3) έπεται ότι

$$\tilde{u}(0, z) = \int_0^\infty e^{-zt} u(0, t) dt = \int_0^\infty e^{-zt} g(t) dt \equiv \tilde{g}(z). \quad (5.9)$$

Η σύγκριση των (5.8) και (5.9) συνεπάγεται ότι  $c_2 = \tilde{g}(z)$  και, έτσι, η (5.7) γίνεται

$$\tilde{u}(x, z) = \tilde{g}(z) e^{-\sqrt{z} x}. \quad (5.10)$$

Σύμφωνα με την (5.10), ο μετασχηματισμός Laplace (ως προς τη μεταβλητή  $t$ ) της συνάρτησης  $u(x, t)$  είναι γινόμενο δύο συναρτήσεων της μιγαδικής παραμέτρου  $z$ , των  $\tilde{g}(z)$  και

$$\tilde{J}(x, z) := e^{-x\sqrt{z}}. \quad (5.11)$$

Άρα, η ίδια η  $u(x, t)$  προκύπτει από τη συνέλιξη της συνάρτησης  $g(t)$  με την (άγνωστη προς το παρόν) συνάρτηση  $J(x, t)$ , της οποίας ο μετασχηματισμός Laplace δίνει την  $\tilde{J}(x, z)$ . Δηλαδή,

$$u(x, t) = (J * f)(x, t) := \int_0^t J(x, \tau) g(t - \tau) d\tau. \quad (5.12)$$

Το μόνο που μένει, λοιπόν, για να ολοκληρωθεί η λύση του ΠΑΣΤ (5.1-3), είναι να υπολογιστεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της  $\tilde{J}(x, z)$ . Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με τη μέθοδο που περιγράψαμε στο Παράδειγμα 2.2.

Εναλλακτικά, μπορούμε να στηριχτούμε στο τελικό αποτέλεσμα του Παραδείγματος 2.2,

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-x\sqrt{z}}}{2\sqrt{z}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/4t}, \quad (5.13)$$

και στη σχέση (2.32). Συγκεκριμένα, αν παρατηρήσουμε ότι

$$\partial_z(e^{-x\sqrt{z}}) = -\frac{e^{-x\sqrt{z}}}{2\sqrt{z}}, \quad (5.14)$$

τότε αμέσως θα συμπεράνουμε πως,

$$\int_z^\infty \frac{x e^{-x\sqrt{s}}}{2\sqrt{s}} ds = -\left(e^{-x\sqrt{s}}\right)_z^\infty = e^{-x\sqrt{z}}. \quad (5.15)$$

Με άλλα λόγια,

$$\int_z^\infty \tilde{K}(x, s) ds = \tilde{J}(x, z), \quad (5.16)$$

όπου

$$K(x, t) := \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/4t}. \quad (5.17)$$

Από την άλλη, σύμφωνα με την (2.32),

$$\int_z^\infty \mathcal{L} f(s) ds = \mathcal{L} [t^{-1} f(t)]. \quad (5.18)$$

Αυτό σημαίνει ότι

$$\tilde{J}(x, z) = \mathcal{L} [t^{-1} K(x, t)]. \quad (5.19)$$

Συνεπώς,

$$J(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t^3}} e^{-x^2/4t}. \quad (5.20)$$

Έτσι, η λύση (5.10) παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$u(x, t) = \int_0^t \frac{x}{\sqrt{4\pi k \tau^3}} e^{-x^2/4k\tau} g(t-\tau) d\tau \quad (5.21)$$

## Ασκήσεις

5.1 α) Να δοθεί μια φυσική ερμηνεία του ΠΑΣΤ

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, & x > 0, & t > 0, \\ u(x, 0) &= 0, & x \geq 0, \\ u_x(0, t) &= h(t), & t \geq 0. \end{aligned}$$

β) Να βρεθεί μια λύση αυτού του ΠΑΤ, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace.

5.2 Χρησιμοποιώντας την ίδια μέθοδο και κατάλληλες υποθέσεις για τη συνάρτηση εξαναγκασμού  $s(x, t)$ , να λυθεί το ΠΑΣΤ

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + s(x, t), & x > 0, & t > 0, \\ u(x, 0) &= 0, & x \geq 0, \\ u(0, t) &= g(t), & t \geq 0, \end{aligned}$$

5.3 α) Να δοθεί μια φυσική ερμηνεία του ΠΑΣΤ

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} - b u, & x > 0, & t > 0, \\ u(x, 0) &= 0, & x \geq 0, \\ u(0, t) &= g(t), & t \geq 0, \end{aligned}$$

όπου  $b$  θετική σταθερή.

β) Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace, να παραχθεί ένας τύπος που περιγράφει λύσεις του παραπάνω ΠΑΤ.

**5.4** Να γίνει το ίδιο για το ΠΑΣΤ

$$\begin{aligned}u_t &= u_{xx} - b u, & x > 0, & t > 0, \\u(x, 0) &= 0, & x \geq 0, \\u_x(0, t) &= h(t), & t \geq 0.\end{aligned}$$

**5.5** Να γίνει το ίδιο για το ΠΑΣΤ

$$\begin{aligned}u_t &= u_{xx} - b u + s(x, t), & x > 0, & t > 0, \\u(x, 0) &= 0, & x \geq 0, \\u(0, t) &= g(t), & t \geq 0,\end{aligned}$$

**5.6** Να γίνει το ίδιο για το ΠΑΣΤ

$$\begin{aligned}u_t &= u_{xx} - b u + s(x, t), & x > 0, & t > 0, \\u(x, 0) &= 0, & x \geq 0, \\u_x(0, t) &= h(t), & t \geq 0,\end{aligned}$$

**5.7** Να λυθεί το ΠΑΣΤ

$$\begin{aligned}u_{tt} &= u_{xx}, & x > 0, & t > 0, \\u(x, 0) &= u_t(x, 0) = 0, & x \geq 0, \\u(0, t) &= g(t), & t \geq 0,\end{aligned}$$

για την κυματική εξίσωση, με τη μέθοδο του μετασχηματισμού Laplace.

**5.8** Με τον ίδιο τρόπο να λυθεί το ΠΑΣΤ

$$\begin{aligned}u_{tt} &= u_{xx}, & x > 0, & t > 0, \\u(x, 0) &= u_t(x, 0) = 0, & x \geq 0, \\u_x(0, t) &= h(t), & t \geq 0,\end{aligned}$$

**5.9** Με τον ίδιο τρόπο να λυθεί το ΠΑΣΤ

$$\begin{aligned}u_{tt} &= u_{xx} + s(x, t), & x > 0, & t > 0, \\u(x, 0) &= u_t(x, 0) = 0, & x \geq 0, \\u(0, t) &= 0, & t \geq 0,\end{aligned}$$

**5.10** Με τον ίδιο τρόπο να λυθεί το ΠΑΣΤ

$$\begin{aligned}u_{tt} &= u_{xx} + s(x, t), & x > 0, & t > 0, \\u(x, 0) &= u_t(x, 0) = 0, & x \geq 0, \\u_x(0, t) &= 0, & t \geq 0,\end{aligned}$$

# Γενικευμένες συναρτήσεις

## 1. Το όνειρο του Dirac

Στο παρόν κεφάλαιο εισάγεται μια από τις σπουδαιότες έννοιες των σύγχρονων μαθηματικών, αυτή της γενικευμένης συνάρτησης ή κατανομής. Όσο αφορά, ειδικότερα, τις μερικές διαφορικές εξισώσεις, η σημασία των γενικευμένων συναρτήσεων θ' αναδειχτεί με σαφήνεια στο επόμενο κεφάλαιο, όπου θα τις χρησιμοποιήσουμε συστηματικά στη διατύπωση και ανάλυση προβλημάτων αρχικών ή και συνοριακών τιμών.

Η έννοια της γενικευμένης συνάρτησης είχε ως αφετηρία την προσπάθεια των φυσικών να περιγράψουν με μαθηματικούς όρους μιαν οντότητα που είναι περιορισμένη σε ένα άπειρα μικρό τμήμα του χώρου ή μια φυσική διεργασία που ολοκληρώνεται μέσα σ' ένα άπειρα μικρό χρονικό διάστημα. Για να καταλάβουμε τους στόχους αυτής της προσπάθειας και ν' αποκτήσουμε τη φυσική διαίσθηση που χαρίζει μεγαλύτερη άνεση στην εφαρμογή της έννοιας των κατανομών, θα σταθούμε για λίγο σε κάποιες γνωστές φυσικο-μαθηματικές κατασκευές.

Ας εξετάσουμε πρώτα τον τρόπο με τον οποίο περιγράφουμε ένα σώμα στο πλαίσιο της Κλασικής Μηχανικής. Μιλάμε βέβαια για ένα σώμα που όλα τα μέρη του παραμένουν ακίνητα ή, ισοδύναμα, για την στιγμιαία εικόνα ενός σώματος που αλλάζει σχήμα ή και θέση. Λέμε, λοιπόν, ότι κάθε συγκεκριμένο υλικό σώμα καταλαμβάνει ένα συμπαγές υποσύνολο,  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$  του Ευκλείδειου χώρου, όπου  $\Omega$  ένα συνεκτικό και φραγμένο υποσύνολο του  $\mathbb{R}^3$  και  $\partial\Omega$  το σύνορο του  $\Omega$ . Το δεύτερο είναι εκείνο που ονομάζεται *επιφάνεια του σώματος*. Αν γ.π. το σώμα έχει σφαιρικό σχήμα, τότε

$$\Omega \equiv B_a(\mathbf{x}_0) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < a\}. \quad (1.1)$$

Ο θετικός αριθμός  $a$  αντιπροσωπεύει την ακτίνα της σφαίρας και το διάνυσμα  $\mathbf{x}_0$  το κέντρο του σώματος.

Το δεύτερο βασικό στοιχείο στην περιγραφή ενός σώματος είναι μια βαθμωτή συνάρτηση,  $\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , που ονομάζεται *ποκνότητα μάζας* κι έχει τις εξής ιδιότητες: (i) Είναι τμηματικά συνεχής και παίρνει μη αρνητικές τιμές. (ii) Μηδενίζεται ταυτοτικά έξω από την περιοχή  $\bar{\Omega}$ :

$$\rho(\mathbf{x}) \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad \rho(\mathbf{x}) = 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}. \quad (1.2)$$

Οι θετικοί αριθμοί

$$V := \int_{\Omega} 1 \, d\mathbf{x}, \quad m := \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad (1.3)$$

ονομάζονται *όγκος* και *μάζα* του σώματος, αντίστοιχα. Τα παραπάνω τριπλά ολοκληρώματα Riemann, όπου το  $dV$  δηλώνει το λεγόμενο *στοιχείο όγκου*, συνήθως γράφονται στη μορφή

$$V := \int_{\Omega} \int \int 1 \, dx \, dy \, dz, \quad m := \int_{\Omega} \int \int \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz, \quad (1.4)$$

όπου  $x, y, z$  Καρτεσιανές συντεταγμένες του Ευκλείδειου τρισδιάστατου χώρου  $\mathbb{E}^3$ .

Στο σύστημα μονάδων στο οποίο η μάζα μετριέται σε γραμμάρια (g) και το μήκος σε εκατοστόμετρα (cm), η μονάδα του όγκου είναι το κυβικό εκατοστόμετρο ( $\text{cm}^3$ ) και, άρα, εκείνη της πυκνότητας μάζας η  $\text{g}/\text{cm}^3$ .

Για να έχουμε στη διάθεσή μας κι ένα συγκεκριμένο παράδειγμα της αυτόνομης παρουσίας της συνάρτησης  $\rho(\mathbf{x})$ , αναφέρουμε το ακόλουθο γεγονός. Η θεωρία που διατύπωσε ο Newton (Νεύτων-ας) για την αμοιβαία έλξη των υλικών σωμάτων κι η οποία καθιερώθηκε με το όνομα *Παγκόσμια Έλξη* είναι ουσιαστικά ίδια μ' εκείνη που περιγράφει την αλληλεπίδραση των ηλεκτρικά φορτισμένων σωμάτων. Η μόνη διαφορά είναι ότι η δύναμη που δύο σώματα ασκούν το ένα στο άλλο εξ αιτίας της μάζας τους δεν είναι ποτέ απωθητική.

Αναλυτικότερα, όταν δύο σώματα (υλικά σώματα αμελητέου όγκου) βρίσκονται στις θέσεις  $\mathbf{x}_1$  και  $\mathbf{x}_2$ , αντίστοιχα, τότε το πρώτο ασκεί στο δεύτερο δύναμη ίση με

$$\mathbf{F}_{12} = G \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^3} (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2). \quad (1.5)$$

Ταυτόχρονα, το δεύτερο σώμα ασκεί σ' εκείνο που βρίσκεται στο σημείο  $\mathbf{x}_1$  δύναμη ίση με

$$\mathbf{F}_{21} = G \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^3} (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1). \quad (1.6)$$

Στις παραπάνω εκφράσεις, οι σταθερές  $m_1, m_2$  παριστάνουν τις μάζες των δύο σωματίων και το  $G$  είναι η λεγόμενη *παγκόσμια σταθερή*:

$$G = 6,67428 \times 10^{-8} \frac{\text{cm}^3}{\text{g sec}^2}. \quad (1.7)$$

Αυτή η διαστατική ποσότητα γράφεται και στη μορφή  $G = 6,67428 \times 10^{-8} \text{ dyne} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{g}^{-2}$ , όπου με dyne δηλώνεται η μονάδα δύναμης:  $1 \text{ dyne} := 1 \text{ g} \cdot \text{cm} / \text{sec}^2$ .

Η ελκτική δύναμη που ένα σώμα ασκεί σε κάθε άλλο και περιγράφεται από τους τύπους (1.5) και (1.6) λέγεται *βαρυτική*. Γιατί, σ' αυτήν οφείλεται το βάρος (η δυσκολία ανύψωσης) κάθε σώματος πάνω στη γη.

Από τη σύγκριση των παραπάνω τύπων για τη βαρυτική δύναμη μ' εκείνους που παρουσιάσαμε αναλυτικά στο εδάφιο του στατικού ηλεκτρισμού συνάγεται αμέσως το

ακόλουθο συμπέρασμα: Η Νευτωνική θεωρία της παγκόσμιας έλξης μπορεί να διατυπωθεί μέσω της έννοιας του πεδίου, οπότε παίρνει την ακόλουθη μορφή:

(i) Στο εσωτερικό και στον περίγυρο κάθε υλικού σώματος  $\Sigma$ , για παράδειγμα της γης, εμφανίζεται ένα διανυσματικό πεδίο,  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ , που ονομάζεται **πεδίο βαρύτητας**.

(ii) Ένα σωματίο μάζας  $m$ , όταν βρεθεί στο σημείο  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ , υφίσταται δύναμη  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  (την βαρυτική) που δίνεται από τον τύπο

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = m \mathbf{g}(\mathbf{x}). \quad (1.8)$$

(iii) Το πεδίο βαρύτητας είναι αστρόβιλο:

$$\nabla \times \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \quad (1.9)$$

(iv) Η απόκλιση του πεδίου βαρύτητας σε κάθε σημείο  $\mathbf{x}$  που βρίσκεται στο εσωτερικό του  $\Sigma$  καθορίζεται πλήρως από την πυκνότητα μάζας αυτού του σώματος στο ίδιο σημείο. Πιο συγκεκριμένα,

$$\nabla \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x}) = 4\pi G \rho(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \quad (1.10)$$

(Όπως ήδη σημειώσαμε,  $\rho(\mathbf{x}) \equiv 0$ , έξω από το  $\Sigma$ ).

Η (1.9) συνεπάγεται ότι το πεδίο βαρύτητας μπορεί να περιγραφεί μέσω ενός βαθμωτού πεδίου. Με άλλα λόγια, υπάρχει συνάρτηση  $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , τέτοια ώστε,

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = -\nabla u(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \quad (1.11)$$

Η αντικατάσταση αυτής της σχέσης στην προηγούμενη, οδηγεί αμέσως στο ακόλουθο συμπέρασμα: Η συνάρτηση  $u(\mathbf{x})$ , που ονομάζεται **δυναμικό του πεδίου βαρύτητας** ή **βαρυτικό δυναμικό**, περιγράφεται από τις λύσεις της εξίσωσης Poisson:

$$\Delta u(\mathbf{x}) = -4\pi G \rho(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \quad (1.12)$$

Η έννοια του σωματίου ή υλικού σημείου που αναφέραμε πιο πάνω είναι θεμελιακή στην κλασική ή Νευτωνική μηχανική. Από μαθηματική άποψη, με **υλικό σημείο** ή **σωμάτιο** εννοούμε ένα ζευγάρι  $(m, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3$ . Ο θετικός αριθμός  $m$  ονομάζεται **μάζα** και το διάνυσμα  $\mathbf{x}$  (στιγμιαία) **θέση** του υλικού σημείου.

Θα πρέπει τώρα να σημειωθεί ότι, η έννοια της μάζας ορίστηκε ήδη παραπάνω, αλλά σε διαφορετικό πλαίσιο. Αφορούσε ένα σώμα πραγματικών (μη μηδενικών) διαστάσεων. Αυτόματα, λοιπόν, εγείρεται το ερώτημα αν η έννοια της μάζας ενός σωματίου μπορεί να ενσωματωθεί σ' εκείνη του σώματος. Προφανώς, αυτό θα ήταν εφικτό, αν μπορούσαμε να ορίσουμε τη συνάρτηση που παριστάνει την πυκνότητα μάζας ενός υλικού σημείου.

Αλλά, κάτι τέτοιο είναι αδύνατο. Για τον απλούστατο λόγο ότι, όποια κι αν είναι η συνάρτηση  $\rho(\mathbf{x})$  που θα μπορούσε να παριστάνει την πυκνότητα μάζας του σωματίου, το αντίστοιχο ολοκλήρωμα πάντα μηδενίζεται:

$$m := \int_{\mathbb{R}^3} \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0. \quad (1.13)$$



Αυτό το αποτέλεσμα είναι άμεση απόρροια της έννοιας του ολοκληρώματος Riemann και του ορισμού του υλικού σημείου. Από την δεύτερη αμέσως έπεται ότι η  $\rho(\mathbf{x})$  είναι μη μηδενική μόνο σε ένα σημείο του  $\mathbb{R}^3$ , αυτό στο οποίο βρίσκεται το σωματίο.

Ωστόσο, παρά το γεγονός ότι το μαθηματικό επιχείρημα που μόλις αναπτύξαμε είναι αδιαμφισβήτητο, ο "θεωρητικός φυσικός" P.A.M. Dirac έκανε το λάθος να επιμένει, εκεί γύρω στο 1930, για το αντίθετο. Ότι, δηλαδή, υπάρχει συνάρτηση  $\rho(\mathbf{x})$  που μηδενίζεται σε κάθε σημείο του  $\mathbb{R}^3$  εκτός από ένα και που το ολοκλήρωμά της είναι μη μηδενικό. Και ήταν τόσο απαράδεκτο το λάθος του Dirac από την άποψη των κυρίων που επαιρόνται ότι είναι μαθηματικοί και όχι φυσικοί που, η συνάρτηση την οποία εκείνος ονειρεύτηκε σήμερα φέρει το όνομά του και είναι πανταχού παρούσα! Και μάλιστα, στα πιο προχωρημένα συγγράμματα των "καθαρών μαθηματικών". Αν θυμηθούμε ότι έναν αιώνα νωρίτερα το ίδιο είχε συμβεί και με την ιδέα του Fourier, θα πρέπει να συμπεράνουμε ότι ο Carl Marx δεν είχε άδικο, λέγοντας πως η ιστορία, όταν επαναλαμβάνεται, παίρνει τη μορφή φάρσας.

Αφήνοντας τη συνέχεια για τα επόμενα, θα εξετάσουμε τώρα μια πιο σύντομη ιστορία. Θεωρούμε ένα σωματίο  $\sigma$  μάζας  $m$ , το οποίο ακινητεί στο σημείο  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  του  $\mathbb{R}^3$ . Τη χρονική στιγμή  $t = 0$ , ένα δεύτερο σωματίο  $\sigma'$  προσκρούει στο πρώτο, με αποτέλεσμα το  $\sigma$  να αποκτήσει ταχύτητα. Αν θέλετε, μπορείτε να φανταστείτε πως το  $\sigma$  παριστάνει μια μπάλα ποδοσφαίρου στη θέση του πέναλτυ, οπότε η ταχύτητα που αποκτάει οφείλεται στην αστρα-πιαία κλωτσιά του ποδοσφαιριστή που ανέλαβε να εκτελέσει πέναλτυ.

Για ευκολία, μπορούμε να υποθέσουμε ότι, η δύναμη που ασκείται στο  $\sigma$  τη στιγμή  $t = 0$ , άρα και η ταχύτητα που αποκτάει αυτό το σωματίο, είναι στην κατεύθυνση του θετικού ημιάξονα  $x$  των αντίστοιχων Καρτεσιανών συντεταγμένων. Τότε, ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα, που καθορίζει την εξέλιξη της ταχύτητας,  $v(t)$ , του  $\sigma$  παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$m v'(t) = F(t). \quad (1.14)$$

Σ' αυτή την εξίσωση, η συνάρτηση  $v'(t)$  παριστάνει την παράγωγο της ταχύτητας, δηλαδή την επιτάχυνση, και η  $F(t)$  την δύναμη που ασκείται στο σωματίο  $\sigma$ , τη στιγμή που αυτό βρίσκεται στο σημείο  $x(t)$ .

Ολοκληρώνοντας την (1.13) και λαβαίνοντας υπόψη ότι  $v(0) = 0$ , καταλήγουμε αμέσως στην

$$m v(t) = \int_0^t F(\tau) d\tau. \quad (1.15)$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η δράση του  $\sigma'$  στο  $\sigma$ , ή η επαφή που είχε το πόδι του ποδοσφαιριστή με την μπάλα, ήταν στιγμιαία. Αυτό σημαίνει ότι η δύναμη που ασκήθηκε στο  $\sigma$  ήταν μη μηδενική μόνο τη στιγμή  $t = 0$ :

$$F(t) = \begin{cases} F_0, & t = 0 \\ 0, & t > 0 \end{cases} \quad (1.16)$$

Τότε από την (1.14) αμέσως έπεται ότι

$$v(t) = 0, \quad t \geq 0. \tag{1.17}$$

Το βασικό συμπέρασμα της προηγούμενης ανάλυσης είναι πως, μια στιγμιαία δύναμη δεν μπορεί ν' αλλάξει την κινητική κατάσταση ενός σωματίου. Όμως, αυτό το αποτέλεσμα φαίνεται να έρχεται σε αντίθεση με την παρατήρηση. Όλοι γνωρίζουμε ότι η σύγκρουση δύο σωματίων ή η κλωτσιά που δέχεται μια μπάλα που στέκεται στη θέση του πέναλτυ έχει ... δραματικά αποτελέσματα. Στη δεύτερη περίπτωση, η ταχύτητα της μπάλας μεταβάλλεται ακαριαία και, από μηδενική γίνεται τόσο μεγάλη, που σε κλάσματα δευτερολέπτου φτάνει στο τέρμα του αντίπαλου.

Και όμως! Ενώ αρχικά φαίνεται ότι δεν μπορούμε να αναπαραγάγουμε το αποτέλεσμα της παρατήρησης χρησιμοποιώντας την έννοια της "δύναμης που ασκείται μόνο για μια στιγμή", τελικά, χάρη στον Dirac και τη δουλειά του Γάλλου μαθηματικού Laurent Schwartz (Λοράν Σβαρτς) γύρω στο 1950, ... μπορούμε!

Θα ξεκινήσουμε την πορεία που οδηγεί στις παράξενες συναρτήσεις των Dirac-Schwartz από το "σχεδόν στιγμιαίο". Θα υποθέσουμε, δηλαδή, ότι η δύναμη που ασκήθηκε στο σωματίο  $\sigma$  είχε την ακόλουθη χρονική εξέλιξη:

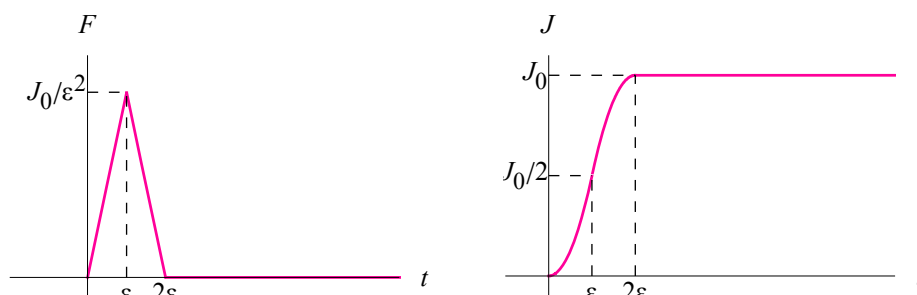
$$F(t) = \begin{cases} \frac{J_0}{\varepsilon^2} t, & 0 \leq t < \varepsilon \\ \frac{J_0}{\varepsilon^2} (2\varepsilon - t), & \varepsilon \leq t \leq 2\varepsilon \\ 0, & t > 2\varepsilon \end{cases} \tag{1.18}$$

Το  $J_0$  παριστάνει μια θετική ποσότητα με τη διάσταση της ορμής (μάζα  $\times$  ταχύτητα), ενώ το  $\varepsilon > 0$  καθορίζει το χρονικό διάστημα,  $2\varepsilon$ , κατά το οποίο η δύναμη είναι μη μηδενική.

Η αντικατάσταση αυτής της έκφρασης στην (1.14) δίνει το εξής αποτέλεσμα:

$$m v(t) = J(t) := \begin{cases} \frac{J_0}{2\varepsilon^2} t^2, & 0 \leq t < \varepsilon \\ J_0 - \frac{J_0}{2\varepsilon^2} (2\varepsilon - t)^2, & \varepsilon \leq t \leq 2\varepsilon \\ J_0, & t > 2\varepsilon \end{cases} \tag{1.19}$$

Στο Σχ. 1.1 δείχνουμε τα γραφήματα των συναρτήσεων  $F(t)$  και  $J(t)$ , που παριστάνουν, αντίστοιχα, τη δύναμη που κάθε στιγμή ασκείται στο σωματίο και την ορμή που αυτό έχει αποκτήσει.

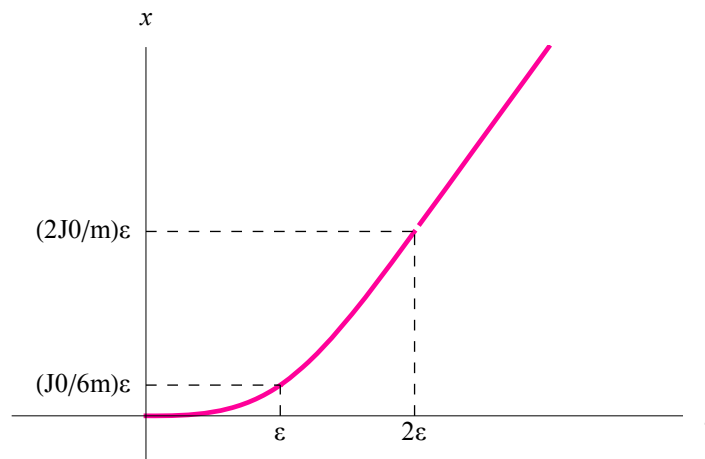


**Σχ. 1.1** Το γράφημα των συναρτήσεων της δύναμης,  $F(t)$ , και της ορμής,  $J(t)$ .

Εξ ορισμού,  $v(t) = x'(t)$ . Συνεπώς, η στιγμιαία θέση του σώματιου δίνεται από τη συνάρτηση

$$x(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau = \begin{cases} \frac{J_0}{6m\varepsilon^2} t^3, & 0 \leq t < \varepsilon \\ \frac{J_0}{m}(t-\varepsilon) + \frac{J_0}{6m\varepsilon^2}(2\varepsilon-t)^3, & \varepsilon \leq t \leq 2\varepsilon \\ \frac{J_0}{m}(t-\varepsilon), & t > 2\varepsilon \end{cases} \quad (1.20)$$

Το γράφημα αυτής της συνάρτησης δίνεται στο Σχ.1.2.



**Σχ. 1.2** Το γράφημα της συνάρτησης  $x(t)$ , που παριστάνει την στιγμιαία θέση του σώματιου  $\sigma$ .

Ας εξετάσουμε τώρα την οριακή μορφή των προηγούμενων αποτελεσμάτων, καθώς το  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Από φυσική άποψη, αυτό το όριο σημαίνει ότι το χρονικό διάστημα κατά το οποίο ασκήθηκε δύναμη στο σώματιο  $\sigma$  ήταν απειροελάχιστο. Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι, καθώς το  $\varepsilon \rightarrow 0$ , η μέγιστη τιμή,  $J_0/\varepsilon^2$ , της  $F(t)$  τείνει στο άπειρο, αλλά με τρόπο ώστε το ολοκλήρωμά της να παραμένει αμετάβλητο. Πιο συγκεκριμένα,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\infty} F(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\varepsilon} F(t) dt = J_0. \quad (1.21)$$

Από την άλλη, αφού το διάστημα  $[0, 2\varepsilon]$  συνεχώς συρρικνώνεται καθώς το  $\varepsilon \rightarrow 0$ , οι συναρτήσεις  $v(t)$  και  $x(t)$  που δίνονται από τους τύπους (1.18) και (1.19), αντίστοιχα, έχουν τελικά νόημα μόνο για  $t > 0$ . Έτσι, αν λάβουμε υπόψη και το ότι το σώματιο  $\sigma$  ακινητούσε στη θέση  $x = 0$  μέχρι τη χρονική στιγμή  $t = 0$ , μπορούμε να πούμε ότι, στο όριο  $\varepsilon \rightarrow 0$ , η ταχύτητα και η θέση του  $\sigma$  περιγράφονται από τις ακόλουθες συναρτήσεις:

$$v(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{J_0}{m}, & t > 0 \end{cases} \quad (1.22)$$

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{J_0}{m} t, & t > 0 \end{cases} \quad (1.23)$$

Προφανώς, η συνάρτηση  $x(t)$  μπορεί να επεκταθεί σε όλη την πραγματική ευθεία, με τρόπο ώστε να γίνει συνεχής. Αρκεί να θέσουμε  $x(0) = 0$ . Αντίθετα, η  $v(t)$  εμφανίζει αλματική ασυνέχεια στο  $t = 0$ , υποχρεωτικά. Σε κάθε περίπτωση, οι συναρτήσεις (1.21) και (1.22), των οποίων τα γραφήματα δίνονται στο Σχ.1.3, φαίνεται να περιγράφουν με ακρίβεια αυτό που συμβαίνει όταν ένα σώματιο που ακινητεί δέχεται ένα απότομο χτύπημα: Το σώματιο αποκτάει ταχύτητα ανάλογη με την ώθηση που δέχτηκε, εδώ την ποσότητα  $J_0$ , και στη συνέχεια "εκτελεί ομαλή ευθύγραμμη κίνηση".



**Σχ. 1.3** Το γράφημα της ταχύτητας,  $v(t)$ , και της στιγμιαίας θέσης,  $x(t)$ , του σώματιο  $\sigma$ , στην οριακή περίπτωση  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Συνεπώς, η παραπάνω μαθηματική κατασκευή φαίνεται ν' αποτελεί ένα καλό μοντέλο (αναπαράσταση) αυτού που συμβαίνει σε μια ακαριαία διαδικασία. Και υποδειχνει ότι, το κλειδί της επιτυχίας βρίσκεται στην κατασκευή μιας μονοπαραμετρικής οικογένειας φραγμένων συναρτήσεων,  $\{f_\epsilon(t)\}$ , σαν αυτήν που ορίζεται από την (1.17), με τις ακόλουθες ιδιότητες:

- (i) Η παράμετρος  $\epsilon$  που διακρίνει τα μέλη της οικογένειας  $\{f_\epsilon(t)\}$  παίρνει τιμές στη θετική ημιευθεία,  $\mathbb{R}_+$ .
- (ii) Το διάστημα της ανεξάρτητης μεταβλητής  $t$ , στο οποίο η  $|f_\epsilon(t)|$  διαφέρει ουσιαστικά από το μηδέν συνεχώς συρρικνώνεται, καθώς το  $\epsilon \rightarrow 0$ .
- (iii) Το ολοκλήρωμα όλων των μελών της οικογένειας  $\{f_\epsilon(t)\}$  είναι μη μηδενικό και ανεξάρτητο από την τιμή της παραμέτρου  $\epsilon$ . Ισοδύναμα,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\epsilon(t) dt = 1, \quad \forall \epsilon \in \mathbb{R}_+. \tag{1.24}$$

Όμως, οι ιδιότητες (ii) και (iii) είναι αντιθετικές, με την εξής έννοια: Καθιστούν αδύνατη την σύγκλιση της οικογένειας  $\{f_\epsilon(t)\}$  σε μια συνάρτηση  $f(t)$ , η οποία θα παρίστανε την φυσική ποσότητα στιγμιαίας διάρκειας που μας ενδιαφέρει. Με άλλα λόγια, η συνάρτηση που είχε στο νου του ο Dirac εξακολουθεί να μοιάζει με άπιαστο όνειρο.

Στο επόμενο εδάφιο, θα διαπιστώσουμε ότι η προηγούμενη κοπιαστική ανάλυση δεν θα πάει χαμένη. Και πως η λύση στο διαφανόμενο αδιέξοδο υπάρχει. Απλώς, αυτό που ονειρεύτηκε ο Dirac δεν βρίσκεται στη χώρα των συναρτήσεων αλλά στον χώρο των συναρτήσεων των συναρτήσεων.

Ωστόσο, προτού εισέλθουμε στη ... χώρα των θαυμάτων, αξίζει να δούμε το πρόβλημά μας κι από την ... ανάποδη. Ας ξεκινήσουμε, δηλαδή, από το Σχ. 1.3 και τις συναρτήσεις που αυτό παριστάνει. Η  $x(t)$  που ορίζεται στην (1.22) είναι συνεχής σε κάθε σημείο της πραγματικής ευθείας. Βέβαια δεν είναι διαφορίσιμη, γιατί η παράγωγός της δεν ορίζεται στο σημείο  $t = 0$ . Ωστόσο, σε κάθε άλλο σημείο του  $\mathbb{R}$ , η  $x(t)$  έχει παράγωγο κάθε τάξης. Ειδικότερα,  $x'(t) = v(t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Η συνάρτηση  $v(t)$ , από την άλλη, είναι ακόμα πιο προβληματική στο  $t = 0$ . Η ασυνέχεια που εμφανίζει σ' αυτό το σημείο αποκλείει κάθε συζήτηση για παράγωγο αυτής της συνάρτησης στο  $t = 0$ . Κι ωστόσο, αν η πρώτη παράγωγος της  $v(t)$ , άρα η δεύτερης τάξης παράγωγος της  $x(t)$ , στο  $t = 0$  υπήρχε, τότε θα μας έλυνε τα χέρια. Γιατί, θα παρίστανε τη δύναμη στιγμιαίας διάρκειας που αναζητάμε διακαώς.

Συμπερασματικά, τα παρακάτω δύο προβλήματα φαίνεται να είναι αλληλένδετα.

- (i) Να βρεθεί μια συνάρτηση που, ενώ ουσιαστικά μηδενίζεται σε κάθε σημείο της πραγματικής ευθείας εκτός από ένα, έχει μη μηδενικό ολοκλήρωμα.
- (ii) Να οριστεί η παράγωγος μιας συνάρτησης στα σημεία όπου αυτή παρουσιάζει αλματική ασυνέχεια.

Όπως θα δείξουμε στο επόμενο εδάφιο, η απάντηση και στα δυο παραπάνω ζητήματα υπάρχει και είναι μία: Η "συνάρτηση του Dirac".

## 2. Γενικευμένες συναρτήσεις (κατανομές) στον $\mathbb{R}$

Ας θεωρήσουμε το σύνολο των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων που μηδενίζονται έξω από ένα συμπαγές (κλειστό και φραγμένο) διάστημα,  $[a, b]$ , της πραγματικής ευθείας και ας το ονομάσουμε  $C_{[a,b]}(\mathbb{R})$ . Για παράδειγμα, η συνάρτηση

$$\varphi(x) := \begin{cases} 1 - x^2, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases} \quad (2.1)$$

ανήκει στην κλάση  $C_{[-1,1]}(\mathbb{R})$ .

Ας θεωρήσουμε, από την άλλη, μια συνάρτηση  $f(x)$  που είναι συνεχής σε όλη την πραγματική ευθεία. Οποιοδήποτε απλό παράδειγμα, όπως οι  $f(x) = 1$ ,  $f(x) = x$ ,  $f(x) = \sin x$ , αρκεί για τους σκοπούς της συζήτησής μας. Τότε, το ολοκλήρωμα

$$I_f(\varphi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx \quad (2.2)$$

υπάρχει, για τον εξής απλό λόγο. Παρά την αρχική εντύπωση, το  $I_f(\varphi)$  δεν είναι καταχρηστικό. Είναι ένα συνηθισμένο ολοκλήρωμα Riemann, γιατί η συνάρτηση  $f(x) \varphi(x)$  μηδενίζεται έξω από το διάστημα  $[-1, 1]$ . Συνεπώς,

$$I_f(\varphi) = \int_{-1}^1 f(x) \varphi(x) dx. \quad (2.3)$$

Αφού η συνάρτηση  $f(x) \varphi(x)$  είναι συνεχής στο διάστημα  $[-1, 1]$ , το τελευταίο ολοκλήρωμα συγκλίνει οπωσδήποτε.

Όταν η  $f(x)$  είναι απλή, όπως στα παραδείγματα που αναφέραμε, και το ίδιο ισχύει για την  $\varphi(x)$ , όπως συμβαίνει με την (2.1), το ολοκλήρωμα  $I_f(\varphi)$  υπολογίζεται εύκολα. Όμως, εκείνο που έχει σημασία για τα παρακάτω, δεν είναι η συγκεκριμένη τιμή του ολοκληρώματος, αλλά το γεγονός ότι αυτό συγκλίνει. Με άλλα λόγια, ισχύει το η

**Πρόταση 2.1.** *Αν η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ανήκει στην κλάση  $C(\mathbb{R})$ , δηλαδή, αν είναι συνεχής, τότε*

$$I_f(\varphi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx = \int_a^b f(x) \varphi(x) dx < \infty, \quad \forall \varphi \in C_{[a,b]}(\mathbb{R}). \quad (2.4)$$

■

Όσα επισημάναμε παραπάνω ισχύουν ανεξάρτητα από το ποιοι είναι οι αριθμοί  $a, b$  που ορίζουν τα άκρα του διαστήματος  $[a, b]$ . Ως μόνη προϋπόθεση έχουν το να είναι αυτό το διάστημα συμπαγές. Γι' αυτό, θα εισαγάγουμε την κλάση των συναρτήσεων που είναι συνεχείς σε όλη την πραγματική ευθεία, αλλά μηδενίζονται έξω από κάποιο συμπαγές διάστημα, την οποία θα συμβολίζουμε με  $C_0(\mathbb{R})$ .

Έτσι, λοιπόν, για κάθε συγκεκριμένη συνάρτηση  $f \in C(\mathbb{R})$ , η απεικόνιση  $I_f : C_0(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  που οδηγεί από το τυχαίο στοιχείο  $\varphi$  της κλάσης  $C_0(\mathbb{R})$  στον πραγματικό

αριθμό  $I_f(\varphi)$  είναι καλά ορισμένη. Κάθε απεικόνιση αυτού του είδους αποτελεί παράδειγμα αυτού που ονομάζεται **συναρτησιοειδής** ή **συναρτησιακό** (*functional*). Σε αντίθεση, δηλαδή, με τις συνήθεις συναρτήσεις, τα συναρτησιακά έχουν ως πεδίο ορισμού κάποια κλάση συναρτήσεων και όχι κάποιο υποσύνολο του  $\mathbb{R}^n$ .

Ένα σημαντικό χαρακτηριστικό των συναρτησιακών που μόλις ορίσαμε είναι η γραμμικότητά τους. Αυτή η ιδιότητα είναι άμεση απόρροια της ολοκλήρωσης κατά Riemann και αποδεικνύεται ως εξής: Ας υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις  $\varphi_1$  και  $\varphi_2$  ανήκουν στην κλάση  $C_0(\mathbb{R})$ . Τότε, το ίδιο ισχύει και για κάθε γραμμικό συνδυασμό τους, δηλαδή, για κάθε συνάρτηση  $\varphi$  της μορφής

$$\varphi(x) = c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2.5)$$

όπου  $(c_1, c_2)$  τυχαίο ζευγάρι πραγματικών αριθμών. Γιατί, αν η  $\varphi_1(x)$  μηδενίζεται έξω από το διάστημα  $[a_1, b_1]$  και η  $\varphi_2(x)$  μηδενίζεται έξω από το διάστημα  $[a_2, b_2]$  τότε η  $\varphi(x)$  μηδενίζεται έξω από το διάστημα  $[a, b]$ , όπου  $a = \min\{a_1, a_2\}$  και  $b = \max\{b_1, b_2\}$ . Από την άλλη,

$$\begin{aligned} I_f(\varphi) &:= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx = \int_{-a}^b f(x) [c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x)] dx \\ &= c_1 \int_{-a}^b f(x) \varphi_1(x) dx + c_2 \int_{-a}^b f(x) \varphi_2(x) dx \\ &= c_1 \int_{-a_1}^{b_1} f(x) \varphi_1(x) dx + c_2 \int_{-a_2}^{b_2} f(x) \varphi_2(x) dx, \end{aligned} \quad (2.6)$$

αφού  $[a_1, b_1] \subset [a, b]$  και  $[a_2, b_2] \subset [a, b]$ . Με άλλα λόγια,

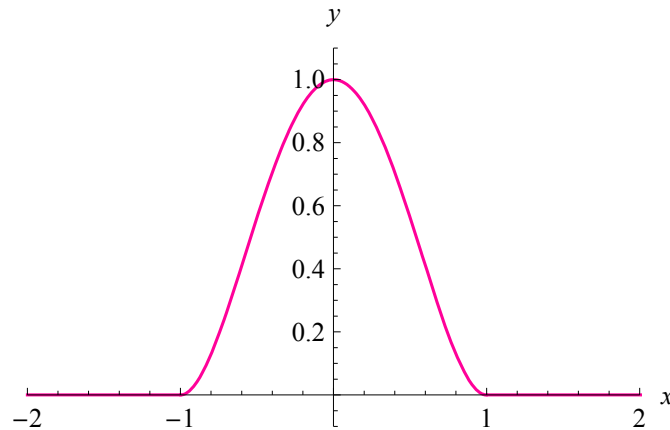
$$I_f(\varphi) = c_1 I_f(\varphi_1) + c_2 I_f(\varphi_2). \quad (2.7)$$

■

Είναι προφανές ότι, μια συνάρτηση  $\varphi(x)$  που είναι συνεχώς διαφορίσιμη και μηδενίζεται έξω από ένα συμπαγές διάστημα ανήκει αυτόματα στην κλάση  $C_0(\mathbb{R})$ . Γιατί, κάθε διαφορίσιμη συνάρτηση είναι υποχρεωτικά συνεχής. Αν λοιπόν συμβολίσουμε την κλάση των συναρτήσεων που έχουν συνεχή παράγωγο και μηδενίζονται έξω από κάποιο συμπαγές διάστημα με  $C_0^1(\mathbb{R})$ , τότε  $C_0^1(\mathbb{R}) \subset C_0(\mathbb{R})$ . Μια απλή συνάρτηση που ανήκει στην  $C_0^1(\mathbb{R})$  είναι η εξής:

$$\varphi(x) := \begin{cases} (1-x^2)^2, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases} \quad (2.8)$$

Το γράφημά της στη γειτονιά του  $x = 0$  δίνεται στο Σχ. 2.1.



**Σχ. 2.1** Το γράφημα της συνάρτησης  $\varphi(x)$ , που ορίζεται από τον τύπο (2.8).

Χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία, μπορούμε πλέον να κατασκευάσουμε παραδείγματα συναρτήσεων που μηδενίζονται έξω από ένα συμπαγές διάστημα και έχουν συνεχή παράγωγο μέχρι και τάξης  $n$ , όπου  $n$  τυχαίος φυσικός αριθμός. Το σύνολο των συναρτήσεων αυτού του είδους αποτελεί την κλάση  $C_0^n(\mathbb{R})$  και είναι προφανές ότι  $C_0^n(\mathbb{R}) \subset C_0^{n-1}(\mathbb{R}) \subset C_0^1(\mathbb{R}) \subset C_0(\mathbb{R})$ . Κατά συνέπεια, ο τύπος

$$I_f(\varphi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx, \quad \varphi \in C_0^n(\mathbb{R}), \quad (2.9)$$

ορίζει με σαφήνεια μια γραμμική απεικόνιση της μορφής  $I_f : C_0^n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ , δηλαδή, ένα γραμμικό συναρτησιακό.

Ωστόσο, για λόγους που θα γίνουν φανεροί στη συνέχεια, εμείς θα χρειαστούμε συναρτησιακά που έχουν ως πεδίο ορισμού τις ομαλές συναρτήσεις. Δηλαδή, αυτές που έχουν συνεχείς παραγώγους κάθε τάξης. Με τον επιπλέον περιορισμό ότι μηδενίζονται έξω από κάποιο συμπαγές διάστημα της πραγματικής ευθείας. Για το σύνολο των συναρτήσεων αυτού του είδους θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο  $C_0^\infty(\mathbb{R})$ .

**Παρατήρηση.** Ορισμένοι συγγραφείς προτιμούν να συμβολίζουν την κλάση  $C_0^\infty(\mathbb{R})$  με  $C_c^\infty(\mathbb{R})$ .

Ο κάτω δείκτης  $c$  αντιστοιχεί στη λέξη compact (=συμπαγής, -ές).

■

Όμως, ενώ η απαίτηση της ομαλότητας ικανοποιείται εύκολα, ο συνδυασμός της με τον μηδενισμό έξω από ένα φραγμένο διάστημα της μορφής  $[a, b]$  κάνει τα πράγματα αρκετά δύσκολα.

Γιατί, οι περισσότερες από τις συναρτήσεις που έρχονται πρόχειρα στο μυαλό μας είναι ομαλές, ή, όπως αλλιώς λέμε, ανήκουν στην κλάση  $C^\infty(\mathbb{R})$ . Όλες οι μη αρνητικές δυνάμεις του  $x$ , για παράδειγμα, άρα και όλες οι πολυωνυμικές συναρτήσεις είναι ομαλές. Όμως, αυτές οι συναρτήσεις δεν μηδενίζονται ταυτοτικά έξω από κάποιο φραγμένο διάστημα της πραγματικής ευθείας. Επειδή, λοιπόν, ο αναγνώστης μπορεί να μην έχει υπόψη του κάποιο παράδειγμα



ομαλής συνάρτησης η οποία μηδενίζεται έξω από ένα συμπαγές διάστημα, θα προχωρήσουμε μαζί στην κατασκευή του.

Για το σκοπό αυτό, ας θεωρήσουμε αρχικά το

**Πρόβλημα 2.1.** Να βρεθεί μια συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  κλάσης  $C^n(\mathbb{R})$ , η οποία μηδενίζεται σε κάθε σημείο του αρνητικού ημιάξονα.

*Λύση.* Η επίλυση αυτού του προβλήματος δεν είναι δύσκολη, αν σκεφτούμε ότι η  $x^m$  μηδενίζεται καθώς πλησιάζουμε στο σημείο  $x = 0$ , αλλά το ίδιο ισχύει και για όλες τις παραγώγους της μέχρι τάξης  $m - 1$ . Συνεπώς, μια καλή υποψηφιότητα για τη ζητούμενη συνάρτηση είναι η

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^{n+1}, & x \geq 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

Την αυστηρή απόδειξη ότι αυτή η συνάρτηση πραγματικά ανήκει στην κλάση  $C^n(\mathbb{R})$  την αφήνουμε για άσκηση του αναγνώστη. ■

Για να προχωρήσουμε ένα βήμα παραπέρα προς τον στόχο μας, ας θεωρήσουμε το, κάπως δυσκολότερο,

**Πρόβλημα 2.2.** Να βρεθεί μια **φραγμένη** συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  κλάσης  $C^\infty(\mathbb{R})$ , η οποία μηδενίζεται σε κάθε σημείο του αρνητικού ημιάξονα.

*Λύση.* Με βάση το προηγούμενο παράδειγμα, ίσως δοκιμάζαμε όλο και μεγαλύτερες δυνάμεις του  $x$ , έτσι ώστε να αυξήσουμε την ομαλότητα της συνάρτησης. Όμως, δυστυχώς, η δύναμη  $x^\infty$  δεν υπάρχει. Γιατί, απλούστατα, ο αριθμός  $\infty$  είναι ανύπαρκτος! Το  $\infty$  συμβολίζει μια μαθηματική διαδικασία και ποτέ έναν συγκεκριμένο αριθμό.

Ωστόσο, υπάρχουν συναρτήσεις που, με μιαν έννοια, περιέχουν όλες τις δυνάμεις του  $x$ , χωρίς καμία εξαίρεση. Ένα σημαντικό παράδειγμα συνάρτησης αυτού του είδους είναι η εκθετική. Όπως όλοι γνωρίζουμε, η

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n, \quad (2.11)$$

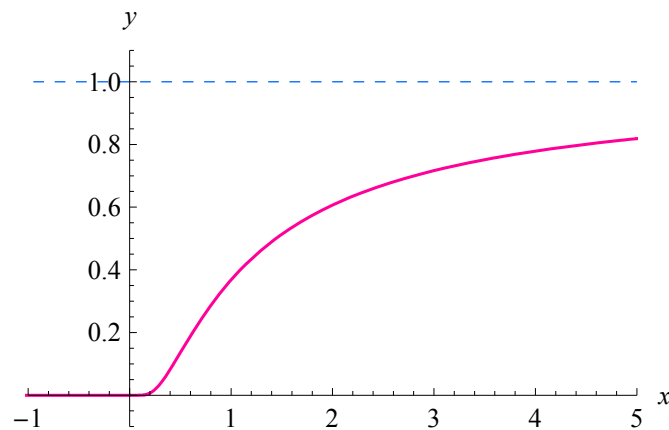
με την έννοια ότι η σειρά συγκλίνει σε κάθε σημείο της πραγματικής ευθείας. Πραγματικά, η εκθετική συνάρτηση ανήκει στην κλάση  $C^\infty(\mathbb{R})$ , αλλά, από τη σκοπιά του προβλήματος που θέλουμε να λύσουμε, έχει δύο βασικά μειονεκτήματα: Δεν είναι φραγμένη στο διάστημα  $x > 0$  και δεν μηδενίζεται καθώς το  $x$  πλησιάζει στο μηδέν από τα δεξιά.

Το πρώτο από τα δυο μειονεκτήματα της εκθετικής συνάρτησης εξαφανίζεται ευθύς μόλις αλλάξουμε το πρόσημο του εκθέτη της: Η  $e^{-x}$  παραμένει φραγμένη στο διάστημα  $x > 0$  και μάλιστα μηδενίζεται καθώς το  $x \rightarrow \infty$ . Η ασυμπτωτική συμπεριφορά της  $e^{-x}$  για πολύ μεγάλα  $x$  δείχνει και τον τρόπο με τον οποίο αίρεται και το δεύτερο μειονέκτημα της  $e^x$ : Το μόνο που χρειάζεται να κάνουμε είναι να αντιστρέψουμε τον εκθέτη! Γιατί, η αντιστροφή  $x \rightarrow 1/x$  απεικονίζει τον θετικό ημιάξονα  $\mathbb{R}_+$  στον εαυτό του, αλλά με τρόπο ώστε τα μικρά  $x$

να γίνουν μεγάλα και αντίστροφα. Κατά συνέπεια, η συμπεριφορά της  $e^{-x}$  καθώς το  $x \rightarrow \infty$  είναι ίδια μ' εκείνη της  $e^{-1/x}$ , καθώς το  $x \rightarrow 0$ . Κοντολογίς, η συνάρτηση που φαίνεται να ικανοποιεί τις απαιτήσεις του προβλήματος είναι η

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ e^{-1/x}, & x > 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

Το γράφημά της δίνεται στο επόμενο σχήμα.



**Σχ. 2.2** Το γράφημα της ομαλής συνάρτησης  $f(x)$ , που ορίζεται από τον τύπο (2.12).

Πιστεύουμε ότι ο αναγνώστης δε θα αντιμετωπίσει δυσκολία στο να αποξείξει αυστηρά ότι η συνάρτηση που ορίζεται στην (2.12) αποτελεί λύση του δοσμένου προβλήματος. Γι' αυτό, περιοριζόμαστε στην ακόλουθη επισήμανση: Το σημείο  $x = 0$  δεν παίζει κανέναν ιδιαίτερο ρόλο στις τμηματικά οριζόμενες συναρτήσεις που κατασκευάσαμε παραπάνω. Μπορούμε να το αντικαταστήσουμε αμέσως με οποιοδήποτε άλλο σημείο της πραγματικής ευθείας με απλή μετάθεση. Για παράδειγμα, από την (2.12) μπορούμε να παράξουμε αμέσως ένα άπειρο σύνολο παρόμοιων συναρτήσεων. Πιο συγκεκριμένα, ο τύπος

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \leq a \\ e^{-1/(x-a)}, & x > a \end{cases} \quad (2.13)$$

όπου  $a$  τυχαίος πραγματικός αριθμός, ορίζει μια φραγμένη συνάρτηση κλάσης  $C^\infty(\mathbb{R})$ , στην οποία η μετάβαση από τις μηδενικές προς τις μη μηδενικές τιμές ξεκινάει στο  $x = a$ .

■

Με την εμπειρία που έχει αποκτήσει ο αναγνώστης από την επίλυση των προηγούμενων προβλημάτων δεν θα δυσκολευτεί να αποδείξει και το επόμενο γεγονός: Η συνάρτηση

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/(x-a)(b-x)}, & a < x < b \\ 0, & x \notin (a, b) \end{cases} \quad (2.14)$$

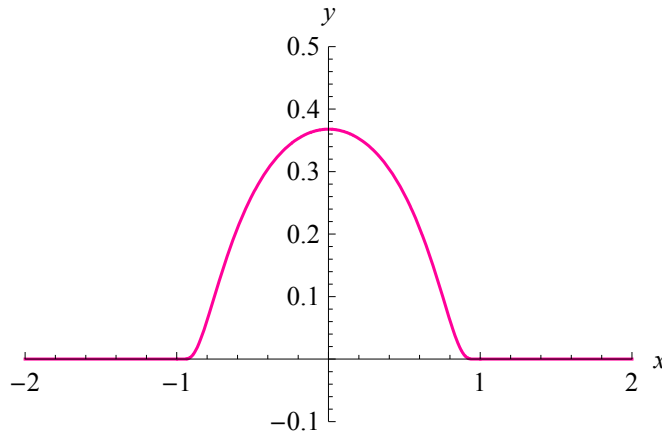
όπου  $a, b$  τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί, έχει συνεχείς παραγώγους κάθε τάξης. Από τον ορισμό της είναι προφανές ότι η παραπάνω συνάρτηση μηδενίζεται έξω από το φραγμένο διάστημα  $[a, b]$ . Άρα, ανήκει στην κλάση  $C_0^\infty(\mathbb{R})$ .

Στην πραγματικότητα, ο τύπος (2.14) δεν ορίζει μία μόνο συνάρτηση, αλλά μια

διπαραμετρική οικογένεια συναρτήσεων κλάσης  $C_0^\infty(\mathbb{R})$  με άπειρα μέλη, όσα και οι επιλογές των αριθμών  $a, b$ . Για παράδειγμα, η επιλογή  $(a, b) = (-1, 1)$  οδηγεί στην άρτια συνάρτηση

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/(1-x^2)}, & -1 < x < 1 \\ 0, & x \notin (-1, 1) \end{cases} \quad (2.15)$$

της οποίας το γράφημα δίνεται στο Σχ. 2.3.



**Σχ. 2.3** Το γράφημα της συνάρτησης κλάσης  $C_0^\infty(\mathbb{R})$ , που ορίζεται από τον τύπο (2.15).

Από την άλλη, η αντικατάσταση  $x \rightarrow x - c$  μετατρέπει την συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο (2/15) σε μία πανομοιότυπη, η οποία, όμως, είναι μη μηδενική στο διάστημα  $(a+c, b+c)$ . Τέλος, με βάση την επόμενη πρόταση, την οποία καλείται να αποδείξει, ο αναγνώστης έχει πλέον στη διάθεσή του άπειρα παραδείγματα συναρτήσεων που ανήκουν στην κλάση  $C_0^\infty(\mathbb{R})$ .

### Πρόταση 2.2

- (i) Ο γραμμικός συνδυασμός δύο συναρτήσεων κλάσης  $C_0^\infty(\mathbb{R})$  ανήκει στην  $C_0^\infty(\mathbb{R})$ .  
(ii) Αν η συνάρτηση  $g \in C^\infty(\mathbb{R})$  και η  $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ , τότε η  $gf \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ .

■

### Παράδειγμα 2.1

Και οι δυο συναρτήσεις

$$f_1(x) := \begin{cases} e^{1/(x+3)(1+x)}, & -3 < x < -1 \\ 0, & x \notin (-3, -1) \end{cases} \quad f_2(x) := \begin{cases} e^{-1/(x-1)(3-x)}, & 1 < x < 3 \\ 0, & x \notin (1, 3) \end{cases} \quad (2.16)$$

παίρνουν μόνο μη αρνητικές τιμές και το μέγιστό τους βρίσκεται στα σημεία  $x = -2$  και  $x = 2$ , αντίστοιχα. Όπως οι  $f_1, f_2$ , η συνάρτηση

$$f(x) := x^3 f_1(x) + \sin x f_2(x) \quad (2.17)$$

ανήκει στην κλάση  $C_0^\infty(\mathbb{R})$ . Πιο συγκεκριμένα, είναι ομαλή, μηδενίζεται ταυτοτικά σε κάθε σημείο που δεν ανήκει στο σύνολο  $(-3, -1) \cup (1, 3)$ , αλλά δεν παραμένει θετική στο εσωτερικό αυτού του συνόλου.

Όπως έχουμε αφήσει να εννοηθεί από την αρχή, αυτό που αναζητούσε ο Dirac δεν μπορεί ν' αποδοθεί με τη συνηθισμένη έννοια της συνάρτησης, αλλά μ' εκείνη της "συνάρτησης συναρτήσεων". Ακριβέστερα, η "συνάρτηση του Dirac" θα πάρει τη μορφή μιας γραμμικής απεικόνισης των συναρτήσεων κλάσης  $C_0^\infty(\mathbb{R})$  στους πραγματικούς αριθμούς.

Προτού δώσουμε τον ακριβή ορισμό της, θα μας επιτραπεί να τονίσουμε το εξής: Όπως ακριβώς οι συνηθισμένες συναρτήσεις, έτσι και οι απεικονίσεις της μορφής  $T: C_0^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  χωρίζονται σε συνεχείς και μη. Θυμίζουμε, λοιπόν, ότι για να ορίσει κανείς τη συνέχεια μιας συνηθισμένης συνάρτησης, χρειάζεται την έννοια της εγγύτητας δύο σημείων του πεδίου ορισμού της. Ανάλογα, για ν' αποφανθούμε αν μια απεικόνιση  $T: C_0^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχής ή όχι, χρειαζόμαστε ένα κριτήριο που θα μας επιτρέψει να πούμε ότι δύο συναρτήσεις κλάσης  $C_0^\infty(\mathbb{R})$  είναι κοντά η μία στην άλλη ή όχι.

Αυτό το κριτήριο παρέχεται από την έννοια της στάθμης μιας φραγμένης συνάρτησης. Θυμίζουμε ότι, **στάθμη** (norm) της φραγμένης συνάρτησης  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  λέγεται ο αριθμός

$$\|f\| := \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \quad (2.18)$$

Ας σημειωθεί πως, όταν η  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχής και μηδενίζεται έξω από το φραγμένο διάστημα  $[a, b]$ , τότε

$$\|f\| = \max_{x \in [a, b]} |f(x)| = \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|. \quad (2.19)$$

Η αντιστοιχία  $f \rightarrow \|f\|$  που, μ' αυτό τον τρόπο, ορίζεται ανάμεσα στις φραγμένες συναρτήσεις και τους μη αρνητικούς αριθμούς οδηγεί αμέσως στην έννοια της εγγύτητας δύο συναρτήσεων: Όσο μικρότερος είναι ο αριθμός  $\|f_1 - f_2\|$ , τόσο πιο κοντά η μία στην άλλη θεωρούμε πως είναι οι συναρτήσεις  $f_1, f_2$ . Με άλλα λόγια, αν  $\|f_1 - f_2\| < \|f_1 - f_3\|$ , τότε λέμε ότι η απόσταση της  $f_2$  από την  $f_1$  είναι μικρότερη από εκείνη της  $f_3$ .

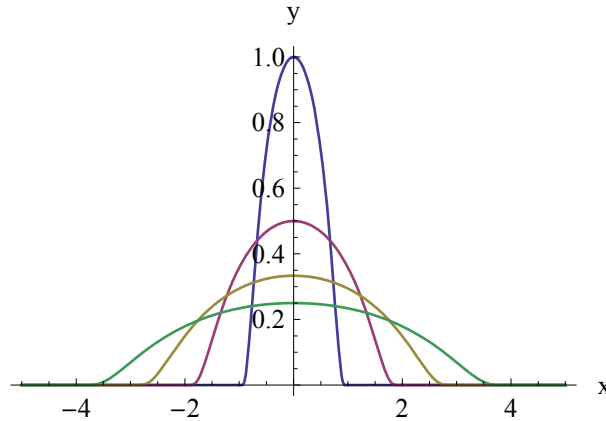
Σ' αυτό το μέτρο εγγύτητας στηρίζεται η έννοια της ομοιόμορφης σύγκλισης μιας (άπειρης) ακολουθίας συναρτήσεων. Συγκεκριμένα, λέμε ότι η ακολουθία των συναρτήσεων  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  **συγκλίνει ομοιόμορφα** στη συνάρτηση  $f$ , όταν, για οποιοδήποτε  $\varepsilon > 0$ , υπάρχει φυσικός αριθμός  $N$ , τέτοιος που  $\|f_n - f\| < \varepsilon$ , για κάθε  $n > N$ .

### Παράδειγμα 2.2

Ας θεωρήσουμε την ακολουθία των συναρτήσεων κλάσης  $C_0^\infty(\mathbb{R})$  που ορίζεται από τον τύπο

$$\varphi_n(x) := \begin{cases} \frac{e}{n} e^{-n^2/(n^2-x^2)}, & |x| < n \\ 0, & |x| \geq n \end{cases} \quad (2.20)$$

Το γράφημα των τεσσάρων πρώτων μελών της ακολουθίας  $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$  φαίνεται στο Σχ. 2.4.



Σχ. 2.4 Το γράφημα των τεσσάρων πρώτων μελών της ακολουθίας (2.20).

Θα πρέπει να είναι φανερό ότι, η  $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$  συγκλίνει ομοιόμορφα στη μηδενική συνάρτηση, δηλαδή στην  $\varphi(x) = 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

■

Για να ορίσουμε τις "συναρτήσεις του Dirac", θα χρειαστούμε μian αυστηρότερη έννοια της εγγύτητας δύο συναρτήσεων και, κατ' επέκταση, της σύγκλισης μιας ακολουθίας συναρτήσεων. Ωστόσο, από πρακτική άποψη, δεν είναι απαραίτητο να ξεκινήσουμε από την αντίστοιχη πιο εξειδικευμένη έννοια της απόστασης δύο συναρτήσεων και άρα την τοπολογία του συναρτησιακού χώρου  $C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ . Το μόνο που θα χρειαστούμε ως θεμέλιο της ανάλυσης του  $C_0^{\infty}(\mathbb{R})$  είναι ακολουθίες από στοιχεία αυτού του χώρου.

Ακριβέστερα, θα συγκεντρώσουμε την προσοχή μας σε ακολουθίες που εμφανίζουν την εξής συμπεριφορά:

- (i) Υπάρχει φραγμένο διάστημα της πραγματικής ευθείας το οποίο καλύπτει τα ερείσματα όλων των μελών της ακολουθίας  $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ .
- (ii) Η ακολουθία  $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$  συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση  $\varphi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ .
- (iii) Κάθε μια από τις ακολουθίες  $\{\varphi_n^{(j)}\}_{n=1}^{\infty}$  που ορίζεται από τις παραγώγους τάξης  $j$  των μελών της  $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$  συγκλίνει ομοιόμορφα στην  $\varphi^{(j)}$ .

Αυτού του είδους τη συμπεριφορά θα την ονομάζουμε *ελεγκτική σύγκλιση*. Όσο αφορά την αντίστοιχη ακολουθία  $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ , θα λέμε ότι αυτή *συγκλίνει ελεγκτικά στην  $\varphi$*  και θα το δηλώνουμε γράφοντας

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi. \quad (2.21)$$

Όταν θεωρείται ως εφοδιασμένος με αυτή την έννοια σύγκλισης, ο συναρτησιακός χώρος  $C_0^{\infty}(\mathbb{R})$  συμβολίζεται με  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  και τα μέλη του αναφέρονται πλέον με το όνομα *ελεγκτικές συναρτήσεις* (*test functions*).

Για ευκολία, το χώρο των ελεγκτικών συναρτήσεων  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  θα τον συμβολίζουμε από δω και πέρα με σκέτο  $\mathcal{D}$  και, όταν λέμε ότι κάποια ακολουθία στοιχείων αυτού του χώρου

συγκλίνει, θα εννοούμε ότι συγκλίνει ελεγκτικά.

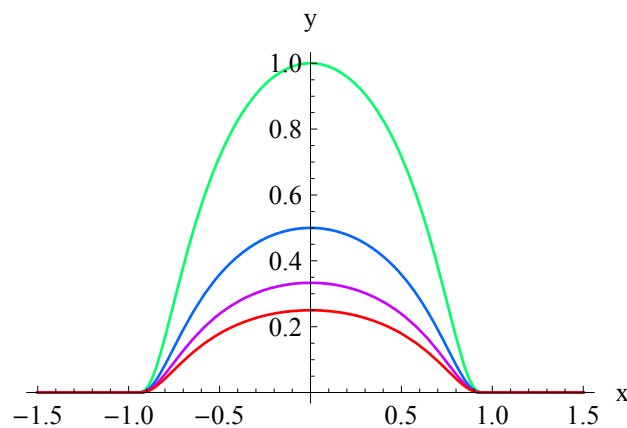
### Παράδειγμα 2.3

Είναι φανερό ότι, για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ , η συνάρτηση

$$\varphi_n(x) := \begin{cases} \frac{e}{n} e^{-1/(1-x^2)}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases} \quad (2.22)$$

έχει ως έρεισμα το διάστημα  $[-1, 1]$  και ανήκει στην κλάση  $C_0^\infty(\mathbb{R})$  (βλ. Σχ. 2.5). Είναι επίσης φανερό ότι συνάρτηση  $f(x) = e e^{-1/(1-x^2)}$ ,  $|x| < 1$ , παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο  $x = 0$ . Προφανώς,  $f(0) = 1$ . Άρα,

$$\|\varphi_n\| = \max_{x \in [-1, 1]} |\varphi_n(x)| = \frac{1}{n} \quad (2.23)$$



Σχ. 2.5 Το γράφημα των τεσσάρων πρώτων μελών της ακολουθίας (2.22).

Από την άλλη, κάθε μία από τις συναρτήσεις  $\varphi_n^{(j)}(x)$  είναι συνεχής στο συμπαγές (κλειστό και φραγμένο) διάστημα  $[-1, 1]$  και μηδενίζεται στα άκρα του. Άρα, σε ένα τουλάχιστον σημείο αυτού του διαστήματος, η  $\varphi_n^{(j)}(x)$  θα παίρνει τη μέγιστη τιμή της, ας την πούμε  $M_j$ . Συνεπώς,

$$\|\varphi_n^{(j)}\| = \max_{x \in [-1, 1]} |\varphi_n^{(j)}(x)| = \frac{1}{n} M_j \quad (2.24)$$

Καθώς λοιπόν το  $n \rightarrow \infty$ , οι ακολουθίες των αριθμών  $\|\varphi_n\|$  και  $\|\varphi_n^{(j)}\|$  συγκλίνουν στο μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι, στο χώρο  $\mathcal{D}$ , η ακολουθία  $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$  συγκλίνει στη μηδενική ελεγκτική συνάρτηση, αυτή που δίνει  $\varphi(x) = 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

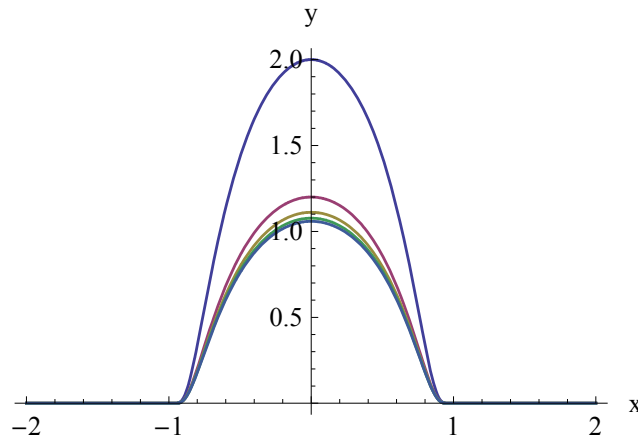
### Παράδειγμα 2.4

Στον χώρο  $\mathcal{D}$ , η ακολουθία  $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ , όπου

$$\varphi_n(x) := \begin{cases} e\left(1 + \frac{1}{n}\right) e^{-1/(1-x^2)}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases} \quad (2.25)$$

συγκλίνει στη συνάρτηση

$$\varphi_n(x) := \begin{cases} e e^{-1/(1-x^2)}, & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases} \quad (2.26)$$



Σχ. 2.6 Τα τέσσερα πρώτα μέλη της ακολουθίας (2.25).

### Παράδειγμα 2.5

Η συνάρτηση

$$\varphi_n(x) := \begin{cases} \frac{e}{n} e^{-1/(1-n^2 x^2)}, & |x| < \frac{1}{n} \\ 0, & |x| \geq \frac{1}{n} \end{cases} \quad (2.27)$$

έχει ως έρεισμα το διάστημα  $[-1/n, 1/n]$  και ανήκει στην κλάση  $C_0^\infty(\mathbb{R})$ . Συνεπώς, το διάστημα  $[-1, 1]$  καλύπτει όλα τα μέλη της ακολουθίας  $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ . Επιπλέον,

$$\|\varphi_n\| = \max_{x \in [-1/n, 1/n]} |\varphi_n(x)| = \frac{1}{n}. \quad (2.28)$$

Αυτό σημαίνει ότι η ακολουθία  $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$  συγκλίνει ομοιόμορφα στη μηδενική συνάρτηση.

Ωστόσο, στην προκειμένη περίπτωση δεν ισχύει ότι  $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$ . Γιατί;

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι μια συγκεκριμένη συνεχής συνάρτηση, όπως η  $f(x) = x^2$ . Τότε, για κάθε ελεγκτική συνάρτηση  $\varphi$ , η ποσότητα

$$\langle T_f, \varphi \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx \quad (2.29)$$

είναι ένας συγκεκριμένος πραγματικός αριθμός. Πρόκειται για τον ίδιο αριθμό που νωρίτερα συμβολίσαμε με  $I_f(\varphi)$ . Ωστόσο, ο συμβολισμός που χρησιμοποιήσαμε στην (2.29) έχει καθιερωθεί διεθνώς για την περίπτωση των γραμμικών συναρτησιακών, στη βάση της ακόλουθης παρατήρησης. Στο δεξί μέλος της (2.19) οι συναρτήσεις  $f$  και  $\varphi$  παίζουν ισότιμο ρόλο. Μάλιστα, αυτή η έκφραση αναφέρεται συχνά και ως εσωτερικό γινόμενο των δύο συναρτήσεων. Άρα, οι  $f$  και  $\varphi$  θα πρέπει να εμφανίζονται ισότιμα και στο αριστερό μέλος της (2.19). Γι' αυτό, οι υπέρμαχοι του παραπάνω συμβολισμού γράφουν την (2.19) και στη μορφή

$$\langle f, \varphi \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx \quad (2.30)$$

Εμείς θα φανούμε, προς το παρόν τουλάχιστον, λιγότερο ... δημοκρατικοί, και θα επιμείνουμε στην διατύπωση (2.19), για λόγους που θα γίνουν εμφανείς πολύ σύντομα.

Προφανώς, ο αριθμός  $\langle T_f, \varphi \rangle$  δεν μπορεί να προσδιοριστεί ακριβώς, όσο ο τύπος της ελεγκτικής συνάρτησης  $\varphi$  δεν είναι γνωστός. Μάλιστα, όπως τονίσαμε και νωρίτερα, τις περισσότερες φορές, η εύρεση του αριθμού  $\langle T_f, \varphi \rangle$  με αναλυτικές μεθόδους είναι αδύνατη, ακόμα και όταν η συνάρτηση  $\varphi$  έχει προσδιοριστεί πλήρως. Αυτό οφείλεται στο ... απίστευτο γεγονός ότι, συνήθως, όσο ομαλότερη είναι μια συνάρτηση, τόσο πιο δύσκολο είναι να εκφραστεί το ολοκλήρωμά της μέσω απλών συναρτήσεων.

Ωστόσο, η πιο πάνω δυσκολία δεν αποτελεί αξιόλογο εμπόδιο στο χτίσιμο του οικοδομήματος της *Ανάλυσης στο Χώρο των Ελεγκτικών Συναρτήσεων*. Γιατί, εκείνο που έχει σημασία είναι ότι, με δοσμένη την  $f$ , ο αριθμός  $\langle T_f, \varphi \rangle$  προσδιορίζεται μονοσήμαντα, για κάθε ελεγκτική συνάρτηση  $\varphi$ .

Όπως δείξαμε παραπάνω, η απεικόνιση  $T_f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  που ορίζεται μέσω της (2.19) είναι γραμμική. Τώρα, θα αποδείξουμε ότι είναι και συνεχής. Για το σκοπό αυτό, ας υποθέσουμε ότι η ακολουθία ελεγκτικών συναρτήσεων  $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$  συγκλίνει στην  $\varphi \in \mathcal{D}$ . Τότε, υπάρχει φραγμένο διάστημα  $[a, b]$  έξω από το οποίο οι  $\varphi_n$  και η  $\varphi$  μηδενίζονται. Άρα

$$\begin{aligned} \left| \langle T_f, \varphi_n \rangle - \langle T_f, \varphi \rangle \right| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \{ \varphi_n(x) - \varphi(x) \} dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f(x)| \left| \varphi_n(x) - \varphi(x) \right| dx \leq \|f\| \|\varphi_n - \varphi\| (b-a). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Η υπόθεση ότι  $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$  εμπεριέχει το γεγονός ότι  $\|\varphi_n - \varphi\| \rightarrow 0$ , καθώς το  $n \rightarrow \infty$ . Άρα, από την (2.31) έπεται ότι η ακολουθία των αριθμών  $\{\langle T_f, \varphi_n \rangle\}_{n=1}^{\infty}$  συγκλίνει στον αριθμό  $\langle T_f, \varphi \rangle$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_f, \varphi_n \rangle = \langle T_f, \varphi \rangle. \quad (2.32)$$

Οι ιδιότητες του συναρτησιακού  $T_f: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  δείχνουν ότι έχει νόημα ο

**Ορισμός 2.1.** Ένα συναρτησιακό  $T: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  λέγεται *κατανομή (distribution)* ή *γενικευμένη*



**συνάρτηση** (*generalized function*) όταν έχει και τις δύο ακόλουθες ιδιότητες.

(i) Είναι **γραμμικό**. Αυτό σημαίνει ότι

$$\langle T, c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 \rangle = c_1 \langle T, \varphi_1 \rangle + c_2 \langle T, \varphi_2 \rangle \quad (2.33)$$

για κάθε  $\varphi_1, \varphi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  και τυχαίους πραγματικούς αριθμούς  $c_1, c_2$ .

(ii) Είναι **συνεχές**. Δηλαδή, ισχύει η συνεπαγωγή

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi \Rightarrow \langle T, \varphi_n \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle. \quad (2.34)$$

■

Από τον τρόπο που κατασκευάσαμε το συναρτησιακό  $T_f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  έπεται ότι, για κάθε συνεχή συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , ορίζεται αυτόματα μια αντίστοιχη κατανομή, η  $T_f : C_0^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ . Ειδικότερα αυτό ισχύει για κάθε σταθερή συνάρτηση, δηλαδή για κάθε συνάρτηση με τύπο  $f(x) = c$ , όπου  $c$  κάποιος πραγματικός αριθμός. Συνήθως, το  $c$  χρησιμοποιείται για να δηλωθεί όχι μόνο η τιμή της σταθερής συνάρτησης, αλλά και η ίδια η συνάρτηση. Αυτός είναι και ο λόγος που συχνά γράφουμε ισότητες της μορφής  $h = g + c$ , όπου  $f, g$  δοσμένες συναρτήσεις. Με βάση αυτή τη σύμβαση, μπορούμε να πούμε ότι στη συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x) = c$  αντιστοιχεί η κατανομή  $T_c : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$\langle T_c, \varphi \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} c \varphi(x) dx = c \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx. \quad (2.35)$$

Σημειώστε ότι, η επιλογή  $c = 0$  οδηγεί στη **μηδενική κατανομή**:  $\langle T_0, \varphi \rangle = 0$ , για κάθε  $\varphi \in \mathcal{D}$ .

Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να κατασκευάσουμε και κατανομές που αντιστοιχούν σε συναρτήσεις που δεν είναι συνεχείς. Το επόμενο παράδειγμα είναι αντιπροσωπευτικό.

### Παράδειγμα 2.6

Ας θεωρήσουμε την ασυνεχή συνάρτηση  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$h(x) := \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases} \quad (2.36)$$

κι ας ορίσουμε το συναρτησιακό  $T_h : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  με το ακόλουθο τρόπο:

$$\langle T_h, \varphi \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \varphi(x) dx = \int_0^{\infty} \varphi(x) dx. \quad (2.37)$$

Η γραμμικότητα του συναρτησιακού  $T_h$  είναι προφανής. Για να εξακριβώσουμε αν είναι και συνεχές, αρκεί να παρατηρήσουμε το εξής. Αν τα μέλη της ακολουθίας  $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$  και η συνάρτηση  $\varphi$  μηδενίζονται έξω από το διάστημα  $[a, b]$ , τότε

$$\begin{aligned} \left| \langle T_h, \varphi_n \rangle - \langle T_h, \varphi \rangle \right| &= \left| \int_0^\infty \{\varphi_n(x) - \varphi(x)\} dx \right| \\ &\leq \int_0^c |\varphi_n(x) - \varphi(x)| dx \leq c \|\varphi_n - \varphi\|, \end{aligned} \quad (2.38)$$

όπου  $c = \max\{0, b\}$ . Άρα, η σύγκλιση  $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$  συνεπάγεται τη σύγκλιση της ακολουθίας  $\{\langle T_h, \varphi_n \rangle\}$  στον αριθμό  $\langle T_h, \varphi \rangle$ . Αλλά αυτό σημαίνει ότι το συναρτησιακό  $T_h$  είναι όντως συνεχές.

**Παρατήρηση.** Η συνάρτηση  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$g(x) := \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \quad (2.39)$$

είναι διαφορετική από την  $h$  του προηγούμενου παραδείγματος, αφού  $g(0) \neq h(0)$ . Αντίθετα, η κατανομή  $T_g : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  που κατασκευάζεται όπως και η  $T_h$ , δηλαδή μέσω του τύπου

$$\langle T_g, \varphi \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \varphi(x) dx, \quad (2.40)$$

ταυτίζεται με την κατανομή  $T_h$  του παραδείγματος. Κι αυτό γιατί,

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \varphi(x) dx = \int_0^{\infty} \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \varphi(x) dx, \quad (2.41)$$

για κάθε  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ .

Γενικότερα, η αντιστοιχία ανάμεσα στη συνάρτηση  $f$  και την κατανομή  $T_f$  παύει να είναι αμφιμονοσήμαντη όταν η  $f$  δεν είναι συνεχής.

Το γεγονός ότι, για σε κάθε συνεχή (ή τμηματικά συνεχή) συνάρτηση αντιστοιχεί μια κατανομή **δεν** σημαίνει ότι όλες οι κατανομές κατασκευάζονται με αυτό τον τρόπο. Μια πολύ σημαντική κατανομή που **δεν** αντιστοιχεί σε καμία συνηθισμένη συνάρτηση δίνεται στο

### Παράδειγμα 2.7 (Η "συνάρτηση" του Dirac)

Επιλέγουμε κάποιον πραγματικό αριθμό  $a$  και ορίζουμε το συναρτησιακό  $\delta_a : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  ως εξής:

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a). \quad (2.42)$$

Η γραμμικότητα και συνέχεια αυτού του συναρτησιακού επαληθεύονται εύκολα:

(i) Αν  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  και  $\varphi_1, \varphi_2 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  τότε

$$\langle \delta_a, c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 \rangle = c_1 \varphi_1(a) + c_2 \varphi_2(a) = c_1 \langle \delta_a, \varphi_1 \rangle + c_2 \langle \delta_a, \varphi_2 \rangle. \quad (2.43)$$

(ii) Από τον ορισμό της στάθμης,  $\|\varphi\|$ , αμέσως έπεται ότι

$$| \langle \delta_a, \varphi_n \rangle - \langle \delta_a, \varphi \rangle | = |\varphi_n(a) - \varphi(a)| \leq \| \varphi_n - \varphi \|. \quad (2.44)$$

Άρα, η συνεπαγωγή  $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi \Rightarrow \langle \delta_a, \varphi_n \rangle \rightarrow \langle \delta_a, \varphi \rangle$  ισχύει.

Η κατανομή  $\delta_a$  που μόλις ορίσαμε είναι το μαθηματικό αντικείμενο που αναζητούσε ο P.A.M. Dirac. Γι' αυτό και φέρει το όνομά του: Λέγεται **δέλτα του Dirac**. Μάλιστα, συχνά αναφέρεται ακόμη ως **συνάρτηση δέλτα του Dirac**, παρά το γεγονός ότι δεν είναι και ούτε αντιστοιχεί σε κάποια συνηθισμένη συνάρτηση.

Ο αριθμός  $a$  αναφέρεται ως **πόλος** ή **έρεισμα** της  $\delta_a$ , για λόγους που θα διευκρινιστούν στη συνέχεια. ■

Οι κατανομές που αντιστοιχούν σε (τμηματικά) συνεχείς συναρτήσεις ονομάζονται **κανονικές** (regular). Όλες οι υπόλοιπες αναφέρονται ως **ιδιόμορφες** (singular). Για να μη δημιουργηθεί η εντύπωση ότι οι ιδιόμορφες κατανομές αποτελούν μια αμελητέα ποσότητα μέσα στο σύνολο των κατανομών, σπεύδουμε να τονίσουμε την εξής αναλογία: Η σχέση των ιδιόμορφων κατανομών προς τις κανονικές είναι ανάλογη εκείνης των άρρητων αριθμών προς τους ρητούς. Και όλοι σήμερα γνωρίζουμε ότι, η αρχική εντύπωση των Πυθαγόρειων ήταν τελείως λαθεμένη: Οι άρρητοι αριθμοί αποτελούν ένα άπειρο και μη αριθμήσιμο υποσύνολο των πραγματικών. Η αναλογία της σχέσης κανονικών-ιδιόμορφων κατανομών προς τη σχέση ρητών-άρρητων αριθμών θ' αναδειχτεί με σαφέστερο τρόπο λίγο αργότερα.

Όταν οι συναρτήσεις  $f_1, f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχείς, τότε το ίδιο ισχύει και για οποιονδήποτε γραμμικό συνδυασμό τους, δηλαδή για κάθε συνάρτηση της μορφής  $f = a_1 f_1 + a_2 f_2$ , όπου  $a_j$  τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί. Για τις αντίστοιχες κατανομές και για οποιαδήποτε ελεγκτική συνάρτηση  $\varphi$ , θα έχουμε

$$\begin{aligned} \langle T_f, \varphi \rangle &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} [a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x)] \varphi(x) dx \\ &= a_1 \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) \varphi(x) dx + a_2 \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x) \varphi(x) dx \\ &\equiv a_1 \langle T_{f_1}, \varphi \rangle + a_2 \langle T_{f_2}, \varphi \rangle. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Αυτή η παρατήρηση επιβάλλει το να υιοθετήσουμε τον εξής ορισμό: Ας υποθεθεί ότι οι  $T_1, T_2$  είναι κατανομές και οι  $a_1, a_2$  τυχαίοι αριθμοί. Τότε, με  $T = a_1 T_1 + a_2 T_2$  εννοούμε το συναρτησιακό που δίνει τον αριθμό  $\langle T, \varphi \rangle = a_1 \langle T_1, \varphi \rangle + a_2 \langle T_2, \varphi \rangle$ , για κάθε  $\varphi \in \mathcal{D}$ . Το γεγονός ότι, το συναρτησιακό που ορίζεται μ' αυτό τον τρόπο είναι και κατανομή, αποδειχεται σε δυο γραμμές.

Σε κάθε περίπτωση, το βασικό συμπέρασμα είναι ότι, με τον παραπάνω τρόπο, το σύνολο των κατανομών αποκτάει τη δομή ενός (απειροδιάστατου) διανυσματικού χώρου. Από τη σκοπιά της Συναρτησιακής Ανάλυσης, αυτός ο διανυσματικός χώρος είναι ο συζυγής (ή δυϊκός) του  $\mathcal{D}$  και συνήθως συμβολίζεται με  $\mathcal{D}'$  ή  $\mathcal{D}^*$ .

Το γεγονός ότι ο γραμμικός συνδυασμός δύο στοιχείων του  $\mathcal{D}'$  είναι επίσης κατανομή είναι ιδιαίτερα σημαντικό από πρακτική άποψη, γιατί μας επιτρέπει να κατασκευάζουμε δεκάδες νέες κατανομές από ήδη γνωστές. Μάλιστα, τα υλικά μιας τέτοιας κατασκευής μπορεί να είναι τελείως ετερόκλητα, όπως στο ακόλουθο παράδειγμα:  $T = 3T_f - 2\delta_5$ , όπου  $T_f$  η κατανομή που αντιστοιχεί στη συνάρτηση  $f(x) = \sin x$ .

Ωστόσο, θα πρέπει να αποφεύγουμε τις αβασάνιστες γενικεύσεις. Για παράδειγμα,

**Το γινόμενο δύο κατανομών γενικά δεν ορίζεται.**

Αν αμφιβάλλετε, προσπαθήστε να δώσετε νόημα στον πολλαπλασιασμό της  $\delta_a$  με την  $\delta_b$ .

Από την άλλη, αν η  $f(x)$  είναι κλάσης  $C^\infty(\mathbb{R})$  και η  $T$  κατανομή, μπορούμε να ορίσουμε ως γινόμενό τους το συναρτησικό  $fT$ , όπου  $\langle fT, \varphi \rangle := \langle T, f\varphi \rangle$ , για κάθε  $\varphi \in \mathcal{D}$ . Το γεγονός ότι το συναρτησικό  $fT$  είναι κατανομή αποδεικνύεται πολύ εύκολα.

## Ασκήσεις

**2.1 α)** Να δειχτεί ότι η συνάρτηση

$$\varphi(x) := \begin{cases} (1-x^2)^2, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

της οποίας το γράφημα δίνεται στο Σχ. 2.1, είναι συνεχώς διαφορίσιμη  $C_0^1(\mathbb{R})$

β) Να δοθεί μια συνάρτηση  $\psi(x)$  που ανήκει στην κλάση  $C_0^2(\mathbb{R})$ . Ν' αποδειχτεί αναλυτικά ότι η  $\psi(x)$  έχει συνεχή παράγωγο δεύτερης τάξης και να κατασκευαστεί το γράφημά της.

**2.2** Να δειχτεί ότι η συνάρτηση

$$f(x) := \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ e^{-1/x}, & x > 0 \end{cases}$$

της οποίας το γράφημα δίνεται στο Σχ. 2.2, όντως ανήκει στην κλάση  $C^\infty(\mathbb{R})$

**2.3** Ν' αποδειχτεί η Πρόταση 2.2.

**2.4** Δείχτε ότι η ακολουθία

$$\psi_n(x) := \begin{cases} n^{-1} e^{-n^2/(n^2-x^2)}, & |x| < n \\ 0 & |x| \geq n \end{cases}$$

συγκλίνει στο μηδέν ομοιόμορφα και πως το ίδιο ισχύει για τις ακολουθίες που ορίζονται από παραγώγους των  $\psi_n(x)$ , κάθε τάξης. Γιατί, παρ' όλ' αυτά, η ακολουθία  $\psi_n$  δεν συγκλίνει στο μηδενικό στοιχείο του χώρου  $\mathcal{D}$ ;

**2.5 α)** Θεωρήστε τη συνάρτηση

$$\psi(x) := \begin{cases} e^{-1/(1-x^2)}, & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

Δείχτε ότι η  $\varphi(x) = \psi''(x)$  ανήκει στην κλάση  $C_0^\infty(\mathbb{R})$  και κατασκευάστε το γράφημα της  $\varphi(x)$  στο διάστημα  $-2 \leq x \leq 2$ .

β) Για κάθε μια από τις  $T_f$  που αντιστοιχούν στις παρακάτω συναρτήσεις, υπολογίστε την τιμή  $\langle T_f, \varphi \rangle$  της  $T_f$  στο "σημείο"  $\varphi$  του χώρου  $C_0^\infty(\mathbb{R})$ , όπου  $\varphi(x)$  η συνάρτηση που ορίστηκε στο μέρος (α).

(i)  $f(x) = 1$ , (ii)  $f(x) = x$ , (iii)  $f(x) = 1 - x$

(iv)  $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$ , (v)  $f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & x \in [-1, 1] \\ 0, & x \notin [-1, 1] \end{cases}$  (vi)  $f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ x - a, & x \geq a \end{cases}$

**2.6** Δείχτε ότι δεν υπάρχει συνεχής συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , τέτοια που η αντίστοιχη κατανομή  $T_f$  να ταυτίζεται με το δέλτα του Dirac, δηλαδή, για κάθε  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ , να ισχύει η ισότητα  $\langle T_f, \varphi \rangle = \langle \delta_a, \varphi \rangle$ .

**2.7** α) Υποθέστε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι κλάσης  $C^\infty(\mathbb{R})$  κι ότι η  $T \in \mathcal{D}'$ . Δείχτε ότι το συναρτησικό  $fT$  που προσδιορίζεται από τον τύπο  $\langle fT, \varphi \rangle := \langle T, f\varphi \rangle$ , για κάθε  $\varphi \in \mathcal{D}$ , είναι επίσης κατανομή.

β) Δώστε τρία παραδείγματα κατανομών της μορφής  $fT$ ,  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ , για τις περιπτώσεις  $T = H_0$ ,  $T = \delta_0$  και  $T = \delta_2$ , αντίστοιχα, με διαφορετική  $f$  για κάθε περίπτωση.

### 3. Γενικευμένες συναρτήσεις (κατανομές) στον $\mathbb{R}^n$

Οι κατανομές που παρουσιάσαμε στο προηγούμενο εδάφιο είχαν ως πεδίο ορισμού αποκλειστικά και μόνο τις συναρτήσεις μιας μεταβλητής που ανήκουν στην κλάση  $C_0^\infty(\mathbb{R})$ . Κάθε κατανομή αυτού του είδους αναφέρεται ως *κατανομή (επί) της πραγματικής ευθείας*. Η προφανής γενίκευση αυτής της έννοιας οδηγεί στην *κατανομή (επί) του ανοιχτού υποσύνολου*  $\Omega$  του  $\mathbb{R}^n$  και γίνεται με τον εξής απλό τρόπο: Σε όλους τους προηγούμενους ορισμούς αντικαθιστούμε την κλάση  $C_0^\infty(\mathbb{R})$  από την  $C_0^\infty(\Omega)$ . Η τελευταία δεν είναι παρά το σύνολο των ομαλών συναρτήσεων που μηδενίζονται έξω από κάποιο συμπαγές (κλειστό και φραγμένο) υποσύνολο  $\Sigma$  του  $\mathbb{R}^n$ , το οποίο περιέχεται στο δοσμένο  $\Omega$ .

Βέβαια, η επέκταση της ανάλυσής μας σε συναρτήσεις πολλών μεταβλητών, επιβάλλει κάποιες αυτονόητες τροποποιήσεις. Για παράδειγμα, η στάθμη των ελεγκτικών συναρτήσεων στην οποία στηρίζεται η έννοια της ομοιόμορφης σύγκλισης δεν έχει νόημα στη μορφή που δόθηκε στο προηγούμενο εδάφιο. Πρέπει να οριστεί από τον τύπο

$$\|f\| := \sup_{x \in \Omega} |f(x)|, \quad (3.1)$$

όπου τώρα

$$x := (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n. \quad (3.2)$$

Συνακόλουθα, η *ελεγκτική σύγκλιση* θα πρέπει να διατυπωθεί με τον ακόλουθο τρόπο:

- (i) Υπάρχει φραγμένο υποσύνολο  $\Sigma$  του  $\Omega$  το οποίο καλύπτει τα ερείσματα όλων των μελών της ακολουθίας  $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ .
- (ii) Η ακολουθία  $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$  συγκλίνει ομοιόμορφα στην  $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ .
- (iii) Η ακολουθία που ορίζεται από κάθε μία από όλες τις μερικές παραγώγους κάθε τάξης των μελών της  $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$  συγκλίνει ομοιόμορφα στην αντίστοιχη μερική παράγωγο της  $\varphi$ .

Όταν εννοείται ως εφοδιασμένος με την έννοια της ελεγκτικής σύγκλισης που μόλις ορίσαμε, ο χώρος  $C_0^\infty(\Omega)$  αναφέρεται και πάλι ως *χώρος των ελεγκτικών συναρτήσεων* και συμβολίζεται με  $\mathcal{D}(\Omega)$ . Για τον συζυγή του, δηλαδή για τον χώρο των κατανομών επί του  $\Omega$ , χρησιμοποιείται το σύμβολο  $\mathcal{D}'(\Omega)$  (ή το  $\mathcal{D}^*(\Omega)$ ).

Από δω και στο εξής, η συζήτησή μας θα επικεντρωθεί στην περίπτωση όπου το ανοιχτό σύνολο  $\Omega$  ταυτίζεται με τον ίδιο τον Ευκλείδειο χώρο  $\mathbb{R}^n$ . Με άλλα λόγια, θα ασχοληθούμε βασικά με τους διανυσματικούς χώρους  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  και  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ . Για ευκολία, θα τους συμβολίζουμε με  $\mathcal{D}$  και  $\mathcal{D}'$ , αντίστοιχα, αφήνοντας στα συμφραζόμενα το καθήκον να προσδιορίσουν τη διάσταση του αντίστοιχου  $\mathbb{R}^n$ .

Όσο αφορά την ανάγκη να έχουμε στη διάθεσή μας συγκεκριμένα πολυδιάστατα παραδείγματα, κι αυτή καλύπτεται εύκολα, τροποποιώντας όσα έχουμε ήδη παρουσιάσει. Να ένα υπόδειγμα για τον τρόπο με τον οποίο θα μπορούσε κανείς να επιφέρει την κατάλληλη τροποποίηση:

**Παράδειγμα 3.1**

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να μεταβούμε στις δύο διαστάσεις. Τότε, αρκεί να θέσουμε

$$\mathbf{x} := (x_1, x_2), \quad |\mathbf{x}| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad (3.3)$$

στο Παράδειγμα (2.3), για να καταλήξουμε σε μια ακολουθία συναρτήσεων που συγκλίνει ελεγκτικά στον  $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ .

Πιο συγκεκριμένα, κάθε συνάρτηση της μορφής

$$\varphi_n(\mathbf{x}) := \begin{cases} \frac{e}{n} e^{-1/(1-|\mathbf{x}|^2)}, & |\mathbf{x}| < 1 \\ 0, & |\mathbf{x}| \geq 1 \end{cases} \quad (3.4)$$

όπου  $n \in \mathbb{N}$ , είναι ομαλή κι έχει ως έρεισμα τον δίσκο  $D := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ . Άρα ανήκει στην κλάση  $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ .

Είναι προφανές ότι

$$\|\varphi_n\| = \max_{\mathbf{x} \in D} |\varphi_n(\mathbf{x})| = \frac{1}{n}. \quad (3.5)$$

Συνεπώς, η ακολουθία  $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$  συγκλίνει ομοιόμορφα στη μηδενική συνάρτηση,  $\varphi(\mathbf{x}) = 0$  για κάθε  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ .

Ας συμβολίσουμε τώρα τον τελεστή της μερικής παραγώγου τάξης  $j_1$  ως προς τη μεταβλητή  $x_1$  και τάξης  $j_2$  ως προς τη μεταβλητή  $x_2$  με  $\partial_{j_1, j_2}$ . Με άλλα λόγια, ας θέσουμε

$$\partial_{j_1, j_2} \Phi := \frac{\partial^j \Phi}{\partial x_1^{j_1} \partial x_2^{j_2}}, \quad j = j_1 + j_2, \quad j_1, j_2 = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.6)$$

όπου υπονοείται ότι  $\partial_{0,0} \Phi \equiv \Phi$ . Τότε, από τον τύπο της  $\varphi_n(\mathbf{x})$  αμέσως έπεται ότι κάθε μια από τις συναρτήσεις  $|\partial_{j_1, j_2} \varphi_n(\mathbf{x})|$  είναι συνεχής στο συμπαγές υποσύνολο  $D$  του  $\mathbb{R}^2$ . Άρα, θα υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο του  $D$  στο οποίο θα παίρνει τη μέγιστη τιμή της. Αν συμβολίσουμε αυτή την τιμή με  $M_{j_1, j_2}$ , τότε

$$\|\partial_{j_1, j_2} \varphi_n\| = \max_{\mathbf{x} \in D} |\partial_{j_1, j_2} \varphi_n| = \frac{1}{n} M_{j_1, j_2}. \quad (3.7)$$

Συνεπώς,  $\|\partial_{j_1, j_2} \varphi_n\| \rightarrow 0$ , καθώς το  $n \rightarrow \infty$ . Αλλά αυτό σημαίνει ότι, στον χώρο  $\mathcal{D} \equiv \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ , η ακολουθία  $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$  συγκλίνει στη μηδενική ελεγκτική συνάρτηση. ■

**Παράδειγμα 3.2**

Ας υποθέσουμε ότι η  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  είναι μια συγκεκριμένη συνεχής συνάρτηση. Θέτοντας

$$\langle T_f, \varphi \rangle := \int_{\mathbb{R}^2} f(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \equiv \int_{\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2) \varphi(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \quad (3.8)$$

με το  $\varphi$  να δηλώνει ένα τυχαίο στοιχείο του  $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ , ορίζουμε μια απεικόνιση αυτού του χώρου στους πραγματικούς αριθμούς. Κι αυτό γιατί, η συνάρτηση  $f(x_1, x_2) \varphi(x_1, x_2)$  είναι συνεχής και μηδενίζεται έξω από το έρεισμα της  $\varphi(x_1, x_2)$ . Συνεπώς, στο δεξί μέλος της (3.8) δεν έχουμε παρά ένα συνηθισμένο διπλό ολοκλήρωμα Riemann μιας συνεχούς συνάρτησης. Αυτό υπάρχει πάντοτε και το γεγονός ότι σπάνια μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά μας είναι αδιάφορο.

Το ότι κάθε απεικόνιση  $T_f : C_0^\infty(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$  που ορίζεται με αυτό τον τρόπο είναι γραμμική και συνεχής ως προς την ελεγκτική σύγκλιση αποδεικνύεται πολύ εύκολα. Συνεπώς, όλα τα συναρτησιακά αυτού του είδους ανήκουν στον  $\mathcal{D}' \equiv \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$  (είναι κατανομές).

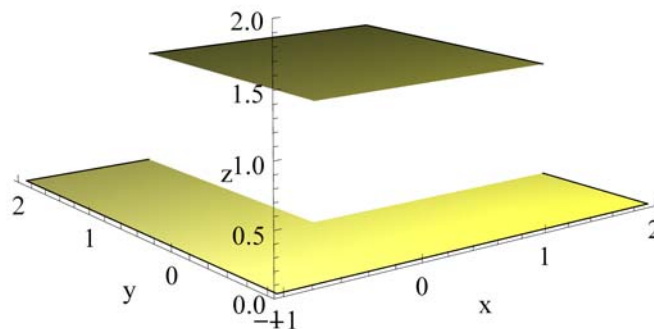
■

### Παράδειγμα 3.3

Ας θεωρήσουμε το τμήμα  $\mathbb{R}_{(a,b)}^2 := [a, \infty) \times [b, \infty)$  του Ευκλείδειου επιπέδου, το οποίο βρίσκεται "δεξιά και πάνω" από το σημείο  $(a, b)$ . Η συνάρτηση

$$h_{(a,b)}(x, y) := \begin{cases} 1, & (x, y) \in \mathbb{R}_{(a,b)}^2 \\ 0, & (x, y) \notin \mathbb{R}_{(a,b)}^2 \end{cases} \quad (3.9)$$

είναι τμηματικά συνεχής, με αλματική ασυνέχεια καθώς εισερχόμαστε από το υπόλοιπο επίπεδο στο τμήμα  $\mathbb{R}_{(a,b)}^2$ .



Σχ. 1.4 Το γράφημα της βηματικής συνάρτησης  $h_{(0,0)}(x, y)$  που ορίζεται από στην (3.9).

Το γραμμικό συναρτησιακό  $H_{(a,b)} : C_0^\infty(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$\langle H_{(a,b)}, \varphi \rangle := \int_{\mathbb{R}^2} h_{(a,b)}(x, y) \varphi(x, y) dx dy, \quad (3.10)$$

είναι σαφώς ορισμένο, αφού το δεξί μέλος της (3.10) είναι ίσο προς το ολοκλήρωμα της  $\varphi(x, y)$



στο συμπαγές υποσύνολο  $\Sigma$  του  $\mathbb{R}^2$ , το οποίο ορίζεται από την τομή του ερείσματος της  $\varphi(x, y)$  με το υποσύνολο  $\mathbb{R}_{(a,b)}^2$ :

$$\int_{\mathbb{R}^2} h_{(a,b)}(x, y) \varphi(x, y) dx dy = \int_{\Sigma} \varphi(x, y) dx dy. \quad (3.11)$$

Την απόδειξη του ότι το συναρτησιακό  $H_{(a,b)}: C_0^\infty(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$  είναι και συνεχές, την αφήνουμε για άσκηση του αναγνώστη. Εμείς θα περιοριστούμε στο να αναφέρουμε ότι η  $H_{(a,b)}$  ονομάζεται **κατανομή Heaviside** (Χέβισάιντ) **με κορυφή το σημείο**  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . ■

### Παράδειγμα 3.4

Ο αναγνώστης δε θα έχει δυσκολία να αποδείξει ότι στοιχείο του  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$  αποτελεί και το συναρτησιακό  $\delta_{(a,b)}: C_0^\infty(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$  που ορίζεται από τον τύπο

$$\langle \delta_{(a,b)}, \varphi \rangle := \varphi(a, b). \quad (3.12)$$

Πρόκειται για την **κατανομή Dirac με πόλο το σημείο**  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ .

Γενικότερα, η **κατανομή Dirac με πόλο το σημείο**  $a \in \mathbb{R}^n$  ορίζεται από τον τύπο

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle := \varphi(a), \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \quad (3.13)$$

Αν συνειδητοποιήσουμε πλέρια ότι το πεδίο ορισμού των κατανομών είναι ο συναρτησιακός χώρος  $\mathcal{D}$ , θα καταλάβουμε ότι δεν έχει νόημα να μιλάμε για την τιμή μιας κατανομής σε κάποιο σημείο του  $\mathbb{R}^n$ . Ωστόσο, μπορούμε να εισαγάγουμε την έννοια του μηδενισμού μιας κατανομής σε μια περιοχή του  $\mathbb{R}^n$  κι αυτό έχει ιδιαίτερη σημασία όταν στρεφόμαστε στις φυσικές εφαρμογές.

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι το  $\Omega$  είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^n$  και η κατανομή  $T$  έχει την εξής ιδιότητα:  $\langle T, \varphi \rangle = 0$ , για κάθε συνάρτηση  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  της οποίας το έρεισμα περιέχεται στο  $\Omega$ . Τότε θα λέμε ότι η **κατανομή  $T$  μηδενίζεται στο υποσύνολο  $\Omega$** .

Αυτός ο ορισμός δίνει αμέσως νόημα στη φράση "οι κατανομές  $T_1, T_2$  είναι ίσες στο ανοιχτό σύνολο  $\Omega$ ". Απλώς σημαίνει ότι η κατανομή  $T_1 - T_2$  μηδενίζεται στο  $\Omega$ .

Ας υποθέσουμε ότι το  $U$  είναι το μέγιστο ανοιχτό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^n$  στο οποίο η  $T \in \mathcal{D}'$  μηδενίζεται. Με άλλα λόγια, το  $U$  είναι η ένωση όλων των ανοιχτών υποσυνόλων του  $\mathbb{R}^n$  στα οποία μηδενίζεται αυτή η κατανομή. Τότε το συμπλήρωμα  $C = \mathbb{R}^n \setminus U$  του  $U$  ονομάζεται **έρεισμα της κατανομής  $T$**  και συμβολίζεται με  $\text{supp } T$  (από την αγγλική λέξη support=έρεισμα, φορέας).

### Παράδειγμα 3.5

α) Το έρεισμα της κατανομής  $T_f$  που αντιστοιχεί σε μια συνεχή συνάρτηση  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ταυτίζεται με το έρεισμα της ίδιας της  $f$ .

β) Το έρεισμα της "συνάρτησης" δέλτα του Dirac,  $\delta_a$ , είναι το σημείο  $a \in \mathbb{R}^n$ .

■

**Παρατήρηση.** Συχνά, το γεγονός ότι το έρεισμα της  $\delta_a$ , είναι το σημείο  $a \in \mathbb{R}^n$  ερμηνεύεται με τον ακόλουθο τρόπο:

Το δέλτα του Dirac  $\delta_a$  είναι μια συνάρτηση που μηδενίζεται σε κάθε σημείο  $x$  του  $\mathbb{R}^n$ , εκτός από το  $x = a$ , όπου απειρίζεται. Μάλιστα, αυτή η "συνάρτηση" γράφεται σαν  $\delta(x - a)$ , οπότε ο τύπος της δίνεται στη μορφή

$$\delta(x - a) := \begin{cases} \infty, & x = a \\ 0, & x \neq a \end{cases} \quad (3.14)$$

Συνακόλουθα, ο ορισμός της  $\delta_a$  ως της κατανομής που απεικονίζει την τυχαία συνάρτηση  $\varphi(x)$  κλάσης  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  στον αριθμό  $\varphi(a)$  παρουσιάζεται ως η ακόλουθη ιδιότητα της συνάρτησης  $\delta(x - a)$ : Για κάθε συνάρτηση  $\varphi(x)$  που είναι συνεχής στον  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta(x - a) \varphi(x) dx = \varphi(a). \quad (3.15)$$

Εξειδικεύοντας αυτή την ιδιότητα στην περίπτωση της  $\varphi(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}^n$ , οδηγείται κανείς στον τύπο

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta(x - a) dx = 1. \quad (3.16)$$

Και οι τρεις αυτές σχέσεις είναι **απαράδεκτες!** Γιατί, πρώτ' απ' όλα, δίνουν τη λαθεμένη εντύπωση ότι το δέλτα του Dirac είναι μια συνηθισμένη συνάρτηση, δηλαδή, μια απεικόνιση του  $\mathbb{R}^n$  στον  $\mathbb{R}$ . Επιπλέον, η (3.14) αφήνει την εντύπωση ότι μπορούμε να δίνουμε ως τιμή μιας συνάρτησης τον "αριθμό"  $\infty$ ! Τέλος, η (3.15) δημιουργεί σύγχυση, γιατί ταυτίζει τις ιδιόμορφες κατανομές με τις κανονικές. Μόνο οι δεύτερες ορίζονται απ' ευθείας μέσω του ολοκληρώματος του γινόμενου της αντίστοιχης συνάρτησης με το τυχαίο στοιχείο του  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

**Ωστόσο**, για λόγους εποπτείας, μπορούμε να σκεφτόμαστε την  $\delta_a$  ως μια συνάρτηση που μηδενίζεται σε κάθε σημείο  $x \neq a$  του  $\mathbb{R}^n$ . Αυτή η ερμηνεία της  $\delta_a$  είναι πολύ χρήσιμη στις εφαρμογές των κατανομών, αλλά, όταν την υιοθετούμε, δε θα πρέπει να ξεχνάμε ότι το κάνουμε μόνο για ευκολία. Το πεδίο ορισμού της  $\delta_a$  δεν είναι ο  $\mathbb{R}^n$ , αλλά συναρτήσεις που έχουν ως πεδίο ορισμού τον  $\mathbb{R}^n$ . Όταν, λοιπόν, διευκολύνει την παρουσίαση θα χρησιμοποιούμε κι εμείς τον "τύπο" (1.84), αλλά με πλήρη συνείδηση ότι βασίζεται στην ακόλουθη **σύμβαση**:

$$" \int_{\mathbb{R}^n} \delta(x - a) \varphi(x) dx " := \langle \delta_a, \varphi \rangle. \quad (3.17)$$

Δηλαδή, το ολοκλήρωμα  $\int \delta(x - a) \varphi(x) dx$  δεν έχει νόημα από μόνο του. Είναι, απλώς, ένας άλλος τρόπος γραφής του αριθμού  $\langle \delta_a, \varphi \rangle$ , στον οποίο η κατανομή  $\delta_a$  απειμονίζει την συνάρτηση  $\varphi(x)$ .

## Ασκήσεις

**3.1** Να υπολογιστεί η τιμή της κατανομής  $\delta_{(a,b)}$  στο "σημείο"

$$\varphi(x, y) := \begin{cases} e^{-1/(1-x^2-y^2)}, & x^2 + y^2 < 1 \\ 0, & x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$$

του χώρου  $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$  στις εξής τρεις περιπτώσεις: (i)  $(a, b) = (0, 0)$ , (ii)  $(a, b) = (1/2, -1/2)$ , (iii)  $(a, b) = (2, -1/2)$ .

**3.2** Να υπολογιστεί η τιμή των παρακάτω κατανομών στο "σημείο"  $\varphi$  του χώρου  $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$  που ορίζεται στην προηγούμενη άσκηση

(i)  $T_1 = (3 + x + y) \delta_{(0,0)}$ ,

(ii)  $T_2 = (3 + x + y) \delta_{(1,0)} + (x^2 + y^2) \delta_{(0,1/2)}$ ,

(iii)  $T_3 = x y \delta_{(1/2,12)} + \cos(x + y) \delta_{(0,0)} + \sin(x - y) \delta_{(0,\pi/2)}$ .

**3.3** Αν  $H_a$  είναι η κατανομή που αντιστοιχεί στη συνάρτηση

$$h_a(x) := \begin{cases} 0, & x < a \\ 1 & x \geq a \end{cases}$$

να προσδιοριστεί το έρεισμα των εξής κατανομών:

$$H_{-2}, \quad 5x^3 H_2 - x H_1, \quad 3H_0 - \delta_{-2}, \quad x^3 H_{-3} - \delta_{-2}.$$

Να γίνει το ίδιο για τις κατανομές

$$x y - 2 \delta_{(0,0)}, \quad 4 \delta_{(0,0)} - (x + y) H_{(0,0)}, \quad 2 \delta_{(1,-1)} - 3 x y H_{(-1,0)}.$$

**3.4** Θεωρήστε τη συνάρτηση  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , με τύπο  $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^\lambda$  όπου  $\lambda$  τυχαίος πραγματικός αριθμός. (Προφανώς, όταν η παράμετρος  $\lambda$  είναι αρνητική, ο τύπος  $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^\lambda$  ισχύει για  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ . Σε ότι ακολουθεί, η τιμή της  $f(\mathbf{x})$  στο  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  δεν παίζει κανένα ρόλο και μπορεί να επιλέγεται αυθαίρετα).

α) Δείχτε ότι, αν  $0 < a < b < \infty$ , τότε

$$\int_{a < |\mathbf{x}| < b} |\mathbf{x}|^\lambda d\mathbf{x} = \int_{S_1^{n-1}} \int_a^b r^{n-1+\lambda} dr dS = \omega_n \int_a^b r^{n-1+\lambda} dr = \begin{cases} \omega_n \frac{b^{n+\lambda} - a^{n+\lambda}}{n+\lambda}, & \lambda \neq -n \\ \omega_n \ln(b/a), & \lambda = -n \end{cases} \quad (3.18)$$

όπου,  $r = |\mathbf{x}|$ ,  $\omega_n$  το (υπερ)εμβαδόν της (υπερ)σφαιρικής επιφάνειας μοναδιαίας ακτίνας,  $S_1^{n-1}$ , του  $\mathbb{R}^n$ .

β) Με βάση το προηγούμενο αποτέλεσμα, εξηγήστε την ακόλουθη

**Πρόταση 3.1**

Η συνάρτηση  $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^\lambda$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , είναι ολοκληρώσιμη σε μια γειτονιά του  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , εάν και μόνο όταν  $\lambda > -n$ , ενώ είναι ολοκληρώσιμη στο εξωτερικό κάθε σφαίρας που έχει ως κέντρο το  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , εάν και μόνο όταν  $\lambda < -n$ .

**3.5** Δείχτε ότι στη συνάρτηση  $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|^{-1}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , αντιστοιχεί κατανομή, εκτός εάν  $n = 1$ .

## 4. Παράγωγοι κατανομών

Η παράγωγος της συνάρτησης  $f(x) = x^2$  είναι η συνάρτηση  $f'(x) = 2x$ . Και οι δύο είναι συνεχείς. Συνεπώς, ορίζουν αντίστοιχες κατανομές. Αναλυτικότερα, η  $f(x) = x^2$  ορίζει την κατανομή  $T_f : C_0^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ , με τύπο

$$\langle T_f, \varphi \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \varphi(x) dx, \quad (4.1)$$

ενώ η  $f'(x) = 2x$  ορίζει την κατανομή  $T_{f'} : C_0^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ , με τύπο

$$\langle T_{f'}, \varphi \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} 2x \varphi(x) dx. \quad (4.2)$$

Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες, αμέσως βρίσκουμε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} 2x \varphi(x) dx = x^2 \varphi(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \varphi'(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \varphi'(x) dx. \quad (4.3)$$

Γιατί, στην πραγματικότητα, η ολοκλήρωση γίνεται σε κάποιο φραγμένο διάστημα  $[a, b]$ , έξω από το οποίο η  $\varphi(x)$  μηδενίζεται ταυτοτικά. Συνεπώς,  $x^2 \varphi(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} \equiv x^2 \varphi(x) \Big|_a^b$ . Αλλά, η τελευταία έκφραση είναι μηδενική, αφού, όντας συνεχής, η  $\varphi(x)$  μηδενίζεται και στο  $x = a$  και στο  $x = b$ .

Με βάση αυτό το αποτέλεσμα, η (4.2) γίνεται

$$\langle T_{f'}, \varphi \rangle = - \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \varphi'(x) dx \equiv - \langle T_f, \varphi' \rangle. \quad (4.4)$$

Αυτή η σχέση ανάμεσα στην κατανομή  $T_f$ , που αντιστοιχεί σε μια συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση  $f$ , και την κατανομή  $T_{f'}$ , που αντιστοιχεί στην παράγωγο  $f'$  της  $f$ , ισχύει γενικά. Η απόδειξη προκύπτει αμέσως από το συγκεκριμένο παράδειγμα που μόλις εξετάσαμε. Αρκεί να διατηρήσουμε την έκφραση  $f(x)$  στο επιχείρημα και να μην την αντικαταστήσουμε από την  $f(x) = x^2$ .

Επειδή, λοιπόν, η (4.4) ισχύει για κάθε κατανομή που αντιστοιχεί σε συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση, είναι λογικό να την υιοθετήσουμε ως βάση του ορισμού της παραγώγου οποιασδήποτε κατανομής:

**Παράγωγος της κατανομής**  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  λέγεται το γραμμικό συναρτησιακό  $T' : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  που ορίζεται από τη σχέση

$$\langle T', \varphi \rangle := - \langle T, \varphi' \rangle, \quad (4.5)$$

για κάθε ελεγκτική συνάρτηση  $\varphi$ .

Ο αναγνώστης μπορεί εύκολα να αποδείξει ότι το συναρτησιακό  $T' : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  που ορίζεται μ' αυτό τον τρόπο είναι κατανομή. Επίσης, δε θα έχει καμία απολύτως δυσκολία να

γενικεύσει και το ακόλουθο παράδειγμα, που αφορά ένα συγκεκριμένο στοιχείο του  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ :

Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση  $f(x, y)$  ανήκει στην κλάση  $C^1(\mathbb{R}^2)$ . Τότε τα συναρτησιακά  $T_f$  και  $T_{\partial_x f}$ , που ορίζονται από τους τύπους

$$\langle T_f, \varphi \rangle := \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \varphi(x, y) dx dy, \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2) \quad (4.6)$$

και

$$\langle T_{\partial_x f}, \varphi \rangle := \int_{\mathbb{R}^2} \partial_x f(x, y) \varphi(x, y) dx dy, \quad (4.7)$$

αντίστοιχα, είναι κατανομές. Από την άλλη,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \partial_x f(x, y) \varphi(x, y) dx dy &= \int_{\mathbb{R}^2} \partial_x (f \varphi) dx dy - \int_{\mathbb{R}^2} f \partial_x \varphi dx dy \\ &= - \int_{\mathbb{R}^2} f \partial_x \varphi dx dy. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Κι αυτό, γιατί η συνάρτηση  $\partial_x (f \varphi)$  είναι συνεχής και μηδενίζεται έξω από κάποιο κλειστό σύνολο της μορφής  $[a, b] \times [c, d]$ .

Με άλλα λόγια,

$$\langle T_{\partial_x f}, \varphi \rangle = - \langle T_f, \partial_x \varphi \rangle. \quad (4.9)$$

Επιπλέον, ένα πανομοιότυπο επιχείρημα οδηγεί στην

$$\langle T_{\partial_y f}, \varphi \rangle = - \langle T_f, \partial_y \varphi \rangle. \quad (4.10)$$

Τέλος, με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, καλύπτεται η γενικότερη περίπτωση, όπου η  $f$  είναι συνάρτηση  $n$  μεταβλητών και κλάσης  $C^1(\mathbb{R}^n)$ . Το αντίστοιχο αποτέλεσμα

$$\langle T_{\partial_j f}, \varphi \rangle = - \langle T_f, \partial_j \varphi \rangle, \quad \partial_j f := \partial_{x_j} f, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (4.11)$$

επιβάλλει την εισαγωγή του εξής ορισμού:

**Μερική παράγωγος της κατανομής**  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$  ως προς τη μεταβλητή  $x_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , ονομάζεται το γραμμικό συναρτησιακό  $\partial_j T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  που ορίζεται από τον τύπο

$$\langle \partial_j T, \varphi \rangle := - \langle T, \partial_j \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \quad (4.12)$$

■

Είναι προφανές, αλλά οφείλουμε να τονίσουμε το γεγονός ότι, η παράγωγος μιας ομαλής συνάρτησης είναι επίσης ομαλή. Με άλλα λόγια, αν η  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , τότε το ίδιο ισχύει και για την  $\partial_j \varphi$ . Κατά συνέπεια, ο συλλογισμός της επαγωγής οδηγεί αμέσως στο συμπέρασμα ότι, η (μερική) παράγωγος οποιασδήποτε τάξης μιας συνάρτησης κλάσης  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  ανήκει στην ίδια κλάση συναρτήσεων.

Μετά από αυτή την επισήμανση, ο αναγνώστης δεν θα δυσκολευτεί να αποδείξει

αναλυτικά την

**Πρόταση 4.1.** *Αν η συνάρτηση  $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ανήκει στον χώρο  $\mathcal{D}$ , τότε το ίδιο ισχύει και για την παράγωγό της, οποιασδήποτε τάξης.*

■

Από αυτή την ιδιότητα των μελών του χώρου  $\mathcal{D}$  και τον ορισμό της (συνήθους ή μερικής, ανάλογα) παραγωγού που δώσαμε πιο πάνω, συνάγονται αμέσως τα ακόλουθα, (θεμελιακής σημασίας) συμπεράσματα:

#### Θεώρημα 4.1

*Η (μερική) παράγωγος μιας κατανομής είναι επίσης κατανομή. Μια κατανομή έχει (μερικές) παραγωγούς κάθε τάξης.*

Απόδειξη: Την αφήνουμε για άσκηση.

Υπόδειξη: Βλ. και το παράδειγμα που ακολουθεί.

■

#### Παράδειγμα 4.1

(i) Σύμφωνα με τον αρχικό ορισμό, η πρώτη παράγωγος,  $T'$  της κατανομής  $T: C_0^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  δίνεται από τον τύπο  $\langle T', \varphi \rangle := - \langle T, \varphi' \rangle$ . Συνακόλουθα, η παράγωγος της  $T'$  ορίζεται από τον τύπο

$$\langle (T')', \varphi \rangle := - \langle T', \varphi' \rangle. \quad (4.13)$$

Αλλά η  $\varphi'$ , όπως και η  $\varphi$ , ανήκει στον χώρο  $C_0^\infty(\mathbb{R})$ . Συνεπώς,

$$\langle T', \varphi' \rangle := - \langle T, (\varphi')' \rangle. \quad (4.14)$$

Άρα,

$$\langle (T')', \varphi \rangle := \langle T, \varphi'' \rangle, \quad (4.15)$$

ή,

$$\boxed{\langle T'', \varphi \rangle = \langle T, \varphi'' \rangle} \quad (4.16)$$

(ii) Με τον ίδιο τρόπο, ο ορισμός (4.12) οδηγεί στο συμπέρασμα ότι, για κάθε  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ,

$$\boxed{\langle \partial_j \partial_k T, \varphi \rangle = \langle T, \partial_j \partial_k \varphi \rangle} \quad (4.17)$$

Γιατί, η  $\partial_k T$  είναι κατανομή. Άρα,

$$\langle \partial_j (\partial_k T), \varphi \rangle := - \langle \partial_k T, \partial_j \varphi \rangle. \quad (4.18)$$

Από την άλλη,

$$\langle \partial_k T, \partial_j \varphi \rangle := - \langle T, \partial_k (\partial_j \varphi) \rangle, \quad (4.19)$$

γιατί η  $\partial_j \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Για τον ίδιο λόγο,  $\partial_k (\partial_j \varphi) = \partial_j (\partial_k \varphi)$ . Συνεπώς,

$$\langle \partial_j(\partial_k T), \varphi \rangle := \langle \partial T, \partial_j(\partial_k \varphi) \rangle. \quad (4.20)$$

### Παράδειγμα 4.2

Το συναρτησιακό  $H_a : C_0^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$\langle H_a, \varphi \rangle := \int_a^\infty \varphi(x) dx \quad (4.21)$$

είναι η **κατανομή (του) Heaviside** στη μία διάσταση.

Το ότι είναι όντως κατανομή συνάγεται αμέσως από την ακόλουθη παρατήρηση: Η  $H_a$  ταυτίζεται με την κατανομή  $T_{h_a}$  που αντιστοιχεί στη **συνάρτηση μοναδιαίου βήματος**

$$h_a(x) := \begin{cases} 0, & x < a \\ 1 & x \geq a \end{cases} \quad (4.22)$$

Σύμφωνα τώρα με τον ορισμό της παραγώγου που δώσαμε πιο πάνω,

$$\langle H_a', \varphi \rangle = - \langle H_a, \varphi' \rangle := - \int_a^\infty \varphi'(x) dx \quad (4.23)$$

Όμως,

$$\int_a^\infty \varphi'(x) dx = \varphi(x) \Big|_a^\infty = [\varphi(\infty) - \varphi(a)] = -\varphi(a). \quad (4.24)$$

Από την άλλη μεριά,  $\varphi(a) = \langle \delta_a, \varphi \rangle$ , όπου  $\delta_a$  η κατανομή (δέλτα του) Dirac. Συνεπώς,

$$\langle H_a', \varphi \rangle = \langle \delta_a, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}). \quad (4.25)$$

Με άλλα λόγια, η παράγωγος της κατανομής Heaviside είναι η κατανομή Dirac:

$$\boxed{H_a' = \delta_a} \quad (4.26)$$

### Παράδειγμα 4.3

Η συνάρτηση

$$f_a(x) := \begin{cases} 0, & x < a \\ x - a, & x \geq a \end{cases} \quad (4.27)$$

είναι φανερά συνεχής. Συνεπώς, ορίζει μια κατανομή  $F_a$  μέσω του τύπου

$$\langle F_a, \varphi \rangle := \int_{-\infty}^\infty f_a(x) \varphi(x) dx = \int_a^\infty (x - a) \varphi(x) dx. \quad (4.28)$$

Σημειώστε, τώρα, ότι η  $f_a(x)$  **δεν** είναι διαφορίσιμη. Αντίθετα, η παράγωγος της  $F_a$  υπάρχει και, σύμφωνα με τον πιο πάνω ορισμό, δίνεται από τον τύπο



$$\langle F_a', \varphi \rangle := - \langle F_a, \varphi' \rangle = - \int_a^\infty (x-a) \varphi'(x) dx. \quad (4.29)$$

Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες, αμέσως βρίσκουμε ότι

$$\int_a^\infty (x-a) \varphi'(x) dx = (x-a) \varphi(x) \Big|_a^\infty - \int_a^\infty \varphi(x) dx = - \int_a^\infty \varphi(x) dx. \quad (4.30)$$

Συνεπώς,

$$\langle F_a', \varphi \rangle = \int_a^\infty \varphi(x) dx \equiv \langle H_a, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}). \quad (4.31)$$

Αυτό σημαίνει ότι

$$F_a' = H_a. \quad (4.32)$$

Κατά συνέπεια,

$$F_a'' = H_a'. \quad (4.33)$$

Αν λοιπόν λάβουμε υπόψη το αποτέλεσμα του προηγούμενου παραδείγματος, θα καταλήξουμε στο εξής συμπέρασμα:

$$\boxed{F_a'' = \delta_a} \quad (4.34)$$

Με άλλα λόγια, έχουμε αποδείξει το ακόλουθο γεγονός:

*Η ιδιόμορφη κατανομή Dirac αποτελεί την παράγωγο δεύτερης τάξης μιας κατανομής που αντιστοιχεί σε μια απλή συνεχή συνάρτηση.*

Για να αξιολογήσει αυτό το αποτέλεσμα με τον κατάλληλο τρόπο, καλούμε τον αναγνώστη

(i) Να σημειώσει ότι η παραγωγή που υπεισέρχεται σε τούτο το αποτέλεσμα δεν είναι αυτή που ορίζεται στο πλαίσιο των συνήθων συναρτήσεων, αλλά εκείνη που ορίστηκε στο πλαίσιο των κατανομών.

(ii) Να συγκρίνει αυτό το αποτέλεσμα με το τελευταίο μέρος του πρώτου εδάφιου, στο οποίο αναλύσαμε την κίνηση ενός σωματίου που δέχεται μια απότομη και στιγμιαία ώθηση.

#### Παράδειγμα 4.4

Την κατανομή Heaviside στις δύο διαστάσεις,  $H_{(a,b)}$ , την αναλύσαμε στο Παράδειγμα 3.3. Όταν κορυφή της είναι το σημείο  $(a, b) = (0, 0)$ , τότε

$$\langle H_{(0,0)}, \varphi \rangle := \int_{\mathbb{R}_{(0,0)}^2} \varphi(x, y) dx dy, \quad (4.35)$$

όπου  $\mathbb{R}_{(0,0)}^2$  είναι το πρώτο τεταρτημόριο,  $x, y \geq 0$ , του  $\mathbb{R}^2$ .

Σύμφωνα με τον ορισμό της μερικής παραγωγού μιας κατανομής,

$$\langle \partial_x H_{(0,0)}, \varphi \rangle := - \langle H_{(0,0)}, \partial_x \varphi \rangle = - \int_{\mathbb{R}_{(0,0)}^2} \partial_x \varphi(x, y) dx dy. \quad (4.36)$$

Όμως, η  $\varphi(x, y)$  είναι ομαλή και μηδενίζεται έξω από ένα φραγμένο διάστημα της μορφής  $I = [a, b] \times [c, d]$  του  $\mathbb{R}^2$ . Το ίδιο ισχύει και για τις μερικές παραγώγους της. Κατά συνέπεια,

(i) Το **διπλό ολοκλήρωμα** στην (4.36) γίνεται στη φραγμένη περιοχή  $\Sigma = I \cap \mathbb{R}_{(0,0)}^2$ . Προφανώς,  $\eta \Sigma \subset \mathbb{R}_{(0,0)}^2$ .

(ii) Το παραπάνω διπλό ολοκλήρωμα μπορεί να αντικατασταθεί από ένα **επάλληλο ολοκλήρωμα**.

Άρα,

$$\langle \partial_x H_{(0,0)}, \varphi \rangle = - \int_0^\infty \left[ \int_0^\infty \partial_x \varphi(x, y) dx \right] dy. \quad (4.37)$$

Στην πραγματικότητα, το ολοκλήρωμα ως προς τη μεταβλητή  $x$  γίνεται στο διάστημα  $[0, \beta]$ , όπου το  $\beta = \max\{0, b\}$ . Με τη σειρά του, το ολοκλήρωμα ως προς τη μεταβλητή  $y$  γίνεται στο διάστημα  $[0, \delta]$ , όπου το  $\delta = \max\{0, d\}$ . Σε κάθε περίπτωση, εκείνο που έχει σημασία είναι ότι η  $\varphi(x, y)$  μηδενίζεται στο πάνω άκρο αυτών των διαστημάτων. Άρα, μπορούμε να διατηρούμε συμβατικά το σύμβολο  $\infty$  για το πάνω άκρο των διαστημάτων ολοκλήρωσης, αρκεί να θυμόμαστε ότι  $\varphi(\infty, y) = \varphi(x, \infty) \equiv 0$ .

Συνεπώς, η κατά παράγοντες ολοκλήρωση ως προς τη μεταβλητή  $x$  δίνει το εξής αποτέλεσμα:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \partial_x \varphi(x, y) dx dy = - \int_0^\infty \varphi(0, y) dy. \quad (4.38)$$

Άρα,

$$\langle \partial_x H_{(0,0)}, \varphi \rangle = \int_0^\infty \varphi(0, y) dy. \quad (4.39)$$

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$\langle \partial_y H_{(0,0)}, \varphi \rangle = - \int_0^\infty \left[ \int_0^\infty \partial_y \varphi(x, y) dy \right] dx = \int_0^\infty \varphi(x, 0) dx. \quad (4.40)$$

Η προηγούμενη ανάλυση και η σχέση (4.17) μας επιτρέπουν να υπολογίσουμε αμέσως και την μικτή μερική παράγωγο δεύτερης τάξης της κατανομής  $H_{(0,0)}$ . Πιο συγκεκριμένα,

$$\langle \partial_y \partial_x H_{(0,0)}, \varphi \rangle = \langle H_{(0,0)}, \partial_y \partial_x \varphi \rangle := \int_{\mathbb{R}_{(0,0)}^2} \partial_y \partial_x \varphi(x, y) dx dy, \quad (4.41)$$

Όμως, για τους λόγους που εξηγήσαμε λίγο παραπάνω,

$$\int_{\mathbb{R}_{(0,0)}^2} \partial_y \partial_x \varphi(x, y) dx dy = \int_0^\infty \left[ \int_0^\infty \partial_y \partial_x \varphi(x, y) dy \right] dx. \quad (4.42)$$

Άρα,

$$\int_{\mathbb{R}_{(0,0)}^2} \partial_y \partial_x \varphi(x, y) dx dy = - \int_0^\infty \partial_x \varphi(x, 0) dx = \varphi(0, 0). \quad (4.43)$$

Αυτό σημαίνει ότι, **για κάθε** ελεγκτική συνάρτηση  $\varphi(x, y)$ ,

$$\langle \partial_y \partial_x H_{(0,0)}, \varphi \rangle = \varphi(0,0). \quad (4.44)$$

Από την άλλη, **για κάθε** ελεγκτική συνάρτηση  $\varphi(x, y)$ ,

$$\langle \delta_{(0,0)}, \varphi \rangle = \varphi(0,0). \quad (4.45)$$

Άρα, το αποτέλεσμα (4.44) σημαίνει ότι

$$\partial_y \partial_x H_{(0,0)} = \delta_{(0,0)}. \quad (4.46)$$

Τέλος, θα πρέπει να είναι φανερό ότι διαλέξαμε ως κορυφή της κατανομής Heaviside το σημείο  $(a, b) = (0, 0)$  μόνο για ευκολία. Η ανάλυση που οδήγησε στη τελευταία σχέση δεν επηρεάζεται καθόλου από αυτήν την επιλογή. Συνεπώς, μπορούμε να γενικεύσουμε την (4.46) απρόσκοπτα και να της δώσουμε την ακόλουθη μορφή:

$$\boxed{\partial_y \partial_x H_{(a,b)} = \delta_{(a,b)}} \quad (4.47)$$

## Ασκήσεις

4.1 α) Να δειχτεί ότι η απεικόνιση  $T' : C_0^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  που ορίζεται από τον τύπο

$$\langle T', \varphi \rangle := - \langle T, \varphi' \rangle$$

και ονομάζεται παράγωγος της κατανομής  $T$  είναι πραγματικά κατανομή.

β) Να γίνει το ίδιο για την απεικόνιση  $\partial_j T : C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  που ορίζεται από τον τύπο

$$\langle \partial_j T, \varphi \rangle = - \langle T, \partial_j \varphi \rangle$$

και ονομάζεται μερική παράγωγος της κατανομής  $T$  ως προς τη μεταβλητή  $x_j$  είναι πραγματικά κατανομή.

γ) Να δειχτεί ότι μια κατανομή έχει (μερικές) παραγώγους κάθε τάξης.

4.2 α) Υποθέστε ότι η  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$  και η  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ . Δείχτε ότι

$$(f T)' = f' T + f T'.$$

Να γενικευτεί ο προηγούμενος τύπος για την περίπτωση  $(f T)^{(m)}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ .

β) Υποθέστε ότι η  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  και η  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ . Δείχτε ότι

$$\partial_j (f T) = \partial_j f T + f \partial_j T.$$

Γενικεύστε τον προηγούμενο τύπο για τις περιπτώσεις  $\partial_j^l (f T)$  και  $\partial_j^l \partial_k^m (f T)$ ,  $l, m \in \mathbb{N}$ .

**4.3** Υπολογίστε τις παραγώγους μέχρι και δεύτερης τάξης της κατανομής  $T_f$  που αντιστοιχεί σε κάθε μια από τις παρακάτω συναρτήσεις:

$$(i) f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ x-a, & x \geq a \end{cases}, \quad (ii) f(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ (x-a)^2, & x \geq a \end{cases}, \quad (iii) f(x) = \begin{cases} x^2 - a^2, & x \in [-a, a] \\ 0, & x \notin [-a, a] \end{cases}$$

$$(iv) f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & x \in [-1, 1] \\ 0, & x \notin [-1, 1] \end{cases}, \quad (v) f(x) = \begin{cases} (x-a)(x-b), & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}$$

$$(vi) f(x) = \begin{cases} x(x^2 - 1), & x \in [-1, 1] \\ 0, & x \notin [-1, 1] \end{cases}, \quad (vii) f(x) = \begin{cases} x+2, & -2 \leq x \leq -1 \\ -x, & -1 \leq x \leq 1 \\ x-2, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & x \notin [-2, 2] \end{cases}$$

**4.4** Υπολογίστε τις παραγώγους μέχρι και δεύτερης τάξης των παρακάτω κατανομών.

$$(i) T = 1 - x^2 + 2x^3 H_0, \quad (ii) T = x - (x^2 - 1)H_2 + \delta_2, \quad (iii) T = H_0 e^x + x H_1 + x^2 \delta_1,$$

$$(iv) T = (x + \tanh x) \delta_0 + \sin x H_0, \quad (v) T = (x+1)^2 \delta_{-1} + \cos^2 x H_{\pi/2}.$$

**4.5** Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης των κατανομών που αντιστοιχούν στις παρακάτω συναρτήσεις, όπου  $\mathbb{R}_{(a,b)}^2 := [a, \infty) \times [b, \infty)$ .

$$(i) f(x, y) := \begin{cases} x(x-1)y, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}, \quad (ii) f(x, y) := \begin{cases} x(y-1)y, & y > 1 \\ 0, & y \leq 1 \end{cases}$$

$$(iii) f(x, y) := \begin{cases} x(x-1)y(y-1), & (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \\ 0, & (x, y) \notin [0, 1] \times [0, 1] \end{cases}$$

$$(iv) f(x, y) := \begin{cases} xy, & (x, y) \in \mathbb{R}_{(0,0)}^2 \\ 0, & (x, y) \notin \mathbb{R}_{(0,0)}^2 \end{cases}, \quad (v) f(x, y) := \begin{cases} xy e^{-x-y}, & (x, y) \in \mathbb{R}_{(0,0)}^2 \\ 0, & (x, y) \notin \mathbb{R}_{(0,0)}^2 \end{cases}$$

**4.6** Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους μέχρι και δεύτερης τάξης παρακάτω στοιχείων του χώρου  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ . Υπενθυμίζουμε ότι  $H_{(a,b)}$  είναι η κατανομή που αντιστοιχεί στη συνάρτηση

$$h_{(a,b)}(x, y) := \begin{cases} 1, & (x, y) \in \mathbb{R}_{(a,b)}^2 \\ 0, & (x, y) \notin \mathbb{R}_{(a,b)}^2 \end{cases}$$

όπου  $\mathbb{R}_{(a,b)}^2 := [a, \infty) \times [b, \infty)$ .

$$(i) T = x^2 - y^2 + xy H_{(0,0)}, \quad (ii) T = e^{-x^2-y^2} H_{(0,0)}, \quad (iii) T = xy(2H_{(0,0)} - 3\delta_{(0,0)}),$$

$$(iv) T = (x-1)^2(y-2)^2 H_{(1,2)}, \quad (v) T = (x-1)^2(y-2)^2 H_{(-1,1)} + (1+x^2y^2\delta_{(0,0)}).$$

**4.7** Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους μέχρι και δεύτερης τάξης παρακάτω στοιχείων του  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ . Με  $H_{(a,b,c)}$  συμβολίζεται η κατανομή που αντιστοιχεί στη συνάρτηση

$$h_{(a,b,c)}(x, y, z) := \begin{cases} 1, & (x, y, z) \in \mathbb{R}_{(a,b,c)}^3 \\ 0, & (x, y, z) \notin \mathbb{R}_{(a,b,c)}^3 \end{cases}$$

όπου  $\mathbb{R}_{(a,b,c)}^3 := [a, \infty) \times [b, \infty) \times [c, \infty)$ .

(i)  $T = x y + y z + z x + x y z H_{(0,0,0)}$ ,

(ii)  $T = (x-1)(y-1)(z-1) \delta_{(0,0,0)} + e^{-x^2-y^2-z^2} H_{(0,0,0)}$ ,

(iii)  $T = (x-1)(y-1)(z-1) \delta_{(1,-1,1)} + e^{-x^2-y^2-z^2} H_{(-1,-1,2)}$ ,

**4.8** Θεωρήστε την κατανομή  $T$  που αντιστοιχεί στην ολοκληρώσιμη συνάρτηση  $f(\mathbf{x}) = r^{-1}$ ,  $r \equiv |\mathbf{x}|$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ . Δείχτε ότι  $\Delta T = -4\pi \delta_0$ .

*Υπόδειξη.* Για να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα  $\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{r} \Delta \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ , θεωρήστε αρχικά το

$\int_{\Omega} \frac{1}{r} \Delta \varphi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$ , όπου  $\Omega$  το υποσύνολο του  $\mathbb{R}^3$  που μένει όταν από τον τελευταίο αποκοπεί μια

σφαίρα ακτίνας  $\varepsilon$  με κέντρο την αρχή των αξόνων. Μην ξεχάσετε ότι

α) Η ελεγκτική συνάρτηση  $\varphi(\mathbf{x})$  ανήκει στο χώρο  $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$  και, άρα, μηδενίζεται έξω από μια σφαίρα αρκετά μεγάλης ακτίνας,

β) Και στην εποχή μας, οι πράσινοι είναι πανταχού παρόντες.

## 5. Μετασχηματισμοί και τανυστικό γινόμενο κατανομών

Ιδιαίτερα όταν στρεφόμεστε στις φυσικές εφαρμογές των κατανομών, γίνεται απαραίτητο να περιγράψουμε τον Ευκλείδειο χώρο στον οποίο ορίζονται οι ελεγκτικές συναρτήσεις σε συντεταγμένες διαφορετικές από τις Καρτεσιανές.

Για να βρούμε τον τρόπο με τον οποίο μετασχηματίζονται οι κατανομές σε μιαν αντιστρέψιμη αλλαγή συντεταγμένων, ας θεωρήσουμε αρχικά το παράδειγμα μιας κατανομής  $T_f$  που αντιστοιχεί σε μια συνεχή συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Σύμφωνα με τον αντίστοιχο ορισμό, η τιμή της  $T_f$  στο "σημείο"  $\varphi$  του  $C_0^\infty(\mathbb{R})$  είναι ο αριθμός

$$\langle T_f, \varphi \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx. \quad (5.1)$$

Υποθέτουμε, τώρα, ότι η νέα μεταβλητή  $y$  ορίζεται από την αντιστρέψιμη σχέση

$$y = Y(x), \quad (5.2)$$

όπου  $Y(x)$  μια συγκεκριμένη ομαλή συνάρτηση. Η αντίστροφη αυτής της σχέσης παίρνει τη μορφή

$$x = X(y), \quad (5.3)$$

όπου  $X(y)$  μια συνάρτηση κλάσης  $C^\infty(\mathbb{R})$ , της οποίας η παράγωγος δε μηδενίζεται σε κανένα σημείο της πραγματικής ευθείας. Η αντικατάσταση της τελευταίας σχέσης στην (5.1) μετατρέπει το ολοκλήρωμα στο

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(X(y)) \varphi(X(y)) |X'(y)| dy = \int_{-\infty}^{\infty} F(y) \Phi(y) |X'(y)| dy, \quad (5.4)$$

όπου

$$F(y) = f(X(y)), \quad \Phi(y) = \varphi(X(y)). \quad (5.5)$$

Συνεπώς,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(y) \Psi(y) dy, \quad (5.6)$$

όπου

$$\Psi(y) := \Phi(y) |X'(y)|. \quad (5.7)$$

Αφού ο μετασχηματισμός  $y \rightarrow x = X(y)$  είναι αντιστρέψιμος, η  $X'(y)$  δεν μηδενίζεται και, άρα, διατηρεί το ίδιο πρόσημο σε όλη την πραγματική ευθεία. Συνάμα, το γεγονός ότι η  $X(y)$  είναι κλάσης  $C^\infty(\mathbb{R})$  συνεπάγεται ότι η συνάρτηση  $\Psi(y)$  είναι ελεγκτική (ανήκει στην κλάση  $C_0^\infty(\mathbb{R})$ ).

Το συνολικό συμπέρασμα της προηγούμενης ανάλυσης είναι ότι η κατανομή  $T_f$  που αντιστοιχεί στη συνάρτηση  $f(x)$  μετατρέπεται στην κατανομή  $T_F$  που αντιστοιχεί στη

συνάρτηση  $F(y)$ , ενώ η ελεγκτική συνάρτηση  $\varphi(x)$  μετατρέπεται στην  $\Psi(y) := \Phi(y) |X'(y)|$ .

Περνώντας στην πολυδιάστατη περίπτωση, θυμίζουμε ότι η κατανομή που αντιστοιχεί σε μια συνεχή συνάρτηση  $f(x)$  ορίζεται από τον τύπο

$$\langle T_f, \varphi \rangle := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) d x. \quad (5.8)$$

Όπως στη μονοδιάστατη περίπτωση, η εισαγωγή των νέων συντεταγμένων γίνεται μέσω μιας σχέσης της μορφής

$$x = X(y). \quad (5.9)$$

Βέβαια, στην προκείμενη περίπτωση, αυτή η σχέση αποτελεί τη συμπυκνωμένη μορφή  $n$  σχέσεων της μορφής  $x_j = X_j(y_1, \dots, y_n)$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

Σύμφωνα με τον γνωστό κανόνα αλλαγής μεταβλητών σε ένα ολοκλήρωμα,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) d x = \int_{\mathbb{R}^n} F(y) \Phi(y) |J(y)| d y, \quad (5.10)$$

όπου  $J(y)$  η ορίζουσα Jacobi του μετασχηματισμού  $R: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  που ορίζεται από την  $x = X(y)$ .

Το προηγούμενο αποτέλεσμα, το οποίο γράφεται και στη μορφή

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) d x = \int_{\mathbb{R}^n} F(y) \Psi(y) d y, \quad (5.11)$$

όπου

$$\Psi(y) := \Phi(y) |J(y)|, \quad (5.12)$$

μπορεί να ερμηνευτεί με τον ακόλουθο τρόπο:

Η αλλαγή συντεταγμένων  $S: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  που ορίζεται από τη σχέση

$$y = Y(x), \quad (5.13)$$

επιφέρει τους μετασχηματισμούς

$$T_f \rightarrow S T_f := T_F, \quad \varphi \rightarrow S \varphi := \Psi, \quad (5.14)$$

με τρόπο ώστε η ποσότητα  $\langle T_f, \varphi \rangle$  να παραμένει αναλλοίωτη:

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \langle S T_f, S \varphi \rangle \equiv \langle T_F, \Psi \rangle. \quad (5.15)$$

Αυτή η διατύπωση μας επιτρέπει να βρούμε αμέσως και τον τρόπο με τον οποίο μια αλλαγή συντεταγμένων επηρεάζει και τις ιδιόμορφες κατανομές, σαν την δέλτα του Dirac.

Ας υποθέσουμε για παράδειγμα ότι, κατά την αλλαγή συντεταγμένων  $x \rightarrow y = Y(x)$ , η  $\delta_a$  μετατρέπεται στην  $S \delta_a$ . Σύμφωνα με τον ορισμό της  $\delta_a$ ,

$$\langle \delta_a(x), \varphi(x) \rangle = \varphi(a), \quad (5.16)$$

όπου ο "απαράδεκτος" συμβολισμός  $\delta_a(\mathbf{x})$ ,  $\varphi(\mathbf{x})$  χρησιμοποιείται προσωρινά, για να τονίσει ότι η κατανομή  $\delta_a$  δρα σε συναρτήσεις που έχουν εκφραστεί στις συντεταγμένες  $(x_1, \dots, x_n)$ . Η  $S \delta_a$ , λοιπόν, θα πρέπει να είναι τέτοια που η δράση της στην ελεγκτική συνάρτηση  $\Psi(\mathbf{y})$  να δίνει το ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα:

$$\langle S \delta_a(\mathbf{y}), \Psi(\mathbf{y}) \rangle = \varphi(\mathbf{a}). \quad (5.17)$$

Όμως, το σημείο  $\mathbf{x} = \mathbf{a}$  αντιστοιχεί στο σημείο  $\mathbf{b} = \mathbf{Y}(\mathbf{a})$  και, άρα,

$$\varphi(\mathbf{a}) = \Phi(\mathbf{b}). \quad (5.18)$$

Από την άλλη  $\Psi(\mathbf{y}) := \Phi(\mathbf{y}) |J(\mathbf{y})|$ . Άρα, η συνθήκη (1.150) γίνεται

$$\langle S \delta_a(\mathbf{y}), \Phi(\mathbf{y}) |J(\mathbf{y})| \rangle = \Phi(\mathbf{b}). \quad (5.19)$$

Όμως,

$$\Phi(\mathbf{b}) = \langle \delta_b(\mathbf{y}), \Phi(\mathbf{y}) \rangle. \quad (5.20)$$

Άρα,

$$S \delta_a(\mathbf{y}) = \frac{1}{|J(\mathbf{y})|} \delta_b(\mathbf{y}). \quad (5.21)$$

### Παράδειγμα 5.1

Ας υποθέσουμε ότι οι αρχικές συντεταγμένες του  $\mathbb{E}^3$  είναι Καρτεσιανές και οι καινούργιες σφαιρικές:  $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ ,  $(y_1, y_2, y_3) = (r, \theta, \varphi)$ . Σ' αυτή την περίπτωση,

$$J(\mathbf{y}) \equiv J(r, \theta, \varphi) = r^2 \sin \theta. \quad (5.22)$$

Θεωρούμε ένα σημείο  $p$  του  $\mathbb{E}^3$  που έχει Καρτεσιανές συντεταγμένες  $\mathbf{a} = (x_0, y_0, z_0)$  και το οποίο βρίσκεται σε μη μηδενική απόσταση από την αρχή των αξόνων,  $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ . Επιπλέον, υποθέτουμε ότι οι άξονες έχουν επιλεγεί έτσι ώστε το  $p$  να μην γρίσκεται πάνω στον άξονα  $z$ . Οι σφαιρικές συντεταγμένες του ίδιου σημείου θα είναι  $\mathbf{b} = (r_0, \theta_0, \varphi_0)$ , όπου  $r_0 = |\mathbf{a}| \neq 0$  και  $\sin \theta_0 \neq 0$ .

Αν θέσουμε

$$\delta_a(\mathbf{x}) \equiv \delta(x - x_0, y - y_0, z - z_0), \quad \delta_b(\mathbf{y}) \equiv \delta(r - r_0, \theta - \theta_0, \varphi - \varphi_0), \quad (5.23)$$

τότε η σχέση  $S \delta_a(\mathbf{y}) = |J(\mathbf{y})|^{-1} \delta_b(\mathbf{y})$  παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$S \delta(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = \frac{1}{|r^2 \sin \theta|} \delta(r - r_0, \theta - \theta_0, \varphi - \varphi_0). \quad (5.24)$$

Συνακόλουθα, αν παραστήσουμε την δράση της  $\delta_a(\mathbf{x})$  στην τυχαία ελεγκτική συνάρτηση  $u(\mathbf{x})$  με την "πρακτική" μορφή

$$\int_{\mathbb{R}^3} \delta(x - x_0, y - y_0, z - z_0) u(x, y, z) dx dy dz, \quad (5.25)$$



τότε

$$\int_{\mathbb{R}^3} \delta(x - x_0, y - y_0, z - z_0) u(x, y, z) dx dy dz = u(x_0, y_0, z_0). \quad (5.26)$$

Κατά συνέπεια, η δράση της μετασχηματισμένης  $\delta_a(\mathbf{x})$  στη συνάρτηση

$$U(r, \theta, \varphi) = u(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) \quad (5.27)$$

θα πάρει την ακόλουθη μορφή:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|r^2 \sin \theta|} \delta(r - r_0, \theta - \theta_0, \varphi - \varphi_0) = U(r, \theta, \varphi) |r^2 \sin \theta| dr d\theta d\varphi \quad (5.28)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^3} \delta(r - r_0, \theta - \theta_0, \varphi - \varphi_0) \Phi(r, \theta, \varphi) dr d\theta d\varphi = U(r_0, \theta_0, \varphi_0). \quad (5.29)$$

Αυτό είναι και το σωστό αποτέλεσμα, γιατί, από τον ορισμό της  $U(r, \theta, \varphi)$ , η τιμή αυτής της συνάρτησης στο σημείο  $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$  είναι ίση με την τιμή της  $u(x, y, z)$  στο  $(x_0, y_0, z_0)$ .

**Παρατήρηση.** Η σχέση (5.24) συχνά γράφεται στη μορφή

$$\delta(x - x_0, y - y_0, z - z_0) = \frac{1}{|r^2 \sin \theta|} \delta(r - r_0, \theta - \theta_0, \varphi - \varphi_0). \quad (5.30)$$

Αν δεν ερμηνεύεται στο σωστό πλαίσιο, αυτός ο τρόπος γραφής δημιουργεί σύγχυση. ■

Όπως ήδη τονίσαμε, πολλές από τις πράξεις που είναι γνωστές από τη θεωρία των συνηθισμένων συναρτήσεων (Κλασική Ανάλυση) παύουν να έχουν νόημα στο χώρο των γενικευμένων συναρτήσεων. Για παράδειγμα, το γινόμενο μιας συνάρτησης  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με μια τυχαία κατανομή  $T$  δεν ορίζεται, εκτός εάν η  $f$  ανήκει στην κλάση  $C^\infty(\mathbb{R})$ . Στη δεύτερη περίπτωση, το γινόμενο  $fT$  είναι η κατανομή που ορίζεται από τον τύπο

$$\langle fT, \varphi \rangle := \langle T, f\varphi \rangle, \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}). \quad (5.31)$$

Ωστόσο, ιδιαίτερα στον τομέα των εφαρμογών, συναντάει κανείς εκφράσεις σαν την  $\delta(f(x))$  που δίνουν την εντύπωση της σύνθεσης,  $\delta_0 \circ f$ , της συνάρτησης  $f(x)$  με τη "συνάρτηση" δέλτα του Dirac,  $\delta_0$ . Για δούμε πότε αυτή η έκφραση έχει νόημα και τι ακριβώς σημαίνει, ας υποθέσουμε ότι

(i) Η συνάρτηση  $f(x)$  είναι διαφορίσιμη και μηδενίζεται σε ένα περασμένο πλήθος σημείων,  $\{x_j\}_{j=1}^m$ , της πραγματικής ευθείας.

(ii) Η παράγωγος  $f'(x)$  της  $f(x)$  είναι μη μηδενική σε όλα τα σημεία  $\{x_j\}_{j=1}^m$ .

Για παράδειγμα, η  $f(x) = (x - a)(x - b)$ ,  $a \neq b$ , μηδενίζεται στα σημεία  $x_1 = a$  και  $x_2 = b$ . Αφού,  $f'(x) = (x - a) + (x - b)$ ,  $f'(a) = a - b \neq 0$ ,  $f'(b) = b - a \neq 0$ .

Συμβολίζουμε, τώρα, με  $\delta(x)$  την κατανομή  $\delta_0$  του Dirac και με  $\delta(f(x))$  την κατανομή

στην οποία θέλουμε να δώσουμε κάποιο νόημα. Με άλλα λόγια, θέλουμε να μπορούμε να υπολογίζουμε τον αριθμό

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(f(x)) \varphi(x) dx \equiv \langle \delta_0 \circ f, \varphi \rangle, \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}). \quad (5.32)$$

Ο μετασχηματισμός  $x \rightarrow y = f(x)$  είναι αντιστρέψιμος σε κάθε διάστημα  $I$  της πραγματικής ευθείας στο οποίο η  $f'(x)$  διατηρεί το ίδιο πρόσημο. Άρα, σε κάθε τέτοιο διάστημα το  $x = X(y)$ , όπου  $X$  η αντίστροφη της συνάρτησης  $f$ . Συνακόλουθα, η ελεγκτική συνάρτηση  $\varphi(x)$  μετατρέπεται στην

$$\Phi(y) = \varphi(X(y)) \quad (5.33)$$

Άρα,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(f(x)) \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) \Phi(y) |X'(y)| dy. \quad (5.34)$$

Ο υπολογισμός των παραπάνω ολοκληρωμάτων πρέπει να γίνει τμηματικά, με βάση την διαμέριση του άξονα  $x$  στα διαστήματα  $I_1 = (-\infty, a_1)$ ,  $I_2 = (a_1, a_2)$ , ...,  $I_k = (a_{m-1}, \infty)$ , σε καθένα από οποία η  $f'(x)$  διατηρεί το ίδιο πρόσημο. Σε καθένα από αυτά τα διαστήματα η  $f(x)$  είναι αντιστρέψιμη, οπότε η  $y = f(x)$  μπορεί να θεωρηθεί ως καινούργια συντεταγμένη. Όσα από τα διαστήματα περιέχουν μίαν από τις ρίζες  $\{x_j\}_{j=1}^m$  της  $f(x)$  θα απεικονιστούν σε διαστήματα  $\{\tilde{I}_j\}_{j=1}^m$  του άξονα  $y$  τα οποία περιέχουν το  $y = 0$ . Αφού η  $\delta(y)$  μηδενίζεται πέρα από το  $y = 0$ , μόνο τα διαστήματα  $\{\tilde{I}_j\}_{j=1}^m$  θα συνεισφέρουν στο ολοκλήρωμα ως προς τη μεταβλητή  $y$ . Με άλλα λόγια,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) \Phi(y) |X'(y)| dy = \sum_{j=1}^m \int_{\tilde{I}_j} \delta(y) \Phi(y) |X'(y)| dy. \quad (5.35)$$

Όμως, στο διάστημα  $\tilde{I}_j$  που περιέχει την εικόνα  $y = 0$  της ρίζας  $x_j$ ,

$$\Phi(0) = \varphi(x_j), \quad X'(0) = \frac{1}{f'(x_j)}. \quad (5.36)$$

Συνεπώς,

$$\sum_{j=1}^m \int_{\tilde{I}_j} \delta(y) \Phi(y) |X'(y)| dy = \sum_{j=1}^m \frac{\varphi(x_j)}{|f'(x_j)|}. \quad (5.37)$$

Συνακόλουθα,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(f(x)) \varphi(x) dx = \sum_{j=1}^m \frac{\varphi(x_j)}{|f'(x_j)|} \quad (5.38)$$

Τελικά, αφού

$$\sum_{j=1}^m \frac{\varphi(x_j)}{|f'(x_j)|} \equiv \sum_{j=1}^m \frac{1}{|f'(x_j)|} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_j) \varphi(x) dx, \quad (5.39)$$

το προηγούμενο αποτέλεσμα δείχνει ότι, η έκφραση  $\delta(f(x))$  πρέπει να ερμηνευτεί με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\delta(f(x)) = \sum_{j=1}^m \frac{\delta(x-x_j)}{|f'(x_j)|}. \quad (5.40)$$

### Παράδειγμα 5.2

Ας υποθέσουμε ότι

$$f(x) = x^2 - a^2, \quad a > 0. \quad (5.41)$$

Προφανώς, η  $f(x)$  μηδενίζεται στα σημεία  $x = \pm a$ , όπου η παράγωγός της είναι ίση με  $f'(-a) = -2a$  και  $f'(a) = 2a$ , αντίστοιχα. Έτσι, σύμφωνα με το προηγούμενο αποτέλεσμα,

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2a} [\delta(x+a) + \delta(x-a)]. \quad (5.42)$$

Για να δούμε αυτό το αποτέλεσμα πιο αναλυτικά, ας σημειώσουμε ότι, στα διαστήματα  $-\infty < x < 0$  και  $0 < x < \infty$ , η  $f'(x) = 2x$  είναι αρνητική και θετική, αντίστοιχα. Στο πρώτο από αυτά τα διαστήματα, η  $y = x^2 - a^2$  αντιστρέφεται για να δώσει  $x = X_1(y) := -\sqrt{y+a^2}$ . Ανάλογα, στο διάστημα  $0 < x < \infty$ , η  $x = X_2(y) := \sqrt{y+a^2}$ .

Καθώς, λοιπόν, η μεταβλητή  $x$  διατρέχει το διάστημα  $I_1 = (-\infty, 0)$ , η μεταβλητή  $y$  διατρέχει το διάστημα  $\tilde{I}_1 = f(I_1) = (-a^2, \infty)$ . Ανάλογα, όταν η  $x$  διατρέχει το διάστημα  $I_2 = (0, \infty)$ , η μεταβλητή  $y$  διατρέχει το διάστημα  $\tilde{I}_2 = f(I_2) = (-a^2, \infty)$ .

Στα διαστήματα  $I_{1,2}$ , ο συντελεστής Jacobi,  $X'(y)$ , είναι ίσος με

$$X'_1(y) = -\frac{1}{2\sqrt{y+a^2}}, \quad X'_2(y) = \frac{1}{2\sqrt{y+a^2}}, \quad (5.43)$$

αντίστοιχα. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(f(x)) \varphi(x) dx &= \sum_{j=1}^2 \int_{\tilde{I}_j} \delta(y) \Phi(y) |X'(y)| dy \\ &= \int_{-a^2}^{\infty} \delta(y) \varphi(X_1(y)) |X'_1(y)| dy + \int_{-a^2}^{\infty} \delta(y) \varphi(X_2(y)) |X'_2(y)| dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nu) \varphi\left(-\sqrt{y+a^2}\right) \frac{1}{2\sqrt{y+a^2}} dy + \int_{-a^2}^{\infty} \delta(y) \varphi\left(\sqrt{y+a^2}\right) \frac{1}{2\sqrt{y+a^2}} dy \\ = \varphi(-a) \frac{1}{2a} + \varphi(a) \frac{1}{2a} \end{aligned}$$

Όμως,

$$\frac{1}{2a} [\varphi(-a) + \varphi(a)] \equiv \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(x+a) + \delta(x-a)] \varphi(x) dx. \quad (5.45)$$

Άρα,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x^2 - a^2) \varphi(x) dx = \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(x+a) + \delta(x-a)] \varphi(x) dx, \quad (5.46)$$

που είναι ταυτόσημη με την (5.42). ■

Μια έννοια που είναι πολύ χρήσιμη στις φυσικές εφαρμογές, αλλά όχι μόνο, είναι αυτή του τανυστικού γινόμενου δύο κατανομών. Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα ότι οι συναρτήσεις  $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχείς. Τότε, κάθε μια από αυτές ορίζει μια κατανομή στον  $\mathbb{R}$ , μέσω των τύπων

$$\langle T_f, \varphi \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx, \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \quad (5.47)$$

$$\langle T_g, \varphi \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \varphi(x) dx, \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}). \quad (5.48)$$

Ας θεωρήσουμε τώρα τη συνάρτηση δύο μεταβλητών  $\varphi(x, y)$  η οποία ανήκει στην κλάση  $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ . Για κάθε συγκεκριμένη τιμή της μεταβλητής  $y$ , η  $\varphi(x, y)$  είναι μια συνάρτηση μόνο της μεταβλητής  $x$  που ανήκει στην κλάση  $C_0^\infty(\mathbb{R})$ . Ανάλογα, για κάθε συγκεκριμένη τιμή της μεταβλητής  $x$ , η  $\varphi(x, y)$  ανάγεται σε μια συνάρτηση κλάσης  $C_0^\infty(\mathbb{R})$  μόνο της μεταβλητής  $y$ . Σαν επακόλουθο, οι συναρτήσεις

$$\psi(y) := \langle T_f, \varphi \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x, y) dx, \quad (5.49)$$

$$\chi(x) := \langle T_g, \varphi \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \varphi(x, y) dy, \quad (5.50)$$

ανήκουν και αυτές στην κλάση  $C_0^\infty(\mathbb{R})$ .

Ο λόγος είναι ότι η  $\varphi(x, y)$  είναι ομαλή και μηδενίζεται ταυτοτικά έξω από ένα διάστημα της μορφής  $I = [a, b] \times [c, d]$  του  $\mathbb{R}^2$ . Κατά συνέπεια,

$$\psi'(y) := \partial_y \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x, y) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \partial_y \varphi(x, y) dx \quad (5.51)$$

κι ανάλογα και για τις παραγώγους μεγαλύτερης τάξης της  $\psi(y)$ . Επιπλέον η  $\psi(y)$  καθώς και οι παράγωγοί της, οποιασδήποτε τάξης, μηδενίζονται έξω από το διάστημα  $[c, d]$ . Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύει κανείς ότι και η  $\chi(x)$  είναι μια ελεγκτική συνάρτηση.

Αφού λοιπόν η  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ , μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή της κατανομής  $T_g$  στο "σημείο"  $\psi$ , για να βρούμε ότι,

$$\begin{aligned} \langle T_g, \psi \rangle &= \langle T_g, \langle T_f, \varphi \rangle \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} g(y) \psi(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(y) \varphi(x, y) dx dy. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Με αυτό τον τρόπο ορίζεται μια κατανομή στον  $\mathbb{R}^2$  που ονομάζεται τανυστικό γινόμενο των  $T_g, T_f$  και συμβολίζεται με  $T_g \otimes T_f$ . Δηλαδή,

$$\langle T_g \otimes T_f, \varphi \rangle := \langle T_g, \langle T_f, \varphi \rangle \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(y) \varphi(x, y) dx dy. \quad (5.53)$$

Ανάλογα, η τιμή της κατανομής  $T_f$  στο "σημείο"  $\chi$  του χώρου  $C_0^\infty(\mathbb{R})$  είναι ίση με

$$\begin{aligned} \langle T_f, \chi \rangle &= \langle T_f, \langle T_g, \varphi \rangle \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \chi(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(y) \varphi(x, y) dy dx. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Η κατανομή στον  $\mathbb{R}^2$  που ορίζεται μ' αυτό τον τρόπο ονομάζεται τανυστικό γινόμενο των  $T_f, T_g$  και συμβολίζεται με  $T_f \otimes T_g$ . Δηλαδή,

$$\langle T_f \otimes T_g, \varphi \rangle := \langle T_f, \langle T_g, \varphi \rangle \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(y) \varphi(x, y) dy dx \quad (5.55)$$

Όμως, οι συναρτήσεις  $f, g$ , είναι συνεχείς και η  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ . Συνεπώς, τα δυο επάλληλα ολοκληρώματα που εμφανίζονται στις παραπάνω σχέσεις είναι ίσα μεταξύ τους, καθώς και προς το αντίστοιχο διπλό ολοκλήρωμα. Δηλαδή,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(y) \varphi(x, y) dx dy &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(y) \varphi(x, y) dy dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} f(x) g(y) \varphi(x, y) dx dy. \end{aligned} \quad (5.56)$$

Αφού αυτό ισχύει για οποιαδήποτε ελεγκτική συνάρτηση  $\varphi(x, y)$ , συμπεραίνουμε ότι

$$T_g \otimes T_f = T_f \otimes T_g. \quad (5.57)$$

Όπως εύκολα μπορεί να επαληθεύσει ο αναγνώστης, η προηγούμενη ανάλυση ισχύει για κάθε ζευγάρι κατανομών και όχι μόνο για τις κανονικές. Έτσι, οδηγούμαστε στον ακόλουθο ορισμό:

**Ευθύ ή τανυστικό γινόμενο** των κατανομών  $S : C_0^\infty(\mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $T : C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  ονομάζεται το γραμμικό συναρτησιακό  $S \otimes T : C_0^\infty(\mathbb{R}^{m+n}) \rightarrow \mathbb{R}$  που ορίζεται από τον τύπο

$$\langle S \otimes T, \varphi \rangle := \langle S, \langle T, \varphi \rangle \rangle, \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{m+n}). \quad (5.58)$$

Με βάση τις προηγούμενες παρατηρήσεις, ο αναγνώστης μπορεί εύκολα να αποδείξει ότι

- (i) Το τανυστικό είναι κατανομή και  
 (ii) Όπως και στην ειδικότερη περίπτωση των κανονικών κατανομών, το τανυστικό γινόμενο δύο κατανομών οποιασδήποτε κατηγορίας είναι αντιμεταθετικό:

$$S \otimes T = T \otimes S. \quad (5.59)$$

Το τανυστικό γινόμενο περισσότερων των δύο κατανομών ορίζεται επαγωγικά, οπότε και διατηρεί την αντιμεταθετική του ιδιότητα. Για παράδειγμα, το τανυστικό γινόμενο των κατανομών  $R : C_0^\infty(\mathbb{R}^l) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $S : C_0^\infty(\mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}$  και  $T : C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  ορίζεται από τον τύπο

$$\langle R \otimes S \otimes T, \varphi \rangle := \langle R, \langle S, \langle T, \varphi \rangle \rangle \rangle, \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{l+m+n}). \quad (5.60)$$

■

### Παράδειγμα 5.3

- (i) Σύμφωνα με τον ορισμό, το τανυστικό γινόμενο,  $\delta_a \otimes \delta_b$ , δύο κατανομών Dirac στην πραγματική ευθεία δρα σε μια ελεγκτική συνάρτηση  $\varphi(x, y)$  για να δώσει τον αριθμό

$$\langle \delta_a \otimes \delta_b, \varphi \rangle = \langle \delta_a, \langle \delta_b, \varphi \rangle \rangle = \langle \delta_a, \varphi(x, b) \rangle = \varphi(a, b). \quad (5.61)$$

Από την άλλη, το δέλτα του Dirac στον  $\mathbb{R}^2$  ορίζεται από τον τύπο  $\delta_{(a,b)}$

$$\langle \delta_{(a,b)}, \varphi \rangle := \varphi(a, b), \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2). \quad (5.62)$$

Συνεπώς,

$$\delta_a \otimes \delta_b = \delta_{(a,b)}. \quad (5.63)$$

**Παρατήρηση.** Όταν οι κατανομές Dirac γράφονται με τον συμβολισμό των συναρτήσεων, το προηγούμενο αποτέλεσμα δίνεται στη μορφή

$$\delta(x-a) \delta(y-b) = \delta(x-a, y-b). \quad (5.64)$$

Θα πρέπει, λοιπόν, να σημειωθεί ότι η παράλειψη του σύμβολου  $\otimes$  δημιουργεί την λαθεμένη εντύπωση ότι το γινόμενο  $\delta(x-a) \delta(y-b)$  έχει νόημα.

■

Μια άλλη κατασκευή, πολύ χρήσιμη στις εφαρμογές, είναι η κατανομή που έχει ως έρεισμα μια καμπύλη του  $\mathbb{R}^2$ , μια επιφάνεια του  $\mathbb{R}^3$  και, γενικότερα, ένα υποσύνολο του Ευκλείδειου χώρου  $\mathbb{R}^n$ , το οποίο έχει κάποια γεωμετρική σημασία.

Ας υποθέσουμε για παράδειγμα ότι το υποσύνολο  $\Sigma$  του  $\mathbb{R}^3$  είναι μια ομαλή επιφάνεια που χωρίζει τον τρισδιάστατο χώρο σε δύο ξένα μεταξύ τους υποσύνολα, τα  $\Omega_+$  και  $\Omega_-$ . Αν η

επιφάνεια είναι κλειστή, τότε τα ανοιχτά υποσύνολα  $\Omega_+$  και  $\Omega_-$  του  $\mathbb{R}^3$  είναι αυτά που συνήθως ονομάζουμε εσωτερικό και εξωτερικό της επιφάνειας.

Η υπόθεση ότι το  $\Sigma$  αποτελεί μian ομαλή επιφάνεια σημαίνει ότι υπάρχει μια συνάρτηση  $F(x, y, z)$ , με συνεχείς μερικές παραγώγους πρώτης τάξης, τέτοια ώστε

$$\Sigma := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = 0\} \quad (5.65)$$

και

$$\nabla F(x, y, z) \neq \mathbf{0}, \quad \forall (x, y, z) \in \Sigma. \quad (5.66)$$

Κλασικό παράδειγμα αποτελεί η σφαιρική επιφάνεια ακτίνας  $a$ , η οποία μπορεί να οριστεί από τη συνθήκη

$$F(x, y, z) := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - a = 0. \quad (5.67)$$

Το απλούστερο δυνατό παράδειγμα μη κλειστής επιφάνειας είναι αυτό ενός επίπεδου παράλληλου προς το επίπεδο που ορίζουν οι άξονες  $x$  και  $y$ . Ένα τέτοιο επίπεδο ορίζεται από τη συνθήκη

$$F(x, y, z) := z - a = 0, \quad (5.68)$$

όπου  $a$  τυχαίος πραγματικός αριθμός.

Υποθέτουμε τώρα ότι η  $\sigma : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  είναι μια συγκεκριμένη συνεχής συνάρτηση. Για παράδειγμα, η  $\sigma(x, y, z) = 1, \forall (x, y, z) \in \Sigma$ . Τότε, ο τύπος

$$\langle \delta_\Sigma, \varphi \rangle := \int_\Sigma \sigma(x, y, z) \varphi(x, y, z) dS, \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3), \quad (5.69)$$

όπου  $dS$  το στοιχείο εμβαδού της επιφάνειας  $\Sigma$ , ορίζει μian κατανομή στον  $\mathbb{R}^3$ .

Σημειώστε ότι, στην περίπτωση που το έρεισμα της ελεγκτικής συνάρτησης  $\varphi$  δεν τέμνει την επιφάνεια  $\Sigma$ , το επιφανειακό ολοκλήρωμα που ορίζει τον αριθμό  $\langle \delta_\Sigma, \varphi \rangle$  μηδενίζεται. Συνεπώς, το έρεισμα της κατανομής  $\delta_\Sigma : C_0^\infty(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}$  είναι η επιφάνεια  $\Sigma$ . Αυτό σημαίνει ότι η κατανομή  $\delta_\Sigma$  είναι ανάλογη προς την δέλτα του Dirac,  $\delta_a$ . Με την έννοια ότι και οι δύο έχουν ως έρεισμα ένα κλειστό υποσύνολο του  $\mathbb{R}^3$ , διάστασης μικρότερης του τρία. Όπως, λοιπόν, η  $\delta_a$  "παριστάνει" μια φυσική ποσότητα, γ.π. μάζα, που είναι συγκεντρωμένη στο σημείο  $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ , έτσι και η  $\delta_\Sigma$  μπορεί να θεωρηθεί ότι παριστάνει ένα άπειρα λεπτό στρώμα ύλης, το οποίο έχει τη μορφή της επιφάνειας  $\Sigma$ .

#### Παράδειγμα 5.4

Ας υποθέσουμε ότι η επιφάνεια  $\Sigma$  είναι σφαιρική, με κέντρο την αρχή,  $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ , των Καρτεσιανών αξόνων, και ότι  $\sigma(x, y, z) = 1, \forall (x, y, z) \in \Sigma$ . Εισάγοντας σφαιρικές συντεταγμένες, αμέσως βρίσκουμε ότι

$$\langle \delta_\Sigma, \varphi \rangle := \int_\Sigma \varphi(x, y, z) dS = a^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \Phi(a, \theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (5.70)$$

όπου  $\Phi(r, \theta, \varphi)$  η αντίστοιχη της  $\varphi(x, y, z)$ . Βλέπουμε, λοιπόν, ότι, ο αριθμός  $\langle \delta_\Sigma, \varphi \rangle$  είναι ανάλογος του μέσου όρου των τιμών που παίρνει η ελεγκτική συνάρτηση  $\varphi(x, y, z)$  πάνω στη σφαιρική επιφάνεια  $\Sigma$ .

## Ασκήσεις

**5.1** Να βρεθεί η μορφή της κατανομής  $\delta_{(a,b)} \equiv \delta(x-a, y-b)$  στις συντεταγμένες  $(\eta, \xi)$  που ορίζονται από τις σχέσεις

$$\eta = x + y, \quad \xi = x - y.$$

**5.2** Η μετάθεση των Καρτεσιανών συντεταγμένων  $(x, y)$  ορίζεται από την απεικόνιση

$$x \rightarrow \tilde{x} = x + k, \quad y \rightarrow \tilde{y} = y + l.$$

Να βρεθεί ο αντίστοιχος μετασχηματισμός της κατανομής  $\delta_{(a,b)} \equiv \delta(x-a, y-b)$ .

**5.3** Η στροφή των Καρτεσιανών συντεταγμένων  $(x_1, x_2, x_3)$  γύρω από την αρχή των αξόνων ορίζεται από την απεικόνιση

$$x_j \rightarrow \tilde{x}_j = \sum_{k=1}^3 A_{jk} x_k$$

όπου  $A_{jk}$  τα στοιχεία ενός ορθογώνιου πίνακα  $3 \times 3$ , του οποίου η ορίζουσα είναι ίση με τη μονάδα. Να βρεθεί ο αντίστοιχος μετασχηματισμός της  $\delta_{(a,b,c)} \equiv \delta(x_1-a, x_2-b, x_3-c)$ .

**5.4** Να γραφτούν οι παρακάτω κατανομές ως γραμμικός συνδυασμός κατανομών δέλτα του Dirac:

(i)  $\delta(x^3 - 2x^2 - x + 2)$ , (ii)  $\delta(x^4 - 1)$ .

**5.5** Θεωρήστε τη συνάρτηση

$$\varphi(x, y) := \begin{cases} e^{-1/(1-x^2-y^2)}, & x^2 + y^2 < 1 \\ 0, & x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}$$

που ανήκει στο χώρο  $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ .

Δείχτε ότι

(i)  $\langle \delta_0 \otimes H_0, \varphi \rangle = \int_0^1 e^{-1/(1-y^2)} dy$ , (ii)  $\langle H_{-2} \otimes \delta_0, \varphi \rangle = \int_{-1}^1 e^{-1/(1-x^2)} dx$

(iii)  $\langle \delta_1 \otimes H_0, \varphi \rangle = \langle \delta_0 \otimes H_1, \varphi \rangle = 0$ .

**5.6** α) Δείχτε ότι

$$\delta_{(a,b,c)} = \delta_a \otimes \delta_b \otimes \delta_c$$

β) Να υπολογιστεί η τιμή των παρακάτω κατανομών στο "σημείο"  $\varphi$  του χώρου  $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ , όπου



$$\varphi(\mathbf{x}) := \begin{cases} e^{-1/(1-|\mathbf{x}|^2)}, & |\mathbf{x}| < 1 \\ 0, & |\mathbf{x}| \geq 1 \end{cases}$$

5.7 α) Δείχτε ότι

$$H_{(a,b)} = H_a \otimes H_b, \quad H_{(a,b,c)} = H_a \otimes H_b \otimes H_c \quad (5.71)$$

όπου  $H_a : C_0^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  η (μονοδιάστατη) κατανομή Heaviside (βλ. Άσκ. 4.7).

β) Κατασκευάστε τη γενίκευση  $H_a : C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ , της  $H_{(a,b)}$  και δείχτε ότι

$$H_a = H_{a_1} \otimes H_{a_2} \otimes \dots \otimes H_{a_n}. \quad (5.72)$$

5.8 α) Δείχτε ότι

$$\partial_j(S \otimes T) = \partial_j S \otimes T + S \otimes \partial_j T \quad (5.73)$$

β) Χρησιμοποιώντας αυτό το αποτέλεσμα, υπολογίστε τις μερικές παραγώγους των παρακάτω ταυστικών γινομένων και τις τιμές τους στις αντίστοιχες ελεγκτικές συναρτήσεις:

(i)  $f(x) = x^2$ ,  $\partial_x(T_f \otimes H_a)$ ,  $\langle \partial_x(T_f \otimes H_a), \varphi \rangle$ ,  $\varphi = \varphi(x, y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ ,

(ii)  $\partial_x(H_a \otimes H_b)$ ,  $\langle \partial_x(H_a \otimes H_b), \varphi \rangle$ ,  $\varphi = \varphi(x, y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ ,

(iii)  $\partial_y(H_a \otimes H_b)$ ,  $\langle \partial_y(H_a \otimes H_b), \varphi \rangle$ ,  $\varphi = \varphi(x, y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ ,

(iv)  $\partial_x(\delta_a \otimes H_b)$ ,  $\langle \partial_x(\delta_a \otimes H_b), \varphi \rangle$ ,  $\varphi = \varphi(x, y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ ,

(vii)  $\partial_y(H_a \otimes \delta_b)$ ,  $\langle \partial_y(H_a \otimes \delta_b), \varphi \rangle$ ,  $\varphi = \varphi(x, y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ ,

(viii)  $\partial_y(\delta_a \otimes \delta_b)$ ,  $\langle \partial_y(\delta_a \otimes \delta_b), \varphi \rangle$ ,  $\varphi = \varphi(x, y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ ,

(ix)  $\partial_y(\delta_a \otimes H_b \otimes \delta_c)$ ,  $\langle \partial_y(\delta_a \otimes H_b \otimes \delta_c), \varphi \rangle$ ,  $\varphi = \varphi(x, y, z) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ ,

(x)  $f(x) = |x|$ ,  $\partial_z(\delta_a \otimes H_b \otimes T_f)$ ,  $\langle \partial_z(\delta_a \otimes H_b \otimes T_f), \varphi \rangle$ ,  $\varphi = \varphi(x, y, z) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ .

## 6. Ακολουθίες και σειρές κατανομών

Όπως στις συνήθεις έτσι και στις γενικευμένες συναρτήσεις (κατανομές), ξεχωριστό ρόλο παίζουν οι (άπειρες) ακολουθίες. Αυτό οφείλεται, εκτός των άλλων, και στο γεγονός ότι, ο καλύτερος αντιπρόσωπος ενός στοιχείου  $T$  αυτού του χώρου συνήθως είναι μια ακολουθία κανονικών που συγκλίνει στην  $T$ .

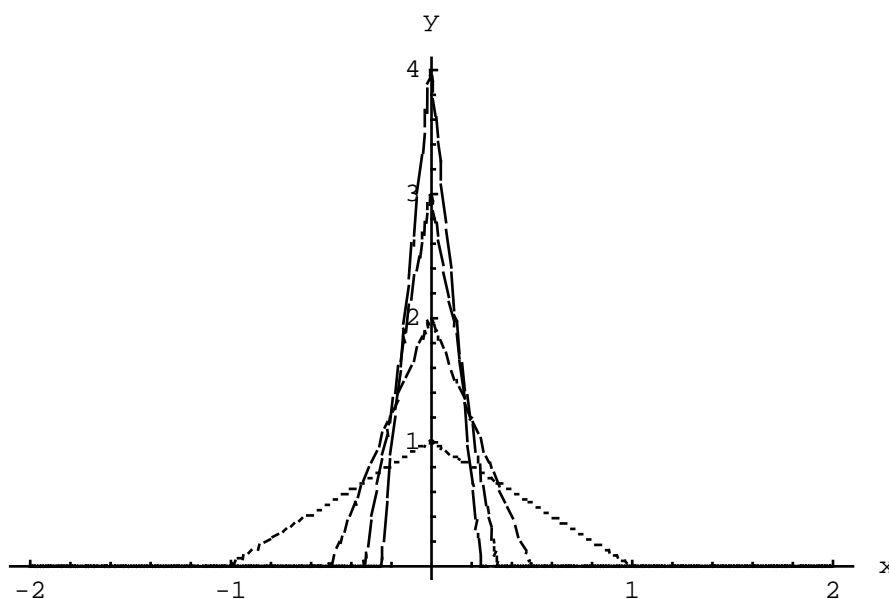
Για να δώσουμε παραδείγματα που αποσαφηνίζουν την προηγούμενη φράση, ας υποθέσουμε αρχικά ότι η ακολουθία  $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$  αποτελείται από κατανομές. Θα λέμε, λοιπόν, ότι η ακολουθία  $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$  **συγκλίνει στην κατανομή**  $T$ , αν η ακολουθία των αριθμών  $\langle T_n, \varphi \rangle$  συγκλίνει στον αριθμό  $\langle T, \varphi \rangle$ , για οποιαδήποτε συνάρτηση  $\varphi$  που ανήκει στο χώρο  $C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ .

### Παράδειγμα 6.1

Θεωρήστε την ακολουθία των συναρτήσεων

$$f_n(x) := \begin{cases} n(1 - n|x|), & |x| < 1/n \\ 0 & |x| \geq 1/n \end{cases} \quad (6.1)$$

Το γράφημα των πρώτων τεσσάρων μελών αυτής της ακολουθίας φαίνεται στο Σχ.6.1.



Σχ. 6.1. Το γράφημα των πρώτων τεσσάρων μελών της ακολουθίας (6.1).

Είναι φανερό ότι, καθώς το  $n$  μεγαλώνει, το ίδιο γίνεται και με το μέγιστο της αντίστοιχης συνάρτησης. Αντίθετα, το έρεισμα της  $f_n$  συρρικνώνεται, αλλά με τρόπο ώστε, το εμβαδόν της περιοχής  $V$  ανάμεσα στο τμήμα  $[-1/n, 1/n]$  του άξονα  $x$  και το γράφημα της  $f_n$  παραμένει ίσο με τη μονάδα. Αυτό συνάγεται από το γεγονός ότι η περιοχή  $V$  δεν είναι παρά ένα τρίγωνο με βάση μήκους  $2/n$  και ύψος  $n$ . Συνεπώς,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx = \int_{-1/n}^{1/n} n(1-n|x|) dx = 1 \quad (6.2)$$

Όντας συνεχής συνάρτηση, κάθε μέλος της ακολουθίας (6.1) ορίζει μια κατανομή. Συγκεκριμένα, στη συνάρτηση  $f_n$  αντιστοιχεί η κατανομή  $T_n: C_0^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ , η οποία ορίζεται από τον τύπο

$$\langle T_n, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) \varphi(x) dx = \int_{-1/n}^{1/n} n(1-n|x|) \varphi(x) dx. \quad (6.3)$$

Θα δείξουμε ότι η ακολουθία  $\{T_n\}_{n=1}^\infty$  που ορίζεται μ' αυτό τον τρόπο συγκλίνει στην  $\delta_0$  του Dirac.

Η απόδειξη αυτού του γεγονότος είναι πολύ εύκολη. Γιατί,  $f_n(x) \geq 0$  και άρα

$$|\langle T_n, \varphi \rangle| = \left| \int_{-1/n}^{1/n} n(1-n|x|) \varphi(x) dx \right| \leq \int_{-1/n}^{1/n} n(1-n|x|) |\varphi(x)| dx \quad (6.4)$$

Αλλά, η  $\varphi(x)$  είναι συνεχής σε όλη την πραγματική ευθεία. Το ίδιο, λοιπόν, θα ισχύει και για την  $|\varphi(x)|$  στο (συμπαγές) διάστημα  $[-1/n, 1/n]$ . Συνεπώς, θα υπάρχει  $\xi \in [-1/n, 1/n]$  όπου

$$|\varphi(\xi)| = M_n := \max_{x \in [-1/n, 1/n]} |\varphi(x)|. \quad (6.5)$$

Άρα,

$$\int_{-1/n}^{1/n} n(1-n|x|) |\varphi(x)| dx \leq M_n \int_{-1/n}^{1/n} n(1-n|x|) dx = M_n. \quad (6.6)$$

Τώρα, καθώς το  $n \rightarrow \infty$ , το διάστημα  $[-1/n, 1/n]$  όλο και συρρικνώνεται, για να καταλήξει να περιέχει μόνο το σημείο  $x = 0$ . Συνεπώς,

$$M_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |\varphi(0)|. \quad (6.7)$$

Σε συνδυασμό με την (6.4), αυτό το αποτέλεσμα σημαίνει ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_n, \varphi \rangle = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle \quad (6.8)$$

και ολοκληρώνει την απόδειξη του ότι  $T_n \rightarrow \delta_0$ . ■

## Παράδειγμα 6.2

Η ακολουθία

$$f_n(x) := \begin{cases} n/2, & |x| < 1/n \\ 0 & |x| \geq 1/n \end{cases} \quad (6.9)$$

διαφέρει από εκείνη του προηγούμενου παραδείγματος ως προς το εξής: Τα μέλη της (από τα οποία τα πρώτα τέσσερα παριστάνονται στο Σχ. 6.2) είναι τμηματικά συνεχείς συναρτήσεις. Ωστόσο, έχουν συμπαγές έρεισμα (το διάστημα  $[-1/n, 1/n]$ ) που όλο μικραίνει, όσο αυξάνεται το  $n$ , και μέγιστη τιμή η οποία όλο μεγαλώνει, έτσι ώστε

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx = \int_{-1/n}^{1/n} \frac{n}{2} dx = 1. \quad (6.10)$$

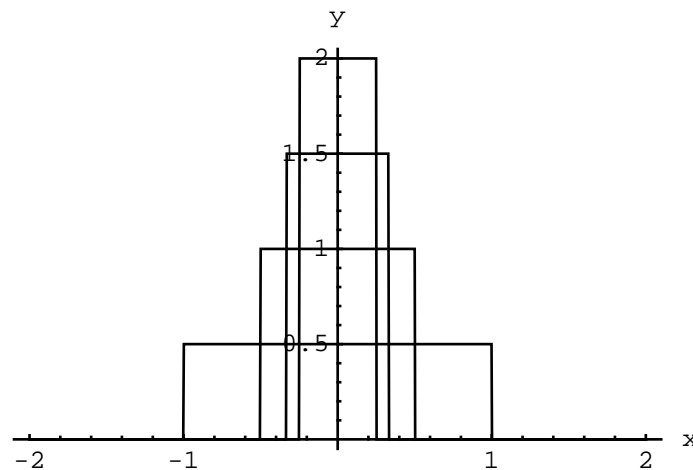
Από το θεώρημα μέσης τιμής για το ολοκλήρωμα Riemann μιας συνεχούς συνάρτησης αμέσως προκύπτει το συμπέρασμα ότι, για οποιαδήποτε  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ , υπάρχει  $\xi \in [-1/n, 1/n]$ , τέτοιο που

$$\langle T_n, \varphi \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) \varphi(x) dx = \frac{n}{2} \int_{-1/n}^{1/n} \varphi(x) dx = \frac{n}{2} [2n \varphi(\xi)] = \varphi(\xi). \quad (6.11)$$

Συνεπώς,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_n, \varphi \rangle = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle. \quad (6.12)$$

Με άλλα λόγια, και η ακολουθία των κατανομών που αντιστοιχεί στην ακολουθία των συναρτήσεων (6.9) συγκλίνει στην  $\delta_0$  του Dirac.



Σχ. 3.2 Το γράφημα των τεσσάρων πρώτων μελών της ακολουθίας (6.9)

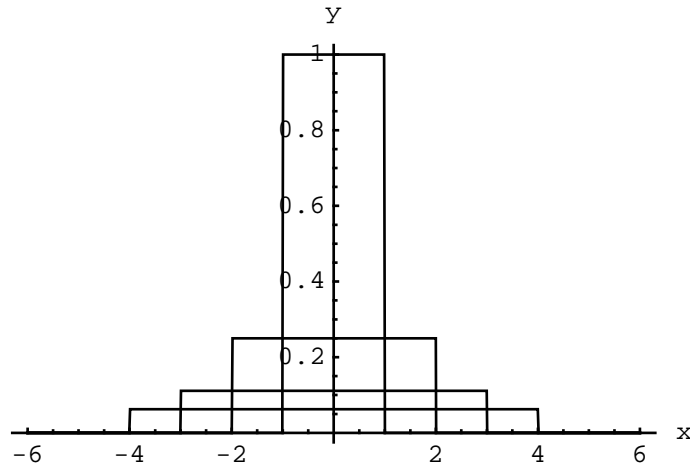
### Παράδειγμα 6.3

Τα μέλη της ακολουθίας

$$f_n(x) := \begin{cases} n^{-2}, & |x| < n \\ 0 & |x| \geq n \end{cases} \quad (6.13)$$

είναι τμηματικά συνεχείς συναρτήσεις, των οποίων το έρεισμα,  $[-n, n]$ , όλο μεγαλώνει όσο αυξάνεται το  $n$ . Αντίθετα, η μέγιστη τιμή τους μειώνεται, με τρόπο ώστε

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx = \int_{-n}^n n^{-2} dx = 2n^{-1}. \quad (6.14)$$



**Σχ. 6.3** Το γράφημα των τεσσάρων πρώτων μελών της ακολουθίας (6.13)

Ας θεωρήσουμε τώρα τη τυχαία  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  κι ας θέσουμε  $M := \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)|$ . Τότε, για την ακολουθία κατανομών  $T_n$  που αντιστοιχούν στις συναρτήσεις (6.12) θα ισχύει η εξής εκτίμηση:

$$|\langle T_n, \varphi \rangle| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x) \varphi(x)| dx = \int_{-n}^n n^{-2} |\varphi(x)| dx \leq M \int_{-n}^n n^{-2} dx = \frac{2M}{n}. \quad (6.15)$$

Συνεπώς,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_n, \varphi \rangle = 0$  κι αυτό σημαίνει ότι η ακολουθία  $T_n$  συγκλίνει στην μηδενική κατανομή.

#### Παράδειγμα 6.4

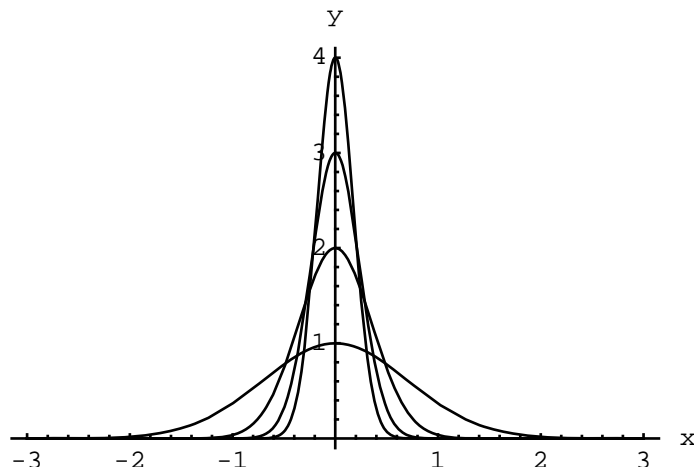
Περνώντας στην αντίθετη κατεύθυνση, θεωρούμε την ακολουθία των συναρτήσεων

$$f_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2}. \quad (6.16)$$

Τα μέλη αυτής της ακολουθίας είναι ομαλότατα (ανήκουν στην κλάση  $C^\infty(\mathbb{R})$ ) και το έρεισμά τους είναι ολόκληρη η πραγματική ευθεία. Συγκεκριμένα,  $f_n(x) > 0$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Από την άλλη μεριά, και οι συναρτήσεις αυτού του παραδείγματος είναι τόσο πιο συγκεντρωμένες στη γειτονιά του  $x = 0$ , όσο μεγαλύτερος είναι ο δείκτης  $n$ . Αυτό φαίνεται καθαρά και στο Σχ. 6.4, που δείχνει τα γραφήματα των συναρτήσεων  $g_n(x) := \sqrt{\pi} f_n(x)$ ,  $n = 1, 2, 3, 4$ . Επιπλέον, όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2} dx = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (6.17)$$



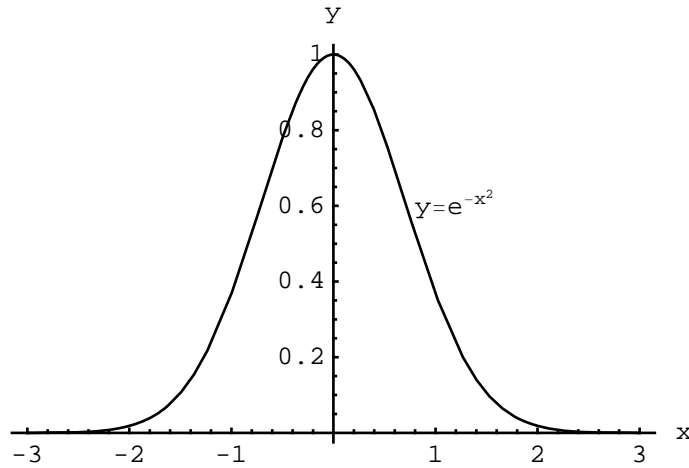
**Σχ. 6.4** Τα τέσσερα πρώτα μέλη της ακολουθίας  $g_n(x) = n e^{-n^2 x^2}$ .

Λίγες γραμμές παρακάτω θ' αποδείξουμε ότι, η ακολουθία των κατανομών που αντιστοιχούν στις συναρτήσεις (6.16) συγκλίνει στην  $\delta_0$ . Επειδή αυτό καθιστά προφανές ότι οι ακολουθίες κατανομών που συγκλίνουν στην δέλτα του Dirac είναι πάρα πολλές (στην πραγματικότητα άπειρες), αξίζει να σταματήσουμε για λίγο και δούμε την τεχνική με την οποία κατασκευάζονται τα αντίστοιχα παραδείγματα.

Δύο είναι, λοιπόν, τα βασικά δομικά στοιχεία αυτών των κατασκευών:

- (i) Μία ολοκληρώσιμη συνάρτηση  $f(x)$  που είναι συγκεντρωμένη στο σημείο  $x = a$ , το οποίο έχουμε επιλέξει ως πόλο ή έρεισμα της δέλτα. Αυτό σημαίνει ότι η  $|f(x)|$  συστηματικά μικραίνει (όχι αναγκαστικά και μονότονα), καθώς η απόσταση  $|x - a|$  μεγαλώνει.
- (ii) Η αλλαγή της ανεξάρτητης μεταβλητής της  $f(x)$ , με τρόπο ώστε να προκύπτει μια ακολουθία συναρτήσεων  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ , κάθε μέλος της οποίας είναι όμοιο με την  $f(x)$ , αλλά τόσο πιο συγκεντρωμένο στο  $x = a$  όσο μεγαλύτερος είναι ο δείκτης  $n$ .

Για να γίνουμε σαφέστεροι, ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση  $g(x) = e^{-x^2}$ . Προφανώς, η  $g(x)$  είναι άρτια και, όπως φαίνεται και στο Σχ. 6.5, συγκεντρωμένη στο σημείο  $x = 0$ . Εκεί παίρνει τη μέγιστη τιμή της. Καθώς απομακρυνόμαστε από αυτό το σημείο, η  $g(x)$  φθίνει τόσο γρήγορα, που πέφτει κάτω από το  $10^{-4}$  αμέσως μόλις το  $|x|$  ξεπεράσει το τρία.



Σχ. 6.5 Το γράφημα της συνάρτησης  $g(x) = e^{-x^2}$ .

Η ταχεία πτώση των τιμών της  $g(x) = e^{-x^2}$  εξασφαλίζει και την ολοκληρωσιμότητά της. Όπως (οφείλουμε, πλέον, να) γνωρίζουμε,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}. \quad (6.18)$$

Αλλά τότε, η αντικατάσταση  $x \rightarrow nx$  μετατρέπει την (6.17) στην

$$\int_{-\infty}^{\infty} n e^{-n^2 x^2} dx = \sqrt{\pi}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (6.19)$$

Αυτή, πέρα από το να είναι ταυτόσημη με την (6.17), ορίζει με σαφήνεια την ακολουθία των συναρτήσεων με την οποία θα πρέπει να ξεκινήσουμε την κατασκευή μας.

Τώρα πλέον, μπορούμε να στραφούμε στην απόδειξη του ότι η ακολουθία των κατανομών που ορίζουν οι συναρτήσεις (6.16) συγκλίνει στην  $\delta_0$ . Αρχίζουμε με την παρατήρηση ότι η (6.17) μας επιτρέπει να γράψουμε τη διαφορά  $\langle T_n, \varphi \rangle - \langle \delta, \varphi \rangle$  στην ακόλουθη μορφή:

$$\begin{aligned} \langle T_n, \varphi \rangle - \langle \delta, \varphi \rangle &:= \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) \varphi(x) dx - \varphi(0) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) \varphi(x) dx - \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) \varphi(0) dx. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} |\langle T_n, \varphi \rangle - \langle \delta, \varphi \rangle| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) [\varphi(x) - \varphi(0)] dx \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2} |\psi(x)| dx. \end{aligned} \quad (6.21)$$

όπου

$$\psi(x) := \varphi(x) - \varphi(0). \quad (6.22)$$

Ας διαμερίσουμε τώρα την πραγματική ευθεία στα τμήματα  $(-\infty, r]$ ,  $[-r, r]$  και  $[r, \infty)$ ,

όπου  $r$  τυχαίος, προς το παρόν, θετικός αριθμός. Προφανώς,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} n e^{-n^2 x^2} |\psi(x)| dx &= \int_{-\infty}^{-r} n e^{-n^2 x^2} |\psi(x)| dx \\ &+ \int_{-r}^r n e^{-n^2 x^2} |\psi(x)| dx + \int_r^{\infty} n e^{-n^2 x^2} |\psi(x)| dx. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Αφού η  $\psi(x)$  είναι συνεχής και φραγμένη, το ίδιο ισχύει και για την  $\psi(x)$ . Αν λοιπόν θέσουμε

$$M := \sup_{x \in \mathbb{R}} |\psi(x)|, \quad (6.24)$$

τότε

$$\int_{-\infty}^{-r} n e^{-n^2 x^2} |\psi(x)| dx \leq M \int_{-\infty}^{-r} n e^{-n^2 x^2} dx = M \int_{-\infty}^{-nr} e^{-\xi^2} d\xi, \quad (6.25)$$

$$\int_r^{\infty} n e^{-n^2 x^2} |\psi(x)| dx \leq M \int_r^{\infty} n e^{-n^2 x^2} dx = M \int_{nr}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi. \quad (6.26)$$

Άρα,

$$\int_{-\infty}^{\infty} n e^{-n^2 x^2} |\psi(x)| dx \leq \int_{-r}^r n e^{-n^2 x^2} |\psi(x)| dx + 2M \int_{nr}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi \quad (6.27)$$

Τώρα, το γεγονός ότι η  $\psi(x)$  είναι συνεχής και μηδενίζεται στο  $x = 0$  έχει την εξής συνέπεια: Για τυχαίο  $\varepsilon > 0$ , οσοδήποτε μικρό, μπορούμε να επιλέξουμε τον θετικό αριθμό  $r$  τέτοιον ώστε  $|\psi(x)| \leq \varepsilon$  αν  $|x| \leq r$ . Σ' αυτή την περίπτωση, η (6.27) γίνεται

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} n e^{-n^2 x^2} |\psi(x)| dx &\leq \varepsilon \int_{-r}^r n e^{-n^2 x^2} dx + 2M \int_{nr}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \\ &\varepsilon \int_{-nr}^{nr} e^{-\xi^2} d\xi + 2M \int_{nr}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi. \end{aligned} \quad (6.28)$$

Αλλά η (6.19) συνεπάγεται ότι

$$\int_{-nr}^{nr} e^{-\xi^2} d\xi \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sqrt{\pi}, \quad \int_{nr}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (6.29)$$

Αυτό σημαίνει ότι το δεξί μέλος της (6.21) μπορεί να γίνει μικρότερο από  $2\varepsilon$ , επιλέγοντας το  $n$  αρκετά μεγάλο. Με άλλα λόγια, έχουμε πλέον αποδείξει ότι

$$\langle T_n, \varphi \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle \delta_0, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in C(\mathbb{R}), \|\varphi\| < \infty. \quad (6.30)$$

A posteriori,

$$\langle T_n, \varphi \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle \delta_0, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \quad (6.31)$$

πράγμα που σημαίνει ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \delta_0. \quad (6.32)$$

■



### Παρατήρηση

Όπως έχουμε εναφέρει, η δέλτα του Dirac ανήκει στην κατηγορία των ιδιόμορφων κατανομών. Αντίθετα, οι κατανομές που αντιστοιχούν σε (τμηματικά) συνεχείς συναρτήσεις ανήκουν στο υποσύνολο των κανονικών κατανομών. Από την άλλη, στα προηγούμενα παραδείγματα κατασκευάσαμε (τρεις) ακολουθίες κανονικών κατανομών που συγκλίνουν στην  $\delta_0$ . Αυτό σημαίνει ότι, υπάρχουν κανονικές κατανομές που προσεγγίζουν, με όση ακρίβεια θέλουμε, την ιδιόμορφη κατανομή  $\delta_0$ . Ισοδύναμα, ως αντιπρόσωπο της  $\delta_0$  μπορούμε να διαλέξουμε την κατανομή που αντιστοιχεί σε μια από τις συναρτήσεις  $f_n(x)$  των πιο πάνω παραδειγμάτων, με αρκετά μεγάλο  $n$ .

Η κατάσταση που μόλις περιγράψαμε είναι ακριβώς ανάλογη με την προσέγγιση ενός άρρητου αριθμού από μια ακολουθία ρητών. Συχνά, για παράδειγμα, δίνουμε τον αριθμό 3,14 ως τιμή του  $\pi$ . Όμως, ο  $\pi$  είναι άρρητος και ο 3,14 ρητός. Άρα, το να λέμε και να γράφουμε  $\pi = 3,14$  είναι απαράδεκτο! Το ίδιο ισχύει ακόμη κι αν προσθέσουμε οσαδήποτε άλλα δεκαδικά ψηφία στον 3,14.

Εκείνο, λοιπόν, που εννοούμε όταν γράφουμε ισότητες σαν τις  $\pi = 3,14$ , ή  $\pi = 3,14159$  κ.λπ. είναι ότι υπάρχει μια ακολουθία ρητών αριθμών,  $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ , η οποία συγκλίνει στον  $\pi$ . Ανάλογα με το πόσο καλή θέλουμε να είναι η προσέγγιση του  $\pi$  από τον ρητό αριθμό  $x_n$ , διαλέγουμε την τιμή του δείκτη  $n$ .

### Παρατήρηση

Οι ακολουθίες των συναρτήσεων και των αντίστοιχων κατανομών που εξετάσαμε στα προηγούμενα παραδείγματα μετατρέπονται σε μονοπαραμετρικές οικογένειες με απλή αντικατάσταση του δείκτη  $n$  από μια μονότονη συνάρτηση  $n(\varepsilon)$  κάποιας παραμέτρου  $\varepsilon$ .

### Παράδειγμα 6.5

(i) Η αντικατάσταση

$$n \rightarrow n(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0, \quad (6.33)$$

μετατρέπει την ακολουθία

$$f_n(x) := \begin{cases} n/2, & |x| \leq 1/n \\ 0 & |x| > 1/n \end{cases} \quad (6.34)$$

στην 1-παραμετρική οικογένεια

$$f_\varepsilon(x) := \begin{cases} 1/2\varepsilon, & |x| \leq \varepsilon \\ 0 & |x| > \varepsilon \end{cases} \quad (6.35)$$

(ii) Με ανάλογο τρόπο, η ακολουθία

$$f_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2} \quad (6.36)$$

μετατρέπεται στην 1-παραμετρική οικογένεια

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon}} e^{-x^2/4\varepsilon}, \quad (6.37)$$

αν θέσουμε

$$n = \frac{1}{\sqrt{4\varepsilon}}, \quad \varepsilon > 0. \quad (6.38)$$

■

Θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι η συμπεριφορά μιας ακολουθίας συναρτήσεων, από την άποψη της σύγκλισης, δεν είναι ίδια μ' εκείνη της ακολουθίας των αντίστοιχων κατανομών. Έτσι, στα παραδείγματα που αναλύσαμε παραπάνω, οι ακολουθίες  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  δεν είχαν όριο. Πιο συγκεκριμένα, σε όλες της περιπτώσεις που εξετάσαμε το  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  υπήρχε για κάθε  $x \neq 0$  και ήταν ίσο με μηδέν. Αλλά, στο  $x = 0$  όλες οι ακολουθίες απέκλιναν. Αντίθετα, οι αντίστοιχες ακολουθίες κατανομών συνέκλιναν (στην  $\delta_0$ ).

Βέβαια, η συμπεριφορά μιας ακολουθίας κατανομών δεν είναι ανεξάρτητη από τη συμπεριφορά της αντίστοιχης ακολουθίας συναρτήσεων. Αυτό φαίνεται καθαρά και από το

### Θεώρημα 6.1

*Ας υποθεθεί ότι η ακολουθία  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  αποτελείται από συνεχείς συναρτήσεις και συγκλίνει ομοιόμορφα στη συνάρτηση  $f$ . Τότε, η αντίστοιχη ακολουθία κατανομών συγκλίνει στην κατανομή  $T_f$ .*

#### Απόδειξη

Είναι απλή και την αφήνουμε για άσκηση.

■

Εκτός από αυτό που συνάγεται από το προηγούμενο θεώρημα, ένα πολύ χρήσιμο κριτήριο σύγκλισης μιας ακολουθίας κατανομών μας παρέχει και το

### Θεώρημα 6.2

*Αν η ακολουθία κατανομών  $\{T_n\}_{n=1}^\infty$  συγκλίνει στην κατανομή  $T$ , τότε η ακολουθία  $\{T'_n\}_{n=1}^\infty$  συγκλίνει στην κατανομή  $T'$ .*

#### Απόδειξη

Από τον ορισμό της παραγώγου μιας κατανομής, αμέσως έπεται ότι,  $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle T'_n, \varphi \rangle = - \lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_n, \varphi' \rangle = - \langle T, \varphi' \rangle \equiv \langle T', \varphi \rangle. \quad (6.39)$$

Ανάλογα,  $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \partial_j T_n, \varphi \rangle = - \lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_n, \partial_j \varphi \rangle = - \langle T, \partial_j \varphi \rangle \equiv \langle \partial_j T, \varphi \rangle. \quad (6.40)$$

■

Από τη στιγμή που έχουμε ορίσει το άθροισμα δύο τυχαίων κατανομών, η έννοια της ακολουθίας κατανομών οδηγεί αυτόματα σ' εκείνη της σειράς. Με άλλα λόγια, αν η ακολουθία  $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$  αποτελείται από κατανομές, τότε αυτόματα ορίζεται και η νέα ακολουθία κατανομών  $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ , θέτοντας

$$S_n := \sum_{m=1}^n T_m. \quad (6.41)$$

Όπως και για τις συνηθισμένες συναρτήσεις, το όριο αυτής της ακολουθίας των μερικών αθροισμάτων, καθώς το  $n \rightarrow \infty$ , ονομάζεται **σειρά κατανομών** και συμβολίζεται με  $\sum_{n=1}^{\infty} T_n$ . Δηλαδή,

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n := \lim_{n \rightarrow \infty} S_n. \quad (6.42)$$

### Παράδειγμα 6.6

(i) Η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \sin nx$  που ορίζεται από την ακολουθία των συνεχών συναρτήσεων  $f_n(x) = n^{-2} \sin nx$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνεχή περιοδική συνάρτηση,  $f(x)$ :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2} \quad (6.43)$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 6.1, η αντίστοιχη σειρά κατανομών,  $\sum_{n=1}^{\infty} T_n$ , συγκλίνει στην  $T_f$ .

(ii) Από το Θεώρημα 6.2, αμέσως συνάγεται ότι οι σειρές  $\sum_{n=1}^{\infty} T'_n$  και  $\sum_{n=1}^{\infty} T''_n$  συγκλίνουν, στην πρώτη και δεύτερη παράγωγο της  $T_f$ , αντίστοιχα.

Σημειώστε ότι, παραγωγίζοντας την σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \sin nx$  όρο προς όρο καταλήγουμε στην  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \cos nx$ . Με τον ίδιο τρόπο, από τη σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \cos nx$  οδηγούμαστε στην  $\sum_{n=1}^{\infty} (-\sin nx)$ . Όμως, η  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} \cos nx$  δεν συγκλίνει στα σημεία  $x = m\pi$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ , ενώ η  $\sum_{n=1}^{\infty} (-\sin nx)$  δεν συγκλίνει σε κανένα σημείο της πραγματικής ευθείας.

Άρα, οι σχέσεις

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}, \quad f''(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx \quad (6.44)$$

δεν έχουν νόημα, παρά μόνο αν θεωρηθεί πως αναφέρονται στις αντίστοιχες κατανομές. Όπως έχουμε σημειώσει, πολλές φορές για οικονομία, η κατανομή που ορίζεται μέσω μιας συνάρτησης  $f$  συμβολίζεται με το ίδιο γράμμα. Με αυτή την έννοια, οι (6.44) θα πρέπει να διαβαστούν ως εξής: Η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} R_n$ , όπου  $R_n$  η κατανομή την οποία ορίζει η συνάρτηση

$g_n(x) = n^{-1} \cos nx$ , συγκλίνει στην κατανομή  $T'_f$ . Ανάλογα, η σειρά  $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ , όπου  $S_n$  η κατανομή την οποία ορίζει η συνάρτηση  $h_n(x) = -\sin nx$ , συγκλίνει στην κατανομή  $T''_f$ .

## Ασκήσεις

6.1 Για κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις,

α) Να κατασκευαστεί το γράφημα των τριών πρώτων μελών της ακολουθίας  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ , σε κοινό σχήμα.

β) Να υπολογιστεί το όριο της αντίστοιχης ακολουθίας κατανομών.

$$(i) f_n(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ nx, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1, & x > \frac{1}{n} \end{cases} \quad (ii) f_n(x) := \begin{cases} n(1 - n|x - 3|), & |x - 3| < 1/n \\ 0 & |x - 3| \geq 1/n \end{cases}$$

$$(iii) f_n(x) := \begin{cases} n(1 - n|x + 2|), & |x + 2| < 1/n \\ 0 & |x + 2| \geq 1/n \end{cases}$$

$$(iv) f_n(x) = \begin{cases} n^2 \left(x + \frac{1}{n}\right), & -\frac{1}{n} \leq x \leq -\frac{1}{2n} \\ -n^2 x, & -\frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ n^2 \left(x - \frac{1}{n}\right), & \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0, & |x| \geq 1/n \end{cases}$$

$$(v) f_n(x) = \begin{cases} n^2 \left(x + \frac{1}{n}\right), & -\frac{1}{n} \leq x \leq -\frac{1}{2n} \\ -n^2 x, & -\frac{1}{2n} \leq x \leq 0 \\ n^2 x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ n^2 \left(\frac{1}{n} - x\right), & \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0, & |x| \geq 1/n \end{cases}$$

6.2 α) Να κατασκευαστεί το γράφημα των τριών πρώτων μελών της ακολουθίας

$$f_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2(x+2)^2}$$

σε κοινό σχήμα και να υπολογιστεί το όριο της αντίστοιχης ακολουθίας κατανομών.

β) Να γίνει το ίδιο για την ακολουθία

$$f_n(x) = \frac{1}{2}[1 + \tanh(nx)].$$

6.3 Η *συνάρτηση σφάλματος*,  $\operatorname{erf}(x)$ , ορίζεται από τον τύπο

$$\operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy. \quad (6.45)$$

Ως συμπληρωματική συνάρτηση σφάλματος,  $\operatorname{erfc}(x)$ , αναφέρεται η

$$\operatorname{erfc}(x) := 1 - \operatorname{erf}(x). \quad (6.46)$$

Δείχτε ότι αν  $\{f_n\}_{n=1}^\infty$  είναι η ακολουθία κατανομών που ορίζονται από τις συναρτήσεις

$$f_n(x) := (1/2) \operatorname{erfc}(-nx), \text{ τότε } f_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} H_0.$$

**6.4** Υπολογίστε τα παρακάτω ολοκληρώματα και, με βάση το αποτέλεσμα σας, κατασκευάστε ακολουθίες κατανομών που συγκλίνουν στην  $\delta_a$ , για τυχαίο  $a \in \mathbb{R}$ :

$$(i) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx \quad (ii) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx.$$

**6.5** N' αποδεχτεί το Θεώρημα 6.1.

**6.6** α) Να βρεθεί το όριο της ακολουθίας κατανομών  $\{s_n\}_{n=1}^\infty$  που ορίζεται από τις συναρτήσεις  $s_n(x) = \sin nx$ .

β) Το ίδιο για την ακολουθία κατανομών  $\{c_n\}_{n=1}^\infty$  που αντιστοιχεί στις συναρτήσεις  $c_n(x) = \cos nx$ .

**6.7** Θεωρήστε τις συναρτήσεις

$$f_n(x) := \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{nx} \frac{\sin y}{y} dy.$$

α) Δείχτε ότι  $f_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} H_0$ .

β) Υπολογίστε το όριο της ακολουθίας των κατανομών  $\{f'_n\}$ .

**6.8** Θεωρήστε τις συναρτήσεις

$$f_n(x) := \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}.$$

α) Να δειχτεί ότι η σειρά  $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$  συγκλίνει στη  $2\pi$ -περιοδική συνάρτηση  $f(x)$  που ορίζεται από τον τύπο

$$f(x) := \frac{\pi}{8} (\pi - 2|x|), \quad x \in [-\pi, \pi].$$

β) Κατασκευαστεί το γράφημα των συναρτήσεων  $f(x)$  και  $f'(x)$ .

γ) Να υπολογιστεί το όριο της σειράς κατανομών  $\sum_{n=1}^\infty f'_n$ .

δ) Να δειχτεί ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'' = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n+1} \delta(x - n\pi) \quad (6.47)$$

ε) Να υπολογιστεί η τιμή της κατανομής  $T = \sum_{n=1}^{\infty} f_n''$  στις ελεγκτικές συναρτήσεις  $\varphi(x)$  και  $x\varphi(x)$ , όπου

$$\varphi(x) := \begin{cases} e^{-16/(16-x^2)}, & x^2 < 16 \\ 0, & x^2 \geq 16 \end{cases}$$

**6.9 α)** Να δειχτεί ότι

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \delta(x - n\pi) = \delta(\sin x). \quad (6.48)$$

ε) Να υπολογιστεί η τιμή της κατανομής  $\delta(\sin x)$  στις ελεγκτικές συναρτήσεις  $\varphi(x)$  και  $x\varphi(x)$ , όπου

$$\varphi(x) := \begin{cases} e^{-1/(25\pi^2 - 4x^2)}, & |x| < 5\pi/2 \\ 0, & |x| > 5\pi/2 \end{cases}$$

**6.10** Δείχτε ότι ο χώρος  $\mathcal{D}'$  είναι ακολουθιακά πλήρης (sequentially complete): Αν η  $T_n$  είναι μια ακολουθία κατανομών, τέτοια που η ακολουθία αριθμών  $\langle T_n, \varphi \rangle$  συγκλίνει για κάθε  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , τότε υπάρχει κατανομή  $T$  στην οποία η  $T_n$  συγκλίνει.

*Υπόδειξη:* Μελετάτε ... τας γραφάς.

**6.11** Δείχτε ότι κάθε κατανομή  $T$  είναι το όριο κατανομών με συμπαγές έρεισμα.

*Υπόδειξη:* Υποθέστε ότι η ακολουθία  $\psi_n$  αποτελείται από συναρτήσεις κλάσης  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  και θεωρήστε την ακολουθία  $T_n = \psi_n T$ .

**6.12** Δείχτε ότι, αν  $f_n \rightarrow 0$  στον  $\mathcal{D}'$  και η  $\varphi_n \rightarrow 0$  στον  $\mathcal{D}$ , τότε  $\langle f_n, \varphi_n \rangle \rightarrow 0$ .

## 7. Ήπιες κατανομές

Όπως είδαμε στο αντίστοιχο κεφάλαιο, στον τομέα των μετασχηματισμών Fourier παίζει ξεχωριστό ρόλο μια ειδική κατηγορία ομαλών συναρτήσεων. Πρόκειται για τις συναρτήσεις που, τόσο οι ίδιες, όσο και οι παράγωγοί τους κάθε τάξης, φθίνουν ταχύτερα από οποιαδήποτε αρνητική δύναμη της ανεξάρτητης μεταβλητής.

Πιο συγκεκριμένα, η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ανήκει στην οικογένεια που αναφέραμε, αν είναι κλάσης  $C^\infty(\mathbb{R})$  και υπάρχουν σταθερές  $M_{lm}$  τέτοιες που

$$|x^l f^{(m)}(x)| \leq M_{lm}, \quad l, m = 0, 1, 2, \dots \quad (7.1)$$

Το σύνολο αυτών των συναρτήσεων, που το συμβολίσαμε με  $C_\downarrow^\infty(\mathbb{R})$ , είναι σημαντικό και από την ακόλουθη άποψη: Αποτελεί το πεδίο ορισμού της ειδικής κατηγορίας κατανομών που λέγονται ήπιες.

Για να ορίσουμε αυτές τις κατανομές, είναι απαραίτητο να εισαγάγουμε ένα μέτρο εγγύτητας δύο στοιχείων του χώρου  $C_\downarrow^\infty(\mathbb{R})$ . Γιατί, όπως τονίσαμε επανειλημμένως, βασικό συστατικό της έννοιας της γενικευμένης συνάρτησης ή κατανομής είναι η ιδιότητα της συνέχειας. Ισοδύναμα, είναι απαραίτητο να ορίσουμε την έννοια της σύγκλισης μιας ακολουθίας στοιχείων του  $C_\downarrow^\infty(\mathbb{R})$ .

Θα λέμε, λοιπόν, ότι η **ακολουθία**  $\{\varphi_j\}$  **συγκλίνει ελεγκτικά στη συνάρτηση**  $\varphi \in C_\downarrow^\infty(\mathbb{R})$ , αν, πρώτο, υπάρχουν σταθερές  $K_{lm}$ , ανεξάρτητες από τον δείκτη  $j$ , τέτοιες ώστε

$$|x^l \varphi_j^{(m)}(x)| \leq K_{lm}, \quad l, m = 0, 1, 2, \dots, \quad (7.2)$$

και, δεύτερο, καθώς το  $j \rightarrow \infty$ , η ακολουθία  $\{\varphi_j^{(m)}\}$  συγκλίνει στην  $\{\varphi^{(m)}\}$  ομοιόμορφα ως προς το  $x$ , για κάθε  $m = 0, 1, 2, \dots$

Όταν η έννοια της ελεγκτικής σύγκλισης θεωρείται ενσωματωμένη στον συναρτησιακό χώρο  $C_\downarrow^\infty(\mathbb{R})$ , τότε ο τελευταίος αναφέρεται ως **χώρος (του) Schwartz** (Σβάρτς) και συμβολίζεται με  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Γι' αυτό, το γεγονός ότι η ακολουθία  $\{\varphi_j\}$  συναρτήσεων κλάσης  $C_\downarrow^\infty(\mathbb{R})$  συγκλίνει στην  $\varphi$  με τον τρόπο που μόλις ορίσαμε δηλώνεται με το σύμβολο

$$\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi \quad (7.3)$$

Από την άλλη μεριά, είναι προφανές ότι, κάθε μια από τις εκφράσεις

$$\|\psi\|_{l,m} := \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^l \psi^{(m)}(x)|, \quad l, m = 0, 1, 2, \dots \quad (7.4)$$

ορίζει μια στάθμη (norm) του χώρου  $C_\downarrow^\infty(\mathbb{R})$ .

Δεν είναι δύσκολο να δείξει κανείς ότι η (7.2) ισχύει εάν και μόνο όταν  $\|\varphi_j - \varphi\|_{l,m} \rightarrow 0$ , καθώς το  $j \rightarrow \infty$ , για κάθε  $l, m = 0, 1, 2, \dots$ . Γι' αυτό, την απόδειξη της ισοδυναμίας αυτού του ορισμού της ελεγκτικής σύγκλισης την αφήνουμε για άσκηση και παρουσιάζουμε μόνο κάποιες από τις τις συνέπειές του.

**Παράδειγμα 7.1**

Υποθέτουμε ότι  $f(x) = x^2$  και θεωρούμε την απεικόνιση  $T_f : C_{\downarrow}^{\infty}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  που ορίζεται από τον τύπο

$$T_f : \varphi \rightarrow \langle T_f, \varphi \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx. \tag{7.5}$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα συγκλίνει για κάθε  $\varphi \in C_{\downarrow}^{\infty}(\mathbb{R})$ , για τον εξής απλό λόγο. Πρώτο, η συνάρτηση  $x^2 \varphi(x)$  είναι συνεχής και άρα το ολοκλήρωμα  $\int_{-a}^b x^2 \varphi(x) dx$  υπάρχει, για οποιοδήποτε ζευγάρι θετικών αριθμών  $a, b$ .

Δεύτερο, από το γεγονός ότι η  $\varphi \in C_{\downarrow}^{\infty}(\mathbb{R})$  και την (7.2) έπεται ότι

$$\left| \int_b^{\infty} x^2 \varphi(x) dx \right| \leq \int_b^{\infty} x^2 |\varphi(x)| dx \leq \int_b^{\infty} x^2 \frac{M_{40}}{x^4} dx = \int_b^{\infty} \frac{M_{40}}{x^2} dx = \frac{M_{40}}{b} < \infty. \tag{7.6}$$

Τέλος, με τον ίδιο ακριβώς τρόπο αποδειχεται και η σύγκλιση του ολοκληρώματος  $\int_{-\infty}^{-a} x^2 \varphi(x) dx$ .

■

Εκτός του ότι είναι καλά ορισμένη και (προφανώς) γραμμική, η απεικόνιση (7.5) είναι και **συνεχής**: Αν η ακολουθία  $\varphi_j$  συγκλίνει στη συνάρτηση  $\varphi$  στο χώρο του Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , αν δηλαδή  $\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi$ , τότε η ακολουθία αριθμών  $\langle T_f, \varphi_j \rangle$  θα συγκλίνει στον αριθμό  $\langle T_f, \varphi \rangle$ .

Πραγματικά, από τον ορισμό (7.5) της απεικόνισης  $T_f : C_{\downarrow}^{\infty}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  αμέσως έπεται ότι,

$$\begin{aligned} |\langle T_f, \varphi_j \rangle - \langle T_f, \varphi \rangle| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) [\varphi_j(x) - \varphi(x)] dx \right| \leq \\ &= \left( \int_{-\infty}^{-a} + \int_{-a}^b + \int_b^{\infty} \right) |x^2 \{ \varphi_j(x) - \varphi(x) \}| dx \end{aligned} \tag{7.7}$$

με  $a, b > 0$ .

Όμως, ο ορισμός της στάθμης  $\|\psi\|_{l,m}$  μας επιτρέπει να συμπεράνουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{-a} x^2 | \{ \varphi_j(x) - \varphi(x) \} | dx &= \int_{-\infty}^{-a} \frac{1}{x^2} |x^4 \{ \varphi_j(x) - \varphi(x) \}| dx \leq \\ &\|\varphi_j - \varphi\|_{4,0} \int_{-\infty}^{-a} \frac{1}{x^2} dx \leq \frac{1}{a} \|\varphi_j - \varphi\|_{4,0}, \end{aligned} \tag{7.8}$$

$$\int_{-a}^b |x^2 \{ \varphi_j(x) - \varphi(x) \}| dx \leq (a+b) \|\varphi_j - \varphi\|_{2,0}, \tag{7.9}$$



$$\int_b^\infty |x^2 \{\varphi_j(x) - \varphi(x)\}| dx = \int_b^\infty \frac{1}{x^2} |x^4 \{\varphi_j(x) - \varphi(x)\}| dx \leq \quad (7.10)$$

$$\|\varphi_j - \varphi\|_{4,0} \int_b^\infty \frac{1}{x^2} dx \leq \frac{1}{b} \|\varphi_j - \varphi\|_{4,0}.$$

Αλλά, όπως ήδη αναφέραμε, η υπόθεση ότι η ακολουθία  $\varphi_j$  συγκλίνει στη συνάρτηση  $\varphi$  στο χώρο (του) Schwartz, ισοδυναμεί με το ότι  $\|\varphi_j - \varphi\|_{l,m} \rightarrow 0$ , καθώς το  $j \rightarrow \infty$ . Έτσι, οι τρεις τελευταίες εκτιμήσεις συνεπάγονται τον μηδενισμό του δεξιού μέλους της (7.7), καθώς ο δείκτης  $j \rightarrow \infty$ , άρα και τη σύγκλιση της ακολουθίας  $\langle T_f, \varphi_j \rangle$  στον αριθμό  $\langle T_f, \varphi \rangle$ .

Ο αναγνώστης δεν θα έχει καμία δυσκολία να αποδείξει ότι τα ίδια ισχύουν και για κάθε άλλη απεικόνιση  $T_f : C_\downarrow^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  που ορίζεται από τον τύπο (7.7), αν η  $f$  είναι οποιαδήποτε συνεχής **συνάρτηση βραδείας ή αργής αύξησης**. Έτσι ονομάζεται κάθε  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  (ή  $\mathbb{C}$ ), για την οποία υπάρχουν θετικοί αριθμοί  $p, R$ , τέτοιοι ώστε  $|f(x)| \leq |x|^p$ , όταν  $|x| > R$ .

**Παρατήρηση.** Είναι φανερό ότι, μια συνάρτηση σαν την  $f(x) = x^9$  κάθε άλλο παρά αργεί να μεγαλώσει. Ωστόσο, σε σύγκριση με τις (απόλυτες) τιμές που "πιάνει" μια συνάρτηση σαν την  $g(x) = \sinh(x)$ , για παράδειγμα, ακόμα και για σχετικά μικρό  $|x|$ , εκείνες της  $f(x) = x^9$ , αλλά και κάθε δύναμης του  $x$ , πραγματικά ... ωχριούν!

Τα όσα επισημάναμε με βάση το Παράδειγμα 7.1 μας οδηγούν στο να εισαγάγουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Κάθε γραμμικό συναρτησιακό  $T : C_\downarrow^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  που είναι συνεχές στο χώρο  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , με την έννοια ότι η ακολουθία  $\langle T, \varphi_j \rangle$  συγκλίνει στον αριθμό  $\langle T, \varphi \rangle$  όταν  $\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi$ , ονομάζεται **ήπια κατανομή (tempered distribution)**, ή **κατανομή αργής αύξησης**.

Το σύνολο των ήπιων κατανομών που έχουν ως πεδίο ορισμού τον συναρτησιακό χώρο  $C_\downarrow^\infty(\mathbb{R})$  αποτελούν τον χώρο  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  που είναι συζυγής ή δυϊκός του  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Είναι προφανές ότι ο χώρος  $C_0^\infty(\mathbb{R})$  αποτελεί υποσύνολο του συναρτησιακού χώρου  $C_\downarrow^\infty(\mathbb{R})$ . Συνακόλουθα, κάθε γραμμικό συναρτησιακό που έχει ως πεδίο ορισμού τον  $C_\downarrow^\infty(\mathbb{R})$  ορίζεται αυτόματα και στον  $C_0^\infty(\mathbb{R})$ . Επιπλέον, αν μια ακολουθία στοιχείων του  $C_0^\infty(\mathbb{R})$  συγκλίνει στον χώρο  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  θα συγκλίνει και στον  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Άρα μια ήπια κατανομή, όταν περιοριστεί στον χώρο  $C_0^\infty(\mathbb{R})$ , γίνεται αυτόματα μια (συνήθης) κατανομή.

Μάλιστα, αν δύο ήπιες κατανομές συμπίπτουν όταν περιορίζονται στον  $C_0^\infty(\mathbb{R})$ , τότε ταυτίζονται. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι ο  $C_0^\infty(\mathbb{R})$  είναι πυκνός υπόχωρος του  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , δηλαδή αν  $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  τότε υπάρχει ακολουθία  $\{\varphi_j\}$  στον  $C_0^\infty$  τέτοια ώστε  $\varphi_j \xrightarrow{\mathcal{S}} \psi$ .

## Παράδειγμα 7.2

α) Ως **δέλτα (του) Dirac** στον ευρύτερο χώρο  $C_{\downarrow}^{\infty}(\mathbb{R})$  ορίζουμε το γραμμικό συναρτησιακό  $\delta_a : C_{\downarrow}^{\infty}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο

$$\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a), \quad \forall \varphi \in C_{\downarrow}^{\infty}(\mathbb{R}). \quad (7.11)$$

Προφανώς,

$$|\langle \delta_a, \varphi_j \rangle - \langle \delta_a, \varphi \rangle| = |\varphi_j(a) - \varphi(a)| \leq \|\varphi_j - \varphi\| \equiv \|\varphi_j - \varphi\|_{0,0} \quad (7.12)$$

Αν λοιπόν  $\varphi_j \xrightarrow{S} \varphi$  τότε  $\|\varphi_j - \varphi\| \rightarrow 0$  και άρα  $\langle \delta_a, \varphi_j \rangle \rightarrow \langle \delta_a, \varphi \rangle$ . Αυτό σημαίνει ότι το συναρτησιακό  $\delta_a : C_{\downarrow}^{\infty}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  είναι και συνεχές, άρα μια ήπια κατανομή. Προφανώς, το παρόν δέλτα του Dirac δεν είναι παρά επέκταση του δέλτα του Dirac που γνωρίσαμε στο πρώτο εδάφιο αυτού του κεφάλαιου και το οποίο είχε ως πεδίο ορισμού τον συναρτησιακό χώρο  $C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ .

β) Η **ήπια κατανομή (του) Heaviside**  $H_a : C_{\downarrow}^{\infty}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  ορίζεται από τον τύπο

$$\langle H_a, \varphi \rangle = \int_0^{\infty} \varphi(x) dx, \quad \forall \varphi \in C_{\downarrow}^{\infty}(\mathbb{R}). \quad (7.13)$$

Το ότι αυτή η  $H_a$  είναι όντως μια ήπια κατανομή, της οποίας ο περιορισμός στον υπόχωρο  $C_0^{\infty}(\mathbb{R})$  δίνει την από παλιά γνωστή μας κατανομή Heaviside, αφήνουμε να το αποδείξει ο αναγνώστης.

■

Εμείς θα περιοριστούμε στο να σημειώσουμε πως, όλες ανεξαιρέτως οι έννοιες που αναπτύξαμε στο γενικότερο πλαίσιο των κατανομών ισχύουν **απαράλλαχτα** και γι' αυτές που ονομάσαμε ήπιες. Για παράδειγμα, η παράγωγος  $T'$  μιας ήπιας κατανομής  $T$  ορίζεται από τον ίδιο τύπο,  $\langle T', \varphi \rangle = - \langle T, \varphi' \rangle$ , που ορίζει την παράγωγο μιας (συνήθους) κατανομής. Το μόνο που αλλάζει είναι ο χώρος στον οποίο ανήκει η (τυχαία) ελεγκτική συνάρτηση  $\varphi$ .

Ανάλογα, ο ορισμός της μερικής παραγώγου μιας ήπιας κατανομής προκύπτει από τον τύπο (4.13), με αντικατάσταση του ελεγκτικού χώρου  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  από τον  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ :

$$\langle \partial_j T, \varphi \rangle = - \langle T, \partial_j \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \quad (7.14)$$

Προφανώς, ο χώρος  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  αποτελεί την γενίκευση του  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  στην οποία καταλήγουμε ως εξής: Αρχικά, ορίζουμε το υποσύνολο  $C_{\downarrow}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$  των ομαλών συναρτήσεων  $n$  μεταβλητών. Αυτό αποτελείται από τις συναρτήσεις κλάσης  $C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$  για τις οποίες ισχύει ότι

$$\sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \{ |\mathbf{x}|^l |\partial_{j_1, j_2, \dots, j_n} \varphi(\mathbf{x})| \} < \infty, \quad \forall l, j_1, j_2, \dots, j_n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.15)$$

όπου, βέβαια,

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad |\mathbf{x}| = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}. \quad (7.16)$$

Στη συνέχεια, ορίζουμε την έννοια της ελεγκτικής σύγκλισης μιας ακολουθίας συναρτήσεων αυτού του είδους, ακριβώς όπως και στην περίπτωση του  $C_{\downarrow}^{\infty}(\mathbb{R})$ . Συγκεκριμένα,

λέμε ότι η ακολουθία συναρτήσεων κλάσης  $C_{\downarrow}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$   $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$  συγκλίνει στην  $\varphi$ , οπότε γράφουμε  $\varphi_m \xrightarrow{S} \varphi$ , αν  $\|\varphi_m - \varphi\|_{l,j} \rightarrow 0$ , όπου

$$\|\varphi\|_{l,j} := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x|^l |\partial_j \varphi(x)|, \quad j = (j_1, j_2, \dots, j_n), \quad (7.17)$$

για κάθε  $l, j_1, j_2, \dots, j_n = 0, 1, 2, \dots$

Τέλος, λέμε ότι η ακολουθία ήπιων κατανομών  $\{T_m\}_{m=1}^{\infty}$  συγκλίνει στην ήπια κατανομή  $T$ , αν

$$\langle T_m, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in C_{\downarrow}^{\infty}(\mathbb{R}^n). \quad (7.18)$$

Η σύγκλιση αυτού του είδους συχνά αναφέρεται ως *ασθενής ή ήπια σύγκλιση* και δηλώνεται με την έκφραση

$$T_m \xrightarrow{S'} T. \quad (7.19)$$

## Ασκήσεις

**7.1** Δείχτε ότι οι συναρτήσεις  $e^{-x^2}$  και  $x e^{-x^2}$  ανήκουν στην κλάση  $C_{\downarrow}^{\infty}(\mathbb{R})$ , ενώ δεν ισχύει το ίδιο για τις  $(1+x^2)^{-1}$  και  $x(1+x^2)^{-1}$ .

**7.2** Ποια από τις δυο συναρτήσεις  $\tanh x$ ,  $\operatorname{sech} x$  ανήκει στην κλάση  $C_{\downarrow}^{\infty}(\mathbb{R})$ ;

(Εκτός από την αυστηρή αιτιολόγηση της απάντησής σας, να κατασκευάσετε και το γράφημα των παραπάνω συναρτήσεων στο διάστημα  $-5 \leq x \leq 5$ ).

**7.3** Δώστε τέσσερις συναρτήσεις κλάσης  $C^{\infty}(\mathbb{R})$ , δύο από τις οποίες ανήκουν στην ειδικότερη κλάση  $C_{\downarrow}^{\infty}(\mathbb{R})$  κι οι άλλες όχι.

**7.4** Κατασκευάστε δύο ακολουθίες συναρτήσεων κλάσης  $C_{\downarrow}^{\infty}(\mathbb{R})$  που συγκλίνουν στο χώρο Schwartz.

**7.5** Υποθέστε ότι οι συναρτήσεις  $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$  ανήκουν στην κλάση  $C_0^{\infty}(\mathbb{R})$  κι ότι  $\varphi_j \xrightarrow{D} \varphi$ , καθώς το  $j \rightarrow \infty$ . Δείχτε ότι  $\varphi_j \xrightarrow{S} \varphi$ .

**7.6** Κατασκευάστε δύο ακολουθίες συναρτήσεων κλάσης  $C_0^{\infty}(\mathbb{R})$  που συγκλίνουν στο χώρο Schwartz.

**7.7** Υποθέστε ότι η  $\varphi \in C_{\downarrow}^{\infty}(\mathbb{R})$  και ότι η  $f \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$  κι έχει την ιδιότητα ότι  $f(0) = 1$ .

α) Δώστε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα συναρτήσεων  $\varphi$  και  $f$  αυτού του είδους.

β) Θέστε

$$\varphi_{\varepsilon}(x) := f(\varepsilon x) \varphi(x), \quad \varepsilon > 0,$$

και δείχτε ότι, πρώτο,  $\varphi_{\varepsilon} \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$  για κάθε  $\varepsilon > 0$  και, δεύτερο,  $\varphi_{\varepsilon} \xrightarrow{S} \varphi$ , καθώς το  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Εξηγήστε αναλυτικά, γιατί το μέρος (β) αποτελεί απόδειξη του γεγονότος ότι ο  $C_0^{\infty}(\mathbb{R})$  είναι

πυκνός υπόχωρος του  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

γ) Αν η  $T$  είναι μια ήπια κατανομή, τότε

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \langle T, \varphi_\varepsilon \rangle = \langle T, \varphi \rangle$$

Μπορείτε να δώσετε μια "πρακτική εφαρμογή" αυτής της ιδιότητας;

**7.8** Ναδειχτεί ότι

α) Αν η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχής και αργής αύξησης, τότε η απεικόνιση  $T_f: C_{\downarrow}^{\infty}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ , με τύπο

$$T_f: \varphi \rightarrow \langle T_f, \varphi \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx,$$

είναι ήπια κατανομή.

β) Το ίδιο ισχύει και όταν η  $f$  είναι αργής αύξησης, αλλά, αντί για συνεχής, είναι τοπικά ολοκληρώσιμη.

**7.9** Να εξηγηθεί γιατί η απεικόνιση

$$T_f: \varphi \rightarrow \langle T_f, \varphi \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx, \quad \varphi \in C_{\downarrow}^{\infty}(\mathbb{R}),$$

δεν ορίζει ήπια κατανομή, όταν  $f(x) = e^x$ .

**7.10** Οι ήπιες κατανομές  $S, T$  έχουν την ακόλουθη ιδιότητα:

$$\langle S, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}).$$

Δείχτε ότι  $S = T$ .

**7.11** Δείχτε ότι

α) Ο  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  είναι γραμμικός υπόχωρος του  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ .

β) Αν η ακολουθία ήπιων κατανομών  $\{T_m\}$  συγκλίνει στο χώρο  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  τότε υποχρεωτικά συγκλίνει και στον  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ .

**7.12** α) Δείχτε ότι σε κάθε συνάρτηση της μορφής  $f_m(x) = \tanh(mx)$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , αντιστοιχεί μια ήπια κατανομή,  $T_m$ .

β) Υπολογίστε το όριο των ακολουθιών  $\{f_m\}$  και  $\{T_m\}$ , καθώς και των παραγώγων τους.

**7.13** α) Δείχτε ότι σε κάθε συνάρτηση της μορφής  $f_m(x) = \sin(mx)$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , αντιστοιχεί μια ήπια κατανομή,  $T_m$ .

β) Υπολογίστε το όριο των ακολουθιών  $\{f_m\}$  και  $\{T_m\}$ .

**7.14** Δείχτε ότι

α) Σε κάθε συνάρτηση της μορφής  $f_m(x) = e^{-|x|/m}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , αντιστοιχεί μια ήπια κατανομή,  $T_m$ .

β)  $T_m \xrightarrow{\mathcal{S}'} 1$ .

**7.15** α) Δείχτε ότι κάθε συνάρτηση της μορφής  $f(x) = x^n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , ορίζει μιαν ήπια κατανομή, μέσω του τύπου

$$T_n: \varphi \rightarrow \beta_n = \langle T_n, \varphi \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} x^n \varphi(x) dx.$$

β) Θεωρήστε, στη συνέχεια μια αναλυτική συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , δηλαδή μια συνάρτηση που ορίζεται μέσω μιας σειράς της μορφής

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

η οποία συγκλίνει σε κάθε σημείο της πραγματικής ευθείας. Εξετάστε κατά πόσο η σειρά  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n$  συγκλίνει στο χώρο  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ .

Ειδικότερα, μελετήστε τη σύγκλιση των σειρών ήπιων κατανομών οι οποίες αντιστοιχούν στις αναλυτικές συναρτήσεις  $\sin x$ ,  $\tanh x$ ,  $x^3(1+x^2)^{-1}$  και  $x^4 \cos 2x$ .

**7.16** (i) Να δειχτεί ότι

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \varepsilon \ln \varepsilon = 0, \quad (7.20)$$

(ii) Να δειχτεί ότι ο τύπος

$$\langle \ln |x|, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \ln |x| \varphi(x) dx, \quad \varphi \in C_{\downarrow}^{\infty}(\mathbb{R}), \quad (7.21)$$

ορίζει ήπια κατανομή.

(iii) Να γίνει το ίδιο για την απεικόνιση  $\text{PV}\left(\frac{1}{x}\right): C_{\downarrow}^{\infty}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  που ορίζεται από τον τύπο

$$\langle \text{PV}\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \rangle = \text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} \varphi(x) dx, \quad \varphi \in C_{\downarrow}^{\infty}(\mathbb{R}), \quad (7.22)$$

όπου με PV εννοείται το ολοκλήρωμα κύριας τιμής. Δηλαδή,

$$\text{PV} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} f(x) dx. \quad (7.23)$$

(iv) Να δειχτεί ότι, με την έννοια της παραγώγου κατανομής

$$(\ln |x|)' = \text{PV}\left(\frac{1}{x}\right) \quad (7.24)$$

**7.17** Θεωρήστε την ακολουθία  $T_m$  των ήπιων κατανομών που αντιστοιχεί στην ακολουθία των συναρτήσεων

$$f_m(x) = \frac{1 - \cos mx}{x}.$$

(i) Δείχτε ότι,

$$T_m \xrightarrow{S'} \text{PV}\left(\frac{1}{x}\right),$$

όπου  $\text{PV}(1/x)$  η κατανομή που ορίζεται στην προηγούμενη άσκηση.

**7.18** Θεωρήστε τις μονοπαραμετρικές οικογένειες συναρτήσεων

$$f_\varepsilon(x) := \frac{1}{2} \ln(x^2 + \varepsilon^2), \quad g_\varepsilon(x) := \frac{x}{x^2 + \varepsilon^2}, \quad \varepsilon > 0.$$

(i) Να κατασκευαστεί το γράφημα των συναρτήσεων  $f_1(x)$  και  $f_{1/10}(x)$  σε κοινό διάγραμμα. Το ίδιο για τις  $g_1(x)$  και  $g_{1/10}(x)$ .

(ii) Να υπολογιστεί το όριο της οικογένειας κατανομών που ορίζει η  $\{f_\varepsilon(x)\}$ , καθώς το  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Το ίδιο για την οικογένεια κατανομών που ορίζει η  $\{g_\varepsilon(x)\}$ .

(iii) Να συγκριθούν τα πιο πάνω όρια με τις κατανομές  $\ln|x|$  και  $PV(1/x)$  που ορίστηκαν στην Άσκ. 7.16.

**7.19** Θεωρήστε την συνάρτηση  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  με τύπο  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Υπολογίστε τις παραγώγους, μέχρι και δεύτερης τάξης της αντίστοιχης κατανομής.

**7.18** Να επαναληφθεί η προηγούμενη άσκηση για την κατανομή που αντιστοιχεί στη συνάρτηση

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq r \leq a \\ 0, & r > a \end{cases}$$

όπου  $a > 0$  και  $r := \sqrt{x^2 + y^2}$

## 8. Μετασχηματισμοί Fourier ήπιων κατανομών

Με βάση και τα συμπεράσματα του προηγούμενου εδάφιου, μπορούμε να πούμε ότι η ξεχωριστή σημασία των ομαλών συναρτήσεων ταχείας πτώσης έχει ήδη αποδειχτεί σε δύο διαφορετικούς τομείς. Στον χώρο των κατανομών που ονομάσαμε ήπιες και στον τομέα των μετασχηματισμών Fourier. Συνεπώς, είναι φυσικό να αναρωτηθεί κανείς αν αυτές οι δύο εκφάνσεις της σημασίας των συναρτήσεων  $C_{\downarrow}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ , ή του χώρου Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , μπορεί να συσχετιστούν.

Ευθύς αμέσως θα δούμε ότι η συσχέτιση είναι δυνατή, τουλάχιστον με στην ακόλουθη μορφή: Η έννοια του μετασχηματισμού Fourier μεταφέρεται αμέσως από τον χώρο Schwartz  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  στον δυϊκό του,  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . Με άλλα λόγια, θα δείξουμε ότι κάθε ήπια κατανομή επιδέχεται μετασχηματισμό Fourier.

Για να γίνει φανερή η σημασία αυτής της "μεταφοράς", θα σημειώσουμε αρχικά ότι, οι περισσότερες συνήθεις συναρτήσεις δεν επιδέχονται μετασχηματισμό Fourier. Αυτό ισχύει γ.π. για όλες τις πολυωνυμικές συναρτήσεις. Έτσι, το γεγονός ότι, ο μετασχηματισμός Fourier κάθε ήπιας κατανομής υπάρχει, ισοδυναμεί με την επέκταση του μετασχηματισμού Fourier σ' έναν μαθηματικό χώρο πολύ ευρύτερο από εκείνον στον οποίο ορίστηκε αρχικά.

Ουσιαστικά, πρόκειται για μια επέκταση ανάλογη εκείνης που κάναμε στην έννοια της παραγώγου. Σχετικά με αυτό το σημείο, υπενθυμίζουμε το -σε όλους γνωστό- γεγονός ότι, οι συνήθεις συναρτήσεις **δεν** είναι υποχρεωτικά διαφορίσιμες. Αντίθετα, κάθε κατανομή έχει παράγωγο κι αυτό, ουσιαστικά, σημαίνει το εξής: Εισάγοντας την έννοια της κατανομής ή γενικευμένης συνάρτησης, καταφέραμε να επεκτείνουμε τη ιδιότητα της διαφορισιμότητας σε έναν μαθηματικό χώρο πολύ ευρύτερο από εκείνον στον οποίο ίσχυε αυτή η ιδιότητα αρχικά. Το πρακτικό όφελος αυτής της επέκτασης το έχουν συνειδητοποιήσει τουλάχιστον οι ... φυσικοί, αυτοί που πρώτοι ένοιωσαν την ανάγκη να εκφραστεί μαθηματικά το "άπειρα συμπυκνωμένο στον χώρο ή/και στον χρόνο".

Για να μεταφέρουμε, τελικά, την έννοια του μετασχηματισμού Fourier στις ήπιες κατανομές, θα ξεκινήσουμε με μια ήπια κατανομή η οποία αντιστοιχεί σε μια συνάρτηση  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  που είναι συνεχής και βραδείας, το πολύ, αύξησης. Ας υποθέσουμε, λοιπόν, ότι η κατανομή  $T_u: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  ορίζεται από τον τύπο

$$\langle T_u, \varphi \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \varphi(x) dx \quad (8.1)$$

Αφού η ελεγκτική συνάρτηση  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , το ίδιο θα ισχύει και για την  $\hat{\varphi}$ , δηλαδή για τον μετασχηματισμό Fourier της  $\varphi$ . Κατά συνέπεια, η τιμή της  $T_u$  στο σημείο  $\hat{\varphi}$  του συναρτησιακού χώρου  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  υπάρχει και δίνεται από τον αριθμό

$$\begin{aligned}
\langle T_u, \hat{\varphi} \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} u(k) \hat{\varphi}(k) dk = \int_{-\infty}^{\infty} u(k) \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \varphi(x) dx \right] dk \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} u(k) \varphi(x) dx dk.
\end{aligned} \tag{8.2}$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι, η  $u$  είναι τέτοια που, η σειρά ολοκλήρωσης στο τελευταίο μέλος της (8.2) μπορεί να αντιστραφεί. Αυτό σίγουρα ισχύει όταν γ.π. η  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} u(k) \varphi(x) dx dk = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} u(k) \varphi(x) dk dx. \tag{8.3}$$

Τότε η προηγούμενη σχέση γράφεται και ως εξής:

$$\langle T_u, \hat{\varphi} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} u(k) e^{-ikx} dk \right] \varphi(x) dx \tag{8.4}$$

Ας υποθέσουμε τέλος ότι, ο μετασχηματισμός Fourier  $\hat{u}$  της  $u$  υπάρχει και είναι συνεχής συνάρτηση βραδείας, το πολύ, αύξησης. Τότε, η προηγούμενη σχέση γράφεται σαν

$$\langle T_u, \hat{\varphi} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(x) \varphi(x) dx \equiv \langle T_{\hat{u}}, \varphi \rangle. \tag{8.5}$$

Με άλλα λόγια, αυτό που αποδείξαμε είναι ότι, για ένα μη κενό υποσύνολο των ήπιων κατανομών που ορίζονται από συνήθεις συναρτήσεις με τον τύπο (8.1),

- (i) Ορίζεται -με τον ίδιο ακριβώς τρόπο- η κατανομή που αντιστοιχεί στον μετασχηματισμό Fourier της αρχικής συνάρτησης και
- (ii) Οι δύο ήπιες κατανομές που κατασκευάζονται με τον πιο πάνω τρόπο συνδέονται με τη σχέση (8.5).

Αυτό το γεγονός μας ωθεί στο να διερευνήσουμε αν μπορεί να σταθεί ο ακόλουθος

**Ορισμός.** Αν η  $T: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  είναι ήπια κατανομή τότε η απεικόνιση  $\hat{T}: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  που ορίζεται από τον τύπο

$$\langle \hat{T}, \varphi \rangle := \langle T, \hat{\varphi} \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \tag{8.6}$$

ονομάζεται **μετασχηματισμός Fourier της κατανομής  $T$** .

### Θεώρημα 8.1

Ο μετασχηματισμός Fourier μιας ήπιας κατανομής αποτελεί ήπια κατανομή.

#### Απόδειξη

Την αφήνουμε στα καθήκοντα του αναγνώστη. ■



**Παράδειγμα 8.1**

Από τον ορισμό που μόλις δώσαμε έπεται ότι, ο μετασχηματισμός Fourier της "συνάρτησης"  $\delta_a$  του Dirac είναι η κατανομή  $\hat{\delta}_a : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ , για την οποία

$$\langle \hat{\delta}_a, \varphi \rangle := \langle \delta_a, \hat{\varphi} \rangle = \hat{\varphi}(a). \quad (8.7)$$

Από την άλλη,

$$\hat{\varphi}(a) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ika} \varphi(k) dk \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f_a(k) \varphi(k) dk, \quad (8.8)$$

όπου

$$f_a(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ika}. \quad (8.9)$$

Για  $k \in \mathbb{R}$ , η τελευταία είναι μια συνεχής και φραγμένη συνάρτηση και άρα η (8.8) μπορεί να γραφτεί και στη μορφή

$$\hat{\varphi}(a) = \langle T_{f_a}, \varphi \rangle. \quad (8.10)$$

Από την σύγκριση των (8.7) και (8.10) αμέσως συνάγεται ότι

$$\hat{\delta}_a = T_{f_a}. \quad (8.11)$$

Συνήθως, μια κατανομή που αντιστοιχεί σε κάποια συνεχή συνάρτηση παριστάνεται με το ίδιο σύμβολο ή τύπο που χρησιμοποιείται και για την αρχική συνάρτηση. Με εξ ίσου παραβατικό τρόπο, η κατανομή δέλτα παρουσιάζεται με όρισμα την ανεξάρτητη μεταβλητή που υπεισέρχεται στις ελεγκτικές συναρτήσεις. Σε αυτό το παράνομο πλαίσιο, η (8.11) γράφεται σαν

$$\boxed{\hat{\delta}_a(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ika}} \quad (8.12)$$

Αυτοί που ρέπουν προς την παρανομία δικαιολογούν τις πράξεις τους με ... μακάλικους υπολογισμούς σαν τον ακόλουθο:

$$\hat{\delta}_a(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \delta(x-a) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ika}. \quad (8.13)$$

Ο θεός των μαθηματικών... ας τους συγχωρέσει.

■

**Παράδειγμα 8.2**

Και η παράγωγος της δέλτα είναι ήπια κατανομή. Σύμφωνα, λοιπόν, με τον ορισμό (8.6), ο μετασχηματισμός Fourier της  $\delta'_a$  είναι η κατανομή  $\hat{\delta}'_a \equiv \mathcal{F}[\delta'_a]$  με τιμή

$$\langle \hat{\delta}'_a, \varphi \rangle = \langle \delta'_a, \hat{\varphi} \rangle, \quad (8.14)$$

στο τυχαίο σημείο  $\varphi$  του  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

Όμως,

$$\langle \delta'_a, \hat{\varphi} \rangle = - \langle \delta_a, \hat{\varphi}' \rangle = - \hat{\varphi}'(a). \quad (8.15)$$

Από την άλλη,

$$\hat{\varphi}'(a) = \partial_a \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ika} \varphi(k) dk = - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [ik e^{-ika}] \varphi(k) dk \quad (8.16)$$

Συνεπώς,

$$\langle \delta'_a, \hat{\varphi} \rangle = \langle T_{f_a}, \hat{\varphi} \rangle, \quad (8.17)$$

όπου  $T_{f_a}$  η ήπια κατανομή που αντιστοιχεί στη συνάρτηση αργής αύξησης

$$f_a = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} ik e^{-ika}. \quad (8.18)$$

Αν λοιπόν, ακολουθώντας την καθιερωμένη πρακτική, ταυτίσουμε και την κατανομή  $T_{f_a}$  με τη συνάρτηση  $f_a$ , τότε μπορούμε να γράψουμε το αποτέλεσμα (8.18) στη μορφή

$$\hat{\delta}'_a \equiv \mathcal{F}[\delta'_a] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} ik e^{-ika}, \quad (8.19)$$

Ειδικότερα

$$\hat{\delta}'_0 \equiv \mathcal{F}[\delta'_0] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} ik. \quad (8.20)$$

■

Η επέκταση της έννοιας του μετασχηματισμού Fourier στις ήπιες κατανομές δεν μπορεί να είναι πλήρης, αν δεν καλύψει και τον αντίστροφο. Και είναι προφανές ότι, η "συνταγή" για τον ορισμό του αντίστροφου δεν μπορεί παρά να είναι πανομοιότυπη μ' εκείνη για τον ευθύ.

Με άλλα λόγια, **αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της ήπιας κατανομής  $T$**  ονομάζεται το συναρτησιακό  $\check{T}: \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ , με τύπο

$$\langle \check{T}, \varphi \rangle := \langle T, \check{\varphi} \rangle. \quad (8.21)$$

Το γεγονός ότι αυτό το συναρτησιακό ορίζεται σαφώς σε ολόκληρο τον χώρο  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  και είναι γραμμικό και συνεχές αφήνουμε να το επαληθεύσει ο αναγνώστης.

### Παράδειγμα 8.3

Για να διερευνήσουμε και τη σχέση του ευθύ με τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier στο

πλαίσιο των κατανομών, ας θεωρήσουμε την ήπια κατανομή  $T_u$  που αντιστοιχεί στη συνάρτηση

$$u(x) = x. \quad (8.22)$$

Από το γεγονός ότι

$$\langle T_u, \varphi \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \varphi(x) dx \quad (8.23)$$

και τον τύπο (8.21) έπεται πως

$$\langle \check{T}_u, \varphi \rangle := \langle T_u, \check{\varphi} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} k \check{\varphi}(k) dk. \quad (8.24)$$

Τώρα,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} k \check{\varphi}(k) dk &= \int_{-\infty}^{\infty} k \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \varphi(x) dx \right] dk \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x (-i e^{ikx}) \varphi(x) dx dk \\ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} i e^{ikx} \varphi'(x) dx dk &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-R}^R \int_{-\infty}^{\infty} i e^{ikx} \varphi'(x) dx dk \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-R}^R i e^{ikx} dk \right] \varphi'(x) dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iRx} - e^{-iRx}}{x} \varphi'(x) dx \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} 2i \frac{\sin Rx}{x} \varphi'(x) dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \sqrt{2\pi} i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin Rx}{\pi x} \varphi'(x) dx \end{aligned} \quad (8.25)$$

Όμως,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\sin Rx}{\pi x} = \delta(x). \quad (8.26)$$

Άρα,

$$\int_{-\infty}^{\infty} k \check{\varphi}(k) dk = \sqrt{2\pi} i \varphi'(0) \quad (8.27)$$

και έτσι,

$$\langle \check{T}_u, \varphi \rangle = \sqrt{2\pi} i \langle \delta_0, \varphi' \rangle = -\sqrt{2\pi} i \langle \delta'_0, \varphi \rangle. \quad (8.28)$$

Αυτό σημαίνει ότι

$$\check{T}_u = -\sqrt{2\pi} i \delta'_0, \quad (8.29)$$

ή

$$\check{k} = -\sqrt{2\pi} i \delta'_0. \quad (8.30)$$

Αξίζει τώρα να συνδυάσουμε αυτό το αποτέλεσμα μ' εκείνο του προηγούμενου παραδείγματος. Γράφουμε λοιπόν την (8.20) στη μορφή

$$k = -\sqrt{2\pi} i \hat{\delta}'_0 \equiv -\sqrt{2\pi} i \mathcal{F}[\delta'_0] \quad (8.31)$$

και την αντικαθιστούμε στην (8.30). Το αποτέλεσμα της αντικατάστασης,

$$\check{\delta}'_0 \equiv \mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F}[\delta'_0] = \delta'_0, \quad (8.32)$$

μάλλον, μπορεί να χαρακτηριστεί ως αναμενόμενο. ■

## Ασκήσεις

**8.1** Ν' αποδειχτεί το Θεώρημα 8.1.

**8.2** Θεωρήστε τις συναρτήσεις

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad g(x) = e^{-|x|}, \quad -\infty < x < \infty.$$

α) Δείχτε ότι για το παραπάνω ζευγάρι συναρτήσεων ισχύει η **ταυτότητα (του) Parseval**

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \hat{g}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) g(x) dx \quad (8.33)$$

**8.3** Υποθέστε ότι η συνάρτηση  $f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , είναι συνεχής και τέτοια που και η συνάρτηση  $\hat{f}(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , η οποία προκύπτει από τον μετασχηματισμό Fourier της  $f$  είναι επίσης συνεχής. Δείχτε ότι

$$\langle f, \hat{\phi} \rangle = \langle \hat{f}, \phi \rangle, \quad \forall \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

όπου

$$\langle f, \hat{\phi} \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \hat{\phi}(x) dx.$$

**8.4** Να δειχτεί ότι ο μετασχηματισμός Fourier της ήπιας κατανομής

$$X_+ := x H_0 \quad (8.34)$$

δίνεται από την κατανομή

$$\hat{X}_+(k) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{k^2} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} i \delta'(k). \quad (8.35)$$

**8.5** Να δειχτεί ότι ο μετασχηματισμός Fourier της ήπιας κατανομής του Heaviside  $H_0$  οδηγεί στην ήπια κατανομή

$$\hat{H}_0(k) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{i}{k} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \delta(k). \quad (8.36)$$

**8.6** Υπολογίστε τον μετασχηματισμό Fourier των παρακάτω ήπιων κατανομών.

(i) Της κατανομής  $T_f$ , όταν  $f(x) = |x|$ , καθώς και της παραγώγου της  $T_f$ .

(ii) Της κατανομής  $T_f$ , όταν  $f(x) = x|x|$ , καθώς και της παραγώγου της  $T_f$ .

(iii) Της κατανομής  $T_f$ , όταν  $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$  καθώς και της παραγώγου της  $T_f$ .

**8.7** Δείχτε ότι, για κάθε  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ,

$$\langle \mathcal{F}[T'], \varphi \rangle = \langle ik \hat{T}, \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad (8.37)$$

και, γενικότερα,

$$\langle \mathcal{F}[T^{(m)}], \varphi \rangle = \langle (ik)^m \hat{T}, \varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad m \in \mathbb{N}. \quad (8.38)$$

**8.8** Δείχτε ότι, για κάθε  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ,

$$\hat{T}' = \mathcal{F}[-ix T] \quad (8.39)$$

και, γενικότερα,

$$\hat{T}^{(m)} = \mathcal{F}[(-ix)^m T], \quad m \in \mathbb{N}. \quad (8.40)$$

**8.9** Δείχτε ότι

$$\mathcal{F}[\delta_a^{(m)}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (ik)^m e^{-ika}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (8.41)$$

**8.10** Δείχτε ότι

$$\mathcal{F}[x^m] = (i)^m \sqrt{2\pi} \delta_0^{(m)}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (8.42)$$

**8.11** Να υπολογιστεί ο μετασχηματισμός Fourier των κατανομών

(i)  $T_1 = a + bx + cx^2$ .

(ii)  $T_2 = (\kappa + \lambda x + \mu x^2) H_0$ .

(iii)  $T_3 = (x^2 - 2x - 1) H_3$ .

(iv)  $T_4 = x|x| + x^2 H_{-1} - 2x^3 \delta_{-1}$ .

(iv)  $T_5 = \kappa x H_0 + \lambda x^2 \delta_{-1} + \mu x^3 \delta_{-2}$ .

## 9. Μετασχηματισμός Fourier και ακολουθίες ήπιων κατανομών

Όπως και στην περίπτωση των συνηθισμένων συναρτήσεων, η έννοια της ακολουθίας ή της μονοπαραμετρικής οικογένειας παίζει ξεχωριστό ρόλο στην ανάλυση των γενικευμένων συναρτήσεων ή κατανομών. Από αυτή την άποψη, έχει ιδιαίτερα σημασία να δούμε το πώς συμπεριφέρονται οι ακολουθίες ήπιων κατανομών όταν υποστούν μετασχηματισμό Fourier. Το επόμενο παράδειγμα δίνει συγκεκριμένη μορφή στο πιο πάνω ερώτημα.

### Παράδειγμα 9.1

Κάθε μέλος της μονο-παραμετρικής οικογένειας ομαλών συναρτήσεων

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2}, \quad \varepsilon > 0, \quad (9.1)$$

είναι (απόλυτα) ολοκληρώσιμο, με

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\varepsilon(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{\varepsilon}{x^2 + \varepsilon^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{y}{y^2 + 1} dy = 1. \quad (9.2)$$

Χρησιμοποιώντας αυτή την ιδιότητα, μπορεί κανείς εύκολα να δείξει ότι, καθώς το  $\varepsilon \rightarrow 0$ , οι ήπιες κατανομές  $\{f_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  που αντιστοιχούν στις συναρτήσεις  $\{f_\varepsilon(x)\}_{\varepsilon>0}$  συγκλίνουν στην ήπια κατανομή  $\delta_0$ :

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} f_\varepsilon = \delta_0. \quad (9.3)$$

Από την άλλη μεριά, στο αντίστοιχο εδάφιο, είδαμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης  $f_\varepsilon(x)$  ορίζεται σε όλη την πραγματική ευθεία και δίνεται από την έκφραση

$$\hat{f}_\varepsilon(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\varepsilon|k|}, \quad k \in \mathbb{R}. \quad (9.4)$$

Τα μέλη της οικογένειας  $\{\hat{f}_\varepsilon(k)\}_{\varepsilon>0}$  είναι συνεχείς και φραγμένες συναρτήσεις. Συνεπώς, σε καθένα από αυτά αντιστοιχεί μία ήπια κατανομή. Αν αυτή την κατανομή την συμβολίσουμε με  $\hat{f}_\varepsilon$ , τότε εύκολα καταλήγουμε στο ακόλουθο συμπέρασμα:

Η 1-παραμετρική οικογένεια ήπιων κατανομών  $\{\hat{f}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$  συγκλίνει στην ήπια κατανομή  $\gamma = 1 / \sqrt{2\pi}$ . Δηλαδή,

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \hat{f}_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad (9.5)$$

Ας θυμηθούμε τώρα ότι στο προηγούμενο εδάφιο αποδείξαμε πως,

$$\hat{\delta}_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \quad (9.6)$$

Άρα, η (9.5) γράφεται σαν

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \hat{f}_\varepsilon = \hat{\delta}_0. \quad (9.7)$$

Αυτό δείχνει ότι, στην προκειμένη τουλάχιστον περίπτωση, ισχύει το εξής αποτέλεσμα:

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \hat{f}_\varepsilon = [\lim_{\varepsilon \searrow 0} f_\varepsilon]^\wedge \Leftrightarrow \lim_{\varepsilon \searrow 0} \{ \mathcal{F}[f_\varepsilon] \} = \mathcal{F}[\lim_{\varepsilon \searrow 0} f_\varepsilon]. \quad (9.8)$$

Μετά από αυτή τη διαπίστωση, είναι φυσικό να αναρωτηθεί κανείς αν επιτρέπεται να αντιμετωπίσει την ασθενή ή ήπια σύγκλιση με τον μετασχηματισμό Fourier, πάντοτε. Ευτυχώς, η απάντηση σ' αυτό το ερώτημα είναι θετική:

### Θεώρημα 9.1

Ας υποθεθεί ότι  $T_m \xrightarrow{S'} T$ , δηλαδή, ότι η ακολουθία ήπιων κατανομών  $\{T_m\}_{m=1}^\infty$  συγκλίνει στην ήπια κατανομή  $T$ . Τότε, το ίδιο ισχύει και για τις κατανομές που προκύπτουν από τον μετασχηματισμό Fourier των προηγούμενων:

$$T_m \xrightarrow{S'} T \Rightarrow \hat{T}_m \xrightarrow{S'} \hat{T} \Leftrightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} \{ \mathcal{F}[T_m] \} = \mathcal{F}[\lim_{m \rightarrow \infty} T_m]. \quad (9.9)$$

Ισοδύναμα, οι δύο εναλλακτικοί δρόμοι του επόμενου διαγράμματος που ξεκινούν από το  $g_\varepsilon$  οδηγούν στο ίδιο αποτέλεσμα.

$$\begin{array}{ccc} g_\varepsilon & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \hat{g}_\varepsilon \\ (\varepsilon \downarrow 0) & & (\varepsilon \downarrow 0) \\ \downarrow & & \downarrow \\ g & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \hat{g} \end{array} \quad (9.10)$$

### Απόδειξη

Επειδή το βάρος της απόδειξης ... το σηκώνουν οι ελεγκτικές συναρτήσεις, αφήνουμε τις λεπτομέρειες στον αναγνώστη. ■

### Παράδειγμα 9.2

Για κάθε  $\varepsilon > 0$ , ο τύπος

$$g_\varepsilon(x) := \frac{1}{\pi} \frac{x}{x^2 + \varepsilon^2}, \quad (9.11)$$

ορίζει μια ομαλή φραγμένη συνάρτηση  $g_\varepsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Συνεπώς, σε κάθε μέλος της οικογένειας ομαλών συναρτήσεων  $\{f_\varepsilon(x)\}_{\varepsilon > 0}$  αντιστοιχεί μια ήπια κατανομή,  $g_\varepsilon : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$ , που ορίζεται από τον τύπο

$$\langle g_\varepsilon, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(x) \varphi(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2 + \varepsilon^2} \varphi(x) dx, \quad \varphi \in \mathcal{S}. \quad (9.12)$$

Σύμφωνα με τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier ήπιων κατανομών που υιοθετήσαμε στο προηγούμενο εδάφιο, η κατανομή  $\hat{g}_\varepsilon : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$  ορίζεται από τον τύπο

$$\langle \hat{g}_\varepsilon, \varphi \rangle = \langle g_\varepsilon, \hat{\varphi} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g_\varepsilon(k) \hat{\varphi}(k) dk = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{k}{k^2 + \varepsilon^2} \hat{\varphi}(k) dk. \quad (9.13)$$

Τώρα, αφού η  $k(k^2 + \varepsilon^2)^{-1}$  είναι περιττή,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{k^2 + \varepsilon^2} \hat{\varphi}(k) dk &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{k^2 + \varepsilon^2} [\hat{\varphi}(k) - \hat{\varphi}(-k)] dk \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{k^2 + \varepsilon^2} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-ikx} - e^{ikx}) \varphi(x) dx \right] dk \end{aligned} \quad (9.14)$$

Στην προκειμένη περίπτωση, η αλλαγή στη σειρά ολοκλήρωσης στο τελευταίο επάλληλο ολοκλήρωμα επιτρέπεται και άρα

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{k^2 + \varepsilon^2} \hat{\varphi}(k) dk &= \\ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{k^2 + \varepsilon^2} (e^{-ikx} - e^{ikx}) dk \right] \varphi(x) dx. \end{aligned} \quad (9.15)$$

Όμως,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{k}{k^2 + \varepsilon^2} e^{-ikx} dk \equiv \hat{g}_\varepsilon(x), \quad (9.16)$$

κι από την άλλη, εύκολα αποδειχνεται ότι,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{k}{k^2 + \varepsilon^2} e^{-ikx} dk = -i \operatorname{sgn}(k) e^{-\varepsilon|k|}. \quad (9.17)$$

Με βάση αυτά τα αποτελέσματα, η (9.13) γίνεται

$$\begin{aligned} \langle \hat{g}_\varepsilon, \varphi \rangle &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{g}_\varepsilon(x) - \hat{g}_\varepsilon(-x)] \varphi(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}_\varepsilon(x) \varphi(x) dx = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(x) e^{-\varepsilon|x|} \varphi(x) dx. \end{aligned} \quad (9.18)$$

Με άλλα λόγια, ο μετασχηματισμός Fourier,  $\hat{g}_\varepsilon$ , της ήπιας κατανομής  $g_\varepsilon$  αντιστοιχεί στον μετασχηματισμό Fourier,



$$\hat{g}_\varepsilon(k) = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sgn}(k) e^{-\varepsilon|k|}, \quad (9.19)$$

της συνάρτησης  $g_\varepsilon(x)$ .

Από το προηγούμενο αποτέλεσμα αμέσως συνάγεται ότι,

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \hat{g}_\varepsilon = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sgn}(k). \quad (9.20)$$

Για να ελλέγξουμε, λοιπόν, αν και σ' αυτήν την περίπτωση  $\lim_{\varepsilon \searrow 0} \{\mathcal{F}[T_\varepsilon]\} = \mathcal{F}[\lim_{\varepsilon \searrow 0} T_\varepsilon]$ , θα πρέπει αρχικά να υπολογίσουμε το όριο των κατανομών  $\{g_\varepsilon\}$ .

Προτού κάνουμε αυτό τον υπολογισμό, αξίζει να σημειώσουμε ότι, πρώτο, το σημειακό όριο των συναρτήσεων  $\{g_\varepsilon(x)\}$  υπάρχει για μη μηδενικά  $x$  και είναι ίσο προς

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} g_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{x}, \quad x \neq 0. \quad (9.21)$$

Δεύτερο, στο Εδάφιο IX-4, παρατηρήσαμε ότι, με την κλασική έννοια, ο μετασχηματισμός της ανώμαλης συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad (9.22)$$

δεν ορίζεται. Παράλληλα, διαπιστώσαμε ότι, αν τροποποιήσουμε τον ορισμό, έτσι ώστε

$$\hat{f}(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{PV} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} e^{-ikx} dx, \quad (9.23)$$

τότε,

$$\hat{f}(k) = -i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sgn} k. \quad (9.24)$$

Με αυτή την έννοια, ο συνδυασμός των (9.21) και (9.24) μας επιτρέπει να συμπεράνουμε ότι

$$\mathcal{F}\left[\lim_{\varepsilon \searrow 0} g_\varepsilon(x)\right] = \mathcal{F}\left[\frac{1}{\pi} \frac{1}{x}\right] = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sgn} k. \quad (9.25)$$

Άρα, στο βαθμό που η (9.21) μπορεί να θεωρηθεί πως ισχύει και με την έννοια του ορίου των κατανομών  $\{g_\varepsilon\}$ , το παράδειγμα που μόλις εξετάσαμε επιβεβαιώνει την ισχύ του Θεωρήματος 9.1.

Πραγματικά, και παρά το γεγονός ότι η συνάρτηση  $f(x) = x^{-1}$  δεν είναι (ούτε καν τοπικά) ολοκληρώσιμη, μπορούμε να ορίσουμε αντίστοιχη προς αυτήν κατανομή, με τρόπο

ώστε το παράδειγμα που μελετήσαμε να καταστεί αναμφισβήτητα έγκυρο. Συγκεκριμένα, η απεικόνιση  $PV(x^{-1}): C_{\downarrow}^{\infty}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$  που ορίζεται από τον τύπο

$$\langle PV\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \rangle := PV \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} \varphi(x) dx, \quad \varphi \in C_{\downarrow}^{\infty}(\mathbb{R}), \quad (9.26)$$

είναι κατανομή κι έχει την απαιτούμενη ιδιότητα. Δηλαδή, αν  $\{g_{\varepsilon}\}$  είναι οι ήπιες κατανομές που αντιστοιχούν στις συναρτήσεις  $g_{\varepsilon} = x / \pi(x^2 + \varepsilon^2)$ , τότε

$$g_{\varepsilon} \xrightarrow{S} PV\left(\frac{1}{x}\right). \quad (9.27)$$

Αυτοί οι ισχυρισμοί διερευνώνται στις επόμενες ασκήσεις. ■

## Ασκήσεις

9.1 N' αποδειχτεί το Θεώρημα 9.1.

9.2 α) Υπολογίστε τον μετασχηματισμό Fourier των συναρτήσεων

$$f_{\varepsilon}(x) := \frac{1}{x-i\varepsilon}, \quad \varepsilon \neq 0$$

β) Δείχτε ότι

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \hat{f}_{\varepsilon}(k) = \mathcal{F}\left[\frac{1}{\pi} PV\left(\frac{1}{x}\right) + i\pi \delta_0\right] \quad (9.28)$$

γ) Δείχτε ότι

$$\boxed{\frac{1}{(x-\xi)-i0} - \frac{1}{(x-\xi)+i0} = 2\pi i \delta(x-\xi)} \quad (9.29)$$

$$\boxed{\frac{1}{(x-\xi)-i0} + \frac{1}{(x-\xi)+i0} = 2 PV\left(\frac{1}{x-\xi}\right)} \quad (9.30)$$

όπου

$$\frac{1}{x \pm i0} := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{x \pm i\varepsilon} \quad (9.31)$$

δ) Δείχτε ότι οι (9.29) και (9.30) οδηγούν στις σχέσεις Plemelj-Sokhotski για τη μιγαδική συνάρτηση

$$\Phi(z) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(x)}{x-z} dx, \quad \text{Im } z \neq 0. \quad (9.32)$$



# Θεμελιακές λύσεις και συναρτήσεις Green εξισώσεων εξέλιξης

## 1. Η πεινιά του Τσιτσάνη

Το τελευταίο κεφάλαιο αυτού του τόμου είναι αφιερωμένο στη σύζευξη της έννοιας των κατανομών με τα προβλήματα αρχικών-συνοριακών τιμών που αφορούν τις βασικότερες μερικές διαφορικές εξισώσεις (ΜΔΕ) της μαθηματικής φυσικής. Η ανάλυσή μας θα επικεντρωθεί στις λεγόμενες *εξισώσεις εξέλιξης*, όπως είναι η κυματική κι εκείνη της διάχυσης. Ωστόσο, συχνά θα αναφερθούμε και σε προβλήματα συνοριακών τιμών που αφορούν εξισώσεις ελλειπτικού τύπου, για να εκμεταλλευτούμε την εμπειρία που έχουμε αποκτήσει μελετώντας την εξίσωση Laplace, στο πρώτο κεφάλαιο.

Για να δούμε αμέσως το πώς "κολάνε" οι γενικευμένες συναρτήσεις ή κατανομές που μελετήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο στα προβλήματα αρχικών ή και συνοριακών τιμών των γραμμικών ΜΔΕ της μαθηματικής φυσικής, ας θυμηθούμε το

### Πρόβλημα Dirichlet για την εξίσωση Poisson

Θεωρούμε μια φραγμένη περιοχή (ανοιχτό και συνεκτικό σύνολο)  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  με ομαλό σύνορο  $\partial\Omega$ . Δίνονται δύο συναρτήσεις  $s(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ ,  $f(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ , που είναι συνεχείς στο πεδίο ορισμού τους. Να βρεθεί μια συνάρτηση  $u(\mathbf{x})$ , κλάσης  $C^2(\Omega)$ , που είναι συνεχής στη συμπαγή περιοχή  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ , αποτελεί λύση της ΜΔΕ

$$\Delta u(\mathbf{x}) = s(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1.1)$$

και πληροί τη συνοριακή συνθήκη

$$u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega. \quad (1.2)$$

Η  $s(\mathbf{x})$  αναφέρεται ως *όρος εξαναγκασμού* ή *συνάρτηση των πηγών*. Στην περίπτωση του στατικού ηλεκτρισμού, για παράδειγμα, η γνωστή συνάρτηση  $s(\mathbf{x})$  είναι ίση με  $-4\pi\rho(\mathbf{x})$ , όπου  $\rho(\mathbf{x})$  η πυκνότητα φορτίου, και η άγνωστη,  $u(\mathbf{x})$ , παριστάνει το αντίστοιχο ηλεκτρικό δυναμικό.

Σ' αυτό το πρόβλημα συνοριακών τιμών (ΠΣΤ), τόσο η προς λύση ΜΔΕ, όσο και η συνοριακή συνθήκη είναι μη ομογενείς, δηλαδή μη ταυτοτικά μηδενικές. Το βασικό χαρακτηριστικό της μη ομογένειας αυτών των στοιχείων είναι η διασπορά της. Με αυτό εννοούμε ότι η μη ομογένεια της ΜΔΕ (1.1) και της συνθήκης (1.2) δεν είναι συγκεντρωμένη σε ένα ή περισσότερα απομονωμένα σημεία του πεδίου ορισμού τους. Η απόδειξη αυτού του γεγονότος είναι απλή: Επειδή είναι συνεχής, η συνάρτηση  $s(\mathbf{x})$ , αν είναι μη μηδενική σε κάποιο σημείο  $\mathbf{x}_0$ ,

τότε είναι μη μηδενική σε μια γειτονιά,  $\Omega_0$ , του  $\mathbf{x}_0$  (σε κάποιο ανοιχτό υποσύνολο  $\Omega_0$  του πεδίου ορισμού της, το οποίο περιέχει το  $\mathbf{x}_0$ ). Το ίδιο ισχύει και για την  $f(\mathbf{x})$ .

Αυτή η παρατήρηση οδηγεί με φυσικό τρόπο στο ακόλουθο ερώτημα: Ποια μορφή θα έπαιρνε το παραπάνω ΠΣΤ, αν η μη ομογένεια των στοιχείων του ήταν συγκεντρωμένη σε ένα σημείο του χώρου; Για παράδειγμα, ποια είναι η μορφή του όρου  $s(\mathbf{x})$  στην (1.1) για το ηλεκτρικό δυναμικό ενός στοιχειώδους φορτισμένου σωμάτιου, όπως είναι το πρωτόνιο και το ηλεκτρόνιο;

Αλλά αυτό ακριβώς είναι το ερώτημα που προσπάθησε να λύσει ο Dirac: Να βρει τη συνάρτηση που περιγράφει την πυκνότητα (μάζας, φορτίου κ.λπ) ενός φυσικού αντικείμενου με μηδενικές διαστάσεις. Η προσπάθειά του αποτέλεσε το έναυσμα για τη σύλληψη της ιδέας των γενικευμένων συναρτήσεων ή κατανομών, με αποτέλεσμα η "συνάρτηση" που φέρει το όνομά να δεσπόζει στην ανάλυση των κατανομών.

Θυμίζουμε ότι, την κατανομή δέλτα του Dirac μπορεί κανείς να την αντιμετωπίζει, από πρακτική άποψη, ως μια συνηθισμένη συνάρτηση που μηδενίζεται έξω από το σημείο που ονομάσαμε έρεισμά της. Αν λοιπόν υιοθετήσουμε αυτή τη σκοπιά, τότε μπορούμε να περιγράψουμε το δυναμικό ενός φορτισμένου σωμάτιου που στέκεται στο σημείο  $\xi \in \mathbb{R}^3$  μέσω της εξίσωσης

$$\Delta \Phi(\mathbf{x}) = -4\pi \delta(\mathbf{x} - \xi). \quad (1.3)$$

**Σημείωση.** Στο παρόν κεφάλαιο, με  $\delta(\mathbf{x} - \xi) \equiv \delta_\xi(\mathbf{x})$  θα συμβολίζουμε την κατανομή του Dirac, με έρεισμα το σημείο  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , η οποία απεικονίζει την τυχαία συνάρτηση  $u(\mathbf{x})$  κλάσης  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  ή  $C_\downarrow^\infty(\mathbb{R}^n)$  στον αριθμό  $u(\xi)$ . Συνακόλουθα,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta(\mathbf{x} - \xi) u(\mathbf{x}) d\mathbf{x} := \langle \delta_\xi, u \rangle \equiv u(\xi). \quad (1.4)$$

■

Το πρόβλημα που απαρτίζεται από την εξίσωση (1.3) και τη συνοριακή συνθήκη  $\Phi(\mathbf{x}) \rightarrow 0$  καθώς το  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$  το λύσαμε ήδη στο κεφ. VII. Στην ουσία, αυτό το πρόβλημα είχε ιστορικά λυθεί από την πρώτη στιγμή που διατυπώθηκε η θεωρία του στατικού ηλεκτρισμού. Η λύση του,

$$\Phi(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi |\mathbf{x} - \xi|}, \quad (1.5)$$

δεν είναι άλλη από αυτή που ονομάσαμε θεμελιακή λύση της εξίσωσης Laplace στις τρεις διαστάσεις.

Ένα άλλο πρόβλημα που έχουμε ήδη λύσει, αλλά χρονικού τύπου αυτή τη φορά, είναι εκείνο της απότομης ώθησης ενός σωμάτιου στην κατεύθυνση της κίνησής του. Πιο συγκεκριμένα, όταν η δύναμη που ασκείται στο σωματίο εντοπίζεται χρονικά στη στιγμή  $t = t_0$ , ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα,

$$m x'' = F(t, x(t), x'(t)), \quad (1.6)$$

ανάγεται στην εξίσωση

$$x'' = f_0 \delta(t - t_0). \quad (1.7)$$

Ας δούμε, τέλος, ορισμένα προβλήματα στα οποία η συνάρτηση εξαναγκασμού είναι εντοπισμένη χωρικά και χρονικά. Όπως γνωρίζουμε, οι ταλαντώσεις των χορδών ενός έγχορδου οργάνου (κιθάρας, πιάνου, βιολιού, μπουζουκιού) περιγράφονται από την κυματική εξίσωση

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = s(x, t). \quad (1.8)$$

και κατάλληλες αρχικές-συνοριακές συνθήκες. Ας υποθέσουμε, λοιπόν, ότι η χορδή είναι ακίνητη μέχρι τη στιγμή που το χρονόμετρο δείχνει  $t = t_0$ . Εκείνη τη στιγμή και στο σημείο  $x = x_0$  δέχεται ένα χτύπημα από την πένα ή το νύχι του οργανοπαίχτη. Πώς περιγράφει κανείς αυτή την πενιά ... του Τσιτσάνη; Η απάντηση είναι

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = a \delta(x - x_0, t - t_0), \quad (1.9)$$

όπου το  $a$  παριστάνει μια σταθερή, ασήμαντη από μαθηματική άποψη, που είναι απαραίτητη μόνο όταν μας ενδιαφέρουν οι φυσικές διαστάσεις.

Ας θεωρήσουμε, τέλος, μια κωλοφωτιά, που τη χρονική στιγμή  $t = t_0$  βρίσκεται στο σημείο  $x = x_0$  κι εκπέμπει φως "σε χρόνο ντε-τε". Οι εξισώσεις Maxwell που περιγράφουν αυτό το ηλεκτρομαγνητικό φαινόμενο ανάγονται στην τρισδιάστατη κυματική εξίσωση

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = a \delta(x - x_0, t - t_0). \quad (1.10)$$

Σ' αυτό σημείο, ο παρατηρητικός αναγνώστης θα μας επεσήμαινε ότι, στα προβλήματα που ως τώρα μελετήσαμε αναλυτικά, η διαφορική εξίσωση ήταν συνήθως ομογενής και η μη ομογένεια χαρακτηριζόταν μόνο τις συνοριακές ή τις αρχικές συνθήκες. Για παράδειγμα, την μονοδιάστατη κυματική εξίσωση τη μελετήσαμε στη μορφή

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad (1.11)$$

σε συνδυασμό με συνθήκες που αφορούσαν τα άκρα ενός φραγμένου διαστήματος της χωρικής μεταβλητής,  $x$ , και αρχικές συνθήκες της μορφής

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x). \quad (1.12)$$

Άρα, με βάση την ως τώρα εμπειρία του, ο αναγνώστης μας θα διατύπωνε το ακόλουθο μαθηματικό πρόβλημα ως μοντέλο της πενιάς του Τσιτσάνη: Αφού ως τη χρονική στιγμή  $t = 0$ , ας πούμε, η χορδή του μπουζουκιού ακινητούσε, η συνάρτηση  $u(x, t)$  της απομάκρυνσης των στοιχείων της χορδής από τη θέση ισορροπίας ήταν αρχικά μηδενική. Συνεπώς, η πρώτη από τις αρχικές συνθήκες (1.12) θα πρέπει να πάρει τη μορφή  $u(x, 0) = 0$ . Ας υποθέσουμε, από την άλλη ότι η πένα του μεγάλου μας συνθέτη-οργανοπαίχτη χτύπησε τη χορδή στο σημείο  $x = x_0$ . Σαν αποτέλεσμα, μόνο το στοιχείο της χορδής που βρισκόταν στο  $x_0$  απέκτησε ταχύτητα. Άρα, η δεύτερη από τις αρχικές συνθήκες (1.12) είναι της μορφής  $u_t(x, 0) = v_0 \delta(x - x_0)$ .

Και πραγματικά, το μοντέλο του αναγνώστη μας, το οποίο απαρτίζεται από την ομογενή ΜΔΕ (1.11) και τις αρχικές συνθήκες

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = u_0 \delta(x - x_0), \quad (1.13)$$

είναι ολόσωστο, από φυσική άποψη. Μάλιστα, θα το μελετήσουμε διεξοδικά στις επόμενες σελίδες. Μπορούμε από τώρα, όμως, να επισημάνουμε ότι το πρόβλημα που ορίζεται από τον συνδυασμό της ομογενούς ΜΔΕ (1.11) με τις συνθήκες (1.13), μία από τις οποίες είναι μη ομογενής, είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα που ορίζεται από τον συνδυασμό της μη ομογενούς ΜΔΕ (1.10) με ομογενείς αρχικές συνθήκες.

Γενικότερα, οι μη ομογένειες των αρχικών ή και συνοριακών τιμών είναι αλληλένδετες μ' εκείνες της διαφορικής εξίσωσης. Αυτό θα φανεί καθαρά από τις λύσεις των προβλημάτων αρχικών-συνοριακών τιμών που θα παρουσιάσουμε αργότερα, Γι' αυτό, θα συγκεντρώσουμε αρχικά την προσοχή μας στην μη ομογένεια των διαφορικών εξισώσεων, για να τονίσουμε το εξής:

Οι (1.3), (1.7), (1.9) και (1.10) **δεν** είναι διαφορικές εξισώσεις, με την κλασική έννοια. Για τον απλό λόγο ότι, το δεξί μέλος τους είναι κατανομή! Άρα, και η άγνωστη ποσότητα  $u$  των παραπάνω εξισώσεων δεν μπορεί παρά να είναι μια κατανομή. Συνεπώς, όλες οι παραπάνω ανήκουν στις **διαφορικές εξισώσεις κατανομών**. Η μέθοδος επίλυσης των εξισώσεων αυτού του είδους και η σύνδεσή τους με τις κλασικές διαφορικές εξισώσεις αποτελούν αντικείμενο των εδαφίων που ακολουθούν.

## 2. Διαφορικές εξισώσεις κατανομών

Με τον όρο *διαφορική εξίσωση κατανομών* θα εννοούμε μια διαφορική εξίσωση που αφορά κατανομές, είτε ρητά είτε έμμεσα.

Τα δύο επόμενα προβλήματα είναι εμφανώς διαφορικές εξισώσεις κατανομών:

(α) Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$u'' = \delta(x - \xi), \quad x, \xi \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

(β) Να λυθεί η διαφορική εξίσωση

$$\Delta u = \delta(x - \xi), \quad x, \xi \in \mathbb{R}^3. \quad (2.2)$$

Αντίθετα, στα δύο προβλήματα που ακολουθούν δεν εμφανίζονται ρητά, ούτε γίνεται λόγος για, κατανομές:

(α') Να βρεθεί μια συνάρτηση  $u(x)$ , που είναι συνεχής σε όλη την πραγματική ευθεία κι αποτελεί λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$u'' = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\xi\}. \quad (2.3)$$

(β') Να βρεθεί συνάρτηση  $u(x)$ , που είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του  $\mathbb{R}^3$  κι αρμονική στο ανοιχτό υποσύνολο  $\mathbb{R}^3 \setminus \{\xi\}$ , δηλαδή, τέτοια που

$$\Delta u = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\xi\}. \quad (2.4)$$

Ωστόσο, κι αυτά τα προβλήματα ανάγονται σε διαφορικές εξισώσεις κατανομών, γιατί, (i) Κάθε λύση των (α') και (β') ορίζει κατανομή που ικανοποιεί τις απαιτήσεις των προβλημάτων (α) και (β), αντίστοιχα. (ii) Οι κατανομές που ορίζονται από τις λύσεις των (2.1) και (2.2) ταυτίζονται, στις περιοχές  $\mathbb{R} \setminus \{\xi\}$  και  $\mathbb{R}^3 \setminus \{\xi\}$ , αντίστοιχα, με συναρτήσεις κλάσης  $C^2$  που ικανοποιούν τις απαιτήσεις των προβλημάτων (α') και (β').

Οι προηγούμενη επισήμανση είναι διπλά χρήσιμη: Από τη μια, θα μας βοηθήσει να λύνουμε διαφορικές εξισώσεις κατανομών (**ΔΕΚ**), χρησιμοποιώντας αυστηρές ή κλασικές λύσεις αντίστοιχων διαφορικών, με τη συνηθισμένη έννοια, εξισώσεων. Από την άλλη, θα μας δείξει τον τρόπο να λύνουμε τα κλασικά προβλήματα αρχικών-συνοριακών τιμών, χρησιμοποιώντας τις λύσεις αντίστοιχων προβλημάτων που αφορούν ΔΕΚ.

### Παράδειγμα 2.1

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να λύσουμε το πιο πάνω πρόβλημα (α). Ένας τρόπος έγκειται στο να χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες των ίδιων των κατανομών, τις οποίες μελετήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Εκεί είδαμε ότι η παράγωγος της κατανομής Heaviside, που από τώρα και στο εξής θα τη συμβολίζουμε και με  $H(x - \xi)$ , είναι ίση με την δέλτα του Dirac:

$$H'(x - \xi) = \delta(x - \xi). \quad (2.5)$$

Από την άλλη, η παράγωγος κάθε σταθερής κατανομής μηδενίζεται, ενώ η (2.1) είναι ταυτόσημη με την

$$(u')' = \delta(x - \xi), \quad x, \xi \in \mathbb{R}. \quad (2.6)$$

Άρα, η επιλογή



$$u' = H(x - \xi) + c_1 \quad (2.7)$$

είναι συμβατή με την (2.6).

Στο προηγούμενο κεφάλαιο, διαπιστώσαμε επίσης ότι η  $H(x - \xi)$  προκύπτει ως παράγωγος της κατανομής  $(x - \xi)H(x - \xi)$  που αντιστοιχεί στη συνεχή συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq \xi \\ x - \xi, & x \geq \xi \end{cases} \quad (2.8)$$

Από την άλλη, οι κατανομές που αντιστοιχούν στις συνεχείς συναρτήσεις  $g(x) = c_1 x + c_2$  έχουν ως παράγωγο εκείνες που αντιστοιχούν στις σταθερές συναρτήσεις  $h(x) = c_1$ . Συνεπώς, οι κατανομές της μορφής

$$u = (x - \xi)H(x - \xi) + c_1 x + c_2 \quad (2.9)$$

είναι συμβατές με την (2.7).

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου μιας κατανομής, μπορούμε να επαληθεύσουμε αμέσως ότι, η παράγωγος δεύτερης τάξης κάθε κατανομής της μορφής (2.9) είναι ίση με την  $\delta(x - \xi)$ .

Ένας άλλος τρόπος επίλυσης του ίδιου προβλήματος ξεκινάει από την (πλασματική) εικόνα της  $\delta(x - \xi)$  ως συνάρτησης που μηδενίζεται σε κάθε σημείο της πραγματικής ευθείας, εκτός από το  $x = \xi$ . Με βάση, αυτή την εικόνα, η (2.1) είναι ταυτόσημη με την (2.3) σε κάθε  $x \neq \xi$ .

Συνεπώς, το πρώτο βήμα του εναλλακτικού τρόπου επίλυσης της ΔΕΚ  $u'' = \delta(x - \xi)$  είναι να εξετάσουμε τα διαστήματα της πραγματικής ευθείας  $x < \xi$  και  $x > \xi$ , ξεχωριστά. Τόσο, λοιπόν, στο πρώτο όσο και στο δεύτερο από αυτά τα διαστήματα, η  $u'' = \delta(x - \xi)$  ανάγεται στην ομογενή ΣΔΕ  $u'' = 0$ . Η γενική λύση αυτής της εξίσωσης είναι προφανής, αλλά χρειάζεται προσοχή. Πρέπει να τη γράψουμε με διαφορετική μορφή σε καθένα από τα διαστήματα  $x < \xi$  και  $x > \xi$ :

$$u(x) = \begin{cases} ax + b, & x < \xi \\ cx + d, & x > \xi \end{cases} \quad (2.10)$$

Το δεύτερο βήμα έγκειται στη σύνδεση του τύπου που δίνει την  $u(x)$  στο διάστημα  $x < \xi$  μ' εκείνον που ισχύει στο διάστημα  $x > \xi$ . Αυτό μπορεί να γίνει μόνο με τη επιβολή μιας επιπλέον συνθήκης για την  $u(x)$ . Αν για παράδειγμα υποθέσουμε ότι η  $u(x)$  είναι συνεχής σε όλη την πραγματική ευθεία, τότε θα πρέπει να ισχύουν οι παρακάτω ισότητες:

$$u(\xi^-) = u(\xi^+) = u(\xi). \quad (2.11)$$

Από αυτές και την (2.10) αμέσως έπεται ότι

$$a\xi + b = c\xi + d. \quad (2.12)$$

Συνεπώς, η  $d = a\xi + b - c\xi$ , οπότε τη (2.10) γίνεται

$$u(x) = \begin{cases} ax + b, & x \leq \xi \\ c(x - \xi) + a\xi + b, & x \geq \xi \end{cases} \quad (2.13)$$

Ισοδύναμα,

$$u(x) = \begin{cases} a(x - \xi) + a\xi + b, & x \leq \xi \\ c(x - \xi) + a\xi + b, & x \geq \xi \end{cases} \quad (2.14)$$

Σ' αυτό το σημείο αξίζει να κάνουμε δυο παρατηρήσεις.

(i) Η συνεχής συνάρτηση  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  που ορίζεται στην (2.14) αποτελεί τη γενική λύση του προβλήματος (α').

(ii) Η (2.14) γράφεται και ως εξής:

$$u(x) = a(x - \xi)H(\xi - x) + c(x - \xi)H(x - \xi) + a\xi + b. \quad (2.15)$$

Από την (2.15) αμέσως έπεται ότι,

$$\begin{aligned} u'(x) &= aH(\xi - x) - a(x - \xi)\delta(\xi - x) + cH(x - \xi) + c(x - \xi)\delta(x - \xi) \\ &= aH(\xi - x) + cH(x - \xi). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Συνακόλουθα,

$$u''(x) = -a\delta(\xi - x) + c\delta(x - \xi) = (c - a)\delta(x - \xi). \quad (2.17)$$

Η σύγκριση της (2.17) με την  $u''(x) = \delta(x - \xi)$  οδηγεί στην  $c = a + 1$ , οπότε η (2.15) γίνεται

$$u(x) = a(x - \xi)H(\xi - x) + (a + 1)(x - \xi)H(x - \xi) + a\xi + b. \quad (2.18)$$

Ισοδύναμα,

$$u(x) = a(x - \xi)[H(\xi - x) + H(x - \xi)] + (x - \xi)H(x - \xi) + a\xi + b. \quad (2.19)$$

Όμως, εύκολα επαληθεύεται ότι

$$(x - \xi)[H(\xi - x) + H(x - \xi)] = (x - \xi). \quad (2.20)$$

Συνεπώς, οι λύσεις που κατασκευάσαμε για το πρόβλημα (α) αποτελούν μια διπαραμετρική οικογένεια της μορφής

$$u(x) = (x - \xi)H(x - \xi) + ax + b. \quad (2.21)$$

Πριν αφήσουμε την ανάλυση της ΔΕΚ  $u'' = \delta(x - \xi)$ , αξίζει να σημειώσουμε ότι, η αντιμετώπιση της  $\delta(x - \xi)$  ως συνηθισμένης συνάρτησης, μας επιτρέπει να υπολογίσουμε την αλματική ασυνέχεια της  $u'(x)$  άμεσα. Πιο συγκεκριμένα, ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της  $u'' = \delta(x - \xi)$  από το σημείο  $x = \xi - \varepsilon$  ως το  $x = \xi + \varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$ , παίρνουμε το εξής αποτέλεσμα:

$$\int_{\xi - \varepsilon}^{\xi + \varepsilon} u'' dx = \int_{\xi - \varepsilon}^{\xi + \varepsilon} \delta(x - \xi) dx. \quad (2.22)$$

Τώρα, εκμεταλλευόμαστε τη δεύτερη ιδιότητα της "συνάρτησης" δέλτα, σύμφωνα με την οποία, το ολοκλήρωμα, τάχα, της  $\delta(x - \xi)$  σε οποιοδήποτε διάστημα καλύπτει το σημείο  $x = \xi$  είναι ίσο προς τη μονάδα:

$$\int_a^b \delta(x - \xi) dx = \begin{cases} 1, & \xi \in [a, b] \\ 0, & \xi \notin [a, b] \end{cases} \quad (2.23)$$

Με βάση αυτή την ιδιότητα, η (2.22) γίνεται

$$u'(\xi + \varepsilon) - u'(\xi - \varepsilon) = 1. \quad (2.24)$$

Συνακόλουθα,

$$u'(\xi^+) - u'(\xi^-) = 1. \quad (2.25)$$

Αυτό τον τύπο για την αλματική ασυνέχεια της  $u'(x)$  στο σημείο  $x = \xi$  θα μπορούσαμε να τον έχουμε χρησιμοποιήσει αμέσως μόλις φτάσαμε στην έκφραση (2.13). Το αποτέλεσμα, βέβαια, θα ήταν και πάλι η (2.21). ■

## Ασκήσεις

**2.1** Να βρεθούν λύσεις των παρακάτω ΔΕΚ.

- (i)  $u' = H(x+1) - H(x-1)$ , (ii)  $u' = \delta(x+1) - \delta(x-1)$ ,  
 (iii)  $u'' = 3[H(x-1) - H(x-2)]$ , (iv)  $u'' = 3[\delta(x-1) - \delta(x-2)]$   
 (v)  $u'' - u = 4H(x-1)$ , (vi)  $u'' - u = 4\delta(x-1)$ ,  
 (vii)  $u'' + u = 3H(x+1)$ , (viii)  $u'' + u = 3\delta(x+1)$ .

**2.2** Να βρεθούν λύσεις των παρακάτω ΔΕΚ, όπου  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ .

- (i)  $u_x = yH(x)$ , (ii)  $u_y = xH(y-1) + 2(y-2)H(y-2)$ ,  
 (iii)  $u_x = \cos y \delta(x-1) - 2(y-2)H(y-2)$ , (iv)  $u_y = 3 - x\delta(y-1) + (2-x)H(y) + xH(x)$ ,  
 (v)  $u_{xy} = 3\delta(x-1)\delta(y-2)$ , (vi)  $u_{xx} = y\delta(x-1)$ , (vii)  $u_{yy} = x\delta(y+1) + \sin x H(y-1)$ .

### 3. Συναρτήσεις Green για συμπαγείς περιοχές

Ας έρθουμε τώρα σ' ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών (ΠΣΤ) που αφορά μια ΔΕΚ. Πιο συγκεκριμένα, ας υποθέσουμε ότι αναζητάμε λύσεις της ΔΕΚ

$$u'' = \delta(x - \xi), \quad x, \xi \in (0, L) \quad (3.1)$$

που είναι συμβατές με τις συνοριακές συνθήκες

$$u(0) = 0, \quad u(L) = 0. \quad (3.2)$$

Το πρώτο πράγμα που οφείλουμε να παρατηρήσουμε, σχετικά μ' αυτό το πρόβλημα, είναι πως **οι συνθήκες (3.2) είναι κατ' αρχήν απαράδεκτες**. Γιατί, το άγνωστο αντικείμενο στην (3.1) δεν είναι συνηθισμένη συνάρτηση, αλλά κατανομή. Συνεπώς, η τιμή της  $u$  σε κάποιο σημείο του άξονα  $x$  δεν έχει νόημα: Οι κατανομές έχουν ως πεδίο ορισμού ένα χώρο συναρτήσεων και όχι την πραγματική ευθεία.

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{a-\delta}^{a+\delta} f(x) \varphi(x) dx = 2 \delta f(\xi) \varphi(\xi), \quad \xi \in I. \quad (3.3)$$

Συνεπώς,

$$|\langle T_f, \varphi \rangle| \leq 2 \delta |f(\xi)| M, \quad M := \max_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)|. \quad (3.4)$$

Όμως, η  $f(x)$ , ως συνεχής στον  $\mathbb{R}$ , είναι ομοιόμορφα συνεχής σε κάθε κλειστό και φραγμένο υποσύνολό του. Αυτό σημαίνει ότι, για κάθε  $\varepsilon > 0$ , οσοδήποτε μικρό, μπορούμε να επιλέξουμε το  $\delta$ , έτσι ώστε  $|f(x) - f(a)| = |f(x)| < \varepsilon$ , για κάθε  $x \in [a - \delta, a + \delta]$ . Άρα, η (3.4) γίνεται

$$|\langle T_f, \varphi \rangle| \leq 2 \delta \varepsilon M, \quad (3.5)$$

πράγμα που σημαίνει ότι η τιμή της κατανομής  $T_f$  σε κάθε "σημείο"  $\varphi$  του χώρου των ελεγκτικών συναρτήσεων μπορεί να γίνει αυθαίρετα μικρή. ■

Ειδικότερα, για το πρόβλημα που τώρα αναλύουμε, είναι προφανές ότι οι λύσεις της  $u'' = \delta(x - \xi)$  που δίνονται στην (2.21) ταυτίζονται με συνεχείς συναρτήσεις σε κάθε διάστημα που δεν περιέχει το σημείο  $x = \xi$ . Κατά συνέπεια, μπορούμε να επιβάλουμε τις συνοριακές συνθήκες (3.2) σημειακά.

Αφού, λοιπόν, η  $H(x - \xi)$  ταυτίζεται με τις σταθερές συναρτήσεις μηδέν και ένα, στα διαστήματα  $x < \xi$  και  $x > \xi$ , αντίστοιχα, οι συνοριακές συνθήκες (3.2) παίρνουν την ακόλουθη μορφή:

$$b = 0, \quad L - \xi + aL + b = 0. \quad (3.6)$$

Συνεπώς,  $a = (\xi - L)/L$  και, άρα,

$$u(x) = (x - \xi) H(x - \xi) + \frac{\xi - L}{L} x. \quad (3.7)$$

Αυτή η λύση του ΠΣΤ  $u'' = \delta(x - \xi)$ ,  $u(0) = u(L) = 0$ , ονομάζεται **συνάρτηση Green** για το ΠΣΤ

$$u'' = f(x), \quad x \in (0, L), \quad (3.8)$$

$$u(0) = A, \quad u(L) = B, \quad (3.9)$$

όπου  $f(x)$  δοσμένη συνεχής συνάρτηση και  $A, B$  τυχαίες σταθερές. Στη συνέχεια, θα συμβολίζουμε τη συνάρτηση Green με  $G(x, \xi)$ .

Θα πρέπει να σημειωθεί πως, όταν οι σταθερές  $A, B$  δεν είναι και οι δύο μηδενικές, το κλασικό ΠΣΤ (3.1-2) είναι διπλά μη ομογενές: Η ΣΔΕ (3.1) είναι μη ομογενής, με διασκορπισμένη μη ομογένεια που εκφράζεται από τη συνάρτηση  $f(x)$ . Συνάμα, μία τουλάχιστον από τις συνοριακές συνθήκες (3.2) είναι επίσης μη ομογενής. Αντίθετα, για την κατασκευή της αντίστοιχης συνάρτησης Green απαιτείται η επίλυση ενός ΠΣΤ με ομογενείς συνοριακές συνθήκες και εντοπισμένη μη ομογένεια στη διαφορική εξίσωση. Παρ' όλ' αυτά, η επίλυση του ΠΣΤ που οδηγεί στη συνάρτηση Green αρκεί, ουσιαστικά, για η επίλυση του πιο σύνθετου κλασικού προβλήματος.

Για να γίνουμε πιο συγκεκριμένοι, θα επισημάνουμε αρχικά ότι η εξίσωση (3.1) είναι γραμμική. Συνεπώς, η υπέρθεση διαφορετικών λύσεων της είναι επίσης λύση. Ειδικότερα, αυτό ότι ο γραμμικός συνδυασμός  $c_1 G(x, \xi_1) + c_2 G(x, \xi_2)$  αποτελεί λύση του ΠΣΤ  $u'' = c_1 \delta(x - \xi_1) + c_2 \delta(x, \xi_2)$ ,  $u(0) = u(L) = 0$ . Σ' αυτή την περίπτωση, η μη ομογένεια της διαφορικής εξίσωσης είναι εντοπισμένη στα σημεία  $\xi_1$  και  $\xi_2$  και το μέγεθός της είναι ανάλογο προς τις σταθερές  $c_1$  και  $c_2$ , αντίστοιχα.

Γενικότερα, η συνάρτηση

$$u(x) = \sum_{i=1}^n c_i G(x, \xi_i), \quad \xi_i \in (0, L), \quad (3.10)$$

αποτελεί λύση της ΔΕΚ

$$u'' = \sum_{i=1}^n c_i \delta(x, \xi_i), \quad \xi_i \in (0, L). \quad (3.11)$$

Μια από τις δυνατές επιλογές των σταθερών  $c_i$  είναι η  $c_i = f(\xi_i)$ . Αυτή η επιλογή συνδέει το μέγεθος της μη ομογένειας στο σημείο  $x = \xi_i$  με την τιμή που παίρνει στο ίδιο σημείο η συνάρτηση εξαναγκασμού,  $f(x)$ , της ΣΔΕ  $u'' = f(x)$ . Με αυτό τον τρόπο, οι λύσεις (3.8) γίνονται

$$u(x) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) G(x, \xi_i), \quad \xi_i \in (0, L). \quad (3.12)$$

Θα μπορούσαμε, λοιπόν, να σκεφτούμε ότι, αυξάνοντας όλο και περισσότερο το πλήθος των σημείων  $\xi_i$  στο άθροισμα (3.12), θα πλησιάσουμε την λύση  $u(x)$  της  $u'' = f(x)$ , σε όποιον βαθμό που επιθυμούμε. Αυτή η νοητή διαδικασία μας οδηγεί τελικά στο να θεωρήσουμε την συνάρτηση

$$u(x) := \int_0^L f(\xi) G(x, \xi) d\xi \quad (3.13)$$

ως την ισχυρότερη υποψηφιότητα για την λύση της  $u'' = f(x)$ . Όπως θα δείξουμε ευθύς αμέσως, αυτή είναι ... που κερδίζει τον τίτλο.

Προς το παρόν, θα σημειώσουμε ότι η λύση (3.7), την οποία ονομάσαμε συνάρτηση Green, γράφεται και στην ακόλουθη μορφή:

$$G(x, \xi) = (x - \xi) H(x - \xi) + \frac{\xi - L}{L} x = \begin{cases} \frac{\xi - L}{L} x, & 0 \leq x \leq \xi \\ \frac{x - L}{L} \xi, & \xi \leq x \leq L \end{cases} \quad (3.14)$$

Αυτή δείχνει καθαρά ότι η συνάρτηση Green είναι συμμετρική ως προς το μετασχηματισμό  $(x, \xi) \rightarrow (\xi, x)$ :

$$G(x, \xi) = G(\xi, x). \quad (3.15)$$

Επιπλέον, η μορφή (3.14) της συνάρτησης Green διευκολύνει την απόδειξη του γεγονότος ότι η  $u(x)$  που ορίζεται στην (3.13) αποτελεί πραγματικά λύση της  $u'' = f(x)$ .

Βέβαια, αν σκεφτούμε λίγο βιαστικά, την απόδειξη αυτού το γεγονός θα την ολοκληρώσουμε σε μια μόνο γραμμή:

$$u''(x) = \partial_x^2 \int_0^L f(\xi) G(x, \xi) d\xi = \int_0^L f(\xi) \partial_x^2 G(x, \xi) d\xi = \int_0^L f(\xi) \delta(x, \xi) d\xi = f(x). \quad (3.16)$$

Το πρόβλημα με αυτή την "απόδειξη" είναι ότι στηρίζεται σε ιδιότητες που η  $G(x, \xi)$  δεν διαθέτει. Ωστόσο, δεν είναι και για πέταμα, αφού δείχνει προς τη σωστή κατεύθυνση.

Σε κάθε περίπτωση, η σωστή αντιμετώπιση έγκειται στο να σπάσουμε το ολοκλήρωμα που εμφανίζεται στον ορισμό της  $u(x)$  με τον ακόλουθο τρόπο:

$$u(x) := \int_0^x f(\xi) G(x, \xi) d\xi + \int_x^L f(\xi) G(x, \xi) d\xi, \quad x \in (0, L). \quad (3.17)$$

Στο πρώτο ολοκλήρωμα, η μεταβλητή ολοκλήρωσης διατρέχει το διάστημα  $[0, x]$ . Δηλαδή,  $0 \leq \xi \leq x$ . Ανάλογα, στο δεύτερο ολοκλήρωμα,  $x \leq \xi \leq L$ . Με βάση λοιπόν την (3.14), η (3.17) γίνεται

$$u(x) := \frac{x - L}{L} \int_0^x f(\xi) \xi d\xi + \frac{x}{L} \int_x^L f(\xi) (\xi - L) d\xi. \quad (3.18)$$

Παραγωγίζοντας όρο προς όρο, βρίσκουμε ότι,

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{1}{L} \int_0^x f(\xi) \xi d\xi + \frac{x - L}{L} x f(x) + \frac{1}{L} \int_x^L f(\xi) (\xi - L) d\xi - \frac{x}{L} f(x) (x - L) \\ &= \frac{1}{L} \int_0^x f(\xi) \xi d\xi + \frac{1}{L} \int_x^L f(\xi) (\xi - L) d\xi = \frac{1}{L} \int_0^L f(\xi) \xi d\xi - \int_x^L f(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Συνεπώς,

$$u''(x) = f(x). \quad (3.20)$$

Από τη αναλυτική μορφή, (3.18), της λύσης (3.13) φαίνεται καθαρά ότι αυτή η λύση μηδενίζεται καθώς πλησιάζουμε τα άκρα του διαστήματος  $[0, L]$ . Άρα, η λύση (3.13) δεν αρκεί για την περίπτωση που οι συνοριακές συνθήκες δεν είναι ομογενείς. Ωστόσο, στην προκειμένη

περίπτωση, η αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος είναι πολύ εύκολη. Το μόνο που χρειάζεται να κάνουμε είναι να προσθέσουμε στη λύση (3.13) της μη ομογενούς εξίσωσης  $u'' = f(x)$  μια λύση της αντίστοιχης ομογενούς,  $u'' = 0$ . Η γενική λύση της τελευταίας είναι της μορφής  $u = c_1 x + c_2$ . Θέτοντας  $u(0) = A$ ,  $u(L) = B$ , αμέσως βρίσκουμε ότι,  $c_1 = (B - A)/L$ ,  $c_2 = A$ . Συνεπώς, η λύση του ΠΣΤ (3.1-2) δίνεται από τη συνάρτηση

$$\begin{aligned} u(x) &= A + \frac{B-A}{L} x + \int_0^L f(\xi) G(x, \xi) d\xi \\ &= A + \frac{B-A}{L} x + \frac{x-L}{L} \int_0^x f(\xi) \xi d\xi + \frac{x}{L} \int_x^L f(\xi) (\xi-L) d\xi. \end{aligned} \quad (3.21)$$

■

Το ΠΣΤ που εξετάσαμε αναλυτικά στις προηγούμενες γραμμές αφορούσε μια απλή, μη ομογενή ΣΔΕ δεύτερης τάξης. Όπως μπορεί να διαπιστώσει ο αναγνώστης με τη βοήθεια των ασκήσεων στο τέλος αυτού του εδάφιου, η παραπάνω ανάλυση μπορεί εύκολα να επεκταθεί σε πιο περίπλοκες ΣΔΕ αυτού του είδους. Ωστόσο, το κύριο αντικείμενο του ενδιαφέροντός μας αποτελούν οι ΜΔΕ. Είναι, λοιπόν, καιρός να στραφούμε στη μελέτη των διαφορικών εξισώσεων που αφορούν πολυδιάστατες κατανομές.

Θα ξεκινήσουμε με το οικείο πρόβλημα Dirichlet για την μη ομογενή εξίσωση Laplace, η οποία ονομάζεται και εξίσωση Poisson. Η απλούστερη περίπτωση είναι αυτή που αφορά μια φραγμένη περιοχή του Ευκλείδειου επιπέδου, με τη μορφή ενός ορθογώνιου παραλληλόγραμμου. Τώρα, βέβαια, η μη ομογένεια θέλουμε να είναι εντοπισμένη σε ένα σημείο αυτής της περιοχής. Η κατασκευή των λύσεων της αντίστοιχης ΔΕΚ, με ομογενείς συνοριακές συνθήκες, περιγράφεται αναλυτικά στο

### Παράδειγμα 3.1

Στις Καρτεσιανές συντεγμένες, η εξίσωση Poisson για το Ευκλείδειο επίπεδο έχει την ακόλουθη μορφή:

$$u_{xx} + u_{yy} = s(x, y). \quad (3.22)$$

Συνεπώς, η αντίστοιχη ΔΕΚ, με την μη ομογένεια εντοπισμένη στο σημείο  $(x, y) = (\eta, \xi)$ , γράφεται σαν

$$u_{xx} + u_{yy} = \delta(x - \eta, y - \xi). \quad (3.23)$$

Θέλουμε, λοιπόν, να βρούμε λύσεις της (3.23) σε μια περιοχή της μορφής

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < a, 0 < y < b\}, \quad (3.24)$$

οι οποίες μηδενίζονται στο σύνορο,  $\partial\Omega$ .

Για να βρούμε τέτοιου είδους λύσεις, θυμόμαστε αρχικά ότι

$$\delta(x - \eta, y - \xi) = \delta(x - \eta) \delta(y - \xi) \quad (3.25)$$

Άρα, η (3.23) γράφεται και στη μορφή

$$u_{xx} + u_{yy} = \delta(x - \eta) \delta(y - \xi). \quad (3.26)$$

Για να μπορέσουμε να επιβάλουμε τις συνοριακές συνθήκες σημειακά, υποθέτουμε ότι η  $u(x, y)$  είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα  $\bar{\Omega} = [0, a] \times [0, b]$  του  $\mathbb{R}^2$ . Από την άλλη, η  $u(x, y)$  πρέπει να μηδενίζεται όταν το  $x = 0, a$ . Αφού λοιπόν, για κάθε συγκεκριμένο  $y \in [0, b]$ , η  $u(x, y)$  είναι μια συνάρτηση του  $x$ , η οποία είναι συνεχής στο διάστημα  $[0, a]$  και μηδενίζεται στα άκρα αυτού του διαστήματος, είναι λογικό να την παραστήσουμε ως σειρά Fourier ημιτόνων:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(y) \sin k_n x, \quad k_n := n \frac{\pi}{a}. \quad (3.27)$$

Τώρα, πλέον, είναι φυσικό να υποθέσουμε ότι και η  $\delta(x - \eta)$  επιδέχεται αυτού του είδους την αναπαράσταση:

$$\delta(x - \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \sin k_n x. \quad (3.28)$$

Προφανώς, με αυτό εννοούμε ότι, με την κατάλληλη επιλογή των συντελεστών  $d_n$ , η ακολουθία των κανονομών που αντιστοιχεί στην ακολουθία των συνεχών συναρτήσεων  $s_m(x) = \sum_{n=1}^m d_n \sin k_n x$  συγκλίνει στην δέλτα του Dirac.

Ο τύπος που καθορίζει τους συντελεστές μιας συνηθισμένης σειράς Fourier ημιτόνων υποδεικνύει την ακόλουθη επιλογή:

$$d_n = \frac{2}{a} \int_0^a \delta(x - \eta) \sin k_n x. \quad (3.29)$$

Αυτό σημαίνει ότι

$$d_n = \frac{2}{a} \sin k_n \eta. \quad (3.30)$$

Έτσι, η αναπαράσταση (3.28) της  $\delta(x - \eta)$  με τη μορφή σειράς Fourier ημιτόνων γίνεται

$$\delta(x - \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{a} \sin k_n \eta \sin k_n x. \quad (3.31)$$

Η αντικατάσταση των (3.27) και (3.31) στην (3.26) δίνει το εξής αποτέλεσμα:

$$\sum_{n=1}^{\infty} [A_n''(y) - k_n^2 A_n(y)] \sin k_n x = \delta(y - \xi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{a} \sin k_n \xi \sin k_n x. \quad (3.32)$$

Από αυτή τη σχέση έπεται ότι, οι συντελεστές Fourier  $A_n(y)$  προκύπτουν από τη λύση των ΔΕΚ

$$A_n''(y) - k_n^2 A_n(y) = \gamma_n \delta(y - \xi), \quad \gamma_n := \frac{2}{a} \sin k_n \xi, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.33)$$

Όμως, τέτοιου είδους ΣΔΕ για κατανομές μάθαμε να τις λύνουμε στο προηγούμενο εδάφιο. Πιο συγκεκριμένα, όταν  $y \neq \xi$ , οι ΣΔΕ (3.33) γίνονται ομογενείς:  $A_n''(y) - k_n^2 A_n(y)$ . Οι τελευταίες λύνονται πολύ εύκολα, για να δώσουν

$$A_n(y) = C_n e^{k_n y} + D_n e^{-k_n y}. \quad (3.34)$$



Οι σταθερές  $C_n$  και  $D_n$  καθορίζονται από τις υπόλοιπες συνθήκες του προβλήματος. Για να τις βρούμε, θα πρέπει να λάβουμε υπόψη δύο πράγματα. Το πρώτο είναι ότι δεν έχουμε ένα μόνο σύνολο λύσεων της μορφής (3.34), αλλά δύο: Ένα που αντιστοιχεί στο διάστημα  $0 \leq y < \xi$  κι ένα για το διάστημα  $\xi < y \leq b$ . Για να τις διακρίνουμε, τις γράφουμε στη μορφή

$$A_n^-(y) = C_n^- e^{k_n y} + D_n^- e^{-k_n y}, \quad 0 \leq y < \xi, \quad (3.35)$$

$$A_n^+(y) = C_n^+ e^{k_n y} + D_n^+ e^{-k_n y}, \quad \xi < y \leq b. \quad (3.36)$$

Το δεύτερο σημείο που πρέπει να λάβουμε υπόψη μας είναι οι συνοριακές συνθήκες στις πλευρές  $y=0$  και  $y=b$  του ορθογώνιου παραλληλόγραμμου  $\bar{\Omega}$ . Πιο συγκεκριμένα, το πρόβλημα απαιτεί από τη λύση μας να σέβεται τις συνθήκες  $u(x, 0) = u(x, b) = 0$ , για κάθε  $x$  στο διάστημα  $[a, b]$ . Σύμφωνα με την αναπαράσταση (3.27) της  $u(x, y)$ , αυτές οι συνθήκες ανάγονται στις

$$A_n^-(0) = 0, \quad A_n^+(b) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.37)$$

Επιβάλλοντας αυτές τις συνθήκες στις (3.35) και (3.36), βρίσκουμε ότι

$$A_n^-(y) = a_n \sinh k_n y, \quad 0 \leq y < \xi, \quad (3.38)$$

$$A_n^+(y) = b_n \sinh k_n(y-b), \quad \xi < y \leq b. \quad (3.39)$$

Μένει λοιπόν να προσδιορίσουμε τις σταθερές  $a_n$  και  $b_n$ . Για το σκοπό αυτό θυμόμαστε πρώτα ότι η  $u(x, y)$  πρέπει να είναι συνεχής κατά μήκος της γραμμής  $y = \xi$ . Αλλά, από την αναπαράσταση (3.27) της  $u(x, y)$  αμέσως συνάγεται ότι αυτή η συνθήκη επιβάλλει τη συνέχεια των συντελεστών  $A_n(y)$  στο σημείο  $y = \xi$ :

$$A_n^+(\xi^+) = A_n^-(\xi^-), \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.40)$$

Από την άλλη, η ΔΕΚ (3.33) δείχνει ότι, στο σημείο  $y = \xi$ , η παράγωγος των  $A_n(y)$  θα πρέπει να εμφανίζει αλματική ασυνέχεια ίση με τον αντίστοιχο συντελεστή  $\gamma_n$  της  $\delta(y - \xi)$ :

$$A_n^{+'}(\xi^+) - A_n^{-'}(\xi^-) = \gamma_n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.41)$$

Γράφοντας τις (3.40) και (3.41) αναλυτικά, βρίσκουμε ότι

$$b_n \sinh k_n(\xi - b) = a_n \sinh k_n \xi, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.42)$$

και

$$k_n b_n \cosh k_n(\xi - b) - k_n a_n \cosh k_n \xi = \gamma_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.43)$$

αντίστοιχα. Από την (3.42) αμέσως έπεται ότι,

$$b_n = \frac{\sinh k_n \xi}{\sinh k_n(\xi - b)} a_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.44)$$

Έτσι, η (3.43) γίνεται

$$k_n a_n \frac{1}{\sinh k_n(\xi - b)} [\sinh k_n \xi \cosh k_n(\xi - b) - \cosh k_n \xi \sinh k_n(\xi - b)] = \gamma_n. \quad (3.45)$$

Η ταυτότητα

$$\sinh(a - b) = \sinh a \cosh b - \cosh a \sinh b \quad (3.46)$$

μας επιτρέπει να γράψουμε την (3.45) στη μορφή

$$k_n a_n \frac{\sinh k_n b}{\sinh k_n(\xi - b)} = \gamma_n, \quad (3.47)$$

οπότε

$$a_n = \frac{\gamma_n \sinh k_n(\xi - b)}{k_n \sinh k_n b} \quad (3.48)$$

Λαβαίνοντας υπόψη και τον ορισμό των σταθερών  $\gamma_n$  που δίνεται στην (3.33), συμπεραίνουμε ότι, τελικά,

$$a_n = \frac{2 \sin k_n \eta \sinh k_n(\xi - b)}{k_n a \sinh k_n b}, \quad b_n = \frac{2 \sin k_n \eta \sinh k_n \xi}{k_n a \sinh k_n b}, \quad (3.49)$$

Συνεπώς,

$$A_n^-(y) = \frac{2 \sin k_n \eta \sinh k_n(\xi - b)}{k_n a \sinh k_n b} \sinh k_n y, \quad 0 \leq y < \xi, \quad (3.50)$$

$$A_n^+(y) = \frac{2 \sin k_n \eta \sinh k_n \xi}{k_n a \sinh k_n b} \sinh k_n(y - b), \quad \xi < y \leq b. \quad (3.51)$$

Συμπερασματικά, η συνάρτηση Green,  $G(x, y | \eta, \xi)$ , δηλαδή μια λύση της ΔΕΚ (3.23) που μηδενίζεται στο σύνορο της περιοχής  $\Omega$ , ορίζεται τμηματικά από τους ακόλουθους τύπους:

$$G^-(x, y | \eta, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin k_n \eta \sinh k_n(\xi - b)}{k_n a \sinh k_n b} \sin k_n x \sinh k_n y, \quad 0 \leq x \leq a \quad 0 \leq y \leq \xi, \quad (3.52)$$

$$G^+(x, y | \eta, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin k_n \eta \sinh k_n \xi}{k_n a \sinh k_n b} \sin k_n x \sinh k_n(y - b), \quad 0 \leq x \leq a, \quad \xi \leq y \leq b. \quad (3.53)$$

### Παρατήρηση

Αφού η συνάρτηση  $u(x, y)$  πρέπει να μηδενίζεται τόσο στα άκρα του διαστήματος  $0 \leq x \leq a$  όσο και στα άκρα του  $0 \leq y \leq b$ , θα μπορούσαμε να ξεκινήσουμε την επίλυση του παραπάνω ΠΣΤ υποθέτοντας ότι οι  $u(x, y)$  και  $\delta(x - \eta)\delta(y - \xi)$  αναπτύσσονται σε διπλή σειρά Fourier. Αυτός ο εναλλακτικός τρόπος κατασκευής της συνάρτησης Green για την εξίσωση Laplace στην περιοχή  $\bar{\Omega} = [0, a] \times [0, b]$  του  $\mathbb{R}^2$  αποτελεί το αντικείμενο της Άσκ. 3.1.

■

Από τη στιγμή που έχουμε κατασκευάσει τη συνάρτηση Green (της εξίσωσης Laplace ή Poisson) για μια συγκεκριμένη περιοχή  $\Omega$  του  $\mathbb{R}^n$ , έχουμε ουσιαστικά λύσει και το τελείως μη ομογενές ΠΣΤ

$$\Delta u(\mathbf{x}) = s(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad u(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega. \quad (3.54)$$

Για τον εξής απλό λόγο: Χάρη στη γραμμικότητα της εξίσωσης Poisson (ή του τελεστή Laplace, αν προτιμάτε), το ΠΣΤ (3.54) μπορεί να σπάσει σε δύο, το ένα από τα οποία είναι ομογενές ως

προς τη συνοριακή συνθήκη και το δεύτερο ως προς τη διαφορική εξίσωση.

Πιο συγκεκριμένα, ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση  $u_1(\mathbf{x})$  αποτελεί λύση του ΠΣΤ

$$\Delta u_1(\mathbf{x}) = s(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad u_1(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega. \quad (3.55)$$

και η  $u_2(\mathbf{x})$  είναι λύση του ΠΣΤ

$$\Delta u_2(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad u_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega. \quad (3.56)$$

Τότε, προφανώς, η συνάρτηση  $u(\mathbf{x}) = u_1(\mathbf{x}) + u_2(\mathbf{x})$  αποτελεί λύση του διπλά μη ομογενούς ΠΣΤ (3.54).

Αλλά, η συνάρτηση Green είναι, από την κατασκευή της, λύση του ΠΣΤ (3.55). Με τη διαφορά ότι η μη ομογένεια της εξίσωσης Poisson είναι εντοπισμένη σε ένα μόνο σημείο της περιοχής  $\Omega$ . Αν συμβολίσουμε αυτό το σημείο με  $\xi$ , τότε, εξ ορισμού, η συνάρτηση Green,  $G(\mathbf{x}, \xi)$ , είναι λύση του ΠΣΤ

$$\Delta_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x}, \xi) = \delta(\mathbf{x} - \xi), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad u(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega. \quad (3.57)$$

(Σημ. Ο συμβολισμός  $\Delta_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x}, \xi)$  θέλει να τονίσει ότι ο τελεστής Laplace δρα στο πρώτο όρισμα της  $G(\mathbf{x}, \xi)$ ).

Άρα, είναι εύλογο να υποθέσουμε το εξής: Η διασκορπισμένη μη ομογένεια,  $s(\mathbf{x})$ , που είναι ίση με  $s(\xi)$  στο σημείο  $\xi$ , προκύπτει από την εντοπισμένη  $s(\xi) \delta(\mathbf{x} - \xi)$ , αν αφήσουμε την παράμετρο  $\xi$  να σαρώσει όλη την περιοχή  $\Omega$ . Με άλλα λόγια, είναι εύλογο να υιοθετήσουμε την ακόλουθη υπόθεση εργασίας:

$$u_1(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi) s(\xi) d\xi, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (3.58)$$

Και πραγματικά, ένας πρόχειρος υπολογισμός δείχνει ότι αυτή η υπόθεση είναι εύλογη:

$$\Delta u_1(\mathbf{x}) = \Delta_{\mathbf{x}} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi) s(\xi) d\xi = \int_{\Omega} \Delta_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x}, \xi) s(\xi) d\xi = \int_{\Omega} \delta(\mathbf{x} - \xi) s(\xi) d\xi = s(\mathbf{x}). \quad (3.59)$$

Το προηγούμενο αποτέλεσμα μπορεί ν' αποδειχτεί και αυστηρά, οπότε μένει να δούμε το πώς η συνάρτηση Green εξασφαλίζει και τη λύση του ΠΣΤ (3.56). Αυτό όμως το ζήτημα καλύπτεται από την διεξοδική ανάλυση του προβλήματος Dirichlet που κάναμε στο Κεφάλαιο VII. Εκεί, αποδείξαμε ότι, αν το σύνορο,  $\partial\Omega$ , μιας φραγμένης περιοχής  $\Omega$  του  $\mathbb{R}^n$  είναι κανονικό, η συνάρτηση  $u_2(\mathbf{x})$ , που είναι αρμονική στην  $\Omega$  και ίση με  $f(\mathbf{x})$  στο σύνορό της, δίνεται από τον τύπο

$$u_2(\mathbf{x}) = \int_{\partial\Omega} f(\xi) \partial_{\nu} G(\mathbf{x}, \xi) dS_{\xi}.$$

Συνοψίζοντας τα συμπεράσματα της προηγούμενης συζήτησης καταλήγουμε στο

### Θεώρημα 3.1

Αν το σύνορο,  $\partial\Omega$ , του ανοιχτού και συνεκτικού υποσύνολου (της περιοχής)  $\Omega$  του  $\mathbb{R}^n$  είναι μια κανονική (υπερ-) επιφάνεια και οι συναρτήσεις  $s(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \Omega$ ,  $f(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ , είναι συνεχείς, τότε η συνάρτηση

$$u(\mathbf{x}) := \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi) s(\xi) d\xi + \int_{\partial\Omega} f(\xi) \partial_{\nu} G(\mathbf{x}, \xi) dS_{\xi} \quad (3.60)$$

αποτελεί τη μοναδική λύση του ΠΣΤ

$$\Delta u(x) = s(x), \quad x \in \Omega, \quad u(x) = f(x), \quad x \in \partial\Omega. \quad (3.61)$$

## Ασκήσεις

**3.1** Η συνάρτηση Green  $G(x, y | \eta, \xi)$  για την εξίσωση Poisson, δηλαδή μια λύση της ΔΕΚ

$$u_{x,x} + u_{y,y} = \delta(x - \eta) \delta(y - \xi).$$

στην περιοχή

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < a, 0 < y < b\},$$

που μηδενίζεται στο σύνορο της  $\Omega$ , μπορεί να υπολογιστεί και με τον ακόλουθο τρόπο: Υποθέτουμε ότι, τόσο η άγνωστη κατανομή,  $u(x, y)$ , όσο και ο όρος εξαναγκασμού,  $\delta(x - \eta) \delta(y - \xi)$ , αναπτύσσονται σε διπλή σειρά Fourier ημιτόνων. Δηλαδή,

$$u(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin k_m x \sin l_n y, \quad k_m := m \frac{\pi}{a}, \quad l_n := n \frac{\pi}{b}.$$

$$\delta(x - \eta) \delta(y - \xi) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} d_{mn} \sin k_m x \sin l_n y.$$

α) Να υπολογιστούν οι σταθερές  $d_{mn}$  και  $A_{mn}$ .

β) Να δειχτεί ότι η συνάρτηση  $G(x, y | \eta, \xi)$  που κατασκευάζεται μ' αυτό τον τρόπο είναι ισοδύναμη μ' εκείνη που κατασκευάσαμε στο Παράδειγμα 3.1.

**3.2 α)** Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο αποτέλεσμα και το τύπο (βλ. Εδάφιο VII-3)

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} f(\xi) \partial_\nu G(x, \xi) dS_\xi.$$

να κατασκευαστεί η λύση του προβλήματος Dirichlet:

$$u_{x,x} + u_{y,y} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b,$$

$$u(0, y) = u(a, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq b,$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u(x, b) = 0, \quad 0 \leq x \leq a,$$

όπου  $f(x)$  τυχαία συνεχής συνάρτηση.

β) Να συγκριθεί το αποτέλεσμά σας με το αντίστοιχο του Εδάφιου V-6.

**3.3 Συνάρτηση Neumann**,  $N(x, y | \eta, \xi)$ , για την εξίσωση Poisson στην περιοχή,

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < a, 0 < y < b\},$$

ονομάζεται κάθε λύση της ΔΕΚ

$$u_{x,x} + u_{y,y} = \delta(x - \eta) \delta(y - \xi) - A,$$

όπου  $A$  το εμβαδόν της περιοχής  $\Omega$ , της οποίας η κάθετη προς το σύνορο,  $\partial\Omega$ , παράγωγος μηδενίζεται σε κάθε σημείο του  $\partial\Omega$ .

α) Να εξηγηθεί ο λόγος για τον οποίο η σταθερή  $A$  είναι απαραίτητη.

β) Να κατασκευαστεί η συνάρτηση Neumann για την περιοχή  $\Omega$  χρησιμοποιώντας διπλή σειρά Fourier συνημιτόνων:

$$u(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mn} \cos k_m x \cos l_n y, \quad k_m := m \frac{\pi}{a}, \quad l_n := n \frac{\pi}{b}.$$

$$\delta(x - \eta) \delta(y - \xi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} d_{mn} \cos k_m x \cos l_n y.$$

### 3.4 (Η συνάρτηση Green για κυκλικό δίσκο)

Θεωρήστε στο ανοιχτό δίσκο ακτίνας  $a$

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq r < a\},$$

όπου  $r := (x^2 + y^2)^{1/2}$ . Το σημείο  $(x, y) = (x_0, y_0)$  βρίσκεται στην περιοχή  $\Omega$ , αλλά είναι διαφορετικό από το κέντρο του δίσκου.

α) Ναδειχτεί ότι, στις κυλινδρικές συντεταγμένες, η ΔΕΚ

$$V_{xx} + V_{yy} = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0)$$

γίνεται

$$u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + u_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0),$$

όπου  $u(r, \theta)$  η συνάρτηση που αντιστοιχεί στην  $V(x, y)$  και  $(r_0, \theta_0)$  οι κυλινδρικές συντεταγμένες του  $(x_0, y_0)$ .

β) Να βρεθούν οι λύσεις,  $G(r, \theta | r_0, \theta_0)$ , της ΔΕΚ για την  $u(r, \theta)$  που μηδενίζονται στην περιφέρεια,  $r = a$ , του δίσκου.

γ) Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση Green,  $G(r, \theta | r_0, \theta_0)$ , να λυθεί το ΠΣΤ

$$V_{xx} + V_{yy} = 0, \quad (x, y) \in \Omega,$$

$$V(x, y) = F(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega,$$

όπου  $F(x, y)$  δοσμένη συνεχής συνάρτηση, με πεδίο ορισμού το σύνολο  $\partial\Omega$ . Το αποτέλεσμα να συγκριθεί με το αντίστοιχο του Εδάφιου V-6.

### 3.5 (Η συνάρτηση Neumann για κυκλικό δίσκο)

Να κατασκευαστεί η συνάρτηση Neumann για ένα δίσκο ακτίνας  $a$  (βλ. Άσκ. 3.3).

### 3.6 (Η συνάρτηση Green για κύλινδρο)

Ένα σωμάτιο με ηλεκτρικό φορτίο  $Q$  ακινητεί στο εσωτερικό ενός κενού μεταλλικού δοχείου, το οποίο έχει το σχήμα ορθού κύλινδρου με κυκλική διατομή.

α) Να υπολογιστεί το ηλεκτρικό δυναμικό,  $V(x, y, z)$ , στο εσωτερικό του δοχείου, όταν αυτό είναι **γειωμένο**:  $V(x, y, z) = 0$ , σε κάθε σημείο του δοχείου (της κυλινδρικής επιφάνειας).

β) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του προηγούμενου μέρους, να υπολογιστεί το ηλεκτρικό

δυναμικό  $V(x, y, z)$  στο εσωτερικό ενός κενού κυλινδρικού δοχείου, όταν

- (i) Στο εσωτερικό του δοχείου δεν υπάρχει κανένα φορτίο.
  - (ii) Το ηλεκτρικό δυναμικό σε μια από τις επίπεδες πλευρές του δοχείου περιγράφεται από τη συνεχή συνάρτηση  $f(r)$ , όπου  $r$  η απόσταση από το κέντρο της.
  - (iii) Η προηγούμενη επίπεδη πλευρά είναι ηλεκτρικά μονωμένη από το υπόλοιπο τμήμα του δοχείου, το οποίο είναι μεταλλικό και γειωμένο.
- γ) Να συγκριθεί το αποτέλεσμα του μέρους (β) με το αντίστοιχο του Εδάφιου VI-2-A.

### 3.7 (Η συνάρτηση Green για σφαίρα)

Ένα σωματίο με ηλεκτρικό φορτίο  $Q$  ακινητεί στο εσωτερικό ενός κενού μεταλλικού δοχείου, το οποίο έχει το σχήμα μιας σφαιρικής επιφάνειας.

- α) Να υπολογιστεί το ηλεκτρικό δυναμικό,  $V(x, y, z)$ , σε κάθε εσωτερικό σημείο του δοχείου, όταν αυτό είναι γειωμένο:  $V(x, y, z) = 0$ , σε κάθε σημείο του δοχείου (της σφαιρικής επιφάνειας).
- β) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του προηγούμενου μέρους, να υπολογιστεί το ηλεκτρικό δυναμικό  $V(x, y, z)$  στο εσωτερικό ενός κενού σφαιρικού δοχείου, όταν
  - (i) Στο εσωτερικό του δοχείου δεν υπάρχει φορτίο.
  - (ii) Το ηλεκτρικό δυναμικό του δοχείου (της σφαιρικής επιφάνειας) είναι συμμετρικό ως προς τις στροφές γύρω από μια διάμετρο της σφαίρας.
- γ) Να συγκριθεί το αποτέλεσμα του μέρους (β) με το αντίστοιχο του Εδάφιου VI-2-B.

## 4. Συναρτήσεις Green για μη φραγμένες περιοχές

Στο προηγούμενο εδάφιο μελετήσαμε προβλήματα συνοριακών τιμών (ΠΣΤ) στα οποία μπορεί κανείς να διακρίνει τα εξής χαρακτηριστικά στοιχεία:

- (i) Η βασική περιοχή  $\Omega$  στην οποία ορίζεται η αντίστοιχη διαφορική εξίσωση είναι φραγμένη.
- (ii) Η εντοπισμένη μη ομογένεια αφορούσε την διαφορική εξίσωση και όχι τις συνοριακές συνθήκες.

Όμως, σε πολλές περιπτώσεις, το πρόβλημα που μας ενδιαφέρει δεν πληροί αυτές τις προϋποθέσεις. Συχνά, για παράδειγμα, μία τουλάχιστον από τις ανεξάρτητες μεταβλητές δεν περιορίζεται σε κάποιο φραγμένο διάστημα της πραγματικής ευθείας. Άλλες φορές πάλι, η ΜΔΕ που μας ενδιαφέρει είναι ομογενής και η μη ομογένεια εμφανίζεται μόνο στις συνοριακές συνθήκες.

Στο παρόν εδάφιο θα επικεντρώσουμε την προσοχή μας σ' ένα γνωστό από παλιά ΠΣΤ από το οποίο λείπει το παραπάνω χαρακτηριστικό στοιχείο (i). Ο τρόπος με τον οποίο αντιμετωπίζεται μια εντοπισμένη μη ομογένεια στις αρχικές ή συνοριακές συνθήκες περιγράφεται στο εδάφιο που ακολουθεί.

Προτού όμως αναλύσουμε το συγκεκριμένο ΠΣΤ, θα σημειώσουμε το εξής: Σε πρακτικό επίπεδο, το στοιχείο (i), σε συνδυασμό με την ομογένεια των συνοριακών συνθηκών, έχει την ακόλουθη συνέπεια: Η αναλυτική κατασκευή της συνάρτησης Green εμπλέκει, με τον ένα ή τον άλλο τρόπο, τις σειρές Fourier. Όταν, όμως, κάποια από τις ανεξάρτητες μεταβλητές δεν περιορίζεται σε φραγμένο διάστημα, τότε οι σειρές Fourier ως προς αυτή τη μεταβλητή χάνουν το νόημά τους. Σ' αυτές τις περιπτώσεις, το κατάλληλο εργαλείο είναι οι ολοκληρωτικοί μετασχηματισμοί, σαν αυτούς των Fourier και Laplace.

### Παράδειγμα 4.1

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να κατασκευάσουμε τη συνάρτηση Green για την εξίσωση Laplace στο τμήμα  $z > 0$  του Ευκλείδειου τρισδιάστατου χώρου  $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z)\}$ .

Θυμίζουμε ότι αυτό το πρόβλημα το λύσαμε με τη μέθοδο των ειδώλων στο Κεφάλαιο VII. Συνεπώς, εκείνο που ουσιαστικά μας ενδιαφέρει είναι να κατανοήσουμε τον εναλλακτικό τρόπο με τον οποίο οι έννοιες των κατανομών και του μετασχηματισμού Fourier χρησιμεύουν στη διατύπωση και ανάλυση του ίδιου προβλήματος. Η επιτυχής έκβαση του παρόντος εγχειρήματος θα καταδείξει και την αποτελεσματικότητα της νέας μεθόδου στην αντιμετώπιση όλων των ομοειδών προβλημάτων.

Αναλυτικότερα, το πρόβλημα που θέλουμε να μελετήσουμε έγκειται στην εύρεση λύσεων της ΔΕΚ

$$\Delta u = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0), \quad (x, y, z), (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3, \quad z, z_0 > 0, \quad (4.1)$$

που σέβονται την ομογενή συνοριακή συνθήκη

$$u(x, y, 0) = 0. \quad (4.2)$$

Ωστόσο, όπως θα φανεί καθαρά και από την ανάλυση αυτού του ΠΣΤ, η συνθήκη (4.2) δεν αρκεί για τον πλήρη καθορισμό των στοιχείων της λύσης. Γι' αυτό θα προσθέσουμε την ακό-

λουθη απαίτηση

$$|u(x, y, z)| \xrightarrow{\sqrt{x^2+y^2+z^2} \rightarrow \infty} 0. \quad (4.3)$$

Η λύση του ΠΣΤ (4.1-3) μπορεί να επιτευχθεί με διάφορους τρόπους. Ένας απ' αυτούς ξεκινάει με την παρατήρηση ότι και οι δυο μεταβλητές  $x, y$  διατρέχουν όλη την πραγματική ευθεία. Αυτή η ιδιότητα υποδεικνύει τον ταυτόχρονο μετασχηματισμό Fourier κι ως προς τις δύο αυτές μεταβλητές.

Μπορούμε, λοιπόν, να υποθέσουμε ότι η άγνωστη συνάρτηση  $u(x, y, z)$  επιδέχεται την ολοκληρωτική αναπαράσταση

$$u(x, y, z) = (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(kx+ly)} \hat{u}(k, l, z) dk dl, \quad (4.4)$$

όπου

$$\hat{u}(k, l, z) := (2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(kx+ly)} u(x, y, z) dx dy, \quad k, l \in \mathbb{R}^2. \quad (4.5)$$

Η αντικατάσταση της (4.4) στην (4.1) οδηγεί στην ΣΔΕ

$$-(k^2 + l^2) \hat{u}(k, l, z) + \hat{u}_{zz}(k, l, z) = (2\pi)^{-1} e^{-i(kx_0+ly_0)} \delta(z - z_0). \quad (4.6)$$

Με την προϋπόθεση, βέβαια, ότι ο τελεστής Laplace επιτρέπεται να περάσει μέσα στο διπλό ολοκλήρωμα της (4.4).

Εναλλακτικά, μπορούμε να ξεκινήσουμε με τον διπλό μετασχηματισμό Fourier της ίδιας της ΔΕΚ:

$$(2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(kx+ly)} \times \{ \Delta u = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \} dx dy \quad (4.7)$$

Το αριστερό μέλος της (4.7) είναι ανάλογο προς το διπλό ολοκλήρωμα

$$I := \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(kx+ly)} (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) dx dy. \quad (4.8)$$

Αν λοιπόν υποθέσουμε ότι, για κάθε  $z > 0$ , διαφορετικό από το  $z_0$ , η  $u(x, y, z)$  είναι μια συνάρτηση των  $x, y$ , κλάσης  $C^2(\mathbb{R}^2)$ , που τόσο η ίδια όσο και οι παράγωγοί της μέχρι δεύτερης τάξης φθίνουν αρκετά γρήγορα καθώς η  $\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$ , τότε μπορούμε να αντικαταστήσουμε το διπλό ολοκλήρωμα στην (4.8) από το αντίστοιχο επάλληλο. Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες, βρίσκουμε ότι

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(kx+ly)} (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) dx dy = \\ -(k^2 + l^2) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(kx+ly)} u dx dy + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(kx+ly)} u_{zz} dx dy. \quad (4.9)$$

Σε τούτο το σημείο, είμαστε και πάλι υποχρεωμένοι να υποθέσουμε ότι το τελευταίο ολοκλήρωμα συγκλίνει ομοιόμορφα, δηλαδή με τρόπο ώστε να ισχύει η ισότητα



$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(kx+ly)} u_{zz} dx dy = \partial_z^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(kx+ly)} u dx dy. \quad (4.10)$$

Με αυτές τις προϋποθέσεις, ο διπλός μετασχηματισμός Fourier της  $\Delta u(x, y, z)$  γίνεται

$$(2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(kx+ly)} \Delta u(x, y, z) dx dy = -(k^2 + l^2) \hat{u}(k, l, z) + \hat{u}_{zz}(k, l, z). \quad (4.11)$$

Από την άλλη, ο κανόνας της (δήθεν) ολοκλήρωσης του δέλτα του Dirac δίνει

$$\int_{\mathbb{R}^2} \delta(x-x_0) \delta(y-y_0) e^{-i(kx+ly)} dx dy = e^{-i(kx_0+ly_0)}. \quad (4.12)$$

Έτσι, ο μετασχηματισμός του δεξιού μέλους της  $\Delta u = \delta(x-x_0)$  οδηγεί στο δεξί μέλος της (4.6) και, άρα, αυτή η εξίσωση είναι η κατάληξη της εναλλακτικής χρήσης του διπλού μετασχηματισμού Fourier.

Σε κάθε περίπτωση, το σημαντικό είναι ότι, στα διαστήματα  $0 < z < z_0$  και  $z > z_0$ , η (4.6) είναι μια ομογενής γραμμική ΣΔΕ δεύτερης τάξης για την  $\hat{u}(k, l, z)$  που λύνεται εύκολα:

$$\hat{u}(k, l, z) = \begin{cases} A e^{mz} + B e^{-mz}, & 0 < z < z_0 \\ C e^{mz} + D e^{-mz}, & z > z_0 \end{cases} \quad (4.13)$$

όπου

$$m := \sqrt{k^2 + l^2} \quad (4.14)$$

Τώρα, από τη συνοριακή συνθήκη  $u(x, y, 0) = 0$  αμέσως έπεται ότι

$$\hat{u}(k, l, 0) = 0. \quad (4.15)$$

Από την άλλη, η συνθήκη (4.3), για την ασυμπτωτική συμπεριφορά της  $u(x, y, z)$  στο όριο  $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \infty$ , συνεπάγεται ότι

$$\hat{u}(k, l, z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0. \quad (4.16)$$

Επιβάλλοντας τις συνθήκες (4.15) και (4.16) στην (4.13), καταλήγουμε στην ακόλουθη μορφή:

$$\hat{u}(k, l, z) = \begin{cases} A (e^{mz} - e^{-mz}), & 0 \leq z < z_0 \\ D e^{-mz}, & z > z_0 \end{cases} \quad (4.17)$$

Μένει λοιπόν να προσδιορίσουμε τους συντελεστές  $A$  και  $D$  κι αυτό γίνεται με τον, γνωστό πλέον, τρόπο: Υποθέτοντας ότι η  $\hat{u}(k, l, z)$  είναι συνεχής και το άλμα που εμφανίζει η παράγωγός της στο σημείο  $z = z_0$  είναι ίσο με τον συντελεστή της  $\delta(z - z_0)$ . Δηλαδή,

$$\hat{u}(k, l, z_0^+) = \hat{u}(k, l, z_0^-) \quad (4.18)$$

και

$$\hat{u}_z(k, l, z_0^+) - \hat{u}_z(k, l, z_0^-) = (2\pi)^{-1} e^{-i(kx_0+ly_0)} \quad (4.19)$$

Σύμφωνα με την (4.17), οι συνθήκες (4.18) και (4.19) ανάγονται στις

$$A (e^{mz_0} - e^{-mz_0}) = D e^{-mz_0}, \quad (4.20)$$

και

$$-m D e^{-m z_0} - m A (e^{m z_0} + e^{-m z_0}) = (2 \pi)^{-1} e^{-i(k x_0 + l y_0)}. \quad (4.21)$$

αντίστοιχα. Άρα,

$$A = -(4 \pi m)^{-1} e^{-m z_0} e^{-i(k x_0 + l y_0)}, \quad (4.22)$$

$$D = -(4 \pi m)^{-1} (e^{m z_0} - e^{-m z_0}) e^{-i(k x_0 + l y_0)}. \quad (4.23)$$

Τελικά, ο μετασχηματισμός Fourier της  $u(x, y, z)$  ως προς τις μεταβλητές  $x, y$  δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$\hat{u}(k, l, z) = \begin{cases} -(4 \pi m)^{-1} e^{-i(k x_0 + l y_0)} (e^{m z} - e^{-m z}) e^{-m z_0}, & 0 \leq z \leq z_0 \\ -(4 \pi m)^{-1} e^{-i(k x_0 + l y_0)} (e^{m z_0} - e^{-m z_0}) e^{-m z}, & z \geq z_0 \end{cases} \quad (4.24)$$

Όταν, λοιπόν, το  $z > z_0$ , τότε

$$u(x, y, z) = -(8 \pi^2)^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(k \tilde{x} + l \tilde{y})} m^{-1} (e^{m z_0} - e^{-m z_0}) e^{-m z} d k d l, \quad (4.25)$$

όπου

$$\tilde{x} := x - x_0, \quad \tilde{y} := y - y_0. \quad (4.26)$$

Για να υπολογίσουμε το τελευταίο ολοκλήρωμα, αρχικά γράφουμε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων  $(k, l)$  και  $(\tilde{x}, \tilde{y})$  στη μορφή

$$k \tilde{x} + l \tilde{y} = m r \cos \theta, \quad r := \sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2}, \quad (4.27)$$

οπότε

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(k \tilde{x} + l \tilde{y})} m^{-1} (e^{m z_0} - e^{-m z_0}) e^{-m z} d k d l \\ &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{i m r \cos \theta} m^{-1} (e^{m z_0} - e^{-m z_0}) e^{-m z} m d m d \theta \\ &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{i m r \cos \theta} (e^{m z_0} - e^{-m z_0}) e^{-m z} d m d \theta. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε την ταυτότητα

$$\int_0^{2\pi} e^{i \rho \cos \theta} d \theta = 2 \pi J_0(\rho), \quad \rho \geq 0, \quad (4.29)$$

όπου  $J_0(\rho)$  η συνάρτηση Bessel πρώτου είδους και μηδενικής τάξης. Άρα, η ολοκλήρωση ως προς τη γωνιακή μεταβλητή δίνει το εξής αποτέλεσμα:

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{i m r \cos \theta} (e^{m z_0} - e^{-m z_0}) e^{-m z} d m d \theta = \\ & 2 \pi \int_0^\infty J_0(m r) (e^{m z_0} - e^{-m z_0}) e^{-m z} d m \\ &= \int_0^\infty J_0(m r) \left[ e^{-m(z-z_0)} - e^{-m(z+z_0)} \right] d m. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Τέλος, από το γνωστό τύπο

$$\int_0^{\infty} J_0(k s) e^{-s} d s = \frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}}, \quad k \geq 0, \quad (4.31)$$

για τον μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης Bessel και με την προφανή αλλαγή της μεταβλητής ολοκλήρωσης βρίσκουμε ότι

$$\int_0^{\infty} J_0(m r) e^{-m \zeta} d m = \frac{1}{\sqrt{r^2 + \zeta^2}}. \quad (4.32)$$

Άρα,

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} J_0(m r) (e^{m z_0} - e^{-m z_0}) e^{-m z} d m &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z - z_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + (z + z_0)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + (z - z_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + (z + z_0)^2}} \end{aligned} \quad (4.33)$$

Τελικά, για  $z > z_0$ ,

$$u(x, y, z) = -\frac{1}{4 \pi} \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_0)^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + z_0)^2}} \right) \quad (4.34)$$

Όταν, από την άλλη, το  $z \in (0, z_0)$ , τότε

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= -(8 \pi^2)^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i[k(x-x_0)+l(y-y_0)]} m^{-1} (e^{m z} - e^{-m z}) e^{-m z_0} d k d l = \\ &= -(8 \pi^2)^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(k \tilde{x} + l \tilde{y})} m^{-1} [e^{-m(z_0-z)} - e^{-m(z+z_0)}] d k d l, \end{aligned} \quad (4.35)$$

οπότε καταλήγουμε και πάλι στην (4.34).

Συμπερασματικά, η λύση του ΠΣΤ (4.1-3) που αναφέρεται ως συνάρτηση Green και συμβολίζεται με  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0)$  δίνεται από την ακόλουθη έκφραση:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}_0) = -\frac{1}{4 \pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|} + \frac{1}{4 \pi |\mathbf{x} + \mathbf{x}_0|}. \quad (4.36)$$

Όπως αναμενόταν, είναι ακριβώς ίδια μ' εκείνη που βρήκαμε και με τη μέθοδο των ειδώλων.

## Ασκήσεις

4.1 α) Να δειχτεί ότι η μέθοδος του μετασχηματισμού Fourier ως προς τη μεταβλητή  $x$  οδηγεί στη μορφή

$$G(x, y | \xi, \eta) = \frac{1}{4 \pi} \ln \left[ \frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{(x-\xi)^2 + (y+\eta)^2} \right]$$

για την συνάρτηση Green της εξίσωσης Laplace στο πάνω ημιεπίπεδο, δηλαδή για τη λύση του ΠΣΤ

$$u_{xx} + u_{yy} = \delta(x - \xi) \delta(y - \eta), \quad x, \xi \in \mathbb{R}, \quad y, \eta > 0,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad u(x, y) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0, \quad r := \sqrt{x^2 + y^2}.$$

β) Να συγκριθεί το προηγούμενο αποτέλεσμα με εκείνο που δίνει η μέθοδος των ειδώλων.

4.2 Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της προηγούμενης άσκησης, δείχτε ότι, η αναπαράσταση

$$u(x, y) = - \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi, 0) \partial_{\eta} G(x, y | \xi, 0) d\xi$$

οδηγεί στον τύπο Poisson

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y f(\xi)}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi,$$

για την λύση του προβλήματος Dirichlet

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad y > 0,$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

4.3 α) Να βρεθεί η λύση της εξίσωσης Laplace,  $u_{(n)}(x, y)$  στην οποία οδηγεί ο τύπος Poisson

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{y f(\xi)}{(x - \xi)^2 + y^2} d\xi, \quad -\infty < x < \infty, \quad y > 0,$$

όταν

$$f(x) = \frac{\sin(nx)}{\pi x}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

β) Να υπολογιστεί και να ερμηνευτεί το όριο της ακολουθίας  $u_{(n)}(x, y)$  καθώς το  $n \rightarrow \infty$ .

4.4 Να δειχτεί ότι η συνάρτηση Green για την άπειρη λωρίδα  $0 < x < a$ ,  $-\infty < y < \infty$ , δίνεται από την έκφραση

$$G(x, y | \xi, \eta) = \frac{1}{4\pi} \ln \left[ \frac{\cos \frac{\pi}{a}(x - \xi) - \cosh \frac{\pi}{a}(y - \eta)}{\cos \frac{\pi}{a}(x + \xi) - \cosh \frac{\pi}{a}(y - \eta)} \right]$$

Υπόδειξη. Να κατασκευαστεί λύση του προβλήματος Dirichlet

$$\Delta u = \delta(x - \xi) \delta(y - \eta), \quad 0 < x, \xi < a, \quad -\infty < y, \eta < \infty,$$

$$u(0, y) = u(a, y) = 0, \quad -\infty < y < \infty,$$

$$|u(x, y)| \rightarrow 0, \quad 0 < x < a, \quad |y| \rightarrow \infty,$$

χρησιμοποιώντας μετασχηματισμό Fourier της διαφορικής εξίσωσης ως προς τη μεταβλητή  $y$ .

4.5 α) Να κατασκευαστούν οι λύσεις  $u(x, y, z)$  της **εξίσωσης (του) Helmholtz**  $\Delta u + k^2 u = 0$ ,  $k > 0$ , που εξαρτιώνται μόνο από τον συνδυασμό  $r := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

β) Να βρεθούν λύσεις του ΠΣΤ

$$\Delta u + k^2 u = \delta(x) \delta(y) \delta(z),$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} u(x, y, z) = 0$$

χρησιμοποιώντας μετασχηματισμό Fourier και ως προς τις τρεις ανεξάρτητες μεταβλητές.

4.6 Να επαναληφθεί η προηγούμενη άσκηση για την **τροποποιημένη εξίσωση (του) Helmholtz**  $\Delta u - k^2 u = 0$ ,  $k > 0$ .

## 5. Θεμελιακές λύσεις εξισώσεων εξέλιξης

Θα κλείσουμε τη μελέτη της σχέσης των γενικευμένων συναρτήσεων ή κατανομών με τις βασικές γραμμικές εξισώσεις της μαθηματικής φυσικής, αναλύοντας τις απλούστερες από τις λεγόμενες εξισώσεις εξέλιξης: Αυτές που συχνά αναφέρονται με τα ονόματα των Fourier και d' Alembert, αντίστοιχα.

Στις εξισώσεις εξέλιξης, μία από τις ανεξάρτητες μεταβλητές, ας την πούμε  $t$ , παριστάνει αυτό που ονομάζουμε χρόνο. Συνεπώς, από φυσική άποψη, ο περιορισμός της μεταβλητής  $t$  σε ένα φραγμένο διάστημα της πραγματικής ευθείας δεν έχει νόημα. Συνακόλουθα, η χωροχρονική περιοχή που υπεισέρχεται στη μελέτη των αντίστοιχων προβλημάτων αρχικών ή και συνοριακών συνθηκών δεν είναι ποτέ φραγμένη.

Βέβαια, το φυσικό αντικείμενο στο οποίο αναφέρεται μια εξίσωση εξέλιξης συνήθως καταλαμβάνει ένα συμπαγές τμήμα του χώρου. Ωστόσο, δεν είναι λίγες οι φορές που και η χωρική περιοχή στην οποία αναφέρεται το φυσικό πρόβλημα είναι, από πρακτική άποψη, άπειρη. Αυτό ισχύει, για παράδειγμα, στα ηχητικά και ηλεκτρομαγνητικά κύματα που διαδίδονται στον "ελεύθερο" χώρο που μας περιβάλλει.

Όταν, λοιπόν, η χρονική ή οι χωρικές μεταβλητές διατρέχουν την πραγματική ευθεία ή ημιευθεία, η χρήση μεθόδων που στηρίζονται στις ιδιοσυναρτήσεις των αντίστοιχων τελεστών οδηγεί αναπόφευκτα σε ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις ή μετασχηματισμούς της άγνωστης συνάρτησης. Τα συγκεκριμένα παραδείγματα που ακολουθούν διευκρινίζουν τη χρήση των μετασχηματισμών Fourier ως προς τις χωρικές μεταβλητές. Ο φιλέρευνος αναγνώστης μπορεί να εξετάσει από μόνος του την εναλλακτική προσέγγιση, που έγκειται στη χρήση του κατάλληλου ολοκληρωτικού μετασχηματισμού ως προς τη χρονική συντεταγμένη,  $t$ .

### 5.1 Η θεμελιακή λύση της εξίσωσης Fourier

Όπως έχουμε αναφέρει και παλιότερα, η εξίσωση της διάχυσης ή της θερμότητας ονομάζεται και εξίσωση (του) Fourier. Το πρόβλημα αρχικών τιμών (ΠΑΤ) γι' αυτή την εξίσωση, όταν η χωρική μεταβλητή,  $x$ , περιορίζεται σε κάποιο φραγμένο διάστημα της μορφής  $[0, a]$ , το έχουμε αναλύσει διεξοδικά. Ας υποθέσουμε τώρα, λοιπόν, ότι μας έχει δοθεί προς επίλυση το ΠΑΤ

$$u_t - u_{xx} = 0, \quad -\infty < x < \infty, t > 0, \quad (5.1)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (5.2)$$

όπου  $f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , μια συνεχής και φραγμένη συνάρτηση. Η τελευταία, παριστάνει, για παράδειγμα, την πυκνότητα που έχει στο σημείο  $x$ , τη χρονική στιγμή  $t = 0$ , κάποιο υλικό, το οποίο έχει διαλυθεί στο ρευστό που βρίσκεται μέσα σ' έναν σωλήνα τεράστιου μήκους,

Ωστόσο, ακόμη κι από πρακτική άποψη, έχει ενδιαφέρον να δούμε τι συμβαίνει όταν, το υλικό που διαχέεται μέσα στο ρευστό του σωλήνα είναι αρχικά συγκεντρωμένο σε κάποιο σημείο. Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι τη χρονική στιγμή  $t = 0$  εισάγουμε στο σημείο

$x = y$  ενός σωλήνα με νερό έναν κόκο αλάτι. Τότε, με βάση όσα έχουμε πει για τις κατανομές, θα πρέπει να θεωρήσουμε ως κατάλληλη αρχική συνθήκη, όχι την (5.2), αλλά την

$$u(x, 0) = \delta(x - y), \quad -\infty < x, y < \infty, \quad (5.3)$$

Από αυτή τη συνθήκη είναι φανερό ότι, πλέον, η  $u(x, t)$  στην εξίσωση (5.1) θα πρέπει να θεωρηθεί ως μια οικογένεια κατανομών,  $\{u\}$ , τα μέλη της οποίας διακρίνονται από τις τιμές της παραμέτρου  $t$ . Καθώς η παράμετρος  $t$  τείνει στο μηδέν, οι κατανομές  $\{u\}$  συγκλίνουν στην κατανομή δέλτα του Dirac, που έχει ως έρεισμα το σημείο  $y \in \mathbb{R}$ .

Θα υποθέσουμε ότι, για κάθε  $t > 0$ , η κατανομή  $u$  είναι ήπια. Όπως θα φανεί στο τέλος της ανάλυσής μας, οι κατανομές  $\{u(x, t)\}$ ,  $t \in (0, \infty)$ , αντιστοιχούν σε συναρτήσεις της κλάσης  $C_{\downarrow}^{\infty}(\mathbb{R})$ , δηλαδή σε ομαλές συναρτήσεις του  $x$  που μηδενίζονται ταχύτερα από κάθε αρνητική δύναμη του  $|x|$ , καθώς το  $|x| \rightarrow \infty$ . Σε κάθε περίπτωση, μπορούμε να υποθέσουμε ότι, ο μετασχηματισμός Fourier της  $u(x, t)$  ως προς τη μεταβλητή  $x$  υπάρχει και, για ευκολία, να θεωρήσουμε πως ορίζεται ως εξής:

$$\hat{u}(k, t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-ikx} dx. \quad (5.4)$$

Με άλλα λόγια, θα χρησιμοποιούμε και για τις κατανομές τον συμβολισμό των συναρτήσεων. Με αυτή την έννοια, ο μετασχηματισμός Fourier της  $\delta(x - y)$  είναι ίσος με

$$\hat{\delta}(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - y) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-iky}. \quad (5.5)$$

Ας υποθέσουμε επιπλέον ότι αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της  $\hat{u}(k, t)$  οδηγεί στην  $u$ :

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k, t) e^{ikx} dk. \quad (5.6)$$

Με άλλα λόγια, υποθέτουμε ότι, για κάθε  $t > 0$ , η άγνωστη (γενικευμένη) συνάρτηση  $u(x, t)$  γράφεται ως υπέρθεση των συναρτήσεων  $\exp(ikx) = \cos kx + i \sin kx$ . Σε αντίθεση με τις  $\exp(ik_n x) = \cos k_n x + i \sin k_n x$  που εμφανίζονται στις σειρές Fourier, η παράμετρος  $k$  δεν περιορίζεται στις διακριτές τιμές  $k_n$ , αλλά διατρέχει όλη την πραγματική ευθεία. Όπως ήδη επισημάναμε, αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι, η αντίστοιχη μεταβλητή  $x$  δεν περιορίζεται σ' ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα του  $\mathbb{R}$ .

Τέλος, θα υποθέσουμε ότι οι τελεστές  $\partial_t$  και  $\partial_x$  επιτρέπεται να περάσουν μέσα στο ολοκλήρωμα που ορίζει την  $u(x, t)$ . Με βάση αυτή την υπόθεση,

$$u_t(x, t) = : \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \partial_t \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k, t) e^{ikx} dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}_t(k, t) e^{ikx} dk, \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, t) &:= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \partial_x^2 \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{u}(k, t) e^{ikx}] dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x^2 [\hat{u}(k, t) e^{ikx}] dk \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} k^2 \hat{u}(k, t) e^{ikx} dk. \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις αναπαράστασεις (5.7) και (5.8) των  $u_t$  και  $u_{xx}$ , αντίστοιχα, στην εξ. (5.1) παίρνουμε το εξής αποτέλεσμα:

$$u_t - u_{xx} = \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{u}_t(k, t) + k^2 \hat{u}(k, t)] e^{ikx} dk = 0. \quad (5.9)$$

Είναι φανερό πως, για να ισχύει η (5.9), αρκεί η  $\hat{u}(k, t)$  να είναι λύση της γραμμικής ΣΔΕ πρώτης τάξης

$$\hat{u}_t(k, t) + k^2 \hat{u}(k, t) = 0. \quad (5.10)$$

Όμως, η τελευταία λύνεται εύκολα για να δώσει

$$\hat{u}(k, t) = C(k) e^{-k^2 t}, \quad t > 0. \quad (5.11)$$

Συνεπώς,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \hat{u}(k, t) = \hat{u}(k, 0) = C(k). \quad (5.12)$$

Από την άλλη, η έκφραση (5.4) για την  $\hat{u}(k, t)$  συνεπάγεται ότι

$$\lim_{t \rightarrow 0} \hat{u}(k, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{t \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-ikx} dx. \quad (5.13)$$

Αν λοιπόν υποθέσουμε ότι

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-ikx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{t \rightarrow 0} u(x, t) e^{-ikx} dx \quad (5.14)$$

και λάβουμε υπόψη τη συνθήκη (5.3), θα καταλήξουμε στο εξής συμπέρασμα:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \hat{u}(k, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y) e^{-ikx} dx. \quad (5.15)$$

Με άλλα λόγια,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \hat{u}(k, t) = \hat{\delta}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-iky}, \quad (5.16)$$

οπότε η (5.11) γίνεται

$$\hat{u}(k, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-k^2 t - ik y}. \quad (5.17)$$

Τέλος, η αντικατάσταση αυτής της έκφρασης για την  $\hat{u}(k, t)$  στην (5.6) δίνει το εξής αποτέλεσμα:



$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k^2 t + ik(x-y)} dk, \quad t > 0. \quad (5.18)$$

Το ολοκλήρωμα που εμφανίζεται στην (5.18) το έχουμε υπολογίσει στο κεφάλαιο των μετασχηματισμών Fourier. Πιο συγκεκριμένα, το παραπάνω ολοκλήρωμα γράφεται και στη μορφή

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iks} e^{-k^2 t} dk, \quad s = y - x. \quad (5.19)$$

Εμείς, λοιπόν, έχουμε δείξει ότι

$$f(x) = e^{-tx^2}, \quad t > 0, \quad \Rightarrow \quad \hat{f}(k) = \frac{e^{-k^2/4t}}{\sqrt{2t}}. \quad (5.20)$$

Άρα,

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-(x-y)^2/4t}. \quad (5.21)$$

Τη συνάρτηση  $u(x, t)$  που ορίζεται στην (5.21) την έχουμε συναντήσει απανηλειμμένα στις σελίδες αυτού του συγγράμματος, αρχίζοντας από το Εδιάφιο IV-3, όπου μελετήσαμε τις συμμετρίες των ΜΔΕ. Τη συναντήσαμε, επίσης, κατά την επίλυση του ΠΑΤ (5.1-2) μέσω μετασχηματισμών Fourier στο Κεφάλαιο VIII. Εκεί, σημειώσαμε πως ονομάζεται θεμελιακή λύση της εξίσωσης της διάχυσης, αλλά και πυρήνας του Gauss, οπότε συμβολίζεται με  $K(x - y, t)$ . Δηλαδή,

$$K(x, t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/4t}. \quad (5.22)$$

Αυτή η συνάρτηση προσονομάζεται πυρήνας, λόγω της θέσης που κατέχει στην ολοκληρωτική αναπαράσταση

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x - y, t) f(y) dy, \quad (5.23)$$

λύσεων της εξίσωσης της διάχυσης στην περιοχή  $t > 0$ .

Αυτή η αναπαράσταση αναδειχνει με σαφήνεια και το ακόλουθο γεγονός: Η λύση που αντιστοιχεί σε μια διασκορπισμένη αρχική μη ομογένεια, η οποία περιγράφεται από τη συνεχή συνάρτηση  $f(x)$ , μπορεί να θεωρηθεί ως αποτέλεσμα της υπέρθεσης των λύσεων που αντιστοιχούν σ' ένα άπειρο σύνολο εντοπισμένων μη ομογενειών. Πιο συγκεκριμένα, σύμφωνα με την ανάλυση που προηγήθηκε, η συνάρτηση  $K(x - y, t) f(y)$  παριστάνει τη λύση της εξίσωσης της διάχυσης που αντιστοιχεί σε αρχική μη ομογένεια της μορφής  $\delta(x - y) f(y)$ . Συνεπώς, η ολοκλήρωση ως προς την παράμετρο  $y$  στον τύπο (5.23) μπορεί να ερμηνευτεί ως άθροιση ανομοιογενειών που είναι εντοπισμένες σε όλα τα σημεία του άξονα  $x$ .

Κλείνουμε την παρουσίαση της θεμελιακής λύσης της εξίσωσης Fourier με δυο επι-

σημάνσεις:

α) Η λύση (5.21) ή (5.22) του ΠΑΤ (5.1-3) έχει όλες τις ιδιότητες που υποθέσαμε στην πορεία προς την κατασκευή της. Ειδικότερα, για κάθε  $t > 0$ , η  $K(x - y, t)$  είναι μια ομαλή συνάρτηση του  $x$  που φθίνει εκθετικά καθώς το  $|x| \rightarrow \infty$ . Επιπλέον, η οικογένεια των ήπιων κατανομών που ορίζεται από τις συναρτήσεις  $K(x - y, t)$ ,  $t > 0$ , συγκλίνει στην κατανομή  $\delta(x - y)$ , καθώς η παράμετρος  $t \rightarrow 0$ . Αυτή τη συμπεριφορά την αποδείξαμε αναλυτικά στο κεφάλαιο των κατανομών.

β) Όταν το πλήθος των χωρικών μεταβλητών είναι  $n$ , η εξίσωση της διάχυσης παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$u_t - \Delta u = 0. \quad (5.24)$$

Συνεπώς, με τον όρο θεμελιακή λύση της εξίσωσης της διάχυσης στις  $n$  χωρικές διαστάσεις, εννοούμε τη λύση της (5.24) που παραμένει φραγμένη καθώς το  $t \rightarrow \infty$  και πληροί την αρχική συνθήκη

$$\lim_{t \searrow 0} u(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n. \quad (5.25)$$

Η κατασκευή αυτού του ΠΑΤ μπορεί να γίνει με τον ίδιο ουσιαστικά τρόπο που αντιμετωπίσαμε την περίπτωση  $n = 1$ . Η μόνη διαφορά έγκειται στη χρήση του μετασχηματισμού Fourier ως προς όλες τις χωρικές μεταβλητές. Τις λεπτομέρειες τις αφήνουμε για άσκηση του αναγνώστη και καταγράφουμε μόνο το αποτέλεσμα, που δεν μπορεί να είναι άλλο από το γνωστό

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^n} K(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad K(\mathbf{x}) := \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|\mathbf{x}|^2/4t}. \quad (5.26)$$

## 5.2 Η συνάρτηση Green για την εξίσωση Fourier

Θεωρούμε τώρα ένα ρευστό που καταλαμβάνει όλο τον φυσικό χώρο και το οποίο δεν περιέχει ούτε ένα μόριο από το υλικό  $Y$ . Τη χρονική στιγμή  $t = t_0$  και στο σημείο  $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$  εγχύεται μια συγκεκριμένη ποσότητα του  $Y$  που αρχίζει αμέσως να διαχέεται προς όλα τα σημεία του χώρου. Τα συγκεκριμένα παραδείγματα αυτής της φυσικής διαδικασίας είναι πάμπολλα. Μπορεί κανείς να θεωρήσει ως ρευστό τον αέρα που μας περιβάλλει και ως  $Y$  το μαύρο σύννεφο που βλέπει ξαφνικά, όταν ακολουθεί ένα ελληνικό ταξί ή λεωφορείο. Η κολώνια που βγαίνει από το στόμιο του δοχείου-ψεκαστή αποτελεί ένα πιο ευχάριστο παράδειγμα.

Σε κάθε περίπτωση, η διαδικασία που περιγράψαμε αντιστοιχεί στο ΠΑΤ

$$u_t(\mathbf{x}, t) - \Delta u(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \delta(t - t_0), \quad \mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n, \quad t, t_0 > 0, \quad (5.27)$$

$$u(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad |u(\mathbf{x}, t)| < \infty, \quad t \rightarrow \infty, \quad (5.28)$$

το οποίο και θα λύσουμε χρησιμοποιώντας μετασχηματισμό Fourier της διαφορικής εξίσωσης ως προς τις χωρικές μεταβλητές.

Υποθέτοντας ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις που αναφέραμε σε προηγούμενα παραδείγματα, συμπεραίνουμε αμέσως ότι, ο μετασχηματισμός Fourier

$$(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \times \{u_t(\mathbf{x}, t) - \Delta u(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \delta(t - t_0)\} d\mathbf{x} \quad (5.29)$$

της εξίσωσης  $u_t - \Delta u = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \delta(t - t_0)$  οδηγεί στην ΣΔΕ

$$\hat{u}_t(\mathbf{k}, t) + k^2 \hat{u}(\mathbf{k}, t) = (2\pi)^{-n/2} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_0} \delta(t - t_0), \quad k := |\mathbf{k}|, \quad t, t_0 > 0. \quad (5.30)$$

Για κάθε  $t \neq t_0$ , αυτή η εξίσωση είναι ομογενής. Συνεπώς,

$$\hat{u}(\mathbf{k}, t) = \begin{cases} A e^{-k^2 t}, & 0 \leq t < t_0 \\ B e^{-k^2 t}, & t > t_0 \end{cases} \quad (5.31)$$

Τώρα, η ΣΔΕ (5.30) για υποδειχνει ότι η  $\hat{u}(\mathbf{k}, t)$  παρουσιάζει αλματική ασυνέχεια στο  $t = t_0$ , ίση προς τον συντελεστή της  $\delta(t - t_0)$ . Δηλαδή,

$$\hat{u}(\mathbf{k}, t_0^+) - \hat{u}(\mathbf{k}, t_0^-) = (2\pi)^{-n/2} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_0}. \quad (5.32)$$

Από την άλλη, ο τύπος

$$\hat{u}(\mathbf{k}, t) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} u(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x} \quad (5.33)$$

για τον μετασχηματισμό Fourier της άγνωστης συνάρτησης  $u(\mathbf{x}, t)$  και η αρχική συνθήκη  $u(\mathbf{x}, 0) = 0$  συνεπάγονται ότι

$$\hat{u}(\mathbf{k}, 0) = 0. \quad (5.34)$$

Από τις (5.32) και (5.34) αμέσως έπεται ότι

$$A = 0, \quad B = (2\pi)^{-n/2} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_0} e^{k^2 t_0}. \quad (5.35)$$

Με αυτό τον τρόπο η λύση (5.31) ανάγεται στην

$$\hat{u}(\mathbf{k}, t) = (2\pi)^{-n/2} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}_0} H(t - t_0) e^{-k^2(t-t_0)}, \quad t_0 > 0, \quad (5.36)$$

όπου  $H(t - t_0) \equiv H_{t_0}(t)$  η κατανομή Heaviside.

Κατά συνέπεια,

$$u(\mathbf{x}, t) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{k} = (2\pi)^{-n} H(t - t_0) \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) - k^2(t-t_0)} d\mathbf{k} \quad (5.37)$$

Όμως, όταν το  $t > 0$ , τότε

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x} - k^2 t} d\mathbf{k} &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(k_1 x_1 + k_2 x_2 + \dots + k_n x_n) - (k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_n^2) t} d k_1 d k_2 \dots d k_n \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i k_1 x_1 - k_1^2 t} d k_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i k_2 x_2 - k_2^2 t} d k_2 \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i k_n x_n - k_n^2 t} d k_n \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}} e^{-x_1^2/4t} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}} e^{-x_2^2/4t} \dots \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}} e^{-x_n^2/4t} = \left(\frac{\pi}{t}\right)^{n/2} e^{-(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)/4t}. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Άρα,

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{H(t-t_0)}{[4\pi(t-t_0)]^{n/2}} e^{-|\mathbf{x}-\mathbf{x}_0|^2/4(t-t_0)} \equiv H(t-t_0) K(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0, t-t_0) \quad (5.39)$$

Η λύση (5.39) αναφέρεται ως **αιτιακή συνάρτηση Green** (causal Green function) της εξίσωσης της διάχυσης στον  $n$ -διάστατο χώρο  $\mathbb{R}^n$ . Η σημασία της αναδειχεται καθαρά στο επόμενο θεώρημα, την απόδειξη του οποίου αναθέτουμε στον αναγνώστη.

**Θεώρημα 5.1**

Αν οι συναρτήσεις  $s(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $t > 0$ , και  $f(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , είναι συνεχείς και φραγμένες, τότε η συνάρτηση

$$u(\mathbf{x}, t) := \int_{\mathbb{R}^n} K(\mathbf{x}-\mathbf{y}, t) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} K(\mathbf{x}-\mathbf{y}, t-\tau) s(\mathbf{y}, \tau) d\mathbf{y} d\tau. \quad (5.40)$$

αποτελεί λύση του ΠΑΤ

$$u_t - \Delta u = s(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \quad (5.41)$$

$$u(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (5.42)$$

**Παρατήρηση.** Μπορεί να δειχτεί ότι η (5.40) ορίζει τη μοναδική φραγμένη λύση του ΠΑΤ (5.41-42).

**5.3 Η θεμελιακή λύση της εξίσωσης d' Alembert**

Η γνωστή εξίσωση που περιγράφει τη διάδοση ηχητικών, ηλεκτρομαγνητικών και άλλου είδους κυμάτων ονομάζεται και εξίσωση (του) d' Alembert. Ως **θεμελιακή λύση** αυτής της εξίσωσης στις  $n$  χωρικές διαστάσεις ορίζεται η λύση του ΠΑΤ

$$u_{tt}(\mathbf{x}, t) - \Delta u(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \quad (5.43)$$

$$u(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad u_t(\mathbf{x}, 0) = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n. \quad (5.44)$$

Στις αμέσως επόμενες γραμμές, θα κατασκευάσουμε αναλυτικά αυτή τη λύση, για τις περιπτώσεις  $n = 1$  και  $n = 3$ , χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του μετασχηματισμού Fourier ως προς τις χωρικές μεταβλητές.

α) Η θεμελιακή λύση της κυματικής εξίσωσης για μία χωρική διάσταση

Όπως στην περίπτωση της εξίσωσης της διάχυσης, ξεκινάμε με την ακόλουθη υπόθεση: Κάθε χρονική στιγμή  $t > 0$ , η γενικευμένη συνάρτηση  $u(x, t)$  επιδέχεται την αναπαράσταση

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k, t) e^{ikx} dk, \quad (5.45)$$

όπου  $\hat{u}(k, t)$  ο μετασχηματισμός Fourier της  $u$  ως προς τη μεταβλητή  $x$ :

$$\hat{u}(k, t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-ikx} dx \quad (5.46)$$

Επιπλέον, υποθέτουμε ότι

$$u_{tt}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \partial_t^2 [\hat{u}(k, t) e^{ikx}] dk, \quad (5.47)$$

$$u_{xx}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \partial_x^2 [\hat{u}(k, t) e^{ikx}] dk. \quad (5.48)$$

Η αντικατάσταση των (5.47) και (5.48) στην  $u_{tt} - u_{xx} = 0$ , οδηγεί στη γραμμική ΣΔΕ δεύτερης τάξης

$$\hat{u}_{tt}(k, t) + k^2 \hat{u}(k, t) = 0. \quad (5.49)$$

Η γενική λύση αυτής της εξίσωσης είναι της μορφής

$$\hat{u}(k, t) = C_1(k) e^{ikt} + C_2(k) e^{-ikt}. \quad (5.50)$$

Για να προσδιορίσουμε τους συντελεστές  $C_1(k)$  και  $C_2(k)$ , χρησιμοποιούμε τις αρχικές συνθήκες (5.44), που ανάγονται στις

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \delta(x - y), \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad (5.51)$$

όταν  $n = 1$ . Από τις (5.51) συμπεραίνουμε ότι

$$\hat{u}(k, 0) = 0 \quad (5.52)$$

$$\hat{u}_t(k, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - y) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-iky}. \quad (5.53)$$

Προφανώς, οι (5.50) και (5.52) συμφωνούν εάν και μόνο όταν  $C_1(k) = -C_2(k)$ . Έτσι, η (5.50) γίνεται

$$\hat{u}(k, t) = C_1(k) (e^{ikt} - e^{-ikt}), \quad (5.54)$$

οπότε,

$$\hat{u}_t(k, t) = ik C_1(k) (e^{ikt} + e^{-ikt}). \quad (5.55)$$

Η τελευταία σχέση οδηγεί στην

$$\hat{u}_t(k, 0) = 2ik C_1(k), \quad (5.56)$$

που, αν συγκριθεί με την (5.53), οδηγεί στο ακόλουθο συμπέρασμα:

$$C_1(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-iky}}{2ik} \quad (5.57)$$

Συνεπώς,

$$\hat{u}(k, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-iky}}{2ik} (e^{ikt} - e^{-ikt}). \quad (5.58)$$

Η αντικατάσταση αυτής της έκφρασης για την  $\hat{u}(k, t)$  στην (5.45) δίνει την

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k} [e^{ik(x-y)} - e^{ik(x+y)}] dk. \quad (5.59)$$

Ισοδύναμα,

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikz} dk, \quad (5.60)$$

όπου  $z = x - y$  και

$$F(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(kt)}{k}. \quad (5.61)$$

Με άλλα λόγια, η  $u(x, t)$  είναι ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της  $F(k)$ . Με βάση αυτή την παρατήρηση, ή χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα για τα ολοκληρώματα (5.59) που δώσαμε στο Κεφάλαιο VIII, καταλήγουμε στο ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$u(x, t) = \begin{cases} 1/2, & |x-y| < t \\ 1/4, & |x-y| = t \\ 0, & |x-y| > t \end{cases} \quad (5.62)$$

Ισοδύναμα,

$$u(x, t) = \frac{1}{4} \{ \operatorname{sgn} [t - (x - y)] + \operatorname{sgn} [t + (x - y)] \}, \quad (5.63)$$

όπου  $\operatorname{sgn}(z)$  το πρόσημο του πραγματικού αριθμού  $z$ . Δηλαδή,

$$\operatorname{sgn}(z) := \begin{cases} -1, & z < 0 \\ 0, & z = 0 \\ 1, & z > 0 \end{cases} \quad (5.64)$$

Σε κάθε περίπτωση, το σημαντικό είναι πως, η συνάρτηση  $u(x, t)$  είναι σταθερή στο εσωτερικό του διαστήματος  $[y-t, y+t]$  και μηδενίζεται στο εξωτερικό του. Αυτό το χαρακτηριστικό συνεπάγεται ότι, πραγματικά, η παράγωγος της αντίστοιχης κατανομής συγκλίνει στην  $\delta(x-y)$ , καθώς το  $t \searrow 0$ .

Για να δώσουμε μια αναλυτική απόδειξη αυτού του γεγονότος, θα μεταφερθούμε προσωρινά στο γενικότερο πλαίσιο της μονοπαραμετρικής οικογένειας κατανομών. Ας υποθέσουμε, λοιπόν, ότι το σύνολο  $\{T_t\}$  αποτελείται από ήπιες κατανομές που διακρίνονται μέσω της τιμής της συνεχούς παραμέτρου  $t$ . Τότε, η παράγωγος των  $T_t$  ως την παράμετρο  $t$  ορίζεται με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\langle \partial_t T_t, \varphi \rangle := \partial_t \langle T_t, \varphi \rangle \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{\langle T_{t+h}, \varphi \rangle - \langle T_t, \varphi \rangle}{h} \right] \quad (5.65)$$

Θεωρούμε, τώρα, την οικογένεια των ήπιων κατανομών που αντιστοιχεί στις συναρτήσεις

$$f_t(x) = \operatorname{sgn}(t-x), \quad t > 0. \quad (5.66)$$

Σημειώστε ότι, στα σύμβολα  $T_t$  και  $f_t$  ο κάτω δείκτης  $t$  δε δηλώνει την μερική παράγωγο. Όπως γνωρίζουμε, η δράση των κατανομών που αντιστοιχούν στην τμηματικά συνεχή συνάρτηση  $f_t(x)$  ορίζεται από τη σχέση

$$\langle f_t, \varphi \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f_t(x) \varphi(x) dx, \quad \varphi \in C_{\downarrow}^{\infty}(\mathbb{R}). \quad (5.67)$$

Άρα,

$$\langle f_t, \varphi \rangle := \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(t-x) \varphi(x) dx. \quad (5.68)$$

Όμως,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}(t-x) \varphi(x) dx &= \int_{-\infty}^t \operatorname{sgn}(t-x) \varphi(x) dx + \int_{-\infty}^t \operatorname{sgn}(t-x) \varphi(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^t \varphi(x) dx - \int_t^{\infty} \varphi(x) dx \end{aligned} \quad (5.69)$$

Συνακόλουθα,

$$\begin{aligned} \langle f_{t+h}, \varphi \rangle &= \left[ \int_{-\infty}^{t+h} \varphi(x) dx - \int_{t+h}^{\infty} \varphi(x) dx \right] - \left[ \int_{-\infty}^t \varphi(x) dx - \int_t^{\infty} \varphi(x) dx \right] \\ &= \int_t^{t+h} \varphi(x) dx + \int_t^{t+h} \varphi(x) dx \end{aligned} \quad (5.70)$$

Κατά συνέπεια,

$$\frac{\langle f_{t+h}, \varphi \rangle - \langle f_t, \varphi \rangle}{h} = \frac{2}{h} \int_t^{t+h} \varphi(x) dx. \quad (5.71)$$

Από το θεώρημα μέσης τιμής για το ολοκλήρωμα Riemann μιας συνεχούς συνάρτησης αμέσως έπεται ότι

$$\frac{1}{h} \int_t^{t+h} \varphi(x) dx = \varphi(t+\zeta), \quad (5.72)$$

όπου το  $\zeta$  ανήκει στο διάστημα  $[0, h]$  ή στο  $[h, 0]$ , ανάλογα με το αν το  $h$  είναι θετικό ή αρνητικό.

Το προηγούμενο αποτέλεσμα οδηγεί στο συμπέρασμα ότι

$$\langle \partial_t f_t, \varphi \rangle := \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{\langle f_{t+h}, \varphi \rangle - \langle f_t, \varphi \rangle}{h} \right] = 2 \varphi(t). \quad (5.73)$$

Δηλαδή,

$$\partial_t f_t = 2 \delta(t). \quad (5.74)$$

Η επανάληψη του προηγούμενου επιχειρήματος για τις κατανομές που αντιστοιχούν στις συναρτήσεις

$$g_{t,y}(x) := \frac{1}{4} \{ \operatorname{sgn}[t - (x - y)] + \operatorname{sgn}[t + (x - y)] \}, \quad (5.75)$$

δείχνει ότι η παράγωγός τους ως προς την παράμετρο  $t$  δίνεται από τη σχέση

$$\partial_t g_{t,y} = \frac{1}{2} [\delta(y+t) + \delta(y-t)]. \quad (5.76)$$

Συνεπώς,

$$\lim_{t \searrow 0} \partial_t g_{t,y} = \delta(y), \quad (5.77)$$

πράγμα που ολοκληρώνει την απόδειξή μας.

Η λύση (5.63) του ΠΑΤ (5.43-44) με  $n = 1$ , την οποία θα γράφουμε στη μορφή

$$G(x-y, t) := \frac{1}{4} \{ \operatorname{sgn} [t - (x-y)] + \operatorname{sgn} [t + (x-y)] \}, \quad (5.78)$$

ονομάζεται **θεμελιακή λύση της μονοδιάστατης κυματικής εξίσωσης**. Από φυσική άποψη, η  $G(x-y, t)$  επιδέχεται την ακόλουθη ερμηνεία: Περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο αλλάζει το σχήμα μιας (άπειρης) τεντωμένης χορδής που, τη χρονική στιγμή  $t = 0$ , δέχτηκε μια ώθηση επικεντρωμένη στο σημείο  $x = y$ .

Συνακόλουθα, το ΠΑΤ

$$u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (5.79)$$

$$u(0, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (5.80)$$

αντιστοιχεί στην περίπτωση που η αρχική ώθηση δεν ήταν εντοπισμένη. Ασκήθηκε σε όλα τα στοιχεία της χορδής, με διαφορετική ένταση στο καθένα και με τρόπο ώστε το στοιχείο που βρισκόταν στο σημείο  $x$  ν' αποκτήσει ταχύτητα  $g(x)$ .

Όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα, η λύση του ΠΑΤ (5.79-80) κατασκευάζεται μέσω της υπέρθεσης λύσεων της μορφής (5.78) που αντιστοιχούν σε όλες τις δυνατές τιμές της παραμέτρου  $y$ :

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y, t) g(y) dy = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(y) dy. \quad (5.81)$$

Από μαθηματική άποψη, η (5.81) σημαίνει ότι η  $u(x, t)$  δίνεται από τη συνέλιξη των συναρτήσεων  $G(x, t)$  και  $g(x)$ .

Η επαλήθευση του γεγονότος ότι η συνάρτηση  $u(x, t)$  που ορίζεται από την (5.81) αποτελεί κλασική λύση του ΠΑΤ (5.79-80), όταν η  $g \in C^1(\mathbb{R})$ , γίνεται σε δυο γραμμές. Γι' αυτό, θα στραφούμε στο γενικότερο ΠΑΤ

$$u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (5.82)$$

$$u(0, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (5.83)$$

Και αυτού, λοιπόν, του ΠΑΤ η λύση κατασκευάζεται με τη βοήθεια της συνάρτησης  $G(x, t)$ . Αναλυτικότερα, ας υποθέσουμε ότι η  $f \in C^2(\mathbb{R})$  κι ας κατασκευάσουμε τη συνάρτηση  $v(x, t)$  με τον ακόλουθο τρόπο:

Εισάγουμε αρχικά την συνάρτηση

$$\tilde{G}(x, t) := \partial_t G(x, t). \quad (5.84)$$

Από το γεγονός ότι η ίδια η  $G(x, t)$  αποτελεί λύση της κυματικής εξίσωσης αμέσως έπεται ότι το



ίδιο ισχύει και για την  $\tilde{G}(x, t)$ :  $\tilde{G}_{tt}(x, t) - \tilde{G}_{xx}(x, t) = 0$ . Από την άλλη οι (5.76) και (5.77) συνεπάγονται ότι

$$\lim_{t \searrow 0} \tilde{G}(x-y, t) = \delta(x-y), \quad \lim_{t \searrow 0} \tilde{G}_t(x-y, t) = 0. \quad (5.85)$$

Αυτό σημαίνει ότι η  $\tilde{G}(x-y, t)$  αποτελεί λύση του ΠΑΤ

$$u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \quad (5.86)$$

$$u(x, 0) = \delta(x-y), \quad u_t(x, 0) = 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (5.87)$$

Συνεπώς, η συνάρτηση

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \partial_t G(x-y, t) f(y) dy + \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y, t) g(y) dy \\ &= \frac{1}{2} \left[ f(x+t) + f(x-t) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(y) dy \right] \end{aligned} \quad (5.88)$$

δίνει τη λύση του γενικότερου ΠΑΤ (5.82-83).

Προφανώς, η (5.88) δεν είναι παρά ο γνωστός μας τύπος του d' Alembert. Η αναπαγωγή του, με το τρόπο που δείξαμε παραπάνω, στόχευε στο να φανεί μέσα από ένα συγκεκριμένο παράδειγμα ο λόγος για τον οποίο η λύση  $G(x-y, t)$  ονομάζεται θεμελιακή: Αρκεί για την κατασκευή λύσεων όλων των άλλων ΠΑΤ που αφορούν την ομογενή κυματική εξίσωση.

### β) Η θεμελιακή λύσης της κυματικής εξίσωσης στον τρισδιάστατο χώρο

Όσο αφορά το ΠΑΤ (5.43-44) για την κυματική εξίσωση στις  $n > 1$  διαστάσεις, η λύση του επιτυγχάνεται με τον ίδιο, ουσιαστικά, τρόπο που χρησιμοποιήσαμε για την περίπτωση  $n = 1$ . Συγκεκριμένα, ο μετασχηματισμός Fourier της  $u(\mathbf{x}, t)$  ως προς τις χωρικές μεταβλητές ορίζεται από το  $n$ -πλό ολοκλήρωμα

$$\hat{u}(\mathbf{k}, t) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} u(\mathbf{x}, t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}, \quad (5.89)$$

όπου  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$  το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων  $\mathbf{k}$  και  $\mathbf{x}$ . Αν υποθέσουμε ότι, για κάθε  $t > 0$ , η συνάρτηση  $u(\mathbf{x}, t)$  είναι ομαλή και φθίνει γρήγορα καθώς το  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ , τότε

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{k}. \quad (5.90)$$

Επιπλέον, τα  $n$ -πλά ολοκλήρωματα στις (5.89) και (5.90) μπορεί ν' αντικατασταθούν από  $n$  επάλληλα ολοκληρώματα.

Η αντικατάσταση της (5.90) στην κυματική εξίσωση (5.43) οδηγεί στη γραμμική ΣΔΕ

$$\hat{u}_{tt}(\mathbf{k}, t) + k^2 \hat{u}(\mathbf{k}, t) = 0, \quad (5.91)$$

όπου

$$k^2 \equiv |\mathbf{k}|^2 := k_1^2 + k_2^2 + \dots + k_n^2. \quad (5.92)$$

Αυτή είναι ίδια με την (5.49) και, άρα, η γενική λύση της είναι της μορφής

$$\hat{u}(\mathbf{k}, t) = C_1(\mathbf{k}) e^{i k t} + C_2(\mathbf{k}) e^{-i k t}. \quad (5.93)$$

Η αρχική συνθήκη  $u(\mathbf{x}, 0) = 0$  συνεπάγεται ότι  $C_2(\mathbf{k}) = -C_1(\mathbf{k})$ . Άρα,

$$\hat{u}(\mathbf{k}, t) = C_1(\mathbf{k}) (e^{i k t} - e^{-i k t}). \quad (5.94)$$

Από την άλλη,

$$\hat{\delta}(\mathbf{k}) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) e^{-i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d \mathbf{x} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-i \mathbf{k} \cdot \mathbf{y}}. \quad (5.95)$$

Έτσι, η αρχική συνθήκη  $u_t(\mathbf{x}, 0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$  μετατρέπεται στην

$$\hat{u}_t(\mathbf{k}, 0) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-i \mathbf{k} \cdot \mathbf{y}}. \quad (5.96)$$

Αλλά, από την (5.93) έπεται ότι

$$\hat{u}_t(\mathbf{k}, t) = i k C_1(\mathbf{k}) (e^{i k t} + e^{-i k t}). \quad (5.97)$$

Συνεπώς, η συνθήκη (5.96) γίνεται

$$2 i k C_1(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-i \mathbf{k} \cdot \mathbf{y}}. \quad (5.98)$$

Συνακόλουθα,

$$\hat{u}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-i \mathbf{k} \cdot \mathbf{y}} \frac{\sin k t}{k}. \quad (5.99)$$

Αντιστρέφοντας τον μετασχηματισμό Fourier  $\hat{u}(\mathbf{k}, t)$  της  $u(\mathbf{x}, t)$  που μόλις υπολογίσαμε, καταλήγουμε στον τύπο

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\sin k t}{k} e^{i \mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} d \mathbf{k}. \quad (5.100)$$

Όμως,

$$\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) = k r \cos \theta, \quad (5.101)$$

όπου  $r := |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$  και  $\theta$  η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα  $\mathbf{k}$  και  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ . Έτσι, ο τύπος (5.100) γράφεται στη μορφή

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\sin k t}{k} e^{i k r \cos \theta} d \mathbf{k}. \quad (5.102)$$

Αυτή η μορφή υποδείχνει την εισαγωγή σφαιρικών συντεταγμένων στον  $\mathbb{R}^n$ . Στην πιο οικεία περίπτωση, αυτή του  $\mathbb{R}^3$ , η (5.102) μετατρέπεται στην

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin kt}{k} e^{ikr \cos \theta} k^2 \sin \theta d\theta d\varphi dk. \quad (5.103)$$

Θέτοντας  $z = \cos \theta$ , εύκολα βρίσκουμε ότι

$$\int_0^\pi e^{ikr \cos \theta} \sin \theta d\theta = - \int_1^{-1} e^{ikrz} dz = \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{ikr}. \quad (5.104)$$

Συνεπώς,

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \sin kt \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{ir} dk. \quad (5.105)$$

Το δεξί μέλος της (5.105) είναι άρτιο ως προς τη μεταβλητή  $k$ . Άρα,

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \sin kt \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{ir} dk. \quad (5.106)$$

Ισοδύναμα,

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ikt} - e^{-ikt}}{2i} \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{ir} dk \\ &= -\frac{1}{4r} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^\infty [e^{ik(t+r)} - e^{ik(t-r)} - e^{-ik(t-r)} + e^{-ik(t+r)}] dk \end{aligned} \quad (5.107)$$

Η αλλαγή μεταβλητής  $k \rightarrow -k$  δεν επηρεάζει τα τελευταία ολοκληρώματα. Συνεπώς,

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2r} \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^\infty [e^{-ik(t-r)} - e^{-ik(t+r)}] dk. \quad (5.108)$$

Είναι προφανές ότι τα ολοκληρώματα στο δεξί μέλος της (5.108) δεν συγκλίνουν. Ωστόσο, μπορεί να ερμηνευτούν ως κατανομές δέλτα. Ο "μπακάλικος" τρόπος για να καταλήξει κανείς σ' αυτό το συμπέρασμα είναι ο εξής: Αφού ο μετασχηματισμός Fourier της  $\delta(x-y)$  δίνεται από τη συνάρτηση

$$\hat{\delta}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{-ikx} \delta(x-y) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-iky}, \quad (5.109)$$

ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της  $\hat{\delta}(k)$  πρέπει να θεωρηθεί πως δίνει την  $\delta(x-y)$ :

$$\begin{aligned} \delta(x-y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{ikx} \hat{f}(k) dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty e^{ikx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-iky} dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty e^{ik(x-y)} dk. \end{aligned} \quad (5.110)$$

Αφήνοντας στον αναγνώστη το καθήκον να δώσει μια αυστηρότερη αιτιολόγηση αυτού του συμπεράσματος, γράφουμε την (5.108) στη μορφή

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi r} [\delta(t-r) - \delta(t+r)] \quad (5.111)$$

για να παρατηρήσουμε τα εξής: Από τον ορισμό της, η ποσότητα  $r$  είναι μη αρνητική. Άρα, στην περιοχή  $t > 0$  το  $\delta(t+r)$  μηδενίζεται. Συνεπώς, στην περίπτωση που μελετάμε, η (5.111) ανάγεται στην

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi r} \delta(t-r), \quad t > 0. \quad (5.112)$$

Η γενικευμένη συνάρτηση (κατανομή) που ορίζεται από την (5.112) ονομάζεται **θεμελιακή λύση της κυματικής εξίσωσης στον  $\mathbb{R}^3$**  και συνήθως συμβολίζεται με  $G(\mathbf{x}-\mathbf{y}, t)$ . Με άλλα λόγια,

$$G(\mathbf{x}-\mathbf{y}, t) := \frac{1}{4\pi |\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \delta(t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|), \quad t > 0. \quad (5.113)$$

Το όνομά της το οφείλει στο ακόλουθο γεγονός: Με βάση τις προηγούμενες επισημάνσεις, αναμένουμε ότι, η λύση του ΠΑΤ

$$u_{tt}(\mathbf{x}, t) - \Delta u(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0, \quad (5.114)$$

$$u(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad u_t(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad (5.115)$$

όπου  $f(\mathbf{x})$  ομαλή συνάρτηση που φθίνει γρήγορα καθώς το  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ , δίνεται από τον τύπο

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} G(\mathbf{x}-\mathbf{y}, t) g(\mathbf{y}) d\mathbf{y}. \quad (5.116)$$

Αυτό το γεγονός επαληθεύεται πολύ εύκολα. Μάλιστα, το επιχείρημα που παρουσιάσαμε στην μονοδιάστατη περίπτωση οδηγεί αμέσως στο ακόλουθο συμπέρασμα: Η λύση της κυματικής εξίσωσης (5.114) για τις γενικότερες αρχικές συνθήκες

$$u(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x}), \quad u_t(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3, \quad (5.117)$$

όπου  $f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x})$  ομαλές συναρτήσεις που φθίνουν γρήγορα καθώς το  $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$  δίνεται από τον τύπο

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} [\partial_t G(\mathbf{x}-\mathbf{y}, t) f(\mathbf{y}) + G(\mathbf{x}-\mathbf{y}, t) g(\mathbf{y})] d\mathbf{y}. \quad (5.118)$$

γ) Η θεμελιακή λύση της κυματικής εξίσωσης στο επίπεδο

Στην περίπτωση που το  $n = 2$ , ο τύπος (5.102) ανάγεται στον

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \sin kt e^{i k r \cos \theta} d\theta dk. \quad (5.119)$$

Επειδή ο υπολογισμός αυτού του ολοκληρώματος δεν είναι τόσο απλός, αλλά και για ιστορικούς λόγους, θα κατασκευάσουμε τη θεμελιακή λύση της κυματικής εξίσωσης στο επίπεδο, χρησιμοποιώντας το τέχνασμα που επινόησε ο Hadamard (Ανταμάρ). Το βασικό στοιχείο αυτού

του τεχνάσματος είναι πως οδηγεί στη λύση για  $n = 2$  ξεκινώντας από εκείνη για  $n = 3$ . Επειδή ακριβώς μειώνει την χωρική διάσταση από τρία σε δύο, αυτή η τεχνική αναφέρεται ως **μέθοδος της καθόδου του Hadamard**.

Ας θεωρήσουμε, λοιπόν, την λύση (5.117) και, αντιστρέφοντας τους ρόλους των μεταβλητών  $x$  και  $y$ , ας την γράψουμε στη μορφή

$$u(\mathbf{y}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|} \delta(t-|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (5.120)$$

Για ευκολία επιλέγουμε το  $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ . Επιπλέον, υποθέτουμε ότι η συνάρτηση  $g(\mathbf{x})$  είναι ανεξάρτητη από την μεταβλητή  $z$  του Καρτεσιανού συστήματος  $x y z$ . Έτσι, η (5.120) γίνεται

$$u(\mathbf{0}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} \delta(t-|\mathbf{x}|) g(x, y) dx dy dz. \quad (5.121)$$

Λόγω της  $\delta(t-|\mathbf{x}|)$ , το ολοκλήρωμα στην (5.122) είναι στην πραγματικότητα επιφανειακό. Δηλαδή, η ολοκλήρωση γίνεται πάνω στη σφαιρική επιφάνεια του  $\mathbb{R}^3$  που ορίζεται από τη συνθήκη  $|\mathbf{x}| = t$ . Συνεπώς, μπορούμε να υπολογίσουμε το παραπάνω ολοκλήρωμα τμηματικά.

Αναλυτικότερα, το πάνω μέρος της επιφάνειας  $(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} = t$  ορίζεται από τη σχέση  $z = (t^2 - x^2 - y^2)^{1/2}$ . Αντίστοιχα, στο κάτω τμήμα, το  $z = -(t^2 - x^2 - y^2)^{1/2}$ . Συνακόλουθα, το στοιχείο εμβαδού της σφαιρικής επιφάνειας  $|\mathbf{x}| = t$  είναι και στις δύο περιπτώσεις ίσο με

$$dS = \frac{t}{\sqrt{t^2 - x^2 - y^2}} dx dy. \quad (5.122)$$

Συνεπώς, η (5.121) ανάγεται στην

$$u(\mathbf{0}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\sqrt{x^2+y^2} \leq t} \frac{1}{\sqrt{t^2 - x^2 - y^2}} g(x, y) dx dy. \quad (5.123)$$

Η μετάθεση του κέντρου της σφαιρικής επιφάνειας από το σημείο  $\mathbf{y} = \mathbf{0} \equiv (0, 0, 0)$  στο τυχαίο  $\mathbf{y}_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$  δεν επηρεάζει καθόλου το αποτέλεσμα (5.123). Γιατί, τα δύο τμήματα της νέας επιφάνειας ορίζονται από τις σχέσεις  $z - z_0 = \pm [t^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2]^{1/2}$ . Απλώς, η έκφραση (5.123) για το στοιχείο εμβαδού μετατρέπεται στην

$$dS = \frac{t}{\sqrt{t^2 - r^2}} dx dy, \quad r := \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}. \quad (5.124)$$

Συνακόλουθα η (5.124) μετατρέπεται στην

$$u(x_0, y_0, z_0, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{r \leq t} \frac{1}{\sqrt{t^2 - r^2}} g(x, y) dx dy. \quad (5.125)$$

Προφανώς, το δεξί μέλος αυτής της σχέσης είναι ανεξάρτητο από το  $z_0$ . Με άλλα λόγια, όταν η συνάρτηση  $g(\mathbf{x})$  στη λύση για τον  $\mathbb{R}^3$  είναι ανεξάρτητη από μια από τις τρεις μεταβλητές το ίδιο ισχύει και για την  $u$ .

Επιστρέφοντας στον αρχικό συμβολισμό, γράφουμε την (5.125) στη μορφή

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}|\leq t} \frac{1}{\sqrt{t^2 - |\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}} g(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0, \quad (5.126)$$

Αν παρατηρήσουμε ότι ο περιορισμός  $|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \leq t$  στην περιοχή ολοκλήρωσης μπορεί να αντικατασταθεί από έναν παράγοντα  $H(t - |\mathbf{x}-\mathbf{y}|)$  στην προς ολοκλήρωση συνάρτηση, θα δούμε αμέσως ότι η λύση (5.126) γράφεται και σαν

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^2} G(\mathbf{x}-\mathbf{y}, t) g(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0, \quad (5.127)$$

όπου

$$G(\mathbf{x}-\mathbf{y}, t) := \frac{1}{2\pi} \frac{H(t - |\mathbf{x}-\mathbf{y}|)}{\sqrt{t^2 - |\mathbf{x}-\mathbf{y}|^2}}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0. \quad (5.128)$$

Υπενθυμίζουμε, τώρα, ότι η  $u(\mathbf{x}, t)$  που ορίζεται στην (5.127) αποτελεί λύση του ΠΑΤ

$$u_{tt}(\mathbf{x}, t) - \Delta u(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0, \quad (5.129)$$

$$u(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad u_t(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2. \quad (5.130)$$

Συνεπώς, η κατανομή  $G(\mathbf{x}-\mathbf{y}, t)$  που ορίζεται στην (5.129) αποτελεί λύση της κυματικής εξίσωσης στον  $\mathbb{R}^2$  για τις αρχικές συνθήκες

$$u(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad u_t(\mathbf{x}, 0) = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2. \quad (5.131)$$

Είναι αυτή που ονομάζεται η **θεμελιακή λύση της κυματικής εξίσωσης στο επίπεδο**.

### 5.4 Η αρχή του Huyghens

Όπως έχουμε σημειώσει, η θεμελιακή λύση,  $G(\mathbf{x}-\mathbf{y}, t)$ , της κυματικής εξίσωσης, δηλαδή η λύση του ΠΑΤ

$$u_{tt}(\mathbf{x}, t) - \Delta u(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \quad (5.132)$$

$$u(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad u_t(\mathbf{x}, 0) = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \quad (5.133)$$

επιδέχεται (και) την ακόλουθη φυσική ερμηνεία: Όταν το  $n = 1, 2$  ή  $3$ , η  $G(\mathbf{x}-\mathbf{y}, t)$  περιγράφει το αποτέλεσμα της διατάραξης ενός ελαστικού μέσου ή ρευστού, η οποία λαβαίνει χώρα στο σημείο  $\mathbf{y}$  τη χρονική στιγμή  $t = 0$ . Ακριβέστερα, η  $G(\mathbf{x}-\mathbf{y}, t)$  προσδιορίζει την ένταση της διαταραχής στο τυχαίο χωρο-χρονικό σημείο  $(\mathbf{x}, t)$ . Όταν η κυματική εξίσωση χρησιμοποιείται για να περιγράψει την εξέλιξη των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων, το  $(\mathbf{x}, t)$  δηλώνει το σημείο του χώρου και τη χρονική στιγμή που η κατάλληλη συσκευή καταγράφει ή μετράει την ένταση

του κύματος. Αυτή η συσκευή αναφέρεται ως *δέκτης* ή *παρατηρητής*, ενώ εκείνη που προκάλεσε το ηλεκτρομαγνητικό κύμα λέγεται *πομπός*.

Για να δούμε αναλυτικότερα κάποια χαρακτηριστικά της διάδοσης των κυμάτων που αναφέραμε, θα υποθέσουμε ότι το  $y = \mathbf{0}$ . Αυτή η υπόθεση δε μειώνει καθόλου τη γενικότητα της ανάλυσής μας, γιατί η θεμελιακή λύση είναι αναλλοίωτη ως προς τις μεταθέσεις στο χώρο. Απλώς σημαίνει ότι επιλέξαμε ως αρχή των Καρτεσιανών αξόνων το σημείο στο οποίο διαταράχτηκε αρχικά το ελαστικό σώμα ή το ρευστό που μας ενδιαφέρει, ή το σημείο στο οποίο βρισκόταν ο πομπός που ηλεκτρομαγνητικού σήματος. Με την επιλογή  $y = \mathbf{0}$ , η θεμελιακή λύση γίνεται

$$G(x, t) = \begin{cases} 1/2, & |x| < t \\ 1/4, & |x| = t \\ 0, & |x| > t \end{cases} \quad (5.134)$$

$$G(x, t) := \frac{1}{2\pi} \frac{H(t - |x|)}{\sqrt{t^2 - |x|^2}}, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0. \quad (5.135)$$

ή,

$$G(x, t) = \frac{1}{4\pi|x|} \delta(t - |x|), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0. \quad (5.136)$$

όταν,  $n = 1, 2$  ή  $3$ , αντίστοιχα.

Αμέσως βλέπουμε, λοιπόν, ότι οι τρεις παραπάνω λύσεις έχουν το εξής κοινό χαρακτηριστικό: Στο σημείο  $x \neq \mathbf{0}$ , η  $G(x, t) = 0$  καθ' όλο το χρονικό διάστημα  $0 \leq t < |x|$ . Αυτό σημαίνει ότι, η διαταραχή του μέσου ή σώματος που προκαλέσαμε στο σημείο  $x = \mathbf{0}$  τη στιγμή που το χρονόμετρό μας έλεγε  $t = 0$  γίνεται αισθητή στο σημείο  $x \neq \mathbf{0}$  με καθυστέρηση. Ακριβέστερα, για να φτάσει στο  $x \neq \mathbf{0}$ , το κύμα χρειάζεται  $t = |x|$  μονάδες χρόνου. Με άλλα λόγια, η διαταραχή κινείται με σταθερή ταχύτητα  $v = |x|/t = 1$ . Βέβαια, η τιμή της ταχύτητας εξαρτιέται από τη μορφή στην οποία έχουμε γράψει την κυματική εξίσωση. Η μορφή  $u_{tt} = \Delta u$  αντιστοιχεί στην περίπτωση που τα χρονικά διαστήματα εκφράζονται σε μονάδες μήκους. Στις μονάδες που συνήθως μετράμε τα χρονικά διαστήματα (γ.π. sec), η κυματική εξίσωση πρέπει να γράφεται στη μορφή  $u_{tt} = c^2 \Delta u$ , όπου  $c$  μια θετική σταθερή. Τότε, η ταχύτητα με την οποία κινείται η διαταραχή είναι ίση με  $c$  (γ.π m/sec).

Σε αντίθεση με την ταχύτητα, η διάρκεια και η ένταση της διαταραχής στο σημείο  $x \neq \mathbf{0}$  διαφέρουν σημαντικά, ανάλογα με τη διάσταση του μέσου ή του σώματος στο οποίο διαδίδεται. Αν αυτό είναι μονοδιάστατο, τότε η διαταραχή στο σημείο  $x \neq \mathbf{0}$  είναι ... αιώνια και με σταθερή ένταση. Γιατί, σύμφωνα με την (5.134), η  $G(x, t) = 1/2$  σε όλο το χρονικό διάστημα  $|x| < t < \infty$ .

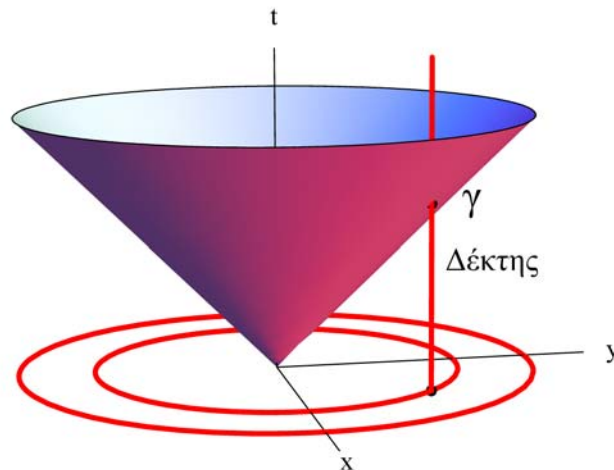
Το ίδιο ισχύει, ως προς τη διάρκεια, κι όταν το μέσο διάδοσης είναι δισδιάστατο. Όμως, η ένταση της διαταραχής μειώνεται συνεχώς. Αυτό συνάγεται από την (5.135), σύμφωνα με την οποία, κατά το χρονικό διάστημα  $|x| < t < \infty$ , η ένταση της διαταραχής στο σημείο  $x \neq \mathbf{0}$  είναι ίση με  $G(x, t) = 1/2\pi \sqrt{t^2 - |x|^2}$ . Όταν το  $t \gg |x|$ , η  $G(x, t) \sim 1/2\pi t$ , πράγμα που

σημαίνει ότι, μετά από αρκετά μεγάλο χρονικό διάστημα, η ένταση της διαταραχής στο σημείο  $x \neq 0$  είναι πάρα πολύ μικρή.

Τα πράγματα αλλάζουν ριζικά, όταν το μέσο διάδοσης της διαταραχής είναι τρισδιάστατο. Τότε, η διαταραχή στο σημείο  $x \neq 0$  είναι στιγμιαία. Αυτό οφείλεται στον παράγοντα  $\delta(t - |x|)$  στην (5.136) που σημαίνει ότι  $G(x, t) = 0$  για κάθε  $t \neq |x|$ .

Το σύνολο των σημείων στα οποία έχει φτάσει η διαταραχή τη χρονική στιγμή  $t$ , ονομάζεται **μέτωπο του κύματος**. Προφανώς, όταν το  $n = 1$ , το μέτωπο του κύματος αποτελείται από δύο σημεία, τα  $x = \pm ct$ . Στις περιπτώσεις  $n = 2$  και  $n = 3$ , το μέτωπο του κύματος είναι ένας κύκλος και μια σφαιρική επιφάνεια, αντίστοιχα. Αφού το μέτωπο κινείται με ταχύτητα  $c$ , η ακτίνα του κύκλου ή της σφαιρικής επιφάνειας μεγαλώνει με την ίδια ταχύτητα. Με βάση τις προηγούμενες παρατηρήσεις μας, όταν το  $n = 1$ , η διαταραχή έχει σταθερή ένταση σε όλο το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία του μετώπου. Στις δύο διαστάσεις, η ένταση δεν είναι σταθερή, αλλά παραμένει μη μηδενική στο εσωτερικό του μετώπου. Αντίθετα, όταν το  $n = 3$ , στο εσωτερικό του μετώπου, η διαταραχή είναι μηδενική. Σ' αυτή την περίπτωση, το μέτωπο μοιάζει μ' ένα κενό κέλυφος.

Η διάδοση της διαταραχής που προκλήθηκε στο σημείο  $(x, y) = (0, 0)$  ενός σώματος ή ρευστού τη χρονική στιγμή  $t = 0$  αναπαριστάται στο Σχ. 5.1. Το σχήμα αντιστοιχεί στην περίπτωση που το σώμα ή ρευστό θεωρείται πως έχει δύο μόνο διαστάσεις. Ωστόσο, μπορεί να θεωρηθεί ως πιστή αναπαράσταση της διάδοσης ενός κύματος και στις τρεις διαστάσεις. Σ' αυτή την περίπτωση, θεωρούμε ότι μία από τις χωρικές διαστάσεις έχει παραληφθεί, οπότε οι κύκλοι παριστάνουν σφαιρικές επιφάνειες. Στο πλαίσιο της Ειδικής Θεωρίας της Σχετικότητας, η κωνική επιφάνεια του σχήματος ονομάζεται **κώνος φωτός**.



**Σχ. 5.1** Η διάδοση του σήματος που εκπέμπεται τη χρονική στιγμή  $t = 0$  από το σημείο  $(x, y) = (0, 0)$ . Οι δύο κύκλοι στο επίπεδο  $x y$  παριστάνουν το μέτωπο του κύματος σε δύο χρονικές στιγμές  $t_1$  και  $t_2 > t_1$ . Η  $t_1$  είναι η στιγμή που το μέτωπο περνάει από τον δέκτη, ο οποίος ακινητεί στο σημείο  $(x_1, y_1)$ . Αυτό το γεγονός αντιστοιχεί στο χωροχρονικό σημείο  $\gamma = (x_1, y_1, t_1)$ . Ο κώνος παριστάνει το σύνολο των σημείων που το μέτωπο σαρώνει στον τρισδιάστατο χωρόχρονο. Η κατακόρυφη γραμμή διέρχεται από το  $\gamma$  ονομάζεται **κοσμική καμπύλη** του δέκτη.



Τα χαρακτηριστικά της διάδοσης ενός ηχητικού, ηλεκτρομαγνητικού ή άλλου είδους κύματος στις δύο και τρεις διαστάσεις που βρήκαμε ισχύουν για κάθε  $n \geq 2$ . Ειδικότερα, το φαινόμενο ότι η ένταση του κύματος στο σημείο  $\mathbf{x}$  όπου βρίσκεται ο δέκτης είναι μη μηδενική και μετά την διέλευση του μετώπου χαρακτηρίζει εμφανίζεται σε όλους τους χώρους με άρτια διάσταση. Αντίθετα, όταν η διάσταση του χώρου είναι περιττή, ο δέκτης καταγράφει μη μηδενικό σήμα μόνο τη στιγμή που το μέτωπο του κύματος περνάει από τη θέση του. Αυτή η διαφορά των άρτιων διαστάσεων από τις περιττές ως προς τη διάρκεια της διαταραχής στον δέκτη ονομάζεται *αρχή του Hueghens*.

Το γεγονός ότι η διαταραχή στη θέση ενός δέκτη ή παρατηρητή "κρατάει" και μετά τη διέλευση του μετώπου του κύματος αποδίδεται με τη φράση "τα κύματα στις άρτιες διαστάσεις έχουν ουρά". Με τη σειρά της, η μη ύπαρξη ουράς στις περιττές διαστάσεις και ειδικότερα στις τρεις διαστάσεις περιγράφεται γραφικά με τη φράση "ο χώρος μας είναι τρισδιάστατος για καλή ακρόαση". Γιατί, η απουσία ουράς όταν το  $n = 3$  οδηγεί στην ευκρίνεια του ακουστικού ερεθίσματος: Το τύμπανο του αυτιού του ακροατή δεν διαταράσσεται, μόνο όσο περνάει από τη θέση του το ηχητικό κύμα που προκάλεσε η πηγή. Διαφορετικά, το αυτί του ακροατή θα "βούιζε" και μετά τη διέλευση του κύματος.

### 5.5 Η συνάρτηση Green για την εξίσωση d' Alembert

Επιστρέφοντας στην εκπομπή φωτός από μια πυγολαμπίδα, θυμίζουμε ότι αυτό το φαινόμενο και άλλα παρόμοια περιγράφονται από την μη ομογενή κυματική εξίσωση, στην ακόλουθη μορφή: Ο όρος εξαναγκασμού, που αντιστοιχεί στην πηγή του κύματος, είναι μηδενικός σε κάθε  $(\mathbf{x}, t)$  διαφορετικό από το χωρο-χρονικό σημείο  $(\mathbf{x}_0, t_0)$ , το οποίο προσδιορίζει το που και πότε έλαβε χώρα η έκλαμψη ή, γενικότερα, η εκπομπή του κύματος.

Αν υποθέσουμε ότι, πριν από την εκπομπή, η συνάρτηση  $u(\mathbf{x}, t)$  η οποία περιγράφει τη φυσική ποσότητα που μας ενδιαφέρει ήταν παντού μηδενική, τότε η διάδοση του παραγόμενου κύματος αντιστοιχεί στο ΠΑΤ

$$u_{tt}(\mathbf{x}, t) - \Delta u(\mathbf{x}, t) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, t - t_0), \quad \mathbf{x}, \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n, \quad t, t_0 > 0, \quad (5.137)$$

$$u(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad u_t(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (5.138)$$

Η επίλυση αυτού του προβλήματος μπορεί να γίνει ακολουθώντας κατά γράμμα την διαδικασία του μετασχηματισμού Fourier της  $u(\mathbf{x}, t)$  ως προς τις χωρικές συντεταγμένες, την οποία παρουσιάσαμε αναλυτικά στην περίπτωση της εξίσωσης της διάχυσης και όχι μόνο. Από την άλλη, οι ενδιάμεσοι υπολογισμοί οδηγούν σε ολοκληρώματα τα οποία αναλύσαμε στο προηγούμενο υπεδάφιο. Αυτό φαίνεται καθαρά και από το τελικό αποτέλεσμα, που έχει την ακόλουθη μορφή:

$$u(\mathbf{x}, t) = G(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0, t - t_0). \quad (5.139)$$

Σ' αυτή τη σχέση, με  $G(\mathbf{x}, t)$  εννοούμε τη θεμελιακή λύση της κυματικής εξίσωσης που βρήκαμε παραπάνω και της οποίας η ακριβής μορφή εξαρτιέται από τη διάσταση του χώρου  $\mathbb{R}^n$ .

Συνδυάζοντας το αποτέλεσμα (5.139) με τις ιδιότητες που έχει η θεμελιακή λύση από την κατασκευή της, καταλήγουμε στο ακόλουθο συμπέρασμα: Η λύση του τελείως μη ομογενούς ΠΑΤ της κυματικής εξίσωσης στον Ευκλείδειο χώρο  $\mathbb{R}^n$  θα πρέπει να παριγράφεται από το

**Θεώρημα 5.2**

Αν οι συναρτήσεις  $s(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \geq 0$ , και  $f(\mathbf{x})$ ,  $g(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , είναι ομαλές, τότε το ΠΑΤ

$$u_{tt} - \Delta u = s(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0, \tag{5.140}$$

$$u(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x}), \quad u_t(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \tag{5.141}$$

επιδέχεται ως (μοναδική) λύση τη συνάρτηση

$$u(\mathbf{x}, t) := \int_{\mathbb{R}^n} [\partial_t G(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) f(\mathbf{y}) + G(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) g(\mathbf{y})] d\mathbf{y} + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - \tau) s(\mathbf{y}, \tau) d\mathbf{y} d\tau. \tag{5.142}$$

■

Η απόδειξη του αυτού του θεωρήματος για τις πιο ρεαλιστικές περιπτώσεις θα συζητηθεί στο επόμενο εδάφιο. Ωστόσο, αν στην ομαλότητα των αρχικών δοσμένων προσθέσει και την κατάλληλη ασυμπτωτική συμπεριφορά, ο αναγνώστης δεν θα δυσκολευτεί να παράξει την απόδειξη κι από μόνος του.

## Ασκήσεις

**5.1** Να κατασκευαστούν λύσεις του ΠΑΤ

$$u_t - u_{xx} = m u, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = \delta(x - y), \quad -\infty < x, y < \infty,$$

όπου  $m$  πραγματική σταθερή, οι οποίες παραμένουν φραγμένες καθώς το  $t \rightarrow \infty$ .

**5.2** Να κατασκευαστούν λύσεις του ΠΑΤ

$$u_t - m u_{xxx} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = \delta(x - y), \quad -\infty < x, y < \infty,$$

όπου  $m$  πραγματική σταθερή, οι οποίες παραμένουν φραγμένες καθώς το  $t \rightarrow \infty$ .

**5.3** α) Να λυθεί το ΠΑΤ

$$u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = g_{(y,\varepsilon)}(x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon}} e^{-(x-y)^2/4\varepsilon}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

όπου  $\varepsilon$  θετική σταθερή.

β) Να δειχτεί ότι, στο όριο  $\varepsilon \rightarrow 0$ , η λύση αυτού του ΠΑΤ ανάγεται στην (5.62) και να εξηγηθεί το γιατί αυτό το αποτέλεσμα είναι αναμενόμενο λόγω της μορφής της  $g_{(y,\varepsilon)}(x)$ .

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(s) ds = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon}} \int_{x-t}^{x+t} e^{-(s-y)^2/4\varepsilon} ds \\
&= \frac{1}{4} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{x-t}^{(x+t-y)/\sqrt{4\varepsilon}} e^{-\tilde{s}^2} d\tilde{s}, \quad \tilde{s} = \frac{1}{\sqrt{4\varepsilon}} (s-y) \\
&= \frac{1}{4} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{x+t-y}{\sqrt{4\varepsilon}} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{x-t-y}{\sqrt{4\varepsilon}} \right) \right] \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{cases} 1/2, & |x-y| < t \\ 1/4, & |x-y| = t \\ 0, & |x-y| > t \end{cases}
\end{aligned}$$

#### 5.4 Θεωρήστε το ΠΑΤ

$$\begin{aligned}
u_{tt}(\mathbf{x}, t) - \Delta u(\mathbf{x}, t) &= 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0, \\
u(\mathbf{x}, 0) &= 0, \quad u_t(\mathbf{x}, 0) = g_{(y,\varepsilon)}(\mathbf{x}) := \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon}} e^{-|\mathbf{x}-y|^2/4\varepsilon}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3.
\end{aligned}$$

όπου  $\varepsilon$  θετική σταθερή.

α) Να εξηγηθεί γιατί είναι εύλογο να υποθέσουμε ότι η λύση αυτού του ΠΑΤ είναι της μορφής

$$u(\mathbf{x}, t) = U(r, t), \quad r := |\mathbf{x} - \mathbf{y}|.$$

β) Να κατασκευαστεί η λύση  $u_{(y,\varepsilon)}(\mathbf{x}, t)$  που στηρίζεται στην παραπάνω υπόθεση.

γ) Να δειχτεί ότι, στο όριο  $\varepsilon \rightarrow 0$ , η  $u_{(y,\varepsilon)}(\mathbf{x}, t)$  ανάγεται στην (5.112) και να εξηγηθεί ο λόγος για τον οποίο αυτό το αποτέλεσμα είναι αναμενόμενο εξ αιτίας της μορφής της  $g_{(y,\varepsilon)}(\mathbf{x})$ .

#### 5.5 Η εξίσωση

$$u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) + m u(x, t) = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

όπου  $m$  θετική, ονομάζεται **τηλεγραφική εξίσωση** (equation of telegraphy). Να κατασκευαστούν λύσεις της τηλεγραφικής εξίσωσης που σέβονται τις αρχικές συνθήκες

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \delta(x - y), \quad x, y \in \mathbb{R}$$

5.6 Να επαναληφθεί η προηγούμενη άσκηση, για την περίπτωση  $m < 0$ .

5.7 Στο πλαίσιο της κβαντικής θεωρίας πεδίων, η ΜΔΕ

$$u_{tt}(\mathbf{x}, t) - \Delta u(\mathbf{x}, t) + m^2 u(\mathbf{x}, t) = 0$$

όπου  $m$  θετική σταθερή, αναφέρεται ως **εξίσωση (των) Klein-Gordon** (Κλάιν-Γκόρτον). Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο του μετασχηματισμού Fourier ως προς τις χωρικές συντεταγμένες, να κατασκευαστούν λύσεις της εξίσωσης Klein-Gordon, στην χωρο-χρονική περιοχή  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ ,  $t > 0$ , που είναι συμβατές με τις αρχικές συνθήκες

$$u(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad u_t(\mathbf{x}, 0) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$$

όπου  $m$  θετική σταθερή.

5.8 Να κατασκευαστούν λύσεις του ΠΑΤ

$$u_{tt}(\mathbf{x}, t) - \Delta u(\mathbf{x}, t) - m^2 u(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \delta(x - y), \quad x, y \in \mathbb{R}^3,$$

όπου  $m$  θετική σταθερή.

### 5.9 Η εξίσωση της δοκού,

$$u_{tt}(x, t) + u_{xxxx}(x, t) = 0,$$

περιγράφει τις μικρού πλάτους ταλαντώσεις μιας ευθείας δοκού. Να κατασκευαστούν λύσεις της παραπάνω εξίσωσης που είναι συμβατές με τις αρχικές συνθήκες

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \delta(x - a), \quad x, a \in \mathbb{R},$$

και να δοθεί, αναλυτικά, η φυσική ερμηνεία αυτού του ΠΑΤ.

### 5.10 Να κατασκευαστούν λύσεις του ΠΑΤ

$$u_{tt}(x, t) + u_{xxxx}(x, t) = \delta(x - a) \delta(t - \tau), \quad x, a \in \mathbb{R}, \quad t, \tau > 0,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

και να ερμηνευτούν, αναλυτικά, από φυσική άποψη (βλ. Άσκ. 6.9).

## 6. Το ΠΑΤ για την κυματική εξίσωση στον $\mathbb{R}^3$

Στο προηγούμενο εδάφιο παρουσιάσαμε τη μορφή που αναμένουμε να έχει το γενικό ΠΑΤ για την κυματική εξίσωση στον  $\mathbb{R}^n$ . Στο παρόν, με το οποίο ολοκληρώνεται και η σύντομη επισκόπηση των γραμμικών εξισώσεων εξέλιξης που ήταν το αντικείμενο αυτού του κεφάλαιου, παρουσιάζουμε αναλυτικότερα τη μορφή και κάποιες ιδιότητες της λύσης του παραπάνω ΠΑΤ στον οικείο τρισδιάστατο χώρο.

Σύμφωνα, λοιπόν, με τα γενικότερα αποτελέσματα για την θεμελιακή λύση και τη συνάρτηση Green της κυματικής εξίσωσης στα οποία καταλήξαμε στο προηγούμενο εδάφιο, είναι εύλογο να θεωρήσουμε πως, στον  $\mathbb{R}^3$ , ισχύει το

### Θεώρημα 6.1

Αν οι συναρτήσεις  $s(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ ,  $t \geq 0$ , και  $f(\mathbf{x})$ ,  $g(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ , είναι ομαλές, τότε το ΠΑΤ

$$u_{tt} - \Delta u = s(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad t > 0, \quad (6.1)$$

$$u(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x}), \quad u_t(\mathbf{x}, 0) = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3, \quad (6.2)$$

επιδέχεται ως (μοναδική) λύση τη συνάρτηση

$$u(\mathbf{x}, t) := \int_{\mathbb{R}^3} [\partial_t G(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) f(\mathbf{y}) + G(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) g(\mathbf{y})] d\mathbf{y} + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - \tau) s(\mathbf{y}, \tau) d\mathbf{y} d\tau \quad (6.3)$$

όπου

$$G(\mathbf{x}, t) := \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|} \delta(t - |\mathbf{x}|), \quad t > 0. \quad (6.4)$$

Για να βρούμε εναλλακτικές μορφές της παραπάνω λύσης, αλλά και για να διευκολύνουμε τον αναγνώστη στην απόδειξη του θεωρήματος, σημειώνουμε αρχικά ότι η (6.3) γράφεται σαν

$$u(\mathbf{x}, t) = u_f(\mathbf{x}, t) + u_g(\mathbf{x}, t) + u_s(\mathbf{x}, t) \quad (6.5)$$

όπου

$$u_f(\mathbf{x}, t) := \partial_t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi r} \delta(t - r) f(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad r := |\mathbf{x} - \mathbf{y}|, \quad (6.6)$$

$$u_g(\mathbf{x}, t) := \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi r} \delta(t - r) g(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad (6.7)$$

$$u_s(\mathbf{x}, t) := \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi r} \delta(t - \tau - r) s(\mathbf{y}, \tau) d\mathbf{y} d\tau. \quad (6.8)$$

Τα μέρη  $u_f(\mathbf{x}, t)$  και  $u_g(\mathbf{x}, t)$  της λύσης αντικατοπτρίζουν την κατάσταση που επικρατεί στο χώρο τη χρονική στιγμή  $t = 0$ . Με τη σειρά του, ο όρος  $u_s(\mathbf{x}, t)$  περιγράφει την δραστηριότητα

των πηγών των (ηχητικών, ηλεκτρομαγνητικών κ.λπ.) κυμάτων από εκείνη τη στιγμή και μετά.

Ξεκινώντας από αυτό τον όρο, σημειώνουμε ότι

$$\int_0^t \delta(t - \tau - t - r) s(\mathbf{y}, \tau) d\tau = H(t - r) s(\mathbf{y}, t - r). \quad (6.9)$$

Συνεπώς, η συνάρτηση  $u_s(\mathbf{x}, t)$  είναι ίση με

$$u_s(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{H(t - r) s(\mathbf{y}, t - r)}{4\pi r} d\mathbf{y} = \int_{r \leq t} \frac{s(\mathbf{y}, t - r)}{4\pi r} d\mathbf{y}, \quad (6.10)$$

Ισοδύναμα,

$$u_s(\mathbf{x}, t) = \int_{|\mathbf{x} - \mathbf{y}| \leq t} \frac{s(\mathbf{y}, t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\mathbf{y}. \quad (6.11)$$

Αυτή η μορφή του όρου  $u_s(\mathbf{x}, t)$  δείχνει καθαρά πως, η τιμή του πεδίου στο χωροχρονικό σημείο  $(\mathbf{x}, t)$  καθορίζεται από την δραστηριότητα των πηγών που βρίσκονται μέσα στη σφαίρα ακτίνας  $t$  που έχει για κέντρο το σημείο  $\mathbf{x}$ . Οι πηγές που βρίσκονται στο εξωτερικό αυτής της σφαίρας δεν επηρεάζουν καθόλου το πεδίο στο σημείο  $\mathbf{x}$  την χρονική στιγμή  $t$ . Και ο λόγος είναι απλός: Στις μονάδες που έχουμε υιοθετήσει στην γραφή της κυματικής εξίσωσης, η ταχύτητα των κυμάτων,  $c$ , είναι ίση με την μονάδα. Άρα, τα κύματα που πρόλαβαν να φτάσουν στο σημείο  $\mathbf{x}$  μέσα στο χρονικό διάστημα  $t$  είναι εκείνα που ξεκίνησαν από σημεία, τα οποία απέχουν από το  $\mathbf{x}$  λιγότερο από  $d = ct = t$ .

Στρέφοντας την προσοχή μας στον όρο  $u_v(\mathbf{x}, t)$ , παρατηρούμε ότι, η αλλαγή μεταβλητών

$$\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{z} = \mathbf{y} - \mathbf{x} \quad (6.12)$$

μετατρέπει την (6.7) στην

$$u_v(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi r} \delta(t - r) v(\mathbf{x} + \mathbf{z}) d\mathbf{z}, \quad r = |\mathbf{z}| \quad (6.13)$$

Ισοδύναμα,

$$u_v(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi r} \delta(t - r) \gamma(\mathbf{z}) d\mathbf{z}, \quad (6.14)$$

όπου,

$$\gamma(\mathbf{z}) := v(\mathbf{x} + \mathbf{z}). \quad (6.15)$$

Αν λοιπόν εισαγάγουμε σφαιρικές συντεταγμένες και θέσουμε  $\tilde{\gamma}(r, \theta, \varphi) = \gamma(\mathbf{z})$ , τότε η (6.14) μετατρέπεται στην

$$u_v(\mathbf{x}, t) = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{4\pi r} \delta(t - r) \tilde{\gamma}(r, \theta, \varphi) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi. \quad (6.16)$$

Αφού το  $t > 0$ , η ολοκλήρωση ως προς την ακτινική μεταβλητή  $r$  δίνει

$$u_v(\mathbf{x}, t) = t \left[ \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \tilde{\gamma}(t, \theta, \varphi) \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \right]. \quad (6.17)$$

Η ποσότητα μέσα στην αγκύλη περιγράφει την μέση τιμή της συνάρτησης  $\tilde{\gamma}(r, \theta, \varphi)$ , άρα και της  $\gamma(z)$ , πάνω σε μια σφαιρική επιφάνεια,  $S_t(\mathbf{0})$ , που έχει ακτίνα  $t$  και το κέντρο της στο σημείο  $z = \mathbf{0}$ . Πιο συγκεκριμένα, μέση τιμή μιας συνάρτησης  $\gamma(z)$  στη σφαιρική επιφάνεια  $S_t(\mathbf{0})$  ονομάζεται η ποσότητα

$$\langle \gamma \rangle_{S_t(\mathbf{0})} := \frac{1}{4\pi t^2} \int_{S_t(\mathbf{0})} \gamma(z) \, dS_z. \quad (6.18)$$

Στις σφαιρικές συντεταγμένες  $(t, \theta, \varphi)$  με κέντρο το σημείο  $z = \mathbf{0}$ , το στοιχείο εμβαδού της  $S_t(\mathbf{0})$  είναι ίσο με  $dS_z = t^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$ . Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi t^2} \int_{S_t(\mathbf{0})} \gamma(z) \, dS_z &= \frac{1}{4\pi t^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \tilde{\gamma}(t, \theta, \varphi) t^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \tilde{\gamma}(t, \theta, \varphi) \sin \theta \, d\theta \, d\varphi. \end{aligned} \quad (6.19)$$

Έτσι, λοιπόν, η (6.17) σημαίνει ότι

$$u_v(\mathbf{x}, t) = t \langle \gamma \rangle_{S_t(\mathbf{0})}. \quad (6.20)$$

Όμως, το σημείο  $z = \mathbf{0}$  αντιστοιχεί στο  $\mathbf{y} = \mathbf{x}$  στις αρχικές συντεταγμένες. Άρα, στις συντεταγμένες  $\mathbf{y}$ , η  $S_t(\mathbf{0})$  είναι ταυτόσημη με την  $S_t(\mathbf{x})$ . Από την άλλη, σύμφωνα με τον ορισμό (6.15) της  $\gamma(z)$ , η μέση τιμή αυτής της συνάρτησης πάνω στην επιφάνεια  $S_t(\mathbf{0})$  είναι ίση με την μέση τιμή της  $v(\mathbf{y})$  πάνω στη επιφάνεια,  $S_t(\mathbf{x})$ . Συνεπώς, η (6.20) είναι ισοδύναμη με την

$$u_v(\mathbf{x}, t) = t \langle v \rangle_{S_t(\mathbf{x})}. \quad (6.21)$$

Μένει να εξετάσουμε τον όρο  $u_f(\mathbf{x}, t)$ . Όμως από τη σύγκριση των (6.6) και (6.7) αμέσως συνάγεται ότι

$$u_f(\mathbf{x}, t) := \partial_t [t \langle f \rangle_{S_t(\mathbf{x})}]. \quad (6.22)$$

Τελικά, με βάση τις (6.11), (6.20) και (6.21) μπορούμε να γράψουμε τη λύση του ΠΑΤ (6.1-2) στη μορφή

$$u(\mathbf{x}, t) = \partial_t [t \langle f \rangle_{S_t(\mathbf{x})}] + t \langle v \rangle_{S_t(\mathbf{x})} + \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \leq t} \frac{s(\mathbf{y}, t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \, d\mathbf{y}. \quad (6.23)$$

Και αυτό το αποτέλεσμα οφείλεται στον Poisson. Γι' αυτό η (6.23) αναφέρεται ως **τύπος του Poisson** για την λύση του ΠΑΤ της κυματικής εξίσωσης.

Μια κάπως διαφορετικότερη μορφή της λύσης του ΠΑΤ (6.1-2) προκύπτει αναλύοντας παραπέρα τον σφαιρικό μέσο όρο της  $f(\mathbf{y})$ .

Εισάγοντας και πάλι το διάνυσμα  $\mathbf{z}$ , που ενώνει το κέντρο της  $S_t(\mathbf{x})$  με το σημείο  $\mathbf{y} \in S_t(\mathbf{x})$ , γράφουμε την (6.22) στη μορφή

$$\langle f \rangle_{S_t(\mathbf{x})} = \frac{1}{4\pi t^2} \int_{S_t(\mathbf{0})} f(\mathbf{x} + \mathbf{z}) dS_z. \quad (6.24)$$

Το διάνυσμα  $\mathbf{z}$  έχει μήκος  $t$ . Άρα, μπορεί να γραφτεί στη μορφή  $\mathbf{z} = t\hat{\mathbf{z}}$ , όπου  $\hat{\mathbf{z}}$  μοναδιαίο διάνυσμα ομόρροπο με το  $\mathbf{z}$ . Κατά συνέπεια, η (6.24) γίνεται

$$\langle f \rangle_{S_t(\mathbf{x})} = \frac{1}{4\pi t^2} \int_{S_t(\mathbf{0})} f(\mathbf{x} + t\hat{\mathbf{z}}) dS_z = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \varphi(\mathbf{x} + t\hat{\mathbf{z}}) \sin\theta d\theta d\varphi. \quad (6.25)$$

Συνακόλουθα,

$$\partial_t \langle f \rangle_{S_t(\mathbf{x})} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \partial_t \varphi(\mathbf{x} + t\hat{\mathbf{z}}) \sin\theta d\theta d\varphi. \quad (6.26)$$

Η παράγωγος  $\partial_t$  είναι στην ακτινική κατεύθυνση. Αυτό σημαίνει ότι  $\partial_t = \hat{\mathbf{z}} \cdot \nabla$ . Συνεπώς,

$$\partial_t \langle f \rangle_{S_t(\mathbf{x})} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \hat{\mathbf{z}} \cdot \nabla \varphi(\mathbf{x} + t\hat{\mathbf{z}}) \sin\theta d\theta d\varphi. \quad (6.27)$$

Από την τελευταία σχέση αμέσως έπεται ότι,

$$\begin{aligned} t \partial_t \langle f \rangle_{S_t(\mathbf{x})} &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi t \hat{\mathbf{z}} \cdot \nabla \varphi(\mathbf{x} + t\hat{\mathbf{z}}) \sin\theta d\theta d\varphi \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathbf{z} \cdot \nabla \varphi(\mathbf{x} + \mathbf{z}) \sin\theta d\theta d\varphi \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \nabla \varphi(\mathbf{y}) \sin\theta d\theta d\varphi \end{aligned} \quad (6.28)$$

Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση  $t \langle f \rangle_{S_t(\mathbf{x})}$  εκφράζει την μέση τιμή της  $(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \nabla \varphi(\mathbf{y})$  πάνω στην επιφάνεια  $S_t(\mathbf{x})$ :

$$t \langle f \rangle_{S_t(\mathbf{x})} = \langle (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \nabla f(\mathbf{y}) \rangle_{S_t(\mathbf{x})} \equiv \frac{1}{4\pi t^2} \int_{S_t(\mathbf{x})} (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \nabla f(\mathbf{y}) dS_y. \quad (6.29)$$

Ας επιστρέψουμε, τώρα, στον τύπο του Poisson, (6.23). Είναι προφανές ότι,

$$\partial_t [t \langle f \rangle_{S_t(\mathbf{x})}] = \langle f \rangle_{S_t(\mathbf{x})} + t \langle f \rangle_{S_t(\mathbf{x})}. \quad (6.30)$$

Άρα, η (6.23) γράφεται σαν

$$u(\mathbf{x}, t) = \langle t v(\mathbf{y}) + f(\mathbf{y}) + (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \nabla f(\mathbf{y}) \rangle_{S_t(\mathbf{x})} + \int_{|\mathbf{x}-\mathbf{y}| \leq t} \frac{s(\mathbf{y}, t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\mathbf{y}. \quad (6.31)$$

Αυτή η μορφή της λύσης του ΠΑΤ (6.1-2) οφείλεται στον Kirchhoff (Κίρχ-χοφ). Γι' αυτό, η (6.31) είναι γνωστή ως **τύπος του Kirchhoff** για την λύση του ΠΑΤ της κυματικής εξίσωσης στον  $\mathbb{R}^3$ . Κλείνοντας, σημειώνουμε ότι η συνθήκη  $|\mathbf{x} - \mathbf{y}| < t$  ορίζει το εσωτερικό της σφαίρας που έχει το κέντρο της στο σημείο  $\mathbf{x}$  του  $\mathbb{R}^3$  και ακτίνα ίση με  $t$ . Αυτή τη σφαιρική περιοχή συχνά την συμβολίσαμε με  $B_t(\mathbf{x})$ . Το σύνορό της,  $\partial B_t(\mathbf{x})$ , είναι ταυτόσημο με την σφαιρική επιφάνεια  $S_t(\mathbf{x})$ . Συνεπώς, ο τύπος του Kirchhoff μπορεί να γραφτεί και στη μορφή



$$u(\mathbf{x}, t) = \langle t v(\mathbf{y}) + f(\mathbf{y}) + (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \nabla f(\mathbf{y}) \rangle_{\partial B_t(\mathbf{x})} + \int_{B_t(\mathbf{x})} \frac{s(\mathbf{y}, t - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|)}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\mathbf{y}. \quad (6.32)$$

## Ασκήσεις

6.1 α) Υποθέστε ότι η λύση  $u(\mathbf{x}, t)$  της ομογενούς κυματικής εξίσωσης στον  $\mathbb{R}^n$  είναι σφαιρικά συμμετρική, δηλαδή, της μορφής

$$u(\mathbf{x}, t) = U(r, t), \quad r := |\mathbf{x}|. \quad (6.33)$$

Δείχτε ότι, τότε, η  $u_{tt} - \Delta u = 0$  ανάγεται στην **εξίσωση (των) Euler-Poisson-Darboux** ('Οιλερ-Πουασόν-Νταρμπού)

$$U_{rr} - \frac{n-1}{r} U_r - U_{tt} = 0. \quad (6.34)$$

β) Να δειχτεί ότι, στην περίπτωση  $n = 3$ , η εξίσωση Euler-Poisson-Darboux ανάγεται στην μονοδιάστατη κυματική εξίσωση

$$\tilde{U}_{rr} - \tilde{U}_{tt} = 0 \quad (6.35)$$

για τη συνάρτηση

$$\tilde{U}(r, t) := r U(r, t) \quad (6.36)$$

γ) Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο αποτέλεσμα, δείχτε ότι, οι σφαιρικά συμμετρικές λύσεις της ομογενούς κυματικής εξίσωσης στον  $\mathbb{R}^3$  είναι της μορφής

$$u(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{r} [F(r+t) + H(r-t)], \quad r := |\mathbf{x}|, \quad (6.37)$$

όπου  $F, H$  τυχαίες συναρτήσεις, κλάσης  $C^2(\mathbb{R}_+)$ . Ποιες επιπλέον συνθήκες πρέπει να πληρούν οι  $F, H$ , ώστε η (6.37) να είναι κλασική ή αυστηρή λύση της  $u_{tt} - \Delta u = 0$ ;

δ) Δείχτε ότι η (6.37) οδηγεί στην έκφραση

$$G(\mathbf{x}, t) := \frac{1}{4\pi |\mathbf{x}|} \delta(t - |\mathbf{x}|), \quad t > 0. \quad (6.38)$$

για τη θεμελιακή λύση της κυματικής εξίσωσης στον  $\mathbb{R}^3$ .

6.2 Υποθέστε ότι η συνάρτηση  $u(\mathbf{x}, t)$  ανήκει στην κλάση  $C^2(\bar{\Omega})$ , όπου  $\bar{\Omega} = \mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$ , και

$$u_{tt} - \Delta u = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega := \mathbb{R}^3 \times (0, \infty), \quad (6.39)$$

$$u(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x}), \quad u_t(\mathbf{x}, 0) = v(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3. \quad (6.40)$$

Θεωρήστε τις μέσες τιμές των συναρτήσεων  $u(\mathbf{x}, t)$ ,  $f(\mathbf{x})$  και  $v(\mathbf{x})$  πάνω στη σφαιρική επιφάνεια  $\partial B_r(\mathbf{x})$ , δηλαδή, τις συναρτήσεις

$$U(\mathbf{x}, r, t) := \langle u(\mathbf{y}, t) \rangle_{\partial B_r(\mathbf{x})} \quad (6.41)$$

$$F(\mathbf{x}, r) := \langle f(\mathbf{y}) \rangle_{\partial B_r(\mathbf{x})} \quad (6.42)$$

και

$$Y(\mathbf{x}, r) := \langle v(\mathbf{y}) \rangle_{\partial B_r(\mathbf{x})}. \quad (6.43)$$

Δείχτε ότι

(i) Όταν το  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  θεωρείται σταθερό, η συνάρτηση  $U(\mathbf{x}, r, t) \in C^2([0, \infty) \times [0, \infty))$  και αποτελεί λύση του ΠΑΤ

$$U_{rr} - \frac{2}{r} U_r - U_{tt} = 0, \quad r > 0, t > 0, \quad (6.44)$$

$$U(\mathbf{x}, r, 0) = F(\mathbf{x}, r), \quad U_t(\mathbf{x}, r, 0) = Y(\mathbf{x}, r), \quad r > 0. \quad (6.45)$$

(ii) Η συνάρτηση

$$\tilde{U}(r, t) := r U(\mathbf{x}, r, t) \quad (6.46)$$

αποτελεί λύση του ΠΑΣΤ

$$\tilde{U}_{rr} - \tilde{U}_{tt} = 0, \quad r > 0, t > 0, \quad (6.47)$$

$$\tilde{U}(r, 0) = \tilde{F}(r), \quad \tilde{U}_t(r, 0) = \tilde{Y}(r), \quad r > 0. \quad (6.48)$$

$$\tilde{U}(0, t) = 0, \quad t > 0, \quad (6.49)$$

όπου

$$\tilde{F}(r) := r F(\mathbf{x}, r), \quad \tilde{Y}(r) := r Y(\mathbf{x}, r). \quad (6.50)$$

(iii) Για κάθε  $(\mathbf{x}, t) \in \Omega$ ,

$$u(\mathbf{x}, t) = \lim_{r \rightarrow 0} U(\mathbf{x}, r, t) = \langle t v(\mathbf{y}) + f(\mathbf{y}) + (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \nabla f(\mathbf{y}) \rangle_{\partial B_t(\mathbf{x})} \quad (6.51)$$

Υπόδειξη. Το ΠΑΣΤ λύνεται πολύ εύκολα (βλ. και Εδάφιο IV-8).

### 6.3 (Απόδειξη του Θεωρήματος 6.1)

α) Υποθέστε ότι οι συναρτήσεις  $f(\mathbf{x})$  και  $v(\mathbf{x})$  ανήκουν στις κλάσεις  $C^3(\mathbb{R}^3)$  και  $C^2(\mathbb{R}^3)$ , αντίστοιχα. Δείχτε ότι η συνάρτηση

$$u(\mathbf{x}, t) := \int_{\mathbb{R}^3} [\partial_t G(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) f(\mathbf{y}) + G(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) v(\mathbf{y})] d \mathbf{y}$$

όπου

$$G(\mathbf{x}, t) := \frac{1}{4 \pi |\mathbf{x}|} \delta(t - |\mathbf{x}|), \quad t > 0,$$

έχει τις παρακάτω ιδιότητες και, άρα, αποτελεί κλασική λύση του ΠΑΤ

$$u_{tt} - \Delta u = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega := \mathbb{R}^3 \times (0, \infty),$$

$$u(\mathbf{x}, 0) = f(\mathbf{x}), \quad u_t(\mathbf{x}, 0) = v(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.$$

(i) Ανήκει στην κλάση  $C^2(\bar{\Omega})$ , όπου  $\bar{\Omega} = \mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$ ,

(ii) Αποτελεί λύση της  $u_{tt} - \Delta u = 0$  στην χωρο-χρονική περιοχή  $\Omega$ .

(iii)  $\lim_{\Omega \ni (\mathbf{x}, t) \rightarrow (\mathbf{a}, 0)} u(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{a}), \quad \lim_{\Omega \ni (\mathbf{x}, t) \rightarrow (\mathbf{a}, 0)} u_t(\mathbf{x}, t) = v(\mathbf{a}).$

Υπόδειξη. Σύμφωνα με τον τύπο του Poisson,

$$u(\mathbf{x}, t) = \partial_t [t F(\mathbf{x}, t)] + Y(\mathbf{x}, t)$$

β) Υποθέστε ότι η συνάρτηση  $s(\mathbf{x}, t)$  ανήκει στην κλάση  $C^2(\bar{\Omega})$ . Δείχτε ότι η συνάρτηση

$$u(\mathbf{x}, t) := \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - \tau) s(\mathbf{y}, \tau) d\mathbf{y} d\tau$$

έχει τις παρακάτω ιδιότητες και, άρα, αποτελεί κλασική λύση του ΠΑΤ

$$u_{tt} - \Delta u = s(\mathbf{x}, t), \quad (\mathbf{x}, t) \in \Omega := \mathbb{R}^3 \times (0, \infty),$$

$$u(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad u_t(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.$$

(i) Ανήκει στην κλάση  $C^2(\bar{\Omega})$ , όπου  $\bar{\Omega} = \mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$ ,

(ii) Αποτελεί λύση της  $u_{tt} - \Delta u = s(\mathbf{x}, t)$  στην χωρο-χρονική περιοχή  $\Omega$ .

(iii)  $\lim_{\Omega \ni (\mathbf{x}, t) \rightarrow (\mathbf{a}, 0)} u(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \lim_{\Omega \ni (\mathbf{x}, t) \rightarrow (\mathbf{a}, 0)} u_t(\mathbf{x}, t) = 0.$

**6.4** N' αποδειχτεί το

**Θεώρημα 6.2** (Περιοχή επίδρασης των αρχικών δοσμένων της κυματικής εξίσωσης)

Υποθέστε ότι, η λύση  $u(\mathbf{x}, t)$  της εξίσωσης  $u_{tt}(\mathbf{x}, t) - \Delta u(\mathbf{x}, t) = 0$  έχει τις εξής ιδιότητες:

(i) Είναι κλάσης  $C^2$  στο σύνολο  $\mathbb{R}^3 \times [0, T]$ ,

(ii)  $u(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad u_t(\mathbf{x}, 0) = 0$  σε κάθε σημείο  $\mathbf{x} \equiv (x, y, z)$  της σφαιρικής περιοχής

$$B_{t_0}(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \leq t_0\}, \quad t_0 \in (0, T].$$

Δείχτε πως, τότε, η  $u(\mathbf{x}, t)$  μηδενίζεται σε κάθε σημείο της κωνικής περιοχής

$$K(\mathbf{x}_0, t_0) := \{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} : |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \leq t_0 - t, \quad 0 \leq t \leq t_0\}$$

του χωρόχρονου.

*Υπόδειξη:* Δείχτε ότι, στο χρονικό διάστημα  $0 \leq t \leq t_0$ , η τιμή του ολοκληρώματος

$$\int_{\mathbb{R}^3} \{(\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2 + (\partial_z u)^2 + (\partial_t u)^2\} d\mathbf{x}$$

παραμένει αμετάβλητη.

*Ερώτημα:* Μπορείτε να δώσετε μια φυσική σημασία στην προς ολοκλήρωση ποσότητα;

## Παράρτημα Σύνοψη διανυσματικής ανάλυσης

### A. Grad, div, curl σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες του $\mathbb{E}^3$

Όπως δείξαμε στο Εδάφιο 3, η αντικατάσταση των Καρτεσιανών συντεταγμένων  $(x, y, z)$  του Ευκλείδειου χώρου  $\mathbb{E}^3$  από τις  $(r, s, t)$  γίνεται μέσω τριών σχέσεων της μορφής

$$x = X(r, s, t), \quad y = Y(r, s, t), \quad z = Z(r, s, t), \quad r \in I_1, \quad s \in I_2, \quad t \in I_3, \quad (1.1)$$

όπου  $I_1, I_2$  και  $I_3$  ανοιχτά διαστήματα της πραγματικής ευθείας. Ο μόνος περιορισμός που επιβάλλεται στην, κατά τα άλλα, τυχαία τριάδα ομαλών συναρτήσεων  $(X, Y, Z)$  είναι ότι η ορίζουσα Jacobi,

$$J(r, s, t) := \det \begin{pmatrix} \partial_r X & \partial_r Y & \partial_r Z \\ \partial_s X & \partial_s Y & \partial_s Z \\ \partial_t X & \partial_t Y & \partial_t Z \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

είναι μη μηδενική σε όλα τα σημεία του ανοιχτού υποσύνολου  $\Omega' := I_1 \times I_2 \times I_3$  του  $\mathbb{R}^3$ .

Αυτή η συνθήκη εξασφαλίζει ότι τα διανύσματα

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \partial_r X \mathbf{e}_x + \partial_r Y \mathbf{e}_y + \partial_r Z \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{e}_s &= \partial_s X \mathbf{e}_x + \partial_s Y \mathbf{e}_y + \partial_s Z \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{e}_t &= \partial_t X \mathbf{e}_x + \partial_t Y \mathbf{e}_y + \partial_t Z \mathbf{e}_z, \end{aligned} \quad (1.3)$$

όπου

$$\mathbf{e}_x := (1, 0, 0), \quad \mathbf{e}_y := (0, 1, 0), \quad \mathbf{e}_z := (0, 0, 1), \quad (1.4)$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητα σε κάθε σημείο  $(x, y, z)$  της περιοχής  $\Omega$  του Ευκλείδειου χώρου  $\mathbb{R}^3$ , στην οποία απεικονίζεται η  $\Omega'$  μέσω των (1.1).

Κατά συνέπεια, κάθε διανυσματικό πεδίο  $V(x, y, z)$  στην περιοχή  $\Omega$  μπορεί να γραφτεί είτε στη μορφή

$$V = V_x \mathbf{e}_x + V_y \mathbf{e}_y + V_z \mathbf{e}_z, \quad (1.5)$$

είτε σαν

$$V = V_r \mathbf{e}_r + V_s \mathbf{e}_s + V_t \mathbf{e}_t. \quad (1.6)$$

Η σχέση των συνιστωσών  $(V_x, V_y, V_z)$  και  $(V_r, V_s, V_t)$  του πεδίου  $V(x, y, z)$  εκφράζεται από τον τύπο

$$\begin{pmatrix} \partial_r X & \partial_r Y & \partial_r Z \\ \partial_s X & \partial_s Y & \partial_s Z \\ \partial_t X & \partial_t Y & \partial_t Z \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} V_r \\ V_s \\ V_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

όπου  $A^T$  ο ανάστροφος του πίνακα  $A$ .

Γενικά, τα στοιχεία της νέας βάσης ( $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_s, \mathbf{e}_t$ ) δεν είναι μεταξύ τους ορθογώνια. Τότε, οι  $(r, s, t)$  αναφέρονται ως **καμπυλόγραμμες συντεταγμένες**.

Όταν τα διανύσματα ( $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_s, \mathbf{e}_t$ ) μεταξύ τους ορθογώνια, οι  $(r, s, t)$  λέγονται **ορθογώνιες καμπυλόγραμμες συντεταγμένες**. Σ' αυτή την περίπτωση, οι συναρτήσεις

$$h_r := |\mathbf{e}_r|, \quad h_s := |\mathbf{e}_s|, \quad h_t := |\mathbf{e}_t|, \quad (1.8)$$

που ονομάζονται **συντελεστές κλίμακας**, μας επιτρέπουν να μετατρέψουμε τη βάση ( $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_s, \mathbf{e}_t$ ) στην ορθοκανονική

$$(\hat{\mathbf{e}}_r, \hat{\mathbf{e}}_s, \hat{\mathbf{e}}_t) := \left( \frac{1}{h_r} \mathbf{e}_r, \frac{1}{h_s} \mathbf{e}_s, \frac{1}{h_t} \mathbf{e}_t \right). \quad (1.9)$$

Σ' αυτή τη βάση, το πεδίο  $V(x, y, z)$  γράφεται ως

$$\mathbf{V} = \hat{V}_r \hat{\mathbf{e}}_r + \hat{V}_s \hat{\mathbf{e}}_s + \hat{V}_t \hat{\mathbf{e}}_t, \quad (1.10)$$

όπου, προφανώς,

$$(\hat{V}_r, \hat{V}_s, \hat{V}_t) := (h_r V_r, h_s V_s, h_t V_t). \quad (1.11)$$

Οι παραπάνω σχέσεις μας επιτρέπουν να εκφράσουμε την κλίση και το πεδίο Laplace ενός βαθμωτού πεδίου, καθώς και την απόκλιση και τον στροβιλισμό ενός διανυσματικού πεδίου, σε οποιοδήποτε σύστημα καμπυλόγραμμων συντεταγμένων. Η διαδικασία που οδηγεί στις αντίστοιχες εκφράσεις παρουσιάζεται αναλυτικά στα επόμενα εδάφια. Στο παρόν δίνουμε μόνο το τελικό αποτέλεσμα για την περίπτωση των ορθογώνιων συντεταγμένων, έτσι ώστε να είναι πιο εύχρηστο.

Με  $(x_1, x_2, x_3)$  συμβολίζουμε την τυχαία τριάδα των ορθογώνιων καμπυλόγραμμων συντεταγμένων. Έτσι, στους τύπους που ακολουθούν, το  $F = F(x_1, x_2, x_3)$  δηλώνει το τυχαίο βαθμωτό πεδίο και τα  $\hat{V}_a$ ,  $a = 1, 2, 3$ , τις συνιστώσες του ομαλού διανυσματικού πεδίου  $\mathbf{V}(x_1, x_2, x_3)$  ως προς την ορθοκανονική βάση  $(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3)$ .

### A. Τυχαίες ορθογώνιες συντεταγμένες του $\mathbb{E}^3$

(i) **Κλίση** (grad) βαθμωτού πεδίου:

$$\nabla F = \sum_{a=1}^3 \frac{\partial F}{\partial x_a} \frac{1}{h_a} \hat{\mathbf{e}}_a \quad (1.12)$$

(ii) **Απόκλιση** (div) διανυσματικού πεδίου:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3 \hat{V}_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (h_1 h_3 \hat{V}_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 h_2 \hat{V}_3) \right] \quad (1.13)$$

(iii) **Στροβιλισμός** (curl) διανυσματικού πεδίου:

$$\nabla \times \mathbf{V} = \hat{C}_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + \hat{C}_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + \hat{C}_3 \hat{\mathbf{e}}_3, \quad \hat{C}_a := \frac{1}{h_b h_c} \left[ \frac{\partial}{\partial x_b} (h_c \hat{V}_c) - \frac{\partial}{\partial x_c} (h_b \hat{V}_b) \right] \quad (1.14)$$

με τα  $a, b, c$ , σε κυκλική αναδιάταξη των 1,2,3.

(iv) **Πεδίο Laplace** ( $\Delta F$ ) βαθμωτού πεδίου:

$$\Delta F = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial F}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial F}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial F}{\partial x_3} \right) \right] \quad (1.15)$$

■

## B. Σφαιρικές συντεταγμένες του $\mathbb{E}^3$

(i) **Κλίση** (grad) του βαθμωτού πεδίου  $F(r, \theta, \varphi)$ :

$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial r} \hat{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F}{\partial \varphi} \hat{\mathbf{e}}_\varphi, \quad (1.16)$$

(ii) **Απόκλιση** (div) του διανυσματικού πεδίου  $\mathbf{V}(r, \theta, \varphi)$ :

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 \hat{V}_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (\sin \theta \hat{V}_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \hat{V}_\varphi}{\partial \varphi} \quad (1.17)$$

(iii) **Στροβιλισμός** (curl) του διανυσματικού πεδίου  $\mathbf{V}(r, \theta, \varphi)$ :

$$\nabla \times \mathbf{V} = \hat{C}_r \hat{\mathbf{e}}_r + \hat{C}_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta + \hat{C}_\varphi \hat{\mathbf{e}}_\varphi, \quad (1.18)$$

όπου

$$\hat{C}_r = \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \hat{V}_\varphi) - \frac{\partial}{\partial \varphi} (\hat{V}_\theta) \right], \quad (1.19)$$

$$\hat{C}_\theta = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial z} (\hat{V}_r) - \frac{\partial}{\partial r} (r \hat{V}_\varphi) \right], \quad (1.20)$$

$$\hat{C}_\varphi = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r \hat{V}_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} (\hat{V}_r) \right]. \quad (1.21)$$

(iv) **Πεδίο Laplace** του βαθμωτού πεδίου  $F(r, \theta, \varphi)$ :

$$\Delta F = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial F}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} \quad (1.22)$$

■

## Γ. Κολινοδικές συντεταγμένες του $\mathbb{E}^3$

(i) **Κλίση** (grad) του βαθμωτού πεδίου  $F(r, \theta, z)$ :

$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial r} \hat{\mathbf{e}}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta + \frac{\partial F}{\partial z} \hat{\mathbf{e}}_z, \quad (1.23)$$

(ii) **Απόκλιση** (div) του διανυσματικού πεδίου  $V(r, \theta, z)$ :

$$\nabla \cdot V = \frac{\partial \hat{V}_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{V}_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \hat{V}_z}{\partial z} \quad (1.24)$$

(iii) **Στροβιλισμός** (curl) του διανυσματικού πεδίου  $V(r, \theta, z)$ :

$$\nabla \times V = \hat{C}_r \hat{e}_r + \hat{C}_\theta \hat{e}_\theta + \hat{C}_z \hat{e}_z, \quad (1.25)$$

όπου

$$\hat{C}_r = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\hat{V}_z) - \frac{\partial}{\partial z} (\hat{V}_\theta) \right], \quad (1.26)$$

$$\hat{C}_\theta = \frac{\partial}{\partial z} (\hat{V}_r) - \frac{\partial}{\partial r} (\hat{V}_z), \quad (1.27)$$

$$\hat{C}_z = \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r \hat{V}_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} (\hat{V}_r) \right] \quad (1.28)$$

(iv) **Πεδίο Laplace** του βαθμωτού πεδίου  $F(r, \theta, z)$ :

$$\Delta F = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial F}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial F}{\partial z} \right), \quad (1.29)$$

■

## B. Γενικοί μετασχηματισμοί συντεταγμένων

Θεωρούμε μια ομαλή απεικόνιση  $\Phi: \Omega' \rightarrow \mathbb{R}^n$ , όπου  $\Omega'$  ένα ανοιχτό υποσύνολο  $\mathbb{R}^n$ . Για καλύτερη εποπτία, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η εικόνα  $\Omega := \Phi(\Omega')$  του  $\Omega'$  ανήκει σε ένα διαφορετικό αντίγραφο του  $\mathbb{R}^n$ . Με αυτό τον τρόπο, αν το σημείο  $\mathbf{x}' := (x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \in \Omega'$ , τότε η εικόνα του,  $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{x}')$ , θα ανήκει στο σύνολο  $\Omega$ . Αφού  $\mathbf{x} := (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , η αναλυτική μορφή της σχέσης  $\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{x}')$  δίνεται από  $n$  τύπους της μορφής

$$x_a = \Phi_a(x'_1, x'_2, \dots, x'_n), \quad a = 1, 2, \dots, n. \quad (2.1)$$

Όπως στα παραδείγματα των δύο και τριών διαστάσεων που μελετήσαμε αναλυτικά στο κύριο μέρος του Κεφάλαιου VII, κάθε φορά που όλες οι συντεταγμένες  $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ , εκτός από μία, θεωρούνται σταθερές οι σχέσεις (2.1) ορίζουν μια παραμετρική καμπύλη της περιοχής  $\Omega$ . Ας υποθέσουμε ότι η συντεταγμένη που μεταβάλλεται είναι η  $x'_a$ , όπου  $a$  ένα συγκεκριμένο στοιχείο του συνόλου  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Τότε, το εφαπτόμενο διάνυσμα  $\mathbf{e}'_a$  της αντίστοιχης καμπύλης δίνεται από τον τύπο

$$\mathbf{e}'_a = \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial x'_a}, \frac{\partial \Phi_2}{\partial x'_a}, \dots, \frac{\partial \Phi_n}{\partial x'_a} \right) \equiv \sum_{b=1}^n \frac{\partial \Phi_b}{\partial x'_a} \mathbf{e}_b. \quad (2.2)$$

Αφήνοντας τον δείκτη  $a$  σ' αυτό τον τύπο να πάρει όλες τις τιμές  $\{1, 2, \dots, n\}$  και τις  $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$  να σαρώσουν όλες τις τιμές που επιτρέπει η συνθήκη  $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \in \Omega'$ , καταλήγουμε να έχουμε  $n$  διανυσματικά πεδία στην περιοχή  $\Omega$ .

Αν, όπως θα υποθέσουμε από δω και πέρα, η ορίζουσα Jacobi του μετασχηματισμού  $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \rightarrow (x_1, x_2, \dots, x_n)$  είναι μη μηδενική σε όλη την περιοχή  $\Omega'$ , τότε τα διανύσματα  $\{\mathbf{e}'_a\}_{a=1}^n$  είναι γραμμικά ανεξάρτητα σε κάθε σημείο της περιοχής  $\Omega$ . Συνεπώς, κάθε διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) = V_1(\mathbf{x}) \mathbf{e}_1 + V_2(\mathbf{x}) \mathbf{e}_2 + \dots + V_n(\mathbf{x}) \mathbf{e}_n \equiv \sum_{a=1}^n V_a \mathbf{e}_a \quad (2.3)$$

μπορεί να εκφραστεί στη βάση  $\{\mathbf{e}'_a\}_{a=1}^n$ . Δηλαδή, να γραφτεί στη μορφή

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}) = \sum_{a=1}^n V'_a \mathbf{e}'_a. \quad (2.4)$$

Η σχέση των συνιστωσών  $\{V'_a\}_{a=1}^n$  του  $\mathbf{V}$  ως προς τη βάση  $\{\mathbf{e}'_a\}_{a=1}^n$  καθορίζεται πλήρως από τη σχέση των βάσεων  $\{\mathbf{e}_a\}_{a=1}^n$  και  $\{\mathbf{e}'_a\}_{a=1}^n$ , δηλαδή από την (1.111). Με άλλα λόγια, μπορούμε να υπολογίσουμε τις συνιστώσες  $\{V'_a\}_{a=1}^n$  από τις  $\{V_a\}_{a=1}^n$  ευθύς μόλις μας δοθεί ο πίνακας  $A := (A_{ab})$ , όπου

$$A_{ab} := \frac{\partial \Phi_b}{\partial x'_a}. \quad (2.5)$$



Κι αυτό γιατί έχουμε υποθέσει ότι

$$J(\mathbf{x}') := \det(A) \neq 0, \quad \forall \mathbf{x}' \in \Omega'. \quad (2.6)$$

Πιο συγκεκριμένα, η αντικατάσταση της (2.2) στην (2.3) δίνει το ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$\mathbf{V} = \sum_{a=1}^n \sum_{b=1}^n V'_a A_{ab} \mathbf{e}_b. \quad (2.7)$$

Ισοδύναμα,

$$\mathbf{V} = \sum_{b=1}^n \left( \sum_{a=1}^n V'_a A_{ab} \right) \mathbf{e}_b. \quad (2.8)$$

Από την άλλη, επειδή το όνομα του αθροιζόμενου δείκτη δεν παίζει κανένα ρόλο, η (2.8) γράφεται σαν

$$\mathbf{V} = \sum_{b=1}^n V_b \mathbf{e}_b. \quad (2.9)$$

Όμως, τα διανύσματα  $\{\mathbf{e}_a\}_{a=1}^n$  είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Άρα, οι (2.8) και (2.9) δεν μπορεί να ισχύουν ταυτόχρονα, εκτός εάν και μόνο όταν

$$\sum_{a=1}^n V'_a A_{ab} = V_b. \quad (2.10)$$

Ο ανάστροφος  $A^T := (A_{ab}^T)$  του πίνακα  $A$  ορίζεται από τη σχέση

$$A_{ab}^T = A_{ba}. \quad (2.11)$$

Άρα, η (2.10) είναι ταυτόσημη με την

$$\sum_{a=1}^n A_{ba}^T V'_a = V_b. \quad (2.12)$$

Από τη σκοπιά των πινάκων, αυτή η σχέση μας λέει ότι το γινόμενο του πίνακα  $A^T$  με το διάνυσμα στήλη  $\mathbf{V}' := (V'_1, V'_2, \dots, V'_n)^T$  είναι ίσο με το διάνυσμα στήλη  $(V_1, V_2, \dots, V_n)^T$ :

$$A^T \mathbf{V}' = \mathbf{V}. \quad (2.13)$$

Όμως, ο πίνακας  $A$  είναι αντιστρέψιμος. Συνάμα,

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T. \quad (2.14)$$

Άρα, η (2.14) αντιστρέφεται για να γίνει

$$\mathbf{V}' = \mathbf{B} \mathbf{V}, \quad (2.15)$$

όπου

$$\mathbf{B} := (A^{-1})^T. \quad (2.16)$$

**Παρατήρηση**

Συχνά, οι τύποι που ορίζουν την αντιστοιχία  $x'_a \rightarrow x_a$  γράφονται στη μορφή

$$x_a = x_a(x'_1, x'_2, \dots, x'_n), \quad a = 1, 2, \dots, n. \quad (2.17)$$

οπότε, εκείνοι που περιγράφουν την αντιστοιχία  $x_a \rightarrow x'_a$  δίνονται στη μορφή

$$x'_a = x'_a(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad a = 1, 2, \dots, n. \quad (2.18)$$

Αυτός ο τρόπος γραφής διευκολύνει την παραγωγή των τύπων που αφορούν τον μετασχηματισμό πεδίων και, πολύ περισσότερο, όταν συνοδεύεται από τη **σύμβαση (του) Einstein**, που σημαίνει το εξής: Κάθε έκφραση στην οποία ένας δείκτης εμφανίζεται δύο φορές δηλώνει το άθροισμα των όρων που προκύπτουν από αυτή την έκφραση όταν ο επαναλαμβανόμενος δείκτης πάρει όλες τις επιτρεπόμενες τιμές.

Για παράδειγμα, αν οι δείκτες  $a, b, c$  παίρνουν τις τιμές  $\{1, 2, \dots, n\}$ , τότε

$$A_{aa} \equiv \sum_{a=1}^n A_{aa} = A_{11} + A_{22} + \dots + A_{nn} \quad (2.19)$$

$$A_a B_a \equiv \sum_{a=1}^n A_a B_a = A_1 B_1 + A_2 B_2 + \dots + A_n B_n \quad (2.20)$$

$$A_{ab} B_b \equiv \sum_{b=1}^n A_{ab} B_b = A_{a1} B_1 + A_{a2} B_2 + \dots + A_{an} B_n \quad (2.21)$$

$$A_{bc} B_{cb} \equiv \sum_{b=1}^n \sum_{c=1}^n A_{bc} B_{cb} = A_{11} B_{11} + A_{12} B_{21} + \dots + A_{21} B_{12} + \dots + A_{nn} B_{nn} \quad (2.22)$$

Στο πλαίσιο αυτού του συμβολισμού, ο πολλαπλασιασμός του  $l \times n$  πίνακα  $A = (A_{ja})$  με τον  $n \times m$  πίνακα  $B = (B_{ak})$  παίρνει την ακόλουθη μορφή

$$A_{ja} B_{ak}, \quad j = 1, \dots, l, \quad k = 1, \dots, m. \quad (2.23)$$

Σημειώστε ότι κάθε όρος του αθροίσματος  $A_{ja} B_{ak}$  είναι το γινόμενο των αριθμών  $A_{ja}$  και  $B_{ak}$ . Συνεπώς,

$$A_{ja} B_{ak} = B_{ak} A_{ja}. \quad (2.24)$$

Με άλλα λόγια, η σειρά με την οποία γράφονται οι παράγοντες σε μια έκφραση για την οποία ισχύει η σύμβαση Einstein δεν παίζει κανένα ρόλο. Επίσης, το όνομα ενός επαναλαμβανόμενου δείκτη είναι τελείως αδιάφορο. Για παράδειγμα,

$$A_{ab} B_b = A_{ac} B_c. \quad (2.25)$$

Σύμφωνα, λοιπόν, με τον συμβολισμό που αναφέραμε και τη σύμβαση Einstein, η σχέση

$$\mathbf{e}'_a = \sum_{b=1}^n \frac{\partial x_b}{\partial x'_a} \mathbf{e}_b \equiv \sum_{b=1}^n A_{ab} \mathbf{e}_b. \quad (2.26)$$

γράφεται σαν

$$\mathbf{e}'_a = \frac{\partial x_b}{\partial x'_a} \mathbf{e}_b \equiv A_{ab} \mathbf{e}_b \quad (2.27)$$

Το ότι κάθε μια από τις συντεταγμένες  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  είναι ανεξάρτητη από όλες τις άλλες εκφράζεται από τη σχέση

$$\frac{\partial x_b}{\partial x_a} = \delta_{ab}. \quad (2.28)$$

Από την άλλη,  $x_a = x_a(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$  και  $x'_a = x'_a(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Άρα, ο κανόνας της αλυσίδας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι

$$\frac{\partial x_b}{\partial x_a} = \frac{\partial x_b}{\partial x'_c} \frac{\partial x'_c}{\partial x_a}. \quad (2.29)$$

Συνεπώς,

$$\frac{\partial x_b}{\partial x'_c} \frac{\partial x'_c}{\partial x_a} = \delta_{ab}. \quad (2.30)$$

Αν θέσουμε

$$C_{ab} := \frac{\partial x'_b}{\partial x_a}, \quad (2.31)$$

τότε η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$A_{cb} C_{ac} = \delta_{ab}. \quad (2.32)$$

Με άλλα λόγια, το γινόμενο των πινάκων  $A := (A_{ab})$  και  $C := (C_{ab})$  είναι ίσο με τον ταυτοτικό πίνακα  $I := (\delta_{ab})$ :

$$A C = I. \quad (2.33)$$

Ισοδύναμα,

$$C = A^{-1}. \quad (2.34)$$

Όπως είδαμε παραπάνω, η αλλαγή των συντεταγμένων από τις  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  στις  $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$  επιφέρει τον μετασχηματισμό των συνιστωσών ενός διανυσματικού πεδίου, ο οποίος εκφράζεται από τον τύπο  $V' = B V$ , όπου  $B = (A^{-1})^T$ . Με βάση την τελευταία σχέση, αυτός ο τύπος γράφεται και στη μορφή  
μπορεί πλέον να γραφτεί στη μορφή

$$V' = C^T V. \quad (2.35)$$

Δηλαδή,

$$V'_a = C_{ab}^T V_b \equiv \frac{\partial x'_a}{\partial x_b} V_b. \quad (2.36)$$

Κατά συνέπεια,

$$V'_a = B_{ab} V_b \equiv \frac{\partial x'_a}{\partial x_b} V_b \quad (2.37)$$

■

## Γ. Συντελεστές κλίμακας και μετρική

Οι μετασχηματισμοί που μελετήσαμε στο προηγούμενο εδάφιο είναι τελείως γενικοί. Ειδικότερα, σε κανένα σημείο δεν υποθέσαμε ότι κάποια από τις  $n$ -άδες  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  και  $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$  αντιστοιχεί σε Καρτεσιανές συντεταγμένες ενός  $n$ -διάστατου Ευκλείδειου χώρου  $\mathbb{E}^n$ .

Αν όμως εξειδικεύσουμε την ανάλυσή μας στην περίπτωση όπου οι  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  παριστάνουν Καρτεσιανές συντεταγμένες του  $\mathbb{E}^n$ , τότε τα διανύσματα  $\{\mathbf{e}_a\}_{a=1}^n$  είναι ορθοκανονικά. Δηλαδή,

$$\mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b = \delta_{ab} \quad (3.1)$$

Κι αυτό γιατί, τότε,

$$\mathbf{e}_1 := (1, 0, \dots, 0), \quad \mathbf{e}_2 := (0, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad \mathbf{e}_n := (0, 0, \dots, 0, 1). \quad (3.2)$$

Από την άλλη, το εσωτερικό γινόμενο καθενός από τα διανύσματα βάσης  $\{\mathbf{e}'_a\}_{a=1}^n$  με τον εαυτό του και με τα υπόλοιπα καθορίζεται πλέον από τη σχέση

$$\mathbf{e}'_a = A_{ab} \mathbf{e}_b, \quad A_{ab} := \frac{\partial x_b}{\partial x'_a}. \quad (3.3)$$

Πιο συγκεκριμένα,

$$\mathbf{e}'_a \cdot \mathbf{e}'_b = (A_{ac} \mathbf{e}_c) \cdot (A_{bd} \mathbf{e}_d) = A_{ac} A_{bd} \delta_{cd}. \quad (3.4)$$

Αν θέσουμε

$$g'_{ab} := \mathbf{e}'_a \cdot \mathbf{e}'_b, \quad (3.5)$$

η προηγούμενη σχέση θα πάρει την ακόλουθη μορφή:

$$g'_{ab} = A_{ac} A_{bd} \delta_{cd}. \quad (3.6)$$

Όμως,

$$A_{bd} \delta_{cd} = A_{bc}. \quad (3.7)$$

Κατά συνέπεια

$$g'_{ab} = A_{ac} A_{bc}. \quad (3.8)$$

Ισοδύναμα,

$$g'_{ab} = A_{ac} A_{cb}^T. \quad (3.9)$$

Με άλλα λόγια, ο πίνακας  $g' := (g'_{ab})$  υπολογίζεται αμέσως από τον τύπο

$$g' = A A^T. \quad (3.10)$$

Ορισμένες φορές, ο μετασχηματισμός που οδηγεί από τις Καρτεσιανές συντεταγμένες  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  του  $\mathbb{E}^n$  στις  $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$  είναι τέτοιος που και τα διανύσματα  $\{\mathbf{e}'_a\}_{a=1}^n$  είναι μεταξύ τους ορθογώνια. Τότε, ο πίνακας  $g'$  είναι διαγώνιος. Πιο συγκεκριμένα,

$$g' := (g'_{ab}) = \text{διαγ}((h'_1)^2, (h'_2)^2, \dots, (h'_n)^2), \quad (3.11)$$

όπου

$$h'_a := |\mathbf{e}'_a|, \quad a = 1, 2, \dots, n. \quad (3.12)$$

Οι συναρτήσεις  $\{h'_a\}_{a=1}^n$  λέγονται **συντελεστές κλίμακας**. Με τη βοήθειά τους, η βάση  $(\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_n)$  μετατρέπεται αμέσως στην ορθοκανονική

$$(\hat{\mathbf{e}}'_1, \hat{\mathbf{e}}'_2, \dots, \hat{\mathbf{e}}'_n) := \left( \frac{1}{h'_1} \mathbf{e}'_1, \frac{1}{h'_2} \mathbf{e}'_2, \dots, \frac{1}{h'_n} \mathbf{e}'_n \right). \quad (3.13)$$

Επιστρέφοντας στη γενικότερη περίπτωση που τα διανύσματα βάσης  $\{\mathbf{e}_a\}_{a=1}^n$  δεν είναι ορθοκανονικά, θέτουμε

$$g_{ab} := \mathbf{e}_a \cdot \mathbf{e}_b. \quad (3.14)$$

Τότε, ο τύπος (1.145) πρέπει να αντικατασταθεί από τον

$$g'_{ab} = A_{ac} A_{bd} g_{cd}, \quad (3.15)$$

που στο συμβολισμό πινάκων γράφεται σαν

$$\boxed{g' = A g A^T} \quad (3.16)$$

Σε κάθε περίπτωση, για να αποτελούν βάση, τα διανύσματα  $\{\mathbf{e}_a\}_{a=1}^n$  πρέπει να είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Συνακόλουθα, η ορίζουσα του πίνακα  $g := (g_{ab})$  είναι μη μηδενική. Από την άλλη,

$$\det(A g A^T) = \det(A) \det(g) \det(A^T). \quad (3.17)$$

Συνεπώς,

$$\det g' = \det(A^2) \det g. \quad (3.18)$$

Στο γενικότερο πλαίσιο που μόλις αναλύσαμε, οι πραγματικές  $n$ -άδες  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  και  $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$  αντιπροσωπεύουν διαφορετικές συντεταγμένες μιας περιοχής  $\Omega$  ενός  $n$ -διάστατου χώρου,  $\mathbb{M}^n$ , που μόνο τοπικά, δηλαδή σε μια μικρή γειτονιά κάθε σημείου του, ξεχωριστά, μοιάζει με τον Ευκλείδειο χώρο  $\mathbb{E}^n$ .

Για να πάρουμε μια εποπτική εικόνα αυτής της σχέσης, ας θεωρήσουμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα από την οικογένεια των χώρων  $\mathbb{M}^2$ . Πρόκειται για την επιφάνεια μιας σφαίρας ακτίνας  $a$ . Όπως δείχνει η καθημερινή εμπειρία μας πάνω στην επιφάνεια της γης, κάθε μικρό τμήμα της σφαιρικής επιφάνειας μοιάζει να είναι ίδιο με το Ευκλείδειο επίπεδο,  $\mathbb{E}^2$ .

Κάθε  $n$ -διάστατος χώρος,  $\mathbb{M}^n$ , του είδους που μόλις σκιαγραφήσαμε αναφέρεται ως **χώρος Riemann** ή **Ρημάνειος χώρος**. Στο πλαίσιο της γενίκευσης της Ευκλείδειας γεωμετρίας που παριστάνουν οι χώροι Riemann, οι πίνακες  $g := (g_{ab})$  και  $g' := (g'_{ab})$  ονομάζονται **συνιστώσες της πρώτης θεμελιακής μορφής** του  $\mathbb{M}^n$ , στις συντεταγμένες  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  και  $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ , αντίστοιχα. Η πρώτη θεμαλιακή μορφή αναφέρεται και ως **μετρικός τανυστής** (metric tensor), ή, απλούστερα, **μετρική** (ως συντόμευση, ίσως, της φράσης μετρική τανυστική συνάρτηση).

## Δ. Γενικός ορισμός των τελεστών grad, div, curl και Δ

### Δ.1 Κλίση

Θεωρούμε τώρα μια ομαλή βαθμωτή συνάρτηση  $F(x)$ , με πεδίο ορισμού την περιοχή  $\Omega$  στην οποία απεικονίζεται η  $\Omega'$ :  $\Omega = \Phi(\Omega')$ . Η σύνθεση των  $F$  και  $\Phi$  ορίζει μια βαθμωτή συνάρτηση με πεδίο ορισμού την περιοχή  $\Omega'$ . Αν λοιπόν θέσουμε

$$F' := F \circ \Phi, \quad (4.1)$$

τότε

$$F'(x') = F(\Phi(x')), \quad (4.2)$$

Όμως,  $\Phi(x') = x$ . Άρα, η προηγούμενη σχέση γράφεται σαν

$$F'(x') = F(x). \quad (4.3)$$

Από τον κανόνα της αλυσίδας αμέσως συνάγεται ότι

$$\frac{\partial F'}{\partial x'_a} = \frac{\partial F}{\partial x_b} \frac{\partial x_b}{\partial x'_a}. \quad (4.4)$$

Ισοδύναμα,

$$\partial_{a'} F' = A_{ab} \partial_b F, \quad (4.5)$$

όπου

$$A_{ab} := \partial'_a(x_b) \equiv \frac{\partial x_b}{\partial x'_a}. \quad (4.6)$$

Ως κλίση της βαθμωτής συνάρτησης  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , με πεδίο ορισμού το ανοιχτό υποσύνολο  $\Omega$  του Ευκλείδειου χώρου  $\mathbb{R}^n$ , ορίζεται η  $n$ -άδα

$$\nabla F = (\partial_1 F, \partial_2 F, \dots, \partial_n F) \equiv \left( \frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right) \quad (4.7)$$

Αν λοιπόν θέσουμε

$$\tilde{V}_a := \partial_a F, \quad (4.8)$$

η σχέση (4.5) θα πάρει την ακόλουθη μορφή:

$$\tilde{V}'_a = A_{ab} \tilde{V}_b. \quad (4.9)$$

Η σύγκριση αυτού του τύπου με τον

$$V'_a = B_{ab} V_b, \quad (4.10)$$

που βρήκαμε στο Εδάφιο Β δείχνει καθαρά ότι οι συνιστώσες  $\partial_a F$  της κλίσης δεν μετασχηματίζονται όπως εκείνες των διανυσμάτων που ορίσαμε νωρίτερα. Γι' αυτό το λόγο, τα διανύσματα χωρίζονται σε δύο κατηγορίες. Αυτά των οποίων οι συνιστώσες μετασχηματίζονται σύμφωνα με τον κανόνα (4.9), δηλαδή ακριβώς όπως τα διανύσματα βάσης, ονομάζονται **συναλλοίωτα**. Εκείνα που ακολουθούν τον κανόνα (4.10) λέγονται **ανταλλοίωτα**.

Στο γενικό πλαίσιο της γεωμετρίας του Riemann, η οποία καλύπτει και τους Ευκλείδειους χώρους  $\mathbb{E}^n$ , μπορούμε πάντα να μετατρέψουμε ένα συναλλοίωτο διάνυσμα σε ανταλλοίωτο και αντίστροφα. Για το σκοπό αυτό, εισάγουμε τον πίνακα  $\gamma := g^{-1}$ , όπου  $g := (g_{ab})$  ο πίνακας των συνιστωσών της πρώτης θεμελιακής μορφής. Δηλαδή

$$\gamma_{ab} := g_{ab}^{-1}, \quad a, b = 1, 2, \dots, n. \quad (4.11)$$

Τότε, ο κανόνας μετασχηματισμού των  $g_{ab}$  που αποδείξαμε στο Εδάφιο Γ οδηγεί αμέσως στο ακόλουθο αποτέλεσμα:

### Πρόταση Δ.1

Αν είναι γνωστό ότι οι ποσότητες  $\{\tilde{V}_a\}$  αποτελούν τις συνιστώσες ενός συναλλοίωτου διανύσματος, τότε οι  $\{V_a\}$ , που ορίζονται από τον τύπο

$$V_a := \gamma_{ab} \tilde{V}_b, \quad (4.12)$$

αποτελούν τις συνιστώσες ενός ανταλλοίωτου διανύσματος.

Αντίστροφα, αν οι  $\{V_a\}$  αποτελούν τις συνιστώσες ενός ανταλλοίωτου διανύσματος, τότε οι  $\{\tilde{V}_a\}$ , που ορίζονται από τον τύπο

$$\tilde{V}_a := g_{ab} V_b, \quad (4.13)$$

αποτελούν τις συνιστώσες ενός συναλλοίωτου διανύσματος.

$$V_a := g_{ab} \tilde{V}_b, \quad (4.14)$$

### Απόδειξη

Από τον τύπο

$$g' = A g A^T \quad (4.15)$$

που αναλυτικά γράφεται σαν

$$g'_{ab} = A_{ac} A_{bd} g_{cd}, \quad (4.16)$$

αμέσως έπεται ότι

$$g'^{-1} A g A^T = I. \quad (4.17)$$

Συνακόλουθα,

$$g'^{-1} = (A^T)^{-1} g^{-1} A^{-1}. \quad (4.18)$$

Ισοδύναμα,

$$\gamma' = (A^T)^{-1} \gamma A^{-1}. \quad (4.19)$$

Αν λοιπόν το διάνυσμα  $\tilde{V}$  είναι συναλλοίωτο, πράγμα που σημαίνει ότι  $\tilde{V}' = A \tilde{V}$ , τότε

$$V' := \gamma' \tilde{V}' = (A^T)^{-1} \gamma A^{-1} A \tilde{V} = (A^T)^{-1} \gamma \tilde{V}, \quad (4.20)$$

Ισοδύναμα,

$$V' = B V. \quad (4.21)$$

Την απόδειξη του αντίστροφου την αφήνουμε για άσκηση.



Με βάση τις προηγούμενες παρατηρήσεις, στο γενικότερο πλαίσιο των χώρων Riemann, υιοθετούμε τον ακόλουθο ορισμό: **Κλίση του βαθμωτού πεδίου**  $F$  ονομάζεται το ανταλλοίωτο διάνυσμα  $\nabla F$  που έχει ως συνιστώσες τις συναρτήσεις

$$(\nabla F)_a := \gamma_{ab} \partial_b F, \quad a = 1, 2, \dots, n. \quad (4.22)$$

Προς διάκριση, το συναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο που έχει ως συνιστώσες τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης της συνάρτησης  $F$  συμβολίζεται με  $dF$ . Δηλαδή,

$$(dF)_a := \partial_a F, \quad a = 1, 2, \dots, n. \quad (4.23)$$

Στην ειδικότερη περίπτωση που πίνακας της πρώτης θεμελιακής μορφής είναι διαγώνιος με θετικά στοιχεία, δηλαδή όταν

$$g := (g_{ab}) = \text{διαγ}(h_1^2, h_2^2, \dots, h_n^2), \quad (4.24)$$

τότε,

$$\gamma := (\gamma_{ab}) = \text{διαγ}(h_1^{-2}, h_2^{-2}, \dots, h_n^{-2}). \quad (4.25)$$

Σ' αυτή λοιπόν την περίπτωση,

$$\nabla F = \sum_{a=1}^n \frac{1}{h_a^2} \frac{\partial F}{\partial x_a} \mathbf{e}_a \quad (4.26)$$

Ειδικότερα, για κάθε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων ενός τρισδιάστατου χώρου Riemann σαν τον  $\mathbb{E}^3$ , η κλίση του βαθμωτού πεδίου  $F(x_1, x_2, x_3)$  ορίζεται ως εξής:

$$\nabla F = \sum_{a=1}^3 \frac{\partial F}{\partial x_a} \frac{1}{h_a^2} \mathbf{e}_a = \sum_{a=1}^3 \frac{\partial F}{\partial x_a} \frac{1}{h_a} \hat{\mathbf{e}}_a \quad (4.27)$$

## 4.2 Απόκλιση

Εύκολα επίσης διαπιστώνουμε ότι, γενικά, το άθροισμα  $\partial_a V_a$  δεν παραμένει αναλλοίωτο σε τυχαίους μετασχηματισμούς συντεταγμένων. Πιο συγκεκριμένα, ο συνδυασμός του τύπου για τον μετασχηματισμό ενός ανταλλοίωτου διανύσματος,

$$V'_a = B_{ab} V_b \equiv \frac{\partial x'_a}{\partial x_b} V_b, \quad (4.28)$$

με τον κανόνα της αλυσίδας, οδηγεί αμέσως στο ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$\begin{aligned} \partial'_a V'_a &\equiv \frac{\partial V'_a}{\partial x'_a} = \frac{\partial}{\partial x_c} (B_{ab} V_b) \frac{\partial x_c}{\partial x'_a} = \frac{\partial}{\partial x_c} (B_{ab}) V_b \frac{\partial x_c}{\partial x'_a} + \frac{\partial V_b}{\partial x_c} B_{ab} \frac{\partial x_c}{\partial x'_a} \\ &\equiv \frac{\partial}{\partial x_c} (B_{ab}) V_b A_{ac} + \frac{\partial V_b}{\partial x_c} B_{ab} A_{ac}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Όμως,  $B^T = A^{-1}$ . Άρα, το προηγούμενο αποτέλεσμα γράφεται στην ακόλουθη μορφή:

$$\partial'_a V'_a = V_b \partial_c B_{ab} A_{ac} + \partial_b V_b. \quad (4.30)$$

Αλλάζοντας και τα ονόματα των βωβών δειχτών, καταλήγουμε στη σχέση

$$\partial'_a V'_a = V_a \partial_c B_{ba} A_{bc} + \partial_a V_a. \quad (4.31)$$

Αφού λοιπόν  $\partial'_a V'_a \neq \partial_a V_a$ , το άθροισμα των μερικών παραγώγων των συνιστωσών ενός ανταλλοίωτου διανύσματος δεν είναι βαθμωτή ποσότητα.

Για να βρούμε την κατάλληλη τροποποίηση, ας σημειώσουμε αρχικά ότι

$$\partial_c B_{ba} = \frac{\partial}{\partial x_c} \left( \frac{\partial x'_b}{\partial x_a} \right) = \frac{\partial}{\partial x_a} \left( \frac{\partial x'_b}{\partial x_c} \right) = \partial_a B_{bc} \quad (4.32)$$

Άρα, η (4.31) γράφεται σαν

$$\partial'_a V'_a = V_a \partial_a B_{bc} A_{bc} + \partial_a V_a. \quad (4.33)$$

Ισοδύναμα,

$$\partial'_a V'_a = V_a \partial_a (A_{cb}^{-1}) A_{bc} + \partial_a V_a. \quad (4.34)$$

Από την άλλη, η σχέση  $A^{-1} A = I$  συνεπάγεται ότι

$$\partial_a A^{-1} A = -A^{-1} \partial_a A. \quad (4.35)$$

Άρα,

$$\partial'_a V'_a = -V_a A_{cb}^{-1} \partial_a A_{bc} + \partial_a V_a. \quad (4.36)$$

Για να καταλήξουμε στο στόχο μας, θα χρησιμοποιήσουμε δύο επιπλέον αποτελέσματα. Το πρώτο το έχουμε ήδη αποδείξει και είναι το εξής:

$$\det g' = \det g [\det(A)]^2. \quad (4.37)$$

Κατά συνέπεια,

$$\sqrt{|\det g'|} = \sqrt{|\det g|} |\det A|. \quad (4.38)$$

Από αυτή τη σχέση αμέσως έπεται ότι

$$\partial'_a \left( \sqrt{|\det g'|} \right) V'_a = \partial_a \left( \sqrt{|\det g|} |\det A| \right) V_a. \quad (4.39)$$

Συνακόλουθα,

$$\partial'_a \left( \ln \sqrt{|\det g'|} \right) V'_a = \partial_a \left( \ln \sqrt{|\det g|} \right) V_a + \partial_a (\ln |\det A|) V_a \quad (4.40)$$

Το δεύτερο αποτέλεσμα που θα χρειαστούμε είναι η ταυτότητα

$$V_a A_{cb}^{-1} \partial_a A_{bc} = \partial_a [\ln |\det(A)|]. \quad (4.41)$$

Η απόδειξή της δίνεται παρακάτω. Σε κάθε περίπτωση, με βάση αυτή την ταυτότητα, η (4.36) μετατρέπεται στην

$$\partial'_a V'_a = -V_a \partial_a [\ln |\det(A)|] + \partial_a V_a. \quad (4.42)$$

Προσθέτοντας τις (4.40) και (4.42) κατά μέλη, βρίσκουμε ότι

$$\partial'_a V'_a + \partial'_a \left( \ln \sqrt{|\det g'|} \right) V'_a = V_a \partial_a \left( \ln \sqrt{|\det g|} \right) + \partial_a V_a. \quad (4.43)$$

Η σχέση που μόλις αποδείξαμε, η οποία γράφεται και στη μορφή

$$\frac{1}{\sqrt{|\det g'|}} \partial'_a \left( \sqrt{|\det g'|} V'_a \right) = \frac{1}{\sqrt{|\det g|}} \partial_a \left( \sqrt{|\det g|} V_a \right), \quad (4.44)$$

αποτελεί τη βάση του γενικού ορισμού της απόκλισης. Πιο συγκεκριμένα, ορίζοντας ως *απόκλιση του (ανταλλοιώτου) διανυσματικού πεδίου*  $V$  την έκφραση

$$\boxed{\nabla \cdot V := \frac{1}{\sqrt{|\det g|}} \partial_a \left( \sqrt{|\det g|} V_a \right)} \quad (4.45)$$

εξασφαλίζουμε ότι ο ορισμός μας είναι ανεξάρτητος από το σύστημα συντεταγμένων.

Στην ειδικότερη περίπτωση που ο πίνακας της μετρικής είναι της μορφής

$$g := (g_{ab}) = \text{διαγ}(h_1^2, h_2^2, \dots, h_n^2), \quad (4.46)$$

όπως ειδικότερα συμβαίνει στις ορθογώνιες καμπυλόγραμμες συντεταγμένες του Ευκλείδειου χώρου  $\mathbb{E}^n$ , ο προηγούμενος τύπος ανάγεται στον

$$\nabla \cdot V = \frac{1}{\kappa} \partial_a (\kappa V_a), \quad (4.47)$$

όπου

$$\kappa := \prod_{a=1}^n h_a. \quad (4.48)$$

Έτσι, στον  $\mathbb{E}^3$ ,

$$\boxed{\nabla \cdot V = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \partial_a (h_1 h_2 h_3 V_a)} \quad (4.49)$$

### Λήμμα Δ.1

$$\boxed{A_{cb}^{-1} \partial_a A_{bc} = \partial_a [\ln |\det(A)|].} \quad (4.50)$$

#### Απόδειξη

Τα στοιχεία του αντίστροφου του πίνακα  $A$  δίνονται από τον τύπο

$$A_{cb}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{cof}(A_{bc}) \quad (4.51)$$

όπου ο *συμπαράγοντας* (cofactor),  $\text{cof}(A_{bc})$ , του στοιχείου  $A_{bc}$  είναι ίσος με την ορίζουσα του πίνακα που προκύπτει αν από τον  $(A_{bc})$  απαλείψουμε το τη γραμμή  $b$  και τη στήλη  $c$ , πολλαπλασιασμένη με  $(-1)^{b+c}$ . Η βασική παρατήρηση για ότι ακολουθεί είναι πως, ο

συμπαράγοντας του στοιχείου  $A_{bc}$  δεν περιέχει κανένα από τα στοιχεία της μορφής  $A_{ba}$ ,  $a = 1, 2, \dots, n$ .

Από τον τύπο για τα στοιχεία του αντίστροφου έπεται ότι

$$\delta_{ca} = A_{cb}^{-1} A_{ba} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{cof}(A_{bc}) A_{ba} \quad (4.52)$$

$$1 = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{cof}(A_{ba}) A_{ba}, \quad (\text{χωρίς άθροιση στον δείκτη } a). \quad (4.53)$$

Για ευκολία, θέτουμε προσωρινά

$$\tilde{A}_{ab} := \operatorname{cof}(A_{ba}). \quad (4.54)$$

Έτσι η (4.52) είναι ισοδύναμη με την

$$\det(A) = \tilde{A}_{ab} A_{ba}, \quad (\text{χωρίς άθροιση στον δείκτη } a). \quad (4.55)$$

Η ορίζουσα ενός πίνακα μπορεί να θεωρηθεί ως συνάρτηση με ανεξάρτητες μεταβλητές τα στοιχεία του πίνακα. Παραγωγίζοντας, λοιπόν, την προηγούμενη σχέση ως προς τη μεταβλητή  $A_{ca}$  και λαβαίνοντας υπόψη την ανεξαρτησία του συμπαράγοντα  $\tilde{A}_{ab} = \operatorname{cof}(A_{ba})$  από κάθε στοιχείο της μορφής  $A_{ca}$ , βρίσκουμε ότι

$$\frac{\partial}{\partial A_{ca}} [\det(A)] = \frac{\partial}{\partial A_{ca}} (\tilde{A}_{ab} A_{ba}) = \tilde{A}_{ab} \frac{\partial}{\partial A_{ca}} A_{ba}. \quad (4.56)$$

$$= \tilde{A}_{ab} \delta_{bc} = \tilde{A}_{ac}. \quad (4.57)$$

Τώρα θεωρούμε ότι τα στοιχεία του πίνακα είναι συναρτήσεις των συντεταγμένων. Συνεπώς,

$$\partial_b [\det(A)] = \frac{\partial}{\partial A_{ca}} \det(A) \partial_b A_{ca} = \tilde{A}_{ac} \partial_b A_{ca} = \det(A) A_{ca}^{-1} \partial_b A_{ca}. \quad (4.58)$$

Ισοδύναμα,

$$\partial_b [\ln |\det(A)|] = A_{ca}^{-1} \partial_b A_{ca}. \quad (4.59)$$

■

### Δ.3 Πεδίο Laplace

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, η απόκλιση του (ανταλλοίωτου) διανυσματικού πεδίου  $V$  ορίζεται από τον τύπο

$$\nabla \cdot V = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x_a} (\sqrt{|g|} V_a) \quad (4.60)$$

και η κλίση του βαθμωτού πεδίου  $F$  από τον

$$\nabla F = \gamma_{ab} \frac{\partial F}{\partial x_b} e_a \equiv g_{ab}^{-1} \frac{\partial F}{\partial x_b} e_a. \quad (4.61)$$

Αφού λοιπόν με **πεδίο Laplace**,  $\Delta F$ , ενός βαθμωτού πεδίου,  $F$ , εννοούμε την απόκλιση της κλίσης της συνάρτησης  $F$ , στο γενικό πλαίσιο των χώρων Riemann,

$$\Delta F := \nabla \cdot \nabla F = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x_a} \left( \sqrt{|g|} g_{ab}^{-1} \frac{\partial F}{\partial x_b} \right) \quad (4.62)$$

Για παράδειγμα, αν σε έναν τρισδιάστατο χώρο Riemann

$$g_{ab} = \text{diag}(h_1^2, h_2^2, h_3^2), \quad g_{ab}^{-1} = \text{diag}(h_1^{-2}, h_2^{-2}, h_3^{-2}), \quad (4.63)$$

όπως συμβαίνει στις ορθογώνιες καμπυλόγραμμες συντεταγμένες του  $\mathbb{E}^3$ , τότε

$$\Delta F = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial x_a} \left( \frac{h_1 h_2 h_3}{h_a^2} \frac{\partial F}{\partial x_a} \right) \quad (4.64)$$

#### Δ. 4 Στροβιλισμός

Στις Καρτεσιανές συντεταγμένες του  $\mathbb{E}^3$ , ως στροβιλισμός ενός διανυσματικού πεδίου  $V$  ορίζεται το διανυσματικό πεδίο  $\nabla \times V$  που έχει ως συνιστώσες τις δυναρτήσεις

$$(\nabla \times V)_a = \frac{\partial}{\partial x_b} V_c - \frac{\partial}{\partial x_c} V_b, \quad (4.65)$$

όπου  $(a, b, c) = (1, 2, 3), (2, 3, 1),$  ή  $(3, 1, 2)$ . Η άμεση γενίκευση αυτού του ορισμού στους χώρους Riemann τυχαίας διάστασης σκονταύτει στο ακόλουθο γεγονός: Ο συνδυασμός (4.65) των μερικών παραγώγων ενός (ανταλλοίωτου) διανύσματος  $V$  δεν έχει τανυστικό χαρακτήρα. Αυτό σημαίνει ότι, η "νέα έκδοση",  $\partial'_b V'_c - \partial'_c V'_b$ , του παραπάνω συνδυασμού στις καινούργιες συντεταγμένες  $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$  δεν ανάγεται σε γραμμικό συνδυασμό των συνιστωσών του,  $\partial_b V_c - \partial_c V_b$ , στις αρχικές συντεταγμένες  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Αντίθετα, όταν το διανυσματικό πεδίο είναι συναλλοίωτο, τα πράγματα γίνονται πολύ απλά. Πιο συγκεκριμένα, ένας εύκολος υπολογισμός οδηγεί στο ακόλουθο συμπέρασμα: Αν, όπως ισχύει για τα συναλλοίωτα διανύσματα,

$$\tilde{V}'_a = A_{ab} \tilde{V}_b \equiv \frac{\partial x_b}{\partial x'_a} \tilde{V}_b, \quad (4.66)$$

τότε,

$$\partial'_a \tilde{V}'_b - \partial'_b \tilde{V}'_a = A_{ac} A_{bd} (\partial_c \tilde{V}_d - \partial_d \tilde{V}_c). \quad (4.67)$$

Με άλλα λόγια, ο συνδυασμός

$$(\mathbf{d} \tilde{V})_{ab} := \partial_a \tilde{V}_b - \partial_b \tilde{V}_a \quad (4.68)$$

μετασχηματίζεται ακριβώς όπως η πρώτη θεμελιακή μορφή.

Από την άλλη μεριά, στους χώρους Riemann, κάθε συναλλοίωτο διανυσματικό πεδίο αντιστοιχεί σε κάποιο ανταλλοίωτο. Αυτό το αποδείξαμε νωρίτερα και είδαμε ότι οι συνιστώσες του  $\tilde{V}$  γράφονται στη μορφή

$$\tilde{V}_a = g_{ab} V_b. \quad (4.69)$$

Άρα, θα μπορούσαμε, τελικά, να ορίσουμε τον στροβιλισμό του ανταλλοίωτου πεδίου  $V$  μέσω

του συνδυασμού  $d\tilde{V}$  για το συναλλοίωτο πεδίο  $\tilde{V}$  που αντιστοιχεί στο  $V$ .

Και, πραγματικά, ο "τανυστής"  $d\tilde{V}$  είναι η κατάλληλη γενίκευση της έννοιας του στροβιλισμού στο πλαίσιο των χώρων Riemann και στο ακόμη ευρύτερο πλαίσιο των χώρων που ονομάζονται *διαφορικές πολλαπλότητες* (differential manifolds). Η μόνη διαφορά είναι ότι, μόνο στους τρισδιάστατους χώρους Riemann μπορούμε να μετατρέψουμε την ποσότητα  $d\tilde{V}$  σε διάνυσμα.

Για λεπτομέρειες θα πρέπει να παραπέμψουμε τον αναγνώστη στα συγγράμματα που είναι αφιερωμένα στη σύγχρονη διαφορική γεωμετρία ή τη Γενική Σχετικότητα. Συνοπτικά, όταν το  $n = 3$ , τότε υπάρχει ένα ανταλλοίωτο διάνυσμα που αντιστοιχεί μονοσήμαντα στον τανυστή  $d\tilde{V}$ . Πρόκειται για τον συδυασμό

$$\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{|\det g|}} \varepsilon_{abc} (d\tilde{V})_{bc} \quad (4.70)$$

όπου  $\varepsilon_{abc} = \pm 1$ , ανάλογα με το αν η τριάδα  $(a, b, c)$  αποτελεί άρτια ή περιττή αναδιάταξη της  $(1, 2, 3)$ . Εδώ, θα συμβολίσουμε αυτό το διάνυσμα με  $\nabla \times V$  και θα το ονομάσουμε στροβιλισμό του ανταλλοίωτου διανύσματος  $V$ . Συνεπώς,

$$(\nabla \times V)_a = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{|\det g|}} \varepsilon_{abc} [\partial_b (g_{cd} V_d) - \partial_c (g_{bd} V_d)] \quad (4.71)$$

Για παράδειγμα, στις ορθογόνιες καμπυλόγραμμες συντεταγμένες του  $\mathbb{E}^3$ , όπου

$$g_{ab} = \text{diag}(h_1^2, h_2^2, h_3^2) \quad (4.72)$$

οι συνιστώσες της απόκλισης είναι ίσες με

$$(\nabla \times V)_a = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} [\partial_b (h_c^2 V_c) - \partial_c (h_b^2 V_b)] \quad (4.73)$$

όπου οι δείκτες  $(a, b, c)$  προκύπτουν από την κυκλική αναδιάταξη των  $(1, 2, 3)$  (χωρίς άθροιση). Βέβαια,

$$\nabla \times V = C_a \mathbf{e}_a = \hat{C}_a \hat{\mathbf{e}}_a, \quad \hat{C}_a := h_a C_a, \quad \hat{\mathbf{e}}_a := \frac{1}{h_a} \mathbf{e}_a, \quad a = 1, 2, 3. \quad (4.74)$$

Συνεπώς, οι συνιστώσες της απόκλισης στην ορθοκανονική βάση δίνονται από το τύπο

$$\hat{C}_a = \frac{h_a}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial x_b} (h_c \hat{V}_c) - \frac{\partial}{\partial x_c} (h_b \hat{V}_b) \right]. \quad (4.75)$$



## Βιβλιογραφία

- Berg, P.W. & Mc Gregor, J.L., *Elementary Partial Differential Equations*, Holden-Day Inc (1966).
- Churchill, R.V., *Fourier Series and Boundary Value Problems*, 2nd Ed., McGraw-Hill Book Co (1969).
- Copson, E.T., *Partial Differential Equations*, Cambridge University Press (1975).
- Courant, R. & Hilbert D., *Methods of Mathematical Physics*, Vols I-II, J. Wiley & Sons (1989).
- Δάσιος, Γ. & Κυριάκη, Κ., *Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις*, Αθήνα (1994).
- Dettman, J.W., *Applied Complex Variables*, Dover (1984).
- Duff, G.F.D. & Naylor, D., *Differential Equations of Applied Mathematics*, 3rd Ed., McGraw-Hill Inc (1966).
- Evans, L.C., *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society (1998).
- Folland, G.B., *Fourier Analysis and its Applications*, Brooks/Cole Publ. Co. (1992).
- Folland, G.B., *Introduction to Partial Differential Equations*, 2nd Ed., Princeton University Press (1995).
- Friedman, A. , *Partial Differential Equations*, 3rd Ed., Rinehart & Winston (1969).
- Garabedian, P., *Partial Differential Equations*, J. Wiley (1964).
- Guenther, B.R & Lee, J.W., *Partial Differential Equations of Mathematical Physics and Integral Equations*, Dover (1996).
- Hildebrand, F.B., *Advanced Calculus for Applications*, 2nd Ed., Prentice-Hall (1976).
- John, F., *Partial Differential Equations*, 4th Ed., Springer-Verlag (1982).
- Kevorkian, J., *Partial Differential Equations*, Analytical Solution Techniques, Brooks/Cole (1990).
- Lieberstein, H.M., *Theory of Partial Differential Equations*, Academic Press (1972).
- Morse, P.M. & Feshbach, H., *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill Inc (1953).
- Petrovsky, I.G., *Lectures of Partial Differential Equations*, Willey (Interscience) (1954).
- Renardy, M. & Rogers, R.C, *An Introduction to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag (1993).
- Shaw, W.T., *Complex Analysis with Mathematica*, Cambridge University Press (2006).
- Shilov, G.E., *Elementary Real and Complex Analysis of Partial Differential Equations*, Dover (1996).
- Silverman, R.A., *Complex Analysis with Applications*, Dover (1984).
- Sneddon, I., *Elements of Partial Differential Equations*, McGraw-Hill, Inc (1985).