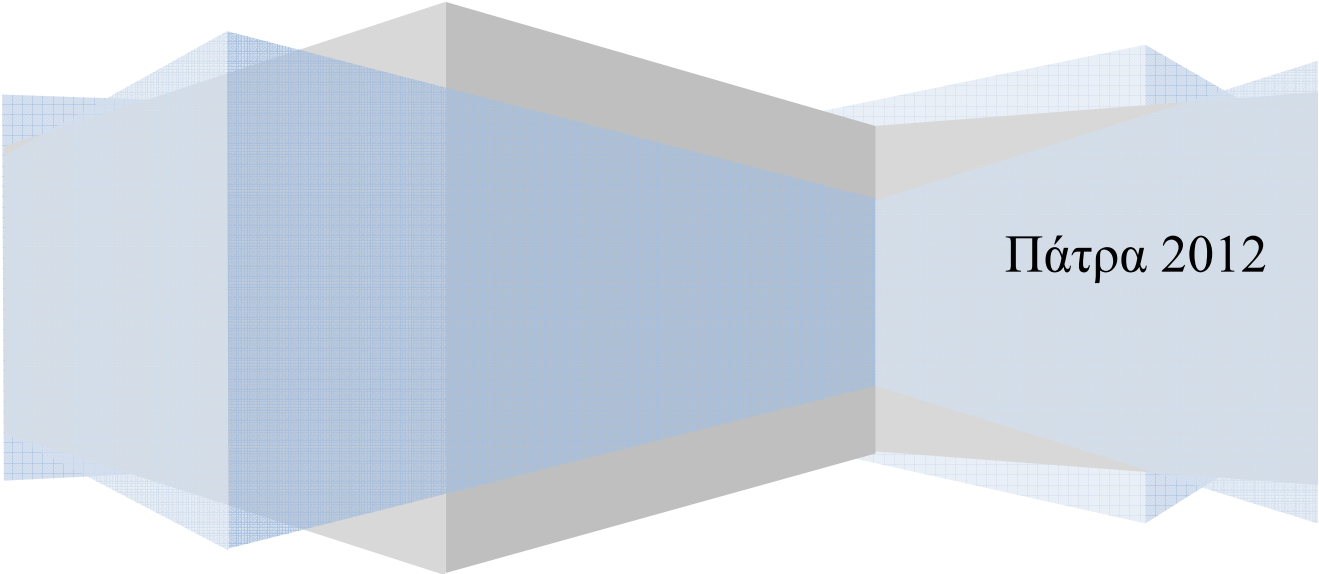


ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Δημήτρης Σουρλάς
Αναπλ. Καθηγητής

$$f^{(n)}(\alpha) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}} dz$$



Πάτρα 2012

Email: dsourlas@physics.upatras.gr

Ιστοσελίδα:

www.physics.upatras.gr

Περιεχόμενα

1.	ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ.....	1
1.1	Ορισμός των μιγαδικών αριθμών.....	1
1.2	Η άλγεβρα και η γεωμετρία των μιγαδικών αριθμών.....	2
1.3	Ο τύπος του De Moivre και οι ρίζες των μιγαδικών αριθμών.....	4
1.4	Ο τύπος του Euler.....	6
1.5	Μερικές εφαρμογές του τύπου του Euler.....	6
1.6	Το σημείο στο άπειρο - Στερεογραφική προβολή. Σφαίρα του Riemann.....	8
1.7	Το όριο μιας ακολουθίας μιγαδικών αριθμών.....	9
1.8	Σημειosύνολα του μιγαδικού επιπέδου.....	10
	Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ.....	12
2.	ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ.....	14
2.1	Ορισμός της Μιγαδικής συνάρτησης - Μονότιμες, Πλειότιμες και.....	14
	Αντίστροφες συναρτήσεις.....	14
2.2	Απεικονίσεις ή Μετασχηματισμοί.....	15
2.3	Όριο συνάρτησης.....	15
2.4	Συνέχεια συνάρτησης.....	17
2.5	Στοιχειώδεις συναρτήσεις.....	18
2.6	Σημεία, τομές διακλάδωσης και επιφάνεια Riemann.....	20
	Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ.....	23
	ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΜΙΓΑΔΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ.....	25
3.1	Ορισμός της παραγώγου μιας μιγαδικής συνάρτησης.....	25
3.2	Κανόνες παραγώγισης.....	27
3.3	Αναλυτικές συναρτήσεις. Συνθήκες Cauchy - Riemann.....	28
3.4	Αρμονικές συναρτήσεις.....	31
3.5	Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου.....	33
3.6	Γεωμετρική σημασία του ορίσματος της παραγώγου.....	33
3.7	Γεωμετρική ερμηνεία του μέτρου της παραγώγου.....	35
3.8	Παράγωγοι ανώτερης τάξης.....	36
3.9	Κανόνας του L' Hospital.....	36
3.10	Ανώμαλα σημεία.....	37

3.11	Μιγαδικοί Διαφορικοί Τελεστές - Κλίση - Απόκλιση - Στροβιλισμός - Λαπλασιανή μιας μιγαδικής συνάρτησης	38
	Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ	41
4.	ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ	43
4.1	Επικαμπύλιο Μιγαδικό Ολοκλήρωμα	43
4.2	Βασικές ιδιότητες των μιγαδικών ολοκληρωμάτων.....	43
4.3	Αναγωγή του επικαμπύλιου μιγαδικού ολοκληρώματος σε ορισμένο ολοκλήρωμα	44
4.4	Το ολοκληρωτικό θεώρημα του Cauchy.....	45
4.5	Εφαρμογή του θεωρήματος του Cauchy για τον υπολογισμό πραγματικών ολοκληρωμάτων.....	51
4.6	Το θεώρημα του Morera	56
4.7	Αόριστα ολοκληρώματα	56
4.8	Συνέπειες του θεωρήματος του Cauchy	57
	Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ	61
5.	ΟΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ ΤΟΥ CAUCHY ΚΑΙ ΣΧΕΤΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ 62	
5.1	Οι ολοκληρωτικοί τύποι του Cauchy	62
5.2	Το Θεώρημα του Morera.....	64
5.3	Ανισότητα του Cauchy.....	65
5.4	Το θεώρημα του Liouville.....	65
5.5	Το θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας.	66
5.6	Το θεώρημα του μέγιστου μέτρου.	66
5.7	Το θεώρημα του ελάχιστου μέτρου.....	68
5.8	Το θεώρημα του ορίσματος.....	68
5.9	Το θεώρημα του Rouché	70
5.10	Οι ολοκληρωτικοί τύποι του Poisson για κύκλο.....	71
5.11	Οι ολοκληρωτικοί τύποι του Poisson για ημιεπίπεδο	72
	Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ	72
6.	ΣΕΙΡΕΣ TAYLOR - LAURENT ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΑ ΥΠΟΛΟΙΠΑ.....	75
6.1	Σειρές συναρτήσεων - Δυναμοσειρές.	75
6.2	Το θεώρημα του Taylor.....	76
6.3	Το θεώρημα του Laurent.....	78
6.4	Ανώμαλα σημεία.	81
6.5	Ακέραιες και Μερόμορφες συναρτήσεις	87

6.6	Αναλυτική συνέχιση.....	87
6.7	Ολοκληρωτικά Υπόλοιπα.....	89
6.8	Το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων.....	91
6.9	Υπολογισμός ορισμένων πραγματικών ολοκληρωμάτων.....	91
6.9.1	Ολοκληρώματα της μορφής: $\int_0^{2\pi} f(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$	91
6.9.2	Ολοκληρώματα της μορφής $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$	94
6.9.3	Ολοκληρώματα της μορφής $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin ax dx$ και $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos ax dx$ με $a > 0$ 96	
6.9.4	Ολοκληρώματα της μορφής $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ όπου η $f(x)$ έχει πεπερασμένο πλήθος απλών πόλων στον πραγματικό άξονα.....	99
6.9.5	Ολοκληρώματα πλειότιμων συναρτήσεων.....	103
6.10	Ο Μιγαδικός τύπος της αντιστροφής του μετασχηματισμού Laplace (The complex inversion formula).....	106
6.10.1	Το περίγραμμα Bromwich.....	107
6.10.2	Χρήση του θεωρήματος των ολοκληρωτικών υπολοίπων για την αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace.....	107
6.10.3	Τροποποίηση του περιγράμματος Bromwich στην περίπτωση σημείων διακλαδώσεως.....	108
	A Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ.....	110
7	ΣΥΜΜΟΡΦΗ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ.....	113
7.1	Γενικά.....	113
7.2	Μετασχηματισμοί στο επίπεδο.....	113
7.3	Σύμμορφη απεικόνιση.....	114
7.4	Το θεώρημα του Riemann.....	117
7.5	Μετασχηματισμοί που ορίζονται από στοιχειώδεις συναρτήσεις.....	117
7.6	Μετασχηματισμοί αρμονικών συναρτήσεων.....	118
7.7	Μετασχηματισμοί των συνοριακών συνθηκών.....	119
7.8	Επίλυση των προβλημάτων συνοριακών τιμών πρώτου και δευτέρου..... είδους. 121	121
	ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 1ου Κεφαλαίου.....	123
	ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 2ου Κεφαλαίου.....	133
	ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 3ου Κεφαλαίου.....	137
	ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 4ου Κεφαλαίου.....	145

ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 5ου Κεφαλαίου	149
ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 6ου Κεφαλαίου	155

1. ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

1.1 Ορισμός των μιγαδικών αριθμών

Εμπλουτίζοντας τις γνώσεις μας για την αριθμητική και την άλγεβρα, διαπιστώσαμε ότι κάθε επέκταση της έννοιας ενός αριθμού πρωτοεμφανίστηκε σαν λύση κάποιου θεμελιώδους προβλήματος. Π.χ. η πρόσθεση των φυσικών αριθμών 1,2,3,... είναι μια κλειστή πράξη που ορίζεται για κάθε ζεύγος φυσικών αριθμών. Όταν όμως επιχειρήσαμε να ορίσουμε την αντίστροφη πράξη, δηλαδή την αφαίρεση, αναγκαστήκαμε να εισάγουμε τους **αρνητικούς αριθμούς**. Όμοια ο πολλαπλασιασμός των ακεραίων αριθμών ορίζεται για κάθε ζεύγος ακεραίων, ενώ η διαίρεση, σαν αντίστροφη πράξη του πολλαπλασιασμού, μας ανάγκασε να εισάγουμε την έννοια των **κλασμάτων** ή **των ρητών αριθμών**. Στη συνέχεια εισήχθησαν οι **άρρητοι αριθμοί** για να περιγράψουν γεωμετρικά μήκη.

Το απλό πρόβλημα της λύσης όλων των αλγεβρικών εξισώσεων βαθμού μεγαλύτερου ή ίσου με δυο, οδήγησε στην εισαγωγή των μιγαδικών αριθμών. Η γενική δευτεροβάθμια εξίσωση: $ax^2 + bx + c = 0$ δεν έχει πραγματική λύση όταν $\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$. Εάν επιχειρήσουμε να λύσουμε μια τέτοια εξίσωση, όπως π.χ. την $x^2 + 6x + 13 = 0$ οδηγούμαστε τυπικά στο αποτέλεσμα $x = -3 \pm \sqrt{-4}$, που δεν έχει νόημα εκτός εάν ορίσουμε νέους αριθμούς. Έτσι εάν δεχθούμε ότι υπάρχει ένας αριθμός για την έκφραση $\sqrt{-1}$, που θα τον συμβολίζουμε με i και θα τον χειριζόμαστε σαν ένα συνήθη αριθμό με την ιδιότητα $i^2 = -1$, μπορούμε να γράψουμε την παραπάνω λύση με την μορφή $x = -3 \pm 2i$. (Η εισαγωγή του συμβόλου i οφείλεται στον Euler, αλλά στα ηλεκτρονικά όμως χρησιμοποιείται το γράμμα j).

Η εισαγωγή των μιγαδικών αριθμών σαν μια απλή επέκταση της έννοιας των πραγματικών αριθμών για την λύση των δευτεροβάθμιων εξισώσεων, δεν πρέπει να μας κάνει να σκεφθούμε ότι αυτή είναι η μόνη χρησιμότητα των μιγαδικών αριθμών. Αν και ορίστηκαν γι' αυτό το σκοπό και στην αρχή η χρήση των μιγαδικών αριθμών ήταν "νεφελώδης" και "ενοχλητική" για την πραγματική ανάλυση, με την πάροδο όμως του χρόνου η θεωρία των μιγαδικών αριθμών και συναρτήσεων, έγινε ένα δυνατό εργαλείο για πολλούς κλάδους της Φυσικής. που αποτελεί σήμερα τον μαθηματικό κλάδο της Μιγαδικής Ανάλυσης,

Ας αρχίσουμε τώρα από την μελέτη των μιγαδικών αριθμών:

Εάν πολλαπλασιάσουμε το i με τους πραγματικούς αριθμούς, προκύπτουν οι λεγόμενοι **φανταστικοί αριθμοί**⁽¹⁾ που έχουν τη μορφή βi , (όπου β πραγματικός αριθμός).

⁽¹⁾ Η ονομασία "φανταστικός αριθμός" προήλθε από την εντύπωση ότι οι αριθμοί αυτοί, όπως και οι μιγαδικοί αριθμοί, (που θα ορισθούν αμέσως παρακάτω), δεν παριστάνουν άμεσα παρατηρήσιμα μεγέθη στη φύση. Αν και η άποψη αυτή έχει τώρα εγκαταλειφθεί, η αρχική ονομασία ακόμα παραμένει.

Εάν επεκτείνουμε τους συνήθεις κανόνες του πολλαπλασιασμού στους φανταστικούς αριθμούς, τότε διαπιστώνουμε ότι το γινόμενο δυο φανταστικών αριθμών είναι πραγματικός αριθμός και το τετράγωνο ενός φανταστικού αριθμού είναι αρνητικός αριθμός. Π.χ.

$$(3i)(-4i) = (3)(-4)i^2 = (-12)(-1) = 12$$

$$(-5i)^2 = (-5)^2 i^2 = -25$$

Αν θεωρήσουμε την ένωση των συνόλων των πραγματικών και φανταστικών αριθμών, τότε στο νέο σύνολο μπορούμε να εκτελέσουμε τις πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης και εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι το νέο αυτό σύνολο είναι κλειστό ως προς τις δυο αυτές πράξεις. Όμως το νέο αυτό σύνολο δεν είναι κλειστό ως προς τις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης. Για να απαλείψουμε αυτή την ανεπάρκεια, εισάγουμε τους λεγόμενους **μυγαδικούς αριθμούς**. Οι αριθμοί αυτοί, τους οποίους συμβολίζουμε με C , συνήθως γράφονται με τη μορφή:

$$z = \alpha + i\beta \quad \text{με } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

και υπακούουν σε ορισμένους κανόνες.

Ο αριθμός α λέγεται **πραγματικό μέρος** του z και ο αριθμός β **φανταστικό μέρος** του z και συμβολίζονται με $\text{Re}(z)$ και $\text{Im}(z)$ αντίστοιχα. Το σύμβολο i λέγεται φανταστική μονάδα.

Όπως θα δούμε παρακάτω το σύνολο των μυγαδικών αριθμών είναι κλειστό ως προς τις τέσσερις πράξεις της αριθμητικής και ως προς την εξαγωγή της τετραγωνικής ρίζας. Έχει όλα τα επιθυμητά αλγεβρικά χαρακτηριστικά για να είναι σώμα και είναι μια επέκταση των πραγματικών αριθμών.

Η μελέτη και η χρήση των μυγαδικών αριθμών είναι πολύτιμη για την Φυσική, διότι η περιγραφή των φυσικών νομών είναι πιο πολύπλοκη χωρίς αυτούς.

1.2 Η άλγεβρα και η γεωμετρία των μυγαδικών αριθμών

Οι αλγεβρικές πράξεις, που μπορούν να ορισθούν στους μυγαδικούς αριθμούς, (που θα τους γράφουμε $\alpha + i\beta$ ή $\alpha + i\beta i$), είναι οι εξής:

1. **Πρόσθεση:** $(\alpha_1 + i\beta_1) + (\alpha_2 + i\beta_2) = (\alpha_1 + \alpha_2) + i(\beta_1 + \beta_2)$

2. **Αφαίρεση:** $(\alpha_1 + i\beta_1) - (\alpha_2 + i\beta_2) = (\alpha_1 - \alpha_2) + i(\beta_1 - \beta_2)$

3. **Πολλαπλασιασμός:** $(\alpha_1 + i\beta_1) \cdot (\alpha_2 + i\beta_2) = (\alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2) + i(\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1)$

Η πράξη του πολλαπλασιασμού εύκολα μπορεί να εκτελεσθεί χωρίς να θυμόμαστε την παραπάνω έκφραση, χρησιμοποιώντας τους μυγαδικούς αριθμούς σαν διώνυμα και εφαρμόζοντας την επιμεριστική ιδιότητα.

Οι μυγαδικοί αριθμοί $\alpha + i0$ ταυτίζονται με τους πραγματικούς αριθμούς. Σε πιο αυστηρή γλώσσα: το υποσύνολο των μυγαδικών αριθμών της μορφής $\alpha + i0$ είναι **ισομορφικό** προς το σύνολο των πραγματικών αριθμών με την αντιστοιχία $\alpha + i0 \rightarrow \alpha$. Οι μυγαδικοί αριθμοί της μορφής $0 + i\beta$ είναι οι φανταστικοί αριθμοί. Στις δυο αυτές περιπτώσεις γράφουμε: $\alpha + i0 = \alpha$ και $0 + i\beta = i\beta$.

4. **Διαίρεση:**

$$\frac{(\alpha + i\beta)}{(\gamma + i\delta)} = \frac{(\alpha + i\beta)(\gamma - i\delta)}{(\gamma + i\delta)(\gamma - i\delta)} = \frac{(\alpha\gamma + \beta\delta) + i(\beta\gamma - \alpha\delta)}{\gamma^2 + \delta^2} = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{\gamma^2 + \delta^2} + i \frac{\beta\gamma - \alpha\delta}{\gamma^2 + \delta^2}$$

με $\gamma^2 + \delta^2 \neq 0$ δηλαδή $\gamma + i\delta \neq 0 + i0 \neq 0$

5. Ισότητα:

Δυο μιγαδικοί αριθμοί $\alpha + i\beta$ και $\gamma + i\delta$ θα λέγονται ίσοι όταν τα πραγματικά και φανταστικά μέρη τους είναι ίσα δηλαδή

$$\alpha + i\beta = \gamma + i\delta \Leftrightarrow \alpha = \gamma \text{ και } \beta = \delta$$

Παρατήρηση 1: Η πρόσθεση των μιγαδικών αριθμών υπακούει στον ίδιο κανόνα με την πρόσθεση των διανυσμάτων του επιπέδου, θεωρώντας τα α και β σαν συνιστώσες ενός διανύσματος. Όμως ο πολλαπλασιασμός των μιγαδικών αριθμών διαφέρει από το εσωτερικό και εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων.

Παρατήρηση 2: Η χρήση του σύμβολου i και του διωνύμου $\alpha + i\beta$ είναι αρκετά πρακτική αλλά όχι απαραίτητη. Είναι δυνατό οι μιγαδικοί αριθμοί να ορισθούν σαν διατεταγμένα ζεύγη πραγματικών αριθμών (α, β) που υπακούουν σ' ορισμένους κανόνες, π.χ. ο πολλαπλασιασμός μπορεί να ορισθεί από τη σχέση:

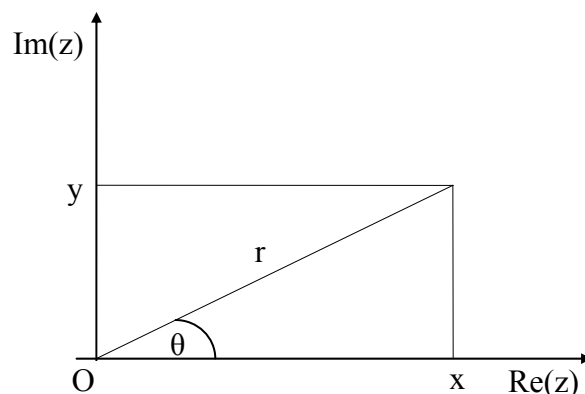
$$(\alpha_1, \beta_1) \cdot (\alpha_2, \beta_2) = (\alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2, \alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1)$$

Έτσι η έκφραση $\alpha + i\beta$ δεν είναι τίποτα άλλο παρά μια **αναπαράσταση** των μιγαδικών αριθμών.

Επειδή ένας μιγαδικός αριθμός $z = x + iy$ μπορεί να θεωρηθεί, όπως είδαμε παραπάνω, σαν ένα διατεταγμένο ζεύγος (x, y) , μπορούμε να παραστήσουμε τους μιγαδικούς αριθμούς με σημεία σ' ένα επίπεδο OXY. Το επίπεδο αυτό ονομάζεται **μιγαδικό επίπεδο** ή **επίπεδο του Gauss** ή **επίπεδο του Argand**. Έτσι ο μιγαδικός αριθμός $z = x + iy$ παριστάνεται από ένα σημείο P με τετμημένη x και τεταγμένη y , Σ.χ. 1. Ο άξονας OX λέγεται **πραγματικός άξονας** και ο άξονας OY **φανταστικός**. Επίσης μπορούμε να έχουμε και την εξής **πολική μορφή** για τον μιγαδικό αριθμό z :

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \text{ όπου}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ και } \tan\theta = y/x$$



Σχ. 1

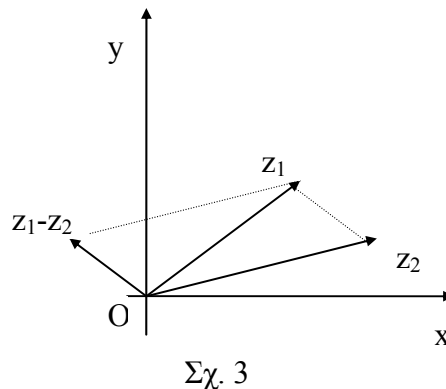
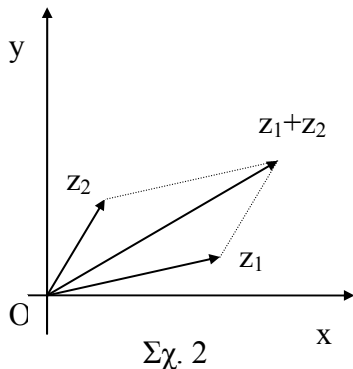
Σ' αυτήν την παράσταση το r είναι μοναδικό αλλά όχι και το θ . Συνήθως θεωρούμε ότι το θ μεταβάλλεται σ' ένα διάστημα εύρους 2π και σαν τέτοιο χρησιμοποιούμε το $I = [0, 2\pi)$ δηλαδή $0 \leq \theta < 2\pi$. Το r λέγεται **μέτρο** ή **απόλυτη τιμή** του μιγαδικού αριθμού z και συμβολίζεται με $r = |z|$ και το θ **όρισμα** ή **πολική γωνία** ή **φάση** του z και συμβολίζεται με $\theta = \arg z$.

Ο αριθμός $x-iy$ λέγεται **συζυγής μιγαδικός** ή απλά **συζυγής** του z και θα συμβολίζεται με \bar{z} ή z^* . Οι μιγαδικοί αριθμοί z και \bar{z} παριστάνουν στο μιγαδικό επίπεδο σημεία, που είναι συμμετρικά ως προς τον πραγματικό άξονα OX .

Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι:

1. $z\bar{z}=|z|^2=r^2$
2. $z+\bar{z}=2x=2\operatorname{Re}z=2\operatorname{Re}\bar{z}$, $z-\bar{z}=2iy=2i\operatorname{Im}z=-2i\operatorname{Im}\bar{z}$
3. $\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2$, $\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2$

Επειδή οι μιγαδικοί αριθμοί υπακούουν στον ίδιο κανόνα πρόσθεσης, που εφαρμόζεται στα διανύσματα του επιπέδου, μπορούν να προστεθούν, (ή αφαιρεθούν), γεωμετρικά με τον κανόνα του παραλληλόγραμμου, Σχ.2, (Σχ. 3). Αντιστρόφως τα διανύσματα ενός επιπέδου μπορούν να παρασταθούν από μιγαδικούς αριθμούς.



Κατ' αναλογία προς τα διανύσματα μπορούμε και στους μιγαδικούς αριθμούς να ορίσουμε εσωτερικό και εξωτερικό γινόμενο. Έτσι αν $z_1=x_1+iy_1$ και $z_2=x_2+iy_2$ δυο μιγαδικοί αριθμοί, ορίζουμε σαν:

α. **εσωτερικό ή βαθμωτό γινόμενο** τον πραγματικό αριθμό:

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1||z_2|\cos\theta = x_1x_2 + y_1y_2 = \operatorname{Re}(\bar{z}_1 z_2) = (\bar{z}_1 z_2 + z_1 \bar{z}_2)/2 \quad (1.1)$$

όπου θ η γωνία μεταξύ των z_1 και z_2 , (η οποία μεταβάλλεται από 0 έως π).

β. **εξωτερικό ή διανυσματικό γινόμενο** τον πραγματικό αριθμό:

$$z_1 \times z_2 = |z_1||z_2|\sin\theta = x_1y_2 - x_2y_1 = \operatorname{Im}(\bar{z}_1 z_2) = (\bar{z}_1 z_2 - z_1 \bar{z}_2)/2i \quad (1.2)$$

Εάν τα z_1 και z_2 είναι διάφορα του μηδενός, τότε ισχύουν οι εξής προτάσεις:

1. Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι τα z_1 και z_2 κάθετα είναι η: $z_1 \cdot z_2 = 0$.
2. Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι τα z_1 και z_2 παράλληλα είναι η $z_1 \times z_2 = 0$.

1.3 Ο τύπος του De Moivre και οι ρίζες των μιγαδικών αριθμών

Ενώ οι πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης των μιγαδικών αριθμών γίνονται αρκετά εύκολα στην καρτεσιανή μορφή τους $z=x+iy$, οι πράξεις του πολλαπλασιασμού και της διαίρεσης γίνονται ακόμα πιο εύκολα στην πολική τους μορφή. Πράγματι αν:

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1) \text{ και } z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$

τότε εύκολα προκύπτει ότι:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] \quad (1.3)$$

$$z_1 / z_2 = r_1 / r_2 [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)] \quad (1.4)$$

με τον όρο ότι αν $\theta_1 + \theta_2 \geq 2\pi$, τότε θα πρέπει να αφαιρεθεί το 2π , και αν $\theta_1 - \theta_2 < 0$, τότε θα πρέπει να προστεθεί το 2π , έτσι ώστε και για τις δυο περιπτώσεις να έχουμε:

$$0 \leq \theta_1 + \theta_2 < 2\pi \text{ και } 0 \leq \theta_1 - \theta_2 < 2\pi$$

Παρατήρηση: Πρέπει να τονισθεί ότι αν και $\cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$ και $\sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta$, η τιμή του θ πρέπει να είναι μονοσήμαντα ορισμένη.

Μια γενίκευση της σχέσης (1.3) δίνει:

$$z_1 z_2 \dots z_n = r_1 r_2 \dots r_n [\cos(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) + i \sin(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)] \quad (1.5)$$

Αν θέσουμε $z_1 = z_2 = \dots = z_n = z$ η προηγούμενη σχέση γίνεται:

$$z^n = r^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)) \quad (1.6)$$

και ονομάζεται **τύπος του De Moivre** και μας δίνει την **n-οστή δύναμη** ενός μιγαδικού αριθμού.

Σαν **n-οστή ρίζα** του μιγαδικού αριθμού z ορίζουμε τον μιγαδικό αριθμό w έτσι ώστε να ισχύει:

$$w^n = z \quad (1.7)$$

Αν $w = r_w [\cos\theta_w + i \sin\theta_w]$ και $z = r [\cos\theta + i \sin\theta]$ η σχέση (1.7) γράφεται με τη χρήση του τύπου De Moivre

$$r_w^n [\cos n\theta_w + i \sin n\theta_w] = r [\cos\theta + i \sin\theta]$$

και από τον ορισμό της ισότητας των μιγαδικών αριθμών προκύπτει:

$$r_w^n \cos n\theta_w = r \cos\theta \text{ και } r_w^n \sin n\theta_w = r \sin\theta \quad (1.8)$$

Αν τις δυο τελευταίες σχέσεις τις υψώσουμε στο τετράγωνο και τις προσθέσουμε, θα έχουμε:

$$r_w^{2n} = r^2 \Rightarrow r_w = \sqrt[n]{r}$$

Με αντικατάσταση της τελευταίας σχέσης στις (1.8) προκύπτει:

$$\cos n\theta_w = \cos\theta \text{ και } \sin n\theta_w = \sin\theta$$

δηλαδή $n\theta_w = \theta + 2k\pi \Rightarrow \theta_w = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$ με $k \in \mathbb{Z}$.

Τελικά η n-οστή ρίζα του μιγαδικού αριθμού $z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$ είναι:

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right] \quad (1.9)$$

με $k=0,1,2,\dots,n-1$ (γιατί:).

Εύκολα αποδεικνύεται ότι οι n -οστές ρίζες ενός μιγαδικού αριθμού βρίσκονται στις κορυφές ενός κανονικού πολυγώνου n πλευρών, που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας $R = \sqrt[n]{r}$ και κέντρου την αρχή των αξόνων.

1.4 Ο τύπος του Euler

Αν στο ανάπτυγμα MacLaurin της εκθετικής συνάρτησης:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

θέσουμε $x = i\theta$, έχουμε:

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + i\theta + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \dots = 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - i\frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots = \\ &= [1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} + \dots] + i[\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} + \dots] = \cos\theta + i\sin\theta \end{aligned}$$

Η σχέση:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \quad (1.10)$$

ονομάζεται **τύπος του Euler**. Έτσι ένας μιγαδικός αριθμός z μπορεί να γράφει υπό τη εκθετική μορφή:

$$z = re^{i\theta} \quad (1.11)$$

1.5 Μερικές εφαρμογές του τύπου του Euler

1) Από την Μηχανική:

Όπως θα δούμε σε επόμενο κεφαλαίο, η συνάρτηση:

$$z = z(t) = x(t) + iy(t)$$

με $x(t)$, $y(t)$ πραγματικές συναρτήσεις της πραγματικής μεταβλητής t , παριστάνει στο μιγαδικό επίπεδο μια καμπύλη. Για παράδειγμα η συνάρτηση $z = 1 + 3e^{2it}$ παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $z_0 = 1$ και ακτίνα 3, διότι $|z - 1| = |3e^{2it}| = 3$. Αν το t παριστάνει χρόνο, η συνάρτηση $z(t) = 1 + 3e^{2it}$ είναι η εξίσωση της κίνησης ενός σώματος, που κινείται πάνω στον κύκλο $|z - 1| = 3$ με ταχύτητα $dz/dt = 6ie^{2it}$ της οποίας το μέτρο είναι $|dz/dt| = 6$.

2) Από τον Ηλεκτρισμό

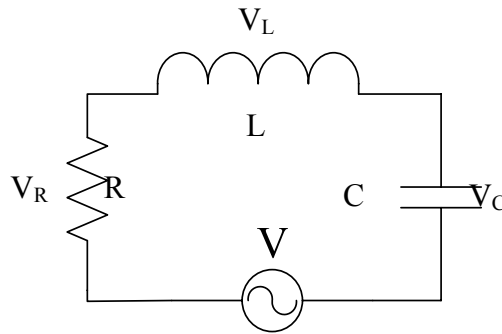
Είναι γνωστό ότι η τάση V στις άκρες μιας αντίστασης R , ενός πηνίου με επαγωγή L και ενός πυκνωτή C , που διαρρέεται από ρεύμα $I(t)$, δίνεται αντίστοιχα από τις σχέσεις

$$V = IR, \quad (\text{νόμος του Ohm}), \quad V = L \frac{dI}{dt}, \quad \frac{dV}{dt} = I/C$$

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε το ηλεκτρικό κύκλωμα του Σχ. 3 και ότι το ρεύμα I δίνεται από τη σχέση $I = I_0 \sin\omega t$, τότε οι αντίστοιχες τάσεις στην αντίσταση, στο πηνίο και στον πυκνωτή είναι:

$$V_R = RI_0 \sin\omega t, \quad V_L = \omega LI_0 \cos\omega t, \quad V_C = -(1/\omega C)I_0 \cos\omega t$$

και η ολική τάση V θα είναι:



Σχ. 3

$$V = V_R + V_L + V_C = RI_0 \sin \omega t + \omega LI_0 \cos \omega t - (1/\omega C)I_0 \cos \omega t$$

της οποίας η έκφραση είναι κάπως πολύπλοκη. Ένας εύκολος τρόπος για να απλοποιηθεί η παραπάνω έκφραση είναι να θεωρήσουμε για το ρεύμα I την μιγαδική έκφραση:

$$I = I_0 e^{i\omega t}$$

της οποίας το φανταστικό μέρος: $\text{Im}(I) = I_0 \sin \omega t$ είναι το πραγματικό ρεύμα. Τότε οι τάσεις V_R , V_L , V_C και η ολική V γράφονται:

$$V_R = RI_0 \sin \omega t = \text{Im} \left[RI_0 e^{i\omega t} \right] = \text{Im}(RI)$$

$$V_L = \omega LI_0 \cos \omega t = \text{Im} \left[i\omega LI_0 e^{i\omega t} \right] = \text{Im}(i\omega LI)$$

$$V_C = -(1/\omega C)I_0 \cos \omega t = \text{Im} \left[\frac{1}{i\omega C} I_0 e^{i\omega t} \right] = \text{Im} \left[\frac{1}{i\omega C} I \right]$$

$$V = V_R + V_L + V_C = \text{Im} \left[\left[R + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] I \right] = \text{Im}(ZI)$$

όπου η μιγαδική ποσότητα $Z = R + i \left[\omega L - \frac{1}{\omega C} \right]$ ονομάζεται **μιγαδική σύνθετη αντίσταση** ή **εμπέδηση**, (impedance) και η σχέση $V = \text{Im}(ZI)$ έχει τη μορφή του νόμου του Ohm.

3) Από την Οπτική

Συχνά χρειαζόμαστε στην οπτική να συνθέσουμε ένα πεπερασμένο αριθμό από φωτεινά κύματα, (τα οποία μπορούν να παρασταθούν από συναρτήσεις του ημίτονου). Επίσης συχνά κάθε κύμα έχει μια σταθερή διαφορά φάσεως δ από το προηγούμενο. Αυτό σημαίνει ότι τα κύματα μπορούν να παρασταθούν από τις συναρτήσεις:

$$\sin t, \sin(t+\delta), \sin(t+2\delta), \dots$$

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να προσθέσουμε αυτές τις συναρτήσεις και να υπολογίσουμε το άθροισμα:

$$\Sigma = \sin t + \sin(t+\delta) + \sin(t+2\delta) + \dots + \sin[t+(n-1)\delta]$$

Ένας εύκολος τρόπος για να το κάνουμε αυτό είναι να δούμε κάθε ημίτονο σαν το φανταστικό μέρος ενός κατάλληλου μιγαδικού αριθμού. Έτσι αυτό που θέλουμε είναι το φανταστικό μέρος του αθροίσματος:

$$S = e^{it} + e^{i(t+\delta)} + e^{i(t+2\delta)} + \dots + e^{i[t+(n-1)\delta]}$$

που αποτελεί μέρος μιας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο e^{it} , με λόγο $e^{i\delta}$ και τελευταίο όρο $e^{i[t+(n-1)\delta]}$. Επομένως θα είναι:

$$S = \frac{e^{it}(1 - e^{in\delta})}{1 - e^{i\delta}}$$

αλλά $1 - e^{i\delta} = e^{i\delta/2} [e^{-i\delta/2} - e^{i\delta/2}] = -e^{i\delta/2} 2i \sin(\delta/2)$

και $1 - e^{in\delta} = e^{in\delta/2} [e^{-in\delta/2} - e^{in\delta/2}] = -e^{in\delta/2} 2i \sin(n\delta/2)$

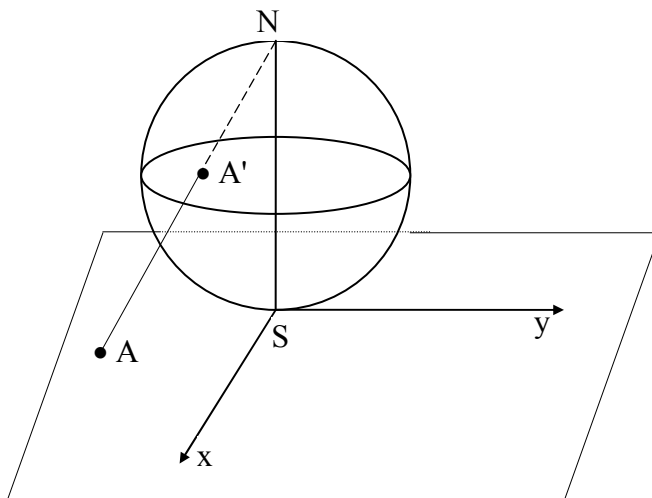
Τελικά θα είναι:

$$S = \frac{e^{it} e^{i\frac{n\delta}{2}} \sin\left[\frac{n\delta}{2}\right]}{e^{i\frac{\delta}{2}} \sin\frac{\delta}{2}} = e^{i\left[t + \frac{\delta}{2}(n-1)\right]} \frac{\sin\frac{n\delta}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}}$$

και $\Sigma = \text{Im}S = \frac{\sin\left[t + \frac{\delta}{2}(n-1)\right] \sin\frac{n\delta}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}}$

1.6 Το σημείο στο άπειρο - Στερεογραφική προβολή. Σφαίρα του Riemann

Στη μελέτη του ορίου μιας ακολουθίας μιγαδικών αριθμών, όπως επίσης και στη μελέτη του ορίου και της συνέχειας μιας μιγαδικής συνάρτησης, θα χρησιμοποιήσουμε το "μιγαδικό άπειρο"



Σχ. 4

επιπέδου αντιστοιχεί ένα και μόνο ένα σημείο της σφαίρας. Το μόνο σημείο της σφαίρας

Για να ορίσουμε το μιγαδικό άπειρο θεωρούμε μια μοναδιαία σφαίρα Σ , η οποία εφάπτεται του μιγαδικού επιπέδου OXY στο σημείο O , Σχ.4. Το σημείο O θα το ονομάσουμε Νότιο πόλο και θα το συμβολίσουμε με το γράμμα S , το δε αντιδιαμετρικό του σημείο N θα το ονομάσουμε Βόρειο πόλο. Σε κάθε σημείο A του μιγαδικού επιπέδου απεικονίζουμε το σημείο A' , που είναι η τομή του ευθύγραμμου τμήματος NA και της επιφάνειας της σφαίρας. Έτσι σε κάθε σημείο του μιγαδικού

για το οποίο φαίνεται ότι δεν υπάρχει αντίστοιχος μιγαδικός αριθμός, είναι ο Βόρειος πόλος N . Στην περίπτωση αυτή δεχόμαστε ότι υπάρχει ένα σημείο, που θα το ονομάζουμε "**σημείο στο άπειρο**", του μιγαδικού επιπέδου, που αντιστοιχεί στο Βόρειο πόλο N . Για το σημείο αυτό χρησιμοποιούμε το σύμβολο ∞ .

Το σύνολο των σημείων του μιγαδικού επιπέδου, μαζί με το σημείο στο άπειρο ονομάζεται **συμπληρωμένο ή επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο**. Η προηγούμενη απεικόνιση μεταξύ των σημείων ενός επιπέδου και της επιφάνειας μιας σφαίρας ονομάζεται **στερεογραφική προβολή**. Η δε σφαίρα ονομάζεται **σφαίρα του Riemann**.

Παρατήρηση: Για το σημείο στο άπειρο δεν ορίζεται το πραγματικό και φανταστικό μέρος, ούτε το όρισμα, (το τελευταίο δεν ορίζεται ούτε για το 0). Όσο για το μέτρο του ∞ χρησιμοποιούμε το σύμβολο $+\infty$, δηλαδή $|\infty|=+\infty$. Πάντως ισχύουν οι σχέσεις:

$$\infty+z=z+\infty=\infty, \quad \infty \cdot z=z \cdot \infty=\infty, \quad \infty \cdot \infty=\infty, \quad z/\infty=0 \quad \infty/z=\infty, \quad z/0=\infty$$

όπου z οποιοσδήποτε μιγαδικός αριθμός.

1.7 Το όριο μιας ακολουθίας μιγαδικών αριθμών

Μια ακολουθία μιγαδικών αριθμών $z_n = \alpha_n + i\beta_n$ θα λέμε ότι έχει όριο τον μιγαδικό αριθμό $z = \alpha + i\beta$ και θα γράφουμε:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \quad \text{ή} \quad z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z$$

εάν ισχύει

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon)) [\forall n > n_0(\varepsilon) \rightarrow |z_n - z| < \varepsilon] \quad (1.12)$$

Επειδή όμως:

$$|\alpha_n - \alpha| \leq |z_n - z| < \varepsilon \quad \text{και} \quad |\beta_n - \beta| \leq |z_n - z| < \varepsilon \quad \forall n > n_0(\varepsilon)$$

συμπεραίνουμε ότι:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha \quad \text{και} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \beta$$

Επομένως αν

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n + i\beta_n) = z = \alpha + i\beta$$

τότε θα ισχύει ότι:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha \quad \text{και} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \beta$$

Αντιστρόφως: Εάν

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha \quad \text{και} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \beta \quad \text{τότε για } n > n_0(\varepsilon) \quad \text{θα έχουμε:}$$

$$|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon\sqrt{2} \quad \text{και} \quad |\beta_n - \beta| < \varepsilon\sqrt{2}$$

και επομένως

$$|(\alpha_n + i\beta_n) - (\alpha + i\beta)| = |z_n - z| = \sqrt{(\alpha_n - \alpha)^2 + (\beta_n - \beta)^2} < \varepsilon$$

δηλαδή

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$$

Τελικά η σχέση

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n + i\beta_n) = \alpha + i\beta \quad \text{είναι ισοδύναμη με τις δυο σχέσεις:}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha \quad \text{και} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \beta$$

Έτσι μπορούμε να εφαρμόσουμε την θεωρία των ακολουθιών των πραγματικών αριθμών στις ακολουθίες των μιγαδικών αριθμών. Π.χ. εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι το κριτήριο του Cauchy ισχύει και εδώ:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon))[\forall n, m > n_0(\varepsilon) \rightarrow |z_n - z_m| < \varepsilon] \quad (1.13)$$

Επίσης αν $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$ και $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = w$

τότε θα έχουμε:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (z_n + w_n) = z + w \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{z}{w} \quad \text{αν } w_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ και } w \neq 0.$$

Μια ακολουθία θα λέμε ότι συγκλίνει στο ∞ , (στο σημείο στο άπειρο), αν ισχύει:

$$(\forall M > 0)(\exists n_0(M))[\forall n > n_0(M) \rightarrow |z_n| > M] \quad (1.14)$$

και θα γράφουμε $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$ Αν $z_n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} |1/z_n| = 0$

1.8 Σημειοσύνολα του μιγαδικού επιπέδου

Στην παράγραφο αυτή θα παραθέσουμε μερικούς ορισμούς, που αναφέρονται σε ορισμένα σημειοσύνολα του μιγαδικού επιπέδου και οι οποίοι είναι απαραίτητοι για την αυστηρή διατύπωση των θεωρημάτων της μιγαδικής ανάλυσης.

1. **Περιοχή:** Για το μιγαδικό σημείο z_0 και για τον θετικό αριθμό δ , ονομάζεται **δ -περιοχή**, η ακριβέστερα **δ -κυκλική περιοχή** του σημείου z_0 , το σύνολο $\Pi_\delta(z_0)$ των σημείων, τα οποία ορίζονται από τη σχέση:

$$\Pi_\delta(z_0) = \{z \mid 0 \leq |z - z_0| < \delta\} \quad (1.15)$$

Ενώ **περιορισμένη περιοχή** ενός σημείου z_0 ονομάζεται το σύνολο $\Pi_\delta(z_0)$ των σημείων z για τα οποία ισχύει:

$$\Pi_\delta(z_0) = \{z \mid 0 < |z - z_0| < \delta\} \quad (1.16)$$

δηλαδή μια περιορισμένη περιοχή είναι μια δ -περιοχή από την οποία έχει αφαιρεθεί το σημείο z_0 .

2. **Οριακό σημείο ή σημείο συσσώρευσης** ενός συνόλου S ονομάζεται ένα σημείο z_0 τέτοιο ώστε:

$$(\forall \Pi_\delta(z_0))[\Pi_\delta(z_0) \cap S \neq \emptyset] \quad (1.17)$$

δηλαδή κάθε περιορισμένη δ -περιοχή του z_0 να περιέχει σημεία του S . Επειδή το δ είναι οποιοσδήποτε θετικός αριθμός, έπεται ότι το S πρέπει να έχει άπειρο πλήθος σημείων. Επίσης πρέπει να παρατηρήσουμε ότι το z_0 μπορεί να ανήκει στο S , αλλά μπορεί και να μην ανήκει.

3. **Κλειστό σύνολο** ονομάζεται το σύνολο εκείνο που περιέχει όλα τα οριακά του σημεία.

4. **Φραγμένο σύνολο** είναι ένα σύνολο S για το οποίο ισχύει:

$$(\exists M > 0)(\forall z \in S)[|z| < M] \quad (1.18)$$

Όταν η (1.18) δεν ισχύει, το σύνολο S λέγεται **μη φραγμένο**.

5. **Συμπαγές σύνολο** είναι κάθε φραγμένο και κλειστό σύνολο.

6. **Εσωτερικό σημείο** ενός συνόλου S λέγεται κάθε σημείο z_0 τέτοιο ώστε:

$$(\exists \Pi_\delta(z))[\Pi_\delta(z) \subset S] \quad (1.19)$$

7. **Εξωτερικό σημείο** ενός συνόλου S λέγεται κάθε σημείο z , τέτοιο ώστε:

$$(\exists \Pi_\delta(z))[\Pi_\delta(z) \cap S = \emptyset] \quad (1.20)$$

8. **Συνοριακό σημείο** ενός συνόλου S λέγεται κάθε σημείο z τέτοιο ώστε:

$$(\forall \Pi_\delta(z))[\Pi_\delta(z) \cap S \neq \emptyset \wedge \Pi_\delta(z) - S \neq \emptyset]$$

δηλαδή κάθε περιοχή του z περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο του S και τουλάχιστον ένα σημείο που δεν ανήκει στο S .

9. **Ανοικτό σύνολο** λέγεται ένα σύνολο που περιέχει μόνο εσωτερικά σημεία.

10. **Συνεκτικό σύνολο**, (ή **συναφές**), λέγεται ένα σύνολο για το οποίο μπορούμε να ενώσουμε δυο οποιαδήποτε σημεία του με μια τεθλασμένη πολυγωνική γραμμή, της οποίας όλα τα σημεία να ανήκουν στο σύνολο.

11. **Ανοικτός τύπος** είναι ένα ανοικτό και συνεκτικό σύνολο.

12. **Κλείσιμο** ή **περίβλημα** ή **κάλυμμα** ενός συνόλου S ονομάζεται το σύνολο που προέρχεται από το S και τα οριακά του σημεία. Κάθε κλείσιμο ενός συνόλου είναι κλειστό σύνολο.

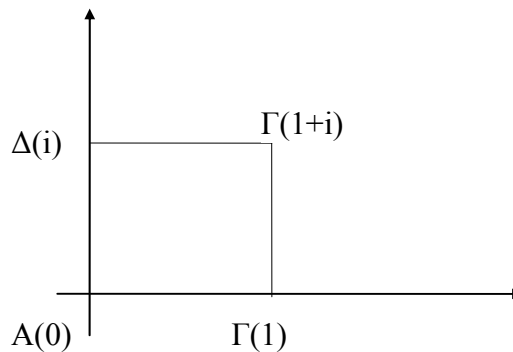
13. **Κλειστός τύπος** ονομάζεται το κλείσιμο ενός ανοικτού τύπου.

Παράδειγμα 1: Θεωρούμε το σύνολο S των σημείων $z = \alpha + i\beta$, που ορίζεται από τη σχέση:

$$S = \{z = \alpha + i\beta \in \mathbb{C} / 0 \leq \alpha, \beta \leq 1 \text{ και } \alpha, \beta \text{ ρητοί αριθμοί} \}$$

α) Τα οριακά σημεία του S είναι όλα τα σημεία του τετράγωνου, (μαζί με τις πλευρές του), που ορίζεται από τα σημεία $A=0$, $B=1$, $\Gamma=1+i$, $\Delta=i$.

- β) Το σύνολο S δεν είναι κλειστό.
 γ) Το σύνολο S είναι φραγμένο.
 δ) Το S δεν είναι Συμπαγές.
 ε) Τα συνοριακά σημεία του S είναι όλα τα σημεία του τετράγωνου.
 ζ) Το S δεν έχει εσωτερικά σημεία.
 η) Το S δεν είναι ανοικτό σύνολο.
 θ) Το S δεν είναι συνεκτικό.
 ι) Το S δεν είναι ανοικτός τόπος.
 κ) Το κλείσιμο του S είναι το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ με τις πλευρές του.



Σχ. 5

Παράδειγμα 2: Εάν το S είναι το σύνολο όλων των σημείων που βρίσκονται μέσα στο τετράγωνο, τότε: α) Τα οριακά του σημεία είναι το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$, β) Το S δεν είναι κλειστό, γ) Το S είναι φραγμένο, δ) Το S δεν είναι Συμπαγές, ε) Τα συνοριακά σημεία του S είναι τα σημεία των πλευρών του τετράγωνου $AB\Gamma\Delta$, ζ) Τα εσωτερικά σημεία του S είναι τα εσωτερικά σημεία του τετράγωνου $AB\Gamma\Delta$, η) Το S είναι ανοικτό σύνολο, θ) Το S είναι συνεκτικό, ι) Το S είναι ανοικτός τόπος, κ) Το κλείσιμο του S είναι το τετράγωνο S με τις πλευρές του.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 1) Δείξτε ότι α) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$ β) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$
- 2) Δείξτε και ερμηνεύστε γεωμετρικά τις σχέσεις:
 α) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ β) $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$
- 3) Έστω ότι $z_1 = x_1 + iy_1$ και $z_2 = x_2 + iy_2$ παριστάνουν δυο διανύσματα που δεν είναι παράλληλα. Αν α και β είναι δυο πραγματικοί αριθμοί και $\alpha z_1 + \beta z_2 = 0$ δείξτε ότι $\alpha = 0$ και $\beta = 0$.
- 4) Να δειχθεί ότι η εξίσωση $z = (1-t)z_1 + tz_2$, όπου z_1 και z_2 δεδομένοι μιγαδικοί αριθμοί και t πραγματική μεταβλητή, παριστάνει ευθεία, που διέρχεται από τα σημεία z_1 και z_2 .
- 5) Να εξετάσετε τι παριστάνουν γεωμετρικά οι εξισώσεις:
 α) $|z| = \alpha$, $\alpha > 0$ και β) $|z + \alpha| + |z + \beta| = c$, $c > 0$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

6) Δείξτε το θεώρημα του De Moivre:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \quad \text{όπου } n \in \mathbb{N}.$$

7) Να υπολογισθούν οι εκφράσεις:

$$\left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - \sqrt{2}i}\right)^{10}, \quad \left(\frac{\sqrt{3} - i}{\sqrt{5} + i}\right)^4 \cdot \left(\frac{1 + i}{2 - i}\right)^5$$

8) Δεδομένου ενός μιγαδικού αριθμού z , παραστήσετε γραφικά τον $ze^{i\alpha}$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

9) Δείξτε ότι $r_1 e^{i\theta_1} + r_2 e^{i\theta_2} = r_3 e^{i\theta_3}$ όπου

$$r_3 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}, \quad \theta_3 = \tan^{-1} \left[\frac{r_1 \sin \theta_1 + r_2 \sin \theta_2}{r_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos \theta_2} \right]$$

10) Να υπολογισθούν οι ρίζες: $\sqrt[3]{1}, \sqrt[3]{i}, \sqrt[4]{-1}, \sqrt[6]{-8}, \sqrt[8]{1}, \sqrt{1-i}$

11) Να αποδείξετε ότι οι σχέσεις που συνδέουν τις συντεταγμένες (ξ, η, ζ) του σημείου A' με τις συντεταγμένες (x, y) του σημείου A στη στερεογραφική προβολή, είναι:

$$\xi = \frac{4x}{x^2 + y^2 + 4}, \quad \eta = \frac{4y}{x^2 + y^2 + 4}, \quad \zeta = \frac{2(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 + 4}, \quad z = x + iy = \frac{\xi + i\eta}{1 - \zeta}$$

Εάν η ακτίνα της σφαίρας του Riemann είναι a , πώς τροποποιούνται οι παραπάνω σχέσεις; (Οι άξονες $O\xi$ και $O\eta$ δεχόμαστε ότι συμπίπτουν με τους άξονες OX και OY αντίστοιχα).

12) Στη μοναδιαία σφαίρα της στερεογραφικής προβολής να βρεθούν οι εικόνες:

α) των ακτίνων $\arg z = \alpha = \text{σταθ}$.

β) των κύκλων $|z| = r = \text{σταθ}$.

13) Ποια σχέση πρέπει να πληρούν τα σημεία z_1 και z_2 ώστε να είναι στερεογραφικές προβολές δυο αντιδιαμετρικών σημείων της σφαίρας του Riemann.

14) Να εξετασθούν οι ασκήσεις 11, 12, και 13 όταν το μιγαδικό επίπεδο διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας του Riemann.

2. ΜΙΓΑΔΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

2.1 Ορισμός της Μιγαδικής συνάρτησης - Μονότιμες, Πλειότιμες και Αντίστροφες συναρτήσεις.

Έστω A, B δυο υποσύνολα του μιγαδικού επιπέδου C . Κάθε αντιστοιχία f μεταξύ των συνόλων A και B

$$f: A \rightarrow B$$

με τον περιορισμό ότι σε κάθε $z \in A$ αντιστοιχεί ένα και μόνο ένα σημείο $w = f(z) \in B$, ονομάζεται **μιγαδική συνάρτηση** με **πεδίο ορισμού** το σύνολο A και **πεδίο τιμών** το σύνολο B . Το z ονομάζεται **ανεξάρτητη μεταβλητή** και το w **εξαρτημένη μεταβλητή**.

Στις περιπτώσεις, που ο πιο πάνω περιορισμός δεν ισχύει, δηλαδή στις περιπτώσεις που σε κάθε τιμή της μεταβλητής $z \in A$ αντιστοιχούν περισσότερες από μια τιμές $f(z)$, η αντιστοιχία f ονομάζεται **πλειότιμη συνάρτηση** σε αντίθεση προς την προηγούμενη περίπτωση, όπου θα χρησιμοποιούμε τον όρο **μονότιμη συνάρτηση** ή απλά συνάρτηση.

Π.χ. οι συναρτήσεις:

$$w = z^n \quad n \in \mathbb{N}, \quad w = |z|, \quad w = z^*, \quad w = \operatorname{Re}z, \quad w = \operatorname{Im}z$$

είναι μονότιμες συναρτήσεις, ενώ η συνάρτηση: $w = \sqrt[n]{z} \quad n \in \mathbb{N}$

είναι πλειότιμη συνάρτηση, επειδή σε κάθε τιμή της μεταβλητής z αντιστοιχούν n διαφορετικές τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής w . Επίσης η συνάρτηση $w = \operatorname{arg}z$ είναι πλειότιμη και μάλιστα σε κάθε τιμή του z αντιστοιχούν άπειρες σε πλήθος τιμές του w .

Παρατήρηση: Αν θέσουμε $z = x + iy$ και $w = u + iv$, τότε η συνάρτηση $w = f(z)$ αντιστοιχεί σε κάθε μιγαδικό αριθμό $z \in A$ με συντεταγμένες x και y δυο πραγματικούς αριθμούς u και v . Με αλλά λόγια στο σύνολο A ορίζονται δυο πραγματικές συναρτήσεις $u = u(x, y)$ και $v = v(x, y)$ δυο πραγματικών μεταβλητών x και y . Άρα μια μιγαδική συνάρτηση $w = f(z)$ ισοδυναμεί με δυο πραγματικές συναρτήσεις $u = u(x, y)$ και $v = v(x, y)$ δυο πραγματικών μεταβλητών. Π.χ. η μιγαδική συνάρτηση:

$$z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$$

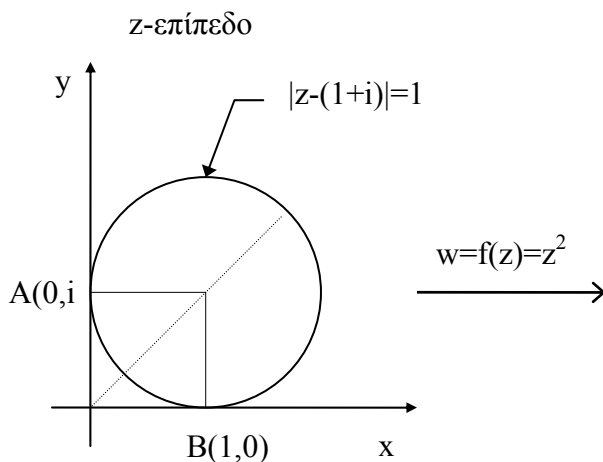
είναι ισοδύναμη με τις πραγματικές συναρτήσεις:

$$u = x^2 - y^2 \quad \text{και} \quad v = 2xy$$

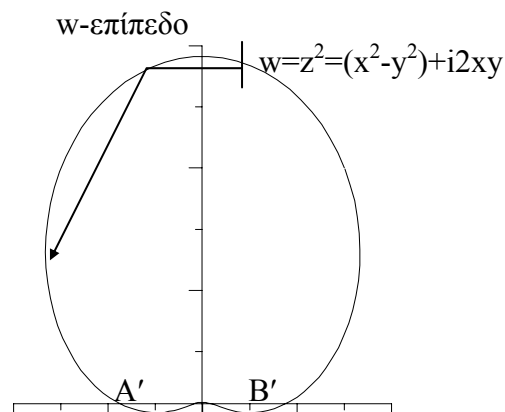
Αν μια μιγαδική συνάρτηση $w = f(z)$ είναι ένα προς ένα και επί, (δηλαδή για $z_1 \neq z_2 \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$ και $f(A) = B$), τότε η αντιστοιχία που σε κάθε $w \in B$ αντιστοιχεί εκείνο το $z \in A$, τέτοιο ώστε $f(z) = w$, ορίζει μια νέα συνάρτηση, που ονομάζεται **αντίστροφη συνάρτηση** της $f(z)$ και συμβολίζεται με f^{-1} , δηλαδή $z = f^{-1}(w)$.

2.2 Απεικονίσεις ή Μετασχηματισμοί

Στις πραγματικές συναρτήσεις $y=f(x)$ μιας πραγματικής μεταβλητής, μπορεί κανείς να έχει μια ποιοτική εικόνα της συμπεριφοράς της συνάρτησης από τη γραφική της παράσταση. Κάτι τέτοιο όμως δεν μπορεί να γίνει στις μιγαδικές συναρτήσεις



Σχ. 1



Σχ. 2

$w=f(z)$, που το πλήθος των μεταβλητών είναι τέσσερις: x, y, u, v . Παρ' όλα αυτά μπορούμε να έχουμε κάποιες ποιοτικές πληροφορίες για την μιγαδική συνάρτηση $w=f(z)$ συσχετίζοντας τα ζεύγη (x, y) και (u, v) . Ένας απλός τρόπος για να γίνει αυτό είναι να "παραστήσουμε" τις μεταβλητές z και w σε ξεχωριστά επίπεδα, τα οποία ονομάζονται **z-επίπεδο** και **w-επίπεδο** αντίστοιχα. Συνήθως θεωρούμε στο **z-επίπεδο** μια ορισμένη καμπύλη και προσπαθούμε να βρούμε την εικόνα της μέσω της f στο **w-επίπεδο**. Π.χ. ας θεωρήσουμε την μιγαδική συνάρτηση $w=f(z)=z^2$ και τον μοναδιαίο κύκλο $|z-(1+i)|=1$ με κέντρο το σημείο $1+i$, (Σχ. 1). Η εικόνα αυτού του κύκλου δια μέσου της συνάρτησης $f(z)=z^2$ είναι η καμπύλη του Σχ. 2, όπου τα σημεία A', B' , είναι οι εικόνες των σημείων A, B αντίστοιχα.

Όταν κανείς θεωρεί την συνάρτηση f μ' αυτόν τον τρόπο, δηλαδή σαν ένα διπλό γράφημα, τότε συνήθως η συνάρτηση f αναφέρεται σαν **απεικόνιση** ή **μετασχηματισμός**.

2.3 Όριο συνάρτησης

Θεωρούμε την, (μονότιμη), μιγαδική συνάρτηση $w=f(z)$ και ένα οριακό σημείο z_0 του συνόλου A . Αν για κάποιον συγκεκριμένο μιγαδικό αριθμό l ισχύει:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon) > 0)[\forall z \in A \wedge 0 < |z - z_0| < \delta(\varepsilon) \rightarrow |f(z) - l| < \varepsilon]$$

τότε λέμε ότι η συνάρτηση $f(z)$ έχει όριο τον αριθμό l όταν το z τείνει στο z_0 και γράφουμε:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l \quad \text{ή} \quad f(z)_{z \rightarrow z_0} \rightarrow l \quad (2.2)$$

Παρατήρηση 1: Το όριο l , όταν υπάρχει, πρέπει να είναι ανεξάρτητο από τον τρόπο που το z πλησιάζει το z_0 . Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το z πλησιάζει το z_0 κατά μήκος μιας τυχαίας ημιευθείας που διέρχεται από το z_0 . Μια τέτοια ημιευθεία θα έχει την μορφή $z = z_0 + re^{i\theta}$ με $r > 0$. Επίσης έχουμε $\lim_{r \rightarrow 0^+} (z_0 + re^{i\theta}) = z_0$. Προφανώς για τις διάφορες τιμές της γωνίας θ , έχουμε μια οικογένεια ημιευθειών που διέρχονται από το z_0 . Αν το $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ υπάρχει, τότε αυτό θα υπάρχει και κατά μήκος κάθε ημιευθείας που διέρχεται από το z_0 . Δηλαδή $\lim_{r \rightarrow 0^+} f(z_0 + re^{i\theta})$ θα είναι ανεξάρτητο της γωνίας θ . Τα παραπάνω χρησιμοποιούνται για να δείξουμε ότι κάποιο όριο δεν υπάρχει. Συγκεκριμένα βρίσκοντας ότι το όριο $\lim_{r \rightarrow 0^+} f(z_0 + re^{i\theta})$ εξαρτάται από την γωνία θ , συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει το όριο. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα: εάν το όριο $\lim_{r \rightarrow 0^+} f(z_0 + re^{i\theta})$ είναι ανεξάρτητο του θ , τότε αυτό δεν σημαίνει ότι υπάρχει το όριο $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$. Όταν όμως υπάρχει, τότε θα είναι αναγκαστικά ίσο με $\lim_{r \rightarrow 0^+} f(z_0 + re^{i\theta})$.

Παράδειγμα 1: Θεωρούμε την συνάρτηση $f(z) = \frac{\bar{z}}{z}$ και $z_0 = 0$. Σύμφωνα με την προηγούμενη Παρατήρηση 1, εξετάζουμε το όριο:

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} f(z_0 + re^{i\theta}) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\overline{re^{i\theta}}}{re^{i\theta}} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{re^{-i\theta}}{re^{i\theta}} = \lim_{r \rightarrow 0^+} e^{-2i\theta} = e^{-2i\theta}$$

το οποίο εξαρτάται από το θ . Άρα το όριο δεν υπάρχει

Παράδειγμα 2: Θεωρούμε την συνάρτηση $f(z) = \frac{|z|^2}{\bar{z}}$ και $z_0 = 0$. Όπως και πριν εξετάζουμε το όριο:

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} f(z_0 + re^{i\theta}) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{|re^{i\theta}|^2}{re^{i\theta}} = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{r^2}{re^{i\theta}} = \lim_{r \rightarrow 0^+} re^{-i\theta} = 0$$

το οποίο δεν εξαρτάται από το θ . Άρα το όριο μπορεί να υπάρχει και είναι το μηδέν διότι, επειδή

$$\left| \frac{|z|^2}{\bar{z}} - 0 \right| = \left| \frac{|z|^2}{\bar{z}} \right| = \frac{|z|^2}{|z|} = \frac{|z|^2}{|z|} = |z|$$

παρατηρούμε ότι για $|z| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{|z|^2}{\bar{z}} \right| < \varepsilon$, δηλαδή πληροῦται ο ορισμός του ορίου:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{|z|^2}{\bar{z}} = 0 \text{ για } \varepsilon = \delta.$$

Παρατήρηση 2: Στις μονότιμες συναρτήσεις το όριο όταν υπάρχει είναι μοναδικό. Στις πλειότιμες συναρτήσεις αυτό μπορεί να μην συμβαίνει, δηλαδή το όριο μπορεί να εξαρτάται από τον τρόπο που το z τείνει στο z_0 .

Παρατήρηση 3: Αν θέσουμε $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, $z_0=x_0+iy_0$ και $l=l_x+il_y$ τότε αποδεικνύεται ότι:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = l_x \text{ και } \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = l_y \quad (2.3)$$

Απόρροια αυτού του γεγονότος είναι ότι μπορούμε να εφαρμόσουμε τα θεωρήματα τα σχετικά με τα όρια πραγματικών συναρτήσεων π.χ. αν $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l_1$ και $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = l_2$ τότε θα έχουμε:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z) + g(z)] = l_1 + l_2$$

Όταν το σημείο z_0 είναι το σημείο στο άπειρο δηλαδή $z_0 = \infty$, η συμπεριφορά της $f(z)$ μπορεί να εξετασθεί σ' αυτό το σημείο αν χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό $w = 1/z$ και εξετάσουμε την συμπεριφορά της $f(1/w)$ στο σημείο $w = 0$. Αν ισχύει:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists M(\varepsilon) > 0) [\forall z \in A \wedge |z| > M \rightarrow |f(z) - l| < \varepsilon] \quad (2.4)$$

τότε λέμε ότι η συνάρτηση $f(z)$ έχει όριο το l όταν το $z \rightarrow \infty$.

Τέλος αν το z_0 είναι ένα οριακό σημείο του A και ισχύει:

$$(\forall M > 0)(\exists \delta > 0) [\forall z \in A \wedge 0 < |z - z_0| < \delta \rightarrow |f(z)| > M] \quad (2.5)$$

τότε λέμε ότι η συνάρτηση $f(z)$ έχει όριο το σημείο στο άπειρο όταν το $z \rightarrow z_0$.

2.4 Συνέχεια συνάρτησης

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(z)$ με πεδίο ορισμού το σύνολο A , και έστω z_0 ένα οριακό σημείο του A , τέτοιο ώστε $z_0 \in A$. Η συνάρτηση $f(z)$ θα λέγεται **συνεχής στο σημείο z_0** αν ισχύει:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0) \quad (2.6)$$

δηλαδή μια συνάρτηση $f(z)$ είναι συνεχής στο σημείο z_0 αν πληρούνται οι παρακάτω συνθήκες:

1. Πρέπει να υπάρχει το όριο $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l$
2. Η συνάρτηση $f(z)$ να ορίζεται στο z_0 δηλαδή να υπάρχει η τιμή $f(z_0)$
3. Πρέπει να ισχύει $l = f(z_0)$ δηλαδή

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) [\forall z \in A \wedge |z - z_0| < \delta \rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon] \quad (2.7)$$

Αν η συνάρτηση $f(z)$ είναι συνεχής σε κάθε σημείο του συνόλου A , τότε λέμε ότι η $f(z)$ είναι **συνεχής στο σύνολο A** . Τότε θα έχουμε

$$(\forall z_0 \in A)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta(\varepsilon, z_0)) [\forall z \in A \wedge |z - z_0| < \delta \rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon] \quad (2.8)$$

Αν $z_0 = x_0 + iy_0$ και $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. τότε μπορούμε να δούμε ότι η συνέχεια της $f(z)$ στο σημείο $z_0 = x_0 + iy_0$ είναι ισοδύναμη με τις εξής δυο σχέσεις:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} u(x,y) = u(x_0,y_0) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} v(x,y) = v(x_0,y_0) \quad (2.9)$$

οι οποίες εκφράζουν την συνέχεια των πραγματικών συναρτήσεων $u(x,y)$ και $v(x,y)$ στο ίδιο σημείο.

Επομένως μια μιγαδική συνάρτηση είναι συνεχής στο σημείο z_0 αν και μόνο αν το πραγματικό και φανταστικό μέρος, θεωρούμενες σαν πραγματικές συναρτήσεις των πραγματικών μεταβλητών x και y είναι συνεχείς στο ίδιο σημείο. Αυτό σημαίνει ότι πολλές ιδιότητες των συνεχών συναρτήσεων δυο πραγματικών μεταβλητών μπορούν να εφαρμοσθούν στις μιγαδικές συναρτήσεις.

Τα σημεία του συνόλου A , στα οποία η συνάρτηση $f(z)$ δεν είναι συνεχής, λέγονται **σημεία ασυνέχειας** της $f(z)$ και η $f(z)$ **ασυνεχής** στα σημεία αυτά.

Η εξέταση της συνέχειας της $f(z)$ στο σημείο $z = \infty$ γίνεται αν θέσουμε $w = 1/z$ και εξετάσουμε την συνέχεια της συνάρτησης $f(1/w)$ στο σημείο $w = 0$.

Από τον ορισμό της συνέχειας της $f(z)$ στο σύνολο A έπεται, (βλ. σχέση (2.8)), ότι το δ γενικά θα εξαρτάται και από το ε και από το z_0 . Αν όμως μπορούμε να βρούμε ένα δ που να εξαρτάται από το ε , αλλά όχι από το συγκεκριμένο σημείο z_0 , τότε λέμε ότι η συνάρτηση $f(z)$ είναι **ομοιόμορφα συνεχής** στο σύνολο A .

Αποδεικνύεται ότι αν η $f(z)$ είναι συνεχής σ' ένα κλειστό τόπο, τότε θα είναι και ομοιόμορφα συνεχής.

2.5 Στοιχειώδεις συναρτήσεις

Στην παράγραφο αυτή θα αναφέρουμε μερικές μιγαδικές συναρτήσεις, των οποίων ο ορισμός προέρχεται από τις στοιχειώδεις πραγματικές συναρτήσεις.

1. Τα **πολυώνυμα** ορίζονται από τη σχέση:

$$w = P_n(z) = \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0 \quad (2.10)$$

όπου $\alpha_i \in \mathbb{C}$ $i=0,1,\dots,n$ με $\alpha_n \neq 0$ και n θετικός ακέραιος, που ονομάζεται **βαθμός του πολυώνυμου**.

2. Οι **ρητές αλγεβρικές συναρτήσεις** ορίζονται από τη σχέση:

$$w = \frac{P(z)}{Q(z)} \quad (2.11)$$

όπου $P(z)$ και $Q(z)$ πολυώνυμα.

Η ειδική περίπτωση $w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ με $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ λέγεται **διγραμμικός μετασχηματισμός ή απεικόνιση του Moebius**.

3. Η **εκθετική συνάρτηση** ορίζεται από τη σχέση:

$$w=e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos y + i\sin y) \quad (2.12)$$

Για $a \in \mathbb{R}$ μπορούμε να έχουμε $w=a^z=e^{z \ln a}$.

Οι μιγαδικές εκθετικές συναρτήσεις έχουν ιδιότητες όμοιες με αυτές των πραγματικών εκθετικών συναρτήσεων, π.χ.:

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}, \quad \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}$$

4. Οι **τριγωνομετρικές συναρτήσεις** ορίζονται με την βοήθεια της εκθετικής συνάρτησης από τις σχέσεις:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \tan z = -i \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}}, \quad \cot z = i \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}}$$

Πολλές ιδιότητες των πραγματικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων ισχύουν και για τις μιγαδικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις π.χ.

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \quad 1 + \tan^2 z = \frac{1}{\cos^2 z}$$

$$\sin(-z) = -\sin z, \quad \cos(-z) = \cos z$$

$$\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$$

5. Οι **υπερβολικές συναρτήσεις** ορίζονται από τις σχέσεις:

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \tanh z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}, \quad \coth z = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}$$

Μεταξύ των τριγωνομετρικών και υπερβολικών συναρτήσεων ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\sin iz = i \sinh z, \quad \cos iz = \cosh z, \quad \tan iz = i \tanh z$$

$$\sinh iz = i \sin z, \quad \cosh iz = \cos z, \quad \tanh iz = i \tan z$$

6. Η **λογαριθμική συνάρτηση** ορίζεται σαν η αντίστροφη της εκθετικής συνάρτησης και αποδεικνύεται ότι, (βλέπε άσκηση 2 στο τέλος του κεφαλαίου):

$$w = \ln z = \ln[re^{i(\theta+2k\pi)}] = \ln r + i(\theta+2k\pi) \quad \text{με } k \in \mathbb{Z}$$

Είναι φανερό ότι η λογαριθμική συνάρτηση είναι μια πλειότιμη συνάρτηση με άπειρους κλάδους και γι' αυτό τον λόγο μπορεί κανείς να πει ότι ο λογάριθμος ενός μιγαδικού αριθμού είναι μια ακολουθία μιγαδικών αριθμών. Σαν πρωτεύοντα κλάδο ή πρωτεύουσα τιμή θεωρούμε την έκφραση:

$$\ln r + i\theta \quad \text{με } 0 \leq \theta < 2\pi$$

ή οποιοδήποτε άλλο διάστημα εύρους 2π .

Επίσης η λογαριθμική συνάρτηση μπορεί να ορισθεί και για πραγματική θετική βάση $a \neq \{e, 0, 1\}$ π.χ. αν $z = a^w$ τότε $w = \log_a z = \ln z / \ln a$

7. Οι αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις ορίζονται σαν οι αντίστροφες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων και αποδεικνύεται ότι έχουν τις εξής μορφές:

$$\sin^{-1}z = \frac{1}{i} \ln \left[iz + \sqrt{1-z^2} \right] + 2k\pi \quad \cos^{-1}z = \frac{1}{i} \ln \left[z + \sqrt{z^2-1} \right] + 2k\pi$$

$$\tan^{-1}z = \frac{1}{2i} \ln \left[\frac{1+iz}{1-iz} \right] + k\pi \quad \cot^{-1}z = \frac{1}{2i} \ln \left[\frac{z+i}{z-i} \right] + k\delta$$

8. Οι αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις ορίζονται σαν οι αντίστροφες των υπερβολικών συναρτήσεων και αποδεικνύεται ότι έχουν τις εξής μορφές:

$$\sinh^{-1}z = \ln \left[z + \sqrt{z^2+1} \right] + i2k\pi \quad \cosh^{-1}z = \ln \left[z + \sqrt{z^2-1} \right] + i2k\pi$$

$$\tanh^{-1}z = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{1+z}{1-z} \right] + ik\pi \quad \coth^{-1}z = \frac{1}{2} \ln \left[\frac{z+1}{z-1} \right] + ik\pi$$

2.6 Σημεία, τομές διακλάδωσης και επιφάνεια Riemann

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με τις πλειότιμες συναρτήσεις. Ο σκοπός μας είναι να βρούμε ένα τρόπο με τον οποίο να ξεχωρίζουμε τις διαφορετικές τιμές της πλειότιμης συνάρτησης $f(z)$, που αντιστοιχούν στην ίδια τιμή του z . Έτσι μια πλειότιμη συνάρτηση θα είναι ένα σύνολο μονότιμων συναρτήσεων στις οποίες θα μπορούμε να εφαρμόζουμε τα θεωρήματα της μιγαδικής ανάλυσης.

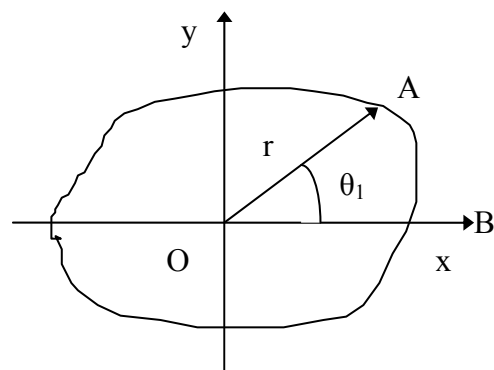
Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $w=\sqrt{z}$ και έστω ότι το σημείο, που αντιστοιχεί στο μιγαδικό αριθμό z , περιστρέφεται γύρω από την αρχή O κατά τη θετική φορά, ξεκινώντας από το σημείο A και καταλήγοντας πάλι σ' αυτό, Σχ. 3. Αν το σημείο A έχει πολικές συντεταγμένες r και θ_1 , τότε θα έχουμε $z=r\exp(i\theta_1)$ και $w=\sqrt{r}\exp(i\theta_1/2)$. Όταν το z φθάσει στο A μετά από μια πλήρη περιφορά θα έχουμε $\theta=\theta_1+2\pi$ και επομένως

$$w = \sqrt{r} \exp \left[\frac{i(\theta_1 + 2\pi)}{2} \right] = -\sqrt{r} \exp \left[\frac{i\theta_1}{2} \right]$$

δηλαδή η τιμή του w δεν είναι η ίδια με την αρχική. Αν όμως συνεχίσουμε κάνοντας μια δεύτερη περιφορά, τότε η γωνία στο σημείο A θα είναι $\theta=\theta_1+4\pi$ και

$$w = \sqrt{r} \exp \left[\frac{i(\theta_1 + 4\pi)}{2} \right] = \sqrt{r} \exp \left[\frac{i\theta_1}{2} \right],$$

δηλαδή η αρχική τιμή του w . Εδώ βλέπουμε ότι η συνάρτηση $w=\sqrt{z}$ είναι μια δίτιμη συνάρτηση, δηλαδή μια συνάρτηση που σε κάθε z αντιστοιχούν δυο διαφορετικές τιμές. Το σύνολο αυτό των διαφορετικών τιμών του w μπορούμε να το χωρίσουμε σε δυο υποσύνολα, όπου για το ένα θα έχουμε $0 \leq \theta < 2\pi$ και για το άλλο $2\pi \leq \theta < 4\pi$. Τα δυο



Σχ. 3

αυτά υποσύνολα ονομάζονται **κλάδοι** της πλειότιμης συνάρτησης $w=\sqrt{z}$.

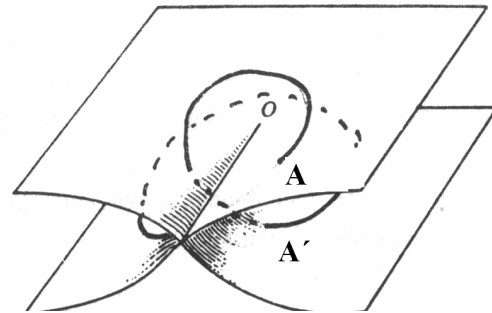
Αν περιορισθούμε σ' έναν από τους δυο κλάδους, τότε είναι φανερό ότι η συνάρτηση $w=\sqrt{z}$ γίνεται μονότιμη. Βέβαια θα μπορούσαμε να πάρουμε οποιουσδήποτε άλλους κλάδους της μορφής $\alpha \leq \theta < \alpha + 2\pi$ και $\alpha + 2\pi \leq \theta < \alpha + 4\pi$.

Γεωμετρικά μπορούμε να απομονώσουμε τους δυο αυτούς κλάδους θεωρώντας την ημιευθεία OB , (όπου το B είναι στο άπειρο), που έχει αρχή, την αρχή O και σχηματίζει γωνία α με τον άξονα OX . Εδώ για απλότητα μπορούμε να θεωρήσουμε $\alpha=0$, όποτε η ημιευθεία OB συμπίπτει με τον θετικό ημιάξονα OX Σχ. 3. Στη συνέχεια συμφωνούμε το z να μην περάσει την ημιευθεία OB , την οποία ονομάζουμε **τομή ή γραμμή διακλάδωσης**. Το δε σημείο O , που έχει την παραπάνω ιδιότητα, δηλαδή κάθε πλήρης περιφορά γύρω από αυτό να οδηγεί σε διαφορετικές τιμές της πλειότιμης συνάρτησης, λέγεται **σημείο διακλάδωσης**.

Ένα σημείο διακλάδωσης θα λέμε ότι είναι **πολλαπλότητας n** , αν μετά από n περιφορές γύρω από το σημείο αυτό επανερχόμαστε, (για πρώτη φορά), στην αρχική τιμή της συνάρτησης.

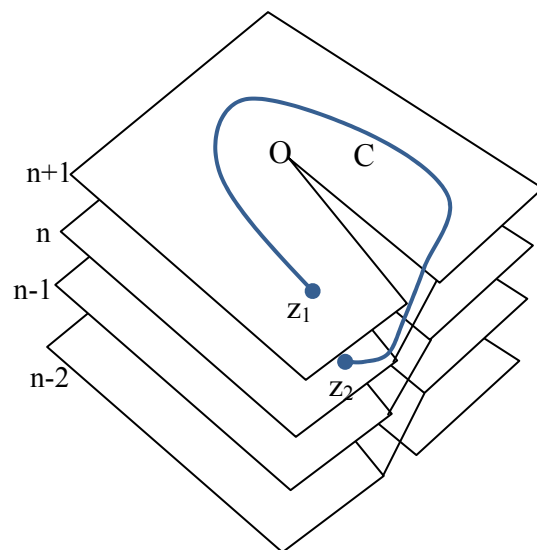
Τον ίδιο σκοπό μπορούμε να πετύχουμε με την **επιφάνεια Riemann**, που για την συγκεκριμένη συνάρτηση $f(z)=\sqrt{z}$ κατασκευάζεται ως εξής: Θεωρούμε ότι το μιγαδικό επίπεδο αποτελείται από δυο φύλλα, (όσοι είναι οι κλάδοι της συνάρτησης), τα οποία τα κόβουμε κατά μήκος της τομής διακλαδώσεως OB . Στη συνέχεια ενώνουμε την κάτω τομή του δεύτερου φύλλου με την πάνω τομή του πρώτου φύλλου και την πάνω τομή του δεύτερου φύλλου με την κάτω τομή του πρώτου φύλλου Σχ. 4. Εύκολα παρατηρούμε ότι αν αρχίσουμε από ένα σημείο A , το οποίο βρίσκεται π.χ. στο πρώτο φύλλο, και κάνουμε μια πλήρη περιφορά με σκοπό να φθάσουμε και πάλι στο αρχικό σημείο, τότε θα βρεθούμε στο αντίστοιχο σημείο A' του δεύτερου φύλλου και αν εκτελέσουμε άλλη μια περιφορά, τότε θα βρεθούμε στο αρχικό σημείο A .

Τα δυο αυτά φύλλα λέμε ότι αποτελούν μια **επιφάνεια Riemann**, που αντιστοιχεί στη συνάρτηση $f(z)=\sqrt{z}$. Το πλεονέκτημα των επιφανειών Riemann είναι ότι σε κάθε φύλλο τους η αντίστοιχη πλειότιμη συνάρτηση είναι μονότιμη και ότι διαγράφοντας τις παίρνουμε τις διάφορες τιμές της πλειότιμης συνάρτησης κατά συνεχή τρόπο.



Σχήμα 4

Εύκολα παρατηρούμε ότι αν αρχίσουμε από ένα σημείο A , το οποίο βρίσκεται π.χ. στο πρώτο φύλλο, και κάνουμε



Σχήμα 5

Η επέκταση των παραπάνω εύκολα μπορεί να γίνει: π.χ. η συνάρτηση $\sqrt[3]{z}$ έχει μια επιφάνεια Riemann που αποτελείται από τρία φύλλα, ενώ για την συνάρτηση $\ln z$ η επιφάνεια Riemann έχει άπειρο πλήθος φύλλα, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.

Άσκηση: Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $w = \sqrt[5]{z}$ και ας υποθέσουμε ότι για τη τιμή $z = z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ αντιστοιχεί η τιμή $w = w_1$.

α. Δείξτε ότι η τιμή της συνάρτησης w θα είναι $w_1 \exp(2\pi i/5)$ όταν κάνουμε μια πλήρη περιφορά γύρω από την αρχή των αξόνων και κατά την θετική φορά ξεκινώντας από το σημείο z_1 .

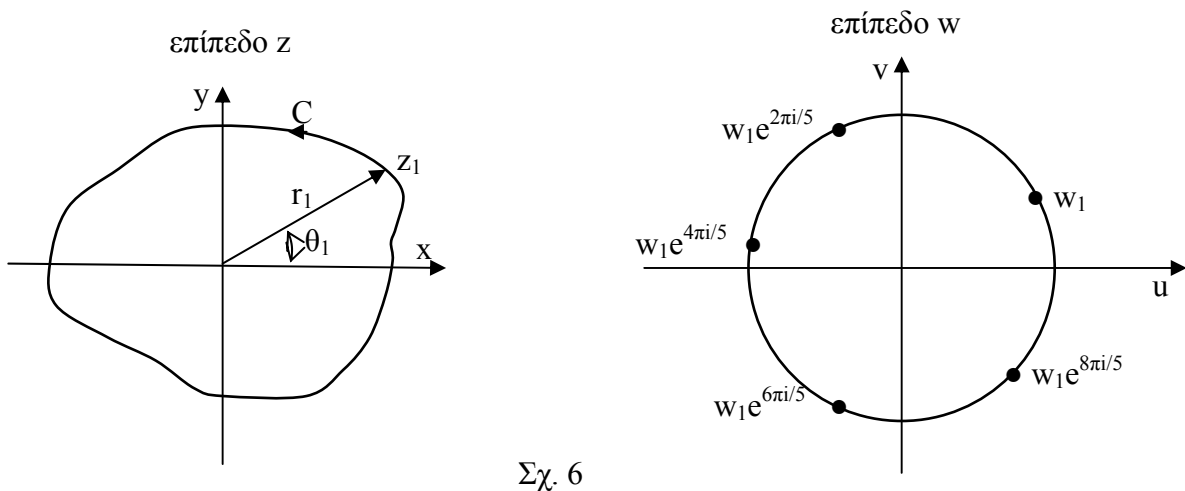
β. Να βρεθούν οι τιμές της συνάρτησης w όταν εκτελέσουμε, όπως πριν, 2, 3, ... πλήρεις περιφορές γύρω από την αρχή.

γ. Να εξετασθούν τα δυο προηγούμενα ερωτήματα, όταν η αρχή δεν περιέχεται στην κλειστή καμπύλη.

Λύση:

α. Ξέρουμε ότι αν $z = r \exp(i\theta)$, τότε $w = \sqrt[5]{z} = \sqrt[5]{r} \exp(i\theta/5)$. Επομένως αν $r = r_1$, $\theta = \theta_1$ τότε $w_1 = \sqrt[5]{z} = \sqrt[5]{r_1} \exp(i\theta_1/5)$

Αν τώρα κάνουμε μια πλήρη περιφορά γύρω από την αρχή ξεκινώντας από το σημείο z_1 , τότε το θ από την τιμή θ_1 θα αυξηθεί στη τιμή $\theta_1 + 2\pi$ και θα έχουμε Σχ. 6:



Σχ. 6

$$w = \sqrt[5]{r_1} e^{\frac{(\theta_1 + 2\pi)i}{5}} = \sqrt[5]{r_1} e^{\frac{\theta_1 i}{5}} e^{\frac{2\pi i}{5}} = w_1 e^{\frac{2\pi i}{5}}$$

β. Μετά από δυο πλήρεις περιφορές γύρω από την αρχή έχουμε:

$$w = \sqrt[5]{r_1} e^{\frac{(\theta_1 + 4\pi)i}{5}} = \sqrt[5]{r_1} e^{\frac{\theta_1 i}{5}} e^{\frac{4\pi i}{5}} = w_1 e^{\frac{4\pi i}{5}}$$

μετά από τρείς: $w = w_1 e^{\frac{6\pi i}{5}}$

μετά από τέσσερις: $w = w_1 e^{\frac{8\pi i}{5}}$

και μετά από πέντε: $w = w_1 e^{\frac{10\pi i}{5}} = w_1$

δηλαδή παίρνουμε την αρχική τιμή της w .

Εάν συνεχίσουμε να κάνουμε περιφορές, τότε τα παραπάνω αποτελέσματα επαναλαμβάνονται με την ίδια σειρά.

Άλλος τρόπος: Επειδή $w = \sqrt[5]{z}$ τότε $\arg w = 1/5 \arg z$ και επομένως μεταβολή του $\arg w = 1/5$ μεταβολή του $\arg z$. Άρα αν το $\arg z$ αυξάνεται κατά $2\pi, 4\pi, 6\pi, 8\pi, 10\pi$, το $\arg w$ αυξάνεται κατά $2\pi/5, 4\pi/5, 6\pi/5, 8\pi/5, 2\pi$, και βρίσκουμε τα ίδια αποτελέσματα.

γ. Αν η περιφορά που κάνουμε γίνει πάνω σε μια κλειστή καμπύλη, που δεν περιέχει την αρχή των αξόνων, τότε η αύξηση στο $\arg z$ είναι μηδέν και συνεπώς η αύξηση στο $\arg w$ είναι επίσης μηδέν. Άρα η τιμή της συνάρτησης w είναι η w_1 ανεξάρτητα του πόσες φορές διασχίσαμε την κλειστή καμπύλη.

Παρατήρηση: Την πλειότιμη συνάρτηση $w = \sqrt[5]{z}$ μπορούμε να την δούμε σαν ένα σύνολο πέντε μονότιμων συναρτήσεων. Πράγματι, επειδή $w = \sqrt[5]{z}$ έχουμε ότι:

$$w^5 = z = r \exp(i\theta) = r \exp[i(\theta + 2k\pi)] \text{ με } k \in \mathbb{Z}$$

επομένως $w = \sqrt[5]{r} \exp[i(\theta + 2k\pi)/5]$ όπου $k=0,1,2,3,4$ (A)

δηλαδή η πλειότιμη συνάρτηση w μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα σύνολο πέντε μονότιμων συναρτήσεων, οι οποίες ορίζονται από τη σχέση (A) για κάποιο συγκεκριμένο k . Ισοδύναμα μπορούμε να θεωρήσουμε την συνάρτηση w σαν ένα σύνολο πέντε μονότιμων συναρτήσεων, που ονομάζονται κλάδοι της πλειότιμης συνάρτησης, περιορίζοντας κατάλληλα το θ . Έτσι π.χ. μπορούμε να γράψουμε:

$$w = \sqrt[5]{r} \exp[i\theta/5]$$

όπου το θ μπορεί να μεταβάλλεται στα εξής πέντε διαστήματα:

$$[0, 2\pi), [2\pi, 4\pi), [4\pi, 6\pi), [6\pi, 8\pi), [8\pi, 10\pi)$$

Για διαφορετικό θ παίρνουμε πάλι μια από τις προηγούμενες τιμές. Πολλές φορές το πρώτο διάστημα, δηλαδή το $[0, 2\pi)$ ονομάζεται **πρωτεύον διάστημα του θ** που αντιστοιχεί στον **πρωτεύοντα κλάδο** της πλειότιμης συνάρτησης. Δεν είναι ανάγκη να περιοριστούμε στα παραπάνω πέντε διαστήματα. Μπορούμε να πάρουμε αλλά διαστήματα του θ , τα οποία να είναι διαδοχικά και να έχουν εύρος 2π π.χ. τα $[-\pi, \pi), [\pi, 3\pi)$ κ.λ.π. Το πρώτο από αυτά τα διαστήματα θα είναι το πρωτεύον διάστημα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 1) Δείξτε ότι οι ρίζες α) του $\sin z$ και β) του $\cos z$ είναι όλες πραγματικές. Να υπολογισθούν.
- 2) Εάν $z = e^w$ όπου $z = re^{i\theta}$ και $w = u + iv$, δείξτε ότι $u = \ln r$ και $v = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ και επομένως $w = \ln z = \ln r + i(\theta + 2k\pi)$. Στη συνέχεια να υπολογισθούν οι τιμές του $\ln(1-i)$ και να βρεθεί η πρωτεύουσα τιμή του.

- 3) Δείξτε ότι το σημείο $z=0$ είναι σημείο διακλαδώσεως της $f(z)=\ln z$.
- 4) Θεωρούμε τον μετασχηματισμό $w=\ln z$. Δείξτε ότι
- α) οι κύκλοι με κέντρο την αρχή στο z -επίπεδο απεικονίζονται στο w -επίπεδο σε ευθείες παράλληλες προς τον άξονα OV .
- β) ευθείες ή ακτίνες, που διέρχονται από την αρχή στο z -επίπεδο, απεικονίζονται στο w -επίπεδο σε ευθείες παράλληλες προς τον άξονα OU .
- γ) ολόκληρο το z -επίπεδο απεικονίζεται στο w -επίπεδο σε μια λουρίδα πλάτους 2π .
Να περιγραφούν οι προηγούμενες απεικονίσεις γραφικά.
- 5) α) Ναδειχθεί ότι τα σημεία $z=\pm i$ είναι σημεία διακλαδώσεως της συνάρτησης $w=f(z)=\sqrt{z^2+1}$.
- β) Ναδειχθεί ότι μια πλήρη περιφορά γύρω από τα δυο σημεία διακλαδώσεως δεν δίνει νέο κλάδο της $f(z)$.
- γ) Να προσδιοριστούν οι γραμμές διακλαδώσεως και η επιφάνεια Riemann.
- 6) Να αποδειχθεί ότι:
- α) $\sin^{-1}z = \frac{1}{i} \ln \left[iz + \sqrt{1-z^2} \right] + 2k\pi$ β) $\sinh^{-1}z = \ln \left[z + \sqrt{z^2+1} \right] + i2k\pi$

ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ ΜΙΓΑΔΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

3.1 Ορισμός της παραγώγου μιας μιγαδικής συνάρτησης

Μέχρι τώρα ο ορισμός και οι ιδιότητες των μιγαδικών συναρτήσεων διευτυπώθηκαν σε πλήρη αναλογία με την θεωρία των πραγματικών συναρτήσεων. Όμως η έννοια της παραγώγου μιας μιγαδικής συνάρτησης, που θα ορισθεί με τον ίδιο τρόπο που ορίστηκε η παράγωγος μιας πραγματικής συνάρτησης, οδηγεί, όπως θα δούμε, σε ουσιώδεις διαφορές.

Έστω $f(z)$ μια μονότιμη συνάρτηση ορισμένη στον ανοικτό τόπο² $D \subset \mathbb{C}$, και έστω z_0 ένα σημείο του D . Η έκφραση:

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

είναι προφανώς μια συνάρτηση του z , που ορίζεται σε όλα τα σημεία του D εκτός από το z_0 . Το όριο:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \quad (3.1)$$

όταν υπάρχει και είναι ανεξάρτητο από τον τρόπο που το $z \rightarrow z_0$, ονομάζεται **παράγωγος** της συνάρτησης $f(z)$ στο σημείο z_0 και ως προς τον τόπο D και συμβολίζεται με $f_D'(z_0)$ ή πιο απλά $f'(z_0)$. Η δε συνάρτηση $f(z)$ λέγεται ότι είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο z_0 . Εάν η $f(z)$ έχει παράγωγο για κάθε σημείο του D , τότε λέμε ότι είναι **παραγωγίσιμη** στο D .

Εάν θέσουμε $\Delta z = z - z_0$ και $\Delta f = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$, τότε το όριο (3.1) μπορεί να γράφει:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z}$$

και μπορούμε να παραστήσουμε την παράγωγο $f'(z_0)$ σαν $\frac{df(z_0)}{dz}$ δηλαδή θα έχουμε:

$$f'(z_0) = \frac{df(z_0)}{dz} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \quad (3.2)$$

Η συνάρτηση $f(z)$ θα λέγεται **διαφορίσιμη** στο σημείο z_0 αν:

$$\Delta f = f'(z_0)\Delta z + \varepsilon(z_0, \Delta z)\Delta z \quad (3.3)$$

όπου το ε , που εξαρτάται από το z_0 και το Δz , τείνει στο μηδέν όταν $\Delta z \rightarrow 0$.

Αντίστροφα: Αν υπάρχει μιγαδικός αριθμός A τέτοιος ώστε:

$$\Delta f = A\Delta z + \varepsilon(z_0, \Delta z)\Delta z$$

² Στα επόμενα όπου θα γράφεται τόπος θα εννοείται ανοικτός.

με τις ίδιες συνθήκες για το $\varepsilon(z_0, \Delta z)$, τότε η f είναι διαφορίσιμη με $A=f'(z_0)$.

Όταν το Δz γίνει απειροστό dz , η ποσότητα $\varepsilon(z_0, dz)$ γίνεται απειροστή, μεγαλύτερης τάξης από το dz , και μπορεί να παραληφθεί, όποτε η σχέση (3.3) γίνεται:

$$\boxed{df=f'(z_0)dz} \quad (3.4)$$

και ονομάζεται **διαφορικό** της μιγαδικής συνάρτησης f .

Ας προσπαθήσουμε τώρα να υπολογίσουμε την παράγωγο της συνάρτησης $f(z)=z^2$ στο τυχαίο σημείο z . Θα έχουμε:

$$f'(z)=\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{[(z+\Delta z)^2 - z^2]}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} [2z + \Delta z] = 2z$$

Ας εξετάσουμε στη συνέχεια τη συνάρτηση $f(z)=|z|^2$. Στην περίπτωση αυτή θα έχουμε:

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{[|z+\Delta z|^2 - |z|^2]}{\Delta z} = \frac{[(z+\Delta z)(\overline{z+\Delta z}) - z\bar{z}]}{\Delta z} = \bar{z} + \overline{\Delta z} + z \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} \quad (3.5)$$

Εάν το $z=0$ τότε $\frac{\Delta f}{\Delta z} = \Delta \bar{z}$ και $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = 0$

Επομένως η παράγωγος της συνάρτησης $f(z)=|z|^2$ στο σημείο $z=0$ υπάρχει και είναι μηδέν, δηλαδή $f'(0)=0$.

Εάν το $z \neq 0$, τότε για να υπάρχει το $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z}$ θα πρέπει το όριο αυτό να μην εξαρτάται από τον τρόπο με τον οποίο το Δz τείνει στο μηδέν. Όμως αν το $\Delta z \rightarrow 0$ παίρνοντας μόνο πραγματικές τιμές, τότε $\overline{\Delta z} = \Delta z$ και θα έχουμε από τη σχέση (3.5) ότι

$$\lim_{\substack{\Delta z \rightarrow 0 \\ \text{Im } \Delta z = 0}} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \bar{z} + z \quad (3.6)$$

Εάν όμως το $\Delta z \rightarrow 0$ παίρνοντας μόνο φανταστικές τιμές, τότε $\overline{\Delta z} = -\Delta z$ και το όριο θα είναι:

$$\lim_{\substack{\Delta z \rightarrow 0 \\ \text{Re } \Delta z = 0}} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \bar{z} - z \quad (3.7)$$

Από τις σχέσεις (3.6) και (3.7) συμπεραίνουμε ότι το όριο:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z}$$

δεν είναι μονοσήμαντο και επομένως η παράγωγος $f'(z)$ δεν υπάρχει σε κανένα σημείο εκτός από το σημείο $z=0$.

Παρατήρηση: Το παράδειγμα αυτό δείχνει ότι μπορεί μια συνάρτηση να είναι παραγωγίσιμη μόνο σ' ένα συγκεκριμένο σημείο και πουθενά αλλού. Επίσης δείχνει ότι μπορεί το πραγματικό και φανταστικό μέρος μιας μιγαδικής συνάρτησης μιας μιγαδικής μεταβλητής να έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους κάθε τάξης σ' ένα σημείο, αλλά η

συνάρτηση να μην έχει παράγωγο σ' αυτό το σημείο. Για την συνάρτηση $f(z)=|z|^2$ έχουμε:
 $\text{Re}f(z)=u(x,y)=x^2+y^2$ και $\text{Im}f(z)=v(x,y)=0$

Επίσης πρέπει να σημειωθεί ότι η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής σ' όλο το μιγαδικό επίπεδο. Έτσι ισχύει και εδώ ό,τι ισχύει στις πραγματικές συναρτήσεις, δηλαδή: "η συνέχεια μιας μιγαδικής συνάρτησης δεν συνεπάγεται κατ' ανάγκη την ύπαρξη της παραγώγου σ' αυτό το σημείο". Το αντίστροφο βέβαια ισχύει.

Πράγματι:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} [f(z)-f(z_0)] = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{[f(z)-f(z_0)]}{z-z_0} (z-z_0) = f'(z_0) \times 0 = 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

Ένα άλλο σημείο, που πρέπει να προσέξουμε, είναι ο τόπος D, στα σημεία του οποίου υπολογίζεται η παράγωγος. Ας πάρουμε σαν παράδειγμα την συνάρτηση:

$$f(z) = f(x+iy) = x$$

και ας θεωρήσουμε ότι το D είναι ο πραγματικός άξονας, δηλαδή

$$f(z) = f(x) = x$$

Η παράγωγος της συνάρτησης για $\forall x \in D$ θα είναι:

$$f'(z) = f'(x) = 1$$

Εάν τώρα αντί για τον τόπο D πάρουμε όλο το μιγαδικό επίπεδο και η συνάρτηση εξακολουθεί να είναι η ίδια, δηλαδή

$$f(z) = f(x+iy) = x$$

τότε το κλάσμα:

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{x - x_0}{(x - x_0) + i(y - y_0)}$$

δεν έχει όριο όταν $z \rightarrow z_0$ με z_0 οποιοσδήποτε μιγαδικός αριθμός ακόμα και πραγματικός, διότι

α) αν $x \rightarrow x_0$ και $y \rightarrow y_0$ τότε το όριο είναι το 0.

β) αν $y \rightarrow y_0$ και $x \rightarrow x_0$ τότε το όριο είναι το 1.

Επομένως η συνάρτηση $f(z)=x$, που είναι συνεχής στο μιγαδικό επίπεδο, δεν είναι πουθενά παραγωγίσιμη.

3.2 Κανόνες παραγώγισης

Από τον ορισμό της παραγώγου και των ιδιοτήτων του ορίου μια συνάρτησης μιας μιγαδικής μεταβλητής, εύκολα προκύπτει ότι και εδώ ισχύουν οι ίδιοι κανόνες παραγώγισης, που ισχύουν στις πραγματικές συναρτήσεις. Οι κανόνες αυτοί είναι οι εξής:

1. Αν $f(z)=c$ =σταθερά, τότε $f'(z)=0$
2. $[z^n]' = nz^{n-1}$

3. $[cf(z)]' = cf'(z)$
4. $[f_1(z) + f_2(z)]' = f_1'(z) + f_2'(z)$
5. $[f_1(z)f_2(z)]' = f_1'(z)f_2(z) + f_1(z)f_2'(z)$
6. $\left[\frac{f_1(z)}{f_2(z)} \right]' = \frac{f_1'(z)f_2(z) - f_1(z)f_2'(z)}{f_2(z)^2}$ με $f_2(z) \neq 0$
7. Αν $w=f(z)$ και $F=g(w)$ τότε: $\frac{dF}{dz} = \frac{dg}{dw} \frac{dw}{dz}$
8. Αν $z=f^{-1}(w)$ είναι η αντίστροφη συνάρτηση της $w=f(z)$, τότε:

$$\frac{d}{dw} f^{-1}(w) = \frac{1}{\frac{d}{dz} f(z)}$$

3.3 Αναλυτικές συναρτήσεις. Συνθήκες Cauchy - Riemann

Αν μια συνάρτηση $f(z)$ είναι παραγωγίσιμη όχι μόνο στο σημείο z_0 αλλά και σε κάθε σημείο z μιας περιοχής $\Pi_\delta(z_0)$ του z_0 , τότε ονομάζεται **αναλυτική** ή **ολόμορφη**³ στο σημείο z_0 . Εάν η $f(z)$ είναι αναλυτική σε κάθε σημείο ενός ανοικτού τόπου D , τότε θα λέμε ότι η $f(z)$ είναι **αναλυτική** ή **ολόμορφη στον τόπο D** .

Εάν η $f(z)$ είναι αναλυτική σε κάθε σημείο z του μιγαδικού επιπέδου, τότε η $f(z)$ λέγεται **ακέραιη**. Π.χ. ένα πολυώνυμο $P(z)$ είναι μια ακέραιη συνάρτηση. Η ρητή συνάρτηση $P(z)/Q(z)$, όπου $P(z)$ και $Q(z)$ πολυώνυμα, είναι αναλυτική σε κάθε τόπο D , που δεν περιέχει ρίζες του παρανομαστή $Q(z)$.

Θεώρημα: Έστω $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ μια μιγαδική συνάρτηση ορισμένη σ' ένα ανοικτό τόπο D . Μια αναγκαία συνθήκη για να είναι η $f(z)$ αναλυτική στο τόπο D είναι οι συναρτήσεις $u(x,y)$ και $v(x,y)$ να ικανοποιούν τις **συνθήκες των Cauchy-Riemann**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.8)$$

Οι σχέσεις (3.8) είναι και ικανές όταν οι μερικές παράγωγοι των συναρτήσεων u και v είναι συνεχείς συναρτήσεις στο τόπο D .

Αν οι σχέσεις (3.8) ισχύουν, τότε η παράγωγος $f'(z)$ μπορεί να υπολογισθεί από τις εξής σχέσεις:

³ Ο όρος **αναλυτική** χρησιμοποιήθηκε πρώτα από τον J. L. Lagrange και αργότερα από τον K. T. Weierstrass. Σήμερα ο όρος χρησιμοποιείται ευρέως και θέλει να τονίσει ότι μια μιγαδική συνάρτηση $f(z)$, που είναι διαφορίσιμη σε κάποιο τόπο D , μπορεί να αναλυθεί σε δυναμοσειρά γύρω από κάποιο σημείο z . Η ανάλυση αυτή, όπως θα δούμε, προσδίδει πολύ ενδιαφέρουσες ιδιότητες στη συνάρτηση $f(z)$.

Ο όρος **ολόμορφη** χρησιμοποιήθηκε πρώτα από τους C. Briot και J. Bouquet, μαθητές του A. Cauchy, οι οποίοι δικαιολόγησαν την εισαγωγή του ως εξής: "μ' αυτόν τον όρο θέλουμε να δείξουμε ότι μια τέτοια συνάρτηση $f(z)$ είναι όμοια με μια πλήρη συνάρτηση, (π.χ. μια πλήρη ρητή συνάρτηση είναι ένα πολυώνυμο), σχετικά με τις ιδιότητες σ' όλο το μιγαδικό επίπεδο

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.9)$$

Απόδειξη:

α) Αναγκαίο. Πρώτος τρόπος.

Από τον ορισμό της αναλυτικής συνάρτησης πρέπει το όριο

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} &= f'(z) = \\ &= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{[u(x + \Delta x, y + \Delta y) + iv(x + \Delta x, y + \Delta y)] - [u(x, y) + iv(x, y)]}{\Delta x + i\Delta y} \end{aligned} \quad (3.10)$$

να υπάρχει και να είναι ανεξάρτητο του τρόπου με τον οποίο το $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ τείνει στο μηδέν.

Εξετάζουμε τους εξής δυο τρόπους με τους οποίους το $\Delta z \rightarrow 0$

1) Έστω $\Delta y = 0, \Delta x \rightarrow 0$, τότε το όριο (3.10) είναι:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \right] = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.11)$$

με την προϋπόθεση ότι υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι.

2) Έστω $\Delta x = 0, \Delta y \rightarrow 0$, τότε το όριο (3.10) είναι:

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left[\frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{i\Delta y} + \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{\Delta y} \right] = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad (3.12)$$

Επειδή η $f(z)$ είναι αναλυτική πρέπει τα όρια (3.11) και (3.12) να είναι τα ίδια δηλαδή

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{και} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Δεύτερος τρόπος: Θυμίζουμε πρώτα ότι μια πραγματική συνάρτηση δυο πραγματικών μεταβλητών $u(x, y)$ ονομάζεται διαφορίσιμη στο σημείο (x, y) αν ισχύει η σχέση:

$$\begin{aligned} \Delta u &= u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) = \\ &= [\partial u(x, y) / \partial x] \Delta x + [\partial u(x, y)] \Delta y + \varepsilon_1(x, y, \Delta x, \Delta y) \Delta x + \varepsilon_2(x, y, \Delta x, \Delta y) \Delta y \end{aligned}$$

όπου $\lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} \varepsilon_1(x, y, \Delta x, \Delta y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} \varepsilon_2(x, y, \Delta x, \Delta y) = 0$

Υποθέτουμε τώρα ότι η $f(z)$ είναι διαφορίσιμη στο σημείο z . Θα έχουμε:

$$\Delta f(z) = f'(z) \Delta z + \varepsilon \Delta z \quad (3.13)$$

όπου $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$

$$\begin{aligned} \Delta f(z) &= f(z + \Delta z) - f(z) = [u(x + \Delta x, y + \Delta y) + iv(x + \Delta x, y + \Delta y)] - [u(x, y) + iv(x, y)] = \\ &= \Delta u + i\Delta v \end{aligned}$$

$$f'(z) = \alpha + i\beta, \quad \varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2 \quad \text{με} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} \varepsilon_1 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} \varepsilon_2 = 0$$

Χωρίζοντας το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της (3.13) βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}\Delta u &= \alpha \Delta x - \beta \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x - \varepsilon_2 \Delta y \\ \Delta v &= \beta \Delta x + \alpha \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x - \varepsilon_2 \Delta y\end{aligned}\quad (3.14)$$

Από τις σχέσεις (3.14) βλέπουμε ότι:

- 1) οι συναρτήσεις $u(x,y)$ και $v(x,y)$ είναι διαφορίσιμες στο σημείο (x,y)
- 2) οι μερικές παράγωγοι των στο ίδιο σημείο είναι:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\beta, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \beta, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \alpha$$

Από τις τελευταίες σχέσεις προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{και} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

β) **Ικανό.** Εάν υποθέσουμε ότι οι μερικές παραγωγοί $\frac{\partial u}{\partial x}$ και $\frac{\partial u}{\partial y}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις, τότε θα έχουμε:

$$\Delta u = u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y) = \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] \Delta x + \left[\frac{\partial u}{\partial y} \right] \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \eta_1 \Delta y$$

όπου $\varepsilon_1 \rightarrow 0$ και $\eta_1 \rightarrow 0$ όταν $\Delta x \rightarrow 0$ και $\Delta y \rightarrow 0$

Επίσης επειδή οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial v}{\partial x}$ και $\frac{\partial v}{\partial y}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις, θα έχουμε ότι:

$$\Delta v = v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y) = \left[\frac{\partial v}{\partial x} \right] \Delta x + \left[\frac{\partial v}{\partial y} \right] \Delta y + \varepsilon_2 \Delta x + \eta_2 \Delta y$$

όπου $\varepsilon_2 \rightarrow 0$ και $\eta_2 \rightarrow 0$ όταν $\Delta x \rightarrow 0$ και $\Delta y \rightarrow 0$

Επομένως

$$\Delta w = \Delta u + i \Delta v = \left[\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right] \Delta x + \left[\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right] \Delta y + \varepsilon \Delta x + \eta \Delta y \quad (3.15)$$

όπου $\varepsilon = \varepsilon_1 + i \varepsilon_2 \rightarrow 0$ και $\eta = \eta_1 + i \eta_2 \rightarrow 0$ όταν $\Delta x \rightarrow 0$ και $\Delta y \rightarrow 0$. Η σχέση (3.15) με την βοήθεια των σχέσεων Cauchy-Riemann γίνεται:

$$\Delta w = \left[\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right] \Delta x + \left[-\frac{\partial v}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial x} \right] \Delta y + \varepsilon \Delta x + \eta \Delta y = \left[\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right] [\Delta x + i \Delta y] + \varepsilon \Delta x + \eta \Delta y$$

και διαιρώντας με $\Delta z = \Delta x + i \Delta y$ και παίρνοντας το όριο $\Delta z \rightarrow 0$ έχουμε:

$$\frac{dw}{dz} = f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

Επομένως η παράγωγος υπάρχει και είναι μοναδική, δηλαδή η $f(z)$ είναι αναλυτική στο τόπο D .

Παρατήρηση: Εάν οι συνθήκες των Cauchy-Riemann ισχύουν σ' ένα σημείο z_0 , (ή στα σημεία μιας καμπύλης), χωρίς να ισχύουν στα γειτονικά του σημεία, (ή στα γειτονικά σημεία της καμπύλης), δηλαδή σε κάποια περιοχή του, τότε η παράγωγος της $f(z)$ στο σημείο z_0 υπάρχει αλλά η $f(z)$ δεν είναι αναλυτική στο z_0 , (η στα σημεία της καμπύλης). Π.χ. η $f(z) = |z|^2$ έχει παράγωγο μόνο στο σημείο $z_0 = 0$, (στο οποίο ισχύουν οι συνθήκες Cauchy-Riemann), αλλά πουθενά δεν είναι αναλυτική.

Άσκηση: Να βρεθούν, αν υπάρχουν, τα σημεία στα οποία η $f(z)=x^2+iy^3$ έχει παράγωγο. Είναι η $f(z)$ αναλυτική σ' αυτά τα σημεία;

Λύση: Έχουμε: $u=x^2, v=y^3$ Επομένως

$$\partial u/\partial x=2x, \partial u/\partial y=0, \partial v/\partial x=0, \partial v/\partial y=3y^2$$

Παρατηρούμε ότι οι πρώτες μερικές παραγωγοί των $u(x,y)$ και $v(x,y)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις σ' όλο το μιγαδικό επίπεδο. Οι δε εξισώσεις των Cauchy-Riemann δίνουν:

$$2x=3y^2 \quad 0=0$$

και επομένως ισχύουν πάνω στην παραβολή $y^2=2x/3$. Συνεπώς, πάνω σ' αυτή την καμπύλη η συνάρτηση $f(z)=x^2+iy^3$ έχει παράγωγο και $f'(z)=2x=3y^2$. Η συνάρτηση $f(z)=x^2+iy^3$ δεν είναι πουθενά αναλυτική γιατί δεν μπορεί να βρεθεί περιοχή $\Pi(z_0)$ τέτοια που η $f'(z)$ να υπάρχει σε κάθε σημείο $z \in \Pi(z_0)$.

3.4 Αρμονικές συναρτήσεις

Μια πραγματική συνάρτηση $g(x,y)$ δυο μεταβλητών λέγεται **αρμονική** σ' ένα ορισμένο τόπο D αν έχει συνεχείς τις πρώτες και δεύτερες μερικές παραγώγους και ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\frac{\partial^2 g(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g(x,y)}{\partial y^2} = 0$$

η οποία ονομάζεται **εξίσωση του Laplace**.

Σε μια αναλυτική συνάρτηση $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ οι πρώτες μερικές παράγωγοι $\partial u/\partial x, \partial u/\partial y, \partial v/\partial x, \partial v/\partial y$ είναι συνεχείς. Εάν υποθέσουμε ότι υπάρχουν και οι δεύτερες μερικές παράγωγοι και είναι συνεχείς⁴, τότε οι συναρτήσεις $u(x,y)$ και $v(x,y)$ είναι αρμονικές συναρτήσεις. Πράγματι από τις συνθήκες Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

έχουμε:
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$$

Από το θεώρημα του Schwarz της πραγματικής ανάλυσης, η συνέχεια των δεύτερων μερικών παραγώγων $\partial^2 v/\partial x \partial y$ και $\partial^2 v/\partial y \partial x$ εγγυάται την ισότητα τους δηλαδή $\partial^2 v/\partial x \partial y = \partial^2 v/\partial y \partial x$. Επομένως:

$$\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 = 0$$

Όμοια αποδεικνύεται ότι:

$$\partial^2 v/\partial x^2 + \partial^2 v/\partial y^2 = 0$$

⁴ Η προϋπόθεση αυτή δεν χρειάζεται, διότι όπως θα αποδειχθεί παρακάτω αν μια συνάρτηση είναι αναλυτική, τότε υπάρχουν οι παράγωγοι κάθε τάξης.

Έτσι αν $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ είναι αναλυτική στο τόπο D , τότε το πραγματικό μέρος $u(x,y)$ και το φανταστικό μέρος $v(x,y)$ είναι αρμονικές συναρτήσεις.

Εάν δυο συναρτήσεις $u(x,y)$ και $v(x,y)$ είναι αρμονικές σ' ένα τόπο D και οι πρώτες μερικές παράγωγοι ικανοποιούν τις συνθήκες Cauchy-Riemann, τότε λέγονται **συζυγείς αρμονικές**.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η συνάρτηση $u(x,y)$ είναι αρμονική.

Ερώτημα: Υπάρχει συνάρτηση $v(x,y)$ τέτοια ώστε η μιγαδική συνάρτηση $f=u(x,y)+iv(x,y)$ να είναι αναλυτική;

Η απάντηση είναι ναι, και ο τρόπος με τον οποίο βρίσκουμε την συνάρτηση $v(x,y)$ θα φανεί από το παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα: Αφού δειχθεί ότι η συνάρτηση:

$$u(x,y)=e^{-x}[x\sin y-y\cos y]$$

είναι αρμονική, να βρεθεί συνάρτηση $v(x,y)$ έτσι ώστε η $f=u+iv$ να είναι αναλυτική. Στη συνέχεια να εκφρασθεί η f συναρτήσει του z .

Λύση:

$$\alpha) \quad \partial u/\partial x = e^{-x}\sin y - e^{-x}[x\sin y - y\cos y] \Rightarrow$$

$$\partial^2 u/\partial x^2 = -e^{-x}\sin y + e^{-x}[x\sin y - y\cos y] - e^{-x}\sin y = e^{-x}[x\sin y - 2\sin y - y\cos y] \quad (3.16)$$

$$\partial u/\partial y = e^{-x}[x\cos y - \cos y + y\sin y] \Rightarrow$$

$$\partial^2 u/\partial y^2 = e^{-x}[-x\sin y + 2\sin y + y\cos y] \quad (3.17)$$

Προσθέτοντας τις σχέσεις (3.16) και (3.17) προκύπτει:

$$\partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2 = 0$$

δηλαδή η $u(x,y)$ είναι αρμονική.

β) Από τις συνθήκες Cauchy-Riemann έχουμε:

$$\partial v/\partial y = \partial u/\partial x = e^{-x}\sin y - xe^{-x}\sin y + ye^{-x}\cos y \quad (3.18)$$

$$\partial v/\partial x = -\partial u/\partial y = e^{-x}\cos y - xe^{-x}\cos y - ye^{-x}\sin y \quad (3.19)$$

Ολοκληρώνοντας την (3.18) ως προς y , (θεωρώντας το x σταθερό), βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} v(x,y) &= -e^{-x}\cos y + xe^{-x}\cos y + e^{-x}[y\sin y + \cos y] + F(x) = \\ &= ye^{-x}\sin y + xe^{-x}\cos y + F(x) \end{aligned} \quad (3.20)$$

όπου $F(x)$ είναι μια πραγματική συνάρτηση του x , που προσδιορίζεται ως εξής: Αντικαθιστούμε την (3.20) στην (3.19) και παίρνουμε

$$-ye^{-x}\sin y - xe^{-x}\cos y + e^{-x}\cos y + F'(x) = -ye^{-x}\sin y - xe^{-x}\cos y + e^{-x}\cos y \Rightarrow$$

$$F'(x) = 0 \Rightarrow F(x) = c = \text{σταθ.}$$

Επομένως: $v(x,y) = e^{-x}[y\sin y + x\cos y] + c$

και τελικά: $f(z) = f(x+iy) = u(x+iy) + iv(x+iy) = e^{-x}[x\sin y - y\cos y] + ie^{-x}[y\sin y + x\cos y] + c$

Για να εκφράσουμε την f συναρτήσει του z θέτουμε $y=0$ και βρίσκουμε

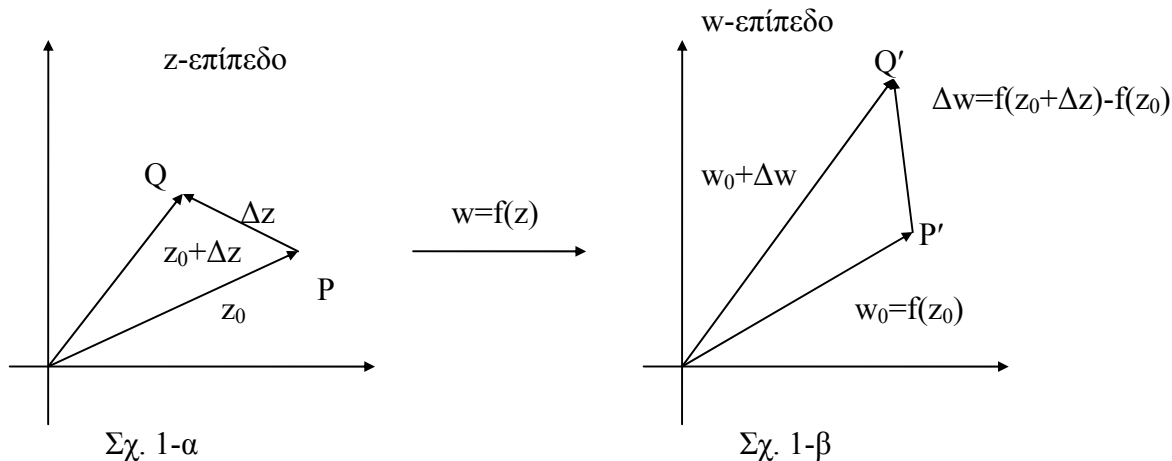
$$f(x) = u(x,0) + iv(x,0) = ie^{-x}x + c. \text{ Αντικαθιστώντας το } x \text{ με το } z \text{ προκύπτει:}$$

$$f(z) = iz e^{-z} + c$$

Η μέθοδος αυτή μπορεί να εφαρμοσθεί όταν η f δεν εξαρτάται από το \bar{z} . Αυτό όμως, όπως θα δούμε στην παρ. 3.11, πάντα ισχύει για μια αναλυτική συνάρτηση.

3.5 Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου

Ας θεωρήσουμε την αναλυτική συνάρτηση $w=f(z)$ και z_0 ένα σημείο P στο z -επίπεδο. Έστω $w_0=f(z_0)$ το σημείο P' , που είναι η εικόνα του P στο w -επίπεδο, Σχ. 1. Ας



υποθέσουμε τώρα ότι το z_0 μεταβάλλεται κατά Δz και έστω Q το σημείο που αντιστοιχεί στο μιγαδικό αριθμό $z_0 + \Delta z$. Το σημείο αυτό έχει εικόνα το Q' στο w -επίπεδο. Από το Σχ. 1-β βλέπουμε ότι το $P'Q'$ παριστάνει τον μιγαδικό αριθμό $w=f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$. Επομένως η παράγωγος $f'(z)$ ισούται με:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \lim_{Q \rightarrow P} \frac{P'Q'}{PQ}$$

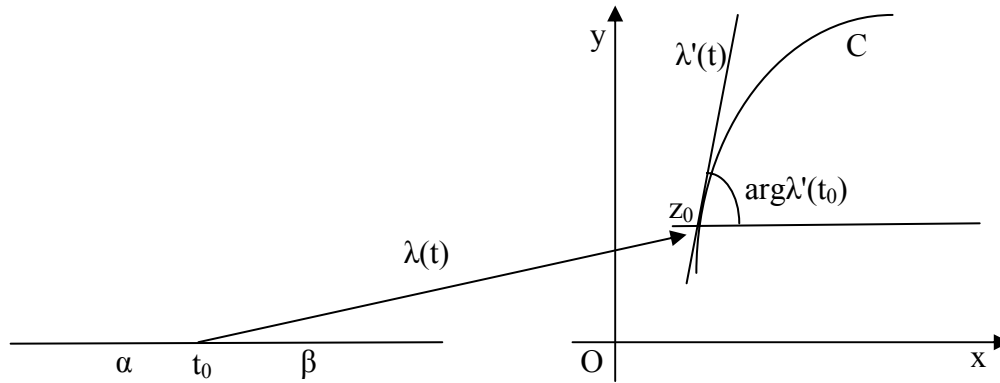
δηλαδή είναι το όριο του λόγου $P'Q'$ προς PQ όταν το σημείο Q τείνει στο σημείο P .

3.6 Γεωμετρική σημασία του ορίσματος της παραγώγου

Ας αρχίσουμε με μια μιγαδική συνάρτηση $z=\lambda(t)$ μιας πραγματικής μεταβλητής t , που είναι συνεχής σ' ένα διάστημα $I=(\alpha, \beta)$. Προφανώς η συνάρτηση αυτή ορίζει μια συνεχή καμπύλη C στο μιγαδικό επίπεδο, Σχ. 2.

Υποθέτουμε ότι στο σημείο $t_0 \in (\alpha, \beta)$ υπάρχει η παράγωγος $\lambda'(t_0) \neq 0$. Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι η παράγωγος $\lambda'(t_0)$ αντιστοιχεί σ' ένα διάνυσμα, εφαπτόμενο στην καμπύλη C , το δε όρισμα της $\arg \lambda'(t_0)$ είναι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\lambda'(t_0)$ με τον πραγματικό άξονα OX . Ας θεωρήσουμε τώρα μια αναλυτική συνάρτηση $w=f(z)$

ορισμένη στο τόπο D . Έστω $z_0 \in D$ και C μια καμπύλη, που διέρχεται από το σημείο z_0 και περιγράφεται από την εξίσωση:

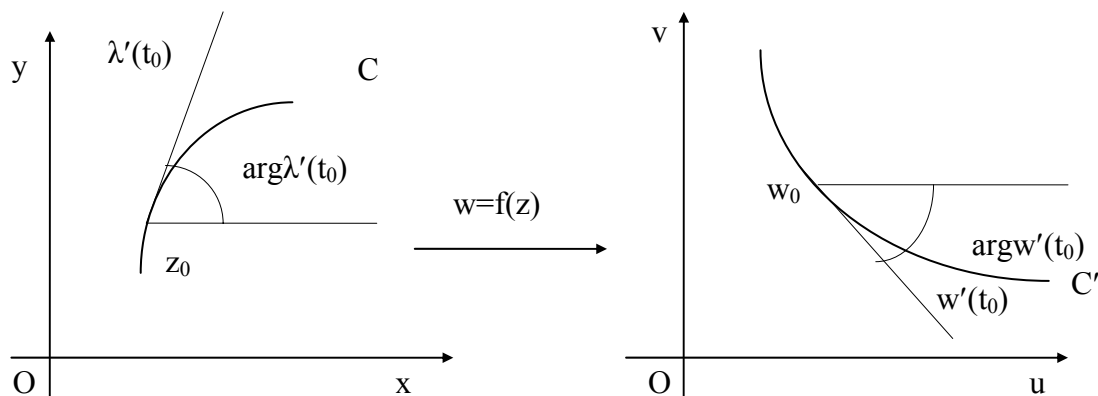


Σχ. 2

$$z = \lambda(t) \text{ με } \alpha < t < \beta, \lambda(t_0) = z_0, \lambda'(t) \neq 0$$

Η καμπύλη αυτή απεικονίζεται με την βοήθεια του μετασχηματισμού $w = f(z)$ στην καμπύλη C' στο w -επίπεδο με εξίσωση $w = f(z) = f(\lambda(t))$, Σχ. 3.

Από τον κανόνα της σύνθετης παραγώγισης:
$$\frac{dw}{dt} = \frac{df}{dz} \frac{dz}{dt} = f'(z)\lambda'(t)$$



Σχ. 3

και για τα σημεία z_0 και w_0 προκύπτει:
$$w'(t_0) = f'(z_0)\lambda'(t_0) \tag{3.21}$$

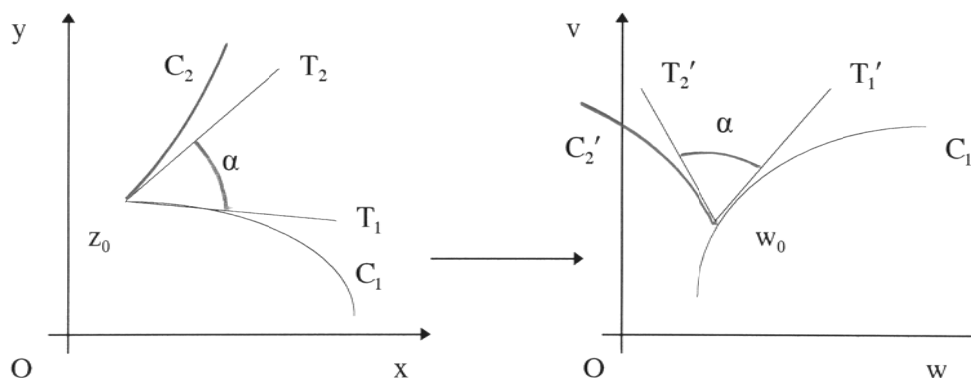
Η παράγωγος $w'(t_0)$ αντιστοιχεί σ' ένα διάνυσμα, που είναι εφαπτόμενο της καμπύλης C' στο σημείο w_0 . Από την (3.21) έχουμε:

$$\begin{aligned} \arg w'(t_0) &= \arg[f'(z_0)\lambda'(t_0)] = \arg f'(z_0) + \arg \lambda'(t_0) \Rightarrow \\ \arg f'(z_0) &= \arg w'(t_0) - \arg \lambda'(t_0) \end{aligned} \tag{3.22}$$

Από την (3.22) και με την προϋπόθεση ότι $f'(z_0) \neq 0$, προκύπτει το συμπέρασμα: όταν από την καμπύλη C πηγαίνουμε στην καμπύλη C' , η διάφορα των κλίσεων των εφαπτόμενων στις καμπύλες C και C' και στα σημεία z_0 και w_0 αντίστοιχα, ισούται με $\arg f'(z_0)$, που εξαρτάται μόνο από την παράγωγο $f'(z_0)$ και όχι από το συγκεκριμένο σχήμα της καμπύλης C .

Επομένως το $\arg f'(z_0)$ ισούται με την γωνία κατά την οποία περιστρέφεται η εφαπτόμενη $l'(t_0)$ της C στο σημείο z_0 δια μέσου του μετασχηματισμού $w=f(z)$.

Απόρροια του παραπάνω συμπεράσματος είναι ότι αν δυο καμπύλες C_1 και C_2 διέρχονται από το σημείο z_0 και έχουν σ' αυτό το σημείο εφαπτόμενες T_1 και T_2 , τότε οι εφαπτόμενες T_1' και T_2' των καμπυλών C_1' και C_2' , (που είναι οι εικόνες των καμπυλών C_1 και C_2), στο σημείο $w_0=f(z_0)$ προκύπτουν από τις T_1 και T_2 περιστρέφοντας τις κατά γωνία ίση με $\arg f'(z_0)$. Επομένως η γωνία των καμπυλών C_1 και C_2 ισούται και κατά μέγεθος και κατά φορά με την γωνία των καμπυλών C_1' και C_2' , Σχ. 4.



Σχ. 4

Δηλαδή μια αναλυτική συνάρτηση διατηρεί την γωνία και την φορά κατά την οποία τέμνονται δυο καμπύλες. Μια τέτοια απεικόνιση λέγεται **σύμμορφη απεικόνιση** και έχει μεγάλες εφαρμογές στη Μηχανική των Ρευστών, στο Στατικό Ηλεκτρισμό, στη Ροή Θερμότητας κ. α.

3.7 Γεωμετρική ερμηνεία του μέτρου της παραγώγου

Ας υποθέσουμε ότι στο σημείο z_0 υπάρχει η παράγωγος της μιγαδικής συνάρτησης $w=f(z)$ και είναι $f'(z_0) \neq 0$. Προφανώς η παράγωγος $f'(z_0)$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός του οποίου η πολική μορφή του έστω ότι είναι:

$$f'(z_0) = k e^{i\theta}$$

είναι όμως $f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta w / \Delta z = k e^{i\theta} \Rightarrow k = |f'(z_0)| = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} |\Delta w| / |\Delta z|$

Για απειροστά μεγάλης τάξης προκύπτει η ισότητα

$$|\Delta w| = k |\Delta z|$$

Η γεωμετρική σημασία της τελευταίας σχέσης είναι ότι απειροστά ευθύγραμμα τμήματα Δz μετασχηματίζονται πάλι σε απειροστά ευθύγραμμα τμήματα Δw με συντελεστή "μεγέθυνσης" το $k=|f'(z_0)|$.

Εάν $k>1$ έχουμε μεγέθυνση αφού $|\Delta w|>|\Delta z|$ και εάν $0<k<1$ έχουμε σμίκρυνση αφού $|\Delta w|<|\Delta z|$

3.8 Παράγωγοι ανώτερης τάξης

Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση $w=f(z)$ είναι αναλυτική σ' ένα τόπο D . Τότε υπάρχει η παράγωγος της $f'(z)$. Εάν στη συνέχεια και η παράγωγος $f'(z)$ είναι αναλυτική συνάρτηση, τότε θα υπάρχει η παράγωγος της, που συμβολίζεται με $f''(z)$ ή d^2f/dz^2 . Συνεχίζοντας μπορούμε να μιλάμε για την n -οστή παράγωγο της $f(z)$, την οποία θα συμβολίζουμε με $d^n f/dz^n$ ή $f^{(n)}$. Το n ονομάζεται **τάξη** της παραγώγου.

Ένα ενδιαφέρον θεώρημα που ισχύει για τις μιγαδικές συναρτήσεις και που γενικά δεν ισχύει για τις πραγματικές συναρτήσεις είναι:

Θεώρημα: Εάν η μιγαδική συνάρτηση $f(z)$ είναι αναλυτική σ' ένα τόπο D , τότε υπάρχουν οι παράγωγοι κάθε τάξης.

Η απόδειξη του θεωρήματος αυτού θα γίνει στο Κεφαλαίο 5.

3.9 Κανόνας του L' Hospital

Ο κανόνας αυτός είναι ακριβώς ο ίδιος με τον αντίστοιχο κανόνα που ισχύει για τις πραγματικές συναρτήσεις και έχει ως εξής:

Εάν $f(z)$ και $g(z)$ δυο αναλυτικές συναρτήσεις σ' ένα τόπο D , στον οποίο ανήκει το σημείο z_0 , για το οποίο ισχύει $f(z_0)=g(z_0)=0$ αλλά $g'(z_0)\neq 0$, τότε έχουμε

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)} \quad (3.23)$$

Στην περίπτωση που $f'(z_0)=g'(z_0)=0$ ο κανόνας μπορεί να επαναληφθεί.

Το δεξιό μέλος της (3.23) συχνά χαρακτηρίζεται σαν "απροσδιόριστη μορφή" $0/0$. Υπάρχουν όμως και άλλες περιπτώσεις απροσδιόριστων μορφών": ∞/∞ , ∞^∞ , 0^0 , 1^∞ και $\infty-\infty$, οι οποίες μπορούν να υπολογισθούν με κατάλληλες τροποποιήσεις του κανόνα του L' Hospital.

Η απόδειξη του κανόνα του L' Hospital έχει ως εξής:

Επειδή $f(z_0)=g(z_0)=0$ έχουμε:

$$f(z)=f(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\varepsilon_1(z-z_0)=f'(z_0)(z-z_0)+\varepsilon_1(z-z_0)$$

$$g(z)=g(z_0)+g'(z_0)(z-z_0)+\varepsilon_2(z-z_0)=g'(z_0)(z-z_0)+\varepsilon_2(z-z_0)$$

όπου $\lim_{z \rightarrow z_0} \varepsilon_1 = \lim_{z \rightarrow z_0} \varepsilon_2 = 0$ Επομένως:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{[f'(z_0) + \varepsilon_1](z - z_0)}{[g'(z_0) + \varepsilon_1](z - z_0)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

Άλλος τρόπος είναι ο εξής:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}}{\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}} = \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}}{\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0}} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

3.10 Ανώμαλα σημεία

Ανώμαλο σημείο μιας μιγαδικής συνάρτησης $f(z)$ ονομάζεται το σημείο z_0 στο οποίο η $f(z)$ δεν είναι αναλυτική αλλά είναι αναλυτική σε κάποιο σημείο κάθε γειτονιάς του z_0 . Εάν το σημείο z_0 δεν είναι ανώμαλο σημείο και επιπλέον μπορούμε να βρούμε μια δ -περιοχή του z_0 που να μην περιέχει ανώμαλο σημείο, τότε το σημείο z_0 ονομάζεται **ομαλό σημείο** της συνάρτησης $f(z)$.

Παραδείγματα: α) Η συνάρτηση $f(z)=1/z$, ($z \neq 0$), της οποίας η παράγωγος είναι $f'(z)=-1/z^2$, είναι αναλυτική σε κάθε σημείο εκτός από το $z_0=0$, στο οποίο ούτε και ορίζεται. Έτσι το σημείο $z_0=0$ είναι ανώμαλο σημείο.

β) Η συνάρτηση $f(z)=|z|^2$, όπως είδαμε, έχει παράγωγο μόνο στο σημείο $z_0=0$. Πουθενά δεν είναι αναλυτική. Στην περίπτωση αυτή δεν είναι σωστό να λέμε ότι η $|z|^2$ δεν έχει ανώμαλα σημεία, αλλά ότι δεν έχει νόημα η έννοια του ανώμαλου σημείου για την $|z|^2$.

Τα ανώμαλα σημεία ταξινομούνται στις εξής κατηγορίες⁽⁵⁾:

1. **Απομονωμένο ανώμαλο σημείο** είναι κάθε ανώμαλο σημείο z_0 για το οποίο μπορούμε να βρούμε μια δ -περιοχή, η οποία να μην περιέχει άλλο ανώμαλο σημείο. Εάν μια τέτοια περιοχή δεν υπάρχει, τότε το ανώμαλο σημείο λέγεται **μη απομονωμένο**.

2. **Πόλος τάξης n** με $n \in \mathbb{N}$ λέγεται το ανώμαλο σημείο z_0 για το οποίο ισχύει:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) = A \neq 0 \text{ ή } \infty$$

Εάν $n=1$, το z ονομάζεται **απλός πόλος**.

Παραδείγματα:

α) Η $f(z)=1/(z+1)^2$ έχει πόλο τάξης 2 στο σημείο $z_0=-1$.

⁽⁵⁾ Στο Κεφάλαιο 6 θα αναφερθούμε και πάλι στη ταξινόμηση των ανώμαλων σημείων, η οποία όμως θα γίνει χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Laurent της συνάρτησης $f(z)$.

β) Η $f(z) = \frac{z+2}{(z+5-i)^3(z+1)^4}$ έχει πόλο τάξης 3 στο σημείο $z_1 = -5+i$ και ένα πόλο τάξης 4 στο σημείο $z_2 = -1$.

γ) Η $f(z) = \frac{z+4}{(z^2-9)(z+2)^2}$ έχει δυο απλούς πόλους τάξης 1 στα σημεία $z_1 = 3$, $z_2 = -3$ και ένα πόλο τάξης 2 στο σημείο $z_3 = -2$.

3. Τα σημεία διακλάδωσης μιας συνάρτησης $f(z)$ είναι ανώμαλα σημεία. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η συνάρτηση $f(z)$ είναι πλειότιμη και το όριο που μας δίνει την παράγωγο εξαρτάται από τον τρόπο με τον οποίο πλησιάζουμε το σημείο διακλάδωσης.

4. **Απαλείψιμο ανώμαλο σημείο** ή **απαλείψιμη ανωμαλία** λέγεται ένα σημείο z_0 της συνάρτησης $f(z)$ εάν υπάρχει το όριο $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$

Παράδειγμα: α) Η συνάρτηση $f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$ "φαίνεται" ότι δεν ορίζεται για την τιμή $z_0 = 0$. Επίσης "φαίνεται" ότι δεν έχει παράγωγο στο ίδιο σημείο. Από τον κανόνα όμως του L' Hospital προκύπτει ότι $f(0) = 1$ και $f'(0) = 1/2$.

β) Όμοια για την συνάρτηση $f(z) = \sin z / z$ μπορούμε να δούμε ότι $f(0) = 1$ και $f'(0) = 0$.

5. **Ουσιώδες ανώμαλο σημείο** λέγεται κάθε ανώμαλο σημείο που δεν είναι πόλος, σημείο διακλάδωσης ή απαλείψιμη ανωμαλία. Π.χ. η συνάρτηση $f(z) = \sin[1/z]$ έχει ένα ουσιώδες ανώμαλο σημείο στο $z = 0$.

Παρατήρηση: Εάν η $f(z)$ είναι μονότιμη συνάρτηση και το z_0 είναι ανώμαλο σημείο, τότε το σημείο αυτό είναι πόλος ή ουσιώδες ανώμαλο σημείο. Εάν στη συνέχεια δεν μπορούμε να βρούμε κάποιο φυσικό αριθμό n έτσι ώστε

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) = A \neq 0$$

τότε το z_0 είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο.

6. **Ανώμαλο σημείο στο άπειρο.** Για το είδος της ανωμαλίας, που μπορεί να έχει μια συνάρτηση $f(z)$ στο σημείο στο άπειρο, χρησιμοποιούμε τον μετασχηματισμό $w = 1/z$ και εξετάζουμε την ανωμαλία της $f(1/w)$ στο σημείο $w = 0$.

3.11 Μιγαδικοί Διαφορικοί Τελεστές - Κλίση - Απόκλιση - Στροβιλισμός - Λαπλασιανή μιας μιγαδικής συνάρτησης

Κατ' αναλογία με τον διαφορικό διανυσματικό τελεστή

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j}$$

στο επίπεδο \mathbb{R}^2 , μπορούμε να ορίσουμε στο μιγαδικό επίπεδο τον εξής μιγαδικό διαφορικό τελεστή:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \quad (3.24)$$

και τον αντίστοιχο συζυγή του:

$$\bar{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \quad (3.25)$$

Άσκηση: Να αποδειχθεί ότι

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} = 2 \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{και} \quad \bar{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} = 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

Απόδειξη: α) Θεωρούμε μια μιγαδική συνάρτηση $f=f(z, \bar{z})$ με συνεχείς παραγώγους. Τότε θα έχουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \quad (A)$$

επίσης
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} i + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} (-i) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} = i \left[\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right] \quad (B)$$

Με την βοήθεια των παραπάνω σχέσεων (A) και (B) προκύπτει

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} = 2 \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{και} \quad \bar{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} = 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

Στη συνέχεια με A θα συμβολίζουμε οποιαδήποτε πραγματική συνάρτηση των x και y, την οποία θα γράφουμε:

$$A=A(x,y)=A[(z+\bar{z})/2, (z-\bar{z})/2i]=B(z, \bar{z})$$

Επίσης με F θα συμβολίζουμε οποιαδήποτε μιγαδική συνάρτηση την οποία θα γράφουμε

$$F=F(x,y)=u(x,y)+iv(x,y)=G(z, \bar{z})$$

Αφήνοντας τώρα να επιδράσει ο μιγαδικός διαφορικός τελεστής:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y}$$

πάνω σε μια πραγματική συνάρτηση $A(x,y)$ ή σε μια μιγαδική συνάρτηση $F(x,y)$ σε συνδυασμό με τον συνήθη πολλαπλασιασμό ή το εσωτερικό γινόμενο ή τον εξωτερικό πολλαπλασιασμό, μπορούμε να ορίσουμε τις εξής ποσότητες:

1α) **Κλίση μιας πραγματικής συνάρτησης** $A(x,y)$ ορίζεται η σχέση:

$$\nabla A = \text{grad} A = \left[\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right] A = \partial A / \partial x + i \partial A / \partial y = 2 \partial B / \partial \bar{z}$$

1β) **Κλίση μιας μιγαδικής συνάρτησης** $F(x,y)$ ορίζεται η σχέση:

$$\nabla F = \text{grad} F = \left[\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right] (u+iv) = \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right] + i \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] = 2 \frac{\partial G}{\partial \bar{z}}$$

Εάν η μιγαδική συνάρτηση F είναι αναλυτική, τότε ισχύουν οι συνθήκες Cauchy-Riemann: $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ και επομένως η κλίση της μιγαδικής συνάρτησης F είναι μηδέν ή ισοδύναμα $\partial G / \partial \bar{z} = 0$. Η τελευταία σχέση μας λέει ότι: μια αναλυτική συνάρτηση δεν περιέχει το \bar{z} και είναι συνάρτηση μόνο του z .

2α) **Απόκλιση μιας πραγματικής συνάρτησης** $A(x,y)$ ορίζεται από την σχέση:

$$\nabla \cdot A = \text{div} A = \text{Re}(\bar{\nabla} A) = \text{Re} \left[\frac{\partial A}{\partial x} - i \frac{\partial A}{\partial y} \right] = \frac{\partial A}{\partial x}$$

2β) **Απόκλιση μιας μιγαδικής συνάρτησης** $F(x,y)$ ορίζεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot F = \text{div} F &= \text{Re}(\bar{\nabla} F) = \text{Re} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) (u + iv) \right] = \text{Re} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + i \left(-\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 2 \text{Re} \frac{\partial G}{\partial z} \end{aligned}$$

3α) **Στροβιλισμός μιας πραγματικής συνάρτησης** $A(x,y)$ ορίζεται από τη σχέση:

$$\nabla \times A = \text{curl} A = \text{Im}(\bar{\nabla} A) = -\partial A / \partial y$$

3β) **Στροβιλισμός μιας μιγαδικής συνάρτησης** $F(x,y)$ ορίζεται από τη σχέση:

$$\nabla \times F = \text{curl} F = \text{Im}(\bar{\nabla} F) = \partial v / \partial x - \partial u / \partial y = 2 \text{Im}[\partial G / \partial z]$$

4. **Λαπλασιανή μιας μιγαδικής συνάρτησης** ορίζεται από την επίδραση του τελεστή του Laplace πάνω στη μιγαδική συνάρτηση. Ο τελεστής του Laplace ορίζεται από το εσωτερικό γινόμενο του ∇ με τον εαυτό του, δηλαδή

$$\nabla^2 \equiv \nabla \cdot \nabla = \text{Re}(\nabla \bar{\nabla}) = \text{Re} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \right] = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \text{Re} \left[4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} \right]$$

Έτσι η Λαπλασιανή της F είναι $\nabla^2 F = \nabla^2 u + i \nabla^2 v$.

Εάν η F είναι αναλυτική, τότε οι συναρτήσεις u και v είναι αρμονικές δηλαδή

$$\nabla^2 u = \nabla^2 v = 0 \text{ και επομένως } \nabla^2 F = 0$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 1) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(z)=\bar{z}$ δεν είναι αναλυτική.
- 2) Εάν η $w=f(z)=u+iv$ είναι αναλυτική σ' ένα τόπο D , δείξτε ότι

$$dw/dz=\partial w/\partial x=-i\partial w/\partial y$$
- 3) Δείξτε ότι η συνάρτηση $w=x^2+iy^2$ είναι παντού μη αναλυτική. Πως συμβιβάζεται αυτό με το γεγονός ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες Cauchy-Riemann στα σημεία της ευθείας $y=x$;
- 4) Εξετάστε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις $u(x,y)$ είναι αρμονικές. Για κάθε αρμονική συνάρτηση βρείτε την συζυγή αρμονική συνάρτηση $v(x,y)$ και εκφράστε την $u+iv$ σαν αναλυτική συνάρτηση του z .
 α. $u=3x^2y+2x^2-y^3-2y^2$ β. $u=2xy+3xy^2-2y^3$
 γ. $u=xe^x\cos y-ye^x\sin y$
Απαντήσεις:
 α. $v=4xy-x^3+3xy^2+c$, $f(z)=2z^2-iz^3+ic$
 β. όχι
 γ. $v=ye^x\cos y+xe^x\sin y+c$, $f(z)=ze^z+ic$
- 5) Εάν $\text{Im}f'(z)=6x(2y-1)$ και $f(0)=3-2i$, $f(1)=6-5i$, υπολογίστε το $f(1+i)$. Απ. $6+3i$
- 6) Για κάθε μια από τις παρακάτω συναρτήσεις προσδιορίστε και αναγνωρίστε τα ανώμαλα σημεία στο πεπερασμένο z -επίπεδο.
 α. $\frac{z^2-3z}{z^2+2z+2}$ β. $\frac{\ln(z+3i)}{z^2}$ γ. $\sin^{-1}(1/z)$
Απαντήσεις:
 α. απλοί πόλοι στα σημεία $z=-1\pm i$
 β. σημείο διακλάδωσης στο σημείο $z=-3i$ και πόλος δεύτερης τάξης στο $z=0$.
 γ. ουσιώδες ανώμαλο σημείο στο $z=0$.
- 7) Για την συνάρτηση $f(z)=\sec(1/z)$ να προσδιορισθούν και να αναγνωρισθούν τα ανώμαλα σημεία.

8) Δείξτε ότι $\nabla^2|f(z)|^2=4|f'(z)|^2$ Επαληθεύστε τη σχέση αυτή για $f(z)=z^2+iz$.

9) Δείξτε ότι σε πολική μορφή οι συνθήκες Cauchy-Riemann είναι:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

10) Εάν η $w=f(z)$ είναι αναλυτική και εκφραστεί σε πολικές συντεταγμένες (r,θ) , δείξτε ότι

$$\frac{dw}{dz} = e^{-i\theta} \frac{\partial w}{\partial r}$$

11) Θεωρούμε την αναλυτική συνάρτηση $f(z)$ σε πολική μορφή, δηλαδή

$$f(z)=\rho(x,y)e^{i\varphi(x,y)}$$

α) Να δείξετε ότι οι συνθήκες Cauchy-Riemann είναι:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

β) Η συνάρτηση $\rho(x,y)$, (που είναι το μέτρο της $f(z)$), εκτός από την συνθήκη $\rho(x,y)>0$ ικανοποιεί και την συνθήκη:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho} \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right)^2 \right] = 0$$

για να είναι το μέτρο μιας αναλυτικής συνάρτησης $f(z)=0$

γ) Το όρισμα $\varphi(x,y)$ μιας αναλυτικής συνάρτησης ικανοποιεί την εξίσωση:

4. ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

4.1 Επικαμπύλιο Μιγαδικό Ολοκλήρωμα

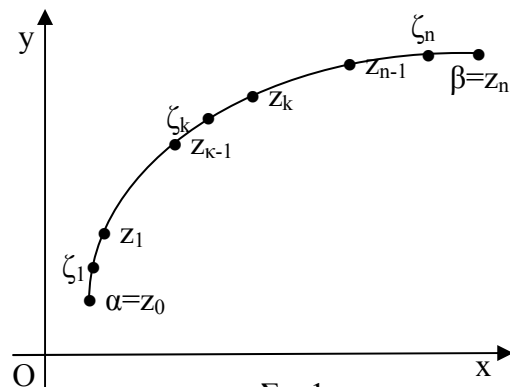
Θεωρούμε μια καμπύλη⁽⁶⁾ C στο μιγαδικό επίπεδο με άκρα τα σημεία a και β και έστω $f(z)$ μια συνάρτηση συνεχής σ' όλα τα σημεία της καμπύλης. Διαιρούμε την καμπύλη C σε n τόξα, διαλέγοντας $n-1$ αυθαίρετα σημεία z_1, z_2, \dots, z_n και θέτοντας $a=z_0$ και $\beta=z_n$. Σχ. 1. Από κάθε τόξο $z_{k-1}z_k$ με $k=1, \dots, n$ παίρνουμε ένα σημείο ζ_k , σχηματίζουμε το άθροισμα:

$$\sum_{k=1}^n f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^n f(\zeta_k)\Delta z_k$$

όπου $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$ και παίρνουμε το όριο όταν το $n \rightarrow \infty$ ενώ συγχρόνως το $\max|\Delta z_k| \rightarrow 0$. Το όριο αυτό, όταν υπάρχει, το συμβολίζουμε με:

$$\int_C f(z)dz$$

και ονομάζεται **επικαμπύλιο μιγαδικό ολοκλήρωμα** ή πιο απλά **μιγαδικό ολοκλήρωμα** της $f(z)$ κατά μήκος της καμπύλης C .



Σχ. 1

4.2 Βασικές ιδιότητες των μιγαδικών ολοκληρωμάτων

Από τον ορισμό του επικαμπυλίου ολοκληρώματος εύκολα προκύπτουν οι σχέσεις:

- 1) $\int_C [f(z) + g(z)]dz = \int_C f(z)dz + \int_C g(z)dz$
- 2) $\int_C kf(z)dz = k \int_C f(z)dz$
- 3) $\int_a^\beta f(z)dz = -\int_\beta^a f(z)dz$
- 4) $\int_a^\beta f(z)dz = \int_a^\gamma f(z)dz + \int_\gamma^\beta f(z)dz$ όπου τα σημεία a, β, γ είναι σημεία της καμπύλης C .
- 5) $\left| \int_C f(z)dz \right| \leq ML$ (ανισότητα του Darboux) όπου M είναι ένα άνω φράγμα του μέτρου της $f(z)$ δηλαδή $|f(z)| \leq M \quad \forall z \in C$ και L το μήκος της καμπύλης C . Πράγματι:

⁽⁶⁾ Δεχόμαστε ότι η καμπύλη C έχει πεπερασμένο μήκος. Μια τέτοια καμπύλη λέγεται **ευθυγραμμίσιμη**.

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |f(\zeta_k)| |\Delta z_k| \leq M \sum_{k=1}^n |\Delta z_k| \leq ML \Rightarrow$$

$$\left| \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max |\Delta z_k| \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k \right| = \left| \int_C f(z) dz \right| \leq ML$$

4.3 Αναγωγή του επικαμπύλιου μιγαδικού ολοκληρώματος σε ορισμένο ολοκλήρωμα

Ας υποθέσουμε ότι η καμπύλη C είναι μια λεία καμπύλη. Αυτό σημαίνει ότι η καμπύλη C μπορεί να περιγράφεται από μια παραμετρική εξίσωση της μορφής:

$$z = \lambda(t) = x(t) + iy(t) \quad t_1 \leq t \leq t_2 \quad (4.1)$$

τέτοια ώστε η παράγωγος $\lambda'(t) = x'(t) + iy'(t)$ να είναι συνεχής.

Γεωμετρικά μια λεία καμπύλη χαρακτηρίζεται από το γεγονός ότι σε κάθε σημείο της υπάρχει η εφαπτόμενη, της οποίας η κλίση ως προς τον πραγματικό άξονα, (η οποία ισούται με $\arg \lambda'(t)$), μεταβάλλεται κατά συνεχή τρόπο, όσο το σημείο κινείται πάνω στην καμπύλη.

Διαφορίζοντας την σχέση (4.1) έχουμε:

$$dz = \lambda'(t) dt = [x'(t) + iy'(t)] dt \quad (4.2)$$

και επομένως

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_{t_1}^{t_2} f(\lambda(t)) \lambda'(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} [u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))] [x'(t) + iy'(t)] dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} [u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)] dt + i \int_{t_1}^{t_2} [u(x(t), y(t))y'(t) + v(x(t), y(t))x'(t)] dt \end{aligned} \quad (4.3)$$

με $\lambda(t_1) = \alpha$ και $\lambda(t_2) = \beta$, όπου α και β τα άκρα της καμπύλης.

Από τη σχέση (4.3) συμπεραίνουμε ότι το επικαμπύλιο μιγαδικό ολοκλήρωμα $\int_C f(z) dz$ ανάγεται στον υπολογισμό δυο πραγματικών ορισμένων ολοκληρωμάτων.

$$\int_{t_1}^{t_2} [u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)] dt \quad \text{και} \quad \int_{t_1}^{t_2} [u(x(t), y(t))y'(t) + v(x(t), y(t))x'(t)] dt$$

Παράδειγμα: Ας θεωρήσουμε το ολοκλήρωμα $\int_C \frac{1}{z - \alpha} dz$ όπου C ο κύκλος με κέντρο

το σημείο α και ακτίνα r . Αν υποθέσουμε ότι ο κύκλος διαγράφεται κατά την θετική φορά, τότε μια παραμετρική εξίσωση του κύκλου είναι: $z = \alpha + re^{it}$ με $0 \leq t < 2\pi$. Εδώ η συνάρτηση $\lambda(t)$ είναι $z = \lambda(t) = \alpha + re^{it}$ για την οποία προκύπτει $\lambda'(t) = ire^{it}$. Επομένως:

$$\int_C \frac{1}{z - \alpha} dz = \int_0^{2\pi} \frac{\lambda'(t)}{\lambda(t) - \alpha} dt = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

Παρατήρηση: Το ολοκλήρωμα $\int_C f(z) dz$ με $f(z) = u + iv$ μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\int_C f(z)dz = \int_C [u + iv][dx + idy] = \int_C udx - vdy + i \int_C udy + vdx \quad (4.4)$$

Η (4.4) μπορεί να ληφθεί ως ορισμός του επικαμπυλίου ολοκλήρωματος.

4.4 Το ολοκληρωτικό θεώρημα του Cauchy

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με την απόδειξη του θεωρήματος Cauchy, που είναι βασικό για την θεωρία των αναλυτικών συναρτήσεων μιας μιγαδικής μεταβλητής.

Θεώρημα του Cauchy: Εάν $f(z)$ είναι μια αναλυτική συνάρτηση σ' ένα τόπο D και στο σύνορο του C , τότε το κλειστό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\oint_C f(z)dz$ είναι μηδέν.

Το θεμελιώδες αυτό θεώρημα, που ισχύει για τόπους απλής και πολλαπλής συνοχής, αρχικά αποδείχθηκε με την βοήθεια του θεωρήματος του Green με την επί πλέον παραδοχή ότι η παράγωγος $f'(z)$ είναι συνεχής. Αργότερα όμως ο Goursat το απέδειξε χωρίς αυτή την παραδοχή και για αυτόν ακριβώς τον λόγο ονομάζεται μερικές φορές θεώρημα των Cauchy-Goursat, ιδίως όταν θέλει κανείς να τονίσει ότι δεν χρειάζεται η επιπλέον παραδοχή.

Απόδειξη:

α) Υποθέτουμε ότι η $f(z)$ είναι συνεχής. Αυτό σημαίνει ότι οι μερικές παράγωγοι των $u(x,y)$ και $v(x,y)$ είναι συνεχείς. Επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα του Green:

$$\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left[\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dx dy \quad (4.5)$$

Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} \oint_C f(z)dz &= \oint_C [u + iv][dx + idy] = \oint_C udx - vdy + i \oint_C vdx + udy = \\ &= \iint_D \left[-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right] dx dy + i \iint_D \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right] dx dy \end{aligned} \quad (4.6)$$

Επειδή όμως η $f(z)$ είναι αναλυτική, ισχύουν οι συνθήκες Cauchy-Riemann δηλαδή:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

οι οποίες μηδενίζουν τα διπλά ολοκληρώματα στη σχέση (4.6). Άρα

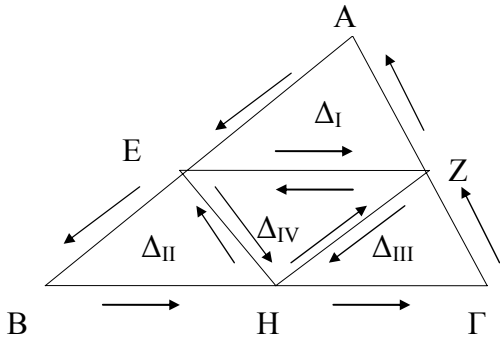
$$\oint_C f(z)dz = 0$$

Παρατήρηση: Το ίδιο αποτέλεσμα μπορεί να προκύψει γράφοντας την σχέση (4.6) ως εξής:

$$\begin{aligned} \oint_C f(z) dz &= \iint_D \left[-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right] dx dy + i \iint_D \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right] dx dy = \\ &= \iint_D \left[-\left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) v + i \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) u \right] dx dy = \\ &= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right] [iu - v] dx dy = i \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right] [u + iv] dx dy = \\ &= i \iint_D 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} dx dy = 0 \quad \text{επειδή η } f(z) \text{ δεν εξαρτάται από το } \bar{z} . \end{aligned}$$

β) Η απόδειξη του θεωρήματος των Cauchy-Goursat χωρίς την παραδοχή ότι η $f'(z)$ είναι συνεχής, θα γίνει διαδοχικά για τις περιπτώσεις, όπου ο τόπος D είναι 1) τρίγωνο, 2) πολύγωνο, 3) απλή κλειστή καμπύλη και 4) τόπος πολλαπλής συνοχής.

- 1) **Τρίγωνο:** Θεωρούμε το τρίγωνο $AB\Gamma$, που θα το συμβολίζουμε για συντομία με Δ . Ενώνουμε τα μέσα E, Z, H των πλευρών AB , $A\Gamma$ και $B\Gamma$, σχηματίζοντας έτσι τα τέσσερα τρίγωνα $\Delta_I, \Delta_{II}, \Delta_{III}, \Delta_{IV}$ Σχ. 2. Υποθέτουμε επίσης ότι η $f(z)$ είναι αναλυτική στο εσωτερικό και πάνω στις πλευρές του $AB\Gamma$. Έτσι έχουμε:



Σχ. 2

$$\begin{aligned} \oint_{\Delta} f(z) dz &= \left\{ \int_{ZAE} + \int_{EBH} + \int_{HGZ} \right\} = \\ &= \left\{ \int_{ZAE} + \int_{EZ} \right\} + \left\{ \int_{EBH} + \int_{HE} \right\} + \left\{ \int_{HGZ} + \int_{ZH} \right\} + \left\{ \int_{ZE} + \int_{EH} + \int_{HZ} \right\} = \\ &= \int_{ZAEZ} + \int_{EBHE} + \int_{HGZH} + \int_{ZEH\Delta} = \\ &= \oint_{\Delta_I} f(z) dz + \oint_{\Delta_{II}} f(z) dz + \oint_{\Delta_{III}} f(z) dz + \oint_{\Delta_{IV}} f(z) dz \end{aligned}$$

Επειδή $\int_{EZ} = -\int_{ZE}$, $\int_{HE} = -\int_{EH}$, $\int_{ZH} = -\int_{HZ}$

$$\text{Επομένως: } \left| \oint_{\Delta} f(z) dz \right| \leq \left| \oint_{\Delta_I} f(z) dz \right| + \left| \oint_{\Delta_{II}} f(z) dz \right| + \left| \oint_{\Delta_{III}} f(z) dz \right| + \left| \oint_{\Delta_{IV}} f(z) dz \right| \quad (4.7)$$

Εάν Δ_I είναι εκείνο από τα τέσσερα τρίγωνα $\Delta_I, \Delta_{II}, \Delta_{III}, \Delta_{IV}$ που δίνει τον μεγαλύτερο όρο στο δεξιό μέλος της (4.7), τότε θα είναι:

$$\left| \oint_{\Delta} f(z) dz \right| \leq 4 \left| \oint_{\Delta_I} f(z) dz \right| \quad (4.8)$$

Συνδέοντας τα μέσα των πλευρών του τριγώνου Δ_I βρίσκουμε, με όμοιο τρόπο, ένα τρίγωνο Δ , τέτοιο ώστε:

$$\left| \oint_{\Delta_I} f(z) dz \right| \leq 4 \left| \oint_{\Delta_2} f(z) dz \right| \quad (4.9)$$

$$\text{και επομένως } \left| \oint_{\Delta} f(z) dz \right| \leq 4^2 \left| \oint_{\Delta_2} f(z) dz \right| \quad (4.10)$$

Στο n -οστό βήμα έχουμε ένα τρίγωνο Δ_n τέτοιο ώστε

$$\left| \oint_{\Delta} f(z) dz \right| \leq 4^n \left| \oint_{\Delta_n} f(z) dz \right| \quad (4.11)$$

Τα τρίγωνα $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n, \dots$ αποτελούν μια ακολουθία από δικτυωμένα τρίγωνα, (το καθένα περιέχεται στο προηγούμενο), και κατά συνέπεια υπάρχει ένα σημείο z_0 , που ανήκει σε κάθε τρίγωνο της ακολουθίας. Το σημείο z_0 θα βρίσκεται στο εσωτερικό του αρχικού τριγώνου Δ ή στο σύνορο του, όπου η $f(z)$ είναι αναλυτική.

Τότε θα έχουμε:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \eta(z - z_0) \quad (4.12)$$

με $\eta \rightarrow 0$ όταν $z \rightarrow z_0$ ⁽⁷⁾ δηλαδή το η μπορεί να γίνει οσοδήποτε μικρό, αρκεί να διαλέξουμε το z αρκετά κοντά στο z_0 ή αλλιώς:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)[|z - z_0| < \delta \rightarrow |\eta| < \varepsilon] \quad (4.13)$$

Εάν ολοκληρώσουμε την (4.12) στο σύνορο του τριγώνου Δ_n παίρνουμε

$$\oint_{\Delta_n} f(z) dz = f(z_0) \oint_{\Delta_n} dz + f'(z_0) \oint_{\Delta_n} (z - z_0) dz + \oint_{\Delta_n} \eta(z - z_0) dz \quad (4.14)$$

⁽⁷⁾ Έστω ότι $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) + \eta$, τότε $f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \eta(z - z_0)$ και επειδή η $f(z)$ είναι

αναλυτική στο z_0 έχουμε: $\lim_{z \rightarrow z_0} \eta = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right] = f'(z_0) - f'(z_0) = 0$

επειδή όμως οι συναρτήσεις 1 και $z-z_0$ είναι αναλυτικές με συνεχείς παραγώγους, θα έχουμε: $\oint_{\Delta_n} dz = 0$ και $\oint_{\Delta_n} (z-z_0)dz = 0$

Έτσι η (4.14) γράφεται:

$$\oint_{\Delta_n} f(z)dz = \oint_{\Delta_n} \eta(z-z_0)dz$$

Εάν τώρα P είναι η περίμετρος του τριγώνου Δ , τότε η περίμετρος του Δ_n είναι $P_n = P/2^n$. Εάν z είναι ένα οποιοδήποτε σημείο του Δ_n , θα έχουμε:

$$|z-z_0| < P/2^n < \delta$$

Άρα από την (4.15) έχουμε:

$$\left| \oint_{\Delta_n} f(z)dz \right| = \left| \oint_{\Delta_n} \eta(z-z_0)dz \right| \leq \varepsilon \frac{P}{2^n} \frac{P}{2^n} = \varepsilon \frac{P^2}{4^n}$$

και η (4.11) γίνεται:

$$\left| \oint_{\Delta} f(z)dz \right| \leq 4^n \varepsilon \frac{P^2}{4^n} = \varepsilon P^2$$

και επειδή το ε μπορεί να γίνει οσοδήποτε μικρό, θα έχουμε τελικά ότι:

$$\oint_{\Delta} f(z)dz = 0$$

2) Πολύγωνο: Θεωρούμε το κλειστό πολύγωνο $AB\Gamma\Delta EA$ Σχ.3 και δεχόμαστε ότι η συνάρτηση $f(z)$ είναι αναλυτική στο εσωτερικό και στο σύνορο του. Χωρίζουμε το πολύγωνο σε τρίγωνα, φέρνοντας τα ευθύγραμμα τμήματα $A\Gamma$ και $A\Delta$. Από την προηγούμενη απόδειξη του θεωρήματος Cauchy-Goursat για τρίγωνα, έχουμε:

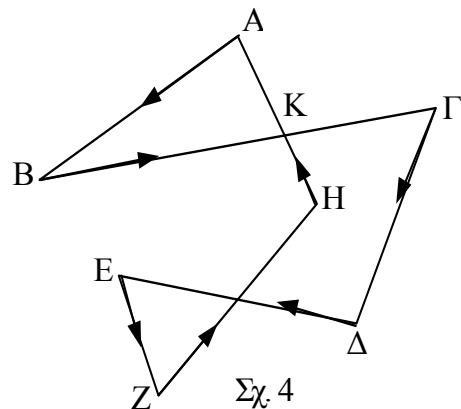
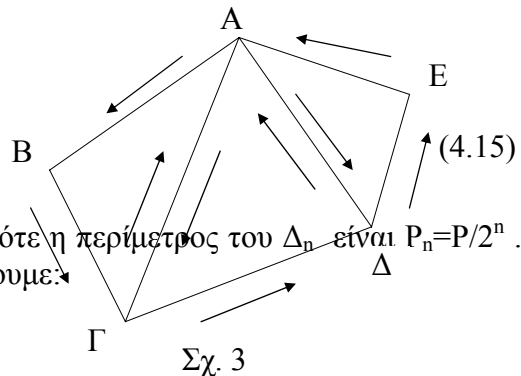
$$\oint_{AB\Gamma\Delta EA} f(z)dz = \oint_{AB\Gamma A} f(z)dz + \oint_{\Gamma\Delta A\Gamma} f(z)dz + \oint_{\Delta EA\Delta} f(z)dz = 0$$

Στην περίπτωση που το πολύγωνο τέμνει τον εαυτό του εργαζόμαστε με παρόμοιο τρόπο. Π.χ. για το πολύγωνο $AB\Gamma\Delta EZHA$ του Σχ.4, εργαζόμαστε ως εξής: Με K και Λ συμβολίζουμε τις τομές των πλευρών $B\Gamma$, AH και ΔE , ZH αντίστοιχα. Τότε το αντίστοιχο κλειστό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα γράφεται:

$$\oint_{AB\Gamma\Delta EZHA} f(z)dz = \oint_{ABK} f(z)dz + \oint_{K\Gamma\Lambda} f(z)dz + \oint_{\Lambda EZA} f(z)dz + \oint_{\Lambda HK} f(z)dz + \oint_{KA} f(z)dz$$

αλλά $\int_{ABK} f(z)dz + \int_{KA} f(z)dz + \int_{ABKA} f(z)dz = 0$

$$\int_{K\Gamma\Lambda} f(z)dz + \int_{\Lambda HK} f(z)dz + \int_{K\Gamma\Delta\Lambda HK} f(z)dz = 0$$

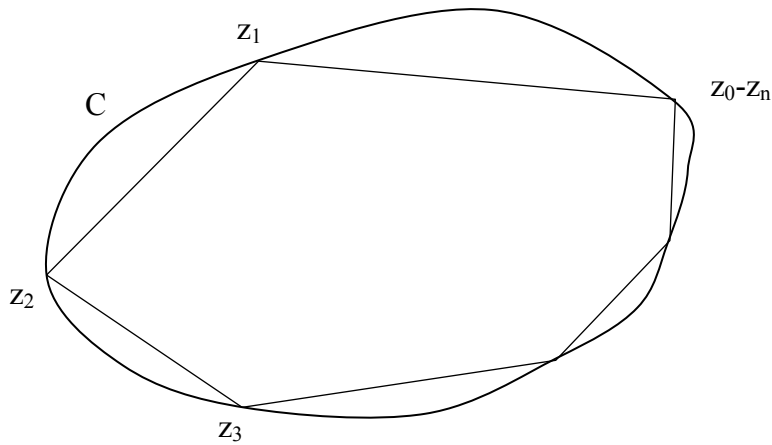


και τέλος $\oint_{\Delta\epsilon\zeta\lambda} f(z)dz = 0$

Τελικά θα έχουμε: $\oint_{\text{ΑΒΓΔΕΖΗΑ}} f(z)dz = 0$

3) Απλή κλειστή καμπύλη. Έστω ότι η $f(z)$ είναι αναλυτική σ' ένα τόπο D , στον οποίο περιέχεται η απλή κλειστή καμπύλη C . Παίρνουμε n σημεία z_0, z_1, \dots, z_n της καμπύλης, θέτουμε $z_n = z_0$ και κατασκευάζουμε το πολύγωνο P με κορυφές τα σημεία αυτά, Σχ. 5. Από τον ορισμό του επικαμπυλίου ολοκληρώματος έχουμε ότι:

$$\int_C f(z)dz = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \tag{4.16}$$



Σχ. 5

όπου $S_n = f(z_1)(z_1 - z_0) + f(z_2)(z_2 - z_1) + \dots + f(z_n)(z_n - z_{n-1}) = \sum_{k=1}^n f(z_k) \Delta z_k$ (4.17)

και το n τείνει στο άπειρο έτσι ώστε $\max_{n \rightarrow \infty} |\Delta z_k| \rightarrow 0$. Από τον ορισμό του ορίου η (4.15) γράφεται: $(\forall \epsilon > 0)(\exists N_0 \in \mathbb{N}) [n > N_0 \rightarrow \left| \oint_C f(z)dz - S_n \right| < \frac{\epsilon}{2}]$ (4.18)

Θεωρούμε τώρα το ολοκλήρωμα πάνω στην περίμετρο του πολύγωνου P . Έχουμε:

$$\begin{aligned} \oint_P f(z)dz &= 0 = \int_{z_0}^{z_1} f(z)dz + \int_{z_1}^{z_2} f(z)dz + \dots + \int_{z_{n-1}}^{z_n} f(z)dz = \\ &= \int_{z_0}^{z_1} [f(z) - f(z_1) + f(z_1)]dz + \dots + \int_{z_{n-1}}^{z_n} [f(z) - f(z_n) + f(z_n)]dz = \\ &= \int_{z_0}^{z_1} [f(z) - f(z_1)]dz + \dots + \int_{z_{n-1}}^{z_n} [f(z) - f(z_n)]dz + \int_{z_0}^{z_1} f(z_1)dz + \dots + \int_{z_{n-1}}^{z_n} f(z_n)dz = \\ &= \int_{z_0}^{z_1} [f(z) - f(z_1)]dz + \dots + \int_{z_{n-1}}^{z_n} [f(z) - f(z_n)]dz + S_n \end{aligned}$$

$$\text{και άρα } S_n = \int_{z_0}^{z_1} [f(z_1) - f(z)] dz + \dots + \int_{z_{n-1}}^{z_n} [f(z_n) - f(z)] dz \quad (4.19)$$

Παίρνουμε τώρα το n να είναι τόσο μεγάλο ώστε σε κάθε πλευρά του πολυγώνου, οι οποίες ορίζονται από τα σημεία z_0 και z_1 , z_1 και z_2 , ..., z_{n-1} και z_n να έχουμε αντίστοιχα:

$$|f(z_1) - f(z)| < \varepsilon/2L, |f(z_2) - f(z)| < \varepsilon/2L, \dots, |f(z_n) - f(z_{n-1})| < \varepsilon/2L \quad (4.20)$$

όπου L το μήκος της καμπύλης.

Από τις σχέσεις (4.18) και (4.19) προκύπτει:

$$\begin{aligned} |S_n| &= \left| \int_{z_0}^{z_1} [f(z_1) - f(z)] dz + \dots + \int_{z_{n-1}}^{z_n} [f(z_n) - f(z)] dz + \dots \right| = \\ &= \frac{\varepsilon}{2L} \{ |z_1 - z_0| + |z_2 - z_1| + \dots + |z_n - z_{n-1}| \} < \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Από τις (4.18) και (4.21) έχουμε:

$$\left| \oint_C f(z) dz \right| = \left| \oint_C f(z) dz - S_n + S_n \right| \leq \left| \oint_C f(z) dz - S_n \right| + |S_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Επειδή το ε μπορεί να γίνει οσοδήποτε μικρό, τελικά έχουμε:

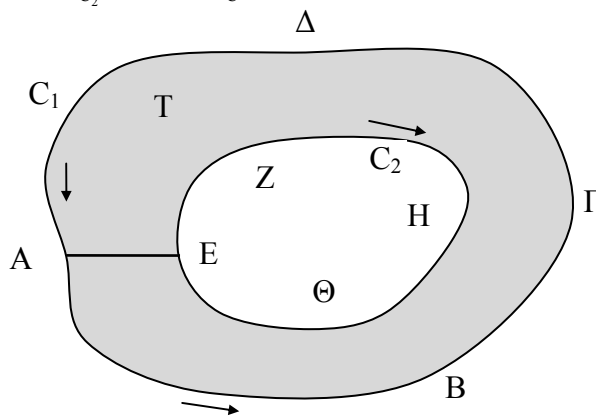
$$\oint_C f(z) dz = 0$$

4) Τόπος πολλαπλής συνοχής. Ας θεωρήσουμε τις απλές κλειστές καμπύλες C_1 και C_2 που ορίζουν ένα τόπο πολλαπλής συνοχής T , Σχ. 6. Φέρνουμε τη τομή AE και παρατηρούμε ότι ο τόπος που ορίζεται από την καμπύλη $AB\Gamma\Delta E Z H \Theta E A$ είναι τόπος απλής συνοχής. Βάσει των προηγούμενων θα είναι:

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_{AB\Gamma\Delta E Z H \Theta E A} f(z) dz = \oint_{AB\Gamma\Delta} f(z) dz + \int_{AE} f(z) dz + \oint_{E Z H \Theta E} f(z) dz + \int_{EA} f(z) dz = \\ &= \oint_{AB\Gamma\Delta} f(z) dz + \oint_{E Z H \Theta E} f(z) dz = \oint_{C_1} f(z) dz + \oint_{C_2} f(z) dz = \oint_C f(z) dz \end{aligned}$$

άρα $\oint_C f(z) dz = 0$

όπου C το σύνορο της περιοχής D που ορίζεται από τις καμπύλες C_1 και C_2 με την φορά διαγραφής που σημειώνεται στο σχήμα και που είναι τέτοια ώστε ένας παρατηρητής, που κινείται κατά μήκος του συνόρου, να έχει τον τόπο D πάντοτε στα αριστερά του.



Σχ. 6

4.5 Εφαρμογή του θεωρήματος του Cauchy για τον υπολογισμό πραγματικών ολοκληρωμάτων

Στις πρώτες του εργασίες ο Cauchy χρησιμοποίησε το θεώρημα του για τον υπολογισμό γενικευμένων ολοκληρωμάτων πραγματικών συναρτήσεων. Παραθέτουμε τρία παραδείγματα:

1. Τα ολοκληρώματα του Fresnel: $\int_0^\infty \cos(x^2)dx$ και $\int_0^\infty \sin(x^2)dx$

Για να υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα αυτά, τα οποία χρησιμοποιούνται στη διάθλαση του φωτός, θεωρούμε μια βοηθητική μιγαδική συνάρτηση

$$F(z)=\exp(iz^2)$$

Η συνάρτηση αυτή μπορεί να θεωρηθεί σαν μια σύνθετη συνάρτηση:

$$F(z)=\varphi(f(z)) \text{ με } f(z)=iz^2 \text{ και } \varphi(\zeta)=\exp(\zeta)$$

της οποίας η παράγωγος είναι:

$$dF(z)/dz=2iz\exp(iz^2)$$

που ορίζεται σ' όλο το μιγαδικό επίπεδο. Επομένως η $F(z)$ είναι αναλυτική και το θεώρημα του Cauchy μπορεί να εφαρμοσθεί.

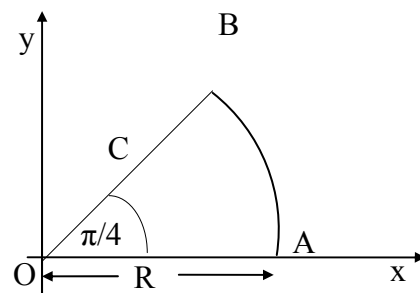
Θεωρούμε τώρα την καμπύλη C , που αποτελείται από το ευθύγραμμο τμήμα OA του θετικού πραγματικού άξονα μήκους R , το τόξο AB του κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων O και ακτίνα R και το τμήμα BO της διχοτόμου του πρώτου τεταρτημορίου Σχ. 7. Από το θεώρημα του Cauchy έχουμε:

$$\oint_C e^{iz^2} dz = \int_{OA} e^{iz^2} dz + \int_{AB} e^{iz^2} dz + \int_{BO} e^{iz^2} dz = 0$$

Στο ευθύγραμμο τμήμα OA , το z είναι πραγματικό και το αντίστοιχο ολοκλήρωμα γράφεται:

$$\begin{aligned} I_1(R) &= \int_{OA} e^{iz^2} dz = \int_0^R e^{ix^2} dx = \\ &= \int_0^R \cos(x^2) dx + i \int_0^R \sin(x^2) dx \end{aligned} \quad (4.22)$$

Στο τόξο AB έχουμε $z=R[\cos\varphi+i\sin\varphi]$ με $0 \leq \varphi \leq \pi/4$ και $dz=R[-\sin\varphi+i\cos\varphi]d\varphi$. Επομένως το αντίστοιχο ολοκλήρωμα γράφεται:



$$\begin{aligned} I_2(R) &= \int_{AB} e^{iz^2} dz = \int_0^{\pi/4} \exp[iR^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)] R(-\sin \varphi + i\cos \varphi) d\varphi = \\ &= \int_0^{\pi/4} \exp[iR^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)] iR(\cos \varphi + i\sin \varphi) d\varphi \end{aligned} \quad (4.24)$$

Στο ευθύγραμμο τμήμα BO έχουμε $z=p[\cos(\pi/4)+i\sin(\pi/4)]$ και

$$dz = \left[\cos \frac{\pi}{4} + i\sin \frac{\pi}{4} \right] dp \text{ με } R \geq p \geq 0. \text{ Επομένως το αντίστοιχο ολοκλήρωμα γράφεται:}$$

$$\begin{aligned}
I_3(R) &= \int_{\text{BO}} e^{iz^2} dz = \int_R^0 \exp \left[ip^2 \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)^2 \right] \left[\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right] dp = \\
&= \int_R^0 \exp \left[ip^2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) \right] \left[\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right] dp = \\
&= \int_R^0 e^{-p^2} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right] dp = -\frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) \int_0^R e^{-p^2} dp \tag{4.25}
\end{aligned}$$

όταν το $R \rightarrow \infty$ το ολοκλήρωμα $I_3(R)$ τείνει στο όριο:

$$I_3(R)_{R \rightarrow \infty} = -\frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) \int_0^\infty e^{-p^2} dp = -\frac{\sqrt{2}}{2} (1+i) \frac{\sqrt{\pi}}{2} = -\frac{\sqrt{2\pi}}{4} (1+i)$$

επειδή, ως γνωστό, είναι $\int_0^\infty e^{-p^2} dp = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Για το ολοκλήρωμα $I_2(R)$ έχουμε:

$$|I_2(R)| \leq R \int_0^{\pi/4} \left| \exp \left[iR^2 (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi) \right] \right| |\cos \varphi + i \sin \varphi| d\varphi$$

αλλά $\left| \exp \left[iR^2 (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi) \right] \right| = \left| \exp \left[iR^2 \cos 2\varphi - R^2 \sin 2\varphi \right] \right| = e^{-R^2 \sin 2\varphi}$

και $|\cos \varphi + i \sin \varphi| = 1$. Επομένως

$$|I_2(R)| \leq R \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 \sin 2\varphi} d\varphi$$

επειδή όμως $\sin 2\varphi \geq \frac{2}{\pi} 2\varphi$ για $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ (ανισότητα του Jordan)⁽⁸⁾ έχουμε:

$$|I_2(R)| \leq R \int_0^{\pi/4} \exp \left[-R^2 \frac{4\varphi}{\pi} \right] d\varphi = R \frac{e^{-R^2 \frac{4\varphi}{\pi}}}{-R^2 \frac{4}{\pi}} \Bigg|_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4} \frac{1 - e^{-R^2}}{R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

Άρα $\lim_{R \rightarrow \infty} I_2(R) = 0$

Επειδή $I_1(R) + I_2(R) + I_3(R) = 0$ για κάθε R , βλέπουμε ότι: $I_1(R) = -I_2(R) - I_3(R)$ και

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_1(R) = -\lim_{R \rightarrow \infty} I_2(R) - \lim_{R \rightarrow \infty} I_3(R) = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} (1+i)$$

⁽⁸⁾ Η συνάρτηση $g(x) = \sin x/x$ είναι φθίνουσα στο διάστημα $(0, \pi/2)$, διότι $g'(x) = (x \cos x - \sin x)/x^2 = (\cos x - (x - \tan x))/x^2 < 0$ για $0 < x < \pi/2$. Επομένως $g(x) > g(\pi/2)$ δηλαδή $\sin x/x > 1/(\pi/2)$ ή $\sin x > 2x/\pi$

$$\text{Άρα} \quad \int_0^{\infty} \cos x^2 dx + i \int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}(1+i) \Rightarrow$$

$$\int_0^{\infty} \cos x^2 dx = \int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$$

2. Το ολοκλήρωμα: $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x^2} \cos(2\lambda \alpha x) dx \quad \lambda, \alpha > 0$

Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα αυτό χρησιμοποιούμε την βοηθητική μιγαδική συνάρτηση $f(z) = \exp[-\lambda z^2]$ την οποία θα ολοκληρώσουμε κατά μήκος της καμπύλης C , που είναι η περίμετρος του ορθογωνίου παραλληλόγραμμου $AB\Gamma\Delta$, Σχ. 8. Επειδή η συνάρτηση $f(z) = \exp[-\lambda z^2]$ είναι αναλυτική σ' όλο το μιγαδικό επίπεδο, μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα του Cauchy και θα έχουμε:

$$\oint_C e^{-\lambda z^2} dz = \int_{AB} e^{-\lambda z^2} dz + \int_{B\Gamma} e^{-\lambda z^2} dz +$$

$$+ \int_{\Gamma\Delta} e^{-\lambda z^2} dz + \int_{\Delta A} e^{-\lambda z^2} dz = 0$$

Στο ευθύγραμμο τμήμα AB έχουμε:

$$z=x \text{ με } -R \leq x \leq R \text{ και } dz=dx. \quad \text{Άρα}$$

$$I_1 = \int_{AB} e^{-\lambda z^2} dz = \int_{-R}^{+R} e^{-\lambda x^2} dx$$

Στο ευθύγραμμο τμήμα $B\Gamma$ έχουμε:

$$z=R+iy \text{ με } 0 \leq y \leq \alpha, \quad z^2=R^2-y^2+2iRy$$

και $dz=idy$. Άρα

$$I_2 = \int_{B\Gamma} e^{-\lambda z^2} dz = \int_0^{\alpha} e^{-\lambda[R^2-y^2+2iRy]} i dy = i \int_0^{\alpha} e^{-\lambda[R^2-y^2]} e^{-i2R\lambda y} dy = i$$

Στο ευθύγραμμο τμήμα $\Gamma\Delta$ έχουμε:

$$z=x+i\alpha \text{ με } R \geq x \geq -R, \quad z^2=x^2-\alpha^2+i2\alpha x \text{ και } dz=dx. \quad \text{Άρα}$$

$$I_3 = \int_{\Gamma\Delta} e^{-\lambda z^2} dz = \int_R^{-R} e^{-\lambda[x^2-\alpha^2+i2\alpha x]} dx = e^{\lambda\alpha^2} \int_R^{-R} e^{-\lambda x^2 - i2\alpha\lambda x} dx =$$

$$= e^{\lambda\alpha^2} \int_R^{-R} e^{-\lambda x^2} [\cos(2\lambda\alpha x) - i \sin(2\lambda\alpha x)] dx$$

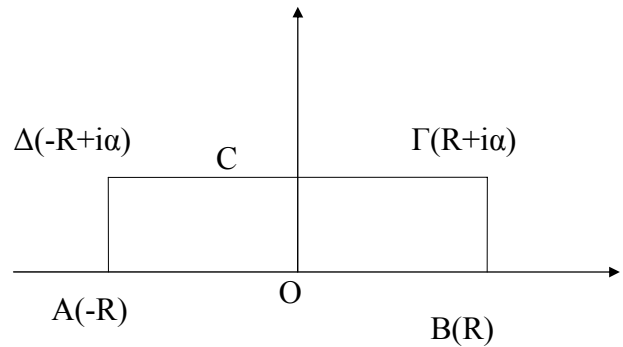
Τελικά στο ευθύγραμμο τμήμα ΔA έχουμε:

$$z=-R+iy \text{ με } \alpha \geq y \geq 0, \quad z^2=R^2-y^2-i2Ry \text{ και } dz=idy. \quad \text{Άρα}$$

$$I_4 = \int_{\Delta A} e^{-\lambda z^2} dz = \int_{\alpha}^0 e^{-\lambda[R^2-y^2-i2Ry]} i dy = -i \int_0^{\alpha} e^{-\lambda[R^2-y^2]} e^{i2R\lambda y} dy$$

Αφήνοντας το R να τείνει στο άπειρο, τα ολοκληρώματα I_2 και I_4 τείνουν στο μηδέν. Πράγματι:

$$|I_2| \leq \int_0^{\alpha} e^{-\lambda[R^2-y^2]} |e^{i2R\lambda y}| dy = \int_0^{\alpha} e^{-\lambda[R^2-y^2]} dy$$



Σχ. 8

Για $R > \alpha$ βρίσκουμε ότι:

$$|I_2| \leq \int_0^\alpha e^{-\lambda[R^2-y^2]} dy = \alpha e^{-\lambda[R^2-\alpha^2]} \rightarrow 0 \quad (\text{για } R \rightarrow \infty)$$

Επίσης: $|I_4| = \int_0^\alpha e^{-\lambda[R^2-y^2]} |e^{i2R\lambda y}| dy = \int_0^\alpha e^{-\lambda[R^2-y^2]} dy \rightarrow 0 \quad (\text{για } R \rightarrow \infty)$

Για $R \rightarrow \infty$ το ολοκλήρωμα I_1 τείνει στο ολοκλήρωμα:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\sqrt{\lambda}x)^2} d(\sqrt{\lambda}x) = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$$

Τελικά από τη σχέση $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0$ προκύπτει:

$$\begin{aligned} e^{\lambda\alpha^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x^2} [\cos(2\lambda\alpha x) - i \sin(2\lambda\alpha x)] dx = \\ = -\lim_{R \rightarrow \infty} I_3 = \lim_{R \rightarrow \infty} I_1 + \lim_{R \rightarrow \infty} I_2 + \lim_{R \rightarrow \infty} I_4 = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \end{aligned}$$

και συγκρίνοντας τα πραγματικά μέρη έχουμε τελικά:

$$\begin{aligned} e^{\lambda\alpha^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x^2} \cos(2\lambda\alpha x) dx = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \rightarrow \\ \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x^2} \cos(2\lambda\alpha x) dx = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} e^{-\lambda\alpha^2} \quad \text{και} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x^2} \sin(2\lambda\alpha x) dx = 0 \end{aligned}$$

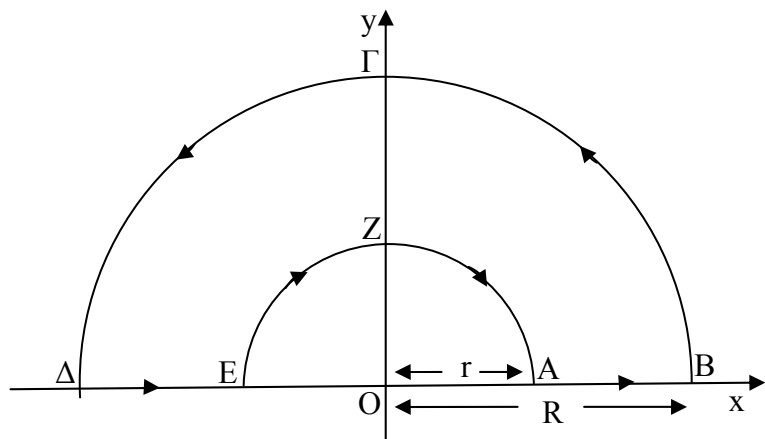
3) **Το ολοκλήρωμα** $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$. Χρησιμοποιούμε την βοηθητική συνάρτηση $f(z) = e^{iz}/z$,

η οποία είναι αναλυτική σ' όλο το μιγαδικό επίπεδο εκτός από την αρχή των αξόνων. Γι' αυτό σαν καμπύλη ολοκλήρωσης παίρνουμε την καμπύλη C , όπως δείχνει το Σχ. 9. Στην περιοχή, που ορίζει η κλειστή καμπύλη C , η συνάρτηση $f(z)$ είναι αναλυτική και επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα του Cauchy. Έτσι έχουμε:

$$\oint_C \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{AB} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{B\Gamma\Delta} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\Delta E} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{EZA} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

Στο ευθύγραμμο τμήμα AB έχουμε $z=x$ με $r \leq x \leq R$ και $dz=dx$. Άρα.

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{AB} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_r^R \frac{e^{ix}}{x} dx = \\ &= \int_r^R \frac{\cos x}{x} dx + i \int_r^R \frac{\sin x}{x} dx \end{aligned}$$



Σχ. 9

Στην ημιπεριφέρεια ΒΓΔ έχουμε $z=R[\cos\varphi+i\sin\varphi]$ με $0\leq\varphi\leq\pi$ και
 $dz=R[\sin\varphi+i\cos\varphi]d\varphi=$
 $=iR[\cos\varphi+i\sin\varphi]d\varphi$

$$\text{Άρα } I_2 = \int_{\text{ΒΓΔ}} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_0^\pi \frac{e^{iR(\cos\varphi+i\sin\varphi)}; iR(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{R(\cos\varphi+i\sin\varphi)} d\varphi = i \int_0^\pi e^{iR\cos\varphi-R\sin\varphi} d\varphi$$

Στο ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ έχουμε $z=x$ με $-R\leq x\leq-r$ και $dz=dx$.

$$\text{Άρα } I_3 = \int_{\Delta\text{Ε}} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{-R}^{-r} \frac{e^{ix}}{x} dx = \int_{-R}^{-r} \frac{\cos x}{x} dx + i \int_{-R}^{-r} \frac{\sin x}{x} dx$$

Αλλάζοντας την μεταβλητή από x σε $-x$ βρίσκουμε:

$$I_3 = -\int_r^R \frac{\cos x}{x} dx + i \int_r^R \frac{\sin x}{x} dx$$

διότι $-R\leq x\leq-r \Rightarrow R\geq -x\geq r$ και $d(-x)=-dx$. Άρα

$$\int_{-R}^{-r} \frac{\cos x}{x} dx = \int_R^r \frac{\cos(-x)}{-x} d(-x) = \int_R^r \frac{\cos x}{x} dx = -\int_r^R \frac{\cos x}{x} dx$$

$$\text{και } i \int_{-R}^{-r} \frac{\sin x}{x} dx = i \int_R^r \frac{\sin(-x)}{-x} d(-x) = -i \int_R^r \frac{\sin x}{x} dx = i \int_r^R \frac{\sin x}{x} dx$$

Στην ημιπεριφέρεια ΕΖΑ έχουμε $z=re^{i\varphi}$ με $\pi\geq\varphi\geq0$ και $dz=ire^{i\varphi}d\varphi$. Άρα

$$I_4 = \int_{\text{ΕΖΑ}} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_\pi^0 \frac{e^{ire^{i\varphi}}}{re^{i\varphi}} ire^{i\varphi} d\varphi = i \int_\pi^0 e^{ire^{i\varphi}} d\varphi$$

και παίρνοντας το όριο όταν το $r\rightarrow0$ έχουμε: $\lim_{r\rightarrow0} I_4 = i \int_\pi^0 d\varphi = -i\pi$

Τώρα για $R\rightarrow\infty$ το ολοκλήρωμα $I_2\rightarrow0$. Πράγματι

$$|I_2| = \left| \int_0^\pi e^{iR\cos\varphi-R\sin\varphi} d\varphi \right| \leq \int_0^\pi e^{-R\sin\varphi} d\varphi = 2 \int_0^{\pi/2} e^{-R\sin\varphi} d\varphi <$$

$$< 2 \int_0^{\pi/2} e^{-R\frac{2}{\pi}\varphi} d\varphi = \pi \frac{1-e^{-R}}{R} < \frac{\pi}{R} \xrightarrow{R\rightarrow\infty} 0$$

Τελικά από τη σχέση $I_1+I_2+I_3+I_4=0$ έχουμε $I_1+I_3=-I_2-I_4 \Rightarrow 2i \int_r^R \frac{\sin x}{x} dx = -I_2 - I_4$

παίρνοντας τα όρια $R\rightarrow\infty$ και $r\rightarrow0$ βρίσκουμε:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \lim_{R \rightarrow \infty} 2i \int_r^R \frac{\sin x}{x} dx = \pi i \rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

4.6 Το θεώρημα του Morera .

Το θεώρημα αυτό είναι το αντίστροφο του θεωρήματος του Cauchy και διατυπώνεται ως εξής:

"Εάν η $f(z)$ είναι συνεχής σ' ένα τόπο D απλής συνοχής και $\oint_C f(z) dz = 0$ για κάθε κλειστή καμπύλη C του τόπου D , τότε η $f(z)$ είναι αναλυτική στο τόπο D ."

Απόδειξη Η απόδειξη είναι πολύ απλή εάν κάνουμε την παραδοχή ότι η $f(z) = u + iv$ έχει συνεχείς τις μερικές παραγώγους και εφαρμόσουμε το θεώρημα του Green. Πράγματι:

$$0 = \oint_C f(z) dz = \oint_C (u + iv)(dx + idy) = \oint_C (udx - vdy) + i \oint_C (vdx + udy) \quad (4.26)$$

Εάν R είναι η περιοχή, που ορίζει η κλειστή καμπύλη C , τότε το θεώρημα του Green για την (4.26) δίνει:

$$\oint_C (udx - vdy) + i \oint_C (vdx + udy) = \iint_R \left[-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right] dx dy + i \iint_R \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right] dx dy = 0 \quad (4.27)$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{και} \quad \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

δηλαδή οι συνθήκες Cauchy-Riemann. Επομένως η $f(z)$ είναι αναλυτική.

Η απόδειξη του θεωρήματος του Morera χωρίς την παραδοχή ότι η $f(z)$ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους, θα διατυπωθεί στο επόμενο κεφαλαίο, (παράγραφος 5.2).

4.7 Αόριστα ολοκληρώματα

Εάν μεταξύ δυο αναλυτικών συναρτήσεων $f(z)$ και $F(z)$ ισχύει $F'(z) = f(z)$, τότε η $F(z)$ λέγεται αόριστο ολοκλήρωμα ή παράγουσα της $f(z)$ και συμβολίζεται με:

$$F(z) = \int f(z) dz$$

Επειδή η παράγωγος μιας σταθερής συνάρτησης είναι μηδέν, έπεται ότι το αόριστο ολοκλήρωμα δεν είναι μόνο μια συνάρτηση, αλλά μια οικογένεια συναρτήσεων, οι οποίες διαφέρουν κατά μια σταθερά.

Παρατήρηση: Ισχύουν και για τις μιγαδικές συναρτήσεις οι τύποι των αόριστων ολοκληρωμάτων των πραγματικών συναρτήσεων.

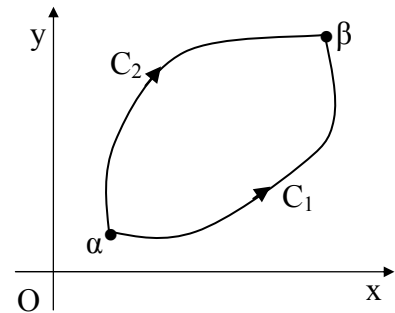
4.8 Συνέπειες του θεωρήματος του Cauchy

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με ορισμένα θεωρήματα, που απορρέουν από το θεώρημα του Cauchy και τα οποία βασικά στηρίζονται στο γεγονός ότι η $f(z)$ είναι αναλυτική.

Θεώρημα 1: Έστω α και β δυο σημεία του μιγαδικού επιπέδου και $f(z)$ μια αναλυτική συνάρτηση. Τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_C f(z)dz$ κατά μήκος της καμπύλης C , που ενώνει τα σημεία α και β , είναι ανεξάρτητο από την μορφή της καμπύλης C και εξαρτάται μόνο από τα σημεία α και β . Έτσι μπορούμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα να το γράφουμε ως εξής:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(z)dz$$

Απόδειξη: Έστω C_1 και C_2 δυο τυχαίες καμπύλες, που ενώνουν τα σημεία α και β και που έχουν φορά διαγραφής από το σημείο α στο σημείο β . Θεωρούμε τώρα την κλειστή καμπύλη $C=C_2-C_1$, (με $-C_1$ συμβολίζουμε την καμπύλη C_1 με φορά διαγραφής αντίθετη της προηγούμενης, Σχ. 10). Από το θεώρημα του Cauchy έχουμε:



Σχ. 10

$$\oint_C f(z)dz = 0 \quad (4.28)$$

$$\text{αλλά} \quad \oint_C f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz + \int_{-C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz - \int_{C_1} f(z)dz \quad (4.29)$$

Από τις σχέσεις (4.28) και (4.29) προκύπτει:

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_{C_2} f(z)dz$$

Ας θεωρήσουμε τώρα ότι το άνω όριο β μεταβάλλεται, με την προϋπόθεση ότι παραμένει στην περιοχή D , στην οποία η $f(z)$ είναι αναλυτική. Εάν το άνω αυτό όριο β το συμβολίσουμε με z , τότε ισχύει το εξής θεώρημα:

Θεώρημα 2: Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^z f(\zeta)d\zeta$ είναι μια συνάρτηση του z , έστω η

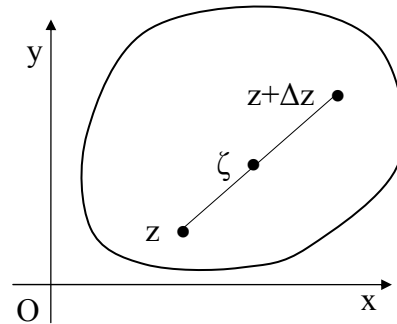
$$F(z), \text{ για την οποία ισχύει: } F'(z) = f(z) \quad (4.30)$$

δηλαδή η $F(z)$ είναι μια παράγουσα ή ένα αόριστο ολοκλήρωμα της $f(z)$.

Απόδειξη: Έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) &= \frac{1}{\Delta z} \left\{ \int_{\alpha}^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta - \int_{\alpha}^z f(\zeta)d\zeta \right\} - f(z) = \\ &= \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} f(\zeta)d\zeta - \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} f(z)d\zeta = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} [f(\zeta) - f(z)]d\zeta \end{aligned}$$

Από το θεώρημα του Cauchy το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητο της καμπύλης, που ενώνει τα σημεία z και $z+\Delta z$. Μπορούμε λοιπόν να διαλέξουμε σαν καμπύλη ολοκλήρωσης το ευθ. τμήμα, που ενώνει τα σημεία z και $z+\Delta z$ του οποίου το μήκος είναι $|\Delta z|$, Σχ. 11. Από την συνέχεια της $f(z)$, προκύπτει ότι το μέτρο της διαφοράς $|f(\zeta)-f(z)|$ μπορεί να γίνει οσοδήποτε μικρό, αρκεί το ζ να είναι αρκετά κοντά στο z , δηλ ισχύει:



Σχ. 11

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)[0 \leq |z - \zeta| < \delta \rightarrow |f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon] \quad (4.31)$$

και η (4.31) ισχύει ακόμα καλύτερα αν πάρουμε $|\Delta z| < \delta$. Τελικά θα έχουμε:

$$\left| \int_z^{z+\Delta z} [f(\zeta) - f(z)] d\zeta \right| < \varepsilon |\Delta z| \quad (\text{Ανισότητα του Darboux})$$

Επομένως
$$\left| \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| = \frac{1}{|\Delta z|} \left| \int_z^{z+\Delta z} [f(\zeta) - f(z)] d\zeta \right| < \varepsilon \quad \text{για } |\Delta z| < \delta, \text{ δηλαδή}$$

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(z + \Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z) \quad \Rightarrow \quad F'(z) = f(z)$$

Θεώρημα 3: Εάν α και β δυο οποιαδήποτε σημεία της περιοχής D , στην οποία η $f(z)$ είναι αναλυτική, τότε η τιμή του επικαμπύλιου ολοκληρώματος

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(z) dz$$

δίνεται από τη διάφορα $F(\beta) - F(\alpha)$, όπου $F(z)$ μια οποιαδήποτε παράγουσα της $f(z)$, δηλαδή θα έχουμε:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(z) dz = F(\beta) - F(\alpha) \quad (4.32)$$

Απόδειξη: Είδαμε προηγουμένως ότι το ολοκλήρωμα $\Phi(z) = \int_{\alpha}^z f(\zeta) d\zeta$ είναι μια παράγουσα της $f(z)$. Έστω $F(z)$ μια άλλη παράγουσα, τότε θα έχουμε:

$$F(z) = \Phi(z) + k$$

όπου k μια μιγαδική σταθερά. Εάν στη τελευταία σχέση θέσουμε $z = \alpha$ θα έχουμε:

$$F(\alpha) = \Phi(\alpha) + k = k \quad (4.33)$$

Άρα
$$F(z) = \Phi(z) + F(\alpha)$$

Θέτοντας τώρα στην (4.33) $z = \beta$ προκύπτει:

$$F(\beta) = \Phi(\beta) + F(\alpha) \Rightarrow \Phi(\beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(\zeta) d\zeta = F(\beta) - F(\alpha) \quad (4.34)$$

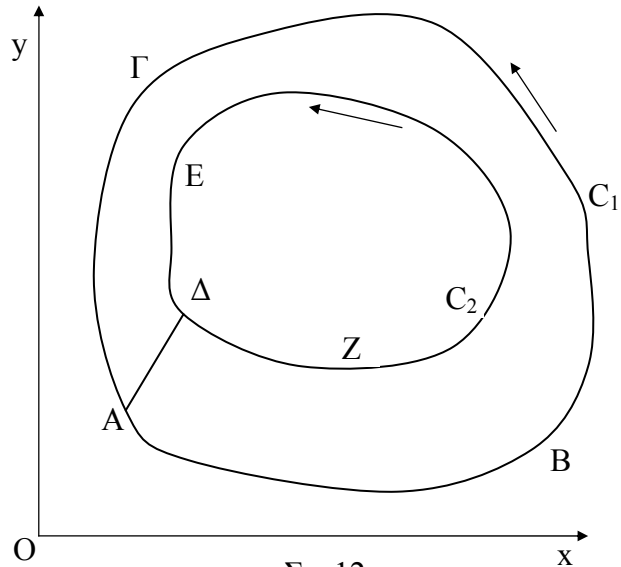
Θεώρημα 4. (Θεώρημα του Cauchy για τόπους πολλαπλής συνοχής).

Έστω ότι η $f(z)$ είναι αναλυτική στην περιοχή, που ορίζεται από τις κλειστές καμπύλες C_1 και C_2 , (και πάνω στις καμπύλες), όπου η C_2 βρίσκεται μέσα στην C_1 , Σχ. 12. Θεωρούμε επίσης ότι η C_1 και η C_2 διαγράφονται κατά την θετική φορά. Τότε ισχύει:

$$\oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_2} f(z)dz$$

Η πρακτική σημασία του θεωρήματος αυτού είναι ότι αν θέλουμε να ολοκληρώσουμε την $f(z)$ κατά μήκος της C_1 , τότε μπορούμε να αντικαταστήσουμε την C_1 με μια οποιαδήποτε άλλη καμπύλη C_2 αρκεί στον ενδιάμεσο τόπο μεταξύ της C_1 και C_2 η $f(z)$ να είναι αναλυτική.

Απόδειξη: Θεωρούμε την κλειστή καμπύλη $AB\Gamma A\Delta E Z\Delta A$ στο εσωτερικό της οποίας η $f(z)$ είναι αναλυτική. Από το θεώρημα του Cauchy έχουμε:



Σχ. 12

$$\oint_{AB\Gamma A\Delta E Z\Delta A} f(z)dz = \int_{AB\Gamma A} f(z)dz + \int_{A\Delta} f(z)dz + \int_{\Delta E Z\Delta} f(z)dz + \int_{\Delta A} f(z)dz = 0 \quad (4.35)$$

Επειδή όμως $\oint_{AB\Gamma A} f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz$

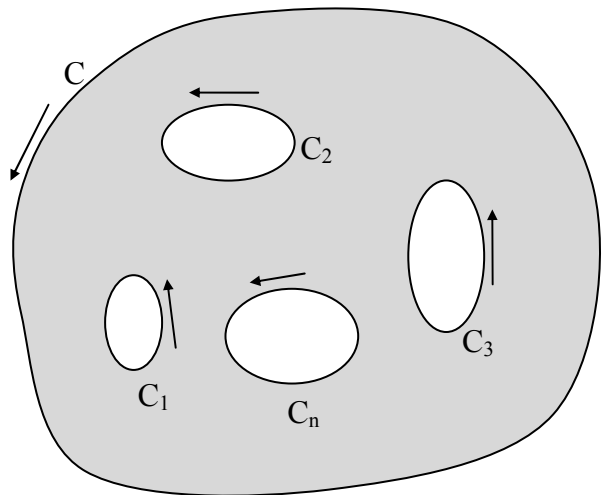
$$\oint_{\Delta E Z\Delta} f(z)dz = - \oint_{\Delta Z E\Delta} f(z)dz = - \oint_{C_2} f(z)dz$$

και

$$\int_{A\Delta} f(z)dz + \int_{\Delta A} f(z)dz = 0$$

από την (4.35) προκύπτει

$$\oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_2} f(z)dz$$



Σχ. 13

Το προηγούμενο θεώρημα μπορεί εύκολα να γενικευθεί στην περίπτωση που οι κλειστές καμπύλες C_1, C_2, \dots, C_n , οι οποίες δεν έχουν κοινά σημεία, βρίσκονται μέσα στην κλειστή καμπύλη C και η $f(z)$ είναι αναλυτική στον ενδιάμεσο τόπο και πάνω στις καμπύλες Σχ. 13. Τότε θα έχουμε:

$$\oint_C f(z)dz = \oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2} f(z)dz + \dots + \oint_{C_n} f(z)dz \quad (4.36)$$

Άσκηση 1 Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\oint_C \frac{dz}{z-\alpha}$ όπου C είναι μια οποιαδήποτε απλή

κλειστή καμπύλη στις εξής δυο περιπτώσεις:

α) Το σημείο α βρίσκεται στο εξωτερικό της καμπύλης C

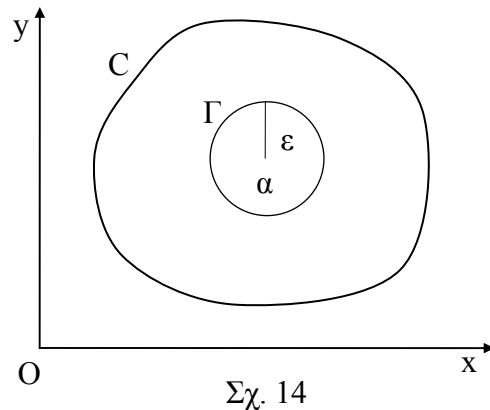
β) Το σημείο α βρίσκεται στο εσωτερικό της καμπύλης C

Λύση: α) Επειδή το σημείο α βρίσκεται στο εξωτερικό της καμπύλης C, η f(z) είναι αναλυτική σε κάθε εσωτερικό σημείο της καμπύλης C και πάνω σ' αυτή. Επομένως από το

θεώρημα του Cauchy θα είναι: $\oint_C \frac{dz}{z-\alpha} = 0$

β) Έστω ότι το σημείο α βρίσκεται στο εσωτερικό της καμπύλης C. Θεωρούμε τότε μια περιφέρεια Γ με κέντρο το σημείο α και ακτίνα ε, τέτοια ώστε η περιφέρεια Γ να βρίσκεται μέσα στο εσωτερικό της C, Σχ. 14. Από το θεώρημα 4 προκύπτει ότι:

$$\oint_C \frac{dz}{z-\alpha} = \oint_\Gamma \frac{dz}{z-\alpha} \quad (4.37)$$



Πάνω όμως στην περιφέρεια Γ είναι $|z-\alpha|=\varepsilon$ ή $z=\alpha+\varepsilon e^{i\theta}$ με $0\leq\theta<2\pi$ και $dz=i\varepsilon e^{i\theta}d\theta$. Επομένως η (4.37) γίνεται:

$$\oint_C \frac{dz}{z-\alpha} = \oint_\Gamma \frac{dz}{z-\alpha} = \int_0^{2\pi} \frac{i\varepsilon e^{i\theta}}{\varepsilon e^{i\theta}} d\theta = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i$$

Άσκηση 2: Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα: $\oint_C \frac{dz}{(z-\alpha)^n}$ με $n=2,3,\dots$ όπου το σημείο α

είναι στο εσωτερικό μιας οποιασδήποτε απλής κλειστής καμπύλης C.

Λύση: Εργαζόμαστε όπως και στην προηγούμενη άσκηση και έχουμε:

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{dz}{(z-\alpha)^n} &= \oint_\Gamma \frac{dz}{(z-\alpha)^n} = \int_0^{2\pi} \frac{i\varepsilon e^{i\theta}}{\varepsilon^n e^{in\theta}} d\theta = \frac{i}{\varepsilon^{n-1}} \int_0^{2\pi} e^{(1-n)i\theta} d\theta = \frac{i}{\varepsilon^{n-1}} \frac{e^{(1-n)i\theta}}{(1-n)i} \Bigg|_0^{2\pi} = \\ &= \frac{1}{(1-n)\varepsilon^{n-1}} [e^{2(1-n)\pi i} - 1] = 0 \quad \text{με } n \neq 1 \end{aligned}$$

Ερώτημα: Το αποτέλεσμα της προηγούμενης άσκησης έρχεται σ' αντίθεση με το θεώρημα του Morera ;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 1) Εάν C είναι το τμήμα της καμπύλης $y=x^3-3x^2+4x-1$ που ενώνει τα σημεία $1+i$ και $2+3i$, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$\int_C (12z^2 - 4iz) dz \quad \text{Απ. } -156+38i$$

- 2) Δείξτε ότι: $\int \frac{1}{z^2 + \alpha^2} dz = \frac{1}{\alpha} \tan^{-1} \left[\frac{z}{\alpha} \right] + c_1 = \frac{1}{2\alpha i} \ln \left[\frac{z - \alpha i}{z + \alpha i} \right] + c_2$

- 3) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\oint_C |z|^2 dz$ στο σύνορο του τετραγώνου με κορυφές στα σημεία $0, 1, 1+i, i$. Απ. $-1+i$

- 4) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\oint_C e^z dz$ όπου C η περιφέρεια $|z|=1$ και δείξτε ότι:

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \cos(\theta + \sin\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \sin(\theta + \cos\theta) d\theta = 0$$

- 5) Εάν n θετικός ακέραιος, δείξτε ότι:

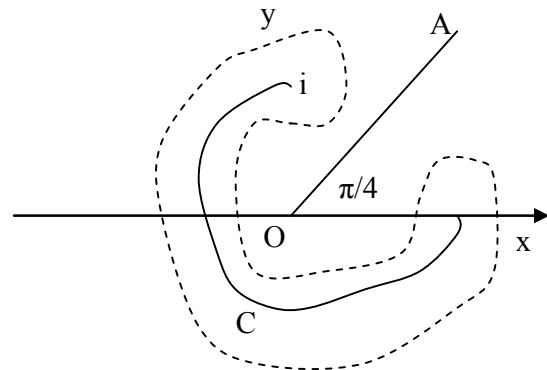
$$\int_0^{2\pi} e^{\sin(n\theta)} \cos(\theta - \cos(n\theta)) d\theta = \int_0^{2\pi} e^{\sin(n\theta)} \sin(\theta - \cos(n\theta)) d\theta = 0$$

- 6) Να υπολογισθεί με τη βοήθεια μιας παράγουσας, (δηλαδή ενός αορίστου ολοκληρώματος), το ολοκλήρωμα $I = \int_C \frac{dz}{z+1}$ όπου C η ημιπεριφέρεια $z=e^{i\theta}$ με $\pi \geq \theta \geq 0$.

- 7) Να υπολογισθεί με τη βοήθεια μιας παράγουσας το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_C \frac{z^2+1}{z} dz$$

όπου ο δρόμος ολοκλήρωσης C δίνεται από το σχήμα.



5. ΟΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ ΤΟΥ CAUCHY ΚΑΙ ΣΧΕΤΙΚΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ

5.1 Οι ολοκληρωτικοί τύποι του Cauchy

Στο κεφαλαίο αυτό θα αναφερθούμε στους ολοκληρωτικούς τύπους του Cauchy, των οποίων η σπουδαιότητα και οι επιπτώσεις είναι μεγάλες και θα φανούν στα θεωρήματα που θα ακολουθήσουν.

Στην άσκηση 1, στο τέλος του προηγούμενου κεφαλαίου, υπολογίσαμε το κλειστό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα πάνω σε μια απλή κλειστή καμπύλη C της συνάρτησης $1/(z-\alpha)$ που είναι αναλυτική πάνω στη C και στο εσωτερικό της, εκτός από το σημείο α , που θεωρούμε ότι ανήκει στο εσωτερικό της C και είναι πόλος τάξης 1. Η συνάρτηση αυτή είναι η πιο απλή σε έκφραση με αυτά τα χαρακτηριστικά.

Η γενική μορφή μιας συνάρτησης, που να είναι αναλυτική πάνω στην καμπύλη C και στο εσωτερικό της, εκτός από ένα σημείο α , που βρίσκεται στο εσωτερικό της C και είναι πόλος τάξης 1, είναι $f(z)/(z-\alpha)$ όπου η $f(z)$ είναι αναλυτική πάνω στη C και στο εσωτερικό της.

Το ερώτημα που τίθεται τώρα είναι: ποια είναι η τιμή του ολοκληρώματος:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-\alpha} dz$$

Θεωρούμε μια περιφέρεια Γ με κέντρο το σημείο α και ακτίνα ε αρκετά μικρή ώστε η περιφέρεια Γ να βρίσκεται στο εσωτερικό της C , Σχ. 1. Έχουμε:

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-\alpha} dz = \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-\alpha} dz \quad (5.1)$$

η εξίσωση της περιφέρειας Γ είναι $|z-\alpha|=\varepsilon \Rightarrow z=\alpha+\varepsilon e^{i\theta}$ με $0 \leq \theta < 2\pi$. Με $z=\alpha+\varepsilon e^{i\theta}$ και $dz=i\varepsilon e^{i\theta} d\theta$ το ολοκλήρωμα πάνω στην περιφέρεια γράφεται:

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-\alpha} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(\alpha + \varepsilon e^{i\theta})}{\varepsilon e^{i\theta}} i\varepsilon e^{i\theta} d\theta = i \int_0^{2\pi} f(\alpha + \varepsilon e^{i\theta}) d\theta$$

$$\text{Επομένως η (5.1) γίνεται: } \oint_C \frac{f(z)}{z-\alpha} dz = i \int_0^{2\pi} f(\alpha + \varepsilon e^{i\theta}) d\theta \quad (5.2)$$

Επειδή η (5.2) ισχύει για οποιοδήποτε ε , όσοδήποτε μικρό, έχουμε:

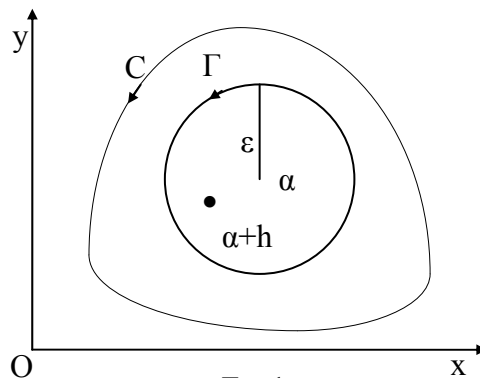
$$\oint_C \frac{f(z)}{z-\alpha} dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} i \int_0^{2\pi} f(\alpha + \varepsilon e^{i\theta}) d\theta = i \int_0^{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(\alpha + \varepsilon e^{i\theta}) d\theta = i \int_0^{2\pi} f(\alpha) d\theta = 2\pi i f(\alpha)$$

δηλαδή

$$\oint_C \frac{f(z)}{z-\alpha} dz = 2\pi i f(\alpha)$$

(5.3)

Μια άμεση γενίκευση των προηγούμενων είναι να υπολογίσουμε το κλειστό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα πάνω σε μια κλειστή καμπύλη C μιας συνάρτησης, που είναι αναλυτική πάνω στη C και στο εσωτερικό της, εκτός από το σημείο α , που βρίσκεται στο εσωτερικό της C και είναι πόλος τάξης 2. Μια τέτοια συνάρτηση θα έχει την γενική μορφή $\frac{f(z)}{(z-\alpha)^2}$ με $f(z)$ αναλυτική πάνω στη C και



Σχ. 1

στο εσωτερικό της και η τιμή του αντιστοίχου ολοκληρώματος:

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^2} dz \text{ μπορεί να υπολογισθεί ως εξής:}$$

$$\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{1}{h} \left[\frac{1}{z-(\alpha+h)} - \frac{1}{z-\alpha} \right] f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-\alpha-h)(z-\alpha)} dz =$$

Όταν το $h \rightarrow 0$, ο πρώτος όρος τείνει στην παράγωγο $f'(\alpha)$ και ο τελευταίος όρος στο ολοκλήρωμα $\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^2} dz$ επομένως θα έχουμε:

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^2} dz = 2\pi i f'(\alpha) \tag{5.4}$$

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(\alpha) \tag{5.5}$$

Από τις σχέσεις (5.3) και (5.5) έχουμε:

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-\alpha} dz$$

$$f^{(n)}(\alpha) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}} dz \tag{5.6}$$

Οι σχέσεις (5.6) λέγονται **ολοκληρωτικοί τύποι** του Cauchy και η δεύτερη περιέχει την πρώτη για $n=0$.

Η σημασία τους είναι πράγματι τεραστία. Και αυτό επειδή δείχνουν ότι:

α) Εάν μια συνάρτηση $f(z)$ είναι αναλυτική πάνω σε μια καμπύλη C και στο εσωτερικό της και γνωρίζουμε τις τιμές της μόνο στα σημεία της C , (αυτές μόνο οι τιμές χρειάζονται για να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα της σχέσης (5.6)), τότε γνωρίζουμε την τιμή της συνάρτησης $f(z)$ και όλων των παραγώγων της σε κάθε εσωτερικό σημείο της καμπύλης C .

β) Εάν μια μιγαδική συνάρτηση έχει πρώτη παράγωγο, δηλ είναι αναλυτική σ' ένα τόπο απλής συνοχής D , τότε έχει παράγωγο κάθε τάξης.

Αυτό δεν ισχύει γενικά για τις πραγματικές συναρτήσεις.

Οι ολοκληρωτικοί τύποι του Cauchy (5.6) ισχύουν και για τόπους πολλαπλής συνοχής. Πράγματι ας θεωρήσουμε την πολλαπλά συνεκτική περιοχή R , που ορίζεται από τις απλές καμπύλες C_1 και C_2 , Σχ.2. Θεωρούμε τώρα μια περιφέρεια Γ , που έχει κέντρο το σημείο α και που βρίσκεται στην περιοχή R . Η συνάρτηση $f(z)/(z-\alpha)$, (με $f(z)$ αναλυτική στην περιοχή R), είναι αναλυτική στην περιοχή R , εκτός από το σημείο α . Επομένως από το Θεώρημα του Cauchy για τόπους πολλαπλής συνοχής έχουμε:

$$\begin{aligned} \oint_{C_1} \frac{f(z)}{z-\alpha} dz &= \oint_{C_2} \frac{f(z)}{z-\alpha} dz + \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-\alpha} dz = \\ &= \oint_{C_2} \frac{f(z)}{z-\alpha} dz + 2\pi i f(\alpha) \Rightarrow \end{aligned}$$

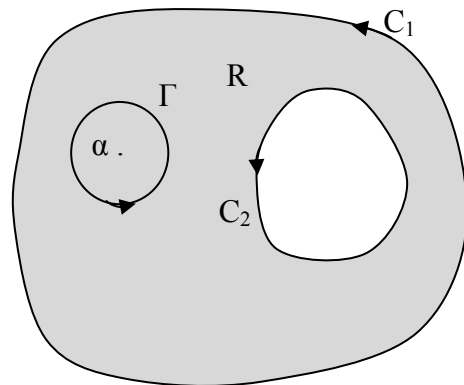
$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \left[\oint_{C_1} \frac{f(z)}{z-\alpha} dz - \oint_{C_2} \frac{f(z)}{z-\alpha} dz \right] = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-\alpha} dz \quad (5.7)$$

όπου $C=C_1-C_2$ το σύνορο της περιοχής R .

Με όμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι ισχύει και ο ολοκληρωτικός τύπος:

$$f^{(n)}(\alpha) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}} dz$$

για τόπους πολλαπλής συνοχής.



Σχ. 2

5.2 Το Θεώρημα του Morera

Ξέροντας τώρα ότι η αναλυτικότητα της $f(z)$ είναι αρκετή για να έχει η $f(z)$ παραγώγους κάθε τάξης, και επομένως συνεχή την πρώτη παράγωγο, (αφού υπάρχει η δεύτερη παράγωγος), μπορούμε να αποδείξουμε το θεώρημα του Morera χωρίς την παραδοχή της συνέχειας της πρώτης παραγώγου.

Θεώρημα του Morera, (αντίστροφο του θεωρήματος του Cauchy):

Εάν η $f(z)$ είναι συνεχής σ' ένα τόπο απλής συνοχής R και εάν ισχύει:

$$\oint_C f(z) dz = 0 \text{ για κάθε κλειστή καμπύλη } C, \text{ που βρίσκεται στον τόπο } R, \text{ τότε η } f(z) \text{ είναι}$$

αναλυτική στον τόπο R .

Απόδειξη: Επειδή ο μηδενισμός του ολοκληρώματος $\oint_C f(z) dz$ είναι ανεξάρτητος της

καμπύλης C , η συνάρτηση $F(z) = \int_a^z f(\zeta) d\zeta$ είναι ανεξάρτητη του δρόμου, που συνδέει τα σημεία a και z αρκεί ο δρόμος αυτός να περιέχεται στην περιοχή R .

Με συλλογισμούς παρόμοιους με εκείνους που χρησιμοποιήσαμε στο θεώρημα 2 στην παράγραφο 4.8, όπου η μόνη προϋπόθεση για την συνάρτηση $f(z)$ ήταν να είναι συνεχής, συμπεραίνουμε ότι η $F(z)$ είναι αναλυτική και μάλιστα $F'(z) = f(z)$. Από το συμπέρασμα όμως της προηγούμενης παραγράφου, προκύπτει ότι επειδή η $F(z)$ είναι αναλυτική, αναλυτική θα είναι και η παράγωγος της, δηλαδή η $F'(z)$. Άρα η $f(z)$ είναι αναλυτική στην περιοχή R .

5.3 Ανισότητα του Cauchy

Εάν η $f(z)$ είναι αναλυτική στο εσωτερικό και πάνω στην περιφέρεια Γ ενός κύκλου με κέντρο το σημείο a και ακτίνα r , τότε ισχύει:

$$\left| f^{(n)}(a) \right| \leq \frac{Mn!}{r^n} \quad n=0,1,2,\dots \quad (5.8)$$

όπου M η μέγιστη τιμή του $|f(z)|$ πάνω στη Γ .

Απόδειξη: Στα σημεία της περιφέρειας Γ έχουμε $|z-a|=r$ και το μήκος της είναι $2\pi r$. Από τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy:

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \quad n=0,1,2,\dots$$

προκύπτει:

$$\left| f^{(n)}(a) \right| = \left| \frac{n!}{2\pi} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \frac{M}{r^{n+1}} 2\pi r = \frac{Mn!}{r^n}$$

5.4 Το θεώρημα του Liouville

Εάν στο συμπληρωμένο μιγαδικό επίπεδο

α) η $f(z)$ είναι αναλυτική και

β) η $f(z)$ είναι φραγμένη, (δηλαδή υπάρχει μια σταθερά $M > 0$ τέτοια ώστε $|f(z)| \leq M \forall z \in \mathbb{C}$), τότε η $f(z)$ είναι σταθερή.

Απόδειξη: Από την ανισότητα του Cauchy για $n=1$ και θέτοντας στη θέση του a το z έχουμε:

$$|f'(z)| \leq M/r \quad (5.9)$$

Όταν η ακτίνα $r \rightarrow \infty$ η $f(z)$ διατηρεί τα χαρακτηριστικά της, (δηλαδή είναι αναλυτική και φραγμένη), και επομένως η ανισότητα (5.9) συνεχίζει να ισχύει. Τότε όμως προκύπτει ότι: $|f'(z)|=0$ και συνεπώς $f'(z) = 0$. Άρα η $f(z)$ είναι σταθερή.

5.5 Το θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας.

Κάθε πολυώνυμο $P_n(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n$ βαθμού $n \geq 1$ και $a_n \neq 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα.

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι το πολυώνυμο $P_n(z)$ δεν έχει καμία ρίζα, τότε η συνάρτηση $f(z) = 1/P_n(z)$ δεν έχει κανένα πόλο και δεν "απειρίζεται" πουθενά, επομένως είναι αναλυτική. Επίσης το μέτρο της $|f(z)| = |1/P_n(z)|$ είναι φραγμένο και μάλιστα τείνει στο μηδέν όταν $z \rightarrow \infty$. Τότε όμως από το θεώρημα του Liouville προκύπτει ότι η $f(z)$ είναι σταθερή. Σταθερό τότε θα είναι και το πολυώνυμο $P_n(z)$, πράγμα αδύνατο. Άρα το πολυώνυμο $P_n(z)$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα.

Σαν προέκταση του θεωρήματος αυτού μπορούμε να δείξουμε ότι:

Κάθε πολυώνυμο n βαθμού έχει ακριβώς n ρίζες. Πράγματι από το προηγούμενο θεώρημα το πολυώνυμο $P_n(z)$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα, έστω την ρ_1 , δηλαδή $P_n(\rho_1) = 0$. Τότε θα έχουμε:

$$\begin{aligned} P_n(z) &= P_n(z) - P(\rho_1) = [a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n] - [a_0 + a_1\rho_1 + \dots + a_n\rho_1^n] = \\ &= a_1(z - \rho_1) + a_2(z^2 - \rho_1^2) + \dots + a_n(z^n - \rho_1^n) = (z - \rho_1)Q_{n-1}(z) \end{aligned}$$

όπου $Q_{n-1}(z)$ είναι ένα πολυώνυμο $n-1$ βαθμού. Εφαρμόζοντας και πάλι το προηγούμενο θεώρημα, συμπεραίνουμε ότι το $Q_{n-1}(z)$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα, έστω την ρ_2 , (που μπορεί να είναι ίση με την ρ_1), και συνεπώς θα είναι:

$$P_n(z) = (z - \rho_1)(z - \rho_2)R_{n-2}(z)$$

Συνεχίζοντας με αυτό τον τρόπο συμπεραίνουμε ότι το πολυώνυμο $P_n(z)$ έχει ακριβώς n ρίζες.

5.6 Το θεώρημα του μέγιστου μέτρου.

Εάν η μη σταθερή συνάρτηση $f(z)$ είναι αναλυτική στο εσωτερικό και πάνω σε μια κλειστή καμπύλη C , τότε το μέτρο της $|f(z)|$ παίρνει την μέγιστη τιμή της σε κάποιο σημείο της C .

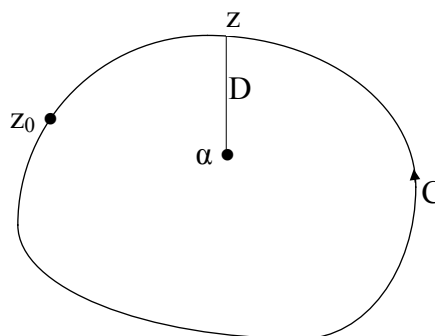
Απόδειξη: Επειδή η $f(z)$ είναι αναλυτική και επομένως συνεχής πάνω στην καμπύλη C , θα υπάρχει ένα σημείο z_0 της καμπύλης C τέτοιο ώστε $\max_{z \in C} |f(z)| = |f(z_0)| = M$. Εάν τώρα a είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο της C και D η απόσταση του από την καμπύλη C , Σχ. 3, που ισούται $D = \min_{z \in C} |z - a|$, θα δείξουμε $|f(a)| \leq M$. Πράγματι ο τύπος του Cauchy (5.3) για την συνάρτηση $\{f(z)\}^n$, $n \in \mathbb{N}$, δίνει:

$$\{f(z)\}^n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\{f(z)\}^n}{z-\alpha} dz$$

και $|f(\alpha)|^n \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M^n}{D} L_C$

όπου L_C το μήκος της καμπύλης C .
Παίρνοντας την n -οστή ρίζα από την τελευταία

σχέση προκύπτει: $|f(\alpha)| \leq M \sqrt[n]{\frac{L_C}{2\pi D}}$



Σχ. 3

Η τελευταία σχέση ισχύει για κάθε n , επομένως για $n \rightarrow \infty$ θα έχουμε:

$$|f(\alpha)| \leq M \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{L_C}{2\pi D}} = M$$

Βασίζόμενοι στο προηγούμενο θεώρημα μπορούμε να αποδείξουμε το εξής θεώρημα του Schwarz:

Θεώρημα του Schwarz: Εάν η $f(z)$ είναι αναλυτική για $|z| \leq R$ και επί πλέον $f(0)=0$, $|f(z)| \leq M$, για $|z|=R$, τότε: $|f(z)| \leq \frac{M|z|}{R}$ για $|z| \leq R$

Απόδειξη: Η συνάρτηση $f(z)/z$ είναι αναλυτική για $|z| \leq R$, (γιατί;). Επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα του μέγιστου μέτρου για τον κύκλο $|z|=R$ και

θα έχουμε: $\left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq \frac{M}{R}$

Η ανισότητα όμως αυτή πρέπει να ισχύει και για τα εσωτερικά σημεία του κύκλου $|z|=R$. Άρα για $|z| \leq R$ έχουμε $|f(z)| \leq \frac{M|z|}{R}$.

Επίσης από το θεώρημα του μέγιστου μέτρου προκύπτει η εξής πρόταση:

Πρόταση: Εάν δυο συναρτήσεις $f(z)$ και $g(z)$ είναι αναλυτικές πάνω σε μια κλειστή καμπύλη C και στο εσωτερικό της R και συμπίπτουν πάνω στα σημεία της καμπύλης C δηλαδή $\forall z \in C f(z)=g(z)$, τότε συμπίπτουν και στο εσωτερικό R της καμπύλης.

Απόδειξη: Η $f(z)-g(z)$ έχει τις ιδιότητες της f και g και $f(z)-g(z)=0 \forall z \in C$. Και επειδή το μέγιστο του μέτρου $|f(z)-g(z)|$ είναι μηδέν, προκύπτει ότι $|f(z)-g(z)| \leq 0 \forall z \in R$ δηλαδή $f(z)=g(z) \forall z \in R$

Η πρόταση αυτή αποδεικνύεται και από τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy:

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-\alpha} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{g(z)}{z-\alpha} dz = g(\alpha)$$

διότι $f(z)=g(z)$ πάνω στη C .

Η σημασία της πρότασης αυτής είναι ότι εξασφαλίζει την μοναδικότητα της λύσης σε συνοριακά προβλήματα διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους

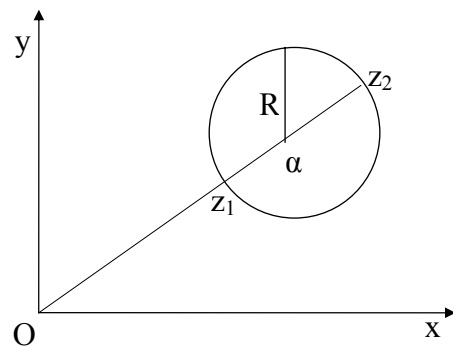
5.7 Το θεώρημα του ελάχιστου μέτρου.

Εάν η συνάρτηση $f(z)$ είναι αναλυτική πάνω στην απλή καμπύλη C και στο εσωτερικό της, στο οποίο δεν μηδενίζεται, τότε το μέτρο της $f(z)$ παίρνει την ελάχιστη τιμή σε κάποιο σημείο της καμπύλης C .

Απόδειξη: Επειδή η $f(z)$ είναι αναλυτική πάνω στη C και στο εσωτερικό της και επί πλέον $f(z) \neq 0$ στο εσωτερικό της C , έπεται ότι η $1/f(z)$ είναι αναλυτική στο εσωτερικό της C . Από το προηγούμενο θεώρημα του μέγιστου μέτρου, έχουμε ότι η απόλυτη τιμή $|1/f(z)|$ δεν μπορεί να πάρει την μέγιστη τιμή στο εσωτερικό της C και συνεπώς η $|f(z)|$ δεν μπορεί να πάρει την ελάχιστη τιμή της στο εσωτερικό της C . Άρα, επειδή η $|f(z)|$ έχει ελάχιστο, παίρνει το ελάχιστο αυτό σε κάποιο σημείο της C .

Ένα παράδειγμα συνάρτησης, η οποία να είναι αναλυτική πάνω σε μια καμπύλη C και στο εσωτερικό της, αλλά να μηδενίζεται σε κάποιο εσωτερικό σημείο της C και επομένως η $|f(z)|$ να μην παίρνει την ελάχιστη τιμή της πάνω στη C , είναι η συνάρτηση $f(z)=z$ με C τον μοναδιαίο κύκλο $|z| \leq 1$. Πράγματι στο σημείο $z=0$ έχουμε $f(z)=0$. Εάν θέσουμε $z=re^{i\theta}$ έχουμε $|f(z)|=r$ και είναι φανερό ότι η $|f(z)|$ παίρνει την ελάχιστη τιμή της όχι πάνω στη C αλλά στο εσωτερικό της και συγκεκριμένα στην αρχή των αξόνων.

Εάν για την ίδια συνάρτηση $f(z)=z$ θεωρήσουμε σαν καμπύλη C τον κύκλο με εξίσωση $|z-\alpha|=R$ με $R < |\alpha|$ Σχ.4, τότε στα σημεία z_1 και z_2 του κύκλου $|z-\alpha|=R$, η $|f(z)|$ παίρνει αντίστοιχα την ελάχιστη και μέγιστη τιμή της. (γιατί;)



Σχ. 4

5.8 Το θεώρημα του ορίσματος

Έστω ότι η συνάρτηση $f(z)$ είναι αναλυτική πάνω σε μια απλή κλειστή καμπύλη C και στο εσωτερικό της, εκτός από το σημείο α , που είναι πόλος τάξης p . Έστω ακόμα ότι στο εσωτερικό της C η $f(z)$ έχει μόνο μια ρίζα στο σημείο β με πολλαπλότητα n και ότι δεν έχει ρίζες πάνω στη C . Τότε ισχύει:

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i(n-p) \quad (5.10)$$

Απόδειξη: Θεωρούμε ότι οι καμπύλες C_1 και C_2 , που βρίσκονται στο εσωτερικό της C , δεν έχουν κοινό σημείο και περικλείουν τα σημεία α και β αντίστοιχα, Σχ. 5. Από το θεώρημα του Cauchy για τόπους πολλαπλής συνοχής έχουμε:

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \oint_{C_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz + \oint_{C_2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz \quad (5.11)$$

Επειδή το σημείο α είναι πόλος της $f(z)$ πολλαπλότητας p θα είναι:

$$f(z) = \frac{F(z)}{(z-\alpha)^p} \quad (5.12)$$

όπου η $F(z)$ είναι αναλυτική και δεν μηδενίζεται στο εσωτερικό και πάνω στην καμπύλη C_1 . Λογαριθμίζοντας την (5.12) και παραγωγίζοντας βρίσκουμε:

$$\ln f(z) = \ln F(z) - p \ln(z-\alpha) \quad (5.13)$$

και
$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{F'(z)}{F(z)} - \frac{p}{z-\alpha}$$

Επομένως

$$\begin{aligned} \oint_{C_1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz &= \oint_{C_1} \frac{F'(z)}{F(z)} dz - p \oint_{C_1} \frac{1}{z-\alpha} dz = \\ &= -p2\pi i \end{aligned} \quad (5.14)$$

Επειδή η $f(z)$ έχει το σημείο β ρίζα πολλαπλότητας n , θα είναι:

$$f(z) = (z-\beta)^n G(z) \quad (5.15)$$

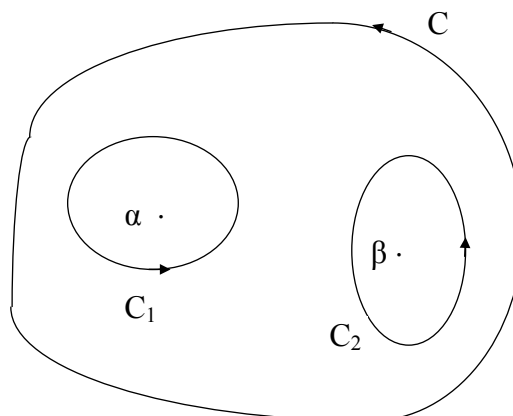
όπου $G(z)$ είναι αναλυτική και δεν μηδενίζεται στο εσωτερικό και πάνω στην καμπύλη C_2 . Λογαριθμίζοντας και παραγωγίζοντας την (5.15) βρίσκουμε:

$$\ln f(z) = n \ln(z-\beta) + \ln G(z)$$

και
$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z-\beta} + \frac{G'(z)}{G(z)} \quad (5.16)$$

Επομένως
$$\oint_{C_2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = n \oint_{C_2} \frac{1}{z-\beta} dz + \oint_{C_2} \frac{G'(z)}{G(z)} dz = n2\pi i \quad (5.17)$$

Τελικά θα έχουμε:
$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i(n-p)$$



Σχ. 5

Το προηγούμενο θεώρημα του ορίσματος μπορεί να γενικευθεί στην περίπτωση που η $f(z)$ έχει τα σημεία $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ πόλους τάξης p_1, p_2, \dots, p_k αντίστοιχα και τα σημεία $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l$ ρίζες πολλαπλότητας n_1, n_2, \dots, n_l αντίστοιχα.

Εάν $N = \sum_{i=1}^{\lambda} n_i$ και $P = \sum_{i=1}^k p_i$ τότε ισχύει:

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \left[\sum_{i=1}^{\lambda} n_i - \sum_{i=1}^k p_i \right] = 2\pi i [N - P]$$

Μια άλλη γενίκευση είναι η εξής: Μαζί με τις προηγούμενες υποθέσεις δεχόμαστε επίσης ότι μια νέα συνάρτηση $g(z)$ είναι αναλυτική πάνω στη C και στο εσωτερικό της. Τότε θα έχουμε:

$$\oint_C g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \left[\sum_{i=1}^{\lambda} n_i g(\beta_i) - \sum_{i=1}^k p_i g(\alpha_i) \right] \quad (5.19)$$

Η γεωμετρική σημασία του θεωρήματος του ορίσματος είναι η εξής:

Κατ' αρχή παρατηρούμε ότι:
$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{d}{dz} [\ln f(z)] dz$$

Ας πάρουμε τώρα ένα σημείο $z_0 \in C$, που θα το θεωρήσουμε σαν αρχή και τέλος της ολοκλήρωσης. Όταν το σημείο z διατρέχει κατά την θετική φορά την καμπύλη C , ξεκινώντας και καταλήγοντας στο σημείο z_0 , η συνάρτηση $\ln f(z) = \ln |f(z)| + i(2k\pi + \arg f(z))$ μεταβάλλεται κατά συνεχή τρόπο και μετά την διαγραφή της C η τιμή της $\ln f(z)$ θα διαφέρει γενικά από την αρχική της τιμή στο ίδιο σημείο z_0 . Η διάφορα αυτή των τιμών της $\ln f(z)$ στο σημείο z_0 οφείλεται στη διαφορά των τιμών του ορίσματος $\arg f(z)$. Εάν συμβολίσουμε με Φ_0 την αρχική τιμή του $\arg f(z)$ και με Φ_1 την τιμή του $\arg f(z)$ μετά την διαγραφή της C , βρίσκουμε ότι:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} [\{\ln |f(z_0)| + i\Phi_1\} - \{\ln |f(z_0)| + i\Phi_0\}] = \frac{1}{2\pi} [\Phi_1 - \Phi_0]$$

αλλά επειδή:
$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P$$

Τελικά θα έχουμε: $\Delta\Phi = \Phi_1 - \Phi_0 = 2\pi [N - P]$

5.9 Το θεώρημα του Rouché

Θεωρούμε δυο συναρτήσεις $f(z)$ και $g(z)$, οι οποίες είναι αναλυτικές πάνω σε μια απλή κλειστή καμπύλη C και στο εσωτερικό της. Εάν πάνω στη C ισχύει $|g(z)| < |f(z)|$, τότε οι συναρτήσεις $f(z) + g(z)$ και $f(z)$ έχουν το ίδιο πλήθος ριζών στο εσωτερικό της C .

Απόδειξη: Θέτουμε $F(z) = g(z)/f(z) \Rightarrow g(z) = f(z)F(z)$. Εάν N_1 και N_2 είναι αντίστοιχα το πλήθος των ριζών των $f+g$ και f στο εσωτερικό της C , έχουμε από το θεώρημα του ορίσματος ότι:

$$N_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f' + g'}{f + g} dz \quad N_2 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'}{f} dz$$

επειδή οι συναρτήσεις $f+g$ και f δεν έχουν πόλους. Άρα

$$\begin{aligned} N_1 - N_2 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f' + fF + fF'}{f + fF} dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'}{f} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'(1+F) + fF'}{f(1+F)} dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'}{f} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \left\{ \frac{f'}{f} + \frac{F'}{1+F} \right\} dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f'}{f} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{F'}{1+F} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_C F'(1 - F + F^2 - F^3 + \dots) dz = 0 \end{aligned}$$

επειδή $|F| < 1$ πάνω στη C και συνεπώς η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα πάνω στη C και μπορεί να ολοκληρωθεί κατά όρους. Τελικά θα έχουμε $N_1 = N_2$.

Άσκηση: Δείξτε ότι οι ρίζες της συνάρτησης $z^7 - 5z^3 + 12 = 0$ βρίσκονται στο δακτύλιο $1 < |z| < 2$.

Λύση: Θεωρούμε την περιφέρεια C_1 $|z|=1$ και θέτουμε $f(z)=12$ και $g(z)=z^7-5z^3$. Πάνω στην C_1 έχουμε:

$$|g(z)| = |z^7 - 5z^3| \leq |z^7| + |5z^3| \leq 6 < 12 = |f(z)|$$

Σύμφωνα με το θεώρημα του Rouché η συνάρτηση $f(z)+g(z) = z^7 - 5z^3 + 12$ έχει το ίδιο πλήθος ριζών στο εσωτερικό της περιφέρειας C_1 με την $f(z)=12$, δηλαδή καμία.

Θεωρούμε τώρα την περιφέρεια C_2 $|z|=2$ και έστω ότι $f(z)=z^7$, $g(z)=12-5z^3$. Πάνω στη C_2 έχουμε:

$$|g(z)| = |12 - 5z^3| \leq |12| + |5z^3| \leq 60 < 2^7 = |f(z)|$$

Σύμφωνα με το θεώρημα του Rouché η συνάρτηση $f(z)+g(z) = z^7 - 5z^3 + 12$ έχει το ίδιο πλήθος ριζών στο εσωτερικό της περιφέρειας C_2 με την $f(z)=z^7$, δηλαδή όλες οι ρίζες είναι στο εσωτερικό της C_2 .

Συνεπώς όλες οι ρίζες βρίσκονται στο εσωτερικό της περιφέρειας C_2 αλλά στο εξωτερικό της περιφέρειας C_1 , δηλαδή στο δακτύλιο $1 < |z| < 2$.

5.10 Οι ολοκληρωτικοί τύποι του Poisson για κύκλο

Θεωρούμε μια συνάρτηση $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ που είναι αναλυτική πάνω στην περιφέρεια C $|z|=R$ και στο εσωτερικό της. Εάν $z = re^{i\theta}$ είναι ένα οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο της C , τότε ισχύει:

$$\alpha) \quad f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} f(Re^{i\varphi}) d\varphi$$

$$\beta_1) \quad u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)u(R, \varphi)}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} d\varphi \quad (1)$$

$$\beta_2) \quad v(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)v(R, \varphi)}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} d\varphi \quad (2)$$

Οι σχέσεις (1) και (2) ονομάζονται **ολοκληρωτικοί τύποι του Poisson για κύκλο** και δίνουν τις τιμές μιας αρμονικής συνάρτησης μέσα σ' έναν κύκλο από τις τιμές της στο σύνορο.

5.11 Οι ολοκληρωτικοί τύποι του Poisson για ημιεπίπεδο

Εάν η συνάρτηση $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ είναι αναλυτική στο άνω ημιεπίπεδο, $\text{Im}(z) \geq 0$, του μιγαδικού επιπέδου C , τότε ισχύουν οι σχέσεις:

$$\alpha) \quad f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{yf(t)}{|t-z|^2} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{yf(t)}{(t-x)^2 + y^2} dt$$

$$\beta_1) \quad u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{yu(t, 0)}{|t-z|^2} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{yu(t, 0)}{(t-x)^2 + y^2} dt \quad (1)$$

$$\beta_2) \quad v(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-t)u(t, 0)}{|t-z|^2} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-t)u(t, 0)}{(t-x)^2 + y^2} dt \quad (2)$$

Οι σχέσεις (1) και (2) ονομάζονται **ολοκληρωτικοί τύποι του Poisson για ημιεπίπεδο** και δίνουν τις τιμές μιας αρμονικής συνάρτησης σ' ένα οποιοδήποτε σημείο του άνω ημιεπιπέδου από τις τιμές της στον πραγματικό άξονα OX , που αποτελεί το σύνορο του ημιεπιπέδου.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$\alpha) \quad \oint_C \frac{e^z}{z-2} dz \quad \text{όπου } C \text{ η περιφέρεια i) } |z|=3 \text{ ii) } |z|=1$$

Απ. i) $2\pi e^2$ ii) 0

β) $\oint_C \frac{\sin 3z}{z + \frac{\pi}{2}} dz$ όπου C η περιφέρεια $|z|=5$ Απ. $2\pi i$

γ) $\oint_C \frac{e^{3z}}{z - \pi i} dz$ όπου C i) η περιφέρεια $|z-1|=4$ ii) η έλλειψη $|z-2|+|z+2|=6$
Απ. i) $-2\pi i$, ii) 0

δ) $\oint_C \frac{\cos \pi z}{z^2 - 1} dz$ όπου C το ορθογώνιο με κορυφές στα σημεία i) $2 \pm i, -2 \pm i$,
 ii) $\pm i, 2 \pm i$ Απ. i) 0 , ii) $-\pi i$

2) Δείξτε ότι $\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{zt}}{z^2 + 1} dz = \sin t$ εάν $t > 0$ και C η περιφέρεια $|z|=3$

3) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\oint_C \frac{e^{zt}}{(z^2 + 1)^2} dz$ εάν $t > 0$ και C η περιφέρεια $|z|=3$.
Απ. $\pi i(z \sin t - t \cos t)$

4) Εάν $f(z) = \frac{(z^2 + 1)^2}{(z^3 + 2z + 2)^3}$ να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ όπου C η
 περιφέρεια $|z|=4$ Απ. $-4\pi i$

5) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\oint_C \tan(\pi z) dz$ όπου C η περιφέρεια $|z|=4$
Απ. $-16i$.

6) Εάν $f(z) = z^4 - 2z^3 + z^2 - 12z + 20$ και C η περιφέρεια $|z|=5$, να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα
 $\oint_C z \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ Απ. $4\pi i$

7) Να αποδειχθεί ότι $\oint_C \frac{\cos^2 tz}{z^3} dz = -2\pi i t$ όπου C η περιφέρεια $|z|=1$ εάν $t > 0$

8) α) Δείξτε ότι $\oint_C \frac{1}{z+1} dz = 2\pi i$ εάν C είναι η περιφέρεια $|z|=2$

β) Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο αποτέλεσμα δείξτε ότι:

$$\oint_C \frac{(x+1)dx+dy}{(x+1)^2+y^2} = 0, \quad \oint_C \frac{(x+1)dy-ydx}{(x+1)^2+y^2} = 2\pi$$

9) Προσδιορίστε όλες τις συναρτήσεις $f(z)$ που είναι αναλυτικές στο συμπληρωμένο μιγαδικό επίπεδο και ικανοποιούν τις συνθήκες

$$\alpha) f(2-i)=4i \quad \beta) |f(z)| \leq e^2 \quad \forall z$$

10) Δείξτε ότι $\alpha) \int_0^{2\pi} e^{\cos t} \cos(\sin t) dt = 0$ $\beta) \int_0^{2\pi} e^{\cos t} \sin(\sin t) dt = 2\pi$

11) Εάν $t > 0$ και C είναι μια οποιαδήποτε απλή κλειστή καμπύλη που περικλείει το $z = -1$, δείξτε ότι:

$$\oint_C \frac{ze^{zt}}{(z+1)^3} dz = 2\pi i \left[t - \frac{t^2}{2} \right] e^{-t}$$

6. ΣΕΙΡΕΣ TAYLOR - LAURENT ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΑ ΥΠΟΛΟΙΠΑ

6.1 Σειρές συναρτήσεων - Δυναμοσειρές.

Στην παράγραφο αυτή θα αναφερθούμε με συντομία στις σειρές μιγαδικών συναρτήσεων. Οι ορισμοί, τα θεωρήματα και τα κριτήρια σύγκλισης, που αναφέρονται στις σειρές μιγαδικών συναρτήσεων, είναι ακριβώς ανάλογα με τα αντίστοιχα της θεωρίας των σειρών των πραγματικών συναρτήσεων.

Ορισμοί: Εάν $f_n(z)$ είναι μια ακολουθία μιγαδικών συναρτήσεων, τότε η ακολουθία, που κατασκευάζεται από τις $f_n(z)$ ως εξής:

$$S_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \dots + f_n(z) \tag{6.1}$$

λέγεται **σειρά μιγαδικών συναρτήσεων** και ο όρος $S_n(z)$ λέγεται **μερικό άθροισμα τάξης n**.

Εάν $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(z) = S(z)$ η σειρά $S_n(z)$ λέγεται **συγκλίνουσα** και το $S(z)$ είναι το **άθροισμα** της, αλλιώς η σειρά λέγεται **αποκλίνουσα**.

Μια αναγκαία συνθήκη, αλλά όχι και ικανή, για να συγκλίνει η σειρά (6.1) είναι: $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = 0$

Εάν η σειρά (6.1) συγκλίνει $\forall z \in D$, όπου D είναι ανοικτός τόπος του μιγαδικού επιπέδου, τότε ο D ονομάζεται **τόπος σύγκλισης** της σειράς $S_n(z)$.

Εάν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$ συγκλίνει, τότε λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ συγκλίνει **απόλυτα**. Εάν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ συγκλίνει χωρίς να συγκλίνει η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$, τότε λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ **συγκλίνει υπό σηνθήκες**.

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ λέμε ότι **συγκλίνει ομοιόμορφα** εάν ισχύει:

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall z \in D)[n > n_0 \rightarrow |S_n(z) - S(z)| < \epsilon]$$

δηλαδή όταν το z δεν εξαρτάται από το n .

Μια ειδική μορφή σειράς συναρτήσεων είναι η:

$$a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n \tag{6.2}$$

η οποία ονομάζεται **σειρά δυνάμεων** ή **δυναμοσειρά** του $z-a$. Η σειρά (6.2) είναι φανερό ότι συγκλίνει για $z=a$. Ενδέχεται όμως η σειρά να συγκλίνει και σε άλλα σημεία εκτός από

το α . Στην περίπτωση αυτή μπορεί να αποδειχθεί ότι υπάρχει ένας θετικός αριθμός R , τέτοιος ώστε για $|z-\alpha|<R$ η σειρά (6.2) να συγκλίνει και να αποκλίνει για $|z-\alpha|>R$, ενώ στα σημεία της περιφέρειας $|z-\alpha|=R$ μπορεί να συγκλίνει, αλλά μπορεί και να αποκλίνει. Το R ονομάζεται **ακτίνα σύγκλισης** και ο αντίστοιχος κύκλος, **κύκλος σύγκλισης**. Εάν $R=0$, τότε μόνο στο σημείο α η σειρά (6.2) συγκλίνει, ενώ εάν $R=\infty$, τότε συγκλίνει για κάθε z με $|z|<\infty$.

Για τις δυναμοσειρές ισχύουν τα εξής θεωρήματα:

Θεώρημα 1: Κάθε δυναμοσειρά συγκλίνει ομοιόμορφα και απόλυτα σε κάθε τόπο που βρίσκεται μέσα στον κύκλο σύγκλισης της.

Θεώρημα 2: α) Μια δυναμοσειρά μπορεί να παραγωγιθεί κατά όρους σε κάθε τόπο που βρίσκεται μέσα στον κύκλο σύγκλισης της.

β) Μια δυναμοσειρά μπορεί να ολοκληρωθεί κατά όρους κατά μήκος οποιασδήποτε καμπύλης C που βρίσκεται μέσα στον κύκλο σύγκλισης της.

γ) Το άθροισμα μιας δυναμοσειράς είναι συνεχής συνάρτηση σε κάθε τόπο που βρίσκεται μέσα στον κύκλο σύγκλισης της.

6.2 Το θεώρημα του Taylor:

Έστω $f(z)$ μια αναλυτική συνάρτηση στο εσωτερικό και πάνω σε μια απλή κλειστή καμπύλη C . Εάν α και z δυο σημεία εσωτερικά της C , τότε έχουμε:

$$f(z) = f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!}(z-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(z-\alpha)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(z-\alpha)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(z-\alpha)^n \quad (6.3)$$

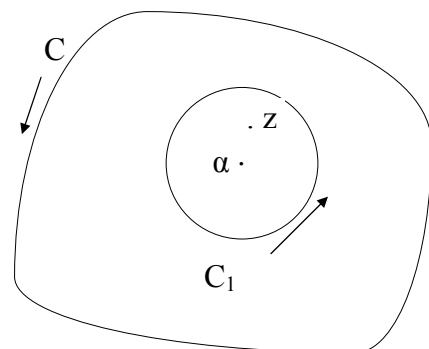
Η σχέση (6.3) ονομάζεται **σειρά** ή **ανάπτυγμα Taylor** της $f(z)$. Εάν $\alpha=0$ η σειρά (6.3) ονομάζεται **σειρά Maclaurin**.

Ο τόπος σύγκλισης της (6.3) είναι το εσωτερικό της περιφέρειας $|z-\alpha|<R$ όπου R η απόσταση του σημείου α από το πλησιέστερο ανώμαλο σημείο της $f(z)$.

Απόδειξη: Θεωρούμε την περιφέρεια C_1 με κέντρο το σημείο α και ακτίνα τέτοια ώστε η περιφέρεια αυτή να περιέχεται μέσα στην καμπύλη C και να περιέχει το σημείο z , Σχ. 1. Από τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy έχουμε:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w)}{w-z} dw \quad (6.4)$$

αλλά



Σχ. 1

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{w-z} &= \frac{1}{(w-\alpha)-(z-\alpha)} = \frac{1}{w-\alpha} \left\{ \frac{1}{1-\frac{z-\alpha}{w-\alpha}} \right\} = \\
 &= \frac{1}{w-\alpha} \left\{ 1 + \left(\frac{z-\alpha}{w-\alpha}\right) + \left(\frac{z-\alpha}{w-\alpha}\right)^2 + \dots + \left(\frac{z-\alpha}{w-\alpha}\right)^{n-1} + \left(\frac{z-\alpha}{w-\alpha}\right)^n \frac{1}{1-\frac{z-\alpha}{w-\alpha}} \right\} = \\
 &= \frac{1}{w-\alpha} + \frac{z-\alpha}{(w-\alpha)^2} + \frac{(z-\alpha)^2}{(w-\alpha)^3} + \dots + \frac{(z-\alpha)^{n-1}}{(w-\alpha)^n} + \left\{ \frac{z-\alpha}{w-\alpha} \right\}^n \frac{1}{w-z}
 \end{aligned} \tag{6.5}$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δυο μέλη της (6.5) με $f(w)$ και χρησιμοποιώντας την (6.4) έχουμε:

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w)}{w-z} dw = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w)}{w-\alpha} dw + \frac{z-\alpha}{2\pi i} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w)}{(w-\alpha)^2} dw + \dots \\
 &+ \frac{(z-\alpha)^{n-1}}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w)}{(w-\alpha)^n} dw + U_n
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

με
$$U_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \left\{ \frac{z-\alpha}{w-\alpha} \right\}^n \frac{f(w)}{w-z} dw$$

Από τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy: $f^{(n)}(\alpha) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w)}{(w-\alpha)^{n+1}} dw \quad n=0, 1, 2, \dots$

η (6.6) γράφεται:

$$f(z) = f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!} (z-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!} (z-\alpha)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!} (z-\alpha)^{n-1} + U_n$$

Αρκεί να δείξουμε ότι $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0$. Επειδή το w είναι πάνω στην περιφέρεια C_1 , θα είναι:

$$\left| \frac{z-\alpha}{w-\alpha} \right| = \gamma < 1$$

με γ σταθερό. Επίσης έχουμε $|f(w)| < M = \text{σταθερό}$, (επειδή η $f(z)$ είναι αναλυτική, άρα συνεχής και επομένως φραγμένη), και

$$|w-z| = |(w-\alpha)-(z-\alpha)| \geq r_1 - |z-\alpha|$$

όπου r_1 η ακτίνα της C_1 . Τελικά θα έχουμε:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \left\{ \frac{z-\alpha}{w-\alpha} \right\}^n \frac{f(w)}{w-z} dw \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{\gamma^n M}{r_1 - |z-\alpha|} 2\pi r_1 = \frac{\gamma^n M r_1}{r_1 - |z-\alpha|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Στη συνέχεια δίνονται τα αναπτύγματα Taylor για μερικές από τις πιο βασικές συναρτήσεις με τους αντιστοίχους κύκλους σύγκλισης. Για τις πλείοτιμες συναρτήσεις συνήθως χρησιμοποιείται ο πρωτεύον κλάδος.

1. $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots$ $|z| < \infty$
2. $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$ $|z| < \infty$
3. $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-2}}{(2n-2)!} + \dots$ $|z| < \infty$
4. $\ln(z+1) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} + \dots$ $|z| < 1$
5. $\tan^{-1} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{2n-1} + \dots$ $|z| < 1$
6. $(1+z)^p = 1 + pz + \frac{p(p-1)}{2!} z^2 + \dots + \frac{p(p-1)\dots(p-n+1)}{n!} z^n + \dots$ $|z| < 1 \quad p \in \mathbb{R}$

6.3 Το θεώρημα του Laurent

Το προηγούμενο θεώρημα του Taylor ισχύει όταν η $f(z)$ είναι αναλυτική στο σημείο α . Εάν υποθέσουμε τώρα ότι το α είναι ανώμαλο σημείο, τότε, όπως θα δούμε, μπορούμε να έχουμε κάποια ανάπτυξη σε δυναμοσειρά της $f(z)$, η οποία όμως γενικά θα ισχύει σε μια περιοχή που θα ορίζουν δυο κατάλληλοι ομόκεντροι κύκλοι που θα έχουν το σημείο α σαν κέντρο και που ενδεχόμενα η ακτίνα του εσωτερικού κύκλου να είναι μηδέν.

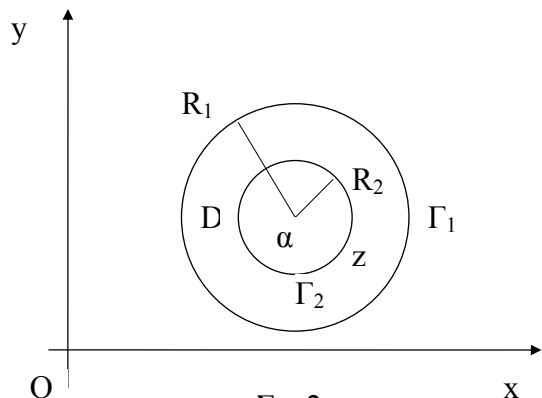
Θεώρημα του Laurent: Ας θεωρήσουμε δυο ομόκεντρες περιφέρειες Γ_1 και Γ_2 με ακτίνες R_1 και R_2 αντίστοιχα και κέντρο το σημείο α , Σχ.2. Έστω $f(z)$ μια αναλυτική συνάρτηση στο δακτύλιο D , που ορίζεται από τις περιφέρειες Γ_1 και Γ_2 . Εάν $z \in D$, τότε ισχύει:

$$f(z) = \dots + \frac{\alpha_{-n}}{(z-\alpha)^n} + \dots + \frac{\alpha_{-1}}{z-\alpha} + \alpha_0 + \alpha_1(z-\alpha) + \dots + \alpha_n(z-\alpha)^n + \dots \quad (6.7)$$

$$\text{όπου} \quad \alpha_n = \oint_{\Gamma_1} \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}} dz \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (6.8\alpha)$$

$$\alpha_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2} (z-\alpha)^{n-1} f(z) dz \quad n=1, 2, \dots \quad (6.8\beta)$$

Στα ολοκληρώματα των σχέσεων (6.8) μπορούμε να αντικαταστήσουμε τις περιφέρειες Γ_1 και Γ_2 με άλλη ομόκεντρη περιφέρεια Γ που περιέχεται



Σχ. 2

μεταξύ των Γ_1 και Γ_2 όποτε οι σχέσεις (6.8) ενοποιούνται στη σχέση:

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}} dz \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Η δυναμοσειρά (6.7) ονομάζεται **σειρά** ή **ανάπτυγμα Laurent της συνάρτησης** $f(z)$. Το τμήμα της σειράς Laurent με τις θετικές δυνάμεις του $z-\alpha$:

$$\alpha_0 + \alpha_1(z-\alpha) + \alpha_2(z-\alpha)^2 + \dots \quad (6.9\alpha)$$

ονομάζεται **αναλυτικό μέρος της σειράς Laurent**, ενώ το υπόλοιπο τμήμα:

$$\frac{\alpha_{-1}}{z-\alpha} + \frac{\alpha_{-2}}{(z-\alpha)^2} + \frac{\alpha_{-3}}{(z-\alpha)^3} + \dots \quad (6.9\beta)$$

ονομάζεται **προτεύον μέρος**.

Στην πράξη συχνά ενδιαφερόμαστε να βρούμε τον μέγιστο δυνατό δακτύλιο D , μέσα στον οποίο η συνάρτηση $f(z)$ αναπτύσσεται σε σειρά Laurent της μορφής

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n (z-\alpha)^n . \text{ Οι ακτίνες } R_1 \text{ και } R_2 \text{ των ομόκεντρων κύκλων βρίσκονται ως εξής:}$$

Γράφουμε τη σειρά:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n (z-\alpha)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z-\alpha)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_{-n}}{(z-\alpha)^n} = A_1 + A_2$$

Προφανώς η περιοχή σύγκλισης της σειράς είναι η τομή των περιοχών σύγκλισης των σειρών A_1 και A_2 . Η περιοχή σύγκλισης της A_1 θα είναι ένας κύκλος με κέντρο το α και ακτίνα έστω R_1 , Σχ.2. Για να βρούμε την περιοχή σύγκλισης της A_2 χρησιμοποιούμε

τον μετασχηματισμό $\zeta=1/(z-\alpha)$ και έχουμε $A_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{-n} \zeta^n$. Έστω r η ακτίνα σύγκλισης

της, δηλαδή η σειρά A_2 συγκλίνει για $|\zeta| < r \Rightarrow 1/|z-\alpha| < r \Rightarrow |z-\alpha| > 1/r = R_2$

Εάν συμβεί $R_1 > R_2$ τότε η αρχική σειρά συγκλίνει στο δακτύλιο που έχει κέντρο το α , εσωτερική ακτίνα R_2 και εξωτερική R_1 . Εάν $R_1 = R_2$ τότε δεν ξέρουμε εάν η σειρά συγκλίνει στην περιφέρεια $|z-\alpha| = R_1 = R_2$. Εάν $R_1 < R_2$ τότε η σειρά αποκλίνει.

Απόδειξη του θεωρήματος του Laurent: Από τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy

για τόπους πολλαπλής συνοχής, (σχέση (5.7)), έχουμε:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w)}{w-z} dw - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_2} \frac{f(w)}{w-z} dw \quad (6.10)$$

Για το πρώτο ολοκλήρωμα έχουμε:

$$\frac{1}{w-z} - \frac{1}{w-\alpha} \left\{ \frac{1}{1 - \frac{z-\alpha}{w-\alpha}} \right\} = \frac{1}{w-\alpha} + \frac{1}{(w-\alpha)^2} + L + \frac{(z-\alpha)^{n-1}}{(w-\alpha)^n} + \left\{ \frac{z-\alpha}{w-\alpha} \right\}^n \frac{1}{w-z} \quad (6.11)$$

και επομένως

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w)}{w-z} dw &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w)}{w-\alpha} dw + \frac{z-\alpha}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w)}{(w-\alpha)^2} dw + \dots + \frac{(z-\alpha)^{n-1}}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w)}{(w-\alpha)^n} dw + U_n \\ &= \alpha_0 + \alpha_1(z-\alpha) + \dots + \alpha_{n-1}(z-\alpha)^{n-1} + U_n \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$\text{όπου } \alpha_0 = \alpha_0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w)}{w-\alpha} dw, \quad \alpha_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w)}{(w-\alpha)^2} dw, \dots, \alpha_{n-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \frac{f(w)}{(w-\alpha)^n} dw, ,$$

$$U_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_1} \left\{ \frac{z-\alpha}{w-\alpha} \right\}^n \frac{f(w)}{w-z} dw$$

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα της (6.10) έχουμε:

$$-\frac{1}{w-z} = \frac{1}{z-\alpha} \left\{ \frac{1}{1 - \frac{w-\alpha}{z-\alpha}} \right\} = \frac{1}{z-\alpha} + \frac{w-\alpha}{(z-\alpha)^2} + \dots + \frac{(w-\alpha)^{n-1}}{(z-\alpha)^n} + \left\{ \frac{w-\alpha}{z-\alpha} \right\}^n \frac{1}{z-w}$$

και επομένως:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2} \frac{f(w)}{w-z} dw &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2} \frac{f(w)}{w-\alpha} dw + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2} \frac{w-\alpha}{(z-\alpha)^2} f(w) dw + \dots + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2} \frac{(w-\alpha)^{n-1}}{(z-\alpha)^n} f(w) dw + V_n = \\ &= \frac{\alpha_{-1}}{z-\alpha} + \frac{\alpha_{-2}}{(z-\alpha)^2} + \dots + \frac{\alpha_{-n}}{(z-\alpha)^n} + V_n \end{aligned} \quad (6.13)$$

$$\text{όπου } \alpha_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2} f(w) dw, \quad \alpha_{-2} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2} (w-\alpha) f(w) dw, \quad \dots, \alpha_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2} (w-\alpha)^{n-1} f(w) dw$$

$$\text{και } V_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_2} \left\{ \frac{w-\alpha}{z-\alpha} \right\}^n \frac{f(w)}{z-w} dw$$

Η σχέση (6.10) με την βοήθεια των (6.12) και (6.13) γράφεται:

$$f(z) = [\alpha_0 + \alpha_1(z-\alpha) + \dots + \alpha_{n-1}(z-\alpha)^{n-1}] + \left[\frac{\alpha_{-1}}{z-\alpha} + \frac{\alpha_{-2}}{(z-\alpha)^2} + \dots + \frac{\alpha_{-n}}{(z-\alpha)^n} \right] + U_n + V_n \quad (6.14)$$

Αυτό που μένει να αποδείξουμε είναι ότι:

$$\alpha) \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0 \quad \beta) \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = 0$$

Η τιμή του πρώτου ορίου αποδεικνύεται όπως στην απόδειξη του θεωρήματος του Taylor.

Για το δεύτερο όριο παρατηρούμε ότι επειδή το σημείο w είναι πάνω στη Γ_2 έχουμε:

$$\left| \frac{w - \alpha}{z - \alpha} \right| = k = \text{σταθ.} < 1$$

Επίσης, επειδή η $f(z)$ είναι αναλυτική στο δακτύλιο, που ορίζουν οι ομόκεντροι κύκλοι με ακτίνες R_1 και R_2 και πάνω σ' αυτές, θα είναι συνεχής και άρα φραγμένη. Επομένως υπάρχει μια σταθερά $M > 0$, έτσι ώστε $|f(z)| < M$ και επειδή

$$|z - w| = |(z - \alpha) - (w - \alpha)| \geq |z - \alpha| - R_2$$

θα έχουμε τελικά:

$$|V_n| = \frac{1}{2\pi} \left| \oint_{\Gamma_2} \left\{ \frac{w - \alpha}{z - \alpha} \right\}^n \frac{f(w)}{z - \alpha} dw \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{k^n M}{|z - \alpha| - R_2} = \frac{k^n M R_2}{|z - \alpha| - R_2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

6.4 Ανώμαλα σημεία.

Τα ανώμαλα σημεία μιας συνάρτησης $f(z)$ μπορούμε να τα ταξινομήσουμε ανάλογα με την μορφή που έχει η σειρά Laurent σε σχέση με τα σημεία αυτά. Έτσι έχουμε:

Πόλοι: Εάν το πρωτεύον μέρος της σειράς Laurent της $f(z)$ έχει πεπερασμένο πλήθος όρων:

$$\frac{\alpha_{-1}}{z - \alpha} + \frac{\alpha_{-2}}{(z - \alpha)^2} + \dots + \frac{\alpha_{-n}}{(z - \alpha)^n} \quad \text{με } \alpha_{-n} \neq 0$$

τότε το σημείο α λέγεται **πόλος τάξης n** .

2. Απαλείψιμο ανώμαλο σημείο: Εάν η συνάρτηση $f(z)$ δεν ορίζεται σε κάποιο σημείο $z = \alpha$, αλλά υπάρχει το όριο $\lim_{z \rightarrow \alpha} f(z)$, τότε το α ονομάζεται **απαλείψιμο ανώμαλο σημείο** ή **απαλείψιμη ανωμαλία** της συνάρτησης. Στην περίπτωση αυτή θέτουμε:

$$f(\alpha) = \lim_{z \rightarrow \alpha} f(z)$$

Παράδειγμα: Η συνάρτηση $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ στο σημείο $z = 0$ δεν ορίζεται αλλά υπάρχει

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1. \text{ Επομένως μπορούμε να θέσουμε } f(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

Ας σημειωθεί ότι η αντίστοιχη σειρά Laurent:

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \left[z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots \right] = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \dots$$

είναι στην ουσία σειρά Taylor.

3. Ουσιώδη ανώμαλα σημεία: Το σημείο $z = \alpha$ ονομάζεται **ουσιώδες ανώμαλο σημείο** εάν το πρωτεύον μέρος της σειράς Laurent έχει άπειρο πλήθος όρων, π.χ.

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots$$

επομένως το $z=0$ είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο.

4. Σημεία διακλάδωσης: Όπως ορίστηκε στην παράγραφο 2.6, ένα σημείο $z=a$ είναι σημείο διακλάδωσης όταν η συνάρτηση $f(z)$ αλλάζει τιμή, (αλλάζει κλάδο), όταν εκτελούμε μια περιφορά γύρω από το σημείο a . Σε κάθε όμως κλάδο η συνάρτηση $f(z)$ είναι μονότιμη και ισχύουν όλα τα θεωρήματα για αναλυτικές συναρτήσεις και ειδικότερα το θεώρημα του Taylor. Π.χ. η συνάρτηση $f(z)=\sqrt{z}$ είναι μονότιμη στον κλάδο που ορίζεται από τη σχέση $f(1)=1$, η δε σειρά Taylor γύρω από το σημείο 1 είναι της μορφής:

$$f(z) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(z-1) + \frac{f''(1)}{2!}(z-1)^2 + \dots$$

με ακτίνα σύγκλισης $R=1$, όση είναι η απόσταση του σημείου $z=1$ από το πλησιέστερο ανώμαλο σημείο, δηλ το σημείο διακλάδωσης $z=0$.

Ασκήσεις στις σειρές Laurent .

1) Να αναπτυχθεί σε σειρά Laurent κάθε μια από τις παρακάτω συναρτήσεις και για το αντίστοιχο ανώμαλο σημείο. Σε κάθε περίπτωση να προσδιοριστεί το είδος της ανωμαλίας και ο τόπος σύγκλισης της σειράς.

α) $f(z) = \frac{e^{2z}}{(z-1)^3}$ Το ανώμαλο σημείο είναι το $a=1$ και έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{e^{2z}}{(z-1)^3} &= \frac{e^{2(z-1)+2}}{(z-1)^3} = e^2 \frac{e^{2(z-1)}}{(z-1)^3} = \\ &= \frac{e^2}{(z-1)^3} \left[1 + 2(z-1) + \frac{2^2(z-1)^2}{2!} + \frac{2^3(z-1)^3}{3!} + \frac{2^4(z-1)^4}{4!} + \dots \right] = \\ &= e^2 \left[\frac{1}{(z-1)^3} + \frac{2}{(z-1)^2} + \frac{2}{z-1} + \frac{4}{3} + \frac{2}{3}(z-1) + \dots \right] = \\ &= \frac{e^2}{(z-1)^3} + \frac{2e^2}{(z-1)^2} + \frac{2e^2}{z-1} + \frac{4}{3}e^2 + \frac{2e^2}{3}(z-1) + \dots \end{aligned}$$

Το σημείο $a=1$ είναι πόλος 3ης τάξης και η σειρά συγκλίνει $\forall z \neq 1$, γιατί η μόνη σειρά που χρησιμοποιήσαμε, ήταν η σειρά Taylor της συνάρτησης $e^{2(z-1)}$ που συγκλίνει $\forall z \in \mathbb{C}$.

β) $f(z) = (z-3)\sin\left[\frac{1}{z+2}\right]$. Το ανώμαλο σημείο είναι το $a=-2$ και έχουμε:

$$\begin{aligned} (z-3)\sin\left[\frac{1}{z+2}\right] &= [(z+2)-5]\left[\frac{1}{z+2}-\frac{1}{3!(z+2)^3}+\frac{1}{5!(z+2)^5}-\frac{1}{7!(z+2)^7}+\dots\right]= \\ &= 1-\frac{5}{z+2}-\frac{1}{3!(z+2)^2}+\frac{5}{3!(z+2)^3}+\frac{1}{5!(z+2)^4}-\dots \end{aligned}$$

Το σημείο $a=-2$ είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο και η σειρά συγκλίνει $\forall z \neq -2$.

2) Να αναπτυχθεί σε σειρά Laurent η συνάρτηση $f(z)=\frac{z}{(z+1)(z+2)}$ στις παρακάτω περιοχές:

i) $|z|<1$, ii) $1<|z|<2$, iii) $|z|>2$, iv) $0<|z+2|<1$, v) $|z+2|>1$, vi) $0<|z+1|<1$, vii) $|z+1|>1$.

Κατ' αρχή η συνάρτηση $f(z)$ μπορεί να γράφει: $f(z)=z\left[\frac{1}{z+1}-\frac{1}{z+2}\right]$ Για όλες τις περιπτώσεις θα χρησιμοποιήσουμε την γεωμετρική σειρά:

$$1+z+z^2+z^3+\dots+z^n+\dots=\frac{1}{1-z} \quad \text{όταν } |z|<1$$

και $1-z+z^2-z^3+\dots+(-1)^{2n+1}z^n+\dots=\frac{1}{1+z} \quad \text{όταν } |z|<1$

Επομένως:

i) Επειδή $|z|<1 \Rightarrow |z|<2$ και θα έχουμε:

$$\begin{aligned} f(z) &= z\left[\frac{1}{z+1}-\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z}{2}}\right] = z\left[\left\{1-z+z^2-z^3+\dots\right\}-\frac{1}{2}\left\{1-\frac{z}{2}+\left(\frac{z}{2}\right)^2-\left(\frac{z}{2}\right)^3+\dots\right\}\right]= \\ &= z\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(-z+\frac{z}{4}\right)+\left(z^2-\frac{1}{2}\frac{z^2}{2^2}\right)+\left(-z^3+\frac{z^3}{2\times 2^3}\right)+\dots\right]= \\ &= \frac{z}{2}-\frac{3}{4}z^2+\frac{7}{8}z^3-\frac{15}{16}z^4+\dots \end{aligned}$$

Η σειρά αυτή συγκλίνει για $|z|<1$.

ii) Στην περιοχή $1<|z|<2$ έχουμε $|1/z|<1$ και $|z/2|<1$. Επομένως

$$f(z)=z\left[\frac{1}{z+1}-\frac{1}{z+2}\right]=z\left[\frac{1}{z}\frac{1}{1+\frac{1}{z}}-\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z}{2}}\right]=$$

$$\begin{aligned}
&= z \left[\frac{1}{z} \left\{ 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} + \dots \right\} - \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} - \frac{z^3}{2^3} + \dots \right\} \right] = \\
&= \left[1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} + \dots \right] - \left[\frac{z}{2} - \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{8} - \frac{z^4}{16} + \dots \right] = \\
&= \dots - \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} + 1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} - \frac{z^3}{8} + \frac{z^4}{16} + \dots
\end{aligned}$$

iii) Στην περιοχή $|z| > 2$ έχουμε ότι και $|z| > 1$ δηλαδή $|2/z| < 1$ και $|1/z| < 1$. Επομένως:

$$\begin{aligned}
f(z) &= z \left[\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+2} \right] = z \left[\frac{1}{z \left(1 + \frac{1}{z} \right)} - \frac{1}{z \left(1 + \frac{2}{z} \right)} \right] = \\
&= z \left[\frac{1}{z} \left\{ 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} + \dots \right\} - \frac{1}{z} \left\{ 1 - \frac{2}{z} + \frac{2^2}{z^2} - \frac{2^3}{z^3} + \dots \right\} \right] = \\
&= 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} + \dots - 1 + \frac{2}{z} - \frac{4}{z^2} + \frac{8}{z^3} - \dots = \frac{1}{z} + \frac{-3}{z^2} + \frac{7}{z^3} + \dots
\end{aligned}$$

iv) Στην περιοχή $0 < |z+2| < 1$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{z}{z+2} \cdot \frac{1}{z+1} = \frac{z}{z+2} \cdot \frac{1}{(z+2)-1} = \frac{-z}{z+2} \cdot \frac{1}{1-(z+2)} = \frac{2-(z+2)}{z+2} \cdot \frac{1}{1-(z+2)} = \\
&= \left[\frac{2}{z+2} - 1 \right] \left[1 + (z+2) + (z+2)^2 + (z+2)^3 + \dots \right] = \left[\frac{2}{z+2} + 2 + 2(z+2) + 2(z+2)^2 + \dots \right] - \\
&\quad - \left[1 + (z+2) + (z+2)^2 + (z+2)^3 + \dots \right] = \frac{2}{z+2} + 1 + (z+2) + (z+2)^2 + \dots
\end{aligned}$$

v) Στην περιοχή $|z+2| > 1$ έχουμε $|1/(z+2)| < 1$. Επομένως:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{z}{z+2} \cdot \frac{1}{z+1} = \frac{z}{z+2} \cdot \frac{1}{(z+2)-1} = \frac{z}{z+2} \cdot \frac{1}{(z+2) \left[1 - \frac{1}{z+2} \right]} = \\
&= \frac{(z+2)-2}{(z+2)^2} \left[1 + \frac{1}{z+2} + \frac{1}{(z+2)^2} + \frac{1}{(z+2)^3} + \dots \right] = \\
&= \left[\frac{1}{z+2} - \frac{2}{(z+2)^2} \right] \left[1 + \frac{1}{z+2} + \frac{1}{(z+2)^2} + \frac{1}{(z+2)^3} + \dots \right] =
\end{aligned}$$

$$= \left[\frac{1}{z+2} + \frac{1}{(z+2)^2} + \frac{1}{(z+2)^3} + \dots \right] - 2 \left[\frac{1}{(z+2)^2} + \frac{1}{(z+2)^3} + \dots \right] =$$

$$= \frac{1}{z+2} - \frac{1}{(z+2)^2} - \frac{1}{(z+2)^3} - \frac{1}{(z+2)^4} - \dots$$

vi) Στην περιοχή $0 < |z+1| < 1$ έχουμε:

$$f(z) = \frac{z}{z+1} \cdot \frac{1}{1+(z+1)} = \frac{z}{z+1} \left[1 - (z+1) + (z+1)^2 - (z+1)^3 + \dots \right] =$$

$$= \frac{(z+1)-1}{z+1} \left[1 - (z+1) + (z+1)^2 - (z+1)^3 + \dots \right] = \left[1 - \frac{1}{z+1} \right] \left[1 - (z+1) + (z+1)^2 - (z+1)^3 + \dots \right] =$$

$$= 1 - (z+1) + (z+1)^2 - (z+1)^3 + \dots - \frac{1}{z+1} + 1 - (z+1) + (z+1)^2 - \dots = -\frac{1}{z+1} + 2 - 2(z+1) + 2(z+1)^2 - \dots$$

vii) Στην περιοχή $|z+1| > 1$ έχουμε $|1/(z+1)| < 1$:

$$f(z) = \frac{z}{z+1} \cdot \frac{1}{1+(z+1)} = \frac{(z+1)-1}{z+1} \cdot \frac{1}{z+1} \left[\frac{1}{1 + \frac{1}{z+1}} \right] =$$

$$= \left[\frac{1}{z+1} - \frac{1}{(z+1)^2} \right] \left[1 - \frac{1}{z+1} + \frac{1}{(z+1)^2} - \frac{1}{(z+1)^3} + \dots \right] =$$

$$= \left[\frac{1}{z+1} - \frac{1}{(z+1)^2} + \frac{1}{(z+1)^3} - \frac{1}{(z+1)^4} + \dots \right] - \left[\frac{1}{(z+1)^2} - \frac{1}{(z+1)^3} + \frac{1}{(z+1)^4} - \dots \right] =$$

$$= \frac{1}{z+1} - 2 \frac{1}{(z+1)^2} + \frac{2}{(z+1)^3} - \frac{2}{(z+1)^4} + \dots$$

3) Να βρεθεί η σειρά Laurent της συνάρτησης $f(z) = \frac{1}{1-z} + \frac{2}{2-z}$ γύρω από το σημείο $z=0$.

Τα ανώμαλα σημεία της συνάρτησης είναι τα σημεία $a_1=1$ και $a_2=2$, που είναι απλοί πόλοι. Επομένως υπάρχουν τρεις περιοχές γύρω από το σημείο $z=0$, για τις οποίες πρέπει να βρούμε τις αντίστοιχες σειρές Laurent.

i) Για $|z| < 1$ θα έχουμε και $|z| < 2$ δηλαδή $|z/2| < 1$ και επομένως:

$$f(z) = \frac{1}{1-z} + \frac{2}{2\left(1-\frac{z}{2}\right)} = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = 1 + z + z^2 + \dots + 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{2^2} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \left[1 + \frac{1}{2^n} \right] z^n$$

ii) Για $|z|>2$ δηλαδή $|2/z|<1$ θα έχουμε και $|z|>1$ δηλαδή $|1/z|<1$. Επομένως:

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)} - \frac{2}{z\left(1-\frac{2}{z}\right)} = -\frac{1}{z}\left[1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\dots\right] - \frac{2}{z}\left[1+\frac{2}{z}+\frac{2^2}{z^2}+\dots\right] = \\ &= -\left[\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\dots\right] - \left[\frac{2}{z}+\frac{2^2}{z^2}+\frac{2^3}{z^3}+\dots\right] = -\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1+2^n}{z^n}\right] \end{aligned}$$

iii) Για $1<|z|<2$ έχουμε $|1/z|<1$ και $|z/2|<1$. Επομένως:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1-z} + \frac{2}{2-z} = \frac{-1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)} + \frac{2}{2\left(1-\frac{z}{2}\right)} = -\frac{1}{z}\left[1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\dots\right] + \left[1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\dots\right] = \\ &= -\left[\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\dots\right] + \left[1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{2^2}+\frac{z^3}{2^3}+\dots\right] = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{z}{2}\right)^n - \frac{1}{z^n}\right] \end{aligned}$$

4) Να βρεθεί η σειρά Laurent της προηγούμενης συνάρτησης γύρω από το σημείο $z=1$.

Η περιοχή σύγκλισης σ' αυτή την περίπτωση είναι:

α) ένας κύκλος με κέντρο το σημείο 1 και ακτίνα R ίση με την απόσταση του σημείου 1 από το πλησιέστερο ανώμαλο σημείο, που είναι το 2. Άρα θα έχουμε $R=1$ και επομένως η περιοχή σύγκλισης της σειράς Laurent, που θα βρούμε, είναι $0<|z-1|<1$. Έχουμε τώρα:

$$f(z) = \frac{-1}{z-1} + \frac{2}{1-(z-1)} = \frac{-1}{z-1} + 2\left[1+(z-1)+(z-1)^2+(z-1)^3+\dots\right]$$

β) Επίσης μπορούμε να έχουμε την περιοχή $|z-1|>1$. Σ' αυτή την περίπτωση έχουμε:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1-z} + \frac{2}{2-z} = \frac{1}{1-z} + \frac{2}{1-(z-1)} = \frac{1}{1-z} + \frac{1}{z-1} \cdot \frac{2}{\frac{1}{z-1}-1} = \\ &= \frac{1}{1-z} - \frac{2}{z-1} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z-1}} = \frac{1}{1-z} - \frac{2}{z-1}\left[1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{(z-1)^3}+\dots\right] = \\ &= \frac{1}{1-z} - \frac{2}{z-1} - \frac{2}{(z-1)^2} - \frac{2}{(z-1)^3} + \dots = \frac{-3}{z-1} - 2\left[\frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{(z-1)^3} + \dots\right] \end{aligned}$$

5) Να βρεθεί η σειρά Laurent της συνάρτησης $f(z)=\exp(1/z)$ γύρω από το σημείο $z=0$.

Από το ανάπτυγμα MacLaurin για την συνάρτηση $\exp x$ έχουμε:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

Το $z=0$ είναι ένα ουσιώδες ανώμαλο σημείο.

6.5 Ακέραιες και Μερόμορφες συναρτήσεις

α) Μια συνάρτηση $f(z)$, που είναι αναλυτική σε κάθε πεπερασμένο σημείο του μιγαδικού επιπέδου, (εκτός δηλαδή από το σημείο ∞), λέγεται **ακέραια συνάρτηση**. Μια ακέραια συνάρτηση μπορεί να παρασταθεί από μια σειρά Taylor με άπειρη ακτίνα σύγκλισης. Π.χ. οι συναρτήσεις $\sin z$, e^z είναι ακέραιες συναρτήσεις.

β) Μια συνάρτηση $f(z)$, που είναι αναλυτική παντού στο πεπερασμένο μιγαδικό επίπεδο, εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος πόλων, ονομάζεται **μερόμορφη συνάρτηση**.

6.6 Αναλυτική συνέχιση

Από την άσκηση 3 της παραγράφου 6.4, είδαμε ότι η συνάρτηση

$f(z) = \frac{1}{1-z} + \frac{2}{2-z}$ έχει τρεις διαφορετικές σειρές Laurent γύρω από το σημείο $z=0$.

$$S_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[1 + \frac{1}{2^n} \right] z^n \quad \text{για } |z| < 1$$

$$S_2(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{z}{2} \right)^n - \frac{1}{z^n} \right] \quad \text{για } 1 < |z| < 2$$

$$S_3(z) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 2^n}{z^n} \quad \text{για } 2 < |z|$$

Έτσι λοιπόν μπορούμε να υπολογίσουμε τη τιμή της $f(z)$ για όλα τα z του μιγαδικού επιπέδου εκτός από εκείνα τα z που βρίσκονται πάνω στις περιφέρειες $|z|=1$ και $|z|=2$. Φυσικά εάν κανείς ξέρει τον τύπο της συνάρτησης $f(z)$ η τιμή της για κάθε z θα υπολογισθεί από τον τύπο της. Συμβαίνει όμως συχνά να έχει κανείς κάποιο ανάπτυγμα της, (Taylor ή Laurent), που ισχύει όμως σε μια ορισμένη περιοχή, (κύκλος ή δακτύλιος). Το πρόβλημα τώρα είναι πως θα μπορέσουμε να βρούμε ένα άλλο ανάπτυγμα της συνάρτησης $f(z)$ που να συγκλίνει σε μια περιοχή, η οποία να περιλαμβάνει κάποιο τμήμα εξωτερικό της προηγούμενης περιοχής. Η μέθοδος που συνήθως χρησιμοποιούμε για τον σκοπό αυτό λέγεται **αναλυτική επέκταση ή συνέχιση της συνάρτησης** $f(z)$, βασίζεται στη σειρά Taylor και είναι η εξής:

Ας υποθέσουμε ότι η άγνωστη συνάρτηση $f(z)$ παριστάνεται από τη σειρά Taylor

$$f(z) = a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \dots \quad (6.14)$$

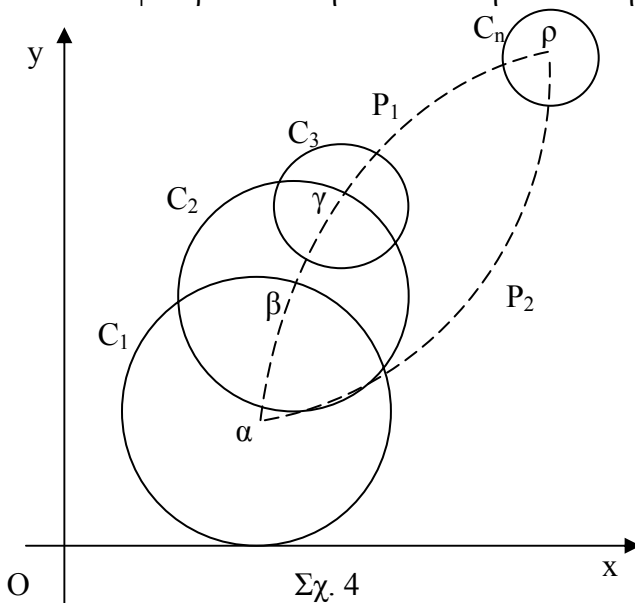
η οποία συγκλίνει μέσα στην περιφέρεια C_1 με κέντρο το σημείο a , Σχ. 4. Διαλέγοντας τώρα ένα σημείο β στο εσωτερικό της C_1 και χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα (6.14)

μπορούμε να υπολογίσουμε τις τιμές της $f(z)$ και των παραγώγων της στο σημείο β και να γράψουμε την σειρά:

$$f(z) = f(\beta) + \frac{f'(\beta)}{1!}(z-\beta) + \frac{f''(\beta)}{2!}(z-\beta)^2 + \dots = \beta_0 + \beta_1(z-\beta) + \beta_2(z-\beta)^2 + \dots \quad (6.15)$$

που θα συγκλίνει στο εσωτερικό μιας περιφέρειας C_2 με κέντρο το σημείο β . Εάν η C_2 δεν περιέχεται μέσα στη C_1 , αλλά εκτείνεται στο εξωτερικό της C_1 , τότε μπορούμε να επαναλάβουμε τα παραπάνω και να υπολογίσουμε τις τιμές της $f(z)$ και των παραγώγων της σε κάποιο σημείο γ , εσωτερικό της C_2 αλλά εξωτερικό της C_1 και να έχουμε ένα νέο ανάπτυγμα που θα συγκλίνει γύρω από το σημείο γ και στο εσωτερικό μιας περιφέρειας C_3 . Η διαδικασία αυτή μπορεί να επαναληφθεί πολλές φορές.

Είναι φανερό ότι στην αναλυτική επέκταση πρέπει να αποφεύγονται τα ανώμαλα σημεία.



Σχ. 4

Έτσι π.χ. δεν μπορεί να υπάρχει ανώμαλο σημείο στο εσωτερικό της C_2 και συγχρόνως πάνω στη C_1 , γιατί σε μια τέτοια περίπτωση η (6.15) θα αποκλίνει στο σημείο αυτό. Σε μερικές περιπτώσεις τα ανώμαλα σημεία πάνω στην περιφέρεια είναι άπειρα σε πλήθος και αποτελούν ένα **πυκνό σύνολο**, (δηλαδή σε κάθε τόξο της περιφέρειας, οσοδήποτε μικρό υπάρχουν άπειρα σε πλήθος αριθμήσιμα ανώμαλα σημεία). Σε μια τέτοια περίπτωση η αναλυτική συνέχιση είναι αδύνατη και η περιφέρεια ονομάζεται **φυσικό σύνορο**.

Πηγαίνοντας από την περιφέρεια C_1 στην περιφέρεια C_n ακολουθούμε ένα δρόμο P_1 , που ορίζεται από τα κέντρα $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \rho$. Μπορούμε όμως να ακολουθήσουμε και άλλο δρόμο P_2 , που ορίζεται από τα κέντρα $\alpha', \beta', \gamma', \dots, \rho$. Αποδεικνύεται ότι εάν ο τόπος που περιέχεται μεταξύ των δρόμων P_1 και P_2 δεν περιέχει ανώμαλα σημεία, τότε η τελική σειρά με κύκλο σύγκλισης το εσωτερικό της C_n δεν εξαρτάται από τον δρόμο που ακολουθήσαμε για να φτάσουμε σ' αυτή.

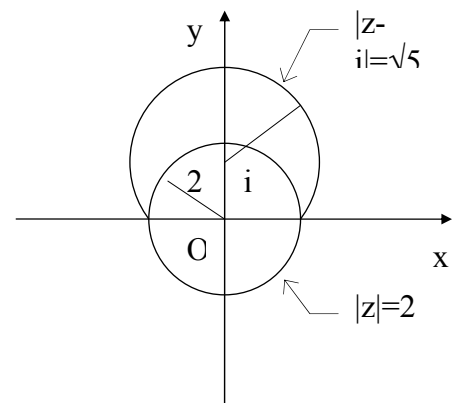
Ασκήσεις

- 1) Δείξτε ότι οι σειρές: α) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$ β)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(2-i)^{n+1}}$$

είναι αναλυτικές επεκτάσεις η μια της άλλης.

Λύση



Σχ. 5

α) Με το κριτήριο του λόγου βρίσκουμε ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$ συγκλίνει για $|z| < 2$, το δε άθροισμα της είναι $1/(2-z)$. (επειδή η σειρά είναι γεωμετρική με πρώτο ορο $1/2$ και λογο $z/2$).

β) Με το κριτήριο του λόγου βρίσκουμε ότι η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(2-i)^{n+1}}$ συγκλίνει για $\left| \frac{z-i}{2-i} \right| < 1$ δηλαδή για $|z-i| < \sqrt{5}$ το δε άθροισμα της είναι $1/(2-z)$.

Επειδή κάθε δυναμοσειρά παριστάνει την ίδια συνάρτηση στο κοινό μέρος των δυο κύκλων $|z| < 2$ και $|z-i| < \sqrt{5}$, Σχ 5, έπεται ότι κάθε σειρά είναι αναλυτική επέκταση της άλλης.

2) Δείξτε ότι η σειρά:

$1+z+z^2+z^4+z^8+\dots+z^{2^n}+\dots=1+\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$ δεν μπορεί να επεκταθεί αναλυτικά έξω από τον κυκλικό δίσκο $|z| < 1$.

Λύση: Προφανώς η σειρά $1+z+z^2+z^4+z^8+\dots+z^{2^n}+\dots$ συγκλίνει για $|z| < 1$. Εάν θέσουμε $f(z) = 1+z+z^2+z^4+z^8+\dots+z^{2^n}+\dots$ παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} f(z^2) &= f(z) - z \\ f(z^4) &= f(z) - z - z^2 \\ &\dots \\ f(z^{2^n}) &= f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} z^{2^k} \end{aligned}$$

Εάν το z τείνει στο 1 με $|z| < 1$ δηλαδή $z \rightarrow 1^-$, τότε $f(z) \rightarrow \infty$ δηλαδή το σημείο $z=1$ είναι ανώμαλο σημείο. Από τη σχέση $f(z^2) = f(z) - z$ βλέπουμε ότι εάν $z^2 \rightarrow 1^-$ τότε $f(z^2) \rightarrow \infty$, δηλαδή $f(z) - z \rightarrow \infty$ δηλαδή εάν το $z^2 = 1$ είναι ανώμαλο σημείο τότε και το $z = \sqrt{1}$ είναι ανώμαλο σημείο. Γενικά:

Εάν $z^{2^n} \rightarrow 1^-$ τότε $f(z^{2^n}) \rightarrow \infty$, δηλαδή $f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} z^{2^k} \rightarrow \infty$ δηλαδή οι μιγαδικοί αριθμοί

$z^{2^n} = 1$ ή $z = \sqrt[n]{1}$ είναι ανώμαλα σημεία της $f(z)$. Επομένως οι ρίζες των εξισώσεων:

$$z^2=1, z^4=1, z^8=1, z^{2^n}=1, \dots$$

είναι ανώμαλα σημεία της $f(z)$. Αλλά όλα αυτά τα ανώμαλα σημεία, που είναι οι άρτιες ρίζες της μονάδας, βρίσκονται πάνω στην περιφέρεια $|z|=1$ και σε οποιονδήποτε τόξο της, οσοδήποτε μικρό υπάρχουν άπειρα σε πλήθος ανώμαλα σημεία. Άρα η περιφέρεια $|z|=1$ αποτελεί ένα φυσικό σύνορο για την $f(z)$ και η αναλυτική επέκταση έξω από την περιφέρεια είναι αδύνατη.

6.7 Ολοκληρωτικά Υπόλοιπα

Ας θεωρήσουμε μια συνάρτηση $f(z)$, που είναι αναλυτική πάνω στην περιφέρεια C και στο εσωτερικό της, εκτός από το κέντρο της a . Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση $f(z)$ έχει ένα ανάπτυγμα Laurent:

$$f(z) = \cdots + \frac{\alpha_{-n}}{(z-\alpha)^n} + \cdots + \frac{\alpha_{-1}}{z-\alpha} + \alpha_0 + \alpha_1(z-\alpha) + \cdots + \alpha_n(z-\alpha)^n + \cdots \quad (6.16)$$

όπου οι συντελεστές α_n δίνονται από τον τύπο:

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-\alpha)^{n+1}} dz \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (6.17)$$

Για $n=-1$ η (6.17) δίνει: $\oint_C f(z) dz = 2\pi i \alpha_{-1}$ (6.18)

δηλαδή εάν ενδιαφερόμαστε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\oint_C f(z) dz$ πρέπει να βρούμε

τον συντελεστή α_{-1} του αναπτύγματος (6.16) από τον οποίο και μόνο εξαρτάται το ολοκλήρωμα $\oint_C f(z) dz$. Γι' αυτό ο συντελεστής α_{-1} ονομάζεται **ολοκληρωτικό υπόλοιπο** ή απλά υπόλοιπο της $f(z)$ και συμβολίζεται με $\text{Res}[f(z):a]$ ή πιο απλά $\text{Res}(a)$.

Τη σχέση (6.18) μπορούμε να την πάρουμε και από το ανάπτυγμα (6.16), ολοκληρώνοντας κατά όρους και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι:

$$\oint_C \frac{dz}{(z-\alpha)^p} = \begin{cases} 2\pi i & \text{όταν } p=1 \\ 0 & \text{όταν } p \in \mathbb{Z} - \{1\} \end{cases}$$

Στην περίπτωση που το ανώμαλο σημείο $z=a$ είναι πόλος τάξης n , τότε το αντίστοιχο ολοκληρωτικό υπόλοιπο, δηλαδή ο συντελεστής α_{-1} μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση:

$$\alpha_{-1} = \text{Res}(a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \{ (z-\alpha)^n f(z) \} \quad (6.20)$$

Πράγματι, επειδή το a είναι πόλος τάξης n , η αντίστοιχη σειρά Laurent της $f(z)$ είναι:

$$f(z) = \frac{\alpha_{-n}}{(z-\alpha)^n} + \frac{\alpha_{-n+1}}{(z-\alpha)^{n-1}} + \cdots + \frac{\alpha_{-1}}{z-\alpha} + \alpha_0 + \alpha_1(z-\alpha) + \alpha_2(z-\alpha)^2 + \dots \quad (6.21)$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δυο μέλη της (6.21) με $(z-\alpha)^n$ έχουμε:

$$(z-\alpha)^n f(z) = \alpha_{-n} + \alpha_{-n+1}(z-\alpha) + \dots + \alpha_{-1}(z-\alpha)^{n-1} + \alpha_0(z-\alpha)^n + \dots \quad (6.22)$$

που είναι η σειρά Taylor της $(z-\alpha)^n f(z)$ στο σημείο a . Παραγωγίζοντας τώρα και τα δυο μέλη $n-1$ φορές ως προς z βρίσκουμε:

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \{(z - \alpha)^n f(z)\} = (n-1)! \alpha_{-1} + n(n-1) \dots 2\alpha_0(z - \alpha) + \dots$$

Εάν τώρα πάρουμε $z \rightarrow \alpha$ βρίσκουμε:

$$\lim_{z \rightarrow \alpha} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \{(z - \alpha)^n f(z)\} = (n-1)! \alpha_{-1}$$

απ' όπου προκύπτει η (6.20).

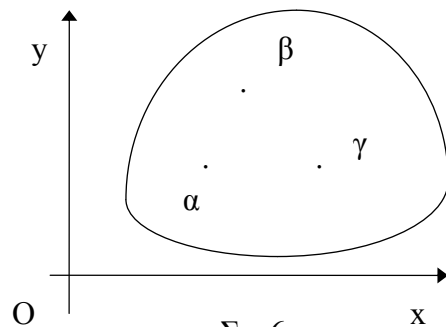
6.8 Το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων

Εάν τώρα η συνάρτηση $f(z)$ είναι αναλυτική πάνω σε μια απλή κλειστή καμπύλη C , η οποία περικλείει τα σημεία $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ Σχ.6, που είναι ανώμαλα σημεία της $f(z)$, τότε το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων σ' αυτή την περίπτωση λέει ότι:

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i [\alpha_{-1} + \beta_{-1} + \gamma_{-1} + \dots] = 2\pi i [\text{Res}(\alpha) + \text{Res}(\beta) + \text{Res}(\gamma) + \dots] \quad (6.23)$$

δηλαδή το ολοκλήρωμα της $f(z)$ πάνω στην καμπύλη C ισούται με $2\pi i$ φορές το άθροισμα των ολοκληρωτικών υπολοίπων της $f(z)$ στα ανώμαλα σημεία που περικλείονται από την C .

Ας σημειωθεί ότι η (6.23) είναι μια γενίκευση και του θεωρήματος των ολοκληρωτικών τύπων του Cauchy.



Σχ. 6

6.9 Υπολογισμός ορισμένων πραγματικών ολοκληρωμάτων

Μια σημαντική εφαρμογή της θεωρίας των ολοκληρωτικών υπολοίπων είναι ο υπολογισμός διαφόρων μορφών ορισμένων και γενικευμένων πραγματικών ολοκληρωμάτων. Όπως θα δούμε παρακάτω, ο υπολογισμός αυτών των ολοκληρωμάτων είναι αρκετά εύκολος χρησιμοποιώντας την μέθοδο των ολοκληρωτικών υπολοίπων. Τα ίδια ολοκληρώματα υπολογίζονται αρκετά δύσκολα με την βοήθεια της πραγματικής ανάλυσης.

Στη συνέχεια θα μελετήσουμε μερικές μορφές πραγματικών ολοκληρωμάτων.

6.9.1 Ολοκληρώματα της μορφής: $\int_0^{2\pi} f(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$

Θεωρούμε το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_0^{2\pi} f(\cos \theta, \sin \theta) d\theta \quad (6.24)$$

με f ρητή συνάρτηση των μεταβλητών της. Η μορφή των ολοκληρωμάτων (6.24) εύκολα ανάγεται σε κλειστό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μιας μιγαδικής αναλυτικής συνάρτησης, εάν θέσουμε $z=e^{i\theta}$, τότε θα έχουμε:

$$dz=ie^{i\theta}d\theta=izd\theta \Rightarrow d\theta=dz/iz \text{ και}$$

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}=\frac{1}{2}\left[z+\frac{1}{z}\right], \quad \sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}=\frac{1}{2i}\left[z-\frac{1}{z}\right]$$

Όταν το θ μεταβάλλεται από 0 έως 2π , το z διατρέχει την μοναδιαία περιφέρεια $|z|=1$ κατά την θετική φορά. Έτσι το ολοκλήρωμα (6.24) μετασχηματίζεται στο ολοκλήρωμα:

$$I = \oint_{|z|=1} f\left[\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right] \frac{dz}{iz} \quad (6.25)$$

Προφανώς η ολοκληρωτέα συνάρτηση στο ολοκλήρωμα (6.25) είναι ρητή της μορφής:

$$f(z)=\frac{\alpha_0+\alpha_1z+\dots+\alpha_nz^n}{\beta_0+\beta_1z+\dots+\beta_mz^m} \quad (6.26)$$

και επομένως αναλυτική στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου $|z|=1$, εκτός από ένα πεπερασμένο αριθμό $N \leq m$ ανώμαλων σημείων z_k , τα οποία είναι ρίζες του παρονομαστή του κλάσματος (6.26) και επομένως πόλοι της $f(z)$. Υποθέτουμε ότι κανένα ανώμαλο σημείο δεν βρίσκεται πάνω στην περιφέρεια C .

Από το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε:

$$I = \int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta) d\theta = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Res}(f, z_k)$$

Παράδειγμα 1: Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+\alpha \cos\theta} \quad \text{με } |\alpha| < 1$$

Θέτουμε $z=e^{i\theta} \Rightarrow d\theta=dz/iz$, $\cos\theta=\frac{1}{2}\left[z+\frac{1}{z}\right]$, $\sin\theta=\frac{1}{2i}\left[z-\frac{1}{z}\right]$ και έχουμε:

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{1+\alpha \frac{z+\frac{1}{z}}{2}} = \frac{2}{i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{\alpha z^2 + 2z + \alpha}$$

Οι ρίζες του παρονομαστή $\alpha z^2+2z+\alpha$ είναι: $z_{1,2}=-\frac{1}{\alpha} \pm \sqrt{\frac{1}{\alpha^2}-1}$

που είναι πόλοι τάξης 1 της ολοκληρωτέας συνάρτησης. Από τους πόλους αυτούς μόνο ο πόλος $z_1 = -\frac{1}{\alpha} + \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} - 1}$ βρίσκεται μέσα στον μοναδιαίο κύκλο διότι $\left| -\frac{1}{\alpha} + \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} - 1} \right| < 1$ ενώ $\left| -\frac{1}{\alpha} - \sqrt{\frac{1}{\alpha^2} - 1} \right| > 1$.

Το αντίστοιχο ολοκληρωτικό υπόλοιπο είναι:

$$\text{Res}(z_1) = \frac{z - z_1}{\alpha(z - z_1)(z - z_2)} \Big|_{z=z_1} = \frac{1}{\alpha(z_1 - z_2)} = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\frac{1}{\alpha^2} - 1}} = \frac{1}{2\sqrt{1 - \alpha^2}}$$

Τελικά θα είναι:
$$I = \frac{2}{i} 2\pi i \left[\frac{1}{2\sqrt{1 - \alpha^2}} \right] = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - \alpha^2}}$$

Παράδειγμα 2: Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3 - 2\cos\theta + \sin\theta}$$

Θέτουμε $z = e^{i\theta} \Rightarrow d\theta = dz/iz$, $\cos\theta = \frac{1}{2} \left[z + \frac{1}{z} \right]$, $\sin\theta = \frac{1}{2i} \left[z - \frac{1}{z} \right]$ και έχουμε:

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{3 - 2 \cdot \frac{1}{2} \left[z + \frac{1}{z} \right] + \frac{1}{2i} \left[z - \frac{1}{z} \right]} = \oint_{|z|=1} \frac{2dz}{(1-2i)z^2 + 6iz - 1 - 2i}$$

Η ολοκληρωτέα συνάρτηση έχει δυο απλούς πόλους $z_1 = 2 - i$ και $z_2 = (2 - i)/5$ από τους οποίους μόνο ο z_2 βρίσκεται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου με αντίστοιχο ολοκληρωτικό υπόλοιπο:

$$\text{Res}\left(\frac{2-i}{5}\right) = \frac{2(z - z_2)}{(1-2i)[(z - z_1)(z - z_2)]} \Big|_{z=z_2} = \frac{2}{(1-2i)(z_2 - z_1)} = \frac{1}{2i}$$

Τελικά θα είναι: $I = 2\pi i [1/2i] = \pi$

Παράδειγμα 3: Να δειχθεί ότι
$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\alpha + \beta \sin\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \quad \text{με } \alpha > |\beta|$$

Θέτουμε $z = e^{i\theta} \Rightarrow d\theta = dz/iz$, $\cos\theta = \frac{1}{2} \left[z + \frac{1}{z} \right]$, $\sin\theta = \frac{1}{2i} \left[z - \frac{1}{z} \right]$ και έχουμε:

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{\frac{dz}{iz}}{\alpha + \beta \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}} = \oint_{|z|=1} \frac{2dz}{\beta z^2 + 2\alpha iz - \beta}$$

Η ολοκληρωτέα συνάρτηση έχει δυο πόλους τάξης 1, τις ρίζες της εξίσωσης $\beta z^2 + 2\alpha iz - \beta = 0$ δηλαδή

$$z_1 = \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{\beta} i \quad \text{και} \quad z_2 = \frac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{\beta} i$$

από τους οποίους μόνο ο z_1 βρίσκεται στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου, διότι

$$\left| \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{\beta} i \right| = \left| \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} - \alpha}{\beta} \cdot \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} + \alpha}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} + \alpha} \right| = \left| \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} + \alpha} \right| < 1 \quad \text{για } \alpha > |\beta|$$

Το αντίστοιχο ολοκληρωτικό υπόλοιπο είναι:

$$\text{Res}(z_1) = \left. \frac{2(z - z_1)}{\beta(z - z_1)(z - z_2)} \right|_{z=z_1} = \frac{2}{\beta(z_1 - z_2)} = \frac{2}{\beta \frac{2\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{\beta} i} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} i}$$

και τελικά θα έχουμε: $I = 2\pi i \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} i} = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}$

6.9.2 Ολοκληρώματα της μορφής $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$

Τα ολοκληρώματα αυτά, που είναι γενικευμένα ολοκληρώματα πρώτου είδους, μπορούν να υπολογισθούν με την βοήθεια των ολοκληρωτικών υπολοίπων αρκεί η συνάρτηση $f(x)$, που ορίζεται σ' όλο τον άξονα των πραγματικών αριθμών, να μπορεί να επεκταθεί αναλυτικά στο άνω ημιεπίπεδο, ($\text{Im}z > 0$), του μιγαδικού επιπέδου, ικανοποιώντας ορισμένες συνθήκες, που θα διατυπωθούν παρακάτω.

Πρόταση 1: Έστω ότι η συνάρτηση $f(z)$ είναι αναλυτική σ' όλο το άνω ημιεπίπεδο, ($\text{Im}z > 0$), εκτός από ένα πεπερασμένο αριθμό ανώμαλων σημείων. Ας υποθέσουμε επίσης ότι υπάρχουν θετικοί αριθμοί R_0 , M και $k > 1$, έτσι ώστε για $|z| > R_0$ να έχουμε $|f(z)| < M/|z|^k$. Τότε ισχύει:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} f(z) dz = 0 \quad (6.27)$$

όπου η καμπύλη ολοκληρώσεως Γ είναι το ημικύκλιο $|z|=R$, $\text{Im}z > 0$ του άνω ημιεπιπέδου.

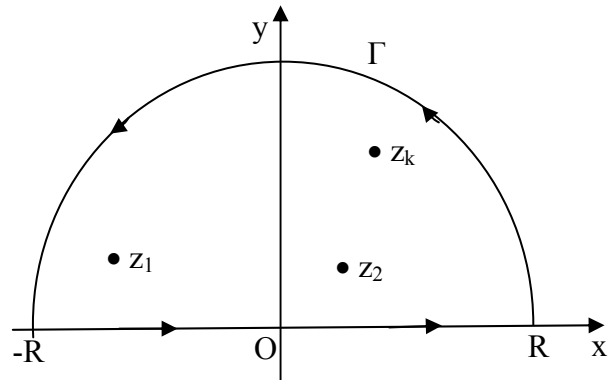
Απόδειξη: $\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\Gamma} |f(z)| ds < \frac{M}{|z|^k} \pi R = \frac{M \pi R}{R^k} = \frac{M \pi}{R^{k-1}} \rightarrow 0 \quad \text{για } R \rightarrow \infty$

Θεώρημα 1: Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση $f(x)$, που ορίζεται για όλους τους πραγματικούς αριθμούς και επεκτείνεται αναλυτικά στο άνω ημιεπίπεδο του μιγαδικού επιπέδου, ικανοποιεί τις συνθήκες της Πρότασης 1 και δεν έχει ανώμαλα σημεία πάνω στον πραγματικό άξονα. Τότε ισχύει:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Res}[f(z), z_k] \quad (6.28)$$

όπου z_k είναι τα ανώμαλα σημεία της $f(z)$ στο άνω ημιεπίπεδο.

Απόδειξη: Εξ' υποθέσεως, η συνάρτηση $f(z)$ στο άνω ημιεπίπεδο έχει ένα πεπερασμένο αριθμό ανώμαλων σημείων $z_k, k=1, \dots, N$ για τα οποία μπορούμε να βρούμε ένα θετικό αριθμό R_0 έτσι ώστε $|z_k| < R_0, \forall k=1, \dots, N$. Θεωρούμε τώρα στο άνω ημιεπίπεδο μια κλειστή καμπύλη, που αποτελείται από το διάστημα του πραγματικού άξονα $[-R, R]$ με $R > R_0$ και το ημικύκλιο $\Gamma: |z|=R$, Σχ. 7. Από το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε:



Σχ. 7

$$\int_{-R}^{+R} f(x)dx + \int_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Res}[f(z), z_k] \quad (6.29)$$

Εφ' όσον ισχύει η Πρόταση 1, το όριο του δεύτερου όρου στο αριστερό μέλος (6.29) είναι μηδέν όταν $R \rightarrow \infty$, ενώ το δεξιό μέλος είναι ανεξάρτητο του R , επειδή $R > R_0$. Τελικά θα έχουμε:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Res}[f(z), z_k]$$

Παρατήρηση 1: Προφανώς παρόμοιο θεώρημα ισχύει στην περίπτωση που η $f(z)$ επεκτείνεται αναλυτικά στο κάτω ημιεπίπεδο, αρκεί να ικανοποιούνται ανάλογες συνθήκες της Πρότασης 1.

Παρατήρηση 2: Αποδεικνύεται ότι εάν η $f(x)$ είναι ρητή συνάρτηση, (δηλαδή πηλίκο δυο πολυώνυμων), τότε η Πρόταση 1 ικανοποιείται εάν

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} zf(z) = 0 \quad (6.30)$$

Αυτό δε συμβαίνει εάν ο βαθμός του αριθμητή της $f(x)$ είναι μικρότερος το λιγότερο κατά δυο μονάδες του βαθμού του παρονομαστή της $f(x)$.

Παράδειγμα 4: Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4+1}$

Η αναλυτική συνέχιση της $f(x) = \frac{1}{x^4 + 1}$, η $f(z) = \frac{1}{z^4 + 1}$, προφανώς ικανοποιεί την Πρόταση

1 ή για την περίπτωση μας τη σχέση (6.30). Τα ανώμαλα σημεία που βρίσκονται στο άνω ημιεπίπεδο είναι:

$$z_1 = \exp[i\pi/4] \text{ και } z_2 = \exp[i3\pi/4]$$

και είναι πόλοι τάξης 1. Τα αντίστοιχα ολοκληρωτικά υπόλοιπα, (με την βοήθεια του κανόνα του L' Hospital), είναι:

$$\text{Res}[\exp(i\pi/4)] = \lim_{z \rightarrow \exp[i\pi/4]} [z - \exp[i\pi/4]] \frac{1}{z^4 + 1} = \lim_{z \rightarrow \exp[i\pi/4]} [1/4z^3] = (1/4)\exp[-i3\pi/4]$$

$$\text{Res}[\exp(i3\pi/4)] = \lim_{z \rightarrow \exp[i3\pi/4]} [z - \exp[i3\pi/4]] \frac{1}{z^4 + 1} = \lim_{z \rightarrow \exp[i3\pi/4]} [1/4z^3] = (1/4)\exp[-i\pi/4]$$

Τελικά έχουμε:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + 1} = 2\pi i [\text{Re } s(e^{i\pi/4}) + \text{Re } s(e^{i3\pi/4})] = \frac{2\pi i}{4} [e^{-i3\pi/4} + e^{-i\pi/4}] = \\ &= \frac{\pi i}{2} \left[\cos \frac{3\pi}{4} - i \sin \frac{3\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right] = \frac{\pi}{2} 2 \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Παράδειγμα 5: Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα: $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{[x^2 + 1]^2 [x^2 + 2x + 2]}$

Προφανώς η συνθήκη (6.30) ικανοποιείται. Οι πόλοι της $f(z) = \frac{z^2}{[z^2 + 1]^2 [z^2 + 2z + 2]}$ που

βρίσκονται στο άνω ημιεπίπεδο είναι $z_1 = i$ τάξης 2 και ο $z_2 = -1 + i$ τάξης 1. Τα δε αντίστοιχα ολοκληρωτικά υπόλοιπα είναι:

$$\text{Res}(i) = \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left[(z-i)^2 \frac{z^2}{(z+i)^2 (z-i)^2 (z^2 + 2z + 2)} \right] = \frac{9i - 12}{100}$$

$$\text{Res}(-1+i) = \lim_{z \rightarrow -1+i} \left[(z+1-i) \frac{z^2}{(z^2+i)(z+1-i)(z+1+i)} \right] = \frac{3-4i}{100}$$

$$\text{Τελικά θα έχουμε: } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 dx}{[x^2 + 1]^2 [x^2 + 2x + 2]} = 2\pi i \left[\frac{9i - 12}{100} + \frac{3 - 4i}{25} \right] = \frac{7\pi}{50}$$

6.9.3 Ολοκληρώματα της μορφής $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \alpha x dx$ και $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \alpha x dx$ με $\alpha > 0$

Τα ολοκληρώματα αυτά υπολογίζονται συγχρόνως από το ολοκλήρωμα

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} f(x) dx$$

Έτσι έχουμε: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin \alpha x dx = \text{Im}(I)$ και $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \alpha x dx = \text{Re}(I)$

Για τον υπολογισμό τώρα του ολοκληρώματος I χρησιμοποιούμε το Λήμμα του Jordan.

Λήμμα του Jordan. Έστω ότι η συνάρτηση $f(z)$ είναι αναλυτική στο άνω ημιεπίπεδο, ($\text{Im}z > 0$), εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος ανώμαλων σημείων. Έστω επίσης ότι $|f(z)| \leq M/R^k$ όταν $z = Re^{i\theta}$ και M, k θετικές σταθερές. Τότε εάν $\alpha > 0$ θα έχουμε:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} e^{iaz} f(z) dz = 0 \quad (6.31)$$

όπου Γ ημικύκλιο, που βρίσκεται στο άνω ημιεπίπεδο, έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα R , Σχ. 7.

Απόδειξη: Για $z = Re^{i\theta}$ έχουμε:

$$\int_{\Gamma} e^{iaz} f(z) dz = \int_0^{\pi} \exp(i\alpha R e^{i\theta}) f(R e^{i\theta}) i R e^{i\theta} d\theta$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα} \quad \left| \int_{\Gamma} e^{iaz} f(z) dz \right| &\leq \int_0^{\pi} \left| \exp(i\alpha R e^{i\theta}) f(R e^{i\theta}) i R e^{i\theta} \right| d\theta = \\ &= \int_0^{\pi} \left| \exp(i\alpha R [\cos \theta + i \sin \theta]) f(R e^{i\theta}) R \right| d\theta \leq \frac{M}{R^{k-1}} \int_0^{\pi} e^{-\alpha R \sin \theta} d\theta \end{aligned}$$

Είναι όμως $\sin \theta \geq 2\theta/\pi$ για $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Συνεπώς

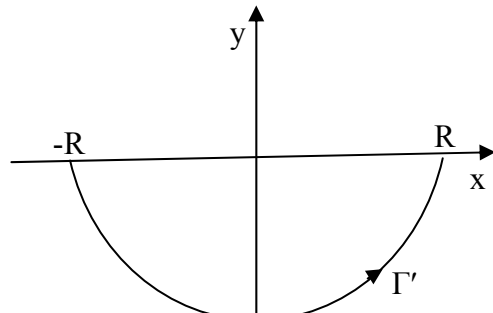
$$\left| \int_{\Gamma} e^{iaz} f(z) dz \right| \leq \frac{2M}{R^{k-1}} \int_0^{\pi/2} \exp\left(-\alpha R \frac{2\theta}{\pi}\right) d\theta = \frac{\pi M}{\alpha R^k} [1 - e^{-\alpha R}] \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

επειδή τα α και k είναι θετικά.

Παρατήρηση 1: Αποδεικνύεται ότι το Λήμμα του Jordan για ρητές συναρτήσεις ισοδυναμεί με τη σχέση:

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} f(z) = 0 \quad (6.32)$$

Παρατήρηση 2: Εάν $\alpha < 0$ και η συνάρτηση $f(z)$ ικανοποιεί τις συνθήκες του Λήμματος του Jordan στο κάτω ημιεπίπεδο, ($\text{Im}z < 0$), τότε η σχέση (6.31) ισχύει κατά την ολοκλήρωση κατά μήκος της ημικύκλιου Γ' του Σχ. 8.



Σχ. 8

Θεώρημα 2: Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση $f(z)$, που ορίζεται για όλους τους πραγματικούς αριθμούς και επεκτείνεται αναλυτικά στο άνω

ημιεπίπεδο του μιγαδικού επιπέδου, ικανοποιεί τις συνθήκες του Λήμματος του Jordan και δεν έχει ανώμαλα σημεία πάνω στον πραγματικό άξονα. Τότε ισχύει:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Res} \left[e^{i\alpha z} f(z), z_k \right]$$

όπου z_k είναι τα ανώμαλα σημεία της $f(z)$ στο άνω ημιεπίπεδο του μιγαδικού επιπέδου.

Απόδειξη: Τα βήματα για την απόδειξη αυτού του θεωρήματος είναι ακριβώς τα ίδια όπως του θεωρήματος 1. Η μόνη διάφορα είναι ότι εδώ θα χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα του Jordan ώστε από την σχέση:

$$\int_{-R}^R e^{i\alpha x} f(x) dx + \int_{\Gamma} e^{i\alpha z} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Res} \left[e^{i\alpha z} f(z), z_k \right]$$

παίρνοντας το όριο $R \rightarrow \infty$ να προκύπτει η (6.33)

Παράδειγμα 6: Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{x^2 + \beta^2} dx \quad \text{με } \alpha, \beta > 0$$

Η πραγματική συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^2 + \beta^2}$ επεκτείνεται αναλυτικά στο άνω ημιεπίπεδο και έχουμε την αναλυτική συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{z^2 + \beta^2}$. Στο άνω ημιεπίπεδο το μόνο ανώμαλο σημείο είναι το $z_1 = i\beta$, που είναι πόλος τάξης 1. Επίσης η συνάρτηση $f(z)$ ικανοποιεί το Λήμμα του Jordan. Επομένως:

$$I = \text{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x^2 + \beta^2} dx = \text{Re} \left[2\pi i \text{Res} \left\{ \frac{e^{i\alpha z}}{z^2 + \beta^2}, i\beta \right\} \right]$$

$$\text{αλλά} \quad \text{Res} \left\{ \frac{e^{i\alpha z}}{z^2 + \beta^2}, i\beta \right\} = \lim_{z \rightarrow i\beta} (z - i\beta) \frac{e^{i\alpha z}}{z^2 + \beta^2} = \lim_{z \rightarrow i\beta} \frac{e^{i\alpha z}}{z + i\beta} = \frac{e^{-\alpha\beta}}{2i\beta}$$

$$\text{Άρα} \quad I = \text{Re} \left[2\pi i \frac{e^{-\alpha\beta}}{2i\beta} \right] \quad \text{δηλαδή} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{x^2 + \alpha^2} dx = \frac{\pi}{\beta} e^{-\alpha\beta}$$

$$\text{Επίσης προκύπτει ότι} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x^2 + \alpha^2} dx = 0 = 0$$

κάτι που ανεμένετο επειδή η συνάρτηση $\frac{\sin \alpha x}{x^2 + \beta^2}$ είναι περιττή.

Παρατήρηση 3: Εάν η $f(z)$ είναι άρτια συνάρτηση και ικανοποιεί το θεώρημα 2, τότε για $\alpha > 0$ έχουμε:

$$\int_0^{\infty} f(x) \cos \alpha x dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos \alpha x dx = \pi \operatorname{Re} \left[i \sum_{k=1}^N \operatorname{Res}(e^{i\alpha z} f(z), z_k) \right] =$$

$$= -\pi \operatorname{Im} \left[\sum_{k=1}^N \operatorname{Res}(e^{i\alpha z} f(z), z_k) \right]$$

Παρατήρηση 4: Εάν η $f(x)$ είναι περιττή συνάρτηση και ικανοποιεί το θεώρημα 2, τότε για $\alpha > 0$ έχουμε:

$$\int_0^{\infty} f(x) \sin \alpha x dx = \pi \operatorname{Re} \left[\sum_{k=1}^N \operatorname{Res}(e^{i\alpha z} f(z), z_k) \right]$$

Παράδειγμα 7.: Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin \pi x}{x^2 + 2x + 5} dx$

Η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2 + 2x + 5}$ επεκτείνεται αναλυτικά στο άνω ημιεπίπεδο, η δε

αναλυτική της επέκταση $f(z) = \frac{z}{z^2 + 2z + 5}$ ικανοποιεί το Λήμμα του Jordan. Τα

ανώμαλα σημεία της $f(z)$ είναι $z_1 = -1 + 2i$ και $z_2 = -1 - 2i$ που είναι πόλοι τάξης 1. Από τους πόλους αυτούς μόνο ο z_1 βρίσκεται στο άνω ημιεπίπεδο. Τελικά θα έχουμε:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin \pi x}{x^2 + 2x + 5} dx = \operatorname{Im} 2\pi i \operatorname{Res} \left\{ \frac{ze^{i\pi z}}{z^2 + 2z + 5}, -1 + 2i \right\} = \operatorname{Im} 2\pi i \frac{ze^{i\pi z}}{(z + 1 + 2i)} \Big|_{z = -1 + 2i} =$$

$$= \operatorname{Im} 2\pi i \frac{(-1 + 2i)e^{i\pi(-1+2i)}}{4i} = \frac{\pi}{2} \operatorname{Im}(1 - 2i)e^{-2\pi} = -\pi e^{-2\pi}$$

6.9.4 Ολοκληρώματα της μορφής $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ όπου η $f(x)$ έχει πεπερασμένο πλήθος απλών πόλων στον πραγματικό άξονα.

Είναι γνωστό ότι για μια πραγματική συνάρτηση $f(x)$ συνεχή στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, εκτός από το σημείο x_0 , το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ ορίζεται από τη σχέση:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\alpha}^{x_0 - \varepsilon} f(x) dx + \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{x_0 + \eta}^{\beta} f(x) dx \quad (6.34)$$

όπου τα ε και η τείνουν στο μηδέν από θετικές τιμές και ανεξάρτητα το ένα από το άλλο. Εάν πάρουμε $\varepsilon = \eta$, τότε η (6.34) δίνει την κύρια τιμή του Cauchy του γενικευμένου ολοκληρώματος:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left\{ \int_{\alpha}^{x_0 - \varepsilon} f(x) dx + \int_{x_0 + \varepsilon}^{\beta} f(x) dx \right\} \quad (6.35)$$

Ανάλογα ορίζεται το γενικευμένο ολοκλήρωμα:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{R_1 \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0^+}} \int_{-R_1}^{x_0 - \varepsilon} f(x) dx + \lim_{\substack{R_2 \rightarrow \infty \\ \eta \rightarrow 0^+}} \int_{x_0 + \eta}^{R_2} f(x) dx \quad (6.36)$$

όπου τα R_1 , R_2 , ε , η τείνουν στα όρια τους ανεξάρτητα το ένα από το άλλο. Εάν στη σχέση (6.36), πάρουμε $R_1 = R_2 = R$ και $\varepsilon = \eta$, τότε θα έχουμε την κύρια τιμή του ολοκληρώματος:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0^+}} \left\{ \int_{-R}^{x_0 - \varepsilon} f(x) dx + \int_{x_0 + \varepsilon}^R f(x) dx \right\} \quad (6.37)$$

Ανάλογοι με τους παραπάνω ορισμούς, ισχύουν όταν η $f(x)$ έχει περισσότερα από ένα, αλλά πάντοτε πεπερασμένο πλήθος σημεία ασυνέχειας.

Εύκολα μπορεί να δει κανείς ότι αν το γενικευμένο ολοκλήρωμα (6.36) συγκλίνει, τότε και η κύρια τιμή του, (6.37) συγκλίνει και ισούται με το γενικευμένο ολοκλήρωμα.

Το αντίστροφο γενικά δεν ισχύει. Π.χ. το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x}$ δεν συγκλίνει, αλλά συγκλίνει η κύρια τιμή του.

Εάν η $f(x)$ είναι άρτια με μοναδικό σημείο ασυνέχειας το $x_0 = 0$ και συγκλίνει η κύρια τιμή $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ συγκλίνει και το γενικευμένο ολοκλήρωμα και ισούται με την κύρια τιμή:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

Εάν η $f(x)$ είναι περιττή με $x_0 = 0$ το μοναδικό σημείο ασυνέχειας, τότε

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 0$$

Στη συνέχεια παραθέτουμε το παρακάτω θεώρημα, αναγκαίο για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων της μορφής $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$, όπου η $f(x)$ έχει πεπερασμένο πλήθος απλών πόλων πάνω στον πραγματικό άξονα με την βοήθεια των ολοκληρωτικών υπολοίπων.

Θεώρημα: Εάν z_0 είναι ένας απλός πόλος της $f(z)$ με ολοκληρωτικό υπόλοιπο α_{-1} , και Γ το κυκλικό τόξο, που ορίζεται από την εξίσωση $z = z_0 + \varepsilon e^{i\theta}$ με $\varphi_0 \leq \theta \leq \varphi_0 + \varphi$, τότε

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma} f(z) dz = i\varphi \alpha_{-1} \quad (6.38)$$

Απόδειξη: Επειδή το z_0 είναι απλός πόλος της $f(z)$ αυτό σημαίνει ότι η $f(z)$ δέχεται ένα ανάπτυγμα Laurent γύρω από το z_0 της μορφής:

$$f(z) = \frac{\alpha_{-1}}{z - z_0} + \alpha_0 + \alpha_1(z - z_0) + \dots = \frac{\alpha_{-1}}{z - z_0} + g(z)$$

με περιοχή σύγκλισης $0 < |z - z_0| < \rho$. Προφανώς η $g(z)$ είναι μια αναλυτική συνάρτηση στον κυκλικό δίσκο με εξίσωση $|z - z_0| \leq \rho$. Θεωρούμε την ακτίνα $\varepsilon < \rho$ και έχουμε:

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma} \frac{\alpha_{-1}}{z-z_0} dz + \int_{\Gamma} g(z)dz$$

Αλλά πάνω στη Γ ισχύει $z-z_0 = \varepsilon e^{i\theta} \rightarrow dz = i\varepsilon e^{i\theta} d\theta$. Επομένως

$$\int_{\Gamma} \frac{\alpha_{-1}}{z-z_0} dz = \alpha_{-1} \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+\varphi} \frac{i\varphi e^{i\varphi} d\varphi}{\varphi e^{i\varphi}} = i\varphi\alpha_{-1}$$

και $\left| \int_{\Gamma} g(z)dz \right| \leq M|\varepsilon\varphi| \rightarrow 0$ με $\varepsilon \rightarrow 0_+$

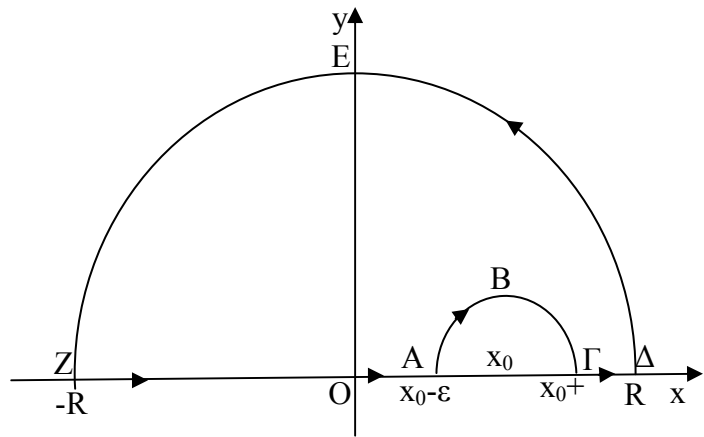
όπου $M = \max_{z \in \Gamma} |g(z)|$ και $|\varepsilon\varphi|$ το μήκος του Γ . Τελικά θα έχουμε:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0_+} \int_{\Gamma} f(z)dz = i\varphi\alpha_{-1}$$

Θεωρούμε τώρα μια πραγματική συνάρτηση $f(x)$, η οποία έχει έναν απλό πραγματικό πόλο x_0 . Ας υποθέσουμε ότι η μιγαδική συνάρτηση $f(z)$ έχει πεπερασμένο k πλήθος ανώμαλων σημείων στο ημιεπίπεδο $\text{Im}z > 0$ και ότι ικανοποιείται η πρόταση 1, της δεύτερης περίπτωσης. Τότε:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res}(z_j) + \pi i \text{Res}(x_0) \tag{6.39}$$

Απόδειξη: Θεωρούμε την κλειστή καμπύλη $C = (\Delta EZAB\Gamma\Delta)$, Σχ.9, όπου η ακτίνα R της ημιπεριφέρειας ΔEZ είναι αρκετά μεγάλη ώστε όλοι οι πόλοι z_j της $f(z)$ με $\text{Im}(z_j) > 0$ να περιέχονται μέσα στο ημικύκλιο $(\Delta EZ\Delta)$. Εφαρμόζουμε το θεώρημα του Cauchy για την καμπύλη C και έχουμε:



Σχ. 9

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res}(z_j) \Rightarrow$$

$$\int_{\Delta EZ} f(z)dz + \int_{-R}^{x_0-\varepsilon} f(x)dx + \int_{AB\Gamma} f(z)dz + \int_{x_0+\varepsilon}^R f(x)dx = 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res}((z_j))$$

Στα όρια $R \rightarrow \infty$ και $\varepsilon \rightarrow 0$ έχουμε: $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Delta EZ} f(z)dz = 0$ λόγω της Πρότασης 1

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \left\{ \int_{-R}^{x_0-\varepsilon} f(x)dx + \int_{x_0+\varepsilon}^R f(x)dx \right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

$$\int_{AB\Gamma} f(z)dz = - \int_{\Gamma BA} f(x)dx = -\pi i \alpha_{-1}$$

όπου α_1 το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της σειράς Laurent, που αντιστοιχεί στον απλό πόλο x_0 . Τελικά θα έχουμε:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res}(z_j) + \pi i \text{Res}(x_0)$$

Παρατήρηση: Εάν η $f(x)$ έχει πεπερασμένο πλήθος λ απλών πόλων x_l πάνω στον πραγματικό άξονα, τότε θα έχουμε:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{j=1}^k \text{Res}(z_j) + \pi i \sum_{l=1}^{\lambda} \text{Res}(x_l)$$

Παράδειγμα: Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα: $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{\alpha^2 - x^2} dx$ με $\alpha > 0$

Λύση: Η μιγαδική συνάρτηση $\frac{e^{iz}}{\alpha^2 - z^2}$, είναι αναλυτική σ' όλο το μιγαδικό επίπεδο,

εκτός από τα σημεία $z_1 = -\alpha$ και $z_2 = \alpha$, που είναι απλοί πραγματικοί πόλοι. Θεωρούμε τώρα την κλειστή καμπύλη C , Σχ.10, που αποτελείται από την ημιπεριφέρεια $\Gamma(O, R)$ με κέντρο το την αρχή των αξόνων O και ακτίνα R , τις ημιπεριφέρειες $\Gamma(-\alpha, \varepsilon)$ και $\Gamma(\alpha, \varepsilon)$ με κέντρα τα σημεία $-\alpha$ και α αντίστοιχα και ακτίνα ε καθώς και τα ευθύγραμμα τμήματα ZH , KA και $\Gamma\Delta$.

Από το θεώρημα του Cauchy έχουμε:

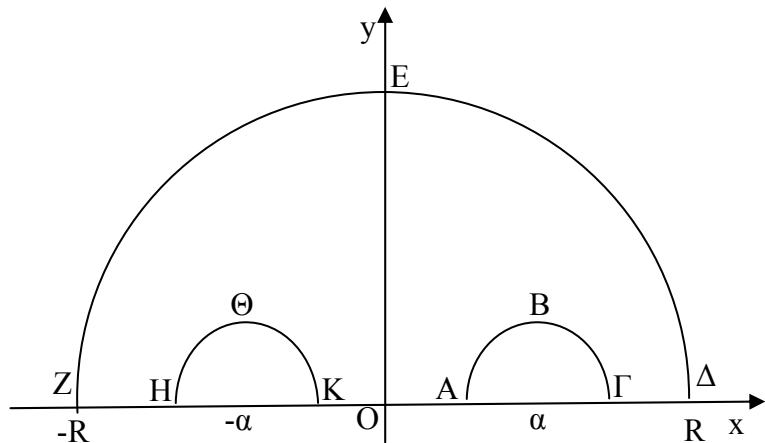
$$I = \oint_C f(z)dz = 0 =$$

$$= \int_{-R}^{-\alpha-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{\alpha^2 - x^2} dx + \int_{\Gamma(-\alpha, \varepsilon)} f(z)dz + \int_{-\alpha+\varepsilon}^{\alpha-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{\alpha^2 - x^2} dx + \int_{\Gamma(\alpha, \varepsilon)} f(z)dz + \int_{\alpha+\varepsilon}^R f(z)dz + \int_{\Gamma} f(z)dz$$

Στα όρια $R \rightarrow \infty$, $\varepsilon \rightarrow 0$ έχουμε:

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 0 \text{ λόγω της πρότασης 1 της περιπτώσεως 2.}$$

$$\lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \left\{ \int_{-R}^{-\alpha-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{\alpha^2 - x^2} dx + \int_{-\alpha+\varepsilon}^{\alpha-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{\alpha^2 - x^2} dx + \int_{\alpha+\varepsilon}^R f(z)dz \right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{\alpha^2 - x^2} dx$$



Σχ. 10

$$\int_{\Gamma(-\alpha, \varepsilon)} \frac{e^{ix}}{\alpha^2 - x^2} dx = -i\pi\alpha_{-1}, \quad \int_{\Gamma(\alpha, \varepsilon)} \frac{e^{ix}}{\alpha^2 - x^2} dx = -i\pi\beta_{-1}$$

όπου α_{-1} και β_{-1} είναι τα ολοκληρωτικά υπόλοιπα των πόλων $-\alpha$ και α , αντίστοιχα. Είναι δε:

$$\alpha_{-1} = \lim_{z \rightarrow -\alpha} (z + \alpha) \frac{e^{iz}}{\alpha^2 - z^2} = \frac{e^{iz}}{\alpha - z} \Big|_{z=-\alpha} = \frac{e^{-i\alpha}}{2\alpha}$$

$$\beta_{-1} = \lim_{z \rightarrow \alpha} (z - \alpha) \frac{e^{iz}}{\alpha^2 - z^2} = \frac{e^{iz}}{-\alpha + z} \Big|_{z=\alpha} = \frac{-e^{i\alpha}}{2\alpha}$$

και τελικά θα έχουμε:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{\alpha^2 - x^2} dx + i\pi \frac{e^{-i\alpha}}{2\alpha} - i\pi \frac{e^{i\alpha}}{2\alpha} \Rightarrow \\ &\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{\alpha^2 - x^2} dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{\alpha^2 - x^2} dx = \frac{i\pi}{2\alpha} [e^{-i\alpha} - e^{i\alpha}] = \frac{\pi}{\alpha} \sin \alpha \Rightarrow \\ &\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{\alpha^2 - x^2} dx = \frac{\pi}{\alpha} \sin \alpha \end{aligned}$$

6.9.5 Ολοκληρώματα πλειότιμων συναρτήσεων

Στις προηγούμενες περιπτώσεις για να υπολογίσουμε ορισμένα πραγματικά ολοκληρώματα χρησιμοποιήσαμε το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων, το οποίο ισχύει για μονότιμες συναρτήσεις.

Στην περίπτωση που έχουμε πλειότιμες συναρτήσεις, δηλ η $f(z)$, που προέρχεται από την αναλυτική επέκταση της $f(x)$, είναι πλειότιμη, η καμπύλη της ολοκλήρωσης πρέπει να εκλέγει έτσι ώστε κανένα σημείο διακλάδωσης της $f(z)$ να βρίσκεται στο εσωτερικό της. Κατ' αυτό τον τρόπο η μιγαδική συνάρτηση $f(z)$ γίνεται μονότιμη στο εσωτερικό της καμπύλης και μπορούμε τότε να εφαρμόσουμε τους προηγούμενους τρόπους ολοκλήρωσης.

Ας δούμε μερικές τυπικές περιπτώσεις:

$$6.9.5\alpha \quad \text{Ολοκληρώματα της μορφής } I = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} f(x) dx, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (6.41)$$

Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση $f(x)$ ορίζεται πάνω στον θετικό πραγματικό ημιάξονα και ότι μπορεί να επεκταθεί αναλυτικά σ' όλο το μιγαδικό επίπεδο, εκτός από ένα πεπερασμένο πλήθος ανώμαλων σημείων z_k , ($k=1,2,\dots,N$), που δεν βρίσκονται πάνω στον θετικό ημιάξονα. Ας υποθέσουμε επίσης ότι για

$$|z| \rightarrow \infty \quad \text{έχουμε} \quad |f(z)| < M/|z|$$

όπου M μια θετική σταθερά και ότι το σημείο $z=0$ είναι το πολύ μια απαλείψιμη ανωμαλία, δηλαδή θέλουμε να ισχύει $|f(z)| < M$, στην περιοχή του σημείου $z=0$. Η συνάρτηση

$$F(z) = z^{\alpha-1} f(z) \quad (6.42)$$

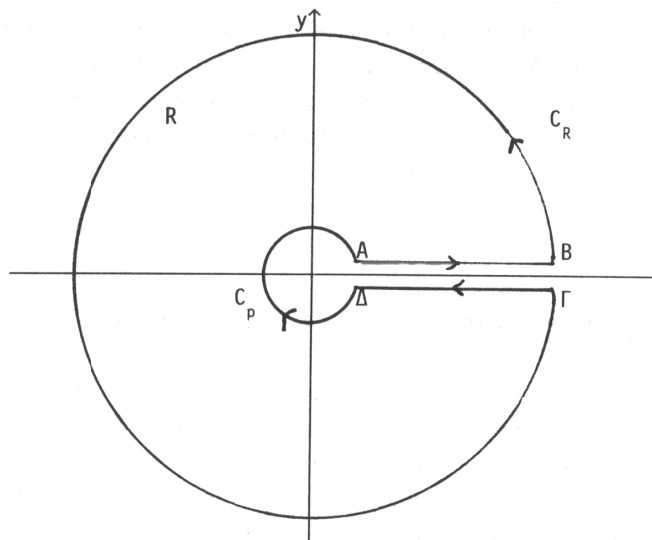
στην περιοχή D , ($0 < \arg z < 2\pi$), η οποία είναι το z -επίπεδο εκτός από τον θετικό πραγματικό ημιάξονα, είναι προφανώς η αναλυτική επέκταση της ολοκληρωτέας συνάρτησης. Επίσης είναι μονότιμη και τα ανώμαλα σημεία της συμπίπτουν με τα ανώμαλα σημεία z_k της $f(z)$.

Στην περιοχή D θεωρούμε την κλειστή καμπύλη C , που αποτελείται από τα ευθύγραμμα τμήματα AB και $\Gamma\Delta$, (τα οποία ουσιαστικά συμπίπτουν), και τους ανοικτούς κύκλους C_R με εξίσωση $|z|=R$ και C_p με εξίσωση $|z|=p$, Σχ. 11.

Στο εσωτερικό της καμπύλης C η $F(z)$ είναι μονότιμη. Μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων και έχουμε:

$$\begin{aligned} \oint_C f(z) dz &= \int_{AB} x^{\alpha-1} f(x) dx + \int_{C_R} z^{\alpha-1} f(z) dz + \int_{\Gamma\Delta} z^{\alpha-1} f(z) dz + \int_{C_p} z^{\alpha-1} f(z) dz = \\ &= 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Res}[z^{\alpha-1} f(z), z_k] \end{aligned} \quad (6.43)$$

Ας εξετάσουμε κάθε όρο του αριστερού μέλους της (6.43) χωριστά. Έχουμε:



Σχ. 11

$$|I_2| = \left| \int_{C_R} z^{\alpha-1} f(z) dz \right| \leq \frac{MR^{\alpha-1}}{R} 2\pi R = 2\pi MR^{\alpha-1} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \quad (6.44)$$

Ο τρίτος όρος $I_3 = \int_{\Gamma\Delta} z^{\alpha-1} f(z) dz$ είναι το ολοκλήρωμα κατά μήκος της $\Gamma\Delta$ όπου $\arg z = 2\pi$, δηλαδή $z = xe^{i2\pi}$ ($x > 0$). Επομένως:

$$I_3 = \int_{\Gamma\Delta} z^{\alpha-1} f(z) dz = \int_R^p x^{\alpha-1} e^{i2\pi(\alpha-1)} f(x) dx = -e^{i2\pi(\alpha-1)} \int_p^R x^{\alpha-1} f(x) dx \quad (6.45)$$

Επίσης $|I_4| = \left| \int_{C_p} z^{\alpha-1} f(z) dz \right| < M p^{\alpha-1} 2\pi p \xrightarrow{p \rightarrow 0} 0$ (6.46)

Παίρνοντας τώρα το όριο της (6.45) για $p \rightarrow 0$ και $R \rightarrow \infty$ βρίσκουμε ότι:

$$I = \int_0^\infty x^{\alpha-1} f(x) dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{i2\pi\alpha}} \sum_{k=1}^N \text{Res}[z^{\alpha-1} f(z), z_k]$$
 (6.47)

I

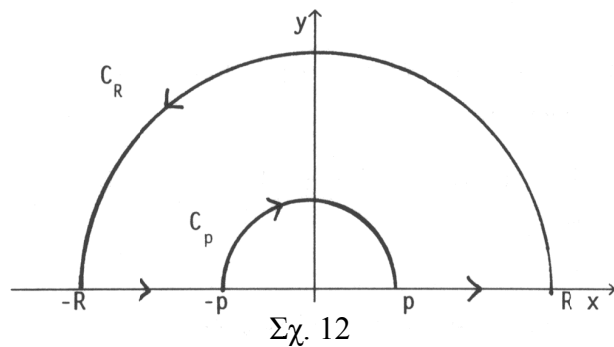
Παράδειγμα: Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα: $I = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx \quad 0 < \alpha < 1$

Η ολοκληρωτέα συνάρτηση $f(x) = 1/(x+1)$ ικανοποιεί όλες τις παραπάνω συνθήκες και επομένως θα έχουμε:

$$I = \frac{2\pi i}{1 - e^{i2\pi\alpha}} \text{Res}\left[\frac{z^{\alpha-1}}{1+z}, -1\right] = \frac{2\pi i e^{i\pi(\alpha-1)}}{1 - e^{i2\pi\alpha}} = \frac{\pi}{\sin \alpha \pi}$$

6.9.5β Ολοκληρώματα της μορφής $I = \int_0^\infty f(x) \ln x dx$ (6.48)

Έστω ότι η $f(x)$ είναι μια άρτια συνάρτηση, που μπορεί να επεκταθεί αναλυτικά στο άνω ημιεπίπεδο, ($\text{Im}z > 0$). Υποθέτουμε τώρα ότι αυτή η αναλυτική επέκταση $f(z)$ ικανοποιεί τις συνθήκες της Πρότασης 1, δηλαδή υπάρχουν θετικές σταθερές $R_0, M > 0$ και $k > 1$ έτσι ώστε για $|z| > R_0$ να ισχύει $|f(z)| < M/z^k$ και ότι η $f(z)$ φράσσεται στην περιοχή του μηδενός, δηλαδή $|f(z)| < M_1$ για $|z| < \epsilon$. Θεωρούμε τώρα την καμπύλη C , που αποτελείται από τα ευθύγραμμα τμήματα $[-R, -p], [p, R]$ του πραγματικού άξονα και τα ημικύκλια $C_p: |z|=p$ και $C_R: |z|=R$, Σχ. 12. και υποθέτουμε ότι όλα τα ανώμαλα σημεία της $f(z)$, που βρίσκονται στο άνω ημιεπίπεδο περιέχονται στο εσωτερικό της καμπύλης C . Θεωρούμε τώρα την συνάρτηση $F(z) = f(z) \ln z$, που είναι η αναλυτική επέκταση της $f(x) \ln x$ και η οποία για $z = |z|e^{i\pi} = -x$ με $x > 0$, παίρνει την τιμή:



$$F(z) \Big|_{z=xe^{i\pi}} = f(x) \ln(xe^{i\pi}) = f(x) [\ln x + i\pi]$$

Από το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων έχουμε:

$$\oint_C f(z) dz = \int_p^R f(x) \ln x dx + \int_{C_R} F(z) dz + \int_{-R}^{-p} f(x) [\ln x + i\pi] dx + \int_{C_p} F(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Res}[f(z) \ln z, z_k]$$
 (6.49)

αλλά:

$$\alpha) \quad \int_{-R}^{+R} f(x)[\ln x + i\pi] dx = -\int_{-p}^{-R} f(x)[\ln x + i\pi] dx = \int_p^R f(x)[\ln x + i\pi] dx$$

β)

$$\left| \int_{C_R} F(z) dz \right| \leq \frac{M}{R^k} \int_0^\pi |\ln z| ds = \frac{M}{R^k} \int_0^\pi |\ln R + i \arg z| ds = \frac{M}{R^k} \int_0^\pi \sqrt{(\ln R)^2 + (\arg z)^2} ds \leq$$

$$\leq \frac{M}{R^k} \left[\sqrt{(\ln R)^2 + \pi^2} \right] \pi R = \frac{M \pi}{R^{k-1}} \sqrt{(\ln R)^2 + \pi^2} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

$$\gamma) \quad \left| \int_{C_p} F(z) dz \right| \leq M_1 \int_0^\pi |\ln z| ds = M_1 (\ln p) \pi p \xrightarrow{p \rightarrow 0} 0$$

$$\delta) \quad \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ p \rightarrow 0}} \int_p^R f(x) dx = \pi i \sum_{k=1}^N \operatorname{Re} s[f(x), z_k]$$

Τελικά θα έχουμε από την (6.49):

$$2 \int_0^\infty f(x) \ln x dx + \pi i \int_0^\infty f(x) dx = 2 \pi i \sum_{k=1}^N \operatorname{Re} s[f(z) \ln z, z_k] \Rightarrow$$

$$2 \int_0^\infty f(x) \ln x dx + (\pi i)^2 \sum_{k=1}^N \operatorname{Re} s[f(z), z_k] = 2 \pi i \sum_{k=1}^N \operatorname{Re} s[f(z) \ln z, z_k] \Rightarrow$$

$$\int_0^\infty f(x) \ln x dx + \frac{(\pi i)^2}{2} \sum_{k=1}^N \operatorname{Re} s[f(z), z_k] = \pi i \sum_{k=1}^N \operatorname{Re} s[f(z) \ln z, z_k] \Rightarrow$$

$$\int_0^\infty f(x) \ln x dx = \pi i \sum_{k=1}^N \operatorname{Re} s \left[f(z) \left(\ln z - \frac{\pi i}{2} \right), z_k \right]$$

6.10 Ο Μιγαδικός τύπος της αντιστροφής του μετασχηματισμού Laplace (The complex inversion formula)

Εαν $F(t)$ η μετασχηματισμένη Laplace της $f(x)$ δηλ

$$F(t) = \int_0^\infty e^{-tx} f(x) dx = L(f(x))$$

τότε

$$\boxed{f(x) = L^{-1}(F(t)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{tx} F(t) dt} \quad \text{με } x > 0 \quad (6.50)$$

και $f(x)=0$ για $x < 0$.

Ο τύπος (6.50) ονομάζεται και **ολοκληρωτικός τύπος του Mellin**, (ή **Bromwich**). Η ολοκλήρωση στον τύπο (6.50) θα γίνει κατά μήκος της ευθείας $t=\gamma$ στο μιγαδικό επίπεδο όπου $t=t_1+it_2$. Ο πραγματικός αριθμός γ είναι τυχαίος με τον μόνο περιορισμό η ευθεία $t=\gamma$ να βρίσκεται στα δεξιά όλων των ανωμαλιών, (πόλων, σημείων διακλαδώσεων ή ουσιωδών ανώμαλων σημείων).

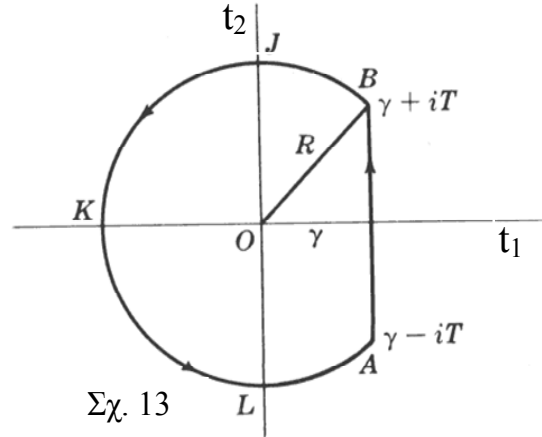
6.10.1 Το περίγραμμα Bromwich

Στην πράξη το ολοκλήρωμα (6.50) υπολογίζεται θεωρώντας το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα:

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{tx} F(t) dt \quad (6.51)$$

όπου C η κλειστή καμπύλη του Σχ. 13 η οποία μερικές φορές ονομάζεται περίγραμμα Bromwich και αποτελείται από το ευθύγραμμο τμήμα AB και το κυκλικό τόξο BJKLA ακτίνας R και κέντρου την αρχή O.

Εαν παραστήσουμε το τόξο BJKLA με Γ και παρατηρώντας ότι $T = \sqrt{R^2 - \gamma^2}$ έχουμε:



Σχ. 13

$$f(x) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-iT}^{\gamma+iT} e^{tx} F(t) dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \left[\oint_C e^{tx} F(t) dt - \int_{\Gamma} e^{tx} F(t) dt \right] \quad (6.52)$$

6.10.2 Χρήση του θεωρήματος των ολοκληρωτικών υπολοίπων για την αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace.

Ας υποθέσουμε ότι οι μόνες ανωμαλίες της F(t) είναι πόλοι, που βρίσκονται στ' αριστερά της ευθείας t=γ για κάποιο πραγματικό αριθμό γ. Υποθέτουμε επίσης ότι το ολοκλήρωμα κατά μήκος του τόξου Γ στη σχέση (6.52) τείνει στο μηδέν όταν R→∞.

Τότε από το θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων η σχέση (6.52) γράφεται:

f(x)=άθροισμα των ολοκληρωτικών υπολοίπων της e^{tx}F(t) που αντιστοιχούν στους πόλους της F(t), δηλαδή

$$f(x) = \sum_{k=1}^m \text{Res}(e^{tx} F(t), t_k) \quad \text{όπου } t_k \text{ πόλοι της } F(t) \text{ με } \text{Re}t_k < \gamma$$

Ικανή συνθήκη για να τείνει στο μηδέν το ολοκλήρωμα κατά μήκος της Γ όταν R→∞:

Θεώρημα: Εαν υπάρχουν θετικές σταθερές M,k>0 τέτοιες ώστε πάνω στο τόξο Γ, (όπου t=Re^{iθ}) να έχουμε:

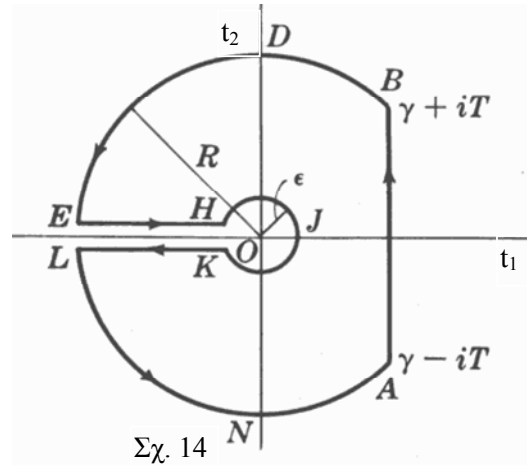
$$|F(t)| < \frac{M}{R^k} \quad (6.53)$$

τότε
$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} e^{tx} F(t) dt = 0 \quad (6.54)$$

Παρατήρηση: Η συνθήκη (6.53) πάντα ισχύει αν $F(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$ όπου $P(t)$, $Q(t)$ πολυώνυμα με $\text{βαθμ.}P(t) < \text{βαθμ.}Q(t)$. Το θεώρημα ισχύει ακόμα και όταν η $F(t)$ έχει ανωμαλίες εκτός από πόλους.

6.10.3 Τροποποίηση του περιγράμματος Bromwich στην περίπτωση σημείων διακλάδωσης.

Εαν η $F(t)$ έχει κάποιο σημείο διακλάδωσης, τα παραπάνω αποτελέσματα ισχύουν εαν το περίγραμμα του Bromwich τροποποιηθεί κατάλληλα, όπως δείχνει το Σχ. 14, στο οποίο υποτίθεται ότι η αρχή των αξόνων είναι σημείο διακλάδωσης.



Σχ. 14

Περίπτωση ανώμαλων σημείων, των οποίων το πλήθος είναι άπειρο.

Και στην περίπτωση αυτή εφαρμόζεται η παραπάνω μέθοδος αρκεί το μήκος της ακτίνας R_m του περιγράμματος του Bromwich να είναι τέτοιο ώστε στο εσωτερικό του να βρίσκεται ένα πεπερασμένο πλήθος ανώμαλων σημείων. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace προκύπτει όταν πάρουμε το όριο $R_m \rightarrow \infty$ και θα έχουμε:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \text{Res}(e^{tx} F(t), t_k)$$

Παραδείγματα:

- 1) α) Ναδειχθεί ότι η συνάρτηση $F(t) = 1/(t-2)$ ικανοποιεί την συνθήκη (6.53)
- β) Να βρεθεί το ολοκληρωτικό υπόλοιπο της συνάρτησης $e^{tx}/(t-2)$ που αντιστοιχεί στον πόλο $t=2$
- γ) Να υπολογισθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace $L^{-1}(1/(t-2))$ χρησιμοποιώντας τον μιγαδικό τύπο της αντιστροφής.

Λύση:

α) για $t = Re^{i\theta}$ έχουμε:

$$\left| \frac{1}{t-2} \right| = \left| \frac{1}{Re^{i\theta} - 2} \right| \leq \frac{1}{|Re^{i\theta} - 2|} = \frac{1}{R-2} < \frac{2}{R} \quad \text{για μεγάλα } R \text{ όπως π.χ. } R > 4$$

$$\beta) \text{Res}(2) = \lim_{t \rightarrow 2} (t-2) \left(\frac{e^{tx}}{t-2} \right) = e^{2x}$$

$$\gamma) L^{-1} \left(\frac{1}{t-2} \right) = \text{Res}(2) = e^{2x}$$

Παρατήρηση: Στο περίγραμμα του Bromwich το γ είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός μεγαλύτερος του 2 και το περίγραμμα περιλαμβάνει τον πόλο 2.

2) Να υπολογισθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace:

$$L^{-1}\left(\frac{1}{(t+1)(t-2)^2}\right)$$

Λύση: Η συνάρτηση $F(t)=\frac{1}{(t+1)(t-2)^2}$ σαν ρητή με βαθμό(Αριθμητή)=0<βαθμό(παρονομαστή)=3 ικανοποιεί την συνθήκη (6.53). Επομένως:

$$L^{-1}\left(\frac{1}{(t+1)(t-2)^2}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{e^{tx}}{(t+1)(t-2)^2}dt=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{e^{tx}}{(t+1)(t-2)^2}dt=\text{Res}(t=-1)+\text{Res}(t=2)$$

Αλλά $\text{Res}(t=-1)=\lim_{t\rightarrow-1}(t+1)\left(\frac{e^{tx}}{(t+1)(t-2)^2}\right)=\frac{1}{9}e^{-x}$

$$\begin{aligned}\text{Res}(t=2) &= \lim_{t\rightarrow 2}\frac{1}{1!}\frac{d}{dt}\left\{(t-2)^2\left[\frac{e^{tx}}{(t+1)(t-2)^2}\right]\right\}=\lim_{t\rightarrow 2}\frac{d}{dt}\left[\frac{e^{tx}}{t+1}\right]= \\ &= \lim_{t\rightarrow 2}\frac{(t+1)xe^{tx}-e^{xt}}{(t+1)^2}=\frac{1}{3}xe^{2x}-\frac{1}{9}e^{2x}\end{aligned}$$

Τελικά: $L^{-1}\left(\frac{1}{(t-1)(t-2)^2}\right)=\frac{1}{9}e^{-x}+\frac{1}{3}xe^{2x}-\frac{1}{9}e^{2x}$

3) Να βρεθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace:

$$L^{-1}\left(\frac{t}{(t+1)^3(t-1)^2}\right)$$

Λύση: Ανώμαλα σημεία: Πόλοι $t=-1$ τάξεως 3, $t=1$ τάξεως 2

$$\text{Res}(t=-1)=\lim_{t\rightarrow-1}\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dt^2}\left\{(t+1)^3\frac{te^{tx}}{(t+1)^3(t-1)^2}\right\}=\lim_{t\rightarrow-1}\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dt^2}\left\{\frac{te^{tx}}{(t-1)^2}\right\}=$$

$$\lim_{t\rightarrow-1}\frac{1}{2!}\frac{d}{dt}\left\{\frac{e^{tx}}{(t-1)^2}+\frac{txe^{tx}}{(t-1)^2}-2\frac{te^{tx}}{(t-1)^3}\right\}=$$

$$= \lim_{t\rightarrow-1}\frac{1}{2!}\left\{2\frac{xe^{tx}}{(t-1)^2}-4\frac{e^{tx}}{(t-1)^3}+\frac{tx^2e^{tx}}{(t-1)^2}-4\frac{txe^{tx}}{(t-1)^3}+6\frac{te^{tx}}{(t-1)^4}\right\}$$

$$= \frac{1}{16} e^{-x} (1 - 2x^2)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(t=1) &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{1!} \frac{d}{dt} \left\{ (t-1)^2 \frac{te^{tx}}{(t+1)^3(t-1)^2} \right\} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{te^{tx}}{(t+1)^3} \right\} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \left\{ \frac{e^{tx}(1+tx)}{(t+1)^3} - 3 \frac{te^{tx}}{(t+1)^4} \right\} = \frac{1}{16} e^x (2x-1) \end{aligned}$$

$$\text{Τελικά } L^{-1} \left(\frac{t}{(t+1)^3(t-1)^2} \right) = \operatorname{Res}(t=-1) + \operatorname{Res}(t=1) = \frac{1}{16} e^{-x} (1-2x^2) + \frac{1}{16} e^x (2x-1)$$

4) Να υπολογισθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace: $L^{-1} \left(\frac{1}{(t^2+1)^2} \right)$

Λύση: Ανώμαλα σημεία $t_1=i, t_2=-i$ πόλοι τάξεως 2

$$\operatorname{Res}(t_1=i) = \lim_{t \rightarrow i} \frac{d}{dt} \left\{ (t-i)^2 \frac{e^{tx}}{(t+i)^2(t-i)^2} \right\} = \lim_{t \rightarrow i} \left\{ \frac{xe^{tx}}{(t+i)^2} - 2 \frac{e^{tx}}{(t+i)^3} \right\} = -\frac{1}{4} xe^{ix} - \frac{1}{4} ie^{ix}$$

$$\operatorname{Res}(t_2=-i) = \lim_{t \rightarrow -i} \frac{d}{dt} \left\{ (t+i)^2 \frac{e^{tx}}{(t+i)^2(t-i)^2} \right\} = -\frac{1}{4} xe^{-ix} + \frac{1}{4} ie^{-ix}$$

Τελικά:

$$L^{-1} \left(\frac{1}{(t^2+1)^2} \right) = \operatorname{Res}(t_1=i) + \operatorname{Res}(t_2=-i) = \frac{1}{2} (\sin x - x \cos x)$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- 1) Δείξτε ότι εάν $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$, τότε και $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = |z|$. Το αντίστροφο ισχύει ;
- 2) Χρησιμοποιώντας τον τύπο του αθροίσματος μιας συγκλίνουσας γεωμετρικής σειράς, να δείξετε ότι:

$$\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nt = \frac{r \cos t - r^2}{1 - 2r \cos t + r^2} \quad \beta) \sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin nt = \frac{r \sin t}{1 - 2r \cos t + r^2} \quad \text{με } 0 < r < 1$$

- 3) Να βρεθεί ο τόπος σύγκλισης των σειρών:

$$\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad \beta) \sum_{n=1}^{\infty} n! z^n$$

4) Να αναπτυχθεί σε σειρά Taylor η συνάρτηση $f(z)=1/z$ γύρω από το σημείο $z_0=-3$. Να βρεθεί η περιοχή σύγκλισης.

5) Όμοια για την συνάρτηση $f(z)=1/z^2$

6) Έστω ότι η συνάρτηση $f(z)$ είναι αναλυτική στο σημείο z_0 και ότι $f(z_0)=0$. Χρησιμοποιώντας κατάλληλο ανάπτυγμα, δείξτε ότι:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{z - z_0} = f'(z_0)$$

7) Να βρεθεί το πρωτεύον και το αναλυτικό μέρος του αναπτύγματος Laurent για τις συναρτήσεις:

$$\alpha) f(z) = \frac{1}{z-2} \sin\left(\frac{1}{z-2}\right) \quad \text{γύρω από το σημείο } z_0=2$$

$$\beta) f(z) = (z-1) \cos\left(\frac{1}{z-1}\right) \quad \text{γύρω από το σημείο } z_0=1$$

8) Να βρεθεί το πρωτεύον μέρος του αναπτύγματος Laurent για τη συνάρτηση $f(z)=\frac{e^z \cos z}{z^3}$ γύρω από το ανώμαλο σημείο της. Να ορισθεί το είδος της ανωμαλίας και η περιοχή σύγκλισης του αναπτύγματος Laurent.

9) Να βρεθεί το πρωτεύον μέρος του αναπτύγματος Laurent για την συνάρτηση: $f(z)=\frac{z}{(z+1)^2(z^3+2)}$ γύρω από το σημείο $z_0=-1$. Να ορισθεί το είδος της ανωμαλίας του σημείου z_0 και η περιοχή σύγκλισης του αναπτύγματος.

10) Να βρεθεί το ανάπτυγμα Laurent της συνάρτησης: $f(z)=\frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)}$ με $0<|\alpha|<|\beta|$ γύρω από τα σημεία α) $z=0$, β) $z=\alpha$, γ) $z=\beta$ και δ) στον δακτύλιο $|\alpha|<|z|<|\beta|$.

11) Να βρεθεί το ανάπτυγμα Laurent της συνάρτησης $f(z)=1/(z-2)^2$ για

α) $|z|<2$ και β) $|z|>2$

- 12) Να εξετάσετε εάν το σημείο $\alpha=1-i$ είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο της $f(z)$, η οποία παριστάνεται από την σειρά:

$$f(z)=(z-\alpha)^{-1}+(z-\alpha)^{-2}+(z-\alpha)^{-3}+\dots$$

- 13) Να αναπτυχθούν σε σειρά Laurent οι συναρτήσεις:

α) $f(z)=\frac{1}{(z^2+1)^2}$ σε μια περιοχή του σημείου i

β) $f(z)=\frac{1}{(z-2)(z^2+1)}$ για $1<|z|<2$.

- 14) Να δειχθεί ότι:

α) $\int_0^{2\pi} e^{\sin kt} \cos[t - \cos kt] dt = 0$ β) $\int_0^{2\pi} e^{\sin kt} \sin[t - \cos kt] dt = 0$

- 15) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1-2\alpha \cos t + \alpha^2}$ όπου $\alpha \in \mathbb{R} - \{1, -1\}$

- 16) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_C \frac{dz}{\sqrt{z}}$, όπου C είναι το ημικύκλιο που ορίζεται από τις σχέσεις $|z|=1, y \geq 0$ και η συνάρτηση $f(z)=\sqrt{z}$ ικανοποιεί τη σχέση $\sqrt{1}=1$.

7 ΣΥΜΜΟΡΦΗ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΗ

7.1 Γενικά

Η μελέτη των γεωμετρικών ιδιοτήτων των σύμμορφων απεικονίσεων έχει μεγάλη σπουδαιότητα τόσο στη μελέτη των μιγαδικών συναρτήσεων όσο και στις εφαρμογές. Στο κεφάλαιο 3 παράγραφος 3.6 συναντήσαμε την έννοια της σύμμορφης απεικόνισης μέσα από την γεωμετρική ερμηνεία του ορίσματος της παραγώγου μιας μιγαδικής αναλυτικής συνάρτησης. Είδαμε ότι μια σύμμορφη απεικόνιση έχει την ιδιότητα να διατηρεί τις γωνίες κατά μέτρο και φορά διαγραφής.

Το κεντρικό σημείο της θεωρίας των σύμμορφων απεικονίσεων είναι το εξής: Δεδομένων δυο ανοικτών τόπων D_1 και D_2 του μιγαδικού επιπέδου C , ζητείται να βρεθεί μια απεικόνιση, δηλαδή μια συνάρτηση $f(z)$ τέτοια ώστε να είναι αμφιμονοσήμαντη και να απεικονίζει τον ένα τόπο στον άλλο δηλαδή $f(D_1)=D_2$.

Στο κεφάλαιο αυτό θα συζητήσουμε με συντομία τις βασικές έννοιες της θεωρίας των σύμμορφων απεικονίσεων και θα εξετάσουμε μερικές γεωμετρικές ιδιότητες αυτών των απεικονίσεων.

7.2 Μετασχηματισμοί στο επίπεδο

Θεωρούμε τα επίπεδα Oxy και Ouv . Οι εξισώσεις:

$$\begin{aligned}u &= u(x,y) \\ v &= v(x,y)\end{aligned}\tag{7.1}$$

ορίζουν ένα **μετασχηματισμό** ή μια **απεικόνιση** μεταξύ των σημείων του επιπέδου Oxy και Ouv . Εάν σε κάθε σημείο του επιπέδου Oxy αντιστοιχεί ένα και μόνο ένα σημείο του επιπέδου Ouv , τότε λέμε ότι έχουμε έναν **αμφιμονοσήμαντο** ή **αμφιμονότιμο** μετασχηματισμό ή απεικόνιση.

Με τον μετασχηματισμό (7.1) ένας κλειστός τόπος R_1 του επιπέδου Oxy απεικονίζεται γενικά σ' έναν κλειστό τόπο R_2 του επιπέδου Ouv . Εάν με $\Delta(R_1)$ και $\Delta(R_2)$ συμβολίσουμε τα εμβαδά των κλειστών τόπων R_1 και R_2 αντίστοιχα, τότε

$$\lim_{\Delta R_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta R_2}{\Delta R_1} = \left| \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \right|\tag{7.2}$$

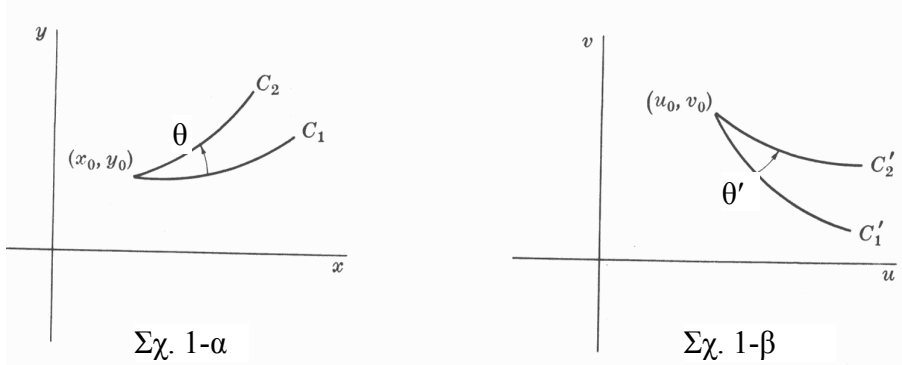
Η ορίζουσα:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x}\tag{7.3}$$

ονομάζεται **Ιακωβιανή του μετασχηματισμού** (7.1)

Η λύση του συστήματος (7.1) ως προς x και y , (εάν είναι δυνατή), μας δίνει τον μετασχηματισμό:

$$x=x(u,v)$$



$$y=y(u,v) \quad (7.4)$$

που ονομάζεται **αντίστροφος μετασχηματισμός** του (7.1). Εάν οι συναρτήσεις $x=x(u,v)$ και $y=y(u,v)$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμες, η Ιακωβιανή του αντιστρόφου μετασχηματισμού (7.4) είναι η αντίστροφη της Ιακωβιανής (7.3) δηλαδή

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} \quad (7.5)$$

Συνεπώς εάν η μια Ιακωβιανή είναι διάφορη του μηδενός, τότε και η άλλη είναι επίσης διάφορη του μηδενός. Επίσης εάν οι συναρτήσεις $u(x,y)$ και $v(x,y)$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμες σ' ένα ανοικτό τόπο D και εάν η Ιακωβιανή $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ δεν μηδενίζεται στον D , τότε ο μετασχηματισμός (7.1) είναι αμφιμονοσήμαντος.

Στην περίπτωση που οι συναρτήσεις $u(x,y)$ και $v(x,y)$ αποτελούν το πραγματικό και φανταστικό μέρος αντίστοιχα, μιας αναλυτικής μιγαδικής συνάρτησης

$$w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y),$$

τότε η Ιακωβιανή του μετασχηματισμού είναι

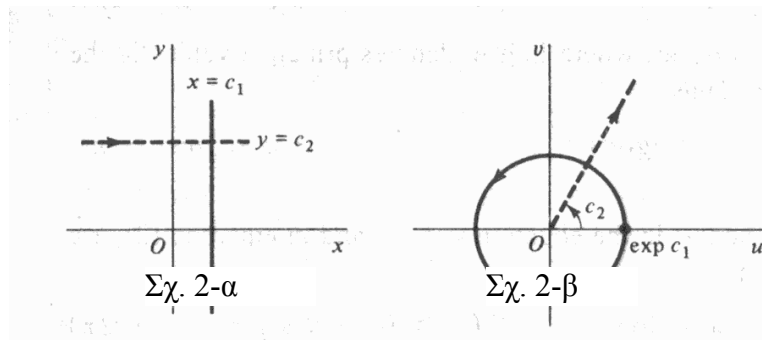
$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = |f'(z)|^2 \quad (7.6)$$

Επομένως η απεικόνιση είναι αμφιμονοσήμαντη σε τόπους όπου $f'(z) \neq 0$. Τα σημεία, στα οποία έχουμε $f'(z)=0$ ονομάζονται **κρίσιμα σημεία**.

7.3 Σύμμορφη απεικόνιση

Έστω C_1 και C_2 δυο λείες καμπύλες, που διέρχονται από το σημείο $z_0=x_0+iy_0$ του επιπέδου Oxy Σχ. 1-α. Με τον μετασχηματισμό (7.1) οι καμπύλες αυτές απεικονίζονται στις καμπύλες C'_1 και C'_2 του επιπέδου Ouv Σχ. 1-β. Εάν οι γωνίες θ και θ' υπό τις

οποίες τέμνονται τα ζεύγη των καμπυλών C_1, C_2 και C_1', C_2' αντίστοιχα, είναι ίσες; κατά μέτρο και φορά διαγραφής, τότε η απεικόνιση (7.1) ονομάζεται **σύμμορφη απεικόνιση**



στο σημείο z_0 . Μια απεικόνιση που διατηρεί τα μέτρα των γωνιών αλλά όχι και τη φορά τους, λέγεται **ισογώνια**.

Η χρησιμότητα της σύμμορφης απεικόνισης οφείλεται στο επόμενο βασικό θεώρημα:

Θεώρημα: Εάν η $f(z)$ είναι αναλυτική και $f'(z) \neq 0$ σ' ένα ανοικτό τόπο D , τότε η απεικόνιση $w=f(z)$ είναι σύμμορφη σε όλα τα σημεία του D .

Παράδειγμα 1: Η απεικόνιση $w=f(z)=e^z$ είναι σύμμορφη σε όλο το μιγαδικό επίπεδο εφ' όσον $d(e^z)/dz=e^z \neq 0 \forall z \in \mathbb{C}$. Ας θεωρήσουμε δυο ευθείες γραμμές με εξισώσεις $x=c_1$ και $y=c_2$ στο z -επίπεδο, εκ των οποίων η πρώτη έχει διεύθυνση προς τα άνω και η δεύτερη προς τα δεξιά, όπως δείχνει το σχήμα 2-α. Η συνάρτηση $f(z)$ μπορεί να γραφεί και ως εξής: $w=e^z=e^{x+iy}=re^{i\varphi}$ όπου $\rho=e^x$ και $\varphi=y$.

Η εικόνα $f(z)$ ενός τυχαίου σημείου $z=c_1+iy$ της κάθετης γραμμής $x=c_1$ έχει πολικές συντεταγμένες $\rho=\exp(c_1)$ και $\varphi=y$ στο w -επίπεδο. Το σημείο $f(z)$ κινείται κατά την θετική φορά πάνω σε περιφέρεια με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho=e^x$, όταν το z κινείται πάνω στην ευθεία $x=c_1$ Σχ. 2-β. Η εικόνα όλης της ευθείας είναι η περιφέρεια και κάθε σημείο της περιφέρειας είναι η εικόνα άπειρων σημείων της ευθείας, που απέχουν μεταξύ τους κατά 2π μονάδες.

Η οριζόντια γραμμή $y=c_2$ απεικονίζεται κατά αμφιμονοσήμαντο τρόπο στην ακτίνα με εξίσωση $\varphi=c_2$. Όταν το σημείο $z=x+ic_2$ κινείται κατά μήκος αυτής της γραμμής από τα αριστερά προς τα δεξιά, η συντεταγμένη $\rho=e^x$ της εικόνας του $f(z)$, αυξάνει κατά θετικό τρόπο απεριόριστα.

Κάθετα και οριζόντια τμήματα απεικονίζονται σε τμήματα περιφερειών και ακτίνων, αντίστοιχα και επομένως οι εικόνες διαφόρων περιοχών μπορούν να βρεθούν από αυτές τις παρατηρήσεις.

Η γωνία, που σχηματίζουν οι γραμμές στο z -επίπεδο, είναι ορθή και διαγράφεται κατά την αρνητική φορά. Το ίδιο συμβαίνει και με τη γωνία κατά την οποία τέμνονται η περιφέρεια και η ακτίνα στο w -επίπεδο. Επομένως η απεικόνιση $f(z)=e^z$ είναι σύμμορφη.

Παράδειγμα 2: Θεωρούμε δυο λείες καμπύλες, οι οποίες είναι ισοσταθμικές καμπύλες με εξισώσεις $u(x,y)=c_1$ και $v(x,y)=c_2$, όπου $u(x,y)$ και $v(x,y)$ είναι το πραγματικό και φανταστικό μέρος μιας αναλυτικής μιγαδικής συνάρτησης $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$. Ας υποθέσουμε ότι οι δυο αυτές καμπύλες τέμνονται στο σημείο z_0 όπου $f'(z_0) \neq 0$. Ο μετασχηματισμός $w=f(z)$ είναι σύμμορφη απεικόνιση στο σημείο z_0 και απεικονίζει αυτές τις καμπύλες στις ευθείες γραμμές $u=c_1$ και $v=c_2$ αντίστοιχα, οι οποίες είναι κάθετες στο σημείο $w=f(z_0)$. Επομένως και οι καμπύλες $u(x,y)=c_1$ και $v(x,y)=c_2$ τέμνονται κάθετα στο σημείο z_0 , δηλαδή οι οικογένειες των καμπύλων $\Phi_1=u(x,y)-c_1=0$ και $\Phi_2=v(x,y)-c_2=0$ είναι ορθογώνιες.

Παράδειγμα 3: Ο μετασχηματισμός $w=\bar{z}$, ο οποίος είναι μια **ανάκλαση**, (ή **συμμετρία**), ως προς τον πραγματικό άξονα είναι ισογώνιος αλλά όχι σύμμορφος. Επίσης και κάθε συνάρτηση $w=f(\bar{z})$ είναι ισογώνια αλλά όχι σύμμορφη.

Παράδειγμα 4: Το σημείο $z=0$ είναι κρίσιμο σημείο για τον μετασχηματισμό

$$w=f(z)=1+z^2.$$

Πράγματι εάν γράψουμε $z=re^{i\theta}$ τότε $w=1+r^2e^{i2\theta}$ ή $w=1+\rho e^{i\varphi}$ όπου $\rho=r^2$ και $\varphi=2\theta$.

Αρα η ακτίνα $\theta=\alpha$ με αρχή το σημείο $z=0$ απεικονίζεται στο w -επίπεδο στην ακτίνα με αρχή το σημείο $w=1$ και με κλίση 2α .

Ας θεωρήσουμε τώρα δυο ακτίνες στο z -επίπεδο με κοινή αρχή το σημείο $z=0$ και έστω ότι σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία ω . Τότε οι εικόνες τους μέσα από τον μετασχηματισμό $f(z)=1+z^2$ δίνουν δυο ακτίνες με κοινή αρχή το σημείο $w=1$ αλλά η γωνία που σχηματίζουν είναι 2ω .

Επομένως η απεικόνιση $f(z)=1+z^2$ δεν είναι σύμμορφη στο σημείο $z=0$, ενώ είναι σύμμορφη σε οποιοδήποτε άλλο σημείο.

Γενικά μπορεί να δειχθεί ότι εάν το σημείο z_0 είναι κρίσιμο για τον μετασχηματισμό $w=f(z)$, τότε υπάρχει ακέραιος m , ($m \geq 2$), τέτοιος ώστε η γωνία, που σχηματίζουν δυο καμπύλες που διέρχονται από το σημείο z_0 , να πολλαπλασιάζεται με το m . Επίσης ο ακέραιος m είναι ο μικρότερος θετικός ακέραιος τέτοιος ώστε $f^{(m)}(z_0) \neq 0$.

Από την γεωμετρική ερμηνεία του μέτρου της παραγώγου μιας αναλυτικής συνάρτησης, είδαμε ότι απειροστά ευθύγραμμα τμήματα Δz μετασχηματίζονται πάλι σε απειροστά ευθύγραμμα τμήματα Δw με συντελεστή "μεγέθυνσης" $k=|f'(z_0)|$, δηλαδή $|\Delta w|=k|\Delta z|$ και εάν $k > 1$ έχουμε μεγέθυνση αφού $|\Delta w| > |\Delta z|$ και εάν $0 < k < 1$ έχουμε σμίκρυνση αφού $|\Delta w| < |\Delta z|$. Σαν γεωμετρικό επακόλουθο των παραπάνω είναι ότι η εικόνα ενός μικρού σχήματος, που βρίσκεται σε μια περιοχή του σημείου z_0 απεικονίζεται σε όμοιο σχήμα σε μια περιοχή του σημείου $f(z_0)$. Αυτό δεν συμβαίνει για μεγάλα σχήματα, των οποίων οι εικόνες μπορεί να είναι τελείως διαφορετικές από τα αρχικά σχήματα.

7.4 Το θεώρημα του Riemann

Στο z -επίπεδο θεωρούμε μια απλή κλειστή καμπύλη C , που αποτελεί το σύνορο ενός τόπου D . Στο w -επίπεδο θεωρούμε την μοναδιαία περιφέρεια C' , που αποτελεί το σύνορο του τόπου D' . Το θεώρημα απεικονίσεως του Riemann μας εγγυάται ότι υπάρχει μια αναλυτική συνάρτηση $w=f(z)$ ορισμένη στο τόπο D , που απεικονίζει κατά αμφιμονοσήμαντο τρόπο κάθε σημείο του D σ' ένα αντίστοιχο σημείο του D' και κάθε σημείο της C σ' ένα αντίστοιχο σημείο της C' .

Η συνάρτηση $f(z)$ περιέχει τρεις αυθαίρετες πραγματικές συναρτήσεις, που προσδιορίζονται εάν απαιτήσουμε το κέντρο της C' να είναι ένα καθορισμένο σημείο και ένα σημείο της C' να αντιστοιχεί σ' ένα ορισμένο σημείο της C .

Το αρνητικό σημείο του θεωρήματος είναι ότι, ενώ μας εγγυάται την ύπαρξη της συνάρτησης $f(z)$, δεν μας λέει και πως θα τη βρούμε.

7.5 Μετασχηματισμοί που ορίζονται από στοιχειώδεις συναρτήσεις

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με τις στοιχειώδεις αναλυτικές συναρτήσεις βλέποντας τις σαν μετασχηματισμούς.

1) **Μεταφορά** . Ο μετασχηματισμός του z -επιπέδου στο w -επίπεδο, που ορίζεται από τη σχέση:

$$w=z+c$$

όπου c μιγαδική σταθερά, ονομάζεται **μεταφορά** . Με τον μετασχηματισμό αυτό σχήματα του z -επιπέδου μεταφέρονται στο w -επίπεδο κατά την διεύθυνση του διανύσματος, που παριστάνει ο μιγαδικός αριθμός c .

2) **Στροφή** . Ο μετασχηματισμός του z -επιπέδου στο w -επίπεδο, που ορίζεται από τη σχέση:

$$w=e^{i\alpha}z$$

όπου α πραγματική σταθερά, ονομάζεται **στροφή** . Με τον μετασχηματισμό αυτό σχήματα του z -επιπέδου μεταφέρονται στο w -επίπεδο αφού έχουν περιστραφεί κατά γωνία α , κατά την θετική φορά εάν $\alpha>0$ ή κατά την αρνητική φορά εάν $\alpha<0$.

3) **Μεγέθυνση** . Ο μετασχηματισμός του z -επιπέδου στο w -επίπεδο, που ορίζεται από τη σχέση:

$$w=\lambda z$$

όπου λ θετική σταθερά, ονομάζεται **μεγέθυνση** . Με τον μετασχηματισμό αυτό σχήματα του z -επιπέδου μεγεθύνονται κατά την διεύθυνση του z στο w -επίπεδο, εάν $\lambda>1$ και σμικραίνονται εάν $0<\lambda<1$. Μπορούμε γενικά να θεωρήσουμε την σμίκρυνση σαν ειδική περίπτωση της μεγέθυνσης.

Εάν το λ είναι μιγαδικός αριθμός με πολική μορφή $\lambda=re^{i\alpha}$, τότε ο μετασχηματισμός $w=\lambda z=re^{i\alpha}z$ είναι σύνθεση περιστροφής κατά γωνία α και μεγέθυνσης κατά ρ .

4) **Αντιστροφή.** Ο μετασχηματισμός του z -επιπέδου στο w -επίπεδο, που ορίζεται από τη σχέση:

$$w=1/z$$

ονομάζεται **αντιστροφή**. Ο μετασχηματισμός αυτός μπορεί να γραφεί σαν $w=\frac{\bar{z}}{|z|^2}$ δηλαδή σαν σύνθεση του μετασχηματισμού $w_1=\bar{z}$, που γεωμετρικά παριστάνει ανάκλαση ως προς τον πραγματικό άξονα και του μετασχηματισμού της μεγέθυνσης $w_2=1/|z|^2$.

5) **Γραμμικός μετασχηματισμός.** Ο μετασχηματισμός αυτός ορίζεται από τη σχέση:

$$w=az+\beta$$

όπου a, β μιγαδικές σταθερές και είναι η σύνθεση των μετασχηματισμών της μεταφοράς, της στροφής και της μεγέθυνσης.

5) **Διγραμμικός μετασχηματισμός.** Ο μετασχηματισμός αυτός ορίζεται από τη σχέση:

$$w=\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

όπου $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ μιγαδικές σταθερές και $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Ο μετασχηματισμός αυτός ονομάζεται και **μετασχηματισμός του Moebius**, και μπορεί να θεωρηθεί σαν σύνθεση των μετασχηματισμών μεταφοράς, στροφής, μεγέθυνσης και αντιστροφής.

7.6 Μετασχηματισμοί αρμονικών συναρτήσεων

Ένα βασικό πρόβλημα για τα εφαρμοσμένα μαθηματικά είναι η εύρεση μιας συνάρτησης $u=u(x,y)$ που είναι αρμονική, δηλαδή ικανοποιεί την εξίσωση Laplace

$$\partial^2 u / \partial x^2 + \partial^2 u / \partial y^2 = 0$$

σε έναν ανοικτό τόπο D , (της οποίας το σύνορο περιγράφεται από την εξίσωση $y=\varphi(x)$, και ικανοποιεί συγκεκριμένες συνθήκες στο σύνορο του D). Ανάλογα με τις συνοριακές συνθήκες, διακρίνουμε τις εξής δυο περιπτώσεις:

1) Εάν οι τιμές της συνάρτησης $u(x,y)$ είναι γνωστές πάνω στο σύνορο του τόπου D , δηλαδή

$$u(x, \varphi(x)) = g(x)$$

με $g(x)$ γνωστή συνάρτηση, τότε έχουμε **το πρόβλημα συνοριακών τιμών πρώτου είδους ή το πρόβλημα του Dirichlet**.

2) Εάν οι τιμές της κάθετης παραγώγου της συνάρτησης $u(x,y)$ είναι γνωστές πάνω στο σύνορο του τόπου D , δηλαδή

$$\partial u(x,y) / \partial n = \nabla u \cdot \mathbf{n} = g(x)$$

με \mathbf{n} το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο σύνορο του τόπου D δηλαδή $\mathbf{n} = \nabla(y - \varphi(x)) / |\nabla(y - \varphi(x))|$ τότε έχουμε **το πρόβλημα συνοριακών τιμών δευτέρου είδους ή το πρόβλημα του Neumann**

Τροποποιήσεις ή συνδυασμοί αυτών των δυο ειδών προβλημάτων είναι δυνατοί

Οι περιοχές D , που συνήθως συναντάμε στα διάφορα προβλήματα, είναι ανοικτοί τόποι, και επειδή μια συνάρτηση, που είναι αρμονική σε έναν ανοικτό τόπο, πάντα έχει μια αρμονική συζυγή, οι λύσεις των προβλημάτων συνοριακών τιμών αποτελούν το πραγματικό και φανταστικό μέρος αναλυτικών μιγαδικών συναρτήσεων.

Μερικές φορές η λύση ενός δεδομένου προβλήματος συνοριακών τιμών μπορεί να βρεθεί εάν την ταυτίσουμε με το πραγματικό ή το φανταστικό μέρος μιας αναλυτικής συνάρτησης. Το επόμενο θεώρημα προσφέρει μια καλή βοήθεια γι' αυτό τον σκοπό.

Θεώρημα: Υποθέτουμε ότι η αναλυτική συνάρτηση $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ απεικονίζει τον ανοικτό τόπο D_z του z -επιπέδου στον ανοικτό τόπο D_w του w -επιπέδου. Εάν $h(u,v)$ είναι μια αρμονική συνάρτηση ορισμένη στον τόπο D_w , τότε η συνάρτηση:

$$H(x,y)=h[u(x,y),v(x,y)]$$

είναι αρμονική στον τόπο D_z .

Απόδειξη: Η αρμονική συνάρτηση $h(u,v)$ έχει μια συζυγή αρμονική $g(u,v)$. Επομένως η συνάρτηση:

$$F(w)=h(u,v)+ig(u,v)$$

είναι αναλυτική στον τόπο D_w . Επειδή η συνάρτηση $f(z)$ είναι αναλυτική στο D_z η σύνθετη συνάρτηση $F[f(z)]$ είναι επίσης αναλυτική στον τόπο D_z . Κατά συνέπεια το πραγματικό μέρος $h[u(x,y),v(x,y)]$ αυτής της σύνθετης συνάρτησης είναι αρμονική στον τόπο D_z .

7.7 Μετασχηματισμοί των συνοριακών συνθηκών.

Οι πιο απλές και συχνές περιπτώσεις συνοριακών συνθηκών είναι να μας δίνουν τις τιμές της άγνωστης συνάρτησης ή τις τιμές της κάθετης παραγώγου της πάνω στο σύνορο ενός ανοικτού τόπου D . Στο παρακάτω θεώρημα θα δούμε ότι ορισμένες συνοριακές συνθήκες παραμένουν αναλλοίωτες όταν οι μεταβλητές μεταβάλλονται από μια σύμμορφη απεικόνιση. Η βασική τεχνική είναι να μετασχηματίσουμε ένα δεδομένο πρόβλημα συνοριακών τιμών στο Oxy επίπεδο σ' ένα απλούστερο στο επίπεδο Ouv , το οποίο να μπορεί να λυθεί και κατόπιν με τον αντίστροφο μετασχηματισμό να βρούμε την λύση του αρχικού προβλήματος.

Θεώρημα: Έστω ότι ο μετασχηματισμός

$$w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y) \quad (7.7)$$

είναι σύμμορφος πάνω σε μια λεία καμπύλη C , και έστω Γ η εικόνα της C κάτω από αυτό τον μετασχηματισμό. Εάν κατά μήκος της Γ μια συνάρτηση $h(u,v)$ ικανοποιεί τις συνθήκες:

$$h=h_0 \quad \text{ή} \quad dh/dn=0 \quad (7.8)$$

όπου h_0 είναι μια πραγματική σταθερά και dh/dn παριστάνει την κάθετη παράγωγο της συνάρτησης $h(u,v)$ πάνω στην καμπύλη Γ , τότε κατά μήκος της καμπύλης C η συνάρτηση:

$$H(x,y)=h[u(x,y),v(x,y)] \quad (7.9)$$

ικανοποιεί τις αντίστοιχες συνθήκες:

$$H=h_0 \quad \text{ή} \quad dH/dn=0 \quad (7.10)$$

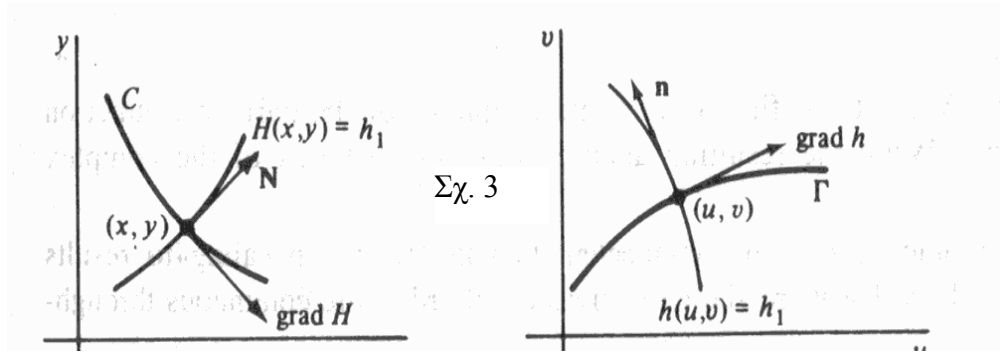
όπου dH/dn παριστάνει την κάθετη παράγωγο στην C .

Απόδειξη: Για να δείξουμε ότι η συνθήκη $h=h_0$ πάνω στη Γ συνεπάγεται $H=h_0$ πάνω στη C , παρατηρούμε από τη σχέση (7.9) ότι η τιμή του H στο τυχαίο σημείο (x,y) της C είναι η ίδια με την τιμή του h στην εικόνα (u,v) του (x,y) κάτω από τον μετασχηματισμό (7.7). Εφ' όσον η εικόνα (u,v) κείται πάνω στη Γ και $h=h_0$ κατά μήκος αυτής της καμπύλης, έπεται ότι $H=h_0$ κατά μήκος της C .

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $dh/dn=0$ πάνω στη Γ . Από τον ορισμό της κατευθύνουσας παραγώγου ενός βαθμωτού πεδίου έχουμε:

$$dh/dn=(\text{grad}h(u,v)) \cdot \mathbf{n} \quad (7.11)$$

Επειδή $dh/dn=0$ στο σημείο (u,v) , η σχέση (7.11) μας λέει ότι η βάρθρωση $\text{grad}h$ είναι κάθετη στο διάνυσμα \mathbf{n} στο σημείο (u,v) , δηλ η βάρθρωση $\text{grad}h$ είναι εφαπτομενικό διάνυσμα στη καμπύλη Γ Σχ. 3. Αλλά οι βαθμώσεις των βαθμωτών πεδίων είναι διανύσματα



κάθετα στις ισοσταθμικές καμπύλες και επειδή στη συγκεκριμένη περίπτωση η βάρθρωση ∇h είναι εφαπτομενικό διάνυσμα στη καμπύλη Γ βλέπουμε ότι η Γ είναι κάθετη στην ισοσταθμική καμπύλη $h(u,v)=h_1$, που διέρχεται από το σημείο (u,v) .

Σύμφωνα τώρα με την εξίσωση (7.7), η ισοσταθμική καμπύλη $H(x,y)=h_1$ στο z -επίπεδο μπορεί να γραφεί:

$$h[u(x,y),v(x,y)]=h_1$$

και είναι προφανές ότι μετασχηματίζεται στην ισοσταθμική καμπύλη $h(u,v)=h_1$ κάτω από τον μετασχηματισμό (7.7). Επιπλέον, επειδή η C μετασχηματίζεται στη Γ και η Γ είναι κάθετη στην ισοσταθμική καμπύλη $h(u,v)=h_1$, όπως είδαμε προηγούμενα, έπεται ότι η C είναι κάθετη στην ισοσταθμική καμπύλη $H(x,y)=h_1$ στο σημείο (x,y) που αντιστοιχεί στο σημείο (u,v) . Επειδή οι βαθμώσεις είναι κάθετα διανύσματα στις ισοσταθμικές καμπύλες, η βάρθρωση $\text{grad}H$ είναι κάθετη στη καμπύλη C στο σημείο (x,y) . Κατά συνέπεια, εάν \mathbf{N} είναι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στη καμπύλη C στο σημείο (x,y) , η βάρθρωση $\text{grad}H$ είναι κάθετη στο \mathbf{N} , δηλ,

$$\text{grad}H \cdot \mathbf{N}=0 \quad (7.12)$$

Τελικά επειδή $dH/dN = \text{grad}H \cdot N$
μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $dH/dN = 0$ σ' όλα τα σημεία της C .

7.8 Επίλυση των προβλημάτων συνοριακών τιμών πρώτου και δευτέρου είδους.

Θα προσπαθήσουμε να επιλύσουμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών πρώτου είδους για την περίπτωση που το σύνορο του τόπου D είναι ο μοναδιαίος κύκλος με εξίσωση $|z|=1$.

Θεωρούμε τον ολοκληρωτικό τύπο του Poisson για κύκλο, (βλέπε παρ. 5.10):

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(R^2 - r^2)u(R, \varphi)}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} d\varphi$$

και θέτουμε $R=1$, οπότε έχουμε:

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1 - r^2)u(1, \varphi)}{1 - 2r \cos(\theta - \varphi) + r^2} d\varphi \quad (7.13)$$

Η σχέση (1), όπως είναι γνωστό, μας δίνει τις τιμές μιας πραγματικής αρμονικής $u(r, \theta)$ εάν γνωρίζουμε τις τιμές της πάνω στη μοναδιαία περιφέρεια, δηλ εάν γνωρίζουμε την συνάρτηση $g(\varphi) = u(1, \varphi)$.

Κάνοντας τώρα τις αντικαταστάσεις:

$$r \rightarrow x, \quad \theta \rightarrow y$$

ο τύπος (1) παίρνει την μορφή:

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1 - x^2)g(\varphi)}{1 - 2x \cos(y - \varphi) + x^2} d\varphi \quad (7.14)$$

που αποτελεί την λύση της διαφορικής εξίσωσης του Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

όπου $g(\varphi) = u(\cos(\varphi), \sin(\varphi))$ οι συνοριακές τιμές της $u(x, y)$.

Στη γενική περίπτωση που το σύνορο του ανοικτού τόπου D δεν είναι ο μοναδιαίος κύκλος αλλά μια απλή κλειστή καμπύλη τέτοια ώστε ο αντίστοιχος ανοικτός τόπος D να είναι απλής συνοχής, μπορούμε να βρούμε τη λύση εάν ο τόπος D μπορεί να απεικονιστεί σύμμορφα με μια αναλυτική συνάρτηση $w=f(z)$ στο εσωτερικό ενός μοναδιαίου κύκλου. Αυτό μπορεί να γίνει βάσει του θεωρήματος του Riemann.

Τα βήματα που ακολουθούμε είναι τα εξής:

-
- 1) Με την αναλυτική συνάρτηση $f(z)$ απεικονίζουμε τον τόπο D στον μοναδιαίο κύκλο $|z|=1$.
 - 2) Λύνουμε το πρόβλημα χρησιμοποιώντας τον τύπο (7.14).
 - 3) Χρησιμοποιούμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό και βρίσκουμε την λύση του προβλήματος.

ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 1ου Κεφαλαίου

1) Δείξτε ότι α) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$ β) $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\times\overline{z_2}$

Λύση: α) $\overline{z_1+z_2}=\overline{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)}=(x_1+x_2)-i(y_1+y_2)=(x_1-iy_1)+(x_2-iy_2)=$
 $=\overline{z_1}+\overline{z_2}$

β) $\overline{z_1z_2}=\overline{(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)}=(x_1x_2-y_1y_2)-i(x_1y_2+x_2y_1)=(x_1-iy_1)(x_2-iy_2)=$
 $=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=z_1z_2$

2) Δείξτε και ερμηνεύστε γεωμετρικά τις σχέσεις:

α) $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$ β) $|z_1-z_2|\geq|z_1|-|z_2|$

Λύση:

α) $|z_1+z_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2}\leq\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}=|z_1|+|z_2|$

Η ανισότητα $\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2}\leq\sqrt{x_1^2+y_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2}$ αποδεικνύεται ως εξής:
 Υψώνουμε και τα δυο μέλη της ανισότητας στο τετράγωνο:

$$(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2\leq x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2+2\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)}$$

δηλαδή πρέπει να δείξουμε ότι: $x_1x_2+y_1y_2\leq 2\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)}$

Υψώνοντας και πάλι στο τετράγωνο βρίσκουμε:

$$x_1^2x_2^2+2x_1x_2y_1y_2+y_1^2y_2^2\leq x_1^2x_2^2+x_1^2y_2^2+y_1^2x_2^2+y_1^2y_2^2 \Rightarrow$$

$$2x_1x_2y_1y_2\leq x_1^2y_2^2+y_1^2x_2^2$$

που είναι άμεση συνέπεια της σχέσης $(x_1y_2-x_2y_1)^2\geq 0$. Επειδή οι πράξεις είναι αντιστρέψιμες, έχουμε την αρχική σχέση.

Γεωμετρική ερμηνεία: Στο τρίγωνο ABΓ με AB=z₁ και BΓ=z₂ το μήκος της πλευράς ΑΓ, που αντιστοιχεί στο μέτρο του μιγαδικού αριθμού z₁+z₂, είναι μικρότερο από το άθροισμα των μηκών των πλευρών AB+BΓ. Το ίσο ισχύει μόνο όταν το τρίγωνο ABΓ εκφυλιστεί σε ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ με την κορυφή Α κείμενη πάνω στην ευθεία στην οποία βρίσκεται το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ.

β) Έχουμε: $|z_1|=|z_1-z_2+z_2|\leq|z_1-z_2|+|z_2| \Rightarrow |z_1-z_2|\geq|z_1|-|z_2|$

Γεωμετρική ερμηνεία: Η σχέση αυτή είναι ισοδύναμη με την ιδιότητα που ισχύει μεταξύ των πλευρών κάθε τριγώνου ότι το μήκος κάθε πλευράς ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερο ή ίσο από την διαφορά των δύο άλλων πλευρών.

- 3) Έστω ότι $z_1=x_1+iy_1$ και $z_2=x_2+iy_2$ παριστάνουν δυο διανύσματα που δεν είναι παράλληλα. Αν α και β είναι δυο πραγματικοί αριθμοί και $\alpha z_1+\beta z_2=0$ δείξτε ότι $\alpha=0$ και $\beta=0$.

Λύση: Από τη σχέση $\alpha z_1+\beta z_2=0$ έχουμε:

$$\alpha(x_1+iy_1)+\beta(x_2+iy_2)=0 \Rightarrow \alpha x_1+\beta x_2=0 \quad (1), \quad \alpha y_1+\beta y_2=0 \quad (2)$$

Επειδή τα διανύσματα, που παριστούν οι μιγαδικοί αριθμοί z_1 και z_2 δεν είναι παράλληλα, θα έχουμε $x_1/x_2 \neq y_1/y_2$ (3). Το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2) δεν μπορεί, βάσει της σχέσης (3), να έχει σαν λύση παρά μόνο τη μηδενική. Άρα $\alpha=0$ και $\beta=0$.

- 4) Να δειχθεί ότι η εξίσωση $z=(1-t)z_1+tz_2$, όπου z_1 και z_2 δεδομένοι μιγαδικοί αριθμοί και t πραγματική μεταβλητή, παριστάνει ευθεία, που διέρχεται από τα σημεία z_1 και z_2 .

Λύση: Εάν $z_1=a_1+i\beta_1$ και $z_2=a_2+i\beta_2$, τότε η σχέση $z=(1-t)z_1+tz_2$ γράφεται:

$$x+iy=(1-t)(x_1+iy_1)+t(x_2+iy_2) \Rightarrow$$

$$x=(1-t)x_1+tx_2 \quad (1), \quad y=(1-t)y_1+ty_2 \quad (2)$$

Οι σχέσεις (1) και (2) αποτελούν τις παραμετρικές εξισώσεις μιας ευθείας, η οποία για $t=0$ διέρχεται από το σημείο $x=x_1, y=y_1$ και για $t=1$ διέρχεται από το σημείο $x=x_2, y=y_2$.

- 5) Να εξετάσετε τι παριστάνουν γεωμετρικά οι εξισώσεις:

$$\alpha) |z|=\alpha, \alpha>0 \quad \text{και} \quad \beta) |z+\alpha|+|z+\beta|=\gamma, \gamma>0 \text{ και } \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

Λύση: α) Οι μιγαδικοί αριθμοί z , που ικανοποιούν την σχέση $|z|=\alpha$, αντιστοιχούν σε διανύσματα, των οποίων τα μέτρα είναι σταθερά και ίσα με α , δηλαδή τα άκρα αυτών των διανυσμάτων απέχουν από την αρχή των αξόνων απόσταση α . Επομένως βρίσκονται πάνω σε μια περιφέρεια με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα α . Προφανώς η σχέση $|z-\beta|=\alpha$ παριστάνει περιφέρεια με κέντρο το σημείο β και ακτίνα α .

β) Οι μιγαδικοί αριθμοί z , που ικανοποιούν τη σχέση $|z-\alpha|+|z-\beta|=\gamma$ αντιστοιχούν σε διανύσματα, των οποίων τα άκρα έχουν την εξής ιδιότητα: το άθροισμα των αποστάσεων του σημείου P , που είναι το άκρο του διανύσματος που αντιστοιχεί στο μιγαδικό αριθμό z , από τα σταθερά σημεία α και β είναι σταθερό και ίσο με γ . Αυτή όμως η ιδιότητα είναι ο γεωμετρικός ορισμός της έλλειψης.

- 6) Δείξτε το θεώρημα του De Moivre:

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta \quad \text{όπου } n \in \mathbb{N}.$$

Λύση: Θα αποδείξουμε το θεώρημα με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής. Προφανώς το θεώρημα ισχύει για $n=1$. Υποθέτουμε τώρα ότι ισχύει για $n=k$ δηλαδή $(\cos\theta+i\sin\theta)^k=\cos k\theta+i\sin k\theta$

και θα αποδείξουμε ότι ισχύει για $n=k+1$. Πολλαπλασιάζουμε την παραπάνω σχέση με $\cos\theta+i\sin\theta$ και έχουμε:

$$\begin{aligned}(\cos\theta+i\sin\theta)^{k+1}&=(\cos\theta+i\sin\theta)^k(\cos\theta+i\sin\theta)= \\ &=(\cos k\theta+i\sin k\theta)(\cos\theta+i\sin\theta)=\cos(k+1)\theta+i\sin(k+1)\theta\end{aligned}$$

7) Να υπολογισθούν οι εκφράσεις:

$$\alpha) \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{2}i}\right)^{10} \quad \beta) \left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{5}+i}\right)^4 \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^5$$

Λύση: α)

Ο μιγαδικός αριθμός $z = \frac{1}{3}(1-\sqrt{6}+i[\sqrt{2}+\sqrt{3}])$ έχει μέτρο:

$$r=|z|=\frac{1}{3}\sqrt{(1-\sqrt{6})^2+(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}=\frac{1}{3}\sqrt{1+6-2\sqrt{6}+2+3+2\sqrt{6}}=\frac{1}{3}\sqrt{12}$$

Το δε όρισμα του είναι: $\theta=\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{6}}\right)$

$$\text{Επομένως: } \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{2}i}\right)^{10}=[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^{10}=r^{10}[\cos 10\theta+i\sin 10\theta]^{10} =$$

$$=12^5\left(\frac{\sqrt{12}}{3}\right)^{10}\left\{\cos\left[10\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{6}}\right)\right]+i\sin\left[10\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{6}}\right)\right]\right\}$$

Με όμοιο τρόπο υπολογίζεται και η δεύτερη έκφραση.

8) Δίδεται ένας μιγαδικός αριθμός z . Να παραστήσετε γραφικά τον $w=ze^{i\alpha}$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}$.

Λύση: Έστω $z=re^{i\theta}$ τότε $w=ze^{i\alpha}=re^{i\theta}e^{i\alpha}=re^{i(\theta+\alpha)}$. Γραφικά ο μιγαδικός αριθμός w μπορεί να προέλθει από τον μιγαδικό αριθμό z εάν ο τελευταίος περιστραφεί κατά γωνία α .

Συμπέρασμα: Κάθε μιγαδικός αριθμός της μορφής $e^{i\alpha}$ με $\alpha\in\mathbb{R}$ παριστάνει γεωμετρικά περιστροφή κατά γωνία α .

9) Δείξτε ότι $r_1e^{\theta_1}+r_2e^{\theta_2}=r_3e^{\theta_3}$ όπου

$$r_3 = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)} \quad , \quad \theta_3 = \tan^{-1} \left[\frac{r_1 \sin \theta_1 + r_2 \sin \theta_2}{r_1 \cos \theta_1 + r_2 \cos \theta_2} \right]$$

10) Να υπολογισθούν οι ρίζες: $\sqrt[3]{1}$, $\sqrt[3]{i}$, $\sqrt[4]{-1}$, $\sqrt[4]{-8}$, $\sqrt[5]{1}$, $\sqrt{1-i}$

Λύση: 1) Ο μιγαδικός αριθμός $z=1$ έχει μέτρο $r=1$ και όρισμα $\theta=0$. Άρα

$$\rho = \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{r} \exp\left(i \frac{\theta + 2k\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{1} \exp\left(i \frac{2k\pi}{3}\right) = \exp\left(i \frac{2k\pi}{3}\right) \quad k=0,1,2$$

Για $k=0$ έχουμε: $\rho_1 = \exp(0) = 1$

Για $k=1$ έχουμε: $\rho_2 = \exp(i2\pi/3) = \cos(2\pi/3) + i\sin(2\pi/3) = -1/2 + i\sqrt{3}/2$

Για $k=2$ έχουμε: $\rho_3 = \exp(i4\pi/3) = \cos(4\pi/3) + i\sin(4\pi/3) = -1/2 - i\sqrt{3}/2$

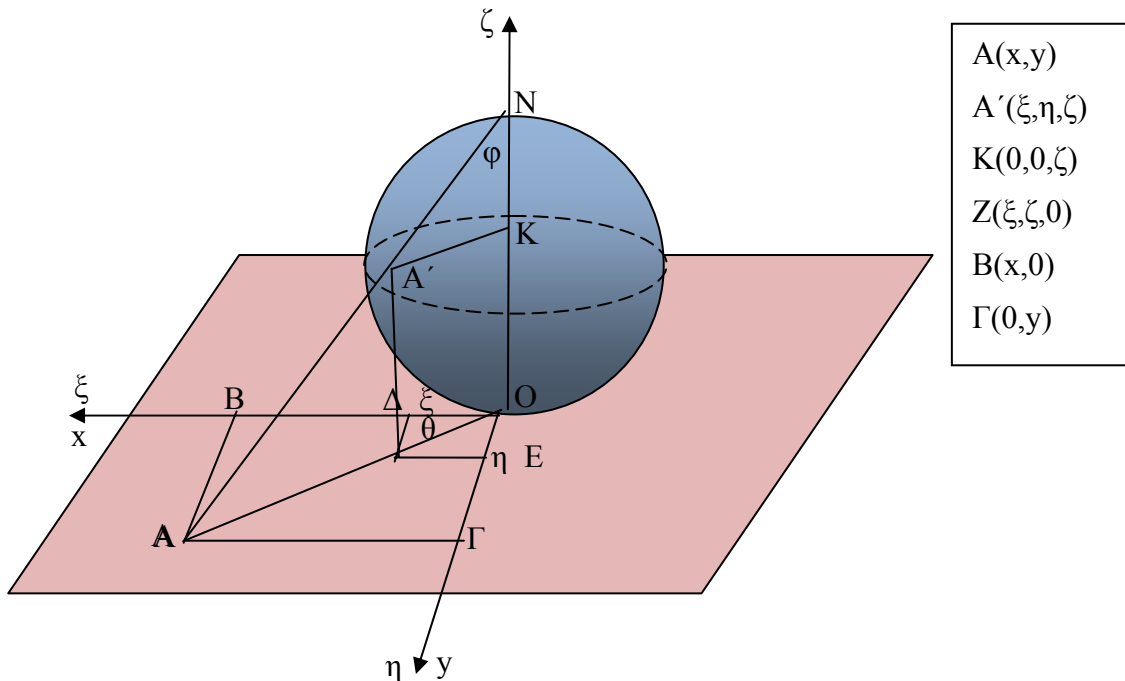
Με παρόμοιο τρόπο υπολογίζονται οι υπόλοιπες ρίζες.

11) Να αποδείξετε ότι οι σχέσεις που συνδέουν τις συντεταγμένες (ξ, η, ζ) του σημείου A' με τις συντεταγμένες (x, y) του σημείου A στη στερεογραφική προβολή, είναι:

$$\xi = \frac{4x}{x^2 + y^2 + 4} \quad , \quad \eta = \frac{4y}{x^2 + y^2 + 4} \quad , \quad \zeta = \frac{2(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 + 4} \quad , \quad z = x + iy = \frac{\xi + i\eta}{1 - \zeta}$$

Εάν η ακτίνα της σφαίρας του Riemann είναι a , πως τροποποιούνται οι παραπάνω σχέσεις; (Οι άξονες $O\xi$ και $O\eta$ δεχόμαστε ότι συμπίπτουν με τους άξονες OX και OY αντίστοιχα).

Λύση: Θα λύσουμε την άσκηση θεωρώντας ότι η ακτίνα της σφαίρας είναι a . Από το παρακάτω σχήμα προκύπτει:



$$\left. \begin{aligned} \tan \varphi &= \frac{OA}{ON} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2\alpha} \\ \tan \varphi &= \frac{KA'}{KN} = \frac{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{2\alpha - \zeta} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{2\alpha - \zeta} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2\alpha} \quad (1)$$

Από την εξίσωση της σφαίρας $\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - \alpha)^2 = \alpha^2$ και από τη σχέση (1) έχουμε:

$$\frac{\sqrt{\alpha^2 - (\zeta - \alpha)^2}}{2\alpha - \zeta} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2\alpha}$$

Την τελευταία σχέση τη λύνουμε ως προς ζ και μετά από μερικές πράξεις προκύπτει

$$\zeta = \frac{2\alpha(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 + 4\alpha^2}$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις: $\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ $\sin\theta = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}$ έχουμε:

$$\xi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sqrt{\alpha^2 - (\zeta - \alpha)^2} \Rightarrow \xi = \frac{4\alpha^2 x}{x^2 + y^2 + 4\alpha^2}$$

Από την εξίσωση της σφαίρας έχουμε:

$$\eta^2 = \alpha^2 - \xi^2 - (\zeta - \alpha)^2 = 2\alpha\zeta - \xi^2 - \zeta^2 = \frac{4\alpha^2(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 + 4\alpha^2} - \frac{4\alpha^4 x^2}{(x^2 + y^2 + 4\alpha^2)^2} - \frac{4\alpha^2(x^2 + y^2)^2}{(x^2 + y^2 + 4\alpha^2)^2} \Rightarrow$$

$$\eta = \frac{4\alpha^2 y}{x^2 + y^2 + 4\alpha^2}$$

Για να βρούμε τις σχέσεις που εκφράζουν τα x και y συναρτήσει των ξ, η, ζ παρατηρούμε ότι:

$$\tan\theta = y/x = \eta/\xi \Rightarrow x = \xi \frac{y}{\eta} = \xi \frac{y}{\frac{4\alpha^2 y}{x^2 + y^2 + 4\alpha^2}} = \xi \frac{x^2 + y^2 + 4\alpha^2}{4\alpha^2}$$

$$\text{αλλά } \zeta = \alpha \frac{2\alpha(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2 + 4\alpha^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{-4\alpha\zeta}{\zeta - 2\alpha} \quad \text{Επομένως } x = \frac{2\alpha\xi}{2\alpha - \zeta}$$

$$\text{Από τη σχέση: } y/x = \eta/\xi \Rightarrow y = \eta(x/\xi) = (2\alpha\eta)/(2\alpha - \zeta) \Rightarrow y = \frac{2\alpha\eta}{2\alpha - \zeta}$$

12) Στη σφαίρα ακτίνας α της στερεογραφικής προβολής να βρεθούν οι εικόνες:

α) των ακτίνων $\arg z = \alpha = \text{σταθ.}$

β) των κύκλων $|z| = r = \text{σταθ.}$

Λύση: Επειδή $\arg z = k = \text{σταθ.}$ θα είναι:

$$\tan \theta = y/x = k \quad \text{αλλά} \quad x = (2a\xi)/(2a-\zeta) \quad \text{και} \quad y = (2a\eta)/(2a-\zeta)$$

Επομένως $y/x = (2a\eta)/(2a\xi) = k \Rightarrow \eta = k\xi$ (1)

Η σχέση (1) πάνω στη σφαίρα ορίζει ένα μεσημβρινό, που είναι και η εικόνα της ακτίνας $\arg z = k$.

Εάν αντικαταστήσουμε τη σχέση $\eta = k\xi$ στην εξίσωση της σφαίρας:

$$\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - a)^2 = a^2$$

βρίσκουμε: $(k^2 + 1)\xi^2 + (\zeta - a)^2 = a^2$ (2)

Η σχέση (2) παριστάνει στο επίπεδο $O\xi\zeta$ έλλειψη με έναν από τους άξονες της την διάμετρο της σφαίρας ON . Η έλλειψη αυτή είναι η προβολή της εικόνας που ζητάμε, η οποία εικόνα δεν μπορεί παρά να είναι κύκλος που περνάει από τους πόλους της σφαίρας. (Η προβολή ενός κύκλου πάνω σε επίπεδο, που δεν είναι παράλληλο προς το επίπεδο του κύκλου έχει σχήμα έλλειψης).

β) Από τη σχέση $|z| = k = \text{σταθ.}$ έχουμε $x^2 + y^2 = k^2$ (3). Εκφράζοντας τα x και y συναρτήσει των ξ, η, ζ , η εξίσωση (3) γράφεται:

$$\frac{4\alpha^2\xi^2}{(2\alpha - \zeta)^2} + \frac{4\alpha^2\eta^2}{(2\alpha - \zeta)^2} = k^2 \Rightarrow \xi^2 + \eta^2 = \frac{k^2}{4\alpha^2}(2\alpha - \zeta)^2 \quad (4)$$

Η εξίσωση (4) για $\zeta = \text{σταθερό}$ παριστάνει κύκλο παράλληλο προς το επίπεδο $O\xi\eta$, με κέντρο το σημείο $(0, 0, \zeta)$ και ακτίνα $\rho = [k(2\alpha - \zeta)]/2\alpha$. Ο κύκλος αυτός αποτελεί ένα παράλληλο κύκλο της σφαίρας.

13. Ποιά σχέση πρέπει να πληρούν τα σημεία z_1 και z_2 ώστε να είναι στερεογραφικές προβολές δυο αντιδιαμετρικών σημείων της σφαίρας του Riemann.

Λύση: Εστω $z_1 = x_1 + iy_1$ και $z_2 = x_2 + iy_2$. Από τα αποτελέσματα των προηγουμένων ασκήσεων έχουμε:

$$\xi_1 = \frac{4\alpha^2 x_1}{x_1^2 + y_1^2 + 4\alpha^2}, \quad \eta_1 = \frac{4\alpha^2 y_1}{x_1^2 + y_1^2 + 4\alpha^2}, \quad \zeta_1 = \frac{2\alpha^2(x_1^2 + y_1^2)}{x_1^2 + y_1^2 + 4\alpha^2} \quad (1)$$

$$\text{και} \quad \xi_2 = \frac{4\alpha^2 x_2}{x_2^2 + y_2^2 + 4\alpha^2}, \quad \eta_2 = \frac{4\alpha^2 y_2}{x_2^2 + y_2^2 + 4\alpha^2}, \quad \zeta_2 = \frac{2\alpha^2(x_2^2 + y_2^2)}{x_2^2 + y_2^2 + 4\alpha^2} \quad (2)$$

Για να είναι τα σημεία z_1 και z_2 στερεογραφικές προβολές δυο αντιδιαμετρικών σημείων, πρέπει τα σημεία αυτά να απέχουν απόσταση ίση με τη διάμετρο της σφαίρας, δηλ 2α . Η απόσταση αυτή με τη βοήθεια των συντεταγμένων των (ξ_1, η_1, ζ_1) και (ξ_2, η_2, ζ_2) διατυπώνεται από τη σχέση:

$$(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\eta_1 - \eta_2)^2 + (\zeta_1 - \zeta_2)^2 = 4\alpha^2 \quad (3)$$

η οποία στη συνέχεια με τη βοήθεια των σχέσεων (1) και (2) γράφεται:

$$(4\alpha^2)^2 \left[\frac{x_1}{k_1} - \frac{x_2}{k_2} \right]^2 + (4\alpha^2)^2 \left[\frac{y_1}{k_1} - \frac{y_2}{k_2} \right]^2 + (4\alpha^2)^2 \left[\frac{x_1^2 + y_1^2}{k_1} - \frac{x_2^2 + y_2^2}{k_2} \right]^2 = 4\alpha^2 \quad (4)$$

όπου $k_1 = x_1^2 + y_1^2 + 4\alpha^2$ και $k_2 = x_2^2 + y_2^2 + 4\alpha^2$

Η σχέση (4) γράφεται:

$$4\alpha^2 \left[\frac{x_1^2}{k_1^2} + \frac{x_2^2}{k_2^2} - 2 \frac{x_1 x_2}{k_1 k_2} + \frac{y_1^2}{k_1^2} + \frac{y_2^2}{k_2^2} - 2 \frac{y_1 y_2}{k_1 k_2} \right] +$$

$$4\alpha^2 \left[\frac{(x_1^2 + y_1^2)^2}{k_1^2} + \frac{(x_2^2 + y_2^2)^2}{k_2^2} - 2 \frac{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)}{k_1 k_2} \right] = 1$$

και μετά από μερικές πράξεις καταλήγουμε στη σχέση:

$$(x_1^2 + y_1^2)k_2 + (x_2^2 + y_2^2)k_1 - 2[4\alpha^2 z_1 \circ z_2 + |z_1|^2 |z_2|^2] = 1 \quad (\text{όπου } z_1 \circ z_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2)$$

αλλά $k_1 = |z_1|^2 + 4\alpha^2$ και $k_2 = |z_2|^2 + 4\alpha^2$ Επομένως

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 - 2z_1 \circ z_2 = 1/(4\alpha^2)$$

14) Να εξετασθούν οι ασκήσεις 11, 12, και 13 όταν το μιγαδικό επίπεδο διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας του Riemann.

Λύση: Για την άσκηση 11 θεωρούμε ότι η ακτίνα της σφαίρας του Riemann είναι α και ότι το κέντρο της ταυτίζεται με την αρχή των αξόνων του μιγαδικού επιπέδου. Θέτουμε $\varphi = \gamma\omega\alpha(\text{ONA})$, $\theta = \gamma\omega\alpha(\text{AOX})$ και από το σχήμα έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} \tan \varphi &= \frac{\text{OA}}{\text{ON}} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\alpha} \\ \tan \varphi &= \frac{\text{KA}'}{\text{KN}} = \frac{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{\alpha - \zeta} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{\alpha - \zeta} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\alpha}$$

αλλά $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \alpha^2 \Rightarrow \xi^2 + \eta^2 = \alpha^2 - \zeta^2$ και επομένως

$$\frac{\sqrt{\alpha^2 - \zeta^2}}{\alpha - \zeta} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\alpha} \Rightarrow \frac{\alpha^2 - \zeta^2}{(\alpha - \zeta)^2} = \frac{x^2 + y^2}{\alpha^2} \Rightarrow \frac{\alpha + \zeta}{\alpha - \zeta} = \frac{x^2 + y^2}{\alpha^2} \Rightarrow$$

$$\alpha + \zeta = \frac{x^2 + y^2}{\alpha^2} (\alpha - \zeta) \Rightarrow \alpha \left(1 + \frac{x^2 + y^2}{\alpha^2} \right) = \frac{x^2 + y^2}{\alpha^2} - \alpha \Rightarrow$$

$$\zeta \left(\frac{\alpha^2 + x^2 + y^2}{\alpha^2} \right) = \frac{x^2 + y^2 - \alpha^2}{\alpha} \Rightarrow \zeta = \frac{\alpha(x^2 + y^2 - \alpha^2)}{x^2 + y^2 + \alpha^2}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha^2}{(x^2 + y^2 + \alpha^2)^2} \left[(x^2 + y^2 + \alpha^2)^2 - 4\alpha^2 x^2 - (x^2 + y^2 - \alpha^2)^2 \right] = \\ & = \frac{\alpha^2}{(x^2 + y^2 + \alpha^2)^2} \left[4\alpha^2(x^2 + y^2) - 4\alpha^2 x \right] = \\ & = \frac{\alpha^2}{(x^2 + y^2 + \alpha^2)^2} \left[4\alpha^2 y^2 \right] \Rightarrow \quad \eta = \frac{2\alpha^2 y}{x^2 + y^2 + \alpha^2} \end{aligned}$$

Για να βρούμε τις σχέσεις που εκφράζουν τα x και y συναρτήσει των ξ, η, ζ παρατηρούμε ότι:

$$\tan\theta = y/x = \eta/\xi \Rightarrow x = \xi(y/\eta) = \xi \frac{y}{\frac{2\alpha^2 y}{x^2 + y^2 + \alpha^2}} = \xi \frac{x^2 + y^2 + \alpha^2}{2\alpha^2}$$

$$\text{αλλά } \zeta = \frac{\alpha(x^2 + y^2 - \alpha^2)}{x^2 + y^2 + \alpha^2} \Rightarrow (x^2 + y^2)(\zeta - \alpha) = -\alpha^3 - \alpha^2 \zeta \Rightarrow x^2 + y^2 = \alpha^2 \frac{\alpha + \zeta}{\alpha - \zeta}$$

$$\text{και επομένως } x = \frac{\xi}{2\alpha^2} \left[\alpha^2 \frac{\alpha + \zeta}{\alpha - \zeta} + \alpha^2 \right] = \frac{\xi}{2} \frac{\alpha + \zeta}{\alpha - \zeta} \Rightarrow x = \frac{\xi}{2} \frac{\alpha + \zeta}{\alpha - \zeta}$$

$$\text{Τέλος } \frac{y}{x} = \frac{\eta}{\xi} \Rightarrow y = \frac{\eta}{\xi} \frac{\xi}{2} \frac{\alpha + \zeta}{\alpha - \zeta} \Rightarrow y = \frac{\eta}{2} \frac{\alpha + \zeta}{\alpha - \zeta}$$

ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 2ου Κεφαλαίου

1) Δείξτε ότι οι ρίζες α) του $\sin z$ και β) του $\cos z$ είναι όλες πραγματικές. Να υπολογισθούν.

Λύση: α) $\sin z = 0 \Rightarrow (e^{iz} - e^{-iz})/2i = 0 \Rightarrow e^{iz} - e^{-iz} = 0 \Rightarrow e^{2iz} - 1 = 0 \Rightarrow e^{2iz} = e^{2k\pi i} \Rightarrow 2iz = 2k\pi i \Rightarrow z = k\pi$ με $k \in \mathbb{Z}$

β) $\cos z = 0 \Rightarrow (e^{iz} + e^{-iz})/2 = 0 \Rightarrow e^{2iz} = -1 = e^{i(2k+1)\pi} \Rightarrow 2iz = i(2k+1)\pi \Rightarrow z = (2k+1)\pi/2$ με $k \in \mathbb{Z}$

2) Εάν $z = e^w$ όπου $z = re^{i\theta}$ και $w = u + iv$, δείξτε ότι $u = \ln r$ και $v = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ και επομένως $w = \ln z = \ln r + i(\theta + 2k\pi)$. Στη συνέχεια να υπολογισθούν οι τιμές του $\ln(1-i)$ και να βρεθεί η πρωτεύουσα τιμή του.

Λύση: α) Έχουμε: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = e^w = e^{u+iv} = e^u(\cos v + i\sin v) \Rightarrow$

$$\left. \begin{aligned} (1) \quad e^u \cos v &= r \cos \theta \\ (2) \quad e^u \sin v &= r \sin \theta \end{aligned} \right\} \Rightarrow e^{2u} = r^2 \Rightarrow u = \ln r \quad (3)$$

Οι σχέσεις (1) και (2) βάσει της (3) δίνουν:

$$\left. \begin{aligned} \cos v &= \cos \theta \\ \sin v &= \sin \theta \end{aligned} \right\} \Rightarrow v = \theta + 2k\pi \quad \text{Άρα } w = \ln z = \ln r + i(\theta + 2k\pi) \text{ με } k \in \mathbb{Z}$$

β) $1-i = \sqrt{2} \exp(7\pi i/4 + 2k\pi i) \Rightarrow \ln(1-i) = \ln\sqrt{2} + (7\pi/4 + 2k\pi)i = (\frac{1}{2})\ln 2 + [7\pi/4 + 2k\pi]i = \frac{1}{2}\ln 2 + [7\pi/4 + 2k\pi]i$

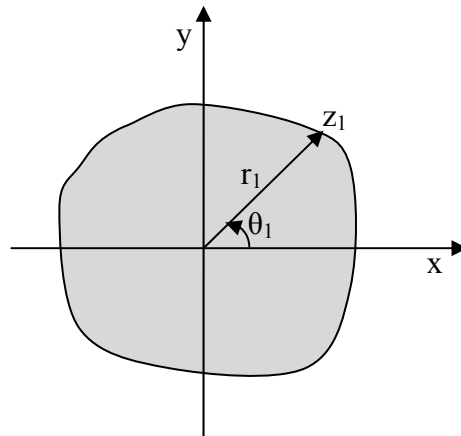
Η πρωτεύουσα τιμή είναι $(\frac{1}{2})\ln 2 + [7\pi/4]i$ και προκύπτει για $k=0$

3) Δείξτε ότι το σημείο $z=0$ είναι σημείο διακλαδώσεως της $f(z) = \ln z$.

Λύση: Έχουμε $\ln z = \ln r + i\theta$. Έστω ότι η αρχή είναι $z_1 = r_1 + i\theta_1$ με $z_1 \neq 0$. Τότε θα είναι $\ln z_1 = \ln r_1 + i\theta_1$. Όταν συμπληρώσουμε μια πλήρη περιφορά γύρω από την αρχή κατά την θετική φορά, θα έχουμε: $r = r_1$ και $\theta = \theta_1 + 2\pi$, και επομένως

$$\ln z = \ln r_1 + i(\theta_1 + 2\pi)$$

και έχουμε διαφορετική τιμή απ' ότι στην αρχή. Άρα το σημείο $z=0$ είναι σημείο διακλαδώσεως.



4) Θεωρούμε τον μετασχηματισμό $w=lnz$. Δείξτε ότι

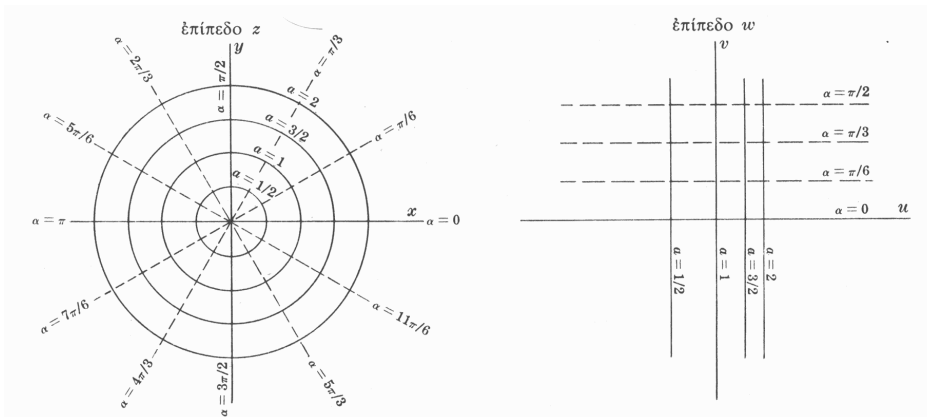
α) οι κύκλοι με κέντρο την αρχή στο z -επίπεδο απεικονίζονται στο w -επίπεδο σε ευθείες παράλληλες προς τον άξονα OV .

β) ευθείες ή ακτίνες, που διέρχονται από την αρχή στο z -επίπεδο, απεικονίζονται στο w -επίπεδο σε ευθείες παράλληλες προς τον άξονα OU .

γ) ολόκληρο το z -επίπεδο απεικονίζεται στο w -επίπεδο σε μια λουρίδα πλάτους 2π .

Να περιγραφούν οι προηγούμενες απεικονίσεις γραφικά.

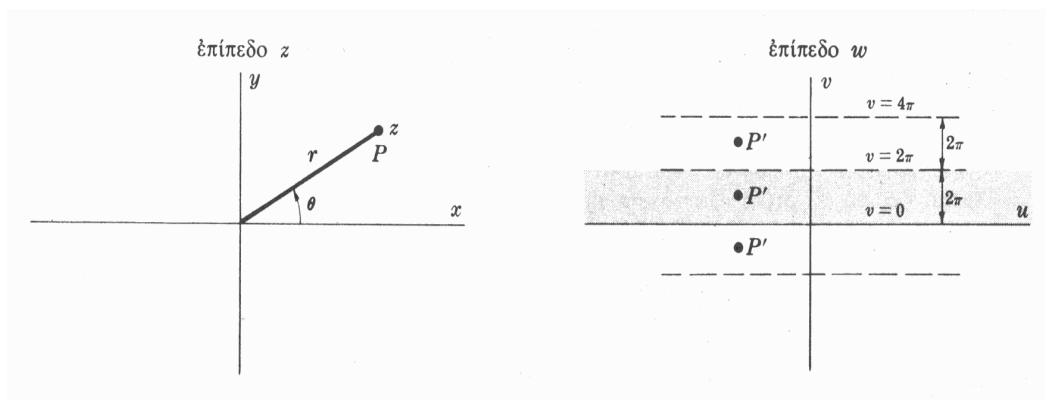
Λύση: α) Εάν $z=ae^{i\theta} \Rightarrow w=lnz=lna+i(\theta+2k\pi)=u+iv$



β) Ευθείες ή ακτίνες του z -επιπέδου, που περνάνε από την αρχή, έχουν εξίσωση $\theta=\text{σταθ}$. Οι εικόνες τους στο w -επίπεδο έχουν εξίσωση $v=\text{σταθ}$., δηλαδή ευθείες παράλληλες προς τον άξονα OU .

γ) Έστω ένα τυχαίο σημείο P του z -επιπέδου, που αντιστοιχεί στο μιγαδικό αριθμό $z=re^{i\theta}$ με $0 \leq \theta < 2\pi$. Στο w -επίπεδο αντιστοιχεί ένα σημείο P' , που αντιστοιχεί στο μιγαδικό αριθμό $w=lnz=lnr+i\theta$. Το w βρίσκεται στο εσωτερικό μιας λουρίδας πλάτους 2π , όπως δείχνει το σχήμα.

Εάν το θ είναι στο διάστημα $2\pi \leq \theta < 4\pi$ το z -επίπεδο απεικονίζεται στη λουρίδα $2\pi \leq v < 4\pi$.



5) α) Ναδειχθεί ότι τα σημεία $z=\pm i$ είναι σημεία διακλαδώσεως της συνάρτησης $w=f(z)=\sqrt{z^2+1}$.

β) Ναδειχθεί ότι μια πλήρη περιφορά γύρω από τα δυο σημεία διακλαδώσεως δεν δίνει νέο κλάδο της $f(z)$.

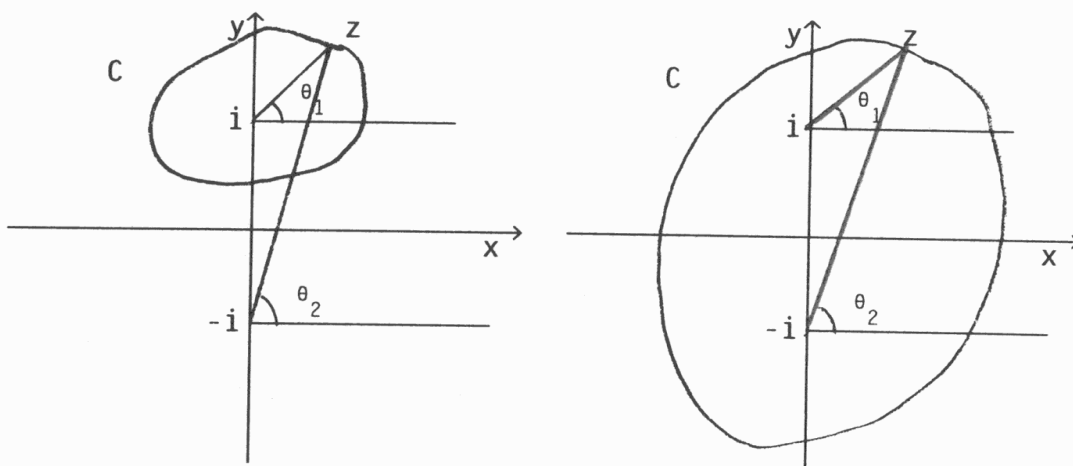
γ) Να προσδιοριστούν οι γραμμές διακλαδώσεως και η επιφάνεια Riemann.

Λύση: α) Έχουμε $w=\sqrt{(z-i)(z+i)}$. Εάν $z-i=r_1\exp(i\theta_1)$ και $z+i=r_2\exp(i\theta_2)$ τότε

$$w=\sqrt{r_1r_2\exp(i(\theta_1+\theta_2))}=\sqrt{r_1r_2}\exp(i\theta_1/2)\exp(i\theta_2/2)=$$

Έστω ότι αρχίζουμε με μια συγκεκριμένη τιμή του z , που αντιστοιχεί σε $\theta_1=\alpha_1$ και $\theta_2=\alpha_2$. Τότε: $w=\sqrt{r_1r_2}\exp(i\alpha_1/2)\exp(i\alpha_2/2)$

Όταν το z συμπληρώσει μια πλήρη περιφορά γύρω από το σημείο i , η θ_1 γίνεται $\alpha_1+2\pi$ ενώ η θ_2 παραμένει ίδια, δηλαδή $\theta_2=\alpha_2$. Άρα και είναι πάλι φανερό ότι δεν παίρνουμε την αρχική τιμή του w , δηλαδή λαμβάνεται ένας άλλος κλάδος και συνεπώς το $z=i$ είναι ένα σημείο διακλαδώσεως.



Με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι και το $z=-i$ είναι σημείο διακλαδώσεως.

β) Εάν η C περικλείει και τα δυο σημεία διακλαδώσεως $z=\pm i$, τότε καθώς το σημείο z κινείται πάνω στην καμπύλη C κατά τη θετική φορά, παρατηρούμε ότι τόσο το θ_1 όσο και το θ_2 αυξάνονται κατά 2π . Άρα:

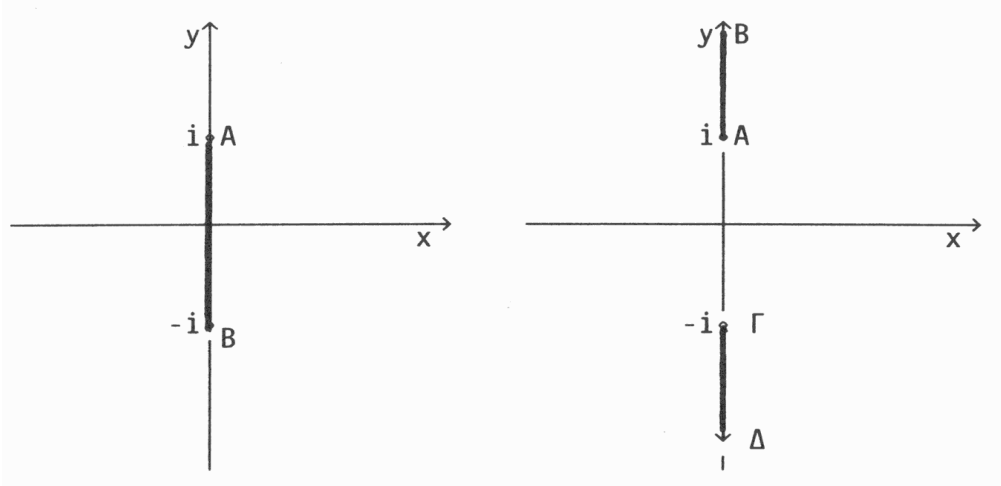
$$w=\sqrt{r_1r_2}\exp(i(\alpha_1+2\pi)/2)\exp(i(\alpha_2+2\pi)/2)=\sqrt{r_1r_2}\exp(i\alpha_1/2)\exp(i\alpha_2/2)$$

και το w παίρνει την αρχική τιμή.

γ) Σαν τομές διακλαδώσεως μπορούμε να θεωρήσουμε την γραμμή AB στο πρώτο σχήμα ή τις ημιευθείες AB και $\Gamma\Delta$:

Έχουμε διαφορετικές επιφάνειες Riemann αντίστοιχες στα δυο προηγούμενα σχήματα. Για

το πρώτο σχήμα φανταζόμαστε ότι το επίπεδο z αποτελείται από δυο φύλλα το ένα πάνω στο άλλο και μια τομή κατά μήκος της γραμμής διακλαδώσεως. Εάν στην τομή ενώσουμε το πάνω φύλλο με το κάτω και αντίστροφα, έχουμε την επιφάνεια Riemann. Εάν κάνουμε



μια πλήρη περιφορά γύρω από το $z=i$, διαβαίνουμε την τομή και έχουμε αλλαγή κλάδου. Εάν όμως κάνουμε μια πλήρη περιφορά γύρω από τα $z=i$ και $z=-i$, δεν έχουμε αλλαγή κλάδου.

6) Να αποδειχθεί ότι:

$$\alpha) \quad \sin^{-1}z = \frac{1}{i} \ln \left[iz + \sqrt{1-z^2} \right] + 2k\pi$$

$$\beta) \quad \sinh^{-1}z = \ln \left[z + \sqrt{z^2+1} \right] + i2k\pi$$

Λύση: α) Εάν $w = \sin^{-1}z \Rightarrow z = \sin w \Rightarrow z = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} \Rightarrow e^{iw} - e^{-iw} - 2iz = 0 \Rightarrow$

$$e^{2iw} - 2ize^{iw} - 1 = 0 \Rightarrow e^{iw} = \frac{2iz \pm \sqrt{4-4z^2}}{2} = iz \pm \sqrt{1-z^2}$$

Επειδή όμως στους μιγαδικούς αριθμούς τα $\pm\sqrt{z}$ και \sqrt{z} είναι ταυτόσημα και $e^{iw} = e^{i(w-2k\pi)}$ με $k \in \mathbb{Z}$ έχουμε:

$$e^{i(w-2k\pi)} = iz + \sqrt{1-z^2} \Rightarrow w = \frac{1}{i} \ln \left[iz + \sqrt{1-z^2} \right] + 2k\pi$$

$$\beta) \quad \text{Εάν } w = \sinh^{-1}z \Rightarrow z = \sinh w = \frac{e^w - e^{-w}}{2} \Rightarrow e^w - e^{-w} - 2z = 0 \Rightarrow e^{2w} - 2ze^w - 1 = 0$$

$$\Rightarrow e^w = \frac{2z + \sqrt{4z^2+4}}{2} = z + \sqrt{z^2+1} = e^{w-2ik\pi} \Rightarrow w - 2ik\pi = \ln \left[z + \sqrt{z^2+1} \right] \Rightarrow$$

$$w = \sinh^{-1}z = \ln \left[z + \sqrt{z^2+1} \right] + 2ik\pi$$

ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 3ου Κεφαλαίου

1) Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(z)=\bar{z}$ δεν είναι αναλυτική.

Λύση: $f(z)=u+iv=x-iy \Rightarrow u=x$ και $v=-y \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=1, \frac{\partial v}{\partial y}=-1 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$

δηλαδή δεν ισχύει μια από τις συνθήκες Cauchy-Riemann και επομένως η συνάρτηση $f(z)=\bar{z}$ δεν είναι αναλυτική.

2) Εάν η $w=f(z)=u+iv$ είναι αναλυτική σ' ένα τόπο D , δείξτε ότι

$$dw/dz = \partial w / \partial x = -i \partial w / \partial y$$

Λύση: Στην παράγραφο 3.3, αποδεικνύοντας το αναγκαίο των συνθηκών Cauchy-Riemann, είδαμε ότι:

$$f'(z) = \lim_{\substack{\Delta y \rightarrow 0 \\ \Delta x \rightarrow 0}} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(z) = \frac{\partial w}{\partial x}$$

Από τις συνθήκες Cauchy-Riemann έχουμε επίσης

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \left(-\frac{\partial u}{\partial y} \right) = -i \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -i \frac{\partial w}{\partial y}$$

3) Δείξτε ότι η συνάρτηση $w=x^2+iy^2$ είναι παντού μη αναλυτική. Πως συμβιβάζεται αυτό με το γεγονός ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες Cauchy-Riemann στα σημεία της ευθείας $y=x$;

Λύση: Έχουμε $w=f(z)=u+iv=x^2+iy^2 \Rightarrow u=x^2$ και $v=y^2$. Για να είναι η $f(z)$ αναλυτική πρέπει να ισχύουν οι συνθήκες Cauchy-Riemann δηλαδή:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow 2x = 2y \text{ και } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow 0 = 0$$

Παρατηρούμε ότι οι συνθήκες Cauchy-Riemann ικανοποιούνται μόνο στα σημεία της ευθείας $y=x$. Από το γεγονός αυτό συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $f(z)=x^2+iy^2$ έχει παράγωγο μόνο πάνω στην ευθεία $y=x$ αλλά σε κανένα σημείο της ευθείας αυτής δεν είναι αναλυτική διότι δεν υπάρχει περιοχή σημείου της ευθείας σε κάθε σημείο της οποίας να έχει η $f(z)$ παράγωγο.

4) Εξετάστε ποιές από τις παρακάτω συναρτήσεις $u(x,y)$ είναι αρμονικές. Για κάθε αρμονική συνάρτηση βρείτε την συζυγή αρμονική συνάρτηση $v(x,y)$ και εκφράστε την $u+iv$ σαν αναλυτική συνάρτηση του z .

α. $u=3x^2y+2x^2-y^3-2y^2$

β. $u=2xy+3xy^2-2y^3$

γ. $u=xe^x \cos y - ye^x \sin y$

Απαντήσεις:α. Εξετάζουμε εάν ισχύει η εξίσωση $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Έχουμε:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}(6xy+4x) + \frac{\partial}{\partial y}(3x^2-3y^2-4y) = (6y+4) + (-6y-4) = 0$$

Άρα η συνάρτηση $u(x,y)$ είναι αρμονική. Επομένως υπάρχει η συζυγής αρμονική $v=v(x,y)$ ώστε η μιγαδική συνάρτηση $f=u(x,y)+iv(x,y)$ να είναι αναλυτική. Η συνάρτηση $v(x,y)$ βρίσκεται ως εξής: Από τις συνθήκες Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (1), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (2)$$

έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 6xy+4x &\Rightarrow v=3xy^2+4xy+c_1(x) \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = 3y^2+4y + \frac{dc_1(x)}{dx} \stackrel{(2)}{=} -\frac{\partial u}{\partial y} = \\ &-(3x^2-3y^2-4y) \Rightarrow \frac{dc_1(x)}{dx} = -3x^2 \Rightarrow c_1(x) = -x^3+c \end{aligned}$$

Άρα $v=3xy^2+4xy-x^3+c$ και επομένως $f=u+iv=(3x^2+2x^2-y^3-2y^2)+i(3xy^2+4xy-x^3+c)$

Για να εκφράσουμε την f συναρτήσει του z , θα θέσουμε στην έκφραση του f , $x=z$ και $y=0$ και θα έχουμε:

$$f(z)=2z^2+i(-z^3)+ic=2z^2-iz^3+ic$$

Με όμοιο τρόπο εξετάζονται και οι άλλες περιπτώσεις:

β. όχι

γ. $v=ye^x \cos y + xe^x \sin y + c$, $f(z)=ze^z+ic$

5) Εάν $\operatorname{Im} f'(z)=6x(2y-1)$ και $f(0)=3-2i$, $f(1)=6-5i$, υπολογίστε το $f(1+i)$. Α

Λύση: Έστω $f(z)=u_1+iv_1$ με $v_1=12xy-6x$. Οι συνθήκες Cauchy-Riemann για την $f'(z)$ δίνουν:

(1) $\frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial v_1}{\partial y} = 12x \Rightarrow u_1 = 6x^2 + c_1(y)$ (3)

(2) $\frac{\partial u_1}{\partial y} = -\frac{\partial v_1}{\partial x} = -12y+6 = c_1'(y) \Rightarrow c_1(y) = -6y^2+6y+k_1$ (4)

(3), (4) $\Rightarrow u_1 = 6x^2 - 6y^2 + 6y + k_1$

Άρα $f(z) = (6x^2 - 6y^2 + 6y) + i(12xy - 6x) + k_1|_{x=z, y=0} = 6z^2 - 6iz + k_1 \Rightarrow f(z) = 2z^3 - 3iz^2 + k_1z + k_2$

Για $z=0$, $f(0)=k_2=3-2i$ και για $z=1$, $f(1)=2-3i+k_1+k_2=6-5i \Rightarrow$

$$k_1=(6-5i)-(2-3i)-(3-2i)=1$$

Τελικά $f(z)=2z^3-3iz^2+z+3-2i$ και $f(1+i)=6+3i$

6) Για κάθε μια από τις παρακάτω συναρτήσεις προσδιορίστε και αναγνωρίστε τα ανώμαλα σημεία στο πεπερασμένο z -επίπεδο.

$$\alpha. \frac{z^2-3z}{z^2+2z+2} \quad \beta. \frac{\ln(z+3i)}{z^2} \quad \gamma. \sin^{-1}(1/z)$$

Απαντήσεις:

α. απλοί πόλοι στα σημεία $z=-1 \pm i$

β. σημείο διακλάδωσης στο σημείο $z=-3i$ και πόλος δεύτερης τάξης στο $z=0$.

γ. ουσιώδες ανώμαλο σημείο στο $z=0$.

7) Για τη συνάρτηση $f(z)=\sec(1/z)$ να προσδιορισθούν και να αναγνωρισθούν τα ανώμαλα σημεία.

Λύση: Επειδή $\sec(1/z)=1/[\cos(1/z)]$ τα ανώμαλα σημεία είναι όπου $\cos(1/z)=0$, δηλαδή $1/z=(2n+1)\pi/2 \Rightarrow z=2/(2n+1)\pi$ με $n \in \mathbb{Z}$. Επίσης, επειδή η $f(z)$ δεν ορίζεται στο $z=0$, έπεται ότι το $z=0$ είναι ανώμαλο σημείο. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του L' Hospital έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 2/(2n+1)\pi} \left[z - \frac{2}{(2n+1)\pi} \right] f(z) &= \lim_{z \rightarrow 2/(2n+1)\pi} \frac{z - \frac{2}{(2n+1)\pi}}{\cos\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{0}{0} = \\ &= \lim_{z \rightarrow 2/(2n+1)\pi} \frac{\left[z - \frac{2}{(2n+1)\pi} \right]'}{\left[\cos\left(\frac{1}{z}\right) \right]'} = \lim_{z \rightarrow 2/(2n+1)\pi} \frac{1}{-\sin(1/z) \left(-1/z^2\right)} = \\ &= \frac{\left(\frac{2}{(2n+1)\pi} \right)^2}{\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)} = \frac{4(-1)^n}{(2n+1)^2 \pi^2} \neq 0 \end{aligned}$$

Συνεπώς τα ανώμαλα σημεία $z=2/(2n+1)\pi$ με $n \in \mathbb{N}$ είναι **πόλοι πρώτης τάξης, (απλοί πόλοι)**. Οι πόλοι αυτοί βρίσκονται πάνω στον πραγματικό άξονα στα σημεία $z=\pm 2/\pi, \pm 2/3\pi, \pm 2/5\pi, \dots$ Έτσι, η δεδομένη συνάρτηση έχει άπειρο πλήθος πόλων σε οποιοδήποτε πεπερασμένο διάστημα που περιλαμβάνει το μηδέν.

Επειδή κάθε ανώμαλο σημείο μπορεί να κλειστεί σε μια περιφέρεια κύκλου ακτίνας δ που δεν περιέχει άλλο σημείο, έπεται ότι όλα αυτά τα ανώμαλα σημεία είναι

απομονωμένα. Ας σημειωθεί ότι όσο πιο κοντά στην αρχή είναι το ανώμαλο σημείο, τόσο πιο μικρό δ απαιτείται.

Επειδή δεν μπορεί να βρεθεί ένας θετικός ακέραιος αριθμός n τέτοιος ώστε

$$\lim_{z \rightarrow 0} (z-0)^n f(z) = A \neq 0$$

έπεται ότι το $z=0$ είναι ένα **ουσιώδες ανώμαλο σημείο**. Επειδή κάθε περιφέρεια με κέντρο το $z=0$ και ακτίνα δ οσοδήποτε μικρή περιέχει και άλλα ανώμαλα σημεία εκτός από το $z=0$, συμπεραίνουμε ότι το $z=0$ είναι ένα **μη απομονωμένο ανώμαλο σημείο**

8) Δείξτε ότι $\nabla^2 |f(z)|^2 = 4|f'(z)|^2$ Επαληθεύστε τη σχέση αυτή για $f(z) = z^2 + iz$.

Λύση: $\nabla^2 |f(z)|^2 = \nabla^2 (u^2 + v^2) = [\partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2] (u^2 + v^2)$

$$\text{αλλά } \frac{\partial}{\partial x} u^2 = 2u \frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} u^2 = \frac{\partial}{\partial x} \left[2u \frac{\partial u}{\partial x} \right] = 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\text{Όμοια } \frac{\partial^2}{\partial x^2} v^2 = \frac{\partial}{\partial x} \left[2v \frac{\partial v}{\partial x} \right] = 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + 2v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} u^2 = \frac{\partial}{\partial y} \left[2u \frac{\partial u}{\partial y} \right] = 2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2u \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} v^2 = \frac{\partial}{\partial y} \left[2v \frac{\partial v}{\partial y} \right] = 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

Επομένως $\nabla^2 |f(z)|^2 = \nabla^2 (u^2 + v^2) =$

$$= 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + 2 \left[u \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + v \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \right] =$$

$$= 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(-\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] = 4 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] = 4|f'(z)|^2$$

9) Δείξτε ότι σε πολική μορφή οι συνθήκες Cauchy-Riemann είναι:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta}$$

Λύση: Έχουμε $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \tan^{-1}(y/x)$ Άρα

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) + \frac{\partial u}{\partial \theta} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{\partial u}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \sin \theta \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) + \frac{\partial u}{\partial \theta} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{\partial u}{\partial r} \sin \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \cos \theta \quad (2)$$

Όμοια έχουμε:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \sin \theta \quad (3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial r} \sin \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \cos \theta \quad (4)$$

Από τη συνθήκη Cauchy-Riemann $\partial u/\partial y = -\partial v/\partial x$ έχουμε χρησιμοποιώντας τις (1) και (4):

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \cos \theta - \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \sin \theta = 0 \quad (5)$$

Από τη συνθήκη Cauchy-Riemann $\partial u/\partial y = -\partial v/\partial x$ έχουμε χρησιμοποιώντας τις (2) και (3)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \sin \theta + \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \cos \theta = 0 \quad (6)$$

Πολλαπλασιάζοντας την (5) επί $\cos \theta$, την (6) επί $\sin \theta$ και προσθέτοντας, βρίσκουμε:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad (7)$$

Πολλαπλασιάζοντας την (5) επί $-\sin \theta$, την (6) επί $\cos \theta$ και προσθέτοντας, βρίσκουμε:

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \quad (8)$$

10) Εάν η $w=f(z)$ είναι αναλυτική και εκφραστεί σε πολικές συντεταγμένες (r, θ) , δείξτε

ότι:
$$\frac{dw}{dz} = e^{-i\theta} \frac{\partial w}{\partial r}$$

Λύση: Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (1) και (3) της προηγούμενης άσκησης έχουμε:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \partial u/\partial x + i \partial v/\partial x \stackrel{(1)}{=} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \sin \theta \right) + i \left(\frac{\partial v}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \sin \theta \right) \stackrel{(7)}{=} \\ & \left(\frac{\partial u}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \left[-r \frac{\partial v}{\partial r} \right] \sin \theta \right) + i \left(\frac{\partial v}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \left[r \frac{\partial u}{\partial r} \right] \sin \theta \right) = \\ & = \left(\frac{\partial u}{\partial r} \cos \theta + \frac{\partial v}{\partial r} \sin \theta \right) + i \left(\frac{\partial v}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial u}{\partial r} \sin \theta \right) = \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right) \cos \theta + \left(\frac{\partial v}{\partial r} - i \frac{\partial u}{\partial r} \right) \sin \theta = \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right) \cos \theta - i \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right) \sin \theta = (\cos \theta - i \sin \theta) \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right) = e^{-i\theta} \frac{\partial f}{\partial r}$$

11) Θεωρούμε την αναλυτική συνάρτηση $f(z)$ σε πολική μορφή, δηλαδή

$$f(z) = \rho(x, y) e^{i\varphi(x, y)}$$

α) Να δείξετε ότι οι συνθήκες Cauchy-Riemann είναι:

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \rho \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial y} = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

β) Η συνάρτηση $\rho(x, y)$, (που είναι το μέτρο της $f(z)$), εκτός από την συνθήκη $\rho(x, y) > 0$ ικανοποιεί και την συνθήκη:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho} \left[\left(\frac{\partial \rho}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial y} \right)^2 \right] = 0$$

για να είναι το μέτρο μιας αναλυτικής συνάρτησης $f(z) = 0$

γ) Το όρισμα $\varphi(x, y)$ μιας αναλυτικής συνάρτησης ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

Λύση:

$$\alpha) \quad \text{Έστω } f(z) = u + iv = \rho e^{i\varphi} \Rightarrow u = \rho \cos \varphi \text{ και } v = \rho \sin \varphi \quad (1)$$

Ξέρουμε ότι:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2) \quad \text{και} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (3)$$

$$(2) \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial x} \cos \varphi - \rho \sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial y} \sin \varphi + \rho \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Rightarrow$$

$$\cos \varphi \left[\frac{\partial \rho}{\partial x} - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] = \sin \varphi \left[\frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] \quad (4)$$

$$(3) \Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial y} \cos \varphi - \rho \sin \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \rho}{\partial x} \sin \varphi - \rho \cos \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Rightarrow$$

$$\cos \varphi \left[\frac{\partial \rho}{\partial y} + \rho \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] = \sin \varphi \left[-\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] \quad (5)$$

Πολλαπλασιάζοντας την (4) επί $\sin \varphi$ και την (5) επί $\cos \varphi$ και προσθέτοντας κατά

$$\mu\acute{\epsilon}\lambda\eta \text{ βρ}\acute{\iota}\sigma\kappa\omicron\upsilon\mu\epsilon: \quad \frac{\partial \rho}{\partial x} - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad (6)$$

Πολλαπλασιάζουμε την (4) επί $\sin\varphi$ και την (5) επί $\cos\varphi$ και προσθέτοντας κατά

μέλη βρίσκουμε:
$$\frac{\partial\rho}{\partial y} = -\rho \frac{\partial\varphi}{\partial x} \quad (7)$$

β)
$$(6) \Rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{\partial\rho}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial\rho}{\partial x} \right] = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial\rho}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2\rho}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} \quad (8)$$

$$(7) \Rightarrow \frac{1}{\rho} \frac{\partial\rho}{\partial y} = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial\rho}{\partial y} \right] = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x} \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial\rho}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2\rho}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x} \quad (9)$$

$$(8), (9) \Rightarrow -\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial\rho}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2\rho}{\partial x^2} = -\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial\rho}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2\rho}{\partial y^2} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\rho}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho} \left[\left(\frac{\partial\rho}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\rho}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (10)$$

γ)
$$(6) \Rightarrow \frac{\partial^2\rho}{\partial y\partial x} = \frac{\partial\rho}{\partial y} \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \rho \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} \quad (11)$$

$$(7) \Rightarrow \frac{\partial^2\rho}{\partial x\partial y} = -\frac{\partial\rho}{\partial x} \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \rho \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} \quad (12)$$

$$(11), (12) \Rightarrow \rho \left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} \right] = -\frac{\partial\rho}{\partial y} \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{\partial\rho}{\partial x} \frac{\partial\varphi}{\partial x} \stackrel{(6)}{=} \rho \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial\varphi}{\partial y} - \rho \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0$$

ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 4ου Κεφαλαίου

1) Εάν C είναι το τμήμα της καμπύλης $y=x^3-3x^2+4x-1$ που ενώνει τα σημεία $1+i$ και $2+3i$, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_C [12z^2 - 4iz] dz$$

Λύση: A τρόπος:

Επειδή η συνάρτηση $f(z)=12z^2-4iz$ είναι αναλυτική το ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητο από το δρόμο που συνδέει τα σημεία $1+i$ και $3+3i$. Έτσι μπορούμε να διαλέξουμε οποιονδήποτε δρόμο. Διαλέγουμε την τεθλασμένη γραμμή που αποτελείται από τα ευθύγραμμα τμήματα εκ των οποίων το πρώτο ενώνει το σημείο $1+i$ με το σημείο $2+i$ και το δεύτερο ενώνει το σημείο $2+i$ με το σημείο $2+3i$.

α) Κατά μήκος του πρώτου ευθυγράμμου τμήματος έχουμε $y=1$, $dy=0$ και συνεπώς $z=x+i$ και $dz=dx$ και το ολοκλήρωμα ισούται με:

$$\int_{x=1}^{x=2} [12(x+i)^2 - 4i(x+i)] dx = [4(x+i)^3 - 2i(x+i)^2]_1^2 = 20+30i$$

β) Κατά μήκος του δεύτερου ευθυγράμμου τμήματος έχουμε $x=2$, $dx=0$ και συνεπώς $z=2+iy$ και $dz=idy$ και το ολοκλήρωμα ισούται με:

$$\int_{y=1}^{y=3} [12(2+iy)^2 - 4i(2+iy)] idy = [4(2+iy)^3 - 2i(2+iy)^2]_1^3 = -176+8i$$

Προσθέτοντας βρίσκουμε $I=(20+30i)+(-176+8i)=-156+38i$

B τρόπος: $I = \int_{1+i}^{2+3i} (12z^2 - 4iz) dz = (4z^3 - 2iz^2) \Big|_{1+i}^{2+3i} = -156+38i$

2) Δείξτε ότι: $\int \frac{1}{z^2 + \alpha^2} dz = \frac{1}{\alpha} \tan^{-1} \left[\frac{z}{\alpha} \right] + c_1 = \frac{1}{2\alpha i} \ln \left[\frac{z - \alpha i}{z + \alpha i} \right] + c_2$

Λύση: $\int \frac{1}{z^2 + \alpha^2} dz = \frac{1}{\alpha} \int \frac{1}{(z/\alpha)^2 + 1} d(z/\alpha) = \frac{1}{\alpha} \tan^{-1} (z/\alpha) + c_1 =$

$$= \frac{1}{\alpha} \frac{1}{2i} \ln \left[\frac{1 + i \frac{z}{\alpha}}{1 - i \frac{z}{\alpha}} \right] + c_2 = \frac{1}{2\alpha i} \ln \left[\frac{z - \alpha i}{z + \alpha i} \right] + c_2$$

3) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\oint_C |z|^2 dz$ στο σύνορο του τετραγώνου με κορυφές στα σημεία 0, 1, 1+i, i.

Λύση: $\oint_C |z|^2 dz = \oint_C (x^2 + y^2)(dx + idy) =$

$$= \int_{OA} |z|^2 dz + \int_{AB} |z|^2 dz + \int_{B\Gamma} |z|^2 dz + \int_{\Gamma O} |z|^2 dz$$

α) OA: $0 \leq x \leq 1, y=0, dy=0$

$$\int_{OA} |z|^2 dz = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

β) AB: $x=1, dx=0, 0 \leq y \leq 1$

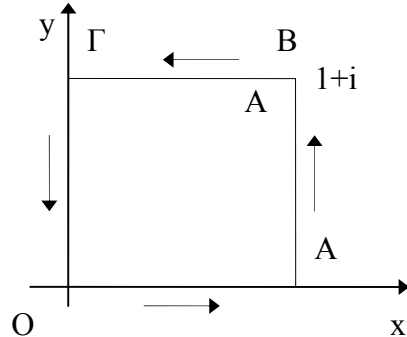
$$\int_{AB} |z|^2 dz = \int_0^1 (1+y^2)(idy) = i \left(y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^1 = i \left(1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3} i$$

γ) BΓ: $1 \geq x \geq 0, y=1, dy=0$

$$\int_{B\Gamma} |z|^2 dz = \int_1^0 (x^2 + 1) dx = \frac{1}{3} x^3 + x \Big|_1^0 = -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{3}$$

δ) ΓO: $x=0, dx=0, 1 \geq y \geq 0$ $\int_{\Gamma O} |z|^2 dz = \int_1^0 y^2 idy = i \frac{y^3}{3} \Big|_1^0 = -i \frac{1}{3}$

Τελικά: $\oint_C |z|^2 dz = 1 + 4i/3 - 4/3 - i/3 = -1 + i$



4) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\oint_C e^z dz$ όπου C η περιφέρεια $|z|=1$ και δείξτε ότι:

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \cos(\theta + \sin\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \sin(\theta + \cos\theta) d\theta = 0$$

Λύση: Επειδή η συνάρτηση $f(z)=e^z$ είναι αναλυτική τότε από το θεώρημα του Cauchy έχουμε ότι:

$$\oint_C e^z dz = 0$$

αλλά $z = \cos\theta + i\sin\theta$ με $0 \leq \theta \leq 2\pi$ και $dz = (-\sin\theta + i\cos\theta)d\theta$.

Επομένως: $I = \int_0^{2\pi} e^{(\cos\theta + i\sin\theta)} (-\sin\theta + i\cos\theta) d\theta =$

$$= \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} [\cos(\sin\theta) + i\sin(\sin\theta)] [-\sin\theta + i\cos\theta] d\theta =$$

$$= i \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} [\cos(\sin\theta) + i \sin(\sin\theta)] [\cos\theta + i \sin\theta] d\theta$$

αλλά $[\cos(\sin\theta) + i \sin(\sin\theta)] = e^{i \sin\theta}$ και $[\cos\theta + i \sin\theta] = e^{i\theta}$

και επομένως $[\cos(\sin\theta) + i \sin(\sin\theta)] [\cos\theta + i \sin\theta] = e^{i(\theta + \sin\theta)} = [\cos(\sin\theta) + i \sin(\sin\theta)] [\cos\theta + i \sin\theta] = \cos(\theta + \sin\theta) + i \sin(\theta + \sin\theta)$

Άρα $I = i \int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} [\cos(\theta + \sin\theta) + i \sin(\theta + \sin\theta)] d\theta = 0 \Rightarrow$

και $\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \cos(\theta + \sin\theta) d\theta = 0$ και $\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta} \sin(\theta + \sin\theta) d\theta = 0$

5) Εάν n θετικός ακέραιος, δείξτε ότι:

$$\int_0^{2\pi} e^{\sin(n\theta)} \cos(\theta - \cos(n\theta)) d\theta = \int_0^{2\pi} e^{\sin(n\theta)} \sin(\theta - \cos(n\theta)) d\theta = 0$$

Λύση: Θέτουμε:

$$I = \int_0^{2\pi} e^{\sin(n\theta)} \cos(\theta - \cos(n\theta)) d\theta \quad \text{και} \quad K = \int_0^{2\pi} e^{\sin(n\theta)} \sin(\theta - \cos(n\theta)) d\theta$$

και υπολογίζουμε την έκφραση $I + iK$:

$$I + iK = \int_0^{2\pi} e^{\sin(n\theta)} e^{i(\theta - \cos(n\theta))} d\theta = \int_0^{2\pi} e^{\sin(n\theta) + i\theta - i\cos(n\theta)} e^{i\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} e^{-i(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))} e^{i\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} e^{-i \exp(in\theta)} e^{i\theta} d\theta$$

Θέτουμε $e^{i\theta} = z \Rightarrow i e^{i\theta} d\theta = dz$ Άρα

$$I + iK = \int_C \exp(-iz^n) \frac{dz}{i} = - \int_C i \exp(-iz^n) dz$$

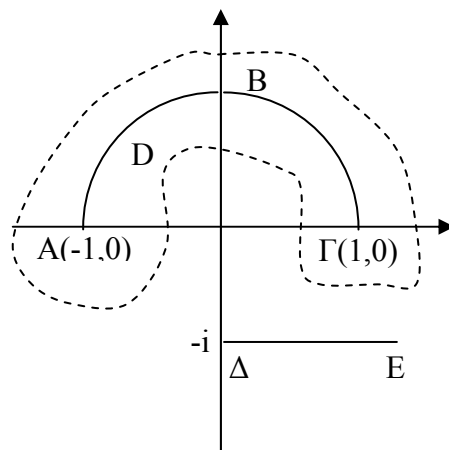
Η συνάρτηση $i \exp(-iz^n)$ είναι αναλυτική και επομένως $I + iK = 0 \Rightarrow I = K = 0$

6) Να υπολογισθεί με τη βοήθεια μιας παράγουσας, (δηλαδή ενός αορίστου ολοκληρώματος), το ολοκλήρωμα $I = \int_C \frac{dz}{z+1}$ όπου C η ημιπεριφέρεια $z = e^{i\theta}$ με $\pi \geq \theta \geq 0$.

Λύση: Για να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση $\int_\alpha^\beta f(z) dz = F(\alpha) - F(\beta)$ πρέπει να βρούμε μια συνάρτηση που έχει για παράγωγο την $1/(z+i)$ σε κάθε σημείο ενός ανοικτού τόπου D , που περιέχει το δρόμο ολοκλήρωσης και μέσα στον οποίο η συνάρτηση $1/(z+i)$ είναι αναλυτική, (βλ. σχήμα). Έχουμε:

$$\frac{d}{dz} \ln(z+i) = \frac{1}{z+i}$$

για κάθε σημείο συνέχειας του $\ln(z+i)$. Ο λογάριθμος $\ln(z+i)$, του οποίου θεωρούμε τον πρωτεύοντα κλάδο, είναι ασυνεχής στη γραμμή διακλαδώσεως ΔE , που δεν τέμνει τον ανοικτό τόπο D . Ο ανοικτός τόπος D



διαλέγεται έτσι ώστε:

- α) να περιέχει τον δρόμο ολοκλήρωσης και
 β) η γραμμή διακλάδωσης ΔΕ να μη τον τέμνει

Παρατηρούμε επίσης ότι η ολοκληρωτέα συνάρτηση $1/(z+i)$ είναι αναλυτική στον, (κατάλληλο διαλεγμένο), ανοικτό τόπο D. Έτσι έχουμε:

$$I = \int_{AB\Gamma} \frac{dz}{z+i} = \ln(z+i) \Big|_{z=-1}^{z=1} = \ln(1+i) - \ln(-1+i) = \left(\ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4} \right) - \left(\ln\sqrt{2} + i\frac{3\pi}{4} \right) = -i\frac{\pi}{2}$$

Το ολοκλήρωμα μπορεί να υπολογισθεί απ' ευθείας ως εξής: Θέτουμε

$$z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \Rightarrow dz = (-\sin\theta + i\cos\theta)d\theta \quad \pi \leq \theta \leq 2\pi$$

$$\begin{aligned} I &= \int_{AB\Gamma} \frac{dz}{z+1} = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{-\sin\theta + i\cos\theta}{\cos\theta + i(1+\sin\theta)} d\theta = \frac{1}{2} \int_{\pi}^{2\pi} \left[\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} + i \right] d\theta = \\ &= \frac{1}{2} \left[\ln(1+\sin\theta) + i\theta \right] \Big|_{\pi}^{2\pi} = -i\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

7) Να υπολογισθεί με τη βοήθεια μιας παράγουσας το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_C \frac{z^2+1}{z} dz$$

όπου ο δρόμος ολοκλήρωσης C δίνεται από το σχήμα.

Λύση: Έχουμε: $I = \int_i^1 z dz + \int_i^1 \frac{dz}{z}$

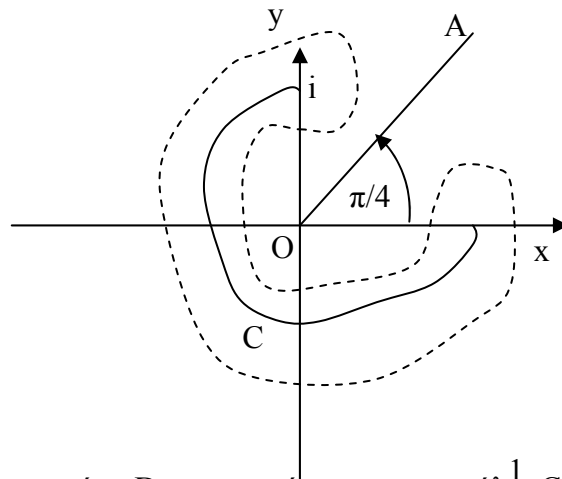
Η συνάρτηση z είναι ακέραιη με παράγουσα την $z^2/2$. Επομένως το ολοκλήρωμα: $\int_i^1 z dz$ είναι ανεξάρτητο της C και ισούται με:

$$\int_i^1 z dz = \frac{1}{2} z^2 \Big|_i^1 = 1$$

Η συνάρτηση $1/z$ είναι αναλυτική πάνω στο τόπο D, που περιέχει την καμπύλη C

και έχει για παράγουσα έναν κλάδο της $\ln z$, αρκεί η γραμμή διακλάδωσης OA να μη τέμνει τον D. Η συνθήκη αυτή ισχύει αν π.χ. η γωνία $(OX, OA) = \pi/4$. Τότε όμως θα είναι: $\ln z = \ln|z| + i\theta$ με $\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4 + 2\pi$ Επομένως θα έχουμε:

$$\int_i^1 \frac{dz}{z} = \ln_{\pi/4}(z) \Big|_i^1 = \ln_{\pi/4}(1) - \ln_{\pi/4}(i) = \{\ln 1 + i2\pi\} - (\ln 1 + i\pi/2) = i(3\pi/2). \text{ Τελικά } I = 1 + i(3\pi/2)$$



ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 5ου Κεφαλαίου

1) Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

α) $\oint_C \frac{e^z}{z-2} dz$ όπου C η περιφέρεια i) $|z|=3$ ii) $|z|=1$

β) $\oint_C \frac{\sin 3z}{z + \frac{\pi}{2}} dz$ όπου C η περιφέρεια $|z|=5$

γ) $\oint_C \frac{e^{3z}}{z - \pi i} dz$ όπου C i) η περιφέρεια $|z-1|=4$ ii) η έλλειψη $|z-2|+|z+2|=6$

δ) $\oint_C \frac{\cos \pi z}{z^2 - 1} dz$ όπου C το ορθογώνιο με κορυφές στα σημεία i) $2 \pm i, -2 \pm i$, ii) $\pm i, 2 \pm i$

Λύση: α) i) Η συνάρτηση $e^z/(z-2)$ έχει το σημείο $z_0=2$ πόλο τάξης 1 ο οποίος βρίσκεται στο εσωτερικό της περιφέρειας $|z|=3$. Επομένως από τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy προκύπτει:

$$\oint_C \frac{e^z}{z-2} dz = 2\pi i e^2$$

ii) Για την περίπτωση της περιφέρειας $|z|=1$ ο πόλος $z_0=2$ δεν βρίσκεται στο εσωτερικό της και επομένως το αποτέλεσμα του αντιστοίχου ολοκληρώματος είναι μηδέν.

β) Η συνάρτηση $\frac{\sin 3z}{z + \pi/2}$ έχει το σημείο $z_0 = -\pi/2$ πόλο τάξης 1, ο οποίος βρίσκεται στο εσωτερικό της περιφέρειας $|z|=5$. Το αποτέλεσμα του αντίστοιχου ολοκληρώματος θα είναι:

$$\oint_C \frac{\sin 3z}{z + \pi/2} dz = 2\pi i \sin\left(-3\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi i$$

γ) i) Η συνάρτηση $\frac{e^{3z}}{z - \pi i}$ έχει το σημείο $z_0 = \pi i$ πόλο τάξης 1, ο οποίος βρίσκεται στο εσωτερικό της περιφέρειας $|z-1|=4$, (διότι $|z_0-1| = |\pi i - 1| = (1^2 + \pi^2)^{1/2} < 4$). Επομένως θα έχουμε:

$$\oint_C \frac{e^{3z}}{z-\pi i} dz = 2\pi i e^{i\pi} = -2\pi i$$

ii) Για την περίπτωση της έλλειψης πρέπει να ελέγξουμε αν ο πόλος $z_0=\pi i$ βρίσκεται στο εσωτερικό της, δηλαδή αν $|z_0-2|+|z_0+2|<6$

$$\text{Αλλά } |z_0-2|+|z_0+2|=|i\pi-2|+|i\pi+2|=(\pi^2+2^2)^{1/2}+(\pi^2+2^2)^{1/2}=2(\pi^2+4)^{1/2}>6$$

Ο πόλος $z_0=\pi i$ δεν βρίσκεται στο εσωτερικό της έλλειψης και το αποτέλεσμα του αντιστοίχου ολοκληρώματος είναι μηδέν.

δ) i) Η συνάρτηση $\frac{\cos \pi z}{z^2-1}$ έχει τα σημεία $z_1=1$ και $z_2=-1$ πόλους τάξης 1, οι οποίοι βρίσκονται στο εσωτερικό του ορθογωνίου με κορυφές τα σημεία $2\pm i, -2\pm i$.

Έχουμε:

$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{(z-1)(z+1)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} \right]$$

Το δε ολοκλήρωμα θα είναι:

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{\cos \pi z}{z^2-1} dz &= \oint_C \cos \pi z \frac{1}{2} \left[\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1} \right] dz = \frac{1}{2} \left\{ \oint_C \frac{\cos \pi z}{z-1} dz - \oint_C \frac{\cos \pi z}{z+1} dz \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \{ \cos \pi - \cos(-\pi) \} = 0 \end{aligned}$$

ii) Για την περίπτωση του δεύτερου ορθογωνίου εύκολα διαπιστώνουμε ότι στο εσωτερικό του βρίσκεται μόνο ο πόλος $z_1=1$. Επομένως:

$$\oint_C \frac{\cos \pi z}{z^2-1} dz = \frac{1}{2} \oint_C \frac{\cos \pi z}{z+1} dz = \frac{1}{2} \cos \pi = -\frac{1}{2}$$

2) Δείξτε ότι $\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{zt}}{z^2+1} dz = \sin t$ εάν $t>0$ και C η περιφέρεια $|z|=3$

Λύση: Η συνάρτηση $\frac{e^{zt}}{z^2+1}$ έχει τα σημεία $z_1=i$ και $z_2=-i$ πόλους τάξης 1, οι οποίοι βρίσκονται στο εσωτερικό της περιφέρειας $|z|=3$. Αλλά

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i} \right]$$

$$\text{Επομένως: } \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{zt}}{z^2+1} dz = \frac{1}{2\pi i} \left[\oint_C \frac{e^{zt}}{z-i} dz - \oint_C \frac{e^{zt}}{z+i} dz \right] = \frac{1}{2i} [e^{it} - e^{-it}] = \sin t$$

Άλλος τρόπος: Εάν θεωρήσουμε δυο περιφέρειες Γ_1 και Γ_2 με κέντρα τους πόλους z_1 και z_2 αντίστοιχα και ακτίνες κατάλληλα μικρές, ώστε να περιέχονται στην περιφέρεια $|z|=3$. Τότε από το θεώρημα του Cauchy για τόπους πολλαπλής συνοχής θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{zt}}{z^2+1} dz &= \frac{1}{2\pi i} \left[\oint_{\Gamma_1} \frac{e^{zt}}{z-i} dz + \oint_{\Gamma_2} \frac{e^{zt}}{z+i} dz \right] = \frac{1}{2\pi i} \left[2\pi i \left(\frac{e^{zt}}{z+i} \right)_{z=i} + 2\pi i \left(\frac{e^{zt}}{z-i} \right)_{z=-i} \right] = \\ &= \frac{e^{it}}{2i} + \frac{e^{-it}}{-2i} = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \sin t \end{aligned}$$

3) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\oint_C \frac{e^{zt}}{(z^2+1)^2} dz$ εαν $t > 0$ και C η περιφέρεια $|z|=3$.

Λύση: Η συνάρτηση $\frac{e^{zt}}{(z^2+1)^2}$ έχει τα σημεία $z_1=i$ και $z_2=-i$ πόλους τάξης 2, τα οποία

βρίσκονται στο εσωτερικό της περιφέρειας $|z|=3$. Θεωρούμε τώρα δυο περιφέρειες Γ_1 και Γ_2 με κέντρα τους αντίστοιχους πόλους z_1 και z_2 και ακτίνες κατάλληλα μικρές ώστε να περιέχονται στο εσωτερικό της περιφέρειας $|z|=3$. Από τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy προκύπτει:

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{e^{zt}}{(z^2+1)^2} dz &= \oint_{\Gamma_1} \frac{e^{zt}}{(z+i)^2} dz + \oint_{\Gamma_2} \frac{e^{zt}}{(z-i)^2} dz = 2\pi i \frac{d}{dz} \left(\frac{e^{zt}}{(z+i)^2} \right)_{z=i} + 2\pi i \frac{d}{dz} \left(\frac{e^{zt}}{(z-i)^2} \right)_{z=-i} = \\ &= 2\pi i \left\{ \frac{te^{zt}(z+i)^2 - 2(z+ie^{zt})}{(z+i)^4} \right\}_{z=i} + 2\pi i \left\{ \frac{te^{zt}(z-i)^2 - 2(z-ie^{zt})}{(z-i)^4} \right\}_{z=-i} = \\ &= 2\pi i \left\{ \frac{te^{it}(-4) - 2(2i)e^{it}}{2^4} + \frac{te^{-it}(-4) - 2(-2i)e^{-it}}{2^4} \right\} = 2\pi i \left\{ \frac{-4t-4i}{16} e^{it} + \frac{-4t+4i}{16} e^{-it} \right\} = \\ &= \frac{\pi i}{2} \{ (-t-i)e^{it} + (-t+i)e^{-it} \} = \\ &= \frac{\pi i}{2} \{ -t(\cos t + i \sin t) - i(\cos t + i \sin t) - t(\cos t - i \sin t) + i(\cos t - i \sin t) \} = \\ &= \frac{\pi i}{2} \{ -2t \cos t + 2 \sin t \} = \pi i \{ \sin t - t \cos t \} \end{aligned}$$

4) Εάν $f(z) = \frac{(z^2 + 1)^2}{(z^2 + 2z + 2)^3}$ να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ όπου C η περιφέρεια $|z|=4$

Λύση: Η συνάρτηση $f(z) = \frac{(z^2 + 1)^2}{(z^2 + 2z + 2)^3}$ έχει πόλους τα σημεία: $z_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = -1 \pm i$

τάξης 3 και ρίζες τα σημεία $\rho_{1,2} = \pm i$ πολλαπλότητας 2. Οι πόλοι και οι ρίζες βρίσκονται μέσα στην περιφέρεια $|z|=4$ και επομένως από το θεώρημα του ορίσματος θα έχουμε:

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i(2 \times 2 - 2 \times 3) = -4\pi i$$

5) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\oint_C \tan(\pi z) dz$ όπου C η περιφέρεια $|z|=4$

Λύση: Παρατηρούμε ότι εάν θέσουμε $f(z) = \cos(\pi z)$ τότε:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-\pi \sin(\pi z)}{\cos(\pi z)} = -\pi \tan(\pi z) \Rightarrow \tan(\pi z) = \frac{1}{-\pi} \frac{f'(z)}{f(z)}$$

Επομένως: $\oint_C \tan(\pi z) dz = \oint_C \frac{1}{-\pi} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = -\frac{1}{\pi} 2\pi i [(n_1 + n_2 + \dots) - (p_1 + p_2 + \dots)]$

όπου n_1, n_2, \dots οι πολλαπλότητες των ριζών και p_1, p_2, \dots οι τάξεις των πόλων, που βρίσκονται στο εσωτερικό της περιφέρειας $|z|=4$. Επειδή η συνάρτηση $f(z) = \cos(\pi z)$ είναι παντού αναλυτική δεν έχει πόλους.

Εύρεση των ριζών: $\cos(\pi z) = 0 \Rightarrow \pi z = [\pi/2](2k+1) \Rightarrow z = k + 1/2, k \in \mathbb{Z}$. Επειδή $|z| < 4$ οι δυνατές τιμές του k είναι: $k = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ δηλαδή η συνάρτηση $f(z) = \cos(\pi z)$ έχει 8 απλές ρίζες στο εσωτερικό της περιφέρειας $|z|=4$. Επομένως το ολοκλήρωμα θα είναι: $\oint_C \tan(\pi z) dz = -2i(8) = -16i$

6) Εάν $f(z) = z^4 - 2z^3 + z^2 - 12z + 20$ και C η περιφέρεια $|z|=5$, να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz$

Λύση: Κατ' αρχή η συνάρτηση $f(z)$ σαν πολυώνυμο δεν έχει πόλους. Για την εύρεση των ριζών της συνάρτησης $f(z)$ παρατηρούμε ότι μια ρίζα είναι $\rho_1 = 2$ και διαιρώντας την $f(z)$ με $z-2$ βρίσκουμε:

$$z^4 - 2z^3 + z^2 - 12z + 20 = (z-2)(z^3 + z - 10) = (z-2)(z-2)(z^2 + 2z + 5) = (z-2)^2 [(z - (-1+2i))(z - (-1-2i))] \Rightarrow$$

$$\rho_1 = 2, \rho_2 = -1+2i, \rho_3 = -1-2i$$

με αντίστοιχες πολλαπλότητες $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1$ και $\alpha_3 = 1$. Τελικά

$$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i [2 \times \rho_1 + \rho_2 + \rho_3] = 2\pi i [4 + (-1 + 2I) + (-1 - 2I)] = 4\pi i$$

7) Να αποδειχθεί ότι $\oint_C \frac{\cos^2 tz}{z^3} dz = -2\pi i t$ όπου C η περιφέρεια $|z|=1$ εάν $t > 0$

Λύση: Το σημείο $z_0=0$ είναι πόλος τάξης 3 για την ολοκληρωτέα συνάρτηση και είναι το κέντρο της περιφέρειας $|z|=1$. Από τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy έχουμε:

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{\cos^2 tz}{z^3} dz &= \frac{2\pi i}{2!} \frac{d^2}{dz^2} [\cos^2(tz)]_{z=0} = \pi i \frac{d}{dz} [-2t \cos(tz) \sin(tz)]_{z=0} = \\ &= \pi i [-2 \cos(tz) \sin(tz) + 2t^2 \sin^2(tz) - 2t^2 \cos^2(tz)]_{z=0} = \pi i (-2t^2) = -2\pi i t^2 \end{aligned}$$

8) α) Δείξτε ότι $\oint_C \frac{1}{z+1} dz = 2\pi i$ εάν C είναι η περιφέρεια $|z|=2$

β) Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο αποτέλεσμα δείξτε ότι:

$$\oint_C \frac{(x+1)dx + ydy}{(x+1)^2 + y^2} = 0, \quad \oint_C \frac{(x+1)dy - ydx}{(x+1)^2 + y^2} = 2\pi$$

Λύση: α) Προφανές. β) Σχηματίζουμε την έκφραση $I_1 + iI_2$ και έχουμε:

$$\begin{aligned} I_1 + iI_2 &= \oint_C \frac{(x+1)(dx+idy) + y(dy-idx)}{(x+1)^2 + y^2} = \oint_C \frac{(x+1)(dx+idy) - iy(dx+idy)}{(x+1)^2 + y^2} \\ &= \oint_C \frac{(x+1)dz - iydz}{|z+1|^2} = \oint_C \frac{(x+1-iy)dz}{|z+1|^2} = \oint_C \frac{(\bar{z}+1)dz}{|z+1|^2} = \oint_C \frac{(\bar{z}+1)dz}{(z+1)(\bar{z}+1)} = \oint_C \frac{dz}{z+1} \oint_C = 2\pi i \end{aligned}$$

$$\Rightarrow I_1 = 0 \text{ και } I_2 = 2\pi i$$

9) Προσδιορίστε όλες τις συναρτήσεις $f(z)$ που είναι αναλυτικές στο συμπληρωμένο μιγαδικό επίπεδο και ικανοποιούν τις συνθήκες:

$$\alpha) f(2-i) = 4i \quad \beta) |f(z)| \leq e^2 \quad \forall z$$

Λύση: Η συνάρτηση $f(z)$ θέλουμε να είναι αναλυτική στο συμπληρωμένο μιγαδικό επίπεδο και $|f(z)| < e^2 \quad \forall z$, δηλαδή φραγμένη. Άρα θα είναι σταθερή και επειδή μας δίνουν $f(2-i) = 4i$ θα έχουμε $f(z) = 4i$.

10) Δείξτε ότι α) $I_1 = \int_0^{2\pi} e^{\cos t} \cos(\sin t) dt = 2\pi$ β) $I_2 = \int_0^{2\pi} e^{\cos t} \sin(\sin t) dt = 0$

Λύση:

$$I_1 + iI_2 = \int_0^{2\pi} e^{\cos t} [\cos(\sin t) + i \sin(\sin t)] dt = \int_0^{2\pi} e^{\cos t} e^{i \sin t} dt = \int_0^{2\pi} \exp(e^{it}) dt$$

$$\text{Θέτουμε } z = e^{it} \Rightarrow dz = iz dt \Rightarrow dt = dz/iz$$

$$\text{Άρα } I_1 + iI_2 = \frac{1}{i} \oint_{|z|=1} e^z \frac{dz}{z} = \frac{1}{i} 2\pi i e^0 = 2\pi \Rightarrow$$

$$I_1 = \int_0^{2\pi} e^{\cos t} \cos(\sin t) dt = 2\pi \quad \text{και} \quad I_2 = \int_0^{2\pi} e^{\cos t} \sin(\sin t) dt = 0$$

11) Εάν $t > 0$ και C είναι μια οποιαδήποτε απλή κλειστή καμπύλη που περικλείει το $z = -1$, δείξτε ότι:

$$\oint_C \frac{ze^{zt}}{(z+1)^3} dz = 2\pi i \left[t - \frac{t^2}{2} \right] e^{-t}$$

Λύση: Από τον ολοκληρωτικό τύπο του Cauchy έχουμε:

$$\oint_C \frac{ze^{zt}}{(z+1)^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} \frac{d^2}{dz^2} [ze^{zt}]_{z=-1} = \pi i \frac{d}{dz} [e^{zt} + te^{zt}]_{z=-1} = \pi i [2te^{-t} + t^2 ze^{-t}]_{z=-1} = \pi i [2t - t^2] e^{-t}$$

ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ 6ου Κεφαλαίου

1) Δείξτε ότι εάν $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$, τότε και $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = |z|$. Το αντίστροφο ισχύει ;

Λύση: $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})[n > n_0 \rightarrow |z_n - z| < \varepsilon]$ αλλά $||z_n| - |z|| < |z_n - z|$ επομένως

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})[n > n_0 \rightarrow ||z_n| - |z|| < \varepsilon] \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = |z|$$

Επειδή δεν ισχύει η ανισότητα: $|z - z| < |z| - |z|$ δεν ισχύει και το αντίστροφο.

2) Χρησιμοποιώντας τον τύπο του αθροίσματος μιας συγκλίνουσας γεωμετρικής σειράς, να δείξετε ότι:

$$\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nt = \frac{r \cos t - r^2}{1 - 2r \cos t + r^2} \quad \text{και}$$

$$\beta) \sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin nt = \frac{r \sin t}{1 - 2r \cos t + r^2} \quad \text{με } 0 \leq r < 1$$

Λύση: Έστω $z = re^{it}$ με $|z| = r < 1$. Θεωρούμε τη γεωμετρική σειρά:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} z^n &= \frac{z}{1-z} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{int} = \frac{re^{it}}{1-re^{it}} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} r^n (\cos nt + i \sin nt) = \frac{r(\cos t + i \sin t)}{(1-r \cos t) - ir \sin t} = \\ &= \frac{r(\cos t + i \sin t [(1-r \cos t) + ir \sin t])}{(1-r \cos t)^2 + r^2 \sin^2 t} = \frac{(r \cos t - r^2) + ir \sin t}{(1-r \cos t)^2 + r^2 \sin^2 t} \end{aligned}$$

Χωρίζοντας πραγματικά από φανταστικά μέρη βρίσκουμε:

$$\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nt = \frac{r \cos t - r^2}{1 - 2r \cos t + r^2} \quad \text{και}$$

$$\beta) \sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin nt = \frac{r \sin t}{1 - 2r \cos t + r^2} \quad \text{με } 0 \leq r < 1$$

3) Να βρεθεί ο τύπος σύγκλισης των σειρών:

$$\alpha) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!} \quad \beta) \sum_{n=1}^{\infty} n! z^n$$

Λύση: α) Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του λόγου βρίσκουμε:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \bigg/ \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| -\frac{z^2(2n-1)!}{(2n+1)!} \right| =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z|^2}{(2n+1)(2n)} = 0 < 1 \text{ για κάθε πεπερασμένο } z.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει, (απόλυτα), για κάθε z , $|z| < \infty$. Επομένως ο κύκλος σύγκλισης είναι άπειρος ή ισοδύναμα η ακτίνα σύγκλισης είναι άπειρη.

β) Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του λόγου βρίσκουμε:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)z^{n+1}}{nz^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)|z| = \infty$$

Επομένως η σειρά αποκλίνει για κάθε z εκτός από το σημείο $z=0$.

4) Να αναπτυχθεί σε σειρά Taylor η συνάρτηση $f(z)=1/z$ γύρω από το σημείο $z_0=-3$. Να βρεθεί η περιοχή σύγκλισης.

Λύση:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{(z+3)-3} = \frac{1}{3} \frac{1}{\frac{z+3}{3}-1} = -\frac{1}{3} \frac{1}{1-\frac{z+3}{3}} =$$

$$= -\frac{1}{3} \left[1 + \frac{z+3}{3} + \left(\frac{z+3}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{z+3}{3}\right)^n + \dots \right] = -\frac{1}{3} - \frac{z+3}{3^2} - \frac{(z+3)^2}{3^3} - \dots - \frac{(z+3)^n}{3^{n+1}} - \dots$$

Η παραπάνω γεωμετρική σειρά συγκλίνει για $\left| \frac{z+3}{3} \right| < 1 \Rightarrow |z+3| < 3$

δηλαδή η περιοχή σύγκλισης είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $(-3,0)$ και ακτίνα 3.

5) Όμοια για την συνάρτηση $f(z)=1/z^2$

Λύση: Παραγωγίζοντας την σειρά:

$$\frac{1}{z} = -\frac{1}{3} - \frac{z+3}{3^2} - \frac{(z+3)^2}{3^3} - \dots - \frac{(z+3)^n}{3^{n+1}} - \dots$$

της προηγούμενης άσκησης ως προς z βρίσκουμε:

$$\frac{1}{z^2} = \frac{1}{3^2} + \frac{2(z+3)}{3^3} + \dots + \frac{n(z+3)^{n-1}}{3^{n+1}} + \dots$$

Η νέα σειρά έχει την ίδια περιοχή σύγκλισης με την προηγούμενη.

6) Έστω ότι η συνάρτηση $f(z)$ είναι αναλυτική στο σημείο z_0 και ότι $f(z_0)=0$. Χρησιμοποιώντας κατάλληλο ανάπτυγμα, δείξτε ότι:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{z - z_0} = f'(z_0)$$

Λύση: Αναπτύσσουμε την αναλυτική συνάρτηση $f(z)$ σε σειρά Taylor γύρω από το σημείο z_0 :

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \dots \quad \text{με } f(z_0) = 0$$

και έχουμε:
$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{z - z_0} = f'(z_0)$$

7) Να βρεθεί το πρωτεύον και το αναλυτικό μέρος του αναπτύγματος Laurent για τις συναρτήσεις:

α) $f(z) = \frac{1}{z-2} \sin\left(\frac{1}{z-2}\right)$ γύρω από το σημείο $z_0=2$

β) $f(z) = (z-1) \cos\left(\frac{1}{z-1}\right)$ γύρω από το σημείο $z_0=1$

Λύση: α) Στο ανάπτυγμα του ημιτόνου:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

αντικαθιστούμε το z με το $1/(z-2)$ οπότε η συνάρτηση $f(z)$ γράφεται:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-2} \left[\frac{1}{z-2} - \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{z-2}\right)^3 + \frac{1}{5!} \left(\frac{1}{z-2}\right)^5 - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{1}{z-2}\right)^{2n+1} + \dots \right] = \\ &= \frac{1}{(z-2)^2} - \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{z-2}\right)^4 + \frac{1}{5!} \left(\frac{1}{z-2}\right)^6 - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{1}{z-2}\right)^{2n+2} + \dots \end{aligned}$$

Από την παραπάνω έκφραση προκύπτει ότι το πρωτεύον μέρος είναι η ίδια η έκφραση και το αναλυτικό μέρος είναι μηδέν.

β) Με όμοιο τρόπο εργαζόμαστε και για την δεύτερη συνάρτηση.

8) Να βρεθεί το πρωτεύον μέρος του αναπτύγματος Laurent για τη συνάρτηση $f(z) = \frac{e^z \cos z}{z^3}$ γύρω από το ανώμαλο σημείο της. Να οριστεί το είδος της ανωμαλίας και η περιοχή σύγκλισης του αναπτύγματος Laurent.

Λύση: Το μόνο ανώμαλο σημείο της $f(z)$ είναι το $z_0=0$. Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor του συνημιτόνου και της εκθετικής συνάρτησης, έχουμε:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{1}{z^3} \left[1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots \right] \left[1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots \right] = \\
&= \frac{1}{z^3} \left[1 + z + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{2!} \right) z^3 + \left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{2!2!} \right) z^4 + \left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{3!2!} \right) z^5 + \left(\frac{1}{2!4!} - \frac{1}{6!} \right) z^6 + \dots \right] = \\
&= \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} - \frac{3}{4} - \frac{5}{16}z - \frac{3}{40}z^2 + \frac{179}{8640}z^3 + \frac{3}{648}z^4 + \dots
\end{aligned}$$

Από το ανάπτυγμα Laurent που προέκυψε, βγαίνει το συμπέρασμα ότι το ανώμαλο σημείο $z_0=0$ είναι πόλος τάξης 3. Η περιοχή σύγκλισης του αναπτύγματος είναι όλο το μιγαδικό επίπεδο, διότι τα μόνα αναπτύγματα που χρησιμοποιήθηκαν ήταν τα αναπτύγματα Taylor των συναρτήσεων e^z και $\cos z$ που συγκλίνουν για κάθε z . Άρα η περιοχή σύγκλισης του αναπτύγματος Laurent είναι όλο το μιγαδικό επίπεδο εκτός από το σημείο $z_0=0$.

9) Να βρεθεί το πρωτεύον μέρος του αναπτύγματος Laurent για την συνάρτηση: $f(z) = \frac{z}{(z+1)^2(z^3+2)}$ γύρω από το σημείο $z_0=-1$. Να ορισθεί το είδος της ανωμαλίας του σημείου z_0 και η περιοχή σύγκλισης του αναπτύγματος.

Λύση: Θα αναπτύξουμε κατά Taylor την συνάρτηση $g(z) = \frac{z}{(z^3+2)}$ γύρω από το σημείο $z_0=-1$:

$$g(z) = \frac{z}{(z^3+2)} = g(-1) + \frac{g'(-1)}{1!}(z+1) + \frac{g''(-1)}{2!}(z+1)^2 + \dots =$$

αλλά $g(-1) = -1/2$

$$g'(-1) = \left. \frac{(z^3+3) - z3z^2}{(z^3+3)^2} \right|_{z=-1} = \frac{5}{4}$$

$$g''(-1) = \left. \frac{(3z^2-6z)(z^3+3)^2 - (z^3-3z^2+3)2(z^3+3)3z}{(z^3+3)^2} \right|_{z=-1} = 12$$

Επομένως: $g(z) = -\frac{1}{2} + \frac{5}{4}(z+1) + 6(z+1)^2 + \dots$ και

$$f(z) = \frac{z}{(z+1)^2(z^3+2)} = \frac{1}{(z+1)^2} \left[-\frac{1}{2} + \frac{5}{4}(z+1) + 6(z+1)^2 + \dots \right] = -\frac{1}{2(z+1)^2} + \frac{5}{4(z+1)} + 6 \dots$$

Από το παραπάνω ανάπτυγμα Laurent προκύπτει ότι το ανώμαλο σημείο $z_0=-1$ είναι πόλος τάξης 2 και η περιοχή σύγκλισης της σειράς είναι όλο το μιγαδικό επίπεδο εκτός από το σημείο $z_0=-1$.

10) Να βρεθεί το ανάπτυγμα Laurent της συνάρτησης: $f(z) = \frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)}$ με $0 < |\alpha| < |\beta|$ γύρω από τα σημεία α) $z=0$, β) $z=\alpha$, γ) $z=\beta$ και δ) στον δακτύλιο $|\alpha| < |z| < |\beta|$.

Λύση: Κατ' αρχήν έχουμε

$$f(z) = \frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)} = \frac{1}{(\alpha-\beta)} \frac{1}{(z-\alpha)} + \frac{1}{(\beta-\alpha)} \frac{1}{(z-\beta)} =$$

$$\alpha) \ z=0 \quad f(z) = \frac{1}{\beta-\alpha} \left[\frac{1}{\alpha} \frac{1}{1-\frac{z}{\alpha}} \right] + \frac{1}{\alpha-\beta} \left[\frac{1}{\beta} \frac{1}{1-\frac{z}{\beta}} \right] =$$

$$= \frac{1}{\alpha(\beta-\alpha)} \left[1 + \frac{z}{\alpha} + \left(\frac{z}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{z}{\alpha}\right)^3 + \dots \right] + \frac{1}{\beta(\alpha-\beta)} \left[1 + \frac{z}{\beta} + \left(\frac{z}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{z}{\beta}\right)^3 + \dots \right]$$

Το πρώτο μέρος της σειράς συγκλίνει για $|z| < |\alpha|$ και το δεύτερο μέρος για $|z| < |\beta|$. Προφανώς και τα δυο μέρη συγκλίνουν για $|z| < |\alpha|$. Το παραπάνω ανάπτυγμα γράφεται ως προς τις δυνάμεις του z :

$$f(z) = \left\{ \frac{1}{\alpha(\beta-\alpha)} + \frac{1}{\beta(\alpha-\beta)} \right\} + \left\{ \frac{1}{\alpha^2(\beta-\alpha)} + \frac{1}{\beta^2(\alpha-\beta)} \right\} z + \left\{ \frac{1}{\alpha^3(\beta-\alpha)} + \frac{1}{\beta^3(\alpha-\beta)} \right\} z^2 + \dots$$

β) Για το σημείο $z=\alpha$ εργαζόμαστε ως εξής:

$$f(z) = \frac{1}{(\alpha-\beta)} \frac{1}{(z-\alpha)} + \frac{1}{(\beta-\alpha)} \frac{1}{(z-\beta)} = \frac{1}{(\beta-\alpha)} \frac{1}{(z-\alpha)} + \frac{1}{(\beta-\alpha)} \frac{1}{(z-\alpha) - (\beta-\alpha)} =$$

$$= \frac{1}{(\beta-\alpha)} \frac{1}{(z-\alpha)} + \frac{1}{(\beta-\alpha)} \left(\frac{1}{\alpha-\beta} \right) \frac{1}{1 - \frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}} =$$

$$= \frac{1}{(\alpha-\beta)} \frac{1}{(z-\alpha)} - \frac{1}{(\beta-\alpha)^2} \left[1 + \left(\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}\right) + \left(\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^2 + \left(\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^3 + \dots \right] =$$

$$= \frac{1}{(\alpha-\beta)} \frac{1}{(z-\alpha)} - \frac{1}{(\beta-\alpha)^2} - \frac{1}{(\beta-\alpha)^3} (z-\alpha) - \frac{1}{(\beta-\alpha)^4} (z-\alpha)^2 - \dots$$

και η σειρά αυτή του Laurent συγκλίνει για $|(z-\alpha)/(z-\beta)| < 1$ δηλαδή $|z-\alpha| < |\beta-\alpha|$.

Με παρόμοιο τρόπο αντιμετωπίζονται και οι υπόλοιπες δυο περιπτώσεις.

11) Να βρεθεί το ανάπτυγμα Laurent της συνάρτησης $f(z) = 1/(z-2)^2$ για α) $|z| < 2$ και β) $|z| > 2$

Λύση: α) Παραγωγίζουμε την γεωμετρική σειρά:

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{z}{2}-1} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2} \left[1 + \frac{z}{2} + \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \dots \right] =$$

ως προς z , (η οποία ισχύει για $|z/2| < 1 \Rightarrow |z| < 2$), και έχουμε:

$$\frac{-1}{(z-2)^2} = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} + \frac{z}{2} + \frac{3z^2}{2^3} + \dots \right] \Rightarrow \frac{-1}{(z-2)^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} + \frac{z}{2} + \frac{3z^2}{2^3} + \dots \right]$$

β) Για την περίπτωση $|z| > 2$ εργαζόμαστε ως εξής:

$$\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z} \left[1 + \frac{2}{z} + \left(\frac{2}{z}\right)^2 + \dots \right] = \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{2^2}{z^3} + \dots \Rightarrow$$

$$\left(\frac{1}{z-2}\right)^2 = -\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z-2}\right) = \frac{1}{z^2} + \frac{4}{z^3} + \frac{12}{z^4} + \dots$$

12) Να εξετάσετε εάν το σημείο $a=1-i$ είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο της $f(z)$, η οποία παριστάνεται από την σειρά:

$$f(z) = (z-a)^{-1} + (z-a)^{-2} + (z-a)^{-3} + \dots$$

Λύση: Η σειρά αυτή είναι γεωμετρική και αν $|1/(z-a)| < 1$ συγκλίνει με άθροισμα

$$f(z) = \frac{1}{z-a} \frac{1}{1-\frac{1}{z-a}} = \frac{1}{z-a-1}$$

Από την μορφή του αθροίσματος προκύπτει ότι το μόνο ανώμαλο σημείο είναι το $2-i$, που είναι απλός πόλος, ενώ το σημείο $a=1-i$ είναι ομαλό.

13) Να αναπτυχθούν σε σειρά Laurent οι συναρτήσεις:

α) $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}$ σε μια περιοχή του σημείου i

β) $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z^2+1)}$ για $1 < |z| < 2$.

Λύση: α) Έχουμε:

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2} = \frac{1}{(z-i)^2} \frac{1}{(z+i)^2}$$

αλλά
$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{(z-i)+2i} = \frac{1}{2i} \frac{1}{1+\frac{z-i}{2i}} = \frac{1}{2i} \left[1 - \frac{z-i}{2i} + \left(\frac{z-i}{2i}\right)^2 - \left(\frac{z-i}{2i}\right)^3 + \dots \right]$$

Η τελευταία σειρά συγκλίνει για $|z-i| < 2$. Παραγωγίζουμε την τελευταία σχέση ως προς z :

$$-\frac{1}{(z+i)^2} = \frac{1}{2i} \left[-\frac{1}{2i} + \frac{2(z-i)}{(2i)^2} - \frac{3(z-i)^2}{(2i)^3} + \dots \right] \Rightarrow \frac{1}{(z+i)^2} = \frac{1}{(2i)^2} + \frac{2(z-i)}{(2i)^3} - \frac{3(z-i)^2}{(2i)^4} + \dots$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-i)^2} \frac{1}{(z+i)^2} = \frac{1}{(z-i)^2} \left[\frac{1}{(2i)^2} + \frac{2(z-i)}{(2i)^3} - \frac{3(z-i)^2}{(2i)^4} + \dots \right] = \\ &= \frac{1}{(2i)^2} \frac{1}{(z-i)^2} + \frac{2}{(2i)^3} \frac{1}{z-i} - \frac{3}{(2i)^4} + \dots \end{aligned}$$

β) Αναλύουμε το κλάσμα $\frac{1}{(z-2)(z^2+1)}$ σε απλά κλάσματα:

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z+i)(z-i)} = \frac{1}{5} \frac{1}{z-2} + \frac{1}{-2+4i} \frac{1}{z+i} + \frac{-1}{2+4i} \frac{1}{z-i}$$

αλλά i) για $|z| < 2$ έχουμε:
$$\frac{1}{z-2} = \frac{-1}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2} \left[1 + \frac{z}{2} + \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^3 + \dots \right]$$

ii) για $|z| > 1$ έχουμε:
$$\frac{1}{z+i} = \frac{1}{z} \frac{1}{1+\frac{i}{z}} = \frac{1}{z} \left[1 + \frac{i}{z} + \left(\frac{i}{z}\right)^2 + \left(\frac{i}{z}\right)^3 + \dots \right]$$

και
$$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{i}{z}} = \frac{1}{z} \left[1 - \frac{i}{z} + \left(\frac{i}{z}\right)^2 - \left(\frac{i}{z}\right)^3 + \dots \right]$$

Τελικά για $1 < |z| < 2$ προκύπτει:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{10} \left[1 + \frac{z}{2} + \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^3 + \dots \right] + \frac{1}{-2+4i} \frac{1}{z} \left[1 + \frac{i}{z} + \left(\frac{i}{z}\right)^2 + \left(\frac{i}{z}\right)^3 + \dots \right] + \\ &+ \frac{-1}{2+4i} \frac{1}{z} \left[1 - \frac{i}{z} + \left(\frac{i}{z}\right)^2 - \left(\frac{i}{z}\right)^3 + \dots \right] = \\ &= \frac{1}{10} \left[1 + \frac{z}{2} + \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^3 + \dots \right] + \frac{1}{-2+4i} \left[\frac{1}{z} + \frac{i}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^4} + \dots \right] - \frac{1}{2+4i} \left[\frac{1}{z} + \frac{i}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \dots \right] = \end{aligned}$$

$$= \left\{ \frac{1}{10} + \frac{z}{20} + \frac{z^2}{40} + \frac{z^3}{80} + \dots \right\} + \left\{ \frac{1}{10} + \frac{z}{20} + \frac{z^2}{40} + \frac{z^3}{80} + \dots \right\}$$

14) Να δειχθεί ότι:

$$\alpha) \int_0^{2\pi} e^{\sin kt} \cos[t - \cos kt] dt = 0 \quad \beta) \int_0^{2\pi} e^{\sin kt} \sin[t - \cos kt] dt = 0$$

Λύση: Τα ολοκληρώματα (α) και (β) θα υπολογισθούν μαζί ως εξής: Θέτουμε

$$\mathbf{M} = \int_0^{2\pi} e^{\sin kt} \cos[t - \cos kt] dt = 0 \quad \text{και} \quad \mathbf{N} = \int_0^{2\pi} e^{\sin kt} \sin[t - \cos kt] dt = 0$$

και υπολογίζουμε την έκφραση $\mathbf{M} + i\mathbf{N}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} + i\mathbf{N} &= \int_0^{2\pi} e^{\sin kt} [\cos[t - \cos kt] + i \sin[t - \cos kt]] dt = \\ &= \int_0^{2\pi} e^{\sin kt} e^{i(t - \cos kt)} dt = \int_0^{2\pi} e^{\sin kt - i \cos kt} e^{it} dt = \int_0^{2\pi} e^{-i(\cos kt + i \sin kt)} e^{it} dt = \int_0^{2\pi} \exp(-ie^{ikt}) e^{it} dt \end{aligned}$$

Θέτουμε $z = e^{it} \Rightarrow dz = ie^{it} dt$ και έχουμε:

$$\mathbf{M} + i\mathbf{N} = \oint_C \exp(-iz^k) \frac{dz}{i} = -\oint_C \exp(-iz^k) dz = 0$$

επειδή η συνάρτηση $\exp(-iz^k)$ είναι αναλυτική. (Η κλειστή καμπύλη C είναι η μοναδιαία περιφέρεια). Επομένως $\mathbf{M} = 0$ και $\mathbf{N} = 0$.

15) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - 2\alpha \cos t + \alpha^2}$ όπου $\alpha \in \mathbb{R} - \{1, -1\}$

Λύση: Θέτουμε $z = e^{it}$ με $dz = iz dt$, $\cos t = (z + z^{-1})/2$ και με καμπύλη ολοκλήρωσης C την μοναδιαία περιφέρεια.

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - 2\alpha \cos t + \alpha^2} = \oint_C \frac{dz}{iz \left[1 - \alpha z - \frac{\alpha}{z} + \alpha^2 \right]} = \oint_C \frac{idz}{\alpha z^2 - (\alpha^2 + 1)z + \alpha}$$

Οι πόλοι της ολοκληρωτέας συνάρτησης είναι οι ρίζες του τριωνύμου $\alpha z^2 - (\alpha + 1)z + \alpha = 0$ δηλαδή $z_1 = \alpha$ και $z_2 = 1/\alpha$, που είναι απλοί πόλοι. Επειδή $|\alpha| > 1$ μόνο ο πόλος z_2 βρίσκεται στο εσωτερικό της μοναδιαίας περιφέρειας. Επομένως:

$$I = i2\pi \text{Res}[f(z), z_2]$$

$$\text{όπου } f(z) = \frac{1}{\alpha z^2 - (\alpha^2 + 1)z + \alpha} \quad \text{και}$$

$$\text{Res}[f(z), z_2] = \lim_{z \rightarrow 1/\alpha} (z - \alpha) \frac{1}{\alpha(z - \alpha)(z - 1/\alpha)} = \frac{1}{\alpha(\alpha - 1/\alpha)} = \frac{1}{\alpha^2 - \alpha}$$

$$\text{Τελικά: } I = i2\pi \frac{1}{\alpha^2 - \alpha} = \frac{2\pi}{\alpha - \alpha^2}$$

16) Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_C \frac{dz}{\sqrt{z}}$, όπου C είναι το ημικύκλιο που ορίζεται

από τις σχέσεις $|z|=1, y \geq 0$ και η συνάρτηση $f(z)=\sqrt{z}$ ικανοποιεί τη σχέση $\sqrt{1}=1$.

Λύση: Από τη σχέση $\sqrt{1}=1$ εύκολα προκύπτει ότι η συνάρτηση $f(z)=\sqrt{z}$ ορίζεται στον πρωτεύοντα κλάδο δηλαδή εάν $z=re^{i\theta}$ τότε $\sqrt{z}=\sqrt{r}e^{i\theta/2}$, $dz=izd\theta$ με $r=1$ και $0 \leq \theta \leq \pi$

Επομένως:

$$\int_C \frac{dz}{\sqrt{z}} = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{i\theta}d\theta}{e^{i\theta/2}} = i \int_0^{2\pi} e^{i\theta/2} d\theta = 2e^{i\theta/2} \Big|_0^{2\pi} = 2e^{i\pi} - 2 = -4$$

ΕΥΡΕΤΗΡΙΟ

B

Bromwich περίγραμμα, 106

C

Cauchy ανισότητα, 65
Cauchy θεώρημα για τόπους πολλαπλής συνοχής, 59
Cauchy ολοκληρωτικοί τύποι, 63

D

De Moivre, 5
Dirichlet πρόβλημα, 118

E

Euler τύπος, 6

F

Fresnel ολοκληρώματα, 50

J

Jordan. Λήμμα, 96

L

Laurent ανάπτυγμα, 79
Laurent θεώρημα, 78
Liouville θεώρημα, 65

M

Maclaurin. σειρά, 76
Mellin - Ολοκληρωτικός τύπος, 106
Moebius μετασχηματισμός, 118
Morera θεώρημα, 56, 64

N

Neumann πρόβλημα, 118

R

Riemann θεώρημα, 117
Rouche θεώρημα, 70

S

Schwarz θεώρημα, 31, 67

T

Taylor ανάπτυγμα, 76
Taylor θεώρημα, 76

A

Άθροισμα σειράς, 75
Ακέραιες και Μερόμορφες συναρτήσεις, 87
ακέραιη συνάρτηση, 28
ακτίνα σύγκλισης, 76
αμφιμονότιμος μετασχηματισμός, 113
ανάκλαση, 116
αναλυτική επέκταση μιας μιγαδικής συνάρτησης, 87
αναλυτική ή ολόμορφη¹ στο σημείο z_0 , 28
Αναλυτική συνέχιση μιας μιγαδικής συνάρτησης, 87
αναλυτικό μέρος της σειράς Laurent, 79
αναπαράσταση, 3
ανεξάρτητη μεταβλητή, 14
Ανοικτό σύνολο, 11
Ανοικτός τόπος, 11
Αντιστροφή, 118
αντίστροφη συνάρτηση, 14
αντίστροφος μετασχηματισμός, 114
Ανώμαλο σημείο, 37
Ανώμαλο σημείο στο άπειρο, 38
αόριστο ολοκλήρωμα, 56
Απαλείψιμο ανώμαλο σημείο, 38
απεικόνιση του Moebius, 18
Αποκλίνουσα σειρά, 75
Απόκλιση μιας μιγαδικής συνάρτησης, 40
Απόκλιση μιας πραγματικής συνάρτησης, 40
απόλυτη τιμή, 3
Απομονωμένο ανώμαλο σημείο, 37
Αρμονικές συναρτήσεις, 31
Αφαίρεση, 2

Β

βαθμωτό γινόμενο, 4

Γ

Γραμμικός μετασχηματισμός, 118

Δ

Διαίρεση, 2

διανυσματικό γινόμενο, 4

διαφορικό μιγαδικής συνάρτησης, 26

διαφορίσιμη στο σημείο z_0 , 25

διγραμμικός μετασχηματισμός, 18

δ-κυκλική περιοχή, 10

δυναμοσειρά, 75

Ε

εξαρτημένη μεταβλητή, 14

εξίσωση του Laplace, 31

εξωτερικό γινόμενο, 4

Εξωτερικό σημείο, 11

Επικαμπύλιο Μιγαδικό Ολοκλήρωμα, 43

επίπεδο του Argand, 3

επίπεδο του Gauss, 3

επιφάνεια Riemann, 21

εσωτερικό γινόμενο, 4

Εσωτερικό σημείο, 11

Θ

Θεμελιώδες θεώρημα της Άλγεβρας, 66

Θεώρημα του Cauchy, 45

Θεώρημα του ελάχιστου μέτρου, 68

Θεώρημα του μέγιστου μέτρου, 66

Θεώρημα του ορίσματος, 68

θεώρημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων, 91

Ι

Ιακωβιανή του μετασχηματισμού, 113

ισογώνια απεικόνιση, 115

ισομορφικό, 2

Ισότητα, 3

Κ

κάλυμμα ενός συνόλου, 11

Κανόνας του L' Hospital, 36

κλάδοι πλειότιμης συνάρτησης, 21

Κλείσιμο ενός συνόλου, 11

Κλειστό σύνολο, 10

Κλειστός τόπος, 11

Κλίση μιας μιγαδικής συνάρτησης, 40

Κλίση μιας πραγματικής συνάρτησης, 39

κρίσιμα σημεία, 114

κύκλος σύγκλισης, 76

Λ

Λαπλασιανή μιας μιγαδικής συνάρτησης, 40

Μ

Μεγέθυνση, 117

μερικό άθροισμα τάξης n , 75

Μετασχηματισμοί στο επίπεδο, 113

μετασχηματισμός, 15

Μεταφορά, 117

μέτρο, 3

μιγαδικό επίπεδο, 3

Μιγαδικός τύπος της αντιστροφής του

μετασχηματισμού Laplace, 106

μιγαδικούς αριθμούς, 2

μονότιμη συνάρτηση, 14

Ο

Ολοκληρωτικά Υπόλοιπα, 89

Ολοκληρωτικοί τύποι του Poisson για ημιεπίπεδο, 72

Ολοκληρωτικοί τύποι του Poisson για κύκλο, 71

ομαλό σημείο, 37

ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση, 18

Ομοιόμορφη σύγκλιση, 75

Οριακό σημείο, 10

όρισμα, 3

ουσιώδες ανώμαλο σημείο της σειράς Laurent, 81

Ουσιώδες ανώμαλο σημείο, 38

Π

παράγουσα της $f(z)$, 56

παραγωγίσιμη στο D , 25

παραγωγός μιγαδικής συνάρτησης, 25

πεδίο ορισμού, 14

πεδίο τιμών, 14

περίβλημα ενός συνόλου, 11

περιορισμένη περιοχή, 10

πλειότιμη συνάρτηση, 14

Πολ, 2

πολική γωνία, 3

πολική μορφή, 3

Πόλος τάξης n μιας μιγαδικής συνάρτησης, 37

πόλος τάξης n της σειράς Laurent, 81

πραγματικό μέρος, 2

πραγματικός άξονας, 3

πρόβλημα συνοριακών τιμών δευτέρου είδους, 118

πρόβλημα συνοριακών τιμών πρώτου είδους, 118

Πρόσθεση, 2

πρωτεύον διάστημα του θ , 23

πρωτεύον μέρος σειράς Laurent, 79

πρωτεύων κλάδος πλειότιμης συνάρτησης, 23

Σ

Σειρές συναρτήσεων, 75
σημεία ασυνέχειας, 18
σημείο στο άπειρο, 9
σημείο διακλάδωσης, 21
σημείο συσσώρευσης, 10
στερεογραφική προβολή, 9
Στοιχειώδεις συναρτήσεις, 18
Στροβιλισμός μιας μιγαδικής συνάρτησης, 40
Στροβιλισμός μιας πραγματικής συνάρτησης, 40
Στροφή, 117
Συγκλίνουσα σειρά, 75
Σύγκλιση υπό σηνθήκες, 75
συζυγής μιγαδικός, 4
σύμμορφη απεικόνιση, 35, 115
Συμπαγές σύνολο, 10
συμπληρωμένο ή επεκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο., 9
συναφές σύνολο, 11
Συνεκτικό σύνολο, 11

Συνέχεια συνάρτησης, 17
συνεχής στο σημείο z_0 , 17
συνεχής στο σύνολο A , 17
Συνθήκες Cauchy - Riemann, 28
συνθήκες των Cauchy-Riemann, 28
Συνοριακό σημείο, 11
σφαίρα του Riemann, 9

T

τομή ή γραμμή διακλάδωσης, 21
τόπος σύγκλισης μιας σειράς, 75

Φ

φανταστικοί αριθμοί, 1
φάση, 3
Φραγμένο σύνολο, 10
φυσικό σύνορο μιας μιγαδικής συνάρτησης, 88

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Complex Variables and Applications.
R. Churchill, J. Brown. McGraw Hill 1984.
2. The theory of analytic functions.
A. Markushevich. Mir Publishers Moscow 1983.
3. Applied functions of a complex variable.
A. Kyrala. Wiley Interscience 1972.
4. The theory of functions of a complex variable.
A. Sveshnikov, A. Tikhonov. Mir Publishers Moscow 1973.
5. Μιγαδικές μεταβλητές.
Spiegel, Μετάφραση Σ. Περσίδης. Schaum's outline series 1980.
6. Μιγαδικές συναρτήσεις. Α. Κυδωνιεύς
Univercity Studio Press. Θεσσαλονίκη.

