ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

- Ιστοσελίδα: http://mycourses.ntua.gr
- Τρεις (3) Σειρές Ασκήσεων
- Λυμένες Ασκήσεις – Θέματα

12/03/12

Μιγαδικοί Αριθμοί

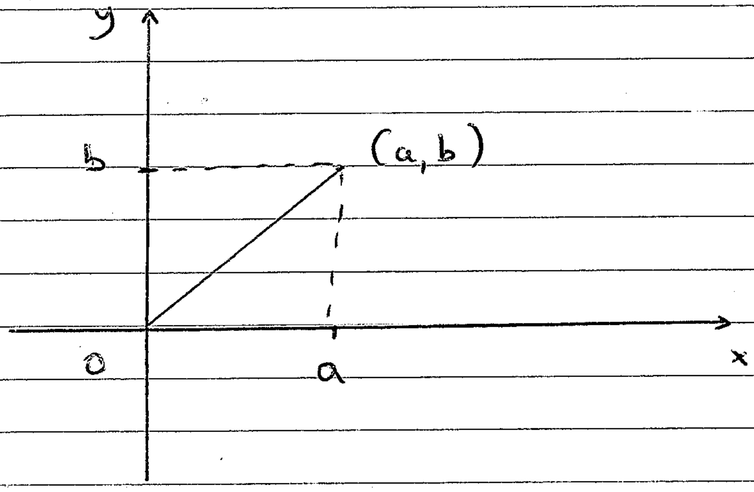
Ορισμοί – Ιδιότητες:

Ορισμός: Το σώμα των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$ είναι το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών (x, y), $x, y \in \mathbb{R}$ στο οποίο έχουμε ορίσει την πρόσθεση και τον "πολ/μό" ως εξής:

(α) → $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

(β) → $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$

π.χ. $(1,1) \cdot (1,2) = (-1, 3)$



Ιδιότητες: Έστω $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$, $z_3 = (x_3, y_3)$ $\in \mathbb{C}$

Τότε:

$$\left\{\begin{array}{l} z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \\ z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1 \end{array}\right\}$$ ① (Αντιμεταθετική ιδιότητα)

$$\left\{\begin{array}{l} z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3 \\ z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 \end{array}\right\}$$ ② (Προσεταιριστική ιδιότητα)

(3) Το $(0,0)$ είναι το μηδενικό στοιχείο. Δηλαδή:

$(x_1,y_1)+(0,0)=(x_1,y_1),\ \forall z_1=(x_1,y_1)\in\mathbb{C}$

(4) Το αντίθετο του $z=(x,y)\in\mathbb{C}$ είναι το $-z=(-x,-y)$
Δηλαδή:

$(x,y)+(-x,-y)=(0,0)$

(5) Το μοναδιαίο στοιχείο είναι το $(1,0)$. Δηλαδή:

$(x,y)\cdot(1,0)=(x,y)\ ,\ \forall (x,y)\in\mathbb{C}$

(6) Κάθε $(x,y)\in\mathbb{C}$ με $(x,y)\neq(0,0)$ έχει αντίστροφο:

$(x,y)\cdot\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{-y}{x^2+y^2}\right)=(1,0)$

(7) $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$ [Επιμεριστική ιδιότητα]

(Άλλα γνωστά σώματα είναι το $\mathbb{Q}$ και το $\mathbb{R}$)

- <u>Ορισμός:</u> $i=(0,1)$

Ορίζουμε το σύνολο $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$ ως εξής:

$\mathbb{C}_{\mathbb{R}}=\{(x,0):x\in\mathbb{R}\}$
$\mathbb{C}_{\mathbb{R}}\subset\mathbb{C}$

Παρατηρούμε ότι $\forall (x,0),(y,0)\in\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$
είναι:

- $(x,0)+(y,0)=(x+y,0)$
- $(x,0)\cdot(y,0)=(x\cdot y,0)$

Έστω $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}_{\mathbb{R}}$
$x \longrightarrow (x, 0)$

Η φ είναι και 1-1 και επί. Μάλιστα:

- $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y) \iff (x+y, 0) = (x,0) + (y,0)$
- $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y) \iff (x \cdot y, 0) = (x,0) \cdot (y,0)$

$\boxed{\text{Το } \varphi \text{ είναι ισομορφισμός.}}$

▸ Λόγω του ισομορφισμού ταυτίζουμε το μιγαδικό αριθμό $(x,0)$ με το x.

$$\boxed{(x,0) \equiv x}$$

Τότε αν $z = (x,y) \in \mathbb{C}$,

$$(x,y) = (x,0) + (0,y) \underset{\text{πολ/μου}}{\overset{\text{λόγω}}{=}} (x,0) + (y,0)\cdot(0,1) =$$

$$x + yi = x + iy$$

Είναι $i^2 = i \cdot i = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) \equiv -1$

Άρα $\boxed{i^2 = -1}$

Δε μπορούμε να πούμε $\sqrt{-1} = i$ διότι
$\sqrt{a} = a^{1/2} = e^{\frac{1}{2}\ln a}$ (είναι μία περίπτωση)

- Αν $z = x + iy \in \mathbb{C}$, το

  - $x = \operatorname{Re} z$ είναι το πραγματικό μέρος του z
  - $y = \operatorname{Im} z$ " " φανταστικό μέρος του z

- Το $\bar{z} = x - iy$ είναι ο συζυγής του z

Επομένως:

$$\left\{\begin{array}{l} z = x+iy \\ \bar{z} = x-iy \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad x = \frac{z+\bar{z}}{2} \quad \text{και} \quad y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$$

Αν $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ τότε:

(α) $Re(z_1+z_2+\ldots+z_n) = Re(z_1)+Re(z_2)+\ldots+Re(z_n)$

(β) $Im(z_1+z_2+\ldots+z_n) = Im(z_1)+Im(z_2)+\ldots+Im(z_n)$

Αν $z = x+iy \in \mathbb{C}$ και $\underline{a \in \mathbb{R}}$,

$az = ax + iay$

Επομένως $Re(az) = a\,Re z$
$Im(az) = a \cdot Im z$

—

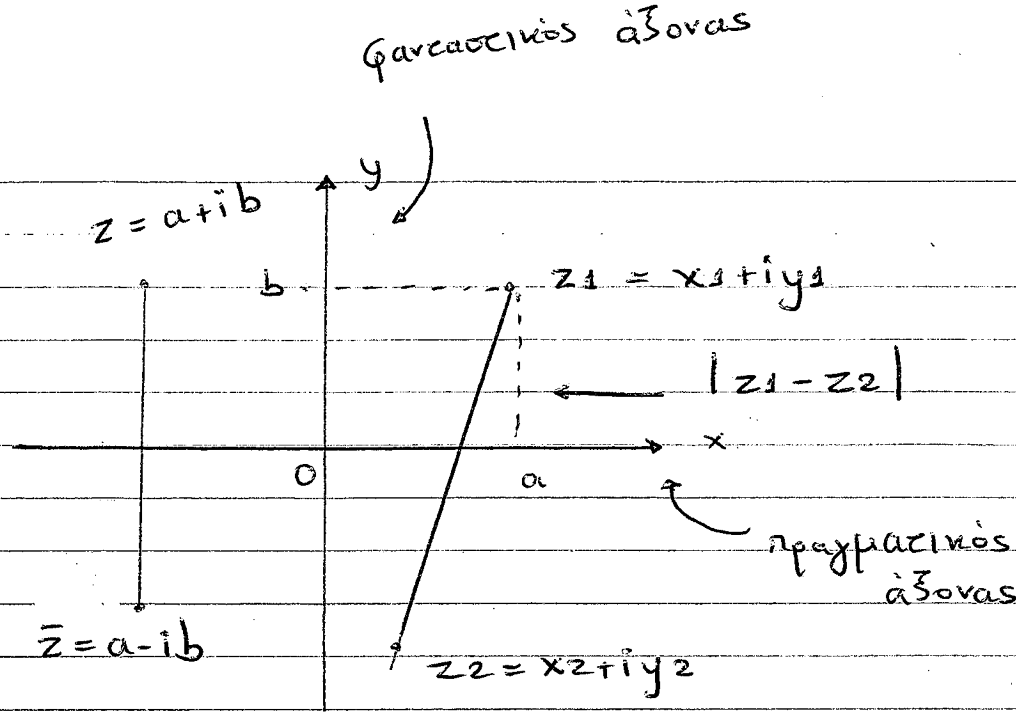
Η απόλυτη τιμή του $z = x+iy \in \mathbb{C}$
(η απόσταση του z από το 0) είναι:

$$|z| = (z\bar{z})^{1/2} = (x^2+y^2)^{1/2} = \sqrt{x^2+y^2}$$

Γενικά, η απόσταση του $z_1 = x_1+iy_1 \in \mathbb{C}$ από το
$z_2 = x_2+iy_2 \in \mathbb{C}$ είναι:

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

<u>Μιγαδικό επίπεδο</u>

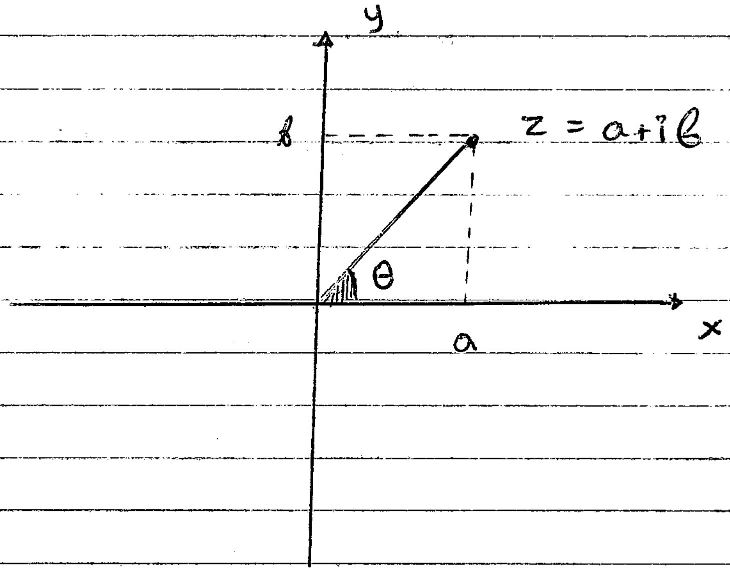


Όλοι οι μιγαδικοί αριθμοί της μορφής: $z=ib$, βρίσκονται πάνω στο φανταστικό άξονα

Ιδιότητες απόλυτης τιμής:

1. $|z| = (z\cdot\bar{z})^{1/2} = \sqrt{x^2+y^2}$, $z = x+iy$
2. $|z\cdot w| = |z|\cdot|w|$, $\forall\, z,w \in \mathbb{C}$
3. $|\bar{z}| = |z|$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$
4. $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$, όπου $z,w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$
5. $\left.\begin{array}{l} |z+w| \leq |z|+|w| \\ |z-w| \leq |z|+|w| \\ \big||z|-|w|\big| \leq |z \pm w| \end{array}\right\}$ τριγωνική ανισότητα
6. $|a\cdot z| = |a|\cdot|z|$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall z \in \mathbb{C}$

Τριγωνομετρική/πολική μορφή



$$z = a + ib = |z|\cos\theta + i|z|\sin\theta$$
$$= |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

όπου θ είναι ένα όρισμα (argument)

$\boxed{\theta = \arg z}$ [Συμβολισμός]

Παρατήρηση: Όλα τα ορίσματα του z είναι $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

- Σημείωση: Αν $\theta \in [0, 2\pi)$ ή $\theta \in [-\pi, \pi)$ τότε σε κάθε $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, αντιστοιχεί ένα και μοναδικό όρισμα

Το όρισμα θ του $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, λέγεται πρωτεύον αν $\theta \in [0, 2\pi)$ ή $\theta \in [-\pi, \pi)$.

Συμβολισμός $\boxed{\theta = \operatorname{Arg} z}$

- Αν $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, η μορφή:

$\boxed{z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta), \ \theta = \arg z}$ λέγεται τριγωνομετρική μορφή

Αν όμως χρησιμοποιήσουμε τον <u>τύπο Euler</u>:

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta, \quad \theta \in \mathbb{R}}$$

τότε $\boxed{z = |z| e^{i\theta}, \quad z \in \mathbb{C}, \quad z \neq 0}$

πολική μορφή του z

$$\boxed{\bar{z} = |z| e^{-i\theta}}$$

13/03/12

• Στο $\mathbb{C}$ δεν υπάρχει διάταξη

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει διάταξη στο $\mathbb{C}$
Τότε:

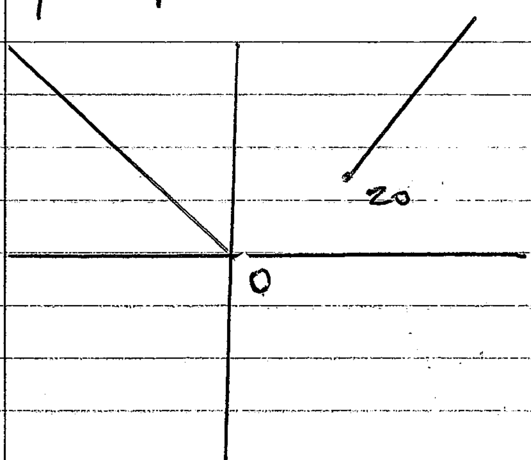
(i) Αν $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, είτε $z>0$ ή το $-z>0$

(ii) Αν $z, w > 0$, τότε $z \cdot w > 0$ και $z+w>0$.

→ Θεωρούμε το $i \neq 0$

Από το (i) θα πρέπει είτε $i>0$ ή $-i>0$
Από (ii) θα πρέπει $i \cdot i > 0 \iff -1>0$
$(-i)(-i) > 0 \iff \boxed{-1>0}$
Τότε από (ii) θα πρέπει
$(-1)\cdot(-1) > 0 \iff \boxed{1>0}$ ΑΤΟΠΟ

• Ακτίνα με αρχή το $z_0 \in \mathbb{C}$ είναι μία ημιευθεία με αρχή το z_0. π.χ.

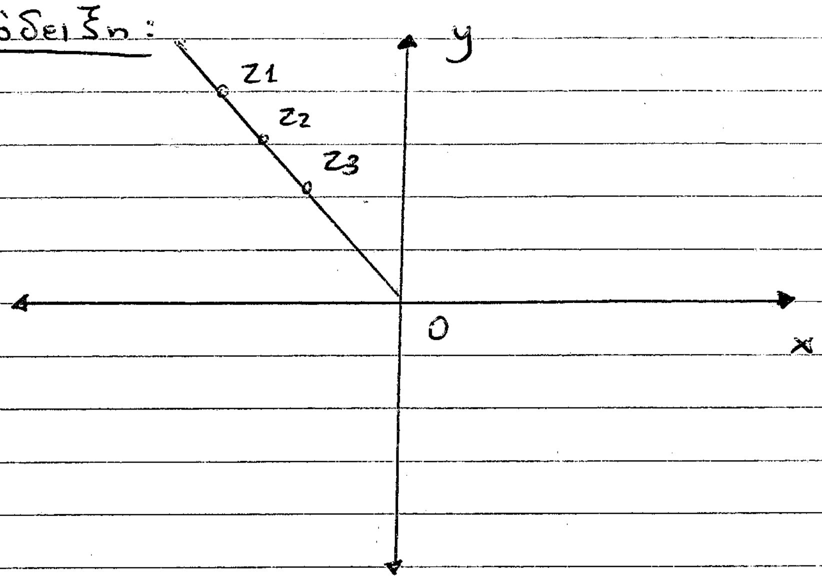


▶ Παράδειγμα: Έστω $z_1, z_2, \ldots, z_n$ μιγαδικοί αριθμοί διάφοροι του μηδενός. Τότε:

$|z_1+z_2+\ldots+z_n| \leq |z_1|+|z_2|+\ldots+|z_n|$ (1)

Η ισότητα αν ισχύει στην (1) αν και μόνο αν τα $z_1, z_2, \ldots, z_n$ βρίσκονται πάνω στην ίδια ακτίνα με αρχή την αρχή των αξόνων.

<u>Απόδειξη:</u>



$z_1 = |z_1| e^{i\theta_1}$
$z_2 = |z_2| e^{i\theta_2}$
$\vdots$

$z_n = |z_n| e^{i\theta_n}$

- Αν $z_1+z_2+\ldots+z_n = 0$, στην (1) ισχύει η ανισότητα
- Έστω $z_1+z_2+\ldots+z_n \neq 0$

Τότε $z_1+z_2+\ldots+z_n = |z_1+z_2+\ldots+z_n| e^{i\theta}$

$\theta = \arg(z_1+z_2+\ldots+z_n)$

Έχουμε

δεν έχει φανταστικό αφού ισούται με μέτρο

$$|z_1+z_2+\ldots+z_n| = (z_1+z_2+\ldots+z_n) e^{-i\theta} = Re\{(z_1+z_2+\ldots+z_n) e^{-i\theta}\}$$

$= Re\{z_1 e^{-i\theta} + z_2 e^{-i\theta} + \ldots + z_n e^{-i\theta}\}$

$= Re\{|z_1| e^{i(\theta_1-\theta)} + |z_2| e^{i(\theta_2-\theta)} + \ldots + z_n e^{i(\theta_n-\theta)}\}$

$= Re\{|z_1| e^{i(\theta_1-\theta)}\} + Re\{|z_2| e^{i(\theta_2-\theta)}\} + \ldots + Re\{|z_n| e^{i(\theta_n-\theta)}\}$

$= |z_1| \cdot Re\{e^{i(\theta_1-\theta)}\} + |z_2| \cdot Re\{e^{i(\theta_2-\theta)}\} + \ldots + |z_n| Re\{e^{i(\theta_n-\theta)}\}$

$$\leq |z_1| \cdot |e^{i(\theta_1-\theta)}|^{1} + |z_2||e^{i(\theta_2-\theta)}|^{1} + \ldots + |z_n||e^{i(\theta_n-\theta)}|^{1}$$
$$= |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n|$$

Η ισότητα ισχύει στην (1) <=>
$Re\{e^{i(\theta_1-\theta)}\} = 1, \ldots, Re\{e^{i(\theta_n-\theta)}\} = 1$ <=>
$\cos(\theta_1-\theta) = 1, \ldots, \cos(\theta_n-\theta) = 1$ <=>

$\theta_1 - \theta = 2k_1\pi, \ldots, \theta_n - \theta = 2k_n\pi$

$k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}$

$\theta_1 = 2k_1\pi + \theta, \theta_2 = 2k_2\pi + \theta, \theta_3 = 2k_3\pi + \theta, \ldots, \theta_n = 2k_n\pi + \theta$

Χρησιμοποιήθηκε το γεγονός ότι:

$$|e^{i(\theta_n-\theta)}| = |\cos(\theta_1-\theta) + i\sin(\theta_1-\theta)| = \sqrt{\cos^2(\theta_1-\theta) + \sin^2(\theta_1-\theta)}$$
$$= \sqrt{1} = 1$$

- Αν $z = x+iy \neq 0$, πώς συνδέονται τα: Rez, Imz και $|z|$;

Επειδή
$|x|, |y| \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq |x|+|y|$

$\Updownarrow$

$|Rez|, |Imz| \leq |z| \leq |Rez| + |Imz|$

Ποια είναι η εξίσωση του κύκλου κέντρου $z_0 = x_0 + iy_0$ και ακτίνας $R > 0$;

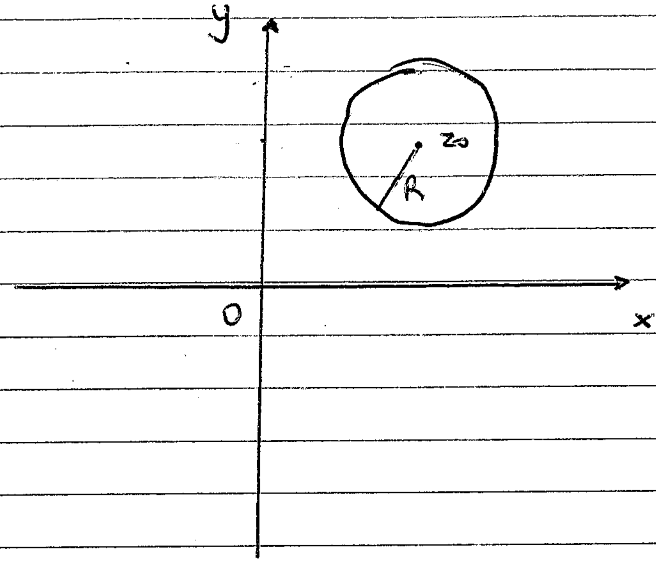
Αν $z = x+iy$, η εξίσωση του κύκλου είναι:
$|z - z_0| = R$

Πράγματι, $|z-z_0| = R \iff |z-z_0|^2 = R^2 \iff$

$|x+iy-(x_0+iy_0)|^2 = R^2 \iff$

$|(x-x_0)+(y-y_0)i|^2 = R^2 \iff$

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = R^2$



- Η εξίσωση κύκλου είναι:

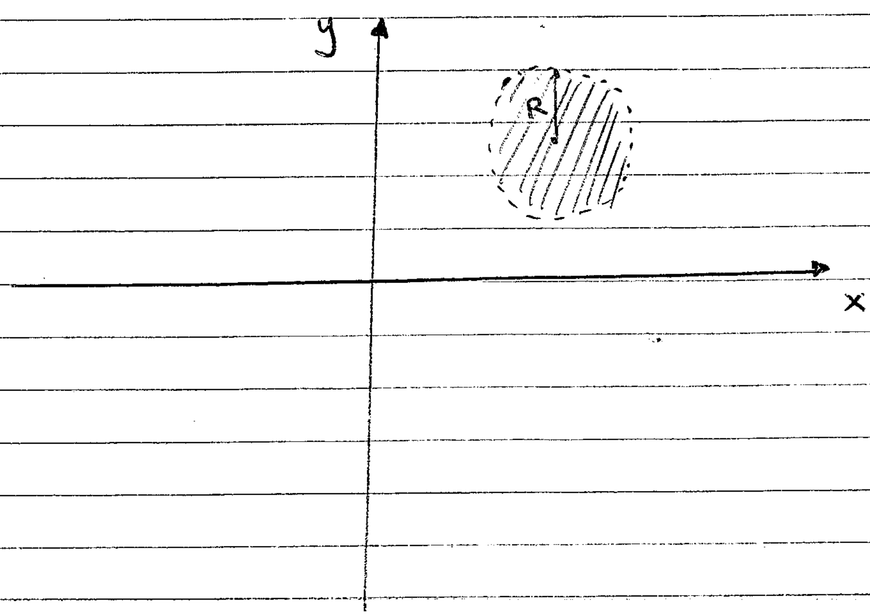
$z-z_0 = |z-z_0| e^{i\theta} \iff$

$z-z_0 = R e^{i\theta} \iff$

$z = z_0 + R e^{i\theta}$

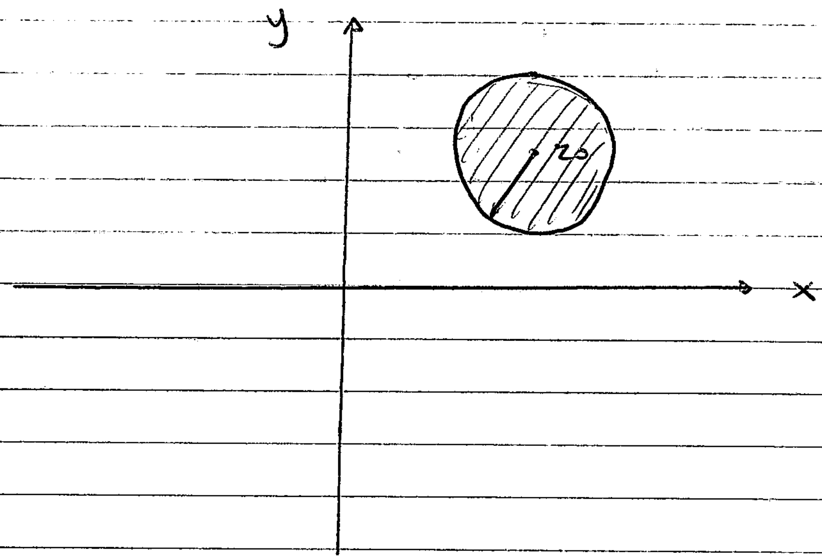
- Ανοικτός δίσκος κέντρου $z_0 \in \mathbb{C}$ και ακτίνας R:

$D(z_0, R) = \{ z \in \mathbb{C} : |z-z_0| < R \}$

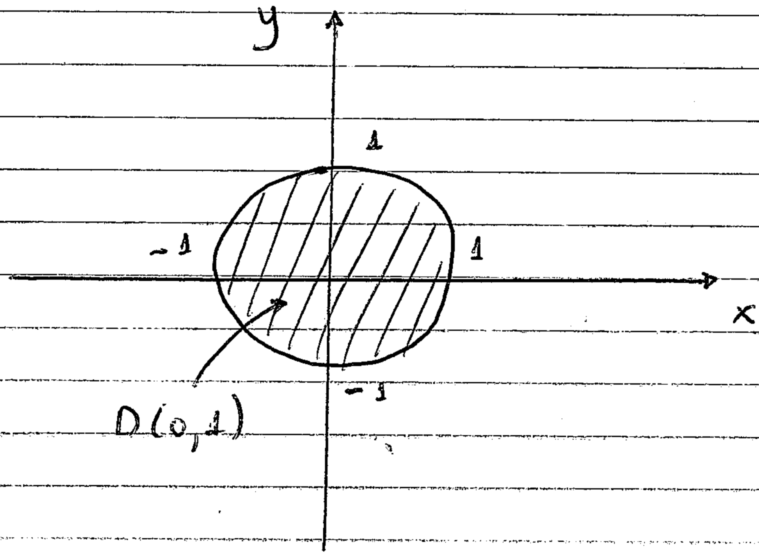


- Κλειστός δίσκος με κέντρο $z_0 \in \mathbb{C}$ και ακτίνα $R>0$:

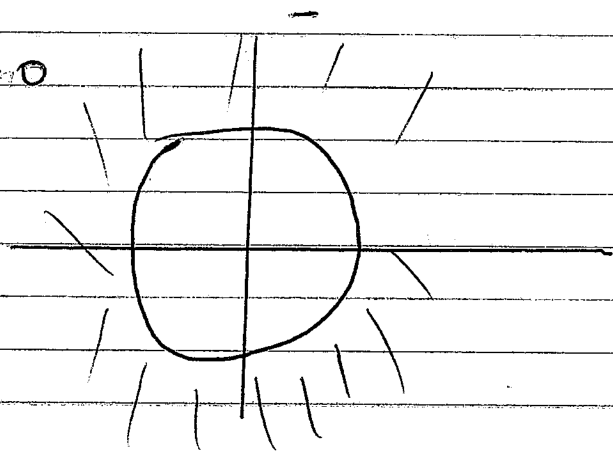
$$\bar{D}(z_0,R) = \{ z \in \mathbb{C},\ |z-z_0| \le R \}$$



- Μοναδιαίος δίσκος $D(0,1) = \{ z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \}$



- $|z| \ge R > 0$



Χρήσιμη πολυωνυμική ανισότητα:

Έστω $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z_1 + a_0$

όπου $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ με $a_n \neq 0$

(πολυώνυμο βαθμού n)

Τότε:

$$\boxed{\frac{1}{2}|a_n|\cdot|z|^n \leq |P(z)| \leq \frac{3}{2}|a_n|\cdot|z|^n \quad \forall |z| \geq R}$$

$$R = \max\left\{1, \frac{2}{|a_n|}(|a_0| + |a_1| + \ldots + |a_{n-1}|)\right\}$$

Είναι (i) $|z| \geq R \geq 1$ και $|z| \geq R \geq \frac{2}{|a_n|}(|a_0| + \ldots + |a_{n-1}|)$

$$\Longrightarrow \frac{|a_n|}{2}|z| \geq |a_0| + |a_1| + \ldots |a_{n-1}|$$

(ii)

Απόδειξη:

$P(z) - a_n z^n = a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$

Είναι:

$$\begin{aligned}
|P(z) - a_n z^n| &= |a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0| \\
&\leq |a_{n-1}||z^{n-1}| + \ldots + |a_1||z| + |a_0| \\
&\overset{(i)}{\leq} |a_{n-1}||z|^{n-1} + \ldots + |a_1||z|^{n-1} + |a_0||z|^{n-1} \\
&= |z|^{n-1}(|a_{n-1}| + \ldots + |a_1| + |a_0|) \\
&\overset{(ii)}{\leq} |z|^{n-1} \cdot \frac{|a_n|\cdot|z|}{2} \\
&= \frac{1}{2}|a_n||z|^n
\end{aligned}$$

ΑΡΑ:

$|P(z) - a_n z^n| \leq \frac{1}{2}|a_n||z|^n \Longrightarrow$

$$\left| |P(z)| - |a_n z^n| \right| \le \frac{1}{2} |a_n| \cdot |z|^n \iff$$

$$-\frac{1}{2} |a_n| \cdot |z|^n \le |P(z)| - |a_n \cdot z^n| \le \frac{1}{2} |a_n| \cdot |z|^n \iff$$

$$|a_n \cdot z^n| - \frac{1}{2} |a_n| |z|^n \le |P(z)| \le |a_n \cdot z^n| + \frac{1}{2} |a_n| \cdot |z|^n \iff$$

$$\frac{1}{2} |a_n| |z|^n \le |P(z)| \le \frac{3}{2} |a_n| |z|^n \quad \blacksquare$$

19/03/12

(*) Αν $z_1 = |z_1| e^{i\theta_1} = |z_1| (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$

$\vdots$

$z_n = |z_n| e^{i\theta_n} = |z_n| (\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$

όπου $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, $z_1, z_2, \dots, z_n \neq 0$, τότε:

$z_1 \cdot \dots \cdot z_n = |z_1| \cdot |z_2| \dots |z_n| (\cos(\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + \dots \theta_n))$

Επομένως

(1) $|z_1 \cdot z_2 \cdots z_n| = |z_1| \dots |z_n|$

(2) $\arg(z_1 \dots z_n) = \arg z_1 + \arg z_2 + \dots + \arg z_n + 2\kappa\pi, \ \kappa \in \mathbb{Z}$

Ειδικά αν $z_1 = \dots = z_n = z$, όπου

$z = |z| e^{i\theta} = |z| (\cos\theta + i\sin\theta)$

Τότε:

$z^n = |z|^n \cdot (\cos n\theta + i\sin n\theta)$

Ισοδύναμα:

$\cancel{|z|^n} \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cancel{|z|^n} \cdot (\cos n\theta + i\sin n\theta) \xrightarrow{\text{ΑΡΑ}}$

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta}$$

Τύπος De Moivre

Εύρεση ριζών :

<u>Πρόβλημα:</u> Έστω $w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$

Τότε $w = |w| e^{i\theta} = |w| (\cos\theta + i\sin\theta)$

$\theta = \arg w$

Να λυθεί η εξίσωση:

(1) $\boxed{z^n = w}$, $n \in \mathbb{N}$

Δηλαδή να βρεθούν όλες οι "n-οστές ρίζες του w"

Λύση: Έστω $z = |z| e^{i\varphi}$, λύση της (1)
$\varphi = \arg z$

(1) $\iff |z|^n \cdot e^{in\varphi} = |w| \cdot e^{i\theta}$ (2)

Επειδή $|e^{in\varphi}| = 1$, $|e^{i\theta}| = 1$, από

(2) $\Longrightarrow |z|^n = |w| \iff$
$\boxed{|z| = |w|^{1/n}}$

(2) $\Longrightarrow e^{in\varphi} = e^{i\theta} \iff e^{in\varphi} \cdot e^{-i\theta} = 1 \iff$
$e^{i(n\varphi - \theta)} = 1 \iff i(n\varphi - \theta) = 2k\pi i \iff$
$\boxed{\varphi = \dfrac{2k\pi + \theta}{n}}$

ΑΡΑ η λύση της (1) είναι:

$$\boxed{z_k = |w|^{1/n} \cdot e^{i(2k\pi + \theta/n)}, \quad k \in \mathbb{Z}}$$

Από (*) $\Longrightarrow$ $z_0 = |w|^{1/n} \cdot e^{i\theta/n}$
$z_1 = |w|^{1/n} \, e^{i(\theta + 2\pi)/n}$
κ.ο.κ.

Παρατηρούμε ότι

$z_n = |w|^{1/n} \cdot e^{i((2n\pi + \theta)/n)} = |w|^{1/n} \, e^{2\pi i + i\theta/n}$
$= |w|^{1/n} \cdot \left[e^{2\pi i} \cdot e^{i\theta/n} \right] = |w|^{1/n} \cdot e^{i\theta/n} = z_0$

Παρόμοια $z_1 = z_{n+1}$, $z_2 = z_{n+2}$ κ.ο.κ.

Συμπέρασμα:

Όλες οι ρίζες της εξίσωσης
$z^n = w = |w| \cdot e^{i\theta}$ δίνονται από τον τύπο:

$$\boxed{z_k = |w|^{1/n} \cdot e^{\frac{2k\pi i + \theta i}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots}$$

Οι ρίζες $\{z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}\}$ είναι διαφορετικές.

Επίσης, οι $\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ είναι διαφορετικές ρίζες της εξίσωσης:
$z^n = w = |w| e^{i\theta}$

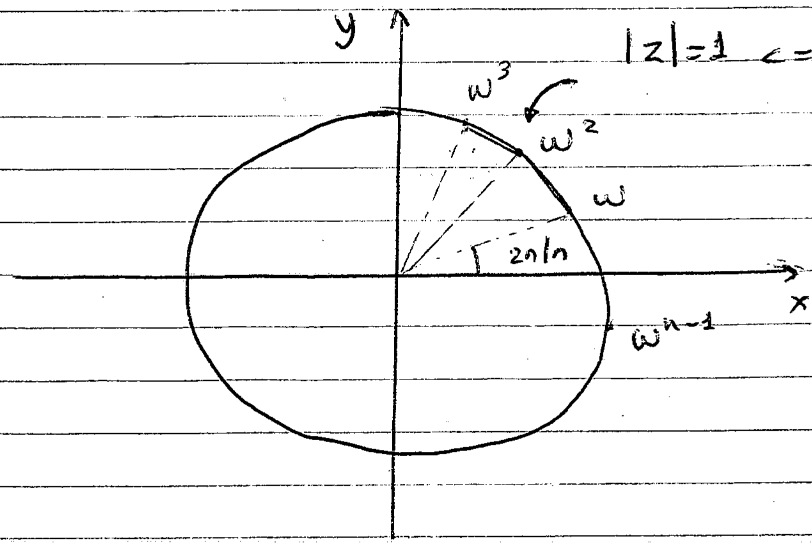
ΕΙΔΙΚΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ

Η λύση της $z^n = 1 = 1 \cdot e^{i0}$ είναι:

$z_k = e^{2k\pi i/n}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$

Αν θέσουμε $w = z_1 = e^{2\pi i/n}$, τότε παρατηρούμε ότι οι ρίζες της $z^n = 1$ είναι οι:
$1, \omega, \omega^2, \omega^3, \ldots, \omega^{n-1}$

$|z| = 1 \iff z = e^{i\theta}$



Παράδειγμα: Το μήκος του εγγεγραμμένου στο μοναδιαίο κύκλο $|z|=1$ με κορυφές τις n-οστές ρίζες της μονάδας $\{1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}\}$ είναι:

$$
\begin{aligned}
\ell_n &= |1-w| + |w-w^2| + |\omega^2-\omega^3| + \dots + |\omega^{n-2}-\omega^{n-1}| \\
&= |1-\omega| + |\omega|\,|1-w| + |\omega|^2|1-\omega| + \dots + |\omega|^{n-2}|1-\omega| \\
&= |1-\omega| + |1-\omega| + \dots + |1-w| \\
&= n\cdot|1-\omega| \\
&= n\left|1-\left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)\right| \\
&= n\left|\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\frac{2\pi}{n}\right| \\
&= n\cdot\sqrt{\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)^2 + \sin^2\frac{2\pi}{n}} \\
&= n\cdot\sqrt{2-2\cos\frac{2\pi}{n}} \\
&= n\sqrt{4\sin^2\pi/n} \\
&= 2n\sin\frac{\pi}{n}
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\begin{aligned} \cos 2x &= 1-2\sin^2 x \\ 2-2\cos 2x &= 4\sin^2 x \end{aligned}}
$$

Άρα $\ell_n = 2n\cdot\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$

$$\lim_{n\to\infty} \ell_n = 2\pi \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\left(\frac{\pi}{n}\right)} = \boxed{2\pi}$$

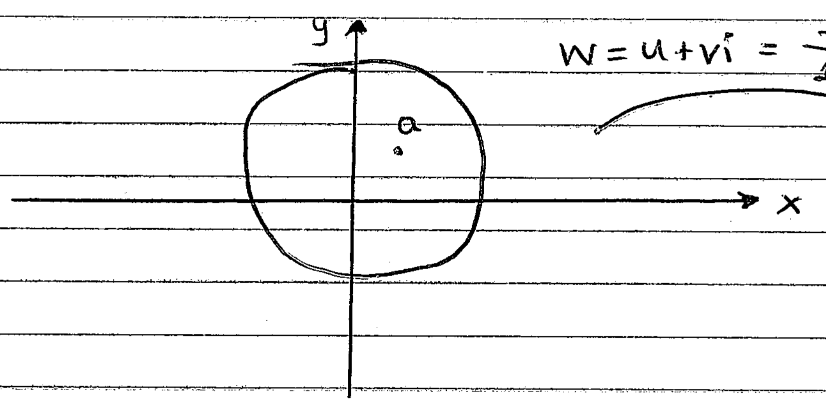
Επειδή $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\pi/n)}{\pi/n} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \boxed{1}$

(1) $w = f(z) = \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$, $a\in\mathbb{C}$, $|a|<1$

ν.δ.ο. αν $|z|=1 \iff z=e^{i\theta}$ τότε και $|w|=1$

z-επίπεδο

$w = u+vi = \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$



w επίπεδο

(2) Αν $z \neq 1$, τότε:

$$1+z+z^2+\ldots+z^n = \frac{z^{n+1}-1}{z-1} = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$

Αν $z = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$, είναι γνωστό ότι $(\cos\theta + i\sin\theta)^k = \cos k\theta + i\sin k\theta$ αποδείξτε ότι:

(a) $$1+\cos\theta+\cos 2\theta+\ldots+\cos n\theta = \frac{1}{2} + \frac{\sin(n+1/2)\theta}{\sin(\theta/2)}$$

(β) $$\sin\theta+\sin 2\theta+\ldots+\sin n\theta = \frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{n+1}{2}\theta\right)}{\sin(\theta/2)}$$

(3) $$\left(\frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}\right)^n = \frac{1+i\tan n\theta}{1-i\tan n\theta}, \quad n\in\mathbb{N}$$

<u>Ακολουθίες "μιγαδικών" αριθμών</u>

Έστω $(z_n) = (x_n + iy_n)$ μια <u>μιγαδική ακολουθία</u>
Λέμε ότι $\lim_{n\to\infty} z_n = z = x+iy \in \mathbb{C}$ αν και μόνο αν

$\forall \varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq n_0 \Longrightarrow |z_n - z| < \varepsilon$

$z_n = x_n + iy_n$, $z = x+iy$. Τότε:

$$z_n - z = (x_n - x) + i(y_n - y)$$

Ως γνωστόν:

$$|x_n - x|, |y_n - y| \leq |(x_n - x) + i(y_n - y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y|$$

$$\Updownarrow$$

$$|Re(z_n - z)|, |Im(z_n - z)| \leq |z_n - z| \leq |Re(z_n - z)| + |Im(z_n - z)|$$

<u>Πρόταση:</u> Είναι $\lim_{n\to\infty} z_n = z \iff$

$\lim_{n\to\infty} Re\, z_n = Re\, z$ και $\lim_{n\to\infty} Im\, z_n = Im\, z$

Παράδειγμα: Να βρεθεί αν υπάρχει το $\lim_{n\to\infty} z_n$,

όπου $z_n = i\sqrt{2} + \dfrac{(3-4i)^n}{6^n}$

Λύση:

$$\left|\frac{3-4i}{6}\right| = \frac{\sqrt{3^2+4^2}}{6} = \frac{5}{6} < 1$$

Άρα

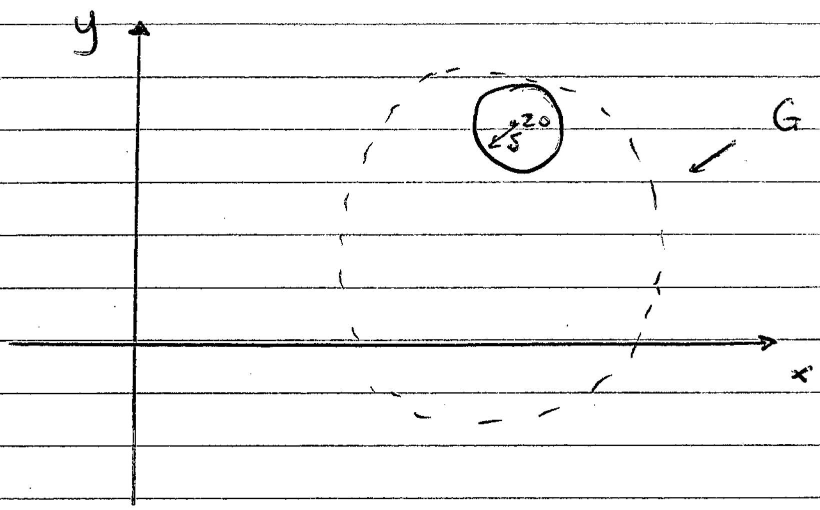
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3-4i}{6}\right|^n = 0 \iff \lim_{n\to\infty}\frac{(3-4i)^n}{6^n} = 0$$

ΑΡΑ: $\lim_{n\to\infty} z_n = i\sqrt{2}$

20/03/12

Τοπολογία του $\mathbb{C}$

- Ένα σύνολο $G \subseteq \mathbb{C}$ λέγεται ανοικτό, αν για κάθε $z_0 \in G$ υπάρχει ανοικτός δίσκος (περιοχή του z_0) $D(z_0, \delta) = \{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \delta \}$ τέτοιες ώστε $D(z_0, \delta) \subseteq G$



- Το $F \subseteq \mathbb{C}$ είναι κλειστό σύνορο αν το συμπλήρωμα του $\mathbb{C} \setminus F$ είναι ανοικτό σύνολο

	Ιδιότητες Αν. Συνόλων	Ιδιότητες Κλ. Συνόλων
[1]	Τα σύνολα $\mathbb{C}$ και $\emptyset$ είναι ανοιχτά	[1]' Τα σύνολα $\mathbb{C}$ και $\emptyset$ είναι κλειστά
[2]	Η ένωση οσωνδήποτε ανοιχτών είναι ανοιχτό σύνολο	[2]' Η ένωση πεπερασμένου το πλήθος κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο
[3]	Η τομή πεπερασμένου το πλήθος ανοιχτών συνόλων είναι ανοιχτό σύνολο.	[3]' Η τομή οσωνδήποτε κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο.

➤ Γενικά η [3] δεν ισχύει για άπειρα το πλήθος ανοικτά σύνολα π.χ. $G_n = D(0, 1+\frac{1}{n}) = \{ z \in \mathbb{C} : |z| < 1 + \frac{1}{n} \}$ είναι ανοικτά σύνολα.

Όμως $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} D(0, 1+\frac{1}{n}) = \bar{D}(0,1) =$

$\{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1 \}$

κλειστό

—

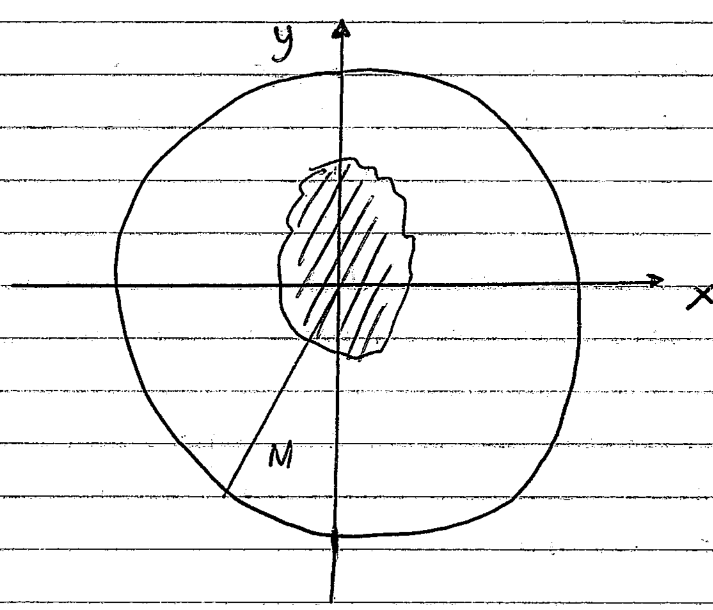
▶ Γενικά η [2'] δεν ισχύει για άπειρα το πλήθος κλειστά σύνολα

π.χ. $F_n = \bar{D}(0, 1 - 1/n) = \{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1 - \frac{1}{n} \}, \ n \in \mathbb{N}$

$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = D(0,1) = \{ z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \}$ ⟵ ανοικτό

—

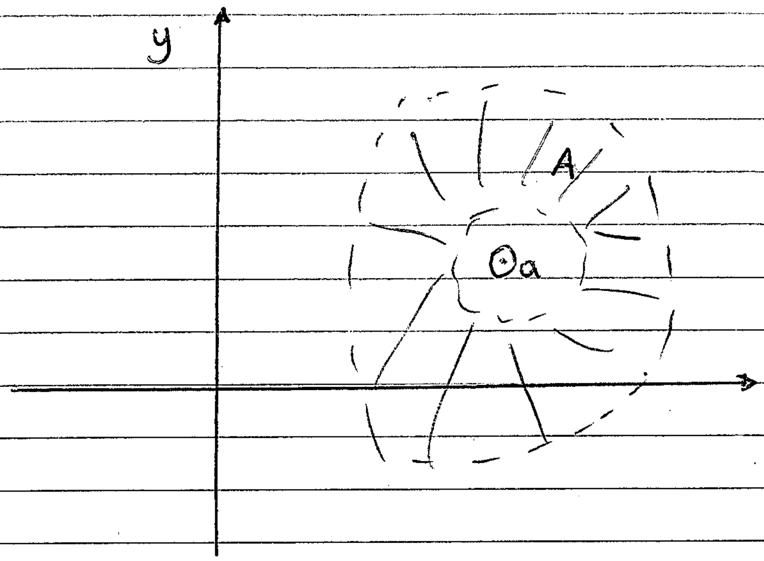
- Το σύνολο $A \subset \mathbb{C}$ λέμε ότι είναι φραγμένο, αν υπάρχει $M > 0$ τ.ω. για κάθε $z \in A$ είναι $|z| \leq M$



- Το A είναι <u>συμπαγές</u> αν είναι <u>κλειστό και φραγμένο</u>.

—

Έστω $S \subseteq \mathbb{C}$. Το $z_0 \in \mathbb{C}$ είναι σημείο συσσώρευσης (σ.σ.) του S αν για κάθε περιοχή $D(z_0, \delta)$ του z_0,
$S \cap (D(z_0,\delta) \setminus \{z_0\}) \neq \emptyset$



$S = A \cup \{a\}$
a: μεμονωμένο σημείο

- Το a δεν είναι σ.σ. του S
- Κάθε σημείο του συνόρου του S είναι σ.σ.
- Με S' συμβολίζουμε το σύνολο των σ.σ. του $S \subseteq \mathbb{C}$
- Το $\bar{S}$, κλειστότητα του S, ορίζεται ως εξής:

$\bar{S} = S \cup S'$

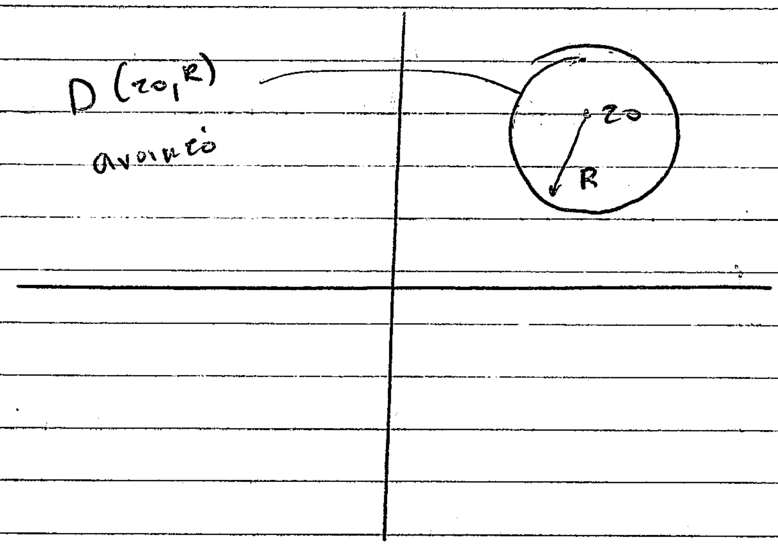
Πρόταση

[1] Το S είναι κλειστό σύνολο αν και μόνο αν $S = \bar{S}$ (δηλαδή αν το S περιέχει τα σ.σ.)

[2] Το $\bar{S}$ είναι κλειστό σύνολο

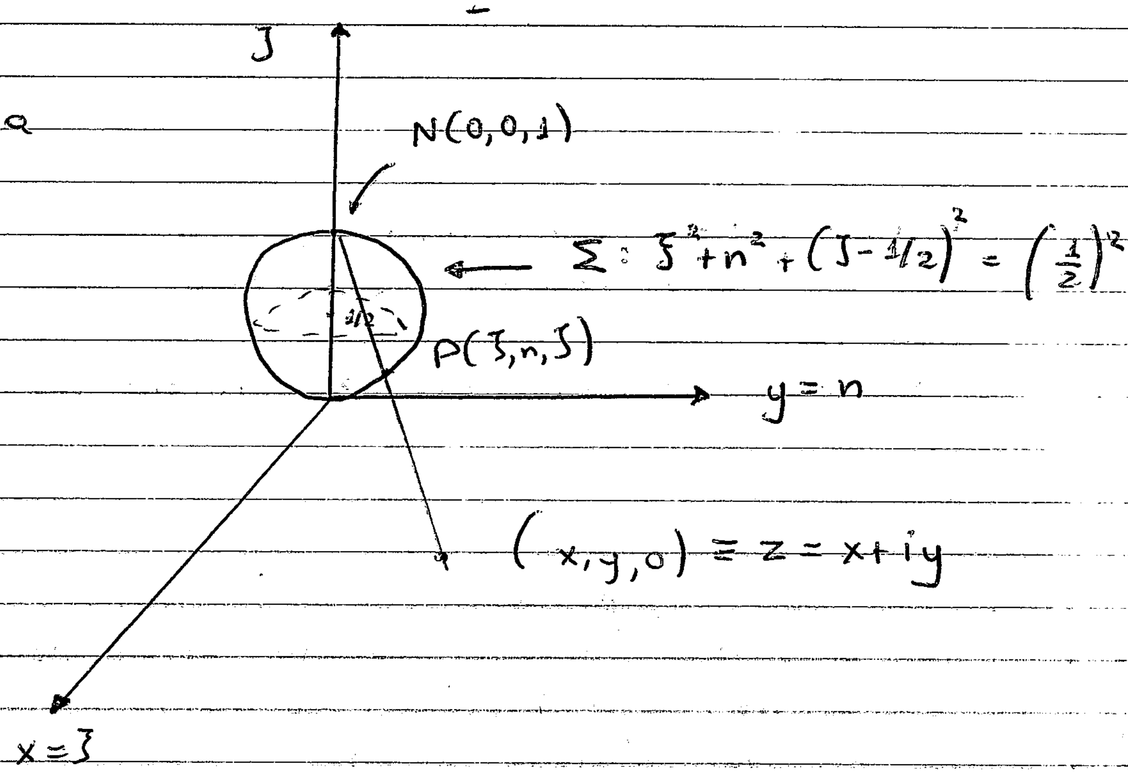
Παρατήρηση:

$D(z_0, R) = \{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R \}$

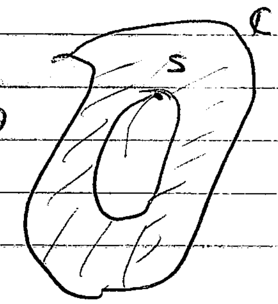


Η κλειστότητα του $D(z_0,R)$ είναι ο κλειστός δίσκος
$\bar{D}(z_0,R) = \{z \in \mathbb{C},\ |z| \le R\}$

Σχήμα 1



- Το σύνορο ενός συνόλου $S \subset \mathbb{C}$, ορίζεται ως εξής:
$\partial S = \bar{S} \cap (\overline{\mathbb{C} \setminus S})$
Επομένως $z \in \partial S$ αν για κάθε $\delta > 0$:
$D(z,\delta) \cap S \neq \emptyset$ και $D(z,\delta) \cap (\mathbb{C} \setminus S) \neq \emptyset$
- Το ∂S είναι κλειστό σύνολο



Στερεογραφική προβολή

Θεωρώ τη σφαίρα,

$\Sigma : \xi^2 + \eta^2 + (\zeta - 1/2)^2 = (\frac{1}{2})^2$ [Σχήμα 1]

Η σφαίρα Σ είναι συμπαγές σύνολο
Υπάρχει 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των σημείων της σφαίρας Σ και των σημείων του $\mathbb{C}$.

Έχουμε την "1-1" αντιστοιχία

$S : \Sigma \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

$(\xi, \eta, \zeta) \longmapsto x + iy = (x, y, 0)$

$N(0,0,1) \longmapsto \infty$

Η S λέγεται <u>στερεογραφική προβολή</u>.

Από το σχήμα έχουμε:

$\overline{PN} = \lambda \cdot \overline{AN} \iff (0-\xi, 0-\eta, 1-\zeta) = \lambda(-x, -y, 1) \iff$
$\{ -\xi = \lambda(-x), \ -\eta = \lambda(-y), \ 1-\zeta = \lambda \} \iff$

$$\boxed{\frac{\xi}{x} = \frac{\eta}{y} = 1-\zeta}$$

Άρα:

$$x = \frac{\xi}{1-\zeta}, \quad y = \frac{\eta}{1-\zeta} \qquad z = x+iy = \frac{\xi + i\eta}{1-\zeta}$$

$$\boxed{\xi^2 + \eta^2 + (\zeta - \tfrac{1}{2})^2 = (\tfrac{1}{2})^2}$$

<u>Μετά από πράξεις:</u> $\xi = \dfrac{x}{x^2+y^2+1} = \dfrac{z+\bar{z}}{2(|z|^2+1)}$

$$\eta = \frac{y}{x^3+y^2+1} = \frac{z-\bar{z}}{2i(|z|^2+1)}$$

$$\zeta = \frac{|z|^2}{1+|z|^2}$$

$S^{-1}: \mathbb{C} \longrightarrow \Sigma$

$$S^{-1}: z = x+iy \longmapsto \left(\frac{z+\bar{z}}{2(1+|z|^2)}, \frac{z-\bar{z}}{2i(1+|z|^2)}, \frac{|z|^2}{1+|z|^2} \right)$$

$S^{-1}: \infty \longrightarrow N$

$\| (\xi_2, \eta_2, \zeta_2) - (\xi_1, \eta_1, \zeta_1) \|_2 =$

$\{ (\xi_2-\xi_1)^2 + (\eta_2-\eta_1)^2 + (\zeta_2-\zeta_1)^2 \}^{1/2} =$ [πράξεις]

$$\frac{|z_1-z_2|}{\sqrt{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}}$$

$$\| (0,0,1) - (\xi,\eta,\zeta) \| = \{ \xi^2 + \eta^2 + (1-\zeta)^2 \}^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}$$

S: $N(0,0,1) \longrightarrow \infty$

$(\xi, \eta, \zeta) \longrightarrow z = x+iy$

- Αν $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \Longrightarrow$

$$d(z_1, z_2) = \frac{|z_1-z_2|}{\sqrt{(1+|z_1|^2)(1+|z_2|^2)}}$$

$$d(z, \infty) = \frac{1}{1+|z|^2}$$

<u>Η d ορίζει μια απόσταση στο $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$</u>

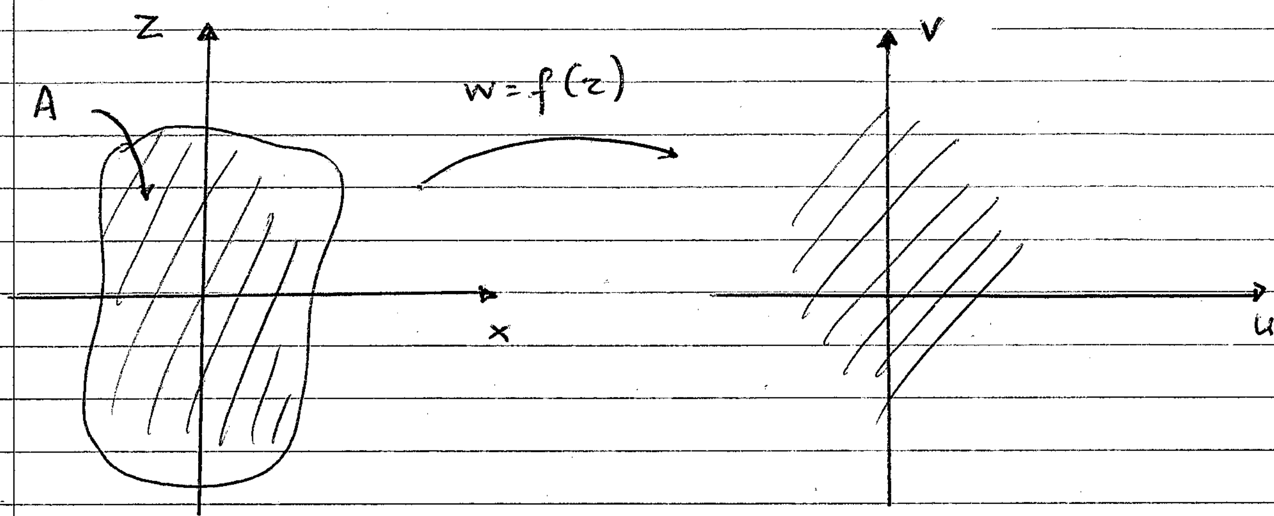
- $d(z_1, z_2) \geq 0$ και $d(z_1,z_2) = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2$
- $d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$
- $d(z_1, z_3) \leq d(z_1, z_2) + d(z_2, z_3)$, z_1, z_2, z_3

26/03/12

ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΜΙΓΑΔΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Έστω η μιγαδική συνάρτηση

$f: A \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$



z-επίπεδο

w-επίπεδο

• Κάθε μιγαδική συνάρτηση $f: A \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, γράφεται στη μορφή:

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, όπου

$u,v : A \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$

(οι u,v είναι πραγματικές συναρτήσεις δύο μεταβλητών)

Παραδείγματα:

[1] $f(z) = |z|^2$

$f: \mathbb{C} \rightarrow [0,\infty)$

$f(z) = f(x+iy) = x^2+y^2$

$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$,

$u(x,y) = x^2+y^2$, $v(x,y) = 0$

[2] $f(z) = \frac{1}{z}$, $z \neq 0$

$f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$

$f(z) = f(x+iy) = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} =$

$\underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_{u} - i \underbrace{\frac{y}{x^2+y^2}}_{v} =$

▶ Ορισμός: $f: A \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f = u + iv$ και z_0 σ.σ. του A. Λέμε ότι το όριο της f καθώς το $z \to z_0$ υπάρχει και ισούται με $a \in \mathbb{C}$, συμβολισμός $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = a$ αν για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ τέτοιο ώστε
$\forall z \in A$, $z \neq z_0$, με $|z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f(z) - a| < \varepsilon$
$(a = k + \lambda i)$ $(z_0 = x_0 + iy_0)$

Πρόταση: Έστω η συνάρτηση $f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$ και έστω $z_0 = x_0 + iy_0$ σ.σ. του A.

Τότε
$$\lim_{z \to z_0} f(z) = k + \lambda i \iff \begin{cases} \lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x,y) = k \\ \lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x,y) = \lambda \end{cases}$$

π.χ. $f(z) = \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} + i \frac{-y}{x^2+y^2}$

$$\lim_{z \to i} f(z) = \frac{1}{i} = -i \iff \begin{cases} \lim\limits_{(x,y) \to (0,1)} \frac{x}{x^2+y^2} = 0 \\ \lim\limits_{(x,y) \to (0,1)} \frac{-y}{x^2+y^2} = -1 \end{cases}$$

Λέμε ότι η f είναι <u>συνεχής στο $z_0 = x_0 + i y_0$</u> αν και μόνο αν:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ τέτοιο ώστε:
$\forall z \in A,\ z \neq z_0$ με $|z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$

Δηλαδή $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$

<u>Πρόταση 2:</u> Έστω η συνάρτηση $f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$ και έστω $z_0 = x_0 + i y_0 \in A$, A <u>ανοικτό</u>. Τότε η f συνεχής στο z_0.

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0) \iff \begin{cases} \lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x,y) = u(x_0,y_0) \\ \lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x,y) = v(x_0,y_0) \end{cases}$$

<u>Θεώρημα:</u> $f: K \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$, συνεχής συνάρτηση στο <u>συμπαγές</u> (κλειστό και φραγμένο σύνολο) σύνολο K. Τότε η f παίρνει την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή. Δηλαδή, αν $m = \inf\limits_{z \in K} |f(z)|$

$M = \sup\limits_{z \in K} |f(z)|$, τότε $m \leq |f(z)| \leq M$ και

υπάρχουν $z_1, z_2 \in K$ τ.ω. $m = |f(z_1)|$
$M = |f(z_2)|$

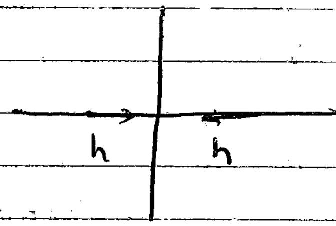
<u>Παράγωγος Μιγαδικής Συνάρτησης</u>

<u>Αναλυτικές (ολόμορφες) συναρτήσεις</u>

Υπενθυμίζεται ότι, αν $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,
A ανοικτό σύνολο και $x_0 \in A$, λέμε ότι η <u>f είναι παραγωγίσιμη στο x_0</u> αν το όριο

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\mathbb{R}}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \left(\text{ή } \lim_{\substack{h\to 0\\ h\in\mathbb{R}}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \right) \text{ υπάρχει}$$

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

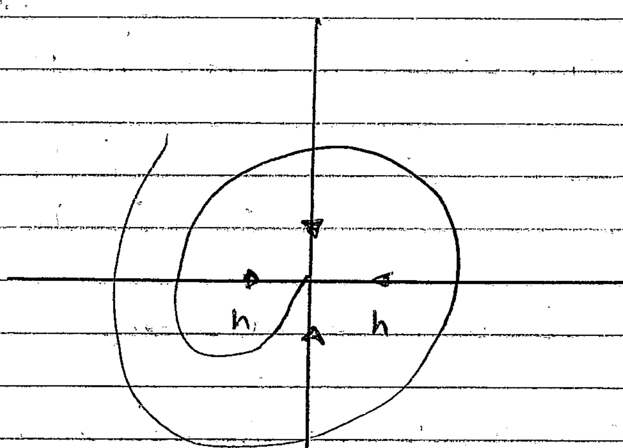


<u>Ορισμός</u>: Έστω η συνάρτηση $f: A \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f = u+iv$, όπου A ανοιχτό σύνολο και έστω $z_0 = x_0 + iy_0 \in A$. Λέμε ότι η f <u>είναι παραγωγίσιμη στο z_0</u> αν το όριο

$$\lim_{\substack{z\to z_0\\ z\in\mathbb{C}}} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \left(\text{ή } \lim_{\substack{h\to 0\\ (h\in\mathbb{C})}} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} \right) \text{ <u>υπάρχει</u>}$$

Αν το όριο υπάρχει, η παράγωγος $f'(z_0)$ είναι αυτό το όριο. Δηλαδή

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}$$



<u>Παράδειγμα</u>

[a] $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$

[β] $f: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $f(z) = f(x+iy) = Re z = x$

(Οι συναρτήσεις είναι διαφορετικές). Εξετάστε αν υπάρχουν οι παράγωγοι:

Λύση:

[α] $f'(x) = (x') = 1$

[β] Έστω $z = x+iy \in \mathbb{C}$ τότε:

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{Re(z+h) - Re(z)}{h} = \frac{Re z + Re h - Re z}{h} =$$

$$\frac{Re h}{h}$$

[i] $h \in \mathbb{R}$: $\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{Re h}{h} = 1$

[ii] $h \in I$: $\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{Re(ik)}{h} = \frac{0}{ik} = 0$ (ik)

Άρα η [β] δεν παραγωγίζεται σε κανένα $z \in \mathbb{C}$.

Παρατήρηση: Οι ιδιότητες της παραγώγου για πραγματικές συναρτήσεις ισχύουν και για μιγαδικές συναρτήσεις

π.χ. Κανόνας αλυσίδας: Έστω η $f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ είναι παραγωγίσιμη στο $z_0 \in A$, όπου A ανοικτό σύνολο. Αν η $g: B \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ είναι παραγωγίσιμη στο $w_0 = f(z_0)$

(υποθέτουμε ότι $f(A) \subseteq B$), τότε και η $g \circ f: A \to \mathbb{C}$ είναι παραγωγίσιμη στο z_0 και ισχύει:

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(\underbrace{f(z_0)}_{w_0}) \cdot f'(z_0)$$

Εξισώσεις (ή συνθήκες) Cauchy-Riemann

Έστω η συνάρτηση $f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$ και έστω $z_0 = x_0 + iy_0 \in A$

$$f(z_0) = u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)$$

Γενικά:

$$\boxed{f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y), \quad \forall z = x+iy \in A \quad (*)}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ! Λόγω της $(*)$ τη μιγαδική συνάρτηση $w = f(z)$ μπορούμε να τη θεωρήσουμε και σα συνάρτηση δύο μεταβλητών. Γενικά το πεδίο τιμών της f είναι το $\mathbb{C}$.

Τότε $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x}$ (ή $f_x = u_x + iv_x$)

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + i\dfrac{\partial v}{\partial y}$ (ή $f_y = u_y + iv_y$)

Οι εξισώσεις Cauchy-Riemann της f στο $z_0 = x_0 + iy_0 \equiv (x_0, y_0)$ είναι οι εξής:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \dfrac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) = -\dfrac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) \end{cases} \iff \boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = -i\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}$$

(1)

27/03/12

Αν θεωρήσουμε την f σα συνάρτηση των x, y τότε οι εξισώσεις C-R (1), είναι ισοδύναμες με την:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \quad (2)$$

Η 2 είναι ισοδύναμη με την

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) = -i\left[\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)\right] \Longleftrightarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0)$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) &= -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) \end{aligned}\right\}$$

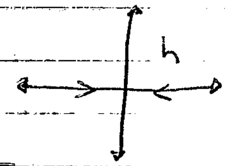
Πρόταση 1:

Έστω η $f: A \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f = u + iv$ και έστω $z_0 = x_0 + iy_0$ σημείο του ανοικτού συνόλου A. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο z_0, δηλαδή το $f'(z_0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}$ υπάρχει, τότε ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy-Riemann στο $z_0 = x_0 + iy_0 \equiv (x_0, y_0)$

Απόδειξη:

$$A = \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}$$

(i) <u>Παίρνω το $h \in \mathbb{R}$</u>: Τότε $z_0 \equiv (x_0, y_0)$, $z_0 + h = x_0 + iy_0 + h$
$= x_0 + h + iy_0 \equiv (x_0 + h, iy_0)$



$$A = \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{R}}} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)}$$

(ii) <u>Παίρνω $h = ik$, $k \in \mathbb{R}$</u>: Τότε, $z_0 \equiv (x_0, y_0)$, $z_0 + h =$
$x_0 + iy_0 + ik = x_0 + i(y_0 + k) \equiv (x_0, y_0 + k)$

$$A = \frac{f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)}{ik};$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)}{ik} = \frac{1}{i} \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

$$= \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

<u>Συμπέρασμα</u>: $f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) =$

$\frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \iff$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \iff$

$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = -i \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}$ [Εξ. C-R]

<u>Παράδειγμα</u>:

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{(x^3+y^3) + i(y^3 - x^3)}{x^2+y^2}, & z = x+iy \neq 0 \\ 0, & z = x+iy = 0 \end{cases}$$

i) Εξετάστε αν ικανοποιούνται οι εξισώσεις C-R, στο $z_0=0$

ii) Υπάρχει η παράγωγος $f'(0)$;

<u>Λύση:</u>

i) $f = u+iv$, όπου

$$u(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

$$v(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^3-x^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Θα δούμε ότι:
$u_x(0,0)=v_y(0,0)$ και $u_y(0,0)=-v_x(0,0)$

• Αν $x\neq0$ $\dfrac{u(x,0)-u(0,0)}{x-0}=\dfrac{\frac{x^3}{x^2}-0}{x-0}=1$

Επομένως
$$u_x(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{u(x,0)-u(0,0)}{x-0}=\boxed{1}$$

• Αν $y\neq0$ $\dfrac{v(0,y)-v(0,0)}{y-0}=\dfrac{\frac{y^3}{y^2}-0}{y-0}=1$

Επομένως
$$v_y(0,0)=\lim_{y\to0}\frac{v(0,y)-v(0,0)}{y-0}=\boxed{1}$$

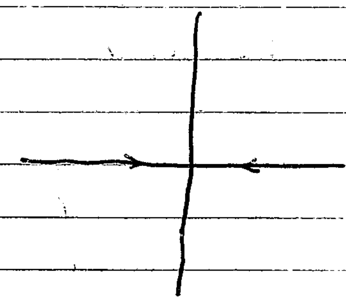
Δηλαδή $u_x(0,0)=v_y(0,0)$

Παρόμοια: $u_y(0,0)=-v_x(0,0)$
Δηλαδή <u>ικανοποιούνται οι C-R.</u>

ii) Αν $z = x+iy \neq 0$, $\dfrac{f(z)-f(0)}{z-0} =$

$$\frac{(x^3+y^3)+i(y^3-x^3)-0}{(x^2+y^2)(x+iy)}$$

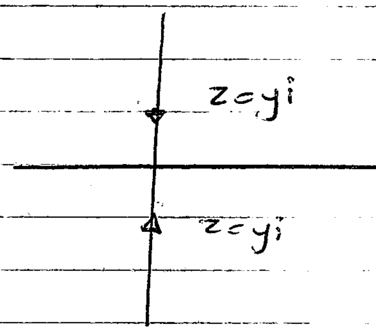
→ <u>1η περίπτωση</u> $z = x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$



$$\frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \frac{x^3 - ix^3}{x^2 \cdot x} = 1-i$$

$$\lim_{\substack{z\to 0 \\ z\in\mathbb{R}}} \frac{f(z)-f(0)}{z-0} = 1-i$$

→ <u>2η περίπτωση</u> $z = iy$, $y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$

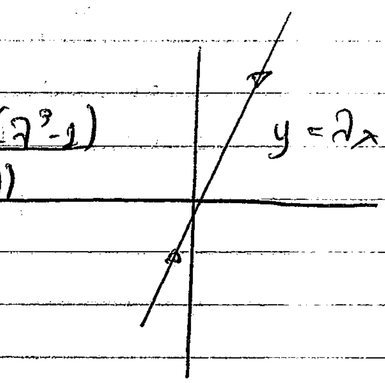


$$\frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \frac{y^3+iy^3}{y^2\cdot(iy)} = \frac{1+i}{i} = 1-i$$

→ <u>3η περίπτωση</u> $z = x + i\lambda x$, $x \neq 0$

$$\frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \frac{(x^3+\lambda^3 x^3)+i(\lambda^3 x^3 - x^3)}{(x^2+\lambda^2 x^2)\cdot(x+i\lambda x)} =$$

$$\frac{1+\lambda^3+i(\lambda^3-1)}{(1+\lambda^2)\cdot(1+i\lambda)}$$ ⟵ Εξαρτάται από το λ



$$f'(0) = \lim_{\substack{z\to 0 \\ z=x+i\lambda x}} \frac{f(z)-f(0)}{z-0} = \lim_{z\to 0} \frac{(1+\lambda^3)+i(\lambda^3-1)}{(1+\lambda^2)\cdot(1+i\lambda)}$$

Επομένως συμπεραίνουμε πως παράγωγος δεν υπάρχει!

Άσκηση: (Σπίτι)

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{xy(x+iy)}{x^2+y^2}, & z = x+iy \neq 0 \\ 0, & z = x+iy = 0 \end{cases}$$

i) Εξετάστε αν ικανοποιούνται οι C-R

ii) Υπάρχει η παράγωγος $f'(0)$;

Διαφορικό συναρτήσεων δύο μεταβλητών

Έστω $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ και $(x_0, y_0) \in A$, όπου A ανοικτό σύνολο.

Η f είναι διαφορίσιμη στο (x_0, y_0), αν υπάρχει γραμμική συνάρτηση $L: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε:

$$\lim_{(\xi, n) \to (0,0)} \frac{f(x_0+\xi, y_0+n) - f(x_0, y_0) - L(\xi, n)}{\sqrt{\xi^2+n^2}} = 0$$

- Αν η f είναι διαφορίσιμη στο (x_0, y_0), τότε οι μερικές παράγωγοι $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ υπάρχουν και είναι:

$$L(\xi, n) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \xi + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot n$$

Συμβολισμός:

$L = Df(x_0, y_0)$ ή $df(x_0, y_0)$

- Αν οι $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ υπάρχουν στο A και είναι συνεχείς στο (x_0, y_0) τότε η f είναι διαφορίσιμη.

• Έστω η f είναι διαφορίσιμη στο (x_0, y_0), δηλαδή η
(1) ισχύει: Αν θέσουμε

$$E(\xi, n) \overset{\text{ορισμός}}{=} \frac{f(x_0+\xi, y_0+h) - f(x_0, y_0) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot\xi + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot n\right)}{\sqrt{\xi^2+n^2}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{f(x_0+\xi, y_0+h) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot\xi + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot h + \varepsilon(\xi,n)\cdot\sqrt{\xi^2+n^2}}$$

με

$$\lim_{(\xi,n)\to(0,0)} \varepsilon(\xi,n) = 0$$

—

<u>Πρόταση 2:</u> Έστω η συνάρτηση $f: A \subseteq \mathbb{C}$, $f = u + iv$ και έστω $z_0 = x_0 + iy_0 \equiv (x_0, y_0)$ σημείο του ανοικτού συνόλου.

Αν

(i) ικανοποιούνται οι εξ. C-R στο z_0 δηλαδή
$\{f_x(x_0,y_0) = -i f_y(x_0,y_0)\} \iff \begin{cases} u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0) \\ u_y(x_0,y_0) = -v_x(x_0,y_0) \end{cases}$

—

(ii) Η f (σα συνάρτηση των x, y), είναι διαφορίσιμη στο (x_0, y_0) [δηλαδή οι u, v είναι διαφορίσιμες στο (x_0, y_0)]

<u>Τότε</u> η f είναι παραγωγίσιμη στο z_0 και ισχύει
<u>$f'(z_0) = f_x(x_0, y_0) = -i f_y(x_0, y_0)$</u>

02/04/12

Απόδειξη Πρότασης 2:

Αν $h = \xi + i n$, τότε $z_0 = x_0 + i y_0 \equiv (x_0, y_0)$ και
$z_0 + h = x_0 + i y_0 + \xi + i n = x_0 + \xi + i(y_0 + n) \equiv$
$\boxed{(x_0+\xi, y_0+n)}$

Είναι:

$$\frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = \frac{f(x_0+\xi, y_0+n) - f(x_0,y_0)}{\xi + i n} \quad (1)$$

Επειδή η f είναι διαφορίσιμη στο (x_0,y_0), έχουμε:

$$f(x_0+\xi, y_0+n) - f(x_0,y_0) = \underbrace{f_x(x_0,y_0)\cdot\xi + f_y(x_0,y_0)\cdot n}_{df(x_0,y_0)(\xi,n)} + \varepsilon(\xi,n)\sqrt{\xi^2+n^2} \quad (2)$$

με $\lim\limits_{(\xi,n)\to(0,0)} \varepsilon(\xi,n) = 0$

Επειδή ισχύει η (ii):

$f_x(x_0,y_0) = -i f_y(x_0,y_0) \iff$
$f_y(x_0,y_0) = i f_x(x_0,y_0)$ η (2) γράφεται:

$$f(x_0+\xi, y_0+n) - f(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)\cdot\xi + i f_x(x_0,y_0)\cdot n + \varepsilon(\xi,n)\cdot\sqrt{\xi^2+n^2}$$

όπου $\lim\limits_{(\xi,n)\to(0,0)} \varepsilon(\xi,n) = 0 \quad (3)$

$$(1) \overset{(3)}{\Longrightarrow} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = \frac{f_x(x_0,y_0)\xi + i f_x(x_0,y_0)\cdot n + \varepsilon(\xi,n)\sqrt{\xi^2+n^2}}{\xi + i n}$$

$$= f_x(x_0,y_0) + \frac{\varepsilon(\xi,n)\sqrt{\xi^2+n^2}}{\xi + i n}$$

Άρα $\left| \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} - f_x(x_0,y_0) \right| = \frac{|\varepsilon(\xi,n)|\sqrt{\xi^2+n^2}}{|\xi+in|} =$

$\varepsilon(\xi,n)$

Άρα

$$\lim_{h\to 0} \left| \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} - f_x(x_0,y_0) \right| =$$

$$\lim_{(\xi,n)\to(0,0)} |\varepsilon(\xi,n)| = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = f_x(x_0,y_0) \iff \boxed{f'(z_0) = f_x(x_0,y_0)}$$

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \frac{f(x_0+\xi,\, y_0+n) - f(x_0,y_0)}{\xi+in} \quad (1)$$

Θεώρημα: Έστω η συνάρτηση $f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f = u+iv$ και έστω $z_0 = x_0+iy_0$ σημείο του ανοικτού συνόλου A

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $z_0 \iff$ η f (σα συνάρτηση των x,y) είναι διαφορίσιμη στο (x_0,y_0) και ικανοποιούνται οι εξισώσεις C-R στο (x_0,y_0). Δηλαδή

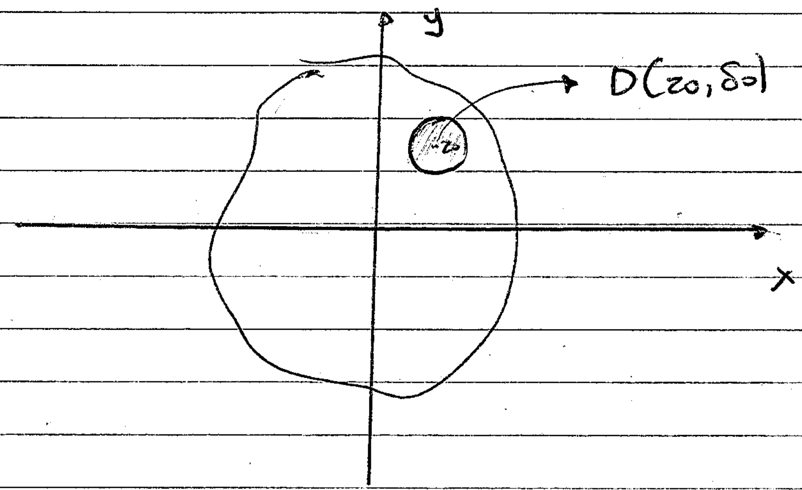
$$\left\{ \begin{array}{l} u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0) \\ u_y(x_0,y_0) = -v_x(x_0,y_0) \end{array} \right\} \iff f_x(x_0,y_0) = -if_y(x_0,y_0).$$

Επιπλέον, αν η f είναι παραγωγίσιμη στο z_0, τότε:

$$f'(z_0) = f_x(x_0,y_0) = -if_y(x_0,y_0).$$

Απόδειξη: Πρόκειται για τις Προτάσεις 1 και 2. Μένει να αποδειχθεί ότι:
$f'(z_0)$ υπάρχει $\Longrightarrow$ η f (σα συνάρτηση των x,y) είναι διαφορίσιμη στο (x_0,y_0)

Ορισμός: Έστω η συνάρτηση $f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$ και έστω $z_0 = x_0 + iy_0 \in A$. Θα λέμε ότι η f είναι αναλυτική (ολόμορφη) στο z_0, αν υπάρχει περιοχή
$D(z_0,\delta) = \{ z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \delta \}$ τ.ω. η f να είναι παραγωγίσιμη $\forall z \in D(z_0,\delta)$



Θα λέμε ότι η f είναι αναλυτική (ολόμορφη) στο A, αν η f είναι αναλυτική (ολόμορφη) $\forall z \in A$.

* Το προηγούμενο Θεώρημα για την αναλυτικότητα (ολομορφία) μιας μιγαδικής συνάρτησης διατυπώνεται ως εξής:

▶ Θεώρημα: Έστω η συνάρτηση $f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$, A ανοικτό σύνολο. Η f είναι αναλυτική (ολόμορφη) στο A αν και μόνο αν

(i) Η f (σα συνάρτηση των x,y) είναι διαφορίσιμη στο A
και

(ii) Ικανοποιούνται οι εξισώσεις C-R στο A.
Δηλαδή $\left\{\begin{array}{l} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{array}\right\} \Longleftrightarrow f_x = -i f_y$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

[1] $f(z) = f(x+iy) = \operatorname{Re} z = x$. Σε ποια σημεία του $\mathbb{C}$ είναι η f παραγωγίσιμη και σε ποια αναλυτική (ολόμορφη);

Λύση: $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $u(x,y) = x$
$v(x,y) = 0$

- Προφανώς οι u, v (δηλ. η f) είναι διαφορίσιμη σε κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

- $\left\{\begin{array}{l} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} 1 = 0 \\ 0 = 0 \end{array}\right\}$ Δεν ικανοποιούνται οι C-R σε κανένα σημείο (x,y)

→ Επομένως η $f(z) = \operatorname{Re} z = x$ δεν είναι παραγωγίσιμη, σε κανένα $z \in \mathbb{C}$. Επίσης η f δεν είναι αναλυτική (ολόμορφη) σε κανένα $z \in \mathbb{C}$.

[2] $f(z) = f(x+iy) = |z|^2 = x^2 + y^2$

Λύση: $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ όπου

$$\left\{\begin{array}{l} u(x,y) = x^2 + y^2 \\ v(x,y) = 0 \end{array}\right.$$

- Επομένως οι u, v έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, οι u, v (και κατά συνέπεια η f) είναι διαφορίσιμες σε κάθε (x,y)

• $\begin{cases} V_x = u_y \\ u_x = -V_y \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \iff (x,y) = (0,0) \iff \underline{\underline{z=0}}$

Η $f(z) = |z|^2$ είναι παραγωγίσιμη μόνο στο $z=0$ και πουθενά <u>αναλυτική</u> (ολόμορφη). Είναι
$f'(0) = f_x(0,0) = 2x\Big|_{x=0} = \boxed{0}$

[3] Η μιγαδική εκθετική συνάρτηση $W = e^z$, $z \in \mathbb{C}$

<u>Λύση:</u>

$W = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $\forall z \in \mathbb{C}$

<u>Ισοδύναμα:</u>

$e^z \overset{\text{ορσ.}}{=} e^x(\cos y + i\sin y)$, $z = x+iy$

$f(z) = e^z = \underbrace{e^x \cos y}_{u} + i\underbrace{e^x \sin y}_{v}$

• Οι $u(x,y) = e^x \cos y$ και $v(x,y) = e^x \sin y$ έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους και κατά συνέπεια είναι διαφορίσιμες (επομένως η f είναι διαφορίσιμη)

• $\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases} \iff \begin{cases} e^x \cos y = e^x \cos y \\ -e^x \sin y = -e^x \sin y \end{cases}$

• Η $f(z) = e^z$ είναι παραγωγίσιμη σ' όλο το Z

$f'(z) = (e^z)' = \frac{\partial f}{\partial x} = \left(e^x \cos y\right) + i\left(e^x \sin y\right) = \underline{\underline{e^z}}$

$(e^z)' = e^z$, $\forall z \in \mathbb{C}$

Η $f(z) = e^z$ είναι <u>αναλυτική (ολόμορφη) σ' όλο το $\mathbb{C}$</u>
Συνεπώς η $f(z) = e^z$ είναι <u>ακέραια συνάρτηση</u>.
(Η $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ είναι ακέραια αν είναι παραγωγίσιμη $\forall\ z \in \mathbb{C}$)

[4] $f(z) = f(x+iy) = \underbrace{x^3y^2}_{u} + i\underbrace{x^2y^3}_{v}$

<u>Λύση:</u>

- Οι $u(x,y) = x^3y^2$ και $v(x,y) = x^2y^3$ έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους και επομένως είναι διαφορίσιμες.
- $\left\{\begin{array}{l} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} 3x^2y^2 = 3x^2y^2 \\ 2x^3y = -2xy^3 \end{array}\right\} \iff yx^3 = -xy^3$

$\iff$ $(x,y) = (0,0)$

Άρα είναι <u>παραγ.</u> στο $z_0 = 0$ και <u>πουθενά αναλυτική</u>

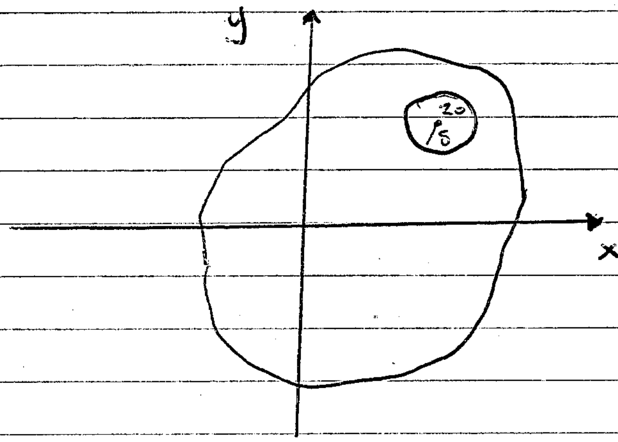
<u>Σπίτι:</u>

[5] $f(z) = f(x+iy) = x^2+y^2+2ixy$ (Παραγ. + Αναλ.)
[6] Δίνεται ότι η f είναι αναλ. $f(z) = u(x)+iv(y)$ σε όλο το $\mathbb{C}$. Να βρεθούν αυτές οι f.
[Απ: κάποιου είδους πολ.]

03/04/12

Έστω $f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$, μία μιγαδική αναλυτική (ολόμορφη) συνάρτηση στο ανοικτό σύνολο A. Θα αποδείξουμε αργότερα (χρησιμοποιώντας τους τύπους Cauchy ότι η f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο A!!!!!

Δηλαδή η f αναλυτική στο $z_0 \in A$ συνεπάγεται ότι η παράγωγος $f^{(n)}(x_0)$ υπάρχει $\forall n \in \mathbb{N}$!!!



Μάλιστα αποδεικνύεται ότι:

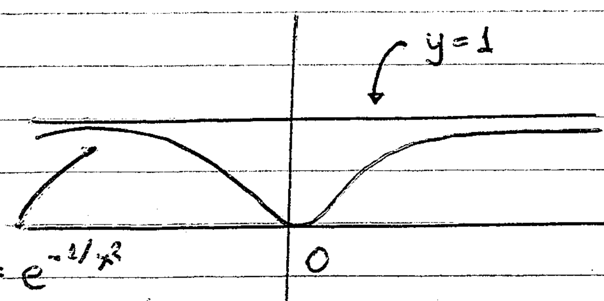
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n, \quad \forall z \in D(z_0, \delta)$$

Υπάρχει ανάλογο αποτέλεσμα για τις πραγματικές συναρτήσεις;

ΟΧΙ

π.χ.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$



Αποδεικνύεται ότι:

$f^{(n)}(0) = 0, \quad \forall n \in N$

Τότε:

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0 \neq f(x), \quad \forall x \neq 0$

—

Δηλαδή, η f δεν αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά με κέντρο το $x_0 = 0$.

—

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι μία αναλυτική (ολόμορφη) συνάρτηση σε ανοικτό σύνολο $A \subseteq \mathbb{C}$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη, έχουμε το παρακάτω κριτήριο αναλυτικότητας (ολομορφίας) μίας συνάρτησης.

—

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω η μιγαδική συνάρτηση $f : A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$, όπου A ανοικτό σύνολο.
Η f είναι αναλυτική (ολόμορφη) στο A αν και μόνο αν:

(i) Η f (σα συνάρτηση των x, y) έχει συνεχείς μερικές παραγώγους
και

(ii) Ικανοποιεί τις εξισώσεις Cauchy-Riemann στο A: $\left\{ \begin{array}{l} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{array} \right\} \Leftrightarrow f_x = -i f_y$

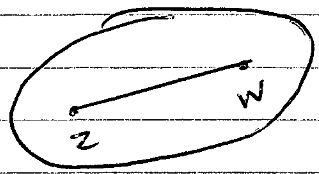
—

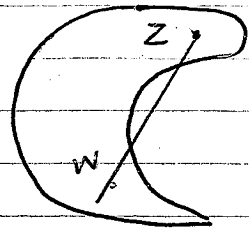
Κυρτά Σύνολα - Συνεκτικά Σύνολα

Ορισμός 1: Το $A \subseteq C$ λέγεται κυρτό, αν για κάθε $z, w \in A$, το ευθ. τμήμα $[z, w] \in A$

Σημείωση:

$$[z,w]=\{ J\in\mathbb{C} : (1-t)z+tw,\ 0\le t\le 1 \}$$

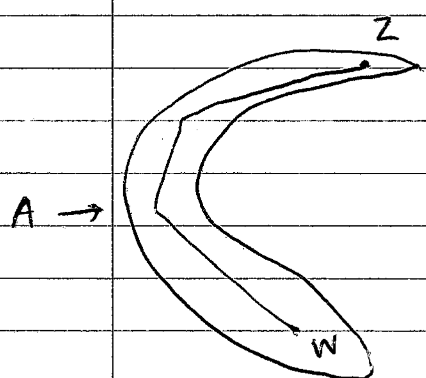


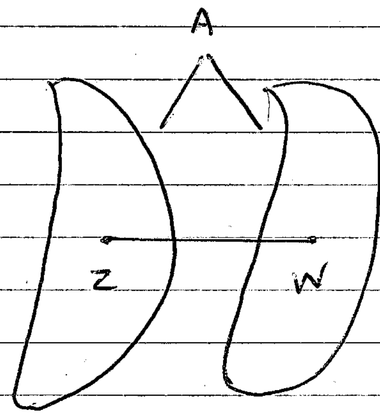


<u>κυρτό</u> μη κυρτό

—

<u>Ορισμός 2</u>: Το $A\subseteq\mathbb{C}$ λέγεται <u>πολυγωνικά συνεκτικό</u>, αν $\forall z,w\in A$ υπάρχει πολυγωνική γραμμή γ η οποία ενώνει τα z,w και βρίσκεται μέσα στο A





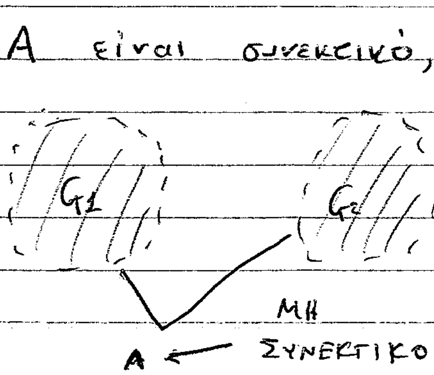
πολυγωνικά συνεκτικό

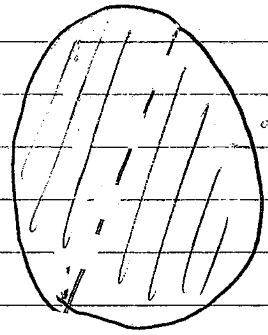
Δεν είναι πολυγωνικά συνεκτικό

—

<u>Ορισμός 3</u>: Το σύνολο $A\subset\mathbb{C}$ λέγεται <u>μη-συνεκτικό</u> αν $A=G_1\cup G_2$, όπου $G_1\neq\emptyset$, $G_2\neq\emptyset$, $G_1\cap G_2\neq\emptyset$ και τα G_1, G_2 <u>είναι ανοικτά σύνολα</u>.

° Το A είναι συνεκτικό, αν δεν είναι μη-συνεκτικό.





A είναι συνεκτικό

Πρόταση: Ένα ανοικτό σύνολο $A \subseteq \mathbb{C}$ είναι συνεκτικό αν και μόνο αν το A είναι πολυγωνικά συνεκτικό.

Ορισμός: Λέμε ότι το $A \subseteq \mathbb{C}$ είναι ένας τόπος (ή πεδίο), αν το A είναι ανοιχτό στο $\mathbb{R}$ και συνεκτικό.

Παρατήρηση: Έστω $A \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό συνεκτικό σύνολο. Αν τα σύνολα $G \subset A$ και $A \setminus G$ είναι ανοικτά, τότε είτε

$G = A$ (οπότε $A \setminus G = \emptyset$) ή
$G = \emptyset$ (οπότε $A \setminus G = A$)

Βασικό Παράδειγμα

Έστω η μιγαδική συνάρτηση $f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$, η οποία είναι αναλυτική (ολόμορφη) στον τόπο (πεδίο) A.

(α) Αν $f'(z) = 0$ $\forall z \in A$, τότε $f =$ σταθ.
(β) Αν $\mathrm{Re} f(z) = u =$ σταθ., τότε $f =$ σταθ.
(γ) Αν $\mathrm{Im} f(z) = v =$ σταθ., τότε $f =$ σταθ.
(δ) Αν $|f| =$ σταθ. $\iff u^2 + v^2 =$ σταθ.
Τότε $f =$ σταθ.

Απόδειξη

(α) $f'(z) = 0 \iff f_x = 0$ και $f_y = 0$, $\forall z \in A$
$(f'(z) = f_x = -i f_y)$

Όμως $f_x = 0 \iff u_x + i v_x = 0 \iff \begin{cases} u_x = 0 \\ v_x = 0 \end{cases}$

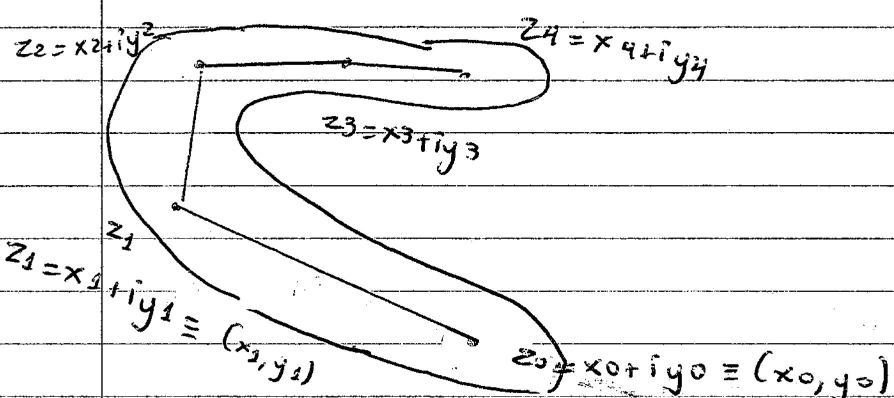
και $f_y = 0 \iff u_y + i v_y = 0 \iff \begin{cases} u_y = 0 \\ v_y = 0 \end{cases}$

Επομένως

$\boxed{u_x = u_y = v_x = v_y = 0}$ $\forall (x,y) \in A$

Θα δείξουμε ότι $f(z) = f(z_0), \ \forall z \in A$

Τότε $f =$ σταθ.



<u>Από Θ.Μ.Τ.:</u>

$u(x_1,y_1) - u(x_0,y_0) = u_x(\bar{x},\bar{y})(x_1 - x_0) + u_y(\bar{x},\bar{y})(y_1 - y_0)$

$\left[\begin{array}{l}\text{όπου } (\bar{x},\bar{y}) \text{ σημείο} \\ \text{μεταξύ } (x_0,y_0) \text{ και } (x_1,y_1)\end{array}\right] = 0 \Longrightarrow$

$u(x_1,y_1) = u(x_0,y_0)$

Όμοια προκύπτει:

$v(x_1,y_1) = v(x_0,y_0)$

Επομένως $f(z_1) = u(x_1,y_1) + iv(x_1,y_1)$

$= u(x_0,y_0) + iv(x_0,y_0) = \underline{\underline{f(z_0)}}$

Παρόμοια: $f(z_0) = f(z_1)$

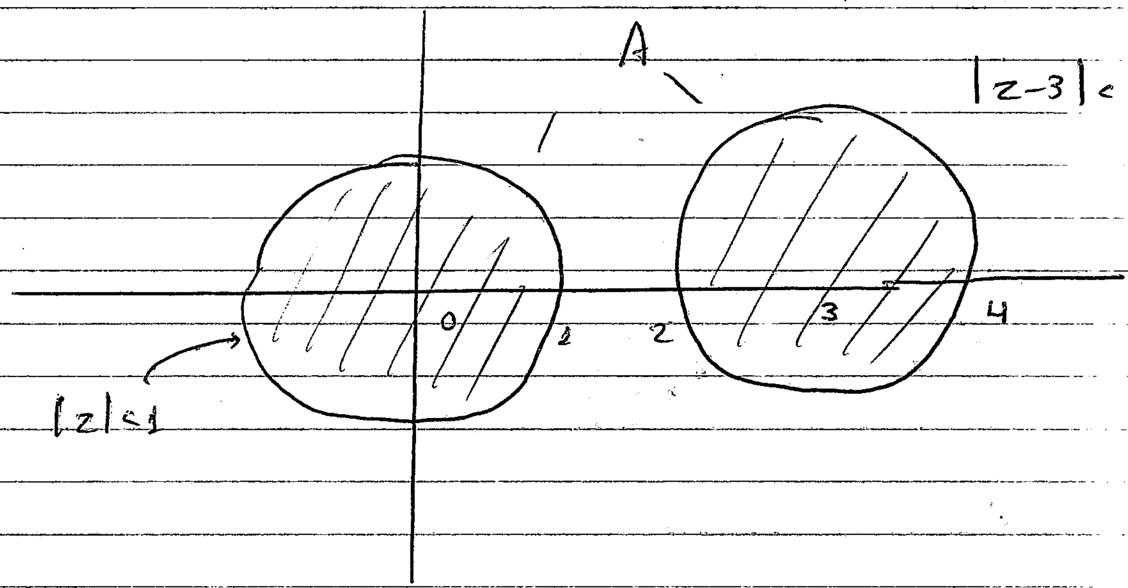
$f(z_1) = f(z_2)$, $f(z) = f(z_3)$

Άρα $f(z) = f(z_0)$

(β) Προκύπτει από το (α)

(γ) Προκύπτει από το (α)

(δ) Προκύπτει από το (α)



$A = D(0,1) \cup (3,1)$

μη συνεκτικό (δεν είναι τόπος)

$f: A \to \mathbb{C}$ με

$$f(z) = \begin{cases} 1, & \text{αν } z \in D(0,1) \\ 2, & \text{αν } z \in D(3,1) \end{cases}$$

Η f δεν είναι σταθερή

Όμως: $\left.\begin{array}{l} f'(z) = 0, \ \forall z \in D(0,1) \\ f'(z) = 0, \ \forall z \in D(3,1) \end{array}\right\} \Longrightarrow f' = 0$ στο A

23/04/12

Παραδείγματα:

[1] Αν οι συναρτήσεις $f = u + iv$, $\bar{f} = u - iv$ είναι αναλυτικές (ολόμορφες) σ'ένα τόπο (ανοικτό και συνεκτικό σύνολο) $G \subseteq \mathbb{C}$, να βρεθεί η f:

Λύση

(i) Η $f + \bar{f}$ είναι αναλυτική στο G. Όμως $f + \bar{f} = 2u$ δηλαδή $Im(f + \bar{f}) = 0$ (σταθερό)
Από "βασικό παράδειγμα" θα πρέπει

$$\boxed{f + \bar{f} = c_1, \text{ (σταθερή) στο } G} \quad (α)$$

(ii) Η $f - \bar{f}$ είναι αναλυτική στο G. Όμως $f - \bar{f} = 2iv$. Δηλαδή $Re(f - \bar{f}) = 0$ (σταθερό).
Από "βασικό παράδειγμα" θα πρέπει:

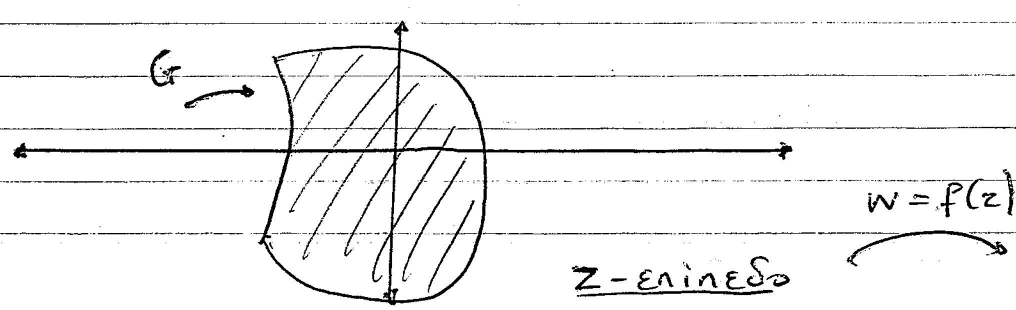
$$\boxed{f - \bar{f} = c_2 \text{ (σταθερή)}} \quad (β)$$

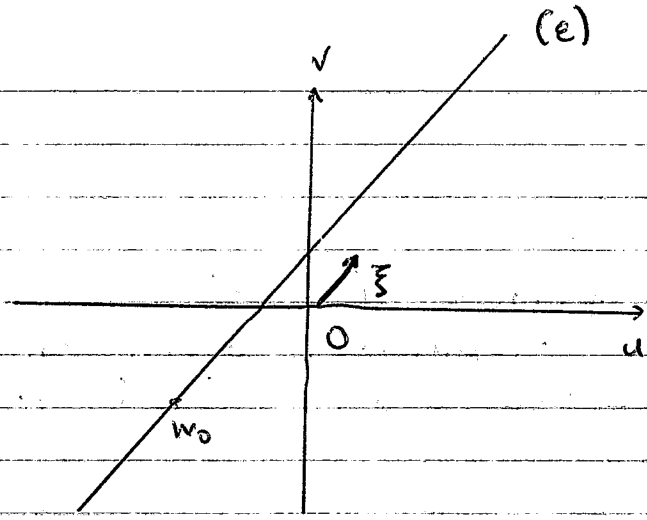
Από $(α) + (β) \implies 2f = c_1 + c_2$ (σταθερή)

ΑΡΑ $f =$ σταθερή

[2] Έστω η $f : G \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$, είναι αναλυτική (ολόμορφη) στον τόπο G. Αν $f(z) \in (\varepsilon)$, $\forall z \in G$, όπου (ε) ευθεία του μιγαδικού επιπέδου, τότε $f =$ σταθ. στο G

Λύση





(ε): $w = w_0 + t\cdot\xi$, $t \in \mathbb{R}$

Επομένως: $\boxed{f(z) = w_0 + t\xi, \quad \forall z \in G}$

Τότε για $\xi \neq 0$: $\dfrac{f(z) - w_0}{\xi} = t \in \mathbb{R}$

Αν $g(z) := \dfrac{f(z) - w_0}{\xi}$, η g είναι αναλυτική

στο G με $\operatorname{Im} g = 0$ (σταθ.)

Από "βασικό παράδειγμα" $\underline{g = \text{σταθ.} = c}$.

<u>Παρατήρηση:</u> Έστω η συνάρτηση $f: G \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$
$f = u + iv$. Ορίζουμε τους τελεστές

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} &:= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}} &:= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) \end{aligned}}$$

όπου $z = x + iy$
$\bar{z} = x - iy$

Οι εξισώσεις C-R

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \boxed{-i\frac{\partial f}{\partial y} \iff \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0}$$

Επειδή $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} + i\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)}$

"Η $f = u + iv$ είναι αναλυτική στο ανοικτό σύνολο G <u>αν και μόνο αν</u> η f είναι διαφορίσιμη σα συνάρτηση των x, y και $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$"

Επίσης
$f'(z) = \dfrac{\partial f}{\partial z}$

Πράγματι:

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z}$$

<u>Ορισμός</u>: Μία συνάρτηση $\varphi : G \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ λέγεται <u>αρμονική</u> αν:

(a) Η φ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους $2^{ης}$ τάξης

(β) Ικανοποιεί την εξίσωση Laplace

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \iff \varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0$$

<u>Πρόταση</u>: Έστω η $f : G \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $f = u + iv$, είναι αναλυτική στο ανοικτό σύνολο G. Τότε οι u, v είναι αρμονική στο G.

<u>Απόδειξη</u>:

(*) Θα αποδείξουμε αργότερα "<u>ολοκληρωτικοί τύποι Cauchy</u>" ότι μία αναλυτική συνάρτηση σ' ένα ανοικτό σύνολο G είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη.

Επομένως οι μερικές παράγωγοι κάθε τάξης της f υπάρχουν και κατά συνέπεια θα είναι συνεχείς στο G. Άρα και οι u, v έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους άπειρης τάξης. Λοιπόν οι u, v και η f ικανοποιούν την (α).

Θα αποδείξουμε ότι η f (και κατά συνέπεια οι u, v) ικανοποιούν τη (β) - εξίσωση Laplace.

Ως γνωστόν $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial f}{\partial y}$

(i) $f''(z) = (f'(z))' = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}$

και

(ii) $f''(z) = (f'(z))' = -i \frac{\partial}{\partial y}\left(-i \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \boxed{-\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}$

Άρα $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \iff$

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \end{array}\right]$$

Συμπέρασμα: Οι u, v είναι αρμονικές στο G.

Ορισμός: Έστω $u: G \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ αρμονική στο σύνολο G. Λέμε ότι η v είναι συζυγής αρμονική στο G, αν η $f = u + iv$ είναι αναλυτική στο G. (η u είναι συζυγής αρμονική της v).

Πρόταση 2: Έστω η $u: G \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι αρμονική στον τόπο G (G ανοικτό και συνεκτικό σύνολο)

Έστω $v: G \to \mathbb{R}$ συζυγής αρμονική της u, δηλαδή η $\boxed{f = u + iv \text{ αναλυτική στο } G}$

Αν $v_1 : G \to \mathbb{R}$ είναι μια άλλη συζυγής αρμονική της u δηλαδή
η $\boxed{f_1 = u + iv_1 \text{ είναι αναλυτική στο } G_1}$ τότε:

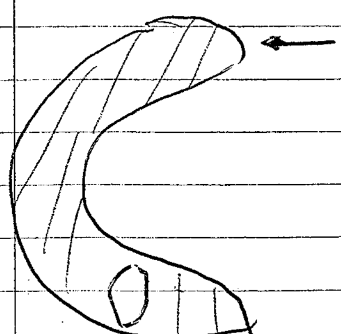
$v_1 = v + \text{σταθ.}$

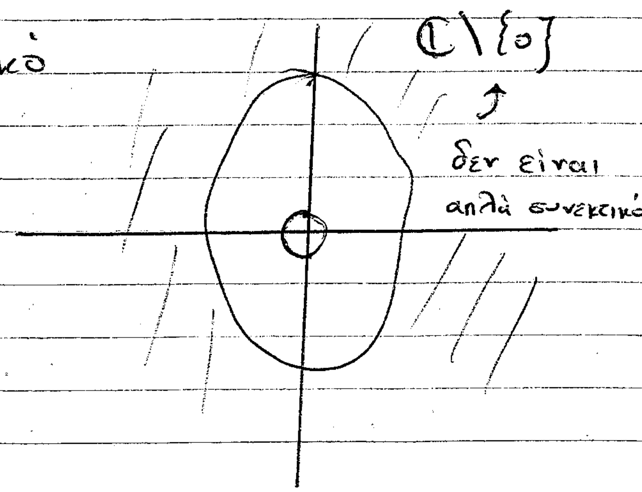
Απόδειξη:

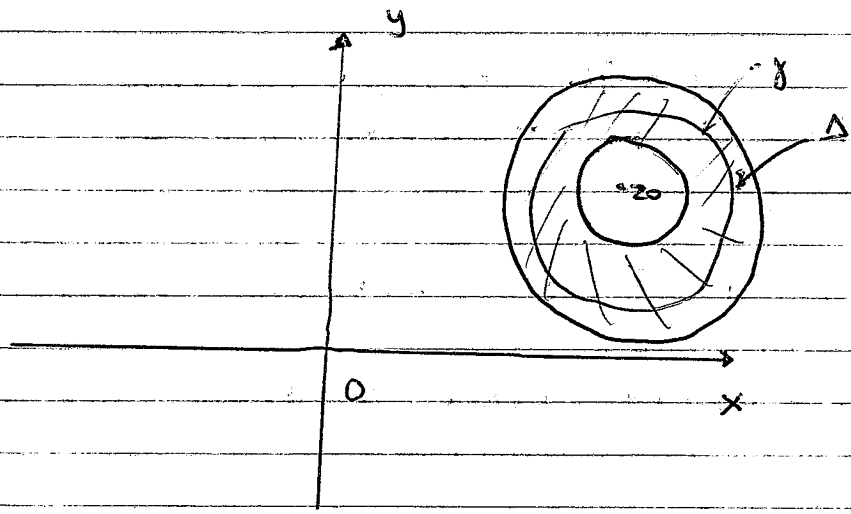
Η $f_1 - f = (u + iv_1) - (u + iv_2) = i(v_1 - v_2)$ είναι αναλυτική στο G. Όμως $Re(f_1 - f) = 0 = \text{σταθ.}$
Από "βασικό παράδειγμα" $f_1 - f = \text{σταθ.} \iff$
$i(v_1 - v) = \text{σταθ.} \iff$
$v_1 - v = \text{σταθ.} \iff$
$v_1 = v + \text{σταθ.}$

Ορισμός: Ο τόπος G (ανοικτό και συνεκτικό) θα λέγεται απλά συνεκτικός, αν δεν έχει "τρύπες". Δηλαδή, το εσωτερικό κάθε κλειστής καμπύλης στο G, ανήκει στο G.

π.χ.







Δακτύλιος $\Delta = \{ z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R \}$,
$z_0 \in \mathbb{C}$, $r, R > 0$ Δεν είναι απλά συνεκτικό.

<u>Θεώρημα:</u> Έστω $u : G \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ αρμονική συνάρτηση στον απλό συνεκτικό τόπο G. Τότε υπάρχει συζυγής αρμονική v της u. Δηλαδή η $f = u + iv$ είναι αναλυτική στο G.

<u>Απόδειξη:</u> <u>Θ. Green</u>: Αν P, Q έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους στον απλό συνεκτικό τόπο G τότε:

$$\oint_{\gamma} P dx + Q dy = \iint_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Ορίζω $Q(x,y) := -\dfrac{\partial u}{\partial x}(x,y)$,

$$P(x,y) := \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)$$

Τότε $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = -\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)$, $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)$

Επειδή $u_{xx} + u_{yy} = 0 \Longrightarrow$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

Από συνέπεια Θ. Green, υπάρχει $v: G \to \mathbb{R}$
τ.ω. $\nabla v = (P, Q) \iff$

$$\begin{pmatrix} v_x = P \\ v_y = Q \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} v_x = u_y \\ v_y = -u_x \end{pmatrix} \leftarrow \text{Cauchy - Riemann}$$

Επειδή u_x, u_y συνεχείς $\Longrightarrow$

$f = u + iv$ αναλυτική στο G

24/04/12

<u>Παραδείγματα</u> (Αρμονική / Συζυγείς Αρμονικές Συναρτήσεις)

[1] Να αποδειχθεί ότι η $u(x,y) = x^3y - xy^3$ είναι <u>αρμονική</u> στο $\mathbb{R}^2$. Στη συνέχεια να βρεθεί η <u>συζυγής αρμονική</u> v της u, καθώς επίσης και η <u>αναλυτική συνάρτηση</u>
$f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$, $z \in \mathbb{C}$

<u>Λύση</u>: Η u έχει συνεχείς μερικές παραγώγους κάθε τάξης. (Είναι πολυώνυμο ως προς x, y).
Επίσης:

$u_x = 3x^2y - y^3$ $\qquad$ $u_y = x^3 - 3xy^2$
$u_{xx} = 6xy$ $\qquad$ $u_{yy} = -6xy$

Επομένως $u_{xx} + u_{yy} = 0$ (Εξίσωση Laplace)

<u>Άρα η u είναι αρμονική.</u>

Επειδή το $\mathbb{C}$ είναι <u>απλά συνεκτικός τόπος</u>, η u έχει συζυγή αρμονική.

<u>Εύρεση συζυγούς αρμονικής V:</u>

Επειδή η f είναι αναλυτική, ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} u_x = v_y & (1) \\ u_y = -v_x & (2) \end{cases}$$

$(1) \Leftrightarrow v_y = 3x^2y - y^3 \Longrightarrow \boxed{V = \frac{3}{2}x^2y^2 - \frac{y^4}{4} + c(x) \quad (*)}$

(2) : $u_y = -v_x \iff x^3 - 3xy^2 = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{3}{2}x^2y^2 - \frac{y^4}{4} + c(x)\right)$

$\iff x^3 - 3x\cancel{y^2} = -3x\cancel{y^2} - c'(x) \iff$

$c'(x) = -x^3 \longrightarrow$

$c(x) = -\frac{x^4}{4} + c$

Επομένως

$$\boxed{v = \frac{3}{2}x^2y^2 - \frac{y^4}{4} - \frac{x^4}{4} + c}$$

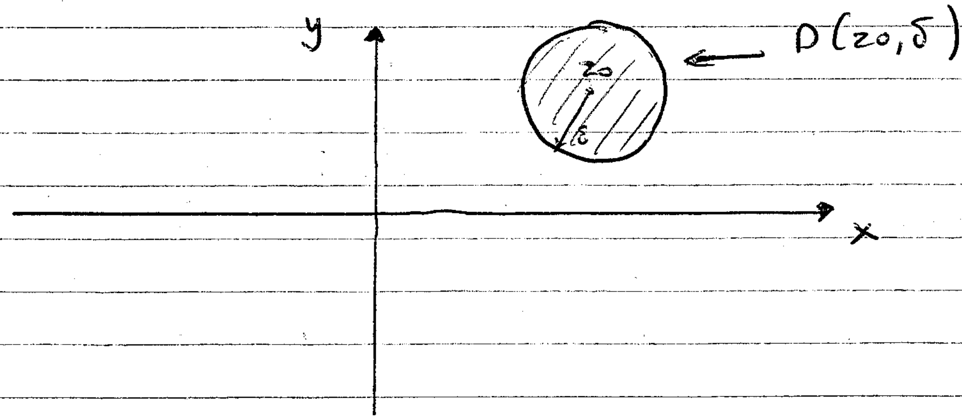
$f(z) = x^3y - xy^3 + i\left(\frac{3}{2}x^2y^2 - \frac{y^4}{4} - \frac{x^4}{4} + c\right)$

όπου $z = x+iy$, $\bar{z} = x - iy$

$x = \frac{z+\bar{z}}{2}$, $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

▶ __Κανόνας:__ Εύρεση της $f(z)$ (συναρτήσει του z) αν γνωρίζουμε τις $u(x,y)$, $v(x,y)$.

Έστω ότι η f είναι αναλυτική σε μια περιοχή του $z_0 = x_0 + iy_0$



Αποδεικνύεται ότι η $f(z)$ δίνεται από τον τύπο
$f(z) = u(z - iy_0, y_0) + i\,v(z - iy_0, y_0)$

Ειδικά αν $\underline{\underline{z_0 = 0}}$, τότε:

$$\boxed{f(z) = u(z,0) + i v(z,0)}$$

Επομένως στο παράδειγμα μας

$$f(z) = 0 + i\left(-\frac{z^4}{4} + c\right)$$

$$= -\frac{i z^4}{4} + c \cdot i \quad , \quad c \in \mathbb{R}$$

→ Αν είχαμε αρχική συνθήκη $f(i) = i$ τότε:

$$i = -i \cdot \frac{i^4}{4} + c \cdot i \Longrightarrow$$

$$\cancel{i} = -\frac{\cancel{i}}{4} + c \cdot \cancel{i} \Longrightarrow \quad c = \frac{5}{4}$$

Δηλαδή τελικά $f(z) = -i\dfrac{z^4}{4} + \dfrac{5}{4} i \Longrightarrow$

$$\boxed{f(z) = \frac{5 - z^4}{4} i}$$

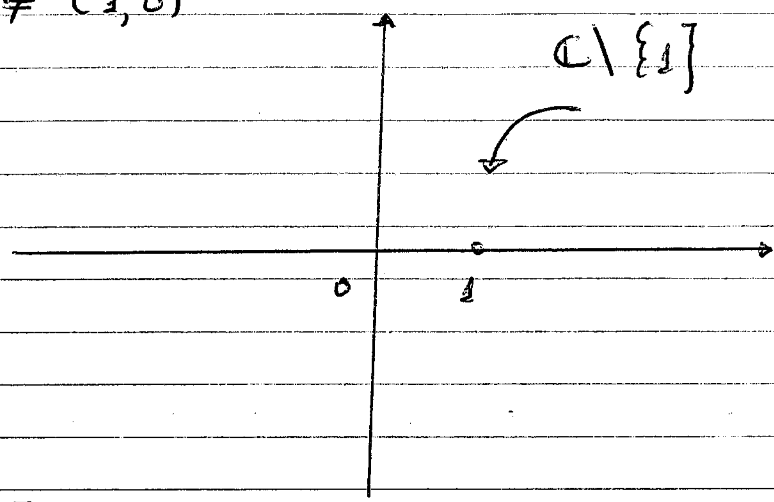
→ Ειδικά να βρεθεί η $f(z)$ αν $f(i+1) = 5 + 4i$

[8] Ποια συνθήκη πρέπει να ικανοποιούν τα $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η $\varphi(x,y) = ax^3 + \beta x^2 y + \gamma x y^2 + \delta y^3$ να είναι αρμονική στο $\mathbb{C}$. Στη συνέχεια να βρεθούν οι συζυγείς αρμονικές v της u καθώς επίσης και η $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$ συνάρτηση του $\underline{\underline{z}}$.

[Απ: $\gamma = -3a$
$\beta = -3\delta$]

[3] $u = \dfrac{y}{(1-x)^2+y^2}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$(x,y) \neq (1,0)$



Αποδείξτε ότι η u είναι αρμονική και υπολογίστε μία συζυγή αρμονική v.

[Απ: $v = \dfrac{x-1}{(1-x)^2+y^2}$, $f(z) = \dfrac{i}{z-1}$]

—

Στοιχειώδεις Μιγαδικές Συναρτήσεις

[1] **Μιγαδική Εκθετική Συνάρτηση**

$W = f(z) = e^z := e^x(\cos y + i\sin y)$
$z = x+iy \in \mathbb{C}$

$$w = e^z = \underbrace{e^x\cos y}_{u} + i\,\underbrace{e^x\sin y}_{v}$$

Οι u,v ικανοποιούν τις εξ. C-R και έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους.

Επομένως η $w = f(z) = e^z$ είναι αναλυτική (ολόμορφη) στο $\mathbb{C}$. Δηλαδή η $w = e^z$ είναι ακέραια συνάρτηση.
(αναλυτική σε όλο το $\mathbb{C}$)

$(e^z)' = f'(z) = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(e^x \cos y) + i\frac{\partial}{\partial x}(e^x \sin y)$

$= e^x \cos y + i e^x \sin y = e^z$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ:

1. $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$, $z, w \in \mathbb{C}$

2. $\frac{e^z}{e^w} = e^{z-w}$, $z, w \in \mathbb{C}$

3. $|e^z| = |e^{x+iy}| = |e^x \cdot e^{iy}| = e^x |e^{iy}| = e^x |\cos y + i \sin y|$

$= e^x \cdot 1 = e^x \leq \underline{\underline{e^{|z|}}}$

4. $e^z = 1 \iff z = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$

Άρα , η $w = e^z$ ΔΕΝ είναι «1-1»

Απόδειξη: $e^z = 1 \iff e^{x+iy} = 1 \iff$

$e^x(\cos y + i \sin y) = 1 \iff$

$e^x \cos y + i e^x \sin y = 1 \iff$

$\begin{cases} e^x \cos y = 1 \\ e^x \sin y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2k\pi \\ x = 0 \end{cases} \iff$

$z = x + iy = 2k\pi i$

5. Η $w = e^z$ είναι περιοδική με περίοδο $2k\pi i$, δηλαδή

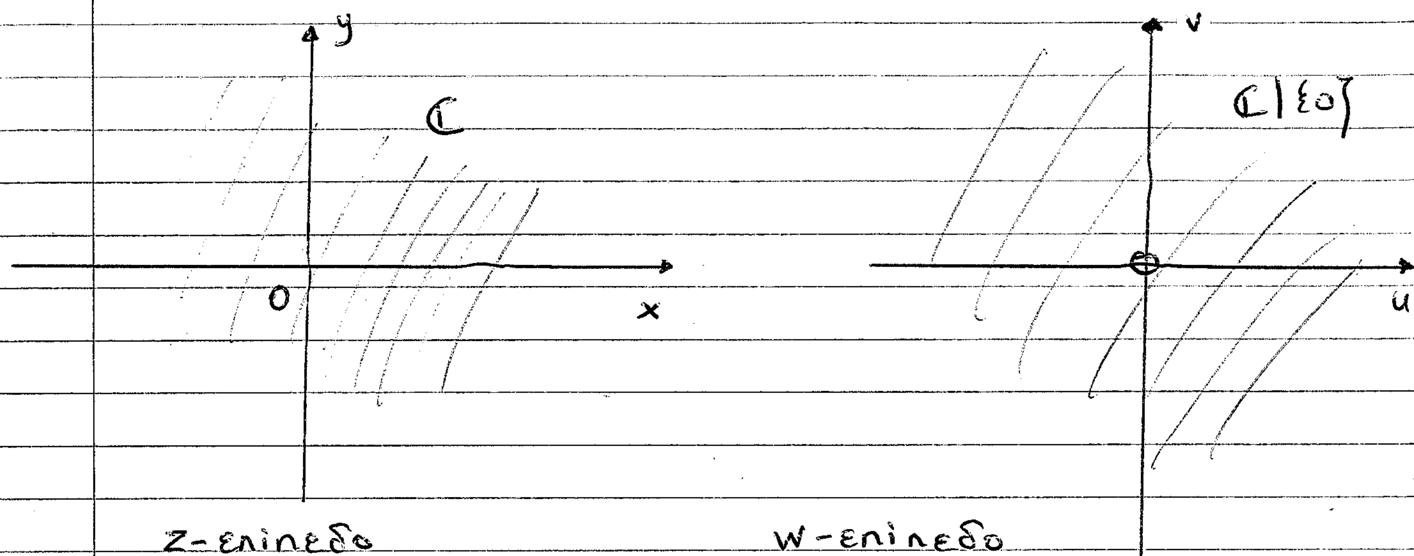
$e^{z+w} = e^z \iff w = 2k\pi i$

Απόδειξη:

$$e^{z+w}=e^{z} \iff \frac{e^{z+w}}{e^{z}}=1 \iff e^{w}=1 \iff$$

$$\boxed{w=2k\pi i}$$

6. Η $w=e^{z}$ απεικονίζει το $\mathbb{C}$ __επί__ του $\mathbb{C}\setminus\{0\}$

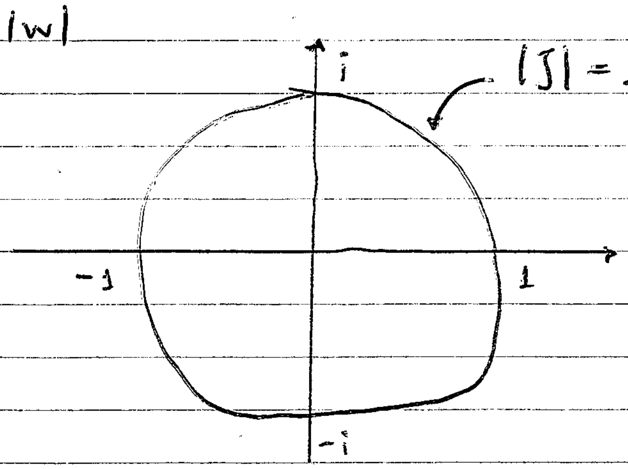


z-επίπεδο   w-επίπεδο

7. Η $w=e^{z}$ είναι __επί__

__Απόδειξη:__ Έστω $w\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, $w\neq 0$
Θεωρώ το μιγαδικό αριθμό:

$\zeta := \dfrac{w}{|w|}$ $|\zeta|=1$



$|\zeta|=1 \iff \zeta=e^{i\theta}$

$0\leq\theta\leq 2\pi$

Υπάρχει $\theta_0\in\mathbb{R}$ τ.ω. $\zeta=e^{i\theta_0} \iff$

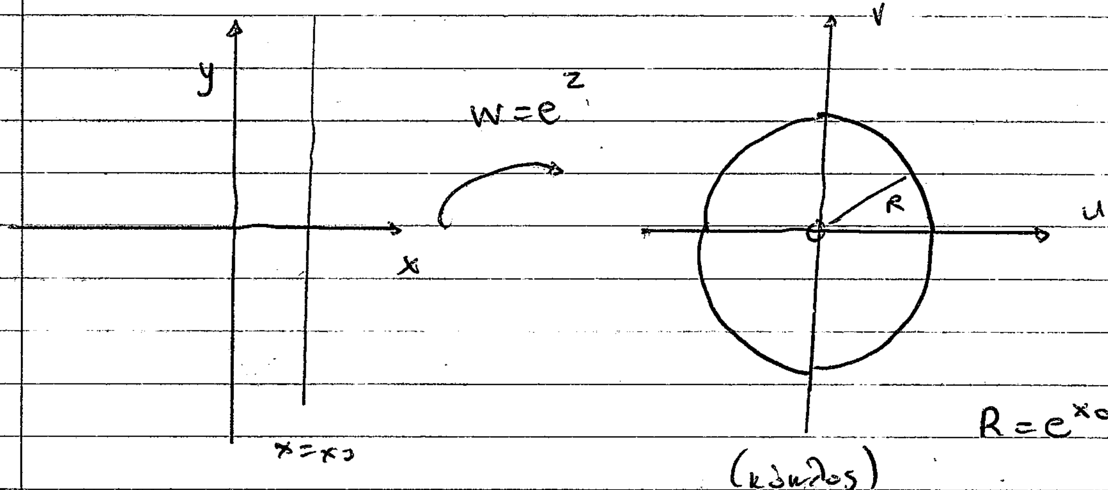
$\dfrac{w}{|w|}=e^{i\theta_0} \iff \boxed{w=|w|e^{i\theta_0}}$ (*)

ΠΑΡ Που απεικονίζει η $w = e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$ την ευθεία $\boxed{x = x_0}$ και που την ευθεία $\boxed{y = y_0}$

Λύση:

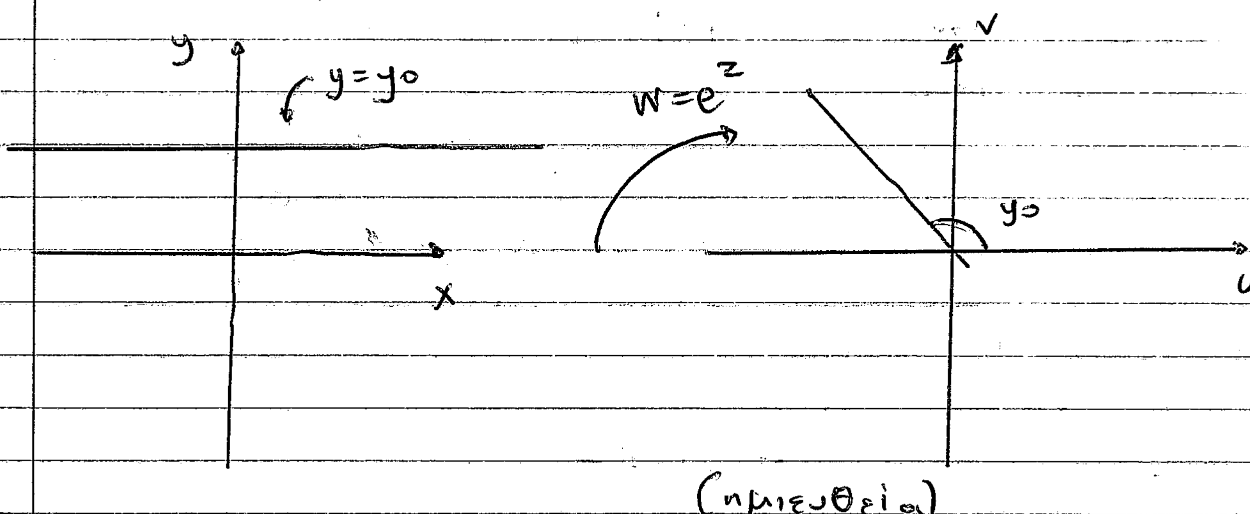
(i) $x = x_0$

$w = e^{x_0 + iy}, \ y \in \mathbb{R} = e^{x_0} \cdot e^{iy}, \ y \in \mathbb{R}$

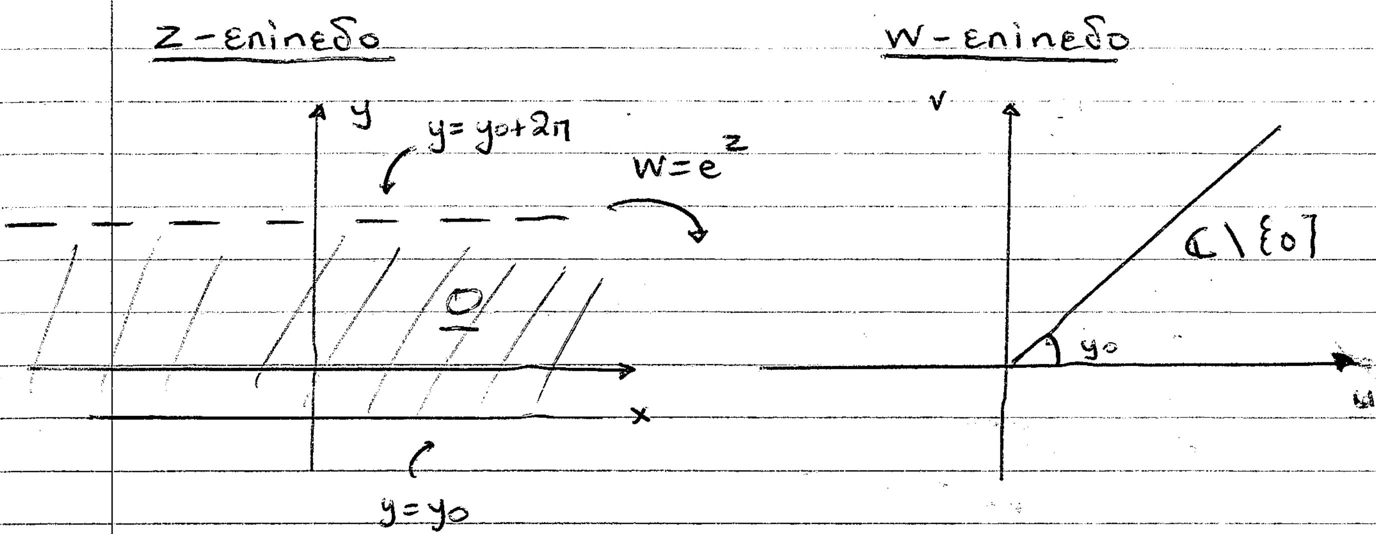


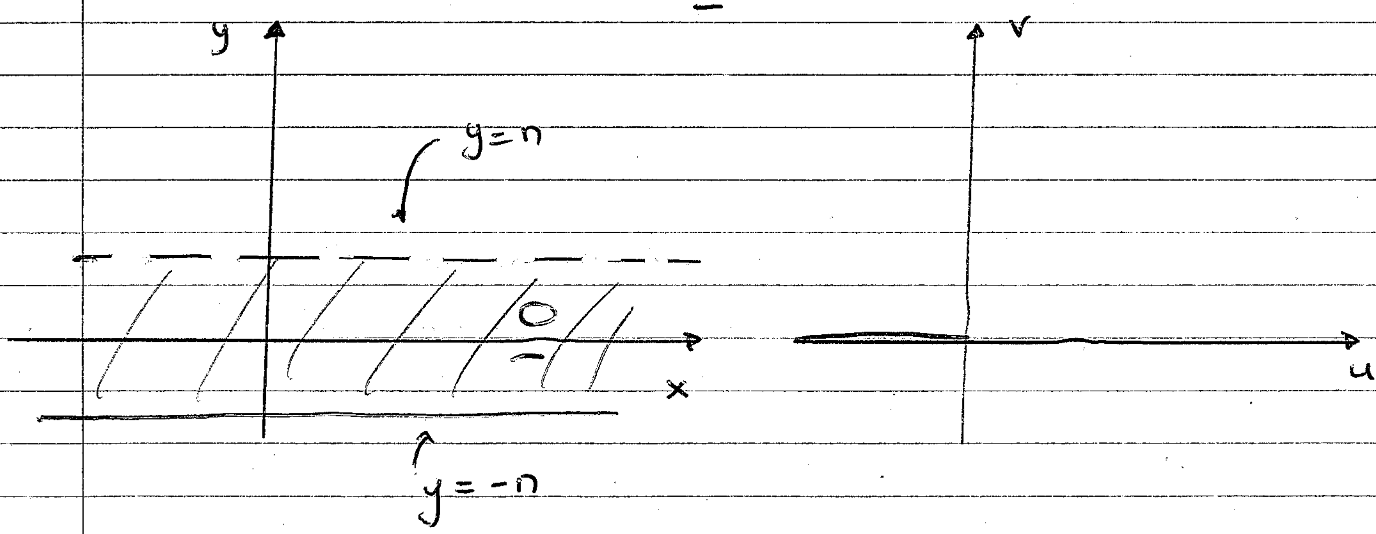
(ii) $y = y_0$

$w = e^{x + iy_0}, \ x \in \mathbb{R} = e^x \cdot e^{iy_0}$



30/04/12





Ως γνωστόν η $w=e^z=e^x\cos y+ie^x\sin y$, $z=x+iy$ απεικονίζει το $\mathbb{C}$ στο $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ και δεν είναι 1-1

Ισχύει $e^z=1 \Leftrightarrow z=2k\pi i$, $k\in\mathbb{Z}$

Πρόταση: Αν ορίσουμε την $w=e^z$ στη λωρίδα $\Omega=\{z\in\mathbb{C}: y_0\leq \operatorname{Im}z<y_0+2\pi\}$

(Ειδικά, αν $y_0=-\pi$ $\Omega=\{z\in\mathbb{C}: -\pi\leq \operatorname{Im}z\leq\pi\}$)

Τότε η $w=e^z$ είναι 1-1.

Απόδειξη: Αν $z_1=x_1+iy_1\in\Omega$ α.ν.δ.ο.

$z_2=x_2+iy_2\in\Omega$

$e^{z_2}=e^{z_1}\Longrightarrow z_2=z_1$

Έστω $e^{z_2} = e^{z_1} \iff e^{z_2 - z_1} = 1 \iff$

$z_2 - z_1 = 2k\pi i,\ k \in \mathbb{Z} \iff$

$x_2 - x_1 + i(y_2 - y_1) = 2k\pi i \iff$

$$\left\{\begin{array}{l} x_2 - x_1 = 0 \\ y_2 - y_1 = 2k\pi \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} x_2 = x_1 \\ y_2 - y_1 = 2k\pi \end{array}\right\}$$

Επειδή $z_2 - z_1 \in \underline{\Omega} \implies$

$|\mathrm{Im}(z_2 - z_1)| < 2\pi \iff$

$|y_2 - y_1| < 2\pi \iff$

$|2k\pi| < 2\pi \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2$

Πρέπει $\underline{k=0}$ και αυτό συνεπάγεται ότι $y_2 = y_1$

Επειδή και $x_2 = x_1 \implies$

$\boxed{z_2 = z_1}$

<u>Άσκηση</u> (Εναλλακτικός τρόπος ορισμού της $W = e^z$)

Η μιγαδική εκθετική συνάρτηση $w = f(z)$ ορίζεται ως εξής:

i) Η $f: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ είναι ακέραια (δηλ. αναλυτική σε όλο το $\mathbb{C}$)

ii) $f(z_1 + z_2) = f(z_1) \cdot f(z_2)$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

iii) $f(x) = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Τότε αποδείξτε ότι:

$w = f(z) = e^x \cos y + i e^x \sin y, \quad z = x + iy$

<u>Υπόδειξη</u>: $f(z) = f(x+iy) \overset{(2)}{=} f(x) \cdot f(iy) \overset{(3)}{=} e^x f(iy)$

$= e^x A(y) + i e^x B(y)$

όπου $f(e^{iy}) = A(y) + iB(y)$

Μετά χρησιμοποιώ αναλυτικότητα, C-R

Έτσι θα βρεθούν τα $A(y)$ και $B(y)$

[2] __Μιγαδικές Τριγωνομετρικές Συναρτήσεις__

- __Ημίτονο:__ $w = \sin z := \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$
- __Συνημίτονο:__ $w = \cos z := \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

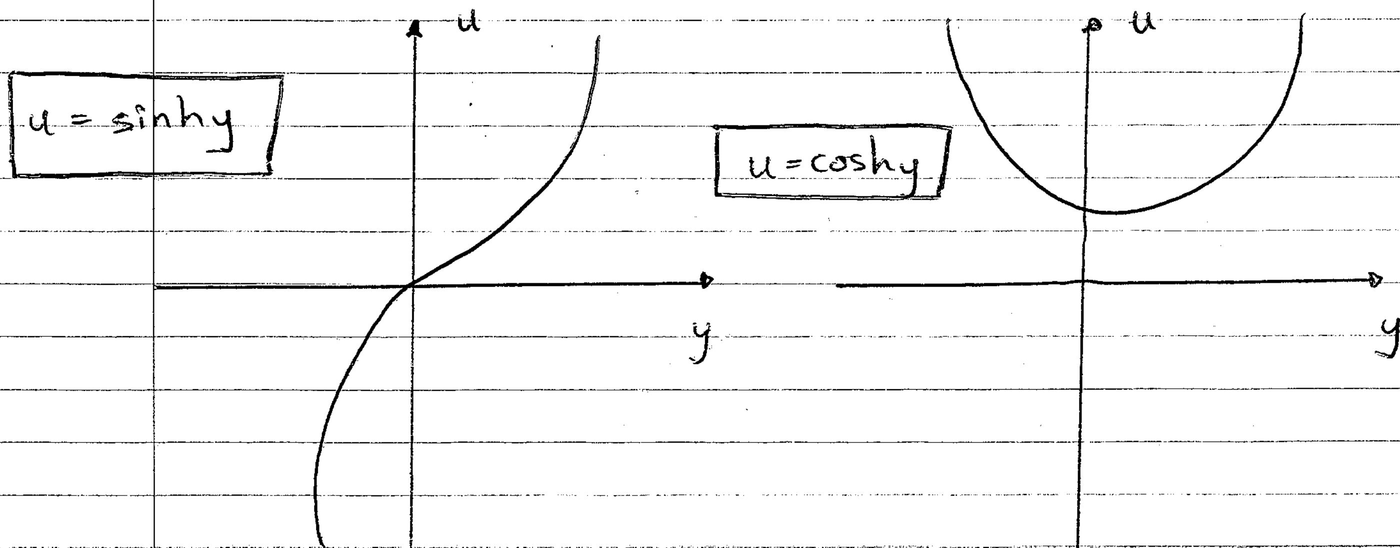
$\Longrightarrow$

$e^{iz} = \cos z + i \sin z$

__Ιδιότητες__

$z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

1. $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$
2. $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$
3. $\sin(2z) = 2 \sin z \cos z, \quad z \in \mathbb{C}$
4. $\cos(2z) = \cos^2 z - \sin^2 z = 2\cos^2 z - 1 = 1 - 2\sin^2 z, \quad z \in \mathbb{C}$
5. $\boxed{\sin^2 z + \cos^2 z = 1,} \quad \forall z \in \mathbb{C}$



(*) Να γραφεί η $w = \sin z = \sin(x+iy)$ στη μορφή:

$w = \sin z = u(x,y) + i v(x,y)$

<u>Λύση:</u>

$w = \sin z = \sin(x+iy) \overset{4.}{=} \sin x \cdot \cos(iy) + \cos x \cdot \sin(iy)$

$= \sin x \cdot \dfrac{e^{i(iy)} + e^{-i(iy)}}{2} + \cos x \cdot \dfrac{e^{i(iy)} - e^{-i(iy)}}{2i} \overset{(+)}{=}$

$\overset{(+)}{=} \sin x \cdot \dfrac{e^{-y} + e^{y}}{2} + \cos x \cdot \dfrac{e^{-y} - e^{y}}{2i}$

$= \sin x \cdot \left(\dfrac{e^{y} + e^{-y}}{2} \right) + i \cos x \left(\dfrac{e^{y} - e^{-y}}{2} \right)$

$\cosh y$ $\sinh y$

$= \sin x \cosh y + i \cos x \cdot \sinh y$ Επομένως:

$$\boxed{\begin{aligned} &\sin z = \sin(x+iy) = \sin x \cdot \cosh y + i \cos x \sinh y \\ &\cos z = \cos(x+iy) = \cos x \cdot \cosh y - i \sin x \sinh y \end{aligned}}$$

(1) <u>Άσκηση:</u>

Ως γνωστόν $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \iff$
$|\sin^2 x| + |\cos^2 x| = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Ως γνωστόν $\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \quad \forall z \in \mathbb{C}$

<u>Ερώτημα:</u> Είναι $|\sin^2 z| + |\cos^2 z| = 1, \quad \forall z \in \mathbb{C}$;

<u>Απάντηση:</u> $|\sin^2 z| = |\sin z|^2 = u^2 + v^2 =$

$(\sin x \cosh y)^2 + (\cos x \sinh y)^2 =$

$\sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y \quad (1)$

Ταυτότητα των υπερβολικών ημιτ-συνημ.

$$\boxed{\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1}$$

Αντίστοιχα:

$|\cos^2 z| = \cos^2 x \cdot \cosh^2 x + \sin^2 x \sinh^2 y \quad (2)$

Επομένως αθροίζοντας εις (1) και (2)

$|\sin^2 z| + |\cos^2 z| = (\sin^2 x + \cos^2 x)\cosh^2 y + (\sin^2 x + \cos^2 x)\sinh^2 y$

$= \cosh^2 y + \sinh^2 y = \boxed{1 + 2\sinh^2 y}$

Συμπέρασμα:

$|\sin^2 z| + |\cos^2 z| = 1 \iff 1 + 2\sinh^2 y = 1 \iff$
$2\sinh^2 y = 0 \iff y = 0$

$z = x + iy = x$

ΑΡΑ: $|\sin^2 z| + |\cos^2 z| = 1 \iff z = x \in \mathbb{R}$

(2) Άσκηση: Ως γνωστόν: $|\sin x| \leq 1$, $|\cos x| \leq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Ερώτημα: Ισχύει $|\sin z| \leq 1$, $|\cos z| \leq 1$, $\forall z \in \mathbb{C}$;

Απάντηση: $|\sin z| = \left| \dfrac{e^{iz} - e^{iz}}{2i} \right| = \dfrac{|e^{iz} - e^{-iz}|}{2} \geq$

$\dfrac{|e^{-iz}| - |e^{iz}|}{2} \overset{z=x+iy}{=} \dfrac{|e^{-i(x+iy)}| - |e^{i(x+iy)}|}{2} =$

$= \dfrac{|e^{-ix} \cdot e^{y}| - |e^{ix} \cdot e^{-y}|}{2} = \dfrac{|e^{-ix}| \cdot e^{y} - |e^{ix}| e^{-y}}{2} =$

$= \dfrac{e^{y} - e^{-y}}{2} \xrightarrow[y \to \infty]{} \infty$

ΑΡΑ $|\sin z| \xrightarrow[y\to\infty]{} \infty$, δηλαδή η $|\sin z|$, $z \in \mathbb{C}$,

δεν είναι φραγμένη. Ακριβώς παρόμοια:

$|\cos z| \xrightarrow[y \to \infty]{} \infty$

▶ Παράδειγμα: Ποια είναι η εικόνα των ευθειών,

① $x = x_0 \in \mathbb{R}$

και μέσω της $w = \sin z = \sin(x+iy)$

② $y = y_0 \in \mathbb{R}$

Λύση:

① Άσκηση

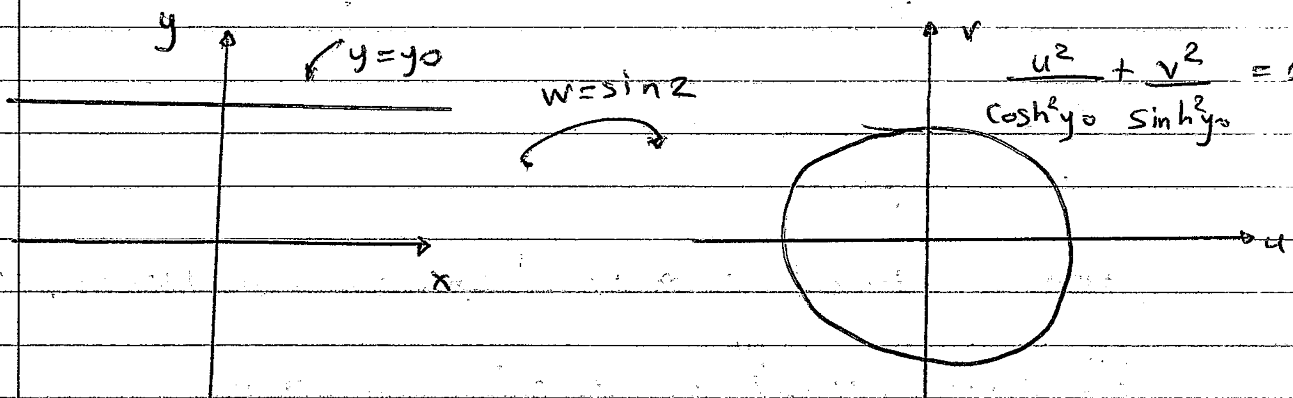
② $\boxed{y = y_0 \in \mathbb{R}}$ $\quad w = \sin z = \sin(x+iy)$

$= \underbrace{\sin x \cosh y_0}_{u} + i \underbrace{\cos x \sinh y_0}_{v}$

Για $y = y_0$: $\quad w = \sin z = \sin x \cosh y_0 + i \cos x \sinh y_0$

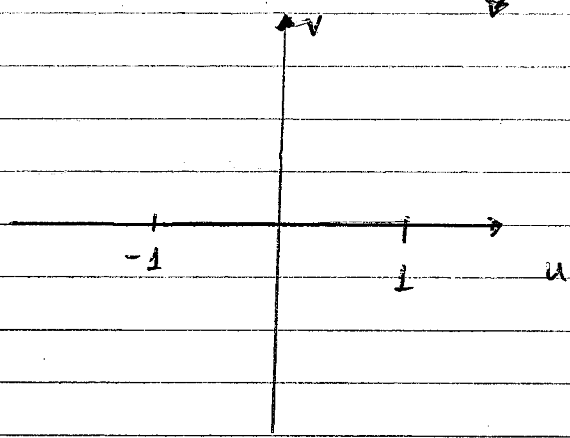
Δηλαδή $\begin{cases} u = \sin x \cosh y_0, & x \in \mathbb{R} \\ v = \cos x \cdot \sinh y_0, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$

ⓘ Αν $\sinh y_0 \neq 0$: $\begin{cases} \dfrac{u}{\cosh y_0} = \sin x \\ \dfrac{v}{\sinh y_0} = \cos x \end{cases} \Longrightarrow \dfrac{u^2}{\cosh^2 y_0} + \dfrac{v^2}{\sinh^2 y_0}$



$\dfrac{u^2}{\cosh^2 y_0} + \dfrac{v^2}{\sinh^2 y_0} = 1$

(ii) $\sinh y_0 = 0 \iff y_0 = 0 \implies \left\{ \begin{array}{l} u = \sin x \\ v = 0 \end{array} \right\}$



- Η $w = \sin z = \sin(x+iy)$ <u>απεικονίζει</u> την <u>$x = x_0$</u> στο ;;
- Να βρεθεί η εικόνα των $\boxed{x = x_0,\ y = y_0}$ μέσω της απεικόνισης $w = \cos z$

08/05/12

[3] ## Μιγαδικός Λογάριθμος

- Αν $x>0$, τότε το $\ln x$ είναι εκείνο το $y \in \mathbb{R}$ για το οποίο $e^y = x$

- Παρόμοια, αν $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, ο μιγαδικός λογάριθμος του z είναι εκείνα τα $w \in \mathbb{C}$ για τα οποία έχουμε:

$$\boxed{e^w = z} \quad (1)$$

Ο μιγαδικός λογάριθμος συμβολίζεται με $\log z$
Δηλαδή:

$w = \log z$

- Θα αποδείξουμε ότι αν $z \neq 0$,

$$\boxed{\log z = \ln|z| + i\arg z + 2k\pi i \quad \text{όπου} \quad k \in \mathbb{Z}} \quad (*)$$

Απόδειξη: Έστω $w = u+iv$ τότε:

$$e^w = z \iff e^{u+iv} = z \iff \boxed{e^u \cdot e^{iv} = z} \quad (2)$$

Από τη (2) $\Longrightarrow$

$$|e^u| \cdot \overbrace{|e^{iv}|}^{1} = |z| \iff$$
$$e^u = |z| \iff$$
$$\boxed{u = \ln|z|}$$

Έστω $z = |z| e^{i\theta}$, $\theta = \arg z$
Από (2) $\Longrightarrow$

$e^u = |z|$

$e^u \cdot e^{iv} = |z| e^{i\theta} \iff$

$e^{iv} = e^{i\theta} \iff$

$e^{i(v-\theta)} = 1 \iff$

$i(v-\theta) = 2k\pi i \iff$

$v = \theta + 2k\pi$

Επομένως $\boxed{v = \theta + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}}$ όπου θ ένα όρισμα του z.

<u>ΑΡΑ</u>

$w = \log z = u + iv = \ln|z| + i(\theta + 2k\pi)$

<u>Συμπέρασμα:</u>

$\boxed{w = \log z = \ln|z| + i\theta + 2k\pi i, \ k \in \mathbb{Z}}$

και $\theta = \arg z$

<u>Παρατήρηση</u>

Λόγω της $(*)$, η $w = \log z$ είναι "πλειονότιμη συνάρτηση"

<u>Παραδείγματα</u>

[i] $\log i$: Επειδή $i = 1 \cdot e^{i\pi/2}$ $\quad |i|$

Από $(*) \Longrightarrow$

$\log i = \ln|i| + i \cdot \pi/2 + 2k\pi i$

$= \ln 1 + i \cdot \pi/2 + 2k\pi i$

$= \boxed{\frac{i\pi}{2} + 2k\pi i}$

[ii] $\log(1-i)$: $\quad 1-i = \sqrt{2}\, e^{-i\pi/4}$

$$\left\{ \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \right\} \qquad \theta = -\frac{\pi}{4}$$

ΔΕ ΞΕΧΝΑΩ

$z = |z| e^{i\theta} = |z| (\cos\theta + i\sin\theta)$

$$\log(1-i) = \ln\sqrt{2} + i\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi i$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{i\pi}{4} + 2k\pi i}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

<u>Άσκηση</u>: Να βρείτε το $\log(\sqrt{3}-1) = \ldots$

[iii] $\log x, \quad x<0 \qquad x = |x| e^{i\pi}$

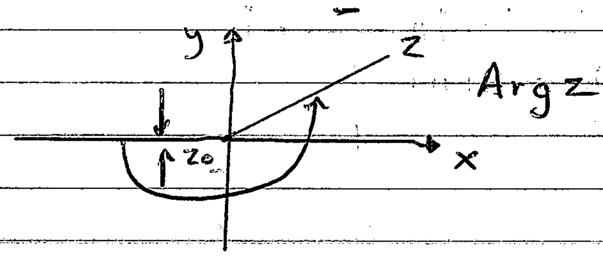
$$\log x = \ln|x| + i\pi + 2k\pi i$$
$$= \boxed{\ln(-x) + i\pi + 2k\pi i}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

[iv] $\log x, \quad x>0 \qquad x = |x| e^{i\cdot 0}$

$$\log x = \ln|x| + i\cdot 0 + 2k\pi i$$
$$= \boxed{\ln x + 2k\pi i}$$

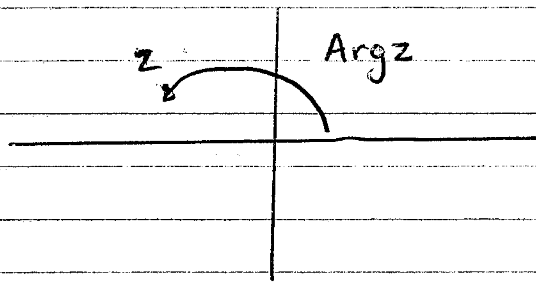
Η πρωτεύουσα ή κύρια τιμή του $\log z$, $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ συμβολίζεται ως <u>$\mathrm{Log}\, z$</u> και ορίζεται ως εξής:

$$\boxed{\mathrm{Log}\, z = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\, z} \qquad -\pi \le \mathrm{Arg}\, z < \pi$$



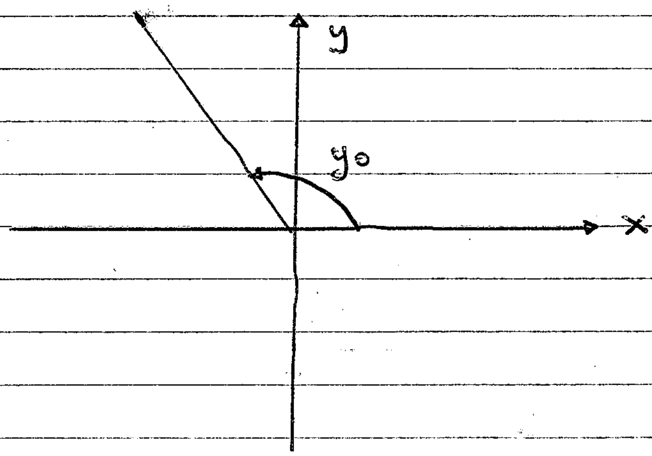
ή

$Log z = \ln|z| + i Arg z$ όπου $0 \le Arg z < 2\pi$



Το $w = Log z$, $z \neq 0$, είναι <u>μια</u> <u>συνάρτηση</u>

Η $w = Log z$ λέγεται και κύριος ή πρωτεύων κλάδος του λογαρίθμου του z.



$\boxed{Log z = \ln|z| + i \arg z}$ όπου $y_0 \le \arg z < y_0 + 2\pi$

είναι ένας κλάδος λογαρίθμου z.

Η συνάρτηση
$w = Log z = \ln|z| + i Arg z$ <u>δεν</u> είναι συνεχής στον αρνητικό πρ. άξονα. Πράγματι έστω
$z \in (-\infty, 0)$

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ Im z < 0}} Log z = \ln|z_0| + i(-\pi)$$

• $$\lim_{\substack{z\to z_0 \\ Im z>0}} Log\, z = \ln|z_0| + i\pi$$

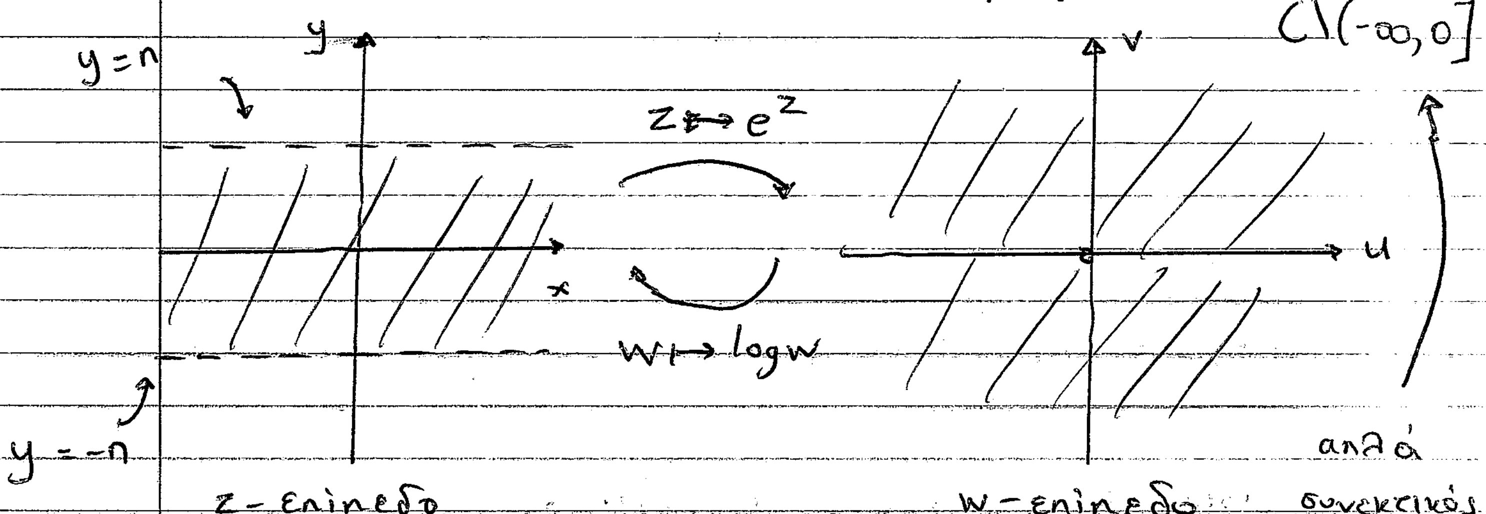
<u>ΑΡΑ</u> η $w = Log\, z$ δεν είναι συνεχής <u>στον αρνητικό ημιάξονα</u>.

<u>Πρόταση:</u> Έστω

$w = Log\, z = \ln|z| + i\, Arg\, z$,

όπου $-\pi < Arg\, z < \pi$ (ή $0 < Arg < 2\pi$).
Τότε η $w = Log\, z$ είναι <u>αναλυτική συνάρτηση</u> στο $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ (ή στο $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$) και ισχύει:

$$\boxed{(Log\, z)' = \frac{1}{z}}$$ (Θα αποδειχθεί αργότερα με τη βοήθεια ολοκληρώματος)

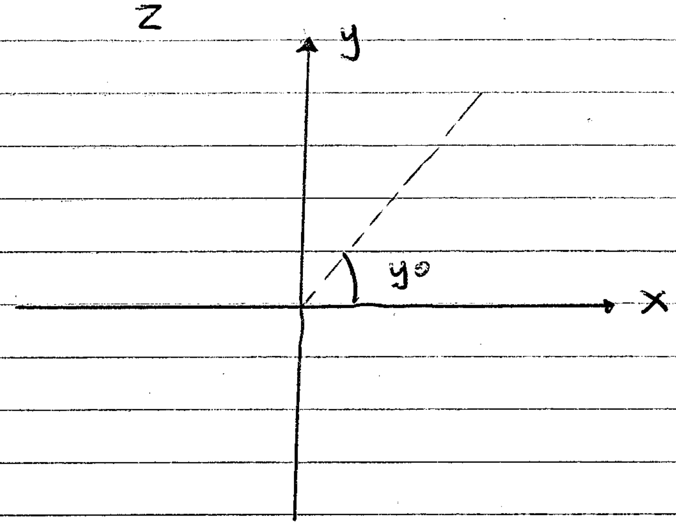


• Ισχύει: $$\left.\begin{cases} e^{\log z} = z \\ \log e^{z} = z \end{cases}\right\} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$$

Πιο γενικά, η συνάρτηση $w = \log z = \ln|z| + i \arg z$
όπου $y_0 < \arg z < y_0 + 2\pi$

είναι αναλυτική και ισχύει:

$$(\log z)' = \frac{1}{z}$$



[4] Μιγαδικές δυνάμεις

Αν $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ και $a \in \mathbb{C}$, τότε:

$$\boxed{z^a \overset{\text{ορισμός}}{=} e^{a \log z}}$$

Παράδειγμα: $i^i = e^{i \log i}$

$$i = |i| e^{i\pi/2} = 1 e^{i\pi/2}$$

$$\log i = \ln|i| + i\pi/2 + ik\pi 2 = \frac{i\pi}{2} + 2k\pi i$$

ΑΡΑ

$$i^i = e^{i \cdot \log i} = e^{i(i\pi/2 + 2k\pi i)} = \boxed{e^{-\pi/2 - 2k\pi}}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

▶ ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ: (Εύρεση πολικής μορφής μιγαδικού)

$$\left.\begin{aligned} x+iy &= |z|(\cos\theta + i\sin\theta) \\ &= \sqrt{x^2+y^2}(\cos\theta + i\sin\theta) \end{aligned}\right\} \longrightarrow \begin{aligned} \cos\theta &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \sin\theta &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{aligned}$$

π.χ. $z = \sqrt{3} - i$

$|z| = \sqrt{3+1} = 2$

$$\left(\begin{array}{c} \cos\theta = \sqrt{3}/2 \\ \sin\theta = -1/2 \\ \Downarrow \\ \theta = -\pi/2 \end{array} \right)$$

<u>ΑΡΑ</u> $z = \sqrt{3} - i = 2 \cdot e^{-i\pi/6}$

$\log(\sqrt{3} - i) = \ln 2 + i(-\pi/6) + 2k\pi i$

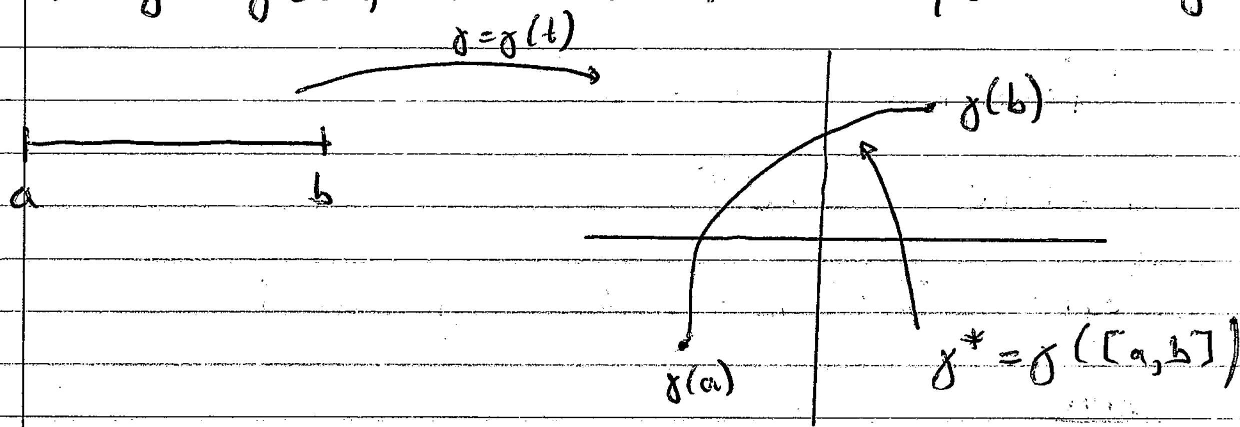
$\mathrm{Log}(\sqrt{3} - i) = \ln 2 - \dfrac{i\pi}{6}$

Μιγαδικό ολοκλήρωμα

Καμπύλες στο μιγαδικό επίπεδο

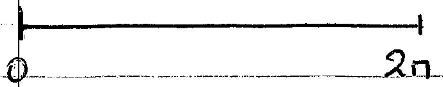
- Μια καμπύλη γ στο $\mathbb{C}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$

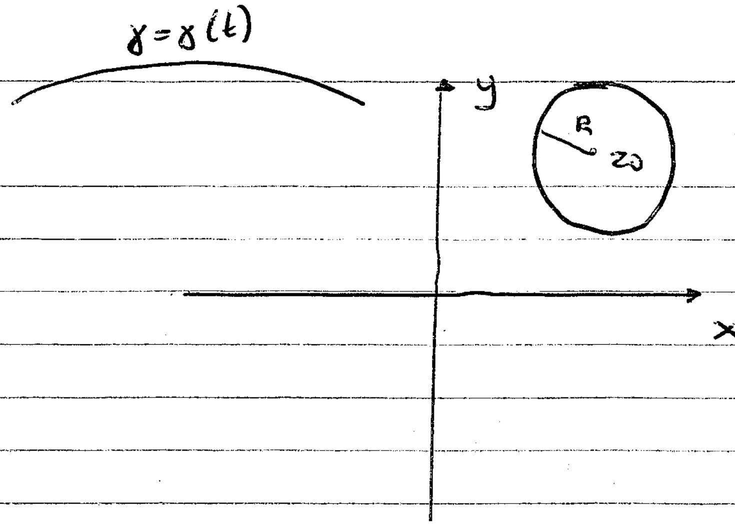
Η $\gamma^* = \gamma([a,b])$ είναι το πεδίο τιμών της γ.



- Η γ <u>είναι κλειστή</u> αν $\gamma(a) = \gamma(b)$

π.χ. $\gamma(t) = z_0 + R \cdot e^{it}$
$= z_0 + R\cos t + iR\sin t$, $R > 0$, $t \in [0, 2\pi]$





$\gamma(0) = \gamma(2\pi)$

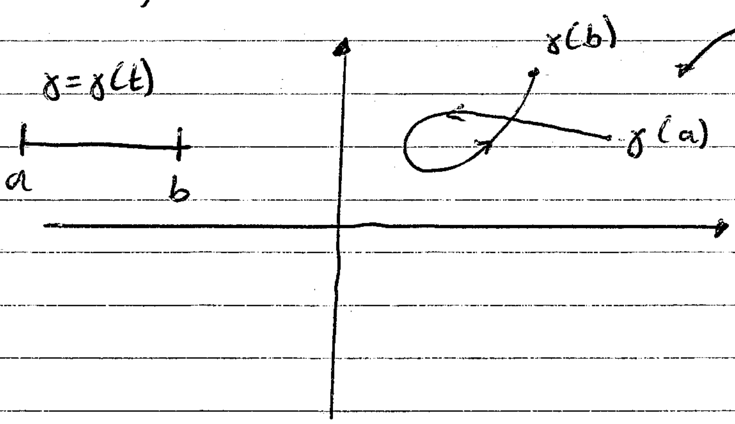
<u>Ορισμός</u>: Έστω η καμπύλη $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = x(t) + i y(t)$

[1] Αν $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ για $t_1 \neq t_2$ η καμπύλη γ λέγεται <u>απλή</u>.

[2] Η γ είναι <u>λεία</u> αν

(i) η γ' είναι συνεχής

(ii) $\gamma'(t) \neq 0$, $\forall t \in [0,1]$



<u>δεν</u> είναι <u>απλή</u>

• Ο κύκλος $\gamma(t) = z_0 + Re^{it}$, $R > 0$, $0 \leq t \leq 2\pi$ είναι <u>λεία</u>. Πράγματι,

(i) $\gamma'(t) = iRe^{it}$ είναι συνεχής

(ii) $\gamma'(t) \neq 0$

Έστω η καμπύλη

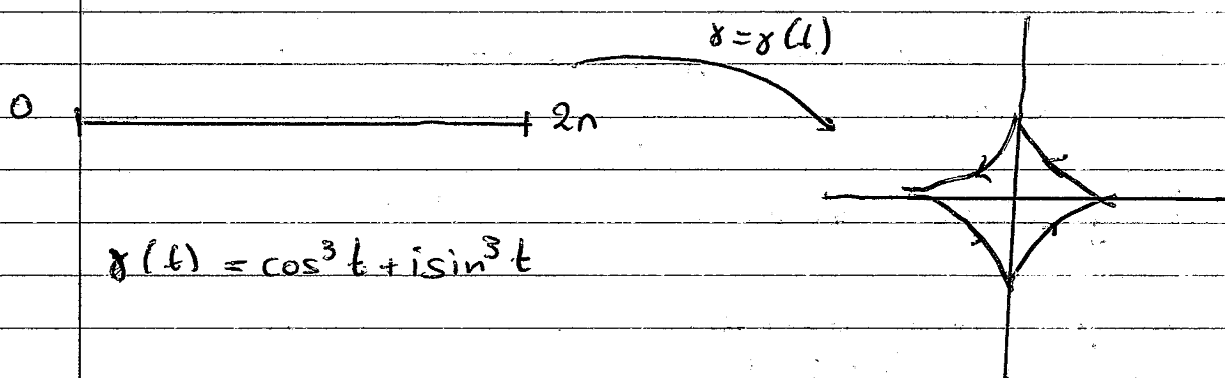
$\gamma(t) = \cos^3 t + i\sin^3 t \;,\quad t\in[0, 2\pi]$

$\gamma'(t) = -3\cos^2 t \sin t + i\,3\sin^2 t\cos t$

Η $\gamma'(t)$ είναι συνεχής

Όμως $\gamma'(t) = 0$ για $t = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$

<u>Η καμπύλη δεν είναι λεία.</u>



$\gamma(t) = \cos^3 t + i\sin^3 t$

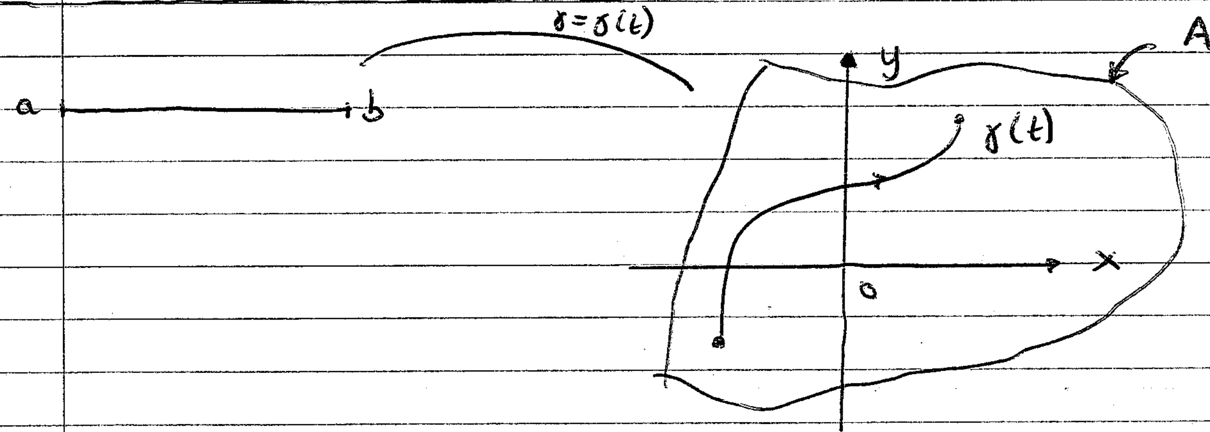
Αν $\gamma = \gamma(t)$ είναι <u>ένωση λείων καμπυλών</u>, θα λέμε ότι η $\gamma = \gamma(t)$ είναι <u>τμηματικά λεία</u>.

14/05/12

Μιγαδική ολοκλήρωση

Ορισμός: Έστω $f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$, συνεχής συνάρτηση, ορισμένη στο ανοιχτό σύνολο A. Αν $\gamma : [a,b] \to A$, $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, είναι μία λεία καμπύλη στο A, τότε το ολοκλήρωμα της f πάνω στη γ, συμβολίζεται: $\int_\gamma f(z)dz$, και ορίζεται ως εξής:

$$\boxed{\int_\gamma f(z)\,dz := \int_a^b f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)\,dt \quad (*)}$$



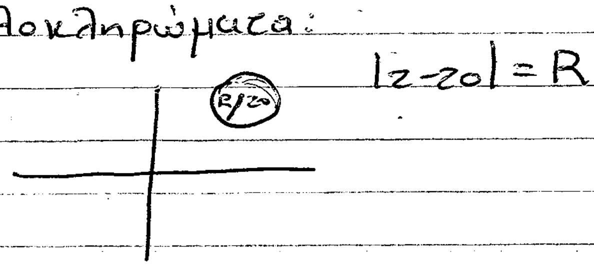
Σημείωση: Αν η καμπύλη γ είναι κλειστή, το ολοκλήρωμα της f πάνω στη γ συμβολίζεται:

$$\oint_\gamma f(z)\,dz$$

Παραδείγματα:

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

[1] $\oint_{|z-z_0|=R} \frac{1}{z-z_0}\,dz$, $z_0 \in \mathbb{C}$

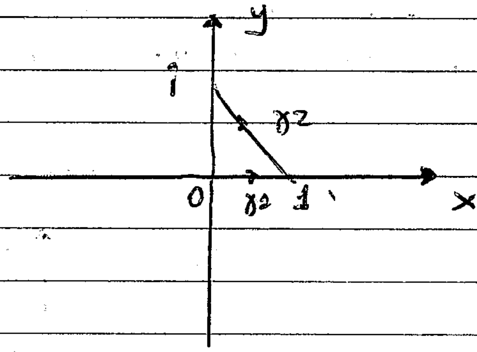


$|z-z_0| = R : \{ z(t) = z_0 + Re^{it},\ 0 \le t \le 2\pi \}$

$$\oint_{|z-z_0|=R} \frac{1}{z-z_0}\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{z(t)-z_0}\, z'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{Re^{it}}\, iRe^{it}\, dt$$

$$= i\int_0^{2\pi} dt = \boxed{2\pi i}$$

[2] $\int_\gamma \bar{z}\, dt$, όπου γ η καμπύλη του σχήματος



$[z_1, z_2] : z(t) = (1-t)z_1 + t z_2 \quad 0 \le t \le 1$

$\gamma_1 : z = x,\ 0 \le x \le 1$

$\gamma_2 : (1-t) + ti \quad 0 \le t \le 1$

$$\int_\gamma \bar{z}\, dz = \int_{\gamma_1} \bar{z}\, dz + \int_{\gamma_2} \bar{z}\, dz$$

Επομένως:

- $\int_{\gamma_1} \bar{z}\, dz = \int_0^1 \bar{x}\, dx = \int_0^1 x\, dx = \boxed{\frac{1}{2}}$

- $\int_{\gamma_2} \bar{z}\, dz = \int_0^1 [(1-t)+ti]\cdot(-1+i)\, dt = \int_0^1 [(1-t)-ti]\cdot(i-1)\, dt =$

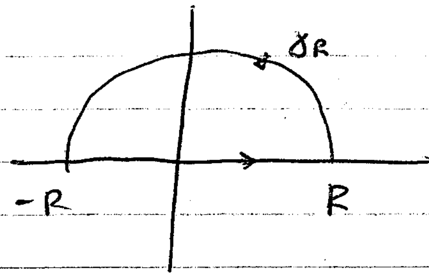
$$(i-1)\int_0^1 (1-t)\, dt - i(i-1)\int_0^1 t\, dt = (i-1)\cdot\left[t - \frac{t^2}{2}\right]_{t=0}^{t=1}$$

$$-\frac{i(i-1)}{2} = \frac{i-1}{2} - \frac{i(i-1)}{2} = \frac{i}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{i}{2} = \boxed{i}$$

Τελικά $\boxed{\int_\gamma \bar{z}\, dz = \frac{1}{2} + i}$

Άσκηση (Φυλ 1)

$$\oint_{[-R,R]\cup\gamma_R} |z|\cdot\bar{z}\, dz = R^3\pi i$$



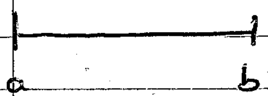
$\gamma_1: z(t) = Re^{it}, \quad 0 \le t \le \pi$

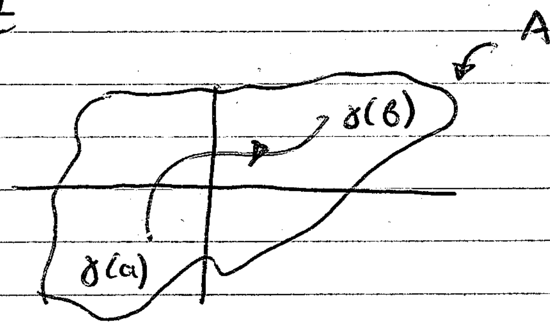
$\gamma_2: z = x$

....

Πρόταση 1: Έστω $f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$, συνεχής συνάρτηση και έστω $\gamma: [a,b] \to A$, $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ λεία καμπύλη στο A. Αν $(-\gamma)$ είναι η καμπύλη γ με αντίθετη φορά, τότε:

$$\int_{-\gamma} f(t)dt = -\int_{\gamma} f(z)dt$$





- $\gamma = \gamma(t)$, $a \le t \le b$, παραμετρική εξίσωση της γ
- $(-\gamma) = (-\gamma)(t)$, $a \le t \le b$ όπου $\boxed{(-\gamma)(t) := \gamma(a+b-t)}$

Τότε:

$$\int_{-\gamma} f(t)dt = \int_a^b f((-\gamma)(t))(-\gamma)'(t)dt = \int_a^b f(\gamma(a+b-t))[-\gamma'(a+b-t)]dt$$

$$= -\int_a^b f(\gamma(a+b-t))\cdot\gamma'(a+b-t)\,dt \overset{u=a+b-t}{=\!=}$$

$$\int_b^a f(\gamma(u))\cdot\gamma'(u)(-du) = -\int_a^b f(\gamma(u))\gamma'(u)du = -\int_{\gamma} f(z)dz \quad \blacksquare$$

Πρόταση 2: Έστω $f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$, συνεχής συνάρτηση και έστω $\gamma: [a,b] \to A$, $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ λεία καμπύλη στο A. Τότε:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma u\,dx - v\,dy + i\int v\,dx + u\,dy$$

$$\left\{ \int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma (u+iv)(dx+idy) = \int_\gamma u\,dx - v\,dy + i\int_\gamma v\,dx + u\,dy \right.$$

Απόδειξη:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt$$

$$= \int_a^b [u(x(t),y(t)) + iv(x(t),y(t))] \cdot [x'(t) + iy'(t)]\,dt +$$

$$i\int_a^b [v(x(t),y(t)) \cdot x'(t) + u(x(t),y(t)) \cdot y'(t)]\,dt$$

$$= \int_\gamma u\,dx - v\,dy + i\int_\gamma v\,dx + u\,dy$$

Πρόταση 3: Έστω $f: A \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$, συνεχής συνάρτηση και έστω $\gamma: [a,b] \to A$, $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ λεία καμπύλη στο A. Τότε:

$$\boxed{\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \le \int_\gamma |f(z)|\,|dz| = \int_a^b |f(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)|\,dt}$$

όπου $\boxed{|dz| = |\gamma'(t)|dt}$ $\boxed{\gamma'(t) = x'(t) + iy'(t)}$

Ειδικά αν $|f(z)| \leq M$, $\forall z \in \gamma^* = \gamma([a,b])$, από (*) $\Longrightarrow$

$$\left| \int_\gamma f(z)dz \right| \leq M \int_\gamma |dz| = M \cdot \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

$$= M \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt = M \cdot (\underline{\text{μήκος καμπύλης } \gamma})$$

<u>Παρατήρηση</u>: Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Ορίζω το ολοκλήρωμα:

$\int_a^b (f(t) + ig(t))dt$ ως εξής:

$$\int_a^b (f(t) + ig(t))dt := \int_a^b f(t)dt + i\int_a^b g(t)dt$$

Επομένως $$\operatorname{Re}\left\{ \int_a^b (f(t) + ig(t))dt \right\} = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b \operatorname{Re}\{f(t) + ig(t)\}\, dt$$

$$\operatorname{Im}\left\{ \int_a^b (f(t) + ig(t))dt \right\} = \int_a^b g(t)dt = \int_a^b \operatorname{Im}\{f(t) + ig(t)\}\, dt$$

<u>Απόδειξη</u>: (πρ. 3)

Αν $\int_\gamma f(z)dz = 0$, η (*) προφανώς ισχύει

• Έστω $\int_\gamma f(t)dz \neq 0$. Επειδή $\int_\gamma f(z)dz = w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$

Τότε $w = |w| e^{i\theta}$, όπου $\theta = \arg w$

$$\int_\gamma f(z)dz = \left| \int_\gamma f(z)dz \right| \cdot e^{i\theta} \iff$$

$$\left| \int_\gamma f(z)dz \right| = e^{-i\theta} \int_\gamma f(z)dz$$

$$= Re\left\{ e^{-i\theta} \int_\gamma f(z)dz \right\}$$ (Αφού στο 1° μέλος έχω | |)

$$= Re\left\{ e^{-i\theta} \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt \right\}$$

$$= Re\left\{ \int_a^b e^{-i\theta} f(\gamma(t)) \gamma'(t)\, dt \right\}$$

$$= \int_a^b Re\left\{ e^{-i\theta} f(\gamma(t)) \gamma'(t) \right\} dt$$

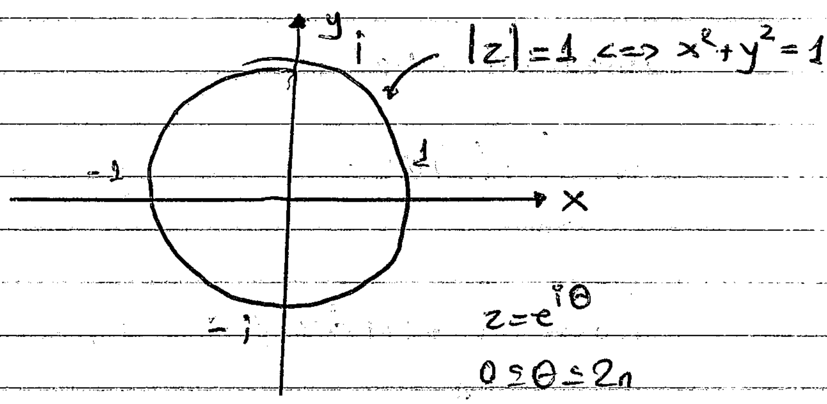
$$\leq \int_a^b |e^{-i\theta}| \cdot |f(\gamma(t))| \, |\gamma'(t)|\, dt$$

$$= \int |f(\gamma(t))| \, |\gamma'(t)|\, dt$$

$$\equiv \int_\gamma |f(z)| \cdot |dz|$$

▶ Εφαρμογή: $\left| \oint_{|z|=1} e^{\bar{z} Im z} dz \right| \leq 2\pi \sqrt{e}$

$f(z) = e^{\bar{z} \cdot Im z}$



$z = e^{i\theta}$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$|f(z)| = |e^{\bar{z}\,\mathrm{Im}z}| \overset{z=x+iy}{=\!=} |e^{(x-iy)y}| = |e^{xy} \cdot e^{-iy^2}|$$

$$= |e^{xy}| \cdot |e^{iy^2}| = e^{xy} \leq e^{\frac{x^2+y^2}{2}} = e^{1/2} = \sqrt{e}$$

ΑΡΑ

$$\left| \oint_{|z|=1} e^{\bar{z}\,\mathrm{Im}z} dz \right| \leq M \cdot (\text{μήκος του κύκλου } |z|=1)$$

$$= 2\pi\sqrt{e}$$

DIABLO III !

15/05/12

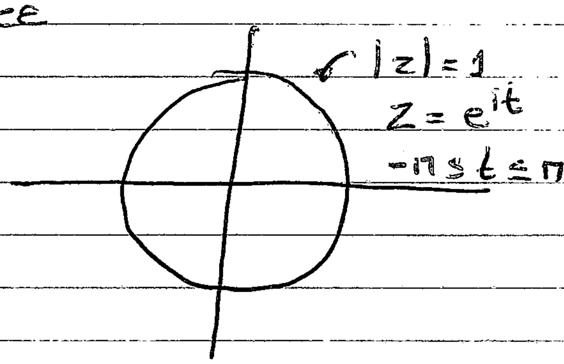
(*) Λέμε ότι η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι <u>περιοδική με περίοδο T</u> αν $f(t+T)=f(t)$, $\forall t\in\mathbb{R}$

• Αν η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και T-περιοδική τότε:

(1) $$\int_x^{x+T} f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt, \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

(2) $$\int_x^{x+nT} f(t)\,dt = n\cdot\int_0^T f(t)\,dt, \quad \forall x\in\mathbb{R}, \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

▶ <u>Παράδειγμα:</u> Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{C}\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής και τέτοια ώστε
$|f(z)|\le 1 \quad \forall\, |z|=1$



Να αποδειχθεί ότι:

$$\left|\oint_{|z|=1} f(z)\,dz\right| \le 4 \qquad (1)$$

<u>Παρατηρήσεις:</u>

(α) Αν η f είναι <u>αναλυτική</u>, επειδή το πεδίο τιμών της f είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}$, τότε $\operatorname{Im} f = 0$ και από το "βασικό παράδειγμα" f: σταθερή.

(β) Αν εφαρμόσουμε "γνωστή πρόταση", τότε:

$$\left| \oint_{|z|=1} f(z)dz \right| \leq 1 \cdot \begin{pmatrix} \text{μήκος} \\ \text{κύκλου} \end{pmatrix} = 1 \cdot 2\pi \approx 6{,}28$$

<u>Λύση</u>: Θα επαναλάβω την απόδειξη της "γνωστής πρότασης"

<u>1η περ:</u> Αν $\oint_{|z|=1} f(z)dz = 0$, τότε η (1) ισχύει

<u>2η περ:</u> $\oint_{|z|=1} f(z)dz \neq 0$. Έστω $\oint_{|z|=1} f(z)dz = w \neq 0$, $w \in \mathbb{C}$.

Επειδή $w = |w| e^{i\theta}$, $\theta = \arg w \in \mathbb{R}$, έχουμε:

$$\oint_{|z|=1} f(z)dz = \left| \oint_{|z|=1} f(z)dz \right| e^{i\theta} \iff$$

$$\left| \oint_{|z|=1} f(z)dz \right| = e^{-i\theta} \oint_{|z|=1} f(z)dz$$

Άρα ισχύει:

$$\left| \oint_{|z|=1} f(z)dz \right| = e^{-i\theta} \oint_{|z|=1} f(z)dz = \mathrm{Re}\left\{ e^{-i\theta} \oint_{|z|=1} f(z)dz \right\} =$$

$$\mathrm{Re}\left\{ e^{-i\theta} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) \cdot i e^{it} dt \right\} =$$

$$\mathrm{Re}\left\{ \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\, i e^{i(t-\theta)} dt \right\} =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Re}\{ \underbrace{f(e^{it})}_{\text{πραγματικός λόγω (Y)}}\, i e^{i(t-\theta)} \} dt =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) \cdot Re\left\{ i e^{i(t-\theta)} \right\} dt =$$

Όμως ισχύει:

$$Re\left\{ i e^{i(t-\theta)} \right\} = Re\left\{ i\left[\cos(t-\theta) + i\sin(t-\theta)\right] \right\}$$

$$= Re\left\{ -\sin(t-\theta) + i\cos(t-\theta) \right\} = -\sin(t-\theta)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it}) \cdot \left[-\sin(t-\theta)\right] dt$$

<u>Επομένως</u>: $\left| \oint_{|z|=1} f(z)\,dz \right| =$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{it})\left[-\sin(t-\theta)\right] dt \le \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{|f(e^{it})|}_{1 \leftarrow \text{ από (γ)}} |\sin(t-\theta)|\, dt$$

$$\le \int_{-\pi}^{\pi} |\sin(t-\theta)|\, dt \overset{u=t-\theta}{=\!=\!=} \int_{-\pi-\theta}^{\pi-\theta} |\sin u|\, du \quad \left\{ \begin{array}{l} y = |\sin u| \text{ είναι} \\ \pi\text{-περιοδική} \end{array} \right.$$

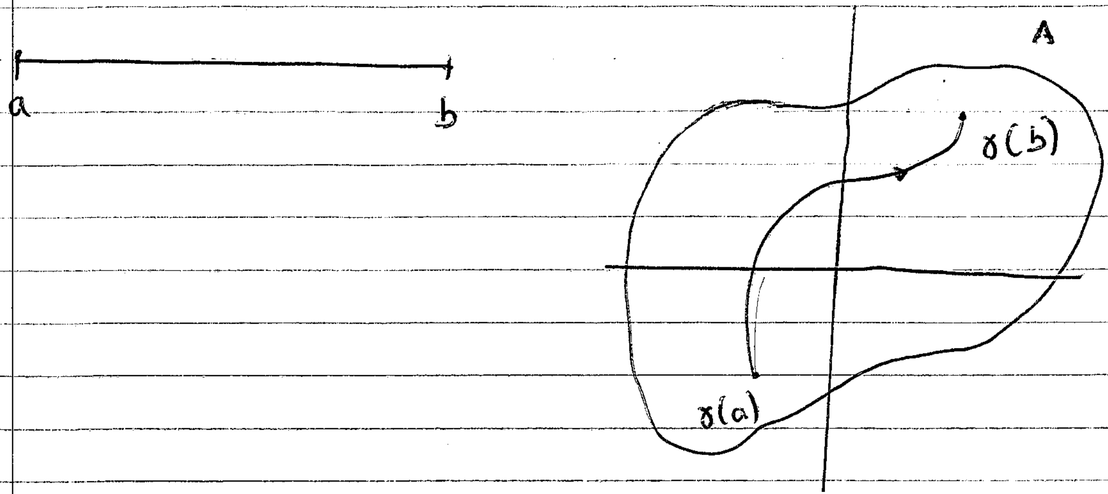
$$= 2\int_{0}^{\pi} |\sin u|\, du = 2 \cdot \int_{0}^{\pi} \sin u\, du = 2\left[-\cos u\right]_0^{\pi} = \boxed{4}$$

<u>Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκλήρωσης</u>

- Στις πραγματικές συναρτήσεις είναι:

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$, Θ.Θ.Ο. $\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)$

- Στις μιγαδικές συναρτήσεις είναι:



Έστω η συνάρτηση $f: A \longrightarrow \mathbb{C}$, όπου $A \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό σύνολο. Αν η f' είναι συνεχής στο A και $\gamma: [a,b] \to A$, $\gamma(t) = x(t) + i y(t)$, είναι μια λεία καμπύλη, τότε:

$$\boxed{\int_\gamma f'(z)\,dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))} \quad (1)$$

Σημείωση: Αν η γ είναι κλειστή καμπύλη δηλαδή $\gamma(a) = \gamma(b)$, τότε: $\oint f'(z)\,dz = 0$

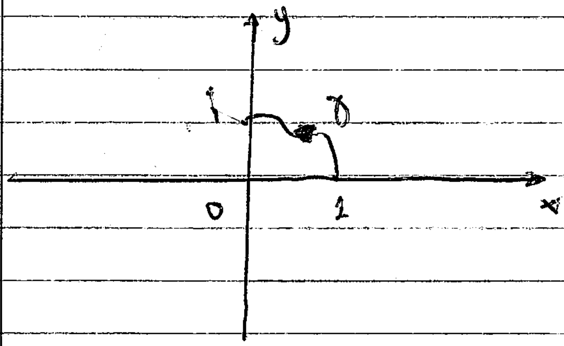
Απόδειξη της (1):

$$\int_\gamma f'(z)\,dz = \int_a^b f'(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt = \int_a^b \frac{d}{dt}\left(f(\gamma(t))\right) dt$$

Θ.Θ.Ο. $f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$

Παραδείγματα: Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

[1] $\int_\gamma z \cdot e^{z^2}\,dz$, όπου γ η καμπύλη του σχήματος



Σχήμα

Λύση:

$$I=\int_\gamma \left(\frac{1}{2}e^{z^2}\right)' dz = \frac{1}{2}e^{i^2} - \frac{1}{2}e^{1^2} = \boxed{\frac{1}{2}e^{-1}-\frac{1}{2}e}$$

[2] $I=\int_\gamma z\cdot \cos z\, dz$, όπου γ η καμπύλη του σχήματος παραπάνω

Λύση:

$$\int x\cos x\,dx = \int x(\sin x)' dx = x\sin x - \int \sin x\,dx =$$

$x\sin x + \cos x$

Επομένως το ολοκλήρωμα γίνεται:

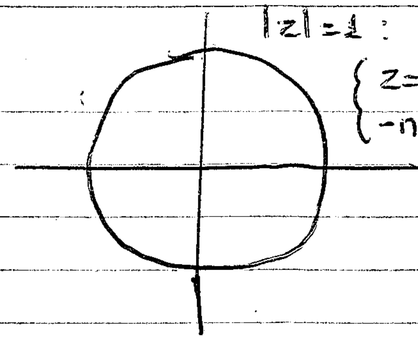
$$I=\int_\gamma (z\sin z+\cos z)' dz = (i\sin i+\cos i) - (\sin 1+\cos 1)$$

Όμως

$$\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \xrightarrow{z=i} \sin i = \frac{e^{i^2}-e^{-i^2}}{2i} = \frac{e^{-1}-e}{2i}$$

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \xrightarrow{z=i} \cos i = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \frac{e^{-1}+e}{2}$$

[3] $I = \oint_{|z|=1} \frac{1}{z}\, dt$



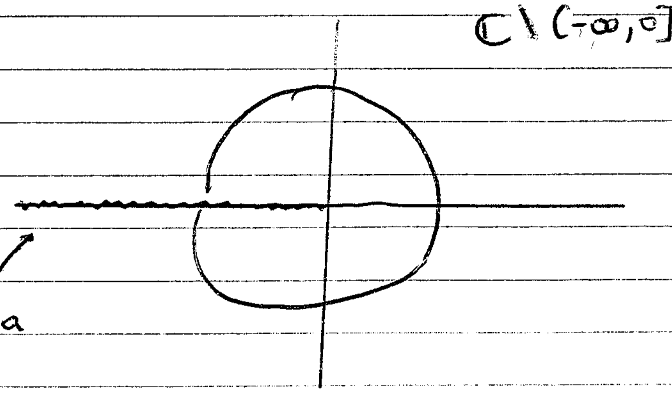
$|z|=1: \begin{cases} z=e^{it} \\ -\pi \le t \le \pi \end{cases}$

<u>Λύση:</u>

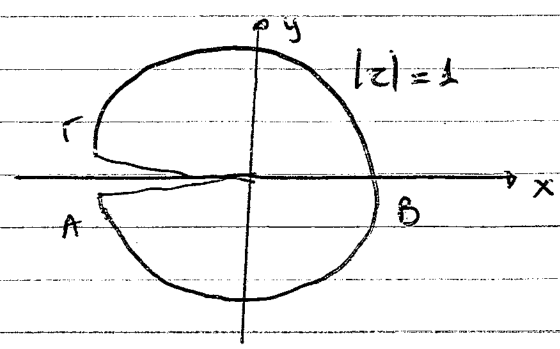
<u>1ος τρόπος</u> $I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{e^{it}}\, i e^{it} dt = i \cdot \int_{-\pi}^{\pi} dt = \boxed{2\pi i}$

<u>2ος τρόπος</u> $I = \oint_{|z|=1} \frac{1}{z}\, dz = \oint_{|z|=1} (\text{Log} z)' dz \overset{\text{Θ.Θ.Ο.}}{=} \boxed{0}$ ← ΛΑΘΟΣ!

Ως γνωστόν η $w = \text{Log} z = \ln|z| + i \text{Arg} z$, $-\pi < \text{Arg} z < \pi$ είναι αναλυτική συνάρτηση στο $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ και ισχύει: $(\text{Log} z)' = \frac{1}{z}$



Για να το διορθώσω θα πάρω:



Επομένως το ολοκλήρωμα υπολογίζεται ως εξής:

$$\int_{\overrightarrow{AB\Gamma}} \frac{1}{z}\,dz = \int_{\overrightarrow{AB\Gamma}} (\text{Log}z)'dz \overset{\text{Θ.Θ.Ο}}{=\!=} \text{Log}\,\Gamma - \text{Log}\,A =$$

$$\text{Log}(e^{i\theta}) - \text{Log}(e^{-i\theta}) = \left[\ln|e^{i\theta}| + i\theta - \ln|e^{i\theta}| + i\theta\right] = 2i\theta$$

Επομένως για $\theta = \pi$

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{z}\,dz = \lim_{\theta \to \pi} (2i\theta) = \boxed{2i\pi}$$

21/05/12

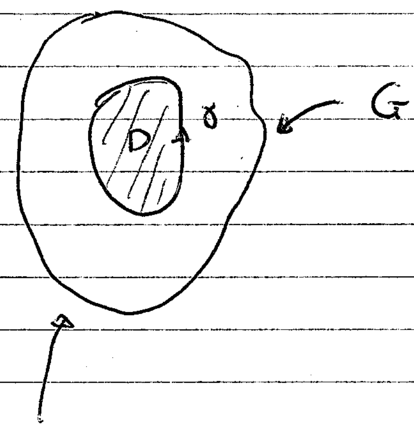
Θεώρημα Cauchy - Εφαρμογές

Θεώρημα Cauchy: (Ασθενής μορφή)
Υποθέτουμε ότι η $f: G \to \mathbb{C}$ είναι αναλυτική (ολόμορφη) στον απλά συνεκτικό τόπο G

||| Υποθέτουμε επίσης ότι η f' είναι συνεχής στο G

Αν η $\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$, είναι κλειστή και τμηματικά λεία καμπύλη στο G, τότε:

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = 0$$



Απόδειξη:

$\boxed{1^{\eta} \text{ περ.}}$ Η γ είναι απλή (όπως στο σχήμα). Τότε:

$$\oint_\gamma f(z)\,dz = \left(\oint_\gamma (u+iv)(dx+idy) \right) = \oint_\gamma u\,dx - v\,dy + i\oint v\,dx + u\,dy$$

Θ.Green
$$\iint_D \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy + i \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy$$

C-R
$$\iint_D 0\,dxdy + i \iint_D 0\,dxdy = 0 \qquad \left(\begin{array}{l} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{array} \right)$$

ΔΕ ΞΕΧΝΩ

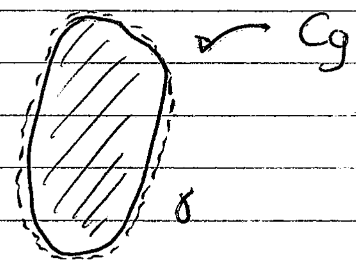
Επειδή η f' συνεχής $\Longrightarrow$ $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ είναι συνεχείς	$\oint_\gamma P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$

2η περ. Αν η γ <u>δεν</u> είναι απλή τότε χρησιμοποιούμε το γενικευμένο Θ. Green.

<u>Παρατήρηση</u>: Στις εφαρμογές το Θ. Cauchy χρησιμοποιείται στην εξής μορφή:

Υποθέτουμε ότι η μιγαδική συνάρτηση f είναι αναλυτική (ολόμορφη) πάνω <u>και στο εσωτερικό μιας κλειστής και τμηματικά</u> λείας καμπύλης.

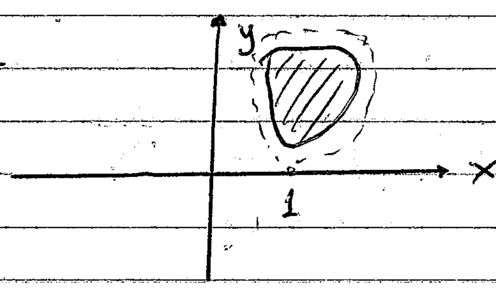
Τότε: $\oint_\gamma f(z)dz = 0$



<u>Παρ</u>: Έστω γ κλειστή και τμηματικά λεία καμπύλη

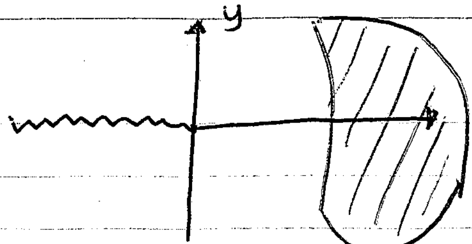
- $\oint_\gamma \sin z\, dz = 0$, $w = \sin z$ είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$
- $\oint_\gamma \cos z\, dz = 0$, $w = \cos z$ " " "
- $\int_\gamma e^z dz = 0$, $w = e^z$ " " "
- $\oint_\gamma \dfrac{e^z}{z(z-1)^2}dz = 0$, όπου γ η καμπύλη του σχήματος

Η $f(z) = \dfrac{e^z}{z(z-1)^2}$ είναι αναλυτική πάνω και στο εσωτερικό της γ.



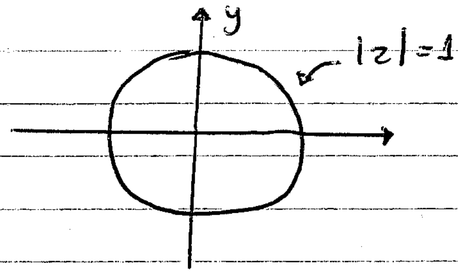
$\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$

- $\oint_\gamma \operatorname{Log} z \, dz = 0$



Η $w = \operatorname{Log} z$ αναλυτική πάνω και στο εσωτερικό της γ.

- $\oint_{|z|=1} \frac{1}{z} \, dz$

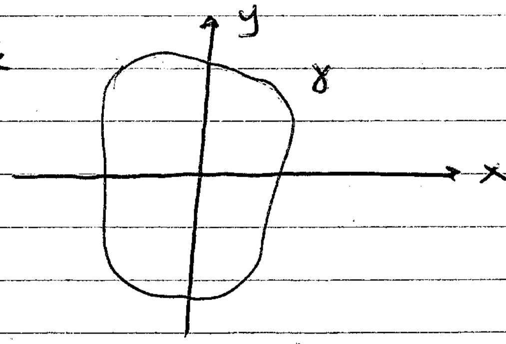


|| Η $f(z) = \frac{1}{z}$ <u>δεν</u> είναι αναλυτική σ' όλο το εσωτερικό του κύκλου $|z|=1$. Η $f(z) = \frac{1}{z}$ <u>δεν</u> ορίζεται στο 0.

(Η $f(z) = \frac{1}{z}$ <u>δεν</u> είναι παραγωγίσιμη στο 0)

- $\oint_\gamma \frac{1}{z^2} \, dz = \oint \left(-\frac{1}{z}\right)' dz$

<u>Θ.Θ.Ο</u> 0



Δεν εφαρμόζεται <u>το Θ. Cauchy</u> (Η $f(z) = \frac{1}{z^2}$ <u>δεν</u> ορίζεται στο <u>0</u>. Η f δεν είναι αναλυτική στο $z_0 = 0$)

Όμως επειδή $\left(-\frac{1}{z}\right)' = \frac{1}{z^2}$, Δηλαδή αν $F(z) = -\frac{1}{z}$

$F'(z) = -\frac{1}{z^2}$ σ' ένα ανοιχτό σύνολο A που περιέχει τη γ. Από <u>Θ.Θ.Ο</u>: Το ολοκλήρωμα ισούται με <u>μηδέν</u>.

Πρόταση: Έστω η συνάρτηση $f: G \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής στον τόπο (ανοικτό και συνεκτικό σύνολο) G. Αν το ολοκλήρωμα της f είναι ανεξάρτητο του δρόμου ολοκλήρωσης και ορίσουμε τη συνάρτηση $F: G \to \mathbb{C}$ με

$$\boxed{F(z) \overset{\text{ορισμός}}{=} \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz, \quad z \in G} \quad (*)$$

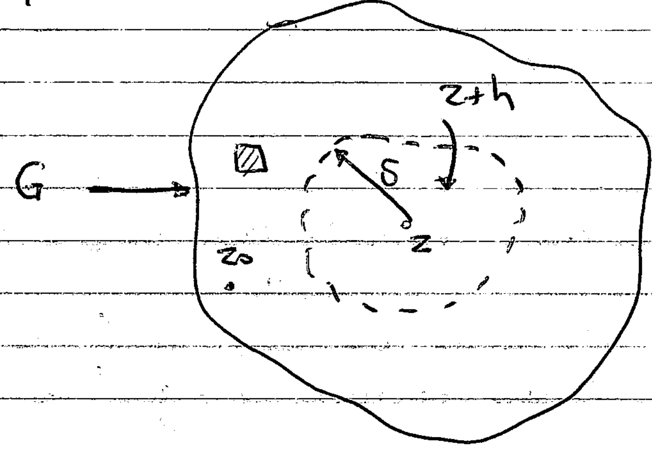
όπου το $z_0 \in G$, z_0 = σταθ.

Τότε η F είναι αναλυτική (ολόμορφη) στο G και ισχύει:

$$\boxed{F'(z) = f(z), \quad \forall z \in G}$$

Σημείωση: Ο συμβολισμός: $\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$

υποδεικνύει ότι η ολοκλήρωση γίνεται πάνω σε οποιαδήποτε τμηματικά λεία καμπύλη με αρχή το z_0 και πέρας το z. (Στην υπόθεση της πρότασης μας δίνεται ότι το ολοκλήρωμα είναι ανεξάρτητο του δρόμου ολοκλήρωσης).



Απόδειξη: Έστω $z \in G$, z τυχαίο. Θα δείξουμε ότι $F'(z) = f(z)$. Επειδή η f είναι συνεχής στο z:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \text{ υπάρχει } \delta > 0 \text{ τ.ω. } |w - z| < \delta \Longrightarrow |f(w) - f(z)| < \varepsilon \quad (1)}$$

Παίρνω το $\delta > 0$ αρκετά μικρό, έτσι ώστε:

$D(z,\delta) = \{ w : |w-z| < \delta \}$ να βρίσκεται μέσα στο G

Παίρνω το $h \in \mathbb{C}$, έτσι ώστε $z+h \in D(z,\delta) \iff |h| < \delta$

$$F(z+h) - F(z) = \int_{\gamma \cup [z,z+h]} f(w)dw - \int_{\gamma} f(w)dw$$

(γ η καμπύλη με αρχή το z_0 και πέρας το z)

$$= \int_{[z,z+h]} f(w)dw \implies$$ διαιρώντας με h, $h \neq 0$, έχουμε:

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_{[z,z+h]} f(w)dw$$

Επειδή $\boxed{f(z) = \frac{1}{h} \int_{[z,z+h]} f(z)dw}$

Πράγματι: $$\frac{1}{h} \int_{[z,z+h]} f(z)dw = \frac{f(z)}{h} \int_{[z,z+h]} dw =$$

$$\left([z, z+h] : w = (1-t)z + t(z+h) = z + th \ , \ 0 \leq t \leq 1 \right)$$

$$= \frac{f(z)}{h} \int_0^1 1 \cdot h \cdot dt = \frac{f(z)}{h} \cdot h \int_0^1 dt = f(z)$$

<u>Επομένως:</u> $$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h} \int_{[z,z+h]} (f(w) - f(z))dw$$

ΑΡΑ: $\left| \dfrac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z) \right| \leq \dfrac{1}{|h|} \displaystyle\int_{[z,z+h]} |f(w)-f(z)| \cdot |dw|$

$\overset{(1)}{\leq} \dfrac{1}{|h|} \displaystyle\int_{[z,z+h]} \varepsilon \cdot |dw| = \dfrac{\varepsilon}{|h|} \cdot \int_{[z,z+h]} |dw|$ ← μήκος του ευθ. τμήματος $[z,z+h]$

$= \dfrac{\varepsilon}{|h|} \cdot |h| = \varepsilon$

<u>Αποδείξαμε ότι:</u>

$\forall \varepsilon>0$, υπάρχει $\delta>0$ τ.ω. $\forall h\in\mathbb{C}$ με $0<|h|<\delta \Rightarrow$

$$\left| \frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z) \right| < \varepsilon$$

$$\Updownarrow$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z) = 0 \iff$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(z+h)-F(z)}{h} = f(z) \iff \boxed{F'(z) = f(z)}$$

<u>Βασικό Θεώρημα</u> (Μιγαδικής Ανάλυσης)

Έστω η $f: G \to \mathbb{C}$ είναι <u>συνεχής</u> στον <u>τόπο</u> (ανοικτό συνεκτικό σύνολο) G. Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

① Το ολοκλήρωμα της f είναι ανεξάρτητο του δρόμου ολοκλήρωσης.
Δηλαδή $\displaystyle\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$, για κάθε ζεύγος τμηματικών και λείων καμπυλών γ_1, γ_2 στο G με την ίδια αρχή και το ίδιο πέρας.

(2) (Θ. Cauchy) $\oint_\gamma f(z)dz = 0$ για κάθε κλειστή και τμηματικά λεία καμπύλη γ στο G.

(3) Η f έχει παράγουσα F στο G, δηλαδή $F'(z) = f(z)$, $\forall\, z \in G$

Αν ισχύει η (1) τότε η F δίνεται από τον τύπο:

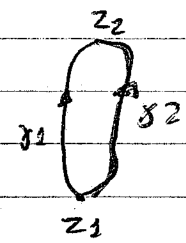
$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(w)dw, \quad z_0 = \sigma\tau\alpha\theta., \quad z \in G$$

Επιπλέον, αν το G είναι απλά συνεκτικό, τότε οι Προτάσεις 1, 2, 3 είναι ισοδύναμες με την:

(4) Η f αναλυτική (ολόμορφη) στο G

Απόδειξη: (1) <=> (2) σχ. προφανές

π.χ. (1) ⟶ (2)



$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz \iff \int_{\gamma_1} f(z)dz - \int_{\gamma_2} f(z)dz = 0 \iff$$

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{-\gamma_2} f(z)dz = 0 \iff \oint_\gamma f(z)dz = 0$$

(1) ⟹ (3) : Προηγ. Πρόταση

(3) ⟹ (4) : Θα αποδείξουμε ότι η αναλυτική F είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο G (χρησ. τους τύπους Cauchy). Επομένως η F'' υπάρχει. Άρα $f' = (F')'$ υπάρχει. Άρα, η f αναλυτική στο G.

(4) ⟹ 2 : Θ. Cauchy

22/05/12

Βασικό Θεώρημα της "Διανυσματικής Ανάλυσης"

Έστω το πεδίο $\bar{F} = (P, Q)$ που είναι συνεχές στον τόπο $G \subseteq \mathbb{R}^2$. Οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες.

[1] Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του $\bar{F}$ είναι ανεξάρτητο του δρόμου ολοκλήρωσης. Δηλαδή, για κάθε ζεύγος γ_1, γ_2 τμηματικά λείων καμπυλών στο G με την ίδια αρχή και το ίδιο πέρας είναι:

$$\int_{\gamma_1} \bar{F} \cdot d\bar{r} = \int_{\gamma_2} \bar{F} d\bar{r}$$

[2] Για κάθε κλειστή και τμηματικά λεία καμπύλη γ στο G, είναι: $\oint_{\gamma} \bar{F} d\bar{r} = 0$

[3] Υπάρχει βαθμωτή συνάρτηση $\Phi: G \to \mathbb{R}$, τέτοια ώστε $\nabla\Phi = \bar{F}$

Αν επιπλέον ο τόπος G είναι απλά συνεκτικός, τότε οι προτάσεις [1], [2], [3] είναι ισοδύναμες με την

[4] $\operatorname{rot}\bar{F} = \bar{0}$ (ή $\operatorname{curl}\bar{F} = 0$) $\iff \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$

Εφαρμογή: Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι: $\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, να αποδειχθεί ότι:

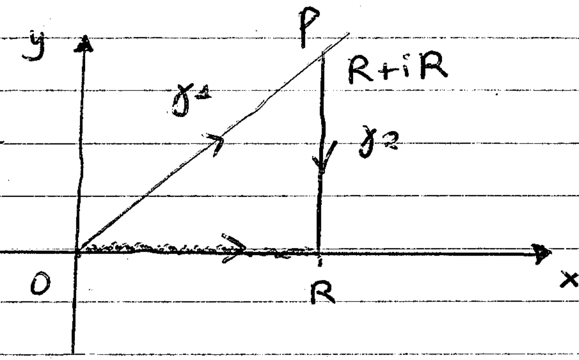
$$\int_0^\infty \cos(x^2)dx = \int_0^\infty \sin(x^2)dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$$

<u>Παρατήρηση:</u> $\int_0^\infty e^{-2x^2}dx \overset{t=\sqrt{2}x}{=\!=\!=} \int_0^\infty e^{-t^2}\frac{dt}{\sqrt{2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$

<u>Λύση:</u> Επειδή $\forall x\in\mathbb{R}$ είναι $e^{ix^2}=\cos(x^2)+i\sin(x^2)$
Θα θεωρήσουμε την ακέραια (αναλυτική στο $\mathbb{C}$) συνάρτηση: $f(z)=e^{iz^2},\ z\in\mathbb{C}$

Από το προηγούμενο θεώρημα έχουμε ανεξαρτησία του δρόμου ολοκ.
Επομένως:



$$\int_{[0,R]} e^{iz^2}dz = \int_{\gamma_1\cup\gamma_2} e^{iz^2}dz \iff$$

$$\int_{[0,R]} e^{iz^2}dz = \int_{\gamma_1} e^{iz^2}dz + \int_{\gamma_2} e^{iz^2}dz \quad (1)$$

$[0,R]:\ z=x,\quad 0\le x\le R$
$\gamma_1:\ [0,R+iR]\quad z=x+ix,\quad 0\le x\le R$
$-\gamma_2:\ [R,R+iR]\quad z=R+iy,\quad 0\le y\le R$

$$(1)\rightarrow \int_0^R e^{ix^2}dx = \int_0^R e^{i(x+ix)^2}(1+i)dx - \int_0^R e^{i(R+iy)^2}\cdot(i)dy \iff$$

$$\int_0^R e^{ix^2}dx = \int_0^R e^{-2x^2}(1+i)dx - i\int_0^R e^{i(R^2-y^2)}\cdot e^{-2Ry}dy \iff$$

$$\int_0^R e^{ix^2}dx - (1+i)\int_0^R e^{-2x^2}dx = -i\int_0^R e^{i(R^2-y^2)}e^{-2Ry}dy \quad (2)$$

Από ②: $\left| \int_0^R e^{ix^2}dx - (1+i)\cdot\int_0^R e^{-2x^2}dx \right|$

$$= \left| -i\int_0^R e^{i(R^2-y^2)}\, e^{-2Ry}dy \right| = \left| \int_0^R e^{i(R^2-y^2)}\cdot e^{-2Ry}dy \right|$$

$$\leq \int_0^R \left| e^{i(R^2-y^2)} \right| \cdot \left| e^{-2Ry} \right| dy$$

$$= \int_0^R e^{-2Ry}dy = \left[-\frac{1}{2R} e^{-2Ry} \right]_0^R = -\frac{1}{2R}\left[e^{-2R^2} - 1 \right] \xrightarrow[R\to\infty]{} \boxed{0}$$

Επομένως: $\lim_{R\to\infty}\left[\int_0^R e^{ix^2}dx - (1+i)\int_0^R e^{-2x^2}dx \right] = 0$

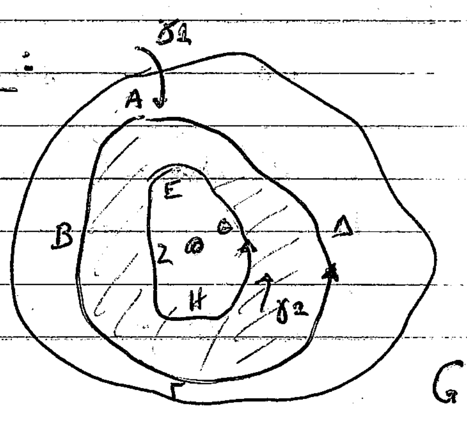
$$\Leftrightarrow \int_0^\infty e^{ix^2}dx = (1+i)\int_0^\infty e^{-2x^2}dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^\infty (\cos x^2 + i\sin x^2)\,dx = (1+i)\frac{\sqrt{2\pi}}{4}$$

$$\Leftrightarrow \int_0^\infty \cos x^2 dx + i\int_0^\infty \sin x^2 dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} + i\frac{\sqrt{2\pi}}{4}$$

Επομένως $\boxed{\int_0^\infty \cos x^2 dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4} \quad \text{και} \quad \int_0^\infty \sin x^2 dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}}$

Γενικευμένο Θ. Cauchy:



Πρόταση: Έστω η $f: G \to \mathbb{C}$ μιγαδική συνάρτηση στο ανοικτό σύνολο G. Υποθέτουμε ότι γ_1, γ_2 είναι απλές, κλειστές, τμηματικά λείες καμπύλες στο G με την <u>ίδια φορά</u>. Επίσης υποθέτω ότι η γ_2 βρίσκεται εσωτερικά της γ_1. Υποθέτουμε ότι η f είναι αναλυτική πάνω στις γ_1, γ_2 και στο χωρίο που βρίσκεται <u>εσωτερικά</u> της γ_1 και εξωτερικά της γ_2. Τότε:

$$\oint_{\gamma_1} f(z)dz = \oint_{\gamma_2} f(z)dz$$

<u>Απόδειξη:</u>

<u>Από Θ.Cauchy</u>: $\displaystyle \int_{\overrightarrow{AB\Gamma}} f(z)dz + \int_{\overrightarrow{\Gamma H}} f(z)dz + \int_{\overrightarrow{HZE}} f(z)dz + \int_{\overrightarrow{EA}} f(z)dz = 0$

$$\int_{\overrightarrow{\Gamma\Delta A}} f(z)dz + \int_{\overrightarrow{AE}} f(z)dz + \int_{\overrightarrow{E\Theta H}} f(z)dz + \int_{\overrightarrow{H\Gamma}} f(z)dz = 0$$

Προσθέτω κατά μέλη τις παραπάνω:

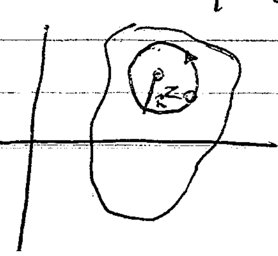
$$\oint_{\gamma_1} f(z)dz + \oint_{-\gamma_2} f(z)dz = 0 \iff$$

$$\oint_{\gamma_1} f(z)dz = -\oint_{-\gamma_2} f(z)dz = 0 \iff$$

$$\boxed{\oint_{\gamma_1} f(z)dz = \oint_{\gamma_2} f(z)dz}$$

<u>Εφαρμογή</u>: Υπολόγισε το ολοκλήρωμα

$$I = \oint_{\gamma} \frac{1}{z-z_0} dz$$



όπου γ απλή, κλειστή και τμηματικά λεία καμπύλη με θετική φορά η οποία περιέχει στο εσωτερικό της το z_0.

Λύση: Θεωρώ τον κύκλο $|z-z_0|=R$ με θετική φορά στο εσωτερικό της γ.

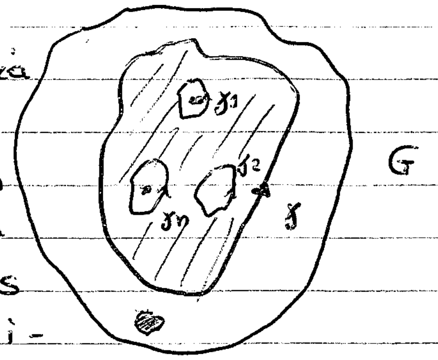
Η $f(z) = \dfrac{1}{z-z_0}$ είναι αναλυτική πάνω στον κύκλο και στην γ και στο χωρίο που βρίσκεται εσωτερικά της γ και εξωτερικά του κύκλου. Από Γεν. Θεω. Cauchy

$$I = \oint_{|z-z_0|=R} \frac{1}{z-z_0}\, dz = \left(\begin{array}{l} z = z_0 + Re^{it} \\ dz = iRe^{it}dt \\ 0 \le t \le 2\pi \end{array} \right) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{Re^{it}}\, iRe^{it}dt$$

$$= i\int_0^{2\pi} dt = \boxed{2\pi i}$$

28/05/12

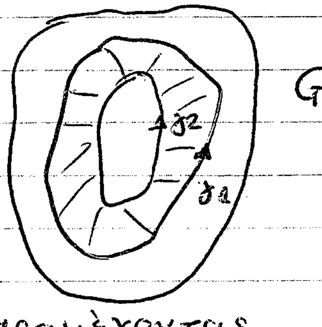
Γενικευμένο Θεώρημα Cauchy



Έστω γ απλή, κλειστή και τμηματικά λεία καμπύλη στο ανοικτό σύνολο $G \subseteq \mathbb{C}$. Υποθέτουμε ότι $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ είναι απλές, κλειστές και τμηματικά λείες καμπύλες στο εσωτερικό της γ. Υποθέτουμε επίσης ότι η γ_i βρίσκεται εξωτερικά της γ_j για κάθε $i \neq j$.
Οι καμπύλες $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ έχουν τον ίδιο προσανατολισμό. Αν η συνάρτηση f είναι αναλυτική πάνω στις $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ και στο χωρίο που βρίσκεται εσωτερικά της γ και εξωτερικά των $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$

Τότε: $\displaystyle\oint_\gamma f(z)dz = \oint_{\gamma_1} f(z)dz + \oint_{\gamma_2} f(z)dz + \dots + \int_{\gamma_n} f(z)dz$

→ Σημείωση: Στο προηγούμενο μάθημα αποδείχτηκε το Γεν. Θ. Cauchy, στην περίπτωση που έχουμε μία καμπύλη γ_1 στο εσωτερικό της γ.

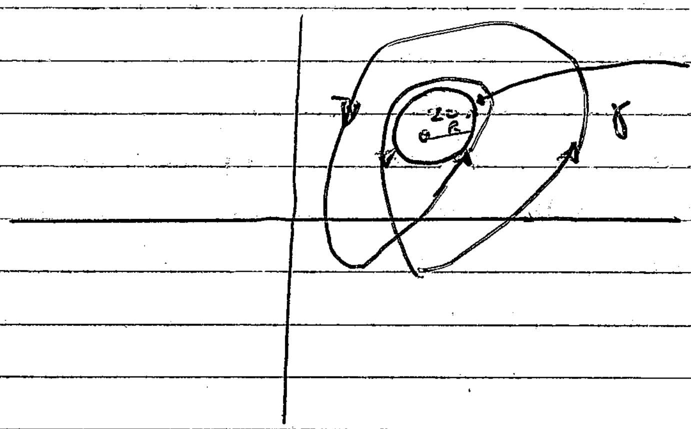


Ορισμός: Έστω γ_1, γ_2 δύο κλειστές και τμηματικά λείες καμπύλες στο ανοικτό σύνολο G. Θα λέμε ότι η γ_1 είναι ομοτοπική με τη γ_2, συμβολισμός $\gamma_1 \sim \gamma_2$, αν η γ_1 συνεχώς παραμορφώνεται στη γ_2 παραμένοντας μέσα στο G, και διατηρώντας τον προσανατολισμό.

Πρόταση: Έστω οι καμπύλες γ_1, γ_2 είναι ομοτοπικές στο ανοικτό σύνολο G. Αν η $f: G \to \mathbb{C}$ είναι αναλυτική, τότε:

$$\oint_{\gamma_1} f(z)dz = \oint_{\gamma_2} f(z)dz$$

Παράδειγμα: Έστω γ η καμπύλη του σχήματος. Να υπολογιστεί το $I = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{1}{z-z_0}\, dz$



$|z-z_0| = R$
$z = z_0 + Re^{it}$
$0 \leq t \leq 4\pi$

Λύση:

Η γ είναι ομοτοπική με τον κύκλο: $|z-z_0| = R$ ο οποίος περιστρέφεται 2-φορές και με θετική φορά γύρω από το z_0.

Εξίσωση κύκλου:

$z = z_0 + Re^{it}$, $0 \leq t \leq 4\pi$

Από προηγούμενη πρόταση:

$$I = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{1}{z-z_0}\, dt = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=R} \frac{1}{z-z_0}\, dz =$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^{4\pi} \frac{1}{z(t)-z_0}\, z'(t)\, dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{4\pi} \frac{1}{Re^{it}}\, iRe^{it}\, dt$$

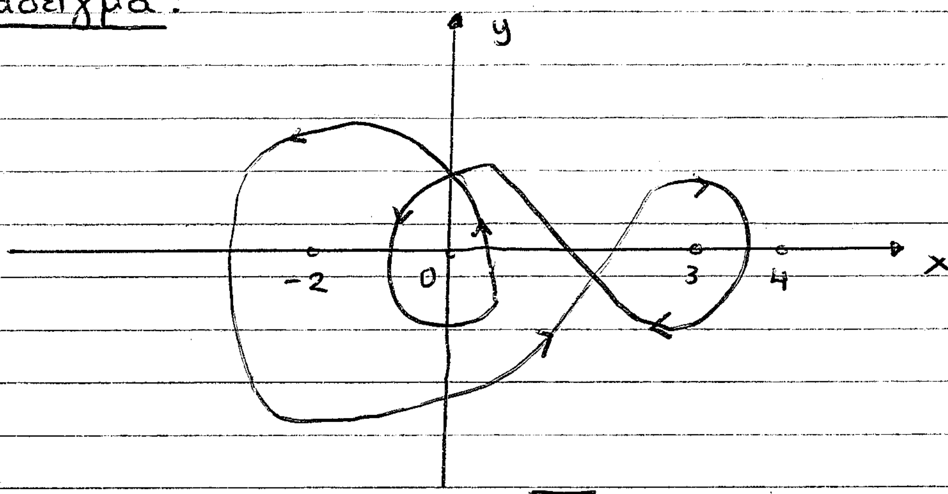
$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{4\pi} i\, dt = \frac{4\pi i}{2\pi i} = \boxed{2}$$ (δείκτης στροφής)

Ορισμός: Έστω $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ κλειστή καμπύλη. Ο δείκτης στροφής της γ ως προς το $z_0 \notin \gamma^* = \gamma([a,b])$ συμβολίζεται $I(\gamma, z_0)$ ή $n(\gamma, z_0)$ ή $\operatorname{Ind}_\gamma(z_0)$, ορίζεται ως εξής:

$$I(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{1}{z-z_0}\, dz$$

"Ο δείκτης στροφής μας λέει πόσες φορές η γ περιστρέφεται γύρω από το z_0".

Παράδειγμα:



- $I(\gamma,0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{1}{z}\,dz=\boxed{2}$

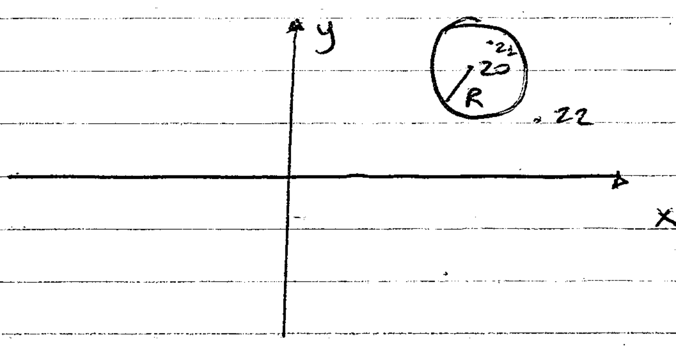
- $I(\gamma,-2)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{1}{z+2}\,dz=\boxed{1}$

- $I(\gamma,3)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{1}{z-3}\,dz=\boxed{-1}$ (γυρίζει αντίθετα)

- $I(\gamma,4)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{1}{z-4}\,dz=\boxed{0}$

Παράδειγμα [2]: $I(\gamma,z_1)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{1}{z-z_1}\,dz$, όπου

γ ο κύκλος: $|z-z_0|=R$, $z=z_0+Re^{it}$ $0\le t\le 6\pi$

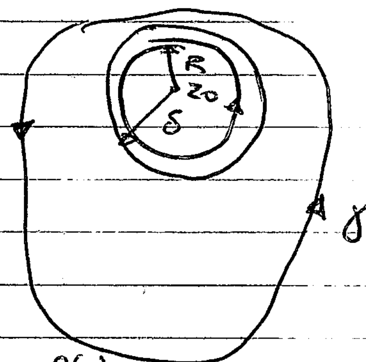


$I(\gamma,z_1)=3$
$I(\gamma,z_2)=0$

<u>Ολοκληρωτικός τύπος Cauchy:</u> Έστω η συνάρτηση f είναι αναλυτική πάνω και στο εσωτερικό μιάς απλής, κλειστής και εμμηματικά λείας καμπύλης γ. Υποθέτουμε ότι η γ έχει θετική φορά. Αν <u>το z_0 σημείο στο εσωτερικό της γ</u>, τότε:

$$\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz} \quad \longleftarrow \text{ολοκ. τύπος Cauchy}$$

<u>Απόδειξη:</u> Επειδή η f είναι <u>συνεχής</u> στο z_0:



$$\left\| \begin{array}{l} \forall\, \varepsilon>0, \text{ υπάρχει } \delta>0 \text{ τ.ω.} \\ |z-z_0|<\delta \Longrightarrow |f(z)-f(z_0)|<\varepsilon \end{array} \right\| \quad (1)$$

Από Γεν. Θεώρημα Cauchy, επειδή η $\frac{f(z)}{z-z_0}$ είναι αναλυτική πάνω στη γ πάνω <u>στον κύκλο</u> $|z-z_0|=R$ και στο χωρίο μεταξύ της γ και του κύκλου $|z-z_0|=R$

Έχουμε:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=R} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=R} \frac{(f(z)-f(z_0))+f(z_0)}{z-z_0}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=R} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=R} \frac{f(z_0)}{z-z_0}\,dz \overset{(1)}{=} \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=R} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz + f(z_0)$$

Επομένως $\displaystyle \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz - f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=R} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz$

ΆΡΑ: $\left| \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\, dt - f(z_0)\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\oint_{|z-z_0|=R} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\,dz\right|$

$\leq \frac{1}{2\pi}\oint_{|z-z_0|=R}\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|}\,|dz| \overset{\boxed{\text{λόγω της } 1}}{\leq}$

$\frac{1}{2\pi}\oint_{|z-z_0|=R} \frac{\varepsilon}{R}\,|dz| = \frac{\varepsilon}{2\pi R}\oint_{|z-z_0|=R} |dz| = \frac{\varepsilon}{2\pi R}\, 2\pi R = \varepsilon$

<u>Συμπέρασμα</u>: $\forall \varepsilon > 0$, υπάρχει δ τ.ω.

$|z-z_0|<\delta \Longrightarrow \left|\underbrace{\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz}_{\text{σταθ.}} - f(z_0)\right| \leq \varepsilon$

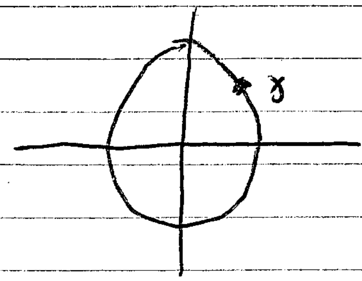
Επομένως: $\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz - f(z_0) = 0$ //

Ο τύπος γράφεται και αλλιώς

$$\boxed{f(z_0)\cdot I(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz}$$

<u>Ασκήσεις</u>

[1] $\oint_\gamma \frac{e^{iz}}{z}\,dt$

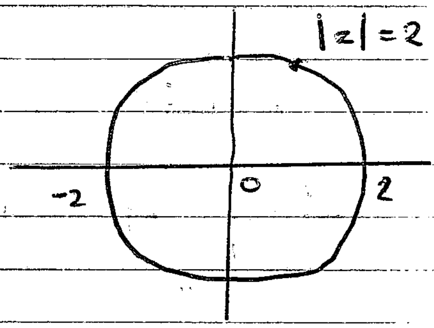


$= 2\pi i\left\{\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{e^{iz}}{z-0}\,dz\right\}$

$= 2\pi i \cdot f(0) = 2\pi i \cdot e^{i0} = \boxed{2\pi i}$

[2] $\displaystyle \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=2} \frac{\cos z}{(z+1)(z+3)}\, dz$

$\displaystyle = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=2} \frac{\frac{\cos z}{z+3}}{z+1}\, dz$



T.C. $\displaystyle = \quad f(-1) = \frac{\cos(-1)}{-1+3} = \boxed{\frac{\cos 1}{2}}$

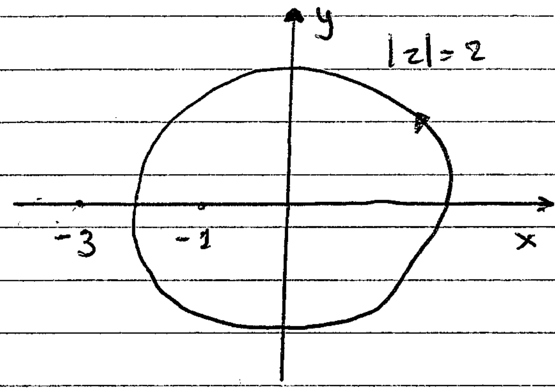
29/05/12

<u>Παράδειγμα</u>: Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

(α) $\displaystyle \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=2} \frac{\cos z}{(z+1)(z+3)}\,dz$ (β) $\displaystyle \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=4} \frac{\cos z}{(z+1)(z+3)}\,dz$

<u>Λύση</u>:

(α)



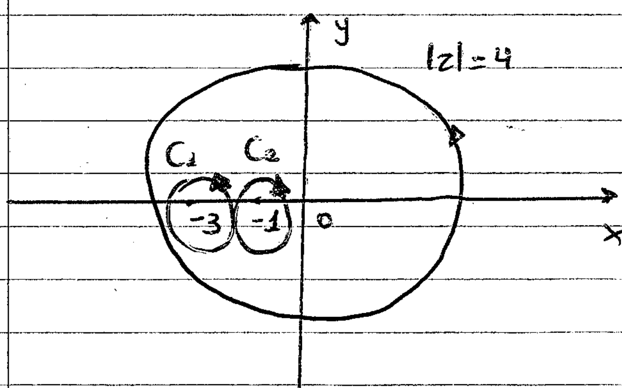
Από ολοκληρ. τύπο Cauchy

$\to f(z)$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=2} \frac{\frac{\cos z}{z+3}}{z+1}\,dz =$$

$$f(-1) = \frac{\cos(-1)}{-1+3} = \boxed{\frac{\cos 1}{2}}$$

(β)



Έστω ο κύκλος C_1 περιέχει το -3 και ο κύκλος C_2 περιέχει το -1.

Από γενικευμένο Θεώρημα Cauchy έχω:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=4} \frac{\cos z}{(z+1)(z+3)}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{\cos z}{(z+1)(z+3)}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{\cos z}{(z+1)(z+3)}\,dz$$

$\to f_1(z)$ $\to f_2(z)$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{\frac{\cos z}{(z+1)}}{z+3}\,dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{\frac{\cos z}{(z+3)}}{z+1}\,dz$$

$$\stackrel{T.C.}{=} f_1(-3) + f_2(-1) = \boxed{-\frac{\cos 3}{2} + \frac{\cos 1}{2}}$$

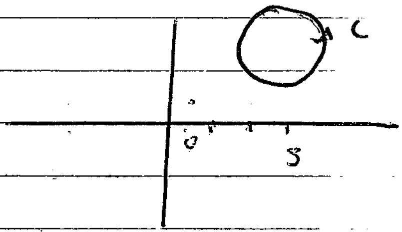
<u>Παράδειγμα 2:</u> Υπολογίστε το ολοκλήρωμα:

$$I = \oint_C \frac{e^z}{z^2-3z}\,dz$$ όπου C κύκλος που δε διέρχεται από τα σημεία <u>0</u> και <u>3</u>.

Εξετάστε όλες τις δυνατές περιπτώσεις

<u>Λύση:</u>

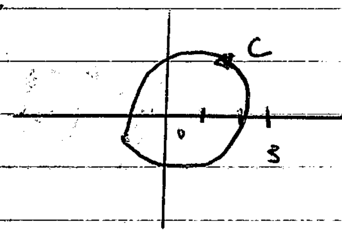
<u>1η περ:</u> Ο κύκλος C <u>δεν</u> περιέχει τα σημεία 0 και 3



Επειδή η $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2-3z}$ είναι αναλυτική πάνω στο εσωτερικό του κύκλου C, από Θεώρημα Cauchy:

$$\boxed{I=0}$$

<u>2η περ:</u> Ο κύκλος C περιέχει <u>μόνο</u> το 0.

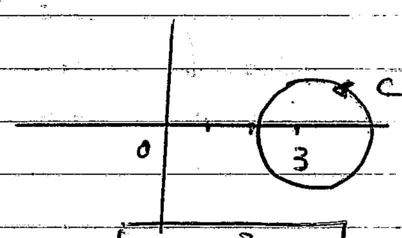


Τότε

$$I = 2\pi i \cdot \left\{ \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\overbrace{\frac{e^z}{(z-3)}}^{f(z)}}{z}\,dz \right\}$$

$$= 2\pi i \cdot f(0) = \boxed{-\frac{2}{3}\pi i}$$

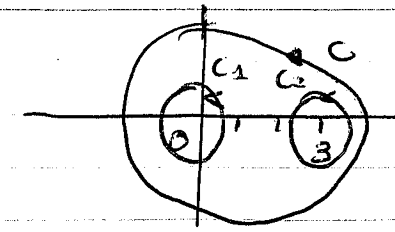
<u>3η περ:</u> Ο κύκλος C περιέχει <u>μόνο</u> το 3



Τότε

$$I = 2\pi i \left\{ \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{\overbrace{\frac{e^z}{z}}^{f(z)}}{(z-3)}\,dz \right\} = 2\pi i \cdot f(3) = \boxed{\frac{2}{3} e^3 \pi i}$$

4^{η} περ: Ο κύκλος περιέχει το 0 και το 3



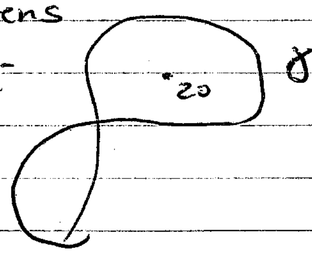
Από Γεν. Θεώρημα Cauchy:

$$I = \oint_{C_1} \frac{e^z}{z^2-3z}\,dz + \oint_{C_2} \frac{e^z}{z^2-3z}\,dz$$

(2)+(3) $$-\frac{2}{3}\pi i + \frac{2}{3}e^3\pi i = \boxed{\frac{2}{3}\pi i\left(e^3-1\right)}$$

Ολοκληρωτικός τύπος Cauchy για παραγώγους

Έστω η συνάρτηση f είναι αναλυτική (ολόμορφη) πάνω και στο εσωτερικό μιας κλειστής καμπύλης γ. Αν το z_0 βρίσκεται στο εσωτερικό της γ τότε η f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο z_0 και η n-οστή παράγωγος $f^{(n)}(z_0)$ δίνεται από τον τύπο:



$$\boxed{f^{(n)}(z_0)\cdot I(\gamma, z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz} \qquad (1)$$

Παρατηρήσεις:

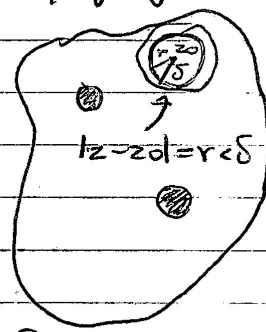
[1] Ο ολοκληρωτικός τύπος Cauchy προκύπτει από τον τύπο (1) για $n=0$.
Πράγματι επειδή $f^{(0)}(z_0) = f(z_0)$ και $0! = 1$ έχουμε:

$$f(z_0)\cdot I(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$

[2] Αν η καμπύλη γ είναι απλή, κλειστή και έχει θετική φορά τότε $I(\gamma, z_0) = 1$ και ο τύπος (1) παίρνει τη μορφή

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz$$

Το παρακάτω σημαντικό αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα από τον ολοκληρωτικό τύπο Cauchy για παραγώγους:



Πόρισμα: Υποθέτουμε ότι η $f: G \to \mathbb{C}$ είναι αναλυτική (ολόμορφη) στο ανοικτό σύνολο G. Τότε η f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο G.

Απόδειξη: Έστω z_0 τυχαίο σημείο του G. Επειδή το G ανοικτό, υπάρχει δίσκος $D(z_0,\delta) \subseteq G$. Η f είναι αναλυτική στο $D(z_0,\delta)$. Παίρνω τον κύκλο $|z-z_0|=r$, $r<\delta$, με θετική φορά. Τότε από ολοκλ. τύπο Cauchy για παραγώγους, η f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο z_0. Μάλιστα η n-οστή παράγωγος δίνεται από τον τύπο

$$\boxed{f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz}$$

■

Παρατήρηση

Έστω κλειστή καμπύλη γ στο $\mathbb{C}$ με εξίσωση:

$f(x,y) = 0$

Έστω $z_0 = x_0 + iy_0$ σημείο στο $\mathbb{C}$

(i) Αν $f(x_0,y_0) < 0$, το z_0 βρίσκεται μέσα στη γ

(ii) Αν $f(x_0,y_0) > 0$, το z_0 βρίσκεται εκτός της γ

(iii) Αν $f(x_0,y_0)=0$, το z_0 βρίσκεται πάνω στη γ.

Παραδείγματα

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

[1] $I=\oint_\Gamma \frac{e^{\pi z}}{(1+z^2)^2}dz$ όπου $\Gamma: 4x^2+y^2-2y=0$

Λύση:

$I=\oint_\Gamma \frac{e^{\pi z}}{(z+i)^2(z-i)^2}dz$

• $i=(0,1)$ Είναι:

$4\cdot 0^2+1^2-2=-1<0$

Άρα το i είναι μέσα στη Γ

• $-i=(0,-1)$ Είναι:

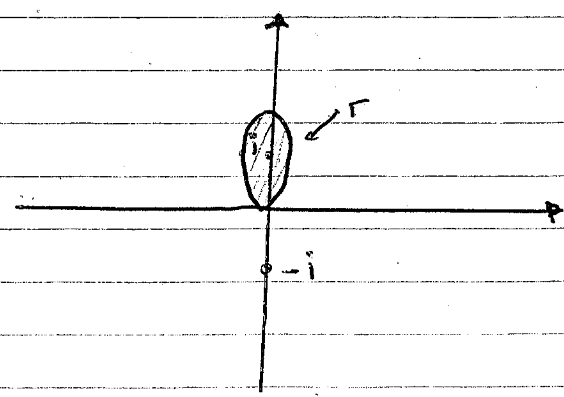
$4\cdot 0^2+(-1)^2+2=1+2=3>0$

Άρα το $-i$ είναι εκτός της Γ

Γ: $4x^2+y^2-2y+1-1=0 \Leftrightarrow$

$4x^2+(y-1)^2=1 \iff$

$\frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{(y-1)^2}{1^2}=1$



Επομένως:

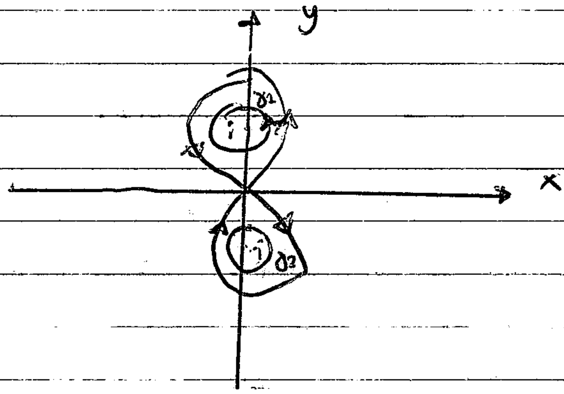
$I=2\pi i\left\{\frac{1!}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{\overbrace{\frac{e^{\pi z}}{(z+i)^2}}^{f(z)}}{(z-i)^2}dz\right\}=f'(i)\cdot 2\pi i$

$=2\pi i\left.\frac{d}{dz}\left(\frac{e^{\pi z}}{(z+i)^2}\right)\right|_{z=i}=2\pi i\cdot\left.\frac{\pi e^{\pi z}(z+i)^2-2(z+i)e^{\pi z}}{(z+i)^4}\right|_{z=i}$

$$= 2\pi i \, e^{\pi z} \frac{\pi(z+i)-2}{(z+i)^3}\Bigg|_{z=i} =$$

$$2\pi i \, e^{i\pi} \frac{2i\pi-2}{(2i)^3} = \frac{2\pi i \, e^{i\pi} \, 2(i\pi-1)}{8(-i)} = \boxed{-\frac{e^{i\pi}\pi(i\pi-1)}{2}}$$

[2] $I = \oint_\gamma \frac{z}{(z-i)(z^2+1)} dz$, όπου γ η καμπύλη του σχήματος



Λύση:

$$I = \oint_\gamma \frac{z}{(z-i)^2(z+i)} dz \stackrel{\text{Γεν. Θ. Cauchy}}{=}$$

$$= \oint_{\gamma 1} \frac{z}{(z-i)^2(z+i)} dz + \oint_{\gamma 2} \frac{z}{(z-i)^2(z+i)} dz$$

$$= 2\pi i \left\{ \frac{1!}{2\pi i} \oint_{\gamma 1} \frac{\overbrace{\frac{z}{(z+i)}}^{f_1(z)}}{(z-i)^2} dz \right\} + 2\pi i \left\{ \frac{1!}{2\pi i} \oint_{\gamma 2} \frac{\overbrace{\frac{z}{(z-i)^2}}^{f_2(z)}}{z+i} dz \right\}$$

$$= 2\pi i \left\{ \underbrace{I(\gamma_1, i)}_{=1} \cdot \left(\frac{z}{z+i}\right)'\Bigg|_{z=i} \right\} + 2\pi i \left\{ \underbrace{I(\gamma_2, -i)}_{=-1} \cdot \left(\frac{z}{(z-i)^2}\right)'\Bigg|_{z=-i} \right\}$$

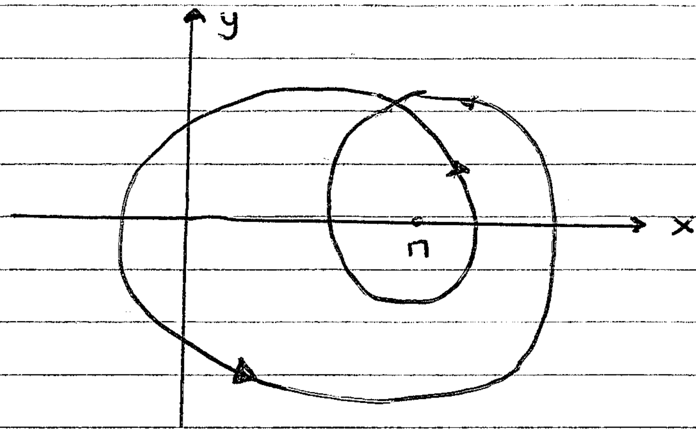
$$= 2\pi i \left\{ 1 \cdot \frac{(z+i)-1}{(z+i)^2}\Bigg|_{z=i} - \frac{(z-i)^2 - 2z(z-i)}{(z-i)^4}\Bigg|_{z=-i} \right\}$$

= πράξεις

01/06/12

Παρ: Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$I = \oint \dfrac{\cos z}{(z-\pi)^3}\, dz$, όπου γ η καμπύλη του σχήματος:



Λύση:

$$I = \frac{2\pi i}{2!}\left\{ \frac{2!}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{\cos z}{(z-\pi)^3}\, dz \right\} = \pi i \left\{ I(\gamma,\pi)\cdot(\cos z)''\big|_{z=\pi} \right\}$$

$$= \pi i \left\{ 2\cdot(-\cos\pi) \right\} = \boxed{2\pi i}$$

Παρ 2: Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{e^{az}}{z}\, dz, \quad a \in \mathbb{R}$$ και να αποδειχθεί ότι:

$$\int_0^{2\pi} e^{a\cos\theta}\cdot\cos(a\sin\theta)\, d\theta = 2\pi$$

Λύση:

$$I = 2\pi i \left\{ \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{e^{az}}{z-0}\, dz \right\} \underset{\text{Cauchy}}{\overset{\text{τύπος}}{=}} 2\pi i\cdot e^{a\cdot 0} = \boxed{2\pi i}$$

$$|z|=1 \iff \{ z = e^{i\theta},\ 0 \le \theta \le 2\pi \}$$

$$dz = i e^{i\theta} d\theta$$

Επομένως:

$$\oint_{|z|=1} \frac{e^{az}}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{e^{a\cdot e^{i\theta}}}{e^{i\theta}} i e^{i\theta} d\theta = i\int_0^{2\pi} e^{a(\cos\theta + i\sin\theta)} d\theta$$

$$= i\cdot\int_0^{2\pi} e^{a\cos\theta}\cdot e^{ia\sin\theta} d\theta = i\int_0^{2\pi} e^{a\cos\theta}\left[\cos(a\sin\theta) + i\sin(a\sin\theta)\right] d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[ie^{a\cos\theta}\cos(a\sin\theta) - e^{a\cos\theta}\sin(a\sin\theta)\right] d\theta$$

$$= -\int_0^{2\pi} e^{a\cos\theta}\sin(a\sin\theta)d\theta + i\int_0^{2\pi} e^{a\cos\theta}\cos(a\sin\theta)d\theta$$

ΑΡΑ:

$$2\pi i = -\int_0^{2\pi} e^{a\cos\theta}\sin(a\sin\theta)d\theta + i\int_0^{2\pi} e^{a\cos\theta}\cos(a\sin\theta)d\theta$$

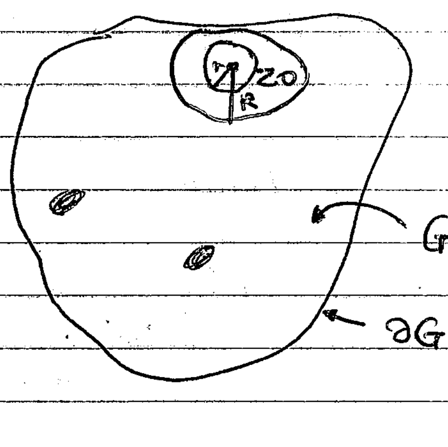
$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} \int_0^{2\pi} e^{a\cos\theta}\sin(a\sin\theta)\,d\theta = 0 \\ \boxed{\int_0^{2\pi} e^{a\cos\theta}\cdot\cos(a\sin\theta)\,d\theta = 2\pi} \end{cases}$$

▶ Θεώρημα Cauchy-Taylor:

Έστω η $f: G \longrightarrow \mathbb{C}$ αναλυτική στο ανοικτό σύνολο G και έστω z_0 σημείο του G. Αν $R := \text{dist}(z_0, \partial G)$ (η απόσταση του z_0 από το σύνορο ∂G του G.)

Τότε:



$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z-z_0)^n, \quad |z-z_0| < R$$

όπου $a_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \dfrac{1}{2\pi i} \oint \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz$

($|z-z_0| = r$ είναι ο κύκλος z_0 και ακτίνα $r < R$)

Σημείωση: Το $0 < R \le \infty$

Βασικά αναπτύγματα σε δυναμοσειρά

[1] $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!} = 1 + z + \dfrac{z^2}{2!} + \dots + \dfrac{z^n}{n!} + \dots, \quad \forall z \in \mathbb{C}$

[2] $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} - \dfrac{z^7}{7!} + \dots, \quad \forall z \in \mathbb{C}$

[3] $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^4}{4!} - \dfrac{z^6}{6!} + \dots, \quad \forall z \in \mathbb{C}$

[4] $\dfrac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \dots + z^n, \quad \forall\ |z| < 1$

[5] $\dfrac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = 1 - z + z^2 - z^3 + \dots, \quad \forall\ |z| < 1$

—

Οι 4 + 5 "Γεωμετρική Σειρά"

Παραδείγματα

[1] Να αναπτυχθεί σε δυναμοσειρά με κέντρο το $z_0 = 0$ η $f(z) = \dfrac{1}{z^2+z-6} = \left[\dfrac{1}{z-2} - \dfrac{1}{z+3}\right] \cdot \dfrac{1}{5}$

Λύση:

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-z/2} \overset{\text{Γ.Σ.}}{=} -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n, \quad \left|\frac{z}{2}\right| < 1$$

$$\Rightarrow |z| < 2$$

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+z/3} \overset{\Gamma.\Sigma.}{=} \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{3}\right)^n,$$

$$\left|\frac{z}{3}\right| < 1 \iff |z| < 3$$

ΑΡΑ:

$$f(z) = \frac{1}{5}\cdot\left[-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{3^{n+1}}\right]$$

$$= \boxed{-\frac{1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}}\right]z^n}, \quad |z| < \min\{2,3\} = 2$$

[2] Να βρεθεί το ανάπτυγμα της

$$f(z) = \frac{1}{(z+3i)^2}, \text{ με κέντρο } z_0 = 1$$

Λύση:

$$f(z) = \frac{1}{[(z-1)+(1+3i)]^2} = \frac{1}{(1+3i)^2}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{z-1}{1+3i}\right)^2}$$

Ισχύει
$$\frac{1}{\left(1+\frac{z-1}{1+3i}\right)^2} \overset{w=\frac{z-1}{1+3i}}{=} \frac{1}{(1+w)^2}$$

Παραγωγίζοντας τη γεωμετρική σειρά:

$$\frac{1}{1+w} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n w^n, \quad |w| < 1 \Longrightarrow$$

$$\left(\frac{1}{1+w}\right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n w^n\right)', \quad |w| < 1 \iff$$

* ΔΕ ΘΥΜΑΤΑΙ ΚΑΛΑ ΤΗΝ ΥΠΟΘΕΣΗ ΤΕΛΙΚΑ ΗΤΑΝ

$f'(z) < \frac{1}{1-|z|}$

$$-\frac{1}{(1+w)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot n\, w^{n-1}, \quad |w|<1 \iff$$

$$\frac{1}{(1+w)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot n w^{n-1}, \quad |w|<1 \iff$$

$$\frac{1}{(1+w)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot (n+1)\, w^n, \quad |w|<1$$

Άρα $\dfrac{1}{\left(1+\frac{z-1}{1+3i}\right)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) \left(\frac{z-1}{1+3i}\right)^n$

όπου $|w|<1 \iff \left|\frac{z-1}{1+3i}\right| < 1 \iff |z-1| < |1+3i| = \sqrt{10}$

<u>ΑΡΑ:</u> $f(z) = \frac{1}{(1+3i)^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) \frac{(z-1)^n}{(1+3i)^n}$

$$= \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) \frac{(z-1)^n}{(1+3i)^{n+2}}, \quad |z-1| < \sqrt{10}}$$

—

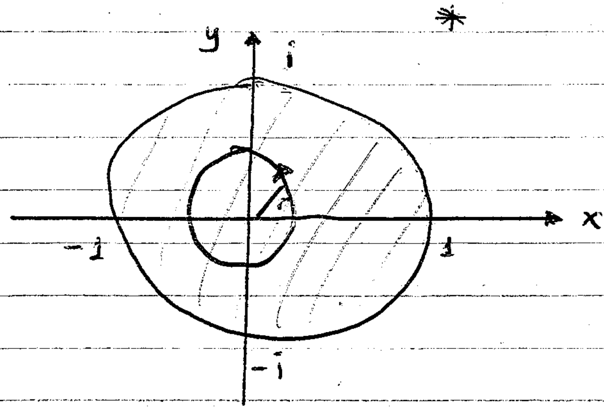
[3] Έστω η $f: D(0,1) \longrightarrow \mathbb{C}$ αναλυτική, στον $D(0,1) = \{ z \in \mathbb{C} : |z|<1 \}$. Ως γνωστόν,

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$, $|z|<1$. Αν $|f'(z)| < \frac{1}{1-|z|}$

Να αποδειχθεί ότι: $|a_n| < e$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

*

<u>Λύση:</u>



ΑΝΕΠΙΤΥΧΗΣ

↓ ΠΡΟΣΠΑΘΕΙΑ

(Λάθος (γ))

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz$$

$$\Downarrow$$

$$|a_n| = \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz\right| \le \frac{1}{2\pi}\oint_{|z|=r}\frac{|f(z)|}{|z|^{n+1}}\,|dz|$$

$$= \frac{1}{2\pi}\oint_{|z|=r}\frac{|f(z)|}{r^{n+1}}\,|dz| \le \frac{1}{2\pi}\oint_{|z|=r}\frac{\frac{1}{1-r}}{r^{n+1}}\,|dz|$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{(1-r)r^{n+1}}\cdot\oint_{|z|=r}|dz| = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{(1-r)r^{n+1}}\, 2\pi r$$

$$= \frac{1}{(1-r)r^{n}} \longrightarrow r = \frac{n}{n+1}$$

$$|a_n| \le \frac{1}{\left(1-\frac{n}{n+1}\right)\left(\frac{n}{n+1}\right)^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot(n+1) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot(n+1)$$

$$< e(n+1)$$

▶ ΜΕΤΑ ΑΠΟ ΤΗ ΘΕΙΑ ΕΜΠΝΕΥΣΗ: (Σωστή Λύση)

$$g(z) := f'(z)$$

$$g^{(n-1)}(0) = \frac{(n-1)!}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{g(z)}{z^n}\, dz$$

$$\Updownarrow$$

$$f^{(n)}(0) = \frac{(n-1)!}{2\pi i}\oint_{|z|=r}\frac{f'(z)}{z^n}\, dz$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{f'(z)}{z^n}\, dz \Longrightarrow$$

$$|a_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \right| \cdot \left| \oint_{|z|=r} \frac{f'(z)}{z^n}\, dz \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \oint_{|z|=r} \frac{|f'(z)|}{|z|^n} |dz| = \frac{1}{2\pi} \oint_{|z|=r} \frac{\frac{1}{1-r}}{r^n} |dz|$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{(1-r)r^n} \oint_{|z|=r} |dz| = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{(1-r)r^n} \cdot 2\pi r = \frac{1}{n(1-r)r^{n-1}}$$

Παίρνοντας $r = \frac{n}{n+1}$

$$|a_n| \leq \frac{1}{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-1} \cdot n \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n-1} \cdot \frac{n}{n+1}}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \boxed{e}$$

<u>Ανισότητες Cauchy (1η διατύπωση)</u>

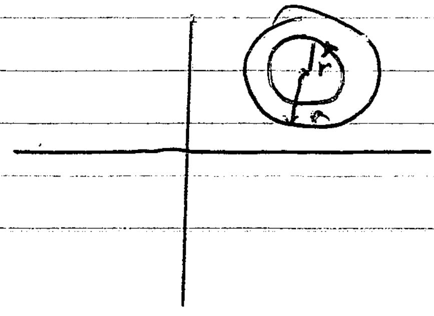
$f: D(0,R) \longrightarrow \mathbb{C}$ αναλυτική, όπου
$D(0,R) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ Αν $|f(z)| \leq M$, $\forall |z| < R$
Τότε:

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{M \cdot n!}{R^n}$$

$|z - z_0| = r$

$r < R$

<u>Απόδειξη:</u>



$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

$$|f^{(n)}(z_0)| = \left|\frac{n!}{2\pi i}\right| \cdot \left| \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz \right| \leq$$

$$\frac{n!}{2\pi} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{n+1}} |dz| \leq \frac{n!}{2\pi} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{M}{r^{n+1}} |dz|$$

$$= \frac{Mn!}{2\pi r^{n+1}} \oint |dz| = \frac{Mn!}{2\pi r^{n+1}} 2\pi r = \boxed{\frac{Mn!}{r^n}}$$

<u>Ανισότητα Cauchy (2η διατύπωση)</u>

Έστω $f: \bar{D}(0,R) \to \mathbb{C}$ αναλυτική, όπου $\bar{D}(0,R) : \{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq R \}$. Αν $|f(z)| \leq M$, $\forall |z| = R$,
$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{M \cdot n!}{R^n}$

05/06/12

Θεώρημα Liouville - Εφαρμογές

Έστω $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ μια <u>ακέραια</u> (αναλυτική σ' όλο το $\mathbb{C}$) συνάρτηση. Τότε:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

$$= f(0) + f'(0)z + \frac{f''(0)}{2!} z^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n + \dots$$

$\forall z \in \mathbb{C}$ (δηλαδή η ακτίνα σύγκλισης ακέραιας συνάρτησης $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ είναι $\boxed{R = \infty}$)

(*) <u>Κλασικό Θεώρημα Liouville</u>

Αν μια ακέραια συνάρτηση $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ είναι <u>φραγμένη</u>, δηλαδή υπάρχει $M > 0$ τ.ω. $|f(z)| \leq M$, $\forall z \in \mathbb{C}$ τότε η f είναι σταθερή.

(*) <u>Γενικευμένο Θεώρημα Liouville</u>

Έστω $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ <u>ακέραια</u> συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι:

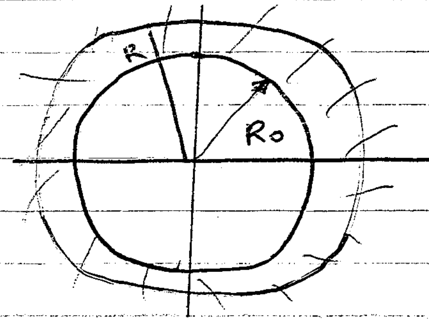
$|f(z)| \leq M_1 + M_2 |z|^k$, $\forall |z| \geq R_0$ (*)

όπου $M_1 > 0$, $M_2 \geq 0$, $k \geq 0$

Τότε, η f είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ k.

<u>Σημείωση</u>: Αν $M_2 = k = 0$, παίρνουμε το "κλασικό Θεώρημα Liouville".

<u>Απόδειξη</u>:



Παίρνω $R > R_0$

Από ανισότητες Cauchy:

$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{M \cdot n!}{R^n}$ $\Longleftrightarrow$

$$\left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right| \leq \frac{M}{R^n} \quad \text{όπου} \quad M = \max\{|f(z)| : |z| = R\}$$

Λόγω της $(*)$: $\boxed{M \leq M_1 + M_2 R^k}$

Επομένως:

$$\left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right| \leq \frac{M_1 + M_2 R^k}{R^n} = \frac{M_1}{R^n} + \frac{M_2}{R^{n-k}}$$

Αν $n > k$ παίρνοντας το $R \to \infty$ έπεται ότι:

$$\left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right| \leq 0 \quad , \quad \forall n > k$$

Συμπέρασμα: $\left\{ \frac{f^{(n)}(0)}{n!} = 0, \quad \forall n > k \right\}$

ΑΡΑ:

$$f(z) = f(0) + f'(0)z + \ldots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k$$

Δηλαδή η f είναι πολ/μο βαθμού το πολύ k

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Έστω $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ακέραια

[1] Αν $|f(z)| \leq 1 + \sqrt{2}\,|z|^{3/2}$, $\forall z \in \mathbb{C}$

Σύμφωνα με το Γεν. Θεώρημα Liouville:

f είναι πολ/μο βαθμού 1

ΑΡΑ: $\boxed{f(z) = a_0 + a_1 z}$

[2] $|f(z)| \leq |z|^{5/2}$, $\forall |z| \geq 100$

Από γεν. Θεώρημα Liouville:

$$\boxed{f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2}$$

[3] $|f(z)| \leq M, \quad \forall |z| \geq R_0 > 0$

<u>Λύση:</u> Είναι

$|f(z)| \leq M \cdot |z|^0, \quad \forall |z| \geq R_0$

Από Γεν. Θ. Liouville η f είναι πολ/μο βαθμού 0 (δηλ. η f σταθερή)

<u>ΑΡΑ:</u> $\boxed{f(z) = c = \text{σταθερά}}$

▶ <u>Άσκηση:</u> Η $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ακέραια, $f = u + iv$ και τέτοια ώστε:

$\operatorname{Im} f = v \leq M, \quad M > 0$

Αποδείξτε ότι $f = \text{σταθ.}$

(Παρόμοια με 5)

<u>Υπόδειξη:</u> $g = e^{-if}$

<u>Λύση:</u> Η $g(z) = e^{-if(z)}, \ z \in \mathbb{C}$ είναι ακέραια

$|g| = |e^{-if}| = |e^{-i(u+iv)}| = |e^{-iu} \cdot e^{v}| = \overset{1}{|e^{-iu}|} \cdot |e^{v}|$
$= |e^{v}| = e^{v} \leq e^{M} = \text{σταθ.}$

Από Θεώρημα Liouville $\Longrightarrow$ $\boxed{g = \text{σταθ.}}$

Τότε και $|g| = \text{σταθ.} \iff$
$e^{v} = \text{σταθ.} \iff$
v σταθ.
Επειδή $f = u + iv$, με $v = \text{σταθ.}$ $\xrightarrow{\text{Βασ. Πρ.}}$ $\boxed{f = \text{σταθ.}}$

Σημείωση: Όταν γράφουμε

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = a \in \mathbb{C}$$

Εννοούμε ότι:

$$\lim_{|z|\to\infty} f(z) = a$$

▶ Άσκηση: Έστω η $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ακέραια συνάρτηση

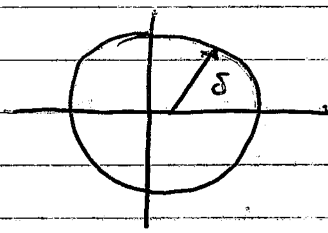
(α) Αν $\lim_{z\to\infty} f(z) = a \in \mathbb{C}$ να αποδειχθεί ότι $f=$ σταθ.

(β) Αν $\lim_{z\to\infty} \mathrm{Re}\, f(z) = 0$ και $f(0)=0$, να αποδειχθεί ότι $f(z)=0,\ \forall z\in\mathbb{C}$.

Λύση:

(α) $\lim_{|z|\to\infty} f(z) = a \iff$

$$\begin{cases} \forall \varepsilon>0,\ \exists\, \delta>0 \text{ τ.ω.} \\ |z|>\delta \implies |f(z)-a|<\varepsilon \end{cases}$$



$|f(z)-a|<\varepsilon \implies$

$|f(z)|-|a| \le |f(z)-a| < \varepsilon \implies$

$|f(z)| \le |a|+\varepsilon$

Επομένως:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Για } \varepsilon>0,\ \exists\, \delta>0 \text{ τ.ω. } |f(z)|\le|a|+\varepsilon, \\ \forall\, |z|>\delta \end{array} \right\} \quad (1)$$

Το σύνολο $|z|\le\delta$ είναι συμπαγές (κλειστό και φραγμένο) και η f είναι συνεχής. Από γνωστό Θεώρημα της "Ανάλυσης" η f θα είναι φραγμένη στο σύνολο: $|z|\le\delta$

Θα είναι : $|f(z)| \leq M, \quad \forall\ |z| \leq \delta$ (2)

Από (1) και (2)

$|f(z)| \leq \max\{|a|+\varepsilon, M\} \leq |a|+\varepsilon+M$

Άρα, από "κλασικό" Θ. Liouville $\Longrightarrow$ $\boxed{f = \sigma\tau\alpha\theta.}$

(β) Η $g(z) := e^{f(z)}, \quad z \in \mathbb{C}$

Η g είναι ακέραια με:

$|g(z)| = |e^{f(z)}| = |e^{Ref(z)+iImf(z)}| = e^{Ref(z)} \cdot |e^{iImf(z)}|$

$= \underline{\underline{e^{Ref(z)}}}$

$\lim\limits_{|z|\to\infty} |g(z)| = \lim\limits_{|z|\to\infty} e^{Ref(z)} \overset{\text{υπόθεση}}{=\!=} e^0 = 1$

Από (α) $\Longrightarrow$ $g = \sigma\tau\alpha\theta.$ $\Longrightarrow$ $|g| = \sigma\tau\alpha\theta.$ $\Longleftrightarrow$ $e^{Ref(z)} = \sigma\tau\alpha\theta.$

Όμως $f(0)=0$ ΑΡΑ:

$e^{Ref(z)} = 1, \quad \forall z \in \mathbb{C}$

$\Updownarrow$

$Re f(z) = 2k\pi i$

ΑΡΑ: $\boxed{f(z) = 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}}$

Θεμελιώδες Θεώρημα "Άλγεβρας"

Έστω $P(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$

$a_n \neq 0$, πολυώνυμο βαθμού $n \geq 1$

Τότε το $P(z)$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $\mathbb{C}$.

<u>Απόδειξη</u>: Έστω το $P(z)$ δεν έχει ρίζα στο $\mathbb{C}$.
Τότε η : $f(z) = \frac{1}{P(z)}$ είναι <u>ακέραια</u> συνάρτηση.

Θα χρησιμοποιήσω την ανισότητα:

Αν.

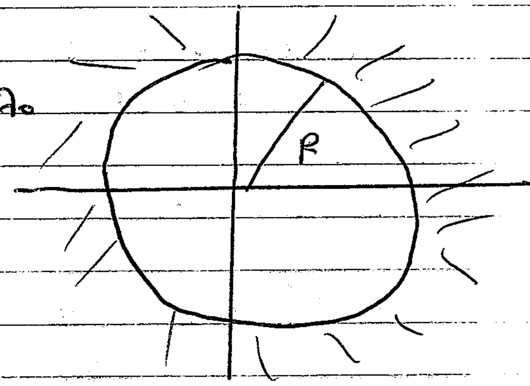
$$\frac{1}{2}|a_n||z|^n \leq |P(z)| \leq \frac{3}{2}|a_n||z|^n, \quad \forall |z| \geq R \quad \left(1/2 - 3/2\right)$$

<u>Ειδικά</u> $|P(z)| \geq \frac{1}{2}|a_n||z|^n$, $|z| \geq R$

$$\geq \frac{1}{2}|a_n| R^n$$

Επομένως:

$$|f(z)| = \frac{1}{|p(z)|} \leq \frac{2}{|a_n|R^n}, \quad \forall |z| \geq R \quad (1)$$



Επειδή f συνεχής και το σύνολο $|z| \leq R$ συμπαγές, η f θα είναι φραγμένη στο $|z| \leq R$.
Έστω

$$|f(z)| \leq M, \quad \forall |z| \leq R \quad (2)$$

Από (1) και (2) : $|f(z)| \leq \max\left\{M, \frac{2}{|a_n|R^n}\right\}$

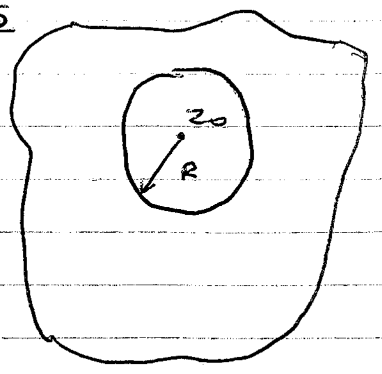
$\forall z \in \mathbb{C}$

Από κλασικό Θ. Liouville $\Longrightarrow$ $f = \sigma\tau\alpha\theta.$ $\Longleftrightarrow$
$\boxed{P = \sigma\tau\alpha\theta., \text{ ΑΤΟΠΟ}}$

(Άρα το $P(z)$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα και κατά συνέπεια n-ρίζες)

08/06/12

Αρχή Μεγίστου/Ελαχίστου - Εφαρμογές



Θεώρημα Μέσης Τιμής του Gauss

Έστω η f αναλυτική (ολόμορφη) $G \rightarrow$ στον απλά συνεκτικό τόπο (πεδίο) G. Αν ο κύκλος: $C(z_0, R): |z-z_0| = R$ βρίσκεται μέσα στο G, τότε:

$$\boxed{f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + Re^{it})\, dt}$$

Απόδειξη:

Τύπος Cauchy:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=R} \frac{f(z)}{z-z_0}\, dz = \left\{ |z-z_0| = R : z = z_0 + Re^{it},\ 0 \le t \le 2\pi \right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+Re^{it})}{Re^{it}} \cdot iRe^{it} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+Re^{it})\, dt \quad \blacksquare$$

Θεώρημα Μέσης Τιμής του Gauss για αρμονικές συναρτήσεις

Έστω $u: G \rightarrow \mathbb{R}$ αρμονική στον απλά συνεκτικό τόπο (πεδίο) G. Αν ο κύκλος: $C(z_0, R): |z-z_0| = R$ βρίσκεται μέσα στο G, τότε:

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0+Re^{it})\, dt$$

Απόδειξη:

Στον απλό συνεκτικό τόπο G, η αρμονική συνάρτηση u έχει συζυγή αρμονική v. Δηλαδή η $f = u+iv$ θα είναι <u>αναλυτική στο G</u>. Από προηγούμενο Θεώρημα:

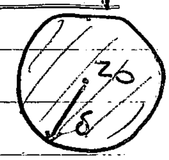
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+Re^{it})\,dt$$ Άρα:

$$u(z_0) = Re(f(z_0)) = Re\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+Re^{it})\,dt\right\} =$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Re\left\{f(z_0+Re^{it})\right\} dt$$

ΑΡΑ: $$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0+Re^{it})\,dt \quad \blacksquare$$

Ορισμοί: Έστω συνάρτηση $f: G \to \mathbb{C}$, G ανοικτό σύνολο.

① Λέμε ότι το $z_0 \in G$ είναι τοπικό μέγιστο της f αν υπάρχει περιοχή $D(z_0,\delta) \subseteq G$ του G_0 τ.ω. $|f(z)| \leq |f(z_0)|$, $\forall z \in D(z_0,\delta)$



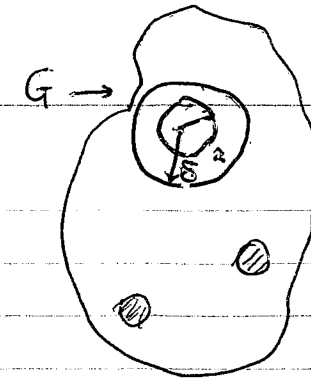
$D(z_0,\delta)$

② Το z_0 θα είναι τοπικό ελάχιστο, αν $|f(z)| \geq |f(z_0)|$, $\forall z \in D(z_0,\delta)$

• Αρχή Μεγίστου (1^{η} διατύπωση)
Έστω η $f: G \to \mathbb{C}$ είναι αναλυτική στον τόπο (πεδίο) G. Τότε η f δεν έχει τοπικό μέγιστο στο G (εκτός αν η f = σταθερή)

Απόδειξη:
Έστω η f έχει τοπικό μέγιστο στο $z_0 \in G$.
Τότε υπάρχει $D(z_0,\delta) \subseteq G$ τ.ω.

$$|f(z)| \leq |f(z_0)|, \quad \forall z \in D(z_0,\delta)$$



Αν $0<R<\delta$, από υπόθεση:

$|f(z_0+Re^{it})| \le |f(z_0)|$, $\forall t \in [0,2\pi]$ ⊛

Από Θ.Μ.Τ. του Gauss:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+Re^{it})\,dt \Longrightarrow$$

$$|f(z_0)| \ge \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0+Re^{it})|\,dt \quad (1)$$

Από ⊛ $\Longrightarrow \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(z_0+Re^{it})|\,dt \le \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(z_0)|\,dt$

$$= |f(z_0)| \cdot \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dt = |f(z_0)| \quad (2)$$

<u>Από (1) και (2)</u>: $|f(z_0)| = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} |f(z_0+Re^{it})|\,dt \iff$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0)|\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0+Re^{it})|\,dt \iff$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big[\,|f(z_0)| - |f(z_0+Re^{it})|\,\Big]\,dt = 0$$

<u>ΑΡΑ</u>:

$|f(z_0+Re^{it})| = |f(z_0)| \ge 0$ από ⊛

Έχουμε δείξει ότι: $|f(z)| = |f(z_0)| =$ σταθ., $\forall z \in C(z_0,R)$

$\Rightarrow$ $|f(z)| = |f(z_0)| =$ σταθ. $\forall z \in D(z_0,\delta)$

Από "Βασικό Παράδειγμα" $f(z) =$ σταθ., $\forall z \in D(z_0,\delta)$.

Τότε από "Αρχή Ταυτοεισμού" $\Longrightarrow f(z) =$ σταθ., $\forall z \in G$.

∎

- **Αρχή Ελαχίστου ($1^η$ διατύπωση):**
Έστω η $f: G \to \mathbb{C}$ είναι αναλυτική στον τόπο (πεδίο) G με $f(z) \neq 0$, $\forall z \in G$. Τότε η f δεν έχει τοπικό ελάχιστο στο G (εκτός αν η f = σταθερή)

Απόδειξη: Θεωρείς την $g(z) = \frac{1}{f(z)}$. Αν η f έχει τοπικό ελάχιστο στο $z_0 \in G$, η g θα έχει τοπικό μέγιστο στο z_0. Από "αρχή μεγίστου" g = σταθ. $\Longrightarrow$ f = σταθ.

★ **Αρχή Μεγίστου ($2^η$ διατύπωση):**
Έστω η $f: G \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο φραγμένο τόπο (πεδίο) G. Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο σύνορο ∂G του G. Τότε η $|f(z)|$ παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο σύνορο ∂G (εκτός αν η f = σταθ.)

Απόδειξη: Επειδή το σύνολο $G \cup \partial G$ είναι συμπαγές (κλειστό και φραγμένο) και η $|f(z)|$ είναι συνεχής στο $G \cup \partial G$, από γνωστό Θεώρημα της "Ανάλυσης" η $|f(z)|$ παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο $G \cup \partial G$.
Από "Αρχή μεγίστου ($1^η$ διατύπωση)" η $|f(z)|$ δεν μπορεί να παίρνει τη μέγιστη τιμή στο G. ②
Άρα, η $|f(z)|$ παίρνει τη μέγιστη τιμή στο σύνορο. ∎

★ **Αρχή Ελαχίστου ($2^η$ διατύπωση)**
Έστω η $f: G \to \mathbb{C}$ είναι αναλυτική στο φραγμένο τόπο (πεδίο) G, με $f(z) \neq 0$, $\forall z \in G$ και η f συνεχής στο σύνορο ∂G του G. Τότε η $|f(z)|$ παίρνει την ελάχιστη τιμή της στο σύνορο ∂G (εκτός αν f = σταθ.)

Απόδειξη: Θεωρείς τη $g(z) = \frac{1}{f(z)}$. Αν έχει ελάχιστο στο $z_0 \in G$, η g θα έχει μέγιστο στο z_0. Από "αρχή μεγίστου"

$g = \sigma\tau\alpha\theta. \Longrightarrow f = \sigma\tau\alpha\theta.$

ΑΡΧΗ ΤΑΥΤΟΤΙΣΜΟΥ

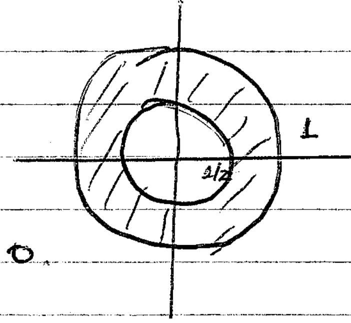
Έστω $f, g : G \to \mathbb{C}$ αναλυτικές στον τόπο (πεδίο) G.

(1) Αν $f^{(n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0) \iff (f-g)^{(n)}(z_0) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$
(Το z_0 είναι ρίζα "άπειρης τάξης" της $f-g$), τότε:
$f - g = 0 \iff \underline{f(z) = g(z), \ \forall z \in G}$

(2) Αν $f(z) = g(z) \iff (f-g)(z) = 0$, $\forall z \in D(z_0, \delta) \subseteq G$,
τότε $f - g \equiv 0$, δηλαδή $\underline{f(z) = g(z)}$, $\forall z \in G$

Ασκήσεις

[1] $f(z) = \dfrac{e^z}{z}$, $\forall z \in \Delta \{ z \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} \leq |z| \leq 1 \}$



Λύση:

Η $f(z) = \dfrac{e^z}{z}$ αναλυτική στο Δ, $f(z) \neq 0$.

Από "αρχή μεγίστου/ελαχίστου" θα εξετάσουμε την f στο σύνορο: $|z| = 1/2$, $|z| = 1$

(i) $|z| = \frac{1}{2} \iff z = \frac{1}{2} e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$|f(z)| = \frac{|e^z|}{|z|} = \frac{|e^{\frac{1}{2}e^{i\theta}}|}{\frac{1}{2}} = 2\left|e^{\frac{1}{2}(\cos\theta + i\sin\theta)}\right| =$$

$$2\left|e^{\frac{\cos\theta}{2}}\right| \cdot \left|e^{\frac{i\sin\theta}{2}}\right| = 2e^{\cos\theta/2} = \begin{cases} \max = 2e^{1/2}, & \theta = 0 \\ \min = 2e^{-1/2}, & \theta = \pi \end{cases}$$

(ii) $|z| = 1 \iff z = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$|f(z)| = e^{\cos\theta} = \begin{cases} \max = e, & \theta = 0 \\ \min = \frac{1}{e}, & \theta = \pi \end{cases}$$

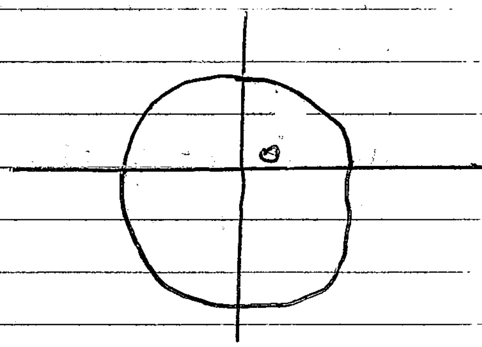
Τελικά:

$$\boxed{\max_{z \in \Delta} |f(z)| = 2\sqrt{e}, \quad \min_{z \in \Delta} |f(z)| = \frac{1}{e}}$$

[2] Η $f: \bar{D}(0,1) \longrightarrow \mathbb{C}$ αναλυτική στον κλειστό δίσκο
$\bar{D}(0,1) = \{ z \in \mathbb{C} : |z| \le 1 \}$

Αν
$$|f(z)| \le \begin{cases} 2, & \text{αν } \operatorname{Im} z \ge 0, \ |z| = 1 \\ 3, & \text{αν } \operatorname{Im} z \le 0, \ |z| = 1 \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι $|f(0)| \le \sqrt{6}$



Λύση:

Σημείωση: Από αρχή μεγίστου $|f(z)| \le 3, \ \forall z \in D(0,1)$
Άρα $|f(0)| \le 3$

Ορίζω τη συνάρτηση $g: \bar{D}(0,1) \longrightarrow \mathbb{C}$ με

$g(z) := f(z) f(-z)$

$$|g(z)| = |f(z)||f(-z)| \le \begin{cases} 2 \cdot 3 = 6, & \operatorname{Im} z \ge 0, \ |z| = 1 \\ 3 \cdot 2 = 6, & \operatorname{Im} z < 0, \ |z| = 1 \end{cases}$$

$\Longrightarrow |g(z)| \le 6, \ \forall |z| = 1$

Από αρχή μεγίστου $\Longrightarrow |g(z)| \le 6, \ \forall |z| < 1 \iff$

$|f(z)||f(-z)| \le 6, \ |z| < 1$

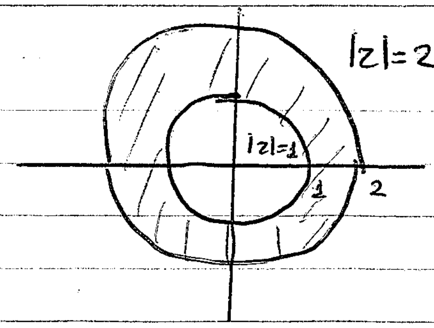
Ειδικά για $z = 0$: $|f(0)| \cdot |f(-0)| \le 6 \iff$
$|f(0)|^2 \le 6 \iff \boxed{|f(0)| \le \sqrt{6}}$

[3] $\Delta = \{ z \in \mathbb{C} : 1 \leq |z| \leq 2 \}$

Αν

(i) $|f(z)| \leq 1, \ \forall |z| = 1$

(i) $|f(z)| \leq 4, \ \forall |z| = 2$ $\Longrightarrow$



$|f(z)| \leq |z|^2, \ \forall z \in \Delta$

Λύση:

(Θεωρώ την $g = \dfrac{f(z)}{z^2}$)

11/06/12

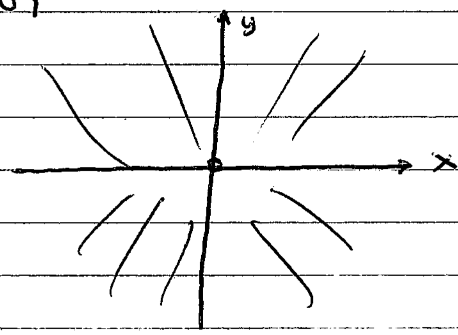
Ανάπτυγμα συνάρτησης σε σειρά Laurent

- Το σημείο $z_0 \in \mathbb{C}$ λέμε ότι είναι ανώμαλο σημείο της συνάρτησης f, αν η f δεν είναι αναλυτική στο z_0 (η f μπορεί να μην ορίζεται στο z_0).

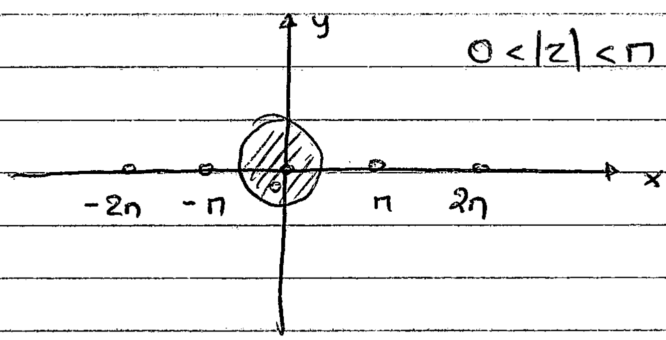
- Θα λέμε ότι το $z_0 \in \mathbb{C}$ είναι μεμονωμένο ανώμαλο σημείο της f, αν υπάρχει περιοχή $D(z_0, \delta)$ του z_0 τ.ω. η f να είναι αναλυτική, $\forall z \in D(z_0, \delta)$ με $z \neq z_0$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

[1] $f(z) = e^{1/z}$. Το 0 είναι μεμονωμένο ανώμαλο σημείο. Η $f(z) = e^{1/z}$ είναι αναλυτική $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

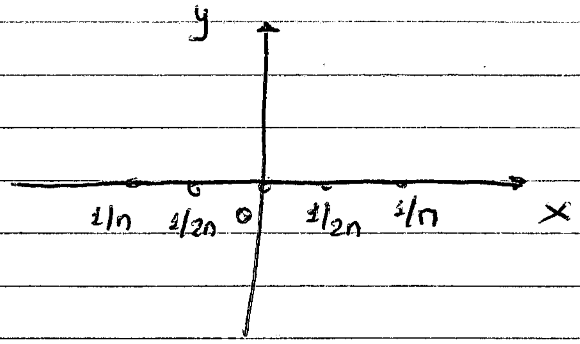


[2] $f(z) = \dfrac{1}{\sin z}$. Τα $z_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, είναι μεμονωμένα ανώμαλα σημεία της f.



[3] $f(z) = \dfrac{1}{\sin(\frac{1}{z})}$. Τα ανώμαλα σημεία της f είναι:

$$\left\{ 0, \pm\frac{1}{\pi}, \pm\frac{1}{2\pi}, \pm\frac{1}{3\pi}, \dots \right\}$$



Έστω $D(0,\delta) = \{ z : |z| < \delta \}$, δ = σταθερά, περιοχή του 0.

Το 0 είναι ανώμαλο σημείο της $f(z) = \dfrac{1}{\sin(\frac{1}{z})}$

Όμως το 0 δεν είναι μεμονωμένο! Πράγματι για αρκετά μεγάλο n, το $\dfrac{1}{n\pi} < \delta$.

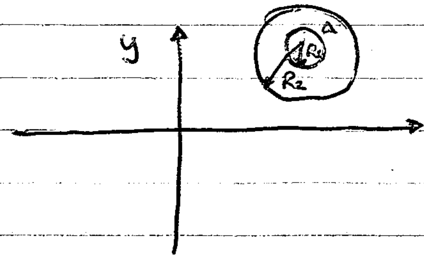
—

Ορισμός: Ένας δακτύλιος στο $\mathbb{C}$ κέντρου z_0 με εσωτερική ακτίνα R_1 και εξωτερική ακτίνα R_2, $R_1 < R_2$, είναι το σύνολο

$$\Delta = \left\{ z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2 \right\}, \text{ όπου}$$

$0 \le R_1 < R_2 \le \infty$

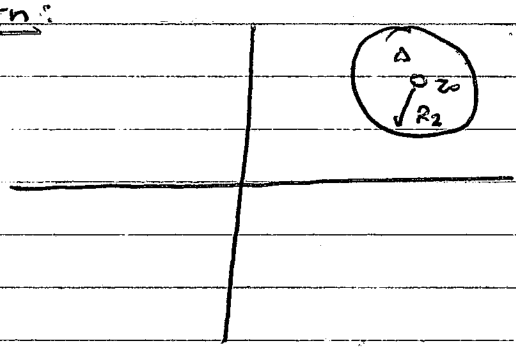
1η περίπτωση: $0 < R_1 < R_2 < \infty$



* SOS → Διατύπωση

• $2^η$ περίπτωση:

$0 = R_1 < R_2 < \infty$

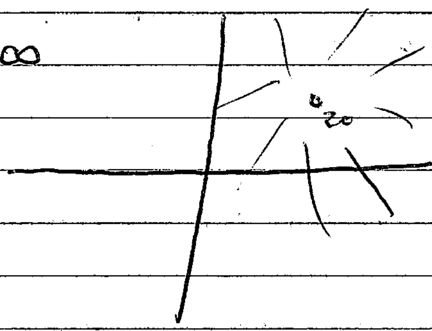


← Διάτρητος δίσκος

$\Delta: \ 0 < |z - z_0| < R_2$

• $3^η$ περίπτωση:

$0 = R_1 < R_2 = \infty$

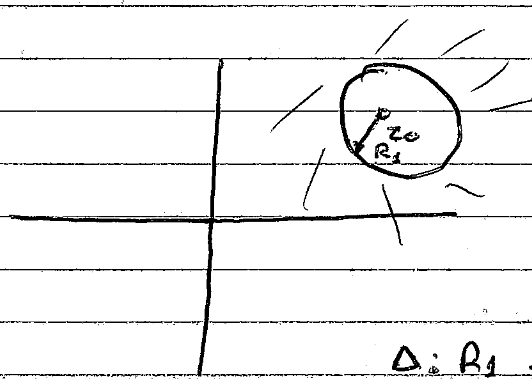


← $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$

$\Delta: \ 0 < |z - z_0| < \infty$

• $4^η$ περίπτωση:

$0 < R_1 < R_2 = \infty$



Δ: εξωτερικός δακτύλιος

$\Delta: R_1 < |z - z_0| < \infty$

* Θεώρημα Laurent: Έστω η $f: \Delta \to \mathbb{C}$ είναι αναλυτική στο δακτύλιο $\Delta = \{ z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2 \}$

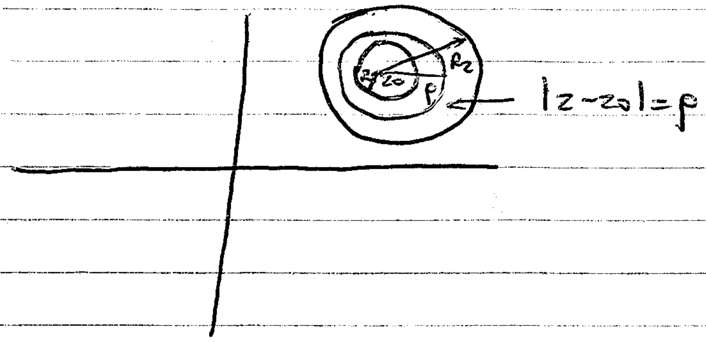
με κέντρο το z_0 $\left(0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty \right)$. Τότε η f

γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \forall z \in \Delta$$

όπου $a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \, dz \quad , n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$R_1 < \rho < R_2$

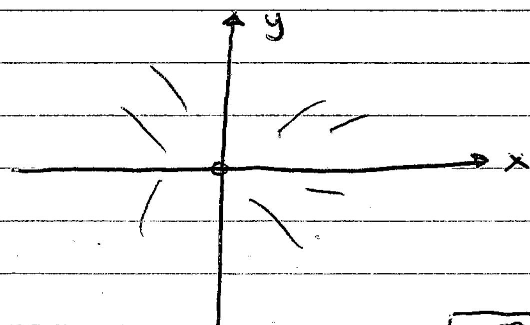


ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

(1) Ανάπτυγμα Laurent της $f(z) = \frac{\sin z}{z^5}$

Λύση:

$\Delta: 0<|z|<\infty$



$$f(z) = \frac{1}{z^5} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n-4}}{(2n+1)!}}$$

$$= z^{-4} - \frac{z^{-2}}{3!} + \underbrace{\frac{1}{5!} - \frac{z^2}{7!} + \frac{z^4}{9!}}_{\text{Taylor}} - \dots$$

Παρατήρηση: Αν $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, όπου P, Q πολυώνυμα, για την εύρεση του αναπτύγματος Laurent "συμφέρει" να χρησιμοποιήσεις τη γεωμετρική σειρά:

$$\left\{ \frac{1}{1-w} = \sum_{n=0}^{\infty} w^n, \quad |w|<1 \right.$$

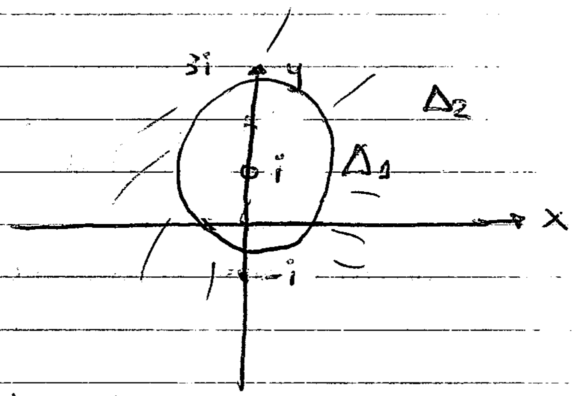
$$\frac{1}{1+w} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w^n, \quad |w|<1$$

(2) Να βρεθεί το ανάπτυγμα Laurent της $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$ με κέντρο το $z_0 = i$ σε όλους τους δακτ.

Λύση: $\dfrac{1}{z^2+1} = \dfrac{1}{(z-i)(z+i)}$

$\Delta_1 : 0 < |z-i| < 2$

$\Delta_2 : 2 < |z-i| < \infty$



1η περίπτωση: $\Delta_1 : 0 < |z-i| < 2$

(α' τρόπος)

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)[(z-i)+2i]}$$

$$= \frac{1}{2i(z-i)\left(1+\underbrace{\frac{z-i}{2i}}_{w}\right)}$$

$$= \frac{1}{2i(z-i)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-i}{2i}\right)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-i)^{n-1}}{(2i)^{n+1}} \qquad (k=n-1)$$

$$= \boxed{\sum_{k=-1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(z-i)^k}{(2i)^{k+2}}}$$

$$= \frac{(z-i)^{-1}}{2i} - \frac{1}{(2i)^2} + \frac{(z-i)}{(2i)^3} + \dots, \quad |z-i|<2$$

$$|w| = \left|\frac{z-i}{2i}\right| < 1 \iff |z-i| < 2 \quad \checkmark \text{ (ισχύει)}$$

(β' τρόπος) Από Θ. Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-i)^n , \quad 0<|z-i|<2$$

όπου
$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\substack{|z-i|=\rho \\ 0<\rho<2}} \frac{\frac{1}{(z+i)(z-i)}}{(z-i)^{n+1}} dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-i|=\rho} \frac{1/(z+i)}{(z-i)^{n+2}} dz = \frac{1}{(n+1)!} \left\{ \frac{(n+1)!}{2\pi i} \oint_{|z-i|=\rho} \frac{\frac{1}{z+i}}{(z-i)^{n+2}} dz \right]$$

$$= \begin{cases} 0 \quad (\Theta.\ \text{Cauchy}), & n+2 \leq 0 \iff n \leq -2 \\ \frac{1}{(n+1)!} \left[\frac{1}{z+i} \right]^{(n+1)} \Big|_{z=i}, & n+2 \geq 1 \iff n \geq -1 \end{cases}$$

Τύπος Cauchy για παραγώγους

$$\left(\frac{1}{z+i}\right)' = \left[(z+i)^{-1}\right] = -1\,(z+i)^{-2}$$

$$\left(\frac{1}{z+i}\right)'' = \left[-1(z+i)^{-2}\right]' = +2(z+i)^{-3}$$

$$\vdots$$

$$\left(\frac{1}{z+i}\right)^{(n+1)} = \quad\ldots\quad = (-1)^{n+1} (n+1)!\,(z+i)^{-(n+2)}$$

Για $z=i$

$$\left(\frac{1}{z+i}\right)^{(n+1)}\Big|_{z=i} = (-1)^{n+1}(n+1)!\,(2i)^{-(n+2)}$$

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} (-1)^{n+1} (n+1)!\, \frac{1}{(n+1)!}\, (2i)^{-(n+2)} (z-i)^n$$

$$= \boxed{\sum_{n=-1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2i)^{n+2}} (z-i)^n}$$

2^{η} περίπτωση:

Δ_2 : $|z-i|>2$: $\quad f(z) = \dfrac{1}{(z-i)(z+i)}$

$$= \frac{1}{(z-i)[(z-i)+2i]} = \frac{1}{(z-i)^2\left[1+\frac{2i}{z-i}\right]} \to w$$

$$\left(|w|<1 \iff \left|\frac{2i}{z-i}\right|<1 \iff |2i|<|z-i| \iff 2<|z-i| \checkmark \right)$$

$$= \frac{1}{(z-i)^2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2i}{z-i}\right)^n = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2i)^n \cdot \frac{1}{(z-i)^{n+2}}}$$

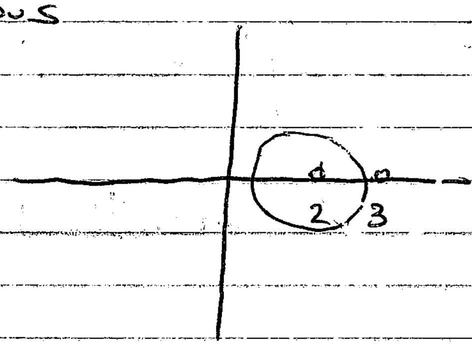
Άσκηση: $f(z) = \dfrac{1}{z^2-5z+6} = \dfrac{1}{(z-2)(z-3)}$

$$= \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2}$$

Ανάπτυγμα Laurent με κέντρο το $z_0=2$ σ'όλους τους δυνατούς δακτυλίους

Δ_1 : $0<|z-2|<1$

Δ_2 : $|z-2|>1$



12/06/12

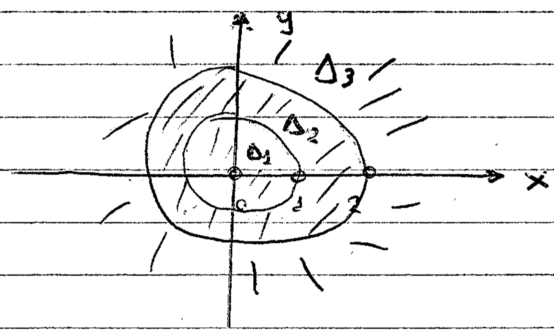
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

[1] Το ανάπτυγμα Laurent της

$$f(z)=\frac{1}{z(z-1)(z-2)} = \frac{1}{2}\frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} + \frac{1}{2}\frac{1}{z-2}$$

με κέντρο το $z_0=0$ σ' όλους τους δυνατούς δακτυλίους είναι:

$$f(z) = \begin{cases} \frac{1}{2 \cdot z} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+2}}\right) z^n, & 0<|z|<1 \\ +\frac{1}{2}\frac{1}{z} - \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{z^n} - \frac{1}{4}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}, & 1<|z|<2 \\ \sum_{n=3}^{\infty}\left(2^{n-2}-1\right) z^n, & |z|>2 \end{cases}$$



Λύση:

Δ_1: $0<|z|<1$ και Δ_3: $|z|>2$ (Άσκηση για σπίτι)

Δ_2: $1<|z|<2$

$$f(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{z} - \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{1-z/2}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{z} - \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n - \frac{1}{2^2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+2}}}$$

$$\left(\cdot\ w=\frac{1}{z} \Rightarrow |w| = \frac{1}{|z|} < 1 \Leftrightarrow |z|>1 \quad \checkmark \right)$$

$*\ \left(\text{ὁ } w = \frac{z}{2} \longrightarrow |w| = \frac{|z|}{2} < 1 \Rightarrow |z| < 2 \ \checkmark \right)$

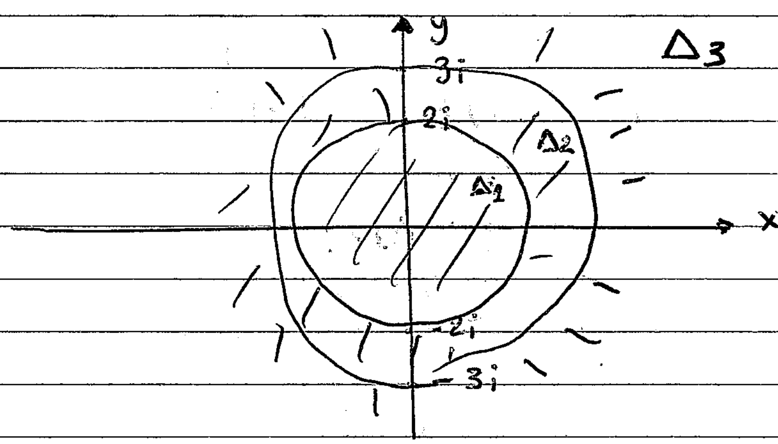
[2] Το ανάπτυγμα Laurent της

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+4)(z^2+9)} = \frac{1}{5}\left[\frac{1}{z^2+4} - \frac{1}{z^2+9}\right]$$

με κέντρο το $z_0 = 0$ στο μεγαλύτερο δυνατό δακτύλιο που περιέχει το: $2-i$

<u>Λύση</u>: Τα ανώμαλα σημεία της f είναι:

$\pm 2i \ , \ \pm 3i$



$\Delta_1 : 0 \le |z| < 2$

$\Delta_2 : 2 \le |z| < 3$

$\Delta_3 : |z| > 3$

Επειδή $|2-i| = \sqrt{5}$, το $2-i \in \Delta_2$

$\Delta_2 : \ 2 < |z| < 3$

$$f(z) = \frac{1}{5}\left[\frac{1}{z^2+4} - \frac{1}{z^2+9}\right]$$

$$= \frac{1}{5}\left[\frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{1+(4/z^2)} - \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{z^2}{9}\right)}\right]$$

$$= \frac{1}{5}\left[\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{4}{z^2}\right)^n - \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z^2}{9}\right)^n\right]$$

$=$

① $w = \frac{4}{z^2} \Rightarrow$

$|w| = \frac{4}{|z|^2} < 1 \iff$

$|z| > 2$

② $w = \frac{z^2}{9} \Rightarrow$

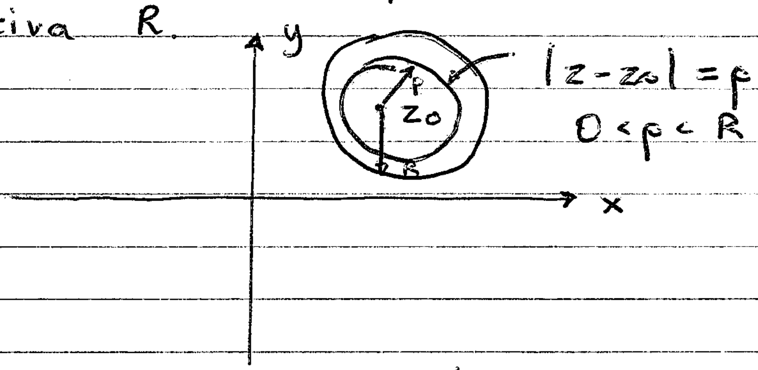
$|w| = \frac{|z|^2}{9} < 1 \Rightarrow$

$|z| < 3$

$$= \frac{1}{5}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n}{z^{2n+2}} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{9^{n+1}}\right]$$

Ταξινόμηση Ανώμαλων Σημείων

• Έστω z_0 μεμονωμένο ανώμαλο σημείο και έστω $\Delta: 0<|z-z_0|<R$ διάτρητος δίσκος με κέντρο z_0 και ακτίνα R.



Από το Θεώρημα Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \quad 0<|z-z_0|<R \quad \text{όπου}$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=\rho}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz, \quad n=0,\pm1,\pm2$$

Ο συντελεστής a_{-1} λέγεται <u>ολοκληρωτικό υπόλοιπο της f στο z_0</u>:

συμβολισμός:

$$a_{-1} = \operatorname{Res}(f,z_0) = \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)$$

Είναι:

$$\boxed{\operatorname{Res}(f,z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=\rho} f(z)\,dz}$$

(i) $a_n = 0$, για $n = -1, -2, \dots$

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad 0 < |z-z_0| < R} \qquad (*)$$

Τότε λέμε ότι το z_0 είναι επουσιώδες ή απαλείψιμο ή εξουδετερώσιμο ή αιρόμενο ανώμαλο σημείο της f.

Σ' αυτή την περίπτωση $Res(f, z_0) = 0$

Παραδείγματα:

① $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$, $0 < |z| < \infty$

$$f(z) = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)!}$$

$$= 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$$

Αν $g(z) = \begin{cases} \dfrac{\sin z}{z}, & z \neq 0 \\ 1, & z = 0 \end{cases}$

Η g είναι αναλυτική σε όλο το $\mathbb{C}$.

② $g(z) = \dfrac{e^z - 1}{z}$, $0 < |z| < \infty$

$$g(z) = \frac{1}{z}\left(z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \right)$$

$$= 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots$$

Το "0" είναι επουσιώδες σημείο.

$$H \quad h(z) = \begin{cases} \dfrac{e^z - 1}{z}, & z \neq 0 \\ 1, & z = 0 \end{cases}$$

Η h είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$.

Πρόταση 1

Το z_0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της f

$\Leftrightarrow$ $\lim_{z \to z_0} f(z)$ υπάρχει $\Leftrightarrow$ $\lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = 0$

$\Leftrightarrow$ f φραγμένη σε μία διάτρητη περιοχή $0 < |z - z_0| < \delta$, του z_0

(ii) $\underline{a_{-k} \neq 0, \; a_{-k-1} = a_{-k-2} = \ldots = 0}$

Τότε από την $(*)$ $\Longrightarrow$

$$f(z) = a_{-k}(z - z_0)^{-k} + a_{-k+1}(z - z_0)^{-k+1} + \ldots + a_{-1}(z - z_0) + a_0 + a_1(z - z_0) + \ldots$$

$$= \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k} + \frac{a_{-k+1}}{(z - z_0)^{k-1}} + \ldots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \ldots \qquad 0 < |z - z_0| < R$$

Τότε το z_0 είναι πόλος τάξης k

Αν λοιπόν το z_0 είναι πόλος τάξης k, τότε:

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^k} \Big[a_{-k} + a_{-k+1}(z - z_0) + \ldots + a_{-1}(z - z_0)^{k-1}$$

$$\underbrace{+ a_0 (z - z_0)^k + \ldots}_{g(z)} \Big] = \boxed{\frac{g(z)}{(z - z_0)^k}}, \quad 0 < |z - z_0| < R$$

όπου g είναι αναλυτική στο δίσκο $|z - z_0| < \delta$ με $g(z_0) = a_{-k} \neq 0$

Πρόταση 2

Το z_0 είναι πόλος τάξης κ της f $\Longleftrightarrow$ $f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-z_0)^{\kappa}}$, g αναλυτική σε περιοχή του z_0 με $g(z_0) \neq 0 \Longleftrightarrow \lim\limits_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$

(iii) $a_{-n} \neq 0$, για άπειρο το πλήθος $n \in \mathbb{N}$

(να έχω άπειρες το πλήθος αρνητικές δυνάμεις του $(z-z_0)$).

Τότε το z_0 είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο της f.

Πρόταση 3

Το z_0 είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο της f $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{z \to z_0} |f(z)|$ δεν υπάρχει και δεν ισούται με $+\infty$

Παρατήρηση: Έστω $f(z) = \dfrac{\varphi_1(z)}{\varphi_2(z)}$

Αν το z_0 είναι ρίζα τάξης $m \in \mathbb{N}$ της $\varphi_2(z)$ και ρίζα τάξης n της $\varphi_1(z)$ με $m > n$, το z_0 είναι πόλος τάξης $m-n$ της f.

- Αν $m \leq n$, τότε το z_0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

[1] $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z^2}$

Το "0" είναι ρίζα τάξης "1" της $e^z - 1$ $\longrightarrow$

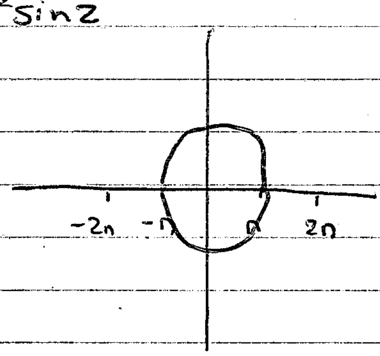
" " " " " "2" " "

$\boxed{Res(f, 0) = 1}$

Το "0" είναι πόλος τάξης 1 της f

$$f(z) = \frac{1}{z^2}\left(z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots\right) = \frac{1}{z} + \frac{1}{2!} + \frac{z}{3!} + \dots$$

[2] $f(z) = \dfrac{1}{z^2 \sin z}$, $0 < |z| < \pi$



Το "0" είναι πόλος τάξης 3.

$$\frac{1}{z^2 \sin z} = \frac{a_{-3}}{z^3} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + \dots$$

$$\Updownarrow$$

$$1 = \left(\frac{a_{-3}}{z^3} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + \dots\right) z^2 \sin z$$

$$\Updownarrow$$

$$1 = \left(\frac{a_{-3}}{z^3} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + \dots\right) \cdot z^2\left(z - \frac{z^3}{3!} + \dots\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$1 = a_{-3} + a_{-2} z + \left(-\frac{a_{-3}}{3!} + a_{-1}\right) z^2 + \dots$$

$$\begin{cases} 1 = a_{-3} \\ 0 = a_{-2} \\ -\dfrac{a_{-3}}{3!} + a_{-1} = 0 \end{cases} \Longrightarrow \left(\begin{array}{l} a_{-3} = 1 \\ a_{-2} = 0 \\ a_{-1} = 1/3! \end{array} \right)$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2 \sin z}, 0\right) = a_{-1} = \boxed{\frac{1}{6}}$$

19/06/12

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ (Ταξινόμηση Ανώμαλων Σημείων)

[1] $f(z) = \cos\left(e^{1/z}\right)$. Εξετάστε το είδος του ανώμαλου σημείου $z=0$

Λύση:

$z_n = \dfrac{1}{\ln n\pi}$, $n \in \mathbb{N}$ $\quad z_n \to 0$ και

$f(z_n) = \cos\left(e^{\ln n\pi}\right) = \cos n\pi = (-1)^n$

Επομένως το $\lim\limits_{n\to\infty} f(z_n)$ δεν υπάρχει!

Άρα το $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ δεν υπάρχει και κατά συνέπεια

το $z=0$ είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο της f.

[2] Αν το z_0 είναι πόλος τάξης $n \in \mathbb{N}$ της $w=f(z)$, τότε το z_0 είναι πόλος τάξης $n+1$ της $f'(z)$

Λύση:

Επειδή το z_0 είναι πόλος τάξης n της $f(z)$,

(*) $\boxed{f(z) = \dfrac{g(z)}{(z-z_0)^n}}$, όπου g αναλυτική σε μία περιοχή

Δ $|z-z_0|<\delta$ του z_0 με $g(z_0) \neq 0$

Από (*) για $0<|z-z_0|<\delta \Longrightarrow$

$$f'(z) = \frac{g'(z)(z-z_0)^n - n(z-z_0)^{n-1}g(z)}{(z-z_0)^{2n}}$$

$$= \frac{g'(z)(z-z_0) - ng(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$$

$$= \boxed{\frac{h(z)}{(z-z_0)^{n+1}}}, \text{ όπου } \quad \boxed{**}$$

$h(z) := g'(z)(z-z_0) - n\, g(z)$

Η h είναι αναλυτική στην περιοχή
$\Delta: |z-z_0|<\delta$ με

$h(z_0) = -n\, g(z_0) \neq 0$

Από την (**) συμπεραίνουμε ότι το z_0 είναι πόλος τάξης $\underline{n+1}$ της $f'(z)$.

[3] $f(z) = \dfrac{e^{1/z}}{1+z^2}$. Εξετάστε το είδος του ανώμαλου σημείου $z=0$ και υπολογίστε το $Res(f,0)$.

Λύση:

$z_n = \dfrac{1}{2n\pi i}$, $n \in \mathbb{N}$ $\quad z_n \to 0$ και

$$f(z_n) = \frac{e^{2n\pi i}}{1-\frac{1}{4n^2\pi^2}} = \frac{1}{1-\frac{1}{4n^2\pi^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Αν $w_n = \dfrac{1}{2n\pi i+\pi i}$, $n \in \mathbb{N}$

Τότε $w_n \to 0$ και

$$f(w_n) = \frac{e^{2n\pi i}\cdot e^{\pi i}}{1-\frac{1}{(2n\pi i+\pi)^2}} = \frac{-1}{1-\frac{1}{(2n\pi+\pi)^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} -1$$

Από Θ. Μεταφοράς το όριο
$\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ $\underline{\text{δεν}}$ υπάρχει.

Άρα το $\underline{z=0}$ είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο.

Ως γνωστόν

$$\boxed{\begin{array}{l} e^{w} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}, \quad \forall w \in \mathbb{C} \\ \hline \frac{1}{1+w} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w^n, \quad |w|<1 \end{array}}$$

Επομένως για $0<|z|<1$ έχουμε:

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} e^{1/z} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\, z^n} \right)$$

$$= \left(1 - z^2 + z^4 - z^6\right) \cdot \left(1 + 1/z + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots\right)$$

$$= \dots + \frac{1}{z}\left(1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!} - \dots\right) \Longrightarrow$$

$$\operatorname{Res}(f, 0) = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} \dots = \boxed{\sin 1}$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} =$$

Για $z=1$: $\sin 1 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \dots$

[4] Έστω το $z_0 \in \mathbb{C}$ είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο της $w = f(z)$. Τι είδους ανώμαλο σημείο είναι το z_0 της $w = f^2(z)$;

Λύση

① Έστω το z_0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της $w = f^2(z)$.
Τότε η $f^2(z)$ είναι φραγμένη σε διάτρητη περιοχή του z_0, δηλαδή:

$$\boxed{f^2(z) \le M, \quad \forall \quad 0<|z-z_0|<\delta}$$

$$\Downarrow$$

(*) $\boxed{|f(z)| \le \sqrt{M}, \quad \forall \quad 0<|z-z_0|<\delta}$

Από (*) $\Longrightarrow$ Το z_0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της $f(z)$. (ΑΤΟΠΟ)

(2) Έστω το z_0 είναι πόλος της $f^2(z)$

Τότε $\lim_{z\to z_0} |f^2(z)| = +\infty$

Επομένως $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = +\infty$ (**)

Από (**) $\Longrightarrow$ Το z_0 είναι πόλος της $f(z)$. (ΑΤΟΠΟ)

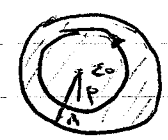
Άρα το z_0 είναι <u>ουσιώδες ανώμαλο σημείο</u> της $f^2(z)$.

<u>ΑΣΚΗΣΗ</u>: Έστω f, g συναρτήσεις αναλυτικές σε διάτρητη περιοχή του $z_0 \in \mathbb{C}$.
Αν το z_0 είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο της f και πόλος της g, τότε,
το z_0 είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο της $f(z)\cdot g(z)$
Το ίδιο ισχύει και για $\frac{f(z)}{g(z)}$ και $f(z)+g(z)$

<u>ΤΥΠΟΙ ΓΙΑ ΤΟ $Res(f, z_0)$</u>

Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$ <u>μεμονωμένο</u> <u>ανώμαλο σημείο</u> της μιγαδικής συνάρτησης $w=f(z)$.
<u>Στο διάτρητο δίσκο</u>
<u>με κέντρο το z_0</u>,

$|z-z_0|=\rho$
$0<\rho<R$



$\Delta: 0<|z-z_0|<R$

$\Delta: 0<|z-z_0|<R$
από το Θεώρημα Laurent
έχουμε:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad \forall z \in \Delta, \quad \text{όπου}$$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$$

$$\boxed{0 < \rho < R}$$

—

Το ολοκληρωτικό υπόλοιπο

$$Res(f, z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\rho} f(z) dz$$

1. Το z_0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο, δηλαδή $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \ \forall z \in A$

Τότε $Res(f, z_0) = a_{-1} = 0$

Σημείωση: Το z_0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο $\Leftrightarrow$ $\lim_{z\to z_0} f(z)$ υπάρχει $\Leftrightarrow$

$\lim_{z\to z_0} (z-z_0) f(z) = 0 \Leftrightarrow$ η f είναι φραγμένη σε διάτρητη περιοχή του z_0, δηλαδή $|f(z)| \le M, \ \forall z \in \Delta$

$\Delta : 0 < |z-z_0| < \delta$

—

2. Το z_0 είναι απλός πόλος (πόλος τάξης 1) της $w = f(z)$

Τότε: $f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \dots,$

$z \in \Delta$

Τότε: $(z-z_0) f(z) = a_{-1} + a_0 (z-z_0) + a_1 (z-z_0)^2 + \dots, \ \forall z \in \Delta$

Άρα:

$$Res(f, z_0) = a_{-1} = \lim_{z\to z_0} (z-z_0) f(z)$$

* Τύπος Cauchy

③ Το z_0 είναι πόλος τάξης $k \geq 1$

Δηλαδή $f(z) = \sum_{n=-k}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$

$$= \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k} + \frac{a_{-k+1}}{(z-z_0)^{k-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \dots, \quad z \in \Delta \qquad a_{-k} \neq 0$$

<u>Επομένως</u>: $f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^k} \left\{ a_{-k} + a_{-k+1}(z-z_0) + \dots + a_{-1}(z-z_0)^{k-1} + a_0(z-z_0)^k + \dots \right\}$

$$= \frac{g(z)}{(z-z_0)^k}, \text{ όπου } g(z) = a_{-k} + a_{-k+1}(z-z_0) + \dots + a_{-1}(z-z_0)^{k-1} + a_0(z-z_0)^k$$

αναλυτική συνάρτηση $\forall\ |z-z_0| < R$, με $g(z_0) = a_{-k} \neq 0$

<u>Εύρεση του $Res(f, z_0) = a_{-1}$</u>

Είναι $Res(f, z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\rho} f(z)dz \overset{*}{=} \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\rho} \frac{g(z)}{(z-z_0)^k} dz$

$$= \frac{1}{(k-1)!} \left\{ \frac{(k-1)!}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=\rho} \frac{g(z)}{(z-z_0)^{k-1+1}} dz \right\}$$

$$\overset{*}{=} \frac{1}{(k-1)!} g^{(k-1)}(z_0)$$

$$= \frac{1}{(k-1)!} \cdot \lim_{z \to z_0} g^{(k-1)}(z)$$

$$= \boxed{\frac{1}{(k-1)!} \cdot \lim_{z \to z_0} \left[(z-z_0)^k \cdot f(z_0) \right]^{(k-1)}}$$

<u>ΠΡΟΣΟΧΗ!</u>

Αν το z_0 είναι <u>ουσιώδες ανώμαλο σημείο</u> της f θα πρέπει να βρεις το ανάπτυγμα Laurent της f στο διάτρητο δίσκο $\Delta: 0 < |z - z_0| < R$ και να υπολογίσεις το $a_{-1} = Res(f, z_0)$

Παρατήρηση: Έστω η $w=f(z)$ είναι αναλυτική στο $z_0 \in \mathbb{C}$. Το z_0 είναι ρίζα τάξης k της f αν:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(z_0) = f'(z_0) = \dots f^{(k-1)}(z_0) = 0 \quad \text{και} \\ f^{(k)}(z_0) \neq 0 \end{array} \right\}$$

Παρατήρηση: Έστω $\boxed{f(z) = \dfrac{\varphi_1(z)}{\varphi_2(z)}}$

Υποθέτουμε ότι το z_0 είναι:
ρίζα τάξης m της φ_1 και ρίζα τάξης n της φ_2.

(α) Αν $n>m$, το z_0 είναι πόλος τάξης $n-m$ της f

(β) Αν $m \geq n$, τότε το z_0 είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της f

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

[1] $f(z) = \dfrac{\sin z - z\cos z}{z^4}$

Το "0" είναι ρίζα τάξης 4 της $\varphi_2(z) = z^4$.
- $\varphi_1(z) = \sin z - z\cos z \Rightarrow \varphi_1(0) = 0$
- $\varphi_1'(z) = \cos z - \cos z + z\sin z \Rightarrow \varphi_1'(0) = 0$
- $\varphi_1''(z) = \sin z + z\cos z \Rightarrow \varphi_1''(0) = 0$
- $\varphi_1'''(z) = \cos z + \cos z - z\sin z \Rightarrow \varphi_1'''(0) = 2 \neq 0$

Το "0" είναι ρίζα τάξης 3 της φ_1
Το "0" είναι πόλος τάξης $4-3=1$ της f

$$\text{Res}\left(\frac{\sin z - z\cos z}{z^4}, 0\right) = \lim_{z\to 0}(z-0)\frac{\sin z - z\cos z}{z^4} =$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{\sin z - z\cos z}{z^3}$$

$$\underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{z\to 0} \frac{z\sin z}{3z^2} = \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{3z}$$

$$= \frac{1}{3}\,1 = \boxed{\frac{1}{3}}$$

[2] $f(z) = \dfrac{1}{z^2\sin z}$

Το "0" είναι πόλος τάξης 3

$$\text{Res}\left(\frac{1}{z^2\sin z}, 0\right) = \frac{1}{(3-1)!} \lim_{z\to 0} \left[(z-0)^3 \frac{1}{z^2\sin z}\right]''$$

$$= \frac{1}{2!} \lim_{z\to 0} \left(\frac{z}{\sin z}\right)'' = \ldots = \boxed{\frac{1}{6}}$$

(Β' τρόπος) : Με ανάπτυγμα Laurent είχαμε δείξει ότι

$$\text{Res}\left(\frac{1}{z^2\sin z}, 0\right) = a_{-1} = \frac{1}{6}$$

[3] $f(z) = \dfrac{\sin z - z\cos z}{z^2}$

Το "0" είναι ρίζα τάξης "3" του αριθμητή
" " " "2" " παρονομαστή

Το "0" είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο.

Άρα: $\text{Res}\left(\dfrac{\sin z - z\cos z}{z^2}, 0\right) = \boxed{0}$

20/06/12

Τύπος 4

Έστω $f(z)=\dfrac{\varphi_1(z)}{\varphi_2(z)}$. Αν το z_0 είναι απλή ρίζα της $\varphi_2(z)$ και δεν είναι ρίζα της $\varphi_1(z)$, το z_0 είναι απλός πόλος της $f(z)$. Επομένως:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{\varphi_1(z)}{\varphi_2(z)}, z_0\right) = \lim_{z\to z_0} (z-z_0)\frac{\varphi_1(z)}{\varphi_2(z)}$$

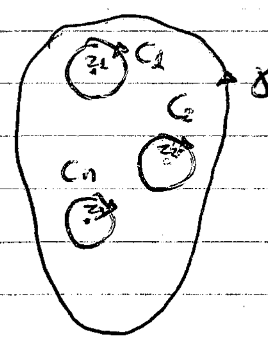
$$= \lim_{z\to z_0} \frac{(z-z_0)\varphi_1(z)}{\varphi_2(z)} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{z\to z_0} \frac{\varphi_1(z)+(z-z_0)\varphi_1'(z)}{\varphi_2'(z)}$$

$$= \boxed{\frac{\varphi_1(z_0)}{\varphi_2'(z_0)}}$$

Θεώρημα Ολοκληρωτικών Υπολοίπων

Έστω η μιγαδική συνάρτηση f είναι αναλυτική πάνω στην απλή, κλειστή, τμηματικά λεία καμπύλη γ και στο εσωτερικό της εκτός από τα μεμονωμένα ανώμαλα σημεία $z_1, z_2, \ldots, z_n$

Τότε:



$$\oint_\gamma f(z)dz = 2\pi i\left\{\operatorname{Res}(f,z_1)+\ldots \operatorname{Res}(f,z_n)\right\} \quad (*)$$

Απόδειξη: Αν $C_1, C_2, \ldots, C_n$ είναι κύκλοι στην περιοχή των $z_1, \ldots, z_n$ αντίστοιχα, από γενικευμένο Θεώρημα Cauchy:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} f(z)dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} f(z)dz + \ldots +$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_n} f(z)dz = Res(f,z_1) + Res(f,z_2) + \dots + Res(f,z_n)$$

Παρατήρηση: Αν η γ δεν είναι απλή καμπύλη τότε ο τύπος (*) παίρνει τη μορφή:

$$\oint_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i \{ I(\gamma, z_1)\, Res(f,z_1) + I(\gamma, z_2)\, Res(f,z_2) + \dots$$

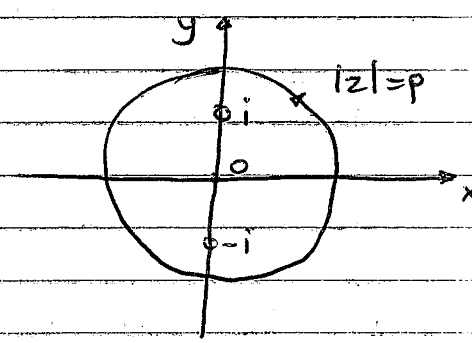
$$+ I(\gamma, z_n) \cdot Res(f,z_n) \}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

[1] $\displaystyle\oint_{|z|=\rho} \frac{e^{1/z}}{z^2+1}dz$, όπου $|z|=\rho$ κύκλος με κέντρο O και ακτίνα $\rho>1$

Λύση:



$$f(z) = \frac{e^{1/z}}{z^2+1} = \frac{e^{1/z}}{(z+i)(z-i)}$$

Έχει απλούς πόλους το $\pm i$ και το 0 είναι ουσιώδες ανώμαλο σημείο

Στο "χθεσινό μάθημα" δείξαμε ότι:

- $$Res\left(\frac{e^{1/z}}{z^2+1}, 0\right) = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \dots = \sin 1$$

- $$Res\left(\frac{e^{1/z}}{z^2+1}, i\right) = \left.\frac{e^{1/z}}{(z^2+1)'}\right|_{z=i} = \frac{e^{1/i}}{2i} = \frac{e^{-i}}{2i}$$

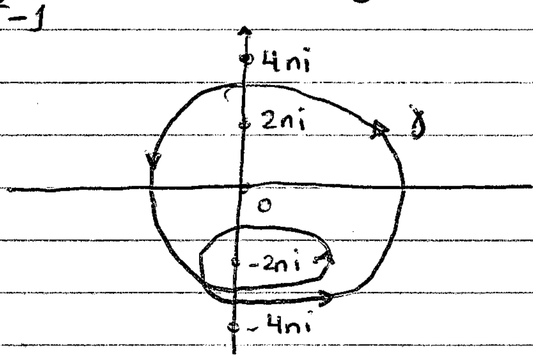
$(*)\quad \sin z = \dfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\ ,\ z\in\mathbb{C}$

• $\text{Res}\left(\dfrac{e^{1/z}}{z^2+1}, -i\right) = \dfrac{e^{1/z}}{(z^2+1)'}\Big|_{z=-i} = \dfrac{e^{-1/i}}{-2i} = \dfrac{e^{i}}{-2i}$

Από <u>Θ.Ο.Υ.</u>

$$I = 2\pi i\left\{\sin 1 + \frac{e^{-i}}{2i} - \frac{e^{i}}{2i}\right\}$$
$$= 2\pi i\left\{\sin 1 - \frac{e^{i}-e^{-i}}{2i}\right\} \overset{(*)}{=}$$
$$= 2\pi i\left\{\sin 1 - \sin 1\right\}$$
$$= \boxed{0}$$

[2] $I = \oint_\gamma \dfrac{z}{e^z-1}\,dz$, όπου γ η καμπύλη του σχήματος:



<u>Λύση</u>:

$f(z) = \dfrac{z}{e^z-1}$, $e^z-1=0 \iff e^z=1 \iff \boxed{z_k=2k\pi i}$

$k=0,\pm1,\pm2$ Τα ανώμαλα σημεία που βρίσκονται <u>μέσα στη γ</u> είναι:

$z_0=0\ ,\ z_1=2\pi i\ ,\ z_2=-2\pi i$

• Το <u>0</u> είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο Επομένως $\text{Res}\left(\dfrac{z}{e^z-1}, 0\right)=0$

• Το $\pm 2\pi i$ <u>είναι απλός πόλος</u>. ΑΡΑ από <u>Θ.Ο.Υ.</u>

* ΘΑ ΒΑΛΕΙ ΠΑΡΟΜΟΙΑ

$$I = 2\pi i \left\{ \mathrm{Res}\left(\frac{z}{e^{z}-1}, 0 \right) + \mathrm{Res}\left(\frac{z}{e^{z}-1}, 2\pi i \right) + 2\,\mathrm{Res}\left(\frac{z}{e^{z}-1}, -2\pi i \right) \right\}$$

$$= 2\pi i \left\{ \frac{2\pi i}{e^{2\pi i}} + 2\,\frac{-2\pi i}{e^{-2\pi i}} \right\} = 2\pi i \left\{ 2\pi i - 4\pi i \right\} = \boxed{4\pi^2}$$

*

[3] Έστω $\dfrac{1}{e^{2\pi z}-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ το ανάπτυγμα Laurent της $f(z) = \dfrac{1}{e^{2\pi z}-1}$ στο δακτύλιο

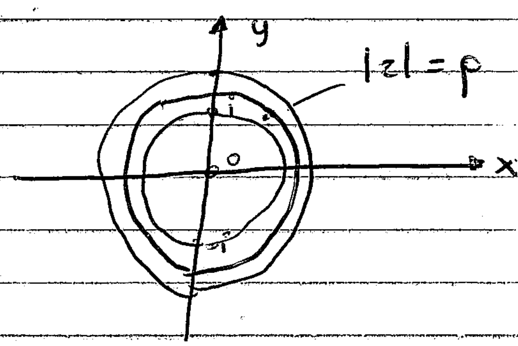
$\Delta: 1<|z|<2$

Να υπολογιστούν οι συντελεστές a_n, $\forall n \le -1$

Λύση:

Από Θεώρημα Laurent:

(*) $$a_n = \oint_{|z|=\rho} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz = \oint_{|z|=\rho} \frac{1}{z^{n+1}(e^{2\pi z}-1)}\,dz, \quad \text{όπου } 1<\rho<2$$



Επειδή

$e^{2\pi z} - 1 = 0 \iff$

$e^{2\pi z} = 1 \iff$

$2\pi z = 2k\pi i \iff$

$z = ki$

Τα ανώμαλα σημεία της f είναι:

Τα $z_k = ki$, $k = 0, \pm 1, \pm 2$

Τα $z_k = ki$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ Είναι απλές ρίζες του παρονομαστή της f.

(i) Υπολογισμός του a_{-1}: (Σ' αυτή την περίπτωση τα $0, \pm i$ είναι απλοί πόλοι της $\dfrac{1}{e^{2\pi z}-1}$

Από (*) είναι:

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=\rho} \frac{1}{e^{2\pi z}-1}\,dz \overset{\text{Θ.Ο.Υ.}}{=\!=}$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{e^{2\pi z}-1}, 0\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{1}{e^{2\pi z}-1}, i\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{1}{e^{2\pi z}-1}, -i\right)$$

$$= \left.\frac{1}{(e^{2\pi z}-1)'}\right|_{z=0} + \left.\frac{1}{(e^{2\pi z}-1)'}\right|_{z=i} + \left.\frac{1}{(e^{2\pi z}-1)'}\right|_{z=-i}$$

$$= \frac{1}{2\pi e^{2\pi 0}} + \frac{1}{2\pi e^{2\pi i}} + \frac{1}{2\pi e^{-2\pi i}} = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} = \boxed{\frac{3}{2\pi}}$$

(ii) Υπολογισμός του a_n, $n \leq -2$:

Από (*) $\Longrightarrow$ $a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=\rho} \frac{z^{-(n+1)}}{e^{2\pi z}-1}\,dz$

$n \leq -2 \iff$
$n+1 \leq -1 \iff$
$-(n+1) \leq 1$

- Το $\underline{0}$ είναι επουσιώδες ανώμαλο σημείο της $\frac{z^{-(n+1)}}{e^{2\pi z}-1}$
- Τα $\underline{\pm i}$ είναι απλός πόλος της
  "

ΑΡΑ: $a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=\rho} \frac{z^{-(n+1)}}{e^{2\pi z}-1}\,dz \overset{\text{Θ.Ο.Υ.}}{=\!=}$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z^{-(n+1)}}{e^{2\pi z}-1}, 0\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{z^{-(n+1)}}{e^{2\pi z}-1}, i\right) + \operatorname{Res}\left(\frac{z^{-(n+1)}}{e^{2\pi z}-1}, -i\right)$$

$$= \left.\frac{z^{-(n+1)}}{(e^{2\pi z}-1)'}\right|_{z=i} + \left.\frac{z^{-(n+1)}}{(e^{2\pi z}-1)'}\right|_{z=-i}$$

$$= \frac{i^{-(n+1)}}{2\pi e^{2\pi i}} + \frac{(-i)^{-(n+1)}}{2\pi e^{-2\pi i}} = \boxed{\frac{1}{2\pi}\left[i^{-(n+1)} + (-i)^{-(n+1)}\right]}$$

(I) <u>Ολοκλ. της μορφής:</u> $\int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta$ ή

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta$$

$z = e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi \longrightarrow dz = i e^{i\theta} d\theta = iz\,d\theta \Longrightarrow$

$d\theta = \dfrac{dz}{iz}$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

<u>ΑΡΑ:</u> $$\int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta = \oint_{|z|=1} f\left[\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right]\frac{dz}{iz}$$

<u>[1]</u> Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^{\pi} \frac{\cos 2\theta}{2 + \cos\theta}\,d\theta$$

<u>Λύση:</u>

$$I = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{2 + \cos\theta}\,d\theta$$ (επειδή είναι άρτια)

$z = e^{i\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$ $d\theta = \dfrac{dz}{iz}$,

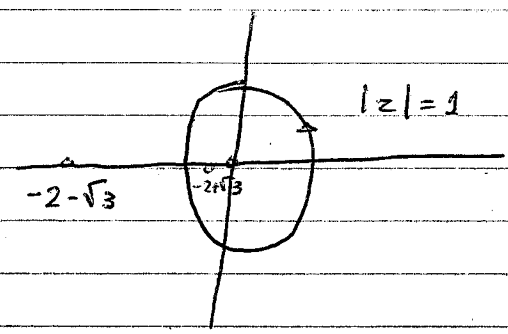
$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

$$\cos 2\theta = \frac{e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}}{2} = \frac{z^2 + z^{-2}}{2} = \frac{1}{2}\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)$$

$$I = \frac{1}{2} \oint \frac{\frac{1}{2}\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)}{2 + \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)} \cdot \frac{dz}{iz}$$

$$= -\frac{i}{2} \oint_{|z|=1} \frac{z^4+1}{z^2(z^2+4z+1)}\, dz$$

$$z^2+4z+1=0 \Longrightarrow z_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3}$$



Από $\underline{\Theta.\text{Ο}.\Upsilon.}$ $\quad I = -\frac{i}{2} \cdot 2\pi i \left\{ \mathrm{Res}\left(\frac{z^4+1}{z^2(z^2+4z+1)}, 0 \right) + \right.$

$\left. \mathrm{Res}\left(\frac{z^4+1}{z^2(z^2+4z+1)}, -2+\sqrt{3} \right) \right\}$ (Το "0" είναι πόλος τάξης $\underline{\underline{2}}$ / Το "$-2+\sqrt{3}$" " " " $=$)

$$= -i \cdot 2\pi i \left\{ -4 + \frac{7}{\sqrt{3}} \right\} = \boxed{2\pi\left(-4 + \frac{7}{\sqrt{3}} \right)}$$

(II) <u>Γενικευμένα Ολοκληρώματα:</u>

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx \qquad P, Q \text{ πολυώνυμα}$$

$$\boxed{\text{βαθμός } Q(x) \geq \text{βαθμός } P(x) + 2}$$

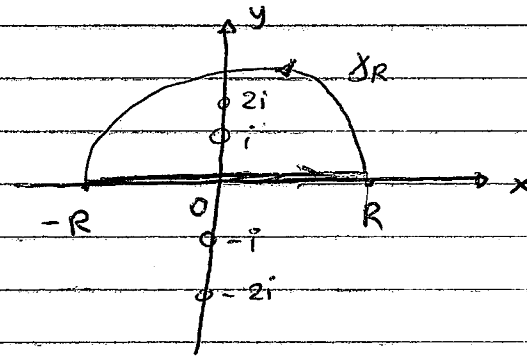
[1] $$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-1}{x^4+5x^2+4}\, dx$$

$$\text{βαθ}(x^4+5x^2+4) = \text{βαθ}(x^2-1)+2$$

<u>Λύση:</u>

(*) $z = Re^{i\theta}, \quad 0 \le \theta \le \pi$

$$f(z) = \frac{z^2-1}{z^4+5z^2+4}$$



Τα $\pm i, \pm 2i$ είναι ρίζες της
εξίσωσης
$z^4+5z^2+4=0$ (διτετράγωνη)

Τα $\pm i, \pm 2i$ είναι απλοί πόλοι της f.
Μόνο τα $i, 2i$ βρίσκονται μέσα στο ημικύκλιο
Από Θ.Ο.Υ.

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz + \int_{[-R,R]} f(z)dz = 2\pi i \left\{ Res(f,i) + Res(f,2i) \right\}$$

$$\int_{\gamma_R} \frac{z^2-1}{z^4+5z^2+4} dz + \int_{-R}^{R} \frac{x^2-1}{x^4+5x^2+4} dx$$

$$= 2\pi i \left\{ Res\left(\frac{z^2-1}{z^4+5z^2+4}, i\right) + Res\left(\frac{z^2-1}{z^4+5z^2+4}, 2i\right) \right\}$$

$$= \boxed{\frac{\pi}{6}}$$

Παίρνοντας στην (*) $R \to \infty$ έχουμε:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-1}{x^4+5x^2+4} dx = \frac{\pi}{6}$$ Επειδή $\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{z^2-1}{z^4+5z^2+4} dz = 0$

$$\left| \int_{\gamma_R} \frac{z^2-1}{z^4+5z^2+4} dz \right| \le \int_{\gamma_R} \frac{|z^2-1|}{|z^4+5z^2+4|} |dz|$$

$$= \int_{\gamma_R} \frac{|z^2|}{|z^4|} \cdot \underbrace{\frac{\left|1-\frac{1}{z^2}\right|}{\left|1+\frac{5}{z^2}+\frac{4}{z^4}\right|}}_{\Downarrow\ |z|\to\infty \quad 1} |dz|$$

$$\leq \int_{\gamma_R} \frac{1}{|z|^2} \cdot M \cdot |dz| , \quad \forall\, |z| \geq R_0$$

$$= \frac{1}{R^2} M \cdot n R = \frac{Mn}{R} , \quad \forall\, |z| \geq R_0$$

$$\frac{Mn}{R} \xrightarrow{R \to \infty} 0$$