ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ II

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

1. Εισαγωγή στις σειρές Fourier

2. Εφαρμογή των Σειρών Fourier στην Επίλυση Διαφορικών Εξισώσεων με Μερικές Παραγώγους

3. Αναπτύγματα Αναλυτικών Συναρτήσεων - Εφαρμογές των Ολοκληρωτικών Υπολοίπων

4. Μετασχηματισμοί ή Ολοκληρώματα Fourier

5. Εφαρμογές της Ανάλυσης Fourier στην Ανάλυση Σημάτων

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή στις σειρές Fourier

1.1 Άπειρες σειρές

Έστω μια ακολουθία (a_n), $n \in \mathbb{N}$. Μια έκφραση της μορφής

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

λέγεται άπειρη σειρά. Ο αριθμός a_n λέγεται $n-$οστός όρος της σειράς.

Μερικό άθροισμα της σειράς λέμε την ακολουθία

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n.$$

Αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων S_N συγκλίνει σε ένα αριθμό S, $N \to \infty$, τότε λέμε ότι η σειρά συγκλίνει στο S και γράφουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S.$$

Όταν η σειρά δεν συγκλίνει λέμε ότι αποκλίνει.

Παραδείγματα. (i) Αν $a_n = \frac{1}{2^n}$ τότε είναι εύκολο να δει κανείς ότι

$$S_N = \frac{1}{2}\,\frac{1-\frac{1}{2^N}}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^N} \;\to 1,\; N \to \infty$$

και άρα $S = 1$.
(ii) Ανάλογα, αν $a_n = r^n$ όπου $|r| < 1$, τότε

$$S_N = r\,\frac{1-r^N}{1-r} \to \frac{r}{1-r},\; N \to \infty$$

και άρα $S = \dfrac{r}{1-r}$. Όταν $|r| \geq 1$, τότε η σειρά αποκλίνει.

(iii) Αν $a_n = (-1)^{n+1}$, τότε

$$S_N = \begin{cases} 0 & \text{αν } N = \text{άρτιος}, \\ 1 & \text{αν } N = \text{περιττός}, \end{cases}$$

οπότε η σειρά αποκλίνει. Αποδεικνύεται το ακόλουθο Θεώρημα:

Θεώρημα 1.1.1 *Αν η σειρά συγκλίνει, τότε* $a_n \to 0,\ n \to \infty$.

Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δεν ισχύει.

Σημείωση. Οι ιδιότητες που γνωρίζουμε για τη σύγκλιση ακολουθιών μεταφέρονται και στη σύγκλιση σειρών.

Θεώρημα 1.1.2 *Εάν η σειρά* $\sum_n a_n$ *συγκλίνει, τότε η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων* $S_N = a_1 + a_2 + \ldots + a_N$ *είναι φραγμένη.*

Θεώρημα 1.1.3 *(Το κριτήριο του Cauchy) Η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει ανν* $\forall \varepsilon > 0$ *υπάρχει φυσικός αριθμός* n_0*, έτσι ώστε* $\forall n, m \geq n_0$ *ισχύει:*

$$|a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n| < \varepsilon.$$

Θεώρημα 1.1.4 *Εάν* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ *και η ακολουθία* $\{b_n\}$ *είναι φραγμένη, τότε* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n| < \infty$.

Απόδειξη: Δοθέντος $\varepsilon > 0$, έστω M είναι ένας φυσικός αριθμός έτσι ώστε $|b_n| \leq M$, $n = 1, 2, \ldots$. Από το Θεώρημα 1.1.3, υπάρχει $n_0 :\ \forall n, m \geq n_0$ ισχύει

$$|a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \ldots + |a_n| < \varepsilon / M,$$

άρα $|a_{m+1} b_{m+1}| + |a_{m+2} b_{m+2}| + \ldots + |a_n b_n| < M \cdot \varepsilon / M$, $\forall n, m \geq n_0$. Επομένως, $\sum |a_n b_n| < \infty$.

Θεώρημα 1.1.5 *Εάν η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ *τότε* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ *(από το κριτήριο του Cauchy).*

Θεώρημα 1.1.6 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ *ανν οι σειρές* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ *και* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ *των θετικών και αρνητικών μερών της* $\sum_n a_n$ *συγκλίνουν.*

Θεώρημα 1.1.7 *(Leibniz) Εάν* $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \ldots \geq 0$ *και εάν* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$*, τότε η σειρά* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \ldots$ *συγκλίνει.*

Θεώρημα 1.1.8 *(Άθροιση κατά μέρη του Abel): Εάν $\{a_n\}$ και $\{b_n\}$ είναι δύο ακολουθίες, τότε:*

$$a_1b_1 + \ldots + a_nb_n = \sum_{k=1}^{n-1}(a_1 + \ldots + a_k)(b_k - b_{k+1}) + (a_1 + \ldots a_n)b_n.$$

Σημείωση: Η άθροιση κατά μέρη του *Abel* μας βοηθά να υπολογίσουμε σειρές που έχουν ως γενικό όρο γινόμενο ακολουθιών.

Ορισμός 1.1.9 *Έστω ότι $\{a_n\}$ είναι μια ακολουθία, θέτουμε:*

$$S_N = a_1 + \ldots a_N \text{ και } \sigma_N = \frac{S_1 + S_2 + \ldots S_N}{N},\ N = 1, 2, \ldots .$$

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ είναι αθροίσιμη κατά Cesaro ή είναι $(C1)$ αθροίσιμη με άθροισμα κατά Cesaro ή με $(C1)$ άθροισμα το S εάν $\lim_{N\to\infty} \sigma_N = S$. Σε αυτήν την περίπτωση γράφουμε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S\ (C1)$.

Θεώρημα 1.1.10 *Εάν $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$, τότε $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a\ (C1)$.*

1.2 Σειρές Συναρτήσεων

Ορισμός 1.2.1 *Έστω $\{f_n\}$, $n = 1, 2, 3, ...$, είναι μια ακολουθία συναρτήσεων που ορίζονται στο σύνολο E (υποσύνολο του $\mathbb{R}$). Εάν η ακολουθία των αριθμών $\{f_n(x)\}$ συγκλίνει για κάθε $x \in E$, ορίζουμε μια συνάρτηση f έτσι ώστε:*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),\ x \in E, \tag{1.2.1}$$

η οποία καλείται οριακή συνάρτηση της $\{f_n\}$ στο E. Εάν ισχύει η (1.2.1), θα λέμε επίσης ότι η $\{f_n\}$ συγκλίνει σημειακά στην f στο E.

Ομοίως, αν η $\sum_n f_n(x)$ συγκλίνει για κάθε $x \in E$, ορίζουμε

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x),\ x \in E, \tag{1.2.2}$$

και η f καλείται άθροισμα της σειράς $\sum_n f_n$.

Θα εξετάσουμε ποιες ιδιότητες της ακολουθίας συναρτήσεων $\{f_n\}$ διατηρούνται και για την οριακή συνάρτηση f αυτών. Παραδείγματος χάρη, εάν οι συναρτήσεις $f_n(x)$ είναι συνεχείς, ή διαφορίσιμες, ισχύει το ίδιο και για την οριακή συνάρτηση f; Επίσης, θα εξετάσουμε αν ισχύει η σχέση $\lim_n \int f_n(x) = \int \lim_n f_n(x)$, με την προϋπόθεση ότι η ακολουθία των $\{f_n(x)\}$ είναι ολοκληρώσιμη.

Υπενθυμίζουμε ότι η f είναι συνεχής στο x αν ισχύει: $\lim_{t\to x} f(t) = f(x)$.

Παράδειγμα: Έστω

$$f_n(x) = n^2 x(1-x^2)^n \ , \ 0 \leq x \leq 1, \ n = 1,2,3,\ldots . \tag{1.2.3}$$

Επειδή ισχύει $\lim_{n\to\infty} n^k \lambda^n = 0, \ \forall \ k \geq 1, \ |\lambda| < 1$, έχουμε:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \text{ για κάθε } x \in (0,1]. \tag{1.2.4}$$

Εφ' όσον $f_n(0) = 0$, η (1.2.4) ισχύει για κάθε $x \in [0,1]$.

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της αντικατάστασης, υπολογίζουμε:

$$\int_0^1 x(1-x^2)^n dx = \frac{1}{2n+2},$$

συνεπώς:

$$\int_0^1 f_n(x) dx = \frac{n^2}{2n+2} \to \infty$$

καθώς $n \to \infty$.

Εάν στην (1.2.3) αντικαταστήσουμε το n^2 με n, η (1.2.4) θα ισχύει, αλλά θα έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+2} = \frac{1}{2},$$

ενώ

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = 0.$$

Κατά συνέπεια, το όριο του ολοκληρώματος δεν είναι πάντα ίσο με το ολοκλήρωμα του ορίου, ακόμα και αν τα δύο όρια είναι πεπερασμένα.

Ορισμός 1.2.2 *Λέμε ότι μια ακολουθία συναρτήσεων $\{f_n\}$,$n = 1,2,3,...$, συγκλίνει ομοιόμορφα στο σύνολο $E \subset \mathbb{R}$ σε μια συνάρτηση f, αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένας φυσικός αριθμός N, τέτοιος ώστε για κάθε $n \geq N$ να συνεπάγεται ότι*

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \ \forall x \in E. \tag{1.2.5}$$

Είναι φανερό ότι κάθε ομοιόμορφα συγκλίνουσα ακολουθία συγκλίνει και σημειακά.

Λέμε ότι η σειρά $\sum_n f_n(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο σύνολο E, αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $\{s_n\}$ που ορίζεται ως

$$s_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο Ε.

Θεώρημα 1.2.3 *(Κριτήριο του Cauchy) Η ακολουθία των συναρτήσεων $\{f_n\}$ που ορίζεται στο E συγκλίνει ομοιόμορφα στο E ανν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένας φυσικός αριθμός N τέτοιος ώστε για κάθε $m, n \geq N$, να ισχύει*

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon, \tag{1.2.6}$$

για κάθε $x \in E$.

Θεώρημα 1.2.4 *Έστω ότι $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, $\forall x \in E$. Αν*

$$M_n = \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)|,$$

τότε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο E ανν $M_n \to 0$ για $n \to \infty$.

Θεώρημα 1.2.5 *Έστω $\{f_n\}$ ακολουθία συναρτήσεων που ορίζονται στο E και έστω*

$$|f_n(x)| \leq M_n, \ \forall x \in E \ , \ n = 1, 2, 3, ...,$$

τότε η $\sum_n f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο E αν $\sum_n M_n$ συγκλίνει.

Σημείωση: Το αντίστροφο δεν ισχύει.

Απόδειξη: Επειδή η $\sum_n M_n$ συγκλίνει, για τυχαίο $\varepsilon > 0$ έχουμε,

$$\left|\sum_{i=n}^{m} f_i(x)\right| \leq \sum_{i=n}^{m} M_i(x) \leq \varepsilon, \ \forall x \in E,$$

με την προϋπόθεση ότι τα m και n είναι αρκετά μεγάλα. Η ομοιόμορφη σύγκλιση έπεται από το Θεώρημα 1.2.3.

Θεώρημα 1.2.6 *Εάν $\{f_n\}$ είναι μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων στο E και εάν $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο E, τότε η f είναι συνεχής στο E.*

Θεώρημα 1.2.7 *Έστω ότι $\{f_n\}$ είναι ένα σύνολο ολοκληρώσιμων κατά Riemann συναρτήσεων στο $[a, b]$, για $n = 1, 2, 3, ...$, και έστω ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[a, b]$, τότε η οριακή συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann στο $[a, b]$ και ισχύει*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx. \tag{1.2.7}$$

1.3 Βασικοί τύποι της τριγωνομετρίας

Σ' αυτή την παράγραφο υπενθυμίζουμε μερικούς τύπους από την τριγωνομετρία για την ευκολότερη κατανόηση των επομένων παραγράφων.

Από τη στοιχειώδη τριγωνομετρία γνωρίζουμε ότι

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x, \quad \cos^2 x = 1 - \sin^2 x,$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x,$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1,$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right),$$

$$\sin x - \sin y = 2 \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \cos\left(\frac{x+y}{2}\right),$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right),$$

$$\cos x - \cos y = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{y-x}{2}\right),$$

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x}, \quad \sin^2 x = \frac{\tan^2 x}{1+\tan^2 x}.$$

Από τους μιγαδικούς αριθμούς γνωρίζουμε ότι

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x, \ x \in \mathbb{R}$$

όπου i είναι η φανταστική μονάδα, δηλαδή $i^2 = -1$. Από εδώ έχουμε ότι

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}. \tag{1.3.1}$$

1.4 Τριγωνομετρικά ολοκληρώματα

Έστω n, m φυσικοί αριθμοί. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι ισχύουν τα ακόλουθα:

- $\displaystyle\int_{-T}^{T} \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx = 0.$
- $\displaystyle\int_{-T}^{T} \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx = 0.$

- $\displaystyle\int_{-T}^{T} \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right) \sin\left(\frac{m\pi x}{T}\right) dx = \begin{cases} 0, & \text{αν } n \neq m, \\ T, & \text{αν } n = m. \end{cases}$
- $\displaystyle\int_{-T}^{T} \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{T}\right) dx = \begin{cases} 0, & \text{αν } n \neq m, \\ T, & \text{αν } n = m. \end{cases}$
- $\displaystyle\int_{-T}^{T} \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{T}\right) dx = 0.$

Οι αποδείξεις των παραπάνω είναι όμοιες. Εδώ θα δούμε την απόδειξη μιας από αυτές. Έστω $n \neq m$, τότε κάνοντας χρήση των ταυτοτήτων της παραγράφου 1.3 έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
& \int_{-T}^{T} \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{T}\right) dx \\
= & \ \frac{1}{2}\int_{-T}^{T} \left(\cos\left(\frac{n\pi x}{T} + \frac{m\pi x}{T}\right) + \cos\left(\frac{n\pi x}{T} - \frac{m\pi x}{T}\right)\right) dx \\
= & \ \frac{1}{2}\int_{-T}^{T} \left(\cos\left(\frac{(n+m)\pi x}{T}\right) + \cos\left(\frac{(n-m)\pi x}{T}\right)\right) dx \\
= & \ \frac{1}{2}\left(\frac{T}{(n+m)\pi}\sin\left(\frac{(n+m)\pi x}{T}\right) + \frac{T}{(n-m)\pi}\sin\left(\frac{(n-m)\pi x}{T}\right)\right)\Bigg|_{x=-T}^{x=T} \\
= & \ 0.
\end{aligned}$$

Έστω $n = m \neq 0$, τότε

$$\begin{aligned}
\int_{-T}^{T} \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) \cos\frac{m\pi x}{T}\, dx &= \int_{-T}^{T} \cos^2\frac{n\pi x}{T}\, dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{-T}^{T} \left(\cos\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) + 1\right) dx \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{T}{2\pi n}\sin\left(\frac{2\pi n x}{T}\right) + x\right)\Bigg|_{x=-T}^{x=T} \\
&= T.
\end{aligned}$$

1.5 Οι σειρές Fourier

Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ λέγεται περιοδική με περίοδο l, αν ισχύει

$$f(x) = f(x + l)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και επιπλέον ο αριθμός l είναι ο μικρότερος για τον οποίο ισχύει αυτή η σχέση.

Μια περιοδική συνάρτηση τη μελετούμε σε ένα διάστημα, μήκους ίσο με την περίοδό της.

Παραδείγματα. (i) Οι συναρτήσεις $\sin x, \cos x$ είναι περιοδικές με περίοδο 2π. Οι συναρτήσεις $\tan x, \cot x$ είναι περιοδικές με περίοδο π.
(ii) Οι συναρτήσεις $\sin nx$, $\cos nx$, $n \in \mathbb{N}$, είναι εύκολο να δει κανείς ότι είναι περιοδικές με περίοδο $2\pi/n$.

Ορισμός 1.5.1 *Έστω μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, περιοδική, με περίοδο $2T$. Ονομάζουμε σειρά Fourier ή ανάπτυγμα Fourier της συνάρτησης f τη σειρά*

$$S[f](x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right)\right), \tag{1.5.1}$$

όπου οι αριθμοί a_n, b_n, $n = 0, 1, \ldots$, δίνονται από τις σχέσεις

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx, \ \ b_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^{T} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx$$

και ονομάζονται συντελεστές Fourier της f. Το άθροισμα

$$S_N[f](x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right)\right)$$

λέγεται N-οστό μερικό άθροισμα της σειράς Fourier $S[f](x)$ της συνάρτησης f.

Σημειώνουμε ότι η παραπάνω σειρά δεν συγκλίνει απαραίτητα και όταν συγκλίνει δεν συγκλίνει υποχρεωτικά στην τιμή $f(x)$.

Ορισμός 1.5.2 *Έστω μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ περιοδική, με περίοδο $2T$. Η συνάρτηση f λέγεται* **τμηματικά συνεχής ή συνεχής κατά τμήματα** *αν:*
(i) το διάστημα $(-T, T)$ μπορεί να διαιρεθεί σε ένα πεπερασμένο αριθμό διαστημάτων σε κάθε ένα από τα οποία η συνάρτηση f είναι συνεχής
(ii) η συνάρτηση f είναι φραγμένη στα άκρα των παραπάνω διαστημάτων.

Θεώρημα 1.5.3 (Συνθήκες του Dirichlet - 1829) *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ περιοδική, με περίοδο $2T$. Αν η συνάρτησεις f και f' είναι τμηματικά συνεχείς στο $(-T, T)$ τότε η σειρά Fourier της f συγκλίνει στη τιμή της συνάρτησης f στα σημεία όπου αυτή είναι συνεχής, δηλαδή*

$$S_N[f](x) \to f(x), \ \ N \to \infty$$

και στο άθροισμα $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$ στα σημεία ασυνέχειας, δηλαδή

$$S_N[f](x) \to \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}, \ \ N \to \infty.$$

Υπενθυμίζουμε ότι οι αριθμοί $f(x^+), f(x^-)$ είναι το όριο από δεξιά και αριστερά αντίστοιχα της f στο σημείο x.

Παραδείγματα. **(i)** Η συνάρτηση $\frac{1}{x-1}$ δεν ικανοποιεί τις συνθήκες Dirichlet στο διάστημα $(0,2)$ γιατί δεν είναι φραγμένη στο 1.
(ii) Η συνάρτηση $\cos\left(\frac{1}{x-1}\right)$ δεν ικανοποιεί τις συνθήκες Dirichlet στο διάστημα $(0,2)$ γιατί η f' δεν είναι φραγμένη στο 1.
(iii) Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } 0 < x < 1/2, \\ -1, & \text{αν } 1/2 < x < 1, \end{cases}$$

ικανοποιεί τις συνθήκες Dirichlet στο διάστημα $(0,1)$ γιατί είναι σταθερή στα διαστήματα $(0,1/2)$ και $(1/2,1)$ ενώ είναι ασυνεχής στα σημεία 0, 1/2, 1.

Θεώρημα 1.5.4 (Ταυτότητα του Parseval) *Αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις συνθήκες του Dirichlet, τότε έχουμε:*

$$\frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f^2(x)\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2). \tag{1.5.2}$$

Απόδειξη. Η απόδειξη που θα δούμε δεν είναι αυστηρή. Δεχόμενοι ότι τα σύμβολα της ολοκλήρωσης και της άθροισης μπορούν να εναλλαχθούν ως προς τη σειρά εφαρμογής τους και κάνοντας χρήση των τύπων υπολογισμού τριγωνομετρικών ολοκληρωμάτων της παραγράφου 1.4 έχουμε:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f^2(x)\,dx &= \frac{1}{T}\int_{-T}^{T}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right)\right)\right]^2 dx \\
&= \frac{1}{T}\int_{-T}^{T}\left[\frac{a_0^2}{4} + \left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right)\right)\right)^2\right. \\
&\qquad \left. +\ a_0 \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right)\right)\right] dx \\
&= \frac{a_0^2}{2} + \frac{1}{T}\int_{-T}^{T}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right)\right)\right]^2 dx \\
&= \frac{a_0^2}{2} + \frac{1}{T}\int_{-T}^{T}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right)\right)^2\right. \\
&\quad +2\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m>n}\left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right)\right)\left(a_m \cos\left(\frac{m\pi x}{T}\right)\right. \\
&\qquad \left.\left. + b_m \sin\left(\frac{m\pi x}{T}\right)\right)\right] dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{a_0^2}{2} + \frac{1}{T}\int_{-T}^{T}\sum_{n=1}^{\infty}\Bigg(a_n^2\,\cos^2\left(\frac{n\pi x}{T}\right) + b_n^2\,\sin^2\left(\frac{n\pi x}{T}\right) \\
&\qquad + 2a_n^2\,b_n^2\,\cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right)\,\sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right)\Bigg)\,dx \\
&= \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2).
\end{aligned}
$$

Λήμμα 1.5.5 *Riemann Αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις συνθήκες του Dirichlet, τότε*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0,$$

δηλαδή:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-T}^{T} f(t)\sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_{-T}^{T} f(t)\cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right)\,dx = 0.$$

Απόδειξη. Από το θεώρημα του Parseval έχουμε ότι η σειρά (1.5.2) συγκλίνει και κατά συνέπεια από το Θεώρημα 1.1.1 παίρνουμε ότι $a_n^2 + b_n^2 \to 0,\ n \to \infty$. Από αυτή τη σχέση προκύπτει εύκολα το ζητούμενο.

Σημείωση. Τα παραπάνω επεκτείνονται και σε πολύ γενικότερες κατηγορίες συναρτήσεων από αυτές που αναφέρουμε. Επειδή αυτά ξεφεύγουν από το σκοπό του μαθήματος ο αναγνώστης που ενδιαφέρεται μπορεί να ανατρέξει στη σχετική βιβλιογραφία.

1.6 Μιγαδική παράσταση των σειρών Fourier

Χρησιμοποιώντας τους τύπους (1.3.1) της παραγράφου 1.2 διαπιστώνουμε ότι

$$a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right) = \frac{a_n - b_n i}{2}e^{i\frac{n\pi x}{T}} + \frac{a_n + b_n i}{2}e^{-i\frac{n\pi x}{T}}$$

και άρα η σειρά (1.5.1) παίρνει τη μορφή

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n - b_n i}{2}e^{i\frac{n\pi x}{T}} + \frac{a_n + b_n i}{2}e^{-i\frac{n\pi x}{T}}\right).$$

Θέτοντας

$$c_0 = \frac{a_0}{2},\quad c_n = \frac{a_n - b_n i}{2},\ c_{-n} = \frac{a_n + b_n i}{2},\ n > 0$$

η σειρά (1.5.1) γράφεται:

$$c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n e^{i\frac{n\pi x}{T}} + c_{-n}e^{-i\frac{n\pi x}{T}}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi x}{T}}. \tag{1.6.1}$$

Η τελευταία λέγεται **μιγαδική μορφή** της σειράς Fourier της f και οι αριθμοί c_n λέγονται **μιγαδικοί συντελεστές Fourier** της f, συμβολίζονται με $\widehat{f}(n)$ και δίνονται από τη σχέση:

$$\widehat{f}(n) = c_n = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x)\, e^{\frac{-in\pi x}{T}}\, dx,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Πράγματι αν $n \geq 0$ τότε

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x)\, e^{\frac{-in\pi x}{T}}\, dx &= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x)\, \left(\cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) - i\sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right)\right) dx \\
&= \frac{a_n - b_n i}{2} \\
&= c_n.
\end{aligned}$$

Ανάλογα, αν $n < 0$, τότε $m = -n > 0$ και έχουμε:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x)\, e^{\frac{-in\pi x}{T}}\, dx &= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x)\, e^{\frac{im\pi x}{T}}\, dx \\
&= \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x)\, \left(\cos\left(\frac{m\pi x}{T}\right) + i\sin\left(\frac{m\pi x}{T}\right)\right) dx \\
&= \frac{a_m + b_m i}{2} \\
&= \frac{a_{-n} + b_{-n} i}{2} \\
&= c_n.
\end{aligned}$$

Σημειώνουμε ότι αν η f είναι συνάρτηση πραγματικών τιμών τότε $c_n = \overline{c_{-n}}$.

Τα αντίστοιχα θεωρήματα που έχουν αναφερθεί για τις σειρές της μορφής (1.5.1) ισχύουν και για τις σειρές της μορφής (1.6.1).

Υπενθυμίζουμε ότι μια συνάρτηση $f : [-T, T] \to \mathbb{R}$ λέγεται **άρτια** αν $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in [-T, T]$, ενώ λέγεται **περιττή** αν $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in [-T, T]$.

Παράδειγμα. Οι συναρτήσεις $x^2, x^4 - x^2, \cos x$ είναι άρτιες, ενώ οι συναρτήσεις $x, x^3 - x^5, \sin x$ είναι περιττές στο $\mathbb{R}$.

1.7 Ο Πυρήνας και το Θεώρημα του Poisson

Θα εξετάσουμε τη λεγόμενη *'Abel σύγκλιση'* της σειράς *Fourier* μιας συνάρτησης $f(x)$. Δηλαδή, θα εξετάσουμε τη σύγκλιση της σειράς

$$u(r, x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}\widehat{f}(n)e^{inx}$$

καθώς το $r \to 1^-$.

Εστω ότι $f(x)$ είναι μία φραγμένη συνάρτηση, τότε είναι εύκολο να δει κανείς ότι και η ακολουθία $\widehat{f}(n)$ είναι επίσης φραγμένη (ΑΣΚΗΣΗ) και εφ' όσον για κάθε $0 < r < 1$ η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ συγκλίνει, έπεται ότι και η σειρά $\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}\widehat{f}(n)e^{inx}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο διάστημα $[0, 2\pi]$.

Θεώρημα 1.7.1 *(Poisson) Εάν η $f(x)$ είναι συνεχής και 2π-περιοδική και εάν*

$$u(r,x) = \sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|}\widehat{f}(n)e^{inx},\ r < 1,$$

τότε,

$$\lim_{r\to 1^-} u(r,x) = f(x)$$

ομοιόμορφα στο $[-\pi, \pi]$.

Μπορούμε να γράψουμε την $u(r,x)$ με μια πιο απλή μορφή. Αντικαθιστούμε στην $u(r,x)$ την τιμή του $\widehat{f}(n)$ και έχουμε

$$\begin{aligned} u(r,x) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{inx}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} r^{|n|}e^{in(x-t)}f(t)dt. \end{aligned} \tag{1.7.1}$$

Παρατηρούμε ότι η σειρά $\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{in(x-t)}$ συγλίνει ομοιόμορφα ως προς t. Πράγματι, έχουμε τις γεωμετρικές σειρές:

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n e^{in(x-t)} = \frac{1}{1 - re^{i(x-t)}},$$

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} r^{-n}e^{in(x-t)} = \frac{re^{-i(x-t)}}{1 - re^{-i(x-t)}}.$$

Προσθέτουμε κατά μέλη και έχουμε για $r < 1$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{in(x-t)} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cdot cos(x-t) + r^2}. \tag{1.7.2}$$

Τώρα, επειδή η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα μπορούμε να εναλλάξουμε την ολοκλήρωση με την άθροιση στην (1.7.1) και χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.7.2) διαπιστώνουμε ότι:

$$u(r,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{in(x-t)}f(t)dt\ ,(r < 1)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cdot cos(x-t)+r^2}f(t)dt. \tag{1.7.3}$$

Η σχέση (1.7.3) λέγεται ολοκλήρωμα του $Poisson$ και η συνάρτηση

$$P_r(x) = \frac{1-r^2}{1-2r\cdot cos(x)+r^2}\ ,\ x\in[-\pi,\pi]\ ,\ r<1\ ,$$

λέγεται πυρήνας του $Poisson$. Τελικά η συνάρτηση $u(r,x)$ γράφεται:

$$u(r,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_r(x-t)f(t)dt,\ r<1\ . \tag{1.7.4}$$

1.8 Μερικές Εφαρμογές του Θεωρήματος του Poisson

Θεώρημα 1.8.1 *Έστω ότι η f είναι μια συνεχής και 2π-περιοδική συνάρτηση. Τότε $\forall\varepsilon>0$ υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο $P(x)$ έτσι ώστε για κάθε $x\in[0,2\pi]$ ισχύει:*

$$|P(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

Απόδειξη: Από το Θεώρημα του $Poisson$, υπάρχει $r<1$:

$$|u(r,x)-f(x)|<\varepsilon/2, \tag{1.8.1}$$

ομοιόμορφα στο $[0,2\pi]$, όπου $u(r,x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}r^{|n|}\widehat{f}(n)e^{inx}$ και $\widehat{f}(n)$ είναι ο συντελεστής $Fourier$ της f. Επειδή η ακολουθία $\widehat{f}(n)$ είναι φραγμένη, υπάρχει $M>0$, έτσι ώστε

$$\left|\sum_{|n|\geq N}r^{|n|}\widehat{f}(n)e^{inx}\right| \leq M\sum_{|n|\geq N}r^{|n|} < 2M\frac{r^N}{1-r}. \tag{1.8.2}$$

Επειδή $r<1$, υπάρχει N αρκετά μεγάλο έτσι ώστε το δεύτερο μέλος της (1.8.2) να είναι $<\varepsilon/2$, άρα από τις (1.8.1) και (1.8.2) έχουμε:

$$\left|f(x)-\sum_{|n|\leq N-1}r^{|n|}\widehat{f}(n)e^{inx}\right| < |f(x)-u(r,x)| + \left|\sum_{|n|\geq N}r^{|n|}\widehat{f}(n)e^{inx}\right| < \varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.$$

Θεώρημα 1.8.2 ($Weierstrass$) *Έστω ότι η f είναι συνεχής στο πεπερασμένο και κλειστό διάστημα $[a,b]$. Τότε, δοθέντος $\varepsilon>0$, υπάρχει πολυώνυμο $P(x)$ έτσι ώστε:*

$$|P(x)-f(x)|<\varepsilon \text{ για κάθε } x\in[a,b]\ .$$

Απόδειξη: Έστω $\gamma > max(|a|,|b|)$, μπορούμε να επεκτείνουμε την f σε μια συνεχή συνάρτηση του $[-\gamma,\gamma]$. Μετά επεκτείνουμε την f έτσι ώστε να γίνει 2γ-περιοδική και συμβολίζουμε αυτήν την επέκταση με F. Τώρα, θέτουμε $g(x) = F\left(\frac{\gamma x}{\pi}\right)$. Παρατηρούμε ότι η g είναι 2π-περιοδική. Άρα, από το Θεώρημα (1.8.1) υπάρχει ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο $Q_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{inx}$ έτσι ώστε $sup_x|Q_N(x) - g(x)| < \varepsilon/2$ άρα $|f(x) - Q_N\left(\frac{\pi x}{\gamma}\right)| < \varepsilon/2$, $\forall x \in [a, b]$. Έχουμε, λοιπόν προσεγγίσει την f με τριγωνομετρικά πολυώνυμα. Όμως, κάθε τριγωνομετρικό πολυώνυμο προσεγγίζεται ομοιόμορφα από πολυώνυμα και έτσι έπεται το θεώρημα.

Θεώρημα 1.8.3 *(Το Λήμμα του Riemann) Έστω ότι η f είναι μια συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση. Τότε, $\forall n \in \mathbb{Z}$ έχουμε:* $\lim_{n\to\pm\infty} \widehat{f}(n) = 0$.
Απόδειξη:

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - Q_N(x))e^{-inx}dx + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Q_N(x)e^{-inx}dx,$$

όπου $Q_N(x)$ είναι ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού N, έτσι ώστε $|f(x) - Q_N(x)| < \varepsilon$ για δοθέν $\varepsilon > 0$ και $\forall x$ (Θεώρημα (1.8.1)). Άρα, αν $|n| > N$ έχουμε:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Q_N(x)e^{-inx}dx = 0$$

και

$$|\widehat{f}(n)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x) - Q_N(x)|dx < \varepsilon.$$

1.9 Λυμένες ασκήσεις

Άσκηση 1. Αν η συνάρτηση f είναι άρτια να δείξεται ότι

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right)dx, \quad b_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Απόδειξη: Από τον ορισμό έχουμε ότι

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right)dx \\ &= \frac{1}{T}\int_{-T}^{0} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right)dx + \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right)dx. \end{aligned}$$

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $x = -u$ στο πρώτο ολοκλήρωμα και επειδή η συνάρτηση είναι άρτια, έχουμε:

$$a_n = -\frac{1}{T}\int_{T}^{0} f(-u)\cos\left(\frac{-n\pi u}{T}\right)du + \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right)dx$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{T}\int_0^T f(u)\,\cos\left(\frac{n\pi u}{T}\right)\,du + \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,\cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right)\,dx \\
&= \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right)\,dx.
\end{aligned}$$

Για το υπολογισμό του b_n έχουμε:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{T}\int_{-T}^T f(x)\,\sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right)\,dx \\
&= \frac{1}{T}\int_{-T}^0 f(x)\,\sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right)\,dx + \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,\sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right)\,dx.
\end{aligned}$$

Όπως και στον υπολογισμό των a_n έτσι και εδώ κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $x = -u$ στο πρώτο ολοκλήρωμα και επειδή η συνάρτηση είναι άρτια έχουμε:

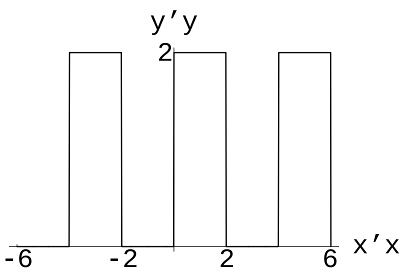
$$\begin{aligned}
b_n &= -\frac{1}{T}\int_T^0 f(-u)\,\sin\left(\frac{-n\pi u}{T}\right)\,du + \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,\sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right)\,dx \\
&= -\frac{1}{T}\int_0^T f(u)\,\sin\left(\frac{n\pi u}{T}\right)\,du + \frac{1}{T}\int_0^T f(x)\,\sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right)\,dx \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Άσκηση 2. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } -2 < x < 0, \\ 2, & \text{αν } \quad 0 < x < 2, \end{cases}$$

την οποία την επεκτείνουμε περιοδικά με περίοδο 4.
(i) Να βρεθούν οι συντελεστές Fourier αυτής.
(ii) Να γραφεί η σειρά Fourier της f.
(iii) Να ορίσετε τη συνάρτηση κατάλληλα στα σημεία $x = -2, 0, 2$ έτσι ώστε η σειρά να συγκλίνει στη συνάρτηση για $|x| \leq 2$.

Απόδειξη :



Σχήμα 1.1: Η γραφική παράσταση της f.

(i) Από τον ορισμό έχουμε:

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{0}^{2} 1\,dx = 2.$$

Για $n = 1, 2, \ldots$ έχουμε:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\,dx \\ &= \int_{0}^{2} \cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\,dx \\ &= \frac{2}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\Bigg|_0^2 = 0. \end{aligned}$$

Επίσης:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\,dx \\ &= \int_{0}^{2} \sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\,dx \\ &= -\frac{2}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi), \quad n = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

(ii) Από την (i) προκύπτει ότι η σειρά Fourier της f είναι η

$$\begin{aligned} S[f](x) &= \frac{2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1-\cos n\pi)}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1-(-1)^n)}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi x}{2}\right) \\ &= 1 + \frac{4}{\pi}\left(\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \frac{1}{3}\sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right) + \frac{1}{5}\sin\left(\frac{5\pi x}{2}\right) + \ldots\right). \end{aligned}$$

(iii) Η συνάρτηση ικανοποιεί τις συνθήκες του Dirichlet, άρα η σειρά συγκλίνει στην τιμή της $f(x)$ στα σημεία συνέχειας αυτής και στο $\frac{f(x^+)+f(x^-)}{2}$ για $x = -2, 0, 2$. Κατά συνέπεια, η τιμή που πρέπει να έχει στο $x = -2$ είναι $f(-2) = \frac{0+2}{2} = 1$, στο $x = 0$ είναι $f(0) = \frac{2+0}{2} = 1$ και στο $x = 2$ είναι $f(2) = \frac{0+2}{2} = 1$.

Άσκηση 3. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = x^2, \quad 0 < x < 2\pi$$

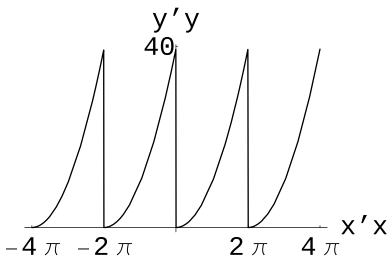
την οποία επεκτείνουμε περιοδικά με περίοδο $2T = 2\pi$.
(i) Να βρεθούν οι συντελεστές Fourier αυτής.
(ii) Να γραφεί η σειρά Fourier της f.
(iii) Να δείξετε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

(iv) Κάνοντας χρήση της ταυτότητας του Parseval να δείξετε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Λύση: (i) Η γραφική της παράσταση δίνεται από το σχήμα:



Σχήμα 1.2: Η γραφική παράσταση της f.

Είναι $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \cos nx\, dx$. Κάνοντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες δύο φορές για $n \neq 0$ έχουμε:

$$\int x^2 \cos nx\, dx = x^2 \frac{\sin nx}{n} + \frac{2}{n^2} x \cos nx - \frac{2}{n^3} \sin nx,$$

άρα:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[x^2 \frac{\sin nx}{n} + \frac{2}{n^2} x \cos nx - \frac{2}{n^3} \sin nx\right]\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{4}{n^2}.$$

Οταν $n = 0$ έχουμε:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\, dx = \frac{1}{\pi}\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{8\pi^2}{3}.$$

Ομοίως υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 \sin nx\, dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[-x^2 \frac{\cos nx}{n} + \frac{2}{n^2} x \sin nx + \frac{2}{n^3} \cos nx\right]\Bigg|_0^{2\pi} \\ &= -\frac{4\pi}{n},\ \ n = 1, 2, \ldots. \end{aligned}$$

(ii) Από την (1.5.1) προκύπτει ότι η σειρά Fourier είναι

$$S[f](x) = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{n^2} \cos nx - \frac{4\pi}{n} \sin nx \right), \quad 0 < x < 2\pi.$$

Μπορούμε επιπλέον να παρατηρήσουμε ότι από το θεώρημα του Dirichlet έχουμε

$$f(x) = S[f](x), \quad 0 < x < 2\pi.$$

(iii) Για $x = 0$ η σειρά Fourier είναι ίση με

$$S[f](x) = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}.$$

Αν $x = 0$, σύμφωνα με το Θεώρημα του Dirichlet η σειρά $S[f](x)$ συγκλίνει στο $\dfrac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = 2\pi^2$, άρα

$$2\pi^2 = \frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}.$$

Από εδώ προκύπτει ότι

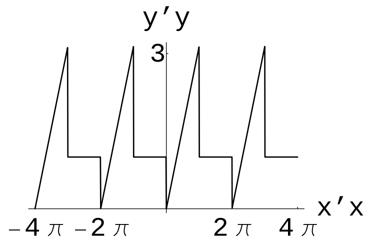
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4} \left(2\pi^2 - \frac{4\pi^2}{3} \right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

(iv) Από την ταυτότητα του Parseval και την παραπάνω ισότητα έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x^4 \, dx &= \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \Leftrightarrow \\
\frac{1}{\pi} \frac{x^5}{5} \bigg|_0^{2\pi} &= \frac{64\pi^4}{18} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16\pi^2}{n^2} \Leftrightarrow \\
\frac{32\pi^4}{5} &= \frac{64\pi^4}{18} + 16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} + \frac{16\pi^4}{6} \Leftrightarrow \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} &= \frac{2\pi^4}{5} - \frac{2\pi^4}{9} - \frac{\pi^4}{6} \Leftrightarrow \\
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} &= \frac{\pi^4}{90}.
\end{aligned}$$

Άσκηση 4. Να βρεθεί η σειρά Fourier της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } -\pi < x < 0, \\ x, & \text{αν } \quad 0 < x < \pi. \end{cases}$$



Σχήμα 1.3: Η γραφική παράσταση της f.

Λύση. Η γραφική της παράσταση δίνεται από το σχήμα:

Ισχύει:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 1\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\,dx \\ &= 1 + \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Για $n = 1, 2, \ldots$ και κάνοντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες έχουμε ότι

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nx\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{0} + x\frac{\sin nx}{n\pi} + \frac{1}{n^2\pi}\cos nx\Big|_{0}^{\pi} \\ &= \frac{\cos n\pi - 1}{n^2\pi} = \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}. \end{aligned}$$

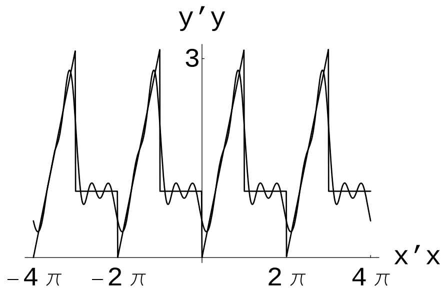
Ανάλογα βρίσκουμε ότι

$$b_n = \frac{(-1)^n(1-\pi) - 1}{n\pi}, \;\; n = 1, 2, \ldots.$$

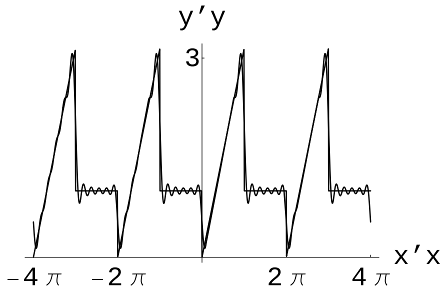
Τελικά έχουμε:

$$S[f](x) = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}\cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(1-\pi) - 1}{n\pi}\sin nx.$$

Παίρνοντας διαδοχικές προσεγγίσεις στο παραπάνω άθροισμα (βλέπε τα παρακάτω σχήματα), παρατηρούμε ότι καθώς το n μεγαλώνει έχουμε καλύτερη προσέγγιση στα σημεία συνέχειας της f.



Σχήμα 1.4: Η γραφική παράσταση της f και της $S_5[f](x)$.



Σχήμα 1.5: Η γραφική παράσταση της f και της $S_{10}[f](x)$.

Αποδεικνύεται ότι ακόμη και όταν το n μεγαλώνει έχουμε απόκλιση της τάξεως του 9% στα σημεία συνέχειας κοντά στο σημείο ασυνέχειας και το φαινόμενο αυτό λέγεται φαινόμενο Gibbs - προς τιμή του Αμερικανού Μαθηματικού και Φυσικού Josianh Willard Gibbs (1839 - 1903) που το παρατήρησε.

1.10 Ασκήσεις

1 *Δείξτε ότι:* (*i*) $1+2\cos t+2\cos(2t)+\ldots+2\cos(Nt)=\frac{\sin((N+\frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})}$.

(*ii*)
$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin((N+\frac{1}{2})t)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\,dt=1.$$

Υπόδειξη: (*i*) Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με $\sin(t/2)$ και παίρνουμε:

$$\left(1+2\sum_{n=1}^{N}\cos(nt)\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right)=\sin\left(\frac{t}{2}\right)+2\cos t\cdot\sin\left(\frac{t}{2}\right)+2\cdot\cos(2t)\cdot\sin\left(\frac{t}{2}\right)+\ldots+2\cdot\cos(Nt)\cdot\sin\left(\frac{t}{2}\right).$$

Από τους τριγωνομετρικούς τύπους της παραγράφου (1.2) και διαδοχικές απλοποιήσεις έχουμε:

$$\left(1+2\sum_{n=1}^{N}\cos(nt)\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right)=\sin\left(\frac{t}{2}\right)+\sin\left(t+\frac{t}{2}\right)-\sin\left(t-\frac{t}{2}\right)+\ldots+\sin\left(Nt+\frac{t}{2}\right)-\sin\left(Nt-\frac{t}{2}\right)=\sin\left(Nt+\frac{t}{2}\right).$$

2 *Αν η συνάρτηση f είναι περιττή στο $(-T,T)$, να δείξετε ότι*

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right)dx, \quad a_n = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

3 *Να βρεθεί η σειρά Fourier της συνάρτησης*

$$f(x) = x, \quad |x| < \pi.$$

Απ. $S[f](x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin nx.$

4 *Να βρεθεί η σειρά Fourier της συνάρτησης* $f(x) = \frac{x^2}{4}, \quad |x| < \pi$. *και στη συνέχεια να δείξετε ότι* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Απ. $S[f](x) = \frac{\pi^2}{12} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx.$

5 *Να βρεθούν οι συντελεστές Fourier της συνάρτησης*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \textit{αν } -\pi < x < 0, \\ x^2 & \textit{αν } \quad 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Κατόπιν να δείξετε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

6 *Να βρεθεί η σειρά Fourier της συνάρτησης*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \textit{αν } -\pi < x < 0, \\ \cos x & \textit{αν } \quad 0 < x < \pi. \end{cases}$$

Απ. $S[f](x) = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(1+(-1)^n)}{n^2-1} \sin nx.$

7 *Να βρεθεί η σειρά Fourier της συνάρτησης*

$$f(x) = \begin{cases} x & \textit{αν } 0 < x < 2, \\ -x+4 & \textit{αν } 2 < x < 4 \end{cases}$$

και στη συνέχεια να δείξετε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$.

Απ. $S[f](x) = 1 - \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}.$

8 *Αν $\widehat{f}(n)$, $\widehat{g}(n)$ είναι οι μιγαδικοί συντελεστές Fourier των $2T$ περιοδικών συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, να υπολογιστούν οι μιγαδικοί συντελεστές Fourier της συνάρτησης fg με τη βοήθεια των $\widehat{f}(n)$ και $\widehat{g}(n)$.*
(Απ. $\widehat{fg}(n) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n-k)\widehat{g}(k)$).

9 *Έστω f και g δύο συνεχείς περιοδικές συναρτήσεις με περίοδο $2T$. Η συνέλιξη (convolution) των δύο συναρτήσεων $f(t)$ και $g(t)$ ορίζεται από τη σχέση:*

$$h(t) = f * g(t) = \int_{-T}^{T} f(t-x)g(x)\,dx.$$

Αποδείξτε με τη βοήθεια του ορισμού της συνέλιξης και των ιδιοτήτων των ολοκληρωμάτων ότι ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

- *Αντιμεταθετική*
$$f * g(t) = g * f(t).$$
- *Προσεταιριστική*
$$[f_1 * f_2(t)] * f_3(t) = f_1(t) * [f_2 * f_3(t)].$$
- *Επιμεριστική*
$$f_1(t) * [f_2(t) + f_3(t)] = f_1 * f_2(t) + f_1 * f_3(t).$$
- *Αν $\widehat{f}(n)$, $\widehat{g}(n)$ είναι οι μιγαδικοί συντελεστές Fourier των συναρτήσεων f και g αντίστοιχα, να υπολογιστούν οι μιγαδικοί συντελεστές Fourier της συνάρτησης $f * g$ με τη βοήθεια των $\widehat{f}(n)$ και $\widehat{g}(n)$.*
(Απ. $\widehat{f * g}(n) = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n)$).

Κεφάλαιο 2

Εφαρμογές των σειρών Fourier στις διαφορικές εξισώσεις

2.1 Η διαφορική εξίσωση του Laplace σε έναν κυκλικό δίσκο

Υπενθυμίζουμε την διαφορική εξίσωση του Laplace:

$$\nabla^2 u = u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0 \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2. \tag{2.1.1}$$

Η ίδια εξίσωση σε πολικές συντεταγμένες (r,θ), γράφεται:

$$\frac{\partial \left(r \frac{\partial u}{\partial r}\right)}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \quad (r \neq 0). \tag{2.1.2}$$

Ζητούμε τη λύση της διαφορικής εξίσωσης (2.1.2) για $r < 1$, όταν μια αρχική συνθήκη δίδεται από τη συνάρτηση $f(\theta)$ που ορίζεται στην μοναδιαία περιφέρεια, όταν δηλαδή:

$$u(1,\theta) = f(\theta) \quad \theta \in [-\pi,\pi]\ . \tag{2.1.3}$$

Το πρόβλημα αυτό είναι γνωστό ως **Πρόβλημα του Dirichlet** .
Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η λύση $u(r,\theta)$ της (2.1.2) πρέπει να ικανοποιεί τις συνθήκες:
Η $u(r,\theta)$ είναι 2π-περιοδική συνάρτηση του θ, δηλαδή:

$$u(r,\theta) = u(r,\theta + 2\pi), \quad \theta \in [-\pi,\pi], \tag{2.1.4}$$

$$\text{Η } u(r,\theta) \text{ είναι συνεχής συνάρτηση.} \tag{2.1.5}$$

Για τη λύση της διαφορικής εξίσωσης (2.1.2) θα χρησιμοποιήσουμε τη **μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών**.
Η μέθοδος αυτή θα ανάγει τη διαφορική εξίσωση (2.1.2) σε δύο συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Πράγματι, θέτουμε:

$$u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$$

Η ιδέα αυτής της αντικατάστασης έγκειται στο γεγονός ότι οι μερικές παράγωγοι της $u(r,\theta)$ θα μας δώσουν απλές παραγώγους των συναρτήσεων $R(r)$ και $\Theta(\theta)$. Πράγματι, η (2.1.2) γίνεται:

$$\frac{\partial(rR'\Theta)}{\partial r} + \frac{1}{r}\cdot R\cdot\Theta'' = 0,$$

ή $r^2R''\Theta + rR'\Theta + R\Theta'' = 0$, οπότε αν διαιρέσουμε με $R\Theta$ έχουμε:

$$r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta}.$$

Παρατηρούμε ότι το πρώτο μέλος είναι ανεξάρτητο του θ και το δεύτερο είναι ανεξάρτητο του r. Επειδή τα δύο μέλη είναι ίσα υπάρχει μια σταθερά c έτσι ώστε:

$$r^2\frac{R''}{R} + r\frac{R'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = c \quad R,\Theta \neq 0\ .$$

Έχουμε λοιπόν δύο απλές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης των r και θ.Υπενθυμίζουμε τώρα ότι η συνήθης διαφορική εξίσωση

$$y'' + ay' + by = 0,$$

όπου a και b είναι σταθερές, λύνεται θέτοντας $y = e^{zx}$ και λύνοντας ως προς z. Αν λοιπόν z_1, z_2, $(z_1 \neq z_2)$ είναι λύσεις της χαρακτηριστικής εξίσωσης $z^2 + az + b = 0$, τότε $y(x) = Ae^{z_1x} + Be^{z_2x}$, όπου A, B είναι αυθαίρετες σταθερές. Εάν $z_1 = z_2 = z$, τότε $y(x) = (A+Bx)e^{zx}$, όπου A, B είναι πάλι αυθαίρετες σταθερές. Υπενθυμίζουμε επίσης ότι η διαφορική εξίσωση

$$x^2y'' + axy' + by = 0$$

λύνεται αν θέσουμε $y = x^z$ και λύσουμε ως προς z. Εάν, z_1, z_2 $(z_1 \neq z_2)$ είναι λύσεις της χαρακτηριστικής εξίσωσης $z^2 + (a-1)z + b = 0$ τότε έχουμε λύσεις της μορφής $y(x) = ax^{z_1} + bx^{z_2}$ όπου a και b είναι αυθαίρετες σταθερές. Εάν $z_1 = z_2 = z$, τότε $y(x) = (a + b\log x)x^z$.

Θεωρούμε τώρα την $\Theta'' + c\Theta = 0$ της οποίας η γενική λύση εξαρτάται από το πρόσημο του c. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι

$$\Theta(\theta) = \begin{cases} Ae^{i\sqrt{c}\theta} + Be^{-i\sqrt{c}\theta}, & c > 0 \\ A + B\theta, & c = 0 \\ Ae^{\sqrt{-c}\theta} + Be^{-\sqrt{-c}\theta}, & c < 0 \end{cases}.$$

Όμοια, η λύση της διαφορικής εξίσωσης $r^2R'' + rR' - cR = 0$ εξαρτάται από το πρόσημο του c:

$$R(r) = \begin{cases} ar^{\sqrt{c}} + br^{-\sqrt{c}}, & c > 0 \\ a + b\log r, & c = 0 \\ ar^{i\sqrt{-c}} + br^{-i\sqrt{-c}}, & c < 0 \end{cases}.$$

Έτσι, για παράδειγμα, βλέπουμε ότι η $(A+B\theta)(a+b\log r)$ ικανοποιεί την (2.1.2). Γενικά, κάθε γινόμενο $R(r)\Theta(\theta)$ που προσδιορίζεται από την ίδια τιμή του c δίνει μια λύση της

(2.1.2). Υπενθυμίζουμε όμως ότι κάθε λύση πρέπει να ικανοποιεί τις συνθήκες (2.1.4) και (2.1.5). Για κάθε r, η $u(r,\theta)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση στο $[-\pi,\pi]$, άρα θα πρέπει να είναι φραγμένη. Εάν λοιπόν $c<0$, η τιμή της Θ δεν είναι φραγμένη εκτός αν $A=B=0$. Άρα για $c<0$ έχουμε την προφανή μηδενική λύση. Όμοια, για $c=0$, για να ικανοποιείται η (2.1.4) πρέπει να πάρουμε $B=0$. Τέλος, εφαρμόζοντας την (2.1.5) στην R έχουμε $b=0$ για $c\leq 0$. Απομένει η περίπτωση όπου $c>0$. Παρατηρούμε ακόμη ότι η λύση της Θ είναι 2π-περιοδική αν και μόνον αν η $\sqrt{c}$ είναι ακέραιος αριθμός, δηλαδή όταν $c=n^2$, $n=0,1,2,....$ Εάν τώρα γι' αυτές τις τιμές ζητήσουμε η R να ικανοποιεί την (2.1.5) έχουμε $b=0$, γιατί εάν $b\neq 0$, $br^{-\sqrt{c}}\to\infty$, $r\to 0$.

Συνοψίζοντας τα προηγούμενα συμπεραίνουμε ότι οι λύσεις $u(r,\theta)$ που ικανοποιούν τις (2.1.4) και (2.1.5) εξαρτώνται από κάποιο $n=0,1,2,...$ και τις γράφουμε:

$$u_n(r,\theta)=\begin{cases} r^n(Ae^{in\theta}+Be^{-in\theta}), & n>0 \\ aA', & n=0 \end{cases}.$$

Μπορεί κανείς εύκολα να επαληθεύσει ότι η $u_n(r,\theta)$ είναι μια μερική λύση της (2.1.2). Επίσης, είναι φανερό ότι εάν $u_1,u_2,...,u_N$ είναι λύσεις τις (2.1.2), τότε και η $u_1+u_2+...+u_N$ είναι λύση της (2.1.2), άρα η

$$a_0+\sum_{n=1}^{N} r^n(A_ne^{in\theta}+B_ne^{-in\theta})$$

ικανοποιεί τις (2.1.2), (2.1.4) και (2.1.5). Εάν τώρα θέσουμε $A_n=\widehat{f}(n)$ και $B_n=\widehat{f}(-n)$ όπου $\widehat{f}$ είναι ο συντελεστής *Fourier* της f έχουμε τη μερική λύση της (2.1.2):

$$\sum_{n=-N}^{N} r^{|n|}e^{in\theta}\widehat{f}(n).$$

Για να βρούμε τη γενική λύση της (2.1.2) η συνηθισμένη διαδικασία σ' αυτά τα προβλήματα (συνοριακών τιμών ή προβλήματα του *Dirichlet*) είναι η λεγόμενη **μέθοδος της υπέρθεσης**. Αφήνουμε το N να τείνει στο άπειρο και γράφουμε:

$$u(r,\theta)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{in\theta}\widehat{f}(n). \tag{2.1.6}$$

Εστω $r<1$, προφανώς οι συντελεστές $\widehat{f}(n)$ είναι φραγμένοι και το δεξιό μέλος της (2.1.6) συγκλίνει. Μπορεί κανείς εύκολα να επιβεβαιώσει ότι η (2.1.6) ικανοποιεί την (2.1.2) στο εσωτερικό του μοναδιαίου δίσκου ($r<1$). Άρα, με τους συντελεστές *Fourier* της $f(\theta)$ έχουμε καθορίσει τη λύση της (2.1.2). Απομένει να δούμε αν η (2.1.6) ικανοποιεί την αρχική συνθήκη (2.1.3). Σημειώνουμε ότι η (2.1.3) καθορίζει μια μοναδική λύση $u(r,\theta)$ της (2.1.2) που είναι η $u(1,\theta)=f(\theta)$. Η τελευταία ισότητα στα περισσότερα προβλήματα συνοριακών τιμών σημαίνει ότι η λύση $u(r,\theta)$ της (2.1.2) (που έχει ορισθεί στο εσωτερικό του δίσκου) συγκλίνει στην $f(\theta)$ (που ορίζεται στο σύνορο) καθώς το $u(r,\theta)$ τείνει στο

σύνορο. Σημειώνουμε ότι υπάρχει μια μεγάλη ποικιλία προβλημάτων συνοριακών τιμών. Το παρόν πρόβλημα της επίλυσης της (2.1.2) συνίσταται στον τρόπο με τον οποίο η $u(r,\theta)$ συγκλίνει στην f.
Αν η $u(r,\theta)$ είναι όπως στο θεώρημα του $Poisson$, έχουμε $u(r,\theta) \to f(\theta)$, $r \to 1^-$, ομοιόμορφα στο $[-\pi,\pi]$. Δηλαδή μπορούμε να επεκτείνουμε συνεχώς την $u(r,\theta)$ στον κλειστό δίσκο έτσι ώστε $u(r,\theta) = f(\theta)$ στο σύνορο.
Η λύση $u(r,\theta)$ είναι μοναδική. Πράγματι, η $u(r,\theta)$ είναι συνεχής και αρμονική συνάρτηση του δίσκου ως λύση της (2.1.1) και από την αρχή του μεγίστου της μιγαδικής ανάλυσης κάθε άλλη λύση $u(r,\theta)$ της (2.1.2) που ικανοποιεί την (2.1.3) ταυτίζεται με την $u(r,\theta)$.
Το πρόβλημα που εξετάσαμε συναντάται στη βιβλιογραφία ως το πρόβλημα της διάδοσης της θερμότητας στο δίσκο. Εάν $f(\theta)$ είναι η θερμότητα στο σύνορο του δίσκου η $u(r,\theta)$ είναι η θερμότητα στο σημείο (r,θ) αυτού.

2.2 Βασικές έννοιες των διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους

Ορισμός 2.2.1 *Διαφορική εξίσωση (δ.ε.) με μερικές παραγώγους (μ.π.) λέγεται μια εξίσωση που περιέχει μια άγνωστη συνάρτηση δύο ή περισσοτέρων μεταβλητών και τις μερικές παραγώγους της ως προς τις μεταβλητές αυτές.*

Ορισμός 2.2.2 *Τάξη μιας διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους λέγεται η τάξη της μεγαλύτερης παραγώγου που περιέχεται στη διαφορική εξίσωση.*

Παράδειγμα: Η εξίσωση

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2(x+y) \tag{2.2.1}$$

είναι μια δ.ε. με μ.π δεύτερης τάξης. Η συνάρτηση u είναι η εξαρτημένη μεταβλητή και τα x, y είναι οι ανεξάρτητες μεταβλητές.

Ορισμός 2.2.3 *Λύση μιας διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους λέγεται μια συνάρτηση που ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση.*

Ορισμός 2.2.4 *Γενική λύση μιας διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους λέγεται μια λύση που περιέχει και αυθαίρετες συναρτήσεις, το πλήθος των οποίων είναι ίσο με την τάξη αυτής.*

Ορισμός 2.2.5 *Μερική λύση μιας διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους καλείται κάθε συνάρτηση που ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση και η οποία προκύπτει από τη γενική λύση με συγκεκριμένη επιλογή των αυθαίρετων συναρτήσεων.*

Παράδειγμα: Η διαφορική εξίσωση (2.2.1) γράφεται στη μορφή

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = 2(x+y).$$

Ολοκληρώνοντας ως προς x παίρνουμε:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + 2yx + g_1(y),$$

όπου $g_1(y)$ είναι μία αυθαίρετη συνάρτηση του y. Ολοκληρώνοντας την παραπάνω ως προς y παίρνουμε τη γενική λύση της δ.ε.:

$$u(x,y) = x^2y + y^2x + f(x) + g(y),$$

όπου f, g είναι αυθαίρετες συναρτήσεις.

Όταν σε μια δ.ε. με μ.π. ζητάμε λύσεις που να ικανοποιούν συγκεκριμένες συνθήκες, λέμε ότι έχουμε ένα πρόβλημα **συνοριακών τιμών** και οι συνθήκες λέγονται συνοριακές συνθήκες.

Παράδειγμα: Να λυθεί η (2.2.1) με τις συνθήκες

$$u(x,0) = x, \quad u(1,y) = 1+y.$$

Στο προηγούμενο παράδειγμα βρήκαμε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης. Για την εύρεση της μερικής λύσης πρέπει να προσδιορίσουμε τις f, g με τη βοήθεια των συνοριακών συνθηκών. Έχουμε:

$$u(x,0) = f(x) + g(0) = x,$$

$$u(1,y) = y + y^2 + f(1) + g(y) = 1 + y.$$

Προσθέτοντας έχουμε:

$$f(x) + g(0) + y + y^2 + f(1) + g(y) = x + 1 + y.$$

Για $x = 1$ και $y = 0$ έχουμε:

$$2(f(1) + g(0)) = 2.$$

Συνδιάζοντας τα παραπάνω προκύπτει

$$f(x) + g(y) = x - y^2,$$

άρα η ζητούμενη λύση είναι:

$$u(x,y) = x^2y + y^2x + x - y^2.$$

2.3 Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης

Η γενική μορφή μιας γραμμικής δ.ε. με μ.π. δεύτερης τάξης με 2 ανεξάρτητες μεταβλητές είναι της μορφής

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g,$$

όπου τα a, b, c, d, e, f, g είναι συναρτήσεις των x, y.
Αν μια δ.ε. με μ.π. δεύτερης τάξης με 2 ανεξάρτητες μεταβλητές δεν είναι της παραπάνω μορφής, λέγεται μη γραμμική δ.ε.

Αν $g = 0$, τότε η παραπάνω δ.ε. λέγεται ομογενής, ενώ αν $g \neq 0$ λέγεται μη ομογενής.

Ανάλογα με τους συντελεστές, η παραπάνω δ.ε. λέγεται
(i) ελλειπτική, αν $b^2 - 4ac < 0$,
(ii) υπερβολική, αν $b^2 - 4ac > 0$,
(iii) παραβολική, αν $b^2 - 4ac = 0$.

Χαρακτηριστικές περιπτώσεις γραμμικών δ.ε. με μ.π. είναι οι ακόλουθες:

- Η εξίσωση διάδοσης της θερμότητας (heat equation or diffusion equation), σε ένα σώμα έχει τη μορφή

  $$u_t = k\nabla^2 u,$$

  όπου $u(t, x, y, z)$ είναι η θερμοκρασία ενός σημείου του σώματος με συντεταγμένες (x, y, z) τη χρονική στιγμή t. Στην παραπάνω σχέση το k είναι μια σταθερά που εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά του σώματος στο οποίο διαδίδεται η θερμότητα.

  Επίσης $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ είναι η Λαπλασιανή της u.

  Στη μία διάσταση (λεπτή ράβδος), η παραπάνω δ.ε. παίρνει τη μορφή

  $$u_t = ku_{xx}, \ k > 0,$$

  όπου $u(t, x)$ είναι η θερμοκρασία στο σημείο x τη χρονική στιγμή t.

- Η εξίσωση της παλλόμενης χορδής στη μια διάσταση (wave equation) είναι

  $$u_{tt} = a^2 u_{xx},$$

  όπου $u(x, t)$ είναι η συνάρτηση που δείχνει τη θέση του σημείου x της χορδής τη χρονική στιγμή t και το a σταθερά που εξαρτάται από τα χαρακτηριστικά της χορδής.

- Η εξίσωση του Laplace (εξίσωση δυναμικού), είναι η

  $$\nabla^2 u = 0$$

  και συναντάται συχνά στη φυσική.

Για την επίλυση μιας γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους χρησιμοποιούμε τα ακόλουθα:

Θεώρημα 2.3.1 *(Αρχή της υπερθέσεως) Αν $u_1, u_2, \ldots, u_n$ είναι λύσεις μιας γραμμικής ομογενούς διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους τότε και η συνάρτηση*

$$u = \sum_{i=1}^{n} c_i u_i$$

όπου c_i, $i = 1, \ldots, n$ αυθαίρετες σταθερές, είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης. Αποδεικνύεται ότι κάτω από κατάλληλες συνθήκες σύγκλισης και η σειρά

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i$$

είναι επίσης λύση της διαφορικής εξίσωσης (παραλείπουμε τις λεπτομέρειες).

Θεώρημα 2.3.2 *Η γενική λύση μιας γραμμικής διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους είναι το άθροισμα μιας μερικής λύσης της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης και της γενικής λύσης της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης.*

2.4 Προβλήματα συνοριακών τιμών

Πρόβλημα: Δίνεται λεπτή ράβδος με συντελεστή διαδόσεως της θερμότητας k και άκρα τα σημεία $x = 0$ και $x = L$ στον άξονα των x. Η επιφάνεια είναι μονωμένη έτσι ώστε να μην μπορεί να δεχτεί ούτε να αποβάλλει θερμότητα στο περιβάλλον, παρά μόνο από τα άκρα της. Εάν η αρχική θερμοκρασία ($t = 0$) είναι $f(x)$ και το άκρο $x = 0$ διατηρείται σε θερμοκρασία μηδέν διατυπώστε το πρόβλημα συνοριακών τιμών όταν:

(i) και το άκρο $x = L$ διατηρείται σε θερμοκρασία 0,

(ii) το άκρο $x = L$ είναι μονωμένο,

(iii) το δεξί άκρο $x = L$ ακτινοβολεί στον περιβάλλοντα χώρο που έχει θερμοκρασία u_0.

Λύση. Είναι πρόβλημα διάδοσης της θερμότητας στη μια διάσταση οπότε έχουμε τη δ.ε.

$$u_t = k u_{xx} \quad 0 < x < L, \ \ t > 0. \tag{2.4.1}$$

(i) Στην περίπτωση αυτή και τα δύο άκρα είναι σε θερμοκρασία 0, οπότε

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t > 0. \tag{2.4.2}$$

Η αρχική θερμοκρασία είναι $f(x)$, άρα

$$u(x,0) = f(x),\ \ 0 < x < L. \tag{2.4.3}$$

Είναι φανερό ότι η συνάρτηση που παριστάνει τη θερμοκρασία πρέπει να είναι φραγμένη άρα

$$|u(x,t)| < M,\ \ 0 < x < L,\quad t > 0, \tag{2.4.4}$$

άρα έχουμε τη δ.ε (2.4.1) με τις συνοριακές συνθήκες (2.4.2), (2.4.3) και (2.4.4).

(ii) Επειδή το δεξί άκρο $x = L$ είναι μονωμένο έχουμε ότι η ροή θερμότητας στο σημείο $x = L$ θα είναι ίση με το 0, άρα θα ισχύει ότι και στην προηγούμενη περίπτωση με τη συνθήκη

$$u_x(L,t) = 0$$

στη θέση της $u(L,t) = 0$.

(iii) Από τους νόμους διάδοσης της θερμότητας γνωρίζουμε ότι η ροή θερμότητας με μορφή ακτινοβολίας από ένα σώμα που έχει απόλυτη θερμοκρασία u_1 σε ένα άλλο σώμα με απόλυτη θερμοκρασία u_2 είναι

$$a(u_1^4 - u_2^4),$$

όπου a είναι μια σταθερά. Η σχέση αυτή λέγεται νόμος ακτινοβολίας του Stefan και έτσι έχουμε

$$-Ku_x(L,t) = a(u_1^4 - u_0^4),\ \ \text{(ροή θερμότητας)}$$

όπου K είναι η σταθερά της θερμικής αγωγιμότητας και όπου

$$u_1 = u(L,t).$$

Αν τα u_0, u_1 είναι περίπου ίσα, τότε

$$\begin{aligned} u_1^4 - u_0^4 &= (u_1 - u_0)(u_1^3 + u_1^2 u_0 + u_1 u_0^2 + u_0^3) \\ &= (u_1 - u_0)u_0^3\left(\left(\frac{u_1}{u_0}\right)^3 + \left(\frac{u_1}{u_0}\right)^2 + \left(\frac{u_1}{u_0}\right) + 1\right) \\ &= 4(u_1 - u_0)u_0^3. \end{aligned}$$

Αυτή η προσέγγιση ονομάζεται νόμος ψύξεως του Newton και παίρνουμε

$$-Ku_x(L,t) = b(u_1 - u_0),$$

όπου το b είναι σταθερά.

2.5 Μέθοδος χωρισμού των μεταβλητών

Ένας τρόπος για την επίλυση κάποιων διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους είναι η μέθοδος χωρισμού των μεταβλητών. Με αυτή την τεχνική ψάχνουμε για λύσεις ειδικής μορφής. Δεχόμαστε ότι μια λύση μπορεί να εκφραστεί σαν γινόμενο αγνώστων συναρτήσεων, η κάθε μια εκ των οποίων εξαρτάται από μια μόνο μεταβλητή. Πιο συγκεκριμένα αναζητούμε λύσεις της μορφής

$$u(x,t) = X(x)Y(t)$$

για καθορισμένες συναρτήσεις X, Y. Υποθέτοντας ότι μπορούμε να βρούμε λύση της διαφορικής εξίσωσης αυτής της μορφής και αντικαθιστώντας στη διαφορική εξίσωση καταλήγουμε σε διαφορική εξίσωση μιας μεταβλητής που ξέρουμε να τη λύνουμε.

Με τη μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών παίρνουμε μόνο μερικές λύσεις.

Παράδειγμα: Να λυθεί το πρόβλημα των συνοριακών τιμών

$$u_x = u_y, \quad u(0,y) = 2e^{-5y}.$$

Λύση. Θα το λύσουμε με τη μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών. Υποθέτουμε ότι η ζητούμενη λύση γράφεται στη μορφή

$$u(x,t) = X(x)Y(t).$$

Παραγωγίζοντας έχουμε

$$u_x(x,y) = X'(x)Y(y),$$
$$u_y(x,y) = X(x)Y'(y).$$

Αντικαθιστώντας στη διαφορική εξίσωση παίρνουμε

$$X'(x)Y(y) = X(x)Y'(y).$$

Για να ισχύει αυτή η σχέση θα πρέπει να έχουμε ότι

$$\frac{X'(x)}{X(x)} = \frac{Y'(y)}{Y(y)} = \lambda,$$

για κάποια αυθαίρετη σταθερά λ. Αν λοιπόν υπάρχει τέτοια λύση πρέπει

$$X'(x) - \lambda X(x) = 0,$$

$$Y'(y) - \lambda Y(y) = 0.$$

Οι παραπάνω είναι γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως. Όπως γνωρίζουμε η λύση τους είναι:

$$X(x) = Ae^{\lambda x},$$
$$Y(y) = Be^{\lambda y},$$

και συνεπώς

$$u(x,y) = ABe^{\lambda(x+y)}.$$

Από την υπόθεση έχουμε:

$$u(0, y) = ABe^{\lambda y} = 2e^{-5y},$$

άρα:

$$AB = 2, \quad \lambda = -5.$$

Επομένως η ζητούμενη λύση είναι η

$$u(x, y) = 2e^{-5(x+y)}.$$

2.6 Η εξίσωση της παλλόμενης χορδής

Πρόβλημα. Έστω ότι η συνάρτηση $u(x, t)$ δίνει τη μετατόπιση του σημείου x της χορδής τη χρονική στιγμή t. Η διαφορική εξίσωση που περιγράφει την κίνηση αυτή δίνεται από τη σχέση

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}.$$

Αν τα άκρα της είναι στερεωμένα, έχουμε τις συνοριακές συνθήκες

$$u(0, t) = u(T, t) = 0.$$

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η θέση κάθε σημείου της χορδής περιγράφεται από τη συνάρτηση $f(x)$, άρα έχουμε την εξίσωση

$$u(x, 0) = f(x).$$

Υποθέτουμε επίσης ότι η αρχική ταχύτητα σε κάθε σημείο της χορδής είναι μηδέν, δηλαδή

$$u_t(x, 0) = 0.$$

Να βρεθεί η $u(x, t)$.

Λύση. Λύνουμε το πρόβλημα με την μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών. Υποθέτουμε ότι η ζητούμενη λύση γράφεται στη μορφή

$$u(x, t) = X(x)Y(t).$$

Παραγωγίζοντας έχουμε:

$$\begin{aligned} u_x(x, t) &= X'(x)Y(t) \\ u_{xx}(x, t) &= X''(x)Y(t) \\ u_t(x, t) &= X(x)Y'(t) \\ u_{tt}(x, t) &= X(x)Y''(t). \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στη δ.ε. έχουμε:

$$X(x)Y''(t) = c^2 X''(x)Y(t),$$

οπότε

$$\frac{Y''(t)}{c^2Y(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Για να ισχύει η σχέση αυτή θα πρέπει:

$$\frac{Y''(t)}{c^2Y(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

για κάποια αυθαίρετη σταθερά λ. Αν λοιπόν υπάρχει τέτοια λύση της διαφορικής εξίσωσης θα πρέπει οι συναρτήσεις X, Y να ικανοποιούν τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$

και

$$Y''(t) + \lambda c^2 Y(t) = 0.$$

Από τις συνοριακές συνθήκες έχουμε

$$u(0,t) = X(0)Y(t) = 0,$$

και

$$u(T,t) = X(T)Y(t) = 0,$$

άρα:

$$X(0) = X(T) = 0.$$

Ετσι, έχουμε τη συνήθη ομογενή γραμμική δ.ε.:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,\ 0 < x < T, \quad X(0) = X(T) = 0.$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση αυτής είναι

$$r^2 + \lambda = 0.$$

Διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

(i) $\lambda = b^2 > 0,\ b > 0$. Οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι $r = \pm bi$ και άρα η γενική της λύση δίνεται από τη σχέση

$$X(x) = c_1 \cos bx + c_2 \sin bx.$$

Από την αρχική συνθήκη $X(0) = 0$ παίρνουμε ότι $c_1 = 0$ ενώ από την αρχική συνθήκη $X(T) = 0$ παίρνουμε ότι $\sin bT = 0$ και άρα

$$b = \frac{n\pi}{T},\ n = 1, 2, \ldots.$$

Οι αριθμοί

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{T}\right)^2$$

είναι οι ιδιοτιμές και οι συναρτήσεις

$$X_n(x) = A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right)$$

είναι οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις.

Για την εύρεση της $Y(t)$ έχουμε τη δ.ε.

$$Y''(t) + \lambda c^2 Y(t) = 0.$$

Με τα λ_n που έχουμε ήδη υπολογίσει, η γενική λύση δίνεται από τη σχέση:

$$Y_n(t) = c_n \cos\left(\frac{n\pi c}{T}t\right) + d_n \sin\left(\frac{n\pi c}{T}t\right),$$

όπου c_n, d_n αυθαίρετες σταθερές. Από την αρχή της υπερθέσεως, η

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n \cos\left(\frac{n\pi c}{T}t\right) + d_n \sin\left(\frac{n\pi c}{T}t\right)\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right)$$

είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης. Παραγωγίζοντας ως προς t παίρνουμε ότι

$$u_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-c_n\frac{n\pi c}{T} \sin\left(\frac{n\pi c}{T}t\right) + d_n\frac{n\pi c}{T} \cos\left(\frac{n\pi c}{T}t\right)\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right).$$

Θέτοντας $t = 0$ και επειδή $u_t(x,0) = 0$ έχουμε:

$$\sum_{n=1}^{\infty} d_n\frac{n\pi c}{T}\sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right) = 0.$$

Για να ισχύει αυτή η σχέση για κάθε x πρέπει $d_n = 0$, $n \in \mathbb{N}$, οπότε:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{n\pi c}{T}t\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right). \tag{2.6.1}$$

Τέλος για να έχουμε την συνθήκη $u(x,0) = f(x)$ πρέπει

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right) = f(x).$$

Από τη θεωρία των σειρών Fourier έχουμε:

$$c_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right)\,dx.$$

Με τον παραπάνω υπολογισμό των c_n έχουμε ότι η ζητούμενη λύση δίνεται από τη σχέση (2.6.1).

(ii) $\lambda \leq 0$. Καταλήγουμε σε τετριμμένες λύσεις.

2.7 Ασκήσεις

1. Εξετάστε σε ποιά κατηγορία ανήκουν οι δ.ε.

$$3u_{xx} + 2u_{xy} + 5u_{yy} + xu_y = 0.$$

(Απ. Ελλειπτική αφού $2^2 - 3.5 = -11 < 0$).

2. Δείξτε ότι λύνοντας τη διαφορική εξίσωση διάδοσης της θερμότητας με τη μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών και με συνοριακές συνθήκες

$$u(0,t) = u_x(l,t) = 0, \; x \in (0,l)$$

προκύπτουν οι ακόλουθες ιδιοσυναρτήσεις.

$$\sin(\pi x/2l), \, \sin(3\pi x/2l), \, \sin(5\pi x/2l), \, \ldots.$$

3. Να λυθεί η δ.ε. της κυματικής εξίσωσης

$$u_{tt} = u_{xx}, \;\; 0 < x < \pi,$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0,$$

$$u(x,0) = \sin(2x), \quad u_t(x,0) = 0$$

με τη μέθοδο χωρισμού των μεταβλητών.

4. Να λυθεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$u_t = 3u_{xx},$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0,$$

$$u(x,0) = 2x,$$

για $0 < x < 1, \; t > 0$.

5. Δείξτε ότι η λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$u_t = u_{xx}$$

με συνοριακές συνθήκες

$$u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$$

$$u(x,0) = f(x)$$

για $0 < x < \pi, \; t > 0$ είναι η

$$u(x,t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t}\,\cos nx \int_0^{\pi} f(x)\,\cos nx\,dx.$$

Δώστε μια φυσική ερμηνεία σ' αυτό το πρόβλημα.

Κεφάλαιο 3

Αναπτύγματα Αναλυτικών Συναρτήσεων- Εφαρμογές των Ολοκληρωτικών Υπολοίπων

3.1 Δυναμοσειρές και το θεώρημα του Taylor

Ορισμός 3.1.1 *Μια σειρά της μορφής $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ με $a_n, z_0, z \in \mathbf{C}$ λέγεται δυναμοσειρά κέντρου z_0.*

Θα δείξουμε ότι μια συνάρτηση είναι αναλυτική σε ένα σημείο z_0 αν και μόνο αν μπορεί να εκφραστεί από μια συγκλίνουσα δυναμοσειρά σε μια περιοχή του z_0.

Θεώρημα 3.1.2 *Έστω $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ μια δυναμοσειρά, τότε υπάρχει μοναδικός αριθμός $R \geq 0$, ο οποίος καλείται ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς, τέτοιος ώστε η σειρά:*

(i) να συγκλίνει απόλυτα για $|z-z_0| < R$,

(ii) να αποκλίνει για $|z-z_0| > R$ και

(iii) να συγκλίνει ομοιόμορφα για κάθε κλειστό δίσκο που περιέχεται στο δίσκο $D(z_0, R) = \{z : |z-z_0| < R\}$.

Η απόδειξη στηρίζεται στο ακόλουθο Λήμμα των Abel-Weierstrass.

Λήμμα 3.1.3 *Υποθέτουμε ότι $|a_n|r_0^n \leq M, \forall\ n$, όπου $r_0 \geq 0$ και M σταθερά. Τότε για $r < r_0$ η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ συγκλίνει ομοιόμορφα και απόλυτα σε κάθε κλειστό δίσκο*

$A_r = \{z : |z - z_0| \le r\}$.
Απόδειξη: Για $z \in A_r$ έχουμε:

$$|a_n(z-z_0)^n| \le |a_n| r^n \le M \left(\frac{r}{r_0}\right)^n.$$

Έστω $M_n = M(\frac{r}{r_0})^n$, επειδή $\frac{r}{r_0} < 1$, η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ συγκλίνει, άρα από το κριτήριο Weierstrass η σύγκλιση είναι απόλυτη και ομοιόμορφη.

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.2 (για $z_0 = 0$): Αν η σειρά αποκλίνει για κάθε $z \neq 0$ τότε προφανώς $R = 0$. Αν η σειρά συγκλίνει για κάποιο $z \neq 0$, θέτουμε $S = \{z : \sum_{n=0}^{\infty} |a_n||z|^n < \infty, \quad |z| < r\}$ και ορίζουμε

$$R = \begin{cases} supS, \text{ αν } S \text{ φραγμένο} \\ \infty, \text{ αν } S \text{ δεν είναι φραγμένο} \end{cases}.$$

(*i*) Για κάθε $|z| < R$ υπάρχει $p > 0 : |z| < p < R$ με $p \in S$, διότι διαφορετικά το $R \neq supS$. Άρα η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ συγκλίνει, συνεπεία του Λήμματος 3.1.3.

(*ii*) Αν η σειρά συγκλίνει σε κάποιο $z_1 : |z_1| > R$ τότε θα συγκλίνει απόλυτα για $|z| < |z_1|$ (προηγούμενο Λήμμα). Άρα $z_1 \in S$, άτοπο.

(*iii*) Η ομοιόμορφη σύγκλιση της $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ για κάθε $z : |z| \le R_0 < R$, έπεται από την (*i*) και από το κριτήριο του Weierstrass.

Σημείωση: Δεν γνωρίζουμε αν συγκλίνει ή αποκλίνει η σειρά για $|z| = R$.

Θεώρημα 3.1.4 *Έστω η δυναμοσειρά* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$.

(i) Εάν το $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ *υπάρχει, είναι ίσο με την ακτίνα σύγκλισης* R.

(ii) Εάν $p = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ *υπάρχει, τότε* $R = \frac{1}{p}$ *είναι η ακτίνα σύγκλισης.*

Σημείωση: Η (*i*) στηρίζεται στο κριτήριο του λόγου και η (*ii*) στο κριτήριο της ρίζας.

Θεώρημα 3.1.5 *(Διαφορίσιμη Δυναμοσειρά) Έστω* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ *μια δυναμοσειρά με ακτίνα σύγκλισης* R*, τότε:*

(i) Η f *είναι αναλυτική στο δίσκο* $D(z_0, R)$.

(ii) Η $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}$ *έχει ακτίνα σύγκλισης* R.

(iii) Για κάθε $n = 0, 1, ...,$ *ισχύει ότι* $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.

Θεώρημα 3.1.6 *(Cauchy-Taylor) Έστω f μια συνάρτηση αναλυτική σ΄ ένα τόπο $A \subseteq \mathbf{C}$ και $z_0 \in A$. Αν $D(z_0, r) = \{z : |z - z_0| < r\}$ είναι ένας ανοικτός δίσκος που περιέχεται στο A, τότε για κάθε $z \in D(z_0, r)$ η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$ συγκλίνει και ισχύει:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n.$$

Θεώρημα 3.1.7 *Έστω f ορισμένη στον τόπο A. Η f είναι αναλυτική στο A ανν για κάθε $z_0 \in A$ υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε $D(z_0, r) \subset A$ και η f είναι ίση με μια συγκλίνουσα δυναμοσειρά στο δίσκο $D(z_0, r)$.*

Μερικά αναπτύγματα Taylor

(i) $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ για κάθε $z \in \mathbf{C}$.

(ii) $sinz = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - ... = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}$.

(iii) $cosz = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$.

Παραδείγματα και ασκήσεις 1. Εάν οι σειρές $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ συγκλίνουν σ'εναν δίσκο κέντρου 0 και ακτίνας r, να δειχθεί ότι $a_n = b_n$ για κάθε n.
Λύση: Κάθε σειρά παριστάνει στο δίσκο $D(0, r)$ μια αναλυτική συνάρτηση f της οποίας οι παράγωγοι είναι της μορφής $f^{(n)}(0) = n!a_n = n!b_n$, $n = 0, 1, ...$, άρα $a_n = b_n$ για κάθε n.

2. Να αναπτυχθούν σε σειρές Taylor γύρω από το z_0 οι συναρτήσεις:

(i) $f(z) = sinz^2$, $z_0 = 0$,

(ii) $f(z) = e^{2z}$, $z_0 = 0$.

Λύση:

(i) Γνωρίζουμε ότι για κάθε $z \in \mathbf{C}$, $sinz = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}$, άρα, εφ΄ όσον το z^2 διατρέχει όλο το μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}$, έχουμε:

$$sinz^2 = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(z^2)^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^{4n-2}}{(2n-1)!}.$$

(ii) $e^{2z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2z)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} z^n$, $z \in \mathbb{C}$.

3. Να αναπτυχθεί σε σειρά Maclaurin (σειρά Taylor με $z_0 = 0$) η συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{1-z}$.

Λύση: Η $f(z)$ δεν είναι αναλυτική στο $z = 1$ και έχει παραγώγους για $z \neq 1$: $f^{(n)}(z) = \frac{n!}{(1-z)^{n+1}}$, $n = 0, 1, ...$ Άρα $f^{(n)}(0) = n!$ και επομένως $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$. Προφανώς η ακτίνα σύγκλισης είναι $R = 1$, δηλαδή έχουμε σύγκλιση για $|z| < 1$.

Σημείωση: Ομοίως, έχουμε ότι $\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$ για $|z| < 1$.

4. Να αναπτυχθεί σε σειρά Maclaurin η συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{z^2-5z+6}$.

Λύση:

$$\frac{1}{z^2 - 5z + 6} = \frac{1}{(z-3)(z-2)} = \frac{1}{z-3} - \frac{1}{z-2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{3}}.$$

Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη άσκηση συμπεραίνουμε ότι:

$$f(z) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^n - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} \right) z^n.$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^n - 2^n}{3^n 2^n}}{\frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{3^{n+1} 2^{n+1}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{6}{3} \cdot \frac{1 - (\frac{2}{3})^n}{1 - (\frac{2}{3})^n} = 2,$$

συμπεραίνουμε ότι η σειρά συγκλίνει για $|z| < 2$.

5. Να αναπτυχθεί σε σειρά Maclaurin η συνάρτηση $f(z) = \log(1 + z)$, όπου $|z| < 1$.

Λύση: Έχουμε $f'(z) = \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$, $|z| < 1$ (βλέπε άσκηση 3), συνεπώς:

$$f(z) = \log(1 + z) = \int_0^z f'(\omega)d\omega + f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^z (-1)^n \omega^n d\omega = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^{n+1}.$$

Έχουμε θεωρήσει τον πρωτεύοντα κλάδο, συνεπώς $\log 1 = 0$. Οταν όμως $\log 1 = 2k\pi i$ έχουμε:

$$f(z) = \log(1 + z) = \int_0^z f'(\omega)d\omega + 2k\pi i = 2k\pi i + z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + ...$$

6. Εάν οι σειρές $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ και $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ έχουν ακτίνες σύγκλισης μεγαλύτερες ή ίσες ενός αριθμού r_0 και εάν $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, να δειχθεί ότι $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n) \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n)$ για $|z| < r_0$.

Λύση: Έστω $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ και $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, οι $f(z)$ και $g(z)$ είναι αναλυτικές στο $D(0, r_0)$, άρα και το γινόμενό τους $f(z) \cdot g(z)$. Από το θεώρημα του Taylor έχουμε:

$$f(z) \cdot g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(f \cdot g)^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

για $z \in D(0, r_0)$. Επειδή

$$(f \cdot g)^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(z) g^{(n-k)}(z),$$

όπου $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, έχουμε:

$$\frac{(f \cdot g)^{(n)}(0)}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} \cdot f^{(k)}(0) \cdot g^{(n-k)}(0) = \sum_{k=0}^{n} a_n b_{n-k} = c_n,$$

όπου $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$ και $b_{n-k} = \frac{g^{(n-k)}(0)}{(n-k)!}$. Από το θεώρημα Taylor, η σειρά $\sum_{n=0}^{n} c_n z^n$ συγκλίνει στο $D(0, r_0)$.

7. Να υπολογισθούν οι πρώτοι όροι του αναπτύγματος Taylor της $\frac{e^z}{1-z}$.

Λύση: Γνωρίζουμε ότι για $|z| < 1$, $\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + ...$ και $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + ...$, για $z \in \mathbf{C}$. Από την άσκηση 6, για $|z| < 1$ έχουμε:

$$\frac{e^z}{1-z} = (1 + z + z^2 + ...) \cdot \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + ...\right) =$$

$$= 1 + (z + z) + \left(\frac{z^2}{2} + z^2 + z^2\right) + \left(\frac{z^3}{6} + \frac{z^3}{2} + z^3 + z^3\right) + ... = 1 + 2z + \frac{5z^2}{2} + \frac{16z^3}{3!} + ...$$

8. Να υπολογισθεί η σειρά Taylor της $J(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ για $z_0 = 2$.

Λύση: Η $J(z)$ είναι η ζήτα συνάρτηση του Riemann η οποία είναι αναλυτική στο $\{z : Rez > 1\}$. Προφανώς:

$$J'(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} (\log n) n^{-z},$$

$$J''(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (\log n)^2 n^{-z},$$

και για $k = 1, 2, ...$

$$J^{(k)}(z) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} (\log n)^k n^{-z},$$

οπότε, από το θεώρημα του Taylor έχουμε:

$$J(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^k}{n^2}\right) \cdot (z-2)^k,$$

η οποία ισχύει για $|z - 2| < 1$.

3.2 Σειρές Laurent και ανώμαλα σημεία

Το Θεώρημα *Taylor* μας εξασφαλίζει το ανάπτυγμα μιας αναλυτικής συνάρτησης f σε μια περιοχή ενός σημείου z_0. Δεν μπορούμε να πούμε το ίδιο όταν το z_0 είναι ανώμαλο σημείο της f, π.χ. αν $f(z) = \frac{e^z}{z^2}$, όπου προφανώς η $f(z)$ δεν είναι αναλυτική στο $z_0 = 0$. Για τέτοιες συναρτήσεις υπάρχει ανάπτυγμα, το οποίο ισχύει σε κάποιο διάτρητο δίσκο του τόπου:$0 < |z - z_0| < r$. Έχουμε το εξής Θεώρημα του *Laurent*:

Θεώρημα 3.2.1 *Έστω ο δακτύλιος $A = \{z : R_1 < |z - z_0| < R_2\}$ με $0 \leq R_1 < R_2 \leq \infty$ και έστω $f(z)$ αναλυτική συνάρτηση στο A. Τότε για κάθε $z \in A$, ισχύει:*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \text{ , όπου } a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz,$$

όπου c είναι ένας οποιοσδήποτε κύκλος με κέντρο z_0 και ακτίνα r: $R_1 < r < R_2$.

Η παραπάνω σειρά καλείται **ανάπτυγμα Laurent της** f και συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του A.

Ταξινόμηση ανωμάλων σημείων

Εάν η $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ δεν είναι αναλυτική στο z_0, τότε το z_0 θα λέγεται **ανώμαλο σημείο**. Θα λέμε ότι η f έχει **μεμονωμένη ανωμαλία** στο z_0, εάν η f είναι αναλυτική στο $0 < |z - z_0| < R$, αλλά το z_0 είναι ανώμαλο σημείο. Στην περίπτωση αυτή η f γράφεται σε σειρά *Laurent*:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \; 0 < |z - z_0| < R. \tag{3.2.1}$$

Ενα μεμονωμένο σημείο z_0 της f καλείται **πόλος m-τάξης**, αν στη σχέση (3.2.1) ισχύει $a_{-m} \neq 0$ και $a_{-\kappa} = 0$ για $\kappa > m + 1$. Σ' αυτήν την περίπτωση υπάρχει συνάρτηση $g(z)$ αναλυτική στο $0 < |z - z_0| < R$ έτσι ώστε

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m}.$$

Στην περίπτωση που το z_0 είναι πόλος πρώτης τάξεως της f, τότε λέμε ότι είναι απλός πόλος της f. Στην περίπτωση που το ανάπτυγμα *Laurent* της f περιέχει άπειρο πλήθος συντελεστών a_{-n}, $(n > 0)$, τότε το z_0 καλείται ουσιώδης ανωμαλία της f. Τέλος, εάν το z_0 είναι ανώμαλο σημείο και ισχύει $a_{-n} = 0$ για κάθε $n > 0$, η ανωμαλία καλείται **επουσιώδες ή απαλείψιμη**.

Θεώρημα 3.2.2 *Εάν η f είναι αναλυτική στον τόπο G και έχει μεμονωμένη ανωμαλία στο σημείο z_0, το z_0 είναι απαλείψιμη ανωμαλία αν και μόνο αν ισχύει μια από τις παρακάτω συνθήκες:*

(i) Η f είναι φραγμένη σε μια διάτρητη περιοχή του z_0,

(ii) υπάρχει το $\lim_{z\to z_0} f(z)$,

(iii) $\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=0$.

Παραδείγματα και ασκήσεις:

1. Να βρεθούν τα αναπτύγματα *Laurent* των συναρτήσεων:

(α) $f(z)=\frac{z+1}{z},\ \ 0<|z|<\infty$,

(β) $f(z)=\frac{1}{z(z+1)},\ \ 0<|z|<1$.

Λύση:

(α) $\frac{z+1}{z}=1+\frac{1}{z}$ άρα $a_{-1}=1$, $a_1=0$ και $a_\kappa=0$ $|\kappa|>1$, άρα το $z_0=0$ είναι πόλος 1ης τάξης.

(β) Επειδή όταν $|z|<1$ ισχύει $\frac{1}{z+1}=1-z+z^2-...$, έχουμε:

$$\frac{1}{z(z+1)}=\frac{1}{z}-1+z-z^2+z^3-z^4+...,\ \ 0<|z|<1,$$

δηλαδή το σημείο $z_0=0$ είναι πόλος 1ης τάξης.

2. Να καθοριστεί η τάξη των πόλων των κάτωθι συναρτήσεων και ανωμάλων σημείων:

(α) $\frac{cosz}{z^2},\ z_0=0$,

(β) $\frac{e^z-1}{z^2},\ z_0=0$,

(γ) $\frac{z+1}{z-1},\ z_0=0$.

Λύση:

(α) Επειδή

$$\frac{cosz}{z^2}=\frac{1}{z^2}\left[1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-...\right]=\frac{1}{z^2}-\frac{1}{2!}+\frac{z}{4!}+...,$$

η συνάρτηση $\frac{cosz}{z^2}$ έχει πόλο τάξης 2 στο σημείο $z_0=0$.

(β) Εφ' όσον

$$\frac{e^z-1}{z^2}=\frac{1}{z^2}\left[z+\frac{z^2}{2!}+...\right]=\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}+\frac{z}{3!}+...,$$

η συνάρτηση $\frac{e^z-1}{z^2}$ έχει απλό πόλο στο σημείο $z_0=0$.

(γ) Η συνάρτηση $\frac{z+1}{z-1}$ δεν έχει πόλους διότι είναι αναλυτική στο $z_0 = 0$.

3. Να καθορίσετε αν το σημείο $z_0 = 0$ είναι απαλείψιμη ανωμαλία των κάτωθι συναρτήσεων:

(α) $\frac{sinz}{z}$,

(β) $\frac{e^z}{z}$,

(γ) $\frac{(e^z-1)^2}{z^2}$,

(δ) $\frac{z}{e^z-1}$.

Λύση:

(α) Το σημείο $z_0 = 0$ είναι απαλείψιμη ανωμαλία διότι:

$$\frac{sinz}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - ...$$

(δεν υπάρχει $k > 0 : \ a^{-\kappa} \neq 0$).

(β) Εφ' όσον $\frac{e^z}{z} = \frac{1}{z} + 1 + \frac{z}{2!} + ...$, το σημείο $z_0 = 0$ είναι απλός πόλος.

(γ) Η συνάρτηση $f(z) = \frac{e^z-1}{z}$ έχει απαλείψιμη ανωμαλία στο σημείο $z_0 = 0$, διότι $\lim_{z\to 0} zf(z) = 0$, άρα και το τετράγωνο της $f(z)$ έχει απαλείψιμη ανωμαλία στο $z_0 = 0$.

(δ) $f(z) = \frac{z}{e^z-1} \to 1$ όταν $z \to 0$ διότι $\frac{e^z-1}{z} = 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + ... \to 1$, άρα $zf(z) \to 0, \ z \to 0$, συνεπώς το σημείο $z_0 = 0$ είναι απαλείψιμη ανωμαλία.

4. Να αναπτυχθεί σε σειρά *Laurent* η συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{z(z-1)(z-2)}$.

Λύση: Α' τρόπος:

$$\frac{1}{z(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}}$$

$$= \frac{1}{2z} \cdot \left(1 + z + z^2 + ...\right) \cdot \left(1 + \frac{z}{2} + \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^3 + ...\right)$$

$$= \frac{1}{2z} \cdot \left(1 + \frac{3}{2} \cdot z + \frac{7}{4} \cdot z^2 + \frac{15}{8} \cdot z^3 + ...\right),$$

άρα:

$$f(z) = \frac{1}{2z} + \frac{3}{4} + \frac{7}{8} \cdot z + \frac{15}{16} \cdot z^2 + ... + \frac{2^{n+2}-1}{2^{n+2}} \cdot z^n + ..., \quad n = -1, 0, 1, ...$$

Β′ τρόπος:

$$f(z) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z} + \frac{1}{1-z} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-2} = \frac{1}{2z} + \frac{1}{1-z} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}}$$

$$= \frac{1}{2z} + \left(1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + ...\right) - \frac{1}{4}\left(1 + \frac{z}{2} + \left(\frac{z}{2}\right)^2 + \left(\frac{z}{2}\right)^3 + ...\right)$$

$$= \frac{1}{2z} + \frac{3}{4} + \frac{7}{8}\cdot z + \frac{15}{16}\cdot z^2 + \frac{31}{32}\cdot z^3 + ...$$

3.3 Λογισμός Ολοκληρωτκών Υπολοίπων

Γνωρίζουμε ότι αν η $f : A \to \mathbb{C}$ είναι αναλυτική στο διάτρητο δίσκο $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\}$, τότε αναπτύσσεται σε σειρά *Laurent* με συντελεστή $a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\int_c f(z)dz$ που καλείται **ολοκληρωτικό υπόλοιπο (Residue) της f** στο z_0 και συμβολίζεται με $Res(f, z_0)$.

Θεώρημα 3.3.1 *Εστω ότι η συνάρτηση $f : A \to \mathbb{C}$ είναι αναλυτική στον τόπο A, με εξαίρεση ένα πεπερασμένο πλήθος μεμονομένων ανωμάλων σημείων $a_1, a_2, ..., a_n$ του εσωτερικού του τόπου A. Εάν γ είναι απλή κλειστή καμπύλη που περικλείει τα $a_1, a_2, ..., a_n$, τότε έχουμε:*

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{\kappa=1}^{n} Res(f, \alpha_\kappa).$$

Απόδειξη: Παίρνουμε κύκλους $C_\kappa = \{z : |z - \alpha_\kappa| = r_\kappa\}$, $\kappa = 1, 2, ..., n$ στο εσωτερικό της κλειστής καμπύλης γ, με $C_i \cap C_1 = \emptyset$, $i \neq 1$. Από το Θεώρημα *Cauchy* για πολλαπλά συνεκτικούς τόπους, έχουμε:

$$\int_{\gamma^+} f(z)dz = \sum_{\kappa=1}^{n} \int_{C_{\kappa^+}} f(z)dz,$$

όπου οι γ και C_κ διαγράφονται κατά τη θετική φορά. Από τον ορισμό του ολοκληρωτικού υπολοίπου

$$Res(f, \alpha_\kappa) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{\kappa^+}} f(z)dz,$$

παίρνουμε:

$$\int_{\gamma^+} f(z)dz = 2\pi i \sum_{\kappa=1}^{n} Res(f, \alpha_\kappa).$$

Θεώρημα 3.3.2 *(i) Εάν το z_0 είναι απαλείψιμη ανωμαλία, τότε:*

$$Res(f, z_0) = \lim_{z\to z_0} f(z)(z - z_0) = 0.$$

(ii) Εάν το z_0 είναι πόλος 1ης τάξης, τότε:

$$Res(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

(iii) Εάν το z_0 είναι πόλος 2ης τάξης, τότε:

$$Res(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{d}{dz} \left((z - z_0)^2 f(z) \right).$$

Απόδειξη: Θα δείξουμε την πιο σύνθετη περίπτωση *(iii)*. Οι περιπτώσεις *(i)* και *(ii)* προκύπτουν με τον ίδιο τρόπο. Η συνάρτηση $f(z)$ αναπτύσσεται σε σειρά Laurent ως εξής:

$$f(z) = \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + ...,$$

άρα:

$$(z - z_0)^2 f(z) = a_{-2} + a_{-1}(z - z_0) + a_0(z - z_0)^2 + ...,$$

συνεπώς:

$$\frac{d}{dz} \left((z - z_0)^2 f(z) \right) = a_{-1} + 2a_0(z - z_0) + ...$$

Τελικά:

$$\lim_{z \to 0} \frac{d}{dz} [(z - z_0)^2 f(z)] = a_{-1}.$$

Σημείωση:

(a) Εάν το σημείο z_0 είναι πόλος N-τάξης, τότε:

$$Res(f, z_0) = \frac{1}{(N-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d}{dz} \left((z - z_0)^N f(z) \right)^{N-1}.$$

(b) Εάν οι συναρτήσεις $g(z)$ και $h(z)$ έχουν αμφότερες στο σημείο z_0 πόλο m-τάξης, τότε η συνάρτηση $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ έχει απαλείψιμη ανωμαλία στο z_0.

(c) Εάν οι συναρτήσεις $g(z)$ και $h(z)$ είναι αναλυτικές, $g(z_0) \neq 0,\ h(z_0) = 0$ και $h'(z_0) \neq 0$, τότε η συνάρτηση $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ έχει απλό πόλο στο z_0 και

$$Res(f, z_0) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

(d) Εάν η συνάρτηση $g(z)$ έχει στο σημείο z_0 ρίζα τάξης k και η συνάρτηση $h(z)$ έχει στο z_0 ρίζα τάξης $k+1$, τότε η συνάρτηση $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ έχει στο σημείο z_0 απλό πόλο και ισχύει:

$$Res(f, z_0) = (k+1) \frac{g^{(k)}(z_0)}{h^{(k+1)}(z_0)}.$$

Παραδείγματα και ασκήσεις:

1. Να υπολογίσετε το $Res(f, z_0)$, όπου $f(z) = \tan(z)$.

Λύση: Εφ' όσον $\tan(z) = \frac{sin(z)}{cos(z)}$, τα ανώμαλα σημεία είναι οι ρίζες της εξίσωσης $cosz = 0$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι οι ρίζες της εξίσωσης $cosz = 0$ είναι τα σημεία τού συνόλου $\left\{z_n = \frac{(2n+1)\pi}{2} \,:\, n \in \mathbb{Z}\right\}$. Προφανώς τα σημεία z_n είναι απλοί πόλοι. Θέτουμε $g(z) = \sin z$, $h(z) = cosz$, οπότε:

$$Res(f, z_n) = \frac{g(z_n)}{h'(z_n)} = \frac{-(sin(z_n))}{sin(z_n)} = -1.,$$

2. Να δειχθεί ότι $Res\left(\frac{z^2}{sin^2 z},\ 0)\right) = 0$.

Λύση: Πράγματι, τόσο η συνάρτηση $g(z) = \frac{1}{sin^2 z}$ όσο και και η συνάρτηση $h(z) = \frac{1}{z^2}$ έχουν στο $z_0 = 0$ πόλο τάξης 2, άρα η ανωμαλία είναι απαλείψιμη.

3. Να δειχθεί ότι $Res\left(\frac{e^{z^2}}{z-1},\ 1\right) = e$.

Λύση:

$$Res\left(\frac{e^{z^2}}{z-1},\ 1\right) = \lim_{z\to 1}(z-1)\frac{e^{z^2}}{z-1} = \lim_{z\to 1} e^{z^2} = e.$$

4. Να δειχθεί ότι $Res\left(\frac{e^{z^2}}{(z-1)^2},\ 0\right) = 0$.

Λύση: Ισχύει, γιατί η συνάρτηση είναι αναλυτική στο $z = 0$.

5. Να υπολογιστεί το $Res\left(\frac{z^2-1}{(z^2+1)^2},\ i\right)$.

Λύση: Ο παρονομαστής $(z^2+1)^2 = (z+i)^2(z-i)^2$ έχει διπλή ρίζα στο $z = i$. Επειδή το $z_0 = i$ δεν είναι ρίζα του αριθμητή, η συνάρτηση $f(z) = \frac{z^2-1}{(z^2+1)^2}$ έχει πόλο 2ης τάξης στο $z_0 = i$. Εχουμε λοιπόν:

$$Res(f,\ i) = lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left((z-i)^2 f(z)\right) = lim_{z\to i}\left(\frac{z^2-1}{(z+i)^2}\right)'$$

$$= lim_{z\to i}\frac{2z(z+i)^2 - 2(z+i)(z^2-1)}{(z+i)^4} = \frac{2i(2i)^2 - 2(2i)(-2)}{(2i)^4} = 0.$$

6. Να υπολογισθεί το

$$I = \int_c \frac{dz}{z^2(z-1)},$$

όπου c είναι: (i) $|z| = 1/2$ ή (ii) $|z-1| = 1/2$ ή (iii) $|z| = 2$.

Λύση: (i) Η $f(z)$ έχει δύο ανώμαλα σημεία τα $z = 0$ και $z = 1$ εκ των οποίων μόνον το $z = 0$ βρίσκεται μέσα στον κύκλο $|z| = 1/2$, άρα: $I = 2\pi i\ Res(f, 0) = -2\pi i$, διότι:

$$Res(f, 0) = lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(z^2\frac{1}{z^2(z-1)}\right) = lim_{z\to 0}\frac{-1}{(z-1)^2} = -1.$$

(ii) Μόνον ο πόλος $z = 1$ βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου $|z - 1| = 1/2$, άρα: $I = 2\pi i\ Res_{z=1}f(z) = 2\pi i$, διότι:

$$Res(f, 1) = lim_{z\to 1}\left((z-1)\frac{1}{z^2(z-1)}\right) = lim_{z\to 1}\frac{1}{z^2} = 1.$$

(iii) Και οι δύο πόλοι $z = 0$ και $z = 1$ βρίσκονται στο εσωτερικό του κύκλου $|z| = 2$, άρα:

$$I = 2\pi i\ (Res(f, 0) + Res(f, 1))\ =\ 2\pi i(-1 + 1) = 0.$$

7. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα

$$I = \int_\gamma \frac{dz}{z^2 + z + 1} : \quad \gamma(t) = \frac{e^{it}}{2}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Λύση: Οι ρίζες του παρονομαστή είναι $z_{1,2} = \frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$. Επειδή $|z_1| = |z_2| = 1$, προφανώς τα ανώμαλα αυτά σημεία βρίσκονται έξω από τον κύκλο γ κέντρου 0 και ακτίνας $1/2$, άρα, από το Θεώρημα Cauchy $I = 0$.

8. Να υπολογισθεί το

$$I = \int_\gamma \frac{dz}{z^4 + 1}dz,$$

όπου γ είναι η κλειστή καμπύλη που ορίζεται από το άνω ημικύκλιο $\{2e^{it} :\ t \in [0, \pi]\}$ και το διάστημα $[-2, 2]$ του άξονα των x.

Λύση: Τα ανώμαλα σημεία της $f(z)$ είναι οι 4 ρίζες της εξίσωσης $z^4 = -1$: $z_0 = e^{\pi i/4}$, $z_1 = e^{3\pi i/4}$, $z_2 = e^{5\pi i/4}$, $z_3 = e^{7\pi i/4}$. Επειδή μόνο οι ρίζες $z_0 = e^{\pi i/4}$ και $z_1 = e^{3\pi i/4}$ κείνται εντός της κλειστής καμπύλης γ, έχουμε:

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i\left(Res(f,\ z_0) + Res(f, z_1)\right).$$

Οι ρίζες $z_0,\ z_1$ είναι απλοί πόλοι, άρα:

$$Res(f,\ z_0) = lim_{z\to z_0}\left((z - z_0)f(z)\right) = \frac{1}{4e^{3\pi i/4}} = \frac{e^{\pi i/4}}{4e^{\pi i}} = -\frac{e^{\pi i/4}}{4},$$

ενώ

$$Res(f,\ z_1) = lim_{z\to z_1}\left((z - z_1)f(z)\right) = \frac{1}{4e^{9\pi i/4}} = \frac{e^{-\pi i/4}}{4}.$$

Τελικά:
$$I = \frac{2\pi i}{4}\left(-e^{\pi i/4} + e^{-\pi i/4}\right) = -\frac{2\pi i}{4}\cdot 2i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pi\sin\frac{\pi}{4}.$$

9. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα
$$I = \int_\gamma \frac{(1+z)dz}{1-cosz}: \quad \gamma(t) = 7e^{it}, \quad t\in[0,2\pi].$$

3.4 Υπολογισμός πραγματικών ολοκληρωμάτων

Ο υπολογισμός των κάτωθι ολοκληρωμάτων γίνεται με τη μέθοδο των ολοκληρωτικών υπολοίπων.

1. Ολοκληρώματα του τύπου:
$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx,$$
όπου η συνάρτηση f είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$, εκτός πεπερασμένου πλήθους ανωμάλων σημείων που δεν κείνται στον άξονα των x. Επίσης, υποθέτουμε ότι $|f(z)| \leq M|z|^{-a}$, για $|z| > R$ και $a > 1$.

Παραδείγματα: 1. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+1}$.

Λύση: Η συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$ έχει τέσσερις απλούς πόλους $z_0 = e^{i\pi/4}$, $z_1 = e^{3i\pi/4}$, $z_2 = e^{5i\pi/4}$ και $z_4 = e^{7\pi i/4}$ όπου $|z| = 1$, $i = 1,2,3,4$. Τώρα όπως είδαμε στην άσκηση 8 σελ. 51:
$$Res(f, z_0) = -\frac{e^{\pi i/4}}{4},$$
ενώ:
$$Res(f, z_1) = \frac{e^{-\pi i/4}}{4}.$$

Αν $C_r = re^{it}$, $t\in[0,\pi]$, $r > 1$, τότε το ολοκλήρωμα κατά μήκος της κλειστής καμπύλης γ που ορίζει το άνω ημικύκλιο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα r γράφεται:
$$\int_\gamma \frac{1}{1+z^4}dz = \int_{-r}^{r}\frac{dx}{1+x^4} + \int_{C_r}\frac{dz}{1+z^4} \Longrightarrow$$
$$2\pi i(Res(f,z_0) + Res(f,z_1)) = \int_{-r}^{r}\frac{dx}{1+x^4} + \int_{C_r}\frac{dz}{1+z^4},$$
όπου z_0, z_1 είναι οι πόλοι της συνάρτησης $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$ που βρίσκονται στο άνω ημιεπίπεδο και περιέχονται στο εσωτερικό της καμπύλης γ. Αν $r \to +\infty$, έχουμε:
$$\lim_{r\to+\infty}\int_{-r}^{r}\frac{1}{1+x^4}dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4},$$

ενώ $\lim_{r\to+\infty}\int_{C_r} f(z)dz \to 0$, διότι υπάρχει $M>0$, έτσι ώστε: $|f(z)| = \frac{1}{|1+z^4|} \le \frac{M}{|z|^4}$ για μεγάλο z, οπότε:

$$\left|\int_{C_r}\frac{dz}{1+z^4}\right| \le \frac{M}{r^4}\int_{C_r}|dz| = \frac{M}{r^4}\,(\text{μήκος}C_r) = \frac{M}{r^4}\pi r \to 0 \text{ όταν } r\to+\infty,$$

άρα:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4} = 2\pi i(Res(f,z_0)+Res(f,z_1)) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Σημείωση: Γενικότερα, εάν $|f(z)|\le M|z|^{-a},\ a>1,\ M$ σταθερά, $|z|>R$, τότε:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i\sum\{Res \text{ της } f \text{στο άνω ημιεπίπεδο}\},$$

ή

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = -2\pi i\sum\{Res \text{ της } f \text{στο κάτω ημιεπίπεδο}\}.$$

2. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I=\int_0^\infty \frac{dx}{x^6+1}$.

Λύση: Η συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{1+x^6}$ είναι άρτια, άρα: $I=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^6+1}$. Η συνάρτηση $f(z)$ έχει τους απλούς πόλους $z_1=e^{\pi i/6},\ z_2=e^{\pi i/2}$ και $z_3=e^{5\pi i/6}$ στο άνω ημιεπίπεδο. Προφανώς $|f(z)|\le M|z|^{-a},\ a>1$ και

$$Res(f,z_i)=\lim_{z\to z_i}(z-z_i)f(z)=\lim_{z\to z_i}\frac{1}{6z^5},\ i=1,2,3,$$

άρα:

$$I=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i\left(\frac{1}{6}e^{-5\pi i/6}+\frac{1}{6}e^{-5\pi i/2}+\frac{1}{6}e^{-25\pi i/6}\right)=\frac{\pi}{6}.$$

2. Ολοκληρώματα της μορφής:

$$I=\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)d\theta,$$

όπου R είναι ρητή συνάρτηση που δεν έχει πόλους επί του μοναδιαίου κύκλου.

Παραδείγματα: 1. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα: $I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\cos\theta}$.

Λύση: Θέτουμε $z=e^{i\theta}, \cos\theta=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), dz=izd\theta$, άρα:

$$I=\int_\gamma \frac{1}{2+\frac{z^2+1}{2z}}\frac{dz}{iz} = -i\int_\gamma\frac{2dz}{z^2+4z+1},$$

όπου γ: $|z| = 1$. Εχουμε τους πόλους $z_1 = -2+\sqrt{3}$ και $z_2 = -2-\sqrt{3}$. Από αυτούς μόνον ο z_1 βρίσκεται στο εσωτερικό του γ, άρα:

$$Res\left(\frac{2}{z^4+4z+1},\ z_1\right) = \frac{2}{2z_1+4} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Τελικά:

$$I = -i\cdot 2\pi i\cdot Res\left(\frac{2}{z^4+4z+1},\ z_1\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

2. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα: $I = \int_0^{2\pi}\cos^6\theta d\theta$.

Λύση: Θέτουμε $z = e^{i\theta}, \cos\theta = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), dz = izd\theta$, άρα:

$$I = \int_{|z|=1}\frac{1}{2^6}\left(z+\frac{1}{z}\right)^6\frac{dz}{iz} = \frac{-i}{2^6}\int_{|z|=1}\frac{(z^2+1)^6}{z^7}dz.$$

Εχουμε πόλο εβδόμης τάξης στο εσωτερικό της καμπύλης $|z| = 1$, άρα:

$$Res(f,0) = lim_{z\to 0}\frac{1}{6!}\frac{d^6}{dz^6}\left(\frac{z^7(z^2+1)}{z^7}\right)^6 = ... = 20.$$

Τελικά:

$$I = \frac{-i}{2^6}\cdot 2\pi i\cdot Res\,(f,\ 0) = \frac{5\pi}{8}.$$

Β΄ τρόπος:

Ενας απλός τρόπος υπολογισμού του $Res\left(\frac{(z^2+1)^6}{z^7},\ 0\right)$ είναι να πάρουμε το ανάπτυγμα Laurent στο 0:

$$\frac{(z^2+1)^6}{z^7} = \frac{1}{z^7}\sum_{j=0}^{6}\frac{6!}{j!(6-j)!}z^{2j} = \sum_{j=0}^{6}\frac{6!}{j!(6-j)!}z^{2j-7},$$

άρα το Residue είναι ο συντελεστής a_{-1} δηλαδή όταν $2j-7 = -1 \Rightarrow j = 3$, $\frac{6!}{3!3!} = 20$.

3. Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα: $I = \int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+a^2-2a\cos\theta},\ \ 0 < a < 1$.

Λύση:

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+a^2-2a\cos\theta} = \int_{|z|=1}\frac{1}{1+a^2-a\left(z+\frac{1}{z}\right)}\cdot\frac{dz}{iz} = -i\cdot\int_{|z|=1}\frac{dz}{-az^2+(1+a^2)z-a}.$$

Βρίσκουμε τους πόλους εκεί που μηδενίζεται μόνον ο παρονομαστής του κλάσματος δηλαδή στα σημεία $z_1 = a$ και $z_2 = \frac{1}{a}$. Ο πόλος $z_1 = a$ είναι στο εσωτερικό της γ, οπότε:

$$Res(f,a) = -\frac{1}{a^2-1}.$$

Τελικά:

$$I = -i \cdot 2\pi i \left(-\frac{1}{a^2-1} \right) = \frac{2\pi}{1-a^2}.$$

3. Ολοκληρώματα της μορφής:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{inx} dx, \ n > 0,$$

όπου η $f(z)$ είναι ρητή συνάρτηση που δεν έχει πόλους στον πραγματικό άξονα και $|f(z)| \leq \frac{M}{|z|}, \ |z| \geq R$. Ισχύει:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{inx} dx = \sum_{i=1}^{m} Res(f(z)e^{inz}, \ z_i \text{ είναι πόλοι της } f(z) \text{ στο άνω ημιεπίπεδο}).$$

Το ακόλουθο Λήμμα(Jordan) είναι χρήσιμο στην απόδειξη του παραπάνω τύπου:

Λήμμα 3.4.1 *Εάν* $|f(z)| \leq \frac{M}{|z|}, \ |z| \geq R$ *και αν* $C_R = \{Re^{it}, \ t \in [0, \pi]\}$, *τότε:*

$$\int_{C_R} f(z) e^{inz} dz \to 0, \quad R \to +\infty, \quad n > 0.$$

Αν C_R είναι όπως στο Λήμμα του (Jordan),τότε το ολοκλήρωμα κατά μήκος της κλειστής καμπύλης γ που ορίζει το άνω ημικύκλιο με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα R γράφεται:

$$\int_{\gamma} f(z) e^{inz} dz = \int_{C_R} f(z) e^{inz} dz + \int_{-R}^{R} f(x) e^{inx} dx.$$

Αφήνοντας $R \to +\infty$ με εφαρμογή του Λήμματος Jordan παίρνουμε τελικά:

$$2\pi i Res(f(z)e^{inz}, z_i \ \ (z_i \text{ είναι πόλοι της } f(z) \text{ στο άνω ημιεπίπεδο})) =$$

$$= lim_{R \to +\infty} \int_{C_R} f(z) e^{inz} dz + lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{R} f(x) e^{inx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{inx} dx.$$

Παράδειγμα: Να υπολογισθούν τα ολοκληρώματα:

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin(mx)}{x^2 + a^2} dx, \qquad K = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos(mx)}{x^2 + a^2} dx, \ a > 0.$$

Λύση: Τα ολοκληρώματα J και K είναι το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του ολοκληρώματος:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x e^{imx}}{x^2 + a^2} dx.$$

Επειδή $\left|\frac{z}{z^2+a^2}\right| \leq \frac{M}{|z|},\ |z| > R_0$ ισχύει το Λήμμα 3.5.1, άρα:

$$I = \sum_{j=1}^{k} Res\left(\frac{z}{z^2+a^2}e^{imz},\ z_j \text{ είναι πόλοι της } f(z) \text{ στο άνω ημιεπίπεδο}\right).$$

Η συνάρτηση $f(z) = \frac{z}{z^2+a^2}$ έχει δύο απλούς πόλους $z_1 = -ia$ και $z_2 = ia$ και εφόσον $a > 0$ μόνο ο πόλος z_2 είναι στο άνω ημιεπίπεδο, άρα:

$$I = 2\pi i\ Res(f(z)e^{imz}, z_2) = 2\pi i\ lim_{z\to ia}\frac{ze^{imz}}{z+ia} = \pi i e^{-ma}.$$

Επειδή $I = K + iJ$, έχουμε:

$$J = \pi e^{-ma}, \quad K = 0.$$

4. Ολοκληρώματα με πεπερασμένο πλήθος απλών πόλων στον άξονα των x.

Θα χρειαστούμε το ακόλουθο Λήμμα:

Λήμμα 3.4.2 *Εάν η f είναι αναλυτική σε έναν διάτρητο δίσκο $0 < |z - z_0| < R$ και αν το z_0 είναι απλός πόλος της $f(z)$, τότε αν $C_r = \{z \in \mathbb{C} : z = z_0 + re^{i\theta},\ \theta \in [0,\pi]\}$ είναι ημικύκλιο κέντρου z_0 και ακτίνας $r < R$, έχουμε:*

$$lim_{r\to 0}\int_{C_r} f(z)dz = i\pi Res(f, z_0).$$

Παράδειγμα: Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα: $I = \int_0^\infty \frac{sinx}{x}dx$.

Λύση: Θα ολοκληρώσουμε τη συνάρτηση $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ κατά μήκος του συνόρου του χωρίου $r < |z| < R$ στο άνω ημιεπίπεδο. Προφανώς η συνάρτηση f έχει έναν απλό πόλο στο $z = 0$. Από το Θεώρημα του Cauchy έχουμε:

$$\int_{-R}^{-r} f(x)dx - \int_{C_r} f(z)dz + \int_r^R f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz = 0,$$

όπου $\int_{C_R} f(z)dz \to 0,\ \ R \to +\infty$ (βλέπε λήμμα 3.5.1). Από το Λήμμα 3.5.2 έχουμε:

$$lim_{r\to 0}\int_{C_r} f(z)dz = i\pi Res(f,\ 0) = i\pi,$$

συνεπώς καθώς $r \to 0$ και $R \to +\infty$ έχουμε:

$$i\pi = \int_{-\infty}^{0}\frac{e^{ix}}{x}dx + \int_0^{+\infty}\frac{e^{ix}}{x}dx = 2i\cdot\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx.$$

Κεφάλαιο 4

Ο μετασχηματισμός Fourier

4.1 Εισαγωγή

Η περιγραφή σημάτων, (κυρίως περιοδικών), οδηγεί στην έννοια των φασμάτων που είναι απαραίτητα στην παρακολούθηση των πληροφοριών που μεταφέρουν τα σήματα.

Ο μετασχηματισμός Fourier χρησιμοποιείται κατά την επίλυση προβλημάτων επεξεργασίας σημάτων στα πληροφοριακά συστήματα επικοινωνίας, στα συστήματα αυτομάτου ελέγχου καθώς και στην ανάλυση γραμμικών συστημάτων, στη μελέτη των κεραιών, στη μοντελοποίηση κ.λ.π.

Ορισμός 4.1.1 *Έστω $f(t)$ μια συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής. Ορίζουμε το ολοκλήρωμα*

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\, dt, \quad \omega \in \mathbb{R}. \tag{4.1.1}$$

Αν αυτό υπάρχει για κάθε $\omega \in \mathbb{R}$, τότε η συνάρτηση $F(\omega)$ λέγεται ολοκλήρωμα Fourier ή μετασχηματισμός Fourier της f.

Γενικά η συνάρτηση $F(\omega)$ είναι συνάρτηση μιγαδικών τιμών και άρα γράφεται στη μορφή

$$F(\omega) = R(\omega) + iX(\omega) = A(\omega)e^{i\varphi(\omega)},$$

όπου η συνάρτηση $A(\omega) = \sqrt{R(\omega)^2 + X(\omega)^2}$ λέγεται φάσμα Fourier της f, η $A^2(\omega)$ λέγεται φάσμα ενέργειας της f και η $\varphi(\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{X(\omega)}{R(\omega)}\right)$ γωνία φάσεως (phase spectrum).

4.2 Τύπος της αντιστροφής

Ο ακόλουθος τύπος μας επιτρέπει να παραστήσουμε την f με τη βοήθεια της F, όταν η f είναι κατάλληλη συνάρτηση. Συγκεκριμένα αποδεικνύεται ότι

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} \, d\omega. \tag{4.2.1}$$

Η $f(t)$ λέγεται αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier της $F(\omega)$.

Απόδειξη. Στη συνέχεια δίνουμε μια φορμαλιστική απόδειξη της παραπάνω ισότητας χωρίς μαθηματική αυστηρότητα. Από την θεωρία των κατανομών έχουμε ότι

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \, d\omega = \delta(t).$$

Από την σχέση αυτή και κάνοντας αλλαγή στη σειρά ολοκλήρωσης έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} \, d\omega &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} \, dx \, d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega(t-x)} \, dx \, d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\omega(t-x)} \, d\omega \, dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(t-x) \, dx \\ &= f(t). \end{aligned}$$

Η παραπάνω ισότητα ισχύει για σημεία στα οποία η συνάρτηση είναι συνεχής. Αποδεικνύεται ότι ο τύπος της αντιστροφής ισχύει και όταν στα σημεία ασυνέχειας της f ισχύει η ισότητα

$$f(t) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2}.$$

Τις σχέσεις (4.1.1) και (4.2.1) μπορούμε να τις έχουμε για μεγάλες κλάσεις συναρτήσεων. Πολλές φορές την ύπαρξη αυτών των ολοκληρωμάτων την θεωρούμε σαν αρχική τιμή του Cauchy - (Cauchy principal value), δηλαδή θέλουμε να υπάρχει το όριο

$$\lim_{T \to \infty} \int_{-T}^{T} f(t) e^{-i\omega t} \, dt$$

κάτι που είναι ασθενέστερο από το ορισμό του γενικευμένου ολοκληρώματος.

Για δύο συναρτήσεις f και F που συνδέονται με τις σχέσεις (4.1.1) και (4.2.1) γράφουμε

$$f(t) \longleftrightarrow F(\omega).$$

Οι μεταβλητές t και ω λέγονται συνήθως χρόνος και συχνότητα αντίστοιχα.

4.3 Ειδικές μορφές συναρτήσεων

Έστω $f \longleftrightarrow F$. Γενικά ισχύει $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$ και $F(\omega) = R(\omega) + iX(\omega)$, όπου οι f_1, f_2, R, X είναι συναρτήσεις πραγματικών τιμών. Από τη σχέση

$$e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t$$

προκύπτει ότι:

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} (f_1(t)\cos\omega t + f_2(t)\sin\omega t)\, dt \tag{4.3.1}$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} (f_2(t)\cos\omega t - f_1(t)\sin\omega t)\, dt \tag{4.3.2}$$

καθώς και οι ακόλουθοι τύποι της αντιστροφής:

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (R(\omega)\cos\omega t - X(\omega)\sin\omega t)\, d\omega \tag{4.3.3}$$

$$f_2(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (R(\omega)\sin\omega t + X(\omega)\cos\omega t)\, d\omega. \tag{4.3.4}$$

Συναρτήσεις πραγματικών τιμών

Υποθέτουμε ότι η f είναι συνάρτηση πραγματικών τιμών. Τότε το φανταστικό μέρος είναι 0, δηλαδή $f_2 = 0$ και άρα $f = f_1$. Από τις σχέσεις (4.3.1) και (4.3.2) έχουμε:

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\, dt \tag{4.3.5}$$

$$X(\omega) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\, dt. \tag{4.3.6}$$

Από εδώ προκύπτει ότι:

$$R(\omega) = R(-\omega), \quad \text{δηλαδή η } R \text{ είναι άρτια συνάρτηση}$$

και

$$X(-\omega) = -X(\omega), \quad \text{δηλαδή η } X \text{ είναι περιττή συνάρτηση.}$$

Κατά συνέπεια έχουμε ότι

$$\overline{F(\omega)} = F(-\omega).$$

Ισχύει και το **αντίστροφο,** δηλαδή

$$\text{αν } \overline{F(\omega)} = F(-\omega) \text{ τότε η } f \text{ είναι πραγματικών τιμών.}$$

Πράγματι από την (4.3.4) έχουμε

$$f_2(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (R(\omega)\sin\omega t + X(\omega)\cos\omega t)\, d\omega$$

και επειδή η ολοκληρωτέα συνάρτηση προκύπτει περιττή συνάρτηση του ω (από την υπόθεση προκύπτει ότι η R είναι άρτια συνάρτηση και ότι η X είναι περιττή συνάρτηση), έχουμε ότι το ολοκλήρωμα είναι 0 και κατά συνέπεια $f_2 = 0$, δηλαδή η f είναι πραγματικών τιμών.

Συναρτήσεις μιγαδικών τιμών

Υποθέτουμε ότι η f είναι συνάρτηση μιγαδικών τιμών. Τότε $f_1 = 0$ και άρα $f = if_2$. Από τις σχέσεις (4.3.1), (4.3.2) έχουμε ότι:

$$R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \omega t \, dt$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt.$$

Από εδώ προκύπτει ότι:

$$R(\omega) = -R(-\omega), \quad \text{δηλαδή η } R \text{ είναι περιττή συνάρτηση}$$

και

$$X(-\omega) = X(\omega), \quad \text{δηλαδή η } X \text{ είναι άρτια συνάρτηση.}$$

Κατά συνέπεια έχουμε ότι

$$-\overline{F(\omega)} = F(-\omega).$$

Ισχύει και το **αντίστροφο**, δηλαδή

$$\text{αν} \quad -\overline{F(\omega)} = F(-\omega) \quad \text{τότε η } f \text{ είναι φανταστικών τιμών.}$$

Πράγματι από την (4.3.3) έχουμε

$$f_1(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (R(\omega) \cos \omega t - X(\omega) \sin \omega t) \, d\omega.$$

Επειδή η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι περιττή συνάρτηση του ω (από την υπόθεση προκύπτει ότι η R είναι περιττή συνάρτηση και ότι η X είναι άρτια συνάρτηση), έχουμε ότι το ολοκλήρωμα είναι 0 και κατά συνέπεια $f_1 = 0$, δηλαδή η f είναι φανταστικών τιμών.

Άρτιες - περιττές συναρτήσεις

Αν η f είναι **πραγματική και άρτια** τότε από την (4.3.2) έχουμε ότι

$$X(\omega) = 0,$$

δηλαδή ο μετασχηματισμός Fourier $F(\omega)$ είναι πραγματική συνάρτηση και από την (4.3.5) παίρνουμε

$$F(\omega) = R(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt = 2 \int_{0}^{\infty} f(t) \cos \omega t \, dt.$$

Επειδή η R είναι άρτια από την (4.3.3) παίρνουμε

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} R(\omega) \cos \omega t \, d\omega.$$

Ισχύει και το **αντίστροφο**, δηλαδή αν η F και η f είναι πραγματικών τιμών τότε η f είναι άρτια.

Αν η f είναι **πραγματική και περιττή** τότε από την (4.3.5) έχουμε ότι

$$R(\omega) = 0,$$

δηλαδή ο μετασχηματισμός Fourier $F(\omega)$ είναι φανταστική συνάρτηση και από την (4.3.6) παίρνουμε

$$F(\omega) = iX(\omega) = -i\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\,dt = -2i\int_{0}^{\infty} f(t)\sin\omega t\,dt.$$

Επίσης επειδή η X είναι περιττή από την (4.3.3) έχουμε

$$f(t) = -\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} X(\omega)\sin\omega t\,d\omega.$$

Ισχύει και το **αντίστροφο**, δηλαδή αν η F είναι μιγαδικών τιμών και η f πραγματικών τιμών, τότε η f είναι περιττή.

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι μια **τυχαία πραγματική** συνάρτηση $f(t)$ μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα μιας άρτιας συνάρτησης f_e και μιας περιττής συνάρτησης f_o, όπου

$$f_e(t) = \frac{f(t)+f(-t)}{2}, \quad f_o(t) = \frac{f(t)-f(-t)}{2},$$

δηλαδή

$$f(t) = f_e(t) + f_o(t).$$

Συμβολίζουμε με F_e κα F_o το ολοκλήρωμα Fourier των f_e και f_o αντίστοιχα. Λόγω των παραπάνω σχέσεων η F_e είναι πραγματικών τιμών ενώ η F_o είναι φανταστικών τιμών. Επίσης επειδή $R + iX = F_e + F_o$ έχουμε ότι

$$R(\omega) = F_e(\omega), \quad iX(\omega) = F_o(\omega),$$

$$f_e(t) \longleftrightarrow R(\omega), \quad f_o(t) \longleftrightarrow iX(\omega),$$

$$R(\omega) = 2\int_{0}^{\infty} f_e(t)\cos\omega t\,dt, \quad X(\omega) = -2\int_{0}^{\infty} f_o(t)\sin\omega t\,dt,$$

καθώς και τους ακόλουθους τύπους της αντιστροφής

$$f_e(t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} R(\omega)\cos\omega t\,d\omega, \quad f_o(t) = -\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} X(\omega)\sin\omega t\,d\omega.$$

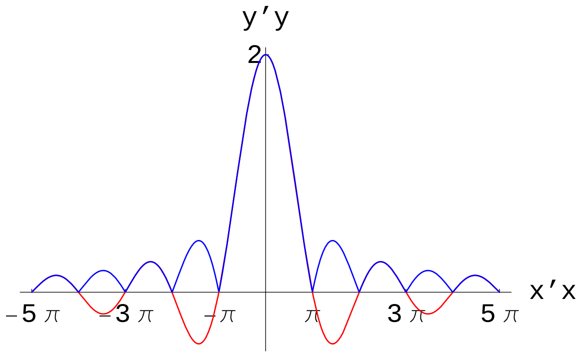
Παραδείγματα.

1. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier του ορθογώνιου παλμού.

$$p_T(t) = \begin{cases} 1 & |t| \le T, \\ 0 & \text{αλλού.} \end{cases}$$

Λύση: Έχουμε ότι

$$F(\omega) = \int_{-T}^{T} e^{-i\omega t}\, dt = \frac{2\sin T\omega}{\omega}, \quad \omega \neq 0, \quad F(0) = 2T.$$



Σχήμα 4.1: Στο σχήμα η μπλε γραμμή παριστάνει το φάσμα Fourier $\left|\frac{2\sin\omega}{\omega}\right|$ του ορθογωνίου παλμού $p_1(t)$ $(T = 1)$, ενώ η κόκκινη γραμμή δείχνει τον μετασχηματισμό Fourier $\frac{2\sin\omega}{\omega}$ του ορθογωνίου παλμού $p_1(t)$.

Από την ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης έχουμε:

$$p_T(t - t_0) \longleftrightarrow \frac{2\sin T\omega}{\omega} e^{-i\omega t_0}.$$

2. Από το προηγούμενο παράδειγμα και την ιδιότητα της συμμετρίας προκύπτει

$$\frac{\sin at}{\pi t} \longleftrightarrow p_a(\omega).$$

3. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at} & t \geq 0, \\ 0 & t < 0, \quad a > 0. \end{cases}$$

Λύση: **Α΄ τρόπος.** Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_0^\infty e^{-at} e^{-i\omega t}\, dt \\ &= \int_0^\infty e^{-at} (\cos\omega t - i\sin\omega t)\, dt \\ &= \int_0^\infty e^{-at} \cos\omega t\, dt - i\int_0^\infty e^{-at} \sin\omega t\, dt. \end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας κατά μέρη έχουμε ότι

$$\int e^{-at} \cos\omega t\, dt = \frac{e^{-at}}{a^2+\omega^2}(\omega \sin\omega t - a\cos\omega t),$$

$$\int e^{-at} \sin\omega t\, dt = \frac{e^{-at}}{a^2+\omega^2}(\omega \cos\omega t - a\sin\omega t)$$

και άρα από τον ορισμό του γενικευμένου ολοκληρώματος και την υπόθεση ότι $a > 0$, προκύπτει ότι

$$\int_0^\infty e^{-at} \cos\omega t\, dt = \frac{a}{a^2+\omega^2},$$

$$\int_0^\infty e^{-at} \sin\omega t\, dt = -\frac{\omega}{a^2+\omega^2}.$$

Συνδυάζοντας τα προηγούμενα παίρνουμε:

$$F(\omega) = \frac{a}{a^2+\omega^2} - i\frac{\omega}{a^2+\omega^2} = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}e^{-i\tan^{-1}(\omega/a)}.$$

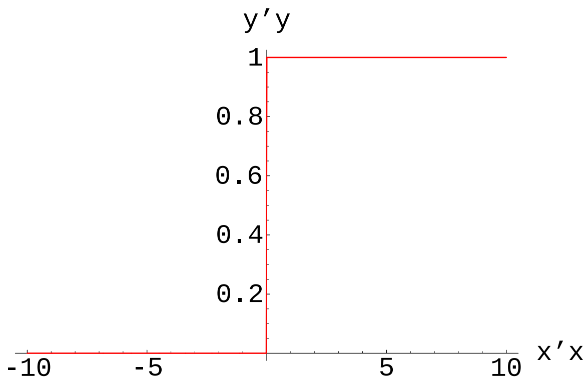
Β′ τρόπος. Από την ολοκλήρωση των μιγαδικών συναρτήσεων έχουμε:

$$F(\omega) = \int_0^\infty e^{-at}e^{-i\omega t}\, dt = \int_0^\infty e^{-t(a+i\omega)}\, dt = \frac{1}{a+i\omega}e^{-t(a+i\omega)}\Big|_0^\infty$$

$$= \frac{1}{a+i\omega} = \frac{a-i\omega}{a^2+\omega^2} = \frac{a}{a^2+\omega^2} - i\frac{\omega}{a^2+\omega^2}.$$

4. Να βρεθεί το φάσμα Fourier και η γωνία φάσεως της συνάρτησης

$$f(t) = e^{-3t}U(t).$$



Σχήμα 4.2: Η συνάρτηση $U(t)$.

Λύση: Από το προηγούμενο παράδειγμα έχουμε:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3t}U(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-3t}U(t)e^{-i\omega t}\,dt$$

$$= \frac{3-i\omega}{9+\omega^2} = \frac{1}{\sqrt{9+\omega^2}}\left(\frac{3}{\sqrt{9+\omega^2}} - i\frac{\omega}{\sqrt{9+\omega^2}}\right).$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το φάσμα Fourier είναι

$$|F(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{9+\omega^2}}$$

και η γωνία φάσεως είναι

$$\varphi(\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{-\omega}{3}\right).$$

4.4 Βασικές ιδιότητες

Οι ακόλουθες ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier είναι άμεση συνέπεια του ορισμού του καθώς και του τύπου της αντιστροφής. Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι

$$f \longleftrightarrow F.$$

- **Γραμμικότητα.** Ο μετασχηματισμός Fourier είναι γραμμική πράξη, δηλαδή αν

  $$f_1 \longleftrightarrow F_1, \quad f_2 \longleftrightarrow F_2,$$

  τότε

  $$a_1 f_1 + a_2 f_2 \longleftrightarrow a_1 F_1 + a_2 F_2,$$

  όπου a_1, a_2 αυθαίρετες σταθερές.

- **Συμμετρία.**

  $$F(t) \longleftrightarrow 2\pi f(-\omega).$$

- **Βαθμωτή χρόνου** (time scaling). Αν $a \in \mathbb{R}$, τότε

  $$f(at) \longleftrightarrow \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

- **Χρονική μετατόπιση** (time shifting)

  $$f(t-t_0) \longleftrightarrow F(\omega)e^{-i\omega t_0}.$$

- **Μετατόπιση συχνότητας** (frequency shifting)

$$e^{i\omega_0 t} f(t) \longleftrightarrow F(\omega - \omega_0).$$

- **Διαφόριση του χρόνου** (time differentiation). Υποθέτοντας ότι ο μετασχηματισμός Fourier της $f^{(n)}$ υπάρχει, έχουμε ότι

$$f^{(n)}(t) \longleftrightarrow (i\omega)^n F(\omega).$$

- **Διαφόριση της συχνότητας** (frequency differentiation)

$$(-it)^n f(t) \longleftrightarrow F^{(n)}(\omega).$$

- **Συζυγής συνάρτηση** (conjugate function)

$$\overline{f(t)} \longleftrightarrow \overline{F(-\omega)}.$$

- **Συνέλιξη στο χρόνο** (time convolution). Έστω δύο συναρτήσεις f_1 και f_2 με μετασχηματισμό Fourier F_1 και F_2 αντίστοιχα. Αν

$$f(t) = f_1 * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t - x) f_2(x)\, dx$$

τότε

$$f(t) \longleftrightarrow F_1(\omega) F_2(\omega).$$

- **Συνέλιξη στη συχνότητα** (frequency convolution). Έστω δύο συναρτήσεις f_1 και f_2 με μετασχηματισμό Fourier F_1 και F_2 αντίστοιχα. Αν

$$F(\omega) = F_1 * F_2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega - x) F_2(x)\, dx$$

τότε

$$f_1(t) f_2(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi} F_1 * F_2(\omega).$$

Το θεώρημα ροπής (moment theorem). Έστω ότι

$$m_n = \int_{-\infty}^{\infty} t^n f(t)\, dt, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

τότε έχουμε

$$(-i)^n m_n = F^{(n)}(0).$$

Απόδειξη. Για $n = 0$ είναι φανερό. Γράφοντας την συνάρτηση $e^{-i\omega t}$ σε σειρά και ολοκληρώνοντας όρο προς όρο έχουμε

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\omega t)^n}{n!} \right] dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\omega)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} t^n f(t)\, dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n m_n \frac{\omega^n}{n!}. \end{aligned}$$

Από το ανάπτυγμα Talyor της $F(\omega)$ έχουμε ότι

$$F(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{(n)}(0) \frac{\omega^n}{n!}.$$

Εξισώνοντας τους ομοιοβάθμιους όρους προκύπτει η ζητούμενη ισότητα.

Παρατήρηση. Για το παραπάνω απαιτήσαμε να ισχύει η όρο προς όρο ολοκλήρωση. Αυτό είναι δυνατό μόνο όταν οι ροπές της f είναι πεπερασμένες.

Θεώρημα του Parseval. Αποδεικνύεται ότι ισχύει η ακόλουθη ισότητα:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\, d\omega.$$

Γενικότερα, αν

$$f_1 \longleftrightarrow F_1, \quad f_2 \longleftrightarrow F_2,$$

τότε:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)\overline{f_2(t)}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(-\omega)\overline{F_2(\omega)}\, d\omega.$$

4.5 Μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης δέλτα

Από τον ορισμό της συνάρτησης δέλτα (θεωρία των κατανομών), έχουμε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t}\, \delta(t)\, dt = 1,$$

δηλαδή:

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1.$$

Από τις ιδιότητες που έχουμε αναφέρει προκύπτουν τα ακόλουθα:

$$\begin{aligned} 1 &\longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega), \\ \delta(t - t_0) &\longleftrightarrow e^{-i\omega t_0}, \\ e^{i\omega_0 t} &\longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega - \omega_0). \end{aligned} \tag{4.5.1}$$

4.6 Παραδείγματα.

1. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier των συναρτήσεων

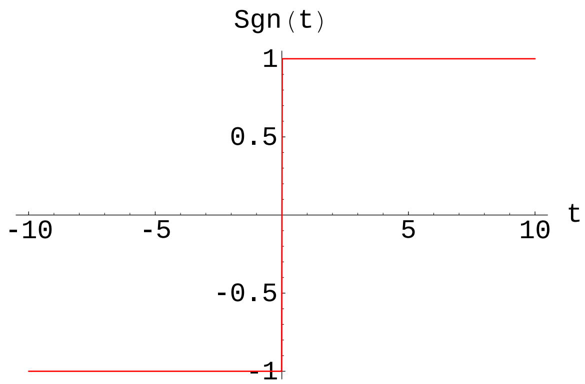
$$\cos\omega_0 t, \quad \sin\omega_0 t.$$

Λύση: Επειδή $\cos\omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t})$, από την (4.5.1) έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\cos\omega_0 t \quad &\longleftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left(2\pi\delta(\omega-\omega_0) + 2\pi\delta(\omega+\omega_0)\right)\\ &= \quad \pi\delta(\omega-\omega_0) + \pi\delta(\omega+\omega_0).\end{aligned}$$

Όμοια έχουμε: $\sin\omega_0 t \longleftrightarrow i\pi[\delta(\omega+\omega_0) - \delta(\omega-\omega_0)]$.

2. Να δειχθεί ότι ο μετασχ. Fourier της συνάρτησης $f(t) = sgn(t)$ είναι $F(\omega) = \dfrac{1}{i\omega}$.



Σχήμα 4.3: Η συνάρτηση $sgn(t)$.

Λύση: Από τον τύπο της αντιστροφής έχουμε ότι

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{i\omega}e^{i\omega t}\,d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}\,d\omega.$$

Αποδεικνύεται ότι

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\omega t}{\omega}\,d\omega = \begin{cases} 1 & t>0 \\ -1 & t<0 \end{cases}$$

και άρα $f(t) = sgn(t)$.

3. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης του μοναδιαίου βήματος $U(t)$, (βλέπε σχ. 4.2).

Λύση: Επειδή $U(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}sgn(t)$, συνδυάζοντας τα προηγούμενα έχουμε:

$$U(t) \longleftrightarrow \pi\delta(\omega) - \frac{1}{i\omega}.$$

4. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier για το διαμορφωμένο σήμα ενός παλμού (pulse modulated signal), δηλαδή της συνάρτησης

$$f(t) = p_T(t)\cos\omega_0 t.$$

Λύση: Από το παράδειγμα 1 αυτής της παραγράφου και την ιδιότητα της συνέλιξης στις συχνότητες έχουμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier F της f δίνεται από την ισότητα:

$$F(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega - t)F_2(t)\,dt$$

όπου F_1 και F_2 είναι οι μετασχηματισμοί των $p_T(t)$ και $\cos\omega_0 t$ αντίστοιχα. Επειδή

$$F_1(\omega) = \frac{2\sin T\omega}{\omega},\ \ F_2(\omega) = \pi(\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)),$$

έχουμε:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega - t)F_2(t)\,dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(T(\omega-t))}{(\omega-t)}(\delta(t-\omega_0)+\delta(t+\omega_0))\,dt \\ &= \frac{\sin T(\omega-\omega_0)}{(\omega-\omega_0)} + \frac{\sin T(\omega+\omega_0)}{(\omega+\omega_0)}. \end{aligned}$$

Β΄ τρόπος. Επειδή

$$p_T(t)\cos\omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{i\omega_0 t}p_T(t) + e^{-i\omega_0 t}p_T(t)),$$

από την ιδιότητα της μετατόπισης της συχνότητας έχουμε:

$$p_T(t)\cos\omega_0 t \longleftrightarrow \frac{1}{2}(F_1(\omega-\omega_0) + F_1(\omega+\omega_0)),$$

όπου F_1 είναι ο μετασχηματισμός της $p_T(t)$:

$$F_1(\omega) = \frac{2\sin T\omega}{\omega}.$$

5. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης

$$f(t) = p_{T/2}(t+T/2) - P_{T/2}(t-T/2).$$

Λύση: Από την ιδιότητα της χρονικής μετατόπισης και τον μετασχηματισμό Fourier του ορθογωνίου παλμού έχουμε ότι

$$F(\omega) = \frac{2\sin(\omega T/2)}{\omega}(e^{i(\omega T/2)} - e^{-i(\omega T/2)}) = \frac{4i\sin^2(\omega T/2)}{\omega}.$$

6. Να βρεθεί ο μετασχ. Fourier του τριγωνικού παλμού: $q_T(t) = 1 - \frac{|t|}{T}$, $|t| \leq T$.

Λύση: Μπορεί κανείς να διαπιστώσει ότι

$$q_T(t) = \frac{1}{T}(p_{T/2} * p_{T/2}(t)),$$

άρα από το Θεώρημα της συνέλιξης έχουμε άμεσα:

$$q_T(t) \longleftrightarrow \frac{1}{T}F(\omega)^2,$$

όπου $F(\omega) = \frac{2\sin(\frac{\omega T}{2})}{\omega}$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier του ορθογωνίου παλμού $p_{T/2}(t)$. Τελικά:

$$q_T(x) \longleftrightarrow \frac{4\sin^2(\omega T/2)}{T\omega^2}.$$

Σημείωση: Από την ιδιότητα συμμετρίας διαπιστώνουμε άμεσα:

$$\frac{4\sin^2\left(\frac{tT}{2}\right)}{Tt^2} \longleftrightarrow 2\pi q_T(\omega).$$

Να σημειώσουμε ότι η συνάρτηση $\frac{\sin^2 at}{\pi a t^2}$ λέγεται πυρήνας του Fejer.

7. Σε ιδανικό σύστημα χαμηλοπερατού φίλτρου (ideal low pass filter LPF) εισέρχεται σήμα $f(t)$ με φάσμα Fourier $|F(\omega)|$. Στην έξοδο κόβονται οι υψηλές συχνότητες ($|\omega| > a$). Να βρεθεί το σήμα εξόδου, $f_a(t)$.

Λύση: Από την υπόθεση της αποκοπής των υψηλών συχνοτήτων έχουμε ότι

$$f_a(t) \longleftrightarrow F_a(\omega) = F(\omega)p_a(\omega),$$

όπου $p_a(\omega)$ η συνάρτηση του ορθογωνίου παλμού. Είδαμε όμως ότι

$$\frac{\sin at}{\pi t} \longleftrightarrow p_a(\omega).$$

Από την ιδιότητα της συνέλιξης στο χρόνο έχουμε ότι η συνάρτηση εξόδου είναι η

$$f_a(t) = f(t) * \frac{\sin at}{\pi t} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\frac{\sin(a(t-x))}{\pi(t-x)}\,dx.$$

8. Σε σύστημα εισέρχεται σήμα $f(t)$ με μετασχηματισμό Fourier $F(\omega)$. Στην έξοδο κόβεται η $f(t)$ για $|t| > T$. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης εξόδου $F_T(\omega)$.

Λύση: Σύμφωνα με την υπόθεση στην έξοδο έχουμε:

$$f_T(t) = f(t)p_T(t) \longleftrightarrow F_T(\omega),$$

όπου $p_T(t)$ η συνάρτηση του ορθογωνίου παλμού.

Βάσει της ιδιότητας της συνέλιξης στη συχνότητα προκύπτει

$$f_T(t) \longleftrightarrow \frac{1}{2\pi}\left(F * p_T\right)(\omega).$$

Επειδή $p_T(t) \longleftrightarrow \frac{2\sin\omega T}{\omega}$, προκύπτει ότι

$$F_T(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\,\frac{\sin\left(T(t-\omega)\right)}{\pi(t-\omega)}\,d\omega.$$

4.7 Συνάρτηση του συστήματος

Έστω $h(t) = L(\delta(t))$ (impulse response of the system) και $g(t) = L(f(t))$. Αποδεικνύεται ότι

$$g(t) = (f * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-x)h(x)\,dx.$$

Αν $f(t) = e^{i\omega_0 t}$, τότε:

$$\begin{aligned} g(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega_0(t-x)}h(x)\,dx \\ &= e^{i\omega_0 t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_0 x}h(x)\,dx \\ &= e^{i\omega_0 t}H(\omega_0), \end{aligned}$$

όπου

$$H(\omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega_0 x}h(x)\,dx$$

είναι ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης $h(t)$. Δηλαδή

$$L(e^{i\omega t}) = e^{i\omega t}H(\omega).$$

Η συνάρτηση $H(\omega)$ λέγεται **συνάρτηση του συστήματος.**

Από το θεώρημα της αντιστροφής έχουμε

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)e^{i\omega t}\,d\omega.$$

4.8 Μετασχηματισμός Fourier μιας περιοδικής συνάρτησης

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια περιοδική συνάρτηση με περίοδο T, δηλαδή

$$f(t+T) = f(t), \quad \text{για κάθε } \; t \in \mathbb{R}.$$

Αν η f θεωρηθεί κατανομή μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{in\omega_0 t}, \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

(σειρά Fourier μιας T περιοδικής συνάρτησης), όπου

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\omega_0 t}\, dt.$$

Άρα ο μετασχηματισμός Fourier της f είναι

$$F(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \delta(\omega - n\omega_0).$$

4.9 Θεώρημα δειγματοληψίας

Σ' αυτή την παράγραφο θα δείξουμε το θεώρημα δειγματοληψίας (sampling theorem), το οποίο έχει σημαντικές εφαρμογές στις τηλεπικοινωνίες.

Θεώρημα 4.9.1 *Έστω $f \longleftrightarrow F$, με την ιδιότητα*

$$F(\omega) = 0 \quad \text{για} \quad |w| > w_c.$$

Τότε η $f(t)$ καθορίζεται από τις τιμές στα σημεία $\dfrac{n\pi}{\omega_c}$, $n \in \mathbb{Z}$. Ισχύει δηλαδή

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n \, \frac{\sin(\omega_c t - n\pi)}{\omega_c t - n\pi},$$

όπου

$$f_n = f\left(\frac{n\pi}{\omega_c}\right), \;\; n \in \mathbb{Z}.$$

Παρατήρηση. Το θεώρημα μας λέει ότι για την αναπαραγωγή του σήματος αρκεί να γνωρίζουμε τις τιμές του μόνο στα σημεία $\frac{n\pi}{\omega_c}$.

Απόδειξη. Από το θεώρημα της αντιστροφής έχουμε ότι

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} F(\omega) e^{i\omega t}\, d\omega, \tag{4.9.1}$$

οπότε

$$f_n = f\left(\frac{n\pi}{\omega_c}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} F(\omega) e^{i\omega \frac{n\pi}{\omega_c}}\, d\omega.$$

Αναπτύσσουμε την $F(\omega)$ σε σειρά Fourier στο διάστημα $(-\omega_c, \omega_c)$ και έχουμε ότι

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{-i\frac{n\pi\omega}{\omega_c}}, \quad |\omega| < \omega_c,$$

όπου

$$A_n = \frac{1}{2\omega_c} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} F(\omega) e^{i\frac{n\pi\omega}{\omega_c}}\, d\omega$$

και άρα

$$A_n = \frac{\pi}{\omega_c} f_n.$$

Αντικαθιστώντας στην (4.9.1) έχουμε:

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\pi}{\omega_c} f_n\, e^{-i\frac{n\pi\omega}{\omega_c}} e^{i\omega t}\, d\omega \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\pi}{\omega_c} f_n \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{i\omega\left(t - \frac{n\pi}{\omega_c}\right)} d\omega \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{f_n}{2\omega_c} \frac{1}{i(t - \frac{n\pi}{\omega_c})} \left(e^{i\omega_c\left(t-\frac{n\pi}{\omega_c}\right)} - e^{-i\omega_c\left(t - \frac{n\pi}{\omega_c}\right)} \right) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{f_n}{2\omega_c} \frac{1}{i(t - \frac{n\pi}{\omega_c})} 2i \sin\left[\omega_c(t - \frac{n\pi}{\omega_c})\right] \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n\, \frac{\sin(\omega_c t - n\pi)}{\omega_c t - n\pi}.
\end{aligned}$$

Θεώρημα 4.9.2 *Θεώρημα δειγματοληψίας για τις συχνότητες (frequency sampling). Έστω $f \longleftrightarrow F$, με την ιδιότητα*

$$f(t) = 0 \quad \text{για} \quad |t| > T.$$

Τότε για το μετασχηματισμό Fourier $F(\omega)$ ισχύει ότι

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} F\left(\frac{n\pi}{T}\right) \frac{\sin(\omega T - n\pi)}{\omega T - n\pi}.$$

Η απόδειξη είναι ανάλογη της απόδειξης του προηγούμενου θεωρήματος.

4.10 Ασκήσεις

1. Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Fourier των σημάτων

$$(i)\ \ 2\cos 3t \cos 4t$$

$$(ii)\ \ g(t) = f(2t-1),$$

με την προϋπόθεση ότι ο μετασχηματισμός Fourier της f είναι γνωστός.

2. Δείξτε ότι αν

$$e^{i\varphi(t)} \longleftrightarrow F(\omega)$$

και η $\varphi(t) \in \mathbb{R}$, τότε

$$\cos\varphi(t) \longleftrightarrow \frac{F(\omega)+\overline{F(-\omega)}}{2}$$

$$\sin\varphi(t) \longleftrightarrow \frac{F(\omega)-\overline{F(-\omega)}}{2i}.$$

3. Δείξτε ότι

$$e^{-a|t|} \longleftrightarrow \frac{2a}{a^2+\omega^2}.$$

4. Με τη βοήθεια του θεωρήματος του Parseval και της προηγούμενης άσκησης να δείξετε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(t^2+a^2)(t^2+b^2)}\, dt = \frac{\pi}{ab(a+b)}.$$

5. Να δείξετε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 at}{t^2}\, dt = a\pi.$$

6. Να δείξετε ότι

$$e^{-a|t|}(1+a|t|) \longleftrightarrow \frac{4a^3}{(a^2+\omega^2)^2}.$$

7. Να δείξετε ότι:

(i) Αν $f \longleftrightarrow F$ τότε

$$f'(t) * \frac{1}{\pi t} \longleftrightarrow |\omega| F(\omega).$$

(ii)

$$-\frac{1}{\pi t^2} \longleftrightarrow |\omega|.$$

8. Να βρεθεί η συνάρτηση του συστήματος $g(t) = f'(t)$. (Απ. $H(\omega) = i\omega$).

9. Να δείξετε ότι
$$f(t) * e^{i\omega t} = F(\omega)e^{i\omega t}.$$
Χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση να αποδείξετε το θεώρημα συνέλιξης για το μετασχηματισμό Fourier.

Κεφάλαιο 5

Ο μετασχηματισμός ζήτα

5.1 Ορισμός

Ορισμός 5.1.1 *Έστω μια ακολουθία $\{f(n)\}$ (διακριτό σήμα). Ορίζουμε το μετασχηματισμό ζήτα αυτής να είναι η συνάρτηση*

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) z^{-n}.$$

Γράφουμε

$$f(n) \longleftrightarrow F(z).$$

Ο παραπάνω μετασχηματισμός ορίζεται μόνο για τους μιγαδικούς z για τους οποίους η παραπάνω σειρά συγκλίνει.

Παραδείγματα. **(i)** Αν $f(n) = U(n)$ είναι η ακολουθία του μοναδιαίου βήματος τότε

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} U(n) z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} \\ &= \frac{z}{z-1}, \quad (|z|^{-1} < 1). \end{aligned}$$

(ii) Αν $f(n) = \delta(n-k)$, τότε

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n-k) z^{-n} \\ &= z^{-k}. \end{aligned}$$

(iii) Αν $f(n) = 5\delta(n-1) + 3\delta(n+7)$, τότε

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (5\delta(n-1) + 3\delta(n+7))\, z^{-n} \\ &= 5z^{-1} + 3z^{7}. \end{aligned}$$

(iv) Αν $f(n) = a^n U(n)$ όπου $U(n)$ είναι η ακολουθία του μοναδιαίου βήματος τότε

$$\begin{aligned} F(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} \\ &= \frac{1}{1-\frac{a}{z}} = \frac{z}{z-a}, \quad (|z| > a). \end{aligned}$$

5.2 Ιδιότητες

- Αντιστροφή του μετασχηματισμού z. Αποδεικνύεται ότι μια ακολουθία $f(n)$ της οποίας ο μετασχηματισμός z είναι ίσος με μια δοσμένη συνάρτηση

  $$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(n) z^{-n}$$

  υπολογίζεται από τη σχέση $f(n) = c(n)$ και είναι μοναδική.

  Παράδειγμα. Αν $F(z) = 4z + 7z^{-4} - 6z^{-12}$, τότε:

  $$f(-1) = 4, \quad f(4) = 7, \quad f(12) = -6, \quad f(n) = 0 \text{ αλλού.}$$

- **Χρονική μετατόπιση.** Αν $f(n) \longleftrightarrow F(z)$, τότε

  $$f(n-m) \longleftrightarrow z^{-m} F(z).$$

- **Συνέλιξη στο χρόνο** (time convolution). Έστω δύο ακολουθίες $f_1(n)$ και $f_2(n)$ με μετασχηματισμό z, $F_1(z)$ και $F_2(z)$ αντίστοιχα. Αν

  $$f(n) = (f_1 * f_2)(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_1(k) f_2(n-k)$$

  τότε

  $$f(n) \longleftrightarrow F_1(z) F_2(z).$$

5.3 Συνάρτηση συστήματος

Έστω $f(n) = z^n$ είναι η συνάρτηση εισόδου σε ένα γραμμικό σύστημα. Αν $h(n)$ είναι η συνάρτηση εξόδου της ακολουθίας δέλτα, δηλαδή

$$L(\delta(n)) = h(n)$$

τότε, λόγω της σχέσης $f(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(n-k)\delta(k)$ έχουμε:

$$\begin{aligned} L(f(n)) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(n-k)L(\delta(k)) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^{n-k}h(k) \\ &= z^n \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)z^{-k} \\ &= z^n H(z) \end{aligned}$$

όπου $H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)z^{-k}$, δηλαδή ο μετασχηματισμός z της ακολουθίας $h(k)$.

Η $H(z)$ ονομάζεται **συνάρτηση του συστήματος**.

Παραδείγματα. **(i)** Για το σύστημα $g(n) = f(n-1)$ θεωρώντας ότι $f(n) = z^n$ έχουμε

$$g(n) = z^{n-1} = z^n z^{-1}$$

και άρα η συνάρτηση του παραπάνω συστήματος είναι η

$$H(z) = z^{-1}.$$

(ii) Για το σύστημα $g(n) = af(n)$ θεωρώντας ότι $f(n) = z^n$ έχουμε

$$g(n) = az^n$$

και άρα η συνάρτηση του συστήματος είναι η

$$H(z) = a.$$

5.4 Ασκήσεις

1. Να βρεθεί η συνάρτηση του συστήματος που δίνεται από την αναδρομική εξίσωση:

$$6g(n) + 5g(n-1) + g(n-2) = f(n).$$

2. Να δείξετε ότι

$$f(n) * z^n = F(z)z^n.$$

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση να δείξετε το θεώρημα συνέλιξης για το μετασχηματισμό z.