ΓΕΩΡΓΙΟΣ Δ. ΑΚΡΙΒΗΣ
Τμήμα Πληροφορικής
Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων
e-mail: akrivis@cs.uoi.gr

ΝΙΚΟΛΑΟΣ Δ. ΑΛΙΚΑΚΟΣ
Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
e-mail: nalikako@math.uoa.gr

Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις

(πανεπιστημιακές παραδόσεις)

Αθήνα, 2011

Περιεχόμενα

Κατάλογος Σχημάτων

1. Μ.Δ.Ε. πρώτης τάξης

Αντικείμενο μελέτης μας σε αυτό το κεφάλαιο αποτελούν οι ΜΔΕ πρώτης τάξης. Στην πρώτη ενότητα θα εξοικειωθούμε με ΜΔΕ πρώτης τάξης και θα μελετήσουμε την εξίσωση μεταφοράς, μια ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές, ενώ στη δεύτερη θα ασχοληθούμε με γενικές γραμμικές εξισώσεις με μεταβλητούς συντελεστές. Στην τρίτη παράγραφο θα μας απασχολήσουν μη γραμμικές εξισώσεις και στη τέταρτη θα μιλήσουμε για την προέλευση των διαφορικών εξισώσεων. Θα γνωρίσουμε τρεις τρόπους επίλυσης ΜΔΕ πρώτης τάξης: με καμπύλες στάθμης, με αλλαγή συντεταγμένων και με τη μέθοδο των χαρακτηριστικών. Η πέμπτη παράγραφος αναφέρεται στα κρουστικά κύματα ενώ η έκτη σε δύο έννοιες που σχετίζονται με κρουστικά κύματα, την περιβάλλουσα και την αιχμή. Στην έβδομη ενότητα θα γενικεύσουμε την έννοια της λύσης εισάγοντας τις λεγόμενες ασθενείς ή γενικευμένες λύσεις και θα ασχοληθούμε με μια πολύ σημαντική συνθήκη, τη συνθήκη των Rankine–Hugoniot.

1.1 Εισαγωγή

Σε αυτήν την προκαταρκτική ενότητα θα δούμε κάποιους ορισμούς, θα εξοικειωθούμε με τις διαφορικές εξισώσεις και θα μελετήσουμε την εξίσωση μεταφοράς.

Θεωρούμε κατ' αρχάς ένα *χωρίο* (δηλαδή ανοικτό, μη κενό σύνολο) U στον $\mathbb{R}^2$, $U \subset \mathbb{R}^2$, και μια ομαλή συνάρτηση $F : \mathbb{R}^3 \times U \to \mathbb{R}$. Η γενική ΜΔΕ πρώτης τάξης, στην περίπτωση δύο ανεξάρτητων μεταβλητών, είναι τότε της μορφής

$$F(u_x, u_y, u, x, y) = 0, \quad \text{για} \quad (x, y) \in U. \tag{1.1}$$

Στην εξίσωση αυτή, ο άγνωστος είναι μια ομαλή (τουλάχιστον συνεχώς παραγωγίσιμη) συνάρτηση $u : U \to \mathbb{R}$.

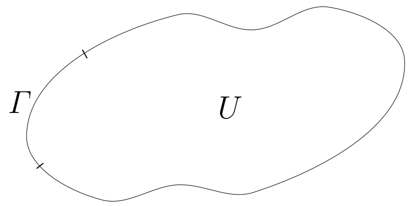
Η διαφορική εξίσωση (1.1) είναι *πρώτης τάξης*, αφού πρώτης τάξης είναι η υψηλότερης τάξης παράγωγος που εμφανίζεται σε αυτή. Σχετικά με τον συμβολισμό, σημειώνουμε ότι η u είναι συνάρτηση δύο μεταβλητών, $u = u(x, y)$, και οι u_x και u_y είναι οι μερικές παράγωγοι της u ως προς την πρώτη και τη δεύτερη μεταβλητή, αντίστοιχα, $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$.

Κάθε ομαλή συνάρτηση $u : U \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί την (1.1), δηλαδή τέτοια ώστε $F(u_x(x, y), u_y(x, y), u(x, y), x, y) = 0$, για κάθε $(x, y) \in U$, λέγεται *λύση* ή *κλασική λύση* της διαφορικής εξίσωσης (1.1). Όταν μιλάμε για επίλυση της εξίσωσης (1.1), αναφερόμαστε στον προσδιορισμό της *γενικής λύσης* της u, δηλαδή όλων των ομαλών συναρτήσεων που την ικανοποιούν.

Οι ΜΔΕ περιγράφουν διάφορα φυσικά φαινόμενα, τα οποία έχουν μοναδική κάθε φορά λύση. Κατά κανόνα, για να περιγράψουν ένα φυσικό φαινόμενο, οπότε θα πρέπει να έχουν και μοναδική λύση, πρέπει οι ΜΔΕ να συνοδεύονται με διάφορες συνθήκες, φερ' ειπείν, με αρχικές, με συνοριακές ή ακόμα τόσο με αρχικές όσο και συνοριακές συνθήκες. Ο τύπος των συνθηκών, που είναι κατάλληλες για κάποια ΜΔΕ, εξαρτάται από τη φύση της εξίσωσης· τέτοια θέματα θα μας απασχολήσουν επανειλημμένα στη συνέχεια. Αν, παραδείγματος χάριν, $\varGamma$ είναι ένα μέρος του συνόρου ∂U του U, $\varGamma \subset \partial U$, και $g : \varGamma \to \mathbb{R}$ μια δεδομένη συνάρτηση, το πρόβλημα

$$\begin{cases} F(u_x, u_y, u, x, y) = 0, & \text{για} \quad (x, y) \in U, \\ u = g, & \text{στο} \quad \varGamma, \end{cases} \tag{1.2}$$

αποτελεί ένα *πρόβλημα αρχικών τιμών* (ΠΑΤ)· βλ. Σχήμα 1.1.



Σχήμα 1.1: Πρόβλημα αρχικών τιμών, με δεδομένες τις τιμές της u στο $\varGamma$.

Από τη θεωρία των Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων θυμόμαστε ότι, γενικά, η γενική τους λύση περιέχει αυθαίρετες σταθερές· όταν η ΣΔΕ είναι πρώτης τάξης, τότε η γενική της λύση περιέχει, γενικά, μία αυθαίρετη σταθερά. Εντελώς ανάλογα, η γενική λύση της ΜΔΕ πρώτης τάξης (1.1) περιέχει, γενικά, μία αυθαίρετη *συνάρτηση*. Αντίστοιχα με τις ΣΔΕ, αναμένουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών (1.2) να έχει μοναδική λύση· βεβαίως, στην προκειμένη περίπτωση αναμένουμε το θέμα να είναι από τη φύση του αρκετά πιο σύνθετο, αφού η απάντηση στο ερώτημά μας εξαρτάται, προφανώς, γενικά και από το σύνολο Γ.

Παραδείγματα 1.1 α) Στη συνάρτηση $F(p,q,z,x,y) := p^2+q^2-1$, $p,q\in\mathbb{R}$, αντιστοιχεί η διαφορική εξίσωση

$$(u_x)^2+(u_y)^2=1, \quad \text{για} \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2. \tag{1.3}$$

Η διαφορική εξίσωση (1.3) είναι *μη γραμμική*, αφού η άγνωστη συνάρτηση u (συγκεκριμένα, εδώ, οι πρώτες της μερικές παράγωγοι) εμφανίζονται σε αυτήν κατά μη γραμμικό τρόπο, προέρχεται από τη γεωμετρική οπτική και είναι γνωστή ως *εξίσωση της εικόνας*.

β) Στη συνάρτηση $F(p,q,z,x,y) := p+q-1$, $p,q\in\mathbb{R}$, αντιστοιχεί η *γραμμική* διαφορική εξίσωση

$$u_x+u_y=1, \quad \text{για} \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2. \tag{1.4}$$

□

1.1.1 Γεωμετρικές θεωρήσεις στο πρόβλημα της επίλυσης

Σε αυτήν την ενότητα θα μελετήσουμε την εξίσωση της μεταφοράς, συγκεκριμένα θα ασχοληθούμε με τρεις ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις, κάθε μια των οποίων αποτελεί γενίκευση της προηγούμενης. Θα αρχίσουμε με μια τετριμμένη εξίσωση και θα καταλήξουμε στην εξίσωση της μεταφοράς.

Θα γνωρίσουμε τρεις τρόπους επίλυσης των εξισώσεών μας: με τις καμπύλες στάθμης, με αλλαγή συντεταγμένων και με τις χαρακτηριστικές.

Αρχίζουμε με ένα τετριμμένο παράδειγμα:

Παράδειγμα 1.2 Η γενική λύση u της τετριμμένης, γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

$$u_x=0, \quad \text{για} \quad (x,y)\in U:=\mathbb{R}^2, \tag{1.5}$$

είναι $u(x,y)=f(y)$, με f αυθαίρετη, συνεχή συνάρτηση του y. □

Παράδειγμα 1.3 Ας θεωρήσουμε τώρα μια λίγο γενικότερη γραμμική διαφορική εξίσωση, την

$$u_x + u_y = 0, \quad \text{για} \quad (x,y) \in U := \mathbb{R}^2. \tag{1.6}$$

Θα επιλύσουμε την (1.6) με τρεις τρόπους: ο πρώτος τρόπος βασίζεται στις *καμπύλες στάθμης* μιας συνάρτησης· με τον δεύτερο τρόπο, με κατάλληλη αλλαγή μεταβλητών, θα αναγάγουμε την (1.6) σε μια εξίσωση της μορφής (1.5), ενώ ο τρίτος χρησιμοποιεί τις χαρακτηριστικές.

Πρώτη προσέγγιση: με καμπύλες στάθμης

Έστω $u = u(x,y)$ μια συνάρτηση δύο μεταβλητών και c ένας πραγματικός αριθμός. Το σύνολο Σ_c των σημείων (x,y) του πεδίου ορισμού της u στα οποία αυτή λαμβάνει την τιμή c,

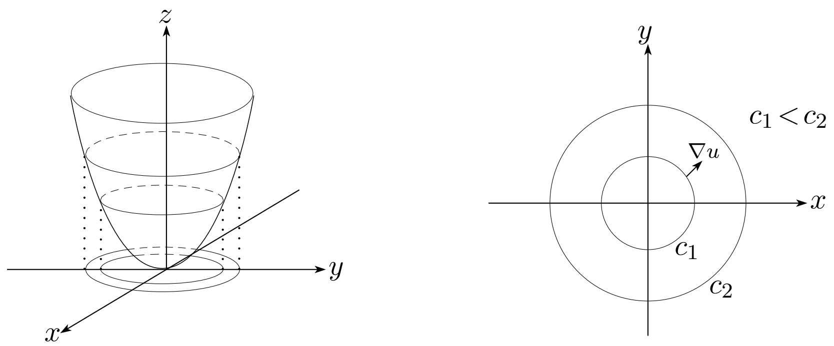
$$\Sigma_c := \{(x,y) : u(x,y) = c\},$$

λέγεται *καμπύλη στάθμης* της u στη στάθμη c. Σημειώνουμε ότι οι καμπύλες στάθμης αναφέρονται στη βιβλιογραφία και ως *ισοϋψείς καμπύλες* ή *ισοσταθμικές καμπύλες*. Όπως γνωρίζουμε από τον Απειροστικό Λογισμό, η *κλίση* ∇u της u είναι κάθετη στην καμπύλη Σ_c, σε κάθε σημείο της (x,y), δηλαδή

$$\nabla u = \langle u_x, u_y \rangle \perp \Sigma_c, \quad \text{για} \quad (x,y) \in \Sigma_c. \tag{1.7}$$

Για παράδειγμα, στην περίπτωση της συνάρτησης $u(x,y) = x^2 + y^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, οι καμπύλες στάθμης είναι οι περιφέρειες ομόκεντρων κύκλων με κέντρο την αρχή των αξόνων. Η κλίση της u είναι $\nabla u(x,y) = 2(x,y)$, δηλαδή το διπλάσιο της ακτίνας από την αρχή των αξόνων προς το σημείο (x,y), και είναι βεβαίως κάθετη στην αντίστοιχη καμπύλη στάθμης, την περιφέρεια που διέρχεται από το σημείο (x,y). Βλ. το Σχήμα 1.2 για τη γραφική παράσταση της u και καμπυλών στάθμης της.

Μια συνάρτηση δύο μεταβλητών περιγράφεται πλήρως από τις καμπύλες στάθμης και την "κατανομή" τους, δηλαδή τον ρυθμό μεταβολής τους σε μεταβολές του c, πόσο "κοντά" μεταξύ τους είναι δηλαδή αυτές οι καμπύλες για κοντινές τιμές της παραμέτρου c. Υπενθυμίζουμε εδώ ότι η κλίση ∇u δείχνει προς αύξουσες τιμές της συνάρτησης u.



Σχήμα 1.2: Γραφική παράσταση της $z = u(x,y) = x^2 + y^2$ και καμπυλών στάθμης της.

Έπειτα από αυτές τις προκαταρκτικές παρατηρήσεις, ας επανέλθουμε τώρα στο πρόβλημά μας, την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης (1.6). Η (1.6) σημαίνει ότι η κλίση ∇u της u είναι κάθετη στο διάνυσμα $\langle 1,1\rangle$, οπότε αυτή γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$\nabla u \perp \langle 1,1\rangle, \quad \text{για} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2. \tag{1.8}$$

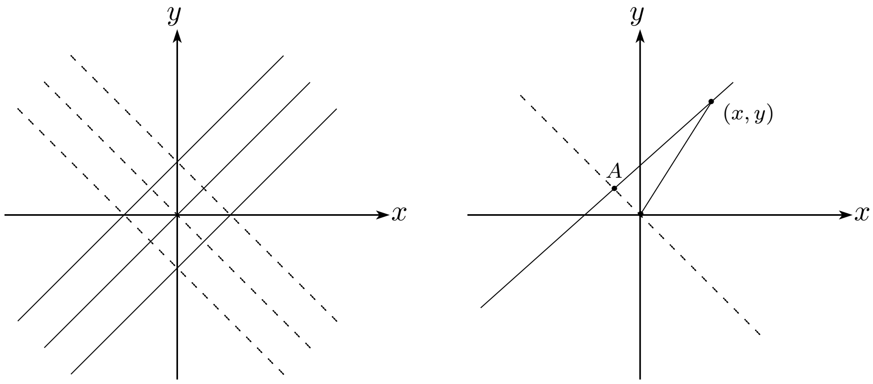
Επομένως, σύμφωνα με την (1.7), οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι οι καμπύλες στάθμης της u είναι παράλληλες προς το διάνυσμα $\langle 1,1\rangle$. Κατά συνέπεια, η τιμή της u σε ένα αυθαίρετο σημείο (x,y) θα πρέπει να εξαρτάται μόνο από την προβολή του (x,y) στην *κάθετη κατεύθυνση* $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$:

$$\langle x,y\rangle \cdot \langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\rangle = \frac{y-x}{\sqrt{2}}.$$

Καταλήγουμε, λοιπόν, στο συμπέρασμα ότι η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης (1.6) είναι

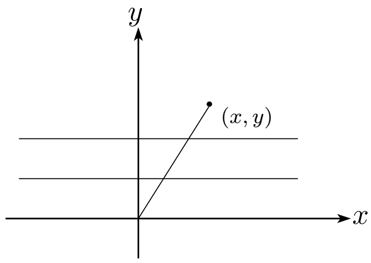
$$u(x,y) = f\Big(\frac{y-x}{\sqrt{2}}\Big), \quad \text{για} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2, \tag{1.9}$$

με f μια αυθαίρετη, συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Πολύ εύκολα επαληθεύει κανείς ότι οι συναρτήσεις της μορφής (1.9) αποτελούν όντως λύσεις της (1.6). $\square$



Σχήμα 1.3: Αριστερά: Οικογένεια χαρακτηριστικών γραμμών της εξίσωσης (1.6), με συνεχή γραμμή, και καθέτων προς τις χαρακτηριστικές, με διακεκομμένη γραμμή. Δεξιά: Προβολή του (x, y) σε ευθεία κάθετη στις χαρακτηριστικές.

Σχόλιο. Αν εφαρμόσουμε αυτές τις ιδέες στη διαφορική εξίσωση (1.5), δηλαδή τη $u_x = 0$, τότε διαπιστώνουμε ότι αυτή γράφεται ισοδύναμα στη μορφή



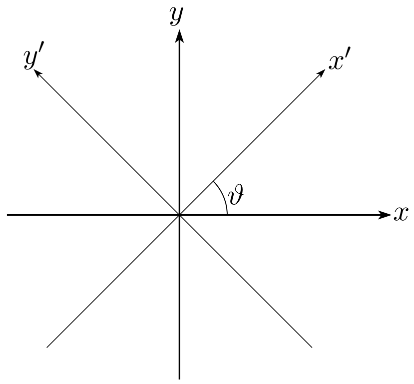
$$\nabla u \cdot \langle 1, 0\rangle = 0, \quad \text{δηλαδή} \quad \nabla u \perp \langle 1, 0\rangle,$$

και κατά συνέπεια οι καμπύλες στάθμης είναι παράλληλες στο διάνυσμα $(1, 0)$, δηλαδή προς τον άξονα των x. Έτσι συμπεραίνουμε ότι η λύση εξαρτάται μόνο από την προβολή $(x, y) \cdot (0, 1) = y$, οπότε $u(x, y) = f(y)$, με f μια αυθαίρετη, συνεχή συνάρτηση. $\square$

Παρατήρηση 1.1 Βεβαίως, η ουσιαστική πληροφορία στην (1.9) είναι το γεγονός ότι η u εξαρτάται από τη διαφορά $y - x$, η εμφάνιση της $\sqrt{2}$ στον παρονομαστή είναι θέμα κανονικοποίησης. Η (1.9) γράφεται ισοδύναμα στη μορφή $u(x, y) = h(y - x)$ ή $u(x, y) = g(x - y)$, με αυθαίρετες, συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις h και g, κ.λπ. $\square$

Δεύτερη προσέγγιση: σύστημα συντεταγμένων

Η ιδέα εδώ είναι με κατάλληλη επιλογή του συστήματος συντεταγμένων να αναγάγουμε τη διαφορική εξίσωση (1.6) στην τετριμμένη μορφή (1.5).



Σχήμα 1.4: Περιστροφή του συστήματος των αξόνων κατά γωνία $\vartheta = \pi/4$ κατά τη θετική φορά.

Υπενθυμίζουμε ότι ο ορθογώνιος πίνακας $\mathcal{O}$,

$$\mathcal{O} := \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix},$$

στρέφει ένα διάνυσμα (x, y) κατά γωνία ϑ, κατά τη θετική φορά, δηλαδή αντίστροφα προς τη φορά των δεικτών του ωρολογίου. Τώρα, λόγω της ορθογωνιότητας του $\mathcal{O}$, έχουμε

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathcal{O}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \mathcal{O}^T\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{1.10}$$

Στην ειδική περίπτωση $\vartheta = \pi/4$, έχουμε

$$\begin{cases} x' = (\cos\vartheta)x + (\sin\vartheta)y \quad = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \\ y' = -(\sin\vartheta)x + (\cos\vartheta)y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(y-x). \end{cases}$$

Λόγω του ότι η έκφραση $u_x + u_y$ είναι πολλαπλάσιο της κατά κατεύθυνση παραγώγου της u στην κατεύθυνση του άξονα x', αναμένουμε ότι η (1.6) θα πάρει την απλούστερη μορφή $u_{x'} = 0$ στις νέες μεταβλητές x', y'. Πράγματι, λαμβάνοντας υπ' όψιν την (1.10), ορίζουμε τη συνάρτηση $\tilde{u}$ ως

$$\tilde{u}(x', y') := u\Big(\mathcal{O}^T\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\Big),$$

και έχουμε

$$u_x = \tilde{u}_{x'}\frac{\partial x'}{\partial x} + \tilde{u}_{y'}\frac{\partial y'}{\partial x} = \tilde{u}_{x'}\frac{\sqrt{2}}{2} - \tilde{u}_{y'}\frac{\sqrt{2}}{2},$$
$$u_y = \tilde{u}_{x'}\frac{\partial x'}{\partial y} + \tilde{u}_{y'}\frac{\partial y'}{\partial y} = \tilde{u}_{x'}\frac{\sqrt{2}}{2} + \tilde{u}_{y'}\frac{\sqrt{2}}{2},$$

οπότε αθροίζοντας λαμβάνουμε

$$u_x + u_y = \sqrt{2}\tilde{u}_{x'}.$$

Επομένως, η (1.6) γράφεται στη μορφή $\tilde{u}_{x'} = 0$, και κατά συνέπεια έχουμε

$$u(x,y) = \tilde{u}(x',y') = f(y'),$$

με αυθαίρετη, συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση f, δηλαδή

$$u(x,y) = f\big(\frac{y-x}{\sqrt{2}}\big), \quad \text{για} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

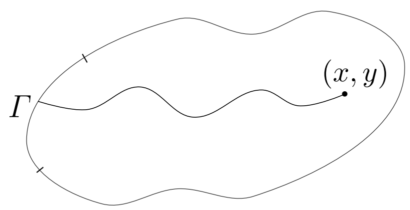
Τρίτη προσέγγιση: Χαρακτηριστικές ως τροχιές, ΠΑΤ

Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών τιμών για τη διαφορική εξίσωση (1.6),

$$\text{(1.11)} \qquad \begin{cases} u_x + u_y = 0, & (x,y) \in U := \{(x,y) : x \in \mathbb{R}, y > 0\}, \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

με δεδομένη μια ομαλή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Η ιδέα τώρα είναι να αντικατασταθεί το πρόβλημα (1.11) με ένα σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων, οι οποίες θα καθορίζουν τις τροχιές των σωματίων στο πεδίο που ορίζει η u.



Σχήμα 1.5: Τροχιά ενός σημείου.

Πληροφορία από το Γ θα καθορίζει την τιμή της u στο σημείο (x,y). Είναι εντυπωσιακό ότι αυτή η ιδέα μπορεί να υλοποιηθεί για την ευρύτατη κλάση F στη διαφορική εξίσωση (1.2). Η γεωμετρία του Γ σε σχέση με το σύνολο U και τη θέση του σημείου (x,y) παίζει, βέβαια, σημαντικό ρόλο.

Έστω, λοιπόν, η χαρακτηριστική

$$\big(x(s),y(s)\big), \quad \text{με παράμετρο } s, \quad \big(x(0),y(0)\big)=(x_0,y_0),$$

και έστω ότι

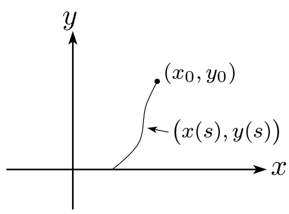
$$z(s)=u\big(x(s),y(s)\big). \tag{1.12}$$

Προσβλέπουμε στην κατασκευή ενός συστήματος ΣΔΕ της μορφής

$$\begin{cases} \dot{x}=\cdots\,, \\ \dot{y}=\cdots\,, \\ \dot{z}=\cdots\,, \end{cases}$$

όπου με $\dot{x}$ συμβολίζουμε την πρώτη παράγωγο της x ως προς την παράμετρο s κ.λπ. Αφού από την (1.12) έπεται αμέσως ότι $\dot{z}=u_x\dot{x}+u_y\dot{y}$, αν επιβάλουμε στις x και y τις συνθήκες $\dot{x}(s)=\dot{y}(s)=1$, τότε η διαφορική εξίσωση $u_x+u_y=0$, βλ. (1.11), οδηγεί στην απλούστατη εξίσωση $\dot{z}(s)=0$ για τη συνάρτηση z. Ορίζουμε, λοιπόν, τις συναρτήσεις $x(s)$ και $y(s)$ μέσω των προβλημάτων αρχικών τιμών

$$\begin{cases} \dot{x}=1, \quad x(0)=x_0, \\ \dot{y}=1, \quad y(0)=y_0. \end{cases} \tag{1.13}$$



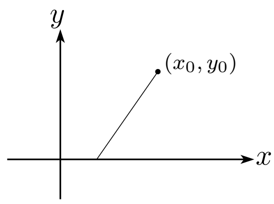
Όπως προαναφέραμε, για αυτήν την επιλογή των x και y, η z ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$\dot{z}(s)=0 \quad \text{κατά μήκος της χαρακτηριστικής.} \tag{1.14}$$

Επομένως, αν η χαρακτηριστική τέμνει τον άξονα των x για κάποιο $\bar{s}$, τότε θα έχουμε

$$\begin{cases} z(\bar{s})=z(0)=u(x_0,y_0), \\ z(\bar{s})=u\big(x(\bar{s}),0\big)=f\big(x(\bar{s})\big). \end{cases} \tag{1.15}$$

Απομένει τώρα να υπολογίσουμε το $x(\bar{s})$. Αυτό μπορεί να γίνει πολύ εύκολα ως εξής: Οι λύσεις των προβλημάτων αρχικών τιμών (1.13) είναι, προφανώς,



$$x(s) = s + x_0, \quad y(s) = s + y_0,$$

ιδιαίτερα η χαρακτηριστική είναι στην προκειμένη περίπτωση ευθεία γραμμή. Η $y(\bar{s}) = 0$ δίνει $\bar{s} = -y_0$, συνεπώς έχουμε $x(\bar{s}) = -y_0 + x_0$. Αντικαθιστώντας αυτήν την τιμή στη σχέση (1.15), λαμβάνουμε

$$u(x_0, y_0) = f\big(x(\bar{s})\big) = f(x_0 - y_0).$$

Κατά συνέπεια, η λύση u του προβλήματος (1.15) δίνεται από τη σχέση

$$u(x, y) = f(x - y), \quad x \in \mathbb{R}, y > 0.$$

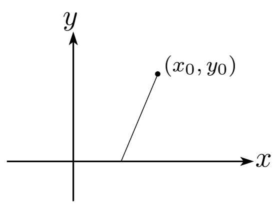
Σημείωση. Η χαρακτηριστική που χρησιμοποιήσαμε εδώ λέγεται *ανάδρομη*, γιατί ακολουθήσαμε ακριβώς την αντίστροφη διαδρομή από εκείνη που οδηγεί από το αρχικό σημείο στον άξονα των x στο σημείο όπου θέλουμε να υπολογίσουμε την τιμή της λύσης. □

Στη συνέχεια θα γενικεύσουμε κάπως την εξίσωση του Παραδείγματος 1.2.

Παράδειγμα 1.4 (Εξίσωση μεταφοράς) Για μια θετική σταθερά c και μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών τιμών για τη λεγόμενη *εξίσωση μεταφοράς*,

$$(1.16) \qquad \begin{cases} u_t + cu_x = 0, & (x,t) \in U := \{(x,t) : x \in \mathbb{R},\ t > 0\}, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Εντελώς αντίστοιχα με την επιλογή στο προηγούμενο Παράδειγμα, η ενδεδειγμένη επιλογή είναι τώρα $\dot{x} = c$ και $\dot{t} = 1$, οπότε, λαμβάνοντας υπ’ όψιν και τις αρχικές συνθήκες συμπεραίνουμε ότι η χαρακτηριστική $\big(x(s), t(s)\big)$ δίνεται στην προκειμένη περίπτωση από τις σχέσεις



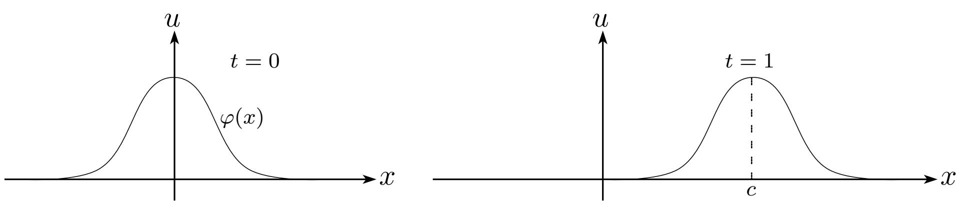
$$x(s) = cs + x_0, \quad t(s) = s + t_0,$$

δηλαδή η χαρακτηριστική είναι ευθεία στο επίπεδο xt με κλίση c. Για να προσδιορίσουμε το σημείο τομής της με τον άξονα των x, λύνουμε την εξίσωση $t(\bar{s}) = 0$ και παίρνουμε $\bar{s} = -t_0$, οπότε, αντικαθιστώντας στη $x(s)$, λαμβάνουμε $x(\bar{s}) = -ct_0 + x_0$. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι $u(x_0, t_0) = \varphi(x_0 - ct_0)$, δηλαδή ότι η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (1.16) είναι

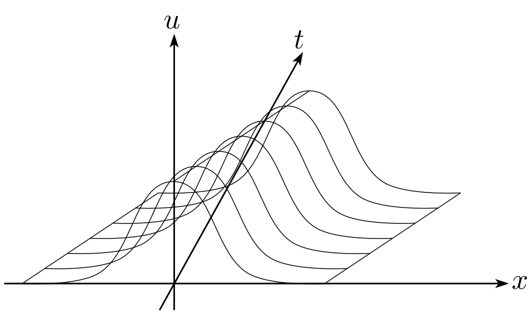
$$u(x,t) = \varphi(x - ct), \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0. \tag{1.17}$$ □

Σχηματοποίηση της λύσης

Στο Σχήμα 1.6 δίνουμε δύο στιγμιότυπα της λύσης u του προβλήματος αρχικών τιμών, στις χρονικές στιγμές $t = 0$ και $t = 1$, και στο Σχήμα 1.7 τη γραφική παράσταση της u, για μια συγκεκριμένη αρχική τιμή φ.



Σχήμα 1.6: Στιγμιότυπα της λύσης u του (1.17) στις χρονικές στιγμές $t = 0$ και $t = 1$, αριστερά και δεξιά, αντίστοιχα. Το κύμα ταξιδεύει προς τα δεξιά με ταχύτητα c.



Σχήμα 1.7: Γραφική παράσταση της λύσης u του ΠΑΤ (1.17).

Σημείωση. Με την αλλαγή μεταβλητών $\tilde{u}(x,t) := u(cx,t)$ η εξίσωση μεταφοράς $u_t + cu_x = 0$ ανάγεται στην κάπως απλούστερη μορφή $\tilde{u}_t + \tilde{u}_x = 0$, βλ. την (1.6).

1.2 Γραμμικές εξισώσεις

Η ενότητα αυτή πραγματεύεται γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μεταβλητούς συντελεστές. Θα γνωρίσουμε δύο τρόπους επίλυσής τους, με αλλαγή συντεταγμένων και με τη μέθοδο των χαρακτηριστικών.

Έστω $U \subset \mathbb{R}^2$ ένα χωρίο και $a, b, c, d : U \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Θεωρούμε τότε τη γενική γραμμική εξίσωση πρώτης τάξης

$$a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = d(x,y), \quad (x,t) \in U. \tag{1.18}$$

Για να μην εκφυλίζεται η εξίσωση σε κάποιο σημείο, δεν επιτρέπουμε να μηδενίζονται ταυτόχρονα και οι δύο συντελεστές των μερικών παραγώγων, υποθέτουμε δηλαδή ότι $[a(x,y)]^2 + [b(x,y)]^2 \neq 0$, για κάθε $(x,y) \in U$.

Θα δούμε στη συνέχεια διάφορους τρόπους επίλυσης της (1.18).

1.2.1 Πρώτος τρόπος: Με αλλαγή συντεταγμένων

Θα χρησιμοποιήσουμε τις χαρακτηριστικές για να ορίσουμε τις νέες συντεταγμένες,

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{ds} = a(x,y), \\ \dfrac{dy}{ds} = b(x,y). \end{cases} \tag{1.19}$$

Διαιρούμε τις διαφορικές εξισώσεις προκειμένου να απαλείψουμε την παράμετρο s και κατ' αυτόν τον τρόπο να αναγάγουμε το σύστημα διαφορικών εξισώσεων (1.19) σε μία διαφορική εξίσωση, την

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(x,y)}{a(x,y)}. \tag{1.20}$$

Οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης (1.20) δίνονται, γενικά, σε πεπλεγμένη (έμμεση) μορφή,

$$\xi(x,y) = c, \quad \text{με } c \text{ σταθερά.} \tag{1.21}$$

Παράδειγμα 1.5 Στην περίπτωση $a(x,y) := xy$ και $b(x,y) := x^2$, το σύστημα (1.19) και η εξίσωση (1.20) λαμβάνουν τη μορφή

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{ds} = xy, \\ \dfrac{dy}{ds} = x^2. \end{cases} \quad \text{και} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y},$$

αντίστοιχα. Επομένως, έχουμε $ydy - xdx = 0$ και συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{1}{2}(x^2 - y^2) = c. \qquad \square$$

Η ιδέα τώρα είναι να χρησιμοποιήσουμε ως συντεταγμένες δύο συστήματα καμπυλών, εκ των οποίων το ένα η οικογένεια λύσεων (1.21) και το άλλο

$$\eta(x, y) = c, \quad \text{με } c \text{ σταθερά}, \tag{1.22}$$

που θα επιλεγεί στη συνέχεια κατάλληλα ώστε να απλοποιηθεί η εξίσωση.

Κατ' αρχάς απαιτούμε

$$\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0,$$

σε κάθε σημείο $(x, y) \in U$, ούτως ώστε ο μετασχηματισμός $(x, y) \to (\xi, \eta)$,

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y), \tag{1.23α}$$

να είναι τοπικά αντιστρέψιμος, δηλαδή να επιτρέπει να εκφράσουμε τα x και y συναρτήσει των ξ και η, οπότε η (1.23α) θα γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta). \tag{1.23β}$$

Ορίζουμε, λοιπόν, τη συνάρτηση $\tilde{u}$ ως

$$u(x, y) = u\big(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)\big) =: \tilde{u}(\xi, \eta). \tag{1.24}$$

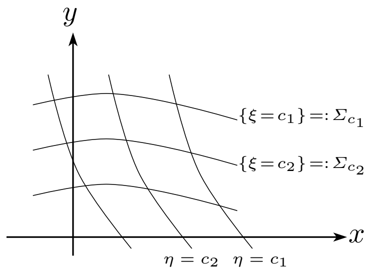
Προκειμένου να εκφράσουμε την αρχική διαφορική εξίσωση (1.18) στις μεταβλητές ξ και η, απαιτείται να υπολογίσουμε τις παραγώγους u_x και u_y συναρτήσει των $\tilde{u}_\xi$ και $\tilde{u}_\eta$. Αμέσως διαπιστώνουμε ότι από την (1.24) προκύπτει ότι

$$\begin{cases} u_x = \dfrac{\partial}{\partial x}\tilde{u}(\xi, \eta) = \tilde{u}_\xi \xi_x + \tilde{u}_\eta \eta_x, \\[2mm] u_y = \dfrac{\partial}{\partial y}\tilde{u}(\xi, \eta) = \tilde{u}_\xi \xi_y + \tilde{u}_\eta \eta_y. \end{cases}$$

Αντικαθιστώντας αυτές τις εκφράσεις στην (1.18), οδηγούμαστε στη διαφορική εξίσωση

$$(a\xi_x + b\xi_y)\tilde{u}_\xi + (a\eta_x + b\eta_y)\tilde{u}_\eta + c\tilde{u} = d. \tag{1.25}$$

Τώρα, κάθε σημείο $(x, y) \in U$ βρίσκεται σε κάποια καμπύλη στάθμης Σ_c της ξ, $\Sigma_c := \{(x, y) \in U : \xi(x, y) = c\}$, για κατάλληλη τιμή της σταθεράς c. Επί της καμπύλης Σ_c, η y μπορεί να θεωρηθεί ως συνάρτηση της x, $y = y(x)$. Πάνω στην καμπύλη Σ_c έχουμε επομένως



$$0 = \frac{d}{dx}\big(\xi(x, y(x))\big) = \xi_x + \xi_y y',$$

οπότε, λαμβάνοντας υπ' όψιν την (1.20), $0 = \xi_x + \xi_y b/a$, δηλαδή

$$a\xi_x + b\xi_y = 0. \tag{1.26}$$

Κατά συνέπεια, η (1.25) απλοποιείται και λαμβάνει τη μορφή

$$(a\eta_x + b\eta_y)\tilde{u}_\eta + c\tilde{u} = d. \tag{1.27}$$

Σημειώνουμε ότι ακόμη δεν έχουμε καθορίσει τη συνάρτηση η· έχουμε δηλαδή ακόμα την ελευθερία να την επιλέξουμε κατάλληλα στη συνέχεια. Η διαφορική εξίσωση (1.27) είναι ουσιαστικά μια συνήθης διαφορική εξίσωση, αφού περιέχει μόνο παραγώγους ως προς μία μόνο μεταβλητή, την η. Πριν μπορέσουμε να προχωρήσουμε στην επίλυση της (1.27), πρέπει να εκφράσουμε τις μεταβλητές x και y συναρτήσει των ξ και η. Στο επόμενο Παράδειγμα θα δούμε με ποιον τρόπο πρέπει να χειριστούμε αυτό το ζήτημα.

Παράδειγμα 1.6 Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$xyu_x + x^2u_y - yu = xy, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Όπως είδαμε στο Παράδειγμα 1.5, στην προκειμένη περίπτωση έχουμε $\xi(x, y) = (x^2 - y^2)/2$, οπότε, αφού $a(x, y) = xy$, $b(x, y) = x^2$, $c(x, y) = -y$ και $d(x, y) = xy$, η αντίστοιχη της (1.27) είναι τώρα

$$(xy\eta_x + x^2\eta_y)\tilde{u}_\eta - y\tilde{u} = xy.$$

Επιλέγουμε τώρα, αυθαίρετα, $\eta(x, y) := x$, επιλογή που ικανοποιεί το κριτήριο μη μηδενισμού της σχετικής ορίζουσας στο χωρίο $U_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$, και οδηγεί στην εξίσωση $xy\tilde{u}_\eta - y\tilde{u} = xy$ ή $x\tilde{u}_\eta - \tilde{u} = x$, δηλαδή

$$\eta\tilde{u}_\eta - \tilde{u} = \eta,$$

μια συνήθη διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης. Η γραμμική αυτή εξίσωση επιλύεται εύκολα και, αφού η αυθαίρετη σταθερά (ως προς η) είναι εν γένει συνάρτηση της παραμέτρου ξ, η γενική της λύση είναι της μορφής

$$\tilde{u}(\xi,\eta) = f(\xi)\eta + \eta \ln|\eta|,$$

με μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση f. Επομένως, συμπεραίνουμε ότι

$$u(x,y) = xf\Big(\frac{x^2-y^2}{2}\Big) + x\ln|x|, \tag{1.28}$$

σύμφωνα με την (1.24).

Στη συνέχεια θα επικεντρώσουμε την προσοχή μας σε μια εναλλακτική επιλογή της συνάρτησης η, παραδείγματος χάριν την $\eta(x,y) := (x^2+y^2)/2$. Με αυτήν την επιλογή, οδηγούμαστε στη διαφορική εξίσωση $2x^2\tilde{u}_\eta - \tilde{u} = x$, η οποία στις μεταβλητές ξ και η λαμβάνει τη μορφή

$$\tilde{u}_\eta - \frac{1}{2(\xi+\eta)}\tilde{u} = \frac{1}{2\sqrt{\xi+\eta}}.$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία εξίσωση, παίρνουμε

$$\tilde{u}(\xi,\eta) = \sqrt{\xi+\eta}\,\ln\sqrt{\xi+\eta} + G(\xi)\sqrt{\xi+\eta},$$

με μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση G. Σύμφωνα με την (1.24), συμπεραίνουμε ότι

$$u(x,y) = |x|G\Big(\frac{x^2-y^2}{2}\Big) + |x|\ln|x|. \tag{1.29}$$

Η σχετική ορίζουσα στη δεύτερη αυτή επιλογή είναι

$$\begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & -y \\ x & y \end{vmatrix} = 2xy.$$

Στο πρώτο τεταρτημόριο, $U' := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x,y>0\}$, η ορίζουσα αυτή είναι διάφορη του μηδενός. Βεβαίως, στο χωρίο U' οι λύσεις που δίνονται στις (1.28) και (1.29) συμπίπτουν. □

Σημείωση. Αποτελεί πάγια τακτική να παραλείπεται η "˜" στην (1.24), γράφουμε δηλαδή $u(\xi,\eta)$ αντί $\tilde{u}(\xi,\eta)$. □

Παράδειγμα 1.7 Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση

$$u_{x_1} + 2u_{x_2} + (2x_1 - x_2)u = 2x_1^2 + 3x_1x_2 - 2x_2^2.$$

Ακολουθώντας τα βήματα που αναφέραμε στη θεωρία, ορίζουμε κατ' αρχάς $\xi(x_1, x_2) := x_2 - 2x_1$ και οδηγούμαστε στην εξίσωση

$$u_\eta(\eta_{x_1} + 2\eta_{x_2}) + (2x_1 - x_2)u = 2x_1^2 + 3x_1x_2 - 2x_2^2, \tag{1.30}$$

βλ. την (1.25). Για τη δοθείσα επιλογή της ξ έχουμε

$$\begin{vmatrix} \xi_{x_1} & \xi_{x_2} \\ \eta_{x_1} & \eta_{x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ \eta_{x_1} & \eta_{x_2} \end{vmatrix} = -2\eta_{x_2} - \eta_{x_1}.$$

Μπορούμε, συνεπώς, να επιλέξουμε $\eta(x_1, x_2) := x_1$ και να εξασφαλίσουμε ότι η ορίζουσά μας δεν μηδενίζεται. Για αυτήν την επιλογή της η, η εξίσωση (1.30) λαμβάνει τη μορφή

$$u_\eta + (2x_1 - x_2)u = 2x_1^2 + 3x_1x_2 - 2x_2^2,$$

ή, ισοδύναμα,

$$u_\eta - \xi u = -5\eta\xi - 2\xi^2.$$

Χρησιμοποιώντας τον ολοκληρωτικό παράγοντα $\mathrm{e}^{-\xi\eta}$, μπορούμε εύκολα να λύσουμε την τελευταία εξίσωση, κατά τα γνωστά από τη θεωρία των συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Πράγματι, η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα ως

$$\frac{d}{d\eta}\big(u\mathrm{e}^{-\xi\eta}\big) = (-5\eta\xi - 2\xi^2)\mathrm{e}^{-\xi\eta},$$

οπότε, ολοκληρώνοντας, λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} u\mathrm{e}^{-\xi\eta} &= -5\int \eta\xi\mathrm{e}^{-\xi\eta}d\eta - 2\xi^2\int \mathrm{e}^{-\xi\eta}d\eta \\ &= 5\big(\eta + \frac{1}{\xi}\big)\mathrm{e}^{-\xi\eta} - 2\xi^2\mathrm{e}^{-\xi\eta} + C(\xi), \end{aligned}$$

συνεπώς

$$u = 5\big(\eta + \frac{1}{\xi}\big) - 2\xi^2 + C(\xi)\mathrm{e}^{\xi\eta}.$$

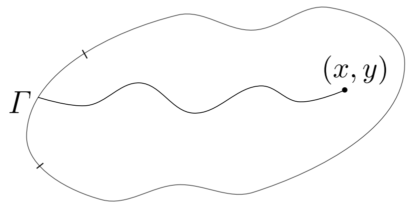
Εκφράζοντας τώρα τις μεταβλητές ξ και η συναρτήσει των x_1 και x_2, οδηγούμαστε στη γενική λύση u της εξίσωσής μας,

$$u(x_1, x_2) = 5\big(x_1 + \frac{1}{x_2 - 2x_1}\big) + 2(x_2 - 2x_1) + f(x_2 - 2x_1)\mathrm{e}^{(x_2 - 2x_1)x_1},$$

με μια αυθαίρετη, συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση f. □

1.2.2 Δεύτερος τρόπος: Με χαρακτηριστικές

Θεωρούμε πάλι τη διαφορική εξίσωση (1.18). Όπως στο Παράδειγμα 1.3, θέλουμε να κατασκευάσουμε καμπύλες $\big(x(s), y(s)\big)$ τέτοιες ώστε η λύση u να "διαβάζει" τα αρχικά δεδομένα σε κάποιο σημείο του συνόλου Γ και να μας δίνει την τιμή της λύσης σε ένα σημείο της καμπύλης.



Σχήμα 1.8: Τροχιά ενός σημείου.

Βασικά, επιδιώκουμε να αναγάγουμε τη ΜΔΕ σε ένα ισοδύναμο σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων της μορφής

$$\begin{cases} \dot{x} = \cdots , \\ \dot{y} = \cdots , \\ \dot{z} = \cdots , \end{cases}$$

όπου $z(s) := u\big(x(s), y(s)\big)$. Αντίστοιχα με την επιλογή μας στην περίπτωση του Παραδείγματος 1.3, βλ. την (1.13), η ενδεδειγμένη επιλογή στην προκειμένη περίπτωση φαίνεται να είναι

$$\dot{x}(s) = a\big(x(s), y(s)\big), \quad \dot{y}(s) = b\big(x(s), y(s)\big).$$

Όντως, τότε θα έχουμε

$$\dot{z}(s) = \frac{d}{ds} u\big(x(s), y(s)\big) = u_x \dot{x} + u_y \dot{y} = u_x a + u_y b,$$

οπότε, σύμφωνα με την (1.18),

$$\dot{z}(s) = d\big(x(s), y(s)\big) - c\big(x(s), y(s)\big) z(s).$$

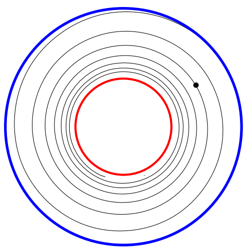
Έτσι προκύπτει συνολικά το ακόλουθο σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{cases} \dot{x} = a(x, y), \\ \dot{y} = b(x, y) \\ \dot{z} = d(x, y) - c(x, y) z. \end{cases} \tag{1.31}$$

Είναι αξιοσημείωτο ότι το σύστημα των δύο πρώτων διαφορικών εξισώσεων στο (1.31) είναι κλειστό, και συνεπώς μπορεί να επιλυθεί χωρίς εμπλοκή της τρίτης συνάρτησης z.

Το κεντρικό ζήτημα είναι, βεβαίως, κατά πόσον δοθέντος ενός σημείου $(x_0, y_0) \in U$, που θα καθορίσει τις αρχικές τιμές $x(0) = x_0$ και $y(0) = y_0$, η λύση $\big(x(s), y(s)\big)$ τέμνει, για κάποια τιμή της παραμέτρου s, το Γ. Καθοριστικό ρόλο εδώ παίζουν τόσο η γεωμετρία του U όσο και το διανυσματικό πεδίο $\big(a(x,y), b(x,y)\big)$.

Ως ένα παράδειγμα στο οποίο η χαρακτηριστική δεν "διαβάζει" τα δεδομένα από το Γ αναφέρουμε το εξής: Έστω U ο κυκλικός δακτύλιος που περιέχεται μεταξύ δύο ομόκενρων κύκλων με ακτίνες r_1 και r_2, αντίστοιχα, με $r_2 > r_1$, $U := \{(x,y) : x = r\cos\vartheta, y = r\sin\vartheta, r_1 < r < r_2, 0 \le \vartheta < 2\pi$. Αν Γ είναι η περιφέρεια του εσωτερικού κύκλου και η χαρακτηριστική που διέρχεται από ένα σημείο $(x,y) \in U$ είναι μια σπείρα που τέμνει την περιφέρεια του εξωτερικού κύκλου και πλησιάζει όσο θέλουμε χωρίς να φτάνει ποτέ την περιφέρεια του εσωτερικού κύκλου, τότε αυτή δεν μπορεί να διαβάσει τα δεδομένα του Γ. Βλέπε το Σχήμα 1.9.



Σχήμα 1.9: Η χαρακτηριστική που διέρχεται από το σημείο • είναι σπείρα που πλησιάζει το Γ, την περιφέρεια του εσωτερικού κύκλου, χωρίς να την φτάνει ποτέ.

Στη συνέχεια επικεντρώνουμε την προσοχή μας σε ένα Παράδειγμα, μια παραλλαγή του Παραδείγματος 1.6.

Παράδειγμα 1.8 Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

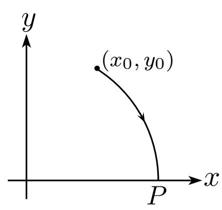
$$(1.32) \qquad \begin{cases} xyu_x - x^2u_y - yu = xy & \text{στο } \; U := \{(x,y) : x > 0, y > 0\}, \\ u = g & \text{στο } \; \Gamma := \{(x,y) : x > 0, y = 0\}, \end{cases}$$

για μια δεδομένη, ομαλή συνάρτηση $g : \Gamma \to \mathbb{R}$. Για αυτά τα δεδομένα, το σύστημα (1.31) λαμβάνει τη μορφή

$$\begin{cases} \dot{x} = xy, \\ \dot{y} = -x^2, \\ \dot{z} = y(x+z). \end{cases} \tag{1.33}$$

Από τις δύο πρώτες εξισώσεις του συστήματος λαμβάνουμε

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$



και συμπεραίνουμε αμέσως ότι η $x^2 + y^2$ έχει σταθερή τιμή, για όλα τα s, οπότε $x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2$. Κατ' αυτόν τον τρόπο απαλείψαμε την παράμετρο s από τη χαρακτηριστική και παραμετρικοποιήσαμε τη χαρακτηριστική ως προς τη μεταβλητή x. Συνεπώς, το αποτέλεσμά μας είναι ότι η χαρακτηριστική είναι η καμπύλη $\big(x, y(x)\big)$, με θετικά x και y τέτοια ώστε $x^2+y^2 = x_0^2+y_0^2$. Πρόκειται, προφανώς, για ένα κυκλικό τόξο ενός κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$. Η εν λόγω χαρακτηριστική τέμνει το σύνορο Γ στο σημείο $P = \big(\sqrt{x_0^2 + y_0^2}, 0\big)$, βλ. και το Σχήμα παραπλεύρως.

Εντελώς παρόμοια, από την πρώτη και την τρίτη εξίσωση του συστήματος (1.33) λαμβάνουμε την εξίσωση

$$\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{z}{x},$$

η γενική λύση της οποίας είναι

$$z(x) = x \ln x + x \ln C, \quad \text{με } C \text{ αυθαίρετη σταθερά.} \tag{1.34}$$

Τώρα, από τον ορισμό της z έχουμε $z(x) = u\big(x, y(x)\big)$, οπότε

$$u(x_0, y_0) = z(x_0) \tag{1.35}$$

και

$$u\Big(\sqrt{x_0^2 + y_0^2}, 0\Big) = z\Big(\sqrt{x_0^2 + y_0^2}\Big). \tag{1.36}$$

Από τις (1.34) και (1.35) έπεται ότι

$$z(x) = x\ln x + \frac{z(x_0) - x_0 \ln x_0}{x_0} x = x\ln x + \frac{u(x_0, y_0) - x_0 \ln x_0}{x_0} x.$$

Λαμβάνοντας τώρα υπ' όψιν και την (1.36), συμπεραίνουμε ότι

$$g\Big(\sqrt{x_0^2 + y_0^2}\Big) = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}\, \ln \sqrt{x_0^2 + y_0^2} + \frac{u(x_0, y_0) - x_0 \ln x_0}{x_0} \sqrt{x_0^2 + y_0^2}. \tag{1.37}$$

Λύνοντας αυτή τη σχέση, εκφράζουμε τη $u(x_0, y_0)$ συναρτήσει των δεδομένων, οπότε παίρνουμε και τη λύση $u(x, y)$, για $(x, y) \in U$. □

Παράδειγμα 1.9 Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} xyu_x - x^2 u_y - yu = xy, & (x, y) \in U := \{(x, y) : y > x > 0\}, \\ u(x, x) = x, & x > 0. \end{cases}$$

Η πρώτη εντύπωση είναι ίσως ότι το παράδειγμα αυτό αποτελεί ειδική περίπτωση του προηγουμένου, με συγκεκριμένη επιλογή της g· βλ. Παράδειγμα 1.8. Μια προσεκτικότερα ματιά αποκαλύπτει, όμως, ότι το U είναι τώρα διαφορετικό.

Σύμφωνα με όσα αναφέραμε στη θεωρία, επιλέγουμε τις συναρτήσεις x, y και z κατά τρόπον ώστε

$$\begin{cases} \dot{x} = xy, & x(0) = x_0, \\ \dot{y} = -x^2, & y(0) = y_0, \\ \dot{z} = y(x + z), & z(0) = u(x_0, y_0). \end{cases}$$

Από τις δύο πρώτες εξισώσεις έπεται αμέσως ότι

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y},$$

οπότε $x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2$. Η χαρακτηριστική της εξίσωσης που διέρχεται από το σημείο (x_0, y_0) είναι, συνεπώς,

$$\big(x(s), y(s)\big) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2\},$$

δηλαδή περιφέρεια κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$. Στην τομή αυτής της περιφέρειας με τη Γ έχουμε $y = x$, επομένως $2x^2 = x_0^2 + y_0^2$. Άρα, το σημείο τομής είναι

$$\bigg(\sqrt{\frac{x_0^2 + y_0^2}{2}}, \sqrt{\frac{x_0^2 + y_0^2}{2}}\bigg).$$

Αντίστοιχα, από την πρώτη και την τρίτη εξίσωση του συστήματος προκύπτει

$$\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{z}{x},$$

και εύκολα διαπιστώνουμε ότι $z(x) = x\ln x + (\ln C)x$, με μια θετική σταθερά C. Αλλά, $z_0 = z(x_0) = x_0 \ln x_0 + (\ln C)x_0$, οπότε

$$z(x) = x\ln x + \frac{z_0 - x_0 \ln x_0}{x_0} x.$$

Συνδυάζοντας τώρα αυτό το αποτέλεσμα με την αρχική συνθήκη

$$z\Big(\sqrt{\frac{x_0^2+y_0^2}{2}}\Big) = u\Big(\sqrt{\frac{x_0^2+y_0^2}{2}}, \sqrt{\frac{x_0^2+y_0^2}{2}}\Big) = \sqrt{\frac{x_0^2+y_0^2}{2}}$$

οδηγούμαστε στο συμπέρασμα

$$z(x_0) = x_0 \ln x_0 + x_0 - x_0 \ln \sqrt{\frac{x_0^2+y_0^2}{2}},$$

δηλαδή

$$u(x_0, y_0) = x_0 \ln x_0 + x_0 - x_0 \ln \sqrt{\frac{x_0^2+y_0^2}{2}}.$$

Γράφοντας απλώς x στη θέση του x_0 και y στη θέση του y_0, λαμβάνουμε τη λύση u του προβλήματός μας,

$$u(x,y) = x\ln x + x - x\ln \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}. \qquad \square$$

1.3 Μη γραμμικές εξισώσεις

Σε αυτήν την παράγραφο θα μας απασχολήσει η γενική, γενικά μη γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης (1.1). Υπενθυμίζουμε ότι το U είναι ένα χωρίο στον $\mathbb{R}^2$, $U \subset \mathbb{R}^2$, η $F : \mathbb{R}^3 \times U \to \mathbb{R}$ είναι μια δεδομένη ομαλή συνάρτηση, και η (1.1) είναι $F(u_x, u_y, u, x, y) = 0$, για $(x, y) \in U$.

Ιδιαίτερα θα μας απασχολήσουν δύο περιπτώσεις, ανάλογα με τη μορφή της F. Στην πρώτη περίπτωση υποθέτουμε ότι η F είναι της μορφής

$$F(p, q, z, x, y) = a(x, y, z)p + b(x, y, z)q - d(x, y, z).$$

Τότε η διαφορική εξίσωση λέγεται *οιονεί γραμμική* (*σχεδόν γραμμική*). Η δεύτερη περίπτωση αποτελεί υποπερίπτωση της πρώτης· συγκεκριμένα τώρα οι συντελεστές a και b υποτίθενται ανεξάρτητοι του z, δηλαδή

$$F(p,q,z,x,y) = a(x,y)p + b(x,y)q - d(x,y,z).$$

Σε αυτήν την περίπτωση μιλάμε για μια *ημιγραμμική* διαφορική εξίσωση.

Οι χαρακτηριστικές εξισώσεις είναι τώρα της μορφής

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = a\big(x(s), y(s), z(s)\big), \\ \dot{y}(s) = b\big(x(s), y(s), z(s)\big), \\ \dot{z}(s) = d\big(x(s), y(s), z(s)\big). \end{cases}$$

Τις πρώτες δύο τις επιβάλλουμε εμείς, για λόγους αντίστοιχους με εκείνους στη γραμμική περίπτωση· βλ. τις (1.19) και (1.31). Η τρίτη εξίσωση είναι απόρροια των δύο πρώτων, του ορισμού $z(s) = u\big(x(s), y(s)\big)$ και της διαφορικής εξίσωσης με τη δοθείσα F. Όντως, έχουμε

$$\dot{z}(s) = \frac{d}{ds}u\big(x(s), y(s)\big) = u_x\dot{x} + u_y\dot{y} = u_x a + u_y b = d = d\big(x(s), y(s), z(s)\big).$$

Παρατήρηση 1.2 Στην ημιγραμμική περίπτωση το σύστημα των δύο πρώτων εξισώσεων είναι κλειστό, δεν εξαρτάται δηλαδή από τη z, όπως ακριβώς συνέβαινε και στη γραμμική περίπτωση. Αντίθετα, στην οιονεί γραμμική περίπτωση είναι κανείς αναγκασμένος να χειριστεί ταυτόχρονα και τις τρεις εξισώσεις. □

Ας δούμε ένα παράδειγμα:

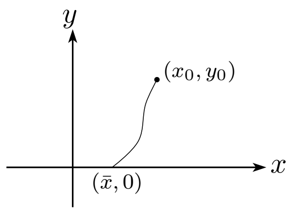
Παράδειγμα 1.10 Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\text{(1.38)} \quad \begin{cases} (y+2xu)u_x - (x+2yu)u_y = \dfrac{x^2-y^2}{2} & \text{στο } U := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y>0\}, \\ u(x,0) = x & \text{στο } \Gamma := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=0\}. \end{cases}$$

Το σύστημα των χαρακτηριστικών είναι, στην προκειμένη περίπτωση,

$$\begin{cases} \dot{x} = y + 2xz, & x(0) = x_0, \\ \dot{y} = -(x+2yz), & y(0) = y_0, \\ \dot{z} = \dfrac{1}{2}(x^2 - y^2), & z(0) = u(x_0, y_0). \end{cases}$$

Για την επίλυση του μη γραμμικού συστήματος απαιτείται εν γένει κάποιο τέχνασμα, που αξιοποιεί τη συμμετρία. Εδώ, πολλαπλασιάζοντας την πρώτη εξίσωση επί y και τη δεύτερη επί x, και προσθέτοντας τα αποτελέσματα, λαμβάνουμε



$$\dot{x}y + \dot{y}x = (y + 2xz)y - (x + 2yz)x = y^2 - x^2 = -2\dot{z},$$

δηλαδή $(xy)^{\cdot} = -2\dot{z}$. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι $x(s)y(s) = -2z(s) + C_1$, με μια σταθερά C_1. Τώρα, λαμβάνοντας υπ' όψιν την αρχική συνθήκη έχουμε $x_0y_0 = -2u(x_0, y_0) + C_1$, δηλαδή ότι $C_1 = 2u(x_0, y_0) + x_0y_0$. Καταλήγουμε, λοιπόν, στη σχέση

$$x(s)y(s) = -2z(s) + 2u(x_0, y_0) + x_0y_0. \tag{1.39}$$

Εντελώς αντίστοιχα, πολλαπλασιάζοντας την πρώτη εξίσωση επί x και τη δεύτερη επί y, και προσθέτοντας, λαμβάνουμε

$$\dot{x}x + \dot{y}y = yx + 2x^2z - xy - 2y^2z = 2z(x^2 - y^2) = 4z\dot{z},$$

οπότε $[x(s)]^2 + [y(s)]^2 = 2[z(s)]^2 + C_2$, με μια σταθερά C_2. Τώρα, λαμβάνοντας υπ' όψιν την αρχική συνθήκη έχουμε $(x_0)^2 + (y_0)^2 = 2[u(x_0, y_0)]^2 + C_2$, δηλαδή ότι $C_2 = (x_0)^2 + (y_0)^2 - 2[u(x_0, y_0)]^2$. Έτσι, οδηγούμαστε στη σχέση

$$[x(s)]^2 + [y(s)]^2 = 2[z(s)]^2 + (x_0)^2 + (y_0)^2 - 2[u(x_0, y_0)]^2. \tag{1.40}$$

Θέτοντας $y = 0$ σε αυτή τη σχέση, για να προσδιορίσουμε το σημείο τομής $(\bar{x}, 0)$ της χαρακτηριστικής με τον άξονα των x, λαμβάνουμε

$$\bar{x}^2 = 2\bar{x}^2 + (x_0)^2 + (y_0)^2 - 2[u(x_0, y_0)]^2,$$

δηλαδή

$$\bar{x}^2 + (x_0)^2 + (y_0)^2 - 2[u(x_0, y_0)]^2 = 0. \tag{1.41}$$

Εξ άλλου, για $y = 0$ η (1.39) δίνει $2z = 2u(x_0, y_0) + x_0y_0$ ή, λαμβάνοντας υπ' όψιν την αρχική συνθήκη $u(x, 0) = x$, ισοδύναμα,

$$2\bar{x} = 2u(x_0, y_0) + x_0y_0. \tag{1.42}$$

Από τις (1.41) και (1.42) προκύπτει αμέσως η σχέση

$$\big(u(x_0,y_0)+\frac{1}{2}x_0y_0\big)+(x_0)^2+(y_0)^2-2[u(x_0,y_0)]^2=0,$$

δηλαδή

$$\big(u(x,y)+\frac{1}{2}xy\big)+x^2+y^2-2[u(x,y)]^2=0 \quad \forall (x,y)\in U, \tag{1.43}$$

σχέση που δίνει σε έμμεση μορφή τη λύση u του προβλήματός μας. □

Παράδειγμα 1.11 Ζητείται να προσδιορίσουμε τη γενική λύση u της μη γραμμικής διαφορικής εξίσωσης

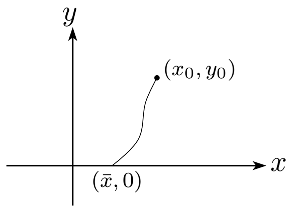
$$\ln(x+u)u_x+u_y=-1.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε την τεχνική των χαρακτηριστικών. Προς τούτο θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} \ln(x+u)u_x+u_y=-1 & \text{στο } U:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y>0\}, \\ u(x,0)=g(x) & \text{στο } \Gamma:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y=0\}, \end{cases} \tag{1.44}$$

με μια αυθαίρετη, συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση g. Το σύστημα των χαρακτηριστικών είναι, στην προκειμένη περίπτωση,

$$\begin{cases} \dot{x}=\ln(x+z), & x(0)=x_0, \\ \dot{y}=1, & y(0)=y_0, \\ \dot{z}=-1, & z(0)=u(x_0,y_0). \end{cases}$$



Από την τρίτη και τη δεύτερη εξίσωση λαμβάνουμε αμέσως $\frac{dz}{dy}=1$, οπότε $z=-y+C_1$, με μια σταθερά C_1. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις αρχικές συνθήκες στο σύστημα των χαρακτηριστικών έχουμε $u(x_0,y_0)=-y_0+C_1$, και συμπεραίνουμε ότι

$$z=-y+u(x_0,y_0)+y_0. \tag{1.45}$$

Αντίστοιχα, από τις δύο πρώτες εξισώσεις του συστήματος των χαρακτηριστικών λαμβάνουμε $\frac{dx}{dy}=\ln(x+z)$, οπότε, σύμφωνα με την (1.45), $\frac{dx}{dy}=$

$\ln\big(u(x_0,y_0)+y_0\big)$. Άρα, $x=\ln\big(u(x_0,y_0)+y_0\big)y+C_2$, με μια σταθερά C_2. Λαμβάνοντας υπ' όψιν τις αρχικές συνθήκες στο σύστημα των χαρακτηριστικών έχουμε $x_0=\ln\big(u(x_0,y_0)+y_0\big)y_0+C_2$, δηλαδή $C_2=x_0-\ln\big(u(x_0,y_0)+y_0\big)y_0$, και συμπεραίνουμε ότι

$$x=\ln\big(u(x_0,y_0)+y_0\big)y+x_0-\ln\big(u(x_0,y_0)+y_0\big)y_0. \tag{1.46}$$

Θέτοντας $y=0$ σε αυτή τη σχέση, για να προσδιορίσουμε το σημείο τομής $(\bar{x},0)$ της χαρακτηριστικής με τον άξονα των x, λαμβάνουμε

$$\bar{x}=x_0-\ln\big(u(x_0,y_0)+y_0\big)y_0,$$

συνεπώς

$$u(\bar{x},0)=g(\bar{x})=g\big(x_0-\ln\big(u(x_0,y_0)+y_0\big)y_0\big).$$

Εξ άλλου, σύμφωνα με την (1.45), $u(\bar{x},0)=u(x_0,y_0)+y_0$, επομένως συνολικά

$$u(x_0,y_0)+y_0=g\big(x_0-\ln\big(u(x_0,y_0)+y_0\big)y_0\big).$$

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι η λύση u του προβλήματος αρχικών τιμών (1.44), οπότε και της αρχικής μας εξίσωσης, δίνεται έμμεσα από τη σχέση

$$u(x,y)+y=g\big(x-\ln\big(u(x,y)+y\big)y\big), \tag{1.47}$$

με αυθαίρετη, συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση g. □

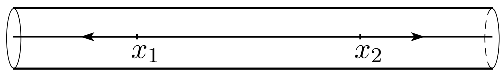
Σχόλιο. Στο προηγούμενο παράδειγμα χρησιμοποιήσαμε τη μέθοδο των χαρακτηριστικών για τον προσδιορισμό της γενικής λύσης, μετατρέποντας το πρόβλημά μας σε πρόβλημα αρχικών τιμών με δεδομένη αρχική τιμή. Ως αυτό το σημείο δεν υπάρχει κανένας περιορισμός. Όμως, επιλέξαμε ως U το άνω ημιεπίπεδο. Η επιλογή αυτή είναι, βεβαίως, αυθαίρετη. Παρά ταύτα, θα την αποδεχτούμε ως μια εκ των "κανονικών" επιλογών.

1.4 Προέλευση των ΜΔΕ: Νόμοι διατήρησης

Οι διαφορικές εξισώσεις παίζουν, αναμφίβολα, τον πρωταγωνιστικό ρόλο στη μαθηματική μοντελοποίηση διαφόρων φαινομένων, φυσικών κυρίως αλλά και άλλων. Εδώ, προκειμένου να πάρουμε απλώς μια γεύση από το θέμα, θα δούμε με ποιον τρόπο προκύπτουν ορισμένες απλές διαφορικές εξισώσεις από θεμελιώδεις αρχές της Φυσικής.

Θεωρούμε ένα υλικό κατανεμημένο στον άξονα των x, φερ' ειπείν, κάποιο ρευστό σε έναν κυλινδρικό, πολύ λεπτό, σωλήνα, με *πυκνότητα* $\rho(x,t)$, στο σημείο x, τη χρονική στιγμή t, με $\rho : \mathbb{R} \times (0,\infty) \to [0,\infty)$ μια ομαλή συνάρτηση. Η συνολική μάζα $M(t)$ που περιέχεται κατά τη χρονική στιγμή t σε ένα σταθεροποιημένο διάστημα $[x_1,x_2]$ δίνεται τότε από τη σχέση

$$M(t) = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x,t)\,dx. \tag{1.48}$$



Σχήμα 1.10: Ρευστό σε κυλινδρικό, λεπτό σωλήνα.

Υποθέτουμε κατ' αρχάς ότι μέσα στον σωλήνα δεν λαμβάνουν χώρα χημικές αντιδράσεις ή άλλες παρόμοιες φυσικές διεργασίες, και ότι η μεταβολή της μάζας στο $[x_1,x_2]$ οφείλεται αποκλειστικά στο γεγονός ότι το ρευστό κινείται, και κατά συνέπεια μπορούμε να έχουμε τόσο εκροή από όσο και εισροή προς το $[x_1,x_2]$ μέσω των άκρων του x_1 και x_2. Εισάγουμε τώρα τη συνάρτηση της *ροής* $q(x,t)$, η οποία μετράει την ποσότητα της μάζας που διέρχεται δια μέσω του x, από τα αριστερά προς τα δεξιά, ανά μονάδα χρόνου, τη χρονική στιγμή t. Όταν η q λαμβάνει αρνητικές τιμές, η κίνηση της μάζας είναι από τα δεξιά προς τα αριστερά. Έχουμε, λοιπόν, τον ακόλουθο *νόμο διατήρησης της μάζας*:

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} \rho(x,t)\,dx = -\big[q(x_2,t)(+1) + q(x_1,t)(-1)\big]. \tag{1.49}$$

Για να κατανοήσουμε τη σημασία των προσήμων στο δεξιό μέλος αυτής της σχέσης, ας υποθέσουμε ότι $q(x_2,t) > 0$ και $q(x_1,t) < 0$, δηλαδή ότι μάζα εκρέει και από τα δύο άκρα του $[x_1,x_2]$. Σε αυτήν την περίπτωση, η μεταβολή της μάζας, που δίνεται στο αριστερό μέλος της (1.49), θα πρέπει, προφανώς, να είναι αρνητική. Αυτό εξηγεί τα αντίστοιχα πρόσημα.

Η (1.49) αποτελεί την *ολοκληρωτική μορφή* του νόμου διατήρησης της μάζας. Υπό κατάλληλες συνθήκες ομαλότητας, μπορούμε από την (1.49) να οδηγηθούμε σε μια "τοπική" *διαφορική μορφή*: Αν η ρ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη, τότε, κατά τα γνωστά από τον Απειροστικό Λογισμό, η παραγώγιση εναλλάσσεται με την ολοκλήρωση στο αριστερό μέλος της (1.49),

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} \rho(x,t)\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \rho_t(x,t)\,dx,$$

οπότε, σύμφωνα με το θεώρημα της μέσης τιμής του Ολοκληρωτικού Λογισμού,

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} \rho(x,t)\,dx = \rho_t(\tilde{x},t)(x_2-x_1),$$

για κάποιο $\tilde{x} \in (x_1, x_2)$. Συνεπώς, η (1.49) γράφεται στη μορφή

$$\rho_t(\tilde{x},t) = -\frac{q(x_2,t)-q(x_1,t)}{x_2-x_1}. \tag{1.50}$$

Υποθέτοντας τώρα ότι η q είναι συνεχώς παραγωγίσιμη ως προς την πρώτη μεταβλητή, και αφήνοντας τα x_1, x_2 στην (1.50) να τείνουν συγχρόνως σε κάποιο x, οδηγούμαστε στη διαφορική εξίσωση $\rho_t(x,t) = -q_x(x,t)$, δηλαδή

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0. \tag{1.51}$$

Η (1.51) αναφέρεται ως *εξίσωση συνέχειας*, και αποτελεί τη διατύπωση του νόμου διατήρησης της μάζας σε διαφορική μορφή.

Η ποσότητα που διατηρείται δεν είναι αναγκαστικά η μάζα. Θα μπορούσαμε, για παράδειγμα, να θεωρήσουμε την ορμή, παίρνοντας ως $u(x,t)$ την ταχύτητα του ρευστού στο σημείο x κατά τη χρονική στιγμή t και, εντελώς αντίστοιχα, να οδηγηθούμε στη διαφορική εξίσωση

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0. \tag{1.52}$$

Ανάλογα με το φαινόμενο που μελετάται, μπορεί να υπάρχει σχέση μεταξύ q και ρ, η λεγόμενη *καταστατική σχέση*. Παραδείγματος χάρη, στην περίπτωση της ροής αερίου, μια τέτοια καταστατική σχέση είναι

$$q = \frac{1}{2}u^2,$$

οπότε η (1.51) λαμβάνει τη μορφή

$$u_t + uu_x = 0 \qquad \text{(εξίσωση του Burgers)}. \tag{1.53}$$

Μια άλλη ενδιαφέρουσα καταστατική σχέση είναι ο *νόμος του Fourier*. Θεωρούμε την περίπτωση της μάζας και ειδικότερα το φαινόμενο της διάχυσης:

$$q(x,t) = -c\rho_x(x,t), \qquad \text{με μια θετική σταθερά } c. \tag{1.54}$$

Το νόημα της (1.54) είναι ότι αναμένουμε μετακίνηση μάζας από περιοχές υψηλής σε περιοχές χαμηλής πυκνότητας. Στην προκειμένη περίπτωση, η (1.51) λαμβάνει τη μορφή

$$\rho_t = c\rho_{xx} \qquad \text{(εξίσωση διάχυσης)}. \tag{1.55}$$

1.5 Συνέπειες της μη γραμμικότητας — Κρουστικά κύματα

Σε αυτήν την ενότητα θα μας απασχολήσουν κάποιες συνέπειες της μη γραμμικότητας διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης. Ιδιαίτερη έμφαση δίνουμε στον σχηματισμό κρουστικών κυμάτων.

Θεωρούμε την εξίσωση του Burgers (1.53), δηλαδή

$$u_t + uu_x = 0. \tag{1.56}$$

Ας δούμε κατ' αρχάς εν συντομία τη φυσική σημασία της εξίσωσης. Θεωρούμε ένα μονοδιάστατο μέσο, το οποίο προσομοιάζουμε (μοντελοποιούμε) με τον πραγματικό άξονα. Η συνάρτηση u είναι το πεδίο της ταχύτητας, δηλαδή η τιμή $u(x,t)$ δίνει την ταχύτητα του σωματιδίου στη θέση x κατά τη χρονική στιγμή t,

$$\frac{dx}{dt} = u(x,t). \tag{1.57}$$

Κατά συνέπεια,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}u\big(x(t),t\big) = u_x\frac{dx}{dt} + u_t = uu_x + u_t.$$

Επομένως, σύμφωνα με την (1.56), έχουμε

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0. \tag{1.58}$$

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι η επιτάχυνση είναι μηδενική, συνεπώς η ταχύτητα του σωματιδίου $x(t)$ είναι σταθερή. Ως επακόλουθο, σωματίδια που αρχικά εκινούντο ταχύτερα, εξακολουθούν να κινούνται με υψηλή ταχύτητα, με αποτέλεσμα να φτάνουν άλλα σωματίδια που κινούνται βραδύτερα. Αφού, σύμφωνα με την (1.58), τα σωματίδια διατηρούν σταθερή ταχύτητα, αναπόφευκτα θα οδηγηθούμε σε σύγκρουση σωματιδίων, δηλαδή στη δημιουργία *κρουστικών κυμάτων*.

Αρχίζουμε με την ανάλυση μιας ελαφρώς γενικότερης εξίσωσης Burgers· θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} u_t + c(u)u_x = 0 & \text{στο } \ U := \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : t > 0\}, \\ u(x,0) = \varphi(x) & \text{στο } \ \varGamma := \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : t = 0\}, \end{cases} \tag{1.59}$$

με $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια δοθείσα συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε εδώ ότι η συνάρτηση $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και έχει θετική παράγωγο, $c'(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

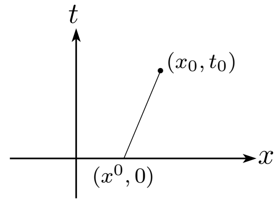
Η μέθοδος των χαρακτηριστικών δίνει, με $t = t(s), x = x(s)$ και $z(s) = u\big(x(s), t(s)\big)$,

$$\begin{cases} \dfrac{dt}{ds} = 1, & t(0) = t_0, \\ \dfrac{dx}{ds} = c(z), & x(0) = x_0, \\ \dfrac{dz}{ds} = 0, & z(0) = u(x_0, t_0). \end{cases} \tag{1.60}$$

Από την τρίτη εξίσωση προκύπτει αμέσως ότι η z είναι σταθερή, $z(s) = u(x_0, y_0)$, οπότε η δεύτερη εξίσωση δίνει $x(s) = c\big(u(x_0, y_0)\big)s + x_0$. Από την πρώτη εξίσωση έπεται εξ άλλου ότι $t(s) = s + t_0$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$x(s) = c\big(u(x_0, t_0)\big)(t - t_0) + x_0. \tag{1.61}$$

Ιδιαίτερα, λοιπόν, οι χαρακτηριστικές είναι στην προκειμένη περίπτωση ευθείες. Ας προσδιορίσουμε τώρα το σημείο $(x^0, 0)$ τομής της χαρακτηριστικής που διέρχεται από το σημείο (x_0, t_0) με τον άξονα των x, επιλέγοντας $t = 0$ στην (1.61),



$$x^0 = -c\big(u(x_0, t_0)\big)t_0 + x_0. \tag{1.62}$$

Τώρα, σύμφωνα με την ανωτέρω σχέση και το γεγονός ότι $t(-t_0) = 0$, η $z(s) = u\big(x(s), t(s)\big)$ δίνει, για $s = -t_0$,

$$z(-t_0) = u\big(x(-t_0), t(-t_0)\big) = u\big(x(-t_0), 0\big) = u(x^0, 0) = \varphi(x^0) = \varphi\big(x_0 - c\big(u(x_0, t_0)\big)t_0\big).$$

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι

$$u(x_0, t_0) = \varphi\big(x_0 - c\big(u(x_0, t_0)\big)t_0\big),$$

δηλαδή ότι

$$u(x,t) = \varphi\big(x - c\big(u(x,t)\big)t\big), \quad (x,t) \in U. \tag{1.63}$$

Η σχέση αυτή είναι ένας χρήσιμος τύπος για τη λύση, σε έμμεση, πεπλεγμένη, μορφή.

Παρατηρήσεις 1.3 α) Παραγωγίζοντας την (1.63) ως προς x, λαμβάνουμε

$$u_x(x,t) = \big(1 - c'\big(u(x,t)\big)u_x(x,t)t\big)\varphi'\big(x - c\big(u(x,t)\big)t\big),$$

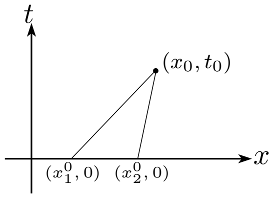
οπότε

$$u_x(x,t) = \frac{\varphi'\big(x - c\big(u(x,t)\big)t\big)}{1 + \varphi'\big(x - c\big(u(x,t)\big)t\big)c'\big(u(x,t)\big)t}. \tag{1.64}$$

Κατά συνέπεια, στην περίπτωση που η φ' λαμβάνει αρνητικές τιμές, ο παρονομαστής στην (1.64) μπορεί γενικά να μηδενιστεί, προκαλώντας *έκρηξη* της κλίσης της λύσης, δηλαδή $u_x = \infty$. Δεν μπορούμε, λοιπόν, να αναμένουμε ύπαρξη συνεχώς παραγωγίσιμης λύσης για όλους τους θετικούς χρόνους t.

β) Οι χαρακτηριστικές του προβλήματος αρχικών τιμών (1.59) στο επίπεδο xt είναι, όπως αναφέραμε ήδη, ευθείες, και, όπως είδαμε, η λύση u είναι σταθερή κατά μήκος κάθε χαρακτηριστικής. Η κλίση της χαρακτηριστικής που διέρχεται από το σημείο $(x^0, 0)$ είναι, προφανώς,

$$\frac{dx}{dt} = c\big(\varphi(x^0)\big). \tag{1.65}$$



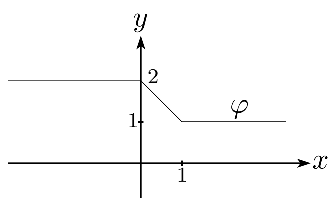
Κατά συνέπεια, οι χαρακτηριστικές δεν είναι γενικά παράλληλες μεταξύ τους. Ας θεωρήσουμε τώρα την περίπτωση που η φ είναι γνησίως φθίνουσα. Αφού, σύμφωνα με την υπόθεσή μας, η c είναι γνησίως αύξουσα, η σύνθεση $c \circ \varphi$ θα είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε, για $x_1^0 < x_2^0$ θα ισχύει $c\big(\varphi(x_1^0)\big) > c\big(\varphi(x_2^0)\big)$. Προκύπτει, λοιπόν, ότι οι χαρακτηριστικές που διέρχονται από τα σημεία $(x_1^0, 0)$ και $(x_2^0, 0)$ τέμνονται για κάποιο θετικό t. Στο σημείο τομής, η λύση u δεν είναι δυνατόν να οριστεί, γιατί θα έπρεπε εκεί να λαμβάνει αφ' ενός την τιμή $\varphi(x_1^0)$, αφού το σημείο τομής ανήκει στη χαρακτηριστική που διέρχεται από το σημείο $(x_1^0, 0)$, αφ' ετέρου δε την τιμή $\varphi(x_2^0)$, αφού το σημείο τομής ανήκει και στη χαρακτηριστική που διέρχεται από το σημείο $(x_2^0, 0)$. Στην αντίφαση αυτή οδηγηθήκαμε, γιατί δεν λάβαμε υπ' όψιν μας το γεγονός ότι η μέθοδος των χαρακτηριστικών προϋποθέτει ότι η u είναι συνεχώς παραγωγίσιμη, και αυτό δεν ισχύει γενικά στην περίπτωση μη γραμμικών εξισώσεων. Η μέθοδος λοιπόν καταρρέει ακριβώς λόγω αυτού του γεγονότος. $\square$

Παράδειγμα 1.12 Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$
\begin{cases} u_t + uu_x = 0 & \text{στο } U := \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : t > 0\}, \\ u(x,0) = \varphi(x) & \text{στο } \Gamma := \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : t = 0\}, \end{cases} \tag{1.66}
$$

με αρχική τιμή

$$
\varphi(x) := \begin{cases} 2, & x < 0, \\ 2 - x, & x \in [0,1], \\ 1, & x > 1. \end{cases}
$$



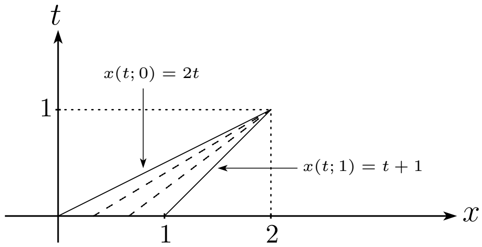
Η αρχική συνθήκη φ είναι φθίνουσα, συνεχής και τμηματικά συνεχώς παραγωγίσιμη. Οι χαρακτηριστικές είναι ευθείες,

$$
x(t; x^0) = \varphi(x^0)t + x^0. \tag{1.67}
$$

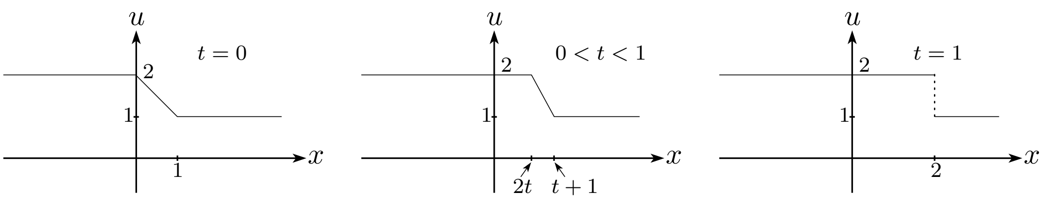
Ενδιαφερόμαστε κατ' αρχάς για τον προσδιορισμό του σημείου τομής των χαρακτηριστικών στον ελάχιστο δυνατό χρόνο, $t = t_\vartheta$, τον λεγόμενο *χρόνο θραύσης* της λύσης. Λαμβάνοντας υπ' όψιν την αρχική συνθήκη φ, μπορούμε να γράψουμε τις χαρακτηριστικές που αναφέρθηκαν στην (1.67) αναλυτικότερα στη μορφή

$$x(t;x^0) = \begin{cases} 2t + x^0, & x^0 < 0, \\ (2-x^0)t + x^0, & x^0 \in [0,1], \\ t + x^0, & x^0 > 1. \end{cases} \tag{1.68}$$

Παρατηρούμε ότι οι δύο ακραίες χαρακτηριστικές, $x(t;0) = 2t$ και $x(t;1) = t+1$, τέμνονται στο σημείο $(x,t) = (2,1)$, και ότι όλες οι ενδιάμεσες χαρακτηριστικές διέρχονται επίσης από το σημείο $(x,t) = (2,1)$. Βλ. και το Σχήμα 1.11. Ο χρόνος θραύσης είναι $t_\vartheta = 1$. Στο Σχήμα 1.12 παρατίθενται στιγμιότυπα της λύσης $u(\cdot,t)$, για διάφορους χρόνους t.



Σχήμα 1.11: Οι ακραίες χαρακτηριστικές γραμμές $x(t;0) = 2t$ και $x(t;1) = t+1$, με συνεχή γραμμή, και ενδιάμεσες χαρακτηριστικές γραμμές για $x^0 \in (0,1)$, με διακεκομμένη γραμμή.



Σχήμα 1.12: Στιγμιότυπα της λύσης $u(\cdot,t)$, για $t = 0$, αριστερά, $t \in (0,1)$, στο κέντρο, και $t = 1$, δεξιά.

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.63) και λαμβάνοντας υπ' όψιν το γεγονός ότι στην προκειμένη περίπτωση $c(u) = u$, οδηγούμαστε στη λύση u του προβλήματος αρχικών τιμών (1.66), για $t < 1$. Έχουμε, λοιπόν, $u = \varphi(x - ut)$ συνεπώς $u = 2 - (x - ut)$, οπότε

$$u(x,t) = \frac{2-x}{1-t} \quad \text{για } 2t < x < t+1.$$

Προφανώς, $u(x,t) = 2$, για $x \leq 2t$, και $u(x,t) = 1$, για $x \geq t+1$. □

Παρατήρηση 1.4 Στο Παράδειγμα 1.12 όλες οι χαρακτηριστικές διέρχονται από το ίδιο σημείο τη στιγμή της θραύσης. Αυτό αποτελεί χαρακτηριστικό της αρχικής συνθήκης. Βλ. Άσκηση 1.16. □

1.5.1 Υπολογισμός του χρόνου θραύσης

Θεωρούμε τον τύπο (1.64). Υποθέτουμε προς το παρόν ότι η φ είναι γνησίως φθίνουσα, και υπολογίζουμε το ελάχιστο t για το οποίο μηδενίζεται ο παρονομαστής,

$$1 + \varphi'(m)c'\big(\varphi(x^0)\big)t = 0, \tag{1.69}$$

όπου θέσαμε $m := x - c(u)t$. Υπενθυμίζουμε ότι $u = \varphi\big(x - c(u)t\big)$, συνεπώς $x - c(u)t = \varphi^{-1}(u)$. Επίσης, $u = u(x_0, t_0) = \varphi(x^0)$, οπότε από την (1.69) λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} t &= -\frac{1}{\varphi'(m)c'\big(\varphi(x^0)\big)} = -\frac{1}{\varphi'\big(\varphi^{-1}(u)\big)c'\big(\varphi(x^0)\big)} \\ &= -\frac{1}{\varphi'\Big(\varphi^{-1}\big(\varphi(x^0)\big)\Big)c'\big(\varphi(x^0)\big)} = -\frac{1}{\varphi'(x^0)c'\big(\varphi(x^0)\big)}. \end{aligned}$$

Κατά συνέπεια, ο χρόνος θραύσης t_ϑ δίνεται από τη σχέση

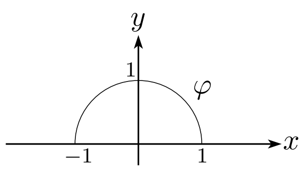
$$t_\vartheta = \inf_{x^0 \in \mathbb{R}} \Big[-\frac{1}{\varphi'(x^0)c'\big(\varphi(x^0)\big)} \Big]. \tag{1.70}$$

Παράδειγμα 1.13 Να προσδιοριστεί ο χρόνος θραύσης του προβλήματος αρχικών τιμών

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 & \text{στο } U := \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : t > 0\}, \\ u(x,0) = \varphi(x) & \text{στο } \mathit{\Gamma} := \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : t = 0\}, \end{cases} \tag{1.71}$$

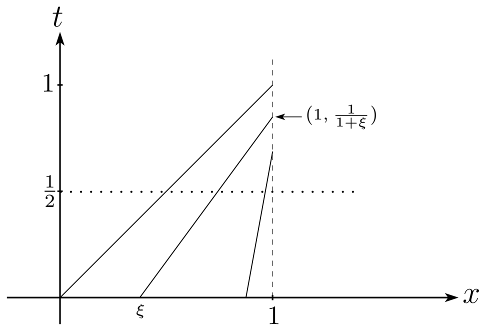
με αρχική τιμή

$$\varphi(x) := \begin{cases} 1 - x^2, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$



Κάποιες χαρακτηριστικές του προβλήματος αρχικών τιμών (1.71) δίνονται στο Σχήμα 1.13. Σύμφωνα με τον τύπο (1.70), για τον χρόνο θραύσης έχουμε

$$t_\vartheta = \inf_{\xi \in \mathbb{R}} \Big(-\frac{1}{\varphi'(\xi)} \Big) = \inf_{0<\xi<1} \Big(-\frac{1}{\varphi'(\xi)} \Big) = \inf_{0<\xi<1} \Big(\frac{1}{2\xi} \Big) = \frac{1}{2}.$$ □



Σχήμα 1.13: Τρεις χαρακτηριστικές γραμμές για το πρόβλημα αρχικών τιμών (1.71).

1.6 Μελέτη της θραύσης — Περιβάλλουσα και αιχμή

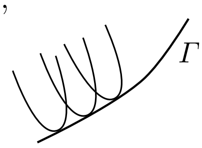
Θα γνωρίσουμε εδώ δύο βασικές έννοιες, την περιβάλλουσα και την αιχμή, που συντελούν στην κατανόηση κρουστικών κυμάτων.

1.6.1 Περιβάλλουσα

Η *περιβάλλουσα* $\varGamma$ μιας οικογένειας $\{\varGamma_\xi\}$ χαρακτηριστικών παίζει σημαντικό ρόλο στην κατανόηση της δημιουργίας κρουστικών κυμάτων. Η περιβάλλουσα είναι εξ ορισμού η καμπύλη στο επίπεδο xt με την ιδιότητα ότι κάθε χαρακτηριστική που ανήκει στην οικογένεια $\{\varGamma_\xi\}$ εφάπτεται στη $\varGamma$.

Ορισμός 1.1 Η *περιβάλλουσα* μιας οικογένειας καμπυλών $\{\varGamma_\xi\}$,

(1.72) $$\varGamma_\xi = \big\{\big(x(\sigma;\xi), t(\sigma;\xi)\big) : \sigma \in (\alpha,\beta), \xi \in (\gamma,\delta)\big\},$$



κλάσεως C^1 ως προς (σ,ξ), είναι μια ομαλή καμπύλη $\varGamma$, που δεν είναι μέλος της οικογένειας $\{\varGamma_\xi\}$, τέτοια ώστε σε κάθε σημείο της να εφάπτεται με μια καμπύλη της οικογένειας $\{\varGamma_\xi\}$. □

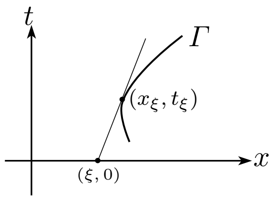
Παράδειγμα 1.14 Θεωρούμε πάλι το πρόβλημα αρχικών τιμών για την εξίσωση του Burgers

(1.73) $$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 & \text{στο } U := \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : t > 0\}, \\ u(x,0) = \varphi(x) & \text{στο } \varGamma := \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : t = 0\}. \end{cases}$$

Γνωρίζουμε ήδη ότι οι χαρακτηριστικές είναι ευθείες,

(1.74) $$x(t;\xi) = \varphi(\xi)t + \xi, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Έστω



$$\varGamma = \big\{\big(x(\sigma), t(\sigma)\big) : \sigma \in (\alpha, \beta)\big\}, \tag{1.75}$$

μια καμπύλη που αποτελεί περιβάλλουσα των ευθειών (1.74). Έστω (x_ξ, t_ξ) το σημείο επαφής της ευθείας με τη $\varGamma$,

$$\begin{cases} x_\xi = \varphi(\xi) t_\xi + \xi, \\ (x_\xi, t_\xi) = \big(x\big(\sigma(\xi)\big), t\big(\sigma(\xi)\big)\big). \end{cases} \tag{1.76}$$

Η πρώτη σχέση στην (1.76) εκφράζει το γεγονός ότι το (x_ξ, t_ξ) είναι σημείο της χαρακτηριστικής ενώ η δεύτερη ότι είναι σημείο και της περιβάλλουσας $\varGamma$. Κατά συνέπεια, στο κοινό σημείο έχουμε

$$x\big(\sigma(\xi)\big) = \varphi(\xi) t\big(\sigma(\xi)\big) + \xi. \tag{1.77}$$

Τώρα, αφού η ευθεία εφάπτεται στην καμπύλη στο σημείο (x_ξ, t_ξ), ισχύει

$$\varphi(\xi) = \frac{x'\big(\sigma(\xi)\big)}{t'\big(\sigma(\xi)\big)}, \quad \text{με } x' = \frac{dx}{d\sigma},\ t' = \frac{dt}{d\sigma}. \tag{1.78}$$

Παραγωγίζοντας την (1.77) έχουμε

$$x'\big(\sigma(\xi)\big)\sigma'(\xi) = \varphi'(\xi) t\big(\sigma(\xi)\big) + \varphi(\xi) t'\big(\sigma(\xi)\big)\sigma'(\xi) + 1,$$

συνεπώς, λαμβάνοντας υπ' όψιν την (1.78),

$$x'\big(\sigma(\xi)\big)\sigma'(\xi) = \varphi'(\xi) t\big(\sigma(\xi)\big) + x'\big(\sigma(\xi)\big)\sigma'(\xi) + 1$$

ή

$$\varphi'(\xi) t\big(\sigma(\xi)\big) + 1 = 0.$$

Προκύπτει, λοιπόν, ότι

$$t\big(\sigma(\xi)\big) = -\frac{1}{\varphi'(\xi)}, \tag{1.79}$$

οπότε η (1.77) δίνει

$$x\big(\sigma(\xi)\big) = -\frac{\varphi(\xi)}{\varphi'(\xi)} + \xi. \tag{1.80}$$

Η περιβάλλουσα Γ μπορεί, κατά συνέπεια, να παραμετρικοποιηθεί μέσω του ξ, ορίζοντας $\hat{t}(\xi) := t\big(\sigma(\xi)\big)$ και $\hat{x}(\xi) := t\big(\sigma(\xi)\big)$, στη μορφή

$$\Gamma = \Big\{ \big(\hat{x}(\xi), \hat{t}(\xi)\big) : \hat{t}(\xi) = -\frac{1}{\varphi'(\xi)},\ \hat{x}(\xi) = -\frac{\varphi(\xi)}{\varphi'(\xi)} + \xi,\ \xi \in (\alpha, \beta) \Big\}. \tag{1.81}$$

Ας θεωρήσουμε, για παράδειγμα, την αρχική συνθήκη

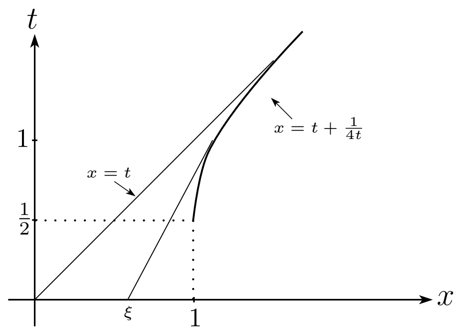
$$\varphi(x) := \begin{cases} 1 - x^2, & |x| \le 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases} \tag{1.82}$$

Υπενθυμίζουμε ότι, για αυτήν την περίπτωση, υπολογίσαμε τον χρόνο θραύσης στην παράγραφο 1.5.1· βλ. Παράδειγμα 1.13. Θεωρούμε το τμήμα $0 \le \xi \le 1$, και τις χαρακτηριστικές. Έχουμε

$$\hat{t}(\xi) = \frac{1}{2\xi}, \quad \hat{x}(\xi) = \frac{1 + \xi^2}{2\xi}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\inf_{0<\xi\le 1} \hat{t}(\xi) = \frac{1}{2} = t_\vartheta. \qquad \square$$



Σχήμα 1.14: Η περιβάλλουσα για το πρόβλημα αρχικών τιμών (1.73) στην περίπτωση της αρχικής τιμής (1.82).

Παρατήρηση 1.5 (Γενική εξίσωση περιβάλλουσας) Η γενική εξίσωση της περιβάλλουσας της οικογένειας

$$\Gamma_\xi = \Big\{ \big(x(\sigma;\xi), t(\sigma;\xi)\big) : \sigma \in (\alpha,\beta), \xi \in (\gamma,\delta) \Big\}$$

δίνεται από την εξίσωση

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \sigma} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial t}{\partial \sigma} & \frac{\partial t}{\partial \xi} \end{vmatrix} = 0, \tag{1.83}$$

βλ. Άσκηση. Στην ειδική περίπτωση όπου οι καμπύλες της οικογένειας Γ_ξ είναι γραφήματα ως προς τον άξονα των t, δηλαδή όταν $t(\sigma;\xi) = \sigma$, τότε η (1.83) δίνει

$$0 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \sigma} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial x}{\partial \xi}, \tag{1.84}$$

συνεπώς η εξίσωση της περιβάλλουσας είναι

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = 0. \tag{1.85}$$

Στην περίπτωση της εξίσωσης του Burgers οι χαρακτηριστικές δίνονται, όπως γνωρίζουμε ήδη, από τις σχέσεις

$$\begin{cases} x(\sigma;\xi) = \varphi(\xi)\sigma + \xi, \\ t(\sigma;\xi) = \sigma, \end{cases} \tag{1.86}$$

βλ. την (1.74). Επομένως, η (1.84) δίνει στην προκειμένη περίπτωση $0 = \varphi'(\xi)t + 1$, συνεπώς

$$t(\xi) = -\frac{1}{\varphi'(\xi)}, \tag{1.87}$$

οπότε θα έχουμε επίσης

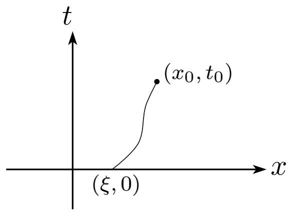
$$x(\xi) = -\frac{\varphi(\xi)}{\varphi'(\xi)} + \xi \tag{1.88}$$

Σημειώστε ότι κατ' αυτόν τον τρόπο οδηγηθήκαμε πάλι στις (1.79) και (1.80). □

Παράδειγμα 1.15 Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} u_t + uu_x + u = 0 & \text{στο } U := \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : t > 0\}, \\ u(x,0) = k\mathrm{e}^{-x^2} & \text{στο } \Gamma := \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : t = 0\}, \end{cases} \tag{1.89}$$

με μια θετική σταθερά k. Επιθυμούμε να προσδιορίσουμε τις τιμές του k για τις οποίες θα προκύψει θραύση του κύματος.



Θα ασχοληθούμε πρώτα με τις χαρακτηριστικές και εν συνεχεία με την περιβάλλουσα.
α) Θεωρούμε τη χαρακτηριστική που διέρχεται από το σημείο $(\xi, 0)$,

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = u, & x(0) = \xi, \\ \dfrac{du}{dt} = -u, & u(0) = k\mathrm{e}^{-\xi^2}. \end{cases}$$

Προφανώς, έχουμε $u(t) = A\mathrm{e}^{-t}$, με μια σταθερά A, οπότε, χρησιμοποιώντας και την αρχική συνθήκη $u(0) = k\mathrm{e}^{-\xi^2}$, συμπεραίνουμε ότι

$$u(t) = k\mathrm{e}^{-\xi^2}\mathrm{e}^{-t}.$$

Επομένως, η πρώτη εξίσωση γίνεται

$$\frac{dx}{dt} = k\mathrm{e}^{-\xi^2}\mathrm{e}^{-t},$$

και εύκολα οδηγούμαστε στη λύση

$$x(t) = k\mathrm{e}^{-\xi^2}(1 - \mathrm{e}^{-t}) + \xi.$$

β) Προχωρούμε τώρα στο ζήτημα της περιβάλλουσας. Η εξίσωση της περιβάλλουσας είναι

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = 0 \iff k\mathrm{e}^{-\xi^2}(-2\xi)(1 - \mathrm{e}^{-t}) + 1 = 0 \iff t(\xi) = -\ln\Big(1 - \frac{\mathrm{e}^{\xi^2}}{2k\xi}\Big).$$

Προϋπόθεση για τη δημιουργία κρουστικού κύματος είναι το $\inf_\xi t(\xi)$ να είναι θετικό. Τώρα,

$$\frac{\partial t}{\partial \xi} = 0 \iff \frac{1}{1 - \frac{\mathrm{e}^{\xi^2}}{2k\xi}}\Big[\frac{\mathrm{e}^{\xi^2}(2\xi)(2k\xi) - \mathrm{e}^{\xi^2}(2k)}{4k^2\xi^2}\Big] = 0 \iff \xi = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Κατά συνέπεια,

$$t\big(\frac{1}{\sqrt{2}}\big) > 0 \iff 0 < \frac{\mathrm{e}^{1/2}}{2k\frac{1}{\sqrt{2}}} < 1 \iff k > \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{1/2},$$

οπότε, για αυτές της τιμές του k δημιουργείται κρουστικό κύμα. □

1.6.2 Αιχμή

Θεωρούμε πάλι το πρόβλημα αρχικών τιμών για την εξίσωση του Burgers,

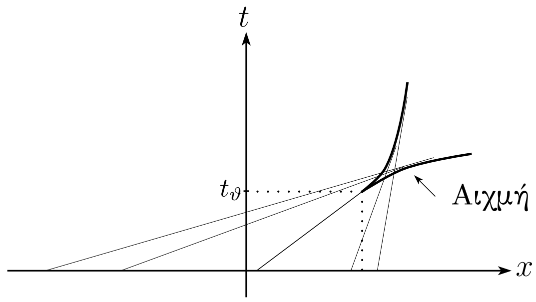
$$
\begin{cases} u_t + uu_x = 0 & \text{στο } U := \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : t > 0\}, \\ u(x,0) = \varphi(x) & \text{στο } \varGamma := \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : t = 0\}. \end{cases} \tag{1.90}
$$

Αυτή τη φορά, υποθέτουμε ότι η αρχική τιμή φ είναι (πραγματική) αναλυτική και επί πλέον ότι ικανοποιεί τις ακόλουθες τρεις συνθήκες:

i) $\varphi'(\xi) < 0$, για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$.

ii) Η συνάρτηση φ' λαμβάνει μη εκφυλισμένο ελάχιστο στο μηδέν· μη εκφυλισμένο με την έννοια ότι $\varphi'''(0) > 0$.

iii) Η $\varphi'(\xi)$ τείνει στο μηδέν καθώς το ξ τείνει είτε στο ∞ είτε στο $-\infty$.



Σχήμα 1.15: Χαρακτηριστικές και αιχμή.

Σκοπός μας στην παρούσα ενότητα είναι να περιγράψουμε το σύνολο των σημείων στο επίπεδο xt όπου οι χαρακτηριστικές "συγκρούονται", για το πρόβλημα (1.90) και υποθέτοντας ότι η αρχική τιμή φ ικανοποιεί τις συνθήκες *i)*, *ii)* και *iii)*. Σημειώνουμε ότι έχουμε ήδη δει παραδείγματα τέτοιων συνόλων σύγκρουσης, Το απλούστερο ήταν το Παράδειγμα 1.12, στο οποίο όλες οι χαρακτηριστικές διέρχονται από ένα σημείο, και το σύνολο σύγκρουσης είναι ακριβώς αυτό το σημείο· βλ. Σχήμα 1.11. Σε αυτήν την περίπτωση, δηλαδή, η περιβάλλουσα εκφυλίζεται σε σημείο. Στο αμέσως επόμενο παράδειγμα, το Παράδειγμα 1.14 με αρχική τιμή φ αυτή της (1.82), το σύνολο σύγκρουσης είναι η καμπύλη του Σχήματος 1.14, που αποτελεί την περιβάλλουσα των χαρακτηριστικών αριστερά από το σημείο θραύσης. Η περίπτωση μιας φ που ικανοποιεί τις $i)$, $ii)$ και $iii)$ είναι αντιπροσωπευτική της γενικής κατάστασης, όπου το σύνολο σύγκρουσης είναι *αιχμή*, η οποία απαρτίζεται από δύο περιβάλλουσες, μίας των χαρακτηριστικών αριστερά του σημείου θραύσης και μίας των χαρακτηριστικών δεξιά του σημείου θραύσης, βλ. Σχήμα 1.15. Η υπόθεση $ii)$ έχει ως αποτέλεσμα η χαρακτηριστική που ξεκινάει από το σημείο $(0,0)$ αφ' ενός να οδηγεί κατ' ευθείαν στη "μύτη" της αιχμής και αφ' ετέρου να διαχωρίζει τις χαρακτηριστικές σε δύο ομάδες. Τέλος, υποθέσαμε αναλυτικότητα της φ για ευκολία, αυτό που όντως χρειαζόμαστε είναι η φ να είναι αρκετά ομαλή ώστε να μπορούμε να αναπτύξουμε κατά Taylor γύρω από το σημείο $\xi = 0$ μέχρι κάποιο βαθμό.

Θέτουμε

$$\begin{cases} \tau(\xi) := t(\xi) - t(0), \\ \chi(\xi) := x(\xi) - x(0), \end{cases} \tag{1.91}$$

με τις συναρτήσεις $t(\xi)$ και $x(\xi)$ που δίνονται στις (1.87) και (1.88), αντίστοιχα. Τώρα, σύμφωνα με την υπόθεση $ii)$ έχουμε $\varphi''(0) = 0$ και $\varphi''(0) > 0$, επομένως, αναπτύσσοντας κατά Taylor γύρω από το σημείο $\xi = 0$, έχουμε

$$t(\xi) = -\frac{1}{\varphi'(\xi)} = -\frac{1}{\varphi'(0)} + \frac{1}{2}\frac{\varphi'''(0)}{\big(\varphi'(0)\big)^2}\xi^2 + O(\xi^3),$$

οπότε

$$\tau(\xi) = a_2\xi^2 + O(\xi^3) \quad \text{με} \;\; a_2 = \frac{1}{2}\frac{\varphi'''(0)}{\big(\varphi'(0)\big)^2} > 0. \tag{1.92}$$

Αντίστοιχα, αναπτύσσοντας την $x(\xi)$ έχουμε

$$\begin{aligned} x(\xi) &= -\frac{\varphi(\xi)}{\varphi'(\xi)} + \xi = -\frac{\varphi(0)}{\varphi'(0)} + (-1)\xi + \frac{1}{2}\frac{\varphi(0)\varphi'''(0)}{\big(\varphi'(0)\big)^2}\xi^2 + \xi + \cdots \\ &= -\frac{\varphi(0)}{\varphi'(0)} + \frac{1}{2}\frac{\varphi(0)\varphi'''(0)}{\big(\varphi'(0)\big)^2}\xi^2 + \frac{1}{6}\Big[2\frac{\varphi'''(0)}{\varphi'(0)} + \frac{\varphi(0)\varphi'''(0)}{\big(\varphi'(0)\big)^2}\Big]\xi^3 + O(\xi^4), \end{aligned}$$

οπότε

$$\chi(\xi) = a_2\varphi(0)\xi^2 + a_3\xi^3 + O(\xi^4). \tag{1.93}$$

Τώρα, για να απαλείψουμε το ξ, για ξ αρκετά κοντά στο μηδέν, σημειώνουμε κατ' αρχάς ότι, σύμφωνα με την (1.92),

$$\xi = \pm\frac{1}{\sqrt{a_2}}\tau^{1/2} + O(\tau^{3/2}),$$

οπότε, αντικαθιστώντας στην (1.93), οδηγούμαστε στην επιθυμητή έκφραση

$$\chi(\tau) = \varphi(0)\tau \pm \frac{a_3}{(a_2)^{3/2}}\tau^{3/2} + O(\tau^2) \quad \text{με} \ \ \varphi(0) > 0. \tag{1.94}$$

Για τ στην περιοχή του μηδενός, η χ προσεγγίζεται πολύ καλά με το άθροισμα των δύο πρώτων όρων του αναπτύγματος στο δεξιό μέλος της (1.94).

Παράδειγμα 1.16 Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών για τη μη γραμμική κυματική εξίσωση με *απόσβεση*,

$$\begin{cases} u_t + uu_x + au = 0 & \text{στο } U := \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : t > 0\}, \\ u(x,0) = \varphi(x) & \text{στο } \Gamma := \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : t = 0\}, \end{cases} \tag{1.95}$$

με μια θετική σταθερά a. Στην περίπτωση δημιουργίας κρουστικού κύματος, θέλουμε να αποδείξουμε ότι ο χρόνος θραύσης t_ϑ είναι μεγαλύτερος από τον αντίστοιχο στην περίπτωση χωρίς απόσβεση, δηλαδή στην περίπτωση της εξίσωσης του Burgers.

Θα ασχοληθούμε πρώτα με τις χαρακτηριστικές και εν συνεχεία με την περιβάλλουσα.

α) Θεωρούμε τη χαρακτηριστική που διέρχεται από το σημείο $(\xi, 0)$,

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = u, & x(0) = \xi, \\ \dfrac{du}{dt} = -au, & u(0) = \varphi(\xi). \end{cases}$$

Προχωρώντας όπως στη Λύση της προηγούμενης Άσκησης, διαπιστώνουμε εύκολα ότι

$$u(t) = \varphi(\xi)\mathrm{e}^{-at}, \quad x(t) = \frac{\varphi(\xi)}{a}(1 - \mathrm{e}^{-t}) + \xi.$$

β) Προχωρούμε τώρα στο ζήτημα της περιβάλλουσας. Έχουμε

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = 0 \iff 1 + \frac{\varphi(\xi)}{a}(1 - \mathrm{e}^{-t}) = 0 \iff at = -\ln\Big[1 + \frac{a}{\varphi'(\xi)}\Big],$$

και, κατά συνέπεια, λύνοντας ως προς $t = t(\xi; a)$, λαμβάνουμε

$$t(\xi; a) = -\frac{1}{a}\ln\Big[1 + \frac{a}{\varphi'(\xi)}\Big].$$

Προσδιορίζουμε τώρα τον χρόνο θραύσης $t_\vartheta(a)$ ελαχιστοποιώντας την $t(\xi;a)$,

$$t_\vartheta(a) := \min_{\xi\in\mathbb{R}} t(\xi;a) = \min_{\xi\in\mathbb{R}} \Big[-\frac{1}{a}\ln\Big(1+\frac{a}{\varphi'(\xi)}\Big)\Big].$$

Επικεντρώνουμε τώρα την προσοχή μας στην περίπτωση χωρίς απόσβεση, $a=0$. Η εξίσωσή μας συμπίπτει τώρα με την εξίσωση του Burgers, οπότε, σύμφωνα με την (1.70), αναμένουμε ότι

$$\lim_{a\searrow 0} t_\vartheta(a) = t_\vartheta = \min_{\xi\in\mathbb{R}}\Big(-\frac{1}{\varphi(\xi)}\Big).$$

Πράγματι, σύμφωνα με τον κανόνα του de L'Hôspital,

$$\lim_{a\searrow 0}\Big[-\frac{1}{a}\ln\Big(1+\frac{a}{\varphi'(\xi)}\Big)\Big] = -\lim_{a\searrow 0}\frac{\frac{1}{\frac{a}{\varphi'(\xi)}+1}\frac{1}{\varphi'(\xi)}}{1} = -\frac{1}{\varphi'(\xi)}.$$

Για να ελαχιστοποιήσουμε την $t(\xi;a)$ ως προς ξ, παρατηρούμε πρώτα ότι

$$\lim_{|\xi|\to\infty} t(\xi;a) = \infty \quad \text{και} \quad t(\xi;a) > 0, \quad \text{για} \quad \xi\in\mathbb{R}.$$

Συνεπώς, η συνάρτηση ελαχιστοποιείται σε κάποιο πεπερασμένο ξ στο οποίο μηδενίζεται η $\frac{\partial t}{\partial\xi}t(\xi;a)$. Τώρα, η $\frac{\partial t}{\partial\xi}t(\xi;a)=0$ γράφεται στη μορφή

$$\frac{1}{1+\frac{a}{\varphi'(\xi)}}\frac{d}{d\xi}\Big(\frac{1}{\varphi(\xi)}\Big) = 0. \tag{1.96}$$

Παρατηρούμε ότι οι λύσεις $\xi=\xi^\star$ αυτής της εξίσωσης είναι ανεξάρτητες του a. Τώρα, έχουμε

$$\min_{\xi\in\mathbb{R}} t(\xi;a) = t(\xi^\star;a) = t_\vartheta(a),$$

και απομένει να αποδείξουμε ότι $t_\vartheta(a) > t_\vartheta(0)$. Αλλά, προφανώς,

$$t_\vartheta(a) > t_\vartheta(0) \iff \ln\Big[1+\frac{a}{\varphi'(\xi^\star)}\Big] < \frac{a}{\varphi'(\xi^\star)} \iff \ln(1+x) < x, \quad x<0.$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει, προφανώς, αφού η συνάρτηση $f(x)=\ln(1+x)$ είναι κοίλη και η συνάρτηση $g(x)=x$ είναι εφαπτομένη της. □

1.7 Ασθενείς λύσεις — Συνθήκες Rankine–Hugoniot

Σε αυτήν την ενότητα θα γενικεύσουμε κατ' αρχάς την έννοια της λύσης μιας διαφορικής εξίσωσης, εισάγοντας την έννοια της ασθενούς ή γενικευμένης λύσης, και εν συνεχεία θα ασχοληθούμε με μια σημαντική συνθήκη που σχετίζεται με ασθενείς λύσεις, τη λεγόμενη συνθήκη Rankine–Hugoniot.

1.7.1 Ασθενής λύση

Μέχρι τώρα όταν μιλούσαμε για λύση μιας διαφορικής εξίσωσης εννοούσαμε μια συνάρτηση τόσο ομαλή ώστε όλες οι παράγωγοί της που εμφανίζονται στη διαφορική εξίσωση να είναι συνεχείς. Στη συνέχεια θα γενικεύσουμε κάπως την έννοια της λύσης, εισάγοντας τις λεγόμενες ασθενείς ή γενικευμένες λύσεις· για να μη αφήσουμε περιθώρια παρανόησης, θα αναφερόμαστε στις λύσεις που θεωρούσαμε μέχρι τώρα ως κλασικές λύσεις.

Η γενίκευση της έννοιας της λύσης που θα γνωρίσουμε είναι πολύ σημαντική από μαθηματική άποψη και εξυπηρετεί πάρα πολύ στις εφαρμογές των διαφορικών εξισώσεων.

Θεωρούμε το πρόβλημα (1.59) και το γράφουμε τώρα στη μορφή

$$\begin{cases} u_t + \big(F(u)\big)_x = 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1.97}$$

με F μια παράγουσα της συνάρτησης c, $F'(x) = c(x)$. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση c είναι συνεχής. Για παράδειγμα, η εξίσωση του Burgers, $u_t + uu_x = 0$, γράφεται στη μορφή (1.97) ως

$$u_t + \big(\frac{1}{2}u^2\big)_x = 0.$$

Στη συνέχεια, θα επαναδιατυπώσουμε το πρόβλημα (1.97) σε μια καταλληλότερη για τους σκοπούς μας μορφή. Πριν γίνει αυτό, για να εξοικειωθούμε κάπως με τη διαδικασία, παρουσιάζουμε χοντρικά τη βασική ιδέα σε μια απλούστατη περίπτωση, εκείνη ενός γραμμικού συστήματος. Θεωρούμε, λοιπόν, το γραμμικό σύστημα

$$Ax = y \tag{1.98}$$

με δεδομένα έναν αντιστρέψιμο τετραγωνικό $n \times n$ πίνακα A, $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, και ένα διάνυσμα $y \in \mathbb{R}^n$, και άγνωστο το διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$. Συμβολίζοντας με $\langle \cdot, \cdot \rangle$ το Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^n$, γράφουμε το γραμμικό σύστημα (1.98) ισοδύναμα στη μορφή

$$\langle Ax, z \rangle = \langle y, z \rangle \quad \forall z \in \mathbb{R}^n. \tag{1.99}$$

Πράγματι, ότι η (1.99) προκύπτει από την (1.98) είναι προφανές. Για το αντίστροφο επιχειρηματολογούμε ως εξής: Η (1.99) γράφεται και στη μορφή

$$\langle Ax - y, z\rangle = 0 \quad \forall z \in \mathbb{R}^n.$$

Επιλέγοντας εδώ $z := Ax - y$ καταλήγουμε στην $|Ax - y|^2 = 0$, με $|\cdot|$ την Ευκλείδεια νόρμα στον $\mathbb{R}^n$, δηλαδή στην επιθυμητή σχέση $Ax = y$.

Παρατηρούμε επίσης ότι ακόμη και αν η (1.99) αντικατασταθεί από την ασθενέστερη συνθήκη

$$\langle Ax, z\rangle = \langle y, z\rangle \quad \forall z \in D, \tag{1.100}$$

όπου D κάποιο πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, η ισοδυναμία με την (1.98) δεν επηρεάζεται και παραμένει σε ισχύ. Η απόδειξη μπορεί να γίνει ως εξής: Σταθεροποιούμε ένα $\xi \in \mathbb{R}^n$ και θα αποδείξουμε ότι η συνθήκη

$$\langle \xi, z\rangle = 0 \quad \forall z \in D$$

ικανοποιείται, αν και μόνο αν $\xi = 0$. Όντως, λόγω της πυκνότητας του D στον $\mathbb{R}^n$, υπάρχει μια ακολουθία $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ που συγκλίνει στο ξ. Τώρα, χρησιμοποιώντας τη συνέχεια του εσωτερικού γινομένου και παίρνοντας το όριο στη σχέση $\langle \xi, z_n\rangle = 0$ οδηγούμαστε στην $\langle \xi, \xi\rangle = 0$, δηλαδή $\xi = 0$. Η αντίστροφη κατεύθυνση είναι, προφανώς, τετριμμένη. Επομένως, θέτοντας $\xi := Ax - y$ στην (1.100) διαπιστώνουμε αμέσως την ισοδυναμία της με την (1.98). Χρησιμοποιώντας επίσης τη γνωστή και προφανή ιδιότητα του συζυγή $A^\star$, δηλαδή του αναστρόφου, του πίνακα A,

$$\langle Ax, z\rangle = \langle x, A^\star z\rangle \quad \forall x, z \in \mathbb{R}^n,$$

διατυπώνουμε τελικά την (1.98) ισοδύναμα στη μορφή

$$\langle x, A^\star z\rangle = \langle y, z\rangle \quad \forall z \in D. \tag{1.101}$$

Καλούμε τα στοιχεία του D *διανύσματα δοκιμής*. Το πλεονέκτημα της διατύπωσης (1.101) έναντι της (1.98) συνίσταται στο ότι σε αυτή δεν απαιτείται η λύση x να ανήκει στο πεδίο ορισμού της απεικόνισης $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto Ax$. Στην περίπτωση που το σύνολο D περιέχεται στο πεδίο ορισμού του $A^\star$, θα μπορούσε η (1.101) να έχει λύση που ενδεχομένως δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού του A. Σε μια τέτοια περίπτωση θα καλούσαμε τη λύση x της (1.101) *ασθενή ή γενικευμένη* λύση της (1.98). Βεβαίως, ένα τέτοιο σενάριο είναι αδύνατο στο πλαίσιο της Γραμμικής Άλγεβρας, δηλαδή στην περίπτωση γραμμικών συστημάτων στον $\mathbb{R}^n$. Αντίθετα, στην περίπτωση που ο A αντικατασταθεί από κάποιον διαφορικό τελεστή και ο $\mathbb{R}^n$ από κάποιον χώρο συναρτήσεων, αυτό το σενάριο μπορεί κάλλιστα να συμβεί και η διαδικασία που περιγράψαμε οδηγεί σε σημαντική και αναγκαία επέκταση της έννοιας της κλασικής λύσης. Στο πρόβλημα (1.97), που θα μας απασχολήσει εδώ, ο πίνακας A θα αντικατασταθεί από τους τελεστές $\frac{\partial}{\partial x}$ και $\frac{\partial}{\partial t}$. Μια τελευταία σημείωση σχετικά με την ορολογία: Ασθενής λύση του (1.98) καλείται η λύση του (1.101) γιατί για αυτήν απαιτούμε ασθενέστερες συνθήκες από ότι για την (κλασική) λύση του (1.98)· η τελευταία ανήκει στο πεδίο ορισμού του A. Γενικευμένη καλείται η λύση γιατί ακριβώς γενικεύει την έννοια της κλασικής λύσης, αφού μπορεί να υπάρχει δίχως να υπάρχει κλασική λύση. Τέλος, η διατύπωση (1.101) αναφέρεται ως *μεταβολική*, επειδή το z μεταβάλλεται σε αυτή, διατρέχει όλα τα στοιχεία του συνόλου D.

Έπειτα από αυτήν την προσπάθεια να εξηγήσουμε τη βασική ιδέα της μεταβολικής διατύπωσης ενός προβλήματος στο παράδειγμα του γραμμικού συστήματος (1.101), επανερχόμαστε στο πρόβλημα που πράγματι μας ενδιαφέρει, το (1.97), στην περίπτωση του οποίου, και σε αντιδιαστολή με την περίπτωση γραμμικών συστημάτων, η μεταβολική διατύπωση συνεισφέρει όντως χρήσιμη πληροφορία. Σε ένα πρώτο στάδιο θα ορίσουμε τις συναρτήσεις δοκιμής, το αντίστοιχο των διανυσμάτων δοκιμής που αναφέραμε προηγουμένως.

Συναρτήσεις δοκιμής. Λέμε ότι μια συνάρτηση $v = v(x,t)$ είναι C^1 στο πεδίο ορισμού της, αν είναι συνεχώς παραγωγίσιμη, δηλαδή αν οι πρώτες μερικές παράγωγοί της $\frac{\partial v}{\partial x}$ και $\frac{\partial v}{\partial t}$ υπάρχουν και είναι συνεχείς ως συναρτήσεις δύο μεταβλητών, (x,t).

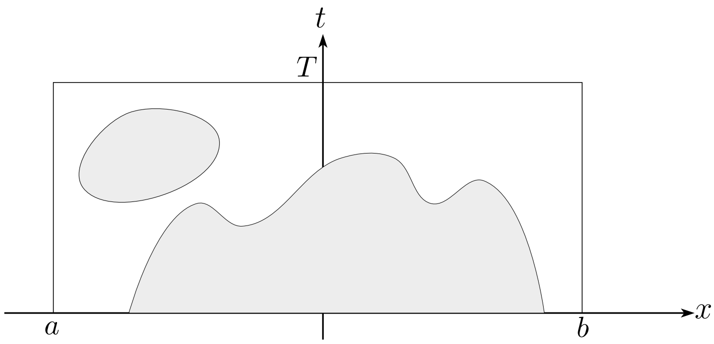
Έστω $v = v(x,t)$ μια C^1 συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}\times[0,\infty)$, $v \in C^1\big(\mathbb{R}\times[0,\infty)\big)$. ***Φορέας*** Φ **της** v καλείται η κλειστότητα (ή θήκη) του συνόλου στο οποίο αυτή δεν μηδενίζεται,

$$\Phi := \overline{\{(x,t) \in \mathbb{R}\times[0,\infty) : v(x,t) \neq 0\}}. \tag{1.102}$$

Ορισμός 1.2 Μια συνάρτηση $v \in C^1\big(\mathbb{R}\times[0,\infty)\big)$ λέγεται *συνάρτηση δοκιμής*, αν ο φορέας της Φ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}\times[0,\infty)$. □

Η απαίτηση να έχει μια συνάρτηση δοκιμής συμπαγή φορέα στο $\mathbb{R}\times[0,\infty)$ σημαίνει ότι υπάρχει κατάλληλο κάθε φορά ορθογώνιο $[a,b]\times[0,T]$, στο οποίο περιέχεται ο φορέας της Φ· δηλαδή, μη μηδενικές τιμές μπορεί η v να λάβει μόνο σε κάποιο τέτοιο ορθογώνιο, έξω από αυτό μηδενίζεται.

Υπενθυμίζουμε ότι, στην περίπτωση χώρων πεπερασμένης διάστασης, ένα σύνολο είναι ακριβώς τότε συμπαγές, αν είναι κλειστό και φραγμένο. Έτσι, η υπόθεση ότι το Φ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}\times[0,\infty)$ σημαίνει ότι το Φ είναι κλειστό και φραγμένο και περιέχεται στο $\mathbb{R}\times[0,\infty)$. Με άλλα λόγια, η απαίτηση να έχει μια συνάρτηση δοκιμής συμπαγή φορέα στο $\mathbb{R}\times[0,\infty)$ σημαίνει ότι υπάρχει κατάλληλο κάθε φορά ορθογώνιο $[a,b]\times[0,T]$, στο οποίο περιέχεται ο φορέας της Φ· δηλαδή, μη μηδενικές τιμές μπορεί η v να λάβει μόνο σε κάποιο τέτοιο ορθογώνιο, έξω από αυτό μηδενίζεται. Βλέπε και το Σχήμα 1.16.

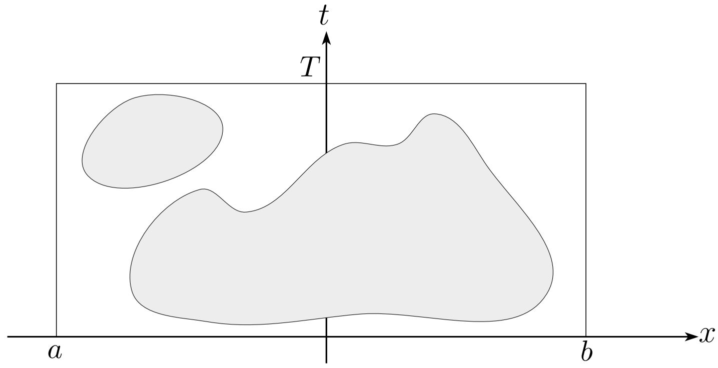


Σχήμα 1.16: Ο φορέας Φ, με γκρι, μιας συνάρτησης δοκιμής.

Παρατήρηση 1.6 Για πληρέστερη κατανόηση της έννοιας της συμπάγειας στο $\mathbb{R}\times[0,\infty)$, αναφέρουμε ακόμη ότι μια συνάρτηση v έχει *συμπαγή φορέα* στο $\mathbb{R}\times(0,\infty)$, αν και μόνο αν ο φορέας της είναι συμπαγές σύνολο και περιέχεται στο $\mathbb{R}\times(0,\infty)$. Ιδιαίτερα, λοιπόν, ο φορέας της v έχει αυτή τη φορά γνήσια θετική απόσταση από τον άξονα των x, συνεπώς $v(x,0)=0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αλλά, βέβαια, μια συνάρτηση v με συμπαγή φορέα στο $\mathbb{R}\times[0,\infty)$ που μηδενίζεται για $t=0$, $v(x,0)=0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, *δεν* έχει αναγκαστικά συμπαγή φορέα στο $\mathbb{R}\times(0,\infty)$. Φερ' ειπείν, η συνάρτηση

$$v(x,t) := \begin{cases} t(t-2)(x-1)(x-4), & \text{για } \ 0\le t\le 2,\ 1\le x\le 4,\\ 0, & \text{διαφορετικά,}\end{cases}$$

δεν έχει συμπαγή φορέα στο $\mathbb{R}\times(0,\infty)$. Το αντίστοιχο του Σχήματος 1.16 στην περίπτωση συμπαγούς φορέα στο $\mathbb{R}\times(0,\infty)$ παρουσιάζεται στο Σχήμα 1.17. □



Σχήμα 1.17: Συμπαγής φορέας Φ, με γκρι, στο σύνολο $\mathbb{R}\times(0,\infty)$.

Έχοντας πλέον στη διάθεσή μας τις κατάλληλες συναρτήσεις δοκιμής, ας τις χρησιμοποιήσουμε για να οδηγηθούμε σε μια μεταβολική διατύπωση του προβλήματος (1.97). Πολλαπλασιάζουμε, λοιπόν, τη διαφορική εξίσωση στο πρόβλημα (1.97) με μια συνάρτηση δοκιμής v και ολοκληρώνουμε στο $\mathbb{R}\times[0,\infty)$. Δεδομένου ότι ο φορέας Φ της v περιέχεται σε ένα κατάλληλο ορθογώνιο $[a,b]\times[0,T]$, έχουμε

$$0=\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty \big(u_t+\big(F(u)\big)_x\big)v\,dxdt=\int_0^T\int_a^b \big(u_t+\big(F(u)\big)_x\big)v\,dxdt,$$

οπότε

$$I_1+I_2=0$$

με

$$I_1:=\int_0^T\int_a^b \big(F(u)\big)_x v\,dxdt,\quad I_2:=\int_0^T\int_a^b u_t v\,dxdt.$$

Χειριζόμαστε χωριστά κάθε ολοκλήρωμα. Ξεκινάμε με το I_1. Ολοκληρώνοντας κατά μέρη ως προς x και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα $v(a,t)=v(b,t)=$

0, για κάθε μη αρνητικό t, της συνάρτησης δοκιμής v, έχουμε

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^T \int_a^b \big(F(u)\big)_x v\,dxdt = \int_0^T \int_a^b \big[\big(F(u)v\big)_x - F(u)v_x\big]\,dxdt \\
&= \int_0^T \Big(\int_a^b \big(F(u)v\big)_x\,dx\Big)dt - \int_0^T \int_a^b F(u)v_x\,dxdt \\
&= \int_0^T \Big[F\big(u(b,t)\big)v(b,t) - F\big(u(a,t)\big)v(a,t)\Big]dt - \int_0^T \int_a^b F(u)v_x\,dxdt \\
&= -\int_0^T \int_a^b F(u)v_x\,dxdt,
\end{aligned}$$

δηλαδή

$$I_1 = -\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty F(u)v_x\,dxdt.$$

Αντίστοιχα, για τον όρο I_2, έχουμε, αλλάζοντας κατ' αρχάς τη σειρά ολοκλήρωσης,

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^T \int_a^b u_t v\,dxdt = \int_0^T \int_a^b [(uv)_t - uv_t]\,dxdt \\
&= \int_0^T \int_a^b (uv)_t\,dxdt - \int_0^T \int_a^b uv_t\,dxdt \\
&= \int_a^b \int_0^T (uv)_t\,dtdx - \int_0^T \int_a^b uv_t\,dxdt \\
&= \int_a^b \Big(\int_0^T (uv)_t\,dt\Big)dx - \int_0^T \int_a^b uv_t\,dxdt,
\end{aligned}$$

και, εν συνεχεία, λαμβάνοντας υπ' όψιν την αρχική συνθήκη $u(x,0) = \varphi(x)$ καθώς και το γεγονός ότι $v(x,T) = 0$, για κάθε x, παρατηρούμε ότι

$$\int_0^T (uv)_t\,dt = u(x,T)v(x,T) - u(x,0)v(x,0) = -u(x,0)v(x,0) = -\varphi(x)v(x,0).$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$I_2 = -\int_0^T \int_a^b uv_t\,dxdt - \int_a^b \varphi(x)v(x,0)\,dx,$$

δηλαδή

$$I_2 = -\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty uv_t\,dxdt - \int_{-\infty}^\infty \varphi(x)v(x,0)\,dx.$$

Καταλήξαμε έτσι στο ακόλουθο αποτέλεσμα:

Πρόταση 1.1 *Η κλασική λύση* u *του προβλήματος αρχικών τιμών* (1.97) *ικανοποιεί την ολοκληρωτική σχέση*

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [uv_t + F(u)v_x]\,dxdt + \int_{-\infty}^\infty \varphi(x)v(x,0)\,dx = 0, \tag{1.103}$$

για κάθε συνάρτηση δοκιμής v. □

Ορισμός 1.3 Μια συνάρτηση u, ορισμένη στο $\mathbb{R} \times [0,\infty)$, λέγεται *ασθενής λύση* του προβλήματος αρχικών τιμών (1.97), αν είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε ορθογώνιο της μορφής $[a,b] \times [0,T]$ και ικανοποιεί την (1.103) για κάθε συνάρτηση δοκιμής v. □

Παρατήρηση 1.7 Το πλεονέκτημα του Ορισμού 1.3 είναι ότι επιτρέπει ασυνεχείς συναρτήσεις $u : \mathbb{R} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ ως λύσεις του προβλήματος αρχικών τιμών (1.97) και κατ' αυτόν τον τρόπο διευρύνει κατά πολύ την έννοια της λύσης. Παράλληλα, όμως, όπως θα δούμε στη συνέχεια, η απαίτηση (1.103) επιβάλλει εντυπωσιακούς περιορισμούς στις αποδεκτές λύσεις και περιορίζει ουσιαστικά το σύνολο των υποψήφιων λύσεων. □

Το τέχνασμα στον Ορισμό 1.3 είναι η ολοκλήρωση κατά μέρη, που μας επέτρεψε να μεταφέρουμε τις παραγωγίσεις από τη u στη συνάρτηση δοκιμής v. Αυτή η διαδικασία φαίνεται καθαρότερα στην περίπτωση που η v έχει συμπαγή φορέα στο $\mathbb{R} \times (0,\infty)$, οπότε έχουμε

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \big(u_t + \big(F(u)\big)_x\big)v\,dxdt = -\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty [uv_t + F(u)v_x]\,dxdt, \tag{1.104}$$

βλ. Άσκηση 1.25. Υπάρχει μια αναλογία με την (1.98) όπου ο πίνακας A αντιστοιχεί στους τελεστές $\frac{\partial}{\partial x}$ και $\frac{\partial}{\partial t}$ και το Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο στο εσωτερικό γινόμενο

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty f(x,t)g(x,t)\,dxdt.$$

Τέλος, οι C^1 συναρτήσεις αφ' ενός ανήκουν στο πεδίο ορισμού των τελεστών $\frac{\partial}{\partial x}$ και $\frac{\partial}{\partial t}$, σε αντίθεση με τη u που δεν ανήκει αναγκαστικά σε αυτό, αφού της επιτρέψαμε να είναι ασυνεχής, αφ' ετέρου αποτελούν πυκνό υποσύνολο του κατάλληλου χώρου, σύμφωνα με το θεώρημα προσέγγισης του Weierstrass, γεγονός, όμως, που δεν θα μας απασχολήσει στο παρόν σύγγραμμα.

Παρατήρηση 1.8 Αν η συνάρτηση δοκιμής v έχει συμπαγή φορέα στο $\mathbb{R} \times (0, \infty)$, τότε στη διατύπωση (1.104) δεν υπεισέρχεται η αρχική συνθήκη. Η (1.104) είναι δηλαδή μεταβολική διατύπωση της εξίσωσης και η λύση της *ασθενής λύση της* διαφορικής εξίσωσης $u_t + \big(F(u)\big)_x = 0$, αλλά όχι του προβλήματος αρχικών τιμών (1.97). Αυτό αποτελεί και το κίνητρο της επιλογής μας να έχουν οι συναρτήσεις δοκιμής συμπαγή φορέα στο $\mathbb{R} \times [0, \infty)$, όταν αναφερόμαστε στο πρόβλημα αρχικών τιμών (1.97), και αφήνει να διαφανεί σε κάποιο βαθμό ο ιδιαίτερα σημαντικός ρόλος της κατάλληλης κάθε φορά επιλογής του συνόλου των συναρτήσεων δοκιμής. Η επιλογή αυτή μας έδωσε τη δυνατότητα να ενσωματώσουμε και την αρχική συνθήκη στη μεταβολική διατύπωση. □

1.7.2 Συνθήκη Rankine–Hugoniot

Το ερώτημα που θα μας απασχολήσει τώρα είναι πόσο αυθαίρετη είναι η ιδιότητα της ασθενούς λύσης. Συγκεκριμένα, θέλουμε να κατανοήσουμε κατά πόσον από τη συγκόλληση κλασικών λύσεων προκύπτει γενικευμένη λύση.

Θεωρούμε την εξίσωση

$$u_t + \big(F(u)\big)_x = 0 \tag{1.105}$$

και μια ημιευθεία όπως στο Σχήμα 1.18 στο θετικό επίπεδο xt, δηλαδή για θετικούς χρόνους t, και υποθέτουμε ότι δύο συναρτήσεις $u^{\mathrm{A}}(x,t)$ και $u^{\Delta}(x,t)$ αποτελούν κλασικές λύσεις αριστερά και δεξιά της ημιευθείας, αντίστοιχα. Το ζήτημα που θα μας απασχολήσει είναι:

Ερώτημα: Υπό ποιες συνθήκες αποτελεί η συνάρτηση u,

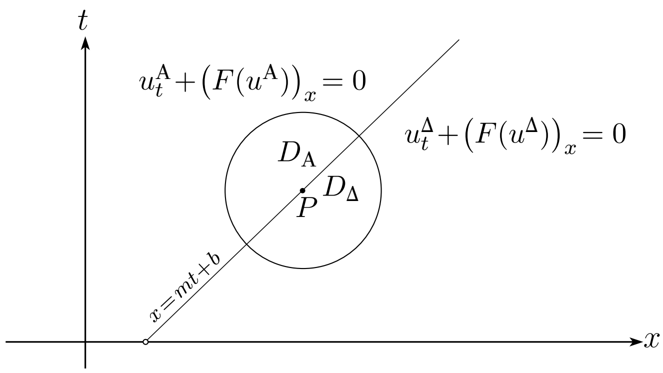
$$u(x,t) = \begin{cases} u^{\mathrm{A}}(x,t) & \text{για } (x,t) \text{ αριστερά της ημιευθείας,} \\ u^{\Delta}(x,t) & \text{για } (x,t) \text{ δεξιά της ημιευθείας,} \end{cases} \tag{1.106}$$

γενικευμένη (ασθενή) λύση της εξίσωσης (1.105);

Οι υποθέσεις μας για τη συνάρτηση u είναι οι εξής:

- Σε κάθε σημείο P της ημιευθείας $x = mt + b$, $t > 0$, υπάρχουν τα πλευρικά όρια, δηλαδή

$$u^{\mathrm{A}}(P) = \lim_{(x,t)\to P^-} u^{\mathrm{A}}(x,t), \quad u^{\Delta}(P) = \lim_{(x,t)\to P^+} u^{\Delta}(x,t).$$



Σχήμα 1.18: Οι u^{A} και u^{Δ} αποτελούν κλασικές λύσεις της (1.105) αριστερά και δεξιά της ημιευθείας ασυνέχειας, αντίστοιχα.

- Η u είναι γενικά ασυνεχής κατά μήκος της ημιευθείας $x = mt + b$, δηλαδή για σημεία P αυτής της ημιευθείας επιτρέπουμε να ισχύει
$$u^{\mathrm{A}}(P) \neq u^{\Delta}(P).$$

Δίνουμε τώρα το βασικό αποτέλεσμα αυτής της ενότητας:

Πρόταση 1.2 *Αναγκαία συνθήκη για να είναι η συνάρτηση* u *της* (1.106) *γενικευμένη λύση της εξίσωσης* (1.105) *είναι η*

$$F\big(u^{A}(P)\big) - F\big(u^{\Delta}(P)\big) = \big(u^{A}(P) - u^{\Delta}(P)\big)m. \tag{1.107}$$

για κάθε σημείο P *της ημιευθείας* $x = mt + b, t > 0$. □

Αναβάλλουμε για λίγο την απόδειξη αυτής της Πρότασης για να τη σχολιάσουμε πρώτα. Για να κατανοήσουμε καλύτερα τη σημασία της συνθήκης (1.107), ας θεωρήσουμε την εξίσωση του Burgers, δηλαδή την περίπτωση $F(u) = u^2/2$. Σε αυτήν την περίπτωση η (1.107) λαμβάνει τη μορφή

$$\frac{1}{2}\big(u^{\mathrm{A}}(P)\big)^2 - \frac{1}{2}\big(u^{\Delta}(P)\big)^2 = \big(u^{\mathrm{A}}(P) - u^{\Delta}(P)\big)m,$$

δηλαδή, στην περίπτωση $u^{\mathrm{A}}(P) \neq u^{\Delta}(P)$,

$$\frac{u^{\mathrm{A}}(P) + u^{\Delta}(P)}{2} = m. \tag{1.108}$$

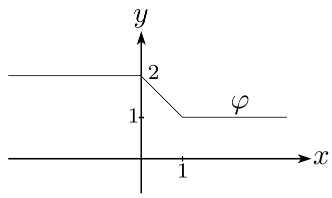
Κατά συνέπεια, η κλίση m της ημιευθείας $x = mt + b$ θα πρέπει να συνδέεται με τις τιμές της λύσης εκατέρωθεν της *ημιευθείας ασυνέχειας* με έναν πολύ συγκεκριμένο τρόπο, αν θέλουμε η ασυνεχής συνάρτηση u να αποτελεί ασθενή λύση της διαφορικής εξίσωσης.

Παράδειγμα 1.17 (Επανεξέταση του Παραδείγματος 1.12.) Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών του Παραδείγματος 1.12,

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 & \text{στο } U := \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : t > 0\}, \\ u(x,0) = \varphi(x) & \text{στο } \Gamma := \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : t = 0\}, \end{cases} \tag{1.109}$$

με αρχική τιμή

$$\varphi(x) := \begin{cases} 2, & x < 0, \\ 2 - x, & x \in [0,1], \\ 1, & x > 1, \end{cases}$$



Γνωρίζουμε ήδη από το Παράδειγμα 1.12 ότι στη χρονική στιγμή $t = 1$ η λύση γίνεται ασυνεχής,

$$u(x,1) = \begin{cases} 2, & x \le 2, \\ 1, & x \ge 2, \end{cases} \tag{1.110}$$

βλ. και τα Σχήματα 1.11 και 1.12. Για $t \ge 1$ δεν υπάρχει κλασική λύση του προβλήματος αρχικών τιμών (1.109) για τη δοθείσα αρχική τιμή φ. Κατασκευάζουμε γενικευμένη λύση ως εξής: Κατ' αρχάς αναμένουμε στο επίπεδο xt μια ημιευθεία ασυνέχειας, η οποία πρέπει να διέρχεται από το σημείο θραύσης $(2,1)$. Τη χρονική στιγμή $t = 1$ δημιουργείται το κρουστικό κύμα (1.110). Παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις

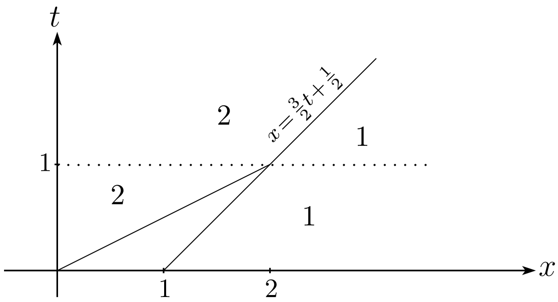
$$u^{\mathrm{A}}(x,t) = 2, \quad u^{\Delta}(x,t) = 1$$

είναι κλασικές λύσης της εξίσωσης. Ορίζουμε, λοιπόν,

$$u(x,t) = \begin{cases} 2 & \text{για } (x,t) \text{ αριστερά της ημιευθείας}, \\ 1 & \text{για } (x,t) \text{ δεξιά της ημιευθείας}. \end{cases} \tag{1.111}$$

Τώρα, για την κλίση m της ημιευθείας έχουμε, σύμφωνα με την (1.108),

$$m = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2},$$



Σχήμα 1.19: Η ημιευθεία ασυνέχειας και η γενικευμένη λύση του προβλήματος (1.109).

κατά συνέπεια η εξίσωση της ημιευθείας ασυνέχειας είναι

$$x = \frac{3}{2}t + \frac{1}{2},$$

αφού αυτή διέρχεται και από το σημείο $(2, 1)$.

Παρατήρηση 1.9 Η κλίση $m = 3/2$ της ημιευθείας ασυνέχειας στο Παράδειγμα 1.17 είναι ο μέσος όρος των κλίσεων των δύο ακραίων χαρακτηριστικών πριν τη σύγκρουση των χαρακτηριστικών. Βλέπε τα Σχήματα 1.11 και 1.19. □

Μια ολική γενικευμένη λύση του προβλήματος (1.109), βλ. και το Παράδειγμα 1.12, είναι, λοιπόν,

$$u(x,t) = \begin{cases} u_{\mathrm{K}}(x,t) & \text{για } t < 1 \text{ κλασική λύση,} \\ u_{\mathrm{A}}(x,t) & \text{για } t \geq 1 \text{ ασθενής λύση,} \end{cases} \tag{1.112}$$

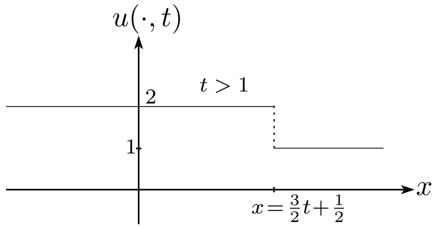
όπου, για $t < 1$, η κλασική λύση u_{K} είναι

$$u_{\mathrm{K}}(x,t) = \begin{cases} 2, & x < 2t, \\ \dfrac{2-x}{1-t}, & 2t < x < t+1, \\ 1, & x > t, \end{cases} \tag{1.113}$$

και, για $t \geq 1$, η ασθενής λύση u_{A} είναι

$$u_{\mathrm{A}}(x,t) = \begin{cases} 2, & x < \frac{3}{2}t + \frac{1}{2}, \\ 1, & x > \frac{3}{2}t + \frac{1}{2}. \end{cases} \tag{1.114}$$

Με βάση την (1.114) μπορούμε να κατασκευάσουμε το αντιπροσωπευτικό στιγμιότυπο της λύσης για $t > 1$, βλ. Σχήμα 1.20. Για αντίστοιχα στιγμιότυπα για $t \leq 1$ παραπέμπουμε στο Σχήμα 1.12.



Σχήμα 1.20: Στιγμιότυπο της λύσης $u(\cdot, t)$, για $t > 1$.

Βλέπουμε ένα κρουστικό κύμα που κινείται με ταχύτητα $\frac{dx}{dt} = \frac{3}{2}$. □

Έπειτα από αυτά τα σχόλια και τις παρατηρήσεις για την Πρόταση 1.2 προχωρούμε τώρα στην απόδειξή της.

Απόδειξη της Πρότασης 1.2. Θεωρούμε έναν δίσκο (δηλαδή το εσωτερικό ενός κύκλου) D με κέντρο ένα σημείο P της ημιευθείας ασυνέχειας, βλ. Σχήμα 1.18, ο οποίος δεν τέμνει τον άξονα των x. Θα χρησιμοποιήσουμε τον Ορισμό 1.3, επιλέγοντας συναρτήσεις δοκιμής v με συμπαγή φορέα στον δίσκο D (δηλαδή στο εσωτερικό του). Για τέτοιες συναρτήσεις δοκιμής, έχουμε, λοιπόν, σύμφωνα με την (1.104),

$$0 = \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \big(uv_t + F(u)v_x\big)dxdt = \iint\limits_D \big(uv_t + F(u)v_x\big)dxdt,$$

αφού ο φορέας της v περιέχεται στον D. Επομένως, με

$$I_1 := \iint\limits_{D_\text{A}} \big(u^\text{A}v_t + F(u^\text{A})v_x\big)dxdt \quad \text{και} \quad I_2 := \iint\limits_{D_\Delta} \big(u^\Delta v_t + F(u^\Delta)v_x\big)dxdt,$$

έχουμε

$$I_1 + I_2 = 0. \tag{1.115}$$

Συμβολίσαμε εδώ με D_A και D_Δ τα ημικύκλια αριστερά και δεξιά της ημιευθείας ασυνέχειας, αντίστοιχα. Θα χειριστούμε ξεχωριστά τον κάθε όρο. Αρχίζουμε με τον I_1. Έχουμε

$$I_1 = \iint\limits_{D_{\mathrm{A}}} \big(u^{\mathrm{A}} v_t + F(u^{\mathrm{A}}) v_x\big) dx dt$$
$$= \iint\limits_{D_{\mathrm{A}}} \Big[\big(u^{\mathrm{A}} v\big)_t + \big(F(u^{\mathrm{A}}) v\big)_x - u_t^{\mathrm{A}} v - \big(F(u^{\mathrm{A}})\big)_x v\Big] dx dt,$$

οπότε, αφού

$$u_t^{\mathrm{A}} + \big(F(u^{\mathrm{A}})\big)_x = 0, \quad (x,t) \in D_{\mathrm{A}}, \tag{1.116}$$

οδηγούμαστε στη σχέση

$$I_1 = \iint\limits_{D_{\mathrm{A}}} \Big[\big(u^{\mathrm{A}} v\big)_t + \big(F(u^{\mathrm{A}}) v\big)_x\Big] dx dt. \tag{1.117}$$

Σε αυτό το σημείο παρατηρούμε ότι η απόκλιση $\mathrm{div}_{x,t}$ ενός διανυσματικού πεδίου (f, g) δίνεται από τη σχέση

$$\mathrm{div}_{x,t} \langle f(x,t), g(x,t) \rangle = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial t}.$$

Κατά συνέπεια, η (1.117) γράφεται ως

$$I_1 = \iint\limits_{D_{\mathrm{A}}} \mathrm{div}_{x,t} \langle F(u^{\mathrm{A}}) v, u^{\mathrm{A}} v \rangle dx dt.$$

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα της απόκλισης, έχουμε

$$I_1 = \int\limits_{\partial D_{\mathrm{A}}} \langle F(u^{\mathrm{A}}) v, u^{\mathrm{A}} v \rangle \cdot \overrightarrow{\nu_{\mathrm{A}}}\, dS,$$

με $\overrightarrow{\nu_{\mathrm{A}}}$ το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα στο ∂D_{A}. Αλλά, αφού η v έχει συμπαγή φορέα στο D, μόνο η ολοκλήρωση πάνω στην τομή του ∂D_{A} με την ημιευθεία ασυνέχειας συνεισφέρει κάτι σε αυτό το ολοκλήρωμα, οπότε

$$I_1 = \int\limits_{\partial D_{\mathrm{A}} \cap \text{ημιευθεία}} \Big(F(u^{\mathrm{A}}) v, u^{\mathrm{A}} v\Big) \cdot \overrightarrow{\nu_{\mathrm{A}}}\, dS.$$

Για να γράφουμε το I_1 στην επιθυμητή μορφή, απομένει μόνο να υπολογίσουμε το διάνυσμα $\overrightarrow{\nu_{\mathrm{A}}}$ στην τομή του ∂D_{A} με την ημιευθεία ασυνέχειας.

Αλλά, προφανώς, το διάνυσμα $\langle m, 1\rangle$ είναι παράλληλο με την ημιευθεία ασυνέχειας, και, κατά συνέπεια, το $\langle 1, -m\rangle$ είναι κάθετο προς την ημιευθεία ασυνέχειας. Τέλος, κανονικοποιώντας το τελευταίο αυτό διάνυσμα καταλήγουμε στη σχέση

$$\overrightarrow{\nu_{\mathrm{A}}} = \frac{1}{\sqrt{m^2+1}}\langle 1, -m\rangle.$$

Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι

$$I_1 = \int\limits_{\partial D_{\mathrm{A}} \cap \text{ημιευθεία}} \frac{1}{\sqrt{m^2+1}}\big[F(u^{\mathrm{A}}) - mu^{\mathrm{A}}\big] v\, dS. \tag{1.118}$$

Η αντίστοιχη διαδικασία στο D_Δ οδηγεί στη σχέση

$$I_2 = \int\limits_{\partial D_{\Delta} \cap \text{ημιευθεία}} \frac{1}{\sqrt{m^2+1}}\big[-F(u^{\Delta}) + mu^{\Delta}\big] v\, dS. \tag{1.119}$$

Σημειώστε ότι η διαφορά στα πρόσημα οφείλεται στο γεγονός ότι επί της ημιευθείας ασυνέχειας έχουμε

$$\overrightarrow{\nu_{\Delta}} = -\overrightarrow{\nu_{\mathrm{A}}} = \frac{1}{\sqrt{m^2+1}}\langle -1, m\rangle.$$

Τώρα, σύμφωνα με τις (1.118) και (1.119), η (1.115) γράφεται στη μορφή

$$\int\limits_{\partial D_{\Delta} \cap \text{ημιευθεία}} \Big[\big(F(u^{\mathrm{A}}) - F(u^{\Delta})\big) - m\big(u^{\mathrm{A}} - u^{\Delta}\big)\Big] v\, dS = 0, \tag{1.120}$$

σχέση που, όπως είδαμε, ισχύει για κάθε συνάρτηση δοκιμής v με συμπαγή φορέα στον δίσκο D.

Υπενθυμίζουμε ότι, σύμφωνα με τις υποθέσεις μας, οι συναρτήσεις u^{A} και u^{Δ} είναι συνεχείς αριστερά και δεξιά της ημιευθείας ασυνέχειας, αντίστοιχα, συμπεριλαμβανομένης κάθε φορά της εν λόγω ημιευθείας. Συνεπώς, οι περιορισμοί αυτών των συναρτήσεων στην ημιευθεία ασυνέχειας είναι συνεχείς συναρτήσεις. Έτσι, από την (1.120) προκύπτει η ακόλουθη ισότητα κατά σημείο

$$\big(F(u^{\mathrm{A}}) - F(u^{\Delta})\big) - m\big(u^{\mathrm{A}} - u^{\Delta}\big) = 0 \tag{1.121}$$

για κάθε σημείο (x, t) στην ημιευθεία ασυνέχειας, βλ. Άσκηση 1.26, γεγονός που ολοκληρώνει την απόδειξη της (1.107). $\square$

Σχόλια.

1) Στην Πρόταση 1.2 είδαμε ότι η συνθήκη (1.107) είναι αναγκαία για να αποτελεί η συνάρτηση u που δόθηκε στην (1.106) ασθενή λύση της εξίσωσης (1.105). Μπορεί μάλιστα να αποδειχθεί ότι η εν λόγω συνθήκη είναι και ικανή, βλ. Άσκηση 1.27.

2) Αν ορίσουμε ως *άλμα* ασυνέχειας μιας συνάρτησης κατά μήκος της ημιευθείας ασυνέχειας τη διαφορά των τιμών της αριστερά και δεξιά της εν λόγω ημιευθείας, και το συμβολίσουμε με $[\,]$, τότε η (1.121) διατυπώνεται ως

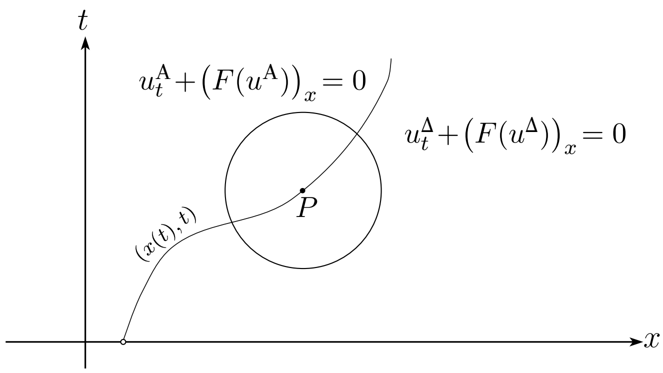
$$[F(u)] = m[u]. \tag{1.122}$$

3) Στην (1.122) εμφανίζεται η κλίση m της ημιευθείας ασυνέχειας, η οποία βέβαια είναι σταθερή, ακριβώς επειδή η ασυνέχεια εμφανίζεται κατά μήκος μιας ημιευθείας. Στη γενική περίπτωση, δηλαδή αν η ημιευθεία ασυνέχειας αντικατασταθεί από μια ομαλή *καμπύλη ασυνέχειας*, βλ. Σχήμα 1.21, τότε η κλίση μεταβάλλεται γενικά και σε κάθε σημείο $(x(t), t)$ της καμπύλης ισούται με $\frac{dx}{dt}(x(t), t)$. Αποδεικνύεται ότι τότε η (1.122) αντικαθίσταται από την
$$[F(u)] = \frac{dx}{dt}[u],$$
που γράφεται κομψότερα στη μορφή
$$\frac{dx}{dt} = \frac{[F(u)]}{[u]}, \tag{1.123}$$
σε κάθε σημείο $(x(t), t)$ της καμπύλης ασυνέχειας, βλ. Άσκηση 1.28.

4) Τόσο η (1.122) όσο και η γενικότερη (1.123) αναφέρεται ως *συνθήκη Rankine–Hugoniot*. □

Ασκήσεις

1.1 (Κατά κατεύθυνση παράγωγοι.) Έστω $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση, $u = u(x, y)$. Αν $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση, θεωρούμε την καμπύλη $\Gamma := \{(x, \varphi(x)) : x \in \mathbb{R}\}$,



Σχήμα 1.21: Οι u^{A} και u^{Δ} αποτελούν κλασικές λύσεις της (1.105) αριστερά και δεξιά της καμπύλης ασυνέχειας, αντίστοιχα.

προσανατολισμένη έτσι ώστε να διαγράφεται κατά τη φορά που αυξάνει το x. Η *κατά κατεύθυνση παράγωγος* της u στο σημείο $(x, \varphi(x))$ *στην κατεύθυνση της καμπύλης* Γ ορίζεται, ως γνωστόν, ως το όριο

$$\lim_{s \searrow x} \frac{u(s, \varphi(s)) - u(x, \varphi(x))}{|(s, \varphi(s)) - (x, \varphi(x))|},$$

όπου $|\cdot|$ είναι η Ευκλείδεια νόρμα στον $\mathbb{R}^2$, δηλαδή $|(a, b)| := \sqrt{a^2 + b^2}$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{s \searrow x} \frac{u(s, \varphi(s)) - u(x, \varphi(x))}{|(s, \varphi(s)) - (x, \varphi(x))|} = \frac{u_x(x, \varphi(x)) + u_y(x, \varphi(x))\varphi'(x)}{\sqrt{1 + \big(\varphi'(x)\big)^2}}.$$

Παρατηρήστε ότι ο αριθμητής στο δεξιό μέλος είναι το Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\langle 1, \varphi'(x) \rangle$ και $\langle u_x(x, \varphi(x)), u_y(x, \varphi(x)) \rangle$, ο δε παρονομαστής κανονικοποιεί το διάνυσμα $\langle 1, \varphi'(x) \rangle$, δηλαδή το διάνυσμα

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \big(\varphi'(x)\big)^2}} \langle 1, \varphi'(x) \rangle$$

είναι μοναδιαίο, έχει Ευκλείδειο μέτρο ίσο με τη μονάδα, και εφάπτεται στην καμπύλη. Επομένως, η προηγούμενη σχέση γράφεται στη μορφή

$$(\star) \qquad \lim_{s \searrow x} \frac{u(s, \varphi(s)) - u(x, \varphi(x))}{|(s, \varphi(s)) - (x, \varphi(x))|} = \frac{\nabla u \cdot \langle 1, \varphi'(x) \rangle}{\sqrt{1 + \big(\varphi'(x)\big)^2}}.$$

[*Υπόδειξη*: Προφανώς, τα σημεία $(s, \varphi(s))$, $s > x$, βρίσκονται στην καμπύλη Γ, $|(s, \varphi(s)) - (x, \varphi(x))|$ είναι η Ευκλείδεια απόσταση μεταξύ των σημείων $(s, \varphi(s))$ και $(x, \varphi(x))$,

$$|(s, \varphi(s)) - (x, \varphi(x))| = \sqrt{(s - x)^2 + \big(\varphi(s) - \varphi(x)\big)^2},$$

και το σημείο $(s, \varphi(s))$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης Γ προς το σημείο $(x, \varphi(x))$. Διαιρώντας αριθμητή και παρονομαστή με $s - x$, χρησιμοποιώντας το θεώρημα της μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και το γεγονός ότι οι συναρτήσεις u και φ είναι συνεχώς παραγωγίσιμες, βεβαιωθείτε ότι

$$\lim_{s \searrow x} \frac{u(s, \varphi(s)) - u(x, \varphi(s))}{\sqrt{(s - x)^2 + \big(\varphi(s) - \varphi(x)\big)^2}} = \frac{u_x(x, \varphi(x))}{\sqrt{1 + \big(\varphi'(x)\big)^2}}$$
$$\lim_{s \searrow x} \frac{u(x, \varphi(s)) - u(x, \varphi(x))}{\sqrt{(s - x)^2 + \big(\varphi(s) - \varphi(x)\big)^2}} = \frac{u_y(x, \varphi(x))\varphi'(x)}{\sqrt{1 + \big(\varphi'(x)\big)^2}}.$$

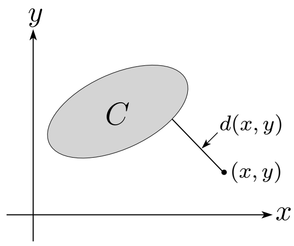
Αφαιρώντας και προσθέτοντας το $u(x, \varphi(s))$ στον αριθμητή στο αριστερό μέλος της προς απόδειξη σχέσης, προσδιορίστε την κατά κατεύθυνση παράγωγο, οδηγηθείτε δηλαδή στην επιθυμητή σχέση.]

1.2 (Συνέχεια της προηγούμενης Άσκησης.) Αν δύο καμπύλες Γ και $\tilde{\Gamma}$ εφάπτονται σε ένα σημείο $\big(x, \varphi(x)\big)$, δηλαδή διέρχονται από το $\big(x, \varphi(x)\big)$ και έχουν εκεί την ίδια εφαπτομένη, αποδείξτε ότι η κατά κατεύθυνση παράγωγος μιας συνάρτησης u στο σημείο $\big(x, \varphi(x)\big)$ κατά μήκος της Γ ταυτίζεται με την κατά κατεύθυνση παράγωγο της u στο ίδιο σημείο κατά μήκος της $\tilde{\Gamma}$. Ιδιαίτερα η κατά κατεύθυνση παράγωγος της u στο σημείο $\big(x, \varphi(x)\big)$ ταυτίζεται με την κατά κατεύθυνση παράγωγο της u στο ίδιο σημείο κατά μήκος της εφαπτομένης της Γ στο σημείο $\big(x, \varphi(x)\big)$, βλ. τη σχέση $(\star)$ στην προηγούμενη Άσκηση. Η κατεύθυνση της εν λόγω εφαπτομένης δίνεται φυσικά από το διάνυσμα $\langle 1, \varphi'(x)\rangle / \sqrt{1 + \big(\varphi'(x)\big)^2}$. Οι ιδιότητες αυτές οδηγούν στον εξής ορισμό: Αν $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ένα μοναδιαίο διάνυσμα, η ποσότητα

$$au_x(x, y) + bu_y(x, y) = \nabla u \cdot \langle a, b\rangle = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} u(x + ta, y + tb)$$

ονομάζεται *κατά κατεύθυνση παράγωγος* της u στο σημείο (x, y) στην *κατεύθυνση* (a, b).

1.3 Έστω ότι η κατά κατεύθυνση παράγωγος μιας συνάρτησης u κατά την κατεύθυνση μιας καμπύλης Γ μηδενίζεται ταυτοτικά επί της Γ, δηλαδή μηδενίζεται σε κάθε σημείο της Γ. Αποδείξτε ότι η u είναι σταθερή κατά μήκος της Γ, δηλαδή λαμβάνει την ίδια τιμή σε όλα τα σημεία της.
[*Υπόδειξη*: Παραγωγίστε τη βοηθητική συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) := u(x, \varphi(x))$, και χρησιμοποιήστε τη σχέση $(\star)$ της Άσκησης 1.1.]



⋆1.4 Έστω C ένα κυρτό, κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$, με ομαλό σύνορο ∂C, και $d(x, y)$ η απόσταση ενός σημείου $(x, y) \in U := \mathbb{R}^2 \setminus C$ από το C, δηλαδή

$$d(x, y) := \min_{(t,s)\in C} \sqrt{(x-t)^2 + (y-s)^2}.$$

Αποδείξτε ότι η συνάρτηση d αποτελεί λύση της εξίσωσης της εικόνας,

$$(d_x)^2 + (d_y)^2 = 1, \quad \text{για} \quad (x, y) \in U.$$

[*Υπόδειξη*: Ας σταθεροποιήσουμε ένα σημείο (x_0, y_0) του $U := \mathbb{R}^2 \setminus C$. Αφού το C είναι συμπαγές και η συνάρτηση $\tilde{d}(t, s) := \sqrt{(x_0 - t)^2 + (y_0 - s)^2}$ είναι συνεχής στο C, αυτή λαμβάνει το ελάχιστό της σε κάποιο σημείο (t_0, s_0) του C. Προφανώς, το (t_0, s_0) δεν μπορεί να είναι εσωτερικό σημείο του C, οπότε αναγκαστικά είναι σημείο του συνόρου ∂C του C. Επίσης, λόγω της κυρτότητας του C, η $\tilde{d}$ λαμβάνει το ελάχιστό της σε ένα ακριβώς σημείο (γιατί;). Επίσης, το διάνυσμα $\langle x_0 - t_0, y_0 - s_0\rangle$ είναι κάθετο στο ∂C. Έχουμε, δηλαδή, αφ' ενός

$$\begin{aligned} d(x_0, y_0) &= \min_{(t,s)\in C} \sqrt{(x_0-t)^2 + (y_0-s)^2} = \min_{(t,s)\in \partial C} \sqrt{(x_0-t)^2 + (y_0-s)^2} \\ &= \sqrt{(x_0-t_0)^2 + (y_0-s_0)^2} \end{aligned}$$

και αφ' ετέρου

$$\overrightarrow{n} := \frac{\langle x_0 - t_0, y_0 - s_0\rangle}{\sqrt{(x_0-t_0)^2 + (y_0-s_0)^2}} \perp \partial C.$$

Τώρα, η καμπύλη $\Gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d(x, y) = d(x_0, y_0)\}$ είναι παράλληλη στο σύνορο ∂C, οπότε το διάνυσμα $\overrightarrow{n}$ είναι κάθετο και στη Γ, $\overrightarrow{n} \perp \Gamma$. Επί πλέον,

$$\frac{\partial d}{\partial \overrightarrow{n}}(x_0, y_0) = \lim_{t\to 0} \frac{d\big((x_0, y_0) + t\overrightarrow{n}\big) - d(x_0, y_0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{t} = 1$$

και
$$\frac{\nabla d}{|\nabla d|}(x_0, y_0) = \overrightarrow{n}.$$

Κατά συνέπεια, έχουμε
$$1 = \frac{\partial d}{\partial \overrightarrow{n}} = \nabla d \cdot \overrightarrow{n} = \nabla d \cdot \frac{\nabla d}{|\nabla d|} = |\nabla d|.]$$

1.5 Χρησιμοποιήστε την αλλαγή μεταβλητών
$$\begin{cases} \xi := ax + by \\ \eta := x - y \end{cases}$$
με πραγματικούς αριθμούς a και b τέτοιους ώστε $a + b \neq 0$, για να επιλύσετε την εξίσωση $u_x + u_y = 0$.

1.6 Χρησιμοποιήστε την αλλαγή μεταβλητών
$$\begin{cases} \xi := ax + by \\ \eta := bx - ay \end{cases}$$
για να επιλύσετε την εξίσωση
$$au_x + bu_y + cu = 0,$$
όπου a, b και c μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί.

1.7 Προσδιορίστε τη γενική λύση της εξίσωσης
$$3u_y + u_{xy} = 0.$$

1.8 Προσδιορίστε τη γενική λύση της εξίσωσης
$$(1 + x^2)u_x + u_y = 0.$$

1.9 Προσδιορίστε μια συνάρτηση $u : (-1, 1) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε
$$\begin{cases} \sqrt{1 - x^2}\, u_x + u_y = 0, & x \in (-1, 1),\ y \in \mathbb{R}, \\ u(0, y) = y, & y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

1.10 Προσδιορίστε μια συνάρτηση $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\begin{cases} u_x + u_y + u = \mathrm{e}^{x+2y}, & (x, y) \in \mathbb{R}^2, \\ u(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

[*Υπόδειξη*: Μπορείτε να οδηγηθείτε στο αποτέλεσμα με δύο τρόπους. Αν εισαγάγουμε τη βοηθητική συνάρτηση g, $g(\tau) := u(x+\tau, y+\tau)$, η Δ.Ε. γράφεται στη μορφή

$$g'(\tau) + g(\tau) = \mathrm{e}^{(x+\tau)+2(y+\tau)},$$

και ολοκληρώνοντας από $-y$ έως 0 οδηγούμαστε στο ζητούμενο. Εναλλακτικά, εισάγουμε τις νέες μεταβλητές $\eta := x - y$ (γιατί;), $\xi := x + y$, παραδείγματος χάριν, και $\tilde{u}(\xi, \eta) = u(x, t)$, και η Δ.Ε. γράφεται στη μορφή

$$\tilde{u}_\xi + \frac{1}{2}\tilde{u} = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{\eta}{2}}\mathrm{e}^{\frac{3\xi}{2}}.$$

Οδηγηθείτε τώρα στη γενική λύση αυτής της εξίσωσης, δηλαδή στη γενική λύση $u(x, t)$ της αρχικής εξίσωσης, και εν συνεχεία χρησιμοποιήστε και την αρχική συνθήκη $u(x, 0) = 0$.]

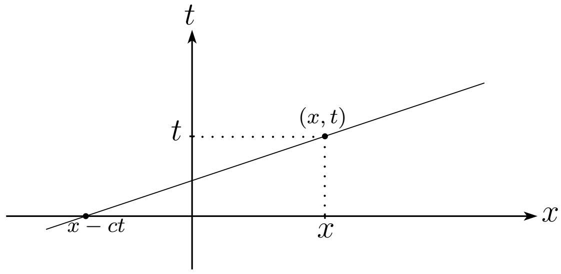
1.11 Αποδείξτε ότι η γενική λύση της εξίσωσης $xu_x + u_y = 0$ είναι $u(x, y) = f(\mathrm{e}^{-y}x)$, με μια αυθαίρετη, συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση f.

1.12 Έστω $f : \mathbb{R} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ και $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις και c ένας πραγματικός αριθμός. Προσδιορίστε τη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$\begin{cases} u_t + cu_x = f(x, t) & \text{στο } U := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : t > 0\}, \\ u(x, 0) = \varphi(x) & \text{στο } \varGamma := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : t = 0\}. \end{cases}$$

[Απάντηση: $u(x, t) = \varphi(x - ct) + \int_0^t f\big(x + c(\tau - t), \tau\big)d\tau$. Ο δεύτερος όρος στο δεξιό μέλος είναι το ολοκλήρωμα της f, κατά μήκος της χαρακτηριστικής της αντίστοιχης ομογενούς εξίσωσης $u_t + cu_x = 0$, από το σημείο $(x - ct, 0)$ μέχρι το (x, t). Βλ. και το Σχήμα 1.22 για μια σχηματική επεξήγηση.]

[*Υπόδειξη*: Πρώτος τρόπος: Βεβαιωθείτε ότι η δοθείσα διαφορική εξίσωση γράφεται στη μορφή $g'(\tau) = f(x + c\tau, t + \tau)$, με g τη συνάρτηση $g(\sigma) := u(x + c\sigma, t + \sigma)$, και ολοκληρώστε από το $-t$ μέχρι το μηδέν. Δεύτερος τρόπος: Χρησιμοποιήστε την αλλαγή μεταβλητών $\xi := t, \eta := x - ct$, $\tilde{u}(\xi, \eta) := u(x, t)$ και βεβαιωθείτε ότι η δοθείσα διαφορική εξίσωση γράφεται στη μορφή $\tilde{u}_\xi(\xi, \eta) = f(\eta + c\xi, \xi)$.]



Σχήμα 1.22: Σχηματική επεξήγηση της λύσης του προβλήματος αρχικών τιμών της Άσκησης 1.12: Θεωρούμε τη χαρακτηριστική γραμμή της ομογενούς εξίσωσης $u_t + cu_x = 0$ που διέρχεται από το σημείο (x, t). Η λύση της μη ομογενούς εξίσωσης είναι το άθροισμα της αρχικής τιμής $\varphi(x - ct)$, δηλαδή της τιμής της u στο σημείο τομής της χαρακτηριστικής με τον άξονα των x, και του ολοκληρώματος του μη ομογενούς όρου στο ευθύγραμμο τμήμα της χαρακτηριστικής μεταξύ των σημείων $(x - ct, 0)$ και (x, t).

1.13 Επιλύστε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} u_t + 3u_x = 0, & (x,t) \in U := \{(x,t) : x \in \mathbb{R},\ t > 0\}, \\ u(x,0) = \sin(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

και παραστήστε γραφικά τόσο τη λύση u όσο και κάποια στιγμιότυπά της.

1.14 Επιλύστε τα ακόλουθα προβλήματα αρχικών τιμών

i)
$$\begin{cases} u_{x_1} - u_{x_2} + u = \mathrm{e}^{x_1 + 2x_2} & \text{στο } U := \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\}, \\ u(x_1, 0) = 0 & \text{στο } \varGamma := \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}, \end{cases}$$

ii)
$$\begin{cases} x_1 u_{x_1} + x_2 u_{x_2} = u & \text{στο } U := \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > x_1^2\}, \\ u(x_1, x_2) = 1 & \text{στο } \varGamma := \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = x_1^2, x_1 > 0\}, \end{cases}$$

iii)
$$\begin{cases} x_2 u_{x_1} - x_1 u_{x_2} = 2x_1 x_2 u & \text{στο } U := \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > x_1 > 0\}, \\ u(t,t) = t^2 & \text{στο } \varGamma := \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 = x_2 > 0\}, \end{cases}$$

iv)
$$\begin{cases} x_1 u_{x_1} - x_2 u_{x_2} + u = x_1 & \text{στο } U := \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 > x_1^2\}, \\ u(x_1, x_1^2) = x_1 & \text{στο } \varGamma := \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 = x_1^2\}. \end{cases}$$

1.15 Επιλύστε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} u_x + u_y = u^2 & \text{στο } \ U := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}, \\ u(x,0) = g(x) & \text{στο } \ \varGamma := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}, \end{cases}$$

με $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση.
Απάντηση: $u(x,y) = \frac{g(x-y)}{1-yg(x-y)}$.

1.16 Χρησιμοποιώντας την περιβάλλουσα, αποδείξτε ότι οι χαρακτηριστικές $x = \varphi(x^0)t + x^0$ για το πρόβλημα αρχικών τιμών για την εξίσωση του Burgers,

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 & \text{στο } U := \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : t > 0\}, \\ u(x,0) = \varphi(x) & \text{στο } \varGamma := \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : t = 0\}, \end{cases}$$

διέρχονται από το ίδιο σημείο (x_0, t_0) για $x^0 \in (\alpha, \beta)$, αν και μόνο αν η φ είναι γραμμική (και μη σταθερή) στο διάστημα (α, β), $\alpha < \beta$.

1.17 Θεωρούμε την οικογένεια των εφαπτόμενων επιπέδων $\{\varPi_\vartheta : 0 \le \vartheta \le 2\pi\}$ στον ισημερινό της μοναδιαίας σφαίρας,

$$(z - \cos\vartheta)\cos\vartheta + (x - \sin\vartheta)\sin\vartheta = 0. \tag{1.124}$$

Σε αναλογία με την (1.85), η περιβάλλουσα επιφάνεια δίνεται τώρα από την εξίσωση

$$\frac{\partial z}{\partial \vartheta} = 0, \tag{1.125}$$

όπου $z = u(x, y, \vartheta)$ η εξίσωση στοιχείων της οικογένειας $\{\varPi_\vartheta\}$.

α) Αποδείξτε ότι η περιβάλλουσα είναι κύλινδρος. Βλ. Σχήμα 1.23.

[*Λύση*: Έχουμε $z = \cos\vartheta - (x - \sin\vartheta)\tan\vartheta$, συνεπώς

$$\frac{\partial z}{\partial \vartheta} = \frac{x - \sin\vartheta}{\cos^2\vartheta},$$

οπότε, σύμφωνα με την (1.125),

$$\frac{\partial z}{\partial \vartheta} = 0 \iff x = \sin\vartheta \iff (1 - x^2)^{1/2} = \cos\vartheta.$$

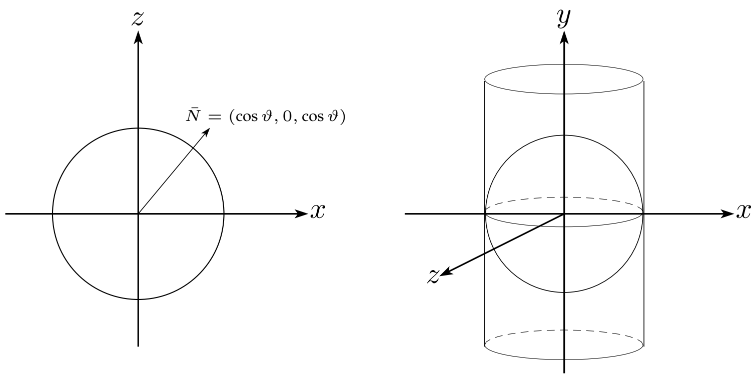
Άρα,

$$v(x,y) = \cos\vartheta = (1 - x^2)^{1/2}.]$$

β) Αποδείξτε ότι τόσο τα επίπεδα $u(x,y,\vartheta)$ όσο και η περιβάλλουσα $v(x,y)$ ικανοποιούν την εξίσωση

$$(1 + u_x^2)^{1/2} + xu_x - u = 0. \tag{1.126}$$

Σημείωση. Τα επίπεδα είναι γραμμικές λύσεις της (1.126), ενώ η περιβάλλουσα v είναι μη γραμμική λύση. Η v λέγεται *ιδιάζον ολοκλήρωμα* της (1.126). □



Σχήμα 1.23: Η περιβάλλουσα στην Άσκηση 1.17.

1.18 Θεωρούμε την εξίσωση της εικόνας,

$$\Big(\frac{\partial u}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial u}{\partial y}\Big)^2 = 1, \qquad u = u(x,y). \tag{1.127}$$

α) Αποδείξτε ότι τα επίπεδα $z = u(x,y,\vartheta) = x\cos\vartheta + y\sin\vartheta$ ικανοποιούν την (1.127).

β) Αποδείξτε ότι η περιβάλλουσα είναι ο διπλός κύκλος

$$v(x,y) = \pm(x^2 + y^2)^{1/2}$$

και ότι ικανοποιεί την (1.126).

[*Λύση*: Έχουμε, σύμφωνα με την (1.125),

$$\frac{\partial z}{\partial \vartheta} = 0 \iff -x\sin\vartheta + y\sin\vartheta = 0 \iff \vartheta = \arctan\frac{y}{x},$$

συνεπώς

$$v(x,y) = x\cos\Big(\arctan\frac{y}{x}\Big) + y\sin\Big(\arctan\frac{y}{x}\Big) = (x^2+y^2)^{1/2}.]$$

1.19 Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών για την εξίσωση του Burgers $u_t + uu_x = 0$ με αρχική συνθήκη $\varphi(x) = -\tanh x + 1$. Προσδιορίστε τον χρόνο θραύσης καθώς και την εξίσωση της περιβάλλουσας.

1.20 (Gelfand) Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα αρχικών τιμών για μια συνήθη διαφορική εξίσωση,

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r^\nu}\dfrac{d}{dr}\big(r^\nu u'(r)\big) + 2\mathrm{e}^u = 0, \quad r > 0, \\ u(0) = 0, \end{cases} \tag{1.128}$$

με $\nu \in \mathbb{N}_0$. Ιδιαίτερα ενδιαφέρουν οι περιπτώσεις $\nu = 0$, $\nu = 1$ και $\nu = 2$.

α) Αν u_0 λύση του (1.128), αποδείξτε ότι και οι συναρτήσεις

$$u(r;\alpha) := \alpha + u_0(r\mathrm{e}^{\alpha/2}), \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

αποτελούν επίσης λύσεις του (1.128).

β) Θεωρούμε την περιβάλλουσα της οικογένειας

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = 0 \Longrightarrow \alpha = \alpha(r).$$

Τώρα,

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = 1 + u_0'(r\mathrm{e}^{\alpha/2})\frac{r}{2}\mathrm{e}^{\alpha/2},$$

συνεπώς

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = 0 \iff r\mathrm{e}^{\alpha/2} = S_0,$$

όπου S_0 ρίζα της εξίσωσης $2 + u_0'(S_0)S_0 = 0$. Προκύπτει, λοιπόν, ότι

$$\alpha(r) = 2\ln\frac{S_0}{r}.$$

γ) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση v,

$$v(r) := u\big(r;\alpha(r)\big) = 2\ln\frac{S_0}{r} + u_0(S_0),$$

επιλύει την εξίσωση.

Σημείωση. Ο πρώτος όρος στη συνήθη διαφορική εξίσωση του προβλήματος (1.128) γράφεται, βεβαίως, στη μορφή

$$\frac{1}{r^\nu}\frac{d}{dr}\big(r^\nu u'(r)\big) = u''(r) + \frac{\nu}{r}u'(r).$$

Αναφέρουμε ότι στην περίπτωση μιας συνάρτησης ν μεταβλητών και *ακτινικής* συμμετρίας, δηλαδή $u(x_1,\dots,x_\nu) = u(r)$, με $r := (x_1^2+\cdots+x_\nu^2)^{1/2}$, ισχύει

$$u_{x_1x_1}+\cdots+u_{x_\nu x_\nu} = u''(r) + \frac{\nu-1}{r}u'(r). \qquad \square$$

1.21 Θεωρήστε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} u_t + c(u)u_x = 0, & x\in\mathbb{R},\ t>0,\\ u(x,0) = f(x), & x\in\mathbb{R}, \end{cases}$$

και αποδείξτε ότι στις περιπτώσεις που οι συναρτήσεις f και c είναι ταυτόχρονα και οι δύο είτε αύξουσες είτε φθίνουσες, τότε δεν δημιουργείται κρουστικό κύμα.

[*Υπόδειξη*: Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[a,b]$ τέτοια ώστε

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0 \quad \forall g\in C^1[a,b].$$

Τότε, αναγκαστικά, η f μηδενίζεται ταυτοτικά στο $[a,b]$.

Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι $f(x_0)\neq 0$, για κάποιο $x_0\in(a,b)$, θα οδηγηθούμε σε άτοπο. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $f(x_0)>0$. Από τη συνέχεια της f έπεται ότι αυτή λαμβάνει θετικές τιμές σε μια περιοχή του x_0, δηλαδή, για κάποιο θετικό δ, έχουμε $f(x)>0$, για κάθε $x\in I := [x_1,x_2]$, με $x_1 := x_0-\delta$ και $x_2 := x_0+\delta$. Επιλέγοντας τότε

$$g(x) := \begin{cases} (x-x_1)^3(x_2-x)^3, & x\in I,\\ 0, & x\notin I, \end{cases}$$

διαπιστώνουμε αμέσως ότι το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ είναι θετικό, γεγονός που αντίκειται στην αρχική μας υπόθεση.]

1.22 Προσδιορίστε τον χρόνο θραύσης για το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} u_t + uu_x + u = 0, & x\in\mathbb{R},\ t>0,\\ u(x,0) = -2x, & x\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

1.23 Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $u(x,t) = (1+\alpha t)^{-1}$ επιλύει το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} u_t + uu_x + \alpha u^2 = 0, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = 1, & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

1.24 Θεωρήστε το λεγόμενο "πρόβλημα σήματος",

$$\begin{cases} u_t + c(u)u_x = 0, & x > 0,\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0, & x \geq 0, \\ u(0,t) = g(t), & t \geq 0, \end{cases}$$

όπου c και g δεδομένες συναρτήσεις και u_0 δεδομένη, θετική σταθερά. Αν η c' λαμβάνει μόνο θετικές τιμές, καθορίστε συνθήκες για το "σήμα" g ώστε να μην δημιουργείται κρουστικό κύμα, και προσδιορίστε την αντίστοιχη λύση στο πρώτο τεταρτημόριο $U := \{(x,t) : x > 0, t > 0\}$.

1.25 Αποδείξτε την (1.104).
[*Υπόδειξη*: Ακολουθήστε τα βήματα που μας οδήγησαν στην (1.103) και λάβετε υπ' όψιν σας ότι, στην προκειμένη περίπτωση, $v(x,0) = 0$, για κάθε πραγματικό x.]

1.26 Αποδείξτε ότι η (1.121) έπεται από την (1.120).

1.27 Αποδείξτε ότι, αν ισχύει η συνθήκη (1.107), τότε η συνάρτηση u που δόθηκε στην (1.106) αποτελεί ασθενή λύση της εξίσωσης (1.105).

1.28 Θεωρούμε την εξίσωση (1.105), μια ομαλή καμπύλη $(x(t),t)$, $t > 0$, και δύο κλασικές λύσεις u^{A} και u^{Δ} της εξίσωσης, αριστερά και δεξιά της εν λόγω καμπύλης, αντίστοιχα, βλ. Σχήμα 1.21. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση u που ορίζεται με τρόπο αντίστοιχο της (1.106), αλλά με την καμπύλη στη θέση της ημιευθείας, αποτελεί ασθενή λύση της (1.105), αν και μόνο αν ικανοποιείται η συνθήκη (1.123), σε κάθε σημείο $(x(t),t)$ της καμπύλης ασυνέχειας.

1.29 Αποδείξτε ότι οι συνθήκες Rankine–Hugoniot για την $u_t + \big(F(u)\big)_x = 0$ παραμένουν αμετάβλητες, αν η εξίσωση αντικατασταθεί από τη γενικότερη εξίσωση

$$u_t + \big(F(u)\big)_x = g(u),$$

όπου g αυθαίρετη συνεχής συνάρτηση.

Ευρετήριο

Κ

Λ

Μ

Ν

Ο

Π

Ρ

Σ

Τ

Φ

Χ