Σημειώσεις Μιγαδικής Ανάλυσης

Θέμης Μήτσης

Τμημα Μαθηματικων

Πανεπιστημιο Κρητης

Ηρακλειο

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγικά

Η αλγεβρική δομή τού $\mathbb{C}$

Το σύνολο $\mathbb{C}$ των **μιγαδικών αριθμών** (ή **μιγαδικό επίπεδο**) είναι το σύνολο $\mathbb{R}^2$ εφοδιασμένο με μια πράξη πρόσθεσης $(+)$ και μια πράξη πολλαπλασιασμού $(\cdot)$ οι οποίες ορίζονται ως εξής. Για κάθε $z_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{C}$, $z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$, θέτουμε

- $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
- $z_1 \cdot z_2 = z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$

Κατά παράδοση, θέτουμε $i = (0, 1)$ και ονομάζουμε το i **φανταστική μονάδα**. Από τον ορισμό τού πολλαπλασιασμού, έχουμε $i^2 = (-1, 0)$. Με τις πράξεις αυτές, το $\mathbb{C}$ είναι σώμα. Το ουδέτερο ως προς την πρόσθεση είναι το $(0, 0)$ και το αντίθετο τού (x, y) είναι το $(-x, -y)$. Το ουδέτερο ως προς τον πολλαπλασιασμό είναι το $(1, 0)$ και το αντίστροφο τού $(x, y) \neq (0, 0)$ είναι το

$$\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right).$$

Εύκολα μπορεί να δείξει κανείς ότι το $\mathbb{C}$ δεν είναι διατεταγμένο σώμα. Θεωρούμε τώρα την απεικόνιση

$$I : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad I(x) = (x, 0).$$

Τότε η I είναι 1-1 και διατηρεί τη δομή σώματος, δηλαδή $I(x + y) = I(x) + I(y)$ και $I(xy) = I(x)I(y)$, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Επομένως, ταυτίζοντας το $\mathbb{R}$ με την εικόνα του μέσω τής I, δηλαδή με το σύνολο $\{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$, μπορούμε να θεωρούμε το $\mathbb{R}$ σαν υποσύνολο τού $\mathbb{C}$ και να γράφουμε, καταχρηστικά, $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Μέσω αυτής τής ταύτισης, και χρησιμοποιώντας την ισότητα

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1)(y, 0) = (x, 0) + i(y, 0) = I(x) + iI(y),$$

μπορούμε να γράφουμε, επίσης καταχρηστικά, $(x, y) = x + iy$. Με τον συμβολισμό αυτόν έχουμε $i^2 = -1$, και επομένως το i είναι μια «λύση» τής εξίσωσης $x^2 + 1 = 0$.

Υπενθυμίζουμε τώρα κάποιες βασικές έννοιες οι οποίες πρέπει να είναι ήδη γνωστές από κάποιο άλλο μάθημα. Για κάθε $z = x + iy \in \mathbb{C}$ θέτουμε

- $\mathfrak{Re}\, z = x$, $\mathfrak{Im}\, z = y$ (**πραγματικό** και **φανταστικό μέρος** τού z).
- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (**απόλυτη τιμή** ή **μέτρο** τού z).
- $\overline{z} = x - iy$ (**συζυγής** τού z).

Από την αναπαράσταση κάθε σημείου στο επίπεδο σε πολικές συντεταγμένες παίρνουμε ότι για κάθε $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, υπάρχει ένας μοναδικός αριθμός $\theta \in (-\pi, \pi]$ τέτοιος ώστε $z = |z|(\cos\theta + i \sin\theta)$. Ο αριθμός αυτός ονομάζεται **όρισμα** τού z και συμβολίζεται με $\arg z$. Οι βασικές ιδιότητες τής απόλυτης τιμής και τού συζυγούς είναι οι ακόλουθες.

- $\mathfrak{Re}\, z = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$, $\mathfrak{Im}\, z = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$.
- $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\overline{zw} = \overline{z}\overline{w}$.
- $|zw| = |z| \cdot |w|$.
- $|z/w| = |z|/|w|$, για $w \neq 0$.
- $|\overline{z}| = |z|$.
- $|z + w| \leq |z| + |w|$ (τριγωνική ανισότητα).

Η τοπολογική δομή τού $\mathbb{C}$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\rho : \mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{R}_+$ με $\rho(z,w) = |z-w|$. Τότε η ρ ορίζει μια μετρική στο $\mathbb{C}$. Παρατηρήστε ότι ο χώρος $(\mathbb{C},\rho)$ ταυτίζεται με τον Ευκλείδειο χώρο $(\mathbb{R}^2, d)$, όπου d είναι η συνηθισμένη απόσταση

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}.$$

Για $z \in \mathbb{C}$ και $r > 0$ θέτουμε

$$D(z,r) = \{w \in \mathbb{C} : |z-w| < r\} \text{ (ο **ανοιχτός δίσκος** με κέντρο } z \text{ και ακτίνα } r),$$

$$\overline{D}(z,r) = \{w \in \mathbb{C} : |z-w| \le r\} \text{ (ο **κλειστός δίσκος** με κέντρο } z \text{ και ακτίνα } r).$$

Επίσης, για $A \subset \mathbb{C}$ θα χρησιμοποιούμε τους κλασικούς συμβολισμούς

$$\overline{A} = \{z \in \mathbb{C} : \text{υπάρχει ακολουθία } z_n \in A \text{ τέτοια ώστε } z_n \to z\} \text{ (η **κλειστότητα** τού } A),$$

$$A^\circ = \{z \in A : \text{υπάρχει } \varepsilon > 0 \text{ τέτοιο ώστε } D(z,\varepsilon) \subset A\} \text{ (το **εσωτερικό** τού } A),$$

$$\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ \text{ (το **σύνορο** τού } A),$$

$$\operatorname{diam}(A) = \sup\{|z-w| : z,w \in A\} \text{ (η **διάμετρος** τού } A).$$

Αν $A, B \subset \mathbb{C}$ θέτουμε

$$\operatorname{dist}(A,B) = \inf\{|z-w| : z \in A,\ w \in B\} \text{ (η **απόσταση** των } A \text{ και } B).$$

Εφόσον $(\mathbb{C},\rho) = (\mathbb{R}^2, d)$, η ακολουθιακή σύγκλιση στο $\mathbb{C}$ χαρακτηρίζεται ως εξής. Μια ακολουθία $z_n \in \mathbb{C}$ συγκλίνει σε κάποιο $z \in \mathbb{C}$ αν και μόνο αν $\Re z_n \to \Re z$ και $\Im z_n \to \Im z$. Χρησιμοποιώντας τον χαρακτηρισμό αυτόν, αποδεικνύονται τα εξής.

- Αν $z_n \to z$, τότε $\overline{z}_n \to \overline{z}$ και $|z_n| \to |z|$.
- Αν $z_n \to z$ και $w_n \to w$, τότε $z_n + w_n \to z + w$ και $z_n w_n \to zw$.
- Αν $z_n, z \neq 0$ και $z_n \to z$, τότε $z_n^{-1} \to z^{-1}$.

Έστω $A \subset \mathbb{C}$ και $f : A \to \mathbb{C}$ μια συνάρτηση. Τότε υπάρχουν μοναδικές συναρτήσεις $u, v : A \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y).$$

Η u ονομάζεται **πραγματικό μέρος** τής f και συμβολίζεται με $\Re f$, και η v ονομάζεται **φανταστικό μέρος** τής f και συμβολίζεται με $\Im f$. Η f είναι συνεχής στο σημείο $x+iy$ αν και μόνο αν οι $\Re f$ και $\Im f$ είναι συνεχείς στο σημείο (x,y). Μια συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ λέγεται Riemann ολοκληρώσιμη αν οι $\Re f$ και $\Im f$ είναι Riemann ολοκληρώσιμες. Στην περίπτωση αυτή θέτουμε

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \Re f(t)\,dt + i\int_a^b \Im f(t)\,dt.$$

Εντελώς ανάλογα, η $f : I \to \mathbb{C}$, όπου $I \subset \mathbb{R}$ κάποιο διάστημα, λέγεται διαφορίσιμη αν οι $\Re f$ και $\Im f$ είναι διαφορίσιμες. Τότε θέτουμε

$$f'(t) = (\Re f)'(t) + i(\Im f)'(t).$$

Ορισμός 1.1. *Μια συνεχής απεικόνιση $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ονομάζεται **καμπύλη με αρχή το σημείο** $\gamma(a)$ **και τέλος το σημείο** $\gamma(b)$. Αν $\gamma(a) = \gamma(b)$, τότε η γ λέγεται **κλειστή καμπύλη**. Αν η γ είναι μια καμπύλη, τότε η εικόνα $\gamma([a,b])$ θα συμβολίζεται με γ^*. Αν $\gamma^* \subset U$, τότε θα λέμε ότι η γ είναι μια **καμπύλη στο** U. Μια κατά τμήματα συνεχώς διαφορίσιμη καμπύλη ονομάζεται **μονοπάτι**. Το **μήκος** ενός μονοπατιού $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ορίζεται να είναι η ποσότητα*

$$\int_a^b |\gamma'(t)|\,dt.$$

Το εκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο

Έστω ∞ ένα αντικείμενο με $\infty \notin \mathbb{C}$. Θέτουμε $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ και ορίζουμε την απεικόνιση

$$\widehat{\rho} : \widehat{\mathbb{C}} \times \widehat{\mathbb{C}} \to \mathbb{R}_+,$$

με

$$\widehat{\rho}(z, w) = \frac{|z - w|}{\sqrt{(1 + |z|^2)(1 + |w|^2)}}, \ z, w \in \mathbb{C}$$

$$\widehat{\rho}(z, \infty) = \widehat{\rho}(\infty, z) = \frac{1}{\sqrt{1 + |z|^2}}, \ z \in \mathbb{C}$$

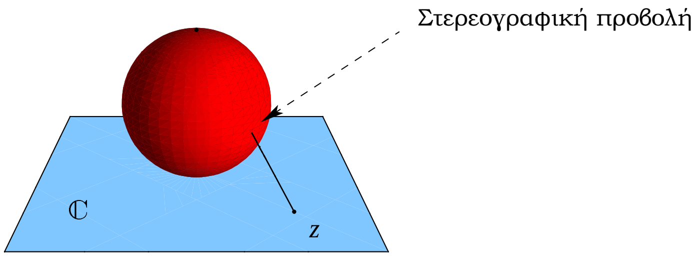
$$\widehat{\rho}(\infty, \infty) = 0.$$

Αποδεικνύεται ότι για $z, w \in \mathbb{C}$

$$\widehat{\rho}(z, w) = d((\pi_1(z), \pi_2(z), \pi_3(z)), (\pi_1(w), \pi_2(w), \pi_3(w))),$$

$$\widehat{\rho}(z, \infty) = d((\pi_1(z), \pi_2(z), \pi_3(z)), (0, 0, 1)),$$

όπου d είναι η συνηθισμένη Ευκλείδεια απόσταση στον $\mathbb{R}^3$ και για $z = x + iy$, $\pi_1(z), \pi_2(z), \pi_3(z)$ είναι οι συντεταγμένες τής στερεογραφικής προβολής του σημείου $(x, y, 0)$ στην επιφάνεια τής σφαίρας με κέντρο το σημείο $(0, 0, \frac{1}{2})$ και ακτίνα $\frac{1}{2}$. Υπενθυμίζουμε ότι η στερεογραφική προβολή τού $(x, y, 0)$ είναι η τομή τής επιφάνειας τής σφαίρας με την ευθεία που συνδέει το $(x, y, 0)$ με τον «βόρειο πόλο» $(0, 0, 1)$.



Εύκολα μπορεί κανείς να δείξει ότι

$$\pi_1(z) = \frac{x}{1 + |z|^2}, \ \pi_2(z) = \frac{y}{1 + |z|^2}, \ \pi_3(z) = \frac{|z|^2}{1 + |z|^2}.$$

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω σχέσεις αποδεικνύεται ότι

- Η $\widehat{\rho}$ ορίζει μια μετρική στο $\widehat{\mathbb{C}}$. Ο χώρος $(\widehat{\mathbb{C}}, \widehat{\rho})$ ονομάζεται **εκτεταμένο μιγαδικό επίπεδο** ή **σφαίρα τού Riemann**.
- Αν $z_n, z \in \mathbb{C}$ τότε
$$z_n \xrightarrow{\rho} z \Leftrightarrow z_n \xrightarrow{\widehat{\rho}} z.$$
- Αν $z_n \in \mathbb{C}$ τότε
$$z_n \xrightarrow{\widehat{\rho}} \infty \Leftrightarrow |z_n| \to +\infty.$$
- Ο $(\widehat{\mathbb{C}}, \widehat{\rho})$ είναι συμπαγής μετρικός χώρος.

Παρατηρήστε ότι η $\widehat{\rho}$ και η ρ ορίζουν την ίδια τοπολογία στο $\mathbb{C}$. Αν $z_n \xrightarrow{\widehat{\rho}} \infty$, θα γράφουμε απλά $z_n \to \infty$.

Συνεκτικότητα

Ορισμός 1.2. *Ένας μετρικός χώρος (X,ρ) λέγεται* ***συνεκτικός*** *αν τα μοναδικά υποσύνολα τού X τα οποία είναι ανοιχτά και κλειστά είναι το $\emptyset$ και το X. Αν $A \subset X$, τότε το A λέγεται* ***συνεκτικό υποσύνολο τού*** *X αν ο μετρικός χώρος (A,ρ) είναι συνεκτικός.*

Μια ισοδύναμη διατύπωση είναι η εξής. Ο X δεν είναι συνεκτικός αν υπάρχουν μη κενά, ανοιχτά και ξένα $A, B \subset X$ τέτοια ώστε $X = A \cup B$. Παραδείγματα μη συνεκτικών χώρων είναι το $\mathbb{Z}$ και το $\mathbb{Q}$ (θεωρούμενα σαν υπόχωροι τού $\mathbb{R}$ με τη συνηθισμένη μετρική).

Πρόταση 1.3. *Έστω $(X,\rho), (Y,d)$ μετρικοί χώροι και $f : X \to Y$ συνεχής. Αν το $A \subset X$ είναι συνεκτικό τότε το $f(A)$ είναι συνεκτικό.*

Απόδειξη. Έστω ότι το $f(A)$ δεν είναι συνεκτικό. Τότε υπάρχουν $U, V \subset Y$ ανοιχτά με $U \cap f(A) \neq \emptyset$, $V \cap f(A) \neq \emptyset$ και $U \cap V \cap f(A) = \emptyset$ τέτοια ώστε

$$f(A) = (f(A) \cap U) \cup (f(A) \cap V).$$

Επομένως

$$A = (A \cap f^{-1}(U)) \cup (A \cap f^{-1}(V)),$$

όπου $A \cap f^{-1}(U)$ και $A \cap f^{-1}(V)$ μη κενά, ξένα και ανοιχτά στο A. Αυτό όμως είναι άτοπο διότι το A είναι συνεκτικό. □

Πρόταση 1.4. *Ένα υποσύνολο $A \subset \mathbb{R}$ είναι συνεκτικό αν και μόνο αν είναι διάστημα.*

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε το αντίστροφο στην ειδική περίπτωση $A = \mathbb{R}$. Η απόδειξη όταν το A είναι κάποιο άλλο διάστημα είναι ανάλογη. Προσπαθήστε να δείξετε το ευθύ σαν άσκηση. Ας υποθέσουμε ότι το $\mathbb{R}$ δεν είναι συνεκτικό. Τότε υπάρχει $G \subset \mathbb{R}$, $G \neq \mathbb{R}$ το οποίο είναι μη κενό, ανοιχτό και κλειστό. Εφόσον το G είναι ανοιχτό,

$$G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n,$$

όπου τα I_n είναι μη κενά, ξένα ανά δυο ανοιχτά διαστήματα. Έστω $I_1 = (a_1, b_1)$. Τότε $b_1 \in \mathbb{R} \setminus G$ διότι τα I_n είναι ξένα. Αλλά το $\mathbb{R} \setminus G$ είναι επίσης ανοιχτό, άρα υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $(b_1 - \varepsilon, b_1 + \varepsilon) \subset \mathbb{R} \setminus G$. Αυτό όμως είναι άτοπο διότι $I_1 \cap (b_1 - \varepsilon, b_1 + \varepsilon) \neq \emptyset$. □

Πρόταση 1.5. *Ένα ανοιχτό υποσύνολο $G \subset \mathbb{C}$ είναι συνεκτικό αν και μόνο αν για κάθε $z, w \in G$ υπάρχει μια καμπύλη γ στο G η οποία συνδέει τα σημεία z και w.*

Απόδειξη. Έστω ότι το G δεν είναι συνεκτικό. Τότε υπάρχουν μη κενά, ξένα και ανοιχτά $U, V \subset \mathbb{C}$ τέτοια ώστε $G = U \cup V$. Επιλέγουμε $z \in U$, $w \in V$. Από υπόθεση, υπάρχει μια καμπύλη $\gamma^* \subset G$ η οποία συνδέει τα z και w. Επομένως

$$\gamma^* = (\gamma^* \cap U) \cup (\gamma^* \cap V),$$

όπου $\gamma^* \cap U$, $\gamma^* \cap V$ είναι μη κενά, ξένα, και ανοιχτά στο γ^*. Αυτό όμως είναι άτοπο διότι το γ^* είναι συνεκτικό σαν συνεχής εικόνα συνεκτικού συνόλου. Για το αντίστροφο, υποθέτουμε ότι το G είναι συνεκτικό, επιλέγουμε τυχόν $z_0 \in G$, και θέτουμε

$$A = \{z \in G : \text{υπάρχει καμπύλη στο } G \text{ η οποία συνδέει τα σημεία } z_0 \text{ και } z\}.$$

Το A είναι προφανώς μη κενό. Θα δείξουμε ότι είναι ανοιχτό και κλειστό στο G, άρα $G = A$ λόγω συνεκτικότητας. Έστω $z \in A$. Εφόσον $z \in G$, υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $D(z,\varepsilon) \subset G$. Αφού $z \in A$, υπάρχει μια καμπύλη γ στο G η οποία συνδέει τα z_0 και z. Τώρα, για κάθε $w \in D(z,\varepsilon)$, το σύνολο $\gamma^* \cup [z,w]$, όπου $[z,w]$ είναι το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα σημεία z και w, είναι η εικόνα μιας καμπύλης στο G που συνδέει τα z_0 και w. Επομένως $w \in A$, άρα $D(z,\varepsilon) \subset A$. Συνεπώς το A είναι ανοιχτό. Έστω τώρα $z \in \overline{A} \cap G$. Εφόσον $z \in G$, υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $D(z,\varepsilon) \subset G$. Αλλά $z \in \overline{A}$ σημαίνει ότι υπάρχει $w \in D(z,\varepsilon) \cap A$. Από υπόθεση, υπάρχει καμπύλη γ στο G η οποία συνδέει τα z_0 και w. Και έτσι το σύνολο $\gamma^* \cup [w,z]$ είναι η εικόνα μιας καμπύλης στο G η οποία συνδέει τα z_0 και z. Άρα $z \in A$, επομένως το A είναι κλειστό. Το z_0 είναι τυχόν και έτσι το συμπέρασμα έπεται. □

Πρόταση 1.6. *Έστω X μετρικός χώρος, $x_0 \in X$, και $\{A_i : i \in I\}$ μια οικογένεια συνεκτικών υποσυνόλων τού X τέτοια ώστε $x_0 \in A_i$ για κάθε $i \in I$. Τότε η ένωση*
$$A = \bigcup_{i \in I} A_i$$
είναι συνεκτικό σύνολο.

Απόδειξη. Έστω G ένα μη κενό υποσύνολο τού A το οποίο είναι ανοιχτό και κλειστό στο A. Τότε το $G \cap A_i$ είναι ανοιχτό και κλειστό στο A_i για κάθε $i \in I$. Επομένως, είτε $G \cap A_i = \emptyset$ είτε $G \cap A_i = A_i$. Εφόσον τώρα $G \neq \emptyset$, υπάρχει $i_0 \in I$ τέτοιο ώστε $G \cap A_{i_0} \neq \emptyset$. Άρα $G \cap A_{i_0} = A_{i_0}$. Ιδιαίτερα, $x_0 \in G$ και έτσι $x_0 \in G \cap A_i$ για κάθε $i \in I$. Συνεπώς $G \cap A_i = A_i$ για κάθε i, άρα $G = A$. □

Ορισμός 1.7. *Ένα υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου X λέγεται* ***συνεκτική συνιστώσα*** *τού X αν είναι ένα μεγιστικό συνεκτικό υποσύνολο τού X. Δηλαδή το A είναι συνεκτικό και κανένα συνεκτικό υποσύνολο τού X δεν περιέχει γνήσια το A.*

Πρόταση 1.8. *Έστω X μετρικός χώρος. Τότε*

(1) *Κάθε $x_0 \in X$ περιέχεται σε μια συνεκτική συνιστώσα τού X.*
(2) *Διακεριμένες συνεκτικές συνιστώσες τού X είναι ανά δυο ξένες.*

Απόδειξη.

(1) Θέτουμε
$$\mathcal{A} = \{A \subset X : x_0 \in A,\ A \text{ συνεκτικό}\}.$$
Η οικογένεια $\mathcal{A}$ είναι μη κενή, διότι $\{x_0\} \in \mathcal{A}$. Επίσης, από την προηγούμενη πρόταση, το σύνολο
$$C = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$$
είναι συνεκτικό. Από τον ορισμό του, το C είναι μεγιστικό, άρα είναι μια συνεκτική συνιστώσα τού X.
(2) Αν C_1, C_2 ήταν δυο διακεκριμένες συνεκτικές συνιστώσες με $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$, τότε, από την προηγούμενη πρόταση, το σύνολο $C_1 \cup C_2$ θα ήταν συνεκτικό και θα περιείχε γνήσια τα C_1 και C_2, άτοπο.

□

Πρόταση 1.9. *Έστω $G \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό. Τότε οι συνεκτικές συνιστώσες τού G είναι ανοιχτά σύνολα και αριθμήσιμες το πλήθος.*

Απόδειξη. Έστω $A \subset G$ μια συνεκτική συνιστώσα τού G και $z \in A$. Αφού το G είναι ανοιχτό, υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $D(z, \varepsilon) \subset G$. Αλλά το σύνολο $D(z, \varepsilon) \cup A$ είναι συνεκτικό. Επομένως, από τη μεγιστικότητα του A, πρέπει να έχουμε $D(z, \varepsilon) \cup A = A$, άρα $D(z, \varepsilon) \subset A$, συνεπώς το A είναι ανοιχτό. Το ότι οι συνεκτικές συνιστώσες τού G είναι αριθμήσιμες το πλήθος έπεται από το ότι σ' ένα διαχωρίσιμο μετρικό χώρο, κάθε οικογένεια μη κενών, ξένων ανά δυο ανοιχτών συνόλων είναι αριθμήσιμη. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Στοιχειώδης Θεωρία

Στο κεφάλαιο αυτό ορίζουμε τις αναλυτικές συναρτήσεις, το ολοκλήρωμα μιας μιγαδικής συνάρτησης πάνω σ' ένα μονοπάτι, και αναπτύσσουμε τα εργαλεία που χρειάζονται για την απόδειξη μιας στοιχειώδους έκδοσης τού θεωρήματος τού Cauchy. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε τις βασικές ιδιότητες των δυναμοσειρών και την σχέση τους με τις αναλυτικές συναρτήσεις.

Αναλυτικές συναρτήσεις

Τα βασικά αντικείμενα που θα μελετήσουμε στη μιγαδική ανάλυση είναι οι αναλυτικές συναρτήσεις.

Ορισμός 2.1. *Έστω U ένα ανοιχτό υποσύνολο τού $\mathbb{C}$. Μια συνάρτηση $f : U \to \mathbb{C}$ λέγεται* ***αναλυτική*** *ή* ***ολόμορφη*** *στο U αν για κάθε $z \in U$ το όριο*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

υπάρχει. Η τιμή του συμβολίζεται με $f'(z)$ και ονομάζεται ***παράγωγος*** *τής f στο z. Η έκφραση «η f είναι αναλυτική στο σημείο z_0» σημαίνει ότι υπάρχει ένα ανοιχτό σύνολο U τέτοιο ώστε $z_0 \in U$ και η f είναι αναλυτική στο U. Γενικότερα, αν S είναι ένα υποσύνολο τού $\mathbb{C}$, τότε λέμε ότι η f είναι αναλυτική στο S αν υπάρχει ένα ανοιχτό $U \subset \mathbb{C}$ τέτοιο ώστε $S \subset U$ και η f είναι αναλυτική στο U.*

Σκεφτείτε τις ομοιότητες και τις διαφορές ανάμεσα στις παραπάνω έννοιες και στην οικεία από την Πραγματική Ανάλυση έννοια τής διαφορισιμότητας. Η απόδειξη των ακόλουθων αποτελεσμάτων είναι εντελώς ανάλογη με την απόδειξη των αντίστοιχων αποτελεσμάτων από τον Απειροστικό Λογισμό.

Θεώρημα 2.2. *Έστω $S \subset \mathbb{C}$.*

(1) *Αν η $f : S \to \mathbb{C}$ είναι αναλυτική, τότε η f είναι συνεχής.*
(2) *Αν οι $f, g : S \to \mathbb{C}$ είναι αναλυτικές, τότε οι $f+g$, fg είναι αναλυτικές και $(f+g)' = f' + g'$, $(fg)' = f'g + fg'$.*
(3) *Αν η $f : S \to \mathbb{C}$ είναι αναλυτική και δεν μηδενίζεται σε κάποια περιοχή τού S, τότε η $1/f$ είναι αναλυτική και $(1/f)' = -f'/f^2$.*

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε μόνο το (1) για να φανεί η απόλυτη αναλογία με τον Απειροστικό Λογισμό. Έστω z_0 στην περιοχή τού S στην οποία η f είναι αναλυτική. Τότε

$$\lim_{z\to z_0}(f(z)-f(z_0)) = \lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\cdot \lim_{z\to z_0}(z-z_0) = f'(z_0)\cdot 0 = 0.$$

□

Θεώρημα 2.3 (Ο Κανόνας τής Αλυσίδας)**.** *Έστω $U, V \subset \mathbb{C}$ ανοιχτά και $f : U \to \mathbb{C}$, $g : V \to \mathbb{C}$ αναλυτικές. Υποθέτουμε ότι $f(U) \subset V$. Τότε η $g \circ f$ είναι αναλυτική στο U και $(g \circ f)'(z) = f'(z)g'(f(z))$ για όλα τα $z \in U$.*

Παρατήρηση. Αν το $U \subset \mathbb{C}$ είναι ανοιχτό, η $f : U \to \mathbb{C}$ αναλυτική, το $I \subset \mathbb{R}$ είναι κάποιο διάστημα, και η $\gamma : I \to U$ παραγωγίσιμη, τότε η $f \circ \gamma$ είναι παραγωγίσιμη και $(f \circ \gamma)'(t) = \gamma'(t)f'(\gamma(t))$ για όλα τα $t \in I$.

Θεώρημα 2.4 (Το Θεώρημα Αντίστροφης Απεικόνισης)**.** *Έστω $U, V \subset \mathbb{C}$ ανοιχτά, $f : U \to \mathbb{C}$ συνεχής, και $g : V \to \mathbb{C}$ αναλυτική τέτοια ώστε η g' δεν μηδενίζεται πουθενά. Υποθέτουμε ότι $f(U) \subset V$ και ότι $g(f(z)) = z$ για όλα τα $z \in U$. Τότε η f είναι αναλυτική στο U και*

$$f'(z) = \frac{1}{g'(f(z))},\ z \in U.$$

Σ' αυτό το σημείο, τα μοναδικά παραδείγματα αναλυτικών συναρτήσεων που μπορούμε να σκεφτούμε είναι οι ρητές συναρτήσεις, δηλαδή πηλίκα μιγαδικών πολυωνύμων. Για να ορίσουμε περισσότερες, θα χρειαστούμε το ακόλουθο αποτέλεσμα, το οποίο χαρακτηρίζει τις αναλυτικές συναρτήσεις μέσω τού πραγματικού και τού φανταστικού τους μέρους.

Θεώρημα 2.5 (Οι συνθήκες **Cauchy-Riemann**). *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό και $f : U \to \mathbb{C}$. Θέτουμε $u = \Re f$ και $v = \Im f$. Αν η f είναι αναλυτική, τότε οι μερικές παράγωγοι u_x, u_y, v_x, v_y υπάρχουν και ισχύει*

$$f'(x_0 + iy_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0),$$

για κάθε $x_0 + iy_0 \in U$. Κατά συνέπεια

$$\left\{ \begin{array}{l} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{array} \right\} \text{(συνθήκες Cauchy-Riemann).}$$

Αντίστροφα, αν οι μερικές παράγωγοι u_x, u_y, v_x, v_y υπάρχουν, είναι συνεχείς και ικανοποιούν τις συνθήκες Cauchy-Riemann, τότε η f είναι αναλυτική.

Απόδειξη. Έστω $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$. Τότε

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = \lim_{\substack{h\in\mathbb{R} \\ h\to 0}} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{u(x_0+h, y_0) + iv(x_0+h, y_0) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{u(x_0+h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h} + i \lim_{h\to 0} \frac{v(x_0+h, y_0) - v(x_0, y_0)}{h} \\ &= u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Ανάλογα,

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = \lim_{\substack{h\in\mathbb{R} \\ h\to 0}} \frac{f(z_0+ih) - f(z_0)}{ih} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{u(x_0, y_0+h) + iv(x_0, y_0+h) - u(x_0, y_0) - iv(x_0, y_0)}{ih} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{v(x_0, y_0+h) - v(x_0, y_0)}{h} - i \lim_{h\to 0} \frac{u(x_0, y_0+h) - u(x_0, y_0)}{h} \\ &= v_y(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Για το αντίστροφο, έστω $z_0 = x_0 + iy_0 \in U$. Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $D(z_0, \varepsilon) \subset U$. Για κάθε $h = s + it$ στο $D(0, \varepsilon)$, θεωρούμε την ποσότητα

$$\frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = \frac{(u(x_0+s, y_0+t) - u(x_0, y_0)) + i(v(x_0+s, y_0+t) - v(x_0, y_0))}{s+it}.$$

Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής έχουμε ότι υπάρχουν s_1, t_1 με $|s_1| < |s|$ και $|t_1| < |t|$ τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} & u(x_0+s, y_0+t) - u(x_0, y_0) \\ &= [u_x(x_0+s_1, y_0+t) - u_x(x_0, y_0)]s + [u_y(x_0, y_0+t_1) - u_y(x_0, y_0)]t + u_x(x_0, y_0)s + u_y(x_0, y_0)t \\ &= \phi(s, t) + u_x(x_0, y_0)s + u_y(x_0, y_0)t, \end{aligned}$$

όπου

$$\lim_{s+it\to 0} \frac{\phi(s,t)}{s+it} = 0,$$

διότι u_x, u_y συνεχείς. Ομοίως

$$v(x_0+s, y_0+t) - v(x_0, y_0) = \psi(s, t) + v_x(x_0, y_0)s + v_y(x_0, y_0)t,$$

όπου

$$\lim_{s+it\to 0} \frac{\psi(s,t)}{s+it} = 0.$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας τις συνθήκες Cauchy-Riemann, έχουμε

$$\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = u_x(x_0,y_0) + iv_x(x_0,y_0) + \frac{\phi(s,t)+i\psi(s,t)}{s+it}.$$

Παίρνοντας το όριο καθώς $s+it \to 0$, βλέπουμε ότι η f είναι αναλυτική. □

Πρόταση 2.6. *Έστω $G \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό και συνεκτικό, και έστω $f : G \to \mathbb{C}$ αναλυτική, τέτοια ώστε $f'(z) = 0$ για κάθε $z \in G$. Τότε η f είναι σταθερή.*

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε $z_0 \in G$ και θέτουμε

$$A = \{z \in G : f(z) = f(z_0)\}.$$

Το A είναι προφανώς μη κενό. Θα δείξουμε ότι είναι ανοιχτό και κλειστό στο G, επομένως $A = G$. Έστω $z = x+iy \in A$. Αφού $z \in G$, υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $D(z,\varepsilon) \subset G$. Επιλέγουμε τυχόν $w \in D(z,\varepsilon)$. Τότε $w = z+h$ για κάποιο $h = s+it \in D(0,\varepsilon)$. Από το Θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχουν s_1, s_2, t_1, t_2 με $|s_1|, |s_2| < |s|$ και $|t_1|, |t_2| < |t|$ τέτοια ώστε

$$f(w) - f(z) = u_x(x+s_1, y+t)s + u_y(x, y+t_1)t + i[v_x(x+s_2, y+t)s + v_y(x, y+t_2)t] = 0,$$

διότι υποθέσαμε ότι $f'(z) = 0$ για κάθε $z \in G$. Επομένως $f(w) = f(z) = f(z_0)$. Άρα $w \in A$ και, αφού το w ήταν τυχόν, $D(z,\varepsilon) \subset A$. Συνεπώς το A είναι ανοιχτό. Τέλος, το A είναι κλειστό στο G διότι η f είναι συνεχής. □

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.5, μπορούμε να κατασκευάσουμε μη τετριμμένες αναλυτικές συναρτήσεις.

- (Η μιγαδική εκθετική συνάρτηση.) Για κάθε $z = x+iy \in \mathbb{C}$ θέτουμε

  $$\exp(z) = e^z = e^x(\cos y + i \sin y).$$

  Η exp είναι αναλυτική (από το Θεώρημα 2.5), $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, είναι περιοδική με περίοδο $2\pi i$ και ικανοποιεί τις σχέσεις $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$ για κάθε $z, w \in \mathbb{C}$, και $(\exp)' = \exp$.
- (Οι μιγαδικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις.) Ορίζουμε τις συναρτήσεις $\sin, \cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ με

  $$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}), \ \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}).$$

  Οι συναρτήσεις αυτές είναι αναλυτικές διότι η exp είναι αναλυτική, και ικανοποιούν τις σχέσεις

  $$\sin' z = \cos z, \ \cos' z = -\sin z, \ \sin^2 z + \cos^2 z = 1.$$
- (Ο κύριος κλάδος τού μιγαδικού λογαρίθμου.) Θέτουμε $A = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} : x \le 0\}$ και ορίζουμε τη συνάρτηση $\log : A \to \mathbb{C}$ με

  $$\log z = \log|z| + i \arg z.$$

  Η log είναι συνεχής και $\exp(\log z) = z$. Εφόσον η exp είναι αναλυτική, από το Θεώρημα Αντίστροφης Απεικόνισης έχουμε ότι και η log είναι αναλυτική. Από το ίδιο θεώρημα παίρνουμε ότι

  $$\log' z = \frac{1}{z}, \ z \in A.$$
- (Η μιγαδική δύναμη.) Αν A είναι όπως παραπάνω, τότε για $a \in \mathbb{C}$, $z \in A$, θέτουμε $z^a = \exp(a \log z)$. Η z^a είναι αναλυτική στο A σαν σύνθεση αναλυτικών συναρτήσεων. Εύκολα βλέπουμε ότι

  $$(z^a)' = az^{a-1}, \ z \in A.$$

Ολοκλήρωση σε μονοπάτια

Ορισμός 2.7. *Έστω $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ένα μονοπάτι και $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ μια συνεχής συνάρτηση. Τότε ορίζουμε το ολοκλήρωμα τής f πάνω στο γ ως εξής.*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt.$$

Απο τώρα και στο εξής, όταν γράφουμε $\int_\gamma f(z)\,dz$, θα υποθέτουμε ότι το γ είναι ένα μονοπάτι και ότι η f είναι συνεχής στο γ^*. Η ακόλουθη ανισότητα θα χρησιμοποιείται συχνά.

Πρόταση 2.8. *Έστω f και γ όπως στον ορισμό. Τότε*

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \le M_f(\gamma)\ell(\gamma),$$

όπου

$$M_f(\gamma) = \max\{|f(z)| : z \in \gamma^*\},\ \ \ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt \text{ (το μήκος του } \gamma).$$

Απόδειξη. Άσκηση. □

Στην απόδειξη τού θεωρήματος τού Cauchy για ένα τρίγωνο, θα χρειαστεί να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int_\gamma z^n\,dz$, όπου το γ παριστάνει το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει δυο σημεία z_1 και z_2. Η απάντηση είναι η αναμενόμενη.

Ορισμός 2.9. *Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ και έστω ότι*

$$\int_{[z_1,z_2]} f(z)\,dz$$

συμβολίζει το ολοκλήρωμα της f πάνω στο μονοπάτι

$$\gamma : [0,1] \to \mathbb{C},\ \ \gamma(t) = (1-t)z_1 + tz_2.$$

Αν Γ είναι ένα πολύγωνο με διαδοχικές κορυφές $z_1, z_2, \ldots, z_n$, τότε θέτουμε

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{[z_k,z_{k+1}]} f(z)\,dz$$

Πρόταση 2.10. *Για κάθε $n = 0, 1, 2, \ldots$ έχουμε*

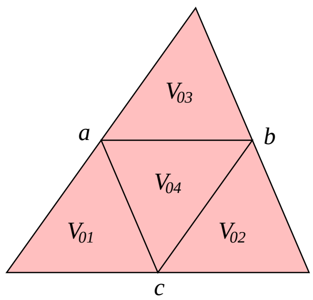
$$\int_{[z_1,z_2]} z^n\,dz = \frac{1}{n+1}(z_2^{n+1} - z_1^{n+1}).$$

Απόδειξη. Άσκηση. □

Θεώρημα 2.11 (Το Θεώρημα τού Cauchy για τρίγωνα). *Έστω Γ ένα τρίγωνο τέτοιο ώστε το Γ και το εσωτερικό του περιέχονται σ' ένα ανοιχτό σύνολο $U \subset \mathbb{C}$. Αν η f είναι αναλυτική στο U, τότε*

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0.$$

Απόδειξη. Χωρίζουμε το εσωτερικό τού Γ όπως φαίνεται στο σχήμα (τα a, b και c είναι τα μέσα των πλευρών τού τριγώνου).



Έστω Γ_{0j} το σύνορο του V_{0j}, $j = 1, 2, 3, 4$. Τότε, υποθέτοντας ότι έχουμε διατάξει τις κορυφές όλων των τριγώνων με φορά αντίθετη από τη φορά των δεικτών τού ρολογιού, παίρνουμε

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{4} \int_{\Gamma_{0j}} f(z)\,dz.$$

Έστω τώρα k τέτοιο ώστε

$$\left|\int_{\Gamma_{0k}} f(z)\,dz\right| = \max\left\{\left|\int_{\Gamma_{0j}} f(z)\,dz\right| : j = 1, 2, 3, 4\right\}.$$

Θέτουμε $\Gamma_1 = \Gamma_{0k}$ και $V_1 = V_{0k}$. Τότε

$$\left|\int_\Gamma f(z)\,dz\right| \le 4\left|\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz\right|.$$

Ομοίως, χωρίζουμε το εσωτερικό τού Γ_1 στα σύνολα $V_{11}, V_{12}, V_{13}, V_{14}$ και παίρνουμε

$$\left|\int_{\Gamma_1} f(z)\,dz\right| \le 4\left|\int_{\Gamma_2} f(z)\,dz\right|,$$

όπου Γ_2 είναι κάποιο από τα «υποτρίγωνα» τού Γ_1. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο παίρνουμε μια φθίνουσα ακολουθία συνόλων $V_1 \supset V_2 \supset V_3 \supset \cdots$ (V_n είναι το εσωτερικό τού τριγώνου Γ_n), τέτοια ώστε

(1)
$$\left|\int_\Gamma f(z)\,dz\right| \le 4^n\left|\int_{\Gamma_n} f(z)\,dz\right|.$$

Έστω $\overline{V}_n$ το κλειστό τριγωνικό σύνολο $V_n \cup \Gamma_n$. Τότε η $\{\overline{V}_n\}$ είναι μια φθίνουσα ακολουθία κλειστών συνόλων. Επιπλέον, αφού το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει τα μέσα δυο πλευρών ενός τριγώνου έχει το μισό μήκος από το μήκος τής απέναντι πλευράς, έχουμε

$$\text{μήκος}(\Gamma_n) = \frac{1}{2}\cdot \text{μήκος}(\Gamma_{n-1}).$$

Επομένως

$$\operatorname{diam}(\overline{V}_n) \le \text{μήκος}(\Gamma_n) = \frac{1}{2^n}\cdot \text{μήκος}(\Gamma) \to 0.$$

Από το Θεώρημα Cantor, η τομή $\bigcap_{n=1}^\infty \overline{V}_n$ περιέχει ακριβώς ένα σημείο, έστω z_0. Αφού η f είναι αναλυτική στο z_0, για δοσμένο $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε

$$\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0)\right| < \varepsilon \quad \text{για} \quad 0 < |z-z_0| < \delta.$$

Συνεπώς, αν ορίσουμε

$$g(z) = f(z) - f(z_0) - (z-z_0)f'(z_0),$$

έχουμε

$$|g(z)| \le \varepsilon|z-z_0| \quad \text{για} \quad 0 \le |z-z_0| < \delta.$$

Τώρα, για n αρκετά μεγάλο, έχουμε

$$\overline{V}_n \subset \{z : |z-z_0| < \delta\},$$

και έτσι

(2)
$$\int_{\Gamma_n} f(z)\,dz = \int_{\Gamma_n} [f(z_0) + (z-z_0)f'(z_0)]\,dz + \int_{\Gamma_n} g(z)\,dz,$$

όπου $|g(z)| \le \varepsilon|z-z_0|$ για $z \in \Gamma_n$. Το πρώτο ολοκλήρωμα στο δεξιά μέλος τής (2) είναι ίσο με μηδέν από την Πρόταση 2.10. Από την Πρόταση 2.8, το δεύτερο ολοκλήρωμα είναι, σε απόλυτη τιμή, μικρότερο από ή ίσο με

$$\varepsilon\cdot\max\{|z-z_0| : z\in\Gamma_n\}\cdot \text{μήκος}(\Gamma_n) \le \varepsilon\cdot[\text{μήκος}(\Gamma_n)]^2 = \frac{\varepsilon}{4^n}\cdot[\text{μήκος}(\Gamma)]^2.$$

Η (1) και (2) μάς δίνουν

$$\left|\int_\Gamma f(z)\,dz\right| \le \varepsilon\cdot[\text{μήκος}(\Gamma)]^2.$$

Αφού το ε είναι αυθαίρετο, έχουμε το ζητούμενο. □

Χωρίς πολλή επιλέον προσπάθεια, μπορούμε να δείξουμε ότι αν U είναι ένα ανοιχτό και κυρτό υποσύνολο τού $\mathbb{C}$ και η f είναι αναλυτική στο U, τότε το ολοκλήρωμα τής f πάνω σε οποιοδήποτε κλειστό μονοπάτι στο U είναι μηδέν. Πρώτα δείχνουμε ότι για κάθε ανοιχτό σύνολο U η πρόταση «$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ για κάθε κλειστό μονοπάτι γ στο U» είναι ισοδύναμη με την πρόταση «η f έχει παράγουσα στο U».

Ορισμός 2.12. *Έστω U ένα ανοιχτό υποσύνολο τού $\mathbb{C}$ και $f : U \to \mathbb{C}$. Μια (αναλυτική) συνάρτηση $F : U \to \mathbb{C}$ λέγεται **παράγουσα** τής f αν $F' = f$ στο U.*

Πρόταση 2.13. *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό και $f : U \to \mathbb{C}$ συνεχής. Τότε η f έχει παράγουσα στο U αν και μόνο αν $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ για κάθε κλειστό μονοπάτι γ στο U.*

Απόδειξη. Αν $F' = f$ στο U, τότε για οποιοδήποτε κλειστό μονοπάτι $\gamma : [a, b] \to U$, το Θεμελιώδες Θεώρημα τού Απειροστικού Λογισμού μάς δίνει

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = [F(\gamma(t))]_a^b = 0.$$

Αντίστροφα, έστω ότι $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ για κάθε κλειστό μονοπάτι γ στο U. Αρχικά υποθέτουμε ότι το U είναι συνεκτικό. Σταθεροποιούμε ένα σημείο $z_0 \in U$ και ορίζουμε

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(w)\,dw,\ z \in U,$$

όπου γ_z οποιοδήποτε μονοπάτι συνδέει το z_0 με το z. Η συνεκτικότητα τού U και η υπόθεση μάς εξασφαλίζουν ότι η F είναι καλά ορισμένη (το ολοκλήρωμα εξαρτάται μόνο από τα σημεία z_0, z και όχι από το μονοπάτι που τα συνδέει). Τώρα για h αρκετά κοντά στο 0 έχουμε

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| = \left|\frac{1}{h}\int_{[z,z+h]}[f(w)-f(z)]\,dw\right| \le \frac{1}{|h|}\max\{|f(w)-f(z)| : w \in [z, z+h]\}|h| \to 0,$$

καθώς $h \to 0$, διότι η f είναι συνεχής. Αν τώρα το U δεν είναι συνεκτικό, εφαρμόζουμε αυτό που αποδείξαμε σε κάθε συνεκτική συνιστώσα τού U. □

Αν το U είναι κυρτό, τότε αρκεί να πάρουμε τρίγωνα στην υπόθεση για το αντίστροφο τής προηγούμενης πρότασης.

Πρόταση 2.14. *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό και κυρτό, και $f : U \to \mathbb{C}$ συνεχής. Αν $\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$ για κάθε τρίγωνο Γ στο U, τότε η f έχει παράγουσα στο U, και άρα $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ για κάθε κλειστό μονοπάτι γ στο U.*

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε $z_0 \in U$ και ορίζουμε

$$F(z) = \int_{[z_0,z]} f(w)\,dw,\ z \in U.$$

Η παραπάνω έκφραση έχει νόημα διότι $[z_0, z] \subset U$ λόγω κυρτότητας. Υποθέτοντας ότι $\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$ για κάθε τρίγωνο Γ στο U, έχουμε

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} f(w)\,dw,$$

και το επιχείρημα τής προηγούμενης πρότασης μάς δίνει $F' = f$ στο U. □

Είμαστε τώρα σε θέση να αποδείξουμε το βασικό αποτέλεσμα αυτής τής ενότητας.

Θεώρημα 2.15. *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό και $f : U \to \mathbb{C}$ συνεχής στο U και αναλυτική στο $U \setminus \{z_0\}$, όπου z_0 κάποιο σταθεροποιημένο σημείο τού U. Αν Γ είναι ένα τρίγωνο τέτοιο ώστε το Γ και το εσωτερικό του περιέχονται στο U, τότε*

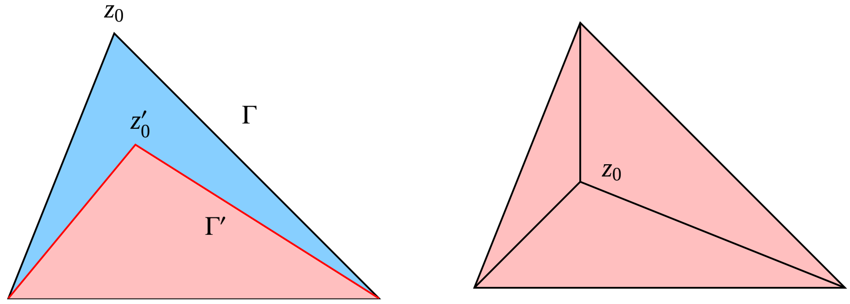
$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0.$$

Έτσι, αν το U είναι κυρτό, έπεται από την Πρόταση 2.14 ότι $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ για κάθε κλειστό μονοπάτι γ στο U. Αυτό είναι το ***Θεώρημα τού Cauchy για κυρτά σύνολα.***

Απόδειξη. Έστω V το εσωτερικό τού Γ. Αν $z_0 \notin V \cup \Gamma$, τότε $\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$ από το Θεώρημα 2.11. Αν z_0 είναι μια κορυφή τού Γ, τότε αντικαθιστούμε το z_0 με ένα «γειτονικό» σημείο $z_0' \in V$ όπως στο σχήμα. Έτσι $\int_{\Gamma'} f(z)\,dz = 0$ πάλι από το Θεώρημα 2.11. Αλλά

$$\int_{\Gamma'} f(z)\,dz \to \int_\Gamma f(z)\,dz$$

καθώς $z_0' \to z_0$, διότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $V \cup \Gamma$. Τέλος, αν $z_0 \in V$ ή $z_0 \in \Gamma$ αλλά το z_0 δεν είναι κορυφή τού Γ, τότε χωρίζουμε το Γ σε τρία «υποτρίγωνα» έτσι ώστε το καθένα να έχει το z_0 κορυφή, και το συμπέρασμα έπεται από την προηγούμενη περίπτωση. □



Θα δείξουμε αργότερα ότι αν μια συνάρτηση είναι συνεχής στο U και αναλυτική στο $U \setminus \{z_0\}$, τότε είναι κατ' ανάγκη αναλυτική στο U.

Δυναμοσειρές

Το βασικό αποτέλεσμα που θα δείξουμε στην ενότητα αυτήν είναι ότι μια συνάρτηση είναι αναλυτική σ' ένα σημείο z_0 αν και μόνο αν μπορεί να αναπαρασταθεί σαν συγκλίνουσα δυναμοσειρά σε μια περιοχή τού z_0.

Ορισμός 2.16. *Μια **δυναμοσειρά** είναι ένα (τυπικό) άθροισμα τής μορφής*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

όπου a_n μια ακολουθία μιγαδικών αριθμών και z_0 κάποιο σταθεροποιημένο σημείο. Το z το θεωρούμε μεταβλητή.

- *Η δυναμοσειρά λέγεται **συγκλίνουσα** στο σημείο z, αν και μόνο αν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k (z - z_0)^k$ συγκλίνει σε κάποιον μιγαδικό αριθμό καθώς $n \to +\infty$.*
- *Η δυναμοσειρά λέγεται **απολύτως συγκλίνουσα** στο z, αν και μόνο αν*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n (z - z_0)^n| < +\infty.$$

- *Η δυναμοσειρά λέγεται **ομοιόμορφα συγκλίνουσα** σ' ένα σύνολο A, αν και μόνο αν υπάρχει μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε $S_n \to f$ ομοιόμορφα στο A.*

Το ακόλουθο αποτέλεσμα μάς λέει ότι το σύνολο των σημείων στα οποία μια δυναμοσειρά συγκλίνει είναι ένας δίσκος μαζί, ενδεχομένως, με ένα κομμάτι τού συνόρου του.

Πρόταση 2.17. *Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$. Υποθέτουμε ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ συγκλίνει για κάποιο $z \neq z_0$. Θέτουμε $r = |z - z_0|$. Τότε η σειρά συγκλίνει απόλυτα στον ανοιχτό δίσκο $D(z_0, r)$, και ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο τού $D(z_0, r)$.*

Απόδειξη. Εφόσον η σειρά συγκλίνει, έχουμε ότι $|a_n (z - z_0)^n| \leq M$ για κάποιο $M > 0$. Αν $w \in D(z_0, r)$, τότε

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n (w - z_0)^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n (z - z_0)^n| \left| \frac{w - z_0}{z - z_0} \right|^n \leq M \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|w - z_0|}{r} \right)^n < +\infty,$$

διότι $|w - z_0| < r$. Έστω τώρα $K \subset D(z_0, r)$ συμπαγές. Τότε υπάρχει r_1, με $0 < r_1 < r$, τέτοιο ώστε $K \subset D(z_0, r_1)$. Επομένως, για κάθε $w \in K$ έχουμε

$$|a_n (w - z_0)^n| = |a_n (z - z_0)^n| \left| \frac{w - z_0}{z - z_0} \right|^n \leq M \left(\frac{r_1}{r} \right)^n.$$

Αφού $\sum_{n=0}^{\infty} (r_1/r)^n < +\infty$, το συμπέρασμα έπεται από το κριτήριο τού Weierstrass. □

Θα συσχετίσουμε τώρα τη σύγκλιση μιας δυναμοσειράς με τη συμπεριφορά των συντελεστών της.

Πρόταση 2.18. *Έστω $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ μια δυναμοσειρά. Θέτουμε*

$$r = (\limsup |a_n|^{1/n})^{-1}.$$

*Ο αριθμός αυτός ονομάζεται **ακτίνα σύγκλισης** τής σειράς (κάνουμε τις συνηθισμένες συμβάσεις $1/0 = \infty$ και $1/+\infty = 0$). Αν $0 < r < +\infty$, τότε η σειρά συγκλίνει απόλυτα στον ανοιχτό δίσκο $D(z_0, r)$ και ομοιόμορφα στα* *συμπαγή υποσύνολα τού $D(z_0, r)$. Η σειρά αποκλίνει για $|z - z_0| > r$. Αν $r = 0$, τότε η σειρά συγκλίνει μόνο για $z = z_0$. Αν $r = +\infty$, τότε η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα σε όλα τα συμπαγή υποσύνολα τού $\mathbb{C}$.*

Απόδειξη. Αποδεικνύουμε μόνο την περίπτωση $0 < r < +\infty$. Αν $|z - z_0| < r$, τότε

$$\limsup |a_n(z - z_0)^n|^{1/n} = \frac{|z - z_0|}{r} < 1.$$

Από το κριτήριο ρίζας, η σειρά συγκλίνει απόλυτα στον $D(z_0, r)$. Η ομοιόμορφη σύγκλιση στα συμπαγή υποσύνολα τού $D(z_0, r)$ έπεται από την Πρόταση 2.17. Αν τώρα η σειρά συνέκλινε σε κάποιο σημείο z με $|z - z_0| > r$, τότε θα είχαμε, από την Πρόταση 2.17, ότι θα συνέκλινε απόλυτα σε όλα τα σημεία z' με $r < |z' - z_0| < |z - z_0|$. Αλλά

$$\limsup |a_n(z' - z_0)^n|^{1/n} = \frac{|z' - z_0|}{r} > 1,$$

το οποίο είναι άτοπο από το κριτήριο ρίζας. □

Για να μπορέσουμε να συσχετίσουμε αναλυτικές συναρτήσεις και δυναμοσειρές, πρέπει να δείξουμε ένα πολύ σημαντικό ενδιάμεσο αποτέλεσμα. Αν η f είναι αναλυτική σ' έναν κλειστό δίσκο, τότε η τιμή τής f σε οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο τού δίσκου καθορίζεται πλήρως από τις τιμές τής f πάνω στο σύνορο τού δίσκου. Επιπλέον, θα δώσουμε έναν τύπο ο οποίος περιγράφει ακριβώς αυτήν την εξάρτηση. Παρατηρήστε πάλι τη διαφορά με την κατάσταση που ξέρετε στην Πραγματική Ανάλυση. Μια διαφορίσιμη πραγματική συνάρτηση δεν έχει κατ' ανάγκη αυτήν την ιδιότητα.

Ορισμός 2.19. *Αν Γ είναι ο κύκλος $\{z : |z - z_0| = r\}$ τότε θέτουμε*

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) ire^{it}\,dt.$$

Δηλαδή

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz, \quad \text{όπου } \gamma(t) = z_0 + re^{it},\ t \in [0, 2\pi].$$

Θεώρημα 2.20 (Ο Ολοκληρωτικός Τύπος τού Cauchy για κύκλους). *Έστω V ένα ανοιχτό υποσύνολο τού $\mathbb{C}$ το οποίο περιέχει τον κύκλο $\Gamma = \{z : |z - z_0| = r\}$ και το εσωτερικό τού Γ, δηλαδή τον ανοιχτό δίσκο $U = D(z_0, r)$. Έστω $f : V \to \mathbb{C}$ μια αναλυτική συνάρτηση. Τότε για κάθε $z \in U$*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z}\,dw.$$

Απόδειξη. Θέτουμε

$$g(w) = \begin{cases} \dfrac{f(w) - f(z)}{w - z}, & \text{αν } w \in U,\ w \neq z \\ f'(z), & \text{αν } w = z \end{cases}.$$

Τότε η g είναι συνεχής στο U και αναλυτική στο $U \setminus \{z\}$, επομένως, από το Θεώρημα 2.15, έχουμε ότι $\int_\Gamma g(w)\,dw = 0$ (παρατηρήστε ότι υπάρχει έναν ανοιχτός δίσκος D τέτοιος ώστε $\Gamma \cup U \subset D \subset V$. •Ετσι, αφού ο D είναι κυρτό σύνολο, μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 2.15). Άρα

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z}\,dw = \frac{f(z)}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{dw}{w - z}.$$

Τώρα

$$\int_\Gamma \frac{dw}{w - z} = \int_\Gamma \frac{dw}{(w - z_0) - (z - z_0)} = \int_\Gamma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}}\,dw.$$

Εφόσον

$$\left| \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}} \right| = \frac{|z - z_0|^n}{r^{n+1}} \quad \text{και} \quad |z - z_0| < r,$$

έχουμε ότι η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα (κριτήριο Weierstrass), άρα μπορούμε να εναλλάξουμε το ολοκλήρωμα με το άπειρο άθροισμα. Αλλά

$$\int_\Gamma \frac{1}{(w - z_0)^{n+1}}\,dw = \int_0^{2\pi} r^{-(n+1)} e^{-i(n+1)t} ire^{it}\,dt = \begin{cases} 0 & \text{αν } n = 1, 2, \dots \\ 2\pi i & \text{αν } n = 0. \end{cases}$$

Συνεπώς

$$\int_\Gamma \frac{dw}{w-z} = 2\pi i.$$

□

Στην παραπάνω απόδειξη υπολογίσαμε ένα χρήσιμο ολοκλήρωμα. Απομονώνουμε αυτόν τον υπολογισμό.

Λήμμα 2.21. *Αν Γ είναι ένας κύκλος, τότε*

$$\int_\Gamma \frac{dw}{w-z} = \begin{cases} 2\pi i & \text{αν το } z \text{ είναι στο εσωτερικό τού } \Gamma \\ 0 & \text{αν το } z \text{ είναι στο εξωτερικό τού } \Gamma. \end{cases}$$

Απόδειξη. Αν το z είναι μέσα στον κύκλο, τότε χρησιμοποιούμε το επιχείρημα τής προηγούμενης απόδειξης. Αν το z βρίσκεται έξω από τον κύκλο, τότε η συνάρτηση $f(w) = (w-z)^{-1}$ είναι αναλυτική σ' έναν ανοιχτό δίσκο ο οποίος περιέχει τον Γ αλλά όχι το z. Το συμπέρασμα τώρα έπεται από το Θεώρημα 2.15. □

Μια άλλη ιδιότητα των μιγαδικών συναρτήσεων η οποία δεν έχει κάποιο ανάλογο στην Πραγματική Ανάλυση είναι ότι αν η f είναι αναλυτική σ' ένα ανοιχτό σύνολο U, τότε η f είναι απείρως παραγωγίσιμη, και μάλιστα η n-τάξης παράγωγός της μπορεί να βρεθεί αν παραγωγίσουμε n φορές τον Ολοκληρωτικό Τύπο τού Cauchy.

Θεώρημα 2.22 (Ο Ολοκληρωτικός Τύπος τού Cauchy για παραγώγους). *Έστω $V \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό και $f : V \to \mathbb{C}$ αναλυτική. Τότε η f έχει παραγώγους όλων των τάξεων στο V. Ειδικότερα, για κάθε $z \in V$, αν U είναι ένας ανοιχτός δίσκος με περιφέρεια Γ τέτοιος ώστε $z \in U$ και $U \cup \Gamma \subset V$, τότε*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{n+1}}\, dw.$$

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο n. Κατ' αρχάς αποδεικνύουμε τον τύπο για $n = 1$. Από το Θεώρημα 2.20, έχουμε για h αρκετά κοντά στο 0

$$\begin{aligned} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{(w-z)^2}\, dw &= \frac{1}{2\pi i h}\int_\Gamma \left[\frac{f(w)}{w-z-h} - \frac{f(w)}{w-z} - \frac{hf(w)}{(w-z)^2}\right] dw \\ &= \frac{h}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{(w-z)^2(w-z-h)}\, dw \to 0, \text{ καθώς } h \to 0 \end{aligned}$$

διότι η f είναι φραγμένη στον Γ και η ποσότητα $|(w-z)^2(w-z-h)|$ είναι κάτω φραγμένη από μια θετική σταθερά. Τώρα υποθέτουμε ότι έχουμε αποδείξει τον τύπο για $n = k$. Τότε

$$\begin{aligned} \frac{f^{(k)}(z+h) - f^{(k)}(z)}{h} - \frac{(k+1)!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{(w-z)^{k+2}}\, dw &= \frac{k!}{2\pi i h}\int_\Gamma \left[\frac{f(w)}{(w-z-h)^{k+1}} - \frac{f(w)}{(w-z)^{k+1}} - \frac{h(k+1)f(w)}{(w-z)^{k+2}}\right] dw \\ &= \frac{hk!}{2\pi i}\int_\Gamma f(w)G(w,z,h)\, dw, \end{aligned}$$

όπου η $G(w,z,h)$ είναι ίση με

$$\frac{\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k+1}{j}(w-z)^{j+1}(-h)^{k-j-1} - (k+1)\sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j}(w-z)^j(-h)^{k-j}}{(w-z-h)^{k+1}(w-z)^{k+2}}.$$

Η παραπάνω ποσότητα είναι φραγμένη, επομένως

$$\frac{hk!}{2\pi i}\int_\Gamma f(w)G(w,z,h)\, dw \to 0, \text{ καθώς } h \to 0.$$

Άρα ο τύπος ισχύει για $n = k+1$. □

Πόρισμα 2.23. *Αν μια συνάρτηση f έχει παράγουσα σ' ένα ανοιχτό σύνολο U, τότε η f είναι αναλυτική στο U.*

Απόδειξη. Άμεση από το Θεώρημα 2.22. □

Πόρισμα 2.24. *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό και $f : U \to \mathbb{C}$ συνεχής. Αν $z_0 \in U$ και η f είναι αναλυτική στο $U \setminus \{z_0\}$, τότε η f είναι αναλυτική στο U.*

Απόδειξη. Έστω $D = D(z_0, r) \subset U$. Αρκεί να δείξουμε ότι η f είναι αναλυτική στο D. Από το Θεώρημα 2.15, $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ για κάθε κλειστό μονοπάτι γ στο D, επομένως, από την Πρόταση 2.13, η f έχει παράγουσα στο D. Άρα, από το Πόρισμα 2.23, η f είναι αναλυτική στο D. □

Είδαμε ότι αν η f είναι αναλυτική σ' ένα ανοιχτό και κυρτό σύνολο U, τότε το ολοκλήρωμα τής f πάνω σε οποιοδήποτε κλειστό μονοπάτι στο U είναι 0. Θα δείξουμε ότι το αντίστροφο ισχύει χωρίς την υπόθεση τής κυρτότητας.

Θεώρημα 2.25 (Το Θεώρημα Morera). *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό και $f : U \to \mathbb{C}$ συνεχής. Αν $\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$ για κάθε τρίγωνο Γ στο U, τότε η f είναι αναλυτική στο U.*

Απόδειξη. Έστω D ένας ανοιχτός δίσκος που περιέχεται στο U. Από την Πρόταση 2.14, η f έχει παράγουσα στο D. Από το Πόρισμα 2.23, η f είναι αναλυτική στο D. Αφού ο D ήταν τυχόντας, η f είναι αναλυτική σ' ολόκληρο το U. □

Το επιχείρημα στην απόδειξη τού Θεωρήματος 2.22 δείχνει ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε αναλυτικές συναρτήσεις μέσω ολοκληρωμάτων.

Πρόταση 2.26. *Έστω γ ένα μονοπάτι και $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ συνεχής. Για κάθε $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ ορίζουμε*

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\,dw.$$

Τότε η g έχει παραγώγους όλων των τάξεων, και

$$g^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w - z)^{n+1}}\,dw.$$

Επιπλέον, $g^{(n)}(z) \to 0$ καθώς $z \to \infty$, για κάθε n.

Απόδειξη. Η απόδειξη τού Θεωρήματος 2.22 μπορεί να επαναληφθεί κατά λέξη. Ο μόνος λόγος που χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η f ήταν αναλυτική (και ότι το Γ ήταν κύκλος), ήταν για να εκφράσουμε την $f(z)$ μέσω τής $f(w)$, $w \in \Gamma$, χρησιμοποιώντας τον Ολοκληρωτικό Τύπο τού Cauchy. Στην παρούσα κατάσταση, αυτό είναι ήδη τμήμα τής υπόθεσης. Τέλος, το γ^* είναι ένα συμπαγές και επομένως φραγμένο σύνολο, άρα περιέχεται σε κάποιον κλειστό δίσκο $\overline{D}(0, r)$. Αν $|f| \le M$ στο γ^*, τότε για $|z| > r$ έχουμε

$$|g^{(n)}(z)| \le \frac{n!}{2\pi}\frac{M}{(|z| - r)^{n+1}} \cdot \text{μήκος}(\gamma) \to 0,$$

καθώς $z \to \infty$. □

Ο Ολοκληρωτικός Τύπος τού Cauchy μάς επιτρέπει να αποδείξουμε ότι μια αναλυτική συνάρτηση μπορεί να αναπαρασταθεί τοπικά σαν συγκλίνουσα δυναμοσειρά.

Πρόταση 2.27 (Ανάπτυγμα Taylor). *Έστω f αναλυτική στο $D(z_0, r)$. Τότε*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n, \quad z \in D(z_0, r).$$

Η σειρά συγκλίνει απόλυτα στο $D(z_0, r)$ και ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα τού $D(z_0, r)$.

Απόδειξη. Έστω r_1 με $0 < r_1 < r$. Θέτουμε $\Gamma = \{w : |w - z_0| = r_1\}$. Από το Θεώρημα 2.20, έχουμε

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z_0}\left[\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}}\right] dw = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \sum_{n=0}^{\infty} f(w)\frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}}\,dw,$$

για κάθε $z \in D(z_0, r_1)$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $w \in \Gamma$, έχουμε

$$\frac{|f(w)(z - z_0)^n|}{|w - z_0|^{n+1}} \le \frac{\max\{|f(w)| : w \in \Gamma\}}{r_1}\left(\frac{|z - z_0|}{r_1}\right)^n.$$

Επομένως, από το κριτήριο τού Weierstrass, η σειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(w)\frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα για $w \in \Gamma$, άρα μπορούμε να εναλλάξουμε το άθροισμα και το ολοκλήρωμα. Συνεπώς

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(z - z_0)^n \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}\,dw = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n,$$

από το Θεώρημα 2.22. Αφού το r_1 είναι αυθαίρετο, έχουμε σύγκλιση για κάθε $z \in D(z_0, r)$. Η απόλυτη και η ομοιόμορφη σύγκλιση έπονται από την Πρόταση 2.17. □

Τυπικά παραδείγματα αναπτυγμάτων Taylor είναι τα ακόλουθα.

$$\begin{aligned}
e^z &= 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots, \ z \in \mathbb{C}\\
\cos z &= 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \ z \in \mathbb{C}\\
\sin z &= z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + (-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \ z \in \mathbb{C}\\
\log z &= (z - 1) - \frac{(z-1)^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{(z-1)^n}{n} + \cdots, \ z \in D(1, 1).
\end{aligned}$$

Παρατηρήστε την αναλογία με τα αντίστοιχα αναπτύγματα από τον Απειροστικό Λογισμό. Για να αποδείξουμε το αντίστροφο τής παραπάνω πρότασης, δηλαδή ότι κάθε συγκλίνουσα δυναμοσειρά ορίζει μια αναλυτική συνάρτηση, χρειαζόμαστε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Πρόταση 2.28. *Έστω $f_1, f_2, \ldots$ μια ακολουθία αναλυτικών συναρτήσεων σ' ένα ανοιχτό σύνολο $U \subset \mathbb{C}$. Υποθέτουμε ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα τού U. Τότε η f είναι αναλυτική στο U. Επιπλέον, για κάθε m, έχουμε $f_n^{(m)} \to f^{(m)}$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα τού U.*

Απόδειξη. Έστω $z_0 \in U$. Επιλέγουμε $r > 0$ τέτοιο ώστε $\overline{D}(z_0, r) \subset U$, και θέτουμε

$$\Gamma = \{w : |w - z_0| = r\}.$$

Από το Θεώρημα 2.20 έχουμε

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f_n(w)}{w - z}\,dw,$$

για κάθε $z \in D(z_0, r)$. Αφού η ποσότητα $|w - z|$, $w \in \Gamma$ είναι κάτω φραγμένη από μια θετική σταθερά, έχουμε ότι

$$\frac{f_n(w)}{w - z} \to \frac{f(w)}{w - z}$$

ομοιόμορφα στο Γ. Επομένως

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z}\,dw.$$

Το ολοκλήρωμα υπάρχει διότι η f είναι συνεχής στο Γ ως ομοιόμορφο όριο συνεχών συναρτήσεων. Τώρα, από την Πρόταση 2.26, η f είναι αναλυτική στον $D(z_0, r)$, και αφού το z_0 είναι τυχόν, η f είναι αναλυτική σ' ολόκληρο το U. Τέλος, από το Θεώρημα 2.22, έχουμε

$$f_n^{(m)}(z) - f^{(m)}(z) = \frac{m!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f_n(w) - f(w)}{(w - z)^{m+1}}\,dw, \ z \in D(z_0, r).$$

Αν τώρα $z \in \overline{D}(z_0, r_1)$, όπου $r_1 < r$, τότε, από την Πρόταση 2.8, έχουμε

$$|f_n^{(m)}(z) - f^{(m)}(z)| \le \frac{m!}{2\pi}\max_{w\in\Gamma}|f_n(w) - f(w)|\frac{2\pi r}{(r - r_1)^{m+1}} \to 0, \ \text{καθώς } n \to +\infty.$$

Επομένως $f_n^{(m)} \to f^{(m)}$ ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό υποδίσκο τού $D(z_0, r)$, άρα σε κάθε κλειστό υποδίσκο τού U (διότι το z_0 είναι τυχόν), άρα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο τού U (διότι κάθε συμπαγές υποσύνολο τού U μπορεί να καλυφθεί από πεπερασμένο πλήθος κλειστών υποδίσκων τού U). □

Μπορούμε τώρα να δείξουμε το βασικό αποτέλεσμα αυτής τής ενότητας.

Θεώρημα 2.29. *Η f είναι αναλυτική στο z_0 αν και μόνο αν η f μπορεί να αναπαρασταθεί σαν μια δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ σε μια περιοχή τού z_0.*

Απόδειξη. Το ευθύ προκύπτει από την Πρόταση 2.27. Για το αντίστροφο, έχουμε ότι για κάθε n, η $\sum_{k=0}^{n} a_k(z-z_0)^k$ είναι αναλυτική στο $\mathbb{C}$ και συγκλίνει στην $f(z)$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα κάποιου δίσκου $D(z_0, r)$. Επομένως, η f είναι αναλυτική από την Πρόταση 2.28. □

Τέλος, δείχνουμε ότι οι συντελεστές τού αναπτύγματος σε δυναμοσειρά μιας αναλυτικής συνάρτησης f είναι μοναδικοί, και ότι οι παράγωγοι τής f μπορούν να βρεθούν αν παραγωγίσουμε τους όρους τής δυναμοσειράς.

Πρόταση 2.30. *Αν $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ για $z \in D(z_0, r)$, τότε*

(1) $f^{(m)}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} a_n n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)(z-z_0)^{n-m}$, $m = 1, 2, \ldots$.

(2) $a_n = f^{(n)}(z_0)/n!$, *για κάθε n. Δηλαδή, η δυναμοσειρά συμπίπτει με το ανάπτυγμα Taylor.*

Απόδειξη.

(1) Από την Πρόταση 2.17, $\sum_{k=0}^{n} a_k(z-z_0)^k \to f(z)$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα τού $D(z_0, r)$. Από την Πρόταση 2.28, έχουμε

$$\sum_{k=m}^{n} a_k k(k-1)\cdots(k-m+1)(z-z_0)^{k-m} \to f^{(m)}(z).$$

(2) Θέτουμε $z = z_0$ στο (1) και παίρνουμε $f^{(m)}(z_0) = a_m m!$.

□

Εφαρμογές

Στην ενότητα αυτή θα δείξουμε την ισχύ των αποτελεσμάτων που διαθέτουμε μέσα από μια σειρά (αναπάντεχων) εφαρμογών.

Πρόταση 2.31 (Εκτιμήσεις Cauchy). *Έστω f αναλυτική στο $D(z_0, R)$. Θέτουμε*

$$M_f(z_0, r) = \max\{|f(z)| : |z - z_0| = r\}, \quad 0 < r < R.$$

Τότε

$$|f^{(n)}(z_0)| \le \frac{n!}{r^n} M_f(z_0, r).$$

Επομένως, αν $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, $z \in D(z_0, R)$, τότε

$$|a_n| \le \frac{M_f(z_0, r)}{r^n}.$$

Απόδειξη. Άμεση από το Θεώρημα 2.22 και την Πρόταση 2.8. □

Ορισμός 2.32. *Μια συνάρτηση $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ονομάζεται **ακέραιη** αν είναι αναλυτική σ' ολόκληρο το $\mathbb{C}$.*

Το επόμενο αποτέλεσμα έρχεται σε πλήρη αντίθεση με ό,τι γνωρίζουμε από την Πραγματική Ανάλυση.

Θεώρημα 2.33 (Το Θεώρημα Liouville). *Αν η f είναι ακέραιη και φραγμένη, τότε η f είναι σταθερή.*

Απόδειξη. Από την Πρόταση 2.27, η f αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά με κέντρο το 0 και άπειρη ακτίνα σύγκλισης.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \; z \in \mathbb{C}.$$

Από την Πρόταση 2.31, έχουμε για $n \ge 1$

$$|a_n| \le \frac{M_f(z_0, r)}{r^n} \to 0, \text{ καθώς } r \to +\infty,$$

διότι η f είναι φραγμένη. Συνεπώς $a_n = 0$ για όλα τα $n \ge 1$. Άρα $f(z) = a_0$ για κάθε $z \in \mathbb{C}$. □

Είμαστε τώρα σε θέση να δείξουμε ένα διάσημο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 2.34 (Το Θεμελιώδες Θεώρημα τής Άλγεβρας). *Έστω P ένα πολυώνυμο βαθμού τουλάχιστον 1. Τότε $P(z) = 0$ για κάποιο z.*

Απόδειξη. Αν $P(z) \neq 0$ για όλα τα z, τότε η $1/P$ είναι ακέραιη. Εφόσον $P(z) \to \infty$ καθώς $z \to \infty$, η $1/P$ είναι φραγμένη, επομένως σταθερή από το Θεώρημα 2.33. Αυτό είναι άτοπο διότι υποθέσαμε ότι ο βαθμός τού P είναι τουλάχιστον 1. □

Ορισμός 2.35. *Ένας μιγαδικός αριθμός z_0 λέγεται **ρίζα** μιας συνάρτησης f αν $f(z_0) = 0$. Έστω τώρα ότι η f είναι αναλυτική στο z_0, και έστω $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ το ανάπτυγμα τής f σε δυναμοσειρά σε μια περιοχή τού z_0. Λέμε ότι το z_0 είναι **ρίζα τάξης** m τής f, αν και μόνο αν $a_n = 0$ για $n < m$ και $a_m \neq 0$. Μια ρίζα τάξης 1 λέγεται μερικές φορές **απλή ρίζα**.*

Παρατηρήστε ότι αν το z_0 είναι ρίζα τάξης m της f, τότε το ανάπτυγμα τής f σε δυναμοσειρά έχει τη μορφή

$$f(z) = a_m(z - z_0)^m + a_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \cdots = (z - z_0)^m[a_m + a_{m+1}(z - z_0) + \cdots] = (z - z_0)^m g(z),$$

όπου $g(z_0) = a_m \neq 0$. Από το Θεώρημα 2.29, η g είναι αναλυτική. Επομένως σε μια περιοχή τής ρίζας, η f μπορεί να «παραγοντοποιηθεί». Σαν εφαρμογή αυτής τής παρατήρησης, εύκολα μπορεί να δείξει κανείς (άσκηση!) το ανάλογο τού κανόνα L' Hôpital για αναλυτικές συναρτήσεις. Έστω $f, g : D(z_0, r) \to \mathbb{C}$ αναλυτικές και όχι ταυτοτικά μηδέν. Αν

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} g(z) = 0,$$

τότε το

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)}$$

υπάρχει (ενδεχομένως είναι ∞) και ισχύει

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

Είδαμε ότι αν η f είναι αναλυτική σ' ένα ανοιχτό σύνολο U που περιέχει ένα κύκλο Γ και το εσωτερικό του, τότε οι τιμές τής f στον Γ καθορίζουν τις τιμές τής f στο εσωτερικό τού Γ. Θα δείξουμε τώρα ότι αν S είναι ένα υποσύνολο τού U το οποίο έχει σημείο συσσώρευσης στο U, τότε οι τιμές τής f στο S καθορίζουν τις τιμές τής f στο U.

Πρόταση 2.36. *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό και συνεκτικό, και $f : U \to \mathbb{C}$ αναλυτική. Υποθέτουμε ότι το σύνολο των ριζών τής f έχει ένα σημείο συσσώρευσης z_0 στο U. Τότε η f είναι ταυτοτικά ίση με 0 στο U.*

Απόδειξη. Αναπτύσσουμε την f σε δυναμοσειρά γύρω από το z_0.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \ |z - z_0| < r.$$

Ισχυριζόμαστε ότι $a_n = 0$ για όλα τα n. Διαφορετικά, έστω m ο ελάχιστος ακέραιος τέτοιος ώστε $a_m \neq 0$. Τότε $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$, όπου g αναλυτική στο z_0, και $g(z_0) \neq 0$. Λόγω συνέχειας, η g είναι μη μηδενική σε κάποια περιοχή τού z_0, το οποίο αντιφάσκει με το ότι το z_0 είναι σημείο συσσώρευσης τού συνόλου των ριζών τής f. Τώρα, θέτουμε

$$A = \{z \in U : \text{Το } z \text{ είναι σημείο συσσώρευσης τού συνόλου των ριζών τής } f\}.$$

Από υπόθεση, $z_0 \in A$, άρα το A είναι μη κενό. Θα δείξουμε ότι το A είναι ανοιχτό και κλειστό στο U, άρα $A = U$ διότι το U είναι συνεκτικό. Αν $z \in A$, τότε το επιχείρημα στην προηγούμενη παράγραφο δείχνει ότι η f είναι ταυτοτικά ίση με μηδέν σ' έναν δίσκο $D(z, \varepsilon)$, άρα $D(z, \varepsilon) \subset A$. Επομένως το A είναι ανοιχτό στο $\mathbb{C}$, συνεπώς και στο U. Έστω τώρα μια ακολουθία $w_n \in A$ τέτοια ώστε $w_n \to w$, όπου $w \in U$. Αν $w_n = w$ για κάποιο n, τότε $w \in A$ και τελειώσαμε. Αν $w_n \neq w$ για κάθε n, τότε από τη συνέχεια τής f, έχουμε $f(w_n) = 0$, άρα $w \in A$. Επομένως το A είναι κλειστό. □

Θεώρημα 2.37 (Το Θεώρημα τής Ταυτότητας). *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό και συνεκτικό και $f, g : U \to \mathbb{C}$ αναλυτικές. Θέτουμε*

$$A = \{z \in U : f(z) = g(z)\}.$$

Αν το A έχει σημείο συσσώρευσης στο U, τότε $f = g$ ταυτοτικά στο U.

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε την Πρόταση 2.36 στην αναλυτική συνάρτηση $f - g$. □

Άμεση συνέπεια τού Θεωρήματος 2.37 είναι ότι η exp είναι η μοναδική αναλυτική συνάρτηση η οποία συμφωνεί με τη συνηθισμένη εκθετική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Το ίδιο ισχύει για τις log, sin και cos. Παρατηρήστε ότι στο προηγούμενο θεώρημα, η υπόθεση ότι το σημείο συσσώρευσης ανήκει στο U είναι απαραίτητη. Για παράδειγμα, αν $U = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, τότε η συνάρτηση $f : U \to \mathbb{C}$ με $f(z) = \sin(1/z)$, έχει ρίζες στα σημεία $1/(k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$, τα οποία συσσωρεύονται στο $0 \notin U$, αλλά προφανώς η f δεν είναι ταυτοτικά ίση με μηδέν.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι, χοντρικά, η απόλυτη τιμή μιας συνάρτησης αναλυτικής σ' ένα σύνολο S δεν μπορεί να πάρει maximum σ' ένα εσωτερικό σημείο τού S.

Θεώρημα 2.38 (Η Αρχή τού Μεγίστου). *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό και συνεκτικό, και f αναλυτική στο U, όχι σταθερή. Τότε*

(1) *Αν $z_0 \in U$ και $D(z_0, r) \subset U$, τότε υπάρχει ένα σημείο $z_1 \in D(z_0, r)$ τέτοιο ώστε $|f(z_1)| > |f(z_0)|$.*

(2) *Αν $\lambda = \sup_{z\in U} |f(z)|$, τότε $|f(z)| < \lambda$ γαι κάθε $z \in U$.*

(3) *Αν το U είναι φραγμένο και ∂U είναι το σύνορο τού U, θέτουμε*

$$M = \limsup_{z\to\partial U} |f(z)|.$$

Ο συμβολισμός σημαίνει ότι το M είναι το supremum των ορίων όλων των συγκλινουσών ακολουθιών τής μορφής $|f(z_n)|$, όπου $z_n \in U$ και $z_n \to z$, $z \in \partial U$. Τότε $|f(z)| < M$ για κάθε $z \in U$.

(4) *Αν το U είναι φραγμένο και η f ορίζεται και είναι συνεχής στο $\overline{U}$, θέτουμε*

$$M_0 = \max_{z\in\partial U} |f(z)|.$$

Τότε $|f(z)| < M_0$ για όλα τα $z \in U$, και επομένως,

$$M_0 = \max_{z\in\overline{U}} |f(z)| = |f(z_0)|,$$

για κάποιο $z_0 \in \partial U$, δηλαδή η $|f|$ παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο σύνορο τού U.

Απόδειξη.

(1) Υποθέτουμε ότι το συμπέρασμα δεν ισχύει. Τότε

$$|f(z_0 + se^{i\theta})| \leq |f(z_0)|,$$

για κάθε $\theta \in [0, 2\pi]$ και κάθε s με $0 \leq s < r$. Από τον Ολοκληρωτικό Τύπο τού Cauchy, έχουμε

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + se^{i\theta})|\, d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0)|\, d\theta = |f(z_0)|.$$

Επομένως

$$\int_0^{2\pi} (|f(z_0)| - |f(z_0 + se^{i\theta})|)\, d\theta = 0,$$

για κάθε $0 \leq s < r$. Στο παραπάνω ολοκλήρωμα, η συνάρτηση την οποία ολοκληρώνουμε είναι μη αρνητική και συνεχής, άρα πρέπει να είναι ταυτοτικά ίση με 0. Με άλλα λόγια, η $|f(z)|$ είναι σταθερή στο $D(z_0, r)$. Τότε όμως και η f είναι σταθερή (άσκηση!) σ' αυτήν την περιοχή, άρα και σ' ολόκληρο το U από το Θεώρημα 2.37, άτοπο.

(2) Αν $|f(z_0)| = \lambda$ για κάποιο $z_0 \in U$, τότε από το (1) θα είχαμε $|f(z_1)| > \lambda$ για κάποιο άλλο $z_1 \in U$. Αυτό όμως αντιφάσκει με τον ορισμό τού λ.

(3) Έστω $z_n \in U$ τέτοια ώστε $|f(z_n)| \to \lambda$. Τότε υπάρχει υπακολουθία z_{k_n} τέτοια ώστε $z_{k_n} \to z_0$ για κάποιο $z_0 \in \overline{U}$. Αν $z_0 \in U$ τότε, από τη συνέχεια τής f, $|f(z_0)| = \lambda$, το οποίο είναι άτοπο από το (2). Επομένως $z_0 \in \partial U$. Από τον ορισμό τού M έχουμε $\lambda \leq M$, άρα από το (2), $|f(z)| < M$ για όλα τα $z \in U$.

(4) Αν $z_n \in U$, $z_n \to z$, $z \in \partial U$, τότε $|f(z_n)| \to |f(z)|$ από τη συνέχεια τής f. Προφανώς $|f(z)| \leq M_0$, άρα $M \leq M_0$, από τον ορισμό τού M. Το συμπέρασμα έπεται από το (3).

□

Η απόλυτη τιμή μιας αναλυτικής είναι δυνατό να παίρνει ελάχιστη τιμή σ' ένα εσωτερικό σημείο ενός συνόλου. Για παράδειγμα, θεωρήστε την $f(z) = z$ στο $D(0, 1)$. Αν όμως υποθέσουμε ότι η συνάρτηση δεν μηδενίζεται πουθενά, τότε έχουμε μια «Αρχή Ελαχίστου».

Θεώρημα 2.39 (Η Αρχή τού Ελαχίστου). *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό και συνεκτικό, και f αναλυτική στο U, όχι σταθερή, πουθενά 0. Τότε*

(1) *Αν $z_0 \in U$ και $D(z_0, r) \subset U$, τότε υπάρχει ένα σημείο $z_1 \in D(z_0, r)$ τέτοιο ώστε $|f(z_1)| < |f(z_0)|$.*

(2) *Αν $\lambda = \inf_{z \in U} |f(z)|$, τότε $|f(z)| > \lambda$ και κάθε $z \in U$.*

(3) *Αν το U είναι φραγμένο και θέσουμε*

$$m = \liminf_{z \to \partial U} |f(z)|,$$

τότε $|f(z)| > m$ για κάθε $z \in U$.

(4) *Αν το U είναι φραγμένο και η f ορίζεται και είναι συνεχής στο $\overline{U}$, θέτουμε*

$$m_0 = \min_{z \in \partial U} |f(z)|.$$

Τότε $|f(z)| > m_0$ για όλα τα $z \in U$, και επομένως,

$$m_0 = \min_{z \in \overline{U}} |f(z)| = |f(z_0)|,$$

για κάποιο $z_0 \in \partial U$, δηλαδή η $|f|$ παίρνει την ελάχιστη τιμή της στο σύνορο τού U.

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 2.38 στην $1/f$. □

Τέλος, δείχνουμε ότι το πραγματικό και το φανταστικό μέρος μιας αναλυτικής συνάρτησης ικανοποιούν τις αρχές τού μεγίστου και τού ελαχίστου.

Θεώρημα 2.40. *Έστω f αναλυτική και όχι σταθερή σ' ένα ανοιχτό και συνεκτικό σύνολο $U \subset \mathbb{C}$. Θέτουμε $u = \mathfrak{Re}\, f$ και $v = \mathfrak{Im}\, f$. Τότε οι u και v ικανοποιούν τις αρχές τού μεγίστου και τού ελαχίστου, δηλαδή τα (1)-(4) των Θεωρημάτων 2.38 και 2.39 ισχύουν με την u ή την v στην θέση τής $|f|$.*

Απόδειξη. Η συνάρτηση e^f είναι αναλυτική στο U, όχι σταθερή και πουθενά 0. Εφόσον $|e^f| = e^u$, η u ικανοποιεί τις αρχές τού μεγίστου και τού ελαχίστου. Εφόσον $|e^{-if}| = e^v$, το ίδιο ισχύει και για την v. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Το Γενικό Θεώρημα τού Cauchy

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με δυο βασικά ερωτήματα.

- Για ένα δεδομένο ανοιχτό σύνολο U, ποια είναι τα κλειστά μονοπάτια γ στο U με την ιδιότητα $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ για κάθε αναλυτική συνάρτηση f στο U;
- Πώς μπορούμε να χαρακτηρίσουμε εκείνα τα ανοιχτά σύνολα U με την ιδιότητα $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ για κάθε κλειστό μονοπάτι γ στο U και κάθε αναλυτική συνάρτηση f στο U;

Λογάριθμοι και ορίσματα

Ορισμός 3.1. *Έστω $S \subset \mathbb{C}$ και $f : S \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ συνεχής.*

(1) *Μια συνάρτηση $g : S \to \mathbb{C}$ λέγεται **συνεχής λογάριθμος** τής f αν είναι συνεχής και $e^{g(z)} = f(z)$ για κάθε $z \in S$.*

(2) *Μια συνάρτηση $\theta : S \to \mathbb{R}$ λέγεται **συνεχές όρισμα** τής f αν είναι συνεχής και $f(z) = |f(z)|e^{i\theta(z)}$ για κάθε $z \in S$.*

Πρόταση 3.2. *Έστω f όπως στον Ορισμό 3.1.*

(1) *Αν g είναι ένας συνεχής λογάριθμος τής f, τότε $\Im\mathrm{m}\, g$ είναι ένα συνεχές όρισμα τής f.*

(2) *Αν θ είναι ένα συνεχές όρισμα τής f, τότε $\log|f(z)| + i\theta(z)$, $z \in S$ είναι ένας συνεχής λογάριθμος τής f.*

(3) *Αν το S είναι συνεκτικό και g_1, g_2 είναι συνεχείς λογάριθμοι τής f, τότε $g_1 - g_2 = 2\pi i n$ για κάποιον ακέραιο n. Ομοίως, αν θ_1, θ_2 είναι συνεχή ορίσματα τής f, τότε $\theta_1 - \theta_2 = 2\pi m$ για κάποιον ακέραιο m.*

(4) *Αν το S είναι συνεκτικό, g ένας συνεχής λογάριθμος τής f, και θ ένα συνεχές όρισμα τής f, τότε*

$$g(w) - g(z) = \log|f(w)| - \log|f(z)| + i[\theta(w) - \theta(z)],$$

για κάθε $z, w \in S$.

Απόδειξη.

(1) $f(z) = e^{g(z)} = e^{\Re\mathrm{e}\, g(z)} e^{i\Im\mathrm{m}\, g(z)} = |f(z)|e^{i\Im\mathrm{m}\, g(z)}$.

(2) $e^{\log|f(z)|+i\theta(z)} = |f(z)|e^{i\theta(z)} = f(z)$.

(3) $e^{g_1} = f = e^{g_2}$, επομένως η συνάρτηση $\dfrac{g_2 - g_1}{2\pi i}$ είναι συνεχής και παίρνει ακέραιες τιμές. Αφού το S είναι συνεκτικό, πρέπει να είναι σταθερή. Ομοίως, $e^{i\theta_1} = \frac{f}{|f|} = e^{i\theta_2}$, άρα η $\dfrac{\theta_2 - \theta_1}{2\pi}$ είναι σταθερή.

(4) Από το (2), η συνάρτηση $\log|f| + i\theta$ είναι συνεχής λογάριθμος τής f. Από το (3), $g = \log|f| + i\theta + 2\pi i n$ για κάποιο n, και το συμπέρασμα έπεται.

□

Μια συνάρτηση f όπως στον Ορισμό 3.1, δεν έχει κατ' ανάγκη συνεχή λογάριθμο. Αν όμως το S είναι ένα κλειστό υποδιάστημα των πραγματικών αριθμών, τότε η f έχει συνεχή λογάριθμο.

Πρόταση 3.3. *Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ συνεχής. Τότε η f έχει συνεχή λογάριθμο.*

Απόδειξη. Αν D είναι ένας ανοιχτός δίσκος που δεν περιέχει το 0, τότε υπάρχει μια αναλυτική συνάρτηση h στον D τέτοια ώστε $e^{h(z)} = z$ για κάθε $z \in D$ (άσκηση!). Αφού το $[a, b]$ είναι συμπαγές, η $|f|$ παίρνει minimum, έστω m, στο $[a, b]$. Από υπόθεση, $m > 0$. Αφού η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, μπορούμε να βρούμε μια διαμέριση

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

τέτοια ώστε $|f(t) - f(t_i)| < m$ για $t_i \le t \le t_{i+1}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Έτσι $f(t) \in D(f(t_i), m)$ για $t_i \le t \le t_{i+1}$ και $0 \notin D(f(t_i), m)$ από τον ορισμό του m. Αν επιλέξουμε την h όπως παραπάνω, τότε $e^{h(f(t))} = f(t)$, $t_i \le t \le t_{i+1}$, επομένως η f περιορισμένη στο $[t_i, t_{i+1}]$ έχει συνεχή λογάριθμο, έστω g_i. Τώρα, αν $e^{g_0(t)} = f(t)$ για $t_0 \le t \le t_1$, και $e^{g_1(t)} = f(t)$ για $t_1 \le t \le t_2$, τότε $g_0(t_1) = g_1(t_1) + 2\pi i n$ για κάποιον ακέραιο n. Αντικαθιστούμε την g_1 με την $g_1 + 2\pi i n$, η οποία είναι επίσης ένας συνεχής λογάριθμος τής f στο $[t_1, t_2]$. Έτσι παίρνουμε έναν συνεχή λογάριθμο τής f στο $[t_0, t_2]$. Επαναλαμβάνοντας αυτή τη διαδικασία, παίρνουμε ένα συνεχή λογάριθμο τής f στο $[a, b]$. □

Ορισμός 3.4. *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό και $f : U \to \mathbb{C}$ αναλυτική, πουθενά μηδέν. Μια συνάρτηση $g : U \to \mathbb{C}$ λέγεται **αναλυτικός λογάριθμος** τής f αν η g είναι αναλυτική και $e^g = f$.*

Πρόταση 3.5. *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό και $f : U \to \mathbb{C}$ αναλυτική, πουθενά μηδέν. Τότε η f έχει αναλυτικό λογάριθμο αν και μόνο αν η «λογαριθμική παράγωγος» f'/f έχει παράγουσα στο U. Ισοδύναμα, αν και μόνο αν*

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = 0,$$

για κάθε κλειστό μονοπάτι γ στο U.

Απόδειξη. Αν $e^g = f$ στο U, τότε $g'e^g = f'$, επομένως $f'/f = g'$. Αντίστροφα, αν η g είναι αναλυτική στο U και $g' = f'/f$, τότε $(fe^{-g})' = f'e^{-g} - fg'e^{-g} = 0$ στο U. Επομένως η fe^{-g} είναι ίση με μια σταθερά k_A πάνω σε κάθε συνεκτική συνιστώσα A τού U. Αν επιλέξουμε C_A έτσι ώστε $e^{C_A} = k_A$, τότε $e^{g+C_A} = f$ στο A. Αφού τώρα το A είναι μια αυθαίρετη συνεκτική συνιστώσα τού U, αυτή η διαδικασία μάς δίνει έναν αναλυτικό λογάριθμο τής f στο U. □

Πρόταση 3.6. *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό και κυρτό, και $f : U \to \mathbb{C}$ αναλυτική, πουθενά 0. Τότε η f έχει αναλυτικό λογάριθμο στο U. Γενικότερα, αν U είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο τού $\mathbb{C}$ τέτοιο ώστε $\int_\gamma h(z)\, dz = 0$ για κάθε κλειστό μονοπάτι γ στο U και κάθε αναλυτική συνάρτηση h στο U, τότε κάθε $f : U \to \mathbb{C}$ αναλυτική και πουθενά 0, έχει αναλυτικό λογάριθμο στο U.*

Απόδειξη. Κατ' αρχάς υποθέτουμε ότι το U είναι κυρτό. Εφόσον η $\frac{f'}{f}$ είναι αναλυτική στο U, το Θεώρημα 2.15 μας δίνει

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = 0,$$

για κάθε κλειστό μονοπάτι γ στο U. Από την Πρόταση 3.5, η f έχει αναλυτικό λογάριθμο. Στη γενική περίπτωση, $\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = 0$ από υπόθεση, και το συμπέρασμα έπεται όπως πριν. □

Πρόταση 3.7. *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό, $f : U \to \mathbb{C}$ αναλυτική, και $g : U \to \mathbb{C}$ αναλυτικός λογάριθμος τής f. Τότε για κάθε μονοπάτι $\gamma : [a, b] \to U$ έχουμε*

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a)).$$

Απόδειξη. Το επιχείρημα στην απόδειξη τής Πρότασης 3.5 μάς δίνει $g' = \frac{f'}{f}$ στο U. Συνεπώς

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \int_a^b g'(\gamma(t))\gamma'(t)\, dt = g(\gamma(b)) - g(\gamma(a)).$$

□

Ο δείκτης ενός σημείου σε σχέση με μια κλειστή καμπύλη

Μια μορφή τού γενικού θεωρήματος τού Cauchy λέει ότι αν η f είναι αναλυτική σ' ένα ανοιχτό σύνολο U και επιπλέον το U είναι απλά συνεκτικό, δηλαδή «δεν έχει τρύπες», τότε το ολοκλήρωμα τής f πάνω σε οποιοδήποτε κλειστό μονοπάτι στο U είναι μηδέν. Ένας τρόπος να εκφράσουμε το ότι το U «δεν έχει τρύπες» είναι να πούμε ότι αν $\gamma : [a, b] \to U$ είναι ένα κλειστό μονοπάτι στο U και $z_0 \notin U$, τότε η συνολική μεταβολή τού ορίσματος τού $\gamma(t) - z_0$ καθώς το t κινείται από το a στο b είναι μηδέν.

Πρόταση 3.8. *Έστω $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ μια κλειστή καμπύλη τέτοια ώστε $0 \notin \gamma^*$, και έστω θ ένα συνεχές όρισμα τής γ (υπάρχει από την Πρόταση 3.3). Τότε η ποσότητα $\frac{1}{2\pi}[\theta(b) - \theta(a)]$ είναι ακέραιος αριθμός. Επιπλέον, ο αριθμός αυτός είναι ανεξάρτητος από την επιλογή τού συνεχούς ορίσματος θ.*

Απόδειξη. Για κάθε $t \in [a,b]$,

$$e^{i\theta(t)} = \frac{\gamma(t)}{|\gamma(t)|}.$$

Επομένως

$$e^{i(\theta(b)-\theta(a))} = \frac{\gamma(b)}{|\gamma(b)|}\frac{|\gamma(a)|}{\gamma(a)} = 1,$$

εφόσον η γ είναι κλειστή. Συνεπώς ο αριθμός $\frac{1}{2\pi}[\theta(b)-\theta(a)]$ είναι ακέραιος. Αν τώρα ϕ είναι κάποιο άλλο συνεχές όρισμα, τότε από την Πρόταση 3.2, έχουμε ότι $\theta(t) - \phi(t) = 2\pi m$ για κάποιον ακέραιο m. Άρα $\theta(b) = \phi(b) + 2\pi m$ και $\theta(a) = \phi(a) + 2\pi m$, και το συμπέρασμα έπεται. □

Ορισμός 3.9. *Έστω $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ μια κλειστή καμπύλη, και $z_0 \notin \gamma^*$. Συμβολίζουμε με $\gamma + w$ την καμπύλη $\gamma(t) + w$, $a \le t \le b$. Έστω θ ένα συνεχές όρισμα τής $\gamma - z_0$. Τότε ο* ***δείκτης*** *τού z_0 σε σχέση με την γ, ορίζεται να είναι ο αριθμός*

$$\frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi},$$

και συμβολίζεται με $n(\gamma, z_0)$.

Από την Πρόταση 3.8, ο $n(\gamma, z_0)$ είναι καλά ορισμένος. Διαισθητικά, ο $n(\gamma, z_0)$ είναι ο καθαρός αριθμός των αντιωρολογιακών περιστροφών τής γ γύρω από το σημείο z_0. Προφανώς, $n(\gamma, z_0) = n(\gamma + w, z_0 + w)$ για κάθε $w \in \mathbb{C}$. Θα αποδείξουμε στη συνέχεια ένα τεχνικό λήμμα.

Λήμμα 3.10. *Έστω $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ συνεχής και $V \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό τέτοιο ώστε $\gamma^* \subset V$. Τότε υπάρχει μια διαμέριση*

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

και ανοιχτοί δίσκοι $D_1, D_2, \ldots, D_n \subset V$, τέτοιοι ώστε $\gamma(t) \in D_j$ για $t_{j-1} \le t \le t_j$, $j = 1, \ldots, n$.

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon = \operatorname{dist}(\gamma^*, \mathbb{C} \setminus V) > 0$. Από την ομοιόμορφη συνέχεια τής γ, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $|t - t'| < \delta$ τότε $|\gamma(t) - \gamma(t')| < \varepsilon$. Έστω $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ μια διαμέριση τού $[a,b]$ με $|t_j - t_{j-1}| < \delta$ για κάθε j. Θέτουμε $D_j = D(\gamma(t_j), \varepsilon)$. □

Έχουμε τώρα την ακόλουθη ολοκληρωτική έκφραση τού δείκτη.

Πρόταση 3.11. *Έστω $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ένα κλειστό μονοπάτι, και $z_0 \notin \gamma^*$. Τότε*

$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z - z_0}\,dz.$$

Γενικότερα, αν η f είναι αναλυτική σ' ένα ανοιχτό σύνολο V με $\gamma^* \subset V$, και $z_0 \notin (f \circ \gamma)^*$, τότε

$$n(f \circ \gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - z_0}\,dz.$$

Απόδειξη. Χωρίς απώλεια τής γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $f - z_0$ δεν είναι ποτέ μηδέν στο V, διαφορετικά περιορίζουμε το πεδίο ορισμού τής f σε μια κατάλληλη περιοχή τού γ^*. Κατασκευάζουμε μια διαμέριση $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ και ανοιχτούς δίσκους $D_1, \ldots, D_n$ όπως στο Λήμμα 3.10. Από την Πρόταση 3.6, η $f - z_0$ έχει αναλυτικό λογάριθμο g_j στο D_j. Από την Πρόταση 3.7,

$$\int_{\gamma(t_{j-1})}^{\gamma(t_j)} \frac{f'(z)}{f(z) - z_0}\,dz = g_j(\gamma(t_j)) - g_j(\gamma(t_{j-1})),$$

όπου ολοκληρώνουμε κατά μήκος τού γ. Έστω $\theta(t)$ ένα συνεχές όρισμα τής $f(\gamma(t)) - z_0$, $a \le t \le b$. Παρατηρήστε ότι η $g_j(\gamma(t))$ είναι ένας συνεχής λογάριθμος τής $f(\gamma(t)) - z_0$, $t_{j-1} \le t \le t_j$. Επομένως, από την Πρόταση 3.2, έχουμε

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - z_0}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{n}\int_{\gamma(t_{j-1})}^{\gamma(t_j)} \frac{f'(z)}{f(z) - z_0}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{n}[g_j(\gamma(t_j)) - g_j(\gamma(t_{j-1}))]$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{n} [\log |f(\gamma(t_j)) - z_0| - \log |f(\gamma(t_{j-1})) - z_0| + i\theta(t_j) - i\theta(t_{j-1})]$$
$$= \frac{1}{2\pi}[\theta(b) - \theta(a)] = n(f \circ \gamma, z_0).$$

□

Τέλος, εξετάζουμε τη συμπεριφορά τού $n(\gamma, z_0)$ καθώς το z_0 μεταβάλλεται.

Πρόταση 3.12. *Έστω γ ένα κλειστό μονοπάτι. Τότε ο δείκτης $n(\gamma, z_0)$, θεωρούμενος σαν συνάρτηση τού z_0, είναι σταθερός σε κάθε συνεκτική συνιστώσα τού $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ και 0 στην μη φραγμένη συνεκτική συνιστώσα.*

Απόδειξη. Από τις Προτάσεις 3.11 και 2.26, ο δείκτης $n(\gamma, \cdot)$ είναι αναλυτική συνάρτηση, και άρα συνεχής στο $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$. Επομένως σε οποιαδήποτε συνεκτική συνιστώσα τού $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, η $n(\gamma, \cdot)$ είναι συνεχής και παίρνει τιμές στους ακέραιους άρα είναι σταθερή. Από την Πρόταση 2.26, έχουμε $n(\gamma, z_0) \to 0$, καθώς $z_0 \to \infty$, επομένως η $n(\gamma, \cdot)$ πρέπει να είναι ταυτοτικά ίση με 0 στην μη φραγμένη συνιστώσα. □

Το Γενικό Θεώρημα τού Cauchy

Στην ανάπτυξη τής θεωρίας, θα χρειαστεί να ολοκληρώσουμε πάνω σε αντικείμενα κάπως πιο γενικά από κλειστά μονοπάτια.

Ορισμός 3.13. *Ένα τυπικό άθροισμα τής μορφής $\gamma = a_1\gamma_1 + \cdots + a_m\gamma_m$, όπου τα a_i είναι ακέραιοι αριθμοί και τα γ_i κλειστά μονοπάτια, λέγεται **κύκλος**. Θα συμβολίζουμε το $\bigcup_{i=1}^{m} \gamma_i^*$ με γ^*. Αν $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ συνεχής, ορίζουμε*

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \int_{\sum_{i=1}^m a_i\gamma_i} f(z)\, dz = \sum_{i=1}^{m} a_i \int_{\gamma_i} f(z)\, dz.$$

*Ένας κύκλος λέγεται **ισοδύναμος** με το 0 αν*

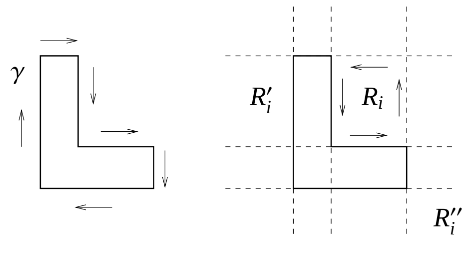
$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0,$$

*για όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$. Δύο κύκλοι γ_1 και γ_2 λέγονται **ισοδύναμοι** αν ο $\gamma_1 - \gamma_2$ είναι ισοδύναμος με το 0. Για παράδειγμα, οι κύκλοι $2\gamma_1 - 5\gamma_2$ και $\gamma_1 - 3\gamma_2 + \gamma_1 - 2\gamma_2$ είναι ισοδύναμοι. Τέλος ορίζουμε*

$$n\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\gamma_1, z\right) = \sum_{i=1}^{m} a_i n(\gamma_i, z).$$

Διαισθητικά, ένας κύκλος είναι μια αλυσίδα από κλειστά μονοπάτια γ_i, έτσι ώστε το γ_i διαγράφεται a_i φορές.

Λήμμα 3.14 (Το Θεμελιώδες Λήμμα). *Έστω γ ένα κλειστό πολυγωνικό μονοπάτι, οι πλευρές τού οποίου είναι παράλληλες στους άξονες των συντεταγμένων. Σχηματίζουμε το δίκτυο που αποτελείται από τις ευθείες που είναι παράλληλες στους άξονες και διέρχονται από τις κορυφές τού γ. Έτσι παίρνουμε μια οικογένεια από (ανοιχτές) ορθογώνιες περιοχές R_i, $i = 1, \ldots, m$, μια οικογένεια από μη φραγμένες περιοχές R_i' οι οποίες έχουν 3 πλευρές, και μια οικογένεια από μη φραγμένες περιοχές R_i'' οι οποίες έχουν 2 πλευρές. Επιλέγουμε σημεία $z_i \in R_i$, $i = 1, \ldots, m$. Έστω γ_0 ο κύκλος $\sum_{i=1}^{m} n(\gamma, z_i)\partial R_i$, όπου ∂R_i συμβολίζει το σύνορο τού R_i προσανατολισμένο αντιωρολογιακά. Τότε ο γ και ο γ_0 είναι ισοδύναμοι.*



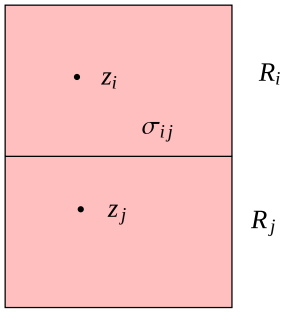
Απόδειξη. Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι

$$n(\gamma_0, z_k) = \sum_{i=1}^{m} n(\gamma, z_i)\, n(\partial R_i, z_k) = n(\gamma, z_k), \tag{3}$$

$k = 1, \ldots, m$. Επίσης, αν $z'_k \in R'_k$,

$$n(\gamma_0, z'_k) = \sum_{i=1}^{m} n(\gamma, z_i)\, n(\partial R_i, z'_k) = 0 = n(\gamma, z'_k), \tag{4}$$

διότι το z'_k ανήκει στη μη φραγμένη συνιστώσα τού $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$. Ας υποθέσουμε τώρα ότι η σ_{ij} είναι μια πλευρά ανάμεσα στα R_i και R_j.



Έστω ότι στον κύκλο $\gamma - \gamma_0$, η σ_{ij} διαγράφεται c φορές (το c είναι ακέραιος αριθμός, πιθανώς αρνητικός). Θεωρούμε τον κύκλο $\sigma = \gamma - \gamma_0 - c\partial R_i$. Από τον ορισμό τού c έχουμε ότι ο σ είναι ισοδύναμος μ' έναν κύκλο τ ο οποίος δεν περιέχει την σ_{ij}. Επομένως από την Πρόταση 3.11, τον ορισμό των ισοδύναμων κύκλων και την (3) έχουμε

$$n(\tau, z_i) = n(\sigma, z_i) = n(\gamma, z_i) - n(\gamma_0, z_i) - cn(\partial R_i, z_i) = -c, \tag{5}$$

και

$$n(\tau, z_j) = n(\sigma, z_j) = n(\gamma, z_j) - n(\gamma_0, z_j) - cn(\partial R_i, z_j) = 0. \tag{6}$$

Αφού τώρα τα z_i και z_j είναι στην ίδια συνεκτική συνιστώσα τού $\mathbb{C} \setminus \tau^*$, έχουμε ότι $n(\tau, z_i) = n(\tau, z_j)$. Από τις (5) και (6) παίρνουμε $c = 0$ και έτσι ο $\gamma - \gamma_0$ είναι ισοδύναμος μ' έναν κύκλο που δεν περιέχει την σ_{ij}. Ακριβώς το ίδιο επιχείρημα, με κάποιο $z'_j \in R'_j$ στη θέση τού z_j και την (4) στη θέση τής (3), δείχνει ότι αν σ'_{ij} είναι μια πλευρά ανάμεσα στο R_i και σε κάποια μη φραγμένη περιοχή R'_j, τότε η σ'_{ij} δεν συνεισφέρει τίποτα στον $\gamma - \gamma_0$. Αλλά όλες οι πλευρές τού $\gamma - \gamma_0$ είναι τής μορφής σ_{ij} ή σ'_{ij}. Επομένως ο $\gamma - \gamma_0$ είναι ισοδύναμος με το 0. □

Είμαστε τώρα σε θέση να απαντήσουμε στο πρώτο ερώτημα που θέσαμε στην αρχή τού κεφαλαίου.

Θεώρημα 3.15. *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό και $f : U \to \mathbb{C}$ αναλυτική. Έστω γ ένα κλειστό μονοπάτι (ή γενικότερα ένας κύκλος) στο U τέτοιος ώστε $n(\gamma, z) = 0$ για κάθε $z \notin U$. Τότε $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.*

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.10, κατασκευάζουμε μια διαμέριση $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ τού πεδίου ορισμού τού γ και ανοιχτούς δίσκους $D_1, \ldots, D_n \subset U$, έτσι ώστε $\gamma(t) \in D_j$, $t_{j-1} \leq t \leq t_j$, $j = 1, \ldots, n$. Αν γ_j είναι ένα πολυγωνικό μονοπάτι στον D_j από το $\gamma(t_{j-1})$ στο $\gamma(t_j)$, με πλευρές παράλληλες στους άξονες, τότε το ολοκλήρωμα τής f από το $\gamma(t_{j-1})$ στο $\gamma(t_j)$ κατά μήκος τού γ είναι το ίδιο με το ολοκλήρωμα τής f κατά μήκος τού γ_j, από το Θεώρημα 2.15. Μπορούμε επομένως να υποθέσουμε, χωρίς απώλεια τής γενικότητας, ότι το γ είναι ένα πολυγωνικό μονοπάτι με πλευρές παράλληλες στους άξονες, και έτσι από το Λήμμα 3.14, το γ είναι ισοδύναμο μ' έναν κύκλο της μορφής $\sum_{i=1}^{m} n(\gamma, z_i)\partial R_i$. Τώρα, αν $\overline{R_i} \not\subseteq U$ τότε επιλέγουμε $z_0 \in \overline{R_i} \setminus U$. Προφανώς τα z_i και z_0 βρίσκονται στην ίδια συνεκτική συνιστώσα τού $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, και άρα, από την Πρόταση 3.12, έχουμε ότι $n(\gamma, z_i) = n(\gamma, z_0)$. Αλλά από υπόθεση, $n(\gamma, z_0) = 0$, και έτσι το γ είναι ισοδύναμο με τον κύκλο

$$\sigma = \sum_{\overline{R_i} \subset U} n(\gamma, z_i)\partial R_i.$$

Επομένως

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\sigma f(z)\,dz = \sum_{\overline{R}_i\subset U} n(\gamma, z_i)\int_{\partial R_i} f(z)\,dz.$$

Αλλά αν $\overline{R}_i \subset U$ τότε το ∂R_i περιέχεται σ' ένα κυρτό υποσύνολο του U, άρα

$$\int_{\partial R_i} f(z)\,dz = 0$$

από το Θεώρημα 2.15.

□

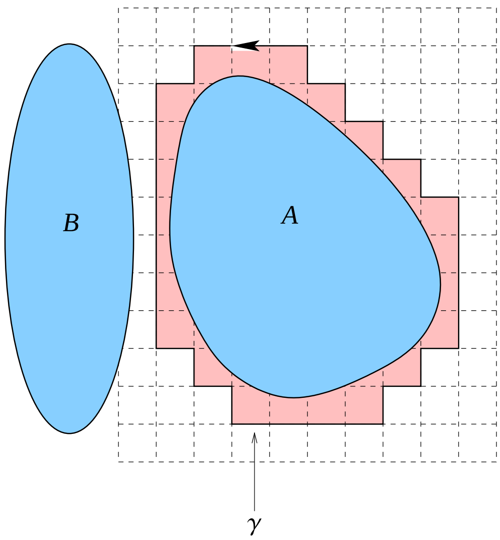
Το προηγούμενο αποτέλεσμα έχει αντίστροφο. Αν γ είναι ένα κλειστό μονοπάτι ή κύκλος στο U τέτοιος ώστε $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ για κάθε αναλυτική συνάρτηση $f : U \to \mathbb{C}$, τότε $n(\gamma, z) = 0$ για κάθε $z \notin U$. Πράγματι, αν για κάποιο $z_0 \notin U$ έχουμε $n(\gamma, z_0) \neq 0$, τότε η $f(z) = [2\pi i(z - z_0)]^{-1}$ είναι αναλυτική στο U, αλλά από την Πρόταση 3.11, έχουμε $\int_\gamma f(z)\,dz = n(\gamma, z_0) \neq 0$. Επομένως απαντήσαμε πλήρως στο πρώτο ερώτημα που θέσαμε στην αρχή τού κεφαλαίου.

Θεώρημα 3.16 (**Το Πρώτο Θεώρημα τού Cauchy**). *Έστω U ένα ανοιχτό υποσύνολο τού $\mathbb{C}$, και γ ένα κλειστό μονοπάτι ή κύκλος στο U. Τότε $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ για κάθε αναλυτική συνάρτηση $f : U \to \mathbb{C}$ αν και μόνο αν $n(\gamma, z) = 0$ για κάθε $z \notin U$.*

Πόρισμα 3.17. *Έστω γ_1 και γ_2 κλειστά μονοπάτια ή κύκλοι σ' ένα ανοιχτό σύνολο U. Τότε $\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_2} f(z)\,dz$ για κάθε αναλυτική συνάρτηση $f : U \to \mathbb{C}$ αν και μόνο αν $n(\gamma_1, z) = n(\gamma_2, z)$ για κάθε $z \notin U$.*

Συνεχίζουμε τώρα με το δεύτερο ερώτημα. Θα χρειαστούμε πάλι ένα τεχνικό λήμμα.

Λήμμα 3.18. *Έστω A, B ξένα, μη κενά υποσύνολα τού $\widehat{\mathbb{C}}$ τέτοια ώστε το A είναι συμπαγές υποσύνολο τού $\mathbb{C}$ και $dist_{\widehat{\rho}}(A, B) = \delta > 0$, όπου $\widehat{\rho}$ είναι η μετρική στο $\widehat{\mathbb{C}}$. Κατασκευάζουμε ένα δίκτυο από κλειστά τετράγωνα στο $\mathbb{C}$ με πλευρές μήκους $\frac{\delta}{2\sqrt{2}}$, παράλληλες στους άξονες. Έστω $Q_1, \ldots, Q_m$ τα τετράγωνα στο δίκτυο που τέμνουν το A, και έστω σ ο κύκλος $\sum_{i=1}^m \partial Q_i$. Αφαιρούμε όλες τις πλευρές που είναι κοινές σε οποιαδήποτε δυο τετράγωνα και παίρνουμε έναν ισοδύναμο κύκλο γ.*



Τότε

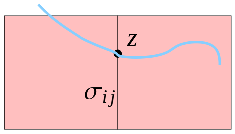
(1) $\gamma^* \cap (A \cup B) = \emptyset$.
(2) *Αν το z είναι εσωτερικό σημείο οποιουδήποτε Q_i, τότε $n(\gamma, z) = 1$.*

Απόδειξη.

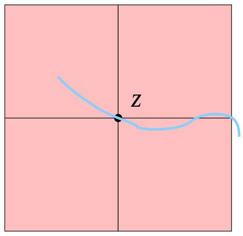
(1) Αν $z \in B \cap \gamma^*$, τότε $z \in \partial Q_i$ για κάποιο i. Αφού το Q_i τέμνει το A και η διαγώνιος τού Q_i έχει μήκος $\frac{\delta}{2}$, έχουμε $|z - w| \leq \frac{\delta}{2}$ για κάποιο $w \in A$. Αλλά $z \in B$, επομένως

$$\mathrm{dist}_{\widehat{\rho}}(A, B) \leq \widehat{\rho}(z, w) \leq |z - w| \leq \frac{\delta}{2},$$

το οποίο είναι άτοπο. Ας υποθέσουμε τώρα ότι $z \in A \cap \gamma^*$. Τότε το z ανήκει σε κάποιο ∂Q_i. Αν το z δεν είναι κορυφή, τότε ανήκει σε κάποια πλευρά τού Q_i. Δηλαδή το A τέμνει όχι μόνο το Q_i αλλά και κάποιο γειτονικό τετράγωνο τού δικτύου. Επομένως το z βρίσκεται πάνω στην κοινή πλευρά σ_{ij} δυο τετραγώνων Q_i και Q_j που τέμνουν το A.



Αλλά τότε η σ_{ij} δεν μπορεί να εμφανίζεται στην έκφραση τού γ, δηλαδή $z \notin \gamma^*$, άτοπο. Αν το z είναι κορυφή, τότε το z βρίσκεται πάνω σε 4 τετράγωνα που τέμνουν το A.



Πάλι οι 4 πλευρές που περιέχουν το z δεν μπορεί να εμφανίζονται στην έκφραση τού γ, δηλαδή $z \notin \gamma^*$, άτοπο.

(2) $n(\gamma, z) = n(\sigma, z) = \sum_{j=1}^{m} n(\partial Q_j, z) = n(\partial Q_i, z) = 1$, διότι αν το z δεν είναι εσωτερικό σημείο κάποιου Q_j τότε $n(\partial Q_j, z) = 0$.

□

Θεώρημα 3.19 (Το Δεύτερο Θεώρημα τού Cauchy). *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*

(1) *Το $\widehat{\mathbb{C}} \setminus U$ είναι συνεκτικό.*
(2) *$n(\gamma, z) = 0$ για κάθε κλειστό μονοπάτι ή κύκλο γ στο U και κάθε σημείο $z \in \mathbb{C} \setminus U$.*
(3) *$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ για κάθε κλειστό μονοπάτι ή κύκλο γ στο U και κάθε αναλυτική συνάρτηση $f : U \to \mathbb{C}$.*
(4) *Αν η $f : U \to \mathbb{C}$ είναι αναλυτική, τότε η f έχει παράγουσα στο U.*
(5) *Αν η $f : U \to \mathbb{C}$ είναι αναλυτική και πουθενά μηδέν, τότε η f έχει αναλυτικό λογάριθμο στο U.*

Απόδειξη.

(1) ⇒ (2) Παρατηρήστε ότι αν ορίσουμε $n(\gamma, \infty) = 0$, τότε η $n(\gamma, \cdot)$ γίνεται συνεχής συνάρτηση στο $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \gamma^*$, από την Πρόταση 3.12. Έχουμε ότι $z \in \widehat{\mathbb{C}} \setminus U$ το οποίο είναι ένα συνεκτικό υποσύνολο τού $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \gamma^*$. Επίσης, $\infty \in \widehat{C} \setminus U$ διότι $U \subset \mathbb{C}$. Δηλαδή, τα z και ∞ ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα τού $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \gamma^*$, επομένως $n(\gamma, z) = n(\gamma, \infty) = 0$.

(2) ⇒ (1) Υποθέτουμε ότι $\widehat{\mathbb{C}} \setminus U = A \cup B$, όπου τα A και B είναι μη κενά, ξένα και κλειστά στο $\widehat{\mathbb{C}} \setminus U$. Έστω ότι $\infty \in B$. Τότε το A είναι ένα συμπαγές υποσύνολο τού $\mathbb{C}$. Εφόσον το A είναι συμπαγές και το B κλειστό, έχουμε $\mathrm{dist}_{\widehat{\rho}}(A, B) > 0$. Κατασκευάζουμε έναν κύκλο γ όπως στο Λήμμα 3.18. Αφού $\gamma^* \cap (A \cup B) = \emptyset$, έχουμε $\gamma^* \subset U$, δηλαδή ο γ είναι ένας κύκλος στο U. Στο Λήμμα 3.18 μπορούμε να επιλέξουμε το δίκτυο έτσι ώστε το εσωτερικό κάποιου από τα τετράγωνα να περιέχει ένα δεδομένο $z \in A$. Τότε $n(\gamma, z) = 1$, άτοπο.

(2) ⇔ (3) Άμεσο από το Θεώρημα 3.16.

(3) ⇔ (4) Έπεται από την Πρόταση 2.13.

(4) ⇒ (5) Αν η $f : U \to \mathbb{C}$ είναι αναλυτική και πουθενά μηδέν, τότε η $\frac{f'}{f}$ είναι αναλυτική στο U, επομένως έχει παράγουσα στο U. Από την Πρόταση 3.5, η f έχει αναλυτικό λογάριθμο.

(5) ⇒ (2) Αν $z_0 \notin U$, τότε η $f(z) = z - z_0$ είναι αναλυτική και δεν μηδενίζεται στο U, άρα έχει αναλυτικό λογάριθμο. Επομένως

$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z - z_0}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 0,$$

από την Πρόταση 3.11 και την Πρόταση 3.5.

□

Ένα ανοιχτό υποσύνολο τού $\mathbb{C}$ που ικανοποιεί οποιαδήποτε από τις συνθήκες τού προηγούμενου θεωρήματος λέγεται **απλά συνεκτικό**. Διαισθητικά, οι συνθήκες (1) και (2) λένε ότι το U δεν έχει «τρύπες». Αν το U είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{C}$ και γ είναι ένας κύκλος στο U τέτοιος ώστε $n(\gamma, z) = 0$ για κάθε $z \notin U$, τότε λέμε ότι ο γ είναι 0-**ομολογικός** στο U. Δυο κύκλοι γ_1 και γ_2 λέγονται **ομολογικοί** στο U, αν ο $\gamma_1 - \gamma_2$ είναι 0-ομολογικός. Μια αναλυτική συνάρτηση έχει το ίδιο ολοκλήρωμα πάνω σε ομολογικούς κύκλους, και το ολοκλήρωμά της είναι 0 πάνω σε κάθε 0-ομολογικό κύκλο. Είμαστε τώρα σε θέση να αποδείξουμε μια γενικότερη μορφή τού ολοκληρωτικού τύπου τού Cauchy.

Θεώρημα 3.20 (Η γενική μορφή τού Ολοκληρωτικού Τύπου τού Cauchy). *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό και*

$$f : U \to \mathbb{C}$$

αναλυτική. Έστω γ ένα κλειστό μονοπάτι ή κύκλος στο U τέτοιος ώστε $n(\gamma, z) = 0$ για κάθε $z \notin U$. Τότε

$$f(z)n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\,dw,$$

για κάθε $z \in U$, $z \notin \gamma^*$. Επομένως, από τις Προτάσεις 2.26 και 3.12,

$$f^{(m)}(z)n(\gamma, z) = \frac{m!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{(w - z)^{m+1}}\,dw.$$

Απόδειξη. Έστω

$$g(w) = \begin{cases} \dfrac{f(w) - f(z)}{w - z} & \text{αν } w \in U,\ w \neq z \\ f'(z) & \text{αν } w = z. \end{cases}$$

Τότε, από το Πόρισμα 2.24, η g είναι αναλυτική στο U. Επομένως, από το Θεώρημα 3.15, έχουμε

$$\int_\gamma g(w)\,dw = 0.$$

Έτσι,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\,dw = f(z)\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dw}{w - z} = f(z)n(\gamma, z).$$

□

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Εφαρμογές τής Θεωρίας τού Cauchy

Ανωμαλίες

Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό και ας υποθέσουμε ότι η f είναι αναλυτική στο $U \setminus \{z_0\}$. Τότε λέμε ότι το z_0 είναι μια **μεμονωμένη ανωμαλία** τής f. Θα μελετήσουμε τη συμπεριφορά τής f κοντά στο z_0. Ένα από τα βασικά αποτελέσματα τής τοπικής θεωρίας τού Cauchy είναι ότι αν η f είναι αναλυτική στο z_0, τότε η f μπορεί να αναπαρασταθεί σαν δυναμοσειρά σε μια περιοχή τού z_0. Θα δείξουμε ότι αν το z_0 είναι μια μεμονωμένη ανωμαλία τής f, τότε γύρω από το z_0, η f μπορεί να αναπαρασταθεί σαν μια «δυναμοσειρά» η οποία περιέχει και θετικές και αρνητικές δυνάμεις.

Ορισμός 4.1. *Μια σειρά* ***Laurent*** *είναι ένα τυπικό άθροισμα τής μορφής*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}.$$

Σε αναλογία με την Πρόταση 2.17, αν μια σειρά Laurent συγκλίνει σε κάποια z_1, z_2, με $|z_1 - z_0| = r_1$, $|z_2 - z_0| = r_2$, $0 < r_1 < r_2 < \infty$, τότε η σειρά συγκλίνει απόλυτα στον ανοιχτό δακτύλιο $\{z : r_1 < |z - z_0| < r_2\}$ και ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα τού δακτυλίου. Θα χρειαστούμε την ακόλουθη «διορθωμένη» μορφή τού ολοκληρωτικού τύπου τού Cauchy.

Πρόταση 4.2. *Έστω ότι η f είναι αναλυτική σ' ένα ανοιχτό σύνολο U το οποίο περιέχει τον δακτύλιο*

$$\{z \in \mathbb{C} : r_1 \leq |z - z_0| \leq r_2\},$$

όπου $0 < r_1 < r_2 < \infty$. Θέτουμε $\Gamma_i = \{z : |z - z_0| = r_i\}$, $i = 1, 2$. Τότε για καθε z με $r_1 < |z - z_0| < r_2$ έχουμε

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}\,dw.$$

Απόδειξη. Έστω $\gamma = \Gamma_2 - \Gamma_1$. Ο γ είναι 0-ομολογικός στο U, επομένως από το Θεώρημα 3.20,

$$f(z)n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(w)}{w-z}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} \frac{f(w)}{w-z}\,dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{f(w)}{w-z}\,dw.$$

Αλλά αν $r_1 < |z - z_0| < r_2$, τότε

$$n(\gamma, z) = n(\Gamma_2, z) - n(\Gamma_1, z) = 1 - 0 = 1.$$

□

Θεώρημα 4.3 (Σειρές Laurent). *Έστω ότι η f είναι αναλυτική στον δακτύλιο $U = \{z : s_1 < |z - z_0| < s_2\}$, όπου $0 \leq s_1 < s_2 \leq \infty$. Τότε*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n,\ z \in U,$$

όπου

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(w)}{(w-z_0)^{n+1}}\,dw,$$

και Γ είναι οποιοσδήποτε κύκλος με κέντρο το z_0 και ακτίνα r, $s_1 < r < s_2$. Η σειρά συγκλίνει απόλυτα στο U και ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα τού U.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι τα a_n είναι καλά ορισμένα διότι δυο κύκλοι

$$\Gamma = \{z : |z - z_0| = r\}, \quad \Gamma' = \{z : |z - z_0| = r'\},$$

με $s_1 < r < r' < s_2$ είναι ομολογικοί στο U. Επιλέγουμε r_1, r_2 τέτοια ώστε $s_1 < r_1 < r_2 < s_2$, και έστω $\Gamma_i = \{z : |z - z_0| = r_i\}$, $i = 1, 2$. Αν $|z - z_0| < r_2$, επαναλαμβάνουμε το επιχείρημα στην απόδειξη τής Πρότασης 2.27 και παίρνουμε

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} \frac{f(w)}{w - z}\,dw = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \ |z - z_0| < r_2, \tag{7}$$

όπου

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}\,dw.$$

Η σειρά συγκλίνει απόλυτα, και ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα τού $D(z_0, r_2)$. Έστω τώρα ότι $|z - z_0| > r_1$. Τότε

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{f(w)}{w - z}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{f(w)}{z - z_0 - (w - z_0)}\,dw = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} f(w) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(w - z_0)^k}{(z - z_0)^{k+1}} dw.$$

Αν $w \in \Gamma_1$, τότε

$$\left|\frac{w - z_0}{z - z_0}\right| = \frac{r_1}{|z - z_0|} < 1,$$

επομένως η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα και έτσι μπορούμε να εναλλάξουμε ολοκλήρωμα και άθροισμα για να πάρουμε

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{f(w)}{w - z}\,dw = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^{-(k+1)},$$

όπου

$$b_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} f(w)(w - z_0)^k\,dw.$$

Θέτουμε $n = -(k + 1)$ και παίρνουμε

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{f(w)}{w - z}\,dw = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n, \ |z - z_0| > r_1, \tag{8}$$

όπου

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}\,dw.$$

Αυτή είναι μια δυναμοσειρά ως προς $(z - z_0)^{-1}$, επομένως συγκλίνει απόλυτα για $|z - z_0| > r_1$, και ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα τού $\{z : |z - z_0| > r_1\}$. Οι (7), (8) και η Πρόταση 4.2 μάς λένε ότι

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2} \frac{f(w)}{w - z}\,dw - \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1} \frac{f(w)}{w - z}\,dw = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

για κάθε z με $r_1 < |z - z_0| < r_2$. Εφόσον τα r_1 και r_2 ήταν τυχόντα, η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε $z \in U$. □

Πρόταση 4.4. *Θέτουμε $U = \{z : s_1 < |z - z_0| < s_2\}$, $0 \le s_1 < s_2 \le \infty$. Έστω ότι*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z - z_0)^n,$$

για κάθε $z \in U$. Τότε η f είναι αναλυτική και

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}\,dw,$$

όπου $\Gamma = \{z : |z - z_0| = r\}$ οποιοσδήποτε κύκλος στο U. Δηλαδή το ανάπτυγμα σε σειρά Laurent είναι μοναδικό.

Απόδειξη. Εφόσον η f είναι το άθροισμα μιας δυναμοσειράς ως προς $z - z_0$ και μιας δυναμοσειράς ως προς $(z-z_0)^{-1}$, η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα τού U, από την παρατήρηση μετά τον ορισμό τής σειράς Laurent (ή από το επιχείρημα στην απόδειξη τού Θεωρήματος 4.3 το οποίο είναι και η απόδειξη τής παρατήρησης!). Δηλαδή η ακολουθία

$$\sum_{k=-n}^{n} b_k(z - z_0)^k$$

συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα τού U, άρα η f είναι αναλυτική από την Πρόταση 2.28. Πολλαπλασιάζουμε τώρα και τα δυο μέλη τής έκφρασης τής f με

$$\frac{1}{2\pi i(z - z_0)^{k+1}},$$

εναλλάσουμε άθροισμα και ολοκλήρωμα, και παίρνουμε

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}\,dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (z - z_0)^{n-k-1}\,dz = b_k,$$

διότι αν $n \neq k$ τότε η $(z - z_0)^{n-k-1}$ έχει παράγουσα στο U και επομένως το ολοκλήρωμα πάνω στο Γ είναι μηδέν, ενώ για $n = k$ έχουμε

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{dz}{z - z_0} = n(\Gamma, z_0) = 1.$$

□

Είμαστε τώρα σε θέση να μελετήσουμε τη συμπεριφορά τής f κοντά σε μια μεμονωμένη ανωμαλία.

Ορισμός 4.5. *Έστω ότι η f έχει μια μεμονωμένη ανωμαλία στο z_0, δηλαδή είναι αναλυτική σ' ένα σύνολο τής μορφής $U \setminus \{z_0\}$. Τότε από το Θεώρημα 4.3*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \; 0 < |z - z_0| < r,$$

για κάποιο $r > 0$. Το άθροισμα των αρνητικών δυνάμεων τής σειράς Laurent, δηλαδή

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z - z_0)^n$$

ονομάζεται ***κύριο μέρος*** *τής σειράς Laurent. Αν η σειρά Laurent δεν έχει αρνητικές δυνάμεις, δηλαδή αν*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

τότε λέμε ότι η f έχει ***επουσιώδη ανωμαλία*** *στο z_0. Σ' αυτήν την περίπτωση, αν επεκτείνουμε το πεδίο ορισμού τής f θέτοντας $f(z_0) = a_0$, τότε η f είναι αναλυτική στο z_0 από το Θεώρημα 2.29. Δηλαδή, η f είναι αναλυτική σε μια περιοχή τού z_0 και τα αναπτύγματα Laurent και Taylor συμπίπτουν. Αν η σειρά Laurent έχει έναν θετικό αλλά πεπερασμένο αριθμό m αρνητικών δυνάμεων, δηλαδή αν*

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \; a_{-m} \neq 0,$$

τότε λέμε ότι η f έχει ***πόλο τάξης*** *m στο z_0, και* ***απλό πόλο*** *αν $m = 1$. Σ' αυτήν την περίπτωση, η $(z - z_0)^m f(z)$ έχει επουσιώδη ανωμαλία στο z_0, και*

$$\lim_{z\to z_0}(z - z_0)^m f(z) = a_{-m} \neq 0.$$

Επίσης, $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$, επομένως αν ορίσουμε $f(z_0) = \infty$, τότε η f είναι μια συνεχής απεικόνιση τού U στο εκτεταμένο επίπεδο. Αν η σειρά Laurent έχει άπειρο αριθμό αρνητικών δυνάμεων, τότε λέμε ότι η f έχει ***ουσιώδη ανωμαλία*** *στο z_0. Μια αναλυτική συνάρτηση τής οποίας όλες οι μεμονωμένες ανωμαλίες είναι πόλοι, ονομάζεται* ***μερόμορφη****.*

Θα βρούμε τώρα ικανές και αναγκαίες συνθήκες για να είναι μια μεμονωμένη ανωμαλία επουσιώδης, πόλος ή ουσιώδης. Το ακόλουθο λήμμα θα είναι χρήσιμο.

Λήμμα 4.6. *Έστω ότι η f έχει μια μεμονωμένη ανωμαλία στο z_0. Θέτουμε*

$$M_f(z_0, r) = \max\{|f(z)| : |z - z_0| = r\}.$$

Αν υπάρχουν $c > 0$ και $\alpha \geq 0$ έτσι ώστε $M_f(z_0, r) \leq cr^{-\alpha}$ για κάθε $r > 0$ αρκετά μικρό, τότε η f έχει είτε επουσιώδη ανωμαλία στο z_0 είτε πόλο τάξης $\leq \alpha$.

Απόδειξη. Έστω a_j οι συντελεστές στο ανάπτυγμα Laurent τής f. Για $j \geq 0$ έχουμε

$$|a_{-j}| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=r} f(z)(z - z_0)^{j-1}\, dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} M_f(z_0, r) r^{j-1} 2\pi r \leq c r^{j-\alpha} \to 0,$$

καθώς $r \to 0$, αν $j > \alpha$. Επομένως $a_{-j} = 0$ αν $j > \alpha$. □

Η συμπεριφορά μιας συνάρτησης κοντά σε μια ουσιώδη ανωμαλία είναι αρκετά παθολογική.

Θεώρημα 4.7 (Το Θεώρημα Casorati-Weierstrass). *Έστω ότι η f έχει μια ουσιώδη ανωμαλία στο σημείο z_0. Τότε για κάθε $b > 0$ αρκετά μικρό, το σύνολο $f(\{z : 0 < |z - z_0| < b\})$ είναι πυκνό στο $\mathbb{C}$.*

Απόδειξη. Για $b > 0$ αρκετά μικρό, θέτουμε $V = \{z : 0 < |z - z_0| < b\}$. Επιλέγουμε τυχόν $w \in \mathbb{C}$. Αν $f(z) = w$ για κάποιο $z \in U$, τότε δεν έχουμε τίποτα να αποδείξουμε. Αν $f(z) \neq w$ για κάθε $z \in V$, τότε θεωρούμε την $g : V \to \mathbb{C}$ με

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w}.$$

Η g είναι αναλυτική. Αρκεί να δείξουμε ότι δεν είναι φραγμένη. Ας υποθέσουμε ότι η g είναι φραγμένη. Τότε $M_g(z_0, r) \leq c$, $0 < r < b$, όπου c κάποια θετική σταθερά. Από το Λήμμα 4.6, η g έχει επουσιώδη ανωμαλία στο z_0. Αλλά

$$f(z) = w + \frac{1}{g(z)}$$

στο V, άρα η $(z - z_0)^m f(z)$ έχει επουσιώδη ανωμαλία στο z_0 για κατάλληλο m. Συνεπώς η f είτε έχει επουσιώδη ανωμαλία, είτε έχει πόλο στο z_0, άτοπο. □

Θεώρημα 4.8. *Έστω ότι η f έχει μεμονωμένη ανωμαλία στο z_0. Τότε*

(1) *Το z_0 είναι επουσιώδης ανωμαλία αν και μόνο αν το $\lim_{z \to z_0} f(z)$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο.*
(2) *Το z_0 είναι πόλος τάξης m αν και μόνο αν το $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^m f(z)$ είναι μη μηδενικό και πεπερασμένο.*
(3) *Το z_0 είναι ουσιώδης ανωμαλία αν και μόνο αν το $\lim_{z \to z_0} f(z)$ δεν υπάρχει.*

Απόδειξη. Άσκηση. □

Η συμπεριφορά μιας συνάρτησης f στο ∞ μπορεί να μελετηθεί εξετάζοντας την $g(z) = f(\frac{1}{z})$ στο 0.

Ορισμός 4.9. *Λέμε ότι η f έχει **επουσιώδη ανωμαλία, πόλο ή ουσιώδη ανωμαλία στο** ∞ αν και μόνο αν η f είναι αναλυτική σ' ένα σύνολο τής μορφής $\{z : |z| > r\}$ και η συνάρτηση*

$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$$

έχει επουσιώδη ανωμαλία, πόλο ή ουσιώδη ανωμαλία στο 0.

Ολοκληρωτικά υπόλοιπα

Θα αναπτύξουμε μια τεχνική η οποία επιτρέπει τον γρήγορο υπολογισμό ολοκληρωμάτων τής μορφής $\int_\gamma f(z)\, dz$, όπου γ είναι ένα κλειστό μονοπάτι στο U και η f είναι αναλυτική στο U, εκτός από ένα σύνολο μεμονωμένων ανωμαλιών.

Ορισμός 4.10. *Αν η f έχει μια μεμονωμένη ανωμαλία στο z_0, τότε ο συντελεστής a_{-1} στο ανάπτυγμα Laurent τής f γύρω από το z_0 λέγεται **ολοκληρωτικό υπόλοιπο** τής f στο z_0 και συμβολίζεται με $\operatorname{Res}(f, z_0)$.*

Στόχος μας είναι να ανάγουμε τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων στον υπολογισμό ολοκληρωτικών υπολοίπων.

Λήμμα 4.11. *Έστω f αναλυτική στο $U \setminus \{z_0\}$, όπου $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό. Έστω R ένα ανοιχτό ορθογώνιο τέτοιο ώστε $\overline{R} \subset U$. Αν $z_0 \in R$, τότε*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R} f(z)\,dz = \mathrm{Res}\,(f, z_0).$$

Απόδειξη. Αναπτύσσουμε την f σε σειρά Laurent γύρω από το z_0.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n.$$

Έστω $\Gamma \subset R$ ένας κύκλος με κέντρο το z_0. Το ∂R είναι ομολογικό με το Γ, επομένως

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial R} f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} f(z)dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}a_n\int_{\Gamma}(z-z_0)^n dz = a_{-1}.$$

□

Θα χρειαστούμε και το ακόλουθο τεχνικό λήμμα.

Λήμμα 4.12. *Έστω γ ένα κλειστό μονοπάτι στο $\mathbb{C}$, και $S \subset \mathbb{C}$ τέτοιο ώστε $\overline{S} \cap \gamma^* = \emptyset$. Υποθέτουμε ότι $n(\gamma, w) = 0$ για κάθε σημείο συσσώρευσης τού S. Τότε $n(\gamma, z) = 0$ για όλα εκτός από το πολύ πεπερασμένο πλήθος $z \in S$.*

Απόδειξη. Θέτουμε $A = \{z : n(\gamma, z) = 0\}$. Τότε το A είναι η ένωση όλων των συνεκτικών συνιστωσών του $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ στις οποίες ο δείκτης $n(\gamma, \cdot)$ είναι μηδέν. Ιδιαίτερα, το A είναι ένα ανοιχτό σύνολο το οποίο περιέχει το $\{z : |z| > r\}$ για $r > 0$ αρκετά μεγάλο. Επομένως το $\mathbb{C} \setminus A$ είναι συμπαγές. Αν τώρα άπειρα σημεία τού S ανήκουν στο $\mathbb{C} \setminus A$, τότε το S έχει σημείο συσσώρευσης στο $\mathbb{C} \setminus A$, άτοπο. □

Θεώρημα 4.13 (Το Θεώρημα των Ολοκληρωτικών Υπολοίπων). *Έστω f αναλυτική σ' ένα ανοιχτό σύνολο $U \subset \mathbb{C}$, εκτός από ένα σύνολο μεμονωμένων ανωμαλιών στα σημεία $w_1, w_2, \ldots$. Έστω γ ένα 0-ομολογικό κλειστό μονοπάτι ή κύκλος στο U, τέτοιο ώστε $w_j \notin \gamma^*$ για κάθε j. Τότε*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(z)\,dz = \sum_j n(\gamma, w_j)\mathrm{Res}\,(f, w_j).$$

Απόδειξη. Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι $n(\gamma, w_j) = 0$ για όλα εκτός από το πολύ πεπερασμένο πλήθος j, κι' έτσι το άθροισμα είναι στην πραγματικότητα πεπερασμένο. Πράγματι, ας θέσουμε $S = \{w_1, w_2, \ldots\}$. Αν w είναι ένα σημείο συσσώρευσης τού S, τότε $w \notin U$ διότι όλες οι ανωμαλίες είναι μεμονωμένες. Επομένως $n(\gamma, w) = 0$. Επιπλέον, $\overline{S} \cap \gamma^* = \emptyset$ διότι $S \cap \gamma^* = \emptyset$ από υπόθεση, και τα σημεία συσσώρευσης τού S δεν ανήκουν στο γ^* γιατί $\gamma^* \subset U$. Ο ισχυρισμός έπεται τώρα από το Λήμμα 4.12. Τώρα έστω $w_1, \ldots, w_t$ οι ανωμαλίες για τις οποίες $n(\gamma, w_j) \neq 0$ (αναδιατάσσουμε τα w_j αν χρειάζεται). Το σύνολο $U \setminus S$ είναι ανοιχτό, διότι το S δεν έχει σημεία συσσώρευσης στο U. Επίσης, $\gamma^* \subset U \setminus S$. Επομένως, όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.15, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το γ είναι ένα πολυγωνικό μονοπάτι με πλευρές παράλληλες στους άξονες. Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι κανένα από τα $w_1, \ldots, w_t$ δεν βρίσκεται πάνω στο δίκτυο των ευθειών που διέρχονται από τις κορυφές τού γ και είναι παράλληλες στους άξονες. Από το Λήμμα 3.14, το γ είναι ισοδύναμο με ένα κύκλο τής μορφής

$$\sum_{i=1}^{m} n(\gamma, z_i)\partial R_i,$$

όπου $z_i \in R_i$, και για κάθε $j = 1, \ldots, t$, έχουμε $w_j \in R_i$ για κάποιο i. Χωρίς βλάβη τής γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το δίκτυο των ευθειών είναι τόσο πυκνό ώστε δυο διαφορετικά w_j στο σύνολο $\{w_1, \ldots, w_t\}$ να μην ανήκουν στο ίδιο R_i. Τώρα, έστω $V = U \setminus \{w_{t+1}, w_{t+2}, \ldots\}$. Αν κάποιο $\overline{R_i}$ δεν περιέχεται στο V, τότε $n(\gamma, z_i) = 0$. Για να δούμε γιατί αυτό ισχύει, επιλέγουμε $z_0 \in \overline{R_i} \setminus V$. Τότε τα z_i και z_0 βρίσκονται στην ίδια συνεκτική συνιστώσα τού $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ και κατά συνέπεια $n(\gamma, z_i) = n(\gamma, z_0)$. Αν $z_0 \notin U$, τότε $n(\gamma, z_0) = 0$ διότι το γ είναι 0-ομολογικό. Αν το z_0 είναι κάποιο από τα w_j, $j \geq t+1$, τότε $n(\gamma, z_0) = 0$, από την επιλογή τού t. Δηλαδή το γ είναι ισοδύναμο με τον κύκλο

$$\sigma = \sum_{\overline{R}_k \subset V} n(\gamma, z_k)\partial R_k.$$

Επομένως

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_{\sigma} f(z)\,dz = \sum_{\overline{R}_k\subset V} n(\gamma, z_k) \int_{\partial R_k} f(z)\,dz.$$

Αν τώρα κάποιο $w_j,\ j = 1, \ldots, t$, ανήκει σε κάποιο R_k με $\overline{R}_k \subset V$, τότε $n(\gamma, z_k) = n(\gamma, w_j)$ και

$$\int_{\partial R_k} f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, w_j),$$

από το Λήμμα 4.11. Αν κανένα $w_j,\ j = 1, \ldots, t$, δεν ανήκει σε κάποιο R_k με $\overline{R}_k \subset V$ τότε

$$\int_{\partial R_k} f(z)\,dz = 0.$$

Αλλά κάθε $w_j,\ j = 1, \ldots, t$, ανήκει σε κάποιο R_k με $\overline{R}_k \subset V$. Επομένως

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{t} n(\gamma, w_j)\operatorname{Res}(f, w_j).$$

□

Το πλεονέκτημα των ολοκληρωτικών υπολοίπων είναι ότι συχνά είναι εύκολο να υπολογιστούν.

Πρόταση 4.14. *Αν η f έχει πόλο τάξης m στο z_0, τότε*

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\left(\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)]\right).$$

Απόδειξη. Άσκηση. □

Θα εφαρμόσουμε τώρα το Θεώρημα των Ολοκληρωτικών Υπολοίπων για να αποδείξουμε μια βασική γεωμετρική ιδιότητα των αναλυτικών συναρτήσεων. Αν γ είναι ένα κλειστό μονοπάτι, τότε ο αριθμός των στροφών τής $f(z)$ γύρω από την αρχή των αξόνων καθώς το z κινείται πάνω στο γ, είναι ίσος με τον αριθμό των ριζών τής f μέσα στο γ^*, λαμβάνοντας υπόψη τον δείκτη τους και την τάξη τους. Θα αποδείξουμε πρώτα ένα Λήμμα.

Λήμμα 4.15. *Έστω ότι η f είναι αναλυτική στο z_0. Υποθέτουμε ότι το z_0 είναι ρίζα τάξης k τής f. Τότε η $\frac{f'}{f}$ έχει απλό πόλο στο z_0 με $\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, z_0\right) = k$.*

Απόδειξη. Έστω $f(z) = (z-z_0)^k g(z)$, όπου η g είναι αναλυτική στο z_0 και $g(z_0) \neq 0$. Τότε

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z-z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Επομένως

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, z_0\right) = k + \operatorname{Res}\left(\frac{g'}{g}, z_0\right) = k,$$

διότι η $\frac{g'}{g}$ είναι αναλυτική στο z_0. □

Θεώρημα 4.16 (Η Αρχή τού Ορίσματος). *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό, $f : U \to \mathbb{C}$ αναλυτική και γ ένα 0-ομολογικό κλειστό μονοπάτι στο U τέτοιο ώστε η f δεν μηδενίζεται στο γ^*. Αν η f δεν είναι ταυτοτικά ίση με 0 σε καμία συνεκτική συνιστώσα του U, και οι ρίζες τής f είναι τα διακεκριμένα σημεία $z_1, z_2, \ldots$ με τάξεις $k_1, k_2, \ldots$, τότε*

$$n(f\circ\gamma, 0) = \sum_j k_j n(\gamma, z_j).$$

(Το άθροισμα είναι πεπερασμένο από το Λήμμα 4.12.)

Απόδειξη. Από την Πρόταση 3.11, το Θεώρημα των Ολοκληρωτικών Υπολοίπων και το Λήμμα 4.15 έχουμε

$$n(f\circ\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_j \operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, z_j\right) n(\gamma, z_j) = \sum_j k_j n(\gamma, z_j).$$

□

Θεώρημα 4.17 (Η Γενικευμένη Αρχή τού Ορίσματος). *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό, $f, g : U \to \mathbb{C}$ αναλυτικές, και γ ένα 0-ομολογικό κλειστό μονοπάτι στο U τέτοιο ώστε η f και g δεν μηδενίζονται στο γ^*. Υποθέτουμε ότι οι f και g δεν είναι ταυτοτικά μηδέν σε καμία συνεκτική συνιστώσα τού U. Έστω $z_1, z_2, \ldots$ οι ρίζες τής f με τάξεις $k_1, k_2, \ldots$, και $w_1, w_2, \ldots$ οι ρίζες τής g με τάξεις $m_1, m_2, \ldots$. Θέτουμε $h = \frac{f}{g}$. Τότε*

$$n(h \circ \gamma, 0) = \sum_j k_j n(\gamma, z_j) - \sum_j m_j n(\gamma, w_j).$$

Απόδειξη. Άσκηση. □

Θεώρημα 4.18 (Το Θεώρημα τού Rouche). *Έστω ότι οι f και g ικανοποιούν τις υποθέσεις τού Θεωρήματος 4.16 και επιπλέον $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ για κάθε $z \in \gamma^*$. Τότε $n(f \circ \gamma, 0) = n(g \circ \gamma, 0)$. Επομένως, από την Αρχή τού Ορίσματος, η f και η g έχουν τον ίδιο αριθμό ριζών μέσα στο γ^*, λαμβανομένων υπόψη των τάξεων τους και των δεικτών τους.*

Απόδειξη. Σε μια περιοχή του γ^* έχουμε $g = f f_1$, όπου

$$f_1 = 1 + \frac{g - f}{f}.$$

Η f_1 δεν είναι ποτέ μηδέν στο γ^* από υπόθεση. Επίσης έχουμε $|f_1(z) - 1| < \delta$, για κάθε $z \in \gamma^*$, όπου $0 < \delta < 1$. Τώρα

$$n(g \circ \gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz + \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f_1'(z)}{f_1(z)}\, dz = n(f \circ \gamma, 0) + n(f_1 \circ \gamma, 0).$$

Αλλά το $f_1 \circ \gamma$ είναι ένα κλειστό μονοπάτι στο απλά συνεκτικό ανοιχτό σύνολο $D(1, \delta)$ και $0 \notin D$, επομένως $n(f_1 \circ \gamma, 0) = 0$. □

Το Θεώρημα Ανοιχτής Απεικόνισης

Σκοπός μας σ' αυτήν την ενότητα είναι να δείξουμε ότι μια μη σταθερή αναλυτική συνάρτηση απεικονίζει ανοιχτά σύνολα σε ανοιχτά σύνολα. Κατ' αρχάς χρειαζόμαστε κάποιες πληροφορίες σχετικά με τον αριθμό των λύσεων τής εξίσωσης $f(z) = w$, όπου το w είναι σταθεροποιημένο και το z κινείται σε μια περιοχή μιας ρίζας τής f.

Πρόταση 4.19. *Έστω ότι η f είναι αναλυτική και όχι σταθερή στο $D(z_0, r)$. Υποθέτουμε ότι το z_0 είναι ρίζα τάξης k τής f. Επιλέγουμε r_1 αρκετά μικρό ώστε ούτε η f ούτε η f' να μηδενίζονται για $0 < |z - z_0| \le r_1$ (αν αυτό δεν ήταν δυνατό τότε το σύνολο των ριζών είτε τής f είτε τής f' θα είχε σημείο συσσώρευσης, επομένως η f θα ήταν σταθερή, άτοπο). Θέτουμε $m = \min\{|f(z)| : |z - z_0| = r_1\}$. Αν $0 < |w| < m$, τότε υπάρχουν ακριβώς k σημεία $z \in D(z_0, r_1)$ τέτοια ώστε $f(z) = w$.*

Απόδειξη. Έστω $\gamma(t) = z_0 + r_1 e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$. Τότε $|f(z)| \ge m > |w|$ στο γ^*, επομένως από το Θεώρημα Rouche

$$n(f \circ \gamma, 0) = n((f - w) \circ \gamma, 0).$$

Τώρα από υπόθεση, η f έχει μια μόνο ρίζα τάξης k μέσα στο γ^*. Άρα, από την Αρχή τού Ορίσματος, $n(f \circ \gamma, 0) = k$. Από την άλλη μεριά, πάλι η Αρχή του Ορίσματος μάς λέει ότι

$$n((f - w) \circ \gamma, 0) = \sum_j k_j n(\gamma, z_j),$$

όπου τα z_j είναι οι ρίζες τής $f - w$ μέσα στο γ^* (άρα $n(\gamma, z_j) = 1$) με τάξεις k_j. Αν υπήρχαν λιγότερα από k τέτοια σημεία, τότε κάποιο z_j θα είχε τάξη μεγαλύτερη από 1. Αλλά τότε $f'(z_j) = 0$, άρα κατ' ανάγκη $z_j = z_0$, το οποίο είναι άτοπο διότι $f(z_0) = 0 \neq w$. □

Πρόταση 4.20. *Έστω f αναλυτική και όχι σταθερή στο $D(z_0, r)$. Υποθέτουμε ότι το z_0 είναι ρίζα τάξης k τής f. Τότε υπάρχει ένα ανοιχτό σύνολο $U \subset D(z_0, r)$ με $z_0 \in U$ τέτοιο ώστε για κάθε $z \in U \setminus \{z_0\}$*

(1) $f(z) \neq 0$.
(2) *Υπάρχουν ακριβώς k σημεία $z' \in U \setminus \{z_0\}$ τέτοια ώστε $f(z) = f(z')$. Με άλλα λόγια η f παίρνει κάθε τιμή της στο $U \setminus \{z_0\}$ ακριβώς k φορές. Ισοδύναμα, η f είναι «k-1» στο $U \setminus \{z_0\}$.*

Απόδειξη. Έστω $D(z_0, r_1)$ και m όπως στην Πρόταση 4.19. Θέτουμε $U = D(z_0, r_1) \cap f^{-1}(D(0, m))$. Αν $z \in U \setminus \{z_0\}$, τότε $f(z) \neq 0$, από την επιλογή τού r_1. Επιπλέον, $0 < |f(z)| < m$, άρα από την Πρόταση 4.19, υπάρχουν ακριβώς k σημεία $z' \in D(z_0, r_1)$ με $f(z) = f(z')$. Εφόσον $0 < |f(z')| < m$, όλα τα z' ανήκουν στο $U \setminus \{z_0\}$. □

Είμαστε τώρα σε θέση να προσδιορίσουμε πότε μια αναλυτική συνάρτηση είναι τοπικά 1-1.

Πρόταση 4.21. *Έστω f αναλυτική στο z_0. Αν $f'(z_0) \neq 0$, τότε υπάρχει μια περιοχή τού z_0 στην οποία η f είναι 1-1. Αν $f'(z_0) = 0$, τότε η f δεν μπορεί να είναι 1-1 σε καμία περιοχή τού z_0.*

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε την Πρόταση 4.20 στην $f(z) - f(z_0)$, παρατηρώντας ότι το z_0 είναι ρίζα τάξης 1 αν $f'(z_0) \neq 0$, και τάξης $k > 1$ αν $f'(z_0) = 0$. □

Θεώρημα 4.22 (Το Θεώρημα Ανοιχτής Απεικόνισης). *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό, και $g : U \to \mathbb{C}$ αναλυτική, όχι σταθερή σε καμία συνεκτική συνιστώσα τού U. Αν το V είναι ανοιχτό υποσύνολο τού U, τότε το $g(V)$ είναι ανοιχτό.*

Απόδειξη. Έστω $g(z_0) \in g(V)$, $z_0 \in V$. Θέτουμε $f(z) = g(z) - g(z_0)$ και επιλέγουμε r ώστε $D(z_0, r) \subset V$. Από υπόθεση και Αρχή Ταυτότητας, η f δεν είναι σταθερή στο $D(z_0, r)$. Ορίζουμε τα $D(z_0, r_1)$ και m όπως στην Πρόταση 4.19. Τότε $D(0, m) \subset f(V)$, επομένως $D(g(z_0), m) \subset g(V)$. Άρα το $g(V)$ είναι ανοιχτό. □

Πόρισμα 4.23. *Έστω g αναλυτική και 1-1 στο ανοιχτό σύνολο $U \subset \mathbb{C}$. Τότε η αντίστροφη g^{-1} είναι αναλυτική στο ανοιχτό σύνολο $g(U)$.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα Ανοιχτής Απεικόνισης, η g είναι ανοιχτή, επομένως η g^{-1} είναι συνεχής. Το συμπέρασμα έπεται από το Θεώρημα 2.4. □

Αναλυτικές απεικονίσεις ενός δίσκου σ' έναν άλλο

Σ' αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε τη συμπεριφορά μιας αναλυτικής συνάρτησης η οποία απεικονίζει έναν δίσκο σε κάποιον άλλο. Κατάλληλοι γραμμικοί κλασματικοί μετασχηματισμοί, δηλαδή απεικονίσεις τής μορφής

$$\frac{az + b}{cz + d}, \ ad - bc \neq 0,$$

αποτελούν τα βασικά παραδείγματα. Τα αποτελέσματα που θα δείξουμε, ουσιαστικά, θα μας επιτρέψουν να συγκρίνουμε μια δεδομένη αναλυτική συνάρτηση μ' έναν τέτοιο μετασχηματισμό.

Λήμμα 4.24. *Αν $|a| < 1$, θέτουμε*

$$\varphi_a(z) = \frac{z - a}{1 - \overline{a}z}.$$

Τότε η φ_a είναι μια 1-1 και επί αναλυτική απεικόνιση τού $D = D(0, 1)$ στον εαυτό του. Επιπλέον, η φ_a απεικονίζει 1-1 και επί το $\{z : |z| = 1\}$ στον εαυτό του.

Απόδειξη. Η φ_a είναι προφανώς 1-1. Αφού $|a| < 1$, η φ_a είναι αναλυτική στο D. Αν τώρα $|z| = 1$, τότε $|z - a| = |z||1 - a\overline{z}|$, επομένως $|\varphi_a(z)| = 1$. Η αντίστροφη τής φ_a είναι

$$\varphi_{-a}(w) = \frac{w + a}{1 + \overline{a}w}.$$

Επομένως $|\varphi_{-a}(w)| = 1$ όταν $|w| = 1$. Άρα η φ_a απεικονίζει το $\{z : |z| = 1\}$ 1-1 και επί στον εαυτό του. Από την Αρχή τού Μεγίστου, η φ_a απεικονίζει το D στον εαυτό του, και ομοίως για την φ_{-a}. Αλλά $\varphi_{-a}(D) \subset D$ σημαίνει ότι $D \subset \varphi_a(D)$, άρα η φ_a είναι επί. □

Λήμμα 4.25. *Σταθεροποιούμε $z_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$, και θέτουμε*

$$f(z) = \frac{R(z - z_0)}{R^2 - \overline{z}_0 z}, \ |z_0| < R.$$

Τότε f η είναι μια 1-1 και επί αναλυτική συνάρτηση τού $D(0, R)$ στο $D(0, 1)$. Επίσης, η f απεικονίζει το $\{z : |z| = R\}$ 1-1 και επί στο $\{z : |z| = 1\}$.

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Λήμμα 4.24 για τη συνάρτηση

$$g(z) = \frac{z - (z_0/R)}{1 - (\overline{z}_0 z/R)}$$

και παρατηρούμε ότι

$$f(z) = g\left(\frac{z}{R}\right).$$

□

Τα επόμενα τρία αποτελέσματα είναι γνωστά με το όνομα **Λήμμα τού Schwarz**.

Θεώρημα 4.26. *Έστω f μια αναλυτική απεικόνιση τού $D = D(0,1)$ στον εαυτό του, με $f(0) = 0$. Τότε $|f(z)| \le |z|$ για κάθε $z \in D$ και $|f'(0)| \le 1$. Επιπλέον, αν $|f(z_0)| = |z_0|$ για κάποιο $z_0 \in D$, με $z_0 \neq 0$, ή αν $|f'(0)| = 1$, τότε η f είναι της μορφής $f(z) = az$ για κάποιο $a \in \mathbb{C}$ με $|a| = 1$.*

Απόδειξη. Θέτουμε

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z}, & z \neq 0 \\ f'(0), & z = 0 \end{cases}.$$

Από το Πόρισμα 2.24, η f είναι αναλυτική στο D. Αν $|z| = r < 1$, τότε $|g(z)| \le 1/r$, επομένως, από την Αρχή τού Μεγίστου, $|g(z)| \le 1/r$, όταν $|z| \le r$. Για $r \to 1$ παίρνουμε $|g(z)| \le 1$, δηλαδή $|f(z)| \le |z|$, $z \in D$. Αν $|g(z_0)| = 1$ για κάποιο $z_0 \in D$, τότε $|g(z_0)| = \sup\{|g(z)| : z \in D\}$. Επομένως, από την Αρχή τού Μεγίστου, η g είναι σταθερή στο D. Τότε όμως $f(z) = az$, για κάποιο a με $|a| = 1$. □

Θεώρημα 4.27. *Έστω f μια αναλυτική απεικόνιση τού $D(0,R)$ στο $D(0,M)$ με $f(z_0) = w_0$, για κάποια $|z_0| < R$, $|w_0| < M$. Τότε*

$$\left|\frac{M(f(z) - w_0)}{M^2 - \overline{w}_0 f(z)}\right| \le \left|\frac{R(z - z_0)}{R^2 - \overline{z}_0 z}\right|,$$

για κάθε $z \in D(0,R)$.

Απόδειξη. Θέτουμε

$$T(z) = \frac{R(z - z_0)}{R^2 - \overline{z}_0 z},\ S(w) = \frac{M(w - w_0)}{M^2 - \overline{w}_0 w}.$$

Τότε η $S \circ f \circ T^{-1}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις τού Θεωρήματος 4.26. Επομένως $|S \circ f \circ T^{-1}(z_1)| \le |z_1|$, για $|z_1| < 1$. Άρα, $|S(f(z))| \le |T(z)|$, για $|z| < R$. □

Παρατηρήσεις.

(1) Αν στο προηγούμενο θεώρημα έχουμε ισότητα σε κάποιο σημείο (διαφορετικό από το z_0), τότε από το Θεώρημα 4.26, έχουμε $S \circ f \circ T^{-1}(z) = az$, με $|a| = 1$, δηλαδή

$$f(z) = S^{-1}(aT(z)).$$

Ιδιαίτερα, η f είναι ένας γραμμικός κλασματικός μετασχηματισμός.

(2) Εφόσον

$$T'(z_0) = \frac{R}{R^2 - |z_0|^2},$$

έχουμε ότι

$$(S \circ f \circ T^{-1})'(0) = \frac{M}{R} f'(z_0)\left(\frac{R^2 - |z_0|^2}{M^2 - |f(z_0)|^2}\right).$$

Από το Θεώρημα 4.26, η παραπάνω ποσότητα είναι, σε απόλυτη τιμή, το πολύ 1. Αν η απόλυτη τιμή είναι ίση με 1, τότε η f είναι ένας γραμμικός κλασματικός μετασχηματισμός, όπως στην προηγούμενη παρατήρηση.

Θεώρημα 4.28. *Έστω f μια αναλυτική απεικόνιση τού $D(0,R)$ στον $D(0,M)$, με $f(z_0)=0$ για κάποιο $z_0 \in D(0,R)$. Τότε*

$$|f(z)| \leq M\left|\frac{R(z-z_0)}{R^2-\overline{z}_0 z}\right|,$$

για όλα τα $z \in D(0,R)$. Αν έχουμε ισότητα για κάποιο $z \neq z_0$, ή αν

$$\frac{|f'(z_0)(R^2-|z_0|^2)|}{MR}=1,$$

τότε η f είναι τής μορφής

$$f(z)=aM\frac{R(z-z_0)}{R^2-\overline{z}_0 z},$$

με $|a|=1$.

Απόδειξη. Ο πρώτος ισχυρισμός έπεται από το Θεώρημα 4.27 για $w_0=0$. Από την υπόθεση τού δεύτερου ισχυρισμού συνεπάγεται, από τις παρατηρήσεις παραπάνω, ότι $f(z)=S^{-1}(aT(z))$. Αλλά $S(w)=w/M$, ισοδύναμα, $S^{-1}(z)=Mz$, και το συμπέρασμα έπεται. □

Θα χαρακτηρίσουμε τώρα τις 1-1 και επί απεικονίσεις τού ανοιχτού μοναδιαίου δίσκου στον εαυτό του.

Θεώρημα 4.29. *Έστω $f: D(0,1)\to D(0,1)$ αναλυτική, 1-1 και επί, με αντίστροφη g. Θέτουμε $a=g(0)$. Τότε υπάρχει $c\in\mathbb{C}$ με $|c|=1$ τέτοιο ώστε $f(z)=c\varphi_a(z)$ για κάθε $z\in D(0,1)$.*

Απόδειξη. Έχουμε $f\circ\varphi_{-a}(0)=0$ και $\varphi_a\circ g(0)=0$, άρα από το Λήμμα τού Schwarz, $|(f\circ\varphi_{-a})'(0)|\leq 1$ και $|(\varphi_a\circ g)'(0)|\leq 1$, δηλαδή $|f'(a)|(1-|a|^2)\leq 1$ και $|g'(0)|(1-|a|^2)^{-1}\leq 1$. Αλλά $f'(a)g'(0)=1$, επομένως $|f'(a)|(1-|a|^2)=1$, συνεπώς από το Λήμμα τού Schwarz, υπάρχει c με $|c|=1$ τέτοιο ώστε $f\circ\varphi_{-a}(z)=cz$. □

Το Θεώρημα Phragmen-Lindelof

Η Αρχή Μεγίστου, γενικά, δεν ισχύει σε μη φραγμένα χωρία. Για παράδειγμα, η εκθετική συνάρτηση είναι φραγμένη πάνω στον φανταστικό άξονα, αλλά όχι στο δεξί ημιεπίπεδο (το σύνορο τού οποίου είναι ο φανταστικός άξονας). Παρ' όλα αυτά ισχύει η εξής παραλλαγή. Αν το $U\subset\mathbb{C}$ είναι ανοιχτό και συνεκτικό (όχι κατ' ανάγκη φραγμένο), $f: U\to\mathbb{C}$ αναλυτική, και θέσουμε $\partial_\infty U$ να είναι το σύνορο τού U στο $\widehat{\mathbb{C}}$, τότε, με το συμβολισμό τού Θεωρήματος 2.38, έχουμε ότι αν υπάρχει $M>0$ τέτοιο ώστε $\limsup\limits_{z\to\partial_\infty U}|f(z)|\leq M$, τότε $|f(z)|\leq M$ για κάθε $z\in U$. Αυτό αποδεικνύεται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που αποδεικνύεται το (3) τού Θεωρήματος 2.38. Το επόμενο αποτέλεσμα δείχνει ότι μπορούμε, φαινομενικά, να εξασθενήσουμε τη συνθήκη ότι η f πρέπει να είναι φραγμένη στο σύνορο.

Θεώρημα 4.30 (Phragmen-Lindelof)**.** *Έστω $U\subset\mathbb{C}$ ανοιχτό, συνεκτικό και απλά συνεκτικό, και $f: U\to\mathbb{C}$ μια αναλυτική συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $\partial_\infty U=A\cup B$ για κάποια A και B, και ότι υπάρχει μια $w: U\to\mathbb{C}$ φραγμένη, αναλυτική και πουθενά μηδέν έτσι ώστε:*

- $\limsup\limits_{z\to A}|f(z)|\leq M$.
- *Για κάθε $a>0$ έχουμε* $\limsup\limits_{z\to B}|f(z)|\cdot|w(z)|^a\leq M$.

Τότε $|f(z)|\leq M$ για κάθε $z\in U$.

Απόδειξη. Έστω $c>0$ τέτοιο ώστε $|w(z)|\leq c$ για κάθε $z\in U$. Αφού το U είναι απλά συνεκτικό και η w δεν μηδενίζεται, έχει αναλυτικό λογάριθμο, έστω h. Θέτουμε $g(z)=e^{ah(z)}$. Τότε $|g(z)|=|w(z)|^a$. Θέτουμε $F(z)=f(z)g(z)c^{-a}$. Τότε

$$\limsup_{z\to A}|F(z)|\leq M,\quad \limsup_{z\to B}|F(z)|\leq Mc^{-a}.$$

Έτσι, από Αρχή Μεγίστου, $|F(z)|\leq\max\{M,Mc^{-a}\}$. Άρα $|f(z)|\leq|w(z)|^{-a}\max\{M,Mc^{-a}\}$. Παίρνοντας όρια καθώς $a\to 0$, έχουμε το ζητούμενο. □

Παράδειγμα. Έστω $U=\{z:\Re z>0\}$ το δεξί ανοιχτό ημιεπίπεδο και $f: U\to\mathbb{C}$ μια αναλυτική συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι:

- Υπάρχει $M>0$ τέτοιο ώστε $\limsup\limits_{z\to\partial U}|f(z)|\leq M$.

- Υπάρχουν $P > 0$, $0 < b < 1$ τέτοια ώστε $|f(z)| \le Pe^{|z|^b}$ για κάθε $z \in U$.

Τότε $|f(z)| \le M$ για κάθε $z \in U$.

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε c με $b < c < 1$, και θέτουμε $w(z) = e^{-z^c}$. Τότε για κάθε $z = re^{i\theta} \in U$ έχουμε

$$|w(z)| = e^{-r^c \cos(c\theta)} \le 1,$$

άρα η w είναι φραγμένη. Επίσης για κάθε $a > 0$ έχουμε

$$|f(z)| \cdot |w(z)|^a \le Pe^{r^b - ar^c \cos(c\theta)} \le Pe^{r^b - ar^c \cos(c\pi/2)} \to 0 = Pe^{|z|^b - a|z|^c \cos(c\pi/2)} \to 0,$$

καθώς $z \to \infty$. Έτσι, αν θέσουμε $A = \partial U$, $B = \{\infty\}$, έχουμε ότι $\partial_\infty U = A \cup B$ και

$$\limsup_{z \to A} |f(z)| \le M, \quad \limsup_{z \to B} |f(z)| \cdot |w(z)|^a = 0.$$

Το συμπέρασμα έπεται από το θεώρημα Phragmen-Lindelof. □

Μια επέκταση τού Θεωρήματος τού Cauchy και τού Ολοκληρωτικού Τύπου τού Cauchy

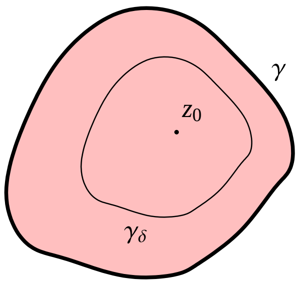
Θα αποδείξουμε μια έκδοση τού Θεωρήματος και τού ολοκληρωτικού τύπου τού Cauchy για συναρτήσεις οι οποίες είναι αναλυτικές σ' ένα χωρίο το σύνορο τού οποίου είναι ένα κλειστό μονοπάτι, και συνεχείς στην κλειστότητα τού χωρίου.

Θεώρημα 4.31. *Έστω U ένα ανοιχτό, συνεκτικό, απλά συνεκτικό και φραγμένο υποσύνολο τού $\mathbb{C}$. Υποθέτουμε ότι*

(1) *Υπάρχει ένα κλειστό μονοπάτι γ τής μορφής $\gamma(t) = z_0 + \gamma_1(t)$, $a \le t \le b$, τέτοιο ώστε $\gamma^* = \partial U$.*
(2) *Αν $0 \le \delta < 1$, τότε $z_0 + \delta\gamma_1(t) \in U$ για όλα τα $t \in [a, b]$.*

Τότε για κάθε $f : \overline{U} \to \mathbb{C}$ αναλυτική στο U και συνεχή στο $\overline{U}$, έχουμε $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

Απόδειξη. Έστω $\gamma_\delta(t) = z_0 + \delta\gamma_1(t)$, $0 < \delta < 1$. Τότε $\int_{\gamma_\delta} f(z)\,dz = 0$, από το Θεώρημα 3.19.



Τώρα,

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| = \left|\int_\gamma f(z)\,dz - \int_{\gamma_\delta} f(z)\,dz\right| = \left|\int_a^b f(z_0 + \gamma_1(t))\gamma_1'(t)\,dt - \int_a^b f(z_0 + \delta\gamma_1(t))\delta\gamma_1'(t)\,dt\right|$$
$$\le \left|\int_a^b [f(z_0 + \gamma_1(t)) - f(z_0 + \delta\gamma_1(t))]\gamma_1'(t)\,dt\right| + \left|\int_a^b f(z_0 + \delta\gamma_1(t))\gamma_1'(t)(1-\delta)\,dt\right|.$$

Ο πρώτος όρος τείνει στο 0 καθώς $\delta \to 1$ εφόσον η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\overline{U}$, και ο δεύτερος όρος τείνει στο 0 καθώς $\delta \to 1$, διότι η f είναι φραγμένη στο $\overline{U}$. □

Θεώρημα 4.32. *Με τις υποθέσεις τού προηγούμενου θεωρήματος, για κάθε $z \in U$ έχουμε*

$$f(z)n(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\,dw.$$

Απόδειξη. Επαναλαμβάνουμε κατά λέξη το επιχείρημα τής απόδειξης τού Θεωρήματος 3.20, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 4.31 στη θέση τού Θεωρήματος 3.15. □

Ο Ολοκληρωτικός Τύπος τού Poisson και το Πρόβλημα Dirichlet

Ο σκοπός μας στην ενότητα αυτή είναι να λύσουμε το πρόβλημα Dirichlet για τον δίσκο, δηλαδή να κατασκευάσουμε μια λύση της εξίσωσης Laplace δεδομένων κάποιων συνοριακών τιμών. Το βασικό εργαλείο είναι ο ολοκληρωτικός τύπος τού Poisson, ο οποίος μπορεί να θεωρηθεί το ανάλογο τού ολοκληρωτικού τύπου τού Cauchy για πραγματικές συναρτήσεις. Ξεκινάμε μ’ ένα υπολογιστικό λήμμα.

Λήμμα 4.33. *Αν* $z = re^{i\theta}$, $0 \le r < R$, *τότε*

$$\Re\mathfrak{e}\left[\frac{Re^{it}+z}{Re^{it}-z}\right] = \frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\theta-t)+r^2} = \frac{R^2-r^2}{|Re^{it}-z|^2}.$$

Απόδειξη. Θέτουμε $w = z/R$. Τότε

$$\frac{1+we^{-it}}{1-we^{-it}} = \frac{(1+we^{-it})(1-\overline{w}e^{it})}{|1-we^{-it}|^2} = \frac{1-\frac{r^2}{R^2}+2i\Im\mathfrak{m}\,(we^{-t})}{\left|1-\frac{z}{R}e^{-it}\right|^2}.$$

Στην παραπάνω ισότητα παίρνουμε πραγματικά μέρη, χρησιμοποιούμε τον Νόμο των Συνημιτόνων, και τελειώσαμε. □

Εισάγουμε τον ακόλουθο συμβολισμό.

$$P_r(x) = \frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos x+r^2},\ \ 0\le r<R,\ \ x\in\mathbb{R},$$

$$Q_z(t) = \frac{Re^{it}+z}{Re^{it}-z},\ \ |z|<R,\ \ t\in\mathbb{R}.$$

Η συνάρτηση P_r ονομάζεται **πυρήνας Poisson**. Θα αποδείξουμε τώρα τον Ολοκληρωτικό Τύπο τού Poisson, σύμφωνα με τον οποίο, η τιμή μιας αναλυτικής συνάρτησης σ’ ένα σημείο στο εσωτερικό ενός δίσκου είναι η «μέση τιμή με βάρη» των τιμών της στο σύνορο τού δίσκου, όπου τα βάρη δίνονται από τον πυρήνα Poisson.

Θεώρημα 4.34 (Ο Ολοκληρωτικός Τύπος τού Poisson). *Έστω f αναλυτική στον $D(z_0,R)$ και συνεχής στον $\overline{D}(z_0,R)$. Τότε για $z = z_0 + re^{i\theta}$, $0 \le r < R$, έχουμε*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta-t)f(z_0+Re^{it})\,dt.$$

Αν $u = \Re\mathfrak{e}\, f$, τότε

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta-t)u(z_0+Re^{it})\,dt.$$

Απόδειξη. Έστω $\gamma(t) = z_0 + Re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$. Από το Θεώρημα 4.32 έχουμε

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z}\,dw. \tag{9}$$

Θέτουμε $z_1 = z_0 + \dfrac{R^2}{\overline{z}-\overline{z}_0}$. Εφόσον το z_1 βρίσκεται εκτός τού γ^*, το Θεώρημα 4.32 δίνει

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(w)}{w-z_1}\,dw = 0. \tag{10}$$

Αφαιρώντας την (10) από την (9) παίρνουμε

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+Re^{it})\left[\frac{1}{Re^{it}-re^{i\theta}} - \frac{1}{Re^{it}-\frac{R^2}{r}e^{i\theta}}\right]Re^{it}\,dt.$$

Αλλά

$$\frac{Re^{it}}{Re^{it}-re^{i\theta}} - \frac{Re^{it}}{Re^{it}-\frac{R^2}{r}e^{i\theta}} = \frac{R}{R-re^{i(\theta-t)}} + \frac{re^{i(t-\theta)}}{R-re^{i(t-\theta)}} = P_r(\theta-t).$$

□

Πόρισμα 4.35.
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)\,dt = 1.$$

Απόδειξη. Παίρνουμε $f = 1$ στο Θεώρημα 4.34. □

Είμαστε τώρα έτοιμοι για το βασικό αποτέλεσμα.

Θεώρημα 4.36 (Το Πρόβλημα Dirichlet). *Έστω u_0 μια συνεχής πραγματική συνάρτηση στον κύκλο*
$$\{z : |z - z_0| = R\}.$$
Ορίζουμε
$$u(z_0 + re^{i\theta}) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)u_0(z_0 + Re^{it})\,dt, & 0 \le r < R \\ u_0(z_0 + Re^{i\theta}), & r = R \end{cases}.$$
Τότε

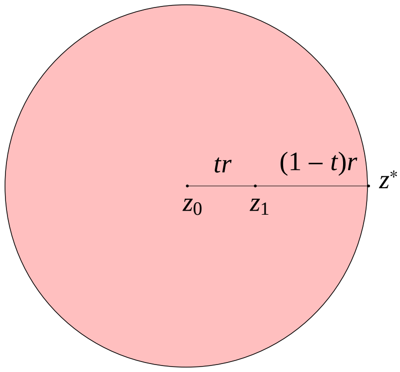
(1) *Στον δίσκο $D(z_0, R)$, η u είναι το πραγματικό μέρος μιας αναλυτικής συνάρτησης και επομένως ικανοποιεί την εξίσωση τού Laplace:*
$$u_{xx} + u_{yy} = 0.$$
(2) *Η u είναι συνεχής στο $\overline{D}(z_0, R)$.*

Απόδειξη. Για $z = re^{i\theta}$, $0 \le r < R$, θέτουμε
$$f(z_0 + z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Q_z(t)u_0(z_0 + Re^{it})\,dt.$$
Τώρα,
$$Q_z(t) = -1 + \frac{2Re^{it}}{Re^{it} - z},$$
επομένως η $f(z_0 + z)$ είναι ίση με μια σταθερά συν
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=R} \frac{2u_0(z_0 + w)}{w - z}dw.$$
Από την Πρόταση 2.26, η f είναι αναλυτική, και επομένως συνεχής στο $D(z_0, R)$. Από το Λήμμα 4.33, $\Re\mathfrak{e}\, f = u$ στον $D(z_0, R)$ και η απόδειξη τού (1) είναι πλήρης. Τώρα, έστω $g(t) = u_0(z_0 + Re^{it})$. Από τον Ολοκληρωτικό Τύπο τού Poisson και το Πόρισμα 4.35 έχουμε για $0 < \delta < \pi$
$$\begin{aligned} |u(z_0 + re^{i\theta}) - u(z_0 + Re^{i\theta})| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(\theta - t)[g(t) - g(\theta)]\,dt\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(x)|g(x + \theta) - g(\theta)|\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} P_r(x)|g(x + \theta) - g(\theta)|\,dx + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta \le |x| \le \pi} P_r(x)|g(x + \theta) - g(\theta)|\,dx. \end{aligned}$$
Για δεδομένο $\varepsilon > 0$, επιλέγουμε δ τόσο μικρό ώστε αν $|x| < \delta$ τότε $|g(x+\theta) - g(\theta)| < \varepsilon$, για όλα τα θ. Η παραπάνω έκφραση είναι τότε μικρότερη από
$$\varepsilon + \frac{P_r(\delta)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g(x + \theta) - g(\theta)|\,dx \le \varepsilon + 2kP_r(\delta),$$
όπου k είναι η μέγιστη τιμή τής συνάρτησης $|g|$. Εφόσον $P_r(\delta) \to 0$ καθώς $r \to R$, έπεται ότι
$$u(z_0 + re^{i\theta}) \to u(z_0 + Re^{i\theta})$$
ομοιόμορφα ως προς θ. Επίσης,
$$u(z_0 + r'e^{i\theta}) \to u(z_0 + re^{i\theta}),$$
καθώς $r' \to r < R$, ομοιόμορφα ως προς θ, από το (1). Αλλά $u(z_0 + re^{i\theta'}) \to u(z_0 + re^{i\theta})$ καθώς $\theta' \to \theta$ για κάθε δεδομένο r, $0 \le r \le R$. Επομένως η $u(z_0 + re^{i\theta})$ είναι από κοινού συνεχής ως προς (r, θ), $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le r \le R$. Συμπεραίνουμε ότι η u είναι συνεχής στο $\overline{D}(z_0, R)$. □

Αναλυτική συνέχιση και το Θεώρημα Μονοδρομίας

Στην ενότητα αυτή εξετάζουμε το πρόβλημα της επέκτασης του πεδίου ορισμού μιας αναλυτικής συνάρτησης.

Ορισμός 4.37. *Έστω $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, με ακτίνα σύγκλισης r, $0 < r < \infty$. Έστω z^* ένα σημείο τέτοιο ώστε $|z^* - z_0| = r$ και έστω $r(t)$ η ακτίνα σύγκλισης τού αναπτύγματος τής f γύρω από το σημείο $z_1 = (1-t)z_0 + tz^*$, $0 < t < 1$. Τότε $r(t) \geq (1-t)r$. Αν $r(t) = (1-t)r$ για κάποιο $t \in (0,1)$, ούτως ώστε δεν υπάρχει συνάρτηση g αναλυτική σ' ένα ανοιχτό συνολο το οποίο να περιέχει το $D(z_0, r) \cup \{z^*\}$ και τέτοια ώστε $g = f$ στο $D(z_0, r)$, τότε το z^* λέγεται* **ιδιάζον σημείο** *τής f.*



Είναι χρήσιμο να έχουμε μια σχέση ανάμεσα στο ανάπτυγμα τής f γύρω από το z_1 και το ανάπτυγμα τής f γύρω από το z_0.

Λήμμα 4.38. *Έστω f όπως στον Ορισμό 4.37. Αν $z_1 \in D(z_0, r)$, τότε το ανάπτυγμα Taylor τής f γύρω από το σημείο z_1 είναι*

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k (z-z_1)^k,$$

όπου

$$b_k = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} a_n (z_1 - z_0)^{n-k},$$

και a_n είναι οι συντελεστές του αναπτύγματος τής f γύρω από το z_0.

Απόδειξη. Για z με $|z - z_1| + |z_1 - z_0| < r$ έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_1+z_1-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (z-z_1)^k (z_1-z_0)^{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=k}^{\infty} a_n \binom{n}{k} (z_1-z_0)^{n-k} \right) (z-z_1)^k.$$

Μπορούμε να αλλάξουμε τη σειρά τής άθροισης διότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |z-z_1|^k |z_1-z_0|^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| (|z-z_1| + |z_1-z_0|)^n < +\infty.$$

□

Θα δείξουμε ότι πάντα υπάρχει τουλάχιστο ένα ιδιάζον σημείο πάνω στον κύκλο σύγκλισης. Κατ' αρχάς εξετάζουμε μια ειδική περίπτωση.

Θεώρημα 4.39. *Στον Ορισμό 4.37, αν τα a_n είναι πραγματικά και μη αρνητικά, τότε το σημείο $z_0 + r$ είναι ένα ιδιάζον σημείο.*

Απόδειξη. Αν $r(t) > (1-t)r$, τότε το ανάπτυγμα Taylor τής f γύρω από το σημείο $z_1 = (1-t)z_0 + t(z_0 + r) = z_0 + tr$ συγκλίνει σε κάποιο σημείο $z = z_1 + h$, όπου h κάποιος θετικός πραγματικός αριθμός μεγαλύτερος από $(1-t)r$.

Επομένως, από το Λήμμα 4.38, η ποσότητα

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=k}^{\infty} a_n \binom{n}{k}(z_1-z_0)^{n-k}\right)(z-z_1)^k$$

είναι πεπερασμένη για κάθε τέτοιο z. Αλλά αυτή είναι μια διπλή σειρά μη αρνητικών αριθμών και επομένως μπορούμε πάντοτε να εναλλάξουμε τη σειρά τής άθροισης. Επομένως και η ποσότητα

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$$

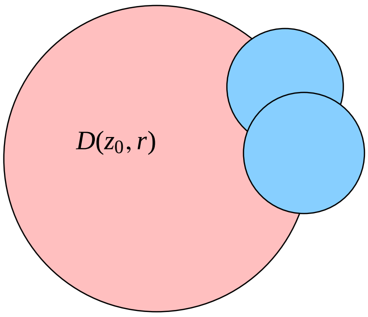
είναι πεπερασμένη. Αυτό όμως είναι άτοπο διότι υποθέσαμε ότι η ακτίνα σύγκλισης τού αναπτύγματος τής f γύρω από το σημείο z_0 είναι r. □

Θεώρημα 4.40. *Στον Ορισμό 4.37, έστω $\Gamma = \{z : |z-z_0| = r\}$ ο κύκλος τής σύγκλισης. Τότε πάνω στον Γ υπάρχει τουλάχιστο ένα ιδιάζον σημείο τής f.*

Απόδειξη. Αν το σημείο $z \in \Gamma$ δεν είναι ιδιάζον τότε υπάρχει μια συνάρτηση f_z αναλυτική σ' ένα δίσκο $D(z,\varepsilon_z)$ τέτοια ώστε $f_z = f$ στο $D(z_0,r)\cap D(z,\varepsilon_z)$. Υποθέτουμε ότι ο Γ δεν περιέχει ιδιάζοντα σημεία. Από συμπάγεια, ο Γ μπορεί να καλυφθεί από πεπερασμένο πλήθος τέτοιων δίσκων $D(z_i,\varepsilon_i)$, $i = 1,\dots,n$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(z) = \begin{cases} f(z), & z \in D(z_0,r) \\ f_{z_i}(z), & z \in D(z_i,\varepsilon_i),\ i = 1,\dots,n. \end{cases}$$

Η g είναι καλά ορισμένη. Πράγματι, αν $D(z_i,\varepsilon_i)\cap D(z_j,\varepsilon_j) \neq \emptyset$, τότε $D(z_i,\varepsilon_i)\cap D(z_j,\varepsilon_j)\cap D(z_0,r) \neq \emptyset$.



Τώρα $f_{z_i} - f_{z_j} = f - f = 0$ στο $D(z_i,\varepsilon_i)\cap D(z_j,\varepsilon_j)\cap D(z_0,r)$, επομένως από Αρχή Ταυτότητας, $f_{z_i} - f_{z_j} = 0$ στο $D(z_i,\varepsilon_i)\cap D(z_j,\varepsilon_j)$. Έτσι η g είναι αναλυτική στο δίσκο $D(z_0,s)$ για κάποιο $s > r$. Αλλά το ανάπτυγμα Taylor τής g γύρω από το z_0 συμπίπτει με αυτό της f διότι $g = f$ στον $D(z_0,r)$. Δηλαδή το ανάπτυγμα τής f συγκλίνει σ' ένα δίσκο ακτίνας μεγαλύτερης από r, άτοπο. □

Θα κατασκευάσουμε παραδείγματα δυναμοσειρών για τα οποία ο κύκλος σύγκλισης είναι **φυσικό σύνορο**, δηλαδή κάθε σημείο του είναι ιδιάζον. Θα χρειαστούμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Λήμμα 4.41. *Έστω $f_1(w) = \frac{1}{2}(w^p + w^{p+1})$, όπου p είναι ένας θετικός ακέραιος. Θέτουμε $U = D(0,1)\cup D(1,\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Τότε $f_1(D(0,r)) \subset U$, για κάποιο $r > 1$.*

Απόδειξη. Προφανώς $f_1(\overline{D}(0,1)) \subset \overline{D}(0,1)$. Αν τώρα $|w| \leq 1$ και $|f_1(w)| = 1$, τότε

$$|1+w| = \frac{2}{|w|^p} \geq 2,$$

επομένως $w = 1$. Συνεπώς $f_1(\overline{D}(0,1)) \subset U$, και άρα ο κύκλος $\Gamma = \{z : |z| = 1\}$ μπορεί να καλυφθεί από πεπερασμένο πλήθος δίσκων $D_1, D_2, \dots, D_n$ ούτως ώστε $f_1(D_i) \subset U$, $i = 1,\dots,n$. Εφόσον ο Γ έχει θετική απόσταση από το σύνολο $\mathbb{C}\setminus\bigcup_{i=1}^{n} D_i$, συμπεραίνουμε ότι $f(D(0,r)) \subset U$ για κάποιο $r > 1$. □

Θεώρημα 4.42. *Έστω $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{n_k}$. Υποθέτουμε ότι $a_k \neq 0$ και ότι υπάρχει $s > 0$ τέτοιο ώστε $\frac{n_{k+1}}{n_k} \geq s$ για όλα τα k. Αν η ακτίνα σύγκλισης τής σειράς είναι 1, τότε κάθε σημείο πάνω στον κύκλο σύγκλισης είναι ιδιάζον.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε αρχικά ότι το 1 δεν είναι ιδιάζον. Τότε η f μπορεί να επεκταθεί σε μια συνάρτηση αναλυτική στο $U = D(0,1) \cup D(1,\varepsilon)$, για κάποιο $\varepsilon > 0$. Εφόσον $f = g$ στο $D(0,1)$, οι f και g έχουν το ίδιο ανάπτυγμα Taylor γύρω από το 0. Αν θέσουμε $h(w) = g(f_1(w))$, όπου $f_1(w) = \frac{1}{2}(w^p + w^{p+1})$, τότε από το Λήμμα 4.41, η h είναι αναλυτική στο $D(0,r)$ για κάποιο $r > 1$. Τώρα αν $|w| < 1$ έχουμε $|f_1(w)| < 1$, επομένως

$$h(w) = f(f_1(w)) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k 2^{-n_k}(w^p + w^{p+1})^{n_k} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k 2^{-n_k} \sum_{n=0}^{n_k} \binom{n_k}{n} w^{(p+1)n} w^{p(n_k-n)}$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_k 2^{-n_k} \sum_{n=0}^{n_k} \binom{n_k}{n} w^{pn_k+n}.$$

Για δεδομένο k, οι δυνάμεις τού w που αναπαρίστανται είναι

$$pn_k, pn_k + 1, \ldots, (p+1)n_k.$$

Επιλέγουμε p τέτοιο ώστε

$$\frac{p+1}{p} < s,$$

επομένως

$$(p+1)n_k < psn_k \le pn_{k+1}.$$

Δηλαδή οι δυνάμεις τού w δεν επαναλμβάνονται και έτσι η παραπάνω έκφραση είναι το ανάπτυγμα Taylor τής h γύρω απο το 0. Η σειρά συγκλίνει απόλυτα για $w \in D(0,r)$, διότι η h είναι αναλυτική στο $D(0,r)$. Ας επιλέξουμε $w \in D(0,r)$ με $|w| > 1$. Τότε

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| 2^{-n_k} \sum_{n=0}^{n_k} \binom{n_k}{n} |w|^{pn_k+n} < \infty,$$

δηλαδή

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| 2^{-n_k} (|w|^p + |w|^{p+1})^{n_k} < \infty.$$

Αλλά

$$\frac{1}{2}(|w|^p + |w|^{p+1}) = |w|^p \left(\frac{1+|w|}{2}\right) > 1,$$

δηλαδή το ανάπτυγμα Taylor τής f συγκλίνει σε κάποιο σημείο έξω από το δίσκο $D(0,1)$, άτοπο. Τέλος, αν το $z^* = e^{i\theta}$ δεν είναι ιδιάζον σημείο, θέτουμε

$$q(z) = f(e^{i\theta} z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{i\theta n_k} z^{n_k},$$

με ακτίνα σύγκλισης 1 όπως πριν, διότι $|e^{i\theta n_k}| = 1$. Τώρα η f επεκτείνεται σε μια συνάρτηση αναλυτική στο $D(0,1) \cup D(z^*, \varepsilon)$ για κάποιο $\varepsilon > 0$. Επομένως η q επεκτείνεται σε μια συνάρτηση αναλυτική στο $D(0,1) \cup D(1,\varepsilon)$, άτοπο. □

Τυπικά παραδείγματα τέτοιων σειρών είναι οι $\sum_{k=1}^{\infty} z^{2^k}$ και $\sum_{k=1}^{\infty} z^{k!}$

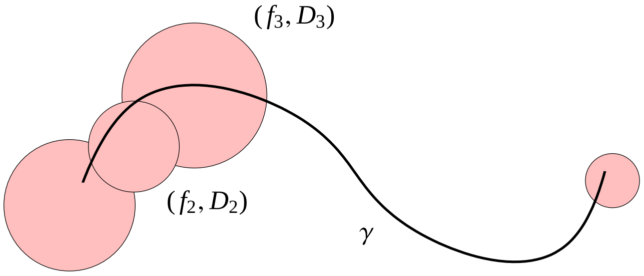
Παρατηρήσεις.

(1) Η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ αποκλίνει σε κάθε σημείο τού κύκλου σύγκλισης. Παρ' όλα αυτά, το $z = 1$ είναι το μοναδικό ιδιάζον σημείο αφού η $(z-1)^{-1}$ είναι αναλυτική παντού εκτός από το σημείο αυτό. Απ' την άλλη, η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{2^n}$ έχει ακτίνα σύγκλισης 1 και συγκλίνει σε κάθε σημείο τού κύκλου σύγκλισης. Παρ' όλα αυτά, κάθε σημείο τού κύκλου σύγκλισης είναι ιδιάζον από το προηγούμενο θεώρημα.

(2) Το συμπέρασμα τού θεωρήματος αυτού ισχύει για κάθε (πεπερασμένη) ακτίνα σύγκλισης διότι αν η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{n_k}$ έχει ακτίνα σύγκλισης r, τότε η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k (rz)^{n_k}$ έχει ακτίνα σύγκλισης 1.

Θα εξετάσουμε τώρα «αλυσίδες» αναλυτικών συναρτήσεων που ορίζονται σε ανοιχτούς δίσκους.

Ορισμός 4.43. *Έστω U ένα ανοιχτό υποσύνολο τού $\mathbb{C}$. Ένα* **συναρτησιακό στοιχείο** *στο U είναι ένα ζευγάρι (f, D), όπου D είναι ένας δισκος στο U και f μια αναλυτική συνάρτηση στον D. Αν $z \in D$, τότε λέμε ότι το (f, D) είναι ένα συναρτησιακό στοιχείο στο z. Αν (f_1, D_1) και (f_2, D_2) είναι δυο συναρτησιακά στοιχεία στο U τότε λέμε ότι το (f_2, D_2) είναι* **άμεση αναλυτική συνέχιση** *τού (f_1, D_1) (και αντίστροφα), αν $D_1 \cap D_2 \neq 0$ και $f_1 = f_2$ στο $D_1 \cap D_2$. Αν υπάρχει μια αλυσίδα (f_1, D_1), (f_2, D_2),...,(f_n, D_n) τέτοια ώστε το (f_{i+1}, D_{i+1}) είναι άμεση αναλυτική συνέχιση τού (f_i, D_i) για $i = 1, 2, \ldots, n-1$, τότε λέμε ότι το (f_n, D_n) είναι* **αναλυτική συνέχιση** *τού (f_1, D_1) (και αντίστροφα). Υποθέτουμε τώρα ότι γ είναι μια καμπύλη στο U, ορισμένη στο διάστημα $[a, b]$. Αν υπάρχει μια διαμέριση $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, και μια αλυσίδα (f_1, D_1), (f_2, D_2), ..., (f_n, D_n) συναρτησιακών στοιχείων στο U τέτοια ώστε (f_{i+1}, D_{i+1}) είναι μια άμεση αναλυτική συνέχιση τού (f_i, D_i), για $i = 1, \ldots, n-1$, και $\gamma(t) \in D_i$, για $t \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \ldots, n$, τότε λέμε ότι το (f_n, D_n) είναι μια αναλυτική συνέχιση τού (f_1, D_1),* **κατά μήκος τής καμπύλης** *γ.*



Θεώρημα 4.44. *Η αναλυτική συνέχιση ενός δεδομένου συναρτησιακού στοιχείου κατά μήκος μιας δεδομένης καμπύλης είναι μοναδική, με την έννοια ότι αν (f_n, D_n) και (g_m, E_m) είναι δυο αναλυτικές συνεχίσεις του (f_1, D_1) κατά μήκος της ίδιας καμπύλης γ, τότε $f_n = g_m$ στο $D_n \cap E_m$.*

Απόδειξη. Έστω ότι η αλυσίδα για την πρώτη συνέχιση είναι

$$(f_1, D_1), \ldots, (f_n, D_n),$$

και έστω ότι η αλυσίδα για τη δεύτερη συνέχιση είναι

$$(g_1, E_1), \ldots, (g_m, E_m),$$

όπου $g_1 = f_1$, $E_1 = D_1$. Υπάρχουν διαμερίσεις

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b, \ a = s_0 < s_1 < \cdots < s_m = b,$$

τέτοιες ώστε $\gamma(t) \in D_i$ για $t_{i-1} \leq t \leq t_i$, $i = 1, \ldots, n$ και $\gamma(t) \in E_j$ για $s_{j-1} \leq t \leq s_j$, $j = 1, \ldots, m$. Ισχυριζόμαστε ότι αν $[t_{i-1}, t_i] \cap [s_{j-1}, s_j] \neq \emptyset$ τότε το (f_i, D_i) είναι άμεση αναλυτική συνέχιση τού (g_j, E_j). Αυτό αληθεύει όταν $i = j = 1$. Έστω ότι δεν αληθεύει για κάποια i, j. Έστω (i, j) εκείνο το ζευγάρι για το οποίο δεν αληθεύει και για το οποίο ο αριθμός $i + j$ είναι ελάχιστος. Ας πούμε ότι $s_{j-1} \leq t_{i-1}$. Τότε έχουμε $s_{j-1} \leq t_{i-1} \leq s_j$. Επομένως, $\gamma(t_{i-1}) \in D_{i-1} \cap D_i \cap E_j$. Τώρα το (f_i, D_i) είναι άμεση συνέχιση τού (f_{i-1}, D_{i-1}), και επιπλέον το (f_{i-1}, D_{i-1}) είναι άμεση συνέχιση τού (g_j, E_j), από την επιλογή των i, j. Αφού $D_{i-1} \cap D_i \cap E_j \neq \emptyset$, το (f_i, D_i) πρέπει να είναι άμεση συνέχιση τού (g_j, E_j), άτοπο. Επομένως ο ισχυρισμός αληθεύει για όλα τα i, j. Ιδιαίτερα για $i = n$, $j = m$ και το συμπέρασμα έπεται. □

Ορισμός 4.45. *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό και συνεκτικό. Δύο συναρτησιακά στοιχεία (f_1, D_1), (f_2, D_2) λέγονται* ***ισοδύναμα*** *αν το ένα είναι αναλυτική συνέχιση τού άλλου. Η σχέση αυτή ορίζει προφανώς μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο όλων των συναρτησιακών στοιχείων. Μια κλάση ισοδυναμίας Φ τέτοια ώστε για κάθε $z \in U$ υπάρχει $(f, D) \in \Phi$ με $z \in D$, λέγεται* ***γενικευμένη αναλυτική συνάρτηση*** *στο U.*

Παρατηρούμε ότι αν η g είναι αναλυτική στο U, τότε η g ορίζει μια γενικευμένη αναλυτική συνάρτηση

$$\Phi = \{(g, D) : D \text{ ανοιχτός δίσκος στο } U\}.$$

Το αντίστροφο δεν ισχύει. Δεν είναι αλήθεια ότι κάθε γενικευμένη αναλυτική συνάρτηση προκύπτει από μια (συνηθισμένη) αναλυτική συνάρτηση μ' αυτόν τον τρόπο (άσκηση!). Σκοπός μας είναι να βρούμε συνθήκες οι οποίες να εξασφαλίζουν ότι αυτό είναι δυνατό.

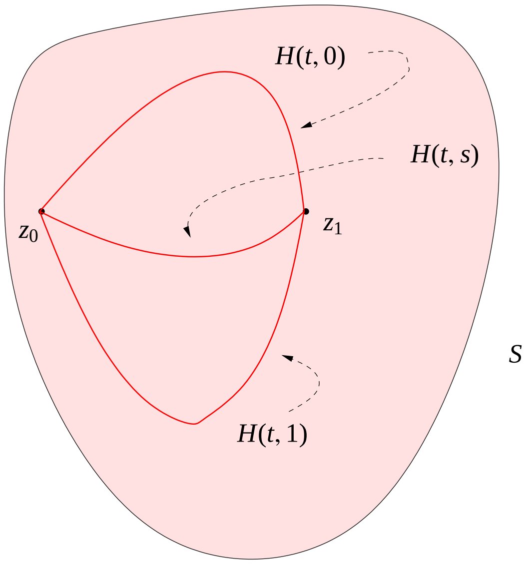
Ορισμός 4.46. *Έστω γ_0, γ_1 δυο καμπύλες σ' ένα σύνολο $S \subset \mathbb{C}$ (για ευκολία, ας υποθέσουμε ότι το πεδίο ορισμού τους είναι το $[0,1]$). Υποθέτουμε ότι $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = z_0$ και $\gamma_0(1) = \gamma_1(1) = z_1$. Οι γ_0, γ_1 λέγονται* ***ομοτοπικές*** *(στο S), αν υπάρχει μια συνεχής απεικόνιση $H : [0,1] \times [0,1] \to S$ (η* ***ομοτοπία*** *των γ_0 και γ_1) τέτοια ώστε*

$$H(t,0) = \gamma_0(t), \ H(t,1) = \gamma_1(t),$$

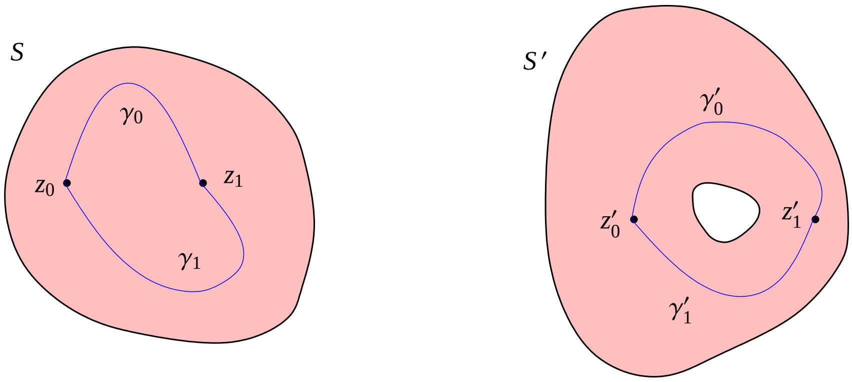
για κάθε $t \in [0,1]$, και

$$H(0,s) = z_0, \ H(1,s) = z_1,$$

για κάθε $s \in [0,1]$.



Διαισθητικά, οι καμπύλες γ_0 και γ_1 είναι ομοτοπικές στο S, αν με συνεχή τρόπο μπορούμε να «παραμορφώσουμε» την γ_0, με τα άκρα της σταθεροποιημένα, και να πάρουμε την γ_1, χωρίς να βγούμε έξω από το S. Στο πάνω σχήμα η $H(t,s)$ απεικονίζει την παραμόρφωση σε «χρόνο s». Στο κάτω σχήμα βλέπουμε δυο καμπύλες γ_0 και γ_1 οι οποίες είναι ομοτοπικές σε κάποιο σύνολο S (αριστερά), και δυο καμπύλες γ_0' και γ_1' σε κάποιο άλλο σύνολο S' (δεξιά) οι οποίες δεν είναι ομοτοπικές. Η «τρύπα» μας εμποδίζει να παραμορφώσουμε την πρώτη και να πάρουμε τη δεύτερη χωρίς να ξεφύγουμε από το χωρίο.



Θεώρημα 4.47. *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό και συνεκτικό, γ_0,γ_1 ομοτοπικές καμπύλες στο U, με αρχικό σημείο z_0, και έστω (f,D) ένα συναρτησιακό στοιχείο στο z_0. Υποθέτουμε ότι το (f,D) έχει αναλυτική συνέχιση κατά μήκος όλων των δυνατών καμπύλων στο U, δηλαδή, αν γ είναι μια καμπύλη που συνδέει το z_0 με το τυχόν $z_n \in U$, τότε υπάρχει μια αναλυτική συνέχιση (f_n, D_n) τού (f,D) κατά μήκος τής γ. Αν (g_0, D_0) είναι μια αναλυτική συνέχιση τού (f,D) κατά μήκος τής γ_0 και (g_1, D_1) είναι μια αναλυτική συνέχιση τού (f,D) κατά μήκος τής γ_1, τότε $g_0 = g_1$ στο $D_0 \cap D_1$.*

Απόδειξη. Έστω H μια ομοτοπία των γ_0 και γ_1. Από υπόθεση, αν $s \in [0,1]$, υπάρχει μια αναλυτική συνέχιση τού (f,D), ας πούμε (g_s, D_s), κατά μήκος τής καμπύλης $\gamma_s = H(\cdot, s)$. Σταθεροποιούμε ένα s και διαλέγουμε μια τέτοια αναλυτική συνέχιση, έστω $(h_1, E_1), \dots, (h_n, E_n)$ με $(h_1, E_1) = (f, D)$ και $(h_n, D_n) = (g_s, D_s)$. Υπάρχει μια διαμέριση $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ τέτοια ώστε $\gamma_s(t) \in E_i$ για $t \in [t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$. Έστω $K_i = \gamma_s([t_{i-1}, t_i]) \subset E_i$. Θέτουμε

$$\varepsilon = \min\{\mathrm{dist}(K_i, \mathbb{C} \setminus E_i) : 1 \le i \le n\} > 0.$$

Εφόσον η H είναι ομοιόμορφα συνεχής, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $|s - s'| < \delta$ τότε $|\gamma_s(t) - \gamma_{s'}(t)| < \varepsilon$ για κάθε $t \in [0,1]$. Ιδιαίτερα, αν $t \in [t_{i-1}, t_i]$ τότε $\gamma_{s'}(t) \in E_i$. Έτσι η $(h_1, E_1), \dots, (h_n, E_n)$ είναι μια αναλυτική συνέχιση τού (f, D) κατά μήκος τής $\gamma_{s'}$. Αλλά το (f, D) μπορεί να συνεχιστεί, κατά μήκος τής $\gamma_{s'}$, από ένα συναρτησιακό στοιχείο, ας πούμε $(g_{s'}, D_{s'})$. Από το Θεώρημα 4.44, έχουμε ότι $g_s = g_{s'}$ στο $D_s \cap D_{s'}$. Συνεπώς για κάθε $s \in [0,1]$, υπάρχει ένα ανοιχτό διάστημα I_s τέτοιο ώστε $g_{s'} = g_s$ στο $D_{s'} \cap D_s$, όταν $s' \in I_s$. Αφού το $[0,1]$ μπορεί να καλυφθεί από πεπερασμένο πλήθος τέτοιων διαστημάτων, έπεται ότι $g_0 = g_1$ στο $D_0 \cap D_1$. □

Θεώρημα 4.48 (Το Θεώρημα Μονοδρομίας). *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό και συνεκτικό με την ιδιότητα ότι κάθε κλειστή καμπύλη στο U είναι ομοτοπική με την αρχή της (θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο ότι αυτό είναι ισοδύναμο με το ότι το U είναι απλά συνεκτικό). Έστω Φ μια γενικευμένη αναλυτική συνάρτηση στο U. Υποθέτουμε κάθε στοιχείο τής Φ έχει αναλυτική συνέχιση κατά μήκος όλων των δυνατών καμπύλων στο U. Τότε υπάρχει μια αναλυτική συνάρτηση $g : U \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε αν $(f, D) \in \Phi$, τότε $g = f$ στο D. Δηλαδή η Φ καθορίζεται πλήρως από μία μόνο αναλυτική συνάρτηση.*

Απόδειξη. Έστω $z \in U$, τότε υπάρχει ένα συναρτησιακό στοιχείο $(f_z, D_z) \in \Phi$ τέτοιο ώστε $z \in D_z$. Θέτουμε $g(z) = f_z(z)$. Πρέπει να δείξουμε ότι η g είναι καλά ορισμένη. Δηλαδή, αν $(f^*, D^*) \in \Phi$ και $z \in D^*$, πρεπει να δείξουμε ότι $f_z(z) = f^*(z)$. Αφού $(f_z, D_z), (f^*, D^*) \in \Phi$, το (f^*, D^*) είναι αναλυτική συνέχιση του (f_z, D_z). Εφόσον $z \in D_z \cap D^*$, υπάρχει μια καμπύλη γ στο U (στην πραγματικότητα, μια πολυγωνική γραμμή) με αρχή και τέλος το z, τέτοια ώστε το (f^*, D^*) να είναι αναλυτική συνέχιση του (f_z, D_z) κατά μήκος τής γ. Από υπόθεση, η γ είναι ομοτοπική με την (εκφυλισμένη) καμπύλη $\gamma_0 = z$. Αφού το (f_z, D_z) είναι συνέχιση τού (f_z, D_z) κατά μήκος τής γ_0, έχουμε από το Θεώρημα 4.47 ότι $f_z = f^*$ στο $D_z \cap D^*$, ιδιαίτερα $f_z(z) = f^*(z)$. Αφού $f_z = g$ στο D_z, και το z είναι αυθαίρετο, έπεται ότι η g είναι αναλυτική σ' ολόκληρο το U. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Οικογένειες αναλυτικών συναρτήσεων

Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζουμε τον γραμμικό χώρο $A(U)$ όλων των αναλυτικών συναρτήσεων σ' ένα ανοιχτό σύνολο U. Εισάγουμε μια μετρική d στο $A(U)$ με την ιδιότητα ότι η σύγκλιση ως προς την d είναι η ομοιόμορφη σύγκλιση πάνω στα συμπαγή υποσύνολα τού U. Προσδιορίζουμε τα συμπαγή υποσύνολα τού $A(U)$ και αποδεικνύουμε διάφορα ισχυρά αποτελέσματα σχετικά με σύγκλιση ακολουθιών αναλυτικών συναρτήσεων. Τέλος αποδεικνύουμε το Θεώρημα Σύμμορφης Απεικόνισης τού Riemann, την ομοτοπική έκδοση τού Θεωρήματος τού Cauchy, το Θεώρημα Παραγοντοποίησης τού Weierstrass, και μια σειρά από αποτελέσματα προσέγγισης και παρεμβολής.

Οι χώροι $A(U)$ **και** $C(U)$

Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό. Συμβολίζουμε με $A(U)$ το σύνολο όλων των αναλυτικών συναρτήσεων στο U και με $C(U)$ το σύνολο όλων των συνεχών συναρτήσεων στο U. Θέτουμε

$$K_n = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq n \text{ και } |z - w| \geq 1/n \text{ για όλα τα } w \in \mathbb{C} \setminus U\}.$$

Τότε η K_n είναι μια αύξουσα ακολουθία συμπαγών υποσυνόλων τού U η ένωση της οποίας είναι το U. Επιπλέον, αν K είναι ένα συμπαγές υποσύνολο τού U, τότε το K έχει θετική Ευκλείδεια απόσταση από το $\mathbb{C} \setminus U$, επομένως $K \subset K_n$ για αρκετά μεγάλο n. Για $f, g \in C(U)$, ορίζουμε

$$d(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|f - g\|_{K_n}}{1 + \|f - g\|_{K_n}},$$

όπου $\|h\|_{K_n} = \sup\{|h(z)| : z \in K_n\}$. Μπορεί εύκολα κανείς να δείξει ότι η d ορίζει μια μετρική στο $C(U)$, άρα και στο $A(U)$.

Θεώρημα 5.1. *Έστω $f_j, f \in C(U)$, $j = 1, 2, \ldots$. Τότε $d(f_j, f) \to 0$ αν και μόνο αν $f_j \to f$ ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές υποσύνολο τού U.*

Απόδειξη. Έστω ότι $d(f_j, f) \to 0$. Τότε $\|f_j - f\|_{K_n} \to 0$ καθώς $j \to \infty$ για κάθε n. Αν K είναι ένα συμπαγές υποσύνολο τού U, τότε το K περιέχεται σε κάποιο K_n, επομένως $\|f_j - f\|_K \leq \|f_j - f\|_{K_n} \to 0$. Άρα $f_j \to f$ ομοιόμορφα στο K. Αντίστροφα, έστω ότι $f_j \to f$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα τού U. Δεδομένου $\varepsilon > 0$, επιλέγουμε N τέτοιο ώστε

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Στη συνέχεια επιλέγουμε j_0 τέτοιο ώστε για κάθε $j \geq j_0$

$$\frac{\|f_j - f\|_{K_n}}{1 + \|f_j - f\|_{K_n}} < \frac{\varepsilon}{2}, \; n = 1, \ldots, N.$$

Τότε $d(f_j, f) < \varepsilon$ για κάθε $j \geq j_0$. □

Το επιχείρημα στην προηγούμενη απόδειξη δείχνει ότι αν η f_j είναι μια ακολουθία Cauchy στον $(C(U), d)$ τότε η f_j είναι ομοιόμορφα Cauchy στα συμπαγή υποσύνολα τού U.

Θεώρημα 5.2. *Ο χώρος $(C(U), d)$ είναι πλήρης, και το $A(U)$ ένα κλειστό υποσύνολό του. Επομένως ο $(A(U), d)$ είναι πλήρης.*

Απόδειξη. Έστω f_j μια ακολουθία Cauchy στον $(C(U), d)$. Τότε για κάθε $z \in U$ η $f_j(z)$ είναι μια ακολουθία Cauchy στο $\mathbb{C}$. Επομένως υπάρχει $f : U \to \mathbb{C}$ τέτοια ώστε $f_j(z) \to f(z)$ για κάθε $z \in U$. Αν K είναι οποιοδήποτε συμπαγές υποσύνολο τού U και $\varepsilon > 0$, τότε για κάποιο j_0 έχουμε $|f_i(z) - f_j(z)| \le \varepsilon$ για κάθε $z \in K$ και κάθε $i, j \ge j_0$. Σταθεροποιώντας το j και παίρνοντας όριο καθώς $i \to +\infty$ έχουμε $|f_j(z) - f(z)| \le \varepsilon$ για κάθε $z \in K$ και κάθε $j \ge j_0$. Άρα $f_j \to f$ ομοιόμορφα στο K. Παίρνοντας το K να είναι ένας τυχόντας κλειστός δίσκος, βρίσκουμε ότι η f είναι συνεχής στο U. Έτσι ο $C(U)$ είναι πλήρης. Το ότι το $A(U)$ είναι κλειστό υποσύνολο τού $C(U)$ έπεται από την Πρόταση 2.28. □

Αν $f_n \in A(U)$ και $f_n \to f$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα τού U, τότε $f \in A(U)$. Θα εξετάσουμε τώρα τις ιδιότητες τής f κάτω από επιπλέον προϋποθέσεις για τις f_n.

Θεώρημα 5.3 (Το Θεώρημα τού Hurwitz). *Έστω $f_n, f \in A(U)$, $f_n \xrightarrow{d} f$. Υποθέτουμε ότι $\overline{D}(z_0, r) \subset U$ και ότι η f δεν μηδενίζεται στον κύκλο $\Gamma = \{z : |z - z_0| = r\}$. Τότε υπάρχει ένας θετικός ακέραιος N τέτοιος ώστε για κάθε $n \ge N$, οι f_n και f έχουν τον ίδιο αριθμό ριζών στο $D(z_0, r)$.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon = \min\{|f(z)| : z \in \Gamma\}$. Τότε για αρκετά μεγάλο n,

$$|f(z) - f_n(z)| < \varepsilon \le |f(z)|,$$

για κάθε $z \in \Gamma$. Το συμπέρασμα έπεται τώρα από το Θεώρημα τού Rouche. □

Θεώρημα 5.4. *Έστω $f_n, f \in A(U)$, $f_n \xrightarrow{d} f$. Αν το U είναι συνεκτικό και οι f_n δεν μηδενίζονται στο U, τότε είτε η f δεν μηδενίζεται, είτε η f είναι ταυτοτικά ίση με 0.*

Απόδειξη. Έστω ότι $f(z_0) = 0$ και ότι η f δεν είναι ταυτοτικά ίση με 0. Τότε, από την Πρόταση 2.36 υπάρχει ένας κλειστός δίσκος $\overline{D}(z_0, r) \subset U$ τέτοιος ώστε η f δεν μηδενίζεται στο $\{z : |z - z_0| = r\}$. Από το Θεώρημα τού Hurwitz έπεται ότι για μεγάλα n η f_n πρέπει να έχει ρίζα στο $D(z_0, r)$. □

Θεώρημα 5.5. *Έστω $f_n, f \in A(U)$, $f_n \xrightarrow{d} f$. Αν το U είναι συνεκτικό και όλες οι f_n είναι 1-1, τότε είτε η f είναι 1-1, είτε η f είναι σταθερή στο U.*

Απόδειξη. Έστω $z_0 \in U$. Θέτουμε $g_n(z) = f_n(z) - f_n(z_0)$. Τότε $g_n \in A(U \setminus \{z_0\})$, $g_n \to f - f(z_0)$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα τού $U \setminus \{z_0\}$. Επιπλέον, το $U \setminus \{z_0\}$ είναι συνεκτικό. Τώρα, οι g_n δεν μηδενίζονται στο $U \setminus \{z_0\}$, επομένως από το Θεώρημα 5.4, η $f - f(z_0)$ είτε δεν μηδενίζεται, είτε είναι ταυτοτικά ίση με μηδέν στο $U \setminus \{z_0\}$. Αφού το z_0 ήταν τυχόν, το συμπέρασμα έπεται. □

Θα προσδιορίσουμε τώρα τα συμπαγή υποσύνολα του $A(U)$.

Ορισμός 5.6. *Ένα σύνολο $\mathcal{F} \subset C(U)$ λέγεται **ομοιόμορφα φραγμένο** αν για κάθε συμπαγές $K \subset U$,*

$$\sup\{\|f\|_K : f \in \mathcal{F}\} < \infty,$$

δηλαδή, οι συναρτήσεις στο $\mathcal{F}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένες σε κάθε συμπαγές υποσύνολο τού U.

Θεώρημα 5.7. *Έστω $\mathcal{F}$ ένα ομοιόμορφα φραγμένο υποσύνολο τού $A(U)$. Τότε το $\mathcal{F}$ είναι **ισοσυνεχές** σε κάθε σημείο $z_0 \in U$, δηλαδή για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $z \in U$ και $|z - z_0| < \delta$, τότε $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ για κάθε $f \in \mathcal{F}$.*

Απόδειξη. Έστω $\overline{D}(z_0, r) \subset U$. Αν $z \in D(z_0, r/2)$ και $f \in \mathcal{F}$, τότε από τον ολοκληρωτικό τύπο τού Cauchy, με $\Gamma = \{z : |z - z_0| = r\}$, έχουμε

$$f(z) - f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f(w)\left[\frac{1}{w-z} - \frac{1}{w-z_0}\right] dw = \frac{1}{2\pi i}(z - z_0)\int_\Gamma \frac{f(w)}{(w-z)(w-z_0)}\, dw.$$

Θέτουμε $M = \sup\{\|f\|_\Gamma : f \in \mathcal{F}\}$. Τότε

$$|f(z) - f(z_0)| \le \frac{1}{2\pi}|z - z_0| 2\pi r \frac{M}{r^2/2},$$

και το συμπέρασμα έπεται. □

Θεώρημα 5.8. *Έστω $\mathcal{F} \subset C(U)$ ισοσυνεχές σε κάθε σημείο τού U. Αν $f_n \in \mathcal{F}$ και $f_n \to f$ κατά σημείο (δηλαδή $f_n(z) \to f(z)$ για κάθε $z \in U$), τότε $f \in C(U)$ και $f_n \xrightarrow{d} f$. Αν η $f_n(z)$ συγκλίνει μόνο για z σ' ένα πυκνό υποσύνολο τού U, τότε η $f_n(z)$ συγκλίνει για κάθε $z \in U$, και από τα παραπάνω, το όριο f ανήκει στο $C(U)$, και $f_n \xrightarrow{d} f$.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Από ισοσυνέχεια, για κάθε $z \in U$ υπάρχει ένας δίσκος $D(z) \subset U$ με κέντρο το z τέτοιος ώστε αν $z' \in D(z)$ τότε $|f_n(z') - f_n(z)| \leq \varepsilon/3$ για κάθε n. Παίρνοντας όρια καθώς $n \to +\infty$ έχουμε $|f(z') - f(z)| \leq \varepsilon/3$. Αυτό αποδεικνύει τη συνέχεια τής f. Έστω τώρα $K \subset U$ συμπαγές. Τότε $K \subset \bigcup_{j=1}^{m} D(z_j)$ για κάποια $z_1, \ldots, z_m$. Επιλέγουμε n_0 τέτοιο ώστε $|f(z_j) - f_n(z_j)| \leq \varepsilon/3$ για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε j. Αν $z \in K$ τότε το z ανήκει σε κάποιο $D(z_j)$. Αλλά

$$|f(z) - f_n(z)| \leq |f(z) - f(z_j)| + |f(z_j) - f_n(z_j)| + |f_n(z_j) - f_n(z)|.$$

Από τη συνέχεια τής f και την ισοσυνέχεια των f_n, ο πρώτος και ο τρίτος όρος στο δεξιά μέλος τής παραπάνω ανισότητας είναι το πολύ $\varepsilon/3$. Ο δεύτερος όρος, από κατά σημείο σύγκλιση, είναι μικρότερος ή ίσος από $\varepsilon/3$ για $n \geq n_0$. Επομένως, αν $n \geq n_0$ τότε $|f(z) - f_n(z)| \leq \varepsilon$ για κάθε $z \in K$. Τέλος, ας υποθέσουμε ότι η $f_n(z)$ συγκλίνει για κάθε $z \in S$, όπου S πυκνό υποσύνολο τού U. Έστω $z \in U$. Αφού το S είναι πυκνό, μπορούμε να βρούμε $w \in S \cap D(z)$. Τώρα

$$|f_m(z) - f_n(z)| \leq |f_m(z) - f_m(w)| + |f_m(w) - f_n(w)| + |f_n(w) - f_n(z)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + |f_m(w) - f_n(w)| + \frac{\varepsilon}{3} \leq \varepsilon,$$

για n, m αρκετά μεγάλα. Δηλαδή η f_n είναι κατά σημείο Cauchy και συνεπώς συγκλίνει κατά σημείο σ' ολόκληρο το U. Το συμπέρασμα έπεται από το πρώτο μέρος τής απόδειξης. □

Θεώρημα 5.9 (Το Θεώρημα Montel). *Έστω $\mathcal{F}$ ένα ομοιόμορφα φραγμένο υποσύνολο του $A(U)$ και f_n μια ακολουθία στο $\mathcal{F}$. Τότε η f_n έχει μια υπακολουθία η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα τού U.*

Απόδειξη. Έστω $\{z_1, z_2, \ldots\}$ ένα αριθμήσιμο και πυκνό υποσύνολο τού U. Αφού το $\mathcal{F}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένο, υπάρχει μια σταθερά $M_1 > 0$ τέτοια ώστε $|f(z_1)| \leq M_1$ για κάθε $f \in \mathcal{F}$. Επομένως μπορούμε να βρούμε μια υπακολουθία $f_{1,n}$ τής f_n τέτοια ώστε $f_{1,n}(z_1) \to w_1$ για κάποιο $w_1 \in \mathbb{C}$. Με την ίδια λογική, μπορούμε να βρούμε μια υπακολουθία $f_{2,n}$ τής $f_{1,n}$ τέτοια ώστε $f_{2,n}(z_2) \to w_2$ για κάποιο w_2. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, βρίσκουμε, για κάθε k, μια υπακολουθία $f_{k,n}$ τής $f_{k-1,n}$ τέτοια ώστε $f_{k,n}(z_k) \to w_k$ καθώς $n \to +\infty$. Θέτουμε $g_n(z) = f_{n,n}(z)$, $n = 1, 2, \ldots$. Τότε για κάθε k, η g_n, $n \geq k$, είναι μια υπακολουθία τής $f_{k,n}$, επομένως $g_n(z_k) \to w_k$. Από το Θεώρημα 5.7, το $\mathcal{F}$ είναι ισοσυνεχές σε κάθε σημείο τού U. Από το Θεώρημα 5.8, η g_n συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα τού U. □

Θεώρημα 5.10 (Κριτήριο συμπάγειας). *Έστω $\mathcal{F} \subset A(U)$. Τότε το $\mathcal{F}$ είναι συμπαγές αν και μόνο αν είναι κλειστό και ομοιόμορφα φραγμένο.*

Απόδειξη. Αν f_n είναι μια ακολουθία στο $\mathcal{F}$, τότε από το Θεώρημα Montel, υπάρχει μια υπακολουθία η οποία συγκλίνει σε κάποια $f \in A(U)$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα τού U, δηλαδή ως προς τη μετρική d. Αφού το $\mathcal{F}$ είναι κλειστό, έχουμε ότι $f \in \mathcal{F}$. Επομένως το $\mathcal{F}$ είναι ακολουθιακά συμπαγές, άρα συμπαγές. Αντίστροφα, έστω ότι το $\mathcal{F}$ είναι συμπαγές. Τότε είναι κλειστό, άρα μένει να δείξουμε ότι είναι ομοιόμορφα φραγμένο. Σταθεροποιούμε ένα $K \subset U$ συμπαγές και παρατηρούμε ότι η απεικόνιση $f \mapsto \|f\|_K$ είναι συνεχής σαν απεικόνιση από το $(C(U), d)$ στο $\mathbb{R}$. Πράγματι, αν $d(f_n, f) \to 0$ τότε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο K, άρα

$$\Big| \|f_n\|_K - \|f\|_K \Big| \leq \|f_n - f\|_K \to 0.$$

Αφού το $\mathcal{F}$ είναι συμπαγές, η εικόνα $\{\|f\|_K : f \in \mathcal{F}\}$ είναι συμπαγές υποσύνολο τού $\mathbb{R}$ άρα φραγμένο. Συνεπώς $\sup\{\|f\|_K : f \in \mathcal{F}\} < \infty$. □

Επιχειρήματα συμπάγειας εμφανίζονται με φυσιολογικό τρόπο σε διάφορα προβλήματα μεγιστοποίησης. Το ακόλουθο αποτέλεσμα είναι ένα τυπικό παράδειγμα.

Θεώρημα 5.11. *Έστω $\mathcal{F}$ μη κενό συμπαγές υποσύνολο τού $A(U)$. Αν $z_0 \in U$, τότε υπάρχει $g \in \mathcal{F}$ τέτοια ώστε $|g'(z_0)| \geq |f'(z_0)|$ για κάθε $f \in \mathcal{F}$.*

Απόδειξη. Η απεικόνιση $f \mapsto |f'(z_0)|$ είναι συνεχής από το $\mathcal{F}$ στο $\mathbb{R}$. Επομένως το $\{|f'(z_0)| : f \in \mathcal{F}\}$ είναι συμπαγές, άρα περιέχει το supremum του. □

Στην επόμενη ενότητα θα χρειαστούμε το ακόλουθο.

Θεώρημα 5.12. *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό και συνεκτικό, $b > 0$, $z_0 \in U$. Θέτουμε*

$$\mathcal{F} = \{f \in A(U) : \text{η } f \text{ είναι μια 1-1 απεικόνιση του } U \text{ στο } D(0,1) \text{ και } |f'(z_0)| \geq b\}.$$

Τότε το $\mathcal{F}$ είναι συμπαγές.

Απόδειξη. Από το κριτήριο συμπάγειας, αρκεί να δείξουμε ότι το $\mathcal{F}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένο και κλειστό. Το ότι είναι ομοιόμορφα φραγμένο είναι προφανές. Έστω λοιπόν $f_n \in \mathcal{F}$, με $f_n \stackrel{d}{\to} f$. Θα δείξουμε ότι $f \in \mathcal{F}$. Άμεσα, $|f| \leq 1$ στο U και $|f'(z_0)| \geq b$, άρα η f δεν είναι σταθερή. Έτσι, από το Θεώρημα Ανοιχτής Απεικόνισης, έχουμε ότι το $f(U)$ είναι ανοιχτό υποσύνολο του κλειστού δίσκου $\overline{D}(0,1)$, άρα $|f| < 1$. Τέλος, από το Θεώρημα 5.5, η f πρέπει να είναι 1-1. □

Κλείνουμε την ενότητα αυτή μ' ένα αποτέλεσμα σύμφωνα με το οποίο αν μια ομοιόμορφα φραγμένη ακολουθία στο $A(U)$ συγκλίνει κατά σημείο σ' ένα σύνολο που έχει σημείο συσσώρευσης στο U, τότε συγκλίνει ως προς τη μετρική τού U.

Λήμμα 5.13. *Έστω f_n μια ομοιόμορφα φραγμένη ακολουθία στο $A(U)$. Αν η f_n δεν συγκλίνει ως προς την d, τότε υπάρχουν δυο υπακολουθίες που συγκλίνουν σε διαφορετικά όρια.*

Απόδειξη. Έστω ότι η f_n δεν συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποιο συμπαγές σύνολο K. Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε n, υπάρχει $m > n$ με $\|f_n - f_m\|_K \geq \varepsilon$. Επιλέγουμε τυχόντα θετικό ακέραιο n_1. Στη συνέχεια επιλέγουμε $m_1 > n_1$ τέτοιο ώστε $\|f_{n_1} - f_{m_1}\|_K \geq \varepsilon$. Μετά παίρνουμε $n_2 > m_1$ και $m_2 > n_2$ ώστε $\|f_{n_2} - f_{m_2}\|_K \geq \varepsilon$. Συνεχίζοντας μ' αυτόν τον τρόπο, κατασκευάζουμε υπακολουθίες f_{n_j} και f_{m_j} τέτοιες ώστε $\|f_{n_j} - f_{m_j}\|_K \geq \varepsilon$ για κάθε j. Από το Θεώρημα Montel, υπάρχει μια υπακολουθία f_{r_j} τής f_{n_j} και μια υπακολουθία f_{s_j} τής f_{m_j} με $\|f_{r_j} - f_{s_j}\|_K \geq \varepsilon$, τέτοιες ώστε $f_{r_j} \stackrel{d}{\to} f$ και $f_{s_j} \stackrel{d}{\to} g$ για κάποιες $f, g \in A(U)$. Αλλά τότε $\varepsilon \leq \|f - g\|_K$, δηλαδή $f \neq g$. □

Θεώρημα 5.14 (Το Θεώρημα Vitali). *Έστω U ανοιχτό και συνεκτικό, f_n μια ομοιόμορφα φραγμένη ακολουθία στο $A(U)$. Υποθέτουμε ότι η $f_n(z)$ συγκλίνει για κάθε $z \in S \subset U$, όπου το S έχει ένα σημείο συσσώρευσης στο U. Τότε η f_n συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα τού U.*

Απόδειξη. Έστω ότι η f_n δεν συγκλίνει. Τότε από το Λήμμα 5.13 μπορούμε να βρούμε δυο υπακολουθίες οι οποίες συγκλίνουν σε διαφορετικά όρια, έστω f και g. Αλλά οι f και g πρέπει να είναι ίσες πάνω στο S άρα και σ' ολόκληρο το U, άτοπο. □

Το Θεώρημα Σύμμορφης Απεικόνισης τού Riemann

Σ' αυτήν την ενότητα, U θα είναι ένα ανοιχτό, συνεκτικό, γνήσιο υποσύνολο του $\mathbb{C}$ με την ιδιότητα ότι κάθε αναλυτική συνάρτηση στο U η οποία δεν μηδενίζεται στο U έχει αναλυτική τετραγωνική ρίζα, δηλαδή υπάρχει αναλυτική συνάρτηση g στο U τέτοια ώστε $g^2 = f$. Στην επόμενη ενότητα θα δείξουμε ότι η συνθήκη αυτή είναι ισοδύναμη με το ότι το U είναι απλά συνεκτικό. Σκοπός μας είναι να αποδείξουμε το Θεώρημα τού Riemann σύμφωνα με το οποίο, υπάρχει μια αναλυτική, 1-1 και επί συνάρτηση απ' το U στον δίσκο $D(0,1)$.

Λήμμα 5.15. *Υπάρχει μια αναλυτική, 1-1 συνάρτηση από το U στο $D(0,1)$.*

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε $a \notin U$. Από υπόθεση, υπάρχει μια συνάρτηση $h \in A(U)$ τέτοια ώστε $h^2(z) = z - a$. Η h είναι κατ' ανάγκη 1-1. Από το Θεώρημα Ανοιχτής Απεικόνισης, το $h(U)$ περιέχει έναν ανοιχτό δίσκο $D(z_0, r)$. Παρατηρούμε ότι $0 \notin D(z_0, r)$, διότι διαφορετικά θα είχαμε $h(z) = 0$ για κάποιο $z \in U$ και έτσι $z = a$, άτοπο. Τώρα, $h(U) \cap D(-z_0, r) = \emptyset$ γιατί, διαφορετικά, αν $h(z) = w \in D(-z_0, r)$, θα μπορούσαμε να βρούμε $z' \in U$ τέτοιο ώστε $h(z') = -w \in D(z_0, r)$. Αλλά τότε $h^2(z) = h^2(z')$, άρα $z = z'$, δηλαδή $w = 0$, άτοπο. Έτσι, $|h(z) + z_0| \geq r$ για κάθε $z \in U$. Ορίζουμε

$$f(z) = \frac{kr}{h(z) + z_0},$$

όπου $0 < |k| < 1$. Η f είναι η ζητούμενη συνάρτηση. □

Λήμμα 5.16. *Θέτουμε $\mathcal{G}$ να είναι η οικογένεια των 1-1 αναλυτικών συναρτήσεων τού U στο $D(0,1)$. Έστω $g \in \mathcal{G}$ και έστω z_0 ένα σταθερό σημείο στο U. Αν η g δεν είναι επί, τότε υπάρχει μια συνάρτηση $f \in \mathcal{G}$ τέτοια ώστε $|f'(z_0)| > |g'(z_0)|$.*

Απόδειξη. Επιλέγουμε $a \in D(0,1) \setminus g(U)$ και θέτουμε

$$T_a(z) = \frac{z-a}{1-\overline{a}z},$$

Τότε η T_a είναι μια 1-1 και επί αναλυτική απεικόνιση τού $D(0,1)$ στον εαυτό του, με αντίστροφη T_{-a}. Επίσης, $T_a(z) = 0$ αν και μόνο αν $z = a$. Τώρα, η $T_a \circ g$ δεν μηδενίζεται διότι $a \notin g(U)$, επομένως $h^2 = T_a \circ g$ για κάποια $h \in A(U)$. Αφού οι g και T_a είναι 1-1, και η h είναι 1-1. Αφού $h^2(U) \subset D(0,1)$, έχουμε $h(U) \subset D(0,1)$. Άρα $h \in \mathcal{G}$. Θέτουμε $f = T_b \circ h$, όπου $b = h(z_0)$, και έχουμε

$$g = T_{-a} \circ h^2 = T_{-a} \circ (T_{-b} \circ f)^2 = T_{-a} \circ S \circ T_{-b} \circ f = W \circ f,$$

όπου $S(w) = w^2$ και $W = T_{-a} \circ S \circ T_{-b}$. Άρα

$$g'(z_0) = W'(f(z_0))f'(z_0) = W'(T_b(h(z_0)))f'(z_0) = W'(0)f'(z_0).$$

Αλλά η W είναι μια αναλυτική απεικόνιση τού $D(0,1)$ στον εαυτό του, η οποία δεν είναι 1-1, διότι η S δεν είναι 1-1. Ισχυριζόμαστε ότι $|W'(0)| < 1$. Πράγματι, από τη δεύτερη παρατήρηση μετά το Θεώρημα 4.27, έχουμε

$$|W'(0)| \leq 1 - |W(0)|^2 \leq 1.$$

Αν $|W'(0)| = 1$, τότε η W είναι γραμμικός κλασματικός μετασχηματισμός, ιδιαίτερα, η W είναι 1-1, άτοπο. Επομένως $|g'(z_0)| < |f'(z_0)|$. □

Θεώρημα 5.17 (Το Θεώρημα Σύμμορφης Απεικόνισης τού Riemann). *Υπάρχει μια αναλυτική, 1-1 και επί απεικόνιση τού U στο $D(0,1)$*

Απόδειξη. Έστω h μια 1-1 αναλυτική απεικόνιση τού U στο $D(0,1)$. Μια τέτοια h υπάρχει από το Λήμμα 5.15. Επιλέγουμε ένα $z_0 \in U$ και θέτουμε $b = |h'(z_0)|$. Τότε $b > 0$ από την Πρόταση 4.21. Τώρα, ορίζουμε

$$\mathcal{F} = \{f \in A(U) : f(U) \subset D(0,1),\ f \text{ 1-1},\ |f'(z_0)| \geq b\}.$$

Το $\mathcal{F}$ είναι μη κενό, και από το Θεώρημα 5.12, είναι συμπαγές. Από το Θεώρημα 5.11, υπάρχει $g \in \mathcal{F}$ τέτοια ώστε $|g'(z_0)| \geq |f'(z_0)|$ για κάθε $f \in \mathcal{F}$. Αλλά $g(U) = D(0,1)$ διότι διαφορετικά, από το Λήμμα 5.16, θα υπήρχε μια 1-1 αναλυτική συνάρτηση $f : U \to D(0,1)$ τέτοια ώστε $|f'(z_0)| > |g'(z_0)|$. Όμως $f \in \mathcal{F}$, άτοπο. □

Παρατηρήσεις.

(1) Έστω g η απεικόνιση τού προηγούμενου θεωρήματος. Τότε
  (α') $g(z_0) = 0$.
  (β') Έστω $f, h : U \to D(0,1)$ αναλυτικές, 1-1 και επί. Αν $f(z_0) = h(z_0) = 0$ και $f'(z_0) = h'(z_0)$, τότε $f = h$. Επίσης, αν $f(z_0) = h(z_0) = 0$ και $f(z_0)$, $h(z_0)$ είναι θετικοί πραγματικοί, τότε $f = h$. Επομένως η g είναι μοναδική κάτω από τους περιορισμούς $g(z_0) = 0$ και $g'(z_0) > 0$.
  (γ') Αν $f : U \to D(0,1)$ αναλυτική, 1-1 και επί, και $f'(z_0) = g'(z_0)$, τότε $f = g$.
  (δ') Αν $f : U \to D(0,1)$ αναλυτική και $f(z_0) = 0$, τότε $|f'(z_0)| \leq |g'(z_0)|$, με ισότητα αν και μόνο αν $f = kg$, όπου $|k| = 1$.

Απόδειξη.
  (α') Αν $g(z_0) = a \neq 0$, τότε, με T_a όπως στο Λήμμα 5.16, έχουμε ότι η $T_a \circ g$ είναι μια αναλυτική, 1-1 και επί απεικόνιση τού U στο $D(0,1)$ και

$$|(T_a \circ g)'(z_0)| = |T_a'(g(z_0))g'(z_0)| = |T_a'(a)g'(z_0)| = \frac{|g'(z_0)|}{1-|a|^2} > |g'(z_0)|.$$

Έτσι η $T_a \circ g$ ανήκει στην οικογένεια $\mathcal{F}$ τού Θεωρήματος 5.17 και

$$|(T_a \circ g)'(z_0)| > |g'(z_0)|,$$

άτοπο.
  (β') Η $q = f \circ h^{-1}$ είναι μια αναλυτική 1-1 και επί απεικόνιση τού $D(0,1)$ στον εαυτό του, η οποία στέλνει το 0 στο 0. Τώρα, αν υποθέσουμε ότι $f'(z_0) = h'(z_0)$, έχουμε

$$q'(0) = f'(z_0)(h^{-1})'(0) = \frac{f'(z_0)}{h'(z_0)} = 1,$$

επομένως, από το Θεώρημα 4.26, $q(z) = az$, με $|a| = 1$. Αφού $q'(0) = a$, έχουμε ότι $a = 1$. Άρα $f(z) = h(z)$ για κάθε $z \in U$. Αν $f'(z_0)$ και $h'(z_0)$ είναι πραγματικοί και θετικοί, και, ας πούμε, $f'(z_0) > h'(z_0)$, τότε το παραπάνω επιχείρημα δείχνει ότι $q'(0) > 1$, άτοπο από το Θεώρημα 4.26. Επομένως $f'(z_0) = h'(z_0)$ και συμπεραίνουμε όπως πριν ότι $f = h$.

(γ΄) Αφού $f'(z_0) = g'(z_0)$, η απόδειξη τού (α΄) δείχνει ότι $f(z_0) = 0$. Το συμπέρασμα έπεται τώρα από το (β΄).

(δ΄) Έστω $h = f \circ g^{-1}$. Τότε η h είναι μια αναλυτική απεικόνιση τού $D(0,1)$ στον εαυτό του με $h(0) = 0$. Από το Θεώρημα 4.26, έχουμε $|h'(0)| \le 1$, δηλαδή $|f'(z_0)| \le |g'(z_0)|$, με ισότητα αν και μόνο αν $h(z) = kz$. Ισοδύναμα, $f = kg$, $|k| = 1$.

□

(2) Από το θεώρημα Liouville, το Θεώρημα Σύμμορφης Απεικόνισης τού Riemann δεν ισχύει για $U = \mathbb{C}$

Η ομοτοπική έκδοση τού Θεωρήματος τού Cauchy

Στην ενότητα αυτή εισάγουμε ακόμα μια συνθήκη η οποία είναι ισοδύναμη με την έννοια τής απλής συνεκτικότητας. Ένα σύνολο είναι απλά συνεκτικό αν και μόνο αν κάθε κλειστή καμπύλη στο σύνολο μπορεί να «συρρικνωθεί» με συνεχή τρόπο σ' ένα σημείο χωρίς να ξεφύγει από το σύνολο. Αν δηλαδή κάθε κλειστή καμπύλη είναι ομοτοπική μ' ένα σημείο. Εξετάζουμε κατ' αρχάς τη σχέση ανάμεσα σε ομοτοπία και ομολογία.

Θεώρημα 5.18. *Έστω γ_0 και γ_1 κλειστές καμπύλες σ' ένα ανοιχτό σύνολο $U \subset \mathbb{C}$. Αν οι γ_0 και γ_1 είναι ομοτοπικές στο U, τότε οι γ_0 και γ_1 είναι ομολογικές, δηλαδή $n(\gamma_0, a) = n(\gamma_1, a)$ για κάθε $a \notin U$. Αν οι γ_0 και γ_1 είναι μονοπάτια, τότε έχουμε $\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz$, για κάθε αναλυτική συνάρτηση $f : U \to \mathbb{C}$. Ιδιαίτερα, αν η γ_0 είναι ομοτοπική μ' ένα σημείο, τότε η γ_0 είναι 0-ομολογική, και αν, επιπλέον, η γ_0 είναι μονοπάτι, τότε $\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = 0$ για κάθε αναλυτική $f : U \to \mathbb{C}$.*

Απόδειξη. Έστω H μια ομοτοπία των γ_0 και γ_1. Θέτουμε $\gamma_s(t) = H(t,s)$, $s, t \in [0,1]$. Τώρα, αν $a \notin U$, έστω θ_s ένα συνεχές όρισμα της $\gamma_s - a$. Στην παραγματικότητα, η $\theta_s(t)$ μπορεί να επιλεγεί ώστε να είναι συνεχής και ως προς τις δυο μεταβλητές (άσκηση!). Έχουμε

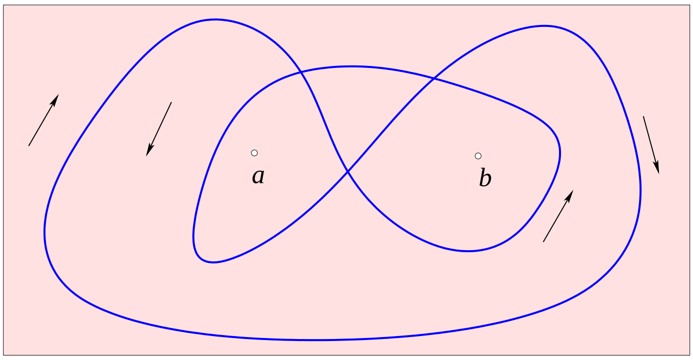
$$e^{i\theta_s(1)} = \frac{\gamma_s(1) - a}{|\gamma_s(1) - a|} = \frac{\gamma_s(0) - a}{|\gamma_s(0) - a|} = e^{i\theta_s(0)}.$$

Επομένως η ποσότητα

$$\frac{\theta_s(1) - \theta_s(0)}{2\pi}$$

είναι ένας ακέραιος $k(s)$. Αφού η k είναι συνεχής πρέπει να είναι σταθερή. Επομένως ο δείκτης $n(\gamma_s, a)$ είναι ο ίδιος για όλα τα s. Ιδιαίτερα, $n(\gamma_0, a) = n(\gamma_1, a)$. □

Παρατηρήστε ότι το αντίστροφο δεν ισχύει. Πράγματι, αν θέσουμε $U = \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$, με $a \ne b$, τότε η καμπύλη του σχήματος είναι 0-ομολογική στο U αλλά δεν είναι ομοτοπική στο U με κάποιο σημείο.



Παρ' όλα αυτά, το επόμενο αποτέλεσμα μάς λέει ότι αν **κάθε** κλειστή καμπύλη στο U είναι 0-ομολογική, αν δηλαδή το U είναι απλά συνεκτικό, τότε **κάθε** κλειστή καμπύλη στο U είναι ομοτοπική μ' ένα σημείο.

Θεώρημα 5.19. *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό και συνεκτικό. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*

(1) *Αν η f είναι αναλυτική και δεν μηδενίζεται στο U, τότε η f έχει αναλυτική τετραγωνική ρίζα στο U.*
(2) *Το U είναι ομοιομορφικό με το $D(0,1)$.*
(3) *Κάθε κλειστή καμπύλη στο U είναι ομοτοπική μ' ένα σημείο.*
(4) *Κάθε κλειστό μονοπάτι στο U είναι ομοτοπικό μ' ένα σημείο.*
(5) *Το U είναι απλά συνεκτικό.*

Απόδειξη.

(1) ⇒ (2) Αν $U \neq \mathbb{C}$, το συμπέρασμα έπεται από το Θεώρημα Σύμμορφης Απεικόνισης τού Riemann. Αν $U = \mathbb{C}$, τότε η απεικόνιση $h(z) = \dfrac{z}{1+|z|}$ είναι ο ζητούμενος ομοιομορφισμός.

(2) ⇒ (3) Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι κάθε κλειστή καμπύλη στο $D(0,1)$ είναι ομοτοπική μ' ένα σημείο. Αν $f : U \to D(0,1)$ είναι ένας ομοιομορφισμός, και γ μια κλειστή καμπύλη στο U, τότε θέτουμε $\gamma_0 = f \circ \gamma$. Αν τώρα H είναι μια ομοτοπία των γ_0 και $\gamma_0(0)$, τότε $f^{-1} \circ H$ είναι μια ομοτοπία των γ και $\gamma(0)$.

(3) ⇒ (4) Προφανές.

(4) ⇒ (5) Έπεται από το Θεώρημα 5.18.

(5) ⇒ (1) Από το Θεώρημα 3.19, η f έχει αναλυτικό λογάριθμο g. Τότε η συνάρτηση $\exp(\frac{1}{2}g)$ είναι η ζητούμενη αναλυτική τετραγωνική ρίζα.

□

Το προηγούμενο θεώρημα, μαζί με το (ομολογικό) Γενικό Θεώρημα τού Cauchy, μάς δίνει ένα πλήρη χαρακτηρισμό των απλά συνεκτικών υποσυνόλων τού $\mathbb{C}$ και αποτελεί το κεντρικό αποτέλεσμα αυτού τού μαθήματος.

Τα Θεωρήματα Runge και Mittag-Leffler

Όπως ξέρουμε κάθε αναλυτική συνάρτηση f μπορεί να αναπτυχθεί τοπικά σε δυναμοσειρά. Επομένως για κάθε σημείο z στο πεδίο ορισμού τής f, υπάρχει μια περιοχή τού z και μια ακολουθία πολυωνύμων η οποία συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα τής περιοχής. Το αποτέλεσμα αυτό είναι τοπικό. Στην ενότητα αυτή θα δείξουμε ένα πολύ ισχυρό σφαιρικό αποτέλεσμα. Υπάρχει μια ακολουθία ρητών συναρτήσεων, η οποία συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα ολόκληρου τού πεδίου ορισμού τής f. Θα χρειαστούμε το ακόλουθο τεχνικό λήμμα.

Λήμμα 5.20. *Έστω $V, A \subset \mathbb{C}$ ανοιχτά με $V \subset A$ και $\partial V \cap A = \emptyset$. Αν H είναι μια συνεκτική συνιστώσα τού A και $H \cap V \neq \emptyset$, τότε $H \subset V$.*

Απόδειξη. Έστω G μια συνεκτική συνιστώσα τού V με $H \cap G \neq \emptyset$. Τότε το $H \cup G$ είναι ένα συνεκτικό υποσύνολο τού A, επομένως $G \subset H$. Αλλά $\partial G \subset \partial V$ (άσκηση!), άρα $\partial G \cap H = \emptyset$. Συνεπώς

$$H \setminus G = H \cap ((\mathbb{C} \setminus \overline{G}) \cup \partial G) = H \setminus \overline{G}.$$

Δηλαδή το $H \setminus G$ είναι ανοιχτό και κλειστό στο H. Αφού το H είναι συνεκτικό και $G \neq \emptyset$, πρέπει να έχουμε $H \setminus G = \emptyset$. Άρα $H = G \subset V$. □

Θα δείξουμε στη συνέχεια ένα ενδιάμεσο προσεγγιστικό αποτέλεσμα. Πάνω σ' ένα σταθεροποιημένο συμπαγές σύνολο, μια αναλυτική συνάρτηση μπορεί να προσεγγιστεί ομοιόμορφα από μια ρητή συνάρτηση με πόλους σ' ένα προδιαγεγραμμένο σύνολο.

Πρόταση 5.21. *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό, $K \subset U$ συμπαγές, και S ένα σύνολο το οποίο περιέχει ένα σημείο από κάθε συνεκτική συνιστώσα τού $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K$. Αν $f \in A(U)$ τότε η f μπορεί να προσεγγιστεί ομοιόμορφα στο K από μια ρητή συνάρτηση με πόλους στο S.*

Απόδειξη. Έστω $r > 0$ τέτοιο ώστε $K \subset D(0,r)$. Θέτουμε

$$M = \operatorname{dist}(K, (\mathbb{C} \setminus U) \cup \partial D(0,r)) > 0.$$

Θεωρούμε ένα δίκτυο κλειστών τετραγώνων στο $\mathbb{C}$ με πλευρές παράλληλες στους άξονες και με διάμετρο μήκους s, όπου $s < M$. Έστω $Q_1, \ldots, Q_n$, εκείνα τα τετράγωνα που περιέχονται στο $U \cap D(0, r)$. Αν θέσουμε

$$T = \bigcup_{j=1}^{n} Q_j,$$

τότε $K \subset T^\circ$, από τον ορισμό τού M. Έστω τώρα ο κύκλος

$$\sigma = \sum_{j=1}^{n} \partial Q_j.$$

Αφαιρούμε όλες τις πλευρές οι οποίες είναι κοινές σε οποιαδήποτε δυο Q_i και παίρνουμε ένα ισοδύναμο κύκλο γ. Αφού $n(\gamma, z) = n(\sigma, z) = 0$ για κάθε $z \notin U$ και $n(\gamma, z) = 1$ για κάθε $z \in T^\circ$, ο ολοκληρωτικός τύπος τού Cauchy μάς δίνει

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\, dw,$$

για κάθε $z \in K$. Η παραπάνω έκφραση μάς επιτρέπει να ισχυριστούμε ότι η f μπορεί να προσεγγιστεί ομοιόμορφα στο K από ρητές συναρτήσεις με πόλους στο γ^*. Πράγματι, χωρίς βλάβη τής γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το γ είναι ένα μονοπάτι με πεδίο ορισμού $[0, 1]$. Τότε

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\, dw = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z} \gamma'(t)\, dt = \int_0^1 h(t, z)\, dt.$$

Η h είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[0, 1] \times K$, επομένως για δεδομένο $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta > 0$ έτσι ώστε για κάθε $z \in K$ και κάθε $s, t \in [0, 1]$ με $|s - t| < \delta$ να έχουμε $|h(s, z) - h(t, z)| < \varepsilon$. Έστω τώρα $0 = t_0 < \cdots < t_n = 1$ μια διαμέριση τού $[0, 1]$ με $t_j - t_{j-1} < \delta$ για κάθε $j = 1, \ldots, n$. Θέτουμε

$$R(z) = \sum_{j=1}^{n} h(t_j, z)(t_j - t_{j-1}).$$

Τότε η R είναι μια ρητή συνάρτηση με πόλους στα σημεία $\gamma(t_j) \in \gamma^*$, και για κάθε $z \in K$ έχουμε

$$|f(z) - R(z)| \le \sum_{j=1}^{n} \int_{t_{j-1}}^{t_j} |h(t, z) - h(t_{j-1}, z)| dt < \varepsilon,$$

το οποίο αποδεικνύει τον ισχυρισμό. Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι κάθε ρητή συνάρτηση με πόλους στο γ^* μπορεί να προσεγγιστεί ομοιόμορφα στο K από μια ρητή συνάρτηση με πόλους στο S. Στην πραγματικότητα, θα δείξουμε κάτι ισχυρότερο. Αν $a \notin K$ τότε η $(z - a)^{-1}$ μπορεί να προσεγγιστεί ομοιόμορφα στο K από μια ρητή συνάρτηση με πόλους στο S. Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις.

(1) $\infty \notin S$. Ας πούμε ότι μια συνάρτηση έχει την ιδιότητα $\mathcal{P}(S)$ αν μπορεί να προσεγγιστεί ομοιόμορφα στο K από μια ρητή συνάρτηση με πόλους στο S. Θέτουμε

$$V = \{a \in \mathbb{C} \setminus K : \text{η } (z - a)^{-1} \text{ έχει την ιδιότητα } \mathcal{P}(S)\}.$$

Θα δείξουμε ότι $V = \mathbb{C} \setminus K$. Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι

$$S \subset V \subset \mathbb{C} \setminus K.$$

Επίσης το V είναι ανοιχτό. Πράγματι, αν $a \in V$ και $b \in \mathbb{C}$ με $|a - b| < \operatorname{dist}(a, K)$, τότε για κάθε $z \in K$ έχουμε

$$\frac{1}{z - b} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(b - a)^n}{(z - a)^{n+1}}.$$

Η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη στο K από το κριτήριο Weierstrass. Τώρα, κάθε όρος τού παραπάνω αθροίσματος έχει την ιδιότητα $\mathcal{P}(S)$ διότι $a \in V$. Επομένως το ίδιο ισχύει και για την $(z - b)^{-1}$. Άρα $b \in V$, δηλαδή $D(a, \operatorname{dist}(a, K)) \subset V$, συνεπώς το V είναι ανοιχτό. Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι $\partial V \cap (\mathbb{C} \setminus K) = \emptyset$. Πράγματι, αν $b \in \partial V$, τότε $b \notin V$ και επίσης υπάρχει $b_n \in V$ με $b_n \to b$. Αλλά $|b - b_n| \ge \operatorname{dist}(b_n, K)$, διαφορετικά το b θα ανήκε στο V από τα παραπάνω. Παίρνοντας όρια καθώς $n \to \infty$ έχουμε $\operatorname{dist}(b, K) = 0$, δηλαδή $b \in K$. Έστω τώρα H μια συνεκτική συνιστώσα τού $\mathbb{C} \setminus K$. Τότε

$H \cap V \neq \emptyset$ διότι $S \subset V$. Εφόσον $\partial V \cap (\mathbb{C} \setminus K) = \emptyset$, το Λήμμα 5.20 μάς δίνει $H \subset V$. Αφού η H είναι τυχούσα συμπεραίνουμε ότι $\mathbb{C} \setminus K \subset V$, άρα $\mathbb{C} \setminus K = V$.

(2) $\infty \in S$. Στην περίπτωση αυτή, επιλέγουμε $a_0 \in \mathbb{C}$ με $|a_0| > \max\{|z| : z \in K\}$, και θέτουμε

$$S' = (S \setminus \{\infty\}) \cup \{a_0\}.$$

Το S' περιέχει ένα σημείο από κάθε συνεκτική συνιστώσα τού $\mathbb{C} \setminus K$, επομένως από το (1) έχουμε ότι για κάθε $a \in \mathbb{C} \setminus K$, η $(z-a)^{-1}$ έχει την ιδιότητα $\mathcal{P}(S')$. Αλλά η $(z-a_0)^{-1}$ αναπτύσσεται σε σειρά Taylor με κέντρο 0 και ακτίνα σύγκλισης $|a_0|$. Συνεπώς η $(z-a_0)^{-1}$ μπορεί να προσεγγιστεί ομοιόμορφα στο K από ένα πολυώνυμο (το οποίο είναι βέβαια μια ρητή συνάρτηση με πόλο στο ∞) και το συμπέρασμα έπεται.

□

Πόρισμα 5.22. *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό, και $K \subset U$ συμπαγές. Υποθέτουμε ότι το $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K$ είναι συνεκτικό. Αν $f \in A(U)$ τότε υπάρχει ακολουθία πολυωνύμων P_n τέτοια ώστε $P_n \to f$ ομοιόμορφα στο K.*

Απόδειξη. Το $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K$ έχει μόνο μία συνεκτική συνιστώσα, επομένως μπορούμε να επιλέξουμε $S = \{\infty\}$ στην Πρόταση 5.21. Εφόσον μια ρητή συνάρτηση με μοναδικό πόλο το ∞ είναι πολυώνυμο, το συμπέρασμα έπεται. □

Θεώρημα 5.23 (Το Θεώρημα Runge). *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό και S ένα σύνολο το οποίο περιέχει ένα σημείο από κάθε συνεκτική συνιστώσα τού $\widehat{\mathbb{C}} \setminus U$. Αν $f \in A(U)$, τότε υπάρχει μια ακολουθία ρητών συναρτήσεων, με πόλους στο S, η οποία συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα τού U. Αν, επιπλέον, το U είναι απλά συνεκτικό, τότε υπάρχει μια ακολουθία πολυωνύμων η οποία συγκλίνει στην f ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα τού U.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την οικογένεια συμπαγών συνόλων $\{K_n : n \in \mathbb{N}\}$ όπως αυτή ορίστηκε στην αρχή τού κεφαλαίου. Αφού κάθε συνεκτική συνιστώσα τού $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K_n$ περιέχει μια συνεκτική συνεκτική συνιστώσα τού $\widehat{\mathbb{C}} \setminus U$, κάθε συνεκτική συνιστώσα τού $\widehat{\mathbb{C}} \setminus K_n$ περιέχει ένα σημείο τού S. Επομένως, από την Πρόταση 5.21, υπάρχει μια ρητή συνάρτηση R_n με πόλους στο S, τέτοια ώστε $|f(z) - R_n(z)| < 1/n$ για κάθε $z \in K_n$. Για κάθε συμπαγές $K \subset U$, έχουμε $K \subset K_n$ για αρκετά μεγάλο n. Επομένως $R_n \to f$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα τού U. Αν τώρα το U είναι απλά συνεκτικό, επιλέγουμε $S = \{\infty\}$. □

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα το Θεώρημα Runge για να δείξουμε ότι σε κάθε ανοιχτό σύνολο μπορούμε να κατασκευάσουμε μια μερόμορφη συνάρτηση τέτοια ώστε το κύριο μέρος τής σειράς Laurent γύρω από κάθε πόλο να έχει όποια μορφή θέλουμε.

Θεώρημα 5.24 (Το Θεώρημα Mittag-Leffler). *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό και $A \subset U$ τέτοιο ώστε το A δεν έχει σημεία συσσώρευσης στο U. Σε κάθε $a \in A$ αντιστοιχούμε ένα θετικό ακέραιο $m(a)$ και μια ρητή συνάρτηση*

$$P_a(z) = \sum_{j=1}^{m(a)} c_{j,a}(z-a)^{-j}.$$

Τότε υπάρχει μια μερόμορφη συνάρτηση f στο U τέτοια ώστε το κύριο μέρος τής σειράς Laurent τής f σε κάθε $a \in A$ είναι ίσο με P_a, και η οποία δεν έχει άλλους πόλους στο U.

Απόδειξη. Θεωρούμε πάλι την ακολουθία συμπαγών συνόλων $\{K_n : n \in \mathbb{N}\}$ όπως αυτή ορίστηκε στην αρχή τού κεφαλαίου. Θέτουμε $A_1 = A \cap K_1$, και $A_n = A \cap (K_n \setminus K_{n-1})$ για $n = 2, 3, \ldots$. Αφού $A_n \subset K_n$ και το A δεν έχει σημεία συσσώρευσης στο U, κάθε A_n είναι πεπερασμένο. Θέτουμε

$$Q_n(z) = \sum_{a \in A_n} P_a(z).$$

Κάθε Q_n είναι ρητή συνάρτηση. Οι πόλοι τής Q_n βρίσκονται στο σύνολο $K_n \setminus K_{n-1}$, για $n \geq 2$. Ιδιαίτερα, η Q_n είναι αναλυτική σ' ένα ανοιχτό σύνολο το οποίο περιέχει το K_{n-1}. Από το Θεώρημα τού Runge έπεται ότι υπάρχει μια ρητή συνάρτηση R_n, οι πόλοι τής οποίας βρίσκονται στο $\widehat{\mathbb{C}} \setminus U$, τέτοια ώστε

$$|R_n(z) - Q_n(z)| < \frac{1}{2^n},$$

για $z \in K_{n-1}$. Ισχυριζόμαστε ότι η

$$f(z) = Q_1(z) + \sum_{n=2}^{\infty}(Q_n(z) - R_n(z)),\ z \in U \setminus A$$

είναι η συνάρτηση που ψάχνουμε. Πράγματι, σταθεροποιούμε ένα N. Τότε στο K_N έχουμε

$$\begin{aligned} f &= Q_1 + \sum_{n=2}^{N}(Q_n - R_n) + \sum_{n=N+1}^{\infty}(Q_n - R_n) \\ &= \sum_{n=1}^{N} Q_n - \sum_{n=2}^{N} R_n + \sum_{n=N+1}^{\infty}(Q_n - R_n) \\ &= F_N + G_N + H_N. \end{aligned}$$

Κάθε όρος τού αθροίσματος που ορίζει την H_N είναι μικρότερος από 2^{-n} στο K_N, επομένως το άθροισμα αυτό συγκλίνει ομοιόμορφα στο K_N. Άρα η H_N είναι αναλυτική στο εσωτερικό τού K_N. Εφόσον οι πόλοι κάθε μιας από τις R_n είναι έξω από το U, η G_N είναι επίσης αναλυτική στο εσωτερικό τού K_N. Τέλος

$$F_N = \sum_{a \in A \cap K_N} P_a.$$

Συνεπώς, στο K_N°, η f είναι μερόμορφη και για κάθε $a \in A \cap K_N^\circ$ το κύριο μέρος τού αναπτύγματος Laurent τής f γύρω από το a είναι ακριβώς P_a. Αφού το N είναι αυθαίρετο, το συμπέρασμα έπεται. □

Το Θεώρημα Παραγοντοποίησης τού Weierstrass

Κάθε πολυώνυμο $p(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί σαν γινόμενο δυωνύμων

$$p(z) = a_n (z - z_0)^{m_0} \cdots (z - z_k)^{m_k},$$

όπου $z_0, \ldots, z_k$ οι διακεκριμένες ρίζες τού p. Τώρα, διαισθητικά, κάθε ακέραιη συνάρτηση f μπορεί να θεωρηθεί σαν πολυώνυμο με άπειρους όρους.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$

Μπορούμε να αναμένουμε κάτι ανάλογο από την f; Μπορούμε δηλαδή, με αντίστοιχο τρόπο, να την «παραγοντοποιήσουμε» σε ένα (ενδεχομένως) άπειρο γινόμενο συναρτήσεων; Η απάντηση είναι «ναι», πρέπει όμως πρώτα να ορίσουμε την έννοια τού άπειρου γινομένου.

Ορισμός 5.25. *Έστω z_n μια ακολουθία μιγαδικών αριθμών. Θέτουμε*

$$p_n = (1 + z_1)(1 + z_2) \cdots (1 + z_n),$$

και υποθέτουμε ότι $p_n \to z$ για κάποιο $z \in \mathbb{C}$. Τότε γράφουμε

$$z = \prod_{n=1}^{\infty}(1 + z_n).$$

*Τα p_n ονομάζονται **μερικά γινόμενα** τού **απειρογινομένου**. Θα λέμε ότι το απειρογινόμενο συγκλίνει αν η p_n συγκλίνει.*

Λήμμα 5.26. *Έστω $z_1, \ldots, z_N \in \mathbb{C}$. Θέτουμε*

$$p_N = \prod_{n=1}^{N}(1 + z_n),\ p_N^* = \prod_{n=1}^{N}(1 + |z_n|).$$

Τότε

$$p_N^* \le \exp(|z_1| + \cdots + |z_N|),$$

και

$$|p_N - 1| \le p_N^* - 1.$$

Απόδειξη. Για κάθε n έχουμε $1+|z_n| \le e^{|z_n|}$. Πολλαπλασιάζοντας τις ανισότητες αυτές κατά μέλη, παίρνουμε την πρώτη σχέση. Για τη δεύτερη σχέση, προχωράμε επαγωγικά. Προφανώς ισχύει για $N = 1$. Υποθέτουμε ότι

$$|p_k - 1| \le p_k^* - 1.$$

Τότε

$$|p_{k+1} - 1| = |(p_k - 1)(1 + z_{k+1}) + z_{k+1}| \le (p_k^* - 1)(1 + |z_{k+1}|) + |z_{k+1}| = p_{k+1}^* - 1.$$

□

Θεώρημα 5.27. *Έστω $S \subset \mathbb{C}$ και $f_n : S \to \mathbb{C}$ μια ακολουθία φραγμένων συναρτήσεων τέτοια ώστε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(z)|$ συγκλίνει ομοιόμορφα. Τότε το απειρογινόμενο*

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty}(1 + f_n(z))$$

συγκλίνει ομοιόμορφα, και $f(z_0) = 0$ για κάποιο $z_0 \in S$ αν και μόνο αν $f_n(z_0) = -1$ για κάποιο n. Επιπλέον, αν $\{n_1, n_2, \dots\}$ είναι οποιαδήποτε αναδιάταξη τού $\{1, 2, \dots\}$, τότε

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty}(1 + f_{n_k}(z)).$$

Απόδειξη. Από υπόθεση, η $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ είναι φραγμένη. Έστω p_N το N-οστό μερικό γινόμενο τού πρώτου απειρογινομένου. Τότε, από το Λήμμα 5.26, υπάρχει μια σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε $|p_N(z)| \le C$ για κάθε N και z. Έστω ε με $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Τότε υπάρχει N_0 τέτοιο ώστε

$$\sum_{n=N_0}^{\infty} |f_n(z)| < \varepsilon,$$

για κάθε $z \in S$. Έστω τώρα $\{n_1, n_2, \dots\}$ μια αναδιάταξη τού $\{1, 2, \dots\}$. Για $N \ge N_0$, επιλέγουμε M τέτοιο ώστε

$$\{1, 2, \dots, N\} \subset \{n_1, n_2, \dots, n_M\}.$$

Έστω q_M το M-οστό μερικό γινόμενο τού δύτερου απειρογινομένου. Τότε

$$q_M - p_N = p_N \left(\prod_{n_k > N}(1 + f_{n_k}) - 1 \right).$$

Τα n_k που εμφανίζονται στην παραπάνω σχέση είναι όλα διακεκριμένα και μεγαλύτερα από N_0, επομένως, από το Λήμμα 5.26, έχουμε

$$|q_M - p_N| \le |p_N|(e^{\varepsilon} - 1) \le 2|p_N|\varepsilon \le 2C\varepsilon. \tag{11}$$

Αν $n_k = k$ για όλα τα k, τότε $q_M = p_M$ και έτσι από την παραπάνω σχέση συνεπάγεται ότι η $\{p_n\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση f. Επίσης, η ίδια σχέση μάς δίνει

$$|p_M - p_{N_0}| \le 2|p_{N_0}|\varepsilon,$$

για $M > N_0$, επομένως $|p_M| \ge (1 - 2\varepsilon)|p_{N_0}|$. Άρα

$$|f(z)| \ge (1 - 2\varepsilon)|p_{N_0}|,$$

το οποίο σημαίνει ότι $f(z) = 0$ αν και μόνο αν $p_{N_0}(z) = 0$, ή ισοδύναμα, $f_n(z) = -1$ για κάποιο n. Τέλος, από την (11) συνεπάγεται ότι η q_M συγκλίνει στο ίδιο όριο με την p_N. □

Θεώρημα 5.28. *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό και $f_n \in A(U)$ μια ακολουθία τέτοια ώστε η*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |1 - f_n(z)|$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα τού U. Τότε το απειρογινόμενο

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} f_n(z)$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα τού U, επομένως $f \in A(U)$. Επιπλέον,

$$m(f, z) = \sum_{n=1}^{\infty} m(f_n, z),$$

όπου $m(f, z)$ είναι η τάξη τής ρίζας z, αν $f(z) = 0$, και $m(f, z) = 0$ αν $f(z) \neq 0$.

Απόδειξη. Ο πρώτος ισχυρισμός έπεται άμεσα από το Θεώρημα 5.27. Για τον δεύτερο ισχυρισμό, σταθεροποιούμε $z_0 \in U$ και παρατηρούμε ότι το πολύ πεπερασμένο πλήθος από τις f_n έχουν ρίζα στο z_0. Τότε

$$f(z) = \prod_{n:\, f_n(z_0)=0} f_n(z) \cdot \prod_{n:\, f_n(z_0)\neq 0} f_n(z).$$

Το πρώτο γινόμενο έχει ρίζα στο z_0 με τάξη

$$\sum_{n:\, f_n(z_0)=0} m(f_n, z).$$

Το δεύτερο γινόμενο ορίζει μια αναλυτική συνάρτηση η οποία δεν έχει ρίζα στο z_0 από το Θεώρημα 5.27, και το συμπέρασμα έπεται. □

Για να αποδείξουμε το Θεώρημα Παραγοντοποίησης τού Weierstrass θα χρειαστούμε κάποιες βοηθητικές συναρτήσεις. Θέτουμε $E_0(z) = 1 - z$ και για $p = 1, 2, 3, \ldots,$

$$E_p(z) = (1 - z) \exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^p}{p}\right).$$

Οι συναρτήσεις αυτές ονομάζονται **στοιχειώδεις παράγοντες**.

Λήμμα 5.29. *Για κάθε $|z| \leq 1$ και $p = 0, 1, 2, \ldots,$ έχουμε*

$$|1 - E_p(z)| \leq |z|^{p+1}.$$

Απόδειξη. Για $p = 0$ είναι προφανές. Για $p \geq 1$ έχουμε

$$-E_p'(z) = z^p \exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^p}{p}\right).$$

Επομένως η $-E_p'$ έχει μια ρίζα τάξης p στο 0, και το ανάπτυγμα Taylor τής $-E_p'$ στο 0 έχει μη αρνητικούς πραγματικούς συντελεστές. Συνεπώς η $1 - E_p$ έχει ρίζα τάξης $p + 1$ στο 0, και αν θέσουμε

$$\phi(z) = \frac{1 - E_p(z)}{z^{p+1}},$$

τότε $\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, με όλα τα a_n μη αρνητικά. Άρα, για $|z| \leq 1$, έχουμε $|\phi(z)| \leq \phi(1) = 1$ και το συμπέρασμα έπεται. □

Θεώρημα 5.30. *Έστω z_n μια ακολουθία μη μηδενικών μιγαδικών αριθμών τέτοια ώστε $|z_n| \to \infty$. Θέτουμε $r_n = |z_n|$. Αν p_n είναι μια ακολουθία μη αρνητικών ακεραίων τέτοια ώστε*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_n}\right)^{1+p_n} < \infty,$$

για κάθε $r > 0$, τότε το απειρογινόμενο

$$P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)$$

ορίζει μια ακέραιη συνάρτηση η οποία έχει μια ρίζα σε κάθε z_n και η οποία δεν έχει άλλες ρίζες στο $\mathbb{C}$. Ακριβέστερα, αν το α εμφανίζεται m φορές στην ακολουθία z_n, τότε η P έχει μια ρίζα τάξης m στο α.

Απόδειξη. Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι είναι πάντα δυνατό να βρούμε μια ακολουθία p_n όπως στη διατύπωση τού θεωρήματος. Πράγματι, για κάθε $r > 0$ έχουμε $r_n > 2r$ για όλα εκτός από πεπερασμένα το πλήθος n, επομένως $r/r_n < 1/2$ για αυτά τα n. Άρα μπορούμε να επιλέξουμε, για παράδειγμα, $p_n = n - 1$. Σταθεροποιούμε τώρα ένα r. Τότε για όλα εκτός από πεπερασμένο πλήθος n, ισχύει $r_n \geq r$. Επομένως αν $|z| \leq r$, τότε από το Λήμμα 5.29, έχουμε ότι

$$\left|1 - E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)\right| \leq \left|\frac{z}{z_n}\right|^{1+p_n} \leq \left(\frac{r}{r_n}\right)^{1+p_n}.$$

Συνεπώς η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|1 - E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right)\right|$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στον δίσκο $\overline{D}(0, r)$. Αφού το r είναι αυθαίρετο, η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη στα συμπαγή υποσύνολα τού $\mathbb{C}$, και το συμπέρασμα έπεται από το Θεώρημα 5.28. □

Θεώρημα 5.31 (Το Θεώρημα Παραγοντοποίησης τού Weierstrass). *Έστω f μια ακέραιη συνάρτηση με $f(0) \neq 0$, και έστω $z_1, z_2, \ldots$ οι ρίζες τής f επαναλμβανόμενες σύμφωνα με την πολλαπλότητά τους. Τότε υπάρχει μια ακέραιη συνάρτηση g και μια ακολουθία p_n μη αρνητικών ακεραίων τέτοια ώστε*

$$f(z) = e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right).$$

Απόδειξη. Σχηματίζουμε το απειρογινόμενο P τού Θεωρήματος 5.30 χρησιμοποιώντας την ακολουθία των ριζών τής f. Τότε η συνάρτηση f/P έχει μόνο επουσιώδεις ανωμαλίες, επομένως μπορεί να επεκταθεί σε μια ακέραιη συνάρτηση. Επίσης, η f/P δεν μηδενίζεται άρα, αφού το $\mathbb{C}$ είναι απλά συνεκτικό, έχει αναλυτικό λογάριθμο, δηλαδή υπάρχει μια ακέραιη συνάρτηση g τέτοια ώστε $f/P = e^g$. □

Παρατήρηση. Αν η f έχει ρίζα τάξης m στο 0, τότε η παραγοντοποίηση τής f παίρνει τη μορφή

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{z_n}\right).$$

Θα επεκτείνουμε τώρα το Θεώρημα 5.30. Σ' ένα αυθαίρετο ανοιχτό σύνολο θα κατασκευάσουμε μια αναλυτική συνάρτηση με προδιαγεγραμμένο σύνολο ριζών κάτω, φυσικά, από τον περιορισμό που θέτει το Θεώρημα Ταυτότητας.

Θεώρημα 5.32. *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό και $A \subset U$. Υποθέτουμε ότι το A δεν έχει σημεία συσσώρευσης στο U. Σε κάθε $a \in A$ αντιστοιχούμε ένα θετικό ακέραιο $m(a)$. Τότε υπάρχει $f \in A(U)$ τής οποίας οι ρίζες είναι τα σημεία τού συνόλου A και τέτοια ώστε η f έχει ρίζα τάξης $m(a)$ για κάθε $a \in A$.*

Απόδειξη. Αν το A είναι πεπερασμένο τότε παίρνουμε για f ένα πολυώνυμο. Αν το A είναι άπειρο τότε είναι αριθμήσιμο διαφορετικά θα είχε σημείο συσσώρευσης στο U. Επιλέγουμε $w_0 \in U$, $r > 0$ τέτοια ώστε $D(w_0, r) \subset U$ και $A \cap D(w_0, r) = \emptyset$. Θέτουμε $T(z) = (z - w_0)^{-1}$, $V = T(U \setminus \{w_0\})$, $S = T(A)$. Το V είναι ανοιχτό και περιέχει μια περιοχή τού ∞, άρα το $\mathbb{C} \setminus V$ είναι συμπαγές. Επίσης, το S είναι φραγμένο και δεν έχει σημεία συσσώρευσης στο V. Έστω a_n μια ακολουθία τής οποίας οι όροι είναι στο S και στην οποία κάθε σημείο $T(a) \in S$ εμφανίζεται ακριβώς $m(a)$ φορές. Λόγω συμπάγειας τού $\mathbb{C} \setminus V$, για κάθε a_n υπάρχει ένα σημείο $b_n \in \mathbb{C} \setminus V$ τέτοιο ώστε $|b_n - a_n| = \operatorname{dist}(a_n, \mathbb{C} \setminus V)$. Τότε $|b_n - a_n| \to 0$, διαφορετικά το S θα είχε σημεία συσσώρευσης στο V. Επομένως, αν K είναι ένα συμπαγές υποσύνολο τού V, τότε υπάρχει N τέτοιο ώστε για κάθε $n \geq N$ και για κάθε $z \in K$ έχουμε

$$\left|\frac{a_n - b_n}{z - b_n}\right| \leq \frac{1}{2},$$

το οποίο, από το Λήμμα 5.29, συνεπάγεται ότι

$$\left|1 - E_n\left(\frac{a_n - b_n}{z - b_n}\right)\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

Άρα, από το Θεώρημα 5.28, η

$$g(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_n\left(\frac{a_n - b_n}{z - b_n}\right)$$

είναι μια αναλυτική συνάρτηση στο V με ρίζα τάξης $m(a)$ σε κάθε $T(a) \in S$ και η οποία δεν έχει άλλες ρίζες. Ισχυριζόμαστε ότι η g είναι φραγμένη σε μια περιοχή τού απείρου. Πράγματι, επιλέγουμε $R > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $|z| > R$ και για κάθε n να ισχύει

$$\left|\frac{a_n - b_n}{z - b_n}\right| \leq \frac{1}{2}.$$

Άρα

$$\left|1 - E_n\left(\frac{a_n - b_n}{z - b_n}\right)\right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

Ιδιαίτερα,

$$\Re\mathfrak{e}\, E_n\left(\frac{a_n - b_n}{z - b_n}\right) > 0.$$

Επομένως

$$g(z) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \log E_n\left(\frac{a_n - b_n}{z - b_n}\right)\right).$$

Αλλά

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} \log E_n\left(\frac{a_n - b_n}{z - b_n}\right)\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left|\log E_n\left(\frac{a_n - b_n}{z - b_n}\right)\right| \leq \frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left|E_n\left(\frac{a_n - b_n}{z - b_n}\right) - 1\right| \leq \frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = c.$$

Άρα $e^{-c} \leq |g(z)| \leq e^c$ για $|z| > R$. Συνεπώς η g έχει επουσιώδη ανωμαλία στο άπειρο και επιπλέον $g(\infty) \neq 0$. Επομένως η $f := g \circ T$ έχει επουσιώδη ανωμαλία στο w_0 και $f(w_0) \neq 0$. Συμπεραίνουμε ότι η f ορίζει μια αναλυτική συνάρτηση στο U με ρίζα τάξης $m(a)$ για κάθε $a \in A$ και η οποία δεν έχει άλλες ρίζες. □

Σαν συνέπεια τού προηγούμενου θεωρήματος, θα αποδείξουμε ένα χαρακτηρισμό των μερόμορφων συναρτήσεων.

Θεώρημα 5.33. *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό και f μερόμορφη στο U. Τότε υπάρχουν $g, h \in A(U)$ τέτοιες ώστε $f = g/h$.*

Απόδειξη. Έστω A το σύνολο των πόλων τής f, και για κάθε $a \in A$ έστω $m(a)$ η τάξη τού πόλου στο a. Από το Θεώρημα 5.32, υπάρχει $h \in A(U)$ τέτοια ώστε η h έχει ρίζα τάξης $m(a)$ σε κάθε $a \in A$, και, επιπλέον, η h δεν έχει άλλες ρίζες. Θέτουμε $g = fh$. Τότε η g έχει επουσιώδεις ανωμαλίες στο A και επομένως μπορεί να επεκταθεί σε μια ολόμορφη συνάρτηση στο U. Προφανώς $f = g/h$ στο $U \setminus A$. □

Θα συνδυάσουμε τέλος το Θεώρημα Mittag-Leffler με το Θεώρημα 5.32 για να αποδείξουμε ένα αποτέλεσμα «παρεμβολής». Μπορούμε να κατασκευάσουμε αναλυτικές συναρτήσεις με «προδιαγεγραμμένες τιμές» πάνω σε αυθαίρετα σύνολα χωρίς σημεία συσσώρευσης.

Θεώρημα 5.34. *Έστω $U \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό και $A \subset U$. Υποθέτουμε ότι το A δεν έχει σημεία συσσώρευσης στο U. Σε κάθε $a \in A$ αντιστοιχούμε ένα μη αρνητικό ακέραιο $m(a)$ και μιγαδικούς αριθμούς $w_{n,a}$, $0 \leq n \leq m(a)$. Τότε υπάρχει $f \in A(U)$ τέτοια ώστε $f^{(n)}(a)/n! = w_{n,a}$, $a \in A$, $0 \leq n \leq m(a)$.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 5.32, υπάρχει $g \in A(U)$, τέτοια ώστε η g έχει ρίζα τάξης $m(a) + 1$ σε κάθε $a \in A$, και τέτοια ώστε η g δεν έχει άλλες ρίζες. Ισχυριζόμαστε ότι σε κάθε $a \in A$ μπορούμε να αντιστοιχίσουμε μια συνάρτηση

$$P_a(z) = \sum_{j=1}^{m(a)+1} c_{j,a}(z - a)^{-j},$$

έτσι ώστε το ανάπτυγμα Taylor τής gP_a γύρω από το a να είναι

$$g(z)P_a(z) = w_{0,a} + w_{1,a}(z - a) + \cdots + w_{m(a),a}(z - a)^{m(a)} + \cdots.$$

Πράγματι, για z κοντά στο a έχουμε

$$g(z) = b_1(z - a)^{m(a)+1} + b_2(z - a)^{m(a)+2} + \cdots.,$$

όπου $b_1 \neq 0$. Αν τώρα

$$P_a(z) = c_{1,a}(z - a)^{-1} + \cdots + c_{m(a)+1,a}z^{-m(a)-1},$$

τότε

$$g(z)P_a(z) = (c_{m(a)+1,a} + c_{m(a),a}(z - a) + \cdots + c_{1,a}(z - a)^{m(a)}) \cdot (b_1 + b_2(z - a) + b_3(z - a)^2 + \cdots).$$

Επιλέγουμε τα $c_{m(a)+1,a}, c_{m(a)a}, \ldots, c_{1,a}$ διαδοχικά έτσι ώστε

$$g(z)P_a(z) = w_{0,a} + w_{1,a}(z-a) + \cdots + w_{m(a),a}(z-a)^{m(a)} + \cdots .$$

Δηλαδή εξισώνουμε συντελεστές και λύνουμε ως προς $c_{m(a)+1,a}, c_{m(a),a}, \ldots, c_{1,a}$. Αυτό είναι δυνατό διότι $b_1 \neq 0$. Με τον τρόπο αυτό παίρνουμε τις P_a. Τώρα, από το Θεώρημα Mittag-Leffler, υπάρχει μια μερόμορφη συνάρτηση h στο U, τής οποίας τα κύρια μέρη των αναπτυγμάτων Laurent είναι ακριβώς οι P_a. Η ζητούμενη συνάρτηση είναι η $f = gh$. □