Σημειωσεις Μερικων Διαφορικων Εξισωσεων

Αθ. Κεχαγιας

email: kehagias@egnatia.ee.auth.gr

web: http://users.auth.gr/ kehagiat

...

Τομεας Μαθηματικων

Γενικο Τμημα

Πολυτεχνικη Σχολη

Αριστοτελειο Πανεπιστημιο Θεσσαλονικης

Μαιος 2003

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το παρόν τεύχος περιέχει συνοπτικές σημειώσεις Μερικών Διαφορικών Εξισώσεων (ΜΔΕ) για χρήση από τους φοιτητές του Τμήματος Ηλεκτρολόγων Μηχ. στο μάθημα **Εφαρμοσμένα Μαθηματικά ΙΙ**. Περιοριζόμαστε σε ΜΔΕ πρώτης και δεύτερης τάξης με δύο ανεξάρτητες μεταβλητές και εξετάζουμε την επίλυση ΜΔΕ με τις μεθόδους των χαρακτηριστικών, του χωρισμού μεταβλητών και των ολοκληρωτικών μετασχηματισμών. Επίσης χρησιμοποιούμε και μερικά στοιχεία αριθμητικής επίλυσης, κυρίως για να τονίσουμε την συγγένεια των ΜΔΕ με τις συνήθεις διαφορικές εξισώσεις. Το ύφος της παρουσίασης δεν είναι αυστηρό και παραλείπεται η συζήτηση ζητημάτων ύπαρξης και μοναδικότητας των λύσεων. Γενικά οι σημειώσεις είναι προσαρμοσμένες για να διαβαστούν από μηχανικούς. Το παρόν τεύχος αφιερώνω στην φίλη μου Σολίτα.

Θανάσης Κεχαγιάς

Θεσσαλονίκη, Μάιος 2000

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγη

1.1 Ειδη Διαφορικων Εξισωσεων με Μερικες Παραγωγους

Διαφορικες εξισωσεις με μερικες παραγωγους ειναι, προφανως, εξισωσεις στις οποιες εμφανιζονται μερικες παραγωγοι. Π.χ. παιρνουμε μια συναρτηση δυο ανεξαρτητων μεταβλητων: $u(x,t)$ και συμβολιζουμε τις μερικες παραγωγους με u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt} κτλ[1]. Τοτε οι παρακατω ειναι διαφορικες εξισωσεις με μερικες παραγωγους.

$$u_x + u_t + u = 0$$

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}$$

$$u \cdot u_t = u_x$$

$$u_t = u_{xx} - u$$

$$u_{tt} = u_{xx} + f(x,t)$$

$$u_t = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}.$$

Θα χρησιμοποιουμε συνηθως την απλουστερη εκφραση *μερικη διαφορικη εξισωση (ΜΔΕ)*.

Η συναρτηση u μπορει να εξαρταται απο 2, 3 η και περισσοτερες μεταβλητες (π.χ. $x, y, ..., t, ...$). *Στο παρον μαθημα θα ασχοληθουμε μονο με συναρτησεις δυο μεταβλητων:* $u(x,y)$, $u(x,t)$ **κτλ.** Θα χρησιμοποιουμε την μεταβλητη t για να δηλωσουμε χρονο και τις μεταβλητες x, y για να δηλωσουμε χωρο. Οπως θα δουμε αργοτερα, οι ΜΔΕ που εμπλεκουν χρονικες παραγωγους εχουν αρκετα διαφορετικη συμπεριφορα απο αυτες που εμπλεκουν μονο χωρικες παραγωγους.

[1] Μερικες φορες στα παρακατω θα χρησιμοποιησουμε και τον 'τελεστικο' συμβολισμο $D_x u$, $D_t u$, $D_{xx} u$ κτλ.

Η *ταξη* της εξισωσης ειναι η υψηλοτερη ταξη παραγωγου που εμφανιζεται στην εξισωση. Π.χ. απο τις παρακατω εξισωσεις η πρωτη ειναι 2ης ταξης, η δευτερη επισης δευτερης ταξης και η τριτη ειναι τεταρτης ταξης.

$$u_{xx} = u_{tt}$$

$$u_t = u_{xx}$$

$$u_{tt} + u \cdot u_{xxxt} = 0.$$

Στο παρον μαθημα θα ασχοληθουμε μονο με ΜΔΕ πρωτης και δευτερης ταξης.

Απο τις παρακατω ΜΔΕ, η πρωτη ειναι *ομογενης* και η δευτερη *μη ομογενης*.

$$u_t - u_{xx} = 0.$$

$$u_t - u_{xx} = f(t).$$

Απο τις παρακατω ΜΔΕ, οι δυο πρωτες ειναι γραμμικες με σταθερους συντελεστες, οι δυο επομενες γραμμικες με μεταβλητους συντελεστες και οι δυο τελευταιες μη γραμμικες. (Ποιες απο αυτες τις εξισωσεις ειναι ομογενεις;)

$$u_t - u_{xx} = 0.$$

$$u_{tt} - u_{xx} = f(t)$$

$$u_{tt} + xu_t = \sin(x)$$

$$u_{xx} + \frac{u_{yy}}{x^2 + y^2} = 1$$

$$u_x + u \cdot u_t = 1$$

$$u_{xx} - u_{yy} \cdot \sin(u_x) = 0.$$

1.2 Ενα Εισαγωγικο Παραδειγμα

Πως λυνεται μια ΜΔΕ; Στο παρον εδαφιο θα εξετασουμε ενα συγκεκριμενο παραδειγμα ΜΔΕ και θα δουμε πως η λυση της μπορει να βρεθει προσεγγιστικα μεσω της λυσης ενος συστηματος συνηθων ΔΕ.

Θεωρουμε λοιπον την παρακατω ομογενη γραμμικη (με σταθερους συντελεστες) ΜΔΕ

$$u_t + au_x + 2u = 0. \tag{1.1}$$

$$u(x, 0) = f_\epsilon(x) \tag{1.2}$$

οπου η $f_\epsilon(x)$ ειναι η συναρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{για } |x| \le \epsilon \\ 0 & \text{για } |x| > \epsilon \end{cases} . \tag{1.3}$$

Θελουμε να λυσουμε την (1.1), (1.2) στον τοπο $-\infty < x < \infty$, $0 \le t < \infty$. Ας ορισουμε $\delta x = a$ και μια οικογενεια συναρτησεων $v_n(t) = u(n \cdot \delta x, t)$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$. Τοτε, αν το $a = \delta x$ ειναι αρκετα μικρο θα εχουμε

$$u_t(n \cdot \delta x, t) = \frac{dv_n}{dt} \tag{1.4}$$

$$u_x(n \cdot \delta x, t) \simeq \frac{v_n(t) - v_{n-1}(t)}{\delta x} \tag{1.5}$$

Επισης η (1.1) ειναι ισοδυναμη με την $u_t = -au_x - 2u$ και ετσι, χρησιμοποιωντας τις (1.4), (1.5), παιρνουμε (για $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$)

$$\frac{dv_n}{dt} = -\delta x \cdot \frac{v_n(t) - v_{n-1}(t)}{\delta x} - 2v_n(t) = -\left(v_n(t) - v_{n-1}(t)\right) - 2v_n(t). \tag{1.6}$$

Οσο για τις αρχικες συνθηκες, αν το ϵ ειναι αρκετα μικρο, θα εχουμε $v_0(0) = 1$ και $v_n(t) = u\left(n \cdot \delta x, t\right) = 0$, για $n \ne 0$. Συνοψιζοντας, θεωρειστε το συστημα με *απειρες εξισωσεις*:

$$\begin{aligned} &... \\ \frac{dv_{-1}}{dt} &= -\left(v_{-1} - v_{-2}\right) - 2v_{-1} \\ \frac{dv_0}{dt} &= -\left(v_0 - v_{-1}\right) - 2v_{-0} \\ \frac{dv_1}{dt} &= -\left(v_1 - v_0\right) - 2v_1 \\ &... \end{aligned} \tag{1.7}$$

$$v_0(0) = 1, \qquad v_n(0) = 0 \quad \text{για } n = \pm 1, \pm 2, ... \tag{1.8}$$

Συμφωνα με τα παραπανω, αν οι συναρτησεις $v_n(t)$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$ ειναι λυση του (1.7)–(1.8) τοτε θα εχουμε μια *προσεγγιστικη* λυση του (1.1)–(1.3): $v_n(t) \simeq u(n \cdot \delta x, t)$ (για $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$).

Για να αντλησουμε λοιπον καποια πληροφορια για την συμπεριφορα των λυσεων του (1.1)–(1.3) θα λυσουμε το συστημα (1.7)–(1.8). Αρχιζουμε με μια απλη παρατηρηση: η n-στη εξισωση του συστηματος εμπλεκει μονο τις συναρτησεις $v_n(t)$ και $v_{n-1}(t)$. Τωρα, οι $v_n(t)$ για $n = -1, -2, ...$ κτλ. δεν επηρεαζονται απο τις $v_n(t)$ για $n = 0, 1, 2, ...$. Επισης οι $v_n(t)$ για $n = -1, -2, ...$ ξεκινανε απο μηδενικη αρχικη κατασταση. Στην πραγματικοτητα λοιπον μπορουμε να λυσουμε το υποσυστημα

$$...$$

$$\frac{dv_{-2}}{dt} = -(v_{-2} - v_{-3}) - 2v_{-2}$$

$$\frac{dv_{-1}}{dt} = -(v_{-1} - v_{-2}) - 2v_{-1}$$

$$v_n(0) = 0 \quad \text{για } n = -1, -2, ...$$

χωρις να ασχοληθουμε με τις υπολοιπες εξισωσεις του συστηματος. Ειναι φανερο οτι αυτο το υποσυστημα εχει την λυση

$$... = v_{-2}(t) = v_{-1}(t) = 0.$$

Τωρα ας εξετασουμε την εξισωση

$$\frac{dv_0}{dt} = -(v_0(t) - v_{-1}(t)) - 2v_0(t) = -3v_0(t), \quad v_0(0) = 1.$$

Ειναι φανερο οτι η λυση αυτης της εξισωσης ειναι $v_0(t) = e^{-3t}$. Μπορουμε τωρα να επιλυσουμε την εξισωση

$$\frac{dv_1}{dt} = -(v_1(t) - v_0(t)) - 2v_1(t) = -3v_1(t) + e^{-3t}, \quad v_1(0) = 0$$

για να υπολογισουμε την $v_1(t)$, κατοπιν να προχωρησουμε στην επιλυση της

$$\frac{dv_2}{dt} = -(v_2(t) - v_1(t)) - 2v_2(t) = -3v_2(t) + v_1(t), \quad v_2(0) = 0$$

οπου η $v_1(t)$ θα ειναι γνωστη συναρτηση και κατ' αυτο τον τροπο να συνεχισουμε και να βρουμε την $v_n(t)$ για οποιοδηποτε n. Ειναι ομως πιο ευκολο να βρουμε κατευθειαν την $v_n(t)$ με χρηση του Μ/Σ Laplace. Πραγματι, μετασχηματιζοντας την n-στη εξισωση παιρνουμε για $n = 1, 2, ...$

$$sV_n - v_n(0) = -3V_n + V_{n-1} \Rightarrow (s+3)\, V_n = V_{n-1} \Rightarrow V_n = \frac{1}{s+3} V_{n-1}$$

και με επανειλημμενη εφαρμογη της τελευταιας σχεσης:

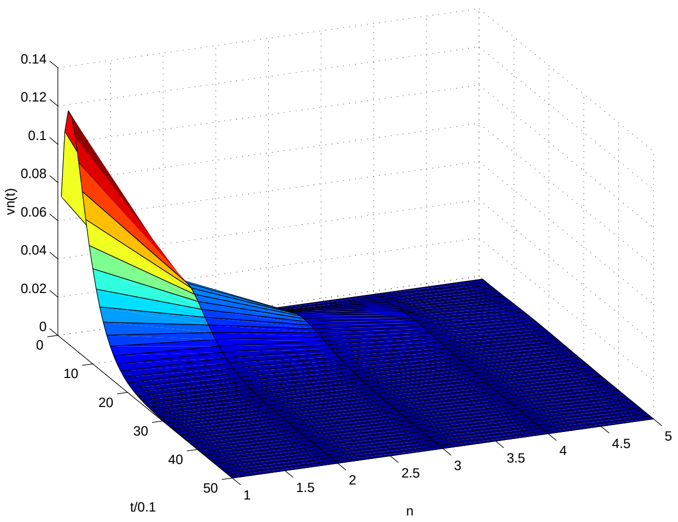
$$V_n = \frac{1}{(s+3)^n} V_0 = \frac{1}{(s+3)^{n+1}} \Rightarrow v_n(t) = \mathbf{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+3)^{n+1}}\right) = \frac{t^n}{n!} e^{-3t}$$

Συνοψιζοντας, η λυση του αρχικου συστηματος ειναι

$$v_n(t) = 0, \qquad n = ..., -2, -1$$

$$v_n(t) = \frac{t^n}{n!} e^{-3t}, \qquad n = 0, 1, 2, ...$$

Στο παρακατω σχημα δινουμε την γραφικη παρασταση των συναρτησεων $v_n(t)$.



Σχημα 1.1

Στα παραπανω υπολογισαμε μια προσεγγιση της λυσης $u(x,t)$ του προβληματος (1.1)–(1.3). Υποστηριξαμε (χωρις αυστηρη αποδειξη) οτι οι συναρτησεις $v_n(t)$ προσεγγιζουν την $u(x,t)$. Στο Κεφαλαιο 2 θα δωσουμε τροπους επιλυσης ΜΔΕ πρωτης ταξης και θα φανει οτι η επιλυση του προβληματος (1.1)–(1.3) μπορει να γινει κατα τροπο εντελως αντιστοιχο με αυτον που χρησιμοποιησαμε εδω για το συστημα (1.7)–(1.8).

Κεφάλαιο 2

ΜΔΕ Πρωτης Ταξης

2.1 Το Προβλημα Cauchy

Ενα τυπικο προβλημα ΜΔΕ πρωτης ταξης ειναι το εξης: ζητειται η λυση της ΜΔΕ

$$a(x,t)u_x + b(x,t)u_t = c(x,t)u \tag{2.1}$$

η οποια ικανοποιει τις αρχικες συνθηκες

$$u(x,0) = f(x). \tag{2.2}$$

Αυτο ειναι το *προβλημα Cauchy*. Ενα παραδειγμα προβληματος Cauchy ειναι το παρακατω:

$$u_x + u_t = -2u \tag{2.3}$$

$$u(x,0) = \sin(x) \tag{2.4}$$

οπου $a(x,t) = 1$, $b(x,t) = 1$, $c(x,t) = -2$ και $f(x) = \sin(x)$. Απο φυσικη αποψη περιμενουμε οτι το προβλημα (2.3), (2.4) ειναι καλα διατυπωμενο και πρεπει να εχει λυση διοτι: η (2.4) μας δινει τις τιμες της $u(x,t)$ για καθε θεση x στον αρχικο χρονο $t = 0$ και αν γραψουμε την (2.3) στην μορφη

$$u_t = -u_x - 2u \tag{2.5}$$

τοτε η (2.5) περιγραφει την εξελιξη της $u(x,t)$ στον χρονο.

Μια τελευταια παρατηρηση: οι αρχικες συνθηκες μπορει να δινονται σε γενικοτερη, παραμετρικη μορφη:

$$u(x(\tau), t(\tau)) = f(\tau) \tag{2.6}$$

δηλαδη να δινονται οι τιμες του u πανω στην παραμετροποιημενη καμπυλη $\{(x(\tau), t(\tau)) : \tau \in T\}$. Η (2.2) ειναι μια ειδικη περιπτωση της (2.6) για την καμπυλη $\{(x,0) : x \in R\}$, δηλ. τον αξονα των x.

2.2 Τρεις Μεθοδοι για να Λυσουμε Ενα Προβλημα Cauchy

Θα λυσουμε το παρακατω προβλημα

$$u_x + u_t = -2u \quad (-\infty < x < \infty, 0 < t < \infty), \quad u(x,0) = \sin(x) \tag{2.7}$$

με τρεις διαφορετικους τροπους.

2.2.1 Λυση με Μ/Σ Laplace

Ο πρωτος τροπος ειναι, κατα καποια εννοια, η συνεχεια του Εδαφιου 1.2. Αν θεωρησουμε οτι η (2.7) ειναι το οριο ενος συστηματος συνηθων ΔΕ (συμφωνα με τις παρατηρησεις του Εδαφιου 1.2), τοτε μια φυσικη σκεψη ειναι να χρησιμοποιησουμε τον Μ/Σ Laplace για να λυσουμε την εξισωση. Οριζουμε

$$U(x,s) = \mathbf{L}\left(u(x,t)\right) = \int_0^{\infty} e^{-st} u(x,t)dt \tag{2.8}$$

και υποθετουμε οτι

$$\mathbf{L}\left(u_x(x,t)\right) = \left[\mathbf{L}\left(u(x,t)\right)\right]_x = U_x.$$

Τοτε η (2.7) γινεται

$$U_x + sU - u(x,0) + 2U = 0 \Rightarrow U_x + (s+2)U = u\left(x,0\right) = \sin x. \tag{2.9}$$

Η (2.9) ειναι μια συνηθης ΔΕ της συναρτησης $U(x,s)$ (ως προς την ανεξαρτητη μεταβλητη x και θεωρωντας το s ως παραμετρο). Η λυση της ειναι

$$U\left(x,s\right) = \frac{-\cos x + (s+2)\sin x}{s^2+4s+5} + C_1(s)e^{-x(s+2)} = \frac{-\cos x + (s+2)\sin x}{\left(s+2\right)^2+1} + C_1(s)e^{-xs}e^{-2x}. \tag{2.10}$$

Τωρα, παιρνοντας τον αντιστροφο Μ/Σ Laplace εχουμε

$$u\left(x,t\right) = -\sin\left(t\right)e^{-2t}\cos\left(x\right) + \cos\left(t\right)e^{-2t}\sin\left(x\right) + c_1(t-x)e^{-2x}$$

(οπου $c_1(t) = \mathbf{L}^{-1}\left(C_1(s)\right)$, δηλ. ο αντιστροφος Μ/Σ Laplace) και

$$\sin(x) = u\left(x,0\right) = -\sin\left(0\right)e^{-2\cdot 0}\cos\left(x\right) + \cos\left(0\right)e^{-2\cdot 0}\sin\left(x\right) + c_1(0-x)e^{-2x} = \sin\left(x\right) + c_1(-x)e^{-2x} \tag{2.11}$$

αρα για καθε x ισχυει $c_1(-x) = 0$ οποτε $c_1(x) = 0$. Τελικα λοιπον

$$u\left(x,t\right) = \sin\left(x-t\right)e^{-2t}. \tag{2.12}$$

2.2.2 Λυση με Μ/Σ Fourier

Αντι να χρησιμοποιησουμε τον Μ/Σ Laplace για να απαλειψουμε την παραγωγο ως προς τον χρονο, μπορουμε να χρησιμοποιησουμε τον Μ/Σ Fourier για να απαλειψουμε την παραγωγο ως προς τον χωρο. Οριζουμε

$$U(w,t) = \mathbf{F}\left(u(x,t)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwx} u(x,t)dx \tag{2.13}$$

και υποθετουμε οτι

$$\mathbf{F}\left(u_t(x,t)\right) = \left[\mathbf{F}\left(u(x,t)\right)\right]_t = U_t.$$

Τοτε η (2.7) γινεται

$$iwU + U_t = -2U \Rightarrow U_t = -(iw+2)U. \tag{2.14}$$

Η δευτερη εξισωση ειναι μια συνηθης ΔΕ της συναρτησης $U(w,t)$ (ως προς την ανεξαρτητη μεταβλητη t και θεωρωντας το w ως παραμετρο). Η λυση της ειναι

$$U\left(w,t\right) = C_1(w)e^{-(iw+2)t} = C_1(w)e^{-iwt}e^{-2t} \tag{2.15}$$

οπου $C_1(w)$ ειναι μια αυθαιρετη 'σταθερα' Τωρα, παιρνοντας τον αντιστροφο Μ/Σ Fourier και γραφοντας $c_1(x)$=$\mathbf{F}^{-1}\left(C_1(w)\right)$, εχουμε

$$u\left(x,t\right) = c_1(x-t)e^{-2t} \Rightarrow \sin(x) = u(x,0) = c_1(x). \tag{2.16}$$

Αρα τελικα

$$u(x,t) = \sin\left(x-t\right)e^{-2t}.$$

2.2.3 Λυση με Μετασχηματισμο Συντεταγμενων

Τωρα θα λυσουμε την (2.7) χρησιμοποιωντας μια αρκετα διαφορετικη προσεγγιση. Θα θεωρησουμε τα x,t ως συναρτησεις μιας μεταβλητης s την οποια θα ορισουμε ετσι ωστε να ικανοποιειται το εξης συστημα ΔΕ:

$$\frac{dx}{ds} = 1, \quad \frac{dt}{ds} = 1. \tag{2.17}$$

Προφανως το συστημα (2.17) εχει την λυση $x(s) = s + c_1$, $t(s) = s + c_2$. Για καθε επιλογη των c_1, c_2 παιρνουμε μια καμπυλη $\{(x(s),t(s)) : s \in [0,\infty)\}$. Ομως ολες αυτες οι καμπυλες δεν ειναι διαφορετικες. Απαλειφοντας το s παιρνουμε

$$x - t = c_1 - c_2 \tag{2.18}$$

δηλαδη το συνολο των καμπυλων για τις οποιες συζηταμε ειναι οι ευθειες της μορφης

$$x = t + \tau \tag{2.19}$$

οπου $\tau = c_1 - c_2$. Οι ευθειες αυτες μπορουν να παραμετροποιηθουν με πολλους ισοδυναμους τροπους – δηλ. υπαρχουν πολλες επιλογες της s που δινουν την ιδια οικογενεια ευθειων. Η απλουστερη παραμετροποιηση ειναι να θεσουμε $t = s$ (δηλαδη $c_2 = 0$) οποτε θα εχουμε και $c_1 = \tau$ και τελικα

$$x = s + \tau, \quad t = s. \tag{2.20}$$

Παρατηρουμε οτι μπορουμε να αντιστρεψουμε την (2.20) και να παρουμε

$$s = t, \quad \tau = x - t. \tag{2.21}$$

Τωρα, πανω σε μια ευθεια με παραμετρικη εξισωση (2.20) θα εχουμε

$$u_x + u_t = -2u \Rightarrow u_x \frac{dx}{ds} + u_t \frac{dt}{ds} = -2u \Rightarrow$$

$$\frac{du}{ds} = -2u \Rightarrow u(s, \tau) = c(\tau) e^{-2s} \Rightarrow$$

$$u(x, t) = c(x - t) \cdot e^{-2t}. \tag{2.22}$$

Προσεξτε οτι στην παραπανω εξισωση η ‘σταθερα’ $c(\tau)$ ειναι μια αυθαιρετη συναρτηση του τ. Για να προσδιορισουμε την $c(\tau)$ θα χρησιμοποιησουμε την αρχικη συνθηκη. Εχουμε

$$\sin(x) = u(x, 0) = c(x - 0) \cdot e^{-2 \cdot 0} = c(x). \tag{2.23}$$

Αρα, τελικα, η λυση της αρχικης εξισωσης ειναι (οπως ηδη γνωριζουμε)

$$u(x, t) = \sin(x - t) \cdot e^{-2t}. \tag{2.24}$$

2.2.4 Συμπερασμα

Λυσαμε μια γραμμικη ΜΔΕ πρωτης ταξης με τρεις διαφορετικες μεθοδους. Οι δυο πρωτες μεθοδοι ειναι παρομοιες: βασιζονται στην χρηση ολοκληρωτικων μετασχηματισμων. Η τριτη μεθοδος λεγεται ‘μεθοδος των χαρακτηριστικων’ και ειναι ‘καλυτερη’, με την εννοια οτι εφαρμοζεται και σε προβληματα που δεν μπορουν να επιλυθουν με ολοκληρωτικους μετασχηματισμους. Για τον λογο αυτο στο επομενο εδαφιο θα μελετησουμε την μεθοδο των χαρακτηριστικων σε μεγαλυτερη εκταση.

2.3 Η Μεθοδος των Χαρακτηριστικων

Θεωρουμε και παλι το προβλημα Cauchy

$$a(x, t) u_x + b(x, t) u_t = c(x, t) u \tag{2.25}$$

$$u(x(\tau), t(\tau)) = f(\tau) \tag{2.26}$$

οπου $\{(x(\tau), t(\tau)) : \tau \in T\}$ ειναι μια καμπυλη σε παραμετρικη μορφη.

Θα προσπαθησουμε να μετατρεψουμε το παραπανω προβλημα που εμπλεκει παραγωγους ως προς δυο ανεξαρτητες μεταβλητες σε ενα νεο προβλημα, στο οποιο το u προσδιοριζεται απο την λυση μιας συνηθους ΔΕ. Αυτο θα το πετυχουμε με μια αλλαγη μεταβλητων. Θεωρειστε το συστημα συνηθων ΔΕ

$$\frac{dx}{ds} = a(x,t), \quad x(0,\tau) = \widetilde{x}(\tau), \tag{2.27}$$

$$\frac{dt}{ds} = b(x,t), \quad t(0,\tau) = \widetilde{t}(\tau). \tag{2.28}$$

Οι συναρτησεις $\widetilde{x}(\tau)$, $\widetilde{t}(\tau)$ θα προκυψουν απο την συνθηκη (2.26), οπως θα φανει παρακατω. Οι λυσεις του συστηματος (2.27), (2.28) λεγονται 'χαρακτηριστικες καμπυλες' του προβληματος (2.25), (2.26) και εχουν την μορφη $x(s,\tau)$, $t(s,\tau)$. Ας θεωρησουμε (προς το παρον) την μεταβλητη τ να ειναι σταθερη. Τοτε παιρνουμε μια *συγκεκριμενη* χαρακτηριστικη καμπυλη $x(s,\tau)$, $t(s,\tau)$ παραμετροποιημενη απο την μεταβλητη s. Πανω σε αυτη την χαρακτηριστικη εχουμε

$$\frac{d\,[x(s,\tau)]}{ds} = a(x(s,\tau),t(s,\tau)), \quad \frac{d\,[t(s,\tau)]}{ds} = b(x(s,\tau),t(s,\tau)) \tag{2.29}$$

και αρα

$$\begin{aligned} a(x(s,\tau),t(s,\tau))u_x + b(x(s,\tau),t(s,\tau))u_t &= c(x(s,\tau),t(s,\tau))u \Rightarrow \\ u_x\frac{dx}{ds} + u_t\frac{dt}{ds} &= c(x(s,\tau),t(s,\tau))u \Rightarrow \\ \frac{du}{ds} &= c(x(s,\tau),t(s,\tau))u. \end{aligned} \tag{2.30}$$

Αν τωρα λυσουμε την (2.30) ως συνηθη ΔΕ με ανεξαρτητη μεταβλητη την s και παραμετρο την τ, η λυση $u(s,\tau)$ θα περιεχει μια αυθαιρετη 'σταθερα', η οποια στην πραγματικοτητα θα ειναι συναρτηση του τ. Αν επιπλεον προσδιορισουμε την 'σταθερα' απο την αρχικη συνθηκη $u(s,\tau) = f(\tau)$, τοτε θα εχουμε βρει την λυση του προβληματος Cauchy (2.25), (2.26).

Παραδειγμα 2.3.1

Θα λυσουμε το προβλημα

$$xu_x + u_t = -tu, \quad u(x,0) = \sin(x) \tag{2.31}$$

Οι χαρακτηριστικες εξισωσεις ειναι

$$\frac{dx}{ds} = x, \quad \frac{dt}{ds} = 1 \tag{2.32}$$

και η λυση αυτων

$$x(s) = c_1 e^s, \quad t(s) = s + c_2. \tag{2.33}$$

Αν θεσουμε $c_2 = 0$, τοτε $t = s$ και $x = c_1 e^t = \tau e^t$. Δηλαδη η παραμετρικη μορφη των χαρακτηριστικων καμπυλων ειναι

$$x(s,\tau) = \tau e^s, \quad t(s,\tau) = s. \tag{2.34}$$

Αν αντιστρεψουμε και γραψουμε τις s, τ σαν συναρτηση των x, t παιρνουμε

$$s = t, \quad \tau = xe^{-t}. \tag{2.35}$$

Τωρα λυνουμε

$$xu_x + u_t = -tu \Rightarrow \frac{du}{ds} = -su \Rightarrow u(s,\tau) = c(\tau)e^{-s^2/2} \Rightarrow u(x,t) = c(xe^{-t})e^{-t^2/2}. \tag{2.36}$$

Τελος, απο την αρχικη συνθηκη εχουμε

$$\sin(x) = u(x,0) = c(xe^0)e^0 = c(x) \Rightarrow u(x,t) = \sin\left(xe^{-t}\right) e^{-t^2/2}. \tag{2.37}$$

***

Παραδειγμα 2.3.2

Θα λυσουμε το προβλημα

$$xu_x + tu_t = -2u, \quad u(x,1) = \sin(x) \tag{2.38}$$

Οι χαρακτηριστικες εξισωσεις ειναι

$$\frac{dx}{ds} = x, \quad \frac{dt}{ds} = t \tag{2.39}$$

και η λυση αυτων

$$x(s) = c_1 e^s, \quad t(s) = c_2 e^s. \tag{2.40}$$

Αν θεσουμε $c_2 = 1$, τοτε $t = e^s$ και $x = c_1 t = \tau e^s$. Δηλαδη η παραμετρικη μορφη των χαρακητριστικων καμπυλων ειναι

$$x(s,\tau) = \tau e^s, \quad t(s,\tau) = e^s. \tag{2.41}$$

Αν αντιστρεψουμε και γραψουμε τις s, τ σαν συναρτηση των x, t παιρνουμε

$$s = \ln(t), \quad \tau = x/t. \tag{2.42}$$

Τωρα λυνουμε

$$xu_x + tu_t = -2u \Rightarrow \frac{du}{ds} = -2u \Rightarrow u(s,\tau) = c(\tau)e^{-2s} \Rightarrow u(x,t) = \frac{c(x/t)}{t^2}. \tag{2.43}$$

Τελος, απο την αρχικη συνθηκη εχουμε

$$\sin(x) = u(x,1) = \frac{c(x/1)}{1^2} = c(x) \Rightarrow u(x,t) = \frac{\sin(x/t)}{t^2}. \tag{2.44}$$

***

Απο τα παραπανω βλεπουμε οτι η μεθοδος των χαρακτηριστικων μπορει να περιγραφει ως εξης.

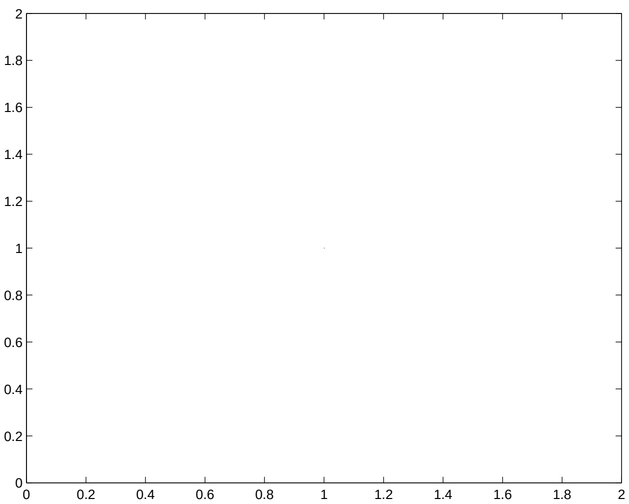
1. Κατασκευαζουμε την οικογενεια των χαρακτηριστικων καμπυλων $x(s,\tau), t(s,\tau)$ της ΜΔΕ (2.25) λυνοντας το συστημα συνηθων ΔΕ (2.27), (2.28).

2. Η παραμετρος s δινει τα *σημεια* μιας συγκεκριμενης καμπυλης και η παραμετρος τ δινει μια ***καμπυλη*** της οικογενειας.

3. Οι $x(s,\tau), t(s,\tau)$ εχουν την ιδιοτητα οτι για σταθερο τ και μεταβαλλομενο s η μεταβολη της $u\left(x(s,\tau), t(s,\tau)\right)$ περιγραφεται απο την συνηθη ΔΕ (2.30). Λυνοντας την (2.30) παιρνουμε την u σαν συναρτηση των s και τ, οπου η τ υπεισερχεται μονο στις αρχικες συνθηκες.

4. Αντιστρεφουμε τις συναρτησεις $x(s,\tau), t(s,\tau)$ και παιρνουμε $\tau(x,t), s(x,t)$ (υποθετουμε οτι η αντιστροφη ειναι δυνατη, αλλιως η μεθοδος δεν εφαρμοζεται!). Ετσι μπορουμε να μετασχηματισουμε τις αρχικες συνθηκες ωστε να εκφραζονται σε σχεση με τις τιμες s, τ και να προσδιορισουμε πληρως την ζητουμενη λυση της (2.25), (2.26).

Στην ουσια λοιπον, η μεθοδος των χαρακτηριστικων συνισταται σε μια αλλαγη μεταβλητων. Γεωμετρικα η κεντρικη ιδεα περιγραφεται απο το παρακατω σχημα.



Σχημα 2.1

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

Λυστε τα παρακατω.

2.3.1 $u_x + 3u_t = u$, $u(x,0) = \sin(x)$ (Απ. $\sin(x - t/3)\, e^{t/3}$).

2.3.2 $u_x + 3u_t = 1$, $u(x,0) = \sin(x)$ (Απ. $\sin(x - t/3) + t/3$).

2.3.3 $xu_x + tu_t = u$, $u(x,2) = \cos(x)$ (Απ. $\frac{t}{2}\cos(2x/t)$).

2.3.4 $xu_x - tu_t = u$, $u(x,1) = \cos(x)$ (Απ. $u(x,t) = \cos(xt)/t$)

2.3.5 $xu_x + u_t = -tu$, $u(x,1) = \frac{1}{ex}$ (Απ. $u(x,t) = te^{-t}/x$).

2.3.6 $xu_x - tu_t = u$, $u(x,1) = \frac{1}{x^2+1}$ (Απ. $u(x,t) = \frac{1}{x^2t^3+t}$).

2.4 Γενικευσεις

Θα διατυπωσουμε τωρα την μεθοδο των χαρακτηριστικων με γενικοτερο και καπως διαφορετικο τροπο. Καταρχην θα γενικευσουμε την οικογενεια των ΜΔΕ τις οποιες μελετουμε. Μια ΜΔΕ της μορφης

$$a(x,t,u)u_x + b(x,t,u)u_t = c(x,t,u). \tag{2.45}$$

λεγεται *σχεδον γραμμικη*. Προσεξτε την διαφορα της (2.45) απο την (2.25). Τωρα τα a, b, c ειναι συναρτησεις οχι μονο των x, t αλλα *και* του u.

Ορισμος 2.4.1 *Εστω συναρτησεις Φ, v, w τετοιες ωστε*

$$\Phi(v(x,t,u), w(x,t,u)) = 0. \tag{2.46}$$

Λεμε οτι η (2.46) ειναι λυση της (2.45) αν το $u(x,t)$ το οποιο προσδιοριζει η (2.46) ικανοποιει την (2.45). Αν οι v, w ειναι τετοιες ωστε η (2.46) να ισχυει για αυθαιρετη Φ, τοτε λεμε οτι η (2.46) ειναι η γενικη λυση της (2.45).

Παραδειγμα 2.4.1

Θα λυσουμε την ΜΔΕ

$$xu_x + tu_t = u. \tag{2.47}$$

Θεωρειστε τις συναρτησεις $v(x,t,u) = \frac{t}{x}$, $w(x,t,u) = \frac{u}{x}$ και την συναρτηση $\Phi_1(\alpha,\beta) = \alpha - \beta$. Τοτε

$$\Phi_1(v(x,t,u), w(x,t,u)) = 0 \Rightarrow \frac{t}{x} - \frac{u}{x} = 0 \Rightarrow u = t. \tag{2.48}$$

Εχουμε $u_x = 0$, $u_t = 1$ και

$$xu_x + tu_t = x \cdot 0 + t \cdot 1 = t = u \tag{2.49}$$

αρα η $\Phi_1\left(\frac{t}{x},\frac{u}{x}\right)=0$ ειναι μια λυση της (2.47). Επισης για την συναρτηση $\Phi_2(\alpha,\beta)=\alpha\cdot\beta-1$ εχουμε

$$\Phi_2\left(v(x,t,u),w(x,t,u)\right)=0\Rightarrow\frac{t}{x}\cdot\frac{u}{x}-1=0\Rightarrow ut=x^2\Rightarrow u=\frac{x^2}{t}\tag{2.50}$$

και εχουμε $u_x=\frac{2x}{t}$, $\quad u_t=-\frac{x^2}{t^2}$ οποτε

$$xu_x+tu_t=x\cdot\frac{2x}{t}-t\cdot\frac{x^2}{t^2}=\frac{2x^2-x^2}{t}=\frac{x^2}{t}=u\tag{2.51}$$

οποτε *και* η $\Phi_2\left(\frac{t}{x},\frac{u}{x}\right)=0$ ειναι μια λυση της (2.47).

Οπως μαλλον εχετε υποψιαστει, αν παρουμε μια τυχουσα συναρτηση $\Phi(\alpha,\beta)$ και θεσουμε

$$\Phi(v(x,t,u),w(x,t,u))=0\tag{2.52}$$

(με $v=\frac{t}{x}$, $w=\frac{u}{x}$) η (2.52) θα πρεπει να ειναι η γενικη λυση της (2.47). Για να το αποδειξουμε προχωρουμε ως εξης.

$$\Phi(v,w)=0\Rightarrow\left(\begin{array}{c}\Phi_x=0\\ \Phi_t=0\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{c}\Phi_v\cdot(v_x+v_uu_x)+\Phi_w\cdot(w_x+w_uu_x)=0\\ \Phi_v\cdot(v_t+v_uu_t)+\Phi_w\cdot(w_t+w_uu_t)=0\end{array}\right).\tag{2.53}$$

Αν γραψουμε τα παραπανω σε μορφη πινακων εχουμε

$$\begin{bmatrix}v_x+v_uu_x & w_x+w_uu_x\\ v_t+v_uu_t & w_t+w_uu_t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Phi_v\\ \Phi_w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}\tag{2.54}$$

και για να ισχυει αυτη η εξισωση για καθε Φ θα πρεπει να εχουμε

$$\begin{vmatrix}v_x+v_uu_x & w_x+w_uu_x\\ v_t+v_uu_t & w_t+w_uu_t\end{vmatrix}=(v_x+v_uu_x)(w_t+w_uu_t)-(v_t+v_uu_t)(w_x+w_uu_x)=0.\tag{2.55}$$

Εχουμε ομως

$$v=\frac{t}{x},\quad v_x=-\frac{t}{x^2},\quad v_t=\frac{1}{x},\quad v_u=0\tag{2.56}$$

$$w=\frac{u}{x},\quad w_x=-\frac{u}{x^2},\quad w_t=0,\quad w_u=\frac{1}{x}.\tag{2.57}$$

Αν αντικαταστησουμε τα παραπανω στην (2.55) παιρνουμε

$$0=-\frac{t}{x^2}\cdot\frac{1}{x}\cdot u_t-\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{u}{x^2}+\frac{1}{x}\cdot u_x\right)=\frac{-tu_t+u-xu_x}{x^3}\tag{2.58}$$

απο την οποια προκυπτει η (2.47). Με αλλα λογια, αν παρουμε οποιαδηποτε (παραγωγισιμη) Φ και απαιτησουμε τα u,x,t να ικανοποιουν

$$\Phi\left(\frac{t}{x},\frac{u}{x}\right)=0\tag{2.59}$$

τοτε το $u(x,t)$ που προσδιοριζει η (2.59) ειναι μια λυση της (2.47).

***

Η εκφραση 'γενικη λυση' ειναι καπως παραπλανητικη, διοτι μπορει να υπαρχουν συναρτησεις $u(x,t)$ οι οποιες ικανοποιουν την (2.45) και δεν προκυπτουν απο μια σχεση της μορφης (2.46). Ειναι ομως σαφες οτι η (2.46) ειναι αρκετα γενικη.

Αν η Φ μπορει να λυθει ως προς την v, τοτε η γενικη λυση μπορει να γραφτει ισοδυναμα στην μορφη

$$v(x,t,u) = \Psi(w(x,t,u)) \tag{2.60}$$

και απο αυτη να προκυψει η $u(x,t)$.

Παραδειγμα 2.4.2

Συνεχιζοντας το παραπανω παραδειγμα, ας παρουμε μια τυχουσα Ψ και ας θεσουμε

$$w(x,t,u) = \Psi(v(x,t,u)) \Rightarrow \frac{u}{x} = \Psi\left(\frac{t}{x}\right). \tag{2.61}$$

Τοτε

$$u = x\Psi\left(\frac{t}{x}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{l} u_x = \Psi + x\Psi' \cdot \left(-\frac{t}{x^2}\right) \\ u_t = x\Psi' \cdot \left(\frac{1}{x}\right) \end{array}\right) \tag{2.62}$$

οποτε

$$xu_x + tu_t = x\Psi + x^2\Psi' \cdot \left(-\frac{t}{x^2}\right) + tx\Psi' \cdot \left(\frac{1}{x}\right) = x\Psi = u \tag{2.63}$$

δηλαδη η (2.47) ικανοποιειται για *αυθαιρετη* (παραγωγισιμη) Ψ.

***

Απομενει τωρα η ευρεση μιας μεθοδου με την οποια να μπορουμε να υπολογιζουμε τις συναρτησεις v, w. Το παρακατω θεωρημα μας παρεχει μια μεθοδο επιλυσης σχεδον γραμμικων ΜΔΕ πρωτης ταξης. Δεν δινουμε την αποδειξη του θεωρηματος (ο αναγνωστης θα την βρει στο βιβλιο [1]) αλλα ειναι φανερο οτι βασιζεται στην ιδεα των χαρακτηριστικων καμπυλων.

Θεωρημα 2.4.2 *Εστω* $v(x,t,u) = c_1$ *και* $w(x,t,u) = c_2$ *δυο* ανεξαρτητες *λυσεις του συστηματος*

$$\frac{dx}{a(x,t,u)} = \frac{dt}{b(x,t,u)} = \frac{du}{c(x,t,u)}. \tag{2.64}$$

Τοτε η γενικη λυση της σχεδον γραμμικης ΜΔΕ

$$a(x,t,u)u_x + b(x,t,u)u_t = c(x,t,u) \tag{2.65}$$

ειναι η

$$F(v(x,t,u), w(x,t,u)) = 0. \tag{2.66}$$

Η σχεση του Θεωρηματος με την μεθοδο των χαρακτηριστικων γινεται φανερη αν ξαναγραφουμε την (2.64) στην μορφη

$$\frac{dx}{a(x,t,u)} = \frac{dt}{b(x,t,u)} = \frac{du}{c(x,t,u)} = ds. \tag{2.67}$$

Παραδειγμα 2.4.3

Για να βρουμε την γενικη λυση της (2.47) πρεπει να λυσουμε το συστημα

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{t} = \frac{du}{u}. \tag{2.68}$$

Η επιλυση του (2.68) ειναι απλη:

$$\frac{dt}{t} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln t + c_1 = \ln x \Rightarrow t = c_2 x \Rightarrow \frac{t}{x} = c_2 \tag{2.69}$$

και

$$\frac{du}{u} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln u = \ln x + c_3 \Rightarrow u = c_4 x \Rightarrow \frac{u}{x} = c_4. \tag{2.70}$$

Παιρνοντας λοιπον $v(x,t,u) = \frac{t}{x} = c_2$ και $w(x,t,u) = \frac{u}{x} = c_4$, η γενικη λυση θα ειναι

$$\Phi\left(\frac{t}{x}, \frac{u}{x}\right) = 0 \tag{2.71}$$

η και

$$\frac{u}{x} = \Psi\left(\frac{t}{x}\right) \Rightarrow u(x,t) = x\Psi\left(\frac{t}{x}\right). \tag{2.72}$$

***

Παραδειγμα 2.4.4

Θα βρουμε την γενικη λυση της

$$xu_x - tu_t = u \tag{2.73}$$

Πρεπει να λυσουμε το συστημα

$$\frac{dx}{x} = \frac{dt}{-t} = \frac{du}{u}. \tag{2.74}$$

Εχουμε

$$\frac{dt}{-t} = \frac{dx}{x} \Rightarrow -\ln t + c_1 = \ln x \Rightarrow xt = c_2 \tag{2.75}$$

και

$$\frac{du}{u} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln u = \ln x + c_3 \Rightarrow u = c_4 x \Rightarrow \frac{u}{x} = c_4. \tag{2.76}$$

Οποτε η γενικη λυση θα ειναι

$$\Phi\left(xt, \frac{u}{x}\right) = 0 \tag{2.77}$$

η

$$\frac{u}{x} = \Psi\left(xt\right) \Rightarrow u(x,t) = x\Psi\left(xt\right). \tag{2.78}$$

***

Παραδειγμα 2.4.5

Θα βρουμε την γενικη λυση της

$$2tuu_x - xuu_t = -xt. \tag{2.79}$$

Πρεπει να λυσουμε το συστημα

$$\frac{dx}{2tu} = \frac{dt}{-xu} = \frac{du}{-xt}. \tag{2.80}$$

Εχουμε

$$\frac{dx}{2tu} = \frac{dt}{-xu} \Rightarrow \frac{dx}{2t} = \frac{dt}{-x} \Rightarrow 2tdt + xdx = 0 \Rightarrow 2t^2 + x^2 = c_1 \tag{2.81}$$

Παρομοια

$$\frac{dx}{2tu} = \frac{du}{-xt} \Rightarrow 2u^2 + x^2 = c_2. \tag{2.82}$$

Οποτε η γενικη λυση θα ειναι

$$\Phi\left(2u^2 + x^2, 2t^2 + x^2\right) = 0 \tag{2.83}$$

Μπορουμε να γραψουμε την γενικη λυση και στην μορφη

$$u^2 = \frac{\Psi\left(2t^2 + x^2\right) - x^2}{2}. \tag{2.84}$$

***

Η παραπανω μεθοδος για την ευρεση της γενικης λυσης μπορει σε πολλες περιπτωσεις (αλλα *οχι σε ολες!*) να δωσει και την ειδικη λυση ενος προβληματος Cauchy.

Παραδειγμα 2.4.6

Εχουμε δει παραπανω οτι η γενικη λυση της

$$xu_x + tu_t = u \tag{2.85}$$

μπορει να γραφτει στην μορφη

$$u(x,t) = x\Psi\left(\frac{t}{x}\right). \tag{2.86}$$

Για να βρουμε την λυση της (2.85) η οποια ικανοποιει την αρχικη συνθηκη

$$u(x,1) = e^{-x} \tag{2.87}$$

θετουμε

$$e^{-x} = u(x,1) = x\Psi\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow \Psi(\frac{1}{x}) = \frac{e^{-x}}{x} \Rightarrow \Psi(x) = \frac{e^{-1/x}}{1/x} = xe^{-1/x} \tag{2.88}$$

οποτε

$$u(x,t) = x\Psi\left(\frac{t}{x}\right) = x\frac{t}{x}e^{-x/t} = te^{-x/t}. \tag{2.89}$$

***

Παραδειγμα 2.4.7

Θα λυσουμε το προβλημα

$$u \cdot (x+u) \cdot u_x - t \cdot (t+u) \cdot u_t = 0, \quad u(1,t) = \sqrt{t}. \tag{2.90}$$

Εχουμε

$$\frac{dx}{u(x+u)} = \frac{dt}{-t(t+u)} = \frac{du}{0} \tag{2.91}$$

απο το οποιο παιρνουμε

$$du = 0 \Rightarrow u = c_1 \tag{2.92}$$

και κατοπιν

$$\begin{aligned}
&\frac{dx}{c_1(x+c_1)} = \frac{dt}{-t(t+c_1)} = \frac{dt}{c_1 \cdot (t+c_1)} - \frac{dt}{c_1 t} \Rightarrow \\
&\ln(x+c1) = \ln\left(\frac{t+c_1}{t}\right) + \ln(c_2) \Rightarrow \\
&\frac{t \cdot (x+c_1)}{t+c_1} = c_2 \Rightarrow \\
&\frac{t \cdot (x+u)}{t+u} = c_2.
\end{aligned} \tag{2.93}$$

Αρα η γενικη λυση γραφεται $\Phi\left(u, \frac{t\cdot(x+u)}{t+u}\right) = 0$, η ισοδυναμα

$$u = c_1, \quad \frac{t \cdot (x+u)}{t+u} = c_2, \quad \Phi(c_1, c_2) = 0.$$

Τωρα, θα προσδιορισουμε τα c_1, c_2 για την λυση που ικανοποιει την συνθηκη $u(1,t) = \sqrt{t}$. Εχουμε για $x = 1$ οτι

$$c_2 = \frac{t \cdot \left(1 + \sqrt{t}\right)}{t + \sqrt{t}} = \sqrt{t} = u = c_1.$$

Αρα

$$c_1 = c_2 \Rightarrow u = \frac{t \cdot (x + u)}{t + u} \Rightarrow tu + u^2 = tx + tu \Rightarrow u(x,t) = \pm\sqrt{xt}$$

αλλα επειδη πρεπει να ισχυει $u(1,t) = \sqrt{t}$ βλεπουμε οτι τελικα $u(x,t) = \sqrt{xt}$.

$$u \cdot (x + u) \cdot u_x - t \cdot (t + u) \cdot u_t = 0, \quad u(1,t) = \sqrt{t}. \tag{2.94}$$

***

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

2.4.1 Να βρεθουν οι γενικες λυσεις των παρακατω ΜΔΕ.

1. $u_x + u_t = u$ (Απ. $u\,(x,t) = F\,(t - x)\,e^x$).
2. $2u_x + 5u_t = 2$ (Απ. $u\,(x,t) = x + F\,(2t - 5x)$).
3. $xu_x + tu_t = u$ (Απ. $u\,(x,t) = xF\left(\frac{t}{x}\right)$).
4. $xu_x - tu_t = -u$ (Απ. $u\,(x,t) = F\,(tx)\,x$).
5. $xuu_x + tuu_t = xt$ (Απ. $F(2xt - u^2, \frac{t}{x})$).
6. $x^2u_x + t^2u_t = u^2$(Απ. $F\left(\frac{x-t}{xt}, \frac{1}{x} - \frac{1}{u}\right) = 0$).
7. $tu_x - xu_t = t^2 - x^2$ (Απ. $u\,(x,t) = \pm xt + F\left(x^2 + t^2\right)$).
8. $tuu_x - xuu_t = xt$ (Απ. $F(x^2 + t^2, t^2 + u^2) = 0$).
9. $uu_x + tu_t = x$ (Απ. $F\left(x^2 - u^2, \frac{x+u}{t}\right)$).
10. $\left(x^2 - t^2 - u^2\right)u_x + 2xtu_t = 2xu$ (Απ. $F\left(\frac{t}{u}, \frac{x^2+t^2+u^2}{u}\right)$).
11. $x \cdot (t - u) \cdot u_x + t \cdot (u - x) \cdot u_t = u \cdot (x - t)$ (Απ. $F(xtu, x + t + u) = 0$).
12. $x \cdot \left(t^2 - u^2\right) \cdot u_x + t \cdot \left(u^2 - x^2\right) \cdot u_t = u \cdot \left(x^2 - t^2\right)$ (Απ. $F(xtu, x^2 + t^2 + u^2) = 0$).

2.4.2 Λυστε τα παρακατω προβληματα Cauchy .

1. $u_x + 3u_t = u$, $u(x,0) = \sin(x)$ (Απ. $\sin(x - t/3)\,e^{t/3}$).
2. $u_x + 3u_t = 1$, $u(x,0) = \sin(x)$ (Απ. $\sin(x - t/3) + t/3$).

3. $xu_x + tu_t = u$, $u(x,2) = \cos(x)$ (Απ. $\frac{t}{2}\cos(2x/t)$).
4. $xu_x - tu_t = u$, $u(x,1) = \cos(x)$ (Απ. $u(x,t) = \cos(xt)/t$)
5. $xu_x + u_t = -tu$, $u(x,1) = \frac{1}{ex}$ (Απ. $u(x,t) = te^{-t}/x$).
6. $xu_x - tu_t = u$, $u(x,1) = \frac{1}{x^2+1}$ (Απ. $u(x,t) = \frac{1}{x^2t^3+t}$).

2.5 Αριθμητικη Επιλυση

Στο παρον μαθημα ενδιαφερομαστε κυριως για την αναλυτικη επιλυση ΜΔΕ. Υπαρχουν ομως πολλες ΜΔΕ τις οποιες δεν μπορουμε να επιλυσουμε αναλυτικα. Για παραδειγμα, αν και υπαρχουν αναλυτικες τεχνικες επιλυσης *μη γραμμικων* ΜΔΕ, αυτες εφαρμοζονται σε σχετικα περιορισμενο αριθμο περιπτωσεων. Ειναι χρησιμο λοιπον σε αυτο το σημειο να δουμε μερικα παραδειγματα αριθμητικης επιλυσης ΜΔΕ πρωτης ταξης. Θα εξετασουμε δυο παραδειγματα.

2.5.1 1ο Παραδειγμα

Θα επιλυσουμε μια γραμμικη ΜΔΕ με αναλυτικο και αριθμητικο τροπο και θα συγκρινουμε τις δυο λυσεις. Η ΜΔΕ την οποια θα εξετασουμε ειναι η

$$u_t + 3u_x = 0, \quad u(x,0) = f(x). \tag{2.95}$$

Με την μεθοδο του Εδαφιου 2.4 εχουμε το συστημα

$$\frac{dx}{3} = \frac{dt}{1} = \frac{du}{0}. \tag{2.96}$$

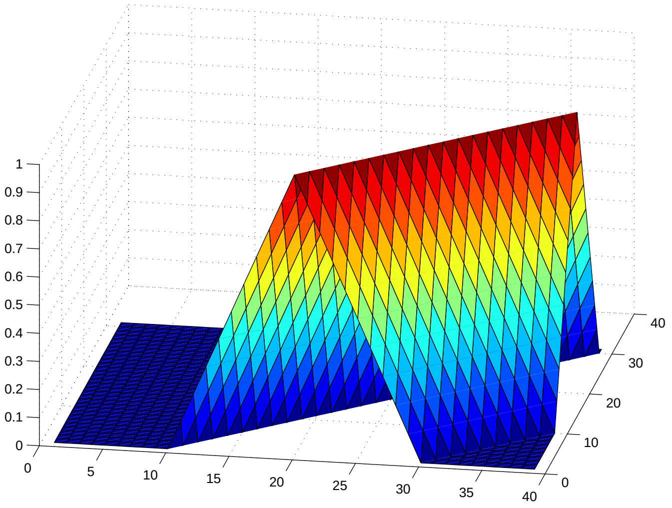
Απο την $\frac{dt}{1} = \frac{du}{0}$ προκυπτει $du = 0$ και αρα $u = c_1$. Απο την $\frac{dt}{1} = \frac{dx}{3}$ προκυπτει $3dt = dx$ και αρα $x - 3t = c_2$. Αρα η γενικη λυση ειναι $u(x,t) = \Psi(x-3t)$ και επειδη $f(x) = u(x,0) = \Psi(x - 3\cdot 0) = \Psi(x)$ συμπεραινουμε οτι

$$u(x,t) = f(x-3t). \tag{2.97}$$

Αυτο σημαινει οτι η (2.95) περιγραφει ενα πολυ απλο φαινομενο: οι αρχικες συνθηκες 'μεταφερονται' προς τα δεξια με ταχυτητα 3. Π.χ. αν θεωρησουμε οτι

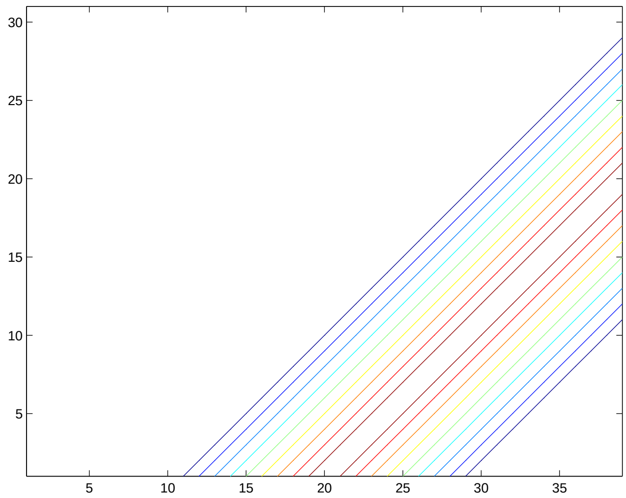
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{για } x \le 10 \\ \frac{x-10}{10} & \text{για } 10 \le x \le 20 \\ 1 - \frac{20-x}{10} & \text{για } 20 \le x \le 30 \\ 0 & \text{για } 30 \le x. \end{cases} \tag{2.98}$$

τοτε η $u(x,t)$ θα παρουσιαζει την εξης εικονα



Σχημα 2.2

η σε απεικονιση ισοσταθμικων



Σχημα 2.3

Θα χρησιμοποιησουμε τωρα την μεθοδο επιλυσης του Εδαφιου 2.3. Η λυση που θα παρουμε θα ειναι η ιδια με την (2.97) αλλα θελουμε να τονισουμε καποια σημαντικη πλευρα του προβληματος. Εχουμε συμφωνα με τα προηγουμενα οτι $\frac{dt}{ds} = 3$ και $\frac{dx}{ds} = 1$, αρα $t = 3s + c_1$ και $x = s + c_2$, η, θετοντας $c_1 = 0$

$$t = 3s, \quad x = \frac{t}{3} + \tau \qquad \text{και} \qquad s = \frac{t}{3}, \quad \tau = x - \frac{t}{3}. \tag{2.99}$$

οποτε και $\frac{du}{ds} = 0$, δηλαδη $u(s) = c(\tau) = c\left(x - \frac{t}{3}\right) = u(x,t)$. Επειδη $u(x,0) = f(x)$ προκυπτει και παλι οτι $u(x,t) = f(x - 3t)$. Αυτο ομως το οποιο ειναι σημαντικο ειναι οτι συμφωνα με τα παραπανω η $u(x,t)$ μενει αμεταβλητη κατα μηκος των ευθειων $x = \frac{t}{3} + \tau$. Αυτο φυσικα ειναι ακριβως αυτο το οποιο βλεπουμε και στα Σχηματα 2.2 και 2.3.

Ας λυσουμε τωρα την ιδια εξισωση αριθμητικα. Θετουμε $v_n(t) = u(n,t)$ οποτε και

$$u_t = \frac{dv_n}{dt}, \quad u_x \simeq v_n - v_{n-1}. \tag{2.100}$$

Δεν μπορουμε να καλυψουμε ολο τον αξονα των x· θα παρουμε $n = 0, 1, ..., 40$ και θα θεωρησουμε οτι $v_0(t) = 0$ για καθε t. Οποτε πρεπει να λυσουμε το συστημα

$$\begin{aligned} \frac{dv_1}{dt} &= -3 \cdot (v_1 - v_0) \\ &\dots \\ \frac{dv_n}{dt} &= -3 \cdot (v_n - v_{n-1}) \\ &\dots \\ \frac{dv_{40}}{dt} &= -3 \cdot (v_{40} - v_{39}) \end{aligned} \tag{2.101}$$

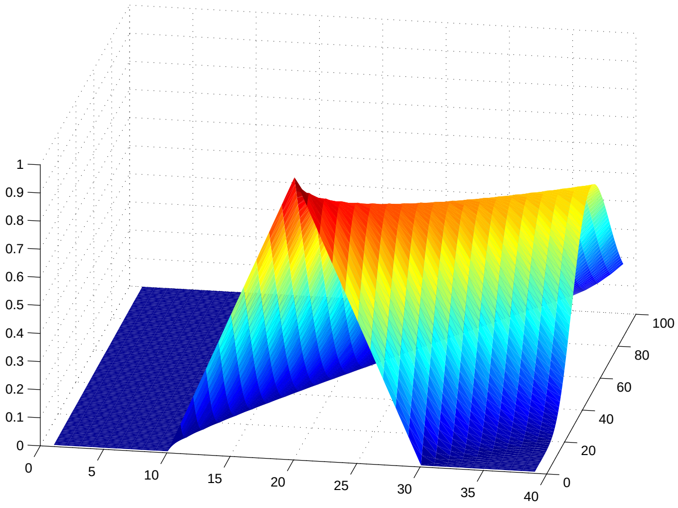
με αρχικες συνθηκες $v_n(0) = f(n)$ (θα χρησιμοποιησουμε την $f(x)$ της (2.98)). Η αριθμητικη επιλυση μπορει να γινει με τις εξης εντολες της MATLAB:

```
clear
T=[0:0.1:10];
u0=[zeros(1,10) [0.1:0.1:1] [0.9:-0.1:0.1] zeros(1,10)];
[t,u]=ode23('flux11',T,u0);
```

που χρησιμοποιουν το αρχειο- συναρτηση flux11.m:

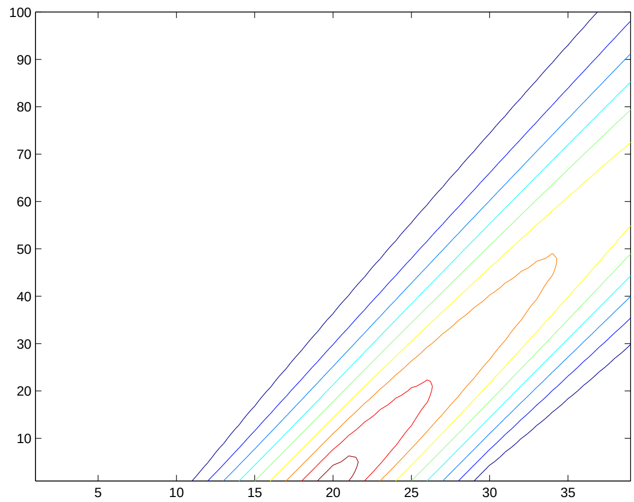
```
function ut=flux(t,u)
N=length(u);
ut(1,1)=-3*u(1);
for n=2:N
 ut(n,1)=-3*(u(n)-u(n-1));
end
```

Τα αποτελεσματα της προσομοιωσης φαινονται στα παρακατω σχηματα.



Σχημα 2.4

η σε απεικονιση ισοσταθμικων



Σχημα 2.5

Βλεπουμε οτι η αριθμητικη λυση ειναι σε αρκετα καλη συμφωνια με την αναλυτικη.

2.5.2 Φυσικη Ερμηνεια

Πριν προχωρησουμε στο δευτερο παραδειγμα, θα δωσουμε μια εξηγηση της φυσικης σημασιας της ΜΔΕ (2.95). Η εξισωση αυτη μπορει να θεωρηθει ως ενα μοντελο ροης, π.χ. της ροης ενος ρευστου μεσα σε ενα σωληνα, η της κινησης αυτοκινητων σε ενα αυτοκνητοδρομο. Συγκεκριμενα η $u_t + 3u_x = 0$ λεει οτι η συνολικη ***χωρικη και χρονικη*** μεταβολη της ποσοτητας $u(x,t)$ (υγρο, αυτοκινητα κτλ.) στο σημειο x και στον χρονο t ειναι μηδενικη διοτι η μεταβολη της u στον χρονο ισουται με την αρνητικη μεταβολη της στον χωρο: $u_t = -3u_x$. Ο αριθμος -3 ειναι ενας συντελεστης την σημασια του οποιου θα συζητησουμε πιο λεπτομερως στο Εδαφιο 2.5.3.

Το γεγονος οτι η $u(x,t)$ δεν μεταβαλλεται κατα μηκος των χαρακτηριστικων ευθειων $x = 3t + \tau$ δεν σημαινει τιποτα αλλο παρα οτι η ρεουσα ποσοτητα διατηρειται σταθερη κατα μηκος αυτης της ευθειας. Αυτο μπορει να ερμηνευθει ως εξης: θεωρειστε τα σωματιδια (η αυτοκινητα κτλ.) τα οποια σε χρονο 0 βρισκονται στην περιοχη $[x, x+\delta x]$. Η 'ποσοτητα' αυτων των σωματιδιων δινεται απο την αρχικη συνθηκη και ειναι $u(x,0) = f(x)$. Αν αυτα κινουνται χωρις εμποδια και με σταθερη ταχυτητα *3* τοτε μετα απο χρονο t θα δουμε τα ιδια σωματιδια στην θεση $x' = x + 3t$. Οποτε θα εχουμε και

$$u(x,0) = f(x - 3 \cdot 0) = f(x + 3t - 3t) = f(x' - 3t) = u(x',t).$$

2.5.3 2ο Παραδειγμα

Τωρα θα επιλυσουμε την ΜΔΕ

$$u_t + 3uu_x = 0, \quad u(x,0) = f(x) \tag{2.102}$$

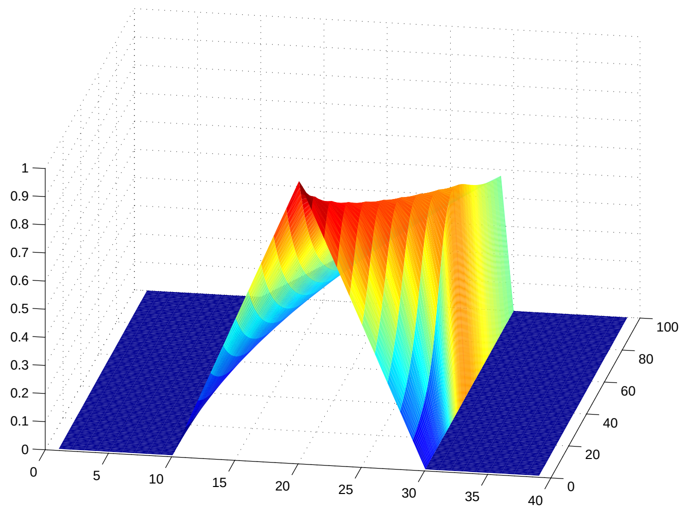
οπου η $f(x)$ δινεται και παλι απο την (2.98). Αν προσπαθησουμε να λυσουμε αναλυτικα

$$\frac{dt}{ds} = 1, \quad \frac{dx}{ds} = 3u \tag{2.103}$$

βλεπουμε αμεσως μια δυσκολια: η u ειναι μια αγνωστη συναρτηση. Το ιδιο ισχυει και αν προσπαθησουμε να λυσουμε το συστημα

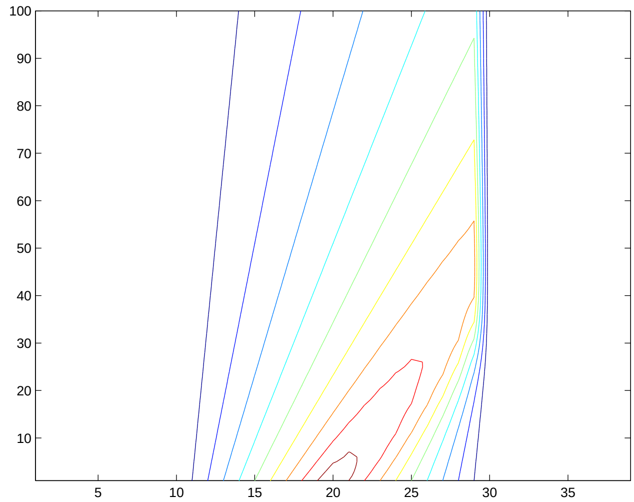
$$\frac{dx}{3u} = \frac{dt}{1} = \frac{du}{0} \tag{2.104}$$

Οι αναλυτικες δυσκολιες μπορουν να αντιμετωπιστουν (μεχρι ενα σημειο) με την χρηση πιο λεπτων τεχνικων. Ομως υπαρχει ενα *φυσικος* λογος για τον οποιο οι δυσκολιες αυτες εμφανιζονται και τον λογο αυτο μπορουμε να τον διαπιστωσουμε και χωρις να λυσουμε την (2.102) αναλυτικα. Θα δωσουμε ομως τα αποτελεσματα της αριθμητικης επιλυσης. Αυτη, εκ πρωτης οψεως δεν παρουσιαζει καμμια ιδιαιτερη δυσκολια· το μονο το οποιο απατειται ειναι να αλλαξουμε το προγραμμα `flux11.m` ωστε να αντιστοιχει στην εξισωση $u_t = -3uu_x$. Εαν κανουμε αυτη την αλλαγη και εκτελεσουμε το προγραμμα θα παρουμε τα εξης αποτελεσματα.



Σχημα 2.6

η σε απεικονιση ισοσταθμικων



Σχημα 2.7

Βλεπουμε καθαρα, ιδιαιτερα στο Σχ. 2.7, οτι το συστημα μπαινει σε καποια μορφη ανωμαλης συμπεριφορας. Π.χ. περιπου στον χρονο $t = 25$, στο σημειο $x = 30$ φαινεται οτι η 'ροη' σταματαει (δηλ. $u(x,t) = 0$ για $t > 25$, $x > 30$). Γιατι συμβαινει αυτο;

Για να καταλαβουμε το φαινομενο απο φυσικη αποψη πρεπει να σκεφτουμε τον ρολο του ορου $3uu_x$. Στο προηγουμενο παραδειγμα ειχαμε τον ορο $3u_x$ και το 3 επαιζε τον ρολο καποιου συντελεστη ροης. Τον ρολο αυτο παιζει τωρα ο συντελεστης $3u$. Αυτο σημαινει οτι η ροη εντος και εκτος του τοπου $[x, x+\delta x]$ εξαρταται απο την ηδη υπαρχουσα τιμη της u. Αυτο το οποιο βλεπουμε στα σχηματα 2.6 και 2.7 ειναι καποια μορφη *συμφορησης*.

Απο μαθηματικη αποψη, η εξηγηση βρισκεται στο οτι οι χαρακτηριστικες καμπυλες τεμνονται και ετσι δεν μπορουμε να βρουμε ενα συστημα συντεταγμενων $s(x,t), \tau(x,t)$ οι οποιες να ειναι αντιστρεψιμες συναρτησεις των x, t. Δεν θα προχωρησουμε σε παραπερα αναλυση του θεματος· ο ενδιαφερομενος αναγνωστης μπορει να ανατρεξει στα βιβλια [1, 2].

Κεφάλαιο 3

ΜΔΕ Δευτερης Ταξης: Εισαγωγικες Παρατηρησεις

Το υπολοιπο μερος των σημειωσεων αφορα ΜΔΕ δευτερης ταξης. Στα επομενα τρια κεφαλαια θα μελετησουμε ορισμενες ειδικες και απλες περιπτωσεις τετοιων εξισωσεων. Στο Κεφαλαιο 4 θα μελετησουμε μια κατηγορια ΜΔΕ οι οποιες εμφανιζονται σε προβληματα *διαχυσης* και στο Κεφαλαιο 5 θα μελετησουμε μια κατηγορια ΜΔΕ οι οποιες εμφανιζονται σε προβληματα *διαδοσης κυματος*. Φυσικα οι εξισωσεις αυτες εμφανιζονται και σε αλλες εφαρμογες, π.χ. η εξελιξη της πυκνοτητας πιθανοτητας μιας *Μαρκοβιανης διαδικασιας* περιγραφεται απο μια εξισωση τυπου διαδοσης θερμοτητας. Στο Κεφαλαιο 6 θα μελετησουμε ΜΔΕ οι οποιες δεν εξελισσονται στον χρονο, αλλα περιγραφουν την *κατασταση ισορροπιας* φαινομενων τα οποια διαδραματιζονται στον *διδιαστατο χωρο*.

Τα προβληματα τα οποια θα εξετασουμε ειναι σχετικα ειδικες περιπτωσεις ΜΔΕ (συγκεκριμενα θα περιοριστουμε σε γραμμικες εξισωσεις με σταθερους συντελεστες) αλλα καλυπτουν τους τρεις βασικους τροπους με τους οποιους συμπεριφερεται μια ΜΔΕ δευτερης ταξης. Στο τελευταιο κεφαλαιο των σημειωσεων θα δουμε οτι τα συμπερασματα των Κεφαλαιων 4, 5 και 6 ισχυουν για γενικοτερη κατηγορια ΜΔΕ δευτερης ταξης.

Κεφάλαιο 4

ΜΔΕ Δευτερης Ταξης: Εξισωσεις Διαχυσης

Σε αυτο το εδαφιο θα μελετησουμε διαφορες ΜΔΕ οι οποιες περιγραφουν την μεταδοση θερμοτητας σε μια ραβδο. Υποθετουμε οτι η ραβδος ειναι αρκετα λεπτη ωστε να μπορουμε να την θεωρησουμε σαν μια ευθεια γραμμη (η ενα ευθυγραμμο τμημα)· ετσι καθε θεση στην ραβδο περιγραφεται απο μια μονο συντεταγμενη, την x. Επισης υπαρχει και μια μεταβλητη χρονου, η t. Η ποσοτητα η οποια μας ενδιαφερει ειναι η θερμοκρασια $u(x,t)$, δηλαδη η θερμοκρασια της ραβδου σαν συναρτηση της θεσης και του χρονου. Οπως θα δουμε αμεσως παρακατω, στο απλουστερο δυνατο προβλημα η μεταβολη της θερμοκρασιας διεπεται απο την εξισωση

$$u_t = a^2 u_{xx}. \tag{4.1}$$

Διαφορες παραλλαγες αυτες της εξισωσης περιγραφουν παραλλαγες του βασικου φαινομενου· επισης μεγαλη σημασια παιζουν οι *αρχικες* και *οριακες* συνθηκες, οπως θα φανει παρακατω.

Η αλλαγη της θερμοκρασιας ειναι συνεπεια της μεταδοσης της θερμοτητας, η οποια ειναι ενα φαινομενο *διαχυσης*. Υπαρχουν και αλλα φαινομενα διαχυσης (η εξελιξη της πυκνοτητας πιθανοτητας μιας *Μαρκοβιανης διαδικασιας*, η ροη υγρου σε ενα πορωδες μεσο κτλ.) γι' αυτο η ΜΔΕ (4.1) λεγεται και *εξισωση διαχυσης*.

4.1 Η Βασικη Εξισωση Διαδοσης της Θερμοτητας

Θεωρειστε μια λεπτη ραβδο απειρου μηκους η οποια ειναι θερμικα μονωμενη (δεν υπαρχει μεταδοση θερμοτητας στο περιβαλλον). Εστω οτι η ραβδος ειναι τοποθετημενη κατα μηκος του αξονα των x. Επειδη η ραβδος ειναι πολυ λεπτη, μπορουμε να θεωρησουμε οτι η θερμοκρασια της δεν μεταβαλλεται κατα μηκος μιας διατομης. Αρα η θερμοκρασια μπορει να γραφει σαν μια συναρτηση $u(x,t)$ η οποια εξαρταται μονο απο την θεση x και τον χρονο t. Ο στοχος μας ειναι να γραφουμε μια ΜΔΕ η οποια περιγραφει την μεταβολη της θερμοκρασιας κατω απο διαφορες συνθηκες.

Καταρχην θα υποθεσουμε οτι στον αρχικο χρονο t=0 υπαρχει μια κατανομη θερμοκρασιας κατα μηκος της ραβδου, η οποια περιγραφεται απο μια συναρτηση $f(x)$· δηλαδη σε χρονο $t = 0$ και στην θεση x η θερμοκρασια ειναι $f(x)$. Με την παροδο του χρονου η θερμοκρασια θα μεταβληθει, π.χ. αν σε χρονο $t = 0$ ενα σημειο x εχει υψηλοτερη θερμοκρασια απο τα γειτονικα τμηματα, προοδευτικα η θερμοκρασια στο x θα ελαττωθει. Ας θεωρησουμε τωρα το διαστημα $[x, x+\delta x]$ (δηλ. ενα κομματι της ραβδου)· αν το δx ειναι μικρο, μπορουμε να θεωρησουμε οτι εχει σταθερη θερμοκρασια. Τωρα, για την 'ποσοτητα' θερμοτητας που περιεχεται στο $[x, x+\delta x]$ ισχυει ο εξης νομος:

$$\text{Μεταβολη θερμοτητας στο } [x, x+\delta x] = \text{Ροη θερμοτητας στα ακρα του } [x, x+\delta x]. \tag{4.2}$$

Επισης απο την Φυσικη γνωριζουμε τα εξης:

1. Η 'ποσοτητα θερμοτητας' που περιεχεται στο $[x, x+\delta x]$ ειναι (προσεγγιστικα) $c \cdot \rho \cdot A \cdot u \cdot \delta x$, οπου c ειναι η ***θερμοχωρητικοτητα***, ρ ειναι η πυκνοτητα μαζας και A η διατομη της ραβδου (τα ρ, c, A θεωρουνται σταθερα μεγεθη).

2. Η 'ροη θερμοτητας' διαμεσου μιας διατομης της ραβδου ειναι απο $k \cdot u_x \cdot A$, οπου k ειναι η ***θερμικη αγωγιμοτητα*** της ραβδου (το k θεωρειται σταθερο). Προσεξτε την εξαρτηση της ροης θερμοτητας απο την παραγωγο (***διαφορα***) θερμοκρασιας u_x.

Συμφωνα με τα παραπανω, η (4.2) για το τμημα $[x, x+\delta x]$ γραφεται

$$\frac{d}{dt}\left[c \cdot \rho \cdot A \cdot u(x,t) \cdot \delta x\right] = k \cdot A \cdot \left(u_x(x+\delta x, t) - u_x(x,t)\right). \tag{4.3}$$

Χρησιμοποιωντας την συνηθισμενη προσεγγιση $\delta x \to 0$ παιρνουμε $u_t(x,t) = \frac{k}{c\rho} u_{xx}(x,t)$ η (θετοντας $a^2 = \frac{k}{c\rho}$):

$$u_t = a^2 u_{xx} \qquad (-\infty < x < \infty, \quad 0 < t < \infty) \tag{4.4}$$

Η (4.4) ειναι η εξισωση μεταβολης της θερμοκρασιας (σε μια λεπτη μονωμενη ραβδο απειρου μηκους χωρις εσωτερικες πηγες θερμοτητας). Η μεταβολη της θερμοκρασιας μεσα στην ραβδο με την παροδο του χρονου θα δινεται απο την λυση της (4.4) με *αρχικη συνθηκη*

$$u(x,0) = f(x) \qquad (-\infty < x < \infty). \tag{4.5}$$

Επειδη το προβλημα φαινεται καλα τοποθετημενο απο φυσικη αποψη, περιμενουμε οτι και οι (4.4), (4.5) θα εχουν μια καλα ορισμενη λυση $u(x,t)$. Στα επομενα κεφαλαια θα δουμε διαφορους τροπους επιλυσης. Ας σημειωσουμε οτι ΜΔΕ παρομοιες με την (4.4), (4.5) περιγραφουν παρεμφερη προβληματα. Π.χ. η

$$u_t = a^2 u_{xx} \qquad (0 < x < L, \quad 0 < t < \infty) \tag{4.6}$$

$$u(x,0) = f(x) \qquad (0 < x < L) \tag{4.7}$$

περιγραφει την μεταδοση της θερμοτητας σε μια ραβδο μηκους L, η

$$u_t = a^2 u_{xx} + g(x,t) \qquad (-\infty < x < \infty, \quad 0 < t < \infty) \tag{4.8}$$

$$u(x,0) = f(x) \qquad (-\infty < x < \infty, \quad 0 < t < \infty) \tag{4.9}$$

περιγραφει την μεταδοση της θερμοτητας σε μια ραβδο απειρου μηκους με εσωτερικες πηγες θερμοτητας $g(x,t)$ κτλ.

4.2 Διαδοση Θερμοτητας σε Απειρη Ραβδο

Θα εξετασουμε τωρα ενα τυπικο προβλημα μεταδοσης θερμοτητας και θα το επιλυσουμε με χρηση των Μ/Σ Laplace και Fourier.

Θεωρειστε μια ραβδο απειρου μηκους με αρχικη κατανομη θερμοκρασιας $f(x)$. Η μεταβολη της θερμοκρασιας για $t > 0$ περιγραφεται ως εξης:

$$u_t = a^2 u_{xx}, \qquad (-\infty < x < \infty, \quad 0 < t < \infty) \tag{4.10}$$

$$u(x,0) = f(x), \qquad (-\infty < x < \infty) \tag{4.11}$$

Επειδη $x \in (-\infty, \infty)$ σκεφτομαστε να εφαρμοσουμε τον Μ/Σ Fourier ως προς την μεταβλητη x. Δηλαδη οριζουμε

$$U(w,t) = \mathbf{F}(u(x,t)) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwx} u(x,t) dx. \tag{4.12}$$

Τοτε η (4.10), (4.11) γινονται

$$U_t = -w^2 a^2 U, \tag{4.13}$$

$$U(w,0) = \mathbf{F}(f(x)) = F(w). \tag{4.14}$$

Η (4.13) εχει την λυση

$$U(w,t) = C(w) e^{-w^2 a^2 t} \tag{4.15}$$

και, επειδη $U(w,0) = F(w)$, τελικα

$$U(w,t) = F(w) e^{-w^2 a^2 t}. \tag{4.16}$$

Η (4.16) αντιστοιχει σε μια συνελιξη. Επειδη

$$e^{-w^2 a^2 t} = \mathbf{F}\left(\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}\right), \tag{4.17}$$

ο αντιστροφος μετασχηματισμος της (4.16) δινει

$$u(x,t) = f(x) * \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} \tag{4.18}$$

δηλαδη

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-(x-z)^2/4a^2 t} dz. \tag{4.19}$$

Αυτη ειναι η λυση του προβληματος (4.10), (4.11).

Μπορουμε να λυσουμε το προβλημα (4.10), (4.11) και με Μ/Σ Laplace. Θα χρειαστουμε το παρακατω: αν $\delta(x)$ συμβολιζει την συναρτηση δελτα του Dirac , τοτε καθε συναρτηση $f(x)$ μπορει να γραφτει

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\delta(x-z)dz = f(x) * \delta(x). \tag{4.20}$$

Πριν λυσουμε την γενικη περιπτωση του προβληματος (4.10), (4.11), θα λυσουμε μια ειδικη περιπτωση:

$$v_t = a^2 v_{xx} \qquad (-\infty < x < \infty, \quad 0 < t < \infty) \tag{4.21}$$

$$v(x,0) = \delta(x) \qquad (-\infty < x < \infty) \tag{4.22}$$

Οριζουμε

$$V(x,s) = \int_0^{\infty} e^{-st} v(x,t) dt \tag{4.23}$$

και, κατα τα γνωστα, η (4.21) μετασχηματιζεται στην

$$sV - v(x,0) = a^2 V_{xx} \tag{4.24}$$

Χρησιμποιωντας και την (4.22) τελικα παιρνουμε

$$a^2 V_{xx} - sV = -\delta(x). \tag{4.25}$$

Μια πεπερασμενη λυση της (4.25) ειναι η

$$V(x,s) = \frac{e^{-\sqrt{s}|x|/a}}{2\sqrt{s}} \tag{4.26}$$

Αντιστρεφοντας παιρνουμε

$$v(x,t) = \mathbf{L}^{-1}\left(\frac{e^{-\sqrt{s}|x|/a}}{2\sqrt{s}}\right) = \frac{e^{-x^2/4a^2 t}}{2a\sqrt{\pi t}}. \tag{4.27}$$

Πριν προχωρησουμε στην λυση του γενικου προβληματος, εχει ενδιαφερον να εξετασουμε την (4.27). Αυτη δινει την θερμοκρασια $u(x,t)$ της ραβδου εαν τοποθετησουμε μια 'σημειακη πηγη θερμοτητας' στην θεση $x = 0$. Μαλλον θα εχετε ηδη παρατηρησει την ομοιοτητα της συναρτηση $e^{-x^2/4a^2 t}/2a\sqrt{\pi t}$ με την Gaussιανη κατανομη πιθανοτητας η οποια εχει μεση τιμη 0 και τυπικη αποκλιση $2at$· δηλαδη η τυπικη αποκλιση *μεγαλωνει με τον χρονο.* Ολα τα παραπανω φαινονται πολυ ευλογα σε σχεση με την φυσικη μας αντιληψη για την διαδοση θερμοτητας. Η συναρτηση $e^{-x^2/4a^2 t}/2a\sqrt{\pi t}$ λεγεται *πυρηνας* της μεταδοσης θερμοτητας. Το βασικο χαρακτηριστικο του πυρηνα θερμοτητας ειναι η *εξομαλυνση* των αρχικων συνθηκων. Αυτο το βλεπουμε στο συγκεκριμενο παραδειγμα (η αρχικη κατανομη θερμοκρασιας $\delta(x,0)$ μετατρεπεται σε μια Gaussιανη $e^{-x^2/4a^2 t}/2a\sqrt{\pi t}$ με χρονικα αυξουσα διασπορα) και θα το δουμε και παλι λιγο παρακατω.

Η $v(x,t)$ οπως οριζεται απο την (4.27) ειναι η λυση του προβληματος (4.21), (4.22). Τωρα, μπορουμε να θεωρησουμε οτι οι αρχικες συνθηκες του προβληματος (4.10), (4.11), δηλ. $u(x,0) = f(x) = f(x)*\delta(x)$, ειναι η συνελιξη της $f(x)$ με τις αρχικες συνθηκες του (4.21), (4.22), δηλ. $v(x,0) = \delta(x)$. Τοτε και η $u(x,t)$ θα ειναι η συνελιξη της $f(x)$ με την $v(x,t)$[1]. Δηλαδη

$$u(x,t) = f(x) * v(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \frac{e^{-(x-z)^2/4a^2t}}{2a\sqrt{\pi t}} dz. \tag{4.28}$$

που ειναι ιδια με την (4.19).

Παραδειγμα 4.2.1

Αν η αρχικη συνθηκη ειναι $f(x) = e^{-x^2}$, τοτε η λυση του προβληματος (4.10), (4.11) ειναι

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} e^{-(x-z)^2/4a^2t} dz = \frac{e^{-x^2/\left(1+4a^2t\right)}}{\sqrt{(1+4a^2t)}}. \tag{4.29}$$

Προσεξτε οτι για καθε x εχουμε

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \lim_{t\to\infty} \frac{e^{-x^2/\left(1+4a^2t\right)}}{\sqrt{(1+4a^2t)}} = 0 \tag{4.30}$$

δηλαδη η σταθερη κατασταση της ραβδου ειναι να αποκτησει μηδενικη θερμοκρασια. Ειναι αυτο λογικο απο φυσικη αποψη;

***

Παραδειγμα 4.2.2

Αν η αρχικη συνθηκη θερμοκρασιας ειναι

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{για } |x| \le 1 \\ 0 & \text{για } |x| > 1. \end{cases} \tag{4.31}$$

τοτε η λυση του προβληματος (4.10), (4.11) ειναι

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-(x-z)^2/4a^2t} dz = \frac{1}{2} \cdot \left(\mathrm{erf}\left(\frac{x+1}{2a\sqrt{t}}\right) - \mathrm{erf}\left(\frac{x-1}{2a\sqrt{t}}\right)\right). \tag{4.32}$$

οπου η συναρτηση $\mathrm{erf}(x)$ ειναι

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-z^2} dz. \tag{4.33}$$

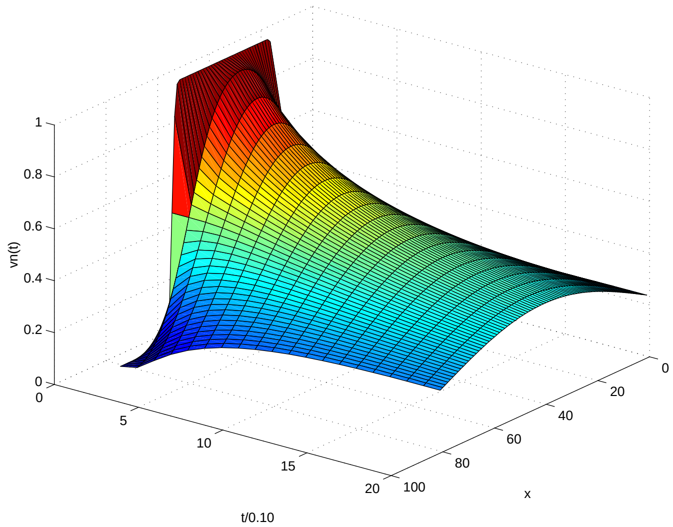
[1] Αυτη η παρατηρηση βασιζεται σε μια αρχη *υπερθεσης* (δηλ. συνδυασμου) των λυσεων, που θα συζητηθει σε μεγαλυτερη εκταση στο Εδαφιο 4.5.

Βλεπουμε οτι και παλι

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(\operatorname{erf}\left(\frac{x+1}{2a\sqrt{t}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x-1}{2a\sqrt{t}}\right)\right) = 0 \tag{4.34}$$

δηλαδη η σταθερη κατασταση της ραβδου ειναι να αποκτησει μηδενικη θερμοκρασια. Στο παρακατω σχημα βλεπουμε την εξελιξη της θερμοκρασιας.

***



Σχημα 4.1

Το χαρακτηριστικο της εξελιξης ειναι η *εξομαλυνση* της θερμοκρασιας. Σας φαινεται η εικονα λογικη απο φυσικη αποψη;

***

Η διαδικασια μεταδοσης θερμοτητας περιγραφεται απο την μορφη της λυσης

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-(x-z)^2/4a^2 t} dz. \tag{4.35}$$

Η (4.35) μας λεει οτι η θερμοκρασια στο σημειο (x,t) ειναι ενα ‘αθροισμα’ (για την ακριβεια ενα ολοκληρωμα) των επιδρασεων των θερμοκρασιων σε ολα τα σημεια της ραβδου· η επιδραση του σημειου (z,t) ειναι ‘σταθμισμενη’ απο τον πυρηνα $e^{-(x-z)^2/4a^2 t}$, δηλ. η επιδραση του (z,t) επι του (x,t) φθινει με την αποσταση $(x-z)^2$ αλλα αυξανει με τον χρονο t. Επαναλαμβανουμε οτι ενα βασικο χαρακτηριστικο του πυρηνα ειναι η *εξομαλυνση* των αρχικων συνθηκων (βλεπε και Σχημα 4.1). Θα συζητησουμε αυτη την ιδιοτητα σε μεγαλυτερη εκταση στο Εδαφιο 4.4.

4.3 Διαδοση Θερμοτητας σε Πεπερασμενη Ραβδο: Χωρισμος Μεταβλητων

Στο προηγουμενο εδαφιο ειδαμε δυο μεθοδους για την επιλυση ενος προβληματος διαδοσης θερμοτητας σε μια απειρη ραβδο. Και οι δυο μεθοδοι βασιστηκαν στην χρηση ολοκληρωτικων μετασχηματισμων. Για προβληματα στα οποια η ραβδος εχει πεπερασμενο μηκος, η μεθοδος του *Χωρισμου Μεταβλητων.* ειναι μαλλον πιο ευχρηστη. Θα μελετησουμε την μεθοδο αυτη σε αρκετα μεγαλη εκταση (με χρηση παραδειγματων).

4.3.1 Μηδενικες Οριακες Συνθηκες

Θα λυσουμε με χωρισμο μεταβλητων το προβλημα

$$u_t = a^2 u_{xx} \qquad (0 < x < 1 \text{ και } 0 < t < \infty) \tag{4.36}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0 \qquad (0 < t < \infty) \tag{4.37}$$

$$u(x,0) = f(x) \qquad (0 < x < 1) \tag{4.38}$$

Αρχιζουμε με μια *υποθεση* (του χωρισμου των μεταβλητων): οτι η λυση $u(x,t)$ μπορει να γραφει στην μορφη

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{4.39}$$

Εαν η υποθεση ισχυει, τοτε η (4.36) δινει

$$X(x)T'(t) = a^2 X''(x)T(t) \Rightarrow$$

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \tag{4.40}$$

Αλλα, το αριστερο μελος της (4.40) ειναι συναρτηση μονο του t και το δεξι μονο του x. Για να ειναι αυτα τα δυο ισα μεταξυ τους *για καθε* x και t, θα πρεπει το καθε μερος να ειναι ισο με την ιδια *σταθερα*, την οποια θα συμβολισουμε με $-b^2$. Οποτε εχουμε

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -b^2 \Rightarrow \begin{pmatrix} T'(t) = -a^2 b^2 T(t) \\ X''(x) = -b^2 X(x). \end{pmatrix} \tag{4.41}$$

Δηλαδη μετατρεψαμε ενα προβλημα με μια ΜΔΕ σε ενα αλλο με δυο συνηθεις ΔΕ. Γιατι θεσαμε την σταθερα ιση με $-b^2$; Θελαμε να τονισουμε οτι η ποσοτητα $-a^2b^2$ *δεν ειναι θετικη* (αν ηταν θετικη τοτε το $T(t)$ και αρα και το $u(x,t)$ θα ετεινε στο απειρο καθως $t \to \infty$).

Τωρα πρεπει να λυσουμε τις δυο ΔΕ. Αυτο γινεται ευκολα και παιρνουμε

$$T(t) = Ce^{-a^2 b^2 t} \tag{4.42}$$

$$X(t) = A \sin(bx) + B\cos(bx). \tag{4.43}$$

Αρα καθε συναρτηση της μορφης $u(x,t) = T(t)X(x) = e^{-a^2b^2t} \cdot (A\sin(bx) + B\cos(bx))$ θα ειναι λυση της (4.36). Επιπλεον θελουμε η $u(x,t)$ να ικανοποιει την οριακη συνθηκη (4.37), δηλαδη

$$0 = u(0,t) = A\sin(0) + B\cos(0) = B \tag{4.44}$$

$$0 = u(1,t) = A\sin(b) + B\cos(b) = A\sin(b) \tag{4.45}$$

οποτε θα πρεπει το b να ικανοποιει

$$b = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, ... \tag{4.46}$$

Ετσι, για καθε ακεραιο n, η $u(x,t) = e^{-a^2n^2\pi^2t} \cdot A_n \sin(n\pi x)$ θα ικανοποιει τις (4.36), (4.37) και το ιδιο θα ισχυει και για την

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-a^2n^2\pi^2t} \cdot A_n \sin(n\pi x). \tag{4.47}$$

Μενει τωρα να προσδιορισουμε την $u(x,t)$ ετσι ωστε να ικανοποιει και την αρχικη συνθηκη (4.38). Δηλαδη πρεπει να εχουμε

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\pi x) \qquad (0 < x < 1). \tag{4.48}$$

Αλλα αυτο ειναι ενα τυπικο προβλημα αναπτυξης μιας συναρτησης σε σειρα Fourier. Αρκει να ορισουμε την συναρτηση $g(x)$ να ειναι η *περιττη επεκταση* της $f(x)$ στο διαστημα $[-1,1]$ και να βρουμε τους συντελεστες A_n απο την σχεση

$$A_n = \int_{-1}^{1} g(x)\sin(n\pi x)\,dx = 2\int_0^1 f(x)\sin(n\pi x)\,dx. \tag{4.49}$$

Τελικα λοιπον η συναρτηση

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-a^2n^2\pi^2t} \cdot A_n \sin(n\pi x) \tag{4.50}$$

$$A_n = 2\int_0^1 f(x)\sin(n\pi x)\,dx \qquad (n = 1, 2, ...). \tag{4.51}$$

ειναι η λυση του προβληματος (4.36)–(4.38).

Απο φυσικη αποψη, το μαθηματικο προβλημα (4.36)–(4.38) αντιστοιχει στο φυσικο προβλημα οπου τα ακρα της ραβδου διατηρουνται σε μηδενικη θερμοκρασια. Προσεξτε οτι $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0$, δηλαδη τελικα η ραβδος ερχεται σε σταθερη κατασταση μηδενικης θερμοκρασιας.

Παραδειγμα 4.3.1

Θα λυσουμε το προβλημα

$$u_t = 2u_{xx} \qquad (0 < x < 3 \text{ και } 0 < t < \infty) \tag{4.52}$$

$$u(0,t) = u(3,t) = 0 \qquad (0 < t < \infty) \tag{4.53}$$

$$u(x,0) = 5\sin(4\pi x) - 3\sin(8\pi x) + 2\sin(10\pi x) \qquad (0 < x < 3) \tag{4.54}$$

Μια διαφορα του παραπανω προβληματος απο το (4.36)–(4.38) ειναι οτι τα ακρα της ραβδου βρισκονται στα σημεια $x = 0, x = 3$ (και οχι $x = 0, x = 1$). Αυτο ομως διορθωνεται ευκολα με μια αλλαγη της μεταβλητης x· δηλ. θα θεσουμε $x' = x/3$ και $b_n = n\pi/3$. Ετσι προκυπτει οτι η λυση εχει την μορφη

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n^2\pi^2 t/9} \cdot A_n \sin\left(\frac{n\pi}{3}x\right) \tag{4.55}$$

Για να ισχυει η αρχικη συνθηκη θα πρεπει να εχουμε

$$5\sin(4\pi x) - 3\sin(8\pi x) + 2\sin(10\pi x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{3}x\right). \tag{4.56}$$

Τωρα βλεπουμε οτι η (4.56) ισχυει αν παρουμε $A_{12} = 5$, $A_{24} = -3$, $A_{30} = 2$ και ολα τα υπολοιπα $A_n = 0$. Τοτε η λυση γινεται

$$u(x,t) = 5e^{-288\pi^2 t/9}\sin(4\pi x) - 3e^{-1152\pi^2 t/9}\sin(8\pi x) + 2e^{-1800\pi^2 t/9}\sin(10\pi x) \tag{4.57}$$

$$= 5e^{-32\pi^2 t}\sin(4\pi x) - 3e^{-128\pi^2 t}\sin(8\pi x) + 2e^{-200\pi^2 t}\sin(10\pi x). \tag{4.58}$$

***

Παραδειγμα 4.3.2

Θα λυσουμε το προβλημα

$$u_t = 2u_{xx} \qquad (0 < x < 3 \text{ και } 0 < t < \infty) \tag{4.59}$$

$$u(0,t) = u(3,t) = 0 \qquad (0 < t < \infty) \tag{4.60}$$

$$u(x,0) = 25 \qquad (0 < x < 3) \tag{4.61}$$

Εχουμε και παλι μια αλλαγη της μεταβλητης x για να αντιστοιχει στα ορια $x = 0, x = 3$. Η λυση εχει την μορφη

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n^2\pi^2 t/9} \cdot A_n \sin\left(\frac{n\pi}{3}x\right) \tag{4.62}$$

Για να ισχυει η αρχικη συνθηκη θα πρεπει να εχουμε

$$25 = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{3}x\right). \tag{4.63}$$

Για να ισχυει η (4.63) θα πρεπει οι συντελεστες A_n να ικανοποιουν

$$A_n = \frac{2}{3}\int_0^3 25\sin\left(\frac{n\pi x}{3}\right) = 50\frac{1-\cos n\pi}{n\pi}$$

και αρα η λυση ειναι

$$u(x,t) = 50 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos n\pi}{n\pi} \cdot e^{-2n^2\pi^2 t/9} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{3}x\right). \tag{4.64}$$

***

4.3.2 Μη Μηδενικες Οριακες Συνθηκες

Θα λυσουμε με χωρισμο μεταβλητων το προβλημα

$$u_t = a^2 u_{xx} \qquad (0 < x < 1 \text{ και } 0 < t < \infty) \tag{4.65}$$

$$u(0,t) = k_1 \qquad (0 < t < \infty) \tag{4.66}$$

$$u(1,t) = k_2 \qquad (0 < t < \infty) \tag{4.67}$$

$$u(x,0) = f(x) \qquad (0 < x < 1) \tag{4.68}$$

Αυτο το μαθηματικο προβλημα αντιστοιχει στο φυσικο προβλημα οπου τα ακρα της ραβδου διατηρουνται σε σταθερες θερμοκρασιες k_1 και k_2 αντιστοιχα. Αν δοκιμασουμε να εφαρμοσουμε χωρισμο μεταβλητων με τον ιδιο τροπο οπως και στο προηγουμενο εδαφιο θα δουμε οτι δεν υπαρχει λυση της μορφης $u(x,t) = T(t)X(x)$. Ομως το φυσικο προβλημα μας οδηγει σε ενα προκαταρκτικο μετασχηματισμο ο οποιος θα κανει δυνατη την επιλυση του προβληματος.

Συγκεκριμενα, ειναι λογικο να υποθεσουμε οτι σε σταθερη κατασταση η θερμοκρασια της ραβδου θα δινεται απο την συναρτηση

$$w(x) = k_1 + (k_2 - k_1) \cdot x \tag{4.69}$$

δηλαδη μια ομοιομορφη μεταβολη της θερμοκρασιας κατα μηκος της ραβδου. Παρατηρειστε οτι η $w(x,t)$ ικανοποιει την (4.66) ('εκ κατασκευης'). Επισης η $w(x)$ ικανοποιει την (4.65) διοτι

$$w_t(x) = w_{xx}(x) = 0. \tag{4.70}$$

Ομως η $w(x)$ δεν ικανοποιει την (4.68) και αρα δεν λυνει το προβλημα μας. Ας εξετασουμε αν υπαρχει μια ακομη συναρτηση $v(x,t)$ τετοια ωστε

$$u(x,t) = w(x) + v(x,t) \tag{4.71}$$

να ειναι λυση του προβληματος. Αν αυτο συμβαινει τοτε θα εχουμε λυσει το προβλημα απεικονιζοντας την σταθερη κατασταση στην $w(t)$ και το μεταβατικο φαινομενο στην $v(t)$.

Αν αντικαταστησουμε την $u(x,t)$ με $w(x)+v(x,t)$ στην (4.65), επειδη $w_t(x) = w_{tt}(x) = 0$, παιρνουμε

$$v_t = a^2 v_{xx} \tag{4.72}$$

Επισης παιρνουμε

$$v(0,t) = v(1,t) = 0 \tag{4.73}$$

$$v(x,0) = f(x) - k_1 - (k_2 - k_1)\cdot x = h(x) \tag{4.74}$$

Αλλα το προβλημα (4.72)–(4.74) ειναι της ιδιας μορφης με το προβλημα του Εδαφιου 4.3.1 και αρα ξερουμε την λυση του. Ειναι

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-a^2 b^2 t}\cdot A_n \sin(n\pi x) \tag{4.75}$$

$$A_n = 2\int_0^1 h(x)\sin(n\pi x)\,dx \qquad (n = 1, 2, ...)\,. \tag{4.76}$$

Οποτε η λυση του προβληματος (4.65)–(4.68) ειναι

$$u(x,t) = w(x) + v(x,t)$$

και, πιο συγκεκριμενα,

$$u(x,t) = k_1 + (k_2 - k_1)\cdot x + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-a^2 b^2 t}\cdot A_n \sin(n\pi x) \tag{4.77}$$

$$A_n = 2\int_0^1 (f(x) - k_1 - (k_2 - k_1)\cdot x)\sin(n\pi x)\,dx \qquad (n = 1, 2, ...)\,. \tag{4.78}$$

Παραδειγμα 4.3.3

Θα λυσουμε το προβλημα

$$u_t = 2u_{xx} \qquad (0 < x < 3 \text{ και } 0 < t < \infty) \tag{4.79}$$

$$u(0,t) = 10 \qquad (0 < t < \infty) \tag{4.80}$$

$$u(3,t) = 40 \qquad (0 < t < \infty) \tag{4.81}$$

$$u(x,0) = 25 \qquad (0 < x < 3) \tag{4.82}$$

Θετουμε $u(x,t) = w(x) + v(x,t)$ και

$$w(x) = 10 + 10x. \tag{4.83}$$

Τωρα, συμφωνα με τα παραπανω, πρεπει να λυσουμε το προβλημα

$$v_t = 2u_{xx} \qquad (0 < x < 3 \text{ και } 0 < t < \infty) \tag{4.84}$$

$$v(0,t) = 0 \qquad (0 < t < \infty) \tag{4.85}$$

$$v(3,t) = 0 \qquad (0 < t < \infty) \tag{4.86}$$

$$v(x,0) = 15 - 10x \qquad (0 < x < 3) \tag{4.87}$$

το οποιο, συμφωνα με το Εδαφιο 4.3.1, εχει την λυση

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot e^{-2n^2\pi^2 t/9} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{3}x\right) \tag{4.88}$$

οπου

$$A_n = \frac{2}{3}\int_0^3 (15 - 10x)\sin\left(\frac{n\pi}{3}x\right)dx = \frac{30}{n\pi}\cdot(\cos(n\pi) - 1)\,. \tag{4.89}$$

Οποτε τελικα η λυση του αρχικου προβληματος ειναι

$$u(x,t) = 10 + 10x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{30}{n\pi}\cdot(\cos(n\pi) - 1)\cdot e^{-2n^2\pi^2 t/9}\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{3}x\right) \tag{4.90}$$

***

4.3.3 Αποσβεση

Θα λυσουμε με χωρισμο μεταβλητων το προβλημα

$$u_t = a^2 u_{xx} - cu \qquad (0 < x < 1 \text{ και } 0 < t < \infty) \tag{4.91}$$

$$u(0,t) = 0 \qquad (0 < t < \infty) \tag{4.92}$$

$$u(1,t) = 0 \qquad (0 < t < \infty) \tag{4.93}$$

$$u(x,0) = f(x) \qquad (0 < x < 1) \tag{4.94}$$

Ο ορος $-cu$ (οπου θεωρουμε $c \geq 0$) αντιστοιχει σε ακτινοβολια θερμοτητας στο περιβαλλον, δηλ. η ραβδος δεν ειναι απολυτα μονωμενη θερμικα. Απο μαθηματικη αποψη, ο ορος $-cu$ θα μπορουσε να αντιστοιχει σε ενα ορο της μορφης e^{-ct} στην λυση $u(x,t)$ (αυτος ειναι ο παραγοντας *αποσβεσης*). Θα εξετασουμε τωρα αν αυτη η υποθεση μπορει να βοηθησει στην απλοποιηση του προβληματος. Δηλ. θα υποθεσουμε οτι η λυση του αρχικου προβληματος εχει την μορφη

$$u(x,t) = e^{-ct}v(x,t) \tag{4.95}$$

και θα εξετασουμε τις ιδιοτητες της $v(x,t)$. Οντως, βλεπουμε αμεσως οτι

$$u_t = -cv + e^{-ct}v_t, \qquad u_{xx} = e^{-ct}v_{xx}. \tag{4.96}$$

Οποτε εχουμε και

$$u_t = a^2 u_{xx} - cu \Rightarrow \tag{4.97}$$

$$-cv + e^{-ct}v_t = a^2 e^{-ct}v_{xx} - cv \Rightarrow \tag{4.98}$$

$$e^{-ct}v_t = e^{-ct}a^2 v_{xx}. \tag{4.99}$$

Επισης βλεπουμε οτι

$$0 = u(0,t) = e^{-ct}v(0,t) \Rightarrow v(0,t) = 0 \tag{4.100}$$

$$0 = u(1,t) = e^{-ct}v(1,t) \Rightarrow v(1,t) = 0 \tag{4.101}$$

και

$$f(x) = u(x,0) = e^{-c\cdot 0}v(x,0) = v(x,0). \tag{4.102}$$

Αρα τελικα η $v(x,t)$ ειναι λυση του προβληματος

$$v_t = a^2 v_{xx} \qquad (0 < x < 1 \text{ και } 0 < t < \infty) \tag{4.103}$$

$$v(0,t) = v(1,t) = 0 \qquad (0 < t < \infty) \tag{4.104}$$

$$v(x,0) = f(x) \qquad (0 < x < 1) \tag{4.105}$$

το οποιο εχουμε ηδη λυσει στο εδαφιο 4.3.1 και η $u(x,t)$ δινεται απο

$$u(x,t) = e^{-ct}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-a^2 n^2 \pi^2 t} \cdot A_n \sin(n\pi x) \tag{4.106}$$

$$\text{οπου } A_n = 2\int_0^1 f(x)\sin(n\pi x)\,dx \text{ για } n = 1,2,.. \tag{4.107}$$

***

Ενα πιο δυσκολο προβλημα ειναι το εξης:

$$u_t = u_{xx} - cu \qquad (0 < x < 1, \quad 0 < t < \infty) \tag{4.108}$$

$$u(0,t) = k_0 \qquad (0 < t < \infty) \tag{4.109}$$

$$u(1,t) = k_1 \qquad (0 < t < \infty) \tag{4.110}$$

$$u(x,0) = 0 \qquad (0 < x < 1) \tag{4.111}$$

Υποθετουμε οτι

$$u(x,t) = w(x) + v(x,t)\, e^{-ct}$$

οπου η $w(x)$ ικανοποιει

$$w_{xx} - cw = 0 \qquad (0 < x < 1)$$

$$w(0) = k_0$$

$$w(1) = k_{1.}$$

Τοτε

$$u_t = 0 + v_t e^{-ct} - cve^{-ct}$$

$$u_{xx} = w_{xx} + v_{xx} e^{-ct}$$

$$-cu = -cw - cve^{-ct}.$$

Αρα για $0 < x < 1, \quad 0 < t < \infty$ εχουμε

$$u_t = u_{xx} - cu \Rightarrow$$

$$v_t e^{-ct} - cve^{-ct} = w_{xx} + v_{xx} e^{-ct} - cw - cve^{-ct} \Rightarrow$$

$$v_t e^{-ct} = v_{xx} e^{-ct} + w_{xx} - cw \Rightarrow$$

$$v_t = v_{xx}.$$

Επισης για $0 < x < 1$ εχουμε

$$0 = u(x,0) = w(x) + v(x,0)\, e^{-c \cdot 0} \Rightarrow$$

$$v(x,0) = -w(x).$$

Τελος, για $0 < t < \infty$ εχουμε

$$k_0 = u(0,t) = w(0) + v(0,t) \cdot e^{-ct} \Rightarrow$$

$$k_0 = k_0 + v(0,t)\, e^{-ct} \Rightarrow$$

$$0 = v(0,t)$$

και ομοια δειχνουμε οτι για $0 < t < \infty$ εχουμε

$$0 = v(1,t).$$

Ανακεφαλαιωνοντας, θα λυσουμε τα υποπροβληματα

$$w_{xx} - cw = 0 \qquad (0 < x < 1) \tag{4.112}$$

$$w(0) = k_0 \tag{4.113}$$

$$w(1) = k_1 \tag{4.114}$$

και

$$v_t = v_{xx} \qquad (0 < x < 1, \quad 0 < t < \infty) \tag{4.115}$$

$$v(0,t) = 0 \qquad (0 < t < \infty) \tag{4.116}$$

$$v(1,t) = 0 \qquad (0 < t < 1) \tag{4.117}$$

$$v(x,0) = -w(x) \qquad (0 < x < 1) \tag{4.118}$$

Πρωτα λυνουμε τις (4.112)–(4.114). Εχουμε

$$w(x) = a\sinh\left(\sqrt{c}x\right) + b\cosh\left(\sqrt{c}x\right)$$

$$w(0) = k_0$$

$$w(1) = k_1$$

οποτε

$$a\sinh(0) + b\cosh(0) = k_0$$

$$a\sinh\left(\sqrt{c}\right) + b\cosh\left(\sqrt{c}\right) = k_1$$

Η λυση ειναι

$$b = k_0$$

$$a = -\frac{k_0\cosh\left(\sqrt{c}\right) - k_1}{\sinh\left(\sqrt{c}\right)}$$

οποτε

$$w(x) = k_0\cosh\left(\sqrt{c}x\right) - \frac{k_0\cosh\left(\sqrt{c}\right) - k_1}{\sinh\left(\sqrt{c}\right)}\sinh\left(\sqrt{c}x\right).$$

Τωρα λυνουμε τις (4.115)–(4.118). Με χωρισμο μεταβλητων παιρνουμε $v(x,t) = X(x)T(t)$ και

$$\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -b^2$$

οποτε και

$$T(t) = e^{-b^2 t}$$

$$X(x) = A\sin(bx) + B\cos(bx).$$

Για να ισχυει $X(0) = X(1) = 0$ θα εχουμε $b_n = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, ...$ και $B_n = 0$ για καθε n. Τελικα μια γενικη λυση ειναι

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n^2\pi^2 t}\sin(n\pi x)$$

και εχουμε επισης

$$-k_0\cosh\left(\sqrt{c}x\right) + \frac{k_0\cosh\left(\sqrt{c}\right) - k_1}{\sinh\left(\sqrt{c}\right)}\sinh\left(\sqrt{c}x\right) = -w(x) = v(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin(n\pi x)$$

αρα για $n = 1, 2, ...$ εχουμε

$$A_n = 2\int_0^1 \left(-k_0\cosh\left(\sqrt{c}x\right) + \frac{k_0\cosh\left(\sqrt{c}\right) - k_1}{\sinh\left(\sqrt{c}\right)}\sinh\left(\sqrt{c}x\right)\right)\sin(n\pi x)\,dx.$$

η και

$$A_n = -2k_0\int_0^1 \cosh\left(\sqrt{c}x\right)\sin(n\pi x)\,dx + 2\frac{k_0\cosh\left(\sqrt{c}\right) - k_1}{\sinh\left(\sqrt{c}\right)}\int_0^1 \sinh\left(\sqrt{c}x\right)\sin(n\pi x)\,dx.$$

Τελικα η λυση του προβληματος (4.108)-(4.111) ειναι

$$u(x,t) = k_0\cosh\left(\sqrt{c}x\right) - \frac{k_0\cosh\left(\sqrt{c}\right) - k_1}{\sinh\left(\sqrt{c}\right)}\sinh\left(\sqrt{c}x\right) + \left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n^2\pi^2 t}\sin(n\pi x)\right)\cdot e^{-ct}.$$

Οταν ο χρονος $t \to \infty$ εχουμε

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = k_0\cosh\left(\sqrt{c}x\right) - \frac{k_0\cosh\left(\sqrt{c}\right) - k_1}{\sinh\left(\sqrt{c}\right)}\sinh\left(\sqrt{c}x\right) + \lim_{t\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n^2\pi^2 t}\sin(n\pi x)\right)\cdot e^{-ct}$$

$$= k_0\cosh\left(\sqrt{c}x\right) - \frac{k_0\cosh\left(\sqrt{c}\right) - k_1}{\sinh\left(\sqrt{c}\right)}\sinh\left(\sqrt{c}x\right) = w(x).$$

Πατατηρειστε τι συμβαινει αν επιπλεον εχουμε πολυ μικρο συντελεστη αποσβεσης $c \simeq 0$. Τοτε

$$\cosh\left(\sqrt{c}x\right) = \frac{e^{\sqrt{c}x} + e^{-\sqrt{c}x}}{2} \simeq \frac{1 + \sqrt{c}x + 1 - \sqrt{c}x}{2} = 1$$

$$\sinh\left(\sqrt{c}x\right) = \frac{e^{\sqrt{c}x} - e^{-\sqrt{c}x}}{2} \simeq \frac{1 + \sqrt{c}x - 1 + \sqrt{c}x}{2} = \sqrt{c}x$$

και $\cosh(c) \simeq 1$, $\sinh\left(\sqrt{c}\right) \simeq \sqrt{c}$. Οποτε

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = k_0\cosh\left(\sqrt{c}x\right) - \frac{k_0\cosh\left(\sqrt{c}\right) - k_1}{\sinh\left(\sqrt{c}\right)}\sinh\left(\sqrt{c}x\right)$$

$$\simeq k_0\cdot 1 - \frac{k_0\cdot 1 - k_1}{\sqrt{c}}\cdot\sqrt{c}x$$

$$= k_0 - (k_0 - k_1)\cdot x$$

που προσεγγιζει την σταθερη κατασταση του προβληματος που λυσαμε στο εδαφιο 4.3.2:

$$z_t = z_{xx} \qquad (0 < x < 1, \quad 0 < t < \infty) \tag{4.119}$$

$$z(0,t) = k_0 \qquad (0 < t < \infty) \tag{4.120}$$

$$z(1,t) = k_1 \qquad (0 < t < \infty) \tag{4.121}$$

$$z(x,0) = 0 \qquad (0 < x < 1)\,. \tag{4.122}$$

4.3.4 Μονωση

Σε ολα τα προβληματα τα οποια εχουμε εξετασει ως τωρα οι οριακες συνθηκες αφορουσαν την $u(x,t)$. Δεν ειναι υποχρεωτικο αυτο να ισχυει παντα. Σε (φυσικα) προβληματα μεταδοσης θερμοτητας, μια συνηθισμενη συνθηκη ειναι οτι ενα ακρο μιας ραβδου ειναι *μονωμενο*. Αυτο σημαινει οτι η $u_x(x,t)$ μηδενιζεται στο αντιστοιχο ακρο. Για παραδειγμα, το παρακατω προβλημα περιγραφει μια ραβδο με μονωμενα και τα δυο της ακρα (και προσδιορισμενη αρχικη κατασταση θερμοκρασιας).

$$u_t = a^2 u_{xx} \qquad (0 < x < 1 \text{ και } 0 < t < \infty) \tag{4.123}$$

$$u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0 \qquad (0 < t < \infty) \tag{4.124}$$

$$u(x,0) = f(x) \qquad (0 < x < 1) \tag{4.125}$$

Για να λυσουμε το προβλημα κανουμε την συνηθισμενη υποθεση χωρισμου μεταβλητων και καταληγουμε οτι καθε συναρτηση της μορφης

$$u(x,t) = T(t)X(x) = e^{-a^2b^2t} \cdot (A\sin(bx) + B\cos(bx))$$

θα ειναι λυση της (4.123). Για να ικανοποιουνται οι οριακες συνθηκες (4.124) πρεπει να εχουμε

$$0 = u_t(0,t) = A\cos(0) - B\sin(0) = A \tag{4.126}$$

$$0 = u_t(1,t) = A\cos(b) - B\sin(b) = B\sin(b) \tag{4.127}$$

οποτε θα πρεπει το b να ικανοποιει

$$b = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, ... \tag{4.128}$$

Ετσι, για καθε ακεραιο n, η $u(x,t) = e^{-a^2n^2\pi^2t} \cdot B_n \cos(n\pi x)$ θα ικανοποιει τις (4.124) και το ιδιο θα ισχυει και για την

$$u(x,t) = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-a^2n^2\pi^2t} \cdot B_n \cos(n\pi x)\,. \tag{4.129}$$

Για να ικανοποιειται και η αρχικη συνθηκη (4.125) πρεπει να εχουμε

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos(n\pi x) \qquad (0 < x < 1)\,. \tag{4.130}$$

το οποιο μπορουμε να επιτυχουμε οριζοντας την $g(x)$ να ειναι η *αρτια επεκταση* της $f(x)$ στο διαστημα $[-1,1]$ και βρισκοντας τους συντελεστες B_n απο την σχεση

$$B_n = \int_{-1}^{1} g(x) \cos(n\pi x)\, dx = 2\int_{0}^{1} f(x) \cos(n\pi x)\, dx. \tag{4.131}$$

Τελικα λοιπον η συναρτηση

$$u(x,t) = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-a^2 n^2 \pi^2 t} \cdot B_n \cos(n\pi x) \tag{4.132}$$

$$B_n = 2\int_{0}^{1} f(x) \cos(n\pi x)\, dx \;\; (n = 0, 1, 2, ..) \tag{4.133}$$

ειναι η λυση του προβληματος (4.123)–(4.125).

Παραδειγμα 4.3.4

Η λυση του προβληματος

$$u_t = u_{xx} \qquad (0 < x < 1 \text{ και } 0 < t < \infty) \tag{4.134}$$

$$u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0 \qquad (0 < t < \infty) \tag{4.135}$$

$$u(x,0) = x \qquad (0 < x < 1) \tag{4.136}$$

ειναι

$$u(x,t) = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-a^2 n^2 \pi^2 t} \cdot B_n \cos(n\pi x) \tag{4.137}$$

$$B_0 = 1 \tag{4.138}$$

$$B_n = 2\int_{0}^{1} x \cos(n\pi x)\, dx = 2\frac{\cos n\pi - 1}{n^2\pi^2} \;\; (n = 1, 2, ..) \tag{4.139}$$

***

Παραδειγμα 4.3.5

Η λυση του προβληματος

$$u_t = u_{xx} \qquad (0 < x < 1 \text{ και } 0 < t < \infty) \tag{4.140}$$

$$u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0 \qquad (0 < t < \infty) \tag{4.141}$$

$$u(x,0) = 1 + x^2 \qquad (0 < x < 1) \tag{4.142}$$

ειναι

$$u(x,t) = \frac{B_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-a^2 n^2 \pi^2 t} \cdot B_n \cos(n\pi x) \tag{4.143}$$

$$\text{οπου } B_0 = \frac{8}{3} \tag{4.144}$$

$$\text{και } B_n = 2\int_0^1 \left(1 + x^2\right) \cos(n\pi x)\, dx = 4\frac{\cos n\pi}{n^2\pi^2} \qquad (n = 1, 2, ..) \tag{4.145}$$

***

4.3.5 Πηγες Θερμοτητας

Θα λυσουμε με χωρισμο μεταβλητων το προβλημα

$$u_t = a^2 u_{xx} + g(x,t) \qquad (0 < x < 1 \text{ και } 0 < t < \infty) \tag{4.146}$$

$$u(0,t) = 0 \qquad (0 < t < \infty) \tag{4.147}$$

$$u(1,t) = 0 \qquad (0 < t < \infty) \tag{4.148}$$

$$u(x,0) = f(x) \qquad (0 < x < 1) \tag{4.149}$$

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

Να λυθουν τα παρακατω προβληματα.

4.3.1 $u_t = u_{xx}$ $(0 < x < 1,\ 0 < t < \infty)$, $u(0,t) = u(1,t) = 0$ $(0 < t < \infty)$, $u(x,0) = 1$ $(0 < x < 1)$.
(Απ. $u(x,t) = \frac{4}{\pi}\left(e^{-\pi^2 t}\sin(\pi x) + \frac{1}{3}e^{-9\pi^2 t}\sin(3\pi x) + \frac{1}{5}e^{-25\pi^2 t}\sin(5\pi x) + ...\right)$).

4.3.2 $u_t = u_{xx}$ $(0 < x < 1,\ 0 < t < \infty)$, $u(0,t) = u(1,t) = 0$ $(0 < t < \infty)$, $u(x,0) = x - x^2$ $(0 < x < 1)$.
(Απ. $u(x,t) = \frac{8}{\pi^3}\left(e^{-\pi^2 t}\sin(\pi x) + \frac{1}{27}e^{-9\pi^2 t}\sin(3\pi x) + \frac{1}{125}e^{-25\pi^2 t}\sin(5\pi x) + ...\right)$).

4.3.3 $u_t = 2u_{xx}$ $(0 < x < 4,\, 0 < t < \infty)$, $u(0,t) = u(4,t) = 0$ $(0 < t < \infty)$, $u(x,0) = 25x$ $(0 < x < 4)$.

(Απ. $u\left(x,t\right) = -\frac{200}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\pi)}{n}e^{-n^2\pi^2 t/8}\sin\left(\frac{n\pi x}{4}\right)$).

4.3.4 $u_t = 4u_{xx}$ $(0 < x < 1,\, 0 < t < \infty)$, $u(0,t) = u(4,t) = 0$ $(0 < t < \infty)$, $u(x,0) = x^2 - x^3$ $(0 < x < 1)$.

(Απ. $u\left(x,t\right) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}-1}{n^3\pi^3}e^{-4n^2\pi^2 t}\sin\left(n\pi x\right)$).

4.3.5 $u_t = u_{xx}$ $(0 < x < \pi,\, 0 < t < \infty)$, $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ $(0 < t < \infty)$, $u(x,0) = \sin^3(x)$ $(0 < x < \pi)$.

(Απ. $u\left(x,t\right) = \frac{3}{4}e^{-t}\sin\left(x\right) - \frac{1}{4}e^{-9t}\sin\left(3x\right)$).

4.3.6 $u_t = u_{xx}$ $(0 < x < 1,\, 0 < t < \infty)$, $u(0,t) = 0$, $u(1,t) = 1$ $(0 < t < \infty)$, $u(x,0) = x^2$ $(0 < x < 1)$.

(Απ. $u\left(x,t\right) = x - \frac{8}{\pi^3}\left(e^{-\pi^2 t}\sin\left(\pi x\right) + \frac{1}{27}e^{-9\pi^2 t}\sin\left(3\pi x\right) + \frac{1}{125}e^{-25\pi^2 t}\sin\left(5\pi x\right) + ...\right)$).

4.3.7 $u_t = u_{xx}$ $(0 < x < 1,\, 0 < t < \infty)$, $u(0,t) = 1$, $u(1,t) = 2$ $(0 < t < \infty)$, $u(x,0) = x + 1 + \sin\left(\pi x\right)$ $(0 < x < 1)$.

(Απ. $u\left(x,t\right) = 1 + x + e^{-\pi^2 t}\sin\left(\pi x\right)$).

4.3.8 $u_t = u_{xx}$ $(0 < x < 10,\, 0 < t < \infty)$, $u(0,t) = 150$, $u(10,t) = 100$ $(0 < t < \infty)$, $u(x,0) = 150 - 5\cdot x$ $(0 < x < 10)$.

4.3.9 $u_t = u_{xx}$ $(0 < x < 1,\, 0 < t < \infty)$, $u(0,t) = 0$, $u(1,t) = 2$ $(0 < t < \infty)$, $u(x,0) = x^2\cdot(1 - x)$ $(0 < x < 1)$.

4.3.10 $u_t = u_{xx}$ $(0 < x < L,\, 0 < t < \infty)$, $u(0,t) = a$, $u(L,t) = b$ $(0 < t < \infty)$, $u(x,0) = \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$ $(0 < x < L)$.

4.3.11 $u_t = u_{xx} - cu$ $(0 < x < 1,\, 0 < t < \infty)$, $u(0,t) = 0$, $u(1,t) = 0$ $(0 < t < \infty)$, $u(x,0) = 1$ $(0 < x < 1)$.

(Απ. $u(x,t) = 2e^{-ct}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos n\pi}{n\pi}\cdot e^{-a^2n^2\pi^2 t}\cdot\sin\left(n\pi x\right)$).

4.3.12 $u_t = u_{xx} - cu$ $(0 < x < \pi,\, 0 < t < \infty)$, $u(0,t) = 0$, $u(\pi,t) = 0$ $(0 < t < \infty)$, $u(x,0) = x\cdot(1 - x)$ $(0 < x < 1)$.

(Απ. $u(x,t) = 2e^{-ct}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2-n\pi\sin n\pi-2\cos n\pi}{n^3\pi^3}\cdot e^{-a^2n^2\pi^2 t}\cdot\sin\left(n\pi x\right)$).

4.3.13 $u_t = u_{xx} - cu$ $(0 < x < 1,\, 0 < t < \infty)$, $u(0,t) = 0$, $u(1,t) = 0$ $(0 < t < \infty)$, $u(x,0) = x^2\cdot(1 - x)$ $(0 < x < 1)$.

(Απ. $u(x,t) = 2e^{-ct}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6\sin n\pi-4n\pi\cos n\pi-n^2\pi^2\sin n\pi-2n\pi}{n^4\pi^4}\cdot e^{-a^2n^2\pi^2 t}\cdot\sin\left(n\pi x\right)$).

4.3.14 $u_t = u_{xx} - u$ $(0 < x < 1,\, 0 < t < \infty)$, $u(0,t) = 1$, $u(1,t) = 2$ $(0 < t < \infty)$, $u(x,0) = 0$ $(0 < x < 1)$.

4.3.15 $u_t = u_{xx} - u$ $(0 < x < 1,\ 0 < t < \infty)$, $u(0,t) = 1$, $u(1,t) = 2$ $(0 < t < \infty)$, $u(x,0) = x + 1$ $(0 < x < 1)$.

4.3.16 $u_t = u_{xx}$ $(0 < x < \pi,\ 0 < t < \infty)$, $u(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$ $(0 < t < \infty)$, $u(x,0) = \cos(x)$ $(0 < x < \pi)$.

(Απ. $u(x,t) = e^{-a^2 t} \cdot \cos(x)$).

4.3.17 $u_t = u_{xx}$ $(0 < x < \pi,\ 0 < t < \infty)$, $u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$ $(0 < t < \infty)$, $u(x,0) = \sin(x)$ $(0 < x < \pi)$.

(Απ. $u(x,t) = 2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi + 1}{n^2 - 1} \cdot e^{-a^2 n^2 t} \cdot \cos(nx)$).

4.3.18 $u_t = u_{xx}$ $(0 < x < 1,\ 0 < t < \infty)$, $u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0$ $(0 < t < \infty)$, $u(x,0) = x^2$ $(0 < x < 1)$.

(Απ. $u(x,t) = \frac{1}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{n^2\pi^2} \cdot e^{-a^2 n^2 \pi^2 t} \cdot \cos(n\pi x)$).

4.3.19 $u_t = u_{xx}$ $(0 < x < 1,\ 0 < t < \infty)$, $u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0$ $(0 < t < \infty)$, $u(x,0) = x \cdot (1 - x)$ $(0 < x < 1)$.

(Απ. $u(x,t) = \frac{1}{6} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\cos(n\pi)+1)}{n^2\pi^2} \cdot e^{-a^2 n^2 \pi^2 t} \cdot \cos(n\pi x)$).

4.4 Διαδοση Θερμοτητας σε Απειρη Ραβδο: Μια Εναλλακτικη Θεωρηση

Στο Εδαφιο 4.2 εχουμε ηδη λυσει το παρακατω προβλημα με Μ/Σ Fourier

$$u_t = a^2 u_{xx} \qquad (-\infty < x < \infty,\ 0 < t < \infty) \tag{4.150}$$

$$u(x,0) = f(x) \qquad (-\infty < x < \infty) \tag{4.151}$$

Τωρα θα λυσουμε το ιδιο προβλημα με χωρισμο μεταβλητων. Υποθετουμε οτι η λυση $u(x,t)$ μπορει να γραφει στην μορφη

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{4.152}$$

και μετα τους συνηθισμενους χειρισμους παιρνουμε τις ΔΕ

$$\begin{aligned} T'(t) &= -a^2 b^2 T(t) \\ X''(x) &= -b^2 X(x) \end{aligned} \tag{4.153}$$

απο τις οποιες συμπεραινουμε οτι οι συναρτησεις

$$T(t) = Ce^{-a^2 b^2 t} \tag{4.154}$$

$$X(t) = A\sin(bx) + B\cos(bx) \tag{4.155}$$

ειναι λυσεις της (4.150). Το ιδιο ισχυει και για καθε συναρτηση της μορφης $(A(b)\sin(bx)+B(b)\cos(bx))\cdot e^{-a^2b^2t}$ οπου τα A και B ειναι συναρτησεις του b. Ακομη, απο την αρχη της υπερθεσης των λυσεων, μια λυση της (4.150) ειναι και η

$$u(x,t)=\int_0^\infty (A(b)\sin(bx)+B(b)\cos(bx))\cdot e^{-a^2b^2t}\,db. \tag{4.156}$$

Για να εχουμε

$$f(x)=u(x,0)=\int_0^\infty (A(b)\sin(bx)+B(b)\cos(bx))\,db$$

αρκει να επιλεξουμε τις $A(b)$, $B(b)$ συμφωνα με τους τριγωνομετρικους μετασχηματισμους Fourier :

$$A(b)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\sin(bz)\,dz$$

$$B(b)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\cos(bz)\,dz$$

οποτε τελικα η λυση ειναι

$$u(x,t)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left(\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\sin(bz)\,dz\right]\sin(bx)+\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\cos(bz)\,dz\right]\cos(bx)\right)\cdot e^{-a^2b^2t}\,db. \tag{4.157}$$

Τι σχεση εχει αυτη λυση με την λυση (4.19)

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{-(x-z)^2/4a^2t}dz \tag{4.158}$$

του Εδαφιου 4.2;

Αν εναλλαξουμε την σειρα ολοκληρωσης στην (4.157) παιρνουμε:

$$\begin{aligned} u(x,t)&=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\left(\int_0^\infty[\sin(bz)\sin(bx)+\cos(bz)\cos(bx)]\cdot e^{-a^2b^2t}\,db\right)dz\\ &=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\left(\int_0^\infty \cos(b\cdot[z-x])\cdot e^{-a^2b^2t}\,db\right)dz. \end{aligned} \tag{4.159}$$

Παρατηρειστε οτι

$$\int_0^\infty \cos(b\cdot[z-x])\cdot e^{-a^2b^2t}\,db=\mathrm{Re}\left[\int_0^\infty e^{ib\cdot[z-x]}\cdot e^{-a^2b^2t}\,db\right]$$

και αυτο το ολοκληρωμα μπορει να υπολογιστει με μιγαδικη ολοκληρωση. Προκυπτει οτι

$$\int_0^\infty \cos(b\cdot[z-x])\cdot e^{-a^2b^2t}\,db=\frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}}e^{-(x-z)^2/4a^2t}$$

οποτε, αντικαθιστωντας στην (4.159) παιρνουμε

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{-(x-z)^2/4a^2t}dz \tag{4.160}$$

που ειναι το ιδιο με την λυση (4.19) του Εδαφιου 4.2.

Βλεπουμε λοιπον οτι η χρηση των ολοκληρωτικων μετασχηματισμων μπορει να θεωρηθει και ως μια οριακη περιπτωση της μεθοδου χωρισμου μεταβλητων.

4.5 Υπερθεση Λυσεων

Εχουμε ηδη χρησιμοποιησει την ιδεα της *υπερθεσης* (δηλ. του συνδυασμου) λυσεων αρκετες φορες. Ας συνοψισουμε δυο παραλλαγες αυτης της ιδεας, ο οποιες θα μας φανουν χρησιμες και στα επομενα κεφαλαια.

Εστω οτι το προβλημα

$$u_t = a^2 u_{xx}, \qquad (0 < x < L, \quad 0 < t < \infty) \tag{4.161}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(x,L) = 0, \qquad (0 < t < \infty) \tag{4.162}$$

εχει δυο λυσεις: $p(x,t)$ και $q(x,t)$. Τοτε και οποιοσδηποτε γραμμικος συνδυασμος αυτων ειναι μια λυση. Διοτι, για οποιαδηποτε A, B:

$$\left.\begin{aligned} p_t &= a^2 p_{xx} \\ q_t &= a^2 q_{xx} \end{aligned}\right\} \Rightarrow Ap_t + Bq_t = Aa^2 p_{xx} + Ba^2 q_{xx} \Rightarrow (Ap+Bq)_t = a^2 (Ap+Bq)_{xx},$$

$$\left.\begin{aligned} p(0,t) &= 0 \\ q(0,t) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow Ap(0,t) + Bq(0,t) = A \cdot 0 + B \cdot 0 \Rightarrow (Ap+Bq)(0,t) = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} p(L,t) &= 0 \\ q(L,t) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow Ap(L,t) + Bq(L,t) = A \cdot 0 + B \cdot 0 \Rightarrow (Ap+Bq)(L,t) = 0.$$

Οποτε η συναρτηση $u(x,t) = Ap(x,t) + Bq(x,t)$ ικανοποιει τις (4.161), (4.162). Το ιδιο ισχυει και για περισσοτερες απο δυο συναρτησεις, ακομη και για ενα απειρο αριθμο συναρτησεων. Π.χ. αν οι $p_n(x,t)$ ικανοποιουν τις (4.161), (4.162) για $n = 1, 2, ...$, τοτε και η

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{N} A_n p_n(x,t)$$

τις ικανοποιει, για αυθαιρετους αριθμους $A_1, A_2, ...$ (αρκει οι A_n να ειναι τετοιοι ωστε το αθροισμα να ειναι καλα ορισμενο). Τελος, το ιδιο ισχυει και στην περιπτωση μιας συνεχομενης απειριας συναρτησεων: αν οι $p_b(x,t)$ ικανοποιουν τις (4.161), (4.162) για καθε $b \in (-\infty, \infty)$, τοτε και η

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(b)\, p_b(x,t)\, db$$

τις ικανοποιει, για αυθαιρετη συναρτηση $A(b)$ (αρκει η $A(b)$ να ειναι τετοια ωστε το ολοκληρωμα να ειναι καλα ορισμενο).

Μια παρομοια αρχη υπερθεσης ισχυει και για τις αρχικες συνθηκες. Εστω το προβλημα

$$u_t = a^2 u_{xx}, \qquad (0 < x < L, \quad 0 < t < \infty) \tag{4.163}$$

$$u(x,0) = f(x), \qquad (0 < x < L). \tag{4.164}$$

Ας υποθεσουμε οτι μπορουμε να γραψουμε την $f(x)$ ως συνδυασμο δυο συναρτησεων $g(x)$ και $h(x)$:

$$f(x) = Ag(x) + Bh(x)$$

και οτι μπορουμε να λυσουμε βρουμε συναρτησεις $p(x,t)$ και $q(x,t)$ οι οποιες λυνουν τα προβληματα

$$p_t = a^2 p_{xx}, \qquad (0 < x < L, \quad 0 < t < \infty) \tag{4.165}$$

$$p(x,0) = g(x), \qquad (0 < x < L). \tag{4.166}$$

και

$$q_t = a^2 q_{xx}, \qquad (0 < x < L, \quad 0 < t < \infty) \tag{4.167}$$

$$q(x,0) = h(x), \qquad (0 < x < L). \tag{4.168}$$

Τοτε και η συναρτηση $u(x,t) = Ap(x,t) + Bq(x,t)$ λυνει το αρχικο προβλημα (4.163)–(4.164). Η ιδεα αυτη επεκτεινεται σε περισσοτερες απο δυο συναρτησεις, ακομη και σε διακριτη η συνεχη απειρια συναρτησεων. Π.χ. αν εχουμε $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n g_n(x)$ και βρουμε τις συναρτησεις $p_n(x,t)$ οι οποιες λυνουν τα προβληματα

$$(p_n)_t = a^2 (p_n)_{xx}, \qquad (0 < x < L, \quad 0 < t < \infty) \tag{4.169}$$

$$p_n(x,0) = g_n(x), \qquad (0 < x < L). \tag{4.170}$$

για $n = 1, 2, \ldots$, τοτε η $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n p_n(x,t)$ λυνει το αρχικο προβλημα (4.163)–(4.164). Παρομοια, αν εχουμε $f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} A(b)\, g(x;b)\, db$ και βρουμε τις συναρτησεις $p_b(x,t)$ οι οποιες λυνουν τα προβληματα

$$(p_b)_t = a^2 (p_b)_{xx}, \qquad (0 < x < L, \quad 0 < t < \infty) \tag{4.171}$$

$$p_b(x,0) = g_b(x), \qquad (0 < x < L). \tag{4.172}$$

για $b \in (-\infty, \infty)$, τοτε η $u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(b)\, p_b(x,t)\, db$ λυνει το αρχικο προβλημα (4.163)–(4.164). Μια εφαρμογη αυτης της ιδεας ειναι η εξης: αν η $v(x,t)$ ειναι η λυση του προβληματος

$$v_t = a^2 v_{xx}, \qquad (0 < x < L, \quad 0 < t < \infty) \tag{4.173}$$

$$v(x,0) = \delta(x), \qquad (0 < x < L) \tag{4.174}$$

τοτε η $u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(b)\, v(x-b,t)\, db$ ειναι η λυση του (4.163)–(4.164), διοτι ισχυει

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(b)\, \delta(x-b,t)\, db.$$

Τα παραπανω ισχυουμ οχι μονο για την εξισωση θερμοτητας $u_t = a^2 u_{xx}$ αλλα και για ολες τις *γραμμικες* ΜΔΕ και θα τα χρησιμοποιησουμε και στα επομενα κεφαλαια.

4.6 Αριθμητικη Επιλυση

Στο παρον εδαφιο θα δωσουμε μερικα στοιχεια για την αριθμητικη επιλυση εξισωσεων διαχυσης. Η βασικη ιδεα ειναι να αντικαταστησουμε την χρονικη και χωρικη παραγωγο με πεπερασμενες διαφορες:

$$u_t \simeq \frac{u\left(m \cdot \delta x, (n+1) \cdot \delta t\right) - u\left(m \cdot \delta x, n \cdot \delta t\right)}{\delta t} \tag{4.175}$$

$$u_x \simeq \frac{u\left(m \cdot \delta x, n \cdot \delta t\right) - u\left((m-1) \cdot \delta x, n \cdot \delta t\right)}{\delta x} \tag{4.176}$$

$$\simeq \frac{u\left((m+1) \cdot \delta x, n \cdot \delta t\right) - u\left(m \cdot \delta x, n \cdot \delta t\right)}{\delta x} \tag{4.177}$$

$$u_{xx} \simeq \frac{u\left((m+1) \cdot \delta x, n \cdot \delta t\right) + u\left((m-1) \cdot \delta x, n \cdot \delta t\right) - 2u\left(m \cdot \delta x, n \cdot \delta t\right)}{\delta x^2}. \tag{4.178}$$

Αν θεσουμε

$$u_{m,n} = u\left(m \cdot \delta x, n \cdot \delta t\right) \tag{4.179}$$

τοτε οι παραπανω σχεσεις γινονται

$$u_t \simeq \frac{u_{m,n+1} - u_{m,n}}{\delta t} \tag{4.180}$$

$$u_x \simeq \frac{u_{m,n} - u_{m-1,n}}{\delta x} \tag{4.181}$$

$$\simeq \frac{u_{m+1,n} - u_{m,n}}{\delta x} \tag{4.182}$$

$$u_{xx} \simeq \frac{u_{m+1,n} + u_{m-1} - 2u_{m,n}}{\delta x^2}. \tag{4.183}$$

και η εξισωση διαχυσης $u_t = a^2 u_{xx}$ γινεται

$$\frac{u_{m,n+1} - u_{m,n}}{\delta t} = a^2 \frac{u_{m+1,n} + u_{m-1,n} - 2u_{m,n}}{\delta x^2} \Rightarrow \tag{4.184}$$

$$u_{m,n+1} = u_{m,n} + \frac{\delta t \cdot a^2}{\delta x^2} \cdot \left(u_{m+1,n} + u_{m-1,n} - 2u_{m,n}\right). \tag{4.185}$$

Η (4.185) μπορει να χρησιμοποιηθει για μια απλη αριθμητικη επιλυση της εξισωσης διαχυσης. Πραγματι αν οι τιμες $u_{m,1}$ ειναι γνωστες για καθε m (αυτες θα προελθουν απο τις αρχικες συνθηκες) τοτε μπορουμε να υπολογισουμε τις τιμες $u_{m,2}$ απο την (4.185), κατοπιν να χρησιμοποιησουμε τις $u_{m,2}$ για να υπολογισουμε τις $u_{m,3}$ και ουτω καθ' εξης. Το παρακατω προγραμμα MATLAB επιλυει αριθμητικα το προβλημα

$$u_t = 4u_{xx} \qquad (0 < x < 40) \tag{4.186}$$

$$u(0,t) = 0, \qquad (0 < t < 100) \tag{4.187}$$

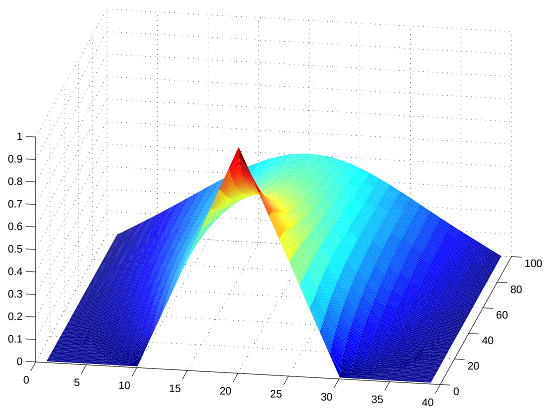
$$u(40,t) = 0, \qquad (0 < t < 100) \tag{4.188}$$

$$u(x,0) = f(x), \qquad (0 < x < 40)\,. \tag{4.189}$$

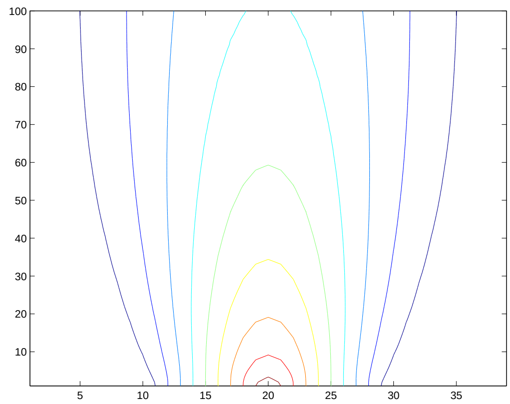
Η $f(x)$ ειναι μια τριγωνικη συναρτηση με κορυφη στο $x = 20$ (χρησιμοποιουμε $\delta x = 1$ και $\delta t = 0.1$).

```
clear
u(:,1)=[zeros(1,10) [0.1:0.1:1] [0.9:-0.1:0.1] zeros(1,10)]';
M=length(u);
a2=4;
dt=0.1;
for n=1:999
 u(1,n+1)=u(1,n);
 for m=2:M-1
  u(m,n+1)=u(m,n)+dt*a2*(u(m+1,n)+u(m-1,n)-2*u(m,n));
 end
 u(M,n+1)=u(M,n);
end
figure(1); surf(u); shading flat
```

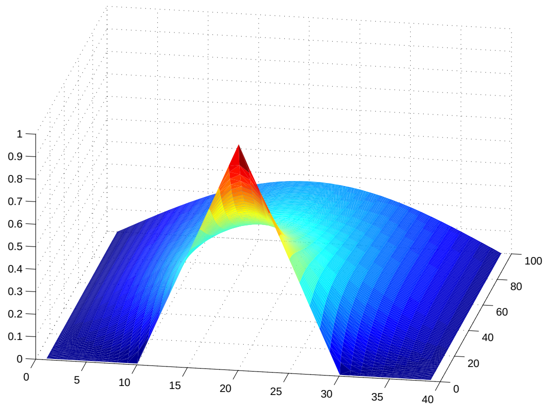
Τα αποτελεσματα της προσομοιωσης φαινονται στα σχηματα 4.2 και 4.3. Η εξομαλυντικη δραση του πυρηνα $e^{-x^2/4a^2t}$ φαινεται καθαρα. Στα σχηματα 4.4 και 4.5. δινουμε τα αποτελεσματα της ιδιας προσομοιωσης αλλα με $a^2 = 9$. Φαινεται καθαρα οτι ο μεγαλυτερος συντελεστης διαχυσης a δινει γρηγοροτερη εξομαλυνση.



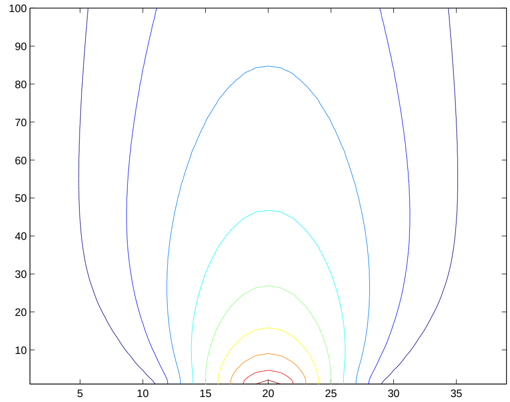
Σχημα 4.2



Σχημα 4.3



Σχημα 4.4



Σχημα 4.5

Που οφειλεται η εξομαλυτικη δραση της διαχυσης; Απο φυσικη αποψη, αν θεωρησουμε οτι η εξισωση διαχυσης ειναι ενα σχετικα καλο μοντελο της μεταδοσης θερμοτητας, τοτε η εξομαλυνση ανταποκρινεται στο φυσικο φαινομενο: τοπικες διαφορες θερμοκρασιας εξισορροπουνται με την παροδο του χρονου. Απο μαθηματικη αποψη, οπως εχουμε ηδη παρατηρησει, η εξομαλυνση οφειλεται στην συνελιξη με τον πυρηνα θερμοτητας. Ειναι χρησιμο να εξετασουμε το ερωτημα και απο καθαρα αριθμητικη σκοπια. Ας ξαναγραψουμε την (4.185):

$$u_{m,n+1} = u_{m,n} + \frac{\delta t \cdot a^2}{\delta x^2} \cdot (u_{m+1,n} + u_{m-1,n} - 2u_{m,n}) \tag{4.190}$$

Βλεπουμε οτι η μεταβολη $u_{m,n+1} - u_{m,n}$ ειναι αναλογη του $u_{m+1,n} + u_{m-1,n} - 2u_{m,n}$. Τωρα, αν

$$\frac{u_{m+1,n} + u_{m-1,n}}{2} > u_{m,n} \tag{4.191}$$

τοτε $u_{m,n+1} > u_{m,n}$, δηλαδη το $u_{m,n+1}$ ειναι πιο κοντα στο $\frac{u_{m+1,n}+u_{m-1,n}}{2}$ απ' οτι το $u_{m,n}$. Αν

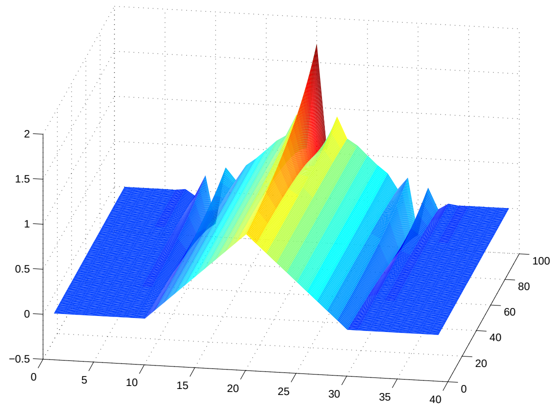
$$\frac{u_{m+1,n} + u_{m-1,n}}{2} < u_{m,n} \tag{4.192}$$

τοτε $u_{m,n+1} < u_{m,n}$, και παλι το $u_{m,n+1}$ ειναι πιο κοντα στο $\frac{u_{m+1,n}+u_{m-1,n}}{2}$ απ' οτι το $u_{m,n}$. Και τελος, αν

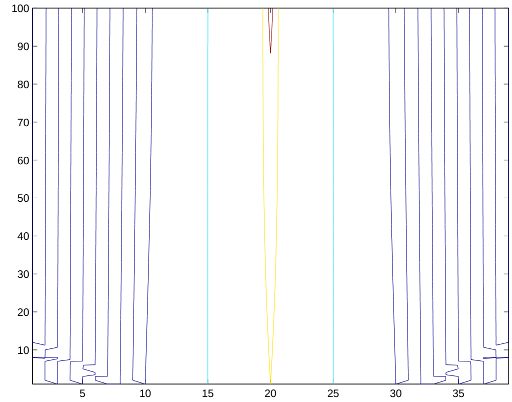
$$\frac{u_{m+1,n} + u_{m-1,n}}{2} = u_{m,n} \tag{4.193}$$

τοτε $u_{m,n+1} = u_{m,n} = \frac{u_{m+1,n}+u_{m-1,n}}{2}$. Δηλαδη, σε καθε περιπτωση το $u_{m,n}$ τεινει στον μεσο ορο της τιμης των δυο γειτονων του. Αυτη ειναι, απο αριθμητικη αποψη, η εξομαλυντικη δραση της εξισωσης διαχυσης. Για λογους συγκρισης δινουμε και τα αποτελεσματα μιας προσομοιωσης της εξισωσης *αρνητικης* διαχυσης. Στα σχηματα 4.6 και 4.7 βλεπουμε το εξης ενδιαφερον φαινομενο: η αρνητικη διαχυση αντι να εξομαλυνει τοπικες διαφορες τις τονιζει.

$$u_t = -a^2 u_{xx}$$



Σχημα 4.6



Σχημα 4.7

Ας εξετασουμε τωρα μια αλλη, *μη γραμμικη* ΜΔΕ. Μια απλη μορφη της εξισωσης *αντιδρασης / διαχυσης* ειναι η εξης

$$u_t = a^2 u_{xx} + b \cdot u \cdot (1-u)\,. \tag{4.194}$$

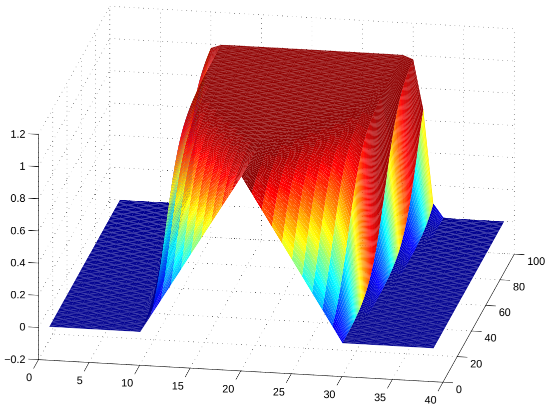
Στην (4.194) βλεπουμε οτι η χρονικη μεταβολη της u εξαρταται απο τον ορο διαχυσης $a^2 u_{xx}$ και ενα επιπλεον ορο, τον $b \cdot u \cdot (1-u)$. Αυτος ειναι ο λεγομενος ορος 'αντιδρασης'. Παρατηρουμε οτι για $0 < u < 1$, ο ορος αντιδρασης ειναι θετικος. Αυτο λοιπον μας λεει οτι ο ορος αντιδρασης ευνοει (στο διαστημα $0 < u < 1$) την αυξηση της u. Παρατηρουμε ομως επισης οτι ο ρυθμος αυξησης μηδενιζεται για $u = 0$ και για $u = 1$.

Η εξισωση αντιδρασης / διαχυσης χρησιμοποιειται για την μοντελοποιηση χημικων αντιδρασεων. Θεωρουμε οτι το $u(x,t)$ ειναι η συγκεντρωση (στο σημειο x και στον χρονο t) μιας ουσιας η οποια αντιδρα με ενα *υποστρωμα*. Ο ρυθμος της αντιδρασης εξαρταται απο την συγκεντρωση της ουσιας (ειναι αναλογος με το γινομενο $u \cdot (1-u)$)· επιπλεον η ουσια διαχεεται απο μια θεση x σε γειτονικες θεσεις.

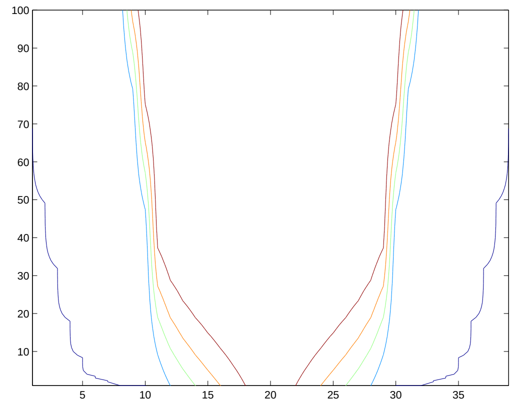
Στα σχηματα 4.10 και 4.11 δινουμε τα αποτελεσματα αριθμητικης επιλυσης της (4.194) με $a = 2$ και $b = 1$. Για λογους συγκρισης δινουμε και την προσομοιωση της (4.194) για $a = 2$ και $b = 0$ (δηλαδη χωρις αντιδραση) στα σχηματα 4.8 και 4.9. Και στις δυο περιπτωσεις χρησιμοποιουμε μηδενικες οριακες συνθηκες και ως αρχικη συνθηκη παιρνουμε μια βηματικη συναρτηση:

$$u(x,0) = \begin{cases} 0 & x \leq 30 \\ 1 & 30 < x \leq 50 \end{cases}. \tag{4.195}$$

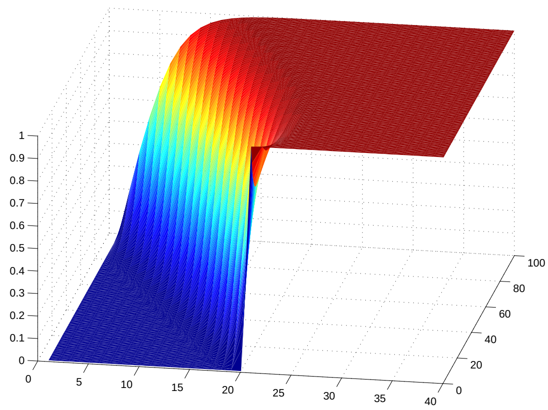
Δηλαδη η συγκεντρωση της ουσιας ειναι 0 για $x \leq 30$ και 1 για $x > 30$.



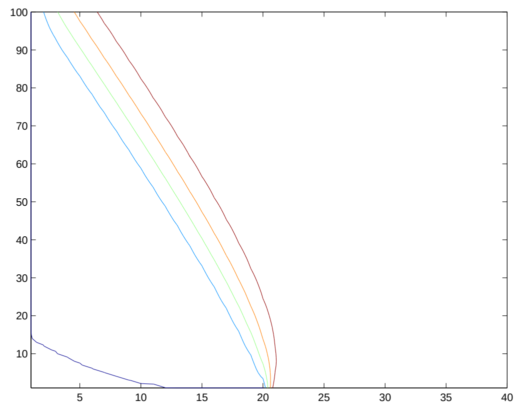
Σχημα 4.8



Σχημα 4.9



Σχημα 4.10

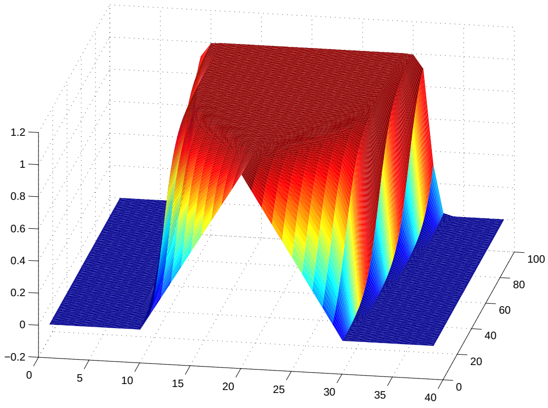


Σχημα 4.11

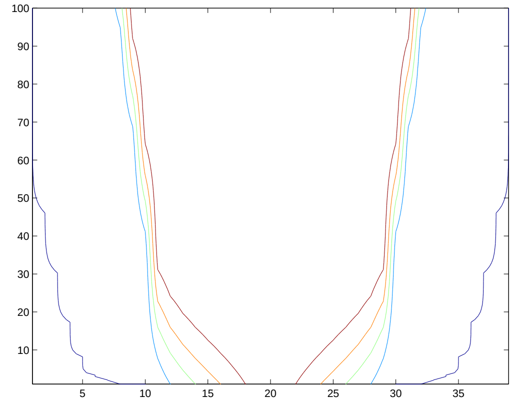
Ας εξετασουμε πρωτα τα σχηματα 4.8 και 4.9. Εδω βλεπουμε μια καθαρη περιπτωση διαχυσης: η αρχικα ξεκαθαρη διεπιφανεια μεταξυ της περιοχης μηδενικης συγκεντρωσης και μοναδιαιας συγκεντρωσης με την παροδο του χρονου 'θολωνει'. Αυτο οφειλεται στην διαχυση της χημικης ουσιας.

Στα σχηματα 4.10 και 4.11 βλεπουμε ενα πιο πολυπλοκο (και ενδιαφερον φαινομενο). Συμφωνα με οσα ειπαμε παραπανω, και στις δυο περιοχες (μηδενικης και μοναδιαιας συγκεντρωσης) ο ρυθμος της αντιδρασης ειναι μοναδικος. Ομως, με την παροδο του χρονου, μικρες ποσοτητας της ουσιας διαχεονται και ετσι στην γειτονια της διεπιφανειας η συγκεντρωση της ουσιας παιρνει τιμες στο διαστημα $(0, 1)$. Αυτο ειναι αρκετο για να αρχισει να εκτελειται η χημικη αντιδραση, πραγμα το οποιο εχει σαν αποτελεσμα την ***μετακινηση*** της διεπιφανειας. Αυτο το ***κυματικο*** φαινομενο δεν εχει αντιστοιχο στης εξισωσεις 'καθαρης' διαχυσης που εχουμε μελετησει ως τωρα[2]. Δινουμε ακομη ενα παραδειγμα αντιδρασης/διαχυσης στα σχηματα 4.12 και 4.13. Ποιες ειναι οι αρχικες συνθηκες; Τις συμπεριφορα παρατηρειτε;

[2]Θυμιζει ομως την εξισωση ροης του Εδαφιου 2.5.



Σχημα 4.12



Σχημα 4.13

Θα μπορουσαμε να διατυπωσουμε ως συμπερασμα των παραπανω προσομοιωσεων οτι οι μη γραμμικες ΜΔΕ παρουσιαζουν πιο ενδιαφερουσα συμπεριφορα απο αυτη των γραμμικων. Αυτο μας ηταν ηδη γνωστο απο την περιπτωση των συνηθων γραμμικων εξισωσεων. Ενα αλλο γνωστο γεγονος ειναι οτι οι μη γραμμικες ΔΕ ειναι δυσκολοτερες στην επιλυση απ' οτι οι γραμμικες. Αυτο ισχυει και για τις ΜΔΕ. Οι μεθοδοι που εχουμε δει ως τωρα δεν μπορουν να χρησιμοποιηθουν για την επιλυση της εξισωσης αντιδρασης / διαχυσης. Η αριθμητικη προσομοιωση μας δινει μια ιδεα της συμπεριφορας της εξισωσης.

Κεφάλαιο 5

ΜΔΕ Δευτερης Ταξης: Εξισωσεις Κυματος

5.1 Επιλυση με Χωρισμο Μεταβλητων

Θα ξεκινησουμε την μελετη της εξισωσης κυματος με ενα συγκεκριμενο παραδειγμα. Θεωρειστε μια λεπτη χορδη τοποθετημενη κατα μηκος του αξονα των x. Τα ακρα της χορδης βρισκονται στα σημεια $x = 0$ και $x = L$ (αρα η χορδη εχει μηκος L) και ειναι σταθερα στερεωμενα. Αν ονομασουμε $u(x, t)$ την (καθετη στον αξονα των x) μετατοπιση του σημειου x σε χρονο t (οπου $0 \leq x \leq L$ και $0 \leq t < \infty$) μπορει να αποδειχτει (δεν θα δωσουμε εδω την αποδειξη) οτι η $u(x, t)$ ικανοποιει την εξισωση *κυματος*:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}. \tag{5.1}$$

Η (5.1) ειναι η γενικη *εξισωση κυματος*. Αν θεωρησουμε την διακριτοποιημενη μορφη της (5.1) καταλαβαινουμε οτι αυτη περιγραφει ενα φαινομενο ταλαντωσης. Συγκεκριμενα, ας διακριτοποιησουμε τις χωρικες παραγωγους: οριζουμε (για $n = 0, 1, 2, ..., N$ και $\delta x = L/N$) τις συναρτησεις

$$v_n(t) = u(n \cdot \delta x, t). \tag{5.2}$$

Χρησιμοποιωντας την διακριτοποιημενη μορφη της u_{xx}, η ΜΔΕ (5.1) μετατρεπεται στην

$$(v_n)_{tt} = \left(\frac{c}{\delta x}\right)^2 (v_{n+1} - 2v_n + v_{n-1}) \tag{5.3}$$

η και

$$(v_n)_{tt} + k^2 \cdot v_n = k^2 \cdot (v_{n+1} + v_{n-1}) \tag{5.4}$$

οπου $k = 2\left(\frac{c}{\delta x}\right)^2$. Για $n = 1, ..., N-1$ (και με οριακες συνθηκες για τις v_0 και v_N) η (5.4) ειναι ενα συστημα συνηθων διαφορικων εξισωσεων. Αν θεωρησουμε προς στιγμη απομονωμενα την n-στη εξισωση και θεσουμε $w = k^2 \cdot (v_{n+1} + v_{n-1})$, τοτε παιρνουμε την

$$(v_n)_{tt} + k^2 \cdot v_n = w \tag{5.5}$$

η οποια ειναι η εξισωση ενος αρμονικου ταλαντωτη με εξωτερικη διεγερση w. Ομως στην (5.4) η $w = k^2 \cdot (v_{n+1} + v_{n-1})$ περιγραφει την *συζευξη* με τις μετατοπισεις των γειτονικων στοιχειων v_{n+1}, v_{n-1}.

Για να λυσουμε το *συστημα* των (5.4) οπου $n = 1, ..., N-1$ χρειαζομαστε αρχικες συνθηκες για τις συναρτησεις $v_1, ..., v_{N-1}$ και για τις παραγωγους αυτων, καθως και οριακες συνθηκες για τις v_0 και v_N. Κατ' αντιστοιχια, για να λυσουμε την ΜΔΕ (5.1) χρειαζομαστε *δυο* αρχικες συνθηκες: $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = g(x)$ και οριακες συνθηκες για τα $u(0,t)$ και $u(L,t)$ για $t \geq 0$. Ειδικα για την περιπτωση που τα ακρα της χορδης ειναι στερεωμενα, θελουμε να λυσουμε το προβλημα

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \qquad (0 < x < L \text{ και } 0 < t) \tag{5.6}$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \qquad (0 < t) \tag{5.7}$$

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x) \qquad (0 < x < L) \tag{5.8}$$

Το προβλημα αυτο μπορει να λυθει με χωρισμο των μεταβλητων. Αν υποθεσουμε οτι $u(x,t) = X(x)T(t)$ τοτε η (5.6) δινει

$$\frac{1}{c^2} \cdot \frac{T''}{T} = \frac{X''}{X} = -b^2. \tag{5.9}$$

Η επιλογη της *αρνητικης* σταθερας $-b^2$ θα εξηγηθει λιγο αργοτερα. Τωρα η (5.9) δινει τις

$$T'' + b^2 c^2 T = 0 \tag{5.10}$$

$$X'' + b^2 X = 0. \tag{5.11}$$

Η (5.10) εχει λυσεις της μορφης $\sin(bct)$, $\cos(bct)$. Η (5.11) εχει λυσεις της μορφης $\sin(bx)$, $\cos(bx)$ και καθε λυση πρεπει να μηδενιζεται για $x = 0$ και $x = L$, οποτε οι συνημιτονικες λυσεις δεν γινονται δεκτες και οι ημιτονικες λυσεις πρεπει να εχουν την μορφη $\sin(b_n x)$ με $b_n = \frac{n\pi}{L}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$. Ετσι τελικα μια γενικη μορφη της $u(x,t)$ ειναι

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L} t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L} t\right) \right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right). \tag{5.12}$$

Η (5.12) ικανοποιει τις (5.6), (5.7). Μενει να ικανοποιησουμε τις (5.8), δηλ.

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos(0) + B_n \sin(0)\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \tag{5.13}$$

$$g(x) = u_t(x,0) = \frac{n\pi c}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left(-A_n \sin(0) + B_n \cos(0)\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) = \frac{n\pi c}{L} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right). \tag{5.14}$$

Απο την (5.13) φαινεται οτι τα A_n ειναι οι συντελεστες της αναπτυξης σε σειρα Fourier [1]της περιττης

[1]Εδω φαινεται και γιατι επιλεξαμε την σταθερα $-b^2$, δηλαδη αρνητικη. Εαν επιλεγαμε b^2 τοτε η τελικη λυση θα ειχε ορους e^{bx} και e^{-bx} και δεν θα μπρουσαμε να αναπτυξουμε την $f(x)$ σε σειρα Fourier.

επεκτασης της $f(x)$ στο διαστημα $[-L, L]$ και δινονται απο τον τυπο (για $n = 1, 2, ...$):

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{5.15}$$

Αντιστοιχα, απο την (5.14) φαινεται οτι τα B_n δινονται απο την αναπτυξη σε σειρα Fourier της περιττης επεκτασης της $g(x)$ στο διαστημα $[-L, L]$ και δινονται απο τον τυπο (για $n = 1, 2, ...$):

$$B_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^L g(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{5.16}$$

Παρατηρουμε απο την μορφη

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + B_n\sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\right)\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

οτι καθε σημειο της χορδης εκτελει κινηση που ειναι γραμμικος συνδυασμος ημιτονοειδων ταλαντωσεων της μορφης $A_n\cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)+$ $B_n\sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)$. Για καθε n παιρνουμε μια διαφορετικη *αρμονικη* συχνοτητα (ολες ειναι πολλαπλασια της *θεμελιωδους* συχνοτητας $\frac{\pi c}{L}$). Καθε ταλαντωση της μορφης

$$\left(A_n\cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + B_n\sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\right)\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

ειναι ενα *στασιμο κυμα*.

Παραδειγμα 5.1.1

Θα λυσουμε το προβλημα $u_{tt} = c^2u_{xx}$ $(0 < x < 1,\ 0 < t)$ $u(0,t) = u(1,t) = 0$ $(0 < t)$, $u(x,0) = 1$, $u_t(x,0) = 0$ $(0 < x < 1)$. Η $u(x,t)$ δινεται απο την

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos(n\pi ct)\cdot\sin(n\pi x)$$

οπου $A_n = 2\int_0^1 1\cdot\sin(n\pi x)\,dx = 2\cdot\frac{1-\cos n\pi}{n\pi}$. Δηλαδη

$$u(x,t) = \frac{4}{\pi}\left(\cos(\pi ct)\cdot\sin(\pi x) + \frac{1}{3}\cos(3\pi ct)\cdot\sin(3\pi x) + \frac{1}{5}\cos(5\pi ct)\cdot\sin(5\pi x) + ...\right)$$

***

Παραδειγμα 5.1.2

Θα λυσουμε το προβλημα $u_{tt} = c^2u_{xx}$ $(0 < x < 1,\ 0 < t)$ $u(0,t) = u(1,t) = 0$ $(0 < t)$, $u(x,0) = h(x)$, $u_t(x,0) = 0$, οπου

$$h(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 2-2x & \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

Οποτε η $u\,(x,t)$ δινεται απο την

$$u\,(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\,(n\pi ct) \cdot \sin\,(n\pi x)$$

οπου

$$A_n = 2\int_0^{1/2} 2x \sin\,(n\pi x)\,dx + 2\int_{1/2}^{1} (2-2x)\sin\,(n\pi x)\,dx$$

$$= -2\frac{-2\sin\frac{1}{2}n\pi + n\pi\cos\frac{1}{2}n\pi}{n^2\pi^2} + 2\frac{-2\sin n\pi + n\pi\cos\frac{1}{2}n\pi + 2\sin\frac{1}{2}n\pi}{n^2\pi^2} = \frac{8\sin\frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2}.$$

Δηλαδη τελικα

$$u\,(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8\sin\frac{n\pi}{2}}{n^2\pi^2} \cos\,(n\pi ct) \cdot \sin\,(n\pi x)$$

***

Παραδειγμα 5.1.3

Θα λυσουμε το προβλημα $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ $(0 < x < 1,\ 0 < t)$ $u(0,t) = u(1,t) = 0$ $(0 < t)$, $u(x,0) = x^2$, $u_t\,(x,0) = 0$ $(0 < x < 1)$. Σε αυτη την περιπτωση για καθε n εχουμε $B_n = 0$ και η $u\,(x,t)$ δινεται απο την

$$u\,(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\,(n\pi ct) \cdot \sin\,(n\pi x)$$

οπου

$$A_n = 2\int_0^1 x^2 \sin\,(n\pi x)\,dx = \frac{2\cos n\pi - 2 - n^2\pi^2\cos n\pi}{n^3\pi^3}$$

***

Ας θεωρησουμε τωρα το προβλημα της *απειρης* χορδης με μηδενικη αρχικη ταχυτητα:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx},\ (-\infty < x < \infty, \quad 0 < t) \tag{5.17}$$

$$u(x,0) = f(x),\ (-\infty < x < \infty) \tag{5.18}$$

$$u_t(x,0) = 0,\ (-\infty < x < \infty) \tag{5.19}$$

Αν θεσουμε $u(x,t) = X(x)T(t)$, βρισκουμε κατα τα γνωστα οτι καθε λυση θα εχει την μορφη

$$(A(b)\cos(bx) + B(b)\sin(bx))\cos(bct)\,. \tag{5.20}$$

Επειδη η χορδη εχει απειρο μηκος, δεν υπαρχουν συνοριακες συνθηκες και αρα δεν υπαρχουν και περιορισμοι στο b. Αρα, συμφωνα με την αρχη της *υπερθεσης* (γραμμικου συνδυασμου) των λυσεων, θα ειναι λυση και η συναρτηση

$$u(x,t) = \int_0^\infty (A(b)\cos(bx) + B(b)\sin(bx))\cos(bct)\,db \tag{5.21}$$

και, αν θεσουμε στην (5.21) $t = 0$ παιρνουμε

$$f(x) = u(x,0) = \int_0^\infty (A(b)\cos(bx) + B(b)\sin(bx))\,db. \tag{5.22}$$

Για να ισχυει η (5.22) θα πρεπει να εχουμε

$$A(b) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(z)\cos(bz)\,dz, \quad B(b) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(z)\sin(bz)\,dz. \tag{5.23}$$

Η (5.21) και η (5.23) δινουν την λυση του προβληματος (5.17) - (5.19). Με αναλογο τροπο λυνονται και προβληματα με αλλες αρχικες συνθηκες (π.χ. μη μηδενικη αρχικη ταχυτητα). Ομως υπαρχει ενας εναλλακτικος (πιο ευκολος!) τροπος επιλυσης προβληματων απειρης χορδης, οπως θα δουμε στο επομενο εδαφιο.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

5.1.1 Λυστε το προβλημα $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ $(0 < x < 1,\ 0 < t)$, $u(0,t) = u(1,t) = 0$ $(0 < t)$, $u(x,0) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} < x \le q1 \end{cases}$, $u_t(x,0) = 0$. (Απ. $u(x,t) = \frac{4}{\pi}(\sin(2\pi x)\sin(2\pi t) + \frac{1}{3}\sin(6\pi x)\sin(6\pi t) + \frac{1}{5}\sin(10\pi x)\sin(10\pi t) + ...)$).

5.1.2 Λυστε το προβλημα $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ $(0 < x < 1,\ 0 < t)$, $u(0,t) = u(1,t) = 0$ $(0 < t)$, $u(x,0) = x$, $u_t(x,0) = 0$. (Απ. $u(x,t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(n\pi x)\cos(n\pi ct)$).

5.1.3 Λυστε το προβλημα $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ $(0 < x < 1,\ 0 < t)$, $u(0,t) = u(1,t) = 0$ $(0 < t)$, $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 1$. (Απ. $u(x,t) = \sum_{n=1}^\infty \frac{2-2\cos(n\pi)}{n^2\pi^2 c}\sin(n\pi x)\sin(n\pi ct)$).

5.1.4 Λυστε το προβλημα $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ $(0 < x < 1,\ 0 < t)$, $u(0,t) = u(1,t) = 0$ $(0 < t)$, $u(x,0) = 1$, $u_t(x,0) = 1$. (Απ. $u(x,t) = \sum_{n=1,3,5,...} \frac{4}{n\pi}\sin(n\pi x)\cos(n\pi ct) + \sum_{n=1,3,5,...} \left(\frac{2}{n\pi}\right)^2 \sin(n\pi x)\sin(n\pi ct)$).

5.1.5 Λυστε το προβλημα $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ $(0 < x < 1,\ 0 < t)$, $u(0,t) = u(1,t) = 0$ $(0 < t)$, $u(x,0) = x \cdot (1-x)$, $u_t(x,0) = 0$. (Απ. $u(x,t) = \sum_{n=1}^\infty \frac{4}{n^3\pi^3}(1-(-1)^n)\sin(n\pi x)\cos(n\pi ct)$).

5.1.6 Λυστε το προβλημα $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ $(0 < x < \pi,\ 0 < t)$, $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ $(0 < t)$, $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = 8\sin^2 x$. (Απ. $u(x,t) = \sum_{n=1,3,4,\ldots} \frac{32}{\pi c n^2 (n^2-4)} ((-1)^n - 1) \sin(nx) \sin(nct)$).

5.1.7 Λυστε το προβλημα $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ $(0 < x < \pi,\ 0 < t)$, $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ $(0 < t)$, $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = x^2$. (Απ. $u(x,t) = \sum_{n=1,3,4,\ldots} \frac{2}{\pi c(n^2-4)} (1 - (-1)^n) \sin(nx) \sin(nct)$).

***

5.2 Επιλυση με την Μεθοδο των Χαρακτηριστικων

Θα εξετασουμε τωρα την εξισωση κυματος απο διαφορετικη σκοπια: θα ψαξουμε για μια αρκετα γενικη λυση της εξισωσης $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ (αγνοωντας προς το παρον τις αρχικες και οριακες συνθηκες). Αυτη η εξισωση μπορει να γραφτει με την βοηθεια των διαφορικων τελεστων D_x και D_t ως εξης

$$D_{tt}u - c^2 D_{xx}u = 0 \Rightarrow$$

$$D_t(D_t u) - c^2 D_x(D_x u) = 0 \Rightarrow$$

$$(D_t - cD_x)(D_t + cD_x)u = 0.$$

Η τελευταια εξισωση ικανοποιειται αν $D_t u - cD_x u = 0$ η $D_t u + cD_x u = 0$, δηλ.

$$u_t - cu_x = 0 \text{ η } u_t + cu_x = 0 \tag{5.24}$$

Αυτες ομως οι *πρωτης ταξεως* ΜΔΕ μπορουν να λυθουν με την μεθοδο των χαρακτηριστικων. Η γενικη λυση της $u_t - cu_x = 0$ ειναι η $\phi(x+ct)$ και η γενικη λυση της $u_t + cu_x = 0$ ειναι η $\psi(x-ct)$, οπου ϕ και ψ ειναι αυθαιρετες συναρτησεις. Οποτε μια[2] λυση της $u_{tt} - cu_{xx} = 0$ ειναι

$$u(x,t) = \phi(x+ct) + \psi(x-ct). \tag{5.25}$$

Αυτο μπορουμε να το επιβεβαιωσουμε ευκολα και με απλη παραγωγιση: $\phi_t = \phi'(x+ct)\cdot c$ και $\phi_{tt} = \phi''(x+ct)\cdot c^2\cdot$ επισης $\phi_x = \phi'(x+ct)$ και $\phi_{xx} = \phi''(x+ct)\cdot$ αρα $\phi_{tt} = c^2\phi_{xx}$. Ομοια δειχνουμε οτι $\psi_{tt} = c^2\psi_{xx}$. Η μορφη (5.25) λεγεται ***λυση*** *d'Alembert* της εξισωσης κυματος. Τωρα θα εξετασουμε μερικα συγκεκριμενα προβληματα αρχικων συνθηκων και θα δουμε πως η (5.25) εξειδικευεται ωστε να ικανοποιουνται αυτες οι συνθηκες.

***

Ας θεωρησουμε την χορδη απειρου μηκους με μηδενικη αρχικη ταχυτητα. Δηλαδη θα λυσουμε το προβλημα

[2] Στην πραγματικοτητα ειναι η *γενικη* λυση της εξισωσης κυματος.

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \tag{5.26}$$

$$u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = 0,\ (-\infty < x < \infty)\,. \tag{5.27}$$

Σε αυτη την περιπτωση, θα πρεπει να εχουμε

$$f\left(x\right) = u\left(x,0\right) = \phi\left(x\right) + \psi\left(x\right) \tag{5.28}$$

και

$$0 = u_t\left(x,0\right) = \phi'\left(x\right)\cdot c - \psi'\left(x\right)\cdot c \Rightarrow$$

$$K = \phi\left(x\right) - \psi\left(x\right). \tag{5.29}$$

Οποτε

$$\phi\left(x\right) = \frac{f\left(x\right)+K}{2}, \quad \psi\left(x\right) = \frac{f\left(x\right)-K}{2} \tag{5.30}$$

και αρα

$$u\left(x,t\right) = \frac{1}{2}f\left(x-ct\right) + \frac{1}{2}f\left(x+ct\right). \tag{5.31}$$

Αυτη ειναι η λυση της εξισωσης κυματος για απειρη χορδη, με μηδενικη αρχικη ταχυτητα. Απο φυσικη σκοπια, βλεπουμε οτι η λυση αποτελειται απο δυο συναρτησεις $f(x+ct)$ και $f(x-ct)$ (***οδευοντα κυματα***) οι οποιες μετατοπιζονται στον χωρο διατηρωντας το σχημα της αρχικης συνθηκης αμεταβλητο· η μονη διαφορα μεταξυ τους ειναι οτι η $f(x-ct)$ μετατοπιζεται προς τα δεξια και η $f\left(x+ct\right)$ προς τα αριστερα (με ταχυτητα μεταδοσης c). Επισης παρατηρουμε οτι δεν υπαρχει αλληλεπιδραση μεταξυ των δυο κυματων.

Στο προηγουμενο εδαφιο ειχαμε λυσει το ιδιο προβλημα με χωρισμο μεταβλητων και ειχαμε δει οτι

$$u\left(x,t\right) = \int_0^\infty \left(A\left(b\right)\cos\left(bx\right) + B\left(b\right)\sin\left(bx\right)\right)\cos\left(bct\right)db \tag{5.32}$$

οπου

$$A\left(b\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\cos\left(bz\right)dz, \quad B\left(b\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(z)\sin\left(bz\right)dz. \tag{5.33}$$

Θα δειξουμε τωρα οτι οι (5.32), (5.33) ειναι ισοδυναμες με την (5.31). Αν αντικαταστησουμε την (5.33) στην (5.32), παιρνουμε

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[\left(\int_{-\infty}^\infty f(z)\cos(bz)\,dz\right)\cos(bx) + \left(\int_{-\infty}^\infty f(z)\sin(bz)\,dz\right)\sin(bx)\right]\cos(bct)\,db \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty \left(f(z)\left[\cos(bz)\cos(bx)+\sin(bz)\sin(bx)\right]\cos(bct)\right)dz\right]db \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(z)\cos\left[b(z-x)\right]\cos(bct)\,dz\right]db \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(z)\left(\cos\left[b(z+ct-x)\right]+\cos\left[b(z-ct-x)\right]\right)dz\right]db \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(z)\cos\left[b(z+ct-x)\right]dz\right]db + \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(z)\cos\left[b(z-ct-x)\right]dz\right]db
\end{aligned} \tag{5.34}$$

Εαν τωρα χρησιμοποιησουμε την αναπαρασταση

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^\infty f(z)\cos\left[b(z-x)\right]dz\right]db$$

βλεπουμε οτι η (5.34) ειναι ακριβως η $\frac{1}{2}f(x+ct)+\frac{1}{2}f(x-ct)$, δηλαδη η λυση (5.31).

Παραδειγμα 5.2.1

Το προβλημα

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \qquad (-\infty < x < \infty, \quad 0 < t < \infty) \tag{5.35}$$

$$u(x,0) = e^{-x}\sin(x),\ u_t(x,0) = 0 \qquad (-\infty < x < \infty) \tag{5.36}$$

εχει την λυση

$$u(x,t) = \frac{1}{2}e^{-(x-ct)}\sin(x-ct) + \frac{1}{2}e^{-(x+ct)}\sin(x+ct)$$

***

Παραδειγμα 5.2.2

Το προβλημα με απειρη χορδη και μη μηδενικη αρχικη ταχυτητα

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \qquad (-\infty < x < \infty, \quad 0 < t < \infty) \tag{5.37}$$

$$u(x,0) = f(x),\ u_t(x,0) = g(x) \qquad (-\infty < x < \infty) \tag{5.38}$$

ειναι λιγο πιο δυσκολο. Ουσιαστικα αυτο που αλλαζει ειναι οτι η εξισωση (5.29) γινεται

$$g(x) = u_t(x,0) = \phi'(x) \cdot c - \psi'(x) \cdot c \Rightarrow$$

$$\frac{1}{c}\int_{x_0}^{x} g(z)\,dz + K = \phi(x) - \psi(x) \tag{5.39}$$

οπου τα x_0 και K ειναι αυθαιρετες σταθερες. Λυνοντας τις (5.28) και (5.39) ως προς ϕ και ψ παιρνουμε

$$\phi(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} g(z)\,dz + \frac{K}{2} \tag{5.40}$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} g(z)\,dz - \frac{K}{2}. \tag{5.41}$$

Οποτε

$$u(x,t) = \frac{1}{2}f(x-ct) + \frac{1}{2}f(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x+ct} g(z)\,dz - \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x-ct} g(z)\,dz \tag{5.42}$$

και τελικα

$$u(x,t) = \frac{1}{2}f(x-ct) + \frac{1}{2}f(x+ct) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(z)\,dz. \tag{5.43}$$

που ειναι η γενικη λυση της εξισωσης κυματος σε απειρη χορδη.

***

Παραδειγμα 5.2.3

Το προβλημα

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \qquad (-\infty < x < \infty, \quad 0 < t < \infty) \tag{5.44}$$

$$u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = \sin(x) \qquad (-\infty < x < \infty) \tag{5.45}$$

εχει την λυση

$$u(x,t) = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \sin(z)\,dz = \frac{1}{2c}\left(\cos(x-ct) - \cos(x+ct)\right).$$

***

Μπορουμε να εφαρμοσουμε την μεθοδο d' Alembert σε προβληματα με οριακες συνθηκες (δηλ. σε προβληματα πεπερασμενης χορδης); Θα εξετασουμε μονο την περιπτωση μηδενικης αρχικης ταχυτητας. Συμφωνα με τις παρατηρησεις του εδαφιου 5.1, η λυση σε αυτη την περιπτωση παιρνει την μορφη

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{5.46}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x - \frac{n\pi c}{L}t\right) + A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x + \frac{n\pi c}{L}t\right)\right) \tag{5.47}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x - \frac{n\pi c}{L}t\right) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x + \frac{n\pi c}{L}t\right) \tag{5.48}$$

Ξερουμε οτι $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = f(x)$. Μπορουμε να πουμε αντιστοιχα οτι $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x - \frac{n\pi c}{L}t\right) = f(x-ct)$; Οχι παντα! Υπαρχουν καποια σημεια που πρεπει να προσεξουμε.

Κατ' αρχην, ορισαμε την $f(x)$ στο διαστημα $[0,L]$ και κατοπιν την επεκτειναμε στο διαστημα $[-L,L]$. Τωρα ομως θα πρεπει να δωσουμε καποια τιμη και στην $f(z)$, οπου το $z = x - ct$ για αρκετα μεγαλους χρονους t μπορει να βρισκεται εκτος του διαστηματος $[-L,L]$. Αν ομως ορισουμε την $F(x)$ να ειναι η περιοδικη επεκταση της $f(x)$ απο το διαστημα $[-L,L]$ στο διαστημα $(-\infty,\infty)$, τοτε οι A_n ειναι οι συντελεστες Fourier ***και*** της $F(x)$. Ετσι λοιπον μπορουμε να πουμε οτι

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x - \frac{n\pi c}{L}t\right) = F(x-ct) \tag{5.49}$$

οπως και

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x + \frac{n\pi c}{L}t\right) = F(x+ct) \tag{5.50}$$

και τελικα να γραψουμε την λυση ως

$$u(x,t) = \frac{1}{2}F(x-ct) + \frac{1}{2}F(x+ct). \tag{5.51}$$

Υπαρχει μια ακομη λεπτομερεια. Η $u(x,t)$ που δινεται απο την (5.51) ειναι στην πραγματικοτητα η λυση στο προβλημα μιας απειρης χορδης· απλα το προβλημα αυτο εχει διατυπωθει με τετοιο τροπο ωστε ο περιορισμος της $u(x,t)$ στο διαστημα $[0,L]$ να ειναι η λυση του αρχικου προβληματος της πεπερασμενης χορδης. Ομως, αυτο προυποθετει και οτι οι παραγωγοι $u_x(x,t)$ και $u_{xx}(x,t)$ ειναι καλα ορισμενες για ολα τα εσωτερικα σημεια του προβληματος. Στην επιλυση του πεπερασμενου προβληματος, η υπαρξη ασυνεχειων στα $x=0$ και $x=L$ δεν δημιουργουσε προβλημα, διοτι αυτα ηταν συνοριακα σημεια. Ομως στο επεκτεταμενο προβλημα τα σημεια αυτα ειναι πλεον εσωτερικα και αρα θα πρεπει να υπαρχουν οι παραγωγοι $u_x(x,t)$ και $u_{xx}(x,t)$ στα $x=0$ και $x=L$. Αυτο μπορουμε να το εξασφαλισουμε για καποιες ειδικες περιπτωσεις οριακων συνθηκων, π.χ. οταν $f(0)=f(L)=0$ και $f'(0)=f'(L)=0$.

Βλεπουμε λοιπον οτι η λυση d' Alembert εχει περιορισμενη εφαρμογη σε προβληματα πεπερασμενης χορδης. Απο φυσικη αποψη η εξηγηση ειναι η εξης: οταν η χορδη εχει πεπερασμενο μηκος, τοτε οταν τα αρχικα οδευοντα κυματα φτασουν στα ορια της χορδης *ανακλωνται* και δημιουργουν νεα κυματα. Ετσι η τελικη λυση θα ειναι συνδυασμος διαδοχικων ανακλασεων και μπορει να εχει αρκετα πολυπλοκη μορφη. Μονο σε ειδικες περιπτωσεις (κατω απο καταλληλες αρχικες / οριακες συνθηκες) μπορει η λυση να γραφει στην μορφη d' Alembert .

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

5.2.1 Να λυθει το προβλημα $u_{tt} = u_{xx}$ $(-\infty < x < \infty,\ 0 < t < \infty)$ και $u(x,0) = e^{-x^2}$, $u_t\,(x,0) = 0$ $(-\infty < x < \infty)$. (Απ. $u(x,t) = \frac{1}{2}\left[e^{-(x-t)^2} + e^{-(x+t)^2}\right]$).

5.2.2 Να λυθει το προβλημα $u_{tt} = u_{xx}$ $(-\infty < x < \infty,\ 0 < t < \infty)$ και $u(x,0) = 0$, $u_t\,(x,0) = xe^{-x^2}$ $(-\infty < x < \infty)$. (Απ. $u(x,t) = \frac{1}{4}\left[e^{-(x-t)^2} - e^{-(x+t)^2}\right]$).

5.2.3 Να λυθει το προβλημα $u_{tt} = u_{xx}$ $(-\infty < x < \infty,\ 0 < t < \infty)$ και $u(x,0) = 0$, $u_t\,(x,0) = 1$ $(-\infty < x < \infty)$. (Απ. $u(x,t) = t$).

5.2.4 Να λυθει το προβλημα $u_{tt} = u_{xx}$ $(-\infty < x < \infty,\ 0 < t < \infty)$ και $u(x,0) = \sin x$, $u_t\,(x,0) = x^2$ $(-\infty < x < \infty)$. (Απ. $u(x,t) = \sin(x)\cos(ct) + x^2 t + \frac{1}{3}c^2 t^3$).

5.2.5 Να λυθει το προβλημα $u_{tt} = u_{xx}$ $(-\infty < x < \infty,\ 0 < t < \infty)$ και $u(x,0) = x^3$, $u_t\,(x,0) = x$ $(-\infty < x < \infty)$. (Απ. $u(x,t) = x^3 + 3c^2 x t^2 + xt$).

5.2.6 Να λυθει το προβλημα $u_{tt} = u_{xx}$ $(-\infty < x < \infty,\ 0 < t < \infty)$ και $u(x,0) = \cos x$, $u_t\,(x,0) = 1/e$ $(-\infty < x < \infty)$. (Απ. $u(x,t) = \cos(x)\cos(ct) + \frac{t}{e}$).

5.2.7 Να λυθει το προβλημα $u_{tt} = u_{xx}$ $(-\infty < x < \infty,\ 0 < t < \infty)$ και $u(x,0) = \log\frac{1}{1+x^2}$, $u_t\,(x,0) = 2$ $(-\infty < x < \infty)$. (Απ. $u(x,t) = 2t +\ \log\left(\sqrt{1+x^2+2cxt+c^2t^2}\right) +\ \log\left(\sqrt{1+x^2-2cxt+c^2t^2}\right)$).

5.2.8 Να λυθει το προβλημα $u_{tt} = u_{xx}$ $(0 < x < \infty,\ 0 < t < \infty)$, $u(x,0) = xe^{-x^2}$, $u_t\,(x,0) = 0$ $(-\infty < x < \infty)$ και $u(0,t) = 0$ $(0 < t < \infty)$.

5.3 Μη Ομογενης Εξισωση Κυματος

Κεφάλαιο 6

ΜΔΕ Δευτερης Ταξης: Εξισωσεις Ισορροπιας

6.1 Εισαγωγικες Παρατηρησεις

Μεχρι τωρα εχουμε μελετησει ΜΔΕ με τις ανεξαρτητες μεταβλητες x (χωρος) και t (χρονος) και την αγνωστη συναρτηση $u(x,t)$. Με αλλα λογια μελετησαμε την χρονικη μεταβολη διαδικασιων οι οποιες εξελισσονται σε *μια* χωρικη διασταση. Μπορουμε ευκολα να γενικευσουμε σε περισσοτερες απο μια χωρικες διαστασεις. Π.χ. η μεταδοση θερμοτητας σε δυο χωρικες διαστασεις x και y περιγραφεται απο την εξισωση

$$w_t = c^2 \cdot (w_{xx} + w_{yy}) \tag{6.1}$$

οπου η $w(x,y,t)$ ειναι μια συναρτηση *τριων* μεταβλητων.

Οπως αναφεραμε στο Κεφαλαιο 1, θα ασχοληθουμε μονο με ΜΔΕ δυο ανεξαρτητων μεταβλητων. Αντι λοιπον να επιλυσουμε την (6.1) στο παρον Κεφαλαιο θα εξετασουμε ενα απλουστερο προβλημα: την συμπεριφορα της λυσης οταν ο χρονος τεινει στο απειρο.

Για φυσικους λογους (εξισορροπηση της θερμοκρασιας) περιμενουμε οτι καθως ο χρονος t τεινει στο απειρο, η λυση $w(x,y,t)$ θα καταληξει σε μια κατασταση *ισορροπιας*. Αυτο μπορει να γραφει ως εξης

$$u(x,y) = \lim_{t\to\infty} w(x,y,t). \tag{6.2}$$

Επειδη (εξ ορισμου) στην κατασταση ισορροπιας δεν υπαρχει χρονικη μεταβολη, περιμενουμε να ισχυει και το εξης:

$$\lim_{t\to\infty} w_t(x,y,t) = D_t\left(u\left(x,y\right)\right) = 0. \tag{6.3}$$

Οποτε η (6.1) και η (6.3) δινουν την

$$u_{xx} + u_{yy} = 0. \tag{6.4}$$

Η εξισωση (6.4) ειναι η εξισωση *Laplace* και χρησιμοποιειται για να περιγραφει την κατασταση *ισορροπιας* σε διαφορα ***στατικα*** προβληματα (θερμοτητας, ηλεκτρισμου κτλ.). Το υπολοιπο του παροντος κεφαλαιου ειναι αφιερωμενο σε διαφορους τροπους επιλυσης της εξισωσης Laplace .

6.2 Η Εξισωση Laplace σε Ορθογωνιο

Στο παρον εδαφιο θα μελετησουμε το βασικο προβλημα $u_{xx} + u_{yy} = 0$ σε ενα ορθογωνιο τοπο $\{(x, y)$: $0 \leq x \leq L$, $0 \leq y \leq M\}$ με διαφορες οριακες συνθηκες. Σημειωνουμε οτι τα προβληματα οριακων τιμων χωριζονται στις εξης κατηγοριες:

1. Προβληματα *Dirichlet* : οι οριακες συνθηκες καθοριζουν την $u\,(x, y)$.

2. Προβληματα *Neumann* : οι οριακες συνθηκες καθοριζουν παραγωγους της $u\,(x, y)$ (π.χ. τις u_x, u_y).

3. Μικτα προβληματα *Dirichlet / Neumann* : με μικτες οριακες συνθηκες.

6.2.1 Προβλημα Dirichlet

Πιθανον το απλουστερο προβλημα Dirichlet ειναι το εξης:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad (0 < x < L \text{ και } 0 < y < M) \tag{6.5}$$

$$u\,(x, 0) = f(x) \qquad (0 < x < L) \tag{6.6}$$

$$u(x, M) = 0 \qquad (0 < x < L) \tag{6.7}$$

$$u(0, y) = 0 \qquad (0 < y < M) \tag{6.8}$$

$$u\,(L, y) = 0 \qquad (0 < y < M)\,. \tag{6.9}$$

Θα λυσουμε το προβλημα με χωρισμο μεταβλητων. Υποθετουμε οτι $u\,(x, y) = X\,(x)\,Y\,(y)$. Τοτε η (6.5) γινεται

$$X''Y + XY'' = 0 \Rightarrow \frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -b^2. \tag{6.10}$$

Θα εξηγησουμε την επιλογη $-b^2$ λιγο αργοτερα. Απο την (6.10) παιρνουμε

$$X'' + b^2 X = 0 \tag{6.11}$$

$$Y'' - b^2 Y = 0. \tag{6.12}$$

Απο τις (6.8), (6.9) προκυπτει οτι οι λυσεις της (6.11) εχουν την μορφη

$$X_n\,(x) = \sin\,(b_n x) \tag{6.13}$$

με $b_n = \frac{n\pi}{L}$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, ...)$. Οι λυσεις της (6.12) εχουν την μορφη $Y_n(y) = C_n e^{b_n y} + D_n e^{-b_n y}$, αλλα μπορουν να γραφουν ισοδυναμα στην μορφη

$$Y_n(y) = E_n \sinh(b_n(y + F_n)). \tag{6.14}$$

Απο την (6.7) προκυπτει οτι $F_n = -M$, οποτε τελικα

$$Y_n(y) = E_n \sinh(b_n(y - M)) \tag{6.15}$$

και

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{L}(y - M)\right). \tag{6.16}$$

Πρεπει ακομη να ικανοποιησουμε την (6.6). Εδω φαινεται ο λογος για τον οποιο πηραμε την αρχικη σταθερα να ειναι $-b^2$ (δηλ. αρνητικη): ετσι μπορουμε να αναπτυξουμε την $f(x)$ σε σειρα Fourier:

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sinh\left(-\frac{n\pi M}{L}\right). \tag{6.17}$$

Αρα

$$E_n = \frac{-2}{L \sinh\left(\frac{n\pi M}{L}\right)} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \tag{6.18}$$

Η (6.16) και (6.18) δινουν την λυση του προβληματος (6.5)–(6.9).

Παραδειγμα 6.2.1

Θα λυσουμε το προβλημα (6.5)–(6.9) με $L = M = \pi$ και $f(x) = \sin^2(x)$. Τοτε

$$E_n = \frac{-2}{\pi \sinh(n\pi)} \int_0^{\pi} \sin^2(x) \sin(nx)\, dx = \begin{cases} -\frac{4}{\pi \sinh \pi n} \frac{\cos(\pi n) - 1}{n(n^2 - 4)} & n \neq 2 \\ 0 & n = 2 \end{cases} \tag{6.19}$$

Οποτε

$$u(x,y) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1,3,5,...} \frac{1}{\pi \sinh(n\pi)} \cdot \frac{1}{n(n^2 - 4)} \cdot \sin(nx) \sinh(n(y - \pi)). \tag{6.20}$$

***

Το παρακατω προβλημα ειναι μια πιο συνθετη εκδοχη του (6.5)–(6.9) :

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{6.21}$$

$$u(x,0) = f(x) \tag{6.22}$$

$$u(x,M) = g(x) \tag{6.23}$$

$$u(0,y) = h(x) \tag{6.24}$$

$$u(L,y) = k(x) \tag{6.25}$$

Για να βρουμε την $u\left(x,y\right)$ που επιλυει το (6.21)–(6.25) χρησιμοποιουμε την αρχη της υπερθεσης των λυσεων. Με αλλα λογια, θεωρουμε οτι $u\left(x,y\right)= u_1\left(x,y\right)+ u_2\left(x,y\right)+ u_3\left(x,y\right)+ u_4\left(x,y\right)$, οπου:

1. Η $u_1\left(x,y\right)$ ικανοποιει την $u_{xx}+u_{yy}=0$ και $u(x,0)=f\left(x\right)$, $u\left(x,M\right)=u\left(0,y\right)=u\left(L,y\right)=0$.
2. Η $u_2\left(x,y\right)$ ικανοποιει την $u_{xx}+u_{yy}=0$ και $u(x,L)=g\left(x\right)$, $u\left(x,0\right)=u\left(0,y\right)=u\left(L,y\right)=0$.
3. Η $u_3\left(x,y\right)$ ικανοποιει την $u_{xx}+u_{yy}=0$ και $u(0,y)=h\left(x\right)$, $u\left(x,0\right)=u\left(x,M\right)=u\left(L,y\right)=0$.
4. Η $u_4\left(x,y\right)$ ικανοποιει την $u_{xx}+u_{yy}=0$ και $u(L,y)=k\left(x\right)$, $u\left(x,0\right)=u\left(x,M\right)=u\left(0,y\right)=0$.

Καθε ενα απο τα παραπανω υποπροβληματα λυνεται οπως κατι το (6.5)–(6.9). Ετσι βρισκουμε τις u_1, u_2, u_3, u_4 και απο αυτες την $u\left(x,y\right)$.

6.2.2 Προβλημα Neumann και Μικτο Προβλημα Dirichlet-Neumann

Ενα απλο προβλημα Neumann ειναι το εξης:

$$u_{xx}+u_{yy}=0 \qquad (0<x<L \text{ και } 0<y<M) \tag{6.26}$$

$$u_y\left(x,0\right)=f(x) \qquad (0<x<L) \tag{6.27}$$

$$u_y(x,M)=0 \qquad (0<x<L) \tag{6.28}$$

$$u_x(0,y)=0 \qquad (0<y<M) \tag{6.29}$$

$$u_x\left(L,y\right)=0 \qquad (0<y<M)\,. \tag{6.30}$$

Κατα τα γνωστα χωριζουμε τις μεταβλητες και προκυπτουν οι εξισωσεις

$$X''+b^2X=0 \tag{6.31}$$

$$Y''-b^2Y=0. \tag{6.32}$$

Για την X θα ισχυουν επισης οι οριακες συνθηκες $X'\left(0\right)=X'\left(L\right)=0$. Αρα οι μονες αποδεκτες λυσεις ειναι της μορφης $X_n\left(x\right)=\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$. Για $n=1,2,..$ μπορουμε να γραψουμε τις λυσεις για την Y στην μορφη $Y_n\left(y\right)=E_n\sinh\left(\frac{n\pi}{L}y\right)+ F_n\cosh\left(\frac{n\pi}{L}y\right)$. Οποτε μια γενικη λυση ειναι η

$$\begin{aligned} u\left(x,y\right) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(E_n\sinh\left(\frac{n\pi}{L}y\right)+F_n\cosh\left(\frac{n\pi}{L}y\right)\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \\ &= E_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(E_n\sinh\left(\frac{n\pi}{L}y\right)+F_n\cosh\left(\frac{n\pi}{L}y\right)\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right). \end{aligned} \tag{6.33}$$

Τωρα οι (6.27), (6.28) μας δινουν

$$f(x) = u_y(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{L} F_n \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \tag{6.34}$$

$$0 = u_y(x,M) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi}{L} \left(E_n \sinh\left(\frac{n\pi}{L} M\right) + F_n \cosh\left(\frac{n\pi}{L} M\right)\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \tag{6.35}$$

Απο την (6.34) συμπεραινουμε οτι τα $\frac{n\pi}{L} F_n$ ειναι οι συντελεστες της συνημιτονικης σειρας της $f(x)$, η οποια ομως πρεπει να εχει μηδενικο συντελεστη του $\cos\left(\frac{0\pi}{L} x\right)$. Δηλαδη, για να εχει λυση το προβλημα, πρεπει να ισχυει η *συνθηκη συμβατοτητας*

$$\int_0^L f(x)\, dx = 0. \tag{6.36}$$

Αν ισχυει η (6.36), τοτε οι συντελεστες $F_1, F_2, \ldots$ προσδιοριζονται ως εξης:

$$F_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx \tag{6.37}$$

και οι E_n προσδιοριζονται λυνοντας για $n = 1, 2, \ldots$ την εξισωση (6.35) που γινεται

$$E_n \sinh\left(\frac{n\pi}{L} M\right) + F_n \cosh\left(\frac{n\pi}{L} M\right) = 0. \tag{6.38}$$

Ο συντελεστης E_0 μενει απροσδιοριστος, το οποιο ειναι λογικο, δεδομενου οτι ολες οι συνοριακες συνθηκες προσδιοριζουν μονο την παραγωγο.

Ενα μικτο προβλημα Dirchlet-Neumann ειναι το εξης:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad (0 < x < L \text{ και } 0 < y < M) \tag{6.39}$$

$$u(x,0) = f(x) \qquad (0 < x < L) \tag{6.40}$$

$$u(x,M) = 0 \qquad (0 < x < L) \tag{6.41}$$

$$u_x(0,y) = 0 \qquad (0 < y < M) \tag{6.42}$$

$$u_x(L,y) = 0 \qquad (0 < y < M). \tag{6.43}$$

Κατα τα γνωστα χωριζουμε τις μεταβλητες και προκυπτουν οι εξισωσεις

$$X'' + b^2 X = 0$$

$$Y'' - b^2 Y = 0.$$

Για την X θα ισχυουν επισης οι οριακες συνθηκες $X'(0) = X'(L) = 0$. Αρα οι μονες αποδεκτες λυσεις ειναι της μορφης $X_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$. Για $n = 1, 2, ..$ μπορουμε να γραψουμε τις λυσεις για την Y

στην μορφη $Y_n(y) = E_n \sinh\left(\frac{n\pi}{L}(y+F_n)\right)$ και, επειδη πρεπει να εχουμε $Y_n(M) = 0$, προκυπτει οτι $Y_n(y) = E_n \sinh\left(\frac{n\pi}{L}(y-M)\right)$. Τελος, ειδικα για $n=0$ εχουμε $Y_n(y) = E_0 \frac{M-y}{M}$. Οποτε τελικα μια λυση ειναι και η

$$u(x,y) = E_0 \frac{M-y}{M} + \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sinh\left(\frac{n\pi}{L}(y-M)\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right). \tag{6.44}$$

Τελος, για να ικανοποιησουμε την (6.40):

$$f(x) = u(x,0) = E_0 - \sum_{n=1}^{\infty} E_n \sinh\left(\frac{n\pi}{L}M\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{6.45}$$

οποτε

$$E_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx \tag{6.46}$$

$$E_n = -\frac{2}{L\sinh\left(\frac{n\pi}{L}M\right)}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \qquad (\text{για } n=0,1,2,...). \tag{6.47}$$

Η λυση του (6.39)–(6.43) μπορει να δοθει απλουστερα ως

$$u(x,y) = \frac{A_0}{2}\left(\frac{M-y}{M}\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{\sinh\left(\frac{n\pi M}{L}\right)}\sinh\left(\frac{n\pi}{L}(M-y)\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \qquad (\text{για } n=0,1,2,...).$$

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

Λυστε τα παρακατω προβληματα.

6.2.1 $u_{xx} + u_{yy} = 0$ ($0 < x < \pi$ και $0 < y < \pi$), $u(x,0) = 0$ ($0 < x < \pi$), $u(x,\pi) = 0$ ($0 < x < \pi$), $u(0,y) = g(y)$ ($0 < y < \pi$), $u(\pi,y) = 0$ ($0 < y < \pi$).

(Απ. $u(x,y) = -4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2\cdot(-1)^n}{n^3\sinh(n\pi)}\sinh(n(\pi-x))\sin(ny)$).

6.2.2 $u_{xx} + u_{yy} = 0$ ($0 < x < \pi$ και $0 < y < \pi$), $u(x,0) = x^2(\pi - x)$ ($0 < x < \pi$), $u(x,\pi) = 0$ ($0 < x < \pi$), $u(0,y) = 0$ ($0 < y < \pi$), $u(\pi,y) = 0$ ($0 < y < \pi$).

(Απ. $u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{\sinh(n\pi)}\sinh(n(\pi-x))\sin(ny)$ με $A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(y)\sin(ny)\,dy$).

6.2.3 $u_{xx} + u_{yy} = 0$ ($0 < x < \pi$ και $0 < y < \pi$), $u(x,0) = x^2$ ($0 < x < \pi$), $u(x,\pi) = x^2$ ($0 < x < \pi$), $u(0,y) = 0$ ($0 < y < \pi$), $u(\pi,y) = 0$ ($0 < y < \pi$).

(Απ. $u(x,y) = \pi x - \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3\cosh\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)}\cdot\cosh\left((2n-1)\left(\frac{\pi}{2}-y\right)\right)\cdot\sin((2n-1)x)$).

6.2.4 $u_{xx}+u_{yy}=0$ $(0<x<\pi$ και $0<y<\pi)$, $u(x,0)=x^2$ $(0<x<\pi)$, $u(x,\pi)=0$ $(0<x<\pi)$, $u_x(0,y)=0$ $(0<y<\pi)$, $u_x(\pi,y)=0$ $(0<y<\pi)$.

(Απ. $u(x,y)=\frac{1}{3}\pi(\pi-y)+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2\sinh(n\pi)}\sinh(n(\pi-y))\cos(nx)$).

6.2.5 $u_{xx}+u_{yy}=0$ $(0<x<1$ και $0<y<1)$, $u(x,0)=(1-x)^2$ $(0<x<1)$, $u(x,1)=0$ $(0<x<1)$, $u_x(0,y)=0$ $(0<y<1)$, $u(1,y)=0$ $(0<y<1)$.

(Απ. $u(x,y)=4\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sinh\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi(1-y)\right]\cos\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x\right]$ με $A_n=\frac{1}{\pi^2\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}+\frac{(-1)^n}{\pi^3\left(n-\frac{1}{2}\right)^3}$).

6.2.6 $u_{xx}+u_{yy}=0$ $(0<x<\pi$ και $0<y<\pi)$, $u_y(x,0)=f(x)$ $(0<x<\pi)$, $u(x,\pi)=0$ $(0<x<\pi)$, $u(0,y)=0$ $(0<y<\pi)$, $u_x(\pi,y)=0$ $(0<y<\pi)$.

(Απ. $u(x,y)=-\sum_{n=1}^{\infty}A_n\frac{1}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\cosh\left(\frac{2n-1}{2}\pi\right)}\cdot\cosh((2n-1)(\pi-y))\cdot\sin\left(\frac{2n-1}{2}x\right)$ με $C_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}g(y)\sin(ny)$

6.3 Η Εξισωση Laplace σε Απειρους Τοπους

Τωρα θα λυσουμε την εξισωση Laplace στο ημιεπιπεδο. Δηλαδη θα λυσουμε το εξης προβλημα:

$$u_{xx}+u_{yy}=0 \qquad (-\infty<x<\infty,\quad 0<y<\infty) \tag{6.48}$$

$$u(x,0)=f(x) \qquad (-\infty<x<\infty)\,. \tag{6.49}$$

Με τον χωρισμο μεταβλητων καταληγουμε και παλι στις εξισωσεις

$$X''+b^2X=0 \tag{6.50}$$

$$Y''-b^2Y=0. \tag{6.51}$$

Οι λυσεις της (6.50) εχουν την μορφη $\cos(bx)$ και $\sin(bx)$ αλλα χωρις περιορισμο στις τιμες του b. Οι λυσεις της (6.51) εχουν την μορφη e^{by}, e^{-by}, αλλα οι λυσεις e^{by} δεν γινονται δεκτες γιατι δινουν μη φραγμενη $u(x,y)$. Οποτε τελικα (λογω υπερθεσης) μια λυση της (6.48) θα ειναι και η

$$u(x,y)=\int_0^{\infty}e^{-by}\left(A(b)\cos(bx)+B(b)\sin(bx)\right)db. \tag{6.52}$$

Αν θεσουμε στην (6.52) $y=0$ παιρνουμε

$$f(x)=u(x,0)=\int_0^{\infty}\left(A(b)\cos(bx)+B(b)\sin(bx)\right)db. \tag{6.53}$$

Αρα

$$A(b)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos(bx)\,dx, \qquad B(b)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin(bx)\,dx \tag{6.54}$$

Η (6.52) και (6.54) δινουν την λυση του προβληματος (6.48)–(6.49). Μπορουμε ομως να γραψουμε την λυση και σε μια αλλη μορφη, η οποια δειχνει πιο καθαρα την φυσικη σημασια της εξισωσης Laplace . Αντικαθιστωντας την (6.54) στην (6.52) παιρνουμε

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(\int_{-\infty}^\infty e^{-by} f(z)\cos(b(z-x))\,dz\right) db \tag{6.55}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(z)\left(\int_0^\infty e^{-by}\cos(b(z-x))\,db\right) dz. \tag{6.56}$$

Τωρα

$$\int_0^\infty e^{-by}\cos(b(z-x))\,db = \frac{1}{y^2+(z-x)^2}\left(-ye^{-by}\cos b(z-x) - (x-z)e^{-by}\sin b(z-x)\right)_{b=0}^\infty$$

$$= \frac{y}{y^2+(z-x)^2}.$$

Οποτε

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{yf(z)}{y^2+(z-x)^2}dz. \tag{6.57}$$

Αυτος ειναι ο *τυπος του Poisson για το ημιεπιπεδο* (μας ειναι γνωστος και απο τον λογισμο των μιγαδικων συναρτησεων) και δινει μια εναλλακτικη μορφη της λυσης της εξισωσης Laplace με οριακη συνθηκη στον αξονα των x. Η ερμηνεια της (6.57) ειναι οτι η τιμη της $u(x,y)$ στο σημειο (x,y) ειναι ο μεσος ορος των τιμων της $u(z,0) = f(z)$ (δηλ. των τιμων πανω στον αξονα των x) σταθμισμενος κατα το αντιστροφο του τετραγωνου της αποστασης του σημειου $(z,0)$ απο το σημειο (x,y) (δηλ. κατα $\frac{1}{y^2+(z-x)^2}$).

Παραδειγμα 6.3.1

Η λυση του

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad (-\infty < x < \infty, \quad 0 < y < \infty,)$$

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases} \qquad (-\infty < x < \infty)$$

δινεται απο τον τυπο του Poisson :

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{yf(z)}{y^2+(x-z)^2}dz = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{y}{y^2+(x-z)^2}dz$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\tan^{-1}\frac{z-x}{y}\right)_{z=0}^\infty = \frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right).$$

***

Θα λυσουμε τωρα την εξισωση Laplace σε μια *ημι-λωριδα*:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad (0 < x < 1, 0 < y < \infty)$$

$$u(x,0) = f(x) \qquad (0 < x < 1)$$

$$u(0,y) = u(1,y) = 0 \qquad (0 < y < \infty)$$

Με χωρισμο μεταβλητων παιρνουμε οτι οι λυσεις εχουν την μορφη $u(x,y) = X(x)\, Y(y)$ και οτι $X(x) = \sin(n\pi x)$, $Y(y) = e^{-n\pi y}$ (οι λυσεις $Y(y) = e^{n\pi y}$ απορριπτονται γιατι δεν εινα φραγμενες). Οποτε

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-n\pi y} \sin(n\pi x)$$

και

$$A_n = 2\int_0^1 f(x) \sin(n\pi x)\, dx.$$

Π.χ. αν $f(x) = 1$, τοτε $A_n = \frac{2}{\pi} \frac{1-\cos n\pi}{n}$ και

$$u(x,y) = \frac{4}{\pi}\left(e^{-y}\sin(\pi x) + \frac{1}{3} e^{-3y} \sin(3\pi x) + \frac{1}{5} e^{-5y} \sin(5\pi x) + ... \right).$$

Μπορειτε να δειξετε οτι η λυση (για $f(x) = 1$) δινεται και απο την σχεση $u(x,y) = \frac{2}{\pi} \tan^{-1}\left(\frac{\sin(\pi x)}{\sinh(y)}\right)$;

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

Λυστε το προβλημα $u_{xx} + u_{yy} = 0$ (για $-\infty < x < \infty$ και $0 < y < \infty$,) και $u(x,0) = f(x)$ για τις παρακατω συναρτησεις:

6.3.1 $f(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$ (Απ. $u(x,y) = \frac{2}{\pi} \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$).

6.3.2 $f(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ 1 & -1 < x < 1 \\ 0 & 1 < x \end{cases}$ (Απ. $u(x,y) = \frac{1}{\pi} \tan^{-1}\left(\frac{1+x}{y}\right) + \frac{1}{\pi} \tan^{-1}\left(\frac{1-x}{y}\right)$).

6.3.3 Λυστε την εξισωση Laplace σε μια *λωριδα*:

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad (-\infty < x < \infty, \quad 0 < y < 1)$$

$$u(x,0) = f(x) \qquad (-\infty < x < \infty)$$

$$u(x,1) = 0 \qquad (-\infty < x < \infty)$$

και δειξτε οτι ισχυει

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{b=0}^{\infty}\int_{z=-\infty}^{\infty} f(z)\,\frac{\sinh(by)}{\sinh(ba)}\cos(bz-bx)\,dzdb.$$

6.4 Η Εξισωση Laplace σε Πολικες Συντεταγμενες

Σε πολλες περιπτωσεις απαιτειται να λυθει η εξισωση Laplace σε ενα τοπο με καμπυλογραμμο συνορο (η απλουστερη περιπτωση ειναι η επιλυση της εξισωσης σε ενα *δισκο*). Σε τετοιες περιπτωσεις ειναι φυσιολογικη η χρηση πολικων συντεταγμενων. Υπενθυμιζουμε οτι η Λαπλασιανη γραφεται σε πολικες συντεταγμενες ως εξης:

$$u_{xx}+u_{yy} = u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{rr}, \tag{6.58}$$

οποτε η εξισωση Laplace σε πολικες συντεταγμενες γινεται

$$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{rr}=0. \tag{6.59}$$

6.4.1 Προβλημα Dirichlet στο Εσωτερικο του Κυκλου

Το απλουστερο προβλημα αυτου του τυπου ειναι το εξης:

$$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0 \qquad (0\le r<1,\quad 0\le\theta\le 2\pi) \tag{6.60}$$

$$u(1,\theta)=f(\theta) \qquad (0\le\theta\le 2\pi). \tag{6.61}$$

Θα χρησιμοποιησουμε και παλι την μεθοδο χωρισμου των μεταβλητων. Θετουμε $u(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$ οποτε

$$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0 \Rightarrow$$

$$R''\Theta+\frac{1}{r}R'\Theta+\frac{1}{r^2}R\Theta''=0 \Rightarrow$$

$$\frac{R''}{R}+\frac{1}{r}\frac{R'}{R}+\frac{1}{r^2}\frac{\Theta''}{\Theta}=0 \Rightarrow$$

$$r^2\frac{R''}{R}+r\frac{R'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta}=a. \tag{6.62}$$

Απο την (6.62) βλεπουμε οτι

$$\Theta''-a\Theta=0 \tag{6.63}$$

$$r^2R''+rR'-aR=0. \tag{6.64}$$

Παρατηρειστε οτι το Θ πρεπει να ειναι περιοδικη με περιοδο 2π. Ας εξετασουμε τις πιθανες τιμες που μπορει να παρει το a.

1. Αν το a ειναι θετικο, τοτε εχουμε $\Theta(\theta) = Ce^{a\theta} + De^{-a\theta}$ και δεν ικανοποιειται η απαιτηση της περιοδικοτητας.

2. Αν το a ειναι μηδεν, τοτε εχουμε $\Theta(\theta) = C\theta + D$ και η απαιτηση της περιοδικοτητας μπορει να ινκανοποιηθει μονο αν $C = 0$. Τοτε ομως παιρνουμε και $R(r) = A + B\log r$ και $R(0)$ δεν ειναι καλως ορισμενο, εκτος αν $B = 0$. Οποτε για $a = 0$ η μονη αποδεκτη λυση ειναι η σταθερη $u(x,t) = AD$.

3. Τελος, αν το a ειναι θετικο, τοτε εχουμε

$$\Theta(\theta) = C\cos\left(\sqrt{a}\theta\right) + D\sin\left(\sqrt{a}\theta\right) \tag{6.65}$$

και η απαιτηση της περιοδικοτητας μπορει να ικανοποιηθει για $\sqrt{a} = b_n = n$. Επισης

$$R(r) = Ar^{\sqrt{a}} + Br^{-\sqrt{a}} = Ar^n + Br^{-n} \tag{6.66}$$

και, για να ειναι καλως ορισμενο το $R(0)$ πρεπει να εχουμε $B = 0$.

Τελικα λοιπον προκυπτει απο τα παραπανω οτι μια λυση της (6.60) εχει την μορφη

$$u(r,\theta) = \frac{C_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cdot \left(C_n\cos(n\theta) + D_n\sin(n\theta)\right). \tag{6.67}$$

Ειναι τωρα φανερο οτι για να ικανοποιειται και η (6.61) αρκει να θεσουμε

$$f(\theta) = u(1,\theta) = \frac{C_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n\cos(n\theta) + D_n\sin(n\theta)\right) \tag{6.68}$$

και να επιλεξουμε τα C_n, D_n να ειναι οι συντελεστες της σειρας Laplace της $f(\theta)$, δηλ.

$$C_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos(n\theta)\,d\theta, \quad D_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin(n\theta)\,d\theta \tag{6.69}$$

Μπορουμε επισης να εκφρασουμε την λυση $u(r,\theta)$ με τον *τυπο του Poisson για τον μοναδιαιο κυκλο*. Αντικαθιστωντας τις (6.69) στην (6.67) παιρνουμε

$$
\begin{aligned}
u(r,\theta) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\,d\theta + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cdot \left(\int_0^{2\pi} f(\theta)\left(\cos(n\phi)\cos(n\theta)+\sin(n\phi)\sin(n\theta)\right)d\phi\right)\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)\cdot\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty} r^n\cdot\cos\left[n\cdot(\theta-\phi)\right]\right]d\phi\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)\cdot\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(r^n e^{in\cdot(\theta-\phi)}+r^n e^{-in\cdot(\theta-\phi)}\right)\right]d\phi\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)\cdot\left[1+\sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{in\cdot(\theta-\phi)}+\sum_{n=1}^{\infty} r^n e^{-in\cdot(\theta-\phi)}\right]d\phi\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)\cdot\left[1+\frac{re^{i\cdot(\theta-\phi)}}{1-re^{i\cdot(\theta-\phi)}}+\frac{re^{-i\cdot(\theta-\phi)}}{1-re^{-i\cdot(\theta-\phi)}}\right]d\phi\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi)\cdot\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\phi)+r^2}\cdot d\phi \qquad (6.70)
\end{aligned}
$$

Η ερμηνεια της (6.70) ειναι η εξης: η τιμη της $u(r,\theta)$ στο σημειο (r,θ) ειναι ο μεσος ορος των τιμων της $u(1,\phi)=f(\phi)$ (δηλ. των τιμων πανω στον μοναδιαιο κυκλο) σταθμισμενων κατα το αντιστροφο του τετραγωνου της αποστασης του σημειου $(1,\phi)$ απο το σημειο (r,θ) (δηλ. κατα $\frac{1}{1-2r\cos(\theta-\phi)+r^2}$).

Παραδειγμα 6.4.1

Για να λυσουμε το προβλημα:

$$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0 \qquad (0\le r<1,\quad 0\le\theta\le 2\pi) \tag{6.71}$$

$$u(1,\theta)=f(\theta)=\begin{cases}1 & 0<\theta<\pi\\ 0 & \pi<\theta<2\pi\end{cases} \tag{6.72}$$

Μπορουμε να χρησιμοποιησουμε χωρισμο μεταβλητων για να δειξουμε οτι μια λυση της (6.71) θα ειναι:

$$u(r,\theta)=\frac{C_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} r^n\cdot\left(C_n\cos(n\theta)+D_n\sin(n\theta)\right). \tag{6.73}$$

και

$$C_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos(n\theta)\,d\theta=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\theta)\,d\theta=\begin{cases}1 & \text{για } n=0\\ 0 & \text{για } n>0\end{cases}, \tag{6.74}$$

$$D_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin(n\theta)\,d\theta=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(n\theta)\,d\theta=\frac{1}{n\pi}\left(1-\cos(n\pi)\right). \tag{6.75}$$

Οποτε

$$u\left(r,\theta\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\left(r\sin\left(\theta\right)+\frac{1}{3}r^{3}\sin\left(3\theta\right)+\frac{1}{5}r^{5}\sin\left(5\theta\right)+...\right) \tag{6.76}$$

Αν χρησιμοποιησουμε τον τυπο του Poisson παιρνουμε

$$\begin{aligned} u\left(r,\theta\right) &= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} f\left(\phi\right)\cdot\frac{1-r^{2}}{1-2r\cos\left(\theta-\phi\right)+r^{2}}d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{1-r^{2}}{1-2r\cos\left(\theta-\phi\right)+r^{2}}d\phi \\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\tan^{-1}\left(\frac{2r\sin\left(\theta\right)}{1-r^{2}}\right). \end{aligned} \tag{6.77}$$

Μπορειτε να αποδειξετε οτι οι δυο μορφες της λυσης ειναι ισοδυναμες; Αρκει να δειξετε οτι

$$\left(r\sin\left(\theta\right)+\frac{1}{3}r^{3}\sin\left(3\theta\right)+\frac{1}{5}r^{5}\sin\left(5\theta\right)+...\right)=\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2r\sin\left(\theta\right)}{1-r^{2}}\right). \tag{6.78}$$

***

6.4.2 Αλλα Προβληματα Dirichlet

Μπορουμε επισης να διατυπωσουμε το προβλημα Dirichlet για το *εξωτερικο* του μοναδιαιου κυκλου:

$$u_{rr}+\frac{1}{r}u_{r}+\frac{1}{r^{2}}u_{\theta\theta}=0 \qquad (1<r,\quad 0\leq\theta\leq 2\pi) \tag{6.79}$$

$$u\left(1,\theta\right)=f(\theta) \qquad \left(0\leq\theta\leq 2\pi\right). \tag{6.80}$$

Παραλειπουμε τις λεπτομερειες (οι οποιες ειναι παρομοιες με αυτες για το εσωτερικο του κυκλου)· τελικα προκυπτει οτι η λυση μπορει να δοθει στην μορφη

$$u\left(r,\theta\right)=\frac{C_{0}}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}r^{-n}\cdot\left(C_{n}\cos\left(n\theta\right)+D_{n}\sin\left(n\theta\right)\right). \tag{6.81}$$

$$C_{n}=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}f\left(\theta\right)\cos\left(n\theta\right)d\theta,\quad D_{n}=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}f\left(\theta\right)\sin\left(n\theta\right)d\theta \tag{6.82}$$

η απο τον εξης τυπο Poisson :

$$u\left(r,\theta\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}f\left(\phi\right)\cdot\frac{r^{2}-1}{1-2r\cos\left(\theta-\phi\right)+r^{2}}\cdot d\phi. \tag{6.83}$$

Μια αλλη παραλλαγη ειναι το προβλημα Dirichlet σε *δακτυλιο*:

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0 \qquad (r_1 < r < r_2, \quad 0 \le \theta \le 2\pi) \tag{6.84}$$

$$u(r_1, \theta) = f_1(\theta) \qquad (0 \le \theta \le 2\pi) \tag{6.85}$$

$$u(r_2, \theta) = f_2(\theta) \qquad (0 \le \theta \le 2\pi). \tag{6.86}$$

Ο χωρισμος μεταβλητων δινει τις ιδιες οικοεγνειες λυσεων οπως και στο Εδαφιο 6.5.1. Επειδη τωρα το $r = 0$ δεν περιλαμβανεται στον τοπο οπου πρεπει να ισχυει η εξισωση Laplace , προκυπτει οτι λυσεις της μορφης $A + B\ln(r)$ ειναι αποδεκτες, οπως επισης και λυσεις της μορφης r^n, r^{-n}. Τελικα μπορουμε να υποθεσουμε μια λυση της μορφης

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2}(A_0 + B_0 \ln(r)) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(A_n r^n + B_n r^{-n}\right)\cos(n\theta) + \left(C_n r^n + D_n r^{-n}\right)\sin(n\theta) \right]. \tag{6.87}$$

Για να ικανοποιουνται οι οριακες συνθηκες (6.85), (6.86) θα πρεπει να ισχυουν οι παρακατω εξισωσεις

$$A_0 + B_0 \ln(r_1) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\theta)\, d\theta \tag{6.88}$$

$$A_0 + B_0 \ln(r_2) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_2(\theta)\, d\theta \tag{6.89}$$

(απο τις οποιες προσδιοριζονται τα A_0, B_0) και για $n = 1, 2, ...$

$$A_n r_1^n + B_n r_1^{-n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\theta)\cos(n\theta)\, d\theta \tag{6.90}$$

$$C_n r_1^n + D_n r_1^{-n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(\theta)\sin(n\theta)\, d\theta \tag{6.91}$$

$$A_n r_2^n + B_n r_2^{-n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_2(\theta)\cos(n\theta)\, d\theta \tag{6.92}$$

$$C_n r_2^n + D_n r_2^{-n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_2(\theta)\sin(n\theta)\, d\theta \tag{6.93}$$

(απο τις οποιες προσδιοριζονται τα A_n, B_n).

6.4.3 Προβλημα Neumann στο Εσωτερικο του Κυκλου

Οπως εχουμε πει στα προβληματα Neumann οι οριακες συνθηκες δινονται σε σχεση με τις παραγωγους της u. Σε πολικες συντεταγμενες, το απλουστερο προβλημα Neumann ειναι το εξης:

$$u_{rr} + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} + \frac{1}{r}u_r = 0 \qquad (1 < r, \quad 0 \le \theta \le 2\pi) \tag{6.94}$$

$$u_r(1, \theta) = f(\theta) \qquad (0 \le \theta \le 2\pi). \tag{6.95}$$

Η επιλυση του προβληματος με χωρισμο μεταβλητων ειναι παρομοια με αυτη του προβληματος Dirichlet . Αφου καταληξουμε οτι μια λυση της (6.94) εχει την μορφη

$$u(r,\theta) = \frac{C_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cdot \left(C_n \cos(n\theta) + D_n \sin(n\theta)\right) \tag{6.96}$$

παραγωγιζουμε ως προς r και παιρνουμε

$$u_r(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1} \cdot \left(C_n \cos(n\theta) + D_n \sin(n\theta)\right) \tag{6.97}$$

οποτε

$$f(\theta) = u_r(1,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(C_n \cos(n\theta) + D_n \sin(n\theta)\right). \tag{6.98}$$

Αρα ϑα επιλεξουμε τα C_n, D_n ως εξης ($n = 1, 2, ...$):

$$C_n = \frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos(n\theta)\,d\theta, \quad D_n = \frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin(n\theta)\,d\theta. \tag{6.99}$$

Προσεξτε οτι για *να ειναι δυνατη η αναπτυξη της $f(\theta)$ σε σειρα Fourier* (;;;) πρεπει να ισχυει η συνϑηκη συμβατοτητας:

$$\int_0^{2\pi} f(\theta)\,d\theta = 0. \tag{6.100}$$

Σε αντιϑετη περιπτωση το προβλημα *δεν εχει λυση!* Αυτο ειναι συνεπεια του ϑεωρηματος του Green(γιατι;). Επισης προσεξτε οτι συμφωνα με τα παραπανω το C_0 ειναι μια αυϑαιρετη σταϑερα. Αυτο ειναι επισης λογικο, μια που η πληροφορια των οριακων συνϑηκων αφορα μονο την την παραγωγο της λυσης.

Τελος, εχει ενδιαφερον να εκφρασουμε την λυση με ενα τυπο αναλογο του τυπου του Poisson . Παραλειπουμε τις λεπτομερειες· τελικα προκυπτει οτι η λυση του προβληματος του Neumann για τον μοναδιαιο κυκλο δινεται απο τον τυπο

$$u(r,\theta) = \frac{C_0}{2} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi) \cdot \ln\left[1 - 2r\cos(\theta - \phi) + r^2\right] d\phi \tag{6.101}$$

οπου η C_0 ειναι κα παλι αυϑαιρετη σταϑερα.

Α Σ Κ Η Σ Ε Ι Σ

6.4.1 Λυστε το προβλημα $u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0$ ($0 < r < 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$), $u(1,\theta) = 120 + 60\cos 2\theta$ ($0 \le \theta \le 2\pi$). (Απ. $u(r,\theta) = 120 + 60r^2\cos(2\theta)$).

6.4.2 Λυστε το προβλημα $u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0$ ($0 < r < 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$), $u(1,\theta) = \sin^3\theta$ ($0 \le \theta \le 2\pi$). (Απ. $u(r,\theta) = \frac{1}{4}\left(3r\sin(\theta) - r^3\sin(3\theta)\right)$).

6.4.3 Λυστε το προβλημα $u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0$ $(0<r<4,\ 0\leq\theta\leq 2\pi)$, $u(4,\theta)=256\cos\theta$ $(0\leq\theta\leq 2\pi)$. (Απ. $u(r,\theta)=\frac{1}{8}\left[768+64r^2\cos(2\theta)+r^4\cos(4\theta)\right]$).

6.4.4 Λυστε το προβλημα $u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0$ $(0<r<1,\ 0\leq\theta\leq\pi)$, $u(1,\theta)=\theta\cdot(\pi-\theta)$ $(0\leq\theta\leq\pi)$, $u(r,0)=u(r,\pi)=0$ $(0\leq r<1)$. (Απ. $u(r,\theta)=\frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^{2k-1}}{(2k-1)^3}\sin[(2k-1)\theta]$).

6.4.5 Μια πλακα εχει σχημα κυκλικου τομεα με ακτινα 1 και γωνια θ_0: $\{(r,\theta)\colon\ 0\leq r\leq 1,\ 0\leq\theta\leq\theta_0\}$. Αν η πλευρα $\{(1,\theta)\colon\ 0\leq\theta\leq\theta_0\}$διατηρειται σε θερμοκρασια $f(\theta)$ και οι πλευρες $\{(r,\theta)\colon\ 0\leq r\leq 1,\ \theta=0\}$, $\{(r,\theta)\colon\ \theta=\theta_0\}$ σε μηδενικη θερμοκρασια, βρειτε την κατανομη θερμοκρασιας της πλακας σε σταθερη κατασταση. (Απ. $u(r,\theta)=\frac{2}{\theta_0}\sum_{n=1}^{\infty}r^n\cdot\left(\int_0^{\theta_0}f(\phi)\sin\left(n\pi\frac{\phi}{\theta_0}\right)d\phi\right)\cdot\ \sin\left(n\pi\frac{\theta}{\theta_0}\right)$).

6.5 Αριθμητικη Επιλυση

Ας προσπαθησουμε τωρα να λυσουμε *αριθμητικα* το προβλημα

$$u_{xx}+u_{yy}=0 \qquad (0<x<30,\quad 0<y<40) \tag{6.102}$$

$$u(0,y)=1 \qquad (0<y<40) \tag{6.103}$$

$$u(30,y)=0 \qquad (0<y<40) \tag{6.104}$$

$$u(x,0)=\left(1-\frac{x}{30}\right)^2 \qquad (0<x<30) \tag{6.105}$$

$$u(x,40)=\left(1-\frac{x}{30}\right)^{1/4} \qquad (0<x<30)\,. \tag{6.106}$$

Θα διακριτοποιησουμε την $u(x,y)$ και τις παραγωγους της ως εξης:

$$v_{m,n}=u(m\cdot\delta x,n\cdot\delta y)$$

$$u_{xx}\simeq\frac{v_{m+1,n}+v_{m-1,n}-2v_{m,n}}{\delta x^2}$$

$$u_{yy}\simeq\frac{v_{m,n+1}+v_{m,n-1}-2v_{m,n}}{\delta y^2}.$$

Τοτε το προβλημα (6.102)–(6.106) μετατρεπεται στο εξης (χρησιμοποιουμε $\delta x = \delta y = 1$ και $m = 0, 1, ..., 30,\ n = 0, 1, ..., 40$):

$$v_{m+1,n} + v_{m-1,n} + v_{m,n+1} + v_{m,n-1} - 4v_{m,n} = 0 \qquad (0 < m < 30, \quad 0 < n < 40) \tag{6.107}$$

$$v_{0,n} = 1 \qquad (0 \le n \le 40) \tag{6.108}$$

$$v_{30,n} = 0 \qquad (0 \le n \le 40) \tag{6.109}$$

$$v_{m,0} = \left(1 - \frac{m}{30}\right)^2 \qquad (0 < m < 30) \tag{6.110}$$

$$u_{m,40} = \left(1 - \frac{m}{30}\right)^{1/4} \qquad (0 < m < 30)\,. \tag{6.111}$$

Οι (6.107)–(6.111) ειναι ενας συστημα *γραμμικων* εξισωσεων ως προς τις μεταβλητες $v_{0,0}$, $v_{0,1}$, ..., $v_{0,40}$, $v_{1,0}$, $v_{1,1}$, ..., $v_{1,40}$, ..., $v_{30,40}$. Εαν ο αντιστοιχος πινακας ειναι αντιστρεςιμος, το συστημα μπορει να λυθει και ετσι θα εχουμε βρει την λυση του διακριτοποιημενου συστηματος και κατα προσεγγιση και την $u(m \cdot \delta x, n \cdot \delta y) \simeq v_{m,n}$ (για $m = 0, 1, ..., 30$ και $n = 0, 1, ..., 40$). Μπορει να αποδειχτει οτι το σσυτημα εχει μοναδικη λυση η οποια και υπολογιζεται αριθμητικα. Ομως, θα ακολουθησουμε μια διαφορετικη προσεγγιση. Θεωρειστε το συστημα εξισωσεων διαφορων: ($m = 0, 1, ..., 30,\ n = 1, ..., 40,\ t = 0, 1, 2, ...$):

$$v^t_{m,n} = \frac{v^{t-1}_{m+1,n} + v^{t-1}_{m-1,n} + v^{t-1}_{m,n+1} + v^{t-1}_{m,n-1} + 4v^{t-1}_{m,n}}{8} \qquad (0 < m < 30, \quad 0 < n < 40) \tag{6.112}$$

$$v^t_{0,n} = 1 \qquad (0 \le n \le 40) \tag{6.113}$$

$$v^t_{30,n} = 0 \qquad (0 \le n \le 40) \tag{6.114}$$

$$v^t_{m,0} = \left(1 - \frac{m}{30}\right)^2 \qquad (0 < m < 30) \tag{6.115}$$

$$u^t_{m,40} = \left(1 - \frac{m}{30}\right)^{1/4} \qquad (0 < m < 30) \tag{6.116}$$

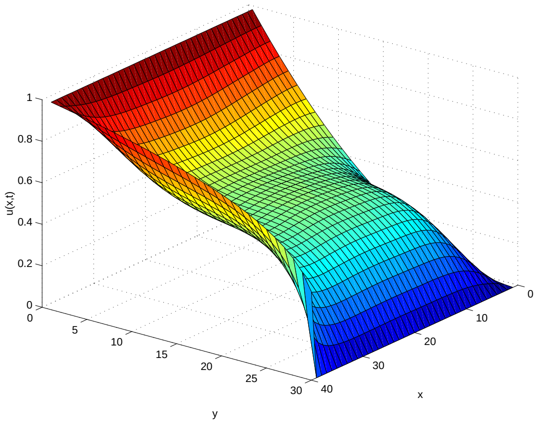
με ***τυχαιες*** αρχικες συνθηκες $v^0_{m,n}$ ($m = 0, 1, ..., 30,\ n = 1, ..., 40,\ t = 0, 1, 2, ...$). Δεν ειναι προφανες αλλα, καθως $t \to \infty$, το (6.112)–(6.116) συγκλινει στην λυση του (6.107)–(6.111). Δηλαδη, για $m = 0, 1, ..., 30$, $n = 1, ..., 40$, εχουμε

$$\lim_{t \to \infty} v^t_{m,n} = v_{m,n}. \tag{6.117}$$

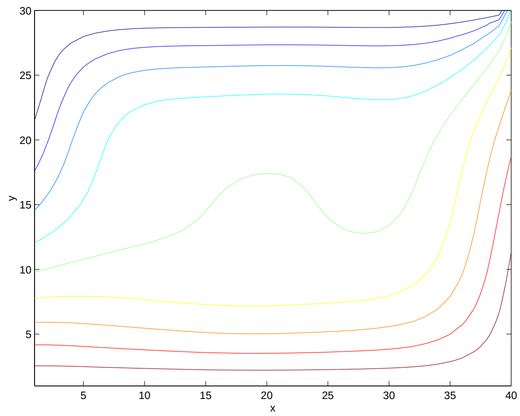
Μπορειτε να αποδειξετε την (6.117); Παντως, συμφωνα με τα παραπανω η αριθμητικη επιλυση του (6.112)–(6.116) δινει μια μεθοδο για την προσεγγιστικη επιλυση του (6.102)–(6.106). Ο παρακατω κωδικας Matlab υλοποιει τον αλγοριθμο. Τα αποτελεσματα δινονται στα Σχηματα 6.1 και 6.2.

```
M=30;
N=40;
```

```
T=100;
u=rand(M,N);
u(1,:)=ones(1,N);
u(M,:)=zeros(1,N);
u(:,1)=(([1:-1/M:1/M]).^2)';
u(:,N)=(([1:-1/M:1/M]).^(1/4))';
for t=1:T
  uold=u;
  for m=2:M-1
    for n=2:N-1
      u(m,n)=(4*uold(m,n)+uold(m-1,n)+uold(m+1,n)+uold(m,n-1)+uold(m,n+1))/8;
    end
  end
  disp([t max(max(abs(u-uold)))])
end
```



Σχημα 6.1



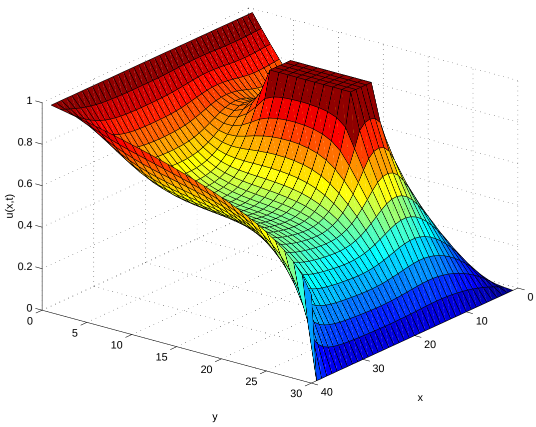
Σχημα 6.2

Προφανως η μεθοδος γενικευεται. Ο παρακατω κωδικας Matlab επιλυει ενα προβλημα Laplace σε πιο περιπλοκο τοπο. Τα αποτελεσματα δινονται στα Σχηματα 6.3 και 6.4.

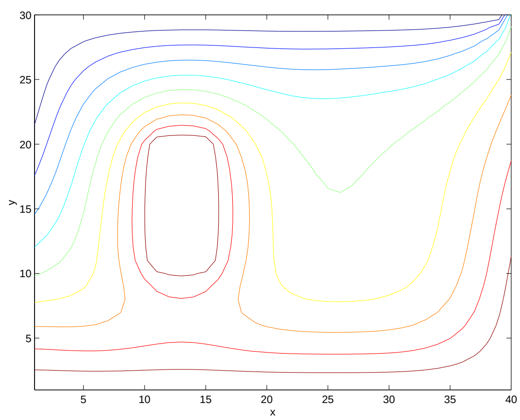
```
clear
M=30;
N=40;
T=100;
u=rand(M,N);
u(1,:)=ones(1,N);
u(M,:)=zeros(1,N);
u(:,1)=(([1:-1/M:1/M]).^2)';
```

```
u(:,N)=(([1:-1/M:1/M]).^(1/4))';

for m=11:M-10
  for n=11:N-25
    u(m,n)=1;
  end
end
for t=1:T
  uold=u;
  for m=2:M-1
    for n=2:N-1
      u(m,n)=(4*uold(m,n)+uold(m-1,n)+uold(m+1,n)+uold(m,n-1)+uold(m,n+1))/8;
    end
  end
  for m=11:M-10
    for n=11:N-25
      u(m,n)=1;
    end
  end
  disp([t max(max(abs(u-uold)))])
end
```



Σχημα 6.3



Σχημα 6.4

Βιβλιογραφία

[1] J.M. Cooper. *Introduction to Partial Differential Equations with Matlab.*

[2] S.J. Farlow. *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers.*

[3] F. Ayres. *Differential Equations*