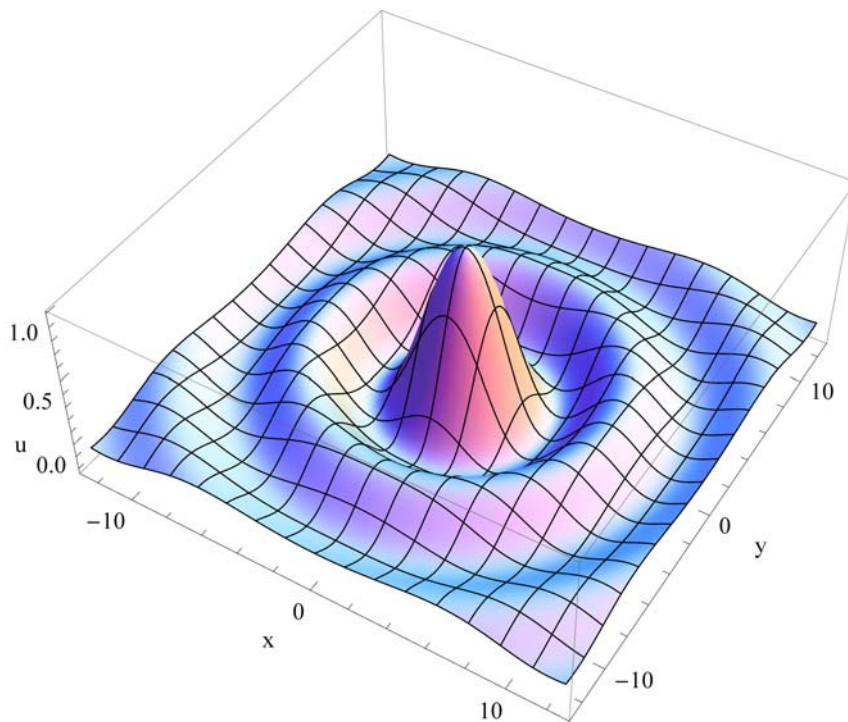


Δημήτρης Τσουμπελής

Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις
Τόμος Α'



Πανεπιστήμιο Πατρών Τμήμα Μαθηματικών
ΠΑΤΡΑ 2009

Περιεχόμενα

Πρόλογος.....	ix
---------------	----

Κεφάλαιο I

Θεμέλια.....	1
0. Παράγωγοι συναρτήσεων πολλών μεταβλητών.....	1
1. Η έννοια της μερικής διαφορικής εξίσωσης.....	10
Ασκήσεις.....	14
2. Γενικές και ειδικές λύσεις.....	16
Ασκήσεις.....	20
3. Εξισώσεις χωρίς λύση.....	21
Ασκήσεις.....	24
4. Γεωμετρική ερμηνεία και αναπαράσταση της λύσης.....	25
5. Σημασία των μερικών διαφορικών εξισώσεων.....	31

Κεφάλαιο II

Γραμμικές ΜΔΕ πρώτης τάξης.....	37
1. Επίλυση ΜΔΕ με απ' ευθείας ολοκλήρωση.....	37
Ασκήσεις.....	41
2. Γραμμικές πρώτης τάξης στον \mathbb{R}^2	43
Ασκήσεις.....	52
3. Χαρακτηριστικές καμπύλες.....	53
Ασκήσεις.....	61

4. Το πρόβλημα των αρχικών τιμών.....	62
Ασκήσεις.....	71
5. Γραμμικές πρώτης τάξης στον \mathbb{R}^n	72
Ασκήσεις.....	76
6. Συστήματα αυτόματων αλγεβρικών υπολογισμών στην Ανάλυση ΜΔΕ	78

Κεφάλαιο III

Μη Γραμμικές ΜΔΕ πρώτης τάξης.....	93
Εισαγωγή.....	93
1. Ημιγραμμικές ΜΔΕ στον \mathbb{R}^2	93
Ασκήσεις.....	96
2. Σχεδόν γραμμικές ΜΔΕ στον \mathbb{R}^2	97
Ασκήσεις.....	105
3. Το πρόβλημα αρχικών τιμών.....	106
Ασκήσεις.....	111
4. Σχεδόν γραμμικές ΜΔΕ στον \mathbb{R}^n , $n > 2$	113
Ασκήσεις.....	116

Κεφάλαιο IV

Γραμμικές ΜΔΕ δεύτερης τάξης.....	119
1. Ταξινόμηση εξισώσεων στον \mathbb{R}^2 : Κανονικές μορφές	119
Ασκήσεις.....	124
2. Γραμμικές ΜΔΕ στον \mathbb{R}^2 : με μη σταθερούς συντελεστές	125
Ασκήσεις.....	131

3. Συμμετρίες των ΜΔΕ	132
Ασκήσεις.....	139
4. Το πρόβλημα αρχικών τιμών για την κυματική εξίσωση	144
Ασκήσεις.....	148
5. Το γενικότερο πρόβλημα Cauchy	150
Ασκήσεις.....	159
6. Διάδοση ασυνεχειών	161
Ασκήσεις.....	164
7. Η μη ομογενής μονοδιάστατη κυματική εξίσωση	165
Ασκήσεις.....	170
8. Το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών για την ημιάπειρη χορδή	171
Ασκήσεις.....	174
9. Το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών για μια πραγματική χορδή	176
Ασκήσεις.....	179
10. Μοναδικότητα των λύσεων-Λαγκρανζική διατύπωση της κυματικής εξίσωσης...	180
Ασκήσεις.....	186
11. Προβλήματα συνοριακών τιμών στον \mathbb{R}^2	187
Ασκήσεις.....	192
12. Ταξινόμηση εξισώσεων στον \mathbb{R}^n , $n > 2$	194
Ασκήσεις.....	205

Κεφάλαιο V

Η μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών.....	207
--	-----

Εισαγωγή.....	207
1. Το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών για την εξίσωση της θερμότητας.....	208
Ασκήσεις.....	216
2. Συνοριακές συνθήκες τύπου Neumann.....	217
Ασκήσεις.....	223
3. Περιοδικές συνθήκες.....	224
Ασκήσεις.....	228
4. Σειρές Fourier.....	229
Ασκήσεις.....	244
5. Κυματική εξίσωση σε μία χωρική διάσταση.....	246
Ασκήσεις.....	249
6. Προβλήματα συνοριακών τιμών για την εξίσωση του Laplace στον \mathbb{R}^2	251
Ασκήσεις.....	263
7. Μη ομογενείς εξισώσεις και συμπληρωματικές συνθήκες.....	266
Ασκήσεις.....	271

Κεφάλαιο VI

Πολυδιάστατα προβλήματα αρχικών-συνοριακών τιμών.....	273
1. Ιδιοτιμές και ιδιοσυναρτήσεις διαφορικών τελεστών.....	297
Ασκήσεις.....	282
2. Προβλήματα συνοριακών τιμών για την εξίσωση του Laplace στον \mathbb{R}^3	283
Ασκήσεις.....	305
3. Προβλήματα αρχικών και συνοριακών τιμών.....	307
Ασκήσεις.....	315

Βιβλιογραφία.....	317
Ευρετήριο.....	332

Θεμέλια

0. Οι παράγωγοι συναρτήσεων πολλών μεταβλητών

Όπως γίνεται σαφές από τον τίτλο του, σκοπός αυτού του βιβλίου είναι να οδηγήσει τον αναγνώστη του στον θαυμαστό κόσμο των μερικών διαφορικών εξισώσεων. Να του γνωρίσει, δηλαδή, ένα ευχάριστο νοητικό παιχνίδι αναζήτησης ενός αντικείμενου, με βάση ορισμένες πληροφορίες για τις ιδιότητές του. Το αναζητούμενο αντικείμενο είναι πάντοτε μια συνάρτηση πολλών μεταβλητών και οι πληροφορίες που δίνονται στους παίκτες έχουν τη μορφή μιας ισότητας, η οποία περιέχει μία τουλάχιστον παράγωγο αυτής της συνάρτησης. Άρα, για να μπορέσουμε να περιγράψουμε αναλυτικότερα τη φύση, τους κανόνες και το ενδιαφέρον του παιχνιδιού στο οποίο αναφέρεται τούτο το βιβλίο, είναι απαραίτητο να θυμηθούμε ορισμένα στοιχεία της έννοιας "συνάρτηση πολλών μεταβλητών" και το συμβολισμό που συνήθως χρησιμοποιείται στην περιγραφή των συναρτήσεων αυτού του είδους.

Τα περισσότερα χαρακτηριστικά μιας συνάρτησης δύο ή περισσότερων μεταβλητών ορίζονται με βάση εκείνα των συναρτήσεων μιας μόνο μεταβλητής. Γι' αυτό, θα ξεκινήσουμε από τις δεύτερες, θυμίζοντας το συμβολισμό με τον οποίο συνήθως περιγράφονται και το τι εννοούμε με τον όρο παράγωγος πρώτης ή μεγαλύτερης τάξης.

Ας θεωρήσουμε, λοιπόν, την έκφραση $2x + x^2$, στην οποία το x παριστάνει έναν τυχαίο πραγματικό αριθμό. Αυτή η υπόθεση δηλώνεται με τη συντομογραφία $x \in \mathbb{R}$. Για οποιοδήποτε στοιχείο του συνόλου των πραγματικών αριθμών, \mathbb{R} , η έκφραση $2x + x^2$ έχει νόημα, στη βάση των πράξεων της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού. Για κάθε συγκεκριμένο στοιχείο του \mathbb{R} , η πιο πάνω έκφραση μετατρέπεται σε έναν συγκεκριμένο πραγματικό αριθμό. Για παράδειγμα, αν $x = 3$, τότε $2x + x^2 = 2 \cdot 3 + 3^2 = 15$.

Αυτό που μόλις περιγράψαμε είναι μια **συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής**. Με ανάλογο τρόπο, μπορούμε να κατασκευάσουμε άπειρες άλλες εκφράσεις που έχουν νόημα με βάση την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό των πραγματικών αριθμών. Ορισμένες από αυτές μπορεί να μην έχουν νόημα για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπως η \sqrt{x} , ή μπορεί εμείς να θέλουμε να περιορίσουμε το x σε κάποιο υποσύνολο, S , των πραγματικών αριθμών. Σε κάθε περίπτωση, το υποσύνολο του \mathbb{R} από το οποίο επιτρέπεται να επιλέξουμε τον αριθμό x ονομάζεται **πεδίο ορισμού της συνάρτησης**.

Συχνά, η αλγεβρική έκφραση που ορίζει μια συνάρτηση είναι αρκετά περίπλοκη. Άλλοτε πάλι, η συνάρτηση αλλάζει μορφή όταν μεταβαίνουμε από το ένα τμήμα του πεδίου ορισμού της σε άλλο. Τότε, γίνεται χρήσιμο να δηλώνουμε τη συνάρτηση με ένα σύμβολο της μορφής $f(x)$, έτσι που να μη γράφουμε και ξαναγράφουμε την περίπλοκη αναλυτική έκφραση της συνάρτησης που μας ενδιαφέρει.

Παράδειγμα 0.1

$$(i) f(x) = \sqrt{x} + \ln x + e^{3x}, \quad x > 0.$$

$$(ii) f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

$$(ii) f(x) = \begin{cases} -1, & x \leq -\frac{\pi}{2} \\ \sin x, & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1, & x \geq \pi \end{cases}$$

■

Με τον ίδιο τρόπο, δηλαδή, με ένα σύμβολο της μορφής $f(x)$, δηλώνουμε και το τυχαίο μέλος του σύνολου των συναρτήσεων που έχουν ως κοινό πεδίο ορισμού κάποιο υποσύνολο S του \mathbb{R} . Αυτό μας διευκολύνει στο να ορίσουμε χαρακτηριστικά που αφορούν όλα τα μέλη της οικογένειας. Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι το $x \in S$ και ότι υπάρχει ένα ανοιχτό διάστημα (a, b) που περιέχει το x και περιέχεται στο S . Με άλλα λόγια, $x \in (a, b) \subset S$. Τότε, για κάθε μη μηδενικό πραγματικό αριθμό h , με αρκετά μικρή απόλυτη τιμή, το σημείο $x+h$ βρίσκεται μέσα στο διάστημα (a, b) . Συνεπώς, η έκφραση $f(x+h)$ έχει νόημα και το ίδιο ισχύει για το κλάσμα $[f(x+h) - f(x)]/h$. Συχνά, μάλιστα, υπάρχει και η ακόλουθη ποσότητα:

$$\frac{df}{dx}(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

(Σημειώστε τον συμβολισμό που θα χρησιμοποιούμε συστηματικά στα επόμενα: $A := B$. Σημαίνει ότι η έκφραση B ορίζει την A).

Όταν υπάρχει, η παραπάνω ποσότητα ονομάζεται **παράγωγος της $f(x)$ στο σημείο x** . Εναλλακτικά, λέμε ότι η $f(x)$ είναι **διαφορίσιμη στο σημείο x** . Μια συνάρτηση χαρακτηρίζεται ως **διαφορίσιμη** μόνο όταν η παράγωγός της υπάρχει σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.

Πρέπει να σημειώσουμε ότι, κάθε συνάρτηση είναι υποχρεωτικά συνεχής σε κάθε σημείο όπου είναι διαφορίσιμη. Το αντίστροφο προφανώς δεν ισχύει, όπως φαίνεται καθαρά στο επόμενο

Παράδειγμα 0.2

Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

είναι **συνεχής**, δηλαδή συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της. Ωστόσο, δεν είναι διαφορίσιμη, γιατί η παράγωγός της στο σημείο $x = 0$ δεν υπάρχει. Βέβαια, είναι διαφορίσιμη σε κάθε άλλο σημείο του πεδίου ορισμού της:

$$\frac{df}{dx}(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

■

Ένας βολικός συμβολισμός για την παράγωγο της συνάρτησης $f(x)$ είναι ο $f'(x)$. Θα τον χρησιμοποιούμε συστηματικά στα επόμενα. Ας υποθέσουμε, λοιπόν ότι η $f'(x)$ υπάρχει σε κάθε σημείο του υποσύνολου S' του πεδίου ορισμού S της $f(x)$. Τότε, μπορούμε να αναρωτηθούμε αν η ίδια η $f'(x)$ είναι διαφορίσιμη στο τυχαίο σημείο $x \in S'$. Με άλλα λόγια, μπορούμε να θέσουμε το ερώτημα αν υπάρχει η ποσότητα

$$\frac{d^2 f}{d x^2}(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

Όταν αυτό το όριο υπάρχει, το ονομάζουμε **δεύτερη παράγωγο** ή **παράγωγο δεύτερης τάξης της $f(x)$ στο σημείο x** . Στα επόμενα, θα προτιμάμε να συμβολίζουμε την δεύτερη παράγωγο της $f(x)$ με $f''(x)$.

Επαναλαμβάνοντας το ίδιο σκεπτικό, μπορούμε να αναρωτηθούμε αν υπάρχει η παράγωγος της $f''(x)$ στο τυχαίο σημείο x του πεδίου ορισμού της, S'' . Όταν υπάρχει, ονομάζεται τρίτη παράγωγος της $f(x)$ στο σημείο $x \in S'' \subset S' \subset S$. Η αλυσίδα αυτών των υπολογισμών μπορεί να συνεχιστεί, έτσι που να οδηγήσει στην **παράγωγο τάξης n της $f(x)$ στο σημείο x** , που θα συμβολίζεται με $(d^n f / d x^n)(x)$ ή με $f^{(n)}(x)$, όπου n τυχαίος φυσικός αριθμός (θετικός ακέραιος). Το αντίστοιχο πεδίο ορισμού, $S^{(n)}$, αποτελεί ένα υποσύνολο του πεδίου ορισμού του S .

Ολοκληρώνοντας τη σύντομη περιήγησή μας στις συναρτήσεις μιας μεταβλητής, σημειώνουμε ότι, με $C(S)$ θα εννοούμε τις συναρτήσεις που είναι συνεχείς στο υποσύνολο S των πραγματικών αριθμών. Με $C^{(n)}(S)$ όλες εκείνες που έχουν παράγωγο μέχρι και τάξης n , τουλάχιστον, σε κάθε σημείο του συνόλου S και η συνάρτηση $f^{(n)}(x)$ είναι συνεχής. Αν αυτό ισχύει για κάθε n , τότε θα γράφουμε $f \in C^\infty(S)$. Είναι φανερό ότι, αν η $f \in C^{(n)}(S)$, τότε η $f \in C^{(m)}(S)$ για κάθε $m < n$.

Παράδειγμα 0.3

(i) Η συνάρτηση

$$f(x) = x - 2x^2 + 3x^3$$

έχει παραγώγους κάθε τάξης σε οποιοδήποτε σημείο της πραγματικής ευθείας. Άρα, αυτή η συνάρτηση ανήκει στην κλάση $C^\infty(\mathbb{R})$. Το ίδιο ισχύει και για κάθε άλλη πολυωνυμική συνάρτηση, για τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις $\sin x$, $\cos x$ και την εκθετική e^x .

(ii) Η λογαριθμική συνάρτηση

$$g(x) = \ln x, \quad x > 0,$$

ανήκει στην κλάση $C^\infty(\mathbb{R}_+)$, όπου \mathbb{R}_+ το σύνολο των θετικών αριθμών.

(iii) Η συνάρτηση

$$h(x) = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

ανήκει στην κλάση $C^1(\mathbb{R})$, αφού η παράγωγός της,

$$h'(x) = \begin{cases} -2x, & x \leq 0 \\ 2x, & x \geq 0 \end{cases}$$

είναι συνεχής. Ωστόσο, η $h'(x)$ δεν είναι καν διαφορίσιμη. Συνεπώς, η $h \notin C^2(\mathbb{R})$.

■

Ας θεωρήσουμε, τώρα, την έκφραση $2xy + x^2 + y^2$, όπου με x και y δηλώνονται δύο τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί. Αυτό το γεγονός συνήθως περιγράφεται με τη συντομογραφία $x, y \in \mathbb{R}$. Εναλλακτικά, γράφουμε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ και λέμε ότι το (x, y) αποτελεί ένα τυχαίο στοιχείο του σύνολου των διαταγμένων ζευγαριών πραγματικών αριθμών. Για οποιοδήποτε στοιχείο του \mathbb{R}^2 , η έκφραση $2xy + x^2 + y^2$ έχει νόημα, στη βάση των γνωστών πράξεων της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού δύο τυχαίων πραγματικών αριθμών. Έτσι, όταν $(x, y) = (3, 2)$, τότε $2xy + x^2 + y^2 = 2 \cdot 3 \cdot 2 + 3^2 + 2^2 = 27$.

Η παραπάνω έκφραση αποτελεί μια **συνάρτηση δύο πραγματικών μεταβλητών**. Και γι' αυτού του είδους τις συναρτήσεις, συνήθως χρησιμοποιούμε μια συντομογραφία της μορφής $u(x, y)$. Μια συνάρτηση δύο μεταβλητών μπορεί να έχει νόημα μόνο αν το ζευγάρι (x, y) ανήκει σε κάποιο γνήσιο υποσύνολο του \mathbb{R}^2 . Εναλλακτικά, μπορεί εμείς να έχουμε κάποιο λόγο να περιορίσουμε την περιοχή του Ευκλείδειου επίπεδου (δηλαδή του \mathbb{R}^2) στην οποία να ισχύει η έκφραση που κατασκευάσαμε. Σε κάθε περίπτωση, το υποσύνολο Ω του \mathbb{R}^2 στο οποίο ισχύει η έκφραση $u(x, y)$ ονομάζεται **πεδίο ορισμού** της αντίστοιχης συνάρτησης.

Στα επόμενα, ιδιαίτερο ρόλο παίζουν τα πεδία ορισμού που αποτελούν **ανοιχτά υποσύνολα** του \mathbb{R}^2 . Θυμίζουμε ότι, ένα υποσύνολο Ω του \mathbb{R}^2 χαρακτηρίζεται ως ανοιχτό αν έχει την εξής ιδιότητα: Για κάθε (x, y) που ανήκει στο Ω , υπάρχει θετικός αριθμός a , τέτοιος που ένας κυκλικός δίσκος ακτίνας a με κέντρο το σημείο (x, y) περιέχεται στο Ω . Για παράδειγμα, η περιοχή που ορίζεται από τη συνθήκη $x > 0$, αποτελεί ένα ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^2 . Το ίδιο ισχύει για την περιοχή που ορίζουν οι συνθήκες $a < x < b$, $c < y < d$. Η δεύτερη αναφέρεται ως **ανοιχτό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο** ή **ανοιχτό διάστημα του επίπεδου** x, y , δηλαδή του \mathbb{R}^2 , όταν τα στοιχεία του δηλώνονται με (x, y) .

Ας επανέλθουμε, τώρα, στη συνάρτηση $u(x, y) = 2xy + x^2 + y^2$ που κατασκευάσαμε νωρίτερα. Είναι φανερό πως, αν για την μεταβλητή y επιλέξουμε μια συγκεκριμένη τιμή, τότε η $u(x, y)$ μετατρέπεται σε συνάρτηση μιας μεταβλητής. Για παράδειγμα, $u(x, 1) = 2x + x^2 + 1$. Η παράγωγος αυτής της συνάρτησης είναι αυτό που ονομάζουμε μερική παράγωγο της $u(x, y)$ ως προς τη μεταβλητή x . Ανάλογα, η επιλογή $x = -1$, οδηγεί στη συνάρτηση μιας μεταβλητής $u(-1, y) = -2y + 1 + y^2$. Η παράγωγος της τελευταίας αποτελεί την μερική παράγωγο της $u(x, y)$ ως προς τη μεταβλητή y .

Για να γίνουμε πιο συγκεκριμένοι, ας υποθέσουμε ότι, το σημείο (a, b) ανήκει στο πεδίο ορισμού U της συνάρτησης $u(x, y)$ κι ότι υπάρχει ένα ανοιχτό διάστημα I της ευθείας $y = b$ το οποίο περιέχει το (a, b) και περιέχεται στο U . Το όριο

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a, b) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(a+h, b) - u(a, b)}{h},$$

όταν υπάρχει, ονομάζεται **μερική παράγωγος της $u(x, y)$ ως προς τη μεταβλητή x στο σημείο**

(a, b) . Ανάλογα, το όριο

$$\frac{\partial u}{\partial y}(a, b) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(a, b+h) - u(a, b)}{h},$$

όταν υπάρχει, ονομάζεται **μερική παράγωγος της $u(x, y)$ ως προς τη μεταβλητή y στο σημείο (a, b)** .

Ο ορισμός των μερικών παραγώγων καθιστά σαφή τον τρόπο υπολογισμού τους, καθώς και το γεγονός ότι, γενικά, αυτές υπάρχουν μόνο σε γνήσια υποσύνολα του πεδίου ορισμού U της $u(x, y)$. Αυτό θέλει να διευκρινίσει το επόμενο

Παράδειγμα 0.4

(i) Η μερική παράγωγος της συνάρτησης

$$u(x, y) = x^2 + y^2 - 3xy, \quad (x, y) \in U \equiv \mathbb{R}^2,$$

ως προς τη μεταβλητή x υπάρχει σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 2x - 3y, \quad (x, y) \in U.$$

Το ίδιο ισχύει και τη μερική παράγωγο της $u(x, y)$ ως προς τη μεταβλητή y :

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = 2y - 3x, \quad (x, y) \in U.$$

(ii) Τα πράγματα είναι διαφορετικά για τη συνάρτηση

$$u(x, y) = \begin{cases} xy, & x > 0 \wedge y > 0 \\ 0, & x \leq 0 \vee y \leq 0 \end{cases}$$

όπου με $A \wedge B$ εννοούμε ότι ισχύουν και οι δύο συνθήκες A, B και με $A \vee B$ ότι ισχύει είτε η πρώτη είτε η δεύτερη.

Ας θεωρήσουμε την ευθεία $y = b$ του επίπεδου xy . Κατά μήκος αυτής της ευθείας, η $u(x, y) = 0$, αν η σταθερή b δεν είναι θετική. Συνεπώς, $(\partial u / \partial x)(x, y) = 0$ σε κάθε σημείο (x, y) με $y \leq 0$.

Αντίθετα, όταν η σταθερή b είναι θετική, η $u(x, y)$ ανάγεται στη συνάρτηση

$$u(x, b) = \begin{cases} bx, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Η τελευταία δεν είναι διαφορίσιμη στο σημείο $x = 0$. Συνεπώς, η $(\partial u / \partial x)(x, y)$ δεν ορίζεται σε κανένα σημείο του θετικού ημιάξονα y .

Ανάλογα, θεωρώντας μιαν ευθεία του επίπεδου xy που ορίζεται από τη συνθήκη $x = a$ καταλήγουμε στο ακόλουθο συμπέρασμα: Όταν η σταθερή a δεν είναι θετική, η $u(a, y) = 0$. Άρα, $(\partial u / \partial y)(x, y) = 0$ σε κάθε σημείο (x, y) με $x \leq 0$. Αντίθετα, όταν $a > 0$, η $u(x, y)$ ανάγεται στη συνάρτηση

$$u(a, y) = \begin{cases} ay, & y \geq 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}$$

Αφού αυτή η συνάρτηση δεν είναι διαφορίσιμη στο σημείο $y = 0$, η $(\partial u / \partial y)(x, y)$ δεν ορίζεται σε κανένα σημείο του θετικού ημιάξονα x .

Συνοψίζοντας, η κατάσταση έχει ως εξής

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \begin{cases} y, & x > 0 \wedge y > 0 \\ 0, & x \leq 0 \vee y < 0 \end{cases}$$

■

Κατά κύριο λόγο, οι συναρτήσεις που θα μας απασχολήσουν δεν θα έχουν την παθογένεια του τελευταίου παραδείγματος. Με άλλα λόγια, θα έχουν μερικές παραγώγους που είναι συνεχείς συναρτήσεις σε όλο το πεδίο ορισμού U των αρχικών. Αυτού του είδους οι συναρτήσεις αποτελούν την κλάση που συμβολίζουμε $C^1(U)$, ενώ η κλάση των συνεχών συναρτήσεων συμβολίζεται με $C(U)$.

Από την άλλη, η έννοια της μερικής παραγώγου, ακριβώς όπως κι εκείνη της συνήθους που αναφέρεται στις συναρτήσεις μιας μεταβλητής, δεν περιορίζεται στις ποσότητες που ορίσαμε πιο πάνω. Αυτές αναφέρονται ως μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης, ενώ εύκολα μπορούμε να εισαγάγουμε και την έννοια των μερικών παραγώγων δεύτερης, τρίτης και, γενικότερα, n -στής τάξης.

Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα ότι, η μερική παράγωγος $(\partial u / \partial x)(x, y)$ της $u(x, y)$ υπάρχει σε κάθε σημείο του υποσύνολου U_1 της περιοχής U . Μπορούμε, τότε, να εξετάσουμε κατά πόσο υπάρχει η μερική παράγωγος της συνάρτησης $(\partial u / \partial x)(x, y)$ είτε ως προς τη μεταβλητή x , είτε ως προς τη μεταβλητή y . Με άλλα λόγια, μπορούμε να εξετάσουμε αν τα όρια

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(a, b) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(a+h, b) - \frac{\partial u}{\partial x}(a, b)}{h}$$

και

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(a, b) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(a, b+h) - \frac{\partial u}{\partial x}(a, b)}{h},$$

Το πρώτο από αυτά, όταν υπάρχει, ονομάζεται **μερική παράγωγος δεύτερης τάξης της $u(x, y)$ ως προς τη μεταβλητή x , στο σημείο (a, b)** . Το δεύτερο, αναφέρεται ως **μικτή μερική παράγωγος δεύτερης τάξης της $u(x, y)$ ως προς τις μεταβλητές x, y , στο σημείο (a, b)** .

Ανάλογα, το όριο

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(a, b) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial u}{\partial y}(a, b+h) - \frac{\partial u}{\partial y}(a, b)}{h},$$

όταν υπάρχει, αναφέρεται ως **μερική παράγωγος δεύτερης τάξης της $u(x, y)$ ως προς τη μεταβλητή y στο σημείο (a, b)** , ενώ το

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(a, b) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial u}{\partial y}(a+h, b) - \frac{\partial u}{\partial y}(a, b)}{h},$$

ονομάζεται **μικτή μερική παράγωγος δεύτερης τάξης της $u(x, y)$ ως προς τις μεταβλητές y, x στο σημείο (a, b)** .

Εδώ θα πρέπει να σημειώσουμε ότι, ακόμα και όταν και οι δύο από τις μικτές παραγώγους που μόλις ορίσαμε υπάρχουν σε κάποιο σημείο (a, b) του πεδίου ορισμού U της $u(x, y)$, δεν είναι υποχρεωτικά ίσες. Όμως, αν οι μικτές παράγωγοι ορίζονται σε κάθε σημείο του ανοιχτού σύνολου U και αποτελούν συνεχείς συναρτήσεις, τότε τα πράγματα αλλάζουν. Σ' αυτή την περίπτωση, λέμε ότι η συνάρτηση $u(x, y)$ ανήκει στην κλάση $C^2(U)$ και τότε

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x, y) \text{ για κάθε } (x, y) \in U.$$

Θεωρούμε ότι, ο τρόπος με τον οποίο ορίζονται οι μερικές παράγωγοι μεγαλύτερης τάξης είναι προφανής. Το ίδιο προφανές θα πρέπει να είναι και το γεγονός ότι, τα σύμβολα που χρησιμοποιήσαμε γι' αυτές τις παραγώγους δεν είναι και τόσο απλά. Γι' αυτό, από τούτο το σημείο και πέρα, θα υιοθετήσουμε δύο άλλους, αρκετά απλούστερους, συμβολισμούς, που ο καθένας τους έχει ειδικότερα πλεονεκτήματα.

Συγκεκριμένα, τις πρώτες μερικές παραγώγους τις $u(x, y)$ ως προς τις μεταβλητές x, y θα τις συμβολίζουμε με $u_x(x, y)$ και $u_y(x, y)$, αντίστοιχα. Οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης ως προς τις ίδιες μεταβλητές θα συμβολίζονται με $u_{xx}(x, y)$ και $u_{yy}(x, y)$. Για τις μικτές παραγώγους δεύτερης τάξης θα χρησιμοποιούμε τα σύμβολα $u_{xy}(x, y)$ και $u_{yx}(x, y)$ και μάλιστα χωρίς διάκριση, αφού κυρίως θα ασχοληθούμε με συναρτήσεις της κλάσης $C^2(U)$. Είναι φανερό ότι, τα σύμβολα για τις μερικές παραγώγους μεγαλύτερης τάξης απλώς έχουν κάτω δείκτες με τόσες θέσεις, όσες και η τάξη της παραγώγου, τις οποίες καταλαμβάνουν τα γράμματα x και y .

Για παράδειγμα, οι μερικές παράγωγοι τρίτης τάξης συμβολίζονται με $u_{xxx}(x, y)$, $u_{xxy}(x, y)$, $u_{xyy}(x, y)$ και $u_{yyy}(x, y)$ κλπ. Και πάλι, όταν η $u(x, y)$ ανήκει στην κλάση $C^3(U)$, όταν δηλαδή όλες οι μερικές της παράγωγοι τρίτης τάξης ορίζονται παντού στο U και είναι συνεχείς συναρτήσεις, τα παραπάνω τέσσερα σύμβολα αρκούν, αφού τότε, για παράδειγμα, $u_{xxy}(x, y) = u_{xyx}(x, y) = u_{yxx}(x, y)$.

Ο δεύτερος τρόπος αναπαράστασης των μερικών παραγώγων που θα χρησιμοποιούμε πολλές φορές στηρίζεται στη χρήση του σύμβολου ∂ . Έτσι, η πρώτη μερική παράγωγος της $u(x, y)$ ως προς τη μεταβλητή x θα συμβολίζεται με $\partial_x u(x, y)$, εκείνη ως προς τη μεταβλητή y θα τη συμβολίζουμε με $\partial_y u(x, y)$, την δεύτερης τάξης μερική παράγωγο ως προς x θα τη γράφουμε σαν $\partial_x^2 u(x, y)$ κλπ. Με άλλα λόγια,

$$\partial_x u \equiv u_x, \quad \partial_y u \equiv u_y,$$

$$\partial_x^2 u \equiv u_{xx}, \quad \partial_{xy}^2 u \equiv u_{xy}, \quad \partial_{yy}^2 u \equiv u_{yy}$$

$$\partial_x^3 u \equiv u_{xxx}, \quad \partial_{xxy}^3 u \equiv u_{xxy}, \quad \partial_{xyy}^3 u \equiv u_{xyy}, \quad \partial_{yyy}^3 u \equiv u_{yyy},$$

όπου, για συντομία, παραλείψαμε την παρένθεση (x, y) που προσδιορίζει τις ανεξάρτητες μεταβλητές.

Αυτός ο τρόπος αναπαράστασης έχει το πλεονέκτημα ότι, δείχνει την πράξη της παραγώγισης ως αυτόνομη. Από αυτή την άποψη, ταιριάζει καλύτερα με έναν άλλο τρόπο με τον οποίο συμβολίζονται οι συναρτήσεις, ιδιαίτερα στο χώρο των καθαρών μαθηματικών. Συγκεκριμένα, μια συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής που παίρνει μόνο πραγματικές τιμές θεωρείται ως πράξη *απεικόνισης* ενός στοιχείου του \mathbb{R} σε κάποιο στοιχείο του ίδιου χώρου. Αυτό δηλώνεται με μια έκφραση της μορφής $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Όταν υιοθετούμε αυτή τη σκοπιά, η τιμή $f(x)$ της συνάρτησης στο σημείο x ονομάζεται *εικόνα του στοιχείου* x , πράγμα που δηλώνεται με την αλυσίδα $f: x \rightarrow f(x)$.

Ανάλογα, μια συνάρτηση δύο πραγματικών μεταβλητών με πραγματικές τιμές συχνά παριστάνεται με μια έκφραση της μορφής $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Τότε ο αριθμός $u(x, y)$ αναφέρεται και πάλι ως εικόνα του στοιχείου (x, y) , πράγμα που δηλώνεται με την αλυσίδα $u: (x, y) \rightarrow u(x, y)$.

Με τον ίδιο λοιπόν τρόπο, η μερική παράγωγος $\partial_x u$ θεωρείται ως το αποτέλεσμα της πράξης της παραγώγισης της συνάρτησης u ως προς τη μεταβλητή x . Αυτή καθαυτή η πράξη της παραγώγισης παριστάνεται από το σύμβολο ∂_x , που συχνά αναφέρεται ως *τελεστής*. Όταν λοιπόν υιοθετούμε αυτό το πλαίσιο, τότε λέμε ότι ο τελεστής ∂_x δρα στη συνάρτηση u για να δώσει την $\partial_x u$. Αυτό δηλώνεται με την αλυσίδα $\partial_x: u \rightarrow \partial_x(u)$, ή την απλούστερη $\partial_x: u \rightarrow \partial_x u$.

Κλείνουμε τούτο το εισαγωγικό εδάφιο με μια, περιττή ίσως, επισήμανση. Όλα όσα αναφέραμε παραπάνω για τις συναρτήσεις δύο μεταβλητών γενικεύονται αμέσως για να καλύψουν τις συναρτήσεις τριών και περισσότερων μεταβλητών. Για παράδειγμα, αν η απεικόνιση $u: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ εκφράζεται σαν $u(x, y, z, t)$ τότε η μερική παράγωγός της ως προς την τέταρτη μεταβλητή στο σημείο (a, b, c, d) δεν είναι παρά το όριο

$$\partial_t u(a, b, c, d) \equiv u_t(a, b, c, d) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(a, b, c, d) - u(a, b, c, d+h)}{h},$$

όταν βέβαια αυτό το όριο υπάρχει.

Ασκήσεις

0.1 Να υπολογιστεί η παράγωγος πρώτης τάξης των παρακάτω συναρτήσεων και να προσδιοριστεί ποιες από αυτές ανήκουν στην κλάση $C^1(I)$, όπου I το διάστημα ορισμού της αντίστοιχης συνάρτησης.

(i) $f(x) = \ln x + e^{3x}$, $x > 0$.

(ii) $f(x) = \sqrt{x} + e^{-x}$, $x \geq 0$.

(iii) $f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$

$$(iv) f(x) = \begin{cases} (x^2 - 1)^2, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

$$(v) f(x) = \begin{cases} -1, & x \leq -\frac{\pi}{2} \\ \sin x, & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 1, & x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

0.2 Να υπολογιστούν οι μερικές η παράγωγοι πρώτης τάξης των παρακάτω συναρτήσεων και να προσδιοριστεί ποιες από αυτές ανήκουν στην κλάση $C^1(\Omega)$, όπου Ω το πεδίο ορισμού της αντίστοιχης συνάρτησης.

$$(i) u(x, y) = \sin(x^2 - y^2), (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

$$(ii) u(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 - 1, & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0, & x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}, (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

$$(iii) u(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2 - 1)^2, & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0, & x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}, (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

0.3 Να υπολογιστούν οι μερικές η παράγωγοι δεύτερης τάξης των παρακάτω συναρτήσεων και να προσδιοριστεί ποιες από αυτές ανήκουν στην κλάση $C^2(\Omega)$, όπου Ω το πεδίο ορισμού της αντίστοιχης συνάρτησης.

$$(i) u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{y}} e^{-x^2/y}, x \in \mathbb{R}, y > 0.$$

$$(ii) u(x, y) = \ln(x^2 + y^2), (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\}.$$

$$(iii) u(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2 - 1)^2, & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0, & x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}, (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

$$(iv) u(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2 - 1)^4, & x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0, & x^2 + y^2 \geq 1 \end{cases}, (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Η έννοια της μερικής διαφορικής εξίσωσης

Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ που απεικονίζει το τυχαίο σημείο (x, y) του \mathbb{R}^2 στον αριθμό

$$(1.1) \quad u(x, y) = x^2 + y^2.$$

Παραγωγίζοντάς της ως προς τη μεταβλητή x , παίρνουμε τη συνάρτηση $u_x: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, της οποίας οι τιμές δίνονται από τον τύπο

$$(1.2) \quad u_x(x, y) = 2x.$$

Ανάλογα, η παραγωγή ως προς τη μεταβλητή y οδηγεί στη συνάρτηση $u_y: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ που καθορίζεται από τον τύπο

$$(1.3) \quad u_y(x, y) = 2y.$$

Είναι φανερό ότι, ο συνδυασμός των (1.1), (1.2) και (1.3), οδηγεί στη σχέση

$$(1.4) \quad x u_y(x, y) + y u_x(x, y) = 2 u(x, y), \quad \text{για κάθε } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Ένα εύλογο ερώτημα που αμέσως γεννιέται σ' αυτό το σημείο είναι το εξής: Η $u(x, y) = x^2 + y^2$ είναι η μοναδική συνάρτηση για την οποία ισχύει η (1.4); Αν έτσι έχουν τα πράγματα, τότε θα πρέπει να υπάρχει τρόπος να αντιστρέψουμε την πορεία που οδήγησε σ' αυτή τη σχέση και, ξεκινώντας από την (1.4) να καταλήξουμε στην (1.1).

Αυτό το ερώτημα μπορούμε να το αναδιατυπώσουμε ως εξής: Υπάρχουν άλλες συναρτήσεις δύο μεταβλητών, εκτός από την $u(x, y) = x^2 + y^2$, που πληρούν τη σχέση (1.4);

Με τον ένα ή τον άλλο τρόπο, εκείνο που θέλουμε να κάνουμε είναι να αντιμετωπίσουμε τη συνάρτηση $u(x, y)$ που περιέχεται στην ισότητα (1.4) ως άγνωστο αντικείμενο. Όμως, μια ισότητα, ένα στοιχείο της οποίας θεωρείται ως άγνωστο, ονομάζεται εξίσωση. Και η εύρεση του αρχικά άγνωστου στοιχείου ονομάζεται λύση της εξίσωσης. Άρα, αυτό που θέλουμε πλέον να κάνουμε είναι να λύσουμε την εξίσωση (1.4) ως προς τη συνάρτηση $u(x, y)$.

Αν παραλείψουμε την παρένθεση (x, y) που δηλώνει το ποιες είναι οι ανεξάρτητες μεταβλητές των συναρτήσεων που υπεισέρχονται στη σχέση (1.4), μπορούμε να τη γράψουμε στη μορφή

$$(1.5) \quad x u_y + y u_x = 2 u.$$

Ισοδύναμα,

$$(1.6) \quad x u_y + y u_x - 2 u = 0.$$

Αυτή η σχέση ανάμεσα στην u , τις μερικές παραγώγους της πρώτης τάξης u_x , u_y και τις ανεξάρτητες μεταβλητές x , y είναι της μορφής

$$(1.7) \quad F(x, y, u, u_x, u_y) = 0.$$

Κάθε εξίσωση αυτής της μορφής που περιέχει μία τουλάχιστον από τις παραγώγους της άγνωστης συνάρτησης u ονομάζεται **μερική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης**.

Βέβαια, η μορφή (1.7) καλύπτει μόνο τις μερικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης για μια συνάρτηση δύο μεταβλητών. Έτσι, αν το άγνωστο αντικείμενο είναι μια συνάρτηση τριών ανεξάρτητων μεταβλητών τις οποίες συμβολίζουμε με x , y και z , αντίστοιχα, τότε η (1.7) πρέπει να αντικατασταθεί από την

$$(1.8) \quad F(x, y, z, u, u_x, u_y, u_z) = 0.$$

Η γενίκευση για συναρτήσεις ακόμα περισσότερων μεταβλητών είναι προφανής.

Παράδειγμα 1.1

(i) Αν για F στον τύπο (1.7) επιλέξουμε τη συνάρτηση $F(x, y, u, p, q) = x y + p + q$, τότε θα οδηγηθούμε στη μερική διαφορική εξίσωση

$$(1.9) \quad x y + u_x + u_y = 0.$$

(ii) Η επιλογή $F(x, y, u, p, q) = p + u q$ οδηγεί από τον ίδιο τύπο στην εξίσωση

$$(1.10) \quad u_x + u u_y = 0.$$

(iii) Ανάλογα, αν στον τύπο (1.8) θέσουμε $F(x, y, z, u, p, q, r) = x p + y q + z r$, τότε θα καταλήξουμε στην εξίσωση

$$(1.11) \quad x u_x + y u_y + z u_z = 0.$$

(iv) Η επιλογή $F(x, y, u, p, q) = p^2 + q^2 + r^2$ στον ίδιο τύπο οδηγεί στην εξίσωση

$$(1.12) \quad u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 0.$$

■

Ας θεωρήσουμε τώρα τη συνάρτηση $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$(1.13) \quad u(x, y) = x^2 - y^2.$$

Από αυτόν εύκολα συνάγεται ότι,

$$(1.14) \quad u_x(x, y) = 2x, \quad u_y(x, y) = -2y$$

και

$$(1.15) \quad u_{xx}(x, y) = 2, \quad u_{xy}(x, y) = 0, \quad u_{yy}(x, y) = -2.$$

Αν ξεχάσουμε την αφετηρία τους, τότε κάθε μια από τις σχέσεις (1.14) και (1.15) μπορεί να θεωρηθεί ως εξίσωση με άγνωστο αντικείμενο τη συνάρτηση $u(x, y)$. Το ίδιο ισχύει και για τους συνδυασμούς τους. Μπορούμε, για παράδειγμα, να θέσουμε το ερώτημα, ποιες είναι οι συναρτήσεις δύο μεταβλητών, που σαν την $u(x, y) = x^2 - y^2$, έχουν μηδενική μικτή παράγωγο δεύτερης τάξης σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού τους. Με άλλα λόγια, μπορούμε να ζητήσουμε να βρεθεί το σύνολο των λύσεων της εξίσωσης

$$(1.16) \quad u_{xy}(x, y) = 0.$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να ζητήσουμε τη λύση της εξίσωσης

$$(1.17) \quad u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0,$$

όπου, και πάλι, ως άγνωστο αντικείμενο θεωρείται η συνάρτηση $u(x, y)$.

Θα μπορούσαμε, επίσης, να εξετάσουμε για ποιες συναρτήσεις ισχύει η ισότητα

$$(1.18) \quad y u_x(x, y) + x u_y(x, y) + u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) + u_{xy}(x, y) = 0,$$

για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Αν παραλείψουμε την ένδειξη (x, y) για τις ανεξάρτητες μεταβλητές, τότε οι σχέσεις (1.16), (1.17) και (1.18) γράφονται, αντίστοιχα, σαν $u_{xy} = 0$, $u_{xx} + u_{yy} = 0$ και $y u_x + x u_y + u_{xx} + u_{yy} + u_{xy} = 0$. Οι τελευταίες είναι της μορφής

$$(1.19) \quad F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = 0.$$

Κάθε εξίσωση αυτής της μορφής, στην οποία ως άγνωστο αντικείμενο θεωρείται η συνάρτηση u , ονομάζεται **μερική διαφορική δεύτερης τάξης**, αν περιέχει μία τουλάχιστον από τις παραγώγους u_{xx} , u_{yy} και u_{xy} .

Παράδειγμα 1.2

(i) Όταν $F(x, y, u, p, q, r, s, t) = \sin(x + y) + q - r$, τότε ο τύπος (1.19) δίνει τη μερική διαφορική εξίσωση

$$(1.20) \quad \sin(x + y) + u_y - u_{xx} = 0.$$

(ii) Η επιλογή $F(x, y, u, p, q, r, s, t) = q - y t$ οδηγεί από τον ίδιο τύπο (1.19) στην εξίσωση

$$(1.21) \quad u_{xx} - y u_{yy} = 0.$$

(iii) Ανάλογα, αν θέσουμε $F(x, y, u, p, q, r, s, t) = u p + q - r$, τότε από τον τύπο (1.19) θα καταλήξουμε στην εξίσωση

$$(1.22) \quad u u_x + u_y - u_{xx} = 0.$$

(iv) Τέλος, η περίπλοκη μορφή $F(x, y, u, p, q, r, s, t) = (1 + q^2)r - 2 p q s + (1 + p^2)t$ οδηγεί στην εξίσωση

$$(1.23) \quad (1 + u_y^2) u_{xx} - 2 u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2) u_{yy} = 0.$$

■

Η γενίκευση του ορισμού που δώσαμε παραπάνω σε μερικές διαφορικές εξισώσεις στις οποίες το άγνωστο αντικείμενο είναι συνάρτηση τριών ή περισσότερων μεταβλητών είναι προφανής.

Εύκολα επίσης γίνεται αντιληπτό, ότι, γενικότερα, με τον όρο **μερική διαφορική εξίσωση τάξης m** , όπου m τυχαίος φυσικός αριθμός, εννοούμε μια σχέση της μορφής

$$(1.24) \quad F(x, y, \dots, u, u_x, u_y, \dots, u_{xx}, u_{xy}, \dots, u_{xxx}, u_{xxy}, \dots) = 0$$

το αριστερό μέλος της οποίας περιέχει μία τουλάχιστον από τις μερικές παραγώγους τάξης m , όχι όμως και ανώτερης, της άγνωστης συνάρτησης u .

Ιδιαίτερη πάντως σημασία, από την άποψη των μεθόδων επίλυσης και της συμπεριφοράς των λύσεων, δεν έχει τόσο η τάξη μιας διαφορικής εξίσωσης, όσο τον αν είναι

γραμμική ή όχι. **Γραμμικές** λέγονται οι μερικές διαφορικές εξισώσεις που η συνάρτηση F στον τύπο της μορφής (1.24) είναι γραμμική ως προς την u και τις παραγώγους της. Όλες οι άλλες λέγονται **μη γραμμικές**.

Για παράδειγμα, μια διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης για μια συνάρτηση δύο μεταβλητών χαρακτηρίζεται ως γραμμική εάν και μόνο όταν μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$(1.25) \quad a(x, y) u_x + b(x, y) u_y + c(x, y) u + d(x, y) = 0,$$

Ανάλογα, μια διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης για μια συνάρτηση δύο μεταβλητών θα πρέπει να είναι της μορφής

$$(1.26) \quad a(x, y) u_{xx} + b(x, y) u_{xy} + c(x, y) u_{yy} + d(x, y) u_x + e(x, y) u_y + f(x, y) u + g(x, y) = 0$$

για να πούμε ότι είναι γραμμική. Διαφορετικά, την χαρακτηρίζουμε ως μη γραμμική.

Παράδειγμα 1.3

(i) Οι μερικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης

$$(1.6) \quad x u_y + y u_x - 2 u = 0,$$

$$(1.9) \quad x y + u_x + u_y = 0,$$

$$(1.11) \quad x u_x + y u_y + z u_z = 0,$$

είναι γραμμικές. Οι

$$(1.10) \quad u_x + u u_y = 0,$$

$$(1.12) \quad u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 0,$$

είναι μη γραμμικές.

(ii) Οι μερικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης

$$(1.16) \quad u_{xy} = 0.$$

$$(1.17) \quad u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

$$(1.18) \quad y u_x + x u_y + u_{xx} + u_{yy} + u_{xy} = 0,$$

$$(1.20) \quad \sin(x + y) + u_y - u_{xx} = 0.$$

$$(1.21) \quad u_{xx} - y u_{yy} = 0.$$

Αντίθετα, οι

$$(1.22) \quad u u_x + u_y - u_{xx} = 0.$$

$$(1.23) \quad (1 + u_y^2) u_{xx} - 2 u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2) u_{yy} = 0.$$

είναι μη γραμμικές.

Παράδειγμα 1.4

Να προσδιοριστεί η τάξη κάθε μιας από τις παρακάτω μερικές διαφορικές εξισώσεις για τη συνάρτηση $u: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$. Σε κάθε περίπτωση, να εξεταστεί αν η αντίστοιχη εξίσωση είναι

γραμμική ή όχι.

(i) $u_x + u + (x + y)^2 = 0$, $u = u(x, y)$.

(Γράφοντας $u = u(x, y)$, εννοούμε ότι οι ανεξάρητες μεταβλητές συμβολίζονται με x και y , αντίστοιχα. Ο ίδιος συμβολισμός ακολουθείται και στις επόμενες.)

(ii) $u_x u_y - u = 0$, $u = u(x, y)$.

(iii) $u_x + u u_y - u^2 = \sin(x y)$, $u = u(x, y)$.

(iv) $u_{xx} + u_{yy} - u_{tt} = 0$, $u = u(x, y, t)$.

(v) $u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0$, $u = u(r, \theta)$.

(vi) $u_{xx} - u_{tt} = \sin(u)$, $u = u(x, t)$.

(vii) $u_{xx} u_{yy} - u_{xy}^2 = 0$, $u = u(x, y)$.

(viii) $u_t + u u_x + u_{xxx} = 0$, $u = u(x, t)$.

Λύση

(i) Πρώτης τάξης, γραμμική.

(ii) Πρώτης τάξης, μη γραμμική.

(iii) Πρώτης τάξης, μη γραμμική.

(iv) Δεύτερης τάξης, γραμμική.

(v) Δεύτερης τάξης, γραμμική.

(vi) Δεύτερης τάξης, μη γραμμική.

(vii) Δεύτερης τάξης, μη γραμμική.

(viii) Τρίτης τάξης, μη γραμμική.

■

Ασκήσεις

1.1 Να προσδιοριστεί η τάξη κάθε μιας από τις παρακάτω μερικές διαφορικές εξισώσεις. Επίσης, να εξηγηθεί το γιατί η εξίσωση είναι γραμμική ή μη γραμμική.

(i) $x u_x + y^2 u_y + 3 u = 0$, $u = u(x, y)$.

(ii) $u_x - u_y - u^2 = 0$, $u = u(x, y)$.

(iii) $u_x + u u_y + u = x y$, $u = u(x, y)$.

(iv) $u_t = u_{xx} + u u_x$, $u = u(x, t)$.

(v) $u_{xx} - u_{tt} = u^3, u = u(x, t).$

(vi) $u_{xx} + u_{yy} - u_t = \sin t e^{-x^2-y^2}, u = u(x, y, t).$

(vii) $u_{rr} + \frac{2}{r} u_r + \frac{\cot \theta}{r^2} u_\theta + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} u_{\phi\phi} = 0, u = u(r, \theta, \phi).$

(viii) $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - u_{tt} = 0, u = u(x, y, z, t).$

1.2 α) Να δειχτεί ότι η συνάρτηση

$$u(x, t) = \exp(x + ct),$$

είναι λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης

$$c u_x - u_t = 0.$$

β) Να γίνει το ίδιο για κάθε μια από τις ακόλουθες εξισώσεις και τις αντίστοιχες συναρτήσεις.

(i) $u_x + u_y = u, u(x, y) = (x - y)^2 e^x.$

(ii) $u_x + u_t = u^2, u(x, t) = \frac{1}{(x-t)^2 - x}.$

(iii) $u_t = u_{xx}, u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right).$

(iv) $u_{xx} + u_{yy} = 0, u(x, y) = 5xy + x^2 - y^2.$

(v) $u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} = 0, u(r, \theta) = r^2 \sin \theta \cos \theta.$

(vi) $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - u_{tt} = 0, u(x, y, z, t) = \exp[-(x - t)^2].$

(vii) $u_t + u u_x + 6 u_{xxx} = 0, u(x, t) = \frac{72}{\cosh^2(x-24t)}.$

1.3 Να δειχτεί ότι, αν $u_1(x, y)$ και $u_2(x, y)$ είναι δύο λύσεις της γραμμικής ΜΔΕ

$$a(x, y) u_x + b(x, y) u_y + c(x, y) u = 0$$

όπου a, b, c δοσμένες συνεχείς συναρτήσεις, τότε και η $u \equiv \alpha u_1(x, y) + \beta u_2(x, y)$, με α, β αυθαίρετες σταθερές, είναι λύση της παραπάνω ΜΔΕ.

1.4 Να κατασκευαστεί μια γραμμική μερική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης, στις λύσεις τη οποίας περιέχεται η συνάρτηση $u(x, y) = xy$.

1.5 Να κατασκευαστεί μια γραμμική μερική διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης, στις λύσεις τη οποίας περιέχεται η συνάρτηση $u(x, y) = \exp[-(x + y)^2]$.

2. Γενικές και ειδικές λύσεις

Στο προηγούμενο εδάφιο δείξαμε αναλυτικά ότι, η συνάρτηση

$$(2.1) \quad u(x, y) = x^2 + y^2, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

αποτελεί λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης

$$(2.2) \quad x u_x + y u_y - 2u = 0.$$

Με άλλα λόγια, η ισότητα

$$(2.3) \quad x u_x(x, y) + y u_y(x, y) - 2u(x, y) = 0,$$

ισχύει πραγματικά σε κάθε σημείο (x, y) του \mathbb{R}^2 .

Ωστόσο, αφήσαμε αναπάντητο το ερώτημα αν συμβαίνει το ίδιο και με άλλες συναρτήσεις, διαφορετικές από την $u(x, y) = x^2 + y^2$. Με άλλα λόγια, δεν εξακριβώσαμε ακόμη αν η εξίσωση (2.2) επιδέχεται και άλλες λύσεις.

Την απάντηση σ' αυτό το σημαντικό ερώτημα θα τη δώσουμε αμέσως. Για το σκοπό αυτό, όμως, είναι απαραίτητο να κάνουμε πρώτα μία ακόμη υπενθύμιση. Συγκεκριμένα, θα πρέπει να θυμίσουμε έναν τρόπο με τον οποίο συχνά κατασκευάζουμε συναρτήσεις δύο ή περισσότερων μεταβλητών από άλλες απλούστερες. Αυτό, λοιπόν, γίνεται, συνθέτοντας την αρχικά δοσμένη συνάρτηση πολλών μεταβλητών με μια συνάρτηση μιας μόνο μεταβλητής.

Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι ξεκινάμε με την τυχαία συνάρτηση δύο μεταβλητών $g(x, y)$. Η σύνθεσή της με τη συνάρτηση $f(\xi)$ δεν είναι παρά η συνάρτηση $h(x, y)$ που προκύπτει αν στη θέση του ξ βάλουμε την $g(x, y)$. Η **σύνθεση της g με την f** συμβολίζεται με $f \circ g$, οπότε ο ορισμός που μόλις δώσαμε παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$(2.4) \quad h = f \circ g \quad \Leftrightarrow \quad h(x, y) = f(g(x, y)).$$

Παράδειγμα 2.1

Αν $g(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ και $f(\xi) = \sqrt{\xi}$, τότε

$$h(x, y) = f \circ g(x, y) = f(g(x, y)) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

■

Από τη σκοπιά της τωρινής μας συζήτησης, δύο χαρακτηριστά της πράξης της σύνθεσης που θα πρέπει να προσέξουμε είναι τα εξής. Πρώτο, το πεδίο ορισμού της νέας συνάρτησης πολλών μεταβλητών είναι συνήθως ένα γνήσιο υποσύνολο του πεδίου ορισμού της αρχικής. Αυτό φαίνεται καθαρά στο παράδειγμα που μόλις δώσαμε. Δεύτερο, εκεί όπου η f είναι διαφορίσιμη, οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης $h = f \circ g$ μπορεί να υπολογιστούν χρησιμοποιώντας την παράγωγο f' της f και τις μερικές παραγώγους της g , με το τρόπο που υποδείχνουν οι ακόλουθοι τύποι:

$$(2.5) \quad \partial_x(f \circ g) = (f' \circ g) \partial_x g \quad \Leftrightarrow \quad h_x(x, y) = f'(g(x, y)) g_x(x, y).$$

$$(2.6) \quad \partial_y(f \circ g) = (f' \circ g) \partial_y g \quad \Leftrightarrow \quad h_y(x, y) = f'(g(x, y)) g_y(x, y).$$

Παράδειγμα 2.2

Αν, όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, $g(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ και $f(\xi) = \sqrt{\xi}$, τότε

$$f'(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\xi}}, \quad g_x(x, y) = -2x, \quad g_y(x, y) = -2y$$

και άρα

$$h_y(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2-y^2}} (-2y) = -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

■

Ας θεωρήσουμε τώρα τη σύνθεση $h = f \circ g$ της συνάρτησης $g(x, y) = y/x$ με την τυχαία διαφορίσιμη συνάρτηση μιας μεταβλητής, f , δηλαδή τη συνάρτηση

$$(2.7) \quad h(x, y) = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Σύμφωνα με τους τύπους (2.5) και (2.6),

$$(2.8) \quad h_x(x, y) = -\frac{y}{x^2} f'\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$(2.9) \quad h_y(x, y) = \frac{1}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right).$$

Τέλος, ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση

$$(2.10) \quad u(x, y) = x^2 h(x, y) = x^2 f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Προφανώς,

$$(2.11) \quad u_x(x, y) = 2x h(x, y) + x^2 h_x(x, y) = 2x f\left(\frac{y}{x}\right) - y f'\left(\frac{y}{x}\right)$$

και

$$(2.12) \quad u_y(x, y) = x^2 h_y(x, y) = x f'\left(\frac{y}{x}\right).$$

$$x u_y + y u_x - 2u = 0.$$

Συνακόλουθα,

$$(2.13) \quad x u_x(x, y) + y u_y(x, y) = 2x^2 f\left(\frac{y}{x}\right) - x y f'\left(\frac{y}{x}\right) - x y f'\left(\frac{y}{x}\right) = 2x^2 f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Δηλαδή,

$$(2.14) \quad x u_x(x, y) + y u_y(x, y) = 2u(x, y).$$

Αυτό σημαίνει ότι, κάθε συνάρτηση της μορφής $u(x, y) = x^2 f(y/x)$, όπου $f(\xi)$ τυχαία διαφορίσιμη συνάρτηση, αποτελεί λύση της διαφορικής εξίσωσης (2.2). Όμως, η κλάση των διαφορίσιμων συναρτήσεων περιέχει άπειρα μέλη. Συνεπώς, η εξίσωση (2.2) επιδέχεται άπειρες λύσεις και όχι μόνο την $u(x, y) = x^2 + y^2$ με την οποία ξεκινήσαμε τη συζήτησή μας.

Η ύπαρξη άπειρων λύσεων δεν χαρακτηρίζει μόνο την εξίσωση (2.2). Το αντίθετο. Οι μερικές διαφορικές εξισώσεις συνήθως επιδέχονται άπειρες λύσεις κι αυτό θα γίνει εμφανές στα παραδείγματα που θα μελετήσουμε αναλυτικά στα επόμενα κεφάλαια. Το άπειρο πλήθος των λύσεων εκφράζεται με πολλούς τρόπους.

Ο συνηθέστερος είναι η παρουσία αυθαίρετων συναρτήσεων στον τύπο που δίνει την οικογένεια των λύσεων, όπως η f στον τύπο $u(x, y) = x^2 f(y/x)$. Μάλιστα, το πλήθος των αυθαίρετων συναρτήσεων που εμφανίζονται σε παρόμοιους τύπους είναι ίσο με την τάξη της εξίσωσης.

Θεωρήστε, για παράδειγμα, τις τυχαίες συναρτήσεις $f(\xi)$, $g(\xi)$ και θέστε

$$(2.15) \quad u(x, y) = f(x + y) + g(x - y).$$

Υποθέτοντας ότι οι δεύτερης τάξης παράγωγοι των f , g υπάρχουν για κάθε ξ σε κάποιο ανοιχτό διάστημα της πραγματικής ευθείας, αμέσως συμπεραίνουμε ότι

$$(2.16) \quad u_{xx}(x, y) = f''(x + y) + g''(x - y)$$

και

$$(2.17) \quad u_{yy}(x, y) = f''(x + y) + g''(x - y).$$

Συνεπώς,

$$(2.18) \quad u_{xx}(x, y) - u_{yy}(x, y) = 0,$$

όποιες κι αν είναι οι f , g .

Οι παραπάνω διαπιστώσεις αποτελούν το λόγο εισαγωγής της ακόλουθης ορολογίας. Μια έκφραση που ορίζει λύσεις μιας μερικής διαφορικής εξίσωσης τάξης m και η οποία περιέχει m αυθαίρετες συναρτήσεις ονομάζεται **γενική ή γενικού τύπου λύση** της δοσμένης εξίσωσης. Αντίθετα, κάθε συγκεκριμένη συνάρτηση που αποτελεί λύση της εξίσωσης αναφέρεται ως **ειδική λύση**.

Παράδειγμα 2.3

(i) Όπως αποδείξαμε παραπάνω κάθε συνάρτηση της μορφής $u(x, y) = x^2 f(y/x)$, όπου $f(\xi)$ τυχαία διαφορίσιμη συνάρτηση, αποτελεί λύση της εξίσωσης $xu_y + yu_x - 2u = 0$. Άρα, η $u(x, y) = x^2 f(y/x)$ αποτελεί γενικού τύπου λύση αυτής της μερικής διαφορικής εξίσωσης.

Από την άλλη, η επιλογή $f(\xi) = \xi$ οδηγεί στη συγκεκριμένη συνάρτηση δύο μεταβλητών $u(x, y) = x^2(y/x) = xy$. Αυτή, λοιπόν, αποτελεί ειδική λύση της εξίσωσης $xu_y + yu_x - 2u = 0$. Μια δεύτερη ειδική λύση της ίδιας εξίσωσης παίρνουμε θέτοντας $f(\xi) = 1 + \xi^2$. Τότε, $u(x, y) = x^2[1 + (y/x)^2] = x^2 + y^2$. Τέλος, η επιλογή $f(\xi) = \sin \xi$ οδηγεί στην ειδική λύση $u(x, y) = x^2 \sin(y/x)$. Προφανώς, οι δυνατές επιλογές για την $f(\xi)$ και άρα οι ειδικές λύσεις της $xu_y + yu_x - 2u = 0$ είναι άπειρες.

(ii) Αποδείξαμε, επίσης, ότι, κάθε συνάρτηση της μορφής $u(x, y) = f(x + y) + g(x - y)$, όπου (f, g) τυχαίο ζευγάρι διαφορίσιμων συναρτήσεων μιας μεταβλητής αποτελεί λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης $u_{xx} - u_{yy} = 0$. Γι' αυτό λέμε ότι, η έκφραση $u(x, y) = f(x + y) + g(x - y)$ αποτελεί γενική λύση της παραπάνω εξίσωσης.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $f(\xi) = 0$, $g(\xi) = \exp(-\xi^2)$. Τότε, η γενική λύση γίνεται

$$u(x, y) = 0 + \exp[-(x - y)^2] \equiv e^{-(x-y)^2}.$$

Αυτή είναι μια συγκεκριμένη συνάρτηση δύο μεταβλητών και άρα ειδική λύση της εξίσωσης $u_{xx} - u_{yy} = 0$. Μια δεύτερη ειδική λύση της ίδιας εξίσωσης μας δίνει η επιλογή $f(\xi) = \exp(-\xi^2)$, $g(\xi) = 0$. Πρόκειται για τη συνάρτηση

$$u(x, y) = \exp[-(x + y)^2] + 0 \equiv e^{-(x+y)^2}.$$

■

Προτού κλείσουμε αυτό το εδάφιο, στο οποίο επικεντρώσαμε την προσοχή μας στην ταξινόμηση των λύσεων μιας μερικής διαφορικής εξίσωσης σε ειδικές και γενικές, θα πρέπει να σημειώσουμε και το ακόλουθο σημαντικό γεγονός. Εκτός από αυτές στις οποίες εμφανίζονται αυθαίρετες συναρτήσεις, υπάρχουν και άλλες εκφράσεις που παριστάνουν ολόκληρες οικογένειες λύσεων μιας μερικής διαφορικής εξίσωσης. Πρόκειται για εκείνες που περιέχουν αυθαίρετες σταθερές ή παραμέτρους. Οι τελευταίες παίζουν ξεχωριστό ρόλο στις μη γραμμικές εξισώσεις και, ενδεικτικά, δίνουμε το ακόλουθο

Παράδειγμα 2.4

(i) Η έκφραση

$$u(x, y) = x \sin a + y \cos a + b,$$

όπου a, b τυχαίες πραγματικές σταθερές, δεν παριστάνει μια συγκεκριμένη συνάρτηση, αλλά μια τη μορφή των μελών μιας οικογένειας συναρτήσεων. Λέμε, λοιπόν, ότι παριστάνει μια **διπαραμετρική οικογένεια συναρτήσεων**.

Τώρα, είναι προφανές ότι,

$$u_x(x, y) = \sin a, \quad u_y(x, y) = \cos a.$$

Άρα,

$$u_x^2(x, y) + u_y^2(x, y) = 1.$$

Αλλά αυτό σημαίνει ότι, κάθε μέλος της παραπάνω διπαραμετρικής οικογένειας συναρτήσεων αποτελεί λύση της μη γραμμικής μερικής διαφορικής εξίσωσης $u_x^2 + u_y^2 - 1 = 0$.

(ii) Και η έκφραση

$$u(x, y) = (x - a)^2 + (y - b)^2,$$

δεν παριστάνει συγκεκριμένη συνάρτηση, όσο δεν προσδιορίζονται οι τιμές των σταθερών a και b . Αντιπροσωπεύει μια διπαραμετρική οικογένεια συναρτήσεων, με την ακόλουθη αξιοσημείωτη ιδιότητα: Κάθε μέλος της αποτελεί λύση της μη γραμμικής μερικής διαφορικής εξίσωσης

$$u_x^2 + u_y^2 - 4u = 0.$$

■

Ασκήσεις

2.1 Να δειχτεί ότι η συνάρτηση που δίνεται δίπλα σε κάθε μια από τις παρακάτω μερικές διαφορικές εξισώσεις αποτελεί γενικού τύπου λύση της αντίστοιχης εξίσωσης. Σε κάθε περίπτωση οι f, g κλπ είναι αυθαίρετες συναρτήσεις.

(i) $u_x - u_y = u, \quad u(x, y) = f(x + y) e^x.$

(ii) $u_x + 2x u_t = u, \quad u(x, t) = f(t - x^2) e^x.$

(iii) $x u_x + 2 u_y = u^2, \quad u(x, y) = \frac{1}{f(y - 2 \ln x) - \ln x}.$

(iv) $u_{xy} = 2x, \quad u(x, y) = x^2 y + f(x) + g(y).$

(v) $u_{xx} - u_{tt} = 8x, \quad u(x, t) = x(x^2 - t^2) + f(x + t) + g(x - t).$

2.2 Να δειχτεί ότι οι πολυπαραμετρικές οικογένειες των συναρτήσεων που συνοδεύουν τις παρακάτω μερικές διαφορικές εξισώσεις αποτελούν λύσεις της αντίστοιχης εξίσωσης.

(i) $u_x^2 - u_z^2 = 4u, \quad u(x, z) = (x - a)^2 - (z - b)^2.$

(ii) $u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = 1, \quad u(x, y, z) = ax + by + cz + d, \quad a^2 + b^2 + c^2 = 1.$

(iii) $u_{xx} + u_{yy} = u_t, \quad u(x, y, t) = \frac{1}{t} \exp\left[-\frac{(x-a)^2 + (y-b)^2}{4t}\right].$

(iv) $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = u_{tt}, \quad u(x, y, z, t) = \sin(ax + by + cz - t), \quad a^2 + b^2 + c^2 = 1.$

3. Εξισώσεις χωρίς λύση

Επειδή, για τις μερικές διαφορικές εξισώσεις, γραμμικές και μη, που εξετάσαμε αναλυτικά ως τώρα, κατασκευάσαμε όχι μόνο μία, αλλά άπειρες λύσεις, υπάρχει ο κίνδυνος να παραπλανηθεί ο αναγνώστης μας και να νομίσει ότι, κάθε μερική διαφορική εξίσωση είναι επιλύσιμη. Για να διασκεδάσουμε αυτή την εντύπωση, σπεύδουμε να δώσουμε το εξής

Αντιπαράδειγμα

Η συνάρτηση

$$h(x, y) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \wedge y \geq 0 \\ 0, & x < 0 \vee y < 0 \end{cases}$$

είναι σαφώς ορισμένη σε κάθε σημείο του \mathbb{R}^2 . Συνεπώς, και το νόημα της μερικής διαφορικής εξίσωσης

$$u_{x,y} = h(x, y)$$

είναι πεντακάθαρο: Ζητιέται η συνάρτηση $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, της οποίας η δεύτερης τάξης μικτή μερική παράγωγος ισούται με τη μονάδα στο πρώτο τερτημόριο του επίπεδου xy και μηδενίζεται παντού αλλού.

Ας υποθέσουμε, λοιπόν, ότι τέτοια συνάρτηση υπάρχει και ας θέσουμε

$$f(x) := u_y(x, b), \quad g(y) := u_x(a, y),$$

όπου (a, b) τυχαίο ζευγάρι θετικών αριθμών. Τότε, τόσο η $f(x)$ όσο και η $g(y)$ είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις μιας μεταβλητής. Κι αυτό γιατί,

$$f'(x) = u_{xy}(x, b), \quad g'(y) = u_{xy}(a, y),$$

και η $u_{xy}(x, y)$, ως λύση του δοσμένου προβλήματος, ορίζεται σε κάθε σημείο του \mathbb{R}^2 .

Τώρα, σύμφωνα με την απαίτηση του προβλήματος, οι παράγωγοι των συναρτήσεων $f(x)$ και $g(y)$ παρουσιάζουν την ακόλουθη συμπεριφορά:

$$f'(x) = h(x, b) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

και

$$g'(y) = h(a, y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ 1, & y \geq 0 \end{cases}$$

Όμως, συναρτήσεις που η παράγωγός τους συμπεριφέρεται με αυτό τον τρόπο δεν υπάρχουν!

Για να βεβαιωθείτε, θεωρήστε πρώτα το ανοιχτό διάστημα $x < 0$. Εκεί, $f'(x) = 0$ και άρα $f(x) = c_1$, μια σταθερή. Στο ανοιχτό διάστημα $y > 0$, $f'(x) = 1$ και άρα $f(x) = x + c_2$, όπου c_2 επίσης τυχαία σταθερή. Αλλά η $f(x)$, ως διαφορίσιμη συνάρτηση, θα πρέπει να και συνεχής στο $x = 0$. Αυτό σημαίνει ότι, πρώτο, η τιμή $f(0-)$ στην οποία τείνει η $f(x)$ καθώς πλησιάζουμε το $x = 0$ από τ' αριστερά πρέπει να συμφωνεί με την τιμή $f(0+)$ στην οποία τείνει

η $f(x)$ καθώς πλησιάζουμε το $x = 0$ από τα δεξιά. Δεύτερο, τα όρια $f(0-)$ και $f(0+)$ θα πρέπει να συμφωνούν με τον αριθμό $f(0)$. Αυτές οι δεσμεύσεις συνεπάγονται ότι $c_1 = c_2$ και τελικά

$$f(x) = \begin{cases} c_1, & x < 0 \\ c_1 + x, & x \geq 0 \end{cases}$$

Όμως, αυτή η συνάρτηση δεν είναι διαφορίσιμη στο $x = 0$!

Από το γεγονός, λοιπόν, ότι δεν υπάρχουν διαφορίσιμες συναρτήσεις με την παραπάνω συμπεριφορά, αμέσως έπεται ότι, η υπόθεση πως η εξίσωση $u_{x,y} = h(x, y)$ έχει λύση δεν ευσταθεί.

■

Η διαπίστωση ότι υπάρχουν διαφορικές εξισώσεις χωρίς λύση δεν θα πρέπει να μας ξενίζει. Από αυτή την άποψη, οι εξισώσεις που μελετάμε σ' αυτό το σύγγραμμα έχουν καλή παρέα. Ορισμένοι φίλοι τους μας είναι γνωστοί από παλιά. Όλοι γνωρίζουμε, για παράδειγμα, ότι η αλγεβρική εξίσωση

$$x^2 + 1 = 0$$

δεν επιδέχεται λύση. Με άλλα λόγια, δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός που, όταν πολλαπλασιαστεί με τον εαυτό του, μας δίνει την αρνητική μονάδα.

Εκείνος ή εκείνη που θα απορήσει με τον τελευταίο ισχυρισμό μας, μπορεί να έχει στο νου το αποτέλεσμα ότι η εξίσωση $x^2 + 1 = 0$, όχι μόνο λύνεται, αλλά επιδέχεται και δύο λύσεις, τους αριθμούς $\pm i$. Όμως, αυτό το αποτέλεσμα δεν έχει καμία σχέση με το σύνολο των πραγματικών αριθμών \mathbb{R} και την πράξη του πολλαπλασιασμού δύο στοιχείων του \mathbb{R} , με την έννοια που όλοι γνωρίζουμε. Στην πραγματικότητα, αφορά το σύνολο \mathbb{R}^2 , με την έννοια που σκιαγραφείται στις αμέσως επόμενες γραμμές.

Συνήθως, το σύνολο \mathbb{R}^2 θεωρείται εφοδιασμένο με τρεις (μόνο!) πράξεις, από τις οποίες οι δύο είναι βασικές. Η πρώτη βασική πράξη είναι η **πρόσθεση** δύο στοιχείων του. Συγκεκριμένα, ως **άθροισμα** των τυχαίων στοιχείων $z = (a, b)$ και $w = (c, d)$ του \mathbb{R}^2 ορίζεται το ζευγάρι πραγματικών αριθμών $(a + c, b + d)$. Δηλαδή,

$$(3.1) \quad z + w \equiv (a, b) + (c, d) := (a + c, b + d).$$

Η δεύτερη βασική πράξη στον \mathbb{R}^2 είναι ο **πολλαπλασιασμός** ενός στοιχείου του με έναν πραγματικό αριθμό. Έτσι, με **γινόμενο** των $\lambda \in \mathbb{R}$ και $z = (a, b) \in \mathbb{R}^2$ εννοούμε το ζευγάρι πραγματικών αριθμών $(\lambda a, \lambda b)$. Δηλαδή,

$$(3.2) \quad \lambda z \equiv \lambda(a, b) := (\lambda a, \lambda b).$$

Τέλος, με **εσωτερικό γινόμενο** τυχαίων στοιχείων $z = (a, b)$ και $w = (c, d)$ του \mathbb{R}^2 νοείται ο πραγματικός αριθμός $a c + b d$. Δηλαδή,

$$(3.3) \quad z w \equiv (a, b) \cdot (c, d) := a c + b d.$$

Με αυτές ακριβώς τις τρεις πράξεις θα θεωρούμε και μεις ότι είναι εφοδιασμένος ο \mathbb{R}^2 σε όλα τα επόμενα κεφάλαια.

Ωστόσο, είναι δυνατό να εισαγάγουμε και μια τέταρτη πράξη στον \mathbb{R}^2 . Πρόκειται για έναν πολλαπλασιασμό που, σε αντίθεση με τον προηγούμενο οδηγεί σε στοιχείο του ίδιου του

\mathbb{R}^2 . Συγκεκριμένα, με **γινόμενο** των τυχαίων στοιχείων $z = (a, b)$ και $w = (c, d)$ του \mathbb{R}^2 θα εννοούμε το ζευγάρι $(ac - bd, ad + bc)$. Δηλαδή,

$$(3.4) \quad zw \equiv (a, b)(c, d) := (ac - bd, ad + bc).$$

Όταν ο \mathbb{R}^2 θεωρείται πως είναι εφοδιασμένος και με αυτή την πράξη, τότε αναφέρεται ως **το σύνολο των μιγαδικών αριθμών** και συμβολίζεται με \mathbb{C} .

Από την άποψη του πολλαπλασιασμού που μόλις εισαγάγαμε, υπάρχουν δύο υποσύνολα του \mathbb{R}^2 που παίζουν ξεχωριστό ρόλο. Πρόκειται για εκείνα που είναι της μορφής $(a, 0)$ και $(0, b)$, αντίστοιχα. Γιατί, το γινόμενο δύο στοιχείων του πρώτου υποσύνολου είναι κι αυτό της μορφής $(a, 0)$:

$$(3.5) \quad (a, 0)(c, 0) = (ac, 0).$$

Αυτό σημαίνει ότι από την άποψη του μιγαδικού πολλαπλασιασμού, το πρώτο υποσύνολο συμπεριφέρεται σαν το σύνολο \mathbb{R} κατά τον συνήθη πολλαπλασιασμό.

Αντίθετα, το γινόμενο δύο στοιχείων της μορφής $(0, b)$ είναι πάντοτε της μορφής $(a, 0)$:

$$(3.6) \quad (0, b)(0, d) = (-bd, 0).$$

Εδικότερα,

$$(3.7) \quad (0, b)^2 \equiv (0, b)(0, b) = (-b^2, 0).$$

Από αυτή την άποψη, το δεύτερο υποσύνολο συμπεριφέρεται με τρόπο που ποτέ δε συναντάμε στους πραγματικούς αριθμούς.

Λόγω αυτής ακριβώς της συμπεριφοράς τα υποσύνολα $\{(a, 0)\}$ και $\{(0, b)\}$ του \mathbb{R}^2 ονομάζονται **υποσύνολο των πραγματικών αριθμών** και **υποσύνολο των φανταστικών αριθμών** του \mathbb{C} , αντίστοιχα.

Σημειώστε, τέλος, ότι οι δύο βασικές πράξεις του \mathbb{R}^2 μας επιτρέπουν να γράφουμε το τυχαίο στοιχείο του στη μορφή

$$(3.8) \quad z \equiv (a, b) = a(1, 0) + b(0, 1).$$

Αυτή η παρατήρηση, σε συνδυασμό με την προηγούμενη, οδηγεί στην υιοθέτηση του ακόλουθου βολικού συμβολισμού: Για συντομία, κάθε ζευγάρι της μορφής $(a, 0)$ παριστάνεται με a , ενώ κάθε ζευγάρι της μορφής $(0, b)$ συμβολίζεται με ib . Με άλλα λόγια, στο πλαίσιο των μιγαδικών αριθμών,

$$(3.9) \quad \boxed{(a, 0) \equiv a, \quad (0, b) \equiv ib}$$

Ειδικότερα,

$$(3.10) \quad \boxed{(1, 0) \equiv 1, \quad (0, 1) \equiv i}$$

Κατά συνέπεια η έκφραση $z \equiv (a, b) = a(1, 0) + b(0, 1)$ γίνεται

$$(3.11) \quad \boxed{z \equiv (a, b) \equiv a + ib}$$

Κλείνουμε αυτή τη μεγάλη και ίσως περιττή παρένθεση, τονίζοντας ότι, πραγματικά, η αλγεβρική εξίσωση $x^2 + 1 = 0$ είναι επιλύσιμη, αλλά σ' ένα πλαίσιο πολύ διαφορετικό από εκείνο των πραγματικών αριθμών -σ' ένα πλαίσιο, όπου η έννοια των αριθμών και της πράξης του πολλαπλασιασμού έχουν αποκτήσει ένα νόημα τελείως διαφορετικό από το συνηθισμένο.

Με τον ίδιο τρόπο, και η μερική διαφορική εξίσωση με την οποία ανοίξαμε τη συζήτησή μας μπορεί να λυθεί, αλλά μόνο αν ξεφύγουμε από το πλαίσιο των συνηθισμένων συναρτήσεων και της πράξης της μερικής παραγώγισης έτσι όπως συνήθως την εννοούμε και την ορίσαμε στο πρώτο εδάφιο αυτού του κεφάλαιου.

Το ευρύτερο πλαίσιο που επιτρέπει την επίλυση της μερικής διαφορικής εξίσωσης του παραδείγματος κατασκευάστηκε μόλις πρόσφατα, από την άποψη της ιστορίας των μαθηματικών. Η δημιουργία του ξεκίνησε γύρω στο 1930, με τη δουλειά του θεωρητικού φυσικού Dirac (Ντίρακ, Αγγλία) και ολοκληρώθηκε στα μέσα του 20^{ου} αιώνα από τους μαθηματικούς Sobolev (Σομπόλεφ, Ρωσία) και Schwarz (Σβάρτς, Γαλλία). Τα στοιχεία αυτού του διευρυμένου χώρου ονομάζονται *γενικευμένες συναρτήσεις* ή *κατανομές*. Θα τις παρουσιάσουμε στο δεύτερο τόμο αυτού του συγγράμματος.

Ως τότε, όταν λέμε λύση μιας μερικής διαφορικής εξίσωσης τάξης m θα εννοούμε μια συνάρτηση που έχει συνεχείς παραγώγους μέχρι και τάξης m . Συχνά, αυτές οι λύσεις αναφέρονται και ως *αυστηρές ή κλασικές λύσεις*, σε αντιδιαστολή με λύσεις άλλου τύπου που τυχόν επιδέχεται η εξίσωση. Οι δεύτερες ονομάζονται *γενικευμένες λύσεις*.

Ασκήσεις

3.1 Να δειχτεί ότι η συνάρτηση

$$u(x, y) = \begin{cases} 0, & x < y \\ \frac{(x-y)^2}{(x-y)^2+1}, & x \geq y \end{cases}$$

αποτελεί λύση της εξίσωσης $u_{xx} - u_{yy} = 0$, αλλ' όχι κλασική.

4. Γεωμετρική ερμηνεία και γραφική αναπαράσταση των λύσεων

Κάθε ειδική, δηλαδή συγκεκριμένη, λύση μιας μερικής διαφορικής εξίσωσης επιδέχεται μια γεωμετρική ερμηνεία που είναι ξεχωριστής σημασίας, τόσο από την άποψη της εποπτείας, όσο και για τη μελέτη των ιδιοτήτων αυτής της λύσης.

Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα, τη λύση

$$(4.1) \quad u(x, y) = x^2 + y^2, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

της εξίσωσης

$$(4.2) \quad x u_y + y u_x - 2u = 0.$$

Θέτοντας

$$(4.3) \quad z = u(x, y)$$

ορίζουμε ένα υποσύνολο S του \mathbb{R}^3 σε συντεταγμένες x, y, z . Με άλλα λόγια,

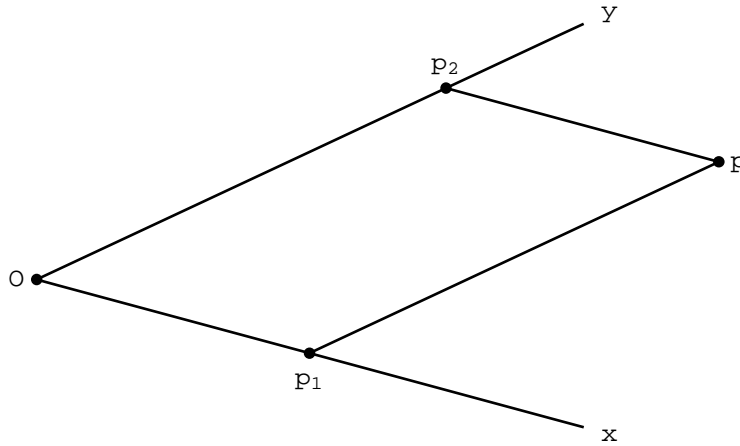
$$(4.4) \quad S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = u(x, y)\}.$$

Αυτό το υποσύνολο συνήθως αναφέρεται ως **γράφημα** της συνάρτησης $u(x, y)$. Από γεωμετρική άποψη, το σύνολο S παριστάνει μια ομαλή επιφάνεια που, στην προκειμένη περίπτωση, λέγεται **παραβολοειδές εκ περιστροφής**.

Επιφάνειες αυτού του είδους μπορούν να παρασταθούν γραφικά στην επιφάνεια ενός χαρτιού ή ενός υπολογιστή, χάρη σε μια σύμβαση που μας επιτρέπει να κατασκευάζουμε ένα σχήμα δύο διαστάσεων και να το θεωρούμε ως τρισδιάστατο!

Για να καταλάβουμε το πώς γίνεται αυτή η κατασκευή, θα ξεκινήσουμε υπενθυμίζοντας δυο-τρία βασικά στοιχεία από τη δομή του Ευκλείδειου επίπεδου. Συγκεκριμένα, δύο τυχαίες ευθείες του επίπεδου είτε τέμνονται είτε όχι. Στη δεύτερη περίπτωση, χαρακτηρίζονται ως παράλληλες (η μία προς την άλλη).

Ας θεωρήσουμε, λοιπόν, τις ευθείες x και y του Σχ. 4.1 που τέμνονται στο σημείο O , και το τυχαίο σημείο του επίπεδου, p . Η ευθεία που διέρχεται από το p και είναι παράλληλη προς την y τέμνει την ευθεία x , σε κάποιο σημείο, ας το πούμε p_1 . Ανάλογα, η ευθεία που διέρχεται από το p και είναι παράλληλη προς την x τέμνει την ευθεία y , σε κάποιο σημείο, ας το πούμε p_2 . Με αυτό τον τρόπο, ορίζεται η αντιστοιχία $p \rightarrow (p_1, p_2)$ που είναι μονοσήμαντη. Δηλαδή, η διαδικασία που περιγράψαμε εξασφαλίζει ότι, σε κάθε σημείο του επίπεδου αντιστοιχίζεται μόνο ένα ζευγάρι σημείων που κείνται πάνω στις ευθείες x και y , αντίστοιχα.

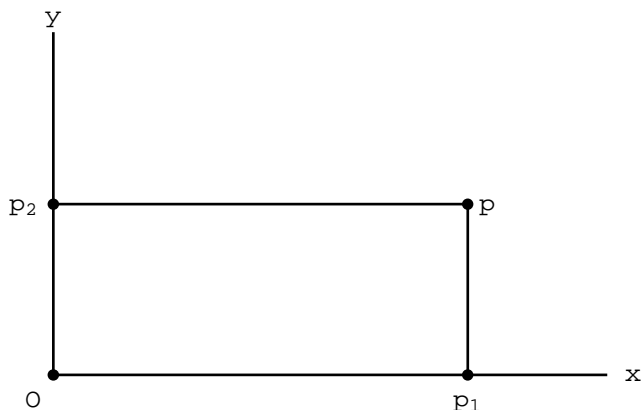


Σχ. 4.1. Η αντιστοίχιση $p \rightarrow (p_1, p_2)$ του τυχαίου σημείου p του Ευκλείδειου επίπεδου στα σημεία p_1 και p_2 των ευθειών x και y .

Μάλιστα, η παραπάνω κατασκευή είναι τέτοια που εξασφαλίζει και το αντίστροφο. Δηλαδή, αν ξεκινήσουμε από ένα ζευγάρι σημείων (p_1, p_2) , το πρώτο από τα οποία ανήκει στην ευθεία x και το δεύτερο στην y , τότε συμβαίνει το εξής: Η ευθεία που διέρχεται από το p_1 και είναι παράλληλη προς την y τέμνει εκείνη που διέρχεται από το p_2 και είναι παράλληλη προς την x σε ένα και μοναδικό σημείο, ας το πούμε p . Η αντιστοιχία $(p_1, p_2) \rightarrow p$ που ορίζεται με αυτό τον τρόπο είναι η αντίστροφη της $p \rightarrow (p_1, p_2)$. Συνεπώς, με τη βοήθεια δύο τεμνόμενων ευθειών, μπορούμε να αντιστοιχίζουμε, αμφιμονοσήμαντα, κάθε σημείο του επίπεδου σε ένα ζευγάρι σημείων, τα οποία βρίσκονται πάνω στις τεμνόμενες ευθείες.

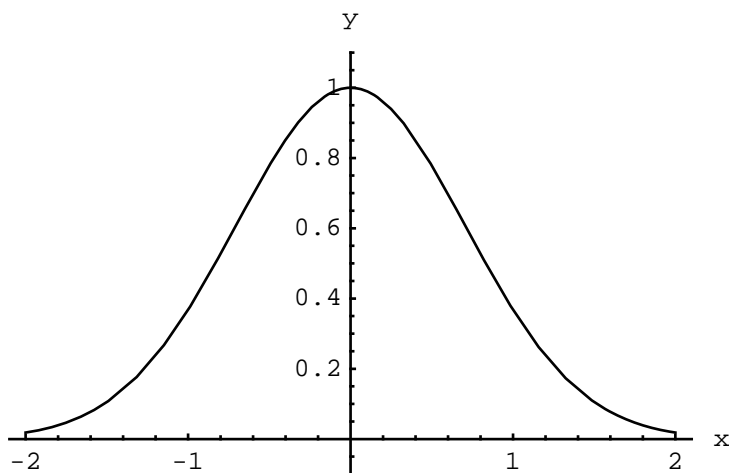
Η αντιστοιχία που μόλις περιγράψαμε μετατρέπεται σε αντιστοιχία των σημείων του επίπεδου στα ζευγάρια των πραγματικών αριθμών, εθώς μόλις οι δύο τεμνόμενες ευθείες βαθμονομηθούν. Δηλαδή, αμέσως μόλις, με τη βοήθεια ενός ευθύγραμμου τμήματος που ονομάζουμε μονάδα μήκους, ορίσουμε την αντιστοιχία των σημείων των ευθειών x και y προς τους πραγματικούς αριθμούς, \mathbb{R} . Με αυτό τον τρόπο, στο τυχαίο σημείο p_1 της ευθείας x αντιστοιχίζεται ένας πραγματικός αριθμός, ας τον πούμε $x(p_1)$. Ανάλογα, στο τυχαίο σημείο p_2 της ευθείας y αντιστοιχίζεται ο πραγματικός αριθμός $y(p_2)$. Αλλά, όπως ήδη τονίσαμε, το ζευγάρι (p_1, p_2) μπορεί να θεωρείται ως αντιπρόσωπος του σημείου p . Συνεπώς, και το ζευγάρι $(x(p_1), y(p_2)) \in \mathbb{R}^2$ αντιστοιχεί αμφιμονοσήμαντα στον σημείο p . Γι' αυτό το λόγο, αντί για $(x(p_1), y(p_2))$, συνήθως γράφουμε απλώς $(x(p), y(p))$.

Συνήθως, οι ευθείες x και y της κατασκευής που περιγράψαμε επιλέγονται να είναι κάθετες η στην άλλη, όπως στο Σχ. 4.2.



Σχ. 4.2. Η αντιστοίχιση $p \rightarrow (p_1, p_2)$ του τυχαίου σημείου p του Ευκλείδειου επίπεδου στα σημεία p_1 και p_2 των ορθογώνιων ευθειών x και y .

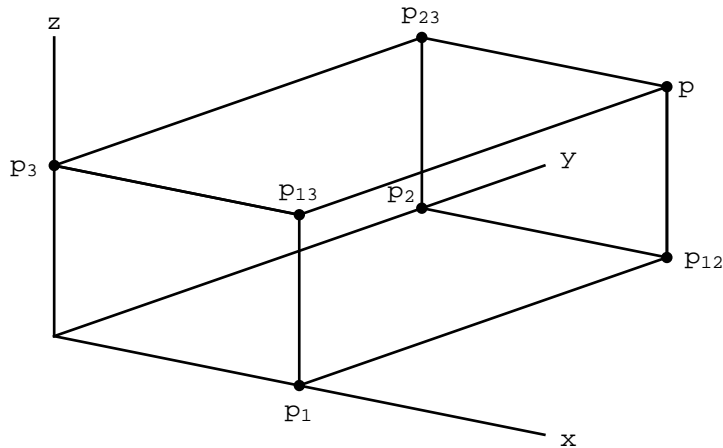
Όμως, οι ορθογώνιοι άξονες είναι κατάλληλοι μόνο για τη γραφική παράσταση συναρτήσεων μιας μεταβλητής που παίρνει πραγματικές τιμές. Γιατί, ως γράφημα μιας συνάρτησης αυτού του είδους, ας πούμε της $f(x)$, ορίζεται το υποσύνολο $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$ του επίπεδου $x y$. Στο Σχ. 4.3, δείχνουμε ένα τμήμα της καμπύλης Γ , για το αντιπροσωπευτικό παράδειγμα όπου $f(x) = \exp(-x^2)$.



Σχ. 4.3. Τμήμα του γραφήματος της συνάρτησης $f(x) = \exp(-x^2)$.

Όταν πρέπει να κατασκευάσουμε ένα επίπεδο σχήμα που παριστάνει το γράφημα μιας πραγματικής συνάρτησης δύο μεταβλητών, η χρήση τριών ορθογώνιων ευθειών που διέρχονται από το ίδιο σημείο είναι αδύνατη. Γιατί, δύο από αυτές θα ταυτίζονταν, υποχρεωτικά.

Στην περίπτωση, λοιπόν, της συνάρτησης δύο μεταβλητών, η κατασκευή της γραφικής της παράστασης ξεκινάει με την επιλογή μιας τριάδας διαφορετικών ευθειών του επίπεδου που τέμνονται σε ένα σημείο, ας πούμε στο O . Αυτό μπορεί να γίνει, προσθέτοντας στις ευθείες x, y του Σχ. 4.1 μια κατακόρυφη ευθεία z , οπότε καταλήγουμε στο Σχ. 4.4.



Σχ. 4.4. Επίπεδη αναπαράσταση του \mathbb{R}^3

Στη συνέχεια, θεωρούμε ότι, κάθε ζευγάρι από τις ευθείες x , y και z λειτουργεί με τον ίδιο ακριβώς τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιήσαμε τις ευθείες x , y στην ανάλυση του Σχ. 4.1. Συγκεκριμένα, η επιλογή των σημείων p_1 και p_2 που βρίσκονται πάνω στους άξονες x και y , αντίστοιχα, ορίζει το σημείο p_{12} . Όπως τονίσαμε παραπάνω, η αντιστοιχία $(p_1, p_2) \rightarrow p_{12}$ είναι μονοσήμαντη. Αν επιλέξουμε κι ένα σημείο p_3 της ευθείας z , τότε η ευθεία που διέρχεται από το p_3 και είναι παράλληλη προς τον άξονα x τέμνει την ευθεία που διέρχεται από το p_1 και είναι παράλληλη προς τον άξονα z στο σημείο p_{13} . Και πάλι, η αντιστοιχία $(p_1, p_3) \rightarrow p_{13}$ είναι μονοσήμαντη. Τέλος, η ευθεία που διέρχεται από το p_2 και είναι παράλληλη προς τον άξονα z τέμνει εκείνη που διέρχεται από το p_3 και είναι παράλληλη προς τον άξονα x στο σημείο p_{23} . Με αυτό τον τρόπο ορίζεται η τρίτη μονοσήμαντη αντιστοιχία $(p_2, p_3) \rightarrow p_{23}$.

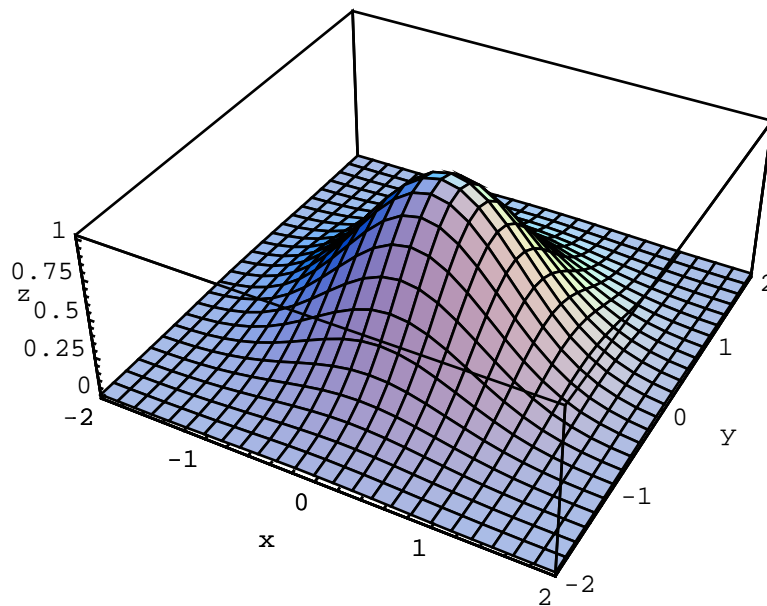
Είναι φανερό ότι, οι δύο ευθείες που ορίζουν τα σημεία p_1, p_{12} και p_1, p_{13} , αντίστοιχα, μπορεί να χρησιμοποιηθούν ως άξονες με τον ίδιο ακριβώς τρόπο που χρησιμοποιήθηκε νωρίτερα το ζευγάρι των ευθειών y και z . Η αντίστοιχη διαδικασία οδηγεί στην αντιστοιχία $(p_{12}, p_{13}) \rightarrow p$. Αλλά, όπως ήδη σημειώσαμε, τα σημεία p_{12} και p_{13} καθορίζονται μονοσήμαντα, ευθύς μόλις επιλέξουμε τα p_1, p_2 και p_3 . Αυτό σημαίνει ότι η παραπάνω διαδικασία ορίζει την μονοσήμαντη αντιστοιχία $(p_1, p_2, p_3) \rightarrow p$.

Όπως φαίνεται καθαρά και στο Σχ. 4.4, τίποτε δε θα άλλαζε αν, για τον ορισμό του σημείου p , στηρίζομασταν είτε στις δύο ευθείες που διέρχονται από τα σημεία p_2, p_{12} και p_2, p_{23} , αντίστοιχα, είτε σ' εκείνες που ορίζουν τα ζευγάρια (p_3, p_{13}) και (p_3, p_{23}) . Έτσι, λοιπόν, εκείνο που μένει να προσθέσουμε για να ολοκληρωθεί η αντιστοίχιση του \mathbb{R}^3 στο Ευκλείδειο επίπεδο που αποτελεί τη βάση της γραφικής αναπαράστασης συναρτήσεων δύο μεταβλητών είναι το εξής: Ευθύς μόλις οι άξονες x , y και z βαθμονομηθούν, τα σημεία p_1, p_2 και p_3 αντιστοιχίζονται σε τρεις συγκεκριμένους πραγματικούς αριθμούς, ας τους πούμε $x(p_1)$, $y(p_2)$ και $z(p_3)$, αντίστοιχα. Αφού η αντιστοιχία $(p_1, p_2, p_3) \rightarrow p$ είναι αμφιμονοσήμαντη, το ίδιο ισχύει και για την $(x(p_1), y(p_2), z(p_3)) \rightarrow p$.

Βέβαια, η ανάλυση που παρουσιάσαμε είχε για κύριο σκοπό το να διευκολύνει τον αναγνώστη στην ερμηνεία των γραφικών παραστάσεων που, συχνά στα επόμενα, θα συνοδεύει την ανάλυση των λύσεων ορισμένων από τις μερικές διαφορικές εξισώσεις που θα

συγκεντρώσουν το ενδιαφέρον μας. Γιατί, πρέπει να τονίσουμε ότι, στις μέρες μας, το καθήκον της κατασκευής των αντίστοιχων γραφικών παραστάσεων έχουν αναλάβει ειδικά προγράμματα υπολογιστών που τα καταφέρνουν πολύ καλύτερα ακόμη κι από έναν ... ζωγράφο της αναγέννησης. Σε κλάσματα του δευτερόλεπτου παράγουν γραφικές παραστάσεις περίπλοκων συναρτήσεων, και όχι μόνο, οι οποίες τηρούν και τις αρχές της προοπτικής ή, αν θέλετε, της προβολικής γεωμετρίας. Γι' αυτό, οι γραφικές παραστάσεις που κατασκευάζονται με τη βοήθεια των υπολογιστών είναι πολύ πιο ζωντανές από αυτές που θα κατασκευάζαμε εμείς στηριζόμενοι στην αντιστοιχία του \mathbb{R}^3 προς τον \mathbb{R}^2 , την οποία μόλις περιγράψαμε.

Το Σχ. 4.5 προσφέρει ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα. Κατασκευάστηκε με τη βοήθεια του προγράμματος *Mathematica*, για το οποίο θα πούμε αρκετά πράγματα αργότερα. Εκείνο που θέλουμε να τονίσουμε σχετικά, είναι ότι, οι καμπύλες που ξεχωρίζουν πάνω στην επιφάνεια που παριστάνει το σχήμα προκύπτουν από την τομή της επιφάνειας με τα επίπεδα xz και yz , αντίστοιχα. Ισοδύναμα, οι παραπάνω καμπύλες ορίζονται από τις τομές της επιφάνειας $z = u(x, y)$ με τα επίπεδα $y = \text{σταθ}$ και $x = \text{σταθ}$. Πρόκειται, με άλλα λόγια, για τις καμπύλες που ορίζονται από τις σχέσεις $z = u(x, c_1)$ και $z = u(c_2, y)$, αντίστοιχα, όταν στις παραμέτρους c_1 και c_2 δοθεί ένα πεπερασμένο πλήθος από διακριτές τιμές. Ανάλογα, βέβαια, και με το σχήμα της επιφάνειας, η απεικόνιση μπορεί να γίνει πιο παραστατική με το να δειχτούν οι τομές της επιφάνειας με οικογένειες επιπέδων άλλου είδους από αυτές που μόλις αναφέραμε.



Σχ. 4.5. Γραφική αναπαράσταση του γραφήματος της συνάτησης $u(x, y) = \exp(-x^2 - y^2)$.

Ανεξάρτητα από το αν μπορεί κανείς να το παραστήσει και γραφικά, το υποσύνολο

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = u(x, y)\}$$

του \mathbb{R}^3 , που ορίζεται από μια λύση $u(x, y)$ κάποιας μερικής διαφορικής στην οποία η άγνωστη είναι συνάρτηση δύο μεταβλητών, ονομάζεται **ολοκληρωτική επιφάνεια** της δοσμένης εξίσωσης. Ο λόγος είναι ότι, συχνά, η επίλυση μιας διαφορικής εξίσωσης αναφέρεται και σαν **ολοκλήρωση της εξίσωσης**.

Κατ' αναλογία προς την περίπτωση των δύο ανεξάρτητων μεταβλητών, το υποσύνολο

$$S = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_{n+1} = u(x_1, x_2, \dots, x_n)\},$$

του \mathbb{R}^{n+1} , που ορίζεται από τη λύση $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ δοσμένης μερικής διαφορικής εξίσωσης για μια συνάρτηση n μεταβλητών, ονομάζεται **ολοκληρωτική υπερεπιφάνεια** της εξίσωσης.

5. Σημασία των μερικών διαφορικών εξισώσεων (ΜΔΕ)

Η κατασκευή μιας μερικής διαφορικής εξίσωσης (=ΜΔΕ, από τώρα και στο εξής) είναι πανεύκολη υπόθεση. Αυτό φάνηκε καθαρά από το πρώτο κίολας εδάφιο αυτού του κεφάλαιου. Η πιο πάνω διαπίστωση οδηγεί αμέσως στο εξής θεμελιώδες ερώτημα: Ποια είναι η αξία της μελέτης των εξισώσεων αυτού του είδους; Ειδικότερα, ποια είναι η σημασία των ΜΔΕ από την άποψη των εφαρμογών;

Μια σύντομη απάντηση στο πιο πάνω ερώτημα προσπαθήσαμε να δώσουμε στον Πρόλογο αυτού του βιβλίου. Ενδεικτικά και πάλι, αναφέρουμε το ακόλουθο γεγονός. Δεν υπάρχει κλάδος των βασικών και εφαρμοσμένων επιστημών που, όταν αποκτάει μαθηματική έκφραση, δε χρησιμοποιεί τις έννοιες και τις μεθόδους επίλυσης των ΜΔΕ. Από τα καθαρά μαθηματικά και τη θεωρητική φυσική ως τη βιολογία, τη χημεία, τη γεωλογία, τα οικονομικά και όλες τις συνιστώσες της μηχανολογίας.

Άρα, το ερώτημα που αναφέραμε πρέπει, μάλλον, να διατυπωθεί με διαφορετικό τρόπο: Ποιο είναι το θεμελιώδες χαρακτηριστικό των ΜΔΕ που τις καθιστά τόσο σημαντικές, όχι μόνο στις βασικές επιστήμες αλλά και στις εφαρμογές τους;

Για να είναι η απάντηση που θα δώσουμε όσο γίνεται σαφέστερη, ας θεωρήσουμε την απλή ΜΔΕ

$$(5.1) \quad u_x = f(x, y),$$

όπου $f(x, y)$ κάποια συγκεκριμένη συνάρτηση, που είναι συνεχής σε κάθε σημείο του \mathbb{R}^2 . Για παράδειγμα, η $f(x, y) = x y$. Υποτίθεται, ότι και το άγνωστο αντικείμενο, u , είναι μια πραγματική συνάρτηση δύο πραγματικών μεταβλητών ($u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$).

Ας υποθέσουμε, τώρα ότι έχουμε βρεί μια λύση της (5.1), τη συνάρτηση $u^{(1)}(x, y)$. Αυτό σημαίνει ότι, $u_x^{(1)} = f(x, y)$. Ας θεωρήσουμε, στη συνέχεια, τη συνάρτηση $u^{(2)}(x, y) = u^{(1)}(x, y) + g(y)$, όπου $g(y)$ οποιαδήποτε διαφορίσιμη συνάρτηση, εκτός από τη μηδενική. Η $g(y) = \exp(x)$ είναι ένα καλό παράδειγμα. Προφανώς, η $u^{(2)}(x, y)$ είναι διαφορετική από την $u^{(1)}(x, y)$. Ακόμη και σε ένα μόνο σημείο $y_1 \in \mathbb{R}$ να είναι η τιμή της $g(y)$ διαφορετική από το μηδέν, οι $u^{(1)}(x, y)$ και $u^{(2)}(x, y)$ θα παίρνουν διαφορετικές τιμές σε κάποιο ανοιχτό διάστημα γύρω από το y_1 . Γι' αυτό γράφουμε $u^{(1)} \neq u^{(2)}$.

Από την άλλη, $\partial_x g(y) = 0$ και άρα $u_x^{(2)} = f(x, y)$. Αυτό σημαίνει ότι, ενώ είναι τελείως διαφορετικές συναρτήσεις, στο επίπεδο της μερικής παραγώγου ως προς τη μεταβλητή x , οι $u^{(1)}(x, y)$ και $u^{(2)}(x, y)$ ταυτίζονται. Με άλλα λόγια, η πληροφορία που μας παρέχει η ΜΔΕ (5.1) δεν αρκούν για να διακρίνουμε την $u^{(1)}(x, y)$ από την $u^{(2)}(x, y)$. Κι αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι

**Η δράση του τελεστή της μερικής παραγώγισης έχει ως αποτέλεσμα την
δραστική απώλεια πληροφορίας.**

Συνεπώς, κάθε φορά που διατυπώνουμε μια ΜΔΕ, δεν κάνουμε άλλο από το να αφαιρέσουμε ορισμένα χαρακτηριστικά από τα μέλη μιας οικογένειας συναρτήσεων, χαρακτηριστικά που διακρίνουν το ένα μέλος από το άλλο.

Αλλά, προς τι αυτή η εμπρόθετη απώλεια πληροφορίας; Για τον εξής απλό λόγο:

Η σκόπιμη απώλεια πληροφορίας αποτελεί τον πυρήνα της νοητικής διαδικασίας που καταλήγει σε αυτό που ονομάζουμε νόμο της φυσικής, της βιολογίας, της οικονομίας και όλων των άλλων επιστημών.

Τι άλλο είναι, για παράδειγμα, κάποιος νόμος της φυσικής παρά ο εντοπισμός των κοινών χαρακτηριστικών μιας σειράς από τελείως διαφορετικά, σε πρώτη εντύπωση, φαινόμενα; Κάθε πέτρα που θα πετάξουμε με το χέρι μας και κάθε πλανήτης στο ηλιακό μας σύστημα διαγράφει διαφορετική τροχιά στο χώρο. Και όμως, όλες αυτές οι κινήσεις "υπακούουν" στο νόμο της παγκόσμιας έλξης του Νεύτωνα (Newton) που μπορεί να διατυπωθεί με τη μορφή της ΜΔΕ

$$(5.2) \quad u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = f(x, y, z).$$

Η χρησιμότητα των ΜΔΕ στην διατύπωση φυσικών, βιολογικών και άλλων νόμων που διέπουν το σύμπαν στο οποίο ζούμε, δίνει την απάντηση και σ' ένα άλλο σκέλος του αρχικού μας ερωτήματος. Από το άπειρο πλήθος των ΜΔΕ που μπορούμε να κατασκευάσουμε, ορισμένες ξεχωρίζουν και έχουν γίνει ... επώνυμες. Η (5.2), για παράδειγμα, αναφέρεται ως **εξίσωση (του) Poisson** (Πουασόν). Ειδικότερα όταν ως f επιλέγεται η μηδενική συνάρτηση, η παραπάνω ονομάζεται **εξίσωση (του) Laplace** (Λαπλάς).

Η εξίσωση

$$(5.3) \quad u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - c^{-2} u_{tt} = f(x, y, z, t),$$

όπου c θετική σταθερή, συνδέεται με τη διάδοση ηχητικών, ηλεκτρομαγνητικών και άλλου είδους κυμάτων, Γι' αυτό αναφέρεται ως **κυματική εξίσωση** ή **εξίσωση (του) d' Alembert** (Ντ' Αλαμπέρ).

Τα φαινόμενα της διάχυσης και της διάδοσης της θερμότητας περιγράφονται ικανοποιητικά από την εξίσωση (κ θετική σταθερή)

$$(5.4) \quad u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - \kappa^{-1} u_t = f(x, y, z, t).$$

Γι' αυτό, η (5.4) είναι γνωστή ως **εξίσωση της διάχυσης ή της θερμότητας**. Συχνά, λέγεται και **εξίσωση (του) Fourier** (Φουριέ).

Οι τρεις αυτές επώνυμες εξισώσεις θ' αποτελέσουν το επίκεντρο της μελέτης μας, από το μεθεπόμενο κεφάλαιο και πέρα. Ωστόσο, συχνά θα αναφερθούμε και σε αρκετές άλλες εξισώσεις της θεωρητικής φυσικής και των εφαρμογών της. Σημαντικό παράδειγμα αποτελεί η **εξίσωση (του) Schrödinger** (Σρέντιγκερ)

$$(5.5) \quad i \hbar u_t = -\frac{\hbar^2}{2m} (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) + V(x, y, z) u,$$

η οποία αποτελεί τον πυρήνα της Κβαντικής Μηχανικής. Δηλαδή, της θεωρίας που, το 1925, ήρθε να αντικαταστήσει την Κλασική Μηχανική του Νεύτωνα, στο ρόλο της θεμελιώδους περιγραφής του φυσικού κόσμου.

Αν και δεν έχει καμία σημασία από μαθηματική άποψη, σημειώνουμε ότι, στην (5.5), το m συμβολίζει τη μάζα του σωματίου στο οποίο αναφέρεται η εξίσωση Schrödinger και το \hbar είναι η **σταθερή (του) Planck** (Πλανκ). Ο τελευταίος είναι ο θεωρητικός φυσικός που, το 1900,

άνοιξε το δρόμο προς τη διατύπωση της Κβαντικής Μηχανικής, προτείνοντας την **κβάντιση ή διακριτοποίηση** των τιμών της ενέργειας, ως βασικό χαρακτηριστικό των δυνατών καταστάσεων ενός φυσικού συστήματος.

Εκείνο που οφείλουμε να σημειώσουμε για την (5.5) είναι η παρουσία της φανταστικής μονάδας i . Αυτή υποδηλώνει ότι, η άγνωστη συνάρτηση $u(x, y, z, t)$ της εξίσωσης Schrödinger παίρνει μιγαδικές τιμές ($u: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{C}$). Ισοδύναμα, η (5.5) μπορεί να θεωρηθεί ως η συμπυκνωμένη μορφή ενός συστήματος δύο ΜΔΕ, για το ζευγάρι των συναρτήσεων $v: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ και $w: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$, που ορίζονται όταν γράφουμε την $u(x, y, z, t)$ στη μορφή

$$(5.6) \quad u(x, y, z, t) = v(x, y, z, t) + i w(x, y, z, t).$$

Σ' αυτή την περίπτωση, οι συναρτήσεις v και w λέγονται **πραγματικό** και **φανταστικό μέρος** της u και συμβολίζονται με $\operatorname{Re} u$ και $\operatorname{Im} u$, αντίστοιχα. Δηλαδή,

$$(5.7) \quad v = \operatorname{Re} u, \quad w = \operatorname{Im} u.$$

Από αυτή την άποψη, η εξίσωση Schrödinger αποτελεί αντιπροσωπευτικό και όχι απομονωμένο παράδειγμα των ΜΔΕ που συναντάμε στη θεωρητική φυσική, αλλά και σε πολλούς κλάδους των μαθηματικών και των εφαρμογών τους. Δηλαδή, οι θεμελιακοί φυσικοί νόμοι και διάφορες εφαρμογές τους συνήθως διατυπώνονται με τη μορφή συστημάτων ΜΔΕ και όχι μιας μόνο εξίσωσης αυτού του είδους.

Για να δούμε κάποια παραδείγματα, ας υποθέσουμε αρχικά ότι, θέλουμε να βρούμε δύο συναρτήσεις $u, v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με την ακόλουθη ιδιότητα:

$$(5.8) \quad u_x - v_y = 0, \quad u_y + v_x = 0.$$

Παρά την απλότητά τους, αυτές οι δύο εξισώσεις είναι εξαιρετικής σημασίας στο χώρο των θεωρητικών μαθηματικών, πράγμα που αντικατοπτρίζεται και στο όνομά τους. Πρόκειται για τις **εξισώσεις (των) Cauchy-Riemann** (Κωσύ-Ρήμαν). Το σύστημα (5.8) δεσπόζει στη θεωρία των μιγαδικών συναρτήσεων, στην οποία η συμβολή των δύο κολοσών της ιστορίας των μαθηματικών, Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) και Georg-Friedrich-Bernhard Riemann (1826-1866), υπήρξε καθοριστική.

Τα συστήματα που αφορούν μια τριάδα συναρτήσεων συνήθως γράφονται με το συμβολισμό του διανυσματικού λογισμού. Για παράδειγμα, οι εξισώσεις

$$(5.9) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0},$$

αποτελούν συντομογραφία ενός συστήματος τεσσάρων ΜΔΕ για μια τριάδα συναρτήσεων, η οποία παριστάνεται με το σύμβολο \mathbf{E} . Δηλαδή,

$$(5.10) \quad \mathbf{E}(x, y, z) := (X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z)),$$

όπου $X, Y, Z: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ διαφορίσιμες συναρτήσεις με κοινό πεδίο ορισμού. Σ' αυτή την περίπτωση, η τριάδα \mathbf{E} αναφέρεται ως **διανυσματικό πεδίο** του \mathbb{R}^3 και οι ποσότητες $\nabla \cdot \mathbf{E}$ και $\nabla \times \mathbf{E}$ ως **απόκλιση** και **στροβιλισμός** του πεδίου, αντίστοιχα. Συχνά, η $\nabla \cdot \mathbf{E}$ συμβολίζεται με $\operatorname{div} \mathbf{E}$ και η $\nabla \times \mathbf{E}$ με $\operatorname{rot} \mathbf{E}$.

Η απόκλιση δεν είναι παρά μία μόνο συνάρτηση, η οποία ορίζεται με τον ακόλουθο τρόπο:

$$(5.11) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} := X_x + Y_y + Z_z.$$

Αντίθετα, ο στροβιλισμός του πεδίου \mathbf{E} είναι μια τριάδα συναρτήσεων. Συγκεκριμένα,

$$(5.12) \quad \nabla \times \mathbf{E} := (Z_y - Y_z, X_z - Z_x, Y_x - X_y).$$

Συνεπώς, η αναλυτική γραφή των εξισώσεων (4.9) δίνει το ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$(5.13) \quad X_x + Y_y + Z_z = 0, \quad Z_y - Y_z = 0, \quad X_z - Z_x = 0, \quad Y_x - X_y = 0.$$

Αυτή η μορφή του συστήματος (4.9) κάνει πρόδηλο το γεγονός ότι, το παραπάνω σύστημα αποτελείται από τέσσερες ΜΔΕ πρώτης τάξης για τις τρεις συναρτήσεις X , Y και Z . Αλλά, φανερώνει συνάμα την οικονομία που πετυχαίνουμε χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό του διανυσματικού λογισμού.

Πάντως, το ποιον συμβολισμό θα χρησιμοποιήσουμε είναι δευτερεύουσας σημασίας. Εκείνο που αξίζει να σημειώσουμε είναι ότι, πρώτο, το σύστημα (5.9) ή (5.13) συναντιέται σε διάφορους κλάδους της φυσικής, από την βαρύτητα μέχρι τον ηλεκτρισμό και το μαγνητισμό, αλλά και σε μια ποικιλία μαθηματικών μοντέλων για άλλα φυσικά (και όχι μόνο) φαινόμενα.

Το δεύτερο που πρέπει να σημειώσουμε είναι ότι, το παραπάνω σύστημα περιέχει περισσότερες εξισώσεις από αγνώστους. Κάθε σύστημα με αυτή την ιδιότητα χαρακτηρίζεται ως **υπερκαθορισμένο** και, συνήθως δεν είναι επιλύσιμο. Αντίθετα, ένα σύστημα ΜΔΕ στο οποίο το πλήθος των εξισώσεων είναι μικρότερο από το πλήθος των άγνωστων συναρτήσεων αποκαλείται **υποκαθορισμένο**.

Η έννοια του υπερκαθορισμένου συστήματος ΜΔΕ πρώτης τάξης, έχει αποκτήσει ξεχωριστή σημασία τα τελευταία χρόνια και από την άποψη της επίλυσης μιας κατηγορίας πολύ σημαντικών μη γραμμικών ΜΔΕ που αναφέρονται ως **εξισώσεις εξέλιξης**. Στην απλούστερη εκδοχή τους, αυτές οι ΜΔΕ είναι της μορφής

$$(5.14) \quad u_t = F(x, u, u_x, \dots, u_{m_x}),$$

όπου $u = u(x, t)$, η μεταβλητή x προσδιορίζει τη θέση του φυσικού συστήματος ως προς μια ευθεία στο χώρο και η t μια χρονική στιγμή στην εξέλιξή του.

Το διασημότερο παράδειγμα αυτού του είδους των εξισώσεων αποτελεί η **εξίσωση (των) Korteweg-de Vries**

$$(5.15) \quad u_t = u u_x + u_{xxx}.$$

Πρόκειται για μια εξίσωση που προκύπτει κατά τη μαθηματική μοντελοποίηση ενός τεράστιου πλήθους φυσικών και άλλων συστημάτων, αλλά πρωτοδιατυπώθηκε ως μοντέλο της διάδοσης κυμάτων σε ρηγά στρώματα νερού. Από αυτή την άποψη, η εξίσωση Korteweg-de Vries αποτελεί την αναγωγή ή απλούστευση ενός άλλου σημαντικού συστήματος ΜΔΕ -μια αναγωγή που έρχεται ως αποτέλεσμα συγκεκριμένων προσεγγιστικών υποθέσεων για τις ιδιότητες του υδάτινου στρώματος και το πλάτος των κυματισμών.

Το αρχικό και πολύ σημαντικό σύστημα είναι γνωστό ως **εξίσωση (των) Navier-Stokes** (Ναβιέ-Στόουκς) και, στην απλούστερη μορφή του, γράφεται ως εξής:

$$(5.16) \quad \rho [\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}] = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{v}.$$

Από τις συναρτήσεις που εμφανίζονται στην (4.16), οι $\rho = \rho(x, y, z, t)$ και $p = p(x, y, z, t)$, παριστάνουν, αντίστοιχα, την **πυκνότητα** και **πίεση** του ρευστού στο χωρικό

σημείο (x, y, z) , τη χρονική στιγμή t . Η διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z, t)$ αντιπροσωπεύει την ταχύτητα του στοιχείου του ρευστού που, τη στιγμή t , περνάει από το σημείο (x, y, z) . Η σταθερή μ είναι ανάλογη προς την αντίσταση που προβάλλουν στην κίνηση ενός στοιχείου τα διπλανά του και ονομάζεται **συντελεστής του ιξώδους** του ρευστού. Τέλος, η διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{f} = \mathbf{f}(x, y, z, t)$ εκφράζει την εξωτερική δύναμη που υφίσταται κάθε στοιχείο του ρευστού, όπως είναι η έλξη της γής πάνω σε κάθε υδάτινο στρώμα που βρίσκεται στην επιφάνειά της. Αυτή αναφέρεται ως **σωματική δύναμη** και θεωρείται ως γνωστή.

Αν θέσουμε

$$(5.17) \quad \mathbf{u}(x, y, z, t) = (X(x, y, z, t), Y(x, y, z, t), Z(x, y, z, t)),$$

τότε το νόημα του τελεστή $\mathbf{u} \cdot \nabla$ δεν αργεί να γίνει ξεκάθαρο. Γιατί, ως **κλίση** μιας συνάρτησης F ορίζεται το διανυσματικό πεδίο

$$(5.18) \quad \nabla F := (F_x, F_y, F_z).$$

Από τον ορισμό (5.18) είναι φανερό ότι η ∇F , που συχνά γράφεται και ως $\text{grad } F$, μπορεί να θεωρηθεί ως το αποτέλεσμα της δράσης του διανυσματικού τελεστή

$$(5.19) \quad \nabla := (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$$

πάνω στη συνάρτηση F . Τότε το νόημα του τελεστή $\mathbf{u} \cdot \nabla$ γίνεται αμέσως σαφές:

$$(5.20) \quad \mathbf{u} \cdot \nabla = X \partial_x + Y \partial_y + Z \partial_z.$$

Μένει να εξηγήσουμε το νόημα του τελεστή ∇^2 που, μάλιστα, είναι και επώνυμος. Λέγεται **τελεστής (του) Laplace** κι αποτελεί τη σύνθεση του τελεστή της απόκλισης, με τον τελεστή της κλίσης. Δηλαδή,

$$(5.21) \quad \nabla^2 F := \nabla \cdot (\nabla F).$$

Το μόνο που δεν μπορούμε να εξηγήσουμε είναι το γιατί οι μαθηματικοί προτιμούν να συμβολίζουν τον τελεστή του Laplace με Δ , ενώ οι φυσικοί προτιμούν το σύμβολο ∇^2 . Εμείς, για να κρατάμε ίσες αποστάσεις και από τα δύο ... αντιμαχόμενα μέρη, θα χρησιμοποιούμε και τα δύο σύμβολα αδιακρίτως. Απλώς θα σημειώσουμε πως, ο συνδυασμός των (5.11) και (5.18) δείχνει αμέσως ότι

$$(5.22) \quad \nabla^2 F \equiv \Delta F = F_{xx} + F_{yy} + F_{zz}.$$

Οι εξισώσεις Navier-Stokes ανάγονται στη μορφή (5.16) όταν υποθεθεί ότι το ρευστό που περιγράφουν είναι ασυμπίεστο. Ότι δηλαδή, η πυκνότητα ενός στοιχείου του δεν αλλάζει με το χρόνο, καθώς αυτό το στοιχείο μετατοπίζεται στο χώρο. Η υπόθεση ότι το ρευστό είναι ασυμπίεστο περιγράφεται από τη συνθήκη

$$(5.23) \quad \partial_t \rho + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = 0.$$

Από την άλλη, η υπόθεση ότι στο στρώμα του ρευστού που εξετάζουμε δεν προστίθεται υλικό από εξωτερικές πηγές, αλλά ούτε και χάνεται σε ... μαύρες τρύπες, εκφράζεται από την **εξίσωση της διατήρησης της μάζας**

$$(5.24) \quad \rho_t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0.$$

Όμως, από τον ορισμό του τελεστή της απόκλισης αμέσως έπεται ότι,

$$(5.25) \quad \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = (\nabla \rho) \cdot \mathbf{v} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v}.$$

Άρα, οι (5.23) και (5.24) είναι συμβατές μόνο αν

$$(5.26) \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0.$$

Συνακόλουθα, η εξίσωση της διατήρησης της μάζας γίνεται

$$(5.27) \quad \partial_t \rho + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = 0$$

κι έτσι καταλήγουμε στην ακόλουθη διαπίστωση. Η φυσική κατάσταση του ρευστού κάθε χρονική στιγμή t περιγράφεται πλήρως από τις πέντε συναρτήσεις ρ , p και $\mathbf{v} \equiv (X, Y, Z)$. Η εξέλιξη αυτής της κατάστασης διέπεται από τις εξισώσεις (5.16), (5.26) και (5.27).

■ Γραμμικές ΜΔΕ πρώτης τάξης

1. Επίλυση ΜΔΕ με απ' ευθείας ολοκλήρωση

Θα ξεκινήσουμε την συστηματική παρουσίαση των μεθόδων επίλυσης των ΜΔΕ από την απλούστερη και σημαντικότερη. Δεν είναι άλλη από την

$$(1.1) \quad u_x = 0.$$

Ας υποθέσουμε αρχικά ότι, η άγνωστη u είναι συνάρτηση μιας μόνο μεταβλητής, της x . Τότε η (1.1) παριστάνει μια συνήθη διαφορική εξίσωση (ΣΔΕ). Συνεπώς, "με απλή ολοκλήρωση", αμέσως συμπεραίνουμε ότι, $u(x) = c$, όπου c τυχαία σταθερή.

Ας υποθέσουμε στη συνέχεια ότι, η άγνωστη u είναι συνάρτηση δύο μεταβλητών, των x και y , κι ας θυμηθούμε ότι η μερική παραγωγή ως προς x είναι μια διαδικασία στην οποία το y θεωρείται σταθερό. Με άλλα λόγια, ο τελεστής ∂_x της μερικής παραγωγισής ως προς τη μεταβλητή x βλέπει κάθε συνάρτηση που εξαρτιέται μόνο από το y σα μια σταθερή και τη μηδενίζει.

Αλλά αυτό ακριβώς δηλώνει και η ΜΔΕ $u_x = 0$. Ότι, δηλαδή, η άγνωστη συνάρτηση u είναι μια σταθερή για την παραγωγή ως προς x . Συνεπώς,

$$(1.2) \quad u(x, y) = c(y),$$

όπου $c(y)$ μια σταθερή, από την άποψη της παραγωγισής ως προς το x , ποσότητα. Δηλαδή, η έκφραση $c(y)$ δηλώνει μια αυθαίρετη συνάρτηση του y .

Σύμφωνα με την ορολογία που εισαγάγαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, η έκφραση (1.2) παρέχει μια γενική ή γενικού τύπου λύση της (1.1), όταν η $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Αντίθετα, οι συναρτήσεις

$$(1.3) \quad u(x, y) = y^2, \quad u(x, y) = 4 \sin(3y),$$

$$(1.4) \quad u(x, y) = \begin{cases} 1, & y < 0 \\ \sin y, & y \geq 0 \end{cases}$$

και όσες άλλες προκύπτουν από την (1.2) όταν επιλεγεί το τύπος της $c(y)$ αποτελούν ειδικές λύσεις της ΜΔΕ $u_x = 0$.

Παρατήρηση. Η τελευταία λύση δεν είναι καν συνεχής. Από την άλλη, η λύση

$$(1.5) \quad u(x, y) = \begin{cases} 1, & y < 0 \\ 1 + \sin y, & y \geq 0 \end{cases}$$

είναι συνεχής, αλλά δεν ισχύει το ίδιο και για την παράγωγό της:

$$(1.6) \quad u_y(x, y) = \begin{cases} 0, & y < 0 \\ \cos y, & y > 0 \end{cases}$$

Οι παραπάνω λύσεις (1.4) και (1.5) δεν είναι απορριπτέες. Απλώς, ανήκουν στην κατηγορία που ονομάσαμε γενικευμένες λύσεις, σε διάκριση προς τις αυστηρές ή κλασικές. Στις δεύτερες ανήκουν οι λύσεις των ΜΔΕ πρώτης τάξης που είναι κλάσης $C^k(\Omega)$, όπου $k \geq 1$ και Ω η περιοχή ισχύος της λύσης.

■

Αν τώρα υποθέσουμε ότι, η άγνωστη συνάρτηση u στην (1.1) εξαρτιέται από τις μεταβλητές x , y , και z , τότε η γενικού τύπου λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι της μορφής $u(x, y, z) = f(y, z)$, όπου f αυθαίρετη συνάρτηση των μεταβλητών y και z . Η γενίκευση για την περίπτωση όπου $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, με $n \geq 4$, είναι προφανής.

Όλοι γνωρίζουμε ότι, με "απ' ευθείας ολοκλήρωση", μπορούμε να λύσουμε και κάθε ΣΔΕ της μορφής $u_x = f(x)$, με $f(x)$ τυχαία συνεχή συνάρτηση. Γιατί, το θεμελιώδες θεώρημα του διαφορικού λογισμού εξασφαλίζει την ύπαρξη άπειρων διαφορίσιμων συναρτήσεων των οποίων η παράγωγος ταυτίζεται με την $f(x)$. Αν συμβολίσουμε μία από αυτές με $\int f(x) dx$, τότε μπορούμε να γράψουμε τη γενική λύση της ΣΔΕ $u_x = f(x)$ στη μορφή $u(x) = \int f(x) dx + c$, όπου c τυχαία σταθερή.

Ωστόσο, ακόμα κι αν υποθεθεί ότι η άγνωστη στην εξίσωση $u_x = f(x)$ είναι συνάρτηση δύο μεταβλητών, αν δηλαδή $u = u(x, y)$, τότε και πάλι μπορούμε να την λύσουμε με τον παραπάνω τρόπο. Η μόνη τροποποίηση που χρειάζεται είναι να αντικαταστήσουμε τη σταθερή c από μια τυχαία συνάρτηση του y . Μάλιστα, το ίδιο ισχύει και για την ΜΔΕ

$$(1.7) \quad u_x = f(x, y).$$

Δηλαδή, αρκεί να υποθέσουμε ότι η δοσμένη συνάρτηση $f(x, y)$ είναι συνεχής ως τη μεταβλητή x , για να συμπεράνουμε ότι, η γενική λύση της (1.7) δίνεται από τις συναρτήσεις της μορφής

$$(1.8) \quad u(x, y) = \int f(x, y) dx + h(y).$$

Για τον πολύ απλό λόγο ότι, κατά την μερική παραγωγή ως προς τη μεταβλητή x , η y θεωρείται σταθερή. Αλλά τότε και η $f(x, y)$ συμπεριφέρεται ως συνάρτηση μόνο της μεταβλητής x , οπότε η ΜΔΕ $u_x = f(x, y)$ δε διαφέρει σε τίποτα από τη ΣΔΕ $u_x = f(x)$.

Προφανώς, τίποτα δεν θα άλλαζε στην παραπάνω διαδικασία, αν η άγνωστη συνάρτηση εξαρτιόταν από n μεταβλητές, όπου $n > 2$. Για παράδειγμα, η γενική λύση της

$$(1.9) \quad u_x = f(x, y, z),$$

όπου $u = u(x, y, z)$ δίνεται από τον τύπο

$$(1.10) \quad u(x, y, z) = \int f(x, y, z) dx + h(y, z).$$

Και θεωρούμε περιττό να τονίσουμε, ότι, ΜΔΕ σαν τις $u_y = f(x, y)$, $u_y = f(x, y, z)$, $u_z = f(x, y, z)$ δεν διαφέρουν από τις προηγούμενες, παρά μόνο ως προς το όνομα των ανεξάρτητων μεταβλητών.

Παράδειγμα 1.1

(i) Η γενική λύση της ΜΔΕ $u_x = 2x + \cos(x+y)$, $u = u(x, y)$, δίνεται από τις συναρτήσεις της μορφής $u(x, y) = x^2 + \sin(x+y) + h(y)$, όπου $h(y)$ τυχαία συνάρτηση μιας μεταβλητής.

(ii) Η γενική λύση της ΜΔΕ $u_y = 2xy + \exp(x-y)$, $u = u(x, y)$, δίνεται την οικογένεια των συναρτήσεων που γράφονται σαν $u(x, y) = xy^2 - \exp(x-y) + h(y)$.

(iii) Η γενική λύση της ΜΔΕ $u_x = 2x \exp[-(x+y)^2] + z^{-1}$, $z > 0$, $u = u(x, y, z)$, δίνεται από τις συναρτήσεις της μορφής $u(x, y, z) = -\exp[-(x+y)^2] + xz^{-1} + h(y, z)$, όπου η απεικόνιση $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ είναι τυχαία.

(iv) Η γενική λύση της ΜΔΕ $u_z = 2xz \exp[-(x+y)^2] + z^{-1}$, $z > 0$, $u = u(x, y, z)$, δίνεται από τις συναρτήσεις της μορφής $u(x, y, z) = 2xz \exp[-(x+y)^2] + \ln z + h(x, y)$.

■

Στηριζόμενοι στα γνωστά αποτελέσματα για ΣΔΕ πρώτης τάξης της μορφής

$$(1.11) \quad u_x + f(x)u = g(x),$$

όπου $f(x)$, $g(x)$ δοσμένες συνεχείς συναρτήσεις μπορούμε να κατασκευάσουμε τη γενική λύση κάθε ΜΔΕ που μπορεί να τεθεί στη μορφή

$$(1.12) \quad u_x + f(x, y, z, \dots)u = g(x, y, z, \dots),$$

με τις $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ γνωστές. Γιατί, όταν όλες οι (y, z, \dots) παραμένουν σταθερές, η (1.12) ανάγεται στην (1.11). Με τη σειρά της, η (1.11) ανάγεται στην

$$(1.13) \quad (Fu)_x = F(x)g(x),$$

αν πολλαπλασιαστεί με τη συνάρτηση

$$(1.14) \quad F(x) := e^{\int f(x) dx}.$$

Αλλά η (1.13) είναι της μορφής $u_x = h(x)$ και άρα ολοκληρώνεται αμέσως για να δώσει, τελικά, τον γνωστό τύπο

$$(1.15) \quad u(x) = \frac{1}{F(x)} \left[c + \int F(x)g(x) dx \right].$$

Αυτό σημαίνει ότι, η γενική λύση κάθε ΜΔΕ πρώτης τάξης της μορφής (1.12) δίνεται από τον τύπο

$$(1.16) \quad u(x, y, z, \dots) = \frac{1}{F(x, y, z, \dots)} \left[h(y, z, \dots) + \int F(x, y, z, \dots)g(x, y, z, \dots) dx \right],$$

όπου η $h: \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ επιλέγεται αυθαίρετα και

$$(1.17) \quad F(x, y, z, \dots) := e^{\int f(x, y, z, \dots) dx}.$$

Παράδειγμα 1.2

(i) Συγκρίνοντας τη ΜΔΕ $u_x + 2xu = 6xy$, $u = u(x, y)$, με την μορφή (1.12), συμπεραίνουμε ότι, στην προκειμένη περίπτωση,

$$f(x, y) = 2x, \quad g(x, y) = 6xy.$$

Άρα,

$$F(x, y) := e^{\int f(x,y) dx} = e^{x^2}.$$

Σύμφωνα λοιπόν με τον τύπο (1.16), η γενική λύση της $u_x + 2xu = 6xy$ δίνεται από τις συναρτήσεις

$$u(x, y) = e^{-x^2} \left[h(y) + \int e^{x^2} 6xy dx \right] = h(y) e^{-x^2} + 3y.$$

(ii) Για να λύσουμε τη ΜΔΕ $u_y + \cos(x+y)u = 3x \cos(x+y)$, $u = u(x, y)$, αρκεί να προσέξουμε ότι, τώρα, τον ρόλο της μεταβλητής x τον έχει πάρει η y . Συνεπώς, η κατάλληλη μορφή του τύπου (1.16) είναι η ακόλουθη:

$$u(x, y) = \frac{1}{F(x,y)} \left[h(x) + \int F(x, y) g(x, y) dy \right],$$

όπου

$$F(x, y) := e^{\int f(x,y) dy}.$$

Άρα,

$$F(x, y) := e^{\int \cos(x+y) dy} = e^{\sin(x+y)}$$

και έτσι

$$u(x, y) = e^{-\sin(x+y)} \left[h(x) + \int e^{\sin(x+y)} 3x \cos(x+y) dy \right] = h(x) e^{-\sin(x+y)} + 3x.$$

■

Συχνά, με τη διαδικασία της ολοκλήρωσης μπορούμε να λύσουμε και ορισμένες ΜΔΕ μεγαλύτερης τάξης από την πρώτη. Ας θεωρήσουμε, για παράδειγμα, τη ΜΔΕ

$$(1.18) \quad u_{xx} = 0,$$

υποθέτοντας προς το παρόν ότι $u = u(x, y)$. Αν θυμηθούμε ότι, $u_{xx} \equiv \partial_x(\partial_x u)$, αμέσως θα δούμε ότι, η εξίσωση (1.18) γράφεται και σαν

$$(1.19) \quad v_x = 0, \quad v := u_x.$$

Με άλλα λόγια η εξίσωση δεύτερης τάξης (1.18) για τη συνάρτηση $u(x, y)$ ανάγεται σε μια ΜΔΕ πρώτης τάξης για την $v(x, y) := u_x(x, y)$.

Ολοκληρώνοντας την $v_x = 0$, αμέσως βρίσκουμε ότι $v(x, y) = g(y)$, όπου $g(y)$ τυχαία συνάρτηση. Αλλά αυτό σημαίνει ότι $u_x = g(y)$, που επίσης είναι μια ΜΔΕ πρώτης τάξης. Η λύση της είναι προφανής και δίνεται από τις συναρτήσεις της μορφής

$$(1.20) \quad u(x, y) = xg(y) + h(y),$$

με την $h(y)$ επίσης αυθαίρετη.

Παράδειγμα 1.3

(i) Η ΜΔΕ

$$u_{x y} = 4 x y,$$

για τη συνάρτηση $u(x, y)$ γράφεται σαν

$$v_y = 4 x y, \quad v := u_x.$$

Άρα,

$$v(x, y) = 2 x y^2 + f(x),$$

όπου η συνάρτηση $f(x)$ είναι τυχαία. Κατά συνέπεια, $u_x = 2 x y^2 + h(x)$, οπότε

$$u(x, y) = x^2 y^2 + f(x) + g(y),$$

όπου $f(x) = \int h(x) d x$ και $g(y)$ τυχαία. Όμως, αφού η $h(x)$ είναι αυθαίρετη, το ίδιο ισχύει και για το ολοκλήρωμά της. Συνεπώς, η προηγούμενη έκφραση για την $u(x, y)$, με τις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τυχαίες διαφορίσιμες συναρτήσεις, αποτελεί τη γενική λύση της ΜΔΕ $u_{x y} = 4 x y$.

(ii) Η ΜΔΕ τρίτης τάξης

$$u_{y x y} = \sin(x + y),$$

για τη συνάρτηση $u(x, y)$ γράφεται σαν

$$v_y = \sin(x + y), \quad v := u_{x y}.$$

Συνεπώς,

$$v(x, y) = -\cos(x + y) + f(x),$$

όπου $f(x)$ τυχαία συνάρτηση. Αυτό σημαίνει ότι,

$$u_{x y} \equiv (u_x)_y = -\cos(x + y) + f(x).$$

Συνακόλουθα,

$$u_x = -\sin(x + y) + y f(x) + h(x),$$

με την $h(x)$ επίσης τυχαία. Ολοκληρώνοντας αυτή τη ΜΔΕ πρώτης τάξης και ονομάζοντας τις $\int f(x) d x$ και $\int h(x) d x$ $F(x)$ και $H(x)$, αντίστοιχα, καταλήγουμε στην ακόλουθη έκφραση για τη γενική λύση της $u_{y x y} = \sin(x + y)$:

$$u(x, y) = \cos(x + y) + y F(x) + H(x) + G(y),$$

όπου $F, G, H: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τυχαίες διαφορίσιμες συναρτήσεις.

■

Ασκήσεις

1.1 Να κατασκευαστεί η γενική λύση των παρακάτω ΜΔΕ:

(i) $u_x + y u = x y, \quad u = u(x, y).$

$$(ii) u_x + u \tan y = \sin(x + y), \quad u = u(x, y).$$

$$(iii) u_y - 2 y u = 2 \cos x, \quad u = u(x, y).$$

$$(iv) u_z + 2 u = 2 z + 2 \sin(x + y), \quad u = u(x, y, z).$$

$$(v) u_y + 2 u = 2 z + 2 \sin(x + y), \quad u = u(x, y, z).$$

1.2 Να βρεθεί η γενική λύση των ακόλουθων ΜΔΕ

$$(i) u_{x y y} = x y + e^{2x}, \quad u = u(x, y).$$

$$(ii) u_{x y z} = 1, \quad u = u(x, y, z).$$

$$(iii) v_{s t} = e^{s t}, \quad v = v(s, t).$$

$$(iv) v_{r s t} = e^{r+s+t}, \quad v = v(r, s, t).$$

$$(v) \varphi_{\sigma \tau \sigma \tau} = \sin(\sigma + \tau) \cos(\sigma + \tau), \quad \varphi = \varphi(\sigma, \tau).$$

$$(vi) \varphi_{\rho \tau \tau} = e^{-\rho^2} + \cos(\sigma + \tau), \quad \varphi = \varphi(\rho, \sigma, \tau).$$

2. Γραμμικές πρώτης τάξης στον \mathbb{R}^2

Σύμφωνα με τη ορολογία που έχουμε υιοθετήσει, κάθε ΜΔΕ της μορφής

$$(2.1) \quad a(x, y) u_x + b(x, y) u_y + c(x, y) u = d(x, y),$$

όπου $a, b, c, d : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ δοσμένες συναρτήσεις, χαρακτηρίζεται ως γραμμική.

Στο προηγούμενο εδάφιο, βρήκαμε τη γενική λύση ενός τεράστιου υποσύνολου αυτού του είδους των εξισώσεων. Συγκεκριμένα, λύσαμε όλες εκείνες για τις οποίες μία από τις συναρτήσεις a, b μηδενίζεται ταυτοτικά. Για να μην υπάρχει καμία αμφιβολία, ας υποθέσουμε ότι, οι a, b, c και d έχουν ως κοινό πεδίο ορισμού το ανοιχτό υποσύνολο Ω του \mathbb{R}^2 . Ας υποθέσουμε επιπλέον ότι, στην περιοχή $\Omega_1 \subset \Omega$,

$$(2.2) \quad a(x, y) \neq 0, \quad b(x, y) = 0.$$

Τότε, αρκεί να διαιρέσουμε την εξ. (1.1) με $a(x, y)$ για να καταλήξουμε στην

$$(2.3) \quad u_x + f(x, y) u = g(x, y),$$

όπου

$$(2.4) \quad f(x, y) := \frac{c(x, y)}{a(x, y)}, \quad g(x, y) := \frac{d(x, y)}{a(x, y)}.$$

Με αυτό τον τρόπο, η (1.1) ανάγεται, στην περιοχή Ω_1 , σε εξίσωση που λύνεται με τη μέθοδο που αναπτύξαμε στο προηγούμενο εδάφιο.

Ανάλογα, αν σε μια υποπεριοχή Ω_2 της Ω ,

$$(2.5) \quad a(x, y) = 0, \quad b(x, y) \neq 0,$$

τότε, στην περιοχή Ω_2 , η ΜΔΕ (1.1) ανάγεται στην

$$(2.6) \quad u_y + f(x, y) u = g(x, y),$$

όπου, τώρα,

$$(2.7) \quad f(x, y) := \frac{c(x, y)}{b(x, y)}, \quad g(x, y) := \frac{d(x, y)}{b(x, y)}.$$

Ωστόσο, σε μια περιοχή όπου καμία από τις συναρτήσεις a, b δε μηδενίζεται ταυτοτικά, η μέθοδος του προηγούμενου εδαφίου δεν μπορεί να εφαρμοστεί. Ακόμη και την απλούστατη ΜΔΕ

$$(2.8) \quad u_x + u_y = 0,$$

δεν μπορούμε να τη λύσουμε με την παραπάνω μέθοδο. Για τον απλό λόγο ότι, αυτή η ΜΔΕ δεν μπορεί να θεωρηθεί σαν ΣΔΕ ως προς τη μία ανεξάρτητη μεταβλητή, με την άλλη σε ρόλο παραμέτρου.

Όμως, ο Αϊνστάιν έλεγε ...

Μην προσπερνάς το προφανές!

Πιο συγκεκριμένα, μπορεί η (2.8) να μην ανάγεται σε μία ΣΔΕ κατά μήκος των ευθειών $y = \text{σταθ.}$, ή $x = \text{σταθ.}$, του επίπεδου \mathbb{R}^2 , αλλά οι ευθείες αυτού του είδους δεν είναι οι μοναδικές

αξιοσημειώτες ... καμπύλες του Ευκλείδειου επίπεδου.

Ας θεωρήσουμε, για παράδειγμα, την καμπύλη Γ του επίπεδου $x y$ που ορίζεται από το γράφημα της διαφορίσιμης συνάρτησης $Y(x)$. Με άλλα λόγια,

$$(2.9) \quad \Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = Y(x)\}.$$

Αν αυτή η καμπύλη περιέχεται στο πεδίο ορισμού Ω της συνάρτησης $u(x, y)$, τότε, κατά μήκος της Γ , η $u(x, y)$ ανάγεται σε μια συνάρτηση μιας μεταβλητής, την

$$(2.10) \quad \varphi(x) := u(x, Y(x)).$$

Αν η $u(x, y)$ είναι διαφορίσιμη, τότε το ίδιο ισχύει και για την $\varphi(x)$ και η παράγωγός της δίνεται από τον τύπο

$$(2.11) \quad \varphi'(x) = u_x(x, Y(x)) + u_y(x, Y(x)) Y'(x).$$

Για να δούμε αναλυτικότερα ένα συγκεκριμένο παράδειγμα, ας υποθέσουμε η συνάρτηση $Y(x)$ έχει σταθερή παράγωγο και ίση προς τη μονάδα: $Y'(x) = 1$. Τότε η (2.11) γίνεται

$$(2.12) \quad \varphi'(x) = u_x(x, Y(x)) + u_y(x, Y(x)).$$

Παρατηρούμε ότι το δεξί μέλος αυτής της σχέσης είναι το ίδιο με το αριστερό μέλος της ΜΔΕ (2.8). Όταν, βέβαια, το y των $u_x(x, y)$ και $u_y(x, y)$ στη (2.8) αντικατασταθεί από την $Y(x)$. Αλλά αυτό σημαίνει ότι, κατά μήκος μιας καμπύλης Γ του είδους που εξετάζουμε, η ΜΔΕ (2.8) ανάγεται στην απλούστατη ΣΔΕ

$$(2.13) \quad \varphi'(x) = 0.$$

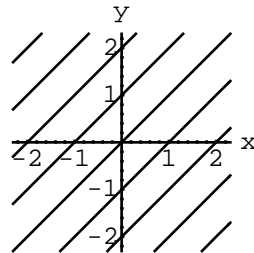
Συνεπώς, κατά μήκος μιας τέτοιας καμπύλης η $\varphi(x)$ παραμένει σταθερή: $\varphi(x) = F$. Ισοδύναμα,

$$(2.14) \quad u(x, Y(x)) = F.$$

Τώρα, θα πρέπει να σημειώσουμε ότι, η συνθήκη $Y'(x) = 1$ δεν ορίζει μία μόνο καμπύλη, αλλά άπειρες! Γιατί, η $Y'(x) = 1$ συνεπάγεται ότι,

$$(2.15) \quad Y(x) = x + s,$$

όπου s τυχαία σταθερή. Με άλλα λόγια, η $Y'(x) = 1$ περιγράφει την μονοπαραμετρική οικογένεια των ευθειών του επίπεδου $x y$, κατά μήκος των οποίων $y = x + s$. Όλες αυτές οι ευθείες έχουν την ίδια κλίση ως προς τον άξονα x και διακρίνονται από το σημείο στο οποίο τέμνουν τον άξονα y . Αυτό προσδιορίζεται από την τιμή της παραμέτρου s , αφού $y = s$, όταν $x = 0$. Στο Σχ. 2.1 δείχνουμε ορισμένα από τα μέλη αυτής της οικογένειας ευθειών.



Σχ. 2.1. Ορισμένες από τις ευθείες της οικογένειας $y = x + s$.

Όπως διαπιστώσαμε, κατά μήκος κάθε μιας από τις ευθείες $y = x + s$, η λύση $u(x, y)$ της (2.8) διατηρεί την ίδια τιμή (είναι σταθερή). Αυτό, όμως, με κανένα τρόπο δε σημαίνει ότι η $u(x, y)$ έχει την ίδια τιμή πάνω σε όλες τις ευθείες της οικογένειας $y = x + s$. Συνεπώς, τη σχέση (2.14) πρέπει να τη γράψουμε στη μορφή

$$(2.16) \quad u(x, x + s) = F(s).$$

όπου με $F(s)$ εννοούμε μια αυθαίρετη, αλλά διαφορίσιμη, συνάρτηση της παραμέτρου s . Από την (2.16) φαίνεται καθαρά ότι, αν επιλέξουμε την τιμή της s , αν γ.π. θέσουμε $s = 3$, τότε κατά μήκος της ευθείας $y = x + s$, η $u(x, y)$ διατηρεί την ίδια τιμή, που, για $s = 3$, δεν είναι άλλη από τον αριθμό $F(3)$.

Η σχέση (2.16) ορίζει μια γενικού τύπου λύση της ΜΔΕ (2.8), παρόλο που αυτό μπορεί να μη φαίνεται καθαρά με την πρώτη ματιά. Ωστόσο, αν ονομάσουμε το δεύτερο όρισμα της $u(x, x + s)$ y , αν θέσουμε δηλαδή $x + s = y$, τότε το όρισμα της $F(s)$ πρέπει να γραφτεί ως $y - x$. Με άλλα λόγια, η (2.16) είναι ισοδύναμη προς την

$$(2.17) \quad u(x, y) = F(y - x).$$

Το γεγονός ότι κάθε συνάρτηση αυτής της μορφής αποτελεί πραγματικά λύση της ΜΔΕ (2.8) επαληθεύεται, πλέον, σε μισή γραμμή.

Η ΜΔΕ $u_x + u_y = 0$ που μόλις ολοκληρώσαμε μπορεί να είναι πολύ απλή, αλλά η μέθοδος που χρησιμοποιήσαμε για την επίλυσή της είναι μεγάλης εμβέλειας. Για να φανεί η αποτελεσματικότητά της, ας επιστρέψουμε την γενική μορφή (2.1) των γραμμικών ΜΔΕ πρώτης τάξης για μια συνάρτηση δύο μεταβλητών, κι ας υποθέσουμε ότι, $a(x, y) \neq 0$ σε κάθε σημείο της περιοχής $\Omega_1 \subset \Omega$. Τότε, διαιρώντας την (2.1) με $a(x, y)$ καταλήγουμε στην εξίσωση

$$(2.18) \quad u_x + B(x, y) u_y + C(x, y) u = D(x, y),$$

όπου

$$(2.19) \quad B(x, y) := \frac{b(x, y)}{a(x, y)}, \quad C(x, y) := \frac{c(x, y)}{a(x, y)}, \quad D(x, y) := \frac{d(x, y)}{a(x, y)}.$$

Τώρα, κατά μήκος μιας καμπύλης που ορίζεται από τη σχέση $y = Y(x)$, η (2.18) γίνεται

$$(2.20) \quad u_x(x, Y(x)) + \beta(x) u_y(x, Y(x)) + f(x) u(x, Y(x)) = g(x),$$

όπου

$$(2.21) \quad \beta(x) := B(x, Y(x)), \quad f(x) := C(x, Y(x)), \quad g(x) := D(x, Y(x)).$$

Ας υποθέσουμε επιπλέον ότι, η συνάρτηση $Y(x)$ που ορίζει την καμπύλη είναι τέτοια που,

$$(2.22) \quad Y'(x) = \beta(x).$$

Τότε, σύμφωνα με τον τύπο (2.12), οι δύο πρώτοι όροι της (2.20) συναπαρτίζουν την παράγωγο της συνάρτησης

$$(2.23) \quad \varphi(x) := u(x, Y(x)).$$

Αυτό σημαίνει ότι, η (2.20) γράφεται σαν

$$(2.24) \quad \varphi'(x) + f(x) \varphi(x) = g(x).$$

Συνεπώς, κατά μήκος κάθε καμπύλης του επίπεδου $x y$ που ορίζεται από τη σχέση $y = Y(x)$, η ΜΔΕ (2.18) ανάγεται σε μια γραμμική ΣΔΕ πρώτης τάξης! Με την προϋπόθεση, βέβαια, ότι η συνάρτηση $Y(x)$ πληροί την ακόλουθη συνθήκη:

$$(2.25) \quad Y'(x) = \beta(x) := B(x, Y(x)).$$

Αλλά κι αυτή δεν είναι παρά μια ΣΔΕ πρώτης τάξης (η οποία, βέβαια, μπορεί να μην είναι γραμμική). Αυτό σημαίνει ότι, το πρόβλημα της επίλυσης κάθε ΜΔΕ που γράφεται στη μορφή (2.18) έχει αναχθεί στο πρόβλημα της επίλυσης δύο ΣΔΕ, των (2.24) και (2.25).

Το αποτέλεσμα στο οποίο μόλις καταλήξαμε αποτελεί τη βάση μιας μεθόδου κατασκευής γενικού τύπου λύσεων όλων των γραμμικών ΜΔΕ πρώτης τάξης, δηλαδή όλων εκείνων που γράφονται στη μορφή (2.1). Οι λεπτομέρειες αυτής της μεθόδου περιγράφονται αναλυτικά στα παραδείγματα που ακολουθούν.

Παράδειγμα 2.1

Στα τμήματα $x < 0$ και $x > 0$ του επίπεδου $x y$, η ΜΔΕ

$$(2.26) \quad x u_x + y u_y - 2 u = 0,$$

γράφεται σαν

$$(2.27) \quad u_x + \frac{y}{x} u_y - \frac{2}{x} u = 0.$$

Συγκρίνοντας αυτή την εξίσωση με τη γενική μορφή (2.18), συμπεραίνουμε ότι, στη συγκεκριμένη περίπτωση,

$$(2.28) \quad B(x, y) = \frac{y}{x}, \quad C(x, y) = -\frac{2}{x}, \quad D(x, y) = 0.$$

Άρα, η εξίσωση (2.25) που προσδιορίζει τις καμπύλες κατά μήκος των οποίων η (2.27) ανάγεται σε μία ΣΔΕ παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$(2.29) \quad Y'(x) = \frac{Y(x)}{x}.$$

Αυτή η ΣΔΕ λύνεται εύκολα για να δώσει

$$(2.30) \quad Y(x) = s x,$$

όπου s τυχαία σταθερή.

Σύμφωνα τώρα με τους ορισμούς (2.21), στην περίπτωση που εξετάζουμε,

$$(2.31) \quad f(x) := C(x, Y(x)) = -\frac{2}{x}, \quad g(x) := D(x, Y(x)) = 0.$$

Άρα, η (2.24) που μας λέει σε ποια ΣΔΕ ανάγεται η ΜΔΕ (2.27) όταν $y = s x$, γίνεται

$$(2.32) \quad \varphi'(x) - \frac{2}{x} \varphi(x) = 0.$$

Η λύση και αυτής της ΣΔΕ είναι εύκολη. Συγκεκριμένα,

$$(2.33) \quad \varphi(x) = F x^2,$$

όπου F τυχαία σταθερή.

Για τους λόγους που εξηγήσαμε αναλύοντας τη γενική περίπτωση, η (2.33) σημαίνει ότι

$$(2.34) \quad u(x, sx) = F(s)x^2,$$

όπου, τώρα, με $F(s)$ εννοούμε μια τυχαία διαφορίσιμη συνάρτηση της παραμέτρου s .

Τέλος, η αντικατάσταση $sx = y$ μετατρέπει τη σχέση (2.34) στην

$$(2.35) \quad u(x, y) = x^2 F\left(\frac{y}{x}\right).$$

Το γεγονός ότι, κάθε συνάρτηση αυτής της μορφής, πραγματικά, αποτελεί λύση της ΜΔΕ $xu_x + yu_y - 2u = 0$, το αποδείξαμε αναλυτικά στο Εδάφ.

■

Παράδειγμα 2.2

Ας θεωρήσουμε τώρα τη ΜΔΕ

$$(2.36) \quad yu_x + xu_y - 2u = 0.$$

Στα δύο ανοιχτά υποσύνολα του επιπέδου xy , όπου $y < 0$ και $y > 0$, αντίστοιχα, η (2.36) γράφεται σαν

$$(2.37) \quad u_x + \frac{x}{y}u_y - \frac{2}{y}u = 0.$$

Σ' αυτή λοιπόν την περίπτωση,

$$(2.38) \quad B(x, y) = \frac{x}{y}, \quad C(x, y) = -\frac{2}{y}, \quad D(x, y) = 0.$$

Συνεπώς, η εξίσωση (2.25) τώρα γίνεται

$$(2.39) \quad Y'(x) = \frac{x}{Y(x)}.$$

Ισοδύναμα,

$$(2.40) \quad [Y^2(x)]' = x$$

και άρα

$$(2.41) \quad Y(x) = \pm \sqrt{s+x^2}$$

Στην περίπτωση της εξ. (2.27), οι ορισμοί (2.21) συνεπάγονται ότι,

$$(2.42) \quad f(x) := C(x, Y(x)) = \mp \frac{2}{\sqrt{s+x^2}}, \quad g(x) := D(x, Y(x)) = 0$$

Συνακόλουθα, η (2.24) γίνεται

$$(2.43) \quad \varphi'(x) \mp \frac{2}{\sqrt{s+x^2}} \varphi(x) = 0.$$

Αν λάβουμε υπόψη ότι

$$(2.44) \quad \int \frac{1}{\sqrt{s+x^2}} dx = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + s} \right|,$$

τότε δε θα δυσκολευτούμε καθόλου στο βρούμε τις λύσεις της ΣΔΕ (2.43). Συγκεκριμένα,

$$(2.45) \quad \varphi(x) = F(s) \left(x + \sqrt{x^2 + s} \right)^{\pm 2}.$$

Η (2.45) σημαίνει ότι, οι λύσεις της ΜΔΕ (2.36) δίνονται από τη σχέση

$$(2.46) \quad u \left(x, \pm \sqrt{s+x^2} \right) = F(s) \left(x + \sqrt{x^2 + s} \right)^{\pm 2},$$

όπου $F(s)$ τυχαία διαφορίσιμη συνάρτηση της παραμέτρου s .

Όταν $y = \pm \sqrt{s+x^2}$, τότε $s = y^2 - x^2$. Άρα, η (2.46) είναι ισοδύναμη προς την

$$(2.47) \quad u(x, y) = (x \pm y)^{\pm 2} F(y^2 - x^2).$$

Η επαλήθευση του γεγονότος ότι, κάθε συνάρτηση αυτής της μορφής (2.47) αποτελεί λύση της ΜΔΕ $y u_x + x u_y - 2u = 0$ αφήνεται για άσκηση του αναγνώστη.

■

Θα πρέπει τώρα να παρατηρήσουμε ότι, η μέθοδος που παρουσιάσαμε πιο πάνω και εφαρμόσαμε σε δύο παραδείγματα φαίνεται να αναθέτει έναν ξεχωριστό ρόλο στην ανεξάρτητη μεταβλητή x , κάνοντας έτσι την y να ... νοιώθει μειονεκτικά. Αυτή η διάκριση εις βάρος της μεταβλητής y φαίνεται κι από το γεγονός ότι, η μέθοδος που αναπτύξαμε, στηρίζεται στην περιγραφή των καμπυλών του επίπεδου xy μέσω σχέσεων της μορφής $y = Y(x)$. Αλλά κάτι τέτοιο, όχι μόνο παραβαίνει ... την δημοκρατική αρχή της ίσης μεταχείρισης, αλλά ορισμένες φορές είναι και ανέφικτο. Για παράδειγμα, είναι αδύνατο να περιγράψουμε τον άξονα y με μία σχέση της μορφής $y = Y(x)$.

Αλλά, και πολλές άλλες αξιόλογες καμπύλες του επίπεδου xy είναι αδύνατο να περιγραφτούν ολόκληρες με μια σχέση της μορφής $y = Y(x)$, όπου η $Y(x)$ είναι διαφορίσιμη. Θεωρήστε, για παράδειγμα, τον μοναδιαίο κύκλο $x^2 + y^2 = 1$. Για να τον περιγράψουμε με σχέσεις της μορφής $y = Y(x)$, θα πρέπει πρώτα να τον χωρίσουμε στα τμήματα όπου $y \geq 0$ και $y \leq 0$, αντίστοιχα. Το πρώτο περιγράφεται από τη σχέση $y = Y_{(1)}(x) := \sqrt{1-x^2}$, $-1 \leq x \leq 1$, ενώ στο δεύτερο από την $y = Y_{(2)}(x) := -\sqrt{1-x^2}$, $-1 \leq x \leq 1$. Οι συναρτήσεις $Y_{(1)}(x)$ και $Y_{(2)}(x)$ όχι μόνο διαφέρουν η μία από την άλλη, αλλά και δεν είναι διαφορίσιμες. Και οι δυο τους έχουν πρόβλημα στα σημεία $x = \pm 1$. Αν, για να άρουμε αυτό το πρόβλημα, περιορίσουμε το πεδίο ορισμού τους στο ανοιχτό διάστημα $-1 < x < 1$, τότε τα δύο τμήματα που ορίζουν οι $Y_{(1)}(x)$ και $Y_{(2)}(x)$ δε συναποτελούν ολόκληρο τον κύκλο.

Ένας τρόπος για να περιγράψουμε, μέσω γραφημάτων μιας διαφορίσιμης συνάρτησης, και τμήματα του μοναδιαίου κύκλου $x^2 + y^2 = 1$ που περιέχουν τα σημεία $(x, y) = (1, 0)$ και $(x, y) = (-1, 0)$, αντίστοιχα, είναι ο εξής: Για το τμήμα όπου $x > 0$ και στο οποίο περιέχεται το σημείο $(x, y) = (1, 0)$, ισχύει η σχέση $x = X_{(1)}(y) := \sqrt{1-y^2}$, $-1 < y < 1$. Ανάλογα, για το

τιμήμα όπου $x < 0$ και στο οποίο ανήκει το σημείο $(x, y) = (-1, 0)$, έχουμε $x = X_{(2)}(y) := -\sqrt{1 - y^2}$, $-1 < y < 1$. Προφανώς, η ένωση των τεσσάρων τμημάτων, όπου $x < 0$, $x > 0$, $y < 0$ και $y > 0$, αντίστοιχα, μας δίνει ολόκληρο τον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$.

Εκτός όμως από την αρχή της ίσης μεταχείρισης, η χρησιμοποίηση καμπυλών που περιγράφονται από σχέσεις της μορφής $x = X(y)$ μπορεί να επιβάλλεται από μian άλλη αρχή, που, ιδιαίτερα στη χώρα μας, θεωρείται πολύ ισχυρότερη. Εννοούμε την αρχή της ... βολικότητας.

Για να γίνουμε σαφέστεροι, θα επανέλθουμε αρχικά στην ΜΔΕ (2.1) και θα τη διαιρέσουμε με τον συντελεστή $b(x, y)$. Με αυτή την πράξη, καταλήγουμε στην εξίσωση

$$(2.48) \quad u_y + \tilde{B}(x, y) u_x + \tilde{C}(x, y) u = \tilde{D}(x, y),$$

όπου

$$(2.49) \quad \tilde{B}(x, y) := \frac{a(x, y)}{b(x, y)}, \quad \tilde{C}(x, y) := \frac{c(x, y)}{b(x, y)}, \quad \tilde{D}(x, y) := \frac{d(x, y)}{b(x, y)}.$$

Βέβαια, η διαίρεση που αναφέραμε προϋποθέτει ότι έχουμε περιοριστεί στο υποσύνολο Ω_2 του \mathbb{R}^2 όπου $b(x, y) \neq 0$. Σε κάθε περίπτωση, εκείνο που έχει σημασία είναι το εξής. Κατά μήκος μιας καμπύλης του Ω_2 που ορίζεται από μια σχέση της μορφής $x = X(y)$, η (2.48) γίνεται

$$(2.50) \quad u_y(X(y), y) + \tilde{\beta}(y) u_x(X(y), y) + \tilde{f}(y) u(X(y), y) = \tilde{g}(y),$$

όπου

$$(2.51) \quad \tilde{\beta}(y) := \tilde{B}(X(y), y), \quad \tilde{f}(y) := \tilde{C}(X(y), y), \quad \tilde{g}(y) := \tilde{D}(X(y), y).$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι, η συνάρτηση $X(y)$ που ορίζει την καμπύλη $x = X(y)$ είναι τέτοια που,

$$(2.52) \quad X'(y) = \tilde{g}(y)$$

κι ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση μιας μεταβλητής

$$(2.53) \quad \tilde{\varphi}(y) := u(X(y), y).$$

Τότε,

$$(2.54) \quad \tilde{\varphi}'(y) = u_x(X(y), y) X'(y) + u_y(X(y), y) = u_x(X(y), y) \tilde{\beta}(y) + u_y(X(y), y).$$

Άρα, η (2.50) γράφεται σαν

$$(2.55) \quad \tilde{\varphi}'(y) + \tilde{f}(y) \tilde{\varphi}(y) = \tilde{g}(y).$$

Το βασικό συμπέρασμα αυτής της άχαρης διαδικασίας είναι ότι, στην περιοχή Ω_2 και κατά μήκος κάθε καμπύλης που ορίζεται από τη σχέση $x = X(y)$, με $X'(y) = \tilde{D}(X(y), y)$, η ΜΔΕ (2.48) ανάγεται σε μια γραμμική ΣΔΕ πρώτης τάξης. Αυτό το συμπέρασμα υποδηλώνει και τον τρόπο επίλυσης της αρχικής ΜΔΕ.

Ο λόγος που χαρακτηρίσαμε τη διαδικασία που οδήγησε στην (2.55) ως άχαρη, θα πρέπει να είναι φανερός. Όλες οι σχέσεις και ορισμοί (2.48)-(2.55) δεν είναι παρά πιστά αντίγραφα εκείνων που βρήκαμε διαιρώντας την ΜΔΕ (2.1) με τον συντελεστή $a(x, y)$ και

θεωρώντας καμπύλες της μορφής $y = Y(x)$. Το μόνο που χρειάζεται για τα πάμε από τις πρώτες στις δεύτερες είναι να παραλείψουμε τις περισπωμένες και να κάνουμε τις αντικαταστάσεις $(x, y) \rightarrow (y, x)$, $Y \rightarrow X$ και $(a, b) \rightarrow (b, a)$.

Από πρακτική άποψη, αυτό σημαίνει ότι, για να δουλέψουμε με καμπύλες της μορφής $x = X(y)$, αρκεί να κάνουμε τις αντικαταστάσεις $(x, y) \rightarrow (y, x)$ και $(a, b) \rightarrow (b, a)$ στην αρχική εξίσωση και να τη λύσουμε με τον τρόπο που δείξαμε στα προηγούμενα παραδείγματα. Οι μετονομασίες $(x, y) \rightarrow (y, x)$ και $X \rightarrow Y$ στην τελική λύση δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα με την επίλυση της εξίσωσης μέσω των τύπων (2.48)-(2.55).

Παράδειγμα 2.3

Ας υποθέσουμε ότι μας έχει ζητηθεί να λύσουμε τη ΜΔΕ

$$(2.56) \quad x u_x + u_y - u = 0.$$

Αφού ο συντελεστής της u_y είναι η μονάδα, η (2.56) είναι ήδη στη μορφή (2.48), Συνεπώς, η αρχή της βολικότητας, επιβάλλει να χρησιμοποιήσουμε καμπύλες της μορφής $x = X(y)$.

Όμως, για να αποφύγουμε τους τύπους (2.48)-(2.55) με τις τόσες περισπωμένες, προχωράμε στις αντικαταστάσεις $(x, y) \rightarrow (y, x)$ και $X \rightarrow Y$, με το ακόλουθο αποτέλεσμα: Η (2.56) μετατρέπεται στην

$$(2.57) \quad u_x + y u_y - u = 0$$

και η σχέση $x = X(y)$ στην $y = Y(x)$.

Από τη σύγκριση της τελευταίας εξίσωσης με την (2.18) αμέσως έπεται ότι, σε τούτη την περίπτωση,

$$(2.58) \quad B(x, y) = y, \quad C(x, y) = -1, \quad D(x, y) = 0.$$

Συνακόλουθα,

$$(2.59) \quad \beta(x) := B(x, Y(x)) = Y(x), \quad f(x) := C(x, Y(x)) = -1, \quad g(x) := D(x, Y(x)) = 0.$$

Άρα, κατά μήκος της καμπύλης $y = Y(x)$, η (2.57) ανάγεται στη ΣΔΕ

$$(2.60) \quad \varphi'(x) - \varphi(x) = 0,$$

με την προϋπόθεση βέβαια ότι, η $Y(x)$ αποτελεί λύση της

$$(2.61) \quad Y'(x) = Y(x).$$

Προφανώς, οι ΣΔΕ (2.60) και (2.61) είναι ταυτόσημες και λύνονται εύκολα για να δώσουν

$$(2.62) \quad \varphi(x) = F e^x$$

και

$$(2.63) \quad Y(x) = s e^x,$$

Αντίστοιχα.

Βέβαια, η λύση (2.62) της (2.60) ισχύει για κάθε συγκεκριμένη καμπύλη $y = Y(x)$, δηλαδή για συγκεκριμένη τιμή του s στη σχέση $Y(x) = s e^x$. Όταν αλλάζουμε καμπύλη, όταν

δηλαδή μεταβάλλουμε την τιμή της παραμέτρου s , τότε αλλάζει και η τιμή της παραμέτρου F στη λύση $\varphi(x) = F e^x$. Αυτό σημαίνει ότι η σχέση $u(x, Y(x)) = \varphi(x)$ πρέπει να γραφτεί στη μορφή

$$(2.64) \quad u(x, s e^x) = e^x F(s),$$

όπου $F(s)$ τυχαία διαφορίσιμη συνάρτηση. Με άλλα λόγια, η γενική λύση της ΜΔΕ (2.57) δίνεται από τις συναρτήσεις της μορφής

$$(2.65) \quad u(x, y) = e^x F(y e^{-x}).$$

Για να ολοκληρώσουμε, πρέπει να επιστρέψουμε στην εξίσωση (2.56) που μας είχε δοθεί προς λύση. Αυτό το πετυχαίνουμε με την αντικατάσταση $(x, y) \rightarrow (y, x)$ και άρα μπορούμε να ισχυριστούμε ότι, κάθε συνάρτηση της μορφής

$$(2.66) \quad u(x, y) = e^y F(x e^{-y}),$$

αποτελεί λύση της γραμμικής ΜΔΕ (2.56).

Αξίζει, επιπλέον, να σημειώσουμε ότι, ο συνδυασμός των αντικαταστάσεων $(x, y) \rightarrow (y, x)$ και $Y \rightarrow X$ μετατρέπει την $y = Y(x) = s e^x$ στην $x = X(y) = s e^y$. Άρα, το σύνολο των καμπυλών του επίπεδου xy , κατά μήκος των οποίων η ΜΔΕ (2.56) ανάγεται σε ΣΔΕ, περιγράφεται από τη σχέση $x = s e^y$, $s \in \mathbb{R}$.

■

Παράδειγμα 2.4

Στα τμήματα $y < 0$ και $y > 0$ του επίπεδου xy , η ΜΔΕ

$$(2.67) \quad x u_x + y u_y - 2u = 0,$$

που μελετήσαμε στο πρώτο παράδειγμα, είναι ισοδύναμη με την

$$(2.68) \quad \frac{x}{y} u_x + u_y - \frac{2}{y} u = 0.$$

Η αντικατάσταση $(x, y) \rightarrow (y, x)$ μετατρέπει την προηγούμενη εξίσωση στην

$$(2.69) \quad u_x + \frac{y}{x} u_y - \frac{2}{x} u = 0.$$

και τις περιοχές $y < 0$ και $y > 0$ του επίπεδου xy στις $x < 0$ και $x > 0$, αντίστοιχα. Όμως, αυτή είναι η ΜΔΕ που λύσαμε στο πρώτο παράδειγμα, όπου και βρήκαμε ότι,

(i) Στις περιοχές $x < 0$ και $x > 0$ και κατά μήκος των ευθειών $y = Y(x) = s x$, η (2.69) ανάγεται σε μια γραμμική ΣΔΕ.

(ii) Σε κάθε μία από τις πιο πάνω περιοχές, η γενική λύση της (2.69) δίνεται από τις συναρτήσεις

$$(2.70) \quad u(x, y) = x^2 F\left(\frac{y}{x}\right).$$

Συνεπώς, με τη βοήθεια των αντικαταστάσεων $(x, y) \rightarrow (y, x)$ και $Y \rightarrow X$, αμέσως συμπεραίνουμε ότι,

(i) Στις περιοχές $y < 0$ και $x > 0$ και κατά μήκος των ευθειών $x = X(y) = s y$, η ΜΔΕ (2.68)

ανάγεται σε μια γραμμική.

(ii) Η γενική λύση της (2.68) στις πιο πάνω περιοχές δίνεται από τις συναρτήσεις

$$(2.71) \quad u(x, y) = y^2 F\left(\frac{x}{y}\right).$$

■

Ασκήσεις

2.1 Να κατασκευαστεί η γενική λύση των παρακάτω ΜΔΕ:

(i) $u_x + 3x^2 u_y = 0, \quad u = u(x, y).$

(ii) $u_x + (x + y) u_y = 0, \quad u = u(x, y).$

(iii) $u_x - u_y = 3u, \quad u = u(x, y).$

(iv) $x u_x + y u_y = 2u + x + y, \quad u = u(x, y).$

(v) $y u_x + x u_y = 2u, \quad u = u(x, y).$

(vi) $t u_s + s u_t = s + t, \quad u = u(s, t).$

(vii) $t u_s + u_t = u + t, \quad u = u(s, t).$

(viii) $u_s - u_t = (s - t) u, \quad u = u(s, t).$

(ix) $v_y \cos y + v_z = 1, \quad v = v(y, z).$

(x) $(\rho^2 - 1) \psi_\rho + \psi_\sigma = 2\psi, \quad \psi = \psi(\rho, \sigma).$

3. Χαρακτηριστικές καμπύλες

Στα δύο προηγούμενα εδάφια δείξαμε αναλυτικά ότι, κάθε γραμμική ΜΔΕ πρώτης τάξης για μια συνάρτηση $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, δηλαδή κάθε ΜΔΕ της μορφής

$$(3.1) \quad a(x, y) u_x + b(x, y) u_y + c(x, y) u = d(x, y),$$

ανάγεται σε ΣΔΕ κατά μήκος συγκεκριμένων καμπυλών του \mathbb{R}^2 . Γενικά, αυτές οι καμπύλες διαφέρουν από ΜΔΕ σε ΜΔΕ. Γι' αυτό αναφέρονται ως **χαρακτηριστικές** της δοσμένης εξίσωσης.

Πιο συγκεκριμένα, οι χαρακτηριστικές καμπύλες καθορίζονται πλήρως από τους συντελεστές $a(x, y)$ και $b(x, y)$. Κατά συνέπεια, δύο εξισώσεις της μορφής (3.1) έχουν διαφορετικές χαρακτηριστικές μόνο όταν διαφέρει το **κύριο μέρος** τους, δηλαδή το κομμάτι $a(x, y) u_x + b(x, y) u_y$.

Η έννοια των χαρακτηριστικών καμπυλών παίζει καθοριστικό ρόλο σε όλες τις ΜΔΕ, ανεξάρτητα από την τάξη τους και το πλήθος των ανεξάρτητων μεταβλητών της άγνωστης συνάρτησης. Αυτό φάνηκε ήδη στο προηγούμενο εδάφιο από τον τρόπο που τις χρησιμοποιήσαμε στην κατασκευή γενικών λύσεων. Όμως, ο ξεχωριστός ρόλος των χαρακτηριστικών θα αναδειχτεί με ακόμη γλαφυρότερο τρόπο στα επόμενα εδάφια, εκεί που θα μελετήσουμε τα λεγόμενα προβλήματα αρχικών και συνοριακών τιμών. Γι' αυτό, στο παρόν εδάφιο θα σταθούμε λίγο αναλυτικότερα στις καμπύλες αυτού του είδους.

Ένας από τους τρόπους που συχνά χρησιμοποιείται για την περιγραφή μιας οικογένειας καμπυλών του επίπεδου xy είναι η συνθήκη $F(x, y) = s$, όπου $F(x, y)$ δοσμένη ομαλή συνάρτηση και s μια παράμετρος που διατρέχει κάποιο διάστημα της πραγματικής ευθείας. Για παράδειγμα, αν $F(x, y) = x - y$, τότε η συνθήκη $F(x, y) = s$, $s \in \mathbb{R}$, ορίζει τις ευθείες του επίπεδου xy που σχηματίζουν γωνία 45° με τον άξονα x .

Ανάλογα, όταν $F(x, y) = x^2 + y^2$, τότε η συνθήκη $F(x, y) = 1$ περιγράφει έναν κύκλο με ακτίνα μήκους 1 και κέντρο την αρχή $(x, y) = (0, 0)$ των Καρτεσιανών αξόνων x, y του \mathbb{R}^2 . Συνακόλουθα, με τη συνθήκη $F(x, y) = s$, $s > 0$, μπορούμε να παραστήσουμε την οικογένεια όλων των κύκλων που έχουν ως κέντρο το σημείο $(0, 0)$ και ακτίνα \sqrt{s} .

Οι καμπύλες που ορίζονται μέσω μιας συνθήκης της μορφής $F(x, y) = s$ ονομάζονται **ισοσταθμικές καμπύλες** της συνάρτησης $F(x, y)$.

Συνήθως, στα περισσότερα από τα σημεία που ορίζονται από τη συνθήκη $F(x, y) = s$, η $F_y(x, y)$ είναι μη μηδενική. Τότε, η $F(x, y) = s$ λύνεται ως προς την μεταβλητή y και ανάγεται σε μία σχέση της μορφής $y = f(x, s)$. Σε άλλα πάλι σημεία των ισοσταθμικών καμπυλών δεν μηδενίζεται η $F_x(x, y)$. Εκεί, μπορούμε να λύσουμε την $F(x, y) = s$ ως προς τη μεταβλητή x για να καταλήξουμε σε μια σχέση της μορφής $x = g(y, s)$. Με αυτό τον τρόπο, οι ισοσταθμικές καμπύλες $F(x, y) = c$ ανάγονται, τμηματικά τουλάχιστον, σε γραφήματα συναρτήσεων μιας μεταβλητής. Για παράδειγμα, όταν $F(x, y) = x^2 + y^2$, τότε $F_x(x, y) = 2x$, $F_y(x, y) = 2y$. Συνεπώς, για $y > 0$, η $x^2 + y^2 = s$ λύνεται ως προς x για να δώσει την $x = \sqrt{s - y^2}$, $|x| < \sqrt{s}$. Ανάλογα, όταν $y < 0$, η $x^2 + y^2 = s$ δίνει την $x = -\sqrt{s - y^2}$, $|x| < \sqrt{s}$.

Τέλος, για $x > 0$ και $x < 0$, η $x^2 + y^2 = s$ λύνεται ως προς x για να δώσει $x = \sqrt{s - y^2}$ και $x = -\sqrt{s - y^2}$, με $|y| < s$, αντίστοιχα.

Υπάρχει, ωστόσο, και ένας άλλος τρόπος για να περιγράψουμε καμπύλες του \mathbb{R}^2 . Πιο συγκεκριμένα, ας υποθέσουμε ότι οι $X, Y: I \rightarrow \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμες συναρτήσεις με κοινό πεδίο ορισμού κάποιο ανοιχτό διάστημα I της πραγματικής ευθείας \mathbb{R} . Τότε θα λέμε ότι το ζευγάρι

$$(3.2) \quad \mathbf{r}(t) := (X(t), Y(t)), \quad t \in I,$$

ορίζει μια *παραμετρική καμπύλη* του \mathbb{R}^2 .

Συχνά, γίνεται διάκριση ανάμεσα στην παραμετρική καμπύλη $\mathbf{r}(t)$ και το υποσύνολο

$$(3.3) \quad \Gamma := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = X(t), y = Y(t)\},$$

του Ευκλείδειου επίπεδου x, y που ορίζεται καθώς η *παραμέτρος* t διατρέχει το διάστημα I . Το Γ αναφέρεται ως *εικόνα της παραμετρικής καμπύλης* $\mathbf{r}(t)$. Εμείς, ωστόσο, δεν έχουμε ανάγκη από τέτοιου είδους ... διακρίσεις.

Παράδειγμα 3.1

(i) Οι σχέσεις $x = t, y = t^2, t \in \mathbb{R}$, ορίζουν μια παραμετρική καμπύλη του Ευκλείδειου επίπεδου x, y , η οποία ταυτίζεται με την παραβολή $y = x^2$.

(ii) Οι σχέσεις $x = \cos t, y = \sin t, t \in \mathbb{R}$, ορίζουν μια παραμετρική καμπύλη του \mathbb{R}^2 , της οποίας η εικόνα ταυτίζεται με τον μοναδιαίο κύκλο που έχει ως κέντρο το σημείο $(x, y) = (0, 0)$. Για τον απλό λόγο ότι, $x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$.

(iii) Η παραμετρική καμπύλη Γ που ορίζεται από τις σχέσεις

$$x = \sinh t, \quad y = \cosh t, \quad -\infty < t < \infty,$$

είναι μίαν υπερβολή. Γιατί,

$$y^2 - x^2 = \cosh^2 t - \sinh^2 t = 1.$$

Άρα, η εικόνα αυτής της παραμετρικής καμπύλης ταυτίζεται με την ισοσταθμική $F(x, y) := y^2 - x^2 = 1, y > 0$. Αν λύσουμε την τελευταία συνθήκη ως προς y θα καταλήξουμε στη σχέση $y = \sqrt{1 + x^2}, -\infty < x < \infty$. Συνεπώς, η Γ ορίζεται και από το γράφημα της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$.

■

Ωστόσο, θα πρέπει να σημειώσουμε ότι, κάθε υποσύνολο του επίπεδου x, y που ορίζεται από σχέσεις της μορφής $y = f(x), x = g(y)$ ή μια συνθήκη της μορφής $F(x, y) = 0$ επιδέχεται πολλές παραμετρικές περιγραφές.

Παράδειγμα 3.2

Ας θεωρήσουμε την παραμετρική καμπύλη $\tilde{\Gamma}$ που ορίζεται από τις σχέσεις

$$x = \frac{\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}, \quad y = \frac{1}{\sqrt{1-\tau^2}}, \quad -1 < \tau < 1.$$

Προφανώς, $y^2 - x^2 = 1$ και $y > 0$. Άρα, όσο αφορά το αντίστοιχο υποσύνολο του επίπεδου x, y , η $\tilde{\Gamma}$ δεν είναι διαφορετική από την Γ που ορίσαμε στο μέρος (iii) του προηγούμενου παραδείγματος.

Η επαλήθευση του γεγονότος ότι, ανάμεσα στις παραμέτρους τ στις παραμέτρους t και τ των Γ και $\tilde{\Gamma}$ υπάρχει 1-1 (αμφιμονοσήμαντη) αντιστοιχία που περιγράφεται από τη σχέση

$$\tau = \tanh t := \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} = \frac{e^{2t} - 1}{e^{2t} + 1}, \quad -\infty < t < \infty,$$

αποτελεί απλή άσκηση. ■

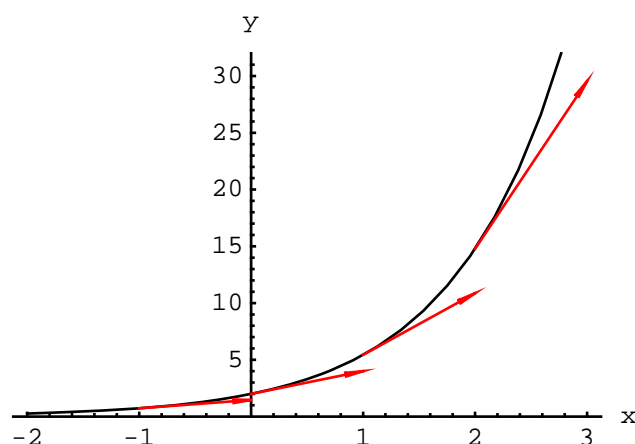
Για εποπτικούς λόγους, η παράμετρος t μιας παραμετρικής καμπύλης θεωρείται πως παριστάνει την ένδειξη ενός χρονόμετρου. Τότε το διάνυσμα $\mathbf{r}(t) := (X(t), Y(t))$ ερμηνεύεται ως *στιγμιαία θέση* ενός σωματίου που κινείται στο επίπεδο x, y . Από αυτή τη σκοπιά, το διάνυσμα

$$(3.4) \quad \mathbf{v}(t) := \mathbf{r}'(t) = (X'(t), Y'(t))$$

παριστάνει την *στιγμιαία ταχύτητα* του σωματίου. Από γεωμετρική άποψη, το $\mathbf{v}(t)$ εκφράζει το *εφαπτόμενο διάνυσμα της παραμετρικής καμπύλης* $\mathbf{r}(t)$. Σε μια γραφική παράσταση της καμπύλης $\mathbf{r}(t)$, το $\mathbf{v}(t)$ τη "χρονική στιγμή" t_1 δηλώνεται με ένα βέλος που έχει αρχή στο σημείο $\mathbf{r}(t_1)$ και εφάπτεται της καμπύλης.

Παράδειγμα 3.3

Στο επίπεδο x, y , η παραμετρική καμπύλη $\mathbf{r}(t) = (t, e^t)$ ταυτίζεται με το γράφημα της συνάρτησης $f(x) = e^x$. Στο Σχ. 3.1 δίνουμε την γραφική παράσταση της $\mathbf{r}(t)$ και του εφαπτόμενου διανύσματος $\mathbf{v}(t) = (1, e^t)$.



Σχ. 3.1. Η καμπύλη $(x, y) = (t, e^t)$ και ορισμένα από τα εφαπτόμενα διανύσματα. ■

Στις περισσότερες εφαρμογές, δε συναντάμε μία παραμετρική καμπύλη, αλλά οικογένειες τέτοιων καμπυλών. Τα μέλη αυτών των οικογενειών συνήθως διακρίνονται με τη βοήθεια μιας δεύτερης παραμέτρου, ας την πούμε s . Τότε, οι σχέσεις που ορίζουν τις παραμετρικές καμπύλες παίρνουν την ακόλουθη μοφή:

$$(3.5) \quad \mathbf{r}(t, s) := (X(t, s), Y(t, s)), \quad t \in I, s \in J.$$

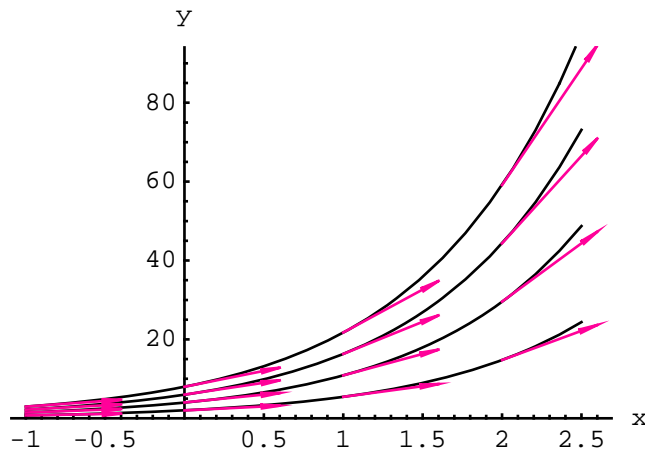
Προφανώς, το J συμβολίζει το διάστημα τιμών της παραμέτρου J .

Παράδειγμα 3.4

Είναι φανερό ότι οι σχέσεις

$$(3.6) \quad \mathbf{r}(t, s) = (t, s e^t), \quad t \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R},$$

ορίζουν μια οικογένεια καμπυλών του επίπεδου x, y , όμοιες με την καμπύλη του προηγούμενου παραδείγματος. Η παράμετρος s ορίζει το σημείο στο οποίο κάθε καμπύλη της οικογένειας τέμνει τον άξονα y . Στο Σχ. 3.2 δείχνουμε ορισμένα από τα μέλη αυτής της οικογένειας και εφαπτόμενα διανύσματά τους σε αντιπροσωπευτικά σημεία.



Σχ. 3.2. Ορισμένες από τις καμπύλες της οικογένειας $(x, y) = (t, s e^t)$, $s > 0$, και τα εφαπτόμενα διανύσματά τους σε αντιπροσωπευτικά σημεία.

Συνήθως, μια οικογένεια παραμετρικών καμπυλών δεν ορίζεται άμεσα, αλλά έμμεσα. Συγκεκριμένα, εκείνο που δίνεται αρχικά είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα σε όλα τα σημεία καθεμιάς από τις καμπύλες της οικογένειας και ζητιέται να βρεθούν οι εκφράσεις της μορφής (3.6) που περιγράφουν τις καμπύλες επακριβώς.

Για να εξηγήσουμε τη διαδικασία σαφέστερα, ας θεωρήσουμε δύο ομαλές συναρτήσεις $a(x, y)$, $b(x, y)$ με κοινό πεδίο ορισμού κάποιο ανοιχτό υποσύνολο Ω του \mathbb{R}^2 . Σε κάθε συγκεκριμένο σημείο της περιοχής Ω , το ζευγάρι $(a(x, y), b(x, y))$ ορίζει το διάνυσμα

$$(3.7) \quad \mathbf{V}(x, y) := (a(x, y), b(x, y)), \quad (x, y) \in \Omega.$$

Από γραφική άποψη, το $\mathbf{V}(x, y)$ είναι ένα βέλος με αρχή το σημείο (x, y) και μήκος

$$(3.8) \quad |\mathbf{V}(x, y)| := \sqrt{a^2(x, y) + b^2(x, y)}.$$

Το σύνολο των διανυσμάτων της μορφής (3.7) ονομάζεται **διανυσματικό πεδίο** της περιοχής Ω και οι συναρτήσεις $a(x, y)$, $b(x, y)$ **συνιστώσες** του πεδίου.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι, το σημείο (x, y) ανήκει στην παραμετρική καμπύλη $r(t) = (X(t), Y(t))$. Αυτό σημαίνει πως,

$$(3.9) \quad (x, y) = (X(t), Y(t)).$$

Το αντίστοιχο εφαπτόμενο διάνυσμα $v(t) = (X'(t), Y'(t))$, γενικά, δεν έχει καμία σχέση με το διάνυσμα $V(x, y)$ που έχουμε ήδη κατασκευάσει στο σημείο (x, y) σύμφωνα με την (3.7). Το $v(t)$ θα ταυτίζεται με το $V(x, y)$ εάν και μόνο όταν

$$(3.10) \quad v(t) = V(X(t), Y(t)).$$

Όταν αυτό συμβαίνει σε κάθε σημείο της καμπύλης $r(t)$, η τελευταία ονομάζεται **ολοκληρωτική καμπύλη** του διανυσματικού πεδίου $V(x, y)$.

Ο λόγος που χρησιμοποιείται αυτός ο όρος για τις παραμετρικές καμπύλες που σχετίζονται με ένα διανυσματικό πεδίο είναι ο εξής: Η αναλυτική μορφή της συνθήκης (3.10) είναι η

$$(3.11) \quad (X'(t), Y'(t)) = (a(X(t), Y(t)), b(X(t), Y(t))).$$

Ισοδύναμα,

$$(3.12) \quad X'(t) = a(X(t), Y(t)), \quad Y'(t) = b(X(t), Y(t)).$$

Με άλλα λόγια, η συνθήκη (3.10) δεν είναι παρά η συντομογραφία ενός συστήματος δύο ΣΔΕ πρώτης τάξης για τις συναρτήσεις $X(t)$ και $Y(t)$. Συνεπώς, η εύρεση μιας καμπύλης με την ιδιότητα (3.10) ισοδυναμεί με την επίλυση ή ολοκλήρωση του συστήματος (3.12).

Σημείωση. Για απλοποίηση του συμβολισμού, οι εξισώσεις (3.12) συνήθως γράφονται στη μορφή

$$(3.13) \quad x' = a(x, y), \quad y' = b(x, y).$$

Αυτή την πρακτική θα ακολουθούμε κι εμείς στα επόμενα, χωρίς προειδοποίηση.

Παράδειγμα 3.5

Οι ολοκληρωτικές καμπύλες του διανυσματικού πεδίου

$$(3.14) \quad V(x, y) = (-y, x)$$

προσδιορίζονται από το σύστημα

$$(3.15) \quad x' = -y, \quad y' = x.$$

Αν παραγωγίσουμε την πρώτη από αυτές τις εξισώσεις και στο αποτέλεσμα αντικαταστήσουμε τη δεύτερη, θα καταλήξουμε στη ΣΔΕ δεύτερης τάξης

$$(3.16) \quad x'' = -x.$$

Η λύση αυτής της εξίσωσης μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$(3.17) \quad x = s \cos(t - t_0),$$

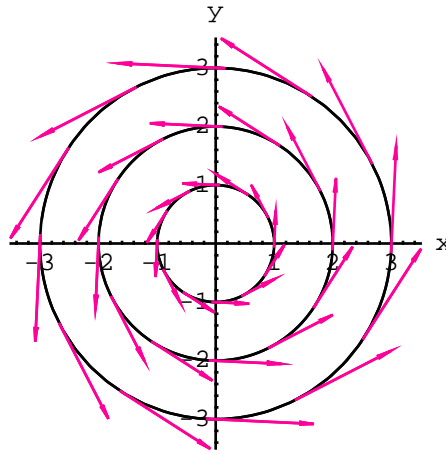
όπου s και t_0 τυχαίες σταθερές. Τότε από την πρώτη των (3.15) αμέσως έπεται ότι

$$(3.18) \quad y = s \sin(t - t_0).$$

Οι (3.17) και (3.18) συνεπάγονται ότι $x^2 + y^2 = s^2$. Άρα, οι παραπάνω εξισώσεις αποτελούν την παραμετρική περιγραφή κύκλων ακτίνας s με κέντρο την αρχή των αξόνων. Από αυτό το γεγονός αμέσως έπεται ότι, από τις s και t_0 μόνο η πρώτη είναι ουσιαστική παράμετρος. Μπορούμε λοιπόν να θέσουμε $t_0 = 0$ και να καταλήξουμε λέγοντας ότι, οι ολοκληρωτικές καμπύλες του διανυσματικού πεδίου $V(x, y) = (-y, x)$ περιγράφονται από τις σχέσεις

$$(3.19) \quad x = s \cos t, \quad y = s \sin t, \quad t \in \mathbb{R}, \quad s \in \mathbb{R}_+.$$

Στο Σχ. 3.3 δείχνουμε τρεις από τις ολοκληρωτικές καμπύλες του διανυσματικού πεδίου $V(x, y) = (-y, x)$ και βέλη τα οποία παριστάνουν το ίδιο το πεδίο σε ορισμένα από τα σημεία αυτών των καμπυλών.



Σχ. 3.3. Το διανυσματικό πεδίο $V(x, y) = (-y, x)$ και οι ολοκληρωτικές του καμπύλες $x = s \cos t, y = s \sin t$, για $s = 1, 2, 3$.

■

Είναι καιρός να επανέλθουμε στη γενική μορφή (3.1) των γραμμικών ΜΔΕ πρώτης τάξης και να σημειώσουμε ότι οι συντελεστές $a(x, y)$ και $b(x, y)$ του κύριου μέρους τους ορίζουν, αυτόματα, ένα διανυσματικό πεδίο σε κάποιο υποσύνολο Ω του \mathbb{R}^2 . Από τους αντίστοιχους ορισμούς αμέσως προκύπτει ότι, οι ολοκληρωτικές καμπύλες του παραπάνω διανυσματικού πεδίου ταυτίζονται με τις χαρακτηριστικές της αντίστοιχης ΜΔΕ.

Πραγματικά, κατά μήκος μιας ολοκληρωτικής καμπύλης $r(t) = (X(t), Y(t))$ του διανυσματικού πεδίου $V(x, y) = (a(x, y), b(x, y))$ η άγνωστη συνάρτηση $u(x, y)$ ανάγεται στη στην

$$(3.20) \quad \varphi(t) := u(X(t), Y(t)).$$

Από τον κανόνα της αλυσσίδας έπεται ότι η παράγωγος της $\varphi(t)$ δίνεται από τον τύπο

$$(3.21) \quad \varphi'(t) = u_x(X(t), Y(t)) X'(t) + u_y(X(t), Y(t)) Y'(t).$$

Όμως, έχουμε υποθέσει ότι η $r(t) = (X(t), Y(t))$ είναι ολοκληρωτική καμπύλη του διανυσματικού πεδίου $V(x, y) = (a(x, y), b(x, y))$. Άρα, ισχύουν οι (3.12) και η προηγούμενη σχέση

μπορεί να γραφτεί σαν

$$(3.22) \quad \varphi'(t) = u_x(X(t), Y(t))a(X(t), Y(t)) + u_y(X(t), Y(t))b(X(t), Y(t)).$$

Το δεξί μέλος της (3.22) δεν είναι παρά η αναλυτική μορφή που παίρνει το κύριο μέρος $a(x, y)u_x + b(x, y)u_y$ της (3.1) όταν το ζευγάρι (x, y) αντικατασταθεί από το $(X(t), Y(t))$. Συνεπώς, ολόκληρη η ΜΔΕ (3.1) ανάγεται στη γραμμική ΣΔΕ

$$(3.23) \quad \varphi'(t) + \gamma(t)\varphi(t) = \delta(t),$$

όπου

$$(3.24) \quad \gamma(t) = c(X(t), Y(t)), \quad \delta(t) := d(X(t), Y(t)).$$

Οι ΣΔΕ $x' = a(x, y)$, $y' = b(x, y)$ που καθορίζουν τις ολοκληρωτικές καμπύλες του διανυσματικού πεδίου $V(x, y) = (a(x, y), b(x, y))$. Γι' αυτό χαρακτηρίζονται ως *αυτόνομες*. Αυτή η ιδιότητα συνεπάγεται ότι, από τις δύο παραμέτρους ή σταθερές ολοκλήρωσης που υπεισέρχονται στη γενική λύση ενός συστήματος δύο ΣΔΕ πρώτης τάξης, η μία μόνο είναι ουσιαστική. Αν την ονομάσουμε s , τότε οι λύσεις του συστήματος $x' = a(x, y)$, $y' = b(x, y)$ περιγράφονται πλήρως από δύο συναρτήσεις της μορφής $X(t, s)$, $Y(t, s)$, $t \in I$, $s \in J$.

Αυτό φάνηκε καθαρά στο προηγούμενο παράδειγμα και, ως προς τη λύση των ΜΔΕ που μας ενδιαφέρουν, έχει την ακόλουθη συνέπεια. Αφού λύσουμε το σύστημα $x' = a(x, y)$, $y' = b(x, y)$, και εκφράσουμε τη λύση του με δύο σχέσεις της μορφής

$$(3.25) \quad x = X(t, s), \quad y = Y(t, s) \quad t \in I, \quad s \in J,$$

πρέπει να στραφούμε στην ΣΔΕ (3.23) για την $\varphi(t)$. Όμως, στη μορφή (3.23), η ΣΔΕ για την $\varphi(t)$ αναφέρεται σε μία μόνο από τις χαρακτηριστικές καμπύλες. Στην πραγματικότητα, οι συναρτήσεις γ και δ που περιέχει η (3.23) θα είναι της μορφής $\gamma(t, s)$ και $\delta(t, s)$, γιατί στον ορισμό τους υπεισέρχονται οι συναρτήσεις $X(t, s)$ και $Y(t, s)$. Κατά συνέπεια, η λύσεις της (3.23) θα δίνονται από μια μονοπαραμετρική οικογένεια συναρτήσεων του t , της μορφής $F(t, s)$.

Αυτό σημαίνει ότι η σχέση $u(X(t), Y(t)) = \varphi(t)$ ανάμεσα στις λύσεις της αρχικής ΜΔΕ (3.1) και τις λύσεις της ΣΔΕ (3.23) θα πάρει, τελικά, την ακόλουθη μορφή:

$$(3.26) \quad u(X(t, s), Y(t, s)) = F(t, s).$$

Από την άλλη, η *ορίζουσα (του) Jacobi*

$$(3.27) \quad J(t, s) := \frac{\partial(x, y)}{\partial(t, s)} \equiv \det \begin{pmatrix} X_t(t, s) & Y_t(t, s) \\ X_s(t, s) & Y_s(t, s) \end{pmatrix}$$

της απεικόνισης $(t, s) \rightarrow (x, y) = (X(t, s), Y(t, s))$ που ορίζουν οι (3.25) είναι μη μηδενική σε μια περιοχή $\tilde{\Omega}$ του επίπεδου st . Αυτό μας επιτρέπει να λύσουμε τις εξισώσεις (3.25) ως προς (t, s) και να καταλήξουμε στις σχέσεις

$$(3.28) \quad t = T(x, y), \quad s = S(x, y).$$

Η αντικατάσταση αυτών των σχέσεων στην (3.26) οδηγεί στην

$$(3.29) \quad u(x, y) = F(T(x, y), S(x, y)).$$

Αυτή είναι η τελική μορφή των λύσεων της ΜΔΕ (1.1) που κατασκευάζονται με την παραπάνω διαδικασία και η οποία, για προφανείς λόγους, αναφέρεται ως *μέθοδος των χαρακτηριστικών*.

Σημείωση: Τα σημεία της περιοχής Ω στα οποία οι συναρτήσεις $a(x, y)$ και $b(x, y)$ μηδενίζονται ταυτόχρονα ονομάζονται **ανώμαλα ή ιδιόμορφα σημεία** του διανυσματικού πεδίου $V(x, y) := (a(x, y), b(x, y))$. Όταν αυτές οι συναρτήσεις αντιστοιχούν στους συντελεστές του κύριου μέρους μιας ΜΔΕ της μορφής (3.1), τα παραπάνω σημεία λέγονται και ανώμαλα σημεία της αντίστοιχης εξίσωσης.

Παράδειγμα 3.6

Στην περίπτωση της ΜΔΕ

$$(3.30) \quad x u_y - y u_x = 0$$

οι συντελεστές $a(x, y) = x$ και $b(x, y) = -y$ ορίζουν το διανυσματικό πεδίο

$$(3.31) \quad V(x, y) = (-y, x), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Οι ολοκληρωτικές καμπύλες αυτού του πεδίου υπολογίστηκαν στο προηγούμενο παράδειγμα και αποτελούνται από κύκλους με κέντρο την αρχή των αξόνων x, y που είναι και το μοναδικό ανώμαλο σημείο του πεδίου $V(x, y) = (-y, x)$. Η αναλυτική περιγραφή των ολοκληρωτικών καμπυλών δίνεται από τις σχέσεις (3.19), που τις ξαναγράφουμε για ευκολία αναφοράς:

$$(3.32) \quad x = s \cos t, \quad y = s \sin t, \quad t \in \mathbb{R}, \quad s \in \mathbb{R}_+.$$

Στην περίπτωση της ΜΔΕ (3.30), οι συναρτήσεις $c(x, y)$ και $d(x, y)$ είναι μηδενικές. Συνακόλουθα, $\gamma(t) = \delta(t) = 0$ και η ΣΔΕ (3.23) γίνεται $\varphi'(t) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι η $\varphi(t)$ είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη από τις τιμές της παραμέτρου t . Ισοδύναμα,

$$(3.33) \quad \varphi = F(s),$$

όπου $F(s)$ τυχαία συνάρτηση, από την οποία θα απαιτήσουμε να είναι διαφορίσιμη.

Από τις (3.32) και (3.33) έπεται ότι οι λύσεις της ΜΔΕ (3.27) ορίζονται από τη σχέση

$$(3.34) \quad u(s \cos t, s \sin t) = F(s).$$

Η τελευταία γράφεται σε πιο εύχριστη μορφή, αν παρατηρήσουμε ότι, η ορίζουσα Jacobi του μετασχηματισμού $(s, t) \rightarrow (x, y)$ που ορίζουν οι (3.32) είναι ίση με

$$(3.35) \quad J(t, s) := \det \begin{pmatrix} -s \sin t & s \cos t \\ \cos t & \sin t \end{pmatrix} = -s.$$

Αφού $s > 0$, η $J(t, s)$ δε μηδενίζεται σε κανένα σημείο της περιοχής $\tilde{\Omega} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ και ο μετασχηματισμός $(s, t) \rightarrow (x, y)$ είναι αντιστρέψιμος. Συγκεκριμένα, λύνοντας τις εξισώσεις (3.32) ως προς τις t και s , βρίσκουμε ότι, τοπικά τουλάχιστον, η απεικόνιση $(x, y) \rightarrow (s, t)$ περιγράφεται από τους τύπους

$$(3.36) \quad t = \arctan(y/x), \quad s = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Συνεπώς, η λύση (3.33) της ΜΔΕ (3.27) μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$(3.37) \quad u(x, y) = F\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right).$$

■

Ασκήσεις

3.1 Για κάθε μία από τις παρακάτω ΜΔΕ,

α) Να διατυπωθούν οι εξισώσεις των χαρακτηριστικών καμπυλών και να ολοκληρωθούν αναλυτικά.

β) Με πρότυπο το Σχ. 3.2, να κατασκευαστεί η γραφική παράσταση ενός αντιπροσωπευτικού υποσύνολου των χαρακτηριστικών καμπυλών και του αντίστοιχου διανυσματικού πεδίου.

γ) Να βρεθεί η γενική λύση με τη μέθοδο των χαρακτηριστικών καμπυλών.

(i) $u_x + 3 u_y = 0, \quad u = u(x, y).$

(ii) $u_x + 2 u_y = x y^2, \quad u = u(x, y).$

(iii) $u_x - u_t = u, \quad u = u(x, t).$

(iv) $y u_x - x u_y = u, \quad u = u(x, y).$

(v) $u_x + y u_y = u, \quad u = u(x, y).$

(vi) $x u_x + u_t = u, \quad u = u(x, t).$

(vii) $x u_x + u_t = t + u, \quad u = u(x, t).$

4. Το πρόβλημα των αρχικών τιμών

Ιδιαίτερα όταν στρεφόμεστε στις εφαρμογές των ΜΔΕ, μία από τις ανεξάρτητες μεταβλητές συχνά αντιπροσωπεύει τον φυσικό χρόνο και συνήθως συμβολίζεται με t . Σ' αυτές τις περιπτώσεις, η αντίστοιχη ΜΔΕ αφορά τον τρόπο με τον οποίο εξελίσσεται η φυσική, βιολογική, χημική, οικονομική, ή άλλου είδους ποσότητα που παριστάνει η "άγνωστη συνάρτηση" της συγκεκριμένης ΜΔΕ.

Η πρώτη μας φροντίδα σε τέτοιες περιπτώσεις θα πρέπει να είναι η **διαστατική ορθότητα** της ΜΔΕ που εξετάζουμε. Διαφορετικά, μπορεί να καταλήξουμε σε γελοίες ισότητες του τύπου 2m (μέτρα)+ 7s (δευτερόλεπτα)= 5g (γραμμάρια)! Ο λόγος είναι ότι, οι άγνωστη συνάρτηση u και οι παράγωγοί της έχουν διαστάσεις που καθορίζονται από τη σημασία της "αξαρτημένης μεταβλητής", u , και των "ανεξάρτητων μεταβλητών".

Για να γίνουμε σαφέστεροι, ας υποθέσουμε ότι, η μεταβλητή x χρησιμεύει στο να προσδιορίζεται η θέση ενός σημείου σ' έναν ευθύγραμμο σωλήνα που περιέχει κάποιο αέριο. Ας υποθέσουμε επιπλέον ότι η συνάρτηση $u(x, t)$ παριστάνει την πυκνότητα του αερίου στο σημείο x τη χρονική στιγμή t . Τότε, η ΜΔΕ $u_x + u_t = 0$ είναι απαράδεκτη για την περιγραφή του τρόπου εξέλιξης της πυκνότητας του αερίου που μελετάμε. Γιατί, στο παράδειγμα που εξετάζουμε, η πυκνότητα μπορεί να θεωρηθεί ότι έχει διάσταση (μάζα/μήκος) και μετριέται σε g/m . Από την άλλη, ο ορισμός των μερικών παραγώγων δείχνει καθαρά ότι, η διάσταση του όρου $u_x \equiv \partial u / \partial x$ είναι (μάζα/μήκος)/μήκος και άρα σε μονάδες είναι της μορφής g / m^2 , ενώ η διάσταση του όρου $u_t \equiv \partial u / \partial t$ είναι (μάζα/μήκος)/χρόνος και άρα σε μονάδες είναι της μορφής $\text{g} / (\text{m} \cdot \text{s})$.

Από την προηγούμενη παρατήρηση συμπεραίνουμε ότι, μια αποδεκτή εξίσωση για την εξέλιξη της πυκνότητας $u(x, t)$ μπορεί να είναι της μορφής $a(x, t) u_x + u_t = 0$, όπου η φυσική ποσότητα που παριστάνει η συνάρτηση $a(x, t)$ έχει τη διάσταση του λόγου (μήκος/χρόνος), δηλαδή της ταχύτητας. Το απλούστερο παράδειγμα αυτού του είδους θα ήταν η ΜΔΕ

$$(4.1) \quad c u_x + u_t = 0,$$

όπου c μια σταθερή, με τη διάσταση της ταχύτητας.

Πάντως, από τη στιγμή που έχουμε πληρώσει την υποχρέωση να είμαστε "φυσικά ορθοί" μπορούμε να το ... παίξουμε μαθηματικοί. Μπορούμε, δηλαδή, να λύσουμε από την αρχή το ζήτημα της διάστασης κάθε όρου μιας ΜΔΕ, εισάγοντας καινούργιες μεταβλητές. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, στη θέση της χρονικής μεταβλητής t , μπορούμε να εισαγάγουμε την $y = c t$ και να απαλλαγούμε αμέσως από την παρουσία της παραμέτρου c . Γιατί, αν θέσουμε $\tilde{u}(x, y) = u(x, c t)$, τότε η (4.1) μετατρέπεται στην

$$(4.2) \quad \tilde{u}_x + \tilde{u}_y = 0.$$

Αλλά, όπως όλοι γνωρίζουμε, οι περισπωμένες ... έχουν καταργηθεί προ πολλού. Με άλλα λόγια, η (4.2) δε διαφέρει σε τίποτα από την ΜΔΕ $u_x + u_y = 0$!

Την ΜΔΕ $u_x + u_y = 0$, άρα και τις (4.1) και (4.2), την έχουμε μελετήσει σε προηγούμενο εδάφιο και έχουμε κατασκευάσει τη γενική λύση της. Ωστόσο, από την άποψη των εφαρμογών (και όχι μόνο), το ενδιαφέρον δεν επικεντρώνεται στη εύρεση γενικών λύσεων της ΜΔΕ που

εκφράζει τον "νόμο εξέλιξης" της κατάστασης ενός συστήματος, αλλά στο ακόλουθο ερώτημα: Αν γνωρίζουμε την κατάσταση του συγκεκριμένου συστήματος κάποια χρονική στιγμή t_1 , μπορούμε να "προβλέψουμε" τη κατάσταση του ίδιου συστήματος κάθε στιγμή μετά την t_1 ; Για παράδειγμα, αν η πυκνότητα του αερίου στον ευθύγραμμο σωλήνα, τη στιγμή που το χρονόμετρο λέει $t = 0$, περιγράφεται από τη συνάρτηση $f(x)$, μπορούμε να υπολογίσουμε τη πυκνότητα του αερίου σε όλα τα σημεία του σωλήνα για κάθε $t > 0$;

Αφού η εξέλιξη της πυκνότητας του αερίου περιγράφεται από την ΜΔΕ (4.1) το προηγούμενο ερώτημα ισοδυναμεί με το ακόλουθο διττό πρόβλημα:

(i) Υπάρχει συνάρτηση $u(x, t)$ με πεδίο ορισμού το τμήμα $t \geq 0$ του επίπεδου x, t , τέτοια που

α) Στην περιοχή $t > 0$, αποτελεί λύση της ΜΔΕ (4.1) και

β) Όταν $t = 0$, ταυτίζεται με την δοσμένη $f(x)$;

(ii) Υπάρχουν περισσότερες από μία συναρτήσεις αυτού του είδους;

Αν η απάντηση στο πρώτο σκέλος αυτού του προβλήματος είναι θετική και στο δεύτερο αρνητική, τότε η εξέλιξη του συστήματος που μας ενδιαφέρει είναι προβλέψιμη. Όμως, αυτοί που ασχολούνται με τις εφαρμογές των διαφορικών εξισώσεων είναι πολύ απαιτητικοί τύποι. Γι' αυτό, αμέσως μόλις απαντήσουμε στα προηγούμενα ερωτήματα, μας θέτουν κι ένα ακόμη:

(iii) Αν η συνάρτηση $f(x)$ που περιγράφει την αρχική κατάσταση του συστήματος αντικατασταθεί από την $\tilde{f}(x)$, η οποία διαφέρει ελάχιστα από την $f(x)$, τι θα συμβεί στη λύση του προβλήματος; Θα αλλάξει ριζικά ή θα παραμείνει σχεδόν η ίδια;

Όπως γίνεται πάντα, πίσω από το τρίτο ερώτημα κρύβεται μια επιθυμία ή σκοπιμότητα. Συγκεκριμένα, η επιθυμητή απάντηση είναι ότι, η λύση $\tilde{u}(x, t)$ που αντιστοιχεί στη συνάρτηση $\tilde{f}(x)$ θα διαφέρει ελάχιστα από την $u(x, t)$. Γιατί, αυτού του είδους η συμπεριφορά εκ μέρους των λύσεων, εξασφαλίζει τη σιγουριά των προβλέψεων. Αν η αρχική κατάσταση δεν έχει εκτιμηθεί με πολύ μεγάλη ακρίβεια, τότε και η πρόβλεψη των υστερότερων καταστάσεων δε θα διαφέρει ουσιαστικά από αυτό που πραγματικά θα παρατηρηθεί.

Για προφανείς λόγους, το πρόβλημα που μόλις περιγράψαμε αναφέρεται ως **πρόβλημα αρχικών τιμών**, ή ως **πρόβλημα (του) Cauchy**. Και, όταν οι απαντήσεις και στα τρία ερωτήματα που το συναπαρτίζουν είναι η επιθυμητή, χαρακτηρίζεται ως **ορθά διατυπωμένο κατά Hadamard** (Ανταμάρ). Με άλλα λόγια, ένα πρόβλημα λέγεται ορθά διατυπωμένο (ή **καλά τοποθετημένο**) κατά Hadamard, όταν

(i) Η ΜΔΕ που μας ενδιαφέρει επιδέχεται λύση $u(x, t)$ στην περιοχή $t > 0$, η οποία πληροί την **αρχική συνθήκη** $u(x, 0) = f(x)$.

(ii) Δεν υπάρχει άλλη συνάρτηση με την ίδια ιδιότητα: Η λύση είναι μοναδική.

(iii) Η λύση του προβλήματος είναι **ευσταθής**: Όταν η συνάρτηση $\tilde{f}(x)$ είναι λίγο διαφορετική από την $f(x)$, τότε και η (μοναδική) λύση $\tilde{u}(x, t)$ που πληροί την αρχική συνθήκη $\tilde{u}(x, 0) = \tilde{f}(x)$ είναι σχεδόν ίδια με την $u(x, t)$.

Βέβαια, η διατύπωση του προβλήματος αρχικών τιμών ή Cauchy που μόλις δώσαμε αφορά μιαν εξίσωση για συνάρτηση δύο μόνο μεταβλητών. Ωστόσο, η γενικότερη περίπτωση των πολλών μεταβλητών καλύπτεται άμεσα με το να θεωρήσουμε ότι το x παριστάνει ένα

στοιχείο του \mathbb{R}^n , όπου n τυχαίος φυσικός αριθμός: $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Επιπλέον, αυτό που ονομάσαμε αρχική συνθήκη δεν είναι απαραίτητο να αναφέρεται στην ευθεία $t = 0$ του επίπεδου $x t$. Σε κάθε περίπτωση, το πρόβλημα Cauchy θα μας απασχολήσει εκτενώς στα επόμενα και, τότε, θα περιγράψουμε αναλυτικότερα τόσο τις διάφορες παραλλαγές του, όσο και το τι εννοούμε με φράσεις σαν "η συνάρτηση $\tilde{f}(x)$ είναι λίγο διαφορετική από την $f(x)$ " που χρησιμοποιήσαμε πιο πάνω.

Παράδειγμα 4.1

Ας υποθέσουμε ότι μας ζητούν τις λύσεις της ΜΔΕ (4.1) που πληρούν την αρχική συνθήκη

$$(4.3) \quad u(x, 0) = f_1(x) := \frac{1}{1+x^2}.$$

Όπως ήδη σημειώσαμε, η επίλυση της (4.1) ισοδυναμεί με την επίλυση της (4.2). Αλλά τις λύσεις της τελευταίας τις έχουμε ήδη κατασκευάσει και είναι της μορφής $\tilde{u}(x, y) = F(x - y)$, όπου F τυχαία διαφορίσιμη συνάρτηση. Άρα, η γενική λύση της (4.1) είναι της μορφής

$$(4.4) \quad u(x, t) = F(x - ct).$$

Τη χρονική στιγμή $t = 0$, αυτού του είδους οι λύσεις γίνονται

$$(4.5) \quad u(x, 0) = F(x).$$

Άρα, για να πληρούν την αρχική συνθήκη (4.3), η συνάρτηση $F(x)$ δεν μπορεί να είναι αυθαίρετη, αλλά η

$$(4.6) \quad F(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Έτσι, η (4.4) γίνεται

$$(4.7) \quad u(x, t) = \frac{1}{1+(x-ct)^2}.$$

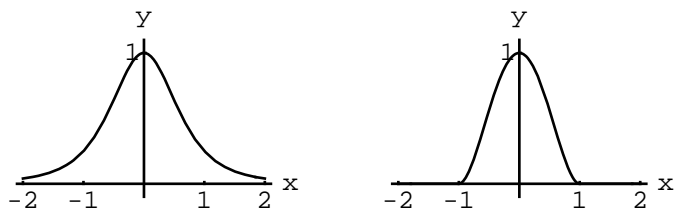
Από τον τρόπο κατασκευής της, γίνεται φανερό ότι, η $u(x, t)$ που ορίζεται στην (4.7) είναι η μοναδική λύση του προβλήματος αρχικών τιμών που μας έθεσαν. Μάλιστα, το ίδιο θα συνέβαινε αν η αρχική συνθήκη (4.3) ήταν της γενικότερης μορφής $u(x, 0) = f(x)$, με $f(x)$ οποιαδήποτε διαφορίσιμη συνάρτηση. Με άλλα λόγια, τη θέση της (4.7) θα έπαιρνε η

$$(4.8) \quad u(x, t) = f(x - ct).$$

Για να έχουμε στη διάθεσή μας ένα ακόμη συγκεκριμένο παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι,

$$(4.9) \quad f_2(x) = \begin{cases} (x^2 - 1)^2, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

Όπως εύκολα διαπιστώνει κανείς, κι αυτή η συνάρτηση ανήκει στην κλάση $C^1(\mathbb{R})$. Η κύρια διαφορά της από την $f_1(x)$ είναι ότι η $f_2(x)$ μηδενίζεται έξω από το κλειστό και φραγμένο διάστημα $[-1, 1]$. Γι' αυτό λέμε ότι, αυτή η συνάρτηση $f_2(x)$ έχει **συμπαγές έρεισμα** (ή φορέα). Τα γραφήματα των $f_1(x)$ και $f_2(x)$ που δίνουμε στο Σχ. 4.1 δείχνουν αυτή τη διαφορά με σαφήνεια.

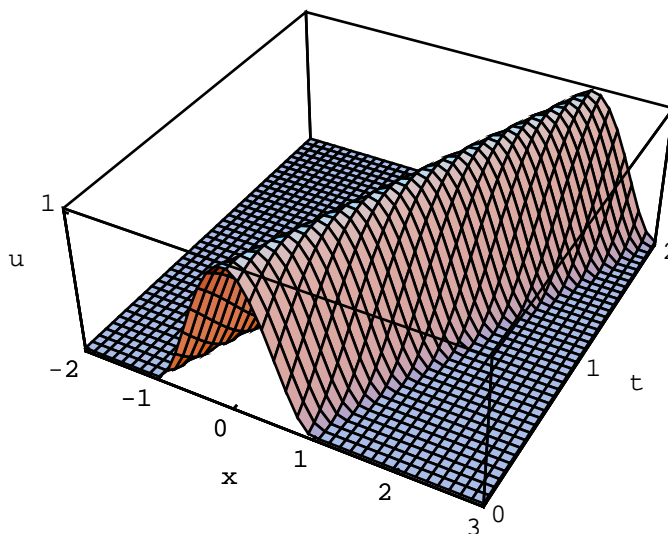


Σχ. 4.1. Το γράφημα των συναρτήσεων $f_1(x)$ και $f_2(x)$ στη γειτονιά του $x = 0$.

Σύμφωνα, λοιπόν, με το την (4.8) η μοναδική λύση του της ΜΔΕ (4.1) που τηρεί την αρχική συνθήκη $u(x, 0) = f_2(x)$ δίνεται από τον τύπο

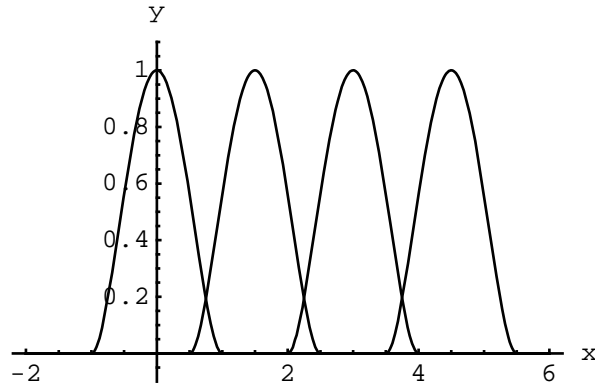
$$(4.10) \quad u(x, t) = \begin{cases} [(x - ct)^2 - 1]^2, & |x - ct| \leq 1 \\ 0, & |x - ct| > 1 \end{cases}$$

Στο Σχ. 4.2 δείχνουμε το γράφημα της τελευταίας λύσης για $c = 1$. Από αυτό το σχήμα, αλλά κι από τον αναλυτικό τύπο (4.10) της συνάρτησης $u(x, t)$, φαίνεται καθαρά ότι, κάθε στιγμή $t > 0$, η κατάσταση του συστήματος είναι ποιοτικά ίδια με την αρχική. Απλώς, το μέγιστο (της πυκνότητας του αερίου) έχει μετατοπιστεί από το $x = 0$ όπου βρισκόταν αρχικά, και έχει φτάσει στο σημείο ct . Το ίδιο ισχύει και για τα άκρα του ερείσματος, τα οποία, από τα σημεία $x = \pm 1$ όπου βρίσκονταν τη στιγμή $t = 0$, έχουν φτάσει στα $x = \pm 1 + ct$, αντίστοιχα. Γενικότερα, ο τύπος (4.10) συνεπάγεται ότι η $u(x, t)$ διατηρεί την ίδια τιμή, $f(s)$, κατά μήκος κάθε μιας από τις ευθείες $x - ct = s$ του επίπεδους xt .



Σχ. 4.2. Το γράφημα της λύσης (4.10), για $c = 1$.

Η ίδια εικόνα προκύπτει και από το Σχ. 4.3, στο οποίο δείχνουμε το γράφημα της $u(x, t)$ για ορισμένες ενδεικτικές τιμές της χρονικής μεταβλητής t . Και από αυτά τα στιγμιό-τυπα φαίνεται καθαρά ότι, η κατανομή της πυκνότητας παραμένει αναλλοίωτη και απλώς μετατοπίζεται με ταχύτητα c . Όταν το $c > 0$, η μετατόπιση γίνεται προς τα δεξιά (προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα x), όπως στα Σχ. 4.2 και 4.3. Αντίθετα, όταν το $c < 0$, η μετατόπιση γίνεται προς τ' αριστερά.



Σχ. 4.3. Το γράφημα της λύσης (4.10), για $c = 1$, σε τέσσερες διαδοχικές χρονικές στιγμές.

Θυμίζουμε ότι, χαρακτηριστικές της ΜΔΕ $u_x + u_y = 0$ είναι οι ευθείες του επίπεδου $x y$ που ορίζονται από τη σχέση $x - y = s$, όπου s τυχαία σταθερή. Άρα, χαρακτηριστικές της $c u_x + u_t = 0$ είναι οι ευθείες $x - c t = s$ του χωροχρονικού επίπεδου $x t$. Κάθε μια από αυτές τις ευθείες περιγράφει ένα σωματίο που κινείται με ταχύτητα c και το οποίο, τη χρονική στιγμή $t = 0$, διέρχεται από το σημείο $x = s$. Άρα και κάθε στοιχείο του αέριου στον ευθύγραμμο σωλήνα του παραδείγματός μας ακολουθεί την ίδια συμπεριφορά. Αυτές οι παρατηρήσεις δικαιολογούν πλήρως και την εξέλιξη της κατανομής του αέριου την οποία περιγράφουν οι διάφορες λύσεις του προβλήματος Cauchy που κατασκευάσαμε παραπάνω.

■

Τα προβλήματα Cauchy που αναλύσαμε στο προηγούμενο παράδειγμα ανέδειξαν με σαφήνεια τον ρόλο των χαρακτηριστικών καμπυλών της εξίσωσης $c u_x + u_t = 0$ στη συμπεριφορά των αντίστοιχων λύσεων. Το επόμενο παράδειγμα δείχνει τη σημασία των ίδιων καμπυλών στο ζήτημα της ύπαρξης λύσεων προβλημάτων αρχικών τιμών για την ίδια εξίσωση.

Παράδειγμα 4.2

Δίνεται η παραμετρική καμπύλη Γ του επίπεδου $x t$ που ορίζεται από τις σχέσεις

$$(4.11) \quad x = \lambda, \quad t = \frac{a}{c} \lambda, \quad -\infty < \lambda < \infty,$$

όπου a μια συγκεκριμένη σταθερή, και μας ζητιέται να απαντήσουμε στο ακόλουθο ερώτημα:

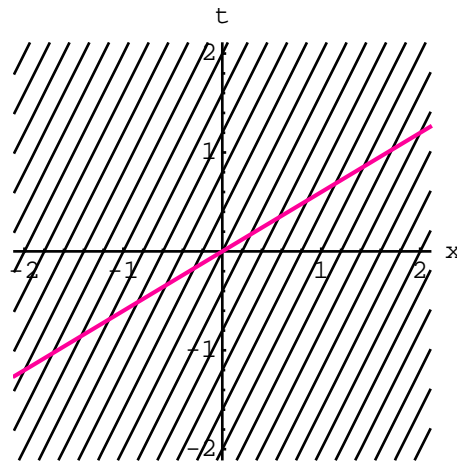
Υπάρχουν λύσεις της ΜΔΕ (4.1) οι οποίες κατά μήκος της Γ ανάγονται στην προκαθορισμένη συνάρτηση $h(\lambda)$; Ως συγκεκριμένο παράδειγμα, θεωρήστε τη συνάρτηση

$$(4.12) \quad h(\lambda) = e^{-\lambda^2}.$$

Θα ξεκινήσουμε τη διερεύνηση αυτού του προβλήματος με την ακόλουθη παρατήρηση. Η απαλοιφή της παραμέτρου λ από τις σχέσεις (4.11) οδηγεί στην

$$(4.13) \quad t = \frac{a}{c} x, \quad -\infty < x < \infty.$$

Αυτό σημαίνει ότι, η Γ δεν είναι παρά μια ευθεία του επίπεδου $x t$, η οποία διέρχεται από το σημείο $(x, t) = (0, 0)$ και έχει κλίση a/c ως προς τον άξονα x (βλ. Σχ. 4.4)



Σχ. 4.4. Χαρακτηριστικές της $c u_x + u_t = 0$, και η ευθεία των αρχικών τιμών $t = (a/c) x$, όταν $(c, a) = (2, 1)$.

Συνακόλουθα, η συνθήκη $u(\lambda, (a/c)\lambda) = \exp(-\lambda^2)$, που επιβάλλεται να πληροί η λύση μας, μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής:

$$(4.14) \quad u\left(x, \frac{a}{c} x\right) = e^{-x^2}.$$

Τώρα, όπως αναφέραμε επανειλημμένα, η γενική λύση της ΜΔΕ (4.1) είναι της μορφής $u(x, t) = F(x - c t)$. Από αυτήν έπεται ότι

$$(4.15) \quad u\left(x, \frac{a}{c} x\right) = F((1 - a) x).$$

Η σύγκριση των (4.14) και (4.15) οδηγεί αμέσως στην εξίσωση

$$(4.16) \quad F((1 - a) x) = e^{-x^2}$$

και, άρα, στο ακόλουθο συμπέρασμα: Μπορούμε να βρούμε λύση της ΜΔΕ (4.1) που σέβεται τη συνθήκη (4.12) εάν και μόνο όταν η (4.16) μπορεί να λυθεί ως προς τη συνάρτηση $F(\xi)$.

Προφανώς, όταν η δοσμένη σταθερή a διαφέρει από τη μονάδα, η (4.16) λύνεται και μάλιστα πολύ εύκολα. Αρκεί να θέσουμε $\xi = (1 - a) x$ και να λύσουμε την τελευταία ως προς x . Με αυτό τον τρόπο βρίσκουμε ότι

$$(4.17) \quad F(\xi) = \exp\left[-\frac{\xi^2}{(1-a)^2}\right],$$

οπότε η αντίστοιχη λύση $u(x, t) = F(x - c t)$ δίνεται από τη συνάρτηση

$$(4.18) \quad u(x, t) = \exp\left[-\frac{(x - c t)^2}{(1-a)^2}\right].$$

Αντίθετα, όταν $a = 1$, η σχέση (4.16) γίνεται

$$(4.19) \quad F(0) = e^{-x^2}.$$

Όμως, το αριστερό μέλος αυτής της σχέσης, σε αντίθεση με το δεξί, είναι μια σταθερή ποσότητα. Άρα, η (4.19) δεν μπορεί να ισχύει. Συνεπώς, δεν υπάρχει λύση της ΜΔΕ (4.1) που

σέβεται τη συνθήκη (4.14) με $a = 1$, δηλαδή την

$$(4.20) \quad u\left(x, \frac{x}{c}\right) = e^{-x^2}.$$

Για να καταλάβουμε το λόγο που, στην περίπτωση $a = 1$ το πρόβλημα που μας δόθηκε δεν έχει λύση, ενώ για $a \neq 1$ επιδέχεται λύση και μάλιστα μοναδική, αρκεί να προσέξουμε τη σημασία των διαφορετικών τιμών της παραμέτρου a .

Για κάθε $a \neq 1$, η ευθεία Γ τέμνει κάθε χαρακτηριστική της ΜΔΕ (4.1) σε ένα και μόνο σημείο. Σ' αυτό το σημείο, η τιμή της $u(x, t)$ είναι γνωστή από τα αρχικά δοσμένα. Από κει κι ύστερα, η εξέλιξη της $u(x, t)$ κατά μήκος της χαρακτηριστικής καθορίζεται μονοσήμαντα από την ΣΔΕ στην οποία είδαμε ότι ανάγεται η ΜΔΕ. Ειδικότερα, για την ΜΔΕ (4.1), είχαμε βρει ότι οι λύσεις της παραμένουν σταθερές κατά μήκος των χαρακτηριστικών της.

Από αυτή την άποψη, τα προβλήματα αρχικών τιμών αυτού του παραδείγματος με $a \neq 1$ δεν διαφέρουν σε τίποτα από την περίπτωση όπου $a = 0$, η οποία δεν είναι άλλη από αυτή που μελετήσαμε στο προηγούμενο παράδειγμα. Γιατί, όταν $a = 0$, η ευθεία Γ , που ορίζεται από τη σχέση $t = (a/c)x$ και πάνω στην οποία προκαθορίστηκαν οι τιμές της $u(x, t)$, ταυτίζεται με τον άξονα x .

Όμως, όταν $a = 1$, τότε η ευθεία Γ ταυτίζεται με τη χαρακτηριστική της (4.1) που διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Άρα, κατά μήκος της Γ , η $u(x, t)$ οφείλει να μείνει σταθερή. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με την απαίτηση (4.20) και, άρα, η λύση του προβλήματος που δόθηκε προς λύση είναι αδύνατη.

Και, για να μην δημιουργηθεί λαθεμένη εντύπωση, θα συμπληρώσουμε το εξής. Ας υποθέσουμε ότι η αρχική συνθήκη που είχε επιβληθεί δεν ήταν η (4.14), αλλά η

$$(4.20) \quad u\left(x, \frac{a}{c}x\right) = b,$$

όπου b τυχαία σταθερή. Τότε, το πρόβλημα που ανέκυψε νωρίτερα για την περίπτωση $a = 1$ θα εξαφανιζόταν. Γιατί τότε, η (4.19) θα έδινε τη θέση της στην

$$(4.21) \quad F(0) = b.$$

Και τα δύο μέλη της (4.21) είναι σταθερές ποσότητες, οπότε αυτή η σχέση δεν είναι αδύνατη.

Δυστυχώς, μπορεί με αυτό τον τρόπο να απαλλαγήκαμε από το ένα πρόβλημα, αλλά βρεθήκαμε αντιμέτωποι με ένα άλλο, εξίσου σοβαρό! Γιατί, η μόνη πληροφορία που μπορούμε να αντλήσουμε από την (4.21) είναι η τιμή της άγνωστης συνάρτησης $F(\xi)$ στο $\xi = 0$. Και διαφορίσιμες συναρτήσεις που παίρνουν την ίδια τιμή σε ένα μόνο σημείο του πεδίου ορισμού τους είναι άπειρες!

Αυτό σημαίνει ότι, κάθε συνάρτηση της μορφής $u(x, t) = F(x - ct)$, όπου $F(\xi)$ οποιαδήποτε διαφορίσιμη συνάρτηση που παίρνει την τιμή b στο $\xi = 0$, αποτελεί λύση της ΜΔΕ (4.1) και σέβεται τη συνθήκη (4.20). Με άλλα λόγια, το πρόβλημα αρχικών τιμών, από μη επιλύσιμο, μετατράπηκε σε απροσδιόριστο!

■

Παράδειγμα 4.3

Ας θεωρήσουμε, τώρα, το πρόβλημα αρχικών τιμών για την ΜΔΕ

$$(4.22) \quad x u_x + b u_t = 0,$$

όπου $b > 0$, όταν οι αρχικές συνθήκες είναι ίδιες με αυτές που εξετάσαμε στο πρώτο παράδειγμα.

Οι χαρακτηριστικές καμπύλες της (4.22) καθορίζονται από το σύστημα

$$(4.23) \quad x' = x, \quad t' = b,$$

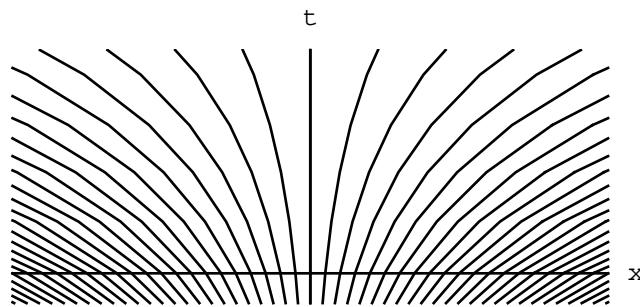
όπου $x = x(\tau)$, $t = t(\tau)$. Το τελευταίο λύνεται εύκολα για να δώσει

$$(4.24) \quad x = C_1 e^\tau, \quad t = b\tau + C_2.$$

Η απαλοιφή της παραμέτρου τ από αυτές τις σχέσεις οδηγεί στην

$$(4.25) \quad x = s e^{t/b}, \quad s := C_1 e^{-C_2/b}.$$

Αυτή δείχνει καθαρά ότι, οι χαρακτηριστικές καμπύλες της (4.22) αποτελούνται από τις υπερβολές του επίπεδου $x t$, ορισμένες από τις οποίες φαίνονται στο Σχ. 4.5.



Σχ. 4.5. Ορισμένες από τις χαρακτηριστικές $x = s e^{t/b}$ της ΜΔΕ $x u_x + b u_t = 0$, όταν $b = 1$.

Κατά μήκος των χαρακτηριστικών, η (4.22) ανάγεται στην ΣΔΕ $\varphi' = 0$. Άρα, $\varphi = F(s)$, όπου $F(s)$ τυχαία διαφορίσιμη συνάρτηση. Συνακόλουθα, η γενική λύση της ΜΔΕ (4.22) δίνεται από τις συναρτήσεις της μορφής

$$(4.26) \quad u(x, t) = F(x e^{-t/b}).$$

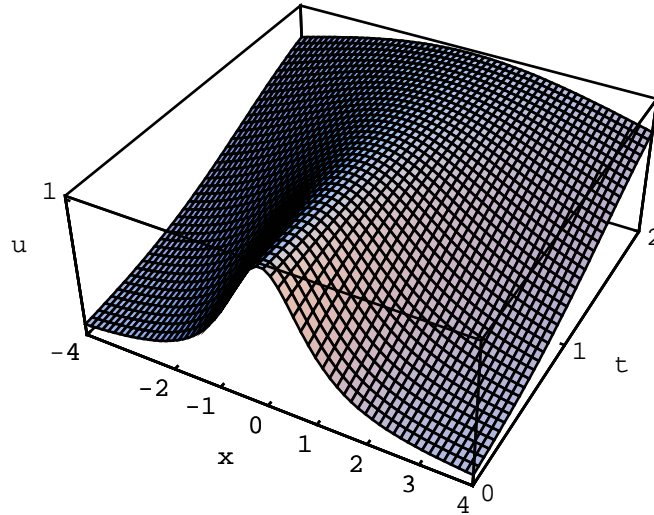
Από αυτή τη γενική έκφραση για τις λύσεις αμέσως έπεται ότι

$$(4.27) \quad u(x, 0) = F(x).$$

Άρα, η ειδική λύση που αντιστοιχεί στην αρχική συνθήκη $u(x, 0) = f_1(x) := (1 + x^2)^{-1}$ δίνεται από τη συνάρτηση

$$(4.28) \quad u(x, t) = \frac{1}{1 + x^2 e^{-2t/b}}.$$

Η γραφική παράσταση αυτής της λύσης δίνεται στο Σχ. 4.6.

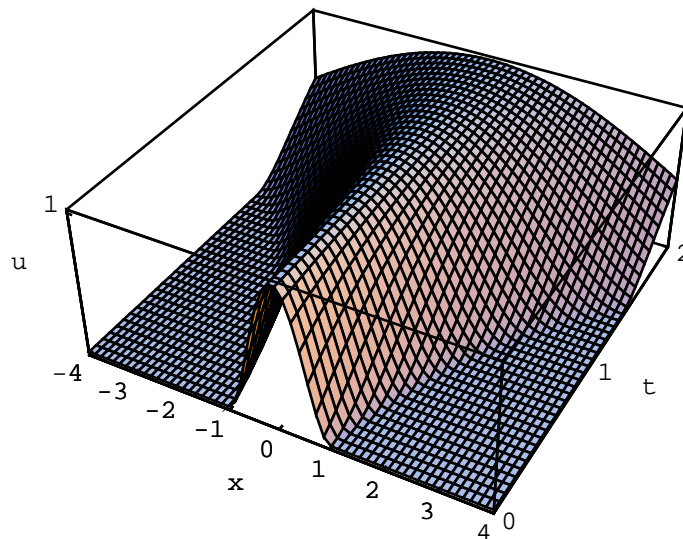


Σχ. 4.6. Το γράφημα της λύσης (4.28), όταν $b = 1$.

Ανάλογα, η ειδική λύση που αντιστοιχεί στην αρχική συνθήκη $u(x, 0) = f_2(x)$, όπου η $f_2(x)$ ορίζεται από την (4.9), δίνεται από τη συνάρτηση

$$(4.29) \quad u(x, t) = \begin{cases} [x^2 e^{-2t/b} - 1]^2, & |x e^{-t/b}| \leq 1 \\ 0, & |x e^{-t/b}| > 1 \end{cases}$$

Στο Σχ. 4.7 παρουσιάζουμε τη γραφική παράσταση της λύσης (4.29). Εκεί διακρίνονται με σαφήνεια οι χαρακτηριστικές $x = \pm e^{t/b}$ που χωρίζουν τις περιοχές μηδενισμού της λύσης από εκείνην όπου $u(x, t) > 0$.



Σχ. 4.7. Το γράφημα της λύσης (4.29), όταν $b = 1$.

■

Ασκήσεις

4.1 Για κάθε μία από τις παρακάτω ΜΔΕ,

α) Να βρεθούν οι χαρακτηριστικές καμπύλες και να κατασκευαστεί μια γραφική παράστασή τους.

β) Να βρεθεί, αν υπάρχει, η λύση του αντίστοιχου προβλήματος αρχικών τιμών και να κατασκευαστεί το γράφημά της.

(i) $u_x + u_t = 0, \quad u(x, 0) = e^{-x^2}.$

(ii) $u_x + u_t = 0, \quad u(x, 0) = \begin{cases} e^{-1/(1-x^2)}, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$

(iii) $u_x + u_t = 0, \quad u(x, kx) = e^{-x^2}, \quad k \in \mathbb{R}.$

(iv) $u_x - u_y = u, \quad u(x, 0) = \begin{cases} (x^2 - 1)^2, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$

(v) $cu_x - u_t = u, \quad c > 0, \quad u(x, 0) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x^2 e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$

(vi) $cu_x - u_t = u, \quad c > 0, \quad u(0, t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ t^2 e^{-t}, & t > 0 \end{cases}$

(vii) $xu_x + u_t = 0, \quad u(x, 0) = \begin{cases} (x-1)^2(x-2)^2, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & x \notin [1, 2] \end{cases}$

(viii) $xu_x + u_t = u, \quad u(x, 0) = \begin{cases} (x-1)^2(x-2)^2, & 1 \leq x \leq 2 \\ 0, & x \notin [1, 2] \end{cases}$

(ix) $u_x + yu_y = 0, \quad u(x, 0) = e^{-x^2}.$

(x) $u_x + yu_y = u, \quad u(0, y) = \begin{cases} (y-1)^2(y-2)^2, & 1 \leq y \leq 2 \\ 0, & y \notin [1, 2] \end{cases}$

(xi) $yu_x - xu_y = 0, \quad u(x, 0) = \cos x.$

(xii) $yu_x - xu_y = 0, \quad u(x, 0) = \sin x.$

(xiii) $yu_x - xu_y = 0, \quad u(0, y) = \begin{cases} (y-1)^2(y-2)^2, & 1 \leq y \leq 2 \\ 0, & y \notin [1, 2] \end{cases}$

(xiv) $u_x + (y^2 - 1)u_y = 0, \quad u(0, y) = \begin{cases} (y-2)^2(y-3)^2, & 2 \leq y \leq 3 \\ 0, & y \notin [2, 3] \end{cases}$

(xv) $u_x + y^2 u_y = 0, \quad u(x, 0) = \sin x.$

5. Γραμμικές πρώτης τάξης στον \mathbb{R}^n

Οι μέθοδοι κατασκευής γενικού τύπου λύσεων και ανάλυσης των αντίστοιχων προβλημάτων αρχικών τιμών μπορεί εύκολα να επεκταθούν στις γραμμικές ΜΔΕ πρώτης τάξης για μια συνάρτηση με αυθαίρετο πλήθος ανεξάρτητων μεταβλητών.

Όταν οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι τρεις, μια γραμμική ΜΔΕ πρώτης τάξης μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$(5.1) \quad a(x, y, z) u_x + b(x, y, z) u_y + c(x, y, z) u_z = f(x, y, z) u + g(x, y, z),$$

όπου $a, b, c, f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ δοσμένες συναρτήσεις.

Είναι φανερό ότι, καθώς το πλήθος των ανεξάρτητων μεταβλητών αυξάνει, ο συμβολισμός που έχουμε χρησιμοποιήσει ως τώρα γίνεται όλο και πιο δύσκολος. Γι' αυτό, σε τούτο το σημείο, θα εισαγάγουμε ορισμένες συμβάσεις που καθιστούν τη γραφή και ανάλυση των ΜΔΕ με πολλές ανεξάρτητες μεταβλητές πολύ πιο άνετη.

Συγκεκριμένα, το τυχαίο στοιχείο του \mathbb{R}^n θα το συμβολίζουμε με \mathbf{x} , δηλαδή

$$(5.2) \quad \mathbf{x} := (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad x_j \in \mathbb{R}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Η παράγωγος της τυχαίας συνάρτησης $u(\mathbf{x}) \equiv u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ως προς τη μεταβλητή x_j θα δηλώνεται με u_j ή $\partial_j u$. Με άλλα λόγια

$$(5.3) \quad u_j \equiv \partial_j u := u_{x_j} \equiv \partial_{x_j} u, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Με αυτό το συμβολισμό, η τυχαία ΜΔΕ πρώτης τάξης για μια συνάρτηση $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ γράφεται στη συμπυκνωμένη μορφή

$$(5.4) \quad \sum_{j=1}^n a_j(\mathbf{x}) \partial_j u = f(\mathbf{x}) u + g(\mathbf{x}),$$

ή

$$(5.5) \quad \sum_{j=1}^n a_j(\mathbf{x}) u_j = f(\mathbf{x}) u + g(\mathbf{x}).$$

Εννοείται ότι, οι συναρτήσεις $\{a_j(\mathbf{x})\} j = 1, 2, \dots, n$, $f(\mathbf{x})$ και $g(\mathbf{x})$ θεωρούνται γνωστές.

Ακολουθώντας την μέθοδο που εφαρμόσαμε στην περίπτωση των δύο ανεξάρτητων μεταβλητών, ας υποθέσουμε ότι οι πραγματικές συναρτήσεις $\{X_j(t)\}$, $j = 1, 2, \dots, n$, είναι διαφορίσιμες στο ανοιχτό διάστημα I της πραγματικής ευθείας. Τότε, οι σχέσεις

$$(5.6) \quad x_j = X_j(t), \quad t \in I, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

ορίζουν μια παραμετρική καμπύλη Γ του \mathbb{R}^n . Κατά μήκος της καμπύλης Γ , η συνάρτηση $u(\mathbf{x})$ ανάγεται στην

$$(5.7) \quad \psi(t) := u(\mathbf{X}(t)),$$

της οποίας η παράγωγος δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$(5.8) \quad \psi'(t) := \sum_{j=1}^n u_j(\mathbf{X}(t)) X_j'(t).$$

Με τον ίδιο τρόπο, οι συναρτήσεις $f(\mathbf{x})$ και $g(\mathbf{x})$ ανάγονται στις

$$(5.9) \quad \varphi(t) := f(\mathbf{X}(t)),$$

και

$$(5.10) \quad \gamma(t) := g(\mathbf{X}(t)),$$

αντίστοιχα.

Συνεπώς, αν οι συναρτήσεις $\{X_j(t)\}$ επιλεγούν έτσι που

$$(5.11) \quad X'_j(t) = a_j(\mathbf{X}(t)), \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

τότε, κατά μήκος της Γ , η ΜΔΕ (5.5) ανάγεται στη γραμμική ΣΔΕ πρώτης τάξης

$$(5.12) \quad \psi'(t) = \varphi(t)\psi(t) + \gamma(t).$$

Οι n ΣΔΕ (5.11) πρώτης τάξης αποτελούν ένα αυτόνομο σύστημα για τις n συναρτήσεις $\{X_j(t)\}$. Αυτού του είδους τα συστήματα είναι επιλύσιμα κάτω από αρκετά χαλαρές προϋποθέσεις. Για παράδειγμα, αν οι συναρτήσεις $\{a_j(\mathbf{x})\}$ είναι κλάσης C^1 σε κάποιο ανοιχτό υποσύνολο Ω του \mathbb{R}^n , τότε, το σύστημα (5.11) μπορεί να λυθεί και η λύση του έχει τις εξής ιδιότητες: Πρώτον, ισχύει για κάποιο ανοιχτό διάστημα τιμών I της ανεξάρτητης μεταβλητής t . Δεύτερο, περιέχει $n-1$ σταθερές ολοκλήρωσης ή παραμέτρους, ως προς τις οποίες είναι και διαφορίσιμη.

Όπως και στην περίπτωση των δύο ανεξάρτητων μεταβλητών, οι καμπύλες που ορίζονται από τις εξισώσεις (5.11) ονομάζονται *χαρακτηριστικές* της ΜΔΕ (5.5). Ο ρόλος τους στην εύρεση λύσεων της (5.5) για $n > 2$ και στην επίλυση αντίστοιχων προβλημάτων Cauchy είναι τελειώς ανάλογος με αυτόν που αναλύσαμε στην περίπτωση $n = 2$.

Αν συμβολίσουμε τις λύσεις του συστήματος (5.11) με $\{X_j(t, s_1, \dots, s_{n-1})\}$, τότε γίνεται φανερό ότι, οι παράμετροι $\{s_k\}$, $k = 1, \dots, n-1$, θα εμφανίζονται και στη ΣΔΕ (5.12). Άρα και της τελευταίας οι λύσεις θα είναι της μορφής

$$(5.13) \quad \psi = \Psi(t, s_1, \dots, s_{n-1}).$$

Έτσι, η σχέση (5.7) ανάμεσα στις λύσεις της ΜΔΕ (5.5) κι εκείνες της ΣΔΕ (5.12) παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$(5.14) \quad u(\mathbf{X}(t, s_1, \dots, s_{n-1})) = \Psi(t, s_1, \dots, s_{n-1}).$$

Ισοδύναμα,

$$(5.15) \quad u(\mathbf{x}) = \Psi(t, s_1, \dots, s_{n-1}),$$

όταν

$$(5.16) \quad x_j = X_j(t, s_1, \dots, s_{n-1}), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Η (5.16) ορίζει μια απεικόνιση από τον \mathbb{R}^n στον \mathbb{R}^n . Στα σημεία όπου η αντίστοιχη ορίζουσα Jacobi

$$(5.17) \quad J(t, \mathbf{s}) \equiv \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(t, s_1, \dots, s_{n-1})} := \det \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial t} & \dots & \frac{\partial X_n}{\partial t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial X_1}{\partial s_{n-1}} & \dots & \frac{\partial X_n}{\partial s_{n-1}} \end{pmatrix}$$

είναι μη μηδενική, η παραπάνω απεικόνιση αντιστρέφεται για να δώσει σχέσεις της ακόλουθης μορφής:

$$(5.18) \quad t = T(x_1, \dots, x_n), \quad s_j = S_j(x_1, \dots, x_n), \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Η αντικατάσταση αυτών των σχέσεων στην (5.15) δίνει τη λύση της ΜΔΕ (5.5) στη μορφή

$$(5.19) \quad u(\mathbf{x}) = \Psi(T(x_1, \dots, x_n), S_1(x_1, \dots, x_n), \dots, S_{n-1}(x_1, \dots, x_n)).$$

Σημείωση. Για λόγους συντομίας, στα επόμενα θα γράφουμε τις εξισώσεις (5.11) για τις χαρακτηριστικές καμπύλες, στη μορφή

$$(5.20) \quad x'_j = a_j, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

εκτός εάν υπάρχει φόβος σύγχυσης.

Παράδειγμα 5.1

Ας θεωρήσουμε την απλή ΜΔΕ

$$(5.21) \quad u_x + u_y + u_z = 0.$$

Σ' αυτή την περίπτωση, $\mathbf{x} := (x_1, x_2, x_3) \equiv (x, y, z)$, οπότε

$$(5.22) \quad a_1(\mathbf{x}) = a_2(\mathbf{x}) = a_3(\mathbf{x}) = 1, \quad f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) = 0.$$

Άρα, οι εξισώσεις των χαρακτηριστικών (5.20) γίνονται

$$(5.23) \quad x'_1 = x'_2 = x'_3 = 1,$$

που είναι ταυτόσημες με τις

$$(5.24) \quad x' = y' = z' = 1.$$

Συνεπώς,

$$(5.25) \quad x = t + c_1, \quad y = t + c_2, \quad z = t + c_3,$$

όπου c_1 , c_2 και c_3 τυχαίες σταθερές. Από αυτές, μόνο δύο είναι ουσιαστικές, αφού η παραμετρική καμπύλη που ορίζουν οι (5.25) παραμένει η ίδια αν, αντί για την παράμετρο t , για παράδειγμα, χρησιμοποιήσουμε την $\tau = t + c_3$. Γιατί τότε, οι παραπάνω εξισώσεις γίνονται

$$(5.26) \quad x = \tau + s_1, \quad y = \tau + s_2, \quad z = \tau,$$

όπου

$$(5.27) \quad s_1 = c_1 - c_3, \quad s_2 = c_2 - c_3.$$

Τώρα, η απεικόνιση $(\tau, s_1, s_2) \rightarrow (x, y, z)$ που ορίζουν οι (5.26) αντιστρέφεται αμέσως για να δώσει

$$(5.28) \quad \tau = z, \quad s_1 = x - z, \quad s_2 = y - z.$$

Από την άλλη, η ΣΔΕ (5.12), στην οποία ανάγεται η ΜΔΕ κατά μήκος των χαρακτηριστικών της, γίνεται $\psi'(\tau) = 0$. Άρα,

$$(5.29) \quad \psi = \Psi(s_1, s_2).$$

Αυτό σημαίνει ότι κατά μήκος των χαρακτηριστικών, η συνάρτηση $u(x, y, z)$ είναι ίση με

$$(5.30) \quad u(\mathbf{X}(\tau, s_1, s_2)) = \Psi(s_1, s_2).$$

Τέλος, με βάση τις (5.28), αυτή η σχέση είναι ισοδύναμη με την

$$(5.31) \quad u(x, y, z) = \Psi(x - z, y - z)$$

Παρατήρηση. Είναι φανερό ότι, στη ΜΔΕ (5.21), οι ανεξάρτητες μεταβλητές έχουν τελείως ισότιμη θέση. Με άλλα λόγια, κάθε αντιμετάθεση δύο στοιχείων της τριάδας (x, y, z) αφήνει την (5.21) αναλλοίωτη. Οι συνέπειες αυτής της ιδιότητας εξετάζονται στην Άσκ. 5.1. ■

Παράδειγμα 5.2

Θεωρούμε τη ΜΔΕ

$$(5.32) \quad a u_x + b u_y + u_t = 0$$

όπου a, b πραγματικές, μη μηδενικές σταθερές, οι μεταβλητές x, y είναι χωρικές και η t δηλώνει το χρόνο. Συνακόλουθα, οι σταθερές a, b έχουν τη διάσταση της ταχύτητας και η ΜΔΕ (5.32) επιδέχεται την ακόλουθη φυσική ερμηνεία: Εκφράζει το νόμο διατήρησης της μάζας ενός επίπεδου στρώματος ρευστού που έχει πυκνότητα $u(x, y, t)$ και κινείται με σταθερή ταχύτητα $\mathbf{v} = (a, b)$.

Αξίζει λοιπόν να μελετήσουμε την εξέλιξη της πυκνότητας που, τη χρονική στιγμή $t = 0$ έχει την ακόλουθη χωρική κατανομή:

$$(5.33) \quad u(x, y, 0) = f(x, y) := u_0 \frac{e^{-(x/\kappa)^2}}{1+(y/\lambda)^2}.$$

Οι ποσότητες u_0, κ και λ είναι σταθερές και η παρουσία τους επιβάλλεται από λόγους διαστατικής ορθότητας. Συγκεκριμένα, η u_0 έχει τη διάσταση της πυκνότητας και οι κ, λ εκείνη του μήκους.

Τώρα, για να λύσουμε το πρόβλημα Cauchy που απαρτίζουν η ΜΔΕ (5.32) με την αρχική συνθήκη (5.33), δε χρειάζεται να ξεκινήσουμε από μηδενική βάση. Για τον απλό λόγο ότι, η (5.32) προκύπτει από την ΜΔΕ (5.21), μέσω της αντικατάστασης

$$(5.34) \quad (x, y, z) \rightarrow (x/a, y/b, t).$$

Συνεπώς, η γενική λύση της ΜΔΕ (5.32) είναι της μορφής

$$(5.35) \quad u(x, y, t) = \Psi\left(\frac{x}{a} - t, \frac{y}{b} - t\right).$$

Μάλιστα, αφού η $\Psi(\eta, \xi)$ είναι αυθαίρετη, η προηγούμενη έκφραση μπορεί να γραφτεί και σαν

$$(5.36) \quad u(x, y, t) = F(x - at, y - bt),$$

με την $F(\eta, \xi)$ επίσης τυχαία.

Από την τελευταία μορφή της γενικής λύσης αμέσως έπεται ότι

$$(5.37) \quad u(x, y, 0) = F(x, y).$$

Άρα, για να είναι η λύση (5.36) σύμφωνη με τη συνθήκη (5.33), η F πρέπει να είναι ίδια με την δοσμένη f . Συνακόλουθα, από το σύνολο των λύσεων (5.36) πρέπει να διαλέξουμε την

$$(5.38) \quad u(x, y, t) = f(x - at, y - bt).$$

Αντικαθιστώντας και τον αναλυτικό τύπο της $f(x, y)$ από την (5.33), καταλήγουμε στην ακόλουθη μορφή της λύσης του συγκεκριμένου προβλήματος αρχικών τιμών:

$$(5.39) \quad u(x, y, t) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + (y - bt)^2} \exp\left[-\left(\frac{x - at}{\kappa}\right)^2\right].$$

■

Ασκήσεις

5.1 α) Να δειχτεί ότι, πραγματικά, κάθε συνάρτηση της μορφής

$$u(x, y, z) = Z(x - z, y - z),$$

όπου $Z(\eta, \xi)$ τυχαία συνάρτηση κλάσης $C^1(\mathbb{R}^2)$, αποτελεί λύση της ΜΔΕ $u_x + u_y + u_z = 0$.

β) Να δειχτεί ότι, το ίδιο ισχύει και για τις συναρτήσεις της μορφής

$$u(x, y, z) = X(y - x, z - x),$$

και

$$u(x, y, z) = Y(x - y, z - y),$$

με $X(\eta, \xi)$, $Z(\eta, \xi)$ τυχαίες συνάρτησεις κλάσης $C^1(\mathbb{R}^2)$.

γ) Να δειχτεί ότι και κάθε συνδυασμός των προηγούμενων λύσεων, της μορφής

$$u(x, y, z) = c_1 X(y - x, z - x) + c_2 Y(x - y, z - y) + c_3 Z(x - z, y - z),$$

αποτελεί λύση της ΜΔΕ $u_x + u_y + u_z = 0$.

5.2 Θεωρήστε την ΜΔΕ

$$a u_x + b u_y + c u_z - u_t = 0 \quad (*)$$

όπου (a, b, c) μια τριάδα πραγματικών σταθερών.

Αφού κατασκευαστούν οι χαρακτηριστικές καμπύλες της (*), να βρεθούν οι λύσεις της στο τμήμα $t > 0$ του \mathbb{R}^4 που σέβονται την αρχική συνθήκη

$$u(x, y, z, 0) = u_0 \exp\left[-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{k^2}\right], \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Τέλος, να δοθεί μια φυσική ερμηνεία της ΜΔΕ (*), των σταθερών u_0 , k και του προβλήματος Cauchy του οποίου ζητήθηκε η λύση.

5.3 α) Να κατασκευαστούν οι χαρακτηριστικές καμπύλες της ΜΔΕ

$$u_x + u_y + u_z = k u,$$

όπου k μη μηδενική πραγματική σταθερή.

β) Να λυθεί το πρόβλημα Cauchy που απαρτίζεται από την παραπάνω ΜΔΕ και τη συνθήκη

$$u(x, 0, z) = \frac{\sin(x^2+z^2)}{x^2+z^2}.$$

5.4 Κάθε ΜΔΕ πρώτης τάξης της μορφής

$$(5.32) \quad \sum_{j=1}^n a_j u_j = \lambda u$$

όπου $\{a_j\}$ και λ πραγματικές σταθερές με $\lambda \neq 0$, αναφέρεται ως **εξίσωση (του) Euler**. Ζητείται να κατασκευαστούν οι χαρακτηριστικές καμπύλες και η γενική λύση των εξισώσεων Euler.

5.5 Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y z u_x + z x u_y = 2 x y u_z, \quad x > 0, y > 0, z > 0.$$

$$u(0, y, z) = f(y, z), \quad y > 0, z > 0,$$

όπου

$$f(y, z) = \begin{cases} (a^2 - y^2 - z^2)^2, & 0 < \sqrt{y^2 + z^2} < a \\ 0, & \sqrt{y^2 + z^2} > a \end{cases}$$

Στη συνέχεια, να προσδιοριστεί η κλάση στην οποία ανήκει η λύση που κατασκευάσατε.

6. Συστήματα αυτόματων αλγεβρικών υπολογισμών στην ανάλυση ΜΔΕ

Η εκρηκτική ανάπτυξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών τις τελευταίες δεκαετίες οδήγησε και στη δημιουργία ειδικών προγραμμάτων, τα οποία επιτρέπουν στον υπολογιστή να εκτελεί με καταπληκτική ταχύτητα, όχι αριθμητικούς, αλλά συμβολικούς ή αλγεβρικούς, όπως λέμε, υπολογισμούς. Τα προγράμματα αυτού του είδους εξελίσσονται συνεχώς και, σήμερα πλέον, αποτελούν αναντικατάστατο εργαλείο της μαθηματικής ανάλυσης. Όχι μόνο για τις εφαρμογές της, αλλά και για τη μελέτη αμιγώς θεωρητικών προβλημάτων.

Αυτά τα προγράμματα ονομάζονται *συστήματα αλγεβρικών υπολογισμών (ΣΑΥ)* και, ορισμένα, έχουν τόσο ευρεία διάδοση, που αποτελούν οργανικό τμήμα όλων των διεθνώς καταξιωμένων συγγραμμάτων για το Διαφορικού Λογισμού (την Ανάλυση), τις Συνήθειες και Μερικές Διφορικές Εξισώσεις, τη Διαφορική Γεωμετρία, την Άλγεβρα κλπ. Ανάμεσα τους, βρίσκει κανείς τα *Maple*, *Mathematica*, *MuPad*, και *Reduce*. Όλα τους μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε προσωπικούς υπολογιστές -επιτραπέζιους και φορητούς.

Οι δυνατότητες των ΣΑΥ περιλαμβάνουν την ταχύτερη εκτέλεση περίπλοκων αλγεβρικών πράξεων, τον υπολογισμό παραγώγων και (αόριστων, ορισμένων) ολοκληρωμάτων σύνθετων συναρτήσεων, την επίλυση συνήθων διαφορικών εξισώσεων, καθώς και συστημάτων εξισώσεων αυτού του είδους. Ακόμη ορισμένου τύπου μερικές διαφορικές εξισώσεις μπορεί να επιλυθούν με τη βοήθεια συστημάτων συμβολικών υπολογισμών. Τέλος, ιδιαίτερη αναφορά πρέπει να γίνει στην ικανότητα των ΣΑΥ να κατασκευάζουν ταχύτατα γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων μιας και δύο μεταβλητών, καμπυλών και διανυσματικών πεδίων του Ευκλείδειου επιπέδου και του τρισδιάστατου χώρου.

Οι παραπάνω ιδιότητες καθιστούν τα ΣΑΥ ξεχωριστής σημασίας εργαλεία για τη μελέτη των ΜΔΕ. Γι' αυτό, αλλά και για τη γενικότερη χρησιμότητά τους, όλοι και όλες θα πρέπει να εξοικειωθούν με κάποιο από τα ΣΑΥ που αναφέραμε πιο πάνω, όσο γίνεται νωρίτερα στη διάρκεια των σπουδών τους. Για να μάθει κανείς τις βασικές εντολές αυτών των προγραμμάτων, δε χρειάζεται να καταβάλει ιδιαίτερη προσπάθεια, ούτε ν' αφιερώσει πολύ χρόνο.

Στο παρόν εδάφιο, παραθέτουμε τις εντολές του προγράμματος *Mathematica* που μπορεί να βοηθήσουν στην αποτελεσματικότερη αφομοίωση των μεθόδων ανάλυσης κι επίλυσης των ΜΔΕ, τις οποίες αναπτύσσουμε σε τούτο το σύγγραμμα. Ο διαθέσιμος χώρος δεν επιτρέπει μίαν αναλυτικότερη εισαγωγή στο παραπάνω ΣΑΥ. Συνεπώς, για μια πιο λεπτομερή παρουσίαση, θα πρέπει παραπέμψουμε την (τον) ενδιαφερόμενη (-ο) στο *Ανώτερα Μαθηματικά με Mathematica, Maple και άλλα συστήματα αλγεβρικών υπολογισμών* του συγγραφέα και στα άλλα συγγράμματα που παραθέτουμε στη Βιβλιογραφία.

Τα βασικά στοιχεία του *Mathematica* που σας είναι απαραίτητα στο πλαίσιο αυτού του μαθήματος, δίνονται στις γραμμές που ακολουθούν, με τη μορφή παραδειγμάτων. Οι προς εκτέλεση εντολές εμφανίζονται με έντονα γράμματα και το αντίστοιχο αποτέλεσμα ακολουθεί αμέσως μετά.

Παράδειγμα 6.1 (Γραφική παράσταση συνάρτησης)

Στο *Mathematica*, κάθε μαθηματικός υπολογισμός γίνεται σε δύο βήματα. Αρχικά, σε μια κτυπηλίδα (cell) εισαγωγής δοσμένων (input), ορίζουμε τη συνάρτηση που θέλουμε να

επεξεργαστούμε, τις τιμές των παραμέτρων που εμφανίζονται στο πρόβλημά μας και την πράξη που θέλουμε να εκτελέσει ο υπολογιστής.

Στη συνέχεια, πατάμε τα πλήκτρα εκτέλεσης των εντολών (γ.π. Shift+Enter), οπότε ο υπολογιστής παράγει το επιθυμητό αποτέλεσμα και το παρουσιάζει σε μια κυψελίδα εξαγομένων (output).

Σ' αυτό το παράδειγμα, δείχνουμε τον τρόπο με τον οποίο κατασκευάζεται το γράφημα της συνάρτησης $f(x) := x^2$, $-2 \leq x \leq 3$, δηλαδή η καμπύλη

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x), -2 \leq x \leq 3\}$$

του επίπεδου $x y$.

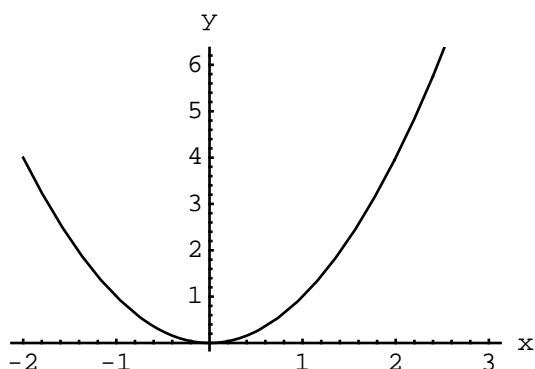
Η βασική εντολή για την κατασκευή γραφικών παραστάσεων είναι η Plot (=σχεδίασε).

In[23]:=

```
f[x_] := x2
```

```
Plot[f[x], {x, -2, 3}, AxesLabel -> {"x", "y"}];
```

```
Clear[f]
```



Παρατήρηση

1. Στο *Mathematica*, η συνάρτηση $f(x)$ παριστάνεται πάντοτε με $f[x]$, δηλαδή, με την ανεξάρτητη μεταβλητή μέσα σε αγκύλη και όχι σε παρένθεση. Όταν ορίζεται, το όρισμά της, x , πρέπει να συνοδεύεται από την κάτω δεξιά παύλα: $f[x_]$.

2. Η εντολή `Clear[x]` οδηγεί στο "σβήσιμο" της σημασίας ή της τιμής που έχει δοθεί στο γράμμα x , στο πλαίσιο κάποιου υπολογισμού. Θα πρέπει να χρησιμοποιείται ως το τελευταίο στοιχείο κάθε αλυσίδας εντολών, έτσι ώστε το ίδιο γράμμα ή σύμπλεγμα γραμμάτων και αριθμών να μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε έναν επόμενο κύκλο υπολογισμών, χωρίς να "μπερδεύεται" το πρόγραμμα.

Παράδειγμα 6.2 (Γραφική παράσταση τμηματικά οριζόμενης συνάρτησης)

Σ' αυτό το παράδειγμα, δείχνουμε τον τρόπο με τον οποίο κατασκευάζεται το γράφημα μιας συνάρτησης με διαφορετικό τύπο σε διαφορετικά τμήματα του πεδίου ορισμού της, όπως είναι η

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < 2 \\ \frac{1}{(x-2)^2+1} & x > 2 \end{cases}$$

Αυτό επιτυγχάνεται με τη βοήθεια της εντολής

`Piecewise[{{f1[x], I1}, {f2[x], I2}, ..., {fn[x], In}}]`,

στην οποία περιέχονται n ζευγάρια της μορφής $\{f_j[x], I_j\}$, όσα και τα διαστήματα στα οποία έχουμε χωρίσει το πεδίο ορισμού της $f(x)$.

`In[26]:=`

`Clear[f]`

`f[x_] =`

`Piecewise[{{x + 1, x < 0}, {1, 0 ≤ x < 2}, {1 / (1 + (x - 2)^2), x > 2}}]`

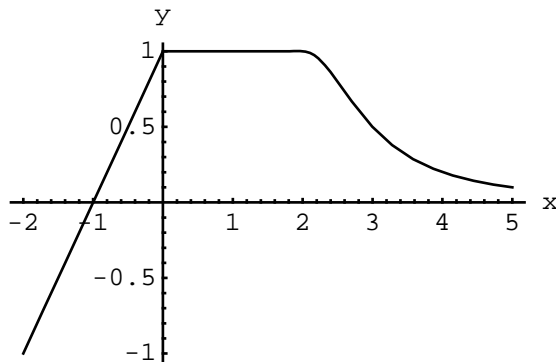
`Out[27]=`

$$\begin{cases} x+1 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < 2 \\ \frac{1}{(x-2)^2+1} & x > 2 \end{cases}$$

`In[28]:=`

`Plot[f[x], {x, -2, 5}, AxesLabel → {"x", "y"}];`

`Clear[f]`



Παράδειγμα 6.3 (Ταυτόχρονη γραφική παράσταση πολλών συναρτήσεων)

Η επόμενη κυψελίδα περιέχει τα στοιχεία που οδηγούν στην κατασκευή των γραφημάτων των τριών συναρτήσεων

$$f(t) := t, \quad g(t) := \frac{4}{1+t^2}, \quad h(t) := 6 \frac{\sin t}{t}, \quad -2\pi \leq t \leq 2\pi,$$

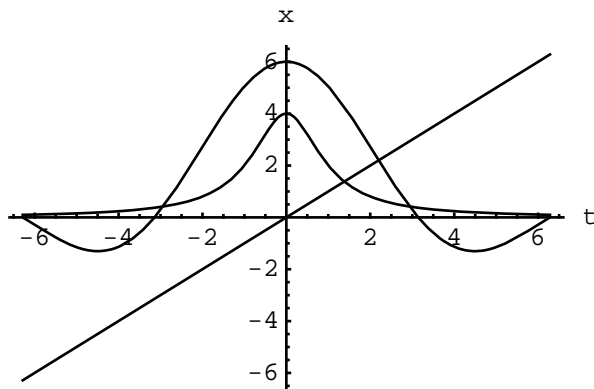
στο ίδιο σχήμα.

Παρατήρηση. Σημειώστε ότι, στο *Mathematica*, όλες οι καθιερωμένες συναρτήσεις, όπως οι $\sin t$ (ημίτονο), $\cos t$ (συνημίτονο) κλπ, εκφράζονται με το πρώτο τους γράμμα κεφαλαίο: `Sin[t]`, `Cos[t]`, κλπ.

```

In[30]:=
f[t_] := t
g[t_] :=  $\frac{4}{1+t^2}$ 
h[t_] :=  $6 \frac{\text{Sin}[t]}{t}$ 
a = -2 Pi;
b = 2 Pi;
Plot[{f[t], g[t], h[t]}, {t, a, b}, AxesLabel -> {"t", "x"}];
Clear[f, g, h, a, b]

```



Παράδειγμα 6.4 (Υπολογισμός παραγώγων μιας συνάρτησης)

Στην κυψελίδα που ακολουθεί παρουσιάζουμε δύο εναλλακτικούς τρόπους εισαγωγής της εντολής υπολογισμού της παραγώγου (πρώτης τάξης) της συνάρτησης

$$f(x) := a x^3 e^{-2x} + \frac{b}{1+x^2} + c x \sin x.$$

Ο πρώτος, στηρίζεται στη χρήση ενός τόνου πάνω από το σύμβολο της συνάρτησης:

```
In[37]:=
```

```
f[x_] := a * x3 * Exp[-2 * x] +  $\frac{b}{1+x^2}$  + c * x Sin[x]
```

```
f' [x]
```

```
Out[38]=
```

$$-2 a e^{-2x} x^3 + 3 a e^{-2x} x^2 + c \cos(x) x - \frac{2 b x}{(x^2 + 1)^2} + c \sin(x)$$

Ο δεύτερος, στηρίζεται στη χρήση του τελεστή παραγώγισης ή διαφορίσης, D :

```
In[39]:=
```

```
D[f[x], x]
```

```
Out[39]=
```

$$-2 a e^{-2x} x^3 + 3 a e^{-2x} x^2 + c \cos(x) x - \frac{2 b x}{(x^2 + 1)^2} + c \sin(x)$$

Ο υπολογισμός της παραγώγου δεύτερης τάξης της ίδιας συνάρτησης γίνεται με τον τρόπο που δείχνουμε στην επόμενη κυψελίδα. Ανάλογες είναι και οι εντολές που οδηγούν στις παραγώγους μεγαλύτερης τάξης.

In[40]:=

f''[t]

D[f[t], t, t]

Out[40]=

$$4 a e^{-2 t} t^3 - 12 a e^{-2 t} t^2 + \frac{8 b t^2}{(t^2 + 1)^3} + 6 a e^{-2 t} t - c \sin(t) t + 2 c \cos(t) - \frac{2 b}{(t^2 + 1)^2}$$

Out[41]=

$$4 a e^{-2 t} t^3 - 12 a e^{-2 t} t^2 + \frac{8 b t^2}{(t^2 + 1)^3} + 6 a e^{-2 t} t - c \sin(t) t + 2 c \cos(t) - \frac{2 b}{(t^2 + 1)^2}$$

Παράδειγμα 6.5 (Υπολογισμός ολοκληρωμάτων μιας συνάρτησης)

Με τις εντολές της κυψελίδας που ακολουθεί, παράγεται ένα αόριστο ολοκλήρωμα, $\int f(x) dx$, της συνάρτησης

$$f(t) := x^3 + x^2 \cos x + x \ln x.$$

In[42]:=

f[x_] = x³ + x² * Cos[x] + x * Log[x]

Integrate[f[x], x]

Out[42]=

$$x^3 + \cos(x) x^2 + \log(x) x$$

Out[43]=

$$\frac{x^4}{4} + \frac{1}{2} \log(x) x^2 - \frac{x^2}{4} + 2 \cos(x) x + (x^2 - 2) \sin(x)$$

Αντίθετα, η τροποποίηση της εντολής `Integrate[]` που δείχνουμε στην επόμενη κυψελίδα οδηγεί στο ορισμένο ολοκλήρωμα της ίδιας συνάρτησης στο διάστημα $-\pi \leq t \leq 2\pi$, δηλαδή στον αριθμό

$$\int_{-\pi}^{2\pi} (t^3 + t \cos t) dt.$$

In[44]:=

Integrate[f[x], {x, -Pi, 2 * Pi}]

Clear[f]

Out[44]=

$$\frac{1}{4} \pi (8 + 15 \pi^3 + \pi (-3 - 2 i \pi + \log(256) + 6 \log(\pi)))$$

Παρατήρηση: Στο σύστημα *Mathematica*, ο αστερίσκος (*) που δηλώνει την πράξη του πολλαπλασιασμού μπορεί να παραλείπεται. Αντ' αυτού, μπορούμε να αφήσουμε ένα κενό διάστημα ανάμεσα στους παράγοντες:

In[46]:=

3 * 4 * 5

3 × 4 × 5

Out[46]=

60

Out[47]=

60

In[48]:=

a * t³ + b * t * Cos[t]

a t³ + b t Cos[t]

Out[48]=

a t³ + b cos(t) t

Out[49]=

a t³ + b cos(t) t

Παράδειγμα 6.6 (Επίλυση αλγεβρικής εξίσωσης)

Το σύστημα *Mathematica* προχωράει στη λύση μιας αλγεβρικής εξίσωσης με την εντολή `Solve` (=λύσε). Προσέξτε το διπλό ίσον (`==`) στη διατύπωση της εξίσωσης

$$x^2 - 2x + 3 = 0$$

που θέλουμε να λύσουμε. Είναι απαραίτητο για να καταλάβει πρόγραμμα ότι πρόκειται για εξίσωση και όχι για την "τιμή" ή το νέο όνομα της σύνθετης μαθηματικής έκφρασης $x^2 - 2x + 3$.

In[50]:=

`Solve[x2 - 2 x + 3 == 0, x]`

Out[50]=

$\left\{ \left\{ x \rightarrow 1 - i \sqrt{2} \right\}, \left\{ x \rightarrow 1 + i \sqrt{2} \right\} \right\}$

Παράδειγμα 6.7 (Επίλυση συνήθους διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης)

Σ' αυτό το παράδειγμα, δείχνουμε τον τρόπο με τον οποίο λύνει το *Mathematica* μια συνήθη διαφορική εξίσωση (ΣΔΕ) πρώτης τάξης της μορφής $y' + f(x)y = g(x)$.

Στη συγκεκριμένη περίπτωση,

$$f(x) := 2x. \quad g(x) = 6x$$

Η βασική εντολή για την επίλυση ΔΕ είναι η `DSolve`.

In[51]:=

`g[x_] := 6 x`

`DSolve[y' [x] + 2 x y[x] == g[x], y[x], x]`

`Clear[f]`

Out[52]=

$\left\{ \left\{ y(x) \rightarrow e^{-x^2} c_1 + 3 \right\} \right\}$

Παράδειγμα 6.8 (Επίλυση προβλήματος αρχικών τιμών)

Για το *Mathematica*, τόσο η διαφορική εξίσωση όσο και η αρχική συνθήκη που απαρτίζουν ένα πρόβλημα αρχικών τιμών (ΠΑΤ) είναι εξισώσεις. Συνεπώς, τα δύο αυτά στοιχεία,

$$x' + f(t)x = g(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

πρέπει να εισαχθούν ως ένα σύστημα δύο εξισώσεων. Αυτό επιτυγχάνεται, γράφοντάς τα μέσα σε αγκύλες:

In[54]:=

```
DSolve[{x'[t] + x[t] == Sin[t], x[0] == 3}, x[t], t]
```

Out[54]=

$$\left\{ \left\{ x(t) \rightarrow -\frac{1}{2} e^{-t} (e^t \cos(t) - e^t \sin(t) - 7) \right\} \right\}$$

In[55]:=

```
Clear[x]
```

$$\mathbf{x}[\mathbf{t_}] = -\frac{1}{2} e^{-t} (e^t \mathbf{Cos}[t] - e^t \mathbf{Sin}[t] - 7)$$

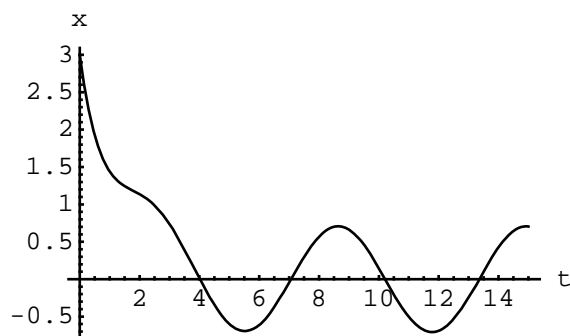
```
Plot[x[t], {t, 0, 15}, AxesLabel → {"t", "x"};
```

```
Clear[f, g, h, a, b]
```

```
Clear[x]
```

Out[56]=

$$-\frac{1}{2} e^{-t} (e^t \cos(t) - e^t \sin(t) - 7)$$

**Παράδειγμα 6.9** (Επίλυση συνήθους διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης)

Σ' αυτό το παράδειγμα, το *Mathematica* καλείται να λύσει μια ΣΔΕ της μορφής

$$x'' - x = a t + b \cosh t.$$

```
In[60]:=
Clear[x]
f[t_] := a t + b Cosh[t]
DSolve[x''[t] - x[t] == f[t], x[t], t]
Clear[f]
Out[62]=
{{x(t) -> 1/8 e^{-t} (-e^{2t} b + 2 e^{2t} t b - 2 t b - b - 8 a e^t t) + e^t c_1 + e^{-t} c_2}}
```

Παράδειγμα 6.10 (Επίλυση ΠΑΤ για ΣΔΕ δεύτερης τάξης)

Οι εντολές που ακολουθούν οδηγούν στη λύση του ΠΑΤ

$$t^2 x'' + t x' + 3x = \ln t, \quad x(1) = a, \quad x'(1) = b.$$

```
In[64]:=
DSolve[{t^2 x''[t] + t x'[t] + x[t] == Log[t], x[1] == a, x'[1] == b},
x[t], t]
Out[64]=
{{x(t) -> log(t) cos^2(log(t)) + a cos(log(t)) + log(t) sin^2(log(t)) + b sin(log(t)) - sin(log(t))}}
```

Παράδειγμα 6.11 (Επίλυση συστήματος ΔΕ πρώτης τάξης)

Με τις εντολές της επόμενης κυψελίδας, λύνεται το σύστημα των ΣΔΕ πρώτης τάξης

$$x' = -y, \quad y' = x.$$

```
In[65]:=
DSolve[{x'[t] == -y[t], y'[t] == x[t]}, {x[t], y[t]}, t]
Out[65]=
{{x(t) -> c_1 cos(t) - c_2 sin(t), y(t) -> c_2 cos(t) + c_1 sin(t)}}
```

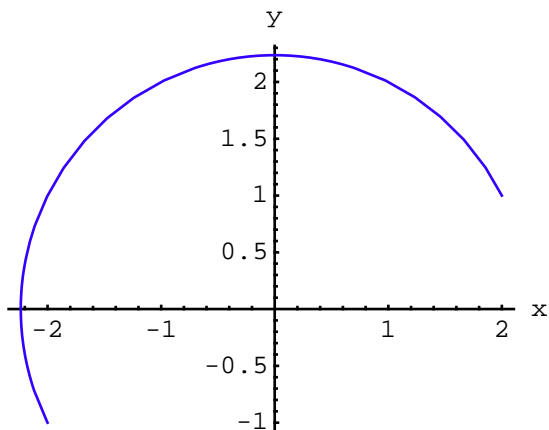
Παράδειγμα 6.12 (Γραφική παράσταση παραμετρικών καμπυλών)

Με τη βοήθεια της εντολής ParametricPlot[], μπορούμε να κατασκευάσουμε παραμετρικές καμπύλες του Ευκλείδειου επίπεδου, σαν αυτές που παριστάνουν ειδικές λύσεις του προηγούμενου συστήματος. Στις επόμενες κυψελίδες, δείχνουμε τον τρόπο με τον οποίο μπορεί κανείς να χρωματίσει και να δείξει σε κοινό σχήμα τέτοιου είδους καμπύλες.

```
In[66]:=
Clear[C1, C2]
{C1, C2} = {2, 1};
{x1[t_], y1[t_]} = {C1 Cos[t] - C2 Sin[t], C2 Cos[t] + C1 Sin[t]}
Out[68]=
{2 cos(t) - sin(t), cos(t) + 2 sin(t)}
```

In[69]:=

```
pp1 = ParametricPlot[{x1[t], y1[t]}, {t, 0, π},
  AspectRatio → Automatic, PlotStyle → Hue[.7],
  AxesLabel -> {"x", "y"}];
```



In[70]:=

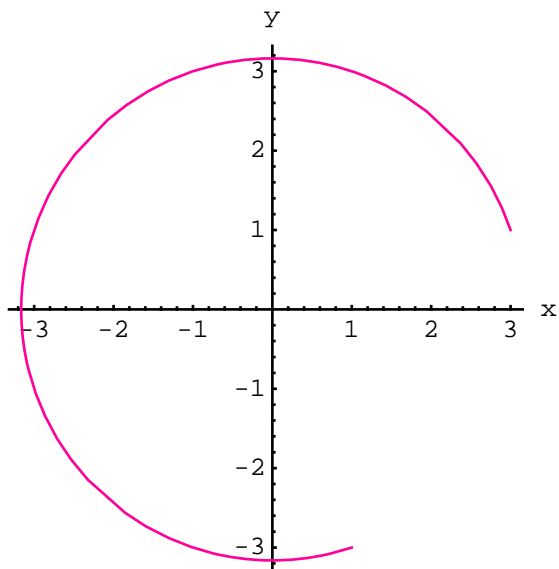
```
Clear[C1, C2]
{C1, C2} = {3, 1};
{x2[t_], y2[t_]} = {C1 Cos[t] - C2 Sin[t], C2 Cos[t] + C1 Sin[t]}
```

Out[72]=

```
{3 cos(t) - sin(t), cos(t) + 3 sin(t)}
```

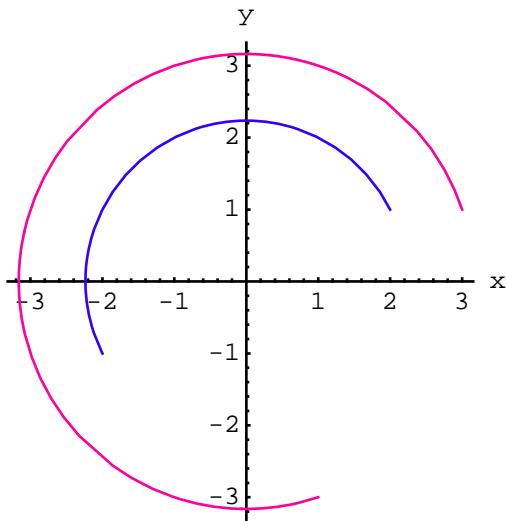
In[73]:=

```
pp2 = ParametricPlot[{x2[t], y2[t]}, {t, 0, 3 π / 2},
  AspectRatio → Automatic, PlotStyle → Hue[.9],
  AxesLabel -> {"x", "y"}];
```



In[74]:=

Show[pp1, pp2];



Παράδειγμα 6.13 (Γραφική παράσταση μιας οικογένειας παραμετρικών καμπυλών)

Οι εντολές που ακολουθούν οδηγούν στο Σχ. 4.4, στο οποίο φαίνονται οι χαρακτηριστικές της ΜΔΕ $c u_x + u_t = 0$ και η ευθεία των αρχικών τιμών $t = (a/c)x$, όταν $(c, a) = (2, 1)$.

In[75]:=

Clear[r, s, t, χαρακτηριστικες, characteristics]

r[t_, s_] = {t, 2 t + s}

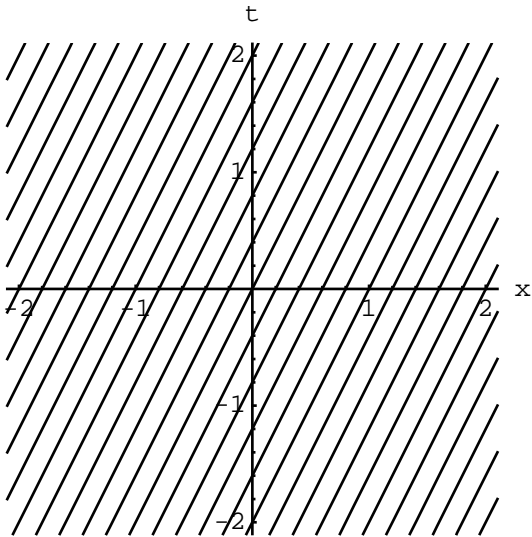
χαρακτηριστικες = Table[r[t, s], {s, -6, 6, 0.4}];

Out[76]=

{t, s + 2 t}

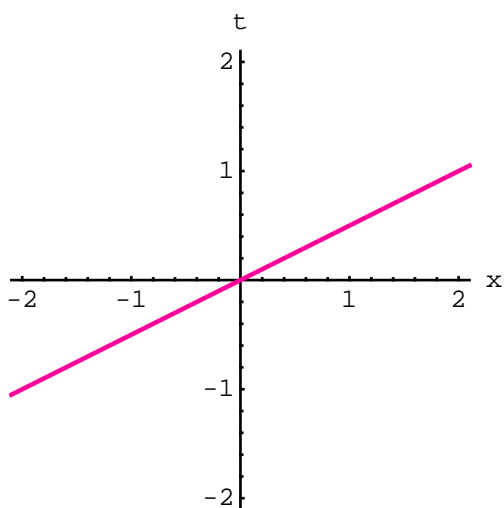
In[78]:=

```
characteristics = ParametricPlot[Evaluate[χαρακτηριστικες],
  {t, -2.1, 2.1}, AxesLabel → {"x", "t"},
  PlotRange → {{-2.1, 2.1}, {-2.1, 2.1}},
  AspectRatio → Automatic];
```

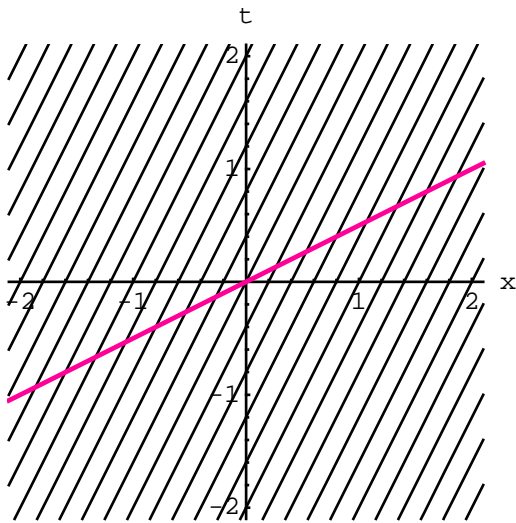


In[95]:=

```
a = 1;
αρχικη = ParametricPlot[{λ, λ/2}, {λ, -2.1, 2.1},
  AxesLabel → {"x", "t"}, PlotStyle → {Hue[.9], Thickness[.01]},
  PlotRange → {{-2.1, 2.1}, {-2.1, 2.1}},
  AspectRatio → Automatic];
```



In[81]:= Show[characteristics, αρχικη];



Παράδειγμα 6.14 (Υπολογισμός των μερικών παραγώγων μιας συνάρτησης πολλών μεταβλητών)

Στις επόμενες γραμμές δείχνουμε τον τρόπο με τον οποίο ζητάμε από το *Mathematica* να υπολογίσει τις μερικές παραγώγους συναρτήσεων πολλών μεταβλητών. Τα δύο παραδείγματα αφορούν τις συναρτήσεις

$$u(x, y) := a x y + b \sin(x - y)$$

και

$$u(x, y, z) := a x y z + b \sinh(x - y) + c \cosh(y - z),$$

αντίστοιχα.

In[82]:=

u[x_, y_] := a x y + b Sin[x - y]

In[83]:=

{D[u[x, y], x], D[u[x, y], y]}

{D[u[x, y], x, x], D[u[x, y], x, y], D[u[x, y], y, y]}

Out[83]=

{y + b cos(x - y), x - b cos(x - y)}

Out[84]=

{-b sin(x - y), b sin(x - y) + 1, -b sin(x - y)}

In[85]:=

u[x_, y_, z_] := a x y z + b Sinh[x - y] + c Cosh[y - z]

In[86]:=

```
{D[u[x, y, z], x], D[u[x, y, z], y], D[u[x, y, z], z]}
{D[u[x, y, z], x, x], D[u[x, y, z], y, y], D[u[x, y, z], z, z]}
{D[u[x, y, z], x, y], D[u[x, y, z], y, z], D[u[x, y, z], z, x]}
```

Out[86]=

```
{y z + b cosh(x - y), x z - b cosh(x - y) + c sinh(y - z), x y - c sinh(y - z)}
```

Out[87]=

```
{b sinh(x - y), c cosh(y - z) + b sinh(x - y), c cosh(y - z)}
```

Out[88]=

```
{z - b sinh(x - y), x - c cosh(y - z), y}
```

Παράδειγμα 6.15 (Γραφική παράσταση συνάρτησης δύο μεταβλητών)

Οι εντολές που ακολουθούν δείχνουν τον τρόπο με τον οποίο κατασκευάζεται το γράφημα μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών. Το συγκεκριμένο παράδειγμα αφορά τη συνάρτηση

$$u(x, y) = \frac{\sin \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

In[89]:=

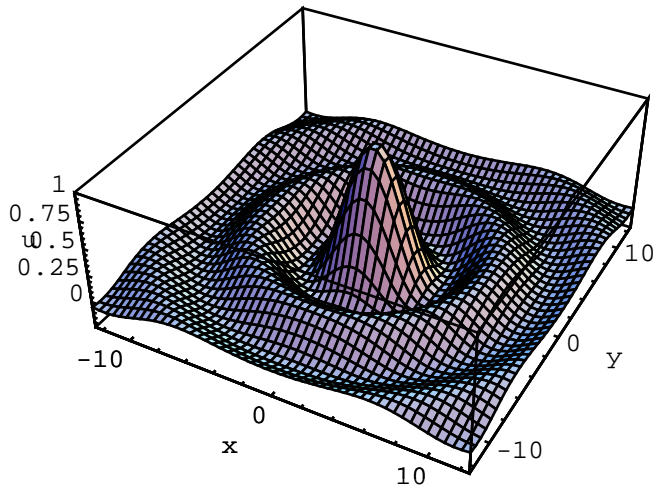
```
Clear[u]
```

```
u[x_, y_] = Sin[Sqrt[x^2 + y^2]]
           Sqrt[x^2 + y^2]
```

Out[90]=

$$\frac{\sin\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$


```
In[91]:=
Plot3D[u[x, y], {x, -4 π, 4 π}, {y, -4 π, 4 π},
  AxesLabel → {"x", "y", "u"}, PlotRange → All,
  PlotPoints → {50, 40}];
```



Παράδειγμα 6.16 (Γραφική παράσταση τμηματικά οριζόμενης συνάρτησης δύο μεταβλητών)

Με τις εντολές που ακολουθούν κατασκευάζεται το Σχ. 4.7, το οποίο παριστάνει το γράφημα της συνάρτησης

$$u(x, t) = \begin{cases} [x^2 e^{-2t} - 1]^2, & |x e^{-t}| \leq 1 \\ 0, & |x e^{-t}| > 1 \end{cases}$$

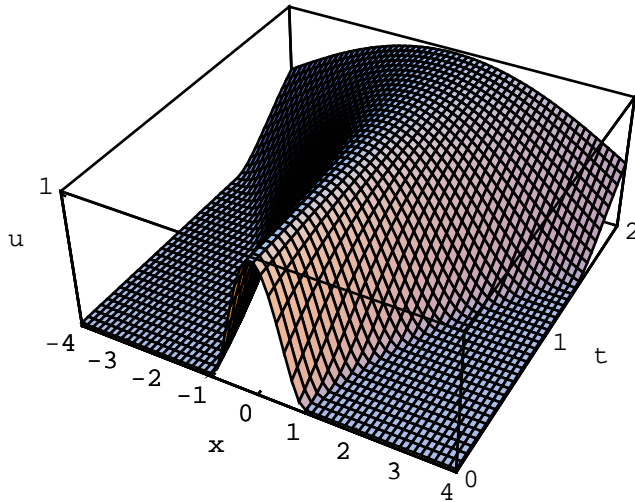
```
In[92]:=
```

```
Clear[u]
```

```
u[x_, t_] =
```

```
Piecewise[{{(x^2 e^{-2 t} - 1)^2, -1 ≤ x e^{-t} ≤ 1},
  {0, x - t < -1 or x - t > 1}}];
```

```
In[94]:=
Plot3D[u[x, t], {x, -4, 4}, {t, 0, 2}, AxesLabel -> {"x", "t", "u"},
  Ticks -> {{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4}, {0, 1, 2}, {1}},
  PlotPoints -> {60, 40}];
```



■ Μη Γραμμικές ΜΔΕ Πρώτης Τάξης

Εισαγωγή

Όπως τονίσαμε και στο πρώτο κεφάλαιο, οι μη γραμμικές ΜΔΕ είναι εξαιρετικής σημασίας, τόσο από καθαρά μαθηματική άποψη, όσο και από τη σκοπιά των εφαρμογών. Ωστόσο, μια συστηματική μελέτη τους απαιτεί αρκετό χώρο και γεωμετρική διαίσθηση. Γι' αυτό, τούτο το κεφάλαιο δεν είναι άλλο από μια σύντομη επισκόπηση των ιδιοτήτων και των μεθόδων επίλυσης των μη γραμμικών ΜΔΕ πρώτης τάξης, που στοχεύει στα εξής: Πρώτο, να αναδείξει τις βασικές διαφορές των μη γραμμικών ΜΔΕ από τις αντίστοιχες γραμμικές. Δεύτερο, να καταγράψει κάποια αποτελέσματα από τον χώρο των μη γραμμικών ΜΔΕ πρώτης τάξης που χρειάζονται στην ανάλυση των γραμμικών εξισώσεων δεύτερης και ανώτερης τάξης. Τρίτο, να παρουσιάσει με πιο συστηματικό και μαθηματικά αυστηρό τρόπο τα αποτελέσματα που θεμελιώνουν τις μεθόδους επίλυσης των γραμμικών ΜΔΕ πρώτης τάξης, τις οποίες χρησιμοποιήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Ένα από τα αποτελέσματα του είδους που μόλις αναφέραμε είναι οι λύσεις της ΜΔΕ

$$u_x^2 + u_y^2 = 1.$$

Παρά την απλότητά της, αυτή η εξίσωση ανήκει στις πιο δύστροπες μη γραμμικές εξισώσεις. Θα μπορούσαμε να την χαρακτηρίσουμε ως *τελείως μη γραμμική*. Ο λόγος είναι ότι, σε αντίθεση με την παραπάνω, υπάρχουν και μη γραμμικές ΜΔΕ που έχουν αρκετά κοινά στοιχεία με τις γραμμικές, ιδιαίτερα από την άποψη των μεθόδων επίλυσής τους. Γι' αυτό, οι εξισώσεις της δεύτερης κατηγορίας αναφέρονται ως *σχεδόν γραμμικές*.

Τα βασικά αποτελέσματα για τις "καλές" μη γραμμικές ΜΔΕ παρουσιάζονται στα αμέσως επόμενα εδάφια. Πάντως, σε "πρώτη ανάγνωση", μπορεί κανείς να περιοριστεί στο αμέσως επόμενο εδάφιο και να θεωρήσει τα υπόλοιπα ως "τόπους αναφοράς", για σχετικές πληροφορίες. Αυτό το τονίζουμε με τον αστερίσκο στην αρχή της επικεφαλίδας τους.

1. Ημιγραμμικές ΜΔΕ στον \mathbb{R}^2

Μια μη γραμμική ΜΔΕ πρώτης τάξης για μια συνάρτηση $u(x, y)$ λέγεται *ημιγραμμική* όταν μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$(1.1) \quad a(x, y) u_x + b(x, y) u_y = c(x, y, u).$$

Αυτό σημαίνει ότι, η συνάρτηση $c(x, y, u)$ δεν επιτρέπεται να είναι γραμμική ως προς τη μεταβλητή u . Γιατί τότε, η εξίσωση γίνεται

$$(1.2) \quad a(x, y) u_x + b(x, y) u_y = f(x, y) u + g(x, y),$$

που είναι γραμμική.

Το αριστερό μέλος της (1.1) εξακολουθεί να επιδέχεται την ερμηνεία της παραγώγου

της u κατά μήκος των καμπυλών του επίπεδου x, y που είναι ολοκληρωτικές καμπύλες του διανυσματικού πεδίου

$$(1.3) \quad \mathbf{v}(x, y) = (a(x, y), b(x, y)).$$

Ας σημειώσουμε ότι το κύριο μέρος της (1.1) είναι και το εσωτερικό γινόμενο των διανυσματικών πεδίων $\mathbf{v}(x, y)$ και $\nabla u(x, y)$:

$$(1.4) \quad a(x, y) u_x(x, y) + b(x, y) u_y(x, y) \equiv \mathbf{v}(x, y) \cdot \nabla u(x, y).$$

Τότε η (1.1) γράφεται σαν

$$(1.5) \quad \mathbf{v}(x, y) \cdot \nabla u(x, y) = c(x, y, u(x, y)).$$

Αν υποθέσουμε ότι μια από αυτές τις καμπύλες, η Γ , περιγράφεται από το ζευγάρι

$$(1.6) \quad \mathbf{r}(t) := (X(t), Y(t))$$

και θέσουμε

$$(1.7) \quad \varphi(t) := u(\mathbf{r}(t)) \equiv u(X(t), Y(t)).$$

Τότε, η παράγωγος της $u(x, y)$ κατά μήκος της Γ είναι η παράγωγος της $\varphi(t)$.

$$(1.8) \quad \varphi'(t) = u_x(\mathbf{r}(t)) X'(t) + u_y(\mathbf{r}(t)) Y'(t), \quad \forall (\text{για κάθε}) t \in I.$$

Ισοδύναμα,

$$(1.9) \quad \varphi'(t) = \mathbf{r}'(t) \cdot \nabla u(\mathbf{r}(t)), \quad \forall (\text{για κάθε}) t \in I.$$

Όταν η Γ είναι *ολοκληρωτική καμπύλη* του διανυσματικού πεδίου $V(x, y)$ τότε

$$(1.10) \quad \mathbf{r}'(t) = V(X(t), Y(t)) \equiv V(\mathbf{r}(t))$$

που για συντομία θα το γράφουμε σαν

$$(1.11) \quad x' = a(x, y), \quad y' = b(x, y).$$

Άρα, η μόνη διαφορά των ημιγραμμικών από τις γραμμικές είναι ότι, η ΣΔΕ για τη συνάρτηση $\varphi(t)$ είναι μη γραμμική. Ωστόσο, αυτό το γεγονός έχει θεαματικές επιπτώσεις στη συμπεριφορά των λύσεων. Ακόμη και όταν οι χαρακτηριστικές είναι ελεύθερες από σταθερά σημεία (το πεδίο $V(x, y)$ είναι ομαλό) οι λύσεις παρουσιάζουν ανωμαλίες. Συνακόλουθα οι λύσεις του προβλήματος αρχικών τιμών έχει περιορισμένη ισχύ.

Από την άποψη της μεθόδου επίλυσης, η διαδικασία είναι ταυτόσημη μ' εκείνη που ακολουθήσαμε στις γραμμικές:

(i) Λύνουμε πρώτα τις εξισώσεις των χαρακτηριστικών. Οι λύσεις τους είναι και πάλι της μορφής

$$(1.12) \quad x = X(t, s), \quad y = Y(t, s).$$

Άρα και η $\varphi'(t) = H(t, \varphi(t))$ θα περιέχει την παράμετρο s που διακρίνει την μία χαρακτηριστική από την άλλη. Η λύση αυτής της μη γραμμικής ΣΔΕ θα είναι της μορφής

$$(1.13) \quad \varphi = \Phi(t, s).$$

Αναλυτικά, αυτό σημαίνει ότι

$$(1.14) \quad u(X(t, s), Y(t, s)) = \Phi(t, s).$$

(ii) Υποθέτουμε ότι για κάποιο διάστημα τιμών J της παραμέτρου s η ορίζουσα Jacobi $J(t, s)$ του μετασχηματισμού $(t, s) \rightarrow (x, y)$ δε μηδενίζεται:

$$(1.15) \quad J(t, s) := \frac{\partial(x,y)}{\partial(t,s)} \equiv \det \begin{pmatrix} X_t(t, s) & Y_t(t, s) \\ X_s(t, s) & Y_s(t, s) \end{pmatrix} \neq 0, \quad t \in I, s \in J.$$

Αυτή η υπόθεση εξασφαλίζει το αντιστρέψιμο του μετασχηματισμού $(t, s) \rightarrow (x, y)$ που ορίζεται από τα δύο πρώτα μέλη των σχέσεων (1.12). Συνεπώς, μπορούμε να λύσουμε αυτές τις δύο εξισώσεις ως προς τις παραμέτρους t και s και να καταλήξουμε σε σχέσεις της μορφής

$$(1.16) \quad t = T(x, y), \quad s = S(x, y).$$

Όταν οι τελευταίες αντικατασταθούν στην (1.14) θα δώσουν μια γενικού τύπου λύση της ΜΔΕ (1.1) στη μορφή

$$(1.17) \quad u(x, y) = \Phi(T(x, y), S(x, y))$$

Παράδειγμα 1.1

Να βρεθούν οι χαρακτηριστικές καμπύλες και μια γενικού τύπου λύση της ΜΔΕ

$$(1.18) \quad u_x + u_y = u^2.$$

Λύση. Το σύστημα (1.11) για τις χαρακτηριστικές αυτής της εξίσωσης είναι πολύ απλό:

$$(1.19) \quad x' = 1, \quad y' = 1.$$

Γι' αυτό λύνεται εύκολα για να δώσει

$$(1.20) \quad x = t + c_1, \quad y = t + c_2,$$

όπου c_1 και c_2 αυθαίρετες σταθερές.

Για να απλουστεύσουμε τις λύσεις που βρήκαμε, θέτουμε

$$(1.21) \quad c_1 = 0, \quad c_2 = s.$$

Έτσι, οι σχέσεις που περιγράφουν τις χαρακτηριστικές της ΜΔΕ (1.18) γράφονται στη μορφή

$$(1.22) \quad x = t, \quad y = t + s$$

Αυτές τις σχέσεις συνεπάγονται ότι $y = x + s$. Άρα, η προβολές όλων των χαρακτηριστικών στο επίπεδο $x y$ είναι ευθείες που σχηματίζουν γωνία 45° ως προς τον άξονα x . Η παράμετρος s ορίζει το σημείο όπου αυτές οι ευθείες τέμνουν τον άξονα y .

Κατά μήκος των χαρακτηριστικών που μόλις βρήκαμε, η ΜΔΕ (1.18) ανάγεται στη μη γραμμική ΣΔΕ $\varphi' = \varphi^2$. Μία λύση της τελευταίας είναι προφανώς η μηδενική συνάρτηση: $\varphi(t) = 0, \forall t$. Από την άλλη, στα ανοιχτά διαστήματα της παραμέτρου t όπου $\varphi(t) \neq 0$, η παραπάνω εξίσωση είναι ισοδύναμη προς την $\varphi^{-2} \varphi' = 1$. Αυτή ολοκληρώνεται εύκολα για να δώσει

$$(1.23) \quad \varphi(s, t) = \frac{1}{F(s)-t},$$

όπου F μια τυχαία συνάρτηση κλάσης C^1 .

Λύνοντας τις (1.22) ως προς τις παραμέτρους t και s , βρίσκουμε ότι

$$(1.24) \quad t = x, \quad s = y - x.$$

Η αντικατάσταση αυτών των σχέσεων στην (1.23) οδηγεί στη συνάρτηση

$$(1.25) \quad u(x, y) := \varphi(y - x, x) = \frac{1}{F(y-x)-x},$$

που αποτελεί μια γενικού τύπου λύση της ΜΔΕ (1.18).

Είναι φανερό ότι οι λύσεις που μόλις βρήκαμε είναι γενικά ανώμαλες. Αυτό οφείλεται στην παρουσία της έκφρασης $F(y-x) - x$ στον παρονομαστή, η οποία μηδενίζεται κατά μήκος ορισμένων καμπυλών του επίπεδου x, y .

Για να δούμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα αυτής της ανώμαλης συμπεριφοράς, ας εξετάσουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών που απαρτίζεται από τη ΜΔΕ (1.18) και τη συνθήκη

$$(1.26) \quad u(0, y) = \frac{1}{1+y^2}.$$

Σύμφωνα με την (1.25), $u(0, y) = 1/F(y)$. Άρα, $F(y) = 1 + y^2$ και η (1.25) γίνεται

$$(1.27) \quad u(x, y) = \frac{1}{1-x+(y-x)^2}.$$

Ο παρονομαστής $1 - x + (y - x)^2$ μηδενίζεται κατά μήκος των καμπυλών $x = (1 + 2y \pm \sqrt{4y - 3})/2$, $y \geq 3/4$. Συνεπώς, η λύση (1.27) "εκρήγνυται", καθώς η μεταβλητή x πλησιάζει την κρίσιμη τιμή $x_c = (1 + 2y - \sqrt{4y - 3})/2$ από τα κάτω.

■

Ασκήσεις

1.1 Να λυθούν τα παρακάτω προβλήματα αρχικών τιμών. Σε κάθε περίπτωση, να προσδιοριστεί επακριβώς η περιοχή στην οποία ισχύει η λύση που βρήκατε.

(i) $c u_x - u_t = u^3$, $u(x, 0) = e^{-x^2}$ ($u = u(x, t)$, $c \in \mathbb{R}$).

(ii) $u_x - u_y = u(1 + u)$, $u(x, 0) = \sin x$.

(iii) $u_x + 2x u_y = u^2$, $u(0, y) = \frac{1}{1+y^2}$.

(iv) $2y u_x + u_y - u^2 = 0$, $u(x, 0) = \frac{1}{1+x^2}$.

2. Σχεδόν γραμμικές ΜΔΕ στον \mathbb{R}^2

Μια μη γραμμική ΜΔΕ πρώτης τάξης για μια συνάρτηση $u(x, y)$ λέγεται *σχεδόν γραμμική* όταν μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$(2.1) \quad a(x, y, u) u_x + b(x, y, u) u_y = c(x, y, u).$$

Αυτό σημαίνει ότι, οι *συντελεστές* $a(x, y, u)$, $b(x, y, u)$ δεν επιτρέπεται να είναι και οι δύο ανεξάρτητοι από την u . και η $c(x, y, u)$. Στην αντίθετη περίπτωση, η (2.1) γίνεται

$$(2.2) \quad a(x, y) u_x + b(x, y) u_y = c(x, y, u),$$

που είναι ημιγραμμική.

Ωστόσο, από την άποψη της μορφής, οι εξισώσεις (2.1) καλύπτουν και όσες γράφονται όπως στην (2.2). Ειδικότερα, εκείνες από τις (2.2) με $c(x, y, u) = f(x, y)u + g(x, y)$. Συνεπώς, τα γενικά αποτελέσματα της μαθηματικής ανάλυσης των σχεδόν γραμμικών ΜΔΕ ισχύουν a fortiori (υποχρεωτικά, αν προτιμάτε) τόσο για τις ημιγραμμικές, όσο και για τις γραμμικές.

Όπως θα διαπιστώσουμε ευθύς αμέσως, η ανάλυση των σχεδόν γραμμικών ΜΔΕ πρώτης τάξης στηρίζεται κυρίως στην έννοια των χαρακτηριστικών καμπυλών, που χρησιμοποιήσαμε και στην επίλυση των γραμμικών. Το μόνο που χρειάζεται για να καλύψουμε και την μη γραμμική περίπτωση είναι να διευρύνουμε αυτή την έννοια, ή να την ... σηκώσουμε λίγο ψηλότερα. Σε πρώτη φάση, αυτό σημαίνει, να την υψώσουμε από το επίπεδο των ανεξάρτητων μεταβλητών (x, y) στον τρισδιάστατο χώρο (x, y, u) .

Για να γίνει σαφέστερος ο στόχος που μόλις αναφέραμε, ας υποθέσουμε ότι οι x, y και z αντιστοιχούν σε Καρτεσιανές συντεταγμένες του \mathbb{R}^3 . Ας υποθέσουμε επιπλέον ότι, οι συναρτήσεις $a, b, c: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ανήκουν στην κλάση $C^1(U)$, όπου U κάποιος *τόπος* (\equiv ανοιχτό και συνεκτικό υποσύνολο) του \mathbb{R}^3 . Τότε, λέμε ότι και το *διανυσματικό πεδίο*

$$(2.3) \quad V(x, y, z) = (a(x, y, z), b(x, y, z), c(x, y, z))$$

ανήκει στην κλάση $C^1(U)$. Μια παραμετρική καμπύλη

$$(2.4) \quad \mathbf{r}(t) := (X(t), Y(t), Z(t))$$

του \mathbb{R}^3 ονομάζεται *ολοκληρωτική καμπύλη* του διανυσματικού πεδίου $V(x, y, z)$ αν αποτελεί λύση του αυτόνομου συστήματος ΣΔΕ

$$(2.5) \quad \mathbf{r}'(t) = V(X(t), Y(t), Z(t)),$$

που για συντομία θα το γράφουμε σαν

$$(2.6) \quad x' = a(x, y, z), \quad y' = b(x, y, z), \quad z' = c(x, y, z).$$

Ας θεωρήσουμε, τέλος, μια τέταρτη συνάρτηση που ανήκει στην κλάση $C^1(U)$, την $F(x, y, z)$. Τότε, αυτόματα, έχουμε στη διάθεσή μας κι ένα δεύτερο διανυσματικό πεδίο στην περιοχή U , το

$$(2.7) \quad \nabla F(x, y, z) := (F_x(x, y, z), F_y(x, y, z), F_z(x, y, z)).$$

Αν περιοριστούμε σε μιαν ομαλή ισοσταθμική επιφάνεια της συνάρτησης $F(x, y, z)$,

δηλαδή σ' ένα υποσύνολο του \mathbb{R}^3 της μορφής

$$(2.8) \quad S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = \lambda\},$$

με την ιδιότητα

$$(2.9) \quad \nabla F(x, y, z) \neq \mathbf{0}, \text{ όταν } (x, y, z) \in S,$$

τότε το διανυσματικό πεδίο $\nabla F(x, y, z)$ αποκτά την ακόλουθη γεωμετρική ερμηνεία: Το $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ παριστάνει ένα βέλος που έχει τη βάση του στο σημείο (x_0, y_0, z_0) της S και είναι κάθετο προς αυτήν. Δηλαδή, είναι ορθογώνιο προς το εφαπτόμενο διάνυσμα κάθε ομαλής καμπύλης της S που διέρχεται από το (x_0, y_0, z_0) . Αυτό το συμπέρασμα συνάγεται αμέσως από το ακόλουθο

Θεώρημα 2.1

Αν μια παραμετρική καμπύλη $\mathbf{r}(t)$, με πεδίο ορισμού το ανοιχτό διάστημα I της πραγματικής ευθείας, περιέχεται στην επιφάνεια S , τότε

$$(2.10) \quad \mathbf{r}' \cdot \nabla F = 0, \quad \forall (\text{για κάθε}) t \in I.$$

Απόδειξη

Αν η καμπύλη $\mathbf{r}(t) = (X(t), Y(t), Z(t))$ περιέχεται στην επιφάνεια S , τότε η συνάρτηση

$$(2.11) \quad \varphi(t) := F(\mathbf{r}(t))$$

παραμένει σταθερή κατά μήκος της καμπύλης: $\varphi(t) = \lambda$. Συνεπώς, $\varphi'(t) = 0$, $\forall t \in I$. Όμως,

$$(2.12) \quad \varphi'(t) = F_x(\mathbf{r}(t)) X'(t) + F_y(\mathbf{r}(t)) Y'(t) + F_z(\mathbf{r}(t)) Z'(t) \equiv \nabla F(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t).$$

Άρα,

$$(2.13) \quad \mathbf{r}'(t) \cdot \nabla F(\mathbf{r}(t)) = 0, \quad \forall t \in I.$$

■

Ας υποθέσουμε τώρα ότι, η συνάρτηση $F(x, y, z)$ ορίζεται από τον τύπο

$$(2.14) \quad F(x, y, z) := z - u(x, y),$$

όπου $u(x, y)$ μια συνάρτηση κλάσης $C^1(\Omega)$, όπου Ω ένας τόπος του \mathbb{R}^2 . Τότε η $F(x, y, z)$ είναι κλάσης $C^1(U)$ στον κυλινδρικό τόπο $U := \Omega \times \mathbb{R}$ του \mathbb{R}^3 και

$$(2.15) \quad \nabla F(x, y, z) = (u_x(x, y), u_y(x, y), -1), \quad (x, y, z) \in U.$$

Αν ο τόπος U είναι η περιοχή όπου ορίζεται και το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{V}(x, y, z)$ της (2.3), τότε, από τις (2.3) και (2.15) αμέσως έπεται ότι,

$$(2.16) \quad \mathbf{V} \cdot \nabla F = a(x, y, z) u_x(x, y) + b(x, y, z) u_y(x, y) - c(x, y, z), \quad \forall (x, y, z) \in U.$$

Συνακόλουθα, τα διανύσματα $\nabla F(x, y, z)$ και $\mathbf{V}(x, y, z)$ είναι ορθογώνια, δηλαδή $\mathbf{V} \cdot \nabla F = 0$, εάν και μόνο όταν

$$(2.17) \quad a(x, y, z) u_x(x, y) + b(x, y, z) u_y(x, y) = c(x, y, z).$$

Ας περιοριστούμε, τώρα, στα σημεία της περιοχής U , στα οποία η $F(x, y, z)$ που

ορίσαμε στην (2.14) μηδενίζεται. Αυτά τα σημεία συναποτελούν την επιφάνεια

$$(2.18) \quad S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = u(x, y)\},$$

η οποία περιέχεται στην περιοχή U και που, για λόγους εποπτείας, μπορούμε να την θεωρούμε σαν μια τέντα πάνω από το τμήμα Ω του επίπεδου xy . Στο τυχαίο σημείο (x, y, z) της S , το αντίστοιχο διάνυσμα $\nabla F(x, y, z)$ είναι πλέον κάθετο σ' αυτή την επιφάνεια. Άρα, το διάνυσμα $V(x, y, z)$ θα εφάπτεται της επιφάνειας, εάν και μόνο όταν είναι ορθογώνιο προς το $\nabla F(x, y, z)$. Αν, δηλαδή, στο (x, y, z) της S , ισχύει η (2.17). Αλλ' όταν το $(x, y, z) \in S$, τότε

$z = u(x, y)$. Άρα, η (2.17) γίνεται

$$(2.19) \quad a(x, y, u(x, y))u_x(x, y) + b(x, y, u(x, y))u_y(x, y) = c(x, y, u(x, y)).$$

Όμως, η (2.19) δεν είναι άλλη από την ΜΔΕ (2.1). Συνεπώς, η ανάλυση που προηγήθηκε μας οδηγεί στην ακόλουθη γεωμετρική εικόνα για κάθε ΜΔΕ που γράφεται στη μορφή (2.1):

- Το διανυσματικό πεδίο $V(x, y, z)$ που ορίζουν οι συναρτήσεις a , b και c της ΜΔΕ (2.1) εφάπτεται στις επιφάνειες του \mathbb{R}^3 που ορίζονται από τη σχέση $z = u(x, y)$.

Μια ισοδύναμη διατύπωση αυτού του πορίσματος είναι η εξής:

- Οι ολοκληρωτικές καμπύλες του διανυσματικού πεδίου $V(x, y, z)$ που ορίζουν οι συναρτήσεις a , b και c της ΜΔΕ (2.1) περιέχονται στις επιφάνειες του \mathbb{R}^3 που ορίζονται από τη σχέση $z = u(x, y)$.

Οι ολοκληρωτικές καμπύλες του πεδίου $V = (a, b, c)$ ονομάζονται **χαρακτηριστικές** της ΜΔΕ (2.1). Σημειώστε ότι, οι χαρακτηριστικές που μόλις ορίσαμε συγγενεύουν, αλλά δεν ταυτίζονται μ' εκείνες που ορίσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Οι δεύτερες ζουν στο επίπεδο των ανεξάρτητων μεταβλητών, ενώ αυτές που τώρα ονομάζουμε χαρακτηριστικές ζουν στον ευρύτερο τρισδιάστατο χώρο. Συχνά, για να γίνεται διάκριση μεταξύ τους, εκείνες που αναφέρονται στο χώρο των ανεξάρτητων μεταβλητών καλούνται **οριζόντιες χαρακτηριστικές** ή **χαρακτηριστικές βάσης**. Η σχέση των οριζόντιων χαρακτηριστικών με αυτές που ορίσαμε πιο πάνω θα αποσαφηνιστεί στα παραδείγματα που δίνουμε παρακάτω.

Στο μεταξύ, θα ολοκληρώσουμε την προηγούμενη ανάλυση, διατυπώνοντας ένα θεώρημα που είναι άμεση απόρροια της γεωμετρικής εικόνας για τις ΜΔΕ (2.1) που μόλις αποκτήσαμε. Για το σκοπό αυτό, θα πρέπει αρχικά να υπενθυμίσουμε ότι, η λύση του αυτόνομου συστήματος (2.6) που ορίζει τις ολοκληρωτικές καμπύλες του πεδίου $V = (a, b, c)$, εκτός από την t , περιέχει και δύο παραμέτρους, από τις οποίες εξαρτιέται ομαλά. Αν τις ονομάσουμε ρ και σ , αντίστοιχα, τότε οι λύσεις του συστήματος (2.6) θα πάρουν την ακόλουθη μορφή:

$$(2.20) \quad x = A(t, \rho, \sigma), \quad y = B(t, \rho, \sigma), \quad z = C(t, \rho, \sigma).$$

Από αυτή την διπαραμετρική οικογένεια καμπυλών του \mathbb{R}^3 μπορούμε να επιλέξουμε ένα υποσύνολο, θέτοντας, για παράδειγμα

$$(2.21) \quad \rho = f_1(s), \quad \sigma = f_2(s), \quad s \in J,$$

όπου (f_1, f_2) κάποιο ζευγάρι ομαλών συναρτήσεων, με πεδίο ορισμού το ανοιχτό διάστημα J .

Με αυτό τον τρόπο οι σχέσεις (2.20) ανάγονται στις

$$(2.22) \quad x = X(t, s), \quad y = Y(t, s), \quad z = Z(t, s).$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η παράμετρος ρ είναι ομαλή συνάρτηση της σ , ή αντίστροφα. Σε κάθε περίπτωση, οι σχέσεις που προκύπτουν είναι τις ίδιες μορφής με τις (2.20) και έχουν την ακόλουθη γεωμετρική σημασία: Παριστάνουν επιφάνειες του \mathbb{R}^3 που αποτελούνται από ολοκληρωτικές καμπύλες του πεδίου $V = (a, b, c)$.

Βέβαια, τα υποσύνολα του \mathbb{R}^3 που ορίζονται από σχέσεις της μορφής (2.20) ονομάζονται, ακριβέστερα, **παραμετρικές επιφάνειες**. Και τίποτα δεν εμποδίζει μια παραμετρική επιφάνεια από το να είναι τελείως κατακόρυφη, δηλαδή, να είναι κατασκευασμένη από ευθείες παράλληλες προς το άξονα z . Θεωρήστε, για παράδειγμα, την κυλινδρική επιφάνεια που ορίζεται από τις σχέσεις $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = s$. Αυτού του είδους οι παραμετρικές επιφάνειες είναι αδύνατο να περιγραφούν μέσω μιας σχέσης της μορφής $z = u(x, y)$.

Για ν' αποφύγουμε, λοιπόν, αυτό το ενδεχόμενο, θα υποθέσουμε ότι, οι σχέσεις της μορφής (2.21) ή οι ανάλογές τους, από τις οποίες καταλήξαμε στις (2.22), είναι τέτοιες που

$$(2.23) \quad J(t, s) := \frac{\partial(x,y)}{\partial(t,s)} \equiv \det \begin{pmatrix} X_t(t, s) & Y_t(t, s) \\ X_s(t, s) & Y_s(t, s) \end{pmatrix} \neq 0, \quad t \in I, s \in J.$$

Ο μη μηδενισμός της ορίζουσας Jacobi $J(t, s)$ εξασφαλίζει το αντιστρέψιμο του μετασχηματισμού $(t, s) \rightarrow (x, y)$ που ορίζεται από τα δύο πρώτα μέλη των σχέσεων (2.22). Με άλλα λόγια, μπορούμε να λύσουμε αυτές τις δύο εξισώσεις ως προς τις παραμέτρους t και s και να καταλήξουμε σε σχέσεις της μορφής

$$(2.24) \quad t = T(x, y), \quad s = S(x, y).$$

Όταν οι τελευταίες αντικατασταθούν στην τρίτη από τις (2.22) θα δώσουν

$$(2.25) \quad z = u(x, y) := Z(T(x, y), S(x, y)).$$

Αυτή η σχέση δείχνει καθαρά πως, όταν ισχύει η (2.23), τότε η παραμετρική επιφάνεια (2.22) περιγράφεται και από το γράφημα μιας σηνάρτησης $u(x, y)$.

Τώρα, πλέον, είμαστε σε θέση να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε εύκολα το θεώρημα που υποσχεθήκαμε:

Θεώρημα 2.2

Μια επιφάνεια $S \subset \mathbb{R}^3$ που αποτελείται από χαρακτηριστικές καμπύλες της ΜΔΕ (2.1) είναι και ολοκληρωτική επιφάνεια αυτής της εξίσωσης. Μάλιστα, κάθε ολοκληρωτική επιφάνεια σχηματίζεται από χαρακτηριστικές καμπύλες.

Απόδειξη. Θεωρούμε πρώτα μιαν επιφάνεια S που ορίζεται από μια σχέση της μορφής $F(x, y, z) := z - u(x, y) = 0$ και αποτελείται από χαρακτηριστικές καμπύλες της ΜΔΕ (2.1). Αν με $r(t)$ συμβολίσουμε μία από τις χαρακτηριστικές, τότε, σε κάθε σημείο της $r(t)$ ισχύει η $r' \cdot \nabla F = 0$. Όμως, σύμφωνα με την υπόθεση, η S αποτελείται από τέτοιου είδους καμπύλες. Άρα η σχέση $r' \cdot \nabla F = 0$ ισχύει σε κάθε σημείο x της S . Ισοδύναμα, $V \cdot \nabla F = 0$ σε κάθε $x \in S$, όπου $V = (a, b, c)$. Αλλά, όπως δείξαμε παραπάνω, η $V \cdot \nabla F = 0$ είναι συντομογραφία της ΜΔΕ (2.1). Συνεπώς, η συνάρτηση $u(x, y)$ αποτελεί λύση της (2.1) και η επιφάνεια S , που

ορίζεται από τη σχέση $z = u(x, y)$, είναι εξ ορισμού μια ολοκληρωτική επιφάνεια της παραπάνω εξίσωσης.

Για να αποδείξουμε το δεύτερο σκέλος του θεωρήματος αρκεί να δείξουμε ότι, από κάθε σημείο δοσμένης ολοκληρωτικής επιφάνειας S διέρχεται μία και μόνη χαρακτηριστική καμπύλη, η οποία και παραμένει στην S . Αυτό όμως είναι άμεση απόρροια του θεωρήματος που ακολουθεί.

■

Θεώρημα 2.3

Αν η χαρακτηριστική καμπύλη Γ περνάει από το τυχαίο σημείο p μιας ολοκληρωτικής επιφάνειας S , τότε η Γ περιέχεται εξ ολοκλήρου στην S .

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι η Γ δίνεται από τη λύση $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ του συστήματος (2.6) και ότι $p = (x_0, y_0, z_0) \equiv r(t_0)$. Τότε, $z_0 = u(x_0, y_0)$, αφού η S , ως ολοκληρωτική επιφάνεια, ορίζεται από τη σχέση $z = u(x, y)$.

Θεωρούμε, στη συνέχεια, τη συνάρτηση

$$(2.26) \quad f(t) := z(t) - u(x(t), y(t)).$$

Τότε, από τη μια μεριά,

$$(2.27) \quad f(t_0) = z(t_0) - u(x(t_0), y(t_0)) = z_0 - u(x_0, y_0) = 0.$$

Από την άλλη,

$$(2.28) \quad f'(t) = z'(t) - u_x x'(t) - u_y y'(t) = c - a u_x - b u_y,$$

γιατί έχουμε υποθέσει ότι η Γ είναι χαρακτηριστική. Θα πρέπει, βέβαια, να σημειωθεί ότι, όλοι οι όροι στο τελευταίο μέλος της (2.10) είναι γραμμικοί συνοπτικά. Συγκεκριμένα, ως επακόλουθο και της (2.26),

$$(2.29) \quad a = a(x(t), y(t), z(t)) = a(x(t), y(t), f(t) + u(x(t), y(t))),$$

κι ανάλογα για τις συναρτήσεις b, c, u_x και u_y .

Τώρα, όλες οι συναρτήσεις που περιέχονται στην (2.29) και στις ανάλογες εκφράσεις για τους υπόλοιπους όρους της (2.28) είναι γνωστές, εκτός από την $f(t)$. Κατά συνέπεια, η (2.28) μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$(2.30) \quad f'(t) = F(t, f(t)),$$

όπου $F(t, s)$ κάποια συνάρτηση κλάσης C^1 . Αλλά, η (2.30) αποτελεί μια ΣΔΕ πρώτης τάξης για τη συνάρτηση $f(t)$. Ένα βασικό αποτέλεσμα σχετικά με τις εξισώσεις αυτού του είδους είναι ότι, το αντίστοιχο πρόβλημα αρχικών τιμών είναι επιλύσιμο και η λύση του είναι μοναδική. Ειδικότερα, υπάρχει λύση της (2.30) που πληροί τη συνθήκη $f(t_0) = 0$, που είναι και η μόνη λύση με αυτή την ιδιότητα.

Αν ως $f(t)$ επιλέξουμε την μηδενική συνάρτηση, τότε, $f'(t) = 0$ και $F(t, 0) = 0$. Γιατί, όταν $f(t) = 0$, η (2.29) γίνεται

$$(2.31) \quad a = a(x(t), y(t), z(t)) = a(x(t), y(t), u(x(t), y(t)))$$

κι ανάλογα για τις συναρτήσεις b και c . Συνακόλουθα, το τελευταίο μέλος της (2.28) ανάγεται πλέον στο άθροισμα $c(x, y, u(x, y)) - a(x, y, u(x, y))u_x - b(x, y, u(x, y))u_y$, με $x = x(t)$ και $y = y(t)$. Όμως, έχουμε υποθέσει πως η S είναι ολοκληρωτική επιφάνεια, δηλαδή, ότι η $u(x, y)$ είναι λύση της ΜΔΕ $au_x + bu_y = c$. Πραγματικά, λοιπόν, όταν $f(t) = 0$, το τελευταίο μέλος της (2.28), που είναι αυτό που για συντομία ονομάσαμε $F(t, f(t))$, μηδενίζεται.

Συνοψίζοντας, έχουμε ως τώρα αποδείξει ότι η ΣΔΕ (2.30) επιδέχεται ως λύση την $f(t) = 0$, η οποία πληροί και την αρχική συνθήκη $f(t_0) = 0$. Άρα η λύση $f(t) = 0$ είναι και η μοναδική με αυτή την ιδιότητα. Όμως, από τον ορισμό (2.26) της $f(t)$ έπεται η ισοδυναμία

$$(2.32) \quad f(t) = 0 \Leftrightarrow z(t) = u(x(t), y(t)).$$

Προφανώς, η ισότητα $z(t) = u(x(t), y(t))$ σημαίνει ότι η καμπύλη Γ ανήκει εξ ολοκλήρου στην ολοκληρωτική επιφάνεια S . ■

Άμεση απόρροια του Θεωρ. (2.2) είναι το ακόλουθο πόρισμα, του οποίου η απόδειξη αφήνεται σαν άσκηση του αναγνώστη.

Πόρισμα 2.1

Αν οι ολοκληρωτικές επιφάνειες S_1 και S_2 έχουν ένα σημείο p κοινό, τότε τέμνονται κατά μήκος της χαρακτηριστικής που περνάει από το p . Αντίστροφα, αν οι S_1 και S_2 τέμνονται κατά μήκος μιας καμπύλης Γ , χωρίς να εφάπτεται η μία στην άλλη κατά μήκος της Γ , τότε η Γ είναι χαρακτηριστική. ■

Στο επόμενο παράδειγμα παρουσιάζουμε την αναλυτική μελέτη μιας συγκεκριμένης μη γραμμικής ΜΔΕ πρώτης τάξης που ανήκει στην οικογένεια των σχεδόν γραμμικών. Θεωρείται ως το πρότυπο εξίσωσης αυτού του είδους, γιατί, παρά την απλότητά της, αναδειχνει με σαφήνεια αρκετές από τις "δυσάρεστες" συνέπειες της μη γραμμικότητας.

Παράδειγμα 2.1

Να βρεθούν οι χαρακτηριστικές καμπύλες και μια γενικού τύπου λύση της ΜΔΕ

$$(2.33) \quad uu_x + u_y = 0.$$

Λύση. Σύμφωνα με τον αντίστοιχο ορισμό, οι χαρακτηριστικές καμπύλες της (2.33) ορίζονται από το σύστημα

$$(2.34) \quad x' = z, \quad y' = 1, \quad z' = 0.$$

Η τρίτη από αυτές τις ΣΔΕ συνεπάγεται ότι η συνάρτηση $z(t)$ είναι σταθερή, οπότε

$$(2.35) \quad x = c_3 t + c_1, \quad y = t + c_2, \quad z = c_3.$$

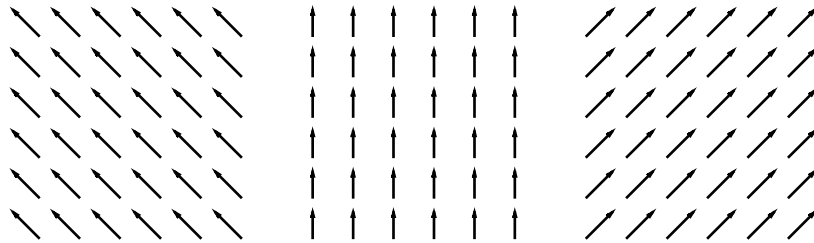
Χωρίς να περιορίσουμε τη γενικότητα της λύσης που βρήκαμε, μπορούμε να θέσουμε $c_2 = 0$. Αλλάζοντας και το όνομα των παραμέτρων c_1 και c_3 , καταλήγουμε στις σχέσεις

$$(2.36) \quad x = r t + s, \quad y = t, \quad z = r.$$

Οι σχέσεις (2.36) περιγράφουν μια διπαραμετρική οικογένεια ευθειών. Αυτό φαίνεται καθαρότερα, απαλείφοντας την παράμετρο t από τις δύο πρώτες. Το αποτέλεσμα είναι η σχέση $x = r y + s$. Από αυτήν και την $x = r y + s$ συνάγεται ότι, αμέσως μόλις επιλέξουμε την τιμή της παραμέτρου r , καθορίζεται ένα επίπεδο του \mathbb{R}^3 , παράλληλο προς το επίπεδο $x y$, στο οποίο ανήκουν οι ευθείες $x = r y + s$. Συνάμα, προσδιορίζεται η κλίση αυτών των ευθειών ως προς τον άξονα y .

Από αυτή την παρατήρηση γίνεται φανερό ότι, οι χαρακτηριστικές των σχεδόν γραμμικών εξισώσεων δεν δίνουν την ίδια εικόνα σε κάθε επίπεδο που είναι παράλληλο προς το επίπεδο $x y$. Συνεπώς, δεν μπορούμε να τις προβάλλουμε στο επίπεδο $x y$ και να πάρουμε μια οικογένεια καμπυλών αυτού του επιπέδου. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο, η έννοια των χαρακτηριστικών βάσης δεν έχει καμμία αξία πέρα από το χώρο των γραμμικών και ημι-γραμμικών ΜΔΕ.

Αλληλένδετη με την προηγούμενη παρατήρηση είναι και η εξής: Το διανυσματικό πεδίο $V(x, y, z) = (z, 1, 0)$, του οποίου οι ευθείες (2.36) αποτελούν ολοκληρωτικές καμπύλες, είναι διαφορετικό σε κάθε επίπεδο $z = \text{σταθ}$. Αυτό φαίνεται καθαρά στο Σχ. 2.1.



Σχ. 2.1. Η μορφή του πεδίου $V(x, y, z) = (z, 1, 0)$ στα επίπεδα $z = -1$, $z = 0$ και $z = 1$.

Ας επιλέξουμε, τώρα, μια μονοπαραμετρική κλάση από την οικογένεια (2.36), θέτοντας

$$(2.37) \quad r = F(s),$$

Με αυτό τον τρόπο, οι (2.36) γίνονται

$$(2.38) \quad x = t F(s) + s, \quad y = t, \quad z = F(s).$$

Συνεπώς,

$$(2.39) \quad J(t, s) := \frac{\partial(x, y)}{\partial(t, s)} = \det \begin{pmatrix} F(s) & 1 \\ t F'(s) + 1 & 0 \end{pmatrix} = -t F'(s) - 1.$$

Στα σημεία του επιπέδου $t s$ στα οποία η ορίζουσα Jacobi $J(t, s)$ δε μηδενίζεται, οι δύο πρώτες των (2.38) μπορεί, κατ' αρχήν, να λυθούν ως προς τις μεταβλητές t, s και το αποτέλεσμα, που θα είναι της μορφής

$$(2.40) \quad t = T(x, y), \quad s = S(x, y),$$

να αντικατασταθεί στην τρίτη των εξισώσεων (2.38).

Με το "κατ' αρχήν" της προηγούμενης παραγράφου θέλουμε να τονίσουμε πως, τις περισσότερες φορές, το να κατασκευαστεί ρητά η λύση είναι πρακτικά αδύνατο. Πάντως, αν η $F(s)$ είναι αντιστρέψιμη, τότε μπορούμε να γράψουμε $s = F^{-1}(z)$ και, συνδυάζοντας τις δύο πρώτες των (2.38), να καταλήξουμε στην

$$(2.41) \quad z = F(x - yz).$$

Μπορούμε να πούμε ότι αυτή η σχέση εκφράζει έμμεσα το z ως συνάρτηση των x, y . Αλλά, αυτό γίνεται με τόσο μπλεγμένο τρόπο, που σπάνια θα καταφέρουμε να δώσουμε στην (2.41) τη μορφή $z = u(x, y)$.

Για να δούμε ένα παράδειγμα από αυτές τις σπάνιες περιπτώσεις, ας υποθέσουμε ότι $F(s) = s$. Τότε, η (2.41) γίνεται $z = x - yz$, που λύνεται για να δώσει

$$(2.42) \quad z = \frac{x}{1+y}.$$

Με την προϋπόθεση, βέβαια, ότι $y \neq -1$, πράγμα που συνάδει με τη γενικότερη συνθήκη $J(t, s) \neq 0$.

■

Θα κλείσουμε το παρόν εδάφιο με την ακόλουθη

Παρατήρηση. Συχνά, οι εξισώσεις για τις χαρακτηριστικές καμπύλες της ΜΔΕ (2.1) γράφονται στη μορφή

$$(2.43) \quad \frac{dx}{a(x, y, z)} = \frac{dy}{b(x, y, z)} = \frac{dz}{c(x, y, z)}.$$

Αυτή η συντομογραφία θέλει, εκτός των άλλων, να τονίσει ότι, σε αρκετές περιπτώσεις, είναι βολικότερο να περιγράφονται οι χαρακτηριστικές θεωρώντας ως παράμετρο μία από τις μεταβλητές x, y και z . Για παράδειγμα, αν ως παράμετρος επιλεγεί η x , τότε οι (2.43) συμβολίζουν το σύστημα

$$(2.44) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{b(x, y, z)}{a(x, y, z)}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{c(x, y, z)}{a(x, y, z)}.$$

Ας υποθέσουμε ότι, με κάποιο τρόπο, έχουμε λύσει τις παραπάνω εξισώσεις και ότι οι αντίστοιχες λύσεις έχουν τη μορφή

$$(2.45) \quad f_1(x, y, z) = c_1, \quad f_2(x, y, z) = c_2.$$

Κάθε μία από τις δυο τελευταίες εξισώσεις παριστάνει μια μονοπαραμετρική οικογένεια επιφανειών. Ας υποθέσουμε επιπλέον ότι, υπάρχουν τα διαστήματα τιμών I_1 και I_2 των παραμέτρων c_1 και c_2 , αντίστοιχα, τέτοια που τα μέλη των πιο πάνω οικογενειών τέμνονται, ανά δύο. Με άλλα λόγια, αν $(c_1, c_2) \in I_1 \times I_2$, τότε $f_1^{-1}(c_1) \cap f_2^{-1}(c_2) \neq \emptyset$. Οι τομές αυτές ορίζουν μια διπαραμετρική οικογένεια καμπυλών, κάθε μέλος της οποίας είναι χαρακτηριστική της αρχικής ΜΔΕ. Θέτοντας $c_2 = F(c_1)$, όπου F τυχαία συνάρτηση κλάσης C^1 , επιλέγουμε ένα ομαλό υποσύνολο των χαρακτηριστικών καμπυλών και άρα μιαν επιφάνεια του \mathbb{R}^3 , που ορίζεται έμμεσα από τη σχέση $f_2(x, y, z) = F(f_1(x, y, z))$.

Ασκήσεις

2.1 Να λυθούν οι εξισώσεις που ορίζουν τις χαρακτηριστικές καμπύλες των παρακάτω ΜΔΕ. Σε κάθε περίπτωση να δοθεί ο τύπος που ορίζει ρητά ή έμμεσα μια γενικού τύπου λύση της αντίστοιχης ΜΔΕ.

(i) $u u_x + u_y = x$, (ii) $u u_x + u_y = x y$, (iii) $x u_x + u u_y = u$,

(iv) $u u_x - x u_y + u = 0$, (v) $u u_x + u_y = u^2$, (vi) $y u u_x - x u_y = 4 u^2$.

3. Το πρόβλημα αρχικών τιμών

Όπως είδαμε και με συγκεκριμένα παραδείγματα, η μέθοδος επίλυσης των σχεδόν γραμμικών ΜΔΕ που παρουσιάσαμε στο προηγούμενο εδάφιο οδηγεί σε λύσεις γενικές. Ισοδύναμα, μας δίνει έναν τρόπο κατασκευής όχι μιας μόνο ολοκληρωτικής επιφάνειας, αλλά ολόκληρης οικογένειας τέτοιων επιφανειών, τα μέλη της οποίας, βέβαια, έχουν κάποιο κοινό γνώρισμα. Αναρωτιέται λοιπόν κανείς αν υπάρχουν ενδιαφέροντες τρόποι να επιλέξει "εκ των προτέρων" μια ειδική λύση που ξεχωρίζει από τις υπόλοιπες της ίδιας οικογένειας, χάρη σε κάποιο ιδιαίτερο χαρακτηριστικό.

Γιατί, είναι φανερό πως, όταν έχουμε ήδη κατασκευάσει τη γενική λύση μιας ΜΔΕ πρώτης τάξης, μπορούμε να επιλέξουμε αμέσως μιαν ειδική λύση, προσδιορίζοντας την αυθαίρετη συνάρτηση που εμφανίζεται στη γενική. Αυτός όμως ο τρόπος δεν παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Αντίθετα, θεωρούμε ως πολύ πιο ενδιαφέρουσα τη διαδικασία επιλογής μιας ειδικής λύσης που απαντάει στο εξής ερώτημα: Ποια είναι η ολοκληρωτική επιφάνεια S της ΜΔΕ

$$(3.1) \quad a(x, y, u) u_x + b(x, y, u) u_y = c(x, y, u).$$

η οποία περιέχει την δοσμένη καμπύλη Γ του \mathbb{R}^3 ;

Ας υποθέσουμε ότι, η καμπύλη Γ του ερωτήματος περιγράφεται παραμετρικά από τις εξισώσεις

$$(3.2) \quad x = f(s), \quad y = g(s), \quad z = h(s),$$

όπου f , g και h δοσμένες C^1 συναρτήσεις. Τότε, το να απαντήσουμε στο πιο πάνω ερώτημα ισοδυναμεί με το να βρούμε τη λύση του ακόλουθου προβλήματος:

Δίνεται η καμπύλη $\Gamma^ = \{(x, y) : x = f(s), y = g(s)\}$ του επίπεδου x, y .*

Να βρεθούν οι λύσεις της ΜΔΕ (3.1) που, κατά μήκος της Γ^ , παίρνουν τις τιμές $h(s)$.*

Αυτό δεν είναι παρά ένα **πρόβλημα Cauchy** για τη δοσμένη ΜΔΕ, στη γενικότερη μορφή του. Για να φανεί καθαρότερα πως έχουμε να κάνουμε μ' ένα πρόβλημα αρχικών τιμών, ας υποθέσουμε ότι η ανεξάρτητη μεταβλητή y παριστάνει τον φυσικό χρόνο. Ας υποθέσουμε επιπλέον ότι $f(s) = s$, $g(s) = 0$. Τότε οι (3.2) γίνονται $x = s$, $y = 0$, $z = h(s)$ και περιγράφουν μια καμπύλη του επίπεδου xz . Το να βρούμε την επιφάνεια $z = u(x, y)$ που περιέχει αυτή την καμπύλη είναι ισοδύναμο με το να βρούμε τη λύση $u(x, y)$ που, τη χρονική στιγμή $y = 0$, πληροί τη συνθήκη $u(x, 0) = h(x)$. Με άλλα λόγια, η συνάρτηση $h(x)$ προσδιορίζει τις αρχικές τιμές της φυσικής ποσότητας που αντιστοιχεί στη συνάρτηση $u(x, y)$.

Την απάντηση στο γεωμετρικό ερώτημα ή στο πρόβλημα αρχικών τιμών που μόλις διατυπώσαμε, τη δίνει το

Θεώρημα 3.1. Υποθέτουμε ότι το διάνυσμα $V = (a, b, c)$ που ορίζει η ΜΔΕ (2.1), καθώς και η καμπύλη Γ που ορίζεται από την (2.1) είναι κλάσης C^1 , και θεωρούμε κατά μήκος της Γ τη συνάρτηση

$$(3.3) \quad \Delta(s) := b f'(s) - a g'(s).$$

Αν $\Delta(s) \neq 0$, τότε το πρόβλημα Cauchy έχει μία και μοναδική λύση στη γειτονιά της Γ . Αν

$\Delta(s) = 0$, το πρόβλημα Cauchy δεν έχει λύση, εκτός εάν η Γ είναι μια από τις χαρακτηριστικές της (3.1). Σ' αυτή την περίπτωση, το πρόβλημα έχει άπειρες λύσεις.

Απόδειξη. Θεωρούμε το τυχαίο σημείο $p = (x_0, y_0, z_0) := (f(s_0), g(s_0), h(s_0))$ της Γ . Η υπόθεση ότι το $V \in C^1$ εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας λύσης $(X(t), Y(t), Z(t))$ των εξισώσεων (2.6) για τις χαρακτηριστικές, η οποία ισχύει για κάποιο ανοιχτό διάστημα της παραμέτρου t γύρω από την τιμή $t = 0$. Επιπλέον αυτή είναι η μοναδική λύση που σέβεται την αρχική συνθήκη $(X(0), Y(0), Z(0)) = (x_0, y_0, z_0)$. Προφανώς, αυτή η λύση περιγράφει την χαρακτηριστική της ΜΔΕ (3.1) που διέρχεται από το συγκεκριμένο σημείο p της καμπύλης Γ .

Για να διευκολυνθούμε στην ανάπτυξη της απόδειξης, θα γράψουμε την πιο πάνω λύση στη μορφή

$$(3.4) \quad x = X(s_0, t), \quad y = Y(s_0, t), \quad z = Z(s_0, t).$$

Προφανώς, οι συναρτήσεις X, Y και Z είναι τέτοιες που

$$(3.5) \quad X(s_0, 0) = x_0, \quad Y(s_0, 0) = y_0, \quad Z(s_0, 0) = z_0,$$

Αν επαναλάβουμε την ίδια κατασκευή για κάθε τιμή της παραμέτρου s , δηλαδή για κάθε σημείο της καμπύλης Γ , θα καταλήξουμε σε μια μονοπαραμετρική οικογένεια χαρακτηριστικών καμπυλών της μορφής

$$(3.6) \quad x = X(s, t), \quad y = Y(s, t), \quad z = Z(s, t).$$

Αυτή η οικογένεια καμπυλών σχηματίζει μια επιφάνεια που περιέχει την καμπύλη Γ , αν οι δύο πρώτες των εξισώσεων (2.5) μπορεί να αντιστραφούν και να μας δώσουν τις s, t ως συναρτήσεις των x, y , στην μορφή $s = S(x, y), t = T(x, y)$. Ικανή συνθήκη γι' αυτή την αντιστροφή είναι να μη μηδενίζεται η ορίζουσα Jacobi

$$(3.7) \quad J(s, t) \equiv \frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} := \det \begin{pmatrix} X_s & Y_s \\ X_t & Y_t \end{pmatrix} = X_s Y_t - X_t Y_s$$

κατά μήκος της Γ . Αλλά, από την κατασκευή των καμπυλών (3.6) έχουμε

$$(3.8) \quad X_t(s, 0) = a, \quad Y_t(s, 0) = b,$$

$$(3.9) \quad X_s(s, 0) = f'(s), \quad Y_s(s, 0) = g'(s).$$

Άρα,

$$(3.10) \quad J(s, 0) = \Delta(s).$$

Η υπόθεση ότι, τόσο η Γ όσο και το V είναι C^1 συνεπάγεται ότι οι συναρτήσεις X_s, X_t, Y_s και Y_t είναι συνεχείς σε κάθε σημείο της Γ . Άρα, αν $J(s, 0) = \Delta(s) \neq 0$, τότε $J(s, t) \neq 0$ και για $-\varepsilon < t < \varepsilon$, όπου ε κάποια θετική ποσότητα.

Συνεπώς, όταν $\Delta(s) \neq 0$, τότε υπάρχει μια γειτονιά της καμπύλης Γ στην οποία μπορούμε να λύσουμε τις δύο πρώτες των (3.6) για τις s, t και, αντικαθιστώντας στην τρίτη από αυτές τις εξισώσεις, να πάρουμε

$$(3.11) \quad z = Z(S(x, y), T(x, y)) \equiv u(x, y).$$

Η μοναδικότητα της λύσης (3.11) του προβλήματος Cauchy εξασφαλίζεται από το Πόρισμα 2.1. Αφού η (3.11) κατασκευάστηκε από τις χαρακτηριστικές που ξεκινάνε από τη Γ ,

και κάθε άλλη λύση της μορφής $z = \tilde{u}(x, y)$ πρέπει επίσης να περιέχει την Γ , έπεται ότι $\tilde{u}(x, y) = u(x, y)$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $\Delta(s) = 0$ κατά μήκος της Γ . Αυτό σημαίνει ότι, κατά μήκος της καμπύλης (3.2),

$$(3.12) \quad b \frac{dx}{ds} = a \frac{dy}{ds} \Leftrightarrow \frac{dx}{a} = \frac{dy}{b}.$$

Από την άλλη, κατά μήκος της Γ^* ,

$$(3.13) \quad \frac{du}{ds} = u_x \frac{dx}{ds} + u_y \frac{dy}{ds}.$$

Συνάμα, η $u(x, y)$ πρέπει να είναι λύση της (3.1). Άρα, κατά μήκος της Γ ,

$$(3.14) \quad a u_x + b u_y = c.$$

Ο συνδυασμός των (3.12)-(3.14) δίνει

$$(3.15) \quad \frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{du}{c}.$$

Αυτό σημαίνει ότι, στην περίπτωση που εξετάζουμε, η Γ είναι αναγκαστικά χαρακτηριστική. Αλλά τότε, η λύση $z = u(x, y)$ που την περιέχει δεν είναι μοναδική.

Για να δούμε πώς προκύπτει το τελευταίο συμπέρασμα, αρκεί να θεωρήσουμε δύο καμπύλες Γ_1 και Γ_2 , με $\Gamma_1 \neq \Gamma_2 \neq \Gamma$, που περνάνε από το τυχαίο σημείο p της Γ . Λύνοντας το πρόβλημα Cauchy για τις Γ_1 και Γ_2 , παίρνουμε τις επιφάνειες $z = u_1(x, y)$ και $z = u_2(x, y)$, αντίστοιχα, με $u_1(x, y) \neq u_2(x, y)$. Αφού όμως αυτές οι ολοκληρωτικές επιφάνειες περιέχουν ένα σημείο της χαρακτηριστικής Γ , θα περιέχουν και ολόκληρη τη Γ (Πόρισμα 2.1.).

Παράδειγμα 3.1

Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$(3.16\alpha) \quad u u_x + u_y = 0,$$

$$(3.16\beta) \quad u(x, 0) = h(x) := 1 - \frac{1}{2} \tanh x.$$

Λύση. Αρχικά σημειώνουμε ότι, η αρχική συνθήκη (3.16β) ορίζει την ακόλουθη καμπύλη Γ του \mathbb{R}^3 :

$$(3.17) \quad x = f(s) = s, \quad y = g(s) = 0, \quad z = h(s) := 1 - \frac{1}{2} \tanh s.$$

Με άλλα λόγια, η Γ ανήκει στο επίπεδο xz και μπορεί να περιγραφτεί από τη σχέση

$$(3.18) \quad z = 1 - \frac{1}{2} \tanh x.$$

Κατά μήκος της Γ ,

$$(3.19) \quad \Delta(s) := b f'(s) - a g'(s) = 1.$$

Συνεπώς, από το Θεώρ. 3.1 συμπεραίνουμε ότι, το πρόβλημα αρχικών τιμών (3.16) έχει λύση, και μάλιστα μοναδική. Με τη διαφορά ότι, η ύπαρξη αυτής της λύσης εξασφαλίζεται μόνο στη γειτονιά της καμπύλης Γ .

Για να βρούμε τη συγκεκριμένη λύση και να μελετήσουμε την ακριβή συμπεριφορά της, εκμεταλλευόμαστε τα αποτελέσματα του Παρ. 2.1. Συγκεκριμένα, οι χαρακτηριστικές της ΜΔΕ (3.16α) ορίζονται παραμετρικά από τις σχέσεις

$$(3.20) \quad x = r t + s, \quad y = t, \quad z = r.$$

Όταν $t = 0$, αυτές γίνονται

$$(3.21) \quad x = s, \quad y = 0, \quad z = r.$$

Συγκρίνοντας τις τελευταίες με τις (3.17), συμπεραίνουμε ότι, οι χαρακτηριστικές που ξεκινάνε από την καμπύλη Γ είναι εκείνες για τις οποίες

$$(3.22) \quad r = h(s) := 1 - \frac{1}{2} \tanh s.$$

Με άλλα λόγια, οι χαρακτηριστικές που διέρχονται από την αρχική καμπύλη Γ και από τις οποίες χτίζεται η ολοκληρωτική επιφάνεια $z = u(x, y)$ ορίζονται από τις σχέσεις

$$(3.23) \quad x = t h(s) + s, \quad y = t, \quad z = h(s).$$

Από τις τελευταίες αμέσως έπεται ότι

$$(3.24) \quad J(s, t) \equiv \frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} := \det \begin{pmatrix} x_s & y_s \\ x_t & y_t \end{pmatrix} = -[1 + t h'(s)].$$

Άρα, οι δύο πρώτες των (2.30) αντιστρέφονται και ορίζουν τις s, t ως συναρτήσεις των x, y σ' όλα τα σημεία του επίπεδου t , εκτός από εκείνα όπου

$$(3.25) \quad 1 + t h'(s) = 1 + \frac{t}{2 \cosh^2 s} = 0.$$

$$x = s, \quad y = 0, \quad z = r.$$

Αυτό σημαίνει ότι, η λύση μας ισχύει μόνο στην περιοχή Ω του επίπεδου x, y , η οποία περιέχει τον άξονα x ($y = 0$) κι εκτείνεται από το $y = -\infty$ ως την καμπύλη γ που ορίζεται από τις

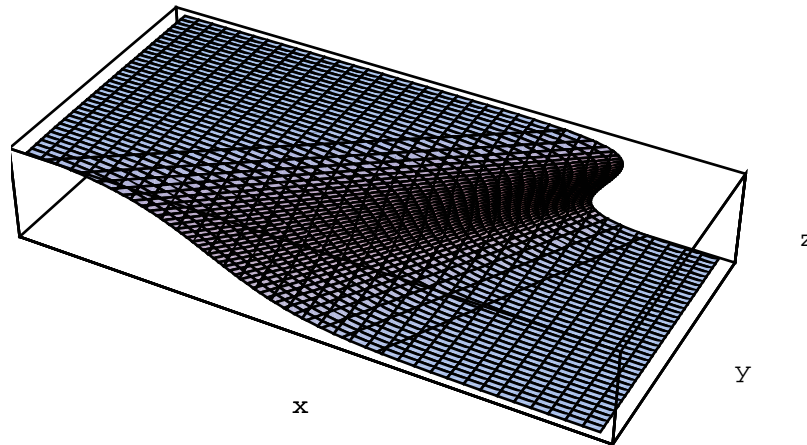
$$(3.26) \quad x = \cosh^2 s (2 - \tanh s) + s, \quad y = 2 \cosh^2 s$$

$$x = s, \quad y = 0, \quad z = r.$$

Όσο αφορά την ίδια τη λύση $u(x, y)$ του προβλήματος αρχικών τιμών (3.16), το μόνο που μπορούμε να προσθέσουμε στο συμπέρασμα ότι υπάρχει είναι πως η $u(x, y)$ ορίζεται έμμεσα από τη σχέση

$$(3.27) \quad z = h(x - y z).$$

Ωστόσο, παρά το γεγονός ότι το να λύσουμε την (3.27) αναλυτικά ως προς την z είναι αδύνατο, αυτή η σχέση μας επιτρέπει να δώσουμε μια σαφή γραφική παράσταση της λύσης, με τη βοήθεια των γραφικών εργαλείων που διαθέτουν προγράμματα σαν το *Mathematica*. Το Σχ. 3.1 που κατασκευάστηκε με αυτόν ακριβώς τον τρόπο δίνει μια ξεκάθαρη εικόνα της ποιοτικής συμπεριφοράς της λύσης $u(x, y)$.



Σχ. 3.1. Το υποσύνολο του \mathbb{R}^3 που ορίζεται από τη σχέση $z = h(x - yz)$.

Από το σχήμα γίνεται φανερό το γιατί η λύση που βρήκαμε δεν ισχύει παρά μόνο ως κάποια πεπερασμένη τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής y . Πρόκειται για τις τιμές του y στις οποίες η επιφάνεια του σχήματος αρχίζει να διπλώνει, σαν ένα θαλάσσιο κύμα από εκείνα που δίνουν χαρά στους surfers. Ο λόγος είναι ότι, μια διπλωμένη επιφάνεια δεν ορίζει μια συνάρτηση $u(x, y)$: Σε κάθε σημείο (x, y) που βρίσκεται κάτω από το "σπασμένο κύμα" του surfer αντιστοιχούν τρεις και όχι μία μόνο τιμή της μεταβλητής z .

Τη συμπεριφορά της $u(x, y)$ που εκφαινεται στο Σχ. 3.1 και, ειδικότερα, το πρώτο σημείο (x_c, y_c) στο οποίο καταρρέει η λύση μπορούμε να τα προβλέψουμε από μια προσεκτικότερη ανάλυση των χαρακτηριστικών της ΜΔΕ (3.16α). Συγκεκριμένα, η χαρακτηριστική που ξεκινάει από το σημείο $(x, y, z) = (s_1, 0, h(s_1))$ της αρχικής καμπύλης Γ είναι η ευθεία C_1 , κατά μήκος της οποίας

$$(3.28) \quad x = y h(s_1) + s_1.$$

Ανάλογα, η χαρακτηριστική που ξεκινάει από το σημείο $(x, y, z) = (s_2, 0, h(s_2))$ της Γ είναι η ευθεία C_2 , κατά μήκος της οποίας

$$(3.29) \quad x = y h(s_2) + s_2.$$

Τώρα, κατά μήκος της C_1 η τιμή της λύσης μας παραμένει σταθερή και ίση με $h(s_1)$. Το ίδιο ισχύει και για την C_2 , κατά μήκος της οποίας η λύση "κρατάει" την τιμή $h(s_2)$. Έτσι, στο σημείο όπου οι προβολές των C_1 και C_2 στο επίπεδο xy τέμνονται, η λύση $u(x, y)$ του προβλήματος αρχικών τιμών (3.16) παύει να είναι μονοσήμαντη. Αυτός είναι προφανώς και ο λόγος που αυτή η λύση δεν μπορεί να ισχύει σ' όλο το διάστημα $y > 0$.

Οι προβολές C_1^* και C_2^* των ευθειών C_1 και C_2 στο επίπεδο xy τέμνονται, αν οι (3.28) και (3.29) έχουν κοινή λύση. Αυτό ισχύει αν υπάρχει y_c τέτοιο που

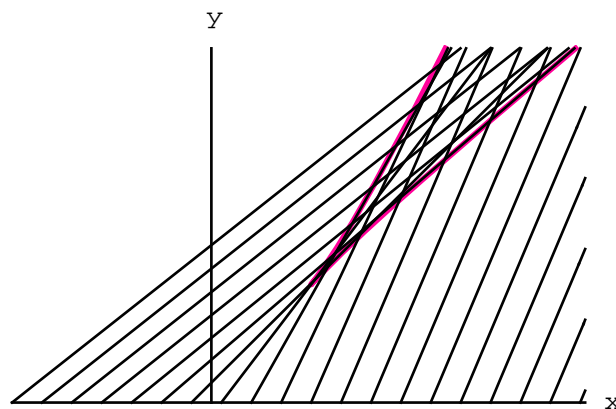
$$(3.30) \quad s_2 - s_1 + [h(s_2) - h(s_1)] y_c = 0.$$

Παίρνοντας το όριο $s_2 \rightarrow s_1$, καταλήγουμε στη συνθήκη

$$(3.31) \quad 1 + h'(s) y_c = 0,$$

που δεν είναι άλλη από την (3.25). Συνακόλουθα, το σύνολο των σημείων (x_c, y_c) αποτελεί μια

καμπύλη του επίπεδου $x y$ που ορίζεται παραμετρικά από τις σχέσεις (3.26) (βλ. Σχ. 3.2).



Σχ. 3.2. Ορισμένες από τις ευθείες $x = y h(s) + s$ και η καμπύλη σχήματος V που ορίζουν οι τομές τους

Ασκήσεις

3.1 Να λυθούν τα παρακάτω προβλήματα αρχικών τιμών ΜΔΕ. Σε σε κάθε περίπτωση, να οριστεί το τμήμα του επίπεδου των ανεξάρτητων μεταβλητών στο οποίο ισχύει η λύση που βρήκατε. Επίσης, με τη βοήθεια του *Mathematica*, ή άλλου παρόμοιου προγράμματος, να κατασκευαστεί μια γραφική παράσταση της λύσης. Όταν η λύση δεν μπορεί να εκφραστεί ρητά, μπορείτε ν' ακολουθήσετε το εξής

Υπόδειγμα. Σύμφωνα με το Παρδγ. 3.1, η λύση $u(x, y)$ του προβλήματος αρχικών τιμών

$$u_x + u_y = 0, \quad u(x, 0) = h(x) := 1 - \frac{1}{2} \tanh x,$$

παράγεται από τη διπαμετρική οικογένεια καμπυλών

$$x = X(s, t) := t h(s) + s, \quad y = Y(s, t) := t, \quad z = Z(s, t) := h(s).$$

Η παραμετρική επιφάνεια $S(s, t)$ του \mathbb{R}^3 που ορίζεται από αυτές τις σχέσεις ταυτίζεται με την ολοκληρωτική επιφάνεια $z = u(x, y)$, εκεί βέβαια που η $S(s, t)$ δεν έχει πτυχώσεις (δίπλες). Οι εντολές που ακολουθούν ορίζουν την $S(s, t)$ για κάποιο διάστημα των παραμέτρων s, t και παράγουν το επόμενο σχήμα.

In[8]:=

```
Clear[s, t, h, X, Y, Z]
```

```
h[s_] = 1 -  $\frac{1}{2}$  Tanh[s];
```

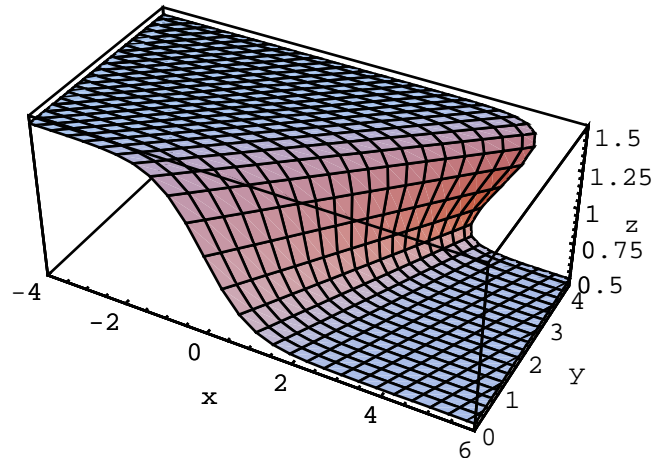
```
X[s_, t_] = s + h[s] t;
```

```
Y[s_, t_] = t;
```

```
Z[s_, t_] = h[s];
```

In[13]:=

```
ParametricPlot3D[{X[s, t], Y[s, t], Z[s, t]}, {s, -12, 7},
  {t, 0, 9}, AxesLabel -> {"x", "y", "z"}, PlotPoints -> {50, 40},
  BoxRatios -> {1, .5, .41},
  PlotRange -> {{-4, 6}, {0, 4.3}, {.45, 1.55}}];
```



(i) $u u_x + u_y = 0, u(x, 0) = \tanh x.$

(ii) $u u_x + u_y = x y, u(x, 0) = e^{-x^2}.$

(iii) $u u_x - y u_y = u, u(0, y) = \frac{1}{1+y^2}.$

(iv) $u u_x + u_y = u, u(x, 0) = \frac{1}{1+x^2}.$

(v) $u u_x + u_y = u^2, u(x, 0) = \frac{1}{1+x^2}.$

4. Σχεδόν γραμμικές ΜΔΕ στον \mathbb{R}^n , $n > 2$

Η γενίκευση των αποτελεσμάτων των δύο προηγούμενων εδαφίων στην περίπτωση που η άγνοση συνάρτηση u εξαρτιέται από περισσότερες από δύο ανεξάρτητες μεταβλητές είναι άμεση. Κατ' αρχήν, αν συμβολίσουμε τις παραπάνω μεταβλητές με x_ν , όπου $\nu = 1, \dots, n$, και και τις αντίστοιχες μερικές παραγώγους της u με u_ν , τότε μπορούμε να γράψουμε τη γενική σχεδόν γραμμική ΜΔΕ πρώτης τάξης με τη μορφή

$$(4.1) \quad \sum_{\nu}^n a_\nu u_\nu = \rho.$$

Όπως ήδη αναφέραμε, $u_\nu := \partial_\nu u$, ενώ οι a_ν και ρ είναι δοσμένες συναρτήσεις των x_ν και u .

Ας θεωρήσουμε τώρα τον Ευκλείδειο χώρο \mathbb{R}^{n+1} με Καρτεσιανές συντεταγμένες x_i , όπου $i = 1, \dots, m = n + 1$. Κάθε λύση της (4.1) ορίζει μια *υπερεπιφάνεια* S του \mathbb{R}^{n+1} , δηλαδή έναν υπόχωρο n διαστάσεων που αποτελείται από το σύνολο των σημείων των οποίων η τελευταία συντεταγμένη καθορίζεται από τις υπόλοιπες, μέσω της σχέσης

$$(4.2) \quad x_m = u(\mathbf{x}) \equiv u(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Αν γράψουμε την τελευταία στη μορφή

$$(4.3) \quad F(\mathbf{x}, x_m) := u(\mathbf{x}) - x_m = 0,$$

τότε, το κάθετο στην υπερεπιφάνεια S διανυσματικό πεδίο που ορίζεται από την κλίση της $F(\mathbf{x}, x_m)$ παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$(4.4) \quad \mathbf{N} = \nabla F := (u_1, \dots, u_n, -1).$$

Αν, από την άλλη μεριά, ορίσουμε το διανυσματικό πεδίο

$$(4.5) \quad \mathbf{V} = (a_1, \dots, a_n, \rho),$$

τότε, η ίδια η ΜΔΕ (4.1) θα είναι ισοδύναμη με τη συνθήκη ορθογωνιότητας των \mathbf{V} και \mathbf{N} :

$$(4.6) \quad \mathbf{V} \cdot \mathbf{N} \equiv a_1 u_1 + \dots + a_n u_n - \rho = 0.$$

Οι ολοκληρωτικές καμπύλες του διανυσματικού πεδίου \mathbf{V} ορίζονται από το σύστημα των $n + 1$ ΣΔΕ

$$(4.7) \quad x'_1 = a_1, \quad \dots, \quad x'_n = a_n, \quad x'_m = \rho,$$

όπου $x'_i \equiv dx_i/dt$, και ονομάζονται *χαρακτηριστικές καμπύλες* της ΜΔΕ (4.1).

Η λύση του παραπάνω αυτόνομου συστήματος θα περιέχει n ουσιαστικές αυθαίρετες σταθερές, ας τις πούμε c_ν . Άρα, θα είναι της μορφής

$$(4.8) \quad x_i = f_i(t, \mathbf{c}) \equiv f_i(t, c_1, \dots, c_n), \quad i = 1, \dots, m = n + 1.$$

Σε αναλογία με τη διαδικασία που ακολουθήθηκε για $n = 2$, μια περιοριστική συνθήκη της μορφής

$$(4.9) \quad G(\mathbf{c}) = 0,$$

όπου G αυθαίρετη συνάρτηση κλάσης C^1 , οδηγεί αμέσως στη γενική λύση της (4.1).

Ισοδύναμα, μπορούμε να επιβάλουμε τον περιορισμό

$$(4.10) \quad c_i = g_i(\mathbf{s}) \equiv g_i(s_1, \dots, s_n),$$

οπότε η (4.8) θα γίνει

$$(4.11) \quad x_i = X_i(t, \mathbf{s}) := f_i(t, g_1(\mathbf{s}), \dots, g_n(\mathbf{s})).$$

Αν η ορίζουσα Jacobi $J(t, \mathbf{s})$, όπου

$$(4.12) \quad J(t, \mathbf{s}) := \frac{\partial(x_1, \dots, x_m)}{\partial(t, s_1, \dots, s_n)} \equiv \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial t} & \dots & \frac{\partial x^m}{\partial t} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial x^1}{\partial s^n} & \dots & \frac{\partial x^m}{\partial s^n} \end{pmatrix}$$

δεν μηδενίζεται, τότε η (4.11) αποτελεί την παραμετρική μορφή μιας ολοκληρωτικής επιφάνειας S του \mathbb{R}^{n+1} . Τελικά, αυτή η επιφάνεια παίρνει τη μορφή $x_m = u(\mathbf{x})$, όταν, με αντιστροφή της ίδιας της (4.11), εκφράσουμε τις παραμέτρους t και s_i συναρτήσει των x_ν .

Παρατηρούμε, τέλος, ότι η n -διάστατη υπερεπιφάνεια που ορίζεται από την (4.11) περιέχει την $(n-1)$ -διάστατη πολλαπλότητα Γ , η οποία ορίζεται από τις σχέσεις

$$(4.13) \quad x_i = h_i(\mathbf{s}),$$

όπου

$$(4.14) \quad h_i(\mathbf{s}) := X_i(0, \mathbf{s}).$$

Αντιστρέφοντας αυτή την εικόνα, καταλήγουμε στη γεωμετρική έκδοση του προβλήματος αρχικών τιμών ή Cauchy: Δίνεται η πολλαπλότητα Γ και ζητείται η ολοκληρωτική υπερεπιφάνεια που την περιέχει. Από τα παραπάνω φαίνεται καθαρά ότι, ικανή συνθήκη για την ύπαρξη μοναδικής λύσης αυτού του προβλήματος στη γειτονιά της Γ αποτελεί ο μη μηδενισμός της $J(t, \mathbf{s})$ κατά μήκος της δοσμένης Γ .

Παράδειγμα 4.1

Θεωρούμε τις λύσεις της ΜΔΕ

$$(4.15) \quad u_x + u_y + u_z = 0,$$

για τη συνάρτηση $u: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ σαν υπερεπιφάνειες της μορφής

$$(4.16) \quad w = u(x, y, z),$$

του \mathbb{R}^4 , ο οποίος περιγράφεται στις συντεταγμένες $(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv (x, y, z, w)$. Ζητείται η υπερεπιφάνεια που περιέχει τη δισδιάστατη πολλαπλότητα

$$(4.17) \quad \Gamma: \quad x = r, \quad y = s, \quad z = 0, \quad w = r^2 + s^2.$$

Λύση. Οι χαρακτηριστικές καμπύλες της (4.15) ορίζονται από το σύστημα

$$(4.18) \quad x' = 1, \quad y' = 1, \quad z' = 1, \quad w' = 0.$$

Αυτό λύνεται αμέσως για να δώσει

$$(4.19) \quad x = t + k_1, \quad y = t + k_2, \quad z = t + k_3, \quad w = k_4,$$

όπου k_1, k_2, k_3 και k_4 αυθαίρετες σταθερές. Μία από αυτές είναι επουσιώδης, όπως φαίνεται από το γεγονός ότι, η αλλαγή παραμέτρου $t \rightarrow \tau = t + k_3$ μετατρέπει τις (4.19) σε

$$(4.20) \quad x = \tau + c_1, \quad y = \tau + c_2, \quad z = \tau, \quad w = c_3,$$

με προφανή τη σχέση των (c_1, c_2, c_3) προς τις k_i .

Η αυθαίρετη συσχέτιση των μελών της τριάδας (c_1, c_2, c_3) , γ.π. μέσω μιας σχέσης της μορφής

$$(4.21) \quad c_3 = f(c_1, c_2),$$

όπου $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ τυχαία συνάρτηση κλάσης C^1 , οδηγεί αμέσως στη γενική λύση της (4.15).

Συγκεκριμένα, λύνοντας τις (4.20) ως προς τις σταθερές c_i κι αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα στην (4.21), βρίσκουμε

$$(4.22) \quad w = f(x - z, y - z).$$

Τέλος, είτε γράφοντας την (4.20) με τη μορφή

$$(4.23) \quad \begin{aligned} x &= X(\tau, r, s) := \tau + c_1(r, s), & y &= Y(\tau, r, s) := \tau + c_2(r, s), \\ z &= Z(\tau, r, s) := \tau, & w &= W(\tau, r, s) := c_3(r, s), \end{aligned}$$

κι επιβάλλοντας τη συνθήκη (βλ. (4.17))

$$(4.24) \quad X(0, r, s) = r, \quad Y(0, r, s) = s, \quad Z(0, r, s) = 0, \quad W(0, r, s) = r^2 + s^2,$$

είτε επιβάλλοντας τη συνθήκη αυτή στην (4.22) με τη μορφή

$$(4.25) \quad z = 0, \quad w = x^2 + y^2,$$

βρίσκουμε ότι η υπερεπιφάνεια που περιέχει τη δισδιάστατη πολλαπλότητα Γ δίνεται από την εξίσωση

$$(4.26) \quad w = u(x, y, z) := (x - z)^2 + (y - z)^2.$$

■

Παράδειγμα 4.2

Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$(4.27\alpha) \quad u u_x + u u_y + u_z = 0,$$

$$(4.27\beta) \quad u(x, y, 0) = h(x, y) := x + y.$$

Λύση. Το σύστημα των ΣΔΕ για τις χαρακτηριστικές καμπύλες της (4.27α) αποτελείται από την τετράδα

$$(4.28) \quad x' = w, \quad y' = w, \quad z' = 1, \quad w' = 0.$$

Συνεπώς

$$(4.29) \quad x = k_4 t + k_1, \quad y = k_4 t + k_2, \quad z = t + k_3, \quad w = k_4,$$

όπου k_1, k_2, k_3 και k_4 αυθαίρετες σταθερές. Η επιλογή $k_3 = 0$, που ισοδυναμεί με τη μετάθεση της παραμέτρου t , μετατρέπει τις (4.29) στις

$$(4.30) \quad x = k_4 t + k_1, \quad y = k_4 t + k_2, \quad z = t, \quad w = k_4.$$

Οι τελευταίες ορίζουν μια 3-παραμετρική οικογένεια καμπυλών του \mathbb{R}^4 . Θέτοντας

$$(4.31) \quad k_4 = f(k_1, k_2),$$

όπου $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ τυχαία συνάρτηση κλάσης C^1 , περιοριζόμαστε σε ένα τρισδιάστατο υποσύνολο S του \mathbb{R}^4 , που (έμμεσα) ορίζει μian ολοκληρωτική επιφάνεια της ΜΔΕ (4.27α).

Συγκεκριμένα, με βάση τις σχέσεις (4.30), η (4.31) γράφεται σαν

$$(4.32) \quad w = f(x - w z, y - w z).$$

Στα σημεία του \mathbb{R}^4 στα οποία μπορεί να λυθεί ως προς τη μεταβλητή w , η (4.32) είναι ισοδύναμη προς μια σχέση της μορφής

$$(4.33) \quad w = u(x, y, z).$$

Η συνάρτηση $u(x, y, z)$ που ορίζεται μ' αυτό τον τρόπο, αποτελεί λύση της ΜΔΕ (4.27α).

Όταν $z = 0$, η (4.32) γίνεται $w = f(x, y)$. Άρα, η αρχική συνθήκη (4.27β) επιβάλλει την ισότητα

$$(4.34) \quad f(x, y) = h(x, y).$$

Συνακόλουθα, η (4.32) γίνεται

$$(4.35) \quad w = h(x - w z, y - w z).$$

Στη συγκεκριμένη περίπτωση που εξετάζουμε, $h(x, y) = x + y$. Άρα, η (4.35) λύνεται εύκολα ως προς w , για να δώσει

$$(4.36) \quad w = u(x, y, z) := \frac{x+y}{1+2z}.$$

■

Ασκήσεις

4.1 Να λυθούν τα παρακάτω προβλήματα αρχικών τιμών, αφού πρώτα κατασκευαστούν οι χαρακτηριστικές καμπύλες της αντίστοιχης ΜΔΕ. Σε κάθε περίπτωση, να οριστεί το τμήμα του χώρου των ανεξάρτητων μεταβλητών στο οποίο ισχύει η λύση που βρήκατε.

(i) $u_x + u_y + u_z = u, \quad u(x, y, 0) = \exp(-x^2 - y^2).$

(ii) $u_x + u_y + u_z + u = 0, \quad u(x, 0, z) = \frac{1}{1+x^2+z^2}.$

$$(iii) \quad y u_x + x u_y + u_z = u, \quad u(x, y, 0) = \exp(-x^2 - y^2).$$

$$(iv) \quad u u_x - u_y - y u_z = u, \quad u(x, 0, z) = \frac{1}{1+z^2}.$$

$$(v) \quad u_x + u(u_y + u_z) = u, \quad u(0, y, z) = 2(y - z).$$

$$(vi) \quad u(u_x + u_y) + u_z = u^2, \quad u(x, y, 0) = x - y.$$

■ Γραμμικές ΜΔΕ Δεύτερης Τάξης

1. Ταξινόμηση εξισώσεων στον \mathbb{R}^2 : Κανονικές μορφές

Η συστηματική μελέτη των γραμμικών ΜΔΕ δεύτερης τάξης που είχαμε υποσχεθεί στο πρώτο κεφάλαιο δεν μπορεί να έχει άλλη αφετηρία, παρά την απλούστερη δυνατή περίπτωση: Εκείνη στην οποία οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι μόνο δύο. Τότε, η ΜΔΕ μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$(1.1) \quad a u_{xx} + 2b u_{xy} + c u_{yy} + d u_x + e u_y + f u = g,$$

όπου (a, b, \dots, g) μια επτάδα από γνωστές συναρτήσεις με κοινό πεδίο ορισμού μια ανοιχτή περιοχή Ω του επίπεδου $x y$. Υποτίθεται, βέβαια, ότι η τριάδα (a, b, c) δε μηδενίζεται ταυτοτικά στην περιοχή Ω . Στην αντίθετη περίπτωση, η (1.1) θα έπαυε να είναι δεύτερης τάξης.

Είναι φανερό ότι, ανάλογα με τη μορφή των συναρτήσεων (a, b, \dots, g) , η (1.1) μπορεί να είναι μια αρκετά περίπλοκη εξίσωση. Έτσι, γεννιέται το ερώτημα κατά πόσο είναι δυνατό ν' απλοποιηθεί για να γίνει η ανάλυσή της, καθώς και η εύρεση των λύσεών της, ευκολότερη.

Το ν' απλοποιήσουμε μια ΜΔΕ της μορφής (1.1) σημαίνει, βέβαια, να βρούμε μια άλλη εξίσωση δεύτερης τάξης, που, ενώ φαίνεται διαφορετική από την αρχική, είναι ισοδύναμη προς αυτήν. Και με ποιον άλλο τρόπο θα μπορούσαμε να μετασχηματίσουμε μια διαφορική εξίσωση, παρά με την αντικατάσταση ενός ή περισσότερων από τα μέλη της τριάδας (x, y, u) από ένα ή περισσότερα "καινούρια" που είναι κατάλληλα επιλεγμένες συναρτήσεις των "παλιών";

Για να δούμε αναλυτικά το πώς μετασχηματίζεται μια διαφορική εξίσωση της οικογένειας (1.1) όταν αλλάζουμε τις ανεξάρτητες μεταβλητές της, θα ξεκινήσουμε μ' ένα απλό

Παράδειγμα 1.1

Θεωρούμε την ΜΔΕ

$$(1.2) \quad u_{xx} - u_{yy} = 0.$$

Αυτή η εξίσωση μπορεί να είναι απλή, αλλά δε λύνεται και τόσο εύκολα. Γι' αυτό, θ' αντικαταστήσουμε τις ανεξάρτητες μεταβλητές x, y από τις s, t , που ορίζονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$(1.3) \quad s = S(x, y) := x + y, \quad t = T(x, y) := x - y.$$

Προφανώς, αυτές οι σχέσεις είναι αντιστρέψιμες σε κάθε σημείο του \mathbb{R}^2 και οδηγούν αμέσως στις

$$(1.4) \quad x = X(s, t) := \frac{1}{2}(s + t), \quad y = Y(s, t) := \frac{1}{2}(s - t).$$

Η αντικατάσταση των ανεξάρτητων μεταβλητών x, y της $u(x, y)$ από τις $X(s, t), Y(s, t)$ μετατρέπει τη συνάρτηση $u(x, y)$ στην

$$(1.5) \quad U(s, t) := u(X(s, t), Y(s, t)).$$

Ισοδύναμα,

$$(1.6) \quad u(x, y) = U(S(x, y), T(x, y)).$$

Από την τελευταία σχέση και τον κανόνα της αλυσίδας αμέσως έπεται ότι, γενικά,

$$(1.7) \quad u_x(x, y) = U_s(S(x, y), T(x, y)) S_x(x, y) + U_t(S(x, y), T(x, y)) T_x(x, y),$$

και

$$(1.8) \quad u_y(x, y) = U_s(S(x, y), T(x, y)) S_y(x, y) + U_t(S(x, y), T(x, y)) T_y(x, y).$$

Αν παραλείψουμε τα ορίσματα όλων των εμπλεκόμενων συναρτήσεων, πράγμα που θα κάνουμε συστηματικά από τώρα και στο εξής, οι σχέσεις (1.7) και (1.8) ανάμεσα στις παραγώγους πρώτης τάξης γίνονται

$$(1.9) \quad u_x = U_s S_x + U_t T_x,$$

και

$$(1.10) \quad u_y = U_s S_y + U_t T_y,$$

αντίστοιχα.

Στη συγκεκριμένη περίπτωση του μετασχηματισμού (1.4),

$$(1.11) \quad S_x = 1, \quad T_x = 1, \quad S_y = 1, \quad T_y = -1.$$

Συνεπώς,

$$(1.12) \quad u_x = U_s + U_t, \quad u_y = U_s - U_t.$$

Με ανάλογο τρόπο, οι τελευταίες σχέσεις οδηγούν στις

$$(1.16) \quad u_{xx} = U_{ss} + 2 U_{st} + U_{tt}, \quad u_{yy} = U_{ss} - 2 U_{st} + U_{tt}.$$

Άρα,

$$(1.17) \quad u_{xx} - u_{yy} = 4 U_{st},$$

Αυτό σημαίνει ότι, η ΜΔΕ $u_{xx} - u_{yy} = 0$ είναι ισοδύναμη προς την

$$(1.18) \quad U_{st} = 0.$$

Η γενική λύση της προηγούμενης εξίσωσης βρίσκεται αμέσως με διαδοχικές ολοκληρώσεις. Συγκεκριμένα,

$$(1.19) \quad U(s, t) = F(s) + G(t),$$

όπου F, G τυχαίες συναρτήσεις, κλάσης $C^2(\mathbb{R})$. Ισοδύναμα, Τέλος, με βάση τη σχέση (1.6) ανάμεσα στις συναρτήσεις u και U καταλήγουμε στο ακόλουθο συμπέρασμα: Η γενική λύση της ΜΔΕ (1.2) δίνεται από τις συναρτήσεις της μορφής

$$(1.20) \quad u(x, y) = F(x + y) + G(x - y).$$

■

Ο μετασχηματισμός που χρησιμοποιήσαμε στο προηγούμενο παράδειγμα αποδείχτηκε εξαιρετικά αποτελεσματικός για την επίλυση της εξίσωσης (1.2). Κάτι τέτοιο δεν είναι εφικτό στη γενική περίπτωση. Ωστόσο, αλλάζοντας τη μορφή της αρχικά δοσμένης εξίσωσης, μέσω ενός αντιστρέψιμου μετασχηματισμού των ανεξάρτητων μεταβλητών, μπορούμε να επιτύχουμε το ακόλουθο πολύ σημαντικό αποτέλεσμα:

(i) Να ταξινομήσουμε όλες τις εξισώσεις της μορφής (1.1) σε τρεις ευδιάκριτες κατηγορίες.

(ii) Να δώσουμε στο κύριο μέρος κάθε μιας από αυτές τις κατηγορίες μια πολύ απλή μορφή.

Ακόμα και όταν δε μας βοηθάει στο να ολοκληρώσουμε ρητά την αντίστοιχη εξίσωση, αυτό το αποτέλεσμα μας επιτρέπει να διακρίνουμε αμέσως αρκετά ποιοτικά στοιχεία των λύσεών της.

Με **κύριο μέρος** μιας ΜΔΕ τάξης m , εννοούμε το τμήμα που περιέχει τις παραγώγους τάξης m της άγνωστης συνάρτησης. Έτσι, αν ξεχωρίσουμε το κύριο μέρος της (1.1), τότε μπορούμε να τη γράψουμε στη μορφή

$$(1.21) \quad a u_{xx} + 2b u_{xy} + c u_{yy} = h(x, y, u, u_x, u_y).$$

Θα δείξουμε λοιπόν ότι, ανάλογα με το πρόσημο της συνάρτησης $b^2 - ac$, κάθε εξίσωση της μορφής (1.21) είναι ισοδύναμη προς μία από τις ακόλουθες τρεις:

$$(1.22\alpha) \quad U_{ss} + U_{tt} = H(s, t, U, U_s, U_t)$$

$$(1.22\beta) \quad U_{ss} = H(s, t, U, U_s, U_t),$$

$$(1.22\gamma) \quad U_{ss} - U_{tt} = H(s, t, U, U_s, U_t).$$

Συγκεκριμένα, η (1.21) μπορεί να τεθεί

(i) Στη μορφή (1.22α), αν $b^2 - ac < 0$, και τότε λέγεται **ελλειπτική**.

(ii) Στη μορφή (1.22β), αν $b^2 - ac = 0$, και τότε λέγεται **παραβολική**.

(iii) Στη μορφή (1.22γ), αν $b^2 - ac > 0$, και τότε λέγεται **υπερβολική**.

Οι εξισώσεις (1.22) ονομάζονται **κανονικές μορφές** της εξίσωσης (1.21). Συνάμα, ως **κανονική μορφή των υπερβολικών εξισώσεων**, θεωρείται και η

$$(1.23) \quad U_{st} = H(s, t, U, U_s, U_t).$$

Γιατί, η (1.23) μετατρέπεται αμέσως στην (1.22γ), με την αλλαγή μεταβλητών που αναλύσαμε στο πρώτο μας παράδειγμα.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι, το αποτέλεσμα που μόλις αναφέραμε και θ' αποδείξουμε στη συνέχεια δεν προϋποθέτει τη γραμμικότητα της συνάρτησης $h(x, y, u, u_x, u_y)$ ως προς τις μεταβλητές u, u_x, u_y . Άρα, καλύπτει και τις μη γραμμικές εξισώσεις που γράφονται στη μορφή (1.21). Οι τελευταίες ονομάζονται **ημιγραμμικές**.

Όταν οι συντελεστές a, b, c είναι σταθεροί, η μετατροπή της (1.21) στην αντίστοιχη κανονική μορφή μπορεί να υλοποιηθεί μέσω ενός γραμμικού μετασχηματισμού. Αντίθετα, όταν οι συντελεστές του κύριου μέρους της εξίσωσης δεν είναι σταθεροί, η απόδειξη πως, και πάλι, η (1.21) ανάγεται σε μία από τις κανονικές μορφές είναι πιο περίπλοκη. Το ίδιο ισχύει και για την κατασκευή του αντίστοιχου μετασχηματισμού $(x, y) \rightarrow (s, t)$. Γι' αυτό ξεχωρίζουμε τις δύο περιπτώσεις και, στο παρόν εδάφιο, αναλύουμε εκείνη όπου οι συντελεστές a, b, c της ΜΔΕ

(1.21) είναι σταθεροί. Η γενικότερη περίπτωση των μη σταθερών συντελεστών παρουσιάζεται στο εδάφιο που ακολουθεί.

Στο μεταξύ, μπορούμε από τώρα να επισημάνουμε το λόγο για τον οποίο οι υπόλοιπες σελίδες αυτού του βιβλίου είναι σχεδόν αποκλειστικά αφιερωμένες στις ΜΔΕ Laplace, $u_{xx} + u_{yy} = 0$, Fourier, $u_{xx} = u_y$, d' Alembert, $u_{xx} - u_{yy} = 0$ και στις μη ομογενείς παραλλαγές τους. Αυτές βρίσκονται ήδη σε κανονική μορφή κι έτσι αποτελούν τα απλούστερα παραδείγματα ελλειπτικής, παραβολικής και υπερβολικής εξίσωσης, αντίστοιχα.

Θεώρημα 1.1

Ας υποθέσουμε ότι οι συντελεστές a, b, c της ΜΔΕ (1.21) είναι σταθεροί. Τότε, υπάρχει αντιστρέψιμος γραμμικός μετασχηματισμός των ανεξάρτητων μεταβλητών που δίνει στην (1.21) μία από τις μορφές (1.22). Συγκεκριμένα,

(i) Αν $b^2 - ac < 0$, η (1.21) μετατρέπεται στην (1.22α) μέσω του μετασχηματισμού

$$(1.24\alpha) \quad s = x, \quad t = \frac{1}{\sqrt{ac-b^2}} (ay - bx).$$

(ii) Αν $b^2 - ac = 0$, η (1.21) μετατρέπεται στην (1.22β) μέσω του μετασχηματισμού

$$(1.24\beta) \quad s = x, \quad t = ay - bx.$$

(iii) Αν $b^2 - ac > 0$, η (1.21) μετατρέπεται στην (1.22γ) μέσω του μετασχηματισμού

$$(1.24\gamma) \quad s = x, \quad t = \frac{1}{\sqrt{b^2-ac}} (ay - bx).$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τον μετασχηματισμό $(x, y) \rightarrow (s, t)$ που ορίζεται από τις σχέσεις

$$(1.25) \quad s = x, \quad t = \kappa x + \lambda y$$

Η ορίζουσα Jacobi αυτού του μετασχηματισμού είναι ίση με

$$(1.26) \quad J(x, y) \equiv \frac{\partial(s,t)}{\partial(x,y)} := \det \begin{pmatrix} 1 & \kappa \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda.$$

Άρα, όταν η παράμετρος λ είναι μη μηδενική, ο μετασχηματισμός (1.25) είναι αντιστρέψιμος.

Τώρα, από τις (1.25) αμέσως έπεται ότι,

$$(1.27) \quad u_x = U_s + \kappa U_t, \quad u_y = \lambda U_t.$$

Συνακόλουθα,

$$(1.28) \quad u_{xx} = U_{ss} + 2\kappa U_{st} + \kappa^2 U_{tt}, \quad u_{yy} = \lambda(U_{ts} + \kappa U_{tt}), \quad u_{yy} = \lambda^2 U_{tt}.$$

Η αντικατάσταση των (1.26) και (1.27) στην (1.21) και η μεταφορά όλων των όρων που δεν περιέχουν παραγώγους δεύτερης τάξης στο δεξί μέλος της, δίνει το εξής αποτέλεσμα:

$$(1.29) \quad A U_{ss} + 2B U_{st} + C U_{tt} = G(s, t, U, U_s, U_t).$$

όπου

$$(1.30) \quad A = a, \quad B = a\kappa + b\lambda, \quad C = a\kappa^2 + 2b\kappa\lambda + c\lambda^2.$$

Συγκρίνοντας τις (1.21) και (1.23) συμπεραίνουμε ότι, η αλλαγή μεταβλητών (1.25) δεν

επηρεάζει τη μορφή της εξίσωσης. Συνάμα, από τις (1.30) εύκολα συνάγεται ότι,

$$(1.31) \quad B^2 - AC = \lambda^2(b^2 - ac).$$

Αυτό σημαίνει πως, όταν $\lambda \neq 0$, οι ποσότητες $b^2 - ac$ και $B^2 - AC$ έχουν το ίδιο πρόσημο.

Τώρα, υποθέτουμε ότι $a \neq 0$. Αν αυτό δεν ισχύει, τότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι $c \neq 0$. Στη δεύτερη περίπτωση, η αλλαγή $(x, y) \rightarrow (y, x)$, $(a, c) \rightarrow (c, a)$ φέρνει την εξίσωση (1.21) στη μορφή για την οποία ισχύει το επιχείρημα που ακολουθεί. Τέλος, όταν $a = c = 0$, η εξίσωση (1.21) ανάγεται στην

$$(1.32) \quad 2b u_{xy} = h(x, y, u, u_x, u_y),$$

όπου $b \neq 0$. Αλλά τότε, η (1.21) είναι από την αρχή στην κανονική μορφή μιας υπερβολικής εξίσωσης. Για να τη φέρουμε ακριβώς στη μορφή (1.23) αρκεί να τη διαιρέσουμε με $2b$.

Η υπόθεση ότι $a \neq 0$ μας επιτρέπει να επιλέξουμε την παράμετρο κ ίση προς

$$(1.33) \quad \kappa = -\frac{b}{a} \lambda.$$

Με αυτό τον τρόπο, ο συντελεστής B της μικτής παραγώγου U_{st} μηδενίζεται και η (1.29) γίνεται

$$(1.34) \quad a U_{ss} + \frac{\lambda^2}{a} (ac - b^2) U_{tt} = G(s, t, U, U_s, U_t).$$

Όταν λοιπόν $b^2 - ac < 0$, αρκεί να θέσουμε

$$(1.35) \quad \lambda = \frac{a}{\sqrt{ac - b^2}},$$

για να φέρουμε την (1.34) στη μορφή (1.22α), με $H = G/a$.

Όταν $b^2 - ac = 0$, η (1.34) είναι ήδη στη μορφή (1.22β). Η επιλογή $\lambda = a$ δίνει στο μετασχηματισμό (1.25) τη μορφή (1.23β).

Τέλος, όταν $b^2 - ac > 0$, η επιλογή

$$(1.31) \quad \lambda = \frac{a}{\sqrt{b^2 - ac}}$$

φέρνει την εξίσωση (1.34) στη μορφή (1.22γ).

■

Παράδειγμα 1.2

(i) Η γραμμική ΜΔΕ

$$(1.32) \quad 2u_{xx} + 6u_{xy} + 9u_{yy} = 4u + 2u_x + 3u_y$$

είναι ελλειπτική, αφού $b^2 - ac = -9$.

Ο μετασχηματισμός

$$(1.33) \quad s = x, \quad t = \frac{2}{3}y - x$$

μετατρέπει την (1.32) στην

$$(1.34) \quad U_{ss} + U_{tt} = 2U + U_s.$$

(ii) Η ΜΔΕ

$$(1.35) \quad u_{xx} + 4u_{xy} + 4u_{yy} = u^2 + u_y$$

είναι ημιγραμμική και παραβολικού τύπου, γιατί $b^2 - ac = 0$.

Η εισαγωγή των μεταβλητών

$$(1.36) \quad s = x, \quad t = y - 2x$$

μετατρέπει την (1.35) στην

$$(1.37) \quad U_{ss} = U_t + U^2.$$

(iii) Η ΜΔΕ

$$(1.38) \quad u_{xx} + 6u_{xy} + 5u_{yy} = \sin u + u_x + 5u_y$$

είναι ημιγραμμική, υπερβολικού τύπου, αφού $b^2 - ac = 4$.

Στις μεταβλητές

$$(1.39) \quad s = x, \quad t = \frac{1}{2}(y - 3x)$$

η (1.38) γίνεται

$$(1.40) \quad U_{ss} - U_{tt} = \sin U + U_s + U_t.$$

■

Ασκήσεις

1.1 Να προσδιοριστεί ο τύπος (ελλειπτικός, παραβολικός ή υπερβολικός) καθεμιάς από τις παρακάτω ΜΔΕ. Στη συνέχεια, να μετατραπεί η αντίστοιχη εξίσωση σε κανονική μορφή.

(i) $u_{xx} + 8u_{xy} + 7u_{yy} + 12u = 0$, $u = u(x, y)$.

(ii) $u_{xx} + u_{xt} + u_{tt} = 3u$, $u = u(x, t)$.

(iii) $5\varphi_{xx} + 4\varphi_{xy} + \varphi_{yy} + 5\varphi_x + 2\varphi_y + \lambda\varphi = xy$, $\varphi = \varphi(x, y)$.

(iv) $2u_{xx} + 10u_{xt} + 8u_{tt} + u_x + u_t + 3u = 0$, $u = u(x, t)$.

(v) $V_{yy} + 2V_{yz} + 5V_{zz} = V^2$, $V = V(y, z)$.

(vi) $4u_{xx} + 4u_{xt} + u_{tt} + 3u_x + u_t = e^{x-t}$, $u = u(x, t)$.

1.2 Δίνεται η ΜΔΕ

$$A u_{xx} + B u_{xy} + C u_{yy} = \lambda u,$$

όπου και οι τρεις σταθερές A, B, C είναι μη μηδενικές. Να βρεθούν τρεις επιλογές της τριάδας (A, B, C) που καθιστούν την παραπάνω ΜΔΕ παραβολική, υπερβολική κι ελλειπτική, αντίστοιχα.

2. Γραμμικές ΜΔΕ στον \mathbb{R}^2 με μη σταθερούς συντελεστές

Επιστέφουμε στην εξίσωση (1.21) και την ξαναγράφουμε για ευκολία αναφοράς:

$$(2.1) \quad a u_{xx} + 2 b u_{xy} + c u_{yy} = h(x, y, u, u_x, u_y).$$

Τώρα, όμως, υποθέτουμε ότι, οι συντελεστές a , b και c είναι τυχαίες συνεχείς συναρτήσεις με κοινό πεδίο ορισμού κάποιο ανοιχτό υποσύνολο Ω του επίπεδου x, y .

Αρχικά, θα υπενθυμίσουμε ότι, η ταξινόμηση των εξισώσεων της μορφής (2.1) εξακολουθεί να στηρίζεται στο πρόσημο της συνάρτησης

$$(2.2) \quad d(x, y) := b^2 - a c.$$

Η μόνη διαφορά είναι ότι, στη γενική περίπτωση, η συνάρτηση $d(x, y)$ δεν έχει αναγκαστικά το ίδιο πρόσημο σε όλη την περιοχή Ω . Κατά συνέπεια, μια και μόνη εξίσωση μπορεί να είναι ελλειπτική σε ένα τμήμα της Ω και υπερβολική σε κάποιο άλλο. Αυτό θα φανεί καθαρά και στα παραδείγματα που θα αναλύσουμε, αφού αποδείξουμε το σχετικό

Θεώρημα

Υποθέτουμε ότι, σε κάθε σημείο του ανοιχτού συνόλου $V \subset \Omega$, η συνάρτηση $d(x, y)$ έχει το ίδιο πρόσημο. Τότε, υπάρχει αντιστρέψιμη απεικόνιση $(x, y) \rightarrow (s, t)$ της περιοχής V σε μια περιοχή W του επίπεδου s, t , τέτοια ώστε,

(i) Αν $d(x, y) < 0$, η (2.1) μετασχηματίζεται στην εξίσωση

$$(2.3\alpha) \quad U_{ss} + U_{tt} = H(s, t, U, U_s, U_t),$$

(ii) Αν $d(x, y) = 0$, η (2.1) μεταμορφώνεται στην

$$(2.3\beta) \quad U_{ss} = H(s, t, U, U_s, U_t),$$

(iii) Αν $d(x, y) > 0$, η (2.1) μετατρέπεται στην εξίσωση

$$(2.3\gamma) \quad U_{ss} - U_{tt} = H(s, t, U, U_s, U_t),$$

ή στην ισοδύναμη της (2.3γ) εξίσωση

$$(2.3\delta) \quad U_{st} = H(s, t, U, U_s, U_t),$$

Απόδειξη. Όταν, $a(x, y) = c(x, y) = 0$, $\forall (x, y) \in V$, τότε, ουσιαστικά, η εξίσωση (2.1) έχει εξαρχής την κανονική μορφή (2.3δ) των υπερβολικών εξισώσεων. Γιατί, η συνάρτηση $b(x, y)$ δεν επιτρέπεται να μηδενιστεί και άρα μπορούμε να τη μεταφέρουμε στο δεξί μέλος της (2.1) με διαίρεση. Θα υποθέσουμε, λοιπόν, ότι η συνάρτηση $a(x, y)$ δε μηδενίζεται σε κανένα σημείο της περιοχής V . Αν αυτό δεν ισχύει, τότε θα είναι μη μηδενική η $c(x, y)$. Η αλλαγή ονομάτων $(x, y) \rightarrow (y, x)$, $(a, c) \rightarrow (c, a)$ μετατρέπει την (2.1) στη μορφή για την οποία ισχύει η υπόθεση $a(x, y) \neq 0$, άρα και η ανάλυση που ακολουθεί.

Πρώτα, θα εξετάσουμε την περίπτωση που η εξίσωση (2.1) είναι υπερβολικού τύπου. Δηλαδή, υποθέτουμε ότι $d(x, y) > 0$, $\forall (x, y) \in V$. Τότε, οι δυο συναρτήσεις

$$(2.4) \quad \lambda_{\pm}(x, y) := \frac{b \pm \sqrt{d}}{a},$$

είναι διακριτές. Άρα, το ίδιο ισχύει και για τις γραμμικές ΜΔΕ πρώτης τάξης

$$(2.5) \quad S_x + \lambda_+ S_y = 0,$$

και

$$(2.6) \quad T_x + \lambda_- T_y = 0.$$

Ας υποθέσουμε, λοιπόν, ότι οι συναρτήσεις $S(x, y)$ και $T(x, y)$ αποτελούν δύο συγκεκριμένες, κλάσης $C^1(\Omega)$, μη σταθερές λύσεις των εξισώσεων (2.5) και (2.6) αντίστοιχα. Τότε

$$(2.7) \quad S_x T_y - S_y T_x = (\lambda_- - \lambda_+) S_y T_y \neq 0, \quad \forall (x, y) \in V.$$

Κατά συνέπεια, οι σχέσεις

$$(2.8) \quad s = S(x, y), \quad t = T(x, y),$$

ορίζουν μια απεικόνιση της περιοχής V του επίπεδου $x y$ σε μια περιοχή W του επίπεδου $s t$ που είναι αντιστρέψιμη. Γιατί, το αριστερό μέλος της (2.7) δεν είναι άλλο από την ορίζουσα Jacobi

$$(2.9) \quad J(x, y) := S_x T_y - S_y T_x$$

του μετασχηματισμού $(x, y) \rightarrow (s, t)$ που ορίζεται από τις σχέσεις (2.8).

Τώρα, ο κανόνας της αλυσίδας, που μας έφερε από την (1.6) στις σχέσεις (1.9) και (1.10) για τις μερικές παραγώγους πρώτης τάξης, μας πηγαίνει αμέσως κι από τις (1.9), (1.10) στις ακόλουθες εκφράσεις για τις παραγώγους δεύτερης τάξης:

$$(2.10\alpha) \quad u_{xx} = S_x^2 U_{ss} + 2 S_x T_x U_{st} + T_x^2 U_{tt} + S_{xx} U_s + T_{xx} U_t$$

$$(2.10\beta) \quad u_{xy} = S_x S_y U_{ss} + (S_x T_y + S_y T_x) U_{st} + T_x T_y U_{tt} + S_{xy} U_s + T_{xy} U_t.$$

$$(2.10\gamma) \quad u_{yy} = S_y^2 U_{ss} + 2 S_y T_y U_{st} + T_y^2 U_{tt} + S_{yy} U_s + T_{yy} U_t.$$

Η αντικατάσταση αυτών των εκφράσεων στην (2.1) δίνει την εξίσωση

$$(2.11) \quad A U_{ss} + 2 B U_{st} + C U_{tt} = G(s, t, U, U_s, U_t),$$

όπου

$$(2.12) \quad A := a S_x^2 + 2 b S_x S_y + c S_y^2,$$

$$(2.13) \quad B := a S_x T_x + b (S_x T_y + S_y T_x) + c S_y T_y,$$

και

$$(2.14) \quad C := a T_x^2 + 2 b T_x T_y + c T_y^2.$$

Επιπλέον, ένας απλός αλγεβρικός υπολογισμός οδηγεί στο συμπέρασμα ότι,

$$(2.15) \quad D := B^2 - A C = J^2 d.$$

Συνεπώς, όταν η ορίζουσα Jacobi $J(x, y)$ δε μηδενίζεται στην περιοχή V , τότε οι συναρτήσεις $D(s, t)$ και $d(x, y)$ έχουν το ίδιο πρόσημο (στα αντίστοιχα σημεία των περιοχών V και W).

Παρατηρούμε τέλος ότι, οι (2.13) και (2.14) γίνονται

$$(2.16) \quad A = a(S_x + \lambda_+ S_y)(S_x + \lambda_- S_y)$$

και

$$(2.17) \quad C = a(T_x + \lambda_+ T_y)(T_x + \lambda_- T_y),$$

αντίστοιχα. Άρα, όταν $d(x, y) > 0$ και οι $S(x, y)$ και $T(x, y)$ επιλεγούν με τον τρόπο που είπαμε νωρίτερα, τότε

$$(2.18) \quad A(x, y) = C(x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \in V.$$

Συνεπώς, η (2.11) ανάγεται στην

$$(2.19) \quad 2B U_{st} = G(s, t, U, U_s, U_t),$$

Τώρα όμως, $D = B^2 > 0$, οπότε $B(x, y) \neq 0, \forall (x, y) \in V$. Άρα, μπορούμε να διαιρέσουμε την (2.19) με $2B$ κι έτσι να καταλήξουμε στην

$$(2.20) \quad U_{st} = H(s, t, U, U_s, U_t).$$

Στρέφοντας την προσοχή μας στην παραβολική περίπτωση, σημειώνουμε αρχικά πως, η συνθήκη $d(x, y) = 0$ συνεπάγεται ότι,

$$(2.21) \quad \lambda_+ = \lambda_- = \frac{b}{a} \equiv \lambda.$$

Συνακόλουθα,

$$(2.22\alpha) \quad A = a(S_x + \lambda S_y)^2,$$

$$(2.22\beta) \quad B = a(S_x + \lambda S_y)(\psi_x + \lambda \psi_y),$$

$$(2.22\gamma) \quad C = a(T_x + \lambda T_y)^2.$$

Άρα, αν επιλέξουμε την συνάρτηση T όπως στην υπερβολική περίπτωση, να είναι δηλαδή μια λύση της γραμμικής ΜΔΕ

$$(2.23) \quad T_x + \lambda T_y = 0,$$

τότε θα έχουμε το εξής αποτέλεσμα:

$$(2.23) \quad B = C = 0$$

και

$$(2.25) \quad A = a\left(S_x - \frac{T_x}{T_y} S_y\right)^2 = \frac{a}{T_y^2} (S_x T_y - T_x S_y)^2.$$

Παρατηρούμε ότι, ο τελευταίος παράγοντας στην (2.25) είναι το τετράγωνο της ορίζουσας Jacobi του μετασχηματισμού $(x, y) \rightarrow (s, t)$. Αρκεί, λοιπόν, να επιλέξουμε ως S οποιαδήποτε συνάρτηση γραμμικά ανεξάρτητη από την T , για εξασφαλίσουμε δύο επιθυμητά αποτελέσματα. Πρώτο, το να γίνει ο μετασχηματισμός συγκεκριμένος και, δεύτερο, ο συντελεστής A να είναι μη μηδενικός σε κάθε σημείο της περιοχής V . Αυτό μας επιτρέπει να διαιρέσουμε την (2.11) με A και να καταλήξουμε στην κανονική μορφή (2.3β).

Ερχόμαστε, τέλος, στην ελλειπτική περίπτωση, οπότε $d(x, y) < 0, \forall (x, y) \in V$. Τότε,

$$(2.26) \quad \lambda_{\pm} = \frac{1}{a} (b \pm i e), \quad e := \sqrt{ac - b^2} > 0.$$

Ας υποθέσουμε και πάλι, όπως δηλαδή στην υπερβολική περίπτωση, ότι οι συναρτήσεις S και T είναι λύσεις των ΜΔΕ (2.5) και (2.6), αντίστοιχα. Είναι προφανές ότι, λόγω της (2.26), οι S και T δεν είναι πλέον πραγματικές συναρτήσεις, αλλά μιγαδικές.

Συνακόλουθα, και οι μεταβλητές s και t που ορίζονται από την (2.8) θα είναι μιγαδικές. Μάλιστα, θα είναι και συζυγείς, γιατί από την (2.26) έπεται ότι $\lambda_- = \bar{\lambda}_+$, όπου το \bar{z} σημαίνει το μιγαδικό συζυγή του z . Άρα, μπορούμε να θέσουμε

$$(2.27) \quad s = \alpha + i\beta, \quad t = \alpha - i\beta, \quad i \equiv \sqrt{-1},$$

με τις πραγματικές μεταβλητές α και β να παριστάνουν το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της s , αντίστοιχα. Συγκεκριμένα,

$$(2.28) \quad \alpha = \frac{1}{2} (s + t), \quad \beta = \frac{i}{2} (s - t).$$

Με αυτό τον τρόπο, κάθε εξίσωση που αφορά μια μιγαδική συνάρτηση μπορεί να χωριστεί σε ένα ζευγάρι δύο πραγματικών εξισώσεων που αφορούν πραγματικές συναρτήσεις. Ωστόσο, η παραπέρα ανάλυση που στηρίζεται σε αυτή την προσέγγιση γίνεται κάπως απαιτητική. Γι' αυτό θα προτιμήσουμε να κάνουμε την ακόλουθη υπόθεση. Όλες οι εμπλεκόμενες συναρτήσεις είναι διαφορίσιμες ως προς τις μιγαδικές μεταβλητές s, t . Με άλλα λόγια, θα υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις που συναντάμε είναι *ολόμορφες ή αναλυτικές*.

Αυτή η υπόθεση μας επιτρέπει να μεταφέρουμε, αυτούσια, τα αποτελέσματα της ανάλυσης των υπερβολικών εξισώσεων στις εξισώσεις ελλειπτικού τύπου. Με άλλα λόγια, και στην περίπτωση όπου $d(x, y) < 0, \forall (x, y) \in V$, η εξίσωση (2.11) ανάγεται στην $U_{st} = H(s, t, U, U_s, U_t)$. Όμως, από τις (2.27) αμέσως προκύπτει ότι

$$(2.29) \quad U_s = \frac{1}{2} (U_\alpha - i U_\beta), \quad U_t = \frac{1}{2} (U_\alpha + i U_\beta),$$

και

$$(2.30) \quad U_{st} = \frac{1}{4} (U_{\alpha\alpha} + U_{\beta\beta}).$$

Από αυτήν είναι πρόδηλο ότι, στο επίπεδο των πραγματικών μεταβλητών α, β , η (2.11) παίρνει την κανονική μορφή (2.3α).

■

Παράδειγμα 2.1

(i) Στην περίπτωση της ΜΔΕ

$$(2.31) \quad u_{xx} - x^2 u_{yy} = 0,$$

$a = 1, b = 0$ και $c = -x^2$, αντίστοιχα. Συνεπώς, $d := b^2 - ac = x^2$. Άρα, στα ανοιχτά υποσύνολα $V_- = \{(x, y) : x < 0\}$ και $V_+ = \{(x, y) : x > 0\}$ του \mathbb{R}^2 η εξίσωση (2.31) είναι υπερβολική.

Αφού

$$(2.32) \quad \lambda_{\pm}(x, y) := \frac{b \pm \sqrt{d}}{a} = \pm |x|,$$

οι εξισώσεις (2.5) και (2.6) γράφονται ως

$$(2.33) \quad S_x + |x| S_y = 0,$$

και

$$(2.34) \quad T_x - |x| T_y = 0.$$

αντίστοιχα.

Για ν' αποφύγουμε τη συνεχή αναφορά στο πρόσημο της μεταβλητής x , θα περιοριστούμε στο τμήμα $x > 0$ του επίπεδου $x y$. Έτσι, γίνεται φανερό ότι οι γενικές λύσεις των εξισώσεων (2.33) και (2.34) είναι της μορφής $S = f(y - x^2/2)$ και $T = g(y + x^2/2)$, αντίστοιχα. Τίποτα δε μας εμποδίζει από το να επιλέξουμε ως f, g τις απλές συναρτήσεις $f(z) = g(z) = z$. Με αυτό τον τρόπο συμπεραίνουμε ότι, η υπερβολική εξίσωση (2.31) μπορεί να αναχθεί στην κανονική μορφή μέσω του μετασχηματισμού

$$(2.35) \quad s = y - \frac{1}{2} x^2, \quad t = y + \frac{1}{2} x^2$$

Συγκεκριμένα, από τις σχέσεις (2.35) έπεται ότι

$$(2.36) \quad B = S_x T_x - x^2 S_y T_y = -2 x^2 = 4(s - t).$$

Από την άλλη μεριά, οι (2.10α) και (2.10γ) δείχνουν καθαρά ότι, εκτός από το τμήμα που δίνει τον όρο U_{st} , στις u_{xx} και u_{yy} θα επιβιώσει μόνο ο συνδυασμός $S_{xx} U_s + T_{xx} U_t = -U_s + U_t$. Με αυτό τον τρόπο, ή με απ' ευθείας αντικατάσταση των (2.10) στην (2.31), καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι, η τελευταία ανάγεται στην κανονική μορφή

$$(2.37) \quad U_{st} = \frac{1}{4(s-t)} (U_s - U_t).$$

ii) Η ΜΔΕ

$$(2.38) \quad u_{xx} + x^2 u_{yy} = 0$$

είναι ελλειπτική, γιατί $a = 1, b = 0, c = x^{-2}$ και άρα $b^2 - ac = -x^2$.

Είναι προφανές ότι, η εξίσωση (2.38) προκύπτει από την (2.31) μέσω της αντικατάστασης $y \rightarrow iy$. Έτσι, οι (1.52) γίνονται

$$(2.39) \quad s = iy - \frac{1}{2} x^2, \quad t = iy + \frac{1}{2} x^2.$$

Για να είναι η δεύτερη μεταβλητή η μιγαδική συζυγής της πρώτης, την αντικαθιστούμε από την

$$(2.40) \quad \tilde{t} := -t = -iy - \frac{1}{2} x^2,$$

οπότε, οι πραγματικές μεταβλητές α, β που ορίσαμε στις (2.28) δίνονται από τις σχέσεις

$$(2.41) \quad \alpha = \frac{1}{2} (s + \tilde{t}) = -x^2, \quad \beta = \frac{i}{2} (s - \tilde{t}) = -y.$$

Τέλος, λαβαίνοντας υπόψη τις (2.29) και (2.30), καταλήγουμε αμέσως στο ακόλουθο συμπέρασμα: Η (2.37), που με την αντικατάσταση $t \rightarrow -\tilde{t}$ έχει μετατραπεί στην

$$(2.42) \quad U_{s\tilde{t}} = -\frac{1}{4(s+\tilde{t})} (U_s + U_{\tilde{t}}),$$

είναι ισοδύναμη προς την

$$(2.43) \quad U_{\alpha\alpha} + U_{\beta\beta} = -\frac{1}{2\alpha} U_{\alpha}.$$

Αυτή είναι και η κανονική μορφή της ΜΔΕ $u_{xx} + x^2 u_{yy} = 0$.

(iii) Η εξίσωση (του) *Tricomi*

$$(2.44) \quad u_{yy} - y u_{xx} = 0$$

προσφέρει ένα παράδειγμα ΜΔΕ που αλλάζει τύπο από περιοχή σε περιοχή του επίπεδου $x y$.

Συγκεκριμένα, στην προκείμενη περίπτωση, $d := b^2 - ac = y$. Άρα, η (2.44) είναι υπερβολική στο πάνω ημιεπίπεδο, $y > 0$, αλλά μετατρέπεται σε ελλειπτική καθώς περνάμε στο κάτω ημιεπίπεδο, $y < 0$.

Στην περιοχή $y > 0$, οι εξισώσεις που ορίζουν τις νέες μεταβλητές s, t γίνονται

$$(2.45) \quad S_x - y^{-1/2} S_y = 0, \quad T_x + y^{-1/2} T_y = 0.$$

Η γενική λύση των (2.45) βρίσκεται εύκολα και δείχνει ότι, η απλούστερη επιλογή για τους τύπους του μετασχηματισμού $(x, t) \rightarrow (s, t)$ είναι η εξής:

$$(2.46) \quad s = 3x + 2y^{3/2}, \quad t = 3x - 2y^{3/2},$$

Συνεπώς, η κανονική μορφή της (2.44) στο πάνω ημιεπίπεδο δίνεται από την ΜΔΕ

$$(2.47) \quad U_{st} = \frac{1}{6(s-t)} (U_s - U_t), \quad s > t.$$

Όταν το y γίνεται αρνητικό, οι (2.46) μπορεί να γραφτούν σαν

$$(2.48) \quad s = 3x - 2i|y|^{3/2}, \quad t = 3x + 2i|y|^{3/2},$$

Οι τελευταίες ορίζουν τις πραγματικές μεταβλητές

$$(2.49) \quad \alpha = 3x, \quad \beta = -2|y|^{3/2}.$$

Με βάση πλέον αυτές τις σχέσεις, η (2.47) γίνεται

$$(2.50) \quad U_{\alpha\alpha} + U_{\beta\beta} = -\frac{1}{3\beta} U_{\beta}, \quad \beta < 0,$$

που αποτελεί την κανονική μορφή της εξίσωσης Tricomi στην περιοχή $y < 0$.

(iv) Η ΜΔΕ

$$(2.51) \quad u_{xx} + 2y u_{xy} + y^2 u_{yy} = 0$$

είναι παραβολική: $a = 1, b = y, c = y^2, d := b^2 - ac = 0$.

Τώρα $\lambda_{\pm} = y$, και η εξίσωση που ορίζει μία από τις νέες συντεταγμένες παίρνει την

ακόλουθη μορφή:

$$(2.52) \quad S_x + y S_y = T_x + y T_y = 0.$$

Η γενική λύση $T = f(y e^{-x})$ αυτής της εξίσωσης μας επιτρέπει να επιλέξουμε ως δεύτερη από τις νέες συντεταγμένες την $t = T(x, y) = y e^{-x}$. Αφού η συνάρτηση $S(x, y) = x$ είναι γραμμικά ανεξάρτητη από την $T(x, y) = y e^{-x}$, μπορούμε να διατηρήσουμε την x ως την πρώτη από τις ανεξάρτητες μεταβλητές.

Με άλλα λόγια, ως νέες συντεταγμένες παίρνουμε τις

$$(2.53) \quad s = x, \quad t = y e^{-x}.$$

Όπως εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (2.10), στις νέες συντεταγμένες, η ΜΔΕ (2.51) παίρνει την κανονική μορφή

$$(2.54) \quad U_{ss} = t U_t.$$

■

Ασκήσεις

2.1 Να βρεθούν οι περιοχές του πεδίου ορισμού τους, στις οποίες οι παρακάτω ΜΔΕ είναι ελλειπτικού, παραβολικού και υπερβολικού τύπου, αντίστοιχα. Σε καθεμιά από αυτές τις περιοχές, να τεθεί η ΜΔΕ σε κανονική μορφή.

(i) $u_{xx} + 2t u_{xt} = u, \quad u = u(x, t).$

(ii) $u_{xx} + 2y u_{xy} + u_{yy} = u, \quad u = u(x, y).$

(iii) $f_{xx} + 2f_{xy} + (1 + x^2)f_{yy} = k f, \quad f = f(x, y), \quad k \in \mathbb{R}$

(iv) $V_{rr} + 2s V_{rs} - V_r + s V = r e^{-s}, \quad V = V(r, s).$

(v) $U_{yy} + 2(y^2 + z^2)U_{yz} + U_{zz} = \lambda U^2, \quad U = U(y, z), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

(vi) $x^2 u_{xx} + u_{yy} + x u_x = \lambda x^2 u, \quad u = u(x, y), \quad x > 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

3. Συμμετρίες των ΜΔΕ

Στα δύο προηγούμενα εδάφια αποδείξαμε ότι, μέσω μιας αλλαγής των ανεξάρτητων μεταβλητών, μπορούμε να μετασχηματίσουμε μια ΜΔΕ δεύτερης τάξης σε μία από τις τρεις κανονικές μορφές. Ορισμένες φορές, αυτή η μεταμόρφωση μπορεί να διευκολύνει την επίλυση της αρχικής εξίσωσης, αλλά μπορεί και να ισχύει το αντίστροφο.

Ας θεωρήσουμε, για παράδειγμα, την εξίσωση Laplace

$$(3.1) \quad u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Ο μετασχηματισμός που ορίζεται από τις σχέσεις

$$(3.2) \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad r > 0, \quad -\pi < \theta < \pi,$$

μετατρέπει την εξίσωση (3.1) για τη συνάρτηση $u(x, y)$ στη ΜΔΕ

$$(3.3) \quad r^2 U_{rr} + r U_r + U_{\theta\theta} = 0,$$

για τη συνάρτηση

$$(3.4) \quad U(r, \theta) := u(r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Βέβαια, η εξίσωση (3.3) είναι πιο περίπλοκη από την αρχική. Ωστόσο, μας επιτρέπει να βρούμε πολύ εύκολα ορισμένες ενδιαφέρουσες λύσεις της (3.1), οι οποίες δεν προκύπτουν απ' αυτή την εξίσωση άμεσα.

Συγκεκριμένα, όπως και για κάθε άλλη εξίσωση, μπορούμε να σταθούμε στις λύσεις της (3.3) που δεν περιέχουν ρητά κάποια από τις ανεξάρτητες μεταβλητές. Ας υποθέσουμε, λοιπόν, ότι

$$(3.5) \quad U(r, \theta) = R(r).$$

Η αντικατάσταση αυτής της έκφρασης στη (3.3) οδηγεί αμέσως στη ΣΔΕ

$$(3.6) \quad r R'' + R' \equiv (r R')' = 0.$$

Συνεπώς

$$(3.5) \quad R(r) = c_1 \ln r + c_2.$$

Τώρα, ο αντίστροφος του μετασχηματισμού (3.2) ορίζεται από τις σχέσεις

$$(3.6) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \tan^{-1}(y/x).$$

Άρα, η λύση $U(r, \theta) = c_1 \ln r + c_2$ της ΜΔΕ (3.3) που μόλις βρήκαμε μεταφράζεται στη λύση

$$(3.7) \quad \boxed{u(x, y) = c_1 \ln \sqrt{x^2 + y^2} + c_2}$$

της (3.1).

Το πόσο σημαντική είναι αυτή η λύση, που εύκολα εντοπίσαμε πηγαίνοντας σε μια περίπλοκη "έκδοση" της ελλειπτικής εξίσωσης (3.1), θα φανεί σιγά-σιγά στα επόμενα. Εδώ θα περιοριστούμε στο αναφέρουμε πως, η (3.7) ονομάζεται **θεμελιώδης λύση της εξίσωσης Laplace**.

Μένοντας για λίγο ακόμα στο κεφάλαιο της αλλαγής των ανεξάρτητων μεταβλητών, θα θέσουμε μαζί με τον αναγνώστη το εξής εύλογο ερώτημα:

Κάθε αντιστρέψιμος μετασχηματισμός των μεταβλητών οδηγεί αναγκαστικά στην μεταμόρφωση μιας εξίσωσης;

Το ότι η απάντηση σ' αυτό το ερώτημα είναι αρνητική θα πρέπει να έχει ήδη δοθεί από κάθε παρατηρητικό αναγνώστη. Για παράδειγμα, η αντικατάσταση $x \rightarrow s = x + \lambda$, όπου λ τυχαίος πραγματικός αριθμός, δεν επηρεάζει καθόλου τη μορφή της εξίσωσης Laplace.

Γενικότερα, κάθε ΜΔΕ της μορφής

$$(3.8) \quad a u_{xx} + 2b u_{xy} + c u_{yy} + d u_x + e u_y + f u = 0,$$

με σταθερούς συντελεστές, παραμένει αμετάβλητη κατά την *μετάθεση* των ανεξάρτητων μεταβλητών, δηλαδή, σε κάθε μετασχηματισμό της μορφής

$$(3.9) \quad (x, y) \rightarrow (s, t) = (x + \lambda, y + \mu), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Αυτές που δεν περιέχουν ρητά και την εξαρτημένη μεταβλητή παραμένουν αναλλοίωτες κατά τις μεταθέσεις

$$(3.10) \quad (x, y, u) \rightarrow (s, y, U) = (x + \lambda, y + \mu, u + \nu), \quad \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}.$$

Συχνά, επίσης, οι εξισώσεις που μας ενδιαφέρουν παραμένουν αναλλοίωτες και κατά τις *αλλαγές κλίμακας*

$$(3.11) \quad (x, y, u) \rightarrow (s, y, U) = (\lambda x, \mu y, \nu u), \quad \lambda, \mu, \nu \neq 0.$$

Παράδειγμα 3.1

Η εξίσωση της διάχυσης $u_y = u_{xx}$ γίνεται

$$(3.12) \quad \frac{1}{\mu} u_y = \frac{1}{\lambda^2} u_{xx}$$

κατά τον μετασχηματισμό (3.11). Άρα, αυτός ο μετασχηματισμός αφήνει τη μορφή της εξίσωσης $u_y = u_{xx}$ αμετάβλητη, αν $\mu = \lambda^2$.

■

Υπάρχουν λύσεις που και οι ίδιες παραμένουν αναλλοίωτες κάτω από έναν μετασχηματισμό που δεν επηρεάζει την εξίσωση. Αυτές ονομάζονται *λύσεις ομοιότητας* ή *αναλλοίωτες λύσεις*. Για να τις εντοπίσουμε, θα μελετήσουμε πρώτα το πώς μεταβάλλεται μια συνάρτηση, καθώς αλλάζουμε σταδιακά και με συνεχή τρόπο τις ανεξάρτητες μεταβλητές. Με άλλα λόγια, θα περιοριστούμε στη μελέτη των αλλαγών που επιφέρει στη συνάρτηση μια *ομάδα σημειακών μετασχηματισμών*. Με αυτό τον όρο εννοούμε αντιστρέψιμους μετασχηματισμούς της μορφής

$$(3.13) \quad x \rightarrow s = S(x, y, \lambda), \quad y \rightarrow t = T(x, y, \lambda),$$

όπου λ μια συνεχής παράμετρος, οι συναρτήσεις S, T έχουν ομαλή εξάρτηση και από τις τρεις μεταβλητές (x, y, λ) και είναι τέτοιες που

$$(3.14) \quad S(x, y, 0) = x, \quad T(x, y, 0) = y.$$

Ο λόγος για τον οποίο αυτού του είδους οι μετασχηματισμοί ονομάζονται σημειακοί

είναι ο εξής. Κάθε απεικόνιση της μορφής (3.13) επιδέχεται την ακόλουθη ερμηνεία: Από το αρχικό σημείο (x, y) του Ευκλείδειου επίπεδου \mathbb{R}^2 μας πηγαίνουν στο σημείο

$$(3.15) \quad (\tilde{x}, \tilde{y}) = (s, t),$$

του ίδιου επίπεδου.

Από την υπόθεση ότι οι συναρτήσεις S, T είναι ομαλές αμέσως έπεται ότι, για πολύ μικρές τιμές της παραμέτρου λ ,

$$(3.16\alpha) \quad S(x, y, \lambda) = S(x, y, 0) + \lambda \partial_\lambda S(x, y, 0) + O(\lambda^2),$$

$$(3.16\beta) \quad T(x, y, \lambda) = T(x, y, 0) + \lambda \partial_\lambda T(x, y, 0) + O(\lambda^2).$$

Το σύμβολο $O(\lambda^2)$ δηλώνει ότι, οι όροι του αναπτύγματος που δεν αναφέρονται ρητά είναι αμελητέοι, σε σύγκριση με τον δεύτερο.

Ισοδύναμα,

$$(3.17) \quad S(x, y, \lambda) = x + \lambda \eta(x, y) + O(\lambda^2), \quad T(x, y, \lambda) = y + \lambda \xi(x, y) + O(\lambda^2),$$

όπου

$$(3.18) \quad \eta(x, y) := \partial_\lambda S(x, y, 0), \quad \xi(x, y) := \partial_\lambda T(x, y, 0).$$

Συχνά, η σχέση (3.19) γράφεται στη μορφή

$$(3.19) \quad \tilde{x} - x \simeq \lambda \eta(x, y), \quad \tilde{y} - y \simeq \lambda \xi(x, y)$$

και ανεφέρεται ως *απειροστή μεταβολή των ανεξάρτητων μεταβλητών*.

Παράδειγμα 3.2

α) Θεωρήστε μεταθέσεις της μορφής

$$(3.20) \quad x \rightarrow s = S(x, y, \lambda) = x + a \lambda, \quad y \rightarrow t = T(x, y, \lambda) = y + b \lambda,$$

όπου (a, b) συγκεκριμένο ζευγάρι πραγματικών σταθερών. Σ' αυτή την περίπτωση,

$$(3.21) \quad \eta(x, y) = a, \quad \xi(x, y) = b.$$

β) Για την αλλαγή κλίμακας

$$(3.22) \quad x \rightarrow s = S(x, y, \lambda) = e^{a\lambda} x, \quad y \rightarrow t = T(x, y, \lambda) = e^{b\lambda} y,$$

οι συναρτήσεις η, ξ που καθορίζουν την απειροστή μεταβολή είναι ίσες με

$$(3.23) \quad \eta(x, y) = a x, \quad \xi(x, y) = b y.$$

γ) Οι στροφές γύρω από το σημείο $(x, y) = (0, 0)$ περιγράφονται από την ομάδα

$$(3.24) \quad x \rightarrow s = S(x, y, \lambda) = x \cos \lambda - y \sin \lambda, \quad y \rightarrow t = T(x, y, \lambda) = x \sin \lambda + y \cos \lambda.$$

Σ' αυτή την περίπτωση,

$$(3.25) \quad \eta(x, y) = -y, \quad \xi(x, y) = y.$$

Τώρα, ο μετασχηματισμός $(x, y) \rightarrow (s, t)$ επιφέρει την ακόλουθη αλλαγή σε μια ομαλή

συνάρτηση:

$$(3.26) \quad f(x, y) \rightarrow F(s, t, \lambda) := f(S(x, y, \lambda), T(x, y, \lambda)).$$

Για πολύ μικρές τιμές της παραμέτρου λ ,

$$(3.27) \quad F(s, t, \lambda) = f(S(x, y, 0), T(x, y, 0)) + \lambda \partial_1 f(S(x, y, 0), T(x, y, 0)) \partial_\lambda S(x, y, 0) \\ + \lambda \partial_2 f(S(x, y, 0), T(x, y, 0)) \partial_\lambda T(x, y, 0) + O(\lambda^2).$$

Ισοδύναμα,

$$(3.28) \quad F(s, t, \lambda) = f(x, y) + \lambda [\partial_x f(x, y) \eta(x, y) + \partial_y f(x, y) \xi(x, y)] + O(\lambda^2).$$

Αυτή η σχέση, που γράφεται και στη μορφή

$$(3.29) \quad \tilde{f}(x, y) - f(x, y) \simeq \lambda [\eta(x, y) \partial_x f(x, y) + \xi(x, y) \partial_y f(x, y)],$$

παριστάνει την **απειροστή μεταβολή της συνάρτησης** $f(x, y)$, την οποία επιφέρει η απειροστή μεταβολή των ανεξάρτητων μεταβλητών.

Είναι φανερό πως, όταν η συνάρτηση $f(x, y)$ μένει αμετάβλητη, τότε

$$(3.30) \quad \eta(x, y) \partial_x f(x, y) + \xi(x, y) \partial_y f(x, y) = 0.$$

Δεν είναι δύσκολο ν' αποδείξει κανείς ότι, αυτή η συνθήκη δεν είναι μόνο αναγκαία, αλλά και ικανή για το μηδενισμό της αλλαγής μιας συνάρτησης κατά τον σημειακό μετασχηματισμό (3.13).

Παράδειγμα 3.4

α) Μια συνάρτηση $f(x, y)$ παραμένει αναλλοίωτη κατά τις μεταθέσεις (3.20) εάν και μόνον όταν

$$(3.31) \quad a f_x + b f_y = 0.$$

Αυτή η ΜΔΕ λύνεται εύκολα για δώσει

$$(3.32) \quad f(x, y) = F(bx - ay),$$

όπου $F(z)$ τυχαία διαφορίσιμη συνάρτηση.

β) Μια συνάρτηση $f(x, y)$ παραμένει αναλλοίωτη κατά τις αλλαγές κλίμακας (3.22) εάν και μόνον όταν

$$(3.33) \quad a x f_x + b y f_y = 0.$$

Άρα, η f θα πρέπει να είναι της μορφής

$$(3.34) \quad f(x, y) = F(x^{-b} y^a).$$

γ) Μια συνάρτηση $f(x, y)$ παραμένει αναλλοίωτη κατά τις στροφές γύρω από την αρχή των αξόνων εάν και μόνον όταν

$$(3.35) \quad -y f_x + x f_y = 0.$$

Άρα, η f θα πρέπει να είναι της μορφής

$$(3.36) \quad f(x, y) = F(x^2 + y^2).$$

Όταν, με τον ένα ή τον άλλο τρόπο, εντοπίσουμε μια ομάδα σημειακών μετασχηματισμών που αφήνουν κάποια ΜΔΕ αναλλοίωτη, ή όπως αλλιώς λέμε, μια *συμμετρία της εξίσωσης*, τότε μπορούμε αμέσως να κατασκευάσουμε τις αντίστοιχες λύσεις ομοιότητας. Στο παράδειγμα που ακολουθεί, εφαρμόζουμε αυτή τη μέθοδο εύρεσης λύσεων στις τρεις βασικές εξισώσεις που θα μελετήσουμε διεξοδικά στις υπόλοιπες σελίδες αυτού του βιβλίου.

Παράδειγμα 3.4

α) Η κυματική εξίσωση $u_{xx} - u_{yy} = 0$.

Αφού δεν περιέχει ρητά τις ανεξάρτητες μεταβλητές, η εξίσωση d' Alembert είναι αναλλοίωτη ως προς οποιαδήποτε μετάθεση των x, y . Ειδικότερα, η ΜΔΕ $u_{xx} - u_{yy} = 0$ μένει αμετάβλητη κατά τις μεταθέσεις (3.20).

Σύμφωνα, λοιπόν, με το αποτέλεσμα του μέρους (α) του προηγούμενου παραδείγματος, οι λύσεις της κυματικής εξίσωσης που είναι αναλλοίωτες ως προς τις μεταθέσεις (3.20) είναι της μορφής

$$(3.37) \quad u = F(bx - ay).$$

Η αντικατάσταση αυτής της έκφρασης στην κυματική εξίσωση οδηγεί αμέσως στη ΣΔΕ

$$(3.38) \quad (b^2 - a^2) F'' = 0.$$

Αν λοιπόν οι παράμετροι a, b είναι τέτοιες που $b^2 \neq a^2$, τότε $F(z) = c_1 z + c_2$ και οι λύσεις ομοιότητας της κυματικής εξίσωσης είναι της μορφής

$$(2.39) \quad u = c_1(bx - ay) + c_2.$$

Αντίθετα, όταν $b^2 = a^2$ ($\Leftrightarrow b = \pm|a|$), οι λύσεις ομοιότητας είναι της μορφής $u = F(\pm|a|x - ay)$.

Ισοδύναμα,

$$(3.40) \quad u = F(x \pm y).$$

β) Η εξίσωση της διάχυσης $u_y = u_{xx}$.

Όπως είδαμε νωρίτερα, ο μετασχηματισμός $(x, y) \rightarrow (s, t) = (\mu x, \mu^2 y)$ αφήνει την εξίσωση της διάχυσης αμετάβλητη. Για να δώσουμε σ' αυτό το μετασχηματισμό τη μορφή (2.13) που σέβεται την αρχική συνθήκη (2.14), τον γράφουμε σαν

$$(3.41) \quad (x, y) \rightarrow (s, t) = (e^\lambda x, e^{2\lambda} t).$$

Σύμφωνα, λοιπόν, με τα αποτελέσματα του μέρους (β) του τελευταίου παραδείγματος, μια συνάρτηση $u(x, y)$ θα παραμένει αναλλοίωτη κατά την αλλαγή κλίμακας (3.41), εάν και μόνο όταν είναι της μορφής $u(x, y) = F(x^{-2} y)$. Αφού η F είναι αυθαίρετη, ισοδύναμη προς την προηγούμενη είναι και η μορφή $u(x, y) = G(x y^{-1/2})$, την οποία θα προτιμήσουμε, γιατί διευκολύνει το δρόμο προς το τελικό αποτέλεσμα. Προφανώς, η (επίσης αυθαίρετη) G είναι η σύνθεση της F με τη συνάρτηση $g(x) = x^{-1/2}$.

Η αντικατάσταση της

$$(3.42) \quad u = G(xy^{-1/2}).$$

στην εξίσωση της διάχυσης $u_y = u_{xx}$ οδηγεί αμέσως στο εξής αποτέλεσμα:

$$(3.43) \quad -\frac{1}{2} x y^{-3/2} G'(xy^{-1/2}) = y^{-1} G''(xy^{-1/2}).$$

Ισοδύναμα,

$$(3.44) \quad G''(z) = -\frac{1}{2} z G'(z), \quad z := xy^{-1/2}.$$

Αυτή η ΣΔΕ γράφεται σαν

$$(3.45) \quad H'(z) = -\frac{1}{2} z H(z), \quad H(z) := G'(z).$$

Η τελευταία ολοκληρώνεται αμέσως για να δώσει

$$(3.46) \quad H(z) = c_1 e^{-z^2/4}.$$

Συνεπώς,

$$(3.47) \quad G(z) = c_1 \int e^{-z^2/4} dz + c_2.$$

Αυτή η λύση μπορεί να γραφτεί και στη μορφή

$$(3.48) \quad G(z) = C_1 \operatorname{erf}\left(\frac{z}{2}\right) + C_2,$$

όπου $\operatorname{erf} x$ η **συνάρτηση σφάλματος**, η οποία ορίζεται από τον τύπο

$$(3.49) \quad \operatorname{erf} x := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-s^2} ds.$$

Συνακόλουθα, οι λύσεις της εξίσωσης της διάχυσης που μένουν αναλλοίωτες ως προς τις αλλαγές κλίμακας (3.41) είναι της μορφής

$$(3.50) \quad u(x, y) = C_1 \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{y}}\right) + C_2.$$

Σ' αυτό το σημείο αξίζει να φέρουμε στην επιφάνεια μια σημαντική ιδιότητα της εξίσωσης της διάχυσης. Συγκεκριμένα, αν η συνάρτηση $u(x, y)$ είναι λύση της ΜΔΕ $u_y = u_{xx}$, τότε το ίδιο ισχύει και για την $u_x(x, y)$. Για να το αποδείξουμε, αρκεί να υπολογίσουμε την ∂_x της ίδιας της εξίσωσης.

Άρα, από τη λύση ομοιότητας $u(x, y) = \operatorname{erf}(x/2\sqrt{y})$ που μόλις βρήκαμε, παράγεται αμέσως και η λύση

$$(3.51) \quad \tilde{u}(x, y) = u_x(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \operatorname{erf}'\left(\frac{x}{2\sqrt{y}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi y}} e^{-\frac{x^2}{4y}}$$

Το μισό αυτής της λύσης, δηλαδή η συνάρτηση

(3.52)

$$K(x, y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi y}} e^{-\frac{x^2}{4y}}$$

ονομάζεται *θεμελιώδης λύση της εξίσωσης της διάχυσης*. Το λόγο θα τον μάθουμε αργότερα.

γ) Η εξίσωση Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

Η βασικότερη ελλειπτική εξίσωση δεν αλλάζει μορφή κατά τις στροφές γύρω από την αρχή των αξόνων x, y . Η επαλήθευση του γεγονότος ότι η εξίσωση Laplace έχει αυτή τη συμμετρία αφήνεται για άσκηση του αναγνώστη. Εδώ, θα περιοριστούμε στο να υπενθυμίσουμε ότι, η αντίστοιχη λύση ομοιότητας είναι της μορφής

$$(3.53) \quad u(x, y) = F(x^2 + y^2).$$

Η αντικατάσταση αυτής της έκφρασης στην $u_{xx} + u_{yy} = 0$ οδηγεί στη ΣΔΕ

$$(3.54) \quad z F''(z) + F'(z) = 0, \quad z := x^2 + y^2.$$

Άρα,

$$(3.55) \quad F(z) = C_1 \ln z + C_2$$

κι αυτό σημαίνει ότι

$$(3.56) \quad u(x, y) = C_1 \ln(x^2 + y^2) + C_2.$$

Αυτή δεν είναι άλλη από τη θεμελιώδη λύση της εξίσωσης Laplace, με την οποία ανοίξαμε τη συζήτησή μας σε τούτο το εδάφιο. ■

Ελπίζουμε ότι, η σύντομη εισαγωγή στις συμμετρίες των διαφορικών εξισώσεων που αναπτύξαμε παραπάνω είναι αρκετή για να καταδείξει τη σημασία αυτής της έννοιας. Γιατί, φάνηκε καθαρά ότι,

Πρώτον, οι λεγόμενες βασικές ή θεμελιώδεις λύσεις μιας ΜΔΕ είναι άρρηκτα δεμένες με τις συνεχείς ομάδες μετασχηματισμών που αφήνουν την εξίσωση αναλλοίωτη, δηλαδή, με τις συμμετρίες της.

Δεύτερο, ο λόγος που, από το άπειρο σύνολο των μεταμορφώσεων που είναι δυνατό να παραχθούν αλλάζοντας τις μεταβλητές, ξεχωρίζουν ορισμένες που συναντάει κανείς επανειλημμένα σε κάθε βιβλίο που διαπραγματεύεται το αντικείμενο των ΜΔΕ.

Το τελευταίο από τα παραδείγματα που αναλύσαμε είναι αντιπροσωπευτικό. Η μετάβαση στις πολικές συντεταγμένες κατά την ανάλυση της εξίσωσης Laplace υποβάλλεται (κι ορισμένες φορές επιβάλλεται) από εξής απλό γεγονός: Αυτές οι συντεταγμένες ορίζονται από τις τροχιές που ακολουθούν τα σημεία του Ευκλείδειου επίπεδου κατά τους μετασχηματισμούς που αποτελούν ομάδες συμμετρίας της εξίσωσης Laplace. Για τις στροφές, αυτοί είναι οι κύκλοι ακτίνας r με κέντρο την αρχή των αξόνων. Η γωνιακή μεταβλητή θ αντιστοιχεί στις ακτινικές ημιευθείες που διαγράφουν τα σημεία του επίπεδου κατά τους μετασχηματισμούς ομοιότητας $(x, y) \rightarrow (e^\lambda x, e^\lambda y)$. Όπως καταδειχνεται στην άσκ. (3.6), αυτή η ομάδα μετασχηματισμών είναι η δεύτερη από τις βασικές συμμετρίες της εξίσωσης Laplace.

Τα όσα παρουσιάσαμε σε τούτο το εδάφιο δεν αποτελούν παρά ένα μικρό δείγμα της λεγόμενης κατά συμμετρίες ανάλυσης των ΜΔΕ, την οποία θεμελίωσε ο Νορβηγός μαθηματικός Sophus Lie (Σόφους Λη) (1842-1899) στο τέλος του 19ου αιώνα. Η σημασία των μεθόδων που στηρίζονται στην έννοια της συμμετρίας σε όλα ενεξαιρέτως τα είδη των διαφορικών εξισώσεων, συνήθων και μερικών, γραμμικών και μη, αποδειχνεται και από το γεγονός ότι, στις αρχές του 21ου αιώνα, η κατά συμμετρίες ανάλυση των ΜΔΕ έχει αναπτυχθεί σε έναν από τους πιο δραστήριους και παραγωγικούς κλάδους της επιστήμης των μαθηματικών.

Ασκήσεις

3.1 α) Ας υποθεθεί ότι, η συνάρτηση $u(x, y)$ είναι λύση κλάσης $C^{m+1}(\Omega)$, $m \geq 1$, της ομογενούς, με σταθερούς συντελεστές, ΜΔΕ $a u_x + b u_y + u = 0$.

Δείχτε ότι, τότε, οι $u_x(x, y)$ και $u_y(x, y)$ αποτελούν λύσεις κλάσης $C^m(\Omega)$ ίδιας εξίσωσης.

β) Δείχτε ότι η παραπάνω ΜΔΕ δεν αλλάζει μορφή κατά τις μεταθέσεις των ανεξάρτητων μεταβλητών της.

3.2 Για κάθε μια από τις παρακάτω ΜΔΕ, να κατασκευαστούν οι λύσεις που παραμένουν αναλλοίωτες κατά τις μεταθέσεις

$$x \rightarrow \tilde{x} = x + \gamma \lambda, \quad y \rightarrow \tilde{y} = y + \delta \lambda,$$

όπου (γ, δ) τυχαίο ζευγάρι πραγματικών σταθερών.

(i) $u_x - 2 u_y = 0$, (ii) $u_x + 3 u_y = 0$, (iii) $u_x - u_y = u$, (iv) $3 u_x + u_y + 2 u = 0$.

3.3 α) Δείχτε ότι

(i) Η ΜΔΕ $u_x + u_y = u^2$ δεν αλλάζει μορφή κατά τις μεταθέσεις των ανεξάρτητων μεταβλητών της.

(ii) Αν η $u(x, y)$ είναι λύση κλάσης $C^2(\Omega)$ της παραπάνω εξίσωσης, δεν ισχύει το ίδιο και για τις $u_x(x, y)$ και $u_y(x, y)$.

β) Να κατασκευαστούν οι λύσεις της $u_x + u_y = u^2$ που παραμένουν αναλλοίωτες κατά τις μεταθέσεις της προηγούμενης άσκησης.

3.4 Για κάθε μια από τις παρακάτω εξισώσεις, να κατασκευαστούν οι λύσεις που παραμένουν αναλλοίωτες κατά τις μεταθέσεις των ανεξάρτητων μεταβλητών.

(i) $u_{xx} - u_{yy} = k u$, (ii) $u_{xx} + u_{yy} = k u$, (iii) $u_{xx} - u_y = k u$, $k \in \mathbb{R}$.

3.5 Να δειχτεί ότι, πραγματικά, μετασχηματισμός $(r, \theta) \rightarrow (x, y)$ που ορίζεται από τις σχέσεις

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad r > 0, \quad -\pi < \theta < \pi,$$

μετατρέπει την εξίσωση Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$ στην

$$r^2 U_{rr} + r U_r + U_{\theta\theta} = 0,$$

όπου

$$U(r, \theta) := u(r \cos \theta, r \sin \theta).$$

3.6 α) Να βρεθούν οι λύσεις της εξίσωσης Laplace που είναι ανεξάρτητες από τη γωνιακή μεταβλητή θ .

β) Να δειχτεί ότι η εξίσωση Laplace που είναι συμμετρική ως προς την ομάδα των σημειακών μετασχηματισμών $(x, y) \rightarrow (e^\lambda x, e^\lambda y)$. Να κατασκευαστούν οι λύσεις της εξίσωσης Laplace που παραμένουν αναλλοίωτες αυτή την ομάδα μετασχηματισμών να συγκριθούν μ' εκείνες του μέρους (α).

3.7 α) Ας υποθεθεί ότι, η συνάρτηση $u(x, y)$ είναι λύση κλάσης $C^{m+1}(\Omega)$, $m \geq 2$, της ομογενούς, με σταθερούς συντελεστές, ΜΔΕ

$$a u_{xx} + 2b u_{xy} + c u_{yy} + d u_x + e u_y + f u = 0.$$

Δείχτε ότι, τότε, οι $u_x(x, y)$ και $u_y(x, y)$ αποτελούν λύσεις κλάσης $C^m(\Omega)$ ίδιας εξίσωσης.

β) Γενικεύσετε το προηγούμενο αποτέλεσμα στις μερικές παραγώγους μεγαλύτερης τάξης.

3.8 α) Να επαληθευτεί ότι συνάρτηση

$$K(x, y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi y}} e^{-\frac{x^2}{4y}}, \quad x \in \mathbb{R}, y > 0,$$

αποτελεί λύση της εξίσωσης της διάχυσης $u_y = u_{xx}$.

β) Χωρίς αλγεβρικούς υπολογισμούς, δείχτε ότι το ίδιο ισχύει και για κάθε συνάρτηση της μορφής

$$u^{(s)}(x, y) = K(x-s, y) \equiv \frac{1}{\sqrt{4\pi y}} e^{-\frac{(x-s)^2}{4y}}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

γ) Υποθέτοντας ότι η συνάρτηση $f(s)$ είναι συνεχής και φραγμένη και πως

$$(\partial_y - \partial_x^2) \int_{-\infty}^{\infty} K(x-s, y) f(s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} (\partial_y - \partial_x^2)[(x-s, y) f(s)] ds, \quad (*)$$

δείχτε ότι η συνάρτηση

$$u(x, y) := \int_{-\infty}^{\infty} K(x-s, y) f(s) ds, \quad y > 0,$$

αποτελεί λύση της εξίσωσης $u_y = u_{xx}$.

Ερώτημα: Ποιες ιδιότητες αρκεί να έχει η συνάρτηση $K(x, y)$ ώστε να ισχύει η (*);

4. Το πρόβλημα αρχικών τιμών για την κυματική εξίσωση

Το πρόβλημα που συνήθως αντιμετωπίζουμε στο χώρο των ΜΔΕ δεν είναι το να βρούμε γενικού τύπου λύσεις μιας συγκεκριμένης εξίσωσης. Αντίθετα, εκείνο που μας ζητάνε είναι να βρούμε μια συνάρτηση που δεν είναι μόνο λύση της δοσμένης εξίσωσης, αλλά υπακούει και σε μια σειρά από πρόσθετους περιορισμούς.

Οι πρόσθετες απαιτήσεις συνήθως αφορούν τη συμπεριφορά της συνάρτησης-λύσης στο σύνορο ενός τμήματος του χώρου των ανεξάρτητων μεταβλητών. Από αυτή την άποψη, μπορούμε πάντα να τις αναφέρουμε ως *συνοριακές συνθήκες*. Ωστόσο, με βάση τη φυσική σημασία κάθε μιας από τις ανεξάρτητες μεταβλητές, οι πρόσθετες συνθήκες διακρίνονται συχνά σε *αρχικές* και *συνοριακές*. Γενικότερα, όλοι μαζί οι περιορισμοί που επιβάλλονται στη λύση της δοσμένης ΜΔΕ αναφέρονται και ως *συμπληρωματικές συνθήκες*.

Για δούμε την αφετηρία της πιο πάνω ορολογίας, ας θυμηθούμε αρχικά ότι, μια γραμμική ΣΔΕ της μορφής

$$(4.1) \quad x'' = F(t, x, x')$$

έχει ως γενική λύση μια διπαραμετρική οικογένεια συναρτήσεων του t , της μορφής $g(t, c_1, c_2)$. Έτσι, η επιλογή μιας συγκεκριμένης λύσης μπορεί να γίνει με την επιβολή δύο περιορισμών που καθορίζουν τις παραμέτρους c_1 και c_2 .

Ως συγκεκριμένο παράδειγμα, μπορούμε να θεωρήσουμε την *εξίσωση του αρμονικού ταλαντωτή*

$$(4.2) \quad x'' = -\omega^2 x.$$

Σ' αυτή την περίπτωση, η ανεξάρτητη μεταβλητή t αντιστοιχεί στο χρόνο. Με τη συνάρτηση $x(t)$ προσδιορίζεται η στιγμιαία θέση του σωμάτιου του οποίου η κίνηση υπακούει στο 2ο νόμο του Νεύτωνα, (4.2). Ένα ειδικότερο παράδειγμα ευθύγραμμης κίνησης που αντιστοιχεί στη ΣΔΕ (4.2) είναι η ταλάντωση ενός σωμάτιου που είναι προσδεμένο στην άκρη ενός ελατήριου.

Τότε, η θετική σταθερή ω παριστάνει την ποσότητα $\sqrt{k/m}$, όπου m η μάζα του σωμάτιου και k το μέτρο της ανελαστικότητας του ελατήριου.

Όπως είναι γνωστό, η γενική λύση της (4.2) μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$(4.3) \quad x = g(t, c_1, c_2) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t.$$

Ας υποθέσουμε όμως ότι, από το σύνολο των δυνατών κινήσεων που περιγράφει η διπαραμετρική οικογένεια λύσεων (4.3), εμείς θέλουμε να ξεχωρίσουμε εκείνη που λέει ότι, τη χρονική στιγμή $t = 0$, το σωμάτιο βρίσκεται στη θέση $x = a$ κι έχει ταχύτητα $x'(0) = b$. Αυτό σημαίνει ότι, θέλουμε να βρούμε τη λύση που πληροί τις συνθήκες

$$(4.4) \quad x(0) = a, \quad x'(0) = b,$$

όπου a, b συγκεκριμένες πραγματικές σταθερές, για παράδειγμα, $(a, b) = (1, 0)$. Τότε, ο συνδυασμός των (4.3) και (4.4) θα δώσει το ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$(4.5) \quad c_1 = a, \quad c_2 = \frac{b}{\omega}.$$

Επειδή αφορούν τη χρονική στιγμή $t = 0$, δηλαδή όταν πατάμε το κουμπί του χρονό-

μετρου, οι περιορισμοί (4.4) λέγονται *αρχικές συνθήκες*. Και το πρόβλημα της εύρεσης μιας λύσης της ΣΔΕ (4.2) που πληροί τις συνθήκες (4.4) αναφέρεται ως *πρόβλημα αρχικών τιμών*.

Το βασικό συμπέρασμα από την ανάλυση της ΣΔΕ (4.2) που μόλις παρουσιάσαμε και το οποίο σχετίζεται με ό,τι ακολουθεί είναι τούτο: Επειδή η ΣΔΕ (4.2) είναι δεύτερης τάξης, για να επιλεγεί μια συγκεκριμένη λύση της, είναι αναγκαίο να επιβληθούν δύο αρχικές συνθήκες. Επιπλέον, ο προκαθορισμός της τιμής της άγνωστης συνάρτησης, $x(t)$, και της παραγώγου της, $x'(t)$, σε κάποιο σημείο της ανεξάρτητης μεταβλητής αρκεί για να προσδιοριστεί μια λύση της (4.2) μονοσήμαντα.

Ας θεωρήσουμε τώρα την κυματική εξίσωση

$$(4.6) \quad c^2 u_{xx} - u_{tt} = 0,$$

όπου c μια θετική σταθερή με τη διάσταση της ταχύτητας. Κι ας θυμηθούμε ότι, η αντικατάσταση $y = ct$ φέρνει την (4.6) στη μορφή

$$(4.7) \quad u_{xx} - u_{yy} = 0,$$

που διευκολύνει την μαθηματική επεξεργασία της.

Η παραπάνω εξίσωση περιγράφει (και) τις μικρού πλάτους ταλαντώσεις μιας λεπτής τεντωμένης χορδής. Με βάση, λοιπόν, το ανάλογο της ΣΔΕ (4.2) για τον αρμονικό ταλαντωτή, περιμένουμε ότι ο προσδιορισμός μιας ειδικής λύσης της (4.7) και, άρα, η περιγραφή μιας συγκεκριμένης κίνησης της χορδής, απαιτεί την επιβολή δύο αρχικών συνθηκών, μιας που να ορίζει τη θέση και μιας που να ορίζει την ταχύτητα κάθε στοιχείου της χορδής τη στιγμή $t = 0$.

Αυτό το συμπέρασμα προκύπτει άμεσα κι από την ακόλουθη παρατήρηση. Θεωρούμε δύο τυχαίες συναρτήσεις F και G κλάσης C^2 . Τότε, όπως αποδείξαμε στο πρώτο εδάφιο αυτού του κεφάλαιου, η γενική λύση των (4.6)-(4.7) δίνεται από την έκφραση

$$(4.8) \quad u = F(x+y) + G(x-y) = F(x+ct) + G(x-ct).$$

Προφανώς, η (4.8) δεν προσδιορίζει την $u(x, t)$ επακριβώς. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι, τα στοιχεία της χορδής κινούνται στην κατεύθυνση z κι ότι, τη στιγμή $t = 0$, η χορδή έχει το σχήμα της καμπύλης $z = f(x)$, όπου $f(x)$ συγκεκριμένη ομαλή συνάρτηση, για παράδειγμα, η $f(x) = \exp(-x^2)$. Αυτό σημαίνει πως,

$$(4.9) \quad u(x, 0) = f(x).$$

Αυτή η υπόθεση (αρχική συνθήκη) συνεπάγεται ότι (βλ. την (4.8)),

$$(4.10) \quad F(x) + G(x) = f(x).$$

Είναι φανερό πως, για τον πλήρη προσδιορισμό των F και G , άρα και της $u(x, t)$, χρειαζόμαστε κι άλλη πληροφορία, πέρα από αυτή που μας δίνει η (4.10). Είναι το ίδιο φανερό ότι, η πρόσθετη πληροφορία δεν μπορεί να αφορά την $u_x(x, 0)$. Γιατί, αυτή η συνάρτηση είναι ήδη γνωστή: Η (4.9) συνεπάγεται ότι, $u_x(x, 0) = f'(x)$.

Γι' αυτό, υποθέτουμε πως, εκτός από το αρχικό σχήμα της χορδής, γνωρίζουμε και την αρχική ταχύτητα κάθε στοιχείου της, δηλαδή τη συνάρτηση $u_t(x, 0)$. Με άλλα λόγια,

$$(4.11) \quad u_y(x, 0) \equiv c^{-1} u_t(x, 0) = g(x),$$

όπου $g(x)$ γνωστή συνάρτηση.

Τώρα, ο συνδυασμός των (4.8) και (4.11) δίνει

$$(4.12) \quad u_y(x, 0) = F'(x) - G'(x) = g(x).$$

Από την άλλη, όπως ήδη αναφέραμε,

$$(4.13) \quad u_x(x, 0) = F'(x) + G'(x) = f'(x).$$

Άρα,

$$(4.14) \quad F'(x) = \frac{1}{2}[f'(x) + g(x)], \quad G'(x) = \frac{1}{2}[f'(x) - g(x)].$$

Αυτές οι σχέσεις ολοκληρώνονται αμέσως για να δώσουν

$$(4.15) \quad F(x) = \frac{1}{2}\left[f(x) + \int_a^x g(s) ds\right], \quad G(x) = \frac{1}{2}\left[f(x) - \int_a^x g(s) ds\right],$$

όπου a αυθαίρετη σταθερή. Το να είναι τα κάτω όρια των ολοκληρωμάτων ίδια επιβάλλεται από την (4.10).

Η αντικατάσταση των τύπων που μόλις βρήκαμε για τις συναρτήσεις $F(x)$ και $G(x)$ στην (4.8) δίνει το ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$(4.16) \quad \begin{aligned} u(x, y) &= \frac{1}{2}\left[f(x+y) + \int_a^{x+y} g(s) ds\right] + \frac{1}{2}\left[f(x-y) - \int_a^{x-y} g(s) ds\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[f(x+y) + f(x-y) + \int_{x-y}^{x+y} g(s) ds\right] \end{aligned}$$

Ισοδύναμα,

$$(4.17) \quad \boxed{u(x, t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct) + \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds\right]}$$

Από την κατασκευή της, η (4.17) αποτελεί λύση της κυματικής εξίσωσης που είναι σύμφωνη με τις αρχικές συνθήκες (4.9) και (4.11). Η παραπάνω λύση ονομάζεται **λύση (του) d'Alembert** και η ανάλυσή της θα μας απασχολήσει εκτενέστερα παρακάτω.

Προσωρινά, σημειώστε ότι,

α) Για να είναι η $u(x, t)$ που ορίζεται από την (4.17) κλάσης C^2 , πρέπει οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$, που περιγράφουν τα **αρχικά δοσμένα**, να είναι κλάσης C^2 και C^1 , αντίστοιχα.

β) Πουθενά δεν αναφέραμε το διάστημα ορισμού των $f(x)$ και $g(x)$. Προφανώς, αν θέλουμε η συνάρτηση $u(x, t)$ να περιγράφει την κίνηση μιας χορδής μήκους L , τότε η χωρική μεταβλητή x θα πρέπει να περιοριστεί σε ένα κλειστό διάστημα της μορφής $[a, b]$, όπου $b = a + L$.

Στις αμέσως επόμενες σελίδες θα δείξουμε ότι, η λύση d'Alembert μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή της συνάρτησης που περιγράφει επακριβώς την κίνηση μιας χορδής πεπερασμένου μήκους, σαν αυτές που μας χαρίζουν τη μελωδία της κιθάρας, το βιολιού, του πιάνου και κάθε άλλου έγχορδου μουσικού οργάνου. Προσωρινά, ωστόσο, θα υποθέσουμε ότι η μεταβλητή x διατρέχει όλη την πραγματική ευθεία, \mathbb{R} , κι ότι οι συναρτήσεις συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$, ανήκουν στις κλάσεις $C^2(\mathbb{R})$ και $C^1(\mathbb{R})$, αντίστοιχα.

Πάντως, και οι λύσεις με $-\infty < x < \infty$ δεν είναι άσχετες από φυσική άποψη. Γιατί περιγράφουν, για παράδειγμα, ηχητικά ή ηλεκτρομαγνητικά *επίπεδα κύματα* που διαδίδονται στην κατεύθυνση x του (άπειρου) Ευκλείδειου χώρου \mathbb{R}^3 . Αυτή η φυσική ερμηνεία προκύπτει με το ακόλουθο τρόπο: Τα κύματα που μόλις αναφέραμε, περιγράφονται από την *τριδιάστατη κυματική εξίσωση*, $c^2(U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}) - U_{tt} = 0$. Αν λοιπόν περιοριστούμε σε λύσεις αυτής της εξίσωσης που δεν εξαρτιώνται ρητά από τις συντεταγμένες y και z , αν δηλαδή υποθέσουμε ότι $U(x, y, z, t) = u(x, t)$, τότε η τριδιάστατη κυματική εξίσωση για τη συνάρτηση $U(x, y, z, t)$ ανάγεται στην *μονοδιάστατη κυματική εξίσωση*, $c^2 u_{xx} - u_{tt} = 0$, για τη συνάρτηση $u(x, t)$.

Παράδειγμα 4.1

Ας υποθέσουμε ότι το αρχικό σχήμα της (άπειρης) χορδής περιγράφεται από τη σχέση $z = (1 + x^2)^{-1}$ κι ότι η αρχική ταχύτητα όλων των στοιχείων της είναι μηδενική. Αυτό σημαίνει ότι η αρχική κατάσταση της χορδής ορίζεται από τις συνθήκες

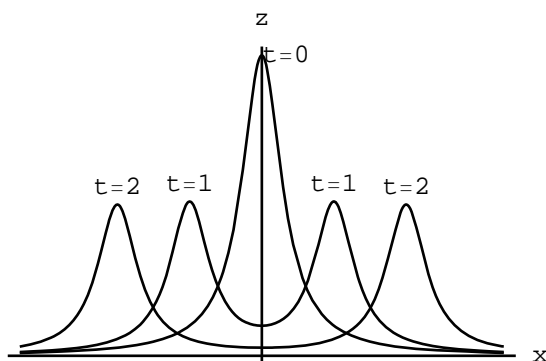
$$(4.18) \quad u(x, 0) = \frac{1}{1+x^2}, \quad u_t(x, 0) = 0.$$

Σύμφωνα με τον τύπο (4.17), η κίνηση της χορδής κάθε στιγμή $t > 0$ περιγράφεται από τη συνάρτηση

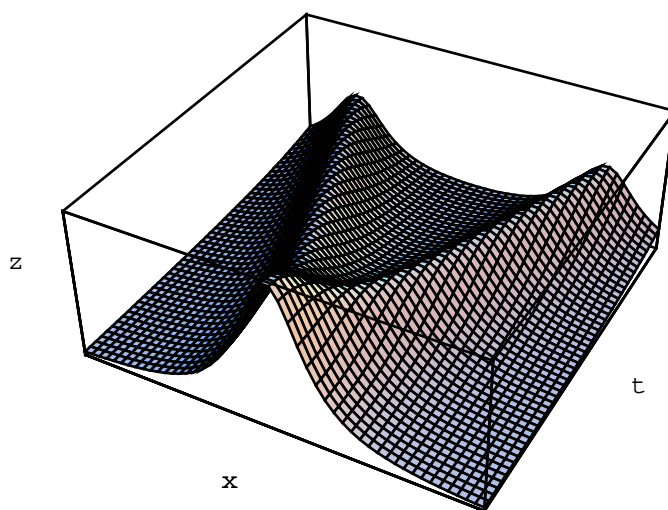
$$(4.19) \quad u(x, t) = \frac{1}{2} \frac{1}{1+(x+ct)^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{1+(x-ct)^2}.$$

Είναι φανερό ότι, κάθε στιγμή $t > 0$, και οι δύο όροι αυτής της λύσης παριστάνουν μια καμπύλη του επιπέδου xz , ποιοτικά ίδια μ' εκείνη που έδινε το αρχικό σχήμα της χορδής. Με την εξής μόνο διαφορά. Η κορυφή της καμπύλης που αντιστοιχεί στον πρώτο όρο βρίσκεται στη θέση $x = -ct$. Αντίθετα, η κορυφή της καμπύλης που αντιστοιχεί στον δεύτερο όρο βρίσκεται στη θέση $x = ct$. Επιπλέον, το μέγιστο κάθε μιας από αυτές τις καμπύλες είναι το μισό της αρχικής. Άρα, από φυσική άποψη, ο πρώτος όρος περιγράφει έναν παλμό που κινείται προς τ' αριστερά (προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα x) με μεταχύτητα μέτρου c . Ανάλογα, ο δεύτερος όρος αντιστοιχεί σ' έναν παλμό του ίδιου σχήματος που κινείται με ταχύτητα c προς τα δεξιά. Και οι δύο τους έχουν το ίδιο σχήμα μ' εκείνο που είχε αρχικά η χορδή και πλάτος το μισό του αρχικού.

Στο Σχ. 4.1 δείχνουμε το σχήμα που είχε αρχικά η χορδή και δύο υστερότερα στιγμιότυπα. Η εξέλιξη της κατάστασης της χορδής φαίνεται ακόμα πιο παραστατικά στο Σχ. 4.2. Το δεύτερο παριστάνει την ολοκληρωτική επιφάνεια της μονοδιάστατης κυματικής εξίσωσης που ορίζει το γράφημα, $z = u(x, t)$, της λύσης (4.19).



Σχ. 4.1. Το αρχικό σχήμα, $z = (1 + x^2)^{-1}$, της χορδής και η διαμόρφωσή της κατά τις χρονικές στιγμές $t = 1$ και $t = 2$, για $c = 1$. (Οι μονάδες μέτρησης είναι αυθαίρετες).



Σχ. 4.2. Το γράφημα της λύσης (4.19), για $c = 1$.

Παράδειγμα 4.2

Ας υποθέσουμε τώρα ότι, τη χρονική στιγμή $t = 0$, όλα τα στοιχεία της χορδής βρίσκονται πάνω στον άξονα x , αλλά, εξαιτίας μιας προηγούμενης διαταραχής, έχουν αποκτήσει ταχύτητα. Αν αυτή η ταχύτητα περιγράφεται από τη συνάρτηση $v(x) = (1 + x^2)^{-1}$, τότε, η αρχική κατάσταση της χορδής ορίζεται από τις συνθήκες

$$(4.20) \quad u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \frac{1}{1+x^2}.$$

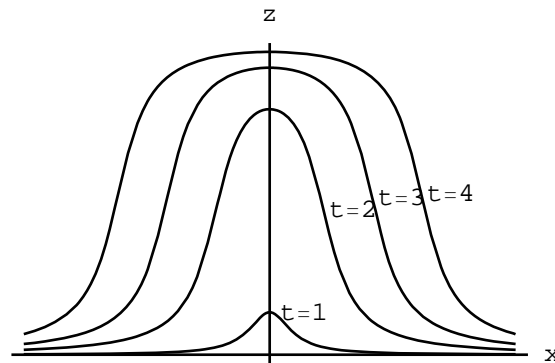
Σύμφωνα με τον τύπο d'Alembert (4.17), η κίνηση της χορδής σε τούτη την περίπτωση περιγράφεται από τη συνάρτηση

$$(4.21) \quad u(x, t) = \frac{1}{2} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v(s) ds = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} v(s) ds$$

$$= \frac{1}{2c} \tan^{-1}(x+ct) - \frac{1}{2c} \tan^{-1}(x-ct).$$

Όπως φαίνεται και στα επόμενα δύο σχήματα, η περίπτωση που εξετάζουμε τώρα είναι αρκετά διαφορετική από την προηγούμενη. Σαν αποτέλεσμα της μη μηδενικής ταχύτητας που είχαν τη στιγμή $t = 0$, τα στοιχεία της χορδής αρχίζουν ν' απομακρύνονται από τον άξονα x , στην εγκάρσια κατεύθυνση z . Ταχύτερα απομακρύνονται τα στοιχεία που βρίσκονταν στη γειτονιά του σημείου $x = 0$, αφού η συνάρτηση $u(x)$ παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο $x = 0$. Αυτά συμπαρασύρουν κι εκείνα που είχαν μικρότερη αρχική ταχύτητα, με τρόπο ώστε όλα τα στοιχεία της χορδής, δεξιά κι αριστερά του σημείου $x = 0$, να τείνουν να πάρουν την ίδια θέση, που απέχει $z_{\max} = \pi/2c$ από την αρχική τους.

Αξίζει, τώρα, να παρατηρήσουμε το εξής: Κάθε χρονική στιγμή $t > 0$, μπορούμε να διακρίνουμε μια ζώνη πλάτους $2ct$ με κέντρο το σημείο $x = 0$, η οποία περιλαμβάνει τα στοιχεία της χορδής που έχουν απομακρυνθεί αρκετά από την αρχική τους θέση, $z = 0$. Έξω από αυτή τη ζώνη βρίσκονται τα στοιχεία της χορδής που δεν τα έχει φτάσει ακόμη το ... τσουνάμι. Αυτό φαίνεται καθαρά στο Σχ. 4.3.



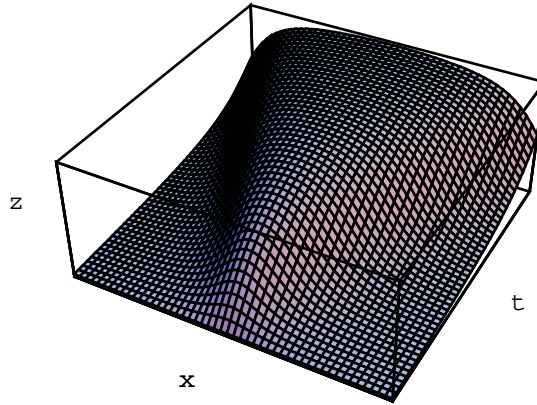
Σχ. 4.3. Τέσσερα στιγμιότυπα από την εξέλιξη της χορδής που αντιστοιχεί στη λύση (4.21).

Βέβαια, η πιο πάνω εξέλιξη του σχήματος της χορδής συνάγεται αναλυτικά κι από τον τύπο (4.21). Συγκεκριμένα, όταν το $|x|$ είναι πολύ μεγαλύτερο από το ct , όταν δηλαδή $|x| \gg ct$, τότε $\tan^{-1}(x \pm ct) \simeq \tan^{-1}(x)$. Άρα, ο τύπος (4.21) γίνεται

$$(4.22) \quad u(x, t) \simeq \frac{1}{2c} \tan^{-1}(x) - \frac{1}{2c} \tan^{-1}(x) \simeq 0, \quad |x| \gg ct.$$

Χοντρικά, τα σημεία $x = -ct$ και $x = ct$ χωρίζουν την κεντρική ζώνη από τις δύο περιοχές, στις οποίες τα στοιχεία της χορδής παραμένουν ακόμα στην αρχική τους θέση. Συνεπώς, μπορούμε να πούμε ότι, υπάρχουν δύο "μέτωπα του κύματος" που κινούνται με ταχύτητα c προς τ' αριστερά και τα δεξιά, αντίστοιχα.

Όταν εξετάσουμε την κίνηση της χορδής που μόλις περιγράψαμε από τη σκοπιά του επίπεδου xt , τότε τα τρία διαστήματα $x < -ct$, $-ct < x < ct$ και $x > ct$ στα οποία χωρίζεται ο άξονας x κάθε χρονική στιγμή $t > 0$, "μεταφράζονται" στις τρεις περιοχές $x < -ct$, $-ct < x < ct$ και $x > ct$ του τμήματος $t > 0$ του επίπεδου xt . Η εσωτερική τριγωνική περιοχή $-ct < x < ct$, $t > 0$, είναι αυτή, πάνω από την οποία βρίσκεται το τριγωνικό βουναλάκι του Σχ. 4.4.



Σχ. 4.4. Το γράφημα της λύσης (4.21).

Παράδειγμα 4.3

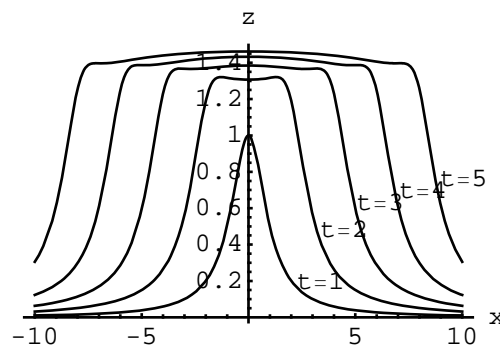
Η εξίσωση $c^2 u_{xx} - u_{tt} = 0$ είναι γραμμική και ομογενής. Κατά συνέπεια, όταν οι συναρτήσεις $u^{(1)}(x, y)$, $u^{(2)}(x, y)$ είναι λύσεις αυτής της εξίσωσης, το ίδιο ισχύει και για κάθε γραμμικό συνδυασμό τους, δηλαδή για κάθε συνάρτηση της μορφής $u(x, y) = c_1 u^{(1)}(x, y) + c_2 u^{(2)}(x, y)$, όπου c_1, c_2 τυχαίες σταθερές. Ειδικότερα, το άθροισμα

$$(4.23) \quad u(x, t) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1+(x+ct)^2} + \frac{1}{1+(x-ct)^2} + \frac{1}{c} \tan^{-1}(x+ct) - \frac{1}{c} \tan^{-1}(x-ct) \right]$$

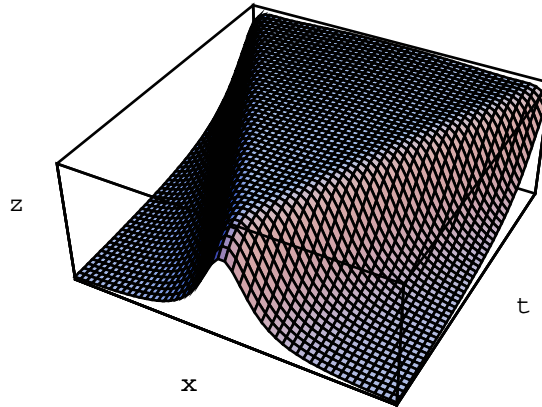
των λύσεων που μελετήσαμε στα δύο προηγούμενα παραδείγματα αποτελεί λύση του προβλήματος Cauchy με αρχικές συνθήκες

$$(4.24) \quad u(x, 0) = \frac{1}{1+x^2}, \quad u_t(x, 0) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Το αποτέλεσμα αυτής της "υπέρθησης" των λύσεων που εξετάσαμε στα προηγούμενα παραδείγματα φαίνεται στη δύο σχήματα που ακολουθούν.



Σχ. 4.5. Στιγμιότυπα της λύσης (4.23).



Σχ. 4.6. Το γράφημα της λύσης (4.23) που αντιστοιχεί στις μη ομογενείς αρχικές συνθήκες $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 1 / (1 + x^2)$.

Ασκήσεις

4.1 Να βρεθεί η λύση της εξίσωσης $c^2 u_{xx} - u_{tt} = 0$, για κάθε μια από τις ακόλουθες αρχικές συνθήκες.

(i) $u(x, 0) = f(x) := \exp[-(x-3)^2]$, $u_t(x, 0) = 0$, $-\infty < x < \infty$.

(ii) $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = g(x) := (x+3)[(x+3)^2 + 1]^{-3}$, $-\infty < x < \infty$.

(iii) $u(x, 0) = f(x)$, $u_t(x, 0) = g(x)$, $-\infty < x < \infty$.

Για κάθε περίπτωση ξεχωριστά, να κατασκευαστούν δύο γραφικές παραστάσεις, μία που να δείχνει στιγμιότυπα της λύσης $u(x, t)$ και μία που να παριστάνει το γράφημα της $u(x, t)$.

4.2 Να βρεθεί η σχέση ανάμεσα στις συναρτήσεις των αρχικών δοσμένων $f(x)$ και $g(x)$ η οποία εξασφαλίζει ότι η λύση d'Alembert παριστάνει έναν κυματικό παλμό που κινείται προς μια κατεύθυνση μόνο.

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \left[f(x+y) + f(x-y) + \int_{x-y}^{x+y} g(s) ds \right]$$

$$u(\eta, \xi) = \frac{1}{2} \left[f(\eta) + f(\xi) + \int_{\xi}^{\eta} g(s) ds \right]$$

$$\partial_{\eta} u(\eta, \xi) = \frac{1}{2} [f'(\eta) + g(\eta)], \quad \partial_{\xi} u(\eta, \xi) = \frac{1}{2} [f'(\xi) - g(\xi)]$$

$$f'(x) = \pm g(x).$$

4.3 Να βρεθεί η λύση της εξίσωσης $c^2 u_{xx} - u_{tt} = 0$, για κάθε μια από τις ακόλουθες αρχικές συνθήκες.

(i) $u(x, 0) = f(x) := [(x-2)^2 + 1]^{-1}$, $u_t(x, 0) = 0$, $-\infty < x < \infty$.

(ii) $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = g(x) := f'(x)$, $-\infty < x < \infty$.

$$(iii) u(x, 0) = f(x), u_t(x, 0) = g(x), -\infty < x < \infty.$$

Για κάθε περίπτωση ξεχωριστά, να κατασκευαστούν δύο γραφικές παραστάσεις, μία που να δείχνει στιγμιότυπα της λύσης $u(x, t)$ και μία που να παριστάνει το γράφημα της $u(x, t)$.

4.5 Να βρεθεί η λύση της εξίσωσης $c^2 u_{xx} - u_{tt} = 0$, για κάθε μια από τις ακόλουθες αρχικές συνθήκες.

$$(i) u(x, 0) = f(x) := \exp[-(x+3)^2], u_t(x, 0) = 0, -\infty < x < \infty.$$

$$(ii) u(x, 0) = 0, u_t(x, 0) = g(x) := -f'(x), -\infty < x < \infty.$$

$$(iii) u(x, 0) = f(x), u_t(x, 0) = g(x), -\infty < x < \infty.$$

Για κάθε περίπτωση ξεχωριστά, να κατασκευαστούν δύο γραφικές παραστάσεις, μία που να δείχνει στιγμιότυπα της λύσης $u(x, t)$ και μία που να παριστάνει το γράφημα της $u(x, t)$.

5. Το γενικότερο πρόβλημα Cauchy

Όπως είδαμε στο προηγούμενο εδάφιο, η λύση d'Alembert προσδιορίστηκε πλήρως από τις τιμές της άγνωστης συνάρτησης, u , και της μερικής παραγώγου της, u_y , κατά μήκος της ευθείας $y = 0$ του επίπεδου x, y . Μάλιστα, όπως θ' αποδειχτεί αργότερα, η πιο πάνω λύση της κυματικής εξίσωσης είναι και μοναδική. Η παρατήρηση ότι, η u_y είναι η παράγωγος της u στην εγκάρσια προς τον άξονα x κατεύθυνση, οδηγεί αμέσως στο ακόλουθο ερώτημα: Θα είχαμε το ίδιο αποτέλεσμα, δηλαδή ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης, αν οι αντίστοιχες πληροφορίες είχαν δοθεί κατά μήκος μιας τυχαίας καμπύλης Γ του επίπεδου x, y ;

Προτού ξεκινήσουμε την αναζήτηση της απάντησης στο ερώτημα που μόλις θέσαμε, θα σημειώσουμε το εξής: Το να γνωρίζουμε, κατά μήκος μιας ομαλής καμπύλης, τις τιμές της συνάρτησης u και της παραγώγου της στην εγκάρσια προς την καμπύλη κατεύθυνση είναι ισοδύναμο με το να γνωρίζουμε την u και τις πρώτες παραγώγους της, u_x και u_y .

Για ν' αποδείξουμε αυτό τον ισχυρισμό, ας υποθέσουμε ότι η καμπύλη Γ ορίζεται παραμετρικά από τις σχέσεις

$$(5.1) \quad x = X(s), \quad y = Y(s), \quad s \in I,$$

όπου I κάποιο διάστημα της πραγματικής ευθείας, και X, Y γνωστές ομαλές συναρτήσεις. Ας υποθέσουμε επιπλέον ότι, κατά μήκος της Γ , έχουν προκαθοριστεί οι τιμές των συναρτήσεων u, u_x και u_y . Δηλαδή,

$$(5.2) \quad u(X(s), Y(s)) = h(s), \quad u_x(X(s), Y(s)) = p(s), \quad u_y(X(s), Y(s)) = q(s),$$

Αν, λοιπόν, θέσουμε

$$(5.3) \quad \psi(s) := u(X(s), Y(s)),$$

τότε από τον κανόνα της αλυσίδας έπεται ότι

$$(5.4) \quad \psi'(s) = u_x(X(s), Y(s)) X'(s) + u_y(X(s), Y(s)) Y'(s).$$

Έτσι καταλήγουμε στο πρώτο μας συμπέρασμα: Αν ως αρχικά δοσμένα θεωρήσουμε τις τρεις συναρτήσεις $h(s), p(s)$ και $q(s)$, τότε αυτές δεν μπορεί να επιλέγονται τελείως αυθαίρετα. Οφείλουν να πληρούν τη **συνθήκη συμβατότητας ή λωρίδας**

$$(5.5) \quad p(s) X'(s) + q(s) Y'(s) = h'(s).$$

Από την άλλη, το εφαπτόμενο στην καμπύλη Γ διάνυσμα ορίζεται από το ζευγάρι $\mathbf{v}(s) = (X'(s), Y'(s))$. Άρα το $\mathbf{n}(s) = (-Y'(s), X'(s))$ είναι κάθετο προς αυτήν: $\mathbf{v}(s) \cdot \mathbf{n}(s) = 0$. Έτσι, η παράγωγος της $u(x, y)$ στην εγκάρσια προς τη Γ κατεύθυνση δίνεται από τη συνάρτηση

$$(5.6) \quad \chi(s) := \mathbf{n} \cdot \nabla u(X(s), Y(s)) = -u_x(X(s), Y(s)) Y'(s) + u_y(X(s), Y(s)) X'(s).$$

Συνεπώς, η εγκάρσια παράγωγος μπορεί να θεωρείται γνωστή από τη στιγμή που έχει δοθεί η καμπύλη Γ και οι πρώτες παράγωγοι της $u(x, y)$ κατά μήκος της Γ . Γιατί, η (5.6) μας λέει ότι

$$(5.7) \quad \chi(s) = -p(s) Y'(s) + q(s) X'(s).$$

Αντίστροφα, αν δοθούν οι συναρτήσεις $h(s)$ και $\chi(s)$, τότε οι σχέσεις (5.5) και (5.7) αποτελούν ένα γραμμικό σύστημα που είναι επιλύσιμο ως προς το ζευγάρι $(p(s), q(s))$. Κι ο λόγος είναι απλός: Η ορίζουσα του πίνακα των συντελεστών του παραπάνω συστήματος είναι ίση με $X'^2(s) + Y'^2(s)$ και άρα δε μηδενίζεται ποτέ.

Τώρα, πλέον, μπορούμε να επιστρέψουμε στο αρχικό μας ερώτημα και, γενικεύοντάς το, να το διατυπώσουμε στην ακόλουθη μορφή: Υπάρχει λύση της ΜΔΕ

$$(5.8) \quad a u_{xx} + 2b u_{xy} + c u_{yy} = D(x, y, u, u_x, u_y),$$

όπου a, b, c και D δοσμένες ομαλές συναρτήσεις των x, y, u, u_x και u_y , η οποία (λύση) συμφωνεί με τις συνθήκες (5.2);

Με άλλα λόγια, θέλουμε να αναλύσουμε το **πρόβλημα Cauchy** για όλες τις σχεδόν γραμμικές ΜΔΕ δεύτερης τάξης, όταν η άγνωστη συνάρτηση είναι δύο μόνο μεταβλητών. Προφανώς, τα συμπεράσματά μας θα καλύπτουν και το πρόβλημα Cauchy για κάθε γραμμική ΜΔΕ στον \mathbb{R}^2 .

Είναι φανερό ότι, το ερώτημα που έχουμε θέσει μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής: Όταν γνωρίζουμε τις συναρτήσεις $(h(s), p(s), q(s))$, μπορούμε να υπολογίσουμε και τις παραγώγους ανώτερης τάξης της άγνωστης συνάρτησης $u(x, y)$ κατά μήκος της καμπύλης Γ ; Αν η απάντηση σε αυτό το ερώτημα είναι θετική, τότε μπορούμε να ελπίζουμε ότι, το αντίστοιχο ανάπτυγμα Taylor θα συγκλίνει σε μια γειτονιά της καμπύλης Γ και θα ορίζει τη λύση του προβλήματος Cauchy.

Βέβαια, ο υπολογισμός των παραγώγων δεύτερης και μεγαλύτερης τάξης της άγνωστης συνάρτησης $u(x, y)$ δεν μπορεί να στηριχτεί παρά στην ίδια τη ΜΔΕ που προσπαθούμε να λύσουμε. Γι' αυτό στρεφόμαστε πλέον στην (5.8) και σημειώνουμε αρχικά ότι, κατά μήκος της καμπύλης Γ , η παραπάνω εξίσωση ανάγεται στη σχέση

$$(5.9) \quad \alpha(s) \rho(s) + 2\beta(s) \sigma(s) + \gamma(s) \tau(s) = \delta(s).$$

Προφανώς, στην (5.9) οι συναρτήσεις $\alpha(s), \beta(s), \gamma(s)$ και $\delta(s)$ προκύπτουν από τις a, b, c και D , όταν τα ορίσματα των τελευταίων αντικατασταθούν από τις αντίστοιχες συναρτήσεις. Για παράδειγμα,

$$(5.10) \quad \alpha(s) := a(X(s), Y(s), h(s), p(s), q(s)).$$

Ανάλογα,

$$(5.11) \quad \rho(s) := u_{xx}(X(s), Y(s)), \quad \sigma(s) := u_{xy}(X(s), Y(s)), \quad \tau(s) := u_{yy}(X(s), Y(s)).$$

Από την άλλη μεριά, η εφαρμογή του κανόνα της αλυσίδας στις συναρτήσεις $u_x(X(s), Y(s))$ και $u_y(X(s), Y(s))$ οδηγεί αμέσως στις σχέσεις

$$(5.12) \quad p'(s) = \rho(s) X'(s) + \sigma(s) Y'(s),$$

και

$$(5.13) \quad q'(s) = \sigma(s) X'(s) + \tau(s) Y'(s),$$

αντίστοιχα. Αυτές δεν είναι παρά συνθήκες συμβατότητας, ανάλογες προς την (5.5).

Οι σχέσεις συμβατότητας (5.9), (5.12) και (5.13) μπορεί να ιδωθούν ως ένα γραμμικό

σύστημα για την τριάδα (ρ, σ, τ) . Συνεπώς, αν η αντίστοιχη ορίζουσα

$$(5.14) \quad \det \begin{pmatrix} \alpha(s) & 2\beta(s) & \gamma(s) \\ X'(s) & Y'(s) & 0 \\ 0 & X'(s) & Y'(s) \end{pmatrix} = \alpha(s)[Y'(s)]^2 - 2\beta(s)X'(s)Y'(s) + \gamma(s)[X'(s)]^2$$

δε μηδενίζεται, τότε η τριάδα (ρ, σ, τ) , δηλαδή οι παράγωγοι δεύτερης τάξης της u , μπορεί να υπολογιστεί από τις ήδη γνωστές $\alpha, \beta, \gamma, \delta, X', Y', p'$ και q' .

Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί και για τις παραγώγους τάξης $n \geq 3$ της u κατά μήκος της Γ . Αν προχωρήσει απρόσκοπτα, θα μας επιτρέψει να υπολογίσουμε τους συντελεστές ενός αναπτύγματος Taylor για την άγνωστη συνάρτηση u με κέντρο οποιοδήποτε σημείο της Γ και να ελπίζουμε ότι, με αυτό τον τρόπο, θα οδηγηθούμε σε λύση του προβλήματος Cauchy.

Αντίθετα, όταν η ορίζουσα (5.14) μηδενίζεται, όταν δηλαδή

$$(5.15) \quad \alpha(s)[Y'(s)]^2 - 2\beta(s)X'(s)Y'(s) + \gamma(s)[X'(s)]^2 = 0,$$

τότε υπάρχουν δύο πιθανότητες. Η πρώτη είναι οι δεύτερης τάξης παράγωγοι της u να μη μπορεί να υπολογιστούν με βάση την ίδια τη ΜΔΕ και τα αρχικά δοσμένα. Τότε, το πρόβλημα Cauchy δεν έχει λύση. Το άλλο που μπορεί να συμβεί, είναι το εξής: Οι ήδη γνωστές ποσότητες $h(s), p(s), p(s)$ ικανοποιούν κάποια επιπλέον σχέση που επιτρέπει τον υπολογισμό των δεύτερης τάξης παραγώγων, αλλά όχι μονοσήμαντα. Σ' αυτή την περίπτωση, λύση του προβλήματος Cauchy υπάρχει, αλλά δεν καθορίζεται μονοσήμαντα από τα αρχικά δοσμένα.

Μια καμπύλη Γ κατά μήκος της οποίας ισχύει η (5.15) ονομάζεται **χαρακτηριστική καμπύλη** της ΜΔΕ (5.8).

Για να πάρουμε μια πρώτη γεύση της σημασίας των χαρακτηριστικών καμπυλών, θα καταγράψουμε χωρίς απόδειξη ένα θεώρημα που δίνει μερική απάντηση στο ερώτημα που εγείραμε νωρίτερα:

Θεώρημα 5.1

Αν οι συντελεστές είναι αναλυτικές συναρτήσεις, και η αρχική καμπύλη Γ δεν είναι χαρακτηριστική, τότε υπάρχει κάποια γειτονιά της Γ , όπου, η σειρά την οποία κατασκευάζουμε με τον παραπάνω τρόπο συγκλίνει σε μια συνάρτηση που αποτελεί λύση του προβλήματος Cauchy.

Σημείωση. Υπενθυμίζουμε ότι μια συνάρτηση $f(x)$ ονομάζεται **αναλυτική** στο ανοιχτό διάστημα I του \mathbb{R} αν είναι κλάσης $C^\infty(\mathbb{R})$ και, για κάθε σημείο $a \in I$, υπάρχει ένα ανοιχτό διάστημα $I_a \subset I$ στο οποίο η $f(x)$ γράφεται ως συγκλίνουσα σειρά της μορφής $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$.

■

Ας παρατηρήσουμε τώρα ότι, η συνθήκη (5.15) μπορεί να γραφτεί σαν

$$(5.16) \quad \alpha(s)n_1^2(s) + 2\beta(s)n_1(s)n_2(s) + \gamma(s)n_2^2(s) = 0,$$

όπου $n_1(s), n_2(s)$ οι δύο συνιστώσες του εγκάρσιου διανύσματος $\mathbf{n}(s) = (-Y'(s), X'(s))$. Αυτή η παρατήρηση οδηγεί αμέσως σε μιαν άλλη περιγραφή των χαρακτηριστικών καμπυλών, η οποία συνδέει την ανάλυση του προβλήματος Cauchy με τις κανονικές μορφές που μελετήσαμε στα Εδάφια IV-2,3.

Συγκεκριμένα, ας υποθέσουμε ότι η Γ είναι μία από τις ισοσταθμικές καμπύλες κάποιας ομαλής συνάρτησης $\Phi(x, y)$. Τότε, το μοναδιαίο, κάθετο στην Γ διάνυσμα ορίζεται από την κλίση της $\Phi(x, y)$. Συγκεκριμένα,

$$(5.17) \quad \mathbf{n} = \frac{1}{|\nabla\Phi|} \nabla\Phi \equiv \frac{1}{\sqrt{\Phi_x^2 + \Phi_y^2}} (\Phi_x, \Phi_y).$$

Κατά συνέπεια, η συνθήκη (5.16) παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$(5.18) \quad a \Phi_x^2 + 2 b \Phi_x \Phi_y + c \Phi_y^2 = 0.$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι, η ΜΔΕ της μορφής (5.8) που μας ενδιαφέρει είναι η ημι-γραμμική. Τότε, οι συντελεστές του κύριου μέρους της είναι γνωστές συναρτήσεις των x, y . Στο ανοιχτό σύνολο V όπου ο συντελεστής $a(x, y)$ δε μηδενίζεται, η συνθήκη γράφεται (5.18) σαν

$$(5.19) \quad a(\Phi_x + \lambda_+ \Phi_y)(\Phi_x + \lambda_- \Phi_y) = 0,$$

όπου

$$(5.20) \quad \lambda_{\pm} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a},$$

Όταν $b^2 - ac > 0$, $\forall (x, y) \in V$, τότε οι συναρτήσεις λ_{\pm} είναι διακριτές και η (5.19) επιδέχεται δύο λύσεις. Αν τις ονομάσουμε $S(x, y)$ και $T(x, y)$, τότε αυτές ορίζονται από τις λύσεις των γραμμικών ΜΔΕ πρώτης τάξης

$$(5.21) \quad S_x + \lambda_+ S_y = 0$$

και

$$(5.22) \quad T_x + \lambda_- T_y = 0,$$

αντίστοιχα.

Όταν, $b^2 - ac = 0$, $\forall (x, y) \in V$, τότε $\lambda_+ = \lambda_- = \lambda \equiv b/a$ και η (5.19) επιδέχεται μόνο μία λύση. Αν την ονομάσουμε $T(x, y)$, τότε αυτή ορίζεται από τη ΜΔΕ

$$(5.23) \quad T_x + \lambda T_y = 0.$$

Τέλος, όταν, $b^2 - ac < 0$, $\forall (x, y) \in V$, τότε οι λ_{\pm} είναι μιγαδικές και η (5.19) δεν επιδέχεται πραγματικές λύσεις.

Συνολικά, έχουμε αποδείξει το ακόλουθο

Θεώρημα 5.2

Μια ημιγραμμική ΜΔΕ της μορφής (5.8) έχει χαρακτηριστικές καμπύλες μόνο όταν είναι παραβολικού ή υπερβολικού τύπου. Αν είναι παραβολική, έχει μία μόνο οικογένεια χαρακτηριστικών, τις ισοσταθμικές καμπύλες της συνάρτησης $T(x, y)$ που ορίζεται από τη ΜΔΕ (5.23). Αν είναι υπερβολική, έχει δύο διακριτές οικογένειες χαρακτηριστικών, τις ισοσταθμικές καμπύλες των συναρτήσεων $S(x, y)$ και $T(x, y)$, που ορίζονται από τις ΜΔΕ (5.21) και (5.22), αντίστοιχα.

Συνακόλουθα, αν s, t είναι οι συντεταγμένες που ορίζονται από τις σχέσεις $s = S(x, y)$, $t = T(x, y)$ και στις οποίες οι υπερβολικές και παραβολικές ΜΔΕ (5.8) παίρνουν την κανονική μορφή $u_{st} = H(s, t, u, u_s, u_t)$ και $u_{ss} = H(s, t, u, u_s, u_t)$, αντίστοιχα, τότε, οι χαρακτηριστικές καμπύλες αυτών των εξισώσεων αποτελούνται από τις ευθείες $s = \text{σταθ.}$, $t = \text{σταθ.}$ του επίπεδου st και τις εικόνες αυτών των ευθειών στο επίπεδο xy .

Παράδειγμα 5.1

(i) Η κυματική εξίσωση $u_{xx} - u_{yy} = 0$ είναι υπερβολική και μετασχηματίζεται στην $U_{st} = 0$ στις συντεταγμένες $s = x + y$, $t = x - y$. Άρα, όταν βρίσκεται στη μορφή $U_{st} = 0$, οι χαρακτηριστικές της κυματικής εξίσωσης είναι οι ευθείες $s = \text{σταθ.}$ και $t = \text{σταθ.}$, που είναι παράλληλες προς τους άξονες t και s , αντίστοιχα. Αντίθετα, όταν βρίσκεται στη μορφή $u_{xx} - u_{yy} = 0$, οι χαρακτηριστικές της κυματικής εξίσωσης είναι οι ευθείες $x + y = \text{σταθ.}$ και $x - y = \text{σταθ.}$ του επίπεδου xy , που σχηματίζουν γωνία 45° με τους άξονες x και y .

(ii) Η εξίσωση Tricomi, $u_{yy} - y u_{xx} = 0$, είναι ελλειπτική στο κάτω ημιεπίπεδο xy και υπερβολική στο πάνω, αφού $d(x, y) := b^2 - ac = y$. Όπως δείξαμε αναλυτικά στο Εδάφιο IV-2, όταν $y > 0$, μπορούμε να εισαγάγουμε τις συντεταγμένες $s = 3x + 2y^{3/2}$, $t = 3x - 2y^{3/2}$, και να φέρουμε την εξίσωση Tricomi στην κανονική μορφή $U_{st} = [6(s - t)]^{-1} (U_s - U_t)$. Συνεπώς, στην περιοχή $y < 0$, η εξίσωση Tricomi δεν έχει χαρακτηριστικές καμπύλες, ενώ στο τμήμα $y > 0$ του επίπεδου xy έχει δύο οικογένειες χαρακτηριστικών, τις οποίες μπορούμε να περιγράψουμε και με τις σχέσεις $x = c \pm (2/3)y^{3/2}$.

(iii) Η ΜΔΕ $u_{xx} + 2y u_{xy} + y^2 u_{yy} = 0$ είναι παραβολική σε όλο το επίπεδο xy , αφού $d(x, y) := b^2 - ac = 0$, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Σε τούτη την περίπτωση, $\lambda(x, y) = y$ και η αντίστοιχη ΜΔΕ $T_x + y T_y = 0$ επιδέχεται ως λύση τη συνάρτηση $T(x, y) = y e^{-x}$. Στις συντεταγμένες $s = x$, $t = y e^{-x}$, η παραπάνω ΜΔΕ δεύτερης τάξης γίνεται $U_{ss} = t U_t$ (βλ. Εδάφιο IV-2). Συνεπώς, η μοναδική οικογένεια χαρακτηριστικών αυτής της εξίσωσης αποτελείται από τις ευθείες $t = c$ του επίπεδου st , όταν τη θεωρούμε στην κανονική μορφή $U_{ss} = t U_t$, και οι καμπύλες $y = c e^x$ του επίπεδου xy , όταν βρίσκεται στη μορφή $u_{xx} + 2y u_{xy} + y^2 u_{yy} = 0$.

Παράδειγμα 5.2

Για να δούμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα του τρόπου με τον οποίο εκφράζεται το περιεχόμενο του θεωρήματος 5.1, ας θεωρήσουμε και το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$(5.24\alpha) \quad u_{xx} - u_{yy} = 0, \quad y > 0, \quad -\infty < x < \infty,$$

$$(5.24\beta) \quad u(x, 0) = f(x), \quad u_y(x, 0) = g(x) \quad -\infty < x < \infty,$$

Αν γράψουμε την ΜΔΕ (5.24α) στη μορφή $u_{yy} = u_{xx}$, αμέσως θα συμπεράνουμε ότι

$$(5.25) \quad \partial_y^3 u(x, y) = \partial_y \partial_x^2 u(x, y) = \partial_x^2 \partial_y u(x, y)$$

και, γενικότερα,

$$(5.26) \quad \partial_y^{2n+1} u(x, y) = \partial_x^{2n} \partial_y u(x, y), \quad n = 1, 2, \dots$$

Ανάλογα,

$$(5.27) \quad \partial_y^4 u(x, y) = \partial_y^2 \partial_x^2 u(x, y) = \partial_x^4 u(x, y)$$

και, γενικότερα,

$$(5.28) \quad \partial_y^{2n} u(x, y) = \partial_x^{2n} u(x, y), \quad n = 1, 2, \dots$$

Συνεπώς,

$$(5.29) \quad \partial_y^{2n+1} u(x, 0) = \partial_x^{2n} \partial_y u(x, 0), \quad \partial_y^{2n} u(x, 0) = \partial_x^{2n} u(x, 0), \quad n = 1, 2, \dots$$

Αν λάβουμε υπόψη τις αρχικές συνθήκες (5.24), οι τελευταίες σχέσεις γίνονται

$$(5.30) \quad \partial_y^{2n+1} u(x, 0) = g^{(2n)}(x), \quad \partial_y^{2n} u(x, 0) = f^{(2n)}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

όπου με $h^{(m)}(x)$ συμβολίζουμε την παράγωγο τάξης m της συνάρτησης $h(x)$ και $h^{(0)}(x) \equiv h(x)$.

Άρα, όλοι οι συντελεστές της σειράς

$$(5.31) \quad u(x, y) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} y^m \partial_y^m u(x, 0)$$

είναι γνωστές συναρτήσεις. Συγκεκριμένα,

$$(5.32) \quad u(x, y) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} y^{2n} f^{(2n)}(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} y^{2n+1} g^{(2n)}(x).$$

Από την άλλη οι συντελεστές της ΜΔΕ $u_{xx} - u_{yy} = 0$ είναι αναλυτικές συναρτήσεις (ως σταθερές). Έτσι, το θεώρημα 5.1 εξασφαλίζει ότι η σειρά (5.32) συγκλίνει και ορίζει τη λύση του δοσμένου προβλήματος αρχικών τιμών.

Για συγκεκριμένο παράδειγμα της ανάλυσης που προηγήθηκε μπορούμε να πάρουμε εκείνο με αρχικές συνθήκες

$$(5.33) \quad u(x, 0) = \sin x, \quad u_y(x, 0) = 0.$$

Τότε η σειρά (5.32) γίνεται

$$(5.34) \quad u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} y^{2n} \sin x.$$

Αφήνουμε για άσκηση του αναγνώστη την απόδειξη του γεγονότος ότι η σειρά συγκλίνει στη συνάρτηση

$$(5.35) \quad u(x, y) = \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)].$$

Προφανώς, αυτή η λύση ταυτίζεται μ' εκείνη που προκύπτει και από τον τύπο d'Alembert.

■

Παράδειγμα 5.3

Να λυθεί το πρόβλημα Cauchy

$$(5.36\alpha) \quad U_{st} = 0, \quad t > 0,$$

$$(5.36\beta) \quad U(s, 0) = f(s), \quad U_t(s, 0) = g(s).$$

Αύση. Όπως έχουμε τονίσει επανειλημμένα, η γενική λύση της $U_{st} = 0$ βρίσκεται με διαδοχικές ολοκληρώσεις και είναι της μορφής

$$(5.37) \quad U(s, t) = F(s) + G(t),$$

όπου $F(s)$, $G(t)$ τυχαίες συναρτήσεις. Συνεπώς,

$$(5.38) \quad U(s, 0) = F(s) + G(0), \quad U_t(s, 0) = G'(0).$$

Ο συνδυασμός αυτών των σχέσεων με τις αρχικές συνθήκες (5.36β) οδηγεί στις

$$(5.39) \quad F(s) - G(0) = f(s), \quad G'(0) = g(s).$$

Από την τελευταία γίνεται φανερό ότι το δοσμένο πρόβλημα Cauchy δεν έχει λύση, παρά μόνο στην περίπτωση που η συνάρτηση $g(s)$ είναι σταθερή. Αν δηλαδή $g(s) = g(0)$, $\forall s$. Αλλά και τότε, οι λύσεις του προβλήματος είναι άπειρες αφού το μόνο πράγμα που καθορίζει η συνθήκη $U_t(s, 0) = g(s)$ είναι η τιμή της παραγώγου της $G(t)$ στο $t = 0$.

Με άλλα λόγια, κάθε συνάρτηση της μορφής

$$(5.40) \quad U(s, t) = f(s) + G(t) - G(0),$$

όπου $G(t)$ οποιαδήποτε συνάρτηση, τέτοια που $G'(0) = g(0)$, αποτελεί λύση τους προβλήματος Cauchy (5.36). Προφανώς, τα αποτελέσματα της ανάλυσης αυτού του προβλήματος ήταν αναμενόμενα, αφού ο άξονας s είναι μία από τις χαρακτηριστικές της ΜΔΕ $U_{st} = 0$.

Ας σημειωθεί ότι, το πρόβλημα Cauchy (5.36) είναι ταυτόσημο με το

$$(5.41\alpha) \quad u_{xx} - u_{yy} = 0, \quad x > y,$$

$$(5.41\beta) \quad u(x, x) = \tilde{f}(x) := f(2x), \quad u_x(x, x) - u_y(x, x) = \tilde{g}(x) := 2g(2x).$$

■

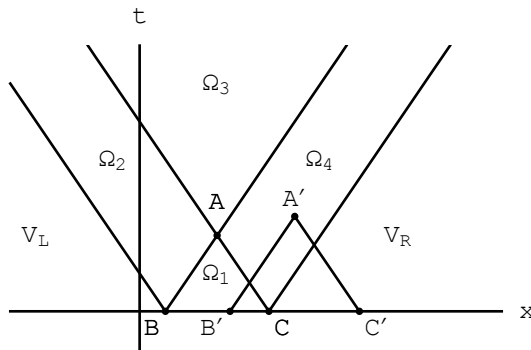
Οι χαρακτηριστικές καμπύλες μπορεί να ερμηνευτούν σε νήματα κατά μήκος των οποίων διαδίδονται οι πληροφορίες που εμπεριέχουν τα αρχικά δοσμένα. Αυτή η ερμηνεία μας βοηθάει στο να καταλάβουμε αμέσως διάφορα ποιοτικά χαρακτηριστικά της λύσης ενός προβλήματος Cauchy, τα οποία έχουν ιδιαίτερη σημασία κι από την άποψη των φυσικών, για παράδειγμα, εφαρμογών.

Για να δούμε αναλυτικότερα αυτή τη σημασία των χαρακτηριστικών καμπυλών, επιστρέφουμε στη λύση του προβλήματος αρχικών τιμών για την ομογενή κυματική εξίσωση που δίνεται από τον τύπο d'Alembert, στη μορφή

$$(5.42) \quad u(x, y) = \frac{1}{2} \left[f(x+y) + f(x-y) + \int_{x-y}^{x+y} g(s) ds \right].$$

Θυμίζουμε ότι η μεταβλητή x προσδιορίζει τη θέση ενός σημείου στον πραγματικό χώρο, ενώ η $y = ct$ προσδιορίζει την χρονική στιγμή που μας ενδιαφέρει. Γι' αυτό, το τυχαίο στοιχείο (x, y) του \mathbb{R}^2 θα το αναφέρουμε και ως *χωροχρονικό σημείο* ή *σημείο του χωρόχρονου*.

Σύμφωνα λοιπόν με τον τύπο d'Alembert, η τιμή της συνάρτησης u στο χωροχρονικό σημείο $A = (a, b)$, με $b > 0$, καθορίζεται από την τιμή της συνάρτησης $f(s)$ στα άκρα του διαστήματος $[a - b, a + b]$ του άξονα x και τις τιμές της συνάρτησης $g(s)$ σε ολόκληρο το πιο πάνω διάστημα. Με άλλα λόγια, η τιμή της συνάρτησης u στο σημείο A καθορίζεται πλήρως από τα αρχικά δοσμένα πάνω στη βάση του τριγώνου ABC του Σχ. 5.1, όπου $B = (a - b, 0)$ και $C = (a + b, 0)$.



Σχ. 5.1. Τα τρίγωνα ABC και $A'B'C'$ ορίζονται από τις χαρακτηριστικές που διέρχονται από τα σημεία $A = (a, b)$ και $A' = (a', b')$, αντίστοιχα.

Τώρα, η διαφορά των συντεταγμένων των σημείων A και B είναι ίδια: $x - y = a - b$, τόσο για το A όσο και B . Άρα, η πλευρά AB βρίσκεται πάνω στη χαρακτηριστική που διέρχεται από το χωροχρονικό σημείο A κι είναι του τύπου $x - y = \text{σταθ}$. Ανάλογα, το άθροισμα των συντεταγμένων των σημείων A και C είναι ίδιο: $x + y = a + b$. Αυτό σημαίνει η πλευρά BC αντιστοιχεί σε μια χαρακτηριστική του τύπου $x + y = \text{σταθ}$.

Είναι φανερό πως, όσα είπαμε πιο πάνω για την $u(x, y)$ στο A ισχύουν και για κάθε άλλο σημείο της περιοχής Ω_1 του σχήματος 5.1, η οποία αποτελείται από το εσωτερικό και τις πλευρές του τριγώνου ABC . Δηλαδή, η τιμή της $u(x, y)$ σε οποιοδήποτε σημείο της περιοχής Ω_1 καθορίζεται πλήρως από τα δοσμένα πάνω στο τμήμα AB του άξονα x . Γιατί, οι δύο χαρακτηριστικές που διέρχονται από ένα σημείο της Ω_1 κόβουν υποχρεωτικά τον άξονα x σε δύο σημεία που ανήκουν στη βάση του τριγώνου ABC .

Αντίθετα, για τα σημεία που βρίσκονται έξω από το τρίγωνο ABC , τα αρχικά δοσμένα κατά μήκος του τμήματος BC του άξονα x είτε δεν επαρκούν για τον καθορισμό της $u(x, y)$ είτε δεν παίζουν κανένα ρόλο στον προσδιορισμό της τιμής της.

Για να δούμε πώς ακριβώς έχουν τα πράγματα για τα χωροχρονικά σημεία αυτού του είδους, ας θεωρήσουμε πρώτα ένα σημείο σαν το $A' = (a', b')$ που βρίσκεται στην περιοχή Ω_4 . Η τελευταία περιέχεται ανάμεσα στις χαρακτηριστικές $x - y = a - b$ και $x - y = a + b$, που ξεκινάνε από τα σημεία B και C , αντίστοιχα, και τη χαρακτηριστική $x + y = a + b$. Η χαρακτηριστική $x - y = a' - b'$, λοιπόν, θα κόψει τον άξονα x σε κάποιο σημείο B' που ανήκει υποχρεωτικά στο διάστημα AB . Ο λόγος είναι ότι, $a - b \leq a' - b' \leq 0 \leq a + b$. Αντίθετα, η χαρακτηριστική $x + y = a' + b'$ θα κόψει τον άξονα x σε κάποιο σημείο C' που βρίσκεται δεξιά του σημείου B , αφού $a' + b' > a + b$. Τώρα, σύμφωνα με τον τύπο d'Alembert, για να καθορίσουμε την τιμή της $u(x, y)$ στο σημείο A' , χρειαζόμαστε τις τιμές των $u(x, 0)$ και $u_y(x, 0)$ σε όλο το διάστημα $B'C'$ και όχι μόνο στο $B'C$. Με άλλα λόγια, τα δοσμένα στο διάστημα AB

συνεισφέρουν στον προσδιορισμό της $u(x, y)$ στο σημείο A' , αλλά δεν επαρκούν για τον πλήρη καθορισμό της.

Αφήνουμε σαν άσκηση στον αναγνώστη να αποδείξει ότι κάτι ανάλογο ισχύει για τα σημεία των περιοχών Ω_2 και Ω_3 του Σχ. 5.1. Τέλος, για την τιμή της $u(x, y)$ σε σημεία των περιοχών V_L και V_R , τα δοσμένα πάνω στο διάστημα AB δεν παίζουν κανέναν απολύτως ρόλο.

Για τους λόγους που μόλις περιγράψαμε, η ένωση των περιοχών $\Omega_1 - \Omega_4$, δηλαδή το σύνολο $E_{AB} := \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4$ ονομάζεται **περιοχή επίδρασης** των δοσμένων στο διάστημα AB , ενώ το σύνολο Ω_1 ονομάζεται **περιοχή καθορισμού** αυτών των δοσμένων.

Αυτές οι περιοχές διακρίνονται με σαφήνεια, αν κατασκευάσουμε τη λύση της κυματικής εξίσωσης που αντιστοιχεί σε αρχικά δοσμένα τα οποία μηδενίζονται έξω από ένα συμπαγές, δηλαδή κλειστό και φραγμένο, υποσύνολο του άξονα x , όπως στο επόμενο

Παράδειγμα 5.4

Ας θεωρήσουμε το πρόβλημα Cauchy για την εξίσωση $u_{xx} - u_{yy} = 0$, με αρχικές συνθήκες $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$, και

$$(5.43) \quad g(x) = \begin{cases} (x^2 - a^2)^2, & |x| \leq a \\ 0, & |x| > a \end{cases}$$

όπου a τυχαίος θετικός αριθμός.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι η συνάρτηση $g(x)$ ανήκει στην κλάση $C^1(\mathbb{R})$ κι έχει **συμπαγές έρεισμα**. Δηλαδή, μηδενίζεται έξω από ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα, εδώ το $[-a, a]$. Το γεγονός ότι η $g(x)$ είναι κλάσης $C^1(\mathbb{R})$ εξασφαλίζει ότι, η λύση $u(x, y)$ που ορίζεται από τον τύπο d'Alembert, είναι κλάσης C^2 στο τμήμα $y > 0$ του επίπεδου xy .

Σύμφωνα, λοιπόν με τον τύπο d'Alembert, η συνάρτηση

$$(5.44) \quad u(x, y) = \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} g(s) ds,$$

αποτελεί λύση του προβλήματος Cauchy για την εξίσωση $u_{xx} - u_{yy} = 0$ με αρχικά δοσμένα

$$(5.45) \quad u(x, 0) = 0, \quad u_y(x, 0) = g(x).$$

Για να υπολογίσουμε ρητά την $u(x, y)$, θα πρέπει να δώσουμε ιδιαίτερη προσοχή στον ορισμό (5.43) της συνάρτησης $g(x)$, ή σε ποια περιοχή του Σχ. 5.1 βρίσκεται το σημείο (x, y) . Αν λοιπόν το $(x, y) \in \Omega_1$, τότε $-a \leq x - y < x + y \leq a$. Συνεπώς,

$$(5.46) \quad u(x, y) = \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} g(s) ds = \frac{1}{2} [G(x+y) - G(x-y)], \quad (x, y) \in \Omega_1,$$

όπου

$$(5.47) \quad G(s) := \int g(s) ds = a^4 s - \frac{2}{3} a^2 s^3 + \frac{1}{5} s^5.$$

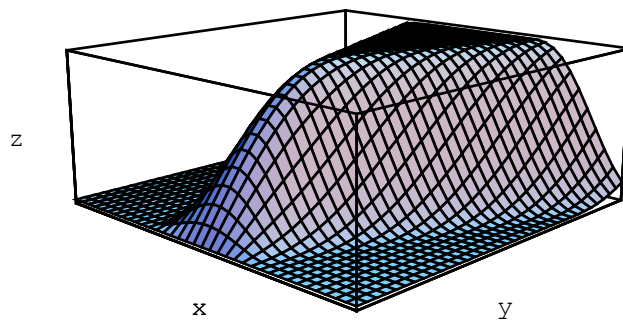
Ανάλογα, όταν το $(x, y) \in \Omega_4$, τότε $-a \leq x - y \leq a, \quad x + y > a$. Όμως, η $g(s)$ μηδενίζεται όταν το όρισμά της είναι μεγαλύτερο του a . Άρα,

$$(5.48) \quad u(x, y) = \frac{1}{2} \int_{x-y}^a g(s) ds = \frac{1}{2} [G(a) - G(x-y)], \quad (x, y) \in \Omega_4.$$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζεται η τιμή της $u(x, y)$ στις υπόλοιπες περιοχές του τμήματος $y > 0$ του επίπεδου x, y , με τελικό αποτέλεσμα τον τύπο

$$(5.49) \quad u(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} [G(x+y) - G(x-y)], & -a+y \leq x \leq a-y, \quad 0 < y \leq a \\ \frac{1}{c} [G(x+y) - G(-a)], & -a-y < x < a-y, \quad y > a+x \\ \frac{1}{c} [G(a) - G(x-y)], & -a+y < x < a+y, \quad y > a-x \\ \frac{1}{c} [G(a) - G(-a)], & a-y < x < -a+y, \quad y > a \\ 0, & x \notin [-a-ct, a+ct] \end{cases}$$

Το γράφημα αυτής της λύσης δίνεται στο Σχ. 5.2. Εκεί φαίνεται καθαρά ότι η $u(x, y)$ είναι μη μηδενική σε όλη την περιοχή επίδρασης των δοσμένων στο διάστημα $[-a, a]$ του άξονα x δηλαδή στην περιοχή ανάμεσα στις χαρακτηριστικές $x+y = -a$ και $x-y = a$. Ωστόσο, θα πρέπει να σημειωθεί ότι, ήμασταν σε θέση να υπολογίσουμε την τιμή της $u(x, y)$ παντού, επειδή μας είχαν δοθεί οι $u(x, 0)$ και $u_y(x, 0)$ σε κάθε σημείο του άξονα x . Διαφορετικά, αν δηλαδή γνωρίζαμε τις συναρτήσεις $u(x, 0)$ και $u_y(x, 0)$ μόνο για $-a \leq x \leq a$, τότε δε θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε την $u(x, y)$, παρά μόνο στην Ω_1 , που είναι η περιοχή καθορισμού των δοσμένων επί του διαστήματος $[-a, a]$ του άξονα x ,



Σχ. 5.2. Το γράφημα της λύσης (5.49). Σημειώστε ότι $u(x, y) = 0$ σε κάθε σημείο των περιοχών που βρίσκονται αριστερά της χαρακτηριστικής $x+y = -a$ και δεξιά της χαρακτηριστικής $x-y = a$, αντίστοιχα.

■

Ασκήσεις

5.1 Να υπολογιστούν και να παρασταθούν στο επίπεδο των ανεξάρτητων μεταβλητών οι χαρακτηριστικές καμπύλες των παρακάτω ΜΔΕ

(i) $4u_{xx} - u_t = u, \quad u = u(x, t).$

(ii) $u_t = u u_x + u_{xx}$, $u = u(x, t)$.

(iii) $V_{yy} + 8 V_{yz} - 7 V_{zz} = V^2$, $V = V(y, z)$.

(iv) $f_t = f_x + f(f_x + f_y) + f_{xx} + 2 f_{xy} + f_{yy}$, $f = f(x, t)$.

(v) $u_{xx} + 2 t u_{xt} = u$, $u = u(x, t)$.

(vi) $u_{xx} + 2 y u_{xy} + u_{yy} = u$, $u = u(x, y)$.

5.2 Να δειχτεί ότι, πραγματικά, η σειρά (5.34) συγκλίνει στη συνάρτηση (5.35).

5.3 Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad y > 0, \quad -\infty < x < \infty,$$

$$u(x, 0) = \sin x, \quad u_y(x, 0) = -\sin x, \quad -\infty < x < \infty,$$

με τη μέθοδο του Παρδγμ. 5.2.

5.4 Χρησιμοποιώντας τον τύπο d'Alembert, να κατασκευαστούν οι λύσεις της κυματικής εξίσωσης $u_{xx} - u_{yy} = 0$ που αντιστοιχούν στις παρακάτω επιλογές αρχικών τιμών.

(i) $u(x, 0) = \begin{cases} (x^2 - 1)^4, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}, \quad u_y(x, 0) = 0.$

(ii) $u(x, 0) = 0, \quad u_y(x, 0) = \begin{cases} x^2(x+1)^2, & x \in [-1, 0] \\ 0, & x \notin [-1, 0] \end{cases}.$

(iii) $u(x, 0) = \begin{cases} (x+1)^3(x+2)^3, & x \in [-2, -1] \\ (x-1)^3(x-2)^3, & x \in [1, 2] \\ 0, & x \notin [-2, -1] \cup [1, 2] \end{cases}, \quad u_y(x, 0) = 0.$

(iv) $u(x, 0) = 0, \quad u_y(x, 0) = \begin{cases} (x+1)^2(x+2)^2, & x \in [-2, -1] \\ (x-1)^2(x-2)^2, & x \in [1, 2] \\ 0, & x \notin [-2, -1] \cup [1, 2] \end{cases}.$

5.5 α) Να δειχτεί ότι η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ e^{-1/x^2} & x > 0 \end{cases}$$

ανήκει στην κλάση $C^\infty(\mathbb{R})$ και να κατασκευαστεί μια γραφική παράσταση του γραφήματός της στη γειτονιά του $x = 0$.

β) Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$c^2 u_{xx} - u_{tt} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = 0, \quad -\infty < x < \infty.$$

γ) Να κατασκευαστούν τα γραφήματα της λύσης που βρήκατε σε συγκεκριμένες τιμές της χρονικής παραμέτρου, καθώς και στον τρισδιάστατο χωρόχρονο $x t z$.

6. Διάδοση ασυνεχειών

Οι χαρακτηριστικές καμπύλες, καθώς και οι επιφάνειες που συναντήσαμε στις ΜΔΕ 1^{ης} τάξης στον $\mathbb{R}^{n>2}$ και θα συνατήσουμε αργότερα στις ΜΔΕ 2^{ης} τάξης στον ίδιο χώρο, είναι άρρηκτα συνδεδεμένες με την παρουσία κάποιου είδους ασυνεχειών ή ιδιομορφιών στη λύση δοσμένης εξίσωσης. Για να δούμε αυτή τη σύνδεση στο πλαίσιο ενός συγκεκριμένου παραδείγματος, ας υποθέσουμε τα εξής: α) Η συνάρτηση $f(x)$ που εμφανίζεται στη λύση d'Alembert και περιγράφει, για παράδειγμα, την αρχική μορφή της χορδής είναι η

$$(6.1) \quad f(x) = \begin{cases} A, & x < 0 \\ A \cos x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ -A, & x > \pi \end{cases}$$

όπου $A = \text{θετική σταθερή}$. β) Η $g(x)$ που περιγράφει την αρχική ταχύτητα των στοιχείων της χορδής μηδενίζεται ταυτοτικά.

Από την (6.1) έπεται ότι, η πρώτη παράγωγος της $f(x)$ υπάρχει σε κάθε σημείο της πραγματικής εθείας κι εκφράζεται από τη συνάρτηση

$$(6.2) \quad f'(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ -A \sin x, & 0 \leq x \leq \pi \\ 0, & x > \pi \end{cases}$$

Αντίθετα, η δεύτερη παράγωγος της $f(x)$ δεν υπάρχει στα σημεία $x = 0$ και $x = \pi$. Στα υπόλοιπα,

$$(6.3) \quad f''(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ -A \cos x, & 0 < x < \pi \\ 0, & x > \pi \end{cases}$$

Είναι προφανές ότι, η $f'(x)$ είναι παντού συνεχής, αφού $\sin(0) = \sin(\pi) = 0$, ενώ η $f''(x)$ παρουσιάζει αλματικές ασυνέχειες μέτρου A στα σημεία $x = 0$ και $x = \pi$. Συνεπώς, η λύση $u(x, t)$ που θα μας δώσει ο τύπος του d'Alembert αναμένεται να εμφανίζει ασυνέχειες στις δεύτερες παραγώγους της, κατά μήκος των χαρακτηριστικών που "πηγάζουν" από τα σημεία $x = 0$ και $x = \pi$. Αφήνουμε όμως την επαλήθευση αυτού του γεγονότος για άσκηση του αναγνώστη και στρέφουμε την προσοχή μας στο γενικότερο πρόβλημα.

Συγκεκριμένα, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η λύση $u(x, y)$ μιας ΜΔΕ 2^{ης} τάξης ονομάζεται *αυστηρή ή κλασική* όταν είναι κλάσης C^2 σε κάθε σημείο της περιοχής ορισμού της· διαφορετικά, λέγεται *γενικευμένη*. Είναι φανερό ότι, υπάρχουν πολλών ειδών γενικευμένες λύσεις κι αργότερα θα έχουμε την ευκαιρία να εξετάσουμε λεπτομερειακά ορισμένα από αυτά τα είδη. Εδώ, θα περιοριστούμε στην περίπτωση που γενικεύει το παράδειγμα που μόλις περιγράψαμε.

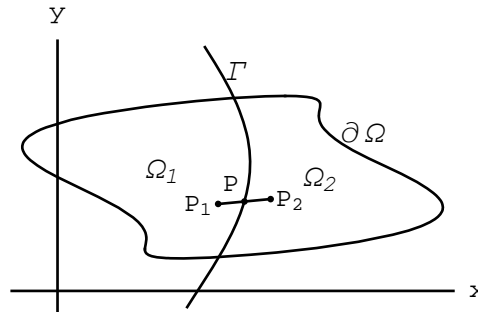
Για το σκοπό αυτό, επιστρέφουμε στη ΜΔΕ (5.8) και, για ευκολία αναφοράς, την ξαναγράφουμε εδώ πέρα,

$$(6.4) \quad a u_{xx} + 2b u_{xy} + c u_{yy} = D(x, y, u, u_x, u_y),$$

υπενθυμίζοντας ότι, με a, b, c και D συμβολίζονται γνωστές, ομαλές συναρτήσεις των x, y, u ,

u_x και u_y .

Θεωρούμε, στη συνέχεια, μιαν ανοιχτή και συνεκτική περιοχή Ω του επίπεδου x, y , η οποία χωρίζεται στα τμήματα Ω_1 και Ω_2 από μια καμπύλη Γ (βλ. Σχ. 6.1).



Σχ. 6.1

Τέλος, υποθέτουμε ότι, η συνάρτηση $u(x, y)$ έχει τις εξής ιδιότητες:

- (i) Είναι κλάσης C^1 σε ολόκληρη την περιοχή Ω .
- (ii) Αποτελεί λύση κλάσης C^2 της ΜΔΕ (6.4) και στις δύο ανοιχτές περιοχές Ω_1, Ω_2 .
- (iii) Οι δεύτερης τάξης μερικές παράγωγοι της $u(x, y)$ τείνουν σε συγκεκριμένα όρια, καθώς πλησιάζουμε την καμπύλη Γ , κατά μήκος μιας άλλης καμπύλης, $\tilde{\Gamma}$, που δεν εφάπτεται στην Γ .

Ας υποθέσουμε ότι η καμπύλη $\tilde{\Gamma}$ τέμνει την Γ στο σημείο P , όπως στο Σχ. 6.1, κι ότι τα P_1, P_2 είναι δύο σημεία της $\tilde{\Gamma}$ που βρίσκονται στις περιοχές Ω_1 και Ω_2 , αντίστοιχα. Για κάθε συνάρτηση $h(x, y)$ που ορίζεται σ' αυτές τις περιοχές και τείνει σε συγκεκριμένα όρια καθώς πλησιάζουμε την Γ , θέτουμε

$$(6.5) \quad [h(P)] := \lim_{P_1, P_2 \rightarrow P} (h(P_2) - h(P_1)).$$

Από την υπόθεση ότι η $u(x, y)$ είναι κλάσης C^1 σε ολόκληρη την περιοχή Ω αμέσως συνάγεται ότι

$$(6.6) \quad [u] = [u_x] = [u_y] = 0, \quad \text{για κάθε } (x, y) \in \Gamma.$$

Επιπλέον, η ομαλότητα των συναρτήσεων a, b, c και D συνεπάγεται ότι

$$(6.7) \quad a[u_{xx}] + 2b[u_{xy}] + c[u_{yy}] = 0.$$

Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι η Γ περιγράφεται από τις σχέσεις

$$(6.8) \quad x = X(s), \quad y = Y(s).$$

Τότε, κατά μήκος της Γ , κάθε συνάρτηση $h(x, y)$, με πεδίο ορισμού την περιοχή Ω , ανάγεται στη συνάρτηση $\psi(s) := h(X(s), Y(s))$ και

$$(6.9) \quad \frac{dh}{ds} := \psi'(s) = u_x(X(s), Y(s)) X'(s) + u_y(X(s), Y(s)) Y'(s).$$

Αν λοιπόν, οι περιορισμοί $h^{(1)}(x, y)$ και $h^{(2)}(x, y)$ της $h(x, y)$ στις περιοχές Ω_1 και Ω_2 , αντίστοιχα, τείνουν στις $\psi^{(1)}(s)$, $\psi^{(2)}(s)$ καθώς πλησιάζουμε την καμπύλη Γ , τότε

$$(6.10) \quad \frac{dh^{(2)}}{ds} - \frac{dh^{(1)}}{ds} = (h_x^{(2)} X' + h_y^{(2)} Y') - (h_x^{(1)} X' + h_y^{(1)} Y') \equiv [h_x] X' + [h_y] Y'.$$

Ειδικότερα,

$$(6.11) \quad \frac{du_x^{(1)}}{ds} - \frac{du_x^{(2)}}{ds} = (u_{xx}^{(2)} X' + u_{xy}^{(2)} Y') - (u_{xx}^{(1)} X' + u_{xy}^{(1)} Y') \equiv [u_{xx}] X' + [u_{xy}] Y',$$

$$(6.12) \quad \frac{du_y^{(1)}}{ds} - \frac{du_y^{(2)}}{ds} = (u_{yx}^{(2)} X' + u_{yy}^{(2)} Y') - (u_{yx}^{(1)} X' + u_{yy}^{(1)} Y') \equiv [u_{yx}] X' + [u_{yy}] Y'.$$

Συνεπώς, αν στις αρχικές υποθέσεις μας προσθέσουμε και την υπόθεση ότι η παράγωγος των u_x και u_y κατά μήκος της Γ είναι συνεχής, θα καταλήξουμε στους ακόλουθους περιορισμούς:

$$(6.13) \quad [u_{xx}] X' + [u_{xy}] Y' = 0,$$

$$(6.14) \quad [u_{yx}] X' + [u_{yy}] Y' = 0.$$

Οι σχέσεις (6.7), (6.13) και (6.14) μπορεί να θεωρηθούν ως ένα γραμμικό σύστημα για τις ποσότητες $[u_{xx}]$, $[u_{xy}] = [u_{yx}]$ και $[u_{yy}]$, της μορφής

$$(6.15) \quad \begin{pmatrix} a & 2b & c \\ X' & Y' & 0 \\ 0 & X' & Y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [u_{xx}] \\ [u_{xy}] \\ [u_{yy}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Όταν η ορίζουσα του πρώτου πίνακα δε μηδενίζεται κατά μήκος της Γ , όταν δηλαδή

$$(6.16) \quad d(s) := a(Y')^2 - 2bX'Y' + c(X')^2 \neq 0,$$

τότε $[u_{xx}] = [u_{xy}] = [u_{yy}] = 0$. Άρα, η λύση $u(x, y)$ είναι κλάσης C^2 στη γειτονιά της Γ , δηλαδή έχουμε να κάνουμε με λύση αυστηρή. Αντίθετα, όταν $d(s) = 0$, το σύστημα επιδέχεται μη τετριμμένη λύση. Συγκεκριμένα, μία από τις συναρτήσεις

$$(6.17) \quad (\lambda(s), \mu(s), \nu(s)) := ([u_{xx}], [u_{xy}], [u_{yy}])$$

μπορεί να επιλέγεται αυθαίρετα, οπότε οι άλλες δύο καθορίζονται από το σύστημα (6.15). Αν, για παράδειγμα, προσδιορίσουμε την $\lambda(s)$, τότε

$$(6.18) \quad \mu(s) = -\frac{X'(s)}{Y'(s)} \lambda(s), \quad \nu(s) = \left(\frac{X'(s)}{Y'(s)}\right)^2 \lambda(s).$$

Τελειώνοντας, αξίζει να παρατηρήσουμε ότι, η συνθήκη $d(s) = 0$ σημαίνει ότι η καμπύλη Γ , κατά μήκος της οποίας εμφανίζονται οι ασυνέχειες λ , μ και ν των δεύτερων παραγώγων της $u(x, y)$, είναι αναγκαστικά χαρακτηριστική. Αυτό το γεγονός επιβεβαιώνει τη σχέση ανάμεσα στις γενικευμένες λύσεις και τις χαρακτηριστικές καμπύλες στην οποία αναφερθήκαμε παραπάνω.

Ασκήσεις

6.1 α) Να κατασκευαστεί η λύση $u(x, y)$ της κυματικής εξίσωσης $u_{xx} - u_{yy} = 0$ που δίνεται από τον τύπο d'Alembert, όταν $f(x)$ είναι η συνάρτηση που ορίζεται στη (6.1) και $g(x) = 0$.

β) Να υπολογιστούν οι τυχόν ασυνέχειες των παραγώγων δεύτερης τάξης της $u(x, y)$ κατά μήκος των χαρακτηριστικών που "πηγάζουν" από τα σημεία $x = 0$ και $x = \pi$.

6.2 α) Να κατασκευαστεί η λύση $u(x, t)$ της κυματικής εξίσωσης $c^2 u_{xx} - u_{tt} = 0$ που αντιστοιχεί στις αρχικές συνθήκες

$$u(x, 0) = f(x) := \begin{cases} x^2(x-1)^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x \notin [0, 1] \end{cases}, \quad u_t(x, 0) = -f'(x).$$

β) Να εντοπιστούν οι καμπύλες του επίπεδου xt , κατά μήκος των οποίων οι παράγωγοι δεύτερης τάξης της $u(x, t)$ παρουσιάζουν ασυνέχειες.

γ) Να δειχτεί ότι οι παραπάνω ασυνέχειες πληρούν τις σχέσεις (6.18).

7. Η μη ομογενής μονοδιάστατη κυματική εξίσωση

Με μη ομογενή κυματική εξίσωση σε μία χωρική διάσταση εννοούμε την υπερβολική ΜΔΕ

$$(7.1) \quad u_{xx} - u_{yy} = h(x, y),$$

όπου $h(x, y)$ δοσμένη συνάρτηση. Η ανεξάρτητη μεταβλητή x ορίζει τη θέση ενός σημείου του φυσικού χώρου ως προς κάποια ευθεία, ενώ η y προσδιορίζει τη χρονική στιγμή που μας ενδιαφέρει. Αναλυτικότερα, $y = ct$, όπου η μεταβλητή t συμβολίζει τον φυσικό χρόνο και η θετική σταθερή c κάποια συγκεκριμένη ταχύτητα.

Στο παρόν εδάφιο, θα μελετήσουμε το πρόβλημα Cauchy που απαρτίζεται από την (7.1) και τις αρχικές συνθήκες

$$(7.2) \quad u(x, 0) = f(x), \quad u_y(x, 0) = g(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

Θα δείξουμε ότι, αν οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ είναι αρκετά ομαλές και ο όρος μη ομογένειας $h(x, y)$ συνεχής, τότε το πιο πάνω πρόβλημα Cauchy επιδέχεται μοναδική λύση που εκφράζεται από μια απλή γενίκευση του τύπου d' Alembert. Συγκεκριμένα, θ' αποδείξουμε το ακόλουθο

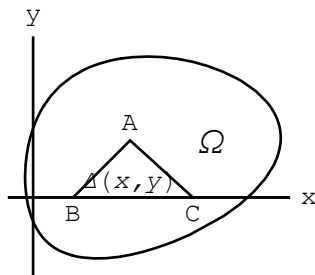
Θεώρημα 7.1

Αν η $f \in C^2(\mathbb{R})$, η $g \in C^1(\mathbb{R})$ και η $h(x, y)$ συνεχής στην περιοχή $y \geq 0$ του επίπεδου x, y , τότε η κυματική εξίσωση (7.1) επιδέχεται λύση που πληροί τις συνθήκες Cauchy (7.5). Η λύση αυτή είναι μοναδική και δίνεται από τη συνάρτηση

$$(7.3) \quad u(x, y) = \frac{1}{2} \left\{ f(x+y) + f(x-y) + \int_{x-y}^{x+y} g(\zeta) d\zeta \right\} - \frac{1}{2} \iint_{\Delta(x,y)} h(\tilde{x}, \tilde{y}) d\tilde{x} d\tilde{y}$$

όπου $\Delta(x, y)$ η τριγωνική περιοχή που έχει ως κορυφή το σημείο (x, y) και βάση το διάστημα $[x - y, x + y]$.

Απόδειξη. Θεωρούμε το τυχαίο σημείο $A = (x, y)$ του τμήματος $y > 0$ του επίπεδου x, y και χαράσσουμε τις δύο χαρακτηριστικές που διέρχονται από το A (βλ. Σχ.7.1). Η χαρακτηριστική $x - y = \text{σταθ.}$ θα κόψει τον άξονα x στο σημείο $B = (x - y, 0)$. Ανάλογα, η χαρακτηριστική $x + y = \text{σταθ.}$ θα κόψει τον άξονα x στο σημείο $C = (x + y, 0)$. Η ένωση των ευθύγραμμων τμημάτων AB, BC και CA ορίζει την κλειστή καμπύλη $\partial\Delta$, που είναι το σύνορο της περιοχής $\Delta(x, y)$.



Σχ. 7.1. Η τριγωνική περιοχή $\Delta(x, y)$ ορίζεται από τις χαρακτηριστικές που διέρχονται από το σημείο $A = (x, y)$.

Στο πρώτο εδάφιο αυτού του κεφάλαιου αποδείξαμε ότι, στις συντεταγμένες (s, t) , που ορίζονται από τις σχέσεις

$$(7.4) \quad s = x + y, \quad t = x - y,$$

η έκφραση $u_{xx} - u_{yy}$ γίνεται

$$(7.5) \quad u_{xx} - u_{yy} = 4 U_{st}.$$

Φυσικά, με $U(s, t)$ εννοούμε τη συνάρτηση που αντιστοιχεί στην $u(x, y)$. Δηλαδή,

$$(7.6) \quad U(s, t) = u\left(\frac{s+t}{2}, \frac{s-t}{2}\right).$$

Συνεπώς, στις συντεταγμένες (s, t) , η μη ομογενής ΜΔΕ (7.1) γίνεται

$$(7.7) \quad 4 U_{st} = H(s, t),$$

όπου $H(s, t)$ η συνάρτηση που αντιστοιχεί στην $h(x, y)$.

Ένας εύκολος υπολογισμός δείχνει ότι, οι συντεταγμένες s, t των κορυφών του τριγώνου ABC έχουν ως εξής:

$$(7.8) \quad A = (s, t), \quad B = (t, t), \quad C = (s, s).$$

Αυτό σημαίνει ότι, στο επίπεδο st , η περιοχή $\Delta(x, y)$ αντιστοιχεί στο τρίγωνο $V(s, t)$ με κορυφές τα σημεία (s, t) , (t, t) και (s, s) . Τέλος, ο άξονας x , κατά μήκος του οποίου $y = 0$, αντιστοιχεί στην ευθεία $t = s$ του επιπέδου st .

Ολοκληρώνοντας την εξίσωση (7.7) στην περιοχή $V(s, t)$, παίρνουμε

$$(7.9) \quad 4 \iint_{V(s,t)} U_{\tilde{s}\tilde{t}}(\tilde{s}, \tilde{t}) d\tilde{s} d\tilde{t} = \iint_{V(s,t)} H(\tilde{s}, \tilde{t}) d\tilde{s} d\tilde{t}.$$

Αφού οι προς ολοκλήρωση συναρτήσεις είναι συνεχείς στη συμπαγή περιοχή $V(s, t)$, το διπλό ολοκλήρωμα μπορεί να αντικατασταθεί από ένα επάλληλο. Δηλαδή, η (7.9) είναι ισοδύναμη προς την

$$(7.10) \quad 4 \int_t^s \left[\int_t^s U_{\tilde{s}\tilde{t}}(\tilde{s}, \tilde{t}) d\tilde{s} \right] d\tilde{t} = \int_t^s \left[\int_t^s H(\tilde{s}, \tilde{t}) d\tilde{s} \right] d\tilde{t}.$$

Τώρα,

$$(7.11) \quad \int_t^s \left[\int_t^s U_{\tilde{s}\tilde{t}}(\tilde{s}, \tilde{t}) d\tilde{s} \right] d\tilde{t} = \int_t^s [U_{\tilde{t}}(s, \tilde{t}) - U_{\tilde{t}}(\tilde{t}, \tilde{t})] d\tilde{t} = U(s, s) - U(s, t) - \int_t^s U_{\tilde{t}}(\tilde{t}, \tilde{t}) d\tilde{t}.$$

Συνεπώς, η (7.10) γίνεται

$$(7.12) \quad U(s, s) - U(s, t) - \int_t^s U_{\tilde{t}}(\tilde{t}, \tilde{t}) d\tilde{t} = \frac{1}{4} \int_t^s \left[\int_t^s H(\tilde{s}, \tilde{t}) d\tilde{s} \right] d\tilde{t}.$$

Ισοδύναμα,

$$(7.13) \quad U(s, t) = U(s, s) - \int_t^s U_{\tilde{t}}(\tilde{t}, \tilde{t}) d\tilde{t} - \frac{1}{4} \int_t^s \left[\int_t^s H(\tilde{s}, \tilde{t}) d\tilde{s} \right] d\tilde{t},$$

Όμως, από την (7.6) αμέσως έπεται ότι

$$(7.14) \quad U_t(s, t) = \frac{1}{2} u_x\left(\frac{s+t}{2}, \frac{s-t}{2}\right) - \frac{1}{2} u_y\left(\frac{s+t}{2}, \frac{s-t}{2}\right).$$

Άρα,

$$(7.15) \quad U_t(t, t) = \frac{1}{2} u_x(t, 0) - \frac{1}{2} u_y(t, 0).$$

Αν λοιπόν θέσουμε

$$(7.16) \quad u(x, 0) = f(x), \quad u_y(x, 0) = g(x),$$

τότε η (7.15) θα γίνει

$$(7.17) \quad U_t(t, t) = \frac{1}{2} f'(t) - \frac{1}{2} g(t).$$

Συνακόλουθα, η (7.12) θα μετατραπεί στην

$$(7.18) \quad U(s, t) = f(s) - \frac{1}{2} \int_t^s [f'(\tilde{t}) - g(\tilde{t})] d\tilde{t} - \frac{1}{4} \int_t^s \left[\int_t^s H(\tilde{s}, \tilde{t}) d\tilde{s} \right] d\tilde{t}.$$

Από αυτήν αμέσως έπεται ότι

$$(7.19) \quad U(s, t) = \frac{1}{2} f(s) - \frac{1}{2} f(t) + \frac{1}{2} \int_t^s g(\tilde{t}) d\tilde{t} - \frac{1}{4} \int_t^s \left[\int_t^s H(\tilde{s}, \tilde{t}) d\tilde{s} \right] d\tilde{t}.$$

Ουσιαστικά, αυτός ο τύπος είναι ίδιος με τον (7.3) του θεωρήματος. Για να το δούμε ρητά, αρκεί να αντικαταστήσουμε το επάλληλο ολοκλήρωμα με το διπλό και να επιστρέψουμε στις συντεταγμένες x, y . Θα πρέπει, βέβαια, να λάβουμε υπόψη ότι

$$(7.20) \quad \iint_{\Delta(x,y)} h(\tilde{x}, \tilde{y}) d\tilde{x} d\tilde{y} = \iint_{V(s,t)} H(\tilde{s}, \tilde{t}) \frac{\partial(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial(\tilde{s}, \tilde{t})} d\tilde{s} d\tilde{t} = 2 \iint_{V(s,t)} H(\tilde{s}, \tilde{t}) d\tilde{s} d\tilde{t}.$$

Τότε η (7.19) γίνεται

$$(7.21) \quad u(x, y) = \frac{1}{2} f(x+y) - \frac{1}{2} f(x, y) + \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} g(\tilde{t}) d\tilde{t} - \frac{1}{2} \iint_{\Delta(x,y)} h(\tilde{x}, \tilde{y}) d\tilde{x} d\tilde{y},$$

που είναι ταυτόσημη με την (7.3).

Σε τούτο το σημείο θα πρέπει να τονίσουμε ότι καταλήξαμε στον τύπο (7.21), έχοντας υποθέσει ότι η συνάρτηση $u(x, y)$ είναι κλάσης C^2 και λύση της μη ομογενούς εξίσωσης (7.1). Άρα, μένει ν' αποδείξουμε ότι,

α) Η συνάρτηση $u(x, y)$ που ορίζεται πλέον από τον τύπο (7.21) είναι πραγματικά λύση της εξίσωσης (7.1) και

β) Η παραπάνω $u(x, y)$ είναι η μόνη λύση που συμφωνεί με τις αρχικές συνθήκες (7.2).

Την απόδειξη το μέρους (α) την αφήνουμε ως άσκηση του αναγνώστη. Εμείς περιοριζόμαστε στην υπόδειξη ότι, αυτό το καθήκον διεκπεραιώνεται ευκολότερα αν κανείς αρχίσει από τη λύση στη μορφή (7.19).

Όσο αφορά τη μοναδικότητα της λύσης (7.21), αυτή απορρέει αμέσως από το ακόλουθο γεγονός: Καταλήξαμε στον τύπο (7.21) έχοντας υποθέσει μόνο ότι, η $u(x, y)$ είναι μια συνάρτηση κλάσης C^2 που λύνει την ΜΔΕ (7.1) και παίρνει τις τιμές (7.2) κατά μήκος του άξονα x . Συνεπώς, κάθε συνάρτηση με αυτές τις ιδιότητες γράφεται στη μορφή (7.20). Με άλλα

λόγια, η μόνη λύση της ΜΔΕ (7.1) που είναι κλάσης C^2 σε ολόκληρο το ημιεπίπεδο $y \geq 0$ και σέβεται τις αρχικές συνθήκες (7.2) είναι αυτή που δίνεται από τον τύπο (7.21).

■

Προτού δώσουμε ένα παράδειγμα εφαρμογής του θεωρήματος που μόλις αποδείξαμε, αξίζει να παρατηρήσουμε ότι, η λύση του προβλήματος Cauchy (7.1)-(7.2) αποτελείται από δύο μέρη. Το πρώτο δίνεται από τη συνάρτηση

$$(7.22) \quad u^{(0)}(x, y) = \frac{1}{2} \left\{ f(x-y) + f(x+y) + \int_{x-y}^{x+y} g(\zeta) d\zeta \right\},$$

κι αποτελεί λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$(7.23\alpha) \quad u_{xx} - u_{yy} = 0,$$

$$(7.23\beta) \quad u(x, 0) = f(x), \quad u_y(x, 0) = g(x).$$

Το δεύτερο μέρος της λύσης δίνεται από τη συνάρτηση

$$(7.24) \quad u^{(c)}(x, y) = -\frac{1}{2} \iint_{\Delta(x,y)} h(\tilde{x}, \tilde{y}) d\tilde{x} d\tilde{y},$$

κι αποτελεί λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$(7.25\alpha) \quad u_{xx} - u_{yy} = h(x, y),$$

$$(7.25\beta) \quad u(x, 0) = 0, \quad u_y(x, 0) = 0.$$

Σημειώστε ότι η συνάρτηση $u^{(0)}(x, y)$ αποτελεί λύση της ομογενούς κυματικής εξίσωσης με μη ομογενείς (\equiv μη μηδενικές) αρχικές συνθήκες, ενώ η $u^{(c)}(x, y)$ αποτελεί λύση της μη ομογενούς κυματικής εξίσωσης με ομογενείς (μηδενικές) αρχικές συνθήκες. Η λύση του συνολικού προβλήματος Cauchy προκύπτει από την *υπέρθθεση* ή *επαλληλία* (\equiv άθροισμα) των δύο προηγούμενων λύσεων.

Παράδειγμα 7.1

Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών (7.25) για

$$(7.26) \quad h(x, y) = \begin{cases} \frac{15}{a^5} y[(y-a)^2 - x^2], & (x, y) \in \Omega_1 \\ 0, & (x, y) \notin \Omega_1 \end{cases}$$

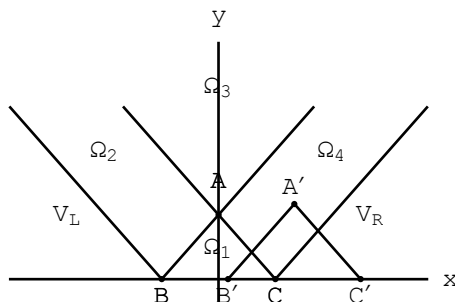
όπου Ω_1 είναι η τριγωνική περιοχή με βάση το διάστημα $[-a, a]$ του άξονα x και κορυφή το σημείο $(x, y) = (0, a)$.

Λύση. Σύμφωνα με όσα επισημάναμε πιο πάνω, η λύση αυτού του προβλήματος Cauchy δίνεται από τη συνάρτηση

$$(7.27) \quad u(x, y) = -\frac{1}{2} \iint_{\Delta(x,y)} h(\tilde{x}, \tilde{y}) d\tilde{x} d\tilde{y}.$$

Τώρα, για να υπολογίσουμε αναλυτικά την $u(x, y)$, θα πρέπει αρχικά να παρατηρήσουμε ότι το διπλό ολοκλήρωμα στην (7.27) μηδενίζεται όταν $\Delta(x, y) \cap \Omega_1 = \emptyset$. Στη συνέχεια, θα πρέπει να σημειώσουμε ότι, ανάλογα με την περιοχή στην οποία βρίσκεται το σημείο (x, y) , το σύνολο $\Delta(x, y) \cap \Omega_1$ μεταβάλλεται. Για παράδειγμα, όταν το $(x, y) \in \Omega_1$, τότε

$\Delta(x, y) \cap \Omega_1 = \Delta(x, y)$, ενώ, όταν το $(x, y) \in \Omega_3$, τότε $\Delta(x, y) \cap \Omega_1 = \Omega_1$ (βλ. Σχ. 7.2). Για ένα σημείο της περιοχής Ω_4 σαν το A' του σχήματος, το σύνολο $\Delta(x, y) \cap \Omega_1$ είναι η περιοχή που βρίσκεται μέσα στο ισόπλευρο τρίγωνο με βάση το διάστημα $B' C$



Σχ. 7.2. Οι περιοχές του επίπεδου $x y$ στις οποίες αναφέρεται ο υπολογισμός του ολοκληρώματος (7.27).

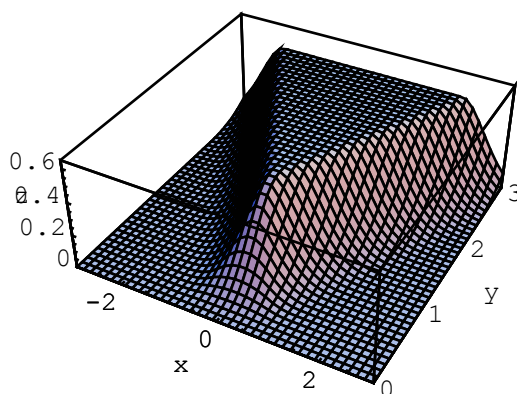
Τέλος, θα πρέπει να αντικαταστήσουμε το διπλό ολοκλήρωμα από ένα επάλληλο. Χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία, μπορεί ναδειχτεί ότι

$$(7.28) \quad \iint_{\Delta(x,y)} h(\tilde{x}, \tilde{y}) d\tilde{x} d\tilde{y} = \int_0^y \left[\int_{x-y+\xi}^{x+y-\xi} h(\eta, \xi) d\eta \right] d\xi.$$

Ο υπολογισμός που αναλύσαμε παραπάνω οδηγεί στο ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$(7.29) \quad u(x, y) = \begin{cases} -\frac{y^3 (5a^2 - 5ya - 5x^2 + y^2)}{2a^5}, & (x, y) \in \Omega_1 \\ -\frac{(3a + 2x - 2y)(a - x + y)^4}{32a^5}, & (x, y) \in \Omega_2 \\ -\frac{1}{2}, & (x, y) \in \Omega_3 \\ -\frac{(3a - 2x - 2y)(a + x + y)^4}{32a^5}, & (x, y) \in \Omega_4 \\ 0, & (x, y) \in V_L \cup V_R \end{cases}$$

Μια γραφική παράσταση αυτής της λύσης δίνεται στο Σχ. 7.3.



Σχ. 7.3. Το γράφημα της συνάρτησης $-u(x, y)$, όπου $u(x, y)$ η συνάρτηση που ορίζεται από την (7.29).

Ασκήσεις

7.1 Ν' αποδειχτεί η σχέση (7.28).

7.2 Να παραχθεί αναλυτικά η λύση (7.29) από το επάλληλο ολοκλήρωμα της η (7.28), με βάση τη διαδικασία που περιγράφεται στο Παρδγ. 7.1. Στη συνέχεια, να επαληθευτεί ότι, σε κάθε περιοχή του Σχ. 7.2 η συνάρτηση $u(x, y)$ που δίνεται από την (7.29) αποτελεί λύση της μη ομογενούς κυματικής εξίσωσης 7.1.

7.3 Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$u_{xx} - u_{yy} = e^{-y} \sin x, \quad y > 0, \quad -\infty < x < \infty,$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_y(x, 0) = g(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

7.4 Να βρεθεί η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών

$$c^2 u_{xx} - u_{tt} = e^{-t-x^2}, \quad y > 0, \quad -\infty < x < \infty,$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = e^{-x^2}, \quad -\infty < x < \infty,$$

και να κατασκευαστεί το γράφημά της για $c = 1$.

7.5 Η συνάρτηση $h(x, y)$, $x \in \mathbb{R}$, $y \geq 0$, ορίζεται ως εξής:

$$h(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{a^2}, & (x, y) \in \Omega_1 \\ 0, & (x, y) \notin \Omega_1 \end{cases}$$

όπου Ω_1 είναι η τριγωνική περιοχή με βάση το διάστημα $[-a, a]$ του άξονα x και κορυφή το σημείο $(x, y) = (0, a)$.

(i) Δείξτε ότι η $h(x, y)$ δεν είναι συνεχής.

(ii) Υπολογίστε τη συνάρτηση

$$u(x, y) := -\frac{1}{2} \iint_{\Delta(x,y)} h(\tilde{x}, \tilde{y}) d\tilde{x} d\tilde{y}, \quad y > 0, \quad -\infty < x < \infty,$$

στο εσωτερικό κάθε μιας από τις περιοχές που φαίνονται στο Σχ. 7.2 και δείξτε ότι, εκεί,

$$u_{xx} - u_{yy} = h(x, y).$$

(iii) Υπολογίστε τις ασυνέχειες που τυχόν εμφανίζει η $u(x, y)$ και οι μερικές παράγωγοί της μέχρι δεύτερης τάξης, κατά μήκος των χαρακτηριστικών που χωρίζουν τις πιο πάνω περιοχές του Σχ. 7.2.

(iv) Προσδιορίστε την οριακή μορφή της $u(x, y)$ και του πεδίου ορισμού της, καθώς το $a \rightarrow 0$.

8. Το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών για την ημιάπειρη χορδή

Όπως έχουμε ήδη παρατηρήσει, η λύση d' Alembert φαίνεται αρχικά να μην είναι και τόσο ενδιαφέρουσα από φυσική άποψη, και τούτο γιατί η χωρική μεταβλητή x καλύπτει όλο το διάστημα $(-\infty, \infty)$. Άρα, αυτή η λύση δεν μπορεί να περιγράψει τις ταλαντώσεις μιας χορδής που, αναγκαστικά, έχει πεπερασμένο μήκος. Για να αντιμετωπίσουμε αυτό το πρόβλημα, θα προχωρήσουμε σταδιακά.

Συγκεκριμένα, θα μελετήσουμε αρχικά τη λύση της ομογενούς κυματικής εξίσωσης που αντιστοιχεί σε μια ημιάπειρη χορδή, το ένα άκρο της οποίας είναι στερεωμένο. Υποθέτουμε λοιπόν ότι, το ακίνητο άκρο της χορδής βρίσκεται στην αρχή του χωρικού άξονα x και η κίνηση της χορδής περιορίζεται στο επίπεδο xz . Το αρχικό σχήμα της χορδής περιγράφεται από τη σχέση $z = f(x)$ και η αρχική ταχύτητα των στοιχείων της από τη σχέση $u_t(x, 0) = c g(x)$. Οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$, $0 \leq x < \infty$, θεωρούνται γνωστές και κλάσης C^2 και C^1 , αντίστοιχα.

Θέτοντας και πάλι $y = ct$, δίνουμε στην κυματική εξίσωση $c^2 u_{xx} - u_{tt} = 0$ τη μορφή $u_{xx} - u_{yy} = 0$ και αντιμετωπίζουμε τη μεταβλητή y ως χρονική. Στόχος μας, λοιπόν, είναι το να βρούμε λύσεις της ΜΔΕ

$$(8.1\alpha) \quad u_{xx} - u_{yy} = 0,$$

στην περιοχή $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < \infty, 0 < y < \infty\}$, τέτοιες που

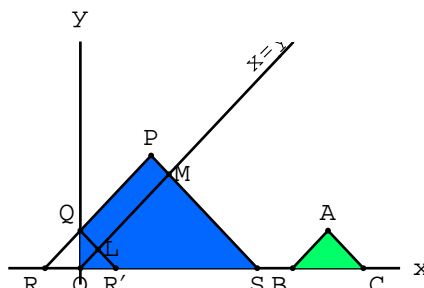
$$(8.1\beta) \quad u(x, 0) = f(x), \quad u_y(x, 0) = g(x), \quad x \in [0, \infty),$$

και

$$(8.1\gamma) \quad u(0, y) = 0, \quad y \in [0, \infty).$$

Οι συμπληρωματικές συνθήκες (8.1β) αναφέρονται ως αρχικές, ενώ η (8.1γ) ως συνοριακή, για προφανείς λόγους: Οι πρώτες αφορούν την αρχή του χρονικού διαστήματος $[0, \infty)$, ενώ η δεύτερη έχει να κάνει με το συνοριακό σημείο $x = 0$ του χωρικού διαστήματος $[0, \infty)$. Όλες μαζί, αφορούν την καμπύλη $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ του επιπέδου xy , όπου Γ_1 είναι η χωρικού τύπου ημιευθεία $0 \leq x < \infty, y = 0$, και Γ_2 η χρονικού τύπου ημιευθεία $x = 0, 0 \leq y < \infty$.

Ας σημειώσουμε τώρα ότι, η χαρακτηριστική καμπύλη $x = y$ της εξ. (8.1α) χωρίζει την περιοχή Ω σε δύο τμήματα, τα Ω_1 και Ω_2 , όπου $y > x$ και $y < x$, αντίστοιχα, όπως στο Σχ. 8.1.



Σχ. 8.1. Οι περιοχές στις οποίες χωρίζει το πρώτο τεταρτημόριο του επιπέδου xy η χαρακτηριστική $y = x$.

Είναι φανερό ότι, ο τόπος Ω_2 αποτελεί την περιοχή καθορισμού της λύσης $u(x, y)$ από τα δοσμένα πάνω στην ημιευθεία $0 \leq x < \infty, y = 0$. Έτσι, για κάθε σημείο αυτής της περιοχής, σαν το $A = (x_1, y_1)$, η λύση δίνεται αμέσως από τον τύπο του d' Alembert:

$$(8.2) \quad u(x_1, y_1) = \frac{1}{2} \left[f(x_1 + y_1) + f(x_1 - y_1) + \int_{x_1 - y_1}^{x_1 + y_1} g(\lambda) d\lambda \right]$$

Αντίθετα, για ένα σημείο σαν το P του τόπου Ω_1 , δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του d' Alembert απ' ευθείας. Ωστόσο, το ακόλουθο "στρατήγημα" αποδεικνύει ότι κάτι τέτοιο είναι, σε τελική ανάλυση, θεμιτό. Επεκτείνουμε τις συναρτήσεις f και g σε όλη την πραγματική ευθεία, εισάγοντας τις \tilde{f} και \tilde{g} , όπου

$$(8.3\alpha) \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} -f(-x), & x \leq 0 \\ f(x), & x \geq 0 \end{cases}$$

και

$$(8.3\beta) \quad \tilde{g}(x) = \begin{cases} -g(-x), & x \leq 0 \\ g(x), & x \geq 0 \end{cases}$$

Είναι φανερό ότι, οι συναρτήσεις \tilde{f} και \tilde{g} είναι περιττές, δηλαδή

$$(8.4) \quad \tilde{f}(-x) = -\tilde{f}(x), \quad \tilde{g}(-x) = -\tilde{g}(x),$$

και άρα

$$(8.5) \quad \tilde{f}(0) = 0, \quad \tilde{g}(0) = 0.$$

Κατά συνέπεια, η συνάρτηση

$$(8.6) \quad \tilde{u}(x, y) = \frac{1}{2} \left[\tilde{f}(x + y) + \tilde{f}(x - y) + \int_{x - y}^{x + y} \tilde{g}(\lambda) d\lambda \right]$$

έχει για πεδίο ορισμού ολόκληρο το τμήμα $y \geq 0$ του επίπεδου x, y και τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) Είναι λύση της ΜΔΕ (8.1α), αφού η (8.6) είναι ταυτόσημη με τον τύπο του d' Alembert για το πρόβλημα Cauchy που συγκροτεί η ΜΔΕ (8.1α) με τις αρχικές συνθήκες $u(x, 0) = \tilde{f}(x)$, $u_y(x, 0) = \tilde{g}(x)$.

(ii) Στην περιοχή Ω_2 η $\tilde{u}(x, y)$ είναι ταυτόσημη με την (8.2).

(iii) Πληροί τη συνοριακή συνθήκη (8.1γ), αφού ο συνδυασμός των (8.4) και (8.6) δίνει

$$(8.7) \quad \tilde{u}(0, y) = \frac{1}{2} \left[\tilde{f}(y) + \tilde{f}(-y) + \int_{-y}^y \tilde{g}(\lambda) d\lambda \right] = 0.$$

(iv) Για ένα σημείο της περιοχής Ω_1 σαν το $P = (x_2, y_2)$ του Σχ. 8.1 έχουμε

$$(8.8) \quad \begin{aligned} \tilde{u}(x_2, y_2) &= \frac{1}{2} \left[\tilde{f}(x_2 + y_2) + \tilde{f}(x_2 - y_2) + \int_{x_2 - y_2}^{x_2 + y_2} \tilde{g}(\lambda) d\lambda \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\tilde{f}(x_2 + y_2) - \tilde{f}(y_2 - x_2) + \int_{x_2 - y_2}^0 \tilde{g}(\lambda) d\lambda + \int_0^{y_2 - x_2} \tilde{g}(\lambda) d\lambda + \int_{x_2 - y_2}^{x_2 + y_2} \tilde{g}(\lambda) d\lambda \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[f(x_2 + y_2) - f(y_2 - x_2) + \int_{x_2 - y_2}^{x_2 + y_2} g(\lambda) d\lambda \right] \end{aligned}$$

αφού $y_2 > x_2$ και η \tilde{g} είναι περιττή.

Η (8.8) δείχνει καθαρά ότι, σε τελική ανάλυση, η λύση \tilde{u} στην περιοχή Ω_1 καθορίζεται μονοσήμαντα από τα δοσμένα f και g κατά μήκος του θετικού τμήματος του άξονα x . Η ίδια έκφραση αναδεικνύει και τις ακόλουθες αξιοσημείωτες ιδιότητες της λύσης της "ημίαιρης χορδής". Για την περιγραφή αυτών των ιδιοτήτων, όμως, διευκολύνει η συγκέντρωση των προηγούμενων αποτελεσμάτων στον ακόλουθο τύπο για τη λύση του προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών (8.1):

$$(8.9) \quad u(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[f(x+y) + f(x-y) + \int_{x-y}^{x+y} g(\lambda) d\lambda \right], & x \geq y \\ \frac{1}{2} \left[f(x+y) - f(y-x) + \int_{x-y}^{x+y} g(\lambda) d\lambda \right], & x \leq y \end{cases}$$

Η πρώτη λοιπόν ιδιότητα μπορεί να χαρακτηριστεί ως φυσική, αφού ισοδυναμεί με το γεγονός της ανάκλασης των κυμάτων που διατρέχουν τη χορδή προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα x στο στερεωμένο άκρο της $x = 0$. Για να γίνει αυτό φανερό, ας εξετάσουμε την εξής ειδική περίπτωση αρχικών συνθηκών:

$$(8.10) \quad f(x) = \begin{cases} [(x-x_0)^2 - a^2]^4, & x \in (x_0 - a, x_0 + a), \quad x_0 > a \\ 0, & x \notin (x_0 - a, x_0 + a) \end{cases}$$

και $g(x) = 0$. Πρόκειται, δηλαδή, για την περίπτωση που, αρχικά, όλα τα στοιχεία της χορδής έχουν μηδενική ταχύτητα και μόνο το τμήμα της που αντιστοιχεί στο διάστημα $x_0 - a < x < x_0 + a$ είναι απομακρυσμένο από τη θέση ισορροπίας.

Από την (8.9) έπεται ότι

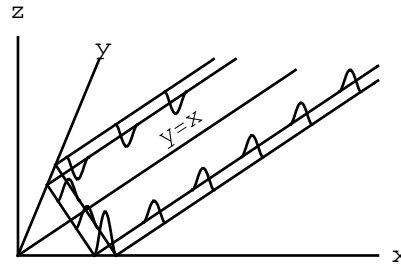
$$(8.11) \quad u(x, y) = \frac{1}{2} [f(x+y) + f(x-y)], \quad \text{για } y \leq x.$$

Αυτό σημαίνει ότι, λίγο μετά την αρχική στιγμή $y = 0$, ο παλμός (8.10) σπάει σε δύο θυγατρικούς που είναι όμοιοι προς τον μητρικό και κινούνται προς αντίθετες κατευθύνσεις, ο ένας προς το $+\infty$ και ο άλλος προς το στερεωμένο άκρο της χορδής στο $x = 0$.

Αντίθετα, στην περιοχή $y \geq x$ έχουμε

$$(8.12) \quad u(x, y) = \frac{1}{2} [f(x+y) - f(y-x)], \quad y \geq x.$$

Από τον ορισμό (8.10) της $f(x)$ έπεται ότι, ο πρώτος όρος στην αγκύλη στην (8.10) είναι μη μηδενικός μόνο στο εσωτερικό της λωρίδας που ορίζουν οι χαρακτηριστικές $x+y = x_0 - a$ και $x+y = x_0 + a$. Αυτός ο όρος παριστάνει τον θυγατρικό παλμό που κινείται προς το άκρο $x = 0$. Με τη σειρά του, ο δεύτερος όρος στην αγκύλη είναι μη μηδενικός μόνο στο εσωτερικό της λωρίδας που έχει για όρια τις χαρακτηριστικές $x-y = x_0 - a$ και $x-y = x_0 + a$ και είναι αρνητικός. Αντιστοιχεί, προφανώς, σε ένα ανεστραμμένο παλμό που κινείται προς τη θετική φορά του άξονα x και δεν είναι άλλος από τον προηγούμενο, μετά την ανάκλασή του στο $x = 0$. Στο Σχ. 8.2 δείχνουμε ορισμένα στιγμιότυπα της κίνησης των παλμών που μόλις περιγράψαμε.



Σχ. 8.2. Η διάσπαση του αρχικού παλμού σε δύο θυγατρικούς κι η ανάκλαση αυτού που διαδίδεται προς τ' αριστερά στην άκρη $x = 0$ της χορδής.

Η δεύτερη αξιοσημείωτη ιδιότητα της λύσης (8.9) προκύπτει από την εξής αρχική παρατήρηση. Σε ένα σημείο σαν το P του Σχ. 8.1 η λύση $u(x, y)$ μπορεί να γραφτεί σαν

$$(8.13) \quad u(P) = \frac{1}{2} \left[-u(R') + u(S) + \int_{R'}^S u_y(\lambda, 0) d\lambda \right].$$

Από την άλλη, ο τύπος του d' Alembert δίνει

$$(8.14) \quad u(L) = \frac{1}{2} \left[u(0) + u(R') + \int_0^{R'} u_y(\lambda, 0) d\lambda \right]$$

και

$$(8.15) \quad u(M) = \frac{1}{2} \left[u(0) + u(S) + \int_0^S u_y(\lambda, 0) d\lambda \right].$$

Συνεπώς,

$$(8.16) \quad u(M) - u(L) = \frac{1}{2} \left[u(S) - u(R') + \int_{R'}^S u_y(\lambda, 0) d\lambda \right].$$

Από τη σύγκριση των (8.13) και (8.16) αμέσως έπεται ότι

$$(8.17) \quad u(P) + u(L) = u(M).$$

Αν λάβουμε υπόψη και το γεγονός ότι $u(Q) = 0$, η τελευταία σχέση οδηγεί στην

$$(8.18) \quad u(P) + u(L) = u(Q) + u(M).$$

Όπως θα δείξουμε αργότερα, η (8.18) ιχθεί για κάθε ορθογώνιο σαν το $PQLM$, του οποίου οι πλευρές βρίσκονται πάνω σε χαρακτηριστικές της κυματικής εξίσωσης.

Ασκήσεις

8.1 Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών

$$u_{xx} - u_{yy} = 0, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < y < \infty,$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_y(x, 0) = g(x), \quad x \in [0, \infty), \quad u(0, y) = 0, \quad y \in [0, \infty).$$

για τις παρακάτω επιλογές αρχικών δοσμένων:

$$(i) \quad f(x) = \begin{cases} [(x-2)^2 - 1]^4, & x \in [1, 3] \\ 0, & x \notin [1, 3] \end{cases}, \quad g(x) = 0.$$

$$(ii) \quad f(x) = 0, \quad g(x) = \begin{cases} [(x-2)^2 - 1]^2, & x \in [1, 3] \\ 0, & x \notin [1, 3] \end{cases}$$

$$(iii) \quad f(x) = \begin{cases} [1 - (x-3)^2]^3, & x \in [2, 4] \\ 0, & x \notin [2, 4] \end{cases}, \quad g(x) = -f'(x).$$

8.2 Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών

$$u_{xx} - u_{yy} = 0, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < y < \infty,$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_y(x, 0) = g(x), \quad x \in [0, \infty), \quad u_x(0, y) = 0, \quad y \in [0, \infty).$$

Υπόδειξη. Επεκτείνετε τις συναρτήσεις $f(x)$, $g(x)$ σε όλη την πραγματική ευθεία, έτσι ώστε να γίνουν άρτιες.

8.3 Με βάση τα αποτελέσματα της προηγούμενης άσκησης, να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$u_{xx} - u_{yy} = 0, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < y < \infty,$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_y(x, 0) = g(x), \quad x \in [0, \infty), \quad u_x(0, y) = 0, \quad y \in [0, \infty).$$

για τις παρακάτω επιλογές αρχικών δοσμένων:

$$(i) \quad f(x) = \begin{cases} [(x-2)^2 - 1]^4, & x \in [1, 3] \\ 0, & x \notin [1, 3] \end{cases}, \quad g(x) = 0.$$

$$(ii) \quad f(x) = 0, \quad g(x) = \begin{cases} [(x-2)^2 - 1]^2, & x \in [1, 3] \\ 0, & x \notin [1, 3] \end{cases}$$

$$(iii) \quad f(x) = \begin{cases} [1 - (x-3)^2]^3, & x \in [2, 4] \\ 0, & x \notin [2, 4] \end{cases}, \quad g(x) = -f'(x).$$

9. Το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών για μια πραγματική χορδή

Η σημασία της ιδιότητας των λύσεων της κυματικής εξίσωσης η οποία εκφράζεται από την ταυτότητα (8.18) αναδειχνεται αμέσως μόλις στραφούμε προς το ακόλουθο "ρεαλιστικό" πλέον πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών:

$$(9.1\alpha) \quad u_{xx} - u_{yy} = 0, \quad x \in (0, a), \quad y \in (0, \infty),$$

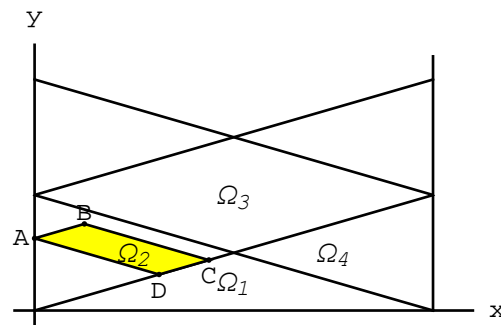
$$(9.1\beta) \quad u(x, 0) = f(x), \quad u_y(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq a,$$

$$(9.1\gamma) \quad u(0, y) = u(a, y) = 0, \quad y \geq 0.$$

Όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις, οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ θεωρούνται γνωστές και κλάσης C^2 και C^1 , αντίστοιχα. Επειδή το πεδίο ορισμού τους είναι το συμπαγές διάστημα $I = [0, a]$, η υπόθεση ότι $f \in C^2(I)$, $g \in C^1(I)$ σημαίνει το εξής: Οι παραπάνω συναρτήσεις αποτελούν, αντίστοιχα, τον περιορισμό στο I των συναρτήσεων \tilde{f} και \tilde{g} , που έχουν ως πεδίο ορισμού το ανοιχτό διάστημα \tilde{I} , στο οποίο περιέχεται το I , και $\tilde{f} \in C^2(\tilde{I})$, $\tilde{g} \in C^1(\tilde{I})$. Υποτίθεται επιπλέον ότι, $f(0) = f(a) = g(0) = g(a) = 0$, έτσι που οι αρχικές συνθήκες (9.1β) να συμφωνούν με τις συνοριακές (9.1γ) στα σημεία $(x, y) = (0, 0)$ και $(x, y) = (a, 0)$.

Ο αναγνώστης δεν θα έχει δυσκολία να αναγνωρίσει ότι τούτο το πρόβλημα αντιστοιχεί στη δυναμική μιας λεπτής τεντωμένης χορδής μήκους a , τα άκρα της οποίας ακινητούν και ορίζουν τα σημεία $x = 0$ και $x = a$ του άξονα x .

Η λύση του παραπάνω προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών μπορεί να βρεθεί και με την ακόλουθη μέθοδο. Χωρίζουμε τη λωρίδα $0 \leq x \leq a$, $y \geq 0$ σε μια σειρά περιοχών, που το σύνορό τους έχει το σχήμα ρόμβου ή τριγώνου, ως εξής. Χαράσσουμε πρώτα τις χαρακτηριστικές $x - y = 0$ και $x + y = a$ που διέρχονται από τις κορυφές $(x, y) = (0, 0)$ και $(x, y) = (a, 0)$ της λωρίδας, αντίστοιχα. Η πρώτη συναντάει την πλευρά $x = a$ στο σημείο όπου $y = a$. Η δεύτερη τέμνει την πλευρά $x = 0$ στο σημείο $y = a$. Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία με αφετηρία τα σημεία των δύο πλευρών της λωρίδας με $y = na$, $n \in \mathbb{N}$, καταλήγουμε στην κατάσταση που υποδείχνει το Σχ. 9.1.



Σχ. 9.1. Οι περιοχές στις οποίες χωρίζεται η λωρίδα $0 \leq x \leq a$, $y \geq 0$, από τις χαρακτηριστικές που πηγάζουν από τα σημεία $(0, 0)$, $(a, 0)$ και τις ανακλάσεις τους στις πλευρές $x = 0$ και $x = a$.

Είναι φανερό ότι, στην περιοχή Ω_1 , η λύση $u(x, y)$ υπολογίζεται με άμεση εφαρμογή του τύπου του d' Alembert. Από την άλλη, στις περιοχές Ω_2, Ω_3 και Ω_4 , η συνάρτηση $u(x, y)$ μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας την ταυτότητα (8.18), που την ξαναγράφουμε για ευκολία αναφοράς: Αν A, B, C και D είναι οι διαδοχικές κορυφές ενός ορθογώνιου παραλληλόγραμμου, του οποίου οι πλευρές βρίσκονται πάνω σε χαρακτηριστικές της κυματικής εξίσωσης, τότε οι τιμές της λύσης $u(x, y)$ στις πιο πάνω κορυφές πληρούν την ακόλουθη σχέση:

$$(9.2) \quad u(A) + u(C) = u(B) + u(D)$$

Αναλυτικότερα, η $u(x, y)$ στις περιοχές $\Omega_1 - \Omega_4$ υπολογίζεται ως εξής: Όπως ήδη αναφέραμε, στην περιοχή Ω_1 ισχύει ο τύπος του d' Alembert. Άρα

$$(9.3) \quad u(x, y) = \frac{1}{2} \left\{ f(x-y) + f(x+y) + \int_{x-y}^{x+y} g(s) ds \right\}, \quad (x, y) \in \Omega_1.$$

Για να υπολογίσουμε την $u(x, y)$ στο τυχαίο σημείο $B = (x_B, y_B)$ της περιοχής Ω_2 , χαράσσουμε πρώτα τις δύο χαρακτηριστικές $x - y = x_B - y_B$ και $x + y = x_B + y_B$ που διέρχονται απ' αυτό. Η πρώτη τέμνει την πλευρά $x = 0$ της λωρίδας στο σημείο A , με συντεταγμένες $(x_A, y_A) = (0, y_B - x_B)$. Η δεύτερη τέμνει την χαρακτηριστική $y = x$ στο σημείο $C = (x_C, y_C)$, όπου $x_C = y_C = (1/2)(x_B + y_B)$.

Στη συνέχεια, χαράσσουμε την χαρακτηριστική $x + y = x_A + y_A$ που διέρχεται από το σημείο A . Αυτή τέμνει την χαρακτηριστική $y = x$ στο σημείο D . Εύκολα συνάγεται ότι $x_D = y_D = (1/2)(y_B - x_B)$.

Τώρα, σύμφωνα με τη συνοριακή συνθήκη, $u(A) = 0$. Από την άλλη, κατά μήκος της χαρακτηριστικής $y = x$, η (9.3) γίνεται

$$(9.4) \quad u(x, x) = \frac{1}{2} \left\{ f(0) + f(2x) + \int_0^{2x} g(s) ds \right\}, \quad 0 \leq x \leq a/2.$$

Άρα,

$$(9.5) \quad u(C) = \frac{1}{2} \left\{ f(x_B + y_B) + \int_0^{x_B + y_B} g(s) ds \right\},$$

$$(9.6) \quad u(D) = \frac{1}{2} \left\{ f(y_B - x_B) + \int_0^{x_B - y_B} g(s) ds \right\}.$$

Όμως, σύμφωνα με την (9.2),

$$(9.7) \quad u(B) = u(A) + u(C) - u(D),$$

Άρα, με βάση τις (9.5) και (9.6), καταλήγουμε στην ακόλουθη μορφή της λύσης στην περιοχή Ω_2 :

$$(9.8) \quad u(x, y) = \frac{1}{2} \left\{ f(x+y) - f(y-x) + \int_{y-x}^{x+y} g(s) ds \right\}, \quad (x, y) \in \Omega_2.$$

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, βρίσκουμε ότι

$$(9.9) \quad u(x, y) = \frac{1}{2} \left\{ f(x-y) - f(2a-x-y) + \int_{x-y}^{2a-x-y} g(s) ds \right\}, \quad (x, y) \in \Omega_4.$$

Για να υπολογίσουμε την $u(x, y)$ σε κάποιο σημείο $\tilde{B} = (x_3, y_3)$ της περιοχής Ω_3 , μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ένα **χαρακτηριστικό τετράπλευρο**, που μία από τις κορυφές του είναι το συγκεκριμένο σημείο. Οι χαρακτηριστικές $x - y = x_3 - y_3$ και $x + y = x_3 + y_3$ που διέρχονται από το \tilde{B} αποτελούν δύο από τις πλευρές του χαρακτηριστικού τετράπλευρου. Αυτές τέμνουν τις χαρακτηριστικές που αποτελούν το σύνορο της Ω_3 με τις περιοχές Ω_2 και Ω_4 στα σημεία \tilde{A} και \tilde{C} , αντίστοιχα. Οι δεύτερες τέμνονται στο σημείο $\tilde{D} = (a/2, a/2)$. Από τα προηγούμενα αποτελέσματα γνωρίζουμε τις τιμές της $u(x, y)$ σε τρεις από τις κορυφές του τετράπλευρου $\tilde{A} \tilde{B} \tilde{C} \tilde{D}$.

Συγκεκριμένα, η $u(\tilde{D})$ βρίσκεται αμέσως από την (9.3). Από την άλλη οι $u(\tilde{A})$ και $u(\tilde{C})$ προκύπτουν από τις (9.8) και (9.9), αντίστοιχα. Το μόνο που χρειαζόμαστε είναι οι συνταγμένες των σημείων \tilde{A} και \tilde{C} . Όμως, ο υπολογισμός τους είναι εύκολος και δίνει $(x_{\tilde{A}}, y_{\tilde{A}}) = (1/2)(a + x - y, a - x + y)$, $(x_{\tilde{C}}, y_{\tilde{C}}) = (1/2)(x + y, x + y)$.

Τελικά, η εφαρμογή της ταυτότητας (9.2) στο τετράπλευρο $\tilde{A} \tilde{B} \tilde{C} \tilde{D}$ οδηγεί στο εξής αποτέλεσμα:

$$(9.10) \quad u(x, y) = \frac{1}{2} \left\{ -f(y-x) - f(2a-x-y) + \int_{y-x}^{2a-x-y} g(s) ds \right\}, \quad (x, y) \in \Omega_3.$$

Κλείνοντας, σημειώνουμε ότι το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών (9.1) μπορεί να λυθεί και με τη μέθοδο που χρησιμοποιήσαμε στην περίπτωση της ημίαιρης χορδής. Εκείνο που χρειαζόμαστε στο πλαίσιο αυτής της μεθόδου είναι η κατάλληλη επέκταση των συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$ από το διάστημα $[0, a]$ σε ολόκληρη την πραγματική ευθεία. Αλλά αυτή δεν είναι δύσκολο να βρεθεί, αν θυμηθούμε το στρατήγημα που επινοήσαμε στην προηγούμενη περίπτωση.

Συγκεκριμένα, θέτοντας αρχικά

$$(9.11) \quad \bar{f}(x) := \begin{cases} -f(-x), & -a \leq x \leq 0 \\ f(x), & 0 \leq x \leq a \end{cases}$$

έχουμε ορίσει μια περιττή συνάρτηση στο διάστημα $[-a, a]$ που συμφωνεί απόλυτα με την δοσμένη $f(x)$ στο διάστημα $[0, a]$. Στη συνέχεια, επεκτείνουμε την $\bar{f}(x)$ σε όλη την πραγματική ευθεία, θέτοντας

$$(9.12) \quad \tilde{f}(x) := \bar{f}(x), \quad -a \leq x \leq a, \quad \tilde{f}(x + 2n\pi) = \tilde{f}(x), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο, ορίζουμε τη συνάρτηση $\tilde{g}(x)$, που αποτελεί την περιοδική επέκταση της περιττής συνάρτησης $\bar{g}(x)$, $-a \leq x \leq a$, σε όλη την πραγματική ευθεία.

Αυτό, πλέον, μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του d' Alembert για να υπολογίσουμε την $u(x, y)$ σε οποιοδήποτε σημείο της λωρίδας $0 < x < a$, $y > 0$. Για παράδειγμα, σύμφωνα με τον τύπο του d' Alembert,

$$(9.13) \quad u(x, y) = \frac{1}{2} \left\{ \tilde{f}(x+y) + \tilde{f}(x-y) + \int_{x-y}^{x+y} \tilde{g}(s) ds \right\}, \quad (x, y) \in \Omega_3.$$

Αν, στη συνέχεια, λάβουμε υπόψη τον ορισμό των $\tilde{f}(x)$ και $\tilde{g}(x)$, θα διαπιστώσουμε ότι η (9.13) είναι ταυτόσημη με την (9.10).

Ασκήσεις

9.1 Να υπολογιστούν οι τιμές της λύσης $u(x, y)$ στις περιοχές $\Omega_1 - \Omega_4$ του Σχ. 9.1, για το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών

$$\begin{aligned} u_{xx} - u_{yy} &= 0, \quad x \in (0, \pi), \quad y \in (0, \infty), \\ u(x, 0) &= \sin x, \quad u_y(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0, y) &= u(\pi, y) = 0, \quad y \geq 0. \end{aligned}$$

9.2. Να γίνει το ίδιο, για το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών

$$\begin{aligned} u_{xx} - u_{yy} &= 0, \quad x \in (0, 3\pi), \quad y \in (0, \infty), \\ u(x, 0) &= \begin{cases} (x - \pi)^3 (2\pi - x)^3, & x \in [\pi, 2\pi] \\ 0 & x \notin [\pi, 2\pi] \end{cases}, \quad u_y(x, 0) = -f'(x), \quad 0 \leq x \leq 3\pi, \\ u(0, y) &= u(3\pi, y) = 0, \quad y \geq 0. \end{aligned}$$

9.3 Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της επέκτασης που περιγράφεται στο τέλος του παρόντος εδάφιου, να λυθεί το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών

$$\begin{aligned} u_{xx} - u_{yy} &= 0, \quad x \in (0, a), \quad y \in (0, \infty), \\ u(x, 0) &= f(x), \quad u_y(x, 0) = -f'(x), \quad 0 \leq x \leq a, \\ u(0, y) &= u(a, y) = 0, \quad y \geq 0. \end{aligned}$$

9.4 Με τη μέθοδο της προηγούμενης άσκησης, να λυθεί το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών

$$\begin{aligned} u_{xx} - u_{yy} &= 0, \quad x \in (0, 3\pi), \quad y \in (0, \infty), \\ u(x, 0) &= \begin{cases} (x - \pi)^3 (2\pi - x)^3, & x \in [\pi, 2\pi] \\ 0 & x \notin [\pi, 2\pi] \end{cases}, \quad u_y(x, 0) = -f'(x), \quad 0 \leq x \leq 3\pi, \\ u(0, y) &= u(3\pi, y) = 0, \quad y \geq 0. \end{aligned}$$

10. Μοναδικότητα λύσεων - Λαγκρανζική διατύπωση της κυματικής εξίσωσης

Σ' αυτό το εδάφιο θ' αποδείξουμε ότι, η λύση του προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών που περιγράψαμε στο προηγούμενο είναι η μόνη λύση κλάσης C^2 . Εδώ, βέβαια, η έμφαση δίνεται στη μέθοδο της απόδειξης, αφού η μοναδικότητα της λύσης της κυματικής εξίσωσης για την τεντωμένη χορδή μήκους a με στερεωμένα άκρα συνάγεται άμεσα από τη μοναδικότητα της λύσης της "άπειρης χορδής".

Για το σκοπό αυτό, ας θυμηθούμε ότι, ένα στοιχείο της χορδής μήκους ds έχει μάζα ρds , όπου ρ η (σταθερή) πυκνότητα της χορδής. Συνακόλουθα, η κινητική ενέργεια του ίδιου στοιχείου είναι ίση με $(1/2)(\rho ds)u_t^2(x, t)$, όπου x η προβολή του κέντρου μάζας του στοιχείου στον άξονα x . Όπως έχουμε ήδη σημειώσει, η κυματική εξίσωση $c^2 u_{xx} - u_{tt} = 0$ περιγράφει μόνο τις ταλαντώσεις μικρού πλάτους. Αυτό το γεγονός μας επιτρέπει να προσεγγίσουμε ικανοποιητικά το μήκος ds ενός στοιχείου της χορδής με το μήκος dx της προβολής του στον άξονα x . Άρα, η κινητική ενέργεια του στοιχείου μπορεί να παρασταθεί από την έκφραση $(1/2)(\rho dx)u_t^2(x, t)$ κι εκείνη ολόκληρης από τη συνάρτηση

$$(10.1) \quad T(t) := \int_0^a \frac{1}{2} \rho u_t^2(x, t) dx.$$

Η υπόθεση ότι η $u(x, t)$ είναι κλάσης C^2 συνεπάγεται ότι

$$(10.2) \quad \frac{dT}{dt}(t) = \int_0^a \partial_t \left[\frac{1}{2} \rho u_t^2(x, t) \right] dx = \frac{1}{2} \rho \int_0^a 2 u_t u_{tt} dx.$$

Όμως,

$$(10.3) \quad u_{tt} = c^2 u_{xx},$$

γιατί η $u(x, t)$ είναι λύση της κυματικής εξίσωσης. Έτσι, η (10.2) γίνεται

$$(10.4) \quad \frac{dT}{dt}(t) = \rho c^2 \int_0^a u_t u_{xx} dx.$$

Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι,

$$(10.5) \quad \begin{aligned} \frac{dT}{dt}(t) &= \rho c^2 \left[u_t u_x \Big|_{x=0}^a - \int_0^a u_{tx} u_x dx \right] \\ &= \rho c^2 \left[u_t u_x \Big|_{x=0}^a - \frac{1}{2} \int_0^a (u_x^2)_t dx \right] \\ &= \rho c^2 \left[u_t u_x \Big|_{x=0}^a - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^a u_x^2 dx \right]. \end{aligned}$$

Ισοδύναμα,

$$(10.6) \quad \frac{d}{dt} \left[T(t) + \int_0^a \frac{1}{2} \rho c^2 u_x^2 dx \right] = \rho c^2 u_t u_x \Big|_{x=0}^a.$$

Εισάγοντας τη συνάρτηση

$$(10.7) \quad V(t) := \int_0^a \frac{1}{2} \rho c^2 u_x^2 dx,$$

και θέτοντας

$$(10.8) \quad E(t) := T(t) + V(t),$$

μπορούμε να γράψουμε την (10.6) στη μορφή

$$(10.9) \quad \frac{dE}{dt}(t) = \rho c^2 u_t u_x \Big|_{x=0}.$$

Οι ποσότητες $V(t)$ και $E(t)$ ονομάζονται, αντίστοιχα, *δυναμική ενέργεια* και *ολική ενέργεια* της χορδής τη χρονική στιγμή t . Με τη σειρά της, η (10.9) ονομάζεται *εξίσωση της διατήρησης της μηχανικής ενέργειας*.

Δεν είναι δύσκολο να δείξει κανείς ότι, το δεξί μέλος της (10.9) δίνει το ρυθμό με τον οποίο παράγουν έργο επί της χορδής οι δυνάμεις που ασκούνται στα άκρα της. Έτσι, η (10.9) δηλώνει ότι, ο ρυθμός με τον οποίο αλλάζει η ολική μηχανική ενέργεια της χορδής είναι ίσος με το ρυθμό παραγωγής έργου από τις εξωτερικές δυνάμεις. Αν αυτό το έργο είναι θετικό, η ενέργεια της χορδής αυξάνει. Στην αντίθετη περίπτωση, η ενέργεια χορδής μειώνεται.

Με την ευκαιρία, σημειώνουμε ότι, η δύναμη που ασκείται στα άκρα της χορδής, στην εφαπτομενική προς τα έξω κατεύθυνση ονομάζεται *τάση*. Είναι ίδια με τη δύναμη που ασκούν στα άκρα κάθε στοιχείου της τα υπόλοιπα τμήματα της χορδής. Η τάση, K , και η πυκνότητα μάζας, ρ , καθορίζουν την ταχύτητα με την οποία διαδίδονται τα κύματα κατά μήκος της χορδής: $c = \sqrt{K/\rho}$. Αυτή η σχέση μας επιτρέπει να δώσουμε στη συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας την ακόλουθη μορφή:

$$(10.10) \quad V(t) = \int_0^l \frac{1}{2} K u_x^2 dx.$$

Το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών συνθηκών που μελετήσαμε στο προηγούμενο εδάφιο αντιστοιχεί στη δυναμική μιας λεπτής τεταμένης χορδής τα άκρα της οποίας διατηρούνται ακίνητα. Σ' εκείνη την περίπτωση, λοιπόν, $u(0, t) = u(a, t) = 0$, οπότε η (10.9) γίνεται

$$(10.11) \quad \frac{dE}{dt}(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad E = \text{σταθ.}$$

Με αυτό το αποτέλεσμα, είμαστε πλέον σε θέση ν' αποδείξουμε το ακόλουθο

Θεώρημα 10.1. Το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών συνθηκών που εκφράζεται από τις Εξ. (9.1) έχει το πολύ μία λύση κλάσης C^2 στη λωρίδα $\bar{\Omega} = \{(x, y) : 0 \leq x \leq a, y \equiv ct \geq 0\}$.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $u^{(1)}(x, t)$ και $u^{(2)}(x, t)$ είναι δύο λύσεις κλάσης C^2 στην $\bar{\Omega}$ του δοσμένου προβλήματος μικτών συνθηκών. Θέτουμε

$$(10.12) \quad u(x, t) := u^{(1)}(x, t) - u^{(2)}(x, t)$$

και σημειώνουμε το εξής: Λόγω της γραμμικότητας της κυματικής εξίσωσης, η $u(x, t)$ είναι λύση κλάσης C^2 στη λωρίδα $\bar{\Omega}$ του προβλήματος αρχικών-συνοριακών τιμών

$$(10.13\alpha) \quad c^2 u_{xx} - u_{tt} = 0, \quad (x, t) \in \Omega = \{(x, t) : 0 < x < a, t > 0\},$$

$$(10.13\beta) \quad u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq a,$$

$$(10.13\gamma) \quad u(0, t) = u(a, t) = 0, \quad t \geq 0.$$

Θεωρούμε, στη συνέχεια, την ολική μηχανική ενέργεια της χορδής που αντιστοιχεί στη λύση $u(x, t)$. Με βάση τις (10.1) και (10.7) αυτή γράφεται σαν

$$(10.14) \quad E(t) = \frac{1}{2} \rho \int_0^l (u_t^2 + c^2 u_x^2) dx.$$

Όπως δείξαμε παραπάνω, όταν ισχύουν οι συνοριακές συνθήκες (10.13γ), η $E(t)$ είναι σταθερή. Μάλιστα, στην προκειμένη περίπτωση η $E(t)$ μηδενίζεται, γιατί

$$(10.15) \quad E(t) = \text{σταθ.} \Leftrightarrow E(t) = E(0)$$

και

$$(10.16) \quad E(0) = 0.$$

Η τελευταία ισότητα προκύπτει από τις αρχικές συνθήκες (10.13β): Από τη μια, $u_t(x, 0) = 0$ και από την άλλη, $u_x(x, 0) = 0$, γιατί $u(x, 0) \equiv 0$, πάνω στον άξονα x .

Όμως, από την (10.14) φαίνεται καθαρά ότι η $E(t)$ μηδενίζεται μόνο όταν οι συναρτήσεις $u_t(x, t)$ και $u_x(x, t)$ μηδενίζονται σε κάθε $(x, t) \in \bar{\Omega}$. Γιατί, η προς ολοκλήρωση συνάρτηση είναι το άθροισμα δύο θετικών όρων. Αλλά τότε, η $u(x, t)$ είναι σταθερή στη λωρίδα $\bar{\Omega}$. Κι αφού αρχικά ήταν μηδενική, θα έχουμε $u(x, t) = 0$ και άρα $u^{(1)}(x, t) = u^{(2)}(x, t)$ σε κάθε $(x, t) \in \bar{\Omega}$. ■

Η έννοια της ολικής (κινητικής και δυναμικής) μηχανικής ενέργειας της χορδής, που χρησιμοποιήσαμε στην απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος μοναδικότητας, έχει τόσα κοινά με την έννοια που χρησιμοποιείται στη μελέτη της δυναμικής ενός υλικού σωματίου, ή ενός συστήματος από τέτοια σωματίδια, που ωθεί στο να ερευνήσουμε την πιθανότητα ύπαρξης μιας ευρύτερης αναλογίας ανάμεσα στις μεθόδους της μηχανικής των σωματίων και στις μεθόδους ανάλυσης ενός "συνεχούς μέσου", όπως είναι η χορδή. Αναρωτιέται, για παράδειγμα, κανείς εάν είναι δυνατό να παραγάγει την εξίσωση κίνησης της χορδής, δηλαδή την ομογενή κυματική εξίσωση, μέσω εξισώσεων τύπου Euler-Lagrange για κάποιο "πρόβλημα μεταβολών", όπως γίνεται με εξίσωση κίνησης ενός σωματίου.

Για να επιτύχουμε κάτι τέτοιο, είναι προφανώς απαραίτητο να κατασκευάσουμε την αντίστοιχη συνάρτηση Lagrange για τη χορδή. Στην κατεύθυνση αυτή παίρνουμε για οδηγό μας το γεγονός ότι, στην περίπτωση του σωματίου, ως συνάρτηση Lagrange ορίζεται η διαφορά της δυναμικής από την κινητική ενέργεια. Γι' αυτό και τώρα, ορίζουμε ως **συνάρτηση Lagrange** της χορδής μήκους a την

$$(10.17) \quad L(t) := T(t) - V(t) = \frac{1}{2} \rho \int_0^a (u_t^2 - c^2 u_x^2) dx.$$

Αυτή γράφεται και σαν

$$(10.18) \quad L(t) = \int_0^a \mathcal{L}(u_x, u_t) dx,$$

όπου

$$(10.19) \quad \mathcal{L}(u_x, u_t) := \frac{1}{2} \rho (u_t^2 - c^2 u_x^2).$$

Η τελευταία ονομάζεται **πυκνότητα Lagrange**.

Με βάση και πάλι τη δυναμική ενός σωματίου, ως **ολοκλήρωμα δράσης** ορίζουμε την ποσότητα

$$(10.20) \quad J := \int_1^2 L(t) dt = \int_1^2 \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L}(u_x, u_t) dx dt,$$

όπου, χάρη γενικότητας, αντικαταστήσαμε τα όρια $0, a$ της χωρικής μεταβλητής με x_1, x_2 .

Έτσι κι αλλιώς, η έκφραση (10.20) είναι προσαρμοσμένη πλήρως στην περίπτωση της χορδής, κι άρα περιορισμένης εμβέλειας. Γίνεται κάπως γενικότερη εάν υποθέσουμε ότι η πυκνότητα Lagrange εξαρτιέται κι από την άγνωστη συνάρτηση $u(x, t)$. Με άλλα λόγια, στα επόμενα θα υποθέτουμε ότι η δράση είναι της μορφής

$$(10.21) \quad J = \iint_{\Omega} \mathcal{L}(u, u_x, u_t) d x d t,$$

όπου το διπλό ολοκλήρωμα ορίζεται σε μια ανοιχτή περιοχή Ω του επίπεδου $x t$, της οποίας το σύνορο αποτελείται από την καμπύλη $\partial\Omega$.

Θεωρούμε τώρα τη μεταβολή δJ της δράσης J που προκύπτει σαν αποτέλεσμα της αντικατάστασης της $u(x, t)$ από την

$$(10.22) \quad \tilde{u}(x, t) := u(x, t) + \varepsilon f(x, t),$$

όπου $\varepsilon > 0$ και $f(x, t)$ μια ομαλή συνάρτηση που μηδενίζεται στο σύνορο $\partial\Omega$ της περιοχής Ω . Συνεπώς, με μεταβολή της $u(x, t)$ και των παραγώγων της εννοούμε τις συναρτήσεις

$$(10.23) \quad \delta u := \varepsilon f(x, t), \quad \delta u_x = \varepsilon f_x(x, t), \quad \delta u_t = \varepsilon f_t(x, t).$$

Τώρα, από τον ορισμό (10.21) αμέσως έπεται ότι, η μεταβολή δu της $u(x, t)$ επιφέρει την ακόλουθη μεταβολή στη δράση:

$$(10.24) \quad \delta J = \iint_{\Omega} (\mathcal{L}_u \delta u + \mathcal{L}_{u_x} \delta u_x + \mathcal{L}_{u_t} \delta u_t) d x d t.$$

Όμως,

$$(10.25) \quad \mathcal{L}_{u_x} \delta u_x = \partial_x (\mathcal{L}_{u_x} \delta u) - \partial_x (\mathcal{L}_{u_x}) \delta u$$

κι ανάλογα για τον όρο $(\partial \mathcal{L} / \partial u_t) \delta u_t$. Άρα,

$$(10.26) \quad \begin{aligned} \delta J = \iint_{\Omega} [\mathcal{L}_u \delta u - \partial_x (\mathcal{L}_{u_x}) \delta u - \partial_t (\mathcal{L}_{u_t}) \delta u] d x d t \\ + \iint_{\Omega} [\partial_x (\mathcal{L}_{u_x} \delta u) + \partial_t (\mathcal{L}_{u_t} \delta u)] d x d t \end{aligned}$$

Το τελευταίο διπλό ολοκλήρωμα μπορεί να μετατραπεί σε επικαμπύλιο, με αποτέλεσμα η (10.26) να γίνει

$$(10.27) \quad \begin{aligned} \delta J = \iint_{\Omega} [\mathcal{L}_u - \partial_x (\mathcal{L}_{u_x}) - \partial_t (\mathcal{L}_{u_t})] \delta u d x d t \\ + \oint_{\partial\Omega} (\mathcal{L}_{u_x} + \mathcal{L}_{u_t}) \delta u d x d t. \end{aligned}$$

Όμως, σύμφωνα με την υπόθεση, δu πάνω στην καμπύλη $\partial\Omega$. Άρα, η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$(10.28) \quad \delta J = \iint_{\Omega} [\mathcal{L}_u - \partial_x (\mathcal{L}_{u_x}) - \partial_t (\mathcal{L}_{u_t})] \delta u d x d t.$$

Εάν λοιπόν, η $u(x, t)$ δίνει στο ολοκλήρωμα (7.20) ακρότατη τιμή, τότε θα έχουμε μηδενική μεταβολή στην δράση J σαν αποτέλεσμα της μεταβολής της u και των πρώτων

παραγώγων της. Με άλλα λόγια, αναγκαία συνθήκη για να 'ναι η τιμή της δράσης ακρότατη είναι η $\delta J = 0$. Επειδή η δu είναι συνεχής, αυτό μπορεί να συμβαίνει μόνο όταν

$$(10.29) \quad \mathcal{L}_u - \partial_x(\mathcal{L}_{u_x}) - \partial_t(\mathcal{L}_{u_t}) = 0.$$

Η (10.29) ονομάζεται **εξίσωση Euler-Lagrange** αντίστοιχη της δράσης (10.21), ή **εξίσωση κίνησης του πεδίου** $u(x, t)$. Ο δεύτερος όρος χρησιμοποιείται γιατί η $u(x, t)$ ονομάζεται και **βαθμωτό πεδίο** ορισμένο στην περιοχή Ω του επίπεδου $x t$.

Εάν θέσουμε $(x_1, x_2) = (x, t)$, η (10.21) γίνεται

$$(10.30) \quad J = \iint_{\Omega} \mathcal{L}(u, u_{x_a}) dx^1 dx^2, \quad a = 1, 2,$$

και η εξίσωση Euler-Lagrange παίρνει την πιο συμπαγή μορφή

$$(10.31) \quad \partial_u \mathcal{L} - \sum_a \partial_{x_a} (\partial_{u_{x_a}} \mathcal{L}) = 0.$$

Σε αυτή τη μορφή η εξίσωση Euler-Lagrange ισχύει **απαράλλαχτη** και όταν οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι περισσότερες από δύο.

Παράδειγμα 10.1

Επιστρέφοντας στο παράδειγμα της χορδής, βλέπουμε ότι η αντίστοιχη πυκνότητα Lagrange (10.19) είναι ανεξάρτητη από την συνάρτηση u . Δηλαδή,

$$(10.32) \quad \partial_u \mathcal{L} = 0$$

και άρα η εξίσωση Euler-Lagrange (10.29) γίνεται

$$(10.33) \quad \partial_x(\mathcal{L}_{u_x}) + \partial_t(\mathcal{L}_{u_t}) = \frac{\partial}{\partial x}(-\rho c^2 u_x) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho u_t) = -\rho c^2 u_{xx} + \rho u_{tt} = 0.$$

Ισοδύναμα,

$$(10.34) \quad c^2 u_{xx} - u_{tt} = 0,$$

που δεν είναι άλλη από την (ομογενή, μονοδιάστατη) κυματική εξίσωση. ■

Παράδειγμα 10.2

Θεωρούμε την επιφάνεια

$$(10.35) \quad S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = u(x, y)\}, \quad (x, y) \in \Omega.$$

όπου x, y, z Καρτεσιανές συντεταγμένες του \mathbb{R}^3 και Ω ένα ανοιχτό και συνεκτικό υποσύνολο του \mathbb{R}^2 . Το εμβαδόν E της S δίνεται από τον τύπο

$$(10.36) \quad E = \iint_{\Omega} \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} dx dy.$$

Ας υποθέσουμε ότι το σύνορο ∂S της επιφάνειας (που προβάλλεται στην καμπύλη $\partial\Omega$ του επίπεδου $x y$) είναι προκαθορισμένο και ας θέσουμε το εξής ερώτημα: Πώς πρέπει να

κατασκευαστεί η S , έτσι που το εμβαδόν της να είναι ακρότατο (μέγιστο ή ελάχιστο); Προφανώς, η κατασκευή της S ισοδυναμεί με την εύρεση της συνάρτησης $u(x, y)$.

Στην προκείμενη περίπτωση

$$(10.37) \quad \mathcal{L} = \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2},$$

οπότε

$$(10.38) \quad \mathcal{L}_u = 0, \quad \mathcal{L}_{u_x} = \frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}, \quad \mathcal{L}_{u_y} = \frac{u_y}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}.$$

Άρα, η εξίσωση Euler-Lagrange (10.29) για τη δράση $J = E$ γίνεται

$$(10.39) \quad \partial_x \left(\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}} \right) + \partial_y \left(\frac{u_y}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}} \right) = 0.$$

Ισοδύναμα,

$$(10.40) \quad (1 + u_x^2) u_{xx} - 2 u_x u_x u_{xy} + (1 + u_y^2) u_{yy} = 0.$$

Το αριστερό μέλος της (10.40) παριστάνει τη λεγόμενη **μέση καμπυλότητα** της επιφάνειας S . Άρα, η ελευταία εξίσωση σημαίνει ότι, η επιφάνεια με το ελάχιστο ή μέγιστο εμβαδό, για δοσμένη συνοριακή καμπύλη, είναι αυτή που έχει μηδενική μέση καμπυλότητα. ■

Ασκήσεις

10.1 Να δειχτεί ότι το ΠΑΣΤ (πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών)

$$\begin{aligned} c^2 u_{xx} - u_{tt} &= 0, \quad x \in (0, a), \quad t \in (0, \infty), \\ u(x, 0) &= f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq a, \\ u(0, t) &= l(t), \quad u(a, t) = r(t), \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

επιδέχεται μία μόνο κλασική λύση. (Εξυπακούεται ότι οι συναρτήσεις που ορίζουν τα αρχικά και συνοριακά δοσμένα είναι μεταξύ τους συμβατές στις κορυφές της χωροχρονικής λωρίδας $0 \leq x \leq a, t \geq 0$. Πώς διατυπώνονται οι αντίστοιχες **συνθήκες συμβατότητας**;))

10.2 Θεωρήστε μια λεπτή χορδή μήκους a που το ένα ή και τα δύο άκρα της δεν είναι στερεωμένα, παρά κινούνται στην ίδια κατεύθυνση με τα υπόλοιπα στοιχεία της χορδής, όντας δεμένα σε κρίκους που ολισθαίνουν χωρίς τριβές πάνω σε δοκούς. Δείχτε ότι, και σ' αυτή την περίπτωση, η ολική ενέργεια της χορδής παραμένει σταθερή.

Υπόδειξη. Οι ολισθηροί δοκοί δεν μπορούν να ασκήσουν δύναμη στα άκρα της χορδής παρά μόνο στην κάθετη προς τους δοκούς κατεύθυνση.

10.3 α) Με βάση το αποτέλεσμα της προηγούμενης άσκησης, ναδειχτεί ότι η λύση του ΠΑΣΤ

$$\begin{aligned} c^2 u_{xx} - u_{tt} &= 0, \quad x \in (0, a), \quad t \in (0, \infty), \\ u(x, 0) &= f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq a, \\ u_t(0, t) &= u(a, t) = 0, \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

είναι μοναδική.

β) Ναδειχτεί ότι το ίδιο ισχύει και στις περιπτώσεις που οι συνοριακές συνθήκες παίρνουν την ακόλουθη μορφή:

$$(i) \quad u(0, t) = u_t(a, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (ii) \quad u_t(0, t) = u_t(a, t) = 0, \quad t \geq 0.$$

10.4 α) Υποθέστε ότι η συνάρτηση $u(x, t)$ αποτελεί κλασική λύση της εξίσωσης της διάχυσης $u_t = k u_{xx}$, $k > 0$, στη χωροχρονική λωρίδα $\Omega = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2, 0 < x < a, t > 0\}$ και σέβεται τόσο την αρχική συνθήκη

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq a,$$

όσο και τις συνοριακές

$$u_x(0, t) = u_x(a, t) = 0, \quad t \geq 0.$$

Δείχτε ότι η παραπάνω λύση είναι μοναδική.

Υπόδειξη. Υπολογίστε την παράγωγο της συνάρτησης

$$V(t) := \int_0^a \frac{1}{2} \lambda u_x^2 dx.$$

β) Εξηγήστε το φυσικό νόημα της συνάρτησης $V(t)$ και των συνοριακών συνθηκών.

10.5 Να βρεθεί η εξίσωση κίνησης του πεδίου $u(x, t)$, όταν η αντίστοιχη πυκνότητα Lagrange είναι της μορφής

$$\mathcal{L}(u, u_x, u_y) = \frac{1}{2} u_y^2 - \frac{1}{2} [u_x^2 + \lambda F(u)]$$

όπου $y = ct$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Εξειδικεύστε την απάντησή σας για τις εξής περιπτώσεις:

$$(i) \quad F(u) = u^2, \quad t \geq 0, \quad (ii) \quad F(u) = 2(1 - \cos u), \quad (iii) \quad F(u) = 2e^u.$$

10.6 Να βρεθεί η εξίσωση κίνησης του πεδίου $u(x, y, z, t)$, όταν η αντίστοιχη πυκνότητα Lagrange είναι της μορφής

$$\mathcal{L}(u, u_x, u_y, u_z, u_t) = \frac{1}{2} u_t^2 - \frac{1}{2} c^2 [u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 + \lambda F(u)]$$

όπου $c, \lambda \in \mathbb{R}$. Εξειδικεύστε την απάντησή σας για τις εξής περιπτώσεις:

$$(i) \quad F(u) = 0, \quad t \geq 0, \quad (ii) \quad F(u) = u^2, \quad (iii) \quad F(u) = 2(1 - \cos u).$$

11. Προβλήματα συνοριακών τιμών στον \mathbb{R}^2

Το κατά πόσο το πρόβλημα που ορίζεται από το ζευγάρι (ΜΔΕ, συμπληρωματικές συνθήκες) είναι ορθά διατυπωμένο εξαρτιέται και από τα δύο μέλη του πιο πάνω ζευγαριού. Αυτό σημαίνει ότι, για κάποια συγκεκριμένη ΜΔΕ, όπως η μονοδιάστατη κυματική εξίσωση, υπάρχουν συμπληρωματικές συνθήκες που δίνουν ένα ορθό πρόβλημα και άλλες που δίνουν το αντίθετο αποτέλεσμα. Για να δούμε ένα παράδειγμα αυτού του φαινομένου, επιστρέφουμε στην κυματική εξίσωση σε χαρακτηριστικές συντεταγμένες και εξετάζουμε το ακόλουθο πρόβλημα συνοριακών τιμών:

Θεωρούμε την ανοιχτή ορθογώνια περιοχή $\Omega = \{(\eta, \xi) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \eta < a, 0 < \xi < b\}$ και ζητάμε τη συνάρτηση $u(\eta, \xi)$, με $u \in C^2(\overline{\Omega})$, που ικανοποιεί την ΜΔΕ

$$(11.1) \quad u_{\eta\xi} = 0,$$

στο εσωτερικό της Ω και τις παρακάτω συνθήκες στο σύνορό της, $\partial\Omega$:

$$(11.2\alpha) \quad u(\eta, 0) = f(\eta), \quad u(0, \xi) = g(\xi),$$

$$(11.2\beta) \quad u(\eta, b) = h(\eta), \quad u(a, \xi) = k(\xi).$$

Υποτίθεται ότι, οι δοσμένες συναρτήσεις f, g, h και k είναι C^2 στο κλειστό διάστημα ορισμού τους και συγκεκριμένα στο $0 \leq \eta \leq a$ οι f και h και στο $0 \leq \xi \leq b$ οι g και k , αντίστοιχα.

Όπως γνωρίζουμε, η λύση της (11.1) δίνεται από την έκφραση

$$(11.3) \quad u(\eta, \xi) = F(\eta) + G(\xi),$$

όπου F, G τυχαίες C^2 συναρτήσεις. Επιβάλλοντας λοιπόν τις συνοριακές συνθήκες (11.2α), βρίσκουμε ότι,

$$(11.4\alpha) \quad F(\eta) + G(0) = f(\eta),$$

$$(11.4\beta) \quad F(0) + G(\xi) = g(\xi).$$

Από αυτές τις σχέσεις αμέσως έπεται ότι,

$$(11.5) \quad F(0) + G(0) = f(0) = g(0) = u(0, 0) \equiv A$$

και άρα

$$(11.6) \quad u(\eta, \xi) = f(\eta) + g(\xi) - A.$$

Παρατηρούμε τώρα τα εξής: Η (11.6) δείχνει καθαρά ότι, η λύση του δοσμένου προβλήματος καθορίζεται πλήρως από τα δοσμένα κατά μήκος των πλευρών $\xi = 0$ και $\eta = 0$ του ορθογώνιου $\overline{\Omega}$, μόνο. Αυτό όμως σημαίνει ότι, οι συνοριακές συνθήκες (11.2β) περιττεύουν. Ισοδύναμα, αν απαιτήσουμε από τη λύση (11.6) να πληρεί και αυτές οι συνθήκες, τότε θα καταλήξουμε στις ακόλουθες σχέσεις:

$$(11.7\alpha) \quad h(\eta) = f(\eta) + g(b) - A,$$

$$(11.7\beta) \quad k(\xi) = f(a) + g(\xi) - A.$$

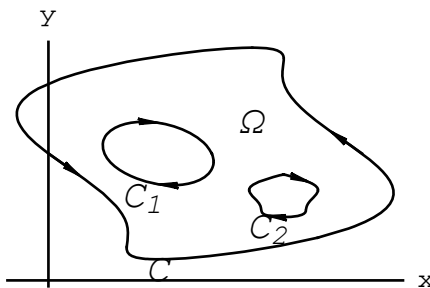
Αλλά αυτό σημαίνει ότι οι h, k δεν μπορεί να επιλέγονται ελεύθερα, πράγμα που έρχεται σε αντίθεση με την έννοια του προβλήματος συνοριακών τιμών.

Με άλλα λόγια, το πρόβλημα συνοριακών τιμών (11.1)-(11.2) γενικά, δηλαδή για τυχαίες f, g, h και k , δεν έχει λύση. Η λύση του υπάρχει μόνο στην ειδική περίπτωση που οι συναρτήσεις h και k σχετίζονται με τις f, g , όπως στις (11.7). Αλλά, σε αυτή την περίπτωση, η λύση είναι ασταθής.

Για να καταλάβουμε πώς βγαίνει αυτό το συμπέρασμα, ας φανταστούμε ότι οι f, g, h και k που μας δόθηκαν αρχικά σέβονται τις συνθήκες (11.7) και άρα το πρόβλημα λύνεται απρόσκοπτα. Ας φανταστούμε στη συνέχεια ότι εξετάζουμε το ίδιο πρόβλημα, αλλά με τις συνθήκες κατά μήκος των πλευρών $\xi = 0$ και $\eta = 0$ ελάχιστα αλλαγμένες. Δηλαδή, με $u(\eta, 0) = \tilde{f}(\eta)$, $u(0, \xi) = \tilde{g}(\xi)$, όπου οι \tilde{f} και \tilde{g} διαφέρουν ελάχιστα από τις f και g , αντίστοιχα. Είναι φανερό ότι το "νέο" πρόβλημα δε θα έχει λύση, αφού οι συνθήκες (11.7) θα παραβιάζονται.

Το πρόβλημα που απαρτίζεται από τη ΜΔΕ (11.1) και τις συνθήκες (11.2α), μόνο, ονομάζεται **πρόβλημα χαρακτηριστικών συνοριακών τιμών** για τη μονοδιάστατη κυματική εξίσωση και, από τα παραπάνω, φαίνεται καθαρά ότι, τούτο το πρόβλημα είναι ορθά διατυπωμένο. Από την άλλη, το πρόβλημα που απαρτίζεται από τη ΜΔΕ (11.1) και τις συνθήκες (11.2α) και (11.2β) αποτελεί ένα παράδειγμα του λεγόμενου προβλήματος Dirichlet. Από την ανάλυση που προηγήθηκε συμπεραίνουμε ότι, το πρόβλημα Dirichlet για την κυματική εξίσωση δεν είναι ορθά διατυπωμένο.

Στη γενικότερη περίπτωση, με τον όρο **πρόβλημα Dirichlet** (στον \mathbb{R}^2) εννοούμε ένα ζευγάρι (ΜΔΕ, συμπληρωματικές συνθήκες), το δεύτερο μέλος του οποίου έχει την ακόλουθη μορφή: Αν Ω είναι η ανοιχτή και συνεκτική περιοχή όπου η συνάρτηση $u(x, y)$ αποτελεί λύση της δοσμένης ΜΔΕ, τότε η $u(x, y)$ πρέπει να σέβεται και τη συνοριακή συνθήκη $u(x, y) = f(x, y)$, όταν $(x, y) \in \partial\Omega$, όπου $f(x, y)$ δοσμένη συνάρτηση. Συνήθως, η περιοχή Ω είναι φραγμένη και το σύνορό της αποτελείται από μία κλειστή, τμηματικά ομαλή καμπύλη, όπως στο παράδειγμα που εξετάσαμε λίγο παραπάνω, ή από ένα πεπερασμένο πλήθος τέτοιων καμπυλών, όπως στο Σχ. 5.1, όπου $\partial\Omega = C_1 \cup C_2 \cup C_3$.



Σχ. 11.1. Η περιοχή Ω και το προσανατολισμένο σύνορό της, $\partial\Omega = C_1 \cup C_2 \cup C_3$.

Ας θεωρήσουμε, για παράδειγμα, το πρόβλημα Dirichlet για την εξίσωση Laplace στον \mathbb{R}^2 , δηλαδή το πρόβλημα

$$(11.8) \quad \Delta u := u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad (x, y) \in \Omega,$$

$$(11.9) \quad u(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega,$$

όπου η περιοχή Ω είναι όπως στο Σχ. 11.1, η άγνωστη συνάρτηση $u \in C^2(\Omega)$ και η δοσμένη συνάρτηση f είναι συνεχής στο σύνολο ορισμού της, $\partial\Omega$, δηλαδή $f \in C(\partial\Omega)$. Το θεώρημα που

ακολουθεί δείχνει καθαρά ότι, στην προκειμένη περίπτωση, ικανοποιείται η μία από τις προϋποθέσεις για να είναι το παραπάνω ένα ορθά διατυπωμένο πρόβλημα.

Θεώρημα 11.1. Η λύση του προβλήματος Dirichlet (11.8)-(11.9), όταν υπάρχει, είναι μοναδική.

Την απόδειξη αυτού του θεωρήματος θα τη στηρίξουμε σε ένα βασικό αποτέλεσμα του διαφορικού λογισμού (της ανάλυσης) που χρησιμοποιείται συχνά στη μελέτη των ΜΔΕ. Γι' αυτό, το παραθέτουμε με τη μορφή ενός λήμματος.

Λήμμα (Θεώρημα Green)

Θεωρούμε μια συνεκτική και φραγμένη περιοχή Ω της οποίας το σύνορο, $\partial\Omega$, προκύπτει από την ένωση καμπυλών κλάσης C^1 , με την ακόλουθη ιδιότητα: Σε κάθε σημείο όπου ενώνονται δύο διαφορετικές καμπύλες, η γωνία που σχηματίζουν τα αντίστοιχα εφαπτόμενα διανύσματα είναι μη μηδενική. Αν οι συνιστώσες του διανυσματικού πεδίου

$$(11.10) \quad \mathbf{v}(x, y) = (a(x, y), b(x, y)),$$

είναι κλάσης C^1 σε κάποιο ανοιχτό σύνολο U που καλύπτει την περιοχή $\bar{\Omega} := \Omega \cup \partial\Omega$, τότε

$$(11.11) \quad \boxed{\int\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{v} \, dx \, dy = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds}$$

Στο δεξί μέλος αυτής της ταυτότητας, η παράμετρος s δηλώνει το μήκος τόξου και το $\mathbf{n}(s)$ συμβολίζει το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι κάθετο στην καμπύλη $\partial\Omega$ και βλέπει προς το εξωτερικό της περιοχής Ω .

Σημείωση. Για να αποσαφηνιστούν οι ποσότητες που υπεισέρχονται στο θεώρημα Green (της απόκλισης στο επίπεδο), ας υποθέσουμε ότι η καμπύλη $\partial\Omega$ ορίζεται από τις σχέσεις

$$(11.12) \quad x = X(s), \quad y = Y(s), \quad s \in I,$$

όπου I κάποιο διάστημα της πραγματικής ευθείας. Τότε το εφαπτόμενο στην $\partial\Omega$ διάνυσμα ορίζεται ως εξής:

$$(11.13) \quad \mathbf{t}(s) := (X'(s), Y'(s)).$$

Από το γεγονός ότι η παράμετρος s δηλώνει το μήκος τόξου, αμέσως έπεται ότι το $\mathbf{t}(s)$ είναι μοναδιαίο:

$$(11.14) \quad X'^2(s) + Y'^2(s) = 1, \quad \forall s \in I.$$

Ο προσανατολισμός της καμπύλης $\partial\Omega$, άρα και του επικαμπύλιου ολοκληρώματος στην (11.11), επιλέγεται με τον ακόλουθο τρόπο: Καθώς προχωράμε κατά μήκος της $\partial\Omega$, προς την κατεύθυνση του εφαπτόμενου διανύσματος $\mathbf{t}(s)$, η περιοχή Ω παραμένει στο αριστερό μας χέρι. Αντίστοιχα, το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{n}(s)$ δείχνει προς το εξωτερικό της περιοχής Ω , δηλαδή προς το δεξιά μας. Συνεπώς,

$$(11.15) \quad \mathbf{n}(s) = (Y'(s), -X'(s)).$$

Αυτό σημαίνει ότι

$$(11.16) \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = a(X(s), Y(s)) Y'(s) - b(X(s), Y(s)) X'(s).$$

Συνακόλουθα, η ταυτότητα (11.11) γράφεται αναλυτικά ως εξής:

$$(11.17) \iint_{\Omega} [a_x(x, y) + b_y(x, y)] dx dy = \oint_{\partial\Omega} [a(X(s), Y(s)) Y'(s) - b(X(s), Y(s)) X'(s)] ds.$$

Τώρα, επειδή $x = X(s)$ και $y = Y(s)$, οι ποσότητες $X'(s) ds$ και $Y'(s) ds$ συχνά συμβολίζονται με dx και dy , αντίστοιχα. Έτσι, η (11.17) γράφεται συνοπτικά στη μορφή

$$(11.18) \quad \boxed{\iint_{\Omega} (a_x + b_y) dx dy = \oint_{\partial\Omega} (a dy - b dx)}$$

Απόδειξη του θεωρήματος. Θεωρούμε το διανυσματικό πεδίο

$$(11.19) \quad \mathbf{v}(x, y) := u(x, y) \nabla \varphi(x, y),$$

όπου $u \in C^1(U)$, $\varphi \in C^2(U)$ και U μια ανοιχτή και συνεκτική περιοχή που καλύπτει το σύνολο $\overline{\Omega}$. Αντικαθιστώντας το \mathbf{v} στη σχέση (11.11) του θεωρήματος Green, παίρνουμε

$$(11.20) \quad \iint_{\Omega} \nabla \cdot (u \nabla \varphi) dx dy = \oint_{\partial\Omega} u \mathbf{n} \cdot \nabla \varphi ds.$$

Ισοδύναμα,

$$(11.21) \quad \boxed{\iint_{\Omega} (u \Delta \varphi + \nabla u \cdot \nabla \varphi) dx dy = \oint_{\partial\Omega} u \partial_n \varphi ds}$$

όπου

$$(11.22) \quad \partial_n \varphi := \mathbf{n} \cdot \nabla \varphi.$$

Η (11.21) είναι γνωστή ως **πρώτη ταυτότητα (του) Green**. Στην ειδικότερη περίπτωση όπου $u = \varphi$ αυτή γίνεται

$$(11.23) \quad \iint_{\Omega} (u \Delta u + |\nabla u|^2) dx dy = \oint_{\partial\Omega} u \partial_n \varphi ds.$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι u_1, u_2 είναι δύο λύσεις του δοσμένου προβλήματος Dirichlet. Τότε, η γραμμικότητα της εξίσωσης Laplace συνεπάγεται ότι και η διαφορά τους, $u = u_1 - u_2$, είναι λύση του ίδιου προβλήματος. Μάλιστα, αφού $u_1 = u_2 = f$ στο σύνορο $\partial\Omega$, η u είναι λύση του πιο πάνω προβλήματος με συνοριακή συνθήκη $u(x, y) = 0$ για $(x, y) \in \partial\Omega$.

Κάτω από αυτές τις προϋποθέσεις, η (11.23) γίνεται

$$(11.24) \quad \iint_{\Omega} |\nabla u|^2 dx dy = 0,$$

που, σε συνδυασμό με την συνέχεια της ∇u , συνεπάγεται ότι $\nabla u = \mathbf{0}$ για κάθε $(x, y) \in \Omega$. Με άλλα λόγια, η u είναι σταθερή στο εσωτερικό της Ω . Αλλά η u είναι συνεχής συνάρτηση σε ολόκληρη την περιοχή $\overline{\Omega}$ και $u(x, y) = 0$ για $(x, y) \in \partial\Omega$. Άρα, $u(x, y) = 0$ ή, ισοδύναμα, $u_1(x, y) = u_2(x, y) = 0$ για κάθε $(x, y) \in \Omega$.

Αργότερα, με μεθόδους σαν αυτή του χωρισμού των μεταβλητών που παρουσιάζουμε στο επόμενο κεφάλαιο, ο αναγνώστης θα είναι σε θέση να διαπιστώσει ότι, για μια ορθογώνια περιοχή, σαν κι αυτή που εξετάσαμε νωρίτερα, το πρόβλημα Dirichlet για την εξίσωση Laplace ικανοποιεί και τα υπόλοιπα κριτήρια ενός ορθού ή καλά τοποθετημένου προβλήματος: Έχει λύση και η λύση αυτή εξαρτιέται με συνεχή τρόπο από τα συνοριακά δοσμένα. Το ίδιο ισχύει και για μια πολύ μεγαλύτερη οικογένεια περιοχών του \mathbb{R}^2 .

Ένα άλλο πρόβλημα συνοριακών τιμών που συναντάει κανείς είναι το **πρόβλημα Neumann**. Με αυτό τον όρο εννοούμε ένα πρόβλημα ίδιο μ' εκείνο του Dirichlet, με τη διαφορά ότι, στο σύνορο της περιοχής Ω δίνονται οι τιμές της εγκάρσιας παραγώγου $\partial_n u$ της άγνωστης συνάρτησης u , αντί για τις τιμές της ίδιας της u . Επαναλαμβάνοντας κατά γράμμα τα βήματα της απόδειξης του Θεωρ. 11.1, καταλήγουμε και πάλι στο συμπέρασμα ότι, η κλίση, ∇u , της διαφοράς $u = u_1 - u_2$ δύο λύσεων του προβλήματος Neumann μηδενίζεται στο εσωτερικό της Ω . Και σ' αυτή την περίπτωση, λοιπόν, $u_1 - u_2 = c$, μία σταθερή ποσότητα. Εδώ, όμως, δεν μπορούμε να προχωρήσουμε παραπέρα και να συμπεράνουμε ότι $c = 0$, γιατί δεν ισχύει η συνθήκη $u = 0$ στο σύνορο της Ω . Με αυτό τον τρόπο αποδειχεται το

Θεώρημα 11.2. Η λύση του προβλήματος Neumann για την εξίσωση Laplace, όταν υπάρχει, είναι **σχεδόν μοναδική**. Με αυτό εννοούμε ότι, δύο λύσεις αυτού του προβλήματος διαφέρουν κατά μία σταθερή ποσότητα, μόνο.

■

Τέλος, με τον όρο **πρόβλημα Robin ή τρίτου είδους** (σε αντιδιαστολή με τα προβλήματα Dirichlet και Neumann που αναφέρονται και σαν **προβλήματα συνοριακών τιμών πρώτου και δεύτερου είδους**, αντίστοιχα) εννοείται το ίδιο όπως παραπάνω πρόβλημα, αλλά με τη συνοριακή συνθήκη αλλαγμένη σε

$$(11.25) \quad \partial_n u + h u = f, \quad \text{για } (x, y) \in \partial\Omega,$$

όπου h και f δοσμένες συναρτήσεις. Η απόδειξη του επόμενου θεωρήματος είναι αρκετά εύκολη και αφήνεται για άσκηση του αναγνώστη.

Θεώρημα 11.3. Αν στη συνοριακή συνθήκη (11.25) η συνάρτηση $h \geq 0$ (δεν παίρνει αρνητικές τιμές), χωρίς να μηδενίζεται παντού, τότε λύση του προβλήματος Robin για την εξίσωση Laplace, όταν υπάρχει, είναι μοναδική.

■

Θα κλείσουμε αυτό το εδάφιο με την απόδειξη μιας ταυτότητας που χρησιμοποιήσαμε στο 9ο. Πρόκειται για τη σχέση

$$(11.26) \quad u(A) + u(C) = u(B) + u(D).$$

ανάμεσα στις τιμές που παίρνει η λύση της ομογενούς κυματικής εξίσωσης $u_{xx} - u_{yy} = 0$ στις κορυφές ενός χαρακτηριστικού τετράπλευρου $A B C D$.

Για το σκοπό αυτό, επιστρέφουμε στην ταυτότητα (11.18) και θέτουμε

$$(11.27) \quad (a(x, y), b(x, y)) = (u_x(x, y), -u_y(x, y)).$$

Αυτή η υπόθεση είναι συμβατή με τις απαιτήσεις του θεωρήματος Green, γιατί μας ενδιαφέρει μια αυστηρή ή κλασσική λύση της κυματικής εξίσωσης. Αυτό σημαίνει ότι η $u \in C^2(U)$, όπου

U είναι το ανοιχτό και συνεκτικό σύνολο του \mathbb{R}^2 , στο οποίο ισχύει η λύση $u(x, y)$. Τότε, οι συναρτήσεις $u_x(x, y)$ και $u_y(x, y)$ ανήκουν στην κλάση $C^1(U)$.

Η αντικατάσταση της (11.27) στην (11.18) δίνει το εξής αποτέλεσμα:

$$(11.28) \quad \iint_{\Omega} (u_{xx} - u_{yy}) dx dy = \oint_{\partial\Omega} (u_x dy + u_y dx).$$

Έτσι, η υπόθεση ότι η $u(x, y)$ είναι λύση της $u_{xx} - u_{yy} = 0$ οδηγεί στο συμπέρασμα ότι

$$(11.29) \quad \oint_{\partial\Omega} (u_x dy + u_y dx) = 0.$$

Τώρα υποθέτουμε ότι η φραγμένη περιοχή Ω είναι αυτή που βρίσκεται μέσα στο χαρακτηριστικό τετράπλευρο $ABCD$. Συνακόλουθα,

$$(11.30) \quad \partial\Omega = AB \cup BC \cup CD \cup DA.$$

Αλλά, όταν λέμε ότι το τετράπλευρο $ABCD$ είναι χαρακτηριστικό, εννοούμε ότι κάθε του πλευρά βρίσκεται πάνω σε μια χαρακτηριστική της κυματικής εξίσωσης. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η πλευρές AB και CD βρίσκονται πάνω σε χαρακτηριστικές του τύπου $x - y = \text{σταθ}$. Τότε, οι πλευρές BC και DA βρίσκονται πάνω σε χαρακτηριστικές του τύπου $x + y = \text{σταθ}$. Κατά συνέπεια, καθώς κινούμαστε πάνω στην πλευρά AB , πηγαίνοντας από το σημείο A στο B , $dx = dy$. Αντίθετα, καθώς πάμε από το B στο C , κατά μήκος της πλευράς BC , $dx = -dy$. Ανάλογα και για τις υπόλοιπες πλευρές.

Από αυτή την παρατήρηση έπεται ότι,

$$\begin{aligned} \oint_{\partial\Omega} (u_x dy + u_y dx) &= \left(\int_A^B + \int_B^C + \int_C^D + \int_D^A \right) (u_x dy + u_y dx) \\ &= \int_A^B (u_x dx + u_y dy) - \int_B^C (u_x dx + u_y dy) + \int_C^D (u_x dx + u_y dy) - \int_D^A (u_x dx + u_y dy) \\ &= \int_A^B du - \int_B^C du + \int_C^D du - \int_D^A du \\ &= [u(B) - u(A)] - [u(C) - u(B)] + [u(D) - u(C)] - [u(A) - u(D)] \\ (11.31) \quad &= 2u(B) - 2u(A) - 2u(C) + 2u(D). \end{aligned}$$

Όμως, σύμφωνα την (11.29), η τελευταία ποσότητα μηδενίζεται ταυτοτικά. Άρα, η (11.26) πραγματικά ισχύει. ■

Ασκήσεις

11.1 Ας υποτεθεί ότι οι $u, \varphi \in C^2(U)$, όπου U κάποιο ανοιχτό υποσύνολο του \mathbb{R}^2 που καλύπτει την περιοχή Ω , στην οποία ισχύει το θεώρημα Green. Να δειχτεί ότι, τότε ισχύουν τόσο η **δεύτερη ταυτότητα (του) Green**

$$(11.32) \quad \boxed{\int_{\Omega} (u \Delta \varphi - \varphi \Delta u) dV = \oint_{\partial \Omega} (u \partial_n \varphi - \varphi \partial_n u) ds}$$

όσο και η **τρίτη ταυτότητα (του) Green**

$$(11.33) \quad \boxed{\int_{\Omega} \Delta u dx dy = \oint_{\partial \Omega} \partial_n u ds}$$

είναι

11.2 α) Ναδειχτεί ότι, απαραίτητη προϋπόθεση για να έχει λύση το πρόβλημα Neumann

$$\Delta u = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad \partial_n u = f(x, y), \quad (x, y) \in \partial \Omega,$$

είναι ο μηδενισμός του ολοκληρώματος της $f(x, y)$ πάνω στο σύνορο της περιοχής Ω :

$$\oint_{\partial \Omega} \partial_n u ds = 0$$

β) Θεωρήστε την ορθογώνια περιοχή $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < a, 0 < y < b\}$. Δείχτε ότι, το ακόλουθο πρόβλημα συνοριακών τιμών δεν έχει λύση:

$$\Delta u = 0, \quad (x, y) \in \Omega,$$

$$\partial_y u(x, 0) = x^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{a} x\right), \quad \partial_y u(x, b) = 0, \quad 0 \leq x \leq a,$$

$$\partial_x u(0, y) = \partial_x u(a, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq b,$$

11.3 N' αποδειχτεί το Θεώρημα 11.3.

11.4 Να διερευνηθεί η μοναδικότητα των λύσεων των προβλημάτων πρώτου, δεύτερου και τρίτου είδους για την ΜΔΕ

$$\Delta u + \lambda u = 0, \quad (x, y) \in \Omega,$$

όπου $\lambda \neq 0$ και Ω μια φραγμένη περιοχή του επίπεδου x, y , στην οποία ισχύει το θεώρημα Green.

12. Ταξινόμηση γραμμικών ΜΔΕ 2^{ης} τάξης στον \mathbb{R}^n , $n > 2$

Οι μέθοδοι ταξινόμησης και ποιοτικής ανάλυσης των γραμμικών ΜΔΕ που παρουσιάσαμε στα πρώτα εδάφια αυτού του κεφάλαιου γενικεύονται εύκολα για να καλύψουν και την περίπτωση όπου το πεδίο ορισμού της άγνωστης συνάρτησης u είναι μια ανοιχτή και συνεκτική περιοχή Ω του \mathbb{R}^n , με $n > 2$.

Ας θεωρήσουμε, λοιπόν, μια ΜΔΕ της μορφής

$$(12.1) \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(\mathbf{x}) u_{ij} = \rho(\mathbf{x}, u, \partial u)$$

όπου χρησιμοποιείται ο ακόλουθος συμβολισμός: Το $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n)$ παριστάνει το τυχαίο στοιχείο του \mathbb{R}^n , με $\partial u \equiv (\partial_1 u, \partial_2 u, \dots, \partial_n u)$ δηλώνεται το σύνολο των μερικών παραγώγων πρώτης τάξης της άγνωστης συνάρτησης $u \equiv u(\mathbf{x})$, $u_{ij} \equiv \partial_i \partial_j u$. Τέλος, οι συντελεστές $a_{ij}(\mathbf{x})$ των παραγώγων δεύτερης τάξης θεωρούνται ως δοσμένες συνεχείς συναρτήσεις με κοινό πεδίο ορισμού την περιοχή Ω . Στην περίπτωση που η (επίσης δοσμένη) συνάρτηση $\rho(\mathbf{x}, u, \partial u)$ είναι γραμμική ως προς τις μεταβλητές u και ∂u , η ΜΔΕ (12.1) είναι γραμμική. Με άλλα λόγια, η εξίσωση χαρακτηρίζεται ως γραμμική, αν μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$(12.2) \quad \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\mathbf{x}) u_{ij} = f(\mathbf{x}) + \sum_i^n b_i(\mathbf{x}) u_i + c(\mathbf{x}) u.$$

Στην ανάλυση που ακολουθεί, υποθέτουμε ότι,

$$(12.3) \quad a_{ij}(\mathbf{x}) = a_{ji}(\mathbf{x}), \quad \text{για κάθε } \mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n,$$

ότι, δηλαδή, ο $n \times n$ πίνακας (a_{ij}) που ορίζουν οι συντελεστές a_{ij} είναι συμμετρικός. Κι αυτό γιατί, ακόμα και όταν η (12.3) δεν ισχύει στη δοσμένη ΜΔΕ, μπορούμε πάντα να βρούμε μια ισοδύναμη, που έχει τη ίδια μορφή με την αρχική, αλλά με συμμετρικό πίνακα συντελεστών.

Αυτή η δυνατότητα στηρίζεται στο ότι, από τη μια μεριά

$$(12.4) \quad a_{ij} = \sigma_{ij} + \tau_{ij},$$

όπου

$$(12.5) \quad \sigma_{ij} := \frac{1}{2} (a_{ij} + a_{ji}), \quad \tau_{ij} := \frac{1}{2} (a_{ij} - a_{ji}).$$

Από την άλλη,

$$(12.6) \quad u_{ij} = u_{ji},$$

γιατί η u υποτίθεται πως είναι κλάσης C^2 . Συνεπώς,

$$(12.7) \quad \sum_{i,j=1}^n \tau_{ij} u_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} u_{ij} - a_{ji} u_{ij}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} u_{ij} - a_{ji} u_{ji}) = 0.$$

Άρα,

$$(12.8) \quad a_{ij} u_{ij} = \sigma_{ij} u_{ij},$$

όπου, σύμφωνα με την πρώτη των (12.5), $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$.

Τώρα, οι ιδιοτιμές κάθε συμμετρικού πίνακα με πραγματικά στοιχεία είναι όλες

πραγματικές. Ας υποθέσουμε, λοιπόν, ότι ο πίνακας (a_{ij}) έχει α θετικές, β αρνητικές και γ μηδενικές ιδιοτιμές. Τότε θα λέμε ότι η δοσμένη εξίσωση είναι **τύπου** (α, β, γ) .

Ειδικότερα, έχει καθιερωθεί η ακόλουθη ορολογία για ορισμένες από της εξισώσεις της μορφής (12.1):

(i) Όταν $(\alpha, \beta, \gamma) = (n, 0, 0)$, ή $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, n, 0)$, η ΜΔΕ ονομάζεται **ελλειπτικού τύπου** ή **ελλειπτική**.

(ii) Αν $(\alpha, \beta, \gamma) = (n-1, 1, 0)$, ή $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, n-1, 0)$, η αντίστοιχη ΜΔΕ ονομάζεται **υπερβολικού τύπου** ή **υπερβολική**.

(iii) Όταν $(\alpha, \beta, \gamma) = (n-1, 0, 1)$, ή $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, n-1, 1)$, η ΜΔΕ λέγεται **παραβολικού τύπου** ή **παραβολική**.

Είναι φανερό ότι, οι πιο πάνω περιπτώσεις (i)-(iii) δεν εξαντλούν όλες τις δυνατές διαμερίσεις του n σε τριάδες της μορφής (α, β, γ) . Ωστόσο, από την άποψη ιδιαίτερα των φυσικών εφαρμογών, οι ελλειπτικές, παραβολικές και υπερβολικές εξισώσεις είναι οι πιο ενδιαφέρουσες και γι' αυτό καθιερώθηκε ειδική ορολογία για τις πιο πάνω περιπτώσεις. Όλες οι άλλες καλύπτονται από τον γενικό όρο "τύπου (α, β, γ) " με αρκετή σαφήνεια. Όμως, επειδή στη σχετική βιβλιογραφία συναντάει κανείς μερικές φορές τον όρο **άκρως υπερβολική** για μια ΜΔΕ της μορφής (12.1), θα σημειώσουμε ότι αυτός αντιστοιχεί στον τύπο $(m, m, 0)$.

Πριν δούμε συγκεκριμένα παραδείγματα, πρέπει να τονίσουμε ότι, οι συντελεστές a_{ij} είναι γενικά συναρτήσεις του x και άρα, ο τύπος μιας εξίσωσης μπορεί ν' αλλάζει από σημείο σε σημείο της περιοχής $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, στην οποία ορίζεται η δοσμένη ΜΔΕ. Με άλλα λόγια, ο χαρακτηρισμός μιας εξίσωσης, ισχύει για κάθε σημείο $x \in \Omega$, όπου η τριάδα (α, β, γ) έχει την αντίστοιχη μορφή.

Παράδειγμα 12.1

(i) Η **εξίσωση Laplace** στον \mathbb{R}^n ,

$$(12.9) \quad \Delta u := \sum_{i=1}^n u_{ii} = 0,$$

είναι ελλειπτική. Γιατί, σ' αυτή την περίπτωση,

$$(12.10) \quad (a_{ij}) = (\delta_{ij}) := \text{διαγ}(1, 1, \dots, 1)$$

και άρα όλες οι ιδιοτιμές του (a_{ij}) είναι ίσες με τη μονάδα.

(ii) Για τη γραμμική ΜΔΕ

$$(12.11) \quad x u_{xx} + y u_{yy} - u_{zz} = 0,$$

όπου $u = u(x, y, z)$, τα μη μηδενικά στοιχεία του πίνακα (a_{ij}) είναι τα $a_{11} = x$, $a_{22} = y$ και $a_{33} = -1$. Άρα,

$$(12.12) \quad (a_{ij}) = \text{διαγ}(x, y, -1).$$

Συνεπώς, η (12.11) είναι ελλειπτικού τύπου στην περιοχή $\Omega_3 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x < 0, y < 0\}$ και υπερβολική στις $\Omega_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0\}$, $\Omega_2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x < 0, y > 0\}$, και $\Omega_4 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y < 0\}$.

(iii) Η ΜΔΕ

$$(12.13) \quad \Delta u - u_t \equiv \sum_{i=1}^m u_{ii} - u_t = 0,$$

για τη συνάρτηση $u(x, t)$, με $x \in \mathbb{R}^m$, $t \in \mathbb{R}$, ονομάζεται **εξίσωση της διάχυσης** ή της **θερμότητας στον \mathbb{R}^m** . Είναι προφανές ότι, σ' αυτή την περίπτωση,

$$(12.14) \quad (a_{ij}) = \text{διαγ}(1, \dots, 1, 0)$$

και

$$(12.15) \quad (\alpha, \beta, \gamma) = (m, 0, 1),$$

για κάθε σημείο του $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+1}$. Έτσι, η ΜΔΕ (12.13) είναι παραβολικού τύπου σε κάθε σημείο της περιοχής ορισμού της.

(iv) Για τη ΜΔΕ

$$(12.16) \quad x^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} + u_{zz} = 0,$$

έχουμε

$$(12.17) \quad (a_{ij}) = \begin{pmatrix} x^2 & xy & 0 \\ xy & y^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Η αντίστοιχη **χαρακτηριστική εξίσωση**,

$$(12.18) \quad \det(a_{ij} - \lambda \delta_{ij}) = \det \begin{pmatrix} x^2 - \lambda & xy & 0 \\ xy & y^2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda) \lambda [\lambda - (x^2 + y^2)] = 0.$$

δείχνει ότι, οι ιδιοτιμές του πίνακα (a_{ij}) είναι οι $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0$ και $\lambda_3 = x^2 + y^2$. Άρα, η ΜΔΕ (12.16) είναι παραβολική σε κάθε σημείο του ανοιχτού σύνολου που προκύπτει αν από τον \mathbb{R}^3 αφαιρέσουμε τον άξονα z .

(v) Η **κυματική εξίσωση** στον \mathbb{R}^m ,

$$(12.19) \quad c^2 \Delta u - u_{tt} \equiv c^2 (\sum_{i=1}^m u_{ii}) - u_{tt} = 0,$$

είναι το κλασικό παράδειγμα εξίσωσης υπερβολικού τύπου. Εδώ, η συνάρτηση $u(x, t)$, με $x \in \mathbb{R}^m$, $t \in \mathbb{R}$, ορίζεται στον \mathbb{R}^{m+1} κι από την (12.19) είναι προφανές ότι $(\alpha, \beta, \gamma) = (m, 1, 0)$.

(vi) Αν η $u(x, y, z)$ αποτελεί λύση της ΜΔΕ

$$(12.20) \quad u_{xx} - 2xz u_{xz} = 0,$$

τότε

$$(12.21) \quad (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -xz \\ 0 & -xz & 0 \end{pmatrix}$$

Η αντίστοιχη **χαρακτηριστική εξίσωση**,

$$(12.22) \quad \det(a_{ij} - \lambda \delta_{ij}) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & -xz \\ 0 & -xz & -\lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)(\lambda^2 - x^2 z^2) = 0,$$

έχει ως λύσεις τις $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \sqrt{|xz|}$ και $\lambda_3 = -\sqrt{|xz|}$. Δηλαδή, $(\alpha, \beta, \gamma) = (2, 0, 1)$. Έτσι, στο ανοιχτό υποσύνολο Ω του \mathbb{R}^3 , που προκύπτει αφαιρώντας τα επίπεδα $y = 0$ και $z = 0$, η ΜΔΕ (12.20) είναι υπερβολική.

■

Από την ανάλυση των (ημι-) γραμμικών ΜΔΕ δεύτερης τάξης στον \mathbb{R}^2 την οποία παρουσιάσαμε σε προηγούμενα εδάφια, ο αναγνώστης θα πρέπει να έχει υποψιαστεί ότι, η ταξινόμηση των ΜΔΕ αυτού του είδους στον \mathbb{R}^n , με $n > 2$, είναι άρρηκτα δεμένη με το αντίστοιχο πρόβλημα Cauchy. Η ορθή διατύπωση και άρα το επιλύσιμο αυτού του προβλήματος εξαρτιέται από την ύπαρξη και το είδος των "χαρακτηριστικών υπερεπιφανειών", δηλαδή υπόχωρων του \mathbb{R}^n ανάλογων προς τις χαρακτηριστικές καμπύλες που συναντήσαμε στην περίπτωση του \mathbb{R}^2 .

Θυμίζουμε ότι, με τον όρο *ομαλή υπερεπιφάνεια* S του \mathbb{R}^n εννοούμε ένα υποσύνολο του \mathbb{R}^n , το οποίο ορίζεται από μια συνθήκη της μορφής

$$(12.21) \quad \varphi(\mathbf{x}) = 0,$$

όπου $\varphi(\mathbf{x})$ μια συνάρτηση κλάσης C^1 , τέτοια που

$$(12.22) \quad \nabla \varphi(\mathbf{x}) := (\partial_1 \varphi, \dots, \partial_n \varphi) \neq \mathbf{0}, \quad \text{για κάθε } \mathbf{x} \in S.$$

Η τελευταία συνθήκη εξασφαλίζει ότι, η γειτονιά ενός τυχαίου σημείου \mathbf{x}_0 της S μπορεί να περιγραφεί από μια σχέση της μορφής

$$(12.23) \quad x_i = f(x_1, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_n),$$

όπου f μια συνάρτηση κλάσης C^1 , η οποία δεν εξαρτιέται από τη μεταβλητή \hat{x}_i . Από την (12.23) γίνεται φανερό ότι, αρκεί να προσδιορίσουμε τις $n - 1$ συντεταγμένες ενός σημείου της S για να καθορίσουμε πλήρως τη θέση αυτού του σημείου στον \mathbb{R}^n . Ισοδύναμα, η (12.23) δείχνει καθαρά ότι, μια υπερεπιφάνεια S του \mathbb{R}^n είναι ένας χώρος $n - 1$ διαστάσεων. Έτσι, για $n = 2$, η S δεν είναι παρά μια καμπύλη του επιπέδου \mathbb{R}^2 και, για $n = 3$, η S είναι μια συνηθισμένη επιφάνεια του τρισδιάστατου Ευκλείδειου χώρου. Από αυτή τη γεωμετρική εικόνα πηγάζει και ο όρος υπερεπιφάνεια που χρησιμοποιούμε για κάθε $n > 3$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η περιοχή ορισμού της ΜΔΕ (12.1) περιέχει την υπερεπιφάνεια S κι ότι μας έχουν δοθεί οι τιμές της άγνωστης συνάρτησης $u(\mathbf{x})$ και της παραγώγου της στην κάθετη προς την S κατεύθυνση, σε κάθε $\mathbf{x} \in S$. Με άλλα λόγια, γνωρίζουμε ότι

$$(12.24) \quad u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}), \quad \mathbf{n} \cdot \nabla u(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S,$$

όπου g, h δοσμένες συναρτήσεις και

$$(12.25) \quad \mathbf{n}(\mathbf{x}) := \frac{\nabla \varphi(\mathbf{x})}{|\nabla \varphi(\mathbf{x})|}.$$

Το **πρόβλημα Cauchy** έγκειται στο ερώτημα αν, με τα παραπάνω δοσμένα, μπορούμε να βρούμε τις τιμές της u στη γειτονιά της S , χρησιμοποιώντας την ΜΔΕ (12.1).

Είναι φανερό ότι, η απάντηση σ' αυτό το ερώτημα εξαρτιέται, βασικά, από τους εξής παράγοντες: α) Ποιες πληροφορίες παρέχουν οι συνθήκες (12.24) και β) Προς ποια κατεύθυνση διαδίδονται αυτές οι πληροφορίες μέσα στο χώρο \mathbb{R}^n .

Όσο αφορά τον πρώτο από αυτούς τους παράγοντες, μπορεί κανείς ν' αποδείξει ότι, από τις συνθήκες (12.24) μπορούμε να υπολογίσουμε τις τιμές που παίρνουν πάνω στην S όλες οι μερικές παράγωγοι της u μέχρι δεύτερης τάξης, μ' εξαίρεση την $\partial_n^2 u \equiv u_{nn}$, όπου

$$(12.26) \quad \partial_n u := \mathbf{n} \cdot \nabla u(\mathbf{x}).$$

Αυτό φαίνεται καθαρά από το ακόλουθο

Παράδειγμα 12.2

Ας υποθέσουμε ότι $u = u(x, y, z)$, με $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, κι ότι η "υπερεπιφάνεια" S όπου ορίζονται τα δοσμένα Cauchy είναι το επίπεδο $z = 0$. Σ' αυτή την περίπτωση, η (12.21) γίνεται

$$(12.27) \quad \varphi(x, y, z) \equiv z = 0,$$

οπότε

$$(12.28) \quad \nabla \varphi(x, y, z) = (0, 0, 1).$$

Με τη σειρά τους, οι συνθήκες (12.24) γίνονται

$$(12.29) \quad u(x, y, 0) = g(x, y), \quad u_z(x, y, 0) = h(x, y),$$

όπου οι συναρτήσεις g και h είναι γνωστές. Αν λοιπόν υποθέσουμε ότι η συνάρτηση u είναι κλάσης C^2 , τότε από τις (12.29) θα βρούμε ότι

$$(12.30\alpha) \quad u_x(x, y, 0) = g_x(x, y), \quad u_y(x, y, 0) = g_y(x, y),$$

$$(12.30\beta) \quad u_{xx}(x, y, 0) = g_{xx}(x, y), \quad u_{xy}(x, y, 0) = g_{xy}(x, y), \quad u_{yy}(x, y, 0) = g_{yy}(x, y),$$

$$u_{zx}(x, y, 0) = h_x(x, y), \quad u_{zy}(x, y, 0) = h_y(x, y).$$

Όμως, την $u_{zz}(x, y, 0)$ δεν μπορούμε να την υπολογίσουμε από τα "αρχικά" δοσμένα.

Για ν' αντιμετωπίσουμε αυτό το πρόβλημα, στρεφόμαστε στην ΜΔΕ για την u , δηλαδή στην (12.1). Είναι φανερό ότι η τελευταία μπορεί να γραφεί με τη μορφή

$$(12.31) \quad a_{3 \times 3}(x, y, z) u_{zz}(x, y, z) = F,$$

όπου F μια παράσταση τις οποίας όλοι οι όροι είναι γνωστοί όταν $z = 0$. Άρα, αν υποθέσουμε ότι $a_{3 \times 3}(x, y, 0) \neq 0$, τότε η $u_{zz}(x, y, 0)$ μπορεί να υπολογιστεί από την (12.31).

■

Γενικότερα, αν υποθέσουμε ότι, όλες οι συναρτήσεις που εμφανίζονται στο πρόβλημά μας είναι κλάσης C^∞ . Τότε από τις συνθήκες (12.25) και τη δοσμένη διαφορική εξίσωση μπορούμε να υπολογίσουμε τις παραγώγους οποιασδήποτε τάξης της $u(\mathbf{x})$ σ' οποιοδήποτε σημείο \mathbf{x}_0 της S . Αν οι παραπάνω συναρτήσεις είναι και αναλυτικές, τότε μπορούμε να

συναγάγουμε το εξής συμπέρασμα: Η τιμή της u στο τυχαίο σημείο \mathbf{x} που βρίσκεται στη γειτονιά του \mathbf{x}_0 δίνεται από το συγκλίνον ανάπτυγμα Taylor

$$(12.32) \quad u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}_0) + (x - x_0) u_x(\mathbf{x}_0) + (y - y_0) u_y(\mathbf{x}_0) + (z - z_0) u_z(\mathbf{x}_0) + \dots \\ + \frac{1}{2} (x - x_0)^2 u_{xx}(\mathbf{x}_0) + (x - x_0)(y - y_0) u_{xy}(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} (y - y_0)^2 u_{yy}(\mathbf{x}_0) + \dots,$$

Συνεπώς, κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις, το πιο πάνω ερώτημα που συνδέεται με το πρόβλημα Cauchy έχει απάντηση καταφατική. Ανάμεσα σ' αυτές τις προϋποθέσεις δεσπόζουσα θέση κατέχει η συνθήκη $a_{33}(x, y, 0) \neq 0$. Αν λάβουμε υπόψη την (12.27) αυτή η συνθήκη γράφεται σαν

$$(12.33) \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(\mathbf{x}) \varphi_i(\mathbf{x}) \varphi_j(\mathbf{x}) \neq 0, \text{ για κάθε } \mathbf{x} \in S,$$

Το πλεονέκτημα αυτού του τρόπου γραφής της συνθήκης $a_{33}(x, y, 0) \neq 0$ είναι ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί για οποιαδήποτε υπερεπιφάνεια $\varphi(\mathbf{x}) = 0$ του \mathbb{R}^n και για κάθε σύστημα συντεταγμένων.

Για ν' αποδείξουμε τον παραπάνω ισχυρισμό, ας υποθέσουμε ότι $\{x_i\}$ και $\{y_i\}$, με $i = 1, 2, \dots, n$, είναι δύο συστήματα συντεταγμένων που περιγράφουν την ίδια ανοιχτή περιοχή Ω του \mathbb{R}^n κι ότι ο μετασχηματισμός $x_i \rightarrow y_j(x)$, όσο κι ο αντίστροφός του $y_i \rightarrow x_i(y)$, είναι κλάσης C^∞ .

Στις συντεταγμένες $\{y_i\}$, η βαθμωτή συνάρτηση $u(\mathbf{x})$ γίνεται $\tilde{u}(\mathbf{y})$. Δηλαδή, $\tilde{u}(\mathbf{y}) = u(\mathbf{x}(\mathbf{y}))$, $u(\mathbf{x}) = \tilde{u}(\mathbf{y}(\mathbf{x}))$. Από τον κανόνα της αλυσσίδας αμέσως έπεται ότι

$$(12.34) \quad \partial_i u \equiv \partial_{x_i} u = \partial_{y_k} \tilde{u} \partial_{x_i} y_k \equiv \tilde{\partial}_k \tilde{u} \partial_i y_k$$

Ας σημειωθεί ότι, για απλοποίηση, στη διατύπωση της (12.35) έχουμε υιοθετήσει τη **σύμβαση Einstein**. Αυτό σημαίνει ότι, κάθε όρος στον οποίο ένας δείκτης εμφανίζεται δύο φορές παριστάνει το άθροισμα των όρων που αντιστοιχούν σε όλες τις τιμές του συγκεκριμένου δείκτη. Δηλαδή,

$$(12.35) \quad \tilde{\partial}_k \tilde{u} \partial_i y_k \equiv \sum_{k=1}^n \tilde{\partial}_k \tilde{u} \partial_i y_k = \tilde{\partial}_1 \tilde{u} \partial_i y_1 + \tilde{\partial}_2 \tilde{u} \partial_i y_2 + \dots + \tilde{\partial}_n \tilde{u} \partial_i y_n.$$

Με τον ίδιο τρόπο καταλήγουμε στις σχέσεις

$$(12.36) \quad \partial_j \partial_i u = \partial_j (\partial_i y_k \tilde{\partial}_k \tilde{u}) = \partial_j (\partial_i y_k) \tilde{\partial}_k \tilde{u} + \partial_i y_k \partial_j (\tilde{\partial}_k \tilde{u}) \\ = \partial_j (\partial_i y_k) \tilde{\partial}_k \tilde{u} + \partial_i y_k \partial_j y_l \tilde{\partial}_l (\tilde{\partial}_k \tilde{u}).$$

Ας ξαναγράψουμε τώρα την ΜΔΕ (12.1) χρησιμοποιώντας τη σύμβαση Einstein. Θα πάρουμε την

$$(12.37) \quad a_{ij} \partial_i \partial_j u = \rho.$$

Αντικαθιστώντας στην τελευταία τις (12.34) και (12.36) και μεταφέροντας όλους τους όρους που περιέχουν τις παραγώγους πρώτης τάξης της \tilde{u} στο δεξί μέλος, καταλήγουμε στην

$$(12.38) \quad a_{ij} \partial_i y_k \partial_j y_l \tilde{\partial}_l (\tilde{\partial}_k \tilde{u}) = H.$$

Αυτή γράφεται και σαν

$$(12.39) \quad \tilde{a}_{lk} \tilde{\partial}_l \tilde{\partial}_k \tilde{u} = H,$$

όπου

$$(12.40) \quad \tilde{a}_{kl} := a_{ij} \partial_i y_k \partial_j y_l.$$

Συγκρίνοντας τις (12.37) και (12.39), συμπεραίνουμε ότι η ΜΔΕ (12.1) διατηρεί τη μορφή της κατά τους ομαλούς μετασχηματισμούς συντεταγμένων.

Από την άλλη,

$$(12.41) \quad a_{ij} \partial_i \varphi(\mathbf{x}) \partial_j \varphi(\mathbf{x}) = a_{ij} \partial_i y_k \tilde{\partial}_k \tilde{\varphi}(\mathbf{y}) \partial_j y_l \tilde{\partial}_l \tilde{\varphi}(\mathbf{y}).$$

Με βάση την (12.40), αυτή γράφεται σαν

$$(12.42) \quad a_{ij} \partial_i \varphi(\mathbf{x}) \partial_j \varphi(\mathbf{x}) = \tilde{a}_{kl} \tilde{\partial}_k \tilde{\varphi}(\mathbf{y}) \tilde{\partial}_l \tilde{\varphi}(\mathbf{y})$$

κι αποδείχνει τον ισχυρισμό μας.

Μια υπερεπιφάνεια $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \varphi(\mathbf{x}) = 0\}$, με $\nabla \varphi(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ για κάθε $\mathbf{x} \in S$, ονομάζεται *ελεύθερη* ή *μη χαρακτηριστική* όταν $a_{ij} \partial_i \varphi(\mathbf{x}) \partial_j \varphi(\mathbf{x}) \neq 0$ σε όλα τα σημεία της. Αντίθετα, όταν $a_{ij} \partial_i \varphi(\mathbf{x}) \partial_j \varphi(\mathbf{x}) = 0$ για κάθε $\mathbf{x} \in S$, η υπερεπιφάνεια ονομάζεται *χαρακτηριστική*. Τα δοσμένα Cauchy πάνω σε μια χαρακτηριστική υπερεπιφάνεια δεν αρκούν για τον προσδιορισμό της $u(\mathbf{x})$ στη γειτονιά της S . Η αντίστοιχη ΜΔΕ, αντί να μας δίνει νέα στοιχεία όταν αντικατασταθούν σ' αυτήν οι πληροφορίες που εμπεριέχονται στα δοσμένα Cauchy, αποτελεί έναν επιπλέον περιορισμό στα ήδη γνωστά στοιχεία.

Αυτό συνάγεται από την ανάλυση του Παραδγ. 12.2, σε συνδυασμό με το γεγονός ότι, κάθε υπερεπιφάνεια μπορεί να μετατραπεί στο ανάλογο του επίπεδου $z = 0$ εκείνου του παραδείγματος. Αν, για παράδειγμα, η υπερεπιφάνεια έχει δοθεί με τη μορφή $\varphi(\mathbf{x}) = 0$ στις συντεταγμένες $\{x_i\}$, με $i = 1, 2, \dots, n$, τότε αρκεί να εισαγάγουμε τις συντεταγμένες $\{y_i\}$, με

$$(12.43) \quad y_i = x_i, \quad \text{για } i = 1, 2, \dots, n-1, \quad \text{και } y_n = \varphi(\mathbf{x}).$$

Με αυτό τον τρόπο, η εξίσωση της υπερεπιφάνειας γίνεται

$$(12.44) \quad \tilde{\varphi}(\mathbf{y}) = y_n = 0$$

και άρα

$$(12.45) \quad \tilde{\partial}_i \tilde{\varphi}(\mathbf{y}) = \delta_{in} \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \tilde{\varphi}(\mathbf{y}) = (0, \dots, 0, 1).$$

Αν η δοσμένη υπερεπιφάνεια είναι και χαρακτηριστική, τότε η σχέση (12.42) οδηγεί στην

$$(12.46) \quad 0 = a_{ij} \partial_i \varphi(\mathbf{x}) \partial_j \varphi(\mathbf{x}) = \tilde{a}_{nn}(\mathbf{y}).$$

Από την τελευταία γίνεται πλέον φανερό ότι, το "απλό" παράδειγμα που αναλύσαμε προηγούμενα καλύπτει και τις "περίπλοκες" περιπτώσεις.

Η ελευθερία που έχουμε ν' αλλάζουμε συντεταγμένες μας επιτρέπει ν' απλοποιούμε μια εξίσωση της μορφής (12.1) σε κάθε σημείο $\mathbf{x}_0 \in \Omega$. Εκείνο που ιδιαίτερα μας ενδιαφέρει από αυτή την άποψη είναι το λεγόμενο *κύριο μέρος της διαφορικής εξίσωσης*, δηλαδή οι όροι

$a_{ij} \partial_i \partial_j u$. Για να δούμε πώς επιτυγχάνεται η απλοποίηση, ας επιστρέψουμε στην (12.40) και ας την γράψουμε με τη μορφή

$$(12.47) \quad \tilde{a}_{kl} := a_{ij} e_{ik} e_{jl},$$

όπου

$$(12.48) \quad e_{ik} := \partial_i y_k.$$

Ισοδύναμα, η (12.48) μπορεί να γραφτεί με τη μορφή πινάκων και συγκεκριμένα σαν

$$(12.49) \quad (\tilde{a}) = (e) (a) (e)^T,$$

όπου $(e)^T$ ο ανάστροφος του πίνακα (e) .

Από τη Γραμμική Άλγεβρα είναι γνωστό ότι, αν ο συμμετρικός πίνακας (a) πραγματικών στοιχείων είναι τύπου (α, β, γ) , τότε ο πίνακας (e) μπορεί να επιλεγεί έτσι που ο (\tilde{a}) να είναι ίσος με

$$(12.50) \quad (\tilde{a}) = \text{διαγ}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0)$$

α θέσεις β θέσεις γ θέσεις

Συνεπώς, το κύριο μέρος της διαφορικής εξίσωσης γίνεται $\sigma_i \tilde{\partial}_i^2 \tilde{u}$, $\sigma_i \in \{-1, 1, 0\}$, και η ίδια η ΜΔΕ (12.1) μετατρέπεται στην

$$(12.51) \quad \sigma_i \tilde{\partial}_i^2 \tilde{u} = H.$$

Τονίζουμε ότι, η παραπάνω διαγωνιοποίηση του κύριου μέρους της ΜΔΕ (12.1) είναι γενικά δυνατή μόνο σε ένα από τα σημεία της περιοχής Ω , οποιοδήποτε θέλουμε, βέβαια. Με άλλα λόγια, όταν τα στοιχεία του πίνακα (a) είναι συναρτήσεις του $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, με $n > 2$, δηλαδή στη γενική περίπτωση, δεν είναι δυνατό να βρούμε ένα μετασχηματισμό συντεταγμένων $x_i \rightarrow y_i(\mathbf{x})$, τέτοιον που ο αντίστοιχος πίνακας $e(\mathbf{x})$ να διαγωνιοποιεί τον $(a(\mathbf{x}))$ μέσω του **μετασχηματισμού ομοιότητας** (12.49) σε κάθε $\mathbf{x} \in \Omega$.

Το αντίθετο βέβαια ισχύει όταν τα στοιχεία του (a) είναι ποσότητες σταθερές. Σ' αυτή την περίπτωση, η διαγωνιοποίηση έχει καθολική ισχύ στην περιοχή Ω και η (12.51) ονομάζεται **κανονική μορφή** της δοσμένης ΜΔΕ.

Μια γραμμική ΜΔΕ της μορφής

$$(12.52) \quad a_{ij} u_{ij} + b_i u_i + c u = f(\mathbf{x})$$

με σταθερούς συντελεστές a_{ij} μπορεί να απλοποιηθεί ακόμα παραπέρα, όταν και οι συντελεστές b_i και c είναι επίσης σταθεροί.

Πιο συγκεκριμένα, ας υποθέσουμε ότι η (12.52) δεν είναι παραβολική. Τότε και στην κανονική μορφή οι καινούργιοι συντελεστές θα είναι σταθεροί. Συνάμα, θα έχουμε $|\sigma_i| = 1$ για κάθε i . Με άλλα λόγια, η (12.52) θα έχει πάρει τη μορφή

$$(12.53) \quad \sigma_i \tilde{u}_{ii} + \tilde{b}_i \tilde{u}_i + \tilde{c} \tilde{u} = \tilde{f}(\mathbf{y}).$$

Αν λοιπόν στην (12.53) θέσουμε

$$(12.54) \quad \tilde{u}(\mathbf{y}) = v(\mathbf{y}) \exp\left[-\frac{1}{2} \sigma_i b_i y_i\right] \equiv v(\mathbf{y}) g(\mathbf{y}),$$

θα καταλήξουμε στη ΜΔΕ

$$(12.55) \quad \sigma_i v_{ii} + \left[c - \frac{1}{4} \sigma_i b_i (y_i)^2 \right] v = \frac{\tilde{f}}{g}.$$

Η επαλήθευση αυτού του αποτελέσματος είναι πολύ εύκολη, γι' αυτό περιοριζόμαστε στο να επισημάνουμε ότι, η απλούστευση που επιτυγχάνεται με την αντικατάσταση (12.54) έγκειται στο ότι από την (12.55) απουσιάζουν οι πρώτες παράγωγοι της άγνωστης συνάρτησης $v(\mathbf{y})$.

Με βάση την προηγούμενη ανάλυση, οδηγούμαστε και σ' ένα ειδικότερο συμπέρασμα για δύο κατηγορίες γραμμικών ΜΔΕ δεύτερης τάξης που θα μας απασχολήσουν εκτενέστερα στα επόμενα κεφάλαια. Συγκεκριμένα, αν η (12.53), με σταθερούς συντελεστές, είναι ελλειπτικού τύπου, τότε μπορεί να μετασχηματιστεί στην κανονική μορφή

$$(12.56) \quad \Delta u + k u = \rho(\mathbf{x}),$$

όπου k πραγματική σταθερή και $\rho(\mathbf{x})$ γνωστή συνάρτηση. Αν όμως η ίδια ΜΔΕ είναι υπερβολικού τύπου, τότε μπορεί να αναχθεί στην κανονική μορφή

$$(12.57) \quad \Delta u - u_{tt} + k u = \rho(\mathbf{x}, t),$$

όπου $(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$. Αρκεί γι' αυτό να ονομάσουμε t τη μεταβλητή για την οποία το αντίστοιχο σ_i στην (12.55) έχει πρόσημο αντίθετο από τα σ_i που αντιστοιχούν στις υπόλοιπες συντεταγμένες. Οι τελευταίες αντιπροσωπεύονται από το $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Με τον ίδιο όπως παραπάνω τρόπο, απλοποιείται και η εξίσωση των χαρακτηριστικών υπερεπιφανειών που αντιστοιχούν στην (12.1), δηλαδή η εξίσωση

$$(12.58) \quad a_{ij}(\mathbf{x}) \varphi_i(\mathbf{x}) \varphi_j(\mathbf{x}) = 0$$

για μια υπερεπιφάνεια S που ορίζεται από τη σχέση $\varphi(\mathbf{x}) = 0$, με $|\nabla \varphi(\mathbf{x})| \neq 0$ όταν $\mathbf{x} \in S$. Αυτό είναι άμεση απόρροια του γεγονότος ότι, η έκφραση

$$(12.59) \quad Q(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \equiv a^{ij}(\mathbf{x}) v_i v_j, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n,$$

μπορεί να αναχθεί στη μορφή

$$(12.60) \quad Q(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \sigma^i (v_i)^2,$$

μέσω μιας αλλαγής βάσης του διανυσματικού χώρου \mathbb{R}^n , η οποία μετατρέπει τις συνιστώσες του \mathbf{v} με τρόπο ώστε

$$(12.61) \quad v_i = e_{ij} \tilde{v}_j.$$

Σημειώνουμε ότι, η $Q(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ που ορίζεται από την (12.61) ονομάζεται **χαρακτηριστική τετραγωνική μορφή** αντίστοιχη της ΜΔΕ (12.1). Χρησιμοποιώντας αυτή την τετραγωνική μορφή, μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση των χαρακτηριστικών υπερεπιφανειών, (12.58), σαν

$$(12.62) \quad Q(\mathbf{x}, \nabla \varphi) = 0.$$

Αυτή μπορεί να διατυπωθεί και σε ΜΔΕ πρώτης τάξης για μια συνάρτηση $n-1$ μεταβλητών, με τον ακόλουθο τρόπο.

Επειδή αυτό είναι πάντα δυνατό τοπικά, υποθέτουμε ότι μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση $\varphi(\mathbf{x}) = 0$ ως προς κάποια συντεταγμένη, ως την πούμε x_n , δηλαδή να καταλήξουμε στην εξίσωση $x_n = \psi(x_\mu)$, όπου $\{x_\mu\}$, με $\mu = 1, \dots, n-1$, οι υπόλοιπες συντεταγμένες. Τότε, η εξίσωση $\varphi(\mathbf{x}) = 0$ παίρνει τη μορφή

$$(12.63) \quad \varphi(\mathbf{x}) \equiv x_n - \psi(x_\mu) = 0.$$

και η συνθήκη (12.62) γίνεται

$$(12.64) \quad Q(\mathbf{x}, \nabla \varphi) \equiv a_{ij}(\mathbf{x}) \partial_i \varphi \partial_j \varphi = a_{nn} + a_{\mu\nu}(\mathbf{x}) \partial_\mu \psi \partial_\nu \psi = 0.$$

Αυτή είναι προφανώς μια ΜΔΕ πρώτης τάξης για την άγνωστη συνάρτηση $\psi(x_\mu)$. Η λύση της δίνει την οικογένεια των χαρακτηριστικών υπερεπιφανειών του \mathbb{R}^n για τη ΜΔΕ (12.1).

Παράδειγμα 12.3

Η κυματική εξίσωση στον οικείο τρισδιάστατο χώρο γράφεται σαν

$$(12.65) \quad \delta_{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu u - \partial_4^2 u = 0,$$

όπου $u = u(x_\mu, x_4)$, με $\{x_\mu\}$ Καρτεσιανές συντεταγμένες του \mathbb{R}^3 και x_4 συντεταγμένη του χρόνου. Από την (12.65) έπεται ότι

$$(12.66) \quad a_{nn} = -1, \quad a_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}.$$

Άρα, η (12.64) στην προκείμενη περίπτωση γίνεται

$$(12.67) \quad -1 + \delta_{\mu\nu} \partial_\mu \psi \partial_\nu \psi = 0,$$

ή

$$(12.68) \quad (\partial_1 \psi)^2 + (\partial_2 \psi)^2 + (\partial_3 \psi)^2 = 1.$$

Ορισμένες λύσεις αυτής της μη γραμμικής ΜΔΕ πρώτης τάξης προκύπτουν αν υποθέσουμε ότι

$$(12.69) \quad \psi = p_\mu x_\mu + q,$$

όπου q και $\{p_\mu\}$ σταθερές, με

$$(12.70) \quad \sum_{\mu=1}^3 (p_\mu)^2 = 1.$$

Ισοδύναμα, οι χαρακτηριστικές υπερεπιφάνειες του χωρό-χρονου \mathbb{R}^4 που αντιστοιχούν στην ΜΔΕ (12.65) είναι υπερεπίπεδα που ορίζονται από την εξίσωση

$$(12.71) \quad x_4 = p_\mu x_\mu + q.$$

Οι χαρακτηριστικές καμπύλες της (12.68) είναι ευθείες του χωρόχρονου που ορίζονται από τις εξισώσεις

$$(12.72) \quad x_4 = 2\tau + c_4, \quad x_\mu = 2p_\mu \tau + c_\mu,$$

όπου $\{c_i\}$ μια τετράδα από τυχαίες σταθερές. Ισοδύναμα, οι χαρακτηριστικές καμπύλες της (12.68) ορίζονται από τις

$$(12.73) \quad x_\mu = x_\mu^0 + p_\mu (x_4 - x_4^0)$$

και ονομάζονται **διχαρακτηριστικές καμπύλες** ή **ακτίνες** της αρχικά δοσμένης ΜΔΕ δεύτερης τάξης (12.65).

Από φυσική άποψη, τα χαρακτηριστικά υπερεπίπεδα (12.71) αντιπροσωπεύουν, για παράδειγμα, τη χωροχρονική πορεία ενός κρουστικού κύματος, δηλαδή μια λύση της κυματικής εξίσωσης με ασυνεχή δεύτερη μερική παράγωγο της $u(x_\mu, x_4)$ στην εγκάρσια προς το υπερεπίπεδο που αντιστοιχεί στο κρουστικό κύμα κατεύθυνση. Οι διχαρακτηριστικές καμπύλες, από την άλλη μεριά, αντιστοιχούν στις χωροχρονικές τροχιές σημειακών φυσικών πληροφοριών. Αν, για παράδειγμα, το χωροχρονικό σημείο $A = (x_\mu, x_4)$ ανήκει στη διχαρακτηριστική X_A και στο A , αν δηλαδή τη στιγμή x_4 στο σημείο x_μ του χώρου υπάρχει ένα φωτόνιο, τότε η τροχιά του φωτονίου στο χωρόχρονο δίνεται από την καμπύλη X_A .

Σημειώστε ότι, η (12.73) συνεπάγεται ότι, κατά μήκος μιας ακτίνας

$$(12.74) \quad \delta_{\mu\nu} (x_\mu - x_\mu^0) (x_\nu - x_\nu^0) = \delta_{\mu\nu} p_\mu (x_4 - x_4^0) p_\nu (x_4 - x_4^0) = (x^0 - x_4^0)^2,$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από τη συνθήκη (12.67). Ισοδύναμα,

$$(12.75) \quad h_{ij} (x_i - x_i^0) (x_j - x_j^0) = 0,$$

όπου

$$(12.76) \quad h_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j = 1, 2, 3 \\ -1, & i = j = 4 \end{cases}$$

Η (12.75) σημαίνει ότι το σύνολο των ακτίνων που διέρχονται από το τυχαίο σημείο x_i^0 του χωρόχρονου \mathbb{R}^4 αποτελούν έναν δίχωνο κώνο με κορυφή το x_i^0 . Για εύκολη εποπτεία, ας πάρουμε αυτό το σημείο να είναι η αρχή των αξόνων x_i , ας επιλέξουμε δηλαδή τις τιμές $x_i^0 = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$. Τότε η (12.75), γίνεται

$$(12.77) \quad \delta_{\mu\nu} x_\mu x_\nu - (x_4)^2 = (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 - (x_4)^2 = 0,$$

ή

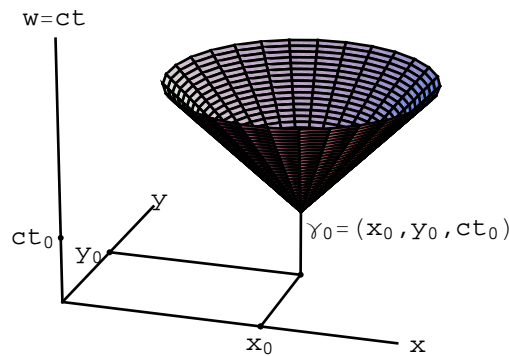
$$(12.78) \quad r^2 - (x_4)^2 = 0, \quad r := \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2},$$

που δείχνει καθαρά ότι, έχουμε να κάνουμε με έναν τρισδιάστατο κώνο στον τετραδιάστατο χώρο \mathbb{R}^4 .

Ο κώνος (12.75) ονομάζεται **χαρακτηριστικός κώνος** της κυματικής εξίσωσης στο χωροχρονικό σημείο ή **γεγονός** x_i^0 . Ειδικότερα, στην περίπτωση που η κυματική εξίσωση αναφέρεται στη διάδοση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων, ο χαρακτηριστικός κώνος αναφέρεται ως **κώνος φωτός**. Είναι φανερό πως, ο χαρακτηριστικός κώνος στο σημείο x_i^0 αποτελεί την περιβάλλουσα των χαρακτηριστικών επιπέδων που διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Επειδή ο χαρακτηριστικός κώνος είναι αδύνατο να παρασταθεί στο επίπεδο μιας σελίδας χαρτιού, συνήθως δίνεται η γραφική παράσταση της σχέσης που προκύπτει από την

(12.75), παραλείποντας μία από τις χωρικές διαστάσεις. Αν, για παράδειγμα, παραλείψουμε την x_3 , και θέσουμε $(x_1, x_2, x_4) \equiv (x, y, w)$, θα καταλήξουμε στην εικόνα του Σχ. 12.1. Για λόγους καλύτερης εποπτίας, στο σχήμα δείχνουμε ένα μέρος του τμήματος $t \geq t_0$ του χαρακτηριστικού κώνου που έχει ως κορυφή το χωροχρονικό σημείο $\gamma_0 = (x_0, y_0, w_0 = ct_0)$.



Σχ. 12.1. Το μελλοντικό τμήμα του χαρακτηριστικού κώνου (φωτός) με κορυφή το χωροχρονικό σημείο $\gamma_0 = (x_0, y_0, ct_0)$

■

Ασκήσεις

12.1 Να προσδιοριστεί ο τύπος των παρακάτω ΜΔΕ, όπου $u = u(x, y, z)$.

- (i) $u_{xy} + u_{zz} + u_x + u_y + u_z = (x + y)u$,
- (ii) $u_{xy} + u_{yz} + u_{zx} = xyz u$,
- (iii) $u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + u_{zz} = u$,
- (iv) $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + 2u_{xy} + 2u_{yz} + 2u_{zx} = \sin(u)$.

12.2 Να βρεθεί η κανονική μορφή καθεμιάς από τις εξισώσεις της προηγούμενης άσκησης.

12.3 Να προσδιοριστεί ο τύπος των παρακάτω ΜΔΕ, όπου $u = u(x, y, z)$.

- (i) $u_{xy} + z u_{zz} + u_x - u_y = u^2$,
- (ii) $u_{xx} + u_{yy} - xy u_{zz} = u$,
- (iii) $x u_{xx} + y u_{yy} + z u_{zz} = xyz u_x u_y u_z$,
- (iv) $x u_{xx} + y u_{yy} - u_{zz} = 0$.

12.4 Να μετασχηματιστούν οι παρακάτω ΜΔΕ σε κανονική μορφή.

(i) $x^2 u_{xx} + y^2 u_{yy} + z^2 u_{zz} = u, \quad u = u(x, y, z).$

(ii) $x^2 u_{xx} + y^2 u_{yy} + z^2 u_{zz} = t^2 u_{tt}, \quad u = u(x, y, z, t).$

(iii) $V_{rr} + \frac{2}{r} V_r + \frac{\cot \theta}{r^2} V_\theta + \frac{1}{r^2} V_{\theta\theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} V_{\phi\phi} = V, \quad V = V(r, \theta, \phi).$

(iv) $V_{rr} + \frac{2}{r} V_r + \frac{\cot \theta}{r^2} V_\theta + \frac{1}{r^2} V_{\theta\theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} V_{\phi\phi} = V_{tt}, \quad V = V(r, \theta, \phi, t).$

12.5 Να βρεθούν οι ΜΔΕ που είναι ισοδύναμες προς τις παρακάτω, αλλά δεν περιέχουν τις πρώτης τάξης παραγώγους της άγνωστης συνάρτησης.

(i) $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + 2(u_x + u_y + u_z) = u, \quad u = u(x, y, z).$

(ii) $u_{xx} - u_{yy} + u_{zz} + 2(u_x - u_y + u_z) = u, \quad u = u(x, y, z).$

(iii) $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - u_{tt} + 2(u_x - u_y + u_z + u_t) = k u, \quad u = u(x, y, z, t).$

(iv) $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} - u_{tt} + 2(u_x + u_y + u_z - u_t) = k u^2, \quad u = u(x, y, z, t).$

■ Η μέθοδος του χωρισμού των μεταβλητών

Εισαγωγή

Το παρόν κεφάλαιο, όπως και το επόμενο, είναι αφιερωμένο στην επίλυση προβλημάτων αρχικών και συνοριακών τιμών που συνδέονται με τις γραμμικές ΜΔΕ της μαθηματικής φυσικής. Η τεχνική με την οποία θα προσεγγίσουμε αυτού του είδους τα προβλήματα είναι γνωστή ως *μέθοδος του (δια-)χωρισμού των μεταβλητών* και στηρίζεται στους εξής τρεις πυλώνες:

- (i) Την υπόθεση ότι η προς επίλυση ΜΔΕ επιδέχεται ως λύσεις συναρτήσεις που έχουν την ακόλουθη μορφή: Είναι το γινόμενο συναρτήσεων κάθε μια από τις οποίες εξαρτιέται από ένα διαφορετικό υποσύνολο των ανεξάρτητων μεταβλητών.
- (ii) Την αρχή της επαλληλίας. Δηλαδή, το γεγονός ότι ο γραμμικός συνδυασμός λύσεων μιας ομογενούς γραμμικής ΜΔΕ είναι επίσης λύση της ίδιας εξίσωσης.
- (iii) Τη δυνατότητα έκφρασης μιας συνάρτησης με τη μορφή ενός αθροίσματος άπειρων σε πλήθος όρων (σειράς), το οποίο κατασκευάζεται από τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις.

Είναι φανερό ότι, οι παραπάνω προϋποθέσεις είναι αρκετά περιοριστικές. Ωστόσο, το φάσμα των προβλημάτων που επιλύονται με την τεχνική του διαχωρισμού των μεταβλητών είναι τόσο ευρύ, που μας επιτρέπει να χαρακτηρίσουμε αυτή τη μέθοδο ως πολύτιμο εργαλείο. Αυτό θα φανεί καθαρά από τις εφαρμογές που αναλύονται στα εδάφια που ακολουθούν, στα οποία και αναπτύσσονται με λεπτομέρεια όλα τα συστατικά της μεθόδου.

Τα προβλήματα αρχικών και συνοριακών συνθηκών που θα μελετήσουμε διεξοδικά αναφέρονται, κυρίως, στις τρεις βασικές εξισώσεις που αποτελούν τα κλασικά παραδείγματα ΜΔΕ παραβολικού, υπερβολικού και ελλειπτικού τύπου, αντίστοιχα. Εννοούμε, βέβαια, τις ΜΔΕ

$$u_t - k \Delta u = \rho, \quad c^2 u_{tt} - \Delta u = \rho, \quad \Delta u = \rho,$$

όπου k, c θετικές σταθερές, $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$, $(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, δοσμένη συνάρτηση και Δ ο τελεστής (του) Laplace στον \mathbb{R}^n .

Στην *εξίσωση Poisson*, $\Delta u = \rho$, τόσο η άγνωστη συνάρτηση, u , όσο και η γνωστή *συνάρτηση εξαναγκασμού* ή *όρος μη ομογένειας*, ρ , εξαρτιώνται μόνο από τις χωρικές συντεταγμένες $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$.

Αντίθετα, τόσο στην *εξίσωση της θερμότητας ή διάχυσης*, $u_t - k \Delta u = \rho$, όσο και στην *κυματική εξίσωση*, $c^2 u_{tt} - \Delta u = \rho$, $u = \rho(\mathbf{x}, t)$ και $\rho = \rho(\mathbf{x}, t)$, $(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, όπου η μεταβλητή t παριστάνει τον φυσικό χρόνο.

Θα πρέπει, βέβαια, να σημειώσουμε ότι, παραπάνω, δώσαμε την μη ομογενή έκδοση αυτών των φυσικά σημαντικών εξισώσεων. Υπενθυμίζουμε ότι κάθε μια απ' αυτές τις ΜΔΕ χαρακτηρίζεται ως *ομογενής* όταν η συνάρτηση εξαναγκασμού είναι μηδενική.

1. Το πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών για την εξίσωση της θερμότητας

Θα ξεκινήσουμε την παρουσίαση της μεθόδου του διαχωρισμού των μεταβλητών από το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών (ΠΑΣΤ)

$$(1.1\alpha) \quad u_t = k u_{xx}, \quad 0 < x < a, \quad t > 0,$$

$$(1.1\beta) \quad u(x, 0) = f(x) := x(a-x), \quad 0 \leq x \leq a,$$

$$(1.1\gamma) \quad u(0, t) = 0, \quad u(a, t) = 0, \quad t \geq 0.$$

Από φυσική άποψη, αυτό το ΠΑΣΤ μπορεί να θεωρηθεί ως μοντέλο της εξέλιξης της θερμοκρασίας $u(x, t)$ στα διάφορα σημεία μιας δοκού μήκους a , η οποία είναι περιτυλιγμένη με μονωτικό υλικό. Έτσι, η δοκός ανταλλάσει θερμότητα με το περιβάλλον, το οποίο βρίσκεται συνεχώς στους μηδέν βαθμούς της κλίμακας θερμοκρασίας, μόνο μέσω των άκρων της.

Για ν' απλοποιήσουμε τις μαθηματικές σχέσεις που θα προκύψουν από την ανάλυσή μας, αρχικά θέτουμε

$$(1.2) \quad k = 1.$$

Αυτή η ενέργεια, ισοδυναμεί με την εισαγωγή της νέας χρονικής μεταβλητής $\tau = k t$ και τη μετατροπή της ΜΔΕ (1.1α) στην $u_\tau = u_{xx}$. Σε κάθε περίπτωση, μπορούμε στους τελικούς τύπους να επαναφέρουμε την παράμετρο k στο προσκήνιο, με τη την αντικατάσταση $t \rightarrow k t$.

Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι η ΜΔΕ (1.1α) επιδέχεται λύσεις της μορφής

$$(1.3) \quad u(x, t) = X(x) T(t).$$

Είναι προφανές ότι, η τυχαία συνάρτηση δύο μεταβλητών δεν μπορεί να γραφτεί ως γινόμενο δύο συναρτήσεων, καθεμιά από τις οποίες εξαρτιέται μόνο από τη μία από τις δύο ανεξάρτητες μεταβλητές. Το απλούστατο αντιπαράδειγμα $u(x, t) = x + t$ είναι αρκετά διαφωτιστικό. Άρα, η (1.3) είναι καθαρά μια **υπόθεση εργασίας** ή **ansatz** (άντζατς) -γερμανικός όρος που έχει καθιερωθεί διεθνώς. Η παραπάνω υπόθεση είναι το πρώτο βήμα της τεχνικής του διαχωρισμού των μεταβλητών και η βάση του ονόματος αυτής της μεθόδου.

Το δεύτερο βήμα ξεκινάει με την αντικατάσταση της (1.3) στη ΜΔΕ (1.1α). Το αποτέλεσμα είναι η σχέση

$$(1.4) \quad X(x) T'(t) = X''(x) T(t),$$

όπου με τον τόνο δηλώνεται η συνήθης παραγωγή.

Προφανώς, οι συναρτήσεις $X(x)$ και $T(t)$ δεν μπορεί να είναι μηδενικές σε ανοιχτά διαστήματα των μεταβλητών x και t , αντίστοιχα. Γιατί τότε, το γινόμενό τους θα έδινε την τετριμμένη λύση $u(x, t) = 0$, που δεν έχει κανένα ενδιαφέρον. Αυτό μας επιτρέπει να διαιρέσουμε και τα δύο μέλη της (1.4) με $X(x) T(t)$ για να καταλήξουμε στην

$$(1.5) \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)}.$$

Σημειώστε τώρα ότι, το αριστερό μέλος της (1.5) είναι μια συνάρτηση αποκλειστικά του x , ενώ το δεξί είναι συνάρτηση αποκλειστικά του t . Όμως, αφού οι μεταβλητές x και t είναι ανεξάρτητες, η ισότητα $F(x) = G(t)$ μπορεί να ισχύει άν και μόνο όταν οι συναρτήσεις $F(x)$ και

$G(t)$ είναι σταθερές. Γιατί, αν το t_0 είναι μια συγκεκριμένη τιμή της μεταβλητής t , τότε η $F(x) = G(t)$ γίνεται $F(x) = \lambda := G(t_0)$, για κάθε x . Συνεπώς,

$$(1.6) \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda = \frac{T'(t)}{T(t)}.$$

Με άλλα λόγια, για να είναι μια συνάρτηση της μορφής $u(x, t) = X(x)T(t)$ λύση της ΜΔΕ (1.1α), οι παράγοντες $X(x)$ και $T(t)$ θα πρέπει να είναι λύσεις των συνήθων διαφορικών εξισώσεων (ΣΔΕ)

$$(1.7) \quad X''(x) = \lambda X(x)$$

και

$$(1.8) \quad T'(t) = \lambda T(t),$$

αντίστοιχα.

Ας σημειωθεί ότι, οι ΣΔΕ (1.7) και (1.8) δεν είναι ανεξάρτητες η μία από την άλλη. Η σύνδεσή τους γίνεται μέσω της σταθερής λ , που ονομάζεται **παράμετρος διαχωρισμού**. Αξίζει επίσης να σημειωθεί ότι, το παραπάνω αποτέλεσμα είναι ενδεικτικό της "λογικής" που διέπει τη μέθοδο του διαχωρισμού των μεταβλητών. Με την ακόλουθη έννοια: Πρώτος στόχος της μεθόδου είναι η αναγωγή της αρχικά δοσμένης ΜΔΕ σε ένα σύστημα αλληλένδετων ΣΔΕ. Το πόσες εξισώσεις απαρτίζουν αυτό το σύστημα εξαρτιέται, βέβαια, από από πλήθος των ανεξάρτητων μεταβλητών που υπεισέρχονται στη δοσμένη ΜΔΕ.

Οι ΣΔΕ στις οποίες καταλήξαμε στην προκείμενη περίπτωση λύνονται εύκολα. Όμως, προτού ξεκινήσουμε την επίλυσή τους, αξίζει να θυμηθούμε ότι, από τις λύσεις της ΜΔΕ (1.1α) μας ενδιαφέρουν μόνο εκείνες που σέβονται την αρχική συνθήκη (1.1β) και τις συνοριακές (1.1γ).

Οι δεύτερες, όντας ομογενείς (=μηδενικές τιμές), αντιμετωπίζονται ευκολότερα και δίνουν το εξής αποτέλεσμα: Από τη συνθήκη $u(0, t) = X(0)T(t) = 0$, για κάθε $t \geq 0$, αμέσως έπεται ότι $X(0) = 0$. Γιατί, ο μηδενισμός της $T(t)$ για κάθε $t \geq 0$ είναι απαράδεκτος. Θα καθιστούσε την $u(x, t) = X(x)T(t)$ τετριμμένη.

Με τον ίδιο τρόπο, η συνθήκη $u(a, t) = X(a)T(t) = 0$, για κάθε $t \geq 0$, συνεπάγεται ότι $X(a) = 0$.

Συνακόλουθα, εκείνο που μας ενδιαφέρει δεν είναι η γενική λύση της ΣΔΕ (1.7), αλλά οι ειδικές λύσεις αυτής της εξίσωσης που σέβονται τις συνοριακές συνθήκες

$$(1.9) \quad X(0) = X(a) = 0.$$

Τώρα, στη φυσική εφαρμογή που περιγράψαμε νωρίτερα, η συνάρτηση $u(x, t)$ παίρνει μόνο πραγματικές τιμές. Το ίδιο λοιπόν πρέπει να ισχύει και για τις $X(x)$ και $T(t)$. Άρα, σε τέτοιες περιπτώσεις, η παράμετρος διαχωρισμού αναγκαστικά περιορίζεται στην πραγματική ευθεία. Συνακόλουθα, θα μπορούσαμε να προχωρήσουμε στην επίλυση της ΣΔΕ (1.7), με τις συνοριακές συνθήκες (1.9), υποθέτοντας ότι $\lambda \in \mathbb{R}$. Ωστόσο, για καλύψουμε την γενικότερη από μαθηματική άποψη περίπτωση, θα προτιμήσουμε ν' αφήσουμε το ίδιο το μαθηματικό πρόβλημα να μας οδηγήσει στους τυχόν περιορισμούς που πρέπει να επιβληθούν στις τιμές της παραμέτρου λ . Την εναλλακτική προσέγγιση που ξεκινάει με την υπόθεση ότι το $\lambda \in \mathbb{R}$ την αφήνουμε για άσκηση.

Πάντως, όπως και να προσεγγίσει κανείς το πιο πάνω πρόβλημα, η περίπτωση $\lambda = 0$

πρέπει ν' αντιμετωπιστεί ξεχωριστά. Γιατί τότε, η (1.8) ανάγεται στην $X''(x) = 0$, που έχει ως γενική λύση τις συναρτήσεις

$$(1.10) \quad X(x) = c_1 x + c_2,$$

με c_1, c_2 τυχαίες (μιγαδικές) σταθερές. Όμως, η μόνη λύση αυτής της μορφής που είναι συμβατή με τις συνοριακές συνθήκες (1.9) είναι η τετριμμένη. Γιατί, από την $X(0) = 0$ έπεται ότι $c_2 = 0$ και τότε η $X(a) = 0$ δίνει $c_1 = 0$.

Όταν $\lambda \neq 0$, η γενική λύση της (1.8) είναι της μορφής

$$(1.11) \quad X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda} x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda} x}.$$

Άρα, $X(0) = c_1 + c_2$. Έτσι, από τη συνθήκη $X(0) = 0$ έπεται ότι $c_2 = -c_1$, οπότε η $X(a) = 0$ γίνεται $c_1(e^{\sqrt{\lambda} a} - e^{-\sqrt{\lambda} a}) = 0$. Η περίπτωση $c_1 = 0$ αποκλείεται, γιατί θα οδηγούσε στη μηδενική λύση. Άρα, $e^{\sqrt{\lambda} a} - e^{-\sqrt{\lambda} a} = 0$, ή $e^{\sqrt{\lambda} a} = e^{-\sqrt{\lambda} a}$. Ισοδύναμα,

$$(1.12) \quad e^{2a\sqrt{\lambda}} = 1.$$

Σ' αυτό το σημείο, εξυπηρετεί το να γράψουμε τον μιγαδικό αριθμό $\sqrt{\lambda}$ στη μορφή

$$(1.13) \quad \sqrt{\lambda} = \mu + i\nu, \quad \mu, \nu \in \mathbb{R}.$$

Με αυτό τον τρόπο, η συνθήκη (1.12) γίνεται

$$(1.14) \quad e^{2a(\mu + i\nu)} \equiv e^{2a\mu} e^{2ia\nu} = 1.$$

Από αυτήν αμέσως έπεται ότι $|e^{2a(\mu + i\nu)}| \equiv e^{2a\mu} = 1$. Αλλά τότε $a\mu = 0$, υποχρεωτικά, και άρα $\mu = 0$. Έτσι, η (1.14) ανάγεται στην

$$(1.15) \quad e^{2ia\nu} \equiv \cos 2a\nu + i \sin 2a\nu = 1.$$

Με τη σειρά της, η (1.15) συνεπάγεται ότι

$$(1.16) \quad a\nu = n\pi,$$

όπου n τυχαίος ακέραιος. Με άλλα λόγια, η ΣΔΕ (1.7) επιδέχεται μη τετριμμένες λύσεις που σέβονται τις συνοριακές συνθήκες (1.9) μόνο όταν η παράμετρος λ ανήκει στο διακριτό σύνολο των αρνητικών αριθμών $\{-(n\pi/a)^2\}$, $n \in \mathbb{N}$. Οι αντίστοιχες λύσεις είναι της μορφής

$$(1.17) \quad X(x) = c_1(e^{i\nu x} - e^{-i\nu x}) \equiv 2i c_1 \sin \nu x = \tilde{c}_1 \sin\left(n \frac{\pi}{a} x\right)$$

Μένει να λύσουμε την ΣΔΕ (1.8), όπου πλέον $\lambda \in \{-(n\pi/a)^2\}$. Συνεπώς,

$$(1.18) \quad T(t) = T_0 e^{-(n\pi/a)^2 t},$$

με το T_0 τυχαία σταθερή.

Σ' αυτό το σημείο αξίζει να μαζέψουμε τ' αποτελέσματα της ανάλυσης που προηγήθηκε και να τα διατυπώσουμε ως το

Θεώρημα 1.1

Υπάρχουν λύσεις την εξίσωσης της θερμότητας $u_t = u_{xx}$ της μορφής $u(x, t) = X(x) T(t)$ που

σέβονται τις συνοριακές συνθήκες $u(0, t) = 0 = u(a, t)$, για κάθε $t \geq 0$. Το σύνολο αυτών των λύσεων αποτελείται από τις συναρτήσεις

$$(1.19) \quad U_n(x, t) := \sin\left(n \frac{\pi}{a} x\right) e^{-(n\pi/a)^2 t}, \quad n = 1, 2, \dots$$

και τους γραμμικούς συνδυασμούς τους.

Απόδειξη. Οι συναρτήσεις $U_n(x, t)$ έχουν όλες τις ιδιότητες που αναφέρονται στο θεώρημα από την κατασκευή τους. Το ότι κάθε γραμμικός συνδυασμός τους, δηλαδή, κάθε συνάρτηση της μορφής

$$(1.20) \quad u_m(x, t) := \sum_{n=1}^m A_n \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) e^{-(n\pi/a)^2 t},$$

όπου A_n τυχαίοι μιγαδικοί αριθμοί, αποτελεί λύση της $u_t - u_{xx} = 0$ επαληθεύεται με απλή αντικατάσταση. Από την άλλη, ο μηδενισμός των $u_m(x, t)$ όταν $x = 0$ ή $x = a$ είναι προφανής.

Παρατήρηση. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι, το γεγονός πως κάθε γραμμικός συνδυασμός των λύσεων $U_n(x, t)$ είναι λύση της $u_t - u_{xx} = 0$ οφείλεται στο ότι αυτή η εξίσωση είναι γραμμική κι ομογενής (αρχή της επαλληλίας).

■

Παρά τις καλές τους ιδιότητες, οι λύσεις $U_n(x, t)$ και οι γραμμικοί συνδυασμοί τους δεν αρκούν για να λύσουμε το πρόβλημα με το οποίο ξεκινήσαμε. Γιατί, παραβιάζουν εξώφθαλμα την αρχική συνθήκη (1.1β).

Συγκεκριμένα, από τον ορισμό (1.20) των $u_m(x, t)$ αμέσως έπεται ότι

$$(1.21) \quad u_m(x, 0) = \sum_{n=1}^m A_n \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right).$$

Η $u_m(x, 0)$ είναι προφανώς το άθροισμα ημιτονοειδών συναρτήσεων. Άρα είναι αδύνατο να ταυτιστεί με τη συνάρτηση $f(x) = x(a - x)$, $0 \leq x \leq a$, όπως απαιτεί η συνθήκη (1.1β).

Ωστόσο, κι αυτό το "ωστόσο" αποτελεί την ιστορικής σημασίας συμβολή του Fourier στην επιστήμη των μαθηματικών, υπάρχει τρόπος να κάνουμε τη διαφορά $|u_m(x, 0) - x(a - x)|$ όσο μικρή θέλουμε. Αυτός ο ισχυρισμός υποδηλώνει ότι κάθε συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα μήκους a , σαν το $[0, a]$, προσεγγίζεται ικανοποιητικά από ένα άθροισμα ημιτονοειδών συναρτήσεων με περίοδο $2na$. Στο βαθμό που ισχύει, αποτελεί το ανάλογο του θεωρήματος (του) Taylor, σύμφωνα με το οποίο, κάθε ομαλή συνάρτηση μπορεί να προσεγγιστεί από ένα άθροισμα συναρτήσεων της μορφής $T_n(x) = x^n$.

Όταν προβλήθηκε από τον Fourier, ο παραπάνω ισχυρισμός αντιμετώπιστηκε ως μαθηματικό σκάνδαλο. Ωστόσο, η εικασία του Fourier δεν άργησε να διατυπωθεί και ν' αποδειχτεί με μαθηματικά αυστηρό τρόπο. Σήμερα πλέον, η επαναστατική ιδέα του Γάλλου φυσικομαθηματικού, που πρωτοστάτησε και στη Γαλλική κοινωνική επανάσταση, έχει καθιερωθεί ως ένας από τους βασικούς πυλώνες της μαθηματικής ανάλυσης.

Η προσέγγιση οποιασδήποτε (σχεδόν) συνάρτησης από ένα άθροισμα της μορφής (1.21) επιτυγχάνεται, αν διαλέξουμε το m αρκετά μεγάλο και τους συντελεστές A_n με κατάλληλο τρόπο. Για να βρούμε την κατάλληλη μορφή των A_n , ας θεωρήσουμε το ακόλουθο πρόβλημα:

Μας δίνουν μια συνάρτηση $f(x)$, μας λένε ότι αυτή προκύπτει από τον γραμμικό συνδυασμό των πρώτων m από τις συναρτήσεις

$$(1.22) \quad F_n(x) := \sin(n \pi x / a), \quad n = 1, 2, \dots$$

και μας ζητάνε να βρούμε το πόσο συνεισφέρει καθεμιά από αυτές τις συναρτήσεις στην κατασκευή της $f(x)$. Με άλλα λόγια, γνωρίζουμε ότι

$$(1.23) \quad f(x) = \sum_{n=1}^m A_n \sin(n \pi x / a),$$

αλλά οι συντελεστές A_n μας είναι άγνωστοι.

Ας πολλαπλασιάσουμε και τα δύο μέλη αυτής της (1.23) με τη συνάρτηση $\sin(k \pi x / a)$, όπου k κάποιος ακέραιος $\{1, \dots, m\}$, κι ας ολοκληρώσουμε το αποτέλεσμα από το $x = 0$ ως το $x = a$. Έτσι, θα καταλήξουμε στη σχέση

$$(1.24) \quad \int_0^a f(x) \sin(k \pi x / a) dx = \sum_{n=1}^m A_n \int_0^a \sin(n \pi x / a) \sin(k \pi x / a) dx.$$

Όμως, από την ταυτότητα

$$(1.25) \quad \sin x \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x - y) - \cos(x + y)]$$

αμέσως έπεται ότι

$$(1.26) \quad \int_0^a \sin(n \pi x / a) \sin(k \pi x / a) dx = \frac{1}{2} \int_0^a \{ \cos[(n - k) \pi x / a] - \cos[(n + k) \pi x / a] \} dx.$$

Από την άλλη, εύκολα βρίσκουμε ότι

$$(1.27) \quad \int_0^a \cos(l \pi x / a) dx = \begin{cases} a, & l = 0 \\ 0, & l \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Συνεπώς,

$$(1.28) \quad \boxed{\int_0^a \sin(n \pi x / a) \sin(k \pi x / a) dx = \frac{a}{2} \delta_{nk} := \frac{a}{2} \begin{cases} 1, & n = k \\ 0, & n \neq k \end{cases}}$$

Με βάση αυτή τη σχέση, λέμε ότι οι συναρτήσεις $F_n(x)$ είναι μεταξύ τους **ορθογώνιες** στο διάστημα $[0, a]$. Η ορθογωνιότητα των παραπάνω συναρτήσεων αποτελεί και το κλειδί για την επιλογή των συντελεστών A_n στο άθροισμα (1.23).

Συγκεκριμένα, από την (1.28) αμέσως έπεται ότι η (1.24) γίνεται

$$(1.29) \quad \int_0^a f(x) \sin(k \pi x / a) dx = A_k \frac{a}{2}.$$

Συνεπώς,

$$(1.30) \quad A_k = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin(k \pi x / a) dx.$$

Αυτό που παρατήρησε ο Fourier είναι το εξής: Ακόμα και όταν η $f(x)$ δεν προκύπτει από το γραμμικό συνδυασμό των συναρτήσεων $F_n(x) := \sin(n \pi x / a)$, ο συνδυασμός

$$(1.31) \quad f_m(x) := \sum_{n=1}^m A_n \sin(n \pi x / a),$$

με συντελεστές A_n επιλεγμένους σύμφωνα με τον τύπο (1.30), δίνει μια προσέγγιση της $f(x)$. Που είναι τόσο καλύτερη, όσο μεγαλύτερη είναι η τιμή της διακριτής παραμέτρου m .

Προτού εμβαθύνουμε στην παραρατήρηση του Fourier από μαθηματική άποψη, αξίζει να δούμε το τι σημαίνει εμπειρικά, για το πρόβλημα που μας απασχολεί. Για το σκοπό αυτό, υπολογίζουμε τους συντελεστές A_n για την περίπτωση όπου $f(x) = x(a - x)$.

Σύμφωνα, λοιπόν, με τον τύπο (1.30),

$$(1.32) \quad A_n = \frac{2}{a} \int_0^a x(a - x) \sin(n \pi x / a) dx.$$

Ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες, εύκολα βρίσκουμε ότι

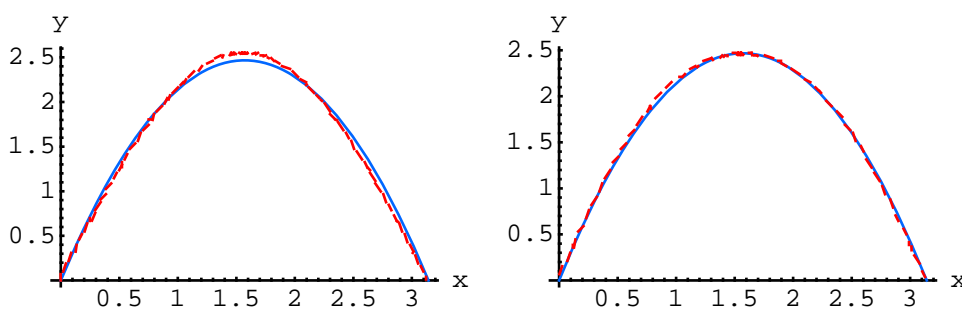
$$(1.33) \quad A_n = \frac{4a^2}{n^3 \pi^3} [1 - \cos(n \pi)] = \frac{4a^2}{n^3 \pi^3} [1 - (-1)^n] = \begin{cases} \frac{8a^2}{n^3 \pi^3}, & n = 2l + 1 \\ 0, & n = 2l \end{cases}$$

όπου l τυχαίος ακέραιος.

Συνεπώς, η ακολουθία των συναρτήσεων που δίνουν τις προσεγγίσεις Fourier της συνάρτησης $f(x) = x(a - x)$ δίνεται από τον τύπο

$$(1.34) \quad f_m(x) := \sum_{n=1}^m \frac{4a^2}{n^3 \pi^3} [1 - (-1)^n] \sin(n \pi x / a).$$

Στο Σχ. 1.1 δείχνουμε το γράφημα των $f_1(x)$ και $f_2(x)$, μαζί μ' εκείνο της $f(x) = x(a - x)$, για $a = \pi$. Είναι φανερό, ότι στην προκειμένη περίπτωση, ακόμα και για μικρές τιμές της παραμέτρου m οι συναρτήσεις $f_m(x)$ δίνουν μια πολύ καλή προσέγγιση της $f(x)$. Εμπειρικά, λοιπόν, η παρατήρηση του Fourier φαίνεται να είναι πολύ ρεαλιστική.



Σχ. 1.1. Στο αριστερό μέρος του σχήματος φαίνεται το γράφημα των συναρτήσεων $f(x) = x(a - x)$ και $f_1(x) = (8/\pi) \sin x$ (διακοπτόμενη καμπύλη). Το δεξί μέρος δείχνει τα γραφήματα των $f(x) = x(a - x)$ και $f_3(x) = (8/\pi) (\sin x + \sin 3x/27)$.

Λίγο παρακάτω θα δείξουμε ότι, πραγματικά, η ακολουθία των συναρτήσεων $f_m(x)$ συγκλίνει στην $f(x) = x(a - x)$ και, μάλιστα, ομοιόμορφα. Με άλλα, λόγια,

$$(1.35) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} f_m(x) = x(a - x), \quad 0 \leq x \leq a.$$

Ισοδύναμα,

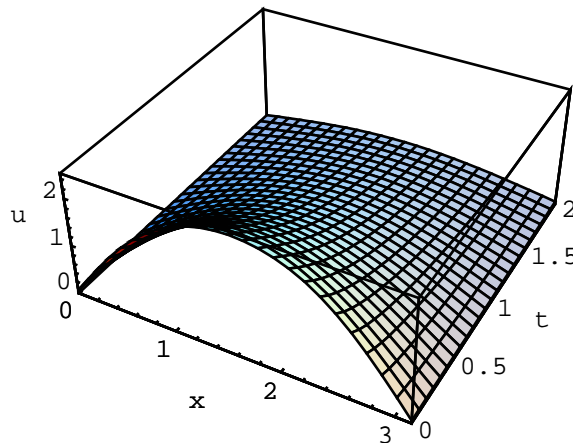
$$(1.36) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4a^2}{n^3 \pi^3} [1 - (-1)^n] \sin(n \pi x / a) = x(a - x), \quad 0 \leq x \leq a.$$

Άμεση συνέπεια αυτού του γεγονότος είναι ότι, η ακολουθία των συναρτήσεων $u_m(x, t)$ που ορίζεται από την (1.20) συγκλίνει ομοιόμορφα στην λωρίδα $0 \leq x \leq a, t \geq 0$, κι έτσι ορίζει μια συνάρτηση που θα την ονομάσουμε $u(x, t)$. Δηλαδή,

$$(1.37) \quad u(x, t) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8a^2}{n^3 \pi^3} \sin(n \pi x / a) e^{-(n \pi / a)^2 t}, \quad n = 2l - 1, \quad l \in \mathbb{N}$$

Σύμφωνα με το θεώρημα που δίνεται παρακάτω, αυτή η $u(x, t)$ αποτελεί λύση του ΠΑΣΤ (1.1).

Στο μεταξύ, μπορούμε να δούμε την εξέλιξη της θερμοκρασίας κατά μήκος της δοκού, την οποία προβλέπει η λύση (1.37). Αυτή φαίνεται καθαρά στο Σχ. 1.2, στο οποίο δείχνουμε το γράφημα των δύο πρώτων όρων της σειράς (1.37), όταν $a = \pi$. Συγκεκριμένα, η αρχικά ανομοιογενής θερμοκρασία, που ήταν μέγιστη στο κέντρο της ράβδου, γρήγορα γίνεται ίδια σε όλα τα σημεία του διαστήματος $0 \leq x \leq \pi$ και ίση προς τη μηδενική θερμοκρασία που επικρατεί στα άκρα της ράβδου. Αυτού του είδους η τάση προς εξισορρόπηση της θερμοκρασίας κατά μήκος ενός σώματος είναι ακριβώς αυτό που παρατηρείται στη φύση.



Σχ. 1.2. Το γράφημα της συνάρτησης $u_3(x, t) = (8/\pi) \sin x e^{-t} + (8/27\pi) \sin 3x e^{-9t}$.

Θεώρημα 1.2

Στη χωροχρονική λωρίδα $0 \leq x \leq a, t \geq 0$, η σειρά (1.37) συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνεχή συνάρτηση $u(x, t)$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:

- (i) Στο εσωτερικό της λωρίδας, η $u(x, t)$ αποτελεί λύση της εξίσωσης $u_t = u_{xx}$.
- (ii) Στο σύνορο της λωρίδας, η $u(x, t)$ παίρνει τις αρχικές-συνοριακές τιμές (1.1α) και (1.1β).

Απόδειξη. Θεωρούμε το ανοιχτό σύνολο $\Omega := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < a, t > 0\}$. Το σύνορό του, $\partial\Omega$, αποτελείται από το διάστημα $[0, a]$ του άξονα x και τις ημιευθείες $x = 0, t \geq 0$ και $x = a, t \geq 0$. Είναι φανερό ότι, κάθε μια από τις συναρτήσεις

$$(1.38) \quad U_n(x, t) := \frac{8a^2}{n^3 \pi^3} \sin(n \pi x / a) e^{-(n \pi / a)^2 t}, \quad n \in \mathbb{N},$$

είναι συνεχής στη χωροχρονική λωρίδα $\bar{\Omega} := \Omega \cup \partial\Omega$. Στο εσωτερικό, Ω , της $\bar{\Omega}$ οι $U_n(x, t)$ είναι κλάσης C^∞ και λύσεις της ΜΔΕ $u_t = u_{xx}$.

Είναι το ίδιο φανερό ότι, πρώτον,

$$(1.39) \quad |U_n(x, t)| = \frac{8a^2}{n^3 \pi^3} \left| \sin(n \pi x / a) e^{-(n \pi / a)^2 t} \right| \leq \frac{8a^2}{n^3 \pi^3}, \quad (x, t) \in \bar{\Omega},$$

και, δεύτερο, η σειρά θετικών όρων $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3}$ συγκλίνει.

Άρα, η σειρά (1.37) πληροί το κριτήριο M του Weierstrass, οπότε συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα στην περιοχή $\bar{\Omega}$. Επιπλέον, αφού όλοι οι όροι της σειράς είναι συνεχείς στην $\bar{\Omega}$, το ίδιο ισχύει και για την οριακή συνάρτηση, αυτή που ονομάσαμε $u(x, t)$.

Άς υποθέσουμε τώρα ότι το ε παριστάνει έναν αυθαίρετα μικρό θετικό αριθμό. Τότε,

$$(1.40) \quad n^k \left| \sin(n \pi x / a) e^{-(n \pi / a)^2 t} \right| \leq n^k e^{-\varepsilon(n \pi / a)^2}, \quad 0 < x < a, \quad t \geq \varepsilon,$$

για οποιονδήποτε ακέραιο k . Από την άλλη, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n^k \exp[-\varepsilon(\pi / a)^2 n^2]$ συγκλίνει. Άρα, από το κριτήριο M του Weierstrass έπεται ότι οι σειρές που προκύπτουν από την όρο προς όρο παραγωγή της (1.37) συγκλίνουν απόλυτα και ομοιόμορφα στη ζώνη $0 < x < a, \quad t \geq \varepsilon$, και δίνουν τις αντίστοιχες παραγώγους της $u(x, t)$. Ειδικότερα,

$$(1.41) \quad u_t(x, t) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n \pi} \sin(n \pi x / a) e^{-(n \pi / a)^2 t}$$

και

$$(1.42) \quad u_{xx}(x, t) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n \pi} \sin(n \pi x / a) e^{-(n \pi / a)^2 t}.$$

Επειδή το ε μπορεί να επιλεγεί όσο μικρό θέλουμε, αμέσως έπεται ότι η $u(x, t)$ που ορίζεται από τη σειρά (1.37) αποτελεί λύση της $u_t = u_{xx}$ στο εσωτερικό της λωρίδας $\bar{\Omega}$.

Μένει να αποδείξουμε ότι η παραπάνω $u(x, t)$ πληροί και τις συνθήκες (1.1β) και (1.1γ) στο σύνορο της χωροχρονικής λωρίδας $\bar{\Omega}$. Αλλά, όσο αφορά τις συνοριακές συνθήκες (1.1γ), δεν υπάρχει και τίποτα για απόδειξη. Όλοι οι όροι της σειράς (1.37) μηδενίζονται τόσο στο $x = 0$, όσο και στο $x = a$.

Άρα, εκείνο που πραγματικά μένει για ν' αποδείξουμε είναι ότι η σειρά

$$(1.43) \quad u(x, 0) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8a^2}{n^3 \pi^3} \sin(n \pi x / a), \quad n = 2l - 1, \quad l \in \mathbb{N},$$

συγκλίνει στη συνάρτηση $f(x) = x(a - x)$. Αυτό πραγματικά ισχύει και συνάγεται από το γενικότερο θεώρημα που αφορά την εικασία του Fourier. Στο τελευταίο αφιερώνουμε ένα από τα επόμενα εδάφια. Γι' αυτό, θεωρούμε ότι, σε τούτο το σημείο η απόδειξη του παρόντος θεωρήματος έχει ολοκληρωθεί.

Ασκήσεις

1.1 Να δειχτεί ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n^k \exp(-\delta n^2)$, όπου $\delta > 0$ και k τυχαίος ακέραιος, συγκλίνει.

1.2 Να λυθεί το ΠΑΣΤ

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, & 0 < x < \pi, & \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= f(x) := \sin x \cos x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0, t) &= 0, & u(\pi, t) &= 0, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

1.3 Ν' αποδειχτεί ο τύπος (1.32) για τους συντελεστές A_n .

1.4 Να λυθούν τα παρακάτω ΠΑΣΤ. Σε κάθε περίπτωση να κατασκευαστούν τα γραφήματα των αντίστοιχων ακολουθιών $f_m(x)$ και $u_m(x, t)$, κατά το πρότυπο των σχημάτων 1.1 και 1.2.

(i)

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, & 0 < x < \pi, & \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= f(x) := x^2(\pi - x), & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0, t) &= 0, & u(\pi, t) &= 0, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, & 0 < x < \pi, & \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= f(x) := x(2\pi - x)^2, & 0 \leq x \leq 2\pi, \\ u(0, t) &= 0, & u(2\pi, t) &= 0, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, & 0 < x < \pi, & \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= f(x) := x^2(x - \pi) \sin 3x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0, t) &= 0, & u(\pi, t) &= 0, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

2. Συνοριακές συνθήκες τύπου Neumann

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να μελετήσουμε τη διάχυση της θερμότητας σε μια ευθεία δοκό που είναι τελείως μονωμένη. Εναλλακτικά, το φυσικό πρόβλημα που μας ενδιαφέρει μπορεί να είναι η διάχυση ενός υλικού διαλυμένου σε κάποιο ρευστό, το οποίο περιέχεται σ' έναν κλειστό ευθύγραμμο σωλήνα. Και στις δυο περιπτώσεις, η μαθηματική έκφραση του φυσικού προβλήματος ανάγεται στο ΠΑΣΤ

$$(2.1\alpha) \quad u_t = k u_{xx}, \quad 0 < x < a, \quad t > 0,$$

$$(2.1\beta) \quad u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq a,$$

$$(2.1\gamma) \quad u_x(0, t) = 0, \quad u_x(a, t) = 0, \quad t \geq 0.$$

Στην περίπτωση του θερμικού προβλήματος, η συνάρτηση $u(x, t)$ παριστάνει τη θερμοκρασία που μετράμε στο σημείο x της δοκού τη χρονική στιγμή t . Στο πρόβλημα της διάχυσης, η $u(x, t)$ δίνει τη συγκέντρωση (πυκνότητα) του διαλυμένου υλικού, σε απόσταση x από το ένα άκρο του σωλήνα. Για να μην υπάρχει εισροή ή εκροή θερμότητας από τα άκρα της δοκού, η κλίση της θερμοκρασίας σ' αυτά τα σημεία θα πρέπει να μηδενίζεται. Ανάλογα, για να μην υπάρχει εκροή του διαλυμένου υλικού από τον σωλήνα στο περιβάλλον ή αντίστροφα, η κλίση της συγκέντρωσης στα σημεία $x = 0$ και $x = a$, που αντιστοιχούν στα άκρα του σωλήνα, θα πρέπει επίσης να μηδενίζεται. Αυτήν ακριβώς την φυσική προϋπόθεση εκφράζουν οι συνοριακές συνθήκες (2.1γ).

Η συνάρτηση $f(x)$ παριστάνει τη θερμοκρασία κάθε στοιχείου της δοκού τη στιγμή που το χρονόμετρο μας δείχνει $t = 0$. (Στην περίπτωση του προβλήματος της διάχυσης, η $f(x)$ παριστάνει την αρχική κατανομή του διαλυμένου υλικού κατά μήκος του σωλήνα. Αλλά, για ευκολία, η αναφοράς μας στο φυσικό πρόβλημα θα περιοριστούν, από τώρα και στο εξής, στην θερμική εκδοχή του). Από τις συνθήκες (2.1γ) αμέσως έπεται ότι $u_x(0, 0) = 0$, $u_x(a, 0) = 0$. Η (2.1β), από την άλλη, συνεπάγεται ότι $u_x(0, 0) = f'(0)$, $u_x(a, 0) = f'(a)$. Άρα, η αρχική συνθήκη θα είναι συμβατή με τις συνοριακές, αν η παράγωγος της $f(x)$ μηδενίζεται στα σημεία $x = 0$ και $x = a$. Παράδειγμα συνάρτησης με αυτή την ιδιότητα είναι η

$$(2.2) \quad f(x) = x^2(x - a)^2, \quad 0 \leq x \leq a.$$

Με την ευκαιρία, αξίζει να σημειώσουμε ότι οι (2.1γ) αναφέρονται ως **συνοριακές συνθήκες (τύπου) Neumann**, για να διακρίνονται από εκείνες που συναντήσαμε στο προηγούμενο εδάφιο. Οι δεύτερες ονομάζονται **συνοριακές συνθήκες (τύπου) Dirichlet**. Ο λόγος είναι ο εξής: Στα τμήματα $x = 0$ και $x = a$ του σύνορου $\partial\Omega$ της χωροχρονικής περιοχής $\Omega := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < a, t > 0\}$ η κατεύθυνση ∂_x είναι κάθετη προς το σύνορο. Συνεπώς, οι συνθήκες (2.1γ) αφορούν την κάθετη προς το σύνορο παράγωγο της $u(x, t)$.

Έχοντας αποσαφηνίσει τη φυσική σημασία, την έννοια της συμβατότητας και τον χαρακτήρα των συμπληρωματικών συνθηκών του ΠΑΣΤ (2.1), μπορούμε να στραφούμε στη μαθηματική του ανάλυση. Είναι φανερό, λοιπόν, ότι, αν προσπαθήσουμε να το λύσουμε εφαρμόζοντας τη μέθοδο του διαχωρισμού των μεταβλητών, τα πρώτα αποτελέσματα θα είναι ακριβώς τα ίδια μ' εκείνα που βρήκαμε στο προηγούμενο παράδειγμα.

Συγκεκριμένα, οι λύσεις της ΜΔΕ (2.1α) που είναι της μορφής $u(x, t) = X(x)T(t)$ θα καθορίζονται και πάλι από τις λύσεις των ΣΔΕ $X''(x) = \lambda X(x)$, $T'(t) = \lambda T(t)$, αλλά με την

εξής διαφορά: Όταν $u(x, t) = X(x) T(t)$ τότε $u_x(x, t) = X'(x) T(t)$. Άρα, για τις λύσεις της μορφής $u(x, t) = X(x) T(t)$, οι συνοριακές συνθήκες (2.1γ) μεταφράζονται στις

$$(2.3) \quad X'(0) T(t) = X'(a) T(t) = 0, \quad t \geq 0.$$

Συνεπώς, οι κατάλληλες λύσεις της ΣΔΕ $X''(x) = \lambda X(x)$ είναι τώρα εκείνες που σέβονται τις συνοριακές συνθήκες

$$(2.4) \quad X'(0) = X'(a) = 0.$$

Όπως και στο προηγούμενο εδάφιο, λύσεις της ΣΔΕ $X''(x) = \lambda X(x)$, συμβατές με τις συνοριακές συνθήκες (2.4) υπάρχουν μόνο για πραγματικές τιμές της παραμέτρου λ (άσκηση). Ανάλογα λοιπόν με τη θέση του λ στην πραγματική ευθεία, οι λύσεις της $X''(x) = \lambda X(x)$ δίνονται από τις συναρτήσεις

$$(2.4\alpha) \quad X(x) = c_1 x + c_2, \quad (\lambda = 0)$$

$$(2.4\beta) \quad X(x) = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}, \quad k = \sqrt{\lambda} \quad (\lambda > 0)$$

$$(2.4\gamma) \quad X(x) = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx, \quad k = \sqrt{-\lambda} \quad (\lambda < 0).$$

Είναι φανερό ότι, από τις συναρτήσεις της πρώτης οικογένειας, οι μόνες που δεν παραβιάζουν τις συνθήκες (2.4) είναι αυτές με $c_1 = 0$. Από την άλλη, ένας εύκολος υπολογισμός δείχνει πως οι συναρτήσεις της μορφής (2.4β) που είναι συμβατές με τις συνθήκες (2.4) είναι εκείνες με $c_1 = c_2 = 0$. Τέλος, για τις λύσεις της μορφής (2.4γ) οι συνθήκες (2.4) οδηγούν στις

$$(2.5) \quad c_2 k = -c_1 k \sin ka + c_2 k \cos ka = 0.$$

Άρα, $c_2 = 0$ και

$$(2.6) \quad \sin ka = 0 \Leftrightarrow k = n \frac{\pi}{a}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Αν λάβουμε υπόψη ότι $\cos 0 = 1$, μπορούμε να διατυπώσουμε το αποτέλεσμα της προηγούμενης ανάλυσης ως εξής:

• Οι μη τετριμμένες λύσεις της ΣΔΕ $X''(x) = \lambda X(x)$ που είναι συμβατές με τις συνθήκες (2.4) δίνονται από τις συναρτήσεις

$$(2.7) \quad X_n(x) := \cos n \left(\frac{n\pi}{a} x \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

και τους γραμμικούς συνδυασμούς τους.

Προφανώς, οι γραμμικοί συνδυασμοί των $X_n(x)$ έχουν τις ίδιες ακριβώς ιδιότητες με τις παραπάνω συναρτήσεις, γιατί η ΣΔΕ $X''(x) = \lambda X(x)$ είναι γραμμική κι ομογενής, ενώ ομογενείς είναι και οι συνοριακές συνθήκες (2.4).

Μια άλλη σημαντική ιδιότητα των συναρτήσεων (2.7) που, ουσιαστικά, οφείλεται στην ομογένεια των συνοριακών συνθηκών (2.4) και που θα παίξει καθοριστικό ρόλο στα επόμενα είναι η εξής:

$$(2.7) \quad \int_0^a X_n(x) X_m(x) dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ a/2, & n = m \neq 0 \\ a & n = m = 0 \end{cases}$$

Η (2.7) αποδειχεται εύκολα χρησιμοποιώντας την ταυτότητα

$$(2.8) \quad \cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)].$$

Με άλλα λόγια,

- Οι συναρτήσεις $X_n(x)$ είναι μεταξύ τους ορθογώνιες στο διάστημα $[0, a]$.

Η ορθογωνιότητα των συναρτήσεων $X_n(x)$ οδηγεί στο ακόλουθο θεμελιώδες αποτέλεσμα, το οποίο θα αποδείξουμε σύντομα:

- Αν η συνάρτηση $f(x)$, $x \in [0, a]$ είναι διαφορίσιμη και η παράγωγός της μηδενίζεται στα άκρα του διαστήματος $[0, a]$, τότε μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$(2.9) \quad f(x) = \frac{1}{2} B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n X_n(x),$$

όπου

$$(2.10) \quad B_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) X_n(x) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Προφανώς, αυτό το αποτέλεσμα είναι ανάλογο εκείνου που διατυπώσαμε στο προηγούμενο εδάφιο, με βάση τις συναρτήσεις $F_n(x) := \sin(n\pi x/a)$. Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, μπορούμε να πάρουμε μια εμπειρική εικόνα του κατά πόσο ισχύει, συγκρίνοντας το λεγόμενο ***m-στό μερικό άθροισμα της σειράς*** (2.9),

$$(2.11) \quad f_m(x) := \frac{1}{2} B_0 + \sum_{n=1}^m B_n X_n(x),$$

με την $f(x) = x^2(x-a)^2$, που ορίζει την αρχική θερμοκρασία της δοκού που μελετάμε.

Για το σκοπό αυτό, θα πρέπει αρχικά να υπολογίσουμε τους συντελεστές B_n . Σύμφωνα λοιπόν με τον τύπο (2.10),

$$(2.12) \quad B_0 = \frac{2}{a} \int_0^a x^2(x-a)^2 dx = \frac{2}{a} \left(\frac{1}{5} x^5 - \frac{2}{4} a x^4 + \frac{1}{3} a^2 x^3 \right) \Big|_0^a = \frac{a^4}{15}$$

και

$$(2.13) \quad B_n = \frac{2}{a} \int_0^a x^2(x-a)^2 \cos(k_n x) dx, \quad n = 1, 2, \dots$$

όπου

$$(2.14) \quad k_n := n \frac{\pi}{a}.$$

Τώρα,

$$(2.15) \quad \int_0^a \cos(k_n x) dx = \left[\frac{1}{k_n} \sin(k_n x) \right]_0^a = 0, \quad n \neq 0,$$

οπότε, ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες, βρίσκουμε ότι

$$(2.16) \quad \begin{aligned} \int_0^a x \cos(k_n x) dx &= \left[x \frac{1}{k_n} \sin(k_n x) \right]_0^a - \frac{1}{k_n} \int_0^a \sin(k_n x) dx = \left[\frac{1}{k_n^2} \cos(k_n x) \right]_0^a \\ &= \frac{1}{k_n^2} [\cos(n\pi) - 1] = \frac{1}{k_n^2} [(-1)^n - 1]. \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$(2.17) \quad \int_0^a x \cos(k_n x) dx = \frac{1}{k_n^2} [(-1)^n - 1], \quad n \neq 0.$$

Ανάλογα,

$$(2.18) \quad \int_0^a x^2 \cos(k_n x) dx = \left[x^2 \frac{1}{k_n} \sin(k_n x) \right]_0^a - \frac{2}{k_n} \int_0^a x \sin(k_n x) dx \\ = -\frac{2}{k_n} \left\{ \left[-x \frac{1}{k_n} \cos(k_n x) \right]_0^a + \frac{1}{k_n} \int_0^a \cos(k_n x) dx \right\}.$$

Δηλαδή,

$$(2.19) \quad \int_0^a x^2 \cos(k_n x) dx = \frac{2}{k_n^2} (-1)^n a, \quad n \neq 0. \\ k_n := n \frac{\pi}{a}$$

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο βρίσκουμε ότι

$$(2.20) \quad \int_0^a x^3 \cos(k_n x) dx = \frac{3}{k_n^4} \{(-1)^{|n|} [a^2 k_n^2 - 2] + 2\}, \quad n \neq 0,$$

και

$$(2.21) \quad \int_0^a x^4 \cos(k_n x) dx = \frac{4a}{k_n^4} (-1)^{|n|} (a^2 k_n^2 - 6), \quad n \neq 0, \\ k_n := n \frac{\pi}{a}$$

Χρησιμοποιώντας τις (2.17) και (2.19)-(2.21), εύκολα πλέον καταλήγουμε στον τύπο

$$(2.22) \quad B_n = -\frac{24a^4}{\pi^4 n^4} [1 + (-1)^n], \quad n = 1, 2, \dots$$

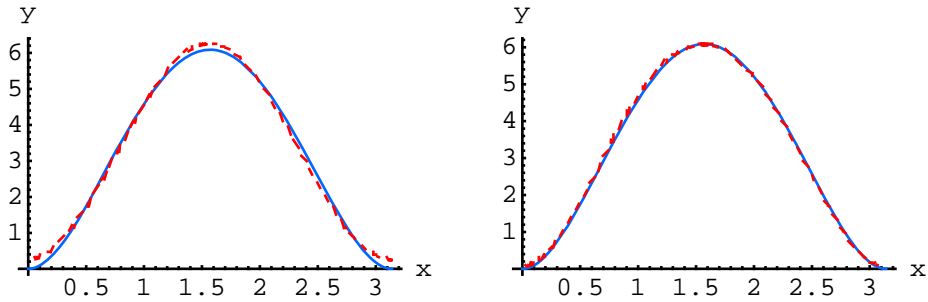
για τους υπόλοιπους συντελεστές της σειράς (2.11). Άρα, η παραπάνω σειρά γίνεται

$$(2.23) \quad f(x) = \frac{a^4}{30} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{24a^4}{\pi^4 n^4} [1 + (-1)^n] \cos\left(n \frac{\pi}{a} x\right).$$

Προφανώς, $1 + (-1)^n = 0$ όταν το n είναι περιττό. Κατά συνέπεια, η προηγούμενη σχέση γράφεται και σαν

$$(2.23) \quad f(x) = \frac{a^4}{30} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^4} \left(\frac{\pi}{a}\right)^4 \cos\left[2n\left(\frac{\pi}{a}\right)x\right].$$

Στο Σχ. 2.1 δείχνουμε το γράφημα των δύο και τριών πρώτων όρων αυτής της σειράς και, ταυτόχρονα, το γράφημα της $f(x) = x^2(x-a)^2$. Είναι φανερό ότι το m -στό μερικό άθροισμα της σειράς (2.23) αποτελεί μια ικανοποιητική προσέγγιση της $f(x)$, ακόμη και για μικρές τιμές της παραμέτρου m .



Σχ. 2.1. Στο αριστερό μέρος του σχήματος δίνεται το γράφημα των συναρτήσεων $f(x) = x^2(x - a)^2$ και $f_1(x) = (\pi^4 / 30) - 3 \cos(2x)$ (διακοπτόμενη καμπύλη). Το δεξί μέρος δείχνει τα γραφήματα των $f(x) = x^2(x - a)^2$ και $f_2(x) = (\pi^4 / 30) - 3 \cos(2x) - (3 / 16) \cos(4x)$.

Είναι πλέον καιρός να στραφούμε στη λύση $u(x, t)$ του ΠΑΣΤ (2.1). Ο συνδυασμός λοιπόν των λύσεων $X_n(x) := \cos(k_n x)$ της ΣΔΕ $X''(x) = \lambda X(x)$ με τις αντίστοιχες λύσεις $T_n(t) = \exp(-k_n^2 t)$ της $T'(t) = \lambda T(t)$ δίνει τις συναρτήσεις $u_n(x, t) = \cos(k_n x) \exp(-k_n^2 t)$ που έχουν όλες τις επιθυμητές ιδιότητες: Αποτελούν λύσεις της ΜΔΕ (2.1α) και πληρούν τις συνοριακές συνθήκες (2.1γ).

Το ίδιο ισχύει και για κάθε γραμμικό συνδυασμό των $u_n(x, t)$. Άρα, αν λάβουμε υπόψη και την αναπαράσταση (2.9) της $f(x)$, μπορούμε εύλογα να εικάσουμε ότι ισχύει η ακόλουθη

Πρόταση 2.1

• Αν η συνάρτηση $f(x)$, $x \in [0, a]$ είναι διαφορίσιμη και η παράγωγός της μηδενίζεται στα άκρα του διαστήματος $[0, a]$, τότε η σειρά

$$(2.24) \quad u(x, t) := \frac{1}{2} B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(k_n x) e^{-k_n^2 t},$$

όπου

$$(2.25) \quad k_n := n \frac{\pi}{a}, \quad B_n := \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \cos(k_n x) dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στη χωροχρονική λωρίδα $\bar{\Omega} := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq a, t \geq 0\}$. Η οριακή συνάρτηση $u(x, t)$ αποτελεί λύση του ΠΑΣΤ (2.1).

• Ειδικότερα, όταν $f(x) = x^2(x - a)^2$, $x \in [0, a]$, η λύση του δίνεται από τη σειρά

$$(2.26) \quad u(x, t) := \frac{a^4}{30} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^4} \left(\frac{a}{\pi}\right)^4 \cos\left[2n\left(\frac{\pi}{a}\right)x\right] e^{-4n^2(\pi/a)^2 t}$$

Απόδειξη. Είναι προφανές ότι, $|\cos[2n(\pi/a)x] \exp[-4n^2(\pi/a)^2 t]| \leq 1$, για κάθε $t \geq 0$, κι ότι η ενώ σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-4}$ συγκλίνει. Άρα, στη χωροχρονική περιοχή $\bar{\Omega}$, η σειρά (2.26) συγκλίνει ομοιόμορφα. Κι αφού κάθε όρος της είναι συνεχής συνάρτηση, το ίδιο θα ισχύει και για το όριό της, $u(x, t)$.

Ειδικότερα, στο τμήμα $0 \leq x \leq a, t = 0$, του σύνορου $\partial\Omega$, η σειρά (2.26) συγκλίνει στην $f(x) = x^2(x - a)^2$. Δηλαδή,

$$(2.27) \quad u(x, 0) := \frac{a^4}{30} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^4} \left(\frac{a}{\pi}\right)^4 \cos\left[2n\left(\frac{\pi}{a}\right)x\right] = x^2(x-a)^2.$$

Αυτό το γεγονός είναι άμεση απόρροια ενός γενικότερου αποτελέσματος, το οποίο θ' αποδείξουμε στο μεθεπόμενο εδάφιο (βλ. Θεώρ. 4-3).

Επιπλέον, η σειρά (2.26) έχει όλες τις ιδιότητες που αναλύσαμε στην απόδειξη του Θεωρ. 1.2. Άρα, μπορούμε αμέσως να συμπεράνουμε ότι η συνάρτηση που ορίζεται από την πιο πάνω σειρά αποτελεί λύση του ΠΑΣΤ (2.1). Ειδικότερα, η σειρά που προκύπτει παραγωγίζοντας την (2.26) όρο προς όρο συγκλίνει ομοιόμορφα. Συνεπώς,

$$(2.28) \quad u_x(x, t) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n^3} \left(\frac{a}{\pi}\right)^3 \sin\left[2n\left(\frac{\pi}{a}\right)x\right] e^{-4n^2(\pi/a)^2 t}.$$

Από αυτή την έκφραση φαίνεται ρητά ότι $u_x(0, t) = u_x(a, t) = 0$, όπως απαιτούν οι συνοριακές συνθήκες (2.1β).

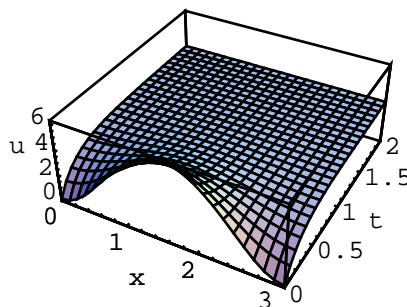
Με τα παραπάνω αποδείξαμε την ορθότητα της πρότασή μας μόνο για την ειδική περίπτωση όπου $f(x) = x^2(x-a)^2$. Αν σημειώσουμε ότι τα επιχειρήματα που αναπτύξαμε πιο πάνω στηρίζονται στην εξάρτηση των συντελεστών B_n από την διακριτή παράμετρο n , θα καταλήξουμε αμέσως στο ακόλουθο συμπέρασμα: Για να καλύψουμε την γενικότερη περίπτωση, χρειαζόμαστε μια τεχνική με την οποία μπορεί κανείς να προβλέπει τη συμπεριφορά των συντελεστών B_n , γνωρίζοντας μόνο τις γενικές ιδιότητες της αντίστοιχης $f(x)$. Δυστυχώς, με τα εργαλεία που διαθέτουμε ως τώρα δεν είμαστε σε θέση ν' αναπτύξουμε αυτή την τεχνική. Άρα, η ολοκλήρωση της απόδειξης του παρόντος θεωρήματος δεν μπορεί παρά να αναβληθεί γι' αργότερα.

■

Από την (2.26) αμέσως συνάγεται ότι, με την πάροδο του χρόνου, η θερμοκρασία $u(x, t)$ τείνει γρήγορα στην ίδια τιμή, $a^4/30$, σε όλα τα σημεία της δοκού. Αυτή η συμπεριφορά φαίνεται καθαρά και στο Σχ. 2.2. Εκεί δίνεται η γραφική παράσταση του γραφήματος του 3ου μερικού αθροίσματος της σειράς (2.26), όταν $a = \pi$, δηλαδή της συνάρτησης

$$(2.29) \quad u_3(x, t) = \frac{a^4}{30} - 3e^{-4t} \cos(2x) - \frac{3}{16} e^{-16t} \cos(4x) - \frac{1}{27} e^{-36t} \cos(6x).$$

Από τον ορισμό του συντελεστή B_0 έπεται ότι ο πρώτος όρος της σειράς (2.24), γενικά, και η τιμή $a^4/30$ στη συγκεκριμένη περίπτωση, αντιπροσωπεύει την μέση τιμή της αρχικής θερμοκρασίας, $f(x)$, της δοκού.



Σχ. 2.2. Το γράφημα της συνάρτησης $u_3(x, t)$ που ορίζεται στην (2.29).

Ασκήσεις

2.1 Να δειχτεί ότι

$$\int_0^a x^m \cos(k_n x) dx = \frac{m}{k_n^2} \{(-1)^{|n|} a^{m-1} - (m-1) \int_0^a x^{m-2} \cos(k_n x) dx\}, \quad m = 2, 3, \dots$$

2.1 Να λυθούν τα παρακάτω ΠΑΣΤ. Σε κάθε περίπτωση να κατασκευαστούν τα γραφήματα των μερικών αθροισμάτων $f_m(x)$ και $u_m(x, t)$ που δίνουν μια καλή προσέγγιση των συναρτήσεων $f(x)$ και $u(x, t)$, αντίστοιχα.

(i)
$$u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = f(x) := x^3 (x - \pi)^2, \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

$$u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0.$$

(ii)
$$u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = f(x) := x^2 (2\pi - x)^2, \quad 0 \leq x \leq 2\pi,$$

$$u_x(0, t) = u_x(2\pi, t) = 0, \quad t \geq 0.$$

(iii)
$$u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0,$$

$$u(x, 0) = f(x) := x^2 (x - \pi)^2 \sin x, \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

$$u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0.$$

3. Περιοδικές συνθήκες

Θεωρούμε έναν κυκλικό μεταλλικό βρόχο (στεφάνι) ακτίνας a που είναι τυλιγμένο με μονωτικό υλικό. Για να το περιγράψουμε αναλυτικά, μπορούμε να το ταυτίσουμε με τον κύκλο $\sqrt{x^2 + y^2} = a$ του Ευκλείδειου επίπεδου $x y$. Η ακτίνα OP που συνδέει το κέντρο $O = (0, 0)$ αυτού του κύκλου με το σημείο $P = (x, y)$ του βρόχου σχηματίζει γωνία θ με τον θετικό ημιάξονα x . Αν ως διάστημα τιμών της παραπάνω γωνίας επιλέξουμε το $[-\pi, \pi]$, τότε είναι φανερό ότι, για το ανοιχτό διάστημα $(-\pi, \pi)$, η αντιστοιχία $\theta \rightarrow P$ είναι αμφιμονοσήμαντη. Αντίθετα, οι τιμές $\theta = \pm\pi$ αντιστοιχούν στο ίδιο σημείο του βρόχου.

Εναλλακτικά, μπορούμε να προσδιορίζουμε τα σημεία του μεταλλικού βρόχου, χρησιμοποιώντας την παράμετρο

$$(3.1) \quad s = a\theta, \quad -\pi a \leq s \leq \pi a,$$

που αντιστοιχεί στο μήκος τόξου. Τότε, η εξέλιξη της θερμοκρασίας $U(s, t)$ κατά μήκος του βρόχου περιγράφεται από την ΜΔΕ

$$(3.2) \quad U_t = k U_{ss}.$$

Με την προϋπόθεση, βέβαια, ότι στο εσωτερικό του σώματος που εξετάζουμε δεν υπάρχουν θερμικές πηγές.

Αν προτιμήσουμε να ορίζουμε τα σημεία του στεφανιού μέσω της γωνιακής παραμέτρου θ , τότε πρέπει να αντικαταστήσουμε την (3.2) από την ισοδύναμη

$$(3.3) \quad u_t = k a^{-2} u_{\theta\theta},$$

όπου, φυσικά, $u(\theta, t) = U(a\theta, t)$.

Έτσι κι αλλιώς, οι θετικές σταθερές k στην (3.2) και $k a^{-2}$ στην (3.3) δεν παίζουν κανένα ρόλο, από μαθηματική άποψη. Μπορούμε να τις θέσουμε ίσες προς τη μονάδα, πράγμα που ισοδυναμεί με την αντικατάση $t \rightarrow \tau = kt$ στην πρώτη και $t \rightarrow \tau = k a^{-2} t$ στη δεύτερη περίπτωση, αντίστοιχα.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι, τη χρονική στιγμή $t = 0$ η θερμοκρασία του στεφανιού περιγράφεται από την ομαλή συνάρτηση $f(\theta)$. Το γεγονός που επισημάναμε παραπάνω, ότι δηλαδή οι τιμές $\theta = \pm\pi$ αντιστοιχούν στο ίδιο σημείο του βρόχου, επιβάλλει στην $f(\theta)$ να έχει τις εξής ιδιότητες: $f(-\pi) = f(\pi)$ και $f'(-\pi) = f'(\pi)$. Παράδειγμα συνάρτησης αυτού του είδους αποτελεί η $f(\theta) = (\theta^2 - \pi^2)^2$.

Για τον παραπάνω λόγο, τις ίδιες ακριβώς ιδιότητες θα πρέπει να έχει η θερμοκρασία $u(\theta, t)$ του βρόχου και κάθε άλλη χρονική στιγμή. Με άλλα λόγια, η φυσική διάταξη που μελετάμε επιβάλλει τις συνθήκες $u(-\pi, t) = u(\pi, t)$ και $u_\theta(-\pi, t) = u_\theta(\pi, t)$ για κάθε t .

Συνακόλουθα, η πρόβλεψη της εξέλιξης της θερμοκρασίας του βρόχου ανάγεται στην επίλυση του ΠΑΣΤ

$$(3.4\alpha) \quad u_t = u_{\theta\theta}, \quad -\pi < \theta < \pi, \quad t > 0$$

$$(3.4\beta) \quad u(\theta, 0) = f(\theta), \quad -\pi \leq \theta \leq \pi,$$

$$(3.4\gamma) \quad u(-\pi, t) = u(\pi, t), \quad u_\theta(-\pi, t) = u_\theta(\pi, t), \quad t \geq 0.$$

Είναι φανερό ότι, η μόνη διαφορά ανάμεσα σ' αυτό το ΠΑΣΤ κι εκείνα που αναλύσαμε στα δύο προηγούμενα εδάφια βρίσκεται στις συνοριακές συνθήκες. Αυτές του παρόντος προβλήματος χαρακτηρίζονται ως **περιοδικές συνθήκες**, για προφανείς λόγους: Πάνω στις ευθείες $\theta = -\pi$ και $\theta = \pi$ του επίπεδου θt οι συνθήκες που οφείλει να πληροί η συνθήκη $u(\theta, t)$ είναι ακριβώς ίδιες. Επειδή οι παραπάνω ευθείες απέχουν κατά 2π ως προς την γωνιακή συντεταγμένη θ , μπορούμε να πούμε ότι οι συνθήκες που έχουν επιβληθεί στην $u(\theta, t)$ επαναλαμβάνονται μετά από 2π βήματα στην κατεύθυνση θ .

Μάλιστα, τίποτα δε μας εμποδίζει από το ν' αφήσουμε την γωνιακή παράμετρο θ να διατρέχει όλη την πραγματική ευθεία. Όποιος και νά 'ναι ο ακέραιος κ , οι τιμές θ και $\theta + 2\kappa\pi$ αντιστοιχούν πάντα στο ίδιο σημείο του βρόχου. Συνεπώς, μπορούμε να θεωρήσουμε ως πεδίο ορισμού της συνάρτησης $u(\theta, t)$ ολόκληρο το επίπεδο \mathbb{R}^2 , διατηρώντας τον εξής όρο:

$$(3.5) \quad u(\theta + 2\kappa\pi, t) = u(\theta, t), \quad u_\theta(\theta + 2\kappa\pi, t) = u_\theta(\theta, t), \quad (\theta, t) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall \kappa \in \mathbb{Z}.$$

Στο πλαίσιο τώρα της μεθόδου του χωρισμού των μεταβλητών, η επίλυση του ΠΑΣΤ (3.4) ξεκινάει με το ansatz

$$(3.6) \quad u(\theta, t) = \Theta(\theta) T(t).$$

Όπως και στις δύο προηγούμενες περιπτώσεις, η αντικατάσταση αυτής της έκφρασης στην ΜΔΕ (3.4α) οδηγεί στις ΣΔΕ

$$(3.7) \quad \Theta''(\theta) = \lambda \Theta(\theta), \quad T'(t) = \lambda T(t).$$

Οι λύσεις αυτών των εξισώσεων μας είναι πλέον κάτι παραπάνω από γνωστές. Για την πρώτη, ειδικότερα, έχουμε

$$(3.8\alpha) \quad \Theta(\theta) = c_1 \theta + c_2, \quad (\lambda = 0)$$

$$(3.8\beta) \quad \Theta(\theta) = c_1 e^{k\theta} + c_2 e^{-k\theta}, \quad k = \sqrt{\lambda} \quad (\lambda > 0)$$

$$(3.8\gamma) \quad \Theta(\theta) = c_1 \cos k\theta + c_2 \sin k\theta, \quad k = \sqrt{-\lambda} \quad (\lambda < 0).$$

Από την άλλη, η μορφή $u(\theta, t) = \Theta(\theta) T(t)$ της λύσης που αναζητάμε μετατρέπει τις συνοριακές συνθήκες (3.4γ) στις

$$(3.9) \quad \Theta(-\pi) T(t) = \Theta(\pi) T(t), \quad \Theta'(-\pi) T(t) = \Theta'(\pi) T(t), \quad t \geq 0.$$

Αφού η εκδοχή $T(t) = 0, \forall t \geq 0$, απορρίπτεται, οι (3.9) είναι ισοδύναμες προς τις

$$(3.10) \quad \Theta(-\pi) = \Theta(\pi), \quad \Theta'(-\pi) = \Theta'(\pi).$$

Είναι φανερό ότι οι μόνες λύσεις της μορφής (3.8α) που είναι συμβατές με αυτές τις συνθήκες είναι οι $\Theta(\theta) = c_2$. Από την άλλη, όλες οι λύσεις της μορφής (3.8β) παραβιάζουν τις (3.10). Τέλος, για τις λύσεις της μορφής (3.8γ) οι συνθήκες (3.10) ανάγονται στις

$$(3.11) \quad -c_2 \sin k\pi = c_2 \sin k\pi, \quad c_1 k \sin k\pi = -c_1 k \sin k\pi.$$

Αυτές συνεπάγονται ότι $\sin k\pi = 0$ και άρα η (μη μηδενική) παράμετρος k μπορεί να παίρνει μόνο ακέραιες τιμές: $k = n$.

Αφού $\cos n\theta = 1$ όταν $n = 0$, μπορούμε να ενσωματώσουμε τις λύσεις $\Theta(\theta) = c_2 \sigma'$ εκείνες της μορφής (3.8γ). Λαβαίνοντας υπόψη και το γεγονός ότι $\sin(-x) = -\sin x$, μπορούμε να διατυπώσουμε το αποτέλεσμα της ανάλυσης που προηγήθηκε ως εξής:

•Οι μη τετριμμένες λύσεις της ΣΔΕ $\Theta''(\theta) = \lambda \Theta(\theta)$ που είναι συμβατές με τις συνθήκες (3.10) δίνονται από τις συναρτήσεις

$$(3.12) \quad \Theta_n(\theta) = a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

και τους γραμμικούς συνδυασμούς τους.

Επιστρέφοντας στο σύστημα (3.7), παρατηρούμε ότι στις λύσεις $\Theta_n(\theta)$ της ΣΔΕ $\Theta''(\theta) = \lambda \Theta(\theta)$ αντιστοιχούν οι λύσεις $T_n(t) = c_n \exp(-n^2 t)$ της $T'(t) = \lambda T(t)$. Συνεπώς, κάθε συνάρτηση της μορφής $(\tilde{a}_n \cos n\theta + \tilde{b}_n \sin n\theta) \exp(-n^2 t)$ είναι λύση της ΜΔΕ $u_t = u_{\theta\theta}$, συμβατή με τις συνοριακές συνθήκες (3.4γ).

Το ίδιο βέβαια ισχύει και για τις συναρτήσεις της μορφής

$$(3.13) \quad u_m(\theta, t) := \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^m (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) e^{-n^2 t},$$

όπου A_n, B_n τυχαίες σταθερές. Ο λόγος για τον οποίο γράψαμε τον σταθερό όρο της ακολουθίας $u_m(\theta, t)$ στη μορφή $A_0/2$ θα φανεί καθαρά στη συνέχεια. Εκείνο για το οποίο δεν μπορούμε να είμαστε βέβαιοι είναι η απάντηση στο ακόλουθο ερώτημα: Ας υποθέσουμε ότι η ακολουθία (3.13) συγκλίνει, και μάλιστα ομοιόμορφα, σε όλη την περιοχή $t \geq 0$ του επίπεδου θt . Είναι η συνάρτηση $u(\theta, t)$ στην οποία συγκλίνει η ακολουθία $u_m(\theta, t)$ λύση της $u_t = u_{\theta\theta}$;

Για να εντοπίσουμε τις προϋποθέσεις που εξασφαλίζουν θετική απάντηση στο πιο πάνω ερώτημα, ας καταγράψουμε πρώτα ρητά την υπόθεσή μας:

$$(3.14) \quad u(\theta, t) := \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) e^{-n^2 t}, \quad -\infty < \theta < \infty, \quad t \geq 0.$$

Αν λοιπόν το μόνο που γνωρίζουμε είναι ότι η σειρά (3.14) συγκλίνει ομοιόμορφα, τότε δεν είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε τις μερικές παραγώγους της $u(\theta, t)$.

Από την άλλη, η (3.14) συνεπάγεται ότι

$$(3.15) \quad u(\theta, 0) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta), \quad -\infty < \theta < \infty.$$

Άρα, έχουμε να αντιμετωπίσουμε κι ένα δεύτερο σημαντικό ερώτημα: Τι σχέση έχει η συνάρτηση $u(\theta, 0)$ που ορίζεται από την (3.15) με τη συνάρτηση $f(\theta)$;

Θα πρέπει να είναι φανερό ότι αυτά τα δύο ερωτήματα είναι αλληλένδετα. Αυτό φαίνεται καθαρά αμέσως μόλις υιοθετήσουμε την υπόθεση ότι η $u(\theta, 0)$ της (3.15) ταυτίζεται με την $f(\theta)$ που έχει δοθεί εκ των προτέρων:

$$(3.16) \quad u(\theta, 0) = f(\theta), \quad -\infty < \theta < \infty.$$

Αυτό σημαίνει ότι οι συντελεστές A_n, B_n είναι τέτοιοι που η ακολουθία

$$(3.17) \quad f_m(\theta) := \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^m (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta), \quad -\infty < \theta < \infty,$$

συγκλίνει στη συνάρτηση $f(\theta)$, που είναι συνεχής και περιοδική: $f(\theta + 2\kappa\pi) = f(\theta)$,

$\forall \kappa \in \mathbb{Z}$. Δηλαδή,

$$(3.18) \quad f(\theta) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n \theta + B_n \sin n \theta), \quad -\infty < \theta < \infty.$$

Μάλιστα, αν συντελεστές A_n, B_n είναι τέτοιοι που τόσο η ίδια όσο κι οι παράγωγοι πρώτης και δεύτερης τάξης της ακολουθίας $f_m(\theta)$ συγκλίνουν ομοιόμορφα, τότε από την (3.18) αμέσως έπεται ότι

$$(3.19) \quad f'(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} n(-A_n \sin n \theta + B_n \cos n \theta), \quad -\infty < \theta < \infty,$$

και

$$(3.20) \quad f''(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2(A_n \cos n \theta + B_n \sin n \theta), \quad -\infty < \theta < \infty.$$

Κάτω από αυτές τις προϋποθέσεις, δεν υπάρχει πλέον αμφιβολία ότι η ακολουθία (3.13) συγκλίνει ομοιόμορφα στην περιοχή $-\infty < \theta < \infty, t \geq 0$. Γιατί, ο συντελεστής $\exp(-n^2 t)$ φράσσεται από τη μονάδα για κάθε $t \geq 0$. Συνακόλουθα, η οριακή συνάρτηση $u(\theta, t)$ είναι συνεχής, πληροί τις συμπληρωματικές συνθήκες του ΠΑΣΤ (3.4) από την κατασκευή της και, τέλος, αποτελεί λύση της ΜΔΕ $u_t = u_{\theta\theta}$ στο τμήμα $t > 0$ του επίπεδου θt .

Έχοντας εντοπίσει τις ικανές συνθήκες για να είναι η (3.13) λύση του ΠΑΣΤ (3.4), αξίζει να σημειώσουμε ότι οι συντελεστές A_n, B_n καθορίζονται μονοσήμαντα από την οριακή συνάρτηση $f(\theta)$. Συγκεκριμένα,

$$(3.21) \quad \boxed{A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos n \theta d \theta, \quad B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin n \theta d \theta}$$

Αυτές οι σχέσεις προκύπτουν αμέσως από την υπόθεση ότι η σειρά (3.18) συγκλίνει ομοιόμορφα, αν λάβουμε υπόψη ότι

$$(3.22) \quad \boxed{\int_{-\pi}^{\pi} \sin m \theta \cos n \theta d \theta = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos m \theta \cos n \theta d \theta = \int_{-\pi}^{\pi} \sin m \theta \sin n \theta d \theta = \pi \delta_{mn}}$$

Τις τελευταίες μπορεί κανείς να τις αποδείξει πάρα πολύ εύκολα.

Παράδειγμα 3.1

Ας υποθέσουμε ότι τη χρονική στιγμή $t = 0$ η θερμοκρασία στο μεταλλικό στεφάνι περιγράφεται από τη συνάρτηση

$$(3.23) \quad f(\theta) = (1 + \theta)(\theta^2 - \pi^2)^2, \quad -\pi \leq \theta \leq \pi.$$

Προφανώς αυτή η συνάρτηση είναι ομαλή και τέτοια που $f(-\pi) = f(\pi), f'(-\pi) = f'(\pi)$. Άρα ικανοποιεί τις απαιτήσεις της φυσικής διάταξης στην οποία αντιστοιχεί το ΠΑΣΤ (3.4).

Από τους τύπους (3.19) και χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία (βλ. άσκ. 3.2) βρίσκουμε ότι

$$(3.24) \quad A_0 = \frac{16\pi^4}{15}, \quad A_n = -\frac{48(-1)^n}{n^4}, \quad B_n = \frac{16(-1)^n(n^2\pi^2 - 15)}{n^5}$$

Συνεπώς, η μέθοδος χωρισμού των μεταβλητών οδηγεί στο ακόλουθο συμπέρασμα: Όταν η αρχικές τιμές της θερμοκρασίας $u(\theta, t)$ δίνονται από τη συνάρτηση (3.23), τότε μια λύση του το ΠΑΣΤ (3.4) δίνεται από τη συνάρτηση

$$(3.25) \quad u(\theta, t) = \frac{8\pi^4}{15} + \sum_{n=1}^m \left[-\frac{48(-1)^n}{n^4} \cos(n\theta) + \frac{16(-1)^n(n^2\pi^2-15)}{n^5} \sin(n\theta) \right] e^{-n^2 t}$$

Το ότι η σειρά που εμφανίζεται στην (3.25) συγκλίνει, με τρόπο ώστε η $u(\theta, t)$ να είναι πραγματικά λύση του ΠΑΣΤ (3.4) αφήνεται για άσκηση.

Ασκήσεις

3.1 Ν' αποδειχτούν οι σχέσεις ορθογωνιότητας (3.22).

3.2 α) Ν' αποδειχτούν οι τύποι (3.24) για τους συντελεστές της ακολουθίας (3.17) και να κατασκευαστεί το γράφημα της $f_3(\theta)$.

β) Να επαληθευτεί ότι η σειρά (3.25), καθώς κι εκείνες που προκύπτουν παραγωγίζοντας όρο προς όρο την (3.25), συγκλίνουν με τρόπο ώστε να ικανοποιούνται όλες οι συνιστώσες του ΠΑΣΤ (3.4).

3.3 Να λυθεί το ΠΑΣΤ (3.4) για κάθε μια από τις ακόλουθες περιπτώσεις:

$$(i) \quad f(\theta) = \sin^2 \theta \cos^2 \theta, \quad (ii) \quad f(\theta) = (\theta^2 - \pi^2)^2 \quad (iii) \quad f(\theta) = (1 - 2\theta)(\theta^2 - \pi^2)^2.$$

Στις περιπτώσεις (ii) και (iii), να κατασκευαστούν τα γραφήματα των μερικών αθροισμάτων $f_m(\theta)$ και $u_m(\theta, t)$ που δίνουν μια καλή προσέγγιση των συναρτήσεων $f(\theta)$ και $u(\theta, t)$, αντίστοιχα.

4. Σειρές Fourier

Στα τρία προηγούμενα εδάφια και στην προσπάθειά μας να λύσουμε το πρόβλημα αρχικών τιμών για την εξίσωση της διάχυσης, εμφανίστηκαν σειρές της μορφής

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n \pi x / a), \quad \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n \pi x / a),$$

που φαίνονταν να συγκλίνουν σε μια συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού το συμπαγές (κλειστό και φραγμένο) διάστημα $[0, a]$, καθώς και σειρές της μορφής

$$\frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n \theta + B_n \sin n \theta)$$

που έτειναν σε κάποια συνάρτηση $f(\theta)$, ορισμένη στο διάστημα $[-\pi, \pi]$.

Ωστόσο, σε καμία περίπτωση δεν ήμασταν σε θέση ν' αποδείξουμε ότι η αντίστοιχη σειρά συνέκλινε πραγματικά στη αρχικά δοσμένη συνάρτηση. Σποπός του παρόντος εδάφιου είναι να καλύψει αυτό το έλλειμμα και να θέσει όλες τις παραπάνω περιπτώσεις σε ενιαία βάση.

Για το σκοπό αυτό, θα χρειαστεί να υπενθυμίσουμε αρχικά κάποιες έννοιες σχετικά με τις συναρτήσεις που θέλουμε να παραστήσουμε με τη μορφή σειράς.

Ξεκινάμε με την παρατήρηση ότι, κάθε συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα διάστημα της μορφής $[0, a]$ μετασχηματίζεται εύκολα σε συνάρτηση που έχει ως πεδίο ορισμού το διάστημα $[0, \pi]$. Συγκεκριμένα, ο μετασχηματισμός (αλλαγή κλίμακας)

$$(4.1) \quad x \rightarrow \tilde{x} := \frac{\pi}{a} x$$

ορίζει μιαν αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση του διαστήματος $0 \leq x \leq a$ στο $0 \leq \tilde{x} \leq \pi$. Συνεπώς, η συνάρτηση $f(x)$, $0 \leq x \leq a$, μετασχηματίζεται στην

$$(4.2) \quad \tilde{f}(\tilde{x}) := f\left(\frac{a}{\pi} \tilde{x}\right), \quad 0 \leq \tilde{x} \leq \pi,$$

που είναι ισοδύναμη προς την $f(x)$, $0 \leq x \leq a$.

Ανάλογα, ο μετασχηματισμός (μετάθεση και αλλαγή κλίμακας)

$$(4.3) \quad x \rightarrow \tilde{x} := \frac{\pi}{b-a} (x - a)$$

μετατρέπει την $f(x)$, $a \leq x \leq b$, στην

$$(4.4) \quad \tilde{f}(\tilde{x}) := f\left(\frac{b-a}{\pi} \tilde{x} + a\right), \quad -\pi \leq \tilde{x} \leq \pi.$$

Με βάση την πιο πάνω παρατήρηση, μπορούμε να εστιάσουμε την προσοχή μας σε συναρτήσεις με πεδίο ορισμού τα διαστήματα $[0, \pi]$ και $[-\pi, \pi]$, αντίστοιχα.

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι η συνάρτηση $f(x)$ έχει ως πεδίο ορισμού το διάστημα $[0, \pi]$. Τότε, με **σειρά Fourier σνημιτόνων της $f(x)$** θα εννοούμε την έκφραση

$$(4.4) \quad F^c(x) := \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n x,$$

όπου

$$(4.5) \quad F^c(x) := \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n x,$$

όπου

$$(4.6) \quad a_n := \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos n x \, dx, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ανάλογα, **σειρά Fourier ημιτόνων της** $f(x)$ θα ονομάζουμε την έκφραση

$$(4.7) \quad F^s(x) := \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n x,$$

όπου

$$(4.8) \quad b_n := \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin n x \, dx, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Τέλος, με τον όρο **σειρά Fourier της** $f(x)$ που έχει ως πεδίο ορισμού το διάστημα $[-\pi, \pi]$ θα εννοούμε την έκφραση

$$(4.9) \quad F^f(x) := \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n x + B_n \sin n x),$$

όπου

$$(4.10) \quad A_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos n x \, dx, \quad B_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin n x \, dx, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Αξιίζει εδώ να σημειώσουμε ότι

$$(4.11) \quad A_{-n} = A_n, \quad B_{-n} = -B_n, \quad n = 0, 1, \dots$$

και να θυμηθούμε πως

$$(4.12) \quad \cos x = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix}), \quad \sin x = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix}).$$

Τότε γίνεται φανερό ότι το m -στό μερικό άθροισμα της σειράς Fourier (4.9) γράφεται σαν

$$(4.13) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^m (A_n \cos n x + B_n \sin n x) &= \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^m \frac{1}{2} [(A_n - i B_n) e^{inx} + (A_n + i B_n) e^{-inx}] \\ &= \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^m \frac{1}{2} (A_n - i B_n) e^{inx} + \sum_{n=1}^{-m} \frac{1}{2} (A_{-n} + i B_{-n}) e^{inx} \\ &= \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^m \frac{1}{2} (A_n - i B_n) e^{inx} + \sum_{n=-1}^{-m} \frac{1}{2} (A_n - i B_n) e^{inx}. \end{aligned}$$

Ισοδύναμα,

$$(4.14\alpha) \quad \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^m (A_n \cos n x + B_n \sin n x) = \sum_{n=-m}^m C_n e^{inx}$$

όπου

$$(4.14\beta) \quad C_n := \frac{1}{2} (A_n - i B_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Από αυτή την παρατήρηση αμέσως έπεται ότι η σειρά Fourier (4.9) γράφεται και στη μορφή

$$(4.15) \quad F^f(x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx}.$$

Αυτή η μορφή της (4.8) διευκολύνει αρκετούς από τους υπολογισμούς που χρειάζονται στην ανάλυση των σειρών Fourier.

Για όλες τις σειρές που εισαγάγαμε παραπάνω, οι αριθμοί a_n , b_n , A_n , B_n και C_n θα αναφέρονται ως **συντελεστές Fourier της $f(x)$** .

Είναι προφανές ότι η σύγκλιση των ολοκληρωμάτων που ορίζουν τους συντελεστές Fourier καθορίζεται από τις ιδιότητες της αντίστοιχης $f(x)$. Γιατί, οι συναρτήσεις $\cos nx$ και $\sin nx$ είναι ομαλές και φραγμένες. Συνακόλουθα, η σύγκλιση των παραπάνω ολοκληρωμάτων είναι εξασφαλισμένη σε κάθε περίπτωση που η $f(x)$ είναι συνεχής. Ωστόσο, το ίδιο ισχύει και για μια πολύ ευρύτερη κατηγορία συναρτήσεων.

Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι η $f(x)$ είναι **απόλυτα ολοκληρώσιμη** στο διάστημα $-\pi \leq x \leq \pi$. Αυτό σημαίνει ότι το ολοκλήρωμα $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx$ συγκλίνει, γεγονός που συχνά δηλώνεται με την έκφραση

$$(4.16) \quad \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx < \infty.$$

Τότε, προφανώς, και οι συναρτήσεις $f(x) \cos nx$ και $f(x) \sin nx$ είναι απόλυτα ολοκληρώσιμες στο διάστημα $-\pi \leq x \leq \pi$ και άρα τα ολοκληρώματα της (4.9) συγκλίνουν.

Οι συντελεστές Fourier ορίζονται απρόσκοπτα και για τις συναρτήσεις που λέγονται τμηματικά συνεχείς. Πρόκειται για τις συναρτήσεις που εμφανίζουν ασυνέχειες ήπιου χαρακτήρα. Για να τις γνωρίσουμε, ας υποθέσουμε αρχικά ότι

(i) Η συνάρτηση $f(x)$ ορίζεται σε κάποια περιοχή της μορφής $(a, x_0) \cup (x_0, b)$ και

(ii) Τα όρια

$$(4.17\alpha) \quad f(x_0+) := \lim_{h \downarrow 0} f(x_0+h) \equiv \lim_{0 < h \rightarrow 0} f(x_0+h),$$

$$(4.17\beta) \quad f(x_0-) := \lim_{h \uparrow 0} f(x_0+h) \equiv \lim_{0 > h \rightarrow 0} f(x_0+h)$$

υπάρχουν. Τότε λέμε ότι η $f(x)$ παρουσιάζει **αλματική ασυνέχεια** στο x_0 . Ως **άλμα** της $f(x)$ στο x_0 ορίζουμε τον αριθμό $|f(x_0+) - f(x_0-)|$.

Μια συνάρτηση $f(x)$, λοιπόν, λέγεται **τμηματικά συνεχής στο διάστημα $[a, b]$** αν είναι συνεχής, εξαιρώντας ίσως ορισμένα σημεία του $[a, b]$, που είναι πεπερασμένα σε πλήθος και στα οποία η $f(x)$ εμφανίζει μόνο αλματικές ασυνέχειες. Ως μέτρο των αλμάτων που τυχόν εμφανίζει η $f(x)$ στα άκρα του διαστήματος $[a, b]$ θεωρούμε τους αριθμούς $|f(a+) - f(a)|$ και $|f(b-) - f(b)|$, αντίστοιχα. Θα λέμε ότι η $f(x)$ είναι **τμηματικά συνεχής στον \mathbb{R}** , όταν είναι τμηματικά συνεχής σε κάθε συμπαγές υποσύνολο $[a, b]$ της πραγματικής ευθείας.

Η σημασία των τμηματικά συνεχών συναρτήσεων θα αναδειχτεί πολύ σύντομα. Ωστόσο, μπορούμε από τώρα να εντοπίσουμε την αναγκαιότητα του να επεκτείνουμε το ενδιαφέρον μας από τις συνεχείς στις τμηματικά συνεχείς συναρτήσεις. Πρώτ' απ' όλα, είναι συχνά βολικό, από πρακτική άποψη, το να προσεγγίζουμε συνεχείς ή και ομαλές συναρτήσεις από τμηματικά συνεχείς. Για παράδειγμα, η συνάρτηση

$$(4.18) \quad f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi \leq x \leq 0 \\ 2, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

αποτελεί μια πολύ εύχρηστη προσέγγιση της συνεχούς συνάρτησης

$$(4.19) \quad g(x) = \begin{cases} 1, & -\pi \leq x \leq 0 \\ 1 + \sqrt[3]{x/\pi}, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

Από την άλλη, οι σειρές Fourier, παρά το γεγονός ότι αποτελούνται από ομαλές συναρτήσεις, πολλές φορές συγκλίνουν σε συναρτήσεις που είναι μόνο τμηματικά συνεχείς.

Παράδειγμα 4.1

Για να δούμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα αυτής της συμπεριφοράς, ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση

$$(4.20) \quad f(x) := x, \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

Σύμφωνα με τους τύπους (4.9), οι συντελεστές Fourier της $f(x)$ ορίζονται από τις εκφράσεις

$$(4.21) \quad A_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx \, dx, \quad B_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, dx, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Προφανώς, οι συντελεστές A_n μηδενίζονται, γιατί η $f(x)$ είναι περιττή. Από την άλλη, η $x \sin nx$ είναι άρτια, οπότε, για $n \neq 0$,

$$(4.22) \quad B_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx \, dx = \frac{2}{\pi} \left[-x \frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx \, dx = -\frac{2(-1)^n}{n\pi}.$$

Άρα, η σειρά Fourier της $f(x) := x$, $-\pi \leq x \leq \pi$, δίνεται από την έκφραση

$$(4.23) \quad F(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} (-1)^{n+1} \sin nx,$$

Όλοι οι όροι αυτής της σειράς μηδενίζονται στα σημεία $x_k = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Από την άλλη, όπως θα δείξουμε σύντομα, στο ανοιχτό διάστημα $-\pi < x < \pi$, η σειρά (4.23) συγκλίνει στην $f(x) = x$. Ταυτόχρονα, $\sin nx = \sin n(x + 2k\pi)$. Άρα, το ίδιο θα ισχύει και για τη συνάρτηση $F(x)$. Δηλαδή, στο διάστημα $(2k-1)\pi < x < (2k+1)\pi$, η σειρά (4.23) συγκλίνει στη συνάρτηση που προκύπτει μεταθέτοντας την $f(x) = x$ κατά $2k\pi$ μονάδες στην κατεύθυνση του άξονα x .

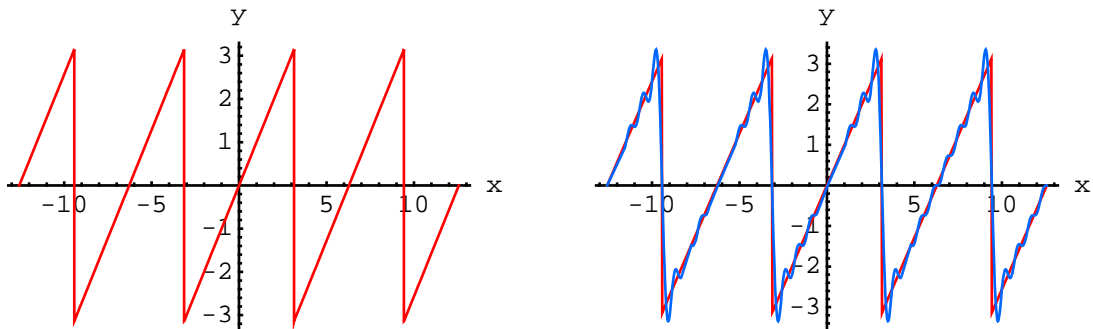
Με άλλα λόγια,

$$(4.24) \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x = -\pi \\ x, & -\pi < x < \pi \end{cases} \quad F(x + 2k\pi) = F(x).$$

Προφανώς η $F(x)$ είναι τμηματικά συνεχής, όπως φαίνεται καθαρά και στο Σχ. 4.1. Εκεί παρουσιάζουμε το γράφημα της συνάρτησης $F(x)$ μόνο του, αλλά και σε υπέρθεση μ' εκείνο

του μερικού αθροίσματος $F_8(x)$ σειράς (4.23), όπου

$$(4.25) \quad F_m(x) := \sum_{n=1}^m \frac{2}{n\pi} (-1)^{n+1} \sin nx.$$



Σχ. 4.1. Το γράφημα της συνάρτησης (4.23) στο διάστημα $-4\pi \leq x \leq 4\pi$ (αριστερά) και μαζί με το γράφημα του μερικού αθροίσματος $F_8(x)$ (δεξιά).

Η συνάρτηση που ορίζεται στην (4.18) αναφέρεται ως **2π -περιοδική επέκταση της** $f(x) = x$, $x \in [-\pi, \pi]$. Γενικότερα, ως **T -περιοδική επέκταση της συνάρτησης** $f(x)$, $x \in [a, b]$ ορίζουμε κάθε περιοδική συνάρτηση με περίοδο $T = b - a$ που ταυτίζεται με την $f(x)$ είτε σε ολόκληρο το διάστημα $[a, b]$ είτε σ' ένα από τα διαστήματα (a, b) και $[a, b)$.

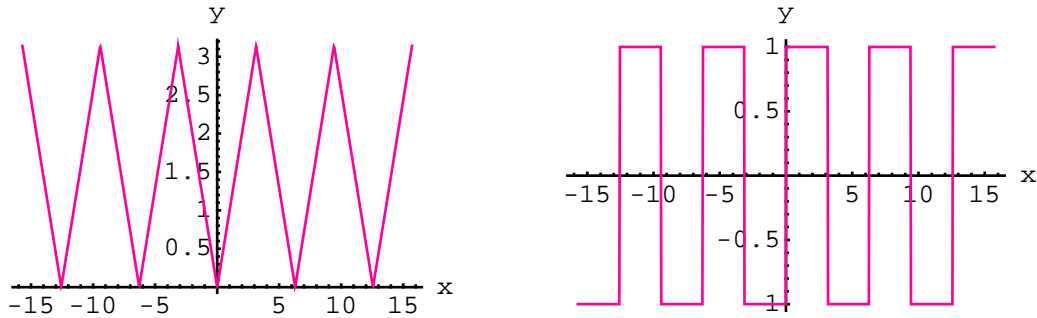
Ακόμη κι αν είναι συνεχής, μια συνάρτηση μπορεί να εμφανίζει ανώμαλη συμπεριφορά στο επίπεδο των παραγώγων της, πρώτης ή και μεγαλύτερης τάξης. Από τη σκοπιά των σειρών Fourier, ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι συναρτήσεις που τόσο οι ίδιες, όσο κι οι παράγωγοί τους μέχρι τάξης k είναι τμηματικά συνεχείς συναρτήσεις σε κάποιο διάστημα I . Αυτές απαρτίζουν τις κλάσεις που θα συμβολίζουμε με $C_\tau^k(I)$. Με $C_\tau(I) \equiv C_\tau^0(I)$ θα εννοούμε την κλάση των τμηματικά συνεχών συναρτήσεων και με $C_\tau^\infty(I)$ εκείνες που έχουν τμηματικά συνεχείς παραγώγους κάθε τάξης. Προφανώς, $C_\tau(I) \subset C_\tau^k(I) \subset C_\tau^\infty(I)$.

Παράδειγμα 4.2

Η περιοδική συνάρτηση

$$(4.26) \quad f(x) = |x|, \quad -\pi \leq x \leq \pi, \quad f(x + 2k\pi) = x, \quad k \in \mathbb{Z},$$

είναι συνεχής. Και, παρά το γεγονός ότι δεν ορίζεται στα σημεία $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, η πρώτη παράγωγος της $f(x)$ είναι συνεχής στα διαστήματα $k\pi < x < (k+1)\pi$ και τείνει σε συγκεκριμένα όρια καθώς πλησιάζουμε τα άκρα αυτών των διαστημάτων. Το ίδιο ισχύει και για τις παραγώγους κάθε τάξης. Άρα $f \in C_\tau^\infty(\mathbb{R})$.



Σχ. 4.2. Αριστερά, το γράφημα της περιοδικής συνάρτησης (4.26) και, δεξιά, της παραγώγου της. Η τελευταία ορίζεται μόνο στ' ανοιχτά διαστήματα $\pi < x < (\kappa + 1)\pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

Είναι φανερό ότι στο ζήτημα της σύγκλισης των σειρών Fourier καθοριστικό ρόλο παίζει η συμπεριφορά των αντίστοιχων συντελεστών. Οι τελευταίοι, όμως, καθορίζονται από τις ιδιότητες της αρχικά δοσμένης συνάρτησης $f(x)$. Για να βρούμε την ακριβή σύνδεση της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς των συντελεστών Fourier με την αντίστοιχη $f(x)$, θα θυμήσουμε αρχικά ότι έχουμε συχνά μιλήσει για συναρτήσεις που είναι ορθογώνιες σε κάποιο διάστημα $[a, b]$. Αλλά, η έννοια της ορθογωνιότητας στηρίζεται σ' εκείνη του εσωτερικού γινόμενου.

Τώρα, ως εσωτερικό γινόμενο των συναρτήσεων $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ ορίζεται ο αριθμός

$$(4.27) \quad \langle f, g \rangle := \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx,$$

όπου $\overline{g(x)}$ η μιγαδική συζυγής της $g(x)$. Γενικά, λοιπόν, οι συναρτήσεις f, g λέγονται **ορθογώνιες** στο διάστημα $[a, b]$ αν το εσωτερικό τους γινόμενο μηδενίζεται.

Παρατήρηση. Όπως, αντί για το Δ των μαθηματικών, οι φυσικοί προτιμούν το ∇^2 , έτσι και για το εσωτερικό γινόμενο συναρτήσεων προτιμούν τον ορισμό $\langle f, g \rangle_\phi := \int_a^b \overline{f(x)} g(x) dx$. Προφανώς, $\langle f, g \rangle_\phi = \overline{\langle f, g \rangle}$.

Όταν το εσωτερικό γινόμενο της συνάρτησης $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ με τον εαυτό της υπάρχει, όταν δηλαδή το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x) \overline{f(x)} dx \equiv \int_a^b |f(x)|^2 dx$ συγκλίνει, τότε λέμε ότι η $f(x)$ είναι **τετραγωνικά ολοκληρώσιμη**. Αφού η τιμή του παραπάνω ολοκληρώματος είναι μη αρνητική, μπορούμε να θέσουμε

$$(4.28) \quad \|f\|_2 := \langle f, f \rangle^{1/2} \equiv \left[\int_a^b |f(x)|^2 dx \right]^{1/2}$$

Ο αριθμός $\|f\|_2$ ομομάζεται **L^2 -στάθμη** της $f(x)$, με το L προς τιμή του Lebesgue (Λεμπέγκ).

Για τις σειρές Fourier, το βασικό διάστημα είναι το $[-\pi, \pi]$. Κι εκείνο που μας ενδιαφέρει είναι το πόσο καλά προσεγγίζει την 2π -περιοδική επέκταση δοσμένης συνάρτησης $f(x)$, $x \in [-\pi, \pi]$, το μερικό άθροισμα

$$(4.29) \quad F_m(x) := \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^m (A_n \cos nx + B_n \sin nx)$$

της σειράς Fourier της $f(x)$. Ως μέτρο της "απόστασης" της $F_m(x)$ από την $f(x)$ θα μπορού-

σαμε λοιπόν να χρησιμοποιήσουμε τον αριθμό

$$(4.30) \quad \|f - F_m\|_2 := \left[\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - F_m(x)|^2 dx \right]^{1/2}.$$

Άρα, ένας τρόπος για να εξακριβώσουμε αν η $F_m(x)$ είναι καλή προσέγγιση της $f(x)$ είναι το να συγκρίνουμε την απόσταση $\|f - F_m\|_2$ με την απόσταση στην οποία βρίσκονται από την $f(x)$ άλλες, ομοειδείς προς την $F_m(x)$, συναρτήσεις. Προφανώς, μια ομοειδής προς την $F_m(x)$ είναι το **τριγωνομετρικό πολυώνυμο**

$$(4.31) \quad T_m(x) := \frac{1}{2} \alpha_0 + \sum_{n=1}^m (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx),$$

όπου α_n και β_n τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί. Θα δείξουμε λοιπόν ότι το $F_m(x)$ υπερέχει του $T_m(x)$, με την ακόλουθη έννοια: Το τριγωνομετρικό πολυώνυμο που απέχει λιγότερο από την $f(x)$ είναι το μερικό άθροισμα $F_m(x)$!

Για ευκολία, θα υποθέσουμε ότι η $f(x)$ παίρνει πραγματικές τιμές. Τότε λοιπόν

$$(4.32) \quad \|f - T_m\|_2^2 := \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_m(x)]^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} [f^2(x) - 2f(x)F_m(x) + F_m^2(x)] dx.$$

Τώρα, από τον ορισμό των συντελεστών Fourier της $f(x)$ αμέσως έπεται ότι

$$(4.33) \quad \begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) F_m(x) dx &= \frac{1}{2} \alpha_0 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx + \sum_{n=1}^m \alpha_n \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \\ &= \sum_{n=1}^m \beta_n \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{2} \pi \alpha_0 A_0 + \sum_{n=1}^m \pi(\alpha_n A_n + \alpha_n B_n). \end{aligned}$$

Από την άλλη, ένας απλός υπολογισμός που λαβαίνει υπόψη την ορθογωνιότητα των $\cos nx$ και $\sin nx$ στο διάστημα $[-\pi, \pi]$ οδηγεί στο ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$(4.34) \quad \int_{-\pi}^{\pi} F_m^2(x) dx = \frac{1}{2} \pi \alpha_0^2 + \sum_{n=1}^m \pi(\alpha_n^2 + \beta_n^2).$$

Συνεπώς,

$$(4.35) \quad \begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - T_m(x)]^2 dx &= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - 2 \left[\frac{1}{2} \pi \alpha_0 A_0 + \sum_{n=1}^m \pi(\alpha_n A_n + \beta_n B_n) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \pi \alpha_0^2 + \sum_{n=1}^m \pi(\alpha_n^2 + \beta_n^2) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \pi \alpha_0 A_0 - 2 \sum_{n=1}^m \pi(\alpha_n A_n + \beta_n B_n) + \frac{1}{2} \pi \alpha_0^2 + \sum_{n=1}^m \pi(\alpha_n^2 + \beta_n^2) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx + \frac{1}{2} \pi(\alpha_0^2 - 2\alpha_0 A_0) + \sum_{n=1}^m \pi(\alpha_n^2 - 2\alpha_n A_n + \beta_n^2 - \beta_n B_n) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx + \frac{1}{2} \pi(\alpha_0 - A_0)^2 - \frac{1}{2} \pi A_0^2 + \sum_{n=1}^m \pi[(\alpha_n - A_n)^2 + (\beta_n - B_n)^2] \\ &\quad - \sum_{n=1}^m \pi(A_n^2 + B_n^2) \end{aligned}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx + \frac{1}{2} \pi (\alpha_0 - A_0)^2 + \sum_{n=1}^m \pi [(\alpha_n - A_n)^2 + (\beta_n - B_n)^2] \\ - \frac{1}{2} \pi A_0^2 - \sum_{n=1}^m \pi (A_n^2 + B_n^2)$$

Από το τελευταίο σκέλος αυτής της ισότητας φαίνεται καθαρά ότι, η απόσταση $\|f - T_m\|_2$ ελαχιστοποιείται όταν $\alpha_0 = A_0$, $\alpha_n = A_n$, $\beta_n = B_n$. Δηλαδή όταν ως $T_m(x)$ επιλέξουμε το $F_m(x)$.

Με αυτή την επιλογή, η (4.35) γίνεται

$$(4.36) \quad \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - F_m(x)]^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx - \pi \left[\frac{1}{2} A_0^2 + \sum_{n=1}^m (A_n^2 + B_n^2) \right]$$

Προφανώς, το αριστερό μέλος αυτής της ισότητας είναι μη αρνητικό. Άρα,

$$(4.37) \quad \frac{1}{2} A_0^2 + \sum_{n=1}^m (A_n^2 + B_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx, \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Συνεπώς,

$$(4.38) \quad \boxed{\frac{1}{2} A_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^2 + B_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx}$$

Αυτή η βασική σχέση, που αναφέρεται ως *ανισότητα (του) Bessel*, οδηγεί αμέσως στο ακόλουθο σημαντικό αποτέλεσμα:

Θεώρημα 4.1

Αν η $f(x)$ είναι τμηματικά συνεχής στο διάστημα $[-\pi, \pi]$, τότε οι συντελεστές Fourier A_n , B_n και C_n της $f(x)$ τείνουν στο μηδέν, καθώς το $n \rightarrow \infty$.

Απόδειξη. Η (4.38) σημαίνει ότι οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} A_n^2$ και $\sum_{n=1}^{\infty} B_n^2$ συγκλίνουν. Άρα, οι αριθμοί A_n^2 και B_n^2 αποτελούν τους n -στους όρους συγκλινουσών σειρών. Συνεπώς, τείνουν στο μηδέν καθώς το $n \rightarrow \infty$. A fortiori, το ίδιο ισχύει τόσο για τους αριθμούς A_n και B_n , όσο και για τους C_n που ορίζονται από τους προηγούμενους. ■

Λήμμα 4.1 (Πυρήνας Dirichlet)

Ας υποθέσουμε ότι η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ είναι περιοδική, με περίοδο 2π , κι απόλυτα ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[-\pi, \pi]$. Τότε το m -στό μερικό άθροισμα της σειράς Fourier της $f(x)$ μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$(4.39\alpha) \quad F_m(x) = \int_{-\pi}^{\pi} G_m(x-y) f(y) dy = \int_{-\pi}^{\pi} G_m(y) f(x+y) dy,$$

όπου

$$(4.39\beta) \quad G_m(y) := \frac{1}{2\pi} \frac{\sin[(m+1/2)y]}{\sin(y/2)}.$$

Η συνάρτηση $G_m(y)$ ονομάζεται *πυρήνας Dirichlet*.

Απόδειξη. Αφού η $f(x)$ είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[-\pi, \pi]$, τα ολοκληρώματα που ορίζουν τους συντελεστές Fourier C_n της $f(x)$ συγκλίνουν. Με βάση την (4.14), το m -στό μερικό άθροισμα της σειράς Fourier της $f(x)$,

$$(4.40) \quad F_m(x) := \sum_{n=-m}^m C_n e^{in x},$$

γράφεται σαν

$$(4.41) \quad F_m(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-m}^m \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{in(x-y)} dy.$$

Ισοδύναμα,

$$(4.42) \quad F_m(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-m}^m \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{in(y-x)} dy,$$

γιατί η διακριτή παράμετρος n αθροίζεται από το $-m$ ως το m , οπότε η αντικατάσταση $n \rightarrow -n$ δεν επηρεάζει το αποτέλεσμα.

Τώρα, οι συναρτήσεις $\cos nx$ και $\sin nx$ είναι (και) 2π -περιοδικές. Άρα το ίδιο ισχύει και για τις $\exp(inx)$. Συνδυάζοντας αυτή την παρατήρηση με την υπόθεση ότι η $f(x)$ είναι 2π -περιοδική, συμπεραίνουμε ότι και η προς ολοκλήρωση συνάρτηση στην (4.42) ανήκει στην ίδια κατηγορία. Αυτό μας επιτρέπει ν' αντικαταστήσουμε τη μεταβλητή ολοκλήρωσης y από την $z = y - x$ και να συμπεράνουμε ότι

$$(4.43) \quad F_m(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-m}^m \int_{-(\pi-x)}^{(\pi-x)} f(x+z) e^{in z} dz = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-m}^m \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z) e^{in z} dz.$$

Όμως,

$$(4.44) \quad \sum_{n=-m}^m e^{in z} = e^{-im z} \sum_{n=0}^{2m} (e^{in z}).$$

Από την άλλη, εύκολα επαληθεύεται ότι

$$(4.45) \quad \sum_{n=0}^k s^n = \frac{s^{k+1}-1}{s-1}, \quad s \neq 1.$$

Συνεπώς, η (4.43) γράφεται και σαν

$$(4.46) \quad \sum_{n=-m}^m e^{in z} = e^{-im z} \frac{e^{(2m+1)iz}-1}{e^{iz}-1} = \frac{e^{i(m+1)z}-e^{-im z}}{e^{iz}-1}.$$

Πολλαπλασιάζοντας το τελευταίο σκέλος της (4.46) με $\exp(-iz/2)$, παίρνουμε

$$(4.47) \quad \sum_{n=-m}^m e^{in z} = \frac{e^{i(m+1/2)z}-e^{-i(m+1/2)z}}{e^{iz/2}-e^{-iz/2}} = \frac{\sin[(m+1/2)z]}{\sin(z/2)}.$$

Τέλος, η αντικατάσταση της (4.47) στην (4.43) οδηγεί στην

$$(4.48) \quad F_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+z) \frac{\sin[(m+1/2)z]}{\sin(z/2)} dz,$$

με την οποία ολοκληρώνεται η απόδειξη του λήμματος. ■

Παρατήρηση. Αξίζει εδώ να σημειώσουμε ότι

$$(4.49) \quad \int_{-\pi}^{\pi} G_m(y) dy := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin[(m+1/2)y]}{\sin(y/2)} dy = 1.$$

Αυτή η ιδιότητα αποδεικνύεται εύκολα ως εξής. Σύμφωνα με την (4.47),

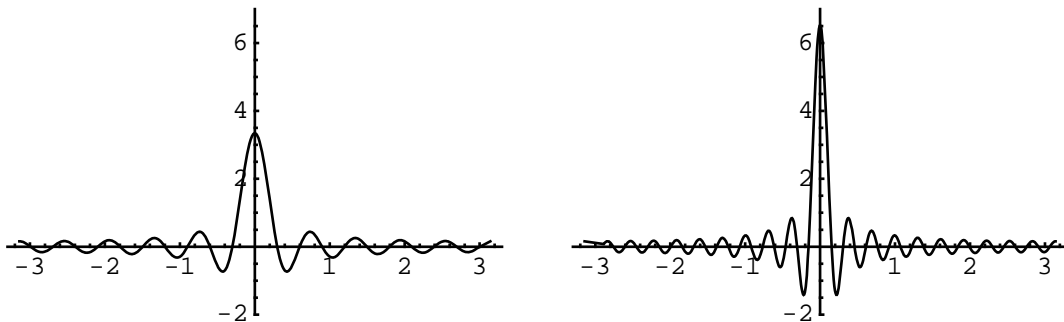
$$(4.50) \quad \frac{\sin[(m+1/2)y]}{\sin(y/2)} = \sum_{n=-m}^m e^{iny} = 1 + \sum_{n=0}^m (e^{iny} + e^{-iny}) \equiv 1 + 2 \sum_{n=0}^m \cos ny.$$

Άρα,

$$(4.51) \quad \int_0^{\pi} \frac{\sin[(m+1/2)y]}{\sin(y/2)} dy = \int_0^{\pi} \left(1 + 2 \sum_{n=0}^m \cos ny \right) dy = \pi.$$

Αν λάβουμε υπόψη και το γεγονός ότι η προς ολοκλήρωση συνάρτηση στην (4.49) είναι άρτια, αμέσως συμπεραίνουμε ότι η παραπάνω σχέση αληθεύει.

Μια δεύτερη πολύ σημαντική ιδιότητα του πυρήνα Dirichlet είναι η εξής: Από τον ορισμό της αμέσως συνάγεται ότι η $G_m(x)$ είναι άρτια και 2π -περιοδική. Στο διάστημα $[-\pi, \pi]$, η $G_m(x)$ παίρνει τη μέγιστη τιμή της, $(m+1/2)/2\pi$, στο σημείο $x=0$. Καθώς απομακρυνόμαστε από το $x=0$, η $G_m(x)$ ταλαντώνεται σαν την $\sin[(m+1/2)x]$ και φθίνει σαν την $[2\pi|\sin(y/2)|]^{-1}$. Αυτό φαίνεται καθαρά στο Σχ. 4.3, στο οποίο δείχνουμε τα γραφήματα των $G_{10}(x)$ και $G_{20}(x)$ στο διάστημα $[-\pi, \pi]$. Από τις προηγούμενες παρατηρήσεις συνάγεται ότι, καθώς η διακριτή παράμετρος m μεγαλώνει, η $G_m(x)$ συγκεντρώνεται στη γειτονιά του μηδενός, με την ακόλουθη έννοια: Η μέγιστη τιμή της όλο και αυξάνει, ενώ το ίδιο συμβαίνει και με τη συχνότητα της ταλάντωσής της καθώς απομακρυνόμαστε από το κεντρικό σημείο $x=0$. Αυτή η συμπεριφορά γίνεται φανερή από τη σύγκριση των δύο γραφημάτων του Σχ. 4.3.



Σχ. 4.3. Τα γραφήματα των πυρήνων Dirichlet $G_{10}(x)$ και $G_{20}(x)$ στο διάστημα $[-\pi, \pi]$. ■

Άμεση συνέπεια της συμπεριφοράς που μόλις περιγράψαμε είναι ότι, καθώς αυξάνεται η τιμή της παραμέτρου m , η συνεισφορά της $f(x+y)$ στο ολοκλήρωμα $\int_{-\pi}^{\pi} G_m(y) f(x+y) dy$ περιορίζεται όλο και περισσότερο σ' ένα μικρό διάστημα γύρω από το σημείο $y=0$. Σε μεγαλύτερες αποστάσεις η συνεισφορά της $f(x+y)$ ακυρώνεται από της ταλαντώσεις του πυρήνα $G_m(y)$. Αυτή η παρατήρηση μας κάνει να περιμένουμε ότι

$$(4.52) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} F_m(x) = \int_{-\pi}^{\pi} G_m(y) f(x+y) dy = f(x).$$

Και πραγματικά, αυτό ισχύει όταν η $f(x)$ είναι ομαλή στη γειτονιά του σημείου $x = 0$. Το τι συμβαίνει σε μια αρκετά γενικότερη περίπτωση μας το λέει το επόμενο θεώρημα που αποτελεί και το βασικό αποτέλεσμα αυτού του εδάφιου.

Θεώρημα 4.2

Αν η 2 π -περιοδική συνάρτηση $f(x)$ ανήκει στην κλάση $C^1_{\tau}(\mathbb{R})$, τότε

$$(4.53\alpha) \quad \lim_{m \rightarrow \infty} F_m(x) = \frac{1}{2}[f(x-) + f(x+)].$$

Με άλλα λόγια,

$$(4.53\beta) \quad \boxed{\frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx) = \frac{1}{2}[f(x-) + f(x+)]}$$

Αυτό σημαίνει ότι

(i) Σε κάθε σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ στο οποίο η $f(x)$ παρουσιάζει αλματική ασυνέχεια, η αντίστοιχη σειρά Fourier συγκλίνει στον μέσο όρο $(1/2)[f(x_0-) + f(x_0+)]$ των αριθμών στους οποίους τείνει η $f(x)$ καθώς πλησιάζουμε το σημείο ασυνέχειας.

(ii) Σε κάθε σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ στο οποίο η $f(x)$ είναι συνεχής, η αντίστοιχη σειρά Fourier συγκλίνει στον αριθμό $f(x_0)$.

Απόδειξη. Στην προκειμένη περίπτωση, οι προϋποθέσεις του Λήμ. 4.1 ικανοποιούνται. Σύμφωνα λοιπόν με την (4.39), $F_m(x) = \int_{-\pi}^{\pi} G_m(y) f(x+y) dy$. Από την άλλη, οι ιδιότητες του πυρήνα Dirichlet -αρτιότητα και (4.49)- μας επιτρέπουν να γράψουμε

$$(4.54) \quad \frac{1}{2}[f(x-) + f(x+)] = f(x-) \int_{-\pi}^0 G_m(y) dy + f(x+) \int_0^{\pi} G_m(y) dy.$$

Συνεπώς,

$$(4.55) \quad \begin{aligned} F_m(x) - \frac{1}{2}[f(x-) + f(x+)] &= \int_{-\pi}^{\pi} G_m(y) f(x+y) dy - \frac{1}{2}[f(x-) + f(x+)] \\ &= \int_{-\pi}^0 G_m(y)[f(x+y) - f(x-)] dy + \int_0^{\pi} G_m(y)[f(x+y) - f(x+)] dy \end{aligned}$$

Η απόδειξη του θεωρήματος είναι άμεση απόρροια του γεγονότος ότι η τελευταία έκφραση μηδενίζεται καθώς το $m \rightarrow \infty$.

Πραγματικά, από τον συνδυασμό των (4.46) και (4.47) αμέσως έπεται ότι

$$(4.56) \quad G_m(y) := \frac{1}{2\pi} \frac{\sin[(m+1/2)y]}{\sin(y/2)} = \frac{1}{2\pi} \frac{e^{i(m+1)y} - e^{-im y}}{e^{iy} - 1}.$$

Άρα,

$$(4.57) \quad \int_{-\pi}^0 G_m(y)[f(x+y) - f(x-)] dy + \int_0^{\pi} G_m(y)[f(x+y) - f(x+)] dy$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 [e^{i(m+1)y} - e^{-imy}] \frac{f(x+y) - f(x-)}{e^{iy} - 1} dy + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} [e^{i(m+1)y} - e^{-imy}] \frac{f(x+y) - f(x+)}{e^{iy} - 1} dy.$$

Τώρα, οι συναρτήσεις $f(x+y) - f(x\pm)$ είναι κλάσης $C^1_{\tau}(\mathbb{R})$ όπως η $f(y)$, αλλά μηδενίζονται υποχρεωτικά καθώς το y πλησιάζει το μηδέν. Το ίδιο συμβαίνει και με τον παρονομαστή των $[f(x+y) - f(x\pm)] / (e^{iy} - 1)$. Όμως, με τον κανόνα του l'Hospital εύκολα διαπιστώνουμε ότι

$$(4.58\alpha) \quad \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{f(x+y) - f(x-)}{e^{iy} - 1} = \lim_{y \rightarrow 0^-} \frac{f'(x+y)}{i e^{iy}} = \frac{f'(x-)}{i},$$

$$(4.58\beta) \quad \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f(x+y) - f(x+)}{e^{iy} - 1} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f'(x+y)}{i e^{iy}} = \frac{f'(x+)}{i}.$$

Άρα, η συνάρτηση

$$(4.59) \quad g^{(x)}(y) := \begin{cases} \frac{f(x+y) - f(x-)}{e^{iy} - 1}, & -\pi < y < 0 \\ \frac{f(x+y) - f(x+)}{e^{iy} - 1}, & 0 < y < \pi \end{cases}$$

είναι τμηματικά συνεχής στο διάστημα $[-\pi, \pi]$. Αυτή η παρατήρηση μας επιτρέπει να γράψουμε τον συνδυασμό των (4.55) και (4.57) στη μορφή

$$(4.60) \quad F_m(x) - \frac{1}{2}[f(x-) + f(x+)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [e^{i(m+1)y} - e^{-imy}] g^{(x)}(y) dy.$$

Ισοδύναμα,

$$(4.61) \quad F_m(x) - \frac{1}{2}[f(x-) + f(x+)] = C_{-(m+1)} - C_m$$

όπου C_m οι συντελεστές Fourier της $g^{(x)}(y)$. Αλλά, από το Θεώρ. 4.1 γνωρίζουμε ότι $C_m \rightarrow 0$, καθώς το $m \rightarrow \infty$. Άρα η (4.53α) αληθεύει. ■

Το προηγούμενο θεώρημα αναφέρεται στην σημειακή ή τοπική συμπεριφορά της σειράς Fourier μιας περιοδικής δυνάμτησης που ανήκει στην κλάση $C^1_{\tau}(\mathbb{R})$. Το επόμενο αναφέρεται στην ολική συμπεριφορά των σειρών Fourier αυτών των συναρτήσεων. Ωστόσο, η ισχύς αυτού θεωρήματος περιορίζεται σ' ένα γνήσιο υποσύνολο των συναρτήσεων $C^1_{\tau}(\mathbb{R})$, που δεν παύει να είναι πολύ σημαντικό.

Θεώρημα 4.3 (Dirichlet)

Η σειρά Fourier μιας συνεχούς, κλάσης $C^1_{\tau}(\mathbb{R})$, 2π -περιοδικής συνάρτησης $f(x)$ συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα στην $f(x)$.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι, στο διάστημα $[-\pi, \pi]$, η $f'(x)$ παρουσιάζει αλματικές ασυνέχειες στα m σημεία x_j , όπου

$$(4.62) \quad -\pi = x_0 < x_1 < \dots < x_m < x_{m+1} = \pi$$

Τότε

$$(4.63) \quad \begin{aligned} A_n &:= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos n x f(x) d x = \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^m \int_{x_j}^{x_{j+1}} \cos n x f(x) d x \\ &= \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^m \left[\frac{1}{n} \sin n x f(x) \Big|_{x_j}^{x_{j+1}} - \frac{1}{n} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \sin n x f'(x) d x \right] \end{aligned}$$

Αφού η $f(x)$ είναι συνεχής, οι όροι $n^{-1} \sin n x f(x) \Big|_{x_j}^{x_{j+1}}$ αλληλοαναιρούνται. Συνεπώς,

$$(4.64) \quad A_n = -\frac{1}{n\pi} \sum_{j=0}^m \int_{x_j}^{x_{j+1}} \sin n x f'(x) d x,$$

Σύμφωνα με την υπόθεση, η $f'(x)$ είναι τμηματικά συνεχής. Άρα, το άθροισμα των ολοκληρωμάτων $\int_{x_j}^{x_{j+1}} \sin n x f'(x) d x$ είναι ίσο με το ολοκλήρωμα $\int_{-\pi}^{\pi} \sin n x f'(x) d x$. Δηλαδή,

$$(4.65) \quad A_n = -\frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin n x f'(x) d x \equiv -\frac{1}{n} B'_n$$

όπου με B'_n συμβολίζουμε τους συντελεστές Fourier ημιτόνων της $f'(x)$.

Με ανάλογο τρόπο, βρίσκουμε ότι

$$(4.66) \quad B_n = \frac{1}{n} A'_n.$$

Έτσι, λοιπόν,

$$(4.67\alpha) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |A_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |B'_n| = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} 2 n^{-1} |B'_n|$$

$$(4.67\beta) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |B_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |A'_n| = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} 2 n^{-1} |A'_n|$$

Αλλά από την $(a-b)^2 \geq 0$ αμέσως έπεται ότι $2 a b \leq a^2 + b^2$. Άρα,

$$(4.68) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |A_n| \leq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (n^{-2} + |B'_n|^2), \quad \sum_{n=1}^{\infty} |B_n| \leq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (n^{-2} + |A'_n|^2).$$

Όμως, είναι γνωστό ότι $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} < \infty$ κι από την ανισότητα Bessel έπεται ότι $\sum_{n=1}^{\infty} |A'_n|^2 < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} |B'_n|^2 < \infty$. Συνεπώς, οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|$ και $\sum_{n=1}^{\infty} |B_n|$ συγκλίνουν.

Τέλος, $|A_n \cos n x| \leq |A_n|$ και $|B_n \sin n x| \leq |B_n|$. Άρα, σύμφωνα με το κριτήριο του Weierstrass, οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n x$ και $\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n x$ συγκλίνουν απόλυτα και ομοιόμορφα. ■

Τα θεωρήματα που αποδείξαμε ως τώρα δίνουν μian αρκετά σαφή εικόνα των συνθηκών που είναι ικανές (αλλ' όχι αναγκαίες) για να συγκλίνει η σειρά Fourier μιας 2π -περιοδικής συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ στην ίδια την f , σημειακά ή ομοιόμορφα. Άρα, για να καλύψουμε τις ανάγκες της παραπέρα συζήτησής μας, χρειαζόμαστε δύο μόνο πράγματα. Το πρώτο είναι να συνδέσουμε τα μέχρι στιγμής αποτελέσματα με τις σειρές Fourier ημιτόνων και συνημιτόνων. Το δεύτερο έγκειται στο εκφράσουμε τα παραπάνω αποτελέσματα με τρόπο ώστε να ισχύουν για συναρτήσεις ορισμένες σε τυχαίο φραγμένο διάστημα της πραγματικής ευθείας.

Όσο αφορά τη σύνδεση των σειρών Fourier με τις ειδικότερες περιπτώσεις των σειρών Fourier ημιτόνων και συνημιτόνων, η πορεία από τις πρώτες στις δεύτερες είναι απρόσκοπτη: Κάθε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ γράφεται σαν άθροισμα μιας άρτιας με μια περιττή. Συγκεκριμένα,

$$(4.69\alpha) \quad f(x) = f_e(x) + f_o(x),$$

όπου

$$(4.69\beta) \quad f_e(x) := \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)], \quad f_o(x) := \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)].$$

Προφανώς, $f_e(-x) = f_e(x)$, ενώ $f_o(-x) = -f_o(x)$.

Επειδή λοιπόν οι συναρτήσεις $\cos nx$ είναι άρτιες και οι $\sin nx$ περιττές,

$$(4.70\alpha) \quad A_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \cos nx f_e(x) dx \equiv a_n$$

$$(4.70\beta) \quad B_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx f(x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin nx f_o(x) dx \equiv b_n.$$

Με άλλα λόγια, οι συντελεστές Fourier A_n μιας 2π -περιοδικής συνάρτησης $f(x)$ ταυτίζονται με τους συντελεστές Fourier συνημιτόνων a_n του άρτιου μέρους της. Με τη σειρά τους, οι συντελεστές Fourier B_n της $f(x)$ ταυτίζονται με τους τους συντελεστές Fourier ημιτόνων b_n του περιττού μέρους της.

Συνακόλουθα,

$$(4.71\alpha) \quad A_n = a_n, \quad B_n = 0,$$

όταν η 2π -περιοδική συνάρτηση $f(x)$ είναι άρτια και

$$(4.72\beta) \quad A_n = 0, \quad B_n = b_n,$$

αν η $f(x)$ είναι περιττή.

Ας έρθουμε τώρα στην περίπτωση που η συνάρτηση $f(x)$ που έχει δοθεί αρχικά έχει ως πεδίο ορισμού το διάστημα $[-\pi, \pi]$. Για να βρούμε τη σχέση της $f(x)$ με την αντίστοιχη σειρά Fourier, θα πρέπει πρώτα να επεκτείνουμε τη δοσμένη $f(x)$ σε όλη την πραγματική ευθεία. Δηλαδή, να ορίσουμε μια 2π -περιοδική συνάρτηση $F(x)$ που έχει ως πεδίο ορισμού το σύνολο \mathbb{R} και ταυτίζεται με την $f(x)$ στο διάστημα $[-\pi, \pi]$. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, αν η $f(x)$ είναι τέτοια που $f(-\pi) = f(\pi)$, τότε η επέκταση κατασκευάζεται πολύ εύκολα. Το μόνο που χρειάζεται να κάνουμε είναι να επιβάλουμε τους περιορισμούς $F(x + 2\kappa\pi) = F(x)$, για κάθε ακέραιο κ και τυχαίο x , και $F(x) = f(x)$, όταν το $x \in [-\pi, \pi]$.

Στην περίπτωση που η αρχικά δοσμένη $f(x)$ δεν παίρνει την ίδια τιμή στα άκρα του διαστήματος $[-\pi, \pi]$, τότε το μόνο που μπορούμε να κάνουμε είναι να επιλέξουμε μια συνάρτηση $\tilde{f}(x)$ που ταυτίζεται με την $f(x)$ σ' ένα από τα διαστήματα $(-\pi, \pi]$, $[-\pi, \pi)$ και να επεκτείνουμε την $\tilde{f}(x)$ όπως προηγούμενα. Η συμπεριφορά των σειρών Fourier των 2π -περιοδικών συναρτήσεων $F(x)$ και $\tilde{F}(x)$, αντίστοιχα, την οποία προβλέπουν τα θεωρήματα που ήδη αποδείξαμε καθορίζει και τη σχέση αυτών των σειρών με την $f(x)$.

Με ανάλογο τρόπο αντιμετωπίζεται και το πρόβλημα της συσχέτισης μιας συνάρτησης $f(x)$ που έχει ως πεδίο ορισμού το διάστημα $[0, \pi]$ με τις αντίστοιχες σειρές Fourier ημιτόνων και συνημιτόνων. Αρχικά, επεκτείνουμε τη δοσμένη $f(x)$ στο διάστημα $[-\pi, \pi]$ και στη συνέχεια ορίζουμε την 2π -περιοδική συνάρτηση $F(x)$, με τον τρόπο που αναλύσαμε παραπάνω. Ωστόσο, στην προκειμένη περίπτωση, η αρχική επέκταση, $f(x) \rightarrow \tilde{f}(x)$, $x \in [-\pi, \pi]$, συνήθως επιλέγεται με τρόπο ώστε η $\tilde{f}(x)$ να είναι είτε άρτια ή περιττή. Το ποια από τις δύο επιλογές θα προτιμήσουμε εξαρτάται από το συγκεκριμένο πρόβλημα στο οποίο θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε τις σειρές Fourier.

Έτσι ή αλλιώς, η άρτια επέκταση της $f(x)$ γίνεται αυτόματα θέτοντας $\tilde{f}(x) = f(-x)$, για $x \in [-\pi, 0)$, και $\tilde{f}(x) = f(x)$, για $x \in [0, \pi]$. Αντίθετα, όταν θέλουμε η $\tilde{f}(x)$ να είναι περιττή στο διάστημα $[-\pi, \pi]$, θα πρέπει να είμαστε λιγάκι πιο προσεκτικοί. Γιατί, η απαίτηση να είναι η $\tilde{f}(x)$ περιττή επιβάλλει τον περιορισμό $\tilde{f}(0) = 0$. Όμως, η αρχικά δοσμένη $f(x)$ μπορεί να μη μηδενίζεται στο $x = 0$. Σε κάθε περίπτωση, η περιττή επέκταση γίνεται θέτοντας $\tilde{f}(x) = -f(-x)$, για $x \in [-\pi, 0)$, και $\tilde{f}(x) = f(x)$, για $x \in (0, \pi]$, κρατώντας υπόψη ότι οι $\tilde{f}(x)$ και $f(x)$ μπορεί να μη συμφωνούν στο $x = 0$.

Αυτές οι παρατηρήσεις, σε συνδυασμό με τα θεωρήματα που αποδείξαμε πιο πάνω, αρκούν για να έχουμε μια πλήρη εικόνα της σχέσης ανάμεσα σε όλα τα είδη των σειρών Fourier μιας 2π -περιοδικής συνάρτησης. Μένει λοιπόν το να γενικεύσουμε τους τύπους που έχουμε ήδη δώσει, με τρόπο ώστε να ισχύουν για κάθε περιοδική συνάρτηση και όχι μόνο γι' αυτές που έχουν περίοδο 2π .

Για το σκοπό αυτό, ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση $f(x)$ που μας ενδιαφέρει έχει ως πεδίο ορισμού το διάστημα $[a, b]$. Τότε, με την μετάθεση και αλλαγή κλίμακας (4.3) οδηγούμαστε στη συνάρτηση $\tilde{f}(\tilde{x})$ που ορίζεται στην (4.4) με πεδίο ορισμού το διάστημα $-\pi \leq \tilde{x} \leq \pi$. Για την τελευταία, ισχύουν οι τύποι που δώσαμε παραπάνω. Αντιστρέφοντας λοιπόν αυτή τη διαδικασία, καταλήγουμε στους τύπους που ακολουθούν και στους οποίους

$$(4.72) \quad T := b - a, \quad M := \frac{1}{2}(a + b).$$

Σειρά Fourier της $f(x)$:

$$(4.73\alpha) \quad F^f(x) := \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos \frac{2\pi n}{T} (x - M) + B_n \sin \frac{2\pi n}{T} (x - M) \right],$$

όπου

$$(4.73\beta) \quad A_n := \frac{2}{T} \int_a^b f(x) \cos \frac{2\pi n}{T} (x - M) dx, \quad B_n := \frac{2}{T} \int_a^b f(x) \sin \frac{2\pi n}{T} (x - M) dx.$$

Σειρά Fourier συνημιτόνων της $f(x)$

$$(4.74\alpha) \quad F^c(x) := \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n}{T} (x - a),$$

όπου

$$(4.74\beta) \quad a_n := \frac{2}{T} \int_a^b f(x) \cos \frac{\pi n}{T} (x - a) dx.$$

Σειρά Fourier ημιτόνων της $f(x)$ θα ονομάζουμε την έκφραση

$$(4.75\alpha) \quad F^s(x) := \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n}{T} (x - a),$$

όπου

$$(4.75\beta) \quad b_n := \frac{2}{T} \int_a^b f(x) \sin \frac{\pi n}{T} (x - a) dx.$$

Ασκήσεις

4.1 Να κατασκευαστεί η 2π -περιοδική επέκταση $F(x)$, $-\infty < x < \infty$, των παρακάτω συναρτήσεων. Σε κάθε περίπτωση, να κατασκευαστεί το γράφημα της $F(x)$ να προσδιοριστεί η κλάση της.

- (i) $f(x) := 1 - |x|$, $-\pi \leq x \leq \pi$.
- (ii) $f(x) := x(\pi - x)$, $-\pi \leq x \leq \pi$.
- (iii) $f(x) := x^2 - \pi^2$, $-\pi \leq x \leq \pi$.
- (iv) $f(x) := (x^2 - \pi^2)^2$, $-\pi \leq x \leq \pi$.
- (v) $f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi \leq x < 0 \\ x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$
- (vi) $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x < 0 \\ 1, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$
- (vii) $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0 \\ \sin x, & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$

4.2 Να υπολογιστούν όλοι οι συντελεστές Fourier καθεμιάς από τις συναρτήσεις $f(x)$ της προηγούμενης άσκησης.

4.3 α) Υποθέστε ότι η πρώτη παράγωγος της 2π -περιοδικής συνάρτησης $f(x)$ είναι συνεχής και η δεύτερη τμηματικά συνεχής. Δείχτε ότι

$$A_n = -\frac{1}{n^2} A_n'', \quad B_n = -\frac{1}{n^2} B_n'', \quad C_n = -\frac{1}{n^2} C_n'', \quad n \neq 0,$$

όπου με A_n'' , B_n'' και C_n'' συμβολίζονται οι συντελεστές Fourier της δεύτερης παραγώγου της $f(x)$.

β) Δείχτε ότι, αν η $f \in C^2(\mathbb{R})$, τότε η αντίστοιχη σειρά Fourier συγκλίνει στην $f(x)$ σε κάθε σημείο του διαστήματος $[-\pi, \pi]$.

4.4 Υποθέστε ότι η 2π -περιοδική συνάρτηση $f(x)$ ανήκει στην κλάση $C^{k-1}(\mathbb{R}) \cap C^k_{\tau}(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}$, δηλαδή ότι έχει συνεχείς παραγώγους μέχρι και τάξης k και τμηματικά συνεχή παράγωγο τάξης

k. Δείχτε ότι

(i) Οι σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} |n^k A_n|^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |n^k B_n|^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |n^k C_n|^2,$$

συγκλίνουν και

(ii) $n^k A_n \rightarrow 0$, $n^k B_n \rightarrow 0$, $n^k C_n \rightarrow 0$, καθώς το $n \rightarrow \infty$.

4.5 Να δειχτεί ότι ο μετασχηματισμός (4.3) οδηγεί στους τύπους (4.73)-(4.75).

5. Η κυματική εξίσωση σε μία χωρική διάσταση

Έχει ενδιαφέρον να δούμε το αποτέλεσμα της εφαρμογής της μεθόδου του διαχωρισμού των μεταβλητών σ' ένα ΠΑΣΤ (πρόβλημα αρχικών-συνοριακών τιμών), το οποίο αναλύσαμε με διαφορετικό τρόπο στο προηγούμενο κεφάλαιο. Εννοούμε αυτό που συνδέεται με τις μικρού πλάτους ταλαντώσεις μιας χορδής μήκους a .

Συγκεκριμένα, ας θεωρήσουμε ότι μας έχει δοθεί προς λύση το πρόβλημα που απαριθμείται από την κυματική εξίσωση

$$(5.1\alpha) \quad u_{xx} - u_{tt} = 0, \quad 0 < x < a, \quad t > 0,$$

και τις συμπληρωματικές συνθήκες

$$(5.1\beta) \quad u(0, t) = 0, \quad u(a, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$(5.1\gamma) \quad u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq a.$$

Θα υποθέσουμε ότι οι (δοσμένες) συναρτήσεις $f, g : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχείς και μηδενίζονται στα άκρα του διαστήματος $[0, a]$. Με τη δεύτερη ιδιότητα εξασφαλίζεται η συμβατότητα των αρχικών συνθηκών με τις συνοριακές στα χωροχρονικά σημεία $(x, t) = (0, 0)$ και $(x, t) = (0, a)$.

Σύμφωνα με το γενικό πλαίσιο που ορίσαμε στο πρώτο εδάφιο, ξεκινάμε με την υπόθεση (ansatz) ότι

$$(5.2) \quad u(x, t) = X(x) T(t).$$

Η αντικατάσταση αυτής της έκφρασης στην (5.1α) δίνει το εξής αποτέλεσμα:

$$(5.3) \quad X''(x) T(t) - X(x) T''(t) = 0.$$

Συνεπώς, σε κάθε ανοιχτό διάστημα του επίπεδου $x t$ στο οποίο η $u(x, t) = X(x) T(t)$ δε μηδενίζεται, ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$(5.4) \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)}.$$

Αλλά, αυτή η ισότητα μπορεί να ισχύει σε ανοιχτά διαστήματα των μεταβλητών x και t μόνο αν

$$(5.5) \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda = \text{σταθ}.$$

Με άλλα λόγια, η κυματική εξίσωση έχει λύσεις της μορφής $u(x, t) = X(x) T(t)$ μόνο αν υπάρχουν συναρτήσεις $X(x), T(t)$ που αποτελούν λύσεις του συστήματος

$$(5.6) \quad X''(x) = \lambda X(x), \quad T''(t) = \lambda T(t).$$

Από τις συνοριακές συνθήκες (5.1β) αμέσως έπεται ότι η συνάρτηση $X(x)$, εκτός του να είναι λύση της ΣΔΕ $X''(x) = \lambda X(x)$, οφείλει να σέβεται και τις συνθήκες $X(0) = X(a) = 0$. Όπως αναλυτικά εξηγήσαμε στα πρώτα εδάφια αυτού του κεφαλαίου, κάτι τέτοιο είναι δυνατό μόνο για αρνητικές τιμές της παραμέτρου λ .

Συγκεκριμένα, η λ θα πρέπει να είναι ίση με έναν από τους αριθμούς $\lambda_n := -[n(\pi/a)]^2$, όπου n μη μηδενικός ακέραιος. Από τη μεριά της, η συνάρτηση $X(x)$ θα πρέπει είναι της μορφής

$$(5.7) \quad X_n(x) = c_n \sin k_n x, \quad k_n := n \frac{\pi}{a}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Με τη σειρά της, η ΣΔΕ $T''(t) = \lambda T(t)$ γίνεται $T''(t) = -k_n^2 T(t)$, της οποίας οι λύσεις δίνονται από τις συναρτήσεις

$$(5.8) \quad T_n(t) = a_n \cos k_n t + b_n \sin k_n t.$$

Συνοψίζοντας, μπορούμε να πούμε ότι,

• Η κυματική εξίσωση $u_{xx} - u_{tt} = 0$ επιδέχεται λύσεις με χωρισμένες μεταβλητές. Από αυτές, οι απλούστερες συμβατές με τις συνοριακές συνθήκες $u(0, t) = 0 = u(a, t)$, $t \geq 0$, είναι της μορφής

$$(5.9) \quad X_n(x) T_n(t) := (\sin k_n x) (a_n \cos k_n t + b_n \sin k_n t), \quad n \in \mathbb{N}.$$

• Το ίδιο ισχύει και οποιαδήποτε επαλληλία τέτοιων λύσεων. Δηλαδή, κάθε συνάρτηση της μορφής

$$(5.10) \quad u_m(x, t) := \sum_{n=1}^m (a_n \cos k_n t + b_n \sin k_n t) \sin k_n x,$$

εξακολουθεί να δίνει λύση της ΜΔΕ $u_{xx} - u_{tt} = 0$ και να πληροί τις συνοριακές συνθήκες $u(0, t) = 0 = u(a, t)$, $t \geq 0$.

Οι αρχικές τιμές της συνάρτησης $u_m(x, t)$ και της παραγώγου της ως προς t δίνονται από τις εκφράσεις

$$(5.11) \quad u_m(x, 0) = \sum_{n=1}^m a_n \sin k_n x$$

και

$$(5.12) \quad \partial_t u_m(x, 0) = \sum_{n=1}^m k_n b_n \sin k_n x,$$

αντίστοιχα. Άρα, για τυχαίες $f(x)$, $g(x)$, κανένα μέλος της ακολουθίας $\{u_m(x, y)\}$ δεν μπορεί να ικανοποιήσει τις αρχικές συνθήκες $u(x, 0) = f(x)$, $u_t(x, 0) = g(x)$, $0 \leq x \leq a$. Κάτι μπορεί να συμβεί μόνο στο όριο $m \rightarrow \infty$. Με άλλα λόγια, ελπίζουμε ότι οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin k_n x$ και $\sum_{n=1}^{\infty} k_n b_n \sin k_n x$ συγκλίνουν στις συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$, αντίστοιχα.

Όμως, από την αρχή έχουμε υποθέσει ότι οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ είναι συνεχείς και μηδενίζονται στα άκρα του διαστήματος $[0, a]$. Άρα, με βάση το Θεώρ. 4.4, μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι οι παραπάνω σειρές θα συγκλίνουν στις $f(x)$ και $g(x)$, αντίστοιχα, σε κάθε σημείο του διαστήματος $[0, a]$. Δηλαδή,

$$(5.13) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin k_n x, \quad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n b_n \sin k_n x.$$

Με την προϋπόθεση, βέβαια, ότι οι συντελεστές a_n και $k_n b_n$ έχουν κατασκευαστεί με βάση τους τύπους

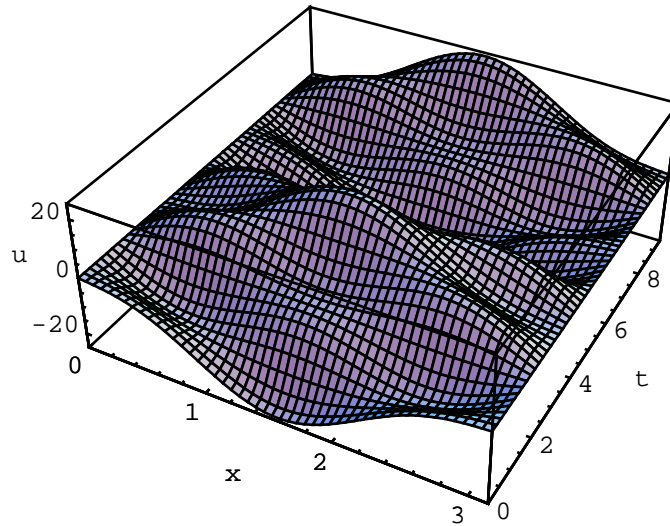
$$(5.14) \quad a_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin k_n x dx, \quad k_n b_n = \frac{2}{a} \int_0^a g(x) \sin k_n x dx.$$

Τώρα, αν οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$ είναι αρκετά λείες, τότε οι ακολουθίες $|a_n|$ και $|b_n|$ συγκλίνουν τόσο γρήγορα που, τόσο η σειρά

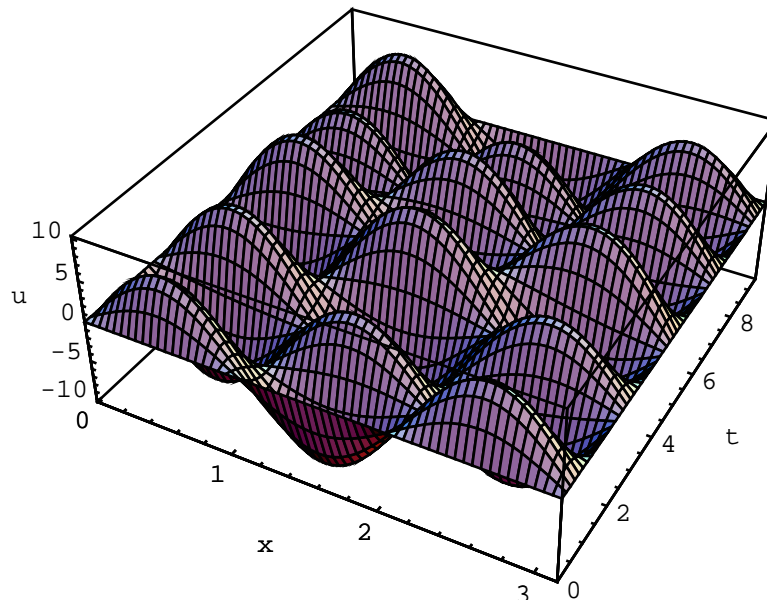
$$(5.15) \quad \boxed{u(x, t) := \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos k_n t + b_n \sin k_n t) \sin k_n x}$$

όσο κι εκείνες που προκύπτουν παραγωγίζοντας την (5.15) όρο προς όρο, συγκλίνουν ομοιόμορφα. Τότε, η συνάρτηση $u(x, t)$ αποτελεί λύση της κυματικής εξίσωσης $u_{xx} - u_{tt} = 0$ στην ανοιχτή λωρίδα $\Omega := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < a, t > 0\}$ και σέβεται τις συνθήκες (5.1β) και (5.1γ) στο σύνορο $\partial\Omega$ αυτής της λωρίδας. Ικανές συνθήκες για να συμβαίνει κάτι τέτοιο είναι η συνάρτηση $f \in C^4([0, a])$, με $f(0) = f(a) = f''(0) = f''(a)$, και η $g \in C^3([0, a])$, με $g(0) = g(a)$.

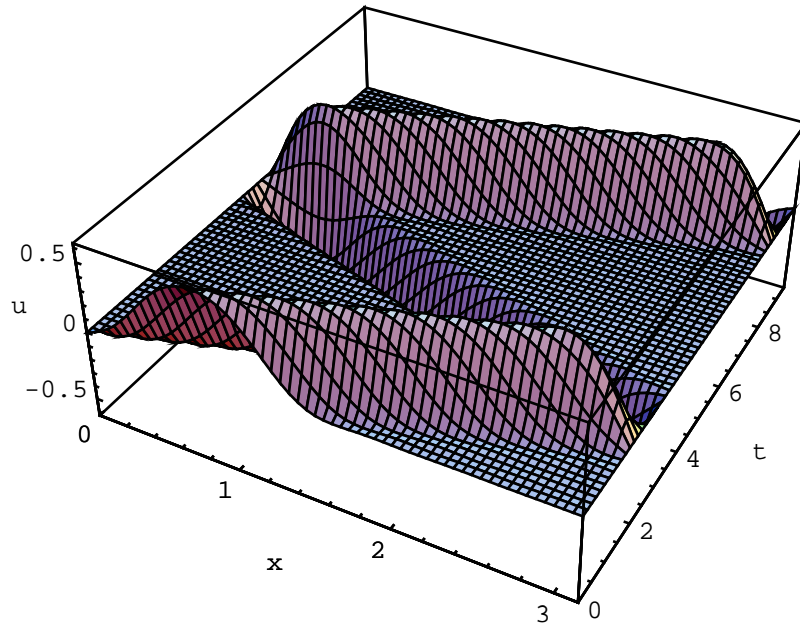
Στα επόμενα τρία σχήματα δείχνουμε το γράφημα ενός μερικού αθροίσματος της σειράς (5.15) για τρεις αντιπροσωπευτικές επιλογές των συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$.



Σχ. 5.1. Το γράφημα του 3ου μερικού αθροίσματος της σειράς (5.15), όταν $f(x) = x^3(x-a)^3$, $g(x) = 0$, $a = \pi$.



Σχ. 5.2. Το γράφημα του 3ου μερικού αθροίσματος της σειράς (5.15), όταν $f(x) = 0$, $g(x) = x^3(a-x)^2 \sin 3x$, $a = \pi$.



Σχ. 5.3. Το γράφημα του 12ου μερικού αθροίσματος της σειράς (5.15), όταν $f(x) = (x - a/2)^2 x^2$, $0 \leq x \leq a/2$, $f(x) = 0$, $a/2 \leq x \leq a$, $g(x) = -f'(x)$, $a = \pi$.

Ασκήσεις

5.1 Να υπολογιστούν οι συντελεστές της σειράς Fourier (5.15) για κάθε μια από τις ακόλουθες επιλογές. Σε κάθε περίπτωση να κατασκευαστεί το γράφημα του 5ου μερικού αθροίσματος της αντίστοιχης σειράς.

(i) $f(x) := x^2 - a^2$, $g(x) := 0$, $a = \pi$.

(ii) $f(x) := 0$, $g(x) := x^2 - a^2$, $a = \pi$.

(iii) $f(x) := 0$, $g(x) := (x^2 - a^2)^2$, $a = \pi$. $x^3(a-x)^2 \sin 3x$

(iv) $f(x) := 0$, $g(x) := x^2(a-x)^2 \sin 3x$, $a = \pi$.

(v) $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < a/2 \\ (x - a/2)^2 (a - x)^2, & a/2 \leq x \leq a \end{cases} \quad g(x) = -f'(x), \quad a = \pi.$

(vi) $f(x) = \begin{cases} x^2(x - a/2)^2, & 0 \leq x < a/2 \\ 0, & a/2 \leq x \leq a \end{cases} \quad g(x) = -f'(x), \quad a = 2\pi.$

5.2 Υποθέστε ότι η $f \in C^4([0, a])$, η $g \in C^3([0, a])$ και $f(0) = f(a) = f''(0) = f''(a)$, $g(0) = g(a)$. Δείχτε ότι η σειρά Fourier (5.15) συγκλίνει ομοιόμορφα στην ανοιχτή λωρίδα $\Omega := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < a, t > 0\}$ και αποτελεί την μοναδική λύση του αντίστοιχου ΠΑΣΤ (5.1).

5.3 Να λυθεί το ΠΑΣΤ

$$u_{xx} - u_{tt} = 0, \quad 0 < x < a, \quad t > 0,$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad u(a, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq a.$$

Εξειδικεύστε τη λύση που βρήκατε στην περίπτωση όπου $f(x) = x^2(x - a)$, $g(x) = 0$, $a = \pi$.

5.4 Να λυθεί το ΠΑΣΤ

$$u_{xx} - u_{tt} = 0, \quad 0 < x < a, \quad t > 0,$$

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(a, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq a.$$

Εξειδικεύστε τη λύση που βρήκατε στην περίπτωση όπου $f(x) = 0$, $g(x) = x^2(x - a)$, $a = \pi$.

5.5 Να λυθεί το ΠΑΣΤ

$$u_{xx} - u_{tt} = 0, \quad 0 < x < a, \quad t > 0,$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(a, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq a.$$

Εξειδικεύστε τη λύση που βρήκατε στην περίπτωση όπου $f(x) = 0$, $g(x) = x^2(x - a)^2$, $a = \pi$.

6. Προβλήματα συνοριακών τιμών για την εξίσωση Laplace στον \mathbb{R}^2

Το παρόν εδάφιο είναι αφιερωμένο στην εφαρμογή της μεθόδου του διαχωρισμού των μεταβλητών στην επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών για την εξίσωση Laplace

$$(6.1) \quad u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

σε μια ανοιχτή και συνεκτική περιοχή (χωρίο) Ω του Ευκλείδειου επίπεδου \mathbb{R}^2 .

Σε ότι ακολουθεί, υποθέτουμε πως το σύνορο $\partial\Omega$ της περιοχής Ω είναι ομαλό. Υπενθυμίζουμε ότι αυτή η υπόθεση σημαίνει το εξής: Το σύνολο $\partial\Omega$ αποτελείται από ένα πεπερασμένο πλήθος ομαλών παραμετρικών καμπυλών, που συναντούν η μια την άλλη υπό μη μηδενική γωνία. Κάτι τέτοιο ισχύει γ.π. όταν η περιοχή Ω είναι το εσωτερικό ενός τριγώνου, ενός ορθογώνιου παραλληλόγραμμου, ενός κυκλικού δακτύλιου, ή μιας έλλειψης. Ως παραδείγματα μιας μη φραγμένης περιοχής αυτού του είδους, μπορούμε να θεωρήσουμε το τμήμα $y > 0$ του επίπεδου x, y , ένα τεταρτημόριο του ίδιου επίπεδου, το διάστημα ανάμεσα σε δυο παράλληλες ευθείες, μιαν άπειρη λωρίδα σαν την $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < a, y > 0\}$, ή το εξωτερικό ενός κύκλου.

Στα προβλήματα που θα αναλύσουμε, η συνοριακή συνθήκη θα είναι της μορφής

$$(6.2) \quad \alpha(x, y) u(x, y) + \beta(x, y) \partial_n u(x, y) = f(x, y), \text{ για } (x, y) \in \partial\Omega,$$

σε όλα τα τμήματα του συνόρου. Στην (6.2), με $\partial_n u$ συμβολίζεται η παράγωγος της u στην κατεύθυνση του διανύσματος \mathbf{n} που είναι κάθετο στην καμπύλη $\partial\Omega$ και βλέπει προς το εξωτερικό της περιοχής Ω . Οι συναρτήσεις α , β και f έχουν ως πεδίο ορισμού το σύνολο $\partial\Omega$ και θεωρούνται γνωστές (δοσμένες). Ανάλογα με το αν (i) $\alpha \equiv 0$ και $\beta \equiv 0$, (ii) $\alpha \equiv 0$ και $\beta \neq 0$, ή (iii) $\alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$, η (6.2) αναφέρεται ως **συνοριακή συνθήκη τύπου Dirichlet, Neumann** και **Robin**, αντίστοιχα.

Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο

Θα ξεκινήσουμε τη μελέτη μας με το πρόβλημα συνοριακών τιμών που απαρτίζεται από την εξίσωση Laplace

$$(6.3a) \quad u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b,$$

και τις συνθήκες Dirichlet

$$(6.3\beta) \quad u(x, 0) = 0, \quad u(x, b) = f(x), \quad 0 \leq x \leq a,$$

$$(6.3\gamma) \quad u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq b.$$

Υποθέτοντας ότι η (6.3a) επιδέχεται λύσεις της μορφής $u(x, y) = X(x)Y(y)$, καταλήγουμε αμέσως στο ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$(6.4) \quad X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0.$$

Για λύσεις που δεν μηδενίζονται ταυτοτικά σε κάποιο ανοιχτό διάστημα του επίπεδου x, y , η (6.4) είναι ισοδύναμη με την $X''(x)/X(x) = -Y''(y)/Y(y)$. Συνεπώς,

$$(6.5) \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda = \text{σταθ.}$$

Αυτό σημαίνει ότι οι λύσεις της μορφής $u(x, y) = X(x) Y(y)$ καθορίζονται από το σύστημα

$$(6.6) \quad X''(x) = \lambda X(x), \quad Y''(y) = -\lambda Y(y).$$

Τώρα, από τις συνοριακές συνθήκες (6.3γ) αμέσως έπεται ότι, από τις λύσεις της ΣΔΕ $X''(x) = \lambda X(x)$, θα πρέπει να επιλέξουμε εκείνες για τις οποίες

$$(6.7) \quad X(0) = X(a) = 0.$$

Τέτοιου είδους (μη τετριμμένες) λύσεις υπάρχουν μόνο για αρνητικές τιμές της παραμέτρου λ . Ακριβέστερα, λύσεις της $X''(x) = \lambda X(x)$, συμβατές με τις συνθήκες (6.7), υπάρχουν μόνο για $\lambda = \lambda_n := -(n\pi/a)^2$, όπου $n = \text{μη μηδενικός ακέραιος}$, και είναι της μορφής

$$(6.8) \quad X_n(x) := c_n \sin(k_n x), \quad k_n := n \frac{\pi}{a}.$$

Ο περιορισμός $\lambda \in \{-k_n^2\}$ μετατρέπει την ΣΔΕ για τη συνάρτηση $Y(y)$ στην $Y''(y) = k_n^2 Y(y)$. Άρα, η συνάρτηση $Y(y)$ είναι υποχρεωτικά της μορφής

$$(6.9) \quad Y_n(y) := a_n e^{k_n y} + b_n e^{-k_n y}.$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι η (6.9) γράφεται και σαν

$$(6.10) \quad Y_n(y) := \tilde{a}_n \sinh(k_n y) + \tilde{b}_n \cosh(k_n y).$$

όπου

$$(6.11) \quad \cosh(z) := \frac{1}{2} (e^z + e^{-z}), \quad \sinh(z) := \frac{1}{2} (e^z - e^{-z}),$$

Η εναλλακτική μορφή (6.10) των λύσεων της $Y''(y) = k_n^2 Y(y)$ είναι συχνά βολικότερη από την (6.9), γιατί οι υπερβολικές συναρτήσεις έχουν την ακόλουθη ιδιότητα: $\sinh(0)=0$, $\cosh(0)=1$.

Τ' αποτελέσματα της προηγούμενης ανάλυσης συνοψίζονται στο

Θεώρημα 6.1

• Η εξίσωση $u_{xx} + u_{yy} = 0$ επιδέχεται άπειρες λύσεις της μορφής $u(x, y) = X(x) Y(y)$ που είναι συμβατές με τις ομογενείς συνοριακές συνθήκες $u(0, y) = 0 = u(a, y)$, $\forall y \in [0, b]$. Αυτές δίνονται από τις συναρτήσεις

$$(6.12) \quad X_n(x) Y_n(y) := \sin k_n x (A_n \sinh k_n y + B_n \cosh k_n y), \quad k_n := n \frac{\pi}{a},$$

τους γραμμικούς συνδυασμούς τους,

$$(6.13) \quad u_m(x, y) := \sum_{n=1}^m \sin k_n x (A_n \sinh k_n y + B_n \cosh k_n y).$$

(Το δεύτερο μέρος του θεωρήματος είναι άμεση απόρροια της γραμμικότητας της εξίσωσης Laplace και της ομογένειας των συνοριακών συνθηκών).

■

Κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις, η ακολουθία $\{u_m(x, y)\}$ συγκλίνει σε κάθε σημείο

της περιοχής $\bar{\Omega} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$, καθώς το $m \rightarrow \infty$. Τότε, το όριο της ακολουθίας $\{u_m(x, y)\}$ ορίζει τη συνάρτηση

$$(6.14) \quad u(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} \sin k_n x (A_n \sinh k_n y + B_n \cosh k_n y), \quad (x, y) \in \bar{\Omega},$$

που ελπίζουμε ν' αποτελέσει τη λύση του ΠΣΤ (6.3).

Τώρα, από την (6.14) αμέσως έπεται ότι

$$(6.15) \quad u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin k_n x,$$

$$(6.16) \quad u(x, b) := \sum_{n=1}^{\infty} \sin k_n x (A_n \sinh k_n b + B_n \cosh k_n b).$$

Άρα, η συνοριακή συνθήκη $u(x, 0) = 0$ καλύπτεται με την επιλογή $B_n = 0, \forall n$. Συνακόλουθα, η δεύτερη από τις συνοριακές συνθήκες (6.3β) γίνεται

$$(6.17) \quad \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh k_n b \sin k_n x = f(x).$$

Αν υποθέσουμε ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής και μηδενίζεται στα άκρα του διαστήματος $[0, a]$, τότε από το θεώρημα () για τις σειρές Fourier έπεται ημιτόνων καταλήγουμε στο ακόλουθο συμπέρασμα: Για να συγκλίνει η σειρά του αριστερού μέλους της (6.17) στη δοσμένη $f(x)$, αρκεί οι συντελεστές $A_n \sinh k_n b$ των συναρτήσεων $\sin k_n x$ να επιλεγούν με βάση τον τύπο

$$(6.18) \quad A_n \sinh k_n b = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin k_n x dx.$$

Αυτή η επιλογή προσδιορίζει πλήρως τις σταθερές A_n και μας επιτρέπει να γράψουμε τη λύση (6.14) στη μορφή

$$(6.19) \quad u(x, y) := \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin k_n x \frac{\sinh k_n y}{\sinh k_n b}$$

όπου

$$(6.20) \quad B_n := \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin k_n x dx, \quad k_n := n \frac{\pi}{a}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Το γεγονός ότι $0 \leq \sinh k_n y \leq \sinh k_n b$ στο διάστημα $0 \leq y \leq b$ συνεπάγεται ότι η σειρά που ορίζει την $u(x, y)$ της (6.19) πραγματικά συγκλίνει ομοιόμορφα στην κλειστή περιοχή $\bar{\Omega}$. Συνεπώς, η συνάρτηση $u(x, y), (x, y) \in \bar{\Omega}$, που δίνεται από την (6.19) είναι συνεχής και πληροί όλες τις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος που εξετάζουμε.

Εκείνο για το οποίο δεν είμαστε ακόμα σίγουροι είναι αν η παραπάνω συνάρτηση αποτελεί λύση της εξίσωση $u_{xx} + u_{yy} = 0$ στο εσωτερικό της περιοχής $\bar{\Omega}$, δηλαδή στο ανοιχτό παραλληλόγραμμο $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < a, 0 < y < b\}$. Κι αυτό γιατί, δεν μπορούμε να παραγωγίσουμε τη σειρά (6.19) όρο προς όρο και να γνωρίζουμε εκ των προτέρων ότι οι σειρές που προκύπτουν συγκλίνουν ομοιόμορφα. Η συμπεριφορά αυτών των σειρών εξαρτιέται από εκείνη των συντελεστών B_n που, με τη σειρά της, καθορίζεται από τις ιδιότητες της $f(x)$.

Βέβαια, αν η $f(x)$ είναι αρκετά ομαλή, η δυνατότητα υπολογισμού των παραγώγων u_{xx} και u_{yy} παραγωγίζοντας τη σειρά (6.19) όρο προς όρο εξασφαλίζεται από τα σχετικά θεωρήματα για τις σειρές Fourier. Διαφορετικά, θα πρέπει να υπολογίζουμε ρητά τους συντελεστές

B_n για τη συγκεκριμένη $f(x)$ του προβλήματος που δίνεται προς λύση κι από τη συμπεριφορά τους v' αποφαινόμεσθε αν η (6.19) αποτελεί και λύση της εξίσωσης Laplace ή όχι. Παραδείγματα τέτοιας ανάλυσης δίνονται στις ασκήσεις.

Κυκλικός δακτύλιος

Ας υποθέσουμε τώρα ότι μας έχει δοθεί προς επίλυση το πρόβλημα συνοριακών τιμών που απαρτίζεται από την εξίσωση Laplace στο εσωτερικό Ω ενός κυκλικού δακτύλιου και συνθήκες Dirichlet στο σύνορό του.

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το κέντρο του δακτύλιου ταυτίζεται με την αρχή των Καρτεσιανών συντεταγμένων x, y του Ευκλείδειου επίπεδου. Έτσι, με τη βοήθεια της συνάρτησης

$$(6.21) \quad r := \sqrt{x^2 + y^2},$$

που δίνει την απόσταση του τυχαίου σημείου $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ από την αρχή των αξόνων, μπορούμε να ορίσουμε την περιοχή Ω ως εξής:

$$(6.22) \quad \Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < r < b\}.$$

Οι θετικοί αριθμοί a, b συμβολίζουν την εσωτερική (μικρή) και εξωτερική (μεγάλη) ακτίνα, αντίστοιχα, του κυκλικού δακτύλιου.

Το σύνορο, $\partial\Omega$, του δακτύλιου απαρτίζεται από τους κύκλους $r = a$ και $r = b$. Με άλλα λόγια,

$$(6.23) \quad \partial\Omega = S_1 \cup S_2, \quad S_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : r = a\}, \quad S_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : r = b\}.$$

Στις Καρτεσιανές συντεταγμένες, το πρόβλημα συνοριακών τιμών που θέλουμε να λύσουμε αποτελείται από τη ΜΔΕ

$$(6.24\alpha) \quad V_{xx} + V_{yy} = 0, \quad (x, y) \in \Omega$$

και τις συνθήκες

$$(6.24\beta) \quad V(x, y) = F(x, y), \quad (x, y) \in S_1,$$

$$(6.24\gamma) \quad V(x, y) = G(x, y), \quad (x, y) \in S_2.$$

Είναι αυτονόητο ότι οι συναρτήσεις $F : S_1 \rightarrow \mathbb{R}$ και $G : S_2 \rightarrow \mathbb{R}$ θεωρούνται γνωστές.

Είναι φανερό ότι η περιγραφή του δακτύλιου και των καμπυλών που απαρτίζουν το σύνορό του είναι αρκετά περίπλοκη στις Καρτεσιανές συντεταγμένες. Οι τελευταίες ταιριάζουν σ' ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, σαν αυτό του προηγούμενου παραδείγματος, όχι όμως και στη γεωμετρία του αντικείμενου που τώρα μας ενδιαφέρει. Προφανώς, καταλληλότερες είναι οι πολικές συντεταγμένες που ορίζονται από την (6.21) και την $\varphi := \arctan(y/x)$.

Με τις αντίστροφες των σχέσεων που μόλις αναφέραμε, δηλαδή με τις

$$(6.25) \quad x = X(r, \varphi) := r \cos \varphi, \quad y = Y(r, \varphi) := r \sin \varphi$$

μπορούμε να μετατρέπουμε κάθε συνάρτηση των x, y σε συνάρτηση των r, φ . Αν, λοιπόν, θέσουμε

$$(6.26) \quad u(r, \varphi) := V(X(r, \varphi), Y(r, \varphi)),$$

τότε η εξίσωση Laplace (6.24α) μετατρέπεται στην

$$(6.27) \quad u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} = 0.$$

Ως αντίστοιχη της Ω και άρα ως πεδίο ορισμού της συνάρτησης $u(r, \varphi)$ μπορούμε να θεωρήσουμε την περιοχή

$$(6.28) \quad U := \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 < a < r < b, 0 < \varphi < 2\pi\}$$

του επίπεδου r, φ .

Με τη σειρά τους, οι συνοριακές συνθήκες γίνονται

$$(6.29) \quad u(a, \varphi) = f(\varphi), \quad u(b, \varphi) = g(\varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

όπου

$$(6.30) \quad f(\varphi) := F(X(a, \varphi), Y(a, \varphi)), \quad g(\varphi) := G(X(b, \varphi), Y(b, \varphi)).$$

Οι συναρτήσεις $f, g : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ θεωρούνται δοσμένες και τέτοιες που

$$(6.31) \quad f(0) = f(2\pi), \quad g(0) = g(2\pi).$$

Η τελευταία ιδιότητα επιβάλλεται από το γεγονός ότι τα ζευγάρια $(r, 0)$ και $(r, 2\pi)$ αντιστοιχούν στο ίδιο σημείο του Ευκλείδειου επίπεδου. Γενικότερα, αν θεωρήσουμε ότι η γωνιακή μεταβλητή φ διατρέχει όλους τους πραγματικούς αριθμούς, \mathbb{R} , τότε τα ζευγάρια (r, φ) και $(r, \varphi + 2n\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$, αντιστοιχούν στο ίδιο σημείο του χώρου και άρα ταυτίζονται. Σ' αυτή την περίπτωση θεωρούμε ότι οι δοσμένες συναρτήσεις f, g έχουν ως πεδίο ορισμού ολόκληρη την πραγματική ευθεία \mathbb{R} , αλλά είναι 2π -περιοδικές.

Όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα, υποθέτουμε ότι η ΜΔΕ (5.111), επιδέχεται λύση διαχωρισμένων μεταβλητών: $u(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$. Η αντικατάσταση αυτής της έκφρασης στην εξίσωση (5.111) δίνει το ακόλουθο αποτέλεσμα.

$$R''(r)\Phi(\varphi) + \frac{1}{r} R'(r)\Phi(\varphi) + \frac{1}{r^2} R(r)\Phi''(\varphi) = 0$$

Σε κάθε ανοιχτό διάστημα της περιοχής U στο οποίο η $u(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ δε μηδενίζεται, η προηγούμενη σχέση είναι ισοδύναμη με την

$$(6.32) \quad \frac{r^2 R''(r) + r R'(r)}{R(r)} = - \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}$$

Αυτή συνεπάγεται ότι

$$(6.33) \quad \frac{r^2 R''(r) + r R'(r)}{R(r)} = - \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \lambda = \text{σταθ.}$$

κι έτσι οδηγούμαστε στο σύστημα

$$(6.34) \quad r^2 R''(r) + r R'(r) = \lambda R(r), \quad \Phi''(\varphi) = -\lambda \Phi(\varphi).$$

Αφού, όπως ήδη επισημάναμε, τα ζευγάρια (r, φ) και $(r, \varphi + 2n\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$, αντιστοιχούν στο ίδιο σημείο του χώρου, η $u(r, \varphi)$ θα πρέπει να είναι περιοδική ως προς τη γωνιακή

μεταβλητή φ : $u(r, \varphi) = u(r, \varphi + 2n\pi)$. Όταν $u(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$, αυτή η συνθήκη ανάγεται στην $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2n\pi)$. Δηλαδή, η $\Phi(\varphi)$ θα πρέπει να είναι περιοδική συνάρτηση, με περίοδο 2π .

Όπως γνωρίζουμε, οι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης $\Phi''(\varphi) = -\lambda\Phi(\varphi)$ που αντιστοιχούν σε αρνητικό λ είναι της μορφής $C_1 e^{k\varphi} + C_2 e^{-k\varphi}$, όπου $k = \sqrt{-\lambda}$ και C_1, C_2 τυχαίες σταθερές. Αλλά, αυτού του είδους οι λύσεις δεν είναι συμβατές με τη συνθήκη $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2n\pi)$.

Όταν $\lambda = 0$, η ΣΔΕ για την $\Phi(\varphi)$ γίνεται $\Phi''(\varphi) = 0$, οπότε $\Phi(\varphi) = C_1 + C_2\varphi$. Από αυτές τις λύσεις μόνο εκείνες με $C_2 = 0$ δεν παραβιάζουν την συνθήκη $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2n\pi)$.

Τέλος, όταν $\lambda = k^2, k \neq 0$, οι λύσεις της $\Phi''(\varphi) = -\lambda\Phi(\varphi)$ δίνονται από τις συναρτήσεις $\Phi(\varphi) = C_1 \cos k\varphi + C_2 \sin k\varphi$. Επιβάλλοντας τη συνθήκη $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2n\pi)$, αμέσως καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι όλες οι λύσεις αυτού του είδους είναι αποδεκτές, με την προϋπόθεση ότι το k είναι ακέραιος.

Συμπερασματικά, οι λύσεις της ΣΔΕ $\Phi''(\varphi) = -\lambda\Phi(\varphi)$ που ταιριάζουν στη συνθήκη περιοδικότητας $\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2n\pi)$ είναι αυτές που αντιστοιχούν στην επιλογή $\lambda = n^2, n \in \mathbb{Z}$, κι είναι της μορφής

$$(6.35) \quad \Phi_n(\varphi) = C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi.$$

Γυρίζοντας στο πρώτο μέλος του συστήματος (6.34), παρατηρούμε τα εξής. Όταν $\lambda = 0$, η ΣΔΕ $r^2 R''(r) + rR'(r) = \lambda R(r)$ ανάγεται στην $r^2 R''(r) + rR'(r) = 0$. Αυτή γράφεται και σαν $[rR'(r)]' = 0$, οπότε $rR'(r) = C_1$. Συνεπώς, η λύση που αντιστοιχεί στην τιμή $\lambda = 0$ είναι της μορφής

$$(6.36) \quad R(r) = C_1 \ln r + C_2.$$

Όταν $\lambda = n^2$, όπου n μη μηδενικός ακέραιος, τότε η $r^2 R''(r) + rR'(r) = \lambda R(r)$ γίνεται

$$(6.37) \quad r^2 R''(r) + rR'(r) - n^2 R(r) = 0.$$

Τώρα, κάθε ΣΔΕ δεύτερης τάξης της μορφής $a r^2 R''(r) + b r R'(r) + c R(r) = 0$ αναφέρεται ως **εξίσωση (του) Euler** ή **(των) Euler-Cauchy**. Για να βρούμε λύσεις αυτής της κατηγορίας εξισώσεων μπορούμε να υποθέσουμε ότι $R(r) = r^\alpha$. Η αντικατάσταση αυτής της έκφρασης στην (6.37) οδηγεί στη συνθήκη $\alpha^2 = n^2$. Συνεπώς, κάθε μια από τις συναρτήσεις r^n, r^{-n} αποτελεί λύση της (6.37). Κι αφού είναι και γραμμικά ανεξάρτητες, το σύνολο των λύσεων της ΣΔΕ (6.37) αποτελείται από τις συναρτήσεις της μορφής

$$(6.38) \quad R_n(r) = A_n r^n + B_n r^{-n}.$$

Από τα προηγούμενη ανάλυση και τη γραμμικότητα της ΜΔΕ (6.27) καταλήγουμε στο ακόλουθο συμπέρασμα: Κάθε μέλος της ακολουθίας

$$(6.39) \quad u_m(r, \varphi) = \alpha \ln r + \beta + \sum_{n=1}^m (A_n r^n + B_n r^{-n}) (C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi),$$

όπου $\alpha, \beta, A_n, B_n, C_n$ και D_n τυχαίες σταθερές, αποτελεί λύση της παραπάνω εξίσωσης στην περιοχή U .

Είναι πιθανό ότι, κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις, το ίδιο θα ισχύει και στο όριο $m \rightarrow \infty$. Με άλλα λόγια, ενδέχεται η σειρά

$$(6.40) \quad u(r, \varphi) := \alpha \ln r + \beta + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n}) (C_n \cos n \varphi + D_n \sin n \varphi)$$

να συγκλίνει σε κάθε σημείο της περιοχής U με τρόπο ώστε, η αντίστοιχη συνάρτηση $V(x, y)$ ν' αποτελεί την επιθυμητή λύση της εξίσωσης Laplace στον δακτύλιο Ω .

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι η σειρά (6.40) συγκλίνει, τόσο στο εσωτερικό όσο και στο σύνορο της περιοχής U . Τότε, για $r = a$ και $r = b$, η συνάρτηση $u(r, \varphi)$ αντιστοιχεί στις σειρές

$$(6.41) \quad u(a, \varphi) = \alpha \ln a + \beta + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n a^n + B_n a^{-n}) (C_n \cos n \varphi + D_n \sin n \varphi)$$

και

$$(6.42) \quad u(b, \varphi) = \alpha \ln b + \beta + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n b^n + B_n b^{-n}) (C_n \cos n \varphi + D_n \sin n \varphi).$$

αντίστοχα. Απλούστερα,

$$(6.43) \quad u(a, \varphi) = \frac{1}{2} M_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (M_n \cos n \varphi + N_n \sin n \varphi),$$

όπου

$$(6.44) \quad M_0 := 2(\alpha \ln a + \beta), \quad M_n := C_n(A_n a^n + B_n a^{-n}), \quad N_n := D_n(A_n a^n + B_n a^{-n}),$$

και

$$(6.45) \quad u(b, \varphi) = \frac{1}{2} R_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (R_n \cos n \varphi + T_n \sin n \varphi),$$

όπου

$$(6.46) \quad R_0 := 2(\alpha \ln b + \beta), \quad R_n := C_n(A_n b^n + B_n b^{-n}), \quad T_n := D_n(A_n b^n + B_n b^{-n}).$$

Συνακόλουθα, οι συνοριακές συνθήκες (6.29) γίνονται

$$(6.47) \quad \frac{1}{2} M_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (M_n \cos n \varphi + N_n \sin n \varphi) = f(\varphi),$$

$$(6.48) \quad \frac{1}{2} R_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (R_n \cos n \varphi + T_n \sin n \varphi) = g(\varphi).$$

Προφανώς, αυτές οι σχέσεις παριστάνουν το ανάπτυγμα των συναρτήσεων $f(\varphi)$ και $g(\varphi)$, αντίστοιχα, σε (πλήρη) σειρά Fourier. Με βάση λοιπόν τα στοιχεία της ανάλυσης Fourier που γνωρίσαμε στο 4ο εδάφιο, μπορούμε να κάνουμε την εξής εικασία:

• Αν οι συναρτήσεις $f(\varphi)$ και $g(\varphi)$ είναι συνεχείς στο διάστημα $[0, 2\pi]$, $f(0) = f(2\pi)$, $g(0) = g(2\pi)$, και οι συντελεστές των σειρών (6.47) και (6.48) επιλεγούν ίσοι προς

$$(6.49) \quad M_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos n \varphi d \varphi, \quad N_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin n \varphi d \varphi,$$

και

$$(6.50) \quad R_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \cos n \varphi d \varphi, \quad T_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \sin n \varphi d \varphi,$$

αντίστοιχα, τότε η σειρά (6.40) συγκλίνει στην περιοχή U σε μια συνάρτηση $u(r, \varphi)$, η οποία αποτελεί λύση της ΜΔΕ (6.27).

Από πρακτική άποψη, τ' αποτελέσματα της προηγούμενης ανάλυσης μπορεί να συνοστούν ως εξής: Η επίλυση του προβλήματος συνοριακών τιμών (6.27) - (6.29) επιτυγχάνεται με δύο βήματα:

- (i) Χρησιμοποιώντας τους τύπους (6.49) και (6.50), αντίστοιχα, υπολογίζουμε τους συντελεστές Fourier $\{M_n, N_n\}$ και $\{R_n, T_n\}$ των (δοσμένων) συρτήσεων $f(\varphi)$ και $g(\varphi)$.
- (ii) Με βάση το αποτέλεσμα του πρώτου βήματος και τις σχέσεις (6.44), (6.46), υπολογίζουμε το σύνολο των σταθερών, $\{\alpha, \beta, A_n, B_n, C_n, D_n\}$, που υπεισέρχεται στη μορφή (6.40) της λύσης, $u(r, \varphi)$.

Εσωτερικό κι εξωτερικό κυκλικού δίσκου

1. Εξωτερικό κυκλικού δίσκου

Είναι φανερό ότι, στο όριο $b \rightarrow \infty$, η περιοχή $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < r < b\}$ ανάγεται στην

$$(6.51) \quad \Omega_- := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < r < \infty\}$$

δηλαδή στο εξωτερικό ενός κυκλικού δίσκου ακτίνας a . Το σύνορο, $\partial\Omega_-$, αυτής της περιοχής δεν είναι άλλο από τον κύκλο $r = a$:

$$(6.52) \quad \partial\Omega_- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : r = a\}.$$

Αυτή η παρατήρηση μας επιτρέπει να λύσουμε αμέσως το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$(6.53\alpha) \quad V_{xx} + V_{yy} = 0, \quad (x, y) \in \Omega_-$$

$$(6.53\beta) \quad V(x, y) = F(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega_-,$$

χρησιμοποιώντας τ' αποτελέσματα που βρήκαμε παραπάνω.

Συγκεκριμένα ας υποθέσουμε ότι μας ενδιαφέρουν οι λύσεις της εξίσωσης Laplace που παραμένουν φραγμένες. Αυτό σημαίνει ότι, η $V(x, y)$ θα πρέπει να είναι τέτοια

$$(6.54) \quad |V(x, y)| \leq M, \quad \text{για κάθε } (x, y) \in \Omega_-.$$

όπου M κάποιος θετικός αριθμός.

Ισοδύναμα, η $|u(r, \varphi)|$ θα πρέπει να μην υπερβαίνει τον αριθμό M για κάθε $r \geq a$. Από την (6.40) είναι φανερό ότι αυτό μπορεί να εξασφαλιστεί μόνο με την επιλογή $\alpha = A_n = 0$. Με άλλα λόγια, οι φραγμένες λύσεις ορίζονται από τη σειρά

$$(6.55) \quad u(r, \varphi) := \beta + \sum_{n=1}^{\infty} B_n r^{-n} (C_n \cos n \varphi + D_n \sin n \varphi).$$

Ισοδύναμα,

$$(6.56) \quad \boxed{u(r, \varphi) = \frac{1}{2} M_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n (M_n \cos n \varphi + N_n \sin n \varphi)}$$

όπου

$$(6.57) \quad M_0 := 2\beta, \quad M_n := C_n B_n a^{-n}, \quad N_n := D_n B_n a^{-n}.$$

Οι συντελεστές $\{M_n, N_n\}$ καθορίζονται από συνοριακή συνθήκη $u(a, \varphi) = f(\varphi)$.

Δηλαδή,

$$(6.58) \quad \frac{1}{2} M_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (M_n \cos n \varphi + N_n \sin n \varphi) = f(\varphi),$$

οπότε

$$(6.59) \quad M_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos n \varphi d \varphi, \quad N_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin n \varphi d \varphi.$$

2. Εσωτερικό κυκλικού δίσκου

Αν θεωρήσουμε ότι η μικρή ακτίνα του δακτύλιου μηδενίζεται, δηλαδή στο όριο $a \rightarrow 0$, η περιοχή Ω ανάγεται στην

$$(6.60) \quad \Omega_+ := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq r < b\}.$$

Με άλλα λόγια, η περιοχή Ω_+ αντιστοιχεί στο εσωτερικό ενός κυκλικού δίσκου ακτίνας b , με σύνορο τον κύκλο $r = b$:

$$(6.61) \quad \partial\Omega_+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : r = b\}.$$

Συνακόλουθα, το αρχικό πρόβλημα συνοριακών τιμών ανάγεται στο

$$(6.62\alpha) \quad V_{xx} + V_{yy} = 0, \quad (x, y) \in \Omega_+$$

$$(6.62\beta) \quad V(x, y) = G(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega_+.$$

Η λύση και αυτού του προβλήματος προκύπτει αμέσως από τον τύπο (6.40), παραλείποντας τους όρους που απειρίζονται καθώς το $r \rightarrow 0$. Διαφορετικά, η λύση μας δεν είναι φραγμένη. Είναι φανερό ότι, σ' αυτή την περίπτωση, οι προβληματικοί όροι είναι οι $a \ln r$ και $B_n r^{-n}$. Συνεπώς, αν θέλουμε η σειρά (6.40) να έχει την πιθανότητα να συγκλίνει σε φραγμένη συνάρτηση, οφείλουμε να θέσουμε $a = B_n = 0$. Με αυτό τον τρόπο, καταλήγουμε στην έκφραση

$$(6.63) \quad u(r, \varphi) := \beta + \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n (C_n \cos n \varphi + D_n \sin n \varphi).$$

Ισοδύναμα,

$$(6.64) \quad u(r, \varphi) = \frac{1}{2} R_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{b}\right)^n (R_n \cos n \varphi + T_n \sin n \varphi)$$

όπου

$$(6.65) \quad R_0 := 2\beta, \quad R_n := C_n A_n b^n, \quad T_n := D_n A_n b^n.$$

Τώρα πλέον, το μόνο που απομένει είναι να επιλέξουμε τους συντελεστές R_0 , R_n και T_n με τρόπο ώστε η λύση (6.64) να είναι συμβατή με τη συνοριακή συνθήκη $u(b, \varphi) = g(\varphi)$. Η τελευταία γράφεται σαν

$$(6.66) \quad \frac{1}{2} R_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (R_n \cos n \varphi + T_n \sin n \varphi) = g(\varphi),$$

και άρα οι συντελεστές $\{R_n, T_n\}$ θα πρέπει να επιλεγούν με βάση τους τύπους

$$(6.67) \quad R_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \cos n \varphi d \varphi, \quad T_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(\varphi) \sin n \varphi d \varphi.$$

Ο τύπος Poisson

Στηριζόμενοι στην υπόθεση ότι η συνάρτηση $g(\varphi)$ είναι συνεχής και στο γεγονός ότι r/b στο εσωτερικό του κυκλικού δίσκου ακτίνας b , μπορούμε να φέρουμε τη λύση (6.64) σε μια πολύ εύχρηστη μορφή. Συγκεκριμένα, η λύση του προβλήματος Dirichlet για την εξίσωση Laplace στο εσωτερικό ενός κυκλικού δίσκου ακτίνας b μπορεί να πάρει τη μορφή

$$(6.68) \quad u(r, \varphi) = \frac{b^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g(\psi)}{b^2 - 2br \cos(\varphi - \psi) + r^2} d\psi$$

Η τελευταία είναι γνωστή ως *τύπος του Poisson*.

Απόδειξη. Η αντικατάσταση των ολοκληρωμάτων (6.67) που δίνουν τους συντελεστές Fourier της $g(\varphi)$ στην (6.64) δίνει το εξής αποτέλεσμα:

$$(6.69) \quad u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\psi) d\psi + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{b}\right)^n \int_0^{2\pi} g(\psi) (\cos n\psi \cos n\varphi + \sin n\psi \sin n\varphi) d\psi.$$

Ισοδύναμα,

$$(6.70) \quad u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\psi) \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{b}\right)^n \cos n(\varphi - \psi) \right] d\psi.$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση $\cos x = (e^{ix} + e^{-ix})/2$, μπορούμε να γράψουμε την τελευταία στη μορφή

$$(6.71) \quad \begin{aligned} u(r, \varphi) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\psi) \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{b}\right)^n (e^{in(\varphi-\psi)} + e^{-in(\varphi-\psi)}) \right] d\psi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\psi) \left[-1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{b}\right)^n (e^{in(\varphi-\psi)} + e^{-in(\varphi-\psi)}) \right] d\psi \end{aligned}$$

Τώρα, $|(r/b)^n e^{in(\varphi-\psi)}| = (r/b)^n < 1$, όταν $r < b$. Από την άλλη,

$$(6.72) \quad \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \quad |z| < 1.$$

Συνεπώς,

$$(6.73) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{b} e^{\pm i(\varphi-\psi)}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{r}{b} e^{\pm i(\varphi-\psi)}} = \frac{b}{b - r e^{\pm i(\varphi-\psi)}}.$$

Άρα

$$(6.74) \quad \begin{aligned} -1 + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{b}\right)^n (e^{in(\varphi-\psi)} + e^{-in(\varphi-\psi)}) &= \frac{b}{b - r e^{i(\varphi-\psi)}} + \frac{b}{b - r e^{-i(\varphi-\psi)}} - 1 \\ &= 2 \operatorname{Re} \left[\frac{b}{b - r e^{i(\varphi-\psi)}} \right] - 1 = \frac{b^2 - r^2}{b^2 - 2br \cos(\varphi - \psi) + r^2} \end{aligned}$$

κι έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη της (6.68). ■

Αξίζει τώρα να θυμηθούμε ότι το μήκος ενός κυκλικού τόξου ακτίνας r που αντιστοιχεί στη γωνία φ είναι ίσο με $s = r\varphi$. Συνεπώς ο τύπος του Poisson γράφεται και στη μορφή

$$(6.75) \quad u(r, s) := u(r, s/r) = \frac{b^2 - r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g(s'/b)}{b^2 - 2br \cos[(s/r) - (s'/b)] + r^2} ds'$$

Από την άλλη, αν θεωρήσουμε ότι το διάνυσμα \mathbf{x} αντιστοιχεί σ' ένα σημείο στο εσωτερικό Ω_+ του δίσκου και το \mathbf{x}' σε κάποιο σημείο του κύκλου $\partial\Omega_+$, τότε

$$(6.76) \quad \mathbf{x} := (x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi), \quad \mathbf{x}' := (x', y') = (b \cos \psi, b \sin \psi).$$

Το τετράγωνο της απόστασης αυτών των σημείων είναι ίσο με

$$|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^2 \equiv (\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x}' - \mathbf{x}) = b^2 - 2br \cos(\varphi - \psi) + r^2.$$

Συνάμα, $|\mathbf{x}| = r$ και $|\mathbf{x}'| = b$. Με βάση αυτές τις παρατηρήσεις, μπορούμε να γράψουμε τον τύπο του Poisson στη μορφή

$$(6.77) \quad V(\mathbf{x}) = \frac{b^2 - |\mathbf{x}|^2}{2\pi b} \int_{|\mathbf{x}'|=b} \frac{G(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^2} d s'$$

Θυμίζουμε ότι με $V(x, y)$ και $G(x, y)$ έχουμε συμβολίσει τις συναρτήσεις $u(r, \varphi)$ και $g(\varphi)$, αντίστοιχα, στις Καρτεσιανές συντεταγμένες.

■

Κάθε συνάρτηση $V(\mathbf{x})$, κλάσης $C^2(\Omega)$, που είναι λύση της εξίσωσης Laplace στο ανοιχτό υποσύνολο Ω του \mathbb{R}^n λέγεται **αρμονική**. Στο δεύτερο τόμο αυτού του βιβλίου θα μελετήσουμε τις αρμονικές συναρτήσεις και τα προβλήματα συνοριακών τιμών για την εξίσωση Laplace πολύ διεξοδικότερα. Εκεί θα τεκμηριώσουμε ένα γενικότερο αποτέλεσμα, το οποίο περιλαμβάνει και την απόδειξη του θεωρήματος που ακολουθεί.

Θεώρημα 6.2

Αν η συνάρτηση $G(x, y)$, $(x, y) \in \partial\Omega_+$ είναι συνεχής, τότε η λύση $V(x, y)$ που ορίζεται από τον τύπο Poisson (6.77) είναι η μοναδική αρμονική συνάρτηση που είναι συνεχής σε ολόκληρο τον κλειστό δίσκο $\bar{\Omega}_+ := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq b^2\}$ και ισούται με την $G(x, y)$ στο σύνορο του δίσκου.

Με άλλα λόγια, η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο Poisson αποτελεί την μοναδική κλασική λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών (6.62).

■

Αυτό το (προσωρινά αναπόδεικτο) αποτέλεσμα οδηγεί αμέσως σε δύο θεωρήματα με τα οποία κλείνουμε και την αναφορά μας στα ολικά ή ποιοτικά χαρακτηριστικά των αρμονικών συναρτήσεων. Όπως και το προηγούμενο, τα συμπεριλάβαμε στο παρόν εδάφιο για τον εξής απλό λόγο: Μας παρέχουν τη βάση για ν' απαντήσουμε σε ορισμένα σημαντικά ερωτήματα που συνήθως αφήνουν αναπάντητα οι λύσεις στις οποίες καταλήγουμε με τη μέθοδο του διαχωρισμού των μεταβλητών. Ένα από αυτά, το μονοσήμαντο της λύσης ενός προβλήματος συνοριακών τιμών που κατασκευάζεται μ' αυτή τη μέθοδο ή οποιαδήποτε άλλη, εξετάζεται στις ασκήσεις που δίνονται παραπάτω.

Θεώρημα 6.3 (Θεώρημα μέσης τιμής)

Αν η $V(x, y)$ είναι αρμονική στον ανοιχτό δίσκο Ω και συνεχής στο ολοκλήρωμά του, $\overline{\Omega}$, τότε η τιμή της $V(x, y)$ στο κέντρο του δίσκου είναι ίση με τη μέση τιμή της πάνω στη περιφέρεια του δίσκου.

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να επιλέξουμε ως αρχή των Καρτεσιανών αξόνων x, y το κέντρο του δίσκου. Τότε, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, η λύση $V(x, y)$ που δίνεται από τον τύπο του Poisson είναι ίση με την $G(x, y)$ πάνω στην περιφέρεια του δίσκου. Έτσι, από τον τύπο του Poisson αμέσως συνάγεται ότι

$$(6.78) \quad V(\mathbf{0}) = \frac{1}{2\pi} \int_{|x'|=b} G(x') \, d s' \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\psi) \, d \psi$$

Η τελευταία έκφραση αποτελεί τον ορισμό της μέσης τιμής της $g(\varphi)$ στο διάστημα $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, άρα και της $V(x, y)$ πάνω στην περιφέρεια του δίσκου. ■

Θεώρημα 6.4 (Ισχυρή αρχή μεγίστου)

Αν η $V(x, y)$ είναι αρμονική σε μια φραγμένη συνεκτική περιοχή Ω και συνεχής στο ολοκλήρωμά της, $\overline{\Omega}$, τότε η $V(x, y)$ παίρνει τη μέγιστη τιμή της σε κάποια σημεία του σύνορου, $\partial\Omega$, εκτός αν είναι σταθερή.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η V δεν είναι σταθερή. Επειδή η περιοχή $\overline{\Omega}$ είναι συμπαγής και η $V \in C(\overline{\Omega})$, υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της $\overline{\Omega}$ όπου η V παίρνει τη μέγιστη τιμή της.

Ας υποθέσουμε ότι ένα από τα σημεία στα οποία η V παίρνει τη μέγιστη τιμή της, M , είναι το $x_1 \in \Omega$. Δηλαδή, $V(x_1) = M$. Αφού αυτό το σημείο είναι εσωτερικό, υπάρχει ένας κλειστός δίσκος D_1 με κέντρο το x_1 , ο οποίος περιέχεται στην Ω . Προφανώς, $V(x) \leq M$ για κάθε x πάνω στην περιφέρεια ∂D_1 του δίσκου. Από την άλλη, το Θεώρ. 6.3 συνεπάγεται ότι η μέση τιμή της $V(x)$ στον κύκλο ∂D_1 είναι ίση με την τιμή της στο x_1 , δηλαδή ίση με M . Άρα, η $V(x)$ διατηρεί την ίδια τιμή σε όλα τα σημεία του κύκλου ∂D_1 . Γιατί, όντας συνεχής, αν γινόταν μικρότερη του M σε κάποιο σημείο $x_m \in \partial D_1$, θα έμενε μικρότερη του M σε μια γειτονιά του x_m , με αποτέλεσμα η μέση τιμή της να κατέληγε λιγότερη από M . Αλλά, το ίδιο ισχύει και για κάθε δίσκο ομόκεντρο με τον D_1 που έχει μικρότερη ακτίνα. Συνεπώς, $V(x) = M$ σε κάθε $x \in D_1$.

Το προηγούμενο επιχείρημα μπορεί να επαναληφθεί θεωρώντας έναν δίσκο D_2 που τέμνει τον D_1 αλλά έχει διαφορετικό κέντρο. Σαν αποτέλεσμα, θα βρούμε τότε ότι η $V(x) = M$ σε κάθε $x \in D_1 \cup D_2$. Αλλά η περιοχή $\overline{\Omega}$ είναι συμπαγής. Άρα μπορεί να καλυφτεί από την ένωση δίσκων σαν τους D_1 και D_2 . Από τα προηγούμενα έπεται ότι η $V(x)$ θα είναι πλέον σταθερή και ίση με τη μέγιστη τιμή της σε ολόκληρη την περιοχή $\overline{\Omega}$. Κάτι τέτοιο έρχεται σε αντίθεση προς την αρχική μας υπόθεση και άρα είναι αδύνατο να υπάρχει ακόμη και ένα σημείο στο εσωτερικό Ω της $\overline{\Omega}$ στο οποίο η αρμονική συνάρτηση V παίρνει τη μέγιστη τιμή της. ■

Ασκήσεις

6.1 Να υπολογιστούν οι συντελεστές της σειράς Fourier B_n της λύσης (6.19) του προβλήματος Dirichlet (6.3) όταν

(i) $f(x) = x(x - a), 0 \leq x \leq a.$

(ii) $f(x) = \begin{cases} x(x - a/2), & 0 \leq x < a/2 \\ 0, & a/2 \leq x \leq a \end{cases}, \quad 0 \leq x \leq a.$

6.2 α) Να λυθεί με τη μέθοδο του διαχωρισμού των μεταβλητών το πρόβλημα Dirichlet

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b,$$

$$u(x, 0) = g(x), \quad u(x, b) = 0, \quad 0 \leq x \leq a,$$

$$u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq b,$$

όπου $g(x)$ συνεχής συνάρτηση και τέτοια που $g(0) = g(a) = 0.$

β) Εξειδικεύσετε την απάντηση του μέρους (α) στις εξής δύο περιπτώσεις:

(i) $g(x) = x(x - a), 0 \leq x \leq a.$

(ii) $g(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < a/2 \\ (x - a)(x - a/2), & a/2 \leq x \leq a \end{cases}, \quad 0 \leq x \leq a.$

6.3 α) Να λυθεί το πρόβλημα Dirichlet

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b,$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u(x, b) = g(x), \quad 0 \leq x \leq a,$$

$$u(0, y) = 0, \quad u(a, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq b,$$

όπου f, g συνεχείς συναρτήσεις, οι οποίες μηδενίζονται στα άκρα του διαστήματος $0 \leq x \leq a.$

Υπόδειξη: Επαλληλία, ή ... διαίρει και βασίλευε.

β) Εξειδικεύσετε την απάντηση του μέρους (α) στις εξής δύο περιπτώσεις:

(i) $f(x) = x(x - a), g(x) = \sin \frac{\pi}{a} x \cos \frac{\pi}{a} x.$

(ii) $f(x) = \begin{cases} x(x - a/2), & 0 \leq x < a/2 \\ 0, & a/2 \leq x \leq a \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < a/2 \\ (x - a)(x - a/2), & a/2 \leq x \leq a \end{cases}$

6.4 α) Να λυθεί με τη μέθοδο του διαχωρισμού των μεταβλητών το πρόβλημα Dirichlet

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b,$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad u(x, b) = g(x), \quad 0 \leq x \leq a,$$

$$u(0, y) = l(y), \quad u(a, y) = r(y), \quad 0 \leq y \leq b,$$

όπου f, g, l και r συνεχείς συναρτήσεις, οι οποίες μηδενίζονται στα άκρα του πεδίου ορισμού τους.

Υπόδειξη: Επαλληλία, ή ... διαιρεί και βασίλευε.

β) Εξειδικεύσετε την απάντηση του μέρους (α) στις εξής δύο περιπτώσεις:

$$(i) f(x) = x(x-a), g(x) = \sin 3 \frac{\pi}{a} x, l(y) = \sin \frac{\pi}{b} y \cos \frac{\pi}{b} y, r(y) = y(y-b).$$

(ii) $f(x) = 0, l(y) = 0$ και

$$g(x) = \begin{cases} x(x-a/2), & 0 \leq x < a/2 \\ 0, & a/2 \leq x \leq a \end{cases} \quad r(y) = \begin{cases} 0, & 0 \leq y < b/2 \\ (y-b)(y-b/2), & b/2 \leq y \leq b \end{cases}$$

6.5 α) Να λυθεί με τη μέθοδο του διαχωρισμού των μεταβλητών το πρόβλημα Neumann

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0, & 0 < x < a, & 0 < y < b, \\ u_y(x, 0) &= f(x), & u_y(x, b) &= 0, & 0 \leq x \leq a, \\ u_x(0, y) &= 0, & u_x(a, y) &= 0, & 0 \leq y \leq b, \end{aligned}$$

όπου $f(x)$ συνεχής συνάρτηση και τέτοια που $f(0) = f(a) = 0$ και $\int_0^a f(x) dx = 0$.

Για ποιο λόγο επιβάλλεται η τελευταία συνθήκη;

β) Εξειδικεύσετε την απάντηση του μέρους (α) στις εξής δύο περιπτώσεις:

$$(i) f(x) = x(x-a)(2x-a), \quad (ii) f(x) = (2x-a) \sin \frac{\pi}{a} x.$$

6.6 Να λυθεί με τη μέθοδο του διαχωρισμού των μεταβλητών το πρόβλημα Neumann

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0, & 0 < x < a, & 0 < y < b, \\ u_y(x, 0) &= x(x-a)(2x-a), & u_y(x, b) &= (2x-a) \sin \frac{\pi}{a} x, & 0 \leq x \leq a, \\ u_x(0, y) &= 0, & u_x(a, y) &= 0, & 0 \leq y \leq b. \end{aligned}$$

6.7 Να λυθεί με τη μέθοδο του διαχωρισμού των μεταβλητών το πρόβλημα Robin

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0, & 0 < x < a, & 0 < y < b, \\ u_y(x, 0) &= x(x-a)(2x-a), & u_y(x, b) &= 0, & 0 \leq x \leq a, \\ u_x(0, y) &= (2y-b) \sin \frac{\pi}{b} y, & u_x(a, y) &= 0, & 0 \leq y \leq b. \end{aligned}$$

6.8 Να υπολογιστούν οι συντελεστές της σειράς που ορίζει τη συνάρτηση $u(r, \varphi)$ της (6.40) όταν $f(\varphi) = \sin \varphi$ και $g(\varphi) = \sin 2 \varphi$.

6.9 Να υπολογιστούν οι συντελεστές $\{M_n, N_n\}$ της σειράς που ορίζει τη συνάρτηση $u(r, \varphi)$ της (6.56) όταν $u(a, \varphi) = \varphi(2\pi - \varphi)$.

6.10 Να βρεθούν οι συντελεστές της σειράς (6.64) όταν $u(b, \varphi) = \varphi(2\pi - \varphi)$.

6.11 Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα (6.64), να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση $V(x, y)$ που είναι αρμονική στο εσωτερικό του μοναδιαίου δίσκου $x^2 + y^2 \leq 1$ και ίση προς την $\sin [2 \arctan(y/x)]$ στο σύνορό του.

6.12 α) Να υπολογιστεί η συνάρτηση $u(r, \varphi)$ που ορίζεται από τον τύπο του Poisson όταν η ακτίνα του κυκλικού δίσκου είναι μοναδιαία και $u(1, \varphi) = \sin 2\varphi$.

β) Ποια είναι, σ' αυτή την περίπτωση, η συνάρτηση $V(x, y)$ που αντιστοιχεί στην $u(r, \varphi)$; Να συγκριθεί το αποτέλεσμα αυτής της άσκησης μ' εκείνο της προηγούμενης.

6.13 α) Να βρεθεί η λύση $V(x, y)$ του προβλήματος Dirichlet για την εξίσωση Laplace στην περιοχή $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < a, x > 0, y > 0\}$ του Ευκλείδειου επίπεδου και τις ακόλουθες συνοριακές συνθήκες:

$$V(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq a, \quad V(0, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq a,$$

$$V(x, y) = G(x, y), \quad \sqrt{x^2 + y^2} = a.$$

Η συνάρτηση $G(x, y)$ θεωρείται συνεχής και τέτοια που $G(a, 0) = G(0, a) = 0$.

β) Ειδικότερα, να βρεθεί η λύση για την οποία $u(a, \theta) = \theta(\pi - \theta)$, όπου $u(r, \theta)$ η συνάρτηση $V(x, y)$ στις πολικές συντεταγμένες.

6.14 α) Να βρεθεί η λύση $V(x, y)$ του προβλήματος Neuman για την εξίσωση Laplace στην περιοχή $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < a, x > 0, y > 0\}$ του Ευκλείδειου επίπεδου και τις ακόλουθες συνοριακές συνθήκες:

$$V_y(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq a, \quad V_x(0, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq a,$$

$$V_x(x, y) + V_y(x, y) = G(x, y), \quad \sqrt{x^2 + y^2} = a.$$

Η συνάρτηση $G(x, y)$ θεωρείται συνεχής και τέτοια που $G(a, 0) = G(0, a) = 0$. Ποια επιπλέον συνθήκη οφείλει να σέβεται η $G(x, y)$;

β) Ειδικότερα, να βρεθεί η λύση για την οποία $u_r(a, \theta) = \theta(\pi - \theta)$, όπου $u(r, \theta)$ η συνάρτηση $V(x, y)$ στις πολικές συντεταγμένες.

6.15 Θεωρήστε το κυκλικό τομέα Ω του Ευκλείδειου επίπεδου που ορίζεται από τις συνθήκες $0 < r < a$, $0 \leq \theta \leq \beta$, όπου r, θ πολικές συντεταγμένες και $\beta \in (0, 2\pi)$. Να βρεθεί η λύση $u(r, \theta)$ της εξίσωσης Laplace στην περιοχή Ω , που είναι συμβατή με τις ακόλουθες συνοριακές συνθήκες:

$$u(r, 0) = 0, \quad u(r, \beta) = 0, \quad 0 \leq r \leq a,$$

$$u(a, \theta) = \theta(\beta - \theta), \quad 0 \leq \theta \leq \beta.$$

6.16 Για την ίδια περιοχή Ω της προηγούμενης άσκησης, να βρεθεί η λύση $u(r, \theta)$ της εξίσωσης Laplace που είναι συμβατή με τις συνοριακές συνθήκες

$$u_\theta(r, 0) = 0, \quad u_\theta(r, \beta) = 0, \quad 0 \leq r \leq a,$$

$$u_r(a, \theta) = \theta(\beta - \theta)(2\beta - \theta), \quad 0 \leq \theta \leq \beta.$$

6.17 Χρησιμοποιώντας την αρχή του μεγίστου, δείχτε ότι το πρόβλημα Dirichlet για την εξίσωση $\Delta V = \rho$ σε μια φραγμένη, ανοιχτή και συνεκτική περιοχή Ω του επίπεδου xy επιδέχεται μία μόνο λύση $V(x, y)$ κλάσης $C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.

7. Μη ομογενείς εξισώσεις και συμπληρωματικές συνθήκες

Τα προβλήματα συνοριακών ή και αρχικών τιμών που αντιμετωπίσαμε με τη μέθοδο του διαχωρισμού των μεταβλητών στα προηγούμενα εδάφια είχαν να κάνουν με ομογενείς εξισώσεις. Στις περισσότερα μάλιστα από αυτά, ακόμη και οι συνοριακές συνθήκες ήταν ομογενείς. Όμως, τα φυσικά προβλήματα που συνήθως καλούμαστε να λύσουμε στην πράξη οδηγούν σε μη ομογενείς εξισώσεις ή/και συνοριακές συνθήκες. Για παράδειγμα, η μελέτη της θερμικής συμπεριφοράς μιας ομογενούς ευθείας ράβδου μήκους a οδηγεί στο πρόβλημα αρχικών και συνοριακών συνθηκών που απαρτίζεται από την μη ομογενή εξίσωση της θερμότητας

$$(7.1\alpha) \quad u_t = u_{xx} + \rho(x, t), \quad 0 < x < a, \quad t > 0,$$

την αρχική συνθήκη

$$(7.1\beta) \quad u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq a,$$

και τις συνοριακές συνθήκες

$$(7.1\gamma) \quad u(0, t) = l(t), \quad u(a, t) = r(t), \quad t \geq 0.$$

Η συνάρτηση εξαναγκασμού $\rho(x, t)$ περιγράφει τον ρυθμό με τον οποίο παράγεται (χάνεται) θερμότητα από διάφορες πηγές (σημεία διαροής) που τυχόν βρίσκονται κατά μήκος της ράβδου. Η συνάρτηση $f(x)$ δίνει τη θερμοκρασία στην οποία βρίσκονται αρχικά τα στοιχεία της ράβδου. Τέλος, οι συναρτήσεις $l(t)$ και $r(t)$ προσδιορίζουν τη θερμοκρασία που επιβάλλουν στη ράβδο τα σώματα-δεξαμενές στα οποία εφάπτονται τα άκρα της.

Θα πρέπει να είναι φανερό ότι, ένα τελείως μη ομογενές πρόβλημα σαν αυτό που απαρτίζουν οι εξ. (7.1) δεν μπορεί να λυθεί με μια κατά μέτωπο εφαρμογή της μεθόδου του διαχωρισμού των μεταβλητών. Γιατί, όπως έδειξαν τα παραδείγματα που αναλύσαμε ως τώρα, η παραπάνω μέθοδος προϋποθέτει ότι οι συνοριακές συνθήκες είναι τέτοιες που από μόνες τους οδηγούν στις τριγωνομετρικές συναρτήσεις από τις οποίες χτίζονται οι σειρές Fourier.

Ωστόσο, η κατάσταση δεν είναι πραγματικά αδιέξοδη, όπως φαίνεται με την πρώτη ματιά. Υπάρχει τρόπος για να την αντιμετωπίσουμε, που έγκειται στη χρήση των εξής βασικών εργαλείων:

(i) Της παλιάς στρατηγικής του ... διαίρει και βασίλευε. Συγκεκριμένα, το πρώτο μας βήμα για την επίλυση ενός τελείως μη ομογενούς προβλήματος είναι να το σπάσουμε σε επιμέρους προβλήματα, καθένα από τα οποία διαθέτει κάποιου είδους ομογένεια.

Για παράδειγμα, το ΠΑΣΤ μπορεί να σπάσει στα

$$(7.2\alpha) \quad u_t = u_{xx} + \rho(x, t), \quad 0 < x < a, \quad t > 0,$$

$$(7.2\beta) \quad u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq a,$$

$$(7.2\gamma) \quad u(0, t) = 0, \quad u(a, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

και

$$(7.3\alpha) \quad u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < a, \quad t > 0,$$

$$(7.3\beta) \quad u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq a,$$

$$(7.3\gamma) \quad u(0, t) = l(t), \quad u(a, t) = r(t), \quad t \geq 0.$$

Από αυτά, το πρώτο χαρακτηρίζεται από ομογενείς συνορικές συνθήκες, ενώ στο δεύτερο ομογενείς είναι η ΜΔΕ και η αρχική συνθήκη. Εύκολα τώρα επαληθεύεται το ακόλουθο γεγονός: Αν $u_1(x, t)$ και $u_2(x, t)$ είναι λύσεις των ΠΑΣΤ (7.2) και (7.3), αντίστοιχα, τότε η συνάρτηση $u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t)$ αποτελεί λύση του αρχικού ΠΑΣΤ (7.1).

Με τη σειρά του, το ΠΑΣΤ (7.2) σπάει στα

$$(7.4\alpha) \quad u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < a, \quad t > 0,$$

$$(7.4\beta) \quad u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq a,$$

$$(7.4\gamma) \quad u(0, t) = 0, \quad u(a, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

και

$$(7.5\alpha) \quad u_t = u_{xx} + \rho(x, t), \quad 0 < x < a, \quad t > 0,$$

$$(7.5\beta) \quad u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq a,$$

$$(7.5\gamma) \quad u(0, t) = 0, \quad u(a, t) = 0, \quad t \geq 0.$$

Τώρα πλέον, τα μόνα στοιχεία που δεν είναι ομογενή είναι η αρχική συνθήκη στο ΠΑΣΤ (7.4) και η ΜΔΕ στο (7.5). Και πάλι, η επαλληλία των λύσεων αυτών των δύο απλούστερων ΠΑΣΤ οδηγεί στη λύση του μητρικού, (7.2).

Μάλιστα, πολύ συχνά αρκεί να βρούμε τη λύση ενός μόνο από τα θυγατρικά ΠΑΣΤ για να επιλύσουμε και τα υπόλοιπα. Γιατί, η μη ομογένεια μπορεί να μετασχηματιστεί από το ένα είδος σε άλλο. Για παράδειγμα, η μη ομογένεια στην αρχική συνθήκη μπορεί να μετατραπεί σε μη ομογένεια της ΜΔΕ κι αντίστροφα.

Το δεύτερο εργαλείο με το οποίο αντιμετωπίζουμε την αρχικά περίπλοκη κατάσταση είναι το εξής: Αγνοώντας το αν η διαδικασία του χωρισμού των μεταβλητών οδηγεί ή όχι στις συναρτήσεις που υπεισέρχονται στις σειρές Fourier, εμείς κατασκευάζουμε αναπτύγματα Fourier για κάθε μια από τις συναρτήσεις που εμφανίζονται στο πρόβλημά μας. Η αποτελεσματικότητα αυτής της τεχνικής, αλλά και οι λεπτομέρειες της εφαρμογής της, αναδειχνεται στα παραδείγματα που ακολουθούν.

Παράδειγμα 7.1

Ξεκινάμε από το ΠΑΣΤ (7.2), το οποίο έχουμε ήδη λύσει με τη μέθοδο του διαχωρισμού των μεταβλητών, στην περίπτωση που η αντίστοιχη ΜΔΕ είναι ομογενής.

Θα υποθέσουμε, λοιπόν, ότι τόσο η άγνωστη συνάρτηση $u(x, t)$ όσο και συνάρτηση μη ομογένειας $\rho(x, t)$ έχουν την ακόλουθη ιδιότητα: Κάθε χρονική στιγμή $t > 0$, ανάγονται σε συναρτήσεις της μεταβλητής x που αναπτύσσονται σε σειρά Fourier ημιτόνων. Αυτό σημαίνει ότι

$$(7.6) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \sin k_n x, \quad k_n = \frac{n\pi}{a}, \quad n \in \mathbb{N},$$

και

$$(7.7) \quad \rho(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} R_n(t) \sin k_n x.$$

Θα υποθέσουμε επιπλέον ότι οι παράγωγοι της $u(x, t)$ προκύπτουν παραγωγίζοντας την σειρά (7.6) όρο προς όρο. Γνωρίζουμε ότι κάτι τέτοιο δεν είναι γενικά επιτρεπτό, γιατί

προϋποθέτει την πολύ γρήγορη σύγκλιση της ακολουθίας των συντελεστών $A_n(t)$. Ωστόσο, μπορούμε να προχωρήσουμε θεωρώντας αυτή και την προηγούμενη ως υποθέσεις εργασίας που οφείλουν να δικαιωθούν μόνο από το αποτέλεσμα.

Κάτω από αυτές τις προϋποθέσεις, η αντικατάσταση των (7.6) και (7.7) οδηγεί στην ακόλουθη σχέση:

$$(7.8) \quad \sum_{n=1}^{\infty} A_n'(t) \sin k_n x = \sum_{n=1}^{\infty} [-k_n^2 A_n(t) + R_n(t)] \sin k_n x.$$

Ισοδύναμα,

$$(7.9) \quad \sum_{n=1}^{\infty} [A_n'(t) + k_n^2 A_n(t) - R_n(t)] \sin k_n x = 0.$$

Προφανώς, ικανή συνθήκη για να ισχύει η (7.9) είναι ο μηδενισμός όλων των συντελεστών των συναρτήσεων $\sin k_n x$:

$$(7.10) \quad A_n'(t) + k_n^2 A_n(t) - R_n(t) = 0.$$

Η τελευταία είναι μια μη ομογενής, γραμμική ΣΔΕ πρώτης τάξης που λύνεται εύκολα για να δώσει

$$(7.11) \quad A_n(t) = a_n e^{-k_n^2 t} + e^{-k_n^2 t} \int_0^t e^{k_n^2 \tau} R_n(\tau) d\tau,$$

όπου a_n τυχαίες σταθερές.

Με βάση αυτό το αποτέλεσμα, η (7.6) γίνεται

$$(7.12) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n + \int_0^t e^{k_n^2 \tau} R_n(\tau) d\tau \right] e^{-k_n^2 t} \sin k_n x.$$

Συνακόλουθα,

$$(7.13) \quad u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin k_n x.$$

Αλλά, σύμφωνα με την αρχική συνθήκη (7.4β), η συνάρτηση $u(x, 0)$ στην οποία υποτίθεται πως συγκλίνει η σειρά (7.13) πρέπει να είναι η δοσμένη $f(x)$. Αν η τελευταία είναι συνεχής, η απαίτηση $u(x, 0) = f(x)$ ικανοποιείται με το να θεωρήσουμε τις σταθερές a_n ως τους συντελεστές Fourier της $f(x)$. Δηλαδή, αρκεί να υπολογίσουμε τις a_n με βάση τον τύπο

$$(7.14) \quad a_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin k_n x dx.$$

Με ανάλογο τρόπο, η υπόθεση ότι η συνάρτηση εξαναγκασμού $\rho(x, t)$ είναι συνεχής στη λωρίδα $0 \leq x \leq a, t \geq 0$, σε συνδυασμό με την (7.7), οδηγεί στον τύπο

$$(7.15) \quad R_n(t) = \frac{2}{a} \int_0^a \rho(x, t) \sin k_n x dx,$$

για τους συντελεστές $R_n(t)$.

Με βάση τις (7.14) και (7.15), η (7.12) γράφεται σαν

$$(7.16) \quad u(x, t) = u_{(f)}(x, t) + u_{(\rho)}(x, t),$$

όπου

$$(7.17\alpha) \quad u_{(f)}(x, t) := \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{a} \int_0^a f(y) \sin k_n y \, dy \right] e^{-k_n^2 t} \sin k_n x,$$

$$(7.17\beta) \quad u_{(\rho)}(x, t) := \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{a} \int_0^t \int_0^a \rho(y, \tau) e^{k_n^2 \tau} \sin k_n y \, dy \, d\tau \right] e^{-k_n^2 t} \sin k_n x.$$

Με αυτό τον τρόπο γίνεται προφανές ότι τα μέρη $u_{(f)}(x, t)$ και $u_{(\rho)}(x, t)$ της λύσης $u(x, t)$ του ΠΑΣΤ (7.2) μηδενίζονται, όταν $f(x) = 0$ και $\rho(x, t) = 0$, αντίστοιχα. Αυτό σημαίνει ότι, η συνάρτηση $u_{(f)}(x, t)$ αποτελεί λύση του παραπάνω ΠΑΣΤ όταν η αντίστοιχη ΜΔΕ είναι ομογενής, ενώ η $u_{(\rho)}(x, t)$ αποτελεί λύση του ίδιου ΠΑΣΤ όταν είναι ομογενής η αρχική συνθήκη.

Με άλλα λόγια, οι συναρτήσεις $u_{(f)}(x, t)$ και $u_{(\rho)}(x, t)$ αποτελούν λύσεις των ΠΑΣΤ (7.4) και (7.5), αντίστοιχα, κι αυτό αποτελεί επιβεβαίωση του ότι η σύνθεση αυτών των δύο ΠΑΣΤ οδηγεί στο (7.2).

Παράδειγμα 7.2

Με τον ίδιο, ουσιαστικά, τρόπο μπορούμε να λύσουμε και το ΠΑΣΤ (7.3), στο οποίο η μη ομογένεια εμφανίζεται μόνο στις συνοριακές συνθήκες. Ωστόσο, τα βήματα που θ' ακολουθήσουμε θα είναι κάπως διαφορετικά και τέτοια που να φέρνουν στην επιφάνεια την μη ομογένεια των παραπάνω συνθηκών.

Συγκεκριμένα, θα ξεκινήσουμε πολλαπλασιάζοντας όλα τα μέλη της ΜΔΕ $u_t = u_{xx}$ με τη συνάρτηση $\sin k_n x$ κι ολοκληρώνοντας το αποτέλεσμα από το $x = 0$ ως το $x = a$. Έτσι οδηγούμαστε στη σχέση

$$(7.18) \quad \int_0^a u_t(x, t) \sin k_n x \, dx = \int_0^a u_{xx}(x, t) \sin k_n x \, dx.$$

Ολοκληρώνοντας στο δεξί μέλος της (7.18) κατά παράγοντες, βρίσκουμε ότι

$$(7.19) \quad \begin{aligned} \int_0^a u_{xx}(x, t) \sin k_n x \, dx &= [u_x(x, t) \sin k_n x]_0^a - k_n \int_0^a u_x(x, t) \cos k_n x \, dx \\ &= -k_n \int_0^a u_x(x, t) \cos k_n x \, dx \\ &= -k_n \{ [u(x, t) \cos k_n x]_0^a + k_n \int_0^a u(x, t) \sin k_n x \, dx \} \\ &= -k_n [(-1)^n u(a, t) - u(0, t) - k_n^2 \int_0^a u(x, t) \sin k_n x \, dx] \end{aligned}$$

Λαβαίνοντας τώρα υπόψη τις συνοριακές συνθήκες (7.3γ), γράφουμε την προηγούμενη σχέση στη μορφή

$$(7.19) \quad \int_0^a u_{xx}(x, t) \sin k_n x \, dx = -k_n [(-1)^n r(t) - l(t)] - k_n^2 \int_0^a u(x, t) \sin k_n x \, dx.$$

Κατά συνέπεια, η (7.18) μετατρέπεται στην

$$(7.20) \quad \int_0^a u_t(x, t) \sin k_n x \, dx = -k_n [(-1)^n r(t) - l(t)] - k_n^2 \int_0^a u(x, t) \sin k_n x \, dx.$$

Σ' αυτό το σημείο εισάγουμε τις συναρτήσεις

$$(7.21) \quad A_n(t) := \frac{2}{a} \int_0^a u(x, t) \sin k_n x \, dx.$$

Αυτές δεν είναι παρά οι συντελεστές Fourier της συνάρτησης $u_{(t)}(x)$ στην οποία ανάγεται κάθε

συγκεκριμένη χρονική στιγμή η $u(x, t)$. Δηλαδή, $u_{(t)}(x) := u(x, t)$. Υποθέτοντας ότι η συνάρτηση $u(x, t)$ είναι ομαλή, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι,

$$(7.22) \quad A_n'(t) = \frac{2}{a} \int_0^a u_t(x, t) \sin k_n x \, dx.$$

Με βάση αυτές τις παραδοχές, η (7.20) γίνεται

$$(7.23) \quad A_n'(t) = -\frac{2}{a} k_n [(-1)^n r(t) - l(t)] - k_n^2 A_n(t).$$

Αυτή η ΣΔΕ πρώτης τάξης είναι της ίδιας κατηγορίας μ' εκείνη του προηγούμενου παραδείγματος και η λύση της δίνεται από τις συναρτήσεις

$$(7.24) \quad A_n(t) = a_n e^{-k_n^2 t} - \frac{2}{a} k_n e^{-k_n^2 t} \int_0^t e^{k_n^2 \tau} [(-1)^n r(\tau) - l(\tau)] \, d\tau.$$

Τέλος, η αντικατάσταση της αρχικής συνθήκης $u(x, 0) = 0$ στην (7.21) οδηγεί στην $A_n(0) = 0$. Αυτή συνεπάγεται ότι $a_n = 0$ και άρα

$$(7.25) \quad A_n(t) = -\frac{2}{a} k_n e^{-k_n^2 t} \int_0^t e^{k_n^2 \tau} [(-1)^n r(\tau) - l(\tau)] \, d\tau.$$

Τώρα, όπως ήδη σημειώσαμε, η σχέση (7.21) υποδηλώνει ότι οι συναρτήσεις $A_n(t)$ που μόλις βρήκαμε αποτελούν του συντελεστές της σειράς Fourier ημιτόνων της συνάρτησης που κάθε στιγμή ορίζεται από την $u(x, t)$. Συνακόλουθα, η ίδια η $u(x, t)$ ανακατασκευάζεται από τις $A_n(t)$ ως εξής:

$$(7.26) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t) \sin k_n x.$$

Άρα, η λύση του ΠΑΣΤ (7.3) στην οποία οδηγεί η μέθοδος που ακολουθήσαμε είναι της μορφής

$$(7.27) \quad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{a} k_n \int_0^t e^{k_n^2 \tau} [l(\tau) - (-1)^n r(\tau)] \, d\tau \right] e^{-k_n^2 t} \sin k_n x.$$

Παράδειγμα 7.3

Όπως ήδη αναφέραμε στην εισαγωγή αυτού το εδάφιου, ένας τρόπος αντιμετώπισης μιας μη ομογένειας είναι η μετατροπή της σε μη ομογένεια διαφορετικού είδους.

Για να δώσουμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα, επιστρέφουμε στο προηγούμενο ΠΑΣΤ και, αρχικά, σημειώνουμε το εξής: Η γενική λύση της ΜΔΕ

$$(7.28) \quad U_{xx}(x, t) = 0$$

δίνεται από τις συναρτήσεις της μορφής

$$(7.29) \quad U(x, t) = \alpha(t) + x \beta(t).$$

Από την τελευταία έκφραση αμέσως έπεται ότι

$$(7.30) \quad U(0, t) = \alpha(t), \quad U(a, t) = \alpha(t) + a \beta(t).$$

Άρα, η $U(x, y)$ θα σέβεται τις συνοριακές συνθήκες $U(0, t) = l(t)$, $U(a, t) = r(t)$, αν οι συναρτήσεις $\alpha(t)$ και $\beta(t)$ επιλεγούν έτσι ώστε

$$(7.31) \quad \alpha(t) = l(t), \quad \alpha(t) + a \beta(t) = r(t).$$

Τότε η $U(x, t)$ γίνεται

$$(7.32) \quad U(x, t) = l(t) + (x/a) [r(t) - l(t)] = [1 - (x/a)] l(t) + (x/a) r(t)$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η $u(x, t)$ αποτελεί λύση του ΠΑΣΤ (7.3). Τότε, η συνάρτηση

$$(7.32) \quad v(x, t) := u(x, t) - U(x, t)$$

έχει τις ακόλοθες ιδιότητες:

(i) Αποτελεί λύση της μη ομογενούς ΜΔΕθα

$$(7.33\alpha) \quad v_t = v_{xx} + [1 - (x/a)] l'(t) + (x/a) r'(t).$$

(ii) Πληροί τις ομογενείς συνοριακές

$$(7.33\beta) \quad v(0, t) = 0, \quad v(a, t) = 0, \quad t \geq 0$$

(iii) Παίρνει τις αρχικές τιμές

$$(7.33\gamma) \quad v(x, 0) = -[1 - (x/a)] l(0) - (x/a) r(0), \quad 0 \leq x \leq a.$$

Ειδικότερα, αν $l(0) = r(0) = 0$, όπως επιβάλλεται για να έχουμε συμβατότητα ανάμεσα στην αρχική συνθήκη και τις συνοριακές, η (7.33γ) γίνεται $v(x, 0) = 0$, $0 \leq x \leq a$. Αυτό σημαίνει ότι στο ΠΑΣΤ (7.33) το μόνο μη ομογενές στοιχείο είναι η ΜΔΕ.

Από πρακτική άποψη, η μετάθεση της μη ομογένειας από τις συνοριακές συνθήκες στη ΜΔΕ έχει την ακόλουθη σημασία. Αν έχουμε στη διάθεσή μας κάποια μέθοδο επίλυσης του τροποποιημένου ΠΑΣΤ, τότε μπορούμε αμέσως να λύσουμε και το αρχικό. Για παράδειγμα, η επίλυση του ΠΑΣΤ (7.33) οδηγεί, μέσω της (7.32), στη λύση του ΠΑΣΤ (7.3).

Ασκήσεις

7.1 Να κατασκευαστεί η λύση του ΠΑΣΤ (7.3) για τις παρακάτω επιλογές των συναρτήσεων $f(x)$, και $\rho(x, t)$.

$$(i) f(x) = x(x-a), \quad \rho(x, t) = e^{-t} \quad 0 \leq x \leq a, \quad t \geq 0, \quad a = \pi.$$

$$(ii) f(x) = x(a-x), \quad \rho(x, t) = t e^{-t} \quad 0 \leq x \leq a, \quad t \geq 0, \quad a = \pi.$$

$$(ii) f(x) = x(a-x), \quad \rho(x, t) = x(x-a) e^{-t} \quad 0 \leq x \leq a, \quad t \geq 0, \quad a = \pi.$$

7.2 Για καθένα από τα παρακάτω ζευγάρια συνοριακών συνθηκών, να λυθεί το ΠΑΣΤ (7.3) πρώτα με τη μέθοδο του Παραδγ. 7.2 κι έπειτα μ' εκείνη του Παραδγ. 7.3 και να συγκριθούν τ' αποτελέσματα των δύο μεθόδων.

$$(i) u(0, t) = t e^{-t}, \quad u(a, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad a = \pi.$$

$$(ii) u(0, t) = 0, \quad u(a, t) = 20(1 - e^{-t}), \quad t \geq 0, \quad a = \pi.$$

$$(ii) u(0, t) = 10(1 - e^{-t}), \quad u(a, t) = 60(1 - e^{-t}), \quad t \geq 0, \quad a = \pi.$$

7.3 Να λυθεί το ΠΑΣΤ

$$\begin{aligned}
 u_t &= u_{xx} + \rho(x, t), & 0 < x < a, & \quad t > 0, \\
 u(x, 0) &= f(x), & 0 \leq x \leq a, \\
 u_x(0, t) &= 0, \quad u_x(a, t) = 0, & t \geq 0.
 \end{aligned}$$

Εξειδικεύστε την απάντησή σας για την περίπτωση όπου

$$f(x) = x^2(x-a)^2, \quad \rho(x, t) = e^{-t} \quad 0 \leq x \leq a, \quad t \geq 0, \quad a = \pi.$$

7.4 Να λυθεί το ΠΑΣΤ

$$\begin{aligned}
 u_t &= u_{xx}, & 0 < x < a, & \quad t > 0, \\
 u(x, 0) &= 0, & 0 \leq x \leq a, \\
 u_x(0, t) &= l(t), \quad u_x(a, t) = r(t), & t \geq 0.
 \end{aligned}$$

Εξειδικεύστε την απάντησή σας για τις ακόλουθες περιπτώσεις

(i) $u_x(0, t) = t e^{-t}, \quad u_x(a, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad a = \pi.$

(ii) $u_x(0, t) = 0, \quad u_x(a, t) = 20(1 - e^{-t}), \quad t \geq 0, \quad a = \pi.$

7.5 Να λυθεί το ΠΑΣΤ

$$\begin{aligned}
 u_{tt} &= u_{xx} + \rho(x, t), & 0 < x < a, & \quad t > 0, \\
 u(x, 0) &= f(x), & 0 \leq x \leq a, \\
 u(0, t) &= 0, \quad u(a, t) = 0, & t \geq 0.
 \end{aligned}$$

Εξειδικεύστε την απάντησή σας για την περίπτωση όπου

$$f(x) = x(x-a), \quad \rho(x, t) = x(a-x)t e^{-t} \quad 0 \leq x \leq a, \quad t \geq 0, \quad a = \pi.$$

7.6 Να λυθεί το ΠΑΣΤ

$$\begin{aligned}
 u_{tt} &= u_{xx} + \rho(x, t), & 0 < x < a, & \quad t > 0, \\
 u(x, 0) &= f(x), & 0 \leq x \leq a, \\
 u_x(0, t) &= 0, \quad u_x(a, t) = 0, & t \geq 0.
 \end{aligned}$$

Εξειδικεύστε την απάντησή σας για την περίπτωση όπου

$$f(x) = x^2(x-a)^2, \quad \rho(x, t) = x(a-x)t e^{-t} \quad 0 \leq x \leq a, \quad t \geq 0, \quad a = \pi.$$

■ Πολυδιάστατα προβλήματα αρχικών-συνοριακών τιμών

1. Ιδιοτιμές και ιδιοσυναρτήσεις διαφορικών τελεστών

Στο προηγούμενο εδάφιο εισαγάγαμε την μέθοδο του διαχωρισμού των μεταβλητών και δείξαμε την αποτελεσματικότητά της στην επίλυση προβλημάτων αρχικών και συνοριακών τιμών (ΠΑΣΤ). Ωστόσο, το πλαίσιο της ανάλυσής μας ήταν στενό. Συγκεκριμένα, η συζήτησή μας περιορίστηκε σε ΜΔΕ που αφορούν συναρτήσεις δύο μόνο μεταβλητών και σε προβλήματα που, με τον ένα ή τον άλλο τρόπο, οδηγούν σε σειρές Fourier ημιτόνων ή/και συνημιτόνων.

Ο στόχος αυτού του εδαφίου είναι διπλός: Από τη μια, θέλουμε να καταδείξουμε ότι η μέθοδος του διαχωρισμού των μεταβλητών είναι το ίδιο αποτελεσματική και όταν οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι περισσότερες από δύο. Από την άλλη, πρέπει να καταστεί σαφές ότι μπορούμε να κατασκευάζουμε σειρές που συγκλίνουν σε δοσμένη συνάρτηση χρησιμοποιώντας και άλλες οικογένειες ορθογώνιων συναρτήσεων, διαφορετικές από τις τριγωνομετρικές.

Το ευρύτερο πλαίσιο μπορεί να περιγραφεί και με όρους της θεωρίας τελεστών. Βέβαια, αυτή η θεωρία ξεφεύγει από τους στόχους του παρόντος συγγράμματος. Ωστόσο, υπάρχει περιθώριο για γνωρίσουμε τα βασικά της στοιχεία και προς αυτή την κατεύθυνση θα ξεκινήσουμε με το εξής απλό παράδειγμα.

Θεωρούμε μια συνάρτηση $u(x)$ που είναι διαφορίσιμη σε κάποιο διάστημα της πραγματικής ευθείας. Για παράδειγμα την $u(x) = x^2$, $-\infty < x < \infty$. Με παράγωγο της προηγούμενης εννοούμε τη συνάρτηση $u'(x) = 2x$, $-\infty < x < \infty$. Η δεύτερη μπορεί να θεωρηθεί ως αποτέλεσμα της πράξης της παραγωγίσιμης της πρώτης. Συνήθως, αυτός που εκτελεί αυτή την πράξη είμαστε εμείς οι ίδιοι. Ωστόσο, για να ... το παίζουμε υπεράνω, θ' αποστασιοποιηθούμε από την όλη διαδικασία, υιοθετώντας την ακόλουθη άποψη.

Ο **τελεστής της παραγωγίσιμης** είναι κάποιος τύπος που ονομάζεται ∂_x . Όταν λοιπόν αυτό ... το υποκείμενο δρα στη συνάρτηση $u(x)$, το αποτέλεσμα είναι η $\partial_x u(x) \equiv u'(x)$.

Γενικά, η δράση του τελεστή ∂_x έχει ... δραστικά αποτελέσματα! Μπορεί ακόμη και ν' απαγάγει τη συνάρτηση στην οποία επενεργεί από την οικογένειά της. Θεωρήστε, για παράδειγμα, τη συνάρτηση $u(x) = x|x|$. Δρώντας σ' αυτή τη συνάρτηση, ο τελεστής ∂_x παράγει την $\partial_x u(x) = 2|x|$. Κι ενώ η $u(x)$ είναι διαφορίσιμη, η $\partial_x u(x)$ δεν είναι.

Ωστόσο, υπάρχουν και περιπτώσεις όπου το αποτέλεσμα της δράσης του τελεστή ∂_x είναι αρκετά ήπιο. Ιδιαίτερη σημασία για όσα ακολουθούν έχει η περίπτωση κατά την οποία, δρώντας σε μια συνάρτηση $u(x)$, ο τελεστής ∂_x παράγει ένα πολλαπλάσιό της. Με άλλα λόγια, ξεχωριστό ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση για την οποία ισχύει ότι

$$(1.1) \quad \partial_x u = \lambda u.$$

Όταν αυτό συμβαίνει, η σταθερή λ ονομάζεται **ιδιοτιμή** και η αντίστοιχη (μη τετριμμένη) u **ιδιοσυνάρτηση** του τελεστή ∂_x . Στη διεθνή βιβλιογραφία, χρησιμοποιούνται οι όροι eigenvalue και eigenfunction, αντίστοιχα. Πρόκειται για υβριδικές λέξεις, που το πρώτο συνθετικό τους, eigen, προέρχεται από τα Γερμανικά και προφέρεται (περίπου σαν) άιγκεν. Το δεύτερο είναι η Αγγλική λέξη value (=τιμή) ή function (=συνάρτηση), ανάλογα. Στην ελληνική βιβλιογραφία, αντί για ιδιοτιμή χρησιμοποιείται και ο όρος **χαρακτηριστική τιμή**. Τότε, η αντίστοιχη u ονομάζεται **χαρακτηριστική συνάρτηση**.

Τις ιδιοτιμές και ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή ∂_x μπορούμε να τις βρούμε πολύ εύκολα. Γιατί, η (1.1) είναι μια απλή γραμμική ΣΔΕ πρώτης τάξης, της οποίας οι λύσεις δίνονται από τον τύπο

$$(1.2) \quad u = c e^{\lambda x},$$

όπου τόσο η σταθερή ολοκλήρωσης c , όσο και η παράμετρος λ , μπορεί ν' ανήκουν στους μιγαδικούς αριθμούς. Επιτρέπουμε, δηλαδή, στη συνάρτηση $u(x)$ να παίρνει μιγαδικές τιμές.

Με βάση αυτό το αποτέλεσμα μπορούμε πλέον να πούμε ότι οποιοδήποτε $\lambda \in \mathbb{C}$ αποτελεί ιδιοτιμή του τελεστή ∂_x . Σε κάθε συγκεκριμένη ιδιοτιμή λ_0 , αντιστοιχούν άπειρες ιδιοσυναρτήσεις, οι $u_0(x) = c e^{\lambda_0 x}$. Ωστόσο, όλες αυτές είναι μεταξύ τους γραμμικά εξαρτημένες. Συνεπώς, μπορούμε να θεωρούμε ως αντιπρόσωπο όλων τους την $u_0(x) = e^{\lambda_0 x}$.

Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να βρούμε τις ιδιοτιμές και τις ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή ∂_x^2 , που ορίζεται από την σύνθεση του ∂_x με τον εαυτό του. Γιατί, το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να βρούμε τις συναρτήσεις $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ που αποτελούν λύσεις της ΣΔΕ

$$(1.3) \quad \partial_x^2 u = \lambda u \Leftrightarrow u'' = \lambda u.$$

Όμως, αυτή τη ΣΔΕ τη λύσαμε επανειλημμένα στο προηγούμενο κεφάλαιο. Γνωρίζουμε λοιπόν ότι η (1.3) είναι επιλύσιμη για κάθε $\lambda \in \mathbb{C}$. Συγκεκριμένα, όταν το $\lambda = 0$, τότε οι λύσεις της (1.3) προκύπτουν από τον γραμμικό συνδυασμό των συναρτήσεων $\{1, x\}$. Διαφορετικά, οι λύσεις της (1.3) δίνονται από τον γραμμικό συνδυασμό των $\{\exp(\sqrt{\lambda} x), \exp(-\sqrt{\lambda} x)\}$.

Σ' αυτό το σημείο θα πρέπει να σημειώσουμε ότι, στα προβλήματα ιδιοτιμών που εξετάσαμε ως τώρα, οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις είχαν ως πεδίο ορισμού ολόκληρη την πραγματική ευθεία. Συνάμα, δεν ήταν υποχρεωμένες να σέβονται κάποια συμπληρωματική συνθήκη. Όπως αναμένεται, τα πράγματα αλλάζουν άρδην όταν, με τον ένα ή τον άλλο τρόπο, περιορίσουμε το πλαίσιο της αναζήτησής μας.

Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι μας ενδιαφέρουν μόνο οι φραγμένες λύσεις της (1.3). Τότε, οι ιδιοτιμές του τελεστή ∂_x^2 που δεν ανήκουν στο τμήμα $(-\infty, 0]$ της πραγματικής ευθείας πρέπει να απορριφθούν. Το ίδιο πρέπει να γίνει και με τις ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή $\lambda = 0$ και είναι της μορφής $u_0(x) = c x$. Συνεπώς, στον χώρο των φραγμένων συναρτήσεων, ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή ∂_x^2 είναι η $u_0(x) = 1$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = 0$ και τα άπειρα ζευγάρια συναρτήσεων της μορφής $\{\exp(i k x), \exp(-i k x)\}$, όπου $k := \sqrt{-\lambda}$, καθένα από τα οποία αντιστοιχεί στην ίδια ιδιοτιμή $\lambda < 0$.

Το τι συμβαίνει αν, για παράδειγμα, περιορίσουμε το πεδίο ορισμού των λύσεων της (1.3) στο κλειστό διάστημα $[0, a]$ κι επιβάλουμε ομογενείς συνοριακές συνθήκες στην $u(x)$, το

είδαμε αναλυτικά στο προηγούμενο κεφάλαιο. Το *φάσμα τιμών* της παραμέτρου λ από *συνεχές* που ήταν στην προηγούμενη περίπτωση γίνεται *διακριτό*: Η παράμετρος k υποχρεώνεται να πάρει μόνο τις τιμές $k_n := n(\pi/a)$, $n \in \mathbb{Z}$, οπότε η λ περιορίζεται στις τιμές $\lambda_n := -k_n^2$ και το σύνολο των αντίστοιχων ιδιοσυναρτήσεων ανάγεται στο $\{\sin(k_n x)\}$.

Γενικεύοντας, μπορούμε να θεωρήσουμε τον γραμμικό διαφορικό τελεστή

$$(1.4) \quad L := -p(x) \partial_x^2 + q(x) \partial_x + r(x)$$

που δρα σε κάποια κλάση συναρτήσεων U , που έχουν ως πεδίο ορισμού κάποιο τμήμα της πραγματικής ευθείας. Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις p , q και r παίρνουν πραγματικές τιμές και είναι τόσο ομαλές όσο χρειάζεται στην ανάλυση που ακολουθεί. Ο λόγος για τον οποίο γράψαμε τον συντελεστή του ∂_x^2 ως $-p(x)$ είναι για να διευκολύνει την γραφή κάποιων υστερότερων σχέσεων.

Για να γίνουμε πιο συγκεκριμένοι, θα υποθέσουμε ότι το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων U είναι το κλειστό διάστημα $[a, b]$. Τότε, το πρόβλημα ιδιοτιμών έγκειται στο να βρεθούν οι τιμές της μιγαδικής παραμέτρου λ για τις οποίες η ΣΔΕ δεύτερης τάξης

$$(1.5) \quad Lu = \lambda u \iff -p(x) u'' + q(x) u' + r(x) u = \lambda u$$

επιδέχεται λύσεις συμβατές με ορισμένες συμπληρωματικές συνθήκες.

Όπως αναφέραμε νωρίτερα, στόχος μας είναι να βρούμε ένα σύνολο ιδιοσυναρτήσεων του τελεστή L που είναι ορθογώνιες στο διάστημα $[a, b]$, σαν τις $\sin(k_n x)$ και $\cos(k_n x)$ που χρησιμοποιήσαμε στα αναπτύγματα Fourier. Άρα, έχει σημασία να δούμε αρχικά τις ιδιότητες του τελεστή L ως προς το εσωτερικό γινόμενο $\langle u, v \rangle$ δύο στοιχείων u, v του χώρου U .

Θυμίζουμε, λοιπόν ότι

$$(1.6) \quad \langle u, v \rangle := \int_a^b u(x) \bar{v}(x) dx.$$

Συνεπώς,

$$(1.7) \quad \langle u, Lv \rangle := \int_a^b u(x) \overline{Lv}(x) dx = \int_a^b u[-p \bar{v}'' + q \bar{v}' + r \bar{v}] dx,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι οι p, q και r είναι πραγματικές και, για ευκολία, παραλείψαμε την ένδειξη του ορίσματος όλων των συναρτήσεων.

Τώρα, ολοκληρώνοντας κατά παράγοντες βρίσκουμε ότι

$$(1.8) \quad \begin{aligned} \int_a^b u p \bar{v}'' dx &= \int_a^b u [(p \bar{v}')' - p' \bar{v}'] dx, \\ &= \int_a^b [(u(p \bar{v}'))' - u'(p \bar{v}') - u p' \bar{v}'] dx \\ &= [u(p \bar{v}')]_a^b - \int_a^b (u p)' \bar{v}' dx \\ &= [u p \bar{v}']_a^b - [(u p)' \bar{v}]_a^b + \int_a^b (u p)'' \bar{v} dx. \end{aligned}$$

Ανάλογα,

$$(1.9) \quad \int_a^b u q \bar{v}' dx = [u q \bar{v}]_a^b - \int_a^b (u q)' \bar{v} dx,$$

Συνεπώς,

$$(1.10) \quad \int_a^b u[-p \bar{v}'' + q \bar{v}' + r \bar{v}] dx = [-u p \bar{v}' + (u p)' \bar{v} + u q \bar{v}]_a^b \\ + \int_a^b [-(u p)'' - (u q)' + r] \bar{v} dx \\ = [p(u' \bar{v} - u \bar{v}') + (q + p') u \bar{v}]_a^b + \int_a^b [-p u'' - (2p' + q) u' + (-p'' - q' + r) u] \bar{v} dx.$$

Με άλλα λόγια,

$$(1.11) \quad \langle u, Lv \rangle = \langle L^* u, v \rangle + B(a, b),$$

όπου

$$(1.12) \quad L^* u := -p u'' - (2p' + q) u' + (-p'' - q' + r) u,$$

και

$$(1.13) \quad B(a, b) := [p(u' \bar{v} - u \bar{v}') + (q + p') u \bar{v}]_a^b.$$

Ο τελεστής L^* αναφέρεται ως *τοπικά ή φορμαλιστικά συζυγής του L* . Ο λόγος είναι ότι δύο τελεστές L, T χαρακτηρίζονται ως *συζυγείς αν*

$$(1.14) \quad \langle u, Lv \rangle = \langle Tu, v \rangle \quad \forall u, v \in U.$$

Ειδικότερα, ο τελεστής L αποκαλείται *αυτοσυζυγής αν*

$$(1.15) \quad \langle u, Lv \rangle = \langle Lu, v \rangle \quad \forall u, v \in U.$$

Οι αυτοσυζυγείς τελεστές έχουν μια σειρά από ξεχωριστές ιδιότητες που συνδέονται άμεσα με το πρόβλημα που μας απασχολεί. Όσο αφορά τον διαφορικό τελεστή L που ορίζεται στην (1.4), οι σχέσεις (1.11)-(1.12) κάνουν φανερό ότι δύο είναι τα στοιχεία που τον εμποδίζουν από το να είναι αυτοσυζυγής. Το πρώτο είναι η διαφορά του από τον L^* . Το δεύτερο είναι ο συνοριακός όρος $B(a, b)$. Άρα, για να καταστήσουμε τον L αυτοσυζυγή αρκεί να μηδενίσουμε τα παραπάνω στοιχεία.

Για το σκοπό αυτό, περιορίζουμε αρχικά τη συνάρτητη q , επιβάλλοντας τη συνθήκη

$$(1.16) \quad q(x) = -p'(x).$$

Με αυτό τον τρόπο, ο L^* γίνεται ίδιος με τον L και ο δεύτερος παίρνει την ειδικότερη μορφή

$$(1.17) \quad L := -p(x) \partial_x^2 - p'(x) \partial_x + r(x).$$

Ταυτόχρονα, ο συνοριακός όρος $B(a, b)$ απλουστεύεται για να γίνει

$$(1.18) \quad B(a, b) := [p(u' \bar{v} - u \bar{v}')]_a^b.$$

Τώρα, οι περισσότερες ΣΔΕ δεύτερης τάξης που προκύπτουν από την εφαρμογή της μεθόδου του διαχωρισμού των μεταβλητών συνοδεύονται από δύο συνοριακές συνθήκες της γενικής μορφής

$$(1.19\alpha) \quad B_1(u) := \alpha u(a) + \beta u'(a) + \gamma u(b) + \delta u'(b) = 0,$$

$$(1.19\beta) \quad B_2(u) := \tilde{\alpha} u(a) + \tilde{\beta} u'(a) + \tilde{\gamma} u(b) + \tilde{\delta} u'(b) = 0,$$

όπου $\alpha, \tilde{\alpha}, \beta, \tilde{\beta}$ κ.λπ. δοσμένες σταθερές. Η πλειονότητα των συνθηκών αυτού του είδους μηδενίζουν τον συνοριακό όρο $B(a, b)$ της (1.18), καθιστώντας τον τελεστή (1.17) αυτοσυζυγή. Αυτό ισχύει, για παράδειγμα, όταν οι συνθήκες (1.19) διαχωρίζονται, με τρόπο ώστε η μία να συνδέεται με το ένα άκρο του διαστήματος $[a, b]$ κι η δεύτερη με το άλλο. Η επαλήθευση του γεγονότος ότι οι **διαχωρισμένες συνοριακές συνθήκες**

$$(1.20\alpha) \quad B_1(u) := \alpha u(a) + \beta u'(a) = 0,$$

$$(1.20\beta) \quad B_2(u) := \tilde{\gamma} u(b) + \tilde{\delta} u'(b) = 0,$$

μηδενίζουν τον συνοριακό όρο (1.18) αποτελεί απλή άσκηση.

Με την προϋπόθεση ότι και η $p(x)$ παίρνει τις ίδιες τιμές στα άκρα του διαστήματος $[a, b]$, ο συνοριακός όρος $B(a, b)$ μηδενίζεται και στην περίπτωση των μη διαχωρισμένων συνοριακών συνθηκών

$$(1.21) \quad u(a) = u(b), \quad u'(a) = u'(b),$$

τις οποίες ονομάζουμε **περιοδικές**. Τέτοιου είδους συνθήκες πρωτοσυναντήσαμε στο 3ο εδάφιο του προηγούμενου κεφάλαιου.

Σε κάθε περίπτωση, αρκετά προβλήματα ιδιοτιμών για διαφορικούς τελεστές της μορφής (1.17) έχουν κοινά τ' ακόλουθα στοιχεία:

(i) Μια ΣΔΕ της μορφής

$$(1.22) \quad Lu = \lambda wu \iff -(p(x)u')' + r(x)u = \lambda w(x)u,$$

όπου οι πραγματικές συναρτήσεις p, r , και w έχουν ως πεδίο ορισμού το διάστημα $I := [a, b]$, η $p \in C^1(I)$, οι $r, w \in C(I)$ και οι p, w παίρνουν μόνο θετικές τιμές.

(ii) Συνοριακές συνθήκες της μορφής

$$(1.23) \quad B_1(u) = 0, \quad B_2(u) = 0,$$

που καθιστούν τον τελεστή L αυτοσυζυγή.

Κάθε πρόβλημα αυτού του είδους ονομάζεται **κανονικό πρόβλημα Sturm-Liouville**. Το επίθετο "κανονικό" προστίθεται γιατί, συχνά, μία ή περισσότερες από τις προϋποθέσεις που αναφέραμε παραπάνω δεν ικανοποιούνται. Για παράδειγμα, η συνάρτηση $p(x)$ πολλές φορές μηδενίζεται στα άκρα του διαστήματος $[a, b]$. Άλλοτε πάλι, οι συναρτήσεις p και w μηδενίζονται ή απειρίζονται σε κάποιο από τα άκρα του ίδιου διαστήματος. Τέλος, το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων p, r, w και u παύει να είναι φραγμένο. Σε κάθε μια από αυτές τις περιπτώσεις, το αντίστοιχο πρόβλημα Sturm-Liouville χαρακτηρίζεται ως **ανώμαλο** ή **ιδιόμορφο**. Και βέβαια, η σημαντική διαφορά δε βρίσκεται στον χαρακτηρισμό, αλλά στο γεγονός ότι η γενική ανάλυση των ανώμαλων προβλημάτων Sturm-Liouville είναι πολύ δυσκολότερη από εκείνη των κανονικών.

Για όλα τα κανονικά προβλήματα Sturm-Liouville ισχύει μια σειρά από θεωρήματα, ορισμένα από τα οποία μπορεί κανείς να αποδείξει αρκετά εύκολα. Το επόμενο αποτελεί ένα

χαρακτηριστικό παράδειγμα.

Θεώρημα 1.1

Αν το πρόβλημα Sturm-Liouville είναι κανονικό, τότε

(i) Όλες οι ιδιοτιμές του είναι πραγματικές.

(ii) Ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι μεταξύ τους ορθογώνιες, ως προς το εσωτερικό γινόμενο

$$(1.24) \quad \langle u, v \rangle_w := \int_a^b u(x) \bar{v}(x) w(x) dx.$$

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι ο μιγαδικός αριθμός λ αποτελεί ιδιοτιμή του τελεστή L , με την ευρύτερη έννοια της (1.22). Δηλαδή, υπάρχει μία τουλάχιστον μη τετριμμένη συνάρτηση $u(x)$, τέτοια που $Lu = \lambda w u$. Η λεγόμενη *συνάρτηση βάρους*, w , διαφέρει στη γενικότερη περίπτωση από τη μονάδα, αλλά, όπως έχουμε υποθέσει, είναι παντού θετική.

Σύμφωνα με τον ορισμό (1.24) του εσωτερικού γινομένου $\langle u, v \rangle_w$, ο αριθμός

$$(1.25) \quad \|u\|_w := \sqrt{\langle u, u \rangle_w} \equiv \left[\int_a^b |u(x)|^2 w(x) dx \right]^{1/2}$$

είναι θετικός. Από την άλλη,

$$(1.26\alpha) \quad \langle u, Lu \rangle = \langle u, \lambda w u \rangle_w = \bar{\lambda} \langle u, w u \rangle \equiv \bar{\lambda} \|u\|_w^2,$$

$$(1.26\beta) \quad \langle Lu, u \rangle = \langle \lambda w u, u \rangle_w = \lambda \langle w u, u \rangle \equiv \lambda \|u\|_w^2.$$

Αφού λοιπόν σε κάθε κανονικό πρόβλημα Sturm-Liouville ο τελεστής L είναι αυτοσυζυγής, δηλαδή $\langle u, Lu \rangle = \langle Lu, u \rangle$, αμέσως έπεται ότι $\bar{\lambda} = \lambda$, πράγμα που σημαίνει ότι $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ας υποθέσουμε στη συνέχεια ότι η u_1 είναι μια από τις ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_1 κι η u_2 μια από εκείνες που αντιστοιχούν στη διαφορετική ιδιοτιμή λ_2 . Τότε, με βάση το προηγούμενο αποτέλεσμα,

$$(1.27\alpha) \quad \langle Lu_1, u_2 \rangle = \langle \lambda_1 w u_1, u_2 \rangle = \lambda_1 \langle u_1, u_2 \rangle_w.$$

$$(1.27\beta) \quad \langle u_1, Lu_2 \rangle = \langle u_1, \lambda_2 w u_2 \rangle = \lambda_2 \langle u_1, u_2 \rangle_w.$$

Αλλά, $\langle Lu_1, u_2 \rangle = \langle u_1, Lu_2 \rangle$, γιατί ο L είναι αυτοσυζυγής. Άρα, οι (1.27) συνεπάγονται ότι $(\lambda_1 - \lambda_2) \langle u_1, u_2 \rangle_w = 0$. Συνακόλουθα, $\langle u_1, u_2 \rangle_w = 0$, αφού ξεκινήσαμε με την υπόθεση ότι $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

■

Αντίθετα, το επόμενο θεώρημα ανήκει στην κατηγορία εκείνων που η απόδειξή τους είναι αρκετά δυσκολότερη. Ωστόσο, το βασικό του συμπέρασμα απλώς γενικεύει τ' αποτελέσματα που συναντήσαμε στο πλαίσιο των σειρών Fourier. Περισσότερα συγκεκριμένα παραδείγματα των συμπεριφορών που προβλέπει αυτό το θεώρημα θα συναντήσουμε στα εδάφια που ακολουθούν.

Θεώρημα 1.2

Αν το πρόβλημα Sturm-Liouville είναι κανονικό, τότε

(i) Οι ιδιοτιμές του αποτελούν ακολουθία από διακριτούς θετικούς αριθμούς, λ_n , με την ιδιότητα ότι $\lambda_n \rightarrow \infty$ καθώς το $n \rightarrow \infty$.

(ii) Υπάρχει μια ακολουθία ορθογώνιων και κανονικών ιδιοσυναρτήσεων, u_n , που αποτελεί βάση του χώρου $L_w^2(a, b)$, των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων ως προς τη συνάρτηση βάρους w . (Σημ. Μια συνάρτηση $u \in L_w^2(a, b)$ αν $\int_a^b |u(x)|^2 w(x) dx < \infty$ και λέγεται **κανονική** όταν το προηγούμενο ολοκλήρωμα είναι ίσο με τη μονάδα).

■

Γενικεύοντας ακόμη περισσότερο, μπορούμε να θεωρήσουμε γραμμικούς διαφορικούς τελεστές δεύτερης τάξης που δρουν σε συναρτήσεις πολλών μεταβλητών. Χρησιμοποιώντας τον γνωστό μας συμβολισμό (βλ. κεφ. IV-12), μπορούμε να γράψουμε έναν τέτοιο τελεστή στη μορφή

$$(1.28) \quad L := \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \partial_i \partial_j + \sum_{i=1}^n b_i(x) \partial_i + c(x)$$

όπου $a_{ij}, b_i, c : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ δοσμένες συναρτήσεις, με πεδίο ορισμού κάποιο ανοιχτό και συνεκτικό υποσύνολο Ω του \mathbb{R}^n . Τότε, το πρόβλημα ιδιοτιμών έγκειται στην εύρεση των μιγαδικών αριθμών λ για τους οποίους η ΜΔΕ

$$(1.29\alpha) \quad Lu = \lambda w u \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(x) u_{ij} + \sum_{i=1}^n b_i(x) u_i + c(x) u = \lambda w(x) u,$$

επιδέχεται λύσεις, συμβατές με τις συνοριακές συνθήκες

$$(1.29\beta) \quad B_\alpha u(x) = F_\alpha(x), \quad x \in \partial\Omega.$$

Εννοείται ότι, τόσο η συνάρτηση βάρους $w : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, όσο και οι συναρτήσεις $F_\alpha : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{C}$ που προκαθορίζουν τις συνοριακές τιμές, είναι γνωστές.

Ένα από τα σημαντικότερα παραδείγματα αυτού του είδους, και στο οποίο θα περιορίσουμε την παραπέρα ανάλυσή μας, αποτελεί η εύρεση των ιδιοτιμών και ιδιοσυναρτήσεων του τελεστή Laplace, όταν οι συνοριακές συνθήκες είναι τύπου Dirichlet, Neumann ή Robin.

Για λόγους που θα φανούν καθαρά στη συνέχεια, γράφουμε την αντίστοιχη ΜΔΕ στη μορφή

$$(1.30) \quad -\Delta u = \lambda u$$

και σημειώνουμε τα εξής: Το θεώρημα και οι ταυτότες (του) Green που συναντήσαμε στο Κεφ. IV-11 ισχύουν απαράλλαχτα σε κάθε φραγμένη περιοχή Ω του \mathbb{R}^n , και όχι μόνο στον \mathbb{R}^2 . Αρκεί το σύνορο $\partial\Omega$ αυτής της περιοχής να είναι ομαλό. Με αυτό εννοούμε ότι το σύνολο $\partial\Omega$ προκύπτει από την ένωση ενός πεπερασμένου πλήθους η (υπερ-)επιφανειών, που, όταν η μία συναντάει την άλλη, δεν εφάπτονται.

Συγκεκριμένα, το γενικευμένο θεώρημα Green λέει ότι, για κάθε διανυσματικό πεδίο $\mathbf{v}(x)$ που είναι κλάσης C^1 σε κάποιο ανοιχτό υποσύνολο $\tilde{\Omega}$ του \mathbb{R}^n το οποίο καλύπτει την κλειστή περιοχή $\bar{\Omega} := \Omega \cup \partial\Omega$,

$$(1.30) \quad \boxed{\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{v} \, dV = \int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS}$$

Το αριστερό μέλος της (1.30) συμβολίζει ένα n -πλό ολοκλήρωμα Riemann, ενώ το δεξί συμβολίζει ένα **(υπερ-)επιφανειακό ολοκλήρωμα**. Το δεύτερο, είναι ένα $(n-1)$ -πλό ολοκλήρωμα που ορίζεται με τρόπο ανάλογο προς εκείνον που οδηγεί στα διπλά επιφανειακά ολοκληρώματα της συνήθους ανάλυσης στον \mathbb{R}^3 . Το μοναδιαίο διάνυσμα \mathbf{n} είναι κάθετο στην (υπερ-)επιφάνεια $\partial\Omega$ και βλέπει προς το εξωτερικό της. Αν για παράδειγμα βρισκόμαστε στο τμήμα της $\partial\Omega$ που ορίζεται από τη συνθήκη

$$(1.31) \quad f(\mathbf{x}) = 0, \quad \nabla f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0},$$

τότε το διάνυσμα \mathbf{n} στο σημείο $\mathbf{x} \in \partial\Omega$ είναι συγγραμμικό με το $\nabla f(\mathbf{x})$.

Αν λοιπόν υποθέσουμε ότι

$$(1.32) \quad \mathbf{v} = u \nabla \varphi, \quad u \in C^1(\tilde{\Omega}), \quad \varphi \in C^2(\tilde{\Omega}),$$

τότε η (1.30) οδηγεί αμέσως στην (γενικευμένη) **πρώτη ταυτότητα (του) Green**

$$(1.33) \quad \boxed{\int_{\Omega} (u \Delta \varphi + \nabla u \cdot \nabla \varphi) \, dV = \int_{\partial\Omega} u \partial_n \varphi \, dS.}$$

Η αντικατάσταση $(u, \varphi) \rightarrow (\varphi, u)$ μετατρέπει την (1.33) σε μια πανομοιότυπη ταυτότητα, που, αν αφαιρεθεί από την αρχική, δίνει το εξής αποτέλεσμα:

$$(1.34) \quad \boxed{\int_{\Omega} (u \Delta \varphi - \varphi \Delta u) \, dV = \int_{\partial\Omega} (u \partial_n \varphi - \varphi \partial_n u) \, dS}$$

Αυτή η σχέση ονομάζεται **δεύτερη ταυτότητα (του) Green**.

Τέλος, ως **τρίτη ταυτότητα (του) Green** συχνά αναφέρεται η σχέση

$$(1.35) \quad \boxed{\int_{\Omega} \Delta \varphi \, dV = \int_{\partial\Omega} \partial_n \varphi \, dS}$$

που προκύπτει θέτοντας $u = 1$ στην (1.34).

Ας υποθέσουμε τώρα ότι οι συναρτήσεις u, φ αποτελούν ομαλές λύσεις της (1.30). Τότε, από την δεύτερη ταυτότητα Green αμέσως έπεται ότι

$$(1.36) \quad - \int_{\Omega} u \Delta \bar{\varphi} \, dV = - \int_{\Omega} \bar{\varphi} \Delta u \, dV + \int_{\partial\Omega} (u \partial_n \bar{\varphi} - \bar{\varphi} \partial_n u) \, dS$$

Ισοδύναμα

$$(1.37) \quad \langle u, L \varphi \rangle = \langle L u, \varphi \rangle + \int_{\partial\Omega} (u \partial_n \bar{\varphi} - \bar{\varphi} \partial_n u) \, dS,$$

όπου, προφανώς,

$$(1.38) \quad \langle u, \psi \rangle := \int_{\Omega} u \bar{\psi} dV.$$

Άμεση συνέπεια της σχέσης (1.37) είναι ότι ο τελεστής $L = -\Delta$ είναι αυτοσυζυγής, για ομογενείς συνοριακές συνθήκες τύπου Dirichlet, Neumann ή Robin. Αυτό είναι προφανές για τις συνθήκες Dirichlet και Neumann, γιατί οι πρώτες απαιτούν τον μηδενισμό των ίδιων των u και ψ και οι δεύτερες τον μηδενισμό των $\partial_n u$ και $\partial_n \psi$ πάνω στο σύνορο $\partial\Omega$ της περιοχής Ω . Αλλά το ίδιο ισχύει και για την ομογενή συνθήκη Robin $u + a(x)\partial_n u = 0$, αν η συνάρτηση $a(x)$ είναι πραγματική. Γιατί, τότε και η λύση ψ πρέπει να σέβεται την ίδια συνθήκη. Δηλαδή, $\psi + a(x)\partial_n \psi = 0$. Συνεπώς, $a(u\partial_n \bar{\psi} - \bar{\psi}\partial_n u) = -u\bar{\psi} + \bar{\psi}u = 0$. Όμως, στη συνθήκη Robin η συνάρτηση $a(x)$ δεν επιτρέπεται να μηδενίζεται ταυτοτικά. Άρα, και σ' αυτή την περίπτωση $u\partial_n \bar{\psi} - \bar{\psi}\partial_n u = 0$.

Με βάση τις προηγούμενες παρατηρήσεις καταλήγουμε στο ακόλουθο σημαντικό αποτέλεσμα:

Θεώρημα 1.3

Ας υποθεθεί ότι πρόβλημα ιδιοτιμών-ιδιοσυναρτήσεων

$$(1.39\alpha) \quad -\Delta u = \lambda u, \quad x \in \Omega.$$

$$(1.39\beta) \quad Bu = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

όπου Ω μια συνεκτική και φραμένη περιοχή του \mathbb{R}^n με ομαλό σύνορο $\partial\Omega$ και $Bu = 0$ συνοριακή συνθήκη τύπου Dirichlet, Neumann ή Robin, είναι επιλύσιμο. Τότε,

(i) Οι ιδιοτιμές του προβλήματος (1.37) είναι πραγματικές. Ειδικότερα, στην περίπτωση των συνθηκών Dirichlet όλες οι ιδιοτιμές είναι θετικές. Στην περίπτωση των συνθηκών Neumann οι ιδιοτιμές είναι μη αρνητικές και το ίδιο ισχύει για τις συνθήκες Robin, $u + a(x)\partial_n u = 0$, αν η συνάρτηση $a(x)$ δεν παίρνει αρνητικές τιμές.

(ii) Οι ιδιοσυναρτήσεις του μπορεί να επιλεγούν πραγματικές και, όταν αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές, είναι μεταξύ τους ορθογώνιες.

Απόδειξη. Το ότι οι ιδιοτιμές του προβλήματος (1.37) είναι πραγματικές απορρέει αυτόματα από το γεγονός ότι οι συγκεκριμένες συνοριακές συνθήκες καθιστούν τον τελεστή $-\Delta u$ αυτοσυζυγή. Αυτό το αποδείξαμε πιο πάνω, οπότε το μόνο που μένει να τεκμηριωθεί είναι ότι το φάσμα των ιδιοτιμών περιορίζεται στο μη αρνητικό τμήμα της πραγματικής ευθείας. Επιπλέον όταν το $\lambda \in \mathbb{R}$, η ΜΔΕ $-\Delta u = \lambda u$ σπάει σε δύο ομοειδείς, μία για το πραγματικό και μία για το φανταστικό μέρος της συνάρτησης $u \equiv \text{Re}(u) + i \text{Im}(u)$.

Τώρα, η επιλογή $\psi = \bar{u}$ μετατρέπει την πρώτη ταυτότητα Green (1.33) στην

$$(1.40) \quad \int_{\Omega} (u \Delta \bar{u} + |\nabla u|^2) dV = \int_{\partial\Omega} u \partial_n \bar{u} dS.$$

Όμως, $\Delta \bar{u} = -\lambda \bar{u}$. Άρα, η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$(1.41) \quad \lambda \int_{\Omega} |u|^2 dV = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dV - \int_{\partial\Omega} u \partial_n \bar{u} dS.$$

Προφανώς, ο πρώτος όρος στο δεξί μέλος της (1.40) είναι μη αρνητικός. Από την άλλη, στην περίπτωση των ομογενών συνθηκών τύπου Dirichlet ή Neumann και ο δεύτερος όρος μηδε-

νίζεται αυτομάτως. Όταν πάλι η συνοριακή συνθήκη είναι τύπου Robin με $a(x) \geq 0$, τότε αυτός όρος είναι μη αρνητικός, αφού $-u \partial_n \bar{u} = \bar{a}(x) |u|^2$. Συνεπώς, το μόνο που μένει να δείξουμε είναι ότι, για τις συνθήκες Dirichlet, το πρώτο ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος της (1.40) είναι αυστηρά θετικό. Για το σκοπό αυτό ας υποθέσουμε ότι $|\nabla u| = 0$ σε κάθε σημείο της περιοχής Ω . Αυτό συνεπάγεται ότι η u είναι σταθερή σε όλη την κλειστή περιοχή $\bar{\Omega}$, αφού έχουμε υποθέσει ότι η λύση u είναι ομαλή, άρα και συνεχής. Αλλά $u = 0$ στο σύνορο. Κατά συνέπεια, η u θα μηδενιζόταν ταυτοτικά, πράγμα που έρχεται σε αντίθεση με τον ορισμό της ιδιοσυνάρτησης.

■

Ασκήσεις

1.1 Ναδειχτεί αναλυτικά ότι οι συνοριακές συνθήκες (1.20) και (1.21) μηδενίζουν τον συνοριακό όρο $B(a, b)$, που ορίζεται στην (1.18).

1.2 α) Να προσδιοστούν όλες οι ιδιοτιμές και να κατασκευαστούν οι αντίστοιχες ιδιοσυνάρτησεις του προβλήματος

$$(1.42\alpha) \quad -u'' = \lambda u, \quad 0 < x < a$$

$$(1.42\beta) \quad \alpha u(0) + \beta u'(0) = 0, \quad \gamma u(a) + \delta u'(a) = 0,$$

όπου $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ μια τυχαία τετράδα πραγματικών αριθμών.

β) Να προσδιοριστεί η σχέση του προηγούμενου προβλήματος με το ΠΑΣΤ

$$(1.43\alpha) \quad u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < a, \quad t > 0,$$

$$(1.43\beta) \quad \alpha u(0, t) + \beta u'(0, t) = 0, \quad \gamma u(a, t) + \delta u'(a, t) = 0, \quad t \geq 0,$$

$$(1.43\gamma) \quad u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq a.$$

Με βάση αυτή τη σχέση, να διερευνηθεί η φυσική σημασία των σταθερών $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$.

1.3 Ναδειχτεί ότι, η λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών (1.39), όταν υπάρχει, είναι μοναδική στην περίπτωση των συνθηκών Dirichlet, και σχεδόν μοναδική (=απροσδιόριστη μέχρι μια προσθετική σταθερή) στις περιπτώσεις Neumann και Robin.

2. Προβλήματα συνοριακών τιμών για την εξίσωση Laplace στον \mathbb{R}^3

Προβλήματα ιδιοτιμών - ιδιοσυναρτήσεων σαν αυτά στα οποία αναφέρεται το Θεώρ. 1.3 προκύπτουν συχνά, κατά την ανάλυση προβλημάτων συνοριακών ή συνοριακών-αρχικών τιμών και για τις τρεις βασικές εξισώσεις της μαθηματικής φυσικής. Στο παρόν εδάφιο, θα εξετάσουμε δύο συγκεκριμένα παραδείγματα, τα οποία συνδέονται με την επίλυση του προβλήματος Dirichlet για την εξίσωση Laplace στον \mathbb{R}^3 . Στο επόμενο, θα μελετήσουμε παραδείγματα που αφορούν την κυματική εξίσωση.

A. Το πρόβλημα Dirichlet για το εσωτερικό ενός κυλίνδρου

Ας υποθέσουμε ότι μας θέλουμε να κατασκευάσουμε λύσεις της εξίσωσης Laplace,

$$(2.1) \quad \Delta U \equiv \nabla^2 U := U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} = 0,$$

που ισχύουν στο εσωτερικό ενός κύλινδρου και πληρούν συνοριακές συνθήκες τύπου Dirichlet στην επιφάνειά του.

Αυτές οι λύσεις μπορεί να θεωρηθούν ότι παριστάνουν τη θερμοκρασία στο εσωτερικό μιας κυλινδρικής ράβδου σε συνθήκες ισορροπίας, δηλαδή όταν η θερμοκρασία δεν αλλάζει με την πάροδο του χρόνου. Εναλλακτικά, μπορεί κανείς να θεωρήσει ότι παριστάνουν το ηλεκτρικό δυναμικό στο εσωτερικό ενός σώματος με την ίδια γεωμετρία.

Ας υποθέσουμε ο κύλινδρος έχει μήκος b και ακτίνα διατομής a . Τότε, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο άξονας συμμετρίας του κύλινδρου βρίσκεται πάνω στον άξονα z ενός Καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων $x y z$, η βάση του στο επίπεδο $z = 0$ και η κορυφή του στο επίπεδο $z = b$. Έτσι, το εσωτερικό του κύλινδρου αντιστοιχεί στην περιοχή

$$(2.2) \quad \Omega := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq r < a, 0 < z < b\}, \quad r := \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Συνακόλουθα, η επιφάνεια του κύλινδρου ορίζει το σύνορο, $\partial\Omega$, της περιοχής Ω , το οποίο αποτελείται από τα εξής τρία τμήματα:

- (i) Τον κυκλικό δίσκο $\partial\Omega_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq r < a, z = 0\}$,
- (ii) Την πλευρική επιφάνεια $\partial\Omega_2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : r = a, 0 \leq z \leq b\}$, και
- (iii) Τον κυκλικό δίσκο $\partial\Omega_3 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq r < a, z = b\}$.

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα που θα μελετήσουμε, υποτίθεται ότι η θερμοκρασία $U(x, y, z)$ είναι μηδενική στην πλευρική επιφάνεια και στην κορυφή του κύλινδρου, όχι όμως και στη βάση του. Εκεί καθορίζεται από τη συνάρτηση $F(x, y)$.

Είναι φανερό ότι η γεωμετρία αυτού του προβλήματος συνοριακών τιμών (ΠΣΤ) επιβάλλει τη χρησιμοποίηση των κυλινδρικών συντεταγμένων (r, φ, z) . Αν λοιπόν θέσουμε

$$(2.3) \quad u(r, \varphi, z) := U(x(r, \varphi), y(r, \varphi), z),$$

τότε η εξίσωση Laplace (2.1) μετατρέπεται στην

$$(2.4) \quad \boxed{u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} + u_{zz} = 0}$$

η οποία θ' αποτελέσει και τη βάση της παραπέρα ανάλυσής μας.

Διαχωρισμός μεταβλητών στις κυλινδρικές συντεταγμένες

Θέτοντας

$$(2.5) \quad f(r, \varphi) := F(x(r, \varphi), y(r, \varphi)),$$

μπορούμε να δώσουμε στις συνοριακές συνθήκες του προβλήματος την ακόλουθη μορφή

$$(2.6\alpha) \quad u(r, \varphi, 0) = f(r, \varphi), \quad 0 \leq r \leq a,$$

$$(2.6\beta) \quad u(r, \varphi, b) = 0, \quad 0 \leq r \leq a,$$

$$(2.6\gamma) \quad u(a, \varphi, z) = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq b.$$

Για ν' αντιμετωπίσουμε αυτό το πρόβλημα Dirichlet για την εξίσωση Laplace, μπορούμε ξεκινήσουμε υποθέτοντας ότι η ΜΔΕ (2.4) επιδέχεται λύσεις με όλες τις ανεξάρτητες μεταβλητές διαχωρισμένες, δηλαδή της μορφής $u(r, \varphi, z) = R(r)\Phi(\varphi)Z(z)$.

Εμείς θα προτιμήσουμε να διαχωρίσουμε αρχικά μόνο την τρίτη μεταβλητή, z , από τις υπόλοιπες δύο. Δηλαδή, θα ξεκινήσουμε τη διαδικασία κατασκευής λύσεων της ΜΔΕ (2.6α) με αφετηρία θα την υπόθεση ότι

$$(2.7) \quad u(r, \varphi, z) = v(r, \varphi)Z(z).$$

Η αντικατάσταση αυτής της έκφρασης στην εξ. (2.4) οδηγεί στο ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$(2.8) \quad \left(v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\varphi\varphi} \right) Z(z) + v(r, \varphi) Z''(z) = 0,$$

Σε κάθε ανοιχτό διάστημα του \mathbb{R}^3 στο οποίο η $u(r, \varphi, z)$ δεν μηδενίζεται, η (2.8) είναι ισοδύναμη προς την

$$(2.9) \quad \frac{1}{v(r, \varphi)} \left(v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\varphi\varphi} \right) + \frac{Z''(z)}{Z(z)} = 0.$$

Με τη σειρά της, η τελευταία είναι προφανώς ταυτόσημη προς την

$$(2.10) \quad \frac{1}{v(r, \varphi)} \left(v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\varphi\varphi} \right) = - \frac{Z''(z)}{Z(z)}.$$

Τώρα, το αριστερό μέλος της (2.10) είναι συνάρτηση των r, φ ενώ το δεξί μόνο της z . Συνεπώς, και τα δύο μέλη αυτής της ισότητας είναι ίσα προς κάποια σταθερή. Αν, για λόγους που θα γίνουν φανεροί σε λίγο, ονομάσουμε αυτή τη σταθερή $-\lambda$, τότε η (2.10) είναι ισοδύναμη με το σύστημα

$$(2.11) \quad Z''(z) = \lambda Z(z),$$

$$(2.12) \quad v_{rr} + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r^2} v_{\varphi\varphi} = -\lambda v(r, \varphi).$$

Από την άλλη, για τις λύσεις της μορφής $u(r, \varphi, z) = v(r, \varphi)Z(z)$, η συνοριακή συνθήκη (2.6γ) γίνεται $v(a, \varphi)Z(z) = 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq z \leq b$. Προφανώς, ο μηδενισμός του παράγοντα $Z(z)$ σε όλο το διάστημα $0 \leq z \leq b$ απορρίπτεται ως επιλογή. Άρα, η προηγούμενη συνθήκη συνεπάγεται ότι

$$(2.13) \quad v(a, \varphi) = 0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Σ' αυτό το σημείο, αξίζει να παρατηρήσουμε το εξής: Η (2.12) δεν είναι παρά η μορφή που παίρνει η ΜΔΕ $V_{xx} + V_{yy} = -\lambda V$ στις πολικές συντεταγμένες. Άρα, ο συνδυασμός των (2.12), (2.13) ορίζει ένα πρόβλημα Dirichlet με ομογενή συνοριακή συνθήκη, ακριβώς σαν αυτό που περιγράφεται από το Θεώρ. 1.3. Στην προκείμενη περίπτωση, η περιοχή εφαρμογής αυτού του θεωρήματος είναι ένας κυκλικός δίσκος ακτίνας a . Άρα, με βάση το Θεώρ. 1.3, μπορούμε να συνεχίσουμε την ανάλυσή μας υποθέτοντας ότι η παράμετρος λ παίρνει μόνο θετικές τιμές.

Ωστόσο, εμείς θα προχωρήσουμε θεωρώντας ότι ο περιορισμός των τιμών της παραμέτρου λ που συνεπάγεται το Θεώρ. 1.3 δεν είναι γνωστός. Αυτή η προσποιητή άγνοια θα μας επιτρέψει να καταλήξουμε στο ίδιο συμπέρασμα από έναν διαφορετικό δρόμο.

Έτσι κι αλλιώς, για να λύσουμε το ΠΣΤ (2.12)-(2.13) και μέσω αυτού το αρχικό, θα πρέπει να κατασκευάσουμε συγκεκριμένες λύσεις της (2.12). Αυτό μπορούμε το πετύχουμε εφαρμόζοντας και πάλι τη μέθοδο του διαχωρισμού των μεταβλητών. Δηλαδή, υποθέτοντας αρχικά ότι

$$(2.14) \quad u(r, \varphi) = R(r) \Phi(\varphi).$$

Αντικαθιστώντας αυτή την έκφραση στην (2.12) καταλήγουμε στη σχέση

$$(2.15) \quad R''(r) \Phi(\varphi) + \frac{1}{r} R'(r) \Phi(\varphi) + \frac{1}{r^2} R(r) \Phi''(\varphi) = -\lambda R(r) \Phi(\varphi).$$

Αλλά, εκεί όπου $R(r) \Phi(\varphi) \neq 0$, αυτή η σχέση είναι ισοδύναμη προς την

$$(2.16) \quad \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = -\lambda r^2 - r^2 \frac{R''(r)}{R(r)} - r \frac{R'(r)}{R(r)}.$$

Για τους ίδιους λόγους που επικαλεστήκαμε επανηλειμμένα, τα μέλη της τελευταίας σχέσης είναι ίσα προς κάποια σταθερή μ . Με άλλα λόγια, οι συναρτήσεις $R(r)$ και $\Phi(\varphi)$ θα πρέπει να είναι λύσεις των ΣΔΕ

$$(2.17) \quad r^2 R''(r) + r R'(r) + (\lambda r^2 + \mu) R(r) = 0,$$

και

$$(2.18) \quad \Phi''(\varphi) = \mu \Phi(\varphi),$$

αντίστοιχα.

Συμπερασματικά, οι λύσεις της εξίσωσης (2.4) της μορφής $u(r, \varphi, z) = R(r) \Phi(\varphi) Z(z)$ καθορίζονται από τις λύσεις του συστήματος των τριών ΣΔΕ (2.11), (2.17) και (2.18), όπου λ, μ ελεύθερες παράμετροι.

Επίλυση του προβλήματος Dirichlet - Συναρτήσεις Bessel

Ας ξεκινήσουμε την επίλυση του συστήματος (2.11), (2.17) και (2.18) από το τρίτο μέλος του. Προφανώς, οι τιμές (r, φ, z) και $(r, \varphi + 2n\pi, z)$, $n \in \mathbb{Z}$, των κυλινδρικών συντεταγμένων αντιστοιχούν στο ίδιο σημείο του Ευκλείδειου χώρου. Συνεπώς, η συνάρτηση $\Phi(\varphi)$, θα πρέπει να είναι περιοδική, με περίοδο 2π . Αλλά, οι λύσεις της $\Phi''(\varphi) = \mu \Phi(\varphi)$ με αυτή την ιδιότητα δεν μπορεί να προκύψουν με το μ θετικό. Άρα $\mu = -m^2$ (με το $m \geq 0$, χωρίς να θίγεται η γενικότητα). Αν λοιπόν $m = 0$, τότε

$$(2.19\alpha) \quad \Phi(\varphi) = C_1 + C_2 \varphi,$$

ενώ, αν $m > 0$,

$$(2.19\beta) \quad \Phi(\varphi) = C_1 \cos m \varphi + C_2 \sin m \varphi.$$

Στην πρώτη περίπτωση, η συνθήκη $\Phi(\varphi + 2n\pi) = \Phi(\varphi)$ επιβάλλει την επιλογή $C_2 = 0$. Στη δεύτερη, η συνθήκη της 2π -περιοδικότητας αναγκάζει το m να είναι ακέραιος. Άρα, όλες οι αποδεκτές λύσεις εκφράζονται από τις συναρτήσεις

$$(2.20) \quad \Phi(\varphi) = C_1 \cos m \varphi + C_2 \sin m \varphi, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Έχοντας βρει το σύνολο των αποδεκτών λύσεων της ΣΔΕ (2.18) που αφορά τη συνάρτηση $\Phi(\varphi)$, μπορούμε να στρέψουμε την προσοχή μας στην ΣΔΕ (2.17) που καθορίζει την $R(r)$. Αφού λοιπόν η $\mu = -m^2$, η ΣΔΕ (2.17) γίνεται

$$(2.21) \quad r^2 R''(r) + r R'(r) + (\lambda r^2 - m^2) R(r) = 0.$$

Από την άλλη, για τις συναρτήσεις της μορφής $u(r, \varphi) = R(r) \Phi(\varphi)$ η συνοριακή συνθήκη (2.13) ανάγεται στην $R(a) \Phi(\varphi) = 0$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Συνεπώς, οι λύσεις της (2.21) που είναι συμβατές με την παραπάνω συνοριακή συνθήκη είναι αυτές για τις οποίες

$$(2.22) \quad R(a) = 0.$$

Ας σημειώσουμε τώρα ότι, το διάστημα τιμών της ανεξάρτητης μεταβλητής r που μας ενδιαφέρει είναι το $0 \leq r \leq a$. Το αριστερό άκρο αυτού του διαστήματος αποτελεί **ανώμαλο σημείο** της ΣΔΕ (2.21), γιατί εκεί ο συντελεστής του όρου $R''(r)$ μηδενίζεται. Συνεπώς, το πρόβλημα συνοριακών τιμών για τη συνάρτηση $R(r)$ στο διάστημα $0 \leq r \leq a$ ανήκει στην κατηγορία των ανώμαλων προβλημάτων Sturm-Liouville. Κι αυτού του είδους τα προβλήματα δεν τα μελετήσαμε αναλυτικά.

Ωστόσο, στην ειδική περίπτωση που εξετάζουμε, τα πράγματα δεν είναι τόσο δύσκολα όσο φαίνεται με την πρώτη ματιά. Ο λόγος είναι ότι οι μόνες λύσεις του παραπάνω προβλήματος Sturm-Liouville που μπορεί να συνεισφέρουν στην επίλυση του αρχικού ΠΣΤ είναι αυτές που παραμένουν φραγμένες, καθώς πλησιάζουμε το ανώμαλο σημείο $r = 0$ από τα δεξιά. Αυτές είναι κι οι μόνες που είναι παραδεκτές από φυσική άποψη.

Έχοντας υπόψη αυτή την παρατήρηση, ας ξεκινήσουμε τη μελέτη της ΣΔΕ (2.21) από την περίπτωση που η παράμετρος λ μηδενίζεται. Όταν λοιπόν το $\lambda = 0$, η (2.21) ανάγεται στην

$$(2.23) \quad r^2 R''(r) + r R'(r) - m^2 R(r) = 0,$$

που ανήκει στην οικογένεια Euler-Cauchy. Όπως γνωρίζουμε, αυτές οι εξισώσεις λύνονται εύκολα και δίνουν

$$(2.24\alpha) \quad R(r) = C_1 + C_2 \ln r,$$

αν το $m = 0$, και

$$(2.24\beta) \quad R(r) = C_1 r^m + C_2 r^{-m},$$

όταν το $m \neq 0$.

Είναι φανερό ότι οι συναρτήσεις (2.24) δεν παραμένουν φραγμένες καθώς το $r \downarrow 0$, εκτός εάν $C_2 = 0$. Από την άλλη, δεν υπάρχει σημείο του διαστήματος $0 < r < \infty$ στο οποίο οι

συναρτήσεις $R(r) = C_1 r^m$, $m = 0, 1, \dots$, να μηδενίζονται. Άρα, όλες οι λύσεις της (2.21) που αντιστοιχούν στην τιμή $\lambda = 0$ απορρίπτονται.

Όταν η παράμετρος λ είναι μη μηδενική, τα πράγματα γίνονται αρκετά πιο δύσκολα. Γιατί, τότε, η (2.21) ανήκει πλέον στην οικογένεια των εξισώσεων (του) Bessel. Ειδικότερα, όταν η παράμετρος λ είναι θετική, μπορούμε να θέσουμε $\lambda = k^2$, $k > 0$, και να γράψουμε την (2.20) σαν

$$(2.25) \quad r^2 R''(r) + r R'(r) + (k^2 r^2 - m^2) R(r) = 0.$$

Τέλος, η αλλαγή μεταβλητής $r \rightarrow \xi = kr$ μετατρέπει την εξαρτημένη μεταβλητή $R(r)$ στην $B(\xi) = R(\xi/k)$ και την ΣΔΕ (2.25) στην

$$(2.26) \quad \xi^2 B''(\xi) + \xi B'(\xi) + (\xi^2 - m^2) B(\xi) = 0.$$

Η τελευταία είναι γνωστή ως **εξίσωση (του) Bessel**.

Αφού η (2.26) είναι γραμμική κι ομογενής ΣΔΕ δεύτερης τάξης, η γενική λύση της δίνεται από το γραμμικό συνδυασμό οποιουδήποτε ζευγαριού γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων της. Ένα τέτοιο ζευγάρι αποτελείται από τη λύση που ονομάζεται **συνάρτηση Bessel πρώτου είδους, τάξης m** και συμβολίζεται με $J_m(\xi)$, κι αυτή που λέγεται **συνάρτηση Bessel δεύτερου είδους, τάξης m** και συμβολίζεται με $Y_m(\xi)$. Η δεύτερη συχνά αναφέρεται και ως **συνάρτηση Weber** ή **συνάρτηση Neumann**.

Γενικότερα, όμως, με τον όρο εξίσωση Bessel νοείται κάθε ΣΔΕ δεύτερης τάξης της μορφής

$$(2.27) \quad \xi^2 B''(\xi) + \xi B'(\xi) + (\xi^2 - \nu^2) B(\xi) = 0,$$

όπου, τόσο η παράμετρος ν , όσο και η ανεξάρτητη μεταβλητή ξ (άρα και η συνάρτηση $B(\xi)$), επιτρέπεται να παίρνουν μιγαδικές τιμές.

Τώρα, όπως συνήθως γίνεται με τις γραμμικές κι ομογενείς ΣΔΕ δεύτερης τάξης που έχουν μεταβλητούς συντελεστές, η κατασκευή των παραπάνω καθιερωμένων λύσεων της εξίσωσης Bessel, ξεκινάει με την υπόθεση εργασίας ότι η (2.27) επιδέχεται λύσεις της μορφής

$$(2.28) \quad B(\xi) = \xi^\kappa \sum_{j=0}^{\infty} c_j \xi^j.$$

Τόσο ο εκθέτης κ , όσο και οι συντελεστές c_j , είναι αρχικά άγνωστες ποσότητες που μένει να προσδιοριστούν από την προς επίλυση εξίσωση. Αυτό επιτυγχάνεται, στην προκειμένη περίπτωση, αντικαθιστώντας την (2.28) στην (2.27).

Υποθέτοντας ότι η σειρά (2.28) συγκλίνει με τρόπο ώστε οι $B'(\xi)$, $B''(\xi)$ προκύπτουν παραγωγίζοντας την ίδια σειρά όρο προς όρο, η αντικατάσταση της (2.28) στην (2.27) οδηγεί αμέσως σε ορισμένες αλγεβρικές σχέσεις. Από αυτές συνάγεται ότι (α) Ο εκθέτης κ πρέπει να είναι ίσος με την παράμετρο ν και (β) Όλοι οι συντελεστές c_j , $j \geq 2$, καθορίζονται από τους c_0 και c_1 .

Οι λεπτομέρειες αυτής της μεθόδου κατασκευής λύσεων της εξίσωσης Bessel μπορεί να βρεθούν σε οποιοδήποτε βιβλίο που έχει ως αντικείμενο τις ΣΔΕ ή τις λεγόμενες ειδικές συναρτήσεις. Εκείνο που έχει σημασία για τη συζήτησή μας είναι το τελικό αποτέλεσμα. Συγκεκριμένα, η λύση που ονομάζεται **συνάρτηση Bessel πρώτου είδους και τάξης ν** , δίνεται από τη σειρά

$$(2.29) \quad J_\nu(\xi) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(\nu+j+1)} \left(\frac{\xi}{2}\right)^{2j+\nu},$$

η οποία συγκλίνει απόλυτα στο διάστημα $0 \leq \xi < \infty$, για κάθε $\nu \geq 0$. Στην (2.29), το Γ συμβολίζει την **συνάρτηση γάμμα**, της οποίας η βασική ιδιότητα είναι ότι

$$(2.30) \quad \Gamma(z+1) = z \Gamma(z).$$

Από αυτήν την ιδιότητα αμέσως συνάγεται ότι

$$(2.31) \quad \Gamma(\kappa+1) = \kappa!, \quad \kappa = 0, 1, \dots$$

Συνεπώς, για ακέραιες και μη αρνητικές τιμές της παραμέτρου ν -αυτές που υπεισέρχονται στο πρόβλημά μας- η συνάρτηση Bessel δίνεται από τη σειρά

$$(2.32) \quad J_m(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! (m+j)!} \left(\frac{\xi}{2}\right)^{2j+m}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Όταν η τιμή της παραμέτρου ν δεν είναι ακέραιος αριθμός, τότε η συνάρτηση $J_{-\nu}(\xi)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητη από την $J_\nu(\xi)$. Το ίδιο φυσικά ισχύει και για τον γραμμικό συνδυασμό των $J_\nu(\xi)$ και $J_{-\nu}(\xi)$. Σε αυτή τη βάση, η λύση που ονομάζεται συνάρτηση Weber ή Bessel δεύτερου είδους και τάξης $\nu \notin \mathbb{Z}$, ορίζεται από τον τύπο

$$(2.33) \quad Y_\nu(\xi) := \frac{\cos(\nu\pi) J_\nu(\xi) - J_{-\nu}(\xi)}{\cos(\nu\pi)}.$$

Αντίθετα, για ακέραιες και αρνητικές τιμές της παραμέτρου ν ,

$$(2.34) \quad J_{-m}(\xi) = (-1)^m J_m(\xi), \quad m = 1, 2, \dots$$

Γι' αυτό, στην περίπτωση που η τιμή της παραμέτρου ν είναι ακέραιος αριθμός, η συνάρτηση Weber ορίζεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$(2.35) \quad Y_m = \lim_{\nu \rightarrow m} Y_\nu(\xi), \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Ας επιστρέψουμε τώρα στην εξ. (2.21) για να δούμε τι συμβαίνει όταν η παράμετρος λ γίνεται αρνητική. Σ' αυτή την περίπτωση, μπορούμε να θέσουμε $\lambda = -k^2$, $k > 0$, οπότε η (2.21) γίνεται

$$(2.36) \quad r^2 R''(r) + r R'(r) - (k^2 r^2 + m^2) R(r) = 0.$$

Αλλάζοντας και πάλι την ανεξάρτητη μέσω της $r \rightarrow \xi = kr$, καταλήγουμε στην

$$(2.37) \quad \xi^2 B''(\xi) + \xi B'(\xi) - (\xi^2 + m^2) B(\xi) = 0.$$

Η τελευταία ονομάζεται **τροποποιημένη εξίσωση Bessel**. Δύο καθιερωμένες γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις αυτής της εξίσωσης είναι η **τροποποιημένη συνάρτηση Bessel πρώτου είδους, τάξης m** , $I_m(\xi)$, και η **τροποποιημένη συνάρτηση Bessel δεύτερου είδους, τάξης m** , $K_m(\xi)$. Η πρώτη από αυτές τις συναρτήσεις ορίζεται από τον τύπο

$$(2.38) \quad I_\nu(\xi) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(\nu+j+1)} \left(\frac{\xi}{2}\right)^{2j+\nu},$$

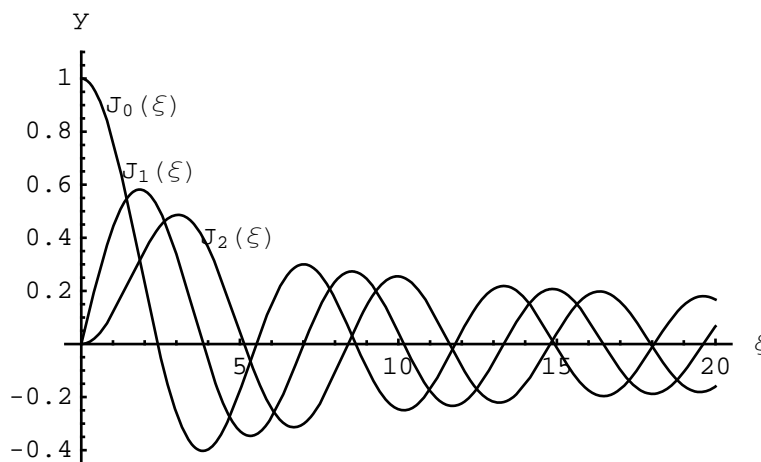
για κάθε $\nu \in \mathbb{C}$. Η δεύτερη ορίζεται από τον τύπο

$$(2.39) \quad K_\nu(\xi) := \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(\xi) - I_\nu(\xi)}{\sin(\nu\pi)},$$

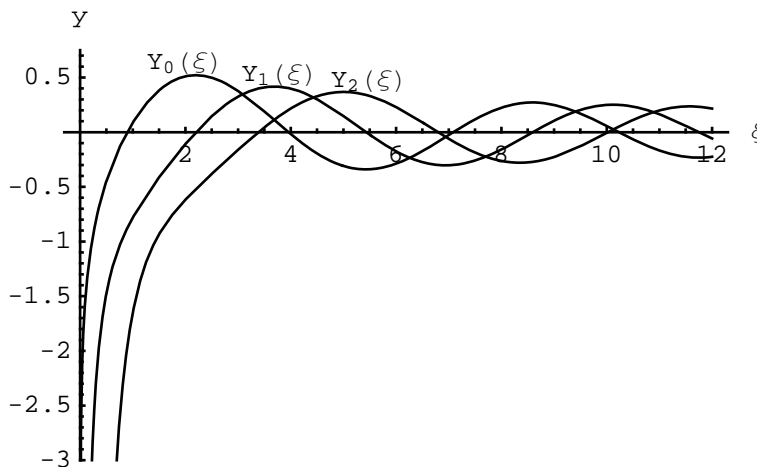
για κάθε $\nu \in \mathbb{C}$ που δεν είναι ακέραιος, διαφορετικά, από το όριο

$$(2.40) \quad K_m = \lim_{\nu \rightarrow m} K_\nu(\xi), \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Σε κάθε περίπτωση εκείνο που έχει πρωταρχική σημασία για το ΠΣΤ που μελετάμε είναι η ποιοτική συμπεριφορά των συναρτήσεων Bessel που εκφράζουν τη γενική λύση της ΣΔΕ (2.21), όταν το $\lambda \neq 0$. Αυτή η συμπεριφορά αναδειχίνεται στα Σχ. 2.1 - 2.4.

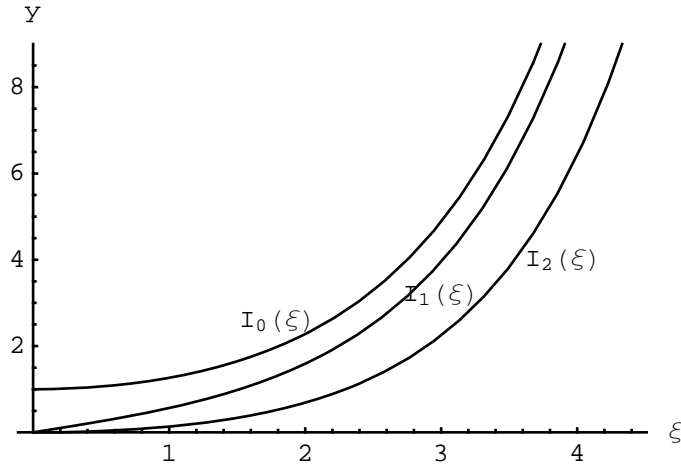


Σχ. 2.1. Τα γραφήματα των συναρτήσεων Bessel πρώτου είδους $J_0(\xi)$, $J_1(\xi)$ και $J_2(\xi)$.

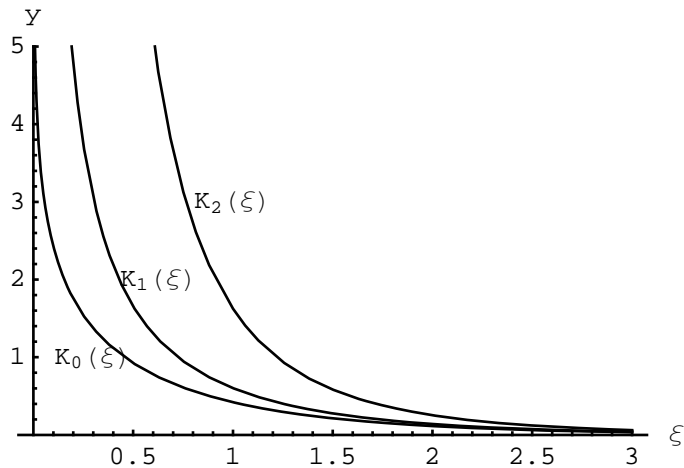


Σχ. 2.2. Τα γραφήματα των συναρτήσεων Bessel δεύτερου είδους $Y_0(\xi)$, $Y_1(\xi)$ και $Y_2(\xi)$.

Όπως φαίνεται καθαρά στα Σχ. 2.1 και 2.2, οι συναρτήσεις Bessel $J_m(\xi)$ παραμένουν φραγμένες σε όλο το διάστημα $0 \leq \xi < \infty$ και, από ένα σημείο κι ύστερα ακολουθούν φθίνουσα ταλάντωση. Τη ίδια ταλάντωση εμφανίζουν και οι συναρτήσεις $Y_m(\xi)$, αλλά η απόλυτη τιμή τους τείνει στο άπειρο καθώς πλησιάζουμε το $\xi = 0$ από τα δεξιά.



Σχ. 2.3. Τα γραφήματα των τροποποιημένων συναρτήσεων Bessel πρώτου είδους $I_0(\xi)$, $I_1(\xi)$ και $I_2(\xi)$.



Σχ. 2.4. Τα γραφήματα των συναρτήσεων Weber (τροποποιημένων των συναρτήσεων Bessel δεύτερου είδους) $K_0(\xi)$, $K_1(\xi)$ και $K_2(\xi)$.

Με τη σειρά τους, τα Σχ. 2.3 και 2.4 δείχνουν με σαφήνεια ότι οι τροποποιημένες συναρτήσεις Bessel $I_m(\xi)$ και $K_m(\xi)$ είναι μονότονες, μη φραγμένες και δεν μηδενίζονται σε κανένα σημείο του διαστήματος $0 < \xi < \infty$.

Από τις προηγούμενες παρατηρήσεις, συνάγεται αμέσως το ακόλουθο συμπέρασμα. Οι μόνες λύσεις της ΣΔΕ (2.21) με $\lambda \neq 0$ που παραμένουν φραγμένες στο διάστημα $0 \leq r \leq a$ και μπορεί να είναι συμβατές με τη συνθήκη $R(a) = 0$ είναι αυτές που αντιστοιχούν σε θετικές τιμές της παραμέτρου λ και είναι της μορφής

$$(2.41) \quad R(r) = C_1 J_m(kr),$$

όπου $k = \sqrt{\lambda}$.

Για τις λύσεις αυτής της μορφής, η συνθήκη $R(a) = 0$ προφανώς ανάγεται στην $J_m(ka) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι, τελικά, η παράμετρος k δεν μπορεί να παίρνει οποιαδήποτε τιμή στο διάστημα $0 < k < \infty$, αλλά μόνο εκείνες για τις οποίες το γινόμενο ka ισούται με κάποια από τις ρίζες της συνάρτησης $J_m(\xi)$.

Αν, λοιπόν, συμβολίσουμε με ξ_{mn} , $n = 1, 2, \dots$, τις ρίζες (τα σημεία μηδενισμού) της συνάρτησης $J_m(\xi)$ στο διάστημα $0 < \xi < \infty$, τότε οι τιμές της παραμέτρου k πρέπει περιοριστούν στο σύνολο $\{k_{mn}\}$, όπου

$$(2.42) \quad k_{mn} := \frac{\xi_{mn}}{a}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Μένει να αντιμετωπίσουμε τη ΣΔΕ (2.11), $Z''(z) = -\lambda Z(z)$, που καθορίζει τη συνάρτηση $Z(z)$. Αυτή πλέον γίνεται $Z''(z) = k_{mn}^2 Z(z)$ και άρα

$$(2.43) \quad Z(z) = C_1 \cosh k_{mn} z + C_2 \sinh k_{mn} z.$$

Όμως η συνοριακή συνθήκη $u(r, \varphi, b) = 0$, $0 \leq r \leq a$, συνεπάγεται την $Z(b) = 0$. Άρα, οι σταθερές C_1, C_2 δεν μπορεί να επιλέγονται αυθαίρετα, παρά τέτοιες ώστε

$$(2.44) \quad C_1 \cosh k_{mn} b + C_2 \sinh k_{mn} b = 0.$$

Συνεπώς,

$$(2.45) \quad C_2 = -C_1 \frac{\cosh k_{mn} b}{\sinh k_{mn} b}$$

και, άρα, οι λύσεις της $Z''(z) = k_{mn}^2 Z(z)$ που είναι συμβατές με τη συνθήκη $Z(b) = 0$ παίρνουν την ακόλουθη μορφή:

$$(2.46) \quad Z(z) = C_1 \left(\cosh k_{mn} z - \frac{\cosh k_{mn} b}{\sinh k_{mn} b} \sinh k_{mn} z \right).$$

Συνοψίζοντας την ως τώρα ανάλυσή μας, έχουμε το εξής αποτέλεσμα:

- Κάθε συνάρτηση της μορφής

$$(2.47) \quad u_{mn} = J_m(k_{mn} r) (A_{mn} \cos m \varphi + B_{mn} \sin m \varphi) \left(\cosh k_{mn} z - \frac{\cosh k_{mn} b}{\sinh k_{mn} b} \sinh k_{mn} z \right),$$

αποτελεί λύση της εξίσωσης Laplace (2.1) στο εσωτερικό και μηδενίζεται σε όλα τα τμήματα της επιφάνειας του κυλίνδρου, πλην της βάσης του.

Στη βάση $z = 0$ του κυλίνδρου, οι συναρτήσεις $u_{mn}(r, \varphi, z)$ γίνονται

$$(2.48) \quad u_{mn}(r, \varphi, 0) = J_m(k_{mn} r) (A_{mn} \cos m \varphi + B_{mn} \sin m \varphi).$$

Συνεπώς, οι ίδιες, ή και γραμμικοί συνδυασμοί τους, θα παραβιάζουν την επιπλέον συνοριακή συνθήκη $u(r, \varphi, 0) = f(r, \varphi)$. Εκτός εάν η δοσμένη συνάρτηση $f(r, \varphi)$ ταιριάζει απόλυτα με κάποιον γραμμικό συνδυασμό τους. Κάτι τέτοιο θα ίσχυε, για παράδειγμα, αν η $f(r, \varphi)$ ήταν της μορφής $f(r, \varphi) = 5 J_0\left(\frac{\xi_{03}}{a} r\right) - 6 J_2\left(\frac{\xi_{23}}{a} r\right) \sin(2 \varphi)$.

Για να καλύψουμε λοιπόν τη γενική περίπτωση, ακολουθούμε το γνωστό πλέον δρόμο. Με βάση τις λύσεις u_{mn} , κατασκευάζουμε μια σειρά της μορφής

$$(2.49)$$

$$u := \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} J_m(k_{mn} r) (A_{mn} \cos m \varphi + B_{mn} \sin m \varphi) \left(\cosh k_{mn} z - \frac{\cosh k_{mn} b}{\sinh k_{mn} b} \sinh k_{mn} z \right)$$

και ελπίζουμε ότι, με κατάλληλη επιλογή των σταθερών $\{A_{mn}, B_{mn}\}$,

(i) Η σειρά θα συγκλίνει σε κάθε σημείο της κλειστής και φραγμένης κυλινδρικής περιοχής

$$(2.50) \quad \bar{\Omega} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq r \leq a, 0 \leq z \leq b\}$$

(ii) Η συνάρτηση που $u(r, \varphi, z)$ στην οποία συγκλίνει η (διπλή) σειρά (2.49) θ' αποτελεί λύση της εξίσωσης Laplace στο εσωτερικό του κυλίνδρου και θα είναι συμβατή με τη συνθήκη $u(r, \varphi, 0) = f(r, \varphi)$.

Από την (2.48) αμέσως έπεται ότι η συνθήκη $u(r, \varphi, 0) = f(r, \varphi)$ παίρνει την ακόλουθη μορφή

$$(2.51) \quad f(r, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} J_m(k_{mn} r) (A_{mn} \cos m \varphi + B_{mn} \sin m \varphi)$$

Με αυτό τον τρόπο, καλούμαστε πλέον ν' αντιμετωπίσουμε ένα καινούργιο πρόβλημα: Μια τυχαία συνάρτηση $f(r, \varphi)$ που ορίζεται στην περιοχή $0 \leq r \leq a, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$, μπορεί να παρασταθεί με τη μορφή της σειράς που εμφανίζεται στο δεξί μέλος της (2.51);

Για ομαλές συναρτήσεις, η απάντηση στο πιο πάνω ερώτημα είναι θετική. Αρκεί οι συντελεστές $\{A_{mn}, B_{mn}\}$ να κατασκευαστούν με συγκεκριμένο τρόπο από τη δοσμένη συνάρτηση $f(r, \varphi)$.

Η ακριβής διαδικασία επιλογής των $\{A_{mn}, B_{mn}\}$ στη γενική περίπτωση είναι εννοιολογικά απλή αλλά αλγεβρικά περίπλοκη. Γι' αυτό θα περιοριστούμε στην περίπτωση όπου η f είναι ανεξάρτητη από τη μεταβλητή φ , όταν δηλ. $f(r, \varphi) = g(r)$. Σ' αυτή την περίπτωση, και το δεξί μέλος της (2.51) πρέπει να είναι ανεξάρτητο από τη φ , πράγμα που ισχύει μόνο για $m = 0$.

Με άλλα λόγια, στην περίπτωση που η συνοριακή συνθήκη στη βάση του κυλίνδρου είναι της μορφής $u(r, \varphi, 0) = g(r)$, η (2.51) ανάγεται στην

$$(2.52) \quad g(r) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(k_n r),$$

όπου

$$(2.53) \quad A_n := A_{0n}, \quad k_n := k_{0n}.$$

Όπως και στις σειρές Fourier που κατασκευάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, έτσι και στην περίπτωση του αναπτύγματος (2.52), η κατάλληλη επιλογή των συντελεστών A_n υποβάλλεται από τη **σχέση ορθογωνιότητας** των μελών της ακολουθίας $\{J_0(k_n r)\}$.

Συγκεκριμένα, οι συναρτήσεις $J_0(k_n r)$ είναι ορθογώνιες στο διάστημα $[0, a]$, με συνάρτηση βάρους την $w(r) = r$. Η ακριβής σχέση ορθογωνιότητας δίνεται από τον τύπο

$$(2.54) \quad \int_0^a J_0(k_n r) J_0(k_m r) r dr = \frac{a^2}{2} \delta_{mn} \{J_1(k_n)\}^2$$

ο οποίος συνάγεται από τις ιδιότητες των συναρτήσεων Bessel $J_0(\xi)$.

Μια σειρά της μορφής (2.52) ονομάζεται, για προφανείς λόγους, **σειρά Fourier-Bessel**.

Το αποτέλεσμα που απαντάει στο πρόβλημα το οποίο μας απασχολεί δίνεται από το επόμενο θεώρημα. Για την απόδειξή του, παραπέμπουμε στην σχετική βιβλιογραφία.

Θεώρημα 2.1

Αν η συνάρτηση $g : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι κλάσης C^2 και $g(a) = 0$, τότε η σειρά (2.52) με συντελεστές

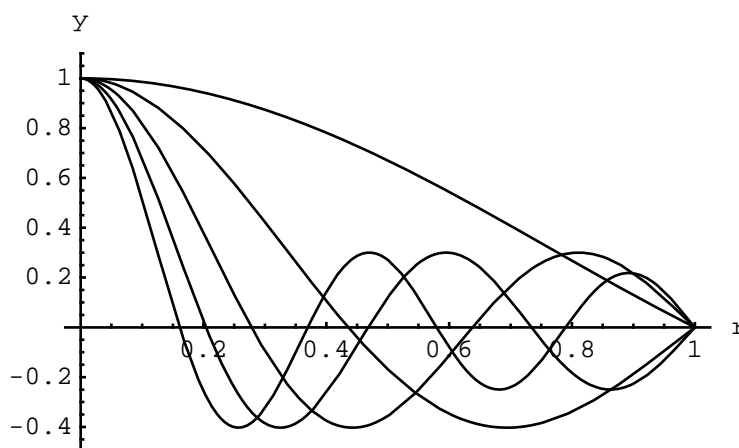
$$(2.55) \quad A_n = \frac{2}{a^2 \{J_1(k_n)\}^2} \int_0^a g(r) J_0(k_n r) r dr$$

συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα στην $g(r)$.

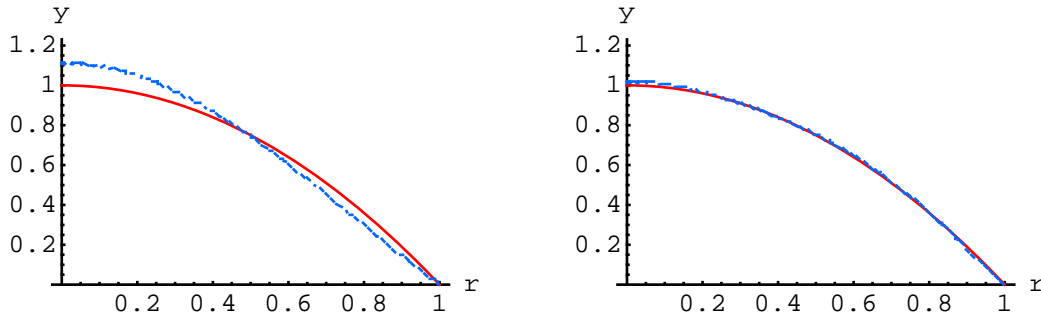


Η κατασκευή συγκεκριμένων αναπτυγμάτων σε σειρές Fourier-Bessel είναι αρκετά περίπλοκη και, τελικά, δεν μπορεί να υλοποιηθεί χωρίς τη βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή. Έτσι, για να δώσουμε μια εικόνα της προσεγγιστικής ικανότητας τέτοιου είδους αναπτυγμάτων στο πρακτικό επίπεδο, κατασκευάσαμε, με τη βοήθεια του *Mathematica*, ορισμένα από τα μερικά αθροίσματα της σειράς (2.52) για τη συνάρτηση $g(r) = 1 - r^2$, $0 \leq r \leq a = 1$. Τα αντίστοιχα γραφήματα δείχνονται στο παρακάτω Σχ. 2.6.

Στο μεταξύ, αξ σημειώσουμε ότι, βάση της σειράς (2.51) για το διάστημα $0 \leq r \leq 1$ αποτελούν οι συναρτήσεις $f_n(r) := J_0(k_n r)$, όπου πλέον k_n οι ρίζες της $J_0(\xi)$. Όλες αυτές οι συναρτήσεις μηδενίζονται στο σημείο $r = 1$. Επιπλέον, η συνάρτηση $f_n(r)$ μηδενίζεται και σε κάθε σημείο r_m του διαστήματος $(0, 1)$ στο οποίο $k_n r_m = k_1$, όπου k_1 η πρώτη ρίζα της $J_0(\xi)$. Γιατί, οι ρίζες της συνάρτησης Bessel $J_0(\xi)$ αποτελούν αύξουσα ακολουθία: $k_{n+1} > k_n$. Ειδικότερα, οι πρώτες πέντε απ' αυτές είναι περίπου ίσες με $k_1 \simeq 2, 40$, $k_2 \simeq 5, 52$, $k_3 \simeq 8, 65$, $k_4 \simeq 11, 79$ και $k_5 \simeq 14, 93$, αντίστοιχα. Αυτή η συμπεριφορά φαίνεται καθαρά στο Σχ. 2.5.



Σχ. 2.5. Το γράφημα των συναρτήσεων $f_n(r) := J_0(k_n r)$, $n = 1, \dots, 5$. Σημειώστε ότι η συνάρτηση $f_n(r)$ μηδενίζεται όταν το $r = 1$. Στο μεταξύ έχει μηδενιστεί κι άλλες $n - 1$ φορές.



Σχ. 2.6. Αριστερά, το γράφημα του μερικού αθροίσματος της σειράς Fourier-Bessel $g_1(r)$ (διακοπτόμενη καμπύλη) για τη συνάρτηση $g(r) = 1 - r^2$ (συνεχής καμπύλη). Δεξιά το γράφημα του μερικού αθροίσματος $g_3(r)$ (διακοπτόμενη καμπύλη), που με δυσκολία διακρίνεται από εκείνο της $g(r) = 1 - r^2$ (συνεχής καμπύλη).

Τελικά δεν είναι δύσκολο ν' αποδειχτεί το ακόλουθο

Θεώρημα 2.2

Αν η συνάρτηση $F(x, y)$ είναι συνεχής στον κυκλικό δίσκο $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq r \leq a\}$, $r := \sqrt{x^2 + y^2}$, μηδενίζεται στην περιφέρεια και οι τιμές της εξαρτώνται μόνο από την απόσταση του σημείου (x, y) από το κέντρο του δίσκου, τότε το πρόβλημα συνοριακών τιμών τύπου Dirichlet

$$(2.56\alpha) \quad U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} = 0, \quad (x, y, z) \in \Omega,$$

$$(2.56\beta) \quad U(x, y, 0) = F(x, y), \quad (x, y, z) \in \partial \Omega_1,$$

$$(2.56\gamma) \quad U(x, y, z) = 0, \quad (x, y, z) \in \partial \Omega_2 \cup \partial \Omega_3,$$

επιδέχεται μοναδική λύση. Αυτή δίνεται από τη συνάρτηση $u(r, \varphi, z) = U(x(r, \varphi), y(r, \varphi), z)$ που ορίζεται από τη σειρά

$$(2.57\alpha) \quad u(r, \varphi, z) := \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0(k_n r) \left(\cosh k_n z - \frac{\cosh k_n b}{\sinh k_n b} \sinh k_n z \right)$$

όπου

$$(2.57\beta) \quad A_n := \frac{2}{a^2 \{J_1(k_n)\}^2} \int_0^a r f(r) J_0(k_n r) dr$$

και $f(r) = F(x(r, \varphi), y(r, \varphi))$.

B. Το πρόβλημα Dirichlet για σφαιρικό κέλυφος

Στον τρισδιάστατο χώρο, το ανάλογο του κυκλικού δακτύλιου που μελετήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, αποτελεί η περιοχή που βρίσκεται ανάμεσα σε δύο ομόκεντρες σφαιρικές επιφάνειες S_a και S_b , ακτίνας a και $b > a$, αντίστοιχα. Σ' ένα Καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων x, y, z με αρχή το κοινό κέντρο των S_a, S_b , οι τελευταίες ορίζονται ως εξής:

$$(2.58) \quad S_a := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : r = a\}, \quad S_b := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : r = b\},$$

όπου,

$$(2.59) \quad r := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Συνακόλουθα, η περιοχή ανάμεσα στις σφαιρικές επιφάνειες S_a, S_b αποτελείται από το ανοιχτό σύνολο

$$(2.60) \quad \Omega := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : a < r < b\}$$

Το σύνορο αυτής της περιοχής αποτελείται από την ένωση των σφαιρικών επιφανειών S_a και S_b : $\partial \Omega = S_a \cup S_b$.

Το πρόβλημα Dirichlet για την εξίσωση Laplace στην περιοχή Ω απαρτίζεται τώρα από τη ΜΔΕ

$$(2.61\alpha) \quad \Delta U \equiv \nabla^2 U \equiv U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} = 0, \quad (x, y, z) \in \Omega,$$

και τις συνοριακές συνθήκες

$$(2.61\beta) \quad U(x, y, z) = F(x, y, z), \quad (x, y, z) \in S_a,$$

$$(2.61\gamma) \quad U(x, y, z) = G(x, y, z), \quad (x, y, z) \in S_b,$$

όπου $F: S_a \rightarrow \mathbb{R}, G: S_b \rightarrow \mathbb{R}$ δοσμένες συναρτήσεις.

Διαχωρισμός μεταβλητών στις σφαιρικές συντεταγμένες

Η γεωμετρία της περιοχής Ω υποβάλλει τη χρησιμοποίηση των σφαιρικών συντεταγμένων (r, θ, φ) . Οι τελευταίες συνδέονται με τις Καρτεσιανές μέσω των σχέσεων

$$(2.62) \quad x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta.$$

Εισάγοντας τις συναρτήσεις

$$(2.63\alpha) \quad u(r, \theta, \varphi) := U(x(r, \theta, \varphi), y(r, \theta, \varphi), z(r, \theta, \varphi)),$$

$$(2.63\beta) \quad f(\theta, \varphi) := F(x(a, \theta, \varphi), y(a, \theta, \varphi), z(a, \theta, \varphi)),$$

$$(2.63\gamma) \quad g(\theta, \varphi) := G(x(b, \theta, \varphi), y(b, \theta, \varphi), z(b, \theta, \varphi)),$$

μετατρέπουμε την εξίσωση (2.61α) στην

$$(2.64\alpha) \quad u_{rr} + \frac{2}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + \frac{\cot \theta}{r^2} u_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} u_{\varphi\varphi} = 0,$$

και τις συνοριακές συνθήκες (2.61β) και (2.61γ) στις

$$(2.64\beta) \quad u(a, \theta, \varphi) = f(\theta, \varphi), \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

και

$$(2.64\gamma) \quad u(b, \theta, \varphi) = g(\theta, \varphi), \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

αντίστοιχα.

Για να κατασκευάσουμε ένα σύνολο λύσεων της ΜΔΕ (2.64α) που είναι κατάλληλες για την αντιμετώπιση του παρόντος προβλήματος Dirichlet, υποθέτουμε ότι η παραπάνω ΜΔΕ επιδέχεται λύσεις της μορφής $u(r, \theta, \varphi) = R(r) \Theta(\theta) \Phi(\varphi)$. Αντικαθιστώντας αυτή την έκφραση στην (2.64α), καταλήγουμε στην

$$(2.65) \quad R''(r) \Theta(\theta) \Phi(\varphi) + \frac{2}{r} R'(r) \Theta(\theta) \Phi(\varphi) + \frac{1}{r^2} R(r) \Theta''(\theta) \Phi(\varphi) + \frac{\cot \theta}{r^2} R(r) \Theta'(\theta) \Phi(\varphi) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} R(r) \Theta(\theta) \Phi''(\varphi) = 0.$$

Αφού πρώτα τη διαιρέσουμε με το γινόμενο $R(r) \Theta(\theta) \Phi(\varphi)$, εύκολα βλέπουμε ότι η προηγούμενη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$(2.66) \quad r^2 \sin^2 \theta \left[\frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{2}{r} \frac{R'(r)}{R(r)} + \frac{1}{r^2} \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\Theta'(\theta)}{\Theta(\theta)} \right] = - \frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}.$$

Το αριστερό μέλος αυτής της εξίσωσης είναι συνάρτηση μόνο των r, θ και το δεξί μόνο της φ . Άρα, και τα δυο τους είναι ίσα προς κάποια σταθερή, μ . Συνεπώς, η (2.66) ανάγεται στο σύστημα

$$(2.67\alpha) \quad \Phi''(\varphi) = -\mu \Phi(\varphi),$$

$$(2.67\beta) \quad r^2 \sin^2 \theta \left[\frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{2}{r} \frac{R'(r)}{R(r)} + \frac{1}{r^2} \frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} + \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\Theta'(\theta)}{\Theta(\theta)} \right] = \mu.$$

Όμως, η ΜΔΕ (2.67β) γράφεται και σαν

$$(2.68) \quad r^2 \left[\frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{2}{r} \frac{R'(r)}{R(r)} \right] = - \left[\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} + \cot \theta \frac{\Theta'(\theta)}{\Theta(\theta)} - \frac{\mu}{\sin^2 \theta} \right].$$

Το αριστερό μέλος αυτής της εξίσωσης είναι συνάρτηση μόνο του r , ενώ το δεξί είναι συνάρτηση μόνο του θ . Αυτό μπορεί να ισχύει μόνο όταν και τα δύο μέλη είναι ίσα προς κάποια σταθερή, λ . Άρα, η ΜΔΕ (2.67β) είναι ισοδύναμη προς το σύστημα

$$(2.69\alpha) \quad r^2 R''(r) + 2r R'(r) = \lambda R(r),$$

$$(2.69\beta) \quad \Theta''(\theta) + \cot \theta \Theta'(\theta) - \frac{\mu}{\sin^2 \theta} \Theta(\theta) = -\lambda \Theta(\theta).$$

Επίλυση του προβλήματος Dirichlet - Συναρτήσεις Legendre

Είναι φανερό ότι οι τριάδες (r, θ, φ) και $(r, \theta, \varphi + 2n\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$, αντιστοιχούν στο ίδιο σημείο του χώρου. Άρα, οι κατάλληλες λύσεις της ΣΔΕ $\Phi''(\varphi) = -\mu \Phi(\varphi)$ είναι μόνο οι 2π -περιοδικές. Όπως είδαμε και στο προηγούμενο παράδειγμα, αυτή η συμπεριφορά μπορεί να εξασφαλιστεί μόνο με την επιλογή $\mu = m^2$, όπου m τυχαίος ακέραιος. Μάλιστα, όλες οι 2π -περιοδικές λύσεις της $\Phi''(\varphi) = -\mu \Phi(\varphi)$ καλύπτονται από τον τύπο

$$(2.70) \quad \Phi(\varphi) = C_1 \cos m \varphi + C_2 \sin m \varphi, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Για τις παραπάνω τιμές της διαχωριστικής παραμέτρου μ , η ΣΔΕ (2.69β) γίνεται

$$(2.71) \quad \sin^2 \theta \Theta''(\theta) + \sin \theta \cos \theta \Theta'(\theta) = (m^2 - \lambda \sin^2 \theta) \Theta(\theta), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Αυτή φαίνεται να είναι αρκετά περίπλοκη, αλλά μπορεί εύκολα να μετασχηματιστεί σ' αυτές που ονομάζονται εξισώσεις (του) Legendre (Λεζάντρ). Ο μετασχηματισμός επιτυγχάνεται με

την εισαγωγή της βοηθητικής μεταβλητής

$$(2.72) \quad \xi := \cos \theta.$$

Είναι φανερό ότι το διάστημα τιμών $0 \leq \theta \leq \pi$ αντιστοιχεί στο $-1 \leq \xi \leq 1$.

Ας ονομάσουμε $P(\xi)$ τη μορφή της συνάρτησης $\Theta(\theta)$ στη μεταβλητή ξ . Δηλαδή,

$$(2.73) \quad P(\xi) := \Theta(\arccos \xi) \Leftrightarrow \Theta(\theta) = P(\cos \theta).$$

Τότε, ο κανόνας της αλυσσίδας συνεπάγεται ότι

$$(2.74) \quad \Theta'(\theta) = P'(\cos \theta) (\cos \theta)' = -\sin \theta P'(\cos \theta),$$

και

$$(2.75) \quad \begin{aligned} \Theta''(\theta) &= [-\sin \theta P'(\cos \theta)]' = -\cos \theta P'(\cos \theta) - \sin \theta P''(\cos \theta) (\cos \theta)' \\ &= \sin^2 \theta P''(\cos \theta) - \cos \theta P'(\cos \theta). \end{aligned}$$

Η αντικατάσταση αυτών των εκφράσεων στην (2.71) οδηγεί στη ΣΔΕ

$$(2.76) \quad (1 - \xi^2) P''(\xi) - 2 \xi P'(\xi) + \left(\lambda - \frac{m^2}{1 - \xi^2} \right) P(\xi) = 0.$$

που ονομάζεται *γενικευμένη ή προσαρτημένη εξίσωση (του) Legendre*.

Για λόγους που θα φανούν καλύτερα στη συνέχεια της ανάλυσής μας, αυτή διευκολύνεται με το να γράψουμε την παράμετρο λ ως την ακόλουθη συνάρτηση μιας νέας παραμέτρου, της n :

$$(2.77) \quad \lambda := n(n + 1).$$

Έτσι, η (2.76) παίρνει τη μορφή

$$(2.78) \quad (1 - \xi^2) P''(\xi) - 2 \xi P'(\xi) + \left[n(n + 1) - \frac{m^2}{1 - \xi^2} \right] P(\xi) = 0,$$

στην οποία συναντάει κανείς την προσαρτημένη εξίσωση Legendre στα σχετικά συγγράμματα.

Δύο καθιερωμένες γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (2.78) είναι οι λεγόμενες *προσαρτημένες συναρτήσεις (του) Legendre πρώτου και δεύτερου είδους*, που συμβολίζονται με $P_n^m(\xi)$ και $Q_n^m(\xi)$, αντίστοιχα.

Όταν $m = 0$, αυτές οι λύσεις αναφέρονται ως *συναρτήσεις Legendre (πρώτου και δεύτερου είδους)*, σκέτα, οπότε συμβολίζονται με $P_n(\xi)$ και $Q_n(\xi)$, αντίστοιχα.

B-1. Αξονικά συμμετρικές λύσεις ($m=0$)

Ας θεωρήσουμε αρχικά την απλούστερη περίπτωση στην οποία οι συναρτήσεις $f(\theta, \varphi)$ και $g(\theta, \varphi)$ που καθορίζουν τις τιμές της $u(r, \theta, \varphi)$ πάνω στις σφαιρικές επιφάνειες S_a και S_b , αντίστοιχα, είναι ανεξάρτητες από τη γωνία φ . Τότε και η λύση $u(r, \theta, \varphi)$ της εξίσωσης Laplace στην ενδιάμεση περιοχή Ω δεν μπορεί παρά να είναι ανεξάρτητη από τη μεταβλητή φ .

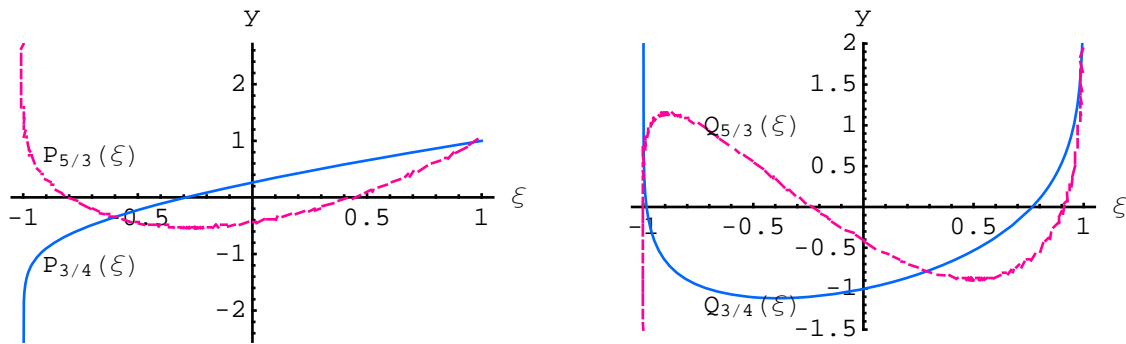
Στην περίπτωση των λύσεων της μορφής $u(r, \theta, \varphi) = R(r) \Theta(\theta) \Phi(\varphi)$ αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση $\Phi(\varphi)$ πρέπει να είναι σταθερή. Όπως είδαμε νωρίτερα, οι λύσεις με σταθερή $\Phi(\varphi)$

αντιστοιχούν στην τιμή $m = 0$. Συνεπώς, για τις λύσεις της μορφής $u(r, \theta, \varphi) = R(r) \Theta(\theta)$, η εξίσωση που καθορίζει τον παράγοντα $\Theta(\theta)$ είναι η (κανονική) εξίσωση Legendre

$$(2.79) \quad (1 - \xi^2) P''(\xi) - 2\xi P'(\xi) + n(n+1)P(\xi) = 0, \quad -1 < \xi < 1.$$

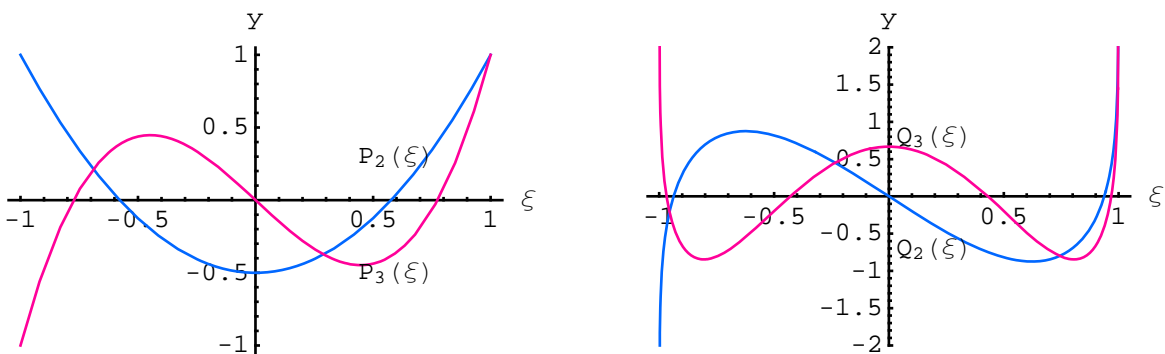
Προφανώς, τα άκρα του διαστήματος $[-1, 1]$ αποτελούν ανώμαλα σημεία της (2.79). Άρα το πρόβλημα συνοριακών τιμών για την $P(\xi)$ στο παραπάνω διάστημα είναι, γενικά, ένα ανώμαλο πρόβλημα Sturm-Liouville. Αλλά και πάλι, οι λύσεις που είναι δυνατό να συνεισφέρουν εποικοδομητικά στην αντιμετώπιση του αρχικού προβλήματος Dirichlet είναι αυτές που παραμένουν φραγμένες καθώς πλησιάζουμε τα σημεία $\xi = \pm 1$ από το εσωτερικό του διαστήματος $[-1, 1]$. Τέτοιες λύσεις της (2.79) υπάρχουν και μάλιστα είναι πάρα πολύ απλές.

Συγκεκριμένα, η μέθοδος των σειρών με την οποία κατασκευάζονται οι βασικές λύσεις $P_n(\xi)$ και $Q_n(\xi)$ της εξίσωσης Legendre οδηγεί στο ακόλουθο συμπέρασμα: Όταν η παράμετρος n δεν είναι ακέραιος αριθμός, τότε και οι δυο παραπάνω λύσεις εμφανίζουν ανώμαλη συμπεριφορά, σε ένα τουλάχιστον από τα άκρα του διαστήματος $[-1, 1]$ (βλ. Σχ. 2.7).



Σχ.2.7. Τα γραφήματα των συναρτήσεων Legendre πρώτου είδους (αριστερά) και δεύτερου είδους (δεξιά) για δύο μη ακέραιες τιμές της παραμέτρου n .

Μάλιστα, ακόμη και όταν το $n \in \mathbb{Z}$, η λύση $Q_n(\xi)$ εξακολουθεί να είναι ανώμαλη. Μόνο η $P_n(\xi)$ παραμένει φραγμένη, για τον εξής απλό λόγο: Όταν το $n = 0, 1, \dots$, η συνάρτηση $P_n(\xi)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n , που ονομάζεται **πολυώνυμο (του) Legendre**. Αυτή η συμπεριφορά φαίνεται καθαρά στο Σχ.2.8. Από την άλλη, η αντικατάσταση $n \rightarrow -(n+1)$, αφήνει την εξίσωση (2.79) αναλλοίωτη. Άρα, και για αρνητικές ακέραιες τιμές της παραμέτρου n η λύση της (2.79) ταυτίζεται με ένα από τα πολυώνυμα Legendre.



Σχ.2.8. Τα γραφήματα των συναρτήσεων Legendre πρώτου είδους (αριστερά) και δεύτερου είδους (δεξιά) για $n = 2, 3$.

Τα πολυώνυμα (του) Legendre μπορεί να οριστούν με τον ακόλουθο τρόπο:

$$(2.80) \quad P_n(\xi) := \frac{1}{2^n n!} \frac{d}{d\xi^n} [(\xi^2 - 1)^n].$$

Η (2.80) αναφέρεται ως **τύπος του Rodrigues** και δίνει πολύ εύκολα τα πρώτα πολυώνυμα Legendre:

$$(2.81) \quad P_0(\xi) = 1, \quad P_1(\xi) = \xi, \quad P_2(\xi) = \frac{1}{2} (3 \xi^2 - 1), \quad P_3(\xi) = \frac{1}{2} (5 \xi^3 - 3 \xi).$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο Rodrigues, μπορεί κανείς να δείξει ότι

$$(2.82) \quad P'_{n+1}(\xi) - P'_{n-1}(\xi) = (2n + 1) P_n(\xi).$$

Από αυτή τη σχέση και την εξίσωση Legendre παράγεται μια σειρά από επιπλέον αναδρομικούς τύπους, σαν τους

$$(2.83) \quad (n + 1) P_{n+1}(\xi) - (2n + 1) \xi P_n(\xi) + n P_{n-1}(\xi) = 0,$$

$$(2.84) \quad (\xi^2 - 1) P'_n(\xi) - n \xi P_n(\xi) + n P_{n-1}(\xi) = 0.$$

Τέτοιου είδους αναδρομικές σχέσεις είναι πολύ χρήσιμες στην ανάλυση προβλημάτων στα οποία υπεισέρχονται τα πολυώνυμα Legendre. Αλλά, για το πρόβλημα που μελετάμε σε τούτο το εδάφιο, η σημαντικότερη σχέση είναι αυτή της ορθογωνιότητας των πολυωνύμων Legendre στο διάστημα $[-1, 1]$. Συγκεκριμένα, χωρίς ιδιαίτερη δυσκολία, μπορεί κανείς να δείξει ότι,

$$(2.85) \quad \int_{-1}^1 P_m(\xi) P_n(\xi) d\xi = \frac{2}{2m+1} \delta_{mn}$$

Ισοδύναμα,

$$(2.86) \quad \int_0^\pi P_m(\cos\theta) P_n(\cos\theta) \sin\theta d\theta = \frac{2}{2m+1} \delta_{mn}.$$

Με την εμπειρία που έχουμε αποκτήσει από την ανάλυση αρκετών άλλων ΠΣΤ, είμαστε σε θέση να διαβλέψουμε αμέσως τη σημασία των σχέσεων (2.85) - (2.86) στην επίλυση του ΠΣΤ στο οποίο αφορά η παρούσα συζήτηση. Προς το παρόν, σημειώνουμε ότι, οι προηγούμενες παρατηρήσεις οδηγούν στο ακόλουθο συμπέρασμα: Οι μόνες φραγμένες λύσεις της ΣΔΕ (2.79) είναι της μορφής

$$(2.86) \quad P(\xi) = C_1 P_n(\xi), \quad n = 0, 1, \dots$$

Συνεπώς, ο παράγοντας $\Theta(\theta)$ στις λύσεις της μορφής $u(r, \theta, \varphi) = R(r) \Theta(\theta)$ δίνεται από τις συναρτήσεις

$$(2.87) \quad \Theta(\theta) = C_1 P_n(\cos\theta), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Μένει να λύσουμε τη ΣΔΕ (2.69α) που, με την επιλογή $\lambda = n(n + 1)$, έχει γίνει

$$(2.87) \quad r^2 R''(r) + 2r R'(r) - n(n + 1) R(r) = 0.$$

Η τελευταία είναι τύπου Euler-Cauchy. Όταν $n = 0$, η (2.87) γίνεται $r^2 R''(r) + 2r R'(r) = 0$, ή $[r^2 R'(r)]' = 0$. Συνεπώς, $r^2 R'(r) = C_1$ και άρα

$$(2.88\alpha) \quad R(r) = -C_1 \frac{1}{r} + C_2.$$

Όταν το $n \in \mathbb{N}$, δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (2.87) βρίσκονται εύκολα, ξεκινώντας με την υπόθεση ότι $R(r) = r^\alpha$. Γιατί, η αντικατάσταση αυτής της έκφρασης στην (2.87) οδηγεί στη συνθήκη $\alpha(\alpha + 1) = n(n + 1)$. Συνεπώς, $\alpha = n, -(n + 1)$ και άρα

$$(2.88\beta) \quad R(r) = C_1 r^n + C_2 r^{-(n+1)}.$$

Συνοψίζοντας τα συμπεράσματα της προηγούμενης ανάλυσης, μπορούμε να πούμε ότι έχουμε καταλήξει στο ακόλουθο αποτέλεσμα: Η ΜΔΕ

$$(2.89) \quad u_{rr} + \frac{2}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\theta\theta} + \frac{\cot \theta}{r^2} u_\theta = 0,$$

στην οποία ανάγεται η (2.64α) όταν η $u(r, \theta, \varphi) = v(r, \theta)$, επιδέχεται λύσεις της μορφής

$$(2.90) \quad v(r, \theta) = R(r) \Theta(\theta) = (A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}) P_n(\cos \theta), \quad n = 0, 1, \dots$$

Άρα, η (2.89) δέχεται ως λύσεις και τις συναρτήσεις

$$(2.91) \quad v_m(r, \theta) := \sum_{n=0}^m (A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}) P_n(\cos \theta).$$

Αν λοιπόν η αντίστοιχη σειρά

$$(2.92) \quad v(r, \theta) := \sum_{n=0}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}) P_n(\cos \theta)$$

συγκλίνει στο διάστημα $a \leq r \leq b$, $0 \leq \theta \leq \pi$, τότε μπορούμε να ελπίζουμε ότι η $u(r, \theta)$ αποτελεί λύση του προβλήματος Dirichlet στην περιοχή Ω . Όχι, βέβαια, του γενικού προβλήματος με το οποίο ξεκινήσαμε, αλλά αυτού που αντιστοιχεί σε συνοριακές τιμές ανεξάρτητες από τη γωνία φ .

Οι τελευταίες έχουν πλέον γίνει

$$(2.93) \quad v(a, \theta) = f(\theta), \quad v(b, \theta) = g(\theta),$$

ενώ από την (2.92) έπεται ότι

$$(2.94\alpha) \quad v(a, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(\cos \theta), \quad C_n := A_n a^n + B_n a^{-(n+1)},$$

και

$$(2.94\beta) \quad v(b, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n P_n(\cos \theta), \quad D_n := A_n b^n + B_n b^{-(n+1)}.$$

Άρα, από τις λύσεις της μορφής (2.92), κατάλληλες είναι μόνο εκείνες για τις οποίες

$$(2.95\alpha) \quad f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(\cos \theta)$$

και

$$(2.95\beta) \quad g(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n P_n(\cos \theta).$$

Προφανώς, οι απαιτήσεις (2.95) μπορεί να ικανοποιηθούν μόνο εάν κάθε συνάρτηση μπορεί ν' αναπτυχθεί σε σειρά πολυωνύμων Legendre. Γιατί, στη μεταβλητή $\xi = \cos \theta$, οι παραπάνω συνθήκες γίνονται

$$(2.96\alpha) \quad \tilde{f}(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n P_n(\xi)$$

και

$$(2.96\beta) \quad \tilde{g}(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n P_n(\xi),$$

αντίστοιχα, όπου $\tilde{f}(\xi) = f(\theta)$, $\tilde{g}(\xi) = g(\theta)$.

Ευτυχώς, αυτό είναι δυνατό, χάρη στην ορθογωνιότητα πολυωνύμων Legendre, που επισημάναμε νωρίτερα. Το σχετικό αποτέλεσμα περιγράφεται από το

Θεώρημα 2.3

Αν η συνάρτηση $h(\xi)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[-1, 1]$, τότε η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} H_n P_n(\xi)$, με συντελεστές

$$(2.97\alpha) \quad H_n := \frac{2^{n+1}}{2} \int_{-1}^1 h(x) P_n(x) dx,$$

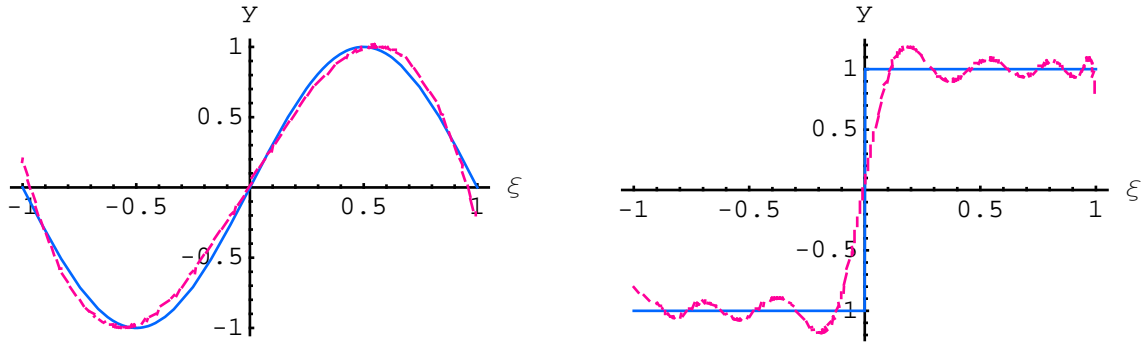
συγκλίνει στην $h(\xi)$:

$$(2.97\beta) \quad h(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n P_n(\xi), \quad -1 \leq \xi \leq 1.$$

■

Για ευνόητους λόγους η (2.97β) ονομάζεται **σειρά Fourier-Legendre** της συνάρτησης $h(\xi)$. Οι ιδιότητές της δεν διαφέρουν ουσιαστικά από εκείνες των συνηθισμένων σειρών Fourier. Ωστόσο, η αναλυτική διατύπωση και απόδειξη των ιδιοτήτων των σειρών Fourier-Legendre υπερβαίνουν το πλαίσιο αυτού του συγγράμματος. Γι' αυτό θα περιοστούμε στο να αναφέρουμε μόνο ότι, στο βασικό ζήτημα της σύγκλισης, κι αυτού του είδους οι σειρές δείχνουν τη γνωστή συμπεριφορά: Όσο ομαλότερη είναι η συνάρτηση $h(\xi)$, τόσο ισχυρότερη γίνεται και η σύγκλιση της αντίστοιχης σειράς Fourier-Legendre. Στην αντίθετη κατεύθυνση, στα σημεία ξ_i όπου μια τμηματικά συνεχής συνάρτηση $h(\xi)$ κάνει άλματα, η αντίστοιχη σειρά Fourier-Legendre συγκλίνει στον μέσο όρο $(1/2)[h(\xi_i -) + h(\xi_i +)]$.

Ένα συγκεκριμένο παράδειγμα αυτής της συμπεριφοράς, δίνεται στο Σχ. 2.9, στο οποίο συγκρίνουμε δύο αντιπροσωπευτικές συναρτήσεις με το μερικό άθροισμα $h_m(\xi)$ των αντίστοιχων σειρών Fourier-Legendre.



Σχ.2.9. Αριστερά, το γράφημα της συνάρτησης $h(\xi) = \sin(\pi \xi)$, σε υπέρθεση με το μερικό άθροισμα $h_3(\xi)$ (διακοπτόμενη καμπύλη) της σειράς Fourier-Legendre της $h(\xi)$. Δεξιά, το γράφημα της συνάρτησης $h(\xi) = \text{sgn}(x)$, σε υπέρθεση με το μερικό άθροισμα $h_{15}(\xi)$.

Επιστρέφοντας στο αξονικά συμμετρικό ΠΣΤ που μελετάμε, δίνουμε το τελικό αποτέλεσμα που έχει ως εξής: Ας υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις $f(\theta)$ και $g(\theta)$ είναι συνεχείς. Τότε οι σειρές Fourier-Legendre (2.96) θα συγκλίνουν σ' αυτές τις συναρτήσεις αν οι συντελεστές C_n και D_n υπολογιστούν με βάση τους τύπους

$$(2.98\alpha) \quad C_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 \tilde{f}(\xi) P_n(\xi) d\xi \equiv \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi f(\theta) P_n(\cos\theta) \sin\theta d\theta,$$

$$(2.98\beta) \quad D_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 \tilde{g}(\xi) P_n(\xi) d\xi \equiv \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi g(\theta) P_n(\cos\theta) \sin\theta d\theta.$$

Σύμφωνα με τις (2.94), οι συντελεστές A_n και D_n υπολογίζονται λύνοντας το σύστημα

$$(2.99) \quad A_n a^n + B_n a^{-(n+1)} = C_n, \quad A_n b^n + B_n b^{-(n+1)} = D_n.$$

Αυτό γίνεται εύκολα και οδηγεί στις ακόλουθες σχέσεις:

$$(2.100\alpha) \quad A_n = \frac{a^{n+1} C_n - b^{n+1} D_n}{a^{2n+1} - b^{2n+1}} = \frac{D_n - (a/b)^{n+1} C_n}{1 - (a/b)^{2n+1}} \frac{1}{b^n},$$

$$(2.100\beta) \quad B_n = a^{n+1} b^{n+1} \frac{a^n D_n - b^n C_n}{a^{2n+1} - b^{2n+1}} = \frac{C_n - (a/b)^n D_n}{1 - (a/b)^{2n+1}} a^{n+1}.$$

Συνακόλουθα, η λύση παίρνει τελικά την ακόλουθη μορφή

$$(2.101) \quad v(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{D_n - (a/b)^{n+1} C_n}{1 - (a/b)^{2n+1}} \left(\frac{r}{b}\right)^n + \frac{C_n - (a/b)^n D_n}{1 - (a/b)^{2n+1}} \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} \right] P_n(\cos\theta)$$

Ειδικότερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι περιπτώσεις που η ακτίνα της εσωτερικής σφαίρας μηδενίζεται ή εκείνη της εξωτερικής απειρίζεται, αντίστοιχα.

Στην πρώτη περίπτωση, η περιοχή Ω ανάγεται στο εσωτερικό μιας σφαιρικής επιφάνειας ακτίνας b . Αφού $a = 0$, οι σχέσεις (2.100) γίνονται

$$(2.102) \quad A_n = \frac{D_n}{b^n}, \quad B_n = 0.$$

Αυτό σημαίνει ότι η λύση του αξονικά συμμετρικού προβλήματος Dirichlet στην περιοχή $0 \leq r \leq b$ δίνεται, σε σφαιρικές βέβαια συντεταγμένες, από τη συνάρτηση

$$(2.103) \quad u(r, \theta) := \sum_{n=0}^{\infty} D_n \left(\frac{r}{b}\right)^n P_n(\cos \theta)$$

Ανάλογα, στο όριο $b \rightarrow \infty$, η περιοχή Ω ανάγεται στο εξωτερικό μιας σφαίρας ακτίνας a . Τότε, οι τύποι (2.100) απλουστεύονται για να γίνουν

$$(2.104) \quad A_n = 0, \quad B_n = a^{n+1} C_n.$$

Συνεπώς, η λύση του αξονικά συμμετρικού προβλήματος Dirichlet στην περιοχή $r \geq a$ δίνεται από τη συνάρτηση

$$(2.105) \quad u(r, \theta) := \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(\frac{a}{r}\right)^{n+1} P_n(\cos \theta)$$

B-2. Η γενική περίπτωση

Η γενικά ανώμαλη συμπεριφορά των συναρτήσεων Legendre στα άκρα του διαστήματος $[-1, 1]$ κληροδοτείται και στις προσαρτημένες. Αλλά και πάλι, όταν οι τιμές της παραμέτρου m περιορίζονται στο σύνολο των φυσικών αριθμών, όπως συμβαίνει στην περίπτωση μας λόγω της 2π -περιοδικότητας της συνάρτησης $\Phi(\varphi)$, τα πράγματα αλλάζουν άρδην. Πιο συγκεκριμένα, όταν $n = 0, 1, \dots$ και $m \in \mathbb{N}$, οι συναρτήσεις $P_n^m(\xi)$ κληρονομούν την καλή συμπεριφορά των πολυωνύμων Legendre. Αυτό συνάγεται αμέσως από το γεγονός ότι, σ' αυτή την περίπτωση

$$(2.106) \quad P_n^m(\xi) = (1 - \xi^2)^{m/2} \partial_\xi^m P_n(\xi).$$

Το ότι οι συναρτήσεις $P_n^m(\xi)$ που ορίζονται από αυτή τη σχέση αποτελούν λύση της προσαρτημένης εξίσωσης Legendre (2.78) αποδεικνύεται εύκολα με απλή αντικατάσταση. Από την άλλη, η (2.106) κάνει προφανές το γεγονός ότι (α) $P_n^m(-1) = P_n^m(1) = 0$ και (β) $P_n^m(\xi) \equiv 0$, για κάθε $m > n$.

Μάλιστα, χρησιμοποιώντας την (2.106), μπορεί κανείς σχετικά εύκολα να δείξει ότι οι συναρτήσεις $P_n^m(\xi)$ είναι ορθογώνιες στο διάστημα $[-1, 1]$. Ακριβέστερα,

$$(2.107) \quad \int_{-1}^1 P_n^m(\xi) P_l^m(\xi) d\xi \equiv \int_0^\pi P_n^m(\cos\theta) P_l^m(\cos\theta) \sin\theta d\theta = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{nl}$$

Με βάση αυτά τα αποτελέσματα μπορούμε πλέον να ισχυριστούμε τα εξής:

(i) Η εξίσωση Laplace στις σφαιρικές συντεταγμένες επιδέχεται λύσεις με διαχωρισμένες μεταβλητές της μορφής

$$(2.108\alpha) \quad u_{mn}(r, \theta, \varphi) := (C_m \cos m\varphi + D_m \sin m\varphi) (A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}) P_n^m(\cos \theta),$$

όπου $n = 0, 1, \dots$ και $m = 0, 1, \dots, n$. Χρησιμοποιώντας τη μιγαδική μορφή των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, αυτές γράφονται και σαν

$$(2.108\beta) \quad u_{mn}(r, \theta, \varphi) := (C_{mn} r^n + D_{mn} r^{-(n+1)}) e^{im\varphi} P_n^{|m|}(\cos \theta),$$

όπου $n = 0, 1, \dots$ και $m = 0, \pm 1, \dots, \pm n$.

(ii) Οι παραπάνω λύσεις είναι 2π -περιοδικές ως προς τη μεταβλητή φ και παραμένουν φραγμέ-

νες καθώς πλησιάζουμε τα άκρα του διαστήματος $0 \leq \theta \leq \pi$. Το ίδιο ισχύει και για κάθε γραμμικό συνδυασμό τους.

(iii) Οι λύσεις (2.108) και οι γραμμικοί συνδυασμοί τους είναι γενικά αδύνατο να πληρούν τις συνοριακές συνθήκες $u(a, \theta, \varphi) = f(\theta, \varphi)$ και $u(b, \theta, \varphi) = g(\theta, \varphi)$, για τυχαίες συναρτήσεις $f(\theta, \varphi)$ και $g(\theta, \varphi)$.

(iv) Ωστόσο, η ορθογωνιότητα των συναρτήσεων $e^{im\varphi}$ στο διάστημα $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ (βλ. σειρές Fourier) και των $P_n^{|m|}(\cos \theta)$ στο $0 \leq \theta \leq \pi$, μας επιτρέπουν να υποθέσουμε ότι το σύνολο των συναρτήσεων $e^{im\varphi} P_n^{|m|}(\cos \theta)$ αποτελεί την κατάλληλη βάση για την κατασκευή αναπτυγμάτων που θα συγκλίνουν σε κάθε ομαλή συνάρτηση $h(\theta, \varphi)$ με πεδίο ορισμού το διάστημα $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, του επίπεδου $\theta\varphi$.

Πραγματικά, οι συναρτήσεις

$$(2.109) \quad Y_{mn}(\theta, \varphi) := e^{im\varphi} P_n^{|m|}(\cos \theta), \quad n = 0, 1, \dots, \quad m = 0, \pm 1, \dots, \pm n,$$

που ονομάζονται **σφαιρικές αρμονικές**, έχουν τις αναμενόμενες ιδιότητες. Με άλλα λόγια, με κατάλληλη επιλογή των συντελεστών H_{mn} η διπλή σειρά $\sum_{mn} H_{mn} Y_{mn}(\theta, \varphi)$ θα συγκλίνει στη δοσμένη συνάρτηση $h(\theta, \varphi)$. Συγκεκριμένα,

• Αν η συνάρτηση $h(\theta, \varphi)$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, είναι συνεχής και 2π -περιοδική ως προς τη μεταβλητή φ , και

$$(2.110) \quad H_{mn} = \frac{(2n+1)(n-|m|)!}{4\pi(n+|m|)!} \int_0^\pi \int_{-\pi}^\pi h(\theta, \varphi) e^{-im\varphi} P_n^{|m|}(\cos \theta) \sin \theta \, d\varphi \, d\theta,$$

τότε

$$(2.111) \quad h(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n H_{mn} Y_{mn}(\theta, \varphi).$$

Συνακόλουθα, η λύση του γενικού προβλήματος Dirichlet με το οποίο ξεκινήσαμε δίνεται από τη συνάρτηση

$$(2.112) \quad u(r, \theta, \varphi) := \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n (C_{mn} r^n + D_{mn} r^{-(n+1)}) Y_{mn}(\theta, \varphi)$$

όπου οι συντελεστές C_{mn} και D_{mn} κατασκευάζονται από τις $f(\theta, \varphi)$ και $g(\theta, \varphi)$, με τον ακόλουθο τρόπο:

Σύμφωνα με την (2.112),

$$(2.113\alpha) \quad u(a, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n F_{mn} Y_{mn}(\theta, \varphi), \quad F_{mn} := C_{mn} a^n + D_{mn} a^{-(n+1)},$$

και

$$(2.113\beta) \quad u(b, \theta, \varphi) := \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^n G_{mn} Y_{mn}(\theta, \varphi), \quad G_{mn} := C_{mn} b^n + D_{mn} b^{-(n+1)}.$$

Άρα, η συνοριακή συνθήκη $u(a, \theta, \varphi) = f(\theta, \varphi)$ επιβάλλει την κατασκευή των συντελεστών F_{mn} από την $f(\theta, \varphi)$ μέσω του τύπου (2.111). Με βάση τον ίδιο τύπο πρέπει να κατασκευαστούν και οι συντελεστές G_{mn} , αλλά χρησιμοποιώντας την $g(\theta, \varphi)$. Γιατί, σύμφωνα με τη δεύτερη συνοριακή συνθήκη, $u(b, \theta, \varphi) = g(\theta, \varphi)$. Τέλος, από τη σχέση (2.113) των συντελεστών F_{mn} , G_{mn} με τους C_{mn} και D_{mn} , προκύπτουν αμέσως και οι τιμές των τελευταίων.

Ασκήσεις

2.1 Χρησιμοποιώντας τον ορισμό (2.29), δείχντε ότι οι συναρτήσεις Bessel $J_\nu(x)$ πληρούν τις παρακάτω αναδρομικές σχέσεις, όπου ο τόνος δηλώνει παραγώγιση ως προς x :

$$\begin{aligned} [x^\nu J_\nu(x)]' &= x^\nu J_{\nu-1}(x), & [x^{-\nu} J_\nu(x)]' &= -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x), \\ x J_\nu'(x) - \nu J_\nu(x) &= -x J_{\nu+1}(x), & x J_\nu'(x) + \nu J_\nu(x) &= x J_{\nu-1}(x), \\ x J_{\nu-1}(x) + x J_{\nu+1}(x) &= 2\nu J_\nu(x), & J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) &= 2 J_\nu'(x). \end{aligned}$$

2.2 Θεωρήστε τον κύλινδρο του μέρους A του παρόντος εδάφιου. Κατασκευάστε τη λύση του προβλήματος Dirichlet για την περίπτωση όπου η $U(x, y, z)$ μηδενίζεται στην πλευρική επιφάνεια, $\partial\Omega_2$, του κύλινδρου, ενώ οι τιμές της στη βάση, $\partial\Omega_1$, και στην κορυφή, $\partial\Omega_3$, καθορίζονται από τις συνθήκες

$$u(r, \varphi, 0) = f(r), \quad u(r, \varphi, b) = g(r), \quad 0 \leq r \leq a.$$

2.3 Για την ίδια διάταξη, να βρεθούν οι λύσεις της εξίσωσης Laplace που πληρούν τις συνοριακές συνθήκες

$$\begin{aligned} U(x, y, 0) &= F(x, y), & (x, y, z) &\in \partial\Omega_1, \\ \partial_n U(x, y, z) &= 0, & (x, y, z) &\in \partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_3. \end{aligned}$$

2.4 Ένας στερεός ευθύς κύλινδρος μήκους b και ακτίνας διατομής $a \ll b$ είναι τοποθετημένος έτσι που η μια του βάση ταυτίζεται με το επίπεδο $z = 0$ ενός Καρτεσιανού συστήματος $x y z$ και ο άξονας συμμετρίας του κυλίνδρου με τον άξονα z . Η πλευρική επιφάνεια του κυλίνδρου διατηρείται σε μηδενική θερμοκρασία, ενώ η βάση του $z = 0$ στη θερμοκρασία $T(x, y, 0) = f(r)$, όπου $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ και f δοσμένη συνεχής συνάρτηση. Να δειχθεί ότι αν, με βάση το γεγονός $b/a \gg 1$, υποθέσουμε ότι ο κύλινδρος καταλαμβάνει όλη την περιοχή

$$\Omega := \{(x, y, z) : 0 \leq r \leq a, z \geq 0\}$$

τότε

$$T(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-k_n z} J_0(k_n r), \quad (x, y, z) \in \Omega$$

όπου $k_n = \xi_n / a$, ξ_n οι ρίζες της $J_0(\xi) = 0$ και

$$A_n = \frac{2}{a^2 J_1^2(k_n a)} \int_0^a r f(r) J_0(k_n r) dr.$$

2.5 Να βρεθεί η θερμοκρασία $T(x, y, z)$ στο εσωτερικό του ημίσειου κύλινδρου της προηγούμενης άσκησης, όταν η πλευρική του επιφάνεια είναι θερμικά μονωμένη.

2.6 Να βρεθεί η λύση της εξίσωσης Laplace στο εσωτερικό μιας σφαίρας ακτίνας a , όταν η συνοριακή συνθήκη είναι της μορφής $u(a, \theta, \varphi) = f(\theta)$, σε κάθε μια από τις παρακάτω περιπτώσεις:

(i) $f(\theta) = \sin^2 \theta$, (ii) $f(\theta) = \sin \theta \sin 2 \theta$, (iii) $f(\theta) = \sin^2 \theta(3 - 4 \cos \theta)$, $f(\theta) = \operatorname{sgn} \theta$.

2.7 Να επαναληφθεί η προηγούμενη άσκηση για το εξωτερικό της σφαίρας.

2.8 α) Θεωρήστε ένα ημισφαίριο ακτίνας a του οποίου η επίπεδη επιφάνεια ταυτίζεται με τον κυκλικό $0 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq a$, του επίπεδου $z = 0$ ενός Καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων $x y z$. Κατασκευάστε τη λύση $U(x, y, z)$ της εξίσωσης Laplace στο εσωτερικό του ημισφαίριου, όταν $U(x, y, 0) = 0$ και στο σφαιρικό τμήμα της επιφάνειας η αντίστοιχη $u(r, \theta, \varphi)$ εξαρτιέται μόνο από τη γωνία θ : $u(a, \theta, \varphi) = f(\theta)$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

β) Εξειδικεύστε τη λύση του προηγούμενου μέρους στις περιπτώσεις όπου

(i) $f(\theta) = 3 \sin^2 \theta \cos^2 \theta$, (ii) $f(\theta) = 5 \sin \theta \sin 2 \theta$.

3. Προβλήματα αρχικών και συνοριακών τιμών

Ας θεωρήσουμε μια λεπτή μεμβράνη που, όταν ισορροπεί, καταλαμβάνει μια συμπαγή και απλά συνεκτική περιοχή \bar{D} του επίπεδου $x y$. Αν D είναι το εσωτερικό της περιοχής \bar{D} και ∂D το σύνορό της, τότε $\bar{D} = D \cup \partial D$. Υποθέτουμε ότι το σύνορο ∂D αποτελείται από ένα πεπερασμένο πλήθος ομαλών καμπυλών, $\{\Gamma_i\}$, με συνολικό μήκος L , που έχουν την ακόλουθη ιδιότητα: Αν, $\Gamma_i := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = X(s), y = Y(s), s_{i-1} \leq s \leq s_i\}$, όπου s η παράμετρος μήκους και $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_m = L$, τότε, στα σημεία όπου ενώνονται ανά δύο, τα εφαπτόμενα διανύσματα $\mathbf{v}(s_i - 0)$ και $\mathbf{v}(s_i + 0)$ σχηματίζουν γωνία $\theta_i \neq \pi$. Με αυτό τον τρόπο, εξασφαλίζουμε την ισχύ του θεωρήματος Green στην περιοχή \bar{D} .

Οι μικρού πλάτους ταλαντώσεις μιας μεμβράνης σαν την παραπάνω περιγράφονται από τις λύσεις της κυματικής εξίσωσης

$$(3.1) \quad c^2 \Delta u - u_{tt} = 0,$$

όπου c μια θετική σταθερή που καθορίζεται από την πυκνότητα μάζας σ της μεμβράνης και την τάση T που υφίσταται η τελευταία. Συγκεκριμένα, τα στοιχεία της μεμβράνης κινούνται στην κάθετη προς το επίπεδο $x y$ κατεύθυνση με τρόπο ώστε, αν το (υλικό) σημείο p της μεμβράνης προβάλλεται σημείο (x_p, y_p) , τότε η $|u(x_p, y_p, t)|$ αντιπροσωπεύει την απόσταση του σημείου p από το (x_p, y_p) τη χρονική στιγμή t . Η $u_t(x_p, y_p, t)$, από την άλλη, παριστάνει την ταχύτητα του ίδιου υλικού σημείου p τη στιγμή t .

Ας υποθέσουμε επιπλέον ότι το σύνορο της μεμβράνης παραμένει ακίνητο, όπως συνήθως συμβαίνει στην ταλάντωση της ελαστικής επιφάνειας ενός τύμπανου. Αυτή η υπόθεση ισοδυναμεί με τη συνοριακή συνθήκη

$$(3.2) \quad u(x, y, t) = 0, \quad (x, y) \in \partial D.$$

Τέλος, ας υποθέσουμε ότι, τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σχήμα της μεμβράνης περιγράφεται από την σχέση $z = F(x, y)$ και η ταχύτητα των στοιχείων της από τη συνάρτηση $G(x, y)$. Με άλλα λόγια, στην περίπτωση που μελετάμε ισχύουν οι αρχικές συνθήκες

$$(3.3) \quad u(x, y, 0) = F(x, y), \quad u_t(x, y, 0) = G(x, y),$$

όπου $F, G : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις που μηδενίζονται στο σύνορο της περιοχής \bar{D} .

Για να επικεντρωθούμε σε συγκεκριμένα παραδείγματα, θα εξετάσουμε το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών (ΠΑΣΤ) (3.1)-(3.3) στις εξής δύο περιπτώσεις:

α) Η τμηματικά ομαλή καμπύλη ∂D είναι ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκος πλευρών a και b , αντίστοιχα.

β) Η ∂D είναι η περιφέρεια ενός κύκλου ακτίνας a .

Και στις δυο περιπτώσεις θα υποθέσουμε, για ευκολία, ότι $c = 1$.

A. Ταλαντώσεις ορθογώνιας μεμβράνης

Στην πρώτη περίπτωση, μπορούμε να επιλέξουμε τους άξονες x, y , με τρόπο ώστε, όταν ισορροπεί, η μεμβράνη να καλύπτει την περιοχή $\bar{D} := \{(x, y) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$. Με

αυτό τον τρόπο η συνοριακή συνθήκη (3.2) γίνεται

$$(3.4\alpha) \quad u(0, y, t) = u(a, y, t) = 0, \quad y \in [0, b]$$

και

$$(3.4\beta) \quad u(x, 0, t) = u(x, b, t) = 0, \quad x \in [0, a].$$

Στη συνέχεια, γράφουμε την κυματική εξίσωση αναλυτικά,

$$(3.5) \quad u_{xx} + u_{yy} = u_{tt},$$

και υποθέτουμε ότι

$$(3.6) \quad u(x, y, t) = v(x, y) T(t).$$

Αντικαθιστώντας αυτή την έκφραση στην (3.5) και διαιρώντας το αποτέλεσμα με το γινόμενο $v(x, y) T(t)$, καταλήγουμε στην

$$(3.7) \quad v^{-1}(v_{xx} + v_{yy}) = T^{-1} T''.$$

Αφού τα δύο μέλη αυτής της ισότητας εξαρτιούνται από διαφορετικές μεταβλητές, έπεται ότι και τα δύο είναι τελικά ίσα προς μια σταθερή, την οποία θα ονομάσουμε $-\lambda$. Με άλλα λόγια, η (3.7) είναι ισοδύναμη με το σύστημα

$$(3.8\alpha) \quad -(v_{xx} + v_{yy}) = \lambda v,$$

$$(3.8\beta) \quad -T'' = \lambda T.$$

Τώρα είναι προφανές ότι η ΜΔΕ (3.8α) με τις συνοριακές συνθήκες (3.4) αποτελεί ένα πρόβλημα Dirichlet για τον τελεστή $-\Delta$, σαν αυτό που αναλύσαμε στο πρώτο εδάφιο αυτού του κεφάλαιου. Με βάση λοιπόν το Θεώρ. 1.3, περιμένουμε ότι η παράμετρος λ παίρνει μόνο θετικές τιμές κι ότι οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις αποτελούν μια ορθογώνια οικογένεια.

Αλλά, στη συγκεκριμένη περίπτωση που εξετάζουμε, μπορούμε να βρούμε ρητά τόσο τις ιδιοτιμές όσο και τις ιδιοσυναρτήσεις του παραπάνω προβλήματος Dirichlet. Για το σκοπό αυτό, υποθέτουμε ότι και η ΜΔΕ (3.8α) επιδέχεται λύσεις με χωριστές μεταβλητές. Έτσι, αντικαθιστώντας την έκφραση $v(x, y) = X(x) Y(y)$ στην (3.8α), καταλήγουμε στην

$$(3.9) \quad -X''(x) Y(y) - X(x) Y'' = \lambda X(x) Y(y).$$

Ισοδύναμα,

$$(3.10) \quad -\frac{X''(x)}{X(x)} - \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda.$$

Από αυτή τη σχέση αμέσως έπεται ότι

$$(3.11) \quad -\frac{X''(x)}{X(x)} = \mu, \quad -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \nu,$$

όπου μ, ν σταθερές, τέτοιες ώστε

$$(3.12) \quad \mu + \nu = \lambda.$$

Με άλλα λόγια, οι συναρτήσεις $X(x), Y(y)$ καθορίζονται από το σύστημα

$$(3.13\alpha) \quad X''(x) + \mu X(x) = 0, \quad Y''(y) + \nu Y(y) = 0.$$

Ταυτόχρονα, οι παραπάνω συναρτήσεις πρέπει να πληρούν τις συνοριακές συνθήκες

$$(3.13\beta) \quad X(0) = X(a) = 0, \quad Y(0) = Y(b) = 0.$$

Αυτό το συμπέρασμα συνάγεται από το γεγονός ότι, οι λύσεις $u(x, y, t) = X(x) Y(y) T(t)$ που προσπαθούμε να κατασκευάσουμε θα πρέπει να είναι συμβατές με τις συνοριακές συνθήκες (3.4). Από αυτές, η (3.4α) απαιτεί να ισχύει η $X(0) Y(y) T(0) = X(a) Y(y) T(0) = 0$, για κάθε $y \in [0, b]$, ενώ η (3.4α) επιβάλλει την $X(x) Y(0) T(0) = X(x) Y(b) T(0) = 0$, για κάθε $x \in [0, a]$. Προφανώς, αυτές οι απαιτήσεις οδηγούν αμέσως στις συνθήκες (3.10β).

Τώρα, τα κανονικά προβλήματα Sturm-Liouville (3.13) τα έχουμε μελετήσει διεξοδικά. Άρα, είμαστε σε θέση να πούμε ότι

- Οι ιδιοτιμές τους, μ και ν , αποτελούνται από τα σύνολα των θετικών αριθμών $\{k_m^2\}$ και $\{l_n^2\}$, αντίστοιχα, όπου

$$(3.14) \quad k_m = m \frac{\pi}{a}, \quad l_n = \frac{n\pi}{b}, \quad m, n = 1, 2, \dots$$

- Οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις δίνονται από τους τύπους

$$(3.15) \quad X_m(x) = \sin \frac{m\pi}{a} x, \quad Y_n(y) = \sin \frac{n\pi}{b} y.$$

Αυτό το αποτέλεσμα, σε συνδυασμό με την (3.12), οδηγεί αμέσως στο επόμενο:

- Οι ιδιοτιμές του προβλήματος Dirichlet που συγκροτεί η ΜΔΕ (3.8α) με τις συνοριακές συνθήκες (3.4) απαρτίζουν το σύνολο των θετικών αριθμών $\{\omega_{mn}^2\}$, όπου

$$(3.16) \quad \omega_{mn}^2 := \pi^2 \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right], \quad m, n = 1, 2, \dots$$

- Οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις είναι της μορφής

$$(3.17) \quad v_{mn}(x, y) = \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y.$$

- Τα μέλη του συνόλου $\{v_{mn}(x, y)\}$ είναι μεταξύ τους ορθογώνια στην περιοχή D :

$$(3.18) \quad \boxed{\int_D v_{mn}(x, y) v_{\tilde{m}\tilde{n}}(x, y) dx dy = 0, \quad (\tilde{m}, \tilde{n}) \neq (m, n)}$$

Στο μεταξύ, η ΣΔΕ (3.8β) που καθορίζει τον χρονικό παράγοντα $T(t)$ των λύσεων $u(x, y, t) = X(x) Y(y) T(t)$ έχει παραμείνει άλυτη. Αλλά, από τα προηγούμενα αμέσως συνάγεται ότι οι λύσεις της παραπάνω ΣΔΕ είναι αναγκαστικά της μορφής

$$(3.19) \quad T = a_{mn} \cos \omega_{mn} t + b_{mn} \sin \omega_{mn} t,$$

όπου a_{mn}, b_{mn} τυχαίες σταθερές.

Κατά συνέπεια, το συμπέρασμα της ως τώρα ανάλυσης είναι ότι κάθε συνάρτηση της μορφής

$$(3.20) \quad u_{mn}(x, y, t) = (A_{mn} \cos \omega_{mn} t + B_{mn} \sin \omega_{mn} t) \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y,$$

αποτελεί λύση της ΜΔΕ (3.5), συμβατή με την ομογενή συνοριακή συνθήκη (3.4). Μένει

λοιπόν να κατασκευάσουμε λύσεις που είναι συμβατές και με τις αρχικές συνθήκες (3.3).

Υποθέτουμε ότι αυτό μπορεί να επιτευχθεί με την υπέρθεση όλων των λύσεων της μορφής (3.20). Με άλλα λόγια, υποθέτουμε ότι η σειρά

$$(3.21) \quad u(x, y, t) := \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (A_{mn} \cos \omega_{mn} t + B_{mn} \sin \omega_{mn} t) \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y$$

συγκλίνει στην χωροχρονική στήλη $\bar{D} \times [0, \infty) := \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, t \geq 0\}$ με τρόπο ώστε, η οριακή συνάρτηση $u(x, y, t)$ ν' αποτελεί λύση της κυματικής εξίσωσης στο εσωτερικό $D \times (0, \infty)$ της στήλης και να συμφωνεί με τις αρχικές συνθήκες (3.3) στη βάση της.

Προφανώς, η συμβατότητα με τις αρχικές συνθήκες (3.3) θα εξασφαλιστεί εάν

$$(3.22\alpha) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y = F(x, y)$$

και

$$(3.22\beta) \quad \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{mn} B_{mn} \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y = G(x, y).$$

Και πραγματικά, αν οι συντελεστές A_{mn} και B_{mn} επιλεχτούν με κατάλληλο τρόπο, τότε οι παραπάνω διπλές σειρές συγκλίνουν στις προκαθορισμένες συναρτήσεις $F(x, y)$ και $G(x, y)$, αντίστοιχα. Η ορθή επιλογή των συντελεστών υπαγορεύεται από τη σχέση ορθογωνιότητας (3.18). Ωστόσο, μπορούμε να καταλήξουμε στον τύπο που καθορίζει τους οι συντελεστές A_{mn} και B_{mn} με τον εξής, όχι απόλυτα αυστηρό, τρόπο.

Υποθέτουμε ότι η $F(x, y)$ είναι συνεχής στο ορθογώνιο \bar{D} . Για δοσμένο $y \in [0, b]$, η $F(x, y)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση του x . Άρα, μπορεί να γραφτεί ως σειρά Fourier ημιτόνων, δηλαδή στη μορφή

$$(3.23\alpha) \quad F(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m(y) \sin \frac{m\pi}{a} x.$$

Όπως γνωρίζουμε, οι συντελεστές $A_m(y)$ καθορίζονται από τον τύπο

$$(3.23\beta) \quad A_m(y) = \frac{2}{a} \int_0^a F(\zeta, y) \sin \frac{m\pi}{a} \zeta d\zeta.$$

Άρα, η (3.23α) γράφεται σαν

$$(3.24) \quad F(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{2}{a} \int_0^a F(\zeta, y) \sin \frac{m\pi}{a} \zeta d\zeta \right] \sin \frac{m\pi}{a} x.$$

Ανάλογα, για κάθε $\zeta \in [0, a]$, η $F(\zeta, y)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση του y , που μπορεί να γραφτεί με τη μορφή σειράς Fourier ημιτόνων

$$(3.25\alpha) \quad F(\zeta, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(\zeta) \sin \frac{n\pi}{b} y.$$

Οι συντελεστές $B_n(\zeta)$ καθορίζονται από τον τύπο

$$(3.25\beta) \quad B_n(\zeta) = \frac{2}{b} \int_0^b F(\zeta, \xi) \sin \frac{n\pi}{b} \xi d \xi.$$

Άρα, η (3.25α) γράφεται σαν

$$(3.26) \quad F(\zeta, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{b} \int_0^b F(\zeta, \xi) \sin \frac{n\pi}{b} \xi d \xi \right] \sin \frac{n\pi}{b} y.$$

Τέλος, η αντικατάσταση της (3.26) στην (3.24) οδηγεί στην

$$(3.27) \quad F(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{a} \frac{2}{b} \int_0^a \int_0^b \sin \frac{m\pi}{a} \zeta \sin \frac{n\pi}{b} \xi d \zeta d \xi \right] \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y.$$

Από τη σύγκριση της τελευταίας σχέσης με την (3.22α) συμπεραίνουμε ότι οι συντελεστές A_{mn} θα πρέπει να κατασκευαστούν με βάση τον τύπο

$$(3.28\alpha) \quad A_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b F(\zeta, \xi) \sin \frac{m\pi}{a} \zeta \sin \frac{n\pi}{b} \xi d \zeta d \xi$$

Όταν οι συντελεστές A_{mn} κατασκευάζονται με αυτό τον τρόπο, η (3.22α) ονομάζεται **διπλή σειρά Fourier ημιτόνων της συνάρτησης** $F(x, y)$. Ανάλογα ορίζονται οι διπλές σειρές συνημιτόνων, καθώς και οι γενικές διπλές σειρές Fourier. Η γενίκευση αυτών των κατασκευών σε πολλαπλές Fourier θα πρέπει να είναι προφανής.

Σύμφωνα, τέλος, με τα προηγούμενα οι συντελεστές B_{mn} της σειράς (3.22β) θα πρέπει να υπολογιστούν από τον τύπο

$$(3.28\beta) \quad B_{mn} = \frac{4}{ab\omega_{mn}} \int_0^a \int_0^b G(\zeta, \xi) \sin \frac{m\pi}{a} \zeta \sin \frac{n\pi}{b} \xi d \zeta d \xi$$

Συμπερασματικά, η σειρά (3.21), με τους συντελεστές A_{mn} και B_{mn} κατασκευασμένους σύμφωνα με τους τύπους (3.28), αποτελεί μια πολύ ισχυρή υποψηφιότητα για τη λύση του ΠΑΣΤ (3.1)-(3.3) στην περίπτωση της ορθογώνιας μεμβράνης. Το ότι είναι πραγματικά μια λύση του παραπάνω ΠΑΣΤ όταν οι συναρτήσεις $F(x, y)$ και $G(x, y)$ είναι ομαλές, επαληθεύεται στις ασκήσεις.

B. Κυκλική μεμβράνη

Είναι προφανές ότι, στην περίπτωση της κυκλικής μεμβράνης, επιβάλλεται να χρησιμοποιήσουμε πολικές συντεταγμένες, που έχουν ως πόλο το κέντρο του δίσκου που ορίζει η μεμβράνη όταν ισορροπεί.

Θέτοντας, λοιπόν, $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $u(r \cos \varphi, r \sin \varphi, t) = U(r, \varphi, t)$ μετατρέπου- με την κυματική εξίσωση (3.1) (με $c = 1$) στην

$$(3.29) \quad U_{rr} + \frac{1}{r} U_r + \frac{1}{r^2} U_{\varphi\varphi} - U_{tt} = 0.$$

Με αυτό τον τρόπο, οι συνοριακή συνθήκη (3.2) γίνεται

$$(3.30) \quad U(a, \varphi, t) = 0$$

κι οι αρχικές συνθήκες (3.3) παίρνουν την ακόλουθη μορφή:

$$(3.31) \quad U(r, \varphi, 0) = f(r, \varphi), \quad U_t(r, \varphi, 0) = g(r, \varphi),$$

Προφανώς, με $f(r, \varphi)$, $g(r, \varphi)$ εννοούμε τις συναρτήσεις $F(x, y)$ και $G(x, y)$, αντίστοιχα, στις πολικές συντεταγμένες.

Ξεκινώντας με την υπόθεση ότι

$$(3.32) \quad U(r, \varphi, t) = V(r, \varphi) T(t)$$

και αντικαθιστώντας αυτή την έκφραση στην (3.29), βρίσκουμε τελικά ότι

$$(3.33) \quad \frac{1}{V} \left(V_{rr} + \frac{1}{r} V_r + \frac{1}{r^2} V_{\varphi\varphi} \right) = \frac{T''}{T}.$$

Για τους γνωστούς λόγους, η τελευταία είναι ισοδύναμη προς το σύστημα

$$(3.34\alpha) \quad -\left(V_{rr} + \frac{1}{r} V_r + \frac{1}{r^2} V_{\varphi\varphi} \right) = \lambda V,$$

$$(3.34\beta) \quad -T'' = \lambda T.$$

Με τη σειρά της, η συνοριακή συνθήκη (3.30) ανάγεται στην

$$(3.35) \quad V(a, \varphi) = 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Είναι προφανές ότι ο συνδυασμός αυτής της συνθήκης με την ΜΔΕ (3.34α) ορίζει ένα πρόβλημα Dirichlet για τον κυκλικό δίσκο D ποιοτικά ίδιο με αυτό που αναλύσαμε νωρίτερα. Κατά συνέπεια, οι γενικές ιδιότητες των ιδιοτιμών και ιδιοσυναρτήσεων που αναφέραμε πιο πάνω ισχύουν απaráλλαχτα και στην προκείμενη περίπτωση. Ειδικότερα, $\lambda > 0$.

Γι' αυτό, προχωράμε αμέσως στην αναλυτική επίλυση της ΜΔΕ (3.34α), με πρώτο βήμα την υπόθεση ότι

$$(3.36) \quad V(r, \varphi) = R(r) \Phi(\varphi).$$

Με τον γνωστό τρόπο, γρήγορα καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η ΜΔΕ (3.34α) ανάγεται στο ζευγάρι των ΣΔΕ

$$(3.37\alpha) \quad \Phi'' + \mu \Phi = 0,$$

$$(3.37\beta) \quad r^2 R''(r) + r R'(r) + (\lambda r^2 - \mu) R = 0,$$

όπου μ τυχαία σταθερή.

Όπως έχουμε τονίσει επανειλημμένα, όλα τα ζευγάρια $(r, \varphi + 2m\pi)$, με m ακέραιο, αντιστοιχούν στο ίδιο σημείο του χώρου. Συνεπώς, η $\Phi(\varphi)$ πρέπει να είναι 2π -περιοδική. Με αυτό τον τρόπο, το σύνολο των επιτρεπτών τιμών της παραμέτρου μ καταλήγει να είναι το $\{m^2\}$, με αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις τις

$$(3.38) \quad \Phi_m(\varphi) = \alpha_m \cos m\varphi + \beta_m \sin m\varphi, \quad m = 0, 1, \dots$$

Στρέφοντας την προσοχή μας στην (3.37β), υπενθυμίζουμε αρχικά ότι η παράμετρος λ έχει ήδη περιοριστεί στον θετικό τμήμα της πραγματικής ευθείας, \mathbb{R}^+ . Άρα μπορούμε να θέσουμε

$$(3.39) \quad \lambda = k^2, \quad k \in \mathbb{R}^+.$$

Με αυτό τον τρόπο η (3.37β) γίνεται

$$(3.40) \quad r^2 R''(r) + r R'(r) + (k^2 r^2 - m^2) R = 0,$$

δηλαδή η εξίσωση Bessel, την οποία μελετήσαμε διεξοδικά στο προηγούμενο εδάφιο. Εκεί είδαμε ότι η γενική λύση της (3.40) δίνεται από τις συναρτήσεις

$$(3.41) \quad R(r) = C_1 J_m(k r) + C_2 Y_m(k r),$$

$J_m(\xi)$ και $Y_m(\xi)$ οι συναρτήσεις Bessel πρώτου και δεύτερου είδους, αντίστοιχα.

Υπενθυμίζουμε σχετικά ότι, οι συναρτήσεις $Y_m(k r)$ δεν παραμένουν φραγμένες, καθώς το $r \rightarrow 0$. Άρα, από τις λύσεις (3.41) θα πρέπει να επιλέξουμε εκείνες που αντιστοιχούν στο $C_2 = 0$. Από την άλλη, για τις λύσεις της μορφής $V(r, \varphi) = R(r) \Phi(\varphi)$, η συνοριακή συνθήκη (3.35) ανάγεται στην

$$(3.42) \quad R(a) = 0.$$

Συνεπώς, το γινόμενο $k a$ πρέπει να είναι ίσο με κάποια από τις θετικές ρίζες της συνάρτησης Bessel $J_m(\xi)$. Αν ονομάσουμε αυτές τις ρίζες ξ_{mn} , τότε το σύνολο των δυνατών τιμών της παραμέτρου k γίνεται το $\{k_{mn}\}$, όπου

$$(3.43) \quad k_{mn} := \frac{\xi_{mn}}{a}.$$

Συνακόλουθα, η ΣΔΕ (3.34β) γίνεται

$$(3.44) \quad T'' + k_{mn}^2 T = 0,$$

που έχει ως λύσεις τους γραμμικούς συνδυασμούς των $\cos k_{mn} t$ και $\sin k_{mn} t$.

Συγκεντρώνοντας τ' αποτελέσματα της προηγούμενης ανάλυσης, καταλήγουμε στο ακόλουθο συμπέρασμα:

- Κάθε συνάρτηση της μορφής

$$(3.45) \quad U_{mn}(r, \varphi, t) = (A_{mn} \cos k_{mn} t + B_{mn} \sin k_{mn} t) J_m\left(k_{mn} \frac{r}{a}\right) \cos m \varphi \\ + (C_{mn} \cos k_{mn} t + D_{mn} \sin k_{mn} t) J_m\left(k_{mn} \frac{r}{a}\right) \sin m \varphi,$$

αποτελεί φραγμένη λύση της ΜΔΕ (3.29), που σέβεται τη συνοριακή συνθήκη (3.30).

Κατά συνέπεια, οι συγκλίνουσες σειρές της μορφής

$$(3.46) \quad U(r, \varphi, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (A_{mn} \cos k_{mn} t + B_{mn} \sin k_{mn} t) J_m\left(k_{mn} \frac{r}{a}\right) \cos m \varphi \\ + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (C_{mn} \cos k_{mn} t + D_{mn} \sin k_{mn} t) J_m\left(k_{mn} \frac{r}{a}\right) \sin m \varphi$$

είναι πιθανό να δίνουν λύση του ΠΑΣΤ (3.29) - (3.31).

Για ν' απλοποιήσουμε την παραπέρα ανάλυση, θα περιοριστούμε στην περίπτωση που το αρχικό σχήμα της κυκλικής μεμβράνης είναι ανεξάρτητο από τη γωνία φ και το ίδιο ισχύει για τη συνάρτηση που ορίζει την αρχική ταχύτητα των στοιχείων της μεμβράνης. Δηλαδή, θα υποθέσουμε ότι

$$(3.47) \quad f(r, \varphi) = F(r), \quad g(r, \varphi) = G(r).$$

Όπως μπορεί να δειχτεί και αυστηρά, η ανεξαρτησία των αρχικών συνθηκών από τη γωνία φ συνεπάγεται ότι και η λύση $u(r, \phi, t)$ της ΜΔΕ (3.29) δε θα εξαρτιέται από τη μεταβλητή φ . Συνεπώς, για την ειδική περίπτωση (3.47), οι λύσεις (3.46) ανάγονται στις

$$(3.48) \quad U(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos k_n t + B_n \sin k_n t) J_0\left(k_n \frac{r}{a}\right)$$

Προφανώς, από μαθηματική άποψη, η τωρινή κατάσταση είναι πανομοιότυπη μ' εκείνη του προβλήματος Dirichlet για τον κύλινδρο του προηγούμενου εδάφιου. Με άλλα λόγια, οι αρχικές συνθήκες για τις λύσεις της μορφής (3.48), που γίνονται

$$(3.49\alpha) \quad U(r, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(k_n \frac{r}{a}\right) = F(r)$$

και

$$(3.49\beta) \quad U_t(r, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n B_n \sin k_n t J_0\left(k_n \frac{r}{a}\right) = G(r),$$

αντίστοιχα, οδηγούν στην επιλογή

$$(3.50\alpha) \quad A_n = \frac{2}{a^2 J_1^2(k_n)} \int_0^a r F(r) J_0\left(k_n \frac{r}{a}\right) d r$$

$$(3.50\beta) \quad B_n = \frac{2}{k_n a^2 J_1^2(k_n)} \int_0^a r G(r) J_0\left(k_n \frac{r}{a}\right) d r$$

για τους συντελεστές των σειρών Fourier-Bessel

Θα κλείσουμε αυτό το εδάφιο με τις ακόλουθες επισημάνσεις: Οι παραπάνω λύσεις του προβλήματος αρχικών τιμών για μια μεμβράνη της οποίας η περίμετρος διατηρείται ακίνητη αποτελούν το δισδιάστατο ανάλογο της κίνησης μιας λεπτής τεντωμένης χορδής μήκους L που τα άκρα της ακινητούν.

Όπως λοιπόν και στην περίπτωση της χορδής, οι λύσεις που περιγράφουν την τυχαία κίνηση της μεμβράνης κατασκευάστηκαν με βάση τις αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις ή **χαρακτηριστικές λύσεις**. Στην ορθογώνια μεμβράνη, για παράδειγμα, αυτές είναι οι συναρτήσεις $u_{mn}(x, y, t)$ που δίνονται από την (3.20). Η τελευταία δείχνει καθαρά ότι, μια χαρακτηριστική λύση περιγράφει μian ειδικού τύπου κίνηση, αυτή κατά την οποία όλα τα στοιχεία της μεμβράνης εκτελούν αρμονική ταλάντωση με την ίδια συχνότητα ω_{mn} , αλλά με διαφορετικό πλάτος και φάση.

Από την (3.20) είναι επίσης φανερό ότι, εκτός από την περίμετρο, υπάρχουν, γενικά, και άλλα στοιχεία της της μεμβράνης που παραμένουν ακίνητα σε μια κανονική ή χαρακτηριστική ταλάντωση (βλ Σχ.3.1). Πιο συγκεκριμένα, αυτό συμβαίνει σε όλα τα σημεία (x, y) για το οποία

$$(3.51) \quad \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y = 0.$$

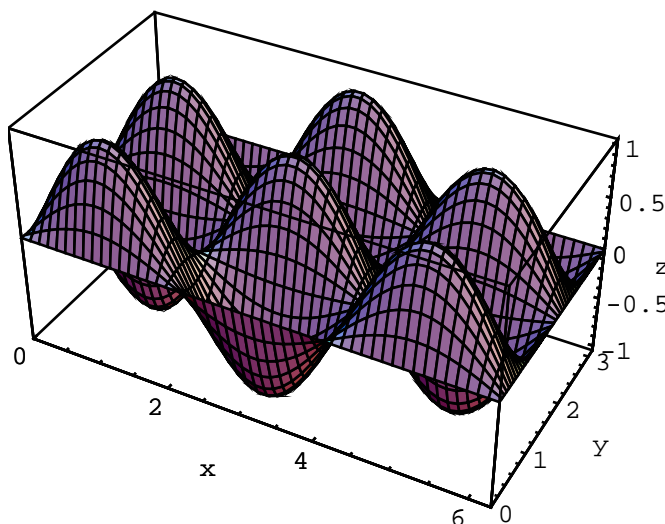
Για παράδειγμα, στη χαρακτηριστική ταλάντωση με $(m, n) = (1, 2)$, εκτός από την περίμετρο της ορθογώνιας μεμβράνης, ακινητούν και όλα τα στοιχεία που βρίσκονται πάνω στην ευθεία

$y = b/2$. Αντίστροφα, στη χαρακτηριστική ταλάντωση με $(m, n) = (2, 1)$ ακινητούν και τα στοιχεία της μεμβράνης που βρίσκονται πάνω στην ευθεία $x = y/2$. Όπως και στην περίπτωση της χορδής, τα σημεία της μεμβράνης που ακινητούν ονομάζονται **δεσμοί** της αντίστοιχης ταλάντωσης.

Σημειώστε τέλος ότι συχνά, στα προβλήματα ιδιοτιμών-ιδιοσυναρτήσεων, εμφανίζεται **εκφυλισμός**. Δηλαδή, στην ίδια ιδιοτιμή αντιστοιχούν περισσότερες από μία ιδιοσυναρτήσεις. Στην περίπτωση των παραπάνω λύσεων της κυματικής εξίσωσης, αυτό σημαίνει ότι στην ίδια συχνότητα ω αντιστοιχούν περισσότερες από μια χαρακτηριστικές ταλαντώσεις. Ας πάρουμε για παράδειγμα μια ορθογώνια μεμβράνη με $a = 2b$. Τότε από την (3.20) αμέσως συνάγεται ότι, οι ταλαντώσεις που αντιστοιχούν στα διαφορετικά ζευγάρια (m, n) και (m', n') θα έχουν την ίδια συχνότητα εάν

$$(3.52) \quad m^2 + 4n^2 = m'^2 + 4n'^2.$$

Ο αναγνώστης μπορεί εύκολα να διαπιστώσει ότι μια λύση της (3.52) είναι η $(m, n) = (2, 3)$, $(m', n') = (6, 1)$, οπότε $\omega_{23} = \omega_{61}$.



Σχ.3.1. Η κανονική ταλάντωση $(m, n) = (3, 4)$ της ορθογώνιας μεμβράνης, για $a = 2\pi, b = 2\pi$.

Ασκήσεις

3.1 N^ο αποδειχτεί η σχέση ορθογωνιότητας(3.18).

3.2 Υποθέστε ότι οι διαστάσεις της ορθογώνιας μεμβράνης που μελετήσαμε στο παρόν εδάφιο είναι $a = \pi, b = 2\pi$. Υπολογίστε τη συνάρτηση $u(x, y, t)$ που περιγράφει την κίνηση των στοιχείων της μεμβράνης, όταν η αρχική μορφή της προσδιορίζεται από τις παρακάτω συναρτήσεις, υποθέτοντας ότι αρχικά τα στοιχεία της μεμβράνης ακινητούν ($0 < \varepsilon \ll 1$).

(i) $f(x, y) = \varepsilon \sin 2x \sin 3y,$ (ii) $f(x, y) = \varepsilon \sin 2x \sin y + 3\varepsilon \sin 5x \sin 6y$

(iii) $f(x, y) = \varepsilon xy(\pi - x)(2\pi - y),$ (iv) $f(x, y) = \varepsilon \sin x \sin y(\pi - x)(2\pi - y).$

3.3 Να επαναληφθεί η προηγούμενη άσκηση, υποθέτοντας ότι, αρχικά, όλα τα στοιχεία της μεμβράνης βρίσκονται στο επίπεδο $x y$ και κινούνται στην κάθετη κατεύθυνση με ταχύτητα $g(x, y)$, όπου

$$(i) \quad g(x, y) = \sin 2x \sin y, \quad (ii) \quad g(x, y) = \sin x \sin 3y + 5 \sin 5x \sin 5y$$

$$(iii) \quad g(x, y) = x y (\pi - x) (2\pi - y), \quad (iv) \quad g(x, y) = \sin x \sin y (\pi - x) (2\pi - y).$$

3.4 Να προσδιοριστεί ένα σύνολο των συνθηκών ομαλότητας των συναρτήσεων $F(x, y)$ και $G(x, y)$ που εξασφαλίζουν ότι η σειρά (3.21) ορίζει μια αυστηρή λύση της κυματικής εξίσωσης στο εσωτερικό της χωροχρονικής στήλης $D \times (0, \infty)$, συμβατή με τις αρχικές και συνοριακές συνθήκες του αντίστοιχου ΠΑΣΤ.

3.5 α) Η περίμετρος ενός μεταλλικού επιπέδου αντικείμενου Σ , το οποίο έχει το σχήμα ορθογώνιου παραλληλόγραμμου και διαστάσεις $a \times b$, βρίσκεται συνεχώς σε μηδενική θερμοκρασία. Να υπολογιστεί η θερμοκρασία στο εσωτερικό του Σ κάθε χρονική στιγμή $t \geq t_0$, υποθέτοντας ότι είναι γνωστή και μη σταθερή τη στιγμή $t = t_0$.

β) Εξειδικεύστε την απάντηση του προηγούμενου μέρους, όταν η αρχική θερμοκρασία του Σ περιγράφεται από τη συνάρτηση $T(x, y, t_0) = x y (a - x) (b - y)$, $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$.

3.6 Να λυθεί το μέρος (α) του προηγούμενου προβλήματος στην περίπτωση που το μεταλλικό αντικείμενο Σ έχει τη μορφή κυκλικού δίσκου ακτίνας a .

3.7 Να προσδιοριστεί η εξέλιξη της θερμοκρασίας του μεταλλικού αντικείμενου Σ της άσκ. 3.5, όταν η περίμετρος του είναι θερμικά μονωμένη.

3.8 Να προσδιοριστεί η εξέλιξη της θερμοκρασίας του μεταλλικού δίσκου της άσκ. 3.6, όταν η η περιφέρειά του είναι θερμικά μονωμένη.

3.9 Ένα συμπαγές μεταλλικό αντικείμενο Σ , στο σχήμα ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου διαστάσεων $a \times b \times c$, καταλαμβάνει το διάστημα $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $0 \leq z \leq c$ του \mathbb{R}^3 . Όλες οι πλευρές του Σ διατηρούνται σε θερμοκρασία $T = 0$, εκτός από την πλευρά $z = c$, όπου $T(x, y, c) = f(x, y)$, με f δοσμένη. Να δείχτεί ότι, με τις κατάλληλες προϋποθέσεις, η θερμοκρασία στο εσωτερικό του Σ δίνεται από την έκφραση

$$T(x, y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \frac{\sinh(k_{mn} z)}{\sinh(k_{mn} c)}$$

όπου

$$k_{mn} = \pi \left[(m/a)^2 + (n/b)^2 \right]^{1/2},$$

$$c_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy.$$

Ειδικότερα, να προσδιοριστεί η $T(x, y, z)$ για $(x, y, z) \in \Sigma$ όταν

$$(i) \quad f(x, y) = x y (a - x) (b - y), \quad a = \pi, \quad b = 3\pi.$$

$$(ii) \quad f(x, y) = T_0 \in \mathbb{R}^+. \quad \text{Είναι η αντίστοιχη λύση συνεχής στην περιοχή } \Sigma;$$

Βιβλιογραφία

A. Διαφορικός και ολοκληρωτικός λογισμός συναρτήσεων πολλών μεταβλητών.

Brand, L., *Μαθηματική Ανάλυση* (=ελλην. μεταφρ. του Advanced Calculus), Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία (1984).

Edwards, Jr, C.H., *Advanced Calculus of Several Variables*, Academic Press (1973).

Kolmogorov, A.N. & Fomin, S.V., *Introductory Real Analysis*, Dover Publ. Inc (1970).

Παπαντωνίου, Β.Ι., *Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών. Θεωρία και ασκήσεις*, Β' έκδ., Εκδόσεις Γαρταγάνη, Θεσσαλονίκη (1989).

Protter, M.H. & C.B. Morrey, *A First Course in Real Analysis*, Springer-Verlag (1977).

Royden, H.L., *Real Analysis*, 2nd Ed., McMillan Publ., Co. Inc (1968).

Rudin, W., *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd Ed., McGraw-Hill Inc (1976).

Widder, D.V., *Advanced Calculus*, 2nd Ed., Prentice Hall Inc (1961).

B. Διαφορικές Εξισώσεις

B-1. Στα ελληνικά

Δάσιος, Γ., *Συνήθειες Διαφορικές Εξισώσεις*, Πανεπιστήμιο Πατρών (1991).

Δάσιος, Γ. & Κυριάκη, Κ., *Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις*, Αθήνα (1994).

Κυβεντίδης, Θ., *Διαφορικές Εξισώσεις*, Τόμοι I-III, Εκδόσεις ΖΗΤΗ, Θεσσαλονίκη (1987).

Τραχανάς, Σ., *Διαφορικές Εξισώσεις*, Τομ. I, Παν/κές Εκδόσεις Κρήτης (1989).

Τσουμπελής, Δ., *Συνήθειες διαφορικές Εξισώσεις*, Τομ. Α, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών (2007,2009).

Τσουμπελής, Δ., *Ανώτερα Μαθηματικά με Mathematica, Maple και άλλα Συστήματα Αλγεβρικών Υπολογισμών*, Τομ. Α-Β, Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών (2003).

Φίλος, Χ. Γ., *Μια εισαγωγή στις Διαφορικές Εξισώσεις*, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων (1989).

B-2. Στα αγγλικά

Arnold, V.I., *Ordinary Differential Equations*, MIT Press (1978).

Berg, P.W. & Mc Gregor, J.L., *Elementary Partial Differential Equations*, Holden-Day Inc (1966).

Birkhoff, G. & Rota, G.C., *Ordinary Differential Equations*, Blaisdell Publ. Co (1976).

Boyce, W. & Di Prima, R., *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, 3rd Ed., Willey (1977).

- Churchill, R.V., *Fourier Series and Boundary Value Problems*, 2nd Ed., McGraw-Hill Book Co (1969).
- Copson, E.T., *Partial Differential Equations*, Cambridge University Press (1975).
- Courant, R. & Hilbert D., *Methods of Mathematical Physics*, Vols I & II, Wiley Classic Edition, J. Wiley & Sons (1989).
- Duff, G.F.D. & Naylor, D., *Differential Equations of Applied Mathematics*, 3rd Ed., McGraw-Hill Inc (1966).
- Friedman, A. , *Partial Differential Equations*, 3rd Ed., Rinehart & Winston (1969).
- Forsyth, A., *Theory of Differential Equations*, Vols I-IV, Dover Publ. Inc (1959).
- Garabedian, P., *Partial Differential Equations*, J. Wiley (1964).
- Ince, E.L., *Ordinary Differential Equations*, Dover Publ. Inc (1956).
- John, F., *Partial Differential Equations*, 4th Ed., Springer-Verlag (1982).
- Kaplan, W., *Ordinary Differential Equations*, Addison-Wesley Publ. Co (1958).
- Kevorkian, J., *Partial Differential Equations*, Analytical Solution Techniques, Brooks/Cole (1990).
- Lieberstein, H.M., *Theory of Partial Differential Equations*, Academic Press (1972).
- Morse, P.M. & Feshbach, H., *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill Inc (1953).
- Petrovsky, I.G. , *Lectures of Partial Differential Equations*, Willey (Interscience) (1954).
- Sneddon, I., *Elements of Partial Differential Equations*, 3rd Ed., McGraw-Hill Book Co (1985).
- Sobolev, S.L., *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*, 3rd Ed., McGraw-Hill Book Co (1989).
- Strauss, W., *Partial Differential Equations - An Introduction*, 2nd Ed., J. Willey & Sons (2007).
- Trim, D.W., *Applied Partial Differential Equations*, PWS-KENT Publ. Co (1990).
- Young, E.C., *Partial Differential Equations, An Introduction*, 3rd Ed., Allyn and Bacon Inc (1972).
- Zauderer, E., *Partial Differential Equations of Applied Mathematics*, J. Willey & Sons (1989).

Ευρετήριο

- Ακολουθία(ς)
 αλλαγή (ς)
 βάσης, 202, 282
 κλίμακας, 134, 136, 229, 242
 μεταβλητής-ών, 121, 122, 132, 133, 310
 παραμέτρου, 115
 αναλλοιώτες λύσεις, 133
 αλυσίδας, κανόνας, 120
 άλμα, 231
 αλματική ασυνέχεια, 231
 αναλυτική (συνάρτηση), 128, 152
 ανισότητα Bessel, 235, 241
 ανοιχτό -ή -ά
 διάστημα, 2, 4, 18, 21, 31, 48, 54, 72, 73, 98, 99, 107, 152, 176, 224, 232, 245, 250, 254, 308
 υποσύνολο (-ά), 4, 43, 56, 73, 97, 125, 184, 192, 197, 260, 303
 άξονες, 27, 28, 154
 απεικόνιση (ς), 8, 29, 39, 59, 60, 73, 74, 125, 126, 134, 229
 απειροστή μεταβολή των ανεξάρτητων μεταβλητών, 134
 απειροστή μεταβολή συνάρτησης, 135
 απόκλιση (ς), 35, 36
 διανυσματικού πεδίου, 33, 34
 θεώρημα, 189
 αρχικά δοσμένα, 143
 ανώμαλο πρόβλημα Sturm-Liouville, 301
 αυστηρή λύση ΜΔΕ, 161, 163, 191, 338
- Βαθμωτό -ή**
 πεδίο, 184
 συνάρτηση, 199, 278
βάση (ς)
 (διανυσματικού) χώρου, 202, 303
 Χαρακτηριστικές, 99
 βαρύτητας, πεδίο
 βαρυτικό δυναμικό
- Γενικευμένη (ες) λύση (εις) ΜΔΕ, 24, 161**
 εξίσωση του Legendre, 320
 συνάρτηση (εις), 24
 γενική λύση ΜΔΕ, 106, 116
 γενικού τύπου λύση, 18
 γραμμικός-ή-ό -ών-ά
 ανεξάρτητη-ες λύση-εις, 131, 255, 310, 312, 321, 323
 ΜΔΕ, 13-15, 19, 21, 34, 37, 43, 45, 46, 51
- Δεσμοί, 293, 315**
 διανυσματικός -ό -ού
 πεδίο, 33, 35, 57, 97, 189, 303
 πεδίου, απόκλιση, 33
 πεδίου, στροβιλισμός, 33
 διακριτοποίηση της ενέργειας, 33
 διανυσματικό(ού) πεδίο(ου), 33, 57
 απόλιση, 33
 στροβιλισμός, 33
 διατήρηση μηχανικής ενέργειας, 181
 διαφορική εξίσωση
 μερική, 10, 12
 διάχυσης, εξίσωση, 32, 136, 137, 196, 229, 274
 διαχωρισμένες συνοριακές συνθήκες, 277
 διχαρακτηριστική-ες καμπύλη-ες, 203, 204, 284
 δράσης, ολοκλήρωμα, 182
 δυναμική ενέργεια, 181
 δυναμικό, ηλεκτρικό, 307
- Ειδική λύση, 18**
 εκφυλισμός, 293, 315
 ελλειπτικού τύπου ΜΔΕ, 128, 195
 έλξη (ς), παγκόσμια (ς) (νόμος), 32
 ενέργεια
 δυναμική, 181
 ολική, 181

- κινητική, 182
 εξίσωση-εις
 αρμονικού ταλαντωτή, 141
 Bessel, 287
 Bessel τροποποιημένη, 288
 διατήρησης της μάζας, 35, 75
 διατήρησης της μηχανικής ενέργειας
 181
 διάχυσης ή θερμότητας, 32, 136,
 137, 196, 229, 274
 Cauchy-Riemann, 33
 Euler, 77
 Euler-Lagrange, 184
 Εξέλιξης, 34
 Fourier, 32
 Korteweg & de Vries, 34
 Laplace, 32
 Legendre, 321
 Navier-Stokes, 34
 κίνησης του πεδίου, 184
 κυματική, 187, 196, 207
 προσαρτημένη εξίσωση Legendre,
 297
 Schrödinger, 32
 Tricomi, 130
 Poisson, 32
 Χαρακτηριστικές, 73
 εξισώσεις
 Euler-Lagrange, 182, 184
 χαρακτηριστικές, 196
 επέκταση (περιοδική) συνάρτησης, 178,
 233
 επιφάνεια-ες
 ολοκληρωτική, 29, 100
 παραμετρική-ές, 100

 εσωτερικό γινόμενο, 22
 εφαπτόμενο διάνυσμα (παραμετρικής
 καμπύλης), 55, 57

Ημιγραμμικές ΜΔΕ, 93, 121

Θεμελιώδης λύση
 εξίσωσης διάχυσης, 138
 εξίσωσης Laplace, 132

 θεώρημα
 Dirichlet, 240
 Green, 189
 ισχυρή αρχή μεγίστου, 261
 μέσης τιμής, 261

Ισοσταθμικές καμπύλες, 53
 ιδιόμορφο πρόβλημα Sturm-Liouville,
 301
 ιδιοσυνάρτηση, 298
 ιδιοτιμή, 298

Καλά τοποθετημένο πρόβλημα (κατά
 Hadamard), 63
 καμπύλη
 ολοκληρωτική, 94
 παραμετρική, 54
 χαρακτηριστική, 53
 καμπυλότητα, Μέση, 185
 κανόνας (στάθμη, norm) αλυσίδας
 κανονική-ό -ές
 μορφή -ές, ΜΔΕ, 121, 201, 280
 πρόβλημα Sturm-Liouville, 301
 συνάρτηση, 303
 κατανομή (ες), 24, 75
 κβάντωση της ενέργειας, 33
 κινητική ενέργεια, 180
 κλίση συνάρτησης, 35
 κριτήριο Μ του Weierstrass, 214, 241
 κυματική εξίσωση, 187, 196, 207
 κύριο μέρος ΜΔΕ, διαφορικού τελεστή,
 279
 κώνος
 φωτός, 204
 χαρακτηριστικός, 204, 284

Λύση -εις
 αυστηρή, 161
 αναλλοιώτες, 133
 ειδική, 18
 γενικευμένη, 161
 γενική, 18
 κλασική, 161
 d' Alembert, 143
 κλασική, 161
 ομοιότητας, 133

χαρακτηριστικές, 292, 337
λωρίδας συνθήκη, 150

Μερική(ς) διαφορική(ς) εξίσωση(ς)

γραμμική –ές, 13
ημιγραμμική, 93
κανονική μορφή, 121
κύριο μέρος, 121
σχεδόν γραμμική-ες, 93, 97

ΜΔΕ,

άκρως υπερβολική, 195
ελλειπτικού τύπου, 128, 195
ημιγραμμικές, 93, 121
παραβολικού τύπου, 195
πρώτης τάξης, 10
δεύτερης τάξης, 12
υπερβολικού τύπου, 195
χαρακτηριστική τετραγωνική μορφή,
202

μέθοδος

χαρακτηριστικών καμπυλών, 60
(δια-) χωρισμού των μεταβλητών,
207

μερική παράγωγος, 4-7

μέση καμπυλότητα, 185

μετασχηματισμός -ού ομοιότητας, 201,
280

μονοδιάστατη κυματική εξίσωση, 144

μορφή

κανονική ΜΔΕ, 121, 201, 280

Ολική

μηχανική ενέργεια, 181

ολοκλήρωμα

επιφανειακό, 280
δράσης, 182

ολοκληρωτική

επιφάνεια, 29
καμπύλη, 57, 94, 97
υπερεπιφάνεια, 30

ομάδες σημειακών μετασχηματισμών,
133

ορίζουσα Jacobi, 59

ορθά διατυπωμένο πρόβλημα (κατά
Hadamard), 63

ορθογώνιες (συναρτήσεις), 212, 234
όρος μη ομογένειας, 207

Παγκόσμια έλξη, 32

παραβολικού τύπου ΜΔΕ, 195

παραμετρική καμπύλη, 54

παράμετρος διαχωρισμού, 209

πεδίο

βαθμωτό, 184

διανυσματικό, 57, 97

περιοδική επέκταση συνάρτησης, 233

περιοχή

επίδρασης, 158

καθορισμού, 158

πίεση, 35

πολυώνυμο Legendre, 298

πρόβλημα

ανώμαλο (ιδιόμορφο) Sturm-
Liouville, 278

αρχικών τιμών, 142

Cauchy, 276

Dirichlet, 188

κανονικό Sturm-Liouville, 278

Neumann, 191

Robin (3^{ου} είδους), 191

χαρακτηριστικών συνορ. τιμών, 188

πυκνότητα, 35

Lagrange, 182

πυρήνας Dirichlet, 236

Σειρά

διπλή Fourier ημιτόνων, 311

Fourier, 230

Fourier-Bessel, 292

Fourier-Legendre, 301

Fourier ημιτόνων, 230

Fourier συνημιτόνων, 229

σταθερή του Planck, 32

στάθμη, 234

σύμβαση Einstein, 199

συμμετρία εξίσωσης, 136

συμπαγές έρεισμα, 64

συμπληρωματικές συνθήκες, 141

συνάρτηση-εις

αναλυτική (ες), 128, 152

απόλυτα ολοκληρώσιμη, 231

- αρμονική, 260
- βάρους, 278
- Bessel, 287
- Bessel 1^{ου} είδους, 287
- Bessel 2^{ου} είδους, 287
- Γάμμα, 288
- εξαναγκασμού, 207
- κανονική, 279
- Lagrange, 182
- Legendre, 1^{ου} είδους, 297
- Legendre, 2^{ου} είδους, 297
- Neumann, 290, 310
- ορθογώνιες, 212, 234
- προσαρτημένη Legendre 1^{ου} είδους, 297
- προσαρτημένη Legendre 2^{ου} είδους, 297
- τετραγωνικά ολοκληρώσιμη, 234
- τροποποιημένη Bessel 1^{ου} είδους, 288
- τροποποιημένη Bessel 2^{ου} είδους, 288
- τμηματικά συνεχής, 231
- σφάλματος, 137
- Weber, 310
- συντελεστές Fourier, 231
- συντελεστής ιξώδους, 35
- συνθήκη-ες
 - αρχική-ές, 63, 141, 142
 - διαχωρισμένες συνοριακές, 301
 - λωρίδας, 150
 - περιοδικές, 225
 - συμβατότητας, 150
 - συνοριακές, 141
 - συνοριακή τύπου Dirichlet, 250
 - συνοριακή τύπου Neumann, 250
 - συνοριακή τύπου Robin, 250
 - συμπληρωματικές, 141
- σύστημα
 - υπερκαθορισμένο, 34
 - υποκαθορισμένο, 34
- συστήματα αλγεβρικών υπολογισμών, 78
- σφαιρικές αρμονικές, 304
- σχεδόν-γραμμική ΜΔΕ, 97
- σχέση ορθογωνιότητας, 292
- Ταυτότητα Green**,
 - πρώτη, 190, 280
 - δεύτερη, 192, 280
 - τρίτη, 193, 280
- τελεστής, 8
 - αυτοσυζυγής, 276
 - Laplace, 35
 - παραγωγισής, 273
 - τυπικά συζυγής, 276
- τετραγωνική μορφή (χαρακτηριστική), 202, 282
- τριγωνομετρικό πολυώνυμο, 234
- τροποποιημένη εξίσωση Bessel, 290, 310
- τύπος
 - Poisson, 259
 - Rodrigues, 299
- Υπερβολικού τύπου ΜΔΕ**, 195
- υπέρθωση (επαλληλία), 168
- υπερεπιφάνεια, 113
 - ελεύθερη, 200, 279
 - ολοκληρωτική, 30
 - ομαλή, 197, 276
 - μη χαρακτηριστική, 200, 279
 - χαρακτηριστική, 200, 279
- υπόθεση εργασίας (ansatz), 208
- Φάσμα τιμών**
 - διακριτό, 275
 - συνεχές, 275
- Χαρακτηριστικός-ή-ό-ές**
 - βάσης, 99
 - διάνυσμα (ιδιοδιάνυσμα), 274
 - εξίσωση-εις, 196
 - καμπύλη –ες, 53, 73, 99, 113, 152

κώνος, 204, 284
λύσεις, 314
οριζόντιες, 99
τετραγωνική μορφή, 202, 282
τετράπλευρο, 178
τιμή (ιδιοτιμή), 274
υπερεπιφάνεια,
200
χωροχρονικό σημείο, 156