ΣΕΙΡΕΣ FOURIER

Θεωρία (σειρές Fourier)

Εάν μιά συνάρτηση f ορίζεται σε όλο το $\mathbb{R}$ και υπάρχει αριθμός λ>0 τέτοιος ώστε να ισχύει:

$$f(x)=f(x+\lambda),\quad \forall x \in \mathbb{R}$$

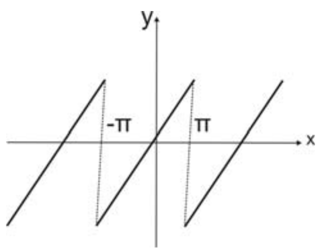
Τότε η συνάρτηση καλείται **περιοδική**, ο δε ελάχιστος αριθμός λ για τον οποίο ισχύει η παραπάνω σχέση καλείται **αρχική περίοδος** της f.

Παράδειγμα

Οι συναρτήσεις sinx, cosx είναι περιοδικές με περίοδο 2π, ενώ οι συναρτήσεις sinλx, cosλx με λ>0 είναι περιοδικές με περίοδο $\frac{2\pi}{\lambda}$.

Παρατήρηση 1. (γράφημα περιοδικής συνάρτησης)

Αν μια συνάρτηση f είναι περιοδική με περίοδο λ, τότε το γράφημα της f σ' ένα οποιοδήποτε διάστημα [α+nλ, α+(n+1)λ], προκύπτει από το γράφημα της στο διάστημα [α, α+λ] με παράλληλη μετατόπιση προς τον άξονα των x, κατά λ μονάδες μήκους (επαναλαμβάνεται δηλαδή το ίδιο γράφημα). Π.χ. ένα γράφημα περιοδικής συνάρτησης είναι και το παρακάτω



Αν η f ορίζεται στο διάστημα $(-\lambda,\lambda)$ και εκτός του $(-\lambda,\lambda)$ είναι **περιοδική** με περίοδο $T=2\lambda$, οι αριθμοί

$$a_o=\frac{1}{2\lambda}\int_{-\lambda}^{\lambda} f(x)dx$$

$$a_n=\frac{1}{\lambda}\int_{-\lambda}^{\lambda} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\lambda}dx \quad \text{με } n=1,2,3,.....$$

$$\beta_n=\frac{1}{\lambda}\int_{-\lambda}^{\lambda} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\lambda}dx \quad \text{με } n=1,2,3,.....$$

καλούνται **συντελεστές Fourier** της συνάρτησης f.

Η σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos nx + \beta_n \sin nx\right)$$

καλείται **σειρά Fourier** της συνάρτησης f.

Παρατήρηση 2.

1. Αν η f(x) είναι ***άρτια*** (δηλαδή $f(x) = f(-x)$, το γράφημα είναι συμμετρικό ως προς τον άξονα των y) θα έχουμε $\beta_n = 0 \quad n \in N$
2. Αν η f(x) είναι ***περιττή*** (δηλαδή $f(-x) = -f(x)$, το γράφημα είναι συμμετρικό ως προς την αρχή των αξόνων) θα έχουμε $a_n = 0 \quad n \in N$

3. Αν **λ=π** δηλαδή η f ορίζεται στο διάστημα $\left(-\pi, \pi\right)$ τότε οι παραπάνω τύποι γίνονται :

$$a_o = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \;,\; a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx \quad,\; \beta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx$$

Ανάλογα αν η f(x) ορίζεται στο διάστημα $\left(0, 2\pi\right)$ και έξω από αυτό επεκτείνεται περιοδικά, τότε οι παραπάνω τύποι γίνονται:

$$a_o = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)dx ,\; a_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\cos nx\, dx \;,\; \beta_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(x)\sin nx\, dx$$

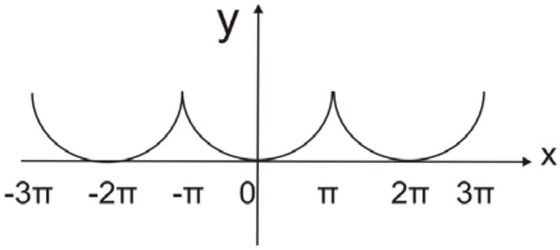
Εφαρμογές

Να αναπτυχθούν σε σειρά Fourier, κάθε μία από τις παρακάτω συναρτήσεις (να γίνει και η γραφική τους παράσταση πρώτα)

1. $f(x) = x^2 \qquad x \in \left[-\pi, \pi\right)$
2. $f(x) = x \qquad x \in \left[-\pi, \pi\right)$
3. $f(x) = x \qquad x \in \left[0, 2\pi\right)$
4. $f(x) = \left|\sin x\right| \qquad x \in \mathbb{R}$

Λύση

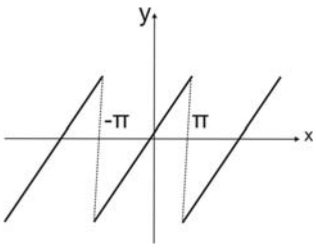
1. $f(x) = x^2 \quad x \in [-\pi, \pi)$



Η f(x) είναι <u>***άρτια***</u> (το γράφημα είναι συμμετρικό ως προς τον άξονα των y) $\Rightarrow \beta_n = 0$

Υπολογισμός $a_n =$ άσκηση 1 αυτοαξιολόγησης σελίδας 191 βιβλίου

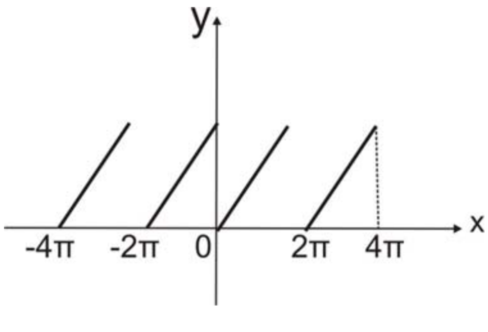
2. $f(x) = x \qquad x \in [-\pi, \pi)$



Η f(x) είναι <u>***περιττή***</u> (το γράφημα είναι συμμετρικό ως προς την αρχή των αξόνων) $\Rightarrow a_n = 0$

Υπολογισμός $\beta_n =$ παράδειγμα σελίδας 193 βιβλίου

3. $f(x) = x \qquad x \in [0, 2\pi)$



Εδώ $a_o = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} x dx = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{x^2}{2}\Bigg|_0^{2\pi} = \dfrac{4\pi^2}{4\pi} = \pi$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos nx dx = (\text{παραγοντική ολοκλήρωση})=$$

$$= \frac{1}{\pi n} x\sin nx\Big|_o^{2\pi} - \frac{1}{\pi n}\int_0^{2\pi} \sin nx dx = 0(;)$$

Ακόμα

$$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin nx dx = {*} -\frac{1}{\pi}\frac{x\cos nx}{n} + \frac{1}{\pi n^2}\sin nx\Bigg|_0^{2\pi} =$$

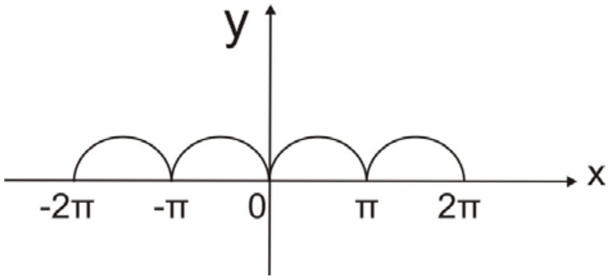
$$*\left(\int \text{xsinnxdx} = \int \text{x}\left(-\frac{\text{cosnx}}{\text{n}}\right)' \text{dx} = -\frac{\text{x}}{\text{n}}\text{cosnx} + \frac{1}{\text{n}}\int \text{cosnxdx} = -\frac{\text{x}}{\text{n}}\text{cosnx} + \frac{1}{\text{n}^2}\text{sinnx} + \text{c}\right)$$

$$= -\frac{1}{\pi}\frac{2\pi\cos 2n\pi}{n} + \frac{1}{\pi n^2}\sin 2n\pi + \frac{1}{\pi}\frac{0\cos 0\pi}{n} + \frac{1}{\pi n^2}\sin 0\pi = (-1)\frac{2}{n} =$$

Άρα

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n \text{sinnx}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)\frac{2}{n}\text{sinnx}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\text{sinnx}$$

4. $f(x)=\left|\sin x\right| \quad 0\le x<2\pi \quad \& \quad f(x+2\pi)=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$



Η f(x) είναι ***άρτια*** (το γράφημα συμμετρικό ως προς τον άξονα των y) $\Rightarrow \beta_n=0$ και έτσι έχουμε:

άρα

$$a_o=\frac{1}{2\lambda}\int_0^{2\pi}\text{sinxdx}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\text{sinxdx}+\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\text{sinxdx}=$$

$$=2\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\text{sinxdx}=\frac{1}{\pi}\left(\text{-cosx}\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}$$

Ακόμα

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\sin x\cos nxdx=*=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(\sin(n+1)x+\sin(1-n)x\right)dx$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\left(\sin(n+1)x+\sin(1-n)x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(-\frac{1}{n+1}\cos(n+1)x\Big|_o^{\pi}-\frac{1}{1-n}\cos(1-n)x\Big|_o^{\pi}-\frac{1}{n+1}\cos(n+1)x\Big|_{\pi}^{2\pi}-\frac{1}{1-n}\cos(1-n)x\Big|_{\pi}^{2\pi}\right)=$$

$$\frac{1}{\pi}\left[\frac{1-(-1)^{n+1}}{n+1}+\frac{(-1)^{n-1}-1}{n-1}\right]=\begin{cases}-\dfrac{4}{\pi(n^2-1)} & \text{αν}\quad \text{n=άρτιος}\\ 0 & \text{αν}\quad \text{n=περιττός}\end{cases}$$

Γιατί αν $n=\text{περιττός}\Rightarrow n+1=\text{άρτιος}$ $\quad\cos\left(n+1\right)x\Big|_0^{\pi}=\cos(n+1)\pi-\cos 0=1-1=0$

Άρα τελικά

$$\left|\sin x\right|=\frac{1}{\pi}-\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{3}\cos 2x-\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{15}\cos 4x-......$$

*Ισχύει $\sin a\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\sin(a+\beta)+\sin(a-\beta)\right)$

Θεωρία (Σύγκλιση και άθροισμα της σειράς Fourier)

Μιά συνάρτηση $f:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ καλείται **τμηματικά λεία**, αν υπάρχει πεπερασμένη διαμέριση του $[\alpha,\beta]$

$$\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n = \beta$$

τέτοια ώστε

α) η παράγωγος της f υπάρχει και είναι συνεχής σε κάθε υποδιάστημα $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$.

β) υπάρχουν τα πλευρικά όρια της παραγώγου $f(\alpha_k +), f(\alpha_k -)$ $k=0,1,\ldots,n-1$.

Θεώρημα 1. (Dirichlet)

Αν f είναι μιά περιοδική συνάρτηση με περίοδο 2λ. Αν η f είναι τμηματικά λεία στο διάστημα [α, α+λ], τότε η σειρά Fourier της

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\cos nx + \beta_n \sin nx\right)$$

συγκλίνει σε κάθε $x \in \mathbb{R}$ στην τιμή

$$\frac{f(x+)+f(x-)}{2}$$

Ειδικότερα, αν η f είναι συνεχής στο σημείο x τότε η σειρά Fourier της συγκλίνει στη τιμή f(x).

Παρατήρηση 3.

1. Όταν η σειρά Fourier της συνάρτησης f στο σημείο x συγκλίνει και έχει άθροισμα την f(x), τότε γράφουμε:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \cos nx + \beta_n \sin nx\right)$$

2. Όταν η σειρά Fourier της συνάρτησης f στο σημείο x συγκλίνει στην τιμή f(x) σε κάθε σημείο του διαστήματος, τότε λέμε ότι η συνάρτηση **αναπτύσεται σε σερά Fourier**.

Εφαρμογές

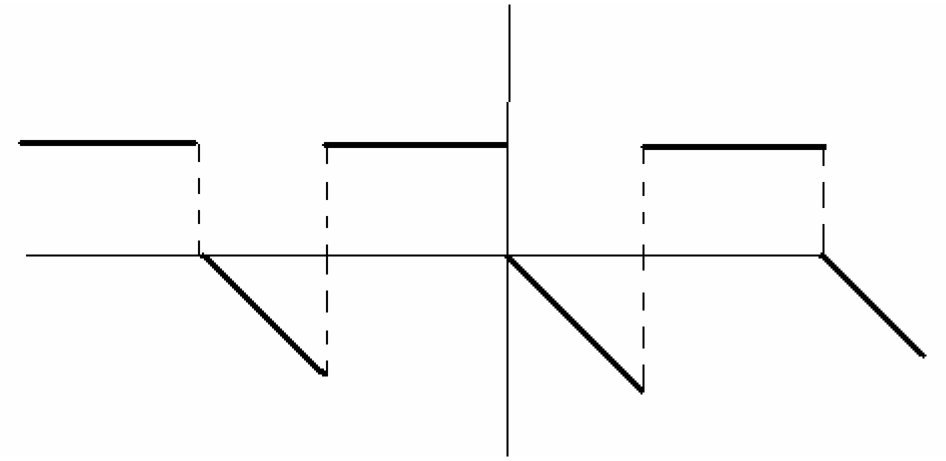
1. Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η περιοδική συνάρτηση f:

$$\text{f(x)}=\begin{cases} \dfrac{1}{2} & -1 \le \text{x} < 0 \\ -x & 0 \le \text{x} < 1 \end{cases} \qquad \& \quad \text{f(x+2)=f(x)} \quad \forall \text{x} \in \mathbb{R}$$

Στη συνέχεια να βρεθεί η τιμή του αναπτύγματος στα σημεία $\text{x}_1=0$, $\text{x}_2=1$ και να δειχθεί ότι: $\dfrac{\pi^2}{8}=1+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}+\dfrac{1}{7^2}+...$

Λύση

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης δίνεται παρακάτω



Εδώ λ=1. Άρα: $a_o=\dfrac{1}{2}\int_{-1}^{0}\dfrac{1}{2}\text{dx}+\dfrac{1}{2}\int_{0}^{1}(\text{-x})\text{dx}=0$ Ακόμα:

$$\text{a}_\text{n}=\frac{1}{1}\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}\text{cosn}\pi\text{xdx}+\frac{1}{1}\int_{0}^{1}(\text{-x})\text{cosn}\pi\text{xdx}=\frac{1}{2}\left[\frac{\text{sinn}\pi\text{x}}{\text{n}\pi}\right]_{-1}^{0}-\left[\frac{\text{x}}{\text{n}\pi}\text{sinn}\pi\text{x}+\frac{\text{x}}{\text{n}^2\pi^2}\text{cosn}\pi\text{x}\right]_{0}^{1}=$$

$$=-\frac{1}{\text{n}^2\pi^2}(\text{cosn}\pi\text{-1})=\frac{1}{\text{n}^2\pi^2}\left(1\text{-}(\text{-1})^\text{n}\right)=\begin{cases}\dfrac{2}{\text{n}^2\pi^2} & \text{n=περιττός}\\ 0 & \text{n=άρτιος}\end{cases}$$

Ακόμα

$$\beta_\text{n}=\frac{1}{1}\int_{-1}^{0}\frac{1}{2}\sin(\text{n}\pi\text{x})\text{dx}+\frac{1}{1}\int_{0}^{1}(\text{-x})\sin(\text{n}\pi\text{x})\text{dx}=\frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(\text{n}\pi\text{x})}{\text{n}\pi}\right]_{-1}^{0}-\left[-\frac{\text{x}}{\text{n}\pi}\cos(\text{n}\pi\text{x})+\frac{\text{x}}{\text{n}^2\pi^2}\sin(\text{n}\pi\text{x})\right]_{0}^{1}=$$

$$=-\frac{1}{2\text{n}\pi}\left[1-\cos(\text{-n}\pi)\right]-\left[-\frac{\cos(n\pi)}{\text{n}\pi}\right]=-\frac{1}{2\text{n}\pi}+\frac{3}{2\text{n}\pi}\cos(\text{n}\pi)=\begin{cases}-\dfrac{2}{\text{n}\pi} & \text{n=περιττός}\\ \dfrac{1}{\text{n}\pi} & \text{n=άρτιος}\end{cases}$$

Άρα η σειρά Fourier της περιοδικής συνάρτησης f είναι η

$$\frac{2}{\pi^2}\left[\frac{1}{1^2}\cos(\pi x)+\frac{1}{3^2}\cos(3\pi x)+\frac{1}{5^2}\cos(5\pi x)+....\right]+\frac{1}{\pi}\left[-2\sin(\pi x)+\frac{1}{2}\sin(2\pi x)-\frac{2}{3}\sin(3\pi x)+\frac{1}{4}\sin(4\pi x)....\right]$$

Επειδή η συνάρτηση f είναι τμηματικά λεία στα διαστήματα (-1, 0) και (0,1) έχουμε:

$$f(x)=\frac{2}{\pi^2}\left[\frac{1}{1^2}\cos(\pi x)+\frac{1}{3^2}\cos(3\pi x)+\frac{1}{5^2}\cos(5\pi x)+...\right]+\frac{1}{\pi}\left[-2\sin(\pi x)+\frac{1}{2}\sin(2\pi x)-\frac{2}{3}\sin(3\pi x)+...\right] \quad (*)$$

για κάθε $x\in(-1,0)\cup(0,1)$.

Το σημείο $x_1=0$ είναι σημείο <u>ασυνεχείας</u> της συνάρτησης. Στο σημείο αυτό δεν ισχύει ο τύπος (*), αλλά η σειρά του αριστερού μέλους της (*) <u>συγκλίνει</u> στην τιμή

$$\frac{f(0+)+f(0-)}{2}=\frac{0+\frac{1}{2}}{2}=\frac{1}{4}$$

Δηλαδή έχουμε: $\frac{1}{4}=\frac{2}{\pi^2}(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+...)$ (θέτοντας x=0 στο δεξί μέλος της (*)), από όπου

$$\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$$

Το σημείο $x_2=1$ είναι σημείο <u>ασυνεχείας</u> της συνάρτησης. Στο σημείο αυτό η σειρά του αριστερού μέλους της (*) <u>συγκλίνει</u> στην τιμή

$$\frac{f(1+)+f(1-)}{2}=\frac{-1+\frac{1}{2}}{2}=-\frac{1}{4}$$

Δηλαδή έχουμε: $-\frac{1}{4}=\frac{2}{\pi^2}(-1-\frac{1}{3^2}-\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}-...)$.

2. Δίνεται η συνάρτηση f:

$$f(x)=\begin{cases}0 & -\pi\le x<0\\ x+1 & 0\le x<\frac{\pi}{2}\\ 2x & \frac{\pi}{2}\le x<\pi\end{cases} \qquad \& \quad f(x+\pi)=f(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

Να επαναπροσδιοριστεί η f στα σημεία x_1=-π, x_2=0, $x_3=\frac{\pi}{2}$ έτσι ώστε η σειρά Fourier της f να παριστάνει την f στο $\mathbb{R}$.

Λύση

Η συνάρτηση f είναι τμηματικά λεία στο διάστημα [-π,π] και συνεχής στα σημεία $x \in (-\pi,0) \cup (0,\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2},\pi)$. Άρα η σειρά Fourier της f (σύμφωνα με το Θεώρημα του Dirichlet) συγκλίνει στην f(x) για κάθε $x \in (-\pi,0) \cup (0,\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2},\pi)$.

Τα σημεία x_1=-π, x_2=0, $x_3=\frac{\pi}{2}$ είναι σημεία <u>ασυνέχειας</u> της f, επομένως στα σημεία αυτά η συνάρτηση πρέπει να επαναπροσδιοριστεί χρησιμοποιώντας τις ισότητες:

$$f(-\pi)=\frac{f(-\pi+)+f(-\pi-)}{2}=\frac{0+2\pi}{2}=2\pi$$

$$f(0)=\frac{f(0+)+f(0-)}{2}=\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2}$$

$$f(\frac{\pi}{2})=\frac{f(\frac{\pi}{2}+)+f(\frac{\pi}{2}-)}{2}=\frac{\pi+\frac{\pi}{2}+1}{2}=\frac{2+3\pi}{4}$$

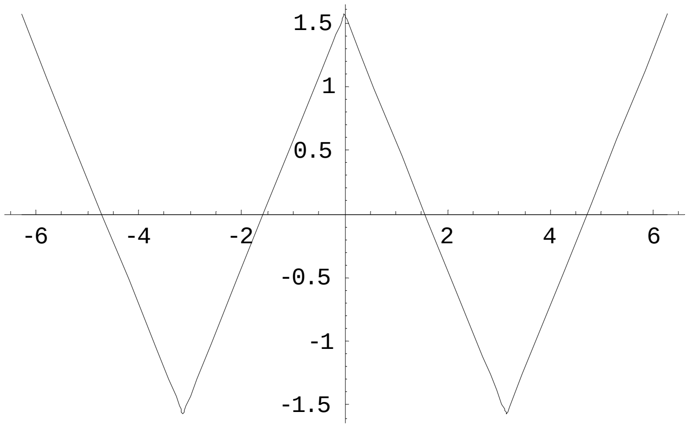
για να παριστάνει η σειρά Fourier της f τη συνάρτηση f για κάθε $x \in [-\pi,\pi)$ (άρα και για κάθε $x \in \mathbb{R}$).

3. α) Να υπολογισθεί η σειρά Fourier της περιοδικής συνάρτησης f(x), με περίοδο 2π, της οποίας ο περιορισμός στο διάστημα (-π, π) δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

$$f(x)=\begin{cases} x+\frac{\pi}{2}, & x \in [-\pi,0) \\ -x+\frac{\pi}{2}, & x \in [0,\pi] \end{cases}$$

β) Με τη βοήθεια της σειράς Fourier να υπολογισθεί το άθροισμα : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$

Λύση (α) Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζεται η γραφική παράσταση της f(x) στο [-2π, 2π],



Η f είναι άρτια. Πράγματι, για $x>0$ έχουμε $-x<0$ και $f(-x)=(-x)+\frac{\pi}{2}=-x+\frac{\pi}{2}=f(x)$,

ενώ για $x<0$ είναι $-x>0$ και $f(-x)=-(-x)+\frac{\pi}{2}=f(x)$. Συνεπώς στο ανάπτυγμα Fourier

της f θα έχουμε $\beta_n=0, n=1,2,...$ δηλ. $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\cos(nx)$, όπου

$$\alpha_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{2\pi}\cdot\left[\int_{-\pi}^{0}(x+\frac{\pi}{2})dx+\int_{0}^{\pi}(-x+\frac{\pi}{2})dx\right]=$$

$$\frac{1}{2\pi}\cdot\left[(\frac{x^2}{2}+\frac{\pi}{2}x\ \Big|_{-\pi}^{0}+(-\frac{x^2}{2}+\frac{\pi}{2}x\ \Big|_{0}^{\pi}\right]=0$$

ενώ για n=1,2,…, έχουμε

$$\alpha_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)dx==\frac{1}{\pi}\cdot\left[\int_{-\pi}^{0}(x+\frac{\pi}{2})\cos(nx)dx+\int_{0}^{\pi}(-x+\frac{\pi}{2})\cos(nx)dx\right]$$

Έστω $I(x)=\int(x+\frac{\pi}{2})\cos(nx)dx=\int(x+\frac{\pi}{2})\cdot(\frac{\sin(nx)}{n})'dx=$

$$=(x+\frac{\pi}{2})\cdot\frac{\sin(nx)}{n}-\int\frac{\sin(nx)}{n}dx=(x+\frac{\pi}{2})\cdot\frac{\sin(nx)}{n}+\frac{\cos(nx)}{n^2}+c.$$

Τότε

$$I=\int_{-\pi}^{0}(x+\frac{\pi}{2})\cos(nx)dx=(I(x)\ \Big|_{-\pi}^{0}=I(0)-I(-\pi)=\frac{1}{n^2}-\frac{(-1)^n}{n^2}=\frac{1-(-1)^n}{n^2}.$$

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα

$$J=\int_0^{\pi}(-x+\frac{\pi}{2})\cos(nx)dx=\int_0^{\pi}(-x+\frac{\pi}{2})\cos(-nx)dx,$$

θέτω $t=-x$ και $dt=-dx$. Τότε για $x=0,\pi$ έχουμε αντίστοιχα $t=0,-\pi$.

Συνεπώς

$$J=-\int_0^{-\pi}(t+\frac{\pi}{2})\cos(nt)dt=+\int_{-\pi}^{0}(t+\frac{\pi}{2})\cos(nt)dt=I=\frac{1-(-1)^n}{n^2}.$$

[Η ισότητα των I και J οφείλεται στο γεγονός ότι η f είναι άρτια και η γραφική της παράσταση έχει άξονα συμμετρίας τον $y'0y$.]

Έτσι, $$\alpha_n=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1-(-1)^n}{n^2},n=1,2,...$$

Παρατηρούμε ότι οι όροι άρτιας τάξης της ακολουθίας αυτής μηδενίζονται, δηλ. για κάθε

$k=1,2,3,...,\quad \alpha_{2k}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1-(-1)^{2k}}{(2k)^2}=0,$ ενώ επιβιώνουν οι υπόλοιποι όροι

$$\alpha_{2k-1}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1-(-1)^{2k-1}}{(2k-1)^2}=\frac{4}{\pi(2k-1)^2},k=1,2,...$$

Άρα $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1-(-1)^n}{n^2}\cdot\cos(nx)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2k-1)^2}\cdot\cos[(2k-1)x].$ (γιατί;)

(β) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [-π.0) και στο (0,π] σαν πολυωνυμική, ενώ είναι συνεχής στο σημείο $x=0$, αφού $\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$.

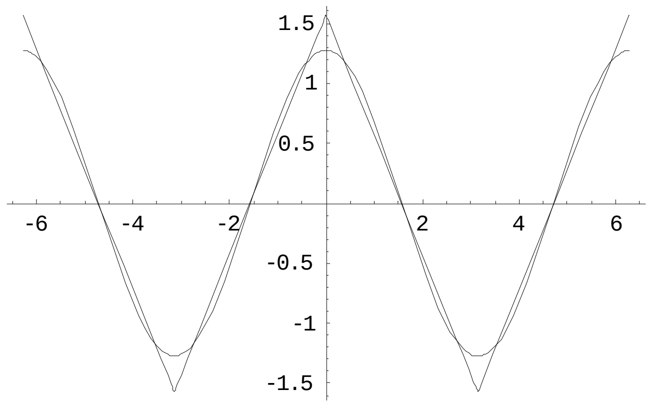
Έτσι, είναι συνεχής στο [-π,π] και επιπλέον $f(-\pi)=f(\pi)$.

Συνεπώς, η περιοδική της επέκταση στο $\mathbb{R}$ θα είναι συνεχής σε κάθε σημείο. Για κάθε x η αντίστοιχη σειρά θα συγκλίνει στην τιμή $f(x)$. (βλ. σελ. 194). Για το συγκεκριμένο ερώτημα, η συνέχεια της f στο σημείο $x=\pi$ εξασφαλίζει ότι

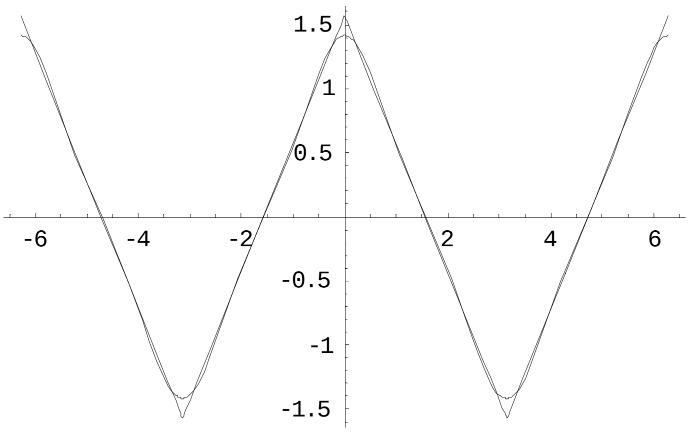
$$f(\pi)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2k-1)^2}\cos[(2k-1)\pi] \text{ ή } -\frac{\pi}{2}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2k-1)^2}\cdot(-1) \text{ ή }$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

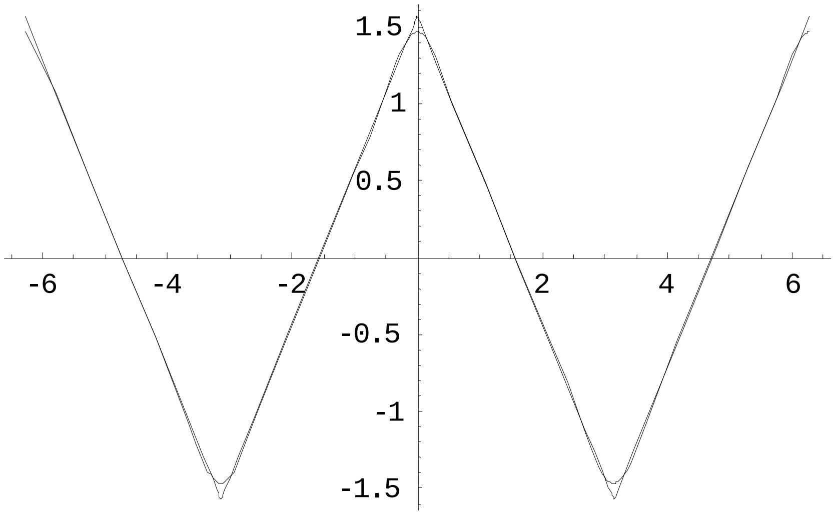
Στα σχήματα που ακολουθούν απεικονίζεται η f μαζί με την σειρά , αν διατηρήσουμε τους 1,2,3,4 πρώτους όρους, αντίστοιχα.



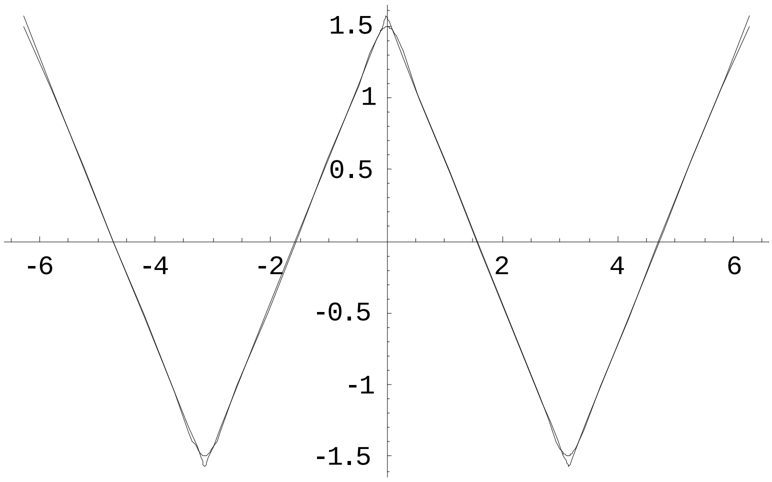
$$\frac{4}{\pi}\cos x$$



$$\frac{4}{\pi}\cos x+\frac{4}{9\pi}\cos 3x$$



$$\frac{4}{\pi}\cos x+\frac{4}{9\pi}\cos 3x+\frac{4}{25\pi}\cos 5x$$



$$\frac{4}{\pi}\cos x+\frac{4}{9\pi}\cos 3x+\frac{4}{25\pi}\cos 5x+\frac{4}{49\pi}\cos 7x$$

4. Να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier η περιοδική συνάρτηση f:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & -\pi \le x < 0 \\ x^2 & 0 \le x < \pi \end{cases} \qquad \& \quad f(x+2\pi)=f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Να οριστεί η τιμή της f στο σημείο $x_1=-\pi$ έτσι ώστε το ανάπτυγμα να ισχύει για κάθε $x \in [0,\pi)$ και στη συνέχεια να δειχθεί ότι:

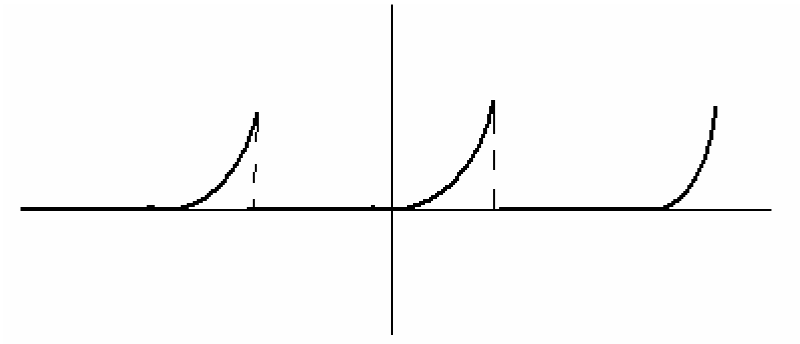
(α) $\dfrac{\pi^2}{6}=1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}+...=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

(β) $\frac{\pi^2}{12}=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+...=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$

(γ) $\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+...\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$

Λύση

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης δίνεται παρακάτω



Εδώ λ=π. Άρα: $a_o=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}x^2dx=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{6}$

Ακόμα:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x^2\cos(nx)dx=...=\frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{n}\sin(nx)+\frac{2}{n^2}x\cos(nx)-\frac{2}{n^3}\sin(nx)\right]_0^{\pi}=$$
$$=\frac{1}{\pi}\frac{2}{n^2}\pi\cos(n\pi)=(-1)^n\frac{2}{n^2}$$

Επίσης

$$\beta_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}x^2\sin(nx)dx=...=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{x^2}{n}\cos(nx)+\frac{2}{n^2}x\sin(nx)+\frac{2}{n^3}\cos(nx)\right]_0^{\pi}=$$
$$=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{\pi^2}{n}\cos(n\pi)+\frac{2}{n^3}\cos(n\pi)-\frac{2}{n^3}\right]=-\frac{\pi}{n}(-1)^n+\frac{2}{\pi n^3}\left[(-1)^n-1\right]=$$
$$=\begin{cases}\frac{\pi}{n}-\frac{4}{\pi n^3} & n=\text{περιττός}\\[2ex] -\frac{\pi}{n} & n=\text{άρτιος}\end{cases}$$

Άρα η σειρά Fourier της περιοδικής συνάρτησης f είναι η

$$\frac{\pi^2}{6}+2\left[-\cos x+\frac{1}{2^2}\cos(2\pi)-\frac{1}{3^2}\cos(3x)+...\right]+(\pi-\frac{4}{\pi})\sin(x)+(\frac{\pi}{3}-\frac{4}{\pi 3^3})\sin(3x)+(\frac{\pi}{5}-\frac{4}{\pi 5^3})\sin(5x)+....$$
$$-\pi\left[\frac{1}{2}\sin(2x)+\frac{1}{4}\sin(4x)+\frac{1}{6}\sin(6x)+...\right]$$

Άρα :

$$f(x)=\frac{\pi^2}{6}+2\left[-\cos x+\frac{1}{2^2}\cos(2x)-\frac{1}{3^2}\cos(3x)+...\right]+(\pi-\frac{4}{\pi})\sin(x)+(\frac{\pi}{3}-\frac{4}{\pi 3^3})\sin(3x)+(\frac{\pi}{5}-\frac{4}{\pi 5^3})\sin(5x)+....$$
$$-\pi\left[\frac{1}{2}\sin(2x)+\frac{1}{4}\sin(4x)+\frac{1}{6}\sin(6x)+...\right] \qquad (**)$$

για κάθε $x \in (-\pi,\pi)$, επειδή η f είναι τμηματικά λεία και συνεχής στο διάστημα αυτό.

Το σημείο $x_2=0$ είναι σημείο συνεχείας της συνάρτησης (άρα στο σημείο ισχύει ο τύπος της (**)). Θέτοντας λοιπόν x=0 στην (**) έχουμε

$$0=\frac{\pi^2}{6}+2\left(-1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}-...\right)\Rightarrow\frac{\pi^2}{12}=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+...=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$$

πούναι η (β).

Για να ισχύει ο τύπος της (**) και στο σημείο $x_1=-\pi$ (σημείο ασυνέχειας της συνάρτησης f), πρέπει να ορίσουμε την τιμή της f στο σημείο αυτό από την ισότητα

$$f(-\pi)=\frac{f(-\pi+)+f(-\pi-)}{2}=\frac{0+\pi^2}{2}=\frac{\pi^2}{2} \qquad (***)$$

(τιμή στην οποία συγκλίνει, λόγω της ασυνέχειας, το δεξί μέλος της (**)).

Χρησιμοποιώντας την (***) και θέτοντας x=-π στην (**), έχουμε:

$$\frac{\pi^2}{2}=\frac{\pi^2}{6}+2\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...\right)\Rightarrow\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+...=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

πούναι η (α).

Τέλος, προσθέτοντας τις (α) και (β) έχουμε:

$$\frac{3\pi}{12} = 2\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+...\right) \Rightarrow \frac{\pi^2}{8} = 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+... = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$$

πούναι η (γ).

5. Μια συνάρτηση f ικανοποιεί τις συνθήκες $f(-x) = f(x)$ και $f(x+\pi) = -f(x)$. Να δείξετε ότι οι μόνοι μη μηδενιζόμενοι συντελεστές Fourier είναι οι συντελεστές των όρων $\cos(2n+1)x$ για $n = 0,1,2,...$

Λύση

Αφού η f είναι άρτια, όλοι οι συντελεστές των sin(nx) μηδενίζονται και η συνάρτηση επιδέχεται το ανάπτυγμα Fourier

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cos(nx)$$

όπου

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx$$

Αν t = x–π, τότε

$$\int_{\pi}^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx = \int_0^{\pi} f(t+\pi)\cos(n\pi+nt)dt$$

$$= -\int_0^{\pi} f(t)[\cos(n\pi)\cos(nt) - \sin(n\pi)\sin(nt)]dt$$

$$= -(-1)^n\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)dt$$

Συνεπώς $a_n = \frac{1}{\pi}(1-(-1)^n)\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx$, n = 0,1,2,…

Άρα $\alpha_{2k} = 0$, k = 0,1,2,… ,ενώ

$$\alpha_{2k+1} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos((2k+1)x)dx,\quad k = 0,1,2,\dots$$