Κεφάλαιο 7

ΣΕΙΡΕΣ TAYLOR ΚΑΙ LAURENT

7.1 Ακολουθίες

Όπως και για τους πραγματικούς αριθμούς, μια (άπειρη) **ακολουθία** μπορεί να θεωρηθεί ως συνάρτηση με πεδίο ορισμού τους θετικούς ακέραιους. Δηλαδή, μια ακολουθία είναι ένα σύνολο μιγαδικών αριθμών

$$z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n, \ldots$$

σε μια ορισμένη σειρά που σχηματίζεται σύμφωνα με ένα συγκεκριμένο κανόνα. Κάθε αριθμός καλείται **όρος** της ακολουθίας. Ο z_n καλείται n-στός ή γενικός όρος.

Μια **συγκλίνουσα ακολουθία** $z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n, \ldots$ είναι αυτή που έχει όριο c και γράφουμε

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = c \quad \text{ή} \quad z_n \to c.$$

Από τον ορισμό του ορίου σημαίνει ότι μια ακολουθία μιγαδικών αριθμών έχει όρι το c, αν για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει θετικός ακέραιος N τέτοιος ώστε να ισχύει

$$|z_n - c| < \epsilon \quad \forall n > N.$$

Σχήμα 7.1:

Γεωμετρικά, σημαίνει όλοι οι όροι z_n με $n > N$ βρίσκονται σε μια γειτονία του c και μόνο ένας πεπερασμένος αριθμός όρων βρίσκονται εκτός αυτής της γειτονιάς.

Αν το όριο υπάρχει, τότε είναι μοναδικό. Μια ακολουθία που δεν συγκλίνει καλείται **αποκλίνουσα ακολουθία**.

Θεώρημα: Μια ακολουθία $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ μιγαδικών αριθμών $z_n = x_n + iy_n$ ($n = 1, 2, \ldots$) συγκλίνει στο $c = a + ib$ αν και μόνο αν η ακολουθία των πραγματικών μερών $x_1, x_2, \ldots$ συγκλίνει στο a και η ακολουθία των φανταστικών μέρων $y_1, y_2, \ldots$ συγκλίνει στο b. Δηλαδή,

$$\lim_{n \to +\infty} z_n = c$$

αν και μόνο αν

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = a \quad \text{και} \quad \lim_{n \to +\infty} y_n = b.$$

Απόδειξη: Δες Churchill-Brown

7.2 Σειρές

Όταν έχουμε μια ακολουθία $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$, μπορούμε να σχηματίσουμε τα αθροίσματα

$$S_1 = z_1, \quad S_2 = z_1 + z_2, \quad S_3 = z_1 + z_2 + z_3, \ldots$$

και γενικά

$$S_N = z_1 + z_2 + \cdots + z_N, \quad N = 1, 2, \ldots$$

Τα S_N καλούνται **μερικά αθροίσματα** της (άπειρης) **σειράς**

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \ldots.$$

Τα $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ καλούνται **όροι** της σειράς.

Μια σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + \cdots + z_n + \ldots$$

μιγαδικών αριθμών συγκλίνει σε ένα άθροισμα S αν η ακολουθία

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} z_n = z_1 + z_2 + \cdots + Z_N$$

των μερικών αθροισμάτων συγκλίνει στο S. Σε αυτή τη περίπτωση λέμε ότι είναι **συγκλίνουσα σειρά** ή λέμε ότι η σειρά συγκλίνει και γράφουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S.$$

Αν η σειρά δεν συγκλίνει, τότε λέμε ότι αποκλίνει. Επίσης σημειώνουμε ότι το όριο-άθροισμα μιας συγκλίνουσας σειράς είναι μοναδικό.

Θεώρημα: Μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ μιγαδικών αριθμών $z_n = x_n + iy_n$ $(n = 1, 2, \dots)$ συγκλίνει στο $S = X + iY$ αν και μόνο αν η σειρά των πραγματικών μερών $x_1 + x_2 + \dots$ συγκλίνει στο X και η σειρά των φανταστικών μέρων $y_1 + y_2 + \dots$ συγκλίνει στο Y. Δηλαδή,

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S$$

αν και μόνο αν

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = X \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty} y_n = Y.$$

Απόδειξη: Δες Churchill-Brown

Όπως και στις σειρές πραγματικών αριθμών, έτσι και στις σειρές μιγαδικών αριθμών μια αναγκαία συνθήκη για τη σύγκλιση της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ είναι η

$$\lim_{n \to +\infty} z_n = 0.$$

Δηλαδή, για κάθε συγκλίνουσα σειρά ισχύει η πιο πάνω σχέση. Επίσης από την πιο πάνω σχέση συμπεραίνουμε ότι οι όροι μιας συγκλίνουσας σειράς είναι φραγμένοι. Δηλαδή, υπάρχει σταθερά $M > 0$ τέτοια ώστε $|z_n| \leq M$.

Τώρα, θα δείξουμε ότι αν μια μιγαδική σειρά συγκλίνει απόλυτα, τότε συγκλίνει. Έστω ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$$

συγκλίνει. Θέτουμε $z_n = x_n + iy_n$, οπότε παρατηρούμε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$$

αποτελείται απο πραγματικούς όρους. Επειδή

$$|x_n| \leq \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \quad \text{και} \quad |y_n| \leq \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$$

από το κριτήριο σύγκρισης για σειρές με πραγματικούς όρους συμπεραίνουμε ότι οι σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|$$

συγκλίνουν. Επίσης από τη θεωρία για σειρές με πραγματικούς όρους γνωρίζουμε ότι όταν μια σειρά συγκλίνει απόλυτα, τότε συγκλίνει. Άρα οι σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty} y_n$$

συγκλίνουν. Χρησιμοποιώντας το πιο πάνω θεώρημα καταλήγουμε ότι η σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

συγκλίνει.

Αν αγνοήσουμε τους n πρώτους όρους μιας σειράς, τότε

$$R_n = z_{n+1} + z_{n+2} + z_{n+3} + \dots$$

Καλείται **υπόλοιπο** της σειράς. Αν η σειρά συγκλίνει στο S, τότε

$$S = S_n + R_n$$

και επομένως

$$R_n = S - S_n.$$

Παρατηρούμε ότι η σειρά συγκλίνει στο S αν και μόνο αν η ακολουθία των υπολοίπων R_n τείνει στο μηδέν.

7.3 Σειρές Taylor

Θεώρημα: Έστω ότι η $f(z)$ είναι αναλυτική συνάρτηση σε ένα ανοικτό δίσκο $|z - z_0| < R_0$. Τότε η $f(z)$ έχει δυναμοσειρά της μορφής

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \qquad |z - z_0| < R_0$$

όπου

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

η οποία καλείται **σειρά Taylor**, Δηλαδή, η σειρά Taylor συγκλίνει στην $f(z)$ όταν το z βρίσκεται στο εσωτερικό του δοσμένου δίσκου. Τώρα, αν $z_0 = 0$, η σειρά

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \qquad |z| < R_0$$

καλείται **σειρά Maclaurin**.

Απόδειξη: Δες Churchill-Brown

Σχήμα 7.2:

Παράδειγμα: (Γεωμετρική σειρά) Έστω

$$f(z) = \frac{1}{1-z}.$$

Έχουμε

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{(1-z)^{n+1}} \quad \text{και} \quad f^{(n)}(0) = n!.$$

Άρα η σειρά Maclaurin της f είναι η γεωμετρική σειρά

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots \qquad |z| < 1$$

Παράδειγμα: (Εκθετική συνάρτηση) Γνωρίζουμε ότι η εκθετική συνάρτηση $f(z) = \mathrm{e}^z$ είναι ακέραια και ότι $(\mathrm{e}^z)' = \mathrm{e}^z$. Επίσης $f^{(n)}(z) = \mathrm{e}^z$ και $f^{(n)}(0) = 1$. Άρα η σειρά Maclaurin της e^z είναι

$$\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots \qquad |z| < \infty$$

Αν θέσουμε $z = x + i0$, προκύπτει η γνωστή δυναμοσειρά

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \qquad -\infty < x < +\infty$$

Αν θέσουμε $z = 0 + ix$ και χωρίσουμε τη σειρά σε πραγματικό και φανταστικό μέρος, βρίσκουμε

$$\mathrm{e}^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Τα αθροίσματα στο δεξιό μέρος είναι οι σειρές Maclaurin των συναρτήσεων $\cos x$ και $\sin x$, αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι με το πιο πάνω αποτέλεσμα έχουμε επαληθεύσει τον τύπο του Euler,

$$\mathrm{e}^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Παράδειγμα: (Τριγωνομετρικές και υπερβολικές συναρτήσεις) Χρησιμοποιώντας τους ορισμούς

$$\cos z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2} \qquad \sin z = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}}.$$

και

$$\sinh z = \frac{\mathrm{e}^{z} - \mathrm{e}^{-z}}{2} \qquad \cosh z = \frac{\mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{-z}}{2}$$

καθώς και τη σειρά Maclaurin της εκθετικής συνάρτησης e^z, βρίσκουμε

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots \qquad |z| < \infty$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \qquad |z| < \infty$$

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots \qquad |z| < \infty$$

$$\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots \qquad |z| < \infty$$

Οι σειρές που έχουν υπολογιστεί στα πιο πάνω παραδείγματα, μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως τύποι για πιο πολύπλοκες συναρτήσεις, όπως φαίνεται στα πιο κάτω παραδείγματα.

Παράδειγμα: Έστω $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$. Αντικαθιστούμε το z με $-z^2$ στη σειρά Maclaurin της $\frac{1}{1-z}$, για να βρούμε

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{1-(-z^2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \dots \qquad |z| < 1$$

Τώρα, έστω η συνάρτηση $f(z) = \tan^{-1} z$. Χρησιμοποιώντας την πιο πάνω σειρά Maclaurin και ότι $\int \frac{\mathrm{d}z}{1+z^2} = \tan^{-1} + c$ και ότι $f(0) = 0$, βρίσκουμε

$$\tan^{-1} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1} = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \dots \qquad |z| < 1$$

Χρησιμοποιώντας τη σειρά Maclaurin της εκθετικής συνάρτησης, βρίσκουμε

$$z^2 \mathrm{e}^{3z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} z^{n+2} = z^2 + 3z^3 + \tfrac{9}{2} z^4 + \dots \qquad |z| < \infty$$

Παράδειγμα: Να εκφραστεί σε δυναμοσειρά η συνάρτηση

$$f(z) = \frac{1+2z^2}{z^3+z^5}.$$

Δεν μπορούμε να βρούμε σειρά Maclaurin της $f(z)$ επειδή δεν είναι αναλυτική στο $z = 0$. Όμως η συνάρτηση γράφεται

$$f(z) = \frac{1}{z^3} \frac{2(1+z^2) - 1}{1+z^2} = \frac{1}{z^3}\left(2 - \frac{1}{1+z^2}\right)$$

και από το προηγούμενο παράδειγμα

$$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \dots \qquad |z| < 1$$

Άρα για $0 < |z| < 1$, βρίσκουμε

$$f(z) = \frac{1}{z^3}(2 - 1 + z^2 - z^4 + z^6 - z^8 + \dots) = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z} - z + z^3 - z^5 + \dots.$$

Παρατηρούμε ότι έχουμε αρνητικές δυνάμεις. Τέτοιες σειρές, με αρνητικές δυνάμεις, θα εξεταστούν στην επόμενη ενότητα.

7.4 Σειρές Laurent

Η σειρά Taylor μιας συνάρτησης $f(z)$ περιέχει όρους της μορφής $(z - z_0)$ υψωμένοι σε μη-αρνητικές δυνάμεις. Η σειρά Laurent, η οποία σχετίζεται με τη σειρά Taylor, περιέχει και όρους με αρνητικές δυνάμεις.

Ορισμός: Η σειρά Laurent μιας συνάρτησης $f(z)$ εκφράζεται στη μορφή

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z - z_0^n = \dots + c_{-2}(z-z_0)^{-2} + c_{-1}(z-z_0)^{-1} + c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \dots$$

όπου η σειρά συγκλίνει στην $f(z)$ σε κάποια περιοχή.

Παράδειγμα: Χρησιμοποιώντας ότι

$$\mathrm{e}^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots \qquad |z| < \infty$$

βρίσκουμε

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{1-z}} = 1 + (z-1)^{-1} + \frac{(z-1)^{-2}}{2!} + \frac{(z-1)^{-3}}{3!} + \dots \qquad z \neq 1$$

ή

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{1-z}} = \dots + \frac{(z-1)^{-3}}{3!} + \frac{(z-1)^{-2}}{2!} + (z-1)^{-1} + 1 \qquad z \neq 1$$

η οποία είναι μια σειρά Laurent χωρίς θετικές δυνάμεις. Η σειρά Laurent

$$(z-1)^2\mathrm{e}^{\frac{1}{1-z}} = \dots + \frac{(z-1)^{-1}}{3!} + \frac{1}{2!} + (z-1) + (z-1)^2 \qquad z \neq 1$$

περιέχει και θετικές δυνάμεις.

Αν μια συνάρτηση f δεν είναι αναλυτική σε ένα σημείο z_0 δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα του Taylor σε αυτό το σημείο. Όμως συχνά μπορούμε να εκφράζουμε τέτοιες συναρτήσεις σε σειρά Laurent. Το ερώτημα που τίθεται, είναι: ποιές συναρτήσεις μπορούν να εκφραστούν σε σειρά Laurent και σε ποιές περιοχές του μιγαδικού επιπέδου ισχύουν. Τις απαντήσεις τις δίνει το πιο κάτω θεώρημα.

Θεώρημα: Έστω ότι η $f(z)$ είναι μια αναλυτική συνάρτηση στο δακτυλιακό χωρίο $R_1 < |z - z_0| < R_2$ με κέντρο το z_0. Έστω ότι C είναι ένας θετικά προσανατολισμένος, απλός και κλειστός βρόχος γύρω από το z_0, ο οποίος περιέχεται εξ ολοκλήρου σε αυτό το χωρίο. Τότε, για κάθε z στο χωρίο, η $f(z)$ παριστάνεται με σειρά της μορφής

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

όπου

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}} \qquad n \geq 0$$

και

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{-n+1}} \qquad n \geq 1$$

η οποία καλείται **σειρά Laurent**.

Σχήμα 7.3:

Σημείωση: Η σειρά Laurent μπορεί να γραφτεί και στη μορφή

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$$

όπου

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}} \qquad n \text{ ακέραιος}$$

Σημείωση: Αν η συνάρτηση f είναι αναλυτική στο δίσκο $|z-z_0| < R_2$, τότε και η $f(z-z_0)^{n-1}$ είναι αναλυτική. Επομένως από το θεώρημα των Cauchy-Goursat

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{-n+1}} = 0 \qquad n \geq 1$$

Επίσης από τον τύπο της παραγώγου αναλυτικής συνάρτησης έχουμε

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\mathrm{d}z}{(z-z_0)^{n+1}} = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \qquad n \geq 0$$

Άρα προκύπτει η σειρά Taylor της $f(z)$ γύρω από το z_0.

Οι συντελεστές στις σειρές Laurent, γενικά, υπολογίζονται με άλλους τρόπους αντί με απ' ευθείας χρήση των ολοκληρωτικών τους τύπους. Συνήθως, όπως θα δούμε στα πιο κάτω παραδείγματα, χρησιμοποιούμε κατάλληλες σειρές Taylor. Μπορεί να αποδειχθεί ότι η σειρά Laurent είναι μοναδική σε δοσμένο δακτύλιο.

Παράδειγμα: Να βρεθεί η σειρά Laurent της $z^{-5}\sin z$ γύρω από το $z = 0$.

Χρησιμοποιούμε τη σειρά Maclaurin της $\sin z$, για να βρούμε

$$\begin{aligned} z^{-5}\sin z &= z^{-5}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n-4}}{(2n+1)!} \\ &= \frac{1}{z^4} - \frac{1}{6z^2} + \frac{1}{120} - \frac{1}{5040}z^2 + \ldots \qquad |z| > 0 \end{aligned}$$

Ο δακτύλιος σύγκλισης είναι όλο το μιγαδικό επίπεδο εκτός από την αρχή των αξόνων.

Παράδειγμα: Να βρεθεί η σειρά Laurent της $z^2 e^{\frac{1}{z}}$ γύρω από το $z = 0$.

Χρησιμοποιούμε τη

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots \qquad |z| < \infty$$

για να βρούμε

$$z^2 e^{\frac{1}{z}} = z^2\left(1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \ldots\right) = z^2 + z + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!z} + \frac{1}{4!z^2} + \ldots \quad |z| > 0$$

Παράδειγμα: Να εκφραστεί η συνάρτηση $\frac{1}{1-z}$ σε σειρά με αρνητικές δυνάμεις.

Γράφουμε

$$\frac{1}{1-z} = \frac{-1}{z(1-\frac{1}{z})}$$

και χρησιμοποιούμε ότι

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \qquad |z| < 1$$

για να βρούμε

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \ldots \qquad |z| > 1$$

Οι σειρές Laurent, όπως φαίνεται στα πιο κάτω παραδείγματα, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων γύρω από απλούς κλειστούς βρόχους. Η μέθοδος θα εξεταστεί εκτενέστερα στο επόμενο κεφάλαιο.

Παράδειγμα: Από πιο πάνω παράδειγμα

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!z^n} = 1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots \qquad |z| > 0$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Laurent, ο συντελεστής του όρου $\frac{1}{z}$ δίνεται από τον τύπο

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{\frac{1}{z}} \mathrm{d}z,$$

όπου C είναι ένας οποιοσδήποτε απλός κλειστός βρόχος γύρω από την αρχή των αξόνων με θετική κατεύθυνση. Τώρα, από την πιο πάνω σειρά $b_1 = 1$. Άρα βρίσκουμε

$$\int_C e^{\frac{1}{z}} \mathrm{d}z = 2\pi i.$$

Παράδειγμα: Η συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{(z-i)^2}$ είναι ήδη σε μορφή σειράς Laurent. Δηλαδή,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-i)^n \qquad |z-i| > 0$$

όπου $c_{-2} = 1$ και οι υπόλοιποι συντελεστές είναι ίσοι με μηδέν. Τώρα, από το θεώρημα του Laurent με $f(z) = \frac{1}{(z-i)^2}$ έχουμε

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-i)^{n+3}} \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

όπου C είναι κύκλος $|z-i| = R$ με θετική κατεύθυνση. Χρησιμοποιώντας την πιο πάνω σειρά, βρίσκουμε

$$\int_C \frac{\mathrm{d}z}{(z-i)^{n+3}} \begin{cases} 0, & n \neq -2 \\ 2\pi i, & n = -2 \end{cases} .$$