Ασκήσεις στα διανύσματα
(1η εκδοχή, Οκτ. 2013)

Άσκηση 1. Για διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ του χώρου δείξτε τα ακόλουθα:

1. $\left(\vec{\alpha}\times\vec{\beta}\right)^2+\left(\vec{\alpha}\cdot\vec{b}\right)^2=\vec{\alpha}^2\,\vec{\beta}^2$.
2. $\left(\vec{\alpha}\times\vec{\beta}\right)\times\vec{\gamma}+\left(\vec{\beta}\times\vec{\gamma}\right)\times\vec{\alpha}+\left(\vec{\gamma}\times\vec{\alpha}\right)\times\vec{\beta}=\vec{0}$ (ταυτότητα Jacobi).
3. $\left(\vec{\alpha}\times\vec{\beta}\right)\times\left(\vec{\gamma}\times\vec{\delta}\right)=\left(\vec{\alpha},\vec{\gamma},\vec{\delta}\right)\vec{\beta}-\left(\vec{\beta},\vec{\gamma},\vec{\delta}\right)\vec{\alpha}=\left(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\delta}\right)\vec{\gamma}-\left(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}\right)\vec{\delta}$.
4. $\left(\vec{\alpha}\times\vec{\beta}\right)\cdot\left(\vec{\gamma}\times\vec{\delta}\right)=\begin{vmatrix}\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma} & \vec{\alpha}\cdot\vec{\delta}\\ \vec{\beta}\cdot\vec{\gamma} & \vec{\beta}\cdot\vec{\delta}\end{vmatrix}$.
5. $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}\Rightarrow\vec{\alpha}\times\vec{\beta}=\vec{\beta}\times\vec{\gamma}=\vec{\gamma}\times\vec{\alpha}$.
6. $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ συνεπίπεδα $\Leftrightarrow\vec{\alpha}\times\vec{\beta},\ \vec{\beta}\times\vec{\gamma},\ \vec{\gamma}\times\vec{\alpha}$ συνεπίπεδα.

Άσκηση 2. Αν τα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ είναι τα διανύσματα θέσης των σημείων A,B,Γ του χώρου ως προς κάποιο καρτεσιανό σύστημα αναφοράς, δείξτε πως το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ ισούται με $(AB\Gamma)=\dfrac{\left|\left(\vec{\alpha}\times\vec{\beta}\right)+\left(\vec{\beta}\times\vec{\gamma}\right)+\left(\vec{\gamma}\times\vec{\alpha}\right)\right|}{2}$.

Άσκηση 3. Αν τα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ είναι μη συνεπίπεδα διανύσματα του χώρου, τότε δείξτε πως οποιοδήποτε άλλο διάνυσμα $\vec{\delta}$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ ως $\vec{\delta}=\dfrac{\left(\vec{\delta},\vec{\beta},\vec{\gamma}\right)}{\left(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}\right)}\vec{\alpha}+\dfrac{\left(\vec{\delta},\vec{\gamma},\vec{\alpha}\right)}{\left(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}\right)}\vec{\beta}+\dfrac{\left(\vec{\delta},\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)}{\left(\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}\right)}\vec{\gamma}$.

Άσκηση 4. Αν τα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ είναι διανύσματα του χώρου με $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$, να επιλύσετε τη διανυσματική εξίσωση $\vec{\alpha}\times\vec{x}=\vec{\beta}$ με άγνωστο το $\vec{x}$. (Υπόδειξη: Οι λύσεις είναι τα διανύσματα $\vec{x}=\lambda\vec{\alpha}+\dfrac{\vec{\beta}\times\vec{\alpha}}{\vec{\alpha}^2},\ \lambda\in\mathbb{R}$.)

Άσκηση 5. Αν τα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ είναι διανύσματα του χώρου, να επιλύσετε τη διανυσματική εξίσωση $\vec{x}\times\vec{\alpha}+\vec{x}=\vec{\beta}$ με άγνωστο το $\vec{x}$. (Υπόδειξη: Υπάρχει μοναδική λύση.)

Άσκηση 6. Είναι τα σημεία $A(1,2,4),\ B(-2,3,-5),\ \Gamma(0,2,-1),\ \Delta(1,3,-1)$ συγγραμμικά;

Άσκηση 7. Αποδείξτε με χρήση διανυσματικού λογισμού τα ακόλουθα θεωρήματα της Ευκλείδειας γεωμετρίας:

1. Το τμήμα $B'\Gamma'$ που ενώνει τα μέσα των πλευρών $A\Gamma, AB$ είναι παράλληλο και ίσο με το μισό της τρίτης πλευράς $B\Gamma$.
2. Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\alpha=B\Gamma,\beta=\Gamma A,\gamma=AB$ και μ_α η διάμεσος από το A, τότε $\beta^2+\gamma^2=\dfrac{\alpha^2}{2}+2\mu_\alpha^{\ 2}$ και $\beta^2-\gamma^2=2\alpha\alpha'$, όπου α' η προβολή της μ_α επί της α (θεωρήματα διαμέσων).
3. Οι διάμεσοι σε κάθε τρίγωνο συντρέχουν.
4. Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\alpha=B\Gamma,\beta=\Gamma A,\gamma=AB$, τότε $\dfrac{\alpha}{\sin A}=\dfrac{\beta}{\sin B}=\dfrac{\gamma}{\sin\Gamma}$ (θεώρημα ημιτόνων).
5. Τα μέσα των πλευρών τυχαίου τετραπλεύρου αποτελούν πλευρές παραλληλογράμμου.