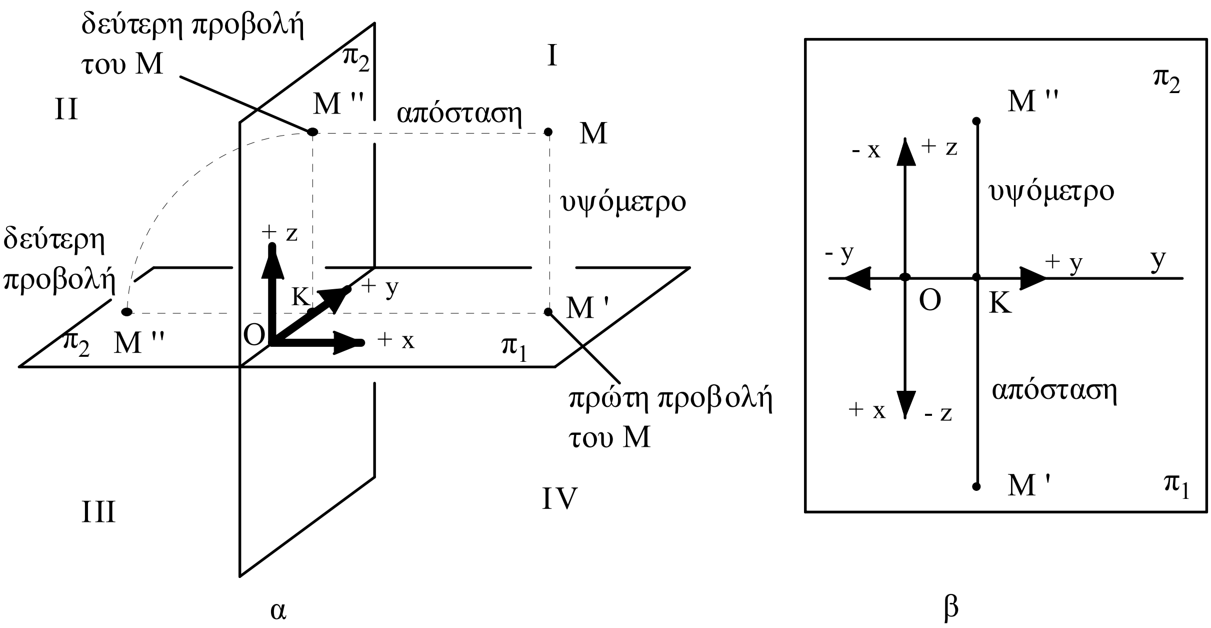
ΚΟΝΤΟΚΩΣΤΑΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΠΑΡΑΣΤΑΤΙΚΗΣ
(Οκτ. 2013)

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
πολιτικών μηχανικών



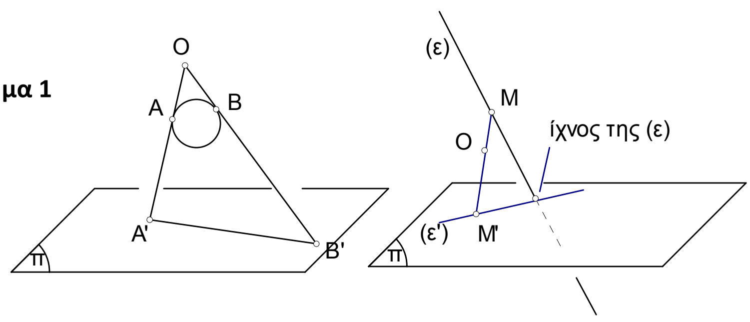
① ΠΡΟΒΟΛΕΣ

ΣΗΜΑΝΤΙΚΟ: Ολόκληρη η δουλειά μας θα γίνεται μέσα στον Προβολικό χώρο. Όμως ο Προβολικός χώρος θα μας ενδιαφέρει όχι για τις μαθηματικές του ιδιότητες, αλλά κυρίως για να μας δίνει σχεδόν ενοποιημένες απαντήσεις για το πώς προβάλλονται τα σχήματα του συνηθισμένου μας (Ευκλείδειου) χώρου.

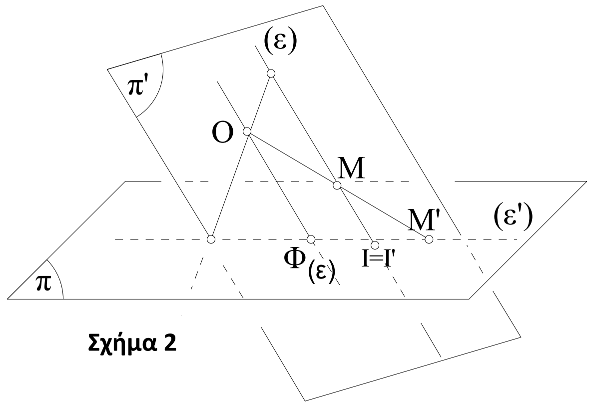
Κεντρική προβολή (προοπτική)

Πρόταση 1: Η κεντρική προβολή ευθείας που διέρχεται από το κέντρο της προβολής είναι το ίχνος της.

Σχήμα 1



α β



Σχήμα 2

Πρόταση 3: Το ίχνος κάθε ευθείας προβάλλεται στον εαυτό του.

Πρόταση 2: Η κεντρική προβολή ευθείας (ε) που δεν διέρχεται από το κέντρο Ο της προβολής είναι ευθεία (ε') που διέρχεται το ίχνος της (ε). Η (ε') προκύπτει ως τομή του επιπέδου προβολής με το επίπεδο που ορίζεται από το Ο και την (ε).

Πρόταση 4: Το επ'άπειρον σημείο κάθε ευθείας προβάλλεται **στο σημείο φυγής $\Phi_{(\varepsilon)}$ της** (ε) δηλαδή το σημείο τομής του (π) με την ευθεία από το Ο την παράλληλη προς την (ε). (Σχήμα 2)

Πρόταση 5: Η κεντρική προβολή ευθείας (ε) που δε διέρχεται από το κέντρο Ο αλλά είναι παράλληλη προς το επίπεδο προβολής (π), είναι

(α) ευθεία παράλληλη προς την (ε) (στην περίπτωση που η (ε) και το Ο δεν ορίζουν επίπεδο παράλληλο στο (π))

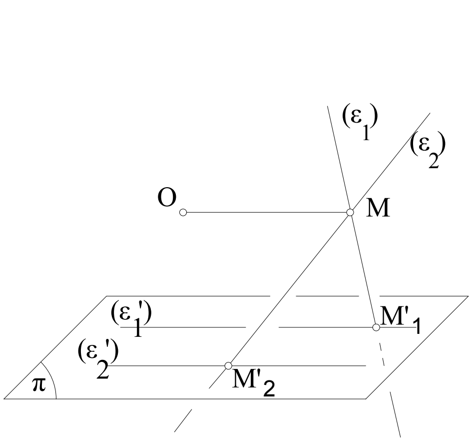
(β) η επ'άπειρον ευθεία του (π) (στην περίπτωση που η (ε) και το Ο ορίζουν επίπεδο παράλληλο στο (π)).

Πρόταση 6: Αν η κεντρική προβολή μιας ευθείας (ε) είναι παράλληλη προς την (ε), τότε η (ε) είναι παράλληλη προς το επίπεδο προβολής.

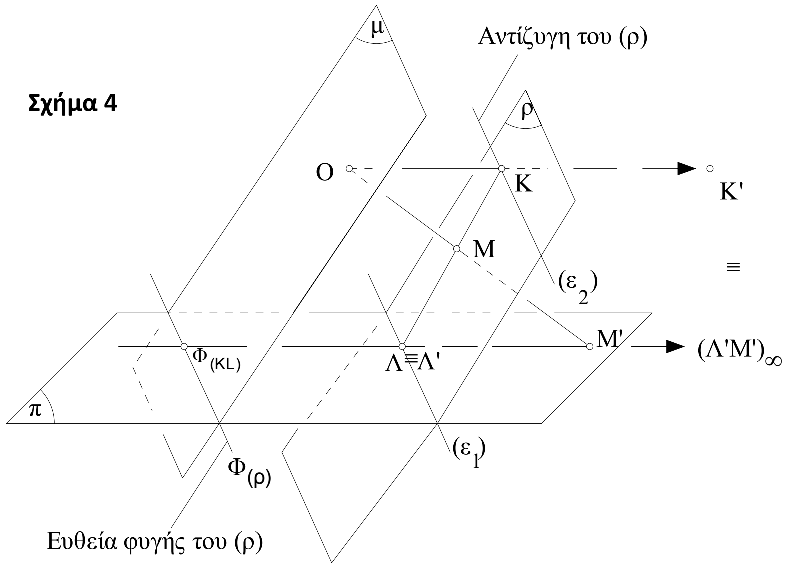
Πρόταση 7: Η κεντρική προβολή οποιασδήποτε ευθείας παράλληλης προς δοσμένη διεύθυνση διέρχεται από σταθερό σημείο, (το σημείο φυγής της διεύθυνσης).

Πρόταση 8: Η κεντρική προβολή οποιασδήποτε ευθείας διερχόμενης από το δοσμένο σημείο Μ (διαφορετικό του Ο) είναι παράλληλη στην ευθεία ΟΜ αν και μόνο αν η ΟΜ είναι παράλληλη στο επίπεδο της προβολής (Σχήμα 3).

Σχήμα 3



Σχήμα 4

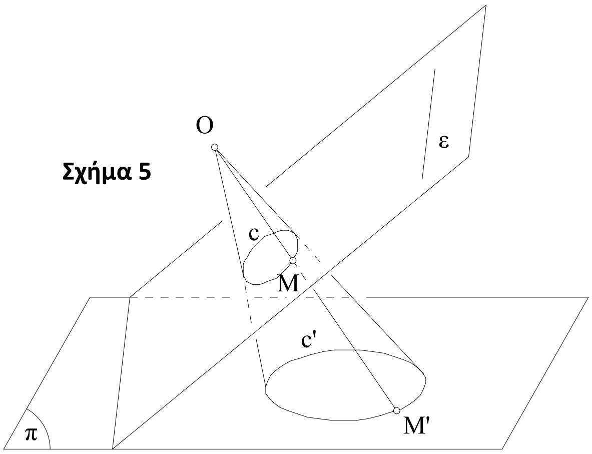


Άσκηση 1: Σχεδιάσετε τα σημεία του (π) που αποτελούν προβολές των επ'άπειρον σημείων κάποιων δοσμένων ευθειών ενός τυχαίου επιπέδου (ρ).

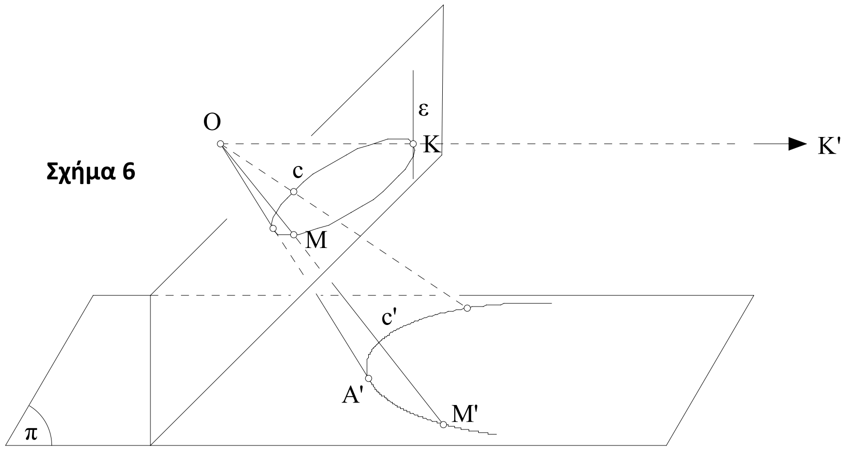
Πρόταση 9: Η κεντρική προβολή τυχαίας ευθείας του επιπέδου του παράλληλου στο (π) από το O, είναι η επ'άπειρον ευθεία του επιπέδου προβολής (εκτός κι αν διέρχεται από το O οπότε είναι ένα επ'άπειρον σημείο).

Πρόταση 10: Ένα φραγμένο σχήμα (s) που ανήκει σε κάποιο επίπεδο έχει φραγμένη προβολή αν και μόνο αν το (s) δεν έχει σημεία αυθαιρέτως κοντά την αντίζυγη ευθεία του επιπέδου του.

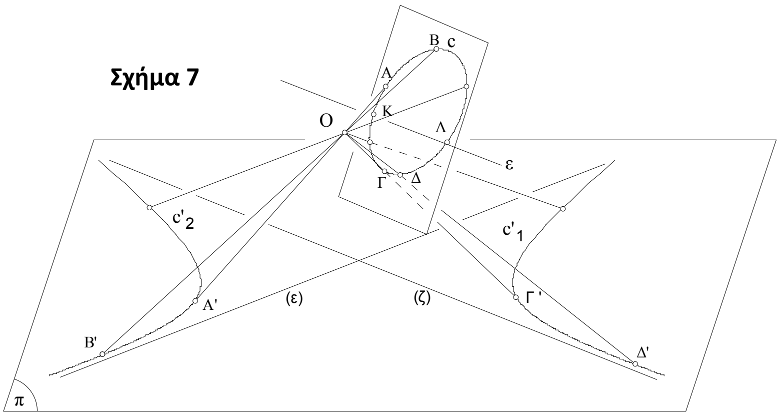
Σχήμα 5



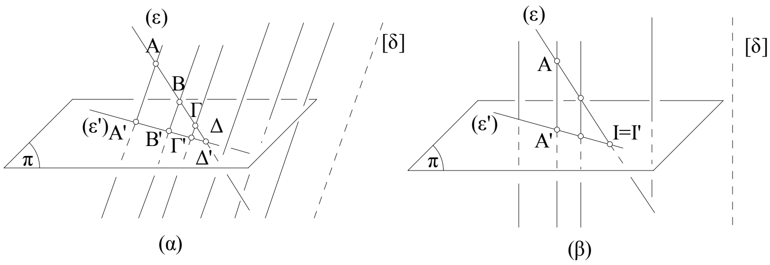
Σχήμα 6



Σχήμα 7



Σχήμα 8



<u>**Παράλληλη (πλάγια και ορθή) προβολή.**</u>

Πρόταση 11: Η παράλληλη προβολή ευθείας (ε) που δεν είναι παράλληλη στη διεύθυνση προβολής $[\delta]$, είναι ακριβώς η ευθεία τομής του επιπέδου (π) με το επίπεδο που διέρχεται από την (ε) και είναι παράλληλο προς τη $[\delta]$.

Πρόταση 12: Η παράλληλη προβολή παράλληλων ευθειών είναι ευθείες παράλληλες.

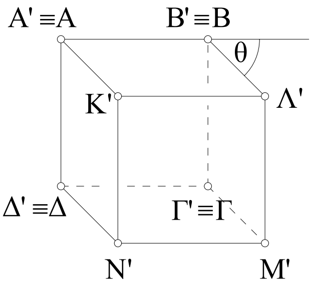
Πρόταση 13: Η παράλληλη προβολή διατηρεί τον λόγο των τμημάτων μιας ευθείας. (Π.χ. στο Σχήμα 8α, για την ευθεία (ε) είναι $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{B\Gamma}}=\frac{\mathrm{A'B'}}{\mathrm{B'\Gamma'}}$).

Πρόταση 14: Στην παράλληλη προβολή, ο λόγος του μήκους ενός τμήματος μιας ευθείας προς το μήκος του προβαλλόμενου τμήματος είναι σταθερός (φυσικά μπορεί να αλλάζει για διαφορετικές ευθείες). (Π.χ. στο Σχήμα 8α, για την ευθεία (ε) είναι $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A'B'}}=\frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{B'\Gamma'}}=\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{A'\Gamma'}}$).

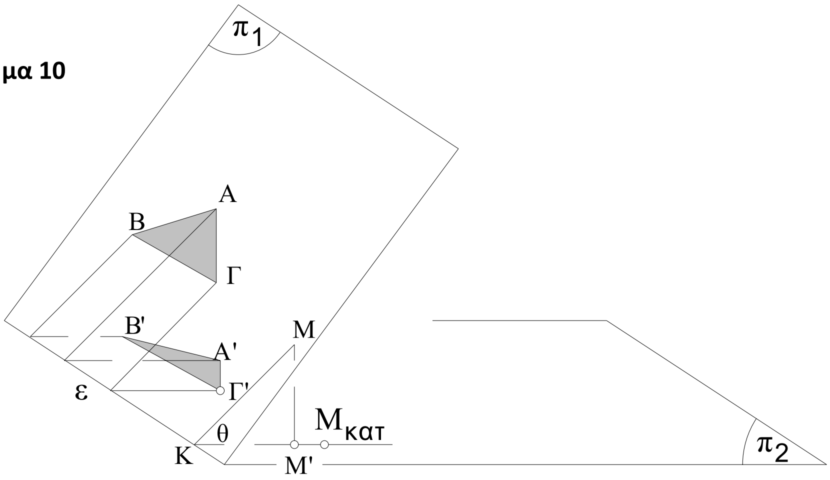
Πρόταση 15: Στην παράλληλη προβολή, η προβολή ευθύγραμμου τμήματος παράλληλου προς το επίπεδο προβολής είναι ευθύγραμμο τμήμα ίσου μήκους. Γενικότερα, η προβολή σχήματος παράλληλου προς το επίπεδο προβολής, είναι σχήμα ίσο με αυτό. Επίσης οι παράλληλες προβολές δύο γωνιών που έχουν παράλληλες και ομόρροπες τις πλευρές τους είναι ίσες.

Παράδειγμα 1. : Σχήμα 9.

Σχήμα 9



Σχήμα 10



__Κατάκλιση και ανάκλιση επιπέδου__ (Σχήμα 10).

KMM' = κλισιμετρικό τρίγωνο του (π_1) ως προς το (π_2) .

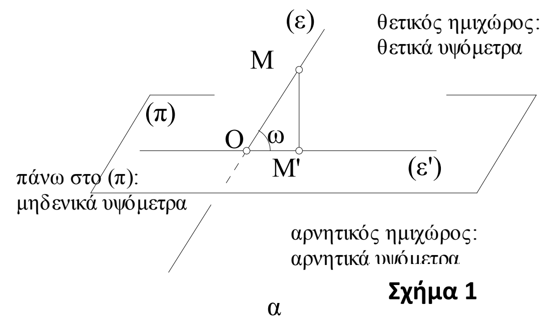
$M_{\kappa\alpha\tau}$ = κατάκλιση του M (δηλαδή $KM{=}KM_{\kappa\alpha\tau}$ και $KM \perp \varepsilon \perp KM_{\kappa\alpha\tau}$).

M' = προβολή του M (δηλαδή $KM' \perp \varepsilon \perp KM$). Είναι $\text{ευθεία}KM \equiv \text{ευθεία}KM_{\kappa\alpha\tau}$.

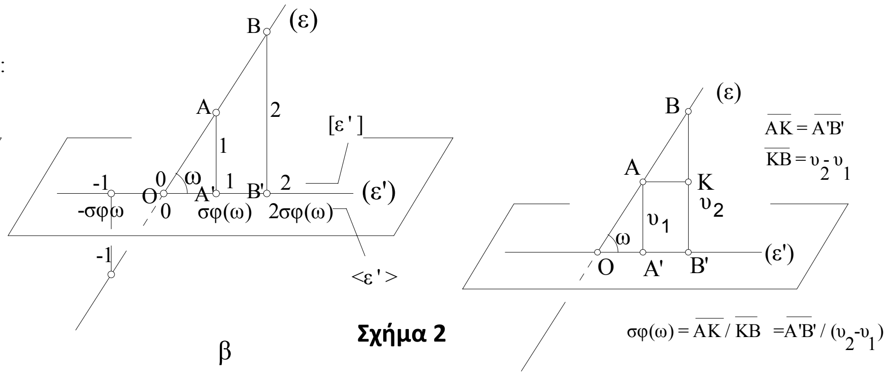
② ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΣΕ ΕΝΑ ΕΠΙΠΕΔΟ

(Υψομετρική Προβολή, δηλαδή προβολή σε ένα επίπεδο με υψόμετρα, δηλαδή συνολικές υψομετρικές κατόψεις)

Παράσταση σημείου (Σχήμα 1)



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Παράσταση ευθείας (Σχήμα 2)

Έστω $\widehat{ω}$ η γωνία κλίσης της $(ε)$ ως προς το $(π)$. Τότε $εφ(ω) =$ κλίση της $(ε)$ ως προς το $(π)$. Ας είναι O το σημείο τομής της $(ε)$ με το $(π)$.

Η $(ε')$ είναι άξονας με αρχή το O, θετική φορά αυτή κατά την οποία αυξάνουν τα υψόμετρα των σημείων της $(ε)$, και μονάδα μέτρησης την πραγματική μονάδα μέτρησης (δηλαδή τη σχεδιαστική μονάδα στο χαρτί μας). Θα τον συμβολίζουμε $<ε'>$. Ισχύει:

$$\overline{OM'} = σφ(ω)υ_M$$

όπου η παύλα πάνω από το μήκος OM υποδηλώνει αλγεβρική τιμή στον άξονα $<ε'>$, και το υψόμετρο $υ_M$ λαμβάνει θετικές, αρνητικές, ή μηδενικές τιμές σύμφωνα με τις συμβάσεις μας.

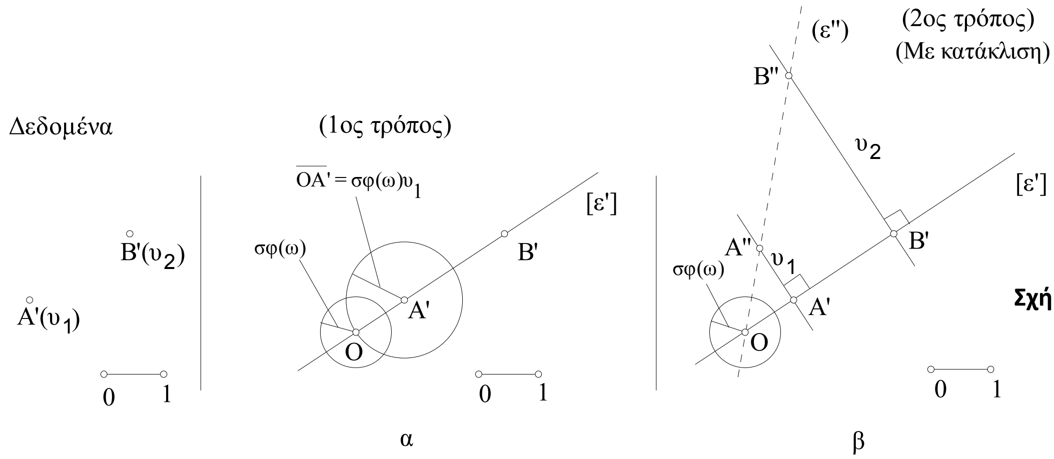
Ο τύπος αυτός διαβάζεται και ως: αληθινό μήκος στον άξονα $<ε'> =$ σταθερός αριθμός επί $υ_M$. Οπότε η $(ε')$ μπορεί να θεωρηθεί ως άξονας και με ένα δεύτερο τρόπο, διατηρώντας την αρχή O, και δηλώνοντας αποστάσεις από το O όσο λένε τα $υ_M$. Εφόσον ο σταθερός αριθμός είναι ο $σφ(ω)$ και $0^0 < ω < 90^0$ θα έχουμε $σφ(ω) > 0$, οπότε η θετική φορά του νέου άξονα ταυτίζεται με την παλιά. Ενώ στον παλιό άξονα η αλγεβρική απόσταση ενός σημείου της ευθείας $(ε)$, έστω του $M'(υ)$ από την αρχή O ήταν $\overline{OM'} = σφ(ω)υ_M$, στο νέο άξονα είναι $υ_M = \dfrac{\overline{OM'}}{σφ(ω)}$. Θα συμβολίζουμε την $(ε')$ ως άξονα με τον νέο τρόπο ως $[ε']$. Έτσι σημεία του $<ε'>$ με αλγεβρικές τιμές (αληθινές προσημασμένες αποστάσεις) $..., -σφ(ω), 0, σφ(ω), 2σφ(ω), ...$ έχουν αντιστοίχως αλγεβρικές τιμές στον $[ε']$: $..., -1, 0, 1, 2, ...$

Για την $σφ(ω)$ που ονομάζεται και βήμα ή βαθμίδα της ευθείας $(ε')$ έχουμε (δες Σχήμα 2) τον εξής γενικότερο τύπο:

$$σφ(ω) = \frac{\overline{A'B'}}{υ_2 - υ_1}$$

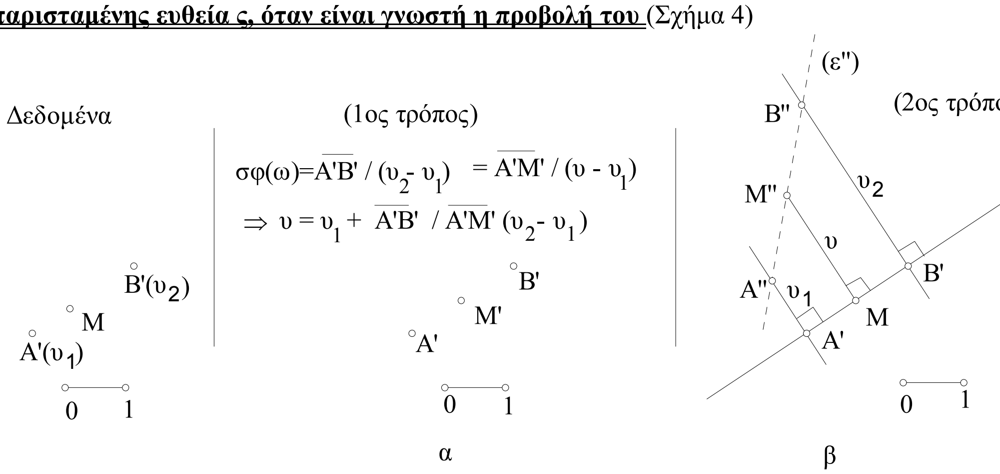
όπου A', B' είναι δύο τυχαία σημεία της ευθείας. Αν λοιπόν για δύο σημεία $A'(υ_1), B'(υ_2)$ της $(ε')$ είναι $υ_2 - υ_1 = 1$, τότε $σφ(ω) = \overline{A'B'}$, δηλαδή όσο και η πραγματική τους προσημασμένη (επί του $<ε'>$) απόσταση. Συνεπώς αν ξεκινώντας από το O, σημειώσουμε διαδοχικά σημεία επί της $(ε')$, που απέχουν (ανά δύο διαδοχικά) προσημασμένη (επί του $<ε'>$) απόσταση $σφ(ω)$, τα σημεία αυτά θα είναι εκείνα με υψόμετρα $..., -1, 0, 1, 2, ...$, δηλαδή τα σημεία της $(ε')$ που προκύπτουν ως προβολές σημείων της $(ε)$ με ακέραια υψόμετρα. Τα σημεία αυτά της $(ε)$ τα ονομάζουμε συντόμως **ακέραια σημεία της**, ενώ τις προβολές τους τις ονομάζουμε **ακέραια σημεία του άξονα** $[ε']$. Ο άξονας $[ε']$ με σημειωμένα τα ακέραια σημεία του, ονομάζεται **υψομετρική κλίμακα** της $(ε)$. Ο αριθμός $σφ(ω)$ ονομάζεται **βήμα ή βαθμίδα της** $(ε)$. Η υψομετρική κλίμακα μιας ευθείας ονομάζεται και **παράστασή** της στην παραστατική με μία προβολή με υψόμετρα.

Εύρεση κλίμακας ευθείας (δηλαδή της παράστασής της) από τις παραστάσεις 2 σημείων της (Σχήμα 3)



Σχήμα 3

Υψόμετρο σημείου παρισταμένης ευθεία ς, όταν είναι γνωστή η προβολή του (Σχήμα 4)

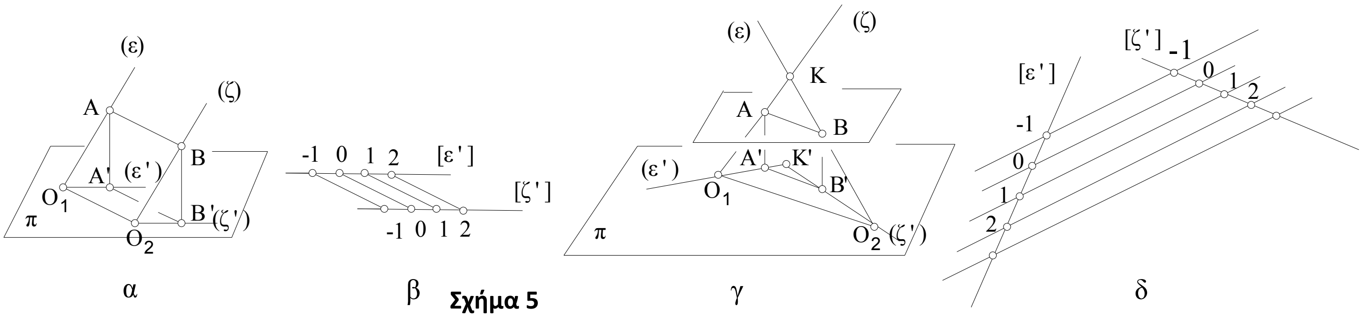


Σχήμα 4

Ευθείες συμβατές και ασύμβατες

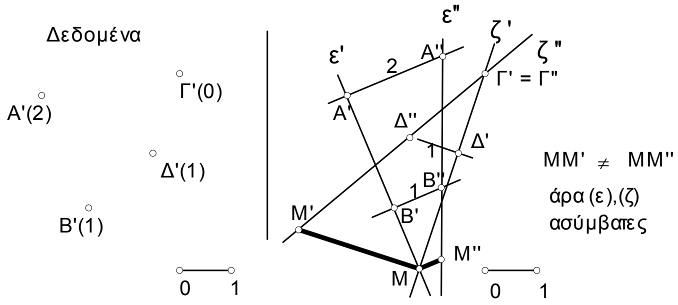
Πρόταση 1: Οι ευθείες $(\varepsilon), (\zeta)$ είναι παράλληλες αν και μόνο αν οι υψομετρικές τους κλίμακες $[\varepsilon'], [\zeta']$ είναι ισοδύναμες (δηλαδή οι $(\varepsilon), (\zeta)$ έχουν παράλληλες προβολές με ίσες βαθμίδες και τα υψόμετρά τους αυξάνουν ομορρόπως). (Σχήμα 5α,β)

Πρόταση 2: Οι ευθείες $(\varepsilon), (\zeta)$ τέμνονται αν και μόνο αν οι ευθείες του επιπέδου προβολής (π) που ενώνουν σημεία ίσων υψομέτρων των $[\varepsilon'], [\zeta']$ είναι παράλληλες. (Σχήμα 5γ,δ)



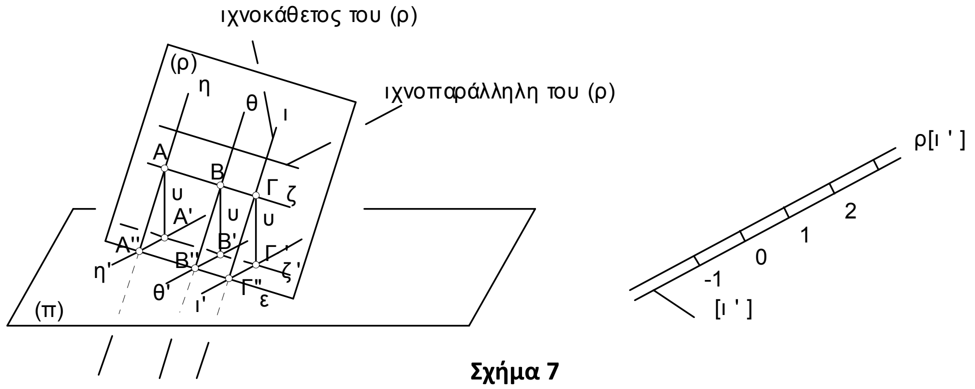
Σχήμα 5

Άσκηση 1: Στο επόμενο σχήμα (Σχήμα 6) οινονται οι προβολές δύο σημείων $A'(2), B'(1)$ μιας ευθείας (ε) καθώς και οι προβολές $\Gamma'(0), \Delta'(1)$ μιας ευθείας (ζ). Με κατακλίσεις των $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ να διαπιστώσετε πως οι δύο ευθείες είναι ασύμβατες. (Να γίνουν σκέψεις στην περίπτωση που το σημείο M του επόμενου σχήματος βρίσκεται εκτός χαρτιού σχεδίασης).



Σχήμα 6

<u>Παράσταση επιπέδου</u>



Σχήμα 7

Πρόταση 3: *Οι προβολές των ιχνοπαραλλήλων πάνω στο* (π) *είναι παράλληλες ευθείες που διέρχονται από τα σημεία της υψομετρικής κλίμακας* $[\iota']$ *με το αντίστοιχο υψόμετρο.* (Σχήμα 7)

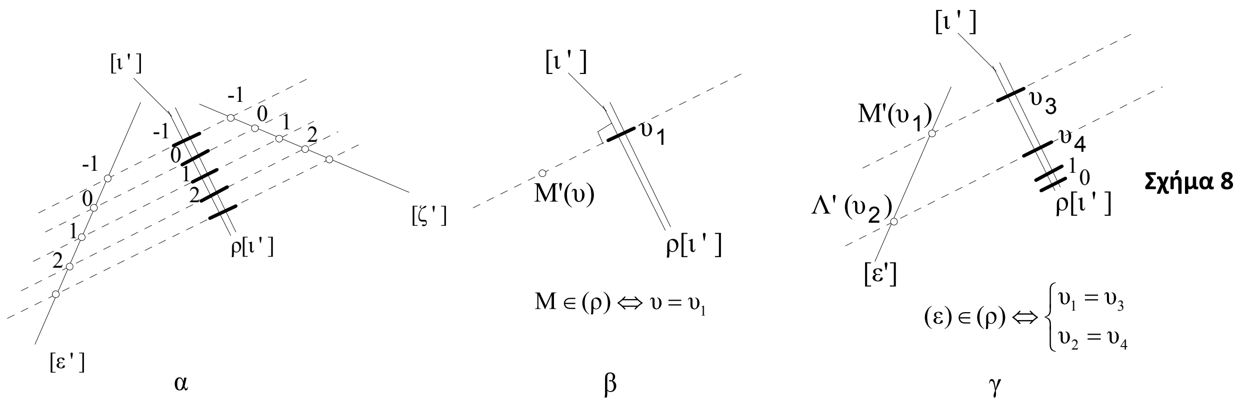
Πρόταση 4: *Οι ευθείες του* (π) *που διέρχονται από προβολές ισοϋψών σημείων των υψομετρικών κλιμάκων δύο ιχνοκαθέτων του* (ρ), *είναι ευθείες παράλληλες και αποτελούν τις προβολές των ιχνοπαραλλήλων του* (ρ) *που βρίσκονται σε υψόμετρο όσο δηλώνουν τα υψόμετρα των κλιμάκων.* (Σχήμα 7)

Άσκηση 2: Καθορισμός υψομετρικής κλίμακας (δηλ. παράστασης) επιπέδου (ρ) από τις υψομετρικές κλίμακες $[\varepsilon'],[\zeta']$ δύο ευθειών του $(\varepsilon),(\zeta)$. (Σχήμα 8α)

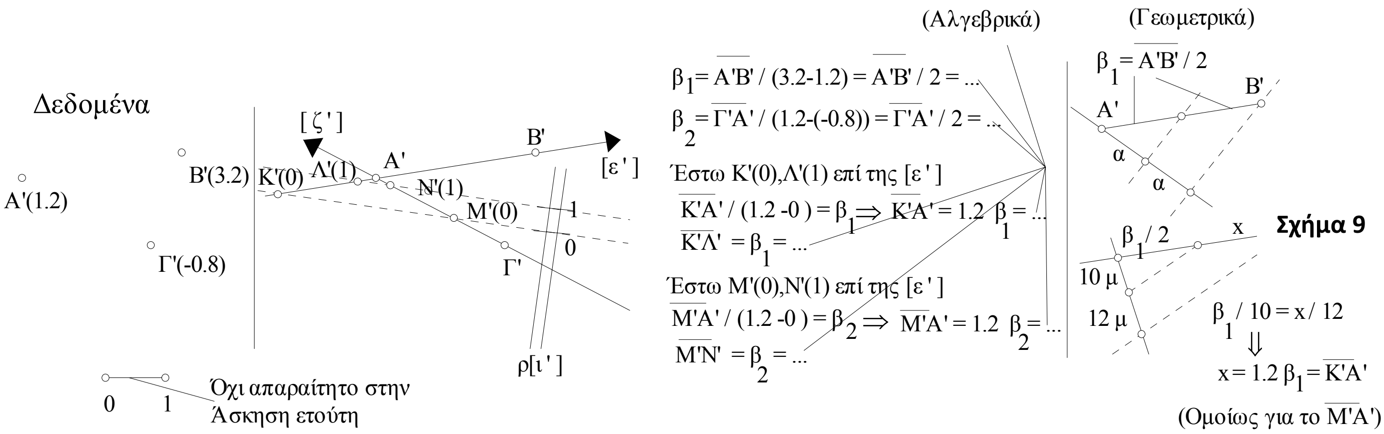
<u>Έλεγχος για το αν παριστάμενο σημείο ή ευθεία ανήκει σε παριστάμενο επίπεδο</u> (Σχήμα 8β,γ)

Άσκηση 3: Καθορισμός υψομετρικής κλίμακας (δηλ. παράστασης) επιπέδου (ρ) από τις παραστάσεις τριών σημείων του, όπως π.χ. των $A'(1.2), B'(3.2), \Gamma'(-0.8)$. (Σχήμα 9)

Άσκηση 4: Να παρασταθεί επίπεδο το οποίο διέρχεται από δοσμένη παριστάμενη ευθεία (Σχήμα 10α).



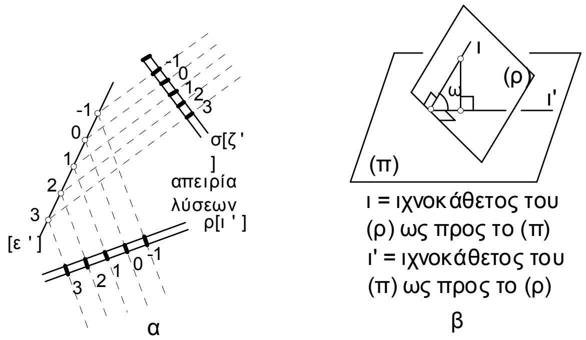
Σχήμα 8



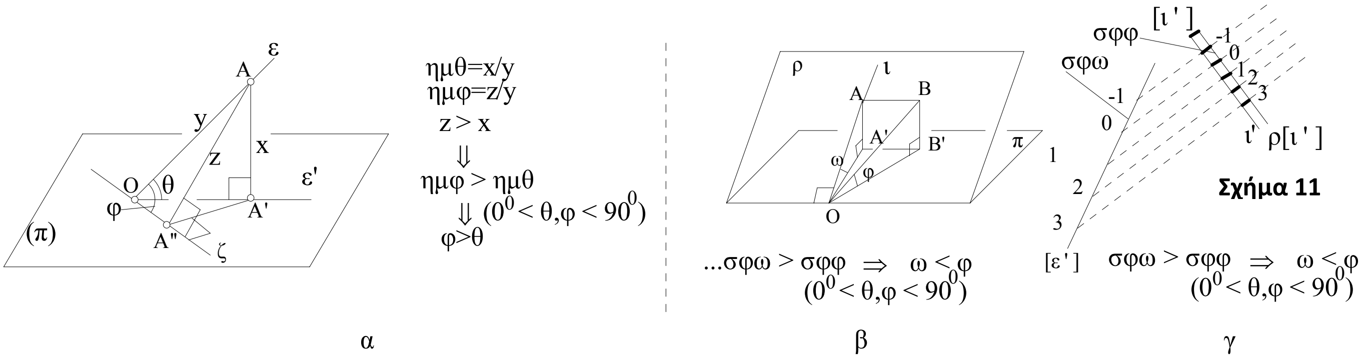
Σχήμα 9

(3) Πρόταση 5: (Σχ. 11α) Στη γενική περίπτωση, η γωνία ευθείας (ε) και επιπέδου (π) είναι η <u>μικρότερη</u> γωνία που σχηματίζει η (ε) με οποιαδήποτε ευθεία του (π) που διέρχεται από το ίχνος της (ε).

(4) Πρόταση 6: (Σχ. 11β) Στη γενική περίπτωση, η γωνία επιπέδου (ρ) με το επίπεδο (π) είναι η <u>μεγαλύτερη</u> γωνία που δημιουργεί οποιαδήποτε ευθεία του (ρ) με το επίπεδο (π) (και ομοίως, είναι η μεγαλύτερη γωνία που δημιουργεί οποιαδήποτε ευθεία του (π) με το επίπεδο (ρ)).

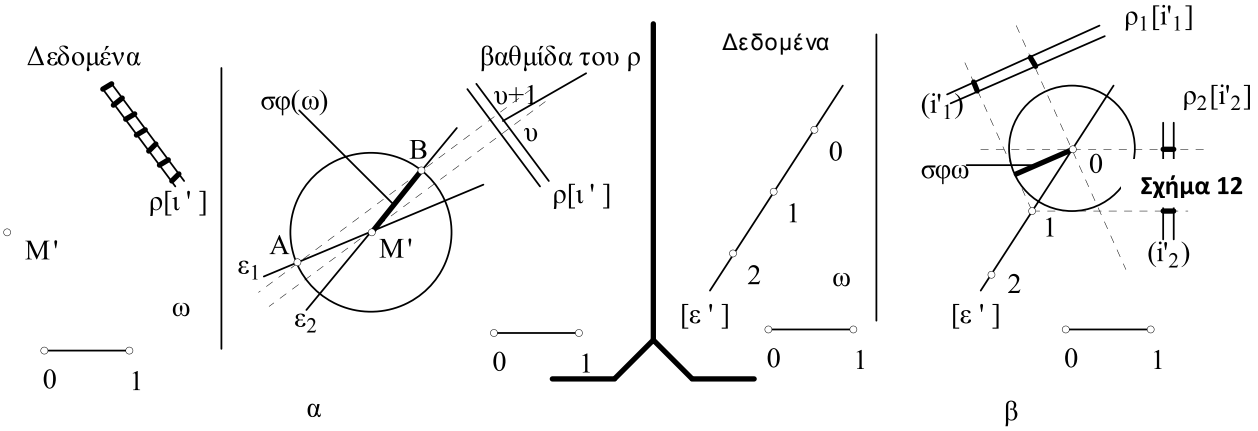


Σχήμα 10



Σχήμα 11

Άσκηση 5: Να παρασταθεί ευθεία (ε) που ανήκει σε δοσμένο επίπεδο $\rho[\iota']$, η οποία διέρχεται από δοσμένο σημείο $M'(\upsilon)$ του ρ και έχει δοσμένη γωνία κλίσης $\hat{\omega}$ ως προς το επίπεδο προβολής (Σχήμα 12α). Να γίνει διερεύνηση.



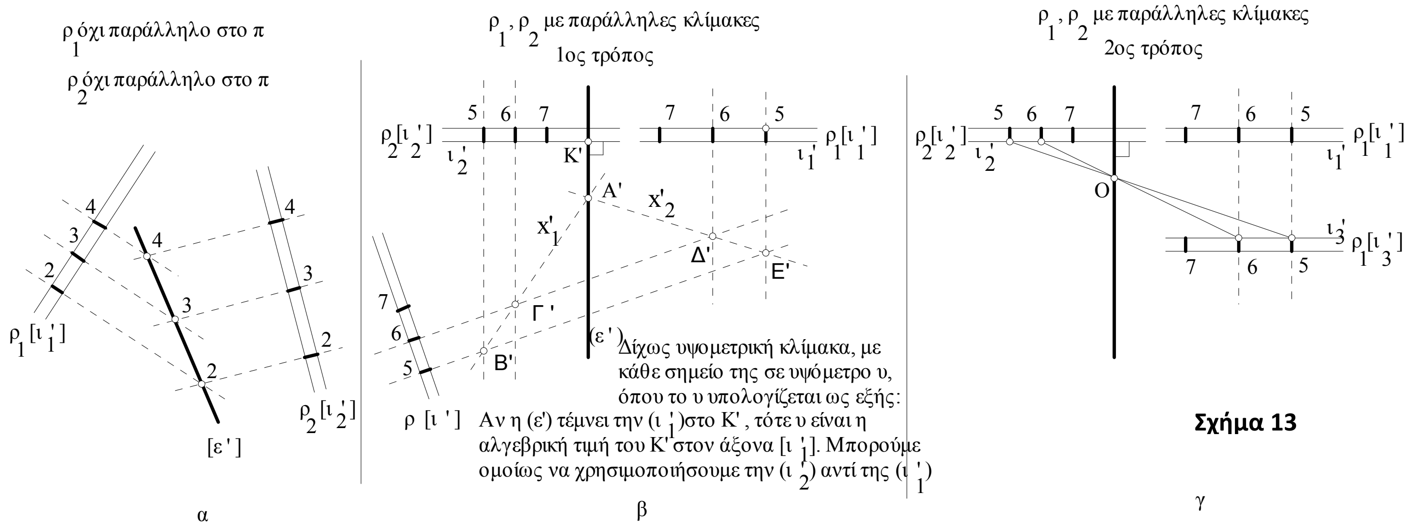
Σχήμα 12

Άσκηση 6: Να παρασταθεί επίπεδο $\rho[\iota']$ που δημιουργεί δοσμένη γωνία $\hat{\omega}$ με το επίπεδο προβολής και που διέρχεται από δοσμένη ευθεία $[\varepsilon']$ (Σχήμα 12β). Να γίνει διερεύνηση.

Πρόταση 7: Δύο επίπεδα είναι παράλληλα αν και μόνο αν οι κλίμακές τους είναι ισοδύναμες (θυμηθείτε πως αυτό σημαίνει ότι είναι ευθείες παράλληλες και ομόρροπες, με τις ίδιες βαθμίδες).

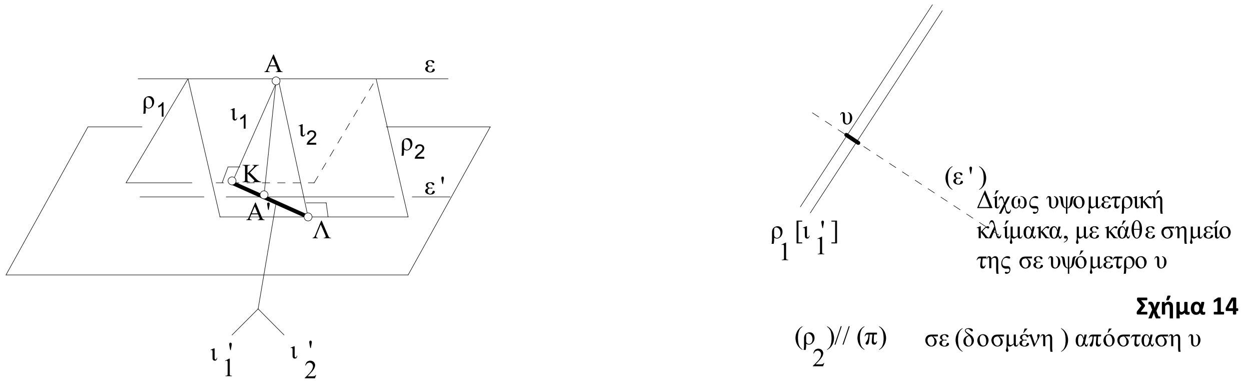
Πρόταση 8 (Επιπεδομετρίας): Δύο παράλληλοι άξονες στο επίπεδο είναι ομοιόθετοι.

Άσκηση 7: Να παρασταθεί η τομή δύο επιπέδων $\rho_1[\iota_1']$ και $\rho_2[\iota_2']$ (Σχήμα 13). Να γίνει διερεύνηση. (Διερεύνηση: Για $\rho_1 \| \rho_2$ δεν υπάρχει τομή στο σχέδιό μας. Για ρ_1 , π , ρ_2 με μη παράλληλες κλίμακες δες Σχήμα 13α. Για ρ_1 , π , ρ_2 με παράλληλες κλίμακες δες Σχήματα 13β,γ, 14α. Για ρ_1 , $\pi \| \rho_2$ δες Σχήμα 14β.)



α β γ

Σχήμα 13



Σχήμα 14

α β

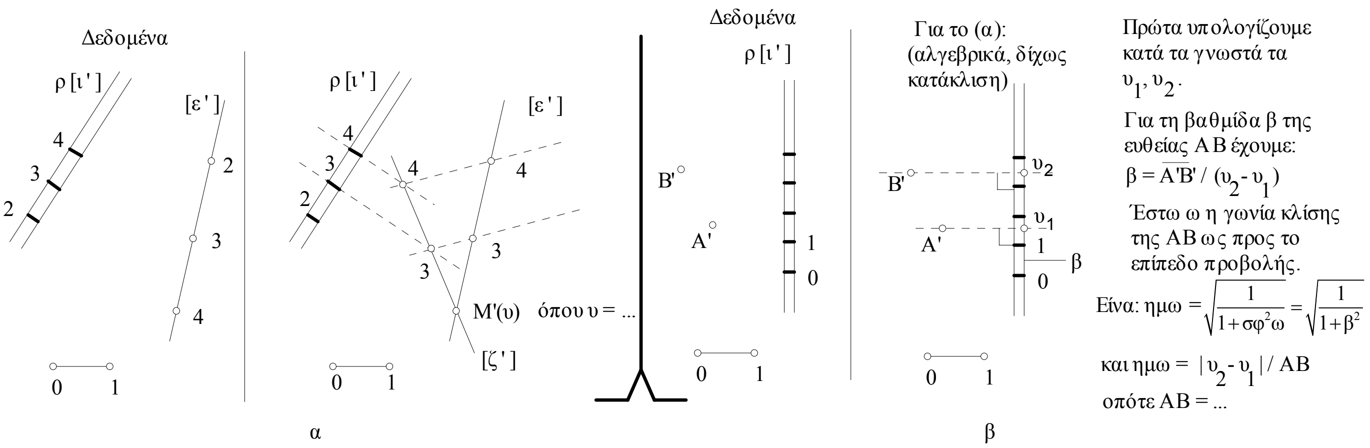
Άσκηση 8: Να παρασταθεί η τομή ευθείας $[\varepsilon']$ και επιπέδου $\rho[\iota']$ (Σχήμα 15α). Να γίνει διερεύνηση.

Άσκηση 9: Να παρασταθεί ευθεία $[\varepsilon']$ παράλληλη προς δοσμένη διεύθυνση (δ), η οποία τέμνει δοσμένες ασύμβατες ευθείες $[\alpha']$ και $[\beta']$ (Υπόδειξη: Δοσμένη διεύθυνση (δ) σημαίνει πως είναι γνωστή η παράσταση $[\zeta']$ μιας ευθείας ζ της διεύθυνσης αυτής. Πρώτα παραστήστε τα επίπεδα ρ_1, ρ_2 που είναι παράλληλα στην (δ) και περιέχουν αντιστοίχως τις ευθείες α, β. Κατόπιν παραστήστε την τομή ε των ρ_1, ρ_2 η οποία είναι και η ζητούμενη ευθεία.)

Άσκηση 10: Όταν δύο επίπεδα ρ_1, ρ_2 που δεν είναι παράλληλα μεταξύ τους ούτε στο επίπεδο προβολής π είναι ισοκλινή ως προς αυτό, να δείξετε τότε πως η προβολή της τομής των ρ_1, ρ_2 διχοτομεί τη μία από τις γωνίες που δημιουργούν οι προβολές μιας τυχαίας ιχνοπαραλλήλου του ενός και μιας τυχαίας ιχνοπαραλλήλλου της άλλης με το ίδιο υψόμετρο. (Δουλέψτε είτε με χωρικό σχέδιο, είτε με προβολικό).

Πρόταση 7: Μία ευθεία ε είναι κάθετη σε ένα επίπεδο ρ αν και μόνο αν οι κλίμακές τους είναι αντίρροπες και οι βαθμίδες τους αντίστροφες. (Δηλαδή αν το ρ παριστάνεται ως $\rho[\zeta']$ τότε $[\varepsilon']\uparrow\downarrow[\zeta']$ και $\beta_\varepsilon \cdot \beta_\rho = \beta_\varepsilon \cdot \beta_\zeta = 1$).

Άσκηση 11: Δίνεται επίπεδο $\rho[\iota']$, οι προβολές A', B' δύο σημείων του και όπως πάντα η γραφική κλίμακα. (α) Να βρεθεί το αληθές μέγεθος του τμήματος AB. (β) Να σημειωθεί η θέση A'', B'' των A, B μετά από κατάκλιση του ρ επί του επιπέδου προβολής π με στροφή γύρω από την κοινή τους ευθεία, και να απαντήσετε και πάλι το ερώτημα (α) χρησιμοποιώντας τις κατακλίσεις A'', B''. (Σχήμα 15β)



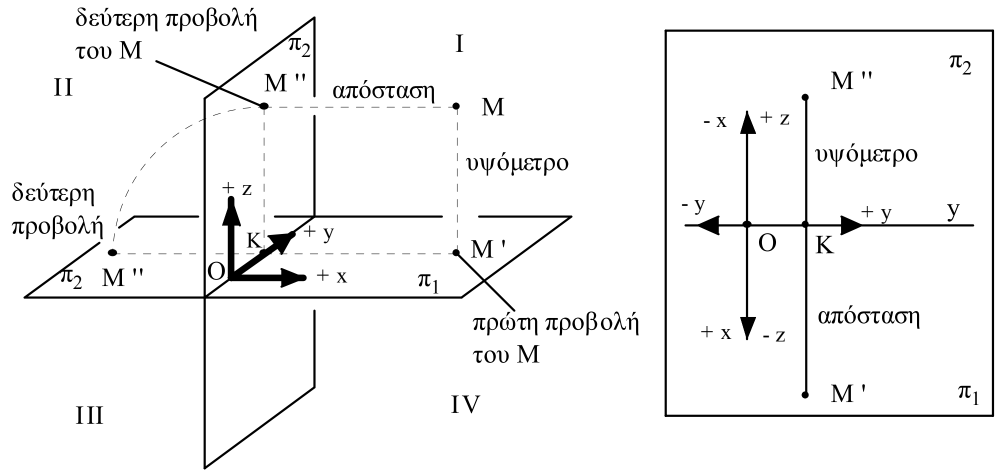
α β

Σχήμα 15

③ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΣΕ ΔΥΟ ΕΠΙΠΕΔΑ

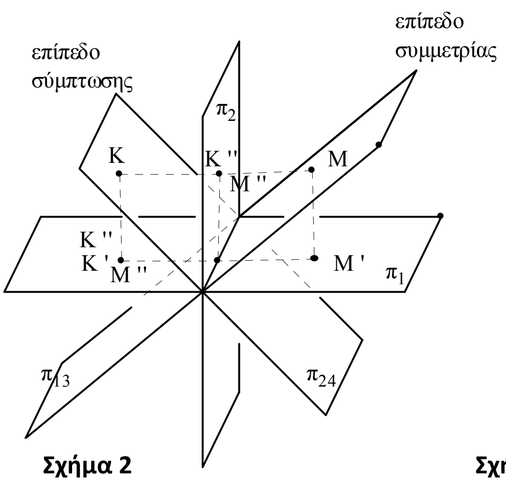
(Μέθοδος Monge: κατόψεις και προσόψεις με ορθοκανονικό σύστημα αναφοράς)

Παράσταση σημείου (Σχήμα 1):

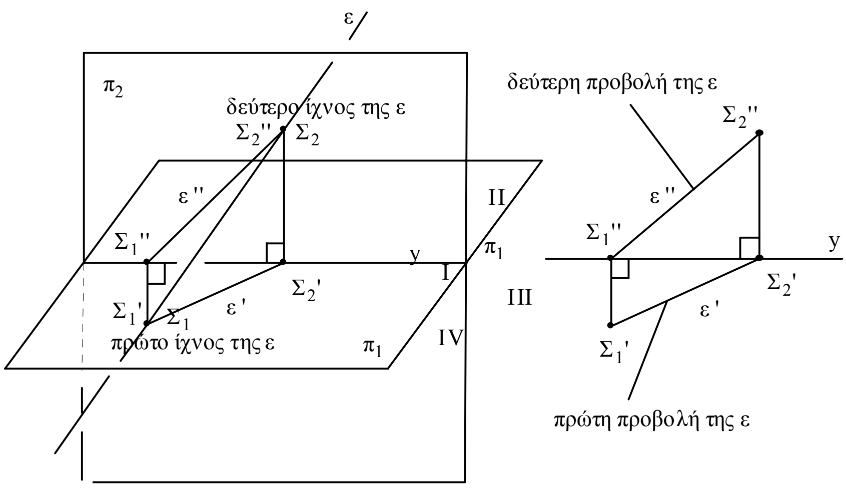


α β **Σχήμα 1**

Γράφουμε $\mathrm{M}(\mathrm{M}',\mathrm{M}'')$.



Σχήμα 2



Σχήμα 3 α β

Άσκηση 1: Να παρασταθούν τα σημεία του χώρου $\mathrm{A}(3,4,2)$, $\mathrm{B}(3,-4,2)$, $\Gamma(-3,-4,2)$, $\Delta(-3,4,-2)$, $\mathrm{E}(3,-4,-2)$.

Άσκηση 2: Παρότι ένα σημείο καθορίζεται από τις δύο προβολές του, δείξτε πως ένα σχήμα εν γένει δεν καθορίζεται απαραιτήτως από τις δύο προβολές του.

Άσκηση 3: Δείξετε πως η προβολή του σημείου $\mathrm{M}(x,y,z)$ στα επίπεδα συμπτώσεως και συμμετρίας είναι αντιστοίχως τα

$$\mathrm{M}_1\left(\frac{x-z}{2},y,\frac{z-x}{2}\right),\quad \mathrm{M}_2\left(\frac{x+z}{2},y,\frac{x+z}{2}\right).$$

Πρόταση 1: Για να βρίσκεται σημείο M του χώρου στο πρώτο (δεύτερο) επίπεδο προβολής π_1 πρέπει και αρκεί η … προβολή του να…

Παράσταση ευθείας (Σχήματα 3, 4):

Ευθεία (ε) με πρώτη και δεύτερη προβολής της επί των $(\pi_1),(\pi_2)$ τις $(\varepsilon'),(\varepsilon'')$ αντιστοίχως. Γράφουμε $\varepsilon(\varepsilon',\varepsilon'')$ και λέμε πως η (ε) παριστάνεται από τις προβολές της $(\varepsilon'),(\varepsilon'')$.

Πρόταση 2: (α) Όταν η (ε) ανήκει σε επίπεδο κάθετο στον (y), τότε οι δύο προβολές της ταυτίζονται και είναι κάθετες στον (y). Μία τέτοια ευθεία (ε) δεν καθορίζεται από τις προβολές της.

(β) Αν ε' και ε'' είναι δύο ευθείες του (π_1) καμιά εκ των οποίων δεν είναι κάθετη στον άξονα (y), τότε υπάρχει μοναδική ευθεία (ε) με πρώτη και δεύτερη προβολή τις ε' και ε'' αντιστοίχως. Η (ε) δεν είναι κάθετη σε κανένα από τα $(\pi_1),(\pi_2)$ (και καθορίζεται από τις προβολές της).

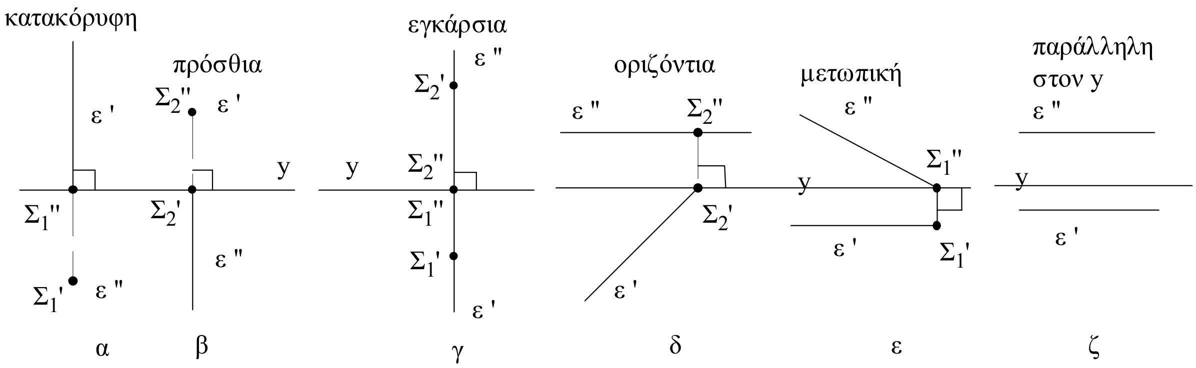
Πρόταση 3: Σημείο $\mathrm{M}(\mathrm{M}',\mathrm{M}'')$ ανήκει σε ευθεία $\varepsilon(\varepsilon',\varepsilon'')$ αν και μόνο αν $\mathrm{M}'\in\varepsilon'$ και $\mathrm{M}''\in\varepsilon''$ (Σχήμα 5).

Άσκηση 4: Ελέγξτε αν παριστάμενο σημείο $\mathrm{M}(\mathrm{M}',\mathrm{M}'')$ ανήκει σε παριστάμενη ευθεία $\varepsilon(\varepsilon',\varepsilon'')$. Λύση: …

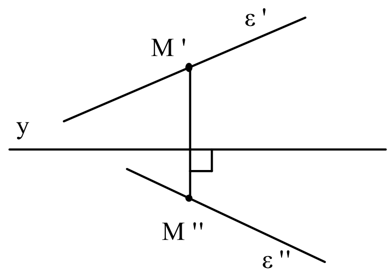
Άσκηση 5: Δίνεται παριστάμενη ευθεία $\varepsilon(\varepsilon',\varepsilon'')$. Να παρασταθούν τα κοινά της σημεία M και K με τα επίπεδα συμπτώσεως και συμμετρίας (Σχήμα 6).

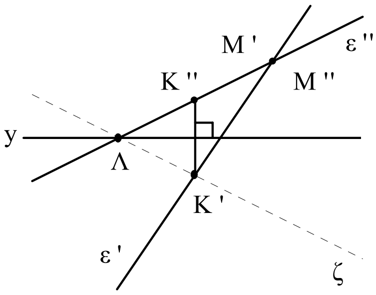
Άσκηση 6: Δίνονται τα σημεία $\mathrm{A}(\mathrm{A}',\mathrm{A}'')$ και $\mathrm{B}(\mathrm{B}',\mathrm{B}'')$ εγκάρσιας ευθείας ε. Να παρασταθεί η ευθεία και τα ίχνη της $\Sigma_1(\Sigma_1',\Sigma_1''),\Sigma_2(\Sigma_2',\Sigma_2'')$ (Σχήμα 7).

Σχήμα 4



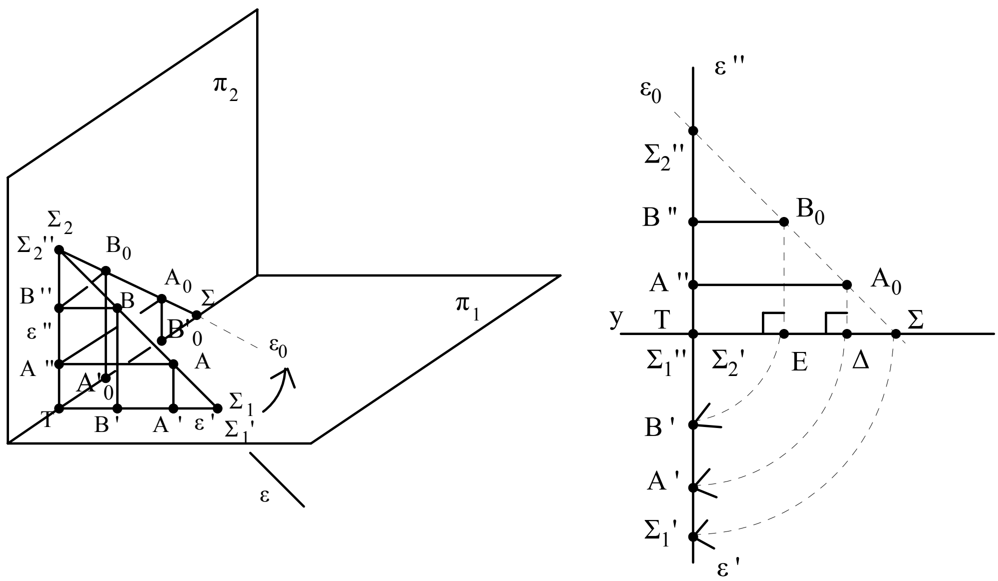
Σχήμα 5





Σχήμα 6

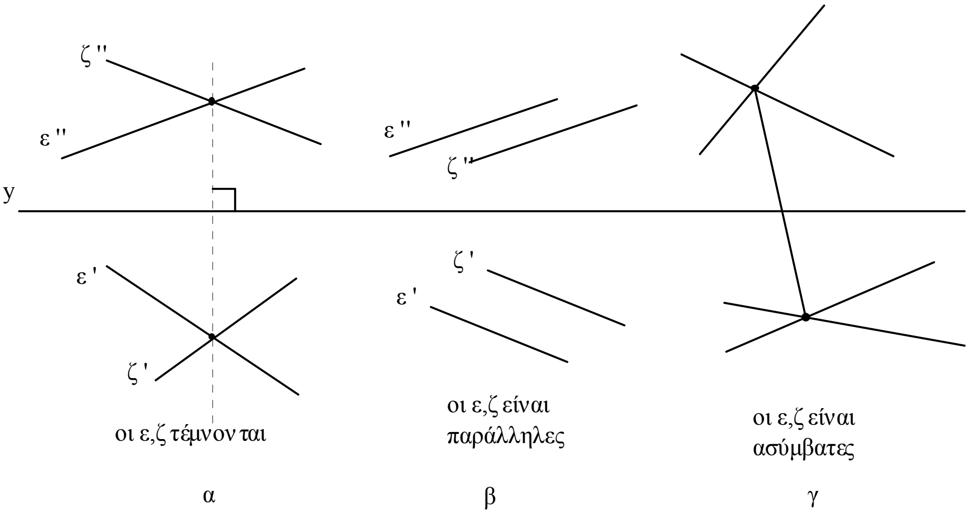
Σχήμα 7



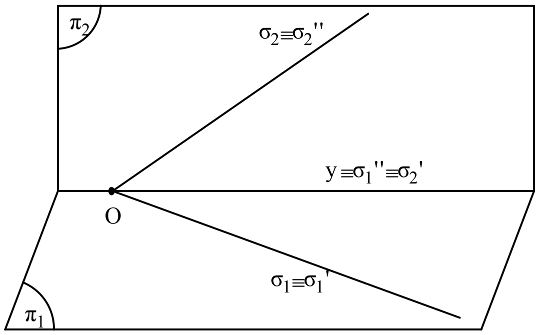
Πρόταση 4: **Δ**ύο μη εγκάρσιες ευθείες τέμνονται αν και μόνο αν τα σημεία τομής των ομώνυμων προβολών τους ορίζουν ευθεία κάθετη στον άξονα y (Σχήμα 8α).

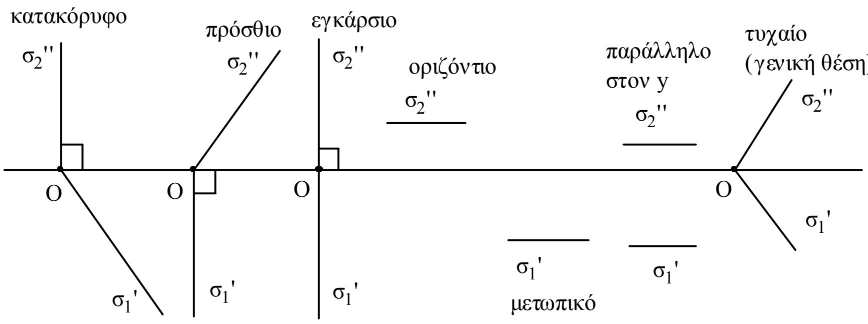
Πρόταση 5: **Δ**ύο μη εγκάρσιες ευθείες είναι παράλληλες αν και μόνο αν οι ομώνυμες προβολές τους είναι παράλληλες (Σχήμα 8β).

Σχήμα 8



<u>**Παράσταση επιπέδου (Σχήματα 9, 10)**</u>.



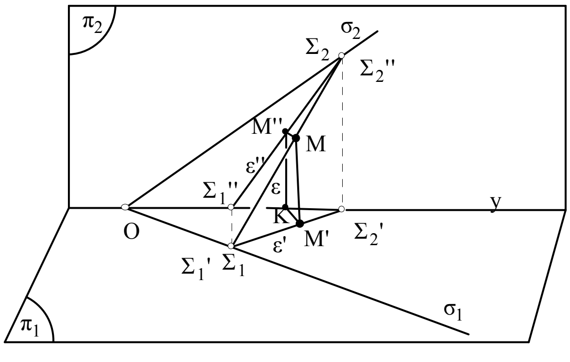


Σχήμα 9 **Σχήμα 10**

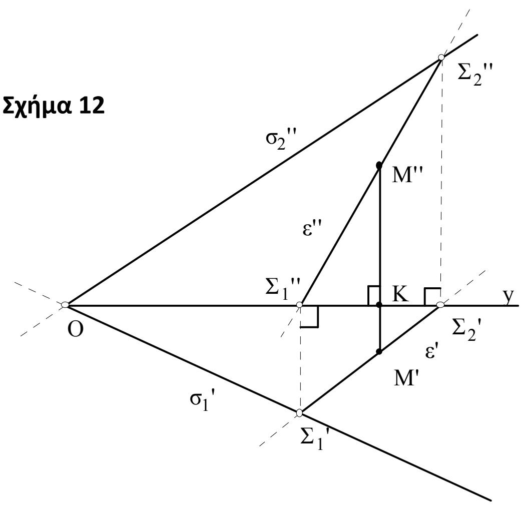
Γράφουμε $\rho(\sigma_1',\sigma_2'')$.

<u>**Σχετικές θέσεις σημείων, ευθειών και επιπέδων.**</u>

Σχήμα 11



Σχήμα 12



Πρόταση 6: Ευθεία κείτεται επί επιπέδου, αν και μόνο αν τα ίχνη της κείτονται επί των ομώνυμων ιχνών του επιπέδου (Σχήματα 11, 12).

Πρόταση 7: Σημείο κείτεται επί επιπέδου αν και μόνο αν οι προβολές του κείτονται επί των αντίστοιχων προβολών μιας ευθείας του επιπέδου (Σχήματα 11, 12).

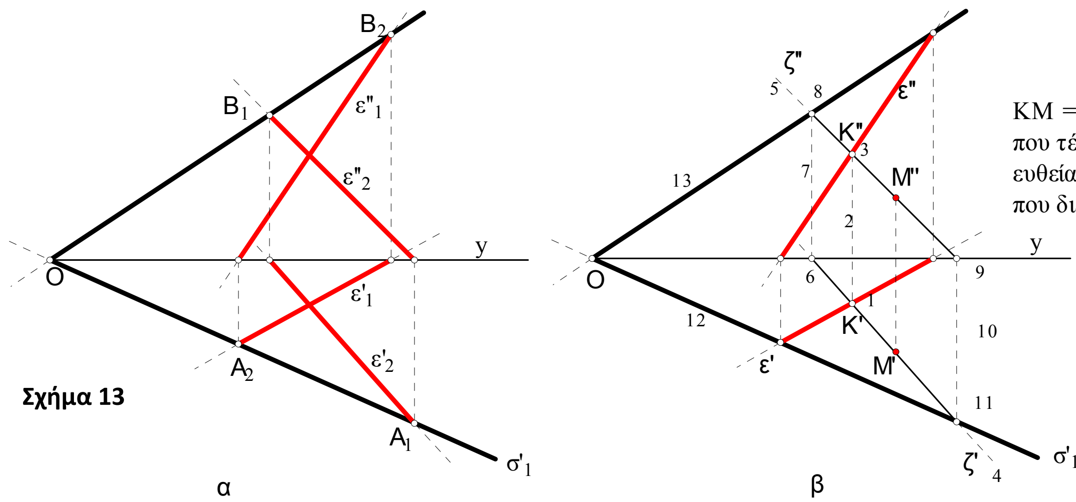
Πρόταση 8: Δύο επίπεδα είναι παράλληλα αν και μόνο αν τα ομώνυμα ίχνη τους είναι παράλληλα.

Άσκηση 7: Δίνεται επίπεδο $\pi(\sigma_1', \sigma_2'')$ και η πρώτη προβολή ε' ευθείας $\varepsilon(\varepsilon', \varepsilon'')$ που ανήκει στο (π). Να βρεθεί η δεύτερη προβολή ε'' της ευθείας. (Σχήμα 12).

Άσκηση 8: Δίνεται επίπεδο $\pi(\sigma_1^{'},\sigma_2^{"})$ και η πρώτη προβολή M' σημείου $M(M',M")$ που ανήκει στο (π). Να βρεθεί η δεύτερη προβολή $M"$ του σημείου. (Σχήμα 12).

Άσκηση 9: Να κατασκευαστούν τα ίχνη επιπέδου του οποίου είναι γνωστές οι παραστάσεις δύο ευθειών του $\varepsilon_1(\varepsilon_1^{'},\varepsilon_1^{"})$ και $\varepsilon_2(\varepsilon_2^{'},\varepsilon_2^{"})$. (Σχήμα 13 α).

Άσκηση 10: Να κατασκευαστούν τα ίχνη επιπέδου του οποίου είναι γνωστή η παράσταση μιας ευθείας του $\varepsilon(\varepsilon',\varepsilon")$ καθώς και ενός σημείου του $M(M',M")$ το οποίο δεν ανήκει στην (ε). (Σχήμα 13 β).

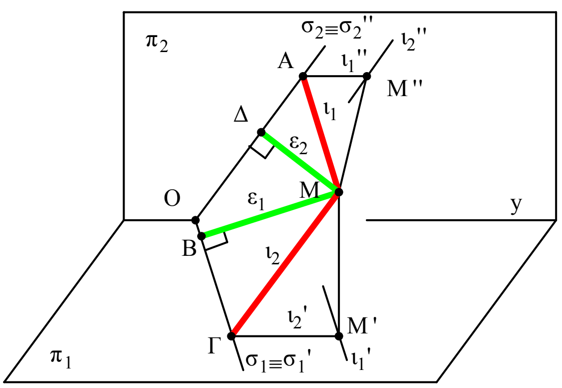


KM = τυχαία ευθεία από το M που τέμνει την ε1. Δηλαδή τυχαία ευθεία του ζητούμενου επιπέδου που διέρχεται από το M.

Σχήμα 13

α β

<u>Ιχνοπαράλληλοι και ιχνοκάθετοι επιπέδου.</u>



ι_1 = MA=1η ιχνοπαράλληλος // σ_1//π_1($\Rightarrow$i1=οριζόντια)

ε_1 = MB=1η ιχνοκάθετος $\perp\sigma_1$

ι_2 = MΓ=2η ιχνοπαράλληλος // σ_2//π_2($\Rightarrow$i1=μετωπική)

ε_2 = MΔ=2η ιχνοκάθετος $\perp\sigma_2$

M' = πρώτο ίχνος

M" = δεύτερο ίχνος

M'B $\perp\sigma_1$

M"Δ $\perp\sigma_2$

Σχήμα 14

Πρόταση 9: Έστω σημείο $M(M',M")$ ενός επιπέδου $\pi(\sigma_1^{'},\sigma_2^{"})$. Τότε:

Η πρώτη ιχνοπαράλληλος $\iota_1(\iota_1^{'},\iota_1^{"})$ του (π) από το M (Σχήμα 15α) έχει:

- Πρώτη προβολή $\iota_1^{'}$ την ευθεία που διέρχεται από το M' και είναι παράλληλη στην $\sigma_1^{'}$.
- Δεύτερη προβολή $\iota_1^{"}$ την ευθεία που διέρχεται από το $M"$ και είναι παράλληλη στον άξονα (y).

Η δεύτερη ιχνοπαράλληλος $\iota_2(\iota_2^{'},\iota_2^{"})$ του (π) από το M (Σχήμα 15α) έχει:

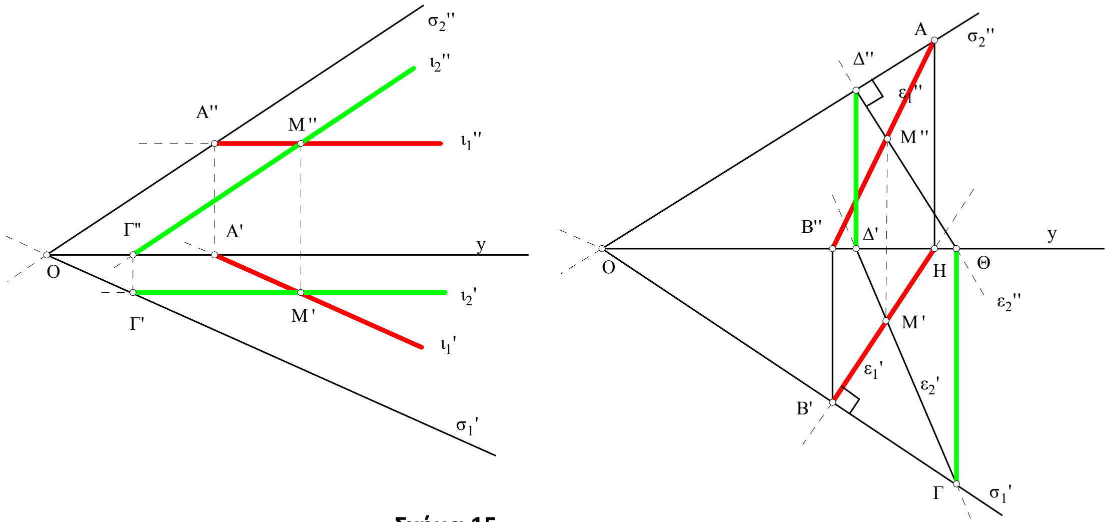
- Πρώτη προβολή $\iota_2^{'}$ την ευθεία που διέρχεται από το M' και είναι παράλληλη στον άξονα (y).
- Δεύτερη προβολή $\iota_2^{"}$ την ευθεία που διέρχεται από το $M"$ και είναι παράλληλη στην $\sigma_2^{"}$.

Η πρώτη ιχνοκάθετος $\varepsilon_1(\varepsilon_1^{'},\varepsilon_1^{"})$ του (π) από το M (Σχήμα 15β) έχει:

- πρώτη προβολή $\varepsilon_1^{'}$ την ευθεία που διέρχεται από το M' και είναι κάθετη στην $\sigma_1^{'}$ (λόγω Θεωρήματος τριών καθέτων).

Η δεύτερη ιχνοκάθετος $\varepsilon_2(\varepsilon_2^{'},\varepsilon_2^{"})$ του (π) από το M (Σχήμα 15β) έχει:

- δεύτερη προβολή $\varepsilon_2^{"}$ ευθεία που διέρχεται από το $M"$ και είναι κάθετη στην $\sigma_2^{"}$ (λόγω Θεωρήματος τριών καθέτων).



Σχήμα 15

α β

Άσκηση 11: Σχεδιάστε τις πρώτες και δεύτερες προβολές των δύο ιχνοκαθέτων επιπέδου $\pi(\sigma_1^{'},\sigma_2^{''})$ οι οποίες διέρχονται από δοθέν σημείο του $M(M',M'')$. (Σχήμα 15 β)

Άσκηση 12: Σχεδιάστε τα ίχνη της πρώτης και της δεύτερης ιχνοπαραλλήλου επιπέδου $\pi(\sigma_1^{'},\sigma_2^{''})$ οι οποίες διέρχονται από δοθέν σημείο του $M(M',M'')$. (Σχήμα 15 α)

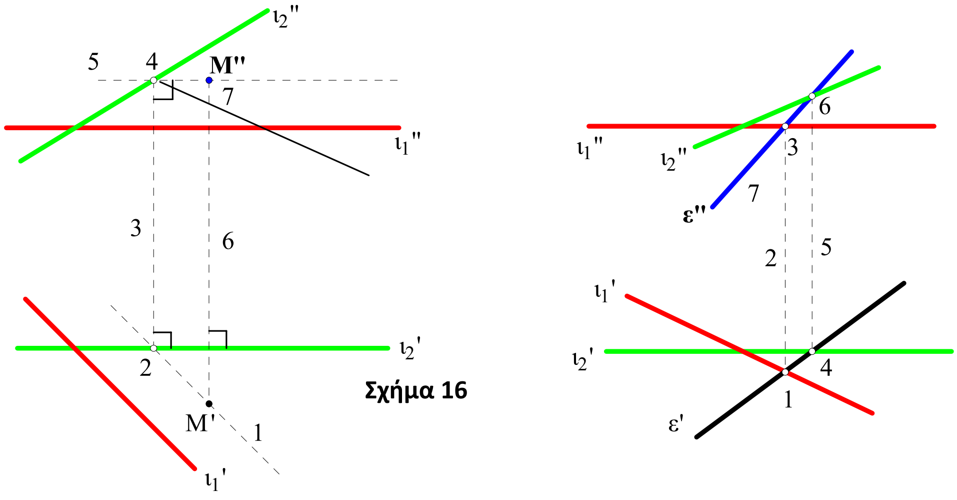
Άσκηση 13: Σχεδιάστε τα ίχνη επιπέδου (π) όταν δίνεται μια ιχνοκάθετός του $\varepsilon(\varepsilon',\varepsilon'')$ (είτε πρώτη είτε δεύτερη). (Σχήμα 15β)

Άσκηση 14: Εξηγήστε γιατί η γνώση μιας ιχνοπαραλλήλου (είτε πρώτης είτε δεύτερης) ενός επιπέδου, δεν καθορίζει τη θέση του επιπέδου στο χώρο. (Σχήμα15 α)

Άσκηση 15: Σχεδιάστε τα ίχνη επιπέδου (π) όταν δίνονται δύο ιχνοπαράλληλοί του $\iota_1(\iota_1^{'},\iota_1^{''})$ και $\iota_2(\iota_2^{'},\iota_2^{''})$. (Σχήμα 15α) (Υπόδειξη: Εξετάστε δύο περιπτώσεις: στην πρώτη περίπτωση δίνονται δύο πρώτες ή δύο δεύτερες ιχνοπαράλληλοι. Στη δεύτερη περίπτωση δίνονται μια πρώτη και μια δεύτερη ιχνοπαράλληλος).

Άσκηση 16: Δίνεται η πρώτη ιχνοπαράλληλος $\iota_1(\iota_1^{'},\iota_1^{''})$ και η δεύτερη ιχνοπαράλληλος $\iota_2(\iota_2^{'},\iota_2^{''})$ επιπέδου (π), καθώς και η πρώτη προβολή M' σημείου $M(M',M'')$ που ανήκει στο (π). Να βρεθεί η δεύτερη προβολή M'' του σημείου. (Δε χρειάζεται να δίνεται η θέση του άξονα y ούτε και το σημείο τομής των ιχνών του επιπέδου εντοπίζεται εντός του σχεδίου, δες Σχήμα 16α).

Άσκηση 17: Δίνεται η πρώτη ιχνοπαράλληλος $\iota_1(\iota_1^{'},\iota_1^{''})$ και η δεύτερη ιχνοπαράλληλος $\iota_2(\iota_2^{'},\iota_2^{''})$ επιπέδου (π), καθώς και η πρώτη προβολή ε' ευθείας $\varepsilon(\varepsilon',\varepsilon'')$ που ανήκει στο (π). Να βρεθεί η δεύτερη προβολή ε'' της ευθείας ε. (Σχήμα 16β). Γενικότερα οι ι_1,ι_2 μπορούν να είναι τυχαίες ευθείες του (π).



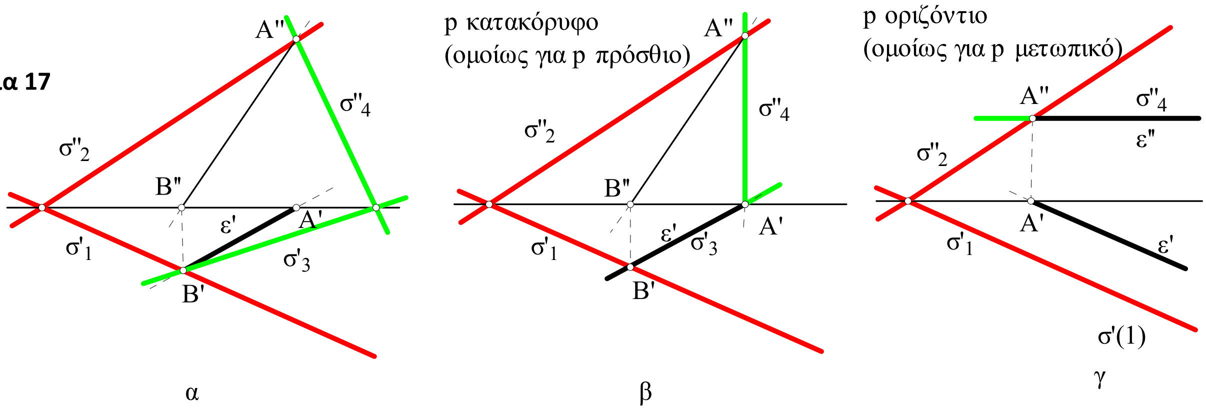
Σχήμα 16

α β

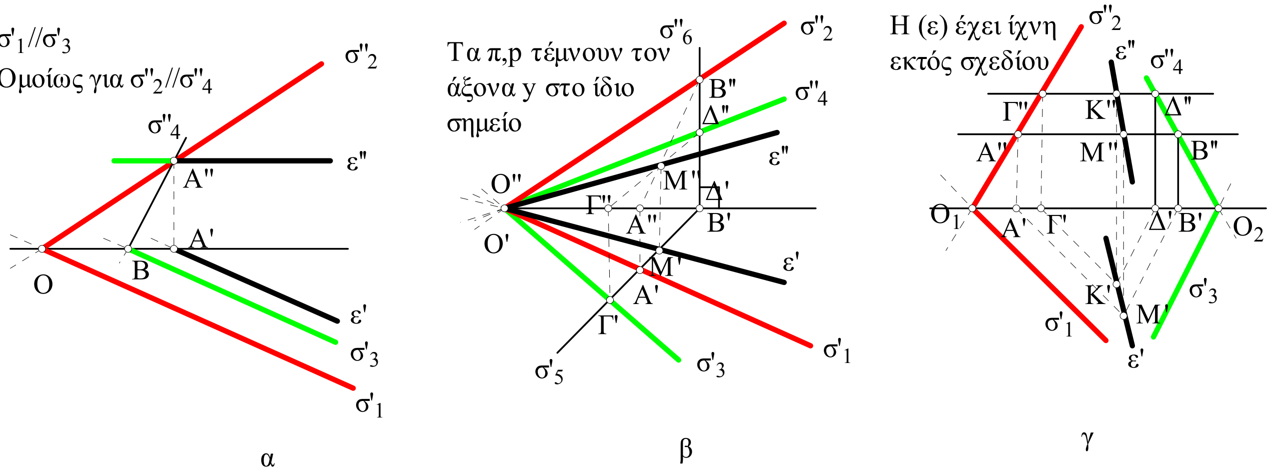
Τομή δύο επιπέδων (Σχήματα 17-19).

(1) Τα επίπεδα δίνονται με τα ίχνη τους: $\pi(\sigma_1^{'},\sigma_2^{''})$ και $p(\sigma_3^{'},\sigma_4^{''})$, όταν τα ίχνη υπάρχουν (Σχήματα 17-18).

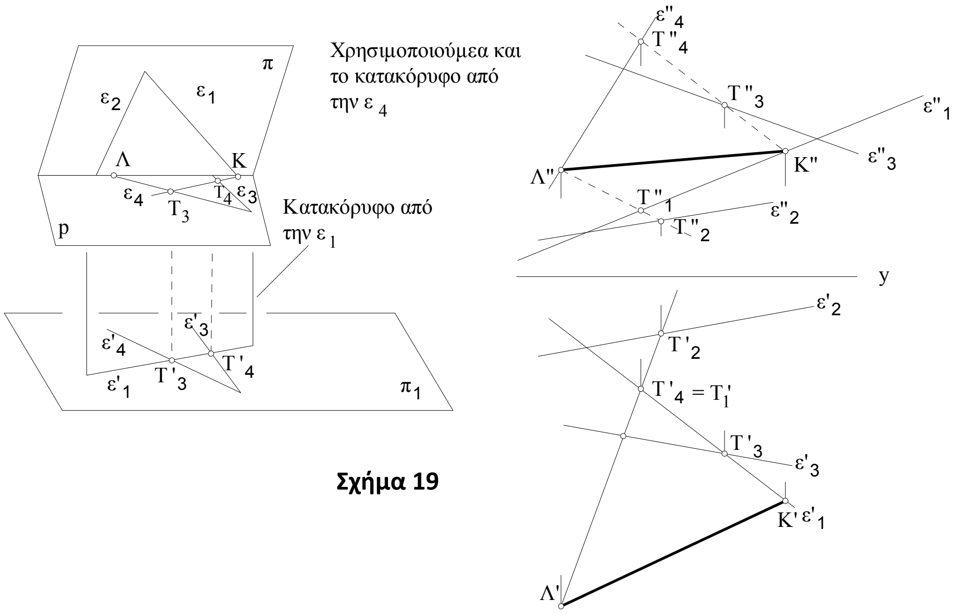
Σχήμα 17



Σχήμα 18



(2) Το (π) ορίζεται από τις ευθείες $\varepsilon_1(\varepsilon_1^{'},\varepsilon_1^{''})$, $\varepsilon_2(\varepsilon_2^{'},\varepsilon_2^{''})$ και το (p) από τις ευθείες $\varepsilon_3(\varepsilon_3^{'},\varepsilon_3^{''})$, $\varepsilon_4(\varepsilon_4^{'},\varepsilon_4^{''})$ (Σχήμα 19).



Σχήμα 19

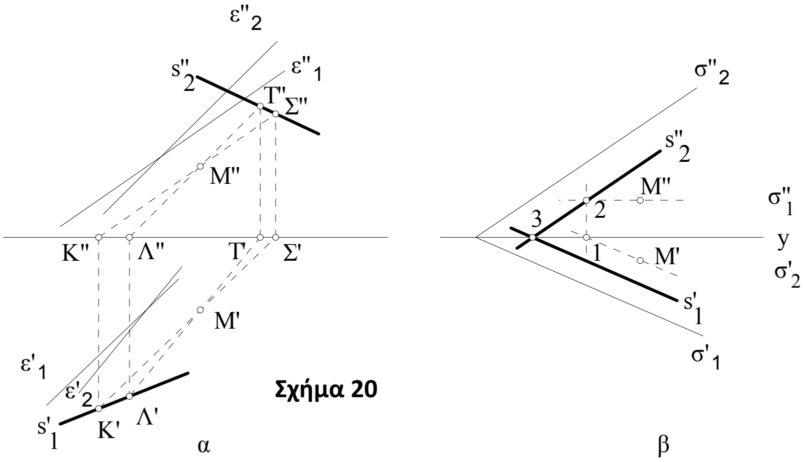
Πρόταση 10: Κάθε ευθεία $\varepsilon(\varepsilon',\varepsilon'')$ κατακόρυφου επιπέδου $\pi(\sigma_1^{'},\sigma_2^{''})$ έχει πρώτη προβολή ε' το πρώτο ίχνος σ_1 του π.

<u>Επίπεδο $p(s_1',s_2'')$ παράλληλο σε δοθέν επίπεδο $\pi(\sigma_1',\sigma_2'')$ από δοσμένο σημείο $M(M',M'')$.</u>

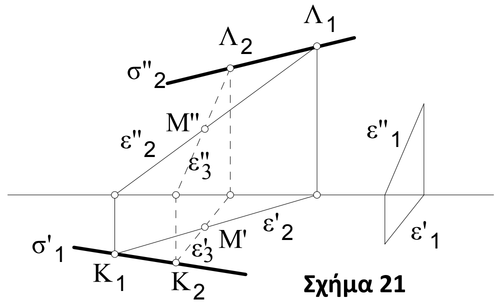
(1) Το επίπεδο π ορίζεται από δύο ευθείες του $\varepsilon_1(\varepsilon_1^{'},\varepsilon_1^{''})$ και $\varepsilon_2(\varepsilon_2^{'},\varepsilon_2^{''})$ (Σχήμα 20α).

(2) Το επίπεδο π ορίζεται από τα ίχνη του: $\pi(\sigma_1^{'},\sigma_2^{''})$ (Σχήμα 20β).

<u>Επίπεδο $\pi(\sigma_1^{'},\sigma_2^{''})$ παράλληλο σε δοσμένη ευθεία $\varepsilon_1(\varepsilon_1',\varepsilon_1'')$ και διερχόμενο από δοσμένη ευθεία $\varepsilon_2(\varepsilon_2',\varepsilon_2'')$.</u> (Σχήμα 21).



Σχήμα 20



Σχήμα 21

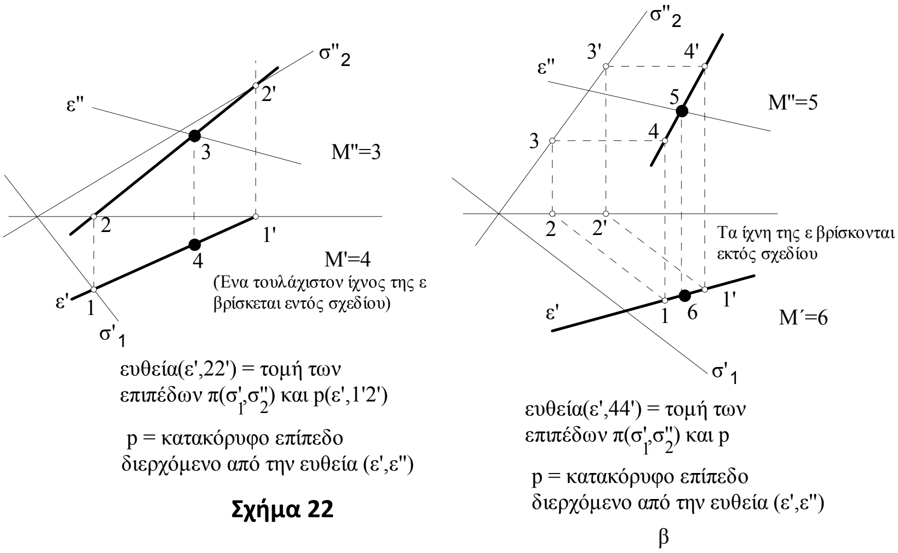
__Τομή ευθείας και επιπέδου.__

(1) Το επίπεδο π ορίζεται από τα ίχνη του: $\pi(\sigma_1^{'}, \sigma_2^{''})$ (Σχήμα 22).

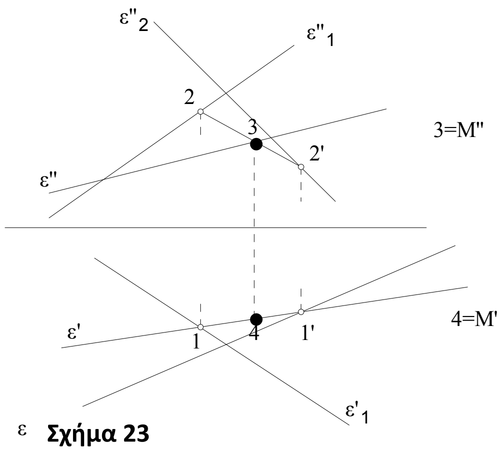
(2) Το επίπεδο π ορίζεται από δύο ευθείες του $\varepsilon_1(\varepsilon_1^{'}, \varepsilon_1^{''})$ και $\varepsilon_2(\varepsilon_2^{'}, \varepsilon_2^{''})$ (Σχήμα 23).

Άσκηση 18: Να κατασκευαστεί η τομή χρησιμοποιώντας πρόσθιο επίπεδο διερχόμενο από την ευθεία $\varepsilon(\varepsilon', \varepsilon'')$.

Άσκηση 19: Να κατασκευαστεί η τομή όταν οι ευθείες $\varepsilon_1(\varepsilon_1^{'}, \varepsilon_1^{''})$ και $\varepsilon_2(\varepsilon_2^{'}, \varepsilon_2^{''})$ του επιπέδου π είναι παράλληλες μεταξύ τους.



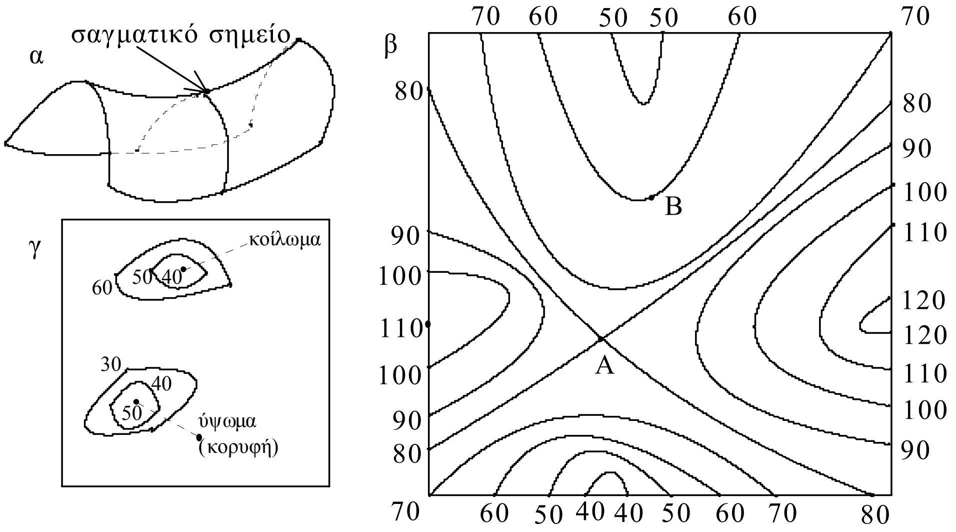
Σχήμα 22



Σχήμα 23

④ ΤΟΠΟΓΡΑΦΙΚΑ

Ισοκλινείς καμπύλες επιφανειών ως προς το οριζόντιο επίπεδο. Υψομετρικές καμπύλες επιφάνειας. Σαγματικά σημεία επιφάνειας (Σχήμα 1 α). Τοπογραφικό διάγραμμα περιοχής (Σχήμα 1β,γ).



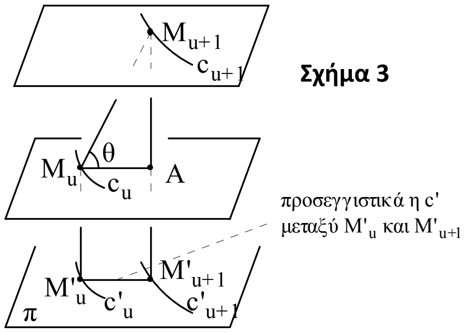
Σχήμα 1

Στο τοπογραφικό μια περιοχής (Σχήμα 2) ας είναι c_u, c_{u+1} δύο διαδοχικές υψομετρικές, c = μια ισοκλινής καμπύλη γωνίας θ ως προς το οριζόντιο επίπεδο, και M_u, M_{u+1} οι τομές της c με τις c_u, c_{u+1} αντιστοίχως. Αν η μονάδα μέτρησης πραγματικών μηκών είναι μικρή, τότε ο ευθύγραμμα τμήμα M_uM_{u+1} προσεγγίζει ικανοποιητικά το αληθινό κομμάτι $c_{u,u+1}$ της c μεταξύ των c_u, c_{u+1}, οπότε η γωνία του M_uM_{u+1} ως προς το οριζόντιο επίπεδο είναι προσεγγιστικά η θ. Τότε:

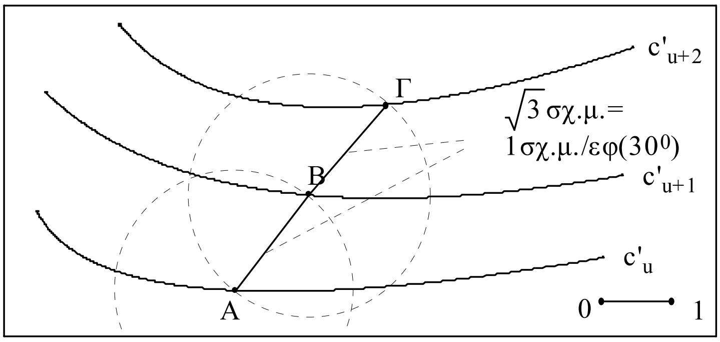
$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{AM_{u+1}}{AM_u} = \frac{1\mu}{AM_u} \Rightarrow AM_u = \frac{1\mu}{\varepsilon\varphi\theta} \Rightarrow M'_u\,M'_{u+1} = \frac{1\mu}{\varepsilon\varphi\theta}$$

Άσκηση 1: Στο τοπογραφικό του σχήματος 3 να χαραχθεί από το A η προβολή ισοκλινούς κλίσης 30^0 ως προς το οριζόντιο.

Σχήμα 2



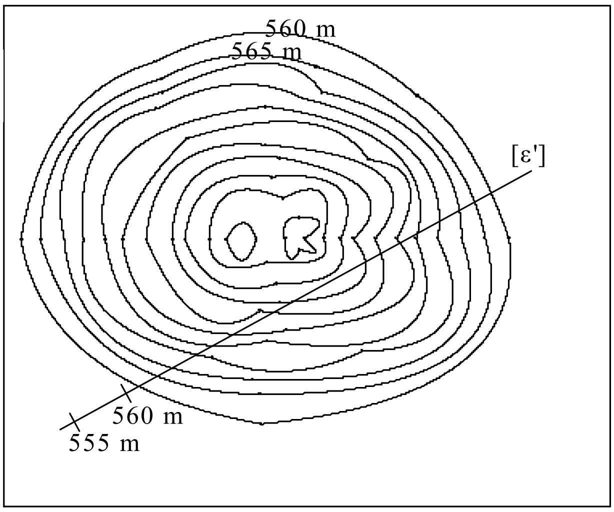
Σχήμα 3



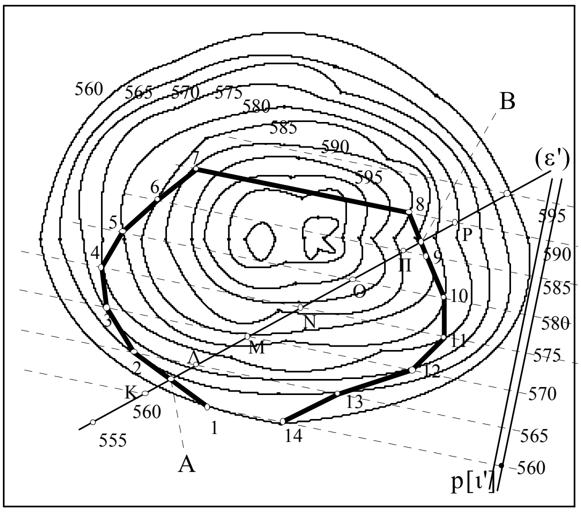
Άσκηση 2: Στο τοπογραφικό του σχήματος 4 να σημειώσετε με ικανοποιητική προσέγγιση την προβολή του κοινού μέρους του λόφου και του δρόμου (ευθεία (ε)).

Λύση: Δες Σχήμα 5.

Σχήμα 4



Σχήμα 5

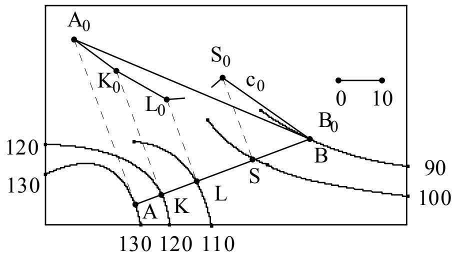


Η ζητούμενη προβολή είναι το τμήμα ΑΒ.

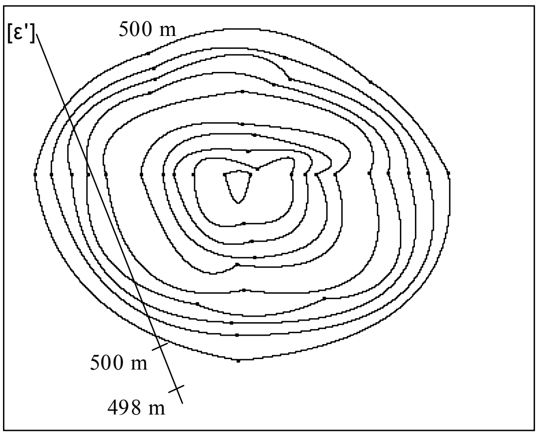
Άσκηση 3: Ορατότητα δύο σημείων. Στο τοπογραφικό του Σχήματος 6 παριστάνονται δύο σημεία A, B του χώρου υψομέτρου $130\mathrm{m}$ και $90\mathrm{m}$ αντιστοίχως. Ελέγξτε αν υπάρχει ορατότητα μεταξύ τους.

Λύση: Έστω c η καμπύλη της επιφάνειας του εδάφους μεταξύ των A, B και πάνω στο κατακόρυφο επίπεδο p το διερχόμενο από την ευθεία AB. Τα A, B έχουν ορατότητα μεταξύ τους αν και μόνο αν η ευθεία AB δεν έχει άλλα κοινά σημεία με την c παρά τα A, B. Για να ελέγξουμε αν αυτό συμβαίνει, κατακλίνουμε το p επί του επιπέδου προβολής γύρω από την κοινή τους ευθεία, και έστω c_0 η θέση της c. Για σχεδιαστική ευκολία, θεωρούμε ως επίπεδο προβολής το οριζόντιο σε υψόμετρο $90\mathrm{m}$. Αρχικά κατακλίνουμε τα A, B και όλα τα σημεία $\mathrm{K}, \mathrm{L}, \ldots$ της c επί των ισοϋψών, έστω στα $\mathrm{A}_0, \mathrm{B}_0 = \mathrm{B}, \mathrm{K}_0, \mathrm{L}_0, \ldots$. Κατόπιν προσεγγίζουμε την c_0 ως την πολυγωνική γραμμή $\mathrm{A}_0\mathrm{K}_0\mathrm{L}_0 \ldots \mathrm{B}_0$ που συνδέει διαδοχικά τα σημεία αυτά και ελέγχουμε αν η γραμμή αυτή τέμνει ή όχι το ευθύγραμμο τμήμα $\mathrm{A}_0\mathrm{B}_0$. Στο σχήμα μας το τέμνει, οπότε τα A, B δεν έχουν ορατότητα μεταξύ τους.

Σχήμα 6



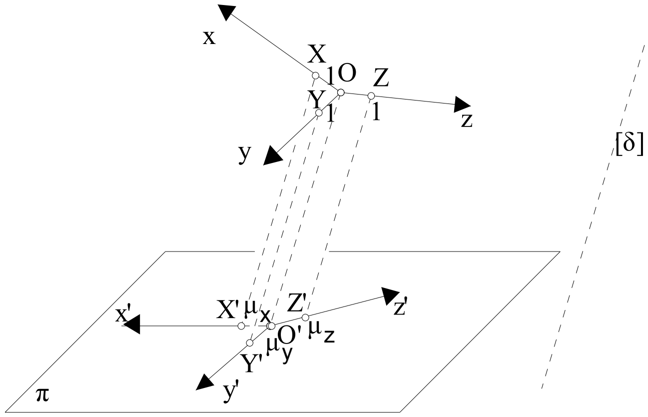
Σχήμα 7



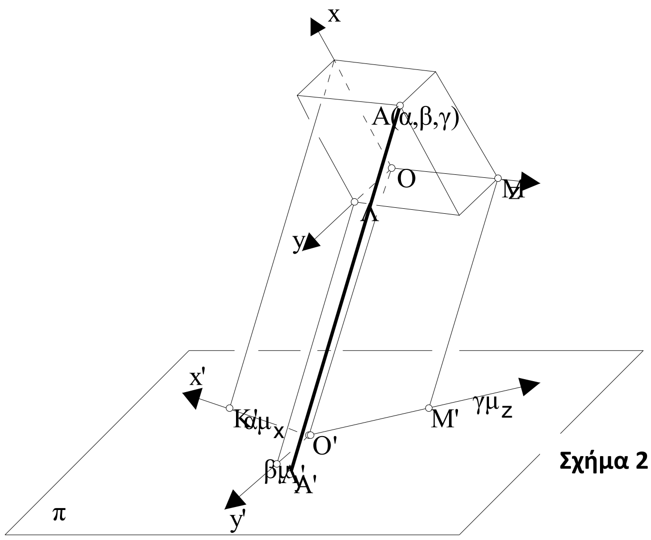
Άσκηση 4: Ίδια εκφώνηση με την Άσκηση 2, αλλά για το Σχήμα 7.

⑤ ΑΞΟΝΟΜΕΤΡΙΑ

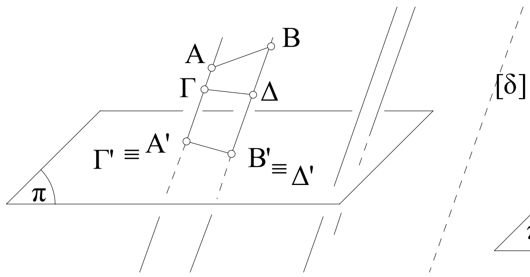
Θεώρημα 1 (Polhke - Schwarz): Για οποιαδήποτε τέσσερα διακεκριμένα σημεία του επιπέδου O', X', Y', Z' υπάρχουν πάντοτε τέσσερα σημεία O, X, Y, Z του χώρου ώστε τα OX, OY, OZ να είναι ίσα και κάθετα μεταξύ τους και οι προβολές τους σε κατάλληλη διεύθυνση $[\delta]$ να είναι τα $O'X', O'Y', O'Z'$ αντιστοίχως. Ανάλογα με τη σχετική θέση των O', X', Y', Z' υπάρχουν από μία έως τέσσερις τέτοιες τετράδες σημείων O, X, Y, Z και διεύθυνση $[\delta]$ (μη θεωρώντας διαφορετικές τις θέσεις μιας τέτοιας τετράδας καθώς αυτή μετακινείται στο χώρο παράλληλα στην $[\delta]$).



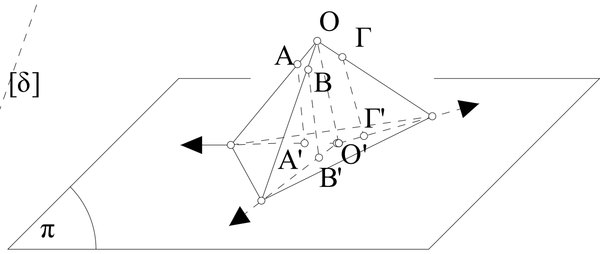
Σχήμα 1



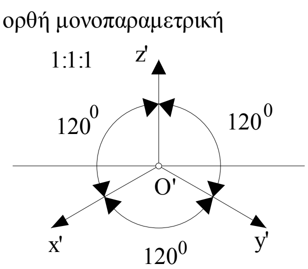
Σχήμα 2



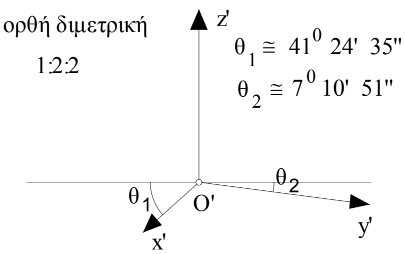
Σχήμα 3



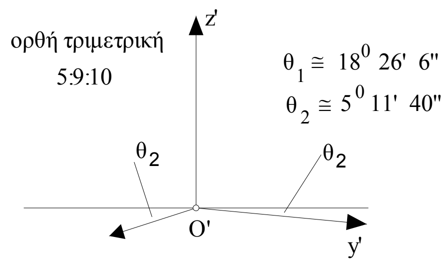
Σχήμα 4



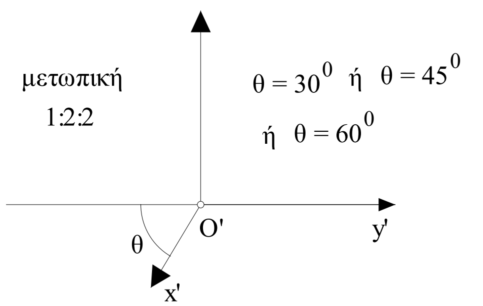
Σχήμα 5



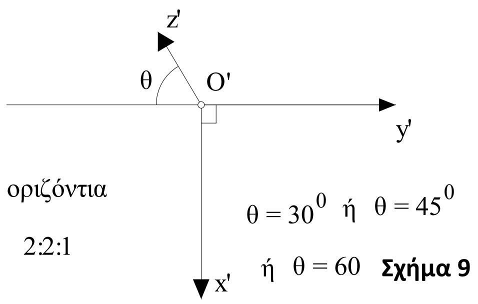
Σχήμα 6



Σχήμα 7

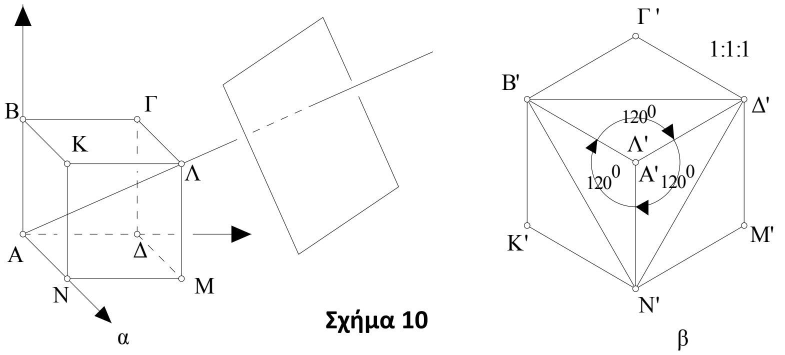


Σχήμα 8



Σχήμα 9

Άσκηση 1: Να βρεθεί η αξονομετρική προβολή κύβου $AB\Gamma\Delta K\Lambda MN$ (ΑΛ διαγώνιος) σε επίπεδο (π) κάθετο στην $A\Lambda$, διεύθυνση προβολής παράλληλη στην $A\Lambda$ και τρισορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων τοποθετημένο στη στερεά τρίεδρη γωνία Α του κύβου με άξονες να συμπίπτουν με τις ακμές του κύβου από το Α: (α) δουλέψτε σαν σε παράλληλη προβολή, (β) δουλέψτε αξονομετρικά λαμβάνοντας υπόψην τις συντεταγμένες του συστήματος. (Απάντηση στο Σχήμα 10).



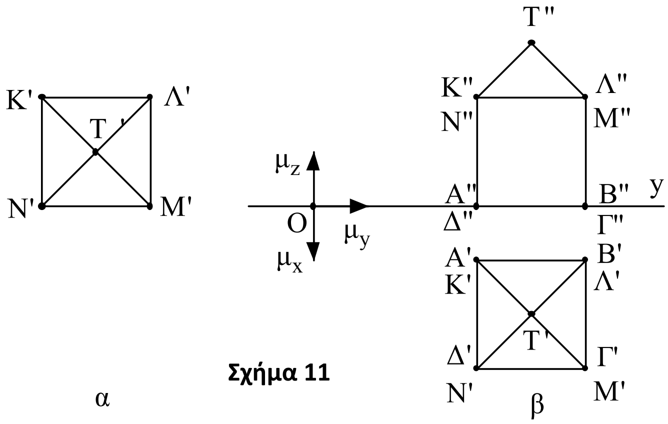
Σχήμα 10

Άσκηση 2: Θεωρούμε κυβικό δωμάτιο $\mathrm{AB\Gamma\Delta EZH\Theta}$ σκεπασμένο με στέγη ισοκλινών εδρών σε κάθε ακμή της οροφής του $\mathrm{K\Lambda MN}$.

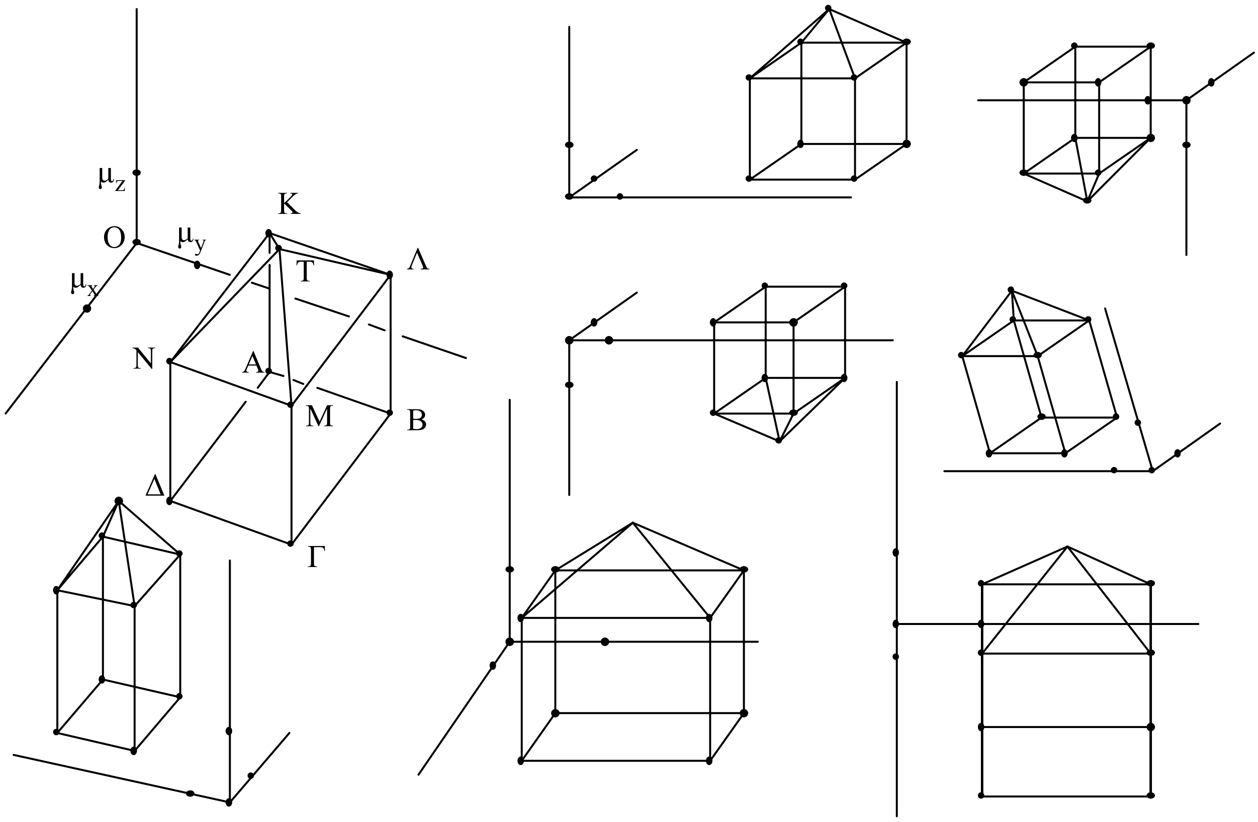
(α) Δεδομένου του περιγράμματος $\mathrm{K\Lambda MN}$ της στέγης, να χαραχθεί η κάτοψή της. (Σχήμα 11α)

(β) Το ερώτημα (α) φανερώνει πως η στέγη είναι απλώς μια πυραμίδα με κορυφή T τοποθετημένη στην οροφή του κύβου. Δεδομένου του ορθοκανονικού συστήματος συντεταγμένων Oxyz να παραστήσετε με προβολές σε δύο επίπεδα τις κορυφές και ακμές του πολυέδρου πυραμίδας-κύβου όταν οι πλευρά του κύβου είναι 2 με συντεταγμένες κορυφών $\mathrm{A}(1,3,0), \mathrm{B}(1,5,0), \Gamma(3,5,0), \Delta(3,3,0)$, $\mathrm{K}(1,3,2), \Lambda(1,5,2), \mathrm{M}(3,5,2), \mathrm{N}(3,3,2)$, και υποθέτοντας πως οι έδρες της στέγης έχουν κατάλληλη κλίση ώστε $\mathrm{T}(2,4,3)$. (Σχήμα 11β)

(γ) Να παρασταθεί αξονομετρικά το σύστημα πυραμίδας και κύβου του ερωτήματος (β), δεδομένων των αξονομετρικών συστημάτων $\langle \mathrm{O}', \mu_x, \mu_y, \mu_z \rangle$ στο Σχήμα 12. (Μιας και η λύση σας δίνεται, να τοποθετήσετε σε κάθε περίπτωση τις αξονομετρικές μονάδες μ_x, μ_y, μ_z στο σωστό άξονα, και να σημειώσετε με διακεκομμένες τις γραμμές που προσκόπτονται από την όρασή μας, δηλαδή όσες βρίσκονται πίσω από έδρες του δωματίου-οροφής ή των επιπέδων $\mathrm{Oxy}, \mathrm{Oyz}, \mathrm{Ozx}$).



Σχήμα 11



Σχήμα 12