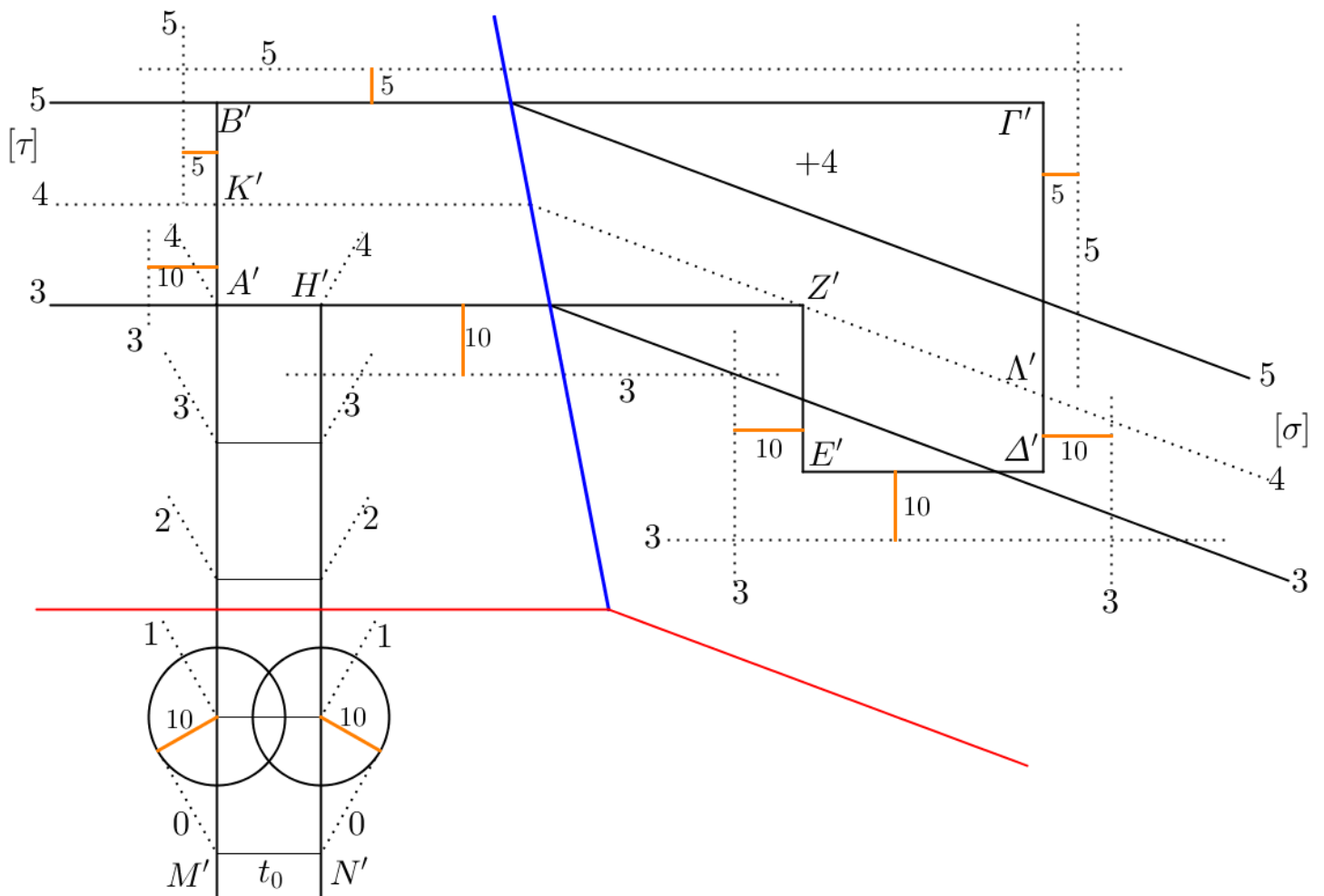


ΚΟΝΤΟΚΩΣΤΑΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ

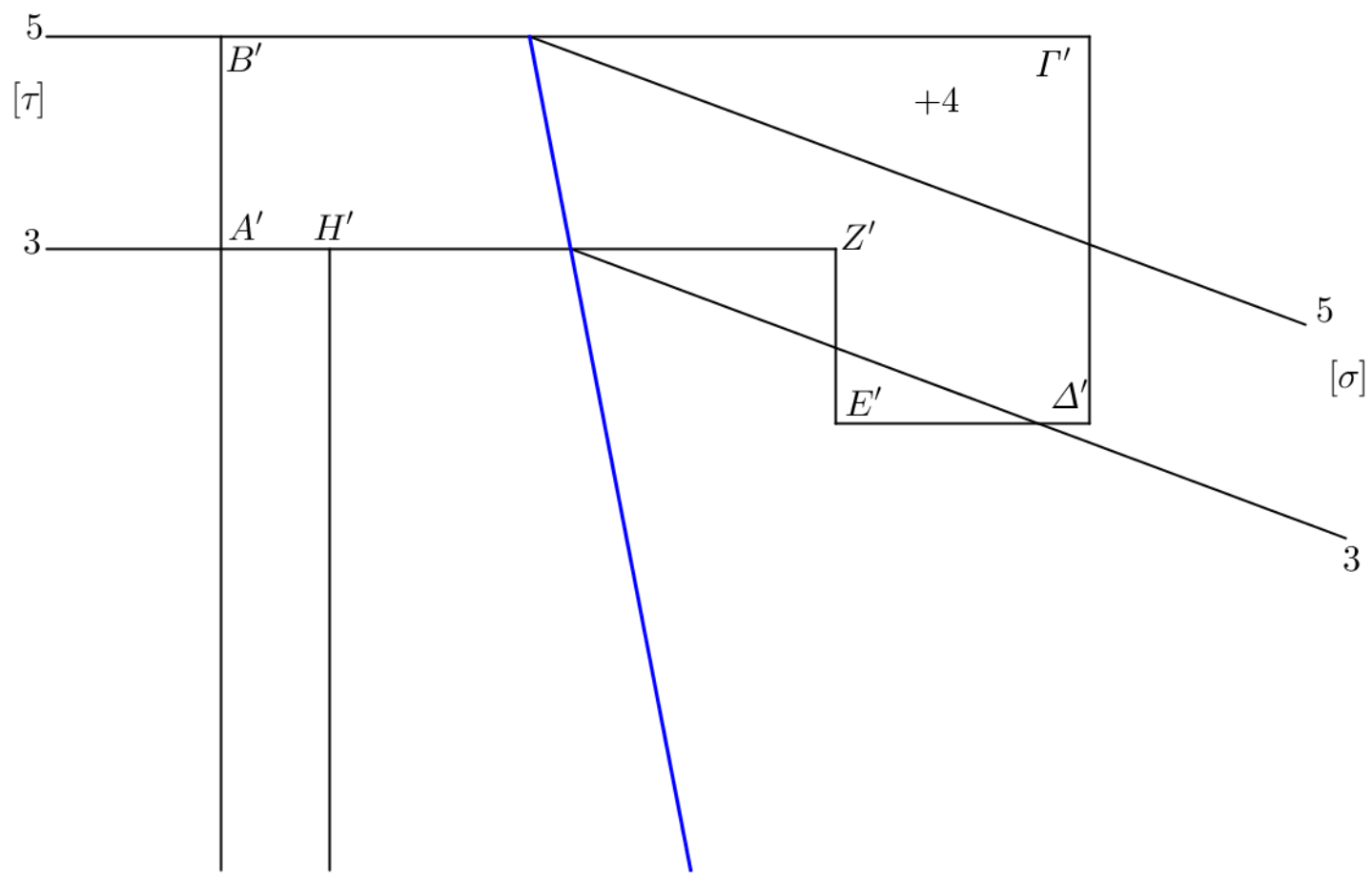
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ-ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑΡΑΣΤΑΤΙΚΗΣ ΜΕ ΠΡΟΒΟΛΕΣ ΣΕ 1 ΕΠΙΠΕΔΟ (1^η εκδοχή, Σεπτ. 2013)

Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
πολιτικών μηχανικών



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1. Το έδαφος μιας περιοχής προσομοιάζεται από τα επίπεδα σ, τ (των οποίων οι ιχνοπαράλληλες υψομέτρων 3 και 5 δίνονται στο Σχήμα 1) και από το οριζόντιο επίπεδο π υψομέτρου 0. Σε υψόμετρο 4 πρόκειται να κατασκευαστεί πολυγωνική πλατεία $ABΓΔΕΖ$ καθώς και κεκλιμένος δρόμος αρχίζοντας από το τμήμα AH της πλατείας και καταλήγοντας στο π με προβολές πλευρών τις δοσμένες στο σχήμα.

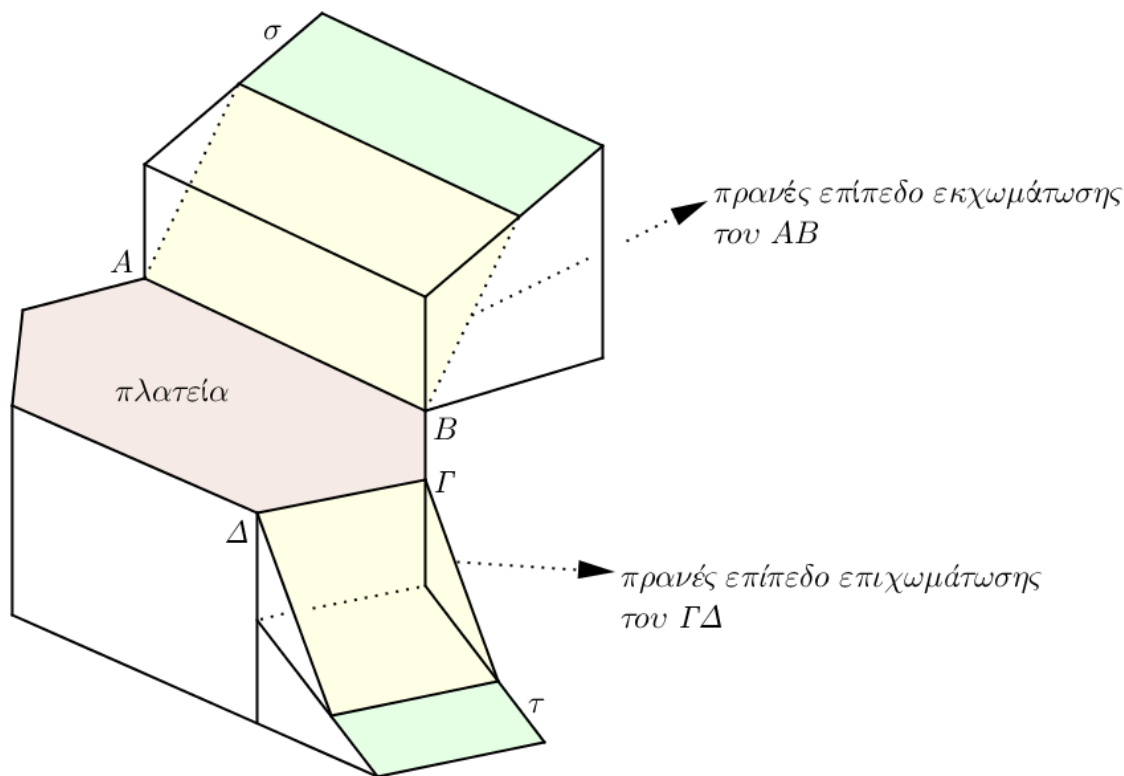
Να βρεθεί η κατάληξη του δρόμου και να κατασκευαστούν τα πρανή των επιχωματώσεων και εκχωματώσεων του δρόμου και της πλατείας όταν βήμα επιχωματώσεων = 10χστ, βήμα εκχωματώσεων = 5χστ, βήμα δρόμου = 20χστ.



Σχήμα 1

Λύση

Η έννοια του πρανούς επιπέδου και του πρανούς: Το επόμενο σχήμα φανερώνει έκδηλα την έννοια των πρανών επιπέδων. Τα πρανά αποτελούν τα μέρη επάνω στα πρανά επίπεδα που προκύπτουν από την τομή διπλανών (ορισμένες φορές και μακρινών) πρανών επιπέδων μεταξύ τους και με το έδαφος.



Σχήμα 2

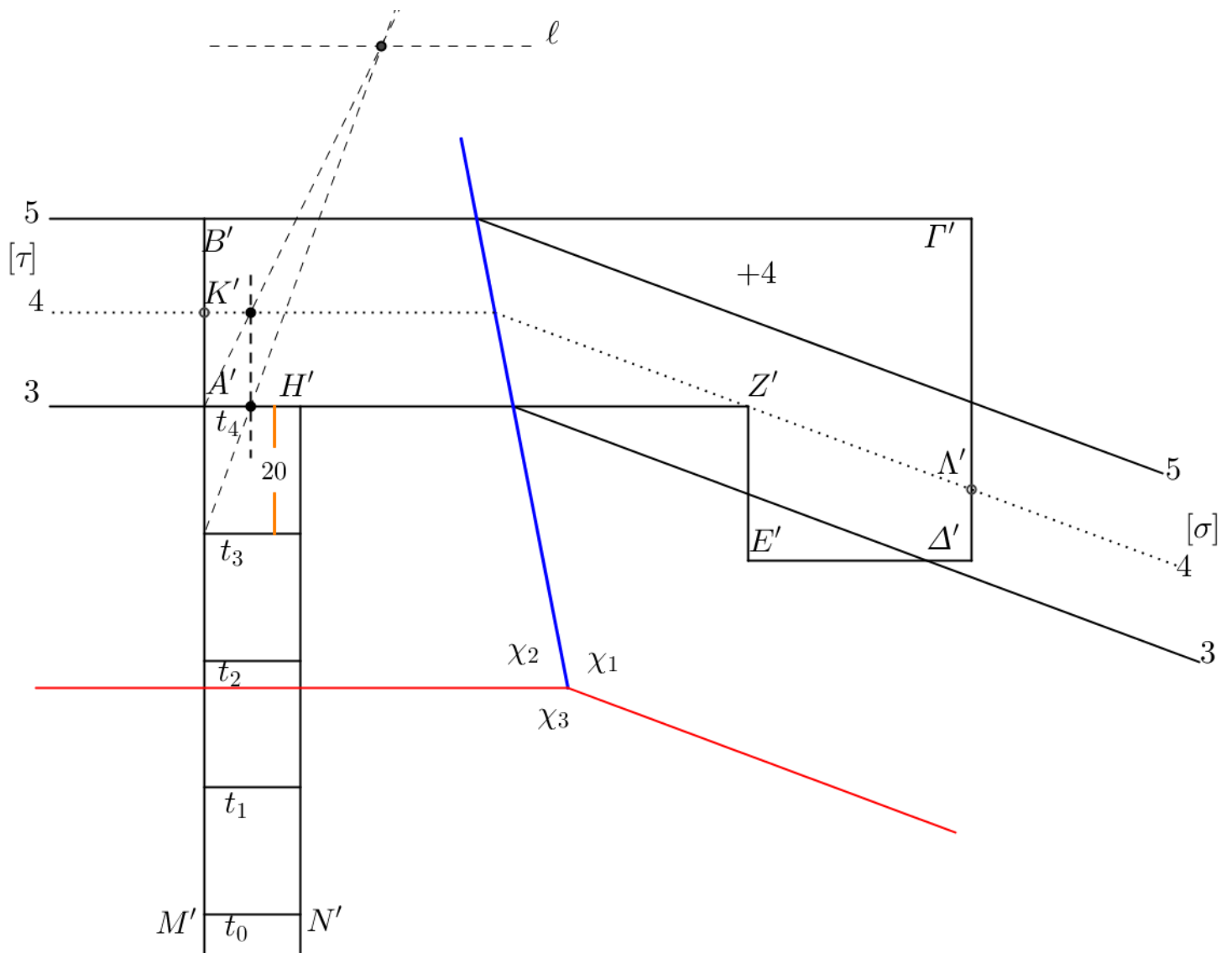
Το σχέδιο για την κατασκευή: Η διαδικασία που ακολουθούμε για την κατασκευή των πρανών είναι σε γενικές γραμμές η εξής:

- Κατασκευάζουμε το επίπεδο του δρόμου (κάποιες ιχνοπαράλληλές του) έως και το οριζόντιο έδαφος. Έτσι πλέον θεωρούμε το σύνολο πλατεία-δρόμος ως ένα ενιαίο κτίσμα, πλήρως τοποθετημένο στο παραστατικό σχέδιο. Αν τυχόν υπήρχε έδαφος κατακορύφως επάνω από μέρη του κτίσματος, θεωρούμε πως έχει αφαιρεθεί.
- Εντοπίζουμε ποια μέρη του συνόρου του ενιαίου κτίσματος πλατείας-δρόμου βρίσκονται εντός και ποια εκτός του φυσικού εδάφους. Δημιουργούνται έτσι τμήματα επάνω στα αρχικά σύνορα της πλατείας ή του δρόμου, από καθένα από τα οποία θα ξεκινήσει και ένα πρανές επιχωμάτωσης ή εκχωμάτωσης. Ορισμένα άλλα τμήματα (όπως π.χ. εδώ το AH) δεν θα φιλοξενήσουν κανένα πρανές.
- Για κάθε ένα από τα παραπάνω συνοριακά τμήματα της πλατείας-δρόμου κατασκευάζουμε το πρανές επίπεδό του (ιχνοπαράλληλες). Στην ορολογία διαφοροποιούμε το "πρανές επίπεδο" από το "πρανές".
- Τέμνουμε κάθε πρανές επίπεδο με όποιο διπλανό πρανές επίπεδο χρειάζεται, καθώς και με κάθε επίπεδο του φυσικού εδάφους πάνω από ή εντός του οποίου βρίσκεται το τμήμα από όπου ξεκινά το πρανές.
- Ελέγχουμε αν μακρινά (μη διπλανά) πρανά τέμνονται, και διορθώνουμε τα σύνορά τους.

Ακολουθούν οι λεπτομέρειες της κατασκευής για το παράδειγμα 1.

Τμήματα επιχωματώσεων και εκχωματώσεων στην πλατεία και το δρόμο. Τέλος του δρόμου.

- (1) Χαράσσουμε τις ιχνοπαράλληλες υψομέτρου 0 των σ, τ (εδώ οι κόκκινες ευθείες). Αυτές συντρέχουν με την κοινή ευθεία των σ, τ (εδώ η μπλε ευθεία) και χωρίζουν το σχέδιο σε τρία χωρία (εδώ χ_1, χ_2, χ_3). Πάνω από το κάθε μέρος υπάρχει ακριβώς ένα από τα τρία επίπεδα σ, τ, π του φυσικού εδάφους της περιοχής (εδώ πάνω από τα χ_1, χ_2, χ_3 βρίσκονται αντιστοίχως τα σ, τ, π).
- (2) Χαράσσουμε τις ιχνοπαράλληλες των σ, τ του υψομέτρου της πλατείας (εδώ 4).
- (3) Βρίσκουμε τις τομές των παραπάνω ιχνοπαράλληλων με το περίγραμμα της πλατείας (εδώ τα σημεία K', A') και αποφασίζουμε για τα τμήματα της πλατείας όπου θα έχουμε εκχωματώσεις (εδώ οι πλευρές της πολυγωνικής γραμμής $K'B'G'TA'$) ή επιχωματώσεις (εδώ οι πλευρές της πολυγωνικής γραμμής $A'D'E'Z'H'$ και το τμήμα $A'K'$).
- (4) Χαράσσουμε τις ιχνοπαράλληλες ακεραίων υψομέτρων του δρόμου (εδώ 4,3,2,1,0): ο δρόμος ανήκει σε ένα επίπεδο! Βρίσκουμε τα σημεία τομής των ιχνοπαράλληλων αυτών με τις ακμές του δρόμου και δημιουργούμε το τμήμα μεταξύ των σημείων για κάθε υψόμετρο (εδώ τα τμήματα t_4, t_3, t_2, t_1, t_0). Το τμήμα που ενώνει τα σημεία υψομέτρου 0 είναι το ζητούμενο τέλος του δρόμου (εδώ το $t_0 = M'N'$).
- (5) Αποφασίζουμε πάνω από ποια χωρία του σχεδίου έχει σημεία ο δρόμος (εδώ πάνω από τα χ_2, χ_3). Βρίσκουμε την τομή του επιπέδου του δρόμου με καθένα από τα επίπεδα του φυσικού εδάφους πάνω από τα χωρία αυτά (εδώ οι ευθείες ℓ, t_0) και αποφασίζουμε σε ποια τμήματα κάθε ακμής-πλευράς του δρόμου έχουμε επιχωματώσεις (εδώ παντού, δηλαδή στα τμήματα $A'M', H'N'$) ή εκχωματώσεις (εδώ πουθενά).



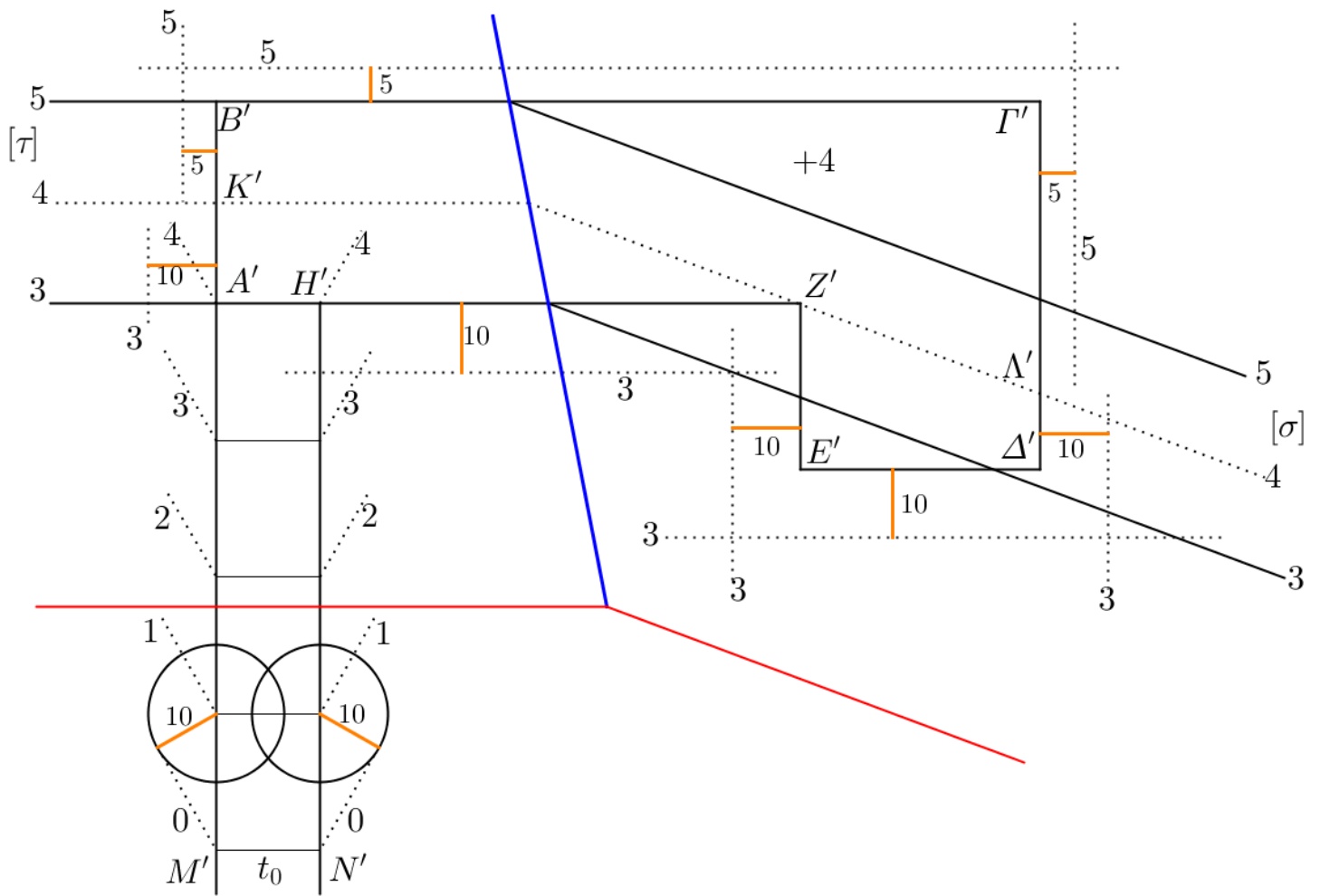
Σχήμα 3

Πρανή επίπεδα.

Από κάθε τμήμα της πλατείας ή του εδάφους διέρχεται ένα **πρανή επίπεδο** επιχωμάτωσης ή εκχωμάτωσης.

(6) Για κάθε επίπεδο επιχωμάτωση ή εκχωμάτωση της πλατείας ή του δρόμου χαράσσουμε μερικές ιχνοπαράλληλους (εδώ οι διάστικτες ευθείες) με ακέραια υψόμετρα.

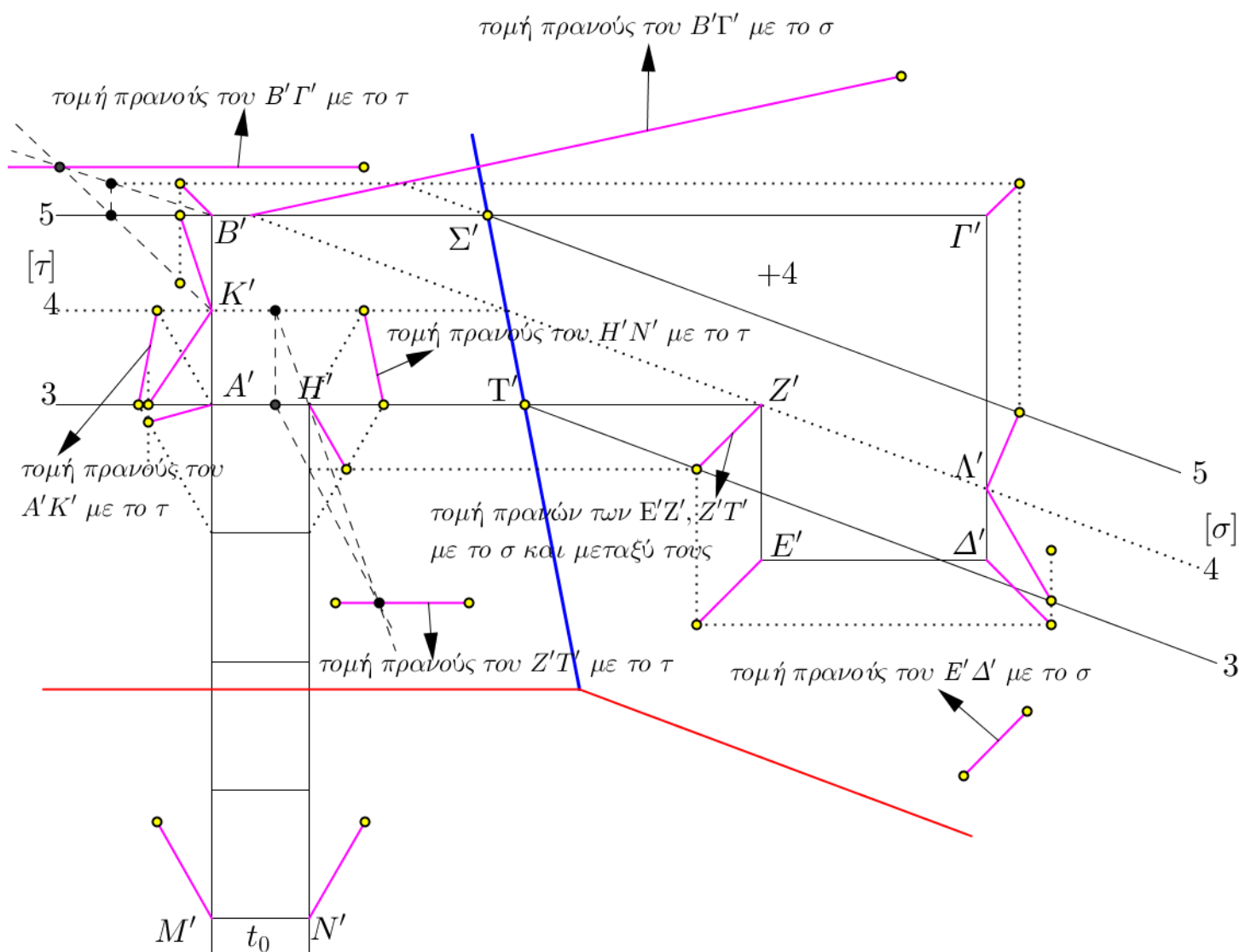
Προσοχή: τα τμήματα της πλατείας είναι οριζόντια, οπότε οι ζητούμενες ιχνοπαράλληλες για τις επιχωματώσεις ή εκχωματώσεις που ξεκινούν από αυτά είναι παράλληλές τους ευθείες. Όμως οι ακμές του δρόμου δεν είναι οριζόντιες, και για τη χάραξη των ιχνοπαράλληλων του πρανού που τους αντιστοιχεί απαιτείται η γνωστή μέθοδος (εδώ χρήση των σημειωμένων κύκλων). Στο σχήμα τα πορτοκαλί τμήματα δείχνουν την απόσταση μεταξύ των διαδοχικών ιχνοπαράλληλων (εδώ 5χστ ή 10χστ αναλόγως), και κάθε ιχνοπαράλληλος συνοδεύεται από το υψόμετρό της (εδώ 0,1,2,3,4 ή 5 αναλόγως).



Σχήμα 4

Τομές πρανών επιπέδων μεταξύ τους και με το έδαφος.

- (7) Για κάθε τμήμα της πλατείας ή του δρόμου χαράσσουμε την κοινή ευθεία του πρανού επιπέδου του με το επίπεδο του εδάφους πάνω από το οποίο βρίσκεται το τμήμα. Επίσης, για κάθε δύο διπλανά τμήμα της πλατείας ή του επιπέδου για τα οποία τα πρανή επίπεδά τους είναι αμφοτέρωτα επιχωματώσεις ή εκχωματώσεις χαράσσουμε την κοινή ευθεία των πρανών επιπέδων τους. (Εδώ οι παραπάνω τομές είναι οι μωβ ευθείες και για ορισμένες σημειώνονται τα επίπεδα που τις έχουν ως τομές.)
- Με τον παραπάνω τρόπο, για κάθε άκρο οποιουδήποτε τμήματος της πλατείας ή του δρόμου κατασκευάζεται ακριβώς μία ευθεία που διέρχεται από το άκρο αυτό. Ορισμένες από τις ευθείες που κατασκευάζονται δε διέρχονται από άκρα τμημάτων της πλατείας ή του δρόμου. Και ορισμένες ακόμη ευθείες που θα χρειαστούν στη συνέχεια, δεν έχουν ακόμη κατασκευαστεί.
 - Για επίπεδα με μη παράλληλες ιχνοπαράλληλες, η κοινή τους ευθεία είναι αυτή που διέρχεται από τα σημεία τομής δύο ζευγών ιχνοπαράλληλων τους κοινού υψομέτρου, π.χ. του υψομέτρου της πλατείας και του υψομέτρου της πλατείας +1 ή -1.
 - Για επίπεδα με παράλληλες ιχνοπαράλληλες, η κοινή τους ευθεία είναι παράλληλη στην κοινή διεύθυνση των ιχνοπαράλληλων τους, και διέρχεται από το σημείο τομής δύο ζευγών ιχνοπαράλληλων τους κοινού υψομέτρου, π.χ. του υψομέτρου της πλατείας και του υψομέτρου της πλατείας +1 ή -1.



Σχήμα 5

Πρανή (ή πρανή πολύγωνα) και κατασκευή τους.

Το **πρανές** ή **πρανές πολύγωνο** του κάθε τμήματος της πλατείας ή του δρόμου είναι ένα πολύγωνο μια πλευρά του οποίου είναι το ίδιο το τμήμα και οι υπόλοιπες πλευρές είναι τμήματα των τομών του πρανού επιπέδου που περιέχει το τμήμα με ένα από τα διπλανά πρανή επίπεδα ή με το έδαφος.

Για την κατασκευή του πρανού ενός τμήματος της πλατείας ή του δρόμου, θεωρούμε πως το τμήμα έχει σημεία εξολοκλήρου πάνω από ένα μόνο χωρίο από τα χ_1, χ_2, χ_3 , ειδάλως το διαμερίζουμε σε μικρότερα τμήματα ώστε αυτό να συμβαίνει (εδώ π.χ. το τμήμα $B'G'$ διαμερίζεται στα $B'S', S'G'$) και ενεργούμε ως εξής:

(8) Έστω $\delta = X'Y'$ ένα τμήμα της πλατείας ή του δρόμου. Ας συμβολίσουμε (i) $\pi\rho_\delta$ το πρανές επίπεδο του δ , (ii) $\varepsilon_X, \varepsilon_Y$ τις ευθείες του $\pi\rho_\delta$ που κατασκευάζονται στο βήμα (7) και διέρχονται από τα άκρα X, Y αντιστοίχως, (iii) ε_δ την τομή του $\pi\rho_\delta$ με το έδαφος πάνω από το τμήμα δ που κατασκευάζεται στο βήμα (7) (η ε_δ μπορεί να ταυτίζεται με κάποια από τις $\varepsilon_X, \varepsilon_Y$), (iv) χ_δ το χωρίο του εδάφους που βρίσκεται επάνω από το δ .

Αν το πολύγωνο $\rho\lambda'_\delta$ που ορίζουν τα X, Y και τα σημεία τομής των $\varepsilon_X, \varepsilon_Y, \varepsilon_\delta$ βρίσκεται εντός του χωρίου χ_δ τότε το $\rho\lambda'_\delta$ είναι το ζητούμενο πρανές του δ . (Εδώ, αυτό συμβαίνει π.χ. για το πρανές του $G'A'$.)

Αν όμως το $\rho\lambda'_\delta$ εισέρχεται σε χωρίο χ_i διαφορετικό χ_δ , τότε χαράσσουμε την ευθεία τομής ε_1 του $\pi\rho_\delta$ με το επίπεδο του εδάφους που αντιστοιχεί στο χ_i . Στη θέση του $\rho\lambda'_\delta$, θεωρούμε πλέον το $\rho\lambda'_{\delta 1}$ που ορίζουν τα X, Y και τα σημεία τομής των $\varepsilon_X, \varepsilon_Y, \varepsilon_\delta, \varepsilon_1$ και ελέγχουμε αν αυτό ανήκει στην ένωση των χωρίων χ_δ, χ_i . Αν όντως ανήκει, τότε αυτό το πολύγωνο $\rho\lambda'_{\delta 1}$ είναι το ζητούμενο πρανές του δ . (Εδώ, αυτό συμβαίνει π.χ. για το πρανές του $B'G'$.)

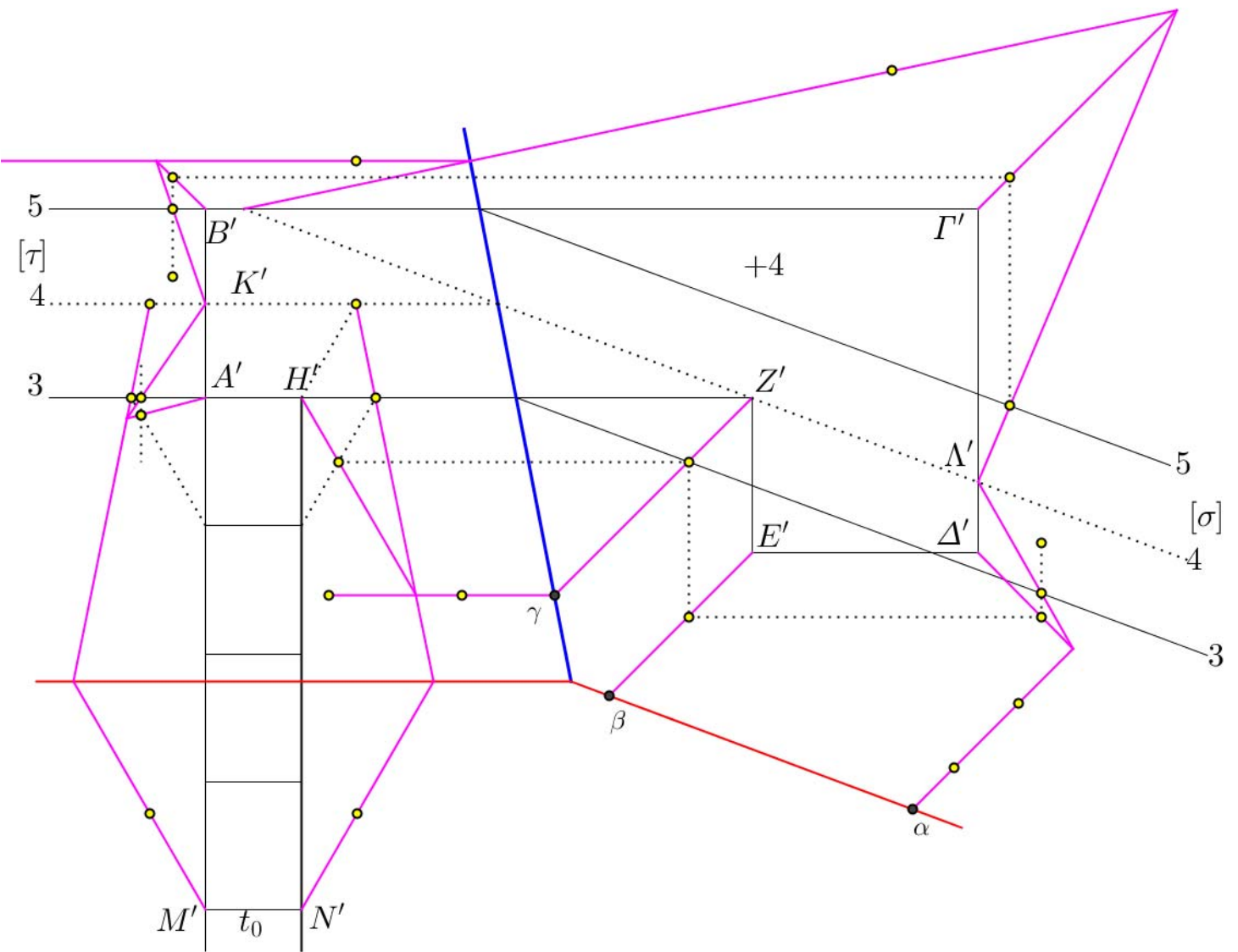
Αν το $\rho\lambda'_{\delta 1}$ εισέρχεται σε χωρίο χ_j διαφορετικό των χ_δ, χ_i , δηλαδή στο τελευταίο από τα τρία αρχικά χωρία χ_1, χ_2, χ_3 , τότε χαράσσουμε και την ευθεία τομής ε_2 του $\pi\rho_\delta$ με το επίπεδο του εδάφους που αντιστοιχεί στο χ_j και το ζητούμενο πρανές του δ είναι το πολύγωνο $\rho\lambda'_{\delta 2}$ που ορίζουν τα X, Y και τα σημεία τομής των $\varepsilon_X, \varepsilon_Y, \varepsilon_\delta, \varepsilon_1, \varepsilon_2$. (Εδώ, αυτό συμβαίνει π.χ. για το πρανές του $E'Z'$.)

- Παραμένει μια μικρή περιπλοκή στην περίπτωση που «μακρινά» πρανή τέμνονται μετά την κατασκευή τους (Θα μπορούσε π.χ. τα σχεδιασμένα πρανή των $H'N', E'Z'$ να τέμνονται!) Στην περίπτωση αυτή πρέπει να λάβουμε υπόψη την τομή τους για την αναμόρφωση του συνόρου τους με τον προφανή τρόπο.

Είναι χρήσιμο να παρατηρήσουμε πως:

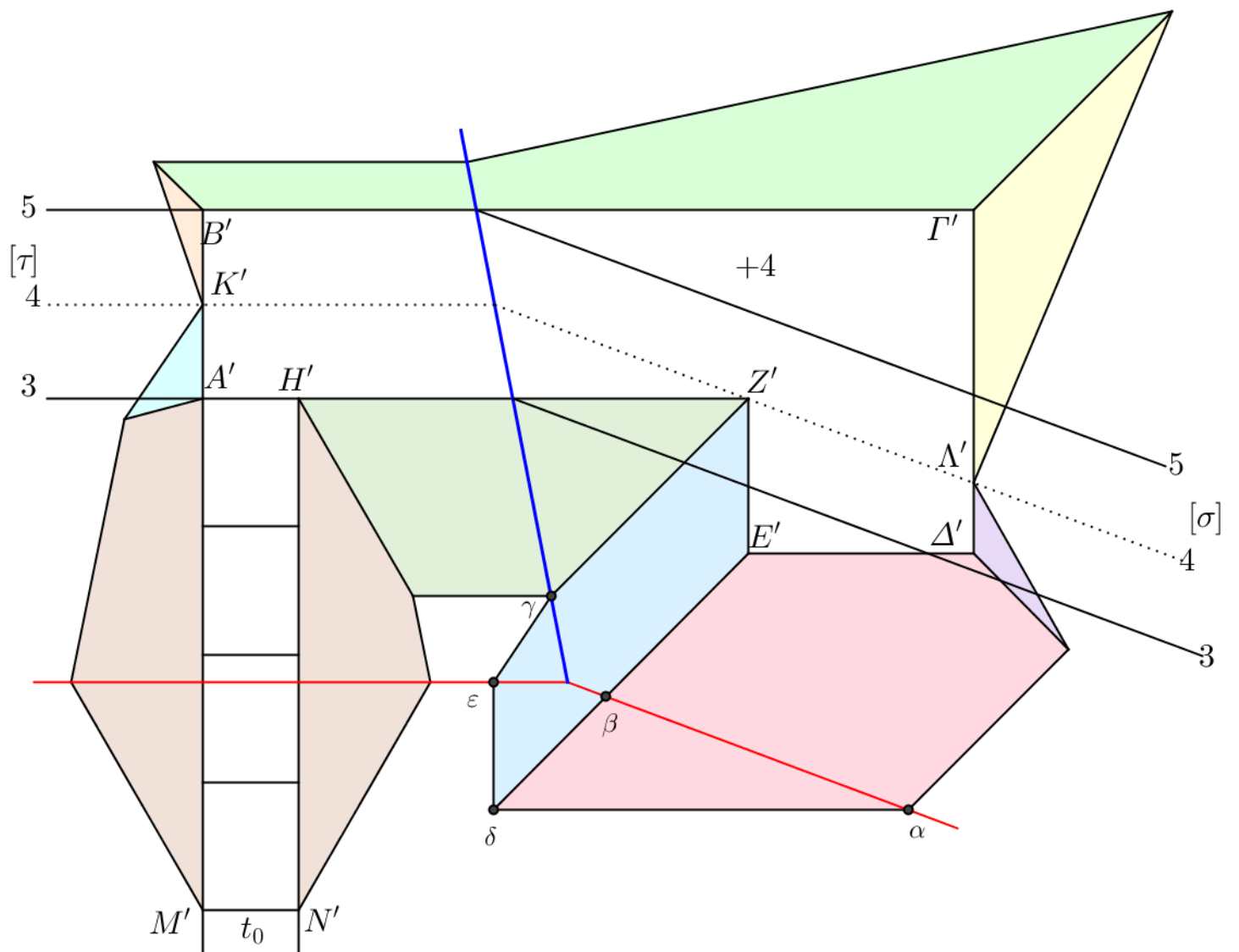
- Όταν δύο διπλανή πρανή τέμνονται, τα αντίστοιχα πρανή πολύγωνα μοιράζονται ολόκληρη κοινή πλευρά.
- Τρία επίπεδα σε γενική θέση τέμνονται σε ένα σημείο. Έτσι π.χ. αν ένα επίπεδο του φυσικού εδάφους τέμνει αμφότερα δύο τεμνόμενα διπλανά πρανή, τότε τα τέμνει και σε μια κοινή κορυφή των πολυγώνων τους. Επίσης, αν ένα πρανές τέμνει αμφότερα το οριζόντιο επίπεδο και ένα από τα πλάγια επίπεδα του φυσικού εδάφους, τότε τα τέμνει και σε μια κορυφή του πολυγώνου του.

Συχνά στην πράξη συντομεύουμε ή παραλλάσσουμε τα βήματα (1)-(8).



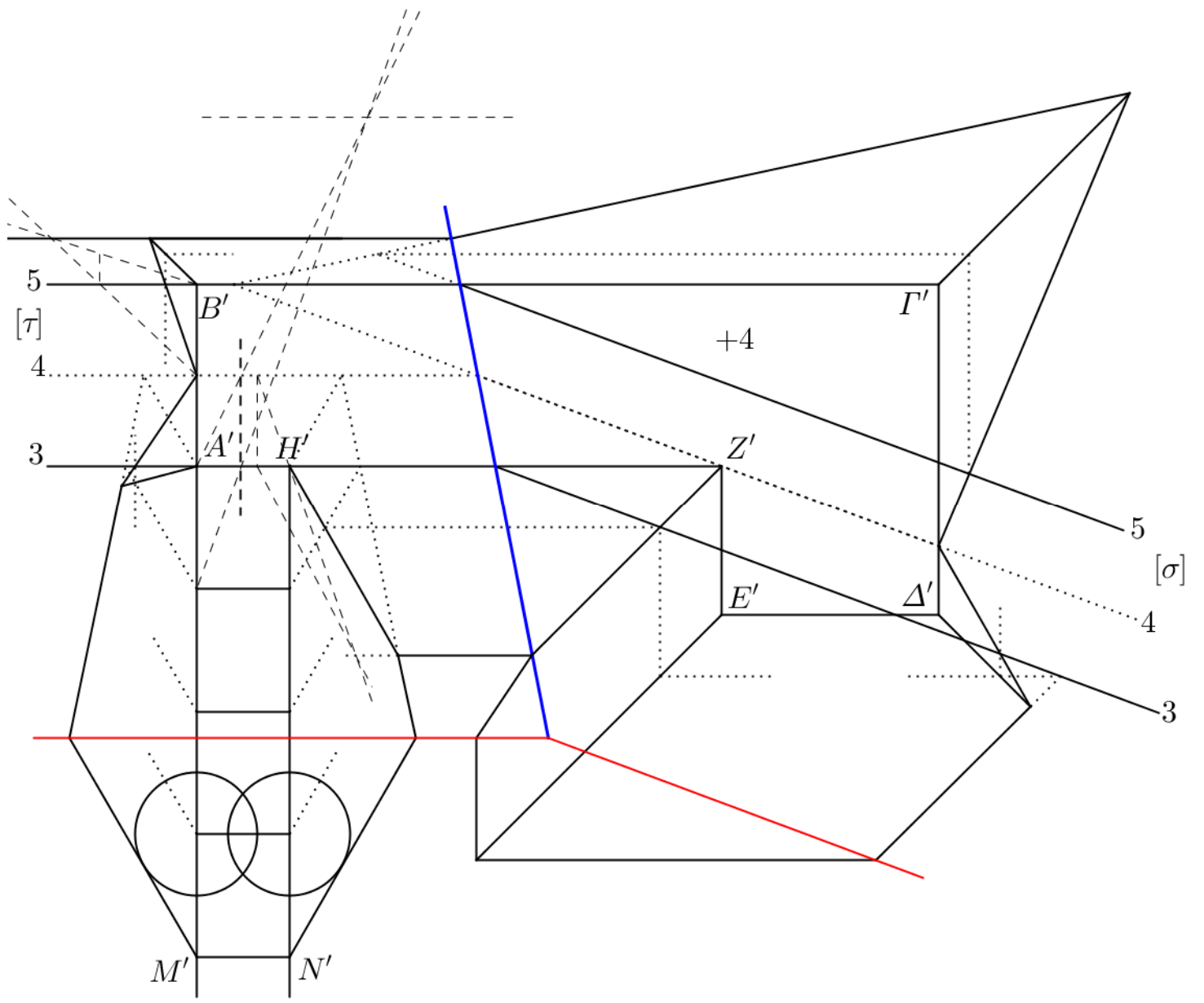
Σχήμα 6

Το πρηνές του $E'\Delta'$ δεν έχει ολοκληρωθεί διότι έχει σημεία και πάνω από το π , ενώ το πρηνές του $E'Z'$ έχει επίσης σημεία τόσο απάνω από το π , όσο και από το τ . Οι τομές των πρηνών των $\Delta'E', E'Z'$ με το π είναι ευθείες παράλληλες στα $\Delta'E', E'Z'$ από τα σημεία α, δ , αντιστοίχως (όπου δ η τομή της $E'\beta$ με την παράλληλη προς το $\Delta'E'$ από το α . Δικαιολογήστε). Έτσι, τελικά τα ζητούμενα πρηνή δίνονται στο επόμενο Σχήμα:



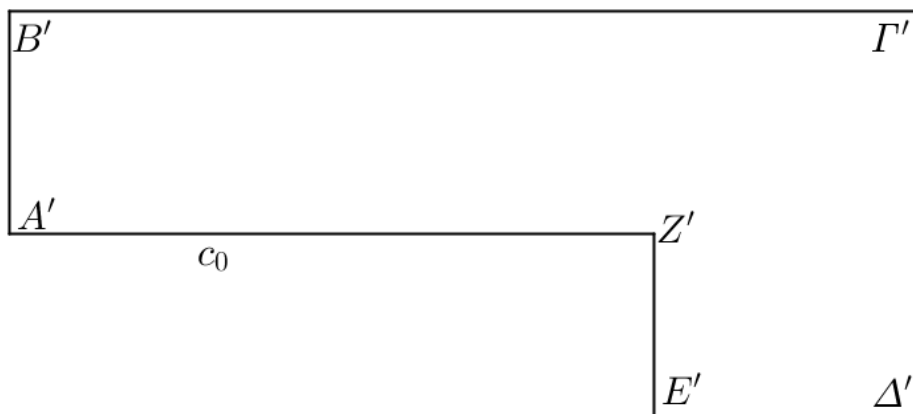
Σχήμα 7

Συνοπτικά (χωρίς τους συμβολισμούς που εισαγάγαμε καθοδόν):



Σχήμα 8

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2. Στην πλατεία του Παραδείγματος 1 (Σχήμα 8) πρόκειται να κατασκευάσουμε στέγη οριζόντιου περιγράμματος με προβολή το $c_0 = A'B'Γ'Δ'E'Z'$, και ισοκλινείς έδρες ως προς το έδαφος. Να παραστήσετε τη στέγη.



Σχήμα 9

Η έννοια της παράστασης και παρατηρήσεις: Από κάθε πλευρά του περιγράμματος διέρχεται ένα επίπεδο της στέγης και ορισμένα από αυτά τα επίπεδα τέμνονται μεταξύ τους δημιουργώντας μια πολυεδρική επιφάνεια με μοναδικό σύνορο το δοσμένο περίγραμμα. Η επιφάνεια αυτή είναι η **στέγη**, και η ζητούμενη **παράσταση** της είναι η προβολή στο δοσμένο επίπεδο-χαρτί των ακμών της ως πολυεδρικής επιφάνειας. Δηλαδή παράσταση της στέγης είναι η προβολή των πλευρών των διαφόρων επιπέδων πολυγώνων που την αποτελούν. Πρόκειται δηλαδή για τα ευθύγραμμα τμήματα του αρχικού περιγράμματος, καθώς και για ορισμένα τμήματα επάνω σε κάποιες τομές των διαφόρων επιπέδων της στέγης που είναι επίπεδα που διέρχονται από τις πλευρές του περιγράμματος. Οποσδήποτε θα υπάρχουν τμήματα που ανήκουν στην τομή των επιπέδων που διέρχονται από τα επίπεδα δύο διπλανών πλευρών του αρχικού περιγράμματος. Αυτά έχουν το ένα τους άκρο στην κοινή κορυφή των δύο πλευρών του περιγράμματος και η προβολή τους ανήκει στη διχοτόμο της εσωτερικής γωνίας του περιγράμματος που δημιουργείται από τις δύο πλευρές. Ο λόγος είναι πως τα αντίστοιχα επίπεδα των δύο πλευρών δίνεται πως είναι ισοκλινή ως προς το οριζόντιο επίπεδο (δηλαδή το επίπεδο των προβολών ή με άλλα λόγια το επίπεδο της παράστασης). Ξεκινώντας από αυτή την παρατήρηση, θα κατασκευάσουμε την παράσταση της στέγης σα να «χτίζουμε» λίγο-λίγο σε ζώνες γύρω από το αρχικό περίγραμμα όπως όταν π.χ. σε μια πραγματική στέγη τοποθετούμε σειρές από κεραμίδια τη μία πάνω από την άλλη ολόγυρα. Οι ζώνες αυτές θα αρχίζουν από το παλιό περίγραμμα και θα τελειώνουν σε ένα νέο περίγραμμα, όλα τα σημεία του οποίου θα βρίσκονται στο ίδιο υψόμετρο, γεγονός που θα εκφράζεται στην παράσταση από μια νέα κλειστή πολυγωνική γραμμή στο εσωτερικό του παλιού περιγράμματος με ίδιο πλήθος πλευρών με αυτές του αρχικού, και πλευρές μία προς μία παράλληλες και με την ίδια σειρά προς αυτές το παλιού. Το νέο στοιχείο του νέου **εσωτερικού περιγράμματος** θα είναι πως ορισμένες από τις πλευρές του θα είναι τετριμμένες μηδενικού μήκους ή θα περιέχονται σε άλλες, οπότε το νέο περίγραμμα-πολύγωνο μπορεί να θεωρηθεί πως έχει λιγότερες «χρήσιμες» πλευρές από το αρχικό. Το φαινόμενο αυτό συμβαίνει διότι καθώς συνεχίζουμε το χτίσιμο με σειρές κεραμιδιών και υψώνουμε όλο και περισσότερο τη στέγη, αρχίζουν κάποια στιγμή και τέμνονται και πιο «απομακρυσμένα» επίπεδά της εκτός των οποιοδήποτε δύο αρχικών «διπλανών». Πλευρά μηδενικού μήκους εμφανίζεται όταν π.χ. τρία «συνεχόμενα» επίπεδα τέμνονται από κοινού, ενώ η μία πλευρά του νέου περιγράμματος περιέχεται σε μια άλλη όταν π.χ. τέμνονται μη συνεχόμενα επίπεδα που διέρχονται από πλευρές του αρχικού περιγράμματος που είναι μεταξύ τους παράλληλες. Η διαδικασία αυτή του χτισίματος έως κάποιο ύψος είναι διαισθητικά φανερό πως κάποια στιγμή θα σταματήσει καθώς τα επίπεδα της στέγης έχουν κλίση προς το εσωτερικό του περιγράμματος, οπότε κάποια στιγμή θα έχουμε καλύψει ολόκληρο το εσωτερικό (δηλαδή κατακόρυφα επάνω από κάθε σημείο του εσωτερικού θα έχει «απλωθεί» κάποιο από τα αρχικά επίπεδα). Μαθηματικώς είμαστε σίγουροι πως η διαδικασία αυτή κάποτε θα τελειώσει, επειδή το κάθε νέο εσωτερικό περίγραμμα υπολείπεται από το προηγούμενο κατά μία τουλάχιστον πλευρά.

Το σχέδιο για την κατασκευή: με βάση τα παραπάνω, θα κατασκευάσουμε την παράσταση της στέγης εκτελώντας επαναληπτικά τρία βήματα.

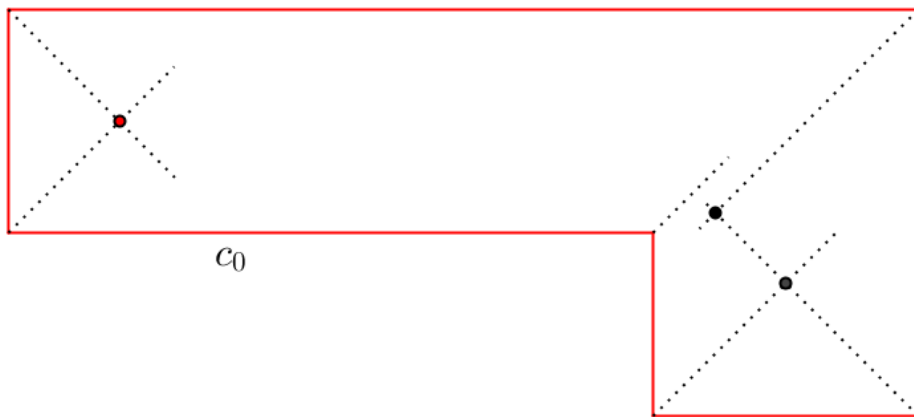
(1) Στο πρώτο βήμα **βρίσκουμε σημείο εκκίνησης** στο εσωτερικό του εκάστοτε περιγράμματος στο οποίο τέμνονται τρία διαδοχικά επίπεδα. Αυτό σημαίνει πως θα βρίσκουμε τα σημεία τομής όλων των διαδοχικών διχοτόμων των γωνιών του περιγράμματος, και από αυτά θα επιλέγουμε το κατάλληλο. Τα σημεία τομής που βρίσκονται εκτός περιγράμματος φυσικά δεν είναι κατάλληλα. Από τα υπόλοιπα, το κατάλληλο είναι αυτό που το αληθινό σημείο των επιπέδων κατακόρυφως ακριβώς από πάνω του, βρίσκεται στο χαμηλότερο δυνατό υψόμετρο σε σχέση με τα υπόλοιπα. Ο λόγος είναι πως ως αυτό το σημείο μπορούμε ανεμπόδιστα να χτίσουμε-υψώσουμε τη στέγη με τον τρόπο που αναφέραμε, δηλαδή σειρά μετά τη σειρά τα κεραμίδια. Στο σχέδιό μας το σημείο αυτό εντοπίζεται σχετικά εύκολα, καθώς είναι εκείνο μεταξύ των τομών των

ζευγών των διαδοχικών διχοτόμων που βρίσκεται πιο κοντά στην αντίστοιχη πλευρά του· δηλαδή την πλευρά του περιγράμματος με άκρα τα σημεία από όπου ξεκινούν οι ευθείες-διχοτόμοι που ορίζουν το σημείο ως τομή τους. Η επιλογή μας θα είναι η σωστή διότι οι αποστάσεις των σημείων αυτών από τις αντίστοιχες πλευρές τους δείχνουν τα υψόμετρα των αληθινών σημείων των επιπέδων της στέγης ακριβώς από επάνω τους. Όταν το αρχικό περίγραμμα αποτελείται από γωνίες ίσες με μία ή τρεις ορθές όπως στο παράδειγμά μας, δεν είναι αναγκαίο να συγκρίνουμε τις αποστάσεις των σημείων από τις αντίστοιχες πλευρές τους για την εύρεση του κατάλληλου σημείου εκκίνησης. Αρκεί να επιλέγουμε το σημείο του οποίου η αντίστοιχη πλευρά είναι η μικρότερη. Ο λόγος είναι πως για αυτά τα περιγράμματα τα τρίγωνα που δημιουργούν τα σημεία με τις αντίστοιχες πλευρές του είναι όλα όμοια μεταξύ τους (όλα τους ισοσκελή και ορθογώνια στην κορυφή του σημείου). Τέλος, ας παρατηρήσουμε πως μπορούν να υπάρξουν περισσότερα από ένα κατάλληλα σημεία εκκίνησης ταυτόχρονα. Αυτό δεν είναι παράξενο. Σε απομακρυσμένες περιοχές της αληθινής στέγης, μπορούν κάλλιστα να υπάρξουν στο ίδιο ύψος σημεία του ίδιου υψομέτρου που αποτελούν το καθένα τους τομές τριών διαδοχικών επιπέδων της. Όπως θα δούμε στο επόμενο βήμα, το φαινόμενο αυτό δεν αποτελεί ούτε και πρόβλημα.

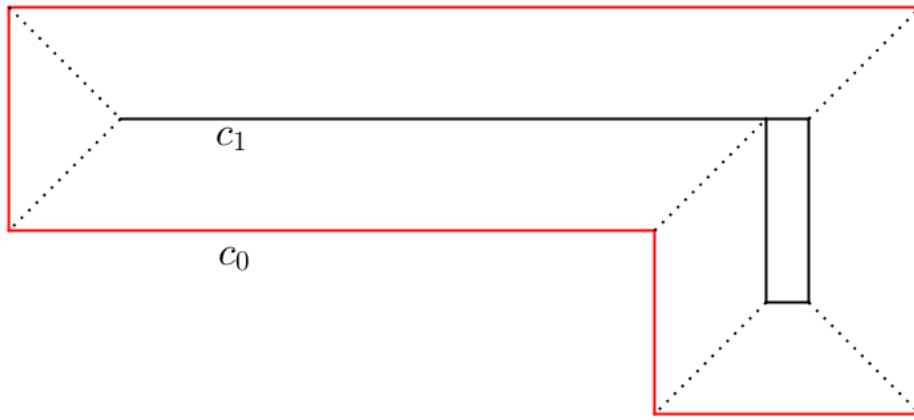
(2) Στο δεύτερο βήμα, κατασκευάζουμε νέο εσωτερικό περίγραμμα, ως πολύγωνο με παράλληλες πλευρές στο εκάστοτε αρχικό περίγραμμα. Για τούτο, θεωρούμε πως το σημείο εκκίνησης ανήκει σε μία από τις δύο διχοτόμους που το ορίζει και επιλέγοντας φορά κίνησης γύρω από το αρχικό περίγραμμα ορίζουμε σημεία στις διαδοχικές διχοτόμους που συναντούμε ώστε κάθε τμήμα μεταξύ δύο διχοτόμων να ανήκει σε ευθεία παράλληλη στην αντίστοιχη πλευρά· δηλαδή την πλευρά με άκρα τις κορυφές από όπου διέρχονται οι δύο διχοτόμοι. Η διαδικασία κατασκευής του νέου περιγράμματος-πολυγώνου ολοκληρώνεται όταν επιστρέψουμε στο αρχικό σημείο. Αυτό συμβαίνει οπωσδήποτε και αποτελεί τετριμμένη Άσκηση για τον ενδιαφερόμενο. Το νέο περίγραμμα-πολύγωνο αποτελεί ουσιαστικά την αποτύπωση στο σχέδιό μας της προβολής όλων των σημείων της αληθινής στέγης με υψόμετρο όσο και το σημείο εκκίνησης, δηλαδή όσο και το σημείο εκείνο μέχρι το οποίο δεν υπάρχουν εμπόδια για το χτίσιμο της στέγης με διαδοχικές σειρές κεραμιδιών. Οπότε η γραμμή αυτή περιέχει όλα τα δυνατά σημεία εκκίνησης, που μπορεί να είναι περισσότερα του ενός. Έτσι το βήμα (2) εκτελείται δίχως να μας ενδιαφέρει το συγκεκριμένο επιλεγμένο σημείο εκκίνησης μεταξύ όλων των δυνατών που προέκυψαν από το βήμα (1). Ας παρατηρήσουμε πως καθώς το σημείο εκκίνησης αποτελεί τετριμμένη πλευρά μηδενικού μήκους του νέου εσωτερικού περιγράμματος, το νέο αυτό περίγραμμα έχει μία τουλάχιστον λιγότερη πλευρά από το προηγούμενο. Όπως ήδη αναφέραμε προηγουμένως, το γεγονός αυτό διασφαλίζει πως η όλη διαδικασία θα τερματιστεί μετά από πεπερασμένο πλήθος επαναλήψεων.

(3) Στο τρίτο βήμα σημειώνουμε στο σχέδιό μας όλα τα ευθύγραμμα τμήματα που προέκυψαν από τα προηγούμενα δύο βήματα ως νέα τμήματα της παράστασης της στέγης. Αυτά είναι (α) τα τμήματα επάνω στις διχοτόμους του παλιού περιγράμματος που ενώνουν αντίστοιχες κορυφές των δύο περιγραμμάτων, (β) Τα τμήματα του νέου περιγράμματος που ανήκουν σε άλλα μεγαλύτερα (ή ίσα τους, δηλαδή ταυτίζονται μεταξύ τους). Τα (α) τμήματα του σχεδίου αντιστοιχούν στα τμήματα στην αληθινή στέγη κατά τα οποία υψώθηκαν μεταξύ των δύο περιγραμμάτων τα κοινά σημεία των διαδοχικών επιπέδων μέχρι να συναντηθεί το πρώτο εμπόδιο, δηλαδή η τομή τριών διαδοχικών επιπέδων. Σημειώτεον πως διαδοχικά επίπεδα για κάποιο εσωτερικό περίγραμμα μπορεί να μην είναι διαδοχικά για κάποιο προηγούμενο! Τα (β) τμήματα του σχεδίου αντιστοιχούν στα σημεία της αληθινής στέγης που προκύπτουν ως τομές επιπέδων διερχόμενων από παράλληλες πλευρές του περιγράμματος για τις οποίες υπάρχει άλλη μία μοναδική πλευρά του περιγράμματος που τις συνδέει. Κοντολογίς, αντιστοιχούν στους λεγόμενους οριζόντιους καβαλάρηδες ή κορφιάτες της στέγης. Πρόκειται για τμήματα οριζόντια, δηλαδή σημείων του αυτού υψομέτρου πάνω στα οποία συναντώνται δύο παραδιπλανά επίπεδα της στέγης. Προσοχή, παραδιπλανά επίπεδα για κάποιο εσωτερικό περίγραμμα μπορεί να μην είναι παραδιπλανά για τα προηγούμενα! Τούτων λεχθέντων, ας σημειώσουμε πως ορισμένες φορές παρουσιάζεται η περιπλοκή κάποιο νέο εσωτερικό περίγραμμα να είναι αυτοτεμνόμενο πολύγωνο. Υπάρχει τρόπος να χειριστούμε κι αυτή την περίπτωση, αλλά δεν θα επεκταθούμε εδώ. Τέλος, στην περίπτωση των μη πολυγωνικών περιγραμμάτων, μπορεί κανείς να εφαρμόσει την παρούσα μέθοδο, αφού προσεγγίσει πρώτα το περίγραμμα από κάποιο πολύγωνο με επιθυμητό μέγιστο μήκος πλευράς.

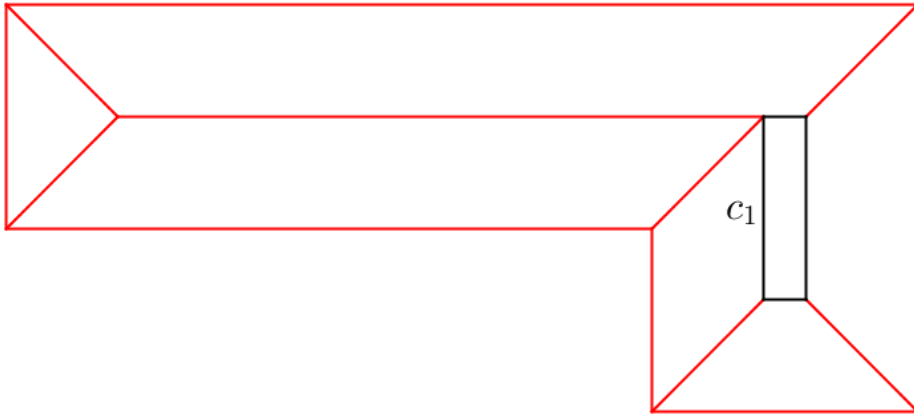
Λύση. Οι κόκκινες γραμμές αποτελούν μέρος της παράστασης της στέγης, και τα κόκκινα σημεία είναι τα σημεία εκκίνησης.



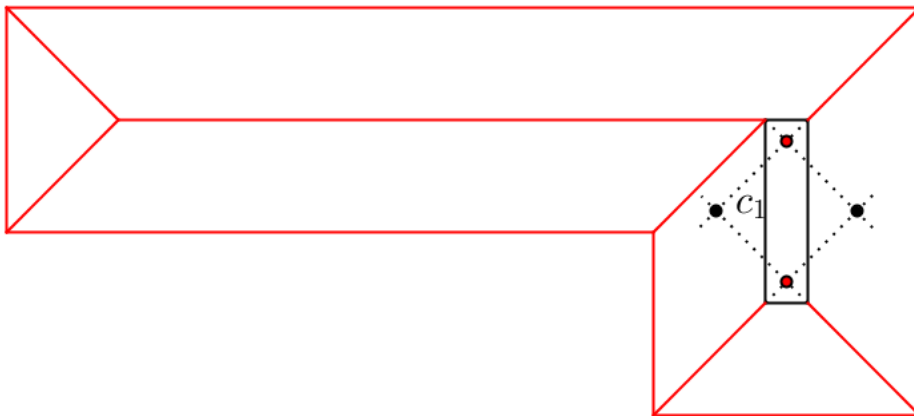
Σχήμα 10



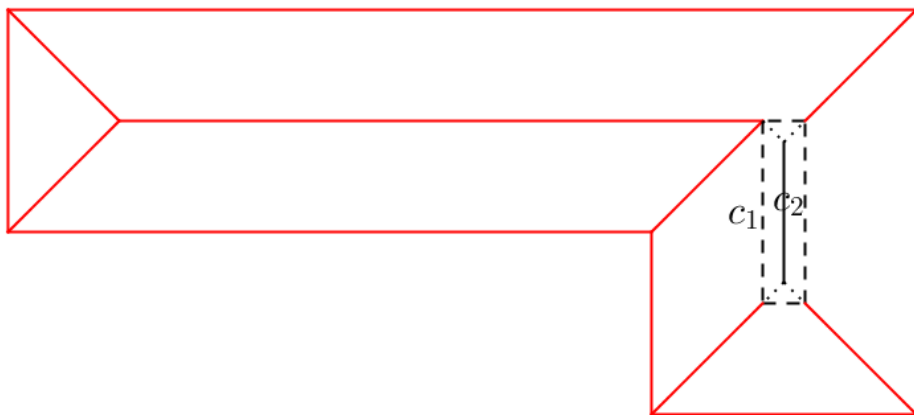
Σχήμα 11



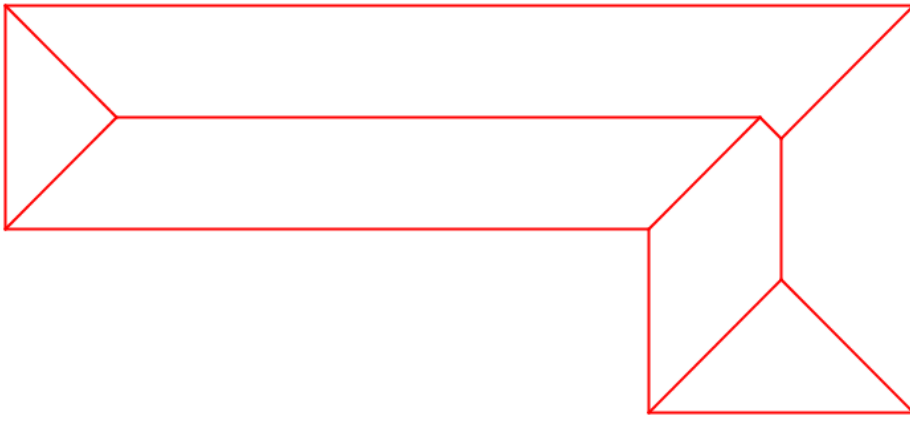
Σχήμα 12



Σχήμα 13

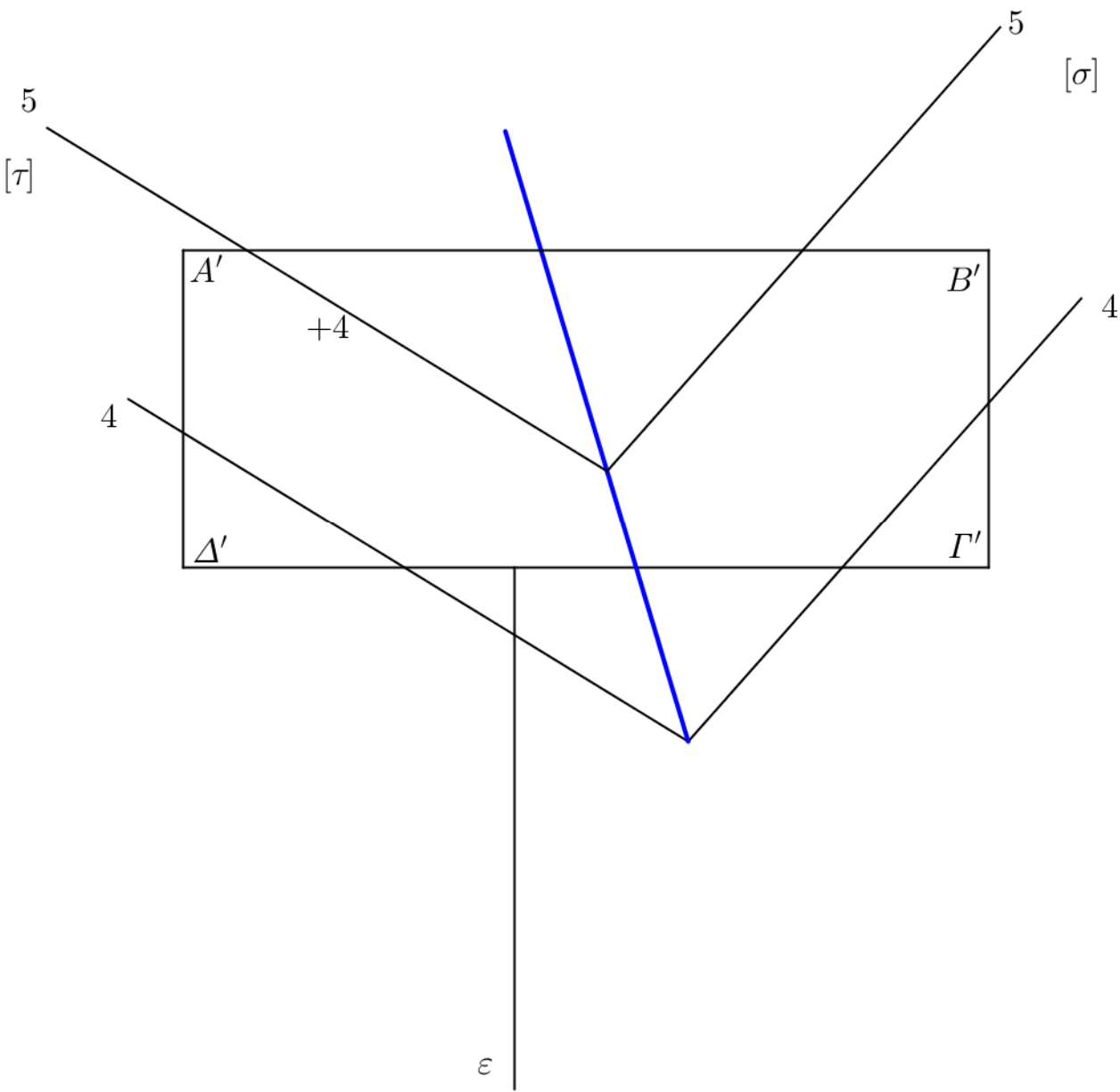


Σχήμα 14



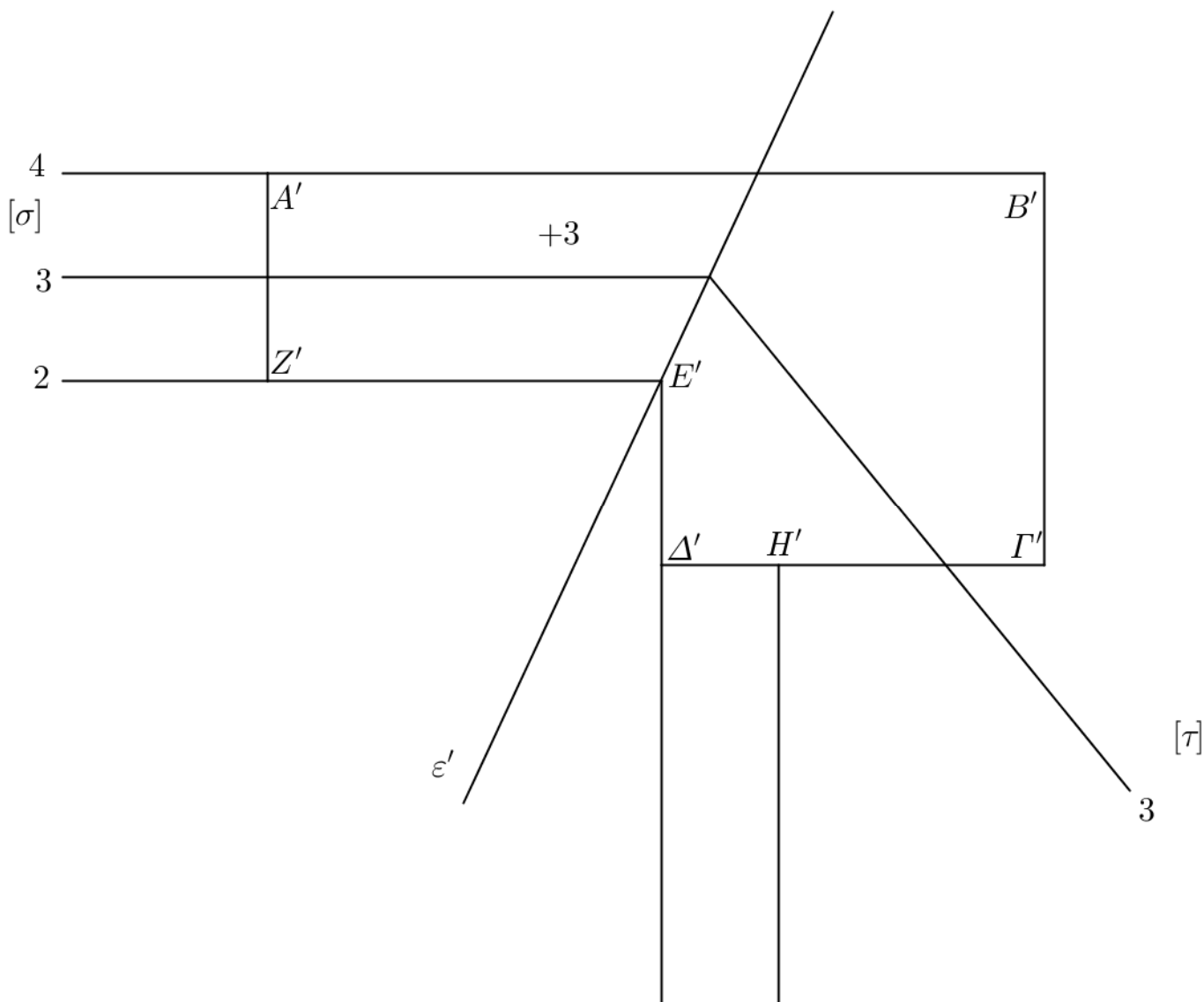
Σχήμα 15

Άσκηση 1. Το έδαφος μιας περιοχής προσομοιάζεται από τα επίπεδα σ, τ (των οποίων οι ιχνοπαράλληλες υψομέτρων 4 και 5 δίνονται στο Σχήμα 16) και από το οριζόντιο επίπεδο π υψομέτρου 0. Σε υψόμετρο 4 πρόκειται να κατασκευαστεί πολυγωνική πλατεία $AB\Gamma\Delta$ καθώς και κεκλιμένος δρόμος πλάτους 20χστ με συμμετρικές προβολές πλευρών ως προς την ευθεία ε του σχήματος, αρχίζοντας από τμήμα της πλευράς $\Gamma\Delta$ της πλατείας και καταλήγοντας στο π . Να βρεθεί η κατάληξη του δρόμου και να κατασκευαστούν τα πρηνή των επιχωματώσεων και εκχωματώσεων του δρόμου και της πλατείας όταν βήμα επιχωματώσεων=10χστ, κλίση εκχωματώσεων=20% (και μονάδα μέτρησης το 1χστ), βήμα δρόμου=15χστ.



Σχήμα 16

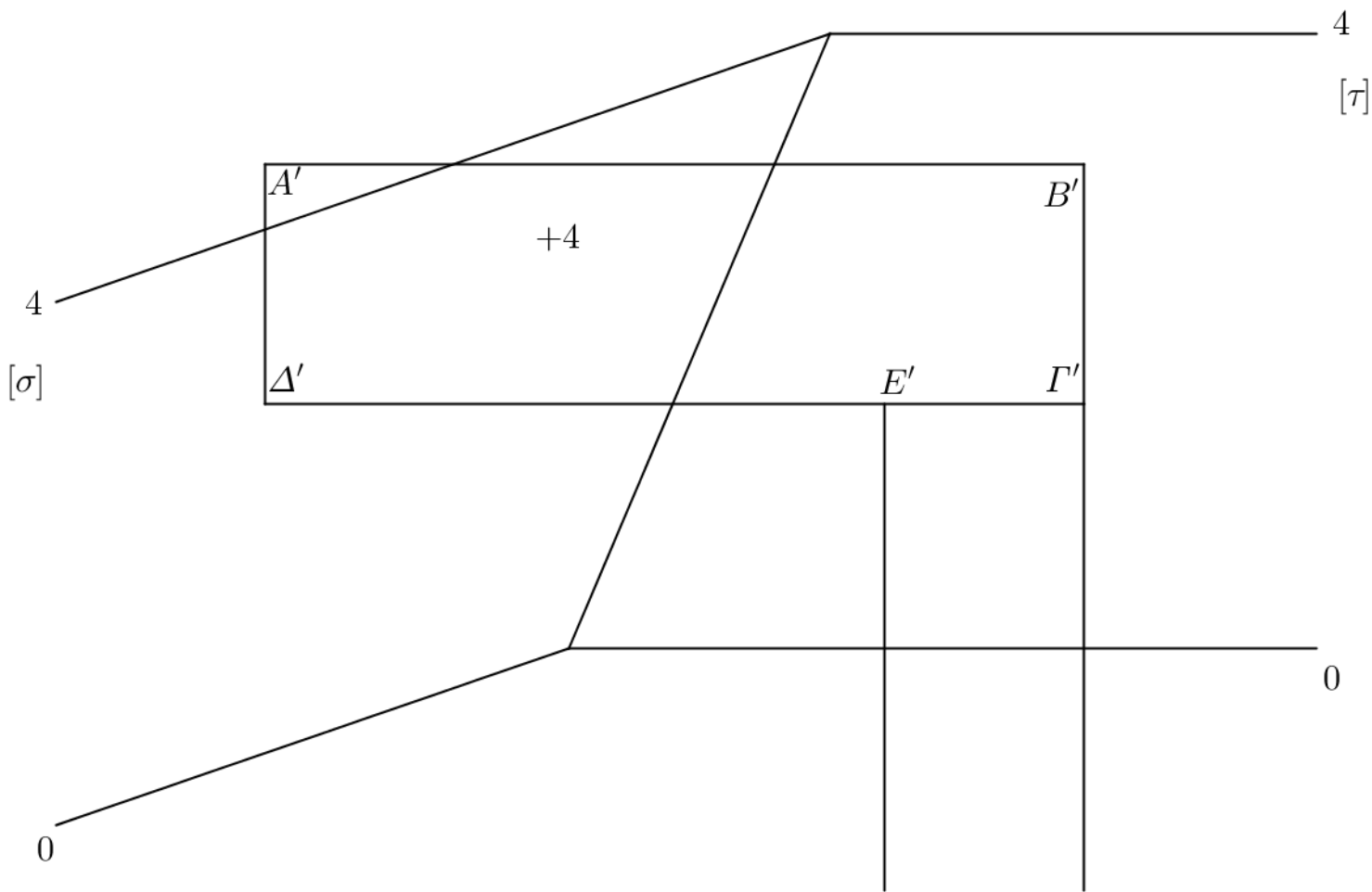
Άσκηση 2. Το έδαφος μιας περιοχής προσομοιάζεται από τα κεκλιμένα επίπεδα και από το οριζόντιο επίπεδο π υψομέτρου 0. Δίνονται οι ιχνοπαράλληλες υψομέτρου 2,3,4 του σ , η ιχνοπαράλληλος υψομέτρου 3 του τ και η κοινή ευθεία ε των σ, τ (Σχήμα 17). Σε υψόμετρο 3 πρόκειται να κατασκευαστεί πολυγωνική πλατεία $AB\Gamma\Delta EZH$ καθώς και κεκλιμένος δρόμος αρχίζοντας από το τμήμα ΔH της πλατείας και καταλήγοντας στο π με προβολές πλευρών τις δοσμένες στο σχήμα. Να βρεθεί η κατάληξη του δρόμου και να κατασκευαστούν τα πρηνή των επιχωματώσεων και εκχωματώσεων του δρόμου και της πλατείας όταν βήμα επιχωματώσεων=10χστ, βήμα εκχωματώσεων=5χστ, βήμα δρόμου=20χστ.



Σχήμα 17

Άσκηση 3. Το έδαφος μιας περιοχής προσομοιάζεται από τα κεκλιμένα επίπεδα σ, τ (των οποίων οι ιχνοπαράλληλες υψομέτρων 0 και 4 δίνονται στο Σχήμα 18) και από το οριζόντιο επίπεδο π υψομέτρου 0. Σε υψόμετρο 4 πρόκειται να κατασκευαστεί πλατεία σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$, καθώς και κεκλιμένος δρόμος που αρχίζει από το τμήμα ΓE της πλατείας και καταλήγει στο π , με προβολές πλευρών τις δοσμένες στο σχήμα.

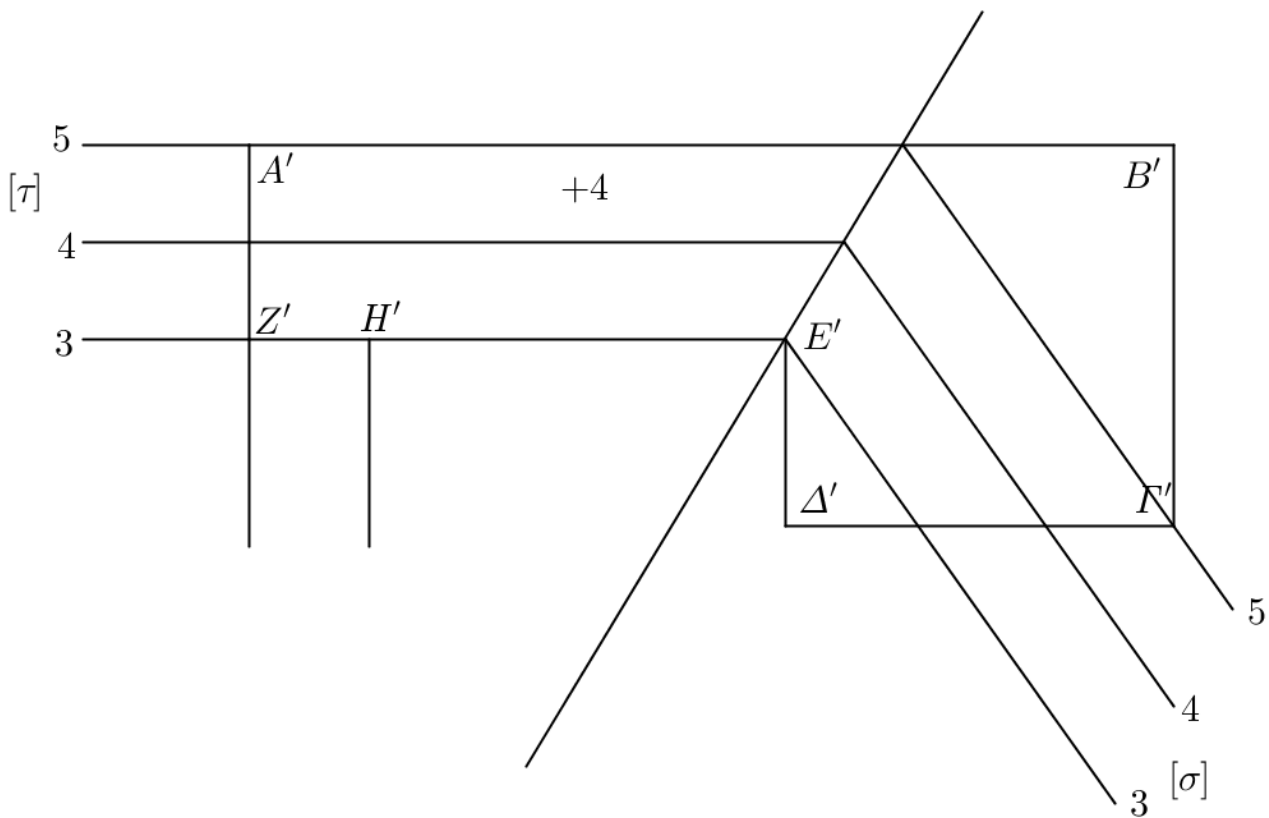
Να βρεθεί η κατάληξη του δρόμου και να κατασκευαστούν τα πρηνή των επιχωματώσεων και εκχωματώσεων του δρόμου και της πλατείας όταν κλίση επιχωματώσεων=10%, κλίση εκχωματώσεων=20%, βήμα δρόμου=20χστ, και μονάδα μέτρησης το 1χστ.



Σχήμα 18

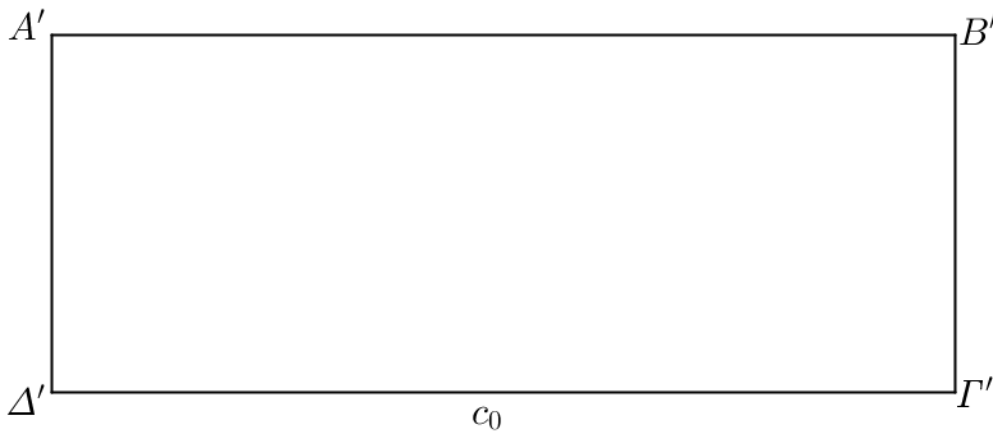
Άσκηση 4. Το έδαφος μιας περιοχής προσομοιάζεται από τα κεκλιμένα επίπεδα σ, τ (των οποίων οι ιχνοπαράλληλες υψομέτρων 3,4,5 δίνονται στο Σχήμα 19) και από το οριζόντιο επίπεδο π υψομέτρου 0. Σε υψόμετρο 4 πρόκειται να κατασκευαστεί πολυγωνική πλατεία $ABΓΔEZ$, καθώς και κεκλιμένος δρόμος που αρχίζει από το τμήμα ZH της πλατείας και καταλήγει στο π , με προβολές πλευρών τις δοσμένες στο σχήμα.

Να βρεθεί η κατάληξη του δρόμου και να κατασκευαστούν τα πρηνή των επιχωματώσεων και εκχωματώσεων του δρόμου και της πλατείας όταν βήμα επιχωματώσεων = 10 χστ, κλίση εκχωματώσεων = 5 χστ, βήμα δρόμου = 20 χστ.



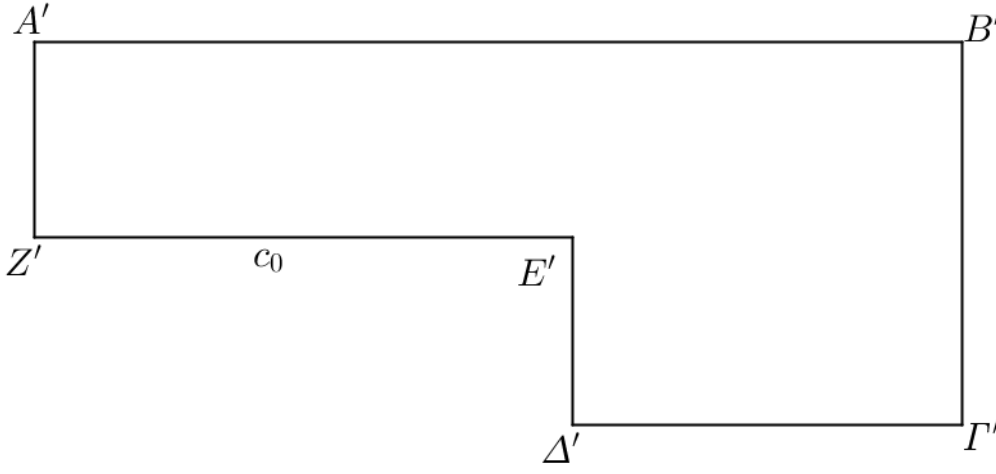
Σχήμα 19

Άσκηση 5. Στην πλατεία της Άσκησης 1 (Σχήμα 19) πρόκειται να κατασκευάσουμε στέγη οριζόντιου περιγράμματος με προβολή το $c_0 = A'B'Γ'Δ'E'Z'$, και ισοκλινείς έδρες ως προς το έδαφος. Να παραστήσετε τη στέγη.



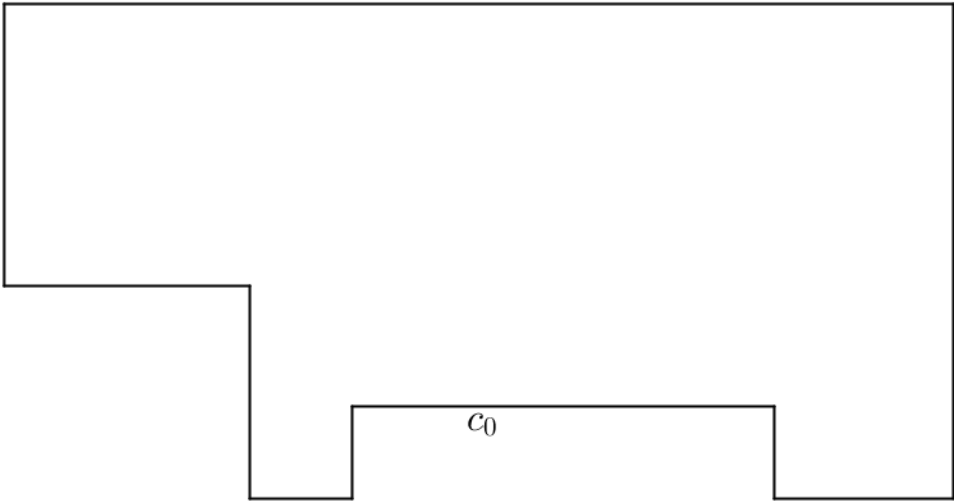
Σχήμα 20

Άσκηση 6. Στην πλατεία της Άσκησης 3 (Σχήμα 20) πρόκειται να κατασκευάσουμε στέγη οριζόντιου περιγράμματος με προβολή το $c_0 = A'B'Γ'Δ'E'Z'$, και ισοκλινείς έδρες ως προς το έδαφος. Να παραστήσετε τη στέγη.



Σχήμα 21

Άσκηση 7. Πρόκειται να κατασκευάσουμε στέγη με προβολή περιγράμματος το πολύγωνο c_0 , και ισοκλινείς έδρες ως προς το επίπεδο του περιγράμματος. Να παραστήσετε τη στέγη.



Σχήμα 22