ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟ ΤΗ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Ορισμοί

Η Συνδυαστική Ανάλυση εμφανίζεται για πρώτη φορά τον 17^{ο} αιώνα στις εργασίες των διάσημων μαθηματικών Fermat και Pascal, οι οποίοι είχαν εργαστεί με προβλήματα που είχαν σχέση με τα τυχερά παιχνίδια. Η Συνδυαστική Ανάλυση βρίσκει εφαρμογή κυρίως στη Θεωρία των Πιθανοτήτων.

Τμήμα ή ***αρχικό απόκομμα*** $T_ν$ του συνόλου Ν των φυσικών αριθμών μέχρι το ν ονομάζουμε το υποσύνολο {1, 2, ..., ν} του Ν :

$Tν = \{1, 2, ..., ν\}$

Αποκαλούμε ***ν-παραγοντικό*** και θα το συμβολίζουμε με το ν! το γινόμενο των ν πρώτων διαδοχικών φυσικών αριθμών :

$ν! = 1 X 2 X 3 X ... X (ν-1) X ν$

Ισχύουν τα εξής :

$ν! = (ν-1)! X ν$
$0! = 1$

ΜΕΤΑΘΕΣΕΙΣ

Μετάθεση των αντικειμένων $α_1$, $α_2$, ..., $α_ν$ ονομάζουμε κάθε δυνατό τρόπο τοποθέτησής τους πάνω σε μια ευθεία. Δύο μεταθέσεις θα είναι διαφορετικές όταν διαφέρουν ως προς τη θέση ενός τουλάχιστον, στην ουσία δύο, αντικειμένου. Το πλήθος των διαφόρων μεταθέσεων ν διαφόρων αντικειμένων θα το παριστάνουμε με το σύμβολο $M_ν$. Το πλήθος αυτό δεν εξαρτάται από τη φύση των αντικειμένων αλλά μόνο από το πλήθος τους.

Ισχύει ότι το πλήθος των μεταθέσεων ν αντικειμένων είναι ίσο με το ν!, δηλαδή :

$$\boxed{M_ν = 1.2.3...ν = ν! = \prod_{k=1}^{ν} k}$$

ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ

Λέμε ότι έχουμε μια ***διάταξη των ν πραγμάτων ανά μ***, αν πάρουμε μ πράγματα από ένα σύνολο ν πραγμάτων και τα τοποθετήσουμε σε μια ευθεία γραμμή το ένα μετά από το άλλο. Από μαθηματική άποψη, διάταξη ν πραγμάτων ανά μ (όπου $1 \leq \mu \leq \nu$), ονομάζουμε κάθε αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση του τμήματος $T_\mu = \{1, 2, \ldots, \mu\}$ μέσα στο σύνολο $E = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu\}$.

Κάθε πράγμα μιας διάταξης περιέχεται μόνο μία φορά σ' αυτήν. Σε κάθε διάταξη παίζει ρόλο όχι μόνο ποια μ πράγματα θα πάρουμε από τα ν, αλλά και με ποια σειρά θα τα τοποθετήσουμε, δηλαδή ποιο θα είναι πρώτο, ποιο δεύτερο κοκ. Αν το πλήθος των διαφόρων διατάξεων των ν πραγμάτων ανά μ παρασταθεί με το σύμβολο Δ_μ^ν, ισχύουν τα εξής :

$\Delta_1^\nu = \nu$ και $\Delta_\nu^\nu = \mathrm{M}_\nu = \nu!$

Αποδεικνύεται ότι το πλήθος των διαφόρων διατάξεων των ν πραγμάτων ανά μ δίνεται από τους εξής τύπους :

$$\boxed{\Delta_\mu^\nu = \nu(\nu-1)(\nu-2)\ldots(\nu-\mu+1) \text{ και } \Delta_\mu^\nu = \frac{\nu!}{(\nu-\mu)!}}$$

Ένας μνημονικός κανόνας είναι ότι το πλήθος των διαφόρων διατάξεων των ν πραγμάτων ανά μ είναι ίσο με το γινόμενο μ διαδοχικών φυσικών αριθμών όπου ο μεγαλύτερός τους είναι το ν. Παράδειγμα : $\Delta_3^7 = 7.6.5$.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΔΙΑΤΑΞΕΙΣ

Επαναληπτική διάταξη των ν πραγμάτων ανά μ είναι κάθε επιλογή μ πραγμάτων από ν πράγματα, όπου το κάθε πράγμα μπορεί να επαναληφθεί μέχρι μ το πολύ φορές. Από μαθηματική άποψη, επαναληπτική διάταξη των ν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ πραγμάτων ανά μ ονομάζουμε κάθε απεικόνιση του τμήματος $T_\mu = \{1, 2, \ldots, \mu\}$ μέσα στο σύνολο $E = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu\}$. Είναι φανερό ότι τώρα μπορεί να έχουμε και $\mu \geq \nu$.

Αν το πλήθος όλων των επαναληπτικών διατάξεων των ν πραγμάτων ανά μ παρασταθεί με το σύμβολο δ_μ^ν, ισχύει το εξής : $\delta_1^\nu = \nu$. Αποδεικνύεται ότι το πλήθος όλων των επαναληπτικών διατάξεων των ν πραγμάτων ανά μ δίνεται από τον εξής τύπο :

$$\boxed{\delta_\mu^\nu = \nu^\mu}$$

ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ

Συνδυασμό των ν πραγμάτων ανά k, όπου $1 \leq k \leq \nu$, ονομάζουμε κάθε υποσύνολο του συνόλου των ν πραγμάτων Ε = $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu\}$, το οποίο περιέχει k στοιχεία. Κάθε πράγμα ενός συνδυασμού περιέχεται μία μόνο φορά σ' αυτόν τον συνδυασμό και δεν έχει συνεπώς καμία σημασία η σειρά (τάξη) των πραγμάτων μέσα σ' έναν συνδυασμό.

Το πλήθος όλων των συνδυασμών των ν πραγμάτων ανά k παριστάνεται με το σύμβολο $\binom{\nu}{k}$ ή και με το $\sum_k^\nu$.

Ισχύουν τα εξής : $\binom{\nu}{1} = \nu$ και $\binom{\nu}{\nu} = 1$. Δεχόμαστε ότι : $\binom{\nu}{0} = 1$

Αποδεικνύεται ότι το πλήθος των συνδυασμών των ν πραγμάτων ανά k δίνεται από τον εξής τύπο :

$$\boxed{\binom{\nu}{k} = \frac{\nu!}{k!(\nu - k)!}}$$

Ισχύουν τα εξής : το πλήθος των συνδυασμών των ν πραγμάτων ανά k είναι ίσο με το πλήθος των συνδυασμών των ν πραγμάτων ανά (ν-k) και το πλήθος των συνδυασμών των ν πραγμάτων ανά k είναι ίσο με το πλήθος των συνδυασμών των ν-1 πραγμάτων ανά k, στο οποίο πρέπει να προσθέσουμε και το πλήθος των συνδυασμών των (ν-1) πραγμάτων ανά (k-1).

$$\binom{\nu}{k} = \binom{\nu}{\nu - k} \text{ και } \binom{\nu}{k} = \binom{\nu - 1}{k} + \binom{\nu - 1}{k - 1}$$

ΤΥΠΟΣ ΤΟΥ ΔΙΩΝΥΜΟΥ

Αποδεικνύεται ότι για κάθε ζεύγος πραγματικών αριθμών x και α και για κάθε $\nu \in N$, ισχύει ο εξής τύπος του διωνύμου του Newton :

$$(x+\alpha)^{\nu} = \binom{\nu}{0}x^{\nu} + \binom{\nu}{1}x^{\nu-1}\alpha + \binom{\nu}{2}x^{\nu-2}\alpha^{2} + \ldots + \binom{\nu}{k}x^{\nu-k}\alpha^{k} + \ldots + \binom{\nu}{\nu}\alpha^{\nu}$$

Ο παραπάνω τύπος γράφεται και ως εξής :

$$(x+\alpha)^{\nu} = x^{\nu} + \nu x^{\nu-1}\alpha + \frac{\nu(\nu-1)}{1.2}x^{\nu-2}\alpha^{2} + \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1.2.3}x^{\nu-3}\alpha^{3} + \ldots + \alpha^{\nu}$$

Ή και πιο σύντομα ως εξής :

$$(x+\alpha)^{\nu} = \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} x^{\nu-k}\alpha^{k}$$

Η παράσταση $\binom{\nu}{k}$ είναι ο συνδυασμός των ν πραγμάτων ανά k και είναι ίση με : $\frac{\nu!}{k!(\nu-k)!}$, όπου $\nu! = 1.2.3...\nu = \prod_{k=1}^{\nu} k$

Μερικές χρήσιμες παρατηρήσεις για τον σχηματισμό του αναπτύγματος $(x+\alpha)^{\nu}$:

1. Είναι ένα πλήρες ομογενές πολυώνυμο ν βαθμού, που είναι διατεταγμένο κατά τις κατιούσες δυνάμεις του x και τις ανιούσες δυνάμεις του α.
2. Οι δυνάμεις του x ξεκινούν από το ν και ελαττώνονται κατά ένα μέχρι να γίνουν 0, ενώ οι δυνάμεις του α ξεκινούν από το 0 και αυξάνουν κατά ένα μέχρι να γίνουν ν.
3. Σε κάθε όρο το άθροισμα των εκθετών του x και του α είναι σταθερό και ίσο με ν.
4. Το πλήθος των όρων του αναπτύγματος είναι ίσο με ν+1.
5. Οι όροι του αναπτύγματος που ισαπέχουν από τα άκρα έχουν ίσους συντελεστές.
6. Αν ο ν είναι άρτιος αριθμός, τότε το πλήθος των όρων του αναπτύγματος είναι περιττός αριθμός και υπάρχει ένας μόνο μεσαίος όρος που έχει τον μεγαλύτερο συντελεστή και οι εκθέτες των x και α είναι ίσοι.
7. Αν ο ν είναι περιττός αριθμός, τότε το πλήθος των όρων του αναπτύγματος είναι άρτιος αριθμός και υπάρχουν δύο μεσαίοι όροι που έχουν τον ίδιο συντελεστή, που είναι και ο μεγαλύτερος του αναπτύγματος.
8. Στο ανάπτυγμα $(x+\alpha)^{\nu}$ όλοι οι όροι έχουν θετικό πρόσημο, ενώ στο ανάπτυγμα $(x-\alpha)^{\nu}$ το πρόσημο των όρων είναι εναλλάξ θετικό και αρνητικό.

9. Κάθε συντελεστής προκύπτει αν λάβουμε το γινόμενο του συντελεστή επί τον εκθέτη του προηγούμενου όρου και διαιρέσουμε με τον αριθμό που δηλώνει την τάξη του προηγούμενου όρου.

Παραδείγματα :

$(x+\alpha)^2 = x^2 + 2x\alpha + \alpha^2$

$(x-\alpha)^2 = x^2 - 2x\alpha + x^2$

$(x+\alpha)^3 = x^3 + 3x^2\alpha + 3x\alpha^2 + \alpha^3$

$(x-\alpha)^3 = x^3 - 3x^2\alpha + 3\alpha x^2 - \alpha^3$

$(x+\alpha)^4 = x^4 + 4x^3\alpha + 6x^2\alpha^2 + 4x\alpha^3 + \alpha^4$

$(x-\alpha)^4 = x^4 - 4x^3\alpha + 6x^2\alpha^2 - 4x\alpha^3 + \alpha^4$

$(x+\alpha)^5 = x^5 + 5x^4\alpha + 10x^3\alpha^2 + 10x^2\alpha^3 + 5x\alpha^4 + \alpha^5$

$(x-\alpha)^5 = x^5 - 5x^4\alpha + 10x^3\alpha^2 - 10x^2\alpha^3 + 5x\alpha^4 - \alpha^5$

$(x+\alpha)^6 = x^6 + 6x^5\alpha + 15x^4\alpha^2 + 20x^3\alpha^3 + 15x^2\alpha^4 + 6x\alpha^5 + \alpha^6$

$(x-\alpha)^6 = x^6 - 6x^5\alpha + 15x^4\alpha^2 - 20x^3\alpha^3 + 15x^2\alpha^4 - 6x\alpha^5 + \alpha^6$

Οι διωνυμικοί συντελεστές έχουν μερικές ενδιαφέρουσες ιδιότητες :

$$\binom{\nu}{0} + \binom{\nu}{1} + \binom{\nu}{2} + \ldots + \binom{\nu}{\nu} = 2^{\nu} \text{ ή } \sum_{k=0}^{\nu} \binom{\nu}{k} = 2^{\nu}$$

Από τον παραπάνω τύπο μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ένα σύνολο που περιέχει ν στοιχεία, έχει 2^{ν} υποσύνολα.

$$\binom{\nu}{1} + \binom{\nu}{3} + \binom{\nu}{5} + \ldots = \binom{\nu}{0} + \binom{\nu}{2} + \binom{\nu}{4} + \ldots = 2^{\nu-1}$$

$$\binom{\nu}{0}^2 + \binom{\nu}{1}^2 + \binom{\nu}{2}^2 + \ldots + \binom{\nu}{\nu}^2 = \binom{2\nu}{\nu}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορούν να παραταχθούν 10 μαθητές σε μια σειρά; *(Απ. 10! = 3.628.800)*.
2. Πόσοι αναγραμματισμοί προκύπτουν από τη λέξη «Φλώρινα»; Πόσοι αρχίζουν από φ και πόσοι αρχίζουν από ι και τελειώνουν σε α;
3. ´Ενα μαθητής έχει 9 βιβλία και θέλει να τοποθετήσει σ' ένα ράφι 5 απ' αυτά. Με πόσους διαφορετικούς τρόπους μπορεί να το κάνει; *(Απ.* $\Delta_5^9 = 15.120$ *)*.
4. Πόσοι πενταψήφιοι αριθμοί υπάρχουν με διαφορετικά ψηφία; *(Απ. 27.216)*.
5. Με πόσους τρόπους 5 τουρίστες μπορούν να κατευθυνθούν σε 7 ξενοδοχεία αλλά σε ξεχωριστό ο καθένας;
6. Πόσους πενταψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε με τα ψηφία 3, 5 και 7; *(Απ.* $\delta_5^3 = 3^5 = 243$ *)*.
7. Πόσες στήλες πρέπει να συμπληρώσουμε στο ΠΡΟΠΟ για να πετύχουμε σίγουρα ένα 13άρι; *(Απ.* $\delta_{13}^3 = 3^{13} = 1.567.323$ *)*.
8. Να βρεθεί το πλήθος των διψήφιων αριθμών που δεν λήγουν σε μηδέν.
9. Με πόσους τρόπους μπορούν να επιλεγούν11 παίκτες από μια ομάδα που έχει 13 παίκτες; *(Απ. 78)*.
10. Πόσες στήλες πρέπει να συμπληρώσουμε στο ΛΟΤΤΟ για να πετύχουμε σίγουρα ένα 6άρι;
11. Να βρεθεί το πλήθος των διαγωνίων ενός πολυγώνου που έχει ν κορυφές.