# <u>Βασικές Έννοιες και Τύποι Συνδυαστικής</u>

## 1. Η Πολλαπλασιαστική αρχή

Αν κατά την απαρίθμηση των στοιχείων ενός συνόλου α) η διαδικασία της απαρίθμησης μπορεί να χωρισθεί σε $\kappa$ διαφορετικά βήματα τα οποία πρέπει να εκτελεσθούν διαδοχικά το ένα μετά το άλλο και β) το πλήθος των δυνατών επιλογών σε κάθε βήμα είναι πλήρως καθορισμένο όταν είναι γνωστά τα αποτελέσματα όλων των προηγούμενων βημάτων, τότε η απαρίθμηση μπορεί να γίνει με χρήση της **πολλαπλασιαστικής αρχής** η οποία διατυπώνεται ως εξής:

*«Αν το στοιχείο $\alpha_1$ μπορεί να επιλεγεί με $\nu_1$ διαφορετικούς τρόπους και για κάθε επιλογή του $\alpha_1$, το στοιχείο $\alpha_2$ μπορεί να επιλεγεί με $\nu_2$ διαφορετικούς τρόπους, ..., και για κάθε επιλογή των στοιχείων $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{k-1}$, το στοιχείο $\alpha_\kappa$ μπορεί να επιλεγεί με $\nu_\kappa$ διαφορετικούς τρόπους, τότε όλα τα στοιχεία $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ μπορούν να επιλεγούν διαδοχικά και με αυτή τη συγκεκριμένη σειρά, κατά $\nu_1 \cdot \nu_2 \cdot ... \cdot \nu_\kappa$ τρόπους.»*

## 2. Διατάξεις, Μεταθέσεις, Συνδυασμοί

Οι σχηματισμοί που προκύπτουν με την επιλογή *k* στοιχείων από ένα σύνολο *ν* στοιχείων ($1 \le k \le \nu$) ονομάζονται ***διατάξεις*** των *ν* στοιχείων ανά *k* <u>αν μας ενδιαφέρει η σειρά καταγραφής τους</u> ή ***συνδυασμοί*** των *ν* στοιχείων ανά *k* <u>αν δεν μας ενδιαφέρει η σειρά καταγραφής τους</u>. Οι διατάξεις των *ν* στοιχείων ανά *ν* ονομάζονται ***μεταθέσεις*** των *ν* στοιχείων. Ας δούμε ένα παράδειγμα:

Οι **συνδυασμοί** των 4 στοιχείων του συνόλου *{α, β, γ, δ}* ανά 3 είναι:

*{α, β, γ}, {α, β, δ}, {α, γ, δ}, {β, γ, δ}.*

Οι **διατάξεις** των 4 στοιχείων του συνόλου *{α, β, γ, δ}* ανά 3 είναι:

*{α, β, γ}, {α, γ ,β}, {β, α, γ}, {β, γ ,α}, {γ, α, β}, {γ, β, α}, {α, β, δ}, {α, δ, β}, {β, α, δ}, {β, δ, α}, {δ, α, β}, {δ, β, α}, {α, γ, δ}, {α, δ, γ}, {γ, α, δ}, {γ, δ, α}, {δ, α, γ}, {δ, γ, α}, {β, γ, δ}, {β, δ, γ}, {γ, β, δ}, {γ, δ, β}, {δ, β, γ}, {δ, γ, β}.*

Οι **μεταθέσεις** των 4 στοιχείων του συνόλου *{α, β, γ, δ}* είναι:

*{α, β, γ, δ}, {β, γ, δ, α}, {γ, δ, α, β}, {δ, α, β, γ}, {α, β, δ, γ}, {α, δ, γ, β}, {α, γ, δ, β,}, {α, γ, β, δ}, {γ, β, α, δ}, {γ, α, β, δ}, {γ, α, δ, β}, {δ, α, γ, β}, {β, α, γ, δ}, {β, α, δ, γ} {δ, β, α, γ}, {δ, β, γ, α}, {δ, γ, β, α}, {δ, γ, α, β}, {γ, δ, β, α}, {γ, β, δ, α}, {α, δ, β, γ}, {β, γ, α, δ}, {β, δ, γ, α}, {β, δ, α, γ}.*

Ο **αριθμός των διατάξεων** *ν* στοιχείων ανά *k* συμβολίζεται με $\Delta_k^\nu$ ή $(\nu)_k$ και ισχύει:

$$\Delta_k^\nu = \nu \cdot (\nu - 1) \cdot (\nu - 2) \cdot ... \cdot (\nu - k + 1) = \frac{\nu!}{(\nu - k)!}.$$

*<u>Απόδειξη:</u> Προκύπτει άμεσα με εφαρμογή της πολλαπλασιαστικής αρχής.*

Ο **αριθμός των μεταθέσεων** *ν* στοιχείων συμβολίζεται με $\Delta_\nu^\nu$ ή $(\nu)_\nu$. Προφανώς είναι: $\Delta_\nu^\nu = \nu \cdot (\nu - 1) \cdot (\nu - 2) \cdot ... \cdot 1 = \nu!$.

Ο **αριθμός των συνδυασμών** των *ν* στοιχείων ανά *k* συμβολίζεται με $\binom{\nu}{k}$ και ισχύει:

$$\binom{\nu}{k} = \frac{\nu!}{k! \cdot (\nu - k)!}.$$

*<u>Απόδειξη:</u> Ο αριθμός των διατάξεων ν στοιχείων ανά k είναι γνωστός και ίσος με $\frac{\nu!}{(\nu - k)!}$. Οι διατάξεις αυτές δημιουργούνται με την ακόλουθη διαδικασία:*

*Βήμα-1. Επιλέγουμε ένα συνδυασμό k στοιχείων*

*Βήμα-2. Τοποθετούμε τα k στοιχεία του συνδυασμού που δημιουργήθηκε στο Βήμα-1 με όλες τις δυνατές μεταθέσεις.*

*Επαναλαμβάνουμε τα Βήματα-1, 2 μέχρι να επιλεγούν όλοι οι συνδυασμοί k στοιχείων. Το Βήμα-1 μπορεί να πραγματοποιηθεί με* $\binom{\nu}{k}$ *διαφορετικούς τρόπους, δηλαδή, με τόσους τρόπους όσοι είναι οι συνδυασμοί των ν στοιχείων ανά k που ζητάμε να υπολογίσουμε. Για κάθε ένα αποτέλεσμα του Βήματος-1, δηλαδή για κάθε συνδυασμό k στοιχείων, δημιουργούνται στο Βήμα-2 οι k! μεταθέσεις των k στοιχείων του που είναι διατάξεις των ν στοιχείων ανά k. Άρα, με την ολοκλήρωση της διαδικασίας, θα έχουμε* $\binom{\nu}{k}\cdot k!$ *αποτελέσματα που είναι όλες οι διατάξεις των ν* στοιχείων ανά *k. Όμως, όπως αναφέραμε, ο αριθμός όλων των διατάξεων των ν* στοιχείων ανά *k είναι γνωστός και ίσος με* $\frac{\nu!}{(\nu-k)!}$. *Επομένως,*

$$\binom{\nu}{k}\cdot k! = \frac{\nu!}{(\nu-k)!} \Rightarrow \binom{\nu}{k} = \frac{\nu!}{k!\cdot(\nu-k)!}.$$

Η παραπάνω διαδικασία δημιουργίας των διατάξεων από τους συνδυασμούς φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα:

| Οι **Συνδυασμοί** των 4 στοιχείων του συνόλου {α, β, γ, δ} ανά 3. | Οι **Μεταθέσεις** που προκύπτουν από κάθε συνδυασμό (τριάδα) | Οι **Διατάξεις** των 4 στοιχείων του συνόλου {α, β, γ, δ} ανά 3 |
|---|---|---|
| {α, β, γ} | {α, β, γ}<br>{α, γ ,β}<br>{β, α, γ}<br>{β, γ ,α}<br>{γ, α, β}<br>{γ, β, α} | {α, β, γ}<br>{α, γ ,β}<br>{β, α, γ}<br>{β, γ ,α}<br>{γ, α, β}<br>{γ, β, α} |
| {α, β, δ} | {α, β, δ}<br>{α, δ, β}<br>{β, α, δ}<br>{β, δ, α}<br>{δ, α, β}<br>{δ, β, α} | {α, β, δ}<br>{α, δ, β}<br>{β, α, δ}<br>{β, δ, α}<br>{δ, α, β}<br>{δ, β, α} |
| {α, γ, δ} | {α, γ, δ}<br>{α, δ, γ}<br>{γ, α, δ}<br>{γ, δ, α}<br>{δ, α, γ}<br>{δ, γ, α} | {α, γ, δ}<br>{α, δ, γ}<br>{γ, α, δ}<br>{γ, δ, α}<br>{δ, α, γ}<br>{δ, γ, α} |
| {β, γ, δ} | {β, γ, δ}<br>{β, δ, γ}<br>{γ, β, δ}<br>{γ, δ, β}<br>{δ, β, γ}<br>{δ, γ, β} | {β, γ, δ}<br>{β, δ, γ}<br>{γ, β, δ}<br>{γ, δ, β}<br>{δ, β, γ}<br>{δ, γ, β} |
| *__4__ Συνδυασμοί __x 6__ Μεταθέσεις κάθε Συνδυασμού __= 24__ Διατάξεις* | | |

Δηλαδή:

| ***Αριθμός τρόπων που μπορούμε να πάρουμε k στοιχεία από ν (Συνδυασμοί των ν ανά k)*** | ***Αριθμός τρόπων που μπορούμε να μεταθέσουμε τα k στοιχεία (Μεταθέσεις των k)*** | ***Αριθμός τρόπων που μπορούμε να πάρουμε k στοιχεία από ν και να τα τοποθετήσουμε στη σειρά (Διατάξεις των ν ανά k)*** |
|---|---|---|
| $\binom{\nu}{k}$ $\cdot$ | $k!$ $=$ | $\frac{\nu!}{(\nu-k)!}$ |

**Επαναληπτικές διατάξεις** $\nu$ στοιχείων ανά $k$: είναι σχηματισμοί $k$ διατεταγμένων στοιχείων που επιλέγονται από $\nu$ έτσι ώστε κάθε στοιχείο να μπορεί να επιλεγεί περισσότερες από μια φορές (μέχρι και $k$ φορές).
Με εφαρμογή της πολλαπλασιαστικής αρχής, εύκολα αποδεικνύεται ότι **ο αριθμός των επαναληπτικών διατάξεων** $\nu$ στοιχείων ανά $k$ είναι ίσος με $\nu^k$ .

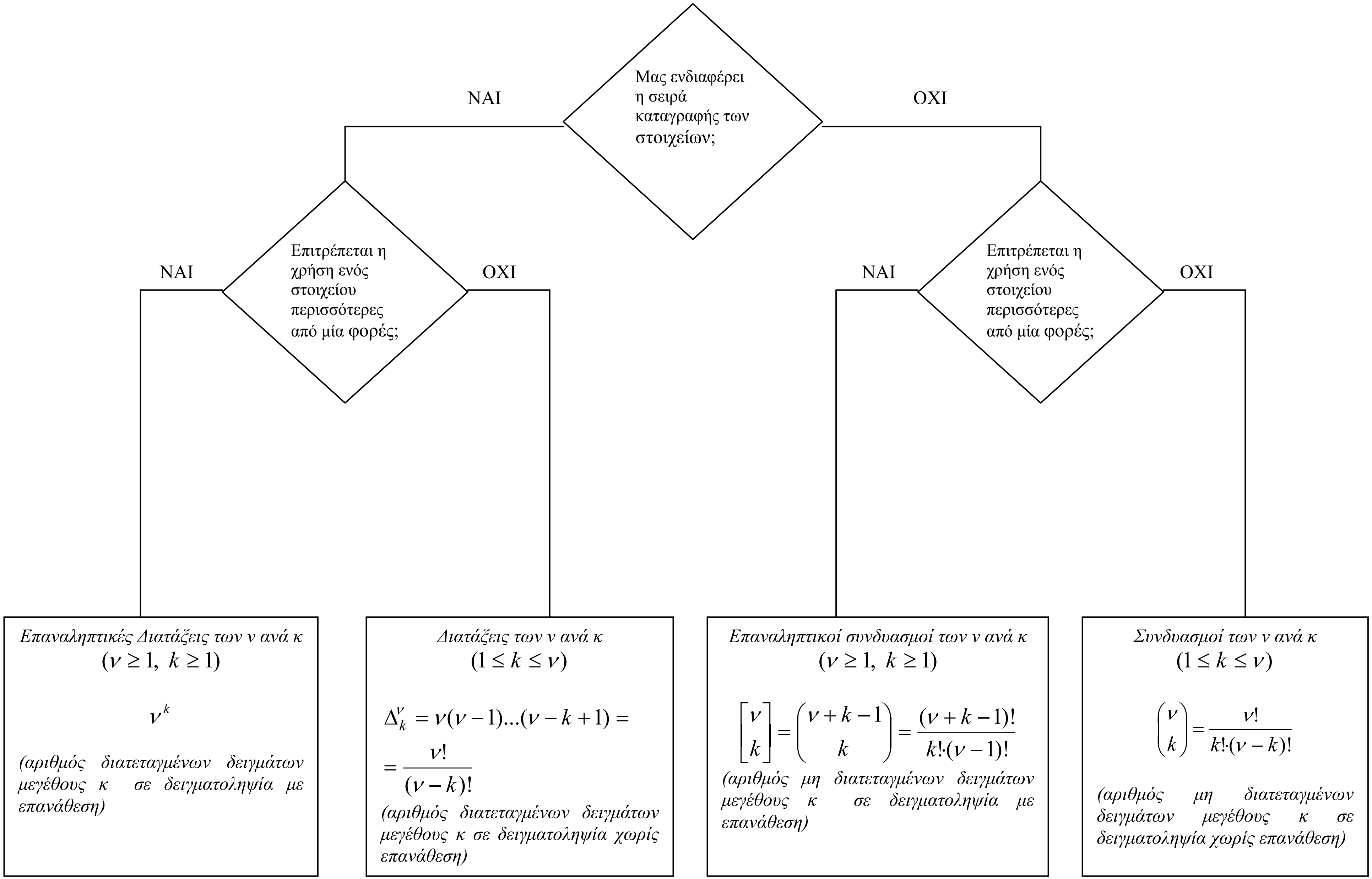
Για παράδειγμα, οι στήλες ΠΡΟΠΟ είναι επαναληπτικές διατάξεις των τριών ($\nu = 3$) συμβόλων 1, Χ, 2 ανά δεκατρία ($k = 13$). Δηλαδή, διατεταγμένες 13-άδες που δημιουργούνται από τα τρία σύμβολα 1, Χ, 2 τα οποία μπορούν να επαναλαμβάνονται (μέχρι και 13 φορές το καθένα). Επομένως, μπορούν να δημιουργηθούν $\underbrace{3 \cdot 3 \cdot .... \cdot 3}_{13} = 3^{13}$ διαφορετικές στήλες ΠΡΟΠΟ των δεκατριών αγώνων.

**Μεταθέσεις *k* ειδών στοιχείων:** Αν $r$ στοιχεία δεν είναι διαφορετικά αλλά ταξινομούνται σε $k$ διαφορετικά είδη με $r_1$ από αυτά όμοια μεταξύ τους (πρώτο είδος), $r_2$ από αυτά όμοια μεταξύ τους (δεύτερο είδος), …. και $r_k$ από αυτά όμοια μεταξύ τους ($k$ είδος), τότε ο αριθμός των **διαφορετικών** μεταθέσεων των $r$ στοιχείων είναι ίσος με:

$$\frac{r!}{r_1! \cdot r_2! \cdot ... \cdot r_k!}$$

*Απόδειξη: Παρατηρείστε ότι οι μεταθέσεις των r στοιχείων είναι r! και ότι τα $r_1$, $r_2$, …, $r_k$ στοιχεία των k ειδών δημιουργούν αντίστοιχα $r_1!$, $r_2!$,…, $r_k!$ όμοιες μεταθέσεις.*

Για παράδειγμα, οι **διαφορετικές** μεταθέσεις των 4 γραμμάτων της λέξης ΑΛΛΟ είναι, ΑΛΛΟ, ΑΛΟΛ, ΛΑΛΟ, ΛΑΟΛ, ΟΑΛΛ, ΛΛΑΟ, ΛΛΟΑ, ΑΟΛΛ, ΛΟΑΛ, ΛΟΛΑ, ΟΛΛΑ, ΟΛΑΛ, δηλαδή, συνολικά $\frac{4!}{1! \cdot 2! \cdot 1!} = 12$ και όχι 4!=24.


Μας ενδιαφέρει η σειρά καταγραφής των στοιχείων;
ΝΑΙ
ΟΧΙ
Επιτρέπεται η χρήση ενός στοιχείου περισσότερες από μία φορές;
ΝΑΙ
ΟΧΙ
Επιτρέπεται η χρήση ενός στοιχείου περισσότερες από μία φορές;
ΝΑΙ
ΟΧΙ
*Επαναληπτικές Διατάξεις των ν ανά κ*
$(\nu \geq 1,\ k \geq 1)$
$\nu^k$
*(αριθμός διατεταγμένων δειγμάτων μεγέθους κ σε δειγματοληψία με επανάθεση)*
*Διατάξεις των ν ανά κ*
$(1 \leq k \leq \nu)$
$\Delta_k^\nu = \nu(\nu-1)\ldots(\nu-k+1) = \dfrac{\nu!}{(\nu-k)!}$
*(αριθμός διατεταγμένων δειγμάτων μεγέθους κ σε δειγματοληψία χωρίς επανάθεση)*
*Επαναληπτικοί συνδυασμοί των ν ανά κ*
$(\nu \geq 1,\ k \geq 1)$
$\begin{bmatrix} \nu \\ k \end{bmatrix} = \dbinom{\nu+k-1}{k} = \dfrac{(\nu+k-1)!}{k!\cdot(\nu-1)!}$
*(αριθμός μη διατεταγμένων δειγμάτων μεγέθους κ σε δειγματοληψία με επανάθεση)*
*Συνδυασμοί των ν ανά κ*
$(1 \leq k \leq \nu)$
$\dbinom{\nu}{k} = \dfrac{\nu!}{k!\cdot(\nu-k)!}$
*(αριθμός μη διατεταγμένων δειγμάτων μεγέθους κ σε δειγματοληψία χωρίς επανάθεση)*