ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ

ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών

"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

Διπλωματική Εργασία

Άπειρες Σειρές : Η Ιστορική τους Εξέλιξη

Χρήστος Μινόπουλος

Επιβλέπων Καθηγητής

Ευστάθιος Γιαννακούλιας

Αθήνα

Οκτώβριος, 2007

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεπταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ……………………..από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1)……………………………………….(επιβλέπων Καθηγητής)	…………………	…………….
2)…………………………………………………	…………………	……….….
3)…………………………………………………	…………………	……………

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Μια σύντομη παρουσίαση της

ιστορικής εξέλιξης των απείρων σειρών

Η πρόταση Ι.45 των Στοιχείων του Ευκλείδη

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον

συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ

αποτέλεσε την αφετηρία μιας μακρόχρονης αναζήτησης για τους μαθηματικούς της Αρχ. Ελλάδας και του Δυτικού πολιτισμού. Μιας αναζήτησης που διήρκησε σχεδόν 20 αιώνες, για να καταλήξει στη σύλληψη και αυστηρή μαθηματική θεμελίωση της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος.

Μέσα σε αυτή την πορεία προέκυψε μια νέα μαθηματική θεωρία, ο Διαφορικός και Ολοκληρωτικός λογισμός που αποτέλεσε το θεμέλιο λίθο του σύγχρονου μαθηματικού οικοδομήματος.

Η πρόταση Ι.45, ανάγει το εμβαδόν πολυγωνικού χωρίου αρχικά σε εμβαδόν παραλληλογράμμου και σε συνδυασμό με τη ΙΙ.14

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον τετράγωνον συστήσασθαι.

τελικά σε εμβαδόν τετραγώνου. Ο *Πρόκλος (411 – 485)* σχολιάζοντας την Ι.45 αναγνωρίζει ότι η πρόταση αυτή ήταν η αιτία να ασχοληθούν οι Αρχ. Έλληνες με τον τετραγωνισμό του κύκλου. Καθώς όμως ο Ιπποκράτης ο Χίος (~ 430 π.Χ), ο Ιππίας (~ 425 π.Χ) και ο Δεινόστρατος (~ 350 π.Χ) απέτυχαν στον τετραγωνισμό με κανόνα και διαβήτη ο *Αρχιμήδης (287 – 212 π.Χ)*, που πήρε τη σκυτάλη αποδείχθηκε πιο προσεκτικός . Αγνόησε τον τετραγωνισμό του κύκλου και στράφηκε προς τον τετραγωνισμό άλλων καμπυλόγραμμων σχημάτων όπως της έλλειψης, της παραβολής και της σπείρας. Ασχολήθηκε επίσης με τον υπολογισμό όγκου σχημάτων εκ' περιστροφής όπως είναι ο κύλινδρος, ο κώνος και η σφαίρα. Για τον τετραγωνισμό της παραβολής και για τον υπολογισμό του εμβαδού της σπείρας υπολογίζει πεπερασμένα αθροίσματα, που σε συνδυασμό με τη μέθοδο της εξάντλησης θα οδηγήσουν στη λύση του προβλήματος. Η μέθοδος της εξάντλησης είναι η επινόηση του *Ευδόξου (408 – 355 π.Χ)* για το χειρισμό της έννοιας του ορίου. Συνεπώς, τα πεπερασμένα αθροίσματα σε συνδυασμό με τη μέθοδο της εξάντλησης είναι ουσιαστικά η έννοια της άπειρης σειράς που παρουσιάζεται με τη μορφή αυτή, τόσο στον τετραγωνισμό της παραβολής, όσο και στον υπολογισμό του εμβαδού της σπείρας.

Συμπερασματικά, οι άπειρες σειρές προέκυψαν στην Αρχ. Ελλάδα ως ακολουθίες γεωμετρικών σχημάτων γνωστού εμβαδού ή όγκου, με τις οποίες επιχειρήθηκε να προσεγγισθεί κατ' ουσίαν κάποιο μελετώμενο μέγεθος.

Με το πέρασμα των αιώνων, και καθώς οι αντιλήψεις των Αρχ. Ελλήνων για μεγάλο χρονικό διάστημα παρέμειναν άγνωστες, οι Ευρωπαίοι μαθηματικοί του Μεσαίωνα στην προσπάθεια τους να λύσουν προβλήματα κυρίως κινηματικής, άρχισαν να χρησιμοποιούν πιο ελεύθερα την ιδέα του απείρου. Οι πρώτες «αποδείξεις» για σύγκλιση ή απόκλιση απείρων σειρών, οφείλονται στον *Richard Suiseth – Swineshead (Calculator)* περί του *1340 – 1354* και στον *Nicolas Oresme (1323 – 1382)*.

Με τη σταδιακή επανεμφάνιση των Αρχ. Ελληνικών κειμένων από το 12^{ο} αιώνα και την αποδοχή τους από τη Παπική Εκκλησία, νέες γεωμετρικές μέθοδοι επινοούνται και σταδιακά επικρατούν. Οι μέθοδοι αυτές, που αντέγραφαν ή προσομοίαζαν εκείνες των Ελληνικών μαθηματικών, αν και δεν ήταν αυστηρά μαθηματικά τεκμηριωμένες, οδήγησαν τελικά σε αξιοποιήσιμα αποτελέσματα και έδωσαν τη δυνατότητα διαφυγής από τις καταξιωμένες Αρχαιοελληνικές μαθηματικές διαδικασίες. Προς τη κατεύθυνση αυτή, συνέβαλλε και το γεγονός ότι η ορθότητα των αποτελεσμάτων προέκυπτε μέσω της καθημερινής πρακτικής και όχι από φιλοσοφικές αρχές οντολογικού περιεχομένου.

Από τους πρώτους που τροποποίησαν την Αρχ. Ελληνική αποδεικτική διαδικασία ήταν ο *Simon Stevin (1548 – 1620)* που με γεωμετρικές προσεγγίσεις, αλλά χωρίς να ακολουθεί την αυστηρή αποδεικτική διαδικασία του Αρχιμήδη, υπολόγισε κέντρα βάρους σωμάτων και υδροστατική πίεση στα τοιχώματα δοχείων. Η γεωμετρική αυτή αντίληψη περνώντας από τα αδιαίρετα του *Cavalieri (1598 -1647)* επιβιώνει μέχρι και το 17^{ο} αιώνα. Από τα μέσα του 17^{ου} αιώνα με τις εργασίες των *Pietro Mengoli (1626 –*

1686), Blaise Pascal (1623- 1662) , Gilles Personne de Roberval (1602 – 1675), Pierre de Fermat (1601 – 1665) και John Wallis (1616 – 1703) παρατηρείται μια σταδιακή μετακίνηση σε μεθόδους περισσότερο αλγεβρικές .

Με την αλγεβροποίηση και την εισαγωγή αλγοριθμικών υπολογισμών, δίνεται η δυνατότητα στους μαθηματικούς της εποχής, αρχής γεννωμένης από το *Fermat*, να αναζητήσουν μια γενική μέθοδο που να επιλύει κλάσεις προβλημάτων και όχι μεμονωμένες περιπτώσεις. Οι αναζητήσεις αυτές οδήγησαν στη Θεωρία των Ροών του *Newton (1643 – 1727)* και στο Διαφορικό λογισμό του *Leibniz (1646 – 1716)*, όπου τα αναπτύγματα δυναμοσειρών έχουν κεντρικό ρόλο. Οι *Wallis, Nicolaus Mercator (1620 – 1687), Newton, Leibniz, Bernoulli, Jakob(1654 – 1705) και Johann (1667 – 1748)* εργάζονται εντατικά με άπειρες σειρές και έτσι από το τέλος του 17^{ου} αιώνα ένας μεγάλος όγκος αποτελεσμάτων έχει παραχθεί.

Από τα παραπάνω διαφαίνεται ότι οι άπειρες σειρές δεν προέκυψαν ως αυτόνομο αντικείμενο μελέτης, αλλά προήλθαν μέσα από την μεθοδολογία προσδιορισμού του ορισμένου ολοκληρώματος από την εποχή του Αρχιμήδη. Συνεπώς, η εννοιολογική τους εξέλιξη είναι στενά συνδεδεμένη με την ιστορική εξέλιξη του Ολοκληρωτικού και Διαφορικού Λογισμού.

Η ιδέα που έδωσε νέα δυναμική στις άπειρες σειρές το 17^{ο} αιώνα ήταν σίγουρα η ανακάλυψη από το *Newton* του Διωνυμικού Θεωρήματος. Με εργαλείο το θεώρημα αυτό, κατάφερε να αναπτύξει πλέον μια ολόκληρη κλάση συναρτήσεων σε πολυώνυμα.

Στη συνέχεια οι *Newton* και *Mercator*, ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο, χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των διαδοχικών διαιρέσεων σε συνδυασμό με τη μέθοδο των ροών ή με τον τύπο παρεμβολής του *Wallis* θα οδηγηθούν στο ανάπτυγμα του

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

Η σχέση αυτή θα αποτελέσει και το πρώτο ανάπτυγμα συνάρτησης σε δυναμοσειρά. Θα ακολουθήσουν μια πληθώρα άλλων αναπτυγμάτων από τους *Newton*, *James Gregory (1638 – 1675)* , *Leibniz* κλπ. Γρήγορα πλέον γίνεται αντιληπτό ότι τα αναπτύγματα αυτά μπορούν να χρησιμεύσουν για προσεγγίσεις των υπερβατικών αριθμών e και π.

Το τέλος του 17^{ου} αιώνα συνοδεύεται από μία πληθώρα αποτελεσμάτων σε ότι αφορά την άθροιση σειρών και τα αναπτύγματα δυναμοσειρών όπως :
α) Επιβεβαιώνονται και με νέες αποδείξεις γνωστά από το Μεσαίωνα συμπεράσματα (π.χ. το ότι η αρμονική σειρά αποκλίνει).
β) Τα νέα αναπτύγματα τριγωνομετρικών συναρτήσεων ταυτοποιούνται από μαθηματικούς που εργάστηκαν ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλον (*Gregory - Newton, Newton – Mercator, Leibniz – Newton*).
γ) Γίνονται οι πρώτες απόπειρες συγκέντρωσης και συστηματοποιήσεις των λύσεων από τον *Jakob Bernoulli.*

Παρόλα αυτά, κρίσιμα ερωτήματα επανέρχονταν κατά καιρούς στην επιφάνεια και ζητούσαν απάντηση όπως:
α) Ο χειρισμός των άπειρων αθροισμάτων γίνεται με τους ίδιους κανόνες που αφορούν στα πεπερασμένα αθροίσματα ;
β) Τι συμβαίνει με την σύγκλιση των σειρών ;
γ) Ποιος ο ρόλος της συνέχειας στη σύγκλιση;

Η ευφορία που δημιούργησε η ραγδαία ανάπτυξη των σειρών, δεν επέτρεψε να αναπτυχθεί ο απαιτούμενος προβληματισμός για το χειρισμό των απείρων αθροισμάτων. Οι μαθηματικοί του 17^{ου} αιώνα προσέθεταν, πολλαπλασίαζαν, ολοκλήρωναν και παραγοντοποιούσαν όρο προς όρο τις σειρές και τις δυναμοσειρές χωρίς να τους απασχολεί το ερώτημα της σύγκλισης, αν και τόσο ο *Newton* όσο και ο *Leibniz* είχαν επισημάνει την ανάγκη για περαιτέρω διερεύνηση.

Ο 18^{ος} αιώνας κυριαρχείται από τη μορφή του *Leonhard Euler (1707 – 1783)*, που έβαλε την Ανάλυση σε νέες βάσεις εγκαταλείποντας οριστικά την γεωμετρική προσέγγιση και αντικαθιστώντας την με την έννοια της αναλυτικής συνάρτησης. Την ίδια περίπου εποχή οι Άγγλοι μαθηματικοί *Brook Taylor (1685 - 1731)* και *Colin Maclaurin (1698 – 1746)* επιτυγχάνουν το ανάπτυγμα συναρτήσεων σε δυναμοσειρά μέσω μιας απλής διαδικασίας διαδοχικών παραγωγίσεων. Το αποτέλεσμα αυτό έδωσε την ιδέα στον *Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813),* να διατυπώσει την υπόθεση ότι κάθε αναλυτική συνάρτηση αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά και να προσπαθήσει να απαλείψει από το Διαφορικό και Ολοκληρωτικό Λογισμό τα απειροστά και τα όρια, θέτοντας τις άπειρες σειρές ως θεμέλιο λίθο της θεωρίας αυτής.

Η ανακάλυψη από τον *Siméon-Denis Poisson (1781 – 1840)* και τον *Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857)* αναπτυγμάτων δυναμοσειρών που όμως, για συγκεκριμένες τιμές, δεν συνέκλιναν στη συνάρτηση από την οποία προήλθαν, θέτει σε αμφισβήτηση των ισχυρισμό του *Lagrange.* Γίνεται πλέον επιτακτική ανάγκη να επαναπροσδιορισθεί η σύγκλιση σειρών. Προς την κατεύθυνση αυτή κινούνται οι *Bernhard Bolzano (1781 – 1848), Jean Batiste Joseph Fourier (1768 – 1830)* και ο *Cauchy*. Τα αποτελέσματα θα φανούν τη δεύτερη δεκαετία του αιώνα όταν οι *Cauchy, Nils Henrik Abel (1802 – 1829), Lejeune Dirichlet(1805 – 1859)* διατυπώνουν μια σειρά κριτηρίων σύγκλισης που θα έρθουν να προστεθούν στα ήδη γνωστά κριτήρια των *Leibniz, Euler*, *D'Alembert*, και *Maclaurin*. Το 1854 ο *Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 -1866)* αποσαφήνισε του όρους της σύγκλισης και της κατά απόλυτο τιμή σύγκλισης, καθώς απέδειξε ότι αναδιατάσσοντας τους όρους σειράς που συγκλίνει υπό συνθήκη μπορούμε ή να την κάνουμε να συγκλίνει σε οποιαδήποτε τιμή ή να αποκλίνει. Ασχολούμενος με το ίδιο πρόβλημα ο *Dirichlet*, ερεύνησε περισσότερο την κατά απόλυτο τιμή σύγκλιση για να διατυπώσει το συμπέρασμα ότι στην περίπτωση αυτή η αναδιάταξη των όρων δεν επηρεάζει την σύγκλιση. Ταυτόχρονα με την έννοια της σύγκλισης αρχίζουν να αποσαφηνίζονται και οι αναγκαίες συνθήκες για τον ορθό χειρισμό των σειρών ενώ παράλληλα κάνουν την εμφάνιση τους και οι πρώτες δυναμοσειρές μιγαδικής μεταβλητής.

Οι εργασίες των *Cauchy* και *Riemann* για το ορισμένο ολοκλήρωμα αποτελούν την τελική σύζευξη των γεωμετρικών διαδικασιών άθροισης, που οι μαθηματικοί του $18^{ου}$ αιώνα ήθελαν να αποφύγουν, με τις αυστηρές διαδικασίες της ανάλυσης του $19^{ου}$ αιώνα.

Από το $18^{ο}$ αιώνα ο *Euler* σε αντίθεση με τον *Cauchy* χρησιμοποιούσε αποκλίνουσες σειρές αποδίδοντας σε αυτές τιμές και όχι άθροισμα. Ο *Cauchy* επηρεασμένος από τις θρησκευτικές του αντιλήψεις δεν αποδέχεται το υπαρκτό άπειρο και έτσι επιλέγει να αποβάλλει από την Ανάλυση τις αποκλίνουσες σειρές. Όμως προς το τέλος του $19^{ου}$

αιώνα οι *Georg Frobenius (1849 – 1917)*, *Otto Holder(1859-1937)*, *Ernesto Cesaro (1859 – 1906)* και *Emil Borel (1871 – 1956)* επαναφέρουν στο προσκήνιο τις αποκλίνουσες σειρές, προσπαθώντας να επεκτείνουν τον ορισμό της σύγκλισης ώστε να περιλαμβάνει και «αθροίσματα» σειρών που αποκλίνουν.

Η Αρχαία Ελλάδα

Η πρώτη ευρέως γνωστή αναφορά στη διαδικασία της άθροισης μη πεπερασμένων το πλήθος προσθετέων είναι εκείνη του *Ζήνωνα (490 – 425 π.Χ)* στα γνωστά παράδοξα της διχοτομίας και του Αχιλλέα όπως αναφέρονται από τον Αριστοτέλη στα Φυσικά.

> πρῶτος μὲν ὁ περὶ τοῦ μὴ κινεῖ-
> σθαι διὰ τὸ πρότερον εἰς τὸ ἥμισυ δεῖν ἀφικέσθαι τὸ φε-
> ρόμενον ἢ πρὸς τὸ τέλος, περὶ οὗ διείλομεν ἐν τοῖς πρότε-
> ρον λόγοις δεύτερος δ᾽ ὁ καλούμενος ᾽Αχιλλεύς. ἔστι δ᾽
> *οὗτος, ὅτι τὸ βραδύτατον οὐδέποτε καταληφθήσεται θέον*
> *ὑπὸ τοῦ ταχίστου. ἔμπροσθεν γὰρ ἀναγκαῖον ἐλθεῖν τὸ διῶ-*
> *κον ὅθεν ὥρμησεν τὸ φεῦγον, ὥστε ἀεί τι προέχειν ἀναγ-*
> *καῖον τὸ βραδύτερον.*
>
> *Φυσικά VI 239b10 – b18*

Από την εμφάνιση τους τα παράδοξα αποτέλεσαν την αιτία ενός εκτεταμένου προβληματισμού ανάμεσα στους μαθηματικούς και φιλοσόφους. Τα ερωτήματα που προέκυψαν ήταν δύο ειδών :

α) Οντολογικού περιεχομένου που αφορούσαν στο ΠΩΣ θα προκύψει και ΠΩΣ θα ολοκληρωθεί η κίνηση.

β) Ποσοτικού περιεχομένου που αφορούσαν στο ΠΟΤΕ θα ολοκληρωθεί χρονικά η κίνηση.

Οι απαντήσεις στα δύο αυτά ερωτήματα διαμόρφωσαν εν τέλει και τα θεμέλια των σύγχρονων μαθηματικών με τη μορφή της μαθηματικής λογικής, της θεωρίας συνόλων και του Απειροστικού Λογισμού.

Ο Αριστοτέλης προσεγγίζει στα Φυσικά την οντολογική διάσταση των παραδόξων.

Α) Αναγνωρίζει ότι και τα δύο παράδοξα περιγράφουν την ίδια κατάσταση. Για το μεν παράδοξο της «διχοτομίας» η απόσταση που κάθε φορά καλύπτεται προς την απόσταση που έχει ήδη καλυφθεί είναι σε λόγο 1 / 2, ενώ στο παράδοξο του

«Αχιλλέα» ο αντίστοιχος λόγος είναι 1 / n με n οποιονδήποτε θετικό ακέραιο αριθμό.

Β) Επικεντρώνεται στην αντίφαση που διαφαίνεται μέσα από τα δύο παράδοξα · ότι δηλαδή ο χρόνος που απαιτείται για να διανυθεί ένα διάστημα δεν μπορεί να είναι άπειρος και συνεπώς η κίνηση που περιγράφεται πρέπει να ολοκληρώνεται σε πεπερασμένο χρόνο.

Γ) Θέτει το εύλογο ερώτημα : Πως είναι λοιπόν δυνατόν το άθροισμα άπειρων το πλήθος βημάτων να αντιστοιχεί σε πεπερασμένο χρόνο;

Η εξήγηση του Αριστοτέλη, με σύγχρονα μαθηματικά είναι ότι η σχέση μεταξύ του μήκους διαστήματος και του χρόνου που χρειάσθηκε για να διανυθεί αυτό το διάστημα είναι μια σχέση ισοδυναμίας .

Έστω $A = \{ x / x$ το μήκος του διαστήματος που καλύφθηκε σε χρόνο $t \}$

και $B = \{ t_x / t_x$ ο χρόνος που απαιτήθηκε για να καλυφθεί το διάστημα $x \}$

Ο ισχυρισμός του Αριστοτέλη είναι ισοδύναμος με τα παρακάτω :
Αν το Α είναι απειροσύνολο τότε και το Β θα είναι απειροσύνολο και αντιστρόφως. Ακόμη αν το Α είναι πυκνό τότε και το Β θα είναι πυκνό και αντιστρόφως. Άρα ο Ζήνων με τον ισχυρισμό του ότι δεν υπάρχει κίνηση υπονοεί, λανθασμένα, ότι ο χρόνος δηλ. το σύνολο Β δεν είναι πυκνό παρόλο που το Α είναι ως γνωστόν πυκνό.

Ο Αριστοτέλης επεξηγεί το λάθος στα παράδοξα του Ζήνωνα ως εξής : Είναι γνωστό το γεγονός ότι δεν είναι δυνατόν άπειρα το πλήθος αντικείμενα να συσχετισθούν - ἅψασθαι – ένα προς ένα με τον πεπερασμένο χρόνο. Όμως είναι δυνατόν απείρως διαιρετά αντικείμενα να συσχετισθούν με τον πεπερασμένο χρόνο, γιατί τότε ο χρόνος είναι άπειρος με την έννοια αυτή, δηλαδή της επ΄ άπειρον διαίρεσης , και συνεπώς στην πραγματικότητα έχουμε άπειρο χρόνο και όχι πεπερασμένο.

διὸ καὶ ὁ Ζήνωνος λόγος
ψεῦδος λαμβάνει τὸ μὴ ἐνδέχεσθαι τὰ ἄπειρα διελθεῖν ἢ
ἅψασθαι τῶν ἀπείρων καθ᾽ ἕκαστον ἐν πεπερασμένῳ χρόνῳ.
διχῶς γὰρ λέγεται καὶ τὸ μῆκος καὶ ὁ χρόνος ἄπειρον, καὶ
ὅλως πᾶν τὸ συνεχές, ἤτοι κατὰ διαίρεσιν ἢ τοῖς ἐσχά-
τοις. τῶν μὲν οὖν κατὰ τὸ ποσὸν ἀπείρων οὐκ ἐνδέχεται ἅψα-
σθαι ἐν πεπερασμένῳ χρόνῳ, τῶν δὲ κατὰ διαίρεσιν ἐνδέ-
χεταιῤ καὶ γὰρ αὐτὸς ὁ χρόνος οὕτως ἄπειρος. ὥστε ἐν τῷ
ἀπείρῳ καὶ οὐκ ἐν τῷ πεπερασμένῳ συμβαίνει διιέναι τὸ

ἄπειρον, καὶ ἅπτεσθαι τῶν ἀπείρων τοῖς ἀπείροις, οὐ τοῖς πεπερασμένοις.

Φυσικά VI 233α21 – α31

Επανερχόμενοι στο ποσοτικό ερώτημα των παραδόξων εύκολα θα αναγνωρίσουμε την έννοια της σύγκλισης γεωμετρικής σειράς. Υπάρχουν ενδείξεις ότι στην Αρχ. Ελλάδα γνώριζαν πότε μια γεωμετρική σειρά συγκλίνει και πότε όχι.

Αν και η πρόταση IX.35 των Στοιχείων του Ευκλείδη αναφέρεται στην εύρεση του αθροίσματος πεπερασμένων διαδοχικών όρων γεωμετρικής προόδου, εντούτοις πουθενά στα Στοιχεία δεν υπάρχει αντίστοιχη πρόταση για την περίπτωση άπειρου πλήθους διαδοχικών όρων . Όμως ο Αριστοτέλης στα Φυσικά για να αιτιολογήσει τη φύση του απείρου και τον ισχυρισμό ότι το άπειρο που προσήλθε από την πρόσθεση είναι κατά κάποιο τρόπο το ίδιο με το άπειρο που προήλθε από την διαίρεση, αναφέρει τα εξής :

ἐν γὰρ τῷ πεπερασμένῳ μεγέθει ἂν λαβών τις ὡρισμένον προσλαμβάνῃ τῷ αὐτῷ λόγῳ, μὴ τὸ αὐτό τι τοῦ ὅλου μέγεθος περιλαμβάνων, οὐ διέξεισι τὸ πεπερασμένον· ἐὰν δ' οὕτως αὔξῃ τὸν λόγον ὥστε ἀεί τι τὸ αὐτὸ περιλαμβάνειν μέγεθος, διέξεισι, διὰ τὸ πᾶν πεπερασμένον ἀναιρεῖσθαι ὁτῳοῦν ὡρισμένῳ. ἄλλως μὲν οὖν οὐκ ἔστιν, οὕτως δ' ἔστι τὸ ἄπειρον, δυνάμει τε καὶ ἐπὶ καθαιρέσει (καὶ ἐντελεχείᾳ δὲ ἔστιν, ὡς τὴν ἡμέραν εἶναι λέγομεν καὶ τὸν ἀγῶνα)

Αριστοτέλης Φυσικά ΙΙΙ 206b3-b12

Κατά τον Heath [1] στο χωρίο αυτό ο Αριστοτέλης κάνει σαφή αναφορά στο ρόλο που παίζει ο λόγος της γεωμετρικής σειράς στη σύγκλιση της.

Σε μια αρχική πεπερασμένη ποσότητα παίρνουμε ένα κλάσμα της και προσθέσουμε σε αυτό διαδοχικά ποσότητες που βρίσκονται σε ίδιο λόγο (κάθε νέα ποσότητα που προστίθεται να έχει προς την προηγούμενη ποσότητα που προστέθηκε λόγο ίσο με εκείνον που είχε το πρώτο μέρος που πήραμε προς την αρχική ποσότητα). Αν το κλάσμα της ποσότητας που κάθε φορά παίρνουμε δεν περιλαμβάνει την αρχική πεπερασμένη ποσότητα τότε η αρχική ποσότητα δεν θα εξαντληθεί ποτέ, ενώ αν το κλάσμα περιλαμβάνει την αρχική πεπερασμένη ποσότητα τότε η αρχική ποσότητα θα εξαντληθεί.

[1] Heath T. Mathematics in Aristotle, σελ. 106

Δηλαδή η γεωμετρική σειρά με λόγο μικρότερο της μονάδας συγκλίνει, ενώ αν ο λόγος είναι μεγαλύτερος της μονάδας αποκλίνει.

Τα παράδοξα του Ζήνωνα αποτέλεσαν πεδίο έντονων φιλοσοφικών συζητήσεων στην Αρχαία Ελλάδα. Καθόσον όμως οι μαθηματικοί της Αρχ. Ελλάδας απέφευγαν να εξετάσουν την κίνηση – και ως εκ τούτου το χρόνο - ως παράμετρο που υπεισέρχεται στις γεωμετρικές οντότητες, δεν φαίνεται να ασχολήθηκαν ιδιαίτερα με το να αντικρούσουν ή να επιχειρηματολογήσουν υπέρ των παραδόξων. Εντούτοις, επειδή στην προσπάθεια τους να επιλύσουν τα τρία προβλήματα της αρχαιότητας επινόησαν καμπύλες που ορίζονται κινηματικά, αλλά και διότι η φιλοσοφική διάσταση υπεισέρχεται αναπόφευκτα στις μαθηματικές αντιλήψεις της εποχής, τα παράδοξα του Ζήνωνα επηρέασαν τον τρόπο που οι Έλληνες μαθηματικοί προσέγγιζαν έννοιες όπως το άπειρο και το απειροστό.

Στη προσπάθεια λοιπόν να μην υπεισέλθουν τα παράδοξα στη μαθηματική μεθοδολογία, οι Αρχ. Έλληνες απέφευγαν στις αποδείξεις τους την χρήση απείρων αθροισμάτων, όπως εξάλλου και απειροστών. Εντούτοις τόσο ο Αρχιμήδης όσο και ο Ευκλείδης, όταν για τις ανάγκες των αποδείξεων χρειάστηκαν άπειρα αθροίσματα, κατέφευγαν σε μία μέθοδο που αργότερα ο Βέλγος μοναχός του 16^{ο} αιώνα *Gregory* του *St.Vincent* ονόμασε μέθοδο της εξάντλησης.

Η μέθοδος της εξάντλησης

Η μέθοδος της εξάντλησης προέκυψε στην Αρχ. Ελλάδα, ως εργαλείο για την επίλυση του προβλήματος του τετραγωνισμού του κύκλου, την κατασκευή δηλαδή ενός τετραγώνου με εμβαδό ίσο με δεδομένου κύκλου. Ο τετραγωνισμός του κύκλου, εμφανίζεται να έχει απασχολήσει για πρώτη φορά τον *Αναξαγόρα (499 – 428 π.Χ)* καθώς εκείνος ήταν στη φυλακή για πολιτικούς λόγους. Ο *Αντιφών (480 -411 π.Χ)* φαίνεται να έλυσε το πρόβλημα εγγράφοντας κανονικό πολύγωνο και διχοτομώντας διαδοχικά τα τόξα. Πίστευε ότι με τον τρόπο αυτό θα ελάμβανε τελικά ένα κανονικό πολύγωνο που οι πλευρές του καθώς πλέον θα ήταν πολύ μικρές θα ταυτίζονταν με εκείνες του κύκλου. Αν και η μέθοδος επικρίθηκε από τον *Αριστοτέλη (384 -322 π.Χ*) διότι αντιβαίνει στις αρχές τις γεωμετρίας (Φυσικά Ι.2.185^{α}14-17), εντούτοις η ιδέα αυτή επρόκειτο να εξελιχθεί από το *Εύδοξο* στη μέθοδο της εξάντλησης για να αποτελέσει στα χέρια του *Αρχιμήδη* στο ποιο ισχυρό εργαλείο για προβλήματα που αφορούσαν δυο μεγέθη ανόμοια, ετερογενή ή ασύμμετρα όπως για παράδειγμα στον υπολογισμό σχέσεων μεταξύ εμβαδών απλών καμπύλων σχημάτων - κύκλος παραβολή έλλειψη – και πολυγώνων σχημάτων, υπολογισμό σχέσεων όγκων μεταξύ κώνου και πυραμίδας, σφαιρών κλπ.

Η μέθοδος της εξάντλησης συνίσταται σε διαδοχικές προσεγγίσεις του ζητούμενου μεγέθους από μια ποικιλία γεωμετρικών σχημάτων. Η ισότητα αποδεικνύεται με ένα τελικό επιχείρημα απαγωγής σε άτοπο που επιτυγχάνεται μέσω μίας διπλής άντίφασης. Επειδή η μέθοδος δεν είναι ευρετική απαιτεί την εκ των προτέρων γνώση της τιμής του μεγέθους που εξετάζεται. Αυτό αποτελεί και το μειονέκτημα της καθώς απαιτεί από τους μαθηματικούς ισχυρή διαίσθηση για να βρουν την ορθή σχέση στην οποία πρέπει να καταλήξουν. Η μέθοδος χρησιμοποιήθηκε από τον Ευκλείδη στα Στοιχεία κυρίως στο XII Βιβλίο αλλά και από τον Αρχιμήδη για τον υπολογισμό του εμβαδού σπείρας, για τον τετραγωνισμό της παραβολής, για τον υπολογισμό όγκων εκ περιστροφής. Στις προτάσεις αυτές ο Αρχιμήδης χρησιμοποίησε την μέθοδο κατασκευάζοντας συνήθως μία αύξουσα I_1, I_2, I_3, …I_ν και μία φθίνουσα C_1, C_2, C_3, …C_ν ακολουθία γεωμετρικών σχημάτων μεταξύ των οποίων βρισκόταν το μέγεθος S που έπρεπε να προσδιορισθεί. Για το μέγεθος αυτό είχε υπολογίσει, μέσω μιας μηχανικής συνήθως διαδικασίας, την πραγματική τιμή του K. Μέσω μια σειράς διαδοχικών προσεγγίσεων κατέληγε σε

$$I_1 < I_2 < I_3 < \ldots < I_\nu < S < C_\nu < \ldots < C_3 < C_2 < C_1$$

Στη συνέχεια αποδείκνυε ότι η διαφορά $C_\nu - I_\nu$ μπορούσε για κατάλληλο ν να γίνει μικρότερη από συγκεκριμένο μέγεθος ή ο λόγος C_ν / I_ν μπορούσε για κατάλληλο ν να γίνει μικρότερος από το λόγο δύο συγκεκριμένων μεγεθών (του μεγαλύτερου προς το μικρότερου). Στο τελευταίο βήμα είχε

$$I_\nu < S < C_\nu \text{ και } I_\nu < K < C_\nu$$

Με απαγωγή εις άτοπο απέρριπτε την περίπτωση $K > S$ και $K < S$ οπότε προέκυπτε το ζητούμενο $K = S$.

Η μέθοδος της εξάντλησης είναι μια μαθηματικά αυστηρή αποδεικτική διαδικασία που θεμελιώνεται μαθηματικά από τις παρακάτω ισοδύναμες προτάσεις [2]:

[2] Baron M.The origins of infinitesimal calculus, σελ.35

Α1) Δοθέντων δύο μεγεθών α και β με α > β υπάρχει φυσικός αριθμός n τέτοιος ώστε nβ>α (Στοιχεία V ορισμός 4).

Α2) Δοθέντων δύο μεγεθών α και β με α > β υπάρχει φυσικός αριθμός n τέτοιος ώστε n(α –β) >γ για οποιοδήποτε μέγεθος γ ομοειδές με τα α και β (Περί σφαίρας και κυλίνδρου, Βιβλίο Ι).

Β) Δοθέντων δύο μεγεθών, αν από το μεγαλύτερο μέγεθος αφαιρέσουμε ποσότητα μεγαλύτερη ή ίση με το μισό της και από αυτό που απέμεινε πάλι αφαιρέσουμε ποσότητα ίση ή μεγαλύτερη από το μισό της και συνεχίσουμε με αυτό τον τρόπο τότε θα προκύψει μέγεθος μικρότερο από το μικρότερο των δύο μεγεθών. (Στοιχεία Χ.Ι). Δηλαδή αν α > β τότε υπάρχει φυσικός αριθμός n τέτοιος ώστε

$$\beta > a(1-p)^n \quad p \geq 1/2 .$$

Παρόλα αυτά η μέθοδος δεν παρείχε τον επιθυμητό βαθμό γενίκευσης. Το αποτέλεσμα ήταν η λύση των προβλημάτων να βασίζεται σε ιδιοφυείς κάθε φορά ιδέες, που όμως δεν ήταν ικανές να δώσουν την πληθώρα αποτελεσμάτων που είναι απαραίτητα για την εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών. Η μέθοδος αναβιώνει από τους μαθηματικούς του $16^{ου}$ αιώνα, αλλά οι δυσκολίες που αντιμετώπισαν τους οδήγησαν στο να εγκαταλείψουν σταδιακά την αυστηρή μεθοδολογία της απαγωγής σε άτοπο και της διπλής άρνησης για να την αντικαταστήσουν με επιχειρήματα που αφορούν διαδικασίες με άπειρο πλήθος βημάτων και με απειροστά.

Τα άπειρα αθροίσματα και η μέθοδος της εξάντλησης

Τα προβλήματα που οδήγησαν, τους Αρχ. Έλληνες μαθηματικούς στην έννοια των απείρων σειρών ήταν το πρόβλημα του τετραγωνισμού καμπυλών και υπολογισμού όγκου εκ περιστροφής.

Ο Αρχιμήδης αντιμετώπισε τα προβλήματα αυτά χωρίς να χρησιμοποιήσει καθόλου την «άπειρη» άθροιση, αλλά συνδυάζοντας γνωστές σχέσεις για πεπερασμένα αθροίσματα με τη μέθοδο της εξάντλησης. Έτσι η έννοια της «άπειρης σειράς» μόνο εν δυνάμει υπάρχει στα έργα του Αρχιμήδη.

Π.χ. για τον υπολογισμό του εμβαδού σπείρας χρησιμοποίησε τις γνωστές από τους Πυθαγορείους σχέσεις :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \text{ και } \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$$

ενώ για το εμβαδό παραβολής κάνει χρήση του πεπερασμένου αθροίσματος n διαδοχικών όρων $α_1, α_2,…,α_n$ γεωμετρικής προόδου με $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$, σχέση που είναι *γνωστή* από την πρόταση IX.35 των Στοιχείων του Ευκλείδη.

Πέρα από αυτά τα άπειρα αθροίσματα δεν φαίνεται να απασχόλησαν ιδιαίτερα τους Αρχ. Έλληνες μαθηματικούς. Προσπαθώντας να ανιχνεύσουμε τους λόγους για τους οποίους συνέβη αυτό, θα επικεντρωθούμε σε τρεις συνιστώσες :

- Στις φιλοσοφικές αντιλήψεις.
- Στη φύση των προβλημάτων που η λύση τους οδήγησε στις άπειρες σειρές .
- Στις τεχνικές που αναπτύχθηκαν για την επίλυση τους.

Οι φιλοσοφικές αντιλήψεις της εποχής, που επηρεάστηκαν και από τα παράδοξα, εκφράζονται από τον Αριστοτέλη.

- Οι μαθηματικοί δεν χρησιμοποιούν μεγέθη που αυξάνουν ή μειώνονται επ’ άπειρον αλλά πεπερασμένες ποσότητες που μπορούν να γίνουν όσο μεγάλες ή μικρές επιθυμούμε.
- Υπάρχει το πραγματικό και το εν’ δυνάμει άπειρο. Καθώς ο κόσμος είναι πεπερασμένος δεν είναι δυνατόν οποιοδήποτε πολλαπλάσιο πεπερασμένου μεγέθους να γίνει πραγματικά άπειρο. Όμως η διαίρεση μεγέθους συνεχίζεται διαρκώς χωρίς ποτέ να προκύψει αδιαίρετη ποσότητα.
- Η κίνηση ανήκει στην τάξη των αντικειμένων που εξετάζονται με ποιοτικά χαρακτηριστικά και είναι συνεχής.

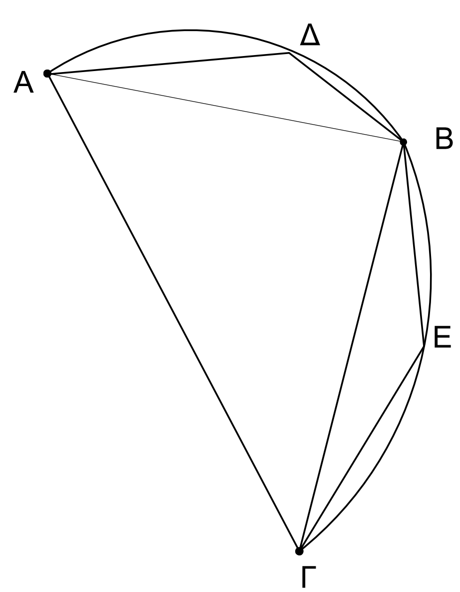
Ιστορικά τώρα τα προβλήματα που έφεραν τα άπειρα αθροίσματα στο προσκήνιο ήταν προβλήματα γεωμετρικά, κινηματικής, υπολογισμού κέντρου βάρους, υδροστατικής κλπ. Τα γεωμετρικά προβλήματα εξαντλήθηκαν και επιλύθηκαν με τις εργασίες του Αρχιμήδη που προαναφέραμε, ενώ τα προβλήματα κινηματικής δεν είχαν θέση στα Αρχαία Ελληνικά μαθηματικά, καθώς οι Αριστοτελικές αντιλήψεις επέβαλαν ως ερευνητικό πεδίο των μαθηματικών να είναι αντικείμενα που δεν βρίσκονται σε κίνηση (Φυσικά 198) μια και η κίνηση έχει ποιοτικά και όχι ποσοτικά χαρακτηριστικά.

Ιστορικά και πάλι, οι τεχνικές επίλυσης των απείρων σειρών είχαν να κάνουν με την έννοια του συνεχούς και τα απειροστά. Προσεγγίστηκαν δε αρχικά με την έννοια των αδιαίρετων και του πραγματικού απείρου που όμως ο Αριστοτέλης είχε απορρίψει. Αν και ο Δημόκριτος φαίνεται να ασχολήθηκε με ένα είδος απειροστών καθώς επίσης και με το συνεχές, που προσπάθησε να το αντιμετωπίσει μέσω του διακριτού, εντούτοις καθώς οι αντιλήψεις του επικρίθηκαν έντονα από την Ελεατική σχολή, σταδιακά εγκαταλείφθηκαν.

Η μέθοδος της εξάντλησης θα αποτελέσει είτε με την αρχική της μορφή, είτε με παραλλαγμένες μορφές το βασικό εργαλείο επίλυσης προβλημάτων που αφορούν άπειρα αθροίσματα γεωμετρικών σχημάτων και κατά τη διάρκεια του $16^{ου}$ και $17^{ου}$ αιώνα.

Αρχιμήδης ***(287 – 212 π.Χ.)***

Καθώς προαναφέραμε ο τετραγωνισμός της παραβολής από τον Αρχιμήδη έγινε με τη μέθοδο της εξάντλησης χρησιμοποιώντας το πεπερασμένο άθροισμα n-διαδοχικών όρων γεωμετρικής προόδου. Η ιδέα του ήταν να κατασκευασθούν ευθύγραμμα σχήματα μέσα στο παραβολικό τμήμα ώστε η διαφορά του εμβαδού αυτών των ευθυγράμμων σχημάτων από το εμβαδόν του παραβολικού χωρίου να είναι μικρότερη από κάθε δοσμένη ποσότητα.



Ο Αρχιμήδης χρησιμοποιεί για το σκοπό αυτό τρίγωνα. Στο παραβολικό τμήμα εγγράφει με ειδικό τρόπο το τρίγωνο ΑΒΓ. Στο τμήμα που απομένει αν αφαιρέσουμε το τρίγωνο ΑΒΓ, εγγράφει τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΒΕΓ όπου Δ και Ε τα μέσα των τόξων ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα. Στα τέσσερα εναπομείναντα τμήματα κατασκευάζει με παρόμοιο τρόπο τρίγωνα κ.ο.κ. Υπολογίζει ότι το συνολικό εμβαδόν των τριγώνων που κατασκευάζονται σε κάθε στάδιο ισούται με το 1 / 4 του εμβαδού των τριγώνων που έχει κατασκευασθεί στο προηγούμενο στάδιο. Αυτό που χρειάζεται τώρα ο Αρχιμήδης είναι ο υπολογισμός του αθροίσματος της γεωμετρικής σειράς

$a+\frac{1}{4}a+\left(\frac{1}{4}\right)^2 a+...+\left(\frac{1}{4}\right)^n a+...$ όπου α είναι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

Ο Αρχιμήδης δε χρησιμοποίησε τον τύπο του αθροίσματος που υπάρχει στο IX Βιβλίο των Στοιχείων πρόταση 35, αλλά έγραψε τα αθροίσματα στη μορφή

$$a+\frac{1}{4}a+\left(\frac{1}{4}\right)^2 a+...+\left(\frac{1}{4}\right)^n a+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n a=\frac{4}{3}a$$

και συμπλήρωσε την απόδειξη με τη διπλή αντίφαση που είχε κάνει και στο έργο του «κύκλου μέτρησης».

Υπέθεσε δηλαδή ότι το παραπάνω εμβαδό $E=\frac{4}{3}a$ δεν είναι ίσο με το εμβαδό Α, του παραβολικού τμήματος.

- Αν Α > Ε τότε μπορούν να εγγραφούν νέα τρίγωνα στο τμήμα ώστε Α – Γ < Α – Ε όπου Γ το συνολικό εμβαδό των εγγεγραμμένων τριγώνων. Τότε όμως Γ > Ε που είναι αδύνατον εφόσον ο τύπος της άθροισης δίνει ότι $\Gamma<\frac{4}{3}a=E$.
- Αν Α < Ε τότε το n ορίζεται ώστε $\left(\frac{1}{4}\right)^n a<E-A$. Εφόσον $E-\Gamma=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n a<\left(\frac{1}{4}\right)^n a\Rightarrow A<\Gamma$ που είναι αδύνατον.
- Άρα Ε = Γ .

Το ενδιαφέρον στην απόδειξη είναι η διαδικασία εύρεσης του αθροίσματος γεωμετρικής σειράς. Ο Αρχιμήδης το δείχνει με σειρά 5 όρων γιατί δεν είναι σε θέση να εκφράσει το άθροισμα για αυθαίρετο πλήθος όρων. Όμως η μέθοδος του γενικεύεται εύκολα.

Σε σύγχρονη γλώσσα ο Αρχιμήδης άρχισε με την παρατήρηση ότι αν n τυχαίος φυσικός τότε

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{n} a+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n} a=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} a$$

και άρα

$$a+\frac{1}{4}a+\left(\frac{1}{4}\right)^{2} a+\ldots+\left(\frac{1}{4}\right)^{n} a+\frac{1}{3}\left[\frac{1}{4}a+\left(\frac{1}{4}\right)^{2} a+\ldots+\left(\frac{1}{4}\right)^{n} a\right]=$$

$$=a+\left(\frac{1}{4}a+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}a\right)+\ldots+\left[\left(\frac{1}{4}\right)^{2} a+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{2} a\right]+\ldots+\left[\left(\frac{1}{4}\right)^{n} a+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n} a\right]=$$

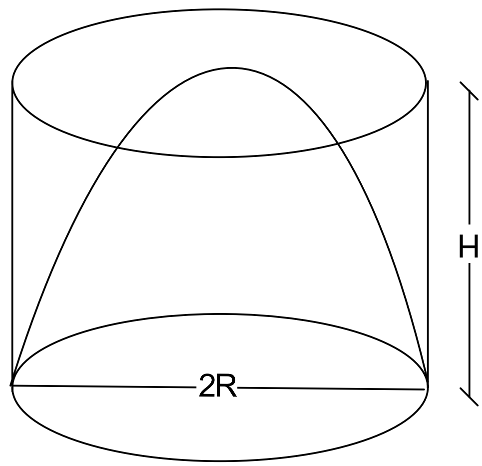
$$=a+\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}a+\ldots+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} a=$$

$$=a+\frac{1}{3}a+\frac{1}{3}\left[\frac{1}{4}a+\ldots+\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} a\right]$$

από την οποία προκύπτει το επιθυμητό αποτέλεσμα

$$a+\frac{1}{4}a+\left(\frac{1}{4}\right)^{2} a+\ldots+\left(\frac{1}{4}\right)^{n} a+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n} a=\frac{4}{3}a\ .$$

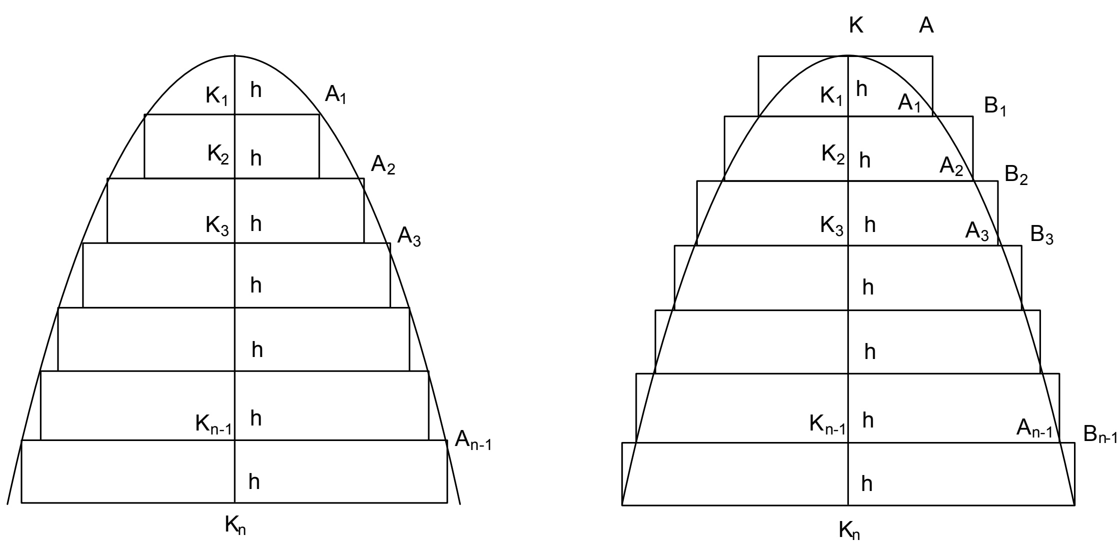
Στο έργο του *περί κωνοειδέων και σφαιροειδέων* ο Αρχιμήδης στις προτάσεις 21 και 22 αποδεικνύει ότι ο όγκος, V_{π} , παραβολοειδούς εκ περιστροφής ισούται με το ήμισυ του όγκου, K, του κυλίνδρου με την ίδια βάση : $V_{\pi} = K / 2 = \pi \cdot R^{2} \cdot H / 2$.



Σχήμα 2

Ο Αρχιμήδης τέμνει σε ίσα μέρη τον κύλινδρο με επίπεδα παράλληλα στη βάση.

Εγγράφει και περιγράφει στο παραβολοειδές κυλίνδρους με ύψος $h = \dfrac{H}{n}$.



Σχήμα 3

Έστω εγγεγραμμένοι κύλινδροι όγκου c_1, c_2 ,…c_n και περιγεγραμμένοι κύλινδροι όγκου π_1, π_2,…,π_n αντίστοιχα.

Τότε το άθροισμα των περιγεγραμμένων κυλίνδρων ισούται με

$\Pi_n = \pi h[(KA)^2 \ldots + (K_{n-1}B_{n-1})^2]$

και το άθροισμα το εγγεγραμμένων κυλίνδρων ισούται με

$C_n = \pi h[(K_1A_1)^2 + \ldots + (K_{n-1}A_{n-1})^2]$

όπου

$KA = K_1A_1$, $K_1B_1 = K_2A_2$, … , $K_{n-2}B_{n-2} = K_{n-1}A_{n-1}$

$\Pi_n - C_n = \pi h[(KA)^2 + (K_1B_1)^2 + \ldots + (K_{n-1}B_{n-1})^2 - (K_1A_1)^2 - (K_2A_2)^2 - \ldots - (K_{n-1}A_{n-1})^2]$

$\Pi_n - C_n = \pi \cdot h \cdot (K_{n-1} \cdot B_{n-1})^2 = \pi_n$

$\Pi_n - C_n = \pi \cdot h \cdot R^2$

όπου R η ακτίνα του κυλίνδρου που είναι εγγεγραμμένος στο παραβολοειδές και επειδή $h = \dfrac{H}{n}$ η παραπάνω διαφορά μπορεί να γίνει οσοδήποτε μικρή με κατάλληλη επιλογή του n.

Από την χαρακτηριστική ιδιότητα της παραβολής

$$\frac{K_iA_i^2}{R^2} = \frac{KK_i}{H} \Leftrightarrow \frac{K_iA_i^2}{R^2} = \frac{i \cdot h}{n \cdot h} = \frac{i}{n} \Leftrightarrow K_iA_i^2 = \frac{i}{n}R^2 \qquad (1)$$

και άρα

$$\frac{C_n}{K} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} c_i}{\pi \cdot H \cdot R^2} = \frac{\pi \cdot h \sum_{i=1}^{n-1} K_iA_i^2}{\pi \cdot nh \cdot R^2} \overset{(1)}{=} \frac{\pi \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{n} R^2}{\pi \cdot nh \cdot R^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} i}{n^2} \overset{1}{=} \frac{n(n-1)}{2n^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} < \frac{1}{2}$$

τελικά $C_n < \dfrac{K}{2}$. $\qquad$ (2)

Επίσης

$$\frac{\Pi_n}{K} = \frac{\pi \cdot h \sum_{i=1}^{n} K_i A_i^2}{\pi \cdot n \cdot h \cdot R^2} \overset{(1)}{=} \frac{\pi \cdot h \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n} R^2}{\pi \cdot n \cdot h \cdot R^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n} i}{n^2} = \frac{n(n+1)}{n^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$$

και άρα $\Pi_n > \dfrac{K}{2}$ $\qquad$ (3)

Από τις (2) και (3) έχουμε ότι : $C_n < \dfrac{K}{2} < \Pi_n$.

- Έστω ότι $V_\pi > \frac{K}{2}$ τότε για τα C_n, Π_n θα ισχύει ότι

  $\Pi_n - C_n < V_\pi - \frac{K}{2}$ και άρα $C_n > \frac{K}{2}$ για κατάλληλα μεγάλο n όμως είναι άτοπο λόγω της (2).

- Έστω $V_\pi < \frac{K}{2}$ τότε :

  $\Pi_n - C_n < \frac{K}{2} - V_\pi$ και άρα $\Pi_n < \frac{K}{2}$ για κατάλληλα μεγάλο n που είναι άτοπο λόγω της (3).

- Άρα $V_\pi = \frac{K}{2}$

Η Δυτική Ευρώπη ανακαλύπτει την Αρχαία Ελλάδα (800 – 1400)

Μέχρι το 12^o αιώνα ο Αρχιμήδης ήταν γνωστός στη Δυτική Ευρώπη, μόνο από το σχολιασμό του *Ευτόκιου (~ 480 – 540)* στα έργα του *Περί σφαίρας και κυλίνδρου* και *Κύκλου μέτρησης*. Αντιθέτως οι Άραβες είχαν μεταφράσει από τον 9^o και 10^o αιώνα τα Στοιχεία του Ευκλείδη μαζί με έργα του Αρχιμήδη του Απολλώνιου και του Πτολεμαίου. Μελετώντας και κατανοώντας τη μέθοδο της εξάντλησης υπολογίζουν όγκους εκ περιστροφής. Έτσι ο *Ibn-al-Haitham (~ 965 – 1039)* επεκτείνει τον υπολογισμό του όγκου παραβολοειδούς και για τις περιπτώσεις όπου ο άξονας περιστροφής δεν είναι οριζόντιος ή κατακόρυφος. Η απόδειξη γίνεται με τη μέθοδο της εξάντλησης κάνοντας χρήση και των σχέσεων

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad \text{και}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

τις οποίες αποδεικνύει γεωμετρικά.

Για τέσσερεις περίπου αιώνες οι Άραβες μελέτησαν και εμπλούτισαν τα Αρχαία Ελληνικά μαθηματικά για να παραδώσουν, μέσω των μεταφράσεων, την πολύτιμη κληρονομιά στη Δυτική Ευρώπη, σηματοδοτώντας την απαρχή της Ευρωπαϊκής Αναγέννησης.

Οι μεταφράσεις των Ελληνικών έργων αρχίζουν να εμφανίζονται στην Ευρώπη κατά τον 12^o και 13^o αιώνα και προέρχονται κυρίως από Αραβικές μεταφράσεις του $9^{ου}$ αιώνα. Ο *Gerard της Cremona (114-1187)* μετάφρασε από τα Αραβικά στα Λατινικά πολλά από τα μαθηματικά κείμενα των Αρχαίων Ελλήνων καθώς και Αράβων στοχαστών. Ανάμεσα σε αυτά μια Αραβική μετάφραση των *Στοιχείων του Ευκλείδη* καθώς και τη *(Μεγίστη) Μαθηματική Σύνταξις* του *Κλαύδιου Πτολεμαίου (85– 165)* (Αλμαγέστη στην Αραβική μετάφραση). Το έργο του *Gerard* αν και δεν έτυχε ιδιαίτερης αναγνώρισης, καθώς τα ενδιαφέροντα της εποχής αυτής σχετίζονται με τη θεολογία και τη μεταφυσική, εντούτοις επηρέασε αποφασιστικά την εξέλιξη της μαθηματικής σκέψης στην Ευρώπη.

Από τις αρχές του 12^{ου} αιώνα οι μεταφράσεις του Αριστοτέλη κυκλοφορούν στην Ευρώπη. Η εκκλησιαστική αντίληψη ότι τα Αρχαία Ελληνικά έργα είναι ειδωλολατρικά δημιουργήματα που αντίκεινται στο χριστιανικό δόγμα εγκαταλείπεται σταδιακά, με αποτέλεσμα από τα μέσα του 13^{ου} αιώνα τα Αριστοτελικά κείμενα να διδάσκονται και στα πανεπιστήμια. Το αποτέλεσμα ήταν οι Αριστοτέλειες ιδέες για το άπειρο καθώς και για την κίνηση να αποτελέσουν τον πυρήνα γόνιμων αναζητήσεων.

Με τις μεταφράσεις των Ελληνικών έργων αναπτύσσεται στα Ευρωπαϊκά πανεπιστήμια ένα ρεύμα συγκερασμού της Αρχαίας Ελληνικής φιλοσοφίας και της Χριστιανικής Θεολογίας του Μεσαίωνα που γίνεται γνωστό με το όνομα *Σχολαστικισμός*. Κύρια πηγή προβληματισμού απετέλεσαν για τους Σχολαστικούς τα έργα του Αριστοτέλη. Οι Σχολαστικοί αναγνωρίζουν τα δύο είδη απείρου του Αριστοτέλη κάπως τροποποιημένα καθότι η Χριστιανική θρησκεία αναγνωρίζει έναν άπειρο Θεό. Το 13^{ο} αιώνα ο πάπας Ιωάννης XXI αναγνωρίζει δύο ειδή απείρου, το κατηγορηματικό άπειρο του οποίου όλοι οι όροι γίνονται πραγματικά αντιληπτοί και το συγκατηγορηματικό άπειρο που περιορίζεται από τη δυνατότητα του απείρου [3]. Οι παπικές αυτές θέσεις επαναφέρουν στο προσκήνιο το οντολογικό πρόβλημα του απείρου. Ο *Thomas Bradwardine (1295 – 1349)* αναλαμβάνει να ξεκαθαρίσει λίγο τη κατάσταση αναφέροντας ότι το κατηγορηματικό άπειρο είναι μια ποσότητα χωρίς πέρας ενώ το συγκατηγορηματικό άπειρο είναι μια ποσότητα όχι τόσο μεγάλη αλλά που μπορεί να γίνει μεγαλύτερη.

Το συγκατηγορηματικό άπειρο οδηγεί κατευθείαν στο πρόβλημα των αδιαιρέτων, όπου και πάλι διατυπώνονται απόψεις υπέρ ή κατά της Αριστοτελικής αντίληψης. Ταυτόχρονα διατυπώνονται και κάποιες ενδιάμεσες απόψεις όπως αυτές του *Bradwardine,* που στη εργασία του *De proportionibus velocitatum in motibus* (1328) υποστηρίζει αλλά και επικρίνει τις απόψεις του Αριστοτέλη. Έτσι ενώ δεν αποδέχεται ότι τα αδιαίρετα αποτελούν τις συστατικές μονάδες των συνεχών μεγεθών, εν τούτοις αποδέχεται ότι τα συνεχή μεγέθη περιέχουν άπειρο πλήθος τέτοιων αδιαίρετων.[4]

[3] Boyer C.B. The history of the Calculus and its conceptual development, σελ.68
[4] Boyer C.B.The history of the Calculus and its conceptual development, σελ.67-68

Από τις αρχές του $14^{ου}$ αιώνα εγκαταλείπεται σταδιακά η Αριστοτέλεια αντίληψη περί κίνησης, δηλαδή να αντιμετωπίζεται η κίνηση ως ποιότητα και όχι ως ποσότητα που μπορεί να αυξομειωθεί. Αυτή η τάση βοηθά τους μαθηματικούς του Μεσαίωνα να αντιμετωπίσουν τη μεταβολή στην κίνηση σαν ένα γεωμετρικό μέγεθος ή ακόμη σαν διακριτό αριθμό και έτσι να αναπτυχθούν οι ιδέες της Δυναμικής. Προς την κατεύθυνση αυτή συνέβαλλαν τα μέγιστα οι καθηγητές του *Merton College* της Οξφόρδης, που από το δεύτερο τέταρτο του $14^{ου}$ αιώνα μελετώντας την κίνηση και τη μεταβολή με ποσοτικά χαρακτηριστικά, διατυπώνουν και αποδεικνύουν το γνωστό θεώρημα της μέσης ταχύτητας. Χαρακτηρίζουν την κίνηση *ομοιόμορφη* αν ίσα διαστήματα διανύονται σε ίσους χρόνους και την επιτάχυνση *ομοιόμορφη* αν ίσες αυξήσεις της ταχύτητας επιτυγχάνονται σε ίσους χρόνους. Σε ότι αφορά τη στιγμιαία ταχύτητα καθόσον δεν γνωρίζουν την έννοια του ορίου την ορίζουν ως συνάρτηση της απόστασης. Δηλαδή, ένα σημείο έχει στιγμιαία ταχύτητα U_t αν τη χρονική στιγμή t διανύει απόσταση ίση με την απόσταση που θα διένυε το ίδιο σημείο αν κινούνταν ομοιόμορφα για ορισμένο χρονικό διάστημα με ταχύτητα U_t [5].

Πολλά συγγράμματα κάνουν την εμφάνιση τους που πραγματεύονται το καθένα κατά το δοκούν αυτή την έννοια που την ονομάζουν *latitude of forms* δηλ. ένταση των ποιοτήτων. Για τον Αριστοτέλη οι ποιότητες είναι ιδιότητες που επιδέχονται ένταση, όπως θερμότητα ή πυκνότητα κλπ.

Σε πρώτη φάση οι ρυθμοί μεταβολής του χρόνου που μελετήθηκαν δεν αφορούσαν μόνο στην απόσταση αλλά στην ένταση τη φωτεινότητα, το θερμικό περιεχόμενο και την πυκνότητα. Διέκριναν περιπτώσεις μεταξύ ομοιόμορφου -*latitudo uniformis*- και μη ομοιόμορφου ρυθμού μεταβολής - *latitudo difformis.* Επίσης μεταξύ ομοιόμορφου ρυθμού στιγμιαίας μεταβολής - *latitudo uniformiter difformis*- και μη ομοιόμορφου ρυθμού στιγμιαίας μεταβολής - *latitudo difformiter difformis*. Σε μερικές περιπτώσεις ακόμη και *latitudo uniformiter difformiter difformis, ή latitudo difformiter difformiter difformis.*

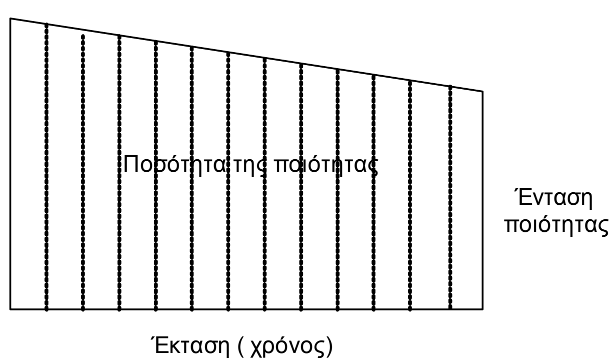
[5] Edwards C.H. The historical development of the calculus, σελ.87

Λεκτική άλγεβρα : Ένα εργαλείο επίλυσης προβλημάτων απείρων σειρών

Χρησιμοποιώντας αυτές τις νέες έννοιες ο *Suiseth (Calculator)* δεν διστάζει να θέσει και επιλύσει προβλήματα που εμπεριέχουν ταυτόχρονα το απείρως μικρό και το απείρως μεγάλο και αφορούν γεωμετρικές σειρές. Οι λύσεις των προβλημάτων είναι κυρίως λεκτικές και περίτεχνες, επηρεασμένες σαφώς από τη διαλεκτική αποδεικτική διαδικασία της Σχολαστικής Σχολής. Αντιλαμβάνεται ότι η λύση των προβλημάτων συχνά οδηγεί σε αθροίσεις απείρου πλήθους αριθμών, αποφεύγει όμως επιμελώς να ανάγει το πρόβλημα σε άθροιση αριθμών. Επιλέγει να μιλήσει για το αντιληπτό αποτέλεσμα της διαδικασίας που περιγράφει το πρόβλημα, με όρους μεγέθους και όχι αριθμού, και να το συγκρίνει με το ταυτόσημο αντιληπτό αποτέλεσμα μιας άλλης απλής διαδικασίας που δεν περιέχει άπειρο. Αντιλαμβάνεται δηλαδή τη σύγκλιση αλλά δεν αποδίδει στην άπειρη σειρά ένα άθροισμα.

Η γραφική λύση του Oresme για τα άπειρα αθροίσματα

Ο Γάλλος μαθηματικός *Nicolas Oresme (1323 – 1382)* αν και έχει σαφώς επηρεαστεί από τις εργασίες του *Merton College* και του *Calculator*, προχωρεί περισσότερο και εισάγει για πρώτη φορά την αναπαράσταση της έντασης των ποιοτήτων με ευθείες γραμμές κάθετες σε μία δεύτερη ευθεία γραμμή. Οι κορυφές αυτών των καθέτων αποτελούσαν τα ίχνη μίας γραμμής που, αν π.χ. το μελετώμενο φαινόμενο ήταν η κίνηση, αντιπροσώπευε την ομαλή κίνηση ή την ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση -*uniformiter difformis*- ή απλώς την μη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση *difformiter difformis*.



Σχήμα 4

Από την ιδέα της γραφικής αναπαράστασης των εντάσεων ο *Oresme* βγάζει το συμπέρασμα ότι η επιφάνεια του γεωμετρικού σχήματος που προκύπτει αναπαριστά την ποσότητα της μελετώμενης ποιότητας. Έτσι οι ομοιόμορφες ποιότητες παριστάνονται με παραλληλόγραμμα, ενώ ποιότητες που η ένταση τους μεταβάλλεται ομοιόμορφα, *uniformiter difformis,* παριστάνονται με τρίγωνα ή τραπέζια.

Ο *Oresme* αντιμετωπίζει και τα άπειρα αθροίσματα με αντίστοιχες γραφικές λύσεις όπως θα δούμε αναλυτικά στη συνέχεια, χωρίς όμως να περιορίζεται σε αυτές. Έτσι για τη γενική γεωμετρική σειρά

$$\frac{a}{k}+\frac{a}{k}\left(1-\frac{1}{k}\right)+\ldots+\frac{a}{k}\left(1-\frac{1}{k}\right)^{n}+\ldots,\ \text{k ακέραιος},\ k>1$$

που αθροίζει στο α, περιγράφει λεκτικά τη λύση, ενώ για την απόδειξη της απόκλισης της αρμονικής σειράς χρησιμοποίησε το ***κριτήριο της σύγκρισης***.

Τέλος στο *Questiones super geometriam Euclidis*, υπάρχουν ενδείξεις ότι ο Oresme γνώριζε πότε μια γεωμετρική σειρά αποκλίνει ή συγκλίνει[6].

Παρουσιάζουμε στη συνέχεια χαρακτηριστικά αποσπάσματα από τις εργασίες του *Calculator* και του *Oresme*.

Richard Suiseth – Swineshead (Calculator) περί του *1340 – 1354*

Ο *Richard Suiseth – Swineshead* υπήρξε μαζί με τον *Bradwardine* από τους βασικούς μελετητές της έντασης των ποιοτήτων. Σε αυτόν οφείλεται εν πολλοίς η ποσοτικοποίηση των εννοιών της μαθηματικής φυσικής, η μελέτη των μεταβλητών ποσοτήτων και η έννοια της στιγμιαίας ταχύτητας. Είναι ενδιαφέρον ότι για τις δύο τελευταίες έννοιες χρησιμοποίησε τις λέξεις *fluent* και *fluxus* που ο Newton έκανε ευρέως γνωστές τρεις αιώνες αργότερα.

Το *Liber calculationum* του *Calculator* υπήρξε το έργο που άνοιξε το δρόμο στις πραγματείες που αφορούν στην ένταση ποιοτήτων. Σε αυτό παρουσιάζονται μια πληθώρα προβλημάτων που αφορούν κυρίως τις άπειρες σειρές. Παράλληλα

[6] Babb, J. Mathematical Concepts and Proofs from Nicole Oresme σελ.450

παρουσιάζονται και τα εργαλεία για την επίλυση των προβλημάτων αυτών. Στο δεύτερο κεφάλαιο του παραπάνω έργου διατυπώνεται η αρχή ότι ***« η μέση ένταση μιας μορφής που ο ρυθμός μεταβολής της σε ένα διάστημα είναι σταθερός, ή που αλλάζει ομοιόμορφα σε κάθε ήμισυ του διαστήματος, είναι η μέση τιμή της πρώτης και τελευταίας έντασης».*** Η απόδειξη, που γίνεται με διαλεκτική μέθοδο, στηρίζεται στη φυσική εμπειρία του ρυθμού μεταβολής:

> *Αν η μέγιστη ένταση αφεθεί να μειωθεί ομοιόμορφα ως την μέση τιμή και ταυτόχρονα η μικρότερη ένταση αυξηθεί ομοιόμορφα με τον ίδιο ρυθμό μέχρι τη μέση τιμή, τότε η συνολική ένταση ούτε θα αυξηθεί ούτε θα μειωθεί.*

Και επεξηγεί την αρχή με αριθμητικά παραδείγματα :

> *Αν μια ένταση αυξηθεί ομοιόμορφα από το τέσσερα στο οκτώ, ή αν για το πρώτο μισό του χρόνου είναι τέσσερα και για το τελευταίο μισό οκτώ, τότε το αποτέλεσμα είναι το ίδιο με το αποτέλεσμα ομοιόμορφης έντασης έξι που επενεργεί στη διάρκεια όλου του χρόνου.*

Η μέθοδος αυτή ενισχύεται και εφαρμόζεται στα επόμενα κεφάλαια του βιβλίου σε προβλήματα που αφορούν στην πυκνότητα, ταχύτητα και ένταση φωτεινότητας. Ο *Suiseth* επιλύει τα προβλήματα λαμβάνοντας υπόψη ότι αν ο ρυθμός μεταβολής της έντασης είναι σταθερός ή στο κάθε ήμισυ του διαστήματος ο ρυθμός μεταβολής είναι 0, τότε η μέση ένταση θα ισούται με τη μέση τιμή της πρώτης και τελευταίας τιμής.

Στο δεύτερο βιβλίο του *Liber calculationum* εμφανίζεται το εξής πρόβλημα :

> *Αν κατά το ήμισυ ενός δεδομένου χρονικού διαστήματος υφίσταται μια μεταβολή της έντασης, για το επόμενο τέταρτο του χρονικού διαστήματος η μεταβολή της έντασης είναι διπλάσια της αρχικής , για το επόμενο ένα όγδοο τριπλάσια της αρχικής, και αυτό συνεχίζεται επ΄άπειρον τότε η μέση ένταση για ολόκληρο το διάστημα θα είναι η ένταση της μεταβολής κατά την διάρκεια του δεύτερου υποδιαστήματος .*

Το πρόβλημα οδηγεί την άθροιση της άπειρης σειράς $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+...+\frac{n}{2^n}+...=2$.

Βλέπουμε ότι σε αντίθεση με τον *Αρχιμήδη* ο *Calculator* όχι μόνο δεν διστάζει να θεωρήσει μια άπειρη διαμέριση του χρονικού διαστήματος αλλά προχωρώντας ακόμη περισσότερο δεν διστάζει να θεωρήσει και μια ένταση η οποία γίνεται άπειρη, επιλέγοντας έτσι να χειρισθεί ταυτόχρονα και το πραγματικό αλλά και το εν δυνάμει άπειρο.

Η μακροσκελής επιχειρηματολογία του *Calculator* ουσιαστικά είναι η εξής: Το να **διπλασιάσουμε** την ένταση στο τελευταίο μισό του χρονικού διαστήματος (από $\frac{1}{2}\,\mu\acute{\epsilon}\chi\rho\iota$ 1) έχει το ίδιο αποτέλεσμα με το να **διπλασιάσουμε** την ένταση στο πρώτο μισό του δηλ. από $0\,\mu\acute{\epsilon}\chi\rho\iota\,\frac{1}{2}$. Αν **τριπλασιάσουμε** την ένταση στο τελευταίο τέταρτο του χρονικού διαστήματος δηλ. από $\frac{3}{4}\,\mu\acute{\epsilon}\chi\rho\iota\ 1$,το **επιπλέον του διπλασιασμού** αποτέλεσμα είναι το ίδιο με αυτό του διπλασιασμού της ταχύτητας στο χρονικό υπο-διάστημα $\frac{1}{2}\,\mu\acute{\epsilon}\chi\rho\iota\,\frac{1}{4}$. Αν **τετραπλασιάσουμε** την ένταση στο τελευταίο όγδοο του χρονικού διαστήματος δηλ. από $\frac{7}{8}\,\mu\acute{\epsilon}\chi\rho\iota\ 1$,το **επιπλέον του τριπλασιασμού** αποτέλεσμα είναι το ίδιο με αυτό του διπλασιασμού της έντασης στο χρονικό υπο-διάστημα $\frac{1}{4}\,\mu\acute{\epsilon}\chi\rho\iota\,\frac{1}{8}$. Συνεπώς αθροιστικά το αποτέλεσμα είναι το ίδιο με το να διπλασιάσουμε την αρχική ένταση σε όλα τα υπό-διαστήματα.[7]

Ο **Calculator** εντοπίζει το παράδοξο του συλλογισμού του, ότι δηλαδή μία ποσότητα που ο ρυθμός μεταβολής της γίνεται άπειρος, έχει πεπερασμένο μέσο ρυθμό μεταβολής και αιτιολογεί ως εξής το αποτέλεσμα.

> Ας θεωρήσουμε δύο ομοιόμορφους και ίσους ρυθμούς μεταβολής α και β που να επενεργούν σε χρονικό διάστημα που έχει διαμερισθεί σε υποδιαστήματα μήκους $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8}\ldots$ *Ο ρυθμός μεταβολής β διπλασιάζεται για όλο το χρονικό διάστημα αλλά ο ρυθμός μεταβολής α διπλασιάζεται στο δεύτερο διάστημα., τριπλασιάζεται στο τρίτο και ούτω καθεξής μέχρι το άπειρο. Τώρα η αύξηση του α στο δεύτερο διάστημα αν συνεχισθεί σταθερά σε αυτό και στα υπόλοιπα διαστήματα, θα οδηγήσει σε μια αύξηση*

[7] Edwards, C.H. The historical development of the calculus , σελ.91

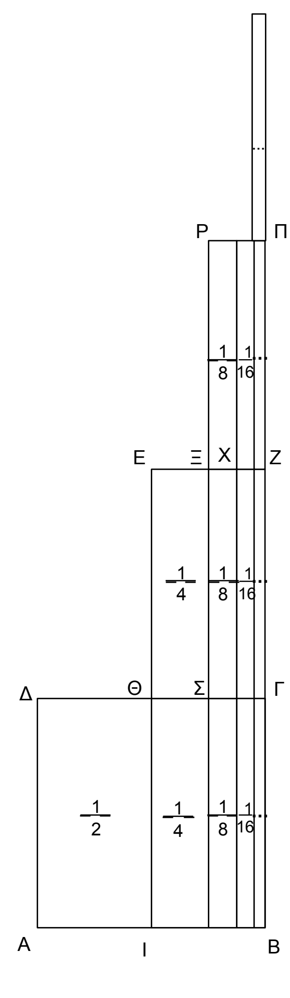
της έντασης ίση με αυτή που θα επέφερε η μεταβολή του β στο πρώτο μισό του χρόνου κίνησης. Ο τριπλασιασμός του α στο τρίτο διάστημα αν συνεχιζόταν σταθερά σε αυτό και για τα υπόλοιπα διαστήματα θα οδηγούσε σε μία περεταίρω αύξηση της έντασης ίση με αυτήν που επέφερε η αλλαγή του β στο δεύτερο διάστημα και η διαδικασία αυτή συνεχίζεται επ΄άπειρον . Έτσι η αύξηση που οφείλεται στο α είναι ίση με εκείνη που προκλήθηκε το διπλασιασμό του β. Έτσι ο μέσος ρυθμός μεταβολής είναι ο ρυθμός μεταβολής κατά το δεύτερο διάστημα[8].

Nicolas Oresme (1323 – 1382)

Το χαρακτηριστικό στο *Liber calculationum* του *Calculator* είναι η παντελής απουσία οποιουδήποτε γεωμετρικού σχεδίου. Το έργο είναι δομημένο πάνω στη λεκτική Άλγεβρα και την αριθμητική. Στους αντίποδες, το έργο *Tractatus de figuratione potentiarum et mensurarum* του *Nicolas Oresme,* που γράφτηκε πιθανόν πριν από το 1361, χρησιμοποιεί τη γραφική αναπαράσταση για την επίλυση προβλημάτων που σχετίζονται με άπειρα αθροίσματα και τα οποία προήλθαν από τη μελέτη του μη ομοιόμορφου ρυθμού στιγμιαίας μεταβολής. Στο πρόβλημα που ακολουθεί η λύση είναι χαρακτηριστική της μεθόδου αυτής.

Να βρεθεί η απόσταση που διανύει σώμα που κινείται με σταθερή ταχύτητα στο ήμισυ του χρόνου κίνησης, με το διπλάσιο της αρχικής ταχύτητας στο 1/4 του εναπομείναντος χρόνου, με τριπλάσια της αρχικής στο 1/8 του εναπομείναντος χρόνου κ.λ.π.

Ο Oresme χρησιμοποιεί μια γραφική αναπαράσταση του προβλήματος για να καταλήξει στο συμπέρασμα ότι η συνολική απόσταση που θα διανύσει το σώμα είναι το 4πλασιο του διαστήματος που κάλυψε στο πρώτο ήμισυ της κίνησης. Δηλ. άθροισε την σειρά



Σχήμα 5

[8] Boyer, C.B. The history of the Calculus and its conceptual development σελ. 77-78

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+...=2$$

Η γραφική λύση παρουσιάζεται στο σχήμα 5.

Κατασκεύασε δύο ίσα τετράγωνα με πλευρά 1. Το δεύτερο τετράγωνο, που φαίνεται στο σχήμα 5, το χώρισε σε 1/2, 1/4, 1/8, 1/16.

Έτσι :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+..+\frac{1}{2^n}+...=1$$

και συνεπώς

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+..+\frac{1}{2^n}+...=2$$

Στο Σχήμα 5 η βάση του πρώτου τετραγώνου ΑΒΓΔ είναι 1 και το ύψος κάθε παραλληλογράμμου είναι επίσης 1. Χώρισε το ΑΒΓΔ διαδοχικά σε ορθογώνια με εμβαδόν $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{8}..$

Το εμβαδόν του ΑΒΓΔ είναι 1.

Το ΙΒΓΘ έχει εμβαδόν ίσο με το ήμισυ του ΑΒΓΔ.

Σχεδίασε πάνω από το ΑΒΓΔ ορθογώνιο με εμβαδό ίσο με το εμβαδό του ΙΒΓΘ. Το εμβαδόν του ΘΓΖΕ αποτελείται από ορθογώνια εμβαδού $\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},...$ και ισούται με $\frac{1}{2}$. Το εμβαδόν του ΣΓΖΞ έχει εμβαδό ίσο με το ήμισυ του ΘΓΖΕ. Σχεδίασε πάνω από το ΘΓΖΕ ορθογώνιο με εμβαδό ίσο με το εμβαδό του ΣΓΖΞ. Το εμβαδόν του ΞΖΠΡ αποτελείται από ορθογώνια εμβαδού $\frac{1}{8},\frac{1}{16},\frac{1}{32},...$ και ισούται με $\frac{1}{4}$ κλπ.

Υπολόγισε το εμβαδόν του σχήματος με δύο τρόπους :

Α) Αθροίζοντας το εμβαδόν του σχήματος οριζόντια :

(ΑΒΓΔ) + (ΘΓΖΕ) + (ΕΖΠΡ) + … = $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+..+\frac{1}{2^n}+...$ που ισούται με 2 όπως έχει ήδη αποδείξει.

Β) Αθροίζοντας το εμβαδόν του σχήματος κάθετα :

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+...+\frac{n}{2^n}+...$$

και συνεπώς $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+...+\frac{n}{2^n}+...=2$

Η μέθοδος που ακολούθησε ο *Oresme* έχει εκ πρώτης άποψης την εξής παραδοξότητα : Το εμβαδόν του σχήματος να είναι πεπερασμένο ενώ η περίμετρος του είναι άπειρη. Μια ανάλογη κατάσταση απαντάται και στην πρόταση Ι.35 των Στοιχείων.

Με τον ίδιο τρόπο αντιμετώπισε το πρόβλημα όπου ο χρόνος διαιρείται σε 3/4, 3/16, 3/64 και η ταχύτητα διπλασιάζεται, τριπλασιάζεται κλπ. (δηλ αυξάνει κατά αριθμητική πρόοδο). Ο *Oresme* αναφέρει ότι τότε η συνολική απόσταση που θα διανύσει το σώμα είναι τα 16/9 του διαστήματος που κάλυψε στα πρώτα 3/4 του χρόνου κίνησης. Δηλαδή

$$\frac{3}{4}+2\cdot\frac{3}{16}+3\cdot\frac{3}{64}+4\cdot\frac{3}{256}+...=\frac{4}{3}.$$

Ο *Oresme* προχωρεί και σε πιο σύνθετα προβλήματα όπως τα παρακάτω :

Να βρεθεί η απόσταση που διανύει σώμα που κινείται με σταθερή ταχύτητα στο ήμισυ του χρόνου κίνησης, με ομοιόμορφα επιταχυνόμενη κίνηση κατά το επόμενο 1/ 4 του χρόνου κίνησης και μέχρι η ταχύτητα να γίνει διπλάσια της αρχικής, με σταθερή ταχύτητα - ίση με αυτή που απόκτησε στο προηγούμενο χρονικό διάστημα- για χρόνο ίσο με το 1/8 του χρόνου κίνησης, με ομοιόμορφα επιταχυνόμενη κίνηση για το επόμενο 1/16 του χρόνου κίνησης και μέχρι η ταχύτητα να γίνει 2πλάσια κλπ.

Για να αποδείξει ότι η συνολική απόσταση που θα διανύσει το σώμα προς την απόσταση που καλύφθηκε στο πρώτο ήμισυ του χρόνου κίνησης θα είναι όπως το 7 προς 2

Δηλ. άθροισε την σειρά $\frac{1}{2}+\frac{3}{8}+\frac{1}{4}+\frac{3}{16}+\frac{1}{8}+\frac{3}{32}+\frac{1}{16}+\frac{3}{64}+...$

Ο *Oresme*, απέδειξε επίσης ότι η αρμονική σειρά αποκλίνει ως εξής :

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\cdots$$

$$= 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}\right)+...$$

$$>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\right)+...=$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{4}{8}+\frac{8}{16}+...=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots$$

Και τελικά

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+...>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+....$$

Δηλαδή η αρμονική σειρά είναι μεγαλύτερη από κάθε αριθμό και συνεπώς αποκλίνει.

Ο *Oresme* ακολούθησε και εκείνος την λεκτική άλγεβρα για να επιλύσει προβλήματα άπειρων σειρών. Σε μια εργασία του 1350 μελετά μια γενικότερη μορφή των γεωμετρικών σειρών :

$$\frac{a}{k}+\frac{a}{k}\left(1-\frac{1}{k}\right)+...+\frac{a}{k}\left(1-\frac{1}{k}\right)^{n}+...=a \quad \text{k ακέραιος, } k>1$$

Και περιγράφει λεκτικά τη λύση

Αν ένα υποπολλαπλάσιο μέρος (το ένα κ-οστο) αφαιρεθεί από μια ποσότητα (α) και από το πρώτο υπόλοιπο αφαιρεθεί ένα τέτοιο μέρος, και από το δεύτερο υπόλοιπο αφαιρεθεί ομοίως ένα τέτοιο μέρος και αυτή η διαδικασία συνεχισθεί επ' άπειρο, τότε η αρχική ποσότητα θα εξαντληθεί εντελώς, από μια τέτοιου είδους αφαίρεση.

Με σύγχρονο συμβολισμό :

Το πρώτο υπόλοιπο θα είναι $r_1 = a-\frac{a}{k}=a\left(1-\frac{1}{k}\right).$

Το δεύτερο υπόλοιπο θα είναι $r_2 = a\left(1-\frac{1}{k}\right)-a\left(1-\frac{1}{k}\right)\frac{1}{k}=a\left(1-\frac{1}{k}\right)^{2}$

και το n – οστό υπόλοιπο $r_n = a\left(1-\frac{1}{k}\right)^{n}.$

Οπότε ο *Oresme* ισχυρίζεται ότι $\frac{a}{k}+\frac{a}{k}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{k}\right)^{n}=a$.

Πραγματικά

$$\frac{a}{k}+\sum_{n=1}^{\infty}a\left(1-\frac{1}{k}\right)^{n}=\frac{a}{k}+\frac{a}{k}\left(1-\frac{1}{k}\right)\frac{1}{1-1+\frac{1}{k}}=\frac{a}{k}+\frac{ka}{k}\left(1-\frac{1}{k}\right)=a\,.$$

Από το Μεσαίωνα στην Αναγέννηση (1400 – 1600)

Παρά το γεγονός ότι οι *Calculator* και *Oresme* έτυχαν του σεβασμού και της αναγνώρισης μαθηματικών όπως ο *Cardan*, *ο Γαλιλαίος* αλλά και ο *Leibniz,* εντούτοις οι μέθοδοι που χρησιμοποίησαν σύντομα εγκαταλείφθηκαν για να αντικατασταθούν από τις αρχές και τα εργαλεία του Αρχιμήδη. Αιτία του γεγονότος αυτού ήταν η συστηματική μελέτη των έργων του Ευκλείδη, Αρχιμήδη και Απολλώνιου, που από τα μέσα του 15^{ου} αιώνα, επέτρεψε στους Ευρωπαίους λόγιους να αποκτήσουν σταδιακά πλήρη γνώση της δομής, των εννοιών και των εργαλείων που χρησιμοποιούσαν οι Αρχ. Έλληνες. Έχοντας κατακτήσει πλέον αυτές τις γνώσεις, επεκτείνανε το γνωστικό πεδίο των Μαθηματικών πέρα από το σημείο που έφθασαν οι Αρχ. Έλληνες. Αμφισβήτησαν τις απόψεις του Αριστοτέλη για το άπειρο και πρότειναν νέους ορισμούς . Τροποποίησαν και χρησιμοποίησαν τη μέθοδο της εξάντλησης για την επίλυση προβλημάτων που έχουν να κάνουν με τον υπολογισμό του εμβαδού κύκλου και την εύρεση του κέντρου βάρους διαφόρων σωμάτων.

Ο καρδινάλιος *Νικόλαος της Cusa (1401-1464)* στις εργασίες του ορίζει το απείρως μεγάλο ως εκείνο που δεν μπορεί να γίνει μεγαλύτερο και το απειροστό ως εκείνο που δεν μπορεί να γίνει μικρότερο. Η ιδέα αυτή διατρέχει και τα γεωμετρικά σχήματα, όπου για το *Νικόλαο*, το τρίγωνο είναι το πολύγωνο με το μικρότερο πλήθος πλευρών, ενώ ο κύκλος το πολύγωνο με το μεγαλύτερο πλήθος πλευρών. Οι απόψεις του αυτές έρχονται σε πλήρη αντίθεση με τον *Αριστοτέλη* καθώς αντιμετωπίζει το άπειρο και το απειροστό όχι μόνο εν δυνάμει αλλά ως πραγματικές οντότητες, που είναι το άνω και κάτω φράγμα αντίστοιχα του πεπερασμένου. Ως άμεσο επακόλουθο αυτής της ιδέας ο *Νικόλαος* αντιμετωπίζει το άπειρο και το απειροστό ως ποσότητες που μπορούν να προσεγγίσουν μόνο μέσα από το πεπερασμένο πλησιάζοντας έτσι στην έννοια του ορίου. Υπό αυτό το πρίσμα θεωρεί τον κύκλο ως ένα κανονικό πολύγωνο με άπειρο πλήθος πλευρών και απόστημα ίσο με την ακτίνα. Έτσι, για να υπολογίσει το εμβαδόν χωρίζει σε άπειρο πλήθος τριγώνων και υπολογίζει το εμβαδόν ως το ημιγινόμενο της περιμέτρου επί το απόστημα. Αποδεικνύει τον ισχυρισμό του αυτόν εγγράφοντας και περιγράφοντας πολύγωνα σύμφωνα με την μέθοδο του Αρχιμήδη ολοκληρώνοντας με τη διπλή άρνηση.

Το 1591 κάνει την εμφάνιση του στην Ευρώπη ένα έργο που έμελε να παίξει καθοριστικό ρόλο στην εξέλιξη των μαθηματικών το *In artem analyticam isagoge* του *François Viète (1540 – 1603)* . Στο έργο αυτό γίνεται για πρώτη φορά συστηματικός διαχωρισμός μεταξύ των γνωστών ποσοτήτων – παραμέτρων- και των αγνώστων ποσοτήτων (μεταβλητών). Ο *Viète* χρησιμοποίησε τα φωνήεντα για τους αγνώστους και τα σύμφωνα για τις γνωστές ποσότητες καθώς επίσης και συνδυασμούς γραμμάτων και ακρωνύμια για τις πράξεις. Η ιδέα αυτή αποδείχθηκε επαναστατική για την νοηματική εξέλιξη των μαθηματικών. Οι μαθηματικοί έχοντας το συμβολισμό του *Viète* αλλά και την έννοια της μεταβλητής, αρχίζουν αργά να εγκαταλείπουν τις γεωμετρικές λύσεις και να αντιλαμβάνονται πλέον τις σειρές μέσα από την εννοιολογική δυναμική που επιφέρει ο νέος συμβολισμός.

Η εξέλιξη των άπειρων αθροισμάτων

Δύο αιώνες μετά το *Liber calculationum* του *Calculator* εκδίδεται στο Παρίσι το 1509 ή το 1510 το βιβλίο *Liber de triplici motu proportionibus annexis magistri Alvari Thomae Ulixbonensis philosophicas Suiseth calculations ex parte declarans* του Πορτογάλου μαθηματικού *Alvarus Thomas.* Στο πρώτο μέρος του βιβλίου παρουσιάζεται μια θεωρία λόγων ενώ στο δεύτερο μια μελέτη για την κίνηση, επηρεασμένη σαφώς από τις εργασίες στο *Merton College*. Οι κινήσεις που μελετά ο *Thomas* πραγματοποιούνται σε χρονικά διαστήματα που η διάρκεια τους αποτελεί γεωμετρική πρόοδο, ενώ στη διάρκεια αυτών των χρονικών διαστημάτων η ταχύτητα παραμένει σταθερή η μεταβάλλεται ομοιόμορφα. Οι λύσεις των προβλημάτων οδηγούν σε άπειρα αθροίσματα, όπως τα παρακάτω :

Για το $1+\frac{7}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{11}{8}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{19}{16}\cdot\frac{1}{2^3}+\dots$ το άθροισμα υπολογίστηκε από τον *Thomas* σε $\frac{5}{2}$ ενώ για το $1+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{7}{6}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{13}{12}\cdot\frac{1}{2^3}+\dots$ σε $\frac{20}{9}$.

Η διαδικασία επίλυσης βασίζεται σε λεκτικά επιχειρήματα ανάλογα με εκείνα του *Calculator*. Κάποια από τα προβλήματα που εξέτασε οδήγησαν σε σειρές που περιλαμβάνουν λογαρίθμους, όπως η $1+\frac{2}{1}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2^3}+\dots$, που αθροίζει στο $2+\log 2$. Για την περίπτωση αυτή ο *Thomas* έδωσε την απάντηση ότι το άθροισμα βρίσκεται μεταξύ του 2 και του 4.

Ο Ολλανδός μηχανικός Simon Stevin (1548 – 1620) χρησιμοποίησε και εκείνος άπειρα αθροίσματα για τον υπολογισμό του κέντρου βάρους και της υδροστατικής πίεσης σωμάτων. Η επίλυση των προβλημάτων της υδροστατικής πίεσης γίνεται με μια μέθοδο που ο ίδιος αποκαλεί «απόδειξη με αριθμούς». Αντιθέτως τα προβλήματα που αφορούσαν στην εύρεση του κέντρου βάρους επιλύονται με μια γεωμετρική μέθοδο, παρόμοια με τη μέθοδο της εξάντλησης, αλλά με μια σημαντική διαφοροποίηση: Ενώ ον Αρχιμήδης προσέγγισε το μέγεθος που πρέπει να υπολογισθεί με πεπερασμένα το πλήθος τρίγωνα, κυλίνδρους κλπ, και ολοκληρώνει την απόδειξη με τη διπλή άρνηση, ο *Stevin* αναφέρεται σε άπειρες προσεγγίσεις, που μπορούν να κάνουν τη διαφορά από το μελετώμενο μέγεθος μικρότερη από κάθε άλλο μέγεθος αποδεικνύοντας έτσι την ισότητα των δύο ποσοτήτων. Ένα παράδειγμα από την απόδειξη αυτή θα παρουσιασθεί αναλυτικά παρακάτω.

Ο *Viète*, στο έργο του *Varia Responsa (1593)* χρησιμοποίησε την γνωστή από τα Στοιχεία του Ευκλείδη (IX.35) σχέση για το άθροισμα n-όρων γεωμετρικής προόδου

$$\frac{a_2-a_1}{a_1}=\frac{a_{n+1}-a_1}{a_1+a_2+\dots+a_n}$$

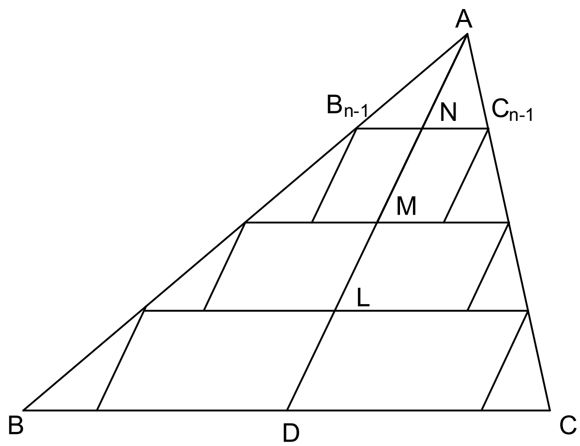
Παίρνοντας λόγο μικρότερο του 1 θεώρησε τον τελευταίο όρο της ακολουθίας ίσο με 0 για να πάρει την γνωστή σχέση $S=a_1\cdot\frac{1}{1-r}$. Επιχειρηματολογώντας για την απόφαση του αυτή αναφέρει ότι αν και οι Πλατωνικοί θα είχαν τις αντιρρήσεις τους εντούτοις ο τελευταίος όρος θα εξαφανιστεί καθώς θα είναι μικρότερος από κάθε δοσμένη ποσότητα. Στη συνέχεια δίνει παράδειγμα για την σχέση αυτή με $α_1=3$ και λόγο $\frac{1}{3}$ βρίσκει το άθροισμα αυτό ίσο με 4 και σχετίζει αυτό το αποτέλεσμα με τον τετραγωνισμό της παραβολής από τον Αρχιμήδη.

Simon Stevin (1548 - 1620)[9]

Ο *Stevin* χρησιμοποίησε δύο μεθόδους για τη λύση προβλημάτων. Η πρώτη, που ήταν μια παραλλαγή της μεθόδου της εξάντλησης, χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό κέντρου βάρους σχημάτων και σωμάτων. Με τη μέθοδο αυτή απέδειξε ότι το κέντρο βάρους τριγώνου βρίσκεται στη διάμεσο .

> *Μέχρι τώρα έχουν εγγραφεί στο τρίγωνο τρία παραλληλόγραμμα, όποτε ένα άπειρο πλήθος παραλληλογράμμων μπορεί να εγγραφεί και το κέντρο βάρους των εγγεγραμμένων σχημάτων θα βρίσκεται πάνω στην AD. Όμως, καθώς όλο και περισσότερα παραλληλόγραμμα εγγράφονται στο τρίγωνο, τόσο λιγότερο θα διαφέρει το τρίγωνο από τα παραλληλόγραμμα που έχουν εγγραφεί. Αν τώρα από τα μέσα των AN, NM, ML, LD φέρουμε παράλληλες στην AD η διαφορά αυτού του τελευταίου σχήματος θα είναι ακριβώς η μισή της διαφοράς του πρώτου σχήματος. Συνεπώς, με άπειρη προσέγγιση, μπορούμε να τοποθετήσουμε μέσα στο τρίγωνο ένα σχήμα που η διαφορά του από το τρίγωνο να είναι μικρότερη από κάθε αριθμό, οσοδήποτε μικρό. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι παίρνοντας την AD να είναι η ευθεία επί της οποίας βρίσκεται το κέντρο βάρους, το βάρος του μέρους ADC θα διαφέρει από το βάρος του ADB λιγότερο από οποιοδήποτε επίπεδο σχήμα οσοδήποτε μικρό*[10]

[9] Boyer, C.B.,The history of the Calculus and its conceptual development σελ. 99-104
[10] Baron, M. The origins of infinitesimal calculus, σελ.98



Σχήμα 6

Με σύγχρονο συμβολισμό η λύση έχει ως εξής :

$$\frac{(AB_{n-1}C_{n-1})}{(ABC)} = \frac{1}{n^2} \Leftrightarrow (AB_{n-1}C_{n-1}) = \frac{1}{n^2} \cdot (ABC)$$

και $(ABC) - (I_{n-1}) = n \cdot (AB_{n-1}C_{n-1})$, $i = 1.. n$ όπου I_{n-1} το εγγεγραμμένο σχήμα.

άρα $(ABC) - (I_{n-1}) = \frac{1}{n}(ABC)$.

Συνεπώς η διαφορά του εμβαδού του εγγεγραμμένου σχήματος από το (ABC) μπορεί να γίνει μικρότερη από κάθε θετικό αριθμό.

$$(ABC) - \sum_{i=1}^{n-1}(B_i) < \frac{1}{n}(ABC)$$ όπου B_i τα εγγεγραμμένα στο ABD

παραλληλόγραμμα

$$(ABC) - \sum_{i=1}^{n-1}(C_i) < \frac{1}{n}(ABC)$$ όπου C_i τα εγγεγραμμένα στο ABC

παραλληλόγραμμα οπότε

$$-\frac{1}{n}(ABC) < \sum_{i=1}^{n-1}(B_i) - (ABC)$$

$$(ABC) - \sum_{i=1}^{n-1}(C_i) < \frac{1}{n}(ABC)$$

άρα

$$\left|\sum_{i=1}^{n-1}(B_i) - \sum_{i=1}^{n-1}(C_i)\right| < \frac{1}{n}(ABC)$$

Οπότε για οποιοδήποτε εμβαδό δ είναι δυνατόν με κατάλληλη επιλογή του n να ισχύει:

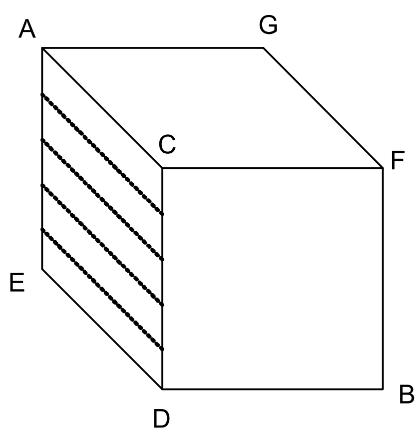
$$\left|\sum_{i=1}^{n-1}(B_i)-\sum_{i=1}^{n-1}(C_i)\right|<\delta$$

Στο σημείο αυτό ο Stevin αντί της διπλής αντίφασης του Αρχιμήδη δίδει τρία συμπεράσματα που είναι ισοδύναμα με τα παρακάτω:

- Αν δύο ποσότητες διαφέρουν, θα διαφέρουν κατά πεπερασμένη ποσότητα.
- Οι ποσότητες (ABD) και (ACD) διαφέρουν λιγότερο από κάθε πεπερασμένη ποσότητα.
- Άρα οι ποσότητες αυτές δε θα διαφέρουν καθόλου.

Άρα τα ABD και ACD έχουν το ίδιο βάρος και συνεπώς το κέντρο βάρους τους βρίσκεται πάνω στη διάμεσο.

Η δεύτερη αποδεικτική μέθοδος του *Stevin* χαρακτηρίζεται ως «απόδειξη με αριθμούς». Ένα παράδειγμα αυτής της αποδεικτικής διαδικασίας υπάρχει στο *De Beghinselen des Waterwichts (1586)* για τον υπολογισμό της υδροστατικής πίεσης σε κατακόρυφο τοίχωμα.



Σχήμα 7

Η λύση, με σύγχρονο συμβολισμό, είναι η εξής:

Έστω ότι το τετράγωνο ACDE έχει τοποθετηθεί κατακόρυφα, με την AC στην επιφάνεια. Έστω AC = CD =1 m.
Οπότε το εμβαδό (ACDE) = 1 m^2.

Το τετράγωνο διαιρείται σε n ίσα ορθογώνια με πλευρές παράλληλες στην AC.Τώρα αν κάθε τέτοιο ορθογώνιο τοποθετηθεί οριζόντια σε βάθος h μέτρων κάτω από την επιφάνεια θα ασκείται πάνω του το βάρος υγρού που ο όγκος του ισούται με $h\cdot\frac{1}{n}\cdot 1$ m^3.

Αν το ορθογώνιο τοποθετηθεί κατακόρυφα θα ισχύει ότι

$$h_1\cdot\frac{1}{n}<P_i<h_2\cdot\frac{1}{n}$$

όπου P_i η πίεση που ασκείται στο ορθογώνιο, h_1 και h_2 η αποστάσεις της πάνω και κάτω πλευράς αντίστοιχα από την επιφάνεια.

Για το κ-οστό από τα ορθογώνια θα ισχύει ότι $h_1 = \frac{k-1}{n}$ και $h_2 = \frac{k}{n}$.

Για τη συνολική πίεση που ασκείται στο τοίχωμα ο Stevin πρόσθεσε τις πιέσεις που ασκούνται σε κάθε ορθογώνιο:

$$\frac{1}{n^2}\left(0+1+2+...+(n-1)\right) < \sum_{i=1}^{n} P_i < \frac{1}{n^2}(1+2+3...+n)$$

χρησιμοποίησε τους γνωστούς τύπους και

$$\frac{n(n-1)}{2n^2} < \sum_{i=1}^{n} P_i < \frac{n(n+1)}{2n^2}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2n} < \sum_{i=1}^{n} P_i < \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$$

Στη συνέχεια διαιρώντας σε 4, 10 και 1000 ορθογώνια το τετράγωνο, παρατηρεί ότι η συνολική πίεση πλησιάζει στο $\frac{1}{2}$. Εν συνεχεία σημειώνει ότι

το ίδιο μπορεί να αποδειχθεί για οποιοδήποτε ορθογώνιο οσοδήποτε μικρό

όποτε καθώς η διαφορά της συνολικής πίεσης από το $\frac{1}{2}$ γίνεται οσοδήποτε μικρή τότε η συνολική πίεση θα ισούται με $\frac{1}{2}$.

Ο αιώνας των ανακαλύψεων (17^{ος} αιώνας)

Η μέθοδος του *Stevin* είναι χαρακτηριστική των μεθόδων που χρησιμοποιούν οι μαθηματικοί στα τέλη του 16^{ου} αιώνα για τον υπολογισμό του κέντρου βάρους. Ενώ οι *Francesco Maurolico (1494 – 1575)* και *Federico Commandino (1509 – 1575)* ακολουθούν την τυπική μέθοδο της εξάντλησης, εγγράφοντας ή περιγράφοντας πεπερασμένα το πλήθος σχήματα και ολοκληρώνοντας με τη διπλή άρνηση, ο *Stevin* και ο *Luca Valerio (1552 – 1618)* εγκαταλείπουν τη διπλή αντίφαση αντικαθιστώντας την από διαφορές που γίνονται μικρότερες από κάθε αριθμό. Μερικές δεκαετίες αργότερα ο Βέλγος μοναχός του τάγματος των Ιησουϊτών *Gregorius του Saint Vincent (1584 – 1667)* τροποποιεί και εκείνος με τη σειρά του τη μέθοδο της εξάντλησης. Αντί για τα παραλληλόγραμμα του *Stevin* χρησιμοποιεί άπειρα το πλήθος και απείρως λεπτά παραλληλόγραμμα και αντί για τα κανονικά πολύγωνα του Αρχιμήδη, εγγράφει πολύγωνα με άπειρες πλευρές. Το τελικό επιχείρημα της μεθόδου της εξάντλησης, όπου η διαφορά γίνεται μικρότερη από κάθε δοσμένο αριθμό, αντικαθίσταται από το τέλος- *terminus*- μιας επαναλαμβανόμενης διαδικασίας που ολοκληρώνεται όταν τα διαδοχικά αποτελέσματα της διαδικασίας πλησιάζουν συνεχώς σε μια τιμή που όμως ποτέ δεν φθάνουν.

> *Το τέλος μιας διαδικασίας (progressionis) είναι το τέλος της σειράς στο οποίο η διαδικασία δεν μπορεί να φθάσει, ακόμη και αν συνεχιστεί επ΄απειρον, αλλά το οποίο η σειρά μπορεί να πλησιάσει πιο κοντά από δοσμένο τμήμα.*

Ο σύγχρονος μαθηματικός εύκολα αναγνωρίζει στις παραπάνω γραμμές την έννοια του ορίου.

Οι μαθηματικοί του 17^{ου} αιώνα εγκαταλείψαν την αποδεικτική διαδικασία των *Valerio,* και *Stevin*. Αντί αυτών υπολογίζουν όγκους εμβαδά και κέντρα βάρους χρησιμοποιώντας απειροστά και αδιαίρετα. Το αρχικό σχήμα διαμερίζεται σε άπειρα το πλήθος όμοια σχήματα που απαρτίζουν ένα αριθμήσιμο σύνολο. Η άθροιση των «στοιχειωδών» αυτών σχημάτων θα δώσει το εμβαδό ή τον όγκο του αρχικού σχήματος. Η ιδέα αυτή παραμένει ισχυρή μέχρι και το τέλος του 17^{ου} αιώνα και μετασχηματίζεται διαρκώς. Ο *Johann Kepler (1571 – 1630)* με τη βοήθεια των «στοιχειωδών» σχημάτων θα μετασχηματίσει το αρχικό σχήμα σε ένα άθροισμα γεωμετρικών σχημάτων με γνωστές σχέσεις υπολογισμού εμβαδού ή όγκου. Η ίδια ιδέα απαντάται και στο έργο του *Gregorius του St.Vincent (1584 – 1667)* για τον υπολογισμό όγκων σε μία μέθοδο που ο ίδιος ονόμασε *Ductus plani in planum.* Ο *Bonaventura Cavalieri* (1598 – 1647) στο έργο του *Geomentria indivisibilus continuorum nova rationale promota (1635)* θεωρεί ότι τα σχήματα αποτελούνται από αδιευκρίνιστα αδιαίρετα. Για τον υπολογισμό όγκων ή εμβαδών, θέτει σε μία αντιστοιχία 1 – 1 τα *αδιαίρετα* του προς μελέτη σχήματος, με τα αδιαίρετα ενός σχήματος γνωστού όγκου ή εμβαδού. Αν τα *αδιαίρετα* έχουν έναν σταθερό λόγο τότε προκύπτει ότι και οι αντίστοιχοι όγκοι ή εμβαδά έχουν τον ίδιο λόγο. Οι αποδεικτικές διαδικασίες του *Cavalieri* στερούνται αυστηρότητας αν συγκριθούν με τη μέθοδο της εξάντλησης αλλά και με τις αντίστοιχες διαδικασίες του *Gregorius* του *St. Vincent.* Εκτός αυτού και η ύπαρξη των ίδιων των αδιαίρετων τίθεται σε αμφισβήτηση. Παρόλα αυτά το έργο του *Cavalieri* είχε τεράστια απήχηση καθώς η θεωρία των αδιαιρέτων επαλήθευε αποτελέσματα που ήταν ήδη γνωστά από τον Αρχιμήδη, αλλά με μια μέθοδο εμπειρική χωρίς τις αυστηρές απαιτήσεις της μεθόδου της εξάντλησης.

Ο Γάλλος μαθηματικός *Gilles Personne de Roberval* είχε αναπτύξει πριν από το 1630, μια θεωρία παρόμοια με τα αδιαίρετα του *Cavalieri* με τη διαφορά ότι διαμέρισε αρχικά τα σχήματα που μελετούσε σε «λωρίδες», αν επρόκειτο για επιφάνειες ή σε «φέτες» αν επρόκειτο για στερεά .[11] Στο "*Traité des indivisibles*" σημειώνει :

> *(…) και καθώς οι επιφάνειες περικλείονται από γραμμές αντί να συγκρίνουμε τις επιφάνειες, συγκρίνουμε τις γραμμές. Το άπειρο πλήθος γραμμών αναπαριστά το άπειρο πλήθος των μικρών επιφανειών που απαρτίζουν τη συνολική επιφάνεια…*

Η δεύτερη ιδέα, μετά τα αδιαίρετα του *Cavalieri*, που επέδρασε καταλυτικά στην εξέλιξη των μαθηματικών, ήταν η αλγεβροποίηση της Γεωμετρίας από τους *Rene Descartes(1596 – 1650)* και *Pier de Fermat* . Το *La Geometrie* του *Descartes* δημοσιεύεται το 1637 και παρόλο που την ίδια περίπου εποχή και ο *Fermat* ασχολείται με το ίδιο αντικείμενο η εργασία του θα εκδοθεί μόλις το 1679, μετά το θάνατό του.

---

[11] Baron, M. The origins of infinitesimal calculus,σελ 153-154

Οι δύο αυτές εργασίες άνοιξαν νέους δρόμους καθώς επέτρεψαν τόσο το μετασχηματισμό των γεωμετρικών λύσεων σε αλγεβρικές, όσο και τη γενίκευση των λύσεων αυτών.

Ο τετραγωνισμός της γενικευμένης παραβολής και τα άπειρα αθροίσματα

Στις αρχές του 17ου αιώνα έγιναν νέες προσπάθειες για τον τετραγωνισμό της παραβολής. Οι *Γαλιλαίος (1564 – 1642), Cavalieri* και *Evangelista Torricelli (1608 - 1647)* χρησιμοποίησαν για το σκοπό αυτό κυρίως γεωμετρικές μεθόδους . Η ανάπτυξη της αναλυτικής γεωμετρίας από τον *Descartes* και *Fermat* έδωσε τη δυνατότητα στον *Roberval* αλλά και στον ίδιο τον *Fermat* να ασχοληθούν με τον τετραγωνισμό της γενικής παραβολής $y = ax^n$, αλλά και της ισοσκελούς υπερβολής χρησιμοποιώντας τα νέα εργαλεία της Αναλυτικής Γεωμετρίας.

Με το ίδιο πρόβλημα ασχολήθηκαν και οι *Blaise Pascal, Pietro Mengoli* και *John Wallis (1616 – 1703)* οι οποίοι όμως εγκατέλειψαν τις γεωμετρικές μεθόδους για να στρέψουν την προσοχή τους σε αποκλειστικά αλγεβρικές λύσεις.

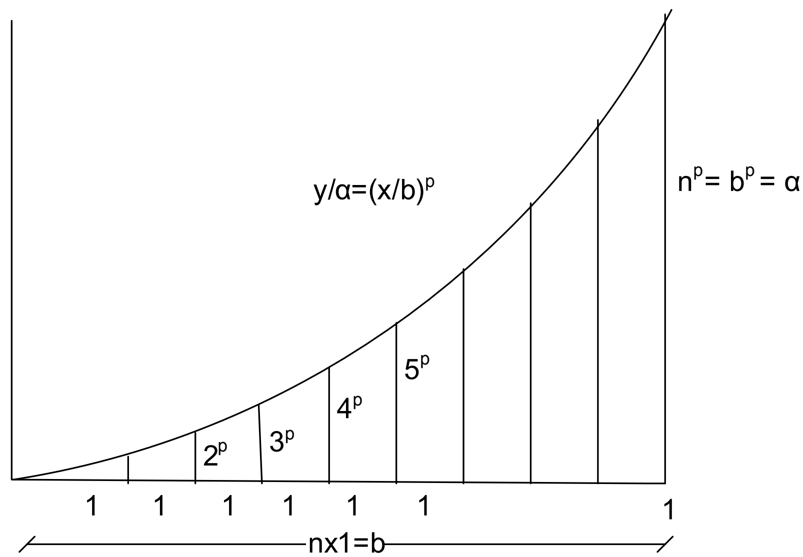
Γενικά τα πρόβλημα του τετραγωνισμού (κωνικών τομών, σπείρας, κυκλοειδούς) μαζί με εκείνα της εύρεσης του κέντρου βάρους σωμάτων, απετέλεσαν αντικείμενο εκτεταμένης μελέτης σχεδόν σε όλη τη διάρκεια του 17ου αιώνα και οδήγησαν στην ανάπτυξη του Απειροστικού Λογισμού.

Ο *Cavalieri* ήταν ο πρώτος που προσπάθησε να αποδείξει τη σχέση $\int_0^a x^k dx = \frac{a^{k+1}}{k+1}$ με k θετικό ακέραιο, δίδοντας διαδοχικές αποδείξεις για $k \leq 9$.

Ο *Roberval* ασχολήθηκε και εκείνος με τον τετραγωνισμό της παραβολής $\frac{y}{a} = \left(\frac{x}{b}\right)^p$.

Η λύση του έχει ως εξής :
Διαμέρισε το εμβαδό κάτω από την καμπύλη σε άπειρες το πλήθος επιφάνειες. Αντί να αθροίσει το εμβαδό αυτών των επιφανειών θεώρησε ότι ισοδύναμα, μπορεί να αθροίσει τα ευθύγραμμα τμήματα, $\sum_{r=1}^{n} r^p$, που απαρτίζουν την επιφάνεια. Το εμβαδόν

υπό της καμπύλης $\frac{y}{a}=\left(\frac{x}{b}\right)^p$ θα δίδεται τότε από το άθροισμα $\sum_{r=1}^{n} r^p$, καθώς το n αυξάνει απεριόριστα. Επίσης θεώρησε ότι κάθε τέτοιο ευθύγραμμο τμήμα αντιπροσωπεύεται από $\frac{y_i}{a}=\left(\frac{i}{b}\right)^p$ και άρα $y_i = a\left(\frac{i}{b}\right)^p$ για υπολογίζει το εμβαδό της παραβολής ως μία δυναμοσειρά.



Σχήμα 8

Με σύγχρονο συμβολισμό ο *Roberval* θεωρεί ότι $\int_0^b \left(\frac{x}{b}\right)^p = \sum_{i=1}^{\infty} y_i = \sum_{i=1}^{\infty} a\left(\frac{i}{b}\right)^p$.

Υπολογίζει το $\sum_{r=1}^{\infty} r^p$ για p =1 και p = 2 χρησιμοποιώντας τις γνωστές από τον Αρχιμήδη σχέσεις :

$$\sum_{r=1}^{n} r = \frac{n(n+1)}{2} \text{ και } \sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6}$$

απορρίπτει τους όρους με n > p +1 για να καταλήξει

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} r = \frac{n^2}{2} \text{ και } \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{n^3}{3}$$

και όταν n →∞ κατά κάποιο τρόπο $n\text{x}1 = \text{b}$ οπότε $\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{b^3}{3}$.

Οπότε το εμβαδό κάτω από την παραβολή $\frac{y}{a} = \left(\frac{x}{b}\right)^p$ δίνεται από τη σχέση

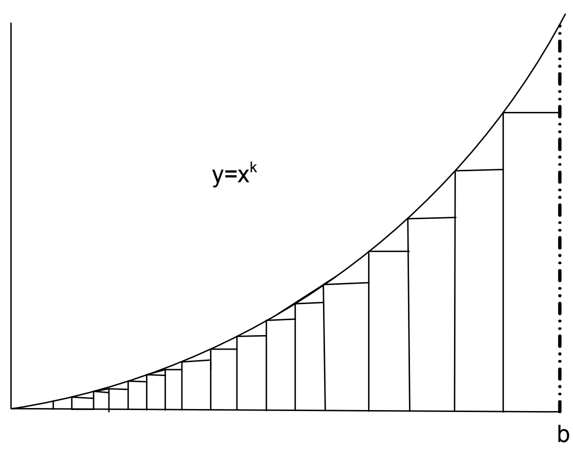
$$\int_0^b \left(\frac{x}{b}\right)^p = \frac{ab}{3}$$

Ο *Roberval* υπέθεσε ότι $\lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{n} \frac{r^p}{n^p} = \frac{1}{p+1}$ αλλά απέδειξε αυτή τη σχέση μόνο για p =1 και p =2 [12].

Ο *Wallis* απέδειξε τη γενικευμένη σχέση $\int_0^a x^k dx = \frac{a^{k+1}}{k+1}$ για k θετικό ρητό αλλά με ατελή επαγωγή και αλγεβρικό τρόπο.

Ο *Fermat* απέδειξε την ίδια σχέση για k θετικό ρητό αριθμό : $\int_0^b x^{\frac{p}{q}} dx = \frac{b^{p/q+1}}{p/q+1}$. [13]

Διαμέρισε τον οριζόντιο άξονα όχι ομοιόμορφα αλλά κατά γεωμετρική πρόοδο, όπως είχε κάνει και ο *Gregorius* του *St.Vincent* στη τριχοτόμηση της γωνίας .Ύψωσε καθέτους έτσι ώστε το εμβαδό των ορθογωνίων να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου.



Σχήμα 9

---

[12] Baron. M. The origins of infinitesimal calculus,σελ. 155 - 156
[13] Νεγρεπόντης, Γιωτόπουλος, Γιαννακούλιας, Απειροστικός Λογισμός τόμος 1ος σελ.209

Έτσι πήρε στον οριζόντιο άξονα σημεία b, rb, r^2b, r^3b,… με $0 < r < 1$.
Το άθροισμα των εμβαδών αυτών των ορθογωνίων θα ισούται με

$$S_r = (b - br)(br)^k + (br - br^2)(br^2)^k + (br^2 - br^3)(br^3)^k + ...$$
$$= b^{k+1}(1-r)r^k[1 + r^{k+1} + r^{2k+2} + ...]$$
$$= b^{k+1}(1-r)r^k \frac{1}{1-r^{k+1}} = \frac{b^{k+1}r^k}{\left(1-r^{k+1}\right)/(1-r)} = \frac{b^{k+1}r^k}{1+r+...+r^k}$$

Θέτοντας $r = \frac{m-1}{m}$, τότε καθώς m→∞, $r \to 1$ και $1 + r + r^2 + ... + r^k \to k + 1$. Άρα η παραπάνω σχέση, θέτοντας $k = \frac{p}{q}$, γίνεται : $S = b^{\frac{p+q}{q}} \frac{1}{\frac{p}{q}+1}$.

Ο *Pascal* επίλυσε το πρόβλημα του τετραγωνισμού της παραβολής $y = x^p$ με την χρήση του αριθμητικού τριγώνου (τρίγωνο Pascal), αφού θεώρησε το εμβαδό υπό την καμπύλη ως άθροισμα απείρων όρων x^p , με x φυσικούς σε αριθμητική πρόοδο. Ίσως όμως η σημαντικότερη προσφορά του *Pascal* στην εξέλιξη του Απειροστικού ήταν το χαρακτηριστικό τρίγωνο. Μια ιδέα που εξελίχθηκε από τον *Leibniz* προς το τέλος του αιώνα για να αποτελέσει ένα ισχυρό εργαλείο για τους πρώτους υπολογισμούς δυναμοσειρών .

Στην Ιταλία ο *Mengoli,* στο έργο του *Geometriae speciosae elementa* (1659) που αποτελείται από έξι βιβλία, χρησιμοποιώντας την ιδέα του αριθμητικού τριγώνου – τρίγωνο Pascal- και με επιρροές από την εργασία του *Viette*, *In Artem Analyticen Isagoge* επινόησε έναν αλγόριθμο για να τετραγωνίζει «παραβολές» της γενικής μορφής $y = x^p$, αναπτύσσοντας μια νέα μαθηματικής θεωρία που ο καθώς ο ίδιος αναφέρει σε επιστολή του :

> *είναι ένα άγνωστο γεωμετρικό στοιχείο που θεμελίωσα για να επιλύσω δύσκολα θεωρήματα με μια απλή διαδικασία.*

Η Θεωρία αυτή, που την ονόμασε Θεωρία quasi λόγων, απετέλεσε τη βάση για τον τετραγωνισμό των παραβολών, με <u>καθαρά αλγεβρικό τρόπο και χωρίς καθόλου χρήση</u>

της γεωμετρίας , για να καταλήξει και εκείνος με τη σειρά του στη γνωστή σχέση

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n}\frac{r^p}{n^p}=\frac{1}{p+1}$$ (Δες Παράρτημα Α)

Ο τετραγωνισμός της γενικευμένης παραβολής δεν είναι το μοναδικό επίτευγμα του *Mengoli* στα άπειρα αθροίσματα. Στο *Novae quadraturae arithmeticae, seu de additione fractionum* που εκδόθηκε στην Bologna το 1650, ασχολήθηκε με άθροιση γεωμετρικών σειρών για να καταλήξει μεταξύ άλλων στα εξής συμπεράσματα [14]:

- Η αρμονική σειρά αποκλίνει.
- Η σειρά των αντιστρόφων των τριγωνικών αριθμών συγκλίνει στο 1 .
- Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+r)}$ συγκλίνει και βρίσκει και το άθροισμα της για r =1…10
- Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ συγκλίνει στο $\frac{1}{4}$.

Με τον τετραγωνισμό ασχολήθηκαν τόσο ο Newton, όσο και ο Leibniz, αναπτύσσοντας ο πρώτος τη μέθοδο των ροών και ο δεύτερος το θεώρημα του μετασχηματισμού.

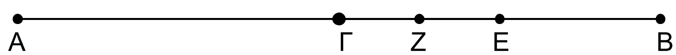
Η γεωμετρική σειρά

Η γεωμετρική σειρά έπαιξε καθοριστικό ρόλο στην εξέλιξη των απείρων αθροισμάτων. Από την εποχή του Ευκλείδη, καθώς είδαμε, ήταν γνωστή η σχέση για το άθροισμα πεπερασμένων όρων γεωμετρικής σειράς, ενώ από το χωρίο του Αριστοτέλη που αναφέραμε, *Φυσικά ΙΙΙ 206b3-b12,* μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ήταν επίσης γνωστός ακόμη και ρόλος του λόγου στη σύγκλιση της γεωμετρικής σειράς. Το Μεσαίωνα ο *Calculator* και ο *Oresme* έκαναν χρήση της γεωμετρικής σειράς σε πολύπλοκα προβλήματα μεταβαλλόμενης κίνησης, ενώ το 16^{ο} αιώνα ο *Viète* «απέδειξε» αλγεβρικά τη γνωστή σχέση για το άθροισμα γεωμετρικής προόδου. Το 1689 ο *Jakob Bernoulli* αποδεικνύει και εκείνος τη σχέση του *Viète* και τη χρησιμοποιεί για να υπολογίσει τα αθροίσματα ενός μεγάλου πλήθους σειρών.

---

[14] http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Mengoli.html

Το 17^{ο} αιώνα η γεωμετρική σειρά παίζει σημαντικό ρόλο στις εργασίες για τον υπολογισμό του ορισμένου ολοκληρώματος και αυτό οφείλεται εν πολλοίς, στην εργασία του *Gregorius του St.Vincent* που συνέλαβε, από τις αρχές του αιώνα, την έννοια του ορίου σε σχέση με τη γεωμετρική σειρά. Κατά το χρονικό διάστημα 1622-1629 ο *Gregorius* αντιλαμβάνεται ότι μία σειρά ορίζει ένα μέγεθος, αυτό που σήμερα θα ονομάζαμε όριο της σειράς. Η ιδέα προέκυψε κατά την μελέτη της γεωμετρικής σειράς.



Σχήμα 10

Αν τα μεγέθη ΑΒ, ΒΓ, ΖΒ, ΕΒ, … του παραπάνω σχήματος αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου τότε :

$$\frac{AB}{\Gamma B} = \frac{\Gamma B}{ZB} = \frac{ZB}{EB} = ..$$

και καθώς

$$\frac{AB - \Gamma B}{\Gamma B - ZB} = \frac{\Gamma B - ZB}{ZB - EB} = ... = \frac{AB}{B\Gamma}$$

προκύπτει ότι

$$\frac{A\Gamma}{\Gamma Z} = \frac{\Gamma Z}{EZ} = ..$$

και άρα τα ΑΓ, ΓΖ, ΕΖ,… , που είναι οι διαφορές των διαδοχικών όρων της γεωμετρικής προόδου, αποτελούν επίσης διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου.
Η διαφορά του αθροίσματος των διαδοχικών όρων από τον πρώτο όρο, μπορεί να γίνει οσοδήποτε μικρή, επιλέγοντας κατάλληλο πλήθος όρων. Ο *Gregorius* θα συμπεράνει ότι για οποιαδήποτε ακολουθία σημείων A, B, C, D, E,… έτσι ώστε τα AB, BC, CD, DE,… να αποτελούν γεωμετρική πρόοδο, είναι δυνατόν να προσδιορισθεί σημείο Κ, πέρα από τα A, B, C,… κλπ τέτοιο ώστε

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CD} = \frac{CD}{DE} = ... = \frac{AK}{BK}$$

και το ΑΚ θα είναι το άθροισμα της γεωμετρικής σειράς.

Ένα ενδιαφέρον συμπέρασμα, που προέκυψε κατά τη μελέτη της γεωμετρικής σειράς από τον *Gregorius,* είναι η ανακάλυψη της λογαριθμικής ιδιότητας της παραβολής, ότι δηλαδή, τα εμβαδά των υπερβολικών χωρίων που ορίζονται από διαστήματα που βρίσκονται στον ίδιο λόγο είναι μεταξύ τους ίσα. Η ιδιότητα επηρέασε καθοριστικά τις εργασίες των επόμενων μαθηματικών όπως του *Fermat*, επέτρεψε στον *Mercator* να δώσει το γνωστό λογαριθμικό ανάπτυγμα, ενώ ο *Newton* ολοκληρώνοντας την γεωμετρική σειρά θα καταλήξει στο ίδιο ανάπτυγμα.

Οι εργασίες του *Gregorius* θα εκδοθούν τελικά το 1647 με το γενικό τίτλο *Opus Geometricum*.

Η σχέση για το άθροισμα απείρων όρων γεωμετρικής προόδου θα χρησιμοποιηθεί από τον Leibniz για την απόδειξη του γνωστού αναπτύγματος $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$, από τον Newton στην εύρεση του αναπτύγματος της αντίστροφης συνάρτησης με γνωστό ανάπτυγμα.

Τα αναπτύγματα συναρτήσεων με δυναμοσειρές και το πρόβλημα της σύγκλισης

Το 1668 εκδίδεται το *Logarithmotechnia* του *Nicolaus Mercator (1620 – 1687)* που σηματοδοτεί ένα σημαντικό σταθμό στην εξέλιξη των απείρων αθροισμάτων, καθώς αναδεικνύει τη χρησιμότητα τους στην κατασκευή λογαριθμικών και τριγωνομετρικών πινάκων. Ο *Mercator* στο βιβλίο αυτό παρουσιάζει τη γνωστή σειρά

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

που είχε υπολογίσει και ο *Newton* μερικά χρόνια νωρίτερα, χωρίς όμως να τη δημοσιεύσει. Η σειρά αποδείχθηκε από τον *Wallis* μερικά χρόνια αργότερα με την παρατήρηση ότι η σειρά συγκλίνει για $x < 1$.

Τρία χρόνια πριν *Logarithmotechnia,* το 1665 εκδίδεται το βιβλίο του *Wallis Arithmetica Infitorum,* που αποτέλεσε πηγή έμπνευσης για το λογισμό του *Newton*, ο οποίος συλλαμβάνει την ιδέα να εφαρμόσει τις αριθμητικές πράξεις σε μεταβλητές :

> *Καθώς οι πράξεις υπολογισμού με τους αριθμούς και με μεταβλητές είναι στενά συνδεδεμένες … έχω εντυπωσιαστεί από το γεγονός ότι κανείς (εκτός από τον*

N.Mercator στον τετραγωνισμό της υπερβολής) δεν σκέφθηκε να προσαρμόσει τις αντιλήψεις μας για τους δεκαδικούς που πρόσφατα καθιερώθηκαν με όμοιο τρόπο για τις μεταβλητές, ...Διότι, καθώς αυτές οι αντιλήψεις έχουν, εν μέρει, την ίδια σχέση με την Άλγεβρα όπως οι αντιλήψεις μας για τους δεκαδικούς αριθμούς έχουν με την κοινή Αριθμητική, οι πράξεις της πρόσθεσης της αφαίρεσης του πολλαπλασιασμού της διαίρεσης και της εξαγωγής ρίζας θα μπορούσαν εύκολα να προκύψουν από τις τελευταίες.[15]

Το αποτέλεσμα αυτών των σκέψεων ήταν η ανακάλυψη του Διωνυμικού Θεωρήματος:

$$(P+PQ)^{m/n} = P^{m/n} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \dots$$

όπου καθένα από τα A, B, C,… υποδηλώνουν τον ακριβώς προηγούμενο όρο, δηλαδή

$$A = P^{m/n},\ B = \frac{m}{n}AQ,\ C = \frac{m-n}{2n}BQ\dots$$

Το Διωνυμικό Θεώρημα πρέπει να ήταν γνωστό και στον *James Gregory (1638 – 1675)*, όπως φαίνεται μέσα από την αλληλογραφία του το 1670.

Με την ανακάλυψη του Διωνυμικού Θεωρήματος, ο *Newton* ήταν πλέον σε θέση να αναπτύξει μια μεγάλη κατηγορία συναρτήσεων σε δυναμοσειρές και έθεσε έτσι τις βάσεις για τον τετραγωνισμό πιο πολύπλοκων καμπυλών. Παράλληλα έχοντας επιτύχει το μετασχηματισμό πολύπλοκων συναρτήσεων σε απλά πολυώνυμα, συλλαμβάνει την ιδέα του αναπτύγματος συναρτήσεων σε δυναμοσειρές. Για να επιτύχει το στόχο του χρησιμοποιεί διαδικασίες ολοκλήρωσης και παραγώγισης, καθώς και απλή διαίρεση πολυωνύμων. Επίσης εφευρίσκει νέες τεχνικές, που κατασκευάζουν τη δυναμοσειρά για την f^{-1} εφόσον είναι γνωστή η δυναμοσειρά της f. Η τεχνική αυτή ήταν και σε γνώση του *Leibniz* που την ανακάλυψε ανεξάρτητα από τον *Newton.*

Μέχρι τα τέλος του αιώνα ο *Newton,* ο *Gregory (1638 – 1675) και Gottfried Wilhelm von Leibniz* θα προτείνουν μια πληθώρα αναπτυγμάτων μεταξύ των οποίων και τα ακόλουθα :

[15] Stillwel, J. Mathematics and its History, Spinger, σελ.107

Το ανάπτυγμα ημx $= x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \ldots$ καθώς και τα

$τοξημx = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \ldots$ και συνx $= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \ldots$, από τους *Newton* και *Leibniz.*

Το ανάπτυγμα $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$ από τον *Leibniz* .

Το ανάπτυγμα $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \ldots$ από τον *Newton*.

Το ανάπτυγμα τοξεφx $= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \ldots$ και

εφx $= \theta + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \ldots$ με ένα λάθος στον 5^o συντελεστή, καθώς και ένα πλήθος άλλων αναπτυγμάτων από τον *Gregory.*

Τα αναπτύγματα συναρτήσεων σε δυναμοσειρές ήταν ένα πολύτιμο εργαλείο, που ταυτόχρονα όμως, δημιούργησε και νέα προβλήματα που αφορούσαν στην εγκυρότητα των χειρισμών που επιδέχονται τα άπειρα αθροίσματα. Ενόσω μελετούσε τα αναπτύγματα σε δυναμοσειρές με το Διωνυμικό Θεώρημα ο *Newton* διέκρινε τα προβλήματα που αφορούσαν την σύγκλιση των αναπτυγμάτων αλλά δεν είχε αναπτύξει τα εργαλεία που θα του επέτρεπαν την διατύπωση κριτηρίων σύγκλισης[16]. Ο *Leibniz* διατύπωσε ένα κριτήριο σύγκλισης για τις εναλλασσόμενες σειρές το 1675 και προσπάθησε να αιτιολογήσει ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}$ των αντιστρόφων των τριγωνικών αριθμών συγκλίνει στο 2 με εισαγωγή της έννοιας terminatio [17] για το «τελευταίο» όρο της ακολουθίας. Τελικά εγκατέλειψε την προσπάθεια για να αντιμετωπίσει γεωμετρικά την σύγκλιση της σειράς και να ισχυρισθεί ότι **σχεδόν όλες οι άπειρες σειρές θα μπορούσαν να αθροισθούν.**

Χαρακτηριστικό της δυσκολίας που αντιμετώπιζαν οι μαθηματικοί της εποχής με την έννοια της σύγκλισης είναι ο ισχυρισμός του *Leibniz* ότι η σειρά $1 - 1 + 1 - 1 + 1 \ldots = \frac{1}{2}$.

[16] Rouse, W. A Short Account of the History of Mathematics. Ανακτήθηκε 28/9/07 από www.maths.tcd.ie
[17] Arthur, R. Essay review 'The Remarkable Fecundity of Liebniz's Work in Infinite Series., σελ.222

Στο ίδιο αποτέλεσμα κατέληξε και ο *Jakob Bernoulli (1654 – 1705)* αλλά και ο *Euler* τον επόμενο αιώνα. Τα προβλήματα αυτά είχαν τις ρίζες τους στο γεγονός ότι οι μαθηματικοί του $17^{ου}$ αιώνα δεν μπόρεσαν να αντιληφθούν ότι ο χειρισμός των απείρων αθροισμάτων ήταν εντελώς διαφορετικός από εκείνο των πεπερασμένων.

Έτσι τόσο ο *Leibniz* όσο και οι αδερφοί *Bernoulli* δεν δίστασαν να προσθέτουν σειρές που αποκλίνουν να αναδιατάσουν σειρές που συγκλίνουν υπό συνθήκη και γενικώς να χρησιμοποιούν όλα τα συμπεράσματα των πεπερασμένων αθροισμάτων στα άπειρα αθροίσματα.

Συνοψίζοντας τα επιτεύγματα των μαθηματικών του $17^{ου}$ αιώνα, αν θα θέλαμε να εντοπίσουμε εκείνες τις ιδέες που πραγματικά άλλαξαν την πορεία της εξέλιξης των απείρων αθροισμάτων νομίζω ότι θα πρέπει να σημειώσουμε :

- Τις εργασίες των *Mengoli* και *Fermat* που συνέβαλλαν προς την αριθμητικοποίηση του τετραγωνισμού. Η μέθοδος του Ιταλού μαθηματικού *Mengoli*, στο *Novae quadraturae arithmeticae, seu de additione fractionum* (1650) και *Geometriae speciosae elementa* (1659) ήταν καθαρά αλγεβρική και αποτελεί μια πρωτότυπη σύζευξη μεταξύ των αριθμητικών τρίγωνων, γνωστά ήδη από τους Άραβες, και του αλγεβρικού συμβολισμού του *Viète*.
- Την ανάπτυξη από τον *Wallis* του τύπου της παρεμβολής για τον υπολογισμό του $\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{p}})^q$.
- Το ανάπτυγμα των Newton – Mercator για τον $\log(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^{n}$ που αφενός μεν απεκάλυψε ένα νέο ερευνητικό πεδίο και αφετέρου άνοιξε νομίζω το δρόμο για τον υπολογισμό των υπερβατικών π, e με αναπτύγματα δυναμοσειρών.

Τα άπειρα αθροίσματα παρουσιάζονται :

- Γεωμετρικά, σε προβλήματα που οδηγούν στον υπολογισμό του ορισμένου ολοκληρώματος, όπως ο τετραγωνισμός κωνικών τομών, εύρεση κέντρου βάρους κλπ.

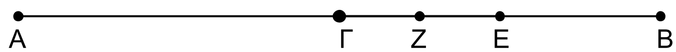
- Αριθμητικά, μέσω των αναπτυγμάτων συναρτήσεων για την κατασκευή τριγωνομετρικών και λογαριθμικών πινάκων.
- Από τις ανάγκες των ίδιων των Μαθηματικών, με τις εργασίες κυρίως του *Newton* αλλά και των *Gregory* και *Leibniz*.
- Από επίκαιρα προβλήματα, όπως εκείνο που έθεσε ο *Huygenes* το 1672 στον Leibniz ,και αφορούσε στο άθροισμα των αντιστρόφων των τριγωνικών αριθμών.
- Στη λύση διαφορικών εξισώσεων από τους *Newton, Leibniz και Bernoulli*.

Αν τώρα συγκρίνουμε τα αδιαίρετα του *Cavalieri* με τις εργασίες του *Gregorius* του *St.Vincent* εύκολα θα συμπεράνουμε ότι υπολείπονται σε μαθηματική αυστηρότητα και υπό αυτό το πρίσμα αποτελούν μια οπισθοδρόμηση ακόμη και αν συγκριθούν με τις μεθόδους του *Stevin*. Παρόλα αυτά η ιστορική εξέλιξη έδειξε ότι η μαθηματική αυστηρότητα θα μπορούσε να θυσιασθεί, πρόσκαιρα όπως αποδείχθηκε, στο βωμό της νέας ιδέας.

Gregorius Saint Vicent (1584 – 1667)

Στο χειρόγραφό του με τίτλο *Sectio Angulorum* ο *Gregorius* ανάγει το πρόβλημα της τριχοτόμησης της γωνίας στην εύρεση δύο μέσων ανάλογων για δοσμένα ευθύγραμμα τμήματα α και β και διατυπώνει, στη πρόταση 696, ότι αν βρεθεί η μέση ανάλογος x_1, μεταξύ δυο δοθέντων γραμμών α και β και στη συνέχεια η μέση ανάλογος x_2 μεταξύ β και x_1 και κατόπιν η μέση ανάλογος x_3 μεταξύ των x_2 και x_1 και η κατασκευή αυτή συνεχιστεί, τότε το τέλος αυτής της σειράς θα είναι η δεύτερη μέση ανάλογος των α και β. Το τι ακριβώς εννοεί με την λέξη τερματισμός *(terminus)* δεν αναφέρεται στο χειρόγραφό αυτό αλλά στο χειρόγραφό με τίτλο Problema Austriacum του 1647. Εκεί δίδεται ο ορισμός που αναφέρθηκε στη σελ. 41.
Η ιδέα για την τριχοτόμηση της γωνίας μέσω της προαναφερθείσας διαδικασίας εύρεσης της δεύτερης μέσης αναλόγου, που είναι κατ΄ουσίαν μια διαδικασία διχοτόμησης, μάλλον προέκυψε από την παρακάτω παρατήρηση που αναφέρεται στο χειρόγραφο (Πρόταση 479).

Όταν απομακρύνουμε από το ΑΒ το μισό του ΑΓ, και από το τμήμα ΒΓ που απομένει πάρουμε πάλι το μισό του ΒΕ, και συνεχίσουμε με αυτόν τον τρόπο, τότε μπορεί να ισχυρισθεί κάποιος ότι το τέλος αυτής της σειράς θα είναι εκεί που το ΑΒ τριχοτομείται.



Σχήμα 11

Η μαθηματική έκφραση της πρότασης αυτής γίνεται είτε μέσω δύο ακολουθιών α_ν, β_ν που ορίζονται με τον αναδρομικό τύπο

$$a_1 = 1, \qquad \beta_1 = 0{,}5$$
$$\alpha_{\nu+1} = a_\nu + \frac{(\beta_\nu - a_\nu)}{2} \qquad \beta_{\nu+1} = \beta_\nu - \frac{(\beta_\nu - \alpha_\nu)}{4}$$

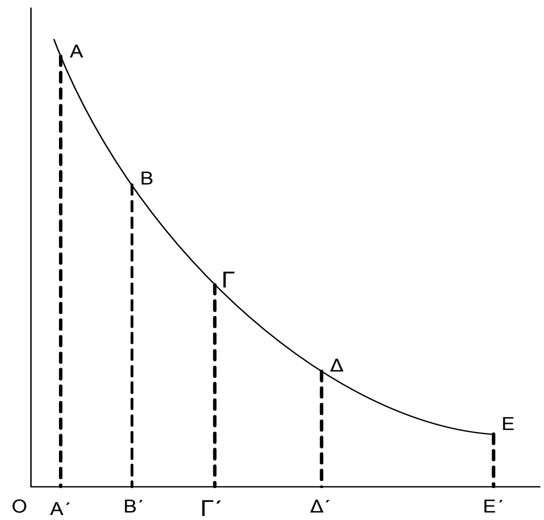
Είτε μέσω της σειράς $\sum_{n-1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n}$ που συγκλίνει στο $\frac{2}{3}$.

Η πρόταση αυτή δεν αποδείχθηκε από τον *Gregorius*[18].

Η πρόταση 673 όμως είναι εκείνη που σχετίζει κατευθείαν στην ιδέα της εύρεσης της μέσης αναλόγου με την διαδικασία διχοτόμησης που αναφέρθηκε παραπάνω : Τα εμβαδά των τμημάτων ΑΑ΄ΒΒ΄, ΒΒ΄Γ΄Γ, ΓΓ΄Δ΄Δ,… της υπερβολής είναι ίσα αν $\frac{\mathrm{O}B'}{OA'} = \frac{O\Gamma'}{OB'} = \frac{O\Delta'}{O\Gamma'} = \ldots$ και αιτιολογεί ότι αυτό προκύπτει από την 1η πρόταση του τρίτου βιβλίου των κωνικών του Απολλώνιου.

Η πρόταση, αν και είναι πραγματικά αληθής, όπως αποδεικνύεται παρακάτω, ο *Gregorius* δεν την αποδεικνύει.

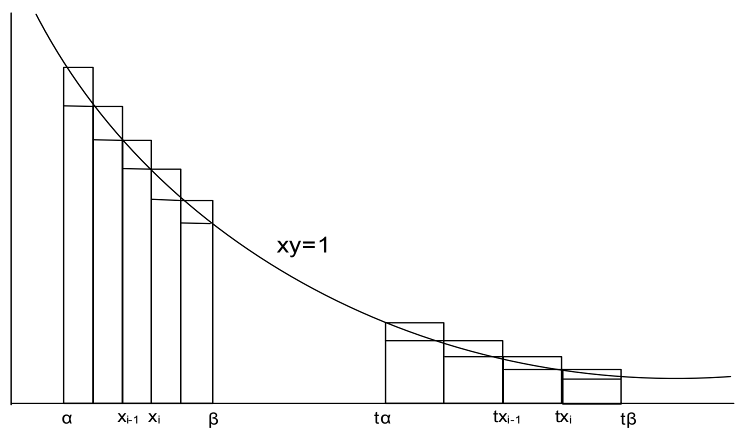
18 Van Looy, H. A chronology and historical analysis of the mathematics manuscripts of Gregorius a Sancto Vincentio, σελ.63



Σχήμα 12

Για να αποδείξουμε την πρόταση θα την μετασχηματίσουμε στην ισοδύναμη της :

Αν [α, β] ένα κλειστό διάστημα στο θετικό άξονα και $A_{\alpha,\beta}$ το εμβαδό του χωρίου της παραβολής xy=1 στο διάστημα αυτό τότε $A_{\alpha,\beta} = A_{t\alpha,t\beta}$ (Σχήμα 13).



Σχήμα 13

Έστω $\alpha = x_o < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = \beta$ διαμέριση του [α , β] με

$x_k - x_{k-1} = \dfrac{\beta - \alpha}{n}$ για κάθε $k = 1,2,3...,n$. Το εγγραμμένο και περιγεγραμμένο ορθογώνιο στο i – υποδιάστημα του [α , β] έχει βάση (β-α)/n και ύψη $1/x_i$ και $1/x_{i-1}$ αντίστοιχα .

Οπότε

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\beta - \alpha}{nx_i} \leq A_{\alpha,\beta} \leq \sum_{i=1}^{n}\frac{\beta-\alpha}{nx_{i-1}} \qquad (1)$$

Έστω τώρα η διαμέριση

$t\alpha= tx_o < tx_1 < tx_2 <\ldots< tx_{i-1}< tx_i < \ldots< tx_n = t\beta$ για το $[t\alpha, t\beta]$

Το εγγραμμένο και περιγεγραμμένο ορθογώνιο στο i – υποδιάστημα του [α , β] έχει βάση $(t\beta-t\alpha)/n$ και ύψη $1/tx_i$ και $1/tx_{i-1}$ αντίστοιχα οπότε το εμβαδό του ισούται με το αντίστοιχο εμβαδό του ορθογωνίου στο $[x_{i-1}, x_i]$ και συνεπώς

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\beta - \alpha}{nx_i} \leq A_{t\alpha,t\beta} \leq \sum_{i=1}^{n}\frac{\beta-\alpha}{nx_{i-1}}. \qquad (2)$$

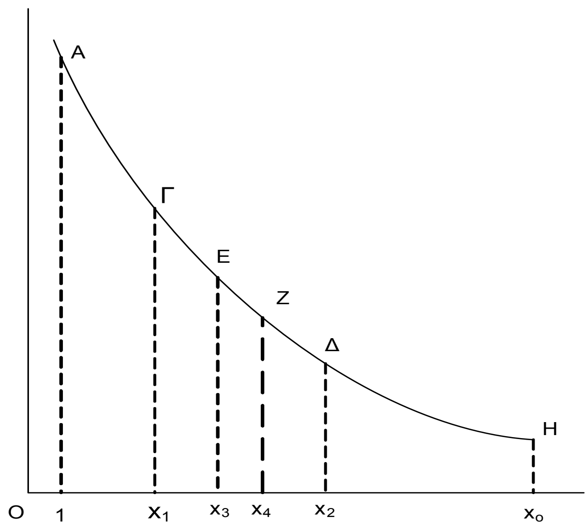
Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $A_{\alpha,\beta} = A_{t\alpha,t\beta}$

Μελετώντας το *Opus Geometricum* του *Gregorius* ο *A.A. de Sarasa* παρατηρεί ότι από τη σχέση $A_{\alpha,\beta} = A_{t\alpha,t\beta}$ προκύπτει η προσθετική ιδιότητα των λογαρίθμων.

Με βάση την παραπάνω παρατήρηση για να τριχοτομηθεί το ΑΑ΄ΔΔ΄ (Σχήμα 12) θα πρέπει να ορισθούν τρείς ίσοι λόγοι πάνω στο τμήμα ΟΔ΄ όποτε αφού

$\frac{OB'}{OA'} = \frac{O\Gamma'}{OB'} = \frac{O\Delta'}{O\Gamma'}$ άρα και ΑΑ΄ΒΒ΄= ΒΒ΄Γ΄Γ= ΓΓ΄Δ΄Δ. Για να κατασκευασθούν όμως οι ίσοι λόγοι θα πρέπει να κατασκευασθούν δύο μέσοι ανάλογοι για τα τμήματα ΟΑ΄ και ΟΔ΄ και αυτό επιτυγχάνεται μέσω της άπειρης διαδικασίας που περιγράφεται στη πρόταση 696 όπως προαναφέρθηκε.

Ας εξετάσουμε, με σύγχρονο συμβολισμό, την άπειρη διαδικασία του St. Vincent, αρχίζοντας από την πρόταση 673 και έχοντας κατά νου την πρόταση που διατύπωσε για την τριχοτόμηση της ευθείας (πρόταση 479)



Σχήμα 14

Εφόσον x_1 είναι η μέση ανάλογος του x_o και 1 και σύμφωνα με την πρόταση 673 θα είναι :

$$\log x_1 - \log_1 = \log x_o - \log x_1 \Leftrightarrow \log x_1 = \frac{1}{2}\log x_o,$$

το x_2 είναι η μέση ανάλογος του x_1 και x_o και άρα

$$\log x_2 = \frac{1}{2}(\log x_o + \log x_1) \Leftrightarrow \log x_2 = \log x_o \cdot \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) = \left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\cdot \log x_o,$$

το x_3 είναι η μέση ανάλογος του x_1 και x_2 και θα έχουμε :

$$\log x_3 = \frac{1}{2}(\log x_1 + \log x_2) \Leftrightarrow \log x_2 = \log x_o\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right) = \left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)\cdot \log x_o,$$

το x_4 είναι η μέση ανάλογος του x_3 και x_2

$$\log x_4 = \frac{1}{2}(\log x_2 + \log x_3) \Leftrightarrow \log x_4 = \log x_o\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\right) = \left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\right)\cdot \log x_o,$$

και συνεχίζοντας με τη διαδικασία αυτή έχουμε τη σειρά $\log x_o \cdot \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}$ η οποία συγκλίνει στο $\frac{2}{3}\log x_o$.

Pietro Mengoli (1626 – 1686)

Ο *Mengoli,* υπήρξε μαθητής του *Cavalieri* στο πανεπιστήμιο της Μπολόνια, και μετά το θάνατο του τον διαδέχθηκε στην έδρα. Διατέλεσε επίσης καθηγητής στη έδρα της μηχανικής της αριθμητικής και των μαθηματικών στο ίδιο πανεπιστήμιο. Τα έργα του, καθώς ήταν ευρέως διαδεδομένα στην Ευρώπη, ήταν γνωστά στους Wallis, Leibniz και Collins.

Οι εργασίες του στις άπειρες σειρές περιλαμβάνουν μια πληθώρα αποτελεσμάτων, μεταξύ των οποίων την απόκλιση της αρμονικής σειράς και το άθροισμα των αντιστρόφων των τριγωνικών αριθμών.

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε την απόδειξη του για την απόκλιση της αρμονικής σειράς.

Οι παρατηρήσεις ότι η αρμονική σειρά γράφεται ως

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)+\ldots$$

και ότι για τις διαδοχικές παρενθέσεις ισχύει ότι

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>3\cdot\frac{1}{3},\ \frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}>3\cdot\frac{1}{6},\ldots$$

Πιθανόν να ήταν εκείνες που τον οδήγησαν αρχικά να δείξει ότι

Για κάθε φυσικό ν > 1 ισχύει $\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}>\frac{3}{n}$

Απόδειξη :

$$2n^3>2n^3-2n\Leftrightarrow 2n^3>2n(n^2-1)\Leftrightarrow\frac{2n^3}{n^2(n-1)(n+1)}>\frac{2n(n^2-1)}{n^2(n^2-1)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{2n}{(n-1)(n+1)}>\frac{2}{n}\Leftrightarrow\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n-1}>\frac{2}{n}$$

Έχοντας αποδείξει αυτή την πρόταση, ο *Mengoli*, είναι πλέον έτοιμος να αποδείξει την απόκλιση της αρμονική σειράς.

Αναδιάταξε τους όρους της αρμονικής σειράς

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots=1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}\right)\ldots$$

και κάνοντας χρήση της σχέσης που απέδειξε

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}>1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\right)$$

προκύπτει ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}>1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$$

Για τη σειρά των αντίστροφων των τριγωνικών αριθμών αποδεικνύει, εσφαλμένα, ότι συγκλίνει στο 1.

Αρχικά αποδεικνύει ότι :

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\ldots+\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{n}{n+2}$$

Στη συνέχεια ισχυρίζεται ότι διαφορά $1-\dfrac{n}{n+2}$ μπορεί να γίνει μικρότερη από κάθε θετικό αριθμό για κατάλληλα μεγάλο n.

Για να αποδείξει ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+r)}$ συγκλίνει, αποδεικνύει αρχικά ότι

$$\frac{1}{1+r}+\frac{1}{2(2+r)}+\frac{1}{3(3+r)}+\ldots=\frac{1}{r}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{r}\right)$$

και για r =1 … 10 αποδεικνύει ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n(n+r)}$ συγκλίνει και υπολογίζει το άθροισμα της .

Nicolaus Mercator (1620 - 1687)

Η λογαριθμική σειρά του *Mercator*, όπως είδαμε, άνοιξε νέους δρόμους στη διερεύνηση των απείρων σειρών. Ο ίδιος ο *Mercator* δεν έδωσε αναλυτική απόδειξη της σειράς. Το έκανε ο Wallis παρουσιάζοντας το *Logarithmotechnia* στο περιοδικό *Philosophical Transactions* του 1668.

Σε σύγχρονο συμβολισμό η απόδειξη είναι η ακόλουθη [19]:

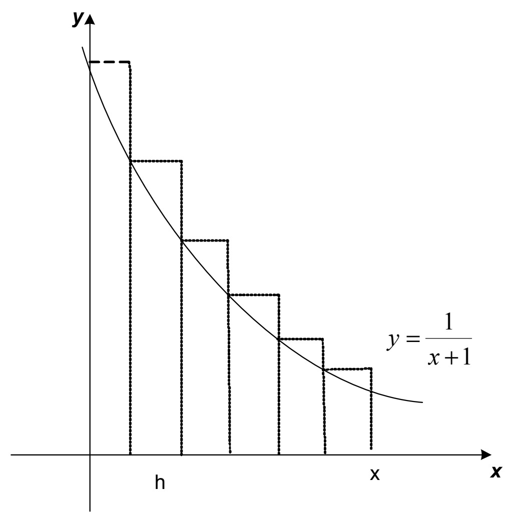
Το διάστημα [0, x] υποδιαιρείται σε n υποδιαστήματα μήκους $h = \frac{x}{n}$ και εγγράφονται παραλληλόγραμμα ύψους 1, $\frac{1}{h+1}, \frac{1}{2h+1}, \frac{1}{3h+1}, \ldots, \frac{1}{(n-1)\cdot h+1}$ αντίστοιχα.

Χρησιμοποιώντας την μέθοδο των αδιαιρέτων του *Cavalieri* υπολογίζει το εμβαδόν υπό την καμπύλη $y = \frac{1}{x+1}$, που είναι :

$$E = h + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{h}{i \cdot h + 1} = h + h \cdot \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i \cdot h + 1}.$$

Αναπτύσσοντας το κάθε ύψος , $\frac{1}{k \cdot h + 1}$, k=1,…,n-1, σε δυναμοσειρά

[19] Edwards, C.H. The historical development of the calculus, σελ. 163



Σχήμα 15

Έχουμε τελικά

$$E = h + h\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k h^k + h\cdot\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k(2h)^k + \ldots + h\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k((n-1)h)^k$$
$$= h + h\left(1 - h + h^2 - \ldots\right) + h\left(1 - 2h + 4h^2 - \ldots\right) + \ldots + h\left(1 - (n-1)h + (n-1)^2 h^2 - \ldots\right)$$
$$= n\cdot h - \left(h^2 + 2h^2 + 3h^2 + \ldots + (n-1)h^2.\right) + \left(h^3 + 4h^3 + 9h^3 + \ldots + (n-1)^2 h^3\right) - \ldots + \ldots$$
$$= n\cdot h - h^2\left(1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1).\right) + h^3\left(1 + 4 + 9 + \ldots + (n-1)^2\right) - \ldots + \ldots .$$

Με την αντικατάσταση $h=\frac{x}{n}$ προκύπτει ότι

$$E = x - \frac{x^2}{n^2}\sum_{j=1}^{n-1} j + \frac{x^3}{n^3}\sum_{j=1}^{n-1} j^2 - \ldots + .(-1)\frac{x^{k+1}}{n^{k+1}}\sum_{j=1}^{n-1} j^k + \ldots$$

Από την ισότητα $\lim_{n\to\infty}\frac{\sum i^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}$

που προκύπτει από την εικασία του *Cavalieri* και αποδείχθηκε από τον *Wallis* αλλά και από τον *Fermat* και *Torricelli.*

μεταβαίνοντας στο όριο προκύπτει

$$E = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ..\ .$$

δηλαδή

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ..$$

Το αξιοσημείωτο είναι ότι ο *Wallis* παρατηρεί πως η συνθήκη x < 1 είναι απαραίτητη για τη σύγκλιση.

John Wallis (1601-1703)

Όταν ο *Wallis* παρουσίασε την παραπάνω απόδειξη ήταν ένας διακεκριμένος καθηγητής στη Σαλιβιανή έδρα της Οξφόρδης από το 1657. Το 1665, στο βιβλίο του «*Arithmetica infinitorum»,* είχε προσπαθήσει να υπολογίσει αριθμητικά με τη χρήση αδιαίρετων, το εμβαδόν του τεταρτημορίου ενός μοναδιαίου κύκλου. Με σύγχρονο συμβολισμό ο Wallis προσπάθησε να δείξει ότι $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{4}$.

Η επίλυση του προβλήματος, επέτρεψε στον *Wallis* να αναπτύξει μια περίτεχνη διαδικασία παρεμβολής που μεταξύ των άλλων οδήγησε και στη γνωστή προσεγγιστική τιμή του π

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 10 \cdot ...}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 9 \cdot ...}$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ προσπάθησε να υπολογίσει το όριο $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \sqrt{1-\frac{k^2}{n^2}}$.

Ο *Wallis* επικεντρώσε αρχικά τις προσπάθειες του στον υπολογισμό της γενικής περίπτωσης $\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{p}})^q$ ώστε να επιλύσει το πρόβλημα αντικαθιστώντας $p = q = \frac{1}{2}$.

Χρησιμοποιώντας αρχικές παρατηρήσεις, απειροστά και ατελή επαγωγή ο *Wallis* υπολόγισε το

$\int_0^1 x^p\,dx = \frac{1}{p+1}$ για p ακέραιο αριθμό όχι απαραίτητα θετικό και στη συνέχεια το

$$\int_0^1 x^{\frac{p}{q}} dx = \frac{q}{p+q}$$ με p, q θετικούς ακέραιους.

Έχοντας αυτά, μπορεί πλέον με το Διωνυμικό Θεώρημα να υπολογίσει το ζητούμενο ολοκλήρωμα για p, q ακέραιους.

Αντί όμως να υπολογίσει το αρχικό ολοκλήρωμα, για λόγους ευκολίας υπολόγισε το αντίστροφο του και κατασκεύασε, έναν πίνακα που έχοντας στην πρώτη γραμμή ακέραιες τιμές του q και στην πρώτη στήλη ακέραιες τιμές του p, έδιδε τις τιμές του ολοκληρώματος $\dfrac{1}{\int_0^1 (1-x^{\frac{1}{p}})^q dx}$ για τιμές των p , q ≤ 10.

Παρατηρώντας ότι ο πίνακας είναι συμμετρικός ως προς την πρώτη διαγώνιο και για κάθε στοιχείο του πήρε τις σχέσεις :

$$a_{p,q} = \frac{1}{p!}(q+1)(q+2).....(q+p) \qquad (1)$$

$$a_{p,q} = \frac{(q+p)}{q} a_{p,q-1} \text{ p, q θετικοί ακέραιοι} \qquad (2)$$

Στη συνέχεια παρεμβάλει μεταξύ των διαδοχικών θετικών ακεραίων τιμών των q και p τις τιμές q/2 και p/2.

Χρησιμοποιεί την σχέση (1) για να υπολογίσει τις τιμές $a_{p,q}$ με $q = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, ...$ και p θετικό ακέραιο, οπότε λόγω της συμμετρίας του πίνακα συμπληρώνονται και οι τιμές $a_{q,p}$.

Έχει απομείνει να υπολογίσει τις τιμές $a_{p,q}$ με p και q : $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, ...$

Αν $p = \frac{m}{2}$ $q = \frac{n}{2}$ με m, n άρτιους από τη (2) προκύπτει ότι

$$b_{mn} = a_{m/2,n/2} = \frac{m/2 + n/2}{n/2} a_{m/2,(n/2)-1}$$

$$b_{mn} = \frac{m+n}{n} b_{m,n-2} . \qquad (3)$$

Ο *Wallis* χρησιμοποιεί τη σχέση (3) για να συμπληρώσει την πρώτη γραμμή και πρώτη στήλη, ενώ για να υπολογίσει τις τιμές $a_{\frac{m}{2},\frac{n}{2}}$ με m, n περιττούς ο *Wallis* παρατηρεί ότι καθώς ισχύει η σχέση $b_{m,n} = b_{m,n-2} + b_{m-2,n}$ ισχύει για m, n άρτιους κατ΄αναλογία θα ισχύει και για m, n περιττούς .

Η μέθοδος παρεμβολής του *Wallis* είναι η πρώτη, μετά τον *Mengoli,* που κινείται προς την κατεύθυνση της άλγεβρας και αριθμητικοποίησης των τετραγωνισμών. Επηρέασε δε σημαντικά τις εργασίες των *Gregory, Newton, Taylor* και έστρεψε τις ερευνητικές προσπάθειες προς την κατεύθυνση της αλγεβροποίησης .

Ο *Newton* όταν έγραφε το De analysi αναγνώρισε το «*Arithmetica infinitorum»,* ως το έργο που διαμόρφωσε τις αντιλήψεις του.

James Gregory (1638 – 1675)

Την εποχή που δημοσιεύεται το *Logarithmotechnia* του *Mercator*, ο *Gregory* βρίσκεται στο πανεπιστήμιο του St. Andrews της Σκωτίας, έχοντας ολοκληρώσει προηγουμένως τις σπουδές του στο Πανεπιστήμιο της Πάδουα, όπου βρισκόταν από το 1664. Στην Πάδουα, ασχολήθηκε με το πρόβλημα εύρεσης του εμβαδού κύκλου και υπερβολής με την επίβλεψη του καθηγητή *Stefano degli Angeli* . Τα αποτελέσματα τα δημοσίευσε το 1667 στην εργασία του με τίτλο *Vera circuli et hyperbolae quadratura.* Με την μέθοδο που ακολούθησε κατασκεύασε διαδοχικά πολύγωνα εγγεγραμμένα και περιγραμμένα στην κωνική που ήθελε να τετραγωνίσει. Συγκεκριμένα στο n-οστό βήμα κατασκεύασε εγγεγραμμένο πολύγωνο που το καθένα αποτελείται από 2^n τρίγωνα και περιγεγραμμένο πολύγωνο που το καθένα αποτελείται από 2^n τετράπλευρα[20]. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των κωνικών κατασκεύασε δύο ακολουθίες εμβαδών $\{E_n\}$ και $\{E'_n\}$ για τα εγγεγραμμένα και περιγεγραμμένα πολύγωνα στη κωνική αντίστοιχα. Έτσι $E_n = \sum_{i=1}^{2n} T_i$ και $E'_n = \sum_{i=1}^{2n} T'_i$ όπου T_i τα εμβαδά των εγγεγραμμένων στη κωνική τριγώνων και T'_i τα εμβαδά των περιγεγραμμένων

[20] Baron, M. The origins of infinitesimal calculus, σελ. 230

στη κωνική τετραπλεύρων. Τελικά αποδεικνύει ότι η διαφορά $E'_n - E_n$ γίνεται μικρότερη από κάθε αριθμό καθώς το n μεγαλώνει. Συνεπώς συμπεραίνει ότι το τελευταίο πολύγωνο στη διαδικασία αυτή θα μπορούσε να θεωρηθεί ως όριο των E_ν και E'_ν το οποίο και θεώρησε ως το εμβαδόν της κωνικής.. Ο *Gregory* προσπάθησε να δείξει ότι το παραπάνω όριο θα είναι ένας άρρητος αριθμός δείχνοντας ότι κανένας πεπερασμένος συνδυασμός των όρων (E_n , E'_n)[21] της διπλής ακολουθίας δεν μπορούσε να δώσει ως αποτέλεσμα μια ρητή συνάρτηση των (E_o, E'_o).

Το 1668 θα εκδοθεί το *Geometriae pars universalis* που είναι γραμμένο ως διδακτικό εγχειρίδιο και πραγματεύεται μεταξύ άλλων τις έννοιες της εφαπτομένης, το πρόβλημα της οποίας αναγνωρίζεται ως το αντίστροφο του τετραγωνισμού .

Η εργασία του *Gregory* στις άπειρες σειρές είναι εντυπωσιακή. Η αλληλογραφία του με τον *Collins* είναι κατατοπιστική του θέματος.

Στις 20 Μαρτίου του 1670 ο *John Collins (1624 – 1683)* κοινοποίησε στον *Gregory* την παρακάτω σειρά με την οποία ο *Newton* υπολόγισε το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου μεταξύ της χορδής ε και της παράλληλης προς αυτήν διαμέτρου :

$S = 2RB - \frac{B^3}{3R} - \frac{B^5}{20R^2} - \frac{B^7}{56R^5} - \frac{5B^9}{567\mathrm{R}^7}$ όπου R η ακτίνα του κύκλου και B η απόσταση της χορδής από τη διάμετρο. [22]

Αυτό δηλαδή που δόθηκε από τον *Newton* είναι μια σειρά για τον υπολογισμό του

$$\int_0^B \sqrt{R^2 - x^2}\,dx .$$

Ο *Gregory* απαντά στις 20 Απριλίου του 1670 ότι δεν μπορεί να καταλάβει αν η σειρά είναι σωστή ή όχι και έτσι θεωρεί την έκφραση αυτή ως λανθασμένη.

Στις 23 Νοεμβρίου του 1670 ο *Gregory* ανακοινώνει *στον Collins,* <u>χωρίς να αποδεικνύει</u>, μια σχέση παρεμβολής για συνάρτηση f όταν είναι γνωστές οι τιμές της f στα σημεία 0, x_o, $2x_o$,…, nx_o.[23] Με σύγχρονο συμβολισμό η σχέση είναι η ακόλουθη :

[21] Boyer, B.C. The history of the Calculus and its conceptual development σελ. 174
[22] Ranjan, R The Discovery Of the Series for π by Leibniz, Gregory and Nilakantha, σελ. 297
[23] Dehn M., Hellinger E. Certain Mathematical Achievements of James Gregory, σελ.151

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{x_o}\Delta f(0)+\frac{x(x-x_o)}{x_o\cdot 2x_o}\Delta^2 f(0)+\frac{x(x-x_o)(x-2x_o)}{x_o\cdot 2x_o\cdot 3x_o}\Delta^3 f(0)+...$$

όπου $\Delta f(0)=f(x_o)-f(0)$, $\Delta f(x_o)=f(2x_o)-f(x_o)$, $\Delta^2 f(0)=\Delta f(x_o)-\Delta f(0)$.

Η παραπάνω σχέση είναι μια ειδική περίπτωση της σχέσης παρεμβολής με α = 0 και $f(0)=0$:

$$f(a+h)=f(a)+\frac{h}{x_o}\Delta f(a)+\frac{\frac{h}{x_o}\left(\frac{h}{x_o}-1\right)}{1\cdot 2}\Delta^2 f(a)+...+\frac{\frac{h}{x_o}\left(\frac{h}{x_o}-1\right)...\left(\frac{h}{x_o}-n+1\right)}{n!}\Delta^n f(a)$$

που έκανε γνωστή ο *Newton* μερικά χρόνια αργότερα.

Στην αλληλογραφία του σχετικά με τη σχέση, ο *Gregory* αναφέρει και τη διαδικασία που χρησιμοποίησε ο *Henry Briggs (1561 -1630)* στο *Arithmetica Logarithmica,* του 1624, για την δημιουργία λογαριθμικών πινάκων. Εκτός από τη χρησιμότητα της σχέσης για την παρεμβολή τιμών σε γνωστούς πίνακες ο *Gregory* τονίζει με έμφαση ότι η σχέση μπορεί να χρησιμοποιηθεί στο πρόβλημα του τετραγωνισμού καμπυλών δίνοντας διάφορα παραδείγματα.

Ο *Gregory* εφάρμοσε αυτή τη σχέση και κατέληξε σε μία σειρά αναπτυγμάτων σειρών. Τώρα γνωρίζει πλέον, όπως αναφέρει και ο ίδιος «*να βρίσκει το ημίτονο αν έχει το τόξο και τον αριθμό αν έχει το λογάριθμο*»[24]. Ας δούμε λίγο την αυτή την τελευταία αναφορά. Αν γνωρίζει το λογάριθμο, x, μπορεί να βρίσκει τον αριθμό, α. Αυτό είναι ισοδύναμο με το εξής :

Αν η βάση του λογαρίθμου είναι 1 + d τότε $\log_{(1+d)} a = x$ και άρα $(1+d)^x = a$.

Ο αριθμός α υπολογίζεται από το $(1+d)^x$ με τη βοήθεια της σχέσης της παρεμβολής, καθώς είναι γνωστές οι τιμές της $f(x)=(1+d)^x$ όταν το x = 0, 1, 2, ….

Πραγματικά , $f(0)=1$, $\Delta f(0)=\mathrm{d}$ $\Delta^2 f(0)=\mathrm{d}^2$ και τελικά

$$(1+d)^x=1+xd+\frac{x(x-1)}{1\cdot 2}d^2+\frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}d^3+...$$

Οπότε μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ο *Gregory* γνώριζε το Διωνυμικό Θεώρημα.

[24] Ranjan, R. The Discovery Of the Series for π by Leibniz, Gregory and Nilakantha, σελ. 298

Από την αλληλογραφία με τον *Collins* μπορούμε να συμπεράνουμε επίσης ότι η ανακάλυψη του Διωνυμικού θεωρήματος από τον *Gregory* έγινε ανεξάρτητα από τον *Newton*.

Στις 24 Δεκεμβρίου του 1670 ο *Collins* του ανακοινώνει τα αναπτύγματα του *Newton* από το *De analysi per aequationes infinitas* για το ημίτονο, το συνημίτονο, το τόξο συνημίτονου και το $\frac{x}{\text{εφx}}$ αναφέροντας ότι προέκυψαν από μια γενική μέθοδο που ο Newton ανακάλυψε.

Στις 15 Φεβρουαρίου του 1671 ο *Gregory* γράφει στον *Collins* :

> *Σε ότι αφορά στη γενική μέθοδο του κ.Newton φαντάζομαι ότι έχω κάποια γνώση αυτής τόσο σε γεωμετρικές όσο και σε μηχανικές καμπύλες. Παρόλα αυτά σε ευχαριστώ για τις σειρές που μου έστειλες και σου στέλνω και τις επόμενες σειρές.*

και ακολουθούν οι δυναμοσειρές , με 5 ή 6 όρους η κάθε μία, για τις συναρτήσεις :

$$\text{τοξεφx, εφx, } \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}, \log\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}, \ \log \varepsilon\phi\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right), \ \tau o\xi\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\left(e^{x}\sqrt{2}\right)}\right),$$

$$2\text{τοξεφ}\left(\upsilon\pi\varepsilon\rho\varepsilon\phi\alpha\pi\tau\frac{x}{2}\right).$$

Για παράδειγμα η σειρά που δίνει για την εφx είναι η ακόλουθη :

$$t = a + \frac{a^3}{3r^2} + \frac{2a^5}{15r^4} + \frac{17a^7}{315r^6} + \frac{3233a^9}{181440r^8}$$

Όπου t το μήκος της εφαπτομένη, α το τόξο και r η ακτίνα.

Αν τώρα $t = r\varepsilon\phi\theta$ και α = rθ η σειρά γίνεται

$$\text{εφθ} = \theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{2\theta^5}{15} + \frac{17\theta^7}{315} + \frac{3233\theta^9}{181440}$$ [25]

που είναι η σειρά *Taylor* της εφαπτομένης, με λανθασμένο το πέμπτο συντελεστή. Οι υπολογισμοί στο περιθώριο της επιστολής υποδεικνύουν τον τρόπο της σκέψης. Αρχικά υπέθεσε ότι υπάρχουν όλες οι παράγωγοι που του χρειάστηκαν και τις

[25] Feigenbaum, L. Brook Taylor and the Method of Increment, σελ.73

υπολόγισε σωστά, εκτός από το λάθος που ήδη αναφέραμε και ένα ακόμη λάθος στο ανάπτυγμα της $\log\frac{1}{\cos x}$ που οφείλεται στο προηγούμενο λάθος. Οι αντιλήψεις που επικρατούν (Turnbull) συγκλίνουν προς το συμπέρασμα ότι ο *Gregory* υπολόγισε τις σειρές του υπολογίζοντας παραγώγους και όχι με κάποια από τις τρεις μεθόδους που ο *Newton* χρησιμοποιούσε για τα αναπτύγματα.

Οι σειρές $\log\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$ και $\log \varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$ υπολογίζονται με κατά μέρη ολοκλήρωση των εφθ και $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$.

Παρόλο που φαίνεται ότι ο *Greogory* έκανε χρήση του θεωρήματος *Taylor* για τα παραπάνω αναπτύγματα, εντούτοις δεν μπορούμε να συμπεράνουμε από τα γραπτά του αν πραγματικά γνώριζε τη γενική διατύπωση του θεωρήματος. Το μόνο σίγουρο είναι ότι ο Gregory γνώριζε να βρίσκει το ανάπτυγμα Taylor συγκεκριμένων συναρτήσεων[26].

Isaac Newton (1643-1727)

Καθώς είδαμε η αλληλογραφία του *Gregory* με τον *Collins* αποκάλυψε στον πρώτο την εργασία του *Newton* με τίτλο *De analysi per aequationes infinitas*. Πριν αναφερθούμε αναλυτικά σ*το De Analysi* ας αναφερθούμε στις συνθήκες κάτω από τις οποίες γράφτηκε το έργο. Ο *Newton*, μέχρι το 1665 που αποφοίτησε από το Cambridge δεν είχε να επιδείξει τίποτα αξιόλογο στα μαθηματικά. Το καλοκαίρι του ιδίου έτους αναγκάζεται να εγκαταλείψει το Cambridge, που έκλεισε εξαιτίας της πανώλης. Στα επόμενα δύο χρόνια που θα παραμείνει σπίτι του, ο *Newton* θα θέσει τις βάσεις του Απειροστικού Λογισμού του.

Επιστρέφοντας στο Cambridge, ολοκληρώνει τις μεταπτυχιακές του σπουδές και διεκδικεί με επιτυχία μια θέση στο διδακτικό προσωπικό της σχολής. Ο *Barrows*, που υπήρξε καθηγητής του, ανακοινώνει τα αποτελέσματα από το *De analysi per aequationes infinitas* στον *Collins* και όταν βεβαιώνεται για την ορθότητα και την

[26] Feigenbaum, L. Brook Taylor and the Method of Increment, σελ.75

πρωτοτυπία τους παραιτείται από την καθηγητική του θέση το 1669, ανοίγοντας το δρόμο στον 27χρονο *Newton* για την Λουκασιανή έδρα.

Ο *Newton* ασχολήθηκε και εκείνος αρχικά με τον τετραγωνισμό της γενικής παραβολής $y = ax^{\frac{m}{n}}$, αναπτύσσοντας μια μέθοδο εντελώς διαφορετική σε σχέση με εκείνες των προγενέστερων μαθηματικών (Fermat, Pascal, *Wallis* κλπ.).

Συγκεκριμένα :

α) Καθώς τα αποτελέσματα που μέχρι τότε είχαν επιτευχθεί, δεν οδήγησαν σε μία γενική μέθοδο ολοκλήρωσης, ο *Newton* στράφηκε προς την εύρεση της μεθόδου που θα του επιτρέψει να υπολογίζει το εμβαδόν <u>κάτω από οποιαδήποτε καμπύλη</u>.

β) Ο *Newton* για να υπολογίσει το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη, δεν διαμέρισε το εμβαδόν σε εμβαδά άλλων γεωμετρικών σχημάτων όπως τρίγωνα, ορθογώνια κλπ . Καθόρισε αρχικά το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού και στη συνέχεια, γνωρίζοντας το ρυθμό μεταβολής υπολόγισε το ίδιο το εμβαδόν με το αόριστο ολοκλήρωμα της συνάρτησης που δίνει την τεταγμένη.

Ο *Newton* θέτει εξ΄ αρχής τις σειρές στον πυρήνα του Απειροστικού Λογισμού. Στο *De analysi* δίνονται αρχικά χωρίς αποδείξεις, οι παρακάτω τρεις κανόνες για τον υπολογισμό εμβαδού κάτω από καμπύλη :

Κανόνας 1ος . Το εμβαδό του χωρίου που βρίσκεται υπό τη γενική παραβολή $y = ax^{\frac{m}{n}}$ ισούται με $\dfrac{ax^{\frac{m}{n}+1}}{(m/n)+1} = \dfrac{nax^{\frac{m+n}{n}}}{m+n}$ όπου α σταθερά και m, n θετικοί ακέραιοι.

Κανόνας 2ος . Αν η τιμή του y συγκροτείται από πολλούς όρους αυτού του είδους, τότε και το συνολικό εμβαδό θα συγκροτείται από τα εμβαδά που προκύπτουν από τους όρους αυτούς.

Κανόνας 3ος . Αν η τιμή του y, ή οποιοιδήποτε από τους όρους που συγκροτούν το y, είναι πιο πεπλεγμένη από τις προαναφερθείσες, η τιμή πρέπει να αναλυθεί σε απλούστερους όρους με το ίδιο τρόπο όπως ακολουθείται και για τους δεκαδικούς αριθμούς δηλαδή διαιρώντας, εξάγοντας ρίζες ή λύνοντας τις αντίστοιχες εξισώσεις.

Ο 3ος και τελευταίος κανόνας ήταν η πρωτοποριακή ιδέα του *Newton* που σχετίζει ευθέως τον τετραγωνισμό με τις άπειρες σειρές.

Συνοψίζοντας, παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα σχετικά με τον τετραγωνισμό, που ήταν σε γνώση του *Newton* όταν εκείνος ασχολήθηκε με το πρόβλημα. Αποκαλυπτική προς την κατεύθυνση αυτή είναι η επιστολή που έστειλε ο *Newton* στον *Oldenburg* το 1676, ως απαντητική στις επιστολές του *Leibniz* προς την Βασιλική Εταιρεία, με τις οποίες ζητούσε διευκρινήσεις για την εργασία του *Newton* στις άπειρες σειρές. Ο *Newton* γνώριζε :

α) Τον υπολογισμό του εμβαδού κάτω από την καμπύλη $y = ax^{\frac{m}{n}}$ από τον *Fermat* και τον *Wallis*. Ο ίδιος ο *Newton* υπολογίζει στο *De analysi* την σχέση αυτή.[27]

β) Τον υπολογισμό με αριθμητικές παρεμβολές του εμβαδού κάτω από την $(1 - x^{\frac{1}{p}})^q$ επίσης από τον *Wallis*.

γ) Το Διωνυμικό θεώρημα που, όπως αναφέρει ο ίδιος, το είχε ανακαλύψει λίγο από την πανώλη που οδήγησε στο κλείσιμο του Cambridge το 1665-1666.

δ) Την εργασία *Logarithmotechica* του *Mercator* στην οποία ,όπως αναφέρει στην ίδια επιστολή, είχε παρουσιάσει μερικά αποτελέσματα ανάλογα με τα δικά του [28]. Στην εργασία αυτή υπάρχει το ανάπτυγμα για τον log(1+x) που και ο *Newton* ανακάλυψε παράλληλα.

Με βάση τα παραπάνω ο *Newton* μελετά συστηματικά τις άπειρες σειρές και αναπτύσσει τη μεθοδολογία του στα εξής έργα :

α) Στο *De analysi per aequationes infinitas* το οποίο, αν και εκδόθηκε το 1711 εντούτοις από το 1669 που ο *Newton* το συνέγραψε, κυκλοφορούσε ευρέως στους κύκλους του Cambridge. Στο *De Analysi*, ο *Newton* εκτός από την παρουσίαση των τριών αρχών από τις οποίες διέπεται η θεωρία του, υπολογίζει και σειρές για το τοξημχ, ημx, συνx, τοξσυνx και e^x . Για την ημx και συνx η απόδειξη είναι γεωμετρική και θα την παραθέσουμε αργότερα, για την e^x χρησιμοποιεί την

[27] Dunham, W. The Calculus Gallerry, σελ.11
[28] http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Newton/RouseBall/RB_Newton.html

διαδικασία που του επιτρέπει από το ανάπτυγμα μιας συνάρτησης να κατασκευάσει και το ανάπτυγμα της αντίστροφης συνάρτησης.

β) Στο *De Methodis Serierum et Fluxionum*, που γράφτηκε το 1671 αλλά τελικά δημοσιεύθηκε το 1736, αναπτύσσεται η μέθοδος των ροών η οποία εκτός των άλλων, δίδει και τη δυνατότητα αναπτύγματος συναρτήσεων σε δυναμοσειρές. Με τη μέθοδο των ροών ο *Newton* επέλυσε προβλήματα, που με σύγχρονη ορολογία, αναφέρονται στην εύρεση της παραγώγου αν έχει δοθεί το αόριστο ολοκλήρωμα και στην εύρεση του αορίστου ολοκληρώματος αν έχει δοθεί η παράγωγος. Επίσης εξέτασε τη δυσκολότερη περίπτωση της διαφορικής εξίσωσης $y + y' = f$. Οι λύσεις δίδονται ως αναπτύγματα απείρων σειρών . Στο ίδιο έργο υπάρχει και το «*παραλληλόγραμμο του Newton*» μια τεχνική που επιτρέπει την ανάπτυξη σε σειρές, συναρτήσεων που έχουν δοθεί σε πεπλεγμένη μορφή.

γ) Στο *Methodus Differentialis* που αν και γράφτηκε το 1676 δημοσιεύθηκε το 1711, υπάρχει ο γνωστός τύπος παρεμβολής *Newton-Gregory*.

Έστω συνάρτηση f με γνωστές τιμές στα σημεία α, α + x_o, α + $2x_o$,…, α + nx_o . Τότε

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{x_o}\Delta f(a) + \frac{\frac{h}{x_o}\left(\frac{h}{x_o}-1\right)}{1\cdot 2}\Delta^2 f(a) + \ldots + \frac{\frac{h}{x_o}\left(\frac{h}{x_o}-1\right)\ldots\left(\frac{h}{x_o}-n+1\right)}{n!}\Delta^n f(a)$$

όπου

$$\Delta f(a) = f(a+x_o) - f(a)$$

$$\Delta f(a+x_o) = f(a+2x_o) - f(a+x_o)$$

$$\Delta f(a+2x_o) = f(a+3x_o) - f(a+2x_o)$$

…………………………………………….

$$\Delta^2 f(a) = \Delta f(a+xo) - \Delta f(a)$$

$$\Delta^3 f(a) = \Delta^2 f(a+xo) - \Delta^2 f(a)$$

……………………………………………

Ο *Newton* δεν απέδειξε αυστηρά της σχέση αλλά απλώς σκιαγράφησε μια απόδειξη.

δ) Στα *Philosophiae naturalis principia mathematica (1687)* υπάρχει πάλι ο τύπος παρεμβολής *Newton-Gregory* που έχουμε ήδη δει, αλλά και κάποιες προτάσεις που παραπέμπουν στο θεώρημα *Taylor*[29].

ε) Στο δεύτερο παράρτημα στο έργο *Optics* (1704) με τίτλο *De Quadratura Curmvarum*. Ουσιαστικά εδώ παρουσιάζονται ολοκληρωμένα τα αποτελέσματα του *De Analysi* και δίδονται οι κανόνες που θα επιτρέψουν την ανάπτυξη συνάρτησης σε άπειρη σειρά. Ο σκοπός είναι φυσικά να υπολογιστεί το αόριστο ολοκλήρωμα καμπύλης. Ο *Newton* ολοκληρώνει τις καμπύλες

$$y = \frac{a^2}{b + x^2} \qquad y = (a^2 \pm x^2)^{\frac{1}{2}} \qquad y = (x - x^2)^{\frac{1}{2}} \qquad y = \left(\frac{1 + ax^2}{1 - bx^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

και δίνει τα αποτελέσματα σε μορφή αναπτύγματος σειράς. Στη συνέχεια προχωρεί σε ανάλογη διαδικασία όταν η συνάρτηση δίνεται σε πεπλεγμένη μορφή. Είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι ο *Newton* υποδεικνύει την αναγκαιότητα να εξετασθεί το κατά πόσον οι σειρές αυτές ***συγκλίνουν,*** ένα ερώτημα που άρχισε να απασχολεί τους μαθηματικούς τον επόμενο αιώνα. Ολοκληρώνοντας, να αναφέρουμε ότι στο παράρτημα αυτό υπάρχει για πρώτη φορά **τυπωμένο**, αλλά όχι αποδειγμένο, το Διωνυμικό θεώρημα.

Η ενασχόληση του *Newton* με τις άπειρες σειρές μπορεί να άρχισε πριν από το 1665, όπως αναφέρει στη *Epistola Prior (1676)* αλλά οι πρώτες μαρτυρίες προέρχονται από την αλληλογραφία του *Barrow* με τον *Collins* τον Ιούνιο του 1669 για το *De Analysi.* Πριν από αυτό όμως σε ένα χειρόγραφό του *Newton*, που γράφτηκε μάλλον το 1667, βρίσκουμε το γνωστό ανάπτυγμα του *Mercator* [30]

$$\log(1 + x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$$

Ο *Newton*, που ασχολείται με τα εμβαδά κάτω από υπερβολές από τα μέσα της δεκαετίας του 1660, αν και δεν αναγνωρίζει το εμβαδό κάτω από την υπερβολή ως φυσικό λογάριθμο, εντούτοις γνωρίζει ότι το εμβαδόν έχει ιδιότητες λογαριθμικές, κάτι που είχε εντοπίσει πρώτος ο *de Sarasa* όταν μελετούσε το *Opus Geometricum* του

[29] Feigenbaum, L. Brook Taylor and the Method of Increment, σελ.76

[30] Edwards, C.H. The historical development of the calculus σελ.158

St. Vincent.

Για να υπολογίσει το εμβαδό, E(1+x), στο διάστημα [0, x] του χωρίου υπό την υπερβολή $y = \frac{1}{x+1}$, x > -1, κάνει αρχικά τη διαίρεση 1 : (1 + x) και καταλήγει στην έκφραση

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$$

Στη συνέχεια ολοκληρώνοντας όρο προς όρο υπολογίζει το ζητούμενο εμβαδό

$$E(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

Καθώς πλέον γνωρίζουμε E(1+x) = log(1 + x), όμως ο *Newton* δεν αναγνωρίζει στο εμβαδό το φυσικό λογάριθμο του (1+x) . Παρόλα αυτά ξέρει ότι το εμβαδό αυτό έχει τις γνωστές λογαριθμικές ιδιότητες. Έτσι για να ελέγξει τα αποτελέσματα του θα υποθέσει ότι ισχύουν οι ιδιότητες των λογαρίθμων

$$E\big((1+x)(1+y)\big) = E(1+x) + E(1+y)$$

$$E\left(\frac{(1+x)}{(1+y)}\right) = E(1+x) - E(1+y)$$

και θα τα επιβεβαιώσει την ορθότητα των αποτελεσμάτων του με ένα μικρό λογαριθμικό πίνακα .

Ας δούμε αναλυτικά τις υπόλοιπες μεθόδους που ο *Newton* χρησιμοποίησε για τα αναπτύγματα αρχικά όπως τις αναφέρει στην *Epistola prior* του 1676.

Στην επιστολή αυτή ο *Newton* αναφέρει ότι γνωρίζει πλέον τρεις μεθόδους για αναπτύγματα σε δυναμοσειρές :

α) Στη πρώτη μέθοδο κατέληξε αφού μελέτησε την μέθοδο παρεμβολής με την οποία ο *Wallis* βρήκε το ανάπτυγμα του εμβαδού για κύκλο και υπερβολή. Έτσι από τα αναπτύγματα των $(1-x^2)^{\frac{0}{2}}$, $(1-x^2)^{\frac{2}{2}}$, $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ εξήγαγε με παρεμβολές το νόμο που συνδέει τους διαδοχικούς συντελεστές στα αναπτύγματα $(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ και $(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$ και μετά επέκτεινε τα αποτελέσματα του για να διατυπώσει το Διωνυμικό Θεώρημα.

β) Γνωρίζοντας τώρα το Διωνυμικό Θεώρημα εγκαταλείπει την μέθοδο του *Wallis* και χρησιμοποιεί το Διωνυμικό Θεώρημα για να εκφράσει την τεταγμένη της καμπύλης ως άπειρη σειρά στις περιπτώσεις που καλύπτει το διωνυμικό θεώρημα με την μορφή που ο *Newton* περιγράφει δηλ. $(P + PQ)^{\frac{m}{n}}$.

γ) Τέλος στην ίδια επιστολή αναφέρει ότι η τρίτη μέθοδο που εφαρμόζεται για εύρεση εμβαδών, όγκων και ευθειοποίηση καμπυλών είναι η μέθοδος των ροών για την οποία ο *Newton* δεν δίνει περισσότερες εξηγήσεις αλλά μόνο μερικά παραδείγματα.

Έτσι για την $y = ax^m\left(b + cx^n\right)^p$ αναφέρει ότι μπορεί να αντιμετωπισθεί ως άθροισμα $\frac{(m+1)}{n}$ το πλήθος όρων, αν ο αριθμός αυτός είναι θετικός ακέραιος και δίνει μια σειρά από ποσότητες που είναι άμεσα ολοκληρώσιμες

$$\frac{x^{mn-1}}{a + bx^n + cx^{2n}} \qquad \frac{x^{\left(\frac{m+1}{2}\right)^{n-1}}}{a + bx^n + cx^{2n}}$$

$$x^{mn-1}(a + bx^n + cx^{2n})^{\pm\frac{1}{2}}$$

m θετικός ακέραιος και n οποιοσδήποτε αριθμός.

Πέρα από αυτά που ο ίδιος ο *Newton* αναφέρει, οι εργασίες του αποκαλύπτουν ότι στη περίπτωση που γνώριζε το ανάπτυγμα συνάρτησης σε δυναμοσειρά είχε την δυνατότητα να αναπτύξει σε δυναμοσειρά και την αντίστροφη της συνάρτησης. Ας δούμε ένα παράδειγμα[31].

Ξεκινώντας με την σειρά $z = x - x^2 + x^3 - x^4 + \ldots$ την φέρνει στη μορφή

$$x - x^2 + x^3 - x^4 + \ldots - z = 0 \qquad (1)$$

και αρχίζει μια διαδικασία προσέγγισης των ριζών.

Απαλείφοντας τις μη γραμμικές δυνάμεις του x και z παίρνει την πρώτη προσέγγιση x = z, όπου θα είναι και ο πρώτος όρος της αντίστροφης σειράς.

Επειδή όμως η ρίζα δεν είναι το z ο *Newton* θέτει x = z + p και αντικαθιστά στην (1)

$$(z + p) - (z + p)^2 + (z + p)^3 - (z - p)^4 + \ldots - z = 0 .$$

[31] Dunham, W. The Calculus Gallerry, σελ.9

Αναπτύσσει και αναδιατάσσει τους όρους

$$z+p-z^2-2zp-p^2+z^3+3z^2p+3zp^2+p^3-z^4-......-z=0\,.$$

Άρα

$$\begin{aligned}&[-z^2+z^3-z^4+z^5-...]+[1-2z+3z^2-4z^3+5z^4-...]p\\&+[-1+3z-6z^2+10z^3-...]p^2+[1-4z+10z^2-...]p^3\\&+[-1+5z-...]p^4+...=0\end{aligned} \qquad (2)$$

Στη συνέχεια απαλείφει τις μη γραμμικές δυνάμεις του p

για να προκύψει τελικά

$$p=\frac{z^2-z^3+z^4-z^5+...}{1-2z+3z^2-4z^3+}.$$

Απαλείφει και πάλι σε αριθμητή και παρονομαστή όλες τις δυνάμεις εκτός από την μικρότερη δύναμη. Παίρνει την δεύτερη προσέγγιση $p = z^2$ που θα είναι και ο δεύτερος όρος της αντίστροφης σειράς. Καθώς όμως το p δεν είναι ακριβώς z^2 θέτει $p = z^2 + q$. Συνεχίζει την διαδικασία. Αντικαθιστά στην (2) και παίρνει

$$\begin{aligned}&[-z^2+z^3-z^4+z^5-...]+[1-2z+3z^2-4z^3+5z^4-...](z^2+q)\\&+[-1+3z-6z^2+10z^3-...](z^2+q)^2+[1-4z+10z^2-...](z^2+q)^3\\&+[-1+5z-...](z^2+q)^4+...=0.\end{aligned}$$

Αναπτύσσει και με αναγωγή ομοίων όρων ως προς q προκύπτει

$$\begin{aligned}&[-z^3+z^4-z^6-...]+[1-2z+z^2+2z^3-...]q\\&+[-1+3z-3z^2-2z^3+...]q^2+....=0\end{aligned}$$

απαλείφει τις μη γραμμικές δυνάμεις του q

$$q=\frac{z^3-z^4+z^6-...}{1-2z+z^2+2z^3+...}.$$

Και με την ίδια διαδικασία θα έχει τον τρίτο όρο, z^3, της αντίστροφής σειράς.

Με την διαδικασία αυτή θα πάρει τελικά την αντίστροφη σειρά

$$x=z+z^2+z^3+z^4+...$$

Είναι όμως σωστή η διαδικασία;

Η αρχική σειρά ήταν η $z = x - x^2 + x^3 - x^4 + \ldots$ δηλαδή μια γεωμετρική σειρά με λόγο –x και πρώτο όρο x, συνεπώς θα αθροίζει στο

$$z = x - x^2 + x^3 - x^4 + \ldots = \frac{1}{1+x}$$

και λύνοντας ως προς x : $x = \frac{1}{1-z}$.

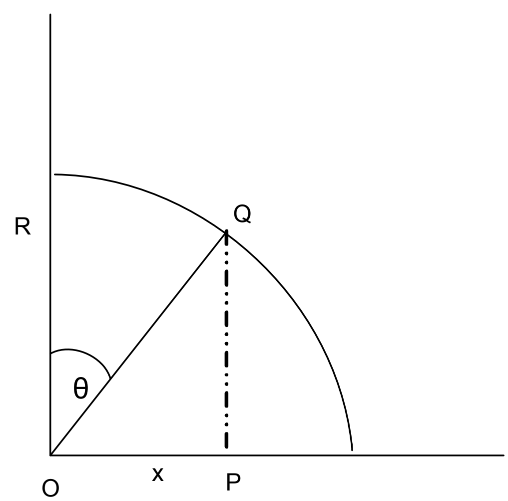
Τώρα η αντίστροφη σειρά είναι η $x = z + z^2 + z^3 + z^4 + \ldots$ που αθροίζει ως γεωμετρική σειρά στο $x = \frac{1}{1-z}$.

Με την διαδικασία αυτή ο *Newton* αντιστρέφοντας την σειρά για τον $\log(1+x)$ παίρνει για πρώτη φορά το ανάπτυγμα της e^x.

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \ldots$$

Ολοκληρώνουμε την αναφορά στον *Newton* παραθέτοντας την μέθοδο που επινόησε για το ανάπτυγμα του ημιτόνου x.[32]

Αρχικά υπολόγισε την σειρά $\textit{τοξημx} = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \ldots$ ως εξής :



Σχήμα 16

[32] Edwards C.H. The historical development of the calculus, σελ.205

Έστω ο κύκλος $x^2 + y^2 = 1$. Στο ορθογώνιο τρίγωνο OQP

$$\sigma\upsilon\nu POQ = x \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = x \Rightarrow \eta\mu\theta = x \Rightarrow \theta = \tau o\xi\eta\mu x$$

Εμβ.τομ(OQR)=$\frac{1}{2}\theta$ και άρα θ = 2Εμβ.τομ(OQR).

O *Newton* όμως γνωρίζει ότι Εμβ(ORQP)=$\int_o^x \sqrt{1-x^2}\,dx$ και χρησιμοποιώντας το Διωνυμικό Θεώρημα και με ολοκλήρωση όρο προς όρο έχει

$$\text{Εμβ(ORQP)}= x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 - \frac{1}{112}x^7 + \ldots$$

Εφόσον

Εμβ.τομ(OQR) = Εμβ.(ORQP) – Εμβ.τριγ.(OQP)

θα είναι

$$\theta = 2\left(x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 - \frac{1}{112}x^7 + \ldots\right) - x\sqrt{1-x^2}\ .$$

Αναπτύσσοντας το $\sqrt{1-x^2}$ με το διωνυμικό θεώρημα προκύπτει ότι

$$\theta = 2\left(x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{40}x^5 - \frac{1}{112}x^7 + \ldots\right) - x\left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 + \ldots\right)$$

και άρα

$$\theta = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \ldots$$

Κατόπιν ο *Newton* αντιστρέφοντας την παραπάνω σειρά του τοξημx πήρε το ανάπτυγμα της ημx:

$$\eta\mu x = 1 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \ldots$$

Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646 -1716)

Την ίδια εποχή που ο *Newton* εργαζόταν στη μέθοδο των ροών , το 1672, ο *Leibniz* επισκέπτεται το Παρίσι με διπλωματική αποστολή εκ μέρους του βαρόνου Boieneburg.

Στο Παρίσι θα έρθει σε επαφή με το *Huygens (1629 – 1695)* και θα αρχίσει να μελετά συστηματικά γεωμετρία. Η ενασχόληση του *Leibniz* με τις σειρές άρχισε μάλλον όταν ο *Huygens* του έδωσε να διαβάσει τις εργασίες του *St.Vincent* και του έθεσε, το Σεπτέμβριο του 1672, το πρόβλημα της εύρεσης του αθροίσματος των αντίστροφων των τριγωνικών αριθμών, δηλαδή της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)}$.

Ο *Leibniz* αρχίζοντας με τις παραδοχές Α = Α και Α – Α = 0 προχωρεί ως εξής :

$$\mathrm{A-A + B - B + \Gamma - \Gamma + \Delta - \Delta + E - E = 0}$$

και

$$\mathrm{A - (A - B) - (B - \Gamma) - (\Gamma - \Delta) - (\Delta - E) - E = 0}$$

Θέτοντας

$$\mathrm{A - B = K,\ B - \Gamma = \Lambda,\ \Gamma - \Delta = M \ \text{και}\ \Delta - E = N}$$

Έχουμε

$$\mathrm{A - K - \Lambda - M - N - E = 0}$$

και τελικά

$$\mathrm{A - E = K + \Lambda + M + N}$$

Οπότε το άθροισμα των διαφορών ισούται με την διαφορά του πρώτου και τελευταίου όρου.

Το αποτέλεσμα αυτό, σε συνδυασμό με την μελέτη του αριθμητικού τριγώνου, οδήγησαν τον Leibniz στην επινόηση του αρμονικού τριγώνου :

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{5} & & \frac{1}{6} & & \ldots \\
& \frac{1}{2} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{30} & & \ldots & \\
& & \frac{1}{3} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{60} & & \ldots & & \\
& & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{60} & & \ldots & & &
\end{array}$$

Το αρμονικό τρίγωνο προκύπτει ως εξής :
Η πρώτη γραμμή έχει τους αντιστρόφους των φυσικών αριθμών,
το πρώτο στοιχείο την ν – οστής γραμμής είναι το 1/ν,
κάθε άλλο στοιχείο προκύπτει από την διαφορά των δύο στοιχείων της προηγούμενης γραμμής που είναι από επάνω του.
Ο τρόπος αυτός κατασκευής του επέτρεψε να υπολογίσει εύκολα τα άπειρα αθροίσματα της κάθε γραμμής.
Π.χ. για την δεύτερη γραμμή έχουμε

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots=1$$

Η δεύτερη γραμμή του αρμονικού τριγώνου εμπλέκεται στο πρόβλημα που έθεσε ο *Huygens* στον *Leibniz*. Σε ένα γράμμα του προς τον *Meissner*, 21 χρόνια αργότερα, περιγράφει την λύση [33]

> Αν κάποιος θέλει να προσθέσει, για παράδειγμα, τα πέντε πρώτα κλάσματα από το $\frac{1}{1}$ μέχρι και το $\frac{1}{15}$, θα μπορούσε να πάρει το πλήθος των κλασμάτων, εδώ πέντε, να προσθέσει το 1 και να πάρει 6, από αυτά να φτιάξει το κλάσμα $\frac{5}{6}$, το οποίο αν διπλασιασθεί θα γίνει $\frac{10}{6}$ ή $\frac{5}{3}$ που είναι $\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$, τόσο όσο να είχε προσθέσει όλα τα κλάσματα μαζί.

Η λύση αυτή προκύπτει εφαρμόζοντας την τηλεσκοπική ιδιότητα των πεπερασμένων αθροισμάτων. (Αν $a_n=b_{n+1}-b_n$ τότε $\sum_{n=1}^{k-1}a_n=b_k-b_1$) αναλυτικά :

Αν οι όροι της σειράς Α είναι οι αντίστροφοι των πρώτων έξι φυσικών αριθμών ,

$$\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6}$$

οι όροι της σειράς Β είναι οι διαφορές των διαδοχικών όρων της σειράς Α ,

[33] Arthur, R. Essay review ‘The Remarkable Fecundity of Liebniz’s Work in Infinite Series, σελ.221

$$1-\frac{1}{2},\frac{1}{2}-\frac{1}{3},\frac{1}{3}-\frac{1}{4},\frac{1}{4}-\frac{1}{5},\frac{1}{5}-\frac{1}{6}$$

δηλαδή η σειρά B είναι η

$$\frac{1}{2},\frac{1}{6},\frac{1}{12},\frac{1}{20},\frac{1}{30}$$

και η σειρά C είναι η σειρά που κάθε όρος της είναι διπλάσιος από εκείνον την σειράς B,

$$1,\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{10},\frac{1}{15}$$

δηλαδή η σειρά των πέντε αντίστροφων των τριγωνικών αριθμών που αναφέρει ο *Leibniz* στην επιστολή του, τότε για το άθροισμα αυτών των πέντε όρων της σειράς των αντίστροφων των τριγωνικών αριθμών ισχύει:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}=2\left(1-\frac{1}{6}\right)$$

Ο *Leibniz* κατά την προσφιλή τακτική της εποχής επεκτείνει την διαδικασία και στις άπειρες σειρές :

Θεωρεί ότι το άθροισμα $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...=a$ (1)

ακόμη ότι το άθροισμα της σειράς με όρους τις διαφορές των διαδοχικών όρων της προηγούμενης σειράς $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+...=b$

και τέλος το άθροισμα των αντιστρόφων των τριγωνικών αριθμών είναι

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+...=c. \qquad (2)$$

Όποτε αν η διαδικασία των πεπερασμένων επεκταθεί στο άπειρο θα έχουμε c = 2b και για να βρει το b αφαιρεί όρο προς όρο τις δύο πρώτες σειρές (1) – (2)

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}-\frac{1}{12}+...=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...=a-1$$

Οπότε α – b = α-1 δηλαδή b =1 και τελικά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)}$ =2

Φυσικά αυτή η διαδικασία επίλυσης δεν είναι αποδεκτή καθώς γνωρίζουμε ότι η αρμονική σειρά αποκλίνει. Φαίνεται όμως ότι και ο *Leibniz* ήταν γνώστης των προβλημάτων που δημιουργούνται με αυτά τα «επαγωγικά» συμπεράσματα καθώς αναγνωρίζει **ότι ο ισχυρισμός με τον οποίο επέκτεινε τα συμπεράσματα που αφορούσαν τους όρους πεπερασμένου πλήθους σε άπειρο πλήθος όρων πρέπει να αποδειχθεί.** Παραθέτει λοιπόν την εξής απόδειξη[34]:

Παίρνει έναν αυθαίρετο όρο τον οποίο ονομάζει terminatio της σειράς και συμβολίζει οποιανδήποτε αριθμό .

Έτσι για την αρμονική σειρά ο terminatio είναι ο $\frac{1}{y}$.

Για την σειρά των αντίστροφων των τριγωνικών αριθμών ο terminatio είναι ο $\frac{2}{y^2+y}$, όποτε για την σειρά με όρους το διπλάσιο των διαφορών των διαδοχικών όρων ο terminatio θα είναι $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{y^2+y}=\frac{1}{y^2+y}$,αφαιρώντας όρο προς όρο την τρίτη σειρά από την πρώτη ο terminatio θα είναι $\frac{1}{y}-\frac{1}{y^2+y}=\frac{y}{y(y+1)}=\frac{1}{y+1}$ που όμως είναι ο επόμενος όρος του terminatio της πρώτης σειράς. Ο *Leibniz* συνεχίζει την απόδειξη γεωμετρικά για να καταλήξει στο συμπέρασμα ότι για αυθαίρετα μεγάλο y το άθροισμα της σειράς με όρους το διπλάσιο των διαφορών των διαδοχικών όρων , θα ισούται με $\frac{1}{2}$ επί το άθροισμα της σειράς των αντιστρόφων των τριγωνικών αριθμών δηλαδή του $1-\frac{1}{y+1}$. Έτσι το άθροισμα της σειράς των αντιστρόφων των τριγωνικών αριθμών πλησιάζει το 2 καθώς το y γίνεται αυθαίρετα μεγάλο.

Η λύση του προβλήματος αποτέλεσε το έναυσμα για να ασχοληθεί ο Leibniz και με άλλες σειρές και να συμπεράνει ότι **σχεδόν όλες οι άπειρες σειρές θα μπορούσαν να αθροισθούν.**

Στις 14 Ιανουαρίου του 1673 ο *Leibniz* επισκέπτεται με διπλωματική αποστολή το Λονδίνο. Εκεί έχει την ευκαιρία να παρουσιάσει στο *John Peel*, την εργασία του

[34] Arthur, R. Essay review ‘The Remarkable Fecundity of Liebniz’s Work in Infinite Series, σελ.222

Dissertio de arte combinatoria για την άθροιση σειρών μέσω της κατασκευής μιας σειράς διαφορών. Ανάμεσα στα αποτελέσματα είναι και μία απόδειξη ότι η αρμονική σειρά αποκλίνει. Ο *Peel* όμως που ανακοινώνει ότι τα αποτελέσματα αυτά είναι ήδη γνωστά από μια εργασία του *Gabriel Mouton* τρία χρόνια νωρίτερα.

Επιστρέφοντας στο Παρίσι αρχίζει να μελετά συστηματικά πλέον τα μαθηματικά και στις 16 Απριλίου του 1673 εκλέγεται μέλος της Βασιλικής Εταιρείας. Ο *Huygens*, που συναντήθηκε μαζί του στο Λονδίνο, του προτείνει να μελετήσει μεταξύ άλλων εργασίες των *Pascal, Gregory* και *St. Vincent*. Ο *Leibniz* μελετά πλέον εντατικά και τα πρώτα θετικά αποτελέσματα δεν αργούν έρθουν.
Το καλοκαίρι του 1673 αναπτύσσει έναν γενικό μετασχηματισμό που του επιτρέπει να τετραγωνίζει οποιανδήποτε καμπύλη. Χρησιμοποιώντας αυτό το αποτέλεσμα πέτυχε να εκφράσει το εμβαδόν τεταρτοκυκλίου ως άπειρη σειρά :

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Ο Leibniz απέδειξε τη σχέση χρησιμοποιώντας το διαφορικό ή χαρακτηριστικό τρίγωνο, μια επινόηση του *Pascal* που προέκυψε όταν μελετούσε το πρόβλημα της εφαπτομένης. Ο ίδιος αναφέρει ότι :

Το να βρεθεί η εφαπτομένη σημαίνει να σχεδιασθεί ευθεία που ενώνει δύο σημεία της καμπύλης σε μία απείρως μικρή απόσταση.[35]

Ας δούμε την κατασκευή αυτή. [36]
Σε σημείο Α της καμπύλης έφερε την εφαπτομένη που τέμνει τον Oy στο Α΄.

Για την εύρεση της εφαπτομένης στο Α(x, y) απαιτείται ένα δεύτερο σημείο Β που προκύπτει, κατά τον *Leibniz*, αν επιτραπεί μια απειροστή μεταβολή, dx, του x, η οποία με την σειρά της οδηγεί σε μια απειροστή μεταβολή, dy, του y. Ο *Leibniz* θεωρεί ότι το ΑΒ ανήκει ,εκ κατασκευής, στην εφαπτομένη της καμπύλης στο Α.
Στη συνέχεια στο σημείο Α κατασκεύασε ένα ορθογώνιο τρίγωνο, που το ονόμασε διαφορικό ή χαρακτηριστικό τρίγωνο ΑΒΓ, με υποτείνουσα ΑΒ = ds και κάθετες πλευρές ΑΓ και ΒΓ με μήκη dx και dy αντίστοιχα..

---

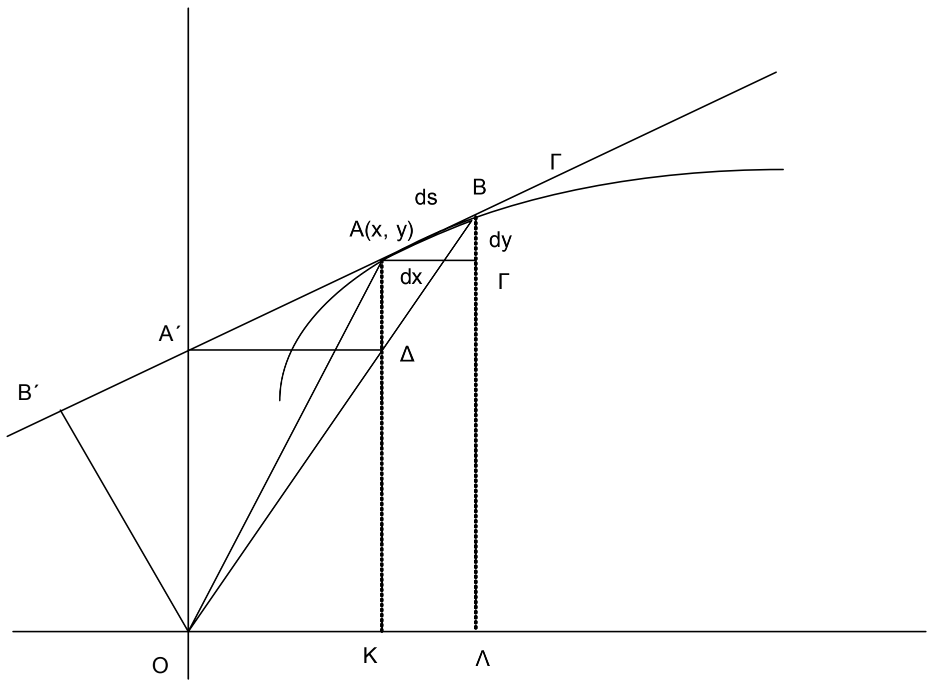
[35] Dunham W. The Calculus Gallerry, σελ.25
[36] Dunham W. The Calculus Gallerry, σελ.24

Το χαρακτηριστικό τρίγωνο έχει το πλεονέκτημα ότι επιτρέπει την αναγωγή του προβλήματος της εφαπτόμενης στον υπολογισμό εμβαδού κάτω από καμπύλη.

Ο Leibniz ισχυρίστηκε ότι

Αν και το τρίγωνο αυτό είναι απειροστό εντούτοις είναι πάντα δυνατόν να βρεθεί καθορισμένο τρίγωνο όμοιο με αυτό.

Έτσι το διαφορικό τρίγωνο ΑΒΓ είναι όμοιο με το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΑ΄Δ,



Σχήμα 17

Ισχύουν λοιπόν οι σχέσεις :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{A\Delta}{\mathrm{A}'\Delta}\Leftrightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{y-OA'}{x}\Leftrightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{y-z}{x}\quad \text{όπου } z=\mathrm{OA}'$$

και άρα

$$z=y-x\frac{dy}{dx}\ . \qquad (1)$$

Ο *Leibniz* προέκτεινε αριστερά την εφαπτομένη και έφερε από το Ο, ΟΒ΄ κάθετη στην Α΄Β. Συνεπώς το τρίγωνο ΑΑ΄Δ είναι όμοιο με το Α΄Β΄Ο και καθώς το ΑΑ΄Δ είναι όμοιο με το ΑΒΓ ισχύουν οι σχέσεις

$OB'\cdot AB = z\cdot dx \Leftrightarrow OB'\cdot ds = z\cdot dx$.

Θεωρώντας τώρα ένα «στοιχειώδες» τρίγωνο ΟΑΒ το εμβαδό του θα ισούται με

$$\frac{1}{2}ds \cdot OB' = \frac{1}{2}z \cdot dx\,,$$

ο *Leibniz* υπολόγισε το εμβαδό (ΑΒΚΛ) κάτω από καμπύλη ΑΒ ως εξής :

Σχημάτισε τα «στοιχειώδη» τρίγωνα ΟΑΒ σε κάθε σημείο της καμπύλης.

Το εμβαδό του τομέα ΟΚΛ ισούται με το άθροισμα των στοιχειωδών τριγώνων ΟΑΒ και κάνοντας χρήση του συμβόλου $\int$

$$\text{Εμβ. (τομ.ΟΑΒ)} = \int \frac{1}{2}OB'\cdot ds = \int \frac{1}{2}z \cdot dx = \frac{1}{2}\int z \cdot dx\,.$$

Το εμβαδόν κάτω από την καμπύλη (ΑΒΚΛ) το υπολόγισε ως εξής :

Εμβαδόν του τομέα ΟΚΛ + Εμβ.τριγ.(ΟΛΒ) – Εμβ.τριγ(ΟΑΚ) (2)

$$\text{Εμβαδόν τριγ. (ΟΛΒ)} = \frac{1}{2}\lambda \cdot y(\lambda) \text{ όπου } \Lambda(\lambda, 0)$$

και

$$\text{Εμβ.τριγ. (ΟΑΚ)} = \frac{1}{2}k \cdot y(k) \text{ όπου } K(k, 0).$$

Άρα από την σχέση (2)

$$\int ydx = \frac{1}{2}\int z \cdot dx + \frac{1}{2}\lambda \cdot y(\lambda) - \frac{1}{2}\kappa \cdot y(\kappa)\,.$$

Θέτοντας και τα όρια ολοκλήρωσης

$$\int_\kappa^\lambda ydx = \frac{1}{2}\int_\kappa^\lambda z \cdot dx + \frac{1}{2}[\mathrm{xy}]_\kappa^\lambda \quad \text{όπου } z = y - x\frac{dy}{dx} \qquad (3)$$

Έχοντας αυτή τη σχέση ο Leibniz ξεκίνησε την απόδειξη της $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$ ως εξής :

Το εμβαδόν τεταρτοκυκλίου με κέντρο (1, 0) και ακτίνας 1 ισούται με π/4.

Η εξίσωση αυτού του κύκλου είναι η $(x-1)^2 + y^2 = 1$ δηλαδή η $x^2 + y^2 = 2x$.

Οπότε από την σχέση (3) :

$$\frac{\pi}{4}=\int_0^1 ydx=\frac{1}{2}yx\Big|_0^1+\frac{1}{2}\int_0^1 zdx \qquad \text{όπου } z=y-x\frac{dy}{dx} \tag{4}$$

Για να υπολογίσει το $\int_0^1 zdx$ παραγώγισε αρχικά την εξίσωση του κύκλου

$$2x\cdot dx+2y\cdot dy=2dx \text{ οπότε } (1-x)\cdot dx=y\cdot dy \text{ και τελικά } \frac{dy}{dx}=\frac{1-x}{y}. \tag{5}$$

Υπολόγισε το z χρησιμοποιώντας την (5) και την εξίσωση του κύκλου $x^2+y^2=2x$

$$z=y-x\frac{1-x}{y}=\frac{y^2-x+x^2}{y}=\frac{x}{y}$$

και $z^2=\frac{x^2}{y^2}=\frac{x^2}{2x-x^2}=\frac{x}{2-x}$.

Άρα $z=\sqrt{\frac{x}{2-x}}$

Έλυσε ως προς x :

$$x=\frac{2z^2}{1+z^2}$$

Τώρα οι συναρτήσεις x και z είναι αντίστροφες οπότε $\int_0^1 zdx=1-\int_0^1 xdz$

Από την (4) έπεται ότι

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4}&=\int_0^1 ydx=\frac{1}{2}yx\Big|_0^1+\frac{1}{2}\int_0^1 zdx=\\ &=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left[1-\int_0^1 xdz\right]=1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2z^2}{1+z^2}dz\\ &=1-\int_0^1\frac{z^2}{1+z^2}dz \end{aligned}\tag{6}$$

και εφόσον

$$\frac{z^2}{1+z^2}=z^2\left(\frac{1}{1+z^2}\right)$$

η παράσταση στη παρένθεση είναι το άθροισμα της γεωμετρικής σειράς

$$1-z^2+z^4-z^6+\dots$$

οπότε

$$\frac{z^2}{1+z^2} = z^2\left(1-z^2+z^4-z^6+...\right) = z^2-z^4+z^6-...$$

και η (6) γράφεται :

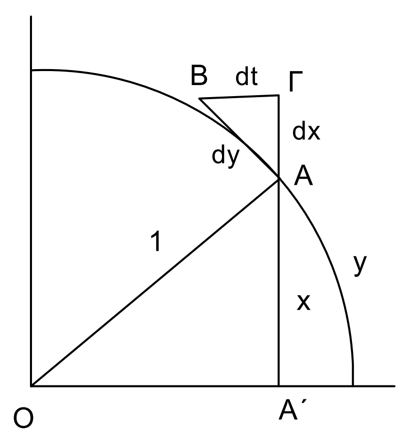
$$\frac{\pi}{4} = 1-\int_0^1 (z^2-z^4+z^6-...)dz = 1-\left[\frac{z^3}{3}-\frac{z^5}{5}+\frac{z^7}{7}-...\right]_0^1 = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...$$

Το 1675 αποδεικνύει το πρώτο κριτήριο για την σύγκλιση εναλλασσόμενων σειρών.

Αν { αn } μια μονότονα φθίνουσα ακολουθία που συγκλίνει στο 0 τότε η εναλλασσόμενη σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ *συγκλίνει.*

Η απόδειξη υπάρχει σε μια πραγματεία για τον τετραγωνισμό των κωνικών τομών που εκδόθηκε το 1993 [37]. Το 1676 χρησιμοποίησε και πάλι το χαρακτηριστικό τρίγωνο για την δυναμοσειρά του ημιτόνου [38].

Θεώρησε κύκλο ακτίνας 1. Σχεδιάζοντας το χαρακτηριστικό τρίγωνο ΑΒΓ σε σημείο Α του κύκλου και με πλευρές ΑΒ = dx, ΑΓ = dy και ΒΓ = dt προκύπτει ότι το ΑΒΓ είναι όμοιο με το ΟΑΑ΄ . Συνεπώς



Σχήμα 18

[37] Knobloch, E. Beyond Cartesian limits: Leibniz's passage from algebraic to "transcendental" mathematics, σελ.125

[38] Katz, V. (1993). A *History of Mathemetics an Introduction*, σελ. 480

$$\frac{\mathrm{AA}'}{\Gamma\mathrm{B}} = \frac{\mathrm{OA}'}{\Gamma A} \Leftrightarrow \frac{x}{dt} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{dx} \Leftrightarrow dt = \frac{x \cdot dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Από το πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, $dx^2 + dt^2 = dy^2$ και αντικαθιστώντας στη σχέση αυτή το dt προκύπτει :

$$dx^2 + \frac{x^2 dx^2}{1-x^2} = dy^2 \Leftrightarrow dx^2 - x^2 dx^2 + x^2 dx^2 = dy^2 - x^2 dy^2$$

$$dx^2 + x^2 dy^2 = dy^2.$$

Θεωρώντας το dy ως σταθερά εφάρμοσε τον τελεστή d στην παραπάνω εξίσωση

$$2dx \cdot d^2 x + 2x \cdot dx \cdot dy^2 = 0$$

και άρα

$$-x = \frac{d^2 x}{dy^2}. \qquad (8)$$

Ο *Leibniz* στη συνέχεια υποθέτει ότι το x μπορεί να αναπτυχθεί ως δυναμοσειρά ως εξής :

$$x = by + cy^3 + hy^5 + fy^7 + gy^9 + \ldots$$

Για την σειρά αυτή η δεύτερη παράγωγος είναι

$$\frac{d^2 x}{dy^2} = 6cy + 20hy^3 + 42fy^5 + 72gy^7 + \ldots$$

Λόγω της (8) η εύρεση των συντελεστών βρίσκεται με την εξίσωση των όρων των δύο σειρών

$$-by - cy^3 - hy^5 - fy^7 - gy^9 + \ldots = 6cy + 20hy^3 + 42fy^5 + 72gy^7 + \ldots$$

$$6c = -b$$
$$20h = -c$$
$$42f = -h$$
$$72g = -f$$

Για b = 1 προκύπτουν οι συντελεστές

$$c = -\frac{1}{6} = -\frac{1}{3!},\ h = \frac{1}{3!\cdot 20} = -\frac{1}{5!},\ f = -\frac{1}{42\cdot 5!} = -\frac{1}{7!}.$$

Από το τρίγωνο ΟΑΑ΄ ημy = x και άρα

$$\eta\mu\; y = y - \frac{1}{3!}y^3 + \frac{1}{5!}y^5 - \frac{1}{7!}y^7 + \ldots$$

Ο *Leibniz* παραγωγίζοντας την σειρά έχει το ανάπτυγμα της y = συνx.

Για τη σειρά του τόξου ημιτόνου από την παραμετρική εξίσωση του κύκλου

$$x = \sigma\upsilon\nu\theta$$
$$y = \eta\mu\theta$$

παραγωγίζοντας ως προς x :

$$dx = -\eta\mu\theta \cdot d\theta \Rightarrow \frac{d\theta}{dx} = -\frac{1}{\eta\mu\theta} \Rightarrow d\theta = \frac{1}{-\eta\mu\theta} \cdot dx$$

με αντικατάσταση στην εξίσωση του κύκλου

$$\eta\mu\theta = \sqrt{1 - \sigma\upsilon\nu^2\theta} \Rightarrow d\theta = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

από το Διωνυμικό Θεώρημα

$$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + \frac{5x^6}{16} + \ldots\right)$$

και με ολοκλήρωση όρο προς όρο

$$\tau o\xi\eta\mu x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \ldots$$ [39]

Τέλος ο *Leibniz* φαίνεται να έχει βρει και αποτελέσματα παρόμοια με το θεώρημα Taylor καθώς ο ίδιος αναφέρει σε επιστολή του προς τον *Johann Bernoulli* το 1694.

Οι φιλοσοφικές καταβολές του και αναζητήσεις του Leibniz τον οδήγησαν στην ενδελεχή έρευνα γύρω από την κατανόηση του απείρου. Αυτό είχε άμεσο αντίκτυπο στην ανάπτυξη των ιδεών γύρω από τις σειρές και την έννοια της σύγκλισης. Οι παρακάτω σκέψεις, που διατυπώνονται σε αδημοσίευτη εργασία του 1676, τεκμηριώνουν την άποψη ότι ο *Leibniz* είχε συλλάβει την έννοια των μερικών αθροισμάτων και της σύγκλισης, .

Οποτεδήποτε λέγεται ότι μια συγκεκριμένη σειρά απείρων αριθμών έχει άθροισμα είμαι της άποψης ότι αυτό που λέγεται είναι ότι οποιαδήποτε <u>πεπερασμένη</u> σειρά με

[39] http://www.math.wpi.edu/IQP/BVCalcHist/calc3.html

τον ίδιο κανόνα έχει άθροισμα, και το σφάλμα συνεχώς ελαττώνεται καθώς η σειρά αυξάνει(αθροίζεται).[40]

Η μελέτη για την εύρεση μιας αναλυτικής συνάρτησης που θα τετραγωνίζει τον κύκλο τον οδήγησε στο συμπέρασμα που διατυπώνει στο *De progressionibus et de arithmetica infinitorum* [41]

Δεν υπάρχει αμφιβολία ότι μερικές σειρές είναι ίσες με
άρρητους αριθμούς παρόλο που αποτελούνται από ρητούς αριθμούς.
Αυτό είναι κάτι που χρειάζεται να ερευνηθεί

Αν και καθώς είδαμε ο τρόπος χειρισμού των πράξεων με άπειρες σειρές είναι ιδιαίτερα ελαστικός και εντελώς εσφαλμένος με τις σύγχρονες αντιλήψεις εντούτοις η έννοια της σύγκλισης αλλά και της αποδεικτικής διαδικασίας που θα καταστήσει έγκυρο το αποτέλεσμα είναι πάντα στις άμεσες προτεραιότητες του *Leibniz.*

Οι αδελφοί Bernoulli Jakob (1654 – 1705) και Johann (1667 – 1748)

Ο *Leibniz* δημοσιεύει το 1684 στο περιοδικό *Acta eruditorum* την πρώτη διατριβή πάνω στον Διαφορικό Λογισμό με τίτλο *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tengentibus, que nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et sinqulare pro illis calculi genus* και δύο χρόνια αργότερα μια ακόμη διατριβή για τον Ολοκληρωτικό Λογισμό. Οι αδερφοί *Bernoulli* από το 1684 μέχρι και το 1686 διαβάζουν τις δημοσιεύσεις του *Leibniz* και γίνονται οι πιο πιστοί οπαδοί του Λογισμού του. Αν και αναφέρουν ότι η εργασία του 1684 αποτέλεσε περισσότερο ένα αίνιγμα παρά μια επεξηγηματική και διαφωτιστική μελέτη , εν τούτοις τα επόμενα χρόνια θα ασχοληθούν εξαντλητικά με το θέμα, θα διευκρινίσουν τις λεπτομέρειες και σταδιακά θα οικοδομήσουν ένα στέρεο και συνεκτικό οικοδόμημα .

Σε ότι αφορά τα άπειρα αθροίσματα το 1689 κυκλοφόρησε η εργασία του *Jakob Bernoulli* με τίτλο *Tractatus de seriebus infinitis earumque summa finite.*Ήταν μια

[40] Arthur, R. Essay review ‘The Remarkable Fecundity of Liebniz’s Work in Infinite Series, σελ.223
[41] Knobloch, E. Beyond Cartesian limits: Leibniz’s passage from algebraic to “transcendental” mathematics., σελ.123

διεξοδική παρουσίαση των γνωστών απείρων σειρών όπως η γεωμετρική η λογαριθμική αλλά περιλάμβανε και πολλές νέες.

Ο *Jakob* όπως και οι *Oresme, Mengoli, Leibniz* πριν από αυτόν, απέδειξε ότι η αρμονική σειρά αποκλίνει.

Πριν όμως προχωρήσει στην απόδειξη ξεκίνησε με την διατύπωση και απόδειξη των δύο θεωρημάτων και μίας σχέσης. [42]

1ο Θεώρημα : Αν μια γεωμετρική πρόοδος με λόγο r >1, έχει κοινούς τους δύο πρώτους όρους με εκείνους μιας αριθμητικής προόδου, τότε οι υπόλοιποι όροι της γεωμετρικής προόδου θα είναι μεγαλύτεροι από τους αντίστοιχους όρους της αριθμητικής προόδου.

2ο Θεώρημα : Σε οποιαδήποτε γεωμετρική πρόοδο με πεπερασμένο πλήθος όρων, ο πρώτος όρος είναι για το δεύτερο όπως το άθροισμα όλων των όρων εκτός του τελευταίου είναι προς το άθροισμα όλων των όρων εκτός του πρώτου.

Εφαρμόζοντας το παραπάνω θεώρημα οδηγήθηκε στη σχέση :

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_{n-1}}{a_2 + a_3 + ... + a_n} \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{S_n - a_n}{S_n - a_1} \Leftrightarrow S_n = \frac{a_1^{\,2} - a_2 a_n}{a_1 - a_2}$$

Η ιδέα του *Jakob* για την απόδειξη ήταν η εξής : Αρχικά επιλέγουμε έναν οποιονδήποτε ακέραιο αριθμό Ν και αφαιρούμε από την αρμονική σειρά διαδοχικούς πρώτους όρους που το άθροισμα τους να ισούται ή υπερβαίνει το 1. Από τους όρους που απέμειναν αφαιρούμε και πάλι διαδοχικούς πρώτους όρους που το άθροισμα τους ισούται ή υπερβαίνει το 1. Συνεχίζοντας την διαδικασία αυτή αφαιρούμε τελικά ένα πλήθος όρων που το άθροισμα τους είναι ίσο ή ξεπερνά το Ν. Άρα το άθροισμα ολόκληρης της αρμονικής σειράς θα είναι τουλάχιστον ίσο με Ν. Όμως το Ν είναι οποιοσδήποτε ακέραιος και συνεπώς η αρμονική σειρά αποκλίνει .

Ο απόδειξη έγινε με την μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο.

Μετά από αυτά ας δούμε αναλυτικά την απόδειξη που έδωσε ο *Jakob Bernoulli* στην πρόταση ότι γεωμετρική σειρά αποκλίνει:

---

[42] Dunham, W. The Calculus Gallerry, σελ.38

Έστω η αρμονική σειρά $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{\nu}+...$ και ένας οποιοσδήποτε ακέραιος Ν.

Αφαιρούμε από την αρμονική σειρά διαδοχικούς όρους που το άθροισμά θα είναι τουλάχιστον ίσο με Ν.

Ας υποθέσουμε ότι το άθροισμα των όρων που απομένουν δεν ξεπερνά 1.
Έστω λοιπόν ότι το 1/α είναι ο πρώτος όρος που απομένει μετά την αφαίρεση αυτών των όρων από την αρμονική σειρά. Άρα

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}+...<1.$$

Οι παρονομαστές όμως είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

Έστω τώρα η αύξουσα γεωμετρική πρόοδος (γ.π.) $a, a+1, a_3, ..a_n$.

Καθώς ο λόγος της γ.π. ισούται με $r=\frac{a+1}{a}>1$ ο *Bernoulli* ισχυρίζεται ότι υπάρχει a_m με $a_m \geq \alpha^2$. (1)

Για τη γεωμετρική πρόοδο θεωρεί τους διαδοχικούς όρους $a, a+1, a_3, ..a_m$

Από το **1ο Θεώρημα** ισχύει ότι

$$a_3 > a+2 \Leftrightarrow \frac{1}{a_3}<\frac{1}{a+2},\ a_4 > a+3 \Leftrightarrow \frac{1}{a_4}<\frac{1}{a+3}, \ldots,$$

$$a_m > a+m-1 \Leftrightarrow \frac{1}{a_m}<\frac{1}{a+m-1},$$

και άρα

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}+...\frac{1}{a+m-1}>\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a_3}+...\frac{1}{a_m} \Leftrightarrow$$
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}+...+\frac{1}{a+m-1}+...>\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha+1}+...+\frac{1}{\alpha_m}$$

καθώς όμως τα

$\frac{1}{a},\frac{1}{a+1},\frac{1}{a_3},...,\frac{1}{a_m}$ αποτελούν επίσης γ.π. από το **2ο Θεώρημα** προκύπτει

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a+1}+\ldots+\frac{1}{a+m-1}+\ldots>\frac{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{(a+1)}\cdot\frac{1}{a_m}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}}\overset{(1)}{>}\frac{\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{(\alpha+1)}\cdot\frac{1}{\alpha^2}}{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha+1}}=1$$

Άτοπο καθώς οι όροι της αρμονικής προόδου που απομένουν έχουν άθροισμα μεγαλύτερο ή ίσο του 1.

O Bernoulli οολοκλήρωσε την απόδειξη του εφαρμόζοντας αριθμητικά τα παραπάνω, **ομαδοποιώντας όρους με άθροισμα μεγαλύτερο του 1**.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots=1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\ldots\frac{1}{25}\right)+\left(\frac{1}{26}+\ldots+\frac{1}{676}\right)+\ldots$$

Για να κλείσει αναφέροντας :

Το άθροισμα μιας άπειρης σειράς που ο τελευταίος όρος μηδενίζεται μπορεί να είναι πεπερασμένο ή και άπειρο.

Μετά από την αρμονική σειρά ο *Jakob* ασχολείται με μια ποικιλία σειρών αρχίζοντας από την γεωμετρική. Η απόδειξη του για το άθροισμα άπειρων όρων γεωμετρικής σειράς, βασίστηκε στη σχέση (1), αφού είχε πρώτα επισημάνει ότι στην περίπτωση γεωμετρικής προόδου θετικών όρων με λόγο μικρότερο της μονάδας ο γενικός όρος θα πλησιάζει το 0. Η σχέση (1) γίνεται λοιπόν $S_n=\frac{a_1{}^2}{a_1-a_2}$.

Με την παραπάνω σχέση καταφέρνει να υπολογίσει σειρές της μορφής $\frac{a}{A}+\frac{b}{B}+\frac{c}{C}+\ldots$ όπου τα α, b, c είναι τριγωνικοί, κυβικοί ή πυραμιδικοί αριθμοί και τα A, B, C είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

Παραδείγματος χάρη για τη σειρά με αριθμητές τριγωνικούς αριθμούς δίνει το άθροισμα:

$$\frac{1}{b}+\frac{3}{bd}+\frac{6}{bd^2}+\frac{10}{bd^3}+\ldots=\frac{d^3}{b(d-1)^3} \text{ όπου } d>1 \qquad (3)$$

Η απόδειξη του βασίστηκε σε προηγούμενη πρόταση όπου απέδειξε ότι :

$$\frac{1}{b}+\frac{2}{bd}+\frac{3}{bd^2}+\frac{4}{bd^3}+....=\frac{d^2}{b(d-1)^2} \text{ , d > 1} \qquad (4)$$

Αρχικά διέσπασε κάθε όρο της σειράς (3) και συνδυάζοντας κατάλληλα δημιούργησε διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου :

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{bd}+\frac{1}{bd^2}+\frac{1}{bd^3}+....+\frac{2}{bd}+\frac{2}{bd^2}+...+\frac{3}{bd^2}+\frac{3}{bd^3}+...+\frac{4}{bd^3}+...=$$

Τώρα

$$\frac{1}{b}+\frac{1}{bd}+\frac{1}{bd^2}+\frac{1}{bd^3}+....=\frac{(1/b)^2}{1/b-1/bd}=\frac{d}{b(d-1)}$$

$$\frac{2}{bd}+\frac{2}{bd^2}+\frac{2}{bd^3}+...=\frac{(2/bd)^2}{2/bd-2/bd^2}=\frac{2}{b(d-1)}$$

$$\frac{3}{bd^2}+\frac{3}{bd^3}+\frac{3}{bd^4}...=\frac{(3/bd^2)^2}{3/bd^2-3/bd^3}=\frac{3}{bd(d-1)}$$

$$\frac{4}{bd^3}+\frac{4}{bd^4}+\frac{4}{bd^5}...=\frac{(4/bd^3)^2}{4/bd^3-4/bd^4}=\frac{4}{bd^2(d-1)}$$

……………..…………………………………………...……

Προσθέτοντας τις παραπάνω σχέσεις :

$$\frac{1}{b}+\frac{1+2}{bd}+\frac{1+2+3}{bd^2}+\frac{1+2+3+4}{bd^3}+...=$$

$$=\frac{d}{b(d-1)}+\frac{2}{b(d-1)}+\frac{3}{bd(d-1)}+\frac{4}{bd^2(d-1)}+...$$

και χρησιμοποιώντας την σχέση (4) :

$$\frac{d}{(d-1)}\left(\frac{1}{b}+\frac{2}{bd}+\frac{3}{bd^2}+\frac{4}{bd^3}+...\right)=\frac{d}{d-1}\cdot\frac{d^2}{b(d-1)^2}=\frac{d^3}{b(d-1)^3}$$

Ο *Bernoulli* προσπάθησε να αθροίσει και την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ χωρίς όμως επιτυχία.

Το 1713 κυκλοφόρησε η εργασία του *Jakob Bernoulli Ars conjectandi,* μια εργασία γνωστή για την απόδειξη του νόμου των μεγάλων αριθμών αλλά και για το Θεώρημα *Bernoulli*. Στην εργασία αυτή υπάρχει το εξής συμπέρασμα για τα πεπερασμένα αθροίσματα των θετικών ακεραίων δυνάμεων :

$$\sum_{k=1}^{n} k^c = \frac{1}{c+1} n^{c+1} + \frac{1}{2} n^c + \frac{c}{2} B_2 n^{c-1} + \frac{c(c-1)(c-2)}{2 \cdot 3 \cdot 4} B_4 n^{c-3} + \frac{c(c-1)(c-2)(c-3)(c-4)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} B_6 n^{c-5} + \ldots$$

Το άθροισμα τερματίζεται για την τελευταία θετική δύναμη του n και

$B_2 = \frac{1}{6}, B_4 = -\frac{1}{30}, B_6 = \frac{1}{42}$ είναι οι αριθμοί *Bernoulli.* Την πρόταση αυτή θα γενικεύσουν και θα αποδείξουν αργότερα, ξεχωριστά ο ένας από τον άλλο, *ο Euler* το 1736 και ο *Maclaurin* το 1742.

Το Νοέμβριο του 1694 ο *Johann Bernoulli* ανακοινώνει στο *Acta Eruditorum* ένα νέο θεώρημα για τον τετραγωνισμό καμπυλών, που το χαρακτηρίζει ως μια βελτίωση της μεθόδου του *Leibniz* για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων με σειρές[43] .

Π.χ. για την επίλυση της διαφορικής εξίσωσης $a^2(dx)^2 = a^2(dy)^2 + y^2(dx)^2$,ο *Bernoulli* αποδυκνύει τη σχέση

$$\int ndz = nz - \frac{1}{1 \cdot 2} z^2 \frac{dn}{dz} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} z^3 \frac{d^2 n}{dz^2} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} z^4 \frac{d^3 n}{dz^3} + \ldots \qquad (5)$$

όπου n είναι *μια ποσότητα που αποτελείται από μεταβλητές και σταθερές* .
Ο *Bernoulli* έγραψε τη διαφορική εξίσωση υπό τη μορφή :

$$dy = \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{a} dx \text{ και έθεσε } n = \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{a} dx \text{ και dz = dx}$$

Κατόπιν υπολόγισε τις διαδοχικές παραγώγους $\frac{dn}{dz}, \frac{d^2 n}{dz^2}$,…και από την σχέση (5) πήρε την

$$y = \int dy = \int \frac{\sqrt{a^2 - y^2} dx}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{a} x + \frac{yx^2}{2a^2} - \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{2 \cdot 3 \cdot a^3} x^3 - \frac{yx^4}{2 \cdot 3 \cdot 4a^4} + \ldots$$

την οποία έγραψε υπό τη μορφή

$$\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}} = \frac{x - \frac{x^3}{2 \cdot 3a^2} + \frac{x^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5a^4} - \ldots}{a - \frac{x^2}{2a} + \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4a^3} - \ldots}.$$

σημειώνοντας ότι ο αριθμητής είναι το ανάπτυγμα ημιτόνου.

[43] Feigenbaum L. Brook Taylor and the Method of Increment, σελ.81

Η σειρά αυτή είναι ισοδύναμη με την σειρά Taylor καθώς και οι δύο προκύπτουν από το ίδιο ολοκλήρωμα με ολοκλήρωση κατά μέρη.

$$\int_0^x f'(t)dt = \begin{cases} f'(t)\cdot t\Big|_0^x - \int\limits_0^x f''(t)\cdot t\cdot dt = ... \\ f'(t)\cdot(t-x)\Big|_0^x - \int\limits_0^x f''(t)\cdot(t-x)\cdot dt = ... \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'(x)x - f''(x)\cdot\dfrac{x^2}{2!} + f'''(x)\cdot\dfrac{x^3}{3!} - \\ f'(0)x - f''(0)\cdot\dfrac{x^2}{2!} + f'''(0)\cdot\dfrac{x^3}{3!} - \end{cases}$$

Αν αντικαταστήσουμε το *f΄* με n στη πρώτη από τις δύο σχέσεις έχουμε την σειρά του *Bernoulli*, ενώ η δεύτερη σχέση είναι η σειρά Taylor.

Σε μια άλλη εργασία του 1697 ο *Johann* δίνει την σχέση

$$\int_0^1 x^x dx = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + ... = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^n}$$ [44].

Για την απόδειξη αναπτύσσει αρχικά το x^x σε δυναμοσειρά ως εξής :

$z = \ln N \Leftrightarrow e^z = N$ και άρα N ισούται με το ανάπτυγμα του e^x.

Δηλαδή

$$N = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + ... \qquad (6)$$

Αν $N = x^x \Leftrightarrow z = \ln x^x \Leftrightarrow z = x\ln x$

Η σχέση (6) γίνεται τώρα

$$x^x = 1 + x\ln x + \frac{x^2(\ln x)^2}{2!} + \frac{x^3(\ln x)^3}{3!} + \frac{x^4(\ln x)^4}{4!} + ...$$

Ο *Johann* είχε κατά νου να υπολογίσει το αποτέλεσμα ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη της προηγούμενη ισότητας. Κάτι τέτοιο θα απαιτούσε τον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων $\int x\ln x dx, \int x^2(\ln x)^2 dx$ κλπ. Πραγματικά αφού υπολόγισε ξεχωριστά

[44] Dunham, W. The Calculus Gallerry, σελ.46

τα ολοκληρώματα, με ολοκλήρωση κατά παράγοντες, φθάνει στη τελική σχέση

$$\int_0^1 x^x dx = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n}.$$

Η πορεία προς την ωρίμανση των ιδεών (18^{ος} αιώνας)

Στο τέλος του 17^{ου} αιώνα η Θεωρία των Ροών και ο Διαφορικός Λογισμός του *Leibniz* κερδίζουν συνεχώς έδαφος ανάμεσα στους Μαθηματικούς, όπως εξάλλου και η αντιπαλότητα μεταξύ των μαθηματικών που υποστηρίζουν τη μία ή την άλλη θεωρία . Οι αδερφοί *Bernoulli*, κυρίως ο *Johann* καθώς προαναφέραμε, στάθηκαν πιστοί σύμμαχοι και υποστηρικτές του *Leibniz*, ενώ με την έλευση του νέου αιώνα ο *Brook Taylor* με το *Methodus incrementorum directa et inversa* (1715) και ο *Collin Maclaurin* με το *Treatise of Fluxions* (1742) ανέλαβαν να διευκρινίσουν τη θεωρία των ροών.

Μακριά από αυτή την αντιδικία, στην Αγ. Πετρούπολη, ο *Leonhard Euler* οραματίζεται το Διαφορικό και Ολοκληρωτικό λογισμό ως μια εντελώς αλγεβρική διαδικασία, απαλλαγμένη από το γεωμετρικό τρόπο προσέγγισης. Για να το επιτύχει τοποθετεί στο επίκεντρο της νέας Ανάλυσης την έννοια της συνάρτησης. Από τις αρχές της δεκαετίας του 1730 επικεντρώνει την προσοχή του στις σειρές παράγοντας μια πληθώρα αποτελεσμάτων. Ο αιώνας θα κλείσει με το *Théorie des Fonctions Analytiques* (*1797)* του *Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813),* με το όποιο επιχειρείται η θεμελίωση της Ανάλυσης μέσω των αναλυτικών συναρτήσεων και των αναπτυγμάτων τους.

Όσο όμως οι ροές και τα διαφορικά κερδίζουν τους Μαθηματικούς, τόσο η φύση των απειροστών και των απείρων διαδικασιών κάνουν επιφυλακτικούς τους διανοουμένους της εποχής. Η εμπεριστατωμένη κριτική του *George Berkeley (1685 – 1753)* στα απειροστά, με το βιβλίο *The Analyst* (1734), δημιούργησε αίσθηση. Οι μαθηματικοί με την κυκλοφορία του βιβλίου προσπάθησαν να υποβαθμίσουν την αξία των σκέψεων του *Berkeley*. Σε δεύτερο όμως χρόνο, αναγνωρίζουν την αξία των επιχειρημάτων του και προσπαθούν με τον *Jean Le Rond D'Alembert (1717 – 1783)* και *τον Lagrange,* να εξαλείψουν από το Λογισμό τα απειροστά.

Ο *D'Alembert* αναμίχθηκε ενεργά στην Εγκυκλοπαίδεια του *Diderot* και από το 1746 περίπου, ήταν ο υπεύθυνος για τη σύνταξη των άρθρων που αφορούσαν τα μαθηματικά και την αστρονομία. Η θεωρία του για τα όρια εμφανίζεται το 1754, στον 4ο τόμο της εγκυκλοπαίδειας σε ένα άρθρο με τίτλο *Différentiel* . Καθώς αναφέρει ένα μέγεθος ονομάζεται όριο κάποιου άλλου μεγέθους όταν το δεύτερο πλησιάζει το πρώτο οσοδήποτε κοντά, δίχως να μπορεί να ξεπεράσει το πρώτο και με τέτοιο τρόπο ώστε η διαφορά να μπορεί να γίνει μικρότερη από κάθε δοσμένη ποσότητα. Αντιλαμβάνεται δε τα διαφορικά ως το όριο του λόγου των πεπερασμένων διαφορών δύο μεταβλητών[45]. Προσπαθώντας ίσως να επιχειρηματολογήσει υπέρ του ότι η θεωρία του των ορίων είναι μια γενική θεωρία, ισχυρίζεται ότι τόσο η θεωρία των ροών του *Newton* όσο και ο διαφορικός λογισμός του *Leibniz* στηρίζονται στην θεωρία των ορίων.

Ο *Euler,* στον αντίποδα των παραπάνω αντιλήψεων, δε διστάζει να χρησιμοποιεί στις αποδείξεις του απείρως μεγάλες αλλά και απείρως μικρές ποσότητες και ακόμη να αναπαριστά τα διαφορικά dx, dy με 0.

Η έννοια της αναλυτικής συνάρτησης

Ο 18ος αιώνας χαρακτηρίζεται από τη σταδιακή μεταστροφή των μαθηματικών σε αλγεβρικές διαδικασίες με προεξάρχοντα τον *Euler*. Και καθώς οι γεωμετρικές μέθοδοι ασχολούνται με τα σχήματα και τις ιδιότητες τους οι αλγεβρικές μέθοδοι αντικαθιστούν το σχήμα με την έννοια της «αναλυτικής συνάρτησης».

Οι μαθηματικοί του 17ου αιώνα είχαν ερευνήσει συστηματικά τις ιδιότητες όχι μόνο των στοιχειωδών αλλά και περισσότερο σύνθετων συναρτήσεων. Χρησιμοποιούσαν μεταβλητές για να περιγράψουν εξισώσεις καμπυλών, αλλά καθώς δεν μπορούσαν να διακρίνουν τη διαφορά μεταξύ ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής, δε μπόρεσαν να συλλάβουν την έννοια της συνάρτησης. Ο *Leibniz* ήταν ο πρώτος που χρησιμοποίησε τον όρο, το 1692, για να χαρακτηρίσει ένα γεωμετρικό αντικείμενο «συνάρτηση» της καμπύλης με την οποία σχετίζεται (π.χ. η εφαπτομένη είναι συνάρτηση της καμπύλης). Ο *Johann Bernoulli* το 1718 αναφέρεται στη συνάρτηση μιας μεταβλητής, ως μια ποσότητα που συγκροτείται με οποιοδήποτε τρόπο από τη

[45] Boyer, C.B. The history of the Calculus and its conceptual development, σελ. 247

μεταβλητή αυτή και σταθερές[46] . Όμως η ιδέα, να χρησιμοποιηθεί η συνάρτηση για να ερευνηθούν οι ιδιότητες που προκύπτουν στην αριθμητική και τη γεωμετρία ήταν του *Euler*. Η έννοια παρουσιάζεται για πρώτη φορά, συγκεχυμένα στο *Introductio in Analysin Infinitorum* (1748) :

> *Συνάρτηση μιας μεταβλητής ποσότητας είναι μια αναλυτική έκφραση που αποτελείται καθ΄ οποιονδήποτε τρόπο από αυτή την μεταβλητή ποσότητα και από αριθμούς ή σταθερές ποσότητες* [47].

Αργότερα στο *Institutiones Calculi Differentialis* (1755) δίνει έναν σαφέστερο ορισμό:

> *Αν κάποιες ποσότητες εξαρτώνται τόσο πολύ από άλλες ποσότητες ώστε όταν οι τελευταίες αλλάζουν, οι πρώτες να υφίστανται την αλλαγή, τότε οι πρώτες ποσότητες ονομάζονται συναρτήσεις των τελευταίων. Αυτή η υπεροχή είναι ευρύτερης φύσεως και περιλαμβάνει κάθε μέθοδο, μέσω της οποίας, μία ποσότητα μπορεί να προσδιορισθεί από τις άλλες. Αν το x, υποδηλώνει μια μεταβλητή ποσότητα, τότε όλες οι ποσότητες που εξαρτώνται από το x με οποιονδήποτε τρόπο, ή μπορούν να προσδιορισθούν από αυτό, ονομάζονται συναρτήσεις αυτού.*[47]

Στο *Leçons sur de Calcul des fonctions* (1802) του *Lagrange* έχουμε ένα ορισμό παρόμοιο με εκείνον του *Euler* στο *Introductio.*

> *Αναλυτική συνάρτηση είναι κάθε έκφραση του Λογισμού στην οποία εισάγονται σταθερές και μεταβλητές* .[48]

Από το *Introductio,* ο *Euler* έχει κάνει τη διάκριση μεταξύ αλγεβρικών και υπερβατικών συναρτήσεων. Ως αλγεβρικές χαρακτηρίζει εκείνες που συγκροτούνται από μεταβλητές και σταθερές με τις πράξεις της πρόσθεσης αφαίρεσης πολλαπλασιασμού και διαίρεσης, ύψωσης σε δύναμη, εξαγωγή ριζών και επίλυση εξισώσεων. Ως υπερβατικές χαρακτηρίζει, εκείνες που ορίζονται από εκθετικά, λογαρίθμους και γενικότερα από ολοκληρώματα.

Ο *D'Alembert* με την σειρά του αντιλαμβάνεται τις συναρτήσεις ως απλές αναλυτικές εκφράσεις μέσω των συνήθων διαδικασιών της Άλγεβρας και του Απειροστικού.

---

[46] Kleiner, I. Evolution of the Function Concept: A Brief Survey, σελ. 283
[47] Edwards, C.H..The historical development of the calculus, σελ.271
[48] Fraser, C. Joseph Louis Lagrange's algebraic vision of the calculus, σελ.39

Για τους *Euler* και *Lagrange* η συνάρτηση είναι μια «αναλυτική έκφραση», δηλαδή ένας τύπος[49] που εκφράζει μία μεταβλητή ποσότητα ως προς μία άλλη μεταβλητή ποσότητα. Περιλαμβάνει τα πολυώνυμα, συναρτήσεις που προκύπτουν με τους συνήθεις αλγεβρικούς τελεστές των πράξεων και τις ρητές συναρτήσεις, την εκθετική τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις όπως και τις αντίστροφες αυτών, καθώς και συναρτήσεις που προκύπτουν από αυτές με τη σύνθεση [50]. Αργότερα το 1748 ο Euler θα αναθεωρήσει τις απόψεις του αποδεχόμενος ότι ακόμη και στην περίπτωση που η καμπύλη σχεδιάζεται με ελεύθερη κίνηση του χεριού, θα αντιπροσωπεύει μία συνάρτηση.

Παρόλα αυτά, η αντίληψη που ήθελε τη συνάρτηση ως αναλυτική έκφραση και όχι ως σχέση μεταξύ μεταβλητών ήταν πολύ ισχυρή το 18^{ο} αιώνα. Άμεση συνέπεια ήταν οι μαθηματικοί του 18^{ου} αιώνα να πιστεύουν ότι οι συναρτήσεις που ταυτίζονται σε ένα διάστημα ταυτίζονται σε όλο το πεδίο ορισμού τους.

Συμπερασματικά, οι αναλυτικές συναρτήσεις του 18^{ου} αιώνα είναι συναρτήσεις παντού παραγωγίσιμες εκτός από μεμονωμένα σημεία. Οι συναρτήσεις χαρακτηρίζονται συνεχείς όταν δίδονται από την ίδια αναλυτική έκφραση σε όλο το πεδίο ορισμού (π.χ. οι δύο κλάδοι της υπερβολής εθεωρούντο ως μια συνεχή συνάρτηση). Αντιθέτως χαρακτηρίζονται ασυνεχείς όταν ορίζονται κατά κλάδους, με διαφορετικές αναλυτικές εκφράσεις.

Η έννοια της συνέχειας, που αποτέλεσε πεδίο αντιδικίας μεταξύ του *Euler* και του *D'Alembert*, προέκυψε κατά τη μελέτη του προβλήματος της παλλόμενης χορδής, στο οποίο θα αναφερθούμε προσεχώς. Ο *D'Alembert* υποστήριξε ότι οι αρχικές λύσεις των μερικών διαφορικών εξισώσεων πρέπει να δίδονται με αναλυτικό τύπο ενώ ο *Euler* διαφώνησε με την άποψη αυτή καθώς δεχόταν για αρχικές λύσεις συναρτήσεις που δεν ήταν περιοδικές και άρα δεχόταν ως λύσεις συναρτήσεις που ορίζονταν κατά κλάδους. Με αφορμή την αντιδικία *D'Alembert- Euler* η Ακαδημία της Αγ.Πετρούπολης προκήρυξε το 1787 διαγωνισμό σχετικά με τις αρχικές λύσεις διαφορικών εξισώσεων. Η εργασία του *Louis Arbogast (1759 – 1803)* που κέρδισε το πρώτο βραβείο το 1791

---

[49] Katz, V. (1993). A *History of Mathemetics an Introduction,* σελ.325
[50] Fraser, C. Joseph Louis Lagrange's algebraic vision of the calculus, σελ.40

απαντά στο ερώτημα της συνέχειας ως εξής :

> *Ο νόμος της συνέχειας έγκειται στο ότι μια ποσότητα δεν μπορεί να περάσει από την μία κατάσταση στην άλλη χωρίς να περάσει από όλες τις ενδιάμεσες καταστάσεις που υπόκεινται στο ίδιο νόμο …Οι αλγεβρικές συναρτήσεις είναι συνεχείς …*
> *Η συνέχεια μπορεί να καταστραφεί με δύο τρόπους α) Αν αλλάξει η μορφή της συνάρτησης , δηλαδή, ο νόμος στον οποίο υπόκειται η μεταβλητή…*
> *β) Τα διάφορα μέρη της καμπύλης να μην ενώνονται μεταξύ τους…* [51]

Οι απόψεις των μαθηματικών του 18ου αιώνα για τις συναρτήσεις, οδηγούν κατά τον Fraser (Fraser,1989 σελ. 322), στο συμπέρασμα ότι οι άπειρες σειρές δε θεωρούνται ως συναρτήσεις αλλά ως εργαλεία για να διευκολύνουν τη μελέτη των συναρτήσεων και να τις καταστήσουν κατανοητές.

Οι άπειρες σειρές το 18ο αιώνα

Η αντίληψη του *Euler* για αλγεβρικές και υπερβατικές συναρτήσεις ανοίγει νέο πεδίο έρευνας για τις άπειρες σειρές, καθώς αναγνωρίζει ότι οι τα αναπτύγματα είναι εκείνα που θα βοηθήσουν στην κατανόηση των υπερβατικών συναρτήσεων. Ο ίδιος μάλιστα ισχυρίστηκε, χωρίς να αποδείξει, ότι κάθε συνάρτηση μπορεί να αναπτυχθεί σε δυναμοσειρά εκτός ίσως από μεμονωμένα σημεία.

Ο *Lagrange*, στο *Théorie des Fonctions Analytiques (1797)* προχωρεί και εξελίσσει την ιδέα του Euler, προτείνοντας μια θεμελίωση του Λογισμού πάνω στην έννοια της δυναμοσειράς και τα αναπτύγματα Taylor. Σύμφωνα με τις – λανθασμένες - απόψεις του κάθε αναλυτική συνάρτηση μπορεί να αναπτυχθεί σε δυναμοσειρά εκτός ίσως από πεπερασμένα σημεία. Όταν αυτό θα συμβεί τότε η παράγωγος μπορεί να ορισθεί ανεξάρτητα από απειροστά μέσω ενός αναπτύγματος Taylor και συγκεκριμένα ως συντελεστές του i στο ανάπτυγμα της μορφής

$$f(x+i) = f(x) + p \cdot i + q \cdot i^2 + r \cdot i^3 + ...$$

Οι αντιδράσεις στην εργασία του *Lagrange*, οφείλονται τόσο στο δύσχρηστο συμβολισμό που χρησιμοποιεί όσο και στον ισχυρισμό ότι όλες οι αναλυτικές συναρτήσεις αναπτύσσονται σε δυναμοσειρές. Ο Πολωνός μαθηματικός *Wronski*

[51] Edwards, C. H. The historical development of the calculus, σελ.303

αντέτεινε στη σχέση του Lagrange τη σχέση

$$F_x = A_o\Omega_o + \mathrm{A}_1\Omega_1 + \mathrm{A}_2\Omega_2 + ...$$

όπου οι ποσότητες Ωi είναι οποιεσδήποτε συναρτήσεις του x.

Φυσικά η θεωρία του *Lagrange* είχε πολλές ακόμη αδυναμίες που έγιναν αντιληπτές από τους μαθηματικούς του επόμενου αιώνα, και είχαν να κάνουν κυρίως με την έννοια της σύγκλισης. Η έννοια αν και υπόβοσκε στις μαθηματικές εργασίες του 19^{ου} αιώνα εντούτοις δεν είχε αποσαφηνιστεί με κατηγορηματικό τρόπο.

Το 18^{ο} αιώνα οι άπειρες σειρές παρουσιάζονται εξ ανάγκης, στα προβλήματα επίλυσης διαφορικών εξισώσεων, στα προβλήματα παρεμβολής και εύρεσης προσεγγιστικών τιμών, αλλά και σε θεωρητικά θέματα. Τα αναπτύγματα συναρτήσεων προέκυπταν είτε μέσω πεπερασμένων αλγεβρικών διαδικασιών, είτε μέσω του ολοκληρωτικού και διαφορικού λογισμού και σχετίζονταν με τη λύση του προβλήματος χωρίς να αποτελούν αυτόνομα μαθηματικά αντικείμενα.

Το 1715, όταν ο *Taylor* αναπτύσσει συναρτήσεις σε δυναμοσειρές, χρησιμοποιώντας το ομώνυμο θεώρημα, οι μαθηματικοί αντιλαμβάνονται ότι έχουν πλέον ένα καθολικό εργαλείο για να αναπτύσσουν σε δυναμοσειρές, ενώ παραλλήλως συνειδητοποιούν ότι πολλά από τα αναπτύγματα του 17^{ου} αιώνα δεν είναι παρά ειδικές περιπτώσεις του αναπτύγματος *Taylor*.

Ο *Euler* μελετώντας το πρόβλημα της παρεμβολής αλλά και προβλήματα πλανητικών κινήσεων καταλήγει στην τριγωνομετρική σειρά

$$y = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \eta\mu 2k\pi \mathrm{x} + \mathrm{A_k}(\mathrm{\sigma\upsilon\nu 2k\pi x} - 1)\right).$$

Ενώ το 1757 ο *Alexis Claude Clairaut (1713 – 1765)* εμπνεόμενος από το πρόβλημα των πλανητικών κινήσεων που μελετούσε, ισχυρίζεται ότι κάθε συνάρτηση έχει ένα ανάπτυγμα της μορφής

$$f(x) = A_o + 2\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sigma\upsilon\nu(nx).$$

Οι σημαντικότεροι μαθηματικοί που δίνουν νέα δυναμική στις άπειρες σειρές στον αιώνα αυτόν είναι οι *Taylor, Maclaurin, Euler, Lagrange*.

Ο *Taylor* παρουσίασε στο *Methodus incrementorum directa et inverse (1715)* το γνωστό ανάπτυγμα *Taylor*, ως λήμα στην έβδομη πρόταση, ενώ στην ενδέκατη πρόταση παρουσίασε μια ισοδύναμη μορφή του αναπτύγματος, που όμως επέσυρε την μήνιν του *Johannes Bernoulli* καθώς είχε δημοσιευθεί από εκείνον ανάλογη πρόταση 21 χρόνια νωρίτερα.

Ο *Maclaurin* δημοσιεύει στο *Treatise of Fluxions (1742)* την ειδική περίπτωση του Αναπτύγματος *Taylor* στο 0 και αποδεικνύει, με τη βοήθεια του, το κριτήριο ν-οστής παραγώγου για την εύρεση μέγιστου και ελάχιστου συνάρτησης. Στην ίδια εργασία υπάρχουν και άλλα ενδιαφέροντα συμπεράσματα που αφορούν στις σειρές. Για παράδειγμα ο τύπος αθροίσματος *Euler-Maclaurin,* με τον οποίο δίδεται η δυνατότητα εκτίμησης πεπερασμένων αθροισμάτων ως συνάρτηση ολοκληρώματος και των παραγώγων περιττής τάξεως:

$$f(0)+f(1)+f(2)+...+f(n-1)=$$
$$=\int_0^n f(t)dt-\frac{1}{2}\{f(n)-f(0)\}+\frac{1}{12}\{f'(n)'f'(0)\}-\frac{1}{720}\{f'''(n)-f'''(0)\}+...$$

καθώς και το κριτήριο του ολοκληρώματος για την σύγκλιση δυναμοσειράς.

Ο *Euler*, από την πλευρά του, με μια πληθώρα εργασιών και κυρίως με το *Introductio in analysin infinitorum,* κάνει μια εμπεριστατωμένη μελέτη των απείρων σειρών. Μεταξύ των αποτελεσμάτων τους συγκαταλέγονται:

α) Τα πολυώνυμα απείρου βαθμού και το Λήμμα που σχετίζει τους συντελεστές αυτών των πολυωνύμων με τα άπειρα αθροίσματα δυνάμεων των ριζών του.

Αν $P(x)=1+Ax+Bx^2+Cx^3+...=(1+a_1x)(1+a_2x)(1+a_3x)...$ τότε

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = A^2-2B$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^3 = A^3-3AB+3C \text{ κλπ.}$$

β) Η συνάρτηση Γάμα για τον υπολογισμό του παραγοντικού πραγματικού αριθμού.

γ) Τα αναπτύγματα για τις εκθετικές και λογαριθμικές συναρτήσεις οποιασδήποτε βάσης.

δ) Τα αναπτύγματα για τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις που προέκυψαν με τελείως αλγεβρικό τρόπο από τις ταυτότητες του *De Moivre* $(\cos z \pm i \sin z)^n$.

ε) Το ανάπτυγμα *Euler-Maclaurin* που αποτελεί γενίκευση θεωρήματος που είχε δημοσιευθεί από τον *Johann Bernoulli*.

στ)΄Ενα κριτήριο σύγκλισης ισοδύναμο του κριτήριου *Cauchy*.

Οι αντιλήψεις για τη σύγκλιση σειρών στο 18^o αιώνα

Οι μαθηματικοί του $18^{ου}$ αιώνα γνώριζαν να χρησιμοποιούν τις σειρές για να προσεγγίσουν τις τιμές συγκεκριμένων συναρτήσεων. Γνώριζαν επίσης ότι κάποιες σειρές, επιλέγοντας κατάλληλο πλήθος όρων, έδιναν ακριβείς προσεγγίσεις ενώ κάποιες άλλες όχι. Τέλος είχαν αντιληφθεί ότι η σύγκλιση των δυναμοσειρών εξαρτάται από την τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής x. Παρόλα αυτά η έννοια της σύγκλισης δεν είχε ακόμη διευκρινιστεί πλήρως. Ο *Euler* για παράδειγμα, αναγνώρισε ότι το άθροισμα 1 +2+ 3+…. μπορεί να γίνει μεγαλύτερο από κάθε αριθμό και για το λόγο αυτό το παράστησε με το σύμβολο ∞ .

Για το άθροισμα 1-1+1-1+…. συμφώνησε με τον *Leibniz*, που το είχε υπολογίσει σε $\frac{1}{2}$, αλλά ανέπτυξε μια διαφορετική επιχειρηματολογία όπως παρουσιάζεται παρακάτω:

Καθώς $1 + x + x^2 + ... = \dfrac{1}{1-x}$

για x = -1 προκύπτει : $1 - 1 + 1 - 1 ... = \dfrac{1}{1-(-1)} = \dfrac{1}{2}$

ενώ για x = -2 : 1 -2 + 4 – 8 + …=1/3 .[52]

Το πιο εντυπωσιακό όμως είναι το συμπέρασμα ότι $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + ... = \log\infty$.

Εντούτοις τόσο οι *D'Alembert* και *Maclaurin* όσο και ο *Euler* δίδουν κριτήρια σύγκλισης :

α) Κριτήριο του ολοκληρώματος για την σύγκλιση δυναμοσειράς που δόθηκε από τον *Maclaurin* το 1*742*

[52] Kline, M. Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, τόμος 1 σελ.445

Αν f μια μη αρνητική φθίνουσα συνάρτηση στο [N, $+\infty$) τότε η σειρά $\sum_{n=N}^{\infty} f(n)$ *συγκλίνει αν και μόνο εάν το ολοκλήρωμα* $\int_{n=N}^{+\infty} f(x)dx$ *συγκλίνει.*

β) Κριτήριο σύγκλισης σειρών του *D' Alembert* που δόθηκε το *1768* στον πέμπτο τόμο του *Opuscules Mathématiques*. Το κριτήριο αυτό είναι γνωστό και ως κριτήριο λόγου.

Αν $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ μία σειρά θετικών όρων και $r = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

Τότε αν r < 1 η σειρά συγκλίνει

αν r > 1 ή ρ = ∞ τότε η σειρά αποκλίνει

αν r = 1 η σειρά είτε συγκλίνει είτε αποκλίνει.

γ) Κριτήριο του *Euler, 1734,* ισοδύναμο με το κριτήριο *Cauchy*.

Η σειρά η οποία, αφού συνεχισθεί στο άπειρο έχει πεπερασμένο άθροισμα, δεν επιδέχεται αύξηση ακόμη και αν συνεχισθεί δύο φορές περισσότερο, καθώς αυτό που προστίθεται από εκεί και πέρα θα είναι πολύ μικρό. Γιατί διαφορετικά, το άθροισμα της σειράς που συνεχίζει στο άπειρο δεν θα μπορούσε να προσδιορισθεί και συνεπώς να περατωθεί. Από αυτό προκύπτει ότι, αν αυτό (το άθροισμα) που δημιουργείται πέρα από έναν όρο είναι πεπερασμένο μέγεθος, τότε το άθροισμα της σειράς πρέπει απαραιτήτως να είναι άπειρο.

Αν και από τα κριτήρια που διατυπώθηκαν είναι φανερό ότι οι μαθηματικοί του $18^{ου}$ αιώνα γνώριζαν ότι η σύγκλιση των δυναμοσειρών $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ εξαρτάται από τις τιμές του x, εντούτοις χειρίζονταν τις σειρές ανεξάρτητα από το διάστημα σύγκλισης αγνοώντας το γεγονός ότι τα αποτελέσματα των χειρισμών είναι έγκυρα μόνο για τιμές του x που ανήκουν στο διάστημα αυτό [53]. Η ισότητα $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ γινόταν αντιληπτή με τη φορμαλιστική έννοια, ως αποτέλεσμα των επιτρεπτών διαδικασιών που είχαν αποκρυσταλλωθεί από το $17^{ο}$ αιώνα (απλή διαίρεση πολυωνύμων, διωνυμικό

[53] Ferraro, G., Panza, M. Developing into series and returning from series: A note on the foundations of eighteen-century analysis, σελ.22

ανάπτυγμα, μέθοδος απροσδιορίστων συντελεστών, ορό προς όρο ολοκλήρωση και παραγώγιση) και όχι με την έννοια της σύγκλισης του πολυωνύμου στην *f(x)*.

Για να συνοψίσουμε, παρόλο που γνώριζαν ότι η έκφραση $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ είναι έγκυρη αν και μόνο αν η $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ συγκλίνει στην *f(x)* σε ένα μη κενό διάστημα του R, εντούτοις δεν θεωρούσαν ότι η ισότητα $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ πρέπει να περιορίζεται στο διάστημα σύγκλισης μόνο[54].

Leonhard Euler (1707 -1738)

Το 1725 ο *Johann Bernoulli* ανέλαβε μια σειρά ιδιαιτέρων μαθημάτων για τον τελειόφοιτο του Πανεπιστημίου της Βασιλείας *Leonhard Euler*. Ο *Bernoulli* αντιλαμβάνεται την μαθηματική ευφυΐα του μαθητή του και έτσι σύντομα ο νεαρός *Euler* θα διαβάσει τα κλασικά μαθηματικά έργα αλλά και τα σύγχρονα άρθρα της εποχής του. Το 1726 μια εργασία του στη ναυπηγική κερδίζει το δεύτερο βραβείο της Γαλλικής Ακαδημίας. Το φθινόπωρο του ίδιου έτους προτάθηκε από τους δύο γιούς του δάσκαλου του, *Daniel* και *Nicolaus*, για μία θέση στη νεοσύστατη Ρωσική Ακαδημία της Αγίας Πετρούπολη την οποία και αποδέχθηκε.

Με τις πρώτες του εργασίες στην Ανάλυση ο *Euler* θέτει σε νέες βάσεις το Διαφορικό και Ολοκληρωτικό Λογισμό. Για εκείνον, η ανάλυση είναι ένα νοητικό οικοδόμημα που εδράζεται πάνω στην έννοια της συνάρτησης, αναπτύσσεται φορμαλιστικά και είναι απαλλαγμένο από τη γεωμετρική διαίσθηση. Σε αυτό το πλαίσιο, η συνάρτηση είναι περισσότερο ένα σύμβολο που επιτρέπει τον εύκολο χειρισμό μαθηματικών εννοιών, παρά η έκφραση μιας σχέσης μεταξύ ποσοτήτων. Οι μελέτες και εργασίες του στην Ανάλυση παρουσιάζονται συγκεντρωτικά στα έργα *Introductio in Analysin Infinitorum*

[54] Ferraro, G., Panza, M. Developing into series and returning from series: A note on the foundations of eighteen-century analysis, σελ.30

(1748), *Institutiones Calculi Differentialis* (1755), *Institutiones Calculi Integralis* (1768-1770).

Το 1748 κυκλοφόρησε σε δύο τόμους το *Introductio in Analysin Infinitorum*. Ο πρώτος τόμος παρουσιάζει αρχικά την έννοια της συνάρτησης, και περιλαμβάνει επίσης οτιδήποτε αφορά στις άπειρες διαδικασίες, καθώς επίσης άπειρες σειρές και άπειρα γινόμενα. Ο δεύτερος τόμος παρουσιάζει την αναλυτική γεωμετρία.

Στο *Introductio*, ορίζεται η συνάρτηση μιας μεταβλητής ποσότητας, ως «αναλυτική έκφραση» και γίνεται ο διαχωρισμός που αναφέραμε μεταξύ αλγεβρικών και αναλυτικών συναρτήσεων. Ως προς το ρόλο των απείρων αθροισμάτων, ο Euler αναγνωρίζει τις δυναμοσειρές ως ένα χρήσιμο εργαλείο για την μελέτη των συναρτήσεων, και κυρίως των υπερβατικών.

> *Η φύση των υπερβατικών συναρτήσεων γίνεται περισσότερο κατανοητή αν μπορούν να εκφραστούν με μια τέτοια, αν και άπειρη, μορφή* [55]

Επίσης στο *Introductio* εξετάζονται, μεταξύ άλλων, αναπτύγματα λογαριθμικών, εκθετικών και τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Προκειμένου να βρει το ανάπτυγμα συνάρτησης συνδυάζει τις τεχνικές του 17ου αιώνα (διαίρεση πολυωνύμων, διωνυμικό θεώρημα κλπ) με τις δικές του πρωτότυπες ιδέες για το άπειρο και τα απειροστά. Για παράδειγμα αποδεικνύει το ανάπτυγμα του e^x ως εξής [56] :

Καθώς $\alpha^0 = 1$ τότε $\alpha^\varepsilon = 1 + y$, με τα ε απείρως μικρό και άρα και y ομοίως «απείρως μικρό». Όμως τότε πρέπει το y να κάποιο πολλαπλάσιο του ε.
Συνεπώς $\alpha^\varepsilon = 1 + k\varepsilon$.
Με δεδομένο πεπερασμένο αριθμό x ο Euler εισάγει μια «απείρως μεγάλη» ποσότητα $N = x / \varepsilon$ και άρα $x = N\varepsilon$.

$$a^x = a^{N\varepsilon} = (\alpha^\varepsilon)^N = (1+k\varepsilon)^N = \left(1+\frac{kx}{N}\right)^N =$$
$$= 1 + N\left(\frac{kx}{N}\right) + \frac{N(N-1)}{2!}\left(\frac{kx}{N}\right)^2 + \frac{N(N-1)(N-2)}{3!}\left(\frac{kx}{N}\right)^3 + \ldots$$

---

[55] Fraser C. The Calculus as Algebraic Analysis : Some Observations on Mathematical Analysis in the 18th Century, σελ.322
[56] Edwards, C.H.The historical development of the calculus, σελ.272

$$= 1 + kx + \frac{1}{2!}\frac{N(N-1)}{N^2}k^2x^2 + \frac{1}{3!}\frac{N(N-1)(N-2)}{N^3}k^3x^3 + \ldots$$

$$= 1 + kx + \frac{1}{2!}\frac{N(N-1)}{N^2}k^2x^2 + \frac{1}{3!}\frac{N-1}{N}\frac{N-2}{N}N \cdot k^3x^3 + \ldots$$

Επειδή το N απείρως μεγάλο ισχύει ότι

$$1 = \frac{N-1}{N} = \frac{N-2}{N} = \ldots$$

και τελικά

$$a^x = 1 + \frac{kx}{1!} + \frac{1}{2!}k^2x^2 + \frac{1}{3!}k^3x^3 + \ldots$$

Θέτοντας x = 1

$$a = 1 + \frac{k}{1!} + \frac{1}{2!}k^2 + \frac{1}{3!}k^3 + \ldots$$

και για k = 1 ονομάζει e το αριστερό μέλος

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$$

Οπότε για k = 1 και οποιοδήποτε x

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

Με την ίδια ιδέα υπολογίζει και το ανάπτυγμα του $\log_a(1+x)$: [57]

Από το ανάπτυγμα του α^x προκύπτει ότι $\alpha^x = 1 + y$

$$1 + y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a(1+y) .$$

Για την απείρως μεγάλη ποσότητα N = x / ε

$$N\varepsilon = \log_a(1+y) \qquad (1)$$

και άρα

$$a^{N\varepsilon} = 1 + y \Rightarrow (a^{\varepsilon})^{\mathrm{N}} = 1 + y \Rightarrow a^{\varepsilon} = (1+y)^{1/N} .$$

Για απείρως μικρά ε , $\alpha^\varepsilon = 1 + k\varepsilon$

$$1 + k\varepsilon = (1+y)^{1/N} \text{ οπότε } \varepsilon = \frac{(1+y)^{1/N} - 1}{k} . \qquad (2)$$

[57] Edwards, C.H. The historical development of the calculus, σελ.274

Με αντικατάσταση της (2) στην (1)

$$\frac{N}{k}\left((1+y)^{1/N}-1\right)=\log_a(1+y)\,. \qquad (3)$$

Για τον υπολογισμό του $(1+y)^{1/\mathrm{N}}$ χρησιμοποιεί το διωνυμικό θεώρημα

$$(1+y)^{1/\mathrm{N}}=1+\frac{1}{\mathrm{N}}y+\frac{\frac{1}{N}\left(\frac{1}{N}-1\right)}{2}y^2+\frac{\frac{1}{N}\left(\frac{1}{N}-1\right)\left(\frac{1}{N}-2\right)}{3!}y^3+\ldots$$

$$=1+\frac{1}{N}y-\frac{1}{2!}\frac{N-1}{N^2}y^2+\frac{(N-1)(2N-1)}{3!N^3}y^3+\ldots$$

και τελικά από την (3)

$$\frac{N}{k}\left(1+\frac{1}{N}y-\frac{1}{2!}\frac{N-1}{N^2}y^2+\frac{(N-1)(2N-1)}{3!N^3}y^3-\ldots-1\right)=\log_a(1+y)$$

$$\frac{1}{k}\left(\frac{1}{N}+y-\frac{1}{2!}\frac{N-1}{N}y^2+\frac{(N-1)(2N-1)}{3!N^2}y^3-\ldots-1\right)=\log_a(1+y)$$

Επειδή N απείρως μεγάλο προκύπτει ότι : $\frac{N-1}{N}=1,\frac{2N-1}{N}=2,\ldots$

και για k = 1 : $\log_a(1+y)=y-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3-\ldots$

Η θεμελίωση της Ανάλυσης του *Euler*, πάνω στην έννοια της συνάρτησης, έδωσε καθώς ήδη αναφέραμε, εξέχουσα θέση στα αναπτύγματα σε δυναμοσειρές

> *Έχουμε τέλεια γνώση της φύσης μιας σειράς αν γνωρίζουμε το γενικό όρο, δηλαδή τον τύπο που παρουσιάζει τον όρο δείκτη x, είτε είναι ακέραιος, είτε ρητός είτε άρρητος*[58].

Από τα παραπάνω είναι προφανές ότι για τον *Euler* το πρόβλημα της παρεμβολής ήταν θεμελιώδες. Στόχος του δεν είναι παρεμβάλει μεμονωμένες τιμές, αλλά να βρει τη γενική σχέση που θα του επιτρέψει να παρεμβάλει οποιεσδήποτε τιμές επιθυμεί

> *Για να προσδιοριστεί η φύση μιας ακολουθίας, σημαίνει να προσδιορισθεί η ποσότητα (με την μορφή συνάρτησης) από την οποία έχει προέλθει.*

Σύμφωνα με αυτά, το πρόβλημα της παρεμβολής ανάγεται στο να προσδιορισθεί ο γενικός όρος μιας σειράς για την οποία είναι γνωστοί οι πρώτοι όροι και μια

[58] Ferraro G. Some Aspects of Euler's Theory of Series : Inexplicable Functions and the Euler–Maclaurin Summation Formula, σελ.292

αναδρομική σχέση. Ζητείται δηλαδή να προσδιορισθεί συνάρτηση τέτοια ώστε $\alpha_n = f(n)$. Η συνάρτηση αυτή δεν πρέπει να είναι αυθαίρετη αλλά να προκύπτει απαραιτήτως από το διαφορικό και ολοκληρωτικό λογισμό.

Από τα πρώτα αποτελέσματα προς την κατεύθυνση αυτή, είναι η συνάρτηση Γάμα, όπως αργότερα ονομάστηκε, που δίνει την τιμή του x! με x πραγματικός αριθμός.

Η ενασχόληση του *Euler* με τη συνάρτηση διαφαίνεται όταν σε επιστολή του προς τον *Goldbach* στις 13 Οκτωβρίου του 1729, ο *Euler* ζητά τη γνώμη του για τον τύπο $n! = \prod_{\kappa=1}^{\infty} \frac{\kappa^{1-n}(\kappa+1)^n}{k+n}$ με τον οποίο υπολόγισε ότι $\left(\frac{1}{2}\right)! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Ο *Euler*, σύμφωνα με τις αντιλήψεις που εκθέσαμε, ανάγει το πρόβλημα της παρεμβολής στην εύρεση του γενικού όρου σειράς , δηλαδή μιας συνάρτησης που θα πρέπει να υπολογιστεί με ολοκληρωτικό ή διαφορικό λογισμό. Από το $\sqrt{\pi}$ συμπέρανε ότι πρέπει να υπάρχει κάποια συσχέτιση με εμβαδόν κύκλου και οδηγήθηκε στο ολοκλήρωμα. Προσπάθησε λοιπόν να εκφράσει το n-οστό όρο μιας σειράς ως ολοκλήρωμα. Γνωρίζοντας εκ των προτέρων το αποτέλεσμά χρησιμοποιεί μια μέθοδο που ο ίδιος αργότερα, μεταξύ 1732-1733, θα ονομάσει συνθετική.
Ο αρχικός σκοπός του είναι να εκφράσει την τιμή ενός ορισμένου ολοκληρώματος ως δυναμοσειρά .

Ο *Euler*, αρχίζοντας από το ολοκλήρωμα $\int_0^1 x^e (1-x)^n \, dx$ αναζητούσε μια δυναμοσειρά που να συγκλίνει σε αυτό το ολοκλήρωμα. [59]
Ανέπτυξε λοιπόν το $(1-x)^n$ με το Διωνυμικό Θεώρημα :

$$\int_0^1 x^e (1-x)^n \, dx =$$

$$= \int_0^1 x^e \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} (-x)^{\kappa} dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} (-1)^k x^{k+e} dx$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \int_0^1 (-1)^k x^{k+e} dx$$

[59] Ferraro G. Some Aspects of Euler’s Theory of Series : Inexplicable Functions and the Euler–Maclaurin Summation Formula,σελ.296

Ολοκλήρωσε όρο προς όρο

$$\int_0^1 x^e (1-x)^n dx = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{e+k+1}$$

και επιβεβαίωσε ότι το δεξιό μέλος ισούται με

$$\frac{n!}{(e+1)(e+2)...(e+n+1)} \quad \text{για n = 0, 1, 2, 3.}$$

Γενίκευσε αμέσως το συμπέρασμα του

$$\int_0^1 x^e (1-x)^n dx = \frac{n!}{(e+1)(e+2)...(e+n+1)}.$$

Πολλαπλασίασε με (e + n + 1) και

$$(e+n+1)\int_0^1 x^e (1-x)^n dx = \frac{n!}{(e+1)(e+2)...(e+n)}.$$

Αν $e = f/g$ τότε

$$a_n = \frac{f+(n+1)g}{g^{n+1}} \int_0^1 x^{f/g} (1-x)^n dx = \frac{n!}{(f+g)(f+2g)...(f+ng)}.$$

Ο *Euler* παρατήρησε ότι η παραπάνω σχέση ισχύει και στη περίπτωση όπου το x αντικατασταθεί με συνάρτηση *f(x)* με την προϋπόθεση ότι *f(0) = 0* και *f(1)=1* .

Μια συνάρτηση που να ικανοποιεί τις προϋποθέσεις αυτές είναι η $f(x) = x^{g/(f+g)}$ οπότε

$$\frac{f+(n+1)g}{g^{n+1}} \int_0^1 x^{g/(g+f)} \left(1 - x^{g/(f+g)}\right)^n dx$$

και για $f = 1, g = 0$

$$\frac{1}{0^{n+1}} \int_0^1 x = n!$$

γράφει την ολοκληρώσιμη ποσότητα ως $\left(\frac{1-x^z}{z}\right)_{z=0}$ και με τον κανόνα του L'Hospital

προκύπτει

$$\int_0^1 (-\log x)^n dx = n!$$

Δηλαδή

$$\Gamma(x) = \int_0^1 (-\log x)^n dx = n!.$$

Ο *Euler* αφού έχει τη μέθοδο που επιτρέπει την ανάπτυξη ενός ολοκληρώματος σε σειρά, στρέφεται προς τον προσδιορισμό του αθροίσματος στις περιπτώσεις σειρών όπου η αλγεβρική μέθοδος δεν έφερε αποτελέσματα.

Μεταξύ 1732 και 1733 ο *Euler* στην εργασία του *Methodus generalis summandi progressions* κάνει λόγο για τη διαδικασία που θα του επιτρέψει να υπολογίζει το άθροισμα σειρών και καταλήγει σε δύο τεχνικές. Η πρώτη αφορά στον τύπο που είναι γνωστός ως τύπος άθροισης *Euler- Maclaurin* και η δεύτερη αφορά στο κατάλληλο χειρισμό των όρων της σειράς με εργαλεία από την άλγεβρα ή την ανάλυση.

Για τον τύπο άθροισης ο *Euler* υπέθεσε την ύπαρξη παραγώγων κάθε τάξης στο [0, n] και κατέληξε στην παρακάτω σχέση

$$\sum_{i=1}^{n} f(i) = \int_0^n f(x)dx - \frac{1}{2}\left[f(n) - f(0)\right] + \frac{B_2}{2!}\left[f'(n) - f'(0)\right] + \\ + \frac{B_4}{4!}\left[f'''(n) - f'''(0)\right] + \ldots + \frac{B_{2k}}{(2k)!}\left[f^{(2k-1)}(n) - f^{(2k-1)}(0)\right] - \ldots$$

όπου Bi οι αριθμοί Bernoulli.

Το Δεκέμβριο του 1735 ο *Euler* ανακοινώνει στην ακαδημία του St.Petersburg την πρώτη του εργασία στην Ανάλυση με τίτλο *De summis serierum reciprocarum* , η οποία πραγματεύεται την άθροιση της σειράς $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ γνωστής και ως «πρόβλημα της Βασιλείας». Στην εργασία αυτή θα δώσει 3 διαφορετικές λύσεις του προβλήματος. Η γνωστότερη είναι η ακόλουθη [60].

Ο *Euler* ξεκινά με το ανάπτυγμα

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots \qquad (4)$$

Πολλαπλασιάζει και τα δύο μέλη με $\frac{x}{x}$

$$\frac{x}{x}f(x) = \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\right).$$

Στο δεξιό μέλος αναγνωρίζει το ανάπτυγμα ημιτόνου

Calinger, R. Leonhard Euler: The First St. Petersburg Years (1727–1741), σελ.135

$$f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$$

και επειδή το $\frac{\eta\mu x}{x}$ έχει ρίζες τις $x = k\pi, k \in Z^*$ ο *Euler* υποθέτει ότι η *f(x)* γράφεται ως ένα άπειρο άθροισμα της μορφής :

$$f(x) = (1 + a_1 x)(1 + a_2 x)(1 + a_3 x)..... \text{ με } a_1 = -\frac{1}{\pi}, \alpha_2 = \frac{1}{\pi}, \alpha_3 = \frac{1}{2\pi}, ...$$

δηλ $f(x) = \left(1 + \frac{x}{\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{2\pi}\right).....$ και ξαναγράφει ως

$$f(x) = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right).....$$

που με αναγωγή ομοίων όρων γίνεται

$$f(x) = 1 - \left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + ..\right)x^2 + (....)x^4 - (...)x^6 + ... \qquad (5)$$

Εξίσωσε τους συντελεστές στις εκφράσεις (4) και (5)

$$-\left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + ...\right) = -\frac{1}{3!}$$

Για να πάρει τελικά

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Σε μια εργασία του 1734 ο *Euler* διατυπώνει ένα κριτήριο σύγκλισης, παρόμοιο με το κριτήριο *Cauchy*[61], (δες σελ. 104). Με σύγχρονη ορολογία :

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ έχει πεπερασμένο άθροισμα αν και μόνο εάν για το άθροισμα $\sum_{n \geq N} a_n$ τείνει προς το 0 για κάθε N > 0.

Σε αυτή την εργασία εξετάζοντας αρχικά την αρμονική σειρά με γενικό όρο $\frac{c}{(a + (k-1)b)}$ που ήταν γνωστό ότι αποκλίνει, παρατηρεί ότι η σειρά παρόλο που οι

[61] Laugwitz D. Definite Values of Infinite Sums: Aspects of the Foundations of Infinitesimal Analysis around 1820, σελ.206

όροι της διαρκώς φθίνουν έχει **άπειρο άθροισμα.** Η επιχειρηματολογία του στηρίζεται στο κριτήριο που αναφέρθηκε παραπάνω και που όπως ο ίδιος αναφέρει αποδεικνύει αμέσως ότι η σειρά αποκλίνει.

Ο *Euler* χρησιμοποίησε το κριτήριο για να αποδείξει ότι η αρμονική σειρά, στη γενική της μορφή $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c}{a+kb}$, αποκλίνει. Ας δούμε την απόδειξη :[62]

Έστω N ένας «απείρως μεγάλος» αριθμός. Αν αθροίσουμε $(n-1)N$ το πλήθος όρους από τον όρο $\frac{c}{a+Nb}$ μέχρι και τον όρο $\frac{c}{a+(nN-1)b}$ τότε για το άθροισμα τους ισχύουν τα εξής :

Επειδή κάθε ένας από τους όρους αυτούς είναι μικρότερος από $\frac{c}{a+Nb}$ άρα

$$\sum_{k=N}^{nN-1}\frac{c}{a+kb}<\frac{(n-1)Nc}{a+Nb}<\frac{(n-1)c}{b}$$

και επειδή κάθε ένας από τους όρους αυτούς είναι μεγαλύτερος από $\frac{c}{a+(nN-1)b}$

$$\sum_{k=N}^{nN-1}\frac{c}{a+kb}>\frac{(n-1)Nc}{a+(nN-1)b}>\frac{(n-1)c}{nb}.$$

Συνεπώς

$$\frac{(n-1)c}{nb}<\sum_{k=N}^{nN-1}\frac{c}{a+kb}<\frac{(n-1)c}{b}.$$

Οπότε αυτό που προέρχεται από την άθροιση μετά το N-οστό όρο είναι πεπερασμένο και συνεπώς η αρμονική σειρά αποκλίνει.

Ο *Euler* επεκτείνει τα αποτελέσματα του και για τις σειρές $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c}{a+k^{\mathrm{a}}b}$.

Αθροίζοντας τους όρους από το (N + 1) έως το nN υπολογίζει για το άθροισμα των $(n-1)N$ όρων ότι :

$$\frac{(n-1)c}{nN^{\mathrm{a}-1}b}<\sum_{k=1}^{(n-1)N}\frac{c}{a+k^{\mathrm{a}}b}<\frac{(n-1)c}{N^{\mathrm{a}-1}b}$$

---

[62] Laugwitz, D. Definite Values of Infinite Sums: Aspects of the Foundations of Infinitesimal Analysis around 1820, σελ.207

και συμπεραίνει ότι για a > 1 το **άθροισμα είναι πεπερασμένο** και για a < 1 το **άθροισμα είναι άπειρο**.

Είναι χαρακτηριστικό ότι στη προηγούμενη διατύπωση ο *Euler* δεν αναφέρεται σε συγκλίνουσα ή αποκλίνουσα σειρά αλλά σε πεπερασμένο και άπειρο άθροισμα . Σε επιστολή του προς τον *Goldbach* το 1745 και αναφερόμενος στη σειρά

1- 2 + 6 - 24 + 120 – 720 + …

αναφέρει ότι η σειρά έχει απροσδιόριστη τιμή. Σημειώνει επίσης ότι δεν πρέπει να χρησιμοποιείται ο όρος «άθροισμα» γιατί αυτό αναφέρεται σε πραγματική πρόσθεση και επισημαίνει ότι η αποκλίνουσα σειρά προέρχεται από πεπερασμένες αλγεβρικές εκφράσεις και η *τιμή* της συνάρτησης είναι η *τιμή* της αλγεβρικής έκφρασης από την οποία προέρχεται.[63]

Ο *Euler* δεν αποφεύγει την χρήση των σειρών που αποκλίνουν και αυτό γιατί

> *Σε κάθε περίπτωση που μια άπειρη σειρά προκύπτει από την ανάπτυξη μιας κλειστής έκφρασης, μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε μαθηματικές πράξεις ως το ισοδύναμο αυτής της έκφρασης, ακόμη και για τις τιμές της μεταβλητής για τις οποίες η σειρά αποκλίνει.*

Στο *Institutiones Calculi Differentialis* (1755) έδωσε έναν ενδιαφέροντα μετασχηματισμό .

Δοθείσης μιας αρχικής σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ την έγραψε ως $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ και κατόπιν με μία σειρά τυπικών αλγεβρικών χειρισμών έδειξε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\Delta^n a_o}{2^{n+1}} \ .$$

όπου $\Delta^o a_o = a_o, \Delta^1 \alpha_o = \alpha_1 - \alpha_o, \Delta^n \alpha_o = \Delta^{n-1}\alpha_1 - \Delta^{n-1}\alpha_0 = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i$ n ≥ 1 [64].

Η σχέση αυτή είναι χαρακτηριστική της αντίληψης για τις αποκλίνουσες σειρές που αναφέραμε, καθώς σε ορισμένες περιπτώσεις οδηγεί την αρχική σειρά σε ταχύτερη

[63] Kline M. Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, σελ.463
[64] Kline M. Mathematical Thought from Ancient to Modern Times., σελ.453

σύγκλιση, ενώ σε άλλες περιπτώσεις μετατρέπει τις αποκλίνουσες σειρές σε «ισοδύναμες» συγκλίνουσες.

Brook Taylor (1685 – 1731)

Το 1715 στο έργο του *Brook Taylor Methodus incrementorum* και ως πόρισμα στην έβδομη πρόταση δημοσιεύεται για πρώτη φορά η μέθοδος που οδηγεί στο ανάπτυγμα σειράς Taylor.

Την εποχή που δημοσιεύτηκε το ανάπτυγμα ο *Gregory* και *ο Newton*, γνώριζαν να εφαρμόζουν το θεώρημα σε συγκεκριμένες συναρτήσεις, ο *Johann Bernoulli* είχε δημοσιεύσει από το 1694 μία ισοδύναμη μορφή του αναπτύγματος και τέλος ο *Leibniz* ισχυριζόταν ότι τα αποτελέσματα του *Bernoulli* του ήταν γνωστά. Παρόλα αυτά ο Taylor είναι σίγουρα ο πρώτος που διατυπώνει ένα γενικευμένο θεώρημα για το ανάπτυγμα σε άπειρη σειρά που με σύγχρονο συμβολισμό είναι το ακόλουθο :

$$x(z+u)=x(z)+\frac{\Delta x(z)}{\Delta z}u+\frac{\Delta^2 x(z)}{(\Delta z)^2}\cdot\frac{u(u-\Delta z)}{2!}+...+\frac{\Delta^n x(z)}{(\Delta z)^n}\cdot\frac{u(u-\Delta z)...(u-(n-1)\Delta z)}{n!}+...$$

με $u=n\cdot\Delta z$.

Η προεργασία για το θεώρημα είχε γίνει σίγουρα από τον Newton καθώς στο 3^{o} Βιβλίο των Principia, Λήμμα 1 περίπτωση 5, υπολογίζει την εξίσωση ν-βαθμού που παρεμβάλει σε παραβολή με γνωστές ν + 1 τιμές $z_o = z$, $z_1 = z+\Delta z$, $z_2 =z + 2\Delta z,\ldots$ $z_n= z + n\Delta z$ [65] .

$$y(u)=x(z)+\frac{\Delta x(z)}{\Delta z}u+\frac{\Delta^2 x(z)}{(\Delta z)^2}\cdot\frac{u(u-\Delta z)}{2!}+...+\frac{\Delta^n x(z)}{(\Delta z)^n}\cdot\frac{u(u-\Delta z)...(u-(n-1)\Delta z)}{n!}$$ με

$u=n\Delta z$.

Ο *Taylor* όμως πριν από την απόδειξη, αποδεικνύει ένα θεώρημα σαφώς επηρεασμένο από τον τύπο παρεμβολής *Gregory-Newton*.

Θεώρημα 7

Αν x και z δύο μεταβλητές ποσότητες όπου η z αυξάνει ομοιόμορφα κατά Δz, και έστω

---

[65] Feigenbaum L. Brook Taylor and the Method of Increment, σελ.42

$u = n\Delta z$, τότε ισχύει η σχέση : [66]

$$x(z+u) = x(z) + \frac{\Delta x(z)}{\Delta z}u + \frac{\Delta^2 x(z)}{(\Delta z)^2} \cdot \frac{u(u-\Delta z)}{2!} + ... + \frac{\Delta^n x(z)}{(\Delta z)^n} \cdot \frac{u(u-\Delta z)...(u-(n-1)\Delta z)}{n!} + ...$$

με $u = n\Delta z$.

Παρατηρούμε ότι ενώ ο *Newton* χρησιμοποιεί το θεώρημα κατασκευάζοντας μια συνάρτηση x(z) για να παρεμβάλει τιμή σε άλλη συνάρτηση y, ο Taylor δίνει ένα θεώρημα για να υπολογιστεί η τιμή της συνάρτησης x(z) σε ένα νέο σημείο.

Τώρα για να οδηγηθούμε στο ανάπτυγμα *Taylor* πρέπει να περάσουμε από τις διαφορές στις ροές. Ο Taylor προχωρεί θεωρώντας ότι καθώς το n αυξάνει απεριόριστα, δηλ. $n \to \infty$ τότε $\Delta z \to 0$. Για να υπολογίσει το όριο «αντικατέστησε τις απειροελάχιστες αυξήσεις, με τα fluxions που είναι ανάλογες προς αυτές». Θεωρώντας τα x και z ως συναρτήσεις του χρόνου με το z να αυξάνει γραμμικά[67] τότε

$z_o = z(0)$, $z_1 = z(h)$, $z_2 = z(2h)$ κλπ.

Για τις διαφορές $\Delta z = z_1 - z_o = z(h) - z(0)$ και προφανώς επειδή h πολύ μικρό ο Taylor θεωρεί

$$\Delta z = z_1 - z_o = z(h) - z(0) \cong \dot{z}_o h$$ όπου $\dot{z}_o$ η ροή (fluxion) του z στο t = 0.

Ομοίως

$$\Delta x(z) = x(z_1) - x(z_o) = x(z(h)) - x(z(0)) = x(z(0))h \cong \dot{x}_o(z)h$$ και γενικότερα

$$\Delta x(z_k) = x(z_{k+1}) - x(z_k) = \dot{x}_k(z)h .$$

Επίσης

$$\Delta^2 x(z) = \Delta x(z_1) - \Delta x(z_o) = \dot{x}_1(z)h - \dot{x}_o(z)h \cong \ddot{x}_o(z)h^2 .$$

Από το Θεώρημα 7.

$$x(z+u) = x(z) + \frac{\dot{x}_o(z)h}{\dot{z}_o h}u + \frac{\ddot{x}_o(z)h^2}{(\dot{z}_o h)^2} \cdot \frac{u(u-\Delta z)}{2!} + ... = x(z) + x'(z)u + x_o''(z)\frac{u(u-\Delta z)}{2!} + ...$$

[66] Feigenbaum L. Brook Taylor and the Method of Increment, σελ.40
[67] Edwards C.M. The historical development of the calculus, σελ.288

και με $\Delta z \to 0$, η σχέση γίνεται

$$x(z+u) = x(z) + x'(z)u + x_o''(z)\frac{u^2}{2!} + \ldots$$

Αντικαθιστώντας το x με την συνάρτηση f, το z με x_o και το u με $x-x_o$

η παραπάνω σχέση παίρνει την γνωστή μας μορφή του Θεωρήματος *Taylor*.

$$f(x) = f(x_o) + f'(x_o)(x-x_o) + f''(x_o)\cdot\frac{(x-x_0)^2}{2!} + f'''(x_o)\cdot\frac{(x-x_0)^3}{2!}\ldots.$$

Φυσικά το πέρασμα από τις διαφορές στα όρια είναι τελείως πρωτόλειο και δεν γίνεται καμία αναφορά στη σύγκλιση της σειράς.

Ο *Taylor* στο περιοδικό Philosophical Transactions αναφέρει την χρησιμότητα του θεωρήματος στην επίλυση διαφορικών εξισώσεων.

Collin Maclaurin (1698 – 1746)

Το 1742 κυκλοφορεί το *Treatise of Fluxions* του *Colin Maclaurin*, καθηγητή μαθηματικών στο πανεπιστήμιο του Εδιμβούργου. Το βιβλίο σκοπεύει αφενός να ανασκευάσει την κριτική που δέχθηκε η μέθοδος των ροών από τον *Berkeley* και αφετέρου να διαλευκάνει τα αδιευκρίνιστα και ασαφή σημεία της Θεωρίας του *Newton*.

Το βιβλίο απαρτίζεται από δύο τόμους. Στον πρώτο τόμο ο *Maclaurin* πραγματεύεται με γεωμετρικά εργαλεία τις αρχές του Λογισμού του Newton ενώ στο δεύτερο τόμο επιχειρείται μια αλγεβρική απόδειξη των κανόνων και των εφαρμογών της μεθόδου των ροών. Στο δεύτερο τόμο εμφανίζεται επίσης για πρώτη φορά η γνωστή σειρά *Maclaurin* και καθώς ο ίδιος αναφέρει «το αποτέλεσμα δόθηκε από τον κ.Taylor στο *Methodus incrementorum*»

Το θεώρημα, που εκφράζεται με τη μέθοδο των ροών, έχει ως εξής :
Υποθέτοντας ότι το y εκφράζεται ως σειρά συναρτήσει του z

$$y = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots. \qquad (1)$$

και E είναι η τιμή της y ενώ $\dot{E}, \ddot{E}, \ldots$ είναι οι ροές διαφόρων τάξεων όταν το z μηδενίζεται, έχει ότι

$$y = E + \dot{E}z + \frac{\ddot{E} \cdot z^2}{2} + \frac{\dddot{E}z^3}{2 \cdot 3} + \ldots \qquad (2)$$

Η απόδειξη του *Maclaurin* είναι η ακόλουθη[68] :

Με την υπόθεση ότι $\dot{z} = 1$, έθεσε z = 0 στις (1) και (2) και εξισώνοντας πήρε $A = E$. Συνέχισε παίρνοντας τις ροές των (1) και (2) :

$$\dot{y} = B\dot{z} + 2C\dot{z}z + 3Dz^2\dot{z} + \ldots$$

$$\dot{y} = \dot{E} + \dot{E}\dot{z} + \frac{2\ddot{E}\dot{z}z}{2} + \frac{\dddot{E}}{2 \cdot 3}z^3 + \ldots$$

Έθεσε ξανά z = 0 και καθώς $\dot{z} = 1$ πήρε $B = \dot{E}$. Συνέχισε με τον τρόπο αυτό για να προκύψει τελικά η σχέση (2), **χωρίς να ενδιαφερθεί για τη σύγκλιση.**

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα ο *Maclaurin* έδωσε μια σειρά αναπτυγμάτων περιλαμβανομένου του ημιτόνου και συνημίτονου.

Για το ανάπτυγμα συνημίτονου $y = \sigma\upsilon\nu z$ εργάστηκε π.χ. ως εξής : [68]

Σε κύκλο ακτίνας α

$$\frac{\dot{y}}{\dot{z}} = \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{a} \text{ οπότε } \frac{\dot{y}^2}{\dot{z}^2} = \frac{a^2 - y^2}{a^2}$$

παίρνοντας την ροή του $\dot{y}$:

$$\frac{2\dot{y}\ddot{y}}{\dot{z}^2} = \frac{-2\dot{y}y}{a^2} \text{ και με απλοποίηση } \frac{\ddot{y}}{\dot{z}^2} = -\frac{y}{a^2}$$

Αν z = 0 το y = α οπότε στη σειρά (2) οι ροές είναι : $E = a, \dot{E} = 0, \ddot{E} = -\frac{1}{a}$ και

$\sigma\upsilon\nu z = a - \frac{1}{2a}z^2$. Συνεχίζοντας με τον τρόπο αυτό υπολογίζονται και άλλοι όροι της σειράς.

Ο *Maclaurin*, χρησιμοποίησε το ανάπτυγμα Taylor για να βρει συνθήκη για την ύπαρξη μεγίστου ή ελαχίστου συνάρτησης *f*[69].

Συγκεκριμένα θεωρώντας το ανάπτυγμα Taylor συνάρτησης *f* στο $x_o = 0$ και με την επιπλέον συνθήκη ότι $f'(x) = 0$ προκύπτει :

---

[68] Katz, V. (1993). A History of Mathemetics an Introduction, σελ. 509

[69] Edwards, C.M. The historical development of the calculus , σελ. 291

$$f(x) = f(0) + \frac{x^2 f''(0)}{2} + \frac{x^3 f'''(0)}{3!} + \ldots \qquad (3)$$

Ο *Maclaurin* παρατηρεί ότι για κατάλληλα μικρό x οι όροι που είναι μεγαλύτεροι από x^2 είναι 0. Αν τώρα $f''(0) > 0$ παίρνοντας κατάλληλα μικρά x δεξιά και αριστερά από το 0, προκύπτει από την (3) ότι και στις δύο περιπτώσεις $f(x) > f(0)$, άρα συμπεραίνει στο x = 0 υπάρχει ελάχιστο. Ομοίως για την περίπτωση που $f''(x) < 0$ συμπεραίνει ότι έχει μέγιστο στο x = 0. Αν όμως $f'(x) = f''(x) = 0$ και $f''(x) \neq 0$ παίρνοντας και πάλι x δεξιά και αριστερά από το 0 ο *Maclaurin* παρατηρεί ότι στη μία $f(x) > f(0)$ ενώ στην άλλη $f(x) < f(0)$ και συνεπώς δεν υπάρχει ούτε μέγιστο ούτε ελάχιστο.

Στο *Treatise of fluxions* και σε συνδυασμό με το ανάπτυγμα Maclaurin υπάρχει και η σχέση που είναι γνωστή ως τύπος άθροισης *Euler-Maclaurin* [70]

$$f(0) + f(1) + f(2) + \ldots + f(n-1) =$$
$$= \int_0^n f(t)dt - \frac{1}{2}\{f(n) - f(0)\} + \frac{1}{12}\{f'(n) - f'(0)\} - \frac{1}{720}\{f'''(n) - f'''(0)\} + \ldots$$

και η σχέση

$$f(\tfrac{1}{2}) + f(\tfrac{3}{2}) + f(\tfrac{5}{2}) + \ldots + f(n - \tfrac{1}{2}) = \int_0^n f(t)dt - \frac{1}{24}\{f'(n) - f'(0)\} + \frac{7}{5760}\{f'''(n) - f'''(0)\} - \ldots$$

όπου οι συντελεστές στις παραπάνω σχέσεις είναι οι αριθμοί Bernoulli .

Η σχέση χρησιμεύει για την εκτίμηση πεπερασμένων αθροισμάτων συνάρτησης ως συνάρτηση του ορισμένου ολοκληρώματος και των περιττών παραγώγων της συνάρτησης . Ο *Maclaurin* γνώριζε τη σχέση από τα μέσα του 1730 αλλά ο *Euler* είχε ήδη τα αποτελέσματα αυτά από τις αρχές του 1730. Το γεγονός ότι το ανάπτυγμα *Taylor* στο 0 επικράτησε να ονομάζεται ανάπτυγμα *Maclaurin* ίσως οφείλεται στο γεγονός ότι ο *Maclaurin* παρουσίασε ξεκάθαρα πώς πρέπει να χρησιμοποιείται το ανάπτυγμα αυτό.

Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813)

Φθάνοντας στο τέλος του 18ου αιώνα ο Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός έχει δεχθεί αναμφισβήτητα έναν ισχυρό κλονισμό από την επίθεση του *Berkley*, χωρίς όμως

[70] Tweedle. I.The prickly genius Colin Maclaurin(1698 – 1746), σελ.377

αυτό να αποτελέσει ανασταλτικό παράγοντα για την ανάπτυξη του. Ταυτοχρόνως, οι αντιλήψεις του *Euler* επηρεάζουν θετικά ή αποτελούν έναυσμα προβληματισμών. Για παράδειγμα η απεμπλοκή από τις γεωμετρικές μεθόδους και ο ορισμός της έννοιας της συνάρτησης αποτελούν ένα μεγάλο άλμα προς τα μπροστά, ενώ η αναπαράσταση των διαφορικών με το 0, δημιούργησε για μια ακόμη φορά προβληματισμό στους μαθηματικούς της εποχής.

Σε αυτό το περιβάλλον των έντονων αμφισβητήσεων και των διαρκώς αναδυομένων νέων ιδεών, ο *Lagrange* επέλεξε να κάνει τον Απειροστικό Λογισμό μέρος της Αλγεβρικής Ανάλυσης μέσω μίας θεωρίας αναλυτικών συναρτήσεων και έτσι να απεμπλέξει την Ανάλυση από τα απειροστά και τις ροές. Ως αναλυτική συνάρτηση ορίζει στο *Leçons sur le Calcul des fonctions* (1806) κάθε έκφραση του λογισμού στην οποία εισάγονται μεταβλητές και σταθερές. Αναλυτικές συναρτήσεις είναι τα πολυώνυμα, οι ρητές συναρτήσεις, συναρτήσεις που ορίζονται με τις 4 αλγεβρικές πράξεις. Επίσης εκθετικά, οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις ημx και συνx καθώς και οι αντίστροφες αυτών. Ακόμη αναλυτικές συναρτήσεις δημιουργούνται από σύνθεση στοιχειωδών αλγεβρικών και υπερβατικών συναρτήσεων καθώς και οι αντίστροφες αυτών.

Στην εργασία του με τίτλο *Sur une nouvelle espèce de calcul relatif a la différentiation et a lintegration des quantités variables* του 1772, εκθέτει την ιδέα του για ορισμό των διαφορικών και των ροών μέσω του αναπτύγματος *Taylor*.

Ο *Lagrange* αναφέρει ότι το ερέθισμα για την ιδέα του αυτή δόθηκε από μια παρατήρηση του *Leibniz* για τη σχέση που υπάρχει μεταξύ των διαφορικών οποιασδήποτε τάξης του γινομένου δύο μεταβλητών, με τις δυνάμεις της ιδίας τάξης του διωνυμικού αναπτύγματος των ιδίων μεταβλητών. Επίσης αναφέρει ότι η ίδια αντιστοίχηση υπάρχει μεταξύ των αρνητικών δυνάμεων και των ολοκληρωμάτων.
Στο ανάπτυγμα *Taylor*

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)\cdot h+f''(x)\cdot\frac{h^2}{2!}+f'''(x)\cdot\frac{h^3}{3!}+...$$

οι συντελεστές των δυνάμεων του h είναι μεν λόγοι διαφορικών ή ροών, αλλά μπορούν να ορισθούν και ανεξάρτητα . Ο *Lagrange* σκέφθηκε να ορίσει τα διαφορικά και τις ροές μέσω του αναπτύγματος *Taylor*[71]. Φυσικά μια τέτοια θεώρηση προϋποθέτει ότι υπάρχει το ανάπτυγμα *Taylor* για τη συνάρτηση, της οποίας οι παράγωγοι πρέπει να ορισθούν.

Στο *Théorie des Fonctions Analytiques* (1797) θεώρησε ότι η συνάρτηση έχει ανάπτυγμα της μορφής , ως προς i :[72]

$$f(x+i) = f(x) + p\cdot i + q\cdot i^2 + r\cdot i^3 + ... \qquad (1)$$

Όπου οι συντελεστές του i ,τα *p, q, r,…* είναι συναρτήσεις του x που προήλθαν από την αρχική συνάρτηση και ονομάζει το p πρώτη παραγόμενη συνάρτηση από την f, το q δεύτερη παραγόμενη συνάρτηση από την f κλπ. Συμβολίζει το p με f΄(x), το q με f΄΄(x) κλπ.

Για να προσδιορίσει τα p, q, r,… αντικατέστησε στην (1) το i με i + o

$$f(x+i+o) = f(x) + p\cdot(i+o) + q\cdot(i+o)^2 + r\cdot(i+o)^3 + ...$$
$$f(x+i+o) = f(x) + pi + po + qi^2 + 2qoi + qo^2 + ri^3 + ro^3 + 3roi^2 + 3ro^2 i...$$
$$f(x+i+o) = f(x) + pi + qi^2 + ri^3 + ... + po + 2qoi + 3roi^2 + ...qo^2 + ro^3 + ... (2)$$

Με την αντικατάσταση του x με το x + o, [x + i +o =(x+o) +i] στην (1) έχει

$$f(x+i+o) = f(x+o) + p(x+o)\cdot i + q(x+o)\cdot i^2 + r(x+o)\cdot i^3 + ... \qquad (3)$$

και χρησιμοποιώντας την (1) και τον ορισμό των παραγώγων συναρτήσεων παίρνει

$$f(x+o) = f(x) + f'(x)o + f''(x)\cdot o^2 + f'''(x)\cdot o^3 + ...$$

$$p(x+o) = p(x) + p'(x)o + p''(x)o^2 + p'''(x)o^3 + ...$$

$$q(x+o) = q(x) + q'(x)o + q''(x)o^2 + q'''(x)o^3 + ...$$

…………………………………………………………

Τότε η (3) γίνεται :

$$f(x+i+o) = \left[f(x) + f'(x)o + f''(x)o^2 + ...\right] + \left[p(x) + p'(x)o + p''(x)o^2 + ...\right]\cdot i + ...$$

$$= f(x) + p(x)i + ... + f'(x)o + p'(x)oi + ... + f''(x)o^2 + p''(x)o^2 i + ... \qquad (4)$$

Εξισώνοντας συντελεστές , του i, στη (2) και την (4) έχει

$p(x)o = f'(x)o$ και άρα $p(x) = f'(x)$

$2q(x)o = p'(x)o$ και άρα $q(x) = \dfrac{1}{2}p'(x) = \dfrac{1}{2}f''(x)$

[71] Boyer C. The history of the Calculus and its conceptual development σελ.252
[72] Edwards C.H. The historical development of the calculus, σελ.297

$$3r(x)o = q'(x)o \text{ και άρα } r(x) = \frac{1}{3}q'(x) = \frac{1}{3!}f'''(x)$$

………………………………………………………

Τελικά η (1) γράφεται

$$f(x+i) = f(x) + f'(x)\cdot i + \frac{1}{2!}f''(x)i^2 + \frac{1}{3!}f'''(x)i^3 + \ldots \qquad (5)$$

Με αυτό το αποτέλεσμα αποδεικνύει στο 5^o κεφάλαιο το ανάπτυγμα Taylor με υπόλοιπο.

Στη σχέση (5) αντικατέστησε το x με x – i

$$f(x) = f(x-i) + f'(x-i)i + \frac{1}{2!}f''(x-i)i^2 + \frac{1}{3!}f'''(x-i)i^3 + \ldots$$

και στη συνέχεια το i με xz

$$f(x) = f(x-xz) + xzf'(x-xz) + \frac{x^2z^2}{2!}f''(x-xz) + \ldots + \frac{x^nz^n}{n!}f^{(n)}(x-xz) + \frac{x^{n+1}z^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x-xz) + ..$$

$$f(x) = f(x-xz) + xzf'(x-xz) + \frac{1}{2!}(xz)^2f''(x-xz) + \ldots + \frac{x^nz^n}{n!}f^{(n)}(x-xz) + x^{n+1}R(x,z)\,. \quad (6)$$

Παραγώγισε την προηγούμενη σχέση ως προς z :

$$0 = -xf'(x-xz) + xf'(x-xz) - x^2zf''(x-xz) + x^2zf''(x-xz) - \ldots - \frac{x^{n+1}z^n}{n!}f^{(n+1)}(x-xz) + x^{n+1}R'(x,z)$$

Οι αντίθετοι όροι διαγράφονται : $0 = -\frac{x^{n+1}z^n}{n!}f^{(n+1)}(x-xz) + x^{n+1}R'(x,z)$

και τελικά : $R'(x.z) = \frac{z^n}{n!}f^{(n+1)}(x-xz)$

Αν Μ η μέγιστη τιμή του $f^{(n+1)}(x-xz)$ για z ∈ [0, 1] και Ν η ελάχιστη τιμή στο ίδιο διάστημα, τότε :

$$\frac{Nz^n}{n!} \le R'(x,z) \le \frac{Mz^n}{n!}$$

Παίρνοντας το αόριστο ολοκλήρωμα της προηγούμενης ανισότητας , εφόσον R(x,z) =0

$$\frac{Nz^{n+1}}{(n+1)!} \le R(x,z) \le \frac{Mz^{n+1}}{(n+1)!}$$

και για z = 1 : $\frac{N}{(n+1)!} \le R(x,1) \le \frac{M}{(n+1)!}$

υπονοώντας το θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής ο Lagrange, θεωρεί ότι υπάρχει z_o τέτοιο ώστε

$$R(x,1) = \frac{f^{(n+1)}(x - xz_o)}{(n+1)!}.$$

Αντικαθιστώντας στην (6) όταν z = 1 προκύπτει ότι

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{1}{2!}xz^2 f''(0) + ... + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1} f^{(n+1)}(u)}{(n+1)!}.$$

Ο *Lagrange* έλεγξε την ορθότητα του αποτελέσματος για n = 0, 1, 2 και εν συνεχεία, κατά τις αποδεικτικές συνήθειες τις εποχής, γενίκευσε αναφέροντας ότι η γενική περίπτωση προκύπτει με τρόπο ανάλογο.

Το πρόβλημα της παλλόμενης χορδής

Το 18^o αιώνα η έννοια της συνάρτησης απετέλεσε το δομικό στοιχείο της Ανάλυσης. Οι μαθηματικοί χρησιμοποίησαν αμέσως την έννοια χωρίς, ως συνήθως, να αποσαφηνίσουν πλήρως το νοηματικό της περιεχόμενο. Έτσι, όταν χρειάσθηκε να προσδιορισθεί η συνάρτηση κύματος που προέκυψε από την επίλυση μιας διαφορικής εξίσωσης, άρχισε μια μεγάλη διαμάχη σχετικά με τις αποδεκτές λύσεις. Το πρόβλημα αυτό έγινε γνωστό ως πρόβλημα της παλλόμενης χορδής.

Το πρόβλημα αφορούσε στην περιγραφή της κίνησης μιας αβαρούς χορδής μήκους l, τέλεια ελαστικής με ομοιόμορφη πυκνότητα που ήταν στερεωμένη σε δύο σταθερά σημεία. Μελετήθηκε διαδοχικά από τους *D' Alembert* (1747), *Euler* (1748), *Daniel Bernoulli* (1753) και *Lagrange* (1759). Αποτέλεσε δε την αφορμή να τεθούν υπό ενδελεχή μελέτη και οι έννοιες της συνάρτησης, της συνέχειας, και των τριγωνομετρικών σειρών.

Όπως απέδειξαν οι *D'Alembert*, *Euler* και *Bernoulli* η κίνηση της χορδής του προβλήματος περιγράφεται από τη μερική διαφορική εξίσωση

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

που έπρεπε να λυθεί με τις οριακές συνθήκες

$$y(0,t) = 0$$
$$y(l,t) = 0$$

και τις αρχικές συνθήκες

$$\left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$$

$$y(x.0) = f(x)$$

Ο *D'Alembert* έλυσε το 1747 το πρόβλημα κάνοντας την παρατήρηση ότι κάθε συνάρτηση της μορφής $y(x,t) = \dfrac{\phi(\mathrm{x+ct}) + \phi(\mathrm{x\text{ - }ct})}{2}$, όπου φ «αυθαίρετη» συνάρτηση είναι λύση του προβλήματος. Εφάρμοσε τις αρχικές συνθήκες όποτε

$$y(x,0\,) = f(x) \Rightarrow \frac{2\phi(\mathrm{x})}{2} = f(x) \Rightarrow \phi(\mathrm{x}) = f(x)$$

και ισχυρίστηκε ότι η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι η

$$y(x,t) = \frac{1}{2} f(x+ct) + \frac{1}{2} f(x-ct) \ ,$$

τονίζοντας ότι η f είναι αναλυτική συνάρτηση δύο φορές παραγωγίσιμη.

Ο *Euler* δημοσίευσε το 1748 μία εργασία στην οποία, αν και συμφώνησε πλήρως με τη λύση του *D'Alembert*, εντούτοις διαφώνησε στο κατά πόσον η λύση του ήταν γενική. Ισχυρίστηκε ότι η f της αρχικής συνθήκης μπορεί να δίδεται από διαφορετικές αναλυτικές εκφράσεις στο διάστημα *(0, l)*.

Ο *D'Alembert* από την πλευρά του ισχυρίστηκε ότι η λύση του *Euler* αντιβαίνει όλες της Αρχές της Ανάλυσης καθώς η λύση του προβλήματος είναι περιοδική, ενώ ο *Euler* επιτρέπει για την αρχική συνθήκη ακόμη και συνάρτηση f που δεν είναι περιοδική.

Ο *Daniel Bernoulli* με τη σειρά του, έλυσε το 1753, τη διαφορική εξίσωση με τη μέθοδο των διαχωριζομένων μεταβλητών για να καταλήξει στη λύση

$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\dfrac{n\pi}{1} x\right) \cos\left(\dfrac{n\pi c}{l} t\right)$ χωρίς όμως να προσδιορίσει τις σταθερές c_n .

Το ενδιαφέρον είναι ότι αν εφαρμοστεί η δεύτερη αρχική συνθήκη του προβλήματος επιτυγχάνεται να εκφρασθεί η *f(x)* ως σειρά ημιτόνων

$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\dfrac{n\pi}{1} x\right)$ μια πρόδρομη σχέση για τις σειρές Fourier.

Ο *Euler* διαφώνησε με τη λύση του *Bernoulli* λέγοντας ότι είναι παράλογο να πιστέψει κανείς ότι προσθέτοντας περιττές συναρτήσεις θα ήταν δυνατόν να καταλήξει στην τυχαία συνάρτηση που περιγράφει την θέση της χορδής την χρονική στιγμή 0. Ο *Bernoulli* με τη σειρά του ανταπάντησε λέγοντας ότι οι λύσεις των *Euler* και *Bernoulli* συνιστούν μεν όμορφα μαθηματικά αλλά τι σχέση έχουν με την παλλόμενη χορδή; Το ενδιαφέρον είναι ότι ο *Euler* ήταν εκείνος που προσδιόρισε σε μια ειδική περίπτωση τους συντελεστές c_n της λύσης του *Bernoulli*.

Οι παλιές έννοιες σε ένα νέο πλαίσιο (19ος αιώνας)

Με το τέλος του 18ου αιώνα και την έλευση του 19ου ο Ολοκληρωτικός και Διαφορικός λογισμός φαίνεται να ξεφεύγει οριστικά από το γεωμετρικό του παρελθόν και οι προσπάθειες για την αλγεβροποιήση των εννοιών με τον *Euler* και *Lagrange* αρχίζουν να αποδίδουν καρπούς. Παράλληλα οι *D'Alembert* και *Lagrange* επιχειρούν να εκριζώσουν τα απειροστά από το Λογισμό και να επαναπροσδιορίσουν τις θεμελιώδεις έννοιες, ο πρώτος με τα όρια και ο δεύτερος με τα αναπτύγματα *Taylor*. Οι άπειρες σειρές αναπτύσσονται αλματωδώς με τους *Taylor*, *Euler* και *Lagrange* αλλά υπάρχουν ακόμα σοβαρά αναπάντητα ερωτήματα. Ανάμεσα σε αυτά έπρεπε να επαναπροσδιορισθούν οι έννοιες της συνάρτησης και της συνέχειας όπως αυτές προέκυψαν από το πρόβλημα της παλλόμενης χορδής, καθώς επίσης και η σύγκλιση των σειρών και ο τρόπος χειρισμού τους μια και την αρχική αισιοδοξία άρχισε να διαδέχεται ο προβληματισμός.

Κατά το διάστημα των δύο αιώνων που χρησιμοποιήθηκαν, τα απειροστά οδήγησαν πάντα στο σωστό αποτέλεσμα, αλλά η απουσία αυστηρού μαθηματικού πλαισίου που θα θεμελιώνει την ύπαρξη τους δεν γινόταν πλέον αποδεκτή από την μαθηματική κοινότητα. Ήταν πλέον αντιληπτό ότι έπρεπε να γίνει μια ακόμη προσπάθεια επαναπροσδιορισμού των ίδιων αυτών εννοιών που τόσα είχαν προσφέρει τους τελευταίους δύο αιώνες. Το έργο αυτό επιτελέστηκε σε μεγάλο βαθμό από τους *Bernhard Bolzano (1781 – 1848) , Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857), Carl Friedrich Gauss (1777- 1855), Nils Heinrik Abel (1802 -1829) και Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815 – 1897).*

Ο πρώτος που το επιχείρησε ήταν ο ιερέας από την Βοημία *Bernhard Bolzano (1781 – 1848)*. Ο *Bolzano* αντιλαμβάνεται την αναγκαιότητα να εκφρασθούν οι θεμελιώδεις έννοιες του Λογισμού ως όριο λόγων πεπερασμένων διαφορών. Για την έννοια της συνέχειας αναφέρει στο *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes* το 1817.

> *Η συνάρτηση f(x) μεταβάλλεται σύμφωνα με το νόμο της συνέχειας για όλες τις τιμές του x που βρίσκονται εντός συγκεκριμένων ορίων, αν καθώς το x παίρνει μια από τις τιμές αυτές η διαφορά f(x +ω) –f(x) μπορεί να γίνει μικρότερη από οποιαδήποτε ποσότητα, όταν το ω γίνει όσο μικρό επιθυμούμε* [73].

Τον ίδιο κατ' ουσία ορισμό θα επαναλάβει ο Γάλλος μαθηματικός *Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857)* στο έργο *Cours d'analyse* του 1821.

> *Έστω f(x) μια συνάρτηση μίας μεταβλητής x ,με την υπόθεση ότι για οποιαδήποτε τιμή του x , μεταξύ δύο δοσμένων τιμών, η συνάρτηση λαμβάνει σταθερά μια πεπερασμένη και μοναδική τιμή … (και έστω ότι θα) αποδώσουμε στη μεταβλητή x μια απείρως μικρή αύξηση α … η συνάρτηση f(x) θα είναι (για τις τιμές που βρίσκονται) μεταξύ των δύο τιμών που δόθηκαν στο x, μια συνεχής συνάρτηση της μεταβλητής x, αν η αριθμητική τιμή της διαφοράς f(x+α) – f(x) μειώνεται απεριόριστα.*

Ο *Cauchy* θέλοντας ίσως να ξεκαθαρίσει πλήρως την έννοια δίδει και έναν ορισμό για το πότε μια συνάρτηση θα είναι ασυνεχής σε σημείο x_o. Αναφέρει λοιπόν ότι αν η συνάρτηση δεν είναι συνεχής σε κανένα διάστημα γύρω από το x_o τότε η συνάρτηση θα είναι ασυνεχής στο x_o [74].

Τόσο ο *Bolzano* στο *Rein analytischer …* όσο και ο *Cauchy* στο *Cours d'analyse* παρουσιάζουν μαζί με την έννοια της σύγκλισης και την έννοια του ορίου που πρώτος *D' Alembert* παρουσίασε. Έτσι ο *Bolzano* το 1817 στο *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes* για τις ανάγκες της απόδειξης του θεωρήματος της ενδιάμεσης τιμής δίδει τον εξής ορισμό της σύγκλισης ακολουθίας συναρτήσεων.

> *Αν μια ακολουθία μεγεθών* $f_1(x), f_2(x), f_3(x)...f_n(x),...f_{n+r}(x)...$ *για την οποία ισχύει ότι η διαφορά μεταξύ του n-οστού όρου από κάθε άλλο επόμενο όρο* $f_{n+r}(x)$*, ανεξάρτητα του πόσο απομακρυσμένος είναι αυτός από το n-οστό όρο, είναι μικρότερη από κάθε δοσμένο μέγεθος για κατάλληλα μεγάλο n, τότε υπάρχει*

---

73 Katz, V. A History of Mathemetics an Introduction, σελ.641
74 Kline M. Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, σελ.951

ένα και μόνο ένα καθορισμένο μέγεθος στο οποίο οι όροι της ακολουθίας πλησιάζουν πιο κοντά, και το οποίο μπορούν να πλησιάσουν όσο επιθυμούν, αν η ακολουθία συνεχίσει αρκετά [75].

Αλλά και από την πλευρά του *Cauchy* στην εισαγωγή του *Cours d'analyse* δίδεται ο παρακάτω ορισμός

Όταν οι διαδοχικές τιμές που δίδονται σε μια μεταβλητή πλησιάζουν απείρως μια καθορισμένη τιμή, έτσι ώστε η διαφορά τους από αυτή να γίνεται τελικά όσο μικρή επιθυμούμε, τότε αυτή η καθορισμένη τιμή ονομάζεται όριο όλων των άλλων.

Το γεγονός ότι ο *Bolzano* αναφέρεται σε μέγεθος στο οποίο πλησιάζουν οι όροι της ακολουθίας, μας επιτρέπει να υποθέσουμε ότι πιθανόν ομιλεί για πραγματικό αριθμό. Αυτό όμως είναι ασαφές καθόσον δεν έχει αναπτύξει κάποια θεωρία σχετικά με τους πραγματικούς αριθμούς. Κατά τα άλλα η παραπάνω πρόταση είναι μια διατύπωση του γνωστού κριτηρίου σύγκλισης του *Cauchy*.

Η διορατικότητα του Bolzano και τα άπειρα αθροίσματα

Είναι ενδιαφέρον ότι τα επιστημονικά αποτελέσματα του 19ου αιώνα που αφορούσαν στις σειρές ,επιτεύχθηκαν με τη χρήση ενός νέου μαθηματικού πλαισίου το οποίο συνέλαβε πρώτος ο *Bolzano*. Αν και η επιρροή του *Bolzano* στην εξέλιξη των απείρων σειρών είναι υπό αμφισβήτηση, καθώς οι εργασίες του παρέμειναν για μεγάλο χρονικό διάστημα ανέκδοτες, εν τούτοις είναι εντυπωσιακό ότι όλες οι ιδέες του σε σχέση με τις σειρές συνεχίσθηκαν και εμπλουτίστηκαν από τους επόμενους μαθηματικούς του αιώνα. Το γεγονός αυτό είναι σίγουρα μια απόδειξη ότι τα προβλήματα που αφορούσαν τις άπειρες σειρές είχαν φθάσει σε τέτοιο βαθμό ωριμότητας που η λύση τους ήταν πλέον επιτακτική.

Ας δούμε αναλυτικά

- Από τις αρχές του αιώνα ο *Bolzano* επαναπροσδιορίζει την έννοια της σύγκλισης σειράς με αναγωγή της στην ακολουθία μερικών αθροισμάτων που ο ίδιος επινόησε. Για το ίδιο θέμα ο *Jean Baptiste Joseph Fourier* το 1811

[75] Laugwitz, D. Definite Values of Infinite Sums: Aspects of the Foundations of Infinitesimal Analysis around 1820, σελ.208

αναφέρει ότι η σειρά συγκλίνει όταν καθώς το n μεγαλώνει, το άθροισμα n όρων της πλησιάζει σε καθορισμένη τιμή όλο και περισσότερο, και διαφέρει από αυτό μόνο κατά μία ποσότητα που είναι μικρότερη από κάθε μέγεθος. Παράλληλα, αναγνωρίζει ότι η σύγκλιση δυναμοσειράς *f(x)* μπορεί να επιτευχθεί μόνο σε διάστημα τιμών του x και ισχυρίστηκε ότι μια αναγκαία συνθήκη για σύγκλιση είναι οι όροι να πλησιάζουν στο 0 [76]. Τέλος και ο *Cauchy* από πλευράς του, παρουσίασε στο *Cours d'analyse* τον ορισμό της σύγκλισης με την απαιτούμενη μαθηματική αυστηρότητα, απορρίπτοντας ταυτοχρόνως τις αποκλίνουσες σειρές. Η αντίληψη αυτή επέτρεψε στον *Cauchy* να καθορίσει σε μεγάλο βαθμός τους επιτρεπτούς χειρισμούς που διατηρούν τη σύγκλιση. Προς την ίδια κατεύθυνση κινήθηκε και ο *Riemann* επιδεικνύοντας σε τι περιπέτειες μπορεί να οδηγηθούμε με την αναδιάταξη των όρων μιας σειράς που συγκλίνει μεν αλλά όχι κατά απόλυτο τιμή.

- Ο *Bolzano* αντιλαμβάνεται την αναγκαιότητα κριτηρίων σύγκλισης, ο *Gauss* αποδεικνύει ένα κριτήριο για την υπεργεωμετρική ενώ παράλληλα καθορίζει το διάστημα σύγκλισης και ο *Cauchy* παρουσιάζει μια πληθώρα κριτηρίων που αφορούν σύγκλιση σειρών και γεωμετρικών σειρών.

- Εξετάζοντας το ανάπτυγμα *Taylor* για συναρτήσεις με κάθε τάξης παράγωγο ο *Bolzano* παρατηρεί ότι μπορούν κατά φυσικό τρόπο να επεκταθούν μέσω της άπειρης σειράς σε συναρτήσεις μιας μιγαδικής μεταβλητής. Αργότερα ο *Cauchy* διατύπωσε το θεώρημα σύγκλισης δυναμοσειρών μιγαδικών μεταβλητών, ότι δηλαδή αν μια δυναμοσειρά μιγαδικής μεταβλητής συγκλίνει τότε είτε θα συγκλίνει σε ένα μόνο σημείο είτε θα συγκλίνει σε όλο το μιγαδικό επίπεδο είτε θα συγκλίνει σε ανοιχτό ή κλειστό δίσκο.

- Στο *Rein analytischer…* ο *Bolzano* χρησιμοποιεί ακολουθίες συναρτήσεων και ορίζει την σύγκλιση αυτών. Αργότερα ο *Cauchy* ασχολείται με σειρές ακολουθιών συναρτήσεων. Εξετάζει δε ερωτήματα που αφορούν στο κατά πόσον η σύγκλιση σειράς συνεχών συναρτήσεων συνεπάγεται τη συνέχεια του

[76] Kline, M. Mathematical Thought from Ancient to Modern Times, σελ.961

αθροίσματος τους καθώς επίσης ανάλογα ερωτήματα για τις παραγώγους και τα ολοκληρώματα.

Οι άπειρες σειρές το 19^{o} αιώνα

Αν και η πρόοδος που είχε επιτευχθεί κατά το 18^{o} αιώνα , σε σχέση με τις άπειρες σειρές ήταν αλματώδης υπήρχαν ακόμη δύο βασικά σημεία που ζητούσαν επιτακτικά διευκρινήσεις : Οι συνθήκες που εξασφάλιζαν τη σύγκλιση και οι κανόνες που καθορίζουν το χειρισμό των απείρων αθροισμάτων.

Από τις αρχές του αιώνα γίνεται αντιληπτό ότι υπάρχουν δυναμοσειρές που αν και θα ήταν αναμενόμενο να συγκλίνουν σε συγκεκριμένες συναρτήσεις αυτό δεν συμβαίνει. Χαρακτηριστική η περίπτωση που μελετήθηκε το 1811από τον *Siméon-Denis Poisson (1781 – 1840)*. Ο *Poisson* μελέτησε το τυπικό ανάπτυγμα της (2συνx)^{m} από το οποίο προκύπτει η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty}\binom{m}{k}\sigma\upsilon\nu((m-2k))x$. Παρατήρησε ότι για $m=\frac{1}{3}$ και x = π η σειρά δε συγκλίνει στην (2συνx)^{m} [77] . Η παρατήρηση αυτή, γνωστή ως παράδοξο του *Poisson*, αποτέλεσε την αφορμή για μελετηθούν διεξοδικά οι σειρές και προκύψει έτσι μια νέα θεωρία για τα άπειρα αθροίσματα. Επίσης το 1823 ο *Cauchy,* δύο χρόνια μετά την έκδοση του *Cours d'analyse* , παρουσιάζει μία ακόμη συνάρτηση, την $f(x)=e^{-x^2}+e^{-1/x^2}$,της οποίας το Ανάπτυγμα Taylor επίσης δε συγκλίνει στην *f(x).*

Οι ενδείξεις, λοιπόν, για την αναγκαιότητα μιας νέας προσέγγισης συνολικά στις άπειρες σειρές ήταν ισχυρές από τις αρχές του 19^{ου} αιώνα.

Ο *Bolzano* και ο *Cauchy*, αναλαμβάνουν να φέρουν εις πέρας το έργο, προτείνοντας να μελετηθεί η σύγκλιση των σειρών μέσω της ακολουθίας των μερικών αθροισμάτων. Το ενδιαφέρον είναι ότι πριν από εκείνους, ο Πορτογάλος μαθηματικός *José Anastácio da Cunha (1744 – 1787)* το 1782 στο έργο του *Principios Mathematicos* παρουσιάζει μια σχεδόν ταυτόσημη ιδέα για τη σύγκλιση.

Επιστρέφοντας στον *Cauchy,* στο *Cours d'analyse* του 1821 παρουσιάζει αρκετά κριτήρια σύγκλισης ενώ το 1823 με τη συνάρτηση $f(x)=e^{-1/x^2}$ κατάρριψε τον

---

[77] Sorensen H.K. Exceptions and counterexamples : Understanding Abel's comment on Cauchy's Theorem, σελ.457

ισχυρισμό του Lagrange ότι κάθε αναλυτική συνάρτηση μπορεί να αναπτυχθεί σε δυναμοσειρά μέσω του θεωρήματος Taylor, καθώς η *f(x)* είναι αναλυτική αλλά δεν έχει ανάπτυγμα Taylor γύρω από το 0. Ο *Cauchy* εν συνεχεία διατύπωσε την γνωστή συνθήκη σύγκλισης του πολυωνύμου *Taylor* αν το υπόλοιπο τείνει προς το 0.

Σε ότι αφορά στις δυναμοσειρές ο *Cauchy* τις αντιμετώπισε ως σειρές συναρτήσεων και διατύπωσε μια νέα σειρά θεωρημάτων που αφορούν στη σύγκλιση ακολουθιών συναρτήσεων σε σχέση με τη συνέχεια, την παράγωγο και το ολοκλήρωμα. Ο νεαρός Νορβηγός μαθηματικός *Nils Heinrik Abel* , μελετώντας το *Cours d'analyse* , αναγνώρισε ότι η πρόταση που αναφέρει ότι, αν μια σειρά ακολουθιών συνεχών συναρτήσεων συγκλίνει στην *f(x)* τότε και η *f(x)* θα είναι συνεχής «επιδέχεται εξαιρέσεις». Είχε έτσι την ευκαιρία να επαναδιατυπώσει την πρόταση αλλά και να αποδείξει μια σειρά κριτηρίων σύγκλισης. Πρότεινε επίσης το διαχωρισμό της σύγκλισης από τον προσδιορισμό του αθροίσματος της σειράς. Η παρατήρηση του *Abel* οδήγησε στην έννοια της ομοιόμορφης σύγκλισης που πρώτοι αναγνώρισαν οι *Stokes* και *Philipp Seidel (1821 – 1896)* και που μελετήθηκε συστηματικά από τον *Carl Weierstrass.*

Το δεύτερο θέμα, που καθώς αναφέραμε, επιζητούσε διευκρινήσεις από τους μαθηματικούς του 19^{ου} αιώνα ήταν οι κανόνες χειρισμού των άπειρων αθροισμάτων.

Πρώτος ο *Gauss,* στη μελέτη του για την υπεργεωμετρική σειρά το 1812, αναγνώρισε την ανάγκη να περιορισθούν οι χειρισμοί των άπειρων σειρών μόνο στο διάστημα σύγκλισης. Αργότερα ο *Cauchy* στο *Cours d'analyse* καθόρισε αναλυτικά τους επιτρεπτούς χειρισμούς των σειρών στο διάστημα σύγκλισης.

Το 1822 εκδίδεται ένα έργο που έρχεται να ανατρέψει τις αντιλήψεις των καταξιωμένων μαθηματικών του 18^{ου} αιώνα σχετικά με τις σειρές. Στο *Théorie analytique de la chaleur,* που βασίζεται εν πολλοίς σε μια εργασία του 1812, ο *Fourier* ισχυρίστηκε ότι κάθε συνάρτηση οποιασδήποτε μορφής μπορεί να αναπτυχθεί σε μια τριγωνομετρική σειρά. Ο ισχυρισμός αν και δεν ήταν εντελώς λάθος, εντούτοις ήταν πολύ αισιόδοξος, όπως αποδείχτηκε από τον *Dirichlet* το 1829. Οι τριγωνομετρικές σειρές προκάλεσαν μεταξύ άλλων και το ενδιαφέρον των *Riemann, Heinne, Cantor*.

Η σύγκλιση εμπλουτίζεται με τις έννοιες της απόλυτης σύγκλισης και της σύγκλισης υπό συνθήκη. Ο *Dirichlet* σε μία εργασία του 1837 απέδειξε ότι οι σειρές που συγκλίνουν κατ΄απόλυτη τιμή επιδέχονται αναδιάταξη των όρων τους χωρίς να επηρεάζεται το άθροισμα ενώ ο *Riemann* σε μία εργασία του 1854 απέδειξε ότι οι σειρές που συγκλίνουν υπό συνθήκη μπορούν με κατάλληλη αναδιάταξη των όρων τους να συγκλίνουν σε οποιοδήποτε αριθμό.

Προς το τέλος του 19^{ου} αιώνα , τίθεται υπό αμφισβήτηση η άποψη του *Cauchy* πού ήθελε τις αποκλίνουσες σειρές να μην αποτελούν αντικείμενο της Ανάλυσης. Οι ιδιότητες που παρουσίαζαν οι σειρές αυτές ήταν πολύ ενδιαφέρουσες για να εγκαταλειφθούν οριστικά. Από το 18^{ο} αιώνα οι μαθηματικοί, κυρίως ο *Euler,* είχαν χρησιμοποιήσει τις αποκλίνουσες σειρές για να υπολογίζουν ακριβείς προσεγγίσεις συναρτήσεων χρησιμοποιώντας λίγους μόνο όρους. Επίσης είχαν χρησιμοποιήσει τις σειρές αυτές ως αναλυτικά ισοδύναμα των συναρτήσεων από τις οποίες προήλθαν. Ακόμη και ο ίδιος ο *Cauchy* αναγνώρισε ότι σειρές αυτού τους είδους θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν για την εύρεση του log(Γ(x)). Τέλος προέκυψε μια νέα χρησιμότητα των σειρών αυτών, καθώς ορίζοντας με διαφορετικό τρόπο το άθροισμα τους ήταν δυνατόν να αποδώσουν πεπερασμένο άθροισμα σε σειρές που απέκλειναν κατά την αντίληψη του *Cauchy*.

Jean Batiste Joseph Fourier (1768 – 1830)

Στις 21 Δεκεμβρίου του 1807 ο Fourier παρουσιάζει σε μια συνεδρίαση της Γαλλικής Ακαδημίας Επιστημών την διατριβή του με θέμα τη διάδοση της θερμότητας σε μεταλλικές επιφάνειες, ράβδους και στερεά σώματα. Κατά την επίλυση του προβλήματος ο Fourier ισχυρίστηκε ότι κάθε συνάρτηση που ορίζεται στο (-π, π) μπορεί να παρασταθεί στο διάστημα αυτό από τη σειρά

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \sigma\upsilon\nu nx + b_n \eta\mu nx\right).$$

Η κριτική επιτροπή που αποτελείτο μεταξύ άλλων από τους *Lagrange* και *Laplace* απέρριψε την εργασία, διότι οι δύο μαθηματικοί διαφώνησαν για το κατά πόσο είναι δυνατόν μια τυχαία συνάρτηση να περιγραφεί από την τριγωνομετρική σειρά που ισχυρίστηκε ο *Fourier*. Ο *Lagrange* ισχυρίστηκε ότι κάτι τέτοιο είναι αδύνατον καθώς οι συναρτήσεις του ημιτόνου και συνημιτόνου έχουν παραγώγους κάθε τάξεως, οπότε η *f(x)* θα είναι πρέπει να είναι επίσης αναλυτική και φυσικά μια τέτοια συνάρτηση δεν μπορεί να χαρακτηρισθεί τυχαία. Παρόλα αυτά , πιθανόν για να δώσουν την ευκαιρία στον *Fourier* να αναπτύξει με προσοχή τις ιδέες του, η Γαλλική Ακαδημία προκήρυξε έναν διαγωνισμό, με θέμα την διάδοση της θερμότητας, που το βραβείο του θα απονέμονταν το 1812. Ο *Fourier* με μία εργασία που παρουσίασε το 1811 κέρδισε μεν το βραβείο αλλά επικρίθηκε και πάλι για έλλειψη αυστηρότητας.

Το 1822 δημοσιεύει το βιβλίο του *Théorie analytique de la chaleur* στο οποίο παρουσιάζει σε γενικές γραμμές την εργασία που κέρδισε το βραβείο του 1812[78]. Στο βιβλίο η διάδοση της θερμότητας περιγράφεται από την μερική διαφορική εξίσωση

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad (1)$$

όπου u(x, y) η θερμοκρασία της ράβδου με $0\leq x \leq \pi$ και $y \geq 0$

Υπό τις αρχικές συνθήκες

$$u(0,y)=u(\pi,\mathrm{y})=0 \qquad (2)$$

$$u(x,0)=f(x) \qquad (3)$$

Ο *Fourier* παρατηρεί ότι οι συναρτήσεις

$e^{-ny}\eta\mu(nx)$ για n = 1, 2, 3,…

ικανοποιούν τις συνθήκες (1) και (2) του προβλήματος και υποθέτει ότι η γενική λύση είναι της μορφής :

$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-ny}\eta\mu(nx)$ όπου b_i *i=1,2,,* είναι αυθαίρετες σταθερές.

Με τη λύση αυτή η συνθήκη (3) γίνεται :

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \eta\mu x \quad x\in(0,\pi) \qquad (4)$$

Για να προσδιορίσει τους συντελεστές ο *Fourier* ισχυρίζεται ότι η *f(x)* είναι μια περιττή συνάρτηση με ανάπτυγμα *Taylor*

[78] Edwards, C.H. The historical development of the calculus , σελ.304

$$f(x) = xf'(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \frac{x^5}{5!} f^{(5)}(0) + ... \qquad (5)$$

Αντικαθιστώντας τη σειρά Taylor για την ημ(nx) στο δεξί μέλος της (4) και εξισώνοντας τους συντελεστές στις (4) και (5) εκφράζει τις παραγώγους $f(0), f'''(0), f^{(5)}(0),...$ ως συνάρτηση των συντελεστών b_i $i=1,2,,$ και προκύπτει σύστημα απείρου πλήθους εξισώσεων. Λύνοντας με ένα περίτεχνο τρόπο το σύστημα για m αγνώστους , $b_1, b_2, ,,,b_m$ και παίρνοντας όρια καθώς $m \to \infty$ προκύπτουν εκφράσεις της μορφής

$$a_n = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{2} \mathrm{b}_n$$

$$a_n = f(\pi) - \frac{1}{\mathrm{n}^2} f''(\pi) + \frac{1}{\mathrm{n}^4} f^{(4)}(\pi) - \frac{1}{\mathrm{n}^6} f^{(6)}(\pi) + ...$$

Θεωρώντας τα a_n ως συναρτήσεις του π και παραγωγίζοντας δύο φορές προκύπτει τελικά μια συνήθεις διαφορική εξίσωση

$$\frac{1}{n^2} \frac{d^2 a_n}{dx^2} + a_n(x) = f(x)$$

από την γενική λύση της οποίας προκύπτουν οι συντελεστές

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x)\, \eta\mu(n\mathrm{x})\mathrm{dx}\ .$$

Ο *Fourier* συμπληρώνει ότι για τον υπολογισμό των συντελεστών b_n αρκεί το χωρίο κάτω από την $f(x)\,\eta\mu(n\mathrm{x})$ να έχει για κάθε n εμβαδό που να μπορεί να αναπαρασταθεί ως $\int_0^\pi f(x)\, \eta\mu(n\mathrm{x})\mathrm{dx}$. <u>Δεν είναι απαραίτητο η συνάρτηση να είναι αναλυτική</u> και συνεπώς να έχει αντιπαράγωγο.

Οι εκτιμήσεις του *Fourier* ότι η σειρά $\frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \sigma\upsilon\nu(nx) + b_n \eta\mu(nx) \right)$ συγκλίνει στην f για οποιαδήποτε συνάρτηση f αποδείχθηκαν λανθασμένες. Το 1829 ο Γερμανός μαθηματικός *Peter Goustav Lejeune Dirichlet (1805- 1859)* απέδειξε το παρακάτω θεώρημα για τη σύγκλιση της σειράς *Fourier*.

Αν στο κλειστό διάστημα [-π, π] , η f είναι μονότιμη, φραγμένη, έχει πεπερασμένο πλήθος ασυνεχειών και πεπερασμένο πλήθος μέγιστων και ελάχιστων τότε η σειρά

Fourier της *f* συγκλίνει στην *f(x)* στα σημεία που η συνάρτηση είναι συνεχής και στη μέση τιμή του δεξιού και αριστερού ορίου της f σε κάθε σημείο που η f είναι ασυνεχής.

Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857)

Η έκδοση του *Cours d'analyse* το 1821, αποτελεί την αρχική πρόταση του *Cauchy* για την πλήρη αναδιοργάνωση του Λογισμού. Στο βιβλίο επανατοποθετούνται όλες οι βασικές έννοιες του Ολοκληρωτικού και Διαφορικού Λογισμού σε ένα ενοποιημένο πλαίσιο που σηματοδοτεί την απαρχή του κλάδου της Μαθηματικής Ανάλυσης. Ο Cauchy στην εισαγωγή του βιβλίου δηλώνει, ότι η αναδιοργάνωση των εννοιών σχεδιάστηκε με πρωταρχικό στόχο να απαλείψει την στροφή της Ανάλυσης προς τις αλγεβρικές γενικεύσεις.

Μέσα στη δεκαετία του 1820 ο Cauchy θα περιγράψει ένα πλαίσιο για την Ανάλυση που στηρίζεται στα εξής [79]

1. Οι άπειρες σειρές είναι αποδεκτές μόνο αν συγκλίνουν.
2. Οι συναρτήσεις *f(x)* έχουν μια μοναδική τιμή για κάθε x (σε δεδομένο διάστημα) και συνήθως θεωρούνται συνεχής.
3. Η ισότητα A = B σημαίνει ότι τα A και B είναι ίσες ποσότητες, δηλαδή πραγματικοί αριθμοί.
4. Σειρά συναρτήσεων συνεχών σε διάστημα I που συγκλίνει παντού στο I έχει άθροισμα επίσης συνεχές στο I.

Το συνεκτικό στοιχείο όλων των εννοιών είναι η επανεμφάνιση της έννοιας του ορίου επί της οποίας θεμελιώνεται η Ανάλυση του *Cauchy*. Αν και δεν αποφεύγει τη χρήση απειροστών, καθώς τα περιγράφει λεκτικά όπως στον ορισμό της σύγκλισης σειράς, εντούτοις αποφεύγει να τα παρουσιάσει στους ορισμούς. [80]Από την εισαγωγή του βιβλίου η έννοια του ορίου ορίζεται αριθμητικά με την λεκτική περιγραφή που αναφέραμε. Επίσης, επαναπροσδιορίζεται εμμέσως η έννοια της συνάρτησης καθώς δηλώνεται κατηγορηματικά ότι οι ιδιότητες των αναλυτικών συναρτήσεων δεν αφορούν αδιακρίτως όλες τις συναρτήσεις και πρέπει η χρήση τους να γίνεται με πολύ προσοχή.

[79] Laugwitz D. Definite Values of Infinite Sums: Aspects of the Foundations of Infinitesimal Analysis around 1820, σελ.197
[80] Καραγιαννίδου Α., Απαρχές Θεμελίωσης του Λογισμού σελ.47

Αν για οποιοδήποτε n τα μερικά αθροίσματα S_n πλησιάζουν απείρως ένα συγκεκριμένο όριο S, η σειρά θα λέγεται συγκλίνουσα και το όριο θα ονομάζεται άθροισμα της σειράς. Αντιθέτως, αν καθώς το n αυξάνεται απεριόριστα τα μερικά αθροίσματα S_n δεν πλησιάζουν μία προκαθορισμένη τιμή η σειρά θα ονομάζεται αποκλίνουσα και δεν θα έχει άθροισμα.

Ο *Cauchy* όμως δεν σταματά εδώ αλλά συνεχίζει. Μελετά τις διαφορές μεταξύ των μερικών αθροισμάτων για να καταλήξει στο γνωστό κριτήριο σύγκλισης *Cauchy* που με σύγχρονο συμβολισμό είναι το ακόλουθο.

Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *συγκλίνει αν και μόνο αν για κάθε ε > 0, υπάρχει φυσικός αριθμός* n_o, *τέτοιος ώστε* $|a_{m+1} + a_{m+2} + ... + a_n| < \varepsilon$ *για κάθε* $n > m \geq n_o$.

Το πρώτο παράδειγμα που δίνει αφορά στη σύγκλιση της γεωμετρικής σειράς για x<1 αναφέροντας ότι ο όρος που απομένει φράσσεται από τα x^n και $\frac{x^n}{1-x}$ [81].

Αν και ο *Cauchy* αναφέρεται σε ικανή και αναγκαία συνθήκη σύγκλισης εντούτοις αποδεικνύει μόνο το ότι η συνθήκη είναι αναγκαία. Αυτό προκύπτει αμέσως από τον ορισμό της σύγκλισης. Απέφυγε να αποδείξει ότι η συνθήκη είναι και ικανή. Κάτι τέτοιο θα απαιτούσε να ορισθεί το σύνολο των πραγματικών αριθμών ώστε η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων να έχει όριο, τελικά δηλαδή θα έπρεπε να ορισθούν οι άρρητοι. Ο *Cauchy* έκανε προσπάθειες προς αυτή τη κατεύθυνση θεωρώντας τους άρρητους ως όρια ακολουθίας ρητών. Φαίνεται όμως να μην αντιλήφθηκε (;) ότι ο ορισμός του ορίου προϋποθέτει την ύπαρξή του και συνεπώς ο ορισμός των αρρήτων που έδωσε περιείχε στοιχεία αυτοαναφοράς. Αποτέλεσμα όλων αυτών ήταν ο ορισμός της σύγκλισης να έχει λογικά κενά.

Παρόλα αυτά ο ορισμός της σύγκλισης μέσω του ορίου της ακολουθίας των μερικών αθροισμάτων, βοήθησε στο τεθούν οι βάσεις ώστε να αποσαφηνισθούν οι χειρισμοί που επιτρέπονται στα άπειρα αθροίσματα και παράλληλα να αναπτυχθούν κριτήρια σύγκλισης. Κατόπιν, στη συνέχεια του βιβλίου μελετά συστηματικά τη σύγκλιση των

[81] Laugwitz D. Definite Values of Infinite Sums: Aspects of the Foundations of Infinitesimal Analysis around 1820, σελ.209

άπειρων σειρών, διατυπώνει και αποδεικνύει το γνωστό κριτήριο του λόγου και το νέο κριτήριο της ρίζας

Έστω η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *με μη αρνητικούς όρους και* $r = \lim_{n\to\infty} a_n^{1/n}$

Τότε

αν $r < 1$ *η σειρά συγκλίνει*

αν $r > 1$ *η σειρά αποκλίνει*

αν $r = 1$ *δεν μπορούμε να συμπεράνουμε για σύγκλιση ή απόκλιση*

Παραθέτει αναλυτικά τις επιτρεπόμενες πράξεις μεταξύ απείρων σειρών, πρόσθεση σειρών και γινόμενο *Cauchy*, και καθορίζει κριτήρια για γενικότερες σειρές.

Εκτός από απλές σειρές στο *Cours d'analyse* αλλά και στο *Leçons sur le Calcul Différentiel* του 1829 ο *Cauchy* πραγματεύεται, μεταξύ των άλλων, και την σύγκλιση ακολουθίας συναρτήσεων. Όμως καθώς η έννοια της ομοιόμορφης σύγκλισης διέφυγε της προσοχής του υποπίπτει σε λάθη. Το πρώτο το αναφέραμε ήδη και έχει να κάνει με την συνέχεια του ορίου ακολουθίας συναρτήσεων. Το δεύτερο έχει να κάνει με την όρο προς όρο ολοκληρωσιμότητα. Ο *Cauchy* ισχυρίστηκε ότι

αν $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$ τότε και $\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) = \int_a^b f(x)$.

Η έννοια της ομοιόμορφης σύγκλισης προσεγγίστηκε αρχικά από τον *Philipp Ludwig von Seidel (1821 – 1896)* όταν παρατήρησε ότι στο κριτήριο του *Cauchy* αν το άθροισμα των συναρτήσεων είναι ασυνεχής σε σημείο x_o τότε για τιμές κοντά στο x_o η σειρά συγκλίνει αυθαίρετα αργά.

Nils Henrik Abel (1802 – 1829)

Ο νεαρός και ταλαντούχος Νορβηγός Μαθηματικός *Nils Abel* έτρεφε απέραντο θαυμασμό για τη μαθηματική σκέψη του Cauchy, αν και είχε συναντήσει την αδιαφορία του όταν του παρουσίασε το 1826 μια εργασία στις ελλειπτικές συναρτήσεις. Ο *Abel* έγγραψε για τον *Cauchy* μετά από μια συνάντηση μαζί του το 1826.

Ο Cauchy είναι τρελός και δεν μπορείς να κάνεις τίποτε μαζί του , όμως αυτή τη στιγμή, είναι ο μόνος που γνωρίζει πως πρέπει να γίνονται τα μαθηματικά.

Όταν ο *Abel* μελέτησε το *Cours d'analyse* του *Cauchy* προσπάθησε να επεκτείνει το Διωνυμικό Θεώρημα, που είχε αποδείξει ο *Cauchy*, και για τη περίπτωση του μιγαδικού εκθέτη. Σε εργασία του που δημοσιεύθηκε το 1826 ο *Abel* χρησιμοποίησε τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\eta\mu(nx)}{n}$$

για να ελέγξει ένα σημαντικό βήμα στην απόδειξη του Cauchy για το Διωνυμικό Θεώρημα. Τότε κατάλαβε ότι μια πρόταση από το *Cours d'analyse* «επιδέχεται εξαιρέσεις». Σε υποσημείωση, που αναφέρεται σε ένα από τα θεωρήματα του, έγραψε:

> *Στην εργασία του κ. Cauchy υπάρχει το επόμενο θεώρημα.*
> *Όταν οι διαφορετικοί όροι της σειράς* $u_o + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$
> *είναι συναρτήσεις μιας μεταβλητής ποσότητας συνεχείς, ως προς τη μεταβλητή αυτή, κοντά με μία συγκεκριμένη τιμή στην οποία η σειρά συγκλίνει, τότε το άθροισμα αυτής της σειράς είναι επίσης συνεχής συνάρτηση του x κοντά σε αυτή τη συγκεκριμένη τιμή.*
> *Παρόλα αυτά νομίζω ότι το θεώρημα επιδέχεται εξαιρέσεις. Διότι, για παράδειγμα η σειρά* $\eta\mu\phi - \frac{1}{2}\eta\mu 2\varphi + \frac{1}{3}\eta\mu 3\phi - \ldots$ *είναι ασυνεχείς για κάθε τιμή (2m+1)π του x όπου m είναι ακέραιος. Καθώς γνωρίζουμε υπάρχει ένα πλήθος σειρών με παρόμοιες ιδιότητες.*

Η σειρά που υποδεικνύει ο Abel συγκλίνει στο

$x/2$ όταν $0 < x < \pi$

και στο

$x/2 - \pi$ αν $\pi < x < 2\pi$

Ο *Abel* είχε αντιρρήσεις ως προς την επιλογή του *Cauchy* να απορρίψει τις σειρές που αποκλίνουν, καθώς στην περίπτωση της Διωνυμικής με μιγαδικό εκθέτη, εκτός από σειρές που συνέκλιναν προέκυπταν και σειρές που είτε απέκλιναν εντελώς, είτε δεν συνέκλιναν στην επιθυμητή συνάρτηση. Για το λόγο αυτό ο *Abel* πρότεινε να διαχωριστεί η σύγκλιση από τον προσδιορισμό του αθροίσματος της σειράς.

Εφόσον εντόπισε το πρόβλημα με τη συνέχεια ο *Abel* διατυπώνει και αποδεικνύει το παρακάτω θεώρημα.

Αν u_n ακολουθία συνεχών συναρτήσεων στο [α, b] και υπάρχει δ > 0 ώστε η σειρά $\sum_{n-1}^{\infty} u_n(x)\delta^{n}$ να συγκλίνει, τότε για κάθε α με $0 \le \alpha < \delta$ το άθροισμα της $\sum_{n-1}^{\infty} u_n(x)a^{n}$ θα είναι συνάρτηση συνεχής στο [α, β] .

Παράρτημα Α

Θεωρία quasi λόγων του Mengoli

Το 1659 δημοσιεύεται στην Μπολόνια το έργο του *Mengoli Geometriae speciosae elementa* . Το έργο αποτελείτο από έξι κεφάλαια στα οποία παρουσιάζονταν διωνυμικά αναπτύγματα, αθροίσματα δυνάμεων και μία θεωρία λογαριθμών αναπτυγμένη κατά τα πρότυπα του Ευκλείδη. Στο τρίτο κεφάλαιο ο Mengoli παρουσιάζει τη Θεωρία των quasi-λόγων, μια αλγεβρική μέθοδος που πραγματεύεται την έννοια του ορίου Μιλώντας με σύγχρονη μαθηματική ορολογία ο Mengoli επινόησε μια διαδικασία για τον τετραγωνισμό παραβολών κάνοντας χρήση του αλγεβρικού συμβολισμού του Viette και αποδίδοντας σε συγκεκριμμένο σύμβολο αριθμητικές τιμές. Στην ουσία επινόησε την έννοια της μεταβλητής . Οι ποσότητες αυτές που εκφράζονται με χρήση συμβόλων χαρακτηρίζονται ως *Indeterminitata* επειδή οι μεταβλητές δεν επιτρέπουν τον ακριβή καθορισμό τους αλλά και *determinabilis* καθώς μόλις δοθούν τιμές στις μεταβλητές οι ποσότητες αυτές είναι πλέον γνωστές.

Το κεφάλαιο ξεκινά, κατά τα πρότυπα του Ευκλείδη, με ορισμούς.

Αρχικά ορίζει μια θετική ποσότητα ως *Indeterminitata determinabilis* . Ένας θετικός λόγος χαρακτηρίζεται ως :

α) *Indeterminitata determinabilis quasi-infinite* αν μπορεί να γίνει μεγαλύτερος από κάθε άλλο αριθμό.

β) *Indeterminitata determinabilis quasi-null* αν μπορεί να γίνει μικρότερος από κάθε άλλο θετικό αριθμό.

γ) *Indeterminitata determinabilis quasi-A* Αν μπορεί να γίνει μικρότερος από κάθε αριθμό μεγαλύτερο από τον *A* και μεγαλύτερος από κάθε αριθμό μικρότερο από τον *A*.

Για να επιτύχει τον τετραγωνισμό παραβολών κατασκευάζει μια σειρά από πίνακες ως εξής :

α) *Tabula proportionalium :* Πίνακας όπου τα στοιχεία των διαγωνίων είναι μεταβλητές και έχουν τον ίδιο λόγο $\frac{1}{r}$. Το u συμβολίζει την μονάδα ενώ τα a, r προσδιορίζονται βάσει αυθαίρετου αριθμού t-που ο Mengoli τον ονομάζει *tota*- και είναι όλα τα δυνατά ζεύγη φυσικών αριθμών με άθροισμα t

$$\begin{array}{ccccccc} & & & u & & & \\ & & a & & r & & \\ & a^2 & & ar & & r^2 & \\ a^3 & & a^2r & & ar^2 & & r^3 \end{array}$$

Παράδειγμα για tota = 4 έχουμε τους παρακάτω *Tabula proportionalium.*

$$\begin{array}{ccccccc} & & & u & & & \\ & & 1 & & 3 & & \\ & 1 & & 3 & & 9 & \\ 1 & & 3 & & 9 & & 27 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} & & & u & & & \\ & & 2 & & 2 & & \\ & 4 & & 4 & & 4 & \\ 8 & & 8 & & 8 & & 8 \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} & & & u & & & \\ & & 3 & & 1 & & \\ & 9 & & 3 & & 1 & \\ 27 & & 9 & & 3 & & 1 \end{array}$$

β) Αριθμητικό τρίγωνο – τρίγωνο Pascal.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{array}$$

Ο Mengoli παίρνοντας για tota αριθμούς από το 1 εως και το 10 δίνει παραδείγματα του *Tabula proportionalium*

γ) *Tabula speciosa*

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \mathrm{O}u & & & \\ & & \mathrm{O}a & & \mathrm{O}r & & \\ & \mathbf{O}a^2 & & \mathbf{O}ar & & \mathbf{O}r^2 & \\ \mathbf{O}a^3 & & \mathbf{O}a^2r & & \mathbf{O}ar^2 & & \mathbf{O}r^3 \end{array}$$

Ο συμβολισμός **O** σημαίνει άθροισμα των αντιστοίχων στοιχείων του *Tabula proportionalium* για μια συγκεκριμένη τιμή του t. Επίσης ορίζει την δεύτερη γραμμή αυτού του πίνακα ως *τάξεως ένα* την τρίτη ως *τάξεως δύο* κλπ ώστε να βρίσκονται σε συμφωνία με το βαθμό του διωνυμικού αναπτύγματος.

Παράδειγμα για t = 4 ο πίνακας *Tabula speciosa* γίνεται

3

6 6

14 10 14

36 20 20 36

δ) *Tabula subquadratrix*

Ou

Oa Or

Oa^2 **O.**2ar **O**r^2

Oa^3 **O.**$3a^2r$ **O.**$3ar^2$ **O**r^3

Προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε τα στοιχεία κάθε γραμμής του *Tabula speciosa* με την αντίστοιχη γραμμή του αριθμητικού τριγώνου

ε) *Tabula quadratix*

O.u

O.2a O.2r

O.$3a^2$ **O.**6ar O.$3r^2$

O.$4a^3$ **O.**$12a^2r$ **O.**$12ar^2$ O.$4r^3$

Προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε με i τα στοιχεία της i-γραμμής του *Tabula subquadratrix*

Για τον *Tabula quadratix* ο Mengoli αποδεικνύει στο Θεώρημα 42 ότι :

« κάθε στοιχείο του είναι quasi equal με τον tota υψωμένο σε δύναμη μία μονάδα μεγαλύτερη από την τάξη της γραμμής που βρίσκεται το στοιχείο αυτό»

και με σύγχρονο συμβολισμό : $\lim_{n\to\infty}\left((p+1)\sum_{a=1}^{n-1}\binom{p}{s}\cdot a^{s}\cdot(n-a)^{p-s}\right)=t^{p+1}$

Για την απόδειξη της σχέσης αποδεικνύεται πρώτα ότι :

Θ.4 Σε ελεύθερη απόδοση: Κάθε *tota,* t^p ,υψωμένος σε οποιαδήποτε δύναμη ισούται με την μονάδα αυξημένη κατά το άθροισμα των γινομένων που προκύπτουν από τον πολλαπλασιασμό του πρώτου αριστερά στοιχείου κάθε γραμμής τάξης k < p του *Tabula speciosa* με τον αντίστοιχο διωνυμικό συντελεστή

$$t^p = \binom{p}{1} O \cdot a^{p-1} + \binom{p}{2} O \cdot a^{p-2} + ... + \binom{p}{p} O \cdot u + 1$$ όπου O.u = t-1

Με σύγχρονο συμβολισμό ο Mengoli απέδειξε :

$$t^p = \left[\sum_{a=1}^{t-1} \binom{p}{1} a^{p-1} + \sum_{a=1}^{t-1} \binom{p}{2} a^{p-2} + ... + \sum \binom{p}{p} a^0 \right] + 1^p$$

Στη συνέχεια υπολογίζει μέχρι και 36 στοιχεία από τον *Tabula Quadratrix.*

Π.χ. για το πρώτο αριστερά στοιχείο κάθε γραμμής έχουμε ως εξής :

$$t^4 = O \cdot 4a^3 + O \cdot 6a^2 + O \cdot 4a + O \cdot u + u \qquad (\text{ I })$$

$$t^3 = O \cdot 3a^2 + O \cdot 3a + O \cdot u + u \qquad (\text{ II })$$

$$t^2 = O \cdot 2a + O \cdot u + u \qquad (\text{III})$$

όπου $O \cdot u = t - 1$ και $u = 1$

Από την (III)

$$O \cdot 2a = t^2 - O \cdot u - u = t^2 - t + 1 - 1 = t^2 - t \qquad (\text{ IV })$$

πολλαπλασιάζει με 2 και έχει

$$O \cdot 4a = 2t^2 - 2t$$

πολλαπλασιάζει με 3 την (IV)

$$O \cdot 6a = 3t^2 - 3t \qquad (\text{ V })$$

Από την (II)

$$O \cdot 3a^2 = t^3 - O \cdot 3a - O \cdot u - u = t^3 - O \cdot 3a - t$$

πολλαπλασιάζει με 2

$$O \cdot 6a^2 = 2t^3 - O \cdot 6a - 2t$$

και από την (V)

$$O \cdot 6a^2 = 2t^3 - 3t^2 + 3t - 2t = 2t^3 - 3t^2 + t$$

και τελικά η σχέση (I) γίνεται

$$O \cdot 4a^3 = t^4 - O \cdot 6a^2 - O \cdot 4a - O \cdot u - u = t^4 - 2t^3 + 3t^2 - t - 2t^2 + 2t - t \Leftrightarrow$$

$$O \cdot 4a^3 = t^4 - 2t^3 + t^2$$

Χρησιμοποιώντας ανάλογες ταυτότητες υπολογίζει και τα ενδιάμεσα στοιχεία του Tabula quadratrix και τελικά διατυπώνει μια γενικότερη πρόταση

Θ.22 *Κάθε στοιχείο του Tabula quadradrix ισούται με τον tota υψωμένο σε δύναμη μία μονάδα μεγαλύτερη από την τάξη της γραμμής που βρίσκεται το στοιχείο αυτό μειωμένη κατά το άθροισμα του tota υψωμένο σε δυνάμεις μικρότερες από την τάξη της γραμμής*

και με σύγχρονο συμβολισμό : $(p+1)\sum_{a=1}^{t-1}\binom{p}{s} \cdot a^s \cdot (t-a)^{p-s} = t^{p+1} - \sum_{k \le p} t^k$

Ενώ αν εφαρμόσουμε το θεώρημα για το πρώτο στοιχείο κάθε γραμμής

$$(p+1)\sum_{a=1}^{t-1} a^p = t^{p+1} - \sum_{n \le p} t^n$$

Αποδεικνύει

Θ.40 Για m > n ο λόγος $\dfrac{t^m}{\sum_{n<m} t^n}$ είναι *quasi infinite*

Θ.41 Τα $t^m \pm \sum_{n<m} t^n$ και t^m είναι *quasi equal*

Μετά από τα θεωρήματα αυτά διατυπώνει και αποδεικνύει το Θεώρημα 42 ως εξής :

$A = (p+1)\sum_{a=1}^{n-1}\binom{p}{s} \cdot a^s \cdot (t-a)^{p-s}$ το στοιχείο του *Tabula quadratrix* και

$B = t^{p+1}$. Συμφώνως με το Θ.22 το A = B - $\sum_{k<p} t^k$ και $t^k < t^{p+1} : \forall k \in N, k < p$

Όμως από το Θ.41 τα B και B - $\sum_{k \le p} t^k$ είναι *quasi equal* άρα και το A είναι *quasi equal* με το B Αν τώρα πάρουμε μόνο το πρώτο στοιχείο κάθε γραμμής το παραπάνω θεώρημα οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το $(p+1)\sum_{a=1}^{n-1} a^p$ είναι *quasi equal* με το B και

άρα $\lim_{t\to\infty} \frac{\sum_{a=1}^{t-1} a^p}{t^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$

Στο τρίτο βιβλίο της *Geometriae speciosae elementa* ο Mengoli αναφέρει ότι ο λόγος $\frac{O \cdot a}{t^2}$ είναι *Indeterminitata determinabilis ratio quasi equal* με το $\frac{1}{2}$. Από τους ορισμούς που έχει δώσει για το *Indeterminitata determinabilis* και το *ratio quasi equal* προκύπτει το νήμα της πρότασης :

« *Καθώς το t παίρνει τιμές φυσικούς αριθμούς ο λόγος* $\frac{O \cdot a}{t^2}$ *πλησιάζει στο* $\frac{1}{2}$ *πιο κοντά από οποιονδήποτε άλλο λόγο καθόσον αυτοί οι λόγοι είναι καθορίσιμοι και χωρίς ποτέ να ισούται με* $\frac{1}{2}$ ».

Δηλαδή με σύγχρονο συμβολισμό $\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t^2}\sum_{a=1}^{t-1} a\right) = \frac{1}{2}$.

Είναι προφανές ότι ο ορισμός του *Indeterminitata determinabilis ratio quasi equal* είναι μια ακόμη προσπάθεια να ορισθεί η έννοια του ορίου ακολουθίας .

Παράρτημα Β

Συνοπτική παρουσίαση της εξελικτικής πορείας της έννοιας των απείρων αθροισμάτων

Αρχιμήδης (287 – 212 π.Χ)	Μέθοδος εξάντλησης	Εμβαδά κωνικών τομών, σπείρας, όγκων εκ περιστροφής.
Richard Swineshead (Calculator) περί του 1350	Ένταση μορφών Λεκτική επίλυση προβλημάτων	Προβλήματα που οδηγούσαν σε άθροισμα άπειρων όρων γεωμετρικής σειράς.
Nicolas Oresme ~ 1360	Γραφική επίλυση προβλημάτων απείρων αθροισμάτων	Η αρμονική σειρά αποκλίνει Άθροισμα απείρων όρων γεωμετρικής προόδου
Alvarus Thomas ~ 1510	Λεκτική επίλυση προβλημάτων	Προβλήματα παρόμοια με του Calculator
Simon Stevin 1586	Τροποποίηση της μεθόδου της εξάντλησης. Η διπλή αντίφαση αντικαθίσταται από μια διαφορά που γίνεται μικρότερη από κάθε αριθμό. « Αποδεικτικές» μέθοδοι που στηρίζονται στον μεγάλο αριθμό αριθμητικών παραδειγμάτων	Υπολογισμός υδροστατικής πίεσης, κέντρου βάρους σωμάτων
François Viète	*1591.* Εκδίδεται το *In artem analyticam isagoge* στο οποίο γίνεται χρήση μεταβλητών	1593. Αλγεβρική σχέση για το άθροισμα απείρων όρων γεωμ. Προόδου.
Bonaventura Cavalieri	1635. Εκδίδεται το *Geomentria indivisibilus continuorum nova rationale promota*	Υπολογισμός όγκων και εμβαδών με «αδιαίρετα». Τετραγωνισμός γενικευμένης παραβολής $y = ax^p$ με p θετικό ακέραιο.
Gregorius του St.Vincent 1622-1629	Μία σειρά ορίζει ένα μέγεθος, που σήμερα ονομάζουμε όριο της σειράς. Λογαριθμική ιδιότητα της υπερβολής	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} = \frac{2}{3}$
Rene Descartes	1637. Εκδίδεται το *La Geometrie* του Descartes, στο οποίο παρουσιάζεται μια αλγεβροποίηση της Γεωμετρίας. Την ίδια ιδέα πραγματεύεται και ο Ferrmat την ίδια εποχή.	
Gilles Persone de Roberval 1628 – 1634	Τετραγωνισμός γενικ. παραβολής $\frac{y}{a} = \left(\frac{x}{b}\right)^p$ p θετικός ακέραιος	Με γεωμετρικές κυρίως μεθόδους
Blaise Pascal 1654	Τετραγωνισμός γενικευμένης παραβολής $y = x^p$ με αλγεβρικές μεθόδους	Το εμβαδόν υπό της καμπύλης $y=x^p$ ισούται με το άθροισμά $\sum x_i^p$ όπου τα x_i αποτελούν αριθμητική πρόοδο.

Συνοπτική παρουσίαση της εξελικτικής πορείας της έννοιας των απείρων αθροισμάτων

John Wallis 1655	Τετραγωνισμός γενικευμένης παραβολής $y = x^p$ για p θετικό ρητό, με ατελή επαγωγή και αλγεβρικές μεθόδους.	
Pier de Fermat 1657 - 1658	Τετραγωνισμός της γενικ. παραβολής $y = x^{\frac{p}{q}}$	Με γεωμετρικές μεθόδους
Pietro Mengoli 1659	Τετραγωνισμός γενικευμένης παραβολής $y = x^p$ με αλγεβρικές μεθόδους	Η αρμονική σειρά δεν συγκλίνει . Η εναλλασσόμενη αρμονική σειρά συγκλίνει στο log2. Η σειρά των αντίστροφων τριγωνικών συγκλίνει στο 1.
Nicolaus Mercator	1668. Εκδίδεται το Logarithmotechnia	$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$ **Ο *Wallis* παρατηρεί πως η συνθήκη x < 1 είναι απαραίτητη για τη σύγκλιση.**
William Brouncker	1668. Υπολογισμός log2 από την διπλανή σειρά **Απέδειξε την σύγκλιση συγκρίνοντας με μια γεωμετρική σειρά**	$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$
Isaac Newton	1667. Ανάπτυγμα του log(1+x) 1669. *De analysi per aequationes infinitas* Διωνυμικό Θεώρημα 1671. Αναπτύγματα με τη μέθοδο των ροών. **Αναφέρεται στην αναγκαιότητα εξέτασης της σύγκλισης δυναμοσειρών**.	Υπολογισμός των αναπτυγμάτων τοξημx, ημx και συνx και e^x Εύρεση της δυναμοσειράς της αντίστροφης συνάρτησης Σχέση παρεμβολής Newton – Gregory Γνώση του Θεωρήματος Taylor, πριν την ανακάλυψη του από τον Taylor. Επίλυση διαφορικών εξισώσεων με σειρές.
James Gregory	1670. Σχέση παρεμβολής Newton – Gregory. Την εφαρμόζει και βρίσκει Διωνυμικό Θεώρημα. Χρησιμοποίησε πρώτος το θεώρημα Taylor. **Χρησιμοποιεί τις λέξεις συγκλίνουν και αποκλίνουν**	$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}, \log\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$, $\log \varepsilon\varphi\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$, , $\tau o\xi\left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu\left(e^x\sqrt{2}\right)}\right)$ $2\text{τοξεφ}\left(\upsilon\pi\varepsilon\rho\varepsilon\varphi\alpha\pi\frac{x}{2}\right)$

Συνοπτική παρουσίαση της εξελικτικής πορείας της έννοιας των απείρων αθροισμάτων (συνέχεια)

Gottfried von Leibniz	1672. Εύρεση του αθροίσματος αντιστρόφων τριγωνικών αριθμών. **Συμπεραίνει ότι οι περισσότερες σειρές θα συγκλίνουν** 1675. Κριτήριο για την σύγκλιση εναλλασσόμενων σειρών 1676. Αντιλαμβάνεται το άθροισμα σειράς ως ακολουθία μερικών αθροισμάτων 1694. Ανακοινώνει στον Johan Bernoulli αποτελέσματα ισοδύναμα με το θεώρημα Taylor	Χρήση σειρών για επίλυση διαφορικών εξισώσεων. Μέθοδος απροσδιορίστων συντελεστών. Εύρεση τριγωνομετρικών σειρών με γεωμετρικό τρόπο, ολοκλήρωση και παραγώγιση. 1673. $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+...$
Jakob Bernoulli	1689. Απόδειξη της σχέσης για το άθροισμα άπειρων όρων γεωμετρικής προόδου *στο έργο του Tractatus de seriebus infinitis earumque summa finite* 1713. Εκδίδεται το *Ars conjectandi*	Η αρμονική σειρά αποκλίνει. Υπολόγισε τα αθροίσματα για μια πληθώρα σειρών Παρουσιάζεται σειρά πεπερασμένων αθροισμάτων που θα οδηγήσει στον τύπο Euler Maclaurin
Johann Bernoulli	1694. Θεώρημα ισοδύναμο με το θεώρημα Taylor	
Brook Taylor	1715. Εκδίδεται το *Methodus incrementorum*	Παρουσιάζεται το Θεώρημα Taylor χωρίς να εξετάσει σύγκλιση.
George Berkeley	1734. Εκδίδεται το *The Analyst*	
Collin Maclaurin	1742. Εκδίδεται το *Treatise of Fluxions*	Ανάπτυγμα Maclaurin χωρίς να εξετάσει σύγκλιση. Κριτήριο ολοκληρώματος για τη σύγκλιση σειράς. Τύπος άθροισης Euler – Maclaurin. Αναπτύγματα τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Συνθήκη για την ύπαρξη μεγίστου ή ελαχίστου συνάρτησης.
Leonhard Euler	1748. Οι αναλυτικές συναρτήσεις ως εργαλεία μελέτης της Ανάλυσης Σειρές που αποκλίνουν δεν έχουν άθροισμα αλλά έχουν μια πεπερασμένη τιμή. 1748. Introductio in analysin infinitorum Κάνει διάκριση σειρών που αποκλίνουν και ημι-αποκλίνουν δηλαδή παλινδρομούν σε μία τιμή καθώς όλο και περισσότεροι όροι προστίθενται	Κριτήριο σύγκλισης σειρών ανάλογο με του Cauchy. Αναπτύγματα για εκθετικές και λογαριθμικές συναρτήσεις με οποιαδήποτε βάση. Η αρμονική σειρά αποκλίνει. Αναπτύγματα τριγωνομετρικών συναρτήσεων. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$ Τριγωνομετρικές σειρές

Συνοπτική παρουσίαση της εξελικτικής πορείας της έννοιας των απείρων αθροισμάτων (συνέχεια)

Jean Le Rond D'Alembert	1754. Ορίζει την έννοια του ορίου	1768. Στον 5^{o} τόμο του Opuscules Mathématiques παρουσιάζει το κριτήριο λόγου για σύγκλιση σειράς.
Joseph Louis Lagrange	1797. Εκδίδεται το *Théorie des Fonctions Analytiques*	Προτείνονται οι άπειρες σειρές για τη Θεμελίωση του Απειροστικού Λογισμού. Διατυπώνει την σειρά Taylor με υπόλοιπο και αναφέρει ότι το ανάπτυγμα δεν πρέπει να χρησιμοποιείται χωρίς να δίδεται ιδιαίτερη προσοχή στο υπόλοιπο, αλλά δεν μελετά την συνθήκη για το υπόλοιπο.
Carl Friedrich Gauss	1816. *Disquisitiones generales circa seriem infinitam*	Μελέτη της υπεργεωμετρικής συνάρτησης. Κριτήρια σύγκλισης για την υπεργεωμετρική σειρά .
Bernhard Bolzano	1817 *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes* Αναπτύσσεται η έννοια της συνέχειας καθώς και η έννοια της σύγκλισης σειράς με χρήση μερικών αθροισμάτων. Γίνονται αναφορές στην αναγκαιότητα εύρεσης κριτηρίων σύγκλισης	
Augustin Louis Cauchy	1821. Εκδίδεται το *Cours d'analyse* στο οποίο περιγράφονται οι αρχές για την αυστηρή θεμελίωση της Ανάλυσης.	Κριτήρια σύγκλισης. Παραδείγματα συναρτήσεων που το ανάπτυγμα Taylor δε συγκλίνει σε αυτές. Έτσι αποδεικνύεται εσφαλμένη η άποψη του Lagrange. Σύγκλιση ακολουθία συναρτήσεων
Jean Batiste Joseph Fourier	1822. Εκδίδεται το *Théorie analytique de la chaleur*	Κάθε συνάρτηση που ορίζεται στο (-π, π) μπορεί να παρασταθεί στο διάστημα αυτό από τη σειρά $f(x)=\frac{a_o}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \sigma\upsilon\nu nx+b_n \eta\mu nx)\cdot$
Nils Henrik Abel	1826. Εργασία για το Διωνυμικό θεώρημα	Ανακαλύπτει λάθος σε θεώρημα του *Cours d'analyse* Κριτήρια σύγκλισης
Peter Goustav Lejeune Dirichlet	1829. Διατυπώνει με ορθές προϋποθέσεις τον ισχυρισμό του Fourier για τη σύγκλιση τριγωνομετρικών σειρών.	Κριτήρια σύγκλισης

Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία

Arthur, R.T.W. (2006). *Essay review 'The Remarkable Fecundity of Liebniz's Work in Infinite Series.* Annals of Science Vol.63 No.2 (221-225).

Babb, J. (2005). *Mathematical Concepts and Proofs from Nicole Oresme*. Science & Education (14), 443–456.

Baron, E.M. (1969). *The Origins of the Infinitesimal Calculus*, (ανατύπωση του 2003). New York : Dover Publications.

Bos, H. (1980). *Mathematics and Rational Mechanics;" In:* F*erment of Knowledge* (eds.G.S. Rousseau & R. Porter). Cambridge Univ. Press, pp. 327–355.

Boyer, B.C. (1959). *The History of Calculus and its conceptual development*. New York : Dover Publications.

Burn, B. (2005). *The vice: Some historically inspired and proof-generated steps to limits of sequences* .Educational Studies in Mathematics 60 (269–295).

Cajori, F. (1991). *A History of Mathematics.* New York: Chelsea Publishing Company.

Calinger, R. (1996). *Leonhard Euler: The First St. Petersburg Years (1727–1741)*. Historia Mathematica 23 (121–166).

Clagett, M. (1981). *'Oresme, Nicole'*, in C.C. Gillespie (ed.), Dictionary of Scientific Biography,Vol. 9. New York: Charles Scribner's Sons, , pp. 223–230.

Dehn, M., Hellinger, E.D. (1943). *Certain Mathematical Achievements of James Gregory. T*he American Mathematical Monthly. *Vol. 50, No. 3, (149-163).*

Dunham, W. (2005). *The Calculus Gallery. Masterpieces from Newton to Lebesque.* Princeton, New Jersey : Princeton University Press.

Edwards, C.H. (1979). *The Historical Development of the Calculus*. New York : Springer-Verlag.

Feigenbaum, L. (1985). *Brook Taylor and the Method of Increment.* Archive for History of Exact Science, Vol.34 No.1-2 (97–137).

Ferraro, G. (1998). *Some Aspects of Euler's Theory of Series : Inexplicable Functions and the Euler–Maclaurin Summation Formula.* Historia mathematica 25 (290–317).

Ferraro G., Panza M. (2003). *Developing into series and returning from series: A note on the foundations of eighteen-century analysis.* Historia Mathematica 30 (17 – 46).

Fraser C.G. (1987). *Joseph Louis Lagrange's algebraic vision of the calculus.* Historia Mathematica 14, 38-52.