Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ
Προβλήματα Διανυσματικού Λογισμού

Επιμέλεια: Σφακιανάκης Νικόλαος

Τελευταία Ενημέρωση: 5 Ιουνίου 2005

Περιεχόμενα

Οι περισσότερες ασκήσεις είναι από το βιβλίο [Τρο95], και κάποιες είναι από τις σημειώσεις [Αθα04] για τον Απ.ΙΙΙ. Όσες δεν αναφέρουν προέλευση είναι από τις σημειώσεις του μαθήματος [Αθα04].

1 Καμπύλες

1.1 Επικαμπύλια Ολοκληρώματα

Θεωρούμε μία C^1 καμπύλη $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$. Το ίχνος της καμπύλης θα είναι συνήθως στον $\mathbb{R}^2$ ή στον $\mathbb{R}^3$.

Υπάρχουν 2 είδη επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων, ανάλογα με την υπο-ολοκλήρωση συνάρτηση.

- Α′ είδος.
  Αν $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα δίνεται από τη σχέση:
  $$\int_\gamma f ds = \int_\alpha^\beta f(\gamma(t))||\gamma'(t)||dt.$$
  Αν η καμπύλη γ είναι επίπεδη μπορούμε να φανταστούμε ότι το $f(\gamma)$ είναι το ύψος ενός φράχτη που έχει ίχνος γ, οπότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στην περίπτωση αυτή θα μας

δίνει το εμβαδόν της μίας πλευράς ενός φράχτη.
Αν η καμπύλη είναι τριών διαστάσεων μπορούμε να φανταστούμε ότι το $f(\gamma)$ είναι η τοπική πυκνότητα ενός σύρματος που δίνεται από την γ, οπότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στην περίπτωση αυτή θα μας δίνει την συνολική μάζα του σύρματος.

Αν $f \equiv 1$ τότε το αντίστοιχο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μας δίνει το *μήκος* της καμπύλης,

$$l(\gamma) = \int_\gamma 1 = \int_\alpha^\beta \|\gamma'(t)\| dt$$

- Β′ είδος.
  Αν $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα δίνεται από τη σχέση:

$$\int_\gamma F ds = \int_\alpha^\beta F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

  Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να φανταστούμε ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα μας δίνει το έργο που παράγει το πεδίο δυνάμεων F πάνω σε ένα σωματίδιο που κινείται κατά μήκος της καμπύλης γ.

Πρόβλημα 1. ***Tromba -7.1 Ασκ 3(γ)-*** *Να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $f(x, y, z) = \frac{x+y}{y+z}$ κατά μήκος της καμπύλης $\sigma : t \to (t, \frac{2}{3}t^{3/2}, t)$ με $t \in [1, 2]$.*

Λύση

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση είναι βαθμωτή (παίρνει τιμές στο $\mathbb{R}$) και ότι η καμπύλη σ είναι 3-διαστάσεων, οπότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι η συνάρτηση μας δίνει την τοπική πυκνότητα ενός σύρματος και ότι το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι η συνολική μάζα του σύρματος.

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος κάνουμε τις παρακάτω παρατηρήσεις,

$$\sigma(t) = (t, \frac{2}{3}t^{3/2}, t), \quad \sigma'(t) = (1, t^{1/2}, 1), \quad ||\sigma'(t)|| = \sqrt{2 + t}, \quad f(\sigma(t)) = 1.$$

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα όπως ήδη παρατηρήσαμε είναι Α′ είδους και ισούται με,

$$\int_\sigma f ds = \int_1^2 \sqrt{2 + t} dt = \frac{2}{3}(t + 2)^{3/2}\Big|_1^2 = \frac{16}{3} - 2\sqrt{3}.$$

□

Πρόβλημα 2. ***Tromba -7.1 Ασκ 5-*** *Έστω η $f : \mathbb{R}^3 - \{y = 0\} \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από την $f(x, y, z) = \frac{1}{y^3}$. Υπολογίστε το $\int_\sigma f(x, y, z)ds$ όπου η $\sigma : [1, e] \to \mathbb{R}^3$ ορίζεται από την $\sigma(t) = (\log t)\mathbf{i} + t\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.*

Λύση

Η καμπύλη σ γράφεται στη μορφή

$$\sigma(t) = (\log t, t, 2) \text{ με } t \in [1, e],$$

και έχει ταχύτητα

$$\sigma'(t) = (\frac{1}{t}, 1, 0) \text{ με νόρμα } \|\sigma'(t)\| = \sqrt{\frac{1}{t^2} + 1}.$$

Η συνάρτηση είναι βαθμωτή (παίρνει τιμές στον $\mathbb{R}$) οπότε το αντίστοιχο επικαμπύλιο είναι Α′ είδους,

$$\int_\sigma f ds = \int_1^e f(\sigma(t))\|\sigma'(t)\| dt = \int_1^e \frac{1}{t^3}\sqrt{\frac{1}{t^2} + 1} dt = \int_1^e \frac{\sqrt{t^2 + 1}}{t^4} dt$$

$$= \int_1^e (-\frac{1}{3}t^{-3})'\sqrt{t^2+1}dt = -\frac{1}{3}t^{-3}\sqrt{t^2+1}\Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{t^2\sqrt{t^2+1}}dt$$

Όπου και υπολογίζουμε το τελευταίο ολοκλήρωμα με την αντικατάσταση $t = \tan\theta$. □

Πρόβλημα 3. ***Tromba -7.1 Ασκ 11-*** *Έστω καμπύλη σ με $\sigma(t) = (t^2, t, 3)$ για $t \in [0, 1]$.*

α. *Βρείτε το μήκος $l(\sigma)$ της καμπύλης σ.*

β. *Βρείτε τη μέση συντεταγμένη y κατά μήκος της καμπύλης σ*

Λύση

α. Η ταχύτητα της καμπύλης είναι $\sigma'(t) = (2t, 1, 0)$ με νόρμα $\|\sigma'(t)\| = \sqrt{4t^2+1}$. Τέλος το μήκος της καμπύλης δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$l(\sigma) = \int_0^1 \|\sigma'(t)\|dt = \int_0^1 \sqrt{4t^2+1}dt = \cdots = \frac{1}{4}(2\sqrt{5} + \log(2+\sqrt{5}))$$

β. Για να βρούμε τη μέση συντεταγμένη των y κατά μήκος της καμπύλης σ θα υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της συνάρτηση $f(x, y, z) = y$ κατά μήκος της καμπύλης σ και θα διαιρέσουμε με το μήκος της καμπύλης. Για το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της f έχουμε:

$$\int_\sigma f ds = \int_0^1 t\sqrt{4t^2+1}dt = \frac{1}{12}(4t^2+1)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1)$$

Διαιρώντας το προηγούμενο αποτέλεσμα με το μήκος της καμπύλης $l(\sigma)$ καταλήγουμε,

$$\frac{\frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1)}{\frac{1}{4}(2\sqrt{5}+\log(2+\sqrt{5}))} = \frac{5\sqrt{5}-1}{6\sqrt{5}+3\log(2+\sqrt{5})}$$

□

Πρόβλημα 4. ***Tromba -7.1 Ασκ 12-*** *Αν η $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι κατά τμήματα συνεχώς παραγωγίσιμη, ορίζουμε το μήκος του γραφήματος της f στο $[a, b]$ σαν το μήκος της καμπύλης $t \to (t, f(t))$ για $t \in [a, b]$.*

α. *Να δείξετε ότι το μήκος του γραφήματος της f στο $[a, b]$ είναι*

$$\int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$$

β. *Να υπολογίσετε το μήκος του γραφήματος της $y = \log x$ στο $[1, 2]$*

Λύση

α. Αν ορίσουμε ως καμπύλη γ την $\gamma(t) = (t, f(t))$ για $t \in [a, b]$ τότε η ταχύτητα της θα είναι $\gamma'(t) = (1, f'(t))$ και το μήκος της

$$l(\gamma) = \int_\gamma 1 = \int_a^b \|\gamma'(t)\|dt = \int_a^b \sqrt{1+[f'(t)]^2}dt.$$

Που χρειάστηκε η "κατά τμήματα συνεχώς παραγωγίσιμη" ιδιότητα της f;

β. Για το δεύτερο αρκεί να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\int_1^2 \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}dx$$

Ας δούμε το αόριστο ολοκλήρωμα πως γίνεται.

$$\int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}dx = \int \frac{1}{x}\sqrt{1+x^2}dx$$

Αλλαγή μεταβλητών $x = \tan z$ και παίρνουμε,

$$\int \frac{1}{\tan z}\sqrt{\tan^2 z+1}(1+\tan^2 z)dz = \int \frac{1}{\sin z\cos^2 z}dz = \int \frac{\sin z}{\cos^2 z}dz + \int \frac{1}{\sin z}dz$$

$$= \frac{1}{\cos z} + \int \frac{1}{\sin(2z/2)}dz = \frac{1}{\cos z} + \int \frac{1}{2\sin z/2\cos z/2}dz$$

$$= \frac{1}{\cos z} + \frac{1}{2}\int \frac{\sin^2 z/2+\cos^2 z/2}{\sin z/2\cos z/2}dz$$

$$= \frac{1}{\cos z} + \frac{1}{2}\int \frac{\sin^2 z/2}{\sin z/2\cos z/2}dz + \int \frac{\sin^2 z/2}{\sin z/2\cos z/2}dz$$

$$= \frac{1}{\cos z} - \frac{1}{4}\log(cos(z/2)) + \frac{1}{4}\log(sin(z/2)).$$

Παρόμοια εργάζεται κάποιος για να λύσει και το αντίστοιχο ορισμένο ολοκλήρωμα.

□

Πρόβλημα 5. ***Tromba -7.1 Ασκ 13-*** *Να βρείτε τη μάζα ενός σύρματος πού έχει το σχήμα της τομής της σφαίρας $x^2+y^2+z^2=1$ με επίπεδο $x+y+z=0$ αν η πυκνότητα μάζας στο (x,y,z) δίνεται από την $\rho(x,y,z)=x^2$ gr ανά μονάδα μήκους σύρματος.*

Λύση

Ξεκινάμε υπολογίζοντας την καμπύλη - τομή της σφαίρας και του επιπέδου. Για το σκοπό αυτό λύνουμε το σύστημα των δύο εξισώσεων. Λύνοντας ως προς z την εξίσωση του επιπέδου παίρνουμε:

$$z = -x-y.$$

Αντικαθιστούμε στη εξίσωση της σφαίρας και προκύπτει ότι:

$$x^2+y^2+x^2+y^2+2xy = 1 \Rightarrow x^2+y^2+xy = \frac{1}{2}.$$

Το επίπεδο διέρχεται από την αρχή των αξόνων και η σφαίρα έχει ως κέντρο την αρχή των αξόνων οπότε η τομή τους πρέπει να είναι ένας μέγιστος κύκλος της σφαίρας -όπως φάινεται στο γράφημα. Αυτό μας οδηγεί στο να "σκεφτούμε" τις πολικές συντεταγμένες. Έχουμε λοιπόν ότι $x = r\cos\theta$ και $y = r\sin\theta$ οπότε αντικαθιστώντας στην τελευταία παίρνουμε ότι:

$$r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta + r^2\cos\theta\sin\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow r^2 + r^2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow r^2 + \frac{1}{2}r^2 2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$r^2(2+\sin 2\theta) = 1 \Rightarrow r = \frac{1}{\sqrt{2+\sin 2\theta}} \quad (\text{χωρίς περιορισμούς;})$$

Έχοντας βρει μια σχέση ανάμεσα στα r, θ προχωράμε στην περιγραφή μέσω πολικών συντεταγμένων της καμπύλης, αφού πρώτα συνοψίσουμε:

$$x = r\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2+\sin 2\theta}}\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2+\sin 2\theta}}\sin\theta$$

$$z = -x-y = -\frac{1}{\sqrt{2+\sin 2\theta}}\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{2+\sin 2\theta}}\sin\theta$$

Έτσι η καμπύλη - τομή της σφαίρας και του επιπέδου θα δίνεται από της εξής παραμέτριση:

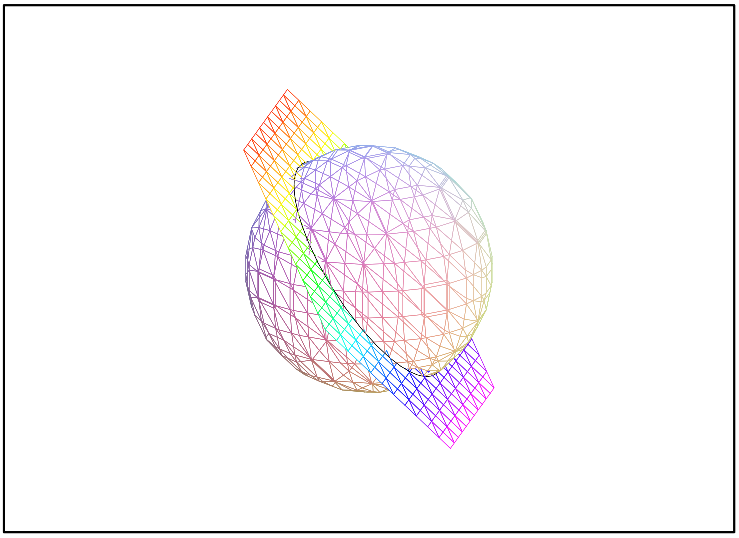
$$\gamma(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2+\sin 2\theta}}(\cos\theta, \sin\theta, -\cos\theta-\sin\theta), \qquad \text{για } \theta \in [0, 2\pi],$$

η οποία έχει ταχύτητα:

$$\gamma'(\theta) = \frac{\cos 2\theta}{\sqrt{2+\sin 2\theta}}(\cos\theta, \sin\theta, -\cos\theta-\sin\theta) + \frac{1}{\sqrt{2+\sin 2\theta}}(-\sin\theta, \cos\theta, \sin\theta-\cos\theta)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2+\sin 2\theta}}\Big(\cos 2\theta(\cos\theta, \sin\theta, -\cos\theta-\sin\theta) + (-\sin\theta, \cos\theta, \sin\theta-\cos\theta)\Big) = \cdots$$

Στη γραφική παράσταση που ακολουθεί παριστάνεται η σφαίρα, το επίπεδο και η καμπύλη τομής τους.



Επιστρέφουμε τώρα στο ζητούμενο της άσκησης. Μας δίνεται η τοπική πυκνότητα $\rho(x, y, z)$ του σύρματος που έχει το σχήμα της καμπύλης και μας ζητείται η συνολική μάζα του, οπότε πρέπει να υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της ρ κατά μήκος της γ. Η συνάρτηση ρ είναι βαθμωτή οπότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα είναι Α΄ είδους.

$$\int_\gamma \rho = \cdots$$

□

Πρόβλημα 6. ***Tromba -7.1 Ασκ 14-*** *Υπολογίστε το $\int_\sigma f ds$ όπου $f(x,y,z) = z$ και $\sigma(t) = (t\cos t, t\sin t, t)$ για $0 \leq t \leq t_0$.*

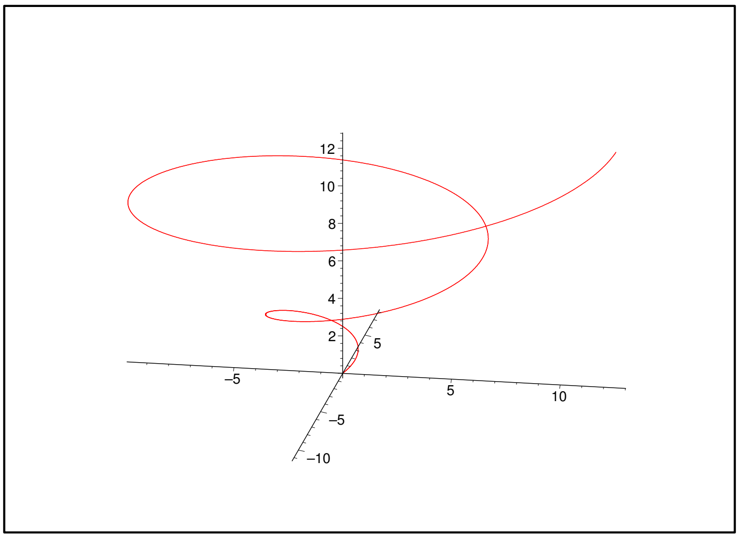
Λύση

Το ολοκλήρωμα είναι Α′ είδους διότι η συνάρτηση f είναι βαθμωτή και έχουμε για την καμπύλη ότι:

$$\sigma'(t) = (\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t, 1)$$

$$\|\sigma'(t)\| = \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1} = \sqrt{t^2+2}$$

Ακολουθεί το γράφημα της καμπύλης για $t \in [0, 4\pi]$,



Οπότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της συνάρτησης είναι:

$$\int_\sigma f ds = \int_0^{t_0} f(\sigma(t))\|\sigma'(t)\|dt = \int_0^{t_0} t\sqrt{t^2+2}dt = \frac{1}{3}(t^2+2)^{3/2}\Big|_0^{t_0} = \frac{1}{3}\Big((t_0^2+2)^{3/2} - 2\Big)$$

□

Πρόβλημα 7. ***Tromba -7.2 Ασκ 2(δ)-*** *Να υπολογίσετε το $\int_\sigma x^2dx - xydy + dz$ όπου σ είναι η παραβολή $z = x^2, y = 0$ από το $(-1,0,1)$ έως το $(1,0,1)$.*

Λύση

Η καμπύλη που περιγράφεται στην άσκηση είναι η

$$\sigma(t) = (t, 0, t^2),\ \ t \in [-1,1] \text{ με ταχύτητα } \sigma'(t) = (1, 0, 2t)$$

Η συνάρτηση είναι διανυσματική και γράφεται ως εξής:

$$F(x,y,z) = (x^2, -xy, 1)$$

Το ολοκλήρωμα της F είναι Β′ είδους και υπολογίζεται ως εξής:

$$\int_\sigma x^2dx - xydy + dz = \int_\sigma F \cdot ds = \int_{-1}^1 (t^2, 0, 1)\cdot(1, 0, 2t)dt = \int_{-1}^1 t^2 + 2tdt = \frac{2}{3}$$

□

Πρόβλημα 8. ***Tromba -7.2 Ασκ 5-*** *Υποθέτουμε ότι η καμπύλη σ έχει μήκος l και ότι $\|F\| \leq M$. Να αποδείξετε ότι:*

$$|\int_{\sigma} F| \leq Ml$$

Λύση
Εφόσον η συνάρτηση F είναι διανυσματική το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα θα είναι Β′ είδους. Οπότε:

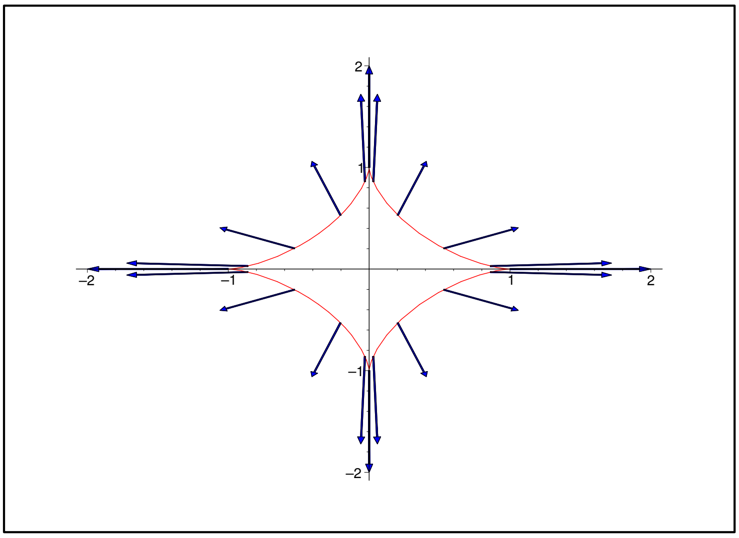
$$|\int_{\sigma} F| = |\int_{a}^{b} F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) dt| \leq \int_{a}^{b} |F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)| dt$$

$$\leq^{1} \int_{a}^{b} \|F(\sigma(t))\| \, \|\sigma'(t)\| dt \leq M \int_{a}^{b} \|\sigma'(t)\| dt \leq Ml.$$

□

Πρόβλημα 9. ***Tromba -7.2 Ασκ 9-*** *Να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $F(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ κατά μήκος του υποκυκλοειδούς $t \to (\cos^3 t, \sin^3 t)$ με $t \in [0, 2\pi]$.*

Λύση
Ξεκινάμε με το μικτό γράφημα της καμπύλης και του διανυσματικού πεδίου πάνω σε αυτήν.



Η υπο-ολοκλήρωση συνάρτηση είναι διανυσματική οπότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα είναι Β′ είδους. Η καμπύλη δίνεται παραμετρικά από την $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$ με $t \in [0, 2\pi]$ και έχει ταχύτητα που δίνεται από την:

$$\gamma'(t) = (-3\cos^2 t \sin t, 3\sin^2 t \cos t) \text{ για } t \in [0, 2\pi].$$

Έτσι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα υπολογίζεται ως:

$$\int_{\gamma} F = \int_{0}^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_{0}^{2\pi} (\cos^3 t, \sin^3 t) \cdot (-3\cos^2 t \sin t, 3\sin^2 t \cos t) dt$$

$$= \int_{0}^{2\pi} -3\cos^5 t \sin t + 3\cos t \sin^5 t = 3\int_{0}^{2\pi} \sin t \cos t (\sin^4 t - \cos^4 t) dt$$

[1] CS: $|a \cdot b| \leq \|a\| \|b\|$

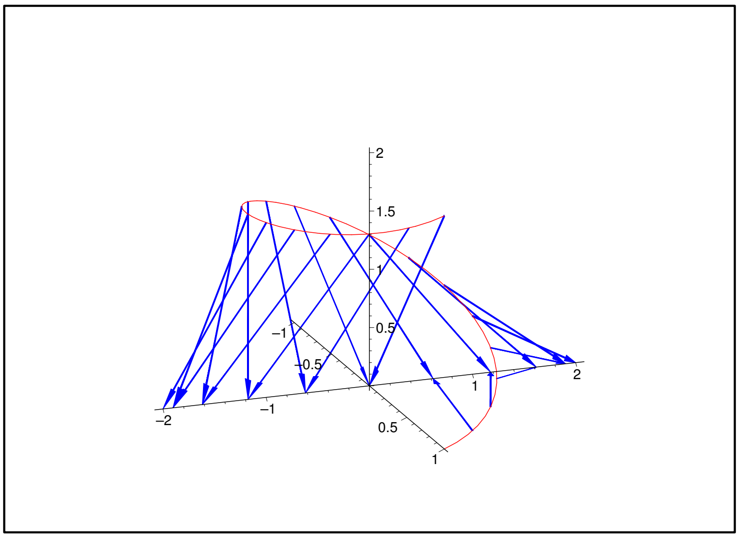
$$= 3\int_0^{2\pi} \sin t\cos t(\sin^2 t - \cos^2 t)dt = -\frac{3}{2}\int_0^{2\pi} \sin 2t \cos 2t dt = -\frac{3}{4}\int_0^{2\pi} \sin 4t dt$$
$$= \frac{3}{16}\cos 4t\Big|_0^{2\pi} = 0$$

Να επαναλάβετε την άσκηση όταν φτάσετε στην επόμενη παράγραφο (Συντηρητικά Πεδία). □

Πρόβλημα 10. ***-Σελ 61 Ασκ 1(β)-*** *Να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\gamma F$ όταν το κύριο μέρος του F είναι $f(x_1, x_2, x_3) = (-x_1, x_2, -x_3)$ και $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, \frac{t}{\pi})$, $t \in [0, 2\pi]$.*

Λύση

Στην επόμενη γραφική παράσταση φαίνεται η καμπύλη γ και η δράση της διανυσματικής συνάρτησης της εκφώνησης. Παρατηρήστε ότι η καμπύλη είναι μια έλικα.



Εφόσον η συνάρτηση είναι διανυσματική συμπεραίνουμε ότι πρόκειται για Β′ είδους επικαμπύλιο ολοκλήρωμα, οπότε:

$$\int_\gamma F ds = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)dt = \int_0^{2\pi} (-\cos t, \sin t, -\frac{t}{\pi})\cdot(-\sin t, \cos t, \frac{1}{\pi})dt$$
$$= \int_0^{2\pi} \sin 2t - \frac{t}{\pi^2}dt = -2$$

□

1.2 Συντηρητικά Πεδία

Ένα διανυσματικό πεδίο $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ λέγεται συντηρητικό όταν υπάρχει μία C^1 διαφορίσιμη συνάρτηση $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$$F = -\mathrm{grad}V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial V}{\partial x_n}\right).$$

Θεώρημα 1.1. *Υποθέτουμε ότι η $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ είναι κλάσεως C^1 και ότι $\sigma : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ είναι μία κατά τμήματα C^1 καμπύλη. Τότε*

$$\int_\sigma gradf\cdot ds = f(\sigma(b)) - f(\sigma(a))$$

Το προηγούμενο θεώρημα μεταφράζεται ως εξής: Αν ολοκληρώνουμε ένα συντηρητικό πεδίο πάνω σε μία ομαλή καμπύλη τότε το ολοκλήρωμα εξαρτάται μόνο από την τιμή της συνάρτησης στα ακραία σημεία της καμπύλης. Αν επιπλέον η καμπύλη είναι κλειστή τότε άμεσα προκύπτει ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα θα είναι μηδέν.

Πρόβλημα 11. ***Tromba -7.2 Ασκ 12-*** *Έστω* $F = (z^3 + 2xy)\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + 3xz^2\mathbf{k}$. *Δείξτε ότι το ολοκλήρωμα του* F *κατά μήκος του τετραγώνου με κορυφές τα* $(\pm 1, \pm 1.5)$ *είναι μηδέν.*

Λύση

Παρατηρούμε ότι $F(x,y,z) = \mathrm{grad} f(x,y,z)$ με $f(x,y,z) = xz^3 + x^2y$ και επιπλέον ότι $f \in C^1$.

Αν ορίσουμε επιπλέον ως κλειστή καμπύλη $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ με $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ την περίμετρο του τετραγώνου που περιγράφεται από την εκφώνηση με αρχικό σημείο μία κορυφή και τελικό σημείο την ίδια κορυφή, παρατηρούμε ότι η καμπύλη θα είναι κατά τμήματα C^1 (ομαλή) και ότι $\gamma(a) = \gamma(b)$ (γιατί;). Βέβαια επειδή θα πρέπει να υπολογιστούν οι τιμές της συνάρτησης κατά μήκος της καμπύλης πρέπει να επεκτείνουμε τον ορισμό της καμπύλης γ σε τρείς διαστάσεις προσθέτοντας ως τρίτη συντεταγμένη το μηδέν δηλαδή $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), 0)$.

Έτσι το ζητούμενο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα θα μπορεί να υπολογιστεί με βάση το θεώρημα για τα συντηρητικά πεδία και θα είναι:

$$\int_\gamma F \cdot ds = \int_\gamma \mathrm{grad} f \cdot ds = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = 0$$

$\square$

Πρόβλημα 12. ***Tromba -7.2 Ασκ 15-*** *Υπολογίστε το ολοκλήρωμα* $\int_C 2xyzdx + x^2zdy + x^2ydz$, *όπου* C *είναι μία προσανατολισμένη απλή καμπύλη που ενώνει το* $(1,1,1)$ *με το* $(1,2,4)$.

Λύση

Αρχικά παρατηρούμε ότι το Δ.Π $F(x,y,z) = (2xyz, x^2z, x^2y)$ είναι συντηρητικό διότι για την C^1 βαθμωτή f με

$$f(x,y,z) = x^2yz \text{ έπεται ότι } \mathrm{grad} f = (2xyz, x^2z, x^2y) = F.$$

Έτσι με βάση το θεώρημα για τα συντηρητικά πεδία θα έχουμε ότι το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $F = \mathrm{grad} f$ θα εξαρτάται μόνο από τις τιμές της f στα ακραία σημεία κάθε απλής ομαλής καμπύλης.

Για την τυχαία λοιπόν ομαλή προσανατολισμένη απλή καμπύλη $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ που ξεκινάει από το $\gamma(a) = (1,1,1)$ και καταλήγει στο $\gamma(b) = (1,2,4)$ θα έχουμε ότι:

$$\int_C F = \int_\gamma \mathrm{grad} f = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = f(1,2,4) - f(1,1,1) = 7$$

$\square$

Πρόβλημα 13. ***-Σελ 61 Ασκ 2-*** *Είναι το διανυσματικό πεδίο* $F(x) = (x, f(x))$ *με* $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ *του* $\mathbb{R}^3$ *με* $f(x_1,x_2,x_3) = (2x_1x_2, x_1^2 + 1, 6x_3^2)$ *συντηρητικό;*

Λύση

Για να είναι το F συντηρητικό, πρέπει να υπάρχει C^1 συνάρτηση $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = -2x_1x_2, \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} = -x_1^2 + 1, \quad \frac{\partial V}{\partial x_3} = -6x_3^2.$$

Ολοκληρώνοντας την πρώτη ως προς x_1 παίρνουμε ότι η ζητούμενη συνάρτηση είναι η:

$$V(x_1,x_2,x_3) = -x_1^2x_2 + c(x_2,x_3),$$

όπου $c(x_2, x_3)$ είναι C^1 συνάρτηση. Παραγωγίζουμε τώρα την V ως προς x_2 και παίρνουμε:

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = -x_1^2 + \frac{\partial c}{\partial x_2}(x_1, x_2).$$

Διασταυρώνουμε τώρα με τη δεύτερη σχέση και παίρνουμε ότι $\frac{\partial c}{\partial x_2}(x_2, x_3) = 1$ οπότε $c(x_2, x_3) = x_2 + d(x_3)$ με $d(x_3)$ να είναι C^1 συνάρτηση. Φτάνουμε λοιπόν στο σημείο να έχουμε ότι:

$$V(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 x_2 + x_2 + d(x_3).$$

Παραγωγίζουμε τώρα την V ως προς x_3 και παίρνουμε ότι

$$\frac{\partial V}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) = d'(x_3),$$

διασταυρώνουμε αυτή τη φορά με την τρίτη σχέση παίρνουμε ότι $d'(x_3) = 6x_3^2$ οπότε προκύπτει ότι $d(x_3) = 2x_3^3 + e$ με $e \in \mathbb{R}$ και κλείνουμε παρατηρώντας ότι η ζητούμενη συνάρτηση V υπάρχει και είναι ίση με:

$$V(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 x_2 + x_2 + 2x_3^3 + e, e \in \mathbb{R}.$$

Τελικά συμπεραίνουμε ότι το ΔΠ F είναι συντηρητικό. □

Πρόβλημα 14. ***-Σελ 61 Ασκ 3-*** *Να δείξετε ότι το διανυσματικό πεδίο $F(x) = (x, f(x))$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ του $\mathbb{R}^2$ με $f(x_1, x_2) = (x_1 x_2^2, x_1^3 x_2)$ δεν είναι συντηρητικό.*

Λύση

Αν το ΔΠ F ήταν συντηρητικό θα έπρεπε να υπάρχει μία C^1 συνάρτηση $V(x_1, x_2)$ ώστε:

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = -x_1 x_2^2, \quad \frac{\partial V}{\partial x_2} = -x_1^3 x_2.$$

Ολοκληρώνοντας την πρώτη σχέση ως προς x_1 παίρνουμε ότι:

$$V(x_1, x_2) = -\frac{1}{2}x_1^2 x_2^2 + c(x_2), \text{ όπου η συνάρτηση } c \text{ είναι } C^1.$$

Παραγωγίζοντας την τελευταία σχέση ως προς x_2 προκύπτει ότι:

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = -x_1^2 x_2 + c'(x_2),$$

και διασταυρώνοντας με την δεύτερη σχέση έχουμε άτοπο(γιατί;). □

Πρόβλημα 15. ***-Σελ 61 Ασκ 4-*** *Έστω F ένα ΣΠ σε ένα τόπο $W \subset \mathbb{R}^n$ με δυναμικό V. Να δείξετε ότι κάθε άλλη συνάρτηση δυναμικού για το F είναι της μορφής $V + c$, $c \in \mathbb{R}$.*

Λύση

Έστω V_1 μια δεύτερη συνάρτηση δυναμικού για το F. Τότε έχουμε:

$$F = -\text{grad}V, \quad F = -\text{grad}V_1,$$

οπότε

$$\text{grad}V = \text{grad}V_1 \Rightarrow \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}, \quad \cdots, \quad \frac{\partial V}{\partial x_n}\right) = \left(\frac{\partial V_1}{\partial x_1}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial V_1}{\partial x_n}\right).$$

Παρατηρούμε ότι προκύπτουν n σχέσεις μεταξύ των πρώτων μερικών παραγώγων των V, V_1. Ολοκληρώνοντας την πρώτη ως προς x_1 παίρνουμε ότι:

$$V = V_1 + c(x_2, \ldots, x_n), \quad c \in C^1(\mathbb{R}^{n-1}).$$

Παραγωγίζοντας την τελευταία ως προς x_2 και διασταυρώνοντας με την δεύτερη (από τις n) παίρνουμε ότι $\frac{\partial c}{\partial x_2} = 0$ δηλαδή η συνάρτηση c δεν εξαρτάται από την μεταβλητή x_2, οπότε:

$$V = V_1 + c(x_3, \dots, x_n).$$

Παραγωγίζουμε τώρα ως προς x_3 και διασταυρώνουμε με την τρίτη σχέση (από τις n) και δείχνουμε ότι η συνάρτηση c δεν εξαρτάται από τη μεταβλητή x_3, οπότε:

$$V = V_1 + c(x_4, \dots, x_n).$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι η συνάρτηση c δεν εξαρτάται από καμία μεταβλητή, έτσι

$$V = V_1 + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

□

2 Επιφάνειες

2.1 Παραμετρικοποίηση επιφάνειας

Πρόβλημα 16. ***Tromba -7.3 Ασκ 5-*** *Βρείτε μία έκφραση για το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα της επιφάνειας:*

$$x = \cos\theta \sin\phi, \ y = \sin\theta\sin\phi, \ z = \cos\phi, \quad \phi \in [0, \pi], \theta \in [0, 2\pi].$$

Λύση

Η επιφάνεια είναι η μοναδιαία σφαίρα. Τα εφαπτόμενα διανύσματα δίνονται από τις σχέσεις:

$$T_\theta = (-\sin\theta\sin\phi, \cos\theta\sin\phi, 0),$$

$$T_\phi = (\cos\theta\cos\phi, \sin\theta\cos\phi, -\sin\phi),$$

των οποίων το εξωτερικό γινόμενο δίνει ένα εξωτερικό κάθετο διάνυσμα της επιφάνειας.

$$T_\theta \times T_\phi = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & 0 \\ \cos\theta\cos\phi & \sin\theta\cos\phi & -\sin\phi \end{vmatrix}$$

$$= (-\cos\theta\sin^2\phi, -\sin\theta\sin^2\phi, -\sin^2\theta\sin\phi\cos\phi - \cos^2\theta\sin\phi\cos\phi)$$
$$= (-\cos\theta\sin^2\phi, -\sin\theta\sin^2\phi, -\sin\phi\cos\phi)$$

Η νόρμα του διανύσματος αυτού είναι ίση με:

$$||T_\theta \times T_\phi|| = \sqrt{\cos^2\theta\sin^4\phi + \sin^2\theta\sin^4\phi + \sin^2\phi\cos^2\phi} = \sqrt{\sin^4\phi + \sin^2\phi\cos^2\phi} = |\sin\phi|$$

Τέλος το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα δίνεται από την:

$$N(S) = \frac{T_\theta \times T_\phi}{||T_\theta \times T_\phi||} = \frac{1}{|\sin\phi|}(-\cos\theta\sin^2\phi, -\sin\theta\sin^2\phi, -\sin\phi\cos\phi)$$

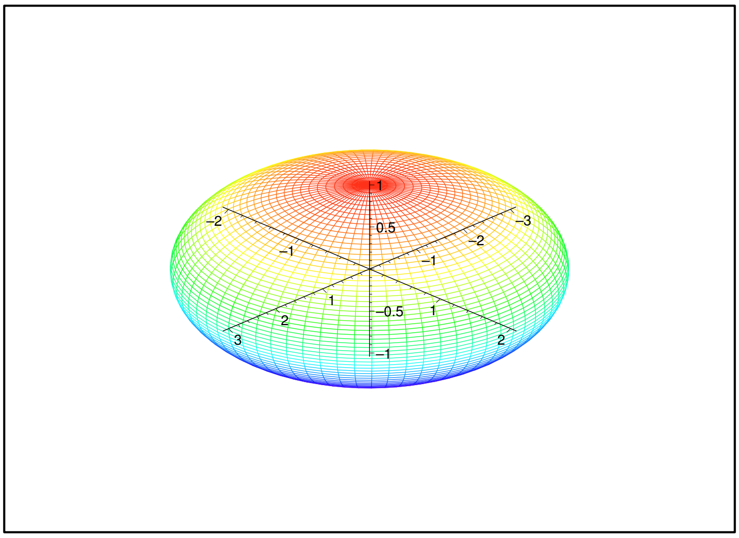
$$= (-\cos\theta\sin\phi, -\sin\theta\sin\phi, -\cos\phi)(\text{γιατι;})$$

□

Πρόβλημα 17. ***Tromba -7.3 Ασκ 6-*** *Επαναλάβετε την ασκ 5 για την επιφάνεια:*

$$x = 3\cos\theta\sin\phi,\ y = 2\sin\theta\sin\phi,\ z = \cos\phi, \quad \theta \in [0, 2\pi], \phi \in [0, \pi]$$

Λύση
Η επιφάνεια είναι ένα ελλειψοειδές όπως παρακάτω φαίνεται.



Τα εφαπτόμενα διανύσματα δίνονται από τις σχέσεις:

$$T_\theta = (-3\sin\theta\sin\phi, 2\cos\theta\sin\phi, 0),$$

$$T_\phi = (3\cos\theta\cos\phi, 2\sin\theta\cos\phi, -\sin\phi),$$

των οποίων το εξωτερικό γινόμενο δίνει ένα εξωτερικό κάθετο διάνυσμα της επιφάνειας.

$$T_\theta \times T_\phi = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3\sin\theta\sin\phi & 2\cos\theta\sin\phi & 0 \\ 3\cos\theta\cos\phi & 2\sin\theta\cos\phi & -\sin\phi \end{vmatrix}$$

$$= (-2\cos\theta\sin^2\phi, -3\sin\theta\sin^2\phi, -6\sin^2\theta\sin\phi\cos\phi - 6\cos^2\theta\sin\phi\cos\phi)$$

$$= (-2\cos\theta\sin^2\phi, -3\sin\theta\sin^2\phi, -6\sin\phi\cos\phi)$$

Η νόρμα του διανύσματος αυτού είναι ίση με:

$$||T_\theta \times T_\phi|| = \sqrt{4\cos^2\theta\sin^4\phi + 9\sin^2\theta\sin^4\phi + 36\sin^2\phi\cos^2\phi} = \cdots$$

Τέλος το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα δίνεται από την:

$$N(S) = \frac{T_\theta \times T_\phi}{||T_\theta \times T_\phi||} = \cdots$$

□

Πρόβλημα 18. ***Tromba -7.3 Ασκ 9-*** *Βρείτε ένα τύπο για το εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας $x = h(y, z)$. Όμοια για την επιφάνεια $y = k(x, z)$.*

Λύση

Μια παραμετρικοποίηση της πρώτης επιφάνειας δίνεται από την συνάρτηση $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$ όπου $D \subset \mathbb{R}^2$ το πεδίο ορισμού της h και έχει τύπο

$$\Phi(y,z) = (h(y,z), y, z).$$

Τα εφαπτόμενα διανύσματα στο σημείο $(h(y_0,z_0), y_0, z_0)$ δίνονται από τις σχέσεις:

$$T_y = \big(\frac{\partial h}{\partial y}(y_0,z_0), 1, 0\big),$$

$$T_z = \big(\frac{\partial h}{\partial z}(y_0,z_0), 0, 1\big).$$

Το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο $T_y \times T_z$ δίνεται από

$$T_y \times T_z = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial h}{\partial y}(y_0,z_0) & 1 & 0 \\ \frac{\partial h}{\partial z}(y_0,z_0) & 0 & 1 \end{vmatrix} = \big(1, -\frac{\partial h}{\partial y}(y_0,z_0), -\frac{\partial h}{\partial z}(y_0,z_0)\big).$$

Τέλος το εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας στο σημείο $(h(y_0,z_0), y_0, z_0)$ δίνεται από:

$$(x - h(y_0,z_0), y - y_0, z - z_0) \cdot (T_y \times T_z) = 0 \Rightarrow$$

$$(x - h(y_0,z_0), y - y_0, z - z_0) \cdot \big(1, -\frac{\partial h}{\partial y}(y_0,z_0), -\frac{\partial h}{\partial z}(y_0,z_0)\big) = 0 \Rightarrow$$

$$x - h(y_0,z_0) - \frac{\partial h}{\partial y}(y_0,z_0)(y - y_0) - \frac{\partial h}{\partial z}(y_0,z_0)(z - z_0) = 0.$$

Όμοια υπολογίζει κανείς το εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας $y = k(x,z)$ στη μορφή

$$-\frac{\partial k}{\partial x}(x_0,z_0)(x - x_0) + y - k(x_0,z_0) - \frac{\partial k}{\partial z}(x_0,z_0)(z - z_0) = 0.$$

□

Πρόβλημα 19. ***Tromba -7.3 Ασκ 11-*** *Θεωρούμε μια επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ παραμετρικοποιημένη μέσω της*

$$\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \theta), \quad \text{με } (r,\theta) \in [0,1] \times [0,4\pi].$$

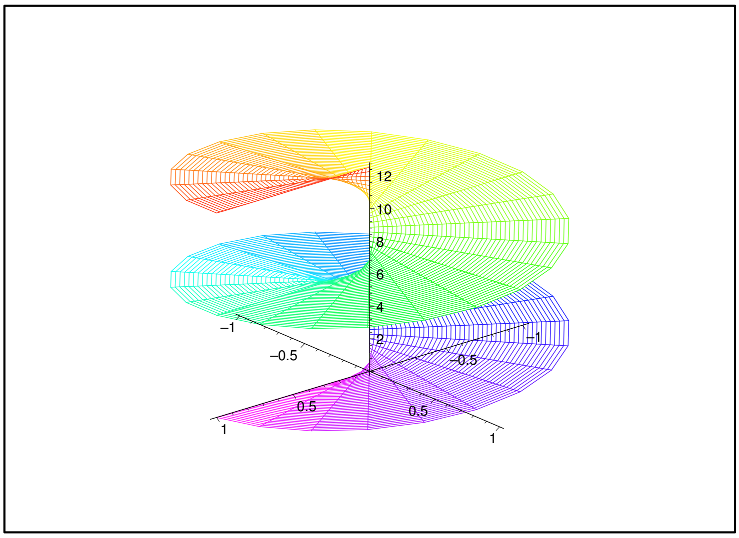
α. Σχεδιάστε και περιγράψτε την επιφάνεια

β. Βρείτε μία έκφραση για το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα της επιφάνειας

γ. Βρείτε μία εξίσωση για το εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας στο σημείο (x_0, y_0, z_0)

Λύση

α. Το γράφημα της εκφώνηση είναι μία γεμάτη έλικα όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Το ότι είναι έλικα φαίνεται από το γεγονός ότι η τρίτη συντεταγμένη εξαρτάται από την παράμετρο θ που παράγει τον κύκλο στις δύο πρώτες συντρεταγμένες $(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Το ότι είναι γεμάτη η έλικα φαίνεται από την παράμετρο $r \in [0,1]$ η οποία παράγει ολόκληρο τον δίσκο - και όχι μόνο τον κύκλο - στις δύο πρώτες συντεταγμένες $(r\cos\theta, r\sin\theta)$. Τέλος, για το γεγονός ότι η έλικα κάνει 2 περιστροφές ευθύνεται το εύρος της γωνίας $\theta \in [0,4\pi]$.



β. Τα εφαπτόμενα διανύσματα δίνονται:

$$T_r = (\cos\theta, \sin\theta, 0),$$
$$T_\theta = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 1),$$

των οποίων το εξωτερικό γινόμενο ισούται με:

$$T_r \times T_\theta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 1 \end{vmatrix} = (\sin\theta, -\cos\theta, r\cos^2\theta + r\sin^2\theta)$$
$$= (\sin\theta, -\cos\theta, r).$$

Η νόρμα του διανύσματος είναι:

$$||T_r \times T_\theta|| = \sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta + r^2} = \sqrt{r^2+1}.$$

Οπότε ένα μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα είναι:

$$N(S) = \frac{T_r \times T_\theta}{||T_r \times T_\theta||} = \frac{1}{\sqrt{r^2+1}}(\sin\theta, -\cos\theta, r)$$

γ. Το σημείο (x_0, y_0, z_0) περιγράφεται μέσω της συνάρτησης Φ από το σημείο (r_0, θ_0) ως εξής:

$$\Phi(r_0, \theta_0) = (x_0, y_0, z_0).$$

Το εξωτερικό κάθετο διάνυσμα στο σημείο αυτό είναι το:

$$N(S)|_{(x_0,y_0,z_0)} = \frac{1}{\sqrt{r_0^2+1}}(\sin\theta_0, -\cos\theta_0, r_0),$$

και τέλος το αντίστοιχο εφαπτόμενο επίπεδο δίνεται από τη σχέση:

$$(x-x_0, y-y_0, z-z_0) \cdot N(S)|_{(x_0,y_0,z_0)} = 0.$$

□

2.2 Εμβαδόν Επιφάνειας

Ισχύει ότι η νόρμα του εξωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων ισούται με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που αυτά ορίζουν. Έτσι η νόρμα του εξωτερικό γινόμενο των εφαπτόμενων διανυσμάτων

$$T_x = \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial x}, \; T_y = \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial y},$$

όπου Φ είναι μία παραμέτριση της επιφάνειας S είναι ίσο με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που αυτά ορίζουν. Αν ολοκληρώσουμε τις νόρμες όλων των εξωτερικών γινομένων των εφαπτόμενων διανυσμάτων μιας επιφάνειας S θα βρούμε το εμβαδόν της επιφάνειας, δηλαδή:

$$\int_S \|T_x \times T_y\| dxdy = E(S).$$

Παρατηρήστε την αναλογία με το μήκος μίας καμπύλης γ, $l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$.

Πρόβλημα 20. ***Tromba -7.4 Ασκ 1-*** *Βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας της μοναδιαίας σφαίρας S που παριστάνεται παραμετρικά από την $\Phi : D \to S \subset \mathbb{R}^3$, όπου D είναι το ορθογώνιο $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le \phi \le \pi$ και η Φ δίνεται από τις εξισώσεις*

$$x = \cos\theta \sin\phi, \;\; y = \sin\theta\sin\phi, \;\; z = \cos\phi$$

Λύση

Ξεκινάμε υπολογίζοντας τα εφαπτόμενα διανύσματα T_θ, T_ϕ:

$$T_\theta = (-\sin\theta\sin\phi, \cos\theta\sin\phi, 0),$$

$$T_\phi = (\cos\theta\cos\phi, \sin\theta\cos\phi, -\sin\phi).$$

Το εξωτερικό γινόμενο $T_\theta \times T_\phi$:

$$T_\theta \times T_\phi = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & 0 \\ \cos\theta\cos\phi & \sin\theta\cos\phi & -\sin\phi \end{vmatrix} = (-\cos\theta\sin^2\phi, -\sin\theta\sin^2\phi, -\sin\phi\cos\phi)$$

$$||T_\theta \times T_\phi|| = \sqrt{\cos^2\theta\sin^4\phi + \sin^2\theta\sin^4\phi + \sin^2\phi\cos^2\phi} = \sqrt{\sin^4\phi + \sin^2\phi\cos^2\phi} = |\sin\phi|$$

Περνάμε τέλος στο εμβαδόν της επιφάνειας $E(S)$:

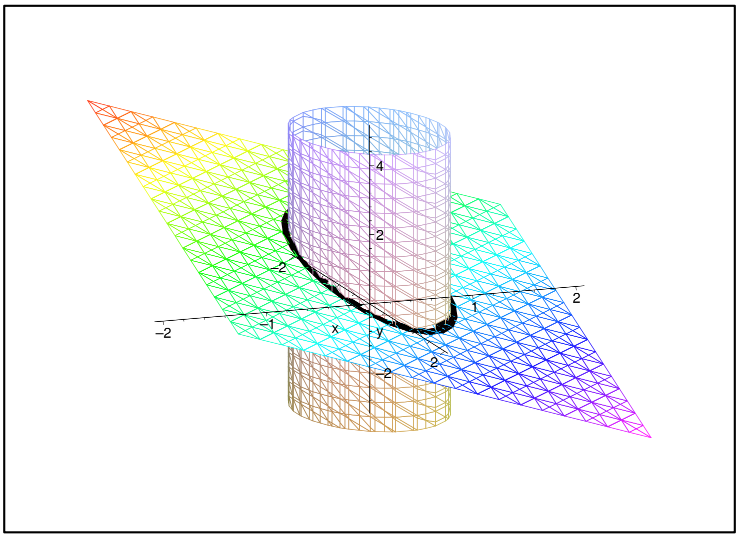
$$E(S) = \int_\Phi 1 = \int_D ||T_\theta \times T_\phi|| d\theta d\phi = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} |\sin\phi| d\theta d\phi = -2\pi\cos\phi\Big|_0^\pi = 4\pi$$

□

Πρόβλημα 21. ***Tromba -7.4 Ασκ 13-*** *Βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας που ορίζεται από τις $x + y + z = 1$ και $x^2 + 2y^2 \le 1$.*

Λύση

Ακολουθεί το γράφημα του γεμάτου ελλειπτικού κυλίνδρου (γιατί;) $x^2+2y^2 \le 1$ και του επιπέδου $x+y+z = 1$. Στο γράφημα φαίνεται ότι η τομή τους είναι μία γεμάτη έλλειψη πάνω στο επίπεδο $x + y + z = 1$. Εφόσον το επίπεδο είναι κεκλιμένο (γιατί;) θα πρέπει στη περιγραφή που θα ακολουθήσει να λάβουμε υπόψη και την τρίτη μεταβλητή z.



Περνάμε στην παραμετρικοποίηση (περιγραφή) της επιφάνειας ξεκινώντας από τη γεμάτη έλλειψη:

$$\frac{x^2}{2} + y^2 \leq \frac{1}{2}.$$

Μία κατάλληλη παραμετρικοποίηση της γεμάτης έλλειψης είναι η

$$x = \sqrt{2}r\cos\theta,\ y = r\sin\theta, \quad r \in [0, \frac{1}{2}], \theta \in [0, 2\pi].$$

Για τον γεμάτο ελλειπτικό κύλινδρο (χωρίς το επίπεδο & απείρου μήκους) μία παραμέτριση θα ήταν η εξής:

$$\Phi(r,\theta) = (\sqrt{2}r\cos\theta, r\sin\theta, z), \quad r \in [0, \frac{1}{2}], \theta \in [0, 2\pi], z \in \mathbb{R}.$$

Όμως εφόσον μας ενδιαφέρει η τομή του κυλίνδρου με συγκεκριμένο επίπεδο πρέπει να εντοπίσουμε και την τρίτη συντεταγμένη z κατάλληλα και για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε την εξίσωση του επιπέδου:

$$z = 1 - x - y \Longrightarrow_{\substack{x=\sqrt{2}r\cos\theta \\ y=r\sin\theta}} z = 1 - \sqrt{2}r\cos\theta - r\sin\theta.$$

Συνοψίζουμε η επιφάνεια δίνεται παραμετρικά από τη συνάρτηση $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$ όπου $D = [0, \frac{1}{2}] \times [0, 2\pi]$ με τύπο:

$$\Phi(r,\theta) = (\sqrt{2}r\cos\theta, r\sin\theta, 1 - \sqrt{2}r\cos\theta - r\sin\theta).$$

Τα εφαπτόμενα διανύσματα δίνονται από τις:

$$T_r = (\sqrt{2}\cos\theta, \sin\theta, -\sqrt{2}\cos\theta - \sin\theta),$$

$$T_\theta = (-\sqrt{2}r\sin\theta, r\cos\theta, \sqrt{2}r\sin\theta - r\cos\theta),$$

που παράγουν το κάθετο στην επιφάνεια διάνυσμα:

$$T_r \times T_\theta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \sqrt{2}\cos\theta & \sin\theta & -\sqrt{2}\cos\theta - \sin\theta \\ -\sqrt{2}r\sin\theta & r\cos\theta & \sqrt{2}r\sin\theta - r\cos\theta \end{vmatrix} = \sqrt{2}r(1,1,1),$$

η νόρμα του οποίου είναι:

$$||T_r \times T_\theta|| = \sqrt{6}r.$$

Τέλος περνώντας στο εμβαδόν της επιφάνειας έχουμε:

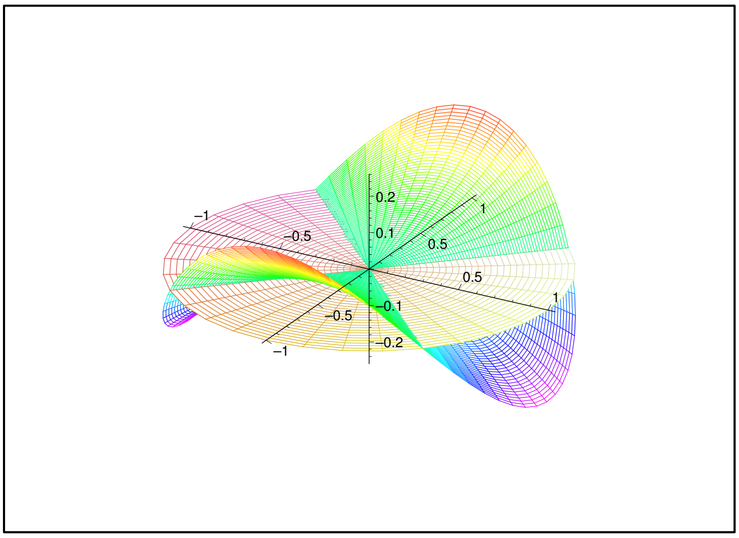
$$E(S) = \int_\Phi 1 = \int_D ||T_r \times T_\theta|| dr d\theta = \int_0^{1/2} \int_0^{2\pi} \sqrt{6} r d\theta dr = \frac{\sqrt{6}\pi}{4}.$$

□

Πρόβλημα 22. ***-Σελ 82 Ασκ 1(α)-*** *Να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας με παραμέτριση* $\Phi : W \to \mathbb{R}^3$ *όταν* $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ *και* $\Phi(x, y) = (x - y, x + y, xy)$.

Λύση

Στο γράφημα που ακολουθεί φαίνεται φαίνεται το πεδίο ορισμού της Φ στο επίπεδο καθώς και το γράφημα της επιφάνειας.



Χρειαζόμαστε τις παραγώγους:

$$T_x = \frac{\partial}{\partial x}(x - y, x + y, xy) = (1, 1, y),$$

$$T_y = \frac{\partial}{\partial y}(x - y, x + y, xy) = (-1, 1, x),$$

και τώρα το εξωτερικό τους γινόμενο:

$$T_x \times T_y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & y \\ -1 & 1 & x \end{vmatrix} = (x - y, -x - y, 2),$$

το οποίο έχει νόρμα:

$$||T_x \times T_y|| = \sqrt{(x - y)^2 + (-x - y)^2 + 4} = \sqrt{2x^2 + 2y^2 + 4}.$$

Το εμβαδόν της επιφάνειας λοιπόν είναι ίσο με:

$$E(S) = \int_{\Phi} 1 = \int_{W} ||T_x \times T_y||dx \quad = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{2x^2+2y^2+4}dydx$$

Αλλάζουμε τις συντεταγμένες σε πολικές ($x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $J = r$, $r \in [0,1]$, $\theta \in [0, 2\pi]$) και παίρνουμε ότι:

$$E(S) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r\sqrt{2r^2+4}d\theta dr = \sqrt{2}\pi \int_0^1 2r\sqrt{r^2+2}dr$$

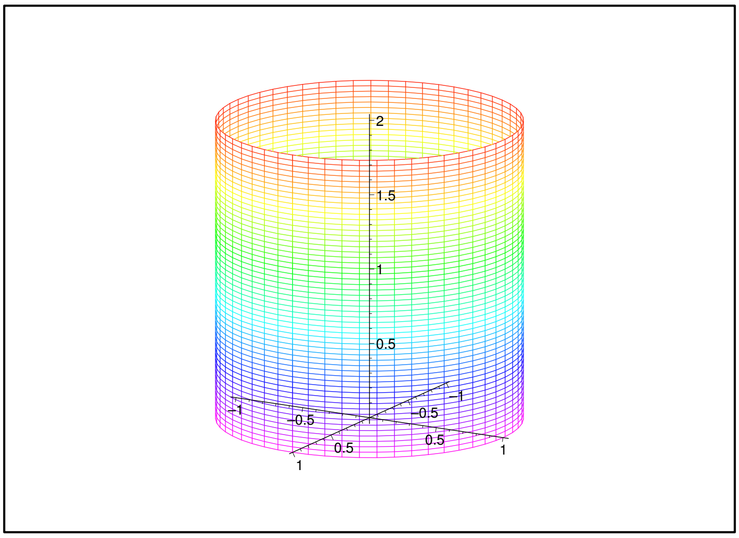
$$= \sqrt{2}\pi \frac{2}{3}(r^2+2)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}(3\sqrt{3}-2\sqrt{2}).$$

□

Πρόβλημα 23. ***-Σελ 82 Ασκ 1(β)-*** *Να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας με παραμέτριση* $\Phi : W \to \mathbb{R}^2$ *όταν* $W = [0, 2\pi] \times [0, a]$ *,*$a > 0$ *και* $\Phi(\theta, t) = (\cos\theta, \sin\theta, t)$.

Λύση

Το γράφημα της επιφάνειας είναι ένας κύλιδρος με βάση τον μοναδιαίο κύκλο στο xy-επίπεδο και ύψος a. Το γράφημα είναι κύλινδρος και όχι έλικα διότι η τρίτη συντεταγμένη παράγεται από την μεταβλητή t η οποία *δεν* έχει συμμετοχή στη κατασκευή του κύκλου που γίνεται στις δύο πρώτες συντεταγμένες $(\cos\theta, \sin\theta)$.



Όπως και στην προηγούμενη μας ενδιαφέρει η νόρμα του εξωτερικού γινομένου των εφαπτόμενων διανυσμάτων:

$$T_\theta = \frac{\partial}{\partial\theta}(\cos\theta, \sin\theta, t) = (-\sin\theta, \cos\theta, 0)$$

$$T_t = \frac{\partial}{\partial t}(\cos\theta, \sin\theta, t) = (0, 0, 1),$$

με εξωτερικό γινόμενο το διάνυσμα:

$$T_\theta \times T_t = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\cos\theta, \sin\theta, 0).$$

Να παρατηρήσουμε σε αυτό το σημείο ότι το κάθετο διάνυσμα της επιφάνειας που μόλις υπολογίσαμε είναι οριζόντιο και εξωτερικό του κυλίνδρου (γιατί;). Τέλος η νόρμα του εξωτερικού γινομένου είναι:

$$||T_\theta \times T_t|| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$$

Το ζητούμενο εμβαδόν είναι ίσο με:

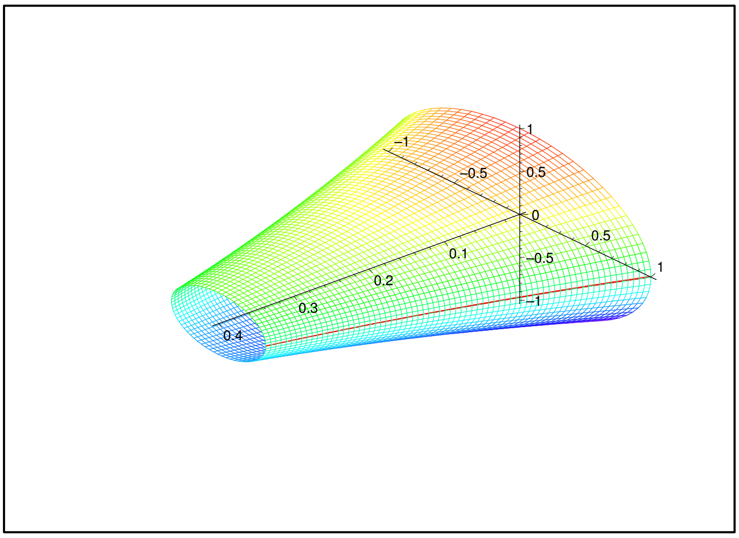
$$E(S) = \int_S 1 = \int_W ||T_\theta \times T_t|| d\theta dt = \int_0^{2\pi}\int_0^a 1 d\theta dt = 2a\pi.$$

□

Πρόβλημα 24. ***-Σελ 82 Ασκ 3-*** *Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της επιφάνειας εκ περιστροφής (ως προς τον άξονα x) που προκύπτει από την καμπύλη $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$, $t \in [0,1]$, $y(t) > 0$ είναι $2\pi\int_0^1 y(t)||\gamma'(t)||dt$.*

Λύση

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η καμπύλη στο xy-επίπεδο και η επιφάνεια εκ περιστροφής -ως προς τον άξονα των x- που προκύπτει από την καμπύλη αυτή.



Για να βρει κάποιος την παραμετρικοποίηση πρέπει να σταθεροποιήσει ένα σημείο της καμπύλης, να το περιστρέψει γύρο από τον άξονα x και να παρατηρήσει ότι παράγεται ένας κύκλος σε επίπεδο παράλληλο του yz-επιπέδου. Η ακτίνα του κύκλου είναι $y(t) > 0$.

Η επιφάνεια εκ περιστροφής - ως προς τον άξονα $x'x$ - που παράγεται από την καμπύλη $\gamma(t) = \big(x(t), y(t)\big)$, $t \in [0,1]$, δίνεται παραμετρικά από:

$$\Phi(\theta, t) = \big(x(t), y(t)\cos\theta, y(t)\sin\theta\big), \quad \theta \in [0, 2\pi],\ t \in [0,1].$$

Συνεχίζουμε τώρα με την λύση της άσκησης υπολογίζοντας τα εφαπτόμενα διανύσματα:

$$T_\theta = \frac{\partial}{\partial\theta}\big(x(t), y(t)\cos\theta, y(t)\sin\theta\big) = (0, -y(t)\sin\theta, y(t)\cos\theta),$$

$$T_t = \frac{\partial}{\partial t}\big(x(t), y(t)\cos\theta, y(t)\sin\theta\big) = (x'(t), y'(t)\cos\theta, y'(t)\sin\theta),$$

περνάμε στο εξωτερικό τους γινόμενο:

$$T_\theta \times T_t = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -y(t)\sin\theta & y(t)\cos\theta \\ x'(t) & y'(t)\cos\theta & y'(t)\sin\theta \end{vmatrix} = \big(-y(t)y'(t), x'(t)y(t)\cos\theta, x'(t)y(t)\sin\theta\big),$$

που έχει νόρμα:

$$||T_\theta \times T_t|| = \sqrt{y^2(t)\Big((y'(t))^2 + (x'(t))^2\Big)} = y(t)\sqrt{(y'(t))^2 + (x'(t))^2}$$

$$= y(t)||\gamma'(t)||.$$

Τέλος το ζητούμενο εμβαδόν της επιφάνειας δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$E(S) = \int_S 1 = \int_0^1 \int_0^{2\pi} ||T_\theta \times T_t|| d\theta dt = 2\pi \int_0^1 y(t)||\gamma'(t)||.$$

□

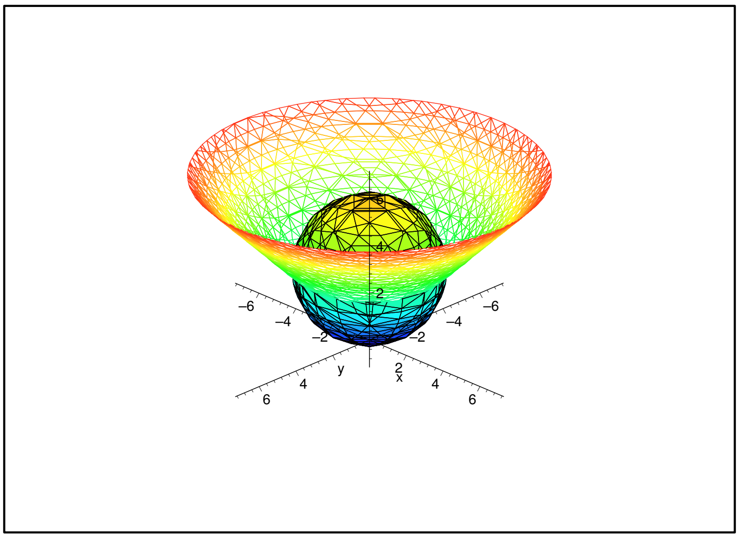
Πρόβλημα 25. ***Tromba -7.5 Ασκ 17-***

α. Να βρείτε το εμβαδόν του τμήματος του κώνου $x^2 + y^2 = z^2$ με $z \geq 0$, το οποίο βρίσκεται μέσα στη σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$, $R > 0$.

β. Να βρείτε το εμβαδόν του τμήματος της σφάιρας που βρίσκεται μέσα στο εσωτερικό του κώνου.

Λύση

Ακολουθεί το γράφημα του κώνου και της σφαίρας για ακτίνα $R = 3$. Βέβαια η άσκηση πρέπει να λυθεί για την τυχαία ακτίνα R.



α. Αρχικά παρατηρούμε ότι η σφαίρα γράφεται στην πιο φυσιολογική μορφή:

$$x^2 + y^2 + (z - R)^2 = r^2.$$

Προχωράμε λύνοντας το σύστημα Κώνου-Σφαίρας για να βρούμε την τομή τους.

$$\left.\begin{array}{c} x^2+y^2=z^2 \\ x^2+y^2+(z-R)^2=R^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x^2+y^2=z^2 \\ z^2+z^2-2Rz+r^2=R^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c} z=R \\ x^2+y^2=R^2 \end{array}$$

Δηλαδή η τομή τους είναι ο κύκλος $x^2+y^2=R^2$ σε ύψος $z=R$. Τώρα το κομμάτι του κώνου που βρίσκεται μέσα στη σφαίρα είναι ουσιαστικά το κομμάτι του κώνου που βρίσκεται κάτω από το επίπεδο $z=R$, δηλαδή τα σημεία:

$$(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ \text{τέτοια ώστε } x^2+y^2=z^2, \quad 0\le z\le R.$$

Μία παραμέτριση του κώνου αυτού είναι η:

$$\Phi_1(r,\theta)=(r\cos\theta, r\sin\theta, r),\ r\in[0,R],\ \theta\in[0,2\pi](\text{γιατι;})$$

Εύκολα βρίσκει κανείς τα εφαπτόμενα διανύσματα:

$$T_r=(\cos\theta,\sin\theta,1),\ T_\theta=(-r\sin\theta, r\cos\theta,0),$$

που έχουν εξωτερικό γινόμενο:

$$T_r\times T_\theta=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos\theta & \sin\theta & 1 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix}=(-r\cos\theta,-r\sin\theta,r),$$

που τέλος έχει νόρμα:

$$\|T_r\times T_\theta\|=\sqrt{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta+r^2}=r\sqrt{2}.$$

Τελικά το εμβαδόν του κώνου δίνεται από το ολοκλήρωμα:

$$E(S)=\int_0^{2\pi}\int_0^R\|T_r\times T_\theta\|=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^R r\,dr\,d\theta=\sqrt{2}\pi R^2$$

β. Για το εμβαδόν του μέρους της σφαίρας που βρίσκεται έξω από τον κώνο αρκεί να κάνουμε την ίδια διαδικασία. Το μέρος της σφαίρας που μας ενδιαφέρει βρίσκεται πάνω από το επίπεδο $z=R$, δηλαδή τα σημεία:

$$(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ \text{τέτοια ώστε } x^2+y^2+(z-R)^2=R^2, \quad z\ge R.$$

Μία παραμέτριση του μέρους αυτού της σφαίρας είναι:

$$\Phi_2(\theta,\phi)=(\cos\theta\sin\phi,\sin\theta\sin\phi,\cos\phi), \quad \theta\in[0,2\pi],\ \phi\in[0,\frac{\pi}{2}](\text{γιατι;})$$

Όπως έχουμε ξαναδεί τα εφαπτόμενα διανύσματα σε αυτή την περίπτωση είναι:

$$T_\theta=(-\sin\theta\sin\phi,\cos\theta\sin\phi,0),$$

$$T_\phi=(\cos\theta\cos\phi,\sin\theta\cos\phi,-\sin\phi),$$

με εξωτερικό κάθετο:

$$T_\theta\times T_\phi=(-\cos\theta\sin^2\phi,-\sin\theta\sin^2\phi,-\sin\phi\cos\phi),$$

με νόρμα:

$$\|T_\theta\times T_\phi\|=|\sin\phi|.$$

Τέλος το εμβαδόν του μέρους της σφαίρας που μας ενδιαφέρει είναι ίσο με:

$$E(S)=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin\phi|\,d\phi\,d\theta=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\phi\,d\phi=2\pi.$$

□

2.3 Επιφανειακό Ολοκλήρωμα

Θεωρούμε μία προσανατολισμένη επιφάνεια (S, N) και μία παραμέτριση $\Phi : W \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ της επιφάνειας που έχει μερικές παραγώγους

$$T_{x_1}(\Phi(x)) = \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_1}, \quad T_{x_2}(\Phi(x)) = \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x_2}.$$

Τα διανύσματα αυτά είναι εφαπτόμενα στην επιφάνεια και ορίζουν προσανατολισμό N (μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα) ως εξής:

$$N = \frac{T_{x_1} \times T_{x_2}}{\|T_{x_1} \times T_{x_2}\|}.$$

- Α Έίδος (βαθμωτή συνάρτηση).
  Αν $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ το επιφανειακό ολοκλήρωμα δίνεται από τη σχέση:

  $$\int_S f dS = \int\int_W f(\Phi(x))\|T_{x_1} \times T_{x_2}\| dx.$$

  Η φυσιολογικότερη ερμηνεία του επιφανειακού ολοκληρώματος βαθμωτής συνάρτηση δίνεται αν υποθέσουμε ότι η συνάρτηση f περιγράφει την τοπική πυκνότητα της συνάρτησης οπότε και το ολοκλήρωμα θα είναι η συνολική μάζα.
  Μια ειδική περίπτωση μας δίνει το επιφανειακό ολοκλήρωμα της $f \equiv 1$, συγκεκριμένα παίρνουμε το εμβαδόν της επιφάνειας:

  $$E(S) = \int_S 1 dS = \int_W \|T_{x_1} \times T_{x_2}\| dx.$$

  *Παρατήρηση: Θυμηθείτε στο σημείο αυτό ότι η νόρμα του εξωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων ισούται με το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που τα διανύσματα αυτά ορίζουν. Συμπληρώστε με τη Θεμελιώδη ιδέα του Απ. Λογισμού, ότι δηλαδή το ολοκλήρωμα είναι το άπειρο άθροισμα απειροστά μικρών ποσοτήτων και συμπεράνετε ότι η παραπάνω σχέση για το εμβαδόν επιφάνειας είναι απόλυτα φυσιολογική.

- Β′ Είδος (διανυσματική συνάρτηση).
  Αν $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ το επιφανειακό ολοκλήρωμα δίνεται από τη σχέση:

  $$\int_\Phi F \cdot dS = \int\int_W F(\Phi(x_1, x_2)) \cdot (T_{x_1} \times T_{x_2}) dx.$$

  Η συνήθης ερμηνεία του επιφανειακού ολοκληρώμος διανυσματικής συνάρτησης δίνεται αν υποθέσουμε ότι η συνάρτηση F μετράει την ταχύτητα ενός ρευστού οπότε το επιφανειακό ολοκλήρωμα μας δίνει τον ρυθμό ροής του ρευστού από την επιφάνεια. Στο σημείο αυτό πρέπει να επισημάνουμε ότι η ζητούμενη ροή μπορεί να είναι προς κάποια συγκεκριμένη κατεύθυνση (μέσα ή έξω, πάνω ή κάτω) οπότε πρέπει να είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε αν το κάθετο προς την επιφάνεια διάνυσμα που έχουμε βρει $T_{x_1} \times T_{x_2}$ είναι αντίστοιχα προς τα μέσα ή προς τα έξω.

  Αν στο σημείο αυτό πολλαπλασιάσουμε και διαιρέσουμε με την νόρμα του εξωτερικού γινομένου θα πάρουμε το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο n και το ολοκλήρωμα θα γίνει:

  $$\int_\Phi F \cdot dS = \int\int_W \Big(F(\Phi(x_1, x_2)) \cdot n\Big)\|T_{x_1} \times T_{x_2}\| = \int_S F \cdot n$$

  Που σημαίνει ότι αν γνωρίζουμε τον προσανατολισμό της επιφάνειας S μέσω της παραμέτρισης Φ τότε το επιφανειακό ολοκλήρωμα Β′ είδους της F μετατρέπεται σε επιφανειακό ολοκλήρωμα Α′ είδους της $F \cdot n$. Βέβαια για να γίνει αυτό πρέπει η επιφάνεια να είναι παραμετρικοποιημένη από μία παραμέτριση η οποία να διατηρεί τον προσανατολισμό.

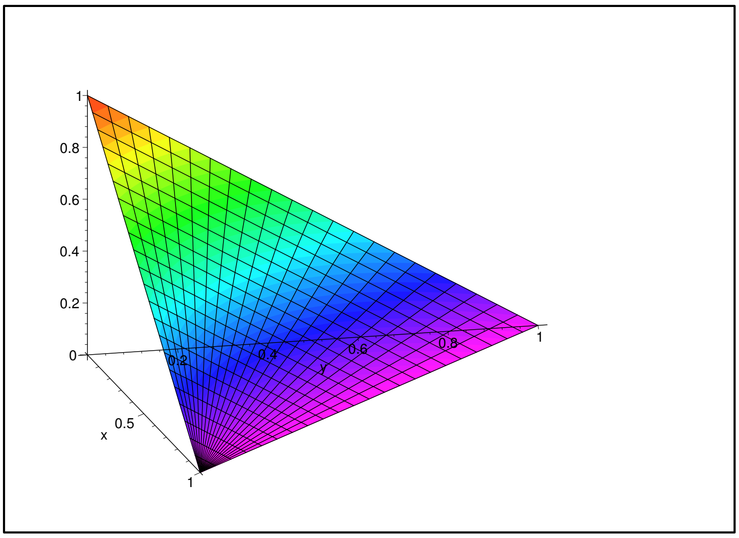
*Παρατήρηση: Παρατηρήστε την ομοιότητα των επιφανειακών ολοκληρωμάτων Α′ και Β′ είδους με τα αντίστοιχα επικαμπύλια.

Πρόβλημα 26. ***-Σελ 82 Ασκ 2(α)-*** *Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_S f$ όταν $f : S \to \mathbb{R}$ και $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1,\ x, y, z \geq 0\}$ και $f(x, y, z) = x$.*

Λύση
Θα ξεκινήσουμε παραμετρικοποιώντας την επιφάνεια. Έχουμε ότι $z = 1 - x - y$ και $z \geq 0$ οπότε πρέπει $1 - x - y \geq 0$ δηλαδή $y \leq 1 - x$, όμως $y \geq 0$ οπότε πρέπει $1 - x \geq 0$ δηλαδή $x \leq 1$. Συνοψίζοντας οι περιορισμοί γίνονται:

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 - x, \quad z = 1 - x - y.$$

Έτσι μία παραμέτριση της επιφάνειας δίνεται από την $\Phi : W \to \mathbb{R}^3$ με $W = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\big\}$ και $\Phi(x, y) = (x, y, 1 - x - y)$. Ακολουθεί το γράφημα της επιφάνειας:



όπου φαίνεται ότι η επιφάνεια είναι το εσωτερικό του τριγώνου με κορυφές τις μονάδες των τριών αξόνων.
Έχοντας πλέον την παραμέτριση της επιφάνειας περνάμε στον υπολογισμό των παραγώγων,

$$T_x(\Phi(x, y)) = \frac{\partial}{\partial x}(x, y, 1 - x - y) = (1, 0, -1),$$

$$T_y(\Phi(x, y)) = \frac{\partial}{\partial y}(x, y, 1 - x - y) = (0, 1, -1).$$

Το εξωτερικό τους γινόμενο τώρα είναι το:

$$T_x \times T_y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1, 1, 1),$$

όπως περιμέναμε βλέποντας το γράφημα της επιφάνειας και η νόρμα του είναι:

$$||T_x \times T_y|| = \sqrt{3}.$$

Περνάμε τώρα στο επιφανειακό ολοκλήρωμα το οποίο είναι Α′ είδους και παίρνουμε ότι:

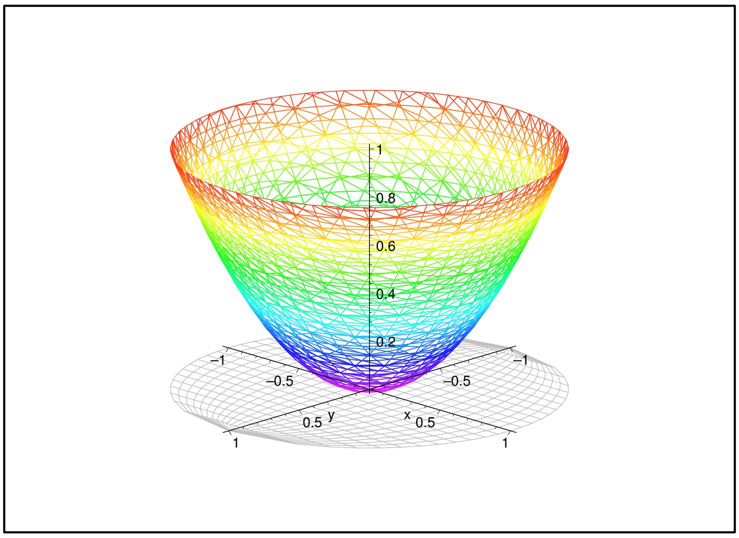
$$\int_S f = \int_W f(\Phi(x,y))||T_x \times T_y||dxdy = \int_0^1 \int_0^{1-x} x\sqrt{3}dydx$$
$$= \sqrt{3}\int_0^1 x(1-x)dx = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

□

Πρόβλημα 27. ***Tromba -7.5 Ασκ 7-*** *Υπολογίστε το $\int_S zdS$, όπου S είναι η επιφάνεια που ορίζεται από $z = x^2 + y^2$ και $x^2 + y^2 \leq 1$.*

Λύση

Στο γράφημα που ακολουθεί παριστάνεται το παραβολοειδές $z = x^2 + y^2$ καθώς και το πεδίο ορισμού $x^2 + y^2 \leq 1$ στο xy-επίπεδο.



Το ολοκλήρωμα είναι Α′ είδους.
Ξεκινάμε με μία παραμέτριση της επιφάνειας. Όπως φαίνεται από τον ορισμό της επιφάνειας πρέπει να χρησιμοποιήσουμε πολικές συντεταγμένες για τα x, y και από την $z = x^2 + y^2$ θα βρούμε και την περιγραφή του z. Έτσι:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = r^2, \quad \text{με } r \in [0,1], \theta \in [0, 2\pi]$$

Προχωράμε στα εφαπτόμενα διανύσματα τα οποία είναι:

$$T_r = (\cos\theta, \sin\theta, 2r), \quad T_\theta = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0)$$

των οποίων το εξωτερικό γινόμενο είναι:

$$T_r \times T_\theta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos\theta & \sin\theta & 2r \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = (-2r^2\cos\theta, -2r^2\sin\theta, r)$$

που έχει νόρμα:

$$\|T_r \times T_\theta\| = \sqrt{4r^4 + r^2} = r\sqrt{4r^2 + 1}.$$

Περνάμε τώρα στον υπολογισμό του ολοκληρώματος και έχουμε:

$$\int_S f dS = \int_0^1 \int_0^{2\pi} f(\Phi(r,\theta)) \|T_r \times T_\theta\| d\theta dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^3 \sqrt{4r^2+1} d\theta dr$$

$$= 2\pi \int_0^1 r^3 \sqrt{4r^2+1} dr = \frac{\pi}{6} r^2 (4r^2+1)^{3/2} \Big|_0^1 - \frac{\pi}{3} \int_0^1 r(4r^2 + 10^{3/2} dr$$

$$= \frac{5\sqrt{5}\pi}{6} - \frac{\pi}{60}(4r^2+1)^{5/2}\Big|_0^1 = \frac{5\sqrt{5}\pi}{6} - \frac{5\sqrt{5}\pi}{12} + \frac{\pi}{60} = \frac{5\sqrt{5}\pi}{12} + \frac{\pi}{60}$$

□

Πρόβλημα 28. ***Tromba -7.5 Ασκ 8-*** *Υπολογίστε τι $\int_S z^2 dS$, όπου S είναι η επιφάνεια του κύβου $C = [-1,1] \times [-1,1] \times [-1,1]$.*

Λύση

Αρχικά θα παρατηρήσουμε ότι το ζητούμενο επιφανειακό ολοκλήρωμα είναι Α′ είδους.

Περιγράφουμε κάθε έδρα ξεχωριστά, και μπορούμε εύκολα (γιατί;) να βρούμε τα εξωτερικά κάθετα διανύσματα τα οποία είναι και μοναδιαία,

$$C_1 = \{(x,y,-1) \ \in \mathbb{R}^3,\ x \in [-1,1],\ y \in [-1,1]\}, \quad n_1 = (0,0,-1),$$

$$C_6 = \{(x,y,1) \ \in \mathbb{R}^3,\ x \in [-1,1],\ y \in [-1,1]\}, \quad n_6 = (0,0,1),$$

$$C_2 = \{(x,-1,z) \ \in \mathbb{R}^3,\ x \in [-1,1],\ z \in [-1,1]\}, \quad n_2 = (0,-1,0),$$

$$C_5 = \{(x,1,z) \ \in \mathbb{R}^3,\ x \in [-1,1],\ z \in [-1,1]\}, \quad n_5 = (0,1,0),$$

$$C_3 = \{(-1,y,z) \ \in \mathbb{R}^3,\ y \in [-1,1],\ z \in [-1,1]\}, \quad n_3 = (-1,0,0),$$

$$C_4 = \{(1,y,z) \ \in \mathbb{R}^3,\ y \in [-1,1],\ z \in [-1,1]\}, \quad n_4 = (1,0,0).$$

Περνάμε τώρα στον υπολογισμό του ολοκληρώματος για κάθε έδρα ξεχωριστά,

$$\int_{C_1} z^2 dS = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (-1)^2 \|n_1\| dxdy = 4, \qquad \int_{C_6} z^2 dS = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 1^2 \|n_6\| dxdy = 4,$$

$$\int_{C_2} z^2 dS = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 z^2 \|n_2\| dxdz = \frac{4}{3}, \qquad \int_{C_5} z^2 dS = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 z^2 \|n_5\| dxdz = \frac{4}{3},$$

$$\int_{C_3} z^2 dS = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 z^2 \|n_3\| dydz = \frac{4}{3}, \qquad \int_{C_4} z^2 dS = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 z^2 \|n_4\| dydz = \frac{4}{3}.$$

Αθροίζουμε και βρίσκουμε το ολοκλήρωμα σε ολόκληρο τον κύβο C,

$$\int_C z^2 dS = 4 \cdot \frac{4}{3} + 2 \cdot 4 = \frac{40}{3}$$

□

Πρόβλημα 29. ***Tromba -7.6 Ασκ 6-*** *Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_S (\nabla \times F) \cdot dS$ όταν $F = (x^2 + y - 4, 3xy, 2xz + z^2)$ και S η επιφάνεια $x^2 + y^2 + z^2 = 16$, $z \geq 0$.*

Λύση
Αρχικά υπολογίζουμε την διανυσματική συνάρτηση:

$$G = \nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x^2 + y - 4 & 3xy & 2xz + z^2 \end{vmatrix} = (0, -2z, 3y - 1).$$

Περνάμε τώρα στην επιφάνεια και αφού παρατηρήσουμε ότι είναι το πάνω ημισφαίριο της σφαίρας με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 4 έχουμε ότι το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα της επιφάνειας είναι το:

$$n = \frac{1}{4}(x, y, z).$$

Έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε το επιφανειακό ολοκλήρωμα της διανυσματική G ως το επιφανειακό ολοκλήρωμα της βαθμωτής:

$$G \cdot n = \frac{1}{4}(0, -2z, 3y - 1) \cdot (x, y, z) = 2yz - z,$$

και έχουμε:

$$\int_S (\nabla \times F) \cdot dS = \int_S G \cdot dS = \int_S G \cdot n dS$$

Παραμετρικοποιούμε την επιφάνεια:

$$x = 4\cos\theta \sin\phi, \quad y = 4\sin\theta \sin\phi, \quad z = 4\cos\phi, \quad \theta \in [0, 2\pi], \phi \in [0, \frac{\pi}{2}],$$

όπως έχουμε ήδη δει η νόρμα του εξωτερικού γινομένου των εφαπτόμενων διανυσμάτων είναι ίση με:

$$\|T_\theta \times T_\phi\| = |\sin\phi|,$$

και τελικά το ολοκλήρωμα γίνεται:

$$\int_S G \cdot n dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (32 \sin\theta \sin\phi \cos\phi - 4\cos\phi) |\sin\phi| d\phi d\theta = \ldots$$

□

Πρόβλημα 30. ***Tromba -7.6 Ασκ 7-*** *Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_S F \cdot dS$ όταν $F = (x + 3y^5, y + 10xz, z - xy)$ και S η επιφάνεια $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$.*

Λύση
Η επιφάνεια είναι το πάνω ημισφαίριο της σφαίρας με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1. Παραμετρικοποιούμε την επιφάνεια:

$$x = \cos\theta \sin\phi, \quad y = \sin\theta \sin\phi, \quad z = \cos\phi, \quad \theta \in [0, 2\pi], \phi \in [0, \frac{\pi}{2}],$$

όπως έχουμε ήδη το εξωτερικό γινόμενο των εφαπτόμενων διανυσμάτων είναι ίσο με:

$$T_\theta \times T_\phi = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos\theta\cos\phi & \sin\theta\cos\phi & -\sin\phi \\ -\sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & 0 \end{vmatrix} = (\cos\theta \sin^2\phi, \sin\theta \sin^2\phi, \sin\phi\cos\phi)$$

Τώρα το επιφανειακό ολοκλήρωμα είναι ίσο με:

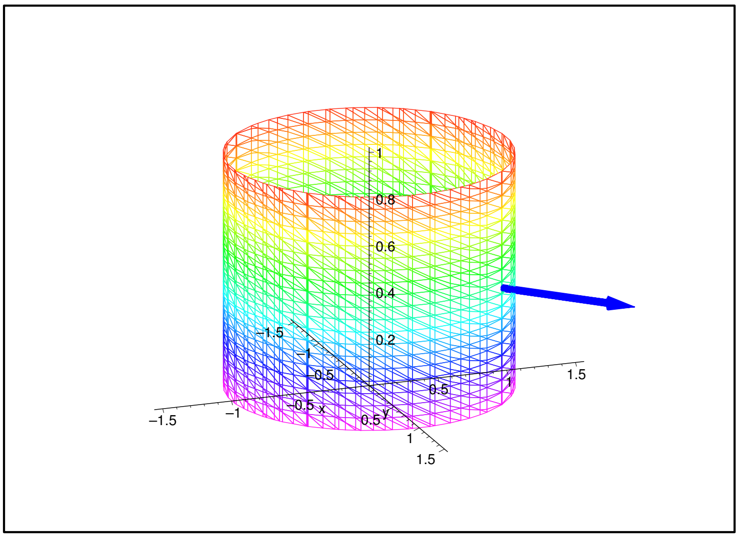
$$\int_S F \cdot dS = \int_W F(\Phi(\theta, \phi)) \cdot (T_\theta \times T_\phi) d\theta d\phi = \cdots$$

□

Πρόβλημα 31. ***Tromba -7.6 Ασκ 10-*** *Υπολογίστε το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\int\int_S F \cdot ndA$ όπου $F(x,y,z) = (1,1,z(x^2+y^2)^2)$ και S είναι η επιφάνεια του κυλίνδρου $x^2+y^2 \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$.*

Λύση

Στο γράφημα που ακολουθεί παρουσιάζουμε τον κύλινδρο της εκφώνησης μαζί με ένα εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα και το ίδιο διάνυσμα μεταφερμένο στην αρχή των αξόνων. Το διάνυσμα αυτό το φανταζόμαστε στο αντίστοιχο σημείο επαφής (στη θέση που φαίνεται στο γράφημα) αλλά δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι η σωστή θέση κάθε διανύσματος είναι στην αρχή των αξόνων και ότι οι συντεταγμένες του δεν είναι τίποτα άλλο παρά η μεταβολή των συντεταγμένων του τέλους του διανύσματος μείον τις συντεταγμένες του σημείου εφαρμογής του διανύσματος.



Είναι φανερό από το σχήμα ότι η τρίτη συντεταγμένη του εξωτερικού κάθετου διανύσματος πρέπει να είναι μηδέν καθώς επίσης ότι οι δύο πρώτες του συντεταγμένες πρέπει να είναι θετικές όταν αυτό έχει σημείο εφαρμογής στο πρώτο ογδοημόριο. Ο λόγος που γίνεται η παρατήρηση αυτή είναι διότι πρέπει να είμαστε σε θέση να αντιλαμβανόμαστε πότε ένα κάθετο σε επιφάνεια διάνυσμα είναι εσωτερικό ή εξωτερικό.

Στη συγκεκριμένη άσκηση η κατάσταση είναι εύκολη. Το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα της επιφάνειας του κυλίνδρου στο τυχαίο σημείο (x,y,z) αυτού είναι το

$$n = (x,y,0).$$

Έτσι το εσωτερικό γινόμενο του διανυσματικού πεδίου F με το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο είναι:

$$F \cdot n = (1,1,z(x^2+y^2)^2) \cdot (x,y,0) = x+y.$$

Ζητάμε λοιπόν να υπολογίσουμε το επιφανειακό ολοκλήρωμα:

$$\int\int_S F \cdot ndA = \int\int_S x+ydA.$$

Το ολοκλήρωμα είναι πλέον Α′ είδους και για τον υπολογισμό του χρειαζόμαστε μια παραμετρικοποίηση της επιφάνειας του κυλίνδρου:

$$\Phi(\theta,z) = (\cos\theta, \sin\theta, z), \ \ \theta \in [0,2\pi], z \in [0,1].$$

Όπως και στις προηγούμενες ασκήσεις χρειαζόμαστε τα εφαπτόμενα διανύσματα:

$$T_\theta = (-\sin\theta, \cos\theta, 0), \quad T_z = (0,0,1),$$

που έχουν εξωτερικό γινόμενο:

$$T_\theta \times T_z = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\cos\theta, \sin\theta, 0) \text{ (σας θυμίζει τίποτα;)},$$

το οποίο έχει νόρμα:

$$\|T_\theta \times T_z\| = 1.$$

Έτσι το επιφανειακό ολοκλήρωμα ισούται με

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 \cos\theta + \sin\theta dz d\theta = 0$$

□

3 Θεωρήματα

3.1 Απόκλιση και Στροβιλισμός

- Στον $\mathbb{R}^3$.
  Θεωρούμε ένα ΔΠ $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ συγκεκριμένα

  $$F(x,y,z) = \big(f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z)\big).$$

  Ορίζουμε,

  $$\textit{Απόκλιση: } divF = \nabla \cdot F = \Big(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\Big) \cdot \big(f_1(x,y,z), f_2(x,y,z), f_3(x,y,z)\big)$$

  $$\textit{Στροβιλισμός: } curlF = \nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$

- Στον $\mathbb{R}^2$.
  Θεωρούμε ένα ΔΠ $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ συγκεκριμένα $F(x,y) = \big(f_1(x,y), f_2(x,y)\big)$. Ορίζουμε,

  $$\textit{Απόκλιση: } divF = \nabla \cdot F = \Big(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\Big) \cdot \big(f_1(x,y), f_2(x,y)\big),$$

  $$\textit{Στροβιλισμός: } curlF = \nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & 0 \end{vmatrix}$$

  Αναπτύξτε την ορίζουσα ως προς την πρώτη της γραμμή και παρατηρήστε ότι ο στροβιλισμός είναι διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$ κάθετο στο επίπεδο xy.

Σημαντικά συμπεράσματα:

- Έστω $F : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, U αστρόμορφο ανοικτό. Αν το ΔΠ F είναι αστρόβιλο ($curlF = 0$) και C^2 τότε είναι και συντηρητικό.

- Μπορούμε να βρούμε το δυναμικό $V(x,y)$ ενός συντηρητικού πεδίου F υπολογίζοντας το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\int_\gamma F$ με γ να είναι η ευθύγραμμη καμπύλη που ενώνει τα σημεία $(0,0)$ και (x,y). Συγκεκριμένα $\gamma(t) = (tx, ty)$ με $t \in [0,1]$ και
$$V(x,y) = -\int_\gamma F = \int_{-\gamma} F.$$
*Με βάση αυτή την παρατήρηση να κάνετε ξανά τις ασκήσεις τις προηγούμενης παραγράφου που αφορούν στην εύρεση του δυναμικού ενός συντηρητικού πεδίου.
- Έστω $F : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, U αστρόμορφο ανοικτό. Αν το ΔΠ F είναι αστρόβιλο και C^2 τότε είναι συντηρητικό.
- Έστω $F : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, U αστρόμορφο ανοικτό. Αν το ΔΠ F είναι ασυμπίεστο ($divF = 0$) και C^2 τότε είναι στροβιλισμός (υπάρχει δηλαδή G έτσι ώστε $F = curlG$)
- Για ένα C^1 ΔΠ $F : U \to \mathbb{R}^3$ ισχύει ότι:
$$div(curlF) = 0$$
- Να μελετήσετε και να αποδείξετε τις ιδιότητες της απόκλισης και στροβιλισμού όπως θα τις βρείτε στην παράγραφο 3.5 του [Τρο95].

3.2 Θεώρημα Green

- Αν $D \subset \mathbb{R}^2$ ένα *χωρίο τύπου 3* και $P, Q : D \to \mathbb{R}$ και $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με $F(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big)$, τότε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα (Β′ είδους) του F κατά μήκος του συνόρου $C = \partial D$ του D (με κανονικό προσανατολισμό) είναι ίσο με:
$$\int_C \underbrace{F}_{\mathbb{R}^2} \cdot ds = \int\int_{\bar{D}} \underbrace{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}_{\mathbb{R}} dxdy.$$

Παρατήρηση 1. *Η μέχρι τώρα διαδικασία υπολογισμού του Β′ είδους επικαμπύλιου ολοκληρώματος του F κατά μήκος της καμπύλης C με παραμέτριση $\gamma : [a,b] \to C$,*
$$\int_C F \cdot ds = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt$$
εξακολουθεί να ισχύει. Το Θεώρημα Green δεν ακυρώνει την προηγούμενη διαδικασία, απλά μας δίνει μια εναλλακτική μέθοδο.

Παρατήρηση 2. *Παρατηρήστε ότι το Θεώρημα του Green συνδέει μία «δράση» στο εσωτερικό ενός επίπεδου τόπου $\bar{D}$ με τις συνέπειες στο σύνορο του τόπου ∂D. Ακριβώς η ίδια παρατήρηση θα γίνει και στα επόμενα δύο θεωρήματα Stokes και Gauss.*

Παρατήρηση 3. *Εύκολα μπορεί να δει κάποιος ότι*
$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \underbrace{\big(\nabla \times (P,Q)\big)}_{\mathbb{R}^3} \cdot k$$
και έτσι παίρνουμε τη διανυσματική μορφή του Θεωρήματος του Green
$$\int_C F \cdot ds = \int\int_{\bar{D}} \big(\nabla \times (P,Q)\big) \cdot k \; dxdy.$$
Να παρατηρήσετε τη δράση του στροβιλισμού στο δεξί μέλος και να επανέλθετε όταν μελετήσετε και την επόμενη παράγραφο (Θεώρημα Stokes).

- Μια ειδική εφαρμογή του θεωρήματος Green είναι ο υπολογισμός του εμβαδού ενός κανονικού τόπου $D \subset \mathbb{R}^2$. Αρκεί να υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του

$$F(x,y) = \frac{1}{2}(-y,x)$$

κατά μήκος της καμπύλης $C = \partial D$ (κανονική φορά). Συγκεκριμένα:

$$|D| = \int\int_{\bar{D}} dxdy = \int\int_{\bar{D}} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, dxdy = \int\int_{\bar{D}} \frac{\partial(\frac{1}{2}x)}{\partial x} - \frac{\partial(-\frac{1}{2}y)}{\partial y}\, dxdy = \int_C F \cdot ds$$

- Το Θεώρημα της Απόκλισης.
Αν πάλι $D \subset \mathbb{R}^2$ είναι τύπου 3 χωρίο και $C = \partial D$ το σύνορο του και αν n το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο C και $F(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big)$ ένα C^1 ΔΠ, τότε

$$\int_C F \cdot n\ ds = \int_D divF\ dxdy$$

Πρόβλημα 32. ***Tromba -8.1 Ασκ 3(α)-*** *Να επαληθεύσετε το θεώρημα του Green για τον δίσκο D με κέντρο το $(0,0)$ και ακτίνα R όταν $P(x,y) = xy^2$ και $Q(x,y) = -yx^2$.*

Λύση

Θεωρούμε τον δίσκο $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2\}$ του οποίου το σύνορο είναι $C = \partial D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. Από το θεώρημα του Green έχουμε:

$$I_1 = \int_C F \cdot ds = \int_D \frac{\partial(-yx^2)}{\partial x} - \frac{\partial(xy^2)}{\partial y}\ dxdy = -4\int_D xy\ dxdy = I_2$$

Θα υπολογίσουμε ξεχωριστά τα ολοκληρώματα I_1, I_2 και θα επιβεβαιώσουμε ότι είναι ίσα.

Για το I_1 χρειαζόμαστε μία παραμέτριση του C, $\gamma : [0, 2\pi] \to R^2$ με $\gamma(t) = R(\cos t, \sin t)$ οπότε $\gamma'(t) = R(-\sin t, \cos t)$. Έτσι

$$I_1 = \int_C F \cdot ds = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt = R\int_0^{2\pi} (\cos t \sin^2 t, -\sin t \cos^2 t) \cdot (-\sin t, \cos t)dt$$

$$= -\frac{R}{2}\int_0^{2\pi} \sin 2t dt = 0$$

Για το I_2 θα χρειαστεί να κάνουμε αλλαγή μεταβλητών μέσα στο ολοκλήρωμα και θα έχουμε ότι $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $J = r$(γιατί;) με $r \in [0, R]$ και $\theta \in [0, 2\pi]$.

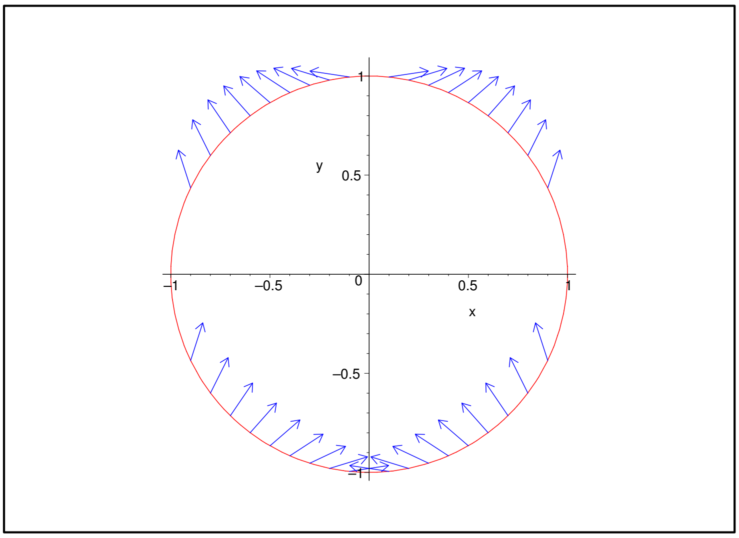
$$I_2 = -4\int_D xy\ dxdy = -4\int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \cos\theta \sin\theta \cdot r\ d\theta dr = -2\int_0^R \int_0^{2\pi} r^3 \sin 2\theta\ d\theta dr = 0$$

Οπότε επαληθεύσαμε το θεώρημα του Green για την περίπτωση αυτή. □

Πρόβλημα 33. ***-Σελ 66 Ασκ 1(β)-*** *Να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του $F = (4xy^3, 6x^2y^2)$ κατά μήκος της περιφέρειας του μοναδιαίου δίσκου.*

Λύση

Αν ορίσουμε D να είναι ο μοναδιαίος δίσκος $D = \{(x,y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ τον μοναδιαίο κύκλο τότε το ίχνος της καμπύλης γ είναι το σύνορο $C = \partial D$ του D. Το ζητούμενο ολοκλήρωμα είναι Β′ είδους και η καμπύλη C είναι ομαλή. Ακολουθεί το γράφημα της καμπύλης C μαζί με το Δ.Π F.



Για τον υπολογισμό του επικαμπύλιου ολοκληρώματος εφαρμόζουμε το Θ. Green και έχουμε ότι:

$$\int_{C=\partial D} F \cdot ds \overset{\text{Green}}{=} \int_{\bar{D}} \frac{\partial(6x^2y^2)}{\partial x} - \frac{\partial(4xy^3)}{\partial y} dxdy = \int_{\bar{D}} 12xy^2 - 12xy^2 \; dxdy = 0$$

Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να είχαμε παραμετρικοποιήσει την καμπύλη C μέσω μίας $\gamma : [a,b] \to C$ και να υπολογίζαμε απευθείας το Β′ είδους επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του F,

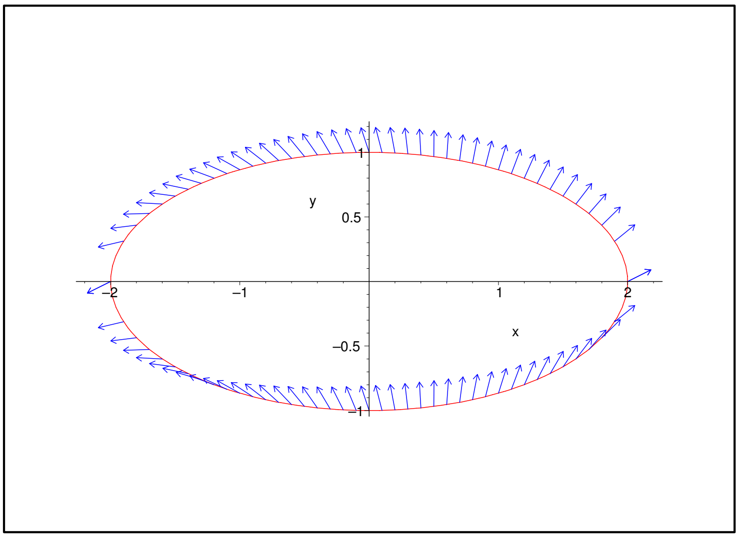
$$\int_C F \cdot ds = \int_a^b F(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

□

Πρόβλημα 34. ***-Σελ 66 Ασκ 1(γ)-*** *Να υπολογίσετε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του* $F = (2x - y, x + 3y)$ *με* C *να είναι η περιφέρεια της έλλειψης* $C : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

Λύση

Στο γράφημα που ακολουθεί φαίνεται η έλλειψη καθώς και η δράση του ΔΠ F πάνω σε αυτή.



Το χωρίο που η καμπύλη C περικλείει είναι το $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1\}$.
Μία παραμέτριση της έλλειψης C δίνεται από την συνάρτηση:

$$\gamma(t) = (2\cos t, \sin t), \ \ t \in [0, 2\pi].$$

Παρατηρήστε ότι παραμέτριση της καμπύλης είναι κανονική "counter-clockwise" (δοκιμάστε διάφορες τιμές του t και δείτε πως «κινείται» το αντίστοιχο σημείο).
Περνώντας στο επικαμπύλιο ολοκλήρωμα έχουμε με βάση το θεώρημα Green:

$$\int_C F \cdot ds = \int_{\partial D} F \cdot ds = \int_{\bar{D}} \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} dxdy = \int_{\bar{D}} \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} dxdy$$

$$= \int_{\bar{D}} 2dxdy = 2\int_{\bar{D}} dxdy = 2|D|$$

Για τον υπολογισμό του $|D|$ μπορούμε απλά να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα με αλλαγή σε κατάλληλες πολικές συντεταγμένες (αφού $\bar{D}$ είναι γεμάτη έλλειψη) ή -όπως αναφέραμε στην αρχή της παραγράφου- να χρησιμοποιήσουμε το ΔΠ $G(x,y) = \frac{1}{2}(-y, x)$ οπότε και θα πάρουμε:

$$|D| = \int_{\bar{D}} 1dxdy = \int_{\partial D} G \cdot ds,$$

το τελευταίο είναι επικαμπύλιο ολοκλήρωμα για την καμπύλη C με παραμέτριση $\gamma(t)$ οπότε:

$$\int_{\partial D} G \cdot ds = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(-\sin t, 2\cos t) \cdot (-2\sin t, \cos t)dt = \int_0^{2\pi} 1dt = 2\pi$$

Άρα το αρχικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα είναι ίσο με:

$$\int_C F \cdot ds = 4\pi.$$

□

Πρόβλημα 35. ***-Σελ 67 Ασκ 3-*** *Έστω $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ δύο C^1 διαφορίσιμες συναρτήσεις και F το Δ.Π στο $\mathbb{R}^2$ με $F = (-g, f)$.*

1. *Αν $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ είναι μία μη-σταθερή περιοδική λύση της Δ.Ε*

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1, x_2) \\ g(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

   να δειχθεί ότι $\int_\phi F = 0$.

2. *Αν επιπλέον ισχύει ότι $\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial g}{\partial x_2} > 0$ στο $\mathbb{R}^2$. Να αποδειχθεί ότι η παραπάνω Δ.Ε δεν έχει μη-σταθερή περιοδική λύση.*

(Σημείωση: Θεωρούμε γνωστό ότι κάθε C^1 διαφορίσιμη απλή κλειστή καμπύλη στο $\mathbb{R}^2$ είναι το σύνορο ενός κανονικού τόπου)

Λύση

Έχουμε αρχικά ότι $F(x,y) = \big(-g(x,y), f(x,y)\big)$ και $\phi(t) = \big(x(t), y(t)\big)$.

- Το ίχνος της ϕ στον $\mathbb{R}^2$ είναι καμπύλη.

- Η ϕ είναι περιοδική και έστω $T > 0$ η περίοδος της, οπότε $\phi(x+T) = \phi(x)$ για κάθε x, δηλαδή το ίχνος της ϕ είναι κλειστή καμπύλη.
- Η ϕ είναι λύση του συστήματος, οπότε (λίγο διαισθητικά) το ίχνος της είναι C^1 απλή καμπύλη.

Συνοψίζοντας τις παρατηρήσεις αυτές προκύπτει ότι το ίχνος της ϕ είναι μία C^1 απλή κλειστή καμπύλη οπότε ορίζει ένα κανονικό τόπο $D \subset \mathbb{R}^2$. Περνάμε τώρα στα ζητούμενα της άσκησης.

1. Ξεκινάμε με το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του Δ.Π F,
$$\int_\phi F = \int_0^T F(\phi(t)) \cdot \phi'(t)dt = \int_0^T \big(-g(\phi_1,\phi_2), f(\phi_1,\phi_2)\big) \cdot (\phi_1', \phi_2')dt$$
$$\overset{\text{σύστημα}}{=} \int_0^T \big(-\phi_2', \phi_1'\big) \cdot (\phi_1', \phi_2') = 0$$

2. Αν $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} > 0$ και ϕ μη-σταθερή περιοδική λύση τότε χρησιμοποιώντας το θεώρημα Green έχουμε,
$$0 = \int_\phi F \overset{\text{Green}}{=} \int_D \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial g}{\partial x_2} dx_1 dx_2 > 0 \qquad \text{άτοπο}$$

*Παρατήρηση: Να θυμάστε ότι η τελευταία ανίσωση του δεύτερου ερωτήματος είναι γενίκευση μίας πολύ ενδιαφέρουσας άσκησης Ανάλυσης όπου είναι γνωστό ότι η συνάρτηση είναι *γνήσια θετική* και *συνεχής* σε ένα *διάστημα* και έτσι το ολοκλήρωμα της θα είναι γνήσια θετικό. (μελετήστε το, περιέχει την μισή ουσία των ολοκληρωμάτων) □

Πρόβλημα 36. ***-Σελ 67 Ασκ 4-*** *Να αποδειχθεί ότι η ΔΕ*
$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2^2 + x_1^3 \\ -x_1 + x_2 + x_1^2 x_2 \end{pmatrix},$$
δεν έχει καμία μη-σταθερή περιοδική λύση στο $\mathbb{R}^2$.

Λύση

Η άσκηση αυτή είναι απλή εφαρμογή της προηγούμενης. Ξεκινάμε λοιπόν ορίζοντας $f(x,y) = x + y^2 + x^3$, $g(x,y) = -x + y + x^2 y$ και Δ.Π F με κύριο μέρος $(-g, f)$. Αν τώρα είχαμε ϕ να είναι μη-σταθερή περιοδική λύση του
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix},$$
τότε από το πρώτο ερώτημα της προηγούμενης άσκησης θα είχαμε,
$$\int_\phi F = 0.$$
Επιπλέον για τις f, g έχουμε ότι,
$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} = 1 + 3x^2 + 1 + x^2 = 2 + 4x^2 > 0,$$
οπότε από το δεύτερο ερώτημα της προηγούμενης άσκησης έχουμε άτοπο.
Έτσι η αρχική Δ.Ε δεν μπορεί να έχει μη-σταθερή περιοδική λύση. □

Πρόβλημα 37. ***-Σελ 67 Ασκ 5-*** *Να υπολογίσετε το εμβαδόν του επίπεδου χωρίου που περικλείεται από την παραβολή $y = \sqrt{x}$, $x \geq 0$ τον οριζόντιο άξονα και την ευθεία $x = k \in \mathbb{R}^+$.*

Λύση

Το χωρίου του οποίου το εμβαδόν ζητάμε είναι το εξής:

$$D = \{(x, y)/0 \leq x \leq k, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}.$$

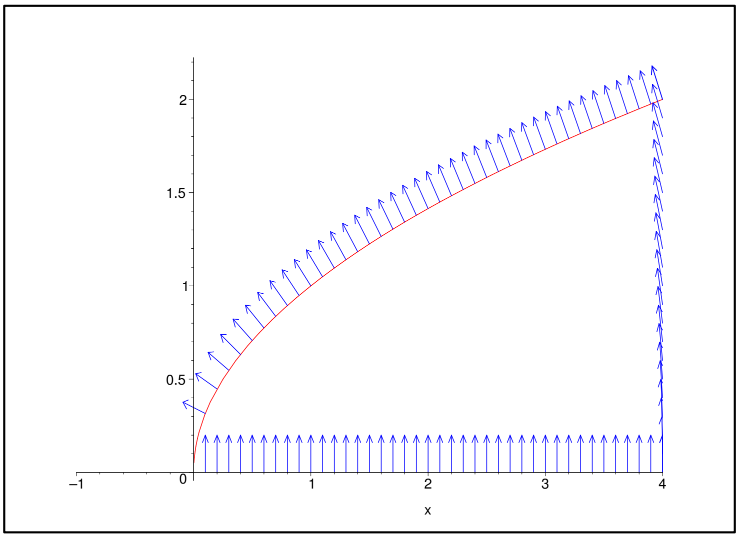
Το εμβαδόν μπορεί να υπολογιστεί με απλές τεχνικές απειροστικού λογισμού μίας μεταβλητής, συγκεκριμένα:

$$E = \int_0^k \sqrt{x} dx.$$

Εμείς όμως θα τη λύσουμε με χρήση επικαμπύλιου ολοκληρώματος (αν και συστήνουμε την πρώτη μέθοδο).
Το σύνορο του χωρίου είναι μια τοπικά C^1 καμπύλη C αποτελείται από 3 μέρη $C = C_1 + C_2 + C_3$. Συγκεκριμένα:

$$C = \begin{cases} C_1 : & \gamma_1(t) = (t, 0), & 0 \leq t \leq k, \\ C_2 : & \gamma_2(t) = (k, t), & 0 \leq t \leq \sqrt{k}, \\ C_3 : & \gamma_3(t) = (k - t, \sqrt{k - t}), & 0 \leq t \leq k. \end{cases}$$

Παρατηρήστε ότι η παραμέτριση αυτή είναι με την κανονική φορά "counter-clockwise". Θεωρούμε επίσης το ΔΠ $F(x, y) = \frac{1}{2}(-y, x)$. Το γράφημα που ακολουθεί μας δείχνει το χωρίο D καθώς και το Δ.Π F περιορισμένο στο σύνορο ∂D του D,



Περνάμε τώρα στον υπολογισμό του εμβαδού και έχουμε από το Θ.Green ότι,

$$|D| = \int_{\bar{D}} dxdy = \int_{\partial D} F = \int_C F = \int_{C_1} F + \int_{C_2} F + \int_{C_3} F =$$

$$\int_0^k \frac{1}{2}(0, t) \cdot (1, 0)dt + \int_0^{\sqrt{k}} \frac{1}{2}(-t, k) \cdot (0, 1)dt + \int_0^k \frac{1}{2}(-\sqrt{k - t}, k - t) \cdot (-1, \frac{-1}{2\sqrt{k - t}})dt$$

$$= \frac{k}{2} \int_0^{\sqrt{k}} dt + \frac{1}{4} \int_0^k \sqrt{k - t} dt = \frac{2}{3} k^{\frac{3}{2}}$$

□

Πρόβλημα 38. ***-Σελ 67 Ασκ 6-*** *Έστω $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ μία C^1 διαφορίσιμη απλή καμπύλη και $\gamma(0) = A$ και $\gamma(1) = B$. Να δείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γ και τα ευθύγραμμα τμήματα OA και OB όπου $O(0,0)$ δίνεται από τη σχέση:*

$$E = \frac{1}{2}\Big|\int_0^1 \gamma_1'(t)\gamma_2(t) - \gamma_1(t)\gamma_2'(t)dt\Big|,$$

όπου $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$.

Λύση

Θεωρούμε C να είναι το σύνορο του χωρίου D αποτελούμενο από τα ομαλά τμήματα:

$$\begin{cases} C_1 : & \sigma_1(t) = t \cdot \big(\gamma_1(0), \gamma_2(0)\big), & 0 \le t \le 1 \\ C_2 : & \sigma_2(t) = \gamma(t) = \big(\gamma_1(t), \gamma_2(t)\big), & 0 \le t \le 1 \\ C_3 : & \sigma_3(t) = (1-t)\big(\gamma_1(1), \gamma_2(1)\big), & 0 \le t \le 1. \end{cases}$$

Αν η παραμέτριση που έχουμε κάνει δεν είναι κανονική (εξαρτάται από τη σχετική θέση των σημείων A, B στο επίπεδο) αντιστρέφουμε τον προσανατολισμό τους και συνεχίζουμε κανονικά. Επιπλέον ορίζουμε ΔΠ $F(x,y) = \frac{1}{2}(-y, x)$ και έχουμε:

$$|D| = \int\int_{\bar{D}} dxdy \overset{\text{Green}}{=} \int_C F \cdot ds = \int_{C_1} F \cdot ds + \int_{C_2} F \cdot ds + \int_{C_3} F \cdot ds =$$

$$\int_0^1 F(\sigma_1(t))\sigma_1'(t)dt + \int_0^1 F(\sigma_2(t))\sigma_2'(t)dt + \int_0^1 F(\sigma_3(t))\sigma_3'(t)dt =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \big(-\gamma_2(0)t, \gamma_1(0)t\big) \cdot \big(\gamma_1(0), \gamma_2(0)\big)dt +$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \big(-\gamma_2(t), \gamma_1(t)\big) \cdot \big(\gamma_1'(t), \gamma_2'(t)\big)dt +$$

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \big(-(1-t)\gamma_2(1), (1-t)\gamma_1(1)\big) \cdot \big(-\gamma_1(1), -\gamma_2(1)\big)dt.$$

Το πρώτο και το τρίτο ολοκλήρωμα μηδενίζονται και έτσι παίρνουμε:

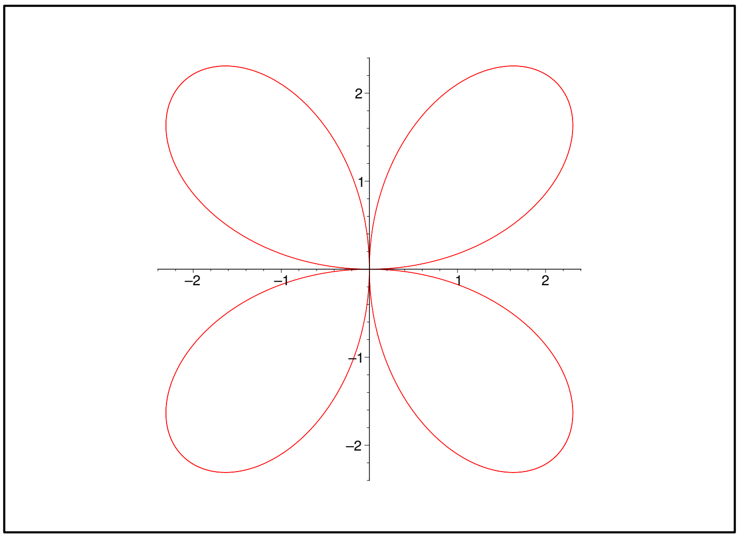
$$E = \frac{1}{2}\int_0^1 -\gamma_1'(t)\gamma_2(t) + \gamma_1(t)\gamma_2'(t)dt.$$

□

Πρόβλημα 39. ***Tromba -8.1 Ασκ 19-*** *Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Green να υπολογίσετε το εμβαδόν ενός φύλλου του τετράφυλλου λουλουδιού $r = 3\sin 2\theta$*

Λύση

Βλέποντας το σχήμα παρατηρούμε ότι το εμβαδόν ολόκληρου του λουλουδιού είναι τετραπλάσιο του ενός φύλλου του. Φυσικά το σημαντικότερο βήμα είναι να μπορέσει κάποιος να "προβλέψει" το σχήμα χωρίς τη χρήση σχεδιαστικού πακέτου. Για το σκοπό αυτό θα πρέπει να θέσετε τιμές στο θ και να πάρετε τιμές στο r, έπειτα κάθε ένα από αυτά τα σημεία να το σχεδιάσετε στο σύστημα αξόνων.



Εφόσον το λουλούδι κατασκευάζεται από τη σχέση $r = 3\sin 2\theta$ με $\theta \in [0, 2\pi]$, το ένα του φύλλο δίνεται από την ίδια σχέση $r = 3\sin 2\theta$ αλλά με $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

Για το εμβαδόν θα χρησιμοποιήσουμε το Δ.Π $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) = \frac{1}{2}(-y, x)$ και το θεώρημα του Green. Έστω $D \subset \mathbb{R}^2$ το χωρίου του ενός φύλλου και $\gamma(t)$ μία παραμέτριση του συνόρου του ∂D με την κανονική φορά,

$$\gamma(t) = (r(t)\cos t, r(t)\sin t),\ t \in [0, \frac{\pi}{2}],$$

φανερά:

$$\gamma'(t) = (r'(t)\cos t - r(t)\sin t, r'(t)\sin t + r(t)\cos t),\ t \in [0, \frac{\pi}{2}],$$

καθώς επίσης:

$$F(\gamma(t)) = \frac{1}{2}(-r(t)\sin t, r(t)\cos(t)).$$

Περνάμε τώρα στο εμβαδόν:

$$E(D) = \int\int_D 1\ dxdy = \int\int_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\ dxdy \overset{\text{Green}}{=} \int_{\partial D} F \cdot ds = \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\big(-r(t)\sin t, r(t)\cos(t)\big) \cdot \big(r'(t)\cos t - r(t)\sin t, r'(t)\sin t + r(t)\cos t\big)dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{2}r(t)r'(t)\sin t\cos t + \frac{1}{2}r^2(t)\sin^2 t + \frac{1}{2}r(t)r'(t)\sin t\cos t + \frac{1}{2}r^2(t)\cos^2 t dt$$

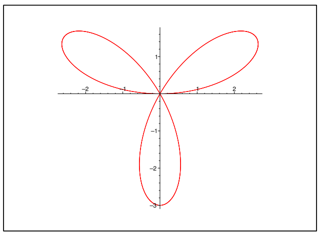
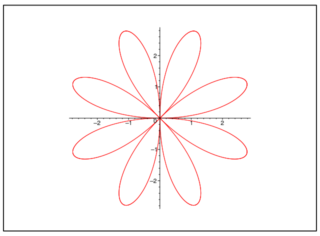
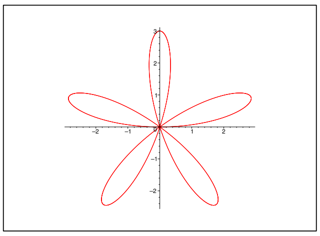
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2(t)dt$$

Από την υπόθεση ξέρουμε ότι $r = 3\sin 2\theta$ οπότε το τελευταίο ολοκλήρωμα γίνεται:

$$E(D) = \frac{9}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t\ dt \overset{[2]}{=} \frac{9}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t)dt = \frac{9\pi}{8}$$

Ακολουθούν τα γραφήματα των λουλουδιών $r = 3\sin 3\theta$, $r = 3\sin 4\theta$, $r = 3\sin 5\theta$ αντίστοιχα,

[2] όπου χρησιμοποιήσαμε την ταυτότητα $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

□

3.3 Θεώρημα Stokes

- Έστω (S, N) μία συμπαγής προσανατολισμένη επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ και F ένα C^1 διαφορίσιμο ΔΠ στον $\mathbb{R}^3$. Τότε

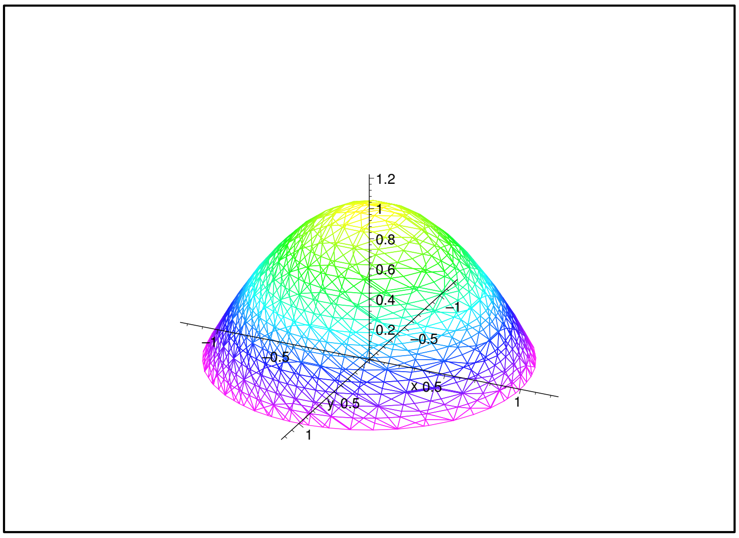
$$\int_S \underbrace{curlF \cdot N}_{\mathbb{R}} \, dS = \int_{\partial S} \underbrace{F}_{\mathbb{R}^3} \cdot ds$$

- Αν η (S, N) είναι κλειστή τότε

$$\int_S curlF \cdot N \, dS = 0$$

Πρόβλημα 40. ***-Σελ 82 Ασκ 4(α)-*** *Να επαληθεύσετε το θεώρημα του Stokes όταν* $F(x, y, z) = (z, x, y)$ *και* $S = \Big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1 - x^2 - y^2, \ z \geq 0\Big\}$.

Λύση
Ξεκινάμε με το γράφημα της επιφάνειας:



Μία παραμέτριση της επιφάνειας προκύπτει αφού πρώτα παρατηρήσουμε ότι:

$$z \geq 0 \Rightarrow 1 - x^2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 1,$$

οπότε:

$$\Phi(x, y) = (x, y, 1 - x^2 - y^2), \ (x, y) \in D^1 \ (\text{μοναδιαίος δίσκος})$$

Μία δεύτερη παραμέτριση θα μπορούσε να είναι η εξής:

$$\Phi_1(\theta,\phi) = (\cos\theta\sin\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\phi),\ \theta\in[0,2\pi],\ \phi\in[0,\frac{\pi}{2}].$$

Κρατάμε την πρώτη παραμέτριση και περνάμε στον υπολογισμού του διανύσματος N,

$$T_x = \frac{\partial}{\partial x}(x,y,1-x^2-y^2) = (1,0,-2x),$$

$$T_y = \frac{\partial}{\partial y}(x,y,1-x^2-y^2) = (0,1,-2y),$$

$$T_x\times T_y = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix} = (2x,2y,1),$$

$$||T_x\times T_y|| = \sqrt{4x^2+4y^2+1},$$

$$N = \frac{T_x\times T_y}{||T_x\times T_y||} = \frac{(2x,2y,1)}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}.$$

Περνάμε τώρα στο στροβιλισμό του ΔΠ F,

$$curlF = \nabla\times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ z & x & y \end{vmatrix} = (1,1,1).$$

Για την επαλήθευση του Stokes πρέπει να δείξουμε ότι:

$$I_1 = \int_S curlF\cdot N\ dS \overset{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial S} F\cdot ds = I_2$$

- Για το πρώτο ολοκλήρωμα έχουμε ότι:

$$I_1 = \int_S curlF\cdot N\ dS = \int_{S^1} curlF(\Phi(x,y))\cdot N(\Phi(x,y))||T_x\times T_y||dxdy$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}(1,1,1)\cdot(2x,2y,1)dxdy = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 2x+2y+1dxdy$$

  αλλαγή σε πολικές συντεταγμένες $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $J = r$, $r\in[0,1]$, $\theta\in[0,2\pi]$,

$$I_1 = \int_0^1\int_0^{2\pi} r(2r\cos\theta+2r\sin\theta+1)d\theta dr = \int_0^1 2\pi r dr = \pi$$

- Για το δεύτερο ολοκλήρωμα έχουμε ότι:

$$I_2 = \int_{\partial S} F\cdot ds$$

  Για το ολοκλήρωμα αυτό χρειαζόμαστε μία παραμέτριση του συνόρου της επιφάνειας. Το σύνορο της επιφάνειας είναι η εικόνα του συνόρου του S^1 (πεδίο ορισμού της Φ) μέσω της Φ δηλαδή

$$\partial S = \Phi(\partial S^1) = \Phi(x^2+y^2=1) = \Phi\big((\cos\theta,\sin\theta),\theta\in[0,2\pi]\big),$$

άρα μία παραμέτριση του συνόρου της επιφάνειας δίνεται από την,

$$\gamma(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 0),\ \ \theta \in [0, 2\pi].$$

Και έτσι το ολοκλήρωμα I_2 είναι ίσο:

$$I_2 = \int_{\partial S} F \cdot ds = \int_0^{2\pi} F(\gamma(\theta)) \cdot \gamma'(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} (0, \cos\theta, \sin\theta) \cdot (-\sin\theta, \cos\theta, 0) d\theta$$

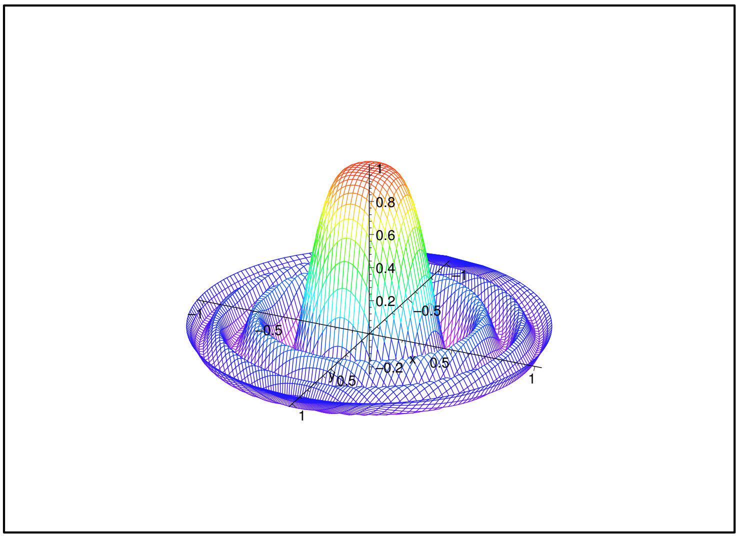
$$= \int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta = \pi$$

Έτσι έχουμε ότι $I_1 = I_2$ οπότε επαληθεύσαμε το θεώρημα του Stokes. □

Πρόβλημα 41. ***-Σελ 82 Ασκ 5-*** *Έστω $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ μία C^2 συνάρτηση και G ένα C^2 διανυσματικό πεδίο στον $\mathbb{R}^3$. Έστω F το C^2 διανυσματικό πεδίο με τύπο $F(x,y,z) = (1 - x^2 - y^2)G(x,y,z)$. Αν $S = \Big\{(x, y, g(x,y)) : x^2 + y^2 \leq 1\Big\}$, να αποδειχθεί ότι $\int_S curlF \cdot N\ dS = 0$, όπου N είναι ο κανονικός προσανατολισμός της S.*

Λύση

Παράδειγμα τέτοιας επιφάνειας για $g(x,y) = \frac{\sin(20x^2+20y^2)}{20x^2+20y^2}$ με $x^2 + y^2 \leq 1$.



Μία παραμέτριση της επιφάνειας δίνεται από την $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$ με $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\big\}$ και

$$\Phi(x,y) = \big(x, y, g(x,y)\big).$$

Το σύνορο του D παραμετρικοποιείται ως $\partial D = \Big\{\underbrace{(\cos t, \sin t)}_{\gamma(t)},\ t \in [0, 2\pi]\Big\}$ οπότε το σύνορο της επιφάνειας S παραμετρικοποιείται ως

$$\partial S = \Big\{\Phi(\gamma(t)) = \big(\cos t, \sin t, g(\cos t, \sin t)\big), t \in [0, 2\pi]\Big\}.$$

Από το θεώρημα του Stokes προκύπτει τώρα για το ζητούμενο ολοκλήρωμα ότι:

$$\int_S curlF\cdot N\ dS \overset{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial S} F\cdot dS = \int_0^{2\pi} F\big(\phi(\gamma(t))\big)||\big(\phi(\gamma(t))\big)'||dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (1-\cos^2 t - \sin^2 t)G\big(\Phi(\gamma(t))\big)||\big(\phi(\gamma(t))\big)'||dt = 0$$

□

Πρόβλημα 42. ***-Σελ 82 Ασκ 6-*** *Έστω (S,N) μία προσανατολισμένη, συμπαγής επιφάνεια με σύνορο στο $\mathbb{R}^3$ και $f,g: U\to\mathbb{R}$ δύο C^2 συναρτήσεις, όπου το U είναι ανοικτό σύνολο που περιέχει την S. Να αποδείξετε ότι $\int_S \big(\nabla f\times\nabla g\big)\cdot N\ dS = \int_{\partial S}\big(f\nabla g\big)\cdot ds$.*

Λύση

Να ξεκινήσουμε παρατηρώντας ότι,

$$\nabla f = (f_x, f_y, f_z), \quad \nabla g = (g_x, g_y, g_z).$$

Παρατηρώντας τη ζητούμενη σχέση βλέπουμε ότι συνδέει ένα επιφανειακό ολοκλήρωμα με το αντίστοιχο (στο σύνορο της επιφάνειας) επικαμπύλιο, οπότε θα μπορούσε να είναι ένα Stokes

$$\int_S curlF\cdot N\ dS = \int_{\partial S} F\cdot ds,$$

για $F = f\nabla g = (fg_x, fg_y, fg_z)$, αρκεί να δείχναμε ότι $curlF = \nabla f\times\nabla g$. Ξεκινάμε λοιπόν με το,

$$curlF = \begin{vmatrix} i & j & k\\ \partial x & \partial y & \partial z\\ fg_x & fg_y & fg_z\end{vmatrix} = \big((fg_z)_y - (fg_y)_z, -(fg_z)_x + (fg_x)_z, (fg_y)_x - (fg_x)_y\big)$$

$$(f_yg_z + fg_{zy} - f_zg_y - fg_{yz}, -f_xg_z - fg_{zx} + f_zg_x + fg_{xz}, f_xg_y + fg_{yx} - f_yg_x - fg_{xy})$$

$$= (f_yg_z - f_zg_y, -f_xg_z + f_zg_x, f_xg_y - f_yg_x).$$

Περνάμε τώρα στο,

$$\nabla f\times\nabla g = \begin{vmatrix} i & j & k\\ f_x & f_y & f_z\\ g_x & g_y & g_z\end{vmatrix} = (f_yg_z - f_zg_y, -f_xg_z + f_zg_x, f_xg_y - f_yg_x).$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι για $F = f\nabla g$ ισχύει $curlF = \nabla f\times\nabla g$ και έτσι από Stokes,

$$\int_S \big(\nabla f\times\nabla g\big)\cdot N\ dS = \int_S curlF\cdot N\ dS \overset{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial S} F\cdot ds = \int_{\partial S}\big(f\nabla g\big)\cdot ds.$$

□

Πρόβλημα 43. ***-Σελ 82 Ασκ 7-*** *Έστω $v\in\mathbb{R}^3$ και F,G τα διανυσματικά πεδία στο $\mathbb{R}^3$ με τύπους $F(x) = v$ και $G(x) = x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^3$. Να αποδειχθεί ότι για κάθε προσανατολισμένη, συμπαγή επιφάνεια (S,N) στο $\mathbb{R}^3$ ισχύει $2\int_S F\cdot N\ dS = \int_{\partial S} F\times G\cdot ds$.*

Λύση
Να ξεκινήσουμε παρατηρώντας ότι η σχέση συνδέει επιφανειακό με επικαμπύλιο ολοκλήρωμα, επίσης στο επιφανειακό ολοκλήρωμα εμφανίζεται εσωτερικό γινόμενο με το εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα N. Αυτές οι παρατηρήσεις παραπέμπουν στο θεώρημα Stokes το οποίο για ένα διανυσματικό πεδίο H γράφεται στη μορφή:

$$\int_S curlH \cdot N \, dS = \int_{\partial S} H \cdot ds$$

- Πρώτη ιδέα λοιπόν είναι να βρούμε ένα διανυσματικό πεδίο $H = (H_1, H_2, H_3)$ τέτοιο ώστε

$$curlH = F \Rightarrow \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ H_1 & H_2 & H_3 \end{vmatrix} = v \Rightarrow$$

$$\big((H_3)_y - (H_2)_z, -(H_3)_x + (H_1)_z, (H_2)_x - (H_1)_y\big) = (v_1, v_2, v_3),$$

ικανές επιλογές για να ισχύει η παραπάνω ισότητα είναι,

$$H_1 = v_2 z, \; H_2 = v_3 x, \; H_3 = v_1 y$$

οπότε το ΔΠ H θα είναι το

$$H = (v_2 z, v_3 x, v_1 y).$$

Για αυτή την επιλογή το αριστερό μέλος της ζητούμενης σχέσης είναι ίσο με:

$$2\int_S F \cdot N \, dS = 2\int_S curlH \cdot N \, dS \overset{\text{Stokes}}{=} 2\int_{\partial S} H \cdot ds = 2\int_{\partial S} (v_2 z, v_3 x, v_1 y) \cdot ds.$$

Όμως το δεξί μέλος της ζητούμενης σχέσης περιέχει ένα εξωτερικό γινόμενο $F \times G = (v_1, v_2, v_3) \times (x, y, z) = (v_2 z - v_3 y, -v_1 z + v_3 x, v_1 y - v_2 x)$ οπότε και είναι ίσο με

$$\int_{\partial S} F \times G \cdot ds = \int_{\partial S} (v_2 z - v_3 y, -v_1 z + v_3 x, v_1 y - v_2 x) \cdot ds.$$

Συγκρίνουμε τα δύο αποτελέσματα και συμπεραίνουμε ότι το αποτέλεσμα που έχουμε καταλήξει είναι κατά το ήμισυ σωστό, περιέχει ένα «πλεόνασμα» $(-v_3 y, -v_1 z, -v_2 x)$.

- Επεκτείνουμε λοιπόν την πρώτη ιδέα παρατηρώντας ότι για το ΔΠ $K = (-v_3 y, -v_1 z, -v_2 x)$ (το οποίο είναι το «πλεόνασμα» της τελευταία παρατήρησης) ισχύει ότι $curlK = F$. Συνοψίζοντας,

$$2\int_S F \cdot N \, dS = \int_S F \cdot N \, dS + \int_S F \cdot N \, dS = \int_S curlH \cdot N \, dS + \int_S curlK \cdot N \, dS \overset{\text{Stokes}}{=}$$

$$\int_{\partial S} H \cdot ds + \int_{\partial S} K \cdot ds = \int_{\partial S} (v_2 z, v_3 x, v_1 y) \cdot ds + \int_{\partial S} (-v_3 y, -v_1 z, -v_2 x) \cdot ds$$

$$= \int_{\partial S} (v_2 z - v_3 y, -v_1 z + v_3 x, v_1 y - v_2 x) \cdot ds = \int_{\partial S} F \times G \cdot ds$$

□

3.4 Θεώρημα Gauss

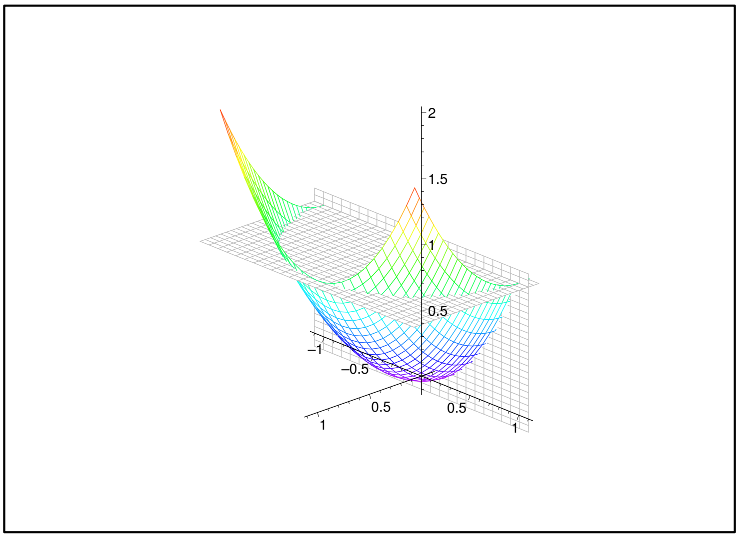
- Αν $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ κανονικός τόπος με σύνορο $\partial\Omega$ και εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο N, και F ένα C^1 ΔΠ τότε:
$$\int_\Omega divF\ dV = \int_{\partial\Omega} F\cdot N\ dS.$$
Παρατηρήστε ότι για άλλη μια φορά ένα θεώρημα συνδέει το «εσωτερικό» ενός «χωρίου» με το σύνορο του.

- Μπορούμε να υπολογίσουμε τον όγκο ενός τόπου χρησιμοποιώντας το θεώρημα Gauss και το ΔΠ $F(x,y,z) = (x,y,z)$ παίρνουμε:
$$V(\Delta) = \int_\Delta 1\ dV \overset{\text{Gauss}}{=} \frac{1}{3}\int_\Delta divF = \frac{1}{3}\int_{\partial\Delta} F\cdot N\ dS$$

Πρόβλημα 44. ***Tromba -8.4 Ασκ 5(β)-*** *Να υπολογίσετε το $\int_{\partial\Omega} F\cdot dS$ όταν $F = (y,z,xz)$ και $\Omega = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le z \le 1,\ x\ge 0\}$*

Λύση

Στο γράφημα που ακολουθεί φαίνεται το σύνορο του χωρίου Ω που αποτελείται από το παραβολοειδές $z = x^2+y^2$ και τα επίπεδα $z=1$ και $x=0$.



το ζητούμενο είναι ένα επιφανειακό ολοκλήρωμα του Δ.Π F πάνω στο σύνορο $\partial\Omega$ ενός κανονικού τόπου Ω. Οπότε από το Θεώρημα Gauss έχουμε ότι

$$I = \int_{\partial\Omega} F\cdot dS \overset{\text{Gauss}}{=} \int_\Omega divF\ dV$$

Όμως

$$divF = \nabla\cdot F = (\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})\cdot(y,z,xz) = \frac{\partial}{\partial x}y + \frac{\partial}{\partial y}z + \frac{\partial}{\partial z}(xz) = x$$

Έτσι πρέπει να υπολογίσουμε το τριπλό ολοκλήρωμα:

$$I = \int\int\int_\Omega x\ dxdydz$$

Στο σημείο αυτό θα κάνουμε αλλαγή μεταβλητών στο ολοκλήρωμα. Η αλλαγή θα είναι σε κυλινδρικές (γιατί;) μέσω των σχέσεων:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \\ J = r \end{cases} \text{με} \quad \left\{ \begin{array}{c} 0 \le r \le 1 \\ -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \\ r^2 \le z \le 1 \end{array} \right\}$$

Έτσι το ολοκλήρωμα θα μετατραπεί στο:

$$I = \int_0^1 \int_{r^2}^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \underbrace{r\cos\theta}_{x} \underbrace{r}_{J} \; d\theta dz dr = 2\int_0^1 \int_{r^2}^1 r^2 \; dz dr = 2\int_0^1 r^2 - r^4 \; dr = \frac{4}{15}$$

□

Πρόβλημα 45. ***-Σελ 82 Ασκ 8(α)-*** *Να επαληθεύσετε του Θεώρημα Gauss όταν* $\Delta = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le 4\}$ *και* $F(x,y,z) = (2x, 3y, -4z)$.

Λύση

Το θεώρημα Gauss μας δίνει ότι:

$$I_1 = \int_\Delta divF \; dV = \int_{\partial\Delta} F \cdot N \; dS = I_2.$$

- Ξεκινάμε με το πρώτο ολοκλήρωμα:

$$I_1 = \int_\Delta divF \; dV = \int_{x^2+y^2+z^2\le 4} (2+3-4) dxdydz = \int_{x^2+y^2+z^2\le 4} 1 dxdydz$$

  Παρατηρούμε ότι πρόκειται για ένα τριπλό ολοκλήρωμα μιας απλής συνάρτησης ορισμένης πάνω σε μία σφαίρα οπότε αλλάζοντας τις μεταβλητές από καρτεσιανές σε σφαιρικές , $x = \rho\cos\theta\sin\phi$, $y = \rho\sin\theta\sin\phi$, $z = \rho\cos\phi$, $\rho \in [0,2]$, $\theta \in [0,2\pi]$, $\phi \in [0,\pi]$,$J = \rho^2\sin\phi$ και παίρνουμε ότι

$$I_1 = \int_0^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (\rho^2\sin\phi) d\theta d\phi d\rho = 2\pi \int_0^2 \int_0^\pi (\rho^2 \sin\phi) d\phi d\rho =$$

$$= 4\pi \int_0^2 \rho^2 d\rho = \frac{32\pi}{3}$$

- Συνεχίζουμε με το δεύτερο ολοκλήρωμα:

$$I_2 = \int_{\partial\Delta} F \cdot N \; dS$$

  Παρατηρούμε ότι είναι ένα επιφανειακό ολοκλήρωμα Α′ είδους με την επιφάνεια να είναι το σύνορο του τόπου Δ, δηλαδή είναι η σφαίρα 3 διαστάσεων με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 2, οπότε μία παραμέτριση της είναι η εξής:

$$\Phi(\theta,\phi) = 2(\cos\theta\sin\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\phi), \;\; \theta \in [0,2\pi], \phi \in [0,\pi].$$

  Θα χρειαστούμε τα εφαπτόμενα διανύσματα:

$$T_\theta = \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = 2(-\sin\theta\sin\phi, \cos\theta\sin\phi, 0),$$

$$T_\phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} = 2(\cos\theta\cos\phi, \sin\theta\cos\phi, -\sin\phi).$$

Περνάμε τώρα στο εξωτερικό γινόμενο τους (που μας δίνει ένα κάθετο στην επιφάνεια),

$$T_\theta \times T_\phi = 4\begin{vmatrix} i & j & k \\ -\sin\theta\sin\phi & \cos\theta\sin\phi & 0 \\ \cos\theta\cos\phi & \sin\theta\cos\phi & -\sin\phi \end{vmatrix} =$$

$$4(-\cos\theta\sin^2\phi, -\sin\theta\sin^2\phi, -\sin^2\theta\sin\phi\cos\phi - \cos^2\theta\sin\phi\cos\phi)$$
$$= 4(-\cos\theta\sin^2\phi, -\sin\theta\sin^2\phi, -\sin\phi\cos\phi).$$

Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι το διάνυσμα αυτό είναι *εσωτερικό κάθετο* στην επιφάνεια. Αυτό μπορούμε να το δούμε από το πρόσημο των συντεταγμένων όταν αυτές αναφέρονται σε ένα διάνυσμα του πρώτου ογδοημορίου - το οποίο θα έπρεπε να έχει θετικές συντεταγμένες για να είναι εξωτερικό (γιατι;). Αλλάζουμε λοιπόν τη σειρά των διανυσμάτων στο εξωτερικό γινόμενο, ώστε να προκύψει εξωτερικό διάνυσμα (ή ισοδύναμα αλλάζουμε το πρόσημο του εξωτερικού γινομένου) και πλέον το διάνυσμα που προκύπτει είναι *εξωτερικό κάθετο*. Έτσι το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο της επιφάνειας ορίζεται ως:

$$N = \frac{T_\phi \times T_\theta}{\|T_\phi \times T_\theta\|}.$$

Για τον υπολογισμό του επιφανειακού ολοκληρώματος I_2 έχουμε τα εξής:

$$I_2 = \int_{\partial\Delta} F\cdot N\ dS = \int_{\Phi}\Big[F\big(\Phi(\theta,\phi)\big)\cdot N\Big]\|T_\theta \times T_\phi\| d\theta d\phi$$

$$= \int_{\partial\Delta} F\big(\Phi(\theta,\phi)\big)\cdot\big(T_\theta\times T_\phi\big)d\theta d\phi$$

$$= \int_0^\pi\int_0^{2\pi}\big(4\cos\theta\sin\phi, 6\sin\theta\sin\phi, -8\cos\phi\big)\cdot$$
$$(4\cos\theta\sin^2\phi, 4\sin\theta\sin^2\phi, 4\sin\phi\cos\phi)d\theta d\phi$$

$$= 8\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\big(2\sin^3\phi + \sin^2\theta\sin^3\phi - 4\sin\phi\cos^2\phi\big)d\theta d\phi$$

$$= \cdots = 8\pi\int_0^\pi\big(5\sin^3\phi - 8\sin\phi\cos^2\phi\big)d\phi = \cdots = \frac{32\pi}{3}$$

Να υπολογίσετε αναλυτικά τα τελευταία τριγωνομετρικά ολοκληρώματα.

Καταφέραμε λοιπόν να επαληθεύσουμε το θεώρημα του Gauss για την περίπτωση αυτή. □

Πρόβλημα 46. ***-Σελ 82 Ασκ 8(β)-*** *Να επαληθεύσετε του Θεώρημα Gauss όταν* $\Delta = \big\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 1\le x^2+y^2+z^2\le 4\big\}$ *και* $F(x,y,z) = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}(z,x,y)$.

Λύση

Να ξεκινήσουμε με τον τόπο Δ.

Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι ο τόπος ορίζεται από δύο ομόκεντρες σφάιρες με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνες 1 και 2, τις $S^2(1)$, $S^2(2)$. Το σύνορο του τόπου $\partial\Delta$ αποτελείται από δύο «ανεξάρτητες» επιφάνειες, τις επιφάνειες των σφαιρών που πριν εξηγήσαμε. Το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο διάνυσμα του τόπου Δ, N_Δ ισούται με το μοναδιαίο εξωτερικό κάθετο της μεγάλης σφαίρας $N_{S^2(2)}$ -στην εξωτερική του επιφάνεια- και είναι αντίθετο του εξωτερικού κάθετου της μικρής σφαίρας $N_{S^2(1)}$ -στην εσωτερική του επιφάνεια. Συμβολικά έχουμε:

$$\Delta = S^2(2) \cap \left(S^2(1)\right)^c,$$

$$\partial\Delta = \partial S^2(2) \cup \partial S^2(1),$$

$$N_\Delta|_{\partial S^2(2)} = N_{S^2(2)},$$

$$N_\Delta|_{\partial S^2(1)} = -N_{S^2(1)}.$$

Για να επαληθεύσουμε το θεώρημα Gauss πρέπει να δείξουμε ότι:

$$\int_\Delta divF\ dV = \int_{\partial\Delta} F \cdot N\ dS$$

Βασιζόμενοι στις παρατηρήσεις για την δομή του τόπου Δ και του συνόρου του $\partial\Delta$ σπάμε τα ολοκληρώματα και αρκεί πλέον να δείξουμε:

$$\int_{S^2(2)} divF\ dV - \int_{S^2(1)} divF\ dV = \int_{\partial S^2(2)} F \cdot N_\Delta|_{\partial S^2(2)}\ dS + \int_{\partial S^2(1)} F \cdot N_\Delta|_{\partial S^2(1)}\ dS,$$

από από τις παρατηρήσεις που κάναμε για τα εξωτερικά μοναδιαία κάθετα του τόπου Δ έχουμε ότι πρέπει να δείξουμε:

$$\int_{S^2(2)} divF\ dV - \int_{S^2(1)} divF\ dV = \int_{\partial S^2(2)} F \cdot N_{S^2(2)}\ dS - \int_{\partial S^2(1)} F \cdot N_{S^2(1)}\ dS$$

Παρατηρήστε ότι το πρόσημο του δεύτερου ολοκληρώματος στο δεύτερο μέλος άλλαξε και ότι πλέον δεν εμφανίζεται ο τόπος Δ. Έτσι μπορούμε να επαναλάβουμε την προηγούμενη άσκηση για να δείξουμε ότι,

$$\int_{S^2(2)} divF\ dV = \int_{\partial S^2(2)} F \cdot N_{S^2(2)}\ dS,$$

και

$$\int_{S^2(1)} divF\ dV = \int_{\partial S^2(1)} F \cdot N_{S^2(1)}\ dS.$$

□

Για οποιεσδήποτε παρατηρήσεις ή διορθώσεις παρακαλούμε να επικοινωνήσετε ηλεκτρονικά στη διεύθυνση sfaknikj@math.uoc.gr.

Αναφορές

[Τρο95] J.Marsden-A.Tromba, *Διανυσματικός Λογισμός*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 1995.

[Αθα04] Κωνσταντίνος Αθανασόπουλος, *Απειροστικός Λογισμός III (Διανυσματικός Λογισμός)*, Σημειώσεις Μαθήματος, 2004.