Σημειώσεις στις σειρές

1. ΟΡΙΣΜΟΙ - ΓΕΝΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Στην Ενότητα αυτή παρουσιάζουμε τις βασικές-απαραίτητες έννοιες για την μελέτη των σειρών πραγματικών αριθμών και των εφαρμογών τους. Έτσι, δίνονται συστηματικά όλοι οι σχετικοί Ορισμοί καθώς και η απαραίτητη ορολογία.

Ας υποθέσουμε ότι $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Με βάση αυτήν κατασκευάζουμε μια νέα ακολουθία ως εξής:

$$
\begin{aligned}
&s_1 = a_1,\\
&s_2 = a_1 + a_2,\\
&s_3 = a_1 + a_2 + a_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k .
\end{aligned}
$$

Το αντίστοιχο άπειρο άθροισμα

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

ονομάζεται ***σειρά με όρους a_n*** ενώ ή $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ καλείται ***ακολουθία μερικών αθροισμάτων*** της σειράς.

Όπως είναι φανερό, κάθε τέτοια σειρά, ακριβώς επειδή αποτελείται από άπειρους προσθετέους, δεν έχει πάντοτε ως άθροισμα έναν πεπερασμένο πραγματικό αριθμό. Πρόκειται στην ουσία για ένα όριο, αυτό της ακολουθίας $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Έτσι, θα λέμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$:

- ***Συγκλίνει*** στο $s \in \mathbb{R}$ αν το όριο $\lim s_n = s$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός
- ***Απειρίζεται θετικά*** (αντ. αρνητικά) αν $\lim s_n = +\infty$ (αντ. $-\infty$)
- ***Κυμαίνεται*** αν το όριο $\lim s_n$ δεν υπάρχει στο $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$
- ***Συγκλίνει απολύτως*** αν συγκλίνει η σειρά των αντίστοιχων απόλυτων τιμών $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$.

Τόσο στη δεύτερη όσο και στην τρίτη περίπτωση θα λέμε ότι η σειρά ***αποκλίνει***.

Σημειώστε επίσης ότι

η απόλυτη σύγκλιση είναι ισχυρότερη της απλής.

Μια σχετικά απλή και γρήγορη απόδειξη του προηγούμενου ισχυρισμού επιτυγχάνεται με τη χρήση της έννοιας της βασικής (Cauchy) ακολουθίας :

Ας συμβολίσουμε με $s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$, $n \in \mathbb{N}$, την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ και με $\tilde{s}_n = |a_1| + |a_2| + ... + |a_n|$, $n \in \mathbb{N}$, την αντίστοιχη ακολουθία μερικών αθροισμάτων της σειράς των απολύτων τιμών $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$. Παρατηρούμε τότε ότι

$$|s_n - s_m| = |a_{m+1} + a_{m+2} + ... + a_n| \leq |a_{m+1}| + |a_{m+2}| + ... + |a_n| = \tilde{s}_n - \tilde{s}_m = |\tilde{s}_n - \tilde{s}_m|, \ m \leq n. \qquad (1)$$

Αν όμως η υπό μελέτη σειρά συγκλίνει απόλυτα, τότε η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της ($\tilde{s}_n$) ως συγκλίνουσα θα είναι και βασική. Επομένως, $\lim|\tilde{s}_n - \tilde{s}_m| = 0$ και από τη σχέση (1) έχουμε ότι και η (s_n) είναι βασική :

$$0 \leq \lim|s_n - s_m| \leq \lim|\tilde{s}_n - \tilde{s}_m| = 0 \Rightarrow \lim|s_n - s_m| = 0.$$

Όμως, σύμφωνα και με τα όσα αναφέρονται στο Κεφάλαιο των Ακολουθιών, κάθε βασική ακολουθία πραγματικών αριθμών είναι και συγκλίνουσα. Έτσι, και η ακολουθία (s_n) συγκλίνει, οπότε από τον ορισμό της σύγκλισης σειρών, το ίδιο ισχύει και για τη σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Αποδείξαμε με τον τρόπο αυτό ότι:

Αν μια σειρά συγκλίνει απολύτως τότε θα συγκλίνει και απλά.

Είναι σημαντικό να τονισθεί εδώ ότι *το αντίστροφο της προηγούμενης διαπίστωσης δεν ισχύει*. Η απλή σύγκλιση μιας σειράς δεν εξασφαλίζει την απόλυτη σύγκλιση, όπως προκύπτει και από το τελευταίο από τα επόμενα παραδείγματα.

Παραδείγματα Σειρών.

- Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ...$ η οποία κατασκευάζεται από την ακολουθία $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, ονομάζεται ***αρμονική*** σειρά και απειρίζεται θετικά (βλ. και Παράγραφο 2.2).
- Η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{1}{2})^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ...$ κατασκευάζεται από την ακολουθία $a_n = (\frac{1}{2})^n$, $n \in \mathbb{N}$, ονομάζεται ***γεωμετρική*** σειρά και συγκλίνει στον αριθμό 2 (βλ. και Παράγραφο 2.1).

- Η $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\ldots$ κατασκευάζεται από την ακολουθία $a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}$, $n\in\mathbb{N}$, ονομάζεται ***εναλλάσσουσα*** σειρά και συγκλίνει (βλ. και Παράγραφο 2.4) ενώ δεν συγκλίνει απόλυτα αφού η $\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right|=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ είναι η αρμονική σειρά του πρώτου παραδείγματος.

Το βασικό ερώτημα που μας απασχολεί στις σειρές είναι αν αυτές συγκλίνουν ή όχι. Ο προσδιορισμός του ορίου τους είναι ένα πρόβλημα εξετάζεται δευτερευόντως και σε κάθε περίπτωση αφού πρώτα εξασφαλιστεί η σύγκλιση τους. Για τον έλεγχο της σύγκλισης ή μη σειρών πραγματικών αριθμών παρουσιάζουμε στις επόμενες Ενότητες τα βασικότερα κριτήρια που χρησιμοποιούνται.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η σύγκλιση μιας σειράς, ως "τελική" έννοια, δεν επηρεάζεται από τους αρχικούς όρους της (όσο πολλοί κι αν είναι αυτοί) αλλά από την συμπεριφορά τους όταν $\boldsymbol{n}\to+\infty$. Έτσι,

$$\text{η σειρά } \sum_{n=1}^{+\infty}a_n \text{ συγκλίνει} \Leftrightarrow \text{ η } \sum_{n=n_0}^{+\infty}a_n \text{ συγκλίνει, } n_0\in\mathbb{N}.$$

Επίσης, από τα αντίστοιχα συμπεράσματα που παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο των ακολουθιών, προκύπτει ότι :

Αν οι σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\beta_n$ συγκλίνουν και $\lambda\in\mathbb{R}$, τότε και οι σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n+\beta_n)$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\lambda\cdot a_n$ συγκλίνουν με $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n+\beta_n)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n+\sum_{n=1}^{+\infty}\beta_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\lambda\cdot a_n\right)=\lambda\cdot\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$.

Απόδειξη.

Έστω $s_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$, $n\in\mathbb{N}$, η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ και $\tilde{s}_n=\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n$, $n\in\mathbb{N}$, αυτή της $\sum_{n=1}^{+\infty}\beta_n$. Τότε η αντίστοιχη ακολουθία της $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n+\beta_n\right)$ είναι η $s_n+\tilde{s}_n=(a_1+\beta_1)+(a_2+\beta_2)+\ldots+(a_n+\beta_n)$, $n\in\mathbb{N}$.

Αφού οι σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\beta_n$ συγκλίνουν, σύμφωνα με τον Ορισμό που είδαμε στην αρχή της Ενότητας, το ίδιο θα ισχύει και για τις ακολουθίες των μερικών αθροισμάτων τους: $\lim s_n=s\in\mathbb{R}$,

$\lim \tilde{s}_n = \tilde{s} \in \mathbb{R}$. Επομένως, και η $\left(s_n + \tilde{s}_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει με $\lim(s_n + \tilde{s}_n) = s + \tilde{s} \in \mathbb{R}$, από όπου έχουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + \beta_n)$ συγκλίνει με τελικό άθροισμα

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n + \beta_n) = \lim(s_n + \tilde{s}_n) = s + \tilde{s} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n .$$

Ανάλογα αποδεικνύεται και ο δεύτερος ισχυρισμός.

2. ΕΙΔΙΚΕΣ ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΣΕΙΡΩΝ.

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζουμε ορισμένες ιδιαίτερες κατηγορίες σειρών για τις οποίες μπορούμε να έχουμε ασφαλή συμπεράσματα σχετικά με τη σύγκλιση ή/και το τελικό άθροισμα τους.

2.1. Γεωμετρικές Σειρές.

Γεωμετρική ονομάζεται κάθε σειρά της μορφής:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n ,$$

όπου r είναι πραγματικός αριθμός. Πρόκειται δηλαδή για το άθροισμα άπειρων όρων της γεωμετρικής προόδου με λόγο r. Μπορούμε, επομένως, να προσδιορίσουμε ακριβώς τόσο τους όρους της ακολουθίας των μερικών αθροισμάτων:

$$\begin{aligned} s_0 &= r^0 = 1, \\ s_1 &= r^0 + r^1 = 1 + r, \\ s_2 &= r^0 + r^1 + r^2 = 1 + r + r^2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_n &= r^0 + r^1 + \ldots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}, \end{aligned}$$

όσο και την τελική συμπεριφορά της σειράς:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} .$$

Λαμβάνοντας υπόψη μας τις ιδιότητες των ορίων ακολουθιών συμπεραίνουμε ότι:

- Η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} r^n$ συγκλίνει όταν $|r|<1$ (αφού τότε $\lim_{n\to+\infty} r^{n+1}=0$) και το τελικό άθροισμά της είναι ίσο με $\frac{1}{1-r}$.
- Απειρίζεται θετικά όταν $r\geq 1$, αφού τότε $\lim_{n\to+\infty} r^{n+1}=+\infty$ και $\lim_{n\to+\infty}\frac{1-r^{n+1}}{1-r}=\frac{1-\infty}{1-r}=+\infty$.
- Κυμαίνενται όταν $r\leq -1$, αφού τότε το όριο $\lim_{n\to+\infty} r^{n+1}$ δεν υπάρχει.

Παραδείγματα.

1. Η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ συγκλίνει, αφού $\left|\frac{2}{3}\right|<1$ και το άθροισμά της είναι ίσο με $\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=3$.

2. Η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n$ απειρίζεται θετικά , αφού $\frac{3}{2}>1$.

3. Η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty}(-2)^n$ κυμαίνεται, αφού $-2<-1$. Πράγματι, αν υπολογίσουμε τους πρώτους όρους της ακολουθίας των μερικών αθροισμάτων βλέπουμε ότι:

$$
\begin{aligned}
s_0 &= (-2)^0 = +1,\\
s_1 &= (-2)^0+(-2)^1 = 1-2=-1,\\
s_2 &= (-2)^0+(-2)^1+(-2)^2 = 1-2+4=+3,\\
s_3 &= (-2)^0+(-2)^1+(-2)^2+(-2)^3 = 1-2+4-8=-5,\\
s_4 &= (-2)^0+(-2)^1+(-2)^2+(-2)^3+(-2)^4 = 1-2+4-8+16=+11.
\end{aligned}
$$

Δηλαδή οι όροι της δεν συγκλίνουν προς κάποια συγκεκριμένη κατεύθυνση αλλά κυμαίνονται εναλλασσόμενοι μεταξύ αρνητικών και θετικών τιμών.

Παρατήρηση. Προσοχή πρέπει να δείξει κανείς στις περιπτώσεις εκείνες που η υπό μελέτη σειρά έχει όρους που ξεκινάνε από τον δείκτη n=1, και όχι από n=0. Αν, για παράδειγμα, θεωρήσουμε την $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$, τότε ως προς την σύγκλιση της δεν υπάρχει καμία διαφοροποίηση (η σειρά συγκλίνει αφού

$\left|\frac{2}{3}\right|<1$) αλλά υπάρχει αλλαγή στο τελικό άθροισμά αφού έχουμε έναν όρο λιγότερο, αυτόν που προκύπτει για n=0. Έτσι: $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} - \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 3-1=2$.

Γενικότερα ισχύει ότι:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} r^n = \frac{r}{1-r}, \text{ όταν } |r|<1.$$

2.2. p-Σειρές.

Ιδιαίτερα χρήσιμη στη σύγκριση με άλλες σειρές, και μέσω αυτής στον έλεγχο της σύγκλισής τους ή μη, είναι η κατηγορία των ***p-σειρών***. Πρόκειται, συγκεκριμένα, για τις σειρές που έχουν την μορφή:

$$\zeta(p) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p},$$

οι οποίες ***συγκλίνουν όταν p>1*** ενώ ***αποκλίνουν για p≤1.***

Η σχετική απόδειξη ξεφεύγει από τον σκοπό και το πνεύμα του παρόντος υλικού και για τον λόγο αυτό δεν παρουσιάζεται εδώ.

Παραδείγματα.

1. Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ (γνωστή και ως ***αρμονική σειρά***) δεν συγκλίνει αφού είναι p-σειρά με p=1.
2. Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει αφού είναι p-σειρά με p=2>1.

2.3. Τηλεσκοπικές Σειρές.

Όπως αναφέραμε και νωρίτερα, στις περισσότερες περιπτώσεις σειρών ο ακριβής προσδιορισμός του τελικού αθροίσματος είναι μια αρκετά δύσκολη υπόθεση. Γι αυτό και το πρώτο ερώτημα στο οποίο καλούμαστε να απαντήσουμε (αν η σειρά συγκλίνει ή όχι) είναι πολλές φορές και το τελευταίο.

Υπάρχει όμως μια σημαντική κατηγορία σειρών των οποίων το άθροισμα μπορεί να υπολογιστεί σχετικά εύκολα. Πρόκειται για τις σειρές $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ των οποίων οι όροι γράφονται στην μορφή:

$$a_n = b_n - b_{n+1} \ (n \in \mathbb{N}),$$

όπου b_n είναι μια ακολουθία της οποίας η οριακή συμπεριφορά μπορεί να προσδιορισθεί. Μια τέτοια σειρά ονομάζεται ***τηλεσκοπική σειρά***.

Ο έλεγχος της σύγκλισης καθώς και ο προσδιορισμός του τελικού αθροίσματος των σειρών αυτών είναι σχετικά απλός αφού για την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n = \\ &= (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + (b_3 - b_4) + \ldots + (b_{n-1} - b_n) + (b_n - b_{n+1}) = \\ &= b_1 - b_{n+1}. \end{aligned}$$

Επομένως η σειρά θα συγκλίνει αν και μόνο αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{n\to+\infty} b_{n+1}$ και το τελικό άθροισμά της θα είναι ίσο με

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = b_1 - \lim_{n\to+\infty} b_{n+1}.$$

Παραδείγματα.

1. Η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ είναι τηλεσκοπική γιατί $\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$. Επομένως,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} - \lim \frac{1}{n+2} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

2. Η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ είναι τηλεσκοπική γιατί $\frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1/3}{3n-2} - \frac{1/3}{3n+1}$ και ισχύει ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \lim \frac{1}{3n+1}\right) = \frac{1}{3} \cdot (1 - 0) = \frac{1}{3}.$$

3. Η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}$ είναι τηλεσκοπική γιατί $\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1/2}{2n-1} - \frac{1/2}{2n+1}$ και ισχύει ότι

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2} - \lim \frac{1/2}{2n+1} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

2.4. Εναλλάσσουσες Σειρές.

Οι σειρές των οποίων οι όροι εναλλάσσουν το πρόσημό τους συνεχώς ονομάζονται ***εναλλάσσουσες***. Πρόκειται, δηλαδή, για σειρές της μορφής:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n \ .$$

Για την κατηγορία αυτή το επόμενο κριτήριο αποτελεί ένα πολύ ισχυρό “εργαλείο” για τον έλεγχο της τελικής συμπεριφοράς τους.

Κριτήριο Leibnitz. Αν σε μία εναλλάσσουσα σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}a_n$ η ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ που την παράγει είναι ***θετική***, ***φθίνουσα*** και ***έχει όριο το μηδέν***, τότε η σειρά συγκλίνει και για το τελικό άθροισμά της $\boldsymbol{s}$ ισχύει ότι

$$\left|s-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k\right| \le a_{n+1} \, .$$

Δηλαδή, όταν προσεγγίσουμε το άθροισμα της σειράς με το μερικό άθροισμα των όρων μέχρι και τάξης n, το σφάλμα που προκύπτει δεν υπερβαίνει, κατ΄ απόλυτη τιμή, τον όρο της επόμενης τάξης n+1.

Απόδειξη.

Ας συμβολίσουμε με s_n το άθροισμα των n πρώτων όρων της σειράς :

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k$$

Παρατηρούμε τότε ότι :

$s_{2n+2} - s_{2n} = -\alpha_{2n+2} + \alpha_{2n+1} \ge 0$ (αφού η ακολουθία α_n είναι φθίνουσα από την υπόθεση), άρα η ακολουθία (s_{2n}) είναι αύξουσα :

$$s_{2n+2} \ge s_{2n}, \ n\in\mathbb{N}.$$

Επίσης,

$s_{2n+1} - s_{2n-1} = \alpha_{2n+1} - \alpha_{2n} \le 0$, άρα η ακολουθία (s_{2n-1}) είναι φθίνουσα :

$$s_{2n+1} \le s_{2n-1}, \ n\in\mathbb{N}.$$

Από την άλλη μεριά, για οποιαδήποτε επιλογή φυσικών k, m ισχύει ότι :

$$s_{2k} \le s_{2m-1} \qquad (1)$$

Πράγματι, αν επιλέξουμε έναν τρίτο φυσικό n μεγαλύτερο τόσο από τον k όσο και από τον m, τότε:

$$s_{2k} \leq s_{2n} \leq s_{2n-1} \leq s_{2m-1} .$$

Η τελευταία σχέση μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η –αύξουσα- ακολουθία (s_{2n}) είναι και άνω φραγμένη αφού, για παράδειγμα $s_{2n} \leq s_1 = \alpha_1$. Άρα, σύμφωνα με την Πρόταση **, είναι συγκλίνουσα ακολουθία και έστω α το όριο της : $\lim s_{2n} = a$.

Ανάλογα, η φθίνουσα ακολουθία s_{2n-1} είναι και κάτω φραγμένη, αφού $s_{2n-1} \geq s_2 = \alpha_1 - \alpha_2$. Άρα είναι και αυτή συγκλίνουσα με όριο έστω το β : $\lim s_{2n-1} = \beta$.

Από τη σχέση (1) έχουμε ότι

$$s_{2n} \leq s_{2n-1} \Rightarrow \alpha \leq \beta .$$

Επομένως,

$$0 \leq \beta - \alpha = \lim s_{2n-1} - \lim s_{2n} = \lim_{x\to\infty} \alpha_{2n} = 0. \qquad (2)$$

Εξασφαλίσαμε με τον τρόπο αυτό ότι

$$\alpha = \lim s_{2n} = \lim s_{2n-1} = \beta .$$

Ιδιαίτερα:

$$s_2 \leq s_4 \leq s_6 \leq \ldots \leq a = \beta \leq \ldots \leq s_{2n+1} \leq s_{2n-1} \leq \ldots \leq s_3 \leq s_1$$

Θα αποδείξουμε τώρα ότι αυτό το κοινό όριο των υποακολουθιών (s_{2n}) και (s_{2n-1}) αποτελεί το σημείο σύγκλισης και της γενικής ακολουθίας των μερικών αθροισμάτων (s_n) της υπό μελέτης σειράς. Πράγματι, για κάθε επιλογή θετικού αριθμού ε, από τη σχέση (2), θα υπάρχει φυσικός n_0 τέτοιος ώστε $0 \leq s_{2n_0-1} - s_{2n_0} < \varepsilon$. Έτσι, για κάθε $n>2n_0$ έχουμε :

➔ Αν $n=2k>2n_0$, τότε,

$$|s_n - \alpha| = |s_{2k} - \alpha| = \alpha - s_{2k} < \alpha - s_{2n_0} < s_{2n_0-1} - s_{2n_0} ,$$

➔ Αν $n=2k+1>2n_0$, τότε

$$|s_n - \alpha| = |s_{2k+1} - \alpha| = s_{2k+1} - a < s_{2n_0-1} - \alpha < s_{2n_0-1} - s_{2n_0} .$$

Επομένως, σε κάθε περίπτωση,

$$|s_n - \alpha| < s_{2n_0-1} - s_{2n_0} < \varepsilon$$

και άρα $\lim s_n = a$.

Επίσης :

$$|s_{2n} - \alpha| = \alpha - s_{2n} < s_{2n+1} - s_{2n} < a_{2n+1} ,$$

$$\left|s_{2n-1}-\alpha\right| = s_{2n-1}-a < s_{2n-1}-s_{2n} < a_{2n}\,.$$

Άρα, σε κάθε περίπτωση έχουμε :

$$\left|s_n-\alpha\right| < a_{n+1}$$

και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί.

Σημείωση. Τα ίδια αποτελέσματα ισχύουν και στη περίπτωση όπου η εναλλάσσουσα σειρά είναι της μορφής $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$ ή $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n$ αφού οι τελευταίες μετατρέπονται, με απλούς μετασχηματισμούς, στην ακριβή μορφή που εμφανίζεται στο Κριτήριο Leibnitz:

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1} a_{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1} a_{n-1}\,,$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n = -\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1} a_n\,.$$

Παραδείγματα.

1. Η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{n+1} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$ πληρεί τις υποθέσεις που αναφέραμε προηγουμένως αφού είναι εναλλάσσουσα και η ακολουθία $\frac{1}{n+1}$ είναι θετική και φθίνουσα. Επομένως συγκλίνει. Αν τώρα προσεγγίσουμε το άθροισμά της με το μερικό άθροισμα τάξης 8 (αν κρατήσουμε δηλαδή τους όρους για n=0,1,2,..,8):

$$\sum_{n=0}^{8}(-1)^n \frac{1}{n+1} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{9}\,,$$

τότε το σφάλμα είναι μικρότερο ή ίσο του όρου τάξης 9: $\frac{1}{9+1}=0.1$ (προφανώς όχι και τόσο καλή εκτίμηση. Πρέπει να φτάσουμε μέχρι τον όρο με n=98 για να είμαστε βέβαιοι, ότι το σφάλμα είναι μικρότερο ή ίσο του 0.01).

2. Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{n^p}$ συγκλίνει για κάθε p>0 (σε αντίθεση με τις p-σειρές που παρουσιάσαμε προηγουμένως). Πράγματι, πρόκειται προφανώς, για μία εναλλάσσουσα σειρά ενώ η ακολουθία $\left(\frac{1}{n^p}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα (αφού p>0):

$$\frac{1}{1^p} \geq \frac{1}{2^p} \geq \frac{1}{3^p} \geq \ldots \geq \frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{(n+1)^p} \geq \ldots$$

και μηδενική : $\lim \frac{1}{n^p} = 0$

3. Η εναλλάσσουσα σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ συγκλίνει γιατί η ακολουθία $a_n = \frac{1}{2n+1}$ είναι θετική, φθίνουσα:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2n+3} \leq \frac{1}{2n+1} = a_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

και μηδενική : $\lim a_n = \lim \frac{1}{2n+1} = 0$.

Επιπλέον, αν θέλουμε να πετύχουμε ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων, δηλαδή το σφάλμα της προσέγγισης να είναι μικρότερο του 0.01, θα πρέπει:

$$a_{n+1} < 10^{-2} \Leftrightarrow \frac{1}{2n+3} < \frac{1}{100} \Rightarrow n > 48.5\,.$$

Επομένως, θα πρέπει να υπολογίσουμε το άθροισμα τουλάχιστον των πρώτων 49 όρων της σειράς.

<u>Ασκήσεις.</u>

1. Βρείτε τα αθροίσματα των επόμενων σειρών στις περιπτώσεις εκείνες που αυτές συγκλίνουν:

i. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{5^n}$ (Απάντηση: $\frac{1}{4}$)

ii. $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{64} + \ldots$ (Απάντηση: $\frac{4}{5}$)

iii. $1 + \frac{5}{3} + \frac{25}{9} + \frac{75}{27} + \ldots$ (Απάντηση: αποκλίνει)

iv. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-\frac{3}{2})^n$ (Απάντηση: κυμαίνεται)

v. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ (Απάντηση: 1)

vi. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+4)(n+5)}$ (Απάντηση: $\frac{1}{5}$)

2. Ελέγξτε ως προς τη σύγκλιση τις επόμενες σειρές:

i. $\sum_{n=1}^{+\infty}(-\frac{1}{n})^2$ (Απάντηση: συγκλίνει)

ii. $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \cdot \frac{n}{e^n}$ (Απάντηση: συγκλίνει)

iii. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ (Απάντηση: αποκλίνει)

iv. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ (Απάντηση: συγκλίνει)

v. $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \cdot\sqrt{n}$ (Απάντηση: αποκλίνει)

vi. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{5}{n^5}$ (Απάντηση: συγκλίνει)

vii. $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1} \cdot \frac{\ln n}{3n+2}$ (Απάντηση: συγκλίνει)

viii. $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[n]{3}}$ (Απάντηση: αποκλίνει)

3. ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ

Τα βασικότερα κριτήρια σύγκλισης σειρών, δηλαδή κανόνες που μας βοηθούν να αποφασίζουμε αν μια σειρά συγκλίνει ή όχι, παρουσιάζονται στην Ενότητα αυτή.

3.1. Ένα πρώτο βασικό συμπέρασμα.

Αρχικά μπορεί κανείς να παρατηρήσει ότι για να υπάρχει πιθανότητα σύγκλισης μιας σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$, δεδομένου ότι αυτή είναι μια άθροιση άπειρων αριθμών, θα πρέπει οι προσθετέοι να μικραίνουν συνεχώς τείνοντας στο μηδέν:

$$\textit{Αν η σειρά } \sum_{n=1}^{+\infty}a_n \textit{ συγκλίνει, τότε } \lim\alpha_n = 0 .$$

Απόδειξη.

Έστω $s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$, $n \in \mathbb{N}$, η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς η οποία, σύμφωνα με την υπόθεση, θα συγκλίνει σε κάποιον πραγματικό αριθμό s. Παρατηρούμε τότε ότι

$$a_n = s_n - s_{n-1},$$

οπότε $\lim a_n = \lim s_n - \lim s_{n-1} = s - s = 0.$

Ιδιαίτερη προσοχή χρειάζεται στο γεγονός ότι *το αντίστροφο συμπέρασμα δεν ισχύει*:

> *Δεν αρκεί η διαπίστωση ότι το όριο της ακολουθίας α_n, που παράγει τη σειρά, είναι μηδέν για να εξασφαλίσουμε ότι η σειρά συγκλίνει.*

Υπάρχουν πολλά παραδείγματα σειρών που δεν συγκλίνουν παρά το γεγονός ότι παράγονται από μηδενικές ακολουθίες. Το κλασικότερο από αυτά είναι η αρμονική σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ η οποία, όπως αναφέραμε στην Παράγραφο 2.2, δεν συγκλίνει αν και παράγεται από την μηδενική ακολουθία $\frac{1}{n}$.

Σε κάθε περίπτωση όμως, το προηγούμενο συμπέρασμα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την διαπίστωση της ***μη σύγκλισης*** της σειράς ***αν η ακολουθία που την παράγει δεν τείνει στο μηδέν***:

$$\textit{Αν } \lim \alpha_n \neq 0, \textit{ τότε η σειρά } \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \textit{ δεν συγκλίνει.}$$

Παραδείγματα.

1. Η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{1}{3})^n$ έχει πιθανότητες να συγκλίνει αφού $\lim (\frac{1}{3})^n = 0$. Άλλωστε, όπως είδαμε στην Παράγραφο 2.1, η υπό μελέτη σειρά εντάσσεται στη κατηγορία των γεωμετρικών σειρών και συγκλίνει στον αριθμό $\dfrac{1}{1-\frac{1}{3}} = \dfrac{3}{2}$.

2. Η $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n^2+1}{2n^2-1}$ δεν συγκλίνει αφού $\lim \dfrac{n^2+1}{2n^2-1} = \dfrac{1}{2} \neq 0$.

3. Αν α_n είναι ακολουθία μη μηδενικών αριθμών ώστε $\alpha_n^2 + \alpha_{n-1}\alpha_{n+1} = \alpha_n\alpha_{n+1}$, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}$ δεν συγκλίνει.

   Πράγματι, η υπόθεση δίνει ότι

$$a_n^2 + a_{n-1}a_{n+1} = a_n a_{n+1} \Rightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} a_n + a_{n-1} = a_n \Rightarrow \frac{a_n}{a_{n+1}} + \frac{a_{n-1}}{a_n} = 1 \qquad \textit{(1)}.$$

Έτσι αν υποθέσουμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}$ συγκλίνει, θα πρέπει $\lim\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}=\lim\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}=0$ κάτι που έρχεται σε αντίθεση με την σχέση (1): Θα είχαμε τότε ότι 0+0=1.

3.2. Κριτήρια Σύγκρισης Σειρών.

Παρουσιάζουμε εδώ δύο από τους βασικότερους κανόνες σύγκρισης σειρών. Πρόκειται για ιδιαίτερα αποτελεσματικά κριτήρια σύγκλισης τα οποία μας δίνουν τη δυνατότητα να αποφασίσουμε για τη σύγκλιση ή μη μιας σειράς συγκρίνοντάς την με άλλη της οποίας η οριακή συμπεριφορά είναι γνωστή.

3.2.1. Ένα απλό Κριτήριο Σύγκρισης.

Θεωρούμε δύο σειρές θετικών όρων: $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\beta_n$ για τις οποίες ισχύει ότι $0\le a_n\le M\cdot\beta_n$ $(n\in\mathbb{N})$, όπου Μ θετικός πραγματικός αριθμός. Τότε:

(I) Αν η σειρά των "μεγαλύτερων" όρων $\sum_{n=1}^{+\infty}\beta_n$ συγκλίνει, τότε συγκλίνει και αυτή των "μικρότερων" $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$.

(II) Αν $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n=+\infty$, τότε και $\sum_{n=1}^{+\infty}\beta_n=+\infty$.

(III) Αν $\sum_{n=1}^{+\infty}\beta_n=-\infty$, τότε και $\sum_{n=1}^{+\infty}\alpha_n=-\infty$.

Απόδειξη.

(I) Ας υποθέσουμε ότι $s_n=a_1+a_2+...+a_n$, $n\in\mathbb{N}$, είναι η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ και $\tilde{s}_n=\beta_1+\beta_2+...+\beta_n$, $n\in\mathbb{N}$, αυτή της $\sum_{n=1}^{+\infty}\beta_n$. Παρατηρούμε τότε ότι :

$$\left|s_n-s_m\right|=a_{m+1}+a_{m+2}+...+a_n\le M\cdot\beta_{m+1}+M\cdot\beta_{m+2}+...+M\cdot\beta_n=M\cdot(\tilde{s}_n-\tilde{s}_m)\,, \qquad (1)$$

για κάθε επιλογή φυσικών $n\ge m$.

Έτσι, αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\beta_n$ συγκλίνει, η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της $(\tilde{s}_n)$ θα είναι βασική ως συγκλίνουσα : $\lim(\tilde{s}_n-\tilde{s}_m)=0$. Επομένως, βάσει της σχέσης (1),

$$0 \le \lim\left|s_n - s_m\right| \le M \cdot \lim(\tilde{s}_n - \tilde{s}_m) = 0 \Rightarrow \lim\left|s_n - s_m\right| = 0 .$$

Δηλαδή και η (s_n) είναι βασική ακολουθία πραγματικών αριθμών, άρα και συγκλίνουσα. Αποδείξαμε με τον τρόπο αυτό ότι πράγματι η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ συγκλίνει.

(II) Θεωρώντας και πάλι τις ακολουθίες των μερικών αθροισμάτων $s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$, $n \in \mathbb{N}$, της $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ και $\tilde{s}_n = \beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_n$, $n \in \mathbb{N}$, της $\sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n$, έχουμε από την υπόθεση ότι για κάθε επιλογή θετικού αριθμού ε, υπάρχει φυσικός n_0 έτσι ώστε :

$$s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n > \varepsilon,\ n \ge n_0 .$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση ανισότητας μεταξύ των όρων των δύο σειρών βλέπουμε ότι :

$$M \cdot \tilde{s}_n = M \cdot \beta_1 + M \cdot \beta_2 + ... + M \cdot \beta_n \ge a_1 + a_2 + ... + a_n > \varepsilon,\ n \ge n_0 .$$

Επομένως, $\lim(M \cdot \tilde{s}_n) = +\infty$ και, αφού ο αριθμός Μ είναι θετικός από την υπόθεση, $\lim \tilde{s}_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n = +\infty$.

(III) Η απόδειξη είναι ανάλογη αυτής της περίπτωσης (II).

Παραδείγματα.

1. Η σειρά $\sum_{\mathrm{n}=1}^{+\infty} \frac{3\mathrm{n}^3 + 1}{4\mathrm{n}^4 - 1}$ δεν συγκλίνει γιατί:

$$\frac{3n^3+1}{4n^4-1} > \frac{3n^3}{4n^4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{n} ,$$

και όπως είδαμε η αρμονική σειρά $\sum_{\mathrm{n}=1}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{n}}$ δεν συγκλίνει.

2. Η $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{5^n+1}$ συγκλίνει γιατί:

$$\frac{3^n}{5^n+1} < \frac{3^n}{5^n} = \left(\frac{3}{5}\right)^n ,$$

και η $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$ είναι γεωμετρική σειρά με λόγο μικρότερο της μονάδας. Άρα τόσο αυτή όσο και η αρχική συγκλίνουν.

3. Η $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2n}{n^2+1}$ δεν συγκλίνει γιατί:

$$\frac{2n}{n^2+1}\geq\frac{2n}{n^2+n^2}=\frac{2n}{2n^2}=\frac{1}{n}.$$

Πρόκειται δηλαδή για σειρά με όρους μεγαλύτερους από ότι η (αποκλίνουσα) αρμονική.

4. Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^5+5^n+2}{(5^n+2)\cdot n^5}$ συγκλίνει. Πράγματι, παρατηρούμε αρχικά ότι $\frac{n^5+5^n+2}{(5^n+2)\cdot n^5}=\frac{1}{5^n+2}+\frac{1}{n^5}$. Επομένως, αφού όλοι οι όροι είναι θετικοί,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^5+5^n+2}{(5^n+2)\cdot n^5}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{5^n+2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^5}$$

Όμως, και οι δύο επιμέρους σειρές που εμφανίσαμε συγκλίνουν γιατί:

$\frac{1}{5^n+2}<\frac{1}{5^n}=(\frac{1}{5})^n$ και η γεωμετρική σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{5})^n$ συγκλίνει, αφού $\frac{1}{5}<1$,

η $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^5}$ είναι p-σειρά με p=5>1.

Έτσι, και η αρχική σειρά θα συγκλίνει ως άθροισμα συγκλινουσών σειρών.

5. Για την σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+1}}{n+1}$ παρατηρούμε ότι:

$$\frac{\sqrt[3]{n^2+1}}{n+1}>\frac{n^{2/3}}{n+1}\geq\frac{n^{2/3}}{2n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^{1/3}}\text{ για κάθε } n>0.$$

Όμως, η σειρά $\zeta(1/3)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{1/3}}$ αποκλίνει, επομένως και η αρχική σειρά αποκλίνει.

6. Αντίστοιχα, για την $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2\sqrt{n}}{n^2+1}$ έχουμε: $\frac{2\sqrt{n}}{n^2+1}<\frac{2\sqrt{n}}{n^2}=2\cdot\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$. Όμως, η $\zeta(3/2)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ συγκλίνει, επομένως το ίδιο ισχύει και για την αρχική σειρά.

7. Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\text{συν}(n\pi a)}{b^2+n^2}$ συγκλίνει για οποιεσδήποτε τιμές των πραγματικών παραμέτρων a, b:

Ελέγχουμε την (ισχυρότερη) απόλυτη σύγκλιση συγκρίνοντας με την συγκλίνουσα $\zeta(2)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$. Πράγματι:

$$\left|\frac{\sigma\upsilon\nu(n\pi a)}{b^2+n^2}\right| \leq \frac{1}{b^2+n^2} < \frac{1}{n^2} .$$

Επομένως, η $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu(n\pi a)}{b^2+n^2}$ συγκλίνει απολύτως άρα και απλά.

3.2.2. Το Γενικευμένο Κριτήριο Σύγκρισης Σειρών.

Θεωρούμε δύο σειρές θετικών πραγματικών αριθμών: $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n$ (ιδιαίτερα για την δεύτερη υποθέτουμε ότι $\beta_n>0$) για τις οποίες ισχύει ότι $\lim\frac{a_n}{\beta_n}=c>0$. Τότε οι δύο σειρές έχουν την *ίδια συμπεριφορά ως προς τη σύγκλιση*. Δηλαδή είτε συγκλίνουν είτε αποκλίνουν ταυτόχρονα.

Απόδειξη.

Από την υπόθεση ότι $\lim\frac{a_n}{\beta_n}=c>0$ και σύμφωνα με τον ορισμό της σύγκλισης ακολουθιών, επιλέγοντας $\varepsilon=\frac{c}{2}>0$, θα υπάρχει n_0 φυσικός έτσι ώστε

$$\left|\frac{\alpha_n}{\beta_n}-c\right|<\varepsilon=\frac{c}{2}\Rightarrow -\frac{c}{2}<\frac{\alpha_n}{\beta_n}-c<\frac{c}{2}\Rightarrow \frac{c}{2}<\frac{\alpha_n}{\beta_n}<\frac{3c}{2}\Rightarrow \begin{cases} \beta_n<\frac{2}{c}\cdot\alpha_n & (I) \\ \alpha_n<\frac{3c}{2}\cdot\beta_n & (II) \end{cases}$$

Έτσι, αν η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ συγκλίνει, η σχέση (I) σε συνδυασμό με το Κριτήριο Σύγκρισης σειρών που παρουσιάσαμε στην Παράγραφο 3.2.1, οδηγεί στο συμπέρασμα ότι και η $\sum_{n=1}^{+\infty}\beta_n$ θα συγκλίνει..

Από την άλλη μεριά, η σύγκλιση της $\sum_{n=1}^{+\infty}\beta_n$ σε συνδυασμό με τη σχέση (II) εξασφαλίζει τη σύγκλιση της $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Παραδείγματα.

1. Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{3n^2-4}$ δεν συγκλίνει γιατί αν συγκριθεί μέσω του Γενικευμένου Κριτηρίου με την αρμονική σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ έχουμε:

$$\frac{\frac{n}{3n^2-4}}{\frac{1}{n}}=\frac{n^2}{3n^2-4}\to\frac{1}{3}>0.$$

Έτσι, αφού η αρμονική σειρά δεν συγκλίνει, το ίδιο θα ισχύει και για την υπό μελέτη σειρά.

2. Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3^n+a}$ συγκλίνει γιατί αν την συγκρίνουμε με την (συγκλίνουσα) γεωμετρική σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{3})^n$ έχουμε:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{3^n+a}}{\left(\frac{1}{3}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{3^n}{3^n+a}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{a}{3^n}}=\frac{1}{1+0}=1>0$$

3. Για την $\sum_{n=1}^{+\infty}\eta\mu(\frac{1}{n+1})$ παρατηρούμε (χρησιμοποιώντας τον κανόνα de l'Hospital για τον υπολογισμό ορίων) ότι:

$$\lim\frac{\eta\mu(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} \overset{x=\frac{1}{n}}{=} \lim_{x\to0}\frac{\eta\mu(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(\eta\mu(x))'}{x'}=\lim_{x\to0}\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu 0=1>0$$

Επομένως η $\sum_{n=2}^{+\infty}\eta\mu(\frac{1}{n})=\sum_{n=1}^{+\infty}\eta\mu(\frac{1}{n+1})$ έχει την ίδια συμπεριφορά ως προς τη σύγκλιση με την αρμονική σειρά, δηλαδή αποκλίνει.

4. Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n\cdot(n^2+n)}}$ συγκλίνει γιατί :

$$\lim\frac{\frac{1}{\sqrt{n\cdot(n^2+n)}}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim\frac{\frac{1}{\sqrt{n^3+n^2}}}{\frac{1}{\sqrt{n^3}}} = \lim\sqrt{\frac{n^3}{n^3+n^2}} = \lim\sqrt{\frac{\frac{n^3}{n^3}}{\frac{n^3+n^2}{n^3}}} = \lim\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}} = 1 > 0 .$$

Επομένως αφού ή $\zeta(3/2)=\sum_{\mathrm{n}=1}^{+\infty}\frac{1}{\mathrm{n}^{3/2}}$ συγκλίνει, το ίδιο θα ισχύει και για την αρχική σειρά.

5. *Αν* $\sum_{n=1}^{+\infty}\alpha_n$ *είναι μια σειρά θετικών όρων (*$\alpha_n>0$*) τότε*

$$\textit{η σειρά } \sum_{n=1}^{+\infty}\alpha_n \textit{ συγκλίνει} \Leftrightarrow \textit{ η } \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha_n}{\alpha_n+1} \textit{ συγκλίνει.}$$

Αν θέσουμε $\beta_n=\frac{\alpha_n}{\alpha_n+1}, n\in\mathbb{N}$, παρατηρούμε ότι :

Αν η $\sum_{n=1}^{+\infty}\alpha_n$ συγκλίνει, τότε $\lim\alpha_n=0$ και επομένως $\lim\frac{\beta_n}{\alpha_n}=\lim\frac{1}{\alpha_n+1}=\frac{1}{0+1}=1$. Συνεπώς, βάσει του γενικευμένου κριτηρίου σύγκρισης σειρών, και η $\sum_{n=1}^{+\infty}\beta_n=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha_n}{\alpha_n+1}$ θα συγκλίνει.

Αντίστροφα, η σύγκλιση της $\sum_{n=1}^{+\infty}\beta_n$ δίνει :

$$\lim\beta_n=0\Rightarrow\lim\frac{\alpha_n}{\alpha_n+1}=0\Rightarrow\lim\frac{1}{1+\frac{1}{\alpha_n}}=0\Rightarrow\lim(1+\frac{1}{\alpha_n})=+\infty\Rightarrow$$

$$\lim(\frac{1}{\alpha_n})=+\infty\Rightarrow\lim\alpha_n=0\Rightarrow\lim(\frac{1}{\alpha_n+1})=\lim\frac{\beta_n}{\alpha_n}=1$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας και πάλι το γενικευμένο κριτήριο σύγκλισης σειρών, συμπεραίνουμε ότι και η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\alpha_n$ συγκλίνει.

3.3. Το Κριτήριο Ρίζας (Cauchy).

Έστω $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ *σειρά πραγματικών αριθμών. Τότε:*

(I) *Αν* $\sqrt[n]{|a_n|}\le r<1$, *για κάθε φυσικό* $n\ge n_0\,(n_0\in\mathbb{N})$*, (ή, ειδικότερα, αν* $\lim\sqrt[n]{|a_n|}<1$*), τότε η σειρά συγκλίνει.*

(II) *Αν* $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$*, για άπειρο πλήθος δεικτών n (ή, ειδικότερα, αν* $\lim \sqrt[n]{|a_n|} > 1$*), τότε η σειρά δεν συγκλίνει στο* $\mathbb{R}$.

(III) *Αν* $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = 1$*, τότε δεν μπορούμε να απαντήσουμε θετικά αν η σειρά συγκλίνει ή όχι με βάση το Κριτήριο της Ρίζας.*

Απόδειξη.

(I) Από την υπόθεση έχουμε : $\sqrt[n]{|a_n|} \leq r \Rightarrow |a_n| \leq r^n$, $n \geq n_0$. Όμως η σειρά $\sum_{n=n_0}^{+\infty} r^n$ συγκλίνει ως γεωμετρική με λόγο r<1 (Βλ. και Παράγραφο 2.1). Έτσι, βάσει του Κριτηρίου Σύγκρισης σειρών 3.2.1, το ίδιο θα ισχύει και για την $\sum_{n=n_0}^{+\infty} |a_n|$. Δηλαδή αποδείξαμε ότι η υπό μελέτη σειρά συγκλίνει απόλυτα, άρα θα συγκλίνει και απλά. Επιπλέον, η σύγκλιση της $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ είναι ισοδύναμη με την σύγκλιση της $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, όπως έχουμε ήδη σχολιάσει στην Ενότητα 1, και η απόδειξη αυτής της περίπτωσης έχει ολοκληρωθεί.

(II) Η ισχύς της σχέσης $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1 \Leftrightarrow |a_n| \geq 1$ για άπειρο πλήθος δεικτών, εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας υποακολουθίας (a_{k_n}) της οποίας όλοι οι όροι είναι απολύτως μεγαλύτεροι της μονάδας: $|a_{k_n}| \geq 1$. Έτσι, η υποακολουθία αυτή, καθώς και η πλήρης ακολουθία (a_n), δεν μπορεί να συγκλίνουν στο μηδέν, όπως θα έπρεπε να συμβαίνει σε περίπτωση σύγκλισης της αρχικής σειράς. Επομένως η $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ θα αποκλίνει.

(III) Πράγματι, μπορούμε εύκολα να προσδιορίσουμε δύο σειρές που ικανοποιούν την υπόθεση αλλά παρουσιάσουν διαφορετική συμπεριφορά ως προς τη σύγκλιση :

Η αρμονική σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, με $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$, αποκλίνει,

ενώ η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, με $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \lim \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n}} = 1$, συγκλίνει.

Παραδείγματα.

1. Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4^n}{5^n}$ συγκλίνει γιατί:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{4^n}{5^n}} = \frac{4}{5} < 1, \text{ για κάθε φυσικό } n \geq 1 .$$

2. Η σειρά $3 + \frac{3}{2} + \frac{3}{4} + \cdots + \frac{3}{2^n} + \cdots$ συγκλίνει γιατί:

Ο γενικός της όρος είναι $a_n = \frac{3}{2^n}$ και $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{3}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{3}}{2} \to \frac{1}{2} < 1$.

3. Η σειρά $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n \left(\frac{3}{5}\right)^{n^2}$ συγκλίνει γιατί:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{2^n \left(\frac{3}{5}\right)^{n^2}} = 2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^n \to 2 \cdot 0 = 0 < 1 .$$

4. Η $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n^2}$ δεν συγκλίνει γιατί:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^2}} = \frac{2}{\sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n}} \to \frac{2}{1 \cdot 1} = 2 > 1 .$$

5. Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \cdot 3^n}{7^n}$ συγκλίνει γιατί:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{n \cdot 3^n}{7^n}} = \sqrt[n]{n} \cdot \frac{3}{7} \to 1 \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{7} < 1 .$$

6. Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{3n+2}{2n-1}\right)^n$ δεν συγκλίνει γιατί:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left(\frac{3n+2}{2n-1}\right)^n} = \frac{3n+2}{2n-1} \to \frac{3}{2} > 1 .$$

7. Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^{n^2}$ συγκλίνει όταν η παράμετρος α είναι αρνητική γιατί:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^{n^2}} = \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n \to e^{\alpha} \ .$$

Οπότε για να είναι το όριο μικρότερο της μονάδας θα πρέπει $e^{\alpha} < 1 \Leftrightarrow e^{\alpha} < e^0 \Leftrightarrow a < 0$.

3.4. Το Κριτήριο Λόγου (d' Alembert).

Έστω $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *σειρά πραγματικών αριθμών με* $\alpha_n \neq 0$*, για κάθε* $n \geq p$*, όπου* p *σταθερός φυσικός αριθμός.* Υποθέτουμε, με άλλα λόγια, ότι το μηδέν δεν περιέχεται στους όρους της σειράς από κάποιον δείκτη και μετά. *Τότε:*

(I) *Αν* $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq r < 1$*, για κάθε φυσικό* $n \geq n_0$ *(*$n_0 \geq p$*), (ή, ειδικότερα, αν* $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$*), τότε η σειρά συγκλίνει.*

(II) *Αν* $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq 1$*, για κάθε φυσικό* $n \geq n_0$ *(*$n_0 \geq p$*), (ή, ειδικότερα, αν* $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$*), τότε η σειρά δεν συγκλίνει στο* $\mathbb{R}$*, οπότε είτε θα απειρίζεται είτε θα κυμαίνεται. .*

(III) *Αν* $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1$*, τότε δεν μπορούμε να απαντήσουμε θετικά αν η σειρά συγκλίνει ή όχι με βάση το Κριτήριο του Λόγου.*

Απόδειξη.

(I) Η υπόθεση $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq r \Leftrightarrow |a_{n+1}| \leq r \cdot |a_n|$, $n \geq n_0$, δίνει :

$$|a_n| \leq r \cdot |a_{n-1}| \leq r^2 \cdot |a_{n-2}| \leq r^3 \cdot |a_{n-3}| \leq \ldots \leq r^{n-n_0} \cdot |a_{n-n_0}| \Rightarrow$$
$$\frac{r^{n_0}}{|a_{n-n_0}|} |a_n| \leq r^n, \ n \geq n_0.$$

Χρησιμοποιώντας το Κριτήριο Ρίζας (Cauchy) που είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο, άμεσα συμπεραίνουμε ότι η σειρά $\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{r^{n_0}}{|a_{n-n_0}|} |a_n| = \frac{r^{n_0}}{|a_{n-n_0}|} \cdot \sum_{n=n_0}^{+\infty} |a_n|$ συγκλίνει. Συνεπώς, αφού ο συντελεστής $\frac{r^{n_0}}{|a_{n-n_0}|}$ είναι ένας σταθερός πραγματικός αριθμός, η σειρά $\sum_{n=n_0}^{+\infty} |a_n|$ - άρα και η $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ - θα συγκλίνει.

(ΙΙ) Εργαζόμενοι όπως στην προηγούμενη περίπτωση, έχουμε :

$$\left|a_n\right| \geq \left|a_{n-1}\right| \geq \left|a_{n-2}\right| \geq \ldots \geq \left|a_{n-n_0}\right|,\ n \geq n_0 .$$

Συνεπώς η ακολουθία $\left(a_n\right)$ δεν συγκλίνει στο μηδέν, αφού ο όρος a_{n-n_0} από την υπόθεση είναι μη μηδενικός, και η υπό μελέτη σειρά αποκλίνει.

(ΙΙΙ) Η απόδειξη είναι ακριβώς αυτή της περίπτωσης (ΙΙΙ) του κριτηρίου Cauchy αφού η υπόθεση ικανοποιείται τόσο από την αποκλίνουσα αρμονική σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ όσο και από τη συγκλίνουσα $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

Παραδείγματα.

1. Η σειρά $\sum_{\mathrm{n}=1}^{+\infty}\frac{2^{\mathrm{n}}}{(\mathrm{n}+2)!}$ συγκλίνει γιατί:

$$\frac{\left|a_{n+1}\right|}{\left|a_n\right|}=\frac{\dfrac{2^{n+1}}{(n+3)!}}{\dfrac{2^n}{(n+2)!}}=\frac{2^{n+1}(n+2)!}{2^n(n+3)!}=\frac{2}{n+3}\leq\frac{2}{4}=\frac{1}{2}<1,\ \text{για κάθε φυσικό } n\geq 1 .$$

Επίσης μπορεί κανείς να παρατηρήσει ότι $\lim\frac{\left|a_{n+1}\right|}{\left|a_n\right|}=\lim\frac{2}{n+3}=0<1$.

2. Η σειρά $\sum_{\mathrm{n}=1}^{+\infty}\frac{2^{\mathrm{n}}+3^{\mathrm{n}}}{5^{\mathrm{n}}}$ συγκλίνει γιατί:

Την μετατρέπουμε αρχικά σε άθροισμα δύο, απλούστερων, σειρών:

$$\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\frac{2^{\mathrm{n}}+3^{\mathrm{n}}}{5^{\mathrm{n}}}=\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\frac{2^{\mathrm{n}}}{5^{\mathrm{n}}}+\sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty}\frac{3^{\mathrm{n}}}{5^{\mathrm{n}}} .$$

Κάθε μία από τις δύο νέες σειρές συγκλίνει γιατί:

$$\frac{\dfrac{2^{n+1}}{5^{n+1}}}{\dfrac{2^n}{5^n}}=\frac{2}{5}<1 \ \text{και}\ \frac{\dfrac{3^{n+1}}{5^{n+1}}}{\dfrac{3^n}{5^n}}=\frac{3}{5}<1 .$$

Επομένως, και το άθροισμά τους θα είναι συγκλίνουσα σειρά. Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να παρατηρήσουμε ότι πρόκειται για δύο συγκλίνουσες γεωμετρικές σειρές με λόγους απολύτως μικρότερους της μονάδας.

3. Η σειρά $\sum_{\mathrm{n}=1}^{+\infty}\frac{3}{2^{\mathrm{n}}}$ συγκλίνει γιατί:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{3}{2^{n+1}}}{\frac{3}{2^n}} = \frac{3\cdot 2^n}{3\cdot 2^{n+1}} = \frac{1}{2} < 1, \text{ για κάθε φυσικό } n \in \mathbb{N}.$$

4. Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n^2}$ δεν συγκλίνει γιατί:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{2^n}{n^2}} = \frac{2^{n+1}\cdot n^2}{2^n\cdot (n+1)^2} = 2\cdot (\frac{n}{n+1})^2.$$

Όμως το όριο της προηγούμενης παράστασης είναι μεγαλύτερο του 1 αφού:

$$\lim 2\cdot (\frac{n}{n+1})^2 = 2\cdot \lim(\frac{n}{n+1})^2 = 2\cdot 1 = 2 > 1.$$

5. Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{10^n}{n!}$ συγκλίνει γιατί:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{10^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{10^n}{n!}} = \frac{10^{n+1}\cdot n!}{10^n\cdot (n+1)!} = \frac{10^n\cdot 10\cdot n!}{10^n\cdot n!\cdot (n+1)} = \frac{10}{n+1} \to 0 < 1.$$

6. Η σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$ συγκλίνει γιατί:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{(n+1)!\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}\cdot n!} = \frac{n!\cdot (n+1)\cdot n^n}{(n+1)^n\cdot (n+1)\cdot n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} =$$

$$= \frac{1}{\frac{(n+1)^n}{n^n}} = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e} < 1$$

7. Η σειρά $\sum_{\mathrm{n}=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{n}^2}{\mathrm{n}!}$ συγκλίνει γιατί:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}}{\frac{n^2}{n!}} = \frac{(n+1)^2\cdot n!}{n^2\cdot (n+1)!} = (\frac{n+1}{n})^2\cdot \frac{n!}{n!\cdot (n+1)} = (\frac{n+1}{n})^2\cdot \frac{1}{n+1} \to 1\cdot 0 = 0 < 1 .$$

8. Για την σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{c^n}$ $(c>0)$ παρατηρούμε ότι:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{(n+1)^2}{c^{n+1}}}{\frac{n^2}{c^n}} = \frac{(n+1)^2 \cdot c^n}{n^2 \cdot c^{n+1}} = (\frac{n+1}{n})^2 \cdot \frac{1}{c} \to 1 \cdot \frac{1}{c} = \frac{1}{c}.$$

Επομένως η υπό μελέτη σειρά συγκλίνει όταν c>1 (οπότε $\frac{1}{c}$<1) και αποκλίνει όταν $c<1$ (οπότε $\frac{1}{c}>1$). Αποκλίνει επίσης για c=1, αφού τότε η ακολουθία n^2 που την παράγει δεν είναι μηδενική.

9. Για την σειρά $\frac{2}{2^2} + \frac{2^2}{3^2} + \frac{2^3}{4^2} + \ldots$ παρατηρούμε ότι:

Ο γενικός όρος της είναι $\frac{2^n}{(n+1)^2}$, αφού

Για n=1: $\frac{2^n}{(n+1)^2} = \frac{2^1}{(1+1)^2} = \frac{2}{2^2}$,

για n=2: $\frac{2^n}{(n+1)^2} = \frac{2^2}{(2+1)^2} = \frac{2^2}{3^2}$,

για n=3: $\frac{2^n}{(n+1)^2} = \frac{2^3}{(3+1)^2} = \frac{2^3}{4^2}$, κ.ο.κ.

Εφαρμόζοντας έτσι το Κριτήριο του Λόγου έχουμε:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+2)^2}}{\frac{2^n}{(n+1)^2}} = \frac{2^{n+1} \cdot (n+1)^2}{2^n \cdot (n+2)^2} = 2 \cdot \frac{n^2+2n+1}{n^2+4n+4} \to 2 \cdot 1 = 2 > 1,$$

συνεπώς η σειρά αποκλίνει.

Όπως γίνεται φανερό και από τα προηγούμενα παραδείγματα, το Κριτήριο του Λόγου είναι ιδιαίτερα αποτελεσματικό σε εκείνες τις περιπτώσεις σειρών όπου οι όροι τους a_n είναι μορφής που οδηγεί σε απλοποιήσεις όταν κανείς θεωρήσει το πηλίκο $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$. Κυριότερες περιπτώσεις αυτής της κατηγορίας σειρών είναι εκείνες που εμφανίζουν ***παραγοντικά*** ή ***δυνάμεις*** του n.

<u>**Ασκήσεις.**</u>

1. Ελέγξτε ως προς τη σύγκλιση τις επόμενες σειρές χρησιμοποιώντας το Κριτήριο του Λόγου:

i. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n!}$ (Απάντηση: συγκλίνει)

ii. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{2n-1}}{n^2+n}$ (Απάντηση: αποκλίνει)

iii. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{(\ln 2)^n}$ (Απάντηση: αποκλίνει)

iv. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)\cdot 2^n}{n!}$ (Απάντηση: συγκλίνει)

v. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{(n+2)\cdot n}$ (Απάντηση: αποκλίνει)

vi. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{2n-1}$ (Απάντηση: αποκλίνει)

2. Ελέγξτε ως προς τη σύγκλιση τις επόμενες σειρές χρησιμοποιώντας το Κριτήριο της Ρίζας:

i. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$ (Απάντηση: συγκλίνει)

ii. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{n^n}$ (Απάντηση: συγκλίνει)

iii. $\sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{n}{n^2+2})^n$ (Απάντηση: συγκλίνει)

iv. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(n+1)}{n\cdot(n-1)^n}$ (Απάντηση: συγκλίνει)

3. Ελέγξτε ως προς τη σύγκλιση τις επόμενες σειρές χρησιμοποιώντας το Κριτήριο της Σύγκρισης:

i. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^3-1}$ (Απάντηση: συγκλίνει)

ii. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+2}{n^2+n}$ (Απάντηση: αποκλίνει)

iii. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^p}$ (Απάντηση: συγκλίνει για p>2)

iv. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3n^2-4}$ (Απάντηση: αποκλίνει)

v. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n \cdot \sqrt{3n-2}}$ (Απάντηση: αποκλίνει)