Κεφάλαιο 1

Σειρές

Εάν (a_k) είναι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών, ορίζουμε μία νέα ακολουθία, θέτοντας για κάθε φυσικό αριθμό n

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_n \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k \,. \end{aligned}$$

Η ακολουθία (s_n) των αθροισμάτων των όρων της ακολουθίας (a_k) ονομάζεται **σειρά**. Λέμε ότι (s_n) είναι η σειρά που αντιστοιχεί στην ακολουθία (a_k). Το άθροισμα (s_n) ονομάζεται **μερικό άθροισμα** της σειράς (s_n). Για τη σειρά (s_n) χρησιμοποιούμε επίσης το συμβολισμό

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \,.$$

Η χρήση αυτού του συμβολισμού δεν προϋποθέτει τη σύγκλιση της ακολουθίας. Εάν η ακολουθία (s_n) συγκλίνει με όριο S, λέμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει με **άθροισμα** S, και το συμβολίζουμε

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S \,.$$

Εάν $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$ ή $-\infty$ γράφουμε $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty$ ή $-\infty$ αντιστοίχως, και λέμε οτι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ αποκλίνει στο ∞ ή στο $-\infty$.

Μερικές φορές είναι πιο πρακτικό να αρχίσει η αρίθμηση των όρων της σειράς από το 0:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots \,.$$

Παράδειγμα. Θεωρούμε τη γεωμετρική *ακολουθία* $b_k = ar^k$, για $a \neq 0$. Η αντίστοιχη *γεωμετρική σειρά* είναι η

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} ar^k = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n \,.$$

Παρατηρούμε ότι $s_n - rs_n = a - ar^{n+1}$, και συνεπώς, εάν $r \neq 1$,

$$s_n = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}\,.$$

Από αυτή την έκφραση για τα μερικά αθροίσματα, εύκολα έλεγχουμε τη σύγκλιση της γεωμετρικής σειράς.

α′. Εάν $r = 1$, τότε $s_n = n\,a$, και η σειρά τείνει προς το $+\infty$ ή το $-\infty$, ανάλογα με το πρόσημο του a.

β′. Εάν $|r| < 1$, τότε $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$, και η σειρά συγκλίνει, με άθροισμα

$$\sum_{k=0}^{\infty} ar^k = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r} = \frac{a}{1-r}\,.$$

γ′. Εάν $r > 1$, τότε $\lim_{n\to\infty} r^n = +\infty$, και

$$\sum_{k=0}^{\infty} a\,r^{k-1} = \pm\infty\,,$$

όπου το πρόσημο είναι το ίδιο με το πρόσημο του a.

δ′. Εάν $r < -1$, τότε $\lim |r|^n = \infty$, αλλά η r^n ταλαντώνεται μεταξύ $|r|^n$ και $-|r|^n$. Η σειρά δεν συγκλίνει.

ε′. Εάν $r = -1$, τότε η σειρά ταλαντώνεται μεταξύ 0 και $2a$, και συνεπώς δεν συγκλίνει.

Παράδειγμα. Θεωρούμε την ακολουθία $a_n = \frac{1}{n}$. Η αντίστοιχη σειρά ονομάζεται *αρμονική σειρά*. Θα δείξουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty\,.$$

Ο πρώτος και δεύτερος όρος είναι ο καθένας μεγαλύτερος ή ίσος προς $\frac{1}{2}$. Θα μαζέψουμε τους όρους της αρμονικής σειράς σε ομάδες που η κάθε μια θα έχει άθροισμα μεγαλύτερο από $\frac{1}{2}$. Έτσι δείχνουμε ότι τα μερικά αθροίσματα μπορούν να γίνουν αυθαίρετα μεγάλα, αρκεί να πάρουμε αρκετούς όρους.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16} > 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}$$

και γενικά,

$$\frac{1}{2^k+1} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}} > 2^k \cdot \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2}\,.$$

Πρόταση 1.1 *Εάν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, τότε $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. Συνεπώς εάν $\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0$, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ δεν συγκλίνει.*

Απόδειξη. Κάθε όρος της ακολουθίας (a_n) είναι ίσος με τη διαφορά διαδοχικών μερικών αθροισμάτων:

$$a_n = s_n - s_{n-1} .$$

Εάν υπάρχει το όριο $\lim_{n\to\infty} s_n = S$, τότε

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} \\ &= S - S \\ &= 0 . \end{aligned}$$

■

Το παράδειγμα της αρμονικής σειράς δείχνει ότι δεν ισχύει το αντίστροφο: η ακολουθία $\frac{1}{n}$ είναι μηδενική, αλλά η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ δεν συγκλίνει.

Από τις γνωστές ιδιότητες ακολουθιών, προκύπτουν οι ακόλουθες ιδιότητες για τη σύγκλιση σειρών.

α΄. Μία συγκλίνουσα σειρά παραμένει συγκλίνουσα εάν αλλάξουμε πεπερασμένο πλήθος των όρων της.

β΄. Εάν $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$ και c είναι σταθερός αριθμός, τότε $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} c\, a_k = cS$.

γ΄. Εάν $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$ και $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} b_m = T$, τότε $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = S + T$

Σειρές θετικών όρων

Εάν όλοι οι όροι της ακολουθίας (a_k) είναι θετικοί ή μηδέν, λέμε ότι η αντίστοιχη σειρά είναι **σειρά θετικών όρων** ή ακριβέστερα *σειρά μη αρνητικών όρων*. Η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων μίας σειράς θετικών όρων είναι αύξουσα. Συνεπώς για να συγκλίνει αρκεί να είναι άνω φραγμένη.

Πρόταση 1.2 *Μία σειρά θετικών όρων συγκλίνει εάν η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων είναι άνω φραγμένη.*

Πρόταση 1.3 ***Κριτήριο σύγκρισης**. Θεωρούμε μια σειρά θετικών όρων $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Εάν υπάρχει μία σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ τέτοια ώστε*

α΄. η $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ συγκλίνει, και

β΄. για κάθε k, εκτός ίσως από πεπερασμένο πλήθος, ισχύουν οι ανισότητες

$$0 \leq a_k \leq b_k ,$$

τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει. Κατά συνέπεια, εάν $0 \leq a_n \leq b_n$ και αντιθέτως $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty$, τότε $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \infty$ επίσης.

Απόδειξη. Αγνοούμε το πεπερασμένο πλήθος όρων για τους οποίους δεν ισχύει η ανισότητα. Τότε η σειρά θετικών όρων $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ είναι άνω φραγμένη από τον αριθμό $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, και συνεπώς συγκλίνει. ■

Παράδειγμα. Εξετάζουμε τη σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$, για $p \geq 0$.

α΄. Εάν $p = 1$, έχουμε την αρμονική σειρά, η οποία γνωρίζουμε ότι αποκλίνει στο ∞.

β΄. Εάν $0 \leq p < 1$, και εφόσον $\frac{1}{k} \leq 1$, έχουμε $\frac{1}{k^p} \geq \frac{1}{k}$. Συνεπώς, από το κριτήριο σύγκρισης, έχουμε
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} = \infty\,.$$

γ΄. Εάν $p > 1$, θα συγκρίνουμε τα μερικά αθροίσματα με κατάλληλο ολοκλήρωμα. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x^p}$. Από το γράφημα της f είναι προφανές ότι, για $n \geq 2$,
$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^p} &< \int_1^n \frac{1}{x^p} dx \\ &= \frac{1 - n^{1-p}}{p-1}\,. \end{aligned}$$
Αφού $p > 1$, έχουμε $1 - p < 0$ και $n^{1-p} < 1$. Συνεπώς $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^p} < \frac{1}{p-1}$, δηλαδή η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ είναι φραγμένη και συγκλίνει.

Το ακόλουθο κριτήριο σύγκλισης βασίζεται στη σύγκριση μίας σειράς θετικών όρων με μία γεωμετρική σειρά.

Πρόταση 1.4 ***Κριτήριο Λόγου.*** *Θεωρούμε μία σειρά θετικών όρων $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, και υποθέτουμε οτι υπάρχει το όριο $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lambda$.*

α΄. Εάν $\lambda < 1$, τότε η σειρά συγκλίνει.

β΄. Εάν $\lambda > 1$ ή $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \infty$, τότε η σειρά τείνει στο άπειρο.

γ΄. Εάν $\lambda = 1$, τότε δεν έχουμε κανένα συμπέρασμα για τη σύγκλιση της σειράς.

Απόδειξη. Εάν $\lambda < 1$, θεωρούμε r τέτοιο ώστε $\lambda < r < 1$. Τότε, αφού $\frac{a_{k+1}}{a_k} \to \lambda$, για τιμές του k μεγαλύτερες από κάποιο αρκετά μεγάλο αριθμό m έχουμε
$$\frac{a_{k+1}}{a_k} < r\,.$$

Συνεπώς για $k > m$, $a_{k+1} < r\, a_k$, και αναδρομικά,

$$a_{m+i} < r^i a_m\,.$$

Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει, από σύγκριση με τη γεωμετρική σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_m r^{k-m}$. ■

Σε ορισμένες περιπτώσεις που δεν δίδει αποτέλεσμα το κριτήριο λόγου, μπορεί να εφαρμόζεται το ακόλουθο κριτήριο.

Πρόταση 1.5 ***Κριτήριο Ρίζας***. *Θεωρούμε μία σειρά θετικών όρων* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *και* $\rho = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k}$.

α΄. *Εάν* $\rho < 1$, *τότε η σειρά συγκλίνει.*

β΄. *Εάν* $\rho > 1$ *ή* $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \infty$, *τότε η σειρά τείνει στο άπειρο.*

γ΄. *Εάν* $\rho = 1$, *τότε δεν έχουμε κανένα συμπέρασμα για τη σύγκλιση της σειράς.*

Γενικεύοντας το κριτήριο σύγκρισης, έχουμε το κριτήριο οριακής σύγκρισης για τη σύγκλιση σειρών με θετικούς όρους.

Πρόταση 1.6 ***Κριτήριο Οριακής Σύγκρισης***. *Εάν* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *και* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *είναι σειρές θετικών όρων, τότε*

α΄. *Εάν* $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_n} = c$, *με* $0 < c < \infty$, *τότε είτε και οι δύο σειρές συγκλίνουν σε πραγματικό όριο, είτε και οι δύο σειρές αποκλίνουν στο άπειρο.*

β΄. *Εάν* $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = 0$ *και η* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *συγκλίνει, τότε η* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *συγκλίνει επίσης.*

γ΄. *Εάν* $\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \infty$, *και* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \infty$, *τότε* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \infty$ *επίσης.*

Σειρές με θετικούς και αρνητικούς όρους

Ακριβώς όπως η μελέτη της σύγκλισης μή μονότονων ακολουθιών είναι πιο δύσκολη από αυτή των μονότονων ακολουθιών, και η μελέτη σειρών με θετικούς και αρνητικούς όρους παρουσιάζει περισσότερες δυσκολίες από τη μελέτη σειρών των οποίων όλοι οι όροι έχουν το ίδιο πρόσημο. Επισημαίνουμε ότι αναφερόμαστε σε σειρές με άπειρο πλήθος θετικών όρων και άπειρο πλήθος αρνητικών όρων.

Εάν η σειρά των απολύτων τιμών συγκλίνει τότε τα πράγματα είναι απλά.

Πρόταση 1.7 *Θεωρούμε τη σειρά* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. *Εάν* $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ *συγκλίνει, τότε η σειρά* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *επίσης συγκλίνει.*

Απόδειξη. Ορίζουμε τις ακολουθίες

$$b_n = \begin{cases} a_n & \text{εάν} \quad a_n \geq 0 \\ 0 & \text{εάν} \quad a_n < 0 \end{cases} \quad \text{και } c_n = \begin{cases} 0 & \text{εάν} \quad a_n \geq 0 \\ -a_n & \text{εάν} \quad a_n < 0 \end{cases}$$

Τότε $a_n = b_n - c_n$, και οι σειρές θετικών όρων $\sum b_k$ και $\sum c_k$ συγκλίνουν, από σύγκριση με την $\sum |a_k|$. Συνεπώς

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k - \sum_{k=1}^{\infty} c_k \,.$$

■

Εάν η σειρά $\sum |a_k|$ συγκλίνει, λέμε ότι η σειρά $\sum a_k$ συγκλίνει απολύτως. Η πρόταση λέει ότι εάν μία σειρά συγκλίνει απολύτως, τότε συγκλίνει.

Το αντίστροφο δεν ισχύει. Θα δούμε ότι η σειρά $\sum \frac{(-1)^k}{k}$ συγκλίνει, αλλά δεν συγκλίνει απολύτως, αφού η σειρά των απολύτων τιμών είναι η αρμονική σειρά.

Μία ειδική περίπτωση σειρών με θετικούς και αρνητικούς όρους είναι οι ***εναλλασσόμενες σειρές***, στις οποίες το πρόσημο είναι εναλλάξ θετικό ή αρνητικό. Μία εναλλασσόμενη σειρά μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \, u_k \,,$$

όπου (u_k) είναι μία ακολουθία της οποίας όλοι οι όροι έχουν το ίδιο πρόσημο

Πρόταση 1.8 ***Κριτήριο Σύγκλισης Εναλλασσομένων Σειρών.*** *Η σειρά* $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} u_k$ *συγκλίνει εάν η ακολουθία* (u_k) *είναι, από κάποιο σημείο και μετά, φθίνουσα μηδενική ακολουθία.*

Δυναμοσειρές

Θεωρούμε μια ακολουθία πραγματικών αριθμών $(c_k)_{k=0,\,1,\,2,\ldots}$. Η ακολουθία πολυωνύμων

$$s_n(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n$$

ονομάζεται ***δυναμοσειρά*** *με κέντρο το 0*, και ***ακολουθία συντελεστών*** (c_k), και συμβολίζεται

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \,.$$

Σε μία δυναμοσειρά μας ενδιαφέρει να προσδιορίσουμε το σύνολο των τιμών του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η σειρά $\sum c_k x^k$ συγκλίνει. Η δυναμοσειρά ορίζει μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού αυτό το σύνολο,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \,.$$

Παράδειγμα. Η δυναμοσειρά $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ έχει ακολουθία συντελεστών τη σταθερή ακολουθία $c_k = 1$. Για κάθε x παίρνουμε τη γεωμετρική σειρά με αρχικό όρο 1 και λόγο x, η οποία συγκλίνει όταν $|x| < 1$. Συνεπώς για κάθε x με $|x| < 1$ έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Για $x \geq 1$ η δυναμοσειρά αποκλίνει στο άπειρο, ενώ για $x \leq -1$ δεν συγκλίνει.

Θεώρημα 1.9 *Για μια δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ ισχύει ένα από τα ακόλουθα.*

*α΄. Υπάρχει θετικός αριθμός R τέτοιος ώστε η σειρά συγκλίνει για $|x| < R$, και δεν συγκλίνει για $|x| > R$. Ο αριθμός R ονομάζεται **ακτίνα σύγκλισης** της δυναμοσειράς, και το διάστημα $(-R, R)$ **διάστημα σύγκλισης**.*

β΄. Η σειρά συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η ακτίνα σύγκλισης είναι ∞.

γ΄. Η σειρά συγκλίνει για $x = 0$, και δεν συγκλίνει για καμία άλλη τιμή του x. Η ακτίνα σύγκλισης είναι 0.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το κριτήριο λόγου για να υπολογίσουμε την ακτίνα σύγκλισης μίας δυναμοσειράς.

Παράδειγμα. Θεωρούμε τη δυναμοσειρά

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n$$

Εφαρμόζουμε το κριτήριο λόγου,

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)x^{n+1}}{nx^n} \right| = |x| \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = |x|.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει για $|x| < 1$ και δεν συγκλίνει για $|x| > 1$. Συνεπώς η ακτίνα σύγκλισης είναι $R = 1$.

Ελέγχουμε τι συμβαίνει στα άκρα του διαστήματος σύγκλισης: εάν $x = 1$, έχουμε τη σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} n$ η οποία αποκλίνει στο ∞, ενώ εάν $x = -1$ έχουμε τη σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n$ η οποία δεν συγκλίνει.

Παράδειγμα. Θα δούμε μία δυναμοσειρά στην οποία δεν εμφανίζονται όλες οι δυνάμεις του x: στο συγκεκριμένο παράδειγμα εμφανίζονται μόνον οι περιττές δυνάμεις.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Εφαρμόζουμε το κριτήριο λόγου για να υπολογίσουμε την ακτίνα σύγκλισης:

$$\begin{aligned} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \frac{2^{n+1}x^{2n+3}}{2n+3}\cdot\frac{2n+1}{2^n\,x^{2n+1}} \\ &= 2x^2\,\frac{2n+1}{2n+3} \end{aligned}$$

άρα $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 2x^2$. Η σειρά συγκλίνει για $2x^2<1$, δηλαδή για $|x|<\frac{1}{\sqrt{2}}$. Στα άκρα του διαστήματος σύγκλισης έχουμε, για $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\,\frac{2^n}{(\sqrt{2})^{2n+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots\right)$$

η οποία είναι εναλλασσόμενη και συγκλίνει, ενώ για $x=-\frac{1}{\sqrt{2}}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\,\frac{2^n}{(-1)^{2n+1}(\sqrt{2})^{2n+1}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots\right).$$

Δηλαδή η σειρά συγκλίνει και στα δύο άκρα του διαστήματος σύγκλισης.

Παράδειγμα. Θεωρούμε τη δυναμοσειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\,\frac{x^n}{n}.$$

Έχουμε $\left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{x^n}\right| = |x|\,\frac{n}{n+1}\to|x|$, και συνεπώς η ακτίνα σύγκλισης είναι 1. Για $x=1$ έχουμε την εναλλασσόμενη σειρά $\sum\frac{(-1)^n}{n}$ η οποία συγκλίνει, ενώ για $x=-1$ έχουμε την αρμονική σειρά $\sum\frac{1}{n}$ η οποία αποκλίνει στο άπειρο.

Ανάλογα μπορούμε να ορίσουμε δυναμοσειρές με κέντρο διαφορετικό από το 0: Μία **δυναμοσειρά με κέντρο** a είναι μία ακολουθία πολυωνύμων

$$s_n(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n$$

και συμβολίζεται

$$\sum_{k=0}^{\infty}c_k(x-a)^k.$$

Μία δυναμοσειρά με κέντρο a

- έχει ακτίνα σύγκλισης R όταν συγκλίνει για τιμές του x στο διάστημα $(a-R,\ a+R)$ και δεν συγκλίνει για $x>a+R$ ή $x<a-R$.
- έχει ακτίνα σύγκλισης ∞ όταν συγκλίνει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, και
- έχει ακτίνα σύγκλισης 0 όταν συγκλίνει μόνο για $x=a$.

Παράδειγμα. Η δυναμοσειρά με κέντρο 1,

$$\sum \frac{(-1)^n (x-1)^n}{n}$$

έχει ακτίνα σύγκλισης 1. Συγκλίνει απόλυτα για $x \in (0, 2)$. Για $x = 0$ αποκλίνει στο ∞, ενώ για $x = 2$ συγκλίνει αλλά όχι απόλυτα.

Σειρές Taylor

Εάν f είναι μία συνάρτηση η οποία ορίζεται και έχει παραγώγους κάθε τάξεως σε ένα διάστημα το οποίο περιέχει το σημείο a στο εσωτερικό του, τότε ορίζεται το πολυώνυμο Taylor βαθμού n της f στο a για κάθε φυσικό αριθμό n:

$$\hat{f}_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)n\,.$$

Αυτό το πολυώνυμο δίδει τη βέλτιστη προσέγγιση βαθμού n της συνάρτησης f γύρω από το σημείο a. Η ακολουθία των πολυωνύμων Taylor $\hat{f}_n$ ορίζει μία δυναμοσειρά με κέντρο a, τη **σειρά Taylor της** f **στο σημείο** a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n\,,$$

όπου $f^{(0)}(x) = f(x)$ και $0! = 1$. Όταν $a = 0$ η σειρά Taylor λέγεται και σειρά Maclaurin.

Όπως κάθε δυναμοσειρά, η σειρά Taylor μίας συνάρτησης συγκλίνει σε κάποιο διάστημα (το οποίο μπορεί να είναι μόνο το σημείο a, ή και όλη η πραγματική ευθεία). Σε αυτό το διάστημα ορίζεται μία συνάρτηση

$$\hat{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n\,.$$

Το ερώτημα που τίθεται είναι τι σχέση έχει αυτή η συνάρτηση $\hat{f}$ με την αρχική συνάρτηση f περιορισμένη στο αντίστοιχο διάστημα. Από το θεώρημα Taylor η διαφορά, του n-οστού μερικού αθροίσματος $\hat{f}_n(x)$ της σειράς Taylor από την τιμή της συνάρτησης $f(x)$ είναι φραγμένη από

$$\frac{1}{(n+1)!} M_{n+1}(x-a)^{n+1}\,,$$

όπου M_{n+1} είναι ένα φράγμα για την $f^{(n+1)}(t)$, για t στο διάστημα μεταξύ a και x. Άρα, εάν αυτή η ποσότητα τείνει στο μηδέν, τότε η σειρά Taylor συγκλίνει στο $f(x)$.

Μια περίπτωση στην οποία συμβαίνει αυτό είναι όταν υπάρχει ένα φράγμα ανεξάρτητο από το n για όλες τις παραγώγους της f στο πεδίο ορισμού της.

Παράδειγμα. Θεωρούμε τη συνάρτηση ημίτονο $f(x) = \sin x$, της οποίας η σειρά Taylor στο 0 είναι η

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots$$

Παρατηρούμε οτι για κάθε n και για κάθε x, $|f^{(n)}(x)| \leq 1$. Συνεπώς η διαφορά μεταξύ του n-οστού πολυωνύμου Taylor και της τιμής της συνάρτησης είναι φραγμένη από $|x^{n+1}|/(n+1)!$, το οποίο, για κάθε σταθερό x τείνει στο μηδέν καθώς $n \to \infty$. Συμπεραίνουμε οτι η σειρά Taylor συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και το άθροισμα της είναι η τιμή της συνάρτησης:

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots$$

Προσέξτε οτι αυτό το αποτέλεσμα μας δίδει έναν τρόπο να ορίσουμε τη συνάρτηση του ημιτόνου χωρίς αναφορά στη γεωμετρική διαίσθηση.

Παρόμοια, η σειρά Taylor για τη συνάρτηση συνημίτονο συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ στην τιμή του συνημιτόνου,

$$\begin{aligned} \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \\ &= 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + \cdots. \end{aligned}$$

Παράδειγμα. Για την εκθετική συνάρτηση $g(x) = e^x$ έχουμε $g^{(n)}(x) = e^x$, και $g^{(n)}(0) = 1$ για κάθε n. Συνεπώς η σειρά Taylor της εκθετικής συνάρτησης στο σημείο 0 είναι η

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

Σε αυτή την περίπτωση οι παράγωγοι $g^{(n)}(t) = e^t$ δεν είναι φραγμένες σε όλο το $\mathbb{R}$. Όμως για κάθε συγκεκριμένο x η $g^{(n)}(t)$ είναι φραγμένη στο διάστημα μεταξύ του 0 και του x δηλαδή σε κάθε διάστημα της μορφής $[0, x]$ για $x > 0$ ή $[x, 0]$ για $x < 0$. Ένα φράγμα είναι το $m = \max\{1, e^x\}$. Συνεπώς η διαφορά μεταξύ του n-οστού πολυωνύμου Taylor και της τιμής της συνάρτησης είναι φραγμένη από την ποσότητα $m|x^{n+1}|/(n+1)!$, η οποία για κάθε σταθερό x τείνει στο μηδέν καθώς $n \to \infty$. Συμπεραίνουμε οτι η σειρά Taylor συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και το άθροισμα της είναι η τιμή της συνάρτησης:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

Παράδειγμα. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \log(1+x)$. Έχουμε $h'(x) = \frac{1}{1+x}$, $h''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$, $h'''(x) = \frac{(-1)(-2)}{(1+x)^3}$, και γενικά

$$h^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n} \text{ για } n \geq 1\,.$$

Άρα η σειρά Taylor στο a της συνάρτησης $\log(1+x)$ είναι

$$\log(1+a) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+a)^n} x^n\,.$$

Για $a = 0$ έχουμε τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots$$

η οποία θα δείξουμε οτι συγκλίνει για $-1 < x \leq 1$. Για κάθε θετικό x σε αυτό το διάστημα, η διαφορά

$$h(x) - \hat{h}_n(x) = \frac{1}{(n+1)!}\, h^{(n+1)}(\xi)x^{n+1} = \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}x^{n+1}$$

είναι φραγμένη από $\frac{1}{n+1}$ για κάθε $\xi \in [0, x]$. Συνεπώς για $x \in [0, 1]$, η σειρά Taylor συγκλίνει στην τιμή της συνάρτησης.

Για $x \in (-1, 0)$, χρησιμοποιούμε τον τύπο του Cauchy για τη διαφορά του n-οστού πολυωνύμου Taylor από την τιμή της συνάρτησης: υπάρχει κάποιο ξ στο διάστημα $(x, 0)$ τέτοιο ώστε

$$h(x) - \hat{h}_n(x) = \frac{1}{n!}h^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-a)\,.$$

Αντικαθιστώντας για $h(x) = \log(1+x)$ έχουμε

$$h(x) - \hat{h}_n(x) = \frac{1}{n!}\frac{(-1)^n n!}{(1+\xi)^{n+1}}(x-\xi)^n x\,.$$

Αλλά $-1 < x < \xi < 0$, και συνεπώς

$$\left|\frac{x-\xi}{1+\xi}\right| = \left|\frac{\xi - x}{\xi-(-1)}\right| < \left|\frac{0-x}{0-(-1)}\right| = |x| < 1$$

και

$$\left|\frac{x}{1+\xi}\right| = \left|\frac{x}{\xi-(-1)}\right| < \left|\frac{x}{x-(-1)}\right| = \left|\frac{x}{1+x}\right|\,.$$

Άρα

$$\begin{aligned} |h(x) - \hat{h}_n(x)| &= \left|\frac{x-\xi}{1+\xi}\right|^n \cdot \left|\frac{x}{1+\xi}\right| \\ &< \frac{|x|^{n+1}}{|1+x|}. \end{aligned}$$

Συνεπώς και για $x \in (-1, 0)$ το άθροισμα της σειράς Taylor είναι η τιμή της συνάρτησης $\log(1+x)$.

Άρα, για κάθε x με $-1 < x \leq 1$, ισχύει

$$\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \cdots$$