Σημειωσεις:

# Λογισμος Συναρτησεων Πολλων Μεταβλητων και Διανυσματικων Συναρτησεων

$v$. 0.95

Θ. Κεχαγιας

Σεπτεμβρης 2010

# Περιεχόμενα

# Προλογος

Το παρον τευχος περιεχει μια συνοψη του λογισμου συναρτησεων πολλων μεταβλητων και διανυσματικων συναρτησεων, για χρηση των φοιτητων της Πολυτεχνικης Σχολης του ΑΠΘ. Το τευχος προοριζεται να χρησιμοποιηθει σε συνδυασμο με ενα πιο εκτενες διδακτικο βιβλιο. Το τευχος υποκειται σε συνεχη αναθεωρηση· η παρουσα εκδοση ειναι η $v$.0.9 (Μαρτιος 2010).

Ασχολουμαστε με συναρτησεις της μορφης $\phi(x,y)$, $\phi(x,y,z)$, $\phi(x_1,x_2,...,x_N)$ κτλ. Η εμφαση δινεται στις συναρτησεις δυο και τριων μεταβλητων. Επισης εξεταζουμε *διανυσματικες συναρτησεις*, π.χ. $\mathbf{F}(t) = \mathbf{i}x(t)+\mathbf{j}y(t)+\mathbf{k}z(t)$ (διαν. συναρτηση *μιας* ανεξαρτητης μεταβλητης), $\mathbf{F}(x,y,z) = \mathbf{i}P(x,y,z) + \mathbf{j}Q(x,y,z) + \mathbf{k}R(x,y,z)$ (διαν. συναρτηση τριων ανεξαρτητων μεταβλητων) κτλ.

Υπενθυμιζουμε στον αναγνωστη μερικους βασικους συμβολισμους της αλγεβρας των διανυσματων.

1. Τα διανυσματα συμβολιζονται με εντονα γραμματα: $\mathbf{u} = a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$ ή και $\mathbf{u} = (a,b,c)$.

2. Τα $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ ειναι τα μοναδιαια διανυσματα κατα τις κατευθυνσεις των αξονων $x,y,z$ αντιστοιχα.

3. Παντοτε ο ορος ¨διανυσμα¨ σημαινει ¨ελευθερο διανυσμα¨, δηλ. $\mathbf{u} = (a,b,c)$ σημαινει το διανυσμα με συνιστωσες $a,b,c$ αλλα *χωρις να προσδιοριζεται το αρχικο και το τελικο σημειο του διανυσματος*. Ετσι, π.χ., το διανυσμα $\overrightarrow{M_1M_2}$ με αρχη το σημειο $M_1(0,0,0)$ και τελος το $M_2(1,2,3)$ ειναι ισοδυναμο με το διανυσμα $\overrightarrow{N_1N_2}$ με αρχη το $N_1(1,-1,1)$ και τελος το $N_2(2,1,4)$· και τα δυο ειναι το ιδιο ακριβως διανυσμα, το $\mathbf{u} = (1,1,1)$.

4. Το εσωτερικο γινομενο των $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = d\mathbf{i} + e\mathbf{j} + f\mathbf{k}$ ειναι

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = (a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k})\cdot(d\mathbf{i} + e\mathbf{j} + f\mathbf{k}) = ad + be + cf.$$

5. Το εξωτερικο γινομενο των $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = d\mathbf{i} + e\mathbf{j} + f\mathbf{k}$ ειναι

$$\begin{aligned}\mathbf{u}\times\mathbf{v} &= (a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k})\times(d\mathbf{i} + e\mathbf{j} + f\mathbf{k})\\ &= \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a & b & c\\ d & e & f\end{vmatrix} = (bf-ce)\,\mathbf{i} + (dc-af)\,\mathbf{j} + (ae-db)\,\mathbf{k}.\end{aligned}$$

6. Το μετρο του $\mathbf{u} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ ειναι
$$|\mathbf{u}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

7. Γενικοτερα, ενα $N$-διαστατο διανυσμα ειναι μια $N$-αδα αριθμων: $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_N)$. Το συνολο των $N$-διαστατων διανυσματων ειναι εφοδιασμενο με τις παρξεις προσθεσης (διανυσματων) και πολλαπλασιασμου (αριθμου επι διανυσμα).

8. Το μετρο $N$-διαστατου διανυσματος $\mathbf{a} = (a_1, a_2, ..., a_N)$ ειναι $||\mathbf{a}|| = \sqrt{a_1^2 + ... + a_N^2}$ και το εσωτερικο γινομενο των $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ ειναι $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{n=1}^{N} a_n b_n$.

Χρησιμοποιουμε τον ορο *χωριο* στον $\mathbb{R}^2$ για να δηλωσουμε ενα συνολο σημειων. Π.χ. ενα χωριο ειναι το
$$D = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$
δηλ. ο δισκος με κεντρο το $(0, 0)$ και ακτινα 1.

Παρομοια ο ορος *χωριο* στον $\mathbb{R}^3$ δηλωνει ενα συνολο σημειων. Π.χ. ενα χωριο ειναι το
$$D = \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\}$$
δηλ. η μπαλα με κεντρο το $(0, 0, 0)$ και ακτινα 1.

Συμβουλευω τον αναγνωστη να λυσει οσο μπορει περισσοτερες απο τις αλυτες ασκησεις του παροντος τευχους. Η θεωρια παρουσιαζεται εντελως συνοπτικα, με μονο σκοπο την υποστηριξη της διαδικασιας επιλυσης. Για τους περισσοτερους απο εμας *ο μονος τροπος εκμαθησης των μαθηματικων ειναι μεσω της επιλυσης ασκησεων.* Καλη δουλεια λοιπον!

Θανασης Κεχαγιας
Θεσσαλονικη, Μαρτης 2010

# Κεφάλαιο 1

# Οριο και Συνεχεια

## 1.1 Θεωρια

**1.1.1.** Εστω οτι μας δινεται μια συναρτηση δυο μεταβλητων $\phi(x,y)$. Λεμε οτι ¨*το οριο της* $\phi(x,y)$, *οταν το σημειο* $(x,y)$ *τεινει στο* $(x_0,y_0)$, *ειναι το* $\phi_o$" (και γραφουμε ¨$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \phi(x,y) = \phi_0$" ) ανν

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 : 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \Rightarrow |\phi(x,y) - \phi_0| < \varepsilon. \tag{1.1}$$

**1.1.2.** Το νοημα της (1.1) ειναι το εξης: μπορουμε να εξασφαλισουμε οτι η διαφορα της μεταβλητης ποσοτητας $\phi(x,y)$ και τη σταθερης ποσοτητας $\phi_0$ δεν θα ειναι μεγαλυτερη (κατ΄ απολυτη τιμη) απο $\varepsilon$, αρκει να χρησιμοποιησουμε σημεια $(x,y)$ τα οποια δεν δεν εχουν αποσταση απο την $(x_0,y_0)$ μεγαλυτερη απο $\delta$· για καθε $\varepsilon > 0$ υπαρχει $\delta > 0$ που εξασφαλιζει αυτη την απαιτηση.

**1.1.3.** Προσοχη: **μπορει να ισχυει** οτι

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \phi(x,y) \neq \lim_{x,\to x_0} \left( \lim_{y\to y_0} \phi(x,y) \right)$$

και μαλιστα υπαρχουν παραδειγματα οπου

$$\lim_{x,\to x_0} \left( \lim_{y\to y_0} \phi(x,y) \right) \neq \lim_{y,\to y_0} \left( \lim_{x,\to x_0} \phi(x,y) \right).$$

**1.1.4.** Λεμε οτι η $\phi(x,y)$ ειναι *συνεχης στο σημειο* $(x_0,y_0)$ αν ισχυει

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \phi(x,y) = \phi(x_0,y_0).$$

**1.1.5.** Λεμε οτι η $\phi(x,y)$ ειναι *συνεχης στο χωριο* $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ανν ειναι συνεχης σε καθε σημειο $(x_0,y_0) \in D$.

**1.1.6.** Καθε *πολυωνυμο δυο μεταβλητων*

$$\phi(x,y) = a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{11}xy + a_{20}x^2 + a_{02}y^2 + ... + a_{mn}x^m y^n$$

ειναι συνεχης συναρτηση στο $\mathbb{R}^2$, δηλ. $\forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ισχυει

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \phi(x,y) = \phi(x_0,y_0).$$

**1.1.7.** Καθε *ρητη συναρτηση δυο μεταβλητων*

$$\phi(x,y) = \frac{f(x,y)}{g(x,y)}$$

οπου $f(x,y)$, $g(x,y)$ ειναι πολυωνυμα, ειναι συνεχης συναρτηση στο $\mathbb{R}^2$, δηλ. $\forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 - P$ ισχυει

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \phi(x,y) = \phi(x_0,y_0)$$

οπου $P$ ειναι το συνολο των ριζων της $g(x,y)$ :

$$P = \{(x,y) : g(x,y) = 0\}.$$

**1.1.8.** Αν οι $f(x,y), g(x,y)$ ειναι συνεχης στο $D \subseteq \mathbb{R}^2$ τοτε και οι

$$f(x,y) + g(x,y), \qquad f(x,y) - g(x,y), \qquad f(x,y)\cdot g(x,y), \qquad \frac{f(x,y)}{g(x,y)}.$$

ειναι συνεχεις στο $D \subseteq \mathbb{R}^2$ (για την $\frac{f(x,y)}{g(x,y)}$ εξαιρουμε απο το $D$ σημεια μηδενισμου της $g(x,y)$).

**1.1.9.** Αν $f(x)$ ειναι συνεχης στο $\mathbb{R}$ και $g(x,y)$ ειναι συνεχης στο $\mathbb{R}^2$ τοτε και η $f(g(x,y))$ ειναι συνεχης στο $\mathbb{R}^2$.

**1.1.10.** Αντιστοιχα πραγματα ισχυουν και για συναρτησεις τριων η περισσοτερων μεταβλητων. Π.χ. $\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} \phi(x,y,z) = \phi_0$ ανν

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 : 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} < \delta \Rightarrow |\phi(x,y,z) - \phi_0| < \varepsilon$$

και λεμε οτι η $\phi(x,y,z)$ ειναι *συνεχης στο σημειο* $(x_0,y_0,z_0)$ ανν

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} \phi(x,y,z) = \phi(x_0,y_0,z_0).$$

## 1.2 Λυμενα Προβληματα

**1.2.1.** Να αποδειχτει οτι $\lim_{(x,y)\longrightarrow(a,b)} 3x = 3a$.

**Λυση**. Αρκει, συμφωνα με τον ορισμο, να δειξουμε οτι για καθε $\varepsilon > 0$ υπαρχει $\delta(\varepsilon) > 0$ τετοιο ωστε

$$0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \Rightarrow |3x - 3a| < \varepsilon.$$

Πραγματι, ας παρουμε $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/3$. Τοτε

$$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow \sqrt{(x-a)^2} < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow |x-a| < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow |3x-3a| < \varepsilon$$

που ηταν το ζητουμενο.

**1.2.2.** Να αποδειχτει οτι $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0$.

**Λυση**. Πραγματι, ας παρουμε $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/3$. Τοτε

$$0 < \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} < \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow \sqrt{y^2} < \frac{\varepsilon}{3} \Rightarrow |y| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Εχουμε επισης.

$$\frac{x^2}{x^2+y^2} < 1$$

Οποτε

$$\left|\frac{3x^2y}{x^2+y^2} - 0\right| = 3|y| \frac{x^2}{x^2+y^2} < 3\frac{\varepsilon}{3}1 = \varepsilon$$

που αποδεικνψυει οτι $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2} = 0$.

**1.2.3.** Να αποδειχτει οτι το οριο $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ δεν υπαρχει.

**Λυση**. Εαν το ζητουμενο οριο υπαρχει, θα πρεπει να ειναι ισο με τα επαναληπτικα ορια

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\longrightarrow0}\lim_{y\longrightarrow0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{y\longrightarrow0}\lim_{x\longrightarrow0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

Αλλα

$$\lim_{x\longrightarrow0}\lim_{y\longrightarrow0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\longrightarrow0} \frac{x^2-0}{x^2+0} = 1$$

$$\lim_{y\longrightarrow0}\lim_{x\longrightarrow0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{y\longrightarrow0} \frac{0-y^2}{0+y^2} = -1.$$

Αρα το ζητουμενο οριο δεν υπαρχει.

**1.2.4.** Να αποδειχτει οτι το οριο $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ δεν υπαρχει.

**Λυση**. Εαν το ζητουμενο οριο υπαρχει, θα πρεπει να ειναι ισο με οποιοδηποτε οριο το οποιο παιρνουμε προσεγγιζοντας το $(0,0)$ κατα μηκος της ευθειας $y = kx$, δηλ. για καθε $k$ θα πρεπει να εχουμε

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{(x,kx)\longrightarrow(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Αλλα

$$\begin{aligned}\lim_{(x,kx)\longrightarrow(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} &= \lim_{(x,kx)\longrightarrow(0,0)} \frac{xkx}{x^2+k^2x^2} \\ &= \lim_{(x,kx)\longrightarrow(0,0)} \frac{x^2k}{x^2(1-k^2)} = \lim_{(x,kx)\longrightarrow(0,0)} \frac{k}{(1-k^2)} = \frac{k}{(1-k^2)}.\end{aligned}$$

Ομως η ποσοτητα $\frac{k}{(1-k^2)}$ δεν ειναι σταθερη, αρα το ζητουμενο οριο $\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ δεν υπαρχει.

**1.2.5.** Να υπολογιστουν τα ορια

1. $\lim_{(x,y)\to(1,1)} x^2+2xy-x^2+5y^2x^3$. Ειναι μια πολυωνυμικη συναρτηση, αρα
$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} x^2+2xy-x^2+5y^2x^3 = \left(x^2+2xy-x^2+5y^2x^3\right)_{(x,y)=(1,1)}$$
$$= 1^2+2\cdot1\cdot1-1^2+5\cdot1^2\cdot1^3 = 7$$

2. $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. Το οριο αυτο αποτελειται απο συνεχεις συναρτησεις και ο παρονομαστης ειναι διαφορος του μηδενος. Οποτε
$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to1,y\longrightarrow0} \frac{1-0}{1+0} = 1$$

3. $\lim_{x\longrightarrow0,y\longrightarrow0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. Ο παρονομαστης αυτου του οριου μηδενιζεται. Εστω $y=Kx$ - αν $x\longrightarrow0$ τοτε και $y=Kx\longrightarrow0$ οποτε
$$\lim_{x\longrightarrow0} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\longrightarrow0} \frac{x^2-K^2x^2}{x^2+K^2x^2} = \frac{1-K^2}{1+K^2}$$
Το οριο λοιπον εξαρταται απο τον τροπο που $(x,y)\longrightarrow(0,0)$ , αρα το οριο δεν υπαρχει

4. $\lim_{x\longrightarrow0,y\longrightarrow1} \frac{x^2+x\cdot y+y^2}{x^2+y^2}$. Το οριο αποτελειται απο συνεχεις συναρτησεις και ο παρονομαστης ειναι διαφορος του μηδενος. Οποτε
$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2+x\cdot y+y^2}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{0+0\cdot1+1}{0+1} = 1$$

5. $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2+x\cdot y+y^2}{x^2+y^2}$. Παρομοια εχουμε $\lim_{x\longrightarrow1,y\longrightarrow1} \frac{1+1+1}{1+1} = \frac{2}{3}$

**1.2.6.** Να υπολογιστουν τα ορια

1. $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \sin\left(x^2+2xy-x^2+5y^2x^3\right)$. Η $g(z)=\sin(z)$ ειναι συνεχης συναρτηση μιας μεταβλητης. Η $g(x,y)=x^2+2xy-x^2+5y^2x^3$ ειναι πολυωνυμικη και αρα συνεχης συναρτηση δυο μεταβλητων. Αρα η $\sin\left(x^2+2xy-x^2+5y^2x^3\right)$ ειναι συνεχης συναρτηση και αρα
$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \sin\left(x^2+2xy-x^2+5y^2x^3\right) = \sin\left(x^2+2xy-x^2+5y^2x^3\right)_{(x,y)=(1,1)} = \sin(7).$$

2. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{\sin\left(x^2+2xy-x^2+5y^2x^3\right)}$. Η $p(x,y)=\sin\left(x^2+2xy-x^2+5y^2x^3\right)$ ειναι συνεχης συναρτηση. Αρα και η $e^{p(x,y)}$ ειναι συνεχης συναρτηση και
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{\sin\left(x^2+2xy-x^2+5y^2x^3\right)} = \left[e^{\sin\left(x^2+2xy-x^2+5y^2x^3\right)}\right]_{(x,y)=(1,1)} = e^{\sin(7)}..$$

**1.2.7.** Να υπολογιστει το οριο

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}.$$

**Λυση**. Εδω ο παρονομαστης μηδενιζεται στο $(0,0)$. Ωστοσο παρατηρουμε το εξης

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \left( \frac{x^2 - xy}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} \right)$$
$$= \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \left( \frac{x \cdot (x-y)}{x-y} \cdot \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right) \right) = \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \left( x \cdot \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)\right) = 0.$$

**1.2.8.** Να υπολογιστει το οριο

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{x+y-4}{\sqrt{x+y} - 2}.$$

**Λυση**. Εδω ο αριθμητης *και* παρονομαστης μηδενιζεται στο $(0,0)$. Ωστοσο παρατηρουμε το εξης

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{x+y-4}{\sqrt{x+y} - 2} = \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \left( \frac{x+y-4}{\sqrt{x+y} - 2} \cdot \frac{\sqrt{x+y} + 2}{\sqrt{x+y} + 2} \right)$$
$$= \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \frac{(x+y-4) \cdot \left(\sqrt{x+y} + 2\right)}{(x+y-4)} = \lim_{(x,y)\longrightarrow(0,0)} \left(\sqrt{x+y} + 2\right) = 2..$$

**1.2.9.** Να υπολογιστει το οριο

$$\lim_{(x,y,z)\longrightarrow(0,1,2)} \frac{x+y+z-1}{x^2 + 2yz}.$$

**Λυση**. Εχουμε

$$\lim_{(x,y,z)\longrightarrow(0,1,2)} \frac{x+y+z-1}{x^2 + 2yz} = \frac{0+1+2-1}{0^2 + 2 \cdot 1 \cdot 2} = \frac{1}{2}..$$

**1.2.10.** Να ορισετε την σημασια του συμβολισμου

$$\lim_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} \phi(x,y) = \infty$$

και να την εξηγησετε.

**Λυση**. Κατ' αναλογια με $\lim_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} \phi(x,y) = \phi_o \in \mathbb{R}$ (και χρησιμοποιωντας στοιχεια γνωστα απο τα ορια συναρτησεων μιας μεταβλητης) μπορουμε να ορισουμε $\lim_{(x,y)\longrightarrow(x_0,y_0)} \phi(x,y) = \infty$ ανν

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists \delta > 0 : 0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \Rightarrow |\phi(x,y)| > M.$$

το οποιο εχει την εξης σημασια: το οριο της $\phi(x,y)$ ειναι το $\infty$ οταν το $(x,y)$ τεινει στο $(x_0,y_0)$ σημαινει μπορουμε να κανουμε την $f(x,y)$ μεγαλυτερη απο καθε πραγματικο αριθμο $M$, αρκει το $(x,y)$ να μην απεχει απο το $(x_0,y_0)$ περισσοτερο απο $\delta$.

**1.2.11.** Σε ποια σημεια του $\mathbb{R}^2$ ειναι συνεχης η $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2-3x+2}$;

**Λυση**. Ως ρητη συναρτηση, η $f(x,y)$ θα ειναι συνεχης σε καθε $(x_0, y_0)$ το οποιο δεν μηδενιζει τον παρονομαστη. Αρα θα ειναι συνεχης στο

$$D = \{(x,y) : x \notin \{1,2\}\}.$$

**1.2.12.** Σε ποια σημεια του $\mathbb{R}^2$ ειναι συνεχης η $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2-y}$;

**Λυση**. Ως ρητη συναρτηση, η $f(x,y)$ θα ειναι συνεχης σε καθε $(x_0, y_0)$ το οποιο δεν μηδενιζει τον παρονομαστη. Αρα θα ειναι συνεχης στο

$$D = \left\{(x,y) : y \neq x^2\right\}.$$

## 1.3 Αλυτα Προβληματα

**1.3.1.** Να αποδειχτει οτι $\lim_{(x,y)\to(1,1)} x + y - 1 = 1$.

**1.3.2.** Να αποδειχτει οτι $\lim_{(x,y)\to(1,1)} xy = 1$.

**1.3.3.** Να αποδειχτει οτι $\lim_{(x,y)\to(1,1)} x^2 + y^2 = 2$.

**1.3.4.** Να αποδειχτει οτι $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 1$.

**1.3.5.** Να αποδειχτει οτι $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$.

**1.3.6.** Να υπολογιστει το οριο $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x+y}$

**Απ.** 0.

**1.3.7.** Να υπολογιστει το οριο $\lim_{(x,y)\to(\pi/2,\pi/2)} \sin(x+y)$

**Απ.** 0.

**1.3.8.** Να υπολογιστει το οριο $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}$

**Απ.** 1.

**1.3.9.** Να υπολογιστει το οριο $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2}$.

**Απ.** 0.

**1.3.10.** Να υπολογιστει το οριο $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x+y}$

**Απ.** Δεν υπαρχει.

**1.3.11.** Να υπολογιστει το οριο $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$

**Απ.** 2.

**1.3.12.** Να υπολογιστει το οριο $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}$

**Απ.** 0.

**1.3.13.** Να υπολογιστει το οριο $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2}$

**Απ.** 1.

**1.3.14.** Να υπολογιστει το οριο $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y}$
**Απ.** Δεν υπαρχει.

**1.3.15.** Απο την γραφικη παρασταση της συναρτησης $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$ βρειτε το οριο $\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y)$.

**1.3.16.** Απο την γραφικη παρασταση της συναρτησης $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$ δειξτε οτι το οριο $\lim_{(x,y)\to(0,0)}$ δεν υπαρχει. Σε ποια αλλα σημεια του $\mathbb{R}^2$ φαινεται να μην εχει οριο η συναρτηση;

**1.3.17.** Δινεται η συναρτηση $\phi(x,y) = \frac{\sin(x+y)}{x+y}$ για $(x,y) \neq (0,0)$ και $\phi(0,0) = 1$. Ειναι αυτη συνεχης στο $(0,0)$;
**Απ.** Ναι.

**1.3.18.** Δινεται η συναρτηση $\phi(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ για $(x,y) \neq (0,0)$ και $\phi(0,0) = 0$. Ειναι αυτη συνεχης στο $(0,0)$;
**Απ.** Ναι.

**1.3.19.** Δινεται η συναρτηση $\phi(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ για $(x,y) \neq (0,0)$ και $\phi(0,0) = 1$. Ειναι αυτη συνεχης στο $(0,0)$;
**Απ.** Οχι.

**1.3.20.** Δινεται η συναρτηση $\phi(x,y) = \frac{x^4-y^4}{x^4+y^4}$ για $(x,y) \neq (0,0)$ και $\phi(0,0) = 1$. Ειναι αυτη συνεχης στο $(0,0)$;
**Απ.** Οχι.

**1.3.21.** Να δειχτει οτι $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2} = \infty$.

**1.3.22.** Δινεται η συναρτηση $\phi(x,y) = \frac{x^4-y^4}{x^4+y^4}$ για $(x,y) \neq (0,0)$ και $\phi(0,0) = 1$. Ειναι αυτη συνεχης στο $(0,0)$;
**Απ.** Οχι.

**1.3.23.** Να υπολογιστει το οριο $\lim_{(x,y,z)\to(1,1,1)} \frac{x^2}{x+y+z}$
**Απ.** 1/3.

**1.3.24.** Να υπολογιστει το οριο $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2}{x+y+z}$
**Απ.** 0.

**1.3.25.** Να υπολογιστει το οριο $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}$
**Απ.** Δεν υπαρχει.

# Κεφάλαιο 2

# Παραγωγιση

## 2.1 Θεωρια

**2.1.1.** Η μερικη παραγωγος της $\phi(x,y)$ ως προς $x$ συμβολιζεται με $\frac{\partial\phi}{\partial x}$ ή και με $\phi_x$ και οριζεται ως εξης

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\phi(x+\Delta x,y)-\phi(x,y)}{\Delta x}.$$

Δηλ. η $\frac{\partial\phi}{\partial x}$ ειναι η παραγωγος της $\phi(x,y)$ ως προς $x$, αν θεωρησουμε την μεταβλητη $y$ σταθερη. Ομοια συμβολιζουμε την *μερικη παραγωγο* της $\phi(x,y)$ ως προς $y$ με $\frac{\partial\phi}{\partial y}$ ή $\phi_y$ και την οριζουμε ως εξης

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\phi(x,y+\Delta y,z)-\phi(x,y,z)}{\Delta y}.$$

**2.1.2.** Οριζουμε τις μερικες παραγωγους ανωτερης ταξης με αντιστοιχο τροπο. Π.χ.

$$\phi_{xx} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right), \qquad \phi_{yx} = \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)$$

$$\phi_{yy} = \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right), \qquad \phi_{xy} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right).$$

**2.1.3.** Αντιστοιχα πραγματα ισχυουν και για συναρτησεις τριων η περισσοτερων μεταβλητων. Π.χ. η $\phi(x,y,z)$ εχει μερικες παραγωγους πρωτης ταξης $\phi_x$, $\phi_y$, $\phi_z$· η $\phi(x_1,x_2,...,x_N)$ εχει τις $\frac{\partial\phi}{\partial x_1},...,\frac{\partial\phi}{\partial x_N}$ κτλ.

**2.1.4.** Επισης θα χρησιμοποιησουμε τον συμβολισμο των *διαφορικων τελεστων*. Ετσι, $D_x\phi=\phi_x$, $D_y\phi=\phi_y$, $D_{xx}=D_x^2\phi=\phi_{xx}$, $D_xD_y\phi=\phi_{xy}$ κτλ.

**2.1.5.** Οταν οι μεταβλητες $x,y$ υφιστανται μικρες μεταβολες, $\Delta x,\Delta y$, τοτε η συναρτηση $\phi(x,y)$ μεταβαλλεται προσεγγιστικα κατα

$$\Delta\phi = \phi(x+\Delta x,y+\Delta y)-\phi(x,y) \simeq \frac{\partial\phi}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\Delta y.$$

Στο οριο $\Delta x\to 0, \Delta y\to 0$ εχουμε μεταβολη ιση με το *διαφορικο* της $\phi(x,y)$ που ειναι

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy.$$

**2.1.6.** Μπορουμε να συνδυασουμε ολες τις μερικες παραγωγους της $\phi(x,y)$ σε μια *διανυσματικη* παραγωγο. Η *κλιση* της $\phi(x,y)$, συμβολιζεται $grad\phi$ και οριζεται ως εξησ:

$$grad\phi = \mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\phi}{\partial y}.$$

**2.1.7.** Αντιστοιχα, μπορουμε να συνδυασουμε ολες τις μερικες παραγωγους της $\phi(x,y,z)$ σε μια *διανυσματικη* παραγωγο, την *κλιση* της $\phi(x,y,z)$, που συμβολιζεται $grad\phi$ και οριζεται ως εξης:

$$grad\phi = \mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}.$$

**2.1.8.** Ο τελεστης *αναδελτα* συμβολιζεται με $\nabla$ και οριζεται ως εξης :

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + +\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} \text{ για συναρτησεις δυο μεταβλητων και}$$

$$\nabla= \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} \text{ για συναρτησεις τριων μεταβλητων}$$

**2.1.9.** Τοτε η κλιση της $\phi$ μπορει να γραφτει

$$grad\phi = \nabla\phi$$

**2.1.10.** Επισης το διαφορικο της $\phi$ μπορει να γραφτει στην μορφη

$$d\phi = \nabla\phi \cdot d\mathbf{r}$$

οπου, για συναρτησεις δυο μεταβλητων, εχουμε $\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y$ και $d\mathbf{r} = \mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy$ (για συναρτησεις τριων μεταβλητων εχοψυμε $\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$ και $d\mathbf{r} = \mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy + \mathbf{k}dz$). Δηλ. το $\mathbf{r}$ ειναι το *διανυσμα θεσης*.

**2.1.11.** Η κλιση εχει ιδιοτητες παρομοιες με αυτες της συνηθους παραγωγου. Π.χ. ισχυει οτι $\nabla(\phi\psi) = (\nabla\phi)\psi + \phi(\nabla\psi)$.

**2.1.12.** Γεωμετρικα, η $\frac{\partial\phi}{\partial x}$ δινει τον ρυθμο μεταβολης της $\phi(x,y)$ οταν το διανυσμα $(x,y)$ μεταβαλλεται κατα την κατευθυνση $x$.

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \lim_{|\Delta\mathbf{r}|\to 0} \frac{|\phi(x+\Delta x, y) - \phi|}{|\Delta x|}.$$

Αντιστοιχα πραγματα ισχυουν για τις $\frac{\partial\phi}{\partial y}$, $\frac{\partial\phi}{\partial z}$ κ.τ.λ.

**2.1.13.** Αν τωρα τα $x,y$ μεταβαλλονται ταυτοχρονως κατα την κατευθυνση του διανυσματος $\mathbf{v} = \mathbf{i}a + \mathbf{j}b$, τοτε ο ρυθμος μεταβολης (δηλ.η *παραγωγος*) της $\phi(x,y)$) *κατα την κατευθυνση* $\mathbf{v}$ ειναι

$$\frac{d\phi}{d\mathbf{v}} = \lim_{\Delta s\to 0} \frac{\phi(x + a\Delta s, y + b\Delta s) - \phi(x,y)}{\Delta s}$$

και δινεται απο την σχεση

$$\frac{d\phi}{d\mathbf{v}} = \nabla\phi \cdot \frac{\mathbf{v}}{||\mathbf{v}||}. \tag{2.1}$$

**2.1.14.** Η κατευθυνση κατα την οποια μεγιστοποιειται η $\frac{d\phi}{d\mathbf{v}}$ ειναι η $\nabla\phi$ και οταν $\mathbf{v} = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}$ τοτε εχουμε

$$\frac{d\phi}{d\mathbf{v}} = |\nabla\phi|.$$

**2.1.15.** Εστω οτι οριζεται μια επιφανεια στην πεπλεγμενη μορφη $\phi(x, y, z) = 0$. Τοτε ενα *καθετο διανυσμα στην επιφανεια*, στο σημειο $(x_0, y_o, z_0)$, ειναι το

$$\nabla\phi|_{(x,y,z)=(x_0,y_o,z_0)}.$$

Η καθετη ευθεια στην επιφανεια, στο σημειο $(x_0, y_o, z_0)$, εχει εξισωση

$$\frac{x - x_0}{\phi_x(x_0,y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{\phi_y(x_0,y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{\phi_z(x_0,y_0, z_0)}.$$

Το δε *εφαπτομενο επιπεδο στην επιφανεια*, στο σημειο $(x_0, y_o, z_0)$, εχει εξισωση

$$\phi_x(x_0,y_0, z_0) \cdot (x - x_0) + \phi_y(x_0,y_0, z_0) \cdot (y - y_0) + \phi_z(x_0,y_0, z_0) \cdot (z - z_0) = 0.$$

**2.1.16.** Η *Λαπλασιανη* της $\phi(x, y)$ οριζεται ως

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}$$

και της $\phi(x, y, z)$ οριζεται ως

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}.$$

## 2.2 Λυμενα Προβληματα

**2.2.1.** Να υπολογιστουν οι μερικες παραγωγοι πρωτης ταξης της $\phi(x, y) = x^2 \cdot e^{\,y+x^3}$.
**Λυση**. Εχουμε

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 \cdot e^{y+x^3}) = 2xe^{y+x^3} + x^2e^{y+x^3}(x^3)' = 2xe^{y+x^3} + 3x^4e^{y+x^3}$$
$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2 \cdot e^{y+x^3}) = x^2e^{y+x^3}(y)' = x^2e^{y+x^3}$$

**2.2.2.** Να υπολογιστουν οι μερικες παραγωγοι πρωτης ταξης της $\phi(x, y) = \frac{1}{y+x^3}$
**Λυση**. Εχουμε

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = -\frac{1}{(y + x^3)^2}(y + x^3)' = -\frac{3x^2}{(y + x^3)^2}$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{1}{(y + x^{3)^2}}(y)' = -\frac{1}{(y + x^{3)^2}}$$

**2.2.3.** Υπολογιστε τις μερικες παραγωγους πρωτης και δευτερης ταξης της $\phi(x,y) = x^3 + xy + y^3 + 4x^2$.

**Λυση.** Για τις πρωτης ταξης παραγωγους εχουμε

$$\begin{aligned} D_x\left(x^3+xy+y^3+4x^2\right) &= 3x^2+8x+y \\ D_y\left(x^3+xy+y^3+4x^2\right) &= 3y^2+x \end{aligned}$$

Για τις δευτερης ταξης παραγωγους εχουμε :

$$\begin{aligned} &D_{xx}\left(x^3+xy+y^3+4x^2\right) = D_x\left(D_x\left(x^3+xy+y^3+4x^2\right)\right) = D_x\left(3x^2+8x+y\right) = 6x+8 \\ &D_{yy}\left(x^3+xy+y^3+4x^2\right) = D_y\left(D_y\left(x^3+xy+y^3+4x^2\right)\right) = 6y \\ &D_{xy}\left(x^3+xy+y^3+4x^2\right) = D_y\left(D_x\left(x^3+xy+y^3+4x^2\right)\right) = 1 \\ &D_{yx}\left(x^3+xy+y^3+4x^2\right) = D_x\left(D_y\left(x^3+xy+y^3+4x^2\right)\right) = 1 \end{aligned}$$

Παρατηρουμε οτι $D_{xy}(x^3+xy+y^3+4x^2) = D_{yx}(x^3+xy+y^3+4x^2)$.

**2.2.4.** Υπολογιστε τις μερικες παραγωγους $\phi_x, \phi_y, \phi_{xx}, \phi_{yy}, \phi_{xy}$ της $\phi(x,y) = x^2\sin(x+y)$.

$$\begin{aligned} &D_x\left(x^2\sin(x+y)\right) = 2x\sin(x+y) + x^2\cos(x+y), \quad D_y\left(x^2\sin(x+y)\right) = x^2\cos(x+y) \\ &D_{xx}\left(x^2\sin(x+y)\right) = D_x\left(2x\sin(x+y)+x^2\cos(x+y)\right) = 2\sin(x+y)+4x\cos(x+y)-x^2\sin(x+y) \\ &D_{yy}\left(x^2\sin(x+y)\right) = D_y\left(x^2\cos(x+y)\right) = -x^2\sin(x+y) \\ &D_{xy}\left(x^2\sin(x+y)\right) = D_y\left(2x\sin(x+y)+x^2\cos(x+y)\right) = 2x\cos(x+y)-x^2\sin(x+y) \\ &D_{yx}\left(x^2\sin(x+y)\right) = D_x\left(x^2\cos(x+y)\right) = 2x\cos(x+y)-x^2\sin(x+y) \end{aligned}$$

**2.2.5.** Υπολογιστε το το διαφορικο της $\phi(x,y) = x + 2y$

**Λυση**. Εχουμε

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy = dx + 2dy.$$

**2.2.6.** Υπολογιστε το το διαφορικο της $\phi(x,y) = x^2 + y^3$

**Λυση**. Εχουμε

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy = 2xdx + 3y^2dy.$$

**2.2.7.** Υπολογιστε το το διαφορικο της $\phi(x,y,z) = x^2 + y^3 + z^4$

**Λυση.** Εχουμε

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz = 2xdx + 3y^2dy + 4z^3dz.$$

**2.2.8.** Υπολογιστε το το διαφορικο της $\phi(x,y,z) = \sin(x + y^2 + z^3)$

**Λυση**. Εχουμε

$$\begin{aligned} d\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz \\ &= -\sin\left(y^2+z^3+x\right)dx - 2y\sin\left(y^2+z^3+x\right)dy - 3z^2\sin\left(y^2+z^3+x\right)dz. \end{aligned}$$

**2.2.9.** Να υπολογιστει το $\Delta\phi$ και το $d\phi$ στο $(x, y) = (x_0, y_0)$ για $\phi(x, y) = x^3 + y^2$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$ και (α) για $\Delta x = 0.1$, $\Delta y = 0.1$ (β) για $\Delta x = 0.01$, $\Delta y = 0.01$.

**Λυση.** Εχουμε

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy = 3x^2dx + 2ydy.$$

Αυτο το αποτελεσμα ειναι το ιδιο για τις περιπτωσεις (α) και (β). Τωρα, στην περιπτωση (α) εχουμε $\Delta x = \Delta y = 0.1$ και

$$\Delta\phi = \phi(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - \phi(x_0, y_0) = \left(1.1^3 + 1.1^2\right) - \left(1^3 + 1^2\right) = 0.541\,.$$

Στην περιπτωση (β) εχουμε $\Delta x = \Delta y = 0.01$ και

$$\Delta\phi = \phi(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - \phi(x_0, y_0) = \left(1.01^3 + 1.01^2\right) - \left(1^3 + 1^2\right) = 0.504\,.$$

Η προσεγγιση με το διαφορικο δινει

$$d\phi(\Delta x = 0.1, \Delta y = 0.1) = 3x^2\Delta x + 2y\Delta y = 0.3 + 0.2 = 0.5.$$

Βλεπουμε λοιπον οτι, οταν τα $\Delta x, \Delta y$ ειναι μικροτερα, η προσεγγιση του $\Delta\phi$ απο το $d\phi$ ειναι καλυτερη (εχει μικροτερο σφαλμα).

**2.2.10.** Να υπολογιστει το $\Delta\phi$ και το $d\phi$ στο $(x, y) = (x_0, y_0)$ για $\phi(x, y) = \sin(x + y)$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$, $\Delta x = 0.1$, $\Delta y = 0.2$

**Λυση**. Εχουμε

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= \sin(0.1 + 0.2) - \sin(0.0 + 0.0) = 0.295\,52 - 0 = 0.295\,52\\ d\phi &= \cos(x + y)\cdot\Delta x + \cos(x + y)\cdot\Delta y = \cos(0)\cdot 0.1 + \cos(0)\cdot 0.2 = 0.3.\end{aligned}$$

**2.2.11.** Να υπολογιστει η κλιση των παρακατω συναρτησεων.

1. $\operatorname{grad}\phi$ για $\phi = x^2 + y^3$. Εδω ειναι

$$\operatorname{grad}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} = 2x\mathbf{i} + 3y^2\mathbf{j}.$$

2. $\operatorname{grad}\phi$ για $\phi = x^2y^3z$. Εδω ειναι

$$\operatorname{grad}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k} = 2xy^3z\mathbf{i} + 3xy^2z\mathbf{j} + x^2y^2\mathbf{k}.$$

3. $\operatorname{grad}\phi$ για $\phi = x^2e^{\,y+x^3}$. Εδω ειναι

$$\operatorname{grad}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} = (2xe^{y+x^3} + 3x^4e^{y+x^3})\mathbf{i} + (x^2e^{y+x^3})\mathbf{j}$$

4. $\operatorname{grad}\phi$ για $\phi = x^2ye^{\,zy}$. Εδω ειναι

$$\operatorname{grad}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k} = (2xye^{zy})\mathbf{i} + (x^2e^{zy} + x^2ye^{zy})\mathbf{j} + (x^2ye^{zy})\mathbf{k}$$

5. $\operatorname{grad}\phi$ για $\phi = \frac{1}{y+x^3}$. Εδω ειναι

$$\operatorname{grad}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} = [-\frac{1}{(y+x^3)^2}(x^3)']\mathbf{i}+[-\frac{1}{(y+x^3)^2}(y)']\mathbf{j} = -\frac{3x^2}{(y+x^3)^2}\mathbf{i}-\frac{1}{(y+x^3)^2}\mathbf{j}$$

**2.2.12.** Να βρεθει η κλιση $\nabla\phi$ και να υπολογιστει η τιμη της στο σημειο $(x,y) = (2,3)$ για $\phi(x,y) = y\sin x + \frac{x}{y}$

**Λυση.** Εχουμε $\nabla\phi(x,y) = \mathbf{i}\left(y\cos x + \frac{1}{y}\right)+\mathbf{j}\left(\sin x - \frac{x}{y^2}\right)$ και $\nabla\phi(2,3) = \mathbf{i}\left(3\cos 2 + \frac{1}{3}\right)+ \mathbf{j}\left(\sin 2 - \frac{2}{9}\right)$.

**2.2.13.** Να βρεθει η κλιση $\nabla\phi$ και να υπολογιστει η τιμη της στο σημειο $(x,y,z) = (1,1,1)$ για $\phi(x,y,z) = x^2y^3z$

**Λυση.** Εχουμε ηδη υπολογισει οτι $\nabla\phi = \mathbf{i}2xy^3z + \mathbf{j}3x^2y^2z + \mathbf{k}x^2y^3$ . Στο $(1,1,1)$ θα ειναι $\nabla\phi(1,1,1) = \mathbf{i}2 + \mathbf{j}3 + \mathbf{k}$.

**Απ**. $6\cos(x^2+y^2+z^2) - 4(\sin(x^2+y^2+z^2))x^2 - 4(\sin(x^2+y^2+z^2))y^2 - 4(\sin(x^2+y^2+z^2))z^2$).

**2.2.14.** Αποδειξτε οτι $d\phi = \nabla\phi\cdot d\mathbf{r}$.

**Λυση**. Πραγματι, αν $\nabla\phi = \mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\phi}{\partial y}$ και $d\mathbf{r} = \mathbf{i}dx + \mathbf{j}dy$ , τοτε το εσωτερικο γινομενο ειναι

$$\nabla\phi\cdot d\mathbf{r} = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy = d\phi.$$

Αναλογη ειναι αποδειξη οταν η $\phi$ ειναι συναρτηση τριων μεταβλητων.

**2.2.15.** Αν $\mathbf{c}$ ειναι σταθερο διανυσμα, να δειχτει οτι $\nabla(\mathbf{c}\cdot\mathbf{r}) = \mathbf{c}$.

**2.2.16. Λυση**. Πραγματι, αν $\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y$ και $\mathbf{c} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ , τοτε

$$\nabla(\mathbf{c}\cdot\mathbf{r}) = \nabla(ax+by) = \mathbf{i}D_x(ax+by) + \mathbf{j}D_y(ax+by) = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} = \mathbf{c}.$$

**2.2.17.** Δινονται παραγωγισιμες συναρτησεις $P(x,y)$, $Q(x,y)$. Να δειχτει οτι

$$(\exists\phi : P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = d\phi) \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

**2.2.18. Λυση**. Εστω οτι υπαρχει $\phi$ τετοια ωστε

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = d\phi.$$

Ομως, *για καθε* $dx, dy$, ισχυει και οτι

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy$$

Αρα θα εχουμε

$$P = \frac{\partial\phi}{\partial x} \text{ και } Q = \frac{\partial\phi}{\partial y}$$

οποτε εχουμε

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

**2.2.19.** Να υπολογιστει η παραγωγος της $\phi = xy$ στο σημειο $A(1,2)$ και κατα την κατευθυνση $\mathbf{n} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

**Λυση**. Το $\mathbf{n}$ εχει μετρο $|\mathbf{n}| = \sqrt{9+16} = 5$. Οποτε

$$\frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} = \frac{2}{\sqrt{8}}\mathbf{i} + \frac{2}{\sqrt{8}}\mathbf{j} + 0 \text{ και μοναδιαιο διανυσμα } \mathbf{n}_o = \left(\frac{2}{\sqrt{8}}, \frac{2}{\sqrt{8}}, 0\right).$$

Επισης $\nabla\phi = (\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}) = (2xy^2, 2yx^2, -\sin z)$ και $\nabla\phi|_{1,1,0} = (2,2,0)$. Οποτε

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{d\mathbf{n}} &= \nabla\phi(x_o, y_o, z_o) \cdot \mathbf{n}_o \\ &= (2,2,0) \cdot (\frac{2}{\sqrt{8}}, \frac{2}{\sqrt{8}}, 0) = \frac{4}{\sqrt{8}} + \frac{4}{\sqrt{8}} \\ &= \frac{8}{\sqrt{8}} = \frac{8}{\sqrt{4\cdot 2}} = \frac{8}{2\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

**2.2.20.** Να υπολογιστει η παραγωγος της $\phi = y^2x^2 + \cos z$ στο σημειο $A(1,1,0)$ και κατα την κατευθυνση $\mathbf{n} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$+$0\mathbf{k}$.

**Λυση**. Το $\mathbf{n}$ εχει μετρο $|\mathbf{n}| = \sqrt{2^2+2^2+0} = \sqrt{8}$. Οποτε

$$\frac{\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|} = \frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{3}{5}\mathbf{j} \text{ και μοναδιαιο διανυσμα } \mathbf{n}_o = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5}).$$

Επισης $\nabla\phi = \mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} = \mathbf{i}y + \mathbf{j}x$ και $\nabla\phi|_{1,2} = (2,1)$. Οποτε

$$\frac{d\phi}{d\mathbf{n}} = \nabla\phi(x_o, y_o) \cdot \mathbf{n}_o = (2,1) \cdot (\frac{3}{5}, \frac{4}{5}) = \frac{6}{5} + \frac{4}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

**2.2.21.** Υπολογιστε την παραγωγο κατα κατευθυνση της $\phi = xyz$ στο σημειο $(1,2,3)$ και κατα την κατευθυνση προς το σημειο $(2,3,2)$.

**Λυση.** Εχουμε

$$\nabla\phi(x,y,z) = \mathbf{i}yz + \mathbf{j}xz + \mathbf{k}xy$$

και

$$\nabla\phi(1,2,3) = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

Επισης το διανυσμα απο το $A\,(5,1,2)$ προς το $B\,(9,4,14)$ ειναι

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{n} = \mathbf{i}\,(2-1) + \mathbf{j}\,(3-2) + \mathbf{k}\,(2-3) = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$$

και το μοναδιαιο διανυσμα ειναι

$$\mathbf{n}_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} - \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}.$$

Οποτε η παραγωγος ειναι

$$\frac{d\phi}{d\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,(6\cdot 1 + 3\cdot 1 - 2\cdot 1) = \frac{7}{13}.$$

**2.2.22.** Υπολογιστε την παραγωγο κατα κατευθυνση της $u = x^2 + y^2 + z^2$ στο σημειο $(1,1,1)$ και κατα την κατευθυνση προς το σημειο $(0,1,1)$.

**Λυση.** Εχουμε

$$\nabla\phi(x,y,z) = \mathbf{i}2x + \mathbf{j}2y + \mathbf{k}2z$$

και

$$\nabla\phi(1,1,1) = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}.$$

Επισης το διανυσμα απο το $A\,(1,1,1)$ προς το $B\,(0,1,1)$ ειναι

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{n} = \mathbf{i}\,(0-1) + \mathbf{j}\,(1-1) + \mathbf{k}\,(1-1) = \mathbf{i}$$

το οποιο ειναι μοναδιαιο: $\mathbf{n} = \mathbf{n}_0$. Οποτε η παραγωγος ειναι

$$\frac{d\phi}{d\mathbf{n}} = (2\cdot 1 + 2\cdot 0 + 2\cdot 0) = 2.$$

Αυτη ειναι η $\phi_x\,(1,1,1)$ (γιατι;).

**2.2.23.** Υπολογιστε την παραγωγο κατα κατευθυνση της $\phi = \frac{1}{r^2} = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$ σε τυχον σημειο και κατα την κατευθυνση $\nabla\phi$.

**Λυση.** Με αλλα λογια το ζητουμενο ειναι το μετρο $\|\nabla\phi\|$ (γιατι;). Εχουμε δε

$$\nabla\phi = \frac{-2x}{(x^2+y^2+z^2)^2}\mathbf{i} + \frac{-2y}{(x^2+y^2+z^2)^2}\mathbf{j} + \frac{-2z}{(x^2+y^2+z^2)^2}\mathbf{k}$$

οποτε η ζητουμενη παραγωγος ειναι $\sqrt{\frac{4x^2+4y^2+4z^2}{(x^2+y^2+z^2)^4}}$

$$\frac{d\phi}{d\mathbf{n}} = \|\nabla\phi\| = \sqrt{\frac{4x^2+4y^2+4z^2}{(x^2+y^2+z^2)^4}} = \frac{2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{2}{r^3}.$$

**2.2.24.** Να υπολογιστει το εφαπτομενο επιπεδο και η καθετη ευθεια, στην επιφανεια $x^2 + 2y^2 - z = 0$ στο σημειο $(3,1,2)$.

**Λυση**. Στο τυχον σημειο $(x,y,z)$ η επιφανεια εχει καθετο διανυσμα

$$\mathbf{n} = \mathbf{i}\phi_x + \mathbf{j}\phi_{\mathbf{y}} + \mathbf{k}\phi_z = \mathbf{i}2x + \mathbf{j}4y - \mathbf{k}.$$

και στο σημειο $(3,1,2)$ εχει καθετο διανυσμα

$$\mathbf{n}_1 = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}.$$

Οποτε η καθετη υθεια εχει εξισωσεις

$$\frac{x-3}{6} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{-1}.$$

και το εφαπτομενο επιπεδο εχει εξισωση

$$6\,(x-3) + 4\,(y-1) - (z-2) = 0$$

δηλ.

$$6x + 4y - z - 20 = 0.$$

**2.2.25.** Να υπολογιστει το εφαπτομενο επιπεδο και η καθετη ευθεια, στην επιφανεια $xyz = a^3$ στο σημειο $(x_0, y_0, z_0)$.

**Λυση**. Στο τυχον σημειο $(x_0, y_0, z_0)$ η επιφανεια εχει καθετο διανυσμα

$$\mathbf{n} = \mathbf{i}\phi_x + \mathbf{j}\phi_\mathbf{y} + \mathbf{k}\phi_z = \mathbf{i}y_0z_0 + \mathbf{j}x_0z_0 + \mathbf{k}x_0y_0.$$

Οποτε η καθετη υθεια εχει εξισωσεις

$$\frac{x - x_0}{y_0z_0} = \frac{y - y_0}{x_0z_0} = \frac{z - z_0}{x_0y_0}.$$

και το εφαπτομενο επιπεδο εχει εξισωση

$$y_0z_0\,(x - x_0) + x_0z_0\,(y - y_0) + x_0y_0\,(z - z_0) = 0$$

δηλ.

$$xy_0z_0 + yx_0z_0 + zx_0z_0 - 3x_0y_0z_0 = 0$$

ή και

$$xy_0z_0 + yx_0z_0 + zx_0z_0 3a^3$$

(αφου $(x_0, y_0, z_0)$ ειναι σημειο της επιφανειας θα ικανοποιει την εξισωση $xyz = a^3$).

**2.2.26.** Να υπολογιστει το εφαπτομενο επιπεδο και η καθετη ευθεια, στην επιφανεια $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ στο σημειο $(1, 1, 2)$.

**Λυση**. Στο τυχον σημειο $(x, y, z)$ η επιφανεια εχει καθετο διανυσμα

$$\mathbf{n} = \mathbf{i}\phi_x + \mathbf{j}\phi_\mathbf{y} + \mathbf{k}\phi_z = \mathbf{i}\frac{2x}{a^2} + \mathbf{j}\frac{2y}{b^2} + \mathbf{k}\frac{2z}{c^2}.$$

και στο σημειο $(1, 1, 2)$ εχει καθετο διανυσμα

$$\mathbf{n}_1 = \mathbf{i}\frac{2}{a^2} + \mathbf{j}\frac{2}{b^2} + \mathbf{k}\frac{4}{c^2}.$$

Οποτε η καθετη ευθεια εχει εξισωσεις

$$\frac{x - 1}{2/a^2} = \frac{y - 1}{2/b^2} = \frac{z - 2}{4/c^2}.$$

και το εφαπτομενο επιπεδο εχει εξισωση

$$\frac{2}{a^2}\,(x - 1) + \frac{2}{b^2}\,(y - 1) + \frac{4}{c^2}\,(z - 2) = 0$$

δηλ.

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} + \frac{4z}{c^2} - \left(\frac{2}{a^2} + \frac{2}{b^2} + \frac{8}{c^2}\right) = 0.$$

**2.2.27.** Να υπολογιστει η Λαπλασιανη των παρακατω συναρτησεων.

1. $\nabla^2\phi$ για $\phi = x^2 e^{\ y+x^3}$. Εδω ειναι

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial \phi}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial \phi}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial x}(2xe^{y+x^3} + 3x^4 e^{y+x^3}) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2 e^{y+x^3})$$
$$= 2e^{y+x^3} + 6x^3 e^{y+x^3} + 12x^3 e^{y+x^3} + 9x^6 e^{y+x^3} + x^2 e^{y+x^3}$$

2. $\nabla^2\phi$ για $\phi = e^{\ x+y+z^3}$. Εδω ειναι

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial}{\partial x}(e^{x+y+z^3}) + \frac{\partial}{\partial y}(2ye^{x+y+z^3}) + \frac{\partial}{\partial z}(3z^2 e^{x+y+z^3})$$
$$= e^{x+y+z^3} + 2e^{x+y+z^3} + 4y^2 e^{x+y+z^3} + 6ze^{x+y+z^3} + 9z^4 e^{x+y+z^3}$$
$$= 3e^{x+y+z^3} + 4y^2 e^{x+y+z^3} + 6ze^{x+y+z^3} + 9z^4 e^{x+y+z^3}$$

3. $\nabla^2\phi$ για $\phi = \frac{1}{y+x^3}$, οποτε

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial \phi}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial \phi}{\partial y}) = \frac{\partial}{\partial x}(-\frac{3x^2}{(y+x^3)^2}) + \frac{\partial}{\partial y}(-\frac{1}{(y+x^{3)^{2}}})$$
$$= \frac{-6x^2(y+x^3+6x^2(y+x^3)3x^2}{(y+x^{3)4}} + \frac{2(y+x^3)3x^2}{(y+x^3)^4}$$
$$= \frac{-6(y+x^3)^2 + 18x(y+x^3) + 6x^2(y+x^3)}{(y+x^3)^4} = \frac{-6(y+x^3) + 18x^4 + 6x^2}{(y+x^3)^3}$$

4. $\nabla^2\phi$ για $\phi = \frac{1}{x+y^2+z^3}$, οποτε

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial \phi}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial \phi}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\frac{\partial \phi}{\partial z})$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}(-\frac{1}{(x+y^2+z^3)^2}) + \frac{\partial}{\partial y}(-\frac{2y}{(x+y^2+z^3)^2}) + \frac{\partial}{\partial z}(-\frac{3z^2}{(x+y^2+z^3)^2})$$
$$= \frac{2}{(x+y^2+z^3)^3} - \frac{2(x+y^2+z^3)^2}{(x+y^2+z^3)^4} + \frac{8y^2(x+y^2+z^3)}{(x+y^2+z^3)^4} - \frac{6z(x+y^2+z^3)}{(x+y^2+z^3)^4} + \frac{18z^4(x+y^2+z^3)}{(x+y^2+z^3)^4}$$
$$= \frac{2}{(x+y^2+z^3)^3} - \frac{2}{(x+y^2+z^3)^2} + \frac{8y^2}{(x+y^2+z^3)^3} - \frac{6z}{(x+y^2+z^3)^3} + \frac{18z^4}{(x+y^2+z^3)^3}$$

## 2.3 Αλυτα Προβληματα

**2.3.1.** Υπολογιστε τις μερικες παραγωγους $\phi_x$, $\phi_y$, $\phi_{xx}$, $\phi_{yy}$, $\phi_{xy}$ της $\phi(x,y) = x^2 + 2xy + y^3 + 4x$.

**Απ.** $2x + 2y + 4$, $3y^2 + 2x$, $2$, $6y$, $2$.

**2.3.2.** Υπολογιστε τις μερικες παραγωγους $\phi_x$, $\phi_y$, $\phi_{xx}$, $\phi_{yy}$, $\phi_{xy}$ της $\phi(x,y) = x^2 \sin(x+y)$.

**Απ.** $2x\sin(x+y) + x^2\cos(x+y)$, $x^2\cos(x+y)$, $2\sin(x+y) + 4x\cos(x+y) - x^2\sin(x+y)$, $-x^2\sin(x+y)$, $2x\cos(x+y) - x^2\sin(x+y)$.

**2.3.3.** Υπολογιστε τις μερικες παραγωγους $\phi_x$, $\phi_y$, $\phi_{xx}$, $\phi_{yy}$, $\phi_{xy}$ της $\phi(x,y) = \frac{x+y}{xy-1}$.
**Απ.** $x^2 \sin(x+y)$

**2.3.4.** Υπολογιστε τις μερικες παραγωγους $\phi_x$, $\phi_y$, $\phi_{xx}$, $\phi_{yy}$, $\phi_{xy}$ της $\phi(x,y) = x^2 \sin(x+y)$.
**Απ.** $-\frac{1}{(xy-1)^2}(y^2+1)$, $-\frac{1}{(xy-1)^2}(x^2+1)$, $2\frac{y}{(xy-1)^3}(y^2+1)$, $2\frac{x}{(xy-1)^3}(x^2+1)$, $\frac{2(x+y)}{(xy-1)^3}$.

**2.3.5.** Υπολογιστε τις μερικες παραγωγους $\phi_x$, $\phi_y$, $\phi_z$, $\phi_{yy}$, $\phi_{xy}$ της $\phi(x,y,z) = x^3yz + y^2z^3 + \cos(xyz)$.
**Απ.** $-yz(\sin xyz - 3x^2)$, $x^3z + 2yz^3 - xz\sin xyz$, $x^3y + 3y^2z^2 - xy\sin xyz$.

**2.3.6.** Υπολογιστε τις μερικες παραγωγους $\phi_x$, $\phi_y$, $\phi_z$, $\phi_{yy}$, $\phi_{xy}$ της $\phi(x,y,z) = ze^{\sin(x+y)}$.
**Απ.** $z(\cos(x+y))e^{\sin(x+y)}$, $z(\cos(x+y))e^{\sin(x+y)}$, $e^{\sin(x+y)}$.

**2.3.7.** Υπολογιστε την μερικη παραγωγο $\frac{\partial\phi}{\partial x}$ και την ολικη παραγωγο $\frac{d\phi}{dx}$ αν $\phi(x,y) = x^2 + y^2$ και $y(x) = x^3$.
**Απ.** $\frac{\partial\phi}{\partial x} = 2x$, $\frac{d\phi}{dx} = 2x + 6x^5$.

**2.3.8.** Υπολογιστε το διαφορικο της $\phi(x,y) = x^2\sin(x+y)$.
**Απ.** $d\phi = (2x\sin(x+y) + x^2\cos(x+y))\,dx + x^2\cos(x+y)\,dy$.

**2.3.9.** Υπολογιστε το το διαφορικο της $\phi(x,y) = x^3y + x^2y^2$.
**Απ.** $d\phi = (3x^2y + 2xy^2)\,dx + (x^3 + 2yx^2)\,dy$.

**2.3.10.** Υπολογιστε το το διαφορικο της $\phi(x,y,z) = x + y + z$
**Απ.** $d\phi = dx + dy + dz$.

**2.3.11.** Υπολογιστε το το διαφορικο της $\phi(x,y,z) = x^2y^3z^4$
**Απ.** $d\phi = 2xy^3z^4dx + 3x^2y^2z^4dy + 4x^2y^3z^3dz$.

**2.3.12.** Υπολογιστε το το διαφορικο της $\phi(x,y,z) = \cos(x + y^2 + z^3)$
**Απ.** $d\phi = -\sin(y^2+z^3+x)\,dx - 2y\sin(y^2+z^3+x)\,dy - 3z^2\sin(y^2+z^3+x)\,dz$.

**2.3.13.** Να υπολογιστει το $\Delta\phi$ και το $d\phi$ στο $(x,y) = (x_0,y_0)$ για $\phi(x,y) = x^2y^2$, $(x_0,y_0) = (1,1)$, $\Delta x = 0.1$, $\Delta y = 0.1$
**Απ.** $\Delta\phi = 0.464$, $d\phi = 0.4$.

**2.3.14.** Να υπολογιστει το $\Delta\phi$ και το $d\phi$ στο $(x,y) = (x_0,y_0)$ για $\phi(x,y) = \sin(x^2+y^2)$, $(x_0,y_0) = (0,0)$, $\Delta x = 0.1$, $\Delta y = 0.1$
**Απ.** $\Delta\phi = 0.01\,999\,9$, $d\phi = 0.399\,92$.

**2.3.15.** Να βρεθει η κλιση $\nabla\phi$ και να υπολογιστει η τιμη της στο σημειο $(x,y,z) = (1,1,1)$ για $\phi(x,y,z) = x^2y^3z$
**Απ.** $\mathbf{i}2xy^3z + \mathbf{j}3x^2y^2z + \mathbf{k}x^2y^3$ και $\mathbf{i}2 + \mathbf{j}3 + \mathbf{k}$.

**2.3.16.** Να βρεθει η κλιση $\nabla\phi$ και να υπολογιστει η τιμη της στο σημειο $(x,y,z) = (1,1,1)$ για $\phi(x,y,z) = yz\sin x + \frac{x}{y}\ln z$
**Απ.** $\mathbf{i}\left(yz\cos x + \frac{1}{y}\ln z\right) + \mathbf{j}\left(z\sin x - \frac{x}{y^2}\ln z\right) + \mathbf{k}\left(y\sin x + \frac{x}{yz}\right)$ και $\mathbf{i}\cos 1 + \mathbf{j}\sin 1 + \mathbf{k}(\sin 1 + 1)$.

**2.3.17.** Να βρεθει η κλιση $\nabla\phi$ και να υπολογιστει η τιμη της στο σημειο $(x,y,z) = (1,1,1)$ για $\phi(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}$.
**Απ.** $-\mathbf{i}\frac{2x}{(x^2+y^2+z^2)^2} - \mathbf{j}\frac{2y}{(x^2+y^2+z^2)^2} - \mathbf{k}\frac{2z}{(x^2+y^2+z^2)^2}$ και $-\mathbf{i}\frac{2}{9} - \mathbf{j}\frac{2}{9} - \mathbf{k}\frac{2}{9}$.

**2.3.18.** Να βρεθει η κλιση $\nabla\phi$ και να υπολογιστει η τιμη της στο σημειο $(x,y,z) = (1,1,1)$ για $\phi(x,y,z) = \ln(x^2+y^2+z^2)$
**Απ.** $\mathbf{i}\frac{2x}{x^2+y^2+z^2} + \mathbf{j}\frac{2y}{x^2+y^2+z^2} + \mathbf{k}\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}$ και $\mathbf{i}\frac{2}{9} + \mathbf{j}\frac{2}{9} + \mathbf{k}\frac{2}{9}$).

**2.3.19.** Δινεται η $\phi(x,y,z) = x^2 + xyz^3 + 2y^2 z$ . Να υπολογιστει η $\nabla^2\phi$.
**Απ.** $2 + 4z + 6xyz$.

**2.3.20.** Δινεται η $\phi(x,y,z) = \sin(x^2+y^2+z^2)$ . Να υπολογιστει η $\nabla^2\phi$.
**Απ.** $6\cos(x^2+y^2+z^2) - 4(\sin(x^2+y^2+z^2))x^2 - 4(\sin(x^2+y^2+z^2))y^2 - 4(\sin(x^2+y^2+z^2))z^2$).

**2.3.21.** Να βρεθει η παραγωγος της $\phi(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ κατα την κατευθυνση $2\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$ στο σημειο $(-1,3,2)$.
**Απ.** $-\frac{1}{3}\sqrt{6}$.

**2.3.22.** Υπολογιστε την παραγωγο κατα κατευθυνση της $z = x^3 - 3x^2y + 3xy^2$ στο σημειο $(3,1)$ και κατα την κατευθυνση προς το σημειο $(6,5)$.
**Απ.** 0.

**2.3.23.** Υπολογιστε την παραγωγο κατα κατευθυνση της $z = \tan^{-1}(xy)$ στο σημειο $(1,1)$ και κατα την κατευθυνση $\mathbf{i}+\mathbf{j}$.
**Απ.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**2.3.24.** Υπολογιστε την παραγωγο κατα κατευθυνση της $z = x^2y^2 - xy^3 - 3y - 1$ στο σημειο $(2,1)$ και κατα την κατευθυνση που οδηγει στο $(0,0)$.
**Απ.** $-\sqrt{5}$.

**2.3.25.** Υπολογιστε την παραγωγο κατα κατευθυνση της $z = \ln(e^x+e^y)$ στο σημειο $(0,0)$ και κατα την κατευθυνση του διανυσματος που σχηματιζει γωνια $\phi$ με τον αξονα των $x$.
**Απ.** $\frac{\cos\phi+\sin\phi}{2}$.

**2.3.26.** Να βρεθει η παραγωγος της $u(x,y,z) = xyz$ κατα την κατευθυνση $\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}$ στο σημειο $(-1,3,2)$.
**Απ.** $\frac{11}{3}\sqrt{3}$.

**2.3.27.** Υπολογιστε την παραγωγο κατα κατευθυνση της $u = xy^2 + z^3 - xyz$ στο σημειο $(1,1,2)$ και κατα την κατευθυνση που σχηματιζει με τους αξονες γωνιες $\pi/3, \pi/4, \pi/3$.
**Απ.** 5.

**2.3.28.** Υπολογιστε την παραγωγο κατα κατευθυνση της $u = xyz$ στο σημειο $(5,1,2)$ και κατα την κατευθυνση προς το σημειο $(9,4,14)$.
**Απ.** $\frac{98}{13}$.

**2.3.29.** Υπολογιστε την παραγωγο κατα κατευθυνση της $u = x^2y^2z^2$ στο σημειο $(1,-1,3)$ και κατα την κατευθυνση προς το σημειο $(0,1,1)$.
**Απ.** $-22$.

**2.3.30.** Υπολογιστε την παραγωγο κατα κατευθυνση της $u = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ σε τυχον σημειο και κατα την κατευθυνση $\nabla u$.

**Απ.** $\frac{1}{r^2}$.

**2.3.31.** Να υπολογιστει το εφαπτομενο επιπεδο στην επιφανεια $z = x^2 + 2y^2$ στο σημειο $(1, 1, 3)$.

**Απ**. $2x + 4y - z = 3$.

**2.3.32.** Να υπολογιστει το εφαπτομενο επιπεδο στην επιφανεια $xy = z^2$ στο σημειο $(x_0, y_0, z_0)$.

**Απ**. $xy_0 + yx_0 = 2zz_0$.

**2.3.33.** Να υπολογιστει το εφαπτομενο επιπεδο στην επιφανεια $xyz = a^3$ στο σημειο $(x_0, y_0, z_0)$.

**Απ**. $xy_0z_0 + yx_0z_0 + zx_0z_0 = 3a^3$.

**2.3.34.** Να υπολογιστει το εφαπτομενο επιπεδο στην επιφανεια $\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ στο σημειο $(x_0, y_0, z_0)$.

**Απ**. $\frac{zz_0}{c^2} - \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

**2.3.35.** Να δειχτει οτι αν $F\left(\frac{x}{y}, \frac{z}{y}\right) = 0$, τοτε $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$.

**2.3.36.** Να δειχτει οτι αν $F\left(x + y - z, x^2 + y^2\right) = 0$, τοτε $x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = x - y$.

**2.3.37.** Να δειχτει οτι $\nabla^2\left(\frac{1}{|\mathbf{r}|}\right) = 0$.

**2.3.38.** Να δειχτει οτι $\nabla^2\left(\frac{1}{|\mathbf{r}|^2}\right) = \frac{2}{|\mathbf{r}|^4}$.

**2.3.39.** Να δειχτει οτι $\nabla^2(\phi\psi) = \psi\nabla^2\phi + 2\nabla\phi\cdot\nabla\psi + \phi\nabla^2\psi$.

**2.3.40.** Αν $\mathbf{c}$ ειναι σταθερο διανυσμα, να δειχτει οτι $\nabla(\mathbf{c}\times\mathbf{r}) = \mathbf{c}$.

**2.3.41.** Δινονται παραγωγισιμες συναρτησεις $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$. Να δειχτει οτι

$$\left(\exists\phi : P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz = d\phi\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \\ \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial z} \end{cases}.$$

**2.3.42.** Μια συναρτηση $\phi$ λεγεται αρμονικη ανν $\nabla^2\phi = 0$. Δειξτε οτι οι παρακατ συναρτησεις ειναι αρμονικες.

1. $\phi(x,y) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$.
2. $\phi(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.
3. $\phi(x,y,z) = \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$.
4. $\phi(x,y,z) = -\ln\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2} + z\right)$
5. $\phi(x,y,z) = \frac{x}{x^2+y^2}$ (ως συναρτηση *τριων μεταβλητων!*).

# Κεφάλαιο 3

# Αλυσωτη και Πεπλεγμενη Παραγωγιση

## 3.1 Θεωρια

**3.1.1.** Δινεται συναρτηση $\phi(x, y)$ και υποθετουμε οτι οι $x, y$ ειναι συναρτησεις μιας αλλης μεταβλητης $t$: $x(t), y(t)$. Τοτε και η $\phi$ ειναι συναρτηση της $t$: $\phi(x(t), y(t))$. Η παραγωγος της $\phi$ ως προς $t$ λεγεται *ολικη παραγωγος* και ειναι

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{dt} \tag{3.1}$$

η και

$$\frac{d\phi}{dt} = \nabla\phi \cdot \left(\mathbf{i}\frac{dx}{dt} + \mathbf{j}\frac{dy}{dt}\right).$$

**3.1.2.** Παρομοια, για συναρτησεις $\phi(x, y, z)$ και $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ εχουμε

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{dt} &= \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{dz}{dt} \\ \frac{d\phi}{dt} &= \nabla\phi \cdot \left(\mathbf{i}\frac{dx}{dt} + \mathbf{j}\frac{dy}{dt} + \mathbf{k}\frac{dz}{dt}\right).\end{aligned}$$

**3.1.3.** Παρομοια, εστω οτι δινεται συναρτηση $\phi(x, y)$ και υποθετουμε οτι οι $x, y$ ειναι συναρτησεις αλλων μεταβλητων $u, v$: $x(u, v)$, $y(u, v)$. Τοτε

$$\frac{\partial\phi}{\partial u} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial\phi}{\partial v} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}, \tag{3.2}$$

η και (με συμβολισμο πινακων)

$$\frac{\partial\phi}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \end{bmatrix}, \qquad \frac{\partial\phi}{\partial v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}.$$

**3.1.4.** Παρομοια, εστω οτι δινεται συναρτηση $\phi(x, y, z)$ και υποθετουμε οτι οι $x, y, z$ ειναι συναρτησεις αλλων μεταβλητων $u, v$: $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$. Τοτε

$$\frac{\partial\phi}{\partial u} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}, \qquad \frac{\partial\phi}{\partial v} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}, \tag{3.3}$$

η και

$$\frac{\partial \phi}{\partial u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{bmatrix}, \qquad \frac{\partial \phi}{\partial v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

**3.1.5.** Παρομοια, εστω οτι δινονται συναρτησεις $P(x,y)$,$Q(x,y)$ και υποθετουμε οτι οι $x,y$ ειναι συναρτησεις αλλων μεταβλητων $u,v$: $x(u,v)$, $y(u,v)$. Τοτε

$$\frac{\partial P}{\partial u} = \frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial u} = \frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \tag{3.4}$$

$$\frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial P}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}, \qquad \frac{\partial Q}{\partial v} = \frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial Q}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} \tag{3.5}$$

**3.1.6.** Οι παραπανω σχεσεις μπορουν να γραφτουν και με συμβολισμο πινακων.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial u} \\ \frac{\partial Q}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial v} \\ \frac{\partial Q}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}.$$

**3.1.7.** Αντιστοιχα πραγματα ισχυουν για συναρτησεις $P(x,y,z)$,$Q(x,y,z)$,$R(x,y,z)$ και $x(u,v,w)$, $y(u,v,w)$. Τοτε

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial u} \\ \frac{\partial Q}{\partial u} \\ \frac{\partial R}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} & \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial R}{\partial y} & \frac{\partial R}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial v} \\ \frac{\partial Q}{\partial v} \\ \frac{\partial R}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} & \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial R}{\partial y} & \frac{\partial R}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial w} \\ \frac{\partial Q}{\partial w} \\ \frac{\partial R}{\partial w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} & \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial R}{\partial y} & \frac{\partial R}{\partial z} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial w} \end{bmatrix}.$$

**3.1.8.** Εστω οτι $P(u,v)$ και $Q(u,v)$ εχουν μερικες παραγωγους πρωτης ταξης. Οριζουμε την *Ιακωβιανη οριζουσα*

$$\frac{D(P,Q)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_u & P_v \\ Q_u & Q_v \end{vmatrix} = P_u Q_v - P_v Q_u.$$

**3.1.9.** Εστω οτι $P(u,v,w)$, $Q(u,v,w)$ και $R(u,v,w)$ εχουν μερικες παραγωγους πρωτης ταξης. Οριζουμε την *Ιακωβιανη οριζουσα*

$$\frac{D(P,Q,R)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} P_u & P_v & P_w \\ Q_u & Q_v & Q_w \\ R_u & R_v & R_w \end{vmatrix}.$$

**3.1.10.** Μια ή περισσοτερες συναρτησεις μπορουν να οριστουν *εμμεσα*. Π.χ. η

$$\phi(x, y, z) = 0$$

οριζει την $z$ ως συναρτηση των $x$ και $y$. Τοτε μπορουμε να υπολογισουμε τις $z_x$ και $z_y$

$$z_x = -\frac{\phi_x}{\phi_z}, \qquad z_x = -\frac{\phi_y}{\phi_z}.$$

**3.1.11.** Παρομοια, μπορει να μας δινονται δυο εξισωσεις της μορφης

$$P(x, y, u, v) = 0, \qquad Q(x, y, u, v) = 0. \tag{3.6}$$

Κατω απο καταλληλες συνθηκες (παραγωγισιμοτητας και συνεχειας), η (3.6) προσδιοριζει τις συναρτησεις $u(x, y)$, $v(x, y)$ (ή, αντιστροφα, τις $x(u, v)$, $y(u, v)$). Τοτε μπορουμε να υπολογισουμε τις μερικες παραγωγους $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, *χωρις να χρειαστει να λυσουμε τις εξισωσεις* (3.6), ως εξησ:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\frac{D(P,Q)}{D(x,v)}}{\frac{D(P,Q)}{D(u,v)}}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\frac{D(P,Q)}{D(y,v)}}{\frac{D(P,Q)}{D(u,v)}}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\frac{D(P,Q)}{D(u,x)}}{\frac{D(P,Q)}{D(u,v)}}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\frac{D(P,Q)}{D(u,y)}}{\frac{D(P,Q)}{D(u,v)}}.$$

**3.1.12.** Αντιστοιχα πραγματα ισχυουν αν μας δοθουν τρεις εξισωσεις

$$P(x, y, u, v, w) = 0, \qquad Q(x, y, u, v, w) = 0, \qquad R(x, y, u, v, w) = 0.$$

Τοτε, κατω απο καταλληλες συνθηκες, εχουμε

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\frac{D(P,Q,R)}{D(x,v,w)}}{\frac{D(P,Q,R)}{D(u,v,w)}}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\frac{D(P,Q,R)}{D(u,x,w)}}{\frac{D(P,Q,R)}{D(u,v,w)}}, \qquad \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\frac{D(P,Q,R)}{D(u,v,x)}}{\frac{D(P,Q,R)}{D(u,v,w)}}$$

και με αντιστιχο τροπο υπολογιζονται οι $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}, \dots$ κτλ.

**3.1.13.** Ο κανονας της αλυσσωτης παραγωγοσης ισχυει και για τις Ιακωβιανες, με την εξης εννοια:

$$\frac{D(x, y)}{D(r, s)} = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \frac{D(u, v)}{D(r, s)}, \qquad \frac{D(x, y, z)}{D(r, s, t)} = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} \frac{D(u, v, w)}{D(r, s, t)} \qquad \text{κ.τ.λ.}$$

## 3.2 Λυμενα Προβληματα

**3.2.1.** Να υπολογιστει η ολικη παραγωγος της $\phi(x, y) = x^3 + y^3$ ως προς $t$, οταν $x(t) = t$ και $y(t) = \frac{t^2}{t^2+1}$.

**Λυση**. Εχουμε

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} &= \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 3x^2 \cdot 1 + 3y^2 \cdot \frac{2t}{(t^2+1)^2} \\ &= 3t^2 + 3\frac{t^2}{t^2+1} \cdot \frac{2t}{(t^2+1)^2} = 3t^2 \frac{(t^6 + 3t^4 + 3t^2 + 2t + 1)}{(t^2+1)^3}. \end{aligned}$$

**3.2.2.** Να υπολογιστει η η ολικη παραγωγος της $\phi(x,y) = u^2 + v^2$, $u = \sin t$, $v = \cos t$.

**Λυση.** Εχουμε

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial v}\frac{dv}{dt} = 2u\cdot\cos t - 2v\cdot\sin t = 2\sin t\cos t - 2\cos t\sin t = 0$$

που ηταν αναμενομενο, αφου

$$\phi = u^2 + v^2 = \sin^2 t + \cos^2 t = 1.$$

**3.2.3.** Να υπολογιστει η ολικη παραγωγος της $\phi(x,y,z) = \sin(x^2+y^2+z^2)$ ως προς $t$, οταν $x(t) = t$, $y(t) = \cos t$ και $z(t) = e^t$.

**Λυση**. Εχουμε

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{dt} &= \frac{\partial\phi}{\partial u}\frac{du}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial v}\frac{dv}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial v}\frac{dv}{dt}\\ &= -\cos\left(x^2+y^2+z^2\right)\cdot\left(2x\cdot 1 - 2y\cdot\sin t + 2z\cdot e^t\right)\\ &= -\cos\left(t^2+\cos^2 t+e^{2t}\right)\cdot\left(2t - 2\cos t\sin t + 2e^{2t}\right).\end{aligned}$$

**3.2.4.** Να υπολογιστουν οι μερικες παραγωγοι $\phi_u, \phi_v$ της $\phi(x,y) = x^3 + y^3$ , οταν $x(u,v) = u + v$ και $y(u,v) = uv$.

**Λυση**. Εχουμε

$$\begin{aligned}\phi_u &= \left[\begin{array}{cc}\frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y}\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}\frac{\partial x}{\partial u}\\ \frac{\partial y}{\partial u}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc}3x^2 & 3y^2\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}1\\ v\end{array}\right]\\ &= 3x^2 + 3y^2 v = 3(u+v)^2 + 3u^2v^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_v &= \left[\begin{array}{cc}\frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y}\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}\frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial v}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc}3x^2 & 3y^2\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}1\\ u\end{array}\right]\\ &= 3x^2 + 3y^2 u = 3(u+v)^2 + 3u^3v^2\end{aligned}$$

**3.2.5.** Να υπολογιστουν οι μερικες παραγωγοι $\phi_u, \phi_v$ της $\phi(x,y) = x^2 + y^2$ , οταν $x(u,v) = u^2 + v^2$ και $y(u,v) = u$.

**Λυση.** Εχουμε

$$\begin{aligned}\phi_u &= \left[\begin{array}{cc}\frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y}\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}\frac{\partial x}{\partial u}\\ \frac{\partial y}{\partial u}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc}2x & 2y\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}2u\\ 1\end{array}\right] =\\ &= 4xu + 2y = 4u^3 + 4v^2u + 2u.\end{aligned}$$

**3.2.6.** Να υπολογιστουν οι μερικες παραγωγοι $\phi_u, \phi_v$ της $\phi(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ , οταν $x(u,v) = u^2 + v^2$, $y(u,v) = uv$ και $z(u,v) = u$.

**Λυση**. Εχουμε

$$\begin{aligned}\phi_u &= \left[\begin{array}{ccc}\frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y} & \frac{\partial\phi}{\partial z}\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}\frac{\partial x}{\partial u}\\ \frac{\partial y}{\partial u}\\ \frac{\partial z}{\partial u}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc}2x & 2y & 2z\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}2u\\ v\\ 1\end{array}\right]\\ &= 2z + 4ux + 2vy = 2u + 2u\left(2u^2+2v^2\right) + 2uv^2\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\phi_v &= \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc} 2x & 2y & 2z \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 2v \\ u \\ 1 \end{array}\right] \\
&= 2z + 2uy + 4vx = 2u + 2v\left(2u^2 + 2v^2\right) + 2u^2 v.
\end{aligned}
$$

**3.2.7.** Να υπολογιστουν οι $P_u, P_v, Q_u, Q_v$ οταν $P(x,y) = x^2 + y^2$, $Q(x,y) = xy$ και $x(u,v) = u + v$, $y(u,v) = uv$.

**Λυση**. Εχουμε

$$
\begin{aligned}
\left[\begin{array}{c} \frac{\partial P}{\partial u} \\ \frac{\partial Q}{\partial u} \end{array}\right] &= \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 2x & 2y \\ y & x \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{c} 2x + 2y \\ x + y \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 2u + 2v + 2uv \\ u + v + uv \end{array}\right]
\end{aligned}
$$

και

$$
\begin{aligned}
\left[\begin{array}{c} \frac{\partial P}{\partial v} \\ \frac{\partial Q}{\partial v} \end{array}\right] &= \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 2x & 2y \\ y & x \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} v \\ u \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{c} 2xv + 2yu \\ yv + xu \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 2uv + 2v^2 + 2u^2 v \\ uv^2 + u^2 + uv \end{array}\right].
\end{aligned}
$$

**3.2.8.** Να υπολογιστουν οι $P_u, P_v, Q_u, Q_v$ οταν $P(x,y) = x^2 + y^2$, $Q(x,y) = xy$ και $x(u,v) = \cos(u+v)$, $y(u,v) = \sin(uv)$.

**Λυση**. Εχουμε

$$
\begin{aligned}
\left[\begin{array}{c} \frac{\partial P}{\partial u} \\ \frac{\partial Q}{\partial u} \end{array}\right] &= \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 2x & 2y \\ y & x \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} -\sin(u+v) \\ v\cos(uv) \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{c} 2vy\cos(uv) - 2x\sin(u+v) \\ vx\cos(uv) - y\sin(u+v) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 2v\sin(uv)\cos(uv) - 2\cos(u+v)\sin(u+v) \\ v\cos(u+v)\cos(uv) - \sin(uv)\sin(u+v) \end{array}\right]
\end{aligned}
$$

και

$$
\begin{aligned}
\left[\begin{array}{c} \frac{\partial P}{\partial u} \\ \frac{\partial Q}{\partial u} \end{array}\right] &= \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} 2x & 2y \\ y & x \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} -\sin(u+v) \\ u\cos(uv) \end{array}\right] \\
&= \left[\begin{array}{c} 2vy\cos(uv) - 2x\sin(u+v) \\ ux\cos(uv) - y\sin(u+v) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 2v\sin(uv)\cos(uv) - 2\sin(uv)\sin(u+v) \\ u\cos(u+v)\cos(uv) - \sin(uv)\sin(u+v) \end{array}\right]
\end{aligned}
$$

**3.2.9.** Να υπολογιστουν οι $z_x$, $z_y$ αν ισχυει $\phi(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

**Λυση**. Εχουμε

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}(1) \Rightarrow \frac{2}{a^2}x - \frac{2}{c^2}zz_x = 0 \Rightarrow z_x = \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{x}{z}, \\
\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right) &= \frac{\partial}{\partial y}(1) \Rightarrow \frac{2}{b^2}y - \frac{2}{c^2}zz_y = 0 \Rightarrow z_y = \frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{y}{z}.
\end{aligned}
$$

Μπορουμε επισης να βρουμε την απαντηση κατευθειαν χρησιμοποιωντας

$$z_x = -\frac{\phi_x}{\phi z} = -\frac{2x/a^2}{-2z/c^2} = \frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{x}{z},$$
$$z_y = -\frac{\phi_y}{\phi z} = -\frac{2y/b^2}{-2z/c^2} = \frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{y}{z}.$$

**3.2.10.** Να υπολογιστουν οι $z_x$, $z_y$ αν ισχυει $x^2 - 2y^2 + z^2 - 6x + 7z - 5 = 0$.
**Λυση**. Εχουμε

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 - 2y^2 + z^2 - 6x + 7z - 5\right) = \frac{\partial}{\partial x}(0) \Rightarrow 2x + 2zz_x - 6 + 7z_x = 0 \Rightarrow z_x = \frac{6-2x}{7+2z},$$
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 - 2y^2 + z^2 - 6x + 7z - 5\right) = \frac{\partial}{\partial y}(0) \Rightarrow -4y + 2zz_y + 7z_y = 0 \Rightarrow z_y = \frac{4y}{7+2z}.$$

Μπορουμε επισης να βρουμε την απαντηση κατευθειαν χρησιμοποιωντας

$$z_x = -\frac{\phi_x}{\phi z} = -\frac{2x-6}{2z+7},$$
$$z_y = -\frac{\phi_y}{\phi z} = -\frac{-4y}{2z+7}..$$

**3.2.11.** Να υπολογιστουν οι $z_x$, $z_y$ αν ισχυει $z^2 + 3xyz = a^3$.
**Λυση**. Εχουμε

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(z^2 + 3xyz\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(a^3\right) \Rightarrow 2zz_x + 3yz + 3xyz_x = 0 \Rightarrow z_x = -\frac{3yz}{2z+3xy}$$

και ομοια προκυπτει

$$z_y = -\frac{3xz}{2z+3xy}$$

Μπορουμε επισης να βρουμε την απαντηση κατευθειαν χρησιμοποιωντας

$$z_x = -\frac{\phi_x}{\phi z} = -\frac{3yz}{2z+3xy}, \quad z_y = -\frac{\phi_y}{\phi z} = -\frac{3yz}{2z+3xy}..$$

**3.2.12.** Να υπολογιστει η Ιακωβιανη $\frac{D(u,v)}{D(x,y)}$ οταν $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$.
**Λυση.** Εχουμε

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{vmatrix} = 4x^2 + 4y^2.$$

**3.2.13.** Να υπολογιστει η Ιακωβιανη $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$ και η $\frac{D(u,v)}{D(x,y)}$ αν $x = u\cos v$, $y = u\sin v$.
**Λυση.** Εχουμε

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos v & \sin v \\ -u\sin v & u\cos v \end{vmatrix} = u\left(\cos^2 v + \sin^2 v\right) = u.$$

Εχουμε επισης οτι

$$x^2+y^2=u^2\cos^2 v+u^2\sin^2 v=u^2\Rightarrow u=\sqrt{x^2+y^2}$$

και αρα

$$\frac{D(u,v)}{D(x,y)}=\frac{1}{u}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

**3.2.14.** Να υπολογιστει η Ιακωβιανη $\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}$ αν $u=\frac{x}{x^2+y^2+z^2}$, $v=\frac{y}{x^2+y^2+z^2}$, $w=\frac{z}{x^2+y^2+z^2}$.

**Λυση.** Εχουμε

$$\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}=\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z\\ v_x & v_y & v_z\\ w_x & w_y & w_z\end{vmatrix}.$$

Εχουμε επισης οτι

$$u_x=\frac{-x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2},\quad u_y=\frac{-2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2},\quad u_z=\frac{-2xz}{(x^2+y^2+z^2)^2}.$$

Με συμμετρικο τροπο υπολογιζουμε και τις υπολοιπες παραγωγους και τελικα εχουμε

$$\begin{aligned}\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}&=\begin{vmatrix} \frac{-x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{-2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{-2xz}{(x^2+y^2+z^2)^2}\\ \frac{-2xy}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{x^2-y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{-2yz}{(x^2+y^2+z^2)^2}\\ \frac{-2xz}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{-2yz}{(x^2+y^2+z^2)^2} & \frac{x^2+y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^2}\end{vmatrix}\\ &=-\frac{1}{x^6+3x^4y^2+3x^4z^2+3x^2y^4+6x^2y^2z^2+3x^2z^4+y^6+3y^4z^2+3y^2z^4+z^6}\\ &=-\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^3}.\end{aligned}$$

**3.2.15.** Να υπολογιστει η Ιακωβιανη $\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}$ αν $x=2u-3v+4w$, $y=u^2-v^2-w^2$, $z=u^3+v$

**Λυση.** Εχουμε

$$\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}=\begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w\\ y_u & y_v & y_w\\ z_u & z_v & z_w\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4\\ 2u & -2v & -2w\\ 3u^2 & 1 & 0\end{vmatrix}=4w+8u+18u^2w+24u^2v..$$

**3.2.16.** Να υπολογιστει η Ιακωβιανη $\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}$ αν $u=x^2+y^2$, $v=y^2+z^2$, $w=z^2+x^2$.

**Λυση.** Εχουμε

$$\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}=\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z\\ v_x & v_y & v_z\\ w_x & w_y & w_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2x & 2y & 0\\ 0 & 2y & 2z\\ 2x & 0 & 2z\end{vmatrix}=16xyz.$$

**3.2.17.** Να υπολογιστει η Ιακωβιανη $\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}$ αν $u=xy^2$, $v=xyz$, $w=x+y+z$

**Λυση.** Εχουμε

$$\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}=\begin{vmatrix} y^2 & 2xy & 0\\ yz & xz & xy\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}.=-y^2zx-y^3x+2x^2y^2.$$

**3.2.18.** Να υπολογιστουν οι $u_x, u_y, v_x, v_y$ αν δινεται οτι $x + 2y - u + 3v - 1 = 0$ και $3x + y - 4u + v - 2 = 0$.

**Λυση**. Εχουμε

$$\begin{aligned} P(x,y,u,v) &= x + 2y - u + 3v - 1 = 0 \\ Q(x,y,u,v) &= 3x + y - 4u + v - 2 = 0 \end{aligned}$$

και

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\frac{D(P,Q)}{D(x,v)}}{\frac{D(P,Q)}{D(u,v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} P_x & P_v \\ Q_x & Q_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_u & P_v \\ Q_u & Q_v \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{8}{11}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\frac{D(P,Q)}{D(y,v)}}{\frac{D(P,Q)}{D(u,v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} P_y & P_v \\ Q_y & Q_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_u & P_v \\ Q_u & Q_v \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{11}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\frac{D(P,Q)}{D(u,x)}}{\frac{D(P,Q)}{D(u,v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} P_u & P_x \\ Q_u & Q_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_u & P_v \\ Q_u & Q_v \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{1}{11}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\frac{D(P,Q)}{D(u,y)}}{\frac{D(P,Q)}{D(u,v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} P_u & P_y \\ Q_u & Q_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_u & P_v \\ Q_u & Q_v \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{7}{11}$$

**3.2.19.** Να υπολογιστουν οι $u_x, v_x$ αν δινεται οτι $x^2+y^2+u^2+v^2 = 0$ και $u^2-v^2-2xy+y^2 = 0$.

**Λυση**. Εχουμε

$$\begin{aligned} P(x,y,u,v) &= x^2 + y^2 + u^2 + v^2 = 0 \\ Q(x,y,u,v) &= u^2 - v^2 - 2xy + y^2 = 0 \end{aligned}$$

και

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\frac{D(P,Q)}{D(x,v)}}{\frac{D(P,Q)}{D(u,v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} P_x & P_v \\ Q_x & Q_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_u & P_v \\ Q_u & Q_v \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} 2x & 2v \\ -2y & -2v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2u & 2v \\ 2u & -2v \end{vmatrix}} = \frac{-4xv + 4vy}{8uv} = \frac{y - x}{2u}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\frac{D(P,Q)}{D(u,x)}}{\frac{D(P,Q)}{D(u,v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} P_u & P_x \\ Q_u & Q_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_u & P_v \\ Q_u & Q_v \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} 2u & 2x \\ 2u & -2y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2u & 2v \\ 2u & -2v \end{vmatrix}} = \frac{-4yu - 4xu}{8uv} = -\frac{x + y}{2v}$$

**3.2.20.** Να υπολογιστουν οι $u_x, u_y, v_x, v_y$ αν δινεται οτι $x^2+y^2-uv-1=0$ και $xy-u+v-2=0$.

**Λυση**. Εχουμε

$$\begin{aligned} P(x,y,u,v) &= x^2+y^2-uv-1=0 \\ Q(x,y,u,v) &= xy-u+v-2=0 \end{aligned}$$

και

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\frac{D(P,Q)}{D(x,v)}}{\frac{D(P,Q)}{D(u,v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} P_x & P_v \\ Q_x & Q_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_u & P_v \\ Q_u & Q_v \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} 2x & -u \\ y & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -v & -u \\ -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2x+uy}{u+v}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\frac{D(P,Q)}{D(y,v)}}{\frac{D(P,Q)}{D(u,v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} P_y & P_v \\ Q_y & Q_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_u & P_v \\ Q_u & Q_v \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} 2y & -u \\ x & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -v & -u \\ -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2y+ux}{u+v}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\frac{D(P,Q)}{D(u,x)}}{\frac{D(P,Q)}{D(u,v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} P_u & P_x \\ Q_u & Q_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_u & P_v \\ Q_u & Q_v \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} -v & 2x \\ -1 & y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -v & -u \\ -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-vy+2x}{u+v}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\frac{D(P,Q)}{D(u,y)}}{\frac{D(P,Q)}{D(u,v)}} = -\frac{\begin{vmatrix} P_u & P_y \\ Q_u & Q_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} P_u & P_v \\ Q_u & Q_v \end{vmatrix}} = -\frac{\begin{vmatrix} -v & 2y \\ -1 & x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -v & -u \\ -1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{-vx+2y}{u+v}$$

**3.2.21.** Δειξτε οτι η συναρτηση $\phi\left(\frac{y}{x}\right)$ ικανοποιει $x\phi_x + y\phi_y = 0$.

**Λυση.** Θετουμε $z = \frac{y}{x}$. Εχουμε

$$\phi_x = \phi_z z_x = \phi_z \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right), \qquad \phi_y = \phi_z z_y = \phi_z \cdot \left(\frac{1}{x}\right)$$

οποτε

$$x\phi_x + y\phi_y = x\phi_z \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) + y\phi_z \cdot \left(\frac{1}{x}\right) = \phi_z \cdot \left(-\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\right) = 0$$

**3.2.22.** Δειξτε οτι η συναρτηση $\phi\left(x^2+y^2\right)$ ικανοποιει $y\phi_x - x\phi_y = 0$.

**Λυση.** Θετουμε $z = x^2+y^2$. Εχουμε

$$\phi_x = \phi_z z_x = \phi_z \cdot 2x, \qquad \phi_y = \phi_z z_y = \phi_z \cdot 2y$$

οποτε

$$y\phi_x + x\phi_y = y\phi_z \cdot 2x - x\phi_z \cdot 2y = \phi_z \cdot (2xy - 2xy) = 0.$$

**3.2.23.** Δειξτε οτι αν $z = y\phi\left(x^2 - y^2\right)$ τοτε $\frac{1}{x}z_x + \frac{1}{y}z_y = \frac{z}{y^2}$.

**Λυση.** Θετουμε $u = x^2 - y^2$. Εχουμε

$$\begin{aligned} z_x &= \frac{\partial}{\partial x}\left(y\phi\left(x^2 - y^2\right)\right) = y\phi_u\left(u\right)u_x = y\phi_u 2x \\ z_y &= \frac{\partial}{\partial y}\left(y\phi\left(x^2 - y^2\right)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(y\right)\phi\left(u\right) + y\phi_u\left(u\right)u_y = \phi - y\phi_u 2y. \end{aligned}$$

Οποτε εχουμε

$$\frac{1}{x}z_x + \frac{1}{y}z_y = \frac{1}{x}y\phi_u 2x + \frac{1}{y}\phi - y\phi_u 2y = \frac{\phi}{y} = \frac{z/y}{y} = \frac{z}{y^2}.$$

**3.2.24.** Δειξτε οτι αν $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\sin\phi$, για καθε συναρτηση $u\left(x,y\right)$ εχουμε $\left(u_x\right)^2 + \left(u_y\right)^2 = \left(u_\rho\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(u_\phi\right)^2$.

**Λυση.** Εχουμε

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u_\rho & u_\phi \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} u_x & u_y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_\rho & x_\phi \\ y_\rho & y_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x & u_y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\phi & -\rho\sin\phi \\ \sin\phi & \rho\cos\phi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u_x\cos\phi + u_y\sin\phi & \rho\cdot\left(-u_x\sin\phi + u_y\cos\phi\right) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Οποτε

$$\begin{aligned} \left(u_\rho\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(u_\phi\right)^2 &= \left(u_x\cos\phi + u_y\sin\phi\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\rho\cdot\left(-u_x\sin\phi + u_y\cos\phi\right)\right)^2 \\ &= u_x^2\cos^2\phi + 2u_x\left(\cos\phi\right)u_y\sin\phi + u_y^2\sin^2\phi + u_x^2\sin^2\phi - 2u_x\left(\cos\phi\right)u_y\sin\phi + u_y^2\cos^2\phi \\ &= \left(u_x\right)^2\cdot\left(\cos^2\phi + \sin^2\phi\right) + \left(u_y\right)^2\cdot\left(\cos^2\phi + \sin^2\phi\right) = \left(u_x\right)^2 + \left(uy\right)^2. \end{aligned}$$

## 3.3 Αλυτα Προβληματα

**3.3.1.** Να υπολογιστει η ολικη παραγωγος της $\phi\left(x,y\right) = x^2 + y^2$ ως προς $t$, οταν $x\left(t\right) = t$ και $y\left(t\right) = \frac{t^2}{t^2+1}$.

**Απ.** $\frac{2t\cdot\left(t^4+2t^2+2\right)}{\left(t^2+1\right)^2}$.

**3.3.2.** Να υπολογιστει η για τις παρακατω περιπτωσεις $f\left(x,y\right) = u^2 + v^2$, $u = \sin t$, $v = t\cos t$.

**Απ.** 0.

**3.3.3.** Να υπολογιστει η ολικη παραγωγος της $\phi\left(x,y\right) = \cos\left(x + y + z\right)$ ως προς $t$, οταν $x\left(t\right) = t$, $y\left(t\right) = \cos t$ και $z\left(t\right) = e^t$.

**Απ.** $-\left(\sin\left(t + \cos t + e^t\right)\right)\left(e^t - \sin t + 1\right)$.

**3.3.4.** Να υπολογιστει η ολικη παραγωγος της $\phi\left(x,y\right) = \sin\left(x + y^3 + z\right)$ ως προς $t$, οταν $x\left(t\right) = t$, $y\left(t\right) = \cos t$ και $z\left(t\right) = \frac{t^2}{t^2+1}$.

**Απ.** $-\frac{\cos\frac{1}{t^2+1}\left(t^3+t^2\cos^3 t+t^2+t+\cos^3 t\right)}{\left(t^2+1\right)^2}\cdot\left(\frac{3}{4}\sin t - 2t + \frac{3}{4}\sin 3t + \frac{3}{2}t^2\sin t + \frac{3}{4}t^4\sin t + \frac{3}{2}t^2\sin 3t + \frac{3}{4}t^4\sin 3t - 2\right.$

**3.3.5.** Να υπολογιστουν οι $z_x$, $z_y$ αν ισχυει $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.
**Απ**. $z_x=-\frac{c^2x}{a^2z}$, $z_y=-\frac{c^2y}{b^2z}$.

**3.3.6.** Να υπολογιστουν οι $z_x$, $z_y$ αν ισχυει $x^2-2y^2+z^2-4x+2z-5=0$.
**Απ**. $z_x=\frac{2-x}{z+1}$, $z_y=\frac{2y}{z+1}$.

**3.3.7.** Να υπολογιστουν οι $z_x$, $z_y$ αν ισχυει $z^3+3xyz=a^3$.
**Απ**. $z_x=-\frac{yz}{xy+z^2}$, $z_y=-\frac{xz}{xy+z^2}$.

**3.3.8.** Να υπολογιστουν οι $z_x$, $z_y$ αν ισχυει $x^2+y^2+z^2-6x=0$.
**Απ**. $z_x=\frac{3-x}{z}$, $z_y=-\frac{y}{z}$.

**3.3.9.** Να υπολογιστουν οι $z_x$, $z_y$ αν ισχυει $z^2=xy$.
**Απ**. $z_x=\frac{y}{z}$, $z_y=\frac{x}{z}$.

**3.3.10.** Να υπολογιστουν $\phi_u$,$\phi_v$ οταν $\phi(x,y)=\sin(x^2+y^3)$, $x(u,v)=u+v$, $y(u,v)=u-v$.
**Απ**. $\phi_u=\left(\cos\left(u^3-3u^2v+u^2+3uv^2+2uv-v^3+v^2\right)\right)\left(3u^2-6uv+2u+3v^2+2v\right)$,

$\phi_v=\left(\cos\left(u^3-3u^2v+u^2+3uv^2+2uv-v^3+v^2\right)\right)\left(-3u^2+6uv+2u-3v^2+2v\right)$.

**3.3.11.** Να υπολογιστουν $\phi_u$,$\phi_v$ οταν $\phi(x,y)=\sin(x+y)$, $x(u,v)=u^2+v^2$, $y(u,v)=uv$.
**Απ**. $\phi_u=\left(\cos\left(u^2+uv+v^2\right)\right)(2u+v)$, $\phi_v=\left(\cos\left(u^2+uv+v^2\right)\right)(u+2v)$.

**3.3.12.** Να υπολογιστουν $\phi_u$,$\phi_v$ οταν $\phi(x,y,z)=\sin(x+y+z)$, $x(u,v)=u^2+v^2$, $y(u,v)=u$, $z(u,v)=\frac{1}{u+v}$.
**Απ**. $\phi_u=\frac{\cos\frac{1}{u+v}\left(u^3+u^2v+u^2+uv^2+uv+v^3+1\right)}{(u+v)^2}\left(2u^3+4u^2v+u^2+2uv^2+2uv+v^2-1\right)$,
$\phi_v=\frac{\cos\frac{1}{u+v}\left(u^3+u^2v+u^2+uv^2+uv+v^3+1\right)}{(u+v)^2}\left(2u^2v+4uv^2+2v^3-1\right)$.

**3.3.13.** Να υπολογιστουν $\phi_u$,$\phi_v$, $\phi_w$ οταν $\phi(x,y,z)=e^{x+y+z}$, $x(u,v,w)=w^2$, $y(u,v,w)=u+v$, $z(u,v,w)=u-v$.
**Απ.** $D_we^{w^2+u+v+u-v}=$
$\phi_u=2e^{w^2+2u}$, $\phi_v=0$, $2we^{w^2+2u}$.

**3.3.14.** Να υπολογιστουν $\phi_u$,$\phi_v$, $\phi_w$ οταν $\phi(x,y,z)=\sin(x+y+z)$, $x(u,v,w)=w\sin u\cos v$, $y(u,v,w)=w\sin u\sin v$, $z(u,v,w)=w\cos u$.
**Απ**. $\phi_u=\left(\cos\left(w\cos u+w\cos v\sin u+w\sin u\sin v\right)\right)\left(w\cos u\cos v-w\sin u+w\cos u\sin v\right)$,

$\phi_v=w\left(\cos\left(w\cos u+w\cos v\sin u+w\sin u\sin v\right)\sin u\right)\left(\cos v-\sin v\right)$,
$\phi_w=\left(\cos\left(w\cos u+w\cos v\sin u+w\sin u\sin v\right)\right)\left(\cos u\sin v+\sin u\cos v+\cos u\right)$.

**3.3.15.** Να υπολογιστει η Ιακωβιανη $\frac{D(u,v)}{D(x,y)}$ οταν $u=x^2+y^2$, $v=2xy$.
**Απ.** $4x^2-4y^2$.

**3.3.16.** Να υπολογιστει η Ιακωβιανη $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$ και την $\frac{D(u,v)}{D(x,y)}$ αν $x=u\cos v$, $y=u\sin v$.
**Απ.** $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\begin{vmatrix}\cos v & -u\sin v\\ \sin v & u\cos v\end{vmatrix}=u$, $\frac{D(u,v)}{D(x,y)}=\frac{1}{u}$.

**3.3.17.** Να υπολογιστει η Ιακωβιανη $\frac{D(u,v)}{D(x,y)}$ αν $u = 3x^2 - xy$, $v = 2xy^2 + y^3$.
**Απ.** $24x^2y + 16xy^2 - 3y^3$.

**3.3.18.** Να υπολογιστει η Ιακωβιανη $\frac{D(u,v)}{D(x,y)}$ αν $u = \frac{x+y}{1-xy}$, $v = \tan^{-1} x + \tan^{-1} y$.
**Απ.** $\begin{vmatrix} \frac{y}{(xy-1)^2}(x+y) - \frac{1}{xy-1} & \frac{x}{(xy-1)^2}(x+y) - \frac{1}{xy-1} \\ \frac{1}{x^2+1} & \frac{1}{y^2+1} \end{vmatrix} = 0.$

**3.3.19.** Να υπολογιστει η Ιακωβιανη $\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}$ αν $x = u-v+w$, $y = u^2-v^2-w^2$, $z = u^3+v$
**Απ.** $6wu^2 + 2u + 6u^2v + 2w$

**3.3.20.** Να υπολογιστει η Ιακωβιανη $\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}$ αν $x = u\cos v \sin w$, $y = u \sin v \sin w$, $z = u\cos w$
**Απ.** $u^2 \sin w$.

**3.3.21.** Να υπολογιστει η Ιακωβιανη $\frac{D(u,v,w)}{D(x,y,z)}$ αν $u = x^2y$, $v = zx$, $w = x + y + z$
**Απ.** $-2x^2y - zx^2 + x^3$.

**3.3.22.** Να υπολογιστουν οι $u_x$, $v_x$, $u_y$, $v_y$ για τις παρακατω περιπτωσεις. $u^2 + v^2 = x + y$ και $u - v = x\cos y$
**Απ**. $u_x = \frac{2v\cos y+1}{2u+2v}$, $v_x = -\frac{2u\cos y-1}{2u+2v}$ , $u_y = -\frac{2vx\sin y-1}{2u+2v}$, $v_y = \frac{2ux\sin y+1}{2u+2v}$.

**3.3.23.** Δειξτε οτι η συναρτηση $z = \phi(x-y)$ ικανοποιει $z_x + z_y = 0$.

**3.3.24.** Δειξτε οτι η συναρτηση $z = \phi(x,y)$ οπου $x = s+t$ και $y = s-t$, ικανοποιει $(z_x)^2 + (z_y)^2 = z_s z_t$.

**3.3.25.** Δειξτε οτι η συναρτηση $z = \arctan\frac{x}{y}$ ικανοποιει $z_u + z_v = \frac{u-v}{u^2+v^2}$ οταν $x = u+v, y = u - v$.

**3.3.26.** Δειξτε οτι η συναρτηση $z = \frac{y}{\phi(x^2-y^2)}$ ικανοποιει $\frac{1}{x}\phi_x + \frac{1}{y}\phi_y = 0$.

**3.3.27.** Δειξτε οτι αν $z = x\phi(x+y) + y\psi(x+y)$ τοτε $z_{xx} - 2z_{xy}z_{yy} = 0$.

**3.3.28.** Δειξτε οτι αν $x = \rho\cos\phi$, $y = \rho\sin\phi$, τοτε $u_{xx} + u_{yy} = u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho^2}u_{\phi\phi} + \frac{1}{\rho}u_\rho$.

**3.3.29.** Δειξτε οτι η συναρτηση $x^k\phi\left(\frac{z}{x}, \frac{y}{x}\right)$ ικανοποιει $x\phi_x + y\phi_y + z\phi_z = k\phi$.

**3.3.30.** Δειξτε οτι καθε συναρτηση της μορφης $z = f(x-at) + g(x+at)$ ικανοποιει την σχεση $z_{tt} = a^2 z_{xx}$.

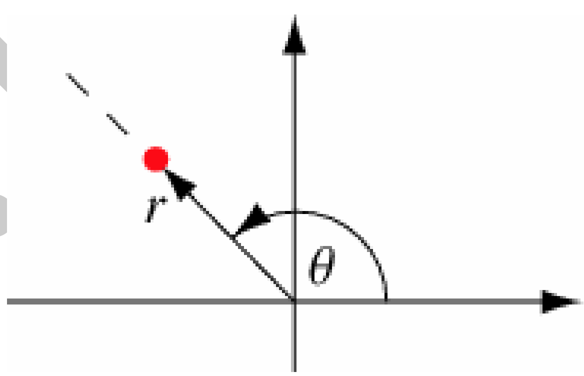
# Κεφάλαιο 4

# Συστηματα Συντεταγμενων

## 4.1 Θεωρια

**4.1.1.** Στο Κεφαλαιο **;;** προσδιορισαμε την θεση ενος σημειου στον χωρο χρησιμοποιωντας τις *Καρτεσιανες συντεταγμενες* $(x, y, z)$. Σε πολλες εφαρμογες (π.χ. στον υπολογισμο ολοκληρωματων) ειναι πιο βολικο να χρησιμοποιησουμε αλλα συστηματα συντεταγμενων. Π.χ. στο λογισμο συναρτησεων μιας μεταβλητης εχουμε χρησιμοποιησει τις *πολικες* συντεταγμενες. Στο παρον κεφαλαιο θα εξετασουμε διαφορα συστηματα συντεταγμενων.

**4.1.2. Πολικες Συντεταγμενες**. Εστω ενα σημειο $M$ στον $R^2$ με Καρτεσιανες συντεταγμενες $(x, y)$. Το $M$ μπορει να προσδιοριστει και με τις πολικες συντεταγμενες $(\rho, \theta)$ (δες Σχ.5.1).




**Σχημα 5.1**

Ισχυουν οι σχεσεις

$$x = \rho \cos\theta, \qquad y = \rho \sin\theta, \qquad z = 0$$

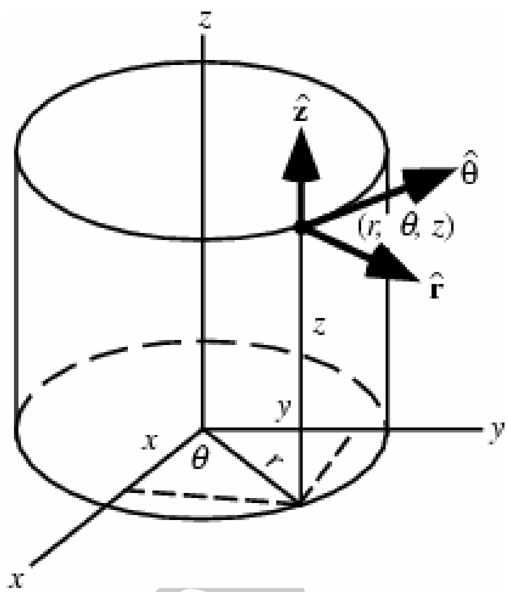
και

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}, \qquad z = 0.$$

Το *στοιχειωδες εμβαδον* μετασχηματιζεται σε πολικο συστημα συντεταγμενων ως εξης

$$dA = dxdy = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \theta)} d\rho d\theta = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix} d\rho d\theta = \rho d\rho d\theta.$$

**4.1.3. Κυλινδρικες Συντεταγμενες**. Εστω ενα σημειο $M$ στον $R^3$ με Καρτεσιανες συντεταγμενες $(x, y, z)$. Το $M$ μπορει να προσδιοριστει και με τις κυλινδρικες συντεταγμενες $(\rho, \theta, z)$ (δες Σχ.5.2).




**Σχημα 5.2**

Ισχυουν οι σχεσεις

$$x = \rho \cos\theta, \qquad y = \rho \sin\theta, \qquad z = z$$

και

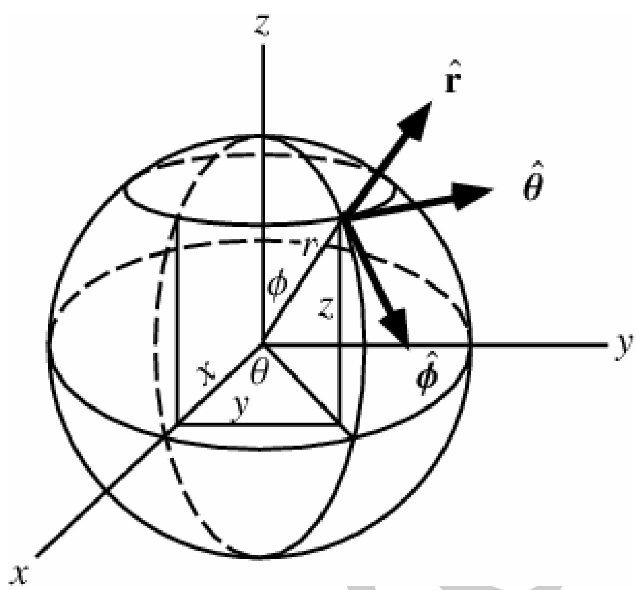
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}, \qquad z = z.$$

Ο *στοιχειωδης ογκος* μετασχηματιζεται σε κυλινδρικο συστημα συντεταγμενων ως εξης

$$dV = dxdydz = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, z)} d\rho d\theta = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \rho\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} d\rho d\theta dz = \rho d\rho d\theta dz.$$

**4.1.4. Σφαιρικες Συντεταγμενες**. Εστω ενα σημειο $M$ στον $R^3$ με Καρτεσιανες συντεταγμενες $(x, y, z)$. Το $M$ μπορει να προσδιοριστει και με τις σφαιρικες συντεταγμενες

$(r, \theta, \phi)$ (δες Σχ.5.3).




**Σχημα 5.3**

Ισχυουν οι σχεσεις

$$x = r\cos\theta\sin\phi, \qquad y = r\sin\theta\sin\phi, \qquad z = r\cos\phi$$

και

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \qquad \phi = \tan^{-1}\frac{y}{x}, \qquad \theta = \cos^{-1}\frac{z}{r}.$$

Ο *στοιχειωδης ογκος* μετασχηματιζεται σε κυλινδρικο συστημα συντεταγμενων ως εξης

$$dV = dxdydz = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)}drd\theta d\phi = \begin{vmatrix} \cos\theta\sin\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\phi \\ -r\sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & 0 \\ r\cos\theta\cos\phi & r\sin\theta\cos\phi & -r\sin\phi \end{vmatrix} drd\theta d\phi = r^2\sin\phi drd\theta d\phi.$$

**4.1.5.** Τα προηγουμενα ηταν ειδικα παραδειγματα. Στην γενικη περιπτωση εισαγουμε μεταβλητες $u, v, w$ τετοιες ωστε να ισχυει

$$x = f(u,v,w), \qquad y = g(u,v,w), \qquad z = h(u,v,w).$$

Τοτε σε καθε σημειο $(x,y,z)$ αντιστοιχει το *διανυσμα θεσης* $\mathbf{r}$ με αναπαρασταση

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + zk = x(u,v,w)\,\mathbf{i} + y(u,v,w)\,\mathbf{j} + z(u,v,w)\,\mathbf{k}$$

και το διαφορικο διανυσμα θεσης ειναι

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}du + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}dv + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial w}dw. \tag{4.1}$$

Αν τωρα ορισουμε

$$a = \left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\right|, \qquad b = \left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right|, \qquad c = \left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial w}\right| \tag{4.2}$$

θα εχουμε

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = a\mathbf{m}, \qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = b\mathbf{n}, \qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w} = c\mathbf{p}, \tag{4.3}$$

οπου τα $\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{p}$ ειναι μοναδιαια διανυσματα:

$$\mathbf{m} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}}{\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right|}, \qquad \mathbf{n} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}}{\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|}, \qquad \mathbf{p} = \frac{\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}}{\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial w}\right|}. \tag{4.4}$$

Απο τις (4.1) – (4.4) παιρνουμε

$$d\mathbf{r} = a\mathbf{m}du + b\mathbf{n}dv + v\mathbf{p}dw$$

και βλεπουμε οτι τα $\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{p}$ παιζουν τον ρολο των $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ στο νεο συστημα συντεταγμενων. Επισης ο στοιχειωδης ογκος ειναι

$$dV = dxdydz = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}dudvdw. \tag{4.5}$$

**4.1.6.** Απο την (4.5) βλεπουμε και την *γεωμετρικη σημασια* της Ιακωβιανης οριζουσας. Στο συστημα συντεταγμενων $(x, y, z)$ ο στοιχειωδης ογκος ειναι $dV = dxdydz$ και στο $(u, v, w)$ ο στοιχειωδης ογκος ειναι $dU = udvdw$. Οποτε, αν ξαναγραφουμε την (4.5) ως

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \frac{dudvdw}{dxdydz} = \frac{dU}{dV}$$

δηλ. η Ιακωβιανη οριζουσα ειναι η ¨παραγωγος ογκου¨.

## 4.2 Λυμενα Προβληματα

**4.2.1.** Ποιες ειναι οι κυλινδρικες και σφαιρικες συντεταγμενες του σημειου με ορθογωνιες συντεταγμενες $(0, 1, 0)$;

**Λυση**. Εχουμε $(x, y, z) = (0, 1, 0)$. Αρα, σε κυλινδρικες συντεταγμενες εχουμε

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = 1, \quad \theta = \arctan\frac{1}{0} = \frac{\pi}{2}, \quad z = 0.$$

Δηλ. $(\rho, \theta, z) = (1, \pi/2, 0)$.

Σε σφαιρικες συντεταγμενες εχουμε

$$0 = x = r\cos\theta\sin\phi, \qquad 1 = y = r\sin\theta\sin\phi, \qquad 0 = r\cos\phi.$$

Εχουμε

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1.$$

Αρα

$$0 = r\cos\phi = \cos\phi \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{2}.$$

Τελος

$$0 = x = r\cos\theta\sin\phi = \cos\theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}.$$

Τελικα λοιπον, σε σφαιρικες συντεταγμενες εχουμε $(r, \theta, \phi) = (1, \pi/2, \pi/2)$.

**4.2.2.** Ποιες ειναι οι κυλινδρικες και σφαιρικες συντεταγμενες του σημειου με ορθογωνιες συντεταγμενες $\left(1, 1, \sqrt{2}\right)$;

**Λυση**. Εχουμε $(x, y, z) = \left(1, 1, \sqrt{2}\right)$. Αρα, σε κυλινδρικες συντεταγμενες εχουμε

$$\rho = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad \theta = \arctan\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}, \quad z = \sqrt{2}.$$

Δηλ. $(\rho, \theta, z) = \left(\sqrt{2}, \pi/4, \sqrt{2}\right)$.

Σε σφαιρικες συντεταγμενες εχουμε

$$1 = x = r\cos\theta\sin\phi, \qquad 1 = y = r\sin\theta\sin\phi, \qquad \sqrt{2} = r\cos\phi.$$

Εχουμε

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2.$$

Αρα

$$1 = r\cos\phi \Rightarrow \cos\phi = \frac{1}{2} \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{3}.$$

Επισης εχουμε $\sin\phi = \sqrt{1 - \cos^2\phi} = \sqrt{1 - (1/2)^2} = \sqrt{3}/2$. Τελος

$$\tan\theta = \frac{r\sin\theta\sin\phi}{r\cos\theta\sin\phi} = \frac{x}{y} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}.$$

Τελικα λοιπον, σε σφαιρικες συντεταγμενες εχουμε $(r, \theta, \phi) = (2, \pi/4, \pi/3)$.

**4.2.3.** Ποιες ειναι οι κυλινδρικες και σφαιρικες συντεταγμενες του σημειου με ορθογωνιες συντεταγμενες $(2, 2, 2)$;

**Λυση**. Εχουμε $(x, y, z) = (2, 2, 2)$. Αρα, σε κυλινδρικες συντεταγμενες εχουμε

$$\rho = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}, \quad \theta = \arctan\frac{2}{2} = \frac{\pi}{4}, \quad z = 2.$$

Δηλ. $(\rho, \theta, z) = \left(2\sqrt{2}, \pi/4, 2\right)$.

Σε σφαιρικες συντεταγμενες εχουμε

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2\sqrt{3}.$$

Αρα

$$1 = r\cos\phi \Rightarrow \cos\phi = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \phi = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}} \simeq 0.95 \text{ ακτινια}.$$

Επισης εχουμε $\sin\phi = \sqrt{1 - \cos^2\phi} = \sqrt{1 - \left(1/\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{2/3}$. Τελος

$$\tan\theta = \frac{r\sin\theta\sin\phi}{r\cos\theta\sin\phi} = \frac{x}{y} = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}.$$

Τελικα λοιπον, σε σφαιρικες συντεταγμενες εχουμε $(r, \theta, \phi) = \left(2, \pi/4, \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

**4.2.4.** Ποιες ειναι οι κυλινδρικες και ορθογωνιες συντεταγμενες του σημειου με σφαιρικες συντεταγμενες $(1, \pi/2, \pi/3)$;

**Λυση**. Για ορθογωνιες συντεταγμενες εχουμε

$$
\begin{aligned}
x &= \rho \cos\theta \sin\phi = 1 \cdot \cos\frac{\pi}{2} \cdot \sin\frac{\pi}{3} = 0 \\
y &= \rho \sin\theta \sin\phi = 1 \cdot \sin\frac{\pi}{2} \cdot \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
z &= \rho \sin\theta \sin\phi = 1 \cdot \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Δηλ. $(x, y, z) = \left(0, \sqrt{3}/2, 1/2\right)$. Απο τις ορθογωνιες βρισκουμε τις κυλινδρικες συντεταγμενεσ:

$$
\begin{aligned}
\rho &= \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3}/2 \\
\theta &= \arctan\frac{y}{x} = \arctan\frac{\sqrt{3}/2}{0} = \pi/2 \\
z &= 1/2
\end{aligned}
$$

δηλ. $(\rho, \theta, z) = \left(\sqrt{3}/2, \pi/2, 1/2\right)$.

**4.2.5.** Ποιες ειναι οι σφαιρικες και ορθογωνιες συντεταγμενες του σημειου με κυλινδρικες συντεταγμενες $(2, \pi/6, 3)$;

**Λυση**. Για ορθογωνιες συντεταγμενες εχουμε

$$
\begin{aligned}
x &= \rho \cos\theta = 2 \cdot \cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{3} \\
y &= \rho \sin\theta = 2 \cdot \sin\frac{\pi}{6} = 1 \\
z &= z = 1 \cdot \cos\frac{\pi}{3} = 3.
\end{aligned}
$$

Δηλ. $(x, y, z) = \left(\sqrt{3}, 1, 3\right)$. Απο τις ορθογωνιες βρισκουμε τις σφαιρικες συντεταγμενεσ:

$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{3 + 1 + 9} = \sqrt{13} \\
\theta &= \arctan\frac{y}{x} = \arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \pi/6 \\
\phi &= 1/2
\end{aligned}
$$

δηλ. $(r, \theta, \phi) = \left(\sqrt{3}/2, \pi/2, 1/2\right)$.

**4.2.6.** Βρειτε τον στοιχειωδη ογκο στο συστημα συντεταγμενων

$$x = u + 2v, y = u - v + w, z = u + w.$$

**Λυση**. Ειναι

$$\frac{dxdydz}{dudvdw} = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow dxdydz = -1 \cdot dudvdw.$$

**4.2.7.** Βρειτε τον στοιχειωδη ογκο στο συστημα συντεταγμενων

$$x = e^u \cos v, y = e^u \sin v, z = w.$$

**Λυση**. Ειναι

$$\frac{dxdydz}{dudvdw} = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} e^u \cos v & -e^u \sin v & 0 \\ e^u \sin v & e^u \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow dxdydz = e^u \cdot dudvdw.$$

**4.2.8.** Βρειτε τον στοιχειωδη ογκο στο συστημα συντεταγμενων

$$x = \frac{u^2 - v^2}{2}, y = uv, z = w.$$

**Λυση**. Ειναι

$$\frac{dxdydz}{dudvdw} = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} u & -v & 0 \\ v & u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow dxdydz = \left(u^2 + v^2\right) dudvdw$$

**4.2.9.** Βρειτε τον στοιχειωδη ογκο στο συστημα συντεταγμενων $x = \cosh u \sin v \cos w$, $y = \sinh u \sin v \sin w$, $z = \sinh u$.

**Λυση**. Ειναι

$$\begin{aligned} dxdydz &= \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} dudvdw \\ &= \begin{vmatrix} \sinh(u)\sin(v)\cos(w) & \cosh(u)\cos(v)\cos(w) & -\cosh(u)\sin(v)\sin(w) \\ \sinh(u)\sin(v)\sin(w) & \cosh(u)\cos(v)\sin(w) & \cosh(u)\sin(v)\cos(w) \\ \cosh(u)\cos(v) & -\sinh(u)\sin(v) & 0 \end{vmatrix} dudvdw \\ &= \left(\cos^2 v \cos^2 w \sin v \cosh^3 u + \cos^2 v \sin v \sin^2 w \cosh^3 u + \cos^2 w \sin^3 v \cosh u \sinh^2 u + \sin^3 v \sin^2 w \, c\right. \\ &= \left(\frac{3}{4} \sin v \cosh u + \frac{1}{4} \cosh 3u \sin v - \sin^3 v \cosh u\right) \cdot dudvdw \end{aligned}$$

**4.2.10.** Βρειτε τον στοιχειωδη ογκο στο συστημα συντεταγμενων

$$x = \frac{uv \cos w}{\left(u^2 + v^2\right)^2}, y = \frac{uv \sin w}{\left(u^2 + v^2\right)^2}, z = \frac{u^2 - v^2}{\left(u^2 + v^2\right)^2}.$$

**Λυση**. Ειναι

$$\begin{aligned} dxdydz &= \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} dudvdw \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\cos(w)v}{(u^2+v^2)^2} - 4\frac{u^2\cos(w)v}{(u^2+v^2)^3} & -4\frac{u\cos(w)v^2}{(u^2+v^2)^3} + \frac{u\cos(w)}{(u^2+v^2)^2} & -\frac{u\sin(w)v}{(u^2+v^2)^2} \\ \frac{\sin(w)v}{(u^2+v^2)^2} - 4\frac{u^2\sin(w)v}{(u^2+v^2)^3} & -4\frac{u\sin(w)v^2}{(u^2+v^2)^3} + \frac{u\sin(w)}{(u^2+v^2)^2} & \frac{u\cos(w)v}{(u^2+v^2)^2} \\ 2\frac{u}{(u^2+v^2)^2} - 4\frac{\left(u^2-v^2\right)u}{(u^2+v^2)^3} & -2\frac{v}{(u^2+v^2)^2} - 4\frac{\left(u^2-v^2\right)v}{(u^2+v^2)^3} & 0 \end{vmatrix} dudvdw \\ &= -\frac{2u^5 v \cos^2 w + 2u^5 v \sin^2 w + 4u^3 v^3 \cos^2 w + 10u^3 v^3 \sin^2 w + 2uv^5 \cos^2 w}{u^{14} + 7u^{12}v^2 + 21u^{10}v^4 + 35u^8v^6 + 35u^6v^8 + 21u^4v^{10} + 7u^2v^{12} + v^{14}} \cdot dudvdw \\ &= -\frac{uv^5 + 2u^5 v + 7u^3v^3 - 3u^3v^3 \cos 2w + uv^5 \cos 2w}{\left(u^2 + v^2\right)^7} \cdot dudvdw. \end{aligned}$$

## 4.3 Αλυτα Προβληματα

**4.3.1.** Ποιες ειναι οι κυλινδρικες και σφαιρικες συντεταγμενες του σημειου με ορθογωνιες συντεταγμενες $(1, 0, 0)$;

**Απ.** $(1, 0, 0)$, $(1, \pi/2, 0)$

**4.3.2.** Ποιες ειναι οι κυλινδρικες και σφαιρικες συντεταγμενες του σημειου με ορθογωνιες συντεταγμενες $(1, 1, 1)$;

**Απ.** $\left(\sqrt{2}, \pi/4, 1\right)$, $\left(\sqrt{3}, \arctan\sqrt{2}, \pi/4\right)$

**4.3.3.** Ποιες ειναι οι κυλινδρικες και σφαιρικες συντεταγμενες του σημειου με ορθογωνιες συντεταγμενες $(1, 2, 3)$;

**Απ.** $\left(\sqrt{5}, \arctan 2, 3\right)$, $\left(\sqrt{14}, \arctan\frac{\sqrt{5}}{3}0, \arctan 2\right)$

**4.3.4.** Ποιες ειναι οι κυλινδρικες και ορθογωνιες συντεταγμενες του σημειου με σφαιρικες συντεταγμενες $(3, 0, \pi/3)$;

**Απ.** $(0, 0, 3)$ , $(0, 0, 3)$.

**4.3.5.** Ποιες ειναι οι κυλινδρικες και ορθογωνιες συντεταγμενες του σημειου με σφαιρικες συντεταγμενες $(1, \pi/4, \pi/3)$;

**Απ.** $\left(\sqrt{2}/2, \pi/3, \sqrt{2}/2\right)$, $\left(\sqrt{2}/4, \sqrt{6}/4, \sqrt{2}/2\right)$.

**4.3.6.** Ποιες ειναι οι σφαιρικες και ορθογωνιες συντεταγμενες του σημειου με κυλινδρικες συντεταγμενες $(1, 0, 3)$;

**Απ.** $\left(\sqrt{10}, \arctan(1/3), 0\right)$, $(1, 0, 3)$

**4.3.7.** Ποιες ειναι οι σφαιρικες και ορθογωνιες συντεταγμενες του σημειου με κυλινδρικες συντεταγμενες $(1, \pi/4, 1)$;

**Απ.** $\left(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 1\right)$, $\left(\sqrt{2}/2, \pi/4, \pi/4\right)$.

**4.3.8.** Βρειτε τον στοιχειωδη ογκο στο συστημα συντεταγμενων $x = u + v$, $y = u - v$, $z = w$.

**Απ.** $dV = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} dudvdw = -2dudvdw.$

**4.3.9.** Βρειτε τον στοιχειωδη ογκο στο συστημα συντεταγμενων

$$x = u\cos v, y = u\sin v, z = w.$$

**Απ.** $dV = dxdydz = \begin{vmatrix} \cos v & -u\sin v & 0 \\ \sin v & u\cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} dudvdw = ududvdw.$

**4.3.10.** Βρειτε τον στοιχειωδη ογκο στο συστημα συντεταγμενων

$$x = uv\cos(w), y = uv\sin(w), z = \frac{u^2 - v^2}{2}.$$

**Απ**. $dV =$

$$\left|\begin{array}{ccc} \cos(w)\,v & u\cos(w) & -u\sin(w)\,v \\ \sin(w)\,v & u\sin(w) & u\cos(w)\,v \\ u & -v & 0 \end{array}\right| dudvdw$$
$$= \left(u^3 v\cos^2 w + u^3 v\sin^2 w + uv^3\cos^2 w + uv^3\sin^2 w\right) dudvdw.$$

**4.3.11.** Βρειτε τον στοιχειωδη ογκο στο συστημα συντεταγμενων

$$x = \frac{u}{u^2+v^2+w^2}, y = \frac{v}{u^2+v^2+w^2}, z = \frac{w}{u^2+v^2+w^2}.$$

**Απ**.

$$dV = \left|\begin{array}{ccc} \frac{-u^2+v^2+w^2}{(u^2+v^2+w^2)^2} & -2\,\frac{uv}{(u^2+v^2+w^2)^2} & -2\,\frac{uw}{(u^2+v^2+w^2)^2} \\ -2\,\frac{uv}{(u^2+v^2+w^2)^2} & \frac{u^2-v^2+w^2}{(u^2+v^2+w^2)^2} & -2\,\frac{vw}{(u^2+v^2+w^2)^2} \\ -2\,\frac{uw}{(u^2+v^2+w^2)^2} & -2\,\frac{vw}{(u^2+v^2+w^2)^2} & \frac{u^2+v^2-w^2}{(u^2+v^2+w^2)^2} \end{array}\right| \cdot dudvdw$$
$$= -\frac{dudvdw}{u^6+3u^4v^2+3u^4w^2+3u^2v^4+6u^2v^2w^2+3u^2w^4+v^6+3v^4w^2+3v^2w^4+w^6}$$

**4.3.12.** Εκφραστε σε κυλινδρικες και σφαιρικες συντεταγμενες τις $\nabla\phi$ και $\nabla^2\phi$.
**Απ**. Σε κυλνδρικεσ:

**4.3.13.** Εκφραστε τις $\nabla\phi$ και $\nabla^2\phi$ στο συστημα συντεταγμενων $x = u+v$, $y = u-v$, $z = w$.

**4.3.14.** Εκφραστε τις $\nabla\phi$ και $\nabla^2\phi$ στο συστημα *παραβολικων* συντεταγμενων $x = \frac{1}{2}\left(u^2-v^2\right)$, $y = uv$, $z = \frac{u^2-v^2}{2}$.

**4.3.15.** Εκφραστε τις $\nabla\phi$ και $\nabla^2\phi$ στο συστημα *παραβολοειδων* συντεταγμενων $x = uv\cos(w)$, $y = uv\sin(w)$, $z = \frac{u^2-v^2}{2}$.

**4.3.16.** Εκφραστε τις $\nabla\phi$ και $\nabla^2\phi$ στο συστημα *ελλειπτικων κυλινδρικων* συντεταγμενων $x = r\cosh u\cos v$, $y = r\sinh u\sin v$, $z = z$.

# Κεφάλαιο 5

# Σειρες $Taylor$ και Ακροτατα Συναρτησεων

## 5.1 Θεωρια

**5.1.1.** Οπως ακριβως μια συναρτηση μιας μεταβλητης μπορει να αναπτυχθει σε σειρα $Taylor$ γυρω απο το σημειο $x_0$, ετσι και μια συναρτηση δυο μεταβλητων μπορει να αναπτυχθει σε σειρα $Taylor$ γυρω απο το σημειο $(x_0, y_0)$. Ο τυπος για την σειρα $Taylor$ της $\phi(x, y)$ γυρω απο το $(x_0, y_0)$ ειναι

$$\begin{aligned} \phi(x,y) = \phi(x_0,y_0) &+ \frac{\phi_x(x_0,y_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{\phi_y(x_0,y_0)}{1!}(y-y_0) \\ &+ \frac{\phi_{xx}(x_0,y_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{2\phi_{xy}(x_0,y_0)}{2!}(x-x_0)(y-y_0) + \frac{\phi_{yy}(x_0,y_0)}{2!}(y-y_0)^2 \\ &+ \frac{\phi_{xxx}(x_0,y_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \frac{3\phi_{xxy}(x_0,y_0)}{3!}(x-x_0)^2(y-y_0) \\ &+ \frac{3\phi_{xyy}(x_0,y_0)}{3!}(x-x_0)(y-y_0)^2 + \frac{\phi_{yyy}(x_0,y_0)}{3!}(y-y_0)^3 + \ldots \end{aligned} \tag{5.1}$$

Η δομη του αναπτυγματος γινεται καλυτερα κατανοητη με χρηση των *διαφορικων τελεστων* $D_x$, $D_y$ (οπου $D_x\phi = \phi_x$, $D_y\phi = \phi_y$). Τοτε

$$\phi(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((x-x_0)D_x + (y-y_0)D_y)^n \phi}{n!}$$

οπου

$$D_x^k D_y^l \phi = \phi_{x\ldots xy\ldots y}(x_0,y_0),$$

δηλ. η μερικη παραγωγος της $\phi$, ταξεως $k$ ως προς $x$ και $l$ ως προς $y$, *υπολογισμενη στο σημειο* $(x,y) = (x_0,y_0)$.

**5.1.2.** Για σειρα $MacLaurin$, δηλ. για $x_0 = y_0 = 0$ ο τυπος (5.1) γινεται

$$
\begin{aligned}
\phi(x,y) = {} & \phi(x_0,y_0) + \frac{\phi_x(x_0,y_0)}{1!}x + \frac{\phi_y(x_0,y_0)}{1!}y \\
& + \frac{\phi_{xx}(x_0,y_0)}{2!}x^2 + \frac{2\phi_{xy}(x_0,y_0)}{2!}xy + \frac{\phi_{yy}(x_0,y_0)}{2!}y^2 \\
& + \frac{\phi_{xxx}(x_0,y_0)}{3!}x^3 + \frac{3\phi_{xxy}(x_0,y_0)}{3!}x^2y + \frac{3\phi_{xyy}(x_0,y_0)}{3!}xy^2 + \frac{\phi_{yyy}(x_0,y_0)}{3!}y^3 + \ldots
\end{aligned}
$$

**5.1.3.** Αντιστοιχα, για συναρτηση $\phi(x,y,z)$, η σειρα $Taylor$ γυρω απο το $(x_0,y_0,z_0)$ ειναι

$$
\begin{aligned}
\phi(x,y,z) = {} & \phi(x_0,y_0,z_0) \\
& + \frac{\phi_x(x_0,y_0,z_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{\phi_x(x_0,y_0,z_0)}{1!}(y-y_0) + \frac{\phi_x(x_0,y_0,z_0)}{1!}(z-z_0) \\
& + \frac{\phi_{xx}(x_0,y_0,z_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{\phi_{yy}(x_0,y_0,z_0)}{2!}(y-y_0)^2 + \frac{\phi_{zz}(x_0,y_0,z_0)}{2!}(y-y_0)^2 \\
& + \frac{2\phi_{xy}(x_0,y_0,z_0)}{2!}(x-x_0)(y-y_0) + \frac{2\phi_{yz}(x_0,y_0,z_0)}{2!}(y-y_0)(z-z_0) + \\
& + \frac{2\phi_{zx}(x_0,y_0,z_0)}{2!}(z-z_0)(x-x_0) + \ldots
\end{aligned}
$$

**5.1.4.** Εστω παραγωγισιμη συναρτηση $\phi(x,y)$. Αυτη μπορει να παρουσιαζει ενα *τοπικο μεγιστο* η *ελαχιστο* στο σημειο $(x_0,y_0)$. Για να συμβαινει αυτο, αναγκαια συνθηκη ειναι

$$\phi_x(x_0,y_0) = \phi_y(x_0,y_0) = 0. \tag{5.2}$$

Εφοσον ικανοποιειται η (5.2), λεμε οτι το $(x_0,y_0)$ ειναι *στασιμο σημειο* της $\phi(x,y)$. Τα στασιμα σημεια ταξινομουνται ως εξης.

1. Εχουμε *τοπικο μεγιστο* ανν $\begin{vmatrix} \phi_{xx}(x_0,y_0) & \phi_{xy}(x_0,y_0) \\ \phi_{yx}(x_0,y_0) & \phi_{yy}(x_0,y_0) \end{vmatrix} > 0$ και $\phi_{xx}(x_0,y_0) < 0$.

2. Εχουμε *τοπικο ελαχιστο* ανν $\begin{vmatrix} \phi_{xx}(x_0,y_0) & \phi_{xy}(x_0,y_0) \\ \phi_{yx}(x_0,y_0) & \phi_{yy}(x_0,y_0) \end{vmatrix} > 0$ και $\phi_{xx}(x_0,y_0) > 0$.

3. Εχουμε *σαγματικο σημειο* ανν $\begin{vmatrix} \phi_{xx}(x_0,y_0) & \phi_{xy}(x_0,y_0) \\ \phi_{yx}(x_0,y_0) & \phi_{yy}(x_0,y_0) \end{vmatrix} < 0$.

4. *Δεν* μπορουμε να ταξινομησουμε το σημειο (χρησιμοποιωντας μονο παραγωγους πρωτης και δευτερης ταξης) ανν $\begin{vmatrix} \phi_{xx}(x_0,y_0) & \phi_{xy}(x_0,y_0) \\ \phi_{yx}(x_0,y_0) & \phi_{yy}(x_0,y_0) \end{vmatrix} = 0$.

**5.1.5.** Παρομοια πραγματα ισχυουν για συναρτηση τριων μεταβλητων $\phi(x,y,z)$ η και $N$ μεταβλητων $\phi(x_1,x_2,...,x_N)$. Σε αυτη την περιπτωση τα κριτηρια για αναγκαια συνθηκη μεγιστου η ελαχιστου ειναι αρκετα πολυπλοκα, αλλα η αναγκαια συνθηκη (για την υπαρξη στασιμου σημειου – μεγιστου, ελαχιστου η σαγματικου) ειναι

$$\phi_x(x_0,y_0,z_0) = \phi_y(x_0,y_0,z_0) = \phi_z(x_0,y_0,z_0) = 0$$

και

$$\phi_{x_1} = \phi_{x_2} = ... = \phi_{x_N} = 0$$

αντιστοιχα.

**5.1.6.** Εστω παραγωγισιμη συναρτηση $\phi(x, y, z)$. Για να βρουμε τοπικα μεγιστα η ελαχιστα της $\phi(x, y, z)$ υπο τον περιορισμο

$$\psi(x, y, z) = 0$$

σχηματιζουμε την βοηθητικη συναρτηση

$$\omega(x, y, z, \lambda) = \phi(x, y, z) + \lambda\psi(x, y, z)$$

και βρισκουμε τα μεγιστα / ελαχιστα αυτης *χωρις περιορισμους*.

**5.1.7.** Παρομοια, εστω παραγωγισιμη συναρτηση $\phi(x_1, x_2, ..., x_N)$. Για να βρουμε τοπικα μεγιστα η ελαχιστα της $\phi(x, y, z)$ υπο τους περιορισμους

$$\psi_1(x_1, x_2, ..., x_N) = 0, ..., \psi_M(x_1, x_2, ..., x_N) = 0$$

σχηματιζουμε την βοηθητικη συναρτηση

$$\omega(x_1, x_2, ..., x_N, \lambda_1, ..., \lambda_M) = \phi(x_1, x_2, ..., x_N) + \sum_{m=1}^{M} \lambda_m \psi_m(x_1, x_2, ..., x_N)$$

και βρισκουμε τα μεγιστα / ελαχιστα αυτης *χωρις περιορισμους*.

## 5.2 Λυμενα Προβληματα

**5.2.1.** Να υπολογιστει η σειρα $Taylor$ της $F(x, y) = e^{2x+3y}$ γυρω απο το σημειο $(0, 0)$. Βρειτε τους ορους μεχρι και 3ης ταξης.

**Λυση**. Γνωριζουμε οτι

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + ....$$

Αν τωρα θεσουμε $z = 2x + 3y$ και αντικαταστησουμε στην παραπανω εχουμε

$$e^{2x+3y} = 1 + (2x + 3y) + \frac{1}{2!}(2x + 3y)^2 + \frac{1}{3!}(2x + 3y)^3 + ... .$$

**Δεν** εχουμε ακομη την σειρα $Taylor$ της $F(x, y)$. Για να φτασουμε στο ζητουμενο αποτελεσμα πρεπει να εχουμεμια εκφραση μονο με δυναμεις της μορφης $x^m y^n$. Οποτε αναπτυσσουμε τις δυναμεις $(2x + 3y)^k$:

$$e^{2x+3y} = 1 + (2x + 3y) + \frac{1}{2!}\left(4x^2 + 12xy + 9y^2\right) + \frac{1}{3!}\left(8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3\right) + ... ..$$

Τελος εκτελουμε τους πολλαπλασιασμους με $\frac{1}{2!}$ και $\frac{1}{3!}$ και παιρνουμε το τελικο αποτελεσμα

$$e^{2x+3y} = 1 + 2x + 3y + 2x^2 + 6xy + \frac{9}{2}y^2 + \frac{4}{3}x^3 + 6x^2y + 9xy^2 + \frac{9}{2}y^3 + .....$$

**5.2.2.** Να υπολογιστει η σειρα $Taylor$ της $F(x,y) = e^{x+y}$ γυρω απο το σημειο $(2,1)$. Βρειτε τους ορους μεχρι και 3ης ταξης.

**Λυση**. Θελουμε η σειρα να περιεχει δυναμεις $(x-2)^m (y-1)^n$. Καταρχην παρατηρουμε οτι

$$e^{x+y} = e^3 e^{(x-2)+(y-1)}.$$

Κατοπιν αναπτυσσουμε την $e^{(x-2)+(y-1)}$ οπως και στην προηγουμενη ασκηση

$$\begin{aligned} e^{(x-2)+(y-1)} &= 1 + ((x-2)+(y-1)) + \frac{1}{2!}((x-2)+(y-1))^2 + \frac{1}{3!}((x-2)+(y-1))^3 \\ &= 1 + (x-2) + (y-1) + \frac{1}{2!}(x-2)^2 + (x-2)(y-1) + \frac{1}{2!}(y-1)^2 + \\ & \frac{1}{3!}(x-2)^3 + \frac{1}{3!}3(x-2)^2(y-1) + \frac{1}{3!}3(x-2)(y-1)^2 + \frac{1}{3!}(y-1)^3 + .... \end{aligned}$$

Τελος, για να παρουμε την σειρα της $e^{x+y}$ πολλαπλασιαζουμε την σειρα της $e^{(x-2)+(y-1)}$ με $e^3$ και παιρνουμε

$$\begin{aligned} e^{x+y} &= e^3 + e^3(x-2) + e^3(y-1) + \frac{e^3}{2}(x-2)^2 + e^3(x-2)(y-1) + \frac{e^3}{2}(y-1)^2 + \\ & \frac{e^3}{6}(x-2)^3 + \frac{e^3}{2}(x-2)^2(y-1) + \frac{e^3}{2}(x-2)(y-1)^2 + \frac{e^3}{6}(y-1)^3 + .... \end{aligned}$$

**5.2.3.** Να υπολογιστει η σειρα $Taylor$ της $F(x,y) = \cos(x^2+y^2)$ γυρω απο το σημειο $(0,0)$. Βρειτε τους ορους μεχρι και 8ης ταξης.

**Λυση**. Γνωριζουμε οτι

$$\cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + ....$$

Αν τωρα θεσουμε $z = x^2 + y^2$ και αντικαταστησουμε στην παραπανω εχουμε

$$\cos\left(x^2+y^2\right) = 1 - \frac{1}{2!}\left(x^2+y^2\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(x^2+y^2\right)^4 + ... .$$

Οποτε, αναπτυσσοντας τις δυναμεις $(x^2+y^2)^2$ και $(x^2+y^2)^4$ (ποιο ειναι το αναπτυγμα της $(a+b)^4$;) παιρνουμε

$$\begin{aligned} \cos\left(x^2+y^2\right) &= 1 - \frac{1}{2}x^4 - x^2y^2 - \frac{1}{2}y^4 + \\ & \frac{1}{24}x^8 + \frac{1}{6}y^2x^6 + \frac{1}{4}y^4x^4 + \frac{1}{6}y^6x^2 + \frac{1}{24}y^8 + ...... \end{aligned}$$

**5.2.4.** Να υπολογιστει η σειρα $Taylor$ της $F(x,y) = xy\cos(x^2+y^2)$ γυρω απο το σημειο $(0,0)$. Βρειτε τους ορους μεχρι και 6ης ταξης.

**Λυση**. Αν θεσουμε $F(x,y) = G(x,y)H(x,y)$ οπου $G(x,y) = \cos(x^2+y^2)$ και $H(x,y) = xy$, τοτε μπορουμε να υπολογισουμε την σειρα της Θα υπολογισουμε την σειρα της $F(x,y)$ αρκει να υπολογισουμε αυτες των $G(x,y)$, $H(x,y)$ και να τις πολλαπλασιασουμε. Απο την προηγουμενη ασκηση, κρατωντας ορους μεχρι και 4ης ταξης ξερουμε οτι

$$G(x,y) = \cos\left(x^2+y^2\right) = 1 - \frac{1}{2}x^4 - x^2y^2 - \frac{1}{2}y^4 + ... .$$

Επισης, η σειρα $Taylor$ της $H(x,y) = xy$ ειναι απλα

$$H(x,y) = xy = xy.$$

Οποτε

$$\begin{aligned} F(x,y) = G(x,y)\,H(x,y) &= \left(1 - \frac{1}{2}x^4 - x^2y^2 - \frac{1}{2}y^4 + ...\right)\cdot xy \\ &= xy - \frac{1}{2}x^5y - x^3y^3 - \frac{1}{2}xy^5 + ... \end{aligned}$$

**5.2.5.** Να υπολογιστει η σειρα $Taylor$ της $F(x,y) = \frac{e^x}{1-y}$ γυρω απο το σημειο $(0,0)$. Βρειτε τους ορους μεχρι και 4ης ταξης.

**Λυση**. Παρομοια με την προηγουμενη, θετουμε $F(x,y) = G(x,y)\,H(x,y)$ οπου $G(x,y) = e^x$ και $H(x,y) = \frac{1}{1-y}$. Εχουμε

$$\begin{aligned} G(x,y) &= e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + ... \,. \\ H(x,y) &= \frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + y^3 + ... \end{aligned}$$

Οποτε

$$F(x,y) = G(x,y)\,H(x,y) = \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + ...\right)\cdot\left(1 + y + y^2 + y^3 + ...\right)$$

και τωρα μενει να εκτελεσουμε τον πολλαπλασιασμο δυο ¨πολυωνυμων απειρης ταξησ¨. Αυτον τον πολλαπλασιασμο θα τον εκτελεσουμε χιαστι και κατα ¨ανιουσα ταξη¨, δηλ. πρωτα θα υπολογισουμε ολα τα γινομενα μηδενικης ταξης, μετα ολα τα γινομενα 1ης ταξης, μετα ολα τα γινομενα 2ης ταξης κ.ο.κ. (ετσι θα ειμαστε σιγουροι οτι δεν μας διαφευγει κανεις ορος). Εχουμε

$$\begin{aligned} F(x,y) = &\left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + ...\right) \\ &\cdot\left(1 + y + y^2 + y^3 + ...\right) \\ &= 1 + x + y + \frac{1}{2}x^2 + xy + y^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}yx^2 + y^2x + y^3 \\ &+ \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{6}x^3y + \frac{1}{2}y^2x^2 + y^3x + y^4 + ... \end{aligned}$$

**5.2.6.** Να υπολογιστει η σειρα $Taylor$ της $F(x,y) = e^{x+y}\sin(x+y)$ γυρω απο το σημειο $(0,0)$. Βρειτε τους ορους μεχρι και 3ης ταξης.

**Λυση**. Με τον ιδιο τροπο οπως και στις προηγουμενες ασκησεις εχουμε

$$\begin{aligned} G(x,y) &= e^{x+y} = 1 + x + y + \frac{1}{2}x^2 + xy + \frac{1}{2}y^2 + ... \\ H(x,y) &= \sin(x+y) = x + y - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{2}xy^2 - \frac{1}{6}y^3 + ... \,. \end{aligned}$$

Οποτε

$$\begin{aligned} F(x,y) &= G(x,y)\,H(x,y) \\ &= \left(1+x+y+\frac{1}{2}x^2+xy+\frac{1}{2}y^2+...\right) \\ &\cdot\left(x+y-\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}x^2y-\frac{1}{2}xy^2-\frac{1}{6}y^3+...\right) \\ &= x+y+x^2+2xy+y^2+\frac{1}{3}x^3+yx^2+xy^2+\frac{1}{3}y^3+... \end{aligned}$$

Προσεξτε οτι στο παραπανω γινομενο κρατησαμε ορους μεχρι τριτης ταξης. Αν και δημιουργηθηκαν και οροι π.χ. 6ης ταξης, αυτοι δεν ειναι *πληρεις*, διοτι στην πηρη σειρα της $F(x,y)$ υπαρχουν και αλλοι οροι 6ης ταξης οι οποιοι δεν εμφανιστηκαν στο γινομενο (αφου εμεις χρησιμοποιησαμε προσεγγιση 3ης ταξης για τις $G(x,y)$ και $H(x,y)$).

**5.2.7.** Να υπολογιστει η σειρα $Taylor$ της $F(x,y) = e^{x^2+y^2}/(1-x-y)$ γυρω απο το σημειο $(0,0)$. Βρειτε τους ορους μεχρι και 3ης ταξης.

**Λυση**. Με τον ιδιο τροπο οπως και στις προηγουμενες ασκησεις εχουμε

$$\begin{aligned} G(x,y) &= e^{x^2+y^2} = 1+x^2+y^2+\frac{1}{2}x^4+x^2y^2+\frac{1}{2}y^4+... \\ H(x,y) &= \frac{1}{1-x-y} = 1+x+y+x^2+2xy+y^2+x^3+3x^2y+3xy^2+y^3+... . \end{aligned}$$

Οποτε

$$\begin{aligned} F(x,y) &= G(x,y)\,H(x,y) \\ &= \left(1+x^2+y^2+\frac{1}{2}x^4+x^2y^2+\frac{1}{2}y^4+...\right)\cdot \\ &\left(1+x+y+x^2+2xy+y^2+x^3+3x^2y+3xy^2+y^3+...\right) \\ &= 1+x+y+2x^2+2xy+2y^2+2x^3+4x^2y+4xy^2+2y^3+... \end{aligned}$$

**5.2.8.** Να υπολογιστει η σειρα $Taylor$ της $F(x,y) = 5x+4y-6xy-y^2+x^3$ γυρω απο το σημειο $(0,0)$. Βρειτε ολους τους ορους της σειρας.

**Λυση**. Η λυση της ασκησης ειναι εξαιρετικα απλη, η ζητουμενη σειρα ειναι

$$5x+4y-6xy-y^2+x^3$$

δηλ. ακριβως αυτη που μας δινεται. Αυτο ισχυει επειδη η σειρα $Taylor$ γυρω απο το $(0,0)$ ειναι ενα πολυωνυμο με δυναμεις $x^m y^n$ και η $F(x,y)$ μας δινεται ακριβως σε αυτη την μορφη. Εαν εχετε αμφιβολιες, μπορειτε να επαληθευσετε οτι τα πραγματα ειναι ετσι ξρησιμποιωντας τους τυπους:

$$F(x,y) = F(0,0)+\frac{F_x(0,0)}{1!}x+\frac{F_y(0,0)}{1!}y+\frac{F_{xx}(0,0)}{2!}x^2+\frac{2F_{xy}(0,0)}{2!}xy+\frac{F_{yy}(0,0)}{2!}y^2+...$$

Εχουμε

$$\begin{array}{ll} F(x,y) = 5x + 4y - 6xy - y^2 + x^3, & F(0,0) = 0, \\ F_x(x,y) = 5 - 6y + 3x^2, & F_x(0,0) = 5, \\ F_y(x,y) = 4 - 6x - 2y, & F_y(0,0) = 4, \\ F_{xx}(x,y) = 6x, & F_{xx}(0,0) = 0, \\ F_{xy}(x,y) = -6, & F_{xy}(0,0) = -6, \\ F_{yy}(x,y) = -2, & F_{yy}(0,0) = -2 \end{array}$$

κ.τ.λ. Ολες οι υψηλοτερης ταξης παραγωγοι ειναι 0 εκτος της $F_{xxx}(0,0) = 6$ (γιατι;). Οποτε με αντικατασταση στον τυπο εχουμε

$$F(x,y) = 0 + 5x + 4y + \frac{0}{2!}x^2 + \frac{2\cdot(-6)}{2!}xy + \frac{-2}{2!}y^2 + \frac{6}{3!}x^3 = 5x + 4y - 6xy - y^2 + x^3.$$

**5.2.9.** Να υπολογιστει η σειρα $Taylor$ της $F(x,y) = 5x + 4y - 6xy - y^2 + x^3$ γυρω απο το σημειο $(1,2)$. Βρειτε ολους τους ορους της σειρας.

**Λυση**. Η ασκηση ειναι παρομοια με τηνπροηγουψμενη αλλα τωρα θελουμε οι οροι της σειρας να εχουν την μορφη $(x-1)^m (y-2)^n$. Αν εφαρμοσουμε τους τυπους εχουμε

$$\begin{array}{ll} F(x,y) = 5x + 4y - 6xy - y^2 + x^3, & F(1,2) = -2 \\ F_x(x,y) = 5 - 6y + 3x^2, & F_x(1,2) = -4 \\ F_y(x,y) = 4 - 6x - 2y, & F_y(1,2) = -6 \\ F_{xx}(x,y) = 6x, & F_{xx}(1,2) = 6 \\ F_{xy}(x,y) = -6, & F_{xy}(1,2) = -6 \\ F_{yy}(x,y) = -2, & F_{yy}(1,2) = -2 \\ ... & \\ F_{xxx}(x,y) = 6, & F_{xxx}(1,2) = 6. \end{array}$$

Οποτε

$$F(x,y) = -2 - 4(x-1) - 6(y-2) + 3(x-1)^2 - 6(x-1)(y-2) - (y-2)^2 + (x-1)^3$$

Αν αναπτυξουμε τα γινομενα και τις δυναμεις στην παραπανω εκφραση βλεπουμε (οπως και περιμεναμε) οτι

$$\begin{aligned} &-2 - 4(x-1) - 6(y-2) + 3(x-1)^2 - 6(x-1)(y-2) - (y-2)^2 + (x-1)^3 = \\ &\qquad 5x + 4y - 6xy - y^2 + x^3 = F(x,y). \end{aligned}$$

**5.2.10.** Να υπολογιστει η σειρα $Taylor$ της $F(x,y,z) = e^{x+y+z}$ γυρω απο το σημειο $(0,0,0)$. Βρειτε τους ορους μεχρι και 2ης ταξης.

**Λυση**. Εχουμε

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + ...$$

οποτε, θετοντας $u = x + y + z$ εχουμε

$$\begin{aligned} e^{x+y+z} &= 1 + x + y + z + (x+y+z)^2 + ... \\ &= 1 + x + y + z + x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx + .. \end{aligned}$$

**5.2.11.** Να υπολογιστει η σειρα $Taylor$ της $F(x,y) = \frac{e^{x+y}}{1-x-z}$ γυρω απο το σημειο $(0,0,0)$. Βρειτε τους ορους μεχρι και 2ης ταξης.

**Λυση**. Εχουμε

$$e^{x+y} = 1 + x + y + \frac{1}{2!}\left(x^2 + 2xy + y^2\right) + ...$$
$$\frac{1}{1-x-z} = 1 + x + z + x^2 + 2xz + z^2 + ...$$

Οποτε, εκτελωντας τον πολλαπλασιασμο των δυο σειρων εχουμε

$$\begin{aligned}\frac{e^{x+y}}{1-x-z} &= \left(1 + x + y + \frac{1}{2!}\left(x^2 + 2xy + y^2\right) + ..\right)\\ &\cdot \left(1 + x + z + x^2 + 2xz + z^2 + ...\right)\\ &= 1 + 2x + y + z + \frac{5}{2}x^2 + 2xy + 3xz + \frac{1}{2}y^2 + yz + z^2 + ...\end{aligned}$$

**5.2.12.** Να βρεθουν και να χαρακτηριστουν τα στασιμα σημεια της $F(x,y) = x^2 + y^2$.

**Λυση**. Καταρχην βρισκουμε τα στασιμα σημεια. Θα εχουμε

$$F_x = 2x = 0$$
$$F_y = 2y = 0.$$

Προφανως η μονη λυση του συστηματος ειναι $(x_1, y_1) = (0,0)$. Για να προσδιορισουμε την φυση αυτου υπολογιζουμε τις δευτερες παραγωγους

$$F_{xx}(x,y) = 1, \qquad F_{xx}(x_1,y_1) = 1 > 0$$
$$D(x,y) = \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{yx} & F_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0.$$

Αρα το $(x_1, y_1)$ ειναι *τοπικο ελαχιστο*. Ευκολα καταλαβαινουμε οτι στην πραγματικοτητα ειναι το μοναδικο ολικο ελαχιστο της συναρτησης $F(x,y) = x^2 + y^2$.

**5.2.13.** Να βρεθουν και να χαρακτηριστουν τα στασιμα σημεια της $F(x,y) = 4xy - x^2 - 3y^2 + 3x + 4$.

**Λυση**. Καταρχην βρισκουμε τα στασιμα σημεια. Θα εχουμε

$$F_x = 4y - 2x + 3 = 0$$
$$F_y = 4x - 6y = 0.$$

Λυνουμε το συστημα και παιρνουμε ενα στασιμο σημειο, το $(x_1, y_1) = (-9/2, -3)$. Για να προσδιορισουμε την φυση αυτου υπολογιζουμε τις δευτερες παραγωγους

$$F_{xx}(x,y) = -2, \qquad F_{xx}(x_1,y_1) = -2 < 0$$
$$D(x,y) = \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{yx} & F_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -6 \end{vmatrix} = -4 < 0.$$

Αρα το $(x_1, y_1)$ ειναι *σαγματικο σημειο* της $F(x,y)$.

**5.2.14.** Να βρεθουν και να χαρακτηριστουν τα στασιμα σημεια της $F(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

**Λυση**. Καταρχην βρισκουμε τα στασιμα σημεια. Θα εχουμε

$$F_x = 3x^2 - 3y = 0$$
$$F_y = 3y^2 - 3x = 0.$$

Εχουμε λοιπον

$$x^2 = y \Rightarrow x^4 = y^2 = x \Rightarrow x \cdot \left(x^3 - 1\right) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x_1, y_1) = (0,0) \\ (x_2, y_2) = (1,1) \end{array} \right. .$$

Τωρα υπολογιζουμε τις δευτερες παραγωγους

$$F_{xx}(x,y) = 6x, \qquad D(x,y) = \left| \begin{array}{cc} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{yx} & F_{yy} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{array} \right| = 36xy - 9.$$

Τελος εχουμε

$$F_{xx}(x_1, y_1) = 6 \cdot 0 = 0, \qquad D(x_1, y_1) = -9 < 0.$$
$$F_{xx}(x_2, y2) = 6 \cdot 1 > 0, \qquad D(x_2, y_2) = 27 > 0.$$

Αρα το $(0,0)$ ειναι σαγματικο σημειο και το $(1,1)$ τοπικο ελαχιστο της $F(x,y)$.

**5.2.15.** Να βρεθουν και να χαρακτηριστουν τα στασιμα σημεια της $F(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

**Λυση**. Καταρχην βρισκουμε τα στασιμα σημεια. Θα εχουμε

$$F_x = 3yx^2 + 24x = 0$$
$$F_y = x^3 - 8 = 0.$$

Εχουμε λοιπον $x = 2$ και $12y + 48 = 0 \Rightarrow y = -4$. Δηλ. το μονο στασιμο σημειο ειναι το $(x_1, y_1) = (2, -4)$. Υπολογιζουμε τις δευτερες παραγωγους

$$F_{xx}(x,y) = 6x, \qquad D(x,y) = \left| \begin{array}{cc} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{yx} & F_{yy} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} 6xy + 24 & 3x^2 \\ 3x^2 & 0 \end{array} \right| = -9x^4.$$

Τελος εχουμε

$$F_{xx}(x_1, y_1) = 6 \cdot 2 = 12 > 0, \qquad D(x_1, y_1) = -9 \cdot 2^4 < 0.$$

Αρα το $(2, -4)$ ειναι σαγματικο σημειο της $F(x,y)$.

**5.2.16.** Να βρεθουν και να χαρακτηριστουν τα στασιμα σημεια της $F(x,y) = x^3y + 12x^2 - 8y$.

**Λυση**. Καταρχην βρισκουμε τα στασιμα σημεια. Θα εχουμε

$$F_x = 3yx^2 + 24x = 0$$
$$F_y = x^3 - 8 = 0.$$

Εχουμε λοιπον $x = 2$ και $12y + 48 = 0 \Rightarrow y = -4$. Δηλ. το μονο στασιμο σημειο ειναι το $(x_1, y_1) = (2, -4)$. Υπολογιζουμε τις δευτερες παραγωγους

$$F_{xx}(x,y) = 6x, \qquad D(x,y) = \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{yx} & F_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6xy+24 & 3x^2 \\ 3x^2 & 0 \end{vmatrix} = -9x^4.$$

Τελος εχουμε

$$F_{xx}(x_1,y_1) = 6 \cdot 2 = 12 > 0, \qquad D(x_1,y_1) = -9 \cdot 2^4 < 0.$$

Αρα το $(2, -4)$ ειναι σαγματικο σημειο της $F(x,y)$.

**5.2.17.** Να βρεθουν και να χαρακτηριστουν τα στασιμα σημεια της $F(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2$.

**Λυση**. Καταρχην βρισκουμε τα στασιμα σημεια. Θα εχουμε

$$\begin{aligned} F_x &= 4x^3 - 4y = 0 \\ F_y &= 4y^3 - 4x = 0. \end{aligned}$$

Εχουμε λοιπον

$$\begin{aligned} x^3 = y \Rightarrow x^9 = y^3 = x \Rightarrow x \cdot \left(x^8 - 1\right) = 0 \Rightarrow x \cdot \left(x^4 - 1\right) \cdot \left(x^4 + 1\right) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x \cdot \left(x^2 - 1\right) \cdot \left(x^2 + 1\right) \cdot \left(x^4 + 1\right) = 0 \\ \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} (x_1,y_1) = (0,0) \\ (x_2,y_2) = (1,1) \\ (x_3,y_3) = (-1,-1) \end{array} \right. . \end{aligned}$$

Τωρα υπολογιζουμε τις δευτερες παραγωγους

$$F_{xx}(x,y) = 12x^2, \qquad D(x,y) = \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{yx} & F_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{vmatrix} = 144x^2y^2 - 16.$$

Τελος εχουμε

$$\begin{aligned} F_{xx}(x_1,y_1) &= 12 \cdot 0 = 0, \qquad & D(x_1,y_1) &= -16 < 0. \\ F_{xx}(x_2,y_2) &= 12 \cdot 1 > 0, \qquad & D(x_2,y_2) &= 128 > 0. \\ F_{xx}(x_3,y_3) &= 12 \cdot 1 > 0, \qquad & D(x_3,y_3) &= 128 > 0. \end{aligned}$$

Αρα το $(0,0)$ ειναι σαγματικο σημειο και τα $(1,1), (-1,-1)$ τοπικα ελαχιστα της $F(x,y)$.

**5.2.18.** Να βρεθουν και να χαρακτηριστουν τα στασιμα σημεια της $F(x,y) = (1 + xy) \cdot (x + y)$.

**Λυση**. Καταρχην βρισκουμε τα στασιμα σημεια. Θα εχουμε

$$\begin{aligned} F_x &= y(x+y) + 1 + xy = 0 \\ F_y &= x(x+y) + 1 + xy = 0. \end{aligned}$$

Ευκολα βλεπουμε οτι καμμια λυση τοπυ συστηματος δεν μπορει να εχει $x = 0$ ουτε και $y = 0$. Οποτε εχουμε $y \cdot (x + y) = x \cdot (x + y)$ και, ειτε $x = -y$, ειτε $x = y$. Αλλα αν $x = y$ τοτε παιρνουμε $3x^2 + 1 = 0$. Οποτε η μονη περιπτωση που απομενει ειναι $x = -1$. Τοτε εχουμε

$$0 + 1 - x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} (x_1, y_1) = (1, -1) \\ (x_2, y_2) = (-1, 1) \end{cases} .$$

Τωρα υπολογιζουμε τις δευτερες παραγωγους

$$F_{xx}(x, y) = 2y, \qquad D(x, y) = \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{yx} & F_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2y & 2x + 2y \\ 2x + 2y & 2x \end{vmatrix} = -4x^2 - 4xy - 4y^2.$$

Τελος εχουμε

$$\begin{array}{ll} F_{xx}(x_1, y_1) = 2 > 0, & D(x_1, y_1) = -4 < 0. \\ F_{xx}(x_2, y_2) = -2 < 0, & D(x_2, y_2) = -4 > 0. \end{array}$$

Αρα τα $(1, -1)$ και $(-1, 1)$ ειναι σαγματικα σημεια της $F(x, y)$.

**5.2.19.** Να βρεθουν και να χαρακτηριστουν τα στασιμα σημεια της $F(x, y) = xy \cdot (1 - x - y)$.

**Λυση**. Καταρχην βρισκουμε τα στασιμα σημεια. Θα εχουμε

$$\begin{aligned} F_x &= y(-x + 1 - y) - xy = 0 \\ F_y &= x(-x + 1 - y) - xy = 0. \end{aligned}$$

Μια λυση του συστηματος ειναι η $(x_1, y_1) = (0, 0)$. Επισης μπορει να εχουμε $x = 0, y \neq 0$ οποτε

$$y \cdot (1 - y) = 0$$

και αρα $(x_2, y_2) = (0, 1)$· συμμετρικα παιρνουμε $(x_3, y_3) = (1, 0)$. Τελος, αν $(x, y) \neq (0, 0)$ τοτε εχουμε

$$\begin{aligned} -x + 1 - y &= x \\ -x + 1 - y &= y \end{aligned}$$

οποτε $(x_4, y_4) = (1/3, 1/3)$. Δηλ. εχουμε *τεσσερα* στασιμα σημεια. Τωρα υπολογιζουμε τις δευτερες παραγωγους

$$\begin{aligned} F_{xx}(x, y) &= -2y, \\ D(x, y) &= \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{yx} & F_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2y & 1 - 2x - 2y \\ 1 - 2x - 2y & -2x \end{vmatrix} \\ &= -4x^2 - 4xy + 4x - 4y^2 + 4y - 1. \end{aligned}$$

Τελος εχουμε

$$\begin{array}{ll} F_{xx}(x_1, y_1) = 0, & D(x_1, y_1) = -1 < 0. \\ F_{xx}(x_2, y_2) = -2 < 0, & D(x_2, y_2) = -1 < 0. \\ F_{xx}(x_3, y_3) = 0, & D(x_3, y_3) = -1 < 0. \\ F_{xx}(x_4, y_4) = -2/3 < 0, & D(x_4, y_4) = \frac{1}{3} > 0. \end{array}$$

Αρα τα $(0, 0), (0, 1), (1, 0)$ ειναι σαγματικα σημεια της $F(x, y)$ και το και $(1/3, 1/3)$ ειναι τοπικο μεγιστο.

**5.2.20.** Να βρεθουν και να χαρακτηριστουν τα στασιμα σημεια της $F(x,y) = x^2+y^2-z^2$.

**Λυση**. Καταρχην βρισκουμε τα στασιμα σημεια. Θα εχουμε

$$\begin{aligned} F_x &= 2x = 0 \\ F_y &= 2y = 0. \\ F_z &= 2z = 0 \end{aligned}$$

Προφανως, το μονο στασιμο σημειο ειναι το $(x_1,y_1,z_1) = (0,0,0)$. Υπολογιζουμε τον $Hesssian$ πινακα

$$D(x,y,z) = \begin{bmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} \\ F_{zx} & F_{zy} & F_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Τελος εχουμε

$$\begin{aligned} D_1(x,y,z) &= \begin{vmatrix} F_{xx}(x,y,z) \end{vmatrix} = 2 > 0 \\ D_2(x,y,z) &= \begin{vmatrix} F_{xx}(x,y,z) & F_{xy}(x,y,z) \\ F_{yx}(x,y,z) & F_{yy}(x,y,z) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \\ D_3(x,y,z) &= \begin{vmatrix} F_{xx}(x,y,z) & F_{xy}(x,y,z) & F_{xz}(x,y,z) \\ F_{yx}(x,y,z) & F_{yy}(x,y,z) & F_{yz}(x,y,z) \\ F_{zx}(x,y,z) & F_{zy}(x,y,z) & F_{zz}(x,y,z) \end{vmatrix} = -8 < 0. \end{aligned}$$

Αρα το $(0,0,0)$ ειναι σαγματικο σημειο της $F(x,y,z)$.

**5.2.21.** Να βρεθουν και να χαρακτηριστουν τα στασιμα σημεια της $F(x,y) = -x^2-y^2-z^2+2xy+xz-3y$.

**Λυση**. Καταρχην βρισκουμε τα στασιμα σημεια. Θα εχουμε

$$\begin{aligned} F_x &= -2x+2y+z = 0 \\ F_y &= -2y+2x-3 = 0. \\ F_z &= -2z+x = 0 \end{aligned}$$

Λυνουμε το *γραμμικο συστημα με τον κανονα του* $Cramer$ και βρισκουμε την μοναδικη λυση $(x_1,y_1,z_1) = (6,9/2,3)$. Υπολογιζουμε τον $Hesssian$ πινακα

$$\begin{bmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} \\ F_{zx} & F_{zy} & F_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Εχουμε

$$\begin{aligned} D_1(x,y,z) &= \begin{vmatrix} -2 \end{vmatrix} = -2 < 0 \\ D_2(x,y,z) &= \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \\ D_3(x,y,z) &= \begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 > 0. \end{aligned}$$

Οι ανισοτητες ισχυουν σε *καθε* σημειο $(x,y,z)$ αρα και στο $(x_1,y_1,z_1) = (0,0,0,)$. Οποτε το $(x_1,y_1,z_1)$ ειναι σαγματικο σημειο της $F(x,y,z)$.

**5.2.22.** Να βρεθουν και να χαρακτηριστουν τα στασιμα σημεια της $F(x,y) = x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz$.

**Λυση**. Καταρχην βρισκουμε τα στασιμα σημεια. Θα εχουμε

$$\begin{aligned} F_x &= 4x^3 - 4yz = 0 \\ F_y &= 4y^3 - 4xz = 0. \\ F_z &= 4z^3 - 4xy = 0 \end{aligned}$$

Με απλη επισκοπηση βλεπουμε οτι μια λυση του συστηματος ειναι $(x_1, y_1, z_1) = (0,0,0)$ και αλλη μια $(x_2, y_2, z_2) = (1,1,1)$. Αν $x \neq 0$ τοτε και $yz \neq 0$ οποτε μπορουμε, π.χ., να γραψουμε

$$\frac{x^3}{y^3} = \frac{y}{x} \Rightarrow x^4 = y^4 \Rightarrow y = \pm x$$

και ομοια $z = \pm x$. Απο τις

$$x^3 = yz, \qquad y = \pm x, \qquad z = \pm x$$

βλεπουμε οτι οι μονες λυσεις (αλλες απο αυτες που ηδη υπολογισαμε) ειναι

$$\begin{aligned} (x_3, y_3, z_3) &= (1, -1, -1) \\ (x_4, y_4, z_4) &= (-1, 1, -1) \\ (x_5, y_5, z_5) &= (-1, -1, 1). \end{aligned}$$

Υπολογιζουμε τωρα τον $Hesssian$ πινακα

$$\begin{bmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} \\ F_{zx} & F_{zy} & F_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12x^2 & -4z & -4y \\ -4z & 12y^2 & -4x \\ -4y & -4x & 12z^2 \end{bmatrix}.$$

Εχουμε

$$\begin{aligned} D_1(x,y,z) &= \begin{vmatrix} 12x^2 \end{vmatrix} = 12x^2 \\ D_2(x,y,z) &= \begin{vmatrix} 12x^2 & -4z \\ -4z & 12y^2 \end{vmatrix} = 144x^2y^2 - 16z^2 \\ D_3(x,y,z) &= \begin{vmatrix} 12x^2 & -4z & -4y \\ -4z & 12y^2 & -4x \\ -4y & -4x & 12z^2 \end{vmatrix} = -192x^4 + 1728x^2y^2z^2 - 128xyz - 192y^4 - 192z^4. \end{aligned}$$

1. Στο $(x_1, y_1, z_1) = (0,0,0,)$ εχουμε

$$D_1(0,0,0) = D_2(0,0,0) = D_3(0,0,0) = 0$$

οποτε δεν μπορουμε να αποφανθουμε για την φυση του στασιμου σημειου $(0,0,0)$.

2. Στο $(x_2, y_2, z_2) = (1,1,1)$ εχουμε

$$\begin{aligned} D_1(x_2, y_2, z_2) &= 12 > 0 \\ D_2(x_2, y_2, z_2) &= 128 > 0 \\ D_3(x_2, y_2, z_2) &= 1024 > 0. \end{aligned}$$

αρα το $(x_2, y_2, z_2)$ ειναι τοπικο ελαχιστο της $F(x,y,z)$.

3. Στο $(x_3, y_3, z_3) = (1, -1, -1)$ εχουμε

$$\begin{aligned} D_1(x_2, y_2, z_2) &= 12 > 0 \\ D_2(x_2, y_2, z_2) &= 128 > 0 \\ D_3(x_2, y_2, z_2) &= 1280 > 0. \end{aligned}$$

   αρα το $(x_3, y_3, z_3)$ ειναι τοπικο ελαχιστο της $F(x, y, z)$.

4. Τα $(x_4, y_4, z_4) = (-1, 1, -1)$ και $(x_5, y_5, z_5) = (-1, -1, 1)$ ειναι επισης τοπικα ελαχιστα, λογω συμμετριας.

**5.2.23.** Να βρεθουν και να χαρακτηριστουν τα στασιμα σημεια της $F(x, y) = x^3 + y^3 - z^2 - xyz$.

**Λυση**. Καταρχην βρισκουμε τα στασιμα σημεια. Θα εχουμε

$$\begin{aligned} F_x &= 3x^2 - yz = 0 \\ F_y &= 3y^2 - xz = 0. \\ F_z &= -2z - xy = 0 \end{aligned}$$

Οι λυσεις του συστηματος ειναι $(x_1, y_1, z_1) = (0, 0, 0)$ και $(x_2, y_2, z_2) = (-6, -6, -18)$. Υπολογιζουμε τον $Hesssian$ πινακα

$$\begin{bmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} \\ F_{zx} & F_{zy} & F_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x & -z & -y \\ -z & 6y & -x \\ -y & -x & -2 \end{bmatrix}.$$

Εχουμε

$$\begin{aligned} D_1(x, y, z) &= \begin{vmatrix} 6x \end{vmatrix} = 6x \\ D_2(x, y, z) &= \begin{vmatrix} 6x & -z \\ -z & 6y \end{vmatrix} = 36xy - z^2 \\ D_3(x, y, z) &= \begin{vmatrix} 6x & -z & -y \\ -z & 6y & -x \\ -y & -x & -2 \end{vmatrix} = -6x^3 - 2xyz - 72xy - 6y^3 + 2z^2. \end{aligned}$$

Τωρα στο $(x_1, y_1, z_1) = (0, 0, 0, )$ εχουμε

$$D_1(0, 0, 0) = D_2(0, 0, 0) = D_3(0, 0, 0) = 0$$

οποτε δεν μπορουμε να αποφανθουμε για την φυση του στασιμου σημειου $(0, 0, 0)$. Στο $(x_2, y_2, z_2) = (-6, -6, -18)$ εχουμε

$$\begin{aligned} D_1(x_2, y_2, z_2) &= \begin{vmatrix} 6 \cdot (-6) \end{vmatrix} = -36 < 0 \\ D_2(x_2, y_2, z_2) &= \begin{vmatrix} 6 \cdot (-6) & 18 \\ 18 & 6 \cdot (-6) \end{vmatrix} = 972 > 0 \\ D_3(x_2, y_2, z_2) &= \begin{vmatrix} 6 \cdot (-6) & 18 & 6 \\ 18 & 6 \cdot (-6) & 6 \\ 6 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 1944 > 0. \end{aligned}$$

αρα το $(x_2, y_2, z_2)$ ειναι σαγματικο σημειο της $F(x, y, z)$.

**5.2.24.** Να βρεθουν τα ακροτατα της συναρτησης $F(x,y) = x^2 + 2y^2$ υπο τον περιορισμο $x^2 + y^2 = 1$.

**Λυση**. Επειδη εχουμε περιορισμο, θα δουλεψουμε με την μεθοδο των πολ/στων $Lagrange$. Η αρχικη μας συναρτηση ειναι $F(x,y) = x^2 + 2y^2$ και η βοηθητικη συναρτηση ειναι

$$L(x,y) = F(x,y) + \lambda \cdot G(x,y) = x^2 + 2y^2 + \lambda \cdot \left(x^2 + y^2 - 1\right).$$

Παιρνουμε τις πρωτες παραγωγους:

$$\begin{aligned} L_x &= 2x + 2\lambda x = 0 \\ L_y &= 4y + 2\lambda y = 0 \\ L_\lambda &= x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Οποτε εχουμε

$$\begin{aligned} 2x &= -2x\lambda \\ 4y &= -2y\lambda \end{aligned}$$

Απο την πρωτη θα εχουμε $x = 0$ ή $\lambda = -1$. Αν $x = 0$, τοτε η τριτη δινει $y = \pm 1$. Αν $\lambda = -1$, τοτε η δευτερη δινει $y = 0$ και η τριτη δινει $x = \pm 1$. Οποτε εχουμε τεσσεαρ πιθανα ακροτατα σημεια: $(0,1)$, $(0,-1)$, $(1,0)$, $(-1,0)$. Αντικαθιστωντας εχουμε

$$F(0,1) = F(0,-1) = 2 \text{ και } F(1,0) = F(-1,0) = 1.$$

Αρα εχουμε μεγιστο στα σημεια $(0,1)$ και $(0,-1)$ και ελαχιστο στα σημεια $(1,0)$ και $(-1,0)$.

**5.2.25.** Να βρεθουν τα ακροτατα της συναρτησης $F(x,y) = 3x + 4y$ υπο τον περιορισμο $G(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$.

**Λυση**. Επειδη εχουμε περιορισμο, θα δουλεψουμε με την μεθοδο των πολ/στων $Lagrange$. Η αρχικη μας συναρτηση ειναι $F(x,y) = 3x + 4y$ και η βοηθητικη συναρτηση ειναι

$$L(x,y) = F(x,y) + \lambda \cdot G(x,y) = 3x + 4y + \lambda \cdot \left(x^2 + y^2 - 1\right).$$

Παιρνουμε τις πρωτες παραγωγους:

$$\begin{aligned} L_x &= 3 + 2\lambda x = 0 \\ L_y &= 4 + 2\lambda y = 0 \\ L_\lambda &= x^2 + y^2 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Απο τις δυο πρωτες εξισωσεις βλεπουμε οτι $x, y, \lambda \neq 0$. Οποτε απο την τριτη εξισωση εχουμε

$$x = -\frac{3}{2\lambda}, \qquad y = -\frac{2}{\lambda}$$

και αντικαθιστωντας στην τριτη παιρνουμε

$$\frac{9}{4\lambda^2} + \frac{4}{\lambda^2} = 1 \Rightarrow \lambda = \pm\frac{5}{2}.$$

Αρα εχουμε δυο στασιμα σημεια:

$$(x_1, y_1) = \left(-\frac{3}{2\lambda_1}, -\frac{2}{\lambda_1}\right) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$
$$(x_2, y_2) = \left(-\frac{3}{2\lambda_2}, -\frac{2}{\lambda_2}\right) = \left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right).$$

Εχουμε δε

$$F(x_1, y_1) = 3x_1 + 4y_1 = 3\frac{3}{5} + 4\frac{4}{5} = 5$$
$$F(x_2, y_2) = 3x_2 + 4y_2 = 3\frac{-3}{5} + 4\frac{-4}{5} = -5.$$

Δηλ. η $F(x, y)$ εχει μεγιστο στο $(x_1, y_1) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ και ελαχιστο στο $(x_2, y_2) = \left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$.

**5.2.26.** Να βρεθουν τα ακροτατα της συναρτησης $F(x, y, z) = x + y + z$ υπο τον περιορισμο $xyz = 1$.

**Λυση**. Επειδη εχουμε περιορισμο, θα δουλεψουμε με την μεθοδο των πολ/στων $Lagrange$. Η αρχικη μας συναρτηση ειναι $F(x, y, z) = x + y + z$ και η βοηθητικη συναρτηση ειναι

$$L(x, y, z) = F(x, y, z) + \lambda \cdot G(x, y, z) = x + y + z + \lambda \cdot (xyz - 1).$$

Παιρνουμε τις πρωτες παραγωγους:

$$L_x = 1 + \lambda yz = 0$$
$$L_y = 1 + \lambda xz = 0$$
$$L_z = 1 + \lambda xy = 0$$
$$L_\lambda = xyz - 1 = 0.$$

Παρατηρουμε οτι δεν ειναι αποδεκτες λυσεις με $xyz = 0$ (διοτι παραβιαζουν τον περιορισμο) αρα $x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$. Οποτε απο το συστημα εχουμε

$$\lambda = -\frac{1}{yz} = -\frac{1}{xz} = -\frac{1}{xy} \Rightarrow x = y = z.$$

Για να ισχυει τωρα και

$$xyz = 1$$

θα πρεπει να εχουμε $x = y = z = 1$. Αυτο ειναι το *μονο* στασιμο σημειο της $F(x, y, z) = x + y + z$ (υπο τον περιορισμο $G(x, y, z) = xyz - 1 = 0$). Το σημειο αυτο ειναι *μεγιστο*, οπως μπορουμε να δουμε δοκιμαζοντας διαφορες τιμες $(x, y, z) = \left(x, y, \frac{1}{xy}\right)$.

**5.2.27.** Βρειτε την μεγιστη και ελαχιστη αποσταση απο το σημειο $(3, 1, -1)$ μεχρι την σφαιρα $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

**Λυση**. Εστω $(x, y, z)$ τυχον σημειο της σφαιρας. Αυτο θα ικανοποιει τον περιορισμο $G(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$. Απο ολα αυτα τα σημεια ζητουμε εκεινο το οποιο μεγιστοποιει (ελαχιστοποιει) την αποσταση $d(x,y,z) = \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2}$ ή ισοδυναμα μεγιστοποιει (ελαχιστοποιει) την συναρτηση $F(x,y,z) = (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2$. Αρα πρεπει να βρουμε τα ακροτατα σημεια της

$$L(x,y,z,\lambda) = (x-3)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 + \lambda \cdot \left(x^2+y^2+z^2-4\right).$$

Εχουμε

$$\begin{aligned} L_x &= 2(x-3) + 2x\lambda = 0 \\ L_y &= 2(y-1) + 2y\lambda = 0 \\ L_z &= 2(z+1) + 2z\lambda = 0 \\ L_\lambda &= x^2+y^2+z^2-4 = 0. \end{aligned}$$

Λυνοντας τις τρεις πρωτες ως προς $x, y, z$ παιρνουμε

$$x = \frac{3}{1-\lambda}, \qquad y = \frac{1}{1-\lambda}, \qquad z = -\frac{1}{1-\lambda}$$

(παρατηρειστε οτι υποθετουμε $\lambda \neq 1$ ... γιατι ;). Αντικαθιστωντας στην τελευταια παιρνουμε

$$\left(\frac{3}{1-\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{1-\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{1-\lambda}\right)^2 = 4$$

και λυνοντας ως προς $\lambda$ παιρνουμε

$$(1-\lambda)^2 = \frac{11}{4} \Rightarrow \lambda = 1 \pm \frac{\sqrt{11}}{2}.$$

Τωρα

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 + \frac{\sqrt{11}}{2} \Rightarrow (x_1,y_1,z_1) = \left(\frac{6}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}}\right) \\ \lambda_2 &= 1 - \frac{\sqrt{11}}{2} \Rightarrow (x_2,y_2,z_2) = \left(-\frac{6}{\sqrt{11}}, -\frac{2}{\sqrt{11}}, \frac{2}{\sqrt{11}}\right) \end{aligned}$$

Επισης βλεπουμε οτι

$$\begin{aligned} d(x_1,y_1,z_1) &= \sqrt{\left(\frac{6}{\sqrt{11}}-3\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{11}}-1\right)^2 + \left(-\frac{2}{\sqrt{11}}+1\right)^2} \simeq 1.3166 \\ d(x_2,y_2,z_2) &= \sqrt{\left(-\frac{6}{\sqrt{11}}-3\right)^2 + \left(-\frac{2}{\sqrt{11}}-1\right)^2 + \left(+\frac{2}{\sqrt{11}}+1\right)^2} \simeq 5.3166 \end{aligned}$$

Αρα εχουμε ελαχιστη αποσταση στο $(x_1,y_1,z_1)$ και μεγιστη στο $(x_2,y_2,z_2)$.

**5.2.28.** Βρειτε την μεγιστη τιμη της $F(x,y,z) = x + 2y + 3z$ με τους περιορισμους $G_1(x,y,z) = x - y + z - 1 = 0$ και $G_2(x,y,z) = x^2 + y^2 - 1 = 0$.

**Λυση**. Πρεπει να βρουμε το μεγιστο της

$$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = x + 2y + 3z + \lambda_1 \cdot (x - y + z - 1) + \lambda_2 \cdot \left(x^2 + y^2 - 1\right).$$

Παιρνοντας πρωτες παραγωγους εχουμε

$$\begin{aligned} 1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 x &= 0 \\ 2 - \lambda_1 + 2\lambda_2 y &= 0 \\ 3 + \lambda_1 &= 0 \\ x - y + z - 1 &= 0 \\ x^2 + y^2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Βλεπουμε αμεσως οτι $\lambda_1 = -3$ οποτε απο την πρωτη παιρνουμε $x = \frac{1}{\lambda_2}\cdot$ παρομοια και $y = -\frac{5}{2\lambda_2}$. Οποτε αντικαθιστωντας στην πεμπτη εχουμε

$$\frac{1}{\lambda_2^2} + \frac{25}{4\lambda_2^2} = 1$$

οποτε $\lambda_2^2 = 29/4$ και $\lambda_2 = \pm\sqrt{29}/2$. Τελικα λοιπον ειτε $1 + 0.371\,39 + 0.928\,48 = 2.\,299\,9$

$$\left.\begin{array}{c} x_1 = -2/\sqrt{29} \simeq -0.371\,39 \\ y_1 = 5/\sqrt{29} \simeq 0.928\,48 \end{array}\right\} \Rightarrow z_1 = 1 - x_1 + y_1 \simeq 2.\,3$$

ειτε

$$\left.\begin{array}{c} x_2 = 2/\sqrt{29} \simeq 0.371\,39 \\ y_2 = -5/\sqrt{29} \simeq -0.928\,48 \end{array}\right\} \Rightarrow z_1 = 1 - x_1 + y_1 \simeq 0.\,3.$$

Στο σημειο $(x_1, y_1, z_1)$ εχουμε

$$F(x_1, y_1, z_1) \simeq F(-0.37139, 0.92848, 2.3) = 8.\,385\,6$$

και στο σημειο $(x_2, y_2, z_2)$ εχουμε

$$F(x_2, y_2, z_2) \simeq F(-0.37139, 0.92848, 2.3) = -2.\,385\,6.$$

Αρα το μεγιστο της $F(x,y,z)$ εμφανιζεται στο σημειο $(x_1, y_1, z_1)$.

## 5.3 Αλυτα Προβληματα

**5.3.1.** Να υπολογιστει η σειρα $Taylor$ της $F(x,y) = e^{x+y}$ γυρω απο το σημειο $(0,0)$. Βρειτε τους ορους μεχρι και 3ης ταξης.

**Απ**. $1 + x + y + \frac{1}{2}x^2 + xy + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{6}y^3 + \ldots$

**5.3.2.** Να υπολογιστει η σειρα $Taylor$ της $F(x,y) = e^{x+y}$ γυρω απο το σημειο $(1,2)$. Βρειτε τους ορους μεχρι και 3ης ταξης.

**Απ**. $e^{-3} + e^{-3}\cdot x + e^{-3}\cdot y + \frac{e^{-3}}{2}x^2 + e^{-3}\cdot xy + \frac{e^{-3}}{2}y^2 + \frac{e^{-3}}{6}x^3 + \frac{e^{-3}}{2}x^2y + \frac{e^{-3}}{2}xy^2 + \frac{e^{-3}}{6}y^3 + \ldots$

**5.3.3.** Να υπολογιστει η σειρα $Taylor$ της $F(x,y) = \sin(x^2+y^2)$ γυρω απο το σημειο $(0,0)$. Βρειτε τους ορους μεχρι και 6ης ταξης.
**Απ.** $1 - \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{2}x^4y^2 - \frac{1}{2}x^2y^4 - \frac{1}{6}y^6 + ....$

**5.3.4.** Να υπολογιστει η σειρα $Taylor$ της $F(x,y) = x^2y\sin(x^2+y^2)$ γυρω απο το σημειο $(0,0)$. Βρειτε τους ορους μεχρι και 9ης ταξης.
**Απ.** $x^2y - \frac{1}{6}x^8y - \frac{1}{2}x^6y^3 - \frac{1}{2}x^4y^5 - \frac{1}{6}x^2y^7 + ...$

**5.3.5.** Να υπολογιστει η σειρα $Taylor$ της $F(x,y) = 21x + 42y - 6xy - 12y^2 + 4y^3 - 109$ γυρω απο το σημειο $(5,1)$. Βρειτε ολους τους ορους.
**Απ.** $15(x-5) - 6(x-5)(y-1) + 4(y-1)^3$.

**5.3.6.** Να υπολογιστει η σειρα $Taylor$ της $F(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$ γυρω απο το σημειο $(0,0)$. Βρειτε τους ορους μεχρι και 8ης ταξης.
**Απ.** $1 - x^6 - 3x^4y^2 + x^4 - 3x^2y^4 + 2x^2y^2 - x^2 - y^6 + y^4 - y^2 + \dots$ .

**5.3.7.** Να υπολογιστει η σειρα $Taylor$ της $F(x,y) = \sin x \sin y$ γυρω απο το σημειο $(\pi/4, \pi/4)$. Βρειτε τους ορους μεχρι και 2ης ταξης.
**Απ.** $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x-\pi/4) + \frac{1}{2}(y-\pi/4) - \frac{1}{4}(x-\pi/4)^2 - \frac{1}{4}(y-\pi/4)^2 + \frac{1}{2}(x-\pi/4)(y-\pi/4) + \dots$

**5.3.8.** Να υπολογιστει η σειρα $Taylor$ της $F(x,y) = e^x \sin y$ γυρω απο το σημειο $(0,0)$. Βρειτε τους ορους μεχρι και 3ης ταξης.
**Απ.** $y + xy + \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{6}y^3 + ...$

**5.3.9.** Να υπολογιστει η σειρα $Taylor$ της $F(x,y) = e^x \ln(1+y)$ γυρω απο το σημειο $(0,0)$. Βρειτε τους ορους μεχρι και 3ης ταξης.
**Απ.** $y - \frac{1}{2}y^2 + xy + \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{3}y^3 + ...$

**5.3.10.** Να υπολογιστει η σειρα $Taylor$ της $F(x,y) = \frac{\cos x}{1+x^2+y^2}$ γυρω απο το σημειο $(-1,2)$. Βρειτε τους ορους μεχρι και 8ης ταξης.
**Απ.** $1 - \frac{1}{24}x^{10} - \frac{1}{8}x^8y^2 + \frac{13}{24}x^8 - \frac{1}{8}x^6y^4 + \frac{19}{12}x^6y^2 - \frac{37}{24}x^6 - \frac{1}{24}x^4y^6 + \frac{37}{24}x^4y^4 - \frac{97}{24}x^4y^2 + \frac{37}{24}x^4 + \frac{1}{2}x^2y^6 - \frac{7}{2}x^2y^4 + \frac{5}{2}x^2y^2 - \frac{3}{2}x^2 - y^6 + y^4 - y^2 + \dots$ .

**5.3.11.** Να υπολογιστει η σειρα $Taylor$ της $F(x,y) = \frac{1}{1-x-y+xy}$ γυρω απο το σημειο $(0,0)$. Βρειτε τους ορους μεχρι και 3ης ταξης.
**Απ.** $1 + x + y + x^2 + xy + y^2 + \dots$ .

**5.3.12.** Να υπολογιστει η σειρα $Taylor$ της $F(x,y) = \ln(1-x)\ln(1-y)$ γυρω απο το σημειο $(0,0)$. Βρειτε τους ορους μεχρι και 5ης ταξης.
**Απ.** $xy + \frac{x^2y}{2} + \frac{xy^2}{2} + \frac{x^2y^2}{4} + \frac{x^2y^3}{6} + \frac{x^3y^2}{6} + \dots$ .

**5.3.13.** Να υπολογιστει η σειρα $Taylor$ (γυρω απο το $(1,1)$ ) της $z(x,y)$ η οποια οριζεται εμμεσα απο τη σχεση $z^3 + yz - xy^2 - x^3 = 0$. Βρειτε τους ορους μεχρι και 2ης ταξης.
**Απ.** $1 + (x-1) + \frac{1}{4}(y-1) - \frac{1}{8}(x-1)(y-1) + \frac{9}{64}(y-1)^2 + \dots$ .

**5.3.14.** Να υπολογιστει η σειρα $Taylor$ της $F(x,y,z) = \sin(x+y+z)$ γυρω απο το σημειο $(0,0,0)$. Βρειτε τους ορους μεχρι και 3ης ταξης.
**Απ.** $x + y + z - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2y - \frac{1}{2}x^2z - \frac{1}{2}xy^2 - xyz - \frac{1}{2}xz^2 - \frac{1}{6}y^3 - \frac{1}{2}y^2z - \frac{1}{2}yz^2 - \frac{1}{6}z^3 + \dots$ .

**5.3.15.** Να υπολογιστει η σειρα $Taylor$ της $F(x,y,z) = \frac{1}{1+x+y+z}$ γυρω απο το σημειο $(0,0,0)$. Βρειτε τους ορους μεχρι και 2ης ταξης.

**Απ**. $1 - x - y - z + x^2 + 2xy + 2xz + y^2 + 2yz + z^2 + \dots$ .

**5.3.16.** Να βρεθουν και να χαρακτηριστουν τα στασιμα σημεια της $F(x,y) = 2xy - x^2 - 2y^2 + 3x + 4$

**Απ**. Υπαρχει μεγιστο στο $(3, 3/2)$.

**5.3.17.** Να βρεθουν τα στασιμα σημεια της $F(x,y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$

**Απ**. Στασιμα σημεια $(0,0)$, $(-5/3, 0)$, $(-1, 2)$, $(-1, -2)$.

**5.3.18.** Να βρεθουν και να χαρακτηριστουν τα στασιμα σημεια της $F(x,y) = 8x^3 + y^3 - 12xy + 8$

**Απ**. Μεγιστο (8) στο $(1,2)$ και ελαχιστο (0) στο $(0,0)$ .

**5.3.19.** Να βρεθουν τα στασιμα σημεια της $F(x,y) = xy(a - x - y)$

**Απ**. Στασιμα σημεια $(0,0)$ , $(0,a)$, $(a,0)$, $\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$.

**5.3.20.** Να βρεθουν και να χαρακτηριστουν τα στασιμα σημεια της $F(x,y) = 2x^2 + y^2 - 2xy - 4x + 3$

**Απ**. Ελαχιστο (−1) στο $(2,2)$.

**5.3.21.** Να βρεθουν τα στασιμα σημεια της $F(x,y) = (2ax - x^2)(2by - y^2)$

**Απ**. Στασιμα σημεια $(0,0)$, $(0,2b)$, $(2a,0)$, $(a,b)$, $(2a,2b)$.

**5.3.22.** Να βρεθουν και να χαρακτηριστουν τα στασιμα σημεια της $F(x,y) = x^4 - 4xy + 2y^2 - 5$.

**Απ**. Στασιμα σημεια τα $(0,0)$, $(-1,-1)$, $(1,1)$ .

**5.3.23.** Να βρεθουν τα στασιμα σημεια της $F(x,y) = x^2 + xy + y^2 + \frac{a^3}{x} + \frac{a^2}{y}$

**Απ**. Ελαχιστο στο $\left(a/\sqrt[3]{3}, a/\sqrt[3]{3}\right)$.

**5.3.24.** Να βρεθουν και να χαρακτηριστουν τα στασιμα σημεια της $F(x,y) = 13x^2 + 16xy + 7y^2 + 10x + 2y - 5$

**Απ**. Ελαχιστο στο $(-1,1)$.

**5.3.25.** Να βρεθουν και να χαρακτηριστουν τα στασιμα σημεια της $F(x,y) = \cos(x+y) - 2x^2 - 2y^2 + 8x - 8y + 4xy$

**Απ**. Δεν εχει στασιμα σημεια.

**5.3.26.** Να βρεθουν τα στασιμα σημεια της $F(x,y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 4xy - 2y^2$.

**Απ**. Ελαχιστο στα $\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ και $\left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$.

**5.3.27.** Να βρεθουν τα στασιμα σημεια της $F(x,y) = x^3 + y^2 - 6xy - 39x + 18y + 20$.

**Απ**. Ελαχιστο στο $(5,6)$ .

**5.3.28.** Να βρεθουν τα στασιμα σημεια της $F(x,y) = x^3y^2(12 - x - y)$.

**Απ**. Μεγιστο στο $(6,4)$.

**5.3.29.** Να βρεθουν τα στασιμα σημεια της $F(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$.
**Απ**. Σαγματικο σημειο στο $(0,0)$, ελαχιστο στο $(1,1)$.

**5.3.30.** Να βρεθουν και να χαρακτηριστουν τα ακροτατα σημεια της $F(x,y) = 2xy - x^2 - 2y^2 + 3x + 4$.
**Απ**. Στασιμα σημεια $(8,5)$, $\left(3, \frac{3}{2}\right)$.

**5.3.31.** Να βρεθουν τα στασιμα σημεια της $F(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + 2z - xy - xz$.
**Απ**. Ελαχιστο στο $(2,1,7)$.

**5.3.32.** Να βρεθουν τα στασιμα σημεια της $F(x,y,z) = 3\ln x + 2\ln y + 5\ln z + \ln(22 - x - y - z)$.
**Απ**. Ελαχιστο στο $(6,4,10)$.

**5.3.33.** Να βρεθουν τα ακροτατα της συναρτηση $F(x,y) = x^m + y^m$ (με $m > 1$) υπο τον περιορισμο $x + y = 2$.
**Απ**. Ελαχιστο στο $(1,1)$.

**5.3.34.** Να βρεθουν τα ακροτατα της συναρτηση $F(x,y) = xy$ υπο τον περιορισμο $x^2 + y^2 = 2a^2$.
**Απ**. Μεγιστα στα $(a,a)$, $(-a,-a)$ και ελαχιστα στα $(a,-a)$, $(a,-a)$ .

**5.3.35.** Να βρεθουν τα ακροτατα της συναρτηση $F(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ υπο τον περιορισμο $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{a^2}$.
**Απ**. Μεγιστο στα $\left(a\sqrt{2}, a\sqrt{2}\right)$ και ελαχιστο στα $\left(-a\sqrt{2}, -a\sqrt{2}\right)$ .

**5.3.36.** Να βρεθουν τα ακροτατα της συναρτηση $F(x,y,z) = x+y+z$ υπο τον περιορισμο $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.
**Απ**. Ελαχιστο στο $(3,3,3)$.

**5.3.37.** Να βρεθουν τα ακροτατα της συναρτηση $F(x,y,z) = xyz$ υπο τον περιορισμο $x + y + z = 5$.
**Απ**. Μεγιστο στο $\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$.

**5.3.38.** Να βρεθουν τα ακροτατα της συναρτηση $F(x,y,z) = xyz$ υπο τον περιορισμο $xy + yz + zx = 8$.
**Απ**. Μεγιστο στο $\left(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}\right)$.

**5.3.39.** Να βρεθουν τα ακροτατα της συναρτηση $F(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 18y$ υπο τον περιορισμο $3x^2 - y^3 - 6x = 0$.
**Απ**. Ακροτατα στα $\left(\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$ και $\left(-\sqrt{3}, -\sqrt{3}\right)$.

**5.3.40.** Να βρεθει το σημειο $(x,y,z)$ του επιπεδου $2x - 6y + 3z = -22$ που εχει ελαχιστη αποσταση απο το σημειο $(3,-3,1)$
**Απ**. $(1,3,-2)$.

**5.3.41.** Να βρεθει το σημειο $(x,y,z)$ του επιπεδου $3x + 2y + 3z = 5$ που εχει ελαχιστη αποσταση απο το σημειο $(2,3,5)$
**Απ**. $(-1,1,2)$.

**5.3.42.** Να βρεθει η ελαχιστη αποσταση των ευθειων

$$l_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+7}{2} \text{ και } l_2 : \frac{x+3}{3} = \frac{y+4}{-1} = \frac{z-5}{1}.$$

**Απ**. $10\sqrt{2}$.

**5.3.43.** Να βρεθουν τα στασιμα σημεια της $z$ η οποια οριζεται εμμεσα απο την σχεση $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0$.

**Απ**. Στασιμα σημεια στα $(-2, 0)$, $(16/7, 0)$.

**5.3.44.** Να βρεθουν τα στασιμα σημεια της $z$ η οποια οριζεται εμμεσα απο την σχεση $5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 72 = 0$.

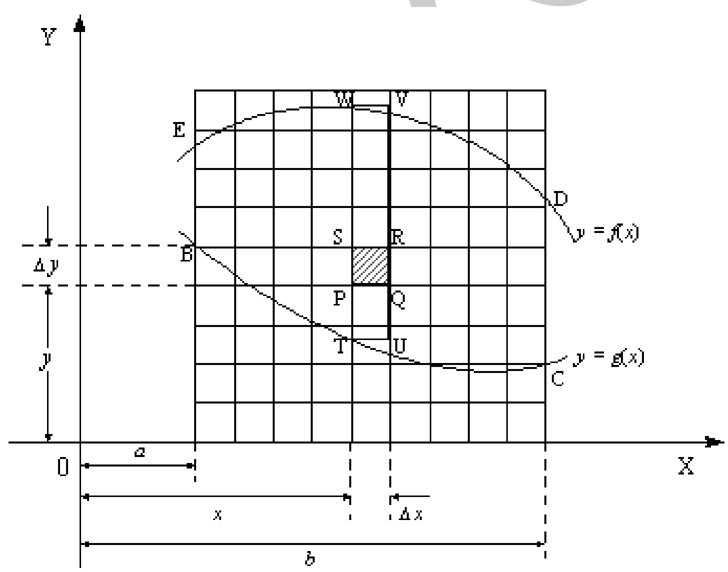
**Απ**. Στασιμα σημεια στα $(1, 1)$ και $(-1, -1)$.

# Κεφάλαιο 6

# Διπλα Ολοκληρωματα

## 6.1 Θεωρια

**6.1.1.** Ας υποθεσουμε οτι μας δινεται μια κλειστη καμπυλη $C$ η οποια οριζει ενα χωριο $D$ (δες σχημα). Θελουμε να υπολογισουμε το εμβαδο $S$ του $D$. (δες Σχ.7.1).




**Σχημα 7.1**

**6.1.2.** Για να υπολογισουμε το $S$ χρησιμοποιουμε την κλασσικη τεχνικη του ολοκληρωτικου λογισμου: υποδιαρουμε το $D$ σε μικρα ορθογωνια παραλληλογραμα· τοτε το $S$ ειναι το οριο του αθροισματος

$$\lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \sum \Delta S = \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \sum \sum \Delta x \Delta y = \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \sum \sum \Delta y \Delta x.$$

Παραλειποντας τις τεχνικες λεπτομερειες, μπορουμε να πουμε οτι το $S$ ειναι το *διπλο ολοκληρωμα*

$$S = \int \int_D dS. \tag{6.1}$$

Προσεξτε οτι το $dS$ ειναι το *στοιχειωδες εμβαδο* και $dS = dxdy$.

**6.1.3.** Το ζητουμενο εμβαδο μπορει να υπολογιστει αντικαθιστωντας το διπλο ολοκληρωμα με το *επαναληπτικο ολοκληρωμα*

$$S = \int\int_D dS = \int_{y_1}^{y_2}\int_{x(y_1)}^{x(y_2)} dxdy = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y(x_1)}^{y(x_2)} dydx. \tag{6.2}$$

**6.1.4.** Γενικοτερα, το διπλο ολοκληρωμα μιας συναρτησης $f(x,y)$ οριζεται να ειναι το οριο $\lim_{\Delta x,\Delta y\to 0}\sum f(x,y)\Delta S$) και ειναι ισο με

$$\int\int_D f(x,y)\,dS = \int_{y_1}^{y_2}\int_{x(y_1)}^{x(y_2)} f(x,y)\,dxdy = \int_{x_1}^{x_2}\int_{y(x_1)}^{y(x_2)} f(x,y)\,dydx. \tag{6.3}$$

**6.1.5.** Απο γεωμετρικη αποψη, το διπλο ολοκληρωμα της (6.3) ειναι ο *ογκος* του στερεου που οριζεται απο το χωριο $D$ και την *επιφανεια* $\{(x,y,f(x,y)) : (x,y)\in D\}$.

**6.1.6.** Απο την παραπανω παρατηρηση προκυπτουν και μερικες βασικες ιδιοτητες του διπλου ολοκληρωματος (αναλογες με αυτες του απλου):

$$a\int\int_D f(x,y)\,dxdy = \int\int_D af(x,y)\,dxdy$$
$$\int\int_D [f(x,y)+g(x,y)]\,dxdy = \int\int_D f(x,y)\,dxdy + \int\int_D g(x,y)\,dxdy$$

και, αν για καθε $(x,y)\in D$ εχουμε $f(x,y)\le g(x,y)$, τοτε

$$\int\int_D f(x,y)\,dxdy \le \int\int_D g(x,y)\,dxdy.$$

**6.1.7.** Τελος, υπαρχει ενα *θεωρημα μεσης τιμης* για τα διπλα ολοκληρωματα: αν η $f(x,y)$ ειναι ορισμενη και συνεχης στον τοπο $D$ ο οποιος εχει εμβαδον $S$, τοτε υπαρχει $(x_0,y_0)\in D$ τετοιο ωστε

$$\int\int_D f(x,y)\,dxdy = f(x_0,y_0)\cdot S.$$

**6.1.8.** Απο τις (6.1)–(6.3) φαινεται οτι υπολογιζουμε το διπλο ολοκληρωμα χρησιμοποιωντας δυο "απλα" ολοκληρωματα, οπου τα ορια ολοκληρωσης $y(x_1)$, $y(x_2)$ κτλ. εξαρτωνται απο την καμπυλη $C$. Η κυριοτερη δυσκολια στον υπολογισμο του διπλου ολοκληρωματος ειναι ο προσδιορισμος των καταλληλων οριων ολοκληρωσης.

**6.1.9.** Πολλες φορες ο υπολογισμος του διπλου ολοκληρωματος διευκολυνεται απο την αλλαγη συντεταγμενων. Εστω οτι τα $(x,y)$ εκφραζονται σαν συναρτησεις των νεων συντεταγμενων $(u,v)$ απο τις εξισωσεις

$$x = x(u,v), \qquad y = y(u,v).$$

Τοτε εχουμε

$$f(x,y) = f(x(u,v), y(u,v))$$

και το στοιχειωδες εμβαδο $dS$ δινεται απο την σχεση

$$dS = dxdy = \left| \frac{d\mathbf{r}}{du} \times \frac{d\mathbf{r}}{dv} \right| = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} dudv.$$

Ετσι το διπλο ολοκληρωμα μετασχηματιζεται ως εξης

$$\int\int_D f(x,y)\, dxdy = \int\int_D f(x(u,v), y(u,v)) \frac{D(x,y)}{D(u,v)} dudv.$$

**6.1.10.** Π.χ., οταν χρησιμοποιουμε πολικες συντεταγμενες, $u = \rho$, $v = \theta$ και $\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \rho$, οποτε $dxdy = \rho d\rho d\theta$ και

$$\int\int_D f(x,y)\, dxdy = \int\int_D f(x(\rho,\theta), y(\rho,\theta))\, \rho d\rho d\theta.$$

## 6.2 Λυμενα Προβληματα

**6.2.1.** Υπολογιστε το $\int_0^1 \int_0^2 y^2 dydx$.

**Λυση.** Εχουμε

$$\int_0^1 \int_0^2 y^2 dydx = \int_0^1 \left( \frac{y^3}{3} \right)_{y=0}^{y=2} dx = \int_0^1 \frac{8}{3} dx = \left( \frac{8x}{3} \right)_{x=0}^{x=1} = \frac{8}{3}.$$

**6.2.2.** Υπολογιστε το $\int_0^1 \int_0^x y^2 dydx$.

**Λυση.** Εχουμε

$$\int_0^1 \int_0^x y^2 dydx = \int_0^1 \left( \frac{y^3}{3} \right)_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^1 \frac{x^3}{3} dx = \left( \frac{x^4}{12} \right)_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{12}.$$

**6.2.3.** Υπολογιστε το $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^{x^2} y^2 dydx$.

**Λυση.** Εχουμε

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^{x^2} y^2 dydx = \int_0^1 \left( \frac{y^3}{3} \right)_{y=\sqrt{x}}^{y=x^2} dx = \int_0^1 \left( \frac{x^6}{3} - \frac{\sqrt{x^3}}{3} \right) dx$$
$$= \left( \frac{x^7}{21} - \frac{2}{15} x \sqrt{x^3} \right)_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{21} - \frac{2}{15} = -\frac{3}{35}.$$

**6.2.4.** Υπολογιστε το εμβαδον του σχηματος που οριζεται απο τις καμπυλες $y_1(x) = \sqrt{x}$, $y_2(x) = x^2$.

**Λυση.** Οι δυο καμπυλες τεμνονται στα σημεια $\sqrt{x} = x^2$, δηλ. στα $x = 0$ και $x = 1$. Επισης μπορουμε ευκολα να δουμε οτι στο διαστημα $[0,1]$ εχουμε $x^2 \le \sqrt{x}$. Εχουμε λοιπον

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dydx = \int_0^1 (y)_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \left( \sqrt{x} - x^2 \right) dx = \left( \frac{2x^{3/2}}{3} - \frac{x^3}{3} \right)_{x=0}^{x=1} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

**6.2.5.** Υπολογιστε το εμβαδο του σχηματος που οριζεται απο: $x = 0$, $y = 0$, $\frac{1}{2}x + y = 1$.

**Λυση.** Ειναι ενα τριγωνο με κορυφες τα σημεια $(0,0)$, $(0,1)$, $(2,1)$ (σημεια τομης των ευθειων $x = 0$, $y = 0$, $\frac{1}{2}x + y = 1$). Το εμβαδον του δινεται απο το ολοκληρωμα

$$\begin{aligned} E &= \int_0^2 \int_0^{1-x/2} dydx = \int_0^2 (y)_{y=0}^{y=1-x/2} dx = \int_0^2 \left(1 - \frac{x}{2}\right) dx \\ &= \left(x - \frac{x^2}{4}\right)_{x=0}^{x=2} = 2 - 1 = 1. \end{aligned}$$

**6.2.6.** Υπολογιστε το εμβαδο του σχηματος που οριζεται απο: $xy = 1, y = x^2, x = 1, x = 2$.

**Λυση.** Το ζητουμενο εμβαδον δινεται απο το ολοκληρωμα

$$\begin{aligned} \int_1^2 \int_{x^2}^{1/x} dydx &= \int_1^2 (y)_{y=x^2}^{y=1/x} dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - x^2\right) dx = \left(\ln x - \frac{x^3}{3}\right)_{x=1}^{x=2} \\ &= \ln 2 - \frac{8}{3} - \left(0 - \frac{1}{3}\right) = \ln 2 + \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

$6 - 4\ln 2$.

**6.2.7.** Υπολογιστε το εμβαδον του σχηματος $D$ που οριζεται απο την παραβολη $y = 4x - x^2$ και τις ευθειες $y = 0$, $y = -3x + 6$.

**Λυση**. Εδω πρεπει να χωρισουμε το $D$ σε δυο κομματια, το $D_1$, που οριζεται απο την παραβολη $y = 4x - x^2$ και τις ευθειες $x = 2$, $y = -3x + 6$· και το $D_2$, που οριζεται απο τις .$y = 4x - x^2$, $x = 2$, $y = 0$· και το $D_2$. Εχουμε λοιπον

$$\iint_D dydx = \iint_{D_1} dydx + \iint_{D_2} dydx$$

και $\left(2 \cdot 4^2 - \frac{4^3}{3}\right) - \left(2 \cdot 2^2 - \frac{2^3}{3}\right) = \frac{16}{3}$

$$\begin{aligned} \iint_{D_1} dydx &= \int_1^2 \int_{-3x+6}^{4x-x^2} dydx = \int_1^2 \left(4x - x^2 - (-3x+6)\right) dx \\ &= \left(2x^2 - \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2}x^2 - 6x\right)_{x=1}^{x=2} = \frac{13}{6} \\ \iint_{D_2} dydx &= \int_2^4 \int_0^{4x-x^2} dydx = \int_2^4 (4x - x^2)\, dx = \left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)_{x=2}^{x=4} = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

οποτε

$$\iint_D dydx = \iint_{D_1} dydx + \iint_{D_2} dydx = \frac{13}{6} + \frac{16}{3} = \frac{45}{6} = \frac{15}{2}.$$

**6.2.8.** Υπολογιστε το εμβαδο του κυκλου με κεντρο το $(0,0)$ και ακτινα $R$.

**Λυση.** Ο κυκλος εχει την εξισωση $x^2+y^2=R^2$, οποτε για καθε $x$ εχουμε $y \in \left[-\sqrt{R^2-x^2}, \sqrt{R^2-x^2}\right]$. Το ζητουμενο εμβαδο δινεται λοιπον απο το ολοκληρωμα

$$\int \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dydx.$$

Ομως ειναι πιο απλο να υπολογισουμε το εμβαδον χρησιμοποιωντας πολικες συντεταγμενες. Σε αυτες η εξισωση του κυκλου ειναι $\rho(\theta)=R$ και ετσι το ζητουμενο εμβαδο δινεται απο το ολοκληρωμα

$$\int_0^{2\pi}\int_0^R \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\frac{\rho^2}{2}\right)_{\rho=0}^{\rho=R} d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{R^2}{2}d\theta = \left(\frac{R^2}{2}\theta\right)_{\theta=0}^{2\pi} = \pi R^2$$

οπως βεβαια περιμεναμε.

**6.2.9.** Υπολογιστε το εμβαδον του τετραφυλλου $\rho=\cos 2\theta$, $\theta\in[-\pi/2,\pi/2]$

**Λυση**. Ενας λοβος του τετραφυλλου αντιστοιχει σε $\theta\in[-\pi/4,\pi/4]$. Αρα το ζητουμενο εμβαδον ειναι

$$\begin{aligned} 4\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_0^{\cos 2\theta}\rho d\rho d\theta &= 4\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left(\frac{\rho^2}{2}\right)_{\rho=0}^{\rho=\cos 2\theta} d\theta = 4\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{\cos^2 2\theta}{2}d\theta \\ &= 4\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{1+\cos 4\theta}{4}d\theta = (\theta+\cos 4\theta)_{\theta=-\pi/4}^{\theta=\pi/4} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

**6.2.10.** Υπολογιστε το εμβαδον που περικλειει η καμπυλη $\rho^2=\cos 2\theta$, $\theta\in[-\pi/4,\pi/4]$ (λημνισκος).

**Λυση**. *Μισος* λοβος του λημνισκου αντιστοιχει σε $\theta\in[0,\pi/4]$. Αρα το ζητουμενο εμβαδον ειναι

$$4\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sqrt{\cos 2\theta}}\rho d\rho d\theta = 4\int_0^{\pi/4}\left(\frac{\rho^2}{2}\right)_{\rho=0}^{\rho=\sqrt{\cos 2\theta}} d\theta = 4\int_0^{\pi/4}\frac{\cos 2\theta}{2}d\theta = (\sin 2\theta)_{\theta=0}^{\theta=\pi/4} = 1.$$

**6.2.11.** Υπολογιστε το εμβαδον του τριφυλλου $\rho=\cos 3\theta$, $\theta\in[0,\pi]$.

**Λυση**. Ενας λοβος του τριφυλλου αντιστοιχει σε $\theta\in[-\pi/6,\pi 6]$ (γιατι;). Αρα το ζητουμενο εμβαδον ειναι

$$\begin{aligned} 3\int_{-\pi/6}^{\pi/6}\int_0^{\cos 3\theta}\rho d\rho d\theta &= 3\int_{-\pi/6}^{\pi/6}\left(\frac{\rho^2}{2}\right)_{\rho=0}^{\rho=\cos 3\theta} d\theta = \frac{3}{2}\int_{-\pi/6}^{\pi/6}\cos^2 3\theta d\theta \\ &= \frac{3}{2}\int_{-\pi/6}^{\pi/6}\frac{1+\cos 6\theta}{2}d\theta = \frac{3}{4}(\theta)_{\theta=-\pi/6}^{\theta=\pi/6} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

**6.2.12.** Υπολογιστε το ολοκληρωμα $\int\int_D xydxdy$ οπου $D: x^2+y^2\leq R^2$.

**Λυση.** Το ζητουμενο δινεται απο το ολοκληρωμα

$$\int_0^{2\pi}\int_0^R xy\rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^R \rho\cos\theta\rho\sin\theta\rho d\rho d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^R \rho^3\sin 2\theta d\rho d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\rho^4}{4}\right)_{\rho=0}^{\rho=R}\sin 2\theta d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{R^4}{4}\sin 2\theta d\theta$$
$$= \frac{R^4}{8}\int_0^{2\pi}\sin 2\theta d\theta = 0$$

(αφου για $\theta\in[0,2\pi]$ το ημιτονο διαγραφει δυο πληρεις περιοδους).

**6.2.13.** Υπολογιστε το ολοκληρωμα $\int\int_D (x^2+y^2)\,dydx$, οπου $D$ ειναι ο δισκος $x^2+y^2\leq 2Rx$.

**Λυση.** Καταρχην, το οριο του δισκου $D$ ειναι ο κυκλος με εξισωση

$$x^2+y^2=2Rx \Leftrightarrow x^2-2Rx+R^2+y^2=R^2 \Leftrightarrow (x-R)^2+y^2=R^2$$

δηλ. ο κυκλος με κεντρο το $(0,R)$ και ακτινα $R$. Η εμφανιση του κυκλου δινει την ιδεα χρησης πολικων συντεταγμενων ... επειδη ομως ο κυκλος εχει κεντρο το $(0,R)$, πρεπει να χρησιμοποιησουμε μια τροποποιηση των ¨κλασσικων¨ πολικων συντεταγμενων. Συγκεκριμενα χρησιμοποιουμε

$$x=R+\rho\cos\theta,\qquad y=\rho\sin\theta.$$

Το στοιχειωδες εμβαδον στο νεο συστημα συντεταγμενων προκυπτει με χρηση της Ιακωβιανης οριζουσας

$$dxdy=\frac{D(x,y)}{D(\rho\theta)}d\rho d\theta=\begin{vmatrix}\cos\theta & -\rho\sin\theta\\ \sin\theta & \rho\cos\theta\end{vmatrix}d\rho d\theta=\rho d\rho d\theta$$

(δηλ. ειναι το ιδιο οπως και στις κλασσικες πολικες). Το ζητουμενο ολοκληρωμα τωρα γινεται

$$\int_0^{2\pi}\int_0^R\left((R+\rho\cos\theta)^2+\rho\sin^2\theta\right)\rho d\rho d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^R\left(R^2+2\rho\cos\theta+\rho^2\right)\rho d\rho d\theta$$
$$=\int_0^{2\pi}\left(R^2\frac{\rho^2}{2}+2\frac{\rho^3}{3}\cos\theta+\frac{R^4}{4}\right)_{\rho=0}^{\rho=R}d\theta$$
$$=2\pi\cdot\frac{R^4}{2}+2\pi\cdot 0+2\pi\cdot\frac{R^4}{4}=\frac{3\pi R^4}{2}.$$

**6.2.14.** Υπολογιστε το ολοκληρωμα $\int\int_D \frac{\sin x}{x} dxdy$ οπου

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$$

**Λυση**. Εαν προσπαθησουμε να υπολογισουμε το $\int\int_D \frac{\sin x}{x} dxdy$ θα πρεπει να υπολογισουμε πρωτα το $\int \frac{\sin x}{x} dx$, το οποιο δεν ειναι δυνατον. Ομως ισχυει η αρχη της αντιστροφης της σειρας ολοκληρωσης, δηλ.

$$\int\int_D \frac{\sin x}{x} dxdy = \int\int_D \frac{\sin x}{x} dydx.$$

Οποτε εχουμε

$$\int\int_D \frac{\sin x}{x} dydx = \int_0^1 \left( \int_0^x \frac{\sin x}{x} dy \right) dx = \int_0^1 \left( \frac{\sin x}{x} y \right)_{y=0}^{y=x} dx$$
$$= \int_0^1 \left( \frac{\sin x}{x} x - \frac{\sin x}{x} 0 \right) dx = \int_0^1 \sin x dx = 1 - \cos 1..$$

**6.2.15.** Υπολογιστε το ολοκληρωμα $\int\int_D x \cos(xy)\, dydx$ στο χωριο

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq 1\}.$$

**Λυση**. Ειναι

$$\int\int_D x \cos(xy)\, dydx = \int_0^\pi \left( \int_0^1 x \cos(xy)\, dy \right) dx = \int_0^\pi \left( \int_0^1 \cos(xy)\, d(xy) \right) dx$$
$$= \int_0^\pi (\sin(xy))_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^\pi \sin x dx = (-\cos x)_{x=0}^{x=\pi} = 2.$$

**6.2.16.** Υπολογιστε το το ολοκληρωμα $\int\int_D xydxdy$ οπου $D$ ειναι το χωριο που οριζεται απο τις $y = x - 1$ και $y^2 = 2x + 6$,

**Λυση**. Για να βρουμε τα ορια του χωριου βρισκουμε πρωτα τα σημεια τομης των δυο καμπυλων. Εχουμε $y = x - 1$ και $y^2 = 2x + 6$ οποτε

$$y^2 = 2 \cdot (1 + y) + 6 \Rightarrow y_1 = -2 \text{ ή } y_2 = 4.$$

Αν τωρα σχεδιασουμε το χωριο βλεπουμε οτι ειναι

$$D = \left\{ (x, y) : -2 \leq y \leq 4, \frac{y^2}{2} - 3 \leq x \leq y + 1 \right\}.$$

Οποτε το ζητουμενο ειναι

$$\int_{-2}^4 \left( \int_{\frac{y^2}{2}-3}^{y+1} xydx \right) dy = \int_{-2}^4 \left( \frac{x^2 y}{2} \right)_{x=\frac{y^2}{2}-3}^{x=y+1} dy = \int_{-2}^4 \left( -\frac{y^5}{4} + 4y^3 + 2y^2 - 8y \right) dy$$
$$= \frac{1}{2} \left( -\frac{y^6}{24} + y^4 + \frac{2}{3} y^3 - 4y^2 \right)_{y=-2}^{y=4} = 36.$$

**6.2.17.** Υπολογιστε το ολοκληρωμα $\int\int_D (3x+4y^2)\,dxdy$ οπου $D$ ειναι ο ημιδακτυλιος ο οποιος οριζεται ως

$$D = \left\{(x,y) : x^2+y^2 \geq 1 \text{ και } x^2+y^2 \leq 4 \text{ και } y \geq 0\right\}.$$

**Λυση**. Ειναι (σε πολικες συντεταγμενες)

$$\begin{aligned}
\int\int_D \left(3x+4y^2\right) dxdy &= \int_0^\pi \int_1^2 \left(3x+4y^2\right) \rho d\rho d\theta \\
&= \int_0^\pi \int_1^2 \left(3\rho\cos\theta + 4\rho^2\sin^2\theta\right) \rho d\rho d\theta \\
&= \int_0^\pi \left(\rho^3\cos\theta + \rho^4\sin^2\theta\right)_{\rho=1}^{\rho=2} d\theta \\
&= \int_0^\pi \left(\rho^3\cos\theta + \rho^4\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)_{\rho=1}^{\rho=2} d\theta \\
&= \int_0^\pi \left(7\cos\theta + \frac{15}{2}\left(1-\cos 2\theta\right)\right) d\theta \\
&= \left(7\sin\theta + \frac{15}{2}\theta\right)_{\theta=0}^{\theta=\pi} = \frac{15\pi}{2}.
\end{aligned}$$

**6.2.18.** Εστω $D$ ο δακτυλιος που περιεχεται μεταξυ των κυκλων $x^2+y^2=1$ και $x^2+y^2=5$. Να υπολογιστει το ολοκληρωμα

$$\int\int_D \left(x^2+y\right) dxdy$$

**Λυση**. Ειναι

$$\begin{aligned}
\int\int_D \left(x^2+y\right) dxdy &= \int_1^{\sqrt{5}} \int_0^{2\pi} \left(\rho^2\cos^2\theta + \rho\sin\theta\right) d\theta\rho d\rho \\
&= \int_1^{\sqrt{5}} \rho^2 \left(\int_0^{2\pi} \left(\rho\cos^2\theta + \sin\theta\right) d\theta\right) d\rho \\
&= \int_1^{\sqrt{5}} \rho^2 \left(\int_0^{2\pi} \left(\rho\frac{1+\cos 2\theta}{2} + \sin\theta\right) d\theta\right) d\rho \\
&= \int_1^{\sqrt{5}} \rho^2 \left(\frac{\rho\theta}{2} + \frac{\rho\sin 2\theta}{4} - \cos\theta\right)_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\rho \\
&= \int_1^{\sqrt{5}} \rho^2 \left(\pi\rho\right) d\rho = \left(\pi\frac{\rho^4}{4}\right)_{\rho=1}^{\rho=\sqrt{5}} = 6\pi.
\end{aligned}$$

**6.2.19.** Υπολογιστε τον ογκο του σχηματος που οριζεται απο: $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x=2$, $y=1$ και $z=x^2+y^2+1$

**Λυση.** Ο ζητουμενος ογκος δινεται απο το ολοκληρωμα

$$\int_0^2 \int_0^1 \left(1 + x^2 + y^2\right) dydx = \int_0^2 \left(y + x^2 y + \frac{y^3}{3}\right)_{y=0}^{y=1} dx$$
$$= \int_0^2 \left(\frac{4}{3} + x^2\right) dx = \left(\frac{4x}{3} + \frac{x^3}{3}\right)_{x=0}^{x=2} = \frac{16}{3}.$$

**6.2.20.** Υπολογιστε τον ογκο του σχηματος που οριζεται απο τα επιπεδα $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = 1$.

**Λυση.** Το σχημα ειναι ενα τετραεδρο (σχεδιαστε το!). Η βαση του ειναι ενα τριγωνο που οριζεται απο τα σημεια $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, $(x, y, z) = (1, 0, 0)$, $(x, y, z) = (0, 1, 0)$ (ή απο τις ευθειες $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 1$). Αν λυσουμε την εξισωση του τελευταιου επιπεδου ως προς $z$ παιρνουμε $z = 1 - x - y$. Αρα ο ζητουμενος ογκος δινεται απο το ολοκληρωμα

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y)\, dydx = \int_0^1 \left(y - xy - \frac{y^2}{2}\right)_{y=0}^{y=1-x} dx$$
$$= \int_0^1 \left(1 - x - x\,(y)\,1 - x - \frac{(1-x)^2}{2}\right) dx = \frac{1}{6}.$$

**6.2.21.** Δινεται ενας κυκλικος κυλινδρος με εξισωση $x^2 + y^2 = R^2$. Υπολογιστε τον ογκο του τμηματος του κυλινδρου που περιεχεται μεταξυ των επιπεδων $z = 2$, $z = 5$.

**Λυση.** Ο ζητουμενος ογκος δινεται απο το ολοκληρωμα (οπου $D$ ειναι ο κυκλος $x^2 + y^2 = R^2$)

$$\int\int_D \left(z_2(x, y) - z_1(x, y)\right) dydx = \int\int_D (5 - 2)\, dydx = 3\pi R^2$$

(χρησιμοποιησαμε το γεγονος οτι $\int\int_D dydx = \pi R^2$, το εμβαδον του κυκλου).

**6.2.22.** Βρειτε τον ογκο του στερεου που οριζεται απο το ελλειπτικο παραβολοειδες $x^2 + 2y^2 + z^2 = 16$ και τα επιπεδα $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 2$, $z = 0$.

**Λυση**. Καντε το αντιστοιχο σχημα. Θα δειτε οτι το ζητουμενο στερεο εχει ¨βαση¨ το τετραγωνο $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 2$. Οποτε ο ζητουμενος ογκος ειναι

$$\int_0^2 \int_0^2 \left(16 - x^2 - 2y^2\right) dxdy = \int_0^2 \left(16x - \frac{x^3}{3} - 2y^2 x\right)_{x=0}^{x=2} dy = \int_0^2 \left(\frac{88}{3} - 4y^2\right) dy = 48.$$

**6.2.23.** Βρειτε τον ογκο του στερεου που οριζεται απο την επιφανεια $z = \sin x \cos y$ και το επιπεδο $z = 0$.

**Λυση**. Καντε το αντιστοιχο σχημα. Θα δειτε οτι το ζητουμενο στερεο εχει ¨βαση¨ το τετραγωνο $0 \le x \le \pi$, $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$. Οποτε ο ζητουμενος ογκος ειναι

$$\int_0^{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin x \cos y dxdy = \left(\int_0^{\pi} \sin x dx\right) \cdot \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos y dy\right) = (\cos x)_{x=0}^{x=\pi} \cdot (\sin y)_{y=-\pi/2}^{y=\pi/2} = 4.$$

**6.2.24.** Βρειτε τον ογκο του στερεου που βρισκεται κατω απο την επιφανεια $z = x^2 + y^2$ και εχει βαση το χωριο $D$ που οριζεται απο την ευθεια $y = 2x$ και την παραβολη $y = x^2$.

**Λυση**. Καντε το αντιστοιχο σχημα. Θα δειτε οτι το χωριο $D$ (στο επιπεδο $xy$) ειναι το

$$D = \left\{(x, y) : 0 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 2x\right\}.$$

Αρα ο ζητουμενος ογκος ειναι

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \int_{x^2}^{2x} \left(x^2 + y^2\right) dydx &= \int_0^2 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3}\right)_{y=x^2}^{y=2x} dx \\
&= \int_0^2 \left(2x^3 + \frac{8x^3}{3} - x^4 - \frac{x^6}{3}\right)_{y=x^2}^{y=2x} dx \\
&= \left(2\frac{x^4}{4} + \frac{8x^4}{12} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{21}\right)_{x=0}^{x=2} dx = \frac{216}{35}.
\end{aligned}$$

**6.2.25.** Βρειτε τον ογκο του στερεου το οποιο οριζεται απο το επιπεδο $z = 0$ και το παραβολοειδες $z = 1 - x^2 - y^2$.

**Λυση**. Το επιπεδο $z = 0$ τεμνει το παραβολοειδες κατα τον κυκλο (για $z = 0$) $x^2 + y^2 = 1$. Αρα ο ζητουμενος ογκος ειναι

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \left(1 - \rho^2\right) \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4}\right)_{\rho=0}^{\rho=1} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} d\theta = \frac{\pi}{2}$$

**6.2.26.** Υπολογιστε τον ογκο του στερεου που περικλειεται απο το επιπεδο $z = 0$, το παραβολοειδες $z = x^2 + y^2$ και τον κυλινδρο $x^2 + y^2 = 1$.

**Λυση**. Ο ζητουμενος ογκος ειναι (καντε το σχημα)

$$\iint_D \left(x^2 + y^2\right) dxdy$$

οπου $D = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\right\}$ (προσεξτε οτι το $D$ ειναι ενα *επιπεδο σχημα*, ενω ο *κυλινδρος* $S = \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1\right\}$ ειναι μια *τριδιαστατη επιφανεια*!!!). Σε πολικες συντεταγμενες ο ζητουμενος ογκος ειναι

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho^2 \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\rho^4}{4}\right)_{\rho=0}^{\rho=1} d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

**6.2.27.** Βρειτε τον ογκο του στερεου που βρισκεται πανω απο το επιπεδο $z = 0$, κατω απο το παραβολοειδες $z = x^2 + y^2$ και μεσα στον κυλινδρο $x^2 + y^2 = 2x$.

**Λυση**. Απο την γραφικη παρασταση (καντε την!) βλεπουμε οτι η ¨βαση¨ του στερεου ειναι ο κυκλος

$$C : x^2 + y^2 = 2x \Leftrightarrow C : (x - 1)^2 + y^2 = 1.$$

Για αυτο τον κυκλο θα χρησιμοποιησουμε τις τροποποιημενες πολικες συντεταγμενες

$$x = 1 + \rho \cos\theta, \qquad y = \rho \sin\theta$$

στις οποιες το στοιχειωδες εμβαδον ειναι

$$dxdy = \rho d\rho d\theta.$$

Οποτε ο ζητουμενος ογκος ειναι

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(x^2+y^2\right)\rho d\rho d\theta &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left((1+\rho\cos\theta)^2+\rho^2\sin^2\theta\right)\rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(\rho^2+2\rho\cos\theta+1\right)\rho d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(\rho^3+2\rho^2\cos\theta+\rho\right)d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\frac{\rho^4}{4}+\frac{2}{3}\rho^3\cos\theta+\frac{\rho^2}{2}\right)_{\rho=0}^{\rho=1} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\cos\theta\right)d\theta \\ &= \left(\frac{3\theta}{4}+\frac{2}{3}\sin\theta\right)_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \frac{3\pi}{2}.\end{aligned}$$

**6.2.28.** Υπολογιστε την μαζα ενος λεπτου τριγωνικου ελασματος. Το ελασμα οριζεται απο τις γραμμες $y=0$, $y=2x$ και $x=1$ και εχει πυκνοτητα $d(x,y)=6x+6y+6$.

**Λυση.** Το τριγωνικο ελασμα εχει κορυφες στα σημεια τομης των ευθειων, τα οποια ειναι $(x_1,y_1)=(0,0)$, $(x_2,y_2)=(1,0)$, $(x_3,y_3)=(1,2)$ (γιατι; καντε το σχημα!). Αρα η ζητουμενη μαζα ειναι

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^{2x}(6x+6y+6)\,dydx &= \int_0^1\left(\left(6xy+3y^2+6y\right)_{y=0}^{y=2x} dy\right)dx \\ &= \int_0^1\left(24x^2+12x\right)dx = \left(8x^3+6x^2\right)_{x=0}^{x=1} = 14.\end{aligned}$$

**6.2.29.** Υπολογιστε την μαζα ενος λεπτου δισκου με κεντρο το $(0,0)$, ακτινα $R$ και του οποιου η πυκνοτητα μεταβαλλεται αναλογα με την αποσταση απο το κεντρο του.

**Λυση.** Ο δισκος εχει την εξισωση $x^2+y^2\leq R^2$. Η πυκνοτητα του ειναι $d(x,y)=\frac{d_0}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Η μαζα θα δινεται απο το ολοκληρωμα

$$\int\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{d_0}{\sqrt{x^2+y^2}}dydx.$$

Δουλευοντας σε πολικες συντεταγμενεστο ολοκληρωμα γινεται

$$\int_0^{2\pi}\int_0^R\frac{d_0}{\rho}\rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi}(d_0\rho)_{\rho=0}^{\rho=R}d\theta = \int_0^{2\pi}d_0Rd\theta = (d_0R\theta)_{\theta=0}^{2\pi} = 2\pi Rd_0.$$

**6.2.30.** Υπολογιστε την μαζα του ανω μισου ενος λεπτου δισκου με κεντρο το $(0,0)$, ακτινα $R$ και του οποιου η πυκνοτητα στο σημειο $(x,y)$ ειναι $d_0 y$.

**Λυση.** Σε πολικες συντεταγμενες ο δισκος εχει την εξισωση $\rho \in [0,R]$, $\theta \in [0,\pi]$. Η ζητουμενη μαζα ειναι

$$\int_0^\pi \int_0^R d_0 y \rho d\rho d\theta = \int_0^\pi \int_0^R d_0 \rho \sin\theta \rho d\rho d\theta = \int_0^\pi \left( d_0 \frac{\rho^3}{3} \right)_{\rho=0}^{\rho=R} \sin\theta d\theta$$
$$= \int_0^\pi d_0 \frac{R^3}{3} \sin\theta d\theta = \left( d_0 \frac{R^3}{3} \cos\theta \right)_{\theta=0}^{2\pi} = \frac{2}{3} d_0 R^3.$$

## 6.3 Αλυτα Προβληματα

**6.3.1.** Υπολογιστε το $\int_0^a \int_0^{\sqrt{x}} dydx$.
**Απ.** $\frac{2}{3} a^{3/2}$.

**6.3.2.** Υπολογιστε το $\int_2^4 \int_x^{2x} \frac{y}{x} dydx$.
**Απ.** 9.

**6.3.3.** Υπολογιστε το $\int_1^2 \int_0^{\ln y} e^x dxdy$.
**Απ.** 1/2.

**6.3.4.** Υπολογιστε το εμβαδο του σχηματος που οριζεται απο: $x=0$, $y=0$, $x+y=1$.
**Απ.** $1/2$.

**6.3.5.** Υπολογιστε το εμβαδο του σχηματος που οριζεται απο: $y^2 = \frac{b^2}{a} x$, $y = \frac{b}{a} x$.
**Απ.** $\frac{ab}{6}$.

**6.3.6.** Υπολογιστε το εμβαδο του σχηματος που οριζεται απο: $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $x = 4$.
**Απ.** 16/3.

**6.3.7.** Υπολογιστε το εμβαδο του σχηματος που οριζεται απο: $x = y$, $y = 5x$, $x = 1$.
**Απ.** 2.

**6.3.8.** Υπολογιστε το εμβαδο του σχηματος που οριζεται απο: $xy = 4, y = x, x = 4$.
**Απ.** $6 - 4\ln 2$.

**6.3.9.** Υπολογιστε το εμβαδο του σχηματος που οριζεται απο: $y^2 = 4 + x, x + 3y = 0$.
**Απ.** $100/6$.

**6.3.10.** Υπολογιστε το εμβαδο του σχηματος που οριζεται απο: $ay = x^2 - 2ax, y = x$.
**Απ.** $9a^2/2$.

**6.3.11.** Υπολογιστε το εμβαδο του σχηματος που οριζεται απο: $y = \ln x, x - y = 1, y = -1$.
**Απ.** $\frac{e-2}{2e}$.

**6.3.12.** Υπολογιστε το εμβαδο του σχηματος που οριζεται απο: $xy = a^2/2, xy = 2a^2, y = x/2, y = 2x$.
**Απ.** $\frac{3}{2} a^2 \ln 2$.

**6.3.13.** Υπολογιστε το εμβαδο του σχηματος που οριζεται απο: $(x^2+y^2)^2 = 2ax^3$.
**Απ.** $\frac{5}{8}\pi a^2$.

**6.3.14.** Υπολογιστε το $\int\int_D x^3y^2dxdy$ οπου $D: x^2+y^2 \leq R^2$.
**Απ.** 0.

**6.3.15.** Υπολογιστε το $\int\int_D xydxdy$, $D = \{(x,y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$
**Απ.** 1.

**6.3.16.** Υπολογιστε το $\int\int_D e^{x+y}dxdy$, $D = \{(x,y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$
**Απ.** $(e-1)^2$.

**6.3.17.** Υπολογιστε το $\int\int_D \frac{x^2}{1+y^2}dxdy$, $D = \{(x,y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$
**Απ.** $\pi/12$.

**6.3.18.** Υπολογιστε το $\int\int_D (x^2+y^2)\,dxdy$ οπου $D: y = x^2, x = y^2$.
**Απ.** $33/140$.

**6.3.19.** Υπολογιστε το $\int\int_D \frac{x^2}{y^2}dxdy$ οπου $D: x = 2, y = x, xy = 1$.
**Απ.** $9/4$.

**6.3.20.** Υπολογιστε το $\int\int_D x\sin(x+y)\,dxdy$, $D = \{(x,y): 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi/2\}$
**Απ.** $\pi - 2$.

**6.3.21.** Υπολογιστε το $\int\int_D x^2e^{xy}dxdy$, $D = \{(x,y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$
**Απ.** 2.

**6.3.22.** Υπολογιστε το $\int\int_D x^3y^2dxdy$, $D = \{(x,y): x^2+y^2 \leq R^2\}$.
**Απ.** 0.

**6.3.23.** Υπολογιστε το $\int\int_D \frac{x^2}{y^2}dxdy$, $D$ ειναι το χωριο που οριζεται απο $x = 2$, $y = x$ και $xy = 1$.
**Απ.** 9/4.

**6.3.24.** Υπολογιστε το $\int\int_D \cos(x+y)\,dxdy$, $D$ ειναι το χωριο που οριζεται απο $x = 0$, $y = \pi$ και $x = y$.
**Απ.** $-2$.

**6.3.25.** Υπολογιστε το $\int\int_D \sqrt{1-x^2-y^2}dxdy$, ειναι το χωριο που οριζεται απο $x \geq 0$, $y \geq 0$ και $x^2+y^2 \leq 1$.
**Απ.** $\pi/6$.

**6.3.26.** Υπολογιστε το $\int_0^R\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln(1+x^2+y^2)\,dydx$.
**Απ.** $\pi/4$ - **υποδ**. χρησιμοποιειστε πολικες συντεταγμενες..

**6.3.27.** Υπολογιστε το $\int\int_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}dydx$, $D$ ειναι το χωριο που οριζεται απο $x \geq 0$, $y \geq 0$ και $x^2+y^2 \leq 1$.
**Απ.** $\frac{\pi^2-2\pi}{8}$ - **υποδ**. χρησιμοποιειστε πολικες συντεταγμενες.

**6.3.28.** Υπολογιστε το $\int\int_D (h-2x-3y)\,dydx$, $D$ ειναι ο κυκλος $x^2+y^2\leq R^2$.
**Απ.** $\pi R^2 h$ - **υποδ**. χρησιμοποιειστε πολικες συντεταγμενες.

**6.3.29.** Υπολογιστε το $\int\int_D \sqrt{R^2-x^2-y^2}dydx$, $D$ ειναι ο κυκλος $x^2+y^2\leq Rx$.
**Απ.** $\frac{R^3}{3}$- **υποδ**. χρησιμοποιειστε πολικες συντεταγμενες.

**6.3.30.** $\int\int_D xydydx$, $D$ ειναι η ελλειψη $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1$, $x\geq 0$, $y\geq 0$.
**Απ.** $\frac{a^2b^2}{8}$ - **υποδ**. χρησιμοποιειστε πολικες συντεταγμενες.

**6.3.31.** Υπολογιστε το $\int_0^R\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln\left(1+x^2+y^2\right)dydx$.
**Απ.** $\pi/4$ - **υποδ**. χρησιμοποιειστε πολικες συντεταγμενες.

**6.3.32.** Υπολογιστε το $\int_0^R\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln\left(1+x^2+y^2\right)dydx$.
**Απ.** $\pi/4$ - **υποδ**. χρησιμοποιειστε πολικες συντεταγμενες.

**6.3.33.** Υπολογιστε το $\int_0^R\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln\left(1+x^2+y^2\right)dydx$.
**Απ.** $\pi/4$ - **υποδ**. χρησιμοποιειστε πολικες συντεταγμενες.

**6.3.34.** Υπολογιστε το $\int_0^R\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln\left(1+x^2+y^2\right)dydx$.
**Απ.** $\pi/4$ - **υποδ**. χρησιμοποιειστε πολικες συντεταγμενες.

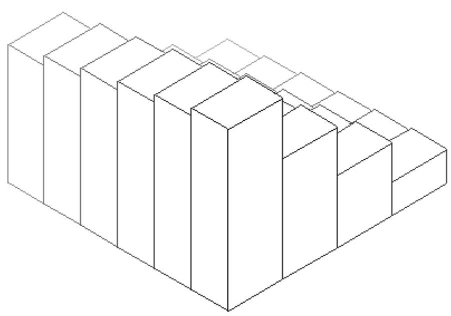
**6.3.35.** Υπολογιστε το $\int_0^R\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \ln\left(1+x^2+y^2\right)dydx$.

# Κεφάλαιο 7

# Τριπλα Ολοκληρωματα

## 7.1 Θεωρια

**7.1.1.** Ας υποθεσουμε οτι μας δινεται μια κλειστη επιφανεια $A$ η οποια οριζει ενα χωριο $D$ (δες σχημα). Θελουμε να υπολογισουμε τον ογκο $V$ του $D$. (δες Σχ.8.1).



**Σχημα 7.1**

**7.1.2.** Για να υπολογισουμε το $V$ χρησιμοποιουμε την κλασσικη τεχνικη του ολοκληρωτικου λογισμου: υποδιαιρουμε το $V$ σε μικρα ορθογωνια παραλληλεπιπεδα· τοτε το $V$ ειναι το οριο του αθροισματος

$$\lim_{\Delta x,\Delta y,\Delta z\to 0}\sum \Delta V=\lim_{\Delta x,\Delta y,\Delta z\to 0}\sum\sum\sum \Delta x\Delta y\Delta z.$$

Παραλειποντας τις τεχνικες λεπτομερειες, μπορουμε να πουμε οτι το $V$ ειναι το *τριπλο ολοκληρωμα*

$$V=\int\int\int_D dV. \tag{7.1}$$

Προσεξτε οτι το $dV$ ειναι ο *στοιχειωδης ογκος* και $dV=dxdydz$.

**7.1.3.** Ο ζητουμενος ογκος μπορει να υπολογιστει αντικαθιστωντας το τριπλο ολοκληρωμα με το *επαναληπτικο ολοκληρωμα*

$$V=\int\int\int_D dV=\int_{z_1}^{z_2}\int_{y_1(z_1)}^{y_2(z_2)}\int_{x(y_1,z_1)}^{x(y_2,z_2)} dxdydz. \tag{7.2}$$

**7.1.4.** Γενικοτερα, το τριπλο ολοκληρωμα μιας συναρτησης $f(x,y,z)$ (δηλ. το οριο $\sum f(x,y,z)\,\Delta V$) συμβολιζεται ως εξης

$$V = \int\int\int_D dV = \int_{z_1}^{z_2}\int_{y_1(z_1)}^{y_2(z_2)}\int_{x(y_1,z_1)}^{x(y_2,z_2)} f(x,y,z)\,dxdydz. \qquad (7.3)$$

**7.1.5.** Να μερικες βασικες ιδιοτητες του τριπλου ολοκληρωματος:

$$a\int\int\int_D f(x,y,z)\,dxdydz = \int\int\int_D af(x,y)\,dxdydz$$

$$\int\int\int_D [f(x,y,z)+g(x,y,z)]\,dxdydz = \int\int\int_D f(x,y,z)\,dxdydz + \int\int\int_D g(x,y,z)\,dxdydz$$

και, αν για καθε $(x,y,z)\in D$ εχουμε $f(x,y,z)\leq g(x,y,z)$, τοτε

$$\int\int\int_D f(x,y,z)\,dxdydz \leq \int\int\int_D g(x,y)\,dxdydz.$$

**7.1.6.** Τελος, υπαρχει ενα *θεωρημα μεσης τιμης* για τα τριπλα ολοκληρωματα: αν η $f(x,y,z)$ ειναι ορισμενη και συνεχης στον τοπο $D$ ο οποιος εχει ογκο $V$, τοτε υπαρχει $(x_0,y_0,z_0)\in D$ τετοιο ωστε

$$\int\int\int_D f(x,y,z)\,dxdy = f(x_0,y_0,z_0)\cdot V.$$

**7.1.7.** Απο τις (7.1)–(7.3) φαινεται οτι υπολογιζουμε το τριπλο ολοκληρωμα χρησιμοποιωντας τρια "απλα" ολοκληρωματα, οπου τα ορια ολοκληρωσης εξαρτωνται απο την επιφανεια $A$. Η κυριοτερη δυσκολια στον υπολογισμο του διπλου ολοκληρωματος ειναι ο προσδιορισμος των καταλληλων οριων ολοκληρωσης.

**7.1.8.** Πολλες φορες ο υπολογισμος του διπλου ολοκληρωματος διευκολυνεται απο την αλλαγη συντεταγμενων. Εστω οτι τα $(x,y,z)$ εκφραζονται σαν συναρτησεις των νεων συντεταγμενων $(u,v,w)$ απο τις εξισωσεις

$$x = x(u,v,w), \qquad y = y(u,v,w), \qquad z = z(u,v,w)$$

οι οποιες μετασχηματιζουν το $D$ στο $D'$. Τοτε εχουμε

$$f(x,y,z) = f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$$

και το στοιχειωδες εμβαδο $dV$ δινεται απο την σχεση

$$dS = dxdydz = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}dudvdw.$$

Ετσι το τριπλο ολοκληρωμα μετασχηματιζεται ως εξης

$$\int\int\int_D f(x,y,z)\,dxdydz = \int\int\int_{D'} f(x(u,v,w), y(u,v,we))\,\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}dudvdw.$$

**7.1.9.** Π.χ., οταν χρησιμοποιουμε κυλινδρικες συντεταγμενες, $u = \rho$, $v = \theta$, $w = z$ και ισχυουν οι σχεσεις

$$x = \rho\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\theta, \qquad z = z$$

και

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,z)} = \rho.$$

Οποτε $dxdydz = \rho d\rho d\theta dz$ και

$$\int\int\int_D f(x,y,z)\,dxdydz = \int\int\int_{D'} f(x(\rho,\theta,z), y(\rho,\theta,z), z(\rho,\theta,z))\,\rho d\rho d\theta dz.$$

**7.1.10.** Παρομοια, οταν χρησιμοποιουμε σφαιρικες συντεταγμενες, $u = r$, $v = \theta$, $w = z$ και ισχυουν οι σχεσεις

$$x = r\cos\theta\sin\phi, \qquad y = r\sin\theta\sin\phi, \qquad z = r\cos\phi$$

και

$$\frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\theta,\phi)} = r^2\sin\phi.$$

Οποτε $dxdydz = r^2\sin\theta drd\theta d\phi$ και

$$\int\int\int_D f(x,y,z)\,dxdydz = \int\int\int_{D'} f(x(r,\theta,\phi), y(r,\theta,\phi), z(r,\theta,\phi))\,r^2\sin\phi drd\theta d\phi.$$

## 7.2 Λυμενα Προβληματα

**7.2.1.** Υπολογιστε το ολοκληρωμα $\int_0^3\int_0^2\int_0^5 dzdydx$.

**Λυση**. Ειναι

$$\int_0^3\left(\int_0^2\left(\int_0^5 dz\right)dy\right)dx = \int_0^3\left(\int_0^2 (z)_{z=0}^{z=5}\,dy\right)dx = \int_0^3\left(\int_0^2 5dy\right)dx$$
$$= \int_0^3 (5y)_{y=0}^{y=2}\,dx = \int_0^3 10dx = (10x)_{x=0}^{x=3} = 30.$$

**7.2.2.** Υπολογιστε το ολοκληρωμα $\int_0^3\int_0^2\int_0^5 xyzdzdydx$.

**Λυση**. Ειναι

$$\int_0^3\left(\int_0^2\left(\int_0^5 xyzdz\right)dy\right)dx = \int_0^3\left(\int_0^2 xy\left(\frac{z^2}{2}\right)_{z=0}^{z=5}dy\right)dx = \int_0^3\left(\int_0^2 xy\frac{25}{2}dy\right)dx$$
$$= \int_0^3 x\left(\frac{25}{2}\frac{y^2}{2}\right)_{y=0}^{y=2}dx = \int_0^3 \frac{100}{4}xdx = \left(\frac{25x^2}{2}\right)_{x=0}^{x=3} = \frac{225}{2}.$$

**7.2.3.** Υπολογιστε το ολοκληρωμα $\int\int_P\int xyzdzdydx$ οπου $P$ ειναι το τετραεδρο που εχει κορυφες τα σημεια $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$.

**Λυση**. Το τετραεδρο φρασσεται απο τεσσερα επιπεδα (καντε το σχημα). Π.χ. ενα εξ αυτων ειναι το επιπεδο $Ax + By + Cz + D = 0$ το οποιο οριζεται απο τα σημεια $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, αρα ικανοποιει

$$\begin{aligned} A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot 0 + D &= 0 \\ A \cdot 1 + B \cdot 0 + C \cdot 0 + D &= 0 \\ A \cdot 0 + B \cdot 1 + C \cdot 0 + D &= 0 \end{aligned}$$

δηλ. ειναι $A = -D, B = -D$, $D = 0$, οποτε ειναι $Cz = 0$ ή απλα $z = 0$. Τα υπολοιπα επιπεδα ειναι $x = 0$, $y = 0$ και $x + y + z = 1$. Βρισκουμε την βαση $Q$ του τετραεδρου (στο επιπεδο $z = 0$) παιρνοντας $z = 0$ οποτε εχουμε (στο επιπεδο $z = 0$) το τριγωνο

$$Q = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}.$$

Το δε τετραεδρο ειναι

$$P = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq z \leq 1 - x - y\}.$$

οποτε το ολοκληρωμα γινεται

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left( \int_0^{1-x} \left( \int_0^{1-x-y} xyzdz \right) dy \right) dx &= \int_0^1 \left( \int_0^{1-x} xy \left( \frac{z^2}{2} \right)_{z=0}^{z=1-x-y} dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left( \int_0^{1-x} xy \frac{(1-x-y)^2}{2} dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left( \frac{1}{4}xy^2 - \frac{1}{2}x^2y^2 - \frac{1}{3}xy^3 + \frac{1}{4}x^3y^2 + \frac{1}{3}x^2y^3 + \frac{1}{8}xy^4 \right)_{y=0}^{y=1-x} dx \\ &= \int_0^1 \left( \frac{1}{24}x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{24}x^5 \right) dx \\ &= \left( \frac{1}{48}x^2 - \frac{1}{18}x^3 + \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{30}x^5 + \frac{1}{144}x^6 \right)_{x=0}^{1} = \frac{1}{720}.. \end{aligned}$$

**7.2.4.** Να υπολογιστει το $\int\int\int_D (x^2 - 3y + 2z)\, dzdydx$ οπου το χωριο $D$ ειναι

$$D = \{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}.$$

**Λυση**. Ειναι

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} \left(x^2 - 3y + 2z\right) dzdydx &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left(x^2z - 3yz + z^2\right)_{z=0}^{z=1-x-y} dydx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left( \left(x^2 - 3y\right)(1 - x - y) + (1 - x - y)^2 \right) dydx \\ &= \int_0^1 \left( y^3 + \frac{1}{2}\left(-x^2 - 3 + 3x\right) y^2 + x^2 (1 - x)\, y - \frac{1}{3}(1 - x - y)^3 \right) \\ &= \int_0^1 \left( -\frac{1}{6} + \frac{1}{2}x - \frac{5}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^4 \right) dx = -\frac{1}{40} \end{aligned}$$

**7.2.5.** Υπολογιστε το ολοκληρωμα $\int\int\int_D (y+z)\,dxdydz$, οπου $D$ ειναι το χωριο που οριζεται απο τα $y=\sqrt{x}$, $y=x^2$, $z=0$ και $x+z=1$.

**Λυση**. Οι $y=\sqrt{x}$, $y=x^2$ ειναι δυο παραβολικοι κυλινδροι. Το χωριο $D$ εχει την μορφη του παρακτω σχηματος. Το ολοκληρωμα γινεται

$$\begin{aligned}
\int_0^1\int_{x^2}^{\sqrt{x}}\int_0^{1-x}(y+z)\,dzdydx &= \int_0^1\int_{x^2}^{\sqrt{x}}\left(yz+\frac{z^2}{2}\right)_{z=0}^{z=1-x}dydx \\
&= \int_0^1\int_{x^2}^{\sqrt{x}}\left(y(1-x)+\frac{(1-x)^2}{2}\right)dydx \\
&= \int_0^1\left(\frac{y^2}{2}(1-x)+y\frac{(1-x)^2}{2}\right)_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}}dx \\
&= \int_0^1\left(\frac{x}{2}(1-x)+\sqrt{x}\frac{(1-x)^2}{2}-\left(\frac{x^4}{2}(1-x)+x^2\frac{(1-x)^2}{2}\right)\right)dx \\
&= \int_0^1\left(-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{7}x^{\frac{7}{2}}-\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{12}x^6-\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{4}x^4\right)dx \\
&= \frac{53}{420}.
\end{aligned}$$

**7.2.6.** Βρειτε τον ογκο του στερεου $D$ το οποιο οριζεται απο τις επιφανειες $z=x^2+3y^2$ και $z=8-x^2-y^2$.

**Λυση**. Το $D$ οριζεται απο τα δυο παραβολοειδη και αρα τα ορια ολοκληρωσης του $z$ ειναι

$$x^2+3y^2\le z\le 8-x^2-y^2.$$

Πρεπει τωρα να βρουμε τα ορια των $x$ και $y$. Αυτο το πετυχαινουμε υπολογιζοντας την καμπυλη τομης των δυο παραβολοειδων, δηλ. λυνοντας την

$$8-x^2-y^2=x^2+3y^2\Rightarrow 2x^2+4y^2=8\Rightarrow x^2+2y^2=4.$$

Αυτη ειναι μια ελλειψη, αρα τα ορια υα ειναι

$$-\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}\le y\le\sqrt{\frac{4-x^2}{2}},\qquad -2\le x\le 2.$$

Οποτε ο ογκος ειναι

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}}^{\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}}\int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} dzdydx &= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}}^{\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}}\left(8-x^2-y^2-x^2-3y^2\right)dydx \\
&= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}}^{\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}}\left(8-2x^2-4y^2\right)dydx \\
&= \int_{-2}^{2}\left(8y-2x^2y-\frac{4y^3}{3}\right)_{y=-\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}}^{y=\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}}dx \\
&= \int_{-2}^{2}\left(2\left(8-2x^2\right)\sqrt{\frac{4-x^2}{2}}-\frac{8}{3}\sqrt{\left(\frac{4-x^2}{2}\right)^3}\right)dx \\
&= \frac{4\sqrt{2}}{3}\int_{-2}^{2}\left(\frac{4-x^2}{2}\right)^{3/2}dx = 8\pi\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

**7.2.7.** Βρειτε τον ογκο του στερεου

$$D=\left\{(x,y,z): 2\le z\le 5, x^2\le y\le x\right\}.$$

**Λυση**. Η επιφανεια $y=x^2$ ειναι παραβολικος κυλινδρος και η $y=x$ επιπεδο. Η βαση $P$ του στερεου βρισκεται στο επιπεδο $z=2$ και ειναι

$$P=\left\{(x,y,z): z=2, x^2\le y\le x, 0\le x\le 1\right\}$$

(οπου $0$ και $1$ ειναι τα σημεια τομης των $y=x^2$, $y=x$). Ο ζητουμενος ογκος ειναι

$$\int_0^1\int_{x^2}^{x}\int_2^5 dzdydx=\int_0^1\int_{x^2}^{x}3dydx=\int_0^1\left(3x-3x^2\right)dx=\frac{1}{2}.$$

**7.2.8.** Βρειτε τον ογκο ενος στερεου το οποιο οριζεται απο την επιφανεια $z=4-x^2-y^2$ και το επιπεδο $z=0$.

**Λυση**. Θα χρησιμοποιησουμε κυλινδρικες συντεταγμενες. Ο ογκος ειναι

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{4-x^2-y^2} dz\rho d\rho d\theta &= \int_0^{2\pi}\int_0^2\left(4-x^2-y^2\right)\rho d\rho d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2\left(4-\rho^2\right)\rho d\rho d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2\left(4\rho-\rho^3\right)d\rho d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left(2\rho^2-\frac{\rho^4}{4}\right)_{\rho=0}^{\rho=2}d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}(8-4)\,d\theta = 8\pi.
\end{aligned}$$

**7.2.9.** Βρειτε τον ογκο ενος στερεου το οποιο οριζεται απο τις επιφανειες $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = 4$ και το επιπεδο $z = 0$.

**Λυση**. Κατασκευαστε το σχημα του στερεου. Προσεξτε οτι η $x^2 + y^2 = 4$ ειναι *κυλινδρικη επιφανεια*. Θα χρησιμοποιησουμε κυλινδρικες συντεταγμενες. Ο ζητουμενς ογκος ειναι

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_0^{4-x^2-y^2} dz\rho d\rho d\theta &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 (z)_{z=0}^{z=\rho^2}\rho d\rho d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \rho^3 d\rho d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\frac{\rho^4}{4}\right)_{\rho=0}^{\rho=2} d\rho d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} 4d\theta = 8\pi.
\end{aligned}$$

**7.2.10.** Βρειτε τον ογκο του στερεου $D$ το οποιο οριζεται απο την σφαιρα $r = 1$ και τον κωνο $\phi = \pi/3$ (σε σφαιρικες συντεταγμενες).

**Λυση**. Ο ογκος ειναι (δειτε το σχημα)

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\int_0^1 r^2\sin\phi dr d\phi d\theta &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/3}\frac{1}{3}\sin\phi d\phi d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{3}\cos\phi\right)_{\phi=0}^{\phi=\pi/3} d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)d\theta = \frac{\pi}{3}.
\end{aligned}$$

**7.2.11.** Βρειτε τον ογκο του στερεου που αποκοπτει ο κυλινδρος με εξισωση (σε κυλινδρικες συντεταγμενες) $\rho = 2\sin\theta$ απο την σφαιρα $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

**Λυση**. Δειτε το σχημα. Θα δουλεψουμε με κυλινδρικες συντεταγμενες. Τα ορια του $z$ δινονται απο το γεγονος οτι

$$x^2 + y^2 + z^2 \le 4 \Rightarrow \rho^2 + z^2 \le 4 \Rightarrow |z| \le \sqrt{4-\rho^2}$$

οποτε ο ζητουμενος ογκος ειναι

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta}\int_{-\sqrt{4-\rho^2}}^{\sqrt{4-\rho^2}}\rho dz d\rho d\theta &= \int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta} 2\sqrt{4-\rho^2}\rho d\rho d\theta \\ &= 2\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\sin\theta}\left(4-\rho^2\right)^{1/2} d\left(\rho^2\right) d\theta \\ &= 2\int_0^{\pi/2}\left(-\frac{2}{3}\left(4-\rho^2\right)^{3/2}\right)_{\rho=0}^{\rho=2\sin\theta} d\theta \\ &= \frac{4}{3}\int_0^{\pi/2}\left(8-8\cos^3\theta\right) d\theta \\ &= \frac{32}{3}\int_0^{\pi/2} d\theta - \frac{32}{3}\int_0^{\pi/2}\left(1-\sin^2\theta\right)\cos\theta d\theta \\ &= \frac{32}{3}\int_0^{\pi/2} d\theta - \frac{32}{3}\int_0^{\pi/2}\left(1-\sin^2\theta\right) d\left(\sin\theta\right) \\ &= \frac{16\pi}{3} - \frac{32}{3}\left(\sin\theta - \frac{\sin^3\theta}{3}\right)_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \\ &= \frac{16\pi}{3} - \frac{32}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{16\pi}{3} - \frac{64}{3}.\end{aligned}$$

**7.2.12.** Να βρεθει ο ογκος του στερεου που περιεχεται μεταξυ των

$$S_1 : \frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{5}-\frac{z^2}{4}=1$$
$$S_2 : x^2+y^2=25$$

**Λυση.** Η $S_1$ ειναι ενα μονοχωνο υπερβολοειδες και η $S_2$ ενας κυλινδρος (δες σχημα). Οταν αυτες τεμνονται εχουμε

$$\left.\begin{array}{c}\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{5}-\frac{z^2}{4}=1 \\ x^2+y^2=25\end{array}\right\} \Rightarrow 5-\frac{z^2}{4}=1 \Rightarrow z=\pm 4.$$

Αρα οι $S_1$ και $S_2$ τεμονονται κατα δυο κυκλουσ:

$$C_1 = \left\{(x,y,z) : x^2+y^2=25, z=4\right\}$$
$$C_2 = \left\{(x,y,z) : x^2+y^2=25, z=-4\right\}$$

Για να υπολογισουμε τον ζητουμενο ογκο $V$, θα αφαιρεσουμε απο τον ογκο του εξωτερικου κυλινδρου $V_1$ τον ογκο του εσωτερικου υπερβολοειδους. Εχουμε $V_1=\pi R^2 h=\pi\cdot 5^2\cdot 8=200\pi$. Ο ογκος του υπερβολοειδους ειναι το ολοκληρωμα των ογκων των λεπτων δισκων με ακτινα

$$\rho(z)=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{5\cdot\left(1+\frac{z^2}{4}\right)}$$

Οποτε εχουμε

$$V_2 = \int_{-4}^{4} \pi \rho^2 dz = \int_{-4}^{4} 5\pi \left(1 + \frac{z^2}{4}\right) dz = \frac{280\pi}{3}.$$

Τελικα λοιπον ο ζητουμενος ογκος ειναι

$$V = V_1 - V_2 = \frac{200\pi}{1} - \frac{280}{3}\pi = \frac{320}{3}\pi.$$

**7.2.13.** Να υπολογιστει ο ογκος του χωριου που οριζεται απο τις κυλινδρικες επιφανειες $S_1 : x^2 + y^2 = a^2$ και $S_2 : x^2 + z^2 = a^2$.

**Λυση.** Λογω συμμετριας αρκει να υπολογισουμε τον ογκο του ενος ογδοου του χωριου, το οποιο απεικονιζεται στο παρακατω σχημα. Εχουμε λοιπον

$$\begin{aligned}
V = 8V' &= 8 \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dzdydx \\
&= 8 \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2}dydx = 8 \int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\sqrt{a^2-x^2}dx \\
&= 8 \int_0^a \left(a^2 - x^2\right) dx = 8 \left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right)_{x=0}^{x=a} = 8a^3 - \frac{8a^3}{3} = \frac{16a^3}{3}.
\end{aligned}$$

**7.2.14.** Υπολογιστε το ολοκληρωμα $\int\int\int_D \left(x^2+y^2\right) dzdydx$ οπου το χωριο $D$ ειναι αυτο της προηγουμενης ασκησης.

**Λυση**. Το ζητουμενο ειναι (σε σφαιρικες συντεταγμενες)

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_0^1 \left(x^2+y^2\right) r^2 \sin\phi dr d\phi d\theta &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_0^1 \left(r^2 \sin^2\phi \cos^2\theta + r^2 \sin^2\phi \sin^2\theta\right) r^2 \sin\phi dr d\phi d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \int_0^1 r^4 \sin^3\phi dr d\phi d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \frac{1}{5} \sin^3\phi d\phi d\theta \\
&= \frac{1}{5} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \left(1 - \cos^2\phi\right) \sin\phi d\phi d\theta \\
&= \frac{1}{5} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \left(1 - \cos^2\phi\right) d\cos\phi d\theta \\
&= \frac{1}{5} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/3} \left(\cos\phi - \frac{\cos^3\phi}{3}\right)_{\phi=0}^{\phi=\pi/3} d\theta \\
&= \frac{1}{5} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{24} - \frac{1}{3}\right) d\theta = \frac{\pi}{12}.
\end{aligned}$$

**7.2.15.** Βρειτε την μαζα του κυβου

$$D = \{(x, y, z) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1\}$$

του οποιου η πυκνοτητα ειναι ιση με το τετραγωνο της αποστασης απο το κεντρο.

**Λυση**. Η πυκνοτητα ειναι $d(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ και η ζητουμενη μαζα ειναι

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left(x^2+y^2+z^2\right)dxdydz &= \int_0^1\int_0^1 \left(\frac{x^3}{3}+y^2x+z^2x\right)_{x=0}^{x=1} dydz \\ &= \int_0^1\int_0^1 \left(\frac{1}{3}+y^2+z^2\right) dydz \\ &= \int_0^1 \left(\frac{y}{3}+\frac{y^3}{3}+z^2y\right)_{y=0}^{y=1} dz \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+z^2\right) dz \\ &= \left(\frac{2z}{3}+\frac{z^3}{3}\right)_{z=0}^{z=1} dz = 1.\end{aligned}$$

**7.2.16.** Βρειτε την μαζα ενος ημισφαιριου με ακτινα $R$ του οποιου η πυκνοτητα ειναι αναλογη της αποστασης απο το κεντρο.

**Λυση**. Θα χρησιμοποιησουμε σφαιρικες συντεταγμενες. Η πυκνοτητα ειναι $d(r) = kr$ και η ζητουμενη μαζα ειναι

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^R kr\cdot r^2 dr\sin\phi d\phi d\theta &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} k\frac{R^4}{4}\sin\phi d\phi d\theta \\ &= k\frac{R^4}{4}\int_0^{2\pi}\left(-\cos\phi\right)_{\phi=0}^{\phi=\pi/2} d\theta \\ &= k\frac{R^4}{4}\int_0^{2\pi}(0+1)\,d\theta = \frac{k\pi R^4}{2}.\end{aligned}$$

**7.2.17.** Υπολογιστε το ολοκληρωμα $\int\int\int_D z\left(y^2+z^2\right)dxdydz$, οπου $D$ ειναι το ημισφαιρο με κεντρο το $(0,0,0)$ και ακτινα 2.

**Λυση**. Ειναι

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z\left(y^2+z^2\right)dzdydz = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z\left(y^2+z^2\right)dzdydx$$

$$= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\left(\frac{y^2z^2}{2}+\frac{z^4}{4}\right)_{z=0}^{z=\sqrt{4-x^2-y^2}} dydx$$

$$= \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\left(\frac{y^2\left(4-x^2-y^2\right)}{2}+\frac{\left(4-x^2-y^2\right)^2}{4}\right)dydx$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\left(\left(4-x^2\right)^2-y^4\right)dydx$$

$$= \frac{1}{4}\int_{-2}^{2}\left(\left(4-x^2\right)^2 y-\frac{y^5}{5}\right)_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{y=\sqrt{4-x^2}} dx$$

$$= \frac{4}{5}\int_{0}^{2}\left(4-x^2\right)^{5/2}dx \quad (\text{με } x=2\sin u)$$

$$= \frac{4}{5}\int_{u=0}^{u=\pi/2} 64\cos^6 u du = 8\pi.$$

**7.2.18.** Βρειτε την μαζα του στερεου που οριζεται απο τον κωνο $\phi=\pi/6$ (σε σφαιρικες συντεταγμενες) και το επιπεδο $z=a$, αν η πυκνοτητα του ειναι $d\left(r,\phi,\theta\right)=r\cos\phi$.

**Λυση**. Θα δουλεςουμε σε σφαιρικες συντεταγμενες. Πρεπει να βρουμε τα ορια του $r$. Εχουμε

$$0\leq z\leq a\Rightarrow 0\leq r\cos\phi\leq a\Rightarrow 0\leq r\leq\frac{a}{\cos\phi}.$$

Οποτε η ζητουμενη μαζα ειναι

$$\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\pi/6}\int_{0}^{a/\cos\phi} d\left(r,\phi,\theta\right)r^2\sin\phi drd\phi d\theta = \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\pi/6}\int_{0}^{a/\cos\phi} r^3\cos\phi\sin\phi drd\phi d\theta$$

$$= \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\pi/6}\left(\frac{r^4}{4}\right)_{r=0}^{r=a/\cos\phi}\cos\phi\sin\phi d\phi d\theta$$

$$= \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\pi/6}\frac{a^4}{4\cos^3\phi}\sin\phi d\phi d\theta$$

$$= \frac{a^4}{4}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\pi/6}\cos^{-3}\phi d\left(\cos\phi\right)d\theta$$

$$= \frac{a^4}{4}\int_{0}^{2\pi}\left(\frac{\cos^{-2}\phi}{-2}\right)_{\phi=0}^{\phi=\pi/6}d\theta = \frac{a^4}{24}\int_{0}^{2\pi}d\theta = \frac{\pi a^4}{12}.$$

**7.2.19.** Βρειτε την μαζα του στερεου που οριζεται απο την σφαιρα $r=5$ (σε σφαιρικες συντεταγμενες) και το επιπεδο $z=4$, αν η πυκνοτητα του ειναι $d\left(r,\phi,\theta\right)=r^{-1}$.

**Λυση**. Θα δουλεψουμε σε σφαιρικες συντεταγμενες. Πρεπει να βρουμε τα ορια του $r$. Εχουμε (δειτε το σχημα)

$$4\leq z\Rightarrow 4\leq r\cos\phi\Rightarrow\frac{4}{\cos\phi}\leq r \text{ οπως και } r\leq 5.$$

Επισης τα ορια του $\phi$ ειναι $0 \le \phi \le \arccos\frac{4}{5}$. Οποτε η ζητουμενη μαζα ειναι

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\int_0^{\arccos(4/5)}\int_{4/\cos\phi}^5 d(r,\phi,\theta)\,r^2\sin\phi drd\phi d\theta &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\arccos(4/5)}\int_{4/\cos\phi}^5 r\sin\phi drd\phi d\theta\\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\arccos(4/5)}\left(\frac{r^2}{2}\right)_{r=4/\cos\phi}^{r=5}\sin\phi d\phi d\theta\\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\arccos(4/5)}\left(\frac{25}{2}-\frac{8}{\cos^2\phi}\right)\sin\phi d\phi d\theta\\ &= -\int_0^{2\pi}\int_0^{\arccos(4/5)}\left(\frac{25}{2}-\frac{8}{\cos^2\phi}\right)d(\cos\phi)\,d\theta\\ &= -\int_0^{2\pi}\left(\frac{25}{2}\cos\phi+\frac{8}{\cos\phi}\right)_{\phi=0}^{\phi=\arccos(4/5)}d\theta\\ &= \int_0^{2\pi}\left(\frac{25}{2}+8-\frac{25}{2}\cdot\frac{4}{5}-\frac{8}{4/5}\right)d\theta\\ &= \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}d\theta=\pi\end{aligned}$$

**7.2.20.** Υπολογιστε το $\int\int\int_D (2x+3y)^2\,dxdydz$ οπου $D=\left\{(x,y,z):\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}\le 1\right\}$.

**Λυση.** Θα χρησιμοποιησουμε *δυο* μετασχηματισμους. Πρωτα θετουμε

$$x=2u,\qquad y=3v,\qquad z=4w.$$

Τοτε εχουμε $dxdydz=\frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)}=24$ και

$$D=\left\{(x,y,z):u^2+v^2+w^2\le 1\right\}$$

οποτε μπορουμε να μεταχειριστουμε σφαιρικες συντεταγμενες, ως ενα μετασχηματισμο των συντεταγμενων $u,v,w$:.

$$\begin{aligned}u&=r\cos\theta\sin\phi\\ v&=r\sin\theta\sin\phi\\ w&=r\cos\phi\end{aligned}$$

Εχουμε λοιπον

$$\begin{aligned}\int\int\int_D (2x+3y)^2\,dxdydz &= \int\int\int_D (4u+9v)^2\,24dudvdw\\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 (4r\cos\theta\sin\phi+9r\sin\theta\sin\phi)^2\,24r^2\sin\phi drd\phi d\theta\\ &= 24\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 (4\cos\theta+9\sin\theta)^2\,r^4\sin^3\phi drd\phi d\theta\\ &= 24\left(\int_0^1 r^4dr\right)\left(\int_0^{\pi}\sin^3\phi d\phi\right)\left(\int_0^{2\pi}(4\cos\theta+9\sin\theta)^2\,d\theta\right)\\ &= \frac{4656\pi}{15}.\end{aligned}$$

## 7.3 Αλυτα Προβληματα

**7.3.1.** Υπολογιστε το ολοκληρωμα $\int_0^1 \int_0^2 \int_0^3 dzdydx$.
**(Απ.** 6)

**7.3.2.** Υπολογιστε το ολοκληρωμα $\int_0^a \int_0^b \int_0^c (x+y+z)\,dzdydx$.
**(Απ.** $\frac{1}{2}bca\,(a+c+b)$)

**7.3.3.** Υπολογιστε το ολοκληρωμα $\int_0^a \int_0^x \int_0^y xyzdzdydx$.
**(Απ.** $a^6/48$)

**7.3.4.** Υπολογιστε το ολοκληρωμα $\int_0^a \int_0^x \int_0^{xy} x^3y^3zdzdydx$.
**(Απ.** $a^{12}/144$)

**7.3.5.** Υπολογιστε το ολοκληρωμα $\int\int\int_D \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3}$, οπου $D$ ειναι το χωριο που οριζεται απο τα επιπεδα $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$.
**(Απ.** $\frac{1}{2}\left(\ln(2)-\frac{5}{8}\right)$)

**7.3.6.** Υπολογιστε το ολοκληρωμα $\int\int\int_D xydxdydz$, οπου $D$ ειναι το χωριο που οριζεται απο τα $z=xy$, $x+y=1$ και $z=0$.
**(Απ.** 1/180)

**7.3.7.** Υπολογιστε το ολοκληρωμα $\int\int\int_D y\cos(z+x)\,dxdydz$, οπου $D$ ειναι το χωριο που οριζεται απο τα $y=\sqrt{x}$, $y=0$, $z=0$ και $x+z=\pi/2$.
**(Απ.** $\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}$)

**7.3.8.** Υπολογιστε το ολοκληρωμα $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^a dzdydx$.
**(Απ.** $\pi a/2$)

**7.3.9.** Υπολογιστε το ολοκληρωμα $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^a z\sqrt{x^2+y^2}dzdydx$.
**(Απ.** $8a^2/9$)

**7.3.10.** Υπολογιστε το ολοκληρωμα $\int_{-R}^R \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2)\,dzdydx$.
**(Απ.** $4\pi R^5/15$)

**7.3.11.** Υπολογιστε το ολοκληρωμα $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}dzdydx$.
**(Απ.** $\pi/8$)

**7.3.12.** Υπολογιστε το ολοκληρωμα $\int\int\int_D (x^2+y^2)\,dzdydx$ οπου το $D$ οριζεται απο τα $z\geq 0$, $r^2\leq x^2+y^2+z^2\leq R^2$.
**(Απ.** $\frac{4\pi\left(R^5-r^5\right)}{15}$)

**7.3.13.** Υπολογιστε το ολοκληρωμα $\int\int\int_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}dzdydx$ οπου το $D$ οριζεται απο το $x^2+y^2+z^2\leq 1$.
**(Απ.** $\frac{2\pi}{3}$)

**7.3.14.** Υπολογιστε το ολοκληρωμα $\int\int\int_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}}dzdydx$ οπου το $D$ οριζεται απο το $x^2+y^2 \leq 1$.

(**Απ.** $\pi\left(3\sqrt{10}+\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{10}-1}-\sqrt{2}-8\right)$)

**7.3.15.** Υπολογιστε το ολοκληρωμα $\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{1}{(1+x+y+z)^4}dzdydx$.

(**Απ.** $\frac{1}{6}$)

**7.3.16.** Υπολογιστε τον ογκο του σχηματος που οριζεται απο: $x=0, y=0, z=0, 3x+2y+z=6$.

**Απ.** $6$.

**7.3.17.** Υπολογιστε τον ογκο του σχηματος που οριζεται απο: $z=0, 2y=x, x=1, y=0, z=x^2+3y+1$.

**Απ.** $1/2$.

**7.3.18.** Υπολογιστε τον ογκο του σχηματος που οριζεται απο: $z=0, y=x, y=2x, y=3, z=x+y^2$.

**Απ.** $27/2$.

**7.3.19.** Υπολογιστε τον ογκο του σχηματος που οριζεται απο: $x^2=2y, y=2, z=0, z=x^2+3y^2$.

**Απ.** $8\pi$.

**7.3.20.** Υπολογιστε τον ογκο του σχηματος που οριζεται απο: $x=0, x=1, y=0, y=2, z=0, z=4-x^2$.

**Απ.** $22/3$.

**7.3.21.** Υπολογιστε τον ογκο του σχηματος που οριζεται απο: $z=1-y^2, x^2=4y, z=0$.

**Απ.** 32/21.

**7.3.22.** Υπολογιστε τον ογκο του σχηματος που οριζεται απο: $3y=9-x^2, z=0, y=0, x=3-z$.

**Απ.** $36$.

**7.3.23.** Υπολογιστε τον ογκο του σχηματος που οριζεται απο: $x=0, x=16-z^2-4y^2$.

**Απ.** $64\pi$.

**7.3.24.** Υπολογιστε τον ογκο του σχηματος που οριζεται απο: $x^2+y^2=k^2, z=0, z=k^2-x^2$ ($k>0$).

**Απ.** $3\pi k^4/4$.

**7.3.25.** Υπολογιστε τον ογκο του σχηματος που οριζεται απο: $z=0, y=3x, y=x, z=16-x^2$.

**Απ.** $abc/6$.

**7.3.26.** Υπολογιστε τον ογκο του σχηματος που οριζεται απο: $z=4-x^2, z=4-y^2$.

**Απ.** $32$.

**7.3.27.** Υπολογιστε τον ογκο του σχηματος που οριζεται απο: $x^2 + z^2 = a^2, y^2 + z^2 = a^2$.
**Απ.** $16a^3/3$.

**7.3.28.** Υπολογιστε τον ογκο του σχηματος που οριζεται απο: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.
**Απ.** $\frac{4}{3}\pi a^3$.

**7.3.29.** Υπολογιστε τον ογκο του σχηματος που οριζεται απο: $x^2+y^2 = a^2, x^2+y^2+z^2 = 4a^2$.
**Απ.** $2\pi a^3 \left(8 - 3\sqrt{3}\right)/3$.

**7.3.30.** Υπολογιστε τον ογκο του σχηματος που οριζεται απο: $r = 2, y - x + 2z = 8$.
**Απ.** $16\pi$.

**7.3.31.** Υπολογιστε τον ογκο του σχηματος που οριζεται απο: $r = 3\sin\theta$, $z = x$.
**Απ.** $9/4$.

**7.3.32.** Υπολογιστε τον ογκο του σχηματος που οριζεται απο: $r = 1 - \cos\theta, z = y$.
**Απ.** $4/3$.

**7.3.33.** Υπολογιστε τον ογκο του σχηματος που οριζεται απο: $x^2+y^2 = 1, z^2 = 4x^2+4y^2$.
**Απ.** $4\pi/3$.

**7.3.34.** Υπολογιστε τον ογκο του σχηματος που οριζεται απο: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = 4$, $y = 4$ και $z = x^2 + y^2 + 1$
**Απ.** $\frac{560}{3}$.

**7.3.35.** Υπολογιστε τον ογκο του σχηματος που οριζεται απο: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.
**Απ.** $\frac{abc}{6}$.

**7.3.36.** Υπολογιστε τον ογκο του σχηματος που οριζεται απο: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.
**Απ.** $84/3$.

**7.3.37.** Υπολογιστε τον ογκο του σχηματος που οριζεται απο: $z = x + y + a$, $y^2 = ax$, $x = a$, $z = 0$, $y = 0$.
**Απ.** $79a^3/60$.

**7.3.38.** Υπολογιστε τον ογκο του σχηματος που οριζεται απο: $y = 0$, $z = 0$, $3x + y = 6$, $3x + 2y = 12$, $x + y + z = 6$.
**Απ.** 12.

**7.3.39.** Υπολογιστε τον ογκο του σχηματος που οριζεται απο: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = x^2 + y^2$, $x + y = 1$.
**Απ.** 1/6.

**7.3.40.** Υπολογιστε τον ογκο του σχηματος που οριζεται απο: $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + z^2 = a^2$.
**Απ.** $16a^3/3$.

**7.3.41.** Υπολογιστε τον ογκο του σχηματος που οριζεται απο: $z^2 = xy, x = a, x = 0, y = a, y = 0$.
**Απ.** $8a^3/9$.

**7.3.42.** Υπολογιστε τον ογκο του σχηματος που οριζεται απο: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = 9 - y^2$,$3x + 4y = 12$.
**Απ.** 45.
**Απ.** $\pi/4$ – **υποδ**. χρησιμοποιειστε πολικες συντεταγμενες.

**7.3.43.** Υπολογιστε τον ογκο του σχηματος που οριζεται απο $z = mx, x^2 + y^2 = a^2, z = 0$.
**Απ.** $4ma^3/3$ – **υποδ**. χρησιμοποιειστε κυλνδρικες συντεταγμενες .

**7.3.44.** Υπολογιστε τον ογκο του σχηματος που οριζεται απο $az = a^2 - x^2 - y^2, z = 0$.
**Απ.** $\pi a^3/2$ – **υποδ**. χρησιμοποιειστε κυλνδρικες συντεταγμενες.

**7.3.45.** Υπολογιστε τον ογκο του σχηματος που οριζεται απο $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$, $x^2 + y^2 = a^2$.
**Απ.** $4\pi a^3\sqrt{3}$ – **υποδ**. χρησιμοποιειστε κυλνδρικες συντεταγμενες .

**7.3.46.** Υπολογιστε τον ογκο του σχηματος που οριζεται απο $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
**Απ.** $16ab^2/3$ – **υποδ**. χρησιμοποιειστε κυλνδρικες συντεταγμενες.

**7.3.47.** Υπολογιστε τον ογκο του σχηματος που οριζεται απο $z^2 = (x + a)^2$, $x^2 + y^2 = a^2$.
**Απ.** $2\pi a^3$ – **υποδ**. χρησιμοποιειστε κυλνδρικες συντεταγμενες.

**7.3.48.** Υπολογιστε τον ογκο του σχηματος που οριζεται απο $z = \frac{4}{x^2+y^2}$, $z = 0$, $x^2+y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$.
**Απ.** $8\pi \ln 2$ – **υποδ**. χρησιμοποιειστε κυλνδρικες συντεταγμενες.

**7.3.49.** Υπολογιστε τον ογκο του σχηματος που οριζεται απο $az = x^2 + y^2$, $z = 0$, $x^2 + y^2 \pm ax = 0$.
**Απ.** $3\pi a^3/16$ – **υποδ**. χρησιμοποιειστε κυλνδρικες συντεταγμενες.

**7.3.50.** Υπολογιστε τον ογκο του σχηματος που οριζεται απο $z = a$, $x^2 + y^2 = a^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = 5a^2$ (με $a \leq z \leq a\sqrt{5}$).
**Απ.** $\pi a^3 \left(10\sqrt{5} - 19\right)/3$ – **υποδ**. χρησιμοποιειστε κυλνδρικες συντεταγμενες.

**7.3.51.** Υπολογιστε τον ογκο του σχηματος που οριζεται απο $r = a$, $z = a^2 - x^2$, $z \geq 0$.
**Απ.** $3\pi a^4/4$ – **υποδ**. χρησιμοποιειστε κυλνδρικες συντεταγμενες.

**7.3.52.** Υπολογιστε τον ογκο του σχηματος που οριζεται απο $z = 12 - x^2 - y^2$, $z = 8$.
**Απ.** $8\pi$ – **υποδ**. χρησιμοποιειστε κυλνδρικες συντεταγμενες.

# Κεφάλαιο 8

# Καμπυλες και Διανυσματικες Συναρτησεις

## 8.1 Θεωρια

**8.1.1.** Σε πολλες εφαρμογες χρησιμοποιουμε *διανυσματικες συναρτησεις*, δηλ. συναρτησεις με πεδιο ορισμου το $\mathbb{R}$ και πεδιο τιμων το $\mathbb{R}^3$. Ενα κλασσικο παραδειγμα ειναι το *διανυσμα θεσης* $\mathbf{r}(t)$: αν θεωρησουμε οτι η μεταβλητη $t$ δηλωνει τον *χρονο*, τοτε το διανυσμα

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}.$$

οριζει την *χρονικα μεταβαλλομενη* θεση ενος σημειου $(x(t), y(t), z(t))$. Το συνολο των σημειων $\{(x(t), y(t), z(t))\}_{t\in\mathbb{R}}$ δινει την *τροχια* του σημειου, η οποια γεωμετρικα ειναι μια *καμπυλη* στον χωρο.ειναι

**8.1.2.** Γενικοτερα, μια διανυσματικη συναρτηση εχει την μορφη $\mathbf{F}:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}^3$, δηλ. ειναι ενα διανυσμα του οποιου οι συνιστωσες ειναι συναρτησεις μιας μεταβλητης $t$:

$$\mathbf{F}(t) = P(t)\,\mathbf{i} + Q(t)\,\mathbf{j} + R(t)\,\mathbf{k}.$$

**8.1.3.** Το *οριο* της $\mathbf{F}(t)$ οταν το $t$ τεινει στο $t_0$ οριζεται ως εξης

$$\lim_{t\to t_0}\mathbf{F}(t) = \mathbf{F}_0 \Leftrightarrow (\forall\varepsilon>0 \quad \exists\delta>0 : 0<|t-t_0|<\delta \Rightarrow |\mathbf{F}(t)-\mathbf{F}_0|<\varepsilon).$$

**8.1.4.** Λεμε οτι η $\mathbf{F}(t)$ ειναι *συνεχης στο σημειο* $t_0$ αν εχουμε

$$\lim_{t\to t_0}\mathbf{F}(t) = \mathbf{F}(t_0).$$

**8.1.5.** Η *παραγωγος* της $\mathbf{F}(t) = P(t)\,\mathbf{i} + Q(t)\,\mathbf{j} + R(t)\,\mathbf{k}$ οριζεται ως εξης

$$\mathbf{F}'(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{F}(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{F}(t+\Delta t)-\mathbf{F}(t)}{\Delta t} = \frac{dP}{dt}\mathbf{i} + \frac{dQ}{dt}\mathbf{j} + \frac{dR}{dt}\mathbf{k}.$$

και εχει τις εξης ιδιοτητες

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\mathbf{F}+\mathbf{G}) &= \frac{d}{dt}\mathbf{F}+\frac{d}{dt}\mathbf{G}\\
\frac{d}{dt}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}) &= \mathbf{F}\cdot\frac{d}{dt}\mathbf{G}+\mathbf{G}\cdot\frac{d}{dt}\mathbf{F}\\
\frac{d}{dt}(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) &= \mathbf{F}(t)\times\frac{d}{dt}\mathbf{G}+\mathbf{G}\times\frac{d}{dt}\mathbf{F}\\
\frac{d}{dt}(\phi\mathbf{F}) &= \mathbf{F}\frac{d}{dt}\phi+\phi\frac{d}{dt}\mathbf{F}\\
\frac{d}{dt}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}\times\mathbf{H}) &= \mathbf{F}\cdot\left(\mathbf{G}\times\frac{d}{dt}\mathbf{H}\right)+\mathbf{F}\cdot\left(\frac{d}{dt}\mathbf{G}\times\mathbf{H}\right)+\frac{d}{dt}\mathbf{F}\cdot(\mathbf{G}\times\mathbf{H}).
\end{aligned}$$

**8.1.6.** Απο τον τυπο
$$\frac{d\mathbf{F}}{dt}=\frac{dP}{dt}\mathbf{i}+\frac{dQ}{dt}\mathbf{j}+\frac{dR}{dt}\mathbf{k}$$
παιρνουμε τον τυπο για το *διαφορικο*:

$$d\mathbf{F}=dP\mathbf{i}+dQ\mathbf{j}+dR\mathbf{k}$$

για το οποιο ισχυουν:

$$\begin{aligned}
d(\mathbf{F}+\mathbf{G}) &= d\mathbf{F}+d\mathbf{G}\\
d(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}) &= \mathbf{F}\cdot d\mathbf{G}+\mathbf{G}\cdot d\mathbf{F}\\
d(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) &= \mathbf{F}(t)\times d\mathbf{G}+\mathbf{G}\times d\mathbf{F}\\
d(\phi\mathbf{F}) &= \mathbf{F}d\phi+\phi d\mathbf{F}\\
d(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}\times\mathbf{H}) &= \mathbf{F}\cdot(\mathbf{G}\times d\mathbf{H})+\mathbf{F}\cdot(d\mathbf{G}\times\mathbf{H})+d\mathbf{F}\cdot(\mathbf{G}\times\mathbf{H}).
\end{aligned}$$

**8.1.7.** Θεωρειστε ενα σημειο $M$ το οποιο κινειται στον τριδιαστατο χωρο. Σε καθε χρονικη στιγμη, οι συντεταγμενες του σημειου ειναι $(x(t),y(t),z(t))$. Το σημειο $M$ διαγραφει μια καμπυλη $C$, η οποια μπορει να παρασταθει σε *παραμετρικη μορφη*:

$$C:(x(t),y(t),z(t)),\qquad t\in[t_1,t_2].$$

Επισης, η $C$ μπορει να παρασταθει και ως *διανυσματικη συναρτηση*

$$\mathbf{r}(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}+z(t)\mathbf{k},\qquad t\in[t_1,t_2].$$

Στο παρον τευχος θα χρησιμοποιησουμε κυριως την διανυσματικη αναπαρασταση[1].

**8.1.8.** Αν τωρα $\mathbf{r}(t)$ ειναι μια καμπυλη, γεωμετρικα η παραγωγος $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ ειναι *το εφαπτομενο στην καμπυλη διανυσμα*.

[1] Σημειωνουμε οτι μια καμπυλη $C$ στον 3-διαστατο χωρο μπορει να παρασταθει και ως τομη δυο επιφανειων:

$$C:\phi(x,y,z)=0,\qquad \psi(x,y,z)=0.$$

**8.1.9.** Η καμπυλη $\mathbf{r}(t), t \in [t_1, t_2]$ λεγεται *κλειστη* εαν εχουμε $\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}(t_2)$, *λεια* εαν για καθε $t$ η $\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t)$ ειναι συνεχης και διαφορη του μηδενος (δηλ. η καμπυλη εχει μια καλως ορισμενη εφαπτομενη που αλλαζει κατευθυνση με συνεχη τροπο), *απλη* εαν δεν τεμνει τον εαυτο της (για καθε $p \neq q$ εχουμε $\mathbf{r}(p) \neq \mathbf{r}(q)$).

**8.1.10.** Θεωρειστε την *εφαπτομενη ευθεια* στην καμπυλη $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}x(t) + \mathbf{j}y(t) + \mathbf{k}z(t)$ στο σημειο $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{i}x(t_0) + \mathbf{j}y(t_0) + \mathbf{k}z(t_0) = \mathbf{i}x_0 + \mathbf{j}y_0 + \mathbf{k}z_0$. Ας συμβολισουμε την εφαπτομενη με $\mathbf{R}(t) = \mathbf{i}X(t) + \mathbf{j}Y(t) + \mathbf{k}Z(t)$, τοτε η $\mathbf{R}(t)$ εχει εξισωση

$$(\mathbf{R}(t) - \mathbf{r}_0) \times \frac{d\mathbf{r}(t_0)}{dt} = 0 \text{ ή και } \frac{X(t) - x_0}{x'(t_0)} = \frac{Y(t) - y_0}{y'(t_0)} = \frac{Z(t) - z_0}{z'(t_0)}.$$

**8.1.11.** Θεωρειστε τωρα το *καθετο επιπεδο* στην $\mathbf{r}(t)$ στο σημειο $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{i}x(t_0) + \mathbf{j}y(t_0) + \mathbf{k}z(t_0) = \mathbf{i}x_0 + \mathbf{j}y_0 + \mathbf{k}z_0$. Ας συμβολισουμε ενα τυχον σημειο του καθετου επιπεδου με $\mathbf{R} = \mathbf{i}X + \mathbf{j}Y + \mathbf{k}Z$, θα ισχυει

$$(\mathbf{R} - \mathbf{r}_0) \cdot \frac{d\mathbf{r}(t_0)}{dt} = 0$$

ή και

$$x'(t_0) \cdot (X - x_0) + y'(t_0) \cdot (Y - y_0) + z'(t_0) \cdot (Z - z_0) = 0.$$

**8.1.12.** Ολοκληρωμα. Το *(αοριστο, ορισμενο) ολοκληρωμα* της $\mathbf{F}(t)$ οριζεται ως εξης

$$\int \mathbf{F}(t)\,dt = \left[\int P(t)\,dt\right]\mathbf{i} + \left[\int Q(t)\,dt\right]\mathbf{j} + \left[\int R(t)\,dt\right]\mathbf{k},$$
$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t)\,dt = \left[\int_{t_1}^{t_2} P(t)\,dt\right]\mathbf{i} + \left[\int_{t_1}^{t_2} Q(t)\,dt\right]\mathbf{j} + \left[\int_{t_1}^{t_2} R(t)\,dt\right]\mathbf{k}.$$

Ισχυουν ολες οι γνωστες ιδιοτητες των ολοκληρωματων και αναλογες επεκτασεις. Π.χ.

$$\int c\mathbf{F}(t)\,dt = c\int \mathbf{F}(t)\,dt,$$
$$\int \mathbf{c} \cdot \mathbf{F}(t)\,dt = \mathbf{c} \cdot \int \mathbf{F}(t)\,dt,$$
$$\int \mathbf{c} \times \mathbf{F}(t)\,dt = \mathbf{c} \times \int \mathbf{F}(t)\,dt.$$

## 8.2 Λυμενα Προβληματα

**8.2.1.** Βρειτε, αν υπαρχουν, τα σημεια στο οποια τεμνονται οι καμπυλες $\mathbf{F}(t) = \mathbf{i}\cos t + \mathbf{j}\sin t + \mathbf{k}$ και $\mathbf{G}(t) = \mathbf{i}(t^2 + 1) + \mathbf{j}t + \mathbf{k}e^t$.

**Λυση.** Θα πρεπει να εχουμε $\mathbf{F}(t) = \mathbf{G}(t)$ δηλ.

$$\cos t = t^2 + 1$$
$$\sin t = t$$
$$1 = e^t$$

Ευκολα βλεπουμε οτι η μοναδικη λυση του παραπανω συστηματος ειναι $t = 0$. Οποτε το μοναδικο σημειο τομης αντιστοιχει στο $\mathbf{F}(0) = \mathbf{G}(0) = \mathbf{i} + \mathbf{k}$, δηλ. ειναι το $(1, 0, 1)$.

**8.2.2.** Βρειτε, αν υπαρχουν, τα σημεια στο οποια τεμνονται οι καμπυλες $\mathbf{F}(t) = \mathbf{i}\cos t + \mathbf{j} + \mathbf{k}t$ και $\mathbf{G}(t) = \mathbf{i}t^2 + \mathbf{j}2t + \mathbf{k}\frac{e^t}{t+1}$.

**Λυση.** Θα πρεπει να εχουμε $\mathbf{F}(t) = \mathbf{G}(t)$ δηλ.

$$\cos t = t^2$$
$$1 = 2t$$
$$t = \frac{e^t}{t+1}$$

Απο την δευτερη εξισωση θα πρεπει να εχουμε $t = 1/2$, αλλα τοτε απο την πρωτη θα πρεπει να εχουμε $\cos\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, το οποιο δεν ισχυει. Αρα οι καμπυλες δεν τεμονονται.

**8.2.3.** Να βρεθει το οριο $\lim_{t\to 2}\mathbf{F}(t) = \mathbf{i}\cos t + \mathbf{j}\frac{t}{t+1} + \mathbf{k}t$.

**Λυση.** Ειναι

$$\lim_{t\to 2}\mathbf{F}(t) = \mathbf{i}\lim_{t\to 2}(\cos t) + \mathbf{j}\lim_{t\to 2}\left(\frac{t}{t+1}\right) + \mathbf{k}\lim_{t\to 2}(t) = \mathbf{i}\cos 2 + \frac{2}{3}\mathbf{j} + 2\mathbf{k}..$$

**8.2.4.** Να υπολογιστουν οι $\frac{d}{dt}\mathbf{F}(t)$, $\left|\frac{d}{dt}\mathbf{F}(t)\right|$, $\frac{d}{dt}|\mathbf{F}(t)|$ για την $\mathbf{F}(t) = \mathbf{i}\cos t + \mathbf{j}\sin t + \mathbf{k}t$

**Λυση.** Ειναι

$$\frac{d}{dt}\mathbf{F}(t) = \frac{d}{dt}(\mathbf{i}\cos t + \mathbf{j}\sin t + \mathbf{k}t) = -\mathbf{i}\sin t + \mathbf{j}\cos t + \mathbf{k}$$

οποτε και

$$\left|\frac{d}{dt}\mathbf{F}(t)\right| = |-\mathbf{i}\sin t + \mathbf{j}\cos t + \mathbf{k}| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}.$$

Εξ αλλου

$$|\mathbf{F}(t)| = |\mathbf{i}\cos t + \mathbf{j}\sin t + t\mathbf{k}| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t + t^2} = \sqrt{t^2+1}$$

οποτε

$$\frac{d}{dt}|\mathbf{F}(t)| = \frac{d\left(\sqrt{t^2+1}\right)}{dt} = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}.$$

**8.2.5.** Για τις συναρτησεις $\mathbf{F}(t) = \mathbf{i}\cos t + \mathbf{j}\sin t + \mathbf{k}t$, $\mathbf{G}(t) = \mathbf{i}t^2 + \mathbf{j}t^3 + \mathbf{k}$, $\phi(t) = t$ να υπολογιστουν τα $\frac{d}{dt}(\mathbf{F}+\mathbf{G})$, $\frac{d}{dt}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G})$, $\frac{d}{dt}(\phi\mathbf{F})$.

**Λυση.** Εχουμε

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\mathbf{F}+\mathbf{G}) &= \frac{d}{dt}\left(\mathbf{i}\cos t + \mathbf{j}\sin t + \mathbf{k}t + \mathbf{i}t^2 + \mathbf{j}t^3 + \mathbf{k}\right)\\ &= \frac{d}{dt}\left(\mathbf{i}(t+\cos t) + \mathbf{j}\left(t^2+\sin t\right) + \mathbf{k}(1+t)\right)\\ &= \mathbf{i}(1-\sin t) + \mathbf{j}(2t+\cos t) + \mathbf{k}.\end{aligned}$$

Επισης

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}) &= \frac{d}{dt}\left(t^2\cdot\cos t + t^3\cdot\sin t + t\right)\\ &= t^3\cos t + 2t^2\sin t + 2t\cos t + 1.\end{aligned}$$

Τελος

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\phi\mathbf{F}) &= \frac{d}{dt}\left(\mathbf{i}t\cos t + \mathbf{j}t\sin t + \mathbf{k}t^2\right)\\ &= \mathbf{i}(\cos t - t\sin t) + \mathbf{j}(t\cos t + \sin t) + \mathbf{k}2t.\end{aligned}$$

**8.2.6.** Για τις $\mathbf{F}(t) = \mathbf{i}\sin t + \mathbf{j}t^2 + \mathbf{k}t$, $\mathbf{G}(t) = \mathbf{i}t + \mathbf{j}\ln t + \mathbf{k}e^t$, $\mathbf{c} = \mathbf{i}2 + \mathbf{j}3 - \mathbf{k}$ να υπολογιστουν τα $\int(\mathbf{F}(t) + \mathbf{G}(t))\,dt$, $\int(\mathbf{F}(t)\cdot\mathbf{G}(t))\,dt$, $\int\mathbf{c}\cdot\mathbf{F}(t)\,dt$.

**Λυση.** Ειναι

$$\begin{aligned}\int(\mathbf{F}(t) + \mathbf{G}(t))\,dt &= \int\left(\mathbf{i}(t+\sin t) + \mathbf{j}\left(t^2 + \ln t\right) + \mathbf{k}\left(t + e^t\right)\right)dt\\ &= \left(\mathbf{i}\left(\frac{t^2}{2} - \cos t + c_1\right) + \mathbf{j}\left(\frac{t^3}{3} + t(\ln t - 1) + c_2\right) + \mathbf{k}\left(\frac{t^2}{2} + e^t + c_3\right)\right)\\ &= \mathbf{i}\left(\frac{t^2}{2} - \cos t\right) + \mathbf{j}\left(\frac{t^3}{3} + t(\ln t - 1)\right) + \mathbf{k}\left(\frac{t^2}{2} + e^t\right) + \mathbf{c}\end{aligned}$$

οπου $\mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$. Επισης

$$\int(\mathbf{F}(t)\cdot\mathbf{G}(t))\,dt = \int\left(t\sin t + t^2\ln t + te^t\right)dt = \sin t - e^t + \frac{1}{3}t^3\ln t - t\cos t + te^t - \frac{1}{9}t^3 + c.$$

Τελος

$$\int\mathbf{c}\cdot\mathbf{F}(t)\,dt = \int\left(2\sin t + 3t^2 - t\right)dt = t^3 - \frac{1}{2}t^2 - 2\cos t + c.$$

**8.2.7.** Να βρεθει η εξισωση της εφαπτομενης ευθειας και του καθετου επιπεδου στην καμπυλη $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}(1+t) - \mathbf{j}t^2 + \mathbf{k}(1+t^3)$ και στο σημειο $\mathbf{r}(1)$.

**Λυση.** Στο σημειο $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(1)$ εχουμε

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_0 &= \mathbf{r}(1) = \mathbf{i}2 - \mathbf{j} + \mathbf{k}2\\ \mathbf{n}_0 &= \frac{d\mathbf{r}}{dt}|_{t=1} = \left(\mathbf{i} - \mathbf{j}2t + \mathbf{k}3t^2\right)|_{t=1} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Αρα η εφαπτομενη ευθεια $\mathbf{R}(t)$ στην $\mathbf{r}(t)$ και στο σημειο $\mathbf{r}_0$ εχει εξισωση

$$\frac{X(t) - 2}{1} = \frac{Y(t) + 1}{-2} = \frac{Z(t) - 2}{3} = t$$

ή, σε διανυσματικη μορφη,

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{i}(2+t) - \mathbf{j}(1+2t) + \mathbf{k}(2+3t).$$

Το δε καθετο επιπεδο στην $\mathbf{r}(t)$ στο σημειο $\mathbf{r}_0$ εχει εξισωση

$$1\cdot(X-2) - 2\cdot(Y+1) + 3\cdot(Z-2) = 0$$

δηλ

$$X - 2Y + 3Z = 10.$$

**8.2.8.** Να βρεθει η εξισωση της εφαπτομενης ευθειας στην καμπυλη $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}2\cos t - \mathbf{j}\sin t + \mathbf{k}t$ και στο σημειο $\mathbf{r}(\pi/2)$.

**Λυση.** Στο σημειο $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(\pi/2)$ εχουμε

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(\pi/2) = \mathbf{j} + \mathbf{k}\frac{\pi}{2}$$
$$\mathbf{n}_0 = \frac{d\mathbf{r}}{dt}|_{t=\pi/2} = (-\mathbf{i}2\sin t + \mathbf{j}\cos t + \mathbf{k})|_{t=1} = -2\mathbf{i} + \mathbf{k}.$$

Αρα η εφαπτομενη ευθεια $\mathbf{R}(t)$ στην $\mathbf{r}(t)$ και στο σημειο $\mathbf{r}_0$ εχει εξισωση

$$\frac{X(t)}{2} = \frac{Y(t)-1}{0} = \frac{Z(t)-\pi/2}{1} = t$$

ή, σε διανυσματικη μορφη,

$$\mathbf{R}(t) = -\mathbf{i}2t - \mathbf{j} + \mathbf{k}(\pi/2 + t).$$

**8.2.9.** Να βρεθει η εξισωση του επιπεδου του καθετου στην καμπυλη $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}\cos t + \mathbf{j}\sin t + \mathbf{k}t$ στο σημειο $\mathbf{r}(t)|_{t=\pi/2} = \mathbf{j} + \mathbf{k}\frac{\pi}{2}$.

**Λυση.** Το καθετο επιπεδο στο σημειο $\mathbf{r}(t = \pi/2)$ εχει καθετο διανυσμα $\mathbf{n} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}|_{t=\pi/2} = -\mathbf{i} + \mathbf{k}$. Οποτε η εξισωση του καθετου επιπεδου ειναι

$$-1\cdot(X-0) + 0\cdot(Y-1) + 1\cdot\left(Z - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

ή και $-X + Z = \pi/2$.

**8.2.10.** Να δειχτει οτι για καθε $t$, η εφαπτομενη ευθεια στην καμπυλη $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}\frac{2t}{3} + \mathbf{j}t^2 + \mathbf{k}t^3$ σχηματιζει σταθερη γωνια με το διανυσμα $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$.

**Λυση.** Η ευθεια $\mathbf{R}(t) = \mathbf{i}X(t) + \mathbf{j}Y(t) + \mathbf{k}Z(t)$ η οποια ειναι εφαπτομενη στην $\mathbf{r}(t)$ στο σημειο $(x_0, y_0, z_0)$ εχει εξισωση

$$\frac{X(t)-x_0}{2/3} = \frac{Y(t)-y_0}{2t} = \frac{Z(t)-z_0}{3t^2}.$$

Αρα η διευθυνση της ευθειας δινεται απο το διανυσμα $\mathbf{n}(t) = \mathbf{i}\frac{2}{3} + \mathbf{j}2t + \mathbf{k}3t^2$ και η γωνια $\theta$ του $\mathbf{n}(t)$ με το $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$ εχει το συνημιτονο

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\mathbf{n}(t)\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{n}(t)\|\cdot||\mathbf{v}||} = \frac{\frac{2}{3}+3t^2}{\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + (2t)^2 + (3t^2)^2}\sqrt{1^2+1^2}} \\ &= \frac{\frac{2}{3}+3t^2}{\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + (2t)^2 + (3t^2)^2}\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{\frac{2}{3}+3t^2}{\sqrt{9t^4+4t^2+\frac{4}{9}}\sqrt{2}} \\ &= \frac{\frac{2}{3}+3t^2}{\sqrt{\left(3t^2+\frac{2}{3}\right)^2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

Αρα λοιπον $\theta = \pi/4$, ανεξαρτητα απο το $t$ και το ζητουμενο εχει δεχτει.

**8.2.11.** Να βρεθει το σημειο της καμπυλης $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}\cos t + \mathbf{j}e^t + \mathbf{k}\sin t$ που εχει εφαπτομενη παραλληλη με το επιπεδο $E : X + Z = 1$.

**Λυση.** Στο σημειο $\mathbf{r}(t)$ η εφαπτομενη ευθεια εχει διευθυνση

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\mathbf{i}\sin t + \mathbf{j}e^t + \mathbf{k}\cos t.$$

Το επιπεδο $E$ εχει καθετο διανυσμα $\mathbf{n} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$. Για να ειναι η εφαπτομενη ευθεια της $\mathbf{r}(t)$ παραλληλη στο επιπεδο $E$ θα πρεπει να εχουμε

$$\mathbf{a}(t) \cdot \mathbf{n} = -\sin t + \cos t = 0 \Rightarrow \sin t = \cos t \Rightarrow t = \frac{\pi}{4} + n\pi \text{ για } n \in \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}.$$

Ετσι λοιπον σε οποιοδηποτε σημειο της μορφης $\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + n\pi\right), e^{\left(\frac{\pi}{4}+n\pi\right)}, \sin\left(\frac{\pi}{4} + n\pi\right)\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{\left(\frac{\pi}{4}+n\pi\right)}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ η εφαπτομενη ευθεια της $\mathbf{r}(t)$ ειναι καθετη στο $E$.

**8.2.12.** Να δειχτει οτι $\frac{d}{dt}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = \mathbf{F} \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{G} + \mathbf{G} \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{F}$.

**Λυση.** Εχουμε

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) &= \frac{d}{dt}((F_1\mathbf{i}+F_2\mathbf{j}+F_3\mathbf{k}) \cdot (G_1\mathbf{i}+G_2\mathbf{j}+G_3\mathbf{k})) = \frac{d}{dt}((F_1G_1+F_2G_2+F_3G_3)) \\ &= \left(F_1\frac{dG_1}{dt}+F_2\frac{dG_2}{dt}+F_3\frac{dG_3}{dt}\right) + \left(\frac{dF_1}{dt}G_1+\frac{dF_2}{dt}G_2+\frac{dF_3}{dt}G_3\right) \\ &= \mathbf{F} \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{G} + \mathbf{G} \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{F}.\end{aligned}$$

**8.2.13.** Να βρεθει η διανυσματικη εξισωση της καμπυλης που δινεται ως τομη των επιφανειων

$$S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 2, \qquad S_2 : z = 1.$$

**Λυση.** Η καμπυλη ειναι ενας κυκλος, που προκυπτει απο την τομη της σφαιρας $S_1$ και του επιπεδου $S_2$. Αν στην εξισωση της $S_1$ θεσουμε $z = 1$ παιρνουμε $x^2 + y^2 = 1$. Αρα ο κυκλος εχει την ορφη

$$x(t) = \cos t, \qquad y(t) = \sin t, \qquad z(t) = 1$$

ή, σε διανυσματικη μορφη $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}\cos t + \mathbf{j}\sin t + \mathbf{k}$.

**8.2.14.** Βρειτε την καμπυλη $\mathbf{r}(t)$ κατα την οποια τεμνονται ο κυλινδρος $x^2 + y^2 = 1$ και το επιπεδο $y + z = 2$.

**Λυση**. Η προβολης της $\mathbf{r}(t)$ στο επιπεδο $xy$ ειναι ο *κυκλος* $x^2 + y^2 = 1$ ο οποιος μπορει ν αγραφτει και ως

$$x = \cos t, \qquad y(t) = \sin t, \qquad z = 0.$$

Καθε σημειο της $(x(t), y(t), z(t))$ της $\mathbf{r}(t)$ εχει $x$ και $y$ συντεταγμενες ιδιες με αυτες της προβολης του. Αρα, *πανω στο επιπεδο* $y + z = 2$, θα εχουμε

$$z(t) = 2 - y(t) = 2 - \sin t.$$

Οποτε παραμετρικς εχουμε

$$(x(t), y(t), z(t)) = (\cos t, \sin t, 2 - \sin t)$$

και διανυσματικα

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}\cos t + \mathbf{j}\sin t + \mathbf{k}(2 - \sin t).$$

**8.2.15.** Εστω καμπυλη $\mathbf{r}(t)$ τετοια ωστε για καθε $t$ εχουμε $\mathbf{r}(t) \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t)$ =0. Να δειχτει οτι η $\mathbf{r}(t)$ βρικσεται επανω στην επιφανεια μιας σφαιρας.

**Λυση.** Αν θεωρησουμε την συναρτηση $f(t) = \|\mathbf{r}(t)\|^2$ τοτε

$$\frac{df}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\|\mathbf{r}(t)\|^2\right) = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t)) = \mathbf{r}(t) \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) + \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) \cdot \mathbf{r}(t) = 2\mathbf{r}(t) \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t) = 0$$

(εκ της υποθεσεως). Τοτε ομως, για καποια σταθερα $c$ εχουμε

$$f(t) = \|\mathbf{r}(t)\|^2 = c \Rightarrow \sqrt{f(t)} = \|\mathbf{r}(t)\| = \sqrt{c}.$$

Με αλλα λογια η αποσταση καθε σημειου της καμπυλης απο την αρχη των αξονων ειναι σταθερη, δηλ. η καμπυλη βρισκεται εξ ολοκληρου πανω σμια σφαιρα με κεντρο το $\mathbf{0}$ και ακτινα $\sqrt{c}$.

## 8.3 Αλυτα Προβληματα

**8.3.1.** Βρειτε τα σημεια στο οποια τεμνονται οι καμπυλες $\mathbf{F}(t) = \mathbf{i}\sin t + \mathbf{j}\cos t + \mathbf{k}t^2$ και $\mathbf{G}(t) = \mathbf{i}t + \mathbf{j}e^t + \mathbf{k}2t$.

**Απ.** Το $(0, 1, 0)$ .

**8.3.2.** Βρειτε τα σημεια στα οποια τεμνονται οι καμπυλες $\mathbf{F}(t) = \mathbf{i}t + \mathbf{j}t + \mathbf{k}t$ και $\mathbf{G}(t) = \mathbf{i}t + \mathbf{j}e^t + \mathbf{k}t^2$.

**Απ.** Οι καμπυλες δεν τεμνονται.

**8.3.3.** Βρειτε τα σημεια στα οποια τεμνονται οι καμπυλες $\mathbf{F}(t) = \mathbf{i}t + \mathbf{j}t^2 + \mathbf{k}t^3$ και $\mathbf{G}(t) = \mathbf{i}t^2 + \mathbf{j}t^3 + \mathbf{k}t^4$. Επισης να βρεθει η *γωνια* υπο την οποια τεμνονται οι καμπυλες.

**Απ.** Ειναι το σημειο $(1, 1, 1)$. Η γωνια τομης ειναι $\theta = \arccos \frac{20}{\sqrt{406}}$.

**8.3.4.** Να βρεθει το οριο $\lim_{t\to1} \mathbf{F}(t) = \mathbf{i}t + \mathbf{j}t + \mathbf{k}t$.

**Απ.** $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

**8.3.5.** Να υπολογιστουν οι $\frac{d}{dt}\mathbf{F}(t)$, $\left|\frac{d}{dt}\mathbf{F}(t)\right|$, $\frac{d}{dt}|\mathbf{F}(t)|$ για την $\mathbf{F}(t) = \mathbf{i}\sin t + \mathbf{j}\cos t + \mathbf{k}t^2$

**Απ.** $\mathbf{i}\cos t - \mathbf{j}\sin t + \mathbf{k}2t$, $\sqrt{4t^2 + 1}$, $\frac{8t^3}{\sqrt{4t^4+1}}$.

**8.3.6.** Να υπολογιστουν οι $\frac{d}{dt}\mathbf{F}(t)$, $\left|\frac{d}{dt}\mathbf{F}(t)\right|$, $\frac{d}{dt}|\mathbf{F}(t)|$ για την $\mathbf{F}(t) = \mathbf{i}e^t + \mathbf{j}\ln t + \mathbf{k}t$

**Απ.** $\mathbf{i}e^t + \mathbf{j}\frac{1}{t} + \mathbf{k}$, $\sqrt{e^{2t} + \left(\frac{1}{t}\right)^2 + 1}$, $\frac{1}{t}\frac{e^{2t}t+\ln t+t^2}{\sqrt{e^{2t}+\ln^2 t+t^2}}$.

**8.3.7.** Να υπολογιστουν οι $\frac{d}{dt}\mathbf{F}(t)$, $\left|\frac{d}{dt}\mathbf{F}(t)\right|$, $\frac{d}{dt}|\mathbf{F}(t)|$ για την $\mathbf{F}(t) = \mathbf{i}\sin t + \mathbf{j}t$

**Απ.** $\mathbf{i}\cos t + \mathbf{j}$, $\sqrt{\cos^2 t + 1}$, $\frac{\sin t \cos t + t}{\sqrt{t^2+1-\cos^2 t}}$ .

**8.3.8.** Για τις συναρτησεις $\mathbf{F}(t) = \mathbf{i}\sin t + \mathbf{j}\cos t + \mathbf{k}t^2$, $\mathbf{G}(t) = \mathbf{i}t + \mathbf{j}t^2 + \mathbf{k}2$, $\phi(t) = t + 2$ να υπολογιστουν τα $\frac{d}{dt}(\mathbf{F}+\mathbf{G})$, $\frac{d}{dt}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G})$, $\frac{d}{dt}(\mathbf{F}\times\mathbf{G})$, $\frac{d}{dt}(\phi\mathbf{F})$

**Απ.**

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{i}(\cos t + 1) - \mathbf{j}(\sin t + 2t) + \mathbf{k}2t,\\
&3t\cos t + \sin t - t^2\sin t + 4t,\\
&-\mathbf{i}\left(2\sin t - 4t^3\right) + \mathbf{j}\left(3t^2 - 2\cos t\right) + \mathbf{k}\left(t^2\cos t + 3t\sin t - \cos t\right),\\
&\mathbf{i}(\sin t + (t+2)\cos t) + \mathbf{j}(\cos t - (t+2)\sin t) + \mathbf{k}\left(3t^2 + 2t\right).
\end{aligned}
$$

**8.3.9.** Για τις συναρτησεις $\mathbf{F}(t) = \mathbf{i}\ln t + \mathbf{j}t + \mathbf{k}t$, $\mathbf{G}(t) = \mathbf{i}t^3 + \mathbf{j}t^2 + \mathbf{k}e^t$, $\phi(t) = t + 1$ να υπολογιστουν οι $\frac{d}{dt}(\mathbf{F}+\mathbf{G})$, $\frac{d}{dt}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G})$, $\frac{d}{dt}(\mathbf{F}\times\mathbf{G})$, $\frac{d}{dt}(\phi\mathbf{F})$.

**Απ.**

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{i}\left(\frac{1}{t} + 3t^2\right) + \mathbf{j}(1+2t) + \mathbf{k}\left(1 + e^t\right),\\
&4t^2 + 3t^2\ln t + e^t + te^t,\\
&\mathbf{i}\left(e^t + te^t - 3t^2\right) + \mathbf{j}\left(4t^3 - \frac{1}{t}e^t - (\ln t)e^t\right) + \mathbf{k}\left(t + 2(\ln t)t - 4t^3\right),\\
&\mathbf{i}\left(\ln t + \frac{t+1}{t}\right) + \mathbf{j}(1+2t) + \mathbf{k}(1+2t).
\end{aligned}
$$

**8.3.10.** Για τις $\mathbf{F}(t) = \mathbf{i}\ln t + \mathbf{j}t + \mathbf{k}2t$, $\mathbf{G}(t) = \mathbf{i}t^3 + \mathbf{j}t^2 + \mathbf{k}e^t$, $\mathbf{c} = \mathbf{i}2 + \mathbf{j}3 - \mathbf{k}$ να υπολογιστουν τα $\int(\mathbf{F}(t) + \mathbf{G}(t))\,dt$, $\int(\mathbf{F}(t)\cdot\mathbf{G}(t))\,dt$, $\int(\mathbf{F}(t)\times\mathbf{G}(t))\,dt$, $\int\mathbf{c}\cdot\mathbf{F}(t)\,dt$, $\int\mathbf{c}\times\mathbf{F}(t)\,dt$.

**Απ.**

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{i}\left(t\ln t - t + \frac{1}{4}t^4\right) + \mathbf{j}\left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3\right) + \mathbf{k}\left(t^2 + e^t\right),\\
&\frac{1}{4}t^4\ln t + \frac{3}{16}t^4 + 2te^t - 2e^t,\\
&\mathbf{i}\left(te^t - e^t - \frac{1}{2}t^4\right) + \mathbf{j}\left(-e^t\ln t + \frac{2}{5}t^5\right) + \mathbf{k}\left(\frac{1}{3}t^3\ln t - \frac{1}{9}t^3 - \frac{1}{5}t^5\right),\\
&2t\ln t - 2t + \frac{1}{2}t^2,\\
&\mathbf{i}\frac{7}{2}t^2 + \mathbf{j}\left(-t\ln t + t - 2t^2\right) + \mathbf{k}\left(t^2 - 3t\ln t + 3t\right).
\end{aligned}
$$

**8.3.11.** Να βρεθει η γωνια τομης των καμπυλων $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}t + \mathbf{j}t^2 + \mathbf{k}t^3$ και $\mathbf{s}(t) = \mathbf{i}\sin t + \mathbf{j}\cos 2t + \mathbf{k}t$ στο σημειο $\mathbf{r}(0)$.

**Απ.** $\theta = \arccos\left(\sqrt{6}/6\right)$.

**8.3.12.** Να βρεθει η γωνια τομης των καμπυλων $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}t + \mathbf{j}(1-t) + \mathbf{k}(3+t^2)$ και $\mathbf{s}(\tau) = \mathbf{i}(3-\tau) + \mathbf{j}(\tau - 2) + \mathbf{k}(\tau^2)$.

**Απ.** Τεμνονται στο σημειο $\mathbf{r}(t=1) = \mathbf{s}(\tau=2) = (1,0,4)$ και με γωνια $\theta = \arccos\left(\sqrt{3}/3\right)$.

**8.3.13.** Να βρεθει η εξισωση της εφαπτομενης ευθειας και του καθετου επιπεδου στην καμπυλη $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}(1+t) - \mathbf{j}t^2 + \mathbf{k}(1+t^3)$ και στο σημειο $\mathbf{r}(1)$.

**Απ.** $\mathbf{i}(2+t) - \mathbf{j}(1+2t) + \mathbf{k}(2+3t)$ και $X - 2Y + 3Z = 10$.

**8.3.14.** Να βρεθει η εξισωση της εφαπτομενης ευθειας και του καθετου επιπεδου στην καμπυλη $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}\frac{t^4}{4} + \mathbf{j}\frac{t^3}{3} + \mathbf{k}\frac{t^2}{2}$.

**Απ.** Στο τυχον σημειο $\mathbf{r}(t_0)$: $\mathbf{i}\left(t_0^2 t + \frac{t_0^4}{4}\right) + \mathbf{j}\left(t_0 t + \frac{t_0^3}{3}\right) + \mathbf{k}\left(t + \frac{t_0^2}{2}\right)$ και $t_0^2 X + t_0 Y + Z = \frac{t_0^6}{4} + \frac{t_0^4}{3} + \frac{t_0^2}{2}$.

**8.3.15.** Να βρεθει η εξισωση της εφαπτομενης ευθειας και του καθετου επιπεδου στην καμπυλη $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}t + \mathbf{j}\frac{t^2}{2} + \mathbf{k}\frac{t^3}{3}$ και στο σημειο $(6, 18, 72)$.

**Απ.** $\mathbf{i}(t+6) + \mathbf{j}(6t+18) + \mathbf{k}(36t+72)$ και $X + 6Y + 36Z = 2706)$.

**8.3.16.** Να βρεθει η εξισωση του καθετου επιπεδου στην καμπυλη $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}2\sin 3t + \mathbf{j}t + \mathbf{k}\cos 3t$ και στο σημειο $\mathbf{r}(\pi)$.

**Απ.** $Y - 6X = \pi$.

**8.3.17.** Να βρεθει η εξισωση του καθετου επιπεδου στην καμπυλη $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}t + \mathbf{j}t^2 + \mathbf{k}t^3$ και στο σημειο $\mathbf{r}(1)$.

**Απ.** $X + 2Y + 3Z = 6$.

**8.3.18.** Σε πιο σημειο της καμπυλης $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}t^3 + \mathbf{j}3t + \mathbf{k}t^4$ ειναι το καθετο επιπεδο παραλληλο στο επιπεδο $6X + 6Y - 8Z = 1$;

**Απ.** Στο σημειο $\mathbf{r}(-1)$=$(-1, -3, 1)$.

**8.3.19.** Να βρεθει το σημειο της καμπυλης $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}\cos t + \mathbf{j}\sin t + \mathbf{k}e^t$ που εχει εφαπτομενη παραλληλη με το επιπεδο $\sqrt{3}X + Y = 4$.

**Απ.** $\left(\sqrt{3}/2, 1/2, e^{\pi/6}\right)$

**8.3.20.** Να βρεθουν τα σημεια της καμπυλης

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}\left(\frac{t^3}{3} + t^2 - t\right) + \mathbf{j}\left(\frac{t^3}{3} - t^2 - t\right) + \mathbf{k}\left(\frac{t^3}{3} - 5t\right)$$

στα οποια η εφαπτομενη ειναι παραλληλη με το επιπεδο $X - Y + Z = 4$.

**Απ.** Ειναι τα σημεια τα οποια αντιστοιχουν στιω τιμες $t = 1$ και $t = -5$.

**8.3.21.** Να δειχτει οτι η καμπυλη $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}t\cos t + \mathbf{j}t\sin t + \mathbf{k}t$ βρισκεται επι του κωνου $z^2 = x^2 + y^2$. Καντε την γραφικη παρασταση.

**8.3.22.** Να δειχτει οτι η καμπυλη $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}\sin t + \mathbf{j}\cos t + \mathbf{k}\sin^2 t$ ειναι η τομη των επιφανειων $z = x^2$ και $x^2 + y^2 = 1$. Καντε την γραφικη παρασταση.

**8.3.23.** Να δειχτει οτι η καμπυλη $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}t^2 + \mathbf{j}(1-3t) + \mathbf{k}(1+t^3)$ διερχεται απο τα σημεια $(1, 4, 0)$ και $(9, -8, 28)$.

**8.3.24.** Βρειτε την καμπυλη η οποια ειναι η τομη των επιφανειων $x^2 + y^2 = 4$ και $z = xy$. Καντε την γραφικη παρασταση.

**Απ.** $\mathbf{i}2\cos t + \mathbf{j}2\sin t + \mathbf{k}2\sin 2t$.

**8.3.25.** Βρειτε την καμπυλη η οποια ειναι η τομη των επιφανειων $z = \sqrt{x^2+y^2}$ και $z = 1+y$. Καντε την γραφικη παρασταση.

**Απ.** $\mathbf{i}t + \mathbf{j}\frac{t^2-1}{2} + \mathbf{k}\frac{t^2+1}{2}$.

**8.3.26.** Βρειτε την καμπυλη η οποια ειναι η τομη των επιφανειων $z = 4x^2+y^2$ και $y = x^2$. Καντε την γραφικη παρασταση.

**Απ.** $\mathbf{i}t + \mathbf{j}t^2 + \mathbf{k}\left(4t^2+t^4\right)$.

**8.3.27.** Να δειχτει οτι $\frac{d}{dt}\left(\mathbf{F}\times\mathbf{G}\right) = \mathbf{F}\left(t\right)\times\frac{d}{dt}\mathbf{G} + \mathbf{G}\times\frac{d}{dt}\mathbf{F}$.

**8.3.28.** Να δειχτει οτι $\frac{d}{dt}\left(\phi\mathbf{F}\right) = \mathbf{F}\frac{d}{dt}\phi + \phi\frac{d}{dt}\mathbf{F}$.

**8.3.29.** Να δειχτει οτι $\frac{d}{dt}\left(\mathbf{F}\left(h\left(t\right)\right)\right) = \frac{dh}{dt}\cdot\left(\frac{d}{dh}\mathbf{F}\right)$.

**8.3.30.** Δειξτε οτι η καμπυλη $\mathbf{r}\left(t\right) = \mathbf{i}\cos t + \mathbf{j}\sin t$ ικανοποιει $\mathbf{r}\left(t\right)\cdot\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = 0$ (δηλ. σε καθε σημειο της η επιβατικη ακτινα ειναι καθετη στην εφαπτομενη).

**8.3.31.** Εστω καμπυλη $\mathbf{r}\left(t\right)$ τετοια ωστε για καθε $t$ εχουμε $\mathbf{r}\left(t\right)\cdot\frac{d}{dt}\mathbf{r}\left(t\right) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{r}\left(t\right)$, οπου $\mathbf{a}$ σταθερο διανυσμα. Να δειχτει οτι η $\mathbf{r}\left(t\right)$ βρισκεται επανω σε μια σφαιρα με κεντρο το σημειο $\mathbf{a}$.

**8.3.32.** Εστω καμπυλη $\mathbf{r}\left(t\right)$ τετοια ωστε για καθε $t$ εχουμε $\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r}\left(t\right)\cdot\frac{d}{dt}\mathbf{r}\left(t\right) = 0$. Δειξτε οτι η $\mathbf{r}\left(t\right)$ ειναι μια ευθεια.

**8.3.33.** Εστω καμπυλη $\mathbf{r}\left(t\right)$ τετοια ωστε για καθε $t$ εχουμε $\left\|\mathbf{r}\left(t\right)\right\| = c$ (σταθερα).Δειξτε οτι $\mathbf{r}\left(t\right)\cdot\frac{d}{dt}\mathbf{r}\left(t\right) = 0$.

# Κεφάλαιο 9

# Επικαμπυλια Ολοκληρωματα

## 9.1 Θεωρια

**9.1.1.** Εστω καμπυλη $C$ με διανυσματικη αναπαρασταση $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$ ($t_1 \leq t \leq t_2$). Την ιδια καμπυλη διαγραμμενη κατα την αρνητικη φορα θα συμβολιζουμε με $C'$. Εχουμε $\frac{ds}{dt} = |\mathbf{r}'(t)|$ οποτε το *στοιχειωδες μηκος* ειναι $ds = |\mathbf{r}'(t)|\,dt$.

**9.1.2.** Εστω τωρα βαθμωτη συναρτηση $\phi(x, y, z)$. Κατω απο καταλληλες προυποθεσεις συνεχειας και παραγωγισιμοτητας, η ποσοτητα

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi(x(t), y(t), z(t))\,|\mathbf{r}'(t)|\,dt \tag{9.1}$$

ειναι καλα ορισμενη. Επειδη $|\mathbf{r}'(t)| = \frac{ds}{dt}$, την ιδια ποσοτητα συμβολιζουμε συντομοτερα ως εξης:

$$\int_C \phi(x, y, z)\,ds \tag{9.2}$$

και αν η καμπυλη $C$ ή $\mathbf{r}(t)$ ειναι κλειστη, δηλ. $\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}(t_2)$, τοτε χρησιμοποιουμε τον συμβολισμο

$$\oint_C \phi(x, y, z)\,ds.$$

Οι (9.1) και (9.2) συμβολιζουν την ιδια ποσοτητα, την οποια ονομαζουμε *επικαμπυλιο ολοκληρωμα α΄ ειδους*. Οπως φαινεται και απο τον συμβολισμο, το ολοκληρωμα $\int_C \phi(x, y, z)\,ds$ εξαρταται απο την $C$, δηλ. απο τον *δρομο ολοκληρωσης*.

**9.1.3.** Ενα τυπικο παραδειγμα επικαμπυλιου ολοκληρωματος α΄ ειδους ειναι το μηκος (του μεταξυ $t_1$και $t_2$) της $C$:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} 1 \cdot |\mathbf{r}'(t)|\,dt.$$

**9.1.4.** Γενικοτερα, αν θεωρησουμε το $a$ σταθερο, μπορουμε να ορισουμε το μηκος της καμπυλης απο $a$ ως $t$ ως εξης

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\tau}\right)^2} d\tau.$$

**9.1.5.** Για το επικαμπυλιο ολοκληρωμα α′ ειδους ισχυουν οι συνηθεις ιδιοτητες των ορισμενων ολοκληρωματων. Ιδιαιτερα σημειωνουμε τις παρακατω δυο ιδιοτητες.

1. Το επικαμπυλιο ολοκληρωμα α′ ειδους ειναι ανεξαρτητο της φορας διαγραφης της καμπυλης.
$$\int_C \phi(x,y,z)\, ds = \int_{C'} \phi(x,y,z)\, ds$$

2. Αν η καμπυλη $C$ μπορει να αποσυντεθει σε συνεχομενες καμπυλες $C_1$, $C_2$, ..., $C_K$ (αυτο το γραφουμε και $C = C_1C_2...C_K$) τοτε
$$\int_C \phi(x,y,z)\, ds = \int_{C_1} \phi(x,y,z)\, ds + \int_{C_2} \phi(x,y,z)\, ds + ... + \int_{C_K} \phi(x,y,z)\, ds.$$

**9.1.6.** Τα επικαμπυλια ολοκληρωματα α′ ειδους ειναι χρησιμα σε πολλες εφαρμογες. Παρουσιαζουμε μια ενδεικτικη εφαρμογη, η οποια δινει και μια φυσικη ερμηνεια. Εστω οτι εχουμε ενα λεπτο συρμα του οποιου το σχημα περιγραφεται απο την καμπυλη $C$ με αναπαρασταση $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$ για $t_1 \leq t \leq t_2$. Εστω ακομη οτι η πυκνοτητα του συρματος ειναι μεταβλητη και περιγραφεται απο την συναρτηση $\phi(x,y,z)$. Τοτε η συνολικη μαζα του συρματος ειναι

$$m = \int_C \phi(x,y,z)\, ds.$$

Επισης, οι συντεταγμενες του *κεντρου μαζας* του συρματος ειναι $(x_0, y_0, z_0)$ και δινονται απο τις σχεσεις

$$x_0 = \frac{1}{m}\int_C x\phi(x,y,z)\, ds$$
$$y_0 = \frac{1}{m}\int_C y\phi(x,y,z)\, ds$$
$$z_0 = \frac{1}{m}\int_C z\phi(x,y,z)\, ds.$$

Παρομοια, οι *ροπες αδρανειας* ως προς τους αξονες $x, y, z$ ειναι

$$I_x = \int_C \left(y^2 + z^2\right)\phi(x,y,z)\, ds$$
$$I_y = \int_C \left(z^2 + x^2\right)\phi(x,y,z)\, ds$$
$$I_z = \int_C \left(x^2 + y^2\right)\phi(x,y,z)\, ds.$$

Και οι *ροπες αδρανειας* ως προς τα επιπεδα $xy, yz, zx$ ειναι

$$I_{xy} = \int_C z^2 \phi(x,y,z)\, ds$$
$$I_{yz} = \int_C x^2 \phi(x,y,z)\, ds$$
$$I_{zx} = \int_C y^2 \phi(x,y,z)\, ds.$$

**9.1.7.** Εστω καμπυλη $C$ με αναπαρασταση $\mathbf{r}(t)$ =$x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$ ($t_1 \leq t \leq t_2$) και μια διανυσματικη συναρτηση $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{i}P(x,y,z) + \mathbf{j}Q(x,y,z) + \mathbf{k}R(x,y,z)$. Κατω απο καταλληλες προυποθεσεις συνεχειας και παραγωγισιμοτητας, η ποσοτητα

$$\int_{t_1}^{t_2} P(x(t), y(t), z(t))\, x'(t)\, dt + \int_{t_1}^{t_2} Q(x(t), y(t), z(t))\, y'(t)\, dt + \int_{t_1}^{t_2} R(x(t), y(t), z(t))\, z'(t)\, dt \tag{9.3}$$

ειναι καλα ορισμενη. Μπορουμε να χρησιμοποιησουμε και τον συντομοτερο συμβολισμο

$$\int_C P(x,y,z)\, dx + \int_C Q(x,y,z)\, dy + \int_C R(x,y,z)\, dz. \tag{9.4}$$

ή και

$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}. \tag{9.5}$$

και αν η καμπυλη $C$ ειναι κλειστη γραφουμε $\oint_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$. Οι (9.3), (9.4) και (9.5) ειναι τρεις διαφορετικοι τροποι συμβολισμουτης ιδιας ποσοτητας, την οποια ονομαζουμε *επικαμπυλιο ολοκληρωμα β′ ειδους*.

**9.1.8.** Οπως φαινεται και απο τον συμβολισμο, το ολοκληρωμα $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ εξαρταται απο την $C$, δηλ. απο τον *δρομο ολοκληρωσης*.

**9.1.9.** Ενα τυπικο παραδειγμα επικαμπυλιου ολοκληρωματος β′ ειδους ειναι το εργο δυναμεως $\mathbf{F}(\mathbf{r})$.

**9.1.10.** Για το επικαμπυλιο ολοκληρωμα β′ ειδους ισχυουν οι συνηθεις ιδιοτητες των ορισμενων ολοκληρωματων. Ιδιαιτερα σημειωνουμε τις εξης ιδιοτητες.

1. Το επικαμπυλιο ολοκληρωμα β′ ειδους εξαρταται απο την φορα διαγραφης της καμπυλης.
$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = -\int_{C'} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$$

2. Αν η καμπυλη $C$ μπορει να αποσυντεθει σε συνεχομενες καμπυλες $C_1$, $C_2$, ..., $C_K$ (αυτο το γραφουμε και $C = C_1 C_2 ... C_K$) τοτε
$$\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + ... + \int_{C_K} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}.$$

3. Εστω οτι υπαρχει βαθμωτη συναρτηση $\phi(x,y,z)$ τετοια ωστε $\mathbf{F} = \nabla\phi$ σε καποιο *χωριο* $A \subseteq R^3$. Τοτε, αν οι καμπυλες $\mathbf{r}_1$ / $C_1$ και $\mathbf{r}_2$ / $C_2$ περιεχονται εντος του $A$ και εχουν κοινη αρχη και τελος ($\mathbf{r}_1(t_1) = \mathbf{r}_2(t_1)$ και $\mathbf{r}_1(t_2) = \mathbf{r}_2(t_2)$), εχουμε

$$\int_{C_1} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \phi(\mathbf{r}_1(t_2)) - \mathbf{r}_1(t_1).$$

Δηλ. σε αυτη την περιπτωση το επικαμπυλιο ολοκληρωμα $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot d\mathbf{r}$ ειναι *ανεξαρτητο* του δρομου ολοκληρωσης (αρκει $C \subseteq A$) και εξαρταται μονο απο το αρχικο και τελικο σημειο του δρομου. Σε τετοιες περιπτωσεις χρησιμοποιουμε τον συμβολισμο

$$\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \qquad \text{ή και} \qquad \int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}.$$

4. Αν ισχυουν οι προυποθεσεις του 3, εχουμε επισης οτι το ολοκληρωμα κατα μηκος μιας κλειστης καμπυλης ειναι 0:

$$\oint_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

**9.1.11.** (*Θεωρημα Green*) Εστω οτι εχουμε μια καμπυλη $C$ ή $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}x(t) + \mathbf{j}y(t)$.[1] Αν επιπλεον η $C$ ειναι *απλη* και *κλειστη*, τοτε οριζει ενα χωριο $D \subseteq R^2$. Εστω ακομα μια διανυσματικη συναρτηση $\mathbf{F}(x,y) = \mathbf{i}P(x,y) + \mathbf{j}Q(x,y)$ οπου οι $P$ και $Q$ εχουν συνεχεις πρωτες παραγωγους σε ολο το $D$. Τοτε

$$\oint_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy \tag{9.6}$$

το οποιο μπορει να γραφτει και ως

$$\oint_C (P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy.$$

**9.1.12.** Εστω απλη, κλειστη καμπυλη $C$ η οποια περικλειει εναν τοπο $D$ και εστω συναρτηση $\mathbf{F}(x,y) = \mathbf{i}P(x,y) + \mathbf{j}Q(x,y)$. Αν ισχυει

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \tag{9.7}$$

για καθε $(x,y) \in D$, τοτε απο την (9.7) βλεπουμε οτι

$$\oint_C (P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = 0.$$

[1] Το θεωρημα αυτο αφορα καμπυλες *που περιεχονται εξ ολοκληρου στο επιπεδο* $xy$.

**9.1.13.** Εστω δυο καμπυλες $C_1$ και $C_2$ η οποια περιεχονται σε εναν τοπο $D$ και δεν τεμνονται. Εστω επισης συναρτηση $\mathbf{F}(x,y) = \mathbf{i}P(x,y) + \mathbf{j}Q(x,y)$. Αν ισχυει

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \tag{9.8}$$

για καθε $(x,y) \in D$, τοτε

$$\oint_{C_1} (P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy) = \oint_{C_2} (P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy), \tag{9.9}$$

δηλ. το ολοκληρωμα (9.9) ειναι ανεξαρτητο του δρομου ολοκληρωσης.

**9.1.14.** Θυμηθειτε απο το Κεφ.2 οτι η συνθηκη (9.7) εξασφαλιζει οτι η ποσοτητα $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ ειναι τελειο διαφορικο. Δηλ. αν ισχυει η (9.7), τοτε

$$\oint_C (P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy) = \oint_C d\phi = \phi(x(t),y(t))\big|_{t=t_1}^{t=t_2} = \phi(x(t_2),y(t_2)) - \phi(x(t_1),y(t_1)) = 0$$

αφου, για την κλειστη καμπυλη $C$ εχουμε $\phi(x(t_2),y(t_2)) = \phi(x(t_1),y(t_1))$.

**9.1.15.** Οι *τυποι του Riemann* ειναι ειδικη περιπτωση του Θεωρηματος του Green και δινουν το εμβαδον $S$ του χωριου $D$ που περικλειει η *απλη* και *κλειστη* $C$ ή $\mathbf{r}(t)$:

$$S = \oint_C x\,dy = -\oint_C y\,dx = \frac{1}{2}\oint_C (x\,dy - y\,dx).$$

## 9.2 Λυμενα Προβληματα

**9.2.1.** Να υπολογιστει το μηκος της καμπυλης $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}R\cos t + \mathbf{j}R\sin t$ για $t \in [0, 2\pi]$.

**Λυση.** Η καμπυλη ειναι (φυσικα) ενας κυκλος. Εχουμε

$$\begin{aligned} S &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2}\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2}\,dt = \int_0^{2\pi} R\,dt = 2\pi R. \end{aligned}$$

οπως ηταν αναμενομενο.

**9.2.2.** Να υπολογιστει το μηκος της καμπυλης $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}\cos t + \mathbf{j}\sin t + \mathbf{k}t$ για $t \in [0, 2\pi]$.

**Λυση.** Εχουμε

$$\begin{aligned} S &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2}\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + (1)^2}\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\,dt = 2\sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$

**9.2.3.** Να υπολογιστει το μηκος της καμπυλης $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}12t + \mathbf{j}8t^{3/2} + \mathbf{k}3t^2$ για $t \in [0,1]$.

**Λυση.** Εχουμε

$$\begin{aligned} S &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{12^2 + \left(12t^{1/2}\right)^2 + (6t)^2} dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{144 + 144t + 36t^2} dt = \\ &= \int_0^1 6(2+t)\, dt = \left(12t + 3t^2\right)_{t=0}^{t=1} = 15. \end{aligned}$$

**9.2.4.** Να υπολογιστει το $\int_C (2 + x^2 y)\, ds$ οπου $C$ ειναι το ανω μισο του κυκλου $x^2 + y^2 = 1$.

**Λυση**. Παραμετριζουμε την $C$ ως $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$. Οποτε

$$\frac{dx}{dt} = -\cos t, \quad \frac{dy}{dt} = \sin t, \quad t \in [0, \pi]$$

και

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = dt.$$

Οποτε

$$\int_C \left(2 + x^2 y\right) ds = \int_0^\pi \left(2 + \cos^2 t \sin t\right) dt = \left(2t - \frac{\cos^3 t}{3}\right)_{t=0}^{t=\pi} = 2\pi + \frac{2}{3}.$$

**9.2.5.** Να υπολογιστει το $\int_C 2x ds$ οπου $C = C_1 C_2$ και (α) $C_1$ ειναι το τοξο της παραβολης $y = x^2$ απο το $(0,0)$ ως το $(1,1)$, (β) $C_2$ ειναι το ευθυγραμμο τμημα $x = 1$ απο το $(1,1)$ ως το $(1,2)$.

**Λυση**. Παραμετριζουμε την $C_1$ ως $x(t) = t$, $y(t) = t^2$. Οποτε (για $t \in [0,1]$)

$$\frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = 2t, \quad ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \sqrt{1 + 4t^2} dt$$

και

$$\int_{C_1} 2x ds = \int_0^1 2t\sqrt{1+4t^2} dt = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \left(1 + 4t^2\right)_{t=0}^{t=1} = \frac{5\sqrt{5} - 1}{6}.$$

Παραμετριζουμε την $C_2$ ως $x(t) = 1$, $y(t) = t$. Οποτε (για $t \in [1,2]$)

$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dy}{dt} = 1, \quad ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = dt$$

και

$$\int_{C_1} 2x ds = \int_0^1 2 \cdot 1 dt = 2.$$

Τελικα

$$\int_C 2x ds = \int_{C_1} 2x ds + \int_{C_2} 2x ds = \frac{5\sqrt{5} - 1}{6} + 2$$

**9.2.6.** Να υπολογιστει το $\int_C (x - 3y^2 + z)\, ds$ οπου $C$ ειναι το ευθυγραμμο τμημα που ενωνει το $(0,0,0)$ με το $(1,1,1)$.

**Λυση**. Παραμετριζουμε την $C$ ως $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}t + \mathbf{j}t + \mathbf{k}t$. Δηλ.

$$\begin{array}{ccc} x(t) = t, & y(t) = t, & z(t) = t, \\ dx = dt, & dy = dt, & dz = dt \end{array}$$

και $t \in [0,1]$. Οποτε

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt = \sqrt{3} dt$$

και

$$\int_C \left(x - 3y^2 + z\right) ds = \int_0^1 \left(2t - 3t^2\right) \sqrt{3} dt = \sqrt{3}\left(t^2 - t^3\right)_{t=0}^{t=1} = 0.$$

**9.2.7.** $\int_C (x - 3y^2 + z)\, ds$ οπου $C = C_1 C_2$ και (α) $C_1$ ειναι το ευθυγραμμο τμημα που ενωνει το $(0,0,0)$ με το $(1,1,0)$, (β) $C_2$ ειναι το ευθυγραμμο τμημα που ενωνει το $(1,1,0)$ με το $(1,1,1)$.

**Λυση**. Παραμετριζουμε την $C_1$ ως εξησ: για $t \in [0,1]$:

$$\begin{array}{ccc} x(t) = t, & y(t) = t, & z(t) = 0, \\ dx = dt, & dy = dt, & dz = 0. \end{array}$$

Παραμετριζουμε την $C_2$ ως εξησ: για $t \in [0,1]$:

$$\begin{array}{ccc} x(t) = 1, & y(t) = 1, & z(t) = t, \\ dx = 0, & dy = 0, & dz = dt. \end{array}$$

Οποτε για την $C_1$ εχουμε

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + 0} dt = \sqrt{2} dt$$

και

$$\int_{C_1} \left(x - 3y^2 + z\right) ds = \int_0^1 \left(t - 3t^2 + 0\right) \sqrt{2} dt = \sqrt{2}\left(\frac{t^2}{2} - t^3\right)_{t=0}^{t=1} = -\frac{\sqrt{2}}{2}..$$

Και για την $C_2$ εχουμε

$$ds = \sqrt{0 + 0 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt = dt$$

και

$$\int_{C_2} \left(x - 3y^2 + z\right) ds = \int_0^1 (1 - 3 + t)\, dt = \left(-2t + \frac{t^2}{2}\right)_{t=0}^{t=1} = -2.$$

Τελικα

$$\int_C \left(x - 3y^2 + z\right) ds = \int_{C_1} \left(x - 3y^2 + z\right) ds + \int_{C_2} \left(x - 3y^2 + z\right) ds = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{2}.$$

**9.2.8.** Να υπολογιστει το κεντρο μαζας ενος λεπτου συρματος το οποιο εχει σχημα ημικυκλιου $C : x^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$ και εχει πυκνοτητα $\phi(x, y) = 1 - y$.

**Λυση**. Παραμετριζουμε την $C$ ως $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in [0, \pi]$. Τοτε η μαζα του συρματος ειναι

$$\begin{aligned} m &= \int_C \phi(x, y)\, ds = \int_0^\pi (1 - y(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int (1 - \sin t) \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt = (t + \cos t)_{t=0}^{t=\pi} = \pi - 2 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{1}{m} \int_C y\phi(x, y)\, ds = \frac{1}{\pi - 2} \int_0^\pi \sin t\,(1 - \sin t)\, dt \\ &= \frac{1}{\pi - 2} \left( -\cos t - \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \sin 2t \right)_{t=0}^{t=\pi} = \frac{4 - \pi}{2\pi - 4}. \end{aligned}$$

Το $x_0 = 0$ λογω συμμετριας.

**9.2.9.** Να υπολογιστει το κεντρο μαζας της κυκλοειδους $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}(t - \sin t) + \mathbf{j}(1 - \cos t)$ ($t \in [0, 2\pi]$) με ομογενη πυκνοτητα $\phi(x, y) = 1$..

**Λυση**. Η μαζα της κυκλοειδους ειναι

$$\begin{aligned} m &= \int_C \phi(x, y)\, ds = \int_0^{2\pi} 1 \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos^2 t + \sin^2 t - 2\cos t} dt \\ &= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos t} dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = 8. \end{aligned}$$

Οι συντεταγμενες του κεντρου μαζας ειναι

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{m} \int_C x\phi(x, y)\, ds = \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} (t - \sin t) \sqrt{1 - \cos t} dt \\ &= \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} (t - \sin t) \sin \frac{t}{2} dt = \frac{8\pi}{8} = \pi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{1}{m} \int_C y\phi(x, y)\, ds == \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sqrt{1 - \cos t} dt \\ &= \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sin \frac{t}{2} dt = \frac{32}{8 \cdot 3} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Οποτε το κεντρο μαζας ειναι το $(\pi, 4/3)$.

**9.2.10.** Να υπολογιστει το κεντρο μαζας ενος λεπτου ελατηριου $C$ το οποιο εχει σταθερη πυκνοτητα και σχημα ελικας $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}\cos 4t + \mathbf{j}\sin 4t + \mathbf{k}t$, $t \in [0, 2\pi]$

**Λυση**. Η μαζα του ελατηριου ειναι

$$m = \int_C \phi(x,y,z)\, ds = \int_0^{2\pi} 1\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt$$
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{16\sin^2 4t + 16\cos^2 4t + 1} dt = 2\pi\sqrt{17}.$$

και

$$z_0 = \frac{1}{m}\int_C z\phi(x,y)\, ds = \frac{1}{2\pi\sqrt{17}}\int_0^{2\pi} t\sqrt{17} dt = \pi.$$

Επισης $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ λογω συμμετριας. Οποτε το κεντρο μαζας ειναι $(0, 0, \pi)$

**9.2.11.** Να υπολογιστει το $\int_C y^2 dx + xdy$ οπου $C$ ειναι το τοξο της παραβολης $x = 4 - y^2$ απο το $(-5, -3)$ ως το $(0, 2)$.

**Λυση**. Δεν χρειαζεται να παραμετρισουμε την $C$. Παρατηρουμε οτι επι της $C : x = 4 - y^2$ εχουμε

$$dx = -2ydy$$

οποτε

$$\int_C y^2 dx + xdy = \int_C y^2(-2y)\, dy + \left(4 - y^2\right) dy = \int_{-3}^{2} \left(-2y^3 + 4 - y^2\right) dy$$
$$= \left(-\frac{y^4}{2} + 4y - \frac{y^3}{3}\right)_{y=-3}^{y=2} = \frac{245}{6}.$$

**9.2.12.** Να υπολογιστει το $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ οπου $\mathbf{F} = \mathbf{i}x^2 - \mathbf{j}xy$ και $C$ ειναι το τεταρτοκυκλιο $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}\cos t + \mathbf{j}\sin t$, $t \in [0, \pi/2]$.

**Λυση**. Εχουμε

$$d\mathbf{r} = (-\mathbf{i}\sin t + \mathbf{j}\cos t)\, dt$$
$$\mathbf{F} = \mathbf{i}\cos^2 t - \mathbf{j}\cos t\sin t$$

και

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\pi/2} \left(-\cos^2 t\sin t - \cos^2 t\sin t\right) dt = \mathbf{2}\int_0^{\pi/2} \cos^2 t d(\cos t) = 2\left(\frac{\cos^3 t}{3}\right)_{t=0}^{\pi/2} = -\frac{2}{3}.$$

**9.2.13.** Να υπολογιστει το $\int_C ydx + zdy + xdz$ οπου $C$ ειναι το ευθυγραμμο τμημα $C$ απο το $(2, 0, 0)$ ως το $(3, 4, 5)$.

**Λυση**. Το ευθυγραμμο τμημα $C$ ειναι τμημα της ευθειας με εξισωσεις

$$\frac{x-2}{3-2} = \frac{y-0}{4-0} = \frac{z-0}{5-0}$$

οποτε παραμετριζεται ως εξης (για $t \in [0,1]$):

$$x = 2+t, \quad y = 4t, \quad z = 5t,$$
$$dx = dt, \quad dy = 4dt, \quad dz = 5dt$$

Οποτε

$$\int_C ydx+zdy+xdz = \int_0^1 4tdt+5t\cdot 4dt+(2+t)\cdot 5dt = \int_0^1 (4t+20t+10+5t)\,dt = \int_0^1 (10+29t)\,dt = \frac{49}{2}.$$

**9.2.14.** Να υπολογιστει το $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ οπου $\mathbf{F} = \mathbf{i}\,(y-x^2)+\mathbf{j}\,(z-y^2)+\mathbf{k}\,(x-z^2)$ και $C$ ειναι η $\mathbf{r}\,(t) = \mathbf{i}t+\mathbf{j}t^2+\mathbf{k}t^3$, $t \in [0,1]$.

**Λυση**. Εχουμε

$$d\mathbf{r} = \left(\mathbf{i}+\mathbf{j}2t+\mathbf{j}3t^2\right)dt$$
$$\mathbf{F} = \mathbf{i}\left(t^2-t^2\right)+\mathbf{j}\left(t^3-t^4\right)+\mathbf{k}\left(t-t^6\right)$$

και

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \left(\left(t^3-t^4\right)\cdot 2t+\left(t-t^6\right)\cdot 3t^2\right)dt$$
$$= \left(\frac{2t^5}{5}-\frac{2t^6}{6}+\frac{3t^4}{4}-\frac{3t^9}{9}\right)_{t=0}^{t=1} = \frac{29}{60}.$$

**9.2.15.** Να υπολογιστει το $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ οπου $\mathbf{F} = \mathbf{i}xy+\mathbf{j}yz+\mathbf{k}zx$ και $C$ ειναι η $\mathbf{r}\,(t) = \mathbf{i}t+\mathbf{j}t^2+\mathbf{k}t^3$, $t \in [0,1]$.

**Λυση**. Εχουμε

$$d\mathbf{r} = \left(\mathbf{i}+\mathbf{j}2t+\mathbf{k}3t^2\right)dt$$
$$\mathbf{F} = \mathbf{i}t^3+\mathbf{j}t^5+\mathbf{k}t^4$$

και

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \left(t^3+2t^6+3t^6\right)dt = \left(\frac{t^4}{4}+\frac{5t^7}{7}\right)_{t=0}^{t=1} = \frac{27}{28}.$$

**9.2.16.** Να υπολογιστει το $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ οπου $\mathbf{F} = \mathbf{i}x+\mathbf{j}z+\mathbf{k}y$ και $C$ ειναι η ελικα $\mathbf{r}\,(t) = \mathbf{i}\cos t+\mathbf{j}\sin t+\mathbf{k}t$, $t \in [0,\pi/2]$.

**Λυση**. Εχουμε

$$d\mathbf{r} = (-\mathbf{i}\sin t+\mathbf{j}\cos t+\mathbf{k})\,dt$$
$$\mathbf{F} = \mathbf{i}\cos t+\mathbf{j}t+\mathbf{k}\sin t$$

και

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\pi/2} (-\cos t\sin t+t\cos t+\sin t)\,dt = \left(\frac{\cos^2 t}{2}+t\sin t\right)_{t=0}^{t=\pi/2} = \frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}.$$

**9.2.17.** Δειξτε οτι το ολοκληρωμα $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, οπου $\mathbf{F} = \mathbf{i}\,(3+2xy) + \mathbf{j}\,(x^2-3y^2)$, δεν εξαρταται απο την $C$.

**Λυση**. Αν θεσουμε $P = 3+2xy$, $Q = x^2-3y^2$, παρατηρουμε οτι $P_y = 2x = Q_x$ οποτε το $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ ειναι ανεξαρτητο του δρομου ολοκληρωσης $C$.

**9.2.18.** Δειξτε οτι το ολοκληρωμα $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, οπου $\mathbf{F} = \mathbf{i}\,(e^x\cos y + yz) + \mathbf{j}\,(xz - e^x\sin y) + \mathbf{k}\,(xy+z)$, δεν εξαρταται απο την $C$.

**Λυση**. Για να δειξουμε το ζητουμενο πρεπει να βρουμε μια συναρτηση $\phi\,(x,y,z)$ τετοια ωστε $\nabla\phi = \mathbf{F}$, δηλ.

$$\phi_x = e^x\cos y + yz, \quad \phi_y = xz - e^x\sin y, \quad \phi_z = xy+z.$$

Ολοκληρωνοντας τησν $\phi_x$ ως προς $x$ εχουμε

$$\phi = \int \phi_x dx = \int (e^x\cos y + yz)\,dx = e^x\cos y + xyz + g\,(y,z)\,.$$

Παραγωγιζουμε ως προς $y$. Θα πρεπει να εχουμε

$$xz - e^x\sin y = \phi_y = xz - e^x\sin y + g_y \Rightarrow g_y = 0.$$

Ολοκληρωνουμε ως προς $y$ και εχουμε

$$g = \int 0dy = h\,(z)$$

οποτε

$$\phi = xyz + e^x\cos y + h\,(z)\,.$$

Τωρα παραγωγιζουμε ως προς $z$ και εχουμε

$$xy + z = \phi_z = xy + \frac{dh}{dz} \Rightarrow \frac{dh}{dz} = z \Rightarrow h\,(z) = \frac{z^2}{2} + d.$$

Οποτε τελικα

$$\phi\,(x,y,z) = xyz + e^x\cos y + \frac{z^2}{2} + d.$$

Πραγματι, ευκολα επαληθευουμε οτι $\nabla\phi = \mathbf{F}$ και αρα το ολοκληρωμα $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ δεν εξαρταται απο την $C$.

**9.2.19.** Υπολογιστε το $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, αν $\mathbf{F} = \mathbf{i}\,(3+2xy) + \mathbf{j}\,(x^2-3y^2)$ και $C$ η καμπυλη $\mathbf{r}\,(t) = \mathbf{i}e^t\sin t + \mathbf{j}e^t\cos t$, $t\in[0,\pi]$.

**Λυση**. Εχουμε ηδη δει οτι το $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ ειναι ανεξαρτητο του δρομου ολοκληρωσης. Αρα υπαρχει συναρτηση $\phi\,(x,y)$ τετοια $\mathbf{F} = \nabla\phi$. Θα πρεπει λοιπον να ειναι

$$\mathbf{i}\,(3+2xy) + \mathbf{j}\left(x^2-3y^2\right) = \mathbf{i}\phi_x + \mathbf{j}\phi_y$$

δηλ.

$$\phi_x = 3+2xy, \quad \phi_y = x^2-3y^2.$$

Ολοκληρωνοντας την πρωτη εχουμε

$$\phi(x,y) = \int \phi_x dx = \int (3+2xy)\, dx = 3x + x^2 y + c(y),$$

επειδη η $c(y)$ ειναι σταθερα μονο ως προς $x$, αλλα μπορει να εξαρταται απο το $y$ (η ολοκληρωση ηταν ως προς $x$). Αν τωρα παραγωγισουμε την $\phi(x,y) = 3x + x^2 y + c(y)$ ως προς $y$ παιρνουμε

$$x^2 - 3y^2 = \phi_y = x^2 + \frac{dc}{dy}.$$

Αρα

$$\frac{dc}{dy} = -3y^2 \Rightarrow c(y) = -y^3 + d.$$

Τελικα λοιπον εχουμε

$$\phi(x,y) = 3x + x^2 - y^3 + d$$

και

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{t=0}^{t=\pi} \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = \phi(x(\pi), y(\pi)) - \phi(x(0), y(0)) \\ &= \left(3e^t \sin t + \left(e^t \sin t\right)^2 - \left(e^t \cos t\right)^3\right)_{t=0}^{t=\pi} = e^{3\pi} + 1.\end{aligned}$$

**9.2.20.** Δειξτε οτι το ολοκληρωμα $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, οπου $\mathbf{F} = \mathbf{i}(x-y) + \mathbf{j}(x-2)$, εξαρταται απο την $C$.

**Λυση**. Αν θεσουμε $P = x - y$, $Q = x - 2$, παρατηρουμε οτι $P_y = -1 \neq 1 = Q_x$ οποτε το $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ δεν ειναι ανεξαρτητο του δρομου ολοκληρωσης $C$.

**9.2.21.** Δειξτε οτι το ολοκληρωμα $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, οπου $\mathbf{F} = \mathbf{i}y^2 + \mathbf{j}(2xy + e^{3z}) + \mathbf{k}3ye^{3z}$, δεν εξαρταται απο την $C$.

**Λυση**. Για να δειξουμε το ζητουμενο πρεπει να βρουμε μια συναρτηση $\phi(x,y,z)$ τετοια ωστε $\nabla\phi = \mathbf{F}$, δηλ.

$$\phi_x = y^2, \quad \phi_y = 2xy + e^{3z}, \quad \phi_z = 3ye^{3z}.$$

Ολοκληρωνοντας τησν $\phi_x$ ως προς $x$ εχουμε

$$\phi = \int \phi_x dx = \int y^2 dx = xy^2 + g(y,z).$$

Παραγωγιζουμε ως προς $y$. Θα πρεπει να εχουμε

$$2xy + e^{3z} = \phi_y = 2xy + g_y \Rightarrow g_y = e^{3z}.$$

Ολοκληρωνουμε ως προς $y$ και εχουμε

$$g = \int g_y dy = ye^{3z} + h(z)$$

οποτε

$$\phi = xy^2 + ye^{3z} + h(z).$$

Τωρα παραγωγιζουμε ως προς $z$ και εχουμε

$$3ye^{3z} = \phi_z = 3ye^{3z} + \frac{dh}{dz} \Rightarrow \frac{dh}{dz} = 0 \Rightarrow h(z) = d.$$

Οποτε τελικα

$$\phi(x,y,z) = xy^2 + ye^{3z} + d.$$

Πραγματι, ευκολα επαληθευουμε οτι

$$\nabla\phi = \mathbf{i}y^2 + \mathbf{j}\left(2xy + e^{3z}\right) + \mathbf{k}3ye^{3z} = \mathbf{F}$$

και αρα το ολοκληρωμα $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ δεν εξαρταται απο την $C$.

**9.2.22.** Υπολογιστε το ολοκληρωμα $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, οπου $\mathbf{F} = \mathbf{i}yz + \mathbf{j}xz + \mathbf{k}xy$ επι της $C$ η οποια ειναι το ευθυγραμμο τμημα που ενωνει τα σημεια $(-1,3,9)$ και $(1,6,-4)$.

**Λυση**. Παρατηρουμε οτι $\mathbf{F} = \nabla\phi$ οπου $\phi = xyz$. Οποτε

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \phi(1,6,-4) - \phi(-1,3,9) = 1\cdot 6\cdot(-4) - (-1)\cdot 3\cdot 9 = -24 + 27 = 3.$$

**9.2.23.** Υπολογιστε το $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, αν $\mathbf{F} = \mathbf{i}y + \mathbf{j}x + \mathbf{k}4$ και $C$ το ευθυγραμμο τμημα που ενωνει το $(1,1,1)$ και το $(2,3,-1)$.

**Λυση**. Ειναι $\mathbf{F} = \nabla\phi$, $\phi = xy + 4z + c$. Οποτε

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \phi(2,3,-1) - \phi(1,1,1) = 2\cdot 3 + 4\cdot(-1) + c - 1\cdot 1 - 4\cdot 1 - c = -3$$

**9.2.24.** Υπολογιστε το ολοκληρωμα $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ οπου $\mathbf{F} = \mathbf{i}x^4 + \mathbf{j}xy$ και $C$ ειναι το τριγωνο με κορυφες $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$.

**Λυση**. Θα μπορουσαμε να υπολογισουμε το επικαμπυλιο ολοκληρωμα. Ομως αντ' αυτου θα χρησιμοποιησουμε το Θεωρημα του *Green*. Εχουμε

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int\int_D (Q_x - P_y)\,dydx = \int_0^1\int_0^{1-x}(y-0)\,dydx = \int_0^1\left(\frac{y^2}{2}\right)_{y=0}^{y=1-x}dx \\ &= \int_0^1 \frac{(1-x)^2}{2}dx = \left(-\frac{1}{6}(1-x)^3\right)_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

**9.2.25.** Επαληυευστε το Θεωρημα του *Green* για την $\mathbf{F} = \mathbf{i}(x-y) + \mathbf{j}x$ και τον κυκλο $x^2 + y^2 = 1$.

**Λυση**. Παραμετριζουμε τον κυκλο ως

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}\cos t + \mathbf{j}\sin t, \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Εχουμε

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} (\mathbf{i}(\cos t-\sin t)+\mathbf{j}\cos t)\cdot(-\mathbf{i}\sin t+\mathbf{j}\cos t)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi}\left(-\cos t\sin t+\sin^2 t+\cos^2 t\right)dt \\ &= \int_0^{2\pi}(1-\cos t\sin t)\,dt = 2\pi.\end{aligned}$$

και

$$\int\int_D (Q_x-P_y)\,dydx = \int\int_D (1+1)\,dydx = 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho d\rho d\theta = 2\pi.$$

**9.2.26.** Υπολογιστε το ολοκληρωμα $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ οπου $\mathbf{F}=\mathbf{i}\left(3y-e^{\sin x}\right)+\mathbf{j}\left(7x+\sqrt{1+y^4}\right)$ και $C$ ειναι ο κυκλος $x^2+y^2=9$.

**Λυση**. Θα μπορουσαμε να υπολογισουμε το επικαμπυλιο ολοκληρωμα. Ομως αντ' αυτου θα χρησιμοποιησουμε το Θεωρημα του $Green$. Εχουμε

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int\int_D (Q_x-P_y)\,dydx = \int\int_D (7-3)\,dydx = 4\int_0^{2\pi}\int_0^3 \rho d\rho d\theta \\ &= \mathbf{4}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\rho^2}{2}\right)_{\rho=0}^{\rho=3} d\theta = 36\pi.\end{aligned}$$

**9.2.27.** Υπολογιστε το ολοκληρωμα $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ οπου $\mathbf{F}=-\mathbf{i}y^2+\mathbf{j}xy$ και $C$ ειναι το τετραγωνο με κορυφες τις $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$.

**Λυση**. Χρησιμοποιουμε το Θεωρημα του $Green$. Εχουμε

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int\int_D (Q_x-P_y)\,dydx = \int\int_D (y-(-2y))\,dydx = -\int_0^1\int_0^1 3ydydx = 3\int_0^1\left(\frac{y^2}{2}\right)_{y=0}^{y=1} dx = \frac{3}{2}.$$

**9.2.28.** Βρειτε το εμβαδον που περικλειει η ελλειψη $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$.

**Λυση**. Η ελλειψη εχει παραμετριση $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, $t\in[0,2\pi]$. Το δε εμβαδον το οποιο αυτη περικλειει ειναι

$$\begin{aligned}\int\int_D dxdy &= \frac{1}{2}\oint_C xdy-ydx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a\cos t\cdot b\cos tdt - b\sin t\cdot a\sin tdt \\ &= \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}\left(\cos^2 t+\sin^2 t\right)dt = \pi ab.\end{aligned}$$

**9.2.29.** Βρειτε το εμβαδον που περικλειει η *αστεροειδης* $\mathbf{r}(t)=\mathbf{i}\cos^3 t+\mathbf{j}\sin^3 t$, $t\in[0,2\pi]$.

**Λυση**. Δειτε το σχημα. Εχουμε

$$dx=-3\cos^2 t\sin tdt,\qquad dx=3\sin^2 t\cos tdt,$$

Το ζητουμενο εμβαδον ειναι

$$\begin{aligned}\int\int_D dxdy &= \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx = \frac{3}{2}\int_0^{2\pi}\left(\cos t\sin^2 t\cos t + \sin t\cos^2 t\sin t\right)dt \\ &= \frac{3}{2}\int_0^{2\pi}\cos^2 t\sin^2 t\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)dt = \frac{3}{2}\int_0^{2\pi}\cos^2 t\sin^2 t dt \\ &= \frac{3}{8}\int_0^{2\pi}\sin^2 2t dt = \frac{3}{8}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 4t}{2}dt = \frac{3\pi}{8}.\end{aligned}$$

**Λυση**.

**9.2.30.** Βρειτε το εμβαδον που περικλειει η *αστεροειδης* $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}t^2 + \mathbf{j}\left(\frac{t^3}{3} - t\right)$, $t \in \left[-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right]$.

**Λυση**. Δειτε το σχημα. Εχουμε

$$dx = 2tdt, \qquad dx = \left(t^2 - 1\right)dt,$$

Το ζητουμενο εμβαδον ειναι

$$\begin{aligned}\int\int_D dxdy &= \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx = \frac{1}{2}\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left(t^2\left(t^2-1\right) - \left(\frac{t^3}{3} - t\right)2t\right)dt \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left(\frac{t^4}{3} + t^2\right)dt = \frac{1}{2}\left(\frac{t^5}{15} + \frac{t^3}{3}\right)_{t=-\sqrt{3}}^{t=\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{5}.\end{aligned}$$

## 9.3 Αλυτα Προβληματα

**9.3.1.** Να υπολογιστει το μηκος της καμπυλης $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}t + \mathbf{j}t^2 + \mathbf{k}\frac{4}{3}t^{3/2}$ για $t \in [0,1]$.
**Απ.** $2$.

**9.3.2.** Να υπολογιστει το μηκος της καμπυλης $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}\sin t + \mathbf{j}5t + \mathbf{k}2\cos t$ για $t \in [-10, 10]$.
**Απ.** $20\sqrt{29}$.

**9.3.3.** Να υπολογιστει το μηκος της καμπυλης $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}t^2 + \mathbf{j}(\sin t - t\cos t) + \mathbf{k}(\cos t + t\sin t)$ για $t \in [0, \pi]$.
**Απ.** $\sqrt{5}\pi^2/2$.

**9.3.4.** Να υπολογιστει το μηκος της καμπυλης $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}\sqrt{2}t + \mathbf{j}e^t + \mathbf{k}\frac{4}{3}e^{-t}$ για $t \in [0,1]$.
**Απ.** $e - e^{-1}$.

**9.3.5.** Να υπολογιστει το μηκος της καμπυλης $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}t^2 + \mathbf{j}2t + \mathbf{k}\ln t$ για $t \in [1, e]$.
**Απ.** $e^2$.

**9.3.6.** Να υπολογιστει το μηκος της καμπυλης $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + \mathbf{j}t^2 + \mathbf{k}t^3$ για $t \in [0,1]$.
**Απ.** $\left(13^{3/2} - 8\right)/27$.

**9.3.7.** Να υπολογιστει το μηκος της καμπυλης $C$ : $\mathbf{i}\cos t + \mathbf{j}\sin t + \mathbf{k}t$, $t_1 = 0$, $t_2 = \pi$. Κατοπιν να υπολογιστουν οι συντεταγμενες του κεντρου μαζας, υποθετωντας οτι η πυκνοτητα ειναι σταθερη.

**Απ.** $\pi\sqrt{2}, (0, 2/\pi, \pi/2)$.

**9.3.8.** Να υπολογιστει το $\int_C \frac{ds}{x-y}$ οπου $C : \mathbf{i}t + \mathbf{j}\left(\frac{t}{2} - 2\right)$, $t_1 = 0$, $t_2 = 4$.

**Απ.** $\sqrt{5}\ln 2$.

**9.3.9.** Να υπολογιστει το $\int_C xyds$ οπου $C$ : το ορθογωνιο με κορυφες $(0, 0, 0)$, $(4, 0, 0)$, $(4, 2, 0)$, $(0, 2, 0)$.

**Απ.** 24.

**9.3.10.** Να υπολογιστει το $\int_C (x^2 + y^2)^n\, ds$οπου $C : \mathbf{i}a\cos t + \mathbf{j}a\sin t$, $t_1 = 0$, $t_2 = 2\pi$.

**Απ.** $2\pi a^{2n+1}$.

**9.3.11.** Να υπολογιστει το $\int_C \frac{z^2}{x^2+y^2}ds$ οπου $C : \mathbf{i}a\cos t + \mathbf{j}a\sin t + \mathbf{k}at$, $t_1 = 0$, $t_2 = 2\pi$.

**Απ.** $8\pi^2 a\sqrt{2}/3$.

**9.3.12.** Να υπολογιστει το $\int_C \left(2z - \sqrt{x^2 + y^2}\right) ds$ οπου $C : \mathbf{i}t\cos t + \mathbf{j}t\sin t + \mathbf{k}t$, $t_1 = 0$, $t_2 = 2\pi$.

**Απ.** $\left((1 + 2\pi^2)^{3/2} - 1\right) 2\sqrt{2}/3$.

**9.3.13.** Να υπολογιστει το $\int_C (x - y)\, ds$ οπου $C : x^2 + y^2 = ax$.

**Απ.** $\pi a^2/2$.

**9.3.14.** Να υπολογιστει το $\int_C x\sqrt{x^2 - y^2}ds$ οπου $C : (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

**Απ.** $2a^3\sqrt{2}/3$.

**9.3.15.** Να υπολογιστει το $\int_C \arctan\frac{y}{x}ds$ οπου $C : x = a\cos t, y = a\sin t, z = at$, $t_1 = 0$, $t_2 = 2\pi$.

**Απ.** $8a\pi^3/\sqrt{2}/3$.

**9.3.16.** Να υπολογιστει το $\int_C xyzds$ οπου $C : x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ και $x^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}$ και $x, y, z \geq 0$.

**Απ.** $R^4\sqrt{3}/32$.

**9.3.17.** Να υπολογιστουν οι ροπες αδρανειες ως προς τους αξονες $x, y$ και $z$ της καμπυλης $C : \mathbf{i}\cos t + \mathbf{j}\sin t + \mathbf{k}t/2\pi$, $t_1 = 0$, $t_2 = 2\pi$, υποθετωντας οτι η πυκνοτητα ειναι σταθερη.

**Απ.** $\frac{5}{6}\sqrt{1 + 4\pi^2}$, $\frac{5}{6}\sqrt{1 + 4\pi^2}$, $\sqrt{1 + 4\pi^2}$.

**9.3.18.** Να υπολογιστει το $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ οπου $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{i}xy + \mathbf{j}(y - x)$,$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}t + \mathbf{j}t$ και $0 \leq t \leq 1$.

**Απ.** $1/3$.

**9.3.19.** Να υπολογιστει το $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ οπου $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{i}xy + \mathbf{j}(y - x)$, $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}t + \mathbf{j}t^2$ και $0 \leq t \leq 1$.

**Απ.** $1/12$.

**9.3.20.** Να υπολογιστει το $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ οπου $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{i}2xy + \mathbf{j}x^2$, $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}t + \mathbf{j}t$ και $0 \leq t \leq 1$.
**Απ**. 1.

**9.3.21.** Να υπολογιστει το $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ οπου $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{i}2xy + \mathbf{j}x^2$, $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}t + \mathbf{j}t^2$ και $0 \leq t \leq 1$.
**Απ**. 1.

**9.3.22.** Να υπολογιστει το $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ οπου $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{i}y + \mathbf{j}2x$ και $\mathbf{r}(t)$ ειναι η επιβατικη ακτινα της ελλειψης $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.
**Απ**. $\pi ab$.

**9.3.23.** Να υπολογιστει το $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ οπου $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{i}(2y+3) + \mathbf{j}xz + \mathbf{k}(yz - x)$,$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}2t^2 + \mathbf{j}t + \mathbf{k}t^3$ και $0 \leq t \leq 2$.
**Απ**. $8728/105$.

**9.3.24.** Να υπολογιστει το $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ οπου $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{i}3x^2 + \mathbf{j}(2xz - y) + \mathbf{k}z$ και $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}2t^2 + \mathbf{j}t + \mathbf{k}(4t-1)t$ και $-1 \leq t \leq 1$.
**Απ**. $-8/5$.

**9.3.25.** Να υπολογιστει το $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ οπου $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{i}3x^2 + \mathbf{j}(2xz - y) + \mathbf{k}z$ και $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}t + \mathbf{j}\frac{t^2}{4} + \mathbf{k}\frac{3t^3}{8}$ και $0 \leq t \leq 1$.
**Απ**. $141/128$.

**9.3.26.** Να υπολογιστει το $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ οπου $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{i}(2y+3) + \mathbf{j}xz + \mathbf{k}(yz - x)$ και η $\mathbf{r}(t)$ συνδεει τα σημεια $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(1,1,1)$, $(2,1,1)$.
**Απ**. $29/3$.

**9.3.27.** Να υπολογιστει το $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ οπου $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{i}(2x + y^2) + \mathbf{j}(3y - 4x)$ και $C$ ειναι το τριγωνο με κορυφες $(0,0)$, $(2,1)$, $(3,0)$.
**Απ**. 7.

**9.3.28.** Να υπολογιστει το $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ οπου $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{i}(x-y) + \mathbf{j}(x+y) + \mathbf{k}z$, $C = C_1C_2$ και $C_1 : y = x^2$, $C_2 : y = \sqrt{x}$ $(0 \leq x \leq 1)$.
**Απ**. $2/3$.

**9.3.29.** Να υπολογιστει το $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ οπου $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}(x+y-1)$ και $C$ ειναι το ευθυγραμμο τμημα απο $(1,1,1)$ ως $(2,3,4)$.
**Απ**. 13.

**9.3.30.** Να υπολογιστει το $\int_C (-x\cos y dx + y \sin x dy)$ οπου $C$ ειναι το ευθυγραμμο τμημα που συνδεει τα $(0,0)$ και $(\pi, 2\pi)$.
**Απ**. $4\pi$.

**9.3.31.** Να υπολογιστει το $\int_C (x^2 + y^2)\, dy$ οπου $C$ ειναι η τεθλασμενη γραμμη που συνδεει τα $(0,0)$, $(2,0)$, $(4,4)$,$(0,4)$.
**Απ**. $37/3$.

**9.3.32.** Να υπολογιστει το $\int_C ((2a-y)\,dx - (a-y)\,dy)$ οπου $C$ ειναι το πρωτο τοξο της $x = a\,(t - \sin t)$, $y = a\,(1-\cos t)$.
**Απ**. $\pi a^2$..

**9.3.33.** Να υπολογιστει το $\int_C \frac{x^2dy - y^2dx}{x^{5/3}+y^{5/3}}$ οπου $C$ ειναι το πρωτο τοξο της $x = R\cos^3 t$, $y = R\sin^3 t$, απο το σημειο $(R,0)$ ως το $(0,R)$.
**Απ**. $\frac{3}{16}\pi R^{4/3}$.

**9.3.34.** Να υπολογιστει το $\int_C (yzdx + zxdy + xydz)$ οπου $C$ ειναι η $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $z = \frac{at}{2\pi}$ και $t \in [0, 2\pi]$.
**Απ**. 0.

**9.3.35.** Να υπολογιστει το $\int_C \frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-x-y-2z}}$ οπου $C$ ειναι το ευθυγραμμο τμημα απο $(1,1,1)$ ως $(4,4,4)$.
**Απ**. $3\sqrt{3}$.

**9.3.36.** Δειξτε οτι το $\int_C ((yx^3+e^y)\,dx + (xy^3+xe^y-2y)\,dy)$ οπου $C$ ειναι τυχουσα κλειυστη καμπυλη, *συμμετρικη* ως προς το $(0,0)$.

**9.3.37.** Δειξτε οτι το $\int_C \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2} = 2\pi$ για οποιαδηποτε κλειστη καμπυλη $C$ περιλαμβανει το $(0,0)$.

**9.3.38.** Να επαληθευτει το Θεωρημα του Green για το ολοκληρωμα $\int_C ((1-x^2)\,ydx + x\,(1+y^2)\,dy)$ οπου $C$ : ο κυκλος με κεντρο το $(0,0)$ και ακτινα $R$.
**Απ**. $\pi R^4/2$.

**9.3.39.** Να επαληθευτει το Θεωρημα του Green για το ολοκληρωμα $\int_C ((xy+x+y)\,dx + (xy+x-y)\,dy)$ οπου $C$ : η ελλειψη $4x^2+y^2=4$.
**Απ**. 0.

**9.3.40.** Να επαληθευτει το Θεωρημα του Green για το ολοκληρωμα $\int_C \left(\left(x^2y+\frac{y^3}{3}+ye^{xy}\right)dx + (x+xe^{xy})\right.$ οπου $C$ : το ημικυκλιο $x^2+y^2=1$ και $y \geq 0$.
**Απ**. $\pi/4$.

**9.3.41.** Αφου δειχτει οτι το $\int_C (xdx - y^2dy + zdz)$ λαμβανει σταθερη τιμη για οποιαδηποτε απλη $C$ αρχιζει στο $(x_1,y_1,z_1)$ και καταληγει στο $(x_2,y_2,z_2)$, να υπολογιστει αυτη η τιμη.
**Απ**. Ειναι $\phi\,(x_2,y_2,z_2) - \phi\,(x_1,y_1,z_1)$ οπου $\phi\,(x,y,z) = \frac{1}{2}\,(x^2+z^2) - \frac{1}{3}y^3$).

**9.3.42.** Αφου δειχτει οτι το $\int_C (yzdx + xzdy + xydz)$ λαμβανει σταθερη τιμη για οποιαδηποτε απλη $C$ αρχιζει στο $(x_1,y_1,z_1)$ και καταληγει στο $(x_2,y_2,z_2)$, να υπολογιστει αυτη η τιμη.
**Απ**. Ειναι $\phi\,(x_2,y_2,z_2) - \phi\,(x_1,y_1,z_1)$ οπου $\phi\,(x,y,z) = xyz$.

**9.3.43.** Εστω $\mathbf{F}\,(\mathbf{r}) = \mathbf{i}\,(4xy - 3x^2z^2) + \mathbf{j}2x^2 - 2x^3z\mathbf{k}$. Να δειχτει οτι το $\int_C \mathbf{F}\,(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ εξαρταται μονο απο τα ακρα της $C$.
**Υποδ**. Χρησιμοποιειστε την συναρτηση $\phi\,(x,y,z) = 2x^2y - x^3z^2$.

**9.3.44.** Εστω $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{i}(y^2\cos x + z^3) + \mathbf{j}(2y\sin x - 4) + \mathbf{k}(3xz^2 + 2)$. Να δειχτει οτι το $\int_C \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r}$ εξαρταται μονο απο τα ακρα της $C$.

**Υποδ**. Χρησιμοποιειστε την συναρτηση $\phi(x, y, z) = y^2 \sin x + xz^3 - 4y + 2z$).

**9.3.45.** Ειναι αληθεια οτι το $\int_C \frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ λαμβανει σταθερη τιμη για οποιαδηποτε απλη $C$ αρχιζει στο $(x_1, y_1)$ και καταληγει στο $(x_2, y_2)$; Αν ναι, να υπολογιστει αυτη η τιμη.

**Υποδ**. Χρησιμοποιειστε την συναρτηση $\sqrt{x^2 + y^2}$.

**9.3.46.** Ειναι αληθεια οτι το $\int_C \frac{-yzdx+zxdy+xydz}{(x-yz)^2}$ λαμβανει σταθερη τιμη για οποιαδηποτε απλη $C$ αρχιζει στο $(x_1, y_1, z_1)$ και καταληγει στο $(x_2, y_2, z_2)$; Αν ναι, να υπολογιστει αυτη η τιμη.

**Υποδ**. Χρησιμοποιειστε την συναρτηση $yz/(x - yz)$.

**9.3.47.** Να υπολογιστει το $\int_{(1,-1,2)}^{(2,1,3)} (xdx - y^2dy + zdz)$ κατα μηκος τυχουσας καμπυλης $C$.

**Απ**. $10/3$.

**9.3.48.** Να υπολογιστει το $\int_{(0,2,3)}^{(3,2,1)} (yzdx + zxdy + xydz)$ κατα μηκος τυχουσας καμπυλης $C$.

**Απ**. $0$.

**9.3.49.** Να υπολογιστει το εμβαδον του χωριου που περικλειει η καμπυλη $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}a\cos t + \mathbf{j}b\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$.

**Απ**. $\pi ab$.

**9.3.50.** Να υπολογιστει το εμβαδον του χωριου που περικλειει η καμπυλη $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}a\cos^3 t + \mathbf{j}a\sin^3 t$, $0 \le t \le 2\pi$.

**Απ**. $\frac{3}{8}\pi a^2$.

**9.3.51.** Να υπολογιστει το εμβαδον του χωριου που περικλειει η καμπυλη $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}(2a\cos t - a\cos 2t) + \mathbf{j}(2a\sin t - a\sin 2t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

**Απ**. $6\pi a^2$.

# Κεφάλαιο 10

# Βαθμωτα και Διανυσματικα Πεδια

## 10.1 Θεωρια

**10.1.1.** *Βαθμωτο πεδιο* ειναι απλα μια συναρτηση με πεδιο ορισμου το $\mathbb{R}^3$ και πεδιο τιμων το $\mathbb{R}$.

**10.1.2.** Π.χ. η θερμοκρασια σε ενα χωρο δινεται απο μια συναρτηση $\phi(\mathbf{r}) = \phi(x, y, z)$. Γενικα, ενα βαθμωτο πεδιο εχει την μορφη $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ και (χρησιμοποιωντας $\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$) μπορει να γραφτει σε οποιαδηποτε απο τις πρακατω μορφες

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z) = \phi(x, y, z).$$

**10.1.3.** Υπαρχουν και συναρτησεις οι οποιες εχουν πεδιο ορισμου *και* πεδιο τιμων το $\mathbb{R}^3$. Π.χ. ενα *πεδιο δυναμεων* στον χωρο γραφεται

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\,\mathbf{i} + Q(x, y, z)\,\mathbf{j} + R(x, y, z)\,\mathbf{k}.$$
$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = P(\mathbf{r})\,\mathbf{i} + Q(\mathbf{r})\,\mathbf{j} + R(\mathbf{r})\,\mathbf{k}.$$

Θα αποκαλουμε τετοιου τυπου συναρτησεις *διαννσματικα πεδια.*

**10.1.4.** Το *οριο* της $\phi(\mathbf{r})$ οριζεται ως εξης

$$\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} \phi(\mathbf{r}) = \phi_0 \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 : 0 < |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| < \delta \Rightarrow |\phi(\mathbf{r}) - \phi_0| < \varepsilon).$$

**10.1.5.** Λεμε οτι η $\phi(\mathbf{r})$ ειναι *συνεχης στο σημειο* $\mathbf{r}_0$ αν εχουμε

$$\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} \phi(\mathbf{r}) = \phi_0.$$

**10.1.6.** Το *οριο* της $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ οριζεται ως εξης

$$\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}_0 \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\delta > 0 : 0 < |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0| < \delta \Rightarrow |\mathbf{F}(\mathbf{r}) - \mathbf{F}_0| < \varepsilon).$$

**10.1.7.** Λεμε οτι η $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ ειναι *συνεχης στο σημειο* $\mathbf{r}_0$ αν εχουμε

$$\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(\mathbf{r}_0).$$

**10.1.8.** Εστω διανυσματικο πεδιο $\mathbf{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\,\mathbf{i} + Q(x,y,z)\,\mathbf{j} + R(x,y,z)\,\mathbf{k}$. *Διανυσματικη γραμμη* του πεδιου λεγεται μια καμπυλη $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}x(t) + \mathbf{j}y(t) + \mathbf{k}z(t)$ της οποιας η εφαπτομενη σε καθε σημειο $(x,y,z)$ ειναι παραλληλη με το πεδιο $\mathbf{F}(x,y,z)$.

**10.1.9.** Για μια συναρτηση $\mathbf{F}(x,y,z)$ μπορουμε να ορισουμε τις μερικες παραγωγους ($\mathbf{F}_x$, $\mathbf{F}_y$, $\mathbf{F}_z$, $\mathbf{F}_{xx}$, $\mathbf{F}_{xy}$, $\mathbf{F}_{xz}$, ...) ως εξης

$$\mathbf{F}_x(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{F}(x,y,z) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\mathbf{F}(x+\Delta x,y,z) - \mathbf{F}(x,y,z)}{\Delta x},$$

με αντιστοιχο τροπο οριζονται οι $\mathbf{F}_y, \mathbf{F}_z, \mathbf{F}_{xx}, \ldots$ κτλ.

**10.1.10.** Εχουμε ηδη δει οτι μπορουμε να συνδυασουμε ολες τις μερικες παραγωγους της $\phi(x,y,z)$ σε μια *διανυσματικη* παραγωγο, την *κλιση* της $\phi(x,y,z)$, η οποια συμβολιζεται $grad\phi$ και οριζεται ως εξησ:

$$grad\phi = \mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \mathbf{k}\frac{\partial\phi}{\partial x}.$$

Επισης εχουμε δει οτι μπορουμε να γραψουμε την κλιση της $\phi$ ως

$$grad\phi = \nabla\phi$$

και την ολικη παραγωγο ως

$$\frac{d\phi}{dt} = \nabla\phi\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot\left(\frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}\right).$$

**10.1.11.** Η *αποκλιση* ενος διανυσματικου πεδιου $\mathbf{F}$ συμβολιζεται με $div\mathbf{F}$ και οριζεται ως εξης:

$$div\mathbf{F} = \nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

**10.1.12.** Η *περιστροφη* ενος διανυσματικου πεδιου $\mathbf{F}$ συμβολιζεται με $rot\mathbf{F}$ και οριζεται ως εξησ:

$$rot\mathbf{F} = \nabla\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \mathbf{i}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) - \mathbf{j}\left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right).$$

**10.1.13.** Ισχυουν τα εξης

$$\begin{aligned}
\nabla\cdot(\phi\mathbf{F}) &= (\nabla\phi)\cdot\mathbf{F} + \phi(\nabla\cdot\mathbf{F}) \\
\nabla\times(\phi\mathbf{F}) &= (\nabla\phi)\times\mathbf{F} + \phi(\nabla\times\mathbf{F}) \\
\nabla\times(\nabla\phi) &= \mathbf{0} \\
\nabla\cdot(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) &= (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{G} - \mathbf{F}\cdot(\nabla\times\mathbf{G}) \\
\nabla\times\nabla\phi &= \mathbf{0} \\
\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{F}) &= 0.
\end{aligned}$$

**10.1.14.** Ενα διανυσματικο πεδιο $\mathbf{F}$ λεγεται *συντηρητικο* ανν υπαρχει συναρτηση $\phi$ τετοια ωστε $\nabla\phi = \mathbf{F}$. Η $\phi$ λεγεται *δυναμικο* του $\mathbf{F}$.

**10.1.15.** Αν η $\phi$ ειναι το δυναμικο του $\mathbf{F} = \mathbf{i}P+\mathbf{j}Q+\mathbf{k}R$, τοτε ισχυει

$$\phi(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(x,y,z)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y,z)\,dy + \int_{z_0}^{z} R(x_0,y_0,z)\,dz \tag{10.1}$$

οπου τα $x_0, y_0, z_0$ ειναι αυθαιρετα.

**10.1.16.** Αν το διανυσματικο πεδιο $\mathbf{F}$ ειναι συντηρητικο, τοτε το ολοκληρωμα $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ ειναι ανεξαρτητο του δρομου ολοκληρωσης για καθε καμπυλη $C$.

**10.1.17.** Ενα διανυσματικο πεδιο $\mathbf{F}$ λεγεται *αστροβιλο* ανν $\nabla\times\mathbf{F} = \mathbf{0}$.

**10.1.18.** Ενα διανυσματικο πεδιο $\mathbf{F}$ ειναι αστροβιλο ανν ειναι συντηρητικο.

**10.1.19.** Ενα διανυσματικο πεδιο $\mathbf{F}$ λεγεται *σληνοειδες* ανν $\nabla\cdot\mathbf{F} = 0$.

**10.1.20.** Ενα διανυσματικο πεδιο $\mathbf{F}$ ειναι σωληνοειδες ανν υπαρχει αλλο πεδιο $\mathbf{G}$ τετοιο ωστε $\mathbf{F} = \nabla\times\mathbf{G}$. Τοτε το $\mathbf{G}$ λεγεται *διανυσματικο δυναμικο* του $\mathbf{F}$.

## 10.2 Λυμενα Προβληματα

**10.2.1.** Αν $\mathbf{F}(x,y,z) = \mathbf{i}xz + \mathbf{j}xyz - \mathbf{k}y^2$ να υπολογιστουν οι $\nabla\cdot\mathbf{F}$, $\nabla\times\mathbf{F}$.
**Λυση**. Εχουμε

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{F} &= \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\mathbf{i}xz + \mathbf{j}xyz - \mathbf{k}y^2\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial x}(xz) + \frac{\partial}{\partial y}(xyz) - \frac{\partial}{\partial z}\left(y^2\right) = z + xz.\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\nabla\times\mathbf{F} &= \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ xz & xyz & -y^2\end{vmatrix}\\ &= \mathbf{i}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ xyz & -y^2\end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z}\\ xz & -y^2\end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\\ xz & xyz\end{vmatrix}\\ &= \mathbf{i}(-2y - xy) - \mathbf{j}(-x) + \mathbf{k}(yz)\\ &= -\mathbf{i}(2y + xy) + \mathbf{j}x + \mathbf{k}yz.\end{aligned}$$

**10.2.2.** Αν $\mathbf{F}(x,y,z) = \mathbf{i}\sin z + \mathbf{j}xe^y + \mathbf{k}y^2$ να υπολογιστουν οι $\nabla\cdot\mathbf{F}$, $\nabla\times\mathbf{F}$.
**Λυση**. Εχουμε

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\mathbf{F} &= \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\mathbf{i}\sin z + \mathbf{j}xe^y + \mathbf{k}y^2\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial x}(\sin z) + \frac{\partial}{\partial y}(xe^y) + \frac{\partial}{\partial z}\left(y^2\right) = xe^y.\end{aligned}$$

και

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\mathbf{F}=&\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \sin z & xe^{y} & y^{2}\end{vmatrix}\\
=&\mathbf{i}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ xe^{y} & y^{2}\end{vmatrix}-\mathbf{j}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \sin z & y^{2}\end{vmatrix}+\mathbf{k}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\\ \sin z & xe^{y}\end{vmatrix}\\
&=\mathbf{i}\left(2y-0\right)-\mathbf{j}\left(0-\cos z\right)+\mathbf{k}\left(e^{y}-0\right)\\
&=\mathbf{i}2y+\mathbf{j}\cos z+\mathbf{k}e^{y}.
\end{aligned}
$$

**10.2.3.** Να αποδειχτει οτι $\nabla\times(\nabla\phi)=\mathbf{0}$.

**Λυση**. Εχουμε

$$
\begin{aligned}
\nabla\times(\nabla\phi)=&\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y} & \frac{\partial\phi}{\partial z}\end{vmatrix}\\
=&\mathbf{i}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial\phi}{\partial y} & \frac{\partial\phi}{\partial z}\end{vmatrix}-\mathbf{j}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial z}\end{vmatrix}+\mathbf{k}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y}\end{vmatrix}\\
&=\mathbf{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)-\mathbf{j}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)+\mathbf{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)=\mathbf{0}.
\end{aligned}
$$

**10.2.4.** Αν $\mathbf{c}=\mathbf{i}c_1+\mathbf{j}c_2+\mathbf{k}c_3$ ειναι ενα *σταθερο* διανυσμα, και $\mathbf{r}=\mathbf{i}x+\mathbf{j}y+\mathbf{k}z$, να δειχτει οτι $\nabla\times(\mathbf{c}\times\mathbf{r})=2\mathbf{c}$.

**Λυση**. Εχουμε

$$
\nabla\times(\mathbf{c}\times\mathbf{r})=\nabla\times\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ c_1 & c_2 & c_3\\ x & y & z\end{vmatrix}=\nabla\times\left(\mathbf{i}\left(c_2z-c_3y\right)-\mathbf{j}\left(c_1z-xc_3\right)+\mathbf{k}\left(c_1y-c_2x\right)\right)
$$

$$
\begin{aligned}
&=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ (c_2z-c_3y) & -(c_1z-xc_3) & (c_1y-c_2x)\end{vmatrix}.\\
&=\mathbf{i}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ -(c_1z-xc_3) & (c_1y-c_2x)\end{vmatrix}-\mathbf{j}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z}\\ (c_2z-c_3y) & (c_1y-c_2x)\end{vmatrix}+\mathbf{k}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\\ (c_2z-c_3y) & -(c_1z-x\end{vmatrix}\\
&=\mathbf{i}\left(c_1+c_1\right)-\mathbf{j}\left(-c_2-c_2\right)+\mathbf{k}\left(c_3+c_3\right)=2\mathbf{c}.
\end{aligned}
$$

**10.2.5.** Να υπολογιστει το $\nabla\times(\mathbf{r}g(r))$, οπου $\mathbf{r}=\mathbf{i}x+\mathbf{j}y+\mathbf{k}z$ και $r=\|\mathbf{r}\|$.

**Λυση**. Εχουμε

$$
\frac{\partial g(r)}{\partial x}=\frac{\partial g\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial r}\cdot\frac{\partial\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}{\partial x}=\frac{\partial g}{\partial r}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{\partial g}{\partial r}\cdot\frac{x}{r}
$$

και ομοιως

$$
\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{\partial g}{\partial r}\cdot\frac{y}{r},\qquad\frac{\partial g}{\partial y}=\frac{\partial g}{\partial r}\cdot\frac{z}{r}.
$$

Επισης

$$\mathbf{r}g(r) = \mathbf{i}xg(r) + \mathbf{j}yg(r) + \mathbf{k}zg(r)$$

και αρα

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\mathbf{r}g(r)) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xg(r) & yg(r) & zg(r) \end{vmatrix}. \\
&= \mathbf{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yg(r) & zg(r) \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xg(r) & zg(r) \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ xg(r) & yg(r) \end{vmatrix} \\
&= \mathbf{i}\left(z\frac{\partial g}{\partial y} - y\frac{\partial g}{\partial z}\right) - \mathbf{j}\left(z\frac{\partial g}{\partial x} - x\frac{\partial g}{\partial z}\right) + \mathbf{k}\left(y\frac{\partial g}{\partial x} - x\frac{\partial g}{\partial y}\right) \\
&= \frac{\partial g}{\partial r} \cdot \left(\mathbf{i}\frac{zy - yz}{r} + \mathbf{i}\frac{zx - xz}{r} + \mathbf{i}\frac{xy - yx}{r}\right) = \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

**10.2.6.** Εστω $\mathbf{F} = \mathbf{i}P + \mathbf{j}Q + \mathbf{k}R$. Να δειχτει οτι, αν $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$, τοτε $\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{r}) = 0$, οπου $\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$.

**Λυση**. Εχουμε

$$\mathbf{0} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \end{cases}.$$

Επισης

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{r}) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \\ x & y & z \end{vmatrix} \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(Qz - Ry) - \frac{\partial}{\partial y}(Pz - Rx) + \frac{\partial}{\partial z}(Py - Qx) \\
&= z\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) + y\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + x\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) = 0.
\end{aligned}$$

**10.2.7.** Να δειχτει οτι, αν $\nabla^2\phi = 0$, τοτε το πεδιο $\nabla\phi$ ειναι αστροβιλο *και* σωληνοειδες.

**Λυση**. Το πεδιο $\nabla\phi$ ειναι προφανως αστροβιλο, αφου, οπως ειναι γνωστο, $\nabla \times (\nabla\phi) = 0$. Επισης εχουμε

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0. \tag{10.2}$$

και

$$\nabla\phi = \mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

οποτε, απο την (10.2) εχουμε

$$\nabla \cdot \nabla\phi = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0$$

αρα το πεδιο ειναι και σωληνοειδες.

**10.2.8.** Να δειχτει οτι το $\mathbf{F}=\mathbf{i}xz+\mathbf{j}xyz-\mathbf{k}y^3$ δεν ειναι συντηρητικο.

**Λυση**. Για να ειναι το $\mathbf{F}$ συντηρητικο, θα πρεπει να ειναι και αστροβιλο, δηλ. $\nabla\times\mathbf{F}=\mathbf{0}$. Αλλα

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\mathbf{F}=&\left|\begin{array}{ccc}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ xz & xyz & -y^3\end{array}\right|\\
=&\mathbf{i}\left|\begin{array}{cc}\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ xyz & -y^3\end{array}\right|-\mathbf{j}\left|\begin{array}{cc}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z}\\ xz & -y^3\end{array}\right|+\mathbf{k}\left|\begin{array}{cc}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\\ xz & xyz\end{array}\right|\\
=&\,\mathbf{i}\left(-3y^2-xy\right)-\mathbf{j}\left(-x\right)+\mathbf{k}\left(yz\right)\\
=&-\mathbf{i}\left(3y^2+xy\right)+\mathbf{j}x+\mathbf{k}yz\neq\mathbf{0}.
\end{aligned}
$$

**10.2.9.** Να δειχτει οτι το $\mathbf{F}=\mathbf{i}y^2z^3+\mathbf{j}2xyz^3+\mathbf{k}3xy^2z^2$ ειναι συντηρητικο και να βρεθει το δυναμικο του.

**Λυση**. Το $\mathbf{F}$ θα ειναι συντηρητικο ανν ειναι αστροβιλο, δηλ. ανν $\nabla\times\mathbf{F}=\mathbf{0}$. Οντως

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\mathbf{F}=&\left|\begin{array}{ccc}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y^2z^3 & 2xyz^3 & 3xy^2z^2\end{array}\right|\\
=&\mathbf{i}\left|\begin{array}{cc}\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ 2xyz^3 & 3xy^2z^2\end{array}\right|-\mathbf{j}\left|\begin{array}{cc}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y^2z^3 & 3xy^2z^2\end{array}\right|+\mathbf{k}\left|\begin{array}{cc}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\\ y^2z^3 & 2xy^2z^2\end{array}\right|\\
=&\,\mathbf{i}\left(6xyz^2-6xyz^2\right)-\mathbf{j}\left(3y^2z^2-3y^2z^2\right)+\mathbf{k}\left(2yz^3-2yz^3\right)=\mathbf{0}.
\end{aligned}
$$

Παιρνοντας $x_0=y_0=z_0=0$ στον τυπο (10.1), η συναρτηση δυναμικου $\phi$ θα ειναι

$$\phi=\int_0^x y^2z^3dx+\int_0^y 2\cdot 0\cdot yz^3dy+\int_0^z 3\cdot 0\cdot 0^2\cdot z^2dz=xy^2z^3.$$

Οντως,

$$
\begin{aligned}
\nabla\phi=\nabla\left(xy^2z^3\right)&=\mathbf{i}\frac{\partial\left(xy^2z^3\right)}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial\left(xy^2z^3\right)}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial\left(xy^2z^3\right)}{\partial z}\\
&=\mathbf{i}xy^2z^3+\mathbf{j}2xyz^3+\mathbf{k}3xy^2z^2=\mathbf{F}.
\end{aligned}
$$

**10.2.10.** Να δειχτει οτι το $\mathbf{F}=\mathbf{i}x+\mathbf{j}y+\mathbf{k}z$ ειναι συντηρητικο και να βρεθει το δυναμικο του.

**Λυση**. Το $\mathbf{F}$ θα ειναι συντηρητικο ανν ειναι αστροβιλο, δηλ. ανν $\nabla\times\mathbf{F}=\mathbf{0}$. Οντως

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\mathbf{F}=&\left|\begin{array}{ccc}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x & y & z\end{array}\right|\\
=&\mathbf{i}\left|\begin{array}{cc}\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ y & z\end{array}\right|-\mathbf{j}\left|\begin{array}{cc}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x & z\end{array}\right|+\mathbf{k}\left|\begin{array}{cc}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\\ x & y\end{array}\right|\\
=&\,\mathbf{i}\left(1-1\right)-\mathbf{j}\left(1-1\right)+\mathbf{k}\left(1-1\right)=\mathbf{0}.
\end{aligned}
$$

Παιρνοντας $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ στον τυπο (10.1), η συναρτηση δυναμικου $\phi$ θα ειναι

$$\phi = \int_0^x x + \int_0^y ydy + \int_0^z zdz = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}.$$

Οντως,

$$\nabla\phi = \nabla\left(\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}\right) = \mathbf{i}\frac{\partial\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{2}\right)}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{2}\right)}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{2}\right)}{\partial z} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z = \mathbf{F}.$$

**10.2.11.** Να δειχτει οτι το $\mathbf{F} = \mathbf{i}\left(e^x \cos y + yz\right) + \mathbf{j}\left(xz - e^x \sin y\right) + \mathbf{k}\left(xy + z\right)$ ειναι συντηρητικο και να βρεθει το δυναμικο του.

**Λυση**. Το $\mathbf{F}$ θα ειναι συντηρητικο ανν ειναι αστροβιλο, δηλ. ανν $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Οντως

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^x \cos y + yz & xz - e^x \sin y & xy + z \end{vmatrix} \\
&= \mathbf{i}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz - e^x \sin y & xy + z \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^x \cos y + yz & xy + z \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ e^x \cos y + yz & xz - e^x \sin y \end{vmatrix} \\
&= \mathbf{i}\left(x - x\right) - \mathbf{j}\left(y - y\right) + \mathbf{k}\left(z - e^x \sin y + e^x \sin y - z\right) = \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

Παιρνοντας $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ στον τυπο (10.1), η συναρτηση δυναμικου $\phi$ θα ειναι

$$\begin{aligned}
\phi &= \int_0^x \left(e^x \cos y + yz\right) dx + \int_0^y \left(-\sin y\right) dy + \int_0^z zdz \\
&= e^x \cos y + xyz - \cos y + \cos y + \frac{z^2}{2} = e^x \cos y + xyz + \frac{z^2}{2}
\end{aligned}$$

Οντως,

$$\begin{aligned}
\nabla\phi &= \nabla\left(e^x \cos y + xyz + \frac{z^2}{2}\right) \\
&= \mathbf{i}\frac{\partial\left(e^x \cos y + xyz + \frac{z^2}{2}\right)}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\left(e^x \cos y + xyz + \frac{z^2}{2}\right)}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\left(e^x \cos y + xyz + \frac{z^2}{2}\right)}{\partial z} \\
&= \mathbf{i}\left(e^x \cos y + yz\right) + \mathbf{j}\left(-e^x \sin y + xz\right) + \mathbf{k}\left(xy + z\right) = \mathbf{F}.
\end{aligned}$$

**10.2.12.** Να δειχτει οτι το $\mathbf{F} = \mathbf{i}2xy + \mathbf{j}\left(x^2 - y\right)$ ειναι συντηρητικο και να υπολογιστει το ολοκληρωμα $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ οπου $C$ ειναι τυχουσα καμπυλη η οποια ενωνει τα σημεια $(-1, 4)$ και $(1, 2)$.

**Λυση**. Εχουμε

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy & x^2 - y & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{k}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 2xy & x^2 - y \end{vmatrix} = \mathbf{k}\left(2x - 2x\right) = \mathbf{0}.$$

Αρα το $\mathbf{F}$ ειναι συντηρητικο. Αρα το ζητουμενο ολοκληρωμα εξαρτατι μονο απο τα καρα της $C$.Βρισκουμε την συναρτηση δυναμικου:

$$\phi(x,y) = \int_0^x 2xy dx + \int_0^y \left(0^2 - y\right) dy = x^2 y - \frac{y^2}{2}.$$

Οποτε

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \phi(1,2) - \phi(-1,4) = \left(x^2 y - \frac{y^2}{2}\right)_{(x,y)=(-1,4)}^{(x,y)=(1,2)} = 4.$$

**10.2.13.** Να δειχτει οτι το $\mathbf{F} = \mathbf{i}e^x \sin y + \mathbf{j}e^x \cos y$ ειναι συντηρητικο και να υπολογιστει το ολοκληρωμα $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ οπου $C$ ειναι τυχουσα καμπυλη η οποια ενωνει τα σημεια $(0,0)$ και $(1,\pi/2)$.

**Λυση**. Εχουμε

$$\nabla\times\mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^x \sin y & e^x \cos y & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{k}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{vmatrix} = \mathbf{k}\left(e^x \cos y - e^x \cos y\right) = \mathbf{0}.$$

Αρα το $\mathbf{F}$ ειναι συντηρητικο. Αρα το ζητουμενο ολοκληρωμα εξαρτατι μονο απο τα καρα της $C$.Βρισκουμε την συναρτηση δυναμικου:

$$\phi(x,y) = \int_0^x e^x \sin y dx + \int_0^y e^x \cos y dy = e^x \sin y - e^0 \sin y + \sin y = e^x \sin y.$$

Οποτε

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \phi(0,0) - \phi(1,\pi/2) = \left(e^x \sin y\right)_{(x,y)=(0,0)}^{(x,y)=(1,\pi/2)} = e.$$

**10.2.14.** Να δειχτει οτι το $\mathbf{F} = \mathbf{i}2xy + \mathbf{j}\left(x^2+z^2\right) + \mathbf{k}2zy$ ειναι συντηρητικο και να υπολογιστει το ολοκληρωμα $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ οπου $C$ ειναι τυχουσα καμπυλη η οποια ενωνει τα σημεια $(1,1,0)$ και $(0,2,3)$.

**Λυση**. Εχουμε

$$\begin{aligned} \nabla\times\mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy & x^2+z^2 & 2zy \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2+z^2 & 2zy \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy & 2zy \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ 2xy & x^2+z^2 \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i}(2z-2z) - \mathbf{j}(0-0) + \mathbf{k}(2x-2x) = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Αρα το $\mathbf{F}$ ειναι συντηρητικο. Αρα το ζητουμενο ολοκληρωμα εξαρταται μονο απο τα καρα της $C$.Βρισκουμε την συναρτηση δυναμικου:

$$\phi(x,y,z) = \int_0^x 2xy dx + \int_0^y \left(0^2 + z^2\right) dy + \int_0^z 0 dz = x^2 y + z^2 y.$$

Οποτε

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \phi(1,1,0) - \phi(0,2,3) = \left(x^2 y + z^2 y\right)_{(x,y,z)=(1,1,0)}^{(x,y,z)=(0,2,3)} = 17.$$

**10.2.15.** Να δειχτει οτι το $\mathbf{F} = \mathbf{i}e^x \cos y - \mathbf{j}e^x \sin y + \mathbf{k}2$ ειναι συντηρητικο και να υπολογιστει το ολοκληρωμα $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ οπου $C$ ειναι τυχουσα καμπυλη η οποια ενωνει τα σημεια $(0, \pi/2, 1)$ και $(1, \pi, 3)$.

**Λυση**. Εχουμε

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^x \cos y & -e^x \sin y & 2 \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -e^x \sin y & 2 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^x \cos y & 2 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ e^x \cos y & -e^x \sin y \end{vmatrix} \\ &= \mathbf{i}\,(0-0) - \mathbf{j}\,(0-0) + \mathbf{k}\,(-e^x \sin y + e^x \sin y) = \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Αρα το $\mathbf{F}$ ειναι συντηρητικο. Αρα το ζητουμενο ολοκληρωμα εξαρταται μονο απο τα καρα της $C$.Βρισκουμε την συναρτηση δυναμικου:

$$\phi(x, y, z) = \int_0^x e^x \cos y dx - \int_0^y e^0 \sin y dy + \int_0^z 2dz = e^x \cos y + 2z.$$

Οποτε

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi(0, \pi/2, 1) - \phi(1, \pi, 3) = (e^x \cos y + 2z)_{(x,y,z)=(0,\pi/2,1)}^{(x,y,z)=(1,\pi,3)} = -e + 6 - 2 = 4 - e.$$

## 10.3 Αλυτα Προβληματα

**10.3.1.** Για την συναρτηση $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i}\,(2x^2 y - x^4) + \mathbf{j}\,(e^{xy} - y \sin x) + \mathbf{k}z^2$ να υπολογιστουν οι $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}, \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y}, \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z}, \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial^2 x^2}, \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial^2 y^2}, \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial^2 z^2}, \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2 \mathbf{F}}{\partial z \partial x}$.

**Απ.** $\mathbf{i}\,(4xy - 4x^3) + \mathbf{j}\,(ye^{xy} - y \cos x)$ , $\mathbf{i}2x^2 + \mathbf{j}\,(xe^{xy} - \sin x)$ , $\mathbf{k}2z$ , $\mathbf{i}\,(4y - 12x^2) + \mathbf{j}\,(y^2 e^{xy} + y \sin x)$ , $\mathbf{j}x^2 e^{xy}$ , $\mathbf{k}2$ , $\mathbf{i}4x + \mathbf{j}\,(e^{xy} + yxe^{xy} - \cos x)$ , $\mathbf{0}$, $\mathbf{0}$.

**10.3.2.** Να δειχτει οτι για συναρτησεις $\mathbf{F}(x, y, z)$ και $x(t), y(t), z(t)$ εχουμε:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

**10.3.3.** Να βρεθει η αποκλιση $\nabla \cdot \mathbf{F}$ και η περιστροφη $\nabla \times \mathbf{F}$ της $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i}x^2 y^3 + \mathbf{j}z + \mathbf{k} \sin(xy)$

**Απ.** $2xy^3$, $\mathbf{i}\,(x \cos(xy) - 1) - \mathbf{j}y \cos xy - \mathbf{k}3x^2 y^2$.

**10.3.4.** Να βρεθει η αποκλιση $\nabla \cdot \mathbf{F}$ και η περιστροφη $\nabla \times \mathbf{F}$ της $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i}yz \sin x + \mathbf{j}zx + \mathbf{k} \sin(xy)$

**Απ.** $yz \cos x$, $\mathbf{i}\,(x \cos(xy) - x) + \mathbf{j}(y \sin x - (\cos xy)\, y) + \mathbf{k}\,(z - z \sin x)$.

**10.3.5.** Να βρεθει η αποκλιση $\nabla \cdot \mathbf{F}$ και η περιστροφη $\nabla \times \mathbf{F}$ της $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i}z^2 y^2 + \mathbf{j}xyz + \mathbf{k}z^2 x^2$

**Απ.**$zx + 2zx^2$, $-\mathbf{i}xy + \mathbf{j}\,(2zy^2 - 2z^2 x) + \mathbf{k}\,(zy - 2z^2 y)$.

**10.3.6.** Να βρεθει η αποκλιση $\nabla \cdot \mathbf{F}$ και η περιστροφη $\nabla \times \mathbf{F}$ της $\mathbf{F}(x,y,z) = \mathbf{i}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \mathbf{j}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \mathbf{k}\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$
**Απ.** $\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\mathbf{0}$ ).

**10.3.7.** Να βρεθει η αποκλιση $\nabla \cdot \mathbf{F}$ και η περιστροφη $\nabla \times \mathbf{F}$ της $\mathbf{F}(x,y,z) = xy\mathbf{i} + (x^2+y^2)\mathbf{j}$.
**Απ.** $3y$, $x\mathbf{k}$.

**10.3.8.** Να βρεθει η αποκλιση $\nabla \cdot \mathbf{F}$ και η περιστροφη $\nabla \times \mathbf{F}$ της $\mathbf{F}(x,y,z) = xyz\mathbf{i} + z^2\mathbf{j}$.
**Απ.** $yz + 2y$, $-2z\mathbf{i} + xy\mathbf{j} - zx\mathbf{k}$.

**10.3.9.** Να βρεθει η αποκλιση $\nabla \cdot \mathbf{F}$ και η περιστροφη $\nabla \times \mathbf{F}$ της $\mathbf{F}(x,y,z) = (x+y+z^2)\mathbf{i} + (y+z+x^2)\mathbf{j} + (z+x+y^2)\mathbf{k}$.
**Απ.** $3$, $(2y-1)\mathbf{i} + (2z-1)\mathbf{j} + (2x-1)\mathbf{k}$).

**10.3.10.** Να βρεθει η αποκλιση $\nabla \cdot \mathbf{F}$ και η περιστροφη $\nabla \times \mathbf{F}$ της $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2yz)\mathbf{i} + (xy^2 + 2\sin z)\mathbf{j} + (z+x)\mathbf{k}$
**Απ.** $2xyz + 2xy + 1$, $(-2\cos z)\mathbf{i} + (x^2y - 1)\mathbf{j} + (y^2 - zx^2)\mathbf{k}$).

**10.3.11.** Να βρεθει η αποκλιση $\nabla \cdot \mathbf{F}$ και η περιστροφη $\nabla \times \mathbf{F}$ της $\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{x+y}{z}\mathbf{i} + \frac{y+z}{x}\mathbf{j} + \frac{z+x}{y}\mathbf{k}$.
**Απ.** $\frac{1}{z} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, $\left(-\frac{z+x}{y^2} - \frac{1}{x}\right)\mathbf{i} + \left(-\frac{x+y}{z^2} - \frac{1}{y}\right)\mathbf{j} + \left(-\frac{y+z}{x^2} - \frac{1}{z}\right)\mathbf{k}$).

**10.3.12.** Να βρεθει η αποκλιση $\nabla \cdot \mathbf{F}$ και η περιστροφη $\nabla \times \mathbf{F}$ της $\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2yz)\mathbf{i} + (xy^2 + 2\sin z)\mathbf{j} + (z+x)\mathbf{k}$
**Απ.** $2xyz + 2xy + 1$, $(-2\cos z)\mathbf{i} + (x^2y - 1)\mathbf{j} + (y^2 - zx^2)\mathbf{k}$).

**10.3.13.** Αν $\mathbf{F} = \mathbf{c} \times \mathbf{r}$ (οπου $\mathbf{c}$ ειναι σταθερο διανυσμα), να δειχτει οτι $\nabla \times \mathbf{F} = 2\mathbf{c}$.

**10.3.14.** Να δειχτει οτι $\nabla \cdot (\mathbf{r}\,|\mathbf{r}|^n) = (n+3)\,|\mathbf{r}|^n$.

**10.3.15.** Αν $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\frac{km}{|\mathbf{r}|^2}\mathbf{r}$, δειξτε οτι $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \nabla\left(\frac{km}{|\mathbf{r}|}\right)$ και $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

**10.3.16.** Εστω οτι τα $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ και $\mathbf{G}(\mathbf{r})$ ικανοποιουν $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{G}$ και $\nabla \times \mathbf{G} = \mathbf{F}$. Δειξτε οτι $\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{G} = 0$.

**10.3.17.** Να δειχτει οτι $\mathbf{n}\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) - \nabla(\mathbf{A} \times \mathbf{n}) = \nabla \cdot \mathbf{A}$, οπου $\mathbf{A}$, $\mathbf{n}$ σταθερα διανυσματα, $||\mathbf{n}|| = 1$.

**10.3.18.** Να δειχτει οτι $\nabla \times \nabla \times \mathbf{F} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F})$.

**10.3.19.** Να δειχτει οτι $\nabla \cdot (\phi\mathbf{F}) = \phi(\nabla \cdot \mathbf{F}) + \mathbf{F} \cdot \nabla\phi$.

**10.3.20.** Να δειχτει οτι $\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) + \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G})$.

**10.3.21.** Να δειχτει οτι $\nabla \cdot (\nabla\phi \times \nabla\psi) = \mathbf{0}$.

**10.3.22.** Να δειχτει οτι $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F})$.

**10.3.23.** Εστω $\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$ και $r = \|\mathbf{r}\|$. Να δειχτει οτι: (α) $\nabla r = \mathbf{r}/r$, (β) $\nabla \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$, (γ) $\nabla (r^{-1}) = \mathbf{r}/r^3$, (δ) $\nabla (\ln r) = \mathbf{r}/r^2$.

**10.3.24.** Αν $\mathbf{F} = \mathbf{r}/r^n$, υπαρχει τιμη του $n$ τετοια ωστε $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$;
**Απ**. Ναι, για $n = 3$.

**10.3.25.** Να δειχτει οτι καθε πεδιο της μορφης $\mathbf{F} = \mathbf{i}P(y,z) + \mathbf{j}Q(x,z) + \mathbf{k}R(x,y)$ ειναι σωληνοειδες.

**10.3.26.** Να υπολογιστει $\nabla \cdot \mathbf{F}$, οταν $\mathbf{F} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{r})\,\mathbf{r} - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} \times \mathbf{r}$.
**Απ**. 0.

**10.3.27.** Να υπολογιστει $\nabla \cdot \mathbf{F}$, οταν $\mathbf{F} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) / ||\mathbf{r} - \mathbf{r}_0||^3$.
**Απ**. 0.

**10.3.28.** Να υπολογιστει $\nabla \cdot \mathbf{F}$, οταν $\mathbf{F} = 1/ ||\mathbf{r} - \mathbf{r}_0||$.
**Απ**. 0.

**10.3.29.** Να δειχτει οτι το $\mathbf{F} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y$ ειναι συντηρητικο και να υπολογιστει το δυναμικο του.
**Απ**. $\phi = x^2 + y^2$.

**10.3.30.** Να δειχτει οτι το $\mathbf{F} = \mathbf{i}3y^2 + \mathbf{j}6xy$ ειναι συντηρητικο και να υπολογιστει το δυναμικο του.
**Απ**. $\phi = 3xy^2$.

**10.3.31.** Να δειχτει οτι το $\mathbf{F} = \mathbf{i}2xe^{y+z} + \mathbf{j}x^2e^{y+z} + \mathbf{k}x^2e^{y+z}$ ειναι συντηρητικο και να υπολογιστει το δυναμικο του.
**Απ**. $\phi = x^2e^{y+z}$.

**10.3.32.** Να δειχτει οτι το $\mathbf{F} = \mathbf{i}2\left(\cos\left(x^2+y^3\right)\right)xe^{z^2} + \mathbf{j}3\left(\cos\left(x^2+y^3\right)\right)y^2e^{z^2} + \mathbf{k}2\left(\sin\left(x^2+y^3\right)\right)ze^{z^2}$ ειναι συντηρητικο και να υπολογιστει το δυναμικο του.
**Απ**. $\phi = \sin\left(x^2+y^3\right)e^{z^2}$.

**10.3.33.** Να δειχτει οτι το $\mathbf{F} = \mathbf{i}2xe^y + \mathbf{j}x^2e^y$ ειναι συντηρητικο και να υπολογιστει το ολοκληρωμα $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ οπου $C$ ειναι τυχουσα καμπυλη η οποια ενωνει τα σημεια $(0,0)$ και $(3,2)$.
**Απ**. $9e^2$.

**10.3.34.** Να δειχτει οτι το $\mathbf{F} = \mathbf{i}\left(e^x \ln y - e^y/x\right) + \mathbf{j}\left(e^x/y - e^y \ln x\right)$ ειναι συντηρητικο και να υπολογιστει το ολοκληρωμα $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ οπου $C$ ειναι τυχουσα καμπυλη η οποια ενωνει τα σημεια $(1,1)$ και $(3,3)$.
**Απ**. 0.

**10.3.35.** Να δειχτει οτι το $\mathbf{F} = \mathbf{i}y + \mathbf{j}x + \mathbf{k}z$ ειναι συντηρητικο και να υπολογιστει το ολοκληρωμα $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ οπου $C$ ειναι τυχουσα καμπυλη η οποια ενωνει τα σημεια $(0,0,0)$ και $(1,1,1)$.
**Απ**. $3/2$.

**10.3.36.** Να δειχτει οτι το $\mathbf{F} = \mathbf{i}e^x y + \mathbf{j}\left(e^x + 2yz^2\right) + \mathbf{k}2y^2 z$ ειναι συντηρητικο και να υπολογιστει το ολοκληρωμα $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ οπου $C$ ειναι τυχουσα καμπυλη η οποια ενωνει τα σημεια $(0,0,0)$ και $(1,1,1)$.

**Απ**. $e + 1$.

**10.3.37.** Να δειχτει οτι το $\mathbf{F} = \mathbf{i}\cosh x + \mathbf{j}6yz^2 + \mathbf{k}6y^2 z$ ειναι συντηρητικο και να υπολογιστει το ολοκληρωμα $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ οπου $C$ ειναι τυχουσα καμπυλη η οποια ενωνει τα σημεια $(0,0,0)$ και $(1,1,1)$.

**Απ**. $\sinh 1 + 3$.

**10.3.38.** Να βρεθει η συναρτηση δυναμικου ενος σταθερου πεδιου $\mathbf{F} = \mathbf{i}a + \mathbf{j}b + \mathbf{k}c$.

**Απ.** $\phi = ax + by + cz$.

**10.3.39.** Να βρεθει η συναρτηση δυναμικου ενος πεδιου $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = k \cdot \mathbf{r} / \left\|\mathbf{r}\right\|$.

**Απ.** $\phi = -\frac{1}{2}\left\|\mathbf{r}\right\|^2$.

**10.3.40.** Να βρεθει η συναρτηση δυναμικου ενος πεδιου $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f\left(\left\|\mathbf{r}\right\|\right) \cdot \mathbf{r} / \left\|\mathbf{r}\right\|$.

**Απ.** $\phi(\mathbf{r}) = \int_a^{\|\mathbf{r}\|} f(p)\, dp$..

# Κεφάλαιο 11

# Επιφανειες σε Παραμετρικη Αναπαρασταση

## 11.1 Θεωρια

**11.1.1.** Μια επιφανεια $S$ ειναι ενα συνολο σημειων στον τριοδιαστατο χωρο: $S \subseteq \mathbb{R}^3$.

**11.1.2.** Εχουμε ηδη δει στο Κεφαλαιο **;;** οτι μια επιφανεια $S$ μπορει να αναπαρασταθει απο μια εξισωση της μορφης

$$S : \phi(x, y, z) = 0. \tag{11.1}$$

δηλ.

$$S = \{(x, y, z) : \phi(x, y, z) = 0\}$$

**11.1.3.** Επισης ομως, μια επιφανεια μπορει να αναπαρασταθει απο μια διανυσματικη *διπαραμετρικη* σχεση:

$$S : \mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}x(u, v) + \mathbf{j}y(u, v) + \mathbf{k}z(u, v) \tag{11.2}$$

οπου $(u, v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$ και λεγονται *παραμετροι της επιφανειας*.

**11.1.4.** Μια ειδικη περιπτωση της (11.2) ειναι να παρουμε $u = x$ και $v = y$, δηλ.

$$S : \mathbf{r}(x, y) = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z(x, y). \tag{11.3}$$

**11.1.5.** Εχουμε ηδη δει οτι, οταν η $S$ δινεται στην μορφη $\phi(x, y, z) = 0$, το διανυσμα το καθετο στην επιφανεια στο σημειο $(x_0, y_0, z_0)$ ειναι

$$\mathbf{n} = \nabla\phi(x, y, z)\,|_{(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)}.$$

**11.1.6.** Οταν η επιφανεια $S$ δινεται στην μορφη $\mathbf{r}(u, v)$, ενα διανυσμα καθετο στην επιφανεια (στο σημειο $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ ) ειναι το

$$\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \mathbf{i}\frac{D(y, z)}{D(u, v)} + \mathbf{j}\frac{D(z, x)}{D(u, v)} + \mathbf{k}\frac{D(x, y)}{D(u, v)}. \tag{11.4}$$

**11.1.7.** Οταν η $S$ δινεται στην μορφη

$$\mathbf{r}(x,y)=\mathbf{i}x+\mathbf{j}y+\mathbf{k}z(x,y)$$

η (11.4) απλοποιειται και ενα διανυσμα καθετο στην επιφανεια (στο σημειο $(x,y,z(x,y))$ ) ειναι το

$$\mathbf{n}=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial y}=-\mathbf{i}\frac{\partial z}{\partial x}-\mathbf{j}\frac{\partial z}{\partial y}+\mathbf{k}.$$

**11.1.8.** Μια επιφανεια λεγεται *απλη* οταν αναπαρισταται απο συνεχεις συναρτησεις και δεν τεμνει τον εαυτο της.

**11.1.9.** Μια επιφανεια $S$ λεγεται *λεια* οταν εχει καθετο διανυσμα σε καθε σημειο της. Π.χ., αν η επιφανεια δινεται στην μορφη $\mathbf{r}(u,v)$, τοτε ειναι λεια αν $\left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right|\neq 0$ για καθε $u$, $v$.

**11.1.10.** Η εξισωση της καθετης *ευθειας* στο $(x_0,y_0,z_0)$ ειναι

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\times\mathbf{n}_0=0$$

οπου $\mathbf{r}_0=\mathbf{r}(x_0,y_0,z_0)$ και $\mathbf{n}_0=\mathbf{n}(x_0,y_0,z_0)$ (το διανυσμα καθετο στην επιφανεια στο σημειο $(x_0,y_0,z_0)$).

**11.1.11.** Η εξισωση του επιπεδου το οποιο εφαπτεται στην επιφανεια στο σημειο $(x_0,y_0,z_0)$ ειναι

$$(\mathbf{i}(x-x_0)+\mathbf{j}(y-y_0)+\mathbf{k}(z-z_0))\cdot\mathbf{n}_0=0.$$

**11.1.12.** *Προσανατολισιμη* ή *διπλευρη* λεγεται μια απλη, λεια επιφανεια $S$ εαν εχει δυο *οψεις* και δεν μπορουμε να μεταβουμε απο την μια οψη στην αλλη χωρις να διατρυπησουμε την επιφανεια ή να συναντησουμε το περας αυτης (ο ορισμος αυτος ειναι διαισθητικος, οχι αυστηρος).

**11.1.13.** Σε μια προσανατολισιμη επιφανεια $S$ μπορουμε να ορισουμε την *θετικη* και την *αρνητικη* οψη. Η θετικη πλευρα της επιφανειας εναι αυτη ϋπερανω¨ της οποιας βρισκεται το μοναδιαιο διανυσμα $\mathbf{n}_0$ καθετο στην $S$.

**11.1.14.** Υπαρχουν και μονοπλευρες επιφανειες (π.χ. η ταινια του $Moebius$ - δες το προβλημα 11.2.31).

**11.1.15.** Μπορουμε να θεωρησουμε οτι μια επιφανεια ¨κτιζεται¨ απο μια οικογενεια καμπυλων. Π.χ., εστω η επιφανεια $S$

$$\mathbf{r}(u,v)=\mathbf{i}x(u,v)+\mathbf{j}y(u,v)+\mathbf{k}z(u,v). \tag{11.5}$$

Ας δωσουμε μια σταθερη τιμη $u_0$ στην παραμετρο $u$.Τοτε η (11.5) γινεται

$$\mathbf{r}(u_0,v)=\mathbf{i}x(u_0,v)+\mathbf{j}y(u_0,v)+\mathbf{k}z(u_0,v), \tag{11.6}$$

δηλ. μια καμπυλη $C$ με παραμετρο $v$. Επειδη καθε σημειο της (11.6) ικανοποιει και την (11.5), καθε σημειο της $C$ ανηκει στην $S$. Αν τωρα θεωρησουμε το συνολο $\{r(u_0,v)\}_{u\in\mathbb{R}}$ παιρνουμε μια *οικογενεια* καμπυλων και εχουμε

$$\cup_{u_0\in\mathbb{R}}\{r(u_0,v)\}_{v\in\mathbb{R}}=\{r(u,v)\}_{u,v\in\mathbb{R}}=S,$$

δηλ. η οικογενεια καμπυλων ταυτιζεται με την επιφανεια. Παρομοια, μπορουμε να θεωρησουμε οτι η $S$ κτιζεται απο την οικογενεια καμπυλων $\cup_{v_0\in\mathbb{R}}\{r(u,v_0)\}_{u\in\mathbb{R}}$ οπου η $v$ παιρνει μια σταθερη τιμη $v_0$ και η (11.5) γινεται

$$\mathbf{r}(u,v_0)=\mathbf{i}x(u,v_0)+\mathbf{j}y(u,v_0)+\mathbf{k}z(u,v_0), \tag{11.7}$$

## 11.2 Λυμενα Προβληματα

**11.2.1.** Γραψτε τις παραμετρικες εξισωσεις του επιπεδου $E: x-y+z=2$ και σχεδιαστε το επιπεδο.

**Λυση**. Θετουμε $u=x$, $v=y$. Κατοπιν λυνουμε την $x-y+z=2$ ως προς $z$ και παιρνουμε

$$z=2-x+y\Rightarrow z=2-u+v\Rightarrow\mathbf{r}(u,v)=\mathbf{i}u+\mathbf{j}v+\mathbf{k}(2-u+v).$$

Η τελευταια ειναι η παραμετρικη διανυσματικη εξισωση του επιπεδου.

**11.2.2.** Να βρεθουν τα σημεια στα οποια η επιφανεια $\mathbf{r}(u,v)=\mathbf{i}u+\mathbf{j}v+\mathbf{k}(a-u-v)^2$ τεμνει τους αξονες $x,y,z$.

**Λυση**. Το σημειο στο οποιο η επιφανεια τεμνει τον αξονα των $x$ εχει την μορφη

$$\mathbf{r}(u_1,v_1)=\mathbf{i}u_1=\mathbf{i}u_1+\mathbf{j}v_1+\mathbf{k}\cdot(a-u_1-v_1)^2.$$

Αρα

$$v_1=0,\qquad(a-u_1-v_1)^2=0\Rightarrow u_1=a.$$

Δηλ. η επιφανεια τεμνει τον αξονα των $x$ στο σημειο $(a,0,0)$. Αντιστοιχα, το σημειο στο οποιο η επιφανεια τεμνει τον αξονα των $y$ εχει την μορφη $\mathbf{r}(u_2,v_2)=\mathbf{0}$ οποτε τελικα προκυπτει οτι αυτο ειναι το σημειο $(0,a,0)$. Τελος, η επιφανεια τεμνει τον αξονα των $z$ στο σημειο

$$\mathbf{r}(u_3,v_3)=\mathbf{k}(a-u_3-v_3)^2=\mathbf{i}u_3+\mathbf{j}v_3+\mathbf{k}\cdot(a-u_3-v_3)^2.$$

αρα $u_3=v_3=0$ και τελικα το ζητυμενο σημειο (στο οποιο η επιφανεια τεμνει τον αξονα των $z$) ειναι το $(0,0,a)$.

**11.2.3.** Βρειτε τις εξισωσεις του επιπεδου $E$ το οποιο περναει απο το σημειο $\mathbf{r}_0 = \mathbf{i}x_0 + \mathbf{j}y_0 + \mathbf{k}z_0$ και ειναι παραλληλο στα διανυσατα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$.

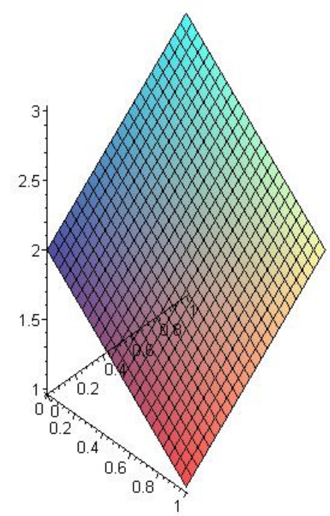
**Λυση**. Εστω τυχον σημειο $\mathbf{r} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$ του $E$. Το διανυσμα $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ θα ειναι γραμμικος συνδυασμος των $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$. Δηλ.

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = u\mathbf{a} + v\mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}.$$

Δηλ. η ζητουμενη εξισωση θα ειναι

$$\mathbf{r}\left(u, v\right) = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}, \qquad u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}.$$

Η γραφικη παρασταση ειναι αυτη του Σχ.11.1. Βλεπουμε οτι το επιπεδο γεννιεται απο ευθειες γραμμες παραλληλες στα διανυσματα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$.




Σχήμα 11.1: Η γραφικη παρασταση του επιπεδου.

**11.2.4.** Γραψτε τις παραμετρικες εξισωσεις της σφαιρας $x^2 + y^2 + z^2 = 2^2$ και σχεδιαστε αυτη.

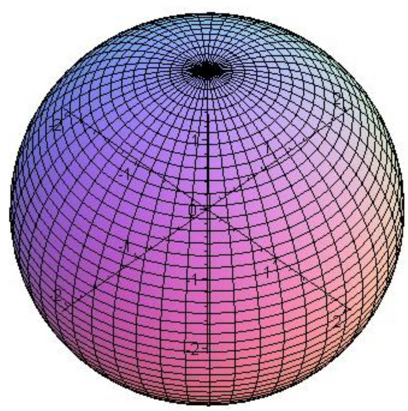
**Λυση**. Σε σφαιρικες συντεταγμενες, η εξισωση σφαιρας με ακτινα **2** ειναι $R = 2$. Αρα τυχον σημειο της σφαιρας θα εχει συντεταγμενες

$$\mathbf{i}2\cos\theta\cos\phi + \mathbf{j}2\sin\theta\cos\phi + \mathbf{k}2\sin\phi$$

Θετουμε $u = \theta$, $v = \phi$. Οποτε οι ζητουμενες εξισωσεις γινονται

$$\mathbf{r}\left(u, v\right) = \mathbf{i}2\cos u\cos v + \mathbf{j}2\sin u\cos v + \mathbf{k}2\sin v, \qquad u \in [0, 2\pi]\,, v \in [0, \pi]\,.$$

Αυτη ειναι η παραμετρικη διανυσματικη εξισωση της σφαιρας. Η γραφικη παρασταση ειναι αυτη του Σχ.11.2.



Σχήμα 11.2: Η γραφικη παρασταση της σφαιρας.

Βλεπουμε οτιο η σφαιρα γεννιεται απο κυκλους οι οποιοι περνουν απο τον βορειο και νοτιο πολο αυτης· αυτοι οι κυκλοι περιγραφονται απο εξισωσεις (για δοθεν $u_0$)

$$\mathbf{r}\left(u, v\right) = \mathbf{i}2\cos u_0\cos v + \mathbf{j}2\sin u_0\cos v + \mathbf{k}2\sin v, \qquad v \in [0, \pi]\,,$$

και απο κυκλους παραλληλους στον ισημερινο· αυτοι οι κυκλοι περιγραφονται απο εξισωσεις (για δοθεν $v_0$)

$$\mathbf{r}\left(u, v\right) = \mathbf{i}2\cos u\cos v_0 + \mathbf{j}2\sin u\cos v_0 + \mathbf{k}2\sin v_0, \qquad u \in [0, 2\pi]\,.$$

**11.2.5.** Γραψτε τις παραμετρικες εξισωσεις της σφαιρας $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=2^2$ και σχεδιαστε αυτη.

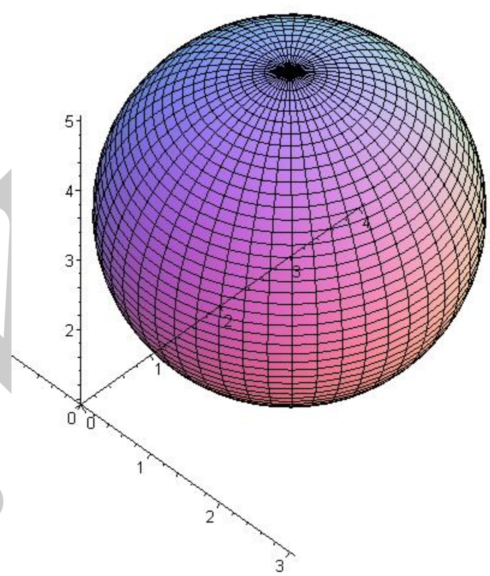
**Λυση**. Η εξισωση ειναι παρομοια με αυτη της προηγουμενης ασκησησ:

$$\mathbf{r}\left(u,v\right)=\mathbf{i}\left(1+2\cos u\cos v\right)+\mathbf{j}\left(2+2\sin u\cos v\right)+\mathbf{k}\left(3+2\sin v\right),\qquad u\in\left[0,2\pi\right],v\in\left[0,\pi\right].$$

Μπορουμε ευκολα να επαληθευσουμε οτι αυτη ειναι η σωστη εξισωση: εχουμε

$$\begin{aligned}
&\left(x\left(u,v\right)-1\right)^2+\left(y\left(u,v\right)-2\right)^2+\left(z\left(u,v\right)-2\right)^2\\
&=\left(1+2\cos u\cos v-1\right)^2+\left(2+2\sin u\cos v-2\right)^2+\left(3+2\sin v-3\right)^2\\
&=4\cos^2 u\cos^2 v+4\sin^2 u\cos^2 v+4\sin^2 v\\
&=4\cdot\left(\left(\cos^2 u+\sin^2 u\right)\cos^2 v+\sin^2 v\right)\\
&=4\cdot\left(\cos^2 v+\sin^2 v\right)=4.
\end{aligned}$$

Η γραφικη παρασταση ειναι αυτη του Σχ.11.3.



Σχήμα 11.3: Η γραφικη παρασταση της σφαιρας.

**11.2.6.** Γραψτε τις παραμετρικες εξισωσεις του ελλειψοειδους $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ και σχεδιαστε αυτο.

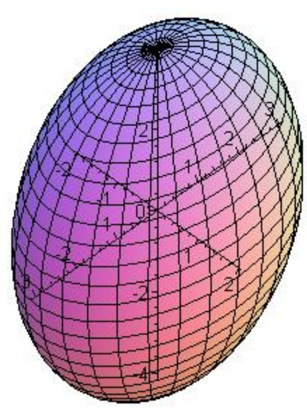
**Λυση**. Το ελλειψοειδες εχει παραμετρικη εξισωση (παρομοια με αυτη της σφαιρας):

$$\mathbf{r}\left(u,v\right)=\mathbf{i}a\cos u\cos v+\mathbf{j}b\sin u\cos v+\mathbf{k}c\sin v,\qquad u\in\left[0,2\pi\right],v\in\mathbb{R}.$$

Μπορουμε ευκολα να επαληθευσουμε οτι αυτη η εξισωση ειναι σωστη: εχουμε

$$\begin{aligned}&\left(\frac{x\left(u,v\right)}{a}\right)^2+\left(\frac{y\left(u,v\right)}{b}\right)^2+\left(\frac{z\left(u,v\right)}{c}\right)^2\\&=\left(\frac{a\cos u\cos v}{a}\right)^2+\left(\frac{b\sin u\cos v}{b}\right)^2+\left(\frac{c\sin v}{c}\right)^2\\&=\cos^2u\cos^2v+\sin^2u\cos^2v+\sin^2v\\&=\left(\cos^2u+\sin^2u\right)\cos^2v+\sin^2v\\&=\cos^2v+\sin^2v=1.\end{aligned}$$

Η γραφικη παρασταση ειναι αυτη του Σχ.11.4. Απο ποιες καμπυλες γενναται το ελλειψοειδες;



Σχήμα 11.4: Η γραφικη παρασταση του ελλειψοειδους.

**11.2.7.** Γραψτε τις παραμετρικες εξισωσεις του μονοχωνου υπερβολοειδους $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ και σχεδιαστε αυτο.

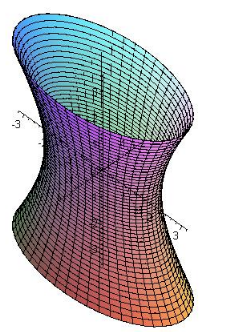
**Λυση**. Το υπερβολοειδες εχει παραμετρικη εξισωση (παρομοια με αυτη της σφαιρας):

$$\mathbf{r}\left(u,v\right)=\mathbf{i}a\cos u\cosh v+\mathbf{j}b\sin u\cosh v+\mathbf{k}c\sinh v,\qquad u\in\left[0,2\pi\right],v\in\mathbb{R}.$$

Μπορουμε ευκολα να επαληθευσουμε οτι αυτη ειναι η σωστη εξισωση: εχουμε

$$\begin{aligned}&\left(\frac{x\left(u,v\right)}{a}\right)^2+\left(\frac{y\left(u,v\right)}{b}\right)^2-\left(\frac{z\left(u,v\right)}{c}\right)^2\\&=\left(\frac{a\cos u\cosh v}{a}\right)^2+\left(\frac{b\sin u\cosh v}{b}\right)^2-\left(\frac{c\sinh v}{c}\right)^2\\&=\cos^2 u\cosh^2 v+\sin^2 u\cosh^2 v-\sinh^2 v\\&=\left(\cos^2 u+\sin^2 u\right)\cosh^2 v-\sinh^2 v\\&=\cosh^2 v-\sinh^2 v=1.\end{aligned}$$

Η γραφικη παρασταση ειναι αυτη του Σχ.11.5. Απο ποιες καμπυλες γενναται το υπερβολοειδες;



Σχήμα 11.5: Η γραφικη παρασταση του μονοχωνου υπερβολοειδους.

**11.2.8.** Γραψτε παραμετρικες εξισωσεις του μονοχωνου υπερβολοειδους $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ *διαφορετικες απο αυτες της προηγουμενης ασκησης.*

**Λυση**. Μπορουμε να χρησιμοποιησουμε τις εξισωσεις

$$\mathbf{r}\left(u,v\right)=\mathbf{i}a\cos u\sqrt{1+v^2}+\mathbf{j}b\sin u\sqrt{1+v^2}+\mathbf{k}cv,\qquad u\in\left[0,2\pi\right],v\in\mathbb{R}.$$

Μπορουμε ευκολα να επαληθευσουμε οτι αυτη η εξισωση ειναι σωστη: εχουμε

$$\begin{aligned}&\left(\frac{x\left(u,v\right)}{a}\right)^2+\left(\frac{y\left(u,v\right)}{b}\right)^2-\left(\frac{z\left(u,v\right)}{c}\right)^2\\&=\left(\frac{a\cos u}{a}\sqrt{1+v^2}\right)^2+\left(\frac{b\sin u}{b}\sqrt{1+v^2}\right)^2-\left(\frac{c}{c}v\right)^2\\&=\left(\cos^2 u+\sin^2 u\right)\left(1+v^2\right)-v^2=1.\end{aligned}$$

Βλεπουμε λοιπον οτι μια επιφανεια μπορει να εχει περισσοτερες απο μια παραμετρισεις.

**11.2.9.** Γραψτε δυο διαφορετικες παραμετρισεις του διχωνου υπερβολοειδους $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ και σχεδιαστε αυτο.

**Λυση**. Μια δυνατη παραμετριση (δινει μονο το ανω μισο της επιφανειας) ειναι

$$\mathbf{r}(u,v)=\mathbf{i}a\cos u\sinh v+\mathbf{j}b\sin u\sinh v+\mathbf{k}c\cosh v,\qquad u\in[0,2\pi],v\in\mathbb{R}$$

Μπορουμε ευκολα να επαληθευσουμε οτι αυτη ειναι η σωστη εξισωση: εχουμε

$$\begin{aligned}&\left(\frac{x(u,v)}{a}\right)^2+\left(\frac{y(u,v)}{b}\right)^2-\left(\frac{z(u,v)}{c}\right)^2\\&=\left(\frac{a\cos u\sinh v}{a}\right)^2+\left(\frac{b\sin u\sinh v}{b}\right)^2-\left(\frac{c\cosh v}{c}\right)^2\\&=\cos^2 u\sinh v^2v+\sin^2 u\sinh^2 v-\cosh^2 v\\&=\left(\cos^2 u+\sin^2 u\right)\sinh^2 v-\cosh^2 v=-1.\end{aligned}$$

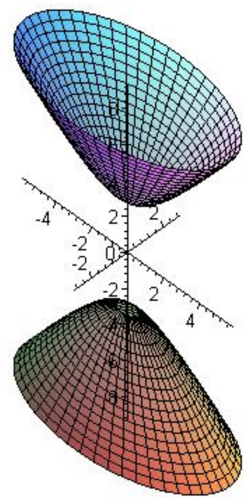
Μια αλλη παραμετριση (η οποια δινει και τα δυο μερη της επιφανειας) ειναι

$$\mathbf{r}(u,v)=\mathbf{i}a\cos u\sqrt{v^2-1}+\mathbf{j}b\sin u\sqrt{v^2-1}+\mathbf{k}cv,\qquad u\in[0,2\pi],v\in\mathbb{R}-(-1,1).$$

Πραγματι

$$\begin{aligned}&\left(\frac{x(u,v)}{a}\right)^2+\left(\frac{y(u,v)}{b}\right)^2-\left(\frac{z(u,v)}{c}\right)^2\\&=\left(\frac{a\cos u}{a}\sqrt{v^2-1}\right)^2+\left(\frac{b\sin u}{b}\sqrt{v^2-1}\right)^2-\left(\frac{c}{c}v\right)^2\\&=\left(\cos^2 u+\sin^2 u\right)\left(v^2-1\right)-v^2=-1.\end{aligned}$$

Η γραφικη παρασταση ειναι αυτη του Σχ.11.6. Απο ποιες καμπυλες γενναται το υπερβολοειδες; Ποια απο τις δυο παραμετρισεις χρησιμοποιηθηκε στο Σχ. 11.6;



Σχήμα 11.6: Η γραφικη παρασταση του διχωνου υπερβολοειδους.

**11.2.10.** Γραψτε τις παραμετρικες εξισωσεις του ελλειπτικου παραβολοειδους $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ και σχεδιαστε αυτο.

**Λυση**. Μια απλη παραμετριση ειναι (προφανως):

$$\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{i}u + \mathbf{j}v + \mathbf{k}\left(\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2}\right), \qquad u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}.$$

Μια αλλη παραμετριση ειναι

$$\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{i}a\cos u\sqrt{v} + \mathbf{j}b\sin u\sqrt{v} + \mathbf{k}cv, \qquad u \in [0,2\pi], v \in \mathbb{R}.$$

Μπορουμε ευκολα να επαληθευσουμε οτι αυτη η εξισωση ειναι σωστη: εχουμε

$$\left(\frac{x(u,v)}{a}\right)^2 + \left(\frac{y(u,v)}{b}\right)^2 = \left(\frac{a\cos u\sqrt{v}}{a}\right)^2 + \left(\frac{b\sin u\sqrt{v}}{b}\right)^2$$
$$= \left(\cos^2 u + \sin^2 u\right)v = v = z(u,v).$$

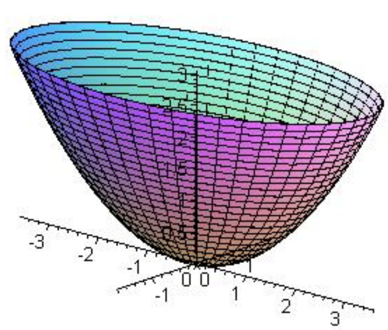
Η γραφικη παρασταση ειναι αυτη του Σχ.11.7. Βλεπουμε οτι το παραβολοειδες γεννιεται απο τις καμπυλες

$$\mathbf{r}(u_0,v) = \mathbf{i}a\cos u_0\sqrt{v} + \mathbf{j}b\sin u_0\sqrt{v} + \mathbf{k}cv, \qquad v \in \mathbb{R}.$$

που ειναι παραβολες· και απο τις

$$\mathbf{r}(u,v_0) = \mathbf{i}a\cos u\sqrt{v_0} + \mathbf{j}b\sin u\sqrt{v_0} + \mathbf{k}cv_0, \qquad u \in [0,2\pi].$$

που ειναι ελλειψεις.




Σχήμα 11.7: Η γραφικη παρασταση του ελλειπτικου παραβολοειδους.

**11.2.11.** Γραψτε τις παραμετρικες εξισωσεις του υπερβολικου παραβολοειδους $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ και σχεδιαστε αυτο.

**Λυση**. Μια απλη παραμετριση ειναι (προφανως):

$$\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{i}u + \mathbf{j}v + \mathbf{k}\left(\frac{u^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2}\right), \qquad u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}.$$

Μια αλλη παραμετριση ειναι

$$\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{i}a\cosh u\sqrt{v} + \mathbf{j}b\sinh u\sqrt{v} + \mathbf{k}c\sin v, \qquad u \in [0,2\pi], v \in \mathbb{R}.$$

Μπορουμε ευκολα να επαληθευσουμε οτι αυτη η εξισωση ειναι σωστη: εχουμε

$$\begin{aligned}&\left(\frac{x(u,v)}{a}\right)^2 - \left(\frac{y(u,v)}{b}\right)^2 = \left(\frac{a\cosh u\sqrt{v}}{a}\right)^2 - \left(\frac{b\sinh u\sqrt{v}}{b}\right)^2 \\ &= \left(\cosh^2 u - \sinh^2 u\right)v = v = z(u,v).\end{aligned}$$

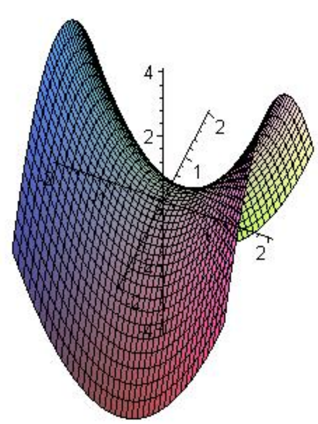
Η γραφικη παρασταση ειναι αυτη του Σχ.11.8. Βλεπουμε οτι το παραβολοειδες γεννιεται απο τις καμπυλες

$$\mathbf{r}(u_0,v) = \mathbf{i}u_0 + \mathbf{j}v + \mathbf{k}\left(\frac{u_0^2}{a^2} - \frac{v^2}{b^2}\right), \qquad v \in \mathbb{R}.$$

που ειναι παραβολες (στρεφουν τα κοιλα προς τα κατω)· και απο τις

$$\mathbf{r}(u,v_0) = \mathbf{i}u + \mathbf{j}v_0 + \mathbf{k}\left(\frac{u^2}{a^2} - \frac{v_0^2}{b^2}\right), \qquad u \in \mathbb{R}.$$

που ειναι επισης παραβολες (στρεφουν τα κοιλα προς τα πανω).



Σχήμα 11.8: Η γραφικη παρασταση του υπερβολικου παραβολοειδους.

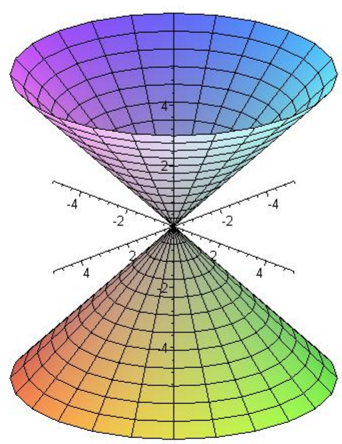
**11.2.12.** Γραψτε τις παραμετρικες εξισωσεις του κωνου $z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ και σχεδιαστε αυτον.
**Λυση**. Μια δυνατη παραμετριση ειναι η

$$\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{i}av\cos u + \mathbf{j}bv\sin u + \mathbf{k}v, \qquad u \in [0,2\pi], v \in \mathbb{R}.$$

Μπορουμε ευκολα να επαληθευσουμε οτι αυτη η εξισωση ειναι σωστη: εχουμε

$$\left(\frac{x(u,v)}{a}\right)^2 + \left(\frac{y(u,v)}{b}\right)^2 = \left(\frac{a\cos u}{a}v\right)^2 + \left(\frac{b\sin u}{b}v\right)^2 =$$
$$= \left(\cos^2 u + \sin^2 u\right)\cdot v^2 = v^2 = z^2(u,v).$$

Η γραφικη παρασταση ειναι αυτη του Σχ.11.9.




Σχήμα 11.9: Η γραφικη παρασταση του κωνου.

**11.2.13.** Γραψτε τις παραμετρικες εξισωσεις του κυλινδρου $1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ και σχεδιαστε αυτον.

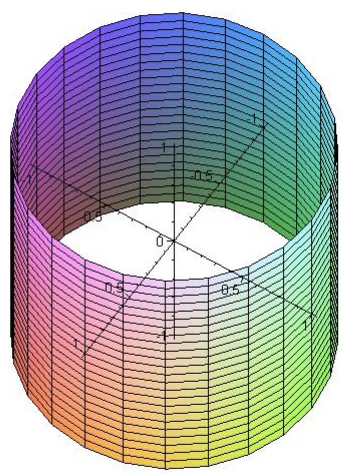
**Λυση**. Μια δυνατη παραμετριση ειναι η

$$\mathbf{r}\left(u,v\right) = \mathbf{i}a\cos u + \mathbf{j}b\sin u + \mathbf{k}v, \qquad u \in \left[0, 2\pi\right], v \in \mathbb{R}.$$

Μπορουμε ευκολα να επαληθευσουμε οτι αυτη η εξισωση ειναι σωστη: εχουμε

$$\left(\frac{x\left(u,v\right)}{a}\right)^2 + \left(\frac{y\left(u,v\right)}{b}\right)^2 = \left(\frac{a\cos u}{a}\right)^2 + \left(\frac{b\sin u}{b}\right)^2 =$$
$$= \left(\cos^2 u + \sin^2 u\right) = 1.$$

Η γραφικη παρασταση ειναι αυτη του Σχ.11.10.



Σχήμα 11.10: Η γραφικη παρασταση του κυλινδρου.

**11.2.14.** Η επιφανεια που περιγραφεται απο την διανυσματικη εξισωση

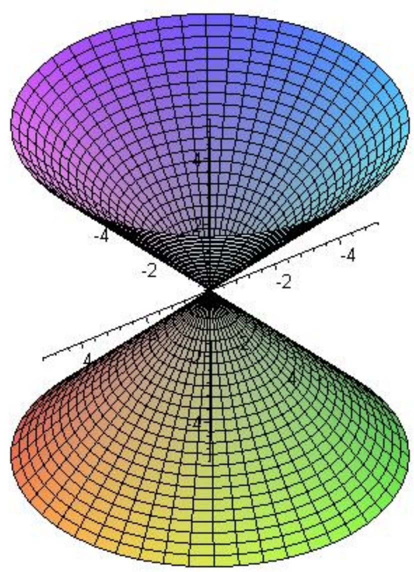
$$\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{r}_0 + v \cdot (\mathbf{r}_1(u) - \mathbf{r}_0) \tag{11.8}$$

λεγεται *κωνικη επιφανεια* με *κορυφη* το σημειο $\mathbf{r}_0$ και *οδηγο καμπυλη* την $\mathbf{r}_1(u)$. Εαν η $\mathbf{r}_1(u)$ ειναι ενας κυκλος, τοτε η (11.8) δινει τον «κλασικο» κωνο. Γραψτε την εξισωση και σχεδιαστε την κωνικη επιφανεια οταν $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$ και $\mathbf{r}_1(u) = \mathbf{i}\cos u + \mathbf{j}\sin u + \mathbf{k}$.

**Λυση**. Σε αυτη την περιπτωση εχουμε

$$\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{0} + v\mathbf{r}_1(u) = \mathbf{i}v\cos u + \mathbf{j}v\sin u + \mathbf{k}v$$

η οποια ειναι η εξισωση του ¨κλασικου¨ κωνου. Πραγματι, η εν λογω κωνικη επιφανεια εχει κορυφη την αρχη των αξονων και οδηγο καμπυλη τον κυκλο $\mathbf{r}_1(u)$ ο οποιος εχει κεντρο το σημειο $(0,0,1)$, ακτινα $1$ και βρισκεται επι του επιπεδου $z = 1$ (γιατι συμβαινουν ολα αυτα;). Με αλλα λογια, η κυλινδρικη επιφανεια σχηματιζεται φεροντας απο καθε σημειο του κυκλου μια ευθεια η οποια διερχεται απο το σημειο $(0,0,1)$. Η γραφικη παρασταση ειναι αυτη του Σχ.11.11.



Σχήμα 11.11: Η γραφικη παρασταση του κωνου.

**11.2.15.** Γραψτε την εξισωση και σχεδιαστε την κωνικη επιφανεια οταν $\mathbf{r}_0 = \mathbf{k}$ και $\mathbf{r}_1(u) = \mathbf{i}\cos u + \mathbf{j}\sin u$.

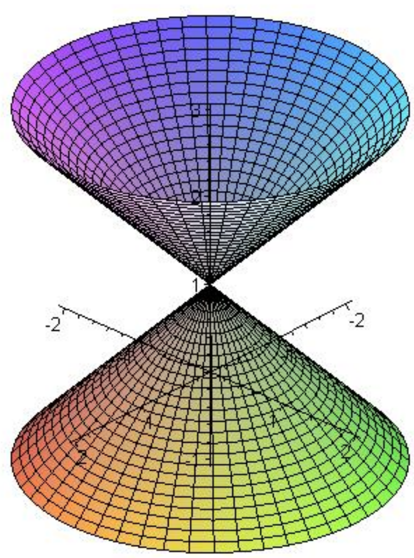
**Λυση**. Η εν λογω κωνικη επιφανεια εχει κορυφη το σημειο $(0,0,1)$ και οδηγο καμπυλη τον κυκλο $\mathbf{r}_1(u)$ ο οποιος εχει κεντρο το σημειο $(0,0,0)$, ακτινα 1 και βρισκεται επι του επιπεδου $z=0$. Με αλλα λογια, η κυλινδρικη επιφανεια σχηματιζεται φεροντας απο καθε σημειο του κυκλου μια ευθεια η οποια διερχεται απο το σημειο $(0,0,1)$. Η εξισωση

$$\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{r}_0 + v\cdot(\mathbf{r}_1(u) - \mathbf{r}_0)$$

γινεται

$$\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{r}_0 + v\cdot(\mathbf{r}_1(u) - \mathbf{r}_0) = \mathbf{k} + v\cdot(\mathbf{i}\cos u + \mathbf{j}\sin u - \mathbf{k}) . = \mathbf{i}v\cos u + \mathbf{j}v\sin u + \mathbf{k}\cdot(1-v) ..$$

Η γραφικη παρασταση ειναι αυτη του Σχ.11.12.



Σχήμα 11.12: Η γραφικη παρασταση του κωνου.

**11.2.16.** Γραψτε την εξισωση και σχεδιαστε την κωνικη επιφανεια οταν $\mathbf{r}_0 = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ και $\mathbf{r}_1(u) = \mathbf{i}2\cos u + \mathbf{j}\sin u$.

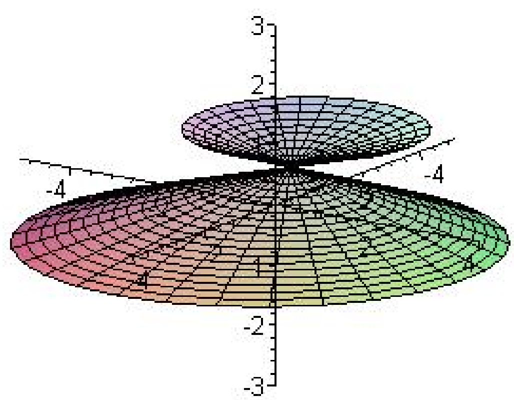
**Λυση**. Η εν λογω κωνικη επιφανεια εχει κορυφη το σημειο $(1,1,1)$ και οδηγο καμπυλη την ελλειψη $\frac{x^2}{2^2} + y^2 = 1$ η οποια βρισκεται επι του επιπεδου $z = 0$. Με αλλα λογια, η κυλινδρικη επιφανεια σχηματιζεται φεροντας απο καθε σημειο της ελλειψης μια ευθεια η οποια διερχεται απο το σημειο $(1,1,1)$. Η εξισωση

$$\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{r}_0 + v \cdot (\mathbf{r}_1(u) - \mathbf{r}_0)$$

γινεται

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u,v) &= \mathbf{r}_0 + v \cdot (\mathbf{r}_1(u) - \mathbf{r}_0) \\ &= \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} + v \cdot (\mathbf{i}2\cos u + \mathbf{j}\sin u) \\ &= \mathbf{i}(1 + 2v\cos u) + \mathbf{j}(1 + v\sin u) + \mathbf{k}.. \end{aligned}$$

Η γραφικη παρασταση ειναι αυτη του Σχ.11.13.




Σχήμα 11.13: Η γραφικη παρασταση του κωνου.

**11.2.17.** Η επιφανεια που περιγραφεται απο την διανυσματικη εξισωση

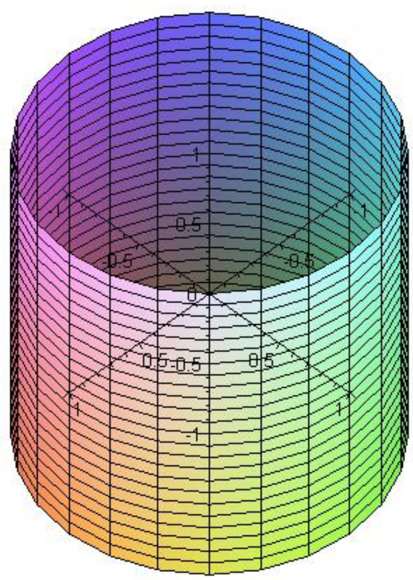
$$\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{r}_1(u) + v \cdot \mathbf{r}_2 \tag{11.9}$$

λεγεται *κυλινδρικη επιφανεια* με *γενετειρα* το διανυσμα $\mathbf{r}_2$ και *οδηγο καμπυλη* την $\mathbf{r}_1(u)$. Εαν η $\mathbf{r}_1(u)$ ειναι ενας κυκλος και το $\mathbf{r}_2$ παραλληλο σε ενα απο τους αξονες $Ox$, $Oy$, $Oz$ τοτε η (11.9) δινει τον «κλασικο» κυλινδρο. Γραψτε την εξισωση και σχεδιαστε την κωνικη επιφανεια οταν $\mathbf{r}_1(u) = \mathbf{i}\cos u + \mathbf{j}\sin u$ και $\mathbf{r}_2 = \mathbf{k}$.

**Λυση**. Σε αυτη την περιπτωση εχουμε

$$\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{i}\cos u + \mathbf{j}\sin u + \mathbf{k}v$$

η οποια ειναι η εξισωση του ¨κλασικου¨ κυλινδρου. Πραγματι, η εν λογω κυλινδρικη επιφανεια εχει γενετειρα ενα διανυσμα παραλληλο στον αξονα των $z$ και οδηγο καμπυλη τον κυκλο $\mathbf{r}_1(u)$ ο οποιος εχει κεντρο το σημειο $(0,0,0)$, ακτινα 1 και βρισκεται επι του επιπεδου $z=0$ (γιατι συμβαινουν ολα αυτα;). Με αλλα λογια, η κυλινδρικη επιφανεια σχηματιζεται φεροντας απο καθε σημειο του κυκλου μια ευθεια παραλληλη στο διανυσμα $\mathbf{k}$ (στον αξονα των $z$). Η γραφικη παρασταση ειναι αυτη του Σχ.11.14.



Σχήμα 11.14: Η γραφικη παρασταση της κυλινδρικης επιφανειας.

**11.2.18.** Γραψτε την εξισωση και σχεδιαστε την κυλινδρικη επιφανεια οταν $\mathbf{r}_2 = \mathbf{i} + \mathbf{k}$ και $\mathbf{r}_1(u) = \mathbf{i}2\cos u + \mathbf{j}\sin u$.

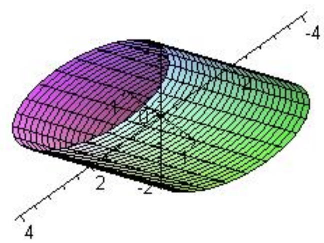
**Λυση**. Η εν λογω επιφανεια εχει γενετειρα το διανυσμα $\mathbf{i} + \mathbf{k}$ και οδηγο καμπυλη την ελλειψη $\frac{x^2}{2^1} + y^2 = 1$ και βρισκεται επι του επιπεδου $z = 0$. Με αλλα λογια, η κυλινδρικη επιφανεια σχηματιζεται φεροντας απο καθε σημειο της ελλειψης μια ευθεια παραλληλη στο διανυσμα $\mathbf{i} + \mathbf{k}$. Η εξισωση

$$\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{r}_1 + v \cdot \mathbf{r}_2(u)$$

γινεται

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(u,v) &= \mathbf{r}_1 + v \cdot \mathbf{r}_2(u) \\ &= \mathbf{i}2\cos u + \mathbf{j}\sin u + v \cdot (\mathbf{i} + \mathbf{k}) \\ &= \mathbf{i}(1 + 2\cos u) + \mathbf{j}\sin u + \mathbf{k}\cdot(1 + v)\,..\end{aligned}$$

Η γραφικη παρασταση ειναι αυτη του Σχ.11.15.




Σχήμα 11.15: Η γραφικη παρασταση της κυλινδρικης επιφανειας.

**11.2.19.** Να αναγνωριστει η επιφανεια $\mathbf{r}(u,v)=\mathbf{i}(2u+1)+\mathbf{j}(-u+3v)+\mathbf{k}(2+4u+5v)$.

**Λυση**. Μπορουμε να γραψουμε την εξισωση ως εξης

$$\mathbf{i}(2u+1)+\mathbf{j}(-u+3v)+\mathbf{k}(2+4u+5v)=(\mathbf{i}+2\mathbf{k})+u\cdot(\mathbf{i}2-\mathbf{j}+\mathbf{k}4)+v\cdot(\mathbf{j}3+\mathbf{k}5)=\mathbf{r}_0+u\mathbf{r}_1+v\mathbf{r}_2$$

με

$$\mathbf{r}_0=\mathbf{i}+2\mathbf{k},\quad \mathbf{r}_1=\mathbf{i}2-\mathbf{j}+\mathbf{k}4,\quad \mathbf{r}_2=\mathbf{j}3+\mathbf{k}5.$$

Αρα η επιφανεια ειναι ενα επιπεδο, το οποιο διερχεται απο το σημειο $(1,0,2)$ και ειναι παραλληλο στα διανυσματα $\mathbf{i}2-\mathbf{j}+\mathbf{k}4$ και $\mathbf{j}3+\mathbf{k}5$.

**11.2.20.** Να αναγνωριστει η επιφανεια $\mathbf{r}(u,v)=\mathbf{i}2u+\mathbf{j}3v+\mathbf{k}(u^2+v^2)$.

**Λυση**. Εχουμε

$$x(u,v)=2u,\quad y(u,v)=3u,\quad z(u,v)=u^2$$

οποτε

$$\left(\frac{x(u,v)}{2}\right)^2+\left(\frac{y(u,v)}{3}\right)^2=\left(\frac{2u}{2}\right)^2+\left(\frac{3u}{3}\right)^2=u^2=z(u,v).$$

Αρα η επιφανεια ειναι ελλειπτικο παραβολοειδες.

**11.2.21.** Να αναγνωριστει η επιφανεια $\mathbf{r}(u,v)=\mathbf{i}2u\cos v+\mathbf{j}3u\sin v+\mathbf{k}u^2$.

**Λυση**. Εχουμε

$$x(u,v)=2u\cos v,\quad y(u,v)=3u\sin v,\quad z(u,v)=u^2$$

οποτε

$$\begin{aligned}\left(\frac{x(u,v)}{2}\right)^2+\left(\frac{y(u,v)}{3}\right)^2&=\left(\frac{2u\cos v}{2}\right)^2+\left(\frac{3u\sin v}{3}\right)^2\\&=u^2\cdot\left(\cos^2 v+\sin^2 v\right)=u^2=z(u,v).\end{aligned}$$

Αρα η επιφανεια ειναι ελλειπτικο παραβολοειδες.

**11.2.22.** Να αναγνωριστει η επιφανεια $\mathbf{r}(u,v)=\mathbf{i}u+\mathbf{j}3\cos v+\mathbf{k}4\sin v$.

**Λυση**. Εχουμε

$$x(u,v)=u,\quad y(u,v)=3\cos v,\quad z(u,v)=4\sin v$$

οποτε

$$\left(\frac{y(u,v)}{3}\right)^2+\left(\frac{z(u,v)}{4}\right)^2=\left(\frac{3\cos v}{3}\right)^2+\left(\frac{4\sin v}{4}\right)^2=1..$$

Αρα η επιφανεια ειναι κυκλικος κυλινδρος παραλληλος προς τον αξονα των $x$.

**11.2.23.** Να αναγνωριστει η επιφανεια $\mathbf{r}(u,v)=\mathbf{i}u+\mathbf{j}3u\cos v+\mathbf{k}4u\sin v$.

**Λυση**. Εχουμε

$$x(u,v)=u,\quad y(u,v)=3u\cos v,\quad z(u,v)=4u\sin v$$

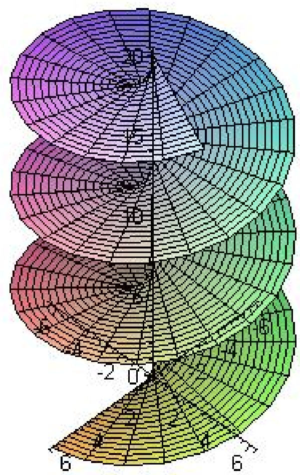
οποτε

$$\left(\frac{y(u,v)}{3}\right)^2+\left(\frac{z(u,v)}{4}\right)^2=\left(\frac{3u\cos v}{3}\right)^2+\left(\frac{4u\sin v}{4}\right)^2=u^2.$$

Αρα η επιφανεια ειναι κυκλικος κωνος παραλληλος προς τον αξονα των $x$.

**11.2.24.** Να αναγνωριστει και να σχεδιαστει η επιφανεια $\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{i}u\cos v + \mathbf{j}u\sin v + \mathbf{k}v$, $u \in [0,5]$, $v \in [0,6\pi]$.

**Λυση**. Η γραφικη παρασταση της επιφανειας δινεται στο Σχ. 11.16. Το σχημα θυμιζει μια ελικοειδη κλιμακα και πραγματι η ¨επισημη¨ ονομασια του ειναι *ελικοειδες*. Ας προσπαθησουμε να καταλαβουμε πως δημιουργειται το σχημα αυτο. Η επιφανεια



Σχήμα 11.16: Η γραφικη παρασταση του ελικοειδους.

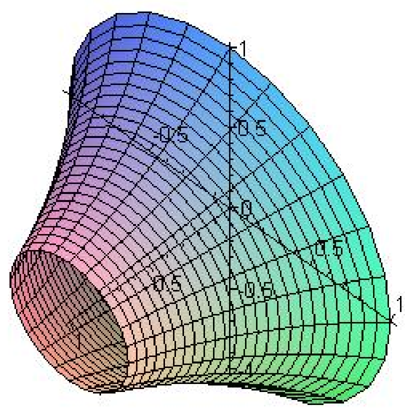
αποτελειται απο καμπυλες της μορφης

$$\mathbf{r}(u_0,v) = \mathbf{i}u_0\cos v + \mathbf{j}u_0\sin v + \mathbf{k}v$$

(για $u_0 \in [0,5]$ ). Για σταθερο $u_0$, καθε τετοια καμπυλη ειναι μια ελικα – μεγαλυτερες τιμες του $u_0$ δινουν ελικες με μεγαλυτερη ακτινα.Στο Σχ. 11.16 βλεπουμε τις ελικες αυτες και κατανοουμε πως η ενωση τους δημιουργει το ελικοειδες.

**11.2.25.** Να σχεδιαστει η επιφανεια $\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{i}u + \mathbf{j}e^{-u}\cos v + \mathbf{k}e^{-u}\sin v,\ u \in [0,1]$, $v \in [0, 2\pi]$.

**Λυση**. Η γραφικη παρασταση της επιφανειας δινεται στο Σχ. 11.17. Το σχημα θυμιζει το στομιο μιας τρομπετας. Για να καταλαβουμε πως δημιουργειται το σχημα αυτο



Σχήμα 11.17: Η γραφικη παρασταση της τρομπετας.

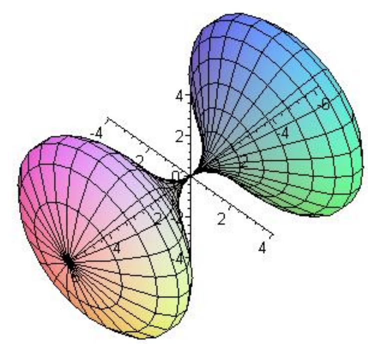
παρατηρουμε οτι η επιφανεια αποτελειται απο καμπυλες της μορφης

$$\mathbf{r}(u_0, v) = \mathbf{i}u_0 + \mathbf{j}e^{-u_0}\cos v + \mathbf{k}e^{-u_0}\sin v$$

(για $u_0 \in [0,1]$ ). Για σταθερο $u_0$, καθε τετοια καμπυλη ειναι ενας κυκλος με κεντρο το $(u,0,0)$, ακτινα $e^{-u_0}$ και κειμενος εξολοκληρου επι του επιπεδου $x = u_0$. Η ενωση αυτων των κυκλων δημιουργει την επιφανεια. Το σχημα της τρμπετας δημιουργειται απο την μειωση της ακτινα συμφωνα με την συναρτηση $e^{-u_0}$ - μια φθινουσα εκθετικη συναρτηση.

**11.2.26.** Να σχεδιαστει η επιφανεια $\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{i}3u + \mathbf{j}u^2(4-u^2)\cos v + \mathbf{k}u^2(4-u^2)\sin v$, $u \in [-2,2]$, $v \in [0,2\pi]$.

**Λυση**. Η γραφικη παρασταση της επιφανειας δινεται στο Σχ. **;;**. Το σχημα θυμιζει ενα *αδραχτι*. Για να καταλαβουμε πως δημιουργειται το σχημα αυτο παρατηρουμε οτι η



Σχήμα 11.18: Η γραφικη παρασταση του αδραχτιου.

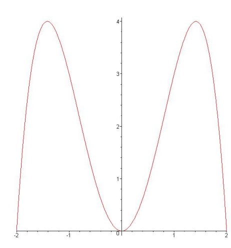
επιφανεια αποτελειται απο καμπυλες της μορφης

$$\mathbf{r}(u,v_0) = \mathbf{i}3u + \mathbf{j}u^2\left(4-u^2\right)\cos v_0 + \mathbf{k}u^2\left(4-u^2\right)\sin v_0$$

για $v_0 \in [0,2\pi]$. Ας θεωρησουμε την περιπτωση $v_1 = 0$. Τοτε παιρνουμε στο επιπεδο $xy$ την καμπυλη

$$\mathbf{r}(u,v_1) = \mathbf{i}3u + \mathbf{j}u^2\left(4-u^2\right).$$

Αυτη ειναι μια τεταρτοβαθμια καμπυλη με ριζες στο συνολο $\{-2,0,2\}$ και εχει γραφικη παρασταση του Σχ.11.19. Για $v_2 = \pi/2$ παιρνουμε στο επιπεδο $yz$ την καμπυλη



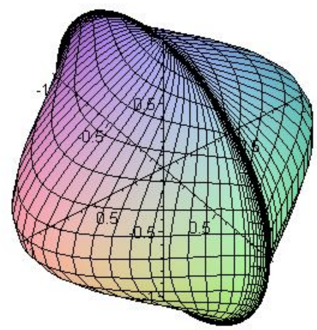
Σχήμα 11.19: Η γραφικη παρασταση μιας καμπυλης του αδραχτιου.

$$\mathbf{r}(u,v_2) = \mathbf{i}3u + \mathbf{k}u^2\left(4-u^2\right)$$

δηλ. την .ιδια με αυτη της $\mathbf{r}(u,v_1)$ αλλα περιστραμμενη κατα $\pi/2$. Με αντιστοιχο τροπο παιρνουμε και ολες τις υπολοιπες καμπυλες $\mathbf{r}(u,v)$, οι οποιες ειναι περιστραμμενες της $\mathbf{r}(u,v_1)$, για $v \in [0,2\pi]$· η ενωση αυτων δινει το αδραχτι.

**11.2.27.** Να σχεδιαστει η επιφανεια $\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{i}\cos^3 u \cos v + \mathbf{j}\sin^3 u \cos v + \mathbf{k}\sin v$, $u \in [-2,2]$, $v \in [0,2\pi]$.

**Λυση**. Η γραφικη παρασταση της επιφανειας δινεται στο Σχ. **;;**. Για να καταλαβουμε



Σχήμα 11.20: Η γραφικη παρασταση του αδραχτιου.

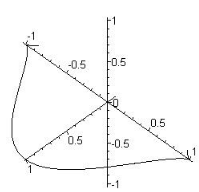
πως δημιουργειται το σχημα αυτο παρατηρουμε οτι η επιφανεια αποτελειται απο καμπυλες της μορφης

$$\mathbf{r}(u,v_0) = \mathbf{i}\cos^3 u \cos v_0 + \mathbf{j}\sin^3 u \cos v_0 + \mathbf{k}\sin v_0$$

για $v_0 \in [0,2\pi]$. Ας θεωρησουμε την περιπτωση $v_1 = 0$. Τοτε παιρνουμε στο επιπεδο $xy$ την καμπυλη

$$\mathbf{r}(u,v_1) = \mathbf{i}\cos^3 u + \mathbf{j}\sin^3 u.$$

Αυτη ικανοποιει την σχεση $x^{2/3} + y^{2/3} = \cos^2 u + \sin^2 u = 1$. Η γραφικη της παρασταση δινεται στο Σχ.11.21. Με αντιστοιχο τροπο παιρνουμε και ολες τις υπολοιπες καμπυλες

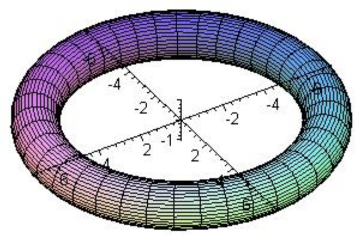


Σχήμα 11.21: Η γραφικη παρασταση μιας καμπυλης του αδραχτιου.

$\mathbf{r}(u,v)$, οι οποιες ειναι περιστραμμενες της $\mathbf{r}(u,v_1)$, για $v \in [0,2\pi]$· η ενωση αυτων δινει την επιφανεια του Σχ.**;;**.

**11.2.28.** Να αναγνωριστει και να σχεδιαστει η επιφανεια $\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{i}(6+\cos u)\cos v + \mathbf{j}(6+\cos u)\sin v + \mathbf{k}\sin u$, $u \in [0,2\pi]$, $v \in [0,2\pi]$.

**Λυση**. Η γραφικη παρασταση της επιφανειας δινεται στο Σχ. 11.22. Για να καταλ-



Σχήμα 11.22: Η γραφικη παρασταση του τορου.

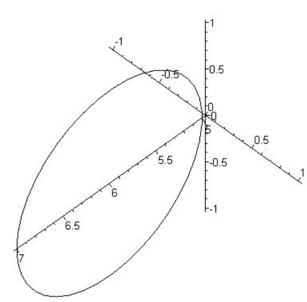
αβουμε πως δημιουργειται το σχημα αυτο παρατηρουμε οτι η επιφανεια αποτελειται απο καμπυλες της μορφης

$$\mathbf{r}(u,v_0) = \mathbf{i}(6+\cos u)\cos v_0 + \mathbf{j}(6+\cos u)\sin v_0 + \mathbf{k}\sin u$$

για $v_0 \in [0,2\pi]$. Ας θεωρησουμε την περιπτωση $v_1 = 0$. Τοτε παιρνουμε στο επιπεδο $xy$ την καμπυλη

$$\mathbf{r}(u,v_1) = \mathbf{i}(6+\cos u) + \mathbf{k}\sin u.$$

Αυτη η καμπυλη ειναι ενας κυκλος στο επιπεδο $xz$, με κεντρο το $(6,0,0)$ και ακτινα 1. Η γραφικη παρασταση δινεται στο Σχ.11.23. Με αντιστοιχο τροπο παιρνουμε και ολες τις

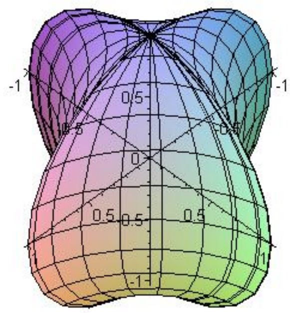


Σχήμα 11.23: Η γραφικη παρασταση μιας καμπυλης του τορου.

υπολοιπες καμπυλες $\mathbf{r}(u,v)$, οι οποιες ειναι περιστραμμενες της $\mathbf{r}(u,v_1)$, για $v \in [0,2\pi]$· η ενωση αυτων δινει την επιφανεια του τορου.

**11.2.29.** Να σχεδιαστει η επιφανεια $\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{i}\cos^3 u \cos v + \mathbf{j}\sin^3 u \cos v + \mathbf{k}\sin v$, $u \in [0, 2\pi]$, $v \in [0, 2\pi]$.

**Λυση**. Η γραφικη παρασταση της επιφανειας δινεται στο Σχ. 11.24. Για να καταλ-




Σχήμα 11.24: Η γραφικη παρασταση του αστεροειδους.

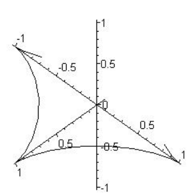
αβουμε πως δημιουργειται το σχημα αυτο παρατηρουμε οτι η επιφανεια αποτελειται απο καμπυλες της μορφης

$$\mathbf{r}(u,v_0) = \mathbf{i}\cos^3 u \cos v_0 + \mathbf{j}\sin^3 u \cos v + \mathbf{k}\sin v$$

για $v_0 \in [0, 2\pi]$. Ας θεωρησουμε την περιπτωση $v_1 = 0$. Τοτε παιρνουμε στο επιπεδο $xy$ την καμπυλη

$$\mathbf{r}(u,v_1) = \mathbf{i}\cos^3 u + \mathbf{j}\sin^3 u.$$

Αυτη η καμπυλη ειναι μια αστεροειδης στο επιπεδο $xy$. Η γραφικη παρασταση δινεται στο Σχ.**;;**. Με αντιστοιχο τροπο παιρνουμε και ολες τις υπολοιπες καμπυλες $\mathbf{r}(u,v)$, οι οποιες

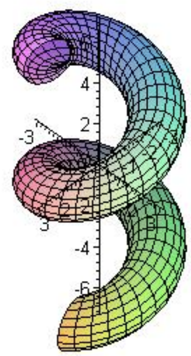



Σχήμα 11.25: Η γραφικη παρασταση μιας καμπυλης του αστεροειδους.

ειναι περιστραμμενες της $\mathbf{r}(u,v_1)$, για $v \in [0, 2\pi]$· η ενωση αυτων δινει την επιφανεια του αστεροειδους.

**11.2.30.** Να σχεδιαστει η επιφανεια $\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{i}(2+\sin v)\cos u + \mathbf{j}(2+\sin v)\sin u + \mathbf{k}(u+\cos v)$, $u \in [0, 2\pi]$, $v \in [-6, 6]$.

**Λυση**. Ειναι μια σωληνοειδης ελικα, οπως φαινεται στο Σχ.11.26.Η επιφανεια αυτη




Σχήμα 11.26: Η γραφικη παρασταση της σωληνοειδους ελικας.

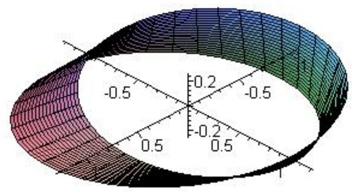
δημιουργειται ως εξης. Ας γραψουμε την $\mathbf{r}(u,v)$ ως εξης:

$$\mathbf{r}(u,v) = (\mathbf{i}2\cos u + \mathbf{j}2\sin u + \mathbf{k}u) + (\mathbf{i}\cos u \sin v + \mathbf{j}\sin u \sin v + \mathbf{k}\cos v)$$

βλεπουμε οτι η $\mathbf{r}(u,v)$ ειναι το αθροισμα της $\mathbf{r}_1(u) = \mathbf{i}2\cos u + \mathbf{j}2\sin u + \mathbf{k}u$ η οποια ειναι μια ελικα (δηλ. μια *καμπυλη*) στην οποια (για καθε δεδομενο $u_0$) προστιθεται η $\mathbf{r}_2(v) = \mathbf{i}\cos u_0 \sin v + \mathbf{j}\sin u_0 \sin v + \mathbf{k}\cos v$, ενας κυκλος με κεντρο το αντιστοιχο σημειο της ελικας, δηλ. το $\mathbf{r}_1(u_0)$. Ετσι δημιουργειται η σωληνοειδης ελικα.

**11.2.31.** Να σχεδιαστει η επιφανεια $\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{i}\left(2\cos u + v\cos\frac{u}{2}\right) + \mathbf{j}\left(2\sin u + v\cos\frac{u}{2}\right) + \mathbf{k}v\sin\frac{u}{2}$, $u \in [0, 2\pi]$, $v \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$.

**Λυση**. Η γραφικη παρασταση της επιφανειας δινεται στο Σχ. **;;**. Η επιφανεια αυτη




Σχήμα 11.27: Η γραφικη παρασταση του τορου.

λεγεται *λωριδα* $Moebius$. Μπορει να γραφτει ως εξης:

$$\mathbf{r}(u,v) = (\mathbf{i}2\cos u + \mathbf{j}2\sin u) + \left(\mathbf{i}v\cos\frac{u}{2} + \mathbf{j}v\cos\frac{u}{2}v + \mathbf{k}v\sin\frac{u}{2}\right)$$

βλεπουμε οτι η $\mathbf{r}(u,v)$ ειναι το αθροισμα της $\mathbf{r}_1(u) = \mathbf{i}2\cos u + \mathbf{j}2\sin u$ (η οποια ειναι ενας κυκλος στο επιπεδο $xy$ με κεντρο το $(0,0,0)$ και ακτινα 2) με την $\mathbf{r}_2(v) = \mathbf{i}v\cos\frac{u}{2} + \mathbf{j}v\cos\frac{u}{2}v + \mathbf{k}v\sin\frac{u}{2}$, η οποια, για δεδομενο $u_0$ ειναι ενα ευθυγραμμο τμημα με μεταβλητο προσανατολισμο. Η ενωση αυτων των ευθυγραμμων τμηματων δινει την λωριδα του $Moebius$. Η λωριδα αυτη εχει το εξης χαρακτηριστικο εχει *μονο μια επιφανεια*.

**11.2.32.** Δινεται η επιφανεια $\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{i}u + \mathbf{j}v - \mathbf{k}(3u^2+v^2)$. Να βρεθει ενα καθετο διανυσμα και το εφαπτομενο επιπεδο στο σημειο $(1,1,-4)$.

**Λυση**. Η επιφανεια ειναι ενα ελλειπτικο παραβολοειδες. Το καθετο διανυσμα ειναι

$$\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -6u \\ 0 & 1 & -2v \end{vmatrix} = \mathbf{i}6u + \mathbf{j}2v + \mathbf{k}$$

και στο σημειο $\mathbf{n}_1 = \mathbf{i}6 + \mathbf{j}2 + \mathbf{k}$. Το εφαπτομενο επιπεδο ειναι

$$0 = (\mathbf{i}\cdot(x-1) + \mathbf{j}\cdot(y-1) + \mathbf{k}\cdot(z+4)) \cdot (\mathbf{i}6 + \mathbf{j}2 + \mathbf{k}) \Rightarrow 4 = 6x + 2y + z$$

και σε διανυσματικη μορφη

$$\mathbf{R}(u,v) = \mathbf{i}u + \mathbf{j}v + \mathbf{k}\cdot(4 - 6u - 2v).$$

**11.2.33.** Δινεται η επιφανεια $z - x^2 + y^2 = 0$. Να βρεθει ενα καθετο διανυσμα και το εφαπτομενο επιπεδο στο σημειο $(1,0,1)$.

**Λυση**. Το καθετο διανυσμα ειναι

$$\mathbf{n} = \nabla\phi|_{(x,y,z)=(1,0,1)} = (-\mathbf{i}2x + \mathbf{j}2y + \mathbf{k})_{(x,y,z)=(1,0,1)} = (-\mathbf{i}2 + \mathbf{k}).$$

Το εφαπτομενο επιπεδο ειναι

$$0 = (\mathbf{i}\cdot(x-1) + \mathbf{j}\cdot(y-0) + \mathbf{k}\cdot(z-1)) \cdot (-\mathbf{i}2 + \mathbf{k}) \Rightarrow -1 = -2x + z$$

και σε διανυσματικη μορφη

$$\mathbf{R}(u,v) = \mathbf{i}u + \mathbf{j}v + \mathbf{k}\cdot(-1 + 2u).$$

Ολα τα επιπεδα περνουν απο το $(0,0,0)$. ς $3(x_0^2 - y_0)x - 3x_0(y + y_0) + 2z + 4z_0 = 0$.

**11.2.34.** Να βρεθει το καθετο δισνυσμα και το εφαπτομενο επιπεδο στην επιφανεια $S$ : $z = (x^2+y^2)^{1/2}$ και στο σημειο $(0,0,0)$.

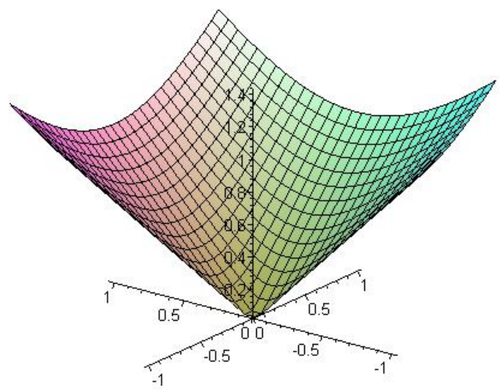
**Λυση**. Γραφουμε την επιφανεια στην μορφη

$$\phi(x,y,z) = z - \left(x^2+y^2\right)^{1/2} = 0$$

Το καθετο διανυσμα ειναι

$$\mathbf{n}(x,y,z) = \nabla\phi|_{(x,y,z)=(1,0,1)} = \left(-\mathbf{i}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} - \mathbf{j}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \mathbf{k}\right).$$

Παρατηρουμε οτι στο σημειο $(0,0,0,)$ το καθετο διανυσμα $\mathbf{n}_{(x,y,z)=(1,0,1)} = (-\mathbf{i}2 + \mathbf{k})$ δεν οριζεται (οποτε δεν οριζεται ουτε το εφαπτομενο επιπεδο)! Πραγματι, εαν εξετασουμε την γραφικη παρασταση της $S$ στο Σχ. **;;** βλεπουμε οτι στο $(0,0,0)$ σχηματιζει μια αιχμη και δεν μπορουμε να φερουμε ουτε το καθετο διανυσμα ουτε το εφαπτομενο επιπεδο.




Σχήμα 11.28: Μια επιφανεια η οποια στο σημειο $(0,0,0)$ δεν εχει ουτε καθετο διανυσμα ουτε εφαπτομενο επιπεδο.

**11.2.35.** Να βρεθουν τα σημεια $(x_a,0,0)$, $(0,y_a,0)$, $(0,0,z_a)$, στα οποια τεμνει τους αξονες $x$, $y$, $z$ το επιπεδο που εφαπτεται σε τυχον σημειο της επιφανειας $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}-1=0$ ($x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$). Να δειχτει οτι το αθροισμα $x_a+y_a+z_a$ ειναι σταθερο..

**Λυση**. Το καθετο διανυσμα σε τυχον σημειο $(x_0,y_0,z_0)$ ειναι

$$\begin{aligned}\mathbf{n} = \nabla\phi|_{(x,y,z)=(1,0,1)} &= \left(\mathbf{i}\frac{1}{2\sqrt{x}}+\mathbf{j}\frac{1}{2\sqrt{y}}+\mathbf{k}\frac{1}{2\sqrt{z}}\right)_{(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)} \\ &= \left(\mathbf{i}\frac{1}{2\sqrt{x_0}}+\mathbf{j}\frac{1}{2\sqrt{y_0}}+\mathbf{k}\frac{1}{2\sqrt{z_0}}\right).\end{aligned}$$

Το εφαπτομενο επιπεδο στο $(x_0,y_0,z_0)$ ειναι

$$\begin{aligned}0 &= (\mathbf{i}\cdot(x-x_0)+\mathbf{j}\cdot(y-y_0)+\mathbf{k}\cdot(z-z_0))\cdot\left(\mathbf{i}\frac{1}{2\sqrt{x_0}}+\mathbf{j}\frac{1}{2\sqrt{y_0}}+\mathbf{k}\frac{1}{2\sqrt{z_0}}\right) \\ &\Rightarrow \frac{x-x_0}{2\sqrt{x_0}}+\frac{y-y_0}{2\sqrt{y_0}}+\frac{z-z_0}{2\sqrt{z_0}}=0.\end{aligned}$$

Τα σημειο $x_a$ λαμβανενται θετοντας $y=z=0$, δηλ.

$$\begin{aligned}&\frac{x_a-x_0}{2\sqrt{x_0}}-\frac{y_0}{2\sqrt{y_0}}-\frac{z_0}{2\sqrt{z_0}}=0 \\ &\qquad\Rightarrow \frac{x_a}{\sqrt{x_0}}=\sqrt{x_0}+\sqrt{y_0}+\sqrt{z_0}=1 \\ &\qquad\Rightarrow x_a=\sqrt{x_0}\end{aligned}$$

Αντιστοιχα παιρνουμε

$$y_a=\sqrt{y_0}, \qquad z_a=\sqrt{z_0}$$

οποτε
$$x_a + y_a + z_a = \sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0} = 1.$$
(Στα παραπανω εκμεταλλευτηκαμε οτι το $(x_0, y_0, z_0)$ ειναι ενα σημειο της επιφανειας, αρα ικανοποιει $\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0} = 1$.)

## 11.3 Αλυτα Προβληματα

**11.3.1.** Γραψτε τις παραμετρικες εξισωσεις του επιπεδου $x - 2y + z = 4$ και σχεδιαστε το επιπεδο.
**Απ.** $\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{i}u + \mathbf{j}v + \mathbf{k}(4 - u + 2v)$.

**11.3.2.** Γραψτε τις παραμετρικες εξισωσεις του επιπεδου το οποιο περναει απο το σημειο $\mathbf{r}_0 = (1,2,3)$ και περιεχει τα διανυσματα $\mathbf{a} = \mathbf{i}2 + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ και $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.
**Απ.** $\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{i}(1 + 2u + v) + \mathbf{j}(2 + u - v) + \mathbf{k}(3 - u + 2v)$.

**11.3.3.** Γραψτε τις παραμετρικες εξισωσεις του επιπεδου το οποιο περναει απο το σημειο $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ και περιεχει τα διανυσματα $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$.
**Απ.** $\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$.

**11.3.4.** Γραψτε τις παραμετρικες εξισωσεις της σφαιρας $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.
**Απ.** $\mathbf{r}(u,v) = (1 + 2\cos u \cos v, 2 + \sin u \cos v, 1 + \sin v)$.

**11.3.5.** Γραψτε τις παραμετρικες εξισωσεις της σφαιρας $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 4$.
**Απ.** $\mathbf{r}(u,v) = (1 + 2\cos u \cos v, 2 + \sin u \cos v, 1 + \sin v)$.

**11.3.6.** Γραψτε τις παραμετρικες εξισωσεις του ελλειψοειδους $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1$
**Απ.** $\mathbf{r}(u,v) = (2\cos u \cos v, 3\sin u \cos v, 5\sin v)$.

**11.3.7.** Γραψτε τις παραμετρικες εξισωσεις του κυλινδρου $1 = x^2 + y^2$.
**Απ.** $\mathbf{r}(u,v) = (\cos v, \sin v, u)$.

**11.3.8.** Γραψτε τις παραμετρικες εξισωσεις του παραβολοειδους $z = x^2 + 4y^2$.
**Απ.** $\mathbf{r}(u,v) = (\sqrt{u}\cos v, 2\sqrt{u}\sin v, u)$.

**11.3.9.** Γραψτε τις παραμετρικες εξισωσεις του κωνου $x^2 = z^2 + y^2$.
**Απ.** $\mathbf{r}(u,v) = (u, u\cos v, u\sin v)$.

**11.3.10.** Γραψτε τις παραμετρικες εξισωσεις της κωνικης επιφανειας με κορυφη το σημειο $(0,0,1)$ και οδηγο καμπυλη τον κυκλο $x^2 + y^2 = 1$ στο επιπεδο $xy$. Σχεδιαστε την κωνικη επιφανεια.
**Απ.** $\mathbf{r}(u,v) = (0,0,1) + v \cdot ((\cos u, \sin u, 0) - (0,0,1)) = (v\cos u, v\sin u, 1 - v)$.

**11.3.11.** Γραψτε τις παραμετρικες εξισωσεις της κωνικης επιφανειας με κορυφη το σημειο $(0,1,0)$ και οδηγο καμπυλη την παραβολη $x^2 = z$ στο επιπεδο $xz$. Σχεδιαστε την κωνικη επιφανεια.
**Απ.** $\mathbf{r}(u,v) = (0,1,0) + v \cdot ((u,0,u^2) - (0,1,0)) = (vu, 1 - v, vu^2)$.

**11.3.12.** Γραψτε τις παραμετρικες εξισωσεις της κυλινδρικης επιφανειας με γενετειρα το διανυσμα $(0,1,0)$ και οδηγο καμπυλη τον κυκλο $x^2+z^2=1$ στο επιπεδο $xz$. Σχεδιαστε την κωνικη επιφανεια.

**Απ**. $\mathbf{r}(u,v)=(\cos u,0,\sin u)+v\cdot(0,1,0)=(\cos u,v,\sin u)$.

**11.3.13.** Γραψτε τις παραμετρικες εξισωσεις της κυλινδρικης επιφανειας με με γενετειρα το διανυσμα $(1,1,1)$ και οδηγο καμπυλη την ελλειψη $x^2+\frac{z^2}{4}=1$ στο επιπεδο $xz$. Σχεδιαστε την κυλινδρικη επιφανεια.

**Απ**. $\mathbf{r}(u,v)=(\cos u,0,2\sin u)+v\cdot(1,1,1)=(v+\cos u,v,v+2\sin u)$.

**11.3.14.** Να αναγνωριστει και να σχεδιαστει η επιφανεια $\mathbf{r}(u,v)=\mathbf{i}u\cos v+\mathbf{j}u\sin v+\mathbf{k}u^2$.

**Απ**. Ειναι ελλειπτικο παραβολοειδες.

**11.3.15.** Να αναγνωριστει και να σχεδιαστει η επιφανεια $\mathbf{r}(u,v)=\mathbf{i}(5+3u+2v)+\mathbf{j}(u+3v)+\mathbf{k}(1+u+v)$.

**Απ**. Ειναι επιπεδο.

**11.3.16.** Να αναγνωριστει και να σχεδιαστει η επιφανεια $\mathbf{r}(u,v)=\mathbf{i}u+\mathbf{j}\cos v+\mathbf{k}\sin v$.

**Απ**. Ειναι κυκλικος κυλινδρος.

**11.3.17.** Να αναγνωριστει και να σχεδιαστει η επιφανεια $\mathbf{r}(u,v)=\mathbf{i}u+\mathbf{j}u\cos v+\mathbf{k}u\sin v$.

**Απ**. Ειναι κυκλικος κωνος.

**11.3.18.** Να αναγνωριστει και να σχεδιαστει η επιφανεια $\mathbf{r}(u,v)=\mathbf{i}(1-v+3v\cos u)+\mathbf{j}(1-v+2v\sin v)+\mathbf{k}(1-v)$.

**Απ**. Ειναι ελλειψοειδης κωνος.

**11.3.19.** Να αναγνωριστει και να σχεδιαστει η επιφανεια $\mathbf{r}(u,v)=\mathbf{i}2\cos u+\mathbf{j}v+\mathbf{k}2\sin u$.

**Απ**. Ειναι κυκλικος κυλινδρος, παραληλος στον αξονα των $y$.

**11.3.20.** Να αναγνωριστει και να σχεδιαστει η επιφανεια $\mathbf{r}(u,v)=\mathbf{i}(v+3\cos u)+\mathbf{j}(v+2\sin u)+\mathbf{k}v$.

**Απ**. Ειναι ελλειψοειδης κυλινδρος.

**11.3.21.** Δινεται η επιφανεια $z-xy=0$. Να βρεθει ενα καθετο διανυσμα και το εφαπτομενο επιπεδο στο σημειο $(2,3,6)$

**Απ**.$-\mathbf{i}3-\mathbf{j}2+\mathbf{k}$, $3x+2y-z-6=0$.

**11.3.22.** Δινεται η επιφανεια $4z-x^2-y^2=0$. Να βρεθει ενα καθετο διανυσμα και το εφαπτομενο επιπεδο στο σημειο $(2,-4,5)$.

**Απ**. $\mathbf{i}-\mathbf{j}2-\mathbf{k}$, $x-2y-z-5=0$.

**11.3.23.** Δινεται η επιφανεια $4z-x^2+y^2=0$. Να βρεθει ενα καθετο διανυσμα και το εφαπτομενο επιπεδο στο σημειο $(3,1,2)$.

**Απ**. $-6\mathbf{i}+\mathbf{j}2+\mathbf{k}4$, $-6x+2y+4z+8=0$.

**11.3.24.** Δινεται η επιφανεια $x^2yz+3y^2-2xz^2+8z=0$. Να βρεθει ενα καθετο διανυσμα και το εφαπτομενο επιπεδο στο σημειο $(1,2,-1)$.

**Απ**. $-\mathbf{i}6+\mathbf{j}11+\mathbf{k}14$, $6x-11y-14z+2=0$.

**11.3.25.** Δινεται η επιφανεια $z - 2x^2 + 4y^2 = 0$. Να βρεθει η καθετη ευθεια και το εφαπτομενο επιπεδο στο σημειο $(2, 1, 4)$.

**Απ.** $\frac{x-2}{8} = \frac{1-y}{8} = 4 - z$, $8x - 8y - z - 4 = 0$.

**11.3.26.** Δινεται η επιφανεια $z - x^3 - y^3 + 3xy = 0$. Να βρεθει η καθετη ευθεια και το εφαπτομενο επιπεδο στο σημειο $(1, 1, -1)$.

**11.3.27. Απ**. $x = y = 1$, $z = -1$.

**11.3.28.** Δινεται η επιφανεια $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$. Να βρεθει η καθετη ευθεια και το εφαπτομενο επιπεδο στο σημειο $(1, 2, -1)$.

**Απ.**$x - 1 = \frac{y-2}{11} = \frac{z+1}{5}$, $x + 11y + 5z - 18 = 0$.

**11.3.29.** Δινεται η επιφανεια $4 + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} - (x + y + z) = 0$. Να βρεθει η καθετη ευθεια και το εφαπτομενο επιπεδο στο σημειο $(2, 3, 6)$.

**Απ.** $\frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{4} = z - 6$, $5x + 4y + z - 28 = 0$.

**11.3.30.** Να βρεθει το εφαπτομενο επιπεδο στην επιφανεια $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}u + \mathbf{j}v + \mathbf{k}\sqrt{u^2 + v^2} - uv$ και στο σημειο $(3, 4, -7)$.

**Απ**. $17x + 11y + 5z = 60$.

**11.3.31.** Να βρεθει το εφαπτομενο επιπεδο στην επιφανεια $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}a \cos u \sin v + \mathbf{j}b \sin u \sin v + \mathbf{k}c \cos v$ και στο σημειο $\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}, \frac{b\sqrt{3}}{3}, \frac{c\sqrt{3}}{3}\right)$.

**Απ**. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = \sqrt{3}$.

**11.3.32.** Να βρεθει το εφαπτομενο επιπεδο στην επιφανεια $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i} \cos u \sin v + \mathbf{j}\frac{\sqrt{2}}{2} \sin u \sin v + \mathbf{k} \cos v$ και παραλληλο στο επιπεδο $x - y + 2z = 0$.

**Απ**. $x - y + 2z = \sqrt{11/2}$.

**11.3.33.** Να βρεθει το εφαπτομενο επιπεδο στην επιφανεια $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}a \cos u \sin v + \mathbf{j}b \sin u \sin v + \mathbf{k}c \cos v$ το οποιο τεμνει ισες αποστασεις απο τους αξονες $x, y$ και $z$.

**Απ**. $x + y + z + = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

**11.3.34.** Να βρεθει το εφαπτομενο επιπεδο στην επιφανεια $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}u \cos v + \mathbf{j}u \sin v + \mathbf{k}\sqrt{a^2 - u^2}$ και στο σημειο $(x_0, y_0, z_0)$.

**Απ**. $x_0 x + y_0 y + z_0 z = a^2$.

**11.3.35.** Να βρεθει το εφαπτομενο επιπεδο στην επιφανεια $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}u + \mathbf{j}v + \mathbf{k}uv$ και καθετο στο διανυσμα $(2, 2, -1)$.

**Απ**. $2x + y - -z = 2$

**11.3.36.** Αποδειξτε οτι ολα τα επιπεδα που εφαπτονται στην επιφανεια $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}u + \mathbf{j}v + \mathbf{k}uf(v/u)$ περνουν απο ενα σταθερο σημειο.

**11.3.37.** Να δειχτει οτι το επιπεδο το οποιο εφαπτεται στην επιφανεια $\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}u + \mathbf{j}v + \mathbf{k}\frac{1}{uv}$ σε τυχον σημειο, και τα επιπεδα $xy$, $yz$, $zx$ σχηματιζουν ενα τετραεδρο σταθερου ογκου.

# Κεφάλαιο 12

# Επιφανειακα Ολοκληρωματα

## 12.1 Θεωρια

**12.1.1.** Εστω οτι μας δινεται μια *απλη*, *λεια* επιφανεια $A$ με διανυσματικη αναπαρασταση

$$\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{i}x(u,v) + \mathbf{j}y(u,v) + \mathbf{k}z(u,v), \qquad (u,v) \in D \subseteq R^2$$

και ζητουμε να βρουμε το *εμβαδο* αυτης, το οποιο συμβολιζουμε με $S$.

**12.1.2.** Το *στοιχειωδες εμβαδο* ειναι $dS = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| dudv$. Οριζουμε τα *θεμελιωδη ποσα πρωτης ταξης* ως εξης

$$E = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\right|^2, \qquad G = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|^2, \qquad F = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$$

και τοτε το στοιχειωδες εμβαδο ειναι

$$dS = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| dudv = \sqrt{EG - F^2} dudv \tag{12.1}$$

και το συνολικο εμβαδο της επιφανειας ειναι

$$S = \iint_A dS = \iint_D \sqrt{\left|\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right|^2 + \left|\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right|^2 + \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|^2} dudv = \iint_D \sqrt{EG - F^2} dudv. \tag{12.2}$$

**12.1.3.** Οταν η επιφανεια δινεται στην μορφη

$$\mathbf{r}(x,y) = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z(x,y)$$

τοτε η (12.1) απλοποιειται και γινεται

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy \tag{12.3}$$

(συγκρινετε την (12.3) με την εκφραση για το στοιχειωδες μηκος καμπυλης) και το συνολικο εμβαδο της επιφανειας ειναι

$$\iint_A dS = \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy \tag{12.4}$$

οπου $D_{xy}$ ειναι η *εικονα* του $D$ στο επιπεδο $xy$: $D_{xy} = \{(x(u,v), y(u,v)) : (u, v \in D)\}$.

**12.1.4.** Τελος, οταν η επιφανεια δινεται στην μορφη $\phi(x,y,z) = 0$, το στοιχειωδες εμβαδο της επιφανειας ειναι

$$dS = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2}}{\left|\frac{\partial\phi}{\partial z}\right|} dxdy, \tag{12.5}$$

$$= \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2}}{\left|\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|} dydz, \tag{12.6}$$

$$= \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2}}{\left|\frac{\partial\phi}{\partial y}\right|} dzdx \tag{12.7}$$

(συγκρινετε τις (12.5)–(12.7) με την (12.3) ) και το συνολικο εμβαδο της επιφανειας ειναι

$$\iint_A dS = \iint\limits_{D_{xy}} \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2}}{\left|\frac{\partial\phi}{\partial z}\right|} dxdy \tag{12.8}$$

$$= \iint\limits_{D_{yz}} \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2}}{\left|\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|} dydz \tag{12.9}$$

$$= \iint\limits_{D_{zx}} \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2}}{\left|\frac{\partial\phi}{\partial y}\right|} dzdx. \tag{12.10}$$

**12.1.5.** Οι παραπανω τυποι για το εμβαδο ειναι ειδικες περιπτωσεις μιας κατηγοριας ολοκληρωματων τα οποια λεγονται *επιφανειακα ολοκληρωματα Α΄ ειδους*.

**12.1.6.** Εστω οτι μας δινεται μια επιφανεια $A$ μεσω της διανυσματικης σχεσης $\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{i}x(u,v) + \mathbf{j}y(u,v) + \mathbf{k}z(u,v)$, $(u,v) \in D \subseteq R^2$. Αν ισχυουν καταλληλες συνθηκες συνεχειας και παραγωγισιμοτητας, μπορουμε να ορισουμε το διπλο ολοκληρωμα

$$\iint\limits_{D} f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \left|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial v}\right| dudv. \tag{12.11}$$

Θυμηθειτε οτι το διανυσμα $\mathbf{n} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ ειναι καθετο στην επιφανεια. Ετσι η ποσοτητα

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right) dudv = \mathbf{n} dudv$$

ειναι το στοιχειωδες *προσανατολισμενο εμβαδο* της $A$ και το $\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| dudv$ ειναι το στοιχειωδες "βαθμωτο εμβαδο". Χρησιμοποιουμε και τους συμβολισμους

$$dS = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| dudv,$$

και

$$\iint_A f(x,y,z)\, dS = \iint_D f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| dudv. \tag{12.12}$$

Τα ολοκληρωματα αυτου του τυπου λεγονται *επιφανειακα ολοκληρωματα Α΄ ειδους*.

**12.1.7.** Υπενθυμιζουμε οτι

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \mathbf{i}\frac{D(y,z)}{D(u,v)} + \mathbf{j}\frac{D(z,x)}{D(u,v)} + \mathbf{k}\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$$

οποτε η (12.12) γινεται

$$\iint_D f(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \sqrt{\left|\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\right|^2 + \left|\frac{D(z,x)}{D(u,v)}\right|^2 + \left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|^2} dudv. \tag{12.13}$$

**12.1.8.** Στην περιπτωση που $u = x$, $v = y$, η (12.12) γινεται

$$\iint_A f(x,y,z)\, dS = \iint_D f(x,y,z(x,y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy. \tag{12.14}$$

Αντιστοιχα, οταν $u = x$, $v = z$, η (12.12) γινεται

$$\iint_A f(x,y,z)\, dS = \iint_D f(x, y(x,z), z) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2} dxdz. \tag{12.15}$$

και οταν $u = y$, $v = z$, η (12.12) γινεται

$$\iint_A f(x,y,z)\, dS = \iint_D f(x(y,z), y, z) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} dydz. \tag{12.16}$$

**12.1.9.** Τελος, αν η επιφανεια δινεται στην μορφη $\phi(x, y, z)$ και $(x, y, z) \in D$, τοτε η (12.12) μπορει να γραφει σε οποιαδηποτε απο τις παρακατω μορφες

$$\iint_A f(x,y,z)\,dS = \iint\limits_{D_{xy}} f(x,y,z)\,\frac{\sqrt{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2}}{\left|\frac{\partial\phi}{\partial z}\right|}dxdy \tag{12.17}$$

$$= \iint\limits_{D_{yz}} f(x,y,z)\,\frac{\sqrt{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2}}{\left|\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|}dydz \tag{12.18}$$

$$= \iint\limits_{D_{zx}} f(x,y,z)\,\frac{\sqrt{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2}}{\left|\frac{\partial\phi}{\partial y}\right|}dzdx \tag{12.19}$$

οπου $D_{xy}$ ειναι η *προβολη* του $D$ στο επιπεδο $xy$, $D_{yz}$ ειναι η *προβολη* του $D$ στο επιπεδο $yz$, $D_{zx}$ ειναι η *προβολη* του $D$ στο επιπεδο $zx$.

**12.1.10.** Το κεντρο μαζας και οι ροπες αδρανειας μιας υλικης επιφανειας μπορουν να υπολογιστουν με χρηση επιφανειακου ολοκληρωματος Α′ ειδους.

**12.1.11.** Αν μας δοθει μια λεια υλικη επιφανεια $A$ με πυκνοτητα $\rho(x, y, z)$, μπορουμε να υπολογισουμε την μαζα, τις συντεταγμενες του κεντρου μαζας και τις ροπες αδρανειας (ως προς τους αξονες $x, y, z$) της $A$ απο τους παρακατω τυπους

$$\begin{aligned}
m &= \iint_A \rho(x,y,z)\,dS \\
x_0 &= \iint_A x\rho(x,y,z)\,dS, \quad y_0 = \iint_A y\rho(x,y,z)\,dS, \quad z_0 = \iint_A z\rho(x,y,z)\,dS \\
I_x &= \iint_A \left(y^2+z^2\right)\rho(x,y,z)\,dS, \\
I_y &= \iint_A \left(z^2+x^2\right)\rho(x,y,z)\,dS, \\
I_z &= \iint_A \left(x^2+y^2\right)\rho(x,y,z)\,dS.
\end{aligned}$$

**12.1.12.** Εστω οτι μας δινεται μια επιφανεια $A$ και μια συναρτηση $f(x, y, z)$. Στο σημειο $(x, y, z)$ η επιφανεια εχει *μοναδιαιο* καθετο διανυσμα

$$\mathbf{n}_0 = \mathbf{i}a(x,y,z) + \mathbf{j}b(x,y,z) + \mathbf{k}c(x,y,z) \tag{12.20}$$

Παρατηρειστε οτι

$$1 = |\mathbf{n}_0| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

Ετσι η (12.20) μπορει να γραφτει και στην μορφη

$$\mathbf{n}_0 = \mathbf{i}\cos(\alpha) + \mathbf{j}\cos(\beta) + \mathbf{k}\cos(\gamma) \tag{12.21}$$

για καταλληλες γωνιες $\alpha, \beta, \gamma$ (συγκεκριμενα, $\alpha$ ειναι η γωνια του $\mathbf{n}_0$ με τον αξονα των $x$, $\beta$ ειναι η γωνια του $\mathbf{n}_0$ με τον αξονα των $y$ και $\gamma$ ειναι η γωνια του $\mathbf{n}_0$ με τον αξονα των $z$).

**12.1.13.** Κατω απο καταλληλες συνθηκες συνεχειας και παραγωγισιμοτητας, το παρακατω ολοκληρωμα ειναι καλα ορισμενο.

$$\iint_A \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_0 dS = \iint_A (\mathbf{i}P+\mathbf{j}Q+\mathbf{k}R)\cdot(\mathbf{i}\cos(\alpha)+\mathbf{j}\cos(\beta)+\mathbf{k}\cos(\gamma))\,dS \tag{12.22}$$

$$= \iint_A P\cos(\alpha)\,dS + \iint_A Q\cos(\beta)\,dS + \iint_A R\cos(\gamma)\,dS \tag{12.23}$$

$$= \iint_{D_{xy}} Pdydz + \iint_{D_{yz}} Qdzdx + \iint_{D_{zx}} Rdxdy \tag{12.24}$$

και λεγεται *ροη* της $\mathbf{F}$ δια της επιφανειας. Στο τελευταιο βημα των παραπανω σχεσεων χρησιμοποιησαμε τις ισοτητες

$$(\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{i})\,dS = dS\cos\alpha = dydz, \tag{12.25}$$

$$(\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{j})\,dS = dS\cos\beta = dzdx, \tag{12.26}$$

$$(\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{k})\,dS = dS\cos\gamma = dxdy. \tag{12.27}$$

Π.χ. $(\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{i})\,dS$ ειναι η προβολη του στοιχειωδους εμβαδου $dS$ στο επιπεδο $yz$.

**12.1.14.** Γενικα, ολοκληρωματα της μορφης (12.22)–(12.24) λεγονται *επιφανειακα ολοκληρωματα Β΄ ειδους*.

**12.1.15.** (*Θεωρημα Gauss*) Εστω μια *κλειστη* και *λεια* επιφανεια $A$ και μια διανυσματικη συναρτηση $\mathbf{F}=\mathbf{i}P+\mathbf{j}Q+\mathbf{k}R$ με συνεχεις μερικες παραγωγους. Η $A$ οριζει ενα χωριο $D\subseteq\mathbb{R}^3$. Ισχυει το εξης

$$\iiint_D \nabla\cdot\mathbf{F}dV = \iint_A \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_0 dS.$$

**12.1.16.** (*Θεωρημα Stokes*) Εστω μια *ανοιχτη*, *λεια* επιφανεια $A$ η οποια εχει συνορο μια *κλειστη, απλη* και *λεια* καμπυλη $C$. Εστω ακομη μια διανυσματικη συναρτηση $\mathbf{F}=\mathbf{i}P+\mathbf{j}Q+\mathbf{k}R$ με συνεχεις μερικες παραγωγους. Ισχυει το εξης

$$\iint_A (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\eta_0 dS = \oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}.$$

## 12.2 Λυμενα Προβληματα

**12.2.1.** Να υπολογιστει το εμβαδον της επιφανειας του στερεου που οριζεται απο τις επιφανειες

$$S_1 : z = x^2+y^2,$$
$$S_2 : z = 9.$$

**Λυση**. Η $S_2$ ειναι επιπεδο το οποιο τεμνει την $S_1$ (παραβολοειδες) κατα τον κυκλο $x^2+y^2=9$ (*και* $z=9$). Θεωρουμε την συναρτηση $z(x,y)=x^2+y^2$. Το ζητουμενο ολοκληρωμα ειναι

$$\int\int_D \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dydx = \int\int_D \sqrt{1+4x^2+4y^2}dydx$$

Το χριο $D$ ειναι ο δισκος

$$D=\left\{(x,y):x^2+y^2\leq 9\right\}=\{(\rho,\theta):0\leq\rho\leq 3, 0\leq\theta\leq 2\pi\}$$

σε πολικες συντεταγμενες. Αρα το ζητουμενο ολοκληρωμα ειναι

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^2\sqrt{1+4\rho^2}\rho d\rho\right)d\theta &= \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\int_0^3\left(1+4\rho^2\right)^{1/2}d\left(\rho^2\right)\right)d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}\left(1+4\rho^2\right)^{3/2}\right)_{\rho=0}^{\rho=3}d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\frac{1}{12}\left((37)^{3/2}-1\right)d\theta=\frac{\pi}{6}\left((37)^{3/2}-1\right).\end{aligned}$$

**12.2.2.** Να υπολογιστει το εμβαδον της επιφανειας του στερεου που οριζεται απο τις επιφανειες

$$\begin{aligned}S_1 &: z=2-x^2-y^2, \\ S_2 &: z=0.\end{aligned}$$

**Λυση**. Θεωρουμε την συναρτηση $z(x,y)=2-x^2-y^2$. Το ζητουμενο ολοκληρωμα ειναι

$$\int\int_D \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dydx = \int\int_D \sqrt{1+4x^2+4y^2}dydx$$

και μενει να βρουμε τα χωριο $D$ στο οποιο παιρνουν τιμες οι $x,y$. Αυτο ειναι η προβολη της επιφανειας $S_1$ στο επιπεδο $z=0$, η οποια προκυπτει αν θεσουμε $z=0$. Δηλ.

$$D=\left\{(x,y):x^2+y^2\leq 2\right\}=\left\{(\rho,\theta):0\leq\rho\leq\sqrt{2}, 0\leq\theta\leq 2\pi\right\}$$

σε πολικες συντεταγμενες. Αρα το ζητουμενο ολοκληρωμα ειναι

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^2\sqrt{1+4\rho^2}\rho d\rho\right)d\theta &= \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\int_0^{\sqrt{2}}\left(1+4\rho^2\right)^{1/2}d\left(\rho^2\right)\right)d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{12}\left(1+4\rho^2\right)^{3/2}\right)_{\rho=0}^{\rho=\sqrt{2}}d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\frac{13}{6}d\theta=\frac{13\pi}{3}.\end{aligned}$$

**12.2.3.** Να υπολογιστει το εμβαδον της επιφανειας του στερεου που οριζεται απο τις επιφανειες

$$S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$
$$S_2 : \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}.$$

**Λυση**. Η $S_1$ ειναι μια σφαιρα και η $S_2$ ενας κυλινδρος (δες Σχ.;;). Ας υπολογισουμε το εμβαδον της ανω επιφανειας· κατοπιν θα διπλασιασουμε το αποτελεσμα για ν απαρτουμε την τελικη απαντηση. Για την ανω επιφανεια, αρκει να γραψουμε το *ημι*σφαιριο $z(x,y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ το οποιο εχει

$$z_x = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \quad z_y = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.$$

Οποτε το ζητουμενο ολοκληρωμα ειναι

$$\int\int_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dydx = \int\int_D \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dydx.$$

Το χωριο ολοκληρωσης ειναι η προβολη του κυλινδρου στο επιπεδο $z = 0$, το οποιο ειναι ο κυκλος $\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$. Αυτος ς εpolικες συντεταγμενες γραφεται ως εξης

$$\frac{a^2}{4} = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = x^2 - ax + \frac{a^2}{4} + y^2 \Rightarrow$$
$$x^2 + y^2 = ax \Rightarrow \rho^2 = a\rho\cos\theta \Rightarrow \rho = a\cos\theta$$

με $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ (γιατι;). Οποτε το ζητουμενο ολοκληρωμα γινεται

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left( \int_0^{a\cos\theta} \frac{a}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} \rho d\rho \right) d\theta &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left( \frac{a}{2} \int_0^{a\cos\theta} \left(a^2 - \rho^2\right)^{-1/2} d\left(\rho^2\right) \right) d\theta \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left( -a\left(a - \rho^2\right)^{1/2} \right)_{\rho=0}^{\rho=a\cos\theta} d\theta \\
&= a^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \sin\theta)\, d\theta = (\pi - 2)\, a^2
\end{aligned}$$

και η ζητουμενη επιφανεια ειναι η διπλασιας του παραπανω, δηλ. $2(\pi - 2)\, a^2$.

**12.2.4.** Να υπολογιστει το εμβαδον της της σφαιρας $\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{i}\cos u \sin v + \mathbf{j} \sin u \sin v + \mathbf{k} \cos v$, $u \in [0, 2\pi]$, $v \in [0, \pi]$.

**Λυση**. Χρησιμοποιωντας την εξισωση για το εμβαδον επιφανειας σε παραμετρικη μορφη, εχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\sin u \sin v & \cos u \sin v & 0 \\ \cos u \cos v & \sin u \cos v & -\sin v \end{vmatrix} \\
&= \mathbf{i} \cos u \sin^2 v + \mathbf{j} \sin u \sin^2 v + \mathbf{k} \cos v \sin v.
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| &= \sqrt{\cos^2 u \sin^4 v + \sin^2 u \sin^4 v + \cos^2 v \sin^2 v} \\ &= \sqrt{\sin^4 v + \cos^2 v \sin^2 v} = \sin v.\end{aligned}$$

Οποτε το ζητουμενο εμβαδον ειναι

$$\int\int_D \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| \, dv du = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^{\pi} \sin v dv \right) du = \int_0^{2\pi} (-\cos v)_{v=0}^{v=\pi} du = 4\pi.$$

Ποιο θα ηταν το ζητουμενο εμβαδον αν η σφαιρα ειχε ακτινα $R$;

**12.2.5.** Να βρεθει το εμβαδον του τμηματος του επιπεδου $S_1 : x + 2y + z = 4$ το οποιο βρισκεται εντος του κυλινδρου $S_2 : x^2 + y^2 = 4$.

**Λυση**. Εδω εχουμε την συναρτηση $z = 4 - x - 2y$ και $z_x = -1$, $z_y = -2$. Το ζητουμενο εμβαδον ειναι

$$\int\int_D \sqrt{1 + (-1)^2 + (-2)^2} dA = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^2 \sqrt{6} \rho d\rho \right) d\theta = 4\pi\sqrt{6}.$$

**12.2.6.** Να βρεθει το εμβαδον του τμηματος της επιφανειας $S_1 : z = xy$ το οποιο βρισκεται εντος του κυλινδρου $S_2 : x^2 + y^2 = 2$.

**Λυση**. Εδω εχουμε την συναρτηση $z = xy$ και $z_x = y$, $z_y = x$. Το ζητουμενο εμβαδον ειναι

$$\int\int_D \sqrt{1 + x^2 + y^2} dA = \int_0^{2\pi} \left( \int_0^2 \sqrt{1 + \rho^2} \rho d\rho \right) d\theta = \left(5^{3/2} - 1\right) \frac{2\pi}{3}.$$

**12.2.7.** Να βρεθει το εμβαδον του τμηματος της επιφανειας $S_1 : z = y^2 - x^2$ το οποιο βρισκεται μεταξυ των κυλινδρων $S_2 : x^2 + y^2 = 1$ και $S_3 : x^2 + y^2 = 4$.

**Λυση**. Εδω εχουμε την συναρτηση $z = y^2 - x^2$ και $z_x = -2x$, $z_y = 2y$. Επισης, το χωριο ολοκληρωση σε πολικες συντεταγμενες ειναι

$$D = \{(\rho, \theta) : 1 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}.$$

Το ζητουμενο εμβαδον ειναι

$$\int\int_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dA = \int_0^{2\pi} \left( \int_1^2 \sqrt{1 + 4\rho^2} \rho d\rho \right) d\theta = \left(17^{3/2} - 5^{3/2}\right) \frac{\pi}{6}.$$

**12.2.8.** Να βρεθει το εμβαδον του τμηματος του ημισφαιρου $S_1 : 2 = x^2 + y^2 + z^2, z \geq 0$ το οποιο αποκοπτεται απο τον κυλινδρο $S_2 : x^2 + y^2 = 1$.

**Λυση**. Θεωρουμε την συναρτηση $z(x, y) = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$. Εχουμε

$$z_x = -\frac{x}{\sqrt{2 - x^2 - y^2}}, \quad z_y = -\frac{y}{\sqrt{2 - x^2 - y^2}},$$

οποτε το ζητουμενο ολοκληρωμα ειναι

$$\int\int_D \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dydx = \int\int_D \sqrt{1+\frac{x^2}{2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{2-x^2-y^2}}dydx$$
$$= \sqrt{2}\int\int_D \frac{1}{\sqrt{2-x^2-y^2}}dydx.$$

Το χωριο $D$ στο οποιο παιρνουν τιμες οι $x, y$ ειναι η προβολη της επιφανειας $S_2$ στο επιπεδο $z = 0$, η οποια προκυπτει αν θεσουμε $z = 0$. Δηλ.

$$D = \left\{(x,y) : x^2+y^2 \le 1\right\} = \{(\rho,\theta) : 0 \le \rho \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

σε πολικες συντεταγμενες. Αρα το ζητουμενο ολοκληρωμα ειναι

$$\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2-\rho^2}}\rho d\rho\right)d\theta = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left(-\left(2-\rho^2\right)^{1/2}\right)_{\rho=0}^{\rho=1}d\theta$$
$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left(\sqrt{2}-1\right)d\theta = 2\pi\left(2-\sqrt{2}\right).$$

**12.2.9.** Να βρεθει το εμβαδον της επιφανειας που κοβει το επιπεδο $S_1 : z = 2$ απο το παραβολοειδες ου τμηματος του ημισφαιρου $S_2 : z = x^2 + y^2$.

**Λυση**. Χρησιμοποιουμε τη συναρτηση $\phi = x^2 + y^2 - z = 0$. Εχουμε

$$\phi_x = 2x, \quad \phi_y = 2y, \quad \phi_z = -1$$

και το ζητουμενο εμβαδον ειναι

$$\int\int_D \frac{\sqrt{\phi_x^2+\phi_y^2+\phi_z^2}}{|\phi_z|}dxdy = \int\int_D \sqrt{4x^2+4y^2+1}dxdy.$$

Η τομη της $S_2$ απο το $S_1$ προκυπτει αν θεσουμε

$$2 = z = x^2 + y^2$$

και το χωριο $D$ στο οποιο παιρνουν τιμες οι $x, y$ ειναι σε πολικες συντεταγμενες:

$$D = \left\{(x,y) : x^2+y^2 \le 2\right\} = \left\{(\rho,\theta) : 0 \le \rho \le \sqrt{2}, 0 \le \theta \le 2\pi\right\}$$

Αρα το ζητουμενο ολοκληρωμα ειναι

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4\rho^2+1}\rho d\rho\right)d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{1}{12}\left(\left(4\rho^2+1\right)^{3/2}\right)_{\rho=0}^{\rho=\sqrt{2}}d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi}\frac{13}{6}d\theta = \frac{13\pi}{3}.$$

οποτε το ζητουμενο

$$\int\int_D \frac{\sqrt{\phi_x^2+\phi_y^2+\phi_z^2}}{|\phi_z|}dxdy = \int\int_D \sqrt{4x^2+4y^2+1}dxdy.$$

**12.2.10.** Να βρεθει το εμβαδον της επιφανειας που κοβει ο κωνος $S_1 : z = \sqrt{x^2+y^2}$ απο την σφαιρα $S_2 : x^2+y^2+z^2 = 2$.

**Λυση**. Χρησιμοποιουμε τη συναρτηση $\phi = x^2+y^2+z^2-2 = 0$. Εχουμε

$$\phi_x = 2x, \quad \phi_y = 2y, \quad \phi_z = 2z$$

και το ζητουμενο εμβαδον ειναι

$$\begin{aligned}\int\int_D \frac{\sqrt{\phi_x^2+\phi_y^2+\phi_z^2}}{|\phi_z|}dxdy &= \int\int_D \frac{\sqrt{4x^2+4y^2+4z^2}}{2z}dxdy \\ &= \int\int_D \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{z}dxdy = \int\int_D \frac{\sqrt{2}}{z}dxdy.\end{aligned}$$

Η τομη της $S_2$ απο το $S_1$ προκυπτει αν θεσουμε

$$x^2+y^2 = 2-z^2 = 2-x^2-y^2 \Rightarrow x^2+y^2 = 1$$

και το χωριο $D$ στο οποιο παιρνουν τιμες οι $x, y$ ειναι σε πολικες συντεταγμενες:

$$D = \left\{(x,y) : x^2+y^2 \le 1\right\} = \{(\rho,\theta) : 0 \le \rho \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

Αρα το ζητουμενο ολοκληρωμα ειναι

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \frac{\sqrt{2}}{z}\rho d\rho\right)d\theta &= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \frac{1}{z}\rho d\rho\right)d\theta \\ &= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2-\rho^2}}\rho d\rho\right)d\theta \\ &= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left(\sqrt{2}-1\right)d\theta = 2\pi\left(2-\sqrt{2}\right)..\end{aligned}$$

**12.2.11.** Να βρεθει το εμβαδον της επιφανειας που κοβει ο κυλινδρος $S_1 : x^2+y^2 = 1$ απο το επιπεδο $S_2 : z = x$.

**Λυση**. Χρησιμοποιουμε τη συναρτηση $\phi = x - z = 0$. Εχουμε

$$\phi_x = 1, \quad \phi_y = 0, \quad \phi_z = -1$$

και το ζητουμενο εμβαδον ειναι

$$\int\int_D \frac{\sqrt{\phi_x^2+\phi_y^2+\phi_z^2}}{|\phi_z|}dxdy = \int\int_D \frac{\sqrt{2}}{1}dxdy = \int\int_D \sqrt{2}dxdy.$$

Το χωριο $D$ στο οποιο παιρνουν τιμες οι $x, y$ ειναι σε πολικες συντεταγμενες:

$$D = \left\{(x,y) : x^2+y^2 \le 1\right\} = \{(\rho,\theta) : 0 \le \rho \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

Αρα το ζητουμενο ολοκληρωμα ειναι

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 \sqrt{2}\rho d\rho\right)d\theta = \sqrt{2}\pi.$$

**12.2.12.** Να βρεθει το εμβαδον της επιφανειας του παραβολοειδους $S_1 : x = 4 - z^2 - y^2$ που βρισκεται πανω απο τον δακτυλιο $1 \leq y^2 + z^2 \leq 4$, $x = 0$.

**Λυση**. Χρησιμοποιουμε τη συναρτηση $\phi = x + y^2 + z^2 - 4 = 0$. Εχουμε

$$\phi_x = 1, \quad \phi_y = 2y, \quad \phi_z = 2z$$

και το ζητουμενο εμβαδον ειναι

$$\int\int_D \frac{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2}}{|\phi_z|} dxdy = \int\int_D \sqrt{1 + 4y^2 + 4z^2} dxdy.$$

Το χωριο $D$ στο οποιο παιρνουν τιμες οι $x, y$ ειναι (σε πολικες συντεταγμενες για το επιπεδο $yz$):

$$D = \left\{(x, y) : 1 \leq y^2 + z^2 \leq 4\right\} = \{(\rho, \theta) : 1 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

Αρα το ζητουμενο ολοκληρωμα ειναι

$$\int_0^{2\pi} \left( \int_1^2 \sqrt{1 + 4\rho^2} \rho d\rho \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{12} \left( \left(1 + 4\rho^2\right)^{3/2} \right)_{\rho=1}^{\rho=2} d\theta = \frac{\pi}{6} \left(17^{3/2} - 5^{3/2}\right).$$

**12.2.13.** Να υπολογιστει το ολοκληρωμα $\int\int_S y dS$ οπου

$$S : z = x + y^2, \qquad x \in [0, 1], y \in [0, 2].$$

**Λυση**. Θεωρουμε την συναρτηση $z(x, y) = x + y^2$. Το ζητουμενο ολοκληρωμα ειναι

$$\begin{aligned} \int\int_D y\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dydx &= \int\int_D y\sqrt{1 + 1 + 4y^2} dydx \\ &= \sqrt{2} \int_0^1 \left( \int_0^2 \sqrt{1 + 2y^2} y dy \right) dx \\ &= \sqrt{2} \int_0^1 \left( \frac{1}{6} \left(1 + 2y^2\right)^{3/2} \right)_{y=0}^{y=2} dx \\ &= \frac{13\sqrt{2}}{3} \int_0^1 dx = \frac{13\sqrt{2}}{3}. \end{aligned}$$

**12.2.14.** Να βρεθει το ολοκληρωμα $\int\int_S x^2 dS$ οπου $S$ ειναι η σφαιρα $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

**Λυση**. Χρησιμοποιουμε την παραμετρικη μορφη της σφαιρας

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i} \cos u \sin v + \mathbf{j} \sin u \sin v + \mathbf{k} \cos v, \qquad u \in [0, 2\pi], v \in [0, \pi].$$

Οπως εχουμε ηδη δει

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v &= \mathbf{i} \cos u \sin^2 v + \mathbf{j} \sin u \sin^2 v + \mathbf{k} \cos v \sin v, \\ \|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\| &= \sin v. \end{aligned}$$

Οποτε το ζητουμενο ολοκληρωμα ειναι

$$\begin{aligned}\int\int_D x^2 \left\|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v\right\| dvdu &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (\cos u \sin v)^2 \sin v dv du \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2 u \left(\int_0^{\pi} \sin^3 v dv\right) du \\ &= \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 u du\right)\left(\int_0^{\pi} \left(\sin v - \sin v \cos^2 v\right) dv\right) \\ &= \left(\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2u}{2} du\right)\left(-\cos v + \frac{\cos^3 v}{3}\right)_{v=0}^{v=\pi} = \frac{4\pi}{3}.\end{aligned}$$

**12.2.15.** Να υπολογιστει το ολοκληρωμα $\int\int_S zdS$ οπου $S$ ειναι το τμημα του επιπεδου $S_1 : z = 1 + x$ το οποιο αποκοπτει ο κυλινδρος $S_2 : x^2 + y^2 = 1$.

**Λυση**. Χρησιμοποιουμε τη συναρτηση $\phi = x - z + 1 = 0$. Εχουμε

$$\phi_x = 1, \quad \phi_y = 0, \quad \phi_z = -1$$

και το ζητουμενο εμβαδον ειναι

$$\int\int_D z \frac{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2}}{|\phi_z|} dxdy = \sqrt{2}\int\int_D (1+x)\, dxdy.$$

Το χωριο $D$ στο οποιο παιρνουν τιμες οι $x, y$ ειναι σε πολικες συντεταγμενες:

$$D = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 \le 1\right\} = \{(\rho,\theta) : 0 \le \rho \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi\}$$

Αρα το ζητουμενο ολοκληρωμα ειναι

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 (1+\rho\cos\theta)\,\rho d\rho\right) d\theta &= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^3}{3}\cos\theta\right)_{\rho=0}^{\rho=1} d\theta \\ &= \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cos\theta\right) d\theta \\ &= \sqrt{2}\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\sin\theta}{3}\right)_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = \sqrt{2}\pi..\end{aligned}$$

**12.2.16.** Να υπολογιστει το ολοκληρωμα $\int\int_S xyzdS$ οπου $S$ ειναι η επιφανεια του κυβου ο οποιος οριζεται απο τα επιπεδα

$$x = 0, \quad x = 1, \quad y = 0, \quad y = 1, \quad z = 0, \quad z = 1.$$

**Λυση**. Ειναι

$$\int\int_S xyzdS = \sum_{n=1}^{6}\int\int_{S_n} xyzdS$$

οπου $S_1, S_2, ..., S_6$ ειναι οι εξη πλευρες του κυβου. Τωρα, στις πλευρες με $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, τα αντιστοιχα ολοκληρωματα ισουνται με μηδεν. Στην πλευρα

$$S_6 = \{(x,y,1) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$$

εχουμε

$$\int\int_{S_2} xyzdS = \int_0^1 \int_0^1 xydydx = \int_0^1 x\left(\frac{y^2}{2}\right)_{y=0}^{y=1} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 xdx = \frac{1}{4}.$$

Για λογους συμμετριας, το ιδιο ισχυει και στις $S_2$ και $S_4$ οποτε τελικα $\int\int_S xyzdS = \frac{3}{4}$.

**12.2.17.** Να υπολογιστει το ολοκληρωμα $\int\int_S x^2yzdS$ οπου $S$ ειναι το τμημα του επιπεδου $S_1 : z = 1 + 2x + 3y$ το οποιο βρισκεται πανω απο το ορθογωνιο παραλληλογραμμο

$$x = 0, \quad x = 3, \quad y = 0, \quad y = 2, \quad z = 0.$$

**Λυση**. Θεωρωντας την συναρτηση $z(x, y) = 1 + 2x + 3y$ εχουμε $z_x = 2$, $z_y = 3$,οποτε το ζητουμενο ολοκληρωμα ειναι

$$\begin{aligned}
\int\int_D x^2yz\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}dydx &= \int\int_D x^2y(1 + 2x + 3y)\sqrt{1 + 3^2 + 2^2}dydx \\
&= \sqrt{14}\int_0^3\int_0^2 \left(x^2y + 2x^3y + 3x^2y^2\right)dydx \\
&= \sqrt{14}\int_0^3 \left(\frac{x^2y^2}{2} + x^3y^2 + x^2y^3\right)_{y=0}^{y=2} dx \\
&= \sqrt{14}\int_0^3 \left(10x^2 + 4x^3\right)dx \\
&= \sqrt{14}\left(\frac{10x^3}{3} + x^4\right)_{x=0}^{x=3} = 171\sqrt{14}.
\end{aligned}$$

**12.2.18.** Να υπολογιστει το ολοκληρωμα $\int\int_S xydS$ οπου $S$ ειναι το τριγωνο με κορυφες $(1, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 0, 2)$

**Λυση**. Το τριγωνο βρισκεται στο επιπεδο $Ax + By + Cz + D = 0$ που ικανοποιει

$$\begin{aligned}
A \cdot 1 + B \cdot 0 + C \cdot 0 + D = 0 \\
A \cdot 0 + B \cdot 2 + C \cdot 0 + D = 0 \\
A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot 2 + D = 0
\end{aligned}$$

οποτε, παιρνοντας $D = -2$ , εχουμε $A = 2$, $B = 1$, $C = 1$, δηλ. το επιπεδο ειναι $2x + y + z = 2$ ή $z = 2 - 2x - y$. Οποτε $z_x = -2$, $z_y = -1$ και το ζητουμενο ολοκληρωμα γινεται

$$\int\int_D xy\sqrt{1 + 4 + 1}dydx = \sqrt{6}\int\int_D xydydx.$$

Το χωριο $D$ ειναι η προβολη του τριγωνου στο επιπεδο $xy$, και ειναι

$$D = \{(x, y) : 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 2 - 2x\}.$$

Αρα το ζητουμενο ολοκληρωμα ειναι

$$\begin{aligned}
\sqrt{6}\int_0^1\int_0^{2-2x} xydydx &= \sqrt{6}\int_0^1 \left(\frac{xy^2}{2}\right)_{y=0}^{y=2-2x} dx = \sqrt{6}\int_0^1 \frac{x(2 - 2x)^2}{2}dx \\
&= \sqrt{6}\int_0^1 \left(2x + 2x^3 - 4x^2\right)dx = \frac{\sqrt{6}}{6}.
\end{aligned}$$

**12.2.19.** Να υπολογιστει το $\iint\limits_A (\mathbf{i}xy + \mathbf{j}yz + \mathbf{k}zx)\, \mathbf{n}_0 dS$ οπου $A$ ειναι η επιφανεια του παραβολοειδους $S_1 : z = 4 - x^2 - y^2$ που βρισκεται πανω απο το τετραγωνο

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad z = 0.$$

**Λυση**. Μπορουμε να ξανγραψουμε το πεδιο $\mathbf{i}xy + \mathbf{j}yz + \mathbf{k}zx$ ως

$$\mathbf{r}(x,y) = \mathbf{i}xy + \mathbf{j}\left(4y - x^2y - y^3\right) + \mathbf{k}\left(4 - x^3 - y^2x\right).$$

Το στοιχειωδες διανυσματικο εμβαδον ειναι

$$\mathbf{n}_0 dS = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\right) dxdy = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix} dxdy = (\mathbf{i}2x + \mathbf{j}2y - \mathbf{k})\, dxdy$$

Παρατηρειστε οτι η $\mathbf{k}$ συνιστωσα ειναι αρνητικη. Αρα το $\mathbf{n}_0 dS$ που υπολογισαμε παραπανω ειναι αυτο το οποιο δειχνει προς το *εσωτερικο* της επιφανειας! Τελικα το ζητουμενο ολοκληρωμα ειναι

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_A (\mathbf{i}y + \mathbf{j}x + \mathbf{k}z)\, \mathbf{n}_0 dS \\
&= \int\int_D \left(\mathbf{i}xy + \mathbf{j}\left(4y - x^2y - y^3\right) + \mathbf{k}\left(4x - x^3 - y^2x\right)\right)(\mathbf{i}2x + \mathbf{j}2y - \mathbf{k})\, dydx \\
&= \int_0^1 \int_0^1 \left(2x^2y + 8y^2 - 2x^2y^2 - 2y^4 - 4x - x^3 - y^2x\right) dydx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{3} + \frac{11x}{3} - x^3 + \frac{34}{15}\right) dx = \frac{713}{180}.
\end{aligned}$$

**12.2.20.** Να υπολογιστει το $\iint\limits_A (\mathbf{j}yz + \mathbf{k}z^2)\, \mathbf{n}_0 dS$ οπου $A$ ειναι το τμημα του κυλινδρου $S_1 : 1 = y^2 + z^2$ με $z \geq 0$, το οποιο αποκοπτεται απο τα επιπεδα $x = 0$ και $x = 1$.

**Λυση**. Ξαναγραφουμε τον κυλινδρο σε παραμετρικη αναπαρασταση ως εξης:

$$\mathbf{r}(x,v) = \mathbf{i}x + \mathbf{j}\cos v + \mathbf{k}\sin v, \quad x \in [0,1], v \in [0,\pi]$$

(το $v \in [0,\pi]$ πορκυπτει απο το $z \geq 0$) οποτε το στοιχειωδες διανυσματικο εμβαδον ειναι

$$\mathbf{n}_0 dS = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right) dxdy = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin v & \cos v \end{vmatrix} dxdv = (-\mathbf{j}\cos v - \mathbf{k}\sin v)\, dxdv$$

Παρατηρειστε οτι το $\mathbf{n}_0 dS = -\mathbf{j}\cos v - \mathbf{k}\sin v$ δειχνει προς το *εσωτερικο* του κυλινδρου· π.χ. για $v = \pi/4$ το $\mathbf{n}_0 dS = -\mathbf{j} - \mathbf{k}$. Το χωριο ολοκληρωσης ειναι

$$D = \{(x,v) : x \in [0,1], v \in [0,\pi]\}.$$

Μπορουμε να ξαναγραψουμε το πεδιο $\mathbf{j}yz + \mathbf{k}z^2$ ως

$$\mathbf{F}(x,v) = \mathbf{j}\cos v \sin v + \mathbf{k}\sin^2 v.$$

Τελικα το ζητουμενο ολοκληρωμα ειναι

$$\begin{aligned}\iint\limits_A \left(\mathbf{j}yz + \mathbf{k}z^2\right)\mathbf{n}_0 dS &= \int\int_D \left(\mathbf{j}\cos v\sin v + \mathbf{k}\sin^2 v\right)\left(-\mathbf{j}\cos v - \mathbf{k}\sin v\right)dxdv \\ &= -\int_0^1\int_0^\pi \left(\cos^2 v\sin v + \sin^3 v\right)dvdx \\ &= -\int_0^1\int_0^\pi \sin v dvdx = -\int_0^1 (\cos v)_{v=0}^{v=\pi} dx = \int_0^1 2dx = 2.\end{aligned}$$

**12.2.21.** Να υπολογιστει το $\iint\limits_A (\mathbf{i}y + \mathbf{j}x + \mathbf{k}z)\mathbf{n}_0 dS$ οπου $A$ ειναι η επιφανεια του παραβολοειδους $S_1 : z = 1 - x^2 - y^2$ που αντιστοιχει σε $z \geq 0$.

**Λυση**. Μπορουμε να ξαναγραψουμε το πεδιο $\mathbf{i}y + \mathbf{j}x + \mathbf{k}z$ ως

$$\mathbf{F}(x,y) = \mathbf{i}y + \mathbf{j}x + \mathbf{k}\left(1 - x^2 - y^2\right).$$

Γραφουμε δε το παραβολοειδες σε παραμετρικη μορφη ως εξης:

$$\mathbf{r}(x,y) = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}\left(1 - x^2 - y^2\right)$$

οποτε το στοιχειωδες διανυσματικο εμβαδον ειναι

$$\mathbf{n}_0 dS = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\right)dxdy = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -2x \\ 0 & 1 & -2y \end{vmatrix} dxdy = (\mathbf{i}2x + \mathbf{j}2y - \mathbf{k})\,dxdy$$

Παρατηρειστε οτι η $\mathbf{k}$ συνιστωσα ειναι αρνητικη. Αρα το $\mathbf{n}_0 dS$ που υπολογισαμε παραπανω ειναι αυτο το οποιο δειχνει προς το *εσωτερικο* της επιφανειας! Το χωριο ολοκληρωσης ειναι η προβολη του παραβολοειδους στο επιπεδο $z = 0$, οποτε το χωριο ολοκληρωσης ειναι

$$D = \left\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\right\}.$$

Τελικα το ζητουμενο ολοκληρωμα ειναι

$$\begin{aligned}\iint\limits_A (\mathbf{i}y + \mathbf{j}x + \mathbf{k}z)\mathbf{n}_0 dS &= \int\int_D \left(\mathbf{i}y + \mathbf{j}x + \mathbf{k}\left(1 - x^2 - y^2\right)\right)(\mathbf{i}2x + \mathbf{j}2y - \mathbf{k})\,dxdy \\ &= \int\int_D \left(2xy + 2xy - 1 + x^2 + y^2\right)dxdy \\ &= -\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(1 + 4\rho^2\cos\theta\sin\theta - \rho^2\right)\rho d\rho d\theta \\ &= -\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(\rho + 2\rho^3\sin 2\theta - \rho^3\right)d\rho d\theta \\ &= -\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin 2\theta - \frac{1}{4}\right)d\theta = -\left(\frac{\theta}{4}\right)_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = -\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

**12.2.22.** Να υπολογιστει το $\iint\limits_A (\mathbf{i}z + \mathbf{j}y + \mathbf{k}x)\, \mathbf{n}_0 dS$ οπου $A$ ειναι η σφαιρα $S : x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

**Λυση**. Γραφουμε την σφαιρα σε παραμετρικη μορφη:

$$\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{i}\cos u \sin v + \mathbf{j}\sin u \sin v + \mathbf{k}\cos v, \quad u \in [0, 2\pi], u \in [0, \pi],$$

Το στοιχειωδες διανυσματικο εμβαδον ειναι

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_0 dS &= \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right) dudv = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\sin u \sin v & \cos u \sin v & 0 \\ \cos u \cos v & \sin u \cos v & -\sin v \end{vmatrix} dudv \\ &= \left(-\mathbf{i}\cos u \sin^2 v - \mathbf{j}\sin u \sin^2 v - \mathbf{k}\sin v \cos v\right) dudv. \end{aligned}$$

Το $\mathbf{n}_0 dS$ που υπολογισαμε παραπανω ειναι αυτο το οποιο δειχνει προς το *εσωτερικο* της σφαιρας! Μπορουμε να ξανγραψουμε το πεδιο $\mathbf{i}z + \mathbf{j}y + \mathbf{k}x$ ως

$$\mathbf{F}(x,y) = \mathbf{i}\cos v + \mathbf{j}\sin u \sin v + \mathbf{k}\cos u \sin v.$$

Τελικα το ζητουμενο ολοκληρωμα ειναι

$$\begin{aligned} &\iint\limits_A (\mathbf{i}y + \mathbf{j}x + \mathbf{k}z)\, \mathbf{n}_0 dS \\ &= \int\int_D (\mathbf{i}\cos v + \mathbf{j}\sin u \sin v + \mathbf{k}\cos u \sin v)\left(-\mathbf{i}\cos u \sin^2 v - \mathbf{j}\sin u \sin^2 v - \mathbf{k}\sin v \cos v\right) dudv \\ &= -\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \left(\cos u \sin^2 v \cos v + \sin^2 u \sin^3 v + \cos u \sin^2 v \cos v\right) dudv \\ &= -\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} 2\cos u \cos v \sin^2 v dudv - \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin^2 u \sin^3 v dudv = -\frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$

**12.2.23.** Να υπολογιστει το $\iint\limits_A (\mathbf{i}xze^y - \mathbf{j}xze^y + \mathbf{k}z)\, \mathbf{n}_0 dS$ οπου $A$ ειναι το τμημα του επιπεδου $S_1 : x + y + z = 1$ με $x, y, z \geq 0$.

**Λυση**. Γραφουμε το επιπεδο σε παραμετρικη μορφη:

$$\mathbf{r}(x,y) = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}(1 - x - y).$$

Το χωριο ολοκληρωσης ειναι

$$D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}.$$

Το στοιχειωδες διανυσματικο εμβαδον ειναι

$$\mathbf{n}_0 dS = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y}\right) dxdy = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} dxdy = (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})\, dxdy.$$

Τελικα το ζητουμενο ολοκληρωμα ειναι

$$\iint_A (\mathbf{i}xze^y - \mathbf{j}xze^y + \mathbf{k}z)\,\mathbf{n}_0 dS = \int\int_D (\mathbf{i}xze^y - \mathbf{j}xze^y + \mathbf{k}(1-x-y))(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})\,dxdy$$
$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y)\,dxdy = -\frac{1}{6}.$$

**12.2.24.** Να υπολογιστει το $\iint_A (\mathbf{j}y - \mathbf{k}z)\,\mathbf{n}_0 dS$ οπου $A$ ειναι το τμημα του παραβολοειδους $S_1 : y = x^2 + z^2$ με $y \leq 1$.

**Λυση**. Γραφουμε το παραβολοειδες σε παραμετρικη μορφη:

$$\mathbf{r}(x,z) = \mathbf{i}x + \mathbf{j}\left(x^2+z^2\right) + \mathbf{k}z.$$

Το χωριο ολοκληρωσης $D$ ειναι το εσωτερικο του κυκλου ο οποιος ειναι η τομη του παραβολοειδους με το επιπεδο $y = 1$, δηλ. η τομη ειναι $1 = x^2 + z^2$ (κυκλος) και το χωριο ειναι

$$D = \left\{(x,y) : x^2+z^2 \leq 1\right\}.$$

Το στοιχειωδες διανυσματικο εμβαδον ειναι

$$\mathbf{n}_0 dS = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z}\right) dxdy = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2x & 0 \\ 0 & 2z & 1 \end{vmatrix} dxdy = (\mathbf{i}2x - \mathbf{j} + \mathbf{k}2z)\,dxdy.$$

Τελικα το ζητουμενο ολοκληρωμα ειναι

$$\iint_A (\mathbf{j}y - \mathbf{k}z)\,\mathbf{n}_0 dS = \int\int_D \left(\mathbf{j}\left(x^2+z^2\right) - \mathbf{k}z\right)(\mathbf{i}2x - \mathbf{j} + \mathbf{k}2z)\,dxdy$$
$$= \int\int_D \left(-x^2 - z^2 - 2z^2\right) dxdy$$
$$= -\int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(\rho^2 + 2\rho^2\cos^2\theta\right)\rho d\rho d\theta$$
$$= -\int_0^{2\pi} \left(\frac{\rho^4}{4} + \frac{\rho^4}{2}\cos\theta\right)_{\rho=0}^{\rho=1} d\theta$$
$$= -\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left(1 + 2\cos^2\theta\right) d\theta = -\pi.$$

(Προσεξτε οτι χρησιμοποιησαμε πολικες συντεταγμενες στο επιπεδο $xz$: $x = \rho\cos\theta$, $z = \rho\sin\theta$.)

**12.2.25.** Να υπολογιστει το $\iint_A (\mathbf{i}xz + \mathbf{j}x + \mathbf{k}y)\,\mathbf{n}_0 dS$ οπου $A$ ειναι το τμημα της σφαιρας $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 25$ με $y \geq 0$.

**Λυση**. Γραφουμε την σφαιρα σε παραμετρικη μορφη:

$$\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{i}5\cos u \sin v + \mathbf{j}5\sin u \sin v + \mathbf{k}5\cos v, \quad u \in [0,2\pi], v \in [0,\pi],$$

Το στοιχειωδες διανυσματικο εμβαδον ειναι (οπως εχουμε ηδη δει)

$$\mathbf{n}_0 dS = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right) dudv = 25\left(-\mathbf{i}\cos u \sin^2 v - \mathbf{j}\sin u \sin^2 v - \mathbf{k}\sin v \cos v\right) dudv.$$

Μπορουμε να ξανγραψουμε το πεδιο $\mathbf{i}xz + \mathbf{j}x + \mathbf{k}y$ ως

$$\mathbf{F}(u,v) = \mathbf{i}25\cos u \sin v \cos v + \mathbf{j}5\cos u \sin v + \mathbf{k}5\sin u \sin v.$$

Τελικα το ζητουμενο ολοκληρωμα ειναι

$$\begin{aligned}
&\iint_A (\mathbf{i}xz + \mathbf{j}x + \mathbf{k}y)\,\mathbf{n}_0 dS \\
&= 125 \int\int_D (\mathbf{i}5\cos u \sin v \cos v + \mathbf{j}\cos u \sin v + \mathbf{k}\sin u \sin v) \cdot \\
&\left(-\mathbf{i}\cos u \sin^2 v - \mathbf{j}\sin u \sin^2 v - \mathbf{k}\sin v \cos v\right) dudv \\
&= -125 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left(5\cos^2 u \sin^3 v \cos v + \cos u \sin u \sin^3 v + \sin u \sin^2 v \cos v\right) dudv.
\end{aligned}$$

Μετα απο αρκετες παρξεις, το παραπανω αποτελεμα προκυπτει ισο με το 0!

**12.2.26.** Να υπολογιστει το $\iint_A (\mathbf{k}z)\,\mathbf{n}_0 dS$ οπου $A$ ειναι το τμημα της σφαιρας $S_1$ : $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ με $x, y, z \geq 0$.

**Λυση**. Η σφαιρα γραφεται σε παραμετρικη μορφη:

$$\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{i}a\cos u \sin v + \mathbf{j}a\sin u \sin v + \mathbf{k}a\cos v, \quad u \in [0,\pi/2], v \in [0,\pi/2],$$

(Τα $u \in [0,\pi/2], v \in [0,\pi/2]$ εξασφαλιζουν $x, y, z \geq 0$.) Το στοιχειωδες διανυσματικο εμβαδον ειναι (οπως εχουμε ηδη δει)

$$\mathbf{n}_0 dS = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right) dudv = a^2\left(-\mathbf{i}\cos u \sin^2 v - \mathbf{j}\sin u \sin^2 v - \mathbf{k}\sin v \cos v\right) dudv.$$

Μπορουμε να ξανγραψουμε το πεδιο $\mathbf{k}z$ ως

$$\mathbf{F}(u,v) = \mathbf{k}a\cos v.$$

Τελικα το ζητουμενο ολοκληρωμα ειναι

$$\begin{aligned}
&\iint_A \mathbf{k}z\mathbf{n}_0 dS = a^3 \int\int_D (\mathbf{k}\cos v)\left(-\mathbf{i}\cos u \sin^2 v - \mathbf{j}\sin u \sin^2 v - \mathbf{k}\sin v \cos v\right) dudv \\
&= -a^3 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \sin v \cos^2 v dudv = -a^3 \left(\int_0^{\pi/2} du\right)\left(-\int_0^{\pi/2} \cos^2 v d(\cos v)\right) \\
&= a^3 (u)_{u=0}^{u=\pi/2} \left(\frac{\cos^3 v}{3}\right)_{v=0}^{v=\pi/2} = -\frac{\pi a^3}{6}.
\end{aligned}$$

**12.2.27.** Να υπολογιστει το $\iint\limits_{A} (\mathbf{i}y - \mathbf{j}x + \mathbf{k})\, \mathbf{n}_0 dS$ οπου $A$ ειναι το τμημα της σφαιρας $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ με $x, y, z \geq 0$.

**Λυση**. Η σφαιρα γραφεται σε παραμετρικη μορφη:

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{i}a \cos u \sin v + \mathbf{j}a \sin u \sin v + \mathbf{k}a \cos v, \quad u \in [0, \pi/2], v \in [0, \pi/2],$$

Το στοιχειωδες διανυσματικο εμβαδον ειναι

$$\mathbf{n}_0 dS = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right) dudv = a^2 \left(-\mathbf{i} \cos u \sin^2 v - \mathbf{j} \sin u \sin^2 v - \mathbf{k} \sin v \cos v\right) dudv.$$

Μπορουμε να ξαναγραψουμε το πεδιο $(\mathbf{i}y - \mathbf{j}x + \mathbf{k})$ ως

$$\mathbf{F}(u, v) = (\mathbf{i}a \sin u \sin v - \mathbf{j}a \cos u \sin v + \mathbf{k}).$$

Τελικα το ζητουμενο ολοκληρωμα ειναι

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_{A} (\mathbf{i}y - \mathbf{j}x + \mathbf{k})\, \mathbf{n}_0 dS \\
&= a^2 \int\int_D (\mathbf{i}a \sin u \sin v - \mathbf{j}a \cos u \sin v + \mathbf{k}) \left(-\mathbf{i} \cos u \sin^2 v - \mathbf{j} \sin u \sin^2 v - \mathbf{k} \sin v \cos v\right) dudv \\
&= -a^2 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \left(a \sin u \cos u \sin^3 v - a \cos u \sin u \sin^3 v + \sin v \cos v\right) dudv \\
&= -a^2 \left(\int_0^{\pi/2} du\right) \left(\int_0^{\pi/2} \sin v d(\sin v)\right) \\
&= -a^2 (u)_{u=0}^{u=\pi/2} \left(\frac{\sin^2 v}{2}\right)_{v=0}^{v=\pi/2} = -\frac{\pi a^2}{2}.
\end{aligned}$$

**12.2.28.** Να επαληθευτει το Θεωρημα $Gauss$ για το πεδιο $\mathbf{F} = \mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z$ και για την επιφανεια $S : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

**Λυση**. Χρησιμοποιωντας τη γνωστη παραμετριση της σφαιρας εχουμε

$$\mathbf{n}_0 dS = -\mathbf{i} \cos u \sin^2 v - \mathbf{j} \sin u \sin^2 v - \mathbf{k} \sin v \cos v.$$

Ομως αυτο ειναι το καθετο διανυσμα προς το εσωτερικο της φσαιρας! Το καθετο διανυσμα προς το εξωτερικο ειναι

$$\mathbf{n}_0 dS = \mathbf{i} \cos u \sin^2 v + \mathbf{j} \sin u \sin^2 v + \mathbf{k} \sin v \cos v.$$

Οποτε

$$\begin{aligned}
&\iint_S (\mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z)\,\mathbf{n}_0 dS \\
&= \int\int_D (\mathbf{i}\cos u \sin v + \mathbf{j}\sin u \sin v + \mathbf{k}\cos v)\left(\mathbf{i}\cos u \sin^2 v + \mathbf{j}\sin u \sin^2 v + \mathbf{k}\sin v \cos v\right) dudv \\
&= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \left(\cos^2 u \sin^3 v + \sin^2 u \sin^3 v + \cos^2 v \sin v\right) dudv \\
&= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \left(\sin^3 v + \cos^2 v \sin v\right) dudv = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin v dudv = \left(\int_0^{\pi} \sin v dv\right)\left(\int_0^{2\pi} du\right) \\
&= (-\cos v)_{v=0}^{v=\pi} (u)_{u=0}^{u=2\pi} = 4\pi.
\end{aligned}$$

Επισης εχουμε

$$\int\int\int_V \nabla \cdot (\mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z)\, dV = \int\int\int_V (1+1+1)\, dV = 3V = 3 \cdot \frac{4}{3}\pi 1^2 = 4\pi.$$

Αρα το Θεωρημα $Gauss$ επαληθευεται.

**12.2.29.** Χρησιμοποιειστε το Θεωρημα $Gauss$ για να υπολογιστε το ολοκληρωμα

$$\iint_S (\mathbf{i}xy + \mathbf{j}yz + \mathbf{k}xz)\,\mathbf{n}_0 dS,$$

οπου $S$ ειναι η επιφανεια του κυβου

$$0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1, \quad 0 \le z \le 1.$$

**Λυση**. Εχουμε

$$\begin{aligned}
\iint_S (\mathbf{i}xy + \mathbf{j}yz + \mathbf{k}xz)\,\mathbf{n}_0 dS &= \int\int\int_V \nabla \cdot (\mathbf{i}xy + \mathbf{j}yz + \mathbf{k}xz)\, dV \\
&= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (y + z + x)\, dxdydz \\
&= \int_0^1\int_0^1 \left(xy + xz + \frac{x^2}{2}\right)_{x=0}^{x=1} dydz \\
&= \int_0^1\int_0^1 \left(y + z + \frac{1}{2}\right) dydz \\
&= \int_0^1 \left(\frac{y^2}{2} + zy + \frac{y}{2}\right)_{y=0}^{y=1} dz \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + z + \frac{1}{2}\right) dz = \left(z + \frac{z^2}{2}\right)_{z=0}^{z=1} = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

**12.2.30.** Χρησιμοποιειστε το Θεωρημα *Gauss* για να υπολογισετε το ολοκληρωμα

$$\iint\limits_S \left(\mathbf{i}\frac{x}{r^3} + \mathbf{j}\frac{y}{r^3} + \mathbf{k}\frac{z}{r^3}\right)\mathbf{n}_0 dS,$$

οπου $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ και $S$ ειναι η επιφανεια του στερεου

$$a^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq b^2$$

το οποιο οριζεται απο δυο ομοκεντρους κυκλους.

**Λυση**. Εχουμε

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{i}\frac{x}{r^3} + \mathbf{j}\frac{y}{r^3} + \mathbf{k}\frac{z}{r^3}\right) = \frac{-2x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} + \frac{x^2-2y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} + \frac{x^2+y^2-2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} = 0.$$

Οποτε

$$\iint\limits_S \left(\mathbf{i}\frac{x}{r^3} + \mathbf{j}\frac{y}{r^3} + \mathbf{k}\frac{z}{r^3}\right)\mathbf{n}_0 dS = \int\int\int_V \nabla\cdot(\mathbf{i}xy+\mathbf{j}yz+\mathbf{k}xz)\, dV = \int\int\int_V \nabla\cdot 0\cdot dV = 0.$$

**12.2.31.** Χρησιμοποιειστε το Θεωρημα *Gauss* για να υπολογισετε το ολοκληρωμα

$$\iint\limits_S \left(\mathbf{i}3xy^2 + \mathbf{j}xe^z + \mathbf{k}z^3\right)\mathbf{n}_0 dS,$$

οπου $S$ ειναι η επιφναεια του στερεου που οριζεται απο τον κυλινδρο $y^2+z^2=a$ και τα επιπεδα $x=-1$ και $x=2$.

**Λυση**. Εχουμε

$$\nabla \cdot \left(\mathbf{i}3xy^2 + \mathbf{j}xe^z + \mathbf{k}z^3\right) = 3y^2+3z^2.$$

Οποτε

$$\begin{aligned}\iint\limits_S \left(\mathbf{i}3xy^2 + \mathbf{j}xe^z + \mathbf{k}z^3\right)\mathbf{n}_0 dS &= \int\int\int_V \nabla\cdot\left(\mathbf{i}3xy^2 + \mathbf{j}xe^z + \mathbf{k}z^3\right) dV \\ &= 3\int\int\int_V \left(y^2+z^2\right) dV \\ &= 3\int_{-1}^{2}\int_0^{2\pi}\int_0^a \rho^2\rho d\rho d\theta dx = \frac{9}{2}\pi a^4.\end{aligned}$$

(Χρησιμοποιησμαε κυλινδρικες συντεταγμενες ως προς τον αξονα $x$, δηλ. $x=x$, $y=\rho\cos\theta$, $z=\rho\sin\theta$.)

**12.2.32.** Να υπολογιστει με χρηση του Θεωρηματος *Stokes*

$$\iint\limits_A \nabla\times(\mathbf{i}xz+\mathbf{j}yz+\mathbf{k}xy)\,\mathbf{n}_0 dS$$

οπου $A$ ειναι το τμημα της σφαιρας $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 4$ το οποιο βρισκεται εντος του κυλινδρου $S_2 : x^2 + y^2 = 1$ και πανω απο το επιπεδο $xy$.

**Λυση**. Για να χρησιμοποιησουμε το Θεωρημα $Stokes$ πρεπει να βρουμε την καμπυλη η οποια περικλειει το τμημα της σφαιρας. Αυτη η καμπυλη ειναι η τομη $S_1 \cap S_2$. Λυνουμ

$$\left.\begin{array}{c} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow z^2 = 3.$$

Αφου ξερουμε και οτι η καμπυλη βρισκεται πανω απο το $xy$ επιπεδο, τελικα η ζητουμενη καμπυλη ειναι ο κυκλος

$$C : \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, z = \sqrt{3}\right\}$$

ή, σε παραμετρικη μορφη

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}\cos t + \mathbf{j}\sin t + \mathbf{k}\sqrt{3}, \qquad t \in [0, 2\pi]$$

και

$$d\mathbf{r} = -\mathbf{i}\sin t dt + \mathbf{j}\cos t dt.$$

Εχουμε επισης, επι του κυκλου $C$,

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{i}xz + \mathbf{j}yz + \mathbf{k}xy = \mathbf{i}\sqrt{3}\cos t + \mathbf{j}\sqrt{3}\sin t + \mathbf{k}\cos t \sin t.$$

Αρα λοιπον

$$\begin{aligned} \iint_A \nabla \times (\mathbf{i}xz + \mathbf{j}yz + \mathbf{k}xy)\,\mathbf{n}_0 dS &= \int_C (\mathbf{i}xz + \mathbf{j}yz + \mathbf{k}xy) \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\mathbf{i}\sqrt{3}\cos t + \mathbf{j}\sqrt{3}\sin t + \mathbf{k}\cos t \sin t\right) \cdot (-\mathbf{i}\sin t + \mathbf{j}\cos t)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-\sqrt{3}\cos t \sin t + \sqrt{3}\sin t \cos t\right) = 0. \end{aligned}$$

Προσοχη! Το επικαμπυλιο ολοκληρωμα μηδενιζεται στη συγκεκριμενη καμπυλη. Αυτο δεν σημανει οτι το πεδιο $\mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{i}xz + \mathbf{j}yz + \mathbf{k}xy$ ειναι συντηρητικο.

$$\nabla \times (\mathbf{i}xz + \mathbf{j}yz + \mathbf{k}xy) = \mathbf{i}(x - y) + \mathbf{j}(x - y) \neq \mathbf{0}.$$

**12.2.33.** Να υπολογιστει με χρηση του Θεωρηματος $Stokes$ το

$$\iint_A \nabla \times (\mathbf{i}yz + \mathbf{j}xz + \mathbf{k}xy)\,\mathbf{n}_0 dS$$

οπου $A$ ειναι το τμημα του παραβολοειδους $S_2 : z = 9 - x^2 - y^2$ το οποιο βρισκεται πανω απο το επιπεδο $S_1 : z = 5$.

**Λυση**. Για να χρησιμοποιησουμε το Θεωρημα *Stokes* πρεπει να βρουμε την καμπυλη η οποια οριζει το τμημα του παραβολοειδους το οποιο μας ενδιαφερει. Αυτη ειναι η τομη $S_1 \cap S_2$. Λυνουμε

$$\left.\begin{array}{c} z = 9 - x^2 - y^2 \\ z = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 + y^2 = 4.$$

Δηλ. η ζητουμενη καμπυλη ειναι ο κυκλος

$$C : \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 4, z = 5\right\}$$

ή, σε παραμετρικη μορφη

$$\mathbf{r}\,(t) = \mathbf{i}2\cos t + \mathbf{j}2\sin t + \mathbf{k}5, \qquad t \in [0, 2\pi]$$

και

$$d\mathbf{r} = -\mathbf{i}2\sin t dt + \mathbf{j}2\cos t dt.$$

Εχουμε επισης, επι του κυκλου $C$,

$$\mathbf{F}\,(t) = \mathbf{i}yz + \mathbf{j}xz + \mathbf{k}xy = \mathbf{i}10\sin t + \mathbf{j}10\cos t + \mathbf{k}4\cos t\sin t.$$

Αρα λοιπον

$$\begin{aligned} \iint\limits_A \nabla \times (\mathbf{i}xz + \mathbf{j}yz + \mathbf{k}xy)\,\mathbf{n}_0 dS &= \int_C (\mathbf{i}xz + \mathbf{j}yz + \mathbf{k}xy) \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_0^{2\pi} (\mathbf{i}10\sin t + \mathbf{j}10\cos t + \mathbf{k}4\cos t\sin t) \cdot (-\mathbf{i}\sin t + \mathbf{j}\cos t)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-10\sin^2 t + 10\cos^2 t\right) = 10\int_0^{2\pi} \cos 2t = 0. \end{aligned}$$

**12.2.34.** Να υπολογιστει με χρηση του Θεωρηματος *Stokes* το

$$\iint\limits_A \nabla \times \left(\mathbf{i}x^2y^3z + \mathbf{j}\sin(xyz) + \mathbf{k}xyz\right)\mathbf{n}_0 dS$$

οπου $A$ ειναι το τμημα του κωνου $S_2 : y^2 = x^2 + z^2$ το οποιο βρισκεται μεταξυ των επιπεδων $y = 0$ και $y = 3$.

**Λυση**. Στο επιπεδο $y = 0$ εχουμε την κορυφη του κωνου, δηλαδη το σημειο $(0, 0, 0)$. Στο επιπεδο $y = 3$ εχουμε εναν κυκλο ο οποιος οριζει το ανω τμημα του κωνου και ικανοποιει το συστημα

$$\left.\begin{array}{c} y^2 = x^2 + z^2 \\ y = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 + z^2 = 9,$$

δηλ. εναν κυκλο ο οποιος σε παραμετρικη μορφη εχει την εξισωση

$$\mathbf{r}\,(t) = \mathbf{i}3\sin t + \mathbf{j}3 + \mathbf{k}3\cos t, \qquad t \in [0, 2\pi]$$

και

$$d\mathbf{r} = \mathbf{i}3\cos t dt - \mathbf{k}3\sin t dt.$$

Εχουμε επισης, επι του κυκλου $C$,

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{i}729\sin^2 t\cos t + \mathbf{j}27\sin t\cos t + \mathbf{k}27\cos t\sin t.$$

Αρα λοιπον

$$\begin{aligned}
&\iint_A \nabla \times \left(\mathbf{i}x^2y^3z + \mathbf{j}\sin(xyz) + \mathbf{k}xyz\right)\mathbf{n}_0 dS \\
&= \int_C \left(\mathbf{i}x^2y^3z + \mathbf{j}\sin(xyz) + \mathbf{k}xyz\right)\cdot d\mathbf{r} \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\mathbf{i}729\sin^2 t\cos t + \mathbf{j}27\sin t\cos t + \mathbf{k}27\cos t\sin t\right)\cdot(\mathbf{i}3\cos t - \mathbf{k}3\sin t)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(2187\cos^2 t\sin^2 t - 81\sin^2 t\cos t\right)dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{2187}{2}\sin^2 2t - 81\sin^2 t\cos t\right)dt \\
&= \frac{2187}{4}\left(\frac{t}{2} - \frac{\sin 4t}{8}\right)_{t=0}^{t=2\pi} - \left(\frac{81}{3}\sin^3 t\right)_{t=0}^{t=2\pi} = \frac{2187\pi}{4}.
\end{aligned}$$

## 12.3 Αλυτα Προβληματα

**12.3.1.** Να υπολογιστει το εμβαδο του τμηματος του επιπεδου $x+2y+2z=12$ το οποιο αποκοπτεται απο τα επιπεδα $x=0$, $y=0$, $x=1$, $y=1$.
**Απ**. $3/2$.

**12.3.2.** Να υπολογιστει το εμβαδο του τμηματος του επιπεδου $x+2y+2z=12$ το οποιο αποκοπτεται απο τα επιπεδα $x=0$, $y=0$ και τον κυλινδρο $x^2+y^2=16$.
**Απ**. $6\pi$.

**12.3.3.** Να βρεθει το εμβαδον του τμηματος της επιφανειας $y^2+z^2-az=0$ που αποκοπτι η σφαιρα $x^2+y^2+z^2=a^2$.
**Απ**. $2\pi a^2$.

**12.3.4.** Να υπολογιστει το εμβαδο του τμηματος που αποκοπτεται απο τους κυλινδρους $x^2+y^2=1$, $x^2+z^2=1$.
**Απ**. $16$.

**12.3.5.** Να υπολογιστει το $\iint_A (z+2x+4y/3)\,dS$, οπου $A$ ειναι το τμημα της επιφανειας $12x+8y+6z=24$ που βρισκεται στο πρωτο ογδοημοριο.
**Απ**. $4\sqrt{61}$.

**12.3.6.** Να υπολογιστει το $\iint_A \sqrt{R^2-x^2-y^2}dS$, οπου $A$ ειναι .το ημισφαιριο $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$
**Απ**. $\pi R^3$.

**12.3.7.** Να υπολογιστει το $\iint\limits_A \frac{dS}{x^2+y^2+(z-c)^2}$, οπου $A$ ειναι η σφαιρα $x^2+y^2+z^2=R^2$ και $c>R$..
**Απ.** $\frac{2\pi R}{C}\ln\frac{c+R}{c-R}$.

**12.3.8.** Να υπολογιστει το $\iint\limits_A xyz dS$, οπου $A$ ειναι το τμημα της επιφανειας $x+y+z=1$ που βρισκεται στο πρωτο ογδοημοριο.
**Απ.** $\sqrt{3}/120$.

**12.3.9.** Να υπολογιστει το $\iint\limits_A x dS$, οπου $A$ ειναι το τμημα της επιφανειας $x^2+y^2+z^2=a^2$ που βρισκεται στο πρωτο ογδοημοριο.
**Απ.** $\pi a^3/4$.

**12.3.10.** Να υπολογιστει το $\iint\limits_A y dS$, οπου $A$ ειναι η επιφανεια $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$.
**Απ.** $0$.

**12.3.11.** Να υπολογιστει το $\iint\limits_A x^2y^2 dS$, οπου $A$ ειναι η επιφανεια $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$.
**Απ.** $2\pi a^6/15$.

**12.3.12.** Να υπολογιστει το $\iint\limits_A \frac{1}{x^2+y^2+z^2} dS$, οπου $A$ ειναι το τμημα της επιφανειας $x^2+y^2=1$ που αποκοπτεται απο τα $z=$0 και $z=1$.
**Απ.** $\pi^2/2$.

**12.3.13.** Να υπολογιστει το $\iint\limits_A (\mathbf{i}y+\mathbf{j}2x-\mathbf{k}z)\,\mathbf{n}_0 dS$ οπου $A$ ειναι το τμημα του επιπεδου $2x+y-6=0$ που βρισκεται στο πρωτο ογδοημοριο και αποκοπτεται απο το $z=4$.
**Απ.** $108$.

**12.3.14.** Να υπολογιστει το $\iint\limits_A (\mathbf{i}\,(y^2+x)-\mathbf{j}2x+\mathbf{k}2yz)\,\mathbf{n}_0 dS$ οπου $A$ ειναι το τμημα του επιπεδου $2x+y+2z-6=0$ που βρισκεται στο πρωτο ογδοημοριο.
**Απ.** $81$.

**12.3.15.** Να υπολογιστει το $\iint\limits_A (\mathbf{i}2y-\mathbf{j}z+\mathbf{k}x^2)\,\mathbf{n}_0 dS$ οπου $S$ ειναι η επιφανεια $y^2-8x=0$ που βρισκεται στο πρωτο ογδοημοριο και μεταξυ των $y=4$ και $z=6$.
**Απ.** $132$.

**12.3.16.** Να υπολογιστει το $\iint\limits_A (\mathbf{i}6z+\mathbf{j}\,(2x+y)-\mathbf{k}x)\,\mathbf{n}_0 dS$ οπου $A$ ειναι η επιφανεια του χωριου που οριζεται απο τα $x^2+z^2=9$, $x=0$, $y=0$, $y=8$, και $z=0$.
**Απ.** $18\pi$.

**12.3.17.** Να υπολογιστει το $\iint\limits_A (\mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z)\cdot\mathbf{n}_0 dS$ οπου $A$ ειναι η επιφανεια του κυβου με κορυφες στα $(0,0,0)$, $(0,0,1)$, ..., $(1,1,1)$.

**Απ**. 3.

**12.3.18.** Να υπολογιστει το $\iint\limits_A (\mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z)\cdot\mathbf{n}_0 dS$ οπου $A$ ειναι η επιφανεια της σφαιρας με κεντρο το $(0,0,0)$ και μοναδιαια ακτινα

**Απ**. $4\pi$.

**12.3.19.** Να υπολογιστει το $\iint\limits_A (\mathbf{i}4xz + \mathbf{j}xyz^2 + \mathbf{k}3z)\cdot\mathbf{n}_0 dS$ οπου $A$ ειναι η επιφανεια του χωριου που οριζεται απο τα $x^2 + z^2 = z^2$, $z = 4$ και $z = 0$.

**Απ**. $320\pi$.

**12.3.20.** Να υπολογιστει το $\iint\limits_A (\mathbf{i}z + \mathbf{j}x - \mathbf{k}3zy^2)\cdot\mathbf{n}_0 dS$ οπου $A$ ειναι η επιφανεια του χωριου που οριζεται απο τα $x^2 + y^2 = 16$, $z = 0$ και $z = 5$ και βρισκεται στο πρωτο ογδοημοριο

**Απ**. 90.

**12.3.21.** Να υπολογιστει το $\iint\limits_A (\mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z)\,\mathbf{n}_0 dS$ οπου $A$ ειναι η επιφανεια του κυβου με κορυφες στα $(0,0,0)$, $(0,0,1)$, ..., $(1,1,1)$. (**Απ**. 3).

**12.3.22.** Να υπολογιστει το $\iint\limits_A (\mathbf{k}x^2y^2z)\cdot\mathbf{n}_0 dS$ οπου $A$ ειναι η επιφανεια $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

**Απ**. $2\pi/105$.

**12.3.23.** Να υπολογιστει το $\iint\limits_A (\mathbf{i}xy + \mathbf{j}yz + \mathbf{k}xz)\cdot\mathbf{n}_0 dS$ οπου $A$ ειναι η επιφανεια του τετραεδρου με κορυφες $(0,0,0)$, $(0,0,1)$, $(0,1,0)$, $(1,0,0)$.

**Απ**. $1/8$.

**12.3.24.** Να υπολογιστει το $\iint\limits_A (\mathbf{i}zx + \mathbf{j}xy + \mathbf{k}yz)\cdot\mathbf{n}_0 dS$ οπου $A$ ειναι η εξωτερικη επιφανεια της πυραμιδας που σχηματιζουν τα επιπεδα $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$.

**Απ**. $1/8$.

**12.3.25.** Να υπολογιστει το $\iint\limits_A (xdzdy + ydxdz + zdxdy)$ οπου $A$ ειναι το τμημα του επιπεδου $x + y + z = a$ που βρισκεται στο πρωτο ογδοημοριο.

**Απ**. $a^3/2$.

**12.3.26.** Να υπολογιστει το $\iint\limits_A (x^2dzdy + y^2dxdz + z^2dxdy)$ οπου $A$ ειναι το τμημα του παραβολοειδους $x^2 + y^2 + 2az = a^2$ που βρισκεται στο δευτερο ογδοημοριο.

**Απ**. $\frac{a^4}{3}\left(\frac{4}{5} + \frac{\pi}{16}\right)$.

**12.3.27.** Να υπολογιστει το $\iint\limits_A (yzdxdy + xzdydz + yxdxdz)$ οπου $A$ ειναι η εξωτερικη επιφανεια της επιφανειας που βρισκεται στο πρωτο ογδοημοριο και σχηματιζεται απο τον κυλινδρο $x^2 + y^2 = R^2$ και τ αεπιπεδα $x = 0, y = 0.z = 0, z = H$.

**Απ**. $R^2H\left(\frac{2R}{3} + \frac{\pi H}{8}\right)$.

**12.3.28.** Να υπολογιστει το $\iint\limits_A (xzdxdy + xydydz + yzdxdz)$ οπου $A$ ειναι η επιφανεια του κυλινδρου $x^2 + y^2 = 1$ που αποκοπτεται απο τα $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $z = 1$.

**Απ**. $\frac{2}{3} + \frac{\pi}{8}$.

**12.3.29.** Να υπολογιστει το $\iint\limits_A (y^2zdxdy + xzdydz + yx^2dxdz)$ οπου $A$ ειναι η εξωτερικη επιφανεια της επιφανειας που βρισκεται στο πρωτο ογδοημοριο και σχηματιζεται απο το παραβολοειδες $z = x^2 + y^2$, τον κυλινδρο $x^2 + y^2 = 1$ και τα επιπεδα $x = 0, y = 0.z = 0$.

**Απ**. $\pi/8$.

**12.3.30.** Να επαληθευθει το θεωρημα του Gauss για το ολοκληρωμα

$$\iint\limits_A \left(\mathbf{i}2xy + \mathbf{j}yz^2 + \mathbf{k}xz\right) \cdot \mathbf{n}_0 dS$$

οπου $A$ ειναι η επιφανεια του στερεου που οριζεται απο τα $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$, $z = 3$.

**12.3.31.** **Απ**. Το ολοκληρωμα ισουται με 30.

**12.3.32.** Να επαληθευθει το θεωρημα του Gauss για το ολοκληρωμα

$$\iint\limits_A \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot \mathbf{n}_0 dS$$

οπου $A$ ειναι η η σφαιρα $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

**Απ**. Το ολοκληρωμα ισουται με $351/2$.

**12.3.33.** Να επαληθευθει το θεωρημα του Gauss για το ολοκληρωμα

$$\iint\limits_A \left(\mathbf{i}2xy + \mathbf{j}yz^2 + \mathbf{k}xz\right) \cdot \mathbf{n}_0 dS$$

οπου $A$ ειναι η επιφανεια του στερεου που οριζεται απο τα $x = 0$, $x = 6 - 2z$, $y = 0$, $y = 3$, $z = 0$.

**Απ**. Το ολοκληρωμα ισουται με $351/2$.

**12.3.34.** Να επαληθευθει το θεωρημα του Gauss για το ολοκληρωμα

$$\iint\limits_A \left(\mathbf{i}2x^2y - \mathbf{j}y^2 + \mathbf{k}4xz^2\right) \cdot \mathbf{n}_0 dS$$

οπου $A$ ειναι η επιφανεια του το στερεου που βρισκεται στο πρωτο ογδοημριο και οριζεται απο τα $y^2 + z^2 = 9$, $x = 2$.

**Απ**. Το ολοκληρωμα ισουται με 180.

**12.3.35.** Να επαληθευθει το θεωρημα του Gauss για το ολοκληρωμα

$$\iint\limits_A \left(\mathbf{i}4x - \mathbf{j}2y^2 + \mathbf{k}z^2\right) \cdot \mathbf{n}_0 dS$$

οπου $A$ ειναι η επιφανεια του στερεου που οριζεται απο τα $y^2 + x^2 = 4$, $z = 0$, $z = 3$.

**Απ**. Το ολοκληρωμα ισουται με $84\pi$.

**12.3.36.** Να επαληθευθει το θεωρημα του Gauss για το ολοκληρωμα

$$\iint\limits_A (\mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z) \cdot \mathbf{n}_0 dS$$

οπου $A$ ειναι η επιφανεια του κυβου με κορυφες $(-1, -1, -1)$, $(-1, -1, 1)$, ..., $(1, 1, 1)$.

**Απ**. Το ολοκληρωμα ισουται με 24.

**12.3.37.** Να επαληθευθει το θεωρημα του Gauss για το ολοκληρωμα $\iint\limits_A (\mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z) \cdot \mathbf{n}_0 dS$ οπου $A$ ειναι η επιφανεια της σφαιρας με κεντρο το $(0, 0, 0)$ και ακτινα 2.

**Απ**. Το ολοκληρωμα ισουται με $32\pi$.

**12.3.38.** Να επαληθευθει το θεωρημα του Gauss για το ολοκληρωμα $\iint\limits_A (\mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z) \cdot \mathbf{n}_0 dS$ οπου $A$ ειναι η επιφανεια που οριζεται απο τα $y^2 + x^2 = 4 - z$ και $z = 0$.

**Απ**. Το ολοκληρωμα ισουται με $24\pi$.

**12.3.39.** Να υπολογιστει το $\iint\limits_A (x^3 dzdy + y^3 dxdz + z^3 dxdy)$ οπου $A$ ειναι η σφαιρα $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

**Απ**. $12\pi a^5/5$.

**12.3.40.** Να υπολογιστει το $\iint\limits_A (x^3 dzdy + y^3 dxdz + z^3 dxdy)$ οπου $A$ ειναι η εξωτερικη επιφανεια της πυραμιδας που σχηματιζουν τα επιπεδα $x = 0, y = 0, z = 0$ και $x + y + z = a$.

**Απ**. $15a^5/100$.

**12.3.41.** Να επαληθευθει το θεωρημα του Stokes για την $\mathbf{F}(x,y,z)=\mathbf{i}xz-\mathbf{j}y+\mathbf{k}yx^2$ και την επιφανεια $S$ του τριγωνου με κορυφες $(4,0,0)$, $(0,8,0)$ και $(0,0,4)$.

**Απ**. Το επικαμπυλιο ολοκληρωμα ισουται με $32/3$.

**12.3.42.** Να επαληθευθει το θεωρημα του Stokes για την $\mathbf{F}(x,y,z)=\mathbf{i}(y-z+2)+\mathbf{j}(yz+4)-\mathbf{k}xz$ και την επιφανεια $S$ του κυβου οριζεται απο τα $x=0$, $x=2$, $y=0$, $y=2$, $z=0$, $z=2$.

**Απ**. Το επικαμπυλιο ολοκληρωμα ισουται με $-4$.

**12.3.43.** Να επαληθευθει το θεωρημα του Stokes για την $\mathbf{F}(x,y,z)=\mathbf{i}(2x-y)-\mathbf{j}yz^2-\mathbf{k}y^2z$ και την επιφανεια $S$ που οριζεται απο την $z=\sqrt{1-y^2-x^2}$.

**Απ**. Το επικαμπυλιο ολοκληρωμα ισουται με $\pi$.

**12.3.44.** Να υπολογιστει το $\int_C (x(z-y)\,dx+y(x-z)\,dy+z(y-x)dz))$ οπου $C$ ειναι το τριγωνο με κορυφες $(a,0,0),(0,a,0),(0,0,a)$.

**Απ**. $a^3$.

**12.3.45.** Να υπολογιστει το $\int_C (yzdx+xzdy+xydz)$ οπου $C$ ειναι το τριγωνο με κορυφες $(0,0,0),(1,1,0),(1,1,1)$.

**Απ**. $0$.