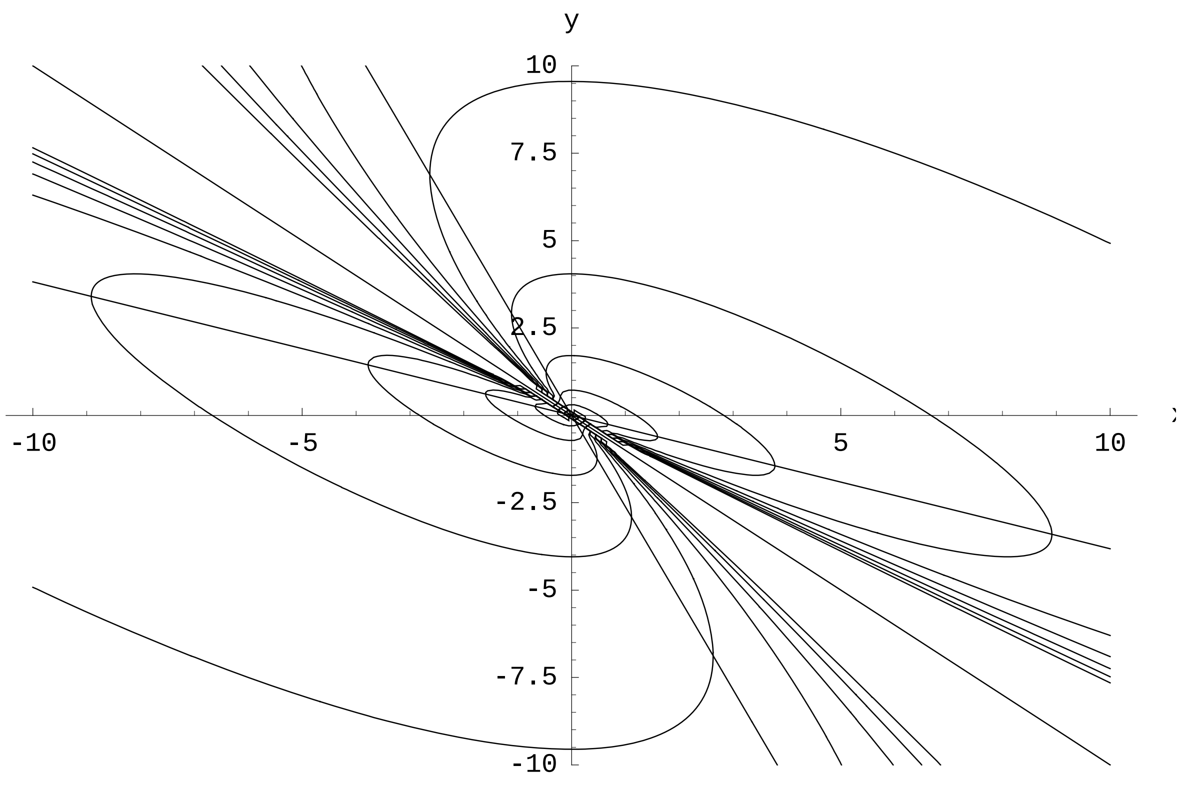
Δημήτρης Τσουμπελής

Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις

Τόμος Α



Πανεπιστήμιο Πατρών   Τμήμα Μαθηματικών

Πάτρα 2008

Στη μάνα μου, Σοφία Γ.Τσουμπελή

Πρόλογος

Τούτο το σύγγραμμα αποτελεί το πρωτόλειο ενός βιβλίου για το γνωστικό αντικείμενο που έχει καθιερωθεί με τον τίτλο *Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις*. Στόχος του είναι να αποτελέσει ένα ακόμα βοήθημα σε όποιον, είτε από αμιγές ενδιαφέρον ή από την υποχρέωση ενός πανεπιστημιακού μαθήματος, θα στραφεί στη μελέτη των εξισώσεων που λέγονται Διαφορικές. Αυτού του είδους οι εξισώσεις δεσπόζουν σε όλες, χωρίς εξαίρεση, τις επιστήμες που έχουν μαθηματικοποιήσει ορισμένες από τις έννοιες με τις οποίες επιχειρούν την γνωσιακή κατάκτηση του κόσμου. Κι αυτές είναι σήμερα όλες σχεδόν οι επιστήμες. Από τη Φυσική μέχρι τη Βιολογία και τα Οικονομικά.

Τα σχόλια, οι κριτικές παρατηρήσεις και οι διορθώσεις όσων περιέχονται στις επόμενες σελίδες είναι παραπάνω από ευπρόσδεκτες. Το ίδιο ισχύει και για την γενικού τύπου αξιολόγηση του βιβλίου. Μάλιστα, όσο αυστηρότερος θα είναι στην κριτική του ο ανα-γνώστης, τόσο το καλύτερο. Γιατί, πραγματικά, το σώμα αυτού του συγγράμματος είναι ... ακόμα ζεστό. Για να θυμηθώ και να τιμήσω τη γειτονιά όπου γεννήθηκα και μεγάλωσα -ένα στενό με τον εντυπωσιακό τίτλο Οδός Φιλαδελφείας στα σύνορα ανάμεσα στα γύφτικα και τα προσφυγικά της Πάτρας- αυτές οι σελίδες μοιάζουν με το πυρακτωμένο σίδερο που τράβαγαν με την τσιμπίδα από το αμόνι, τραγουδώντας, οι γύφτοι-σιδηρουργοί. ΄Οσο δυνατότερα χτυπηθεί με την "βαριά", τόσο καλλίτερη και χρησιμότερη θα είναι η τελική μορφή του.

Ας μου επιτραπεί από τη θέση αυτή να ευχαριστήσω τον συνεργάτη μου Στέλιο Δήμα, μεταπτυχιακό φοιτητή του Τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστήμιου Πατρών. Χωρίς την πολύτιμη αρωγή του σε μια σειρά από τεχνικά προβλήματα ακόμα και αυτή η βιαστική έκδοση του βιβλίου δε θα μπορούσε να υλοποιηθεί.

Δημήτρης Γ. Τσουμπελής

Πάτρα

Σεπτέμβρης 20004

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο Ι

Κεφάλαιο ΙΙ

Κεφάλαιο III

Κεφάλαιο IV

Κεφάλαιο V

Κεφάλαιο I

Θεμέλια

1. Το παιχνίδι των διαφορικών εξισώσεων

Οι διαφορικές εξισώσεις είναι ένα ευχάριστο (κυρίως επιτραπέζιο) παιχνίδι αναζήτησης ενός άγνωστου αντικείμενου, με βάση ορισμένες πληροφορίες που δίνονται στους παίκτες στην αρχή. Δημιουργοί του παιχνιδιού ήταν αυτοί που ανακάλυψαν τον διαφορικό και ολοκληρωτικό λογισμό (γνωστό και ως ανάλυση): Οι **Isaac Newton** (Νιούτον, ή -προς το ελληνικότερον- Νεύτων) (1642-1727) και **Gottfried Wilhelm Leibniz** (Λάιμπνιτς) (1646-1716). Το γεγονός ότι σήμερα παίζεται από χιλιάδες επιστήμονες σε όλα τα μήκη και πλάτη της γης αποτελεί ένδειξη, αν όχι απόδειξη, του πόσο ενδιαφέρον και σημαντικό είναι αυτό το παιχνίδι.

Το άγνωστο αντικείμενο στο παιχνίδι των διαφορικών εξισώσεων είναι μια συνάρτηση και η βασική πληροφορία δίνεται με τη μορφή μιας ισότητας. Η τελευταία περιέχει οπωσδήποτε μία τουλάχιστον από από τις παραγώγους της άγνωστης συνάρτησης. ΄Αρα, για να περιγράψουμε με σαφήνεια τους κανόνες του παιχνιδιού και τις τεχνικές που οδηγούν στην εύρεση του αγνώστου, θα χρειαστεί να υπενθυμίσουμε αρχικά την έννοια της συνάρτησης και της παραγώγου της.

Προτού, όμως, ξεκινήσουμε την αναλυτική περιγραφή του παχνιδιού των διαφορικών εξισώσεων, θα σταθούμε για λίγο σ' ένα άλλο μαθηματικό παιχνίδι που μας είναι οικείο από τα σχολικά μας χρόνια - στις αλγεβρικές εξισώσεις. Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι μας έχει δοθεί για λύση το ακόλουθο απλό

Πρόβλημα

Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός που, όταν πολλαπλασιάζεται με τον εαυτό του, μένει αναλλοίωτος.

Λύση

Για ν' αντιμετωπίσουμε ένα ... τόσο σοβαρό πρόβλημα, ξεκινάμε εισάγοντας ένα σύμβολο για τον άγνωστο αριθμό, ας πούμε το γράμμα x. Αυτό μας επιτρέπει να διατυπώσουμε το πρόβλημα με συντομία, γράφοντάς το στη μορφή

(1) $$x^2 = x.$$

Είναι φανερό ότι για να γράψουμε αυτή την ισότητα, χρησιμοποιήσαμε ένα επιπλέον σύμβολο, το x^2, που δηλώνει το γινόμενο $x \cdot x$.

Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες των αριθμών και των αλγεβικών πράξεων για να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι το πρόβλημα έχει δύο λύσεις: Τους αριθμούς μηδέν και ένα, ή τα στοιχεία 0 και 1 του συνόλου των πραγματικών αριθμών, $\mathbb{R}$. Συνήθως δίνουμε τη λύση που βρήκαμε γράφοντας $x = 0$, $x = 1$. Εναλλακτικά, γράφουμε την απάντηση στη μορφή $x \in \{0, 1\}$, δηλώντας έτσι ότι, η ισότητα (1) ισχύει αν το σύμβολο x αντικατασταθεί από οποιοδήποτε μέλος του υποσύνολου $\{0, 1\}$ του $\mathbb{R}$.

Με ακριβώς ανάλογο τρόπο, κάποιος που γνωρίζει την έννοια της παραγώγου μιας συνάρτησης, μπορεί να σκεφτεί το ακόλουθο, επίσης απλό

Πρόβλημα

Να βρεθεί ο συνάρτηση που, όταν παραγωγίζεται, μένει αναλλοίωτη.

Λύση

Για ν' αντιμετωπίσουμε και αυτό το πρόβλημα, ξεκινάμε εισάγοντας ένα σύμβολο για την άγνωστη συνάρτηση, ας πούμε το γράμμα x. Αυτό μας επιτρέπει να διατυπώσουμε το πρόβλημα με συντομία, γράφοντάς το στη μορφή

(2) $$x' = x.$$

Είναι φανερό ότι για να γράψουμε αυτή την ισότητα, χησιμοποιήσαμε ένα επιπλέον σύμβολο, το x', που δηλώνει την παράγωγο της άγνωστης συνάρτησης x.

Σίγουρα, αυτός που σκέφτηκε τούτο το πρόβλημα ξέρει και τις λύσεις του, ή, τουλάχιστον μία απ' αυτές. Ωστόσο, εμείς δεν θα τις αποκαλύψουμε, γιατί τότε το "άτομο" θα φαινόταν και πολύ έξυπνο. Στην πραγματικότητα, η επίλυση και αυτού του προβλήματος είναι πολύ εύκολη υπόθεση, πράγμα για το οποίο ο υπομονετικός αναγνώστης που τυχόν δε γνωρίζει την απάντηση θα πειστεί γρήγορα.

Το μόνο που αξίζει να αναφέρουμε από τώρα είναι ότι, όπως η ισότητα (1), έτσι και η (2) ονομάζεται ***εξίσωση***. Και ο λόγος πάλι είναι ότι, γράφοντάς την, δεν εννοούμε κάτι που ισχύει για κάθε συνάρτηση, αλλά ότι εκφράζει, με συμπυκνωμένο τρόπο, ένα πρόβλημα που ζητάει λύση. Αυτό αποδείχνεται ρητά όταν, έχοντας κατασκευάσει τη λύση, διαπιστώνουμε ότι και η ισότητα (2) δεν ισχύει, παρά μόνο αν το x αντικατασταθεί από συγκεκριμένες συναρτήσεις.

Για να τελειώνουμε με τούτη τη μακροσκελή εισαγωγή, σημειώνουμε ότι η (2) αποτελεί το πρώτο μας παράδειγμα διαφορικής εξίσωσης. Στα επόμενα θα φανεί καθαρά ότι, παρ' όλη την απλότητά της, η (2) αποτελεί εξέχον μέλος της κοινότητας των διαφορικών εξισώσεων.

2. Κατασκευή διαφορικών εξισώσεων από γνωστές συναρ- τήσεις

Ας υποθέσουμε ότι η $u(t)$, $t \in \mathbb{R}$, είναι μια από τις γνωστές σας συναρτήσεις. Για να είμαστε ακριβείς, ας υποθέσουμε ότι

(1) $$u(t) = t^2, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Τότε, για κάθε συγκεκριμένο $\tau \in \mathbb{R}$ και οποιονδήποτε μη μηδενικό αριθμό h,

(2) $$\frac{u(\tau+h)-u(\tau)}{h} = \frac{(\tau+h)^2-t^2}{h} = 2\,\tau + h.$$

Συνεπώς, το όριο

(3) $$\lim_{h\to 0} \frac{u(\tau+h)-u(\tau)}{h},$$

υπάρχει και είναι ίσο με $2\,\tau$.

Γενικά, όταν ο αριθμός τ ανήκει στο πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης $u(t)$ και το πιο πάνω όριο υπάρχει, τότε λέμε ότι η συνάρτηση $u(t)$ είναι ***διαφορίσιμη* ή *παραραγωγίσιμη στο σημείο* τ**.

Το ίδιο το όριο ονομάζεται ***παράγωγος της συνάρτησης* $u(t)$ *στο σημείο* τ** και συμβολίζεται με $u'(\tau)$ ή $\frac{d\,u}{d\,t}(\tau)$. Με άλλα λόγια,

(4) $$\boxed{u'(\tau) \equiv \frac{d\,u}{d\,t}(\tau) := \lim_{h\to 0} \frac{u(\tau+h)-u(\tau)}{h}}$$

Σημείωση. Στην (4) πρωτοεμφανίζονται τα σύμβολα $\equiv$ και := (άνω-κάτω τελεία και ίσον). Το πρώτο δηλώνει ότι οι δυο ποσότητες που βρίσκονται αριστερά και δεξιά του είναι ταυτόσημες. Το δεύτερο σύμβολο χρησιμοποιείται για να ορίσουμε μια νέα ποσότητα: Το αντικείμενο που προηγείται του := ορίζεται από αυτό που έπεται.

Όταν η παράγωγος υπάρχει σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού A μιας συνάρτησης $u(t)$, η τελευταία λέγεται (σκέτα) *διαφορίσιμη*. Τότε ορίζεται αυτόματα και η συνάρτηση $u'(t)$, $t \in A$, που ονομάζεται *παράγωγος της* $u(t)$, $t \in A$. Όπως είδαμε παραπάνω, η συνάρτηση $u(t) = t^2$, $t \in \mathbb{R}$, είναι διαφορίσιμη και

(5) $$u'(t) = 2\,t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Αν επικεντρώσουμε την προσοχή μας στη σχέση (5), μπορούμε να θέσουμε το εξής ερώτημα: Εκτός από την $u(t) = t^2$, $t \in \mathbb{R}$, υπάρχουν άλλες συναρτήσεις που έχουν ως παράγωγο την $f(t) = 2\,t$, $t \in \mathbb{R}$;

Ας συμβολίσουμε με x το τυχαίο στοιχείο της οικογένειας των συναρτήσεων που έχουν αυτή την ιδιότητα και με x' την παράγωγό του. Τότε το ερώτημα που μόλις εγείραμε μπορεί να διατυπωθεί με τον ακόλουθο τρόπο:

Πρόβλημα

Να βρεθεί κάθε συνάρτηση x για την οποία ισχύει ότι

(6) $$x'(t) = 2\,t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Με αυτό τον τρόπο έχουμε καταλήξει σε μια διαφορική εξίσωση (ΔΕ).

Λύση

Από τον τρόπο με τον οποίο καταλήξαμε σ' αυτό το πρόβλημα αμέσως έπεται ότι μια λύση της ΔΕ (6) είναι η $x(t) = t^2$. Επιπλέον, όλοι γνωρίζουμε ότι κάθε σταθερή συνάρτηση είναι διαφορίσιμη κι ότι η παράγωγός της είναι η μηδενική συνάρτηση. Αυτό το συμπέρασμα είναι άμεση απόρροια του ορισμού της παραγώγου. Συγκεκριμένα, αν

(7) $$\varphi(t) = c, \quad t \in \mathbb{R},$$

όπου c τυχαίος πραγματικός αριθμός, τότε

(8) $$\lim_{h\to 0} \frac{\varphi(\tau+h)-\varphi(\tau)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = 0.$$

Με άλλα λόγια,

(9) $$\varphi'(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Συνακόλουθα, κάθε συνάρτηση της μορφής

(10) $$x(t) = t^2 + c$$

αποτελεί λύση της ΔΕ (6).

Εδώ αξίζει να σημειώσουμε ότι η (10) δεν παριστάνει μια συγκεκριμένη συνάρτηση, αλλά μια οικογένεια συναρτήσεων με άπειρα μέλη, ένα για κάθε τιμή της σταθερής c. Αυτή η σταθερή, που με τις τιμές της διακρίνονται τα μέλη της οικογένειας, λέγεται *παράμετρος*. Σύντομα θα συναντήσουμε οικογένειες συναρτήσεων που τα μέλη τους διακρίνονται από δύο ή και περισσότερες παραμέτρους. Γι αυτό, ένα σύνολο συναρτήσεων σαν αυτό που ορίζει η (10) θα αναφέρεται ως ***μονοπαραμετρική οικογένεια συναρτήσεων***.

Η ως τώρα ανάλυση του προβλήματος έχει οδηγήσει στην εύρεση άπειρων σε πλήθος λύσεων. Παρ' όλ' αυτά, δεν είμαστε σε θέση να ισχυριστούμε ότι έχουμε βρει όλες ανεξαιρέτως τις λύσεις της ΔΕ (6). Εκτός αν ανήκουμε σ' εκείνους που γνωρίζουν ότι,

Ο μηδενισμός της παραγώγου μιας συνάρτησης δεν είναι μόνο αναγκαία αλλά και ικανή συνθήκη για να είναι η συνάρτηση σταθερή.

Αυτό το αποτέλεσμα είναι θεμελιακής σημασίας για τις διαφορικές εξισώσεις. Η απόδειξή του δεν είναι ιδιαίτερα δύσκολη. Στηρίζεται, όμως, σε ένα άλλο θεμελιακό αποτέλεσμα του διαφορικού λογισμού, στο λεγόμενο

Θεώρημα μέσης τιμής

Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση $\varphi(t)$ είναι διαφορίσιμη στο *ανοιχτό διάστημα*

(11) $$(a, b) := \{t \in \mathbb{R} : a < t < b\}$$

και συνεχής στο ***κλειστό διάστημα***

(12) $$[a, b] := \{t \in \mathbb{R} : a \le t \le b\}.$$

Τότε υπάρχει $t_c \in (a, b)$ τέτοιο που

(13) $$\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(t_c)\,(b - a).$$

Την απόδειξη αυτού του θεωρήματος τη βρίσκει κανείς σε οποιοδήποτε βιβλίο διαφορικού λογισμού (ανάλυσης). Γι' αυτό, δε θα την επαναλάβουμε κι από αυτή τη θέση. Αλλά και την απόδειξη του επόμενου λήμματος, το οποίο διατυπώνει αυστηρά το αποτέλεσμα που ήδη αναφέραμε, θα την αφήσουμε στον αναγνώστη για άσκηση.

Λήμμα

Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση $\varphi(t)$, $t \in I$ είναι διαφορίσιμη στο διάστημα I και ότι $\varphi'(t) = 0$ σε κάθε $t \in I$. Τότε υπάρχει σταθερή c τέτοια που $\varphi(t) = c$, για κάθε $t \in I$.

Πόρισμα

Αν οι παράγωγοι δύο συναρτήσεων είναι ίσες σε κάποιο διάστημα I, τότε οι συναρτήσεις διαφέρουν κατά μία σταθερή. Με άλλα λόγια

$$u'(t) = \upsilon'(t), \ t \in I \quad \Rightarrow \quad u(t) = \upsilon(t) + c, \ t \in I.$$

Απόδειξη: Θέτουμε $\varphi(t) := u(t) - \upsilon(t)$, $t \in I$. Τότε η υπόθεση ότι $u'(t) = \upsilon'(t)$ είναι ισοδύναμη με την $\varphi'(t) = 0$. Από το λήμμα αμέσως έπεται ότι, $\varphi(t) = c$, δηλαδή $u(t) - \upsilon(t) = c$.

Ανακεφαλαιώνοντας, έχουμε καταλήξει στο εξής απλό, αλλά και πολύ σημαντικό συμπέρασμα:

Το σύνολο των λύσεων της ΔΕ $x'(t) = 2\,t, \ t \in \mathbb{R}$**, ταυτίζεται με την μονοπαραμετρική οικογένεια των διαφορίσιμων συναρτήσεων** $x(t) = t^2 + c, \ t \in \mathbb{R}$.

Ας σημειώσουμε τώρα ότι, η παράγωγος $u'(t) = 2\,t$, $t \in \mathbb{R}$, της συνάρτησης $u(t) = t^2$, $t \in \mathbb{R}$, είναι κι αυτή μια διαφορίσιμη συνάρτηση. Γιατί, από τον ορισμό (4) αμέσως έπεται ότι η παράγωγος της συνάρτησης $\upsilon(t) = 2\,t$, $t \in \mathbb{R}$, υπάρχει σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της και είναι ίση με $\upsilon'(t) = 2$, $t \in \mathbb{R}$. Με άλλα λόγια, η ***παράγωγος δεύτερης τάξης*** της συνάρτησης $u(t) = t^2$, $t \in \mathbb{R}$, υπάρχει και είναι ίση με

(14) $$u''(t) \equiv \frac{d^2 u}{d\,t^2}(t) = 2, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Αυτό το αποτέλεσμα μπορεί να αποτελέσει την αφορμή για να θέσουμε το ακόλουθο ερώτημα: Ποιο είναι το σύνολο των συναρτήσεων των οποίων η δεύτερης τάξης παράγωγος είναι σταθερή και ίση με 2 για κάθε $t \in \mathbb{R}$; Αν συμβολίσουμε με x το τυχαίο στοιχείο αυτής της άγνωστης οικογένειας συναρτήσεων και με x'' την αντίστοιχη παράγωγο δεύτερης τάξης, τότε το ερώτημά μας παίρνει την ακόλουθη μορφή:

Πρόβλημα

Ζητούνται όλες οι λύσεις της ΔΕ

(15) $$x''(t) = 2, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Λύση

Η λύση και αυτής της εξίσωσης είναι εύκολη υπόθεση. Ο λόγος είναι ότι το καινούργιο μας πρόβλημα μπορεί να μετατραπεί σε κάτι ανάλογο αυτού που αντιμετωπίσαμε νωρίτερα.

Συγκεκριμένα, το γεγονός ότι

(16) $$x'' \equiv (x')'$$

μας ωθεί στο να εισαγάγουμε μια νέα άγνωστη συνάρτηση, την

(17) $$y := x'.$$

Τότε $y' = x''$ και η ΔΕ (15) γράφεται σαν

(18) $$y'(t) = 2.$$

΄Οπως ήδη παρατηρήσαμε, αν $\upsilon(t) = 2\,t$, $t \in \mathbb{R}$, τότε $\upsilon'(t) = 2$, $t \in \mathbb{R}$. ΄Αρα έχουμε στη διάθεσή μας μία τουλάχιστον λύση της (18). ΄Ομως, το πόρισμα που αποδείξαμε λίγο πιο πάνω σημαίνει ότι από αυτή τη λύση κατασκευάζεται αμέσως και το σύνολο των λύσεων της παραπάνω ΔΕ: Αρκεί να προσθέσουμε στην έκφραση $2\,t$ μια τυχαία σταθερή, ας την πούμε c_1. Συνεπώς, όλες οι λύσεις της (18) περιέχονται στη μονοπαραμετρική οικογένεια συναρτήσεων

(19) $$y(t) = 2\,t + c_1.$$

Σύμφωνα με τον ορισμό (17) της y, η σχέση που μόλις βρήκαμε μας δίνει την πρώτη παράγωγο των συναρτήσεων που αναζητάμε:

(20) $$x'(t) = 2\,t + c_1.$$

Αλλά και αυτή δεν είναι παρά μια ΔΕ σαν εκείνη που πρωτολύσαμε. Συνεπώς, για να βρούμε το σύνολο των λύσεών της, αρκεί να βρούμε μία μόνο συνάρτηση της οποίας η παράγωγος είναι ίση με $2\,t + c_1$. Το πόρισμα φροντίζει για τα υπόλοιπα. Αυτό, όμως, είναι πολύ εύκολη υπόθεση: Από το γεγονός ότι $2\,t = (t^2)'$, $c_1 = (c_1\,t)'$ αμέσως έπεται ότι $2\,t + c_1 = (t^2 + c_1\,t)'$. Συνακόλουθα, το σύνολο των λύσεων της (20), άρα και της αρχικής ΔΕ (15), προκύπτει με το να προσθέσουμε μια τυχαία σταθερή c_2 στην έκφραση $t^2 + c_1\,t$. Με άλλα λόγια, η λύση του προβλήματός μας δίνεται από τη ***διπαραμετρική οικογένεια των συναρτήσεων***

(21) $$x(t) = t^2 + c_1\,t + c_2.$$

Η διαδικασία που περιγράψαμε πιο πάνω, δηλαδή το ότι ξεκινήσαμε από τη συνάρτηση $u(t) = t^2$, $t \in \mathbb{R}$, για να καταλήξουμε στις ΔΕ $x' = 2\,t$ και $x'' = 2$, μπορεί να να επεκταθεί με πολλούς και διάφορους τρόπους. Πρώτ' απ' όλα, μπορούμε να συνεχίσουμε στην ίδια κατεύθυνση. Δηλαδή, να υπολογίσουμε τις παραγώγους τρίτης και μεγαλύτερης τάξης της $u(t) = t^2$, $t \in \mathbb{R}$, ή οποιασδήποτε άλλης από τις γνωστές μας συναρτήσεις και, από το αντίστοιχο αποτέλεσμα, να κατασκευάσουμε ΔΕ στις οποίες εμφανίζονται παράγωγοι ανώτερης τάξης της άγνωστης συνάρτησης. Μπορούμε επίσης να κασκευάσουμε ΔΕ χρησιμοποιώντας ως βάση συνδυασμούς μιας γνωστής συνάρτησης και των παραγώγων της, όπως στο ακόλουθο

Παράδειγμα

(i) Αν $u(t) = t^2$, $t \in \mathbb{R}$, τότε από τα προηγούμενα αποτελέσματα έπεται ότι

$$u^{(3)}(t) \equiv \frac{d^3 u}{d\,t^3}\,(t) = 0,$$

και άρα $u^{(3)}(t) + u''(t) = 2$.

Έτσι οδηγούμαστε στη ΔΕ

$$x^{(3)}(t) + x''(t) = 2.$$

(ii) Αν $u(t) = t^{-1}$, $t > 0$, τότε

$$u'(t) = -t^{-2}, \qquad u''(t) = 2\,t^{-3}.$$

Συνεπώς,

(ii-α) $u'(t) = -u^2(t)$, $t > 0$. Αυτό το αποτέλεσμα μας οδηγεί στη διατύπωση της ΔΕ

$$x'(t) + x^2(t) = 0.$$

(ii-β) $t^2\, u''(t) + 6\, t\, u'(t) + 4\, u(t) = 0$, $t > 0$. Με βάση τούτο το αποτέλεσμα, μπορούμε να διατυπώσουμε τη ΔΕ

$$t^2\, x''(t) + 6\, t\, x'(t) + 4\, x(t) = 0.$$

Σημείωση. Για να κάνουμε τις εξισώσεις που θα μελετήσουμε πιο εμφανίσιμες, από τώρα και στο εξής θα γράφουμε την άγνωστη συνάρτηση και τις παραγώγους της, χωρίς τη συνοδία της παρένθεσης με το σύμβολο της ανεξάρτητης μεταβλητής. Με άλλα λόγια, θα προτιμάμε το τελευταίο στάδιο της ακόλουθης διαδικασίας:

$$t^2\, x''(t) + 6\, t\, x'(t) + 4\, x(t) = 0 \xrightarrow{\text{ινστιτούτο καλλονής}} t^2\, x'' + 6\, t\, x' + 4\, x = 0.$$

Η μέθοδος κατασκευής ΔΕ την οποία παρουσιάσαμε νωρίτερα, τις περισσότερες φορές δεν είναι άμεσα αντιστρέψιμη. Έτσι, δεν μπορεί να οδηγήσει αμέσως στη γενική λύση της ΔΕ που κατασκευάσαμε. Ωστόσο, η παραπάνω μέθοδος είναι πολύ σημαντική για δύο, βασικά, λόγους. Ο πρώτος είναι ότι αποσαφηνίζει τον ακόλουθο κανόνα: Η γενική λύση μιας ΔΕ, στην οποία εμφανίζεται η παράγωγος τάξης το πολύ n της άγνωστης συνάρτησης, περιέχει οπωσδήποτε n παραμέτρους. Τούτο οφείλεται στο γεγονός ότι,

Σε τελική ανάλυση -όπως θα έλεγε κι ο Κ. Μάρξ (1818-83)-

η διαδικασία επίλυσης μιας ΔΕ <u>είναι</u> η αντίστροφη εκείνης που, με διαδοχικές

παραγωγίσεις, οδήγησε στην συγκεκριμένη εξίσωση.

Ο δεύτερος λόγος έχει να κάνει με το ακόλουθο γεγονός. Οι πιο σύνθετες μέθοδοι που είναι απαραίτητες για την επίλυση των "δύσκολων" ΔΕ συχνά στηρίζονται στην γνώση μιας τουλάχιστον λύσης τους. Είναι προφανές ότι, αν έχουμε εμείς οι ίδιοι κατασκευάσει την διαφορική εξίσωση , τότε γνωρίζουμε εκ των προτέρων μία λύση της - τη συνάρτηση με την οποία ξεκινήσαμε! Αν πάλι, άλλος είναι ο κατασκευαστής της ΔΕ, τότε μπορούμε να μαντέψουμε τη συνάρτηση με την οποία ξεκίνησε ή, τουλάχιστον, τη γενική μορφή της.

Παράδειγμα

Η ΔΕ

(22) $$2\, t^2\, x'' + t\, x' - x = 0$$

μοιάζει μ' εκείνη στην οποία καταλήξαμε ξεκινώντας από την συνάρτηση $u(t) = t^{-1}$, $t > 0$. Άρα είναι εύλογο να υποθέσει κανείς ότι υπάρχουν λύσεις της (22) που είναι της μορφής $x = t^{\beta}$.

Πραγματικά, από την υπόθεση ότι $x = t^{\beta}$ αμέσως έπεται ότι $x' = \beta\, t^{\beta-1}$ και $x'' = \beta\, (\beta - 1)\, t^{\beta-2}$. Η αντικατάσταση αυτών των εκφράσεων στην (22) δίνει το ακόλουθο αποτέλεσμα:

(23) $$2\, \beta\, (\beta - 1)\, t^{\beta} + \beta\, t^{\beta} - t^{\beta} = 0.$$

Ισοδύναμα,

(24) $$(2\, \beta^2 - \beta - 1)\, t^{\beta} = 0.$$

Αυτή η σχέση μπορεί να ισχύει για κάθε t σε κάποιο διάστημα της πραγματικής ευθείας, εάν και μόνο όταν $2\beta^2 - \beta - 1 = 0$. Συνεπώς, $\beta \in \{-1/2,\ 1\}$.

Με άλλα λόγια, όντως υπάρχουν λύσεις της ΔΕ (22) οι οποίες είναι της μορφής $x = t^\beta$. Πρόκειται για τις συναρτήσεις $x = 1\big/\sqrt{t}$, $t > 0$, και $x = t$, $t \in \mathbb{R}$.

Ασκήσεις

1. Να κατασκευαστούν δύο ΔΕ πρώτης τάξης που έχουν ως λύση την συνάρτηση $u(t) = 2t$, $t \in \mathbb{R}$.

2. Να κατασκευαστούν δύο ΔΕ δεύτερης τάξης που στις λύσεις τους περιέχεται η συνάρτηση $u(t) = 2t$, $t \in \mathbb{R}$.

3. Να αποδειχτεί το λήμμα του παρόντος εδάφιου.

Υπόδειξη: Θεωρείστε ότι το διάστημα $[a, b]$ περιέχεται στο I. Δείχτε ότι $\varphi(t) = \varphi(a)$, για κάθε $t \in [a, b]$.

4. Να δειχτεί ότι, κάθε μία από τις ακόλουθες οικογένειες συναρτήσεων αποτελεί λύση της αντίστοιχης ΔΕ:

α) $x = t(t-1) + c$, $t \in \mathbb{R}$, $\qquad x' = 2t - 1$.

β) $x = t + t^{-2} + c$, $t > 0$, $\qquad x' = 1 - 2t^{-3}$.

γ) $x = \frac{c}{\sqrt{1+t^2}}$, $t \in \mathbb{R}$, $\qquad x' + \frac{t}{1+t^2}x = 0$.

δ) $x = t(t + c)$, $t \in \mathbb{R}$, $\qquad x' = t + t^{-1}x$.

ε) $x = c_1 t + c_2 t^2$, $t \in \mathbb{R}$, $\qquad t^2 x'' - 2tx' + 2x = 0$.

στ) $x = c_1 t + c_2 t^{-1}$, $t > 0$, $\qquad t^2 x'' + tx' - x = 0$.

ζ) $x = t + c_1 t + c_2 t^{-2/3}$, $t > 0$, $\qquad 3t^2 x'' + 8tx' + 2x = 10t$.

η) $x = c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3$, $t \in \mathbb{R}$, $\qquad t^3 x^{(3)} - 3t^2 x'' + 6tx' - 6x = 0$.

5. Να εξεταστεί κατά πόσο οι επόμενες ΔΕ επιδέχονται λύσεις της μορφής $x = t^\alpha$.

α) $t^2 x'' - 3tx' + 3x = 0$.

β) $4t^2 x'' - 3tx' + 3x = 0$.

γ) $5t^2 x'' + 7tx' - 3x = 0$.

δ) $15t^2 x'' + 29tx' + 3x = 0$.

ε) $t^3 x^{(3)} - 3t^2 x'' + 6tx' - 6x = 0$.

στ) $t^3 x^{(3)} + 5t^2 x'' + 2tx' - 2x = 0$.

6. Να βρεθεί η γενική λύση των παρακάτω ΔΕ. (΄Οπου δεν αναφέρεται άλλος περιορισμός, η ανεξάρτητη μεταβλητή $t \in \mathbb{R}$).

α) $x' = 2t + 3$.

β) $x' = 2\,t(t-3)$.

γ) $x' = 2\,t^{-2} + \sqrt{t} - 3,\ \ t > 0$

δ) $x' = 2\,t^{-4} + t^{-3} - 3\,t^{-1/2},\ \ t > 0$.

ε) $x'' = 2\,t + 3$.

στ) $x'' = 1 - 3\,t + 4\,t^2$.

η) $x'' = 2\,t + 3\,t^{-2},\ \ t > 0$.

θ) $x'' = 2\,t^{-1/2} + 3\,t^{-3/2}, t > 0$.

ι) $x^{(3)} = 1$.

κ) $x^{(3)} = 1 - 2\,t + 3\,t^2$.

λ) $x^{(3)} = 2\,t^{-3} + 3\,t^{-3/2}, t > 0$.

μ) $x^{(4)} = t - 1$.

3. Κατασκευή ΔΕ από γνωστές συναρτήσεις πολλών μετα- βλητών

Η ίδια τεχνική που χρησιμοποιήσαμε στο προηγούμενο υπεδάφιο, μας επιτρέπει να κατασκευάσουμε και ΔΕ στις οποίες το άγνωστο αντικείμενο είναι μια συνάρτηση πολλών μεταβλητών. Για να δούμε μερικά παραδείγματα τέτοιων εξισώσεων, ας υποθέσουμε ότι τα γράμματα σ και τ συμβολίζουν ένα τυχαίο ζευγάρι πραγματικών αριθμών, πράγμα που το δηλώνουμε γράφοντας $(\sigma, \tau) \in \mathbb{R}^2$. Τότε η έκφραση

(1) $$u(\sigma, \tau) = \sigma + \tau + \sigma\,\tau, \qquad (\sigma, \tau) \in \mathbb{R}^2$$

αποκτάει αμέσως σαφές νόημα, αφού στηρίζεται στις βασικές αλγεβρικές πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού. Παριστάνει μιαν ***πραγματική συνάρτηση δύο πραγματικών μεταβλητών***.

Είναι φανερό ότι, για κάθε συγκεκριμένη τιμή, β, της μεταβλητής τ, μια συνάρτηση δύο μεταβλητών $u(\sigma, \tau)$ ανάγεται σε συνάρτηση μιας μεταβλητής, της σ. Ανάλογα, για κάθε συγκεκριμένη τιμή, α, της μεταβλητής σ, η $u(\sigma, \tau)$ ανάγεται σε συνάρτηση της μεταβλητής τ. Συνακόλουθα, το όριο

$$\lim_{h\to 0} \frac{u(\alpha+h,\beta)-u(\alpha,\beta)}{h},$$

όταν υπάρχει, δεν είναι παρά η συνήθης παράγωγος της συνάρτησης $u(\sigma, \beta)$ στο σημείο $\sigma = \alpha$. Ανάλογα, το όριο

$$\lim_{h\to 0} \frac{u(\alpha,\beta+h)-u(\alpha,\beta)}{h},$$

όταν υπάρχει, δεν είναι παρά η συνήθης παράγωγος της συνάρτησης $u(\alpha, \tau)$ στο σημείο $\tau = \beta$.

Στο πλαίσιο, όμως, των συναρτήσεων δύο μεταβλητών, η πρώτη από αυτές τις παραγώγους ονομάζεται ***μερική παράγωγος της συνάρτησης $u(\sigma, \tau)$, ως προς την***

μεταβλητή σ, στο σημείο (α, β).

Η δεύτερη αναφέρεται ως ***μερική παράγωγος της $u(\sigma, \tau)$, ως προς τη μεταβλητή τ στο σημείο (α, β).***

Συνήθως συμβολίζονται με $\frac{\partial u}{\partial \sigma}(\alpha, \beta)$ και $\frac{\partial u}{\partial \tau}(\alpha, \beta)$, αντίστοιχα. Άρα, με την προϋπόθεση ότι τα αντίστοιχα όρια υπάρχουν,

(2) $$\boxed{\frac{\partial u}{\partial \sigma}(\alpha, \beta) := \lim_{h \to 0} \frac{u(\alpha+h, \beta) - u(\alpha, \beta)}{h}}$$

(3) $$\boxed{\frac{\partial u}{\partial \tau}(\alpha, \beta) := \lim_{h \to 0} \frac{u(\alpha, \beta+h) - u(\alpha, \beta)}{h}}$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης $u(\sigma, \tau) = \sigma + \tau + \sigma\,\tau$, $(\sigma, \tau) \in \mathbb{R}^2$, υπάρχουν σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της. Συνεπώς, αρκεί να παραγωγίσουμε την $u(\sigma, \tau)$ ως προς σ, θεωρώντας την τ σταθερή, για να βρούμε ότι

(4) $$\frac{\partial u}{\partial \sigma}(\sigma, \tau) = 1 + \tau, \qquad (\sigma, \tau) \in \mathbb{R}^2.$$

Με ανάλογο τρόπο, αν παραγωγίσουμε τη δοσμένη συνάρτηση ως τ, αντιμετωπίζοντας την σ ως σταθερή, θα καταλήξουμε στην

(5) $$\frac{\partial u}{\partial \tau}(\sigma, \tau) = 1 + \sigma, \qquad (\sigma, \tau) \in \mathbb{R}^2.$$

Ακολουθώντας την τακτική που εισαγάγαμε στην περίπτωση των συναρτήσεων μιας μεταβλητής, μπορούμε να στηριχτούμε στα αποτελέσματα που μόλις βρήκαμε και να θέσουμε το εξής ερώτημα: Ποιο είναι το σύνολο των συναρτήσεων δύο μεταβλητών για τις οποίες ισχύει η (4);

Αν συμβολίσουμε το τυχαίο μέλος αυτής της οικογένειας συναρτήσεων με x και τη μερική του παράγωγο ως προς τη μεταβλητή σ με x_σ, τότε το ερώτημα που μόλις θέσαμε διατυπώνεται ως το ακόλουθο

Πρόβλημα

Να βρεθεί το σύνολο των λύσεων της ΔΕ

(6) $$x_\sigma = 1 + \tau, \quad (\sigma, \tau) \in \mathbb{R}^2.$$

Με ανάλογο τρόπο, αν συμβολίσουμε με x_τ τη μερική παράγωγο της άγνωστης συνάρτησης ως προς τη μεταβλητή τ, τότε θα οδηγηθούμε στο εξής

Πρόβλημα

Να βρεθεί το σύνολο των λύσεων της ΔΕ

(7) $$x_\tau = 1 + \sigma, \quad (\sigma, \tau) \in \mathbb{R}^2.$$

Το να βρούμε (ορισμένες, τουλάχιστον) λύσεις των προβλημάτων που μόλις διατυπώσαμε δεν είναι και πολύ δύσκολο. Για το σκοπό αυτό αρκεί να στηριχτούμε στην έννοια της μερικής παραγώγου, που, όπως μόλις είδαμε, δεν διαφέρει ουσιαστικά από τη συνήθη παράγωγο.

Αναλυτικότερα, από την άποψη της παραγώγισης ως προς τη μεταβλητή σ, το δεξί μέλος της ΔΕ $x_\sigma = 1 + \tau$ είναι μια σταθερή. Συνεπώς, όσο αφορά τη μεταβλητή σ, αυτή η ΔΕ είναι της μορφής x' =σταθ. Συνακόλουθα, κάθε συνάρτηση της μορφής $x = (1+\tau)\,\sigma + c$, αποτελεί λύση της $x_\sigma = 1 + \tau$.

Ωστόσο, το ίδιο ισχύει και όταν τη θέση της παραμέτρου c πάρει μια τυχαία διαφορίσιμη συνάρτηση της μεταβλητής τ. Για τον απλούστατο λόγο ότι, η μερική παράγωγος ως προς σ κάθε συνάρτησης της μορφής $f(\tau)$ είναι ταυτοτικά μηδέν. Έτσι καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι κάθε συνάρτηση των μεταβλητών σ, τ που είναι της μοφρής

(8) $$x = (1+\tau)\,\sigma + f(\tau), \qquad (\sigma, \tau) \in \mathbb{R}^2,$$

αποτελεί λύση της ΔΕ (6).

Με ακριβώς ανάλογο τρόπο βρίσκουμε ότι, κάθε συνάρτηση των μεταβλητών σ, τ που είναι της μοφρής

(9) $$x = (1+\sigma)\,\tau + g(\sigma), \qquad (\sigma, \tau) \in \mathbb{R}^2,$$

όπου $g(\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{R}$, τυχαία διαφορίσιμη συνάρτηση, αποτελεί λύση της ΔΕ (7).

Όπως συμβαίνει και με τις συναρτήσεις μιας μεταβλητής, οι μερικές παράγωγοι μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών είναι συναρτήσεις που μπορεί να έχουν κι αυτές μερικές παραγώγους, σε κάποιο υποσύνολο του πεδίου ορισμού τους. Ας υποθέσουμε γ.π. ότι το πεδίο ορισμού S της συνάρτησης $u(\sigma, \tau)$ είναι ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και ότι οι μερικές παράγωγοι της $u(\sigma, \tau)$ υπάρχουν σε κάθε σημείο του υποσύνολου $\Omega \subset S$. Τότε, μπορούμε να ορίσουμε τις συναρτήσεις

(10) $$\upsilon(\sigma, \tau) := \frac{\partial u}{\partial \sigma}(\sigma, \tau), \qquad (\sigma, \tau) \in \Omega,$$

και

(11) $$w(\sigma, \tau) := \frac{\partial u}{\partial \tau}(\sigma, \tau), \qquad (\sigma, \tau) \in \Omega.$$

Είναι εύλογο, λοιπόν, να αναρωτηθούμε σε ποια σημεία της περιοχής Ω υπάρχουν και οι μερικές παράγωγοι αυτών των νέων συναρτήσεων.

Ας υποθέσουμε ότι στο σημείο $(\alpha, \beta) \in \Omega$ ορίζονται κάποιες τουλάχιστον από τις ακόλουθες παραγώγους:

(12) $$\frac{\partial \upsilon}{\partial \sigma}(\alpha, \beta), \qquad \frac{\partial \upsilon}{\partial \tau}(\alpha, \beta), \qquad \frac{\partial w}{\partial \sigma}(\alpha, \beta), \qquad \frac{\partial w}{\partial \tau}(\alpha, \beta).$$

Τότε αυτές λέγονται ***μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης της*** $\boldsymbol{u(\sigma, \tau)}$, στο σημείο (α, β) και, αντίστοιχα, συμβολίζονται με

(13) $$\frac{\partial^2 u}{\partial \sigma^2}(\alpha, \beta), \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial \tau\, \partial \sigma}(\alpha, \beta), \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial \sigma\, \partial \tau}(\alpha, \beta), \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}(\alpha, \beta).$$

Στο παράδειγμα με το οποίο ξεκινήσαμε τα πράγματα είναι απλά. Οι (10), (11) σημαίνουν ότι

(14) $$\upsilon(\sigma, \tau) = 1 + \tau, \quad (\sigma, \tau) \in \mathbb{R}^2,$$

και

(15) $$w(\sigma, \tau) = 1 + \sigma, \quad (\sigma, \tau) \in \mathbb{R}^2,$$

αντίστοιχα. Συνεπώς,

(16) $$\frac{\partial^2 u}{\partial \sigma^2}(\sigma, \tau) \equiv \frac{\partial v}{\partial \sigma}(\sigma, \tau) = 0, \quad (\sigma, \tau) \in \mathbb{R}^2,$$

(17) $$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau\, \partial \sigma}(\sigma, \tau) \equiv \frac{\partial v}{\partial \tau}(\sigma, \tau) = 1, \quad (\sigma, \tau) \in \mathbb{R}^2,$$

(18) $$\frac{\partial^2 u}{\partial \sigma\, \partial \tau}(\sigma, \tau) \equiv \frac{\partial w}{\partial \sigma}(\sigma, \tau) = 1, \quad (\sigma, \tau) \in \mathbb{R}^2,$$

(19) $$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}(\sigma, \tau) \equiv \frac{\partial w}{\partial \tau}(\sigma, \tau) = 0, \quad (\sigma, \tau) \in \mathbb{R}^2.$$

Με βάση αυτά τα αποτελέσματα μπορούμε να διατυπώσουμε μια σειρά από διαφορικές εξισώσεις, που, ενώ φαίνονται απλές, είναι εξαιρετικής σημασίας σε όλους τους τομείς των μαθηματικών και των εφαρμογών τους. Για το σκοπό αυτό και για συντομία, ας συμβολίσουμε με $x_{\sigma\sigma}$, $x_{\sigma\tau}$, $x_{\tau\sigma}$, $x_{\tau\tau}$ τις παραγώγους δεύτερης τάξης της άγνωστης συνάρτησης x. Τότε κάθε μια από τις

$$x_{\sigma\sigma} = 0, \qquad x_{\sigma\tau} = 1, \qquad x_{\sigma\sigma} + x_{\tau\tau} = 0$$

είναι μια σημαντική ΔΕ της οποίας γνωρίζουμε μία τουλάχιστον λύση -την συνάρτηση $x = \sigma + \tau + \sigma\,\tau$ από την οποία ξεκινήσαμε. Για τις δύο πρώτες, μάλιστα, μπορούμε εύκολα να βρούμε και πολύ περισσότερες λύσεις, χρησιμοποιώντας μεθόδους που ήδη αναπτύξαμε.

Παράδειγμα

(i) Από τον ορισμό της μερικής παραγώγου έπεται ότι η ΔΕ

(20) $$x_{\sigma\sigma} = 0$$

είναι ταυτόσημη με την

(21) $$y_\sigma = 0,$$

όπου

(22) $$y := x_\sigma.$$

Τώρα, η $y_\sigma = 0$ απλά δηλώνει το γεγονός ότι η μερική παράγωγος της άγνωστης συνάρτησης y ως προς τη μεταβλητή σ μηδενίζεται. Αλλά αυτό ισχύει για κάθε διαφορίσιμη συνάρτηση $f(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$. Συνεπώς, $y = f(\tau)$ και άρα $x_\sigma = f(\tau)$. Όμως, από τη σκοπιά της μεταβλητής σ, η ΔΕ $x_\sigma = f(\tau)$ είναι ισοδύναμη με την $x' = c_1$ =σταθ. Συνεπώς, $x = c_1\,\sigma + c_2$, δηλαδή

(23) $$x = \sigma\, f(\tau) + g(\tau), \quad (\sigma, \tau) \in \mathbb{R}^2,$$

όπου και η $g(\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, είναι τυχαία διαφορίσιμη συνάρτηση.

(ii) Με ανάλογο τρόπο μπορεί κανείς να κατασκευάσει λύσεις της ΔΕ

(24) $$x_{\sigma\tau} = 1.$$

Συγκεκριμένα, η παρατήρηση ότι $x_{\sigma\tau} \equiv (x_\sigma)_\tau$ μας οδηγεί στο να εισαγάγουμε την συνάρτηση

(25) $$y := x_\sigma,$$

δοπότε η (24) γίνεται

δ(26) $$y_\tau = 1.$$

Προφανώς, κάθε συνάρτηση της μορφής $y = \tau + \varphi(\sigma)$ αποτελεί λύση της ΔΕ (26). Αλλά αυτό σημαίνει ότι

(27) $$x_\sigma = \tau + \varphi(\sigma),$$

όπου $\varphi(\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{R}$, τυχαία διαφορίσιμη συνάρτηση.

Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι η $f(\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{R}$, είναι μια άλλη διαφορίσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα ότι $f'(\sigma) = \varphi(\sigma)$. Τότε, τα ίδια επιχειρήματα που χρησιμοποιήσαμε νωρίτερα οδηγούν στο συμπέρασμα ότι κάθε συνάρτηση της μορφής

(28) $$x = \sigma\,\tau + f(\sigma) + g(\tau), \qquad (\sigma, \tau) \in \mathbb{R}^2,$$

αποτελεί λύση της (27), άρα και της ΔΕ $x_{\sigma\tau} = 1$.

Παρατήρηση

Τα παραδείγματα που μελετήσαμε σ' αυτό και στο προηγούμενο εδάφιο υποδείχνουν τον ακόλουθο κανόνα, ο οποίος πραγματικά ισχύει. Ας υποθέσουμε ότι μια ΔΕ περιέχει παραγώγους τάξης το πολύ *n*. Όταν η ΔΕ αφορά μια συνάρτηση μιας ανεξάρτητης μεταβλητής, τότε στη γενική λύση της εμφανίζονται *n* αυθαίρετες σταθερές. Αντίθετα, στην περίπτωση που η ΔΕ αφορά συναρτήσεις δύο ή περισσότερων ανεξάρτητων μεταβλητών, τότε στις γενικού τύπου λύσεις της εμφανίζονται *n* αυθαίρετες συναρτήσεις.

Η μέθοδος κατασκευής ΔΕ που παρουσιάσαμε στο παρόν εδάφιο μπορεί να γενικευτεί αμέσως προς δύο κατευθύνσεις. Η πρώτη έγκειται στην εισαγωγή των μερικών παραγώγων τρίτης και ανώτερης τάξης. Η δεύτερη κατεύθυνση γενίκευσης είναι το να στραφεί κανείς σε συναρτήσεις τριών ή και περισσότερων μεταβλητών. Ωστόσο, αυτές οι σημαντικές κατά τα άλλα γενικεύσεις γίνονται κατανοητές χωρίς την εισαγωγή θεμελιακά νέων εννοιών και των μεθόδων. Ούτε θα μας απασχολήσουν ιδιαίτερα στα επόμενα κεφάλαια. Γι' αυτό προτιμάμε τώρα να στραφούμε στην εισαγωγή κάποιας ορολογίας που χρησιμοποιείται συστηματικά στο χώρο των διαφορικών εξισώσεων.

Ασκήσεις

1. Να κατασκευαστεί μια ΔΕ πρώτης τάξης που έχει ως λύση τη συνάρτηση $u(\sigma, \tau) = \sigma - \tau$, $(\sigma, \tau) \in \mathbb{R}^2$.

2. Να κατασκευαστεί μια ΔΕ δεύτερης τάξης που έχει ως λύση τη συνάρτηση $u(\sigma, \tau) = \sigma - \tau$, $(\sigma, \tau) \in \mathbb{R}^2$.

3. Να κατασκευαστούν δύο ΔΕ, μία πρώτης και μία δεύτερης τάξης, που έχουν ως λύση τη συνάρτηση $u(\sigma, \tau) = \sigma^2 - \tau^2$, $(\sigma, \tau) \in \mathbb{R}^2$.

4. Να δειχτεί ότι, κάθε μία από τις ακόλουθες συναρτήσεις, $x = x(\sigma, \tau)$, αποτελεί λύση της αντίστοιχης ΔΕ:

α) $x = \sigma + \tau$, $\quad x_\sigma - x_\tau = 0$.

β) $x = (\sigma + \tau)^2$, $\quad x_\sigma - x_\tau = 0$.

γ) $x = \sigma^2 - 2\,\tau$, $\quad x_\sigma + \sigma\, x_\tau = 0$.

δ) $x = \sigma^4 - 2\,\sigma^2\,\tau^2 + \tau^4$, $\quad \tau\, x_\sigma + \sigma\, x_\tau = 0$.

ε) $x = \sigma\,\tau\,(\sigma + \tau) + \tau^4$, $\quad x_{\sigma\tau} = \sigma + \tau$.

στ) $x = \sigma^2 - \tau^2 + 5\,\sigma\,\tau$, $\quad x_{\sigma\sigma} + x_{\tau\tau} = 0$.

ζ) $x = (\sigma + \tau)^2 + 5\,(\sigma - \tau)^3$, $\quad x_{\sigma\sigma} - x_{\tau\tau} = 0$.

5. Να δειχτεί ότι, κάθε μία από τις ακόλουθες οικογένειες συναρτήσεων αποτελεί λύση της αντίστοιχης ΔΕ (Οι f, g είναι τυχαίες ομαλές συναρτήσεις μιας μεταβλητής).

α) $x = f(\sigma + \tau)$, $\quad x_\sigma - x_\tau = 0$.

β) $x = f(\sigma - \tau)$, $\quad x_\sigma + x_\tau = 0$.

γ) $x = f(\sigma^2 - 2\,\tau)$, $\quad x_\sigma + \sigma\, x_\tau = 0$.

δ) $x = f(\tau^2 - \sigma^2)$, $\quad \tau\, x_\sigma + \sigma\, x_\tau = 0$.

ε) $x = \sigma\,\tau\,(\sigma + \tau) + f(\sigma) + g(\tau)$, $\quad x_{\sigma\tau} = 2\,(\sigma + \tau)$.

στ) $x = f(\sigma + \tau) + g(\sigma - \tau)$, $\quad x_{\sigma\sigma} - x_{\tau\tau} = 0$.

ζ) $x = -\frac{1}{6}\,\sigma\,\tau^3 + f(\sigma + \tau) + g(\sigma - \tau)$, $\quad x_{\sigma\sigma} - x_{\tau\tau} = \sigma\,\tau$.

4. Ταξινόμηση ΔΕ

Θα ξεκινήσουμε λέγοντας ότι αυτές που κατασκευάσαμε στο προηγούμενο υπεδάφιο λέγονται *διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους* ή, συνηθέστερα, ***μερικές διαφορικές εξισώσεις***. Ο όρος χρησιμοποιείται για να δηλώσει ότι το άγνωστο αντικείμενο είναι μια συνάρτηση δύο ή περισσότερων μεταβλητών, οπότε οι παράγωγοι που εμφανίζονται στην εξίσωση είναι υποχρεωτικά μερικές.

Σε αντιδιαστολή, οι ΔΕ όπου το άγνωστο αντικείμενο είναι μια συνάρτηση μιας μεταβλητής ονομάζονται *συνήθεις διαφορικές εξισώσεις* (ΣΔΕ). Οι τελευταίες αποτελούν το αντικείμενο μελέτης αυτού του βιβλίου και γι αυτό θα συνεχίσουμε να χρησιμοποιούμε τον όρο ***διαφορική εξίσωση*** **(ΔΕ)** εννοώντας μια συνήθη διαφορική εξίσωση. Μόνο στις περιπτώσεις όπου υπάρχει λόγος να τονιστεί η διάκριση θα χρησιμοποιούμε τους όρους ***συνήθης διαφορική εξίσωση*** **(ΣΔΕ)** και ***μερική διαφορική εξίσωση*** **(ΜΔΕ)**, αντίστοιχα.

Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι σε μια ΔΕ (συνήθη ή μερική) εμφανίζεται μια παράγωγος τάξης n, όχι όμως και παράγωγος μεγαλύτερης τάξης. Τότε τον φυσικό αριθμό n τον λέμε *τάξη της* ΔΕ ή λέμε ότι *η* ΔΕ *είναι τάξης n*.

Η έννοια μιας συνάρτησης πολλών μεταβλητών μας επιτρέπει να δώσουμε και τον γενικό ορισμό μιας ΣΔΕ. Για το σκοπό, θα χρειαστούμε την έννοια του ανοιχτού υποσύνολου του $\mathbb{R}^n$. Ας ξεκινήσουμε θεωρώντας το ***ανοιχτό παραλληλόγραμμο***, δηλαδή ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ της μορφής

(1) $$I^2 := \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : a_1 < t < b_1,\ a_2 < x < b_2\},$$

όπου a_j και b_j, $j = 1, 2$, τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί (προφανώς, τέτοιοι ώστε $a_j < b_j$). Είναι φανερό, ότι το I^2 δεν είναι παρά το Καρτεσιανό γινόμενο $I_t \times I_x$ των ανοιχτών διαστημάτων $I_t = (a_1, b_1)$, $I_x = (a_2, b_2)$. Γι' αυτό, ένα ανοιχτό παραλληλόγραμμο λέγεται και ***ανοιχτό διάστημα του*** $\mathbb{R}^2$.

Ανάλογα ορίζεται το ***ανοιχτό παραλληλεπίπεδο*** **ή** ***ανοιχτό διάστημα του*** $\mathbb{R}^3$. Πρόκειται για ένα υποσύνολο της μορφής

(2) $$I^3 := \{(t, x, y) \in \mathbb{R}^3 : a_1 < t < b_1,\ a_2 < x < b_2,\ a_3 < y < b_3\},$$

όπου a_j και b_j, $j = 1, 2{,}3$ τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί (τέτοιοι ώστε $a_j < b_j$).

Τέλος, ***ανοιχτό διάστημα του*** $\mathbb{R}^n$ λέγεται κάθε σύνολο της μορφής

(3) $$I^n := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_1 < x_1 < b_1,\ a_2 < x_2 < b_2,\ \ldots,\ a_n < x_n < b_n\},$$

όπου a_j και b_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί (τέτοιοι ώστε $a_j < b_j$).

Ένα υποσύνολο Ω του $\mathbb{R}^n$ χαρακτηρίζεται ως ***ανοιχτό***, αν για κάθε σημείο $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \Omega$, μπορούμε να βρούμε ένα ανοιχτό διάστημα I^n το οποίο περιέχει το $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ και, με τη σειρά του, περιέχεται στο Ω. Με ***κλειστό υποσύνολο*** του $\mathbb{R}^n$ εννοούμε ένα υποσύνολο V του οποίου το συμπλήρωμα, $\mathbb{R}^n \setminus V$, είναι ανοιχτό. Για παράδειγμα, το "δεξιό ημιεπίπεδο", $\Omega_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$, και το "εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου", $\Omega_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$, είναι ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$. Τα συμπληρώματά τους $V_1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0\}$και $V_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1\}$ είναι, αυτομάτως, κλειστά.

Υποθέτουμε, λοιπόν, ότι η συνάρτηση $F(t, x)$ έχει ως πεδίο ορισμού ένα ανοιχτό υποσύνολο Ω του $\mathbb{R}^2$ και παίρνει μόνο πραγματικές τιμές. Τότε με ΣΔΕ πρώτης τάξης εννοούμε μια έκφραση της μορφής

(4) $$x' = F(t, x),$$

όπου το τα x, x' συμβολίζουν μια συνάρτηση της μεταβλητής t και την παράγωγο αυτής της συνάρτησης, αντίστοιχα.

Παράδειγμα

(i) $F(t, x) = 0,\ (t, x) \in \Omega = \mathbb{R}^2$: $\quad x' = F(t, x) \Leftrightarrow x' = 0.$

(ii) $F(t, x) = 2\,t,\ (t, x) \in \Omega = \mathbb{R}^2$: $\quad x' = F(t, x) \Leftrightarrow x' = 2\,t.$

(ii) $F(t, x) = t^2 - t\,x,\ (t, x) \in \Omega = \mathbb{R}^2$: $\quad x' = F(t, x) \Leftrightarrow x' = t^2 - t\,x.$

(iv) $F(t, x) = x^2,\ (t, x) \in \Omega = \mathbb{R}^2$: $\quad x' = F(t, x) \Leftrightarrow x' = x^2.$

(v) $F(t, x) = \sqrt{1 - x^2}$, $\quad (t, x) \in \Omega := \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 1\}$:

$$x' = F(t, x) \Leftrightarrow x' = \sqrt{1 - x^2}.$$

(vi) $F(t, x) = \frac{1}{t\sqrt{1-x^2}}$, $\quad (t, x) \in \Omega := \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 1,\ t > 0\}$:

$$x' = F(t, x) \Leftrightarrow x' = \frac{1}{t\sqrt{1-x^2}}.$$

Ανάλογα, ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση $F(t, x, x')$ έχει ως πεδίο ορισμού ένα ανοιχτό υποσύνολο Ω του $\mathbb{R}^3$ και παίρνει μόνο πραγματικές τιμές. Τότε με ΣΔΕ *δεύτερης τάξης* εννοούμε μια έκφραση της μορφής

(5) $$x'' = F(t, x, x'),$$

όπου το τα x, x', x'' συμβολίζουν μια συνάρτηση της μεταβλητής t και τις παραγώγους πρώτης και δεύτερης τάξης αυτής της συνάρτησης, αντίστοιχα.

Παράδειγμα

(i) $F(t, x, x') = 0,\ (t, x, x') \in \Omega = \mathbb{R}^3$: $\quad x'' = F(t, x, x') \Leftrightarrow x'' = 0.$

(ii) $F(t, x, x') = x,\ (t, x, x') \in \Omega = \mathbb{R}^3$: $\quad x'' = F(t, x, x') \Leftrightarrow x'' = x.$

(ii) $F(t, x, x') = 3\,t^2 - x + t\,x',\ (t, x, x') \in \Omega = \mathbb{R}^3$:

$$x'' = F(t, x, x') \Leftrightarrow x'' = t\,x' - x + 3\,t^2.$$

(iv) $F(t, x, x') = t^{-1}(x' + t\,x),\ (t, x, x') \in \Omega := \{(t, x, x') \in \mathbb{R}^3 : t > 0\}$:

$$x'' = F(t, x, x') \Leftrightarrow x'' = t^{-1}\,x' + x.$$

(v) $F(t, x, x') = t^{-1}\,x'\sqrt{1 - x^2},\ (t, x, x') \in \Omega := \{(t, x, x') \in \mathbb{R}^3 : t > 0, -1 < x < 1\}$:

$$x'' = F(t, x, x') \Leftrightarrow x'' = t^{-1}\,x'\sqrt{1 - x^2}$$

(vi) $F(t, x, x') = (x\,x')^{-1}$, $(t, x, x') \in \Omega := \{(t, x, x') \in \mathbb{R}^3 : x > 0, x' < 0\}$:

$$x'' = F(t, x, x') \Leftrightarrow x'' = \frac{1}{x\,x'}.$$

Γενικεύοντας, με ΣΔΕ *n-στής τάξης* εννοούμε μια έκφραση της μορφής

$$x^{(n)} = F(t, x, x', x'', \ldots, x^{(n-1)}), \tag{6}$$

όπου η συνάρτηση $F(t, x, x', x'', \ldots, x^{(n-1)})$ έχει ως πεδίο ορισμού ένα ανοιχτό υποσύνολο Ω του $\mathbb{R}^{n+1}$ και παίρνει μόνο πραγματικές τιμές. Γι' άλλη μια φορά, τα $x, x', x'', \ldots x^{(n-1)}$ συμβολίζουν, αντίστοιχα, μια συνάρτηση της μεταβλητής t και τις παραγώγους της μέχρι και τάξης n.

Για να είμαστε ακριβείς, η (6) συνήθως αναφέρεται ως ***κανονική μορφή της* ΣΔΕ *τάξης n***. Ο λόγος είναι ότι μια ΔΕ σαν την

$$t\,x^{(3)} - x'\,x'' + 3\,x = 0, \tag{7}$$

δεν είναι προφανώς της μορφής (6). Είναι, όμως, της μορφής

$$G(t, x, x', x'', x^{(3)}) = 0, \tag{8}$$

όπου η συνάρτηση $G(t, x, x', x''', x^{(3)}) = t\,x^{(3)} - x'\,x'' + 3\,x$ έχει ως πεδίο ορισμού το χώρο $\mathbb{R}^5$. Αυτός είναι ο λόγος που ως *γενική μορφή μιας* ΣΔΕ *τάξης n* αναφέρεται η σχέση

$$G(t, x, x', x'', \ldots, x^{(n)}) = 0, \tag{9}$$

με τη συνάρτηση $G(t, x, x', x'', \ldots, x^{(n)})$ να ορίζεται σε κάποιο ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^{n+2}$.

Ας παρατηρήσουμε, ωστόσο, ότι, στα διαστήματα $t < 0$ και $t > 0$, μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση (7) ως προς $x^{(3)}$ για να καταλήξουμε στην κανονική μορφή.

$$x^{(3)} = \frac{1}{t}\,(x'\,x'' - 3\,x) \tag{10}$$

Σημειώστε ότι, από τον ορισμό τη μερικής παραραγώγου, αμέσως έπεται ότι η μερική παράγωγος της συνάρτησης $G(t, x, x', x'', x^{(3)}) = t\,x^{(3)} - x'\,x'' + 3\,x$ ως προς τη μεταβλητή $x^{(3)}$ είναι ίση με

$$\frac{\partial G}{\partial x^{(3)}}\,(t, x, x', x'', x^{(3)}) = t. \tag{11}$$

΄Αρα, η συνθήκη $t \neq 0$ που μας επέτρεψε να λύσουμε την εξίσωση (7) ως προς την τη μεταβλητή $x^{(3)}$ είναι ισοδύναμη με τον μη μηδενισμό της μερικής παραγώγου της συνάρτησης $G(t, x, x', x'', x^{(3)})$ ως προς αυτή ακριβώς τη μεταβλητή.

Αυτή η παρατήρηση συνδέεται με το ***θεώρημα της πεπλεγμένης συνάρτησης***, το οποίο ουσιαστικά λέει ότι η συνθήκη

$$\frac{\partial G}{\partial x^{(n)}}\,(t, x, x', x'', \ldots, x^{(n)}) \neq 0 \tag{12}$$

σε κάποια περιοχή του υποσύνολου του $\mathbb{R}^{n+2}$ το οποίο ορίζεται από τη σχέση

$$G(t, x, x', x'', \ldots, x^{(n)}) = 0 \tag{13}$$

είναι ικανή για να μπορεί κανείς να λύσει την (9) ως προς τη μεταβλητή $x^{(n)}$.

Παράδειγμα

Ας υποθέσουμε ότι

$$G(t,\,x,\,x') = (x')^2 + x^2 - t, \qquad (t,\,x,\,x') \in \mathbb{R}^3.$$

Τότε η συνθήκη $G(t,\,x,\,x') = 0$ ορίζει την γενικής μορφής ΣΔΕ πρώτης τάξης

$$(x')^2 + x^2 - t = 0.$$

Ταυτόχρονα, αυτή η συνθήκη ορίζει ένα υποσύνολο S του $\mathbb{R}^3$ (μια παραβολική επιφάνεια εκ περιστροφής γύρω από τον άξονα t).

Τώρα,

$$\frac{\partial G}{\partial x'}\,(t,\,x,\,x') = 2\,x'.$$

Συνεπώς, η $\partial G/\partial x'$ μηδενίζεται μόνο στα σημεία του S στα οποία $x^2 = t$. Στα υπόλοιπα, το $t > x^2$, οπότε μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση $(x')^2 + x^2 - t = 0$ ως προς x' για να πάρουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

(i) Αν $x' > 0$, τότε $\quad x' = \sqrt{t - x^2}\,.$

(ii) Αν $x' < 0$, τότε $\quad x' = -\sqrt{t - x^2}\,.$

Με άλλα λόγια, η γενικής μορφής ΣΔΕ $(x')^2 + x^2 - t = 0$ δεν είναι παρά ένας συμπυκνωμένος τρόπος για να γράφουμε δύο ΣΔΕ κανονικής μορφής, τις $x' = \sqrt{t - x^2}$ και $x' = -\sqrt{t - x^2}\,.$

Εδώ θα πρέπει επίσης να παρατηρήσουμε ότι οι ορισμοί που δώσαμε για τη ΣΔΕ τάξης n είναι, σε κάποιο βαθμό, παραπλανητικοί. Ο λόγος είναι ότι, στη συντριπτική πλειονότητά τους, οι διαφορικές εξισώσεις που μελετάμε δεν περιέχουν αποκλειστικά και μόνο ένα υποσύνολο των μεταβλητών t, x, x', x'', ..., $x^{(n)}$ (το οποίο περιέχει οπωσδήποτε την $x^{(n)}$). Συνήθως -κι αυτό ισχύει ιδιαίτερα στις εφαρμογές των ΔΕ στις φυσικές επιστήμες- οι ίδιες οι ΔΕ που προσπαθούμε να λύσουμε περιέχουν δικές τους παραμέτρους.

Για να γίνουμε σαφέστεροι, ας επανέλθουμε στο αρχικό μας παράδειγμα, δηλαδή στη ΔΕ $x' = 2\,t$. Είναι προφανές ότι η συγκεκριμένη τιμή 2 του πολλαπλασιαστή του t δεν παίζει ιδιαίτερο ρόλο στη διαδικασία επίλυσης της εξίσωσης. Το ίδιο εύκολα με την $x' = 2\,t$ λύνουμε και τη ΔΕ $x' = \alpha\,t$, όπου α τυχαίος πραγματικός αριθμός. Συγκεκριμένα, οι λύσεις της $x' = \alpha\,t$ είναι της μορφής $x = (1/2)\,\alpha\,t^2 + c$ και, προφανώς, αυτές περιέχουν ως ειδική περίπτωση τις λύσεις της $x' = 2\,t$.

Για τον ίδιο λόγο, δε θα σταθεί κανείς στη λύση της ΔΕ δεύτερης τάξης $x'' = 4 - 5\,t + t^2$, παρά θα ασχοληθεί με την τριπαραμετρική οικογένεια των ΔΕ

(14) $$x'' = \alpha + \beta\,t + \gamma\,t^2, \qquad \alpha,\,\beta,\,\gamma \in \mathbb{R}.$$

Γιατί, από την τελευταία, αμέσως θα συμπεράνει ότι

(15) $$x' = \alpha\,t + \frac{1}{2}\,\beta\,t^2 + \frac{1}{3}\,\gamma\,t^3 + c_1,$$

οπότε

(16) $$x = \frac{1}{2}\,\alpha\,t^2 + \frac{1}{6}\,\beta\,t^3 + \frac{1}{12}\,\gamma\,t^4 + c_1\,t + c_2.$$

Παρατηρούμε, ότι η γενική λύση της ΔΕ (14) αποτελείται από μια 5-παραμετρική οικογένεια συναρτήσεων. Την πεντάδα των παραμέτρων της γενικής λύσης συγκροτούν η τριάδα (α, β, γ) των παραμέτρων που εμφανίζονται στην ίδια τη ΔΕ και η δυάδα (c_1, c_2) των "σταθερών ολοκλήρωσης".

Μια βασική διάκριση των ΔΕ (συνήθων και μερικών) είναι σε γραμμικές και μη γραμμικές. Για να περιγράψουμε αυτή την διάκριση, θα σημειώσουμε αρχικά ότι μια έκφραση της μορφής $\alpha x + \beta y + \gamma$, όπου α, β, γ συγκεκριμένοι αριθμοί, αναφέρεται ως ***γραμμικός συνδυασμός των μεταβλητών x και y***. Ανάλογα, η έκφραση $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta$ ονομάζεται γραμμικός συνδυασμός των x, y, z.

Γενικότερα, ***γραμμικός συνδυασμός των μεταβλητών*** $(x_1, x_2, ..., x_n)$ ονομάζεται κάθε άθροισμα της μορφής

(17) $$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j + b, \qquad a_j, b \in \mathbb{R}$$

Οι αριθμοί a_j, λέγονται ***συντελεστές του γραμμικού συνδυασμού***, ενώ ο b αναφέρεται ως ***όρος μη ομογένειας***. Ο συνδυασμός (17) χαρακτηρίζεται ως *ομογενής* όταν $b = 0$.

Ας θεωρήσουμε, λοιπόν, την (κανονικής μορφής) ΣΔΕ τάξης n

(18) $$x^{(n)} = F(t, x, x', x'', \; ..., \; x^{(n-1)})$$

και ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση $F(t, x, x', x'', \; ..., \; x^{(n-1)})$ είναι γραμμικός συνδυασμός των n μεταβλητών $x, x', x'', \; ..., \; x^{(n-1)}$ της ακόλουθης μορφής

(19) $$F(t, x, x', x'', \; ..., \; x^{(n-1)}) = b(t) + \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t)\, x^{(j)}$$
$$= b(t) + a_0(t)\, x + a_1(t)\, x' \,.. + a_{n-1}(t)\, x^{(n-1)}$$

Τότε η (18) χαρακτηρίζεται ως ***γραμμική***. Σε κάθε άλλη περίπτωση, η ΣΔΕ (18) αποκαλείται ***μη γραμμική***.

Μια γραμμική ΔΕ λέγεται ***ομογενής*** όταν η $F(t, x, x', x'', \; ..., \; x^{(n-1)})$ είναι ομογενής γραμμικός συνδυασμός των μεταβλητών $x, x', x'', \; ..., \; x^{(n-1)}$, δηλαδή όταν απουσιάζει ο όρος $b(t)$ από το δεξί μέλος της (19).

Παράδειγμα

(i) Η κανονική μορφή των γραμμικών ΣΔΕ πρώτης τάξης είναι η

(20) $$x' = b(t) + a_0(t)\, x.$$

(i-α) Η $x' + t^2 x = 0$ είναι ομογενής γραμμική: $b(t) = 0$, $a_0(t) = -t^2$.

(i-β) Η $x' - \sqrt{1 - t^2}\; x = t^3$, $-1 \leq t \leq 1$, είναι μη ομογενής γραμμική:

$$b(t) = t^3, \qquad a_0(t) = \sqrt{1 - t^2}\,.$$

(i-γ) Η $t\, x' + x = t$ δεν είναι κανονικής μορφής. Ωστόσο, χαρακτηρίζεται ως μη ομογενής γραμμική, γιατί στα διαστήματα $t < 0$ και $t > 0$ γράφεται στην κανονική μορφή $x' = 1 - \frac{1}{t}\, x$.

(i-δ) Η $x' + x^2 = t$ είναι μη γραμμική.

(ii) Η κανονική μορφή των γραμμικών ΣΔΕ πρώτης τάξης είναι η

(21) $$x'' = b(t) + a_0(t)\,x + a_1(t)\,x'$$

(ii-α) Η $x'' + x = 0$ είναι ομογενής γραμμική: $b(t) = 0$, $a_0(t) = -1$, $a_1(t) = 0$.

(ii-β) Η $x'' - x' - \frac{1}{t}\,x - t^3 = 0$, $t > 0$, είναι μη ομογενής γραμμική:

$$b(t) = t^3, \quad a_0(t) = \frac{1}{t}, \quad a_1(t) = 1.$$

(ii-γ) Η $t^2\,x'' - 2\,t\,x' + x = 0$ δεν είναι κανονικής μορφής. Ωστόσο, χαρακτηρίζεται ως ομογενής γραμμική, γιατί στα διαστήματα $t < 0$ και $t > 0$ γράφεται στην κανονική μορφή $x'' = -\frac{1}{t^2}\,x + \frac{2}{t}\,x'$.

(ii-δ) Η $x'' + x\,x' = t$ είναι μη γραμμική.

Ανάλογος είναι και ο ορισμός των γραμμικών ΜΔΕ. Ωστόσο, δε θα σταθούμε σε λεπτομέρειες γιατί το κύριο αντικείμενο της μελέτης μας είναι οι ΣΔΕ. Θα αναφέρουμε μονάχα το παράδειγμα των γραμμικών ΜΔΕ μέχρι και δεύτερης τάξης για μια συνάρτηση δύο ανεξάρτητων μεταβλητών.

Κάθε ΜΔΕ, λοιπόν, πρώτης τάξης που μπορεί να τεθεί στη μορφή

(22) $$a(\sigma, \tau)\,x + b(\sigma, \tau)\,x_\sigma + c\,(\sigma, \tau)\,x_\tau + g(\sigma, \tau) = 0$$

λέγεται ***γραμμική***. Διαφορετικά, χαρακτηρίζεται ως ***μη γραμμική***.

Ανάλογα, μια ΜΔΕ δεύτερης τάξης λέγεται ***γραμμική*** ή ***μη γραμμική*** αν μπορεί να τεθεί ή όχι στη μορφή

(23) $$a(\sigma, \tau)\,x + b(\sigma, \tau)\,x_\sigma + c\,(\sigma, \tau)\,x_\tau$$
$$+d(\sigma, \tau)\,x_{\sigma\sigma} + e(\sigma, \tau)\,x_{\sigma\tau} + f(\sigma, \tau)\,x_{\tau\tau} + g(\sigma, \tau) = 0.$$

΄Οταν ο όρος $g(\sigma, \tau)$ απουσιάζει από τις (22) και (23) οι πιο πάνω ΜΔΕ χακτηρίζονται ως ***ομογενείς***.

Ασκήσεις

1. Προσδιορίστε την τάξη κάθε μιας τις ακόλουθες ΣΔΕ, καθώς και ποιες απ' αυτές είναι γραμμικές και ποιες όχι.

α) $x' = t + t^2 x$

β) $x' = t + t x^2$

γ) $(t + x) x' = t + t x$

δ) $t^2 x' + t x + 1 = 0$

ε) $x'^2 + 2 x + 1 = 0$

στ) $(x' + x)^2 + (x - 1)^3 = 0$

η) $t x x' = t + x + x'$

θ) $x'' = t + x + x'$

ι) $x'' = t x x'$

κ) $x'' + t x' + t^2 x = 0$

λ) $x'' + t x' + x^2 = 0$

μ) $x'' + x x' = 0$

ν) $x'' + x' + x^2 = 0$

ξ) $x'' + x'^2 + x = 0$

ο) $x x'' + x' = 0$

π) $x' x'' + x = 0$

ρ) $x^{(3)} = t + t^2 x + t^3 x' + t^4 x''$

σ) $x^{(3)} = 1 + x x' + x''$

τ) $x^{(3)} + t x x' x'' = 0$

υ) $t^3 x^{(3)} + t^2 x'' + t x' + x = t$

2. Προσδιορίστε ποιες από τις ακόλουθες ΜΔΕ είναι γραμμικές και ποιες όχι.

α) $x_\sigma + x_\tau = \sigma^2 \tau^2$

β) $x_\sigma + x_\tau = \sigma^2 \tau^2 x$

γ) $x_\sigma - x_\tau = \sigma \tau x^2$

δ) $x_\sigma + x x_\tau = 0$

ε) $x_\sigma x_\tau + \sigma \tau x = 0$

στ) $x_{\sigma\sigma} - x_\tau = \sigma + \tau^2$

η) $x_{\sigma\sigma} + 2\,x_{\sigma\tau} - x_{\tau\tau} = \sigma^2 + \tau^2$

θ) $x_{\sigma\sigma} + 2\,x_{\sigma\tau} - x_{\tau\tau} - x^2 = 0$

ι) $x_{\sigma\tau} = {x_\sigma}^2 + {x_\tau}^2$

κ) $x_{\sigma\sigma} - x_{\tau\tau} + x\,x_\sigma\,x_\tau = 0$

5. Οι συναρτήσεις του φτωχού επιστήμονα

Συχνά στα προηγούμενα εδάφια χρησιμοποιήσαμε τη φράση "θεωρείστε μια από τις γνωστές σας συναρτήσεις". ΄Οταν, όμως, χρησιμοποιήσαμε συγκεκριμένες συναρτήσεις περιοριστήκαμε σε πολύ απλούς αλγεβρικούς συνδυασμούς της ανεξάρτητης μεταβλητής. Ο παρατηρητικός αναγνώστης θα πρέπει να σημείωσε ότι πουθενά δεν έκαναν την εμφάνισή τους οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις (ημίτονο, συνημίτονο κλπ), η εκθετική και λογαριθμική συνάρτηση, ή άλλες συναρτήσεις που ο αναγνώστης δικαιούται να τις θεωρεί γνωστές του. Ασφαλώς, δεν έχουμε καμία πρόθεση να θίξουμε τέτοια δικαιώματα. ΄Εχουμε, όμως, κι εμείς το δικαίωμα να υπερασπιζόμαστε τον ... φτωχό επιστήμονα. Γι' αυτό θα επιμείνουμε στο να θεωρούμε ως γνωστές συναρτήσεις εκείνες που ο τύπος τους προκύπτει

(α) Με γραμμικό συνδυασμό ρητών δυνάμεων της ανεξάρτητης μεταβλητής,

(β) Με τον πολλαπλασισμό ή τη σύνθεση συναρτήσεων της προηγούμενης μορφής και

(γ) Με παραγώγιση συναρτήσεων της μορφής (α) και (β).

Θα γίνουμε πιο σαφείς θυμίζοντας αρχικά ότι *το **σύνολο των φυσικών αριθμών*** συνήθως συμβολίζεται με $\mathbb{N}$ κι εκείνο των ***ακεραίων*** με $\mathbb{Z}$. Οι αριθμοί που γράφονται με τη μορφή του κλάσματος m/n, όπου $m \in \mathbb{Z}$ και $n \in \mathbb{N}$ απαρτίζουν ***το σύνολο των ρητών αριθμών*** $\mathbb{Q}$. (Συνεπώς, καθένα από τα σύνολα της αλυσίδας $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ αποτελεί γνήσιο υποσύνολο του επόμενου.) ΄Ετσι, η έκφραση $t^{2/3}$ δηλώνει μια ρητή δύναμη της μεταβλητής t.

Με βάση αυτή την ορολογία, στην κατηγορία (α) των συναρτήσεων του φτωχού μαθηματικού ανήκουν

(α-1) Τα ***πολυώνυμα βαθμού n***:

$$p_n(t) = \sum_{j=0}^{n} a_j\,t^j = a_0 + a_1\,t + a_2\,t^2 + \ldots + a_n\,t^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(α-2) Συναρτήσεις της μορφής

$$f(t) = \sum_{j=-m}^{n} a_j\,t^j = a_{-m}\,t^{-m} + a_{1-m}\,t^{1-m} + \ldots a_{-1}\,t^{-1} + a_0 + a_1\,t + a_2\,t^2 + \ldots + a_n\,t^n,$$

$$m,\, n \in \mathbb{N}$$

(α-3) Συναρτήσεις της μορφής

$$f(t) = a + b\,t^{-1/3} + c\,t + d\,\sqrt{t} + e\,t^{8/7}.$$

Στην κατηγορία (β) ανήκουν συναρτήσεις όπως οι

(β-1) Οι λεγόμενες ***ρητές συναρτήσεις***, δηλαδή κλάσματα πολυωνύμων:

$$f(t) = \frac{p_m(t)}{p_n(t)} = \frac{\sum_{j=0}^{m} a_j\,t^j}{\sum_{j=0}^{n} b_j\,t^j} \equiv \frac{a_0 + a_1\,t + a_2\,t^2 + \ldots + a_m\,t^m}{b_0 + b_1\,t + b_2\,t^2 + \ldots + b_n\,t^n}, \qquad m,\, n \in \mathbb{N}$$

(β-2) Συναρτήσεις σαν την $f(t) = \sqrt{1+t^2}$ που προκύπτει από τη σύνθεση των $g(t) = \sqrt{t}$ και $h(t) = 1 + t^2$. Με την ευκαιρία, θυμίζουμε ότι η ***σύνθεση*** $g \circ h$ ***των τυχαίων συναρτήσεων g και h*** (<u>*με αυτή την σειρά*</u>) ορίζεται από τον τύπο

(1) $$g \circ h(t) := g(h(t))$$

και προϋποθέτει ότι οι τιμές της $h(t)$ περιέχονται στο πεδίο ορισμού της $g(t)$.

Στην κατηγορία (γ) περιέχονται όλες εκείνες οι συναρτήσεις που προκύπτουν από τις προηγούμενες, εφαρμόζοντας στους γνωστούς *κανόνες παραγώγισης*, δηλαδή το

Θεώρημα

(i) (***Γραμμικότητα του διαφορικού τελεστή***) Αν η συνάρτηση $f(t)$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $g(t)$, $h(t)$, αν δηλαδή

(2) $$f(t) = a\, g(t) + b\, h(t)$$

και οι παράγωγοι των $g(t)$ και $h(t)$ υπάρχουν στο σημείο $t = \tau$, τότε

(3) $$f'(\tau) = a\, g'(\tau) + b\, h'(\tau).$$

(ii) (***Κανόνας του Leibniz***) Αν $f(t) = g(t)\, h(t)$ και οι παράγωγοι των $g(t)$ και $h(t)$ υπάρχουν στο σημείο $t = \tau$, τότε

(4) $$f'(\tau) = g'(\tau)\, h(\tau) + g(\tau)\, h'(\tau).$$

(iii) (***Κανόνας της αλυσίδας***) Αν η συνάρτηση $f(t)$ προκύπτει από τη σύνθεση των $g(t)$ και $h(t)$, αν δηλαδή

(5) $$f(t) = g \circ h(t) := g(h(t)),$$

και οι παράγωγοι των $h(t)$ και $g(t)$ υπάρχουν στα σημεία $t = \tau$ και $h(\tau)$, αντίστοιχα, τότε

(6) $$f'(\tau) = g'(h(\tau))\, h'(\tau).$$

(iv) Αν $f(t) = t^k$, όπου k ρητός αριθμός, τότε

(7) $$f'(t) = k\, t^{k-1}.$$

Το παραπάνω θεώρημα αποδείχνεται πολύ εύκολα. Τις λεπτομέρειες μπορεί να τις βρει ο αναγνώστης σε οποιοδήποτε βασικό σύγγραμμα ανάλυσης (διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού). Ωστόσο, μπορεί να το αποδείξει και μόνος του στηριζόμενος στις ιδιότητες των ορίων. Ο γνωστός ***τύπος του δυωνύμου***

(8) $$(t+y)^n = \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!\,(n-m)!}\, t^{n-m}\, y^m = t^n + n\, t^{n-1}\, y + \frac{n(n-1)}{2}\, t^{n-2}\, y^2 + \ldots + y^n,$$

όπου με το λεγόνομενο ***n παραγοντικό***, $n!$, εννοούμε τον ακέραιο

(9) $$0! := 1, \quad n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n, \quad n > 0,$$

είναι η μόνη ειδική πληροφορία την οποία, μάλλον, θα χρειαστεί.

Εμείς θα σταθούμε μόνο στον πρώτο κανόνα, για το λόγο ότι η φράση "Γραμμικότητα του διαφορικού τελεστή" μάλλον χρειάζεται διευκρίνιση. Εκτιμάμε ότι, ο αναγνώστης είναι ήδη εξοικειωμένος με την έννοια της ***απεικόνισης του σύνολου A στο σύνολο B***. Έτσι, πάντως, ονομάζεται κάθε νοητική διαδικασία που, από κάθε συγκεκριμένο στοιχείο του συνόλου A, οδηγεί μονοσήμαντα σε ένα στοιχείο του συνόλου B. Η παράστασή της γίνεται με την αλυσίδα $f : A \to B$. Το στοιχείο του B στο οποίο οδηγούμαστε ξεκινώντας από το $a \in A$ συμβολίζεται με $f(a)$ και ονομάζεται *εικόνα του a*. Το αφετηριακό σύνολο A αναφέρεται και ως ***πεδίο ορισμού της απεικόνισης***. Με ***εικόνα του A στο B***, εννοούμε το υποσύνολο του B που απαρτίζουν όλες μαζί οι εικόνες των στοιχείων του A. Συμβολίζεται με $f(A)$ και άρα $f(A) := \{f(a) \in B : a \in A\}$.

Παραδείγματα απεικονίσεων αποτελούν όλες οι πραγματικές συναρτήσεις μιας ή περισσότερων μεταβλητών. Είναι απεικονίσεις της μορφής $f : A \to \mathbb{R}$, όπου A το υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ στο οποίο ορίζεται η συνάρτηση. Όταν μια συνάρτηση θεωρείται από τη σκοπιά της απεικόνισης, η συγκεκριμένη έκφραση, γ.π. η $f(\sigma, \tau) = \sigma\tau$, που μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τις τιμές της ονομάζεται ***τύπος της συνάρτησης***.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το σύνολο A αποτελείται από όλες τις διαφορίσιμες συναρτήσεις που έχουν ως κοινό πεδίο ορισμού το διάστημα I. Αν λοιπόν η $f \in A$ τότε η παράγωγός της, f', δεν ανήκει υποχρεωτικά στο ίδο σύνολο A. Σίγουρα, όμως, αποτελεί μέλος του συνόλου το οποίο απαρτίζουν οι συναρτήσεις που έχουν ως κοινό πεδίο ορισμού το διάστημα I. Αν ονομάσουμε αυτό το σύνολο B, τότε είναι προφανές ότι το $A \subset B$. Είναι επίσης φανερό ότι η διαδικασία της παραγώγισης μας οδηγεί από την f στην f' με τρόπο μονοσήμαντο. Άρα η παραγώγιση μπορεί να θεωρηθεί ως απεικόνιση του σύνολου A στο σύνολο B. Θα τη συμβολίσουμε με $D : A \to B$, οπότε

(10) $$D(f) = f' \quad \Leftrightarrow \quad D(f)(t) = f'(t), \quad t \in I.$$

Ας σημειωθεί ότι κάθε γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του B ανήκει στο ίδιο σύνολο. Γιατί, αν οι $g, h \in B$, τότε η

(11) $$f(t) := a\,g(t) + b\,h(t)$$

όπου a, b τυχαίες σταθερές, ορίζεται μονοσήμαντα σε κάθε σημείο του διαστήματος I. Γι' αυτό, το σύνολο B ονομάζεται ***γραμμικός ή διανυσματικός χώρος***.

Τα παραπάνω ισχύουν ειδικότερα για το υποσύνολο A. Γιατί, αν οι g και h είναι διαφορίσιμες, τότε

(12) $$\lim_{s\to 0} \frac{[a\,g(t+s)+b\,h(t+s)]-[a\,g(t)+b\,h(t)]}{s} = a \lim_{s\to 0} \frac{g(t+s)-g(t)}{s} + b \lim_{s\to 0} \frac{h(t+s)-h(t)}{s}$$

Με άλλα λόγια, και η $f(t) := a\,g(t) + b\,h(t)$ είναι διαφορίσιμη και μάλιστα

(13) $$f'(t) = a\,g'(t) + b\,h'(t), \quad t \in I.$$

Αυτό σημαίνει ότι η παράγωγος του γραμμικού συνδυασμού δύο διαφορίσιμων συναρτήσεων είναι (ο ίδιος) γραμμικός συνδυασμός των παραγώγων τους.

Χρησιμοποιώντας την απεικόνιση $D : A \to B$ που ορίσαμε παραπάνω, μπορούμε να γράψουμε το προηγούμενο αποτέλεσμα στην εξής μορφή.

(14) $$f = a\,g + b\,h \;\Rightarrow\; D(f) = a\,D(g) + b\,D(h)$$

Γενικά, κάθε απεικόνιση $L : A \to B$, ενός διανυσματικού χώρου A σ' έναν διανυσματικό χώρο B η οποία έχει αυτή την ιδιότητα ονομάζεται *γραμμική*.

Το σύμβολο που περιστάνει μιαν απεικόνιση ενός διανυσματικού χώρου A σ' έναν διανυσματικό χώρο B συχνά θεωρείται ως ένα αυτόνομο υποκείμενο που δρα στα στοιχεία του A. Τότε ονομάζεται ***τελεστής***, και, ανάλογα με τη δράση του, παίρνει και κάποιο επίθετο. Έτσι το σύμβολο D της παραγώγισης ονομάζεται ***διαφορικός τελεστής***. Οι τελεστές που αντιστοιχούν σε γραμμικές απεικονίσεις αποκαλούνται ***γραμμικοί***.

Παράδειγμα

Ας υποθέσουμε ότι ο διανυσματικός χώρος B είναι αυτός που ορίσαμε παραπάνω, δηλαδή το σύνολο των συναρτήσεων που έχουν ως κοινό πεδίο ορισμού κάποιο διάστημα I.

(i) Αν φ είναι κάποιο συγκεκριμένο στοιχείο του B, γ.π. η συνάρτηση $\varphi : I \to \mathbb{R}$ με τύπο $\varphi(t) = t^2$, τότε μπορούμε να ορίσουμε την απεικόνιση $\Phi : B \to B$ με τύπο

(15) $$\Phi(f) = \varphi\, f \quad \Leftrightarrow \quad \Phi(f)\,(t) = \varphi(t)\, f(t), \quad t \in I.$$

Από τον τύπο της $\Phi : B \to B$ αμέσως συνάγεται ότι αυτή η απεικόνιση είναι γραμμική:

(16) $$\Phi(a\, g + b\, h) = \varphi\,(a\, g + b\, h) = a\, \varphi\, g + b\, \varphi\, h \equiv a\, \Phi(g) + b\, \Phi(h)$$

Είναι φανερό ότι η δράση του τελεστή Φ έγκειται στο να πολλαπλασιάζει κάθε συνάρτηση που ανήκει στο χώρο B με τη συγκεκριμένη συνάρτηση $\varphi(t)$. Άρα ο Φ αποτελεί παράδειγμα ενός ***πολλαπλασιαστικού τελεστή***.

(ii) Ας ορίσουμε τώρα την απεικόνιση $T : B \to B$ με τύπο

(17) $$T(f) = f^2 \quad \Leftrightarrow \quad T(f)\,(t) = f^2(t) \equiv [f(t)]^2, \quad t \in I.$$

Ο "τετραγωνιστής" T δεν είναι γραμμικός τελεστής:

(18) $$T(a\, g + b\, h) = (a\, g + b\, h)^2 = a^2\, g^2 + b^2\, h^2 + 2\, a\, b\, g\, h \equiv a^2\, T(g) + b^2\, T(h) + 2\, a\, b\, g\, h$$

Συνεπώς,

(19) $$T(a\, g + b\, h) \neq a\, T(g) + b\, T(h).$$

Χρησιμοποιώντας τους κανόνες της παραγώγισης, ο φτωχός επιστήμονας είναι σε θέση να λύσει πάρα πολλές ΔΕ. Αυτό ισχύει ειδικότερα για τις ΔΕ της μορφής

(20) $$x' = f(t), \quad t \in I,$$

όπου $f(t)$ δοσμένη συνάρτηση. Με την ακόλουθη προϋπόθεση: Στον "ισχνό" κατάστιχο της περιουσίας του θα πρέπει να μπορεί να εντοπίσει μια συνάρτηση $F(t)$ τέτοια που $F'(t) = f(t)$. Αν τα καταφέρει, τότε η γενική λύση της (20) δίνεται από τις συναρτήσεις

(21) $$x = F(t) + c$$

Παράδειγμα

(i) Ας θεωρήσουμε την ΔΕ

(22) $$x' = 1 + 2\, t - 4\, t^{2/3}$$

Αυτή είναι της μορφής (20), με $f(t) = 1 + 2\,t - 5\,t^{2/3}$.

Τώρα, χρησιμομοποιώντας και τη γραμμικότητα της παραγώγισης, συμπεραίνουμε ότι

(23) $$1 + 2\,t - 5\,t^{2/3} = (t)' + (t^2)' - 5\,(\tfrac{3}{5}\,t^{5/3})' = (t + t^2 - 3\,t^{5/3})'.$$

΄Αρα οι λύσεις της πιο πάνω ΔΕ δίνονται από την έκφραση

(24) $$x = t + t^2 - 3\,t^{5/3} + c.$$

(ii) Προφανώς, και η ΔΕ

(25) $$x' = \frac{\alpha}{t^2} + \frac{\beta\,t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad t > 0,$$

είναι της μορφής (20).

Σ’ αυτή την περίπτωση, χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας, συμπεραίνουμε ότι

(26) $$\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} = \left(\sqrt{1 + t^2}\right)'.$$

΄Αρα

(27) $$f(t) = \frac{\alpha}{t^2} + \frac{\beta\,t}{\sqrt{1+t^2}} = \alpha\,(-t^{-1})' + \beta\left(\sqrt{1 + t^2}\right)' = \left(-\alpha\,t^{-1} + \beta\,\sqrt{1 + t^2}\right)'.$$

Συνεπώς, οι λύσεις της (25) δίνονται από την οικογένεια των συναρτήσεων

(28) $$x = c - \frac{\alpha}{t} + \beta\,\sqrt{1 + t^2}\,, \quad t > 0.$$

(iii) Τέλος, ας θεωρήσουμε την ΔΕ

(29) $$x' = t + \frac{1}{t}, \quad t > 0.$$

Τώρα, $f(t) = t + t^{-1}$, οπότε ο φτωχός μας επιστήμονας αδυνατεί να λύσει την ΔΕ (29). Γιατί, αμέσως βλέπει ότι $t = (t^2/2)'$, αλλά πουθενά στο κατάστιχό του δεν μπορεί να εντοπίσει τη συνάρτηση που έχει ως παράγωγο την t^{-1}.

Η τελευταία εξίσωση του παραδείγματος φαίνεται να δείχνει ότι η ιστορία των ΔΕ δεν μπορεί να συμβαδίσει με τη μοίρα του φτωχού επιστήμονα. Ωστόσο, τα πράγματα δεν είναι τόσο απελπιστικά. Γιατί, με τα εργαλεία που έχει στη διάθεσή του ο επιστήμονας της ιστορίας μας, είναι σε θέση να λύσει πολλές εξισώσεις πρώτης τάξης που δεν είναι αναγκαστικά της μορφής $x' = f(t)$, αλλά και πολλές και ενδιαφέρουσες εξισώσεις τάξης $n \geq 2$. Το μόνο που χρειάζεται για το σκοπό αυτό είναι να αναπτύξει περισσότερο την τεχνική του. Με άλλα λόγια, πρέπει να αποκτήσει ευχέρεια στο να μετατρέπει εξισώσεις, που αρχικά φαίνονται να μην επιλύονται με βάση τους κανόνες της παραγώγισης, σε μορφές που επιδέχονται τέτοια ανάλυση.

Η εξοικείωση με τις κατάλληλες μεθόδους ή τεχνικές επίλυσης ΔΕ αποτελεί τον στόχο των επόμενων κεφαλαίων αυτού του βιβλίου. ΄Ομως, τα τεχνικά ζητήματα είναι δευτερεύουσας σημασίας σε οποιοδήποτε επιστημονικό πεδίο, άρα και στον κλάδο των ΔΕ. Πιο σημαντικό είναι να καταλάβει κανείς τον λόγο ύπαρξης ενός επιστημονικού τομέα - τι είναι αυτό που τον κάνει ενδιαφέροντα και σημαντικό ως κοινωνική δραστηριότητα. Αυτό το θεμελιακό ζήτημα για το γνωστικό αντικείμενο που ονομάζουμε ΔΕ μπορεί να το κατανοήσει πλήρως κάθε νέος επιστήμονας, όσο μικρό κι αν είναι "το έχει" του. Αρκεί να ... προχωρήσει στο επόμενο εδάφιο.

6. Η σημαντικότερη διαφορική εξίσωση

Σε κάθε γνωστικό αντικείμενο ή επιστημονικό τομέα υπάρχει ένα στοιχείο ξεχωριστής σημασίας. Είναι εκείνο που παίζει τον ρόλο του θεμέλιου ή του πυρήνα του γνωστικού αντικείμενου και, συνακόλουθα, η κατανόησή του ισοδυναμεί με τη σύλληψη της ουσίας του συγκεκριμένου επιστημονικού τομέα. Με άλλα λόγια, όποιος αποκτήσει σαφή γνώση αυτού του θεμελιακού στοιχείου, μπορεί να ισχυριστεί ότι κατάλαβε το λόγο ύπαρξης του αντίστοιχου γνωστικού πεδίου. Το υπόλοιπο οικοδόμημα είναι λεπτομέρειες που έχουν τη σημασία τους, ιδιαίτερα από την άποψη των εφαρμογών, αλλά μπορούν να αφεθούν στον ειδικό ή σ' αυτόν ενδιαφέρεται να αποκτήσει εξειδικευμένη γνώση στον συγκεκριμένο επιστημονικό τομέα.

Ποιό είναι, λοιπόν, το θεμελιακό ή πυρηνικό στοιχείο των διαφορικών εξισώσεων; Με άλλα λόγια, ποιά είναι η σημαντικότερη από όλες ανεξαιρέτως τις διαφορικές εξισώσεις; Αυτή που, αν την κατανοήσουμε, μπορούμε να πούμε ότι καταλάβαμε το λόγο για τον οποίο αυτός ο επιστημονικός κλάδος συγκεντρώνει το ενδιαφέρον τόσων ερευνητών;

Η απάντηση είναι τόσο απλή που φαίνεται απίστευτη:

Η σημαντικότερη διαφορική εξίσωση είναι η

$$\boxed{x' = 0}$$

Είμαστε σίγουροι πως δε θα την ξεχάσετε ποτέ και άρα, αν καταλάβατε ήδη τη σημασία της, μπορείτε να ... πετάξετε αυτό το βιβλίο.

Ο λόγος για τον οποίο μια τόσο απλή εξίσωση έχει κατακτήσει το στέμμα της βασίλισας των ΔΕ είναι ... απλός: ΄Οπως δείξαμε σε προηγούμενο εδάφιο, η παράγωγος κάθε σταθερής συνάρτησης μηδενίζεται. Αυτό σημαίνει ότι, από την σκοπιά της διαδικασίας της παραγώγισης, δεν υπάρχει καμία απολύτως διαφορά ανάμεσα στις συναρτήσεις

$$u(t) = 1, \qquad \varphi(t) = 3, \qquad t \in I,$$

για παράδειγμα. ΄Ομως, αυτές οι δύο συναρτήσεις είναι απολύτως διακριτές - διαφέρουν σε όλα ανεξαιρέτως τα σημεία του (κοινού) πεδίου ορισμού τους. Γενικότερα, η διαδικασία της παραγώγισης είναι τυφλή στη διαφορά δύο μελών της 1-παραμετρικής οικογένειας συναρτήσεων της μορφής $f(t) = c, \quad t \in I$, που αντιστοιχούν σε διαφορετικές τιμές της παραμέτρου c.

Για να δούμε αυτή την κατάσταση από μια άλλη σκοπιά, ας ονομάσουμε $\Sigma(I)$ το σύνολο των σταθερών συναρτήσεων που έχουν ως κοινό πεδίο ορισμού κάποιο διάστημα I. Ας συμβολίσουμε, επίσης, με $D(f)$ την παράγωγο του τυχαίου στοιχείου f του $\Sigma(I)$. Τότε, η αδυναμία της παραγώγισης να διακρίνει τα διαφορετικά στοιχεία του συνόλου $\Sigma(I)$ ισοδυναμεί με το γεγονός ότι απεικονίζει όλα ανεξαιρέτως τα στοιχεία αυτού του συνόλου σε ένα και μόνο στοιχείο του - στη μηδενική συνάρτηση:

$$D(\Sigma(I)) = 0$$

Αλλά, γιατί είναι αυτή η διαπίστωση τόσο σημαντική; Ακριβώς γιατί, με το να βλέπει όλες τις σταθερές συναρτήσεις ως ίδιες, η παραγώγιση διατηρεί και εκφράζει μόνο το κοινό χαρακτηριστικό τους. Αυτή, όμως είναι και

Η έννοια ενός φυσικού, βιολογικού ή οποιουδήποτε άλλου νόμου: Το να βρίσκουμε το κοινό γνώρισμα μιας οικογένειας φαινομένων κι έτσι να τα ομαδοποιούμε.

Κάθε κινούμενο σώμα (οι πλανήτες, τα αυτοκίνητα, τα έμβια όντα) έχει τη δική του κίνηση. Το να πει κανείς ότι αυτές τις κινήσεις τις διέπει κάποιος νόμος είναι ισοδύναμο του να πει ότι, παρά τις εμφανείς διαφορές τους, έχουν και κάτι το κοινό. Μια περιγραφή που στέκεται στις λεπτομέρειες δεν θα οδηγήσει ποτέ στην ανακάλυψη αυτού του κοινού χαρακτηριστικού. Αν λοιπόν η παραγώγιση έμενε σε λεπτομέρειες, τότε και η έννοια της διαφορικής εξίσωσης θα ήταν άχρηστη ως μέσο έκφρασης των φυσικών καί άλλων νόμων.

Επιπλέον, έχουμε αποδείξει ότι, όχι μόνο κάθε μέλος του συνόλου $\Sigma(I)$ αποτελεί λύση της ΔΕ $x' = 0$, αλλά και ότι στο σύνολο $\Sigma(I)$ περιέχονται όλες ανεξαιρέτως οι λύσεις αυτής της εξίσωσης. ΄Αρα, η ΔΕ $x' = 0$ αποτελεί συμπυκνωμένη αναπαράσταση όλων των συναρτήσεων που ανήκουν στο σύνολο $\Sigma(I)$. Αν, θέλετε, η $x' = 0$ εκφράζει τον *νόμο των σταθερών συναρτήσεων*.

΄Οπως θα φανεί καθαρά και από τις εφαρμογές που θα παρουσιάσουμε σύντομα, δεν υπερβάλλουμε καθόλου προβάλλοντας τον ακόλουθο ισχυρισμό:

Ο νόμος των σταθερών συναρτήσεων αποτελεί το θεμέλιο όλων εκείνων των νόμων της φυσικής, της βιολογίας και των άλλων επιστημών που επιδέχονται μαθηματική αναπαράσταση με τη μορφή διαφορικών εξισώσεων.

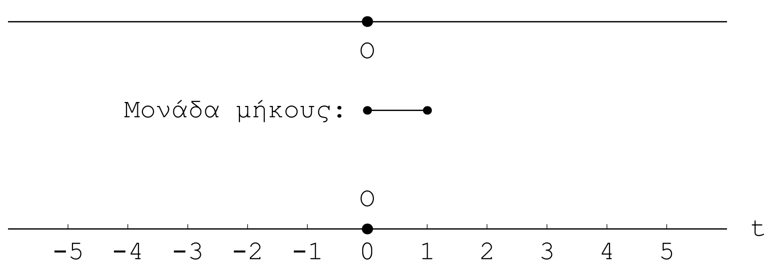
7. Ο δεύτερος αναβαθμός της διαλεκτικής: Από το γενικό στο ειδικό

Το πέρασμα από το ειδικό στο γενικό είναι το πρώτο στάδιο της νοητικής διεργασίας που οδηγεί στην επιστημονική γνώση. Για να ολοκληρωθεί η γνωσιακή διαδικασία απαιτείται η αντιστροφή της αρχικής πορείας - το πέρασμα από το γενικό στο ειδικό.

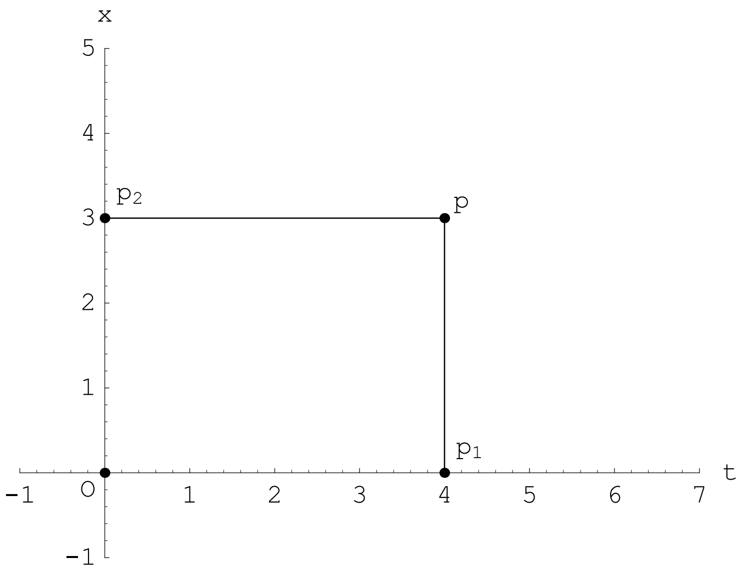
Δεν αρκεί, λοιπόν, να υποστηρίζουμε ότι με κάποια ΔΕ εκφράζονται τα κοινά χαρακτηριστικά - ο νόμος- μιας κατηγορίας φυσικών, βιολογικών, ή άλλου είδους φαινομένων. Θα πρέπει να είμαστε σε θέση να προσδιορίζουμε και το πώς εξελίσσεται καθένα από αυτά τα φαινόμενα ξεχωριστά. Για παράδειγμα, αν μια ΔΕ εκφράζει τον νόμο που διέπει την κίνηση κάθε πέτρας που εκσφενδονίζουμε με το χέρι και, παράλληλα, δεν είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε την τροχιά μιας συγκεκριμένης πέτρας από τη στιγμή που θα χάσει επαφή με το χέρι μας ως τη στιγμή που θα χτυπήσει τον στόχο της, τότε το μαθηματικό κατόρθωμά μας χάνει τελείως την αξία του. Με άλλα λόγια, θα πρέπει να μπορούμε να επιλέγουμε μια συγκεκριμένη λύση από το σύνολο των λύσεων μιας ΔΕ με προκαθορισμένο τρόπο.

Προτού δούμε συγκεκριμένα παραδείγματα από το χώρο των φυσικών επιστημών, ας δούμε το πως εκφράζεται η προηγούμενη απαίτηση από τη σκοπιά της γεωμετρίας. Για τον σκοπό αυτό, θα χρειαστεί να θυμίσουμε ορισμένα στοιχεία από τον τομέα της γραφικής παράστασης των συναρτήσεων.

Ξεκινάμε με την υπενθύμιση του λόγου για τον οποίο το σύνολο $\mathbb{R}$ αποκαλείται και ***πραγματική ευθεία***. Θεωρούμε, λοιπόν, μια τυχαία ευθεία, σαν την πρώτη του επόμενου σχήματος. Πάνω σ' αυτή την ευθεία επιλέγουμε ένα συγκεκριμένο σημείο, όπως το O. Επιλέγουμε επίσης ένα ευθύγραμμο τμήμα το οποίο ονομάζουμε ***μονάδα μήκους***. Στη συνέχεια, με τη βοήθεια ενός διαβήτη, εντοπίζουμε τα σημεία της ευθείας που απέχουν μία, δύο, τρεις κλπ μονάδες μήκους από το σημείο O. Σ' εκείνα που βρίσκονται στο ένα από τα δύο τμήματα στα οποία χωρίζεται η ευθεία από το O, αντιστοιχίζουμε τους πραγματικούς αριθμούς 1,2,3 κλπ. Ανάλογα, στα σημεία που βρίσκονται στο άλλο τμήμα, αντιστοιχίζουμε τους πραγματικούς αριθμούς -1, -2, -3 κλπ. Το ίδιο το σημείο O το αντιστοιχίζουμε στον αριθμό μηδέν. Με αυτό τον τρόπο καταλήγουμε στη δεύτερη από τις ευθείες του σχήματος. Η αντιστοιχία που μόλις κατασκευάσαμε μας επιτρέπει να θεωρούμε όλα τα υπόλοιπα στοιχεία του $\mathbb{R}$ ως αντίστοιχα 1-1 (ένα προς ένα) με τα σημεία της ευθείας.



Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να βαθμονομήσουμε δύο κάθετες μεταξύ τους ευθείες του Ευκλείδειου επίπεδου, τις t και x. Αν υποθέσουμε ότι αυτές τέμνονται στο σημείο O, τότε καταλήγουμε στο επόμενο σχήμα. Αυτή η κατασκευή οδηγεί σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία των σημείων του Ευκλείδειου επίπεδου με τα στοιχεία του χώρου $\mathbb{R}^2$. Για τον ακόλουθο λόγο. Κάθε σημείο του Ευκλείδειου επίπεδου, σαν το p του σχήματος, αντιστοιχεί πλέον μονοσήμαντα σε ένα ζευγάρι σημείων p_1 και p_2 που ανήκουν στις ευθείες t και x, αντίστοιχα. Το p_1 είναι το σημείο όπου τέμνει την t η μοναδική ευθεία που είναι παράλληλη προς την x και διέρχεται από το p. Ανάλογα, το p_2 είναι το σημείο όπου τέμνει την x η ευθεία που διέρχεται από το p και είναι παράλληλη προς την t. Οι αριθμοί t και x που, σύμφωνα με την βαθμονόμηση, αντιστοιχούν στα σημεία p_1 και p_2 ορίζουν το στοιχείο (t, x) του $\mathbb{R}^2$ το οποίο αντιστοιχεί στο σημείο p του Ευκλείδειου επίπεδου. Για το συγκεκριμένο σημείο p του σχήματος, $(t, x) = (4, 3)$. Επειδή η αντιστοιχία που ορίζεται με αυτό τον τρόπο είναι αμφινοσήμαντη και καλύπτει όλα ανεξαιρέτως τα στοιχεία του $\mathbb{R}^2$, ο τελευταίος αποκαλείται και *Ευκλείδειο επίπεδο*. Λέγεται και *επίπεδο* $t - x$, όταν, όπως έγινε στην περίπτωσή μας, οι ευθείες που χρησιμοποιούνται για την κατασκευή της αντιστοιχίας, φέρουν τα ονόματα t και x. Οι τελευταίες αναφέρονται ως *άξονες του επίπεδου*.



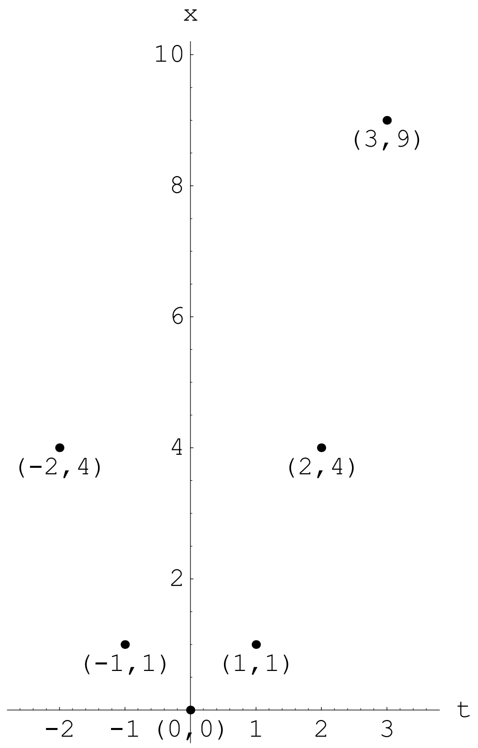
Ας θεωρήσουμε τώρα μια συνάρτηση $f(t)$ με πεδίο ορισμού κάποιο υποσύνολο A της πραγματικής ευθείας. Τότε με ***γράφημα της $f(t)$*** εννοούμε το εξής υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$:

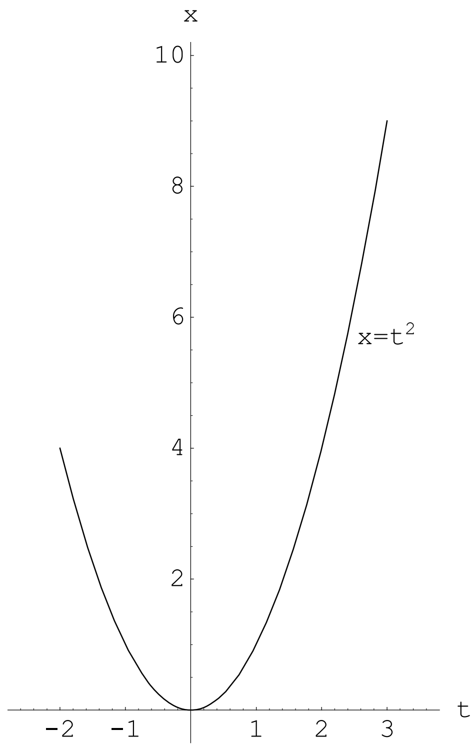
$$\Gamma_f := \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : x = f(t),\ \ t \in A\}.$$

Το γράφημα μιας συνάρτησης μας επιτρέπει να την αναπαραστήσουμε και γραφικά. Ας θεωρήσουμε, για παράδειγμα, την συνάρτηση $f(t) = t^2, \quad t \in \mathbb{R}$. Είναι προφανές ότι τα ζευγάρια $(-2, 4)$, $(-1, 1)$, $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 4)$ και $(3, 9)$ ανήκουν στο γράφημά της. Χρησιμοποιώντας την αντιστοιχία του $\mathbb{R}^2$ προς το Ευκλείδειο επίπεδο που μόλις περιγράψαμε, μπορούμε να παραστήσουμε τα πιο πάνω ζευγάρια όπως στο αριστερό τμήμα του επόμενου σχήματος.

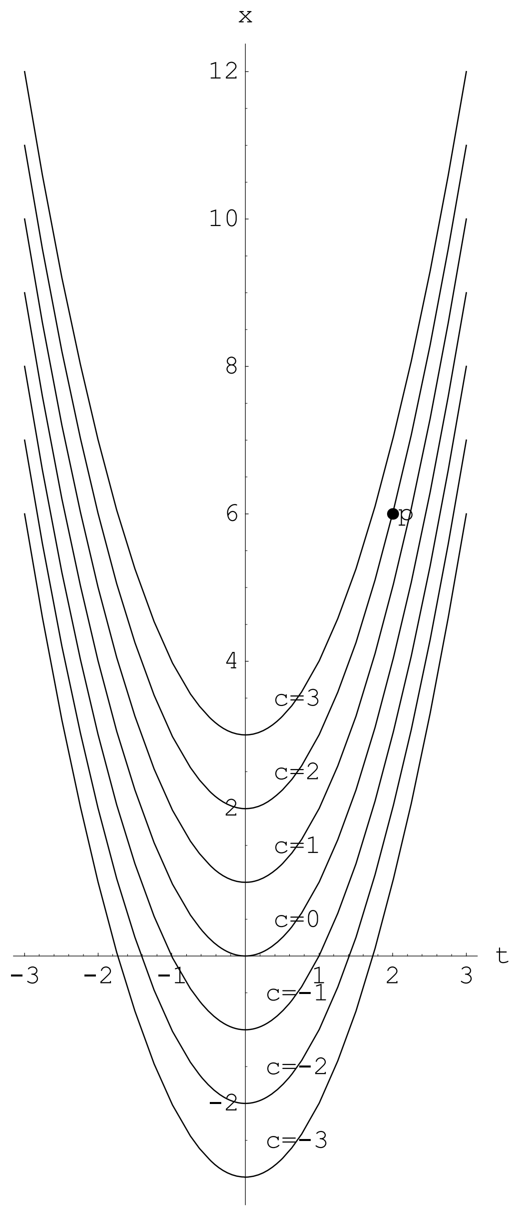
Αυτή η αναπαράσταση είναι πολύ εύκολη. Το δύσκολο είναι να κατασκευάσουμε κάτι ανάλογο για το σύνολο των στοιχείων, ακόμα και ενός τμήματος, του γραφήματος· ιδιαίτερα, όταν ο τύπος της δοσμένης συνάρτησης είναι περίπλοκος. Για τέτοιου είδους κατασκευές, τα προγράμματα γραφικών που διαθέτουν οι σύγχρονοι ηλεκτρονικοί υπολογιστές - ακόμα και αυτοί του χεριού- αποτελούν αναντικατάστατα εργαλεία.

Το δεξί μέρος του επόμενου σχήματος, για παράδειγμα, κατασκευάστηκε χρησιμοποιώντας ένα τέτοιο πρόγραμμα. Δείχνει την καμπύλη του Ευκλείδειου επίπεδου που ορίζεται από το γράφημα της $f(t) = t^2, \quad t \in \mathbb{R}$, για το διάστημα τιμών $-2 \le t \le 3$ της ανεξάρτητης μεταβλητής.





Ας θεωρήσουμε, τώρα, την 1-παραμετρική οικογένεια συναρτήσεων $f(t) = t^2 + c$, $t \in \mathbb{R}$. Κάθε μέλος αυτής της οικογένειας ορίζει το δικό του γράφημα. Στο επόμενο σχήμα δείχνουμε τις καμπύλες του $\mathbb{R}^2$ τις οποίες ορίζουν τα γραφήματα των συναρτήσεων που αντιστοιχούν στις τιμές -3, -2, -1, 0, 1, 2, και 3 της παραμέτρου c.



Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι, παρόλο που είναι θεωρητικά δυνατό, το να κατασκευάσουμε την γραφική παράσταση όλων των συναρτήσεων που ανήκουν στην οικογένεια $f(t) = t^2 + c, \quad t \in \mathbb{R}$, δεν έχει νόημα. Γιατί, πρώτ' απ' όλα, το πεδίο ορισμού τους δεν είναι φραγμένο. Αλλά, ακόμα και αν περιοριστούμε σ' ένα φραγμένο διάστημα σαν το $[-3, 3]$ που χρησιμοποιήσαμε στο προηγούμενο σχήμα, θα καταλήξουμε σε ... μια μαύρη τρύπα. Ο λόγος είναι ότι, η παράμετρος c μεταβάλλεται με συνεχή τρόπο. Ως επακόλουθο, η ένωση των γραφημάτων όλων των συναρτήσεων $f(t) = t^2 + c, \quad t \in \mathbb{R}$, καλύπτει ολόκληρο το Ευκλείδειο επίπεδο, $\mathbb{R}^2$. Ανάλογα, η ένωση των γραφημάτων που αντιστοιχούν στο διάστημα $-3 \leq t \leq 3$ καλύπτει ολόκληρη την λωρίδα $-3 \leq t \leq 3$ του επίπεδου $t - x$. Ακόμα και αν περιορίσουμε τις τιμές της παραμέτρου στο διάστημα $0 \leq c \leq 1$, για παράδειγμα, η αντίστοιχη γραφική παράσταση θα είναι μια μαύρη ζώνη που καλύπτει ολόκληρη την περιοχή ανάμεσα στις δυο καμπύλες του προηγούμενου σχήματος οι οποίες ορίζονται από τις τιμές $c = 0$ και $c = 1$.

Ας θυμηθούμε, τώρα, ότι η οικογένεια των συναρτήσεων $f(t) = t^2 + c$, $t \in \mathbb{R}$, αποτελεί την γενική λύση της ΔΕ $x' = 2\,t$. ΄Αρα, ανάμεσα στο σύνολο των καμπυλών του $\mathbb{R}^2$ που ορίζουν τα γραφήματα των συναρτήσεων $f(t) = t^2 + c$ και το σύνολο των λύσεων της $x' = 2\,t$ υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία. Αυτό σημαίνει ότι, αν γ.π. εστιάσουμε την προσοχή μας στην καμπύλη $\{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : x = t^2 + 2,\ t \in \mathbb{R}\}$, τότε αυτόματα επιλέγουμε την λύση $x = t^2 + 2$ -και αντίστροφα. Καμπύλες του Ευκλείδειου επίπεδου που, σαν αυτές του παραδείγματος, ορίζονται από τις λύσεις μιας ΔΕ ονομάζονται ***ολοκληρωτικές καμπύλες*** της συγκεκριμένης ΔΕ.

Ας επικεντρώσουμε την προσοχή μας στη λύση της ΔΕ $x' = 2\,t$ που ορίζεται από την επιλογή $c = 2$. Η ανίστοιχη ολοκληρωτική καμπύλη $x = t^2 + 2$ περιέχει άπειρα σημεία του $\mathbb{R}^2$. Για να ξεχωρίσουμε ένα από αυτά, αρκεί να επιλέξουμε την τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής t. Ας πούμε, λοιπόν, ότι $t = 2$. Τότε $x = 6$ και άρα μιλάμε για το σημείο $(2, 6)$ του $\mathbb{R}^2$, δηλαδή για το σημείο p του προηγούμενου σχήματος. Με άλλα λόγια, η επιλογή συγκεκριμένων τιμών για την παράμετρο που εμφανίζεται στη γενική λύση και την ανεξάρτητη μεταβλητή οδήγησε σε συγκεκριμένο σημείο του επίπεδου $t - x$.

Για να διερευνήσουμε αν ισχύει και το αντίστροφο, ξεκινάμε επιλέγοντας τυχαία ένα σημείο του επίπεδου $t - x$, για παράδειγμα το σημείο με συντεταγμένες $(t, x) = (2, 6)$. Τότε, η αντικατάσταση των τιμών $t = 2$, $x = 6$ στην έκφραση $x = t^2 + c$ οδηγεί αμέσως στο συμπέρασμα ότι $c = 2$. Αυτό σημαίνει ότι, η επιλογή του σημείου ήταν αρκετή για να προσδιοριστεί μονοσήμαντα η ολοκληρωτική καμπύλη της ΔΕ $x' = 2\,t$ η οποία διέρχεται από το συγκεκριμένο σημείο. Ισοδύναμα, η επιλογή μιας τιμής για τα μέλη του ζευγαριού (t, x) ήταν αρκετή για να προσδιοριστεί μονοσήμαντα μια συγκεκριμένη λύση της ΔΕ $x' = 2\,t$.

Για να φανεί καθαρά ότι η επιλογή $(t, x) = (2, 6)$ δεν έπαιξε κανένα ρόλο στη συναγωγή του συμπεράσματος που μόλις περιγράψαμε, ας υποθέσουμε ότι το (t_0, x_0) είναι ένα τυχαίο ζευγάρι πραγματικών αριθμών. Τότε, για $(t, x) = (t_0, x_0)$, η έκφραση $x = t^2 + c$ γίνεται $x_0 = {t_0}^2 + c$ και άρα $c = x_0 - {t_0}^2$. Συνεπώς, η καμπύλη που διέρχεται από το σημείο $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ -άρα και η αντίστοιχη λύση της ΔΕ $x' = 2\,t$- ορίζεται από την σχέση

(1) $$x = x_0 + t^2 - {t_0}^2$$

Επειδή ο αριθμός t_0 αποτελεί την αρχή του διαστήματος $[t_0, \infty)$, οι αριθμοί t_0, x_0 συνήθως αφέρονται ως ***αρχικές τιμές*** της ανεξάρτητης και της εξαρτημένης μεταβλητής, αντίστοιχα. Συνακόλουθα, το αποτέλεσμα (1) δηλώνει με σαφήνεια ότι η επιλογή των αρχικών τιμών προσδιορίζει μονοσήμαντα μια συγκεκριμένη λύση της ΔΕ $x' = 2\,t$.

Μάλιστα, στις περισσότερες εφαρμογές των ΔΕ, η ανεξάρτητη μεταβλητή t παριστάνει αυτό που ονομάζουμε χρόνο. Συνακόλουθα, ο αριθμός t_0 αποτελεί την αρχή κάθε χρονικού διαστήματος της μορφής $[t_0, t_0 + T]$, όπου T τυχαίος θετικός αριθμός. Η εξαρτημένη μεταβλητή x, από την άλλη, παριστάνει μια από τις παραμέτρους που χαρακτηρίζουν την κατάσταση ενός φυσικού, βιολογικού κλπ συστήματος, γ.π. την θερμοκρασία του. Σε τέτοιες περιπτώσεις, η αντίστοιχη ΔΕ υποτίθεται πως εκφράζει τον τρόπο με τον οποίο αλλάζει με τον χρόνο η συγκεκριμένη καταστατική παράμετρος. Με άλλα λόγια, η ΔΕ εκφράζει το νόμο που διέπει τη χρονική εξέλιξη του συστήματος -ακριβέστερα, της χαρακτηριστικής παραμέτρου x.

Υποτίθεται, λοιπόν, ότι ένας νόμος εξέλιξης είναι έγκυρος, αν μας επιτρέπει να προβλέψουμε την κατάσταση του αντίστοιχου συστήματος κάθε χρονική στιγμή $t > t_0$, γνωρίζοντας την κατάστασή του τη στιγμή t_0. Με άλλα λόγια, αν μας δοθεί η αρχική τιμή x_0 της καταστατικής παραμέτρου x του συστήματος, τότε θα πρέπει να μπορούμε να υπολογίσουμε την $x(t)$ και για κάθε στιγμή $t > t_0$, χρησιμοποιώντας αποκλειστικά και μόνο το νόμο που διέπει το σύστημα, δηλαδή την αντίστοιχη ΔΕ.

Όπως είδαμε παραπάνω, στην περίπτωση που ο νόμος του συστήματος εκφράζεται από την ΔΕ $x' = 2\,t$, αυτή η δυνατότητα πρόβλεψης ισχύει. Για τον εξής απλό λόγο:

α) Η ΔΕ $x' = 2\,t$ έχει λύσεις που, στο σύνολό τους, εκφράζονται από την 2-παραμετρική οικογένεια συναρτήσεων $x = x_0 + t^2 - {t_0}^2$.

β) Για κάθε επιλογή των αρχικών τιμών (t_0, x_0) η προηγούμενη έκφραση μετατρέπεται σε συγκεκριμένη συνάρτηση του t. Συνακόλουθα, για κάθε $t > t_0$ η αντίστοιχη τιμή του x προσδιορίζεται μονοσήμαντα.

Με άλλα λόγια, στην περίπτωση που μελετήσαμε αναλυτικά σ' αυτό το εδάφιο, υπάρχει λύση, και μάλιστα μοναδική, στο ακόλουθο διπλό

Πρόβλημα

Ας υποθέσουμε ότι το (t_0, x_0) είναι ένα τυχαίο ζευγάρι πραγματικών αριθμών. Θέλουμε να βρεθούν οι λύσεις $x(t)$ της ΔΕ

(2) $$x' = 2\,t, \quad t \in \mathbb{R},$$

για τις οποίες ισχύει ότι

(3) $$x(t_0) = x_0.$$

Για το λόγο που εξηγήσαμε πιο πάνω, ο αριθμός x_0 συνήθως αναφέρεται ως αρχική τιμή της συνάρτησης $x(t)$. Συνακόλουθα, ένα πρόβλημα σαν κι αυτό που μόλις διατυπώσαμε ονομάζεται ***πρόβλημα αρχικής τιμής*** **(ΠΑΤ)**. Η απαίτηση που εκφράζεται από την (3), δηλαδή το να έχει η εξαρτημένη μεταβλητή x την προεπιλεγμένη τιμή x_0 κατά τη "στιγμή" t_0, ονομάζεται ***αρχική συνθήκη***. Συνεπώς, ένα πρόβλημα αρχικών τιμών, εκτός από την ΔΕ, περιλαμβάνει πάντοτε και μία ή περισσότερες αρχικές συνθήκες.

Συχνά, η λύση ενός ΠΑΤ δεν επηρεάζεται από μικρές αλλαγές στην αρχική τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής. Αυτό αποδείχνεται πολύ εύκολα για το πρόβλημα που έχουμε ήδη επιλύσει. Για να δούμε τις λεπτομέρειες, ας ονομάσουμε $x_1(t)$ τη λύση που αντιστοιχεί στην αρχική τιμή x_0 και $x_2(t)$ τη λύση που αντιστοιχεί στην αχική τιμή $\tilde{x}_0 = x_0 + \delta$. Τότε

(4) $$x_1(t) = x_0 + t^2\,, \qquad x_2(t) = x_0 + \delta + t^2,$$

και άρα

(5) $$|\,x_2(t) - x_1(t)\,| = |\,\delta\,|.$$

Συνεπώς, αν η διαφορά $\delta = \tilde{x}_0 - x_0$ των δύο αρχικών τιμών είναι μικρή, τότε και η διαφορά των αντίστοιχων λύσεων θα παραμείνει μικρή.

Αυτή η συμπεριφορά των λύσεων ονομάζεται *ευστάθεια* και είναι ένα από τα τρία επιθυμητά χαρακτηριστικά κάθε ΠΑΤ. Τα άλλα δύο είναι η ύπαρξη λύσεων και η μοναδικότητά τους. Κατά τον Γάλλο μαθηματικό Jacques Hadamard (Ανταμάρ) (1865-1963), αυτά τα τρία χαρακτηριστικά είναι απαραίτητα για ν' αποτελεί η αντίστοιχη ΔΕ καλή μαθηματική έκφραση των νόμων που διέπουν την εξέλιξη των συστημάτων που συναντάμε στη φύση. Γιατί, ακριβώς, τα περισσότερα φυσικά συστήματα παρουσιάζουν ***ντετερμινιστική συμπεριφορά***, δηλαδή η αρχική τους κατάσταση καθορίζει πλήρως την μετέπειτα εξέλιξή τους και, μάλιστα, με ευσταθή τρόπο. Συνακόλουθα, ένα ΠΑΤ το οποίο επιδέχεται λύσεις που είναι μοναδικές και ευσταθείς χαρακτηρίζεται ως ***καλά τοποθετημένο κατά Hadamard***.

Το ότι όλα τα ΠΑΤ δεν είναι καλά τοποθετημένα κατά Hadamard φαίνεται αμέσως από το ακόλουθο

Παράδειγμα

Ας θεωρήσουμε το ΠΑΤ που απαρτίζεται από τη ΔΕ

(6) $$x' = 3\,x^{2/3}$$

και την αρχική συνθήκη

(7) $$x(0) = 0.$$

Είναι φανερό ότι η μηδενική συνάρτηση $x(t) = 0$ αποτελεί λύση της ΔΕ (6). Προφανώς, αυτή η λύση ικανοποιεί και την απαίτηση (7).

Από την άλλη, εύκολα επαληθεύεται ότι και κάθε συνάρτηση της μορφής

(8) $$x(t) = (t + c)^3$$

αποτελεί λύση της πιο πάνω ΔΕ. Για τις λύσεις αυτής της μορφής $x(0) = c^3$. Συνεπώς, η επιλογή $c = 0$ οδηγεί στη συνάρτηση $x(t) = t^3$ που ικανοποιεί και την απαίτηση $x(0) = 0$.

Αυτό σημαίνει ότι το παραπάνω ΠΑΤ επιδέχεται δύο (τουλάχιστον) λύσεις. ΄Αρα, το συγκεκριμένο ΠΑΤ δεν είναι καλά τοποθετημένο, αφού οι λύσεις του δεν χαρακτηρίζονται από μοναδικότητα. ΄Οπως θα δούμε στο επόμενο εδάφιο, τα πράγματα μπορεί να γίνουν ακόμα χειρότερα!

Παρατήρηση

Το παράδειγμα που μόλις εξετάσαμε δεν θα πρέπει να οδηγήσει στο λαθεμένο συμπέρασμα ότι "οι λύσεις της ΔΕ $x' = 3\,x^{2/3}$ δεν έχουν το χαρακτηριστικό της μοδικότητας". Σε τέτοιου είδους λάθη είναι επιρρεπής όποια (ος) προσέχει μόνο ορισμένα από τα στοιχεία ενός ορισμού και όχι το σύνολό τους. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, ως ΠΑΤ ορίζεται ένα ζευγάρι της μορφής { ΔΕ, αρχικές συνθήκες }. ΄Αρα, τα χαρακτηριστικά ενός ΠΑΤ οφείλονται και στα δύο στοιχεία του μαζί και όχι σε καθένα απ' αυτά ξεχωριστά. Κατά συνέπεια, κάθε συμπέρασμα που αφορά ένα ΠΑΤ θα πρέπει να αναφέρεται και στα δύο στοιχεία του και να προκύπτει από την σύνδεσή τους.

8. ΔΕ χωρίς λύση

Για ... προθέρμαση, ας θεωρήσουμε ένα πρόβλημα αρχικών τιμών (ΠΑΤ) σαν το ακόλουθο:

(1) $$x' = f(t) := \begin{cases} 1, & t < 0 \\ 1 + 2t, & t \geq 0 \end{cases}, \quad x(1) = 3.$$

Η ιδιομορφία αυτού του προβλήματος βρίσκεται στο ότι, η συνάρτηση $f(t)$ που εμφανίζεται στη ΔΕ έχει διαφορετικό τύπο στα τμήματα $(-\infty, 0)$ και $[0,\infty)$ του πεδίου ορισμού της. Ωστόσο, αυτή η ιδιομορφία δεν αποτελεί αξιόλογο εμπόδιο στη διαδικασία επίλυσης της ΔΕ. Γιατί, το μόνο που χρειάζεται να κάνουμε είναι να λύσουμε την ΔΕ τμηματικά.

Συγκεκριμένα, στο διάστημα $(-\infty, 0)$, η ΔΕ (1) ταυτίζεται με την

(2) $$x' = 1, \qquad t < 0.$$

Αυτή λύνεται εύκολα για να δώσει

(3) $$x = t + c, \quad t < 0.$$

Ανάλογα, στο διάστημα $[0, \infty)$, η ΔΕ (1) ανάγεται στην

(4) $$x' = 1 + 2t, \qquad t \geq 0.$$

Συνεπώς,

(5) $$x = t + t^2 + \tilde{c}, \qquad t \geq 0.$$

Τώρα, η άγνωστη συνάρτηση μιας ΔΕ είναι υποχρεωτικά διαφορίσιμη. Όμως, κάθε διαφορίσιμη συνάρτηση είναι αναγκαστικά συνεχής. Αυτό σημαίνει ότι, οι δυο εκφράσεις (3) και (5) που βρήκαμε για τη συνάρτηση x θα πρέπει να συμφωνούν στο σημείο $t = 0$. Συνεπώς, $\tilde{c} = c$ και άρα η γενική λύση της ΔΕ (1) θα πρέπει να δίνεται από την 1-παραμετρική οικογένεια συναρτήσεων

(6) $$x = \begin{cases} t + c, & t < 0 \\ t + t^2 + c, & t \geq 0 \end{cases}$$

Από αυτή την έκφραση αμέσως έπεται ότι $x = c + 2$, όταν $t = 1$. ΄Αρα η απαίτηση $x(1) = 3$ που επιβάλλει η αρχική συνθήκη ικανοποιείται με την επιλογή $c = 1$.

Συμπερασματικά, το ΠΑΤ (1) επιδέχεται τη λύση

(7) $$x = \begin{cases} t + 1, & t < 0 \\ t + t^2 + 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

και καμία άλλη.

Παρατήρηση. Δεν αποκλείεται ο αναγνώστης να ένοιωσε άβολα με τη ΔΕ (4), επειδή το διάστημα $[0, \infty)$ δεν είναι ανοιχτό στο αριστερό του άκρο $t = 0$. Μπορεί να σκέφτηκε, δηλαδή, ότι ο ορισμός της παραγώγου που δώσαμε σε προηγούμενο εδάφιο δεν έχει νόημα στο σημείο $t = 0$. Και θα είχε δίκηο, γιατί το κλάσμα που εμφανίζεται στο δεξί μέλος της έκφρασης

(8) $$u'(\tau) := \lim_{h \to 0} \frac{u(\tau+h)-u(\tau)}{h}$$

έχει νόημα μόνο αν

α) Το σημείο τ ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης $u(t)$ και

β) Η παράμετρος h μπορεί να παίρνει ελεύθερα τόσο θετικές όσο και αρνητικές τιμές. Ο μόνος περιορισμός στις τιμές της h είναι το να βρίσκονται όλα τα σημεία $\tau + h$ μέσα στο πεδίο ορισμού της $u(t)$.

Αλλά αυτός ο περιορισμός δεν είναι ουσιαστικός, όταν το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $u(t)$ είναι ένα ανοιχτό διάστημα. Γιατί τότε, υπάρχει πάντοντε ένας θετικός αριθμός δ, τέτοιος ώστε, το ανοιχτό διάστημα $(\tau - \delta, \tau + \delta)$ να περιέχεται στο πεδίο ορισμού της $u(t)$. Συνακόλουθα, το κλάσμα $[u(\tau + h) - u(\tau)]/h$ ορίζεται για κάθε $h \neq 0$ που είναι αρκετά μικρό σε απόλυτη τιμή. Αυτό μας επιτρέπει να διαπιστώσουμε άν το όριο στο δεξί μέλος της (8) υπάρχει και άρα το νόημα της (8) είναι σαφέστατο.

Ωστόσο, οι επιφυλάξεις του αναγνώστη αντιμετωπίζονται εύκολα με την ακόλουθη τροποποίηση του ορισμού της παραγώγου. Ας υποθέσουμε, αρχικά, ότι το κλάσμα $[u(\tau + h) - u(\tau)]/h$ ορίζεται σαφώς μόνο για (αρκετά μικρές) θετικές τιμές της παταμέτρου h. Αυτό είναι εξασφαλισμένο, αν η συνάρτηση $u(t)$ ορίζεται σε ένα διάστημα της μορφής $[\tau, \tau + \delta)$, $\delta > 0$. Τότε μπορούμε να εξακριβώσουμε άν το παραπάνω κλάσμα έχει όριο, καθώς το $h \searrow 0$ (τείνει στο μηδέν από τα δεξιά). Αυτό το όριο, όταν υπάρχει, το ονομάζουμε (από) ***δεξιά παράγωγο της $u(t)$ στο σημείο τ*** και το συμβολίζουμε με $u'_+(\tau)$. Με άλλα λόγια

(9) $$u'_+(\tau) := \lim_{h \searrow 0} \frac{u(\tau+h)-u(\tau)}{h}$$

Ανάλογα, αν η $u(t)$ ορίζεται σε ένα διάστημα της μορφής $(\tau - \delta, \tau]$, $\delta > 0$, τότε το κλάσμα $[u(\tau + h) - u(\tau)]/h$ ορίζεται σαφώς για $h < 0$ και αρκετά μικρό σε απόλυτη τιμή. Στην περίπτωση που το πιο πάνω κλάσμα έχει όριο καθώς το $h \nearrow 0$ (τείνει στο μηδέν από τα αριστερά), το όριο ονομάζεται ***αριστερή παράγωγος της $u(t)$ στο σημείο τ*** και συμβολίζεται με $u'_-(\tau)$. Συνεπώς,

(10) $$u'_-(\tau) := \lim_{h \nearrow 0} \frac{u(\tau+h)-u(\tau)}{h}$$

Αν, λοιπόν, το σημείο τ είναι το κάτω ή πάνω άκρο του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης $u(t)$, η μόνη παράγωγος στο τ που έχει νόημα να εξετάζουμε είναι η δεξιά ή αριστερή, αντίστοιχα. Αντίθετα, αν το τ είναι ένα εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της $u(t)$, αν δηλαδή η $u(t)$ ορίζεται σε κάποιο διάστημα της μορφής $(\tau - \delta, \tau + \delta)$, $\delta > 0$, τότε έχει νόημα να μιλάμε τόσο για την αριστερή όσο και για τη δεξιά παράγωγό της. Γενικά, ακόμα και όταν υπάρχουν και οι δύο, αυτές οι παράγωγοι είναι διαφορετικές. Αν υπάρχουν και είναι ίσες, τότε ταυτίζονται με την παράγωγο της $u(t)$ στο σημείο τ, έτσι όπως ορίζεται από την (8).

Έχοντας άρει τις επιφυλάξεις του αναγνώστη για το ζήτημα της παραγώγου στα άκρα ενός διαστήματος της πραγματικής ευθείας, ας δούμε πώς μπορούμε να αντιμετωπίσουμε ένα συγγενές προς το προηγούμενο

Πρόβλημα

Να βρεθεί η λύση του ακόλουθου ΠΑΤ:

(11) $$x' = f(t) := \begin{cases} 1, & t < 0 \\ 2 + 2\,t, & t \geq 0 \end{cases}, \qquad x(1) = 3.$$

Είναι φανερό ότι, για την αντιμετώπιση και αυτού του προβλήματος, θα πρέπει να εφαρμόσουμε την τεχνική της τμηματικής επίλυσης που χρησιμοποιήσαμε στο προηγούμενο. Οι αρχικές λεπτομέρειες είναι προφανείς, γι' αυτό γράφουμε απ' ευθείας το εξής ενδιάμεσο αποτέλεσμα:

(12) $$x = \begin{cases} t + c, & t < 0 \\ 2\,t + t^2 + \tilde{c}, & t \geq 0 \end{cases}$$

Αφού η συνάρτηση που αναζητάμε είναι υποχρεωτικά συνεχής, οι παράμετροι c και $\tilde{c}$ δεν μπορεί να διαφέρουν : $\tilde{c} = c$. ΄Αρα, η προηγούμενη οικογένεια συναρτήσεων γίνεται

(13) $$x = \begin{cases} t + c, & t < 0 \\ 2\,t + t^2 + c, & t \geq 0 \end{cases}$$

Το ίδιο εύκολα μπορούμε να υπολογίσουμε και την τιμή της παραμέτρου c με βάση την αρχική συνθήκη και να συμπεράνουμε ότι αντιμετωπίσαμε επιτυχώς το ΠΑΤ που μας δόθηκε προς λύση.

Δυστυχώς, τα πράγματα δεν είναι τόσο απλά. Γιατί, καμία από τις συναρτήσεις (13) **δεν** αποτελεί λύση της ΔΕ

(14) $$x' = f(t) := \begin{cases} 1, & t < 0 \\ 2 + 2\,t, & t \geq 0 \end{cases}$$

Ο λόγος είναι ότι, κάθε μέλος της οικογένειας (13) είναι όντως μια συνεχής συνάρτηση της οποίας η παράγωγος είναι ίση με $x'(t) = 1$, για $t < 0$, και $x'(t) = 2 + 2\,t$, για $t > 0$. Επιπλέον, $x'_+(0) = 2$. Ωστόσο -κι εδώ βρίσκεται το πρόβλημα- η αριστερή παράγωγος της $x(t)$ στο σημείο $t = 0$ δεν υπάρχει! Συνεπώς, δεν μπορούμε να ισχυριστούμε ότι $x'(0) = 2$, όπως απαιτεί η (14). Με άλλα λόγια, δεν υπάρχει διαφορίσιμη συνάρτηση που να αποτελεί λύση της ΔΕ (14).

Σχόλιο. Η μη ύπαρξη λύσεων μιας ΔΕ δεν πρέπει να θεωρηθεί ως εξωτικό φαινόμενο. Είναι το ακριβές ανάλογο της μη ύπαρξης λύσεων της απλής αλγεβρικής εξίσωσης $x^2 = -1$. Και, για να μη βιαστεί κανείς να κάνει το λάθος να μας πει ότι " η εξίσωση $x^2 = -1$ και βέβαια έχει λύσεις, τους αριθμούς $x = i$ και $x = -i$", σπεύδουμε να του επισημάνουμε τα εξής:

Κάθε πρόβλημα αποκτάει νόημα σε ένα συγκεκριμένο πλαίσιο ή σύστημα αναφοράς. Στο πλαίσιο, λοιπόν, των πραγματικών αριθμών, $\mathbb{R}$, όπου η πράξη του πολλαπλασιασμού έχει τη συνηθισμένη έννοια, δεν υπάρχει αριθμός του οποίου το τετράγωνο είναι ίσο με την αρνητική μονάδα. Θα πρέπει κανείς να διευρύνει σημαντικά αυτό το πλαίσιο και να μεταβεί στους μιγαδικούς αριθμούς για πει ότι υπάχει λύση της εξίσωσης $x^2 = -1$. Και η λύση αυτή υφίσταται ακριβώς για το λόγο ότι, στο διευρυμένο πλαίσιο των μιγαδικών αριθμών, η έννοια του πολλαπλασιασμού είναι τελείως διαφορετική από εκείνη που ορίζεται στον $\mathbb{R}$.

Αναλυτικότερα, ***το σύνολο των μιγαδικών αριθμών***, $\mathbb{C}$, δεν είναι άλλο από το σύνολο $\mathbb{R}^2$ εφοδιασμένο με την ακόλουθη πράξη του πολλαπλασιασμού δύο στοιχείων του:

Αν $z := (a, b)$, $w := (c, d)$ είναι δύο τυχαία στοιχεία του $\mathbb{R}^2$, τότε με ***γινόμενο*** των z, w εννοούμε το ζευγάρι πραγματικών αριθμών

(15) $$z\,w := (a\,c - b\,d,\ a\,d + b\,c).$$

Από την άλλη, ως ***άθροισμα*** των στοιχείων $z := (a, b)$, $w := (c, d)$ του $\mathbb{R}^2$ ορίζεται το ζευγάρι πραγματικών αριθμών

(16) $$z + w := (a + c,\ b + d).$$

Μάλιστα, με τον γραμμικό συνδυασμό δύο στοιχείων του να ορίζεται από σχέση

(17) $$\kappa\,z + \lambda\,w := (\kappa\,a, \kappa\,b) + (\lambda\,c, \lambda\,d), \qquad \kappa, \lambda \in \mathbb{R},$$

ο $\mathbb{R}^2$ αποτελεί ένα από τα απλούστερα παραδείγματα (πραγματικού) διανυσματικού χώρου.

Ας σημειωθεί ότι, από τον τελευταίο ορισμό αμέσως έπεται ότι, αν $z := (1, 0)$ και $w := (0, 1)$, τότε

(18) $$\kappa\,z + \lambda\,w = (\kappa, 0) + (0, \lambda) = (\kappa, \lambda).$$

Με άλλα λόγια,

(19) $$(\kappa, \lambda) = \kappa(1, 0) + \lambda(0, 1).$$

Τώρα, από τον ορισμό που δώσαμε παραπάνω, αμέσως συνάγεται το εξής αποτέλεσμα. Το γινόμενο δύο ζευγαριών της μορφής $(a, 0)$ είναι ζευγάρι του ίδιο τύπου:

(20) $$(a, 0)\,(c, 0) = (a\,c, 0).$$

Συνεπώς, το υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ που αποτελείται από ζευγάρια της μορφής $(a, 0)$ έχει την ίδια ακριβώς δομή με το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$. Από αυτή την ιδιότητα πηγάζει και η ακόλουθη σύμβαση: Κάθε στοιχείο του $\mathbb{R}^2$ που είναι της μορφής $(a, 0)$ ονομάζεται ***πραγματικός αριθμός*** και, για συντομία, γράφεται σαν a. Αντίστοιχα, κάθε στοιχείο του $\mathbb{R}^2$ που είναι της μορφής $(0, b)$ ονομάζεται ***φανταστικός αριθμός*** και, για συντομία, γράφεται σαν $i\,b$. Με βάση αυτή τη σύμβαση,

(21) $$\boxed{(a, 0) \equiv a, \quad (0, b) \equiv i\,b}$$

και ειδικότερα,

(22) $$\boxed{(1, 0) \equiv 1, \quad (0, 1) \equiv i}$$

Συνακόλουθα

(23) $$\boxed{(a, b) \equiv a + i\,b}$$

Από τον ορισμό του γινομένου που δώσαμε πιο πάνω και την (19), αμέσως έπεται ότι

(24) $$(0, b)^2 = (-b^2,\ 0) = -b^2(1, 0).$$

Αλλά, με βάση την σύμβαση που οιοθετήσαμε, αυτό το αποτέλεσμα γράφεται σαν

(25) $$(i\,b)^2 = -b^2.$$

Ειδικότερα,

(26) $$\boxed{(\pm i)^2 = -1}.$$

Το τελευταίο αποτέλεσμα είναι εκείνο που είχε κατά νου ο "βιαστικός" συνομιλητής μας -αυτός που έδωσε τη λύση $x = \pm i$ για την εξίσωση $x^2 = -1$.

Αναγκαστήκαμε να μπούμε σε τόσες λεπτομέρειες για το χώρο των μιγαδικών αριθμών, $\mathbb{C}$, γιατί θέλαμε να καταστήσουμε σαφές ότι, ορισμένες φορές, η αντιμετώπιση ενός προβλήματος που δεν επιδέχεται λύση επιτυγχάνεται με την κατασκευή ενός διευρυμένου χώρου, με τελείως καινούργια δομή. Με την προϋπόθεση ότι, στον ευρύτερο αυτό χώρο, μπορούμε να ενσωματώσουμε εκείνον που αποτελούσε το αρχικό πλαίσιο του προβλήματος.

Κάτι τέτοιο μπορεί να επιτευχθεί και για τις ΔΕ χωρίς λύση, σαν αυτή που παρουσιάσαμε στο τελευταίο μας παράδειγμα. Η αντίστοιχη διεύρυνση του χώρου των συναρτήσεων και της έννοιας της παραγώγου είναι πολύ υστερότερη εκείνης που οδήγησε από τους πραγματικούς στους μιγαδικούς αριθμούς. Ξεκίνησε γύρω στο 1930, με τη δουλειά του θεωρητικού φυσικού Dirac (Ντίρακ, Αγγλία), για τα ολοκληρωθεί στα μέσα του $20^{ου}$ αιώνα από τους μαθηματικούς Sobolev (Σομπόλεφ, Ρωσία) και Schwarz (Σβάρτς, Γαλλία). Τα στοιχεία αυτού του διευρυμένου χώρου ονομάζονται ***γενικευμένες συναρτήσες*** ή ***κατανομές***. Σε αντιδιαστολή, αυτές που έχουμε χρησιμοποιήσει ως τώρα λέγονται ***κλασικές συναρτήσεις*** και, αντίστοιχα, ***κλασικές παράγωγοι***. Σαν τον αρχοντοχωριάτη του Μολιέρου, εμείς θα συνεχίσουμε ... να μιλάμε πεζά. Ο αναγνώστης που έχει ... ποιητικές ανησυχίες και θέλει να ξεφύγει από το στενό πλαίσιο των κλασικών συναρτήσεων θα πρέπει να κάνει ... υπομονή.

Ωστόσο, για να μη δημιουργήσουμε κλίμα απαισιοδοξίας, σπεύδουμε να σημειώσουμε ότι, στη συντριπτική τους πλειονότητα, οι ΔΕ έχουν λύση και τα αντίστοιχα ΠΑΤ είναι καλά τοποθετημένα. Αλλά και αυτού του ισχυρισμού η ακριβής διατύπωση και πειστική απόδειξη δεν χωρούν στο παρόν κεφάλαιο.

Κλείνοντας αυτό το εδάφιο, σημειώνουμε ότι, η μη ύπαρξη λύσης ΔΕ σαν την (14) συνάγεται αμέσως και από το ακόλουθο λήμμα. Τις λεπτομέρειες της αφήνουμε για άσκηση του αναγνώστη.

Θεμελιώδες λήμμα της παραγώγισης

Αν η $\varphi(t)$ έχει παράγωγο στο $t = a$, τότε υπάρχει συνεχής συνάρτηση $g(t)$ με πεδίο ορισμού μια γειτονιά του μηδενός και τέτοια που

(27) $$g(0) = 0, \quad \varphi(a + h) = \varphi(a) + h\,\varphi'(a) + h\,g(h),$$

Απόδειξη

Ορίζουμε την συνάρτηση

(28) $$g(t) = \begin{cases} R(t) - \varphi'(a), & t \neq 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$$

όπου

(29) $$R(t) := \frac{\varphi(a+t) - \varphi(a)}{t}.$$

Από τον ορισμό της $g(t)$ αμέσως έπεται ότι

(30) $$\lim_{t\to 0} g(t) = \lim_{t\to 0}[R(t) - \varphi'(a)] = \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(a+t)-\varphi(a)}{t} - \varphi'(a) = 0.$$

(31) $$t\,g(t) = t[R(t) - \varphi'(a)] = \varphi(a+t) - \varphi(a) - t\,\varphi'(a).$$

Το πρώτο αποτέλεσμα δείχνει ότι η $g(t)$ είναι συνεχής, ενώ το δεύτερο είναι ισοδύναμο με το ακόλουθο:

(32) $$\varphi(a+t) = \varphi(a) + t\,\varphi'(a) + t\,g(t).$$

Αλλά αυτό ακριβώς είναι εκείνο που θέλαμε να αποδείξουμε.

Ασκήσεις

1. Να βρεθεί η γενική λύση των παρακάτω ΔΕ

α) $x' = f(t) := \begin{cases} 2\,t, & t < 0 \\ 3\,t^2, & t \geq 0 \end{cases}$

β) $x' = f(t) := \begin{cases} 2\,t, & t < 1 \\ 3\,t^2 - 1, & t \geq 1 \end{cases}$

γ) $x' = f(t) := \begin{cases} t + 1, & t < -1 \\ 3\,(t+1)^2, & t \geq -1 \end{cases}$

δ) $x' = f(t) := \begin{cases} -2\,t, & t < 0 \\ 2\,t, & 0 \leq t < 1 \\ 3\,t^2 - 1, & t \geq 1 \end{cases}$

ε) $x' = f(t) := \begin{cases} 1 - 2\,t, & t < -1 \\ 2\,t^2 + 1, & -1 \leq t < 1 \\ 3 - 4\,(t-1)^3, & t \geq 1 \end{cases}$

στ) $x' = f(t) := \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & 0 \leq t < 1 \\ 2 - t, & 1 \leq t < 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases}$

η) $x'' = f(t) := \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 2\,t, & t \geq 0 \end{cases}$

θ) $x'' = f(t) := \begin{cases} 1 - t, & t < 1 \\ 3\,(t^2 - 1), & t \geq 1 \end{cases}$

ι) $x'' = f(t) := \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 2\,t, & 0 \leq t < 1 \\ 2 + 3\,(t-1)^2, & t \geq 1 \end{cases}$

κ) $$x'' = f(t) := \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & 0 \le t < 1 \\ 2 - t, & 1 \le t < 2 \\ 0, & t \ge 2 \end{cases}$$

2. Να λυθούν τα παρακάτω ΠΑΤ. Σε κάθε περίπτωση να εξεταστεί αν η λύση είναι μοναδική.

α) $$x' = f(t) := \begin{cases} 2, & t < 0 \\ 2 + 3\,t^2, & t \ge 0 \end{cases} \qquad x(-1) = 2.$$

β) $$x' = f(t) := \begin{cases} 2\,t, & t < -1 \\ 3\,t^2 - 5, & t \ge -1 \end{cases} \qquad x(1) = -1.$$

γ) $$x' = f(t) := \begin{cases} t + 3, & t < 1 \\ (t + 1)^2, & t \ge 1 \end{cases} \qquad x(-1) = 0.$$

δ) $$x' = f(t) := \begin{cases} 1 - 2\,t, & t < 0 \\ 1 + 2\,t, & 0 \le t < 1 \\ 3\,t^2, & t \ge 1 \end{cases} \qquad x(0) = 1.$$

ε) $$x' = f(t) := \begin{cases} 3 - 2\,t, & t < -1 \\ 2\,t^2 + 3, & -1 \le t < 0 \\ 3 - t, & t \ge 0 \end{cases} \qquad x(2) = -3.$$

στ) $$x' = f(t) := \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & 0 \le t < 2 \\ 4 - t, & 2 \le t < 4 \\ 0, & t \ge 4 \end{cases} \qquad x(0) = -1.$$

η) $$x'' = f(t) := \begin{cases} 1, & t < 0 \\ 1 + 2\,t, & t \ge 0 \end{cases} \qquad x(0) = -1, \quad x'(0) = 0.$$

θ) $$x'' = f(t) := \begin{cases} 1 - t, & t < 1 \\ 3\,(t^2 - 1), & t \ge 1 \end{cases} \qquad x(0) = -1, \quad x'(0) = 0.$$

ι) $$x'' = f(t) := \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 2\,t, & 0 \le t < 1 \\ 2 + 3\,(t - 1)^2, & t \ge 1 \end{cases} \qquad x(0) = -1, \quad x'(0) = 0.$$

κ) $$x'' = f(t) := \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & 0 \le t < 1 \\ 2 - t, & 1 \le t < 2 \\ 0, & t \ge 2 \end{cases} \qquad x(0) = -1, \quad x'(0) = 0.$$

3. Να δειχτεί ότι η ΔΕ

$$x' = f(t) := \begin{cases} 1, & t < 0 \\ 2 + 2\,t, & t \ge 0 \end{cases}$$

δεν έχει λύση, χρησιμοποιώντας το θεμελιώδες λήμμα της παραγώγισης.

9. Συστήματα ΔΕ

Ας θεωρήσουμε το ζευγάρι των συναρτήσεων $f(t) = 2t - 1$, $g(t) = 2 + t^2$, $t \in \mathbb{R}$. Τότε $f'(t) = 2$, $g'(t) = 2t$, $t \in \mathbb{R}$. Συνακόλουθα,

(1) $$f'(t) = g(t) - t^2, \quad g'(t) = f(t) + 1.$$

Το τελευταίο αποτέλεσμα μπορεί να αποτελέσει τη βάση του εξής ερωτήματος: Για ποια ζευγάρια συναρτήσεων ισχύουν οι σχέσεις που μόλις βρήκαμε; Αν συμβολίσουμε το ζευγάρι των άγνωστων συναρτήσεων με (x, y), τότε το ερώτημα που μόλις θέσαμε μετατρέπεται στο ακόλουθο

Πρόβλημα

Να βρεθεί το σύνολο των λύσεων του συστήματος των ΔΕ

(2) $$x' = y - t^2, \qquad y' = x + 1.$$

Το σύστημα (2) απαρτίζεται από δύο ΔΕ πρώτης τάξης για ισάριθμες συναρτήσεις. Τα μέλη του γράφονται στη μορφή

(3) $$x' = F(t, x, y), \quad y' = G(t, x, y),$$

όπου $F(t, x, y) = y - t^2$, $G(t, x, y) = x + 1$, για κάθε $(t, x, y) \in \mathbb{R}^3$.

Με ανάλογο τρόπο, ξεκινώντας δηλαδή από ένα ζευγάρι γνωστών συναρτήσεων, ας τις πούμε $x(t)$ και $y(t)$, αντίστοιχα, μπορεί κανείς να κατασκευάσει δεκάδες άλλα συστήματα της μορφής (3). Αυτός ο τρόπος κατασκευής συστημάτων ΔΕ έχει το πλεονέκτημα ότι μας εξασφαλίζει μία τουλάχιστον λύση - τις συναρτήσεις $x(t)$, $y(t)$ με τις οποίες ξεκινήσαμε.

Γενικότερα, αρκεί να επιλέξουμε αυθαίρετα δύο συναρτήσεις $F(t, x, y)$ και $G(t, x, y)$, με κοινό πεδίο ορισμού κάποιο ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$, για να καταλήξουμε σ' ένα συγκεκριμένο σύστημα ΔΕ της μορφής (3).

Τα απλούστερα συστήματα αυτού του είδους προκύπτουν όταν ως $F(t, x, y)$, $G(t, x, y)$ επιλέγονται κάποιοι γραμμικοί συνδυασμοί των x, y. Τότε, και το αντίστοιχο σύστημα λέγεται γραμμικό. Με άλλα λόγια, δύο ΔΕ πρώτης τάξης αποτελούν ένα ***γραμμικό σύστημα*** αν είναι της μορφής

(4) $$x' = f_1(t) + g_1(t)\,x + h_1(t)\,y, \qquad y' = f_2(t) + g_2(t)\,x + h_2(t)\,y,$$

όπου $f_j(t)$, $g_j(t)$ και $h_j(t)$, $j = 1, 2$, συγκεκριμένες συναρτήσεις, με κοινό πεδίο ορισμού κάποιο διάστημα I της πραγματικής ευθείας. Διαφορετικά, το σύστημα χαρακτηρίζεται ως ***μη γραμμικό***.

Η παραπέρα γενίκευση είναι προφανής. Συγκεκριμένα, ***με κανονικό σύστημα τάξης n***, εννοούμε μια n-άδα ΔΕ της μορφής

(5) $$x_1' = F_1(t, x_1, x_2, ..., x_n), x_2' = F_2(t, x_1, x_2, ..., x_n), ..., x_n' = F_n(t, x_1, x_2, ..., x_n)$$

όπου οι συναρτήσεις $F_j(t, x_1, x_2, ..., x_n)$, $j = 1, 2, ..., n$, έχουν ως κοινό πεδίο ορισμού κάποιο ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^{n+1}$. Στην ειδικότερη περίπτωση όπου αυτές οι συναρτήσεις είναι γραμμικοί συνδυασμοί των x_1, x_2, ..., x_n, το σύστημα χαρακτηρίζεται γραμμικό.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι, τα μαθηματικά μοντέλα φυσικών, βιολογικών κλπ διαδικασιών απαρτίζονται κατά κύριο λόγο από συστήματα ΔΕ και όχι από μία μόνο ΔΕ πρώτης ή μεγαλύτερης τάξης. Συνεπώς, από την άποψη των εφαρμογών, τα συστήματα ΔΕ έχουν ξεχωριστή σημασία.

Μάλιστα, στο χώρο της φυσικής τα περισσότερα μοντέλα οδηγούν σε συστήματα τα οποία απαρτίζονται από ΔΕ δεύτερης τάξης. Λεπτομέρειες θα δούμε στο επόμενο εδάφιο. Ωστόσο, τα κανονικά συστήματα που ορίσαμε πιο πάνω καλύπτουν όλες τις άλλες περιπτώσεις συστημάτων. Για τον εξής απλό λόγο. Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι μας έχει δοθεί προς λύση η ΔΕ δεύτερης τάξης

(6) $$x'' = G(t, x, x').$$

Τότε, εισάγοντας ως δεύτερη άγνωστη συνάρτηση την $y := x'$ δίνουμε στη ΔΕ (6) τη μορφή $y' = G(t, x, y)$. Με αυτό τον τρόπο η (6) ανάγεται στο κανονικό σύστημα

(7) $$x' = F(t, x, y) := y, \quad y' = G(t, x, y).$$

Ανάλογα, η αντικατάσταση

(8) $$x' = z, \quad y' = w$$

μετατρέπει τις ΔΕ δεύτερης τάξης

(9) $$x'' = F(t, x, y, x', y'), \quad y'' = G(t, x, y, x', y'),$$

στο ζευγάρι

(10) $$z' = F(t, x, y, z, w), \quad w' = G(t, x, y, z, w).$$

Αυτό σημαίνει ότι, κάθε σύστημα ΔΕ δεύτερης τάξης της μορφής (9) ανάγεται σε κανονικό σύστημα ΔΕ πρώτης τάξης - εκείνο που ορίζουν από κοινού οι (8) και (10).

Ασκήσεις

1. Να κατασκευαστούν συστήματα ΔΕ της μορφής

$$x' = F(x, y), \quad y' = G(x, y),$$

τα οποία έχουν ως λύση τα ακόλουθα ζευγάρια συναρτήσεων

α) $x(t) = t, \quad y(t) = t^2$.

β) $x(t) = t^2, \quad y(t) = t^3$.

γ) $x(t) = t^2, \quad y(t) = t^{2/3}, \ t > 0$.

2. Να δειχτεί ότι τα ακόλουθα ζευγάρια συναρτήσεων $\{x(t), y(t)\}$ αποτελούν λύση του αντίστοιχου συστήματος ΔΕ.

α) $x(t) = t,\quad y(t) = t^2,\qquad x' = t\,x - y + 1,\quad y' = 2\,x + t\,y - t^3.$

β) $x(t) = t^2,\quad y(t) = t^3,\qquad x' = t\,x - y + 2\,t,\quad x' = -t\,x + y + 3\,t^2.$

γ) $x(t) = \sqrt{t},\quad y(t) = t^{2/3},\ t > 0,\qquad x' = t^{1/6}\,x - y + \frac{1}{2\sqrt{t}},\quad x' = x + y + \frac{2-3\,t}{3\,t^{1/3}} - \sqrt{t}.$

10. Εφαρμογές στη φυσική και άλλες επιστήμες

΄Οπως έχουμε αναφέρει, ο κλάδος των μαθηματικών που σήμερα ονομάζουμε *διαφορικές εξισώσεις* γεννήθηκε ταυτόχρονα με την επιστήμη της φυσικής προς το τέλος του $17^{ου}$ αιώνα. Στο μεταξύ, αναπτύχθηκε σε τέτοιο βαθμό, που πλέον θεωρείται αυτόνομος. Παράπλευρο αποτέλεσμα αυτής της εξέλιξης είναι το γεγονός ότι οι έννοιες και οι μέθοδοι του κλάδου των διαφορικών εξισώσεων χρησιμοποιούνται για την κατασκευή μαθηματικών μοντέλων ή προτύπων των συστημάτων που μελετούν επιστήμες όπως η βιολογία, η χημεία, τα οικονομικά και οι διάφοροι κλάδοι της τεχνολογίας. Αυτό έχει οδηγήσει στο να μιλάμε ακόμα και για "εφαρμογές των διαφορικών εξισώσεων στη φυσική", λες και η σύγχρονη φυσική μπορεί να νοηθεί και χωρίς διαφορικές εξισώσεις.

Στόχος αυτού του εδάφιου είναι να δώσει μια "πρόγευση" από τις "εφαρμογές των διαφορικών εξισώσεων". Περισσότερα παραδείγματα εφαρμογών θα παρουσιάσουμε με αναλυτικό τρόπο σε επόμενα κεφάλαια -εκεί όπου θα παρουσιάσουμε αναλυτικά και τις τεχνικές επίλυσης ειδικών κατηγοριών διαφορικών εξισώσεων. Το παρόν εδάφιο στοχεύει ειδικότερα στο να γίνει σαφής η διάκριση των διαφορικών εξισώσεων των μαθηματικών από τις διαφορικές εξισώσεις των φυσικών και των άλλων ... υποδεέστερων ειδών επιστημόνων.

Κλασική ή Νευτώνεια φυσική

Θεμελιωτές της επιστήμης της φυσικής ήταν ο Γαλιλαίος (Galileo Galilei, όπως λέμε Δημήτριος Δημητρίου, 1564-1642) και ο Νεύτων (Isaac Newton, 1642-1727). Το σώμα των φυσικομαθηματικών εννοιών και μεθόδων που ανάπτυξε κυρίως ο δεύτερος από αυτούς τους πρωτοπόρους αναφέρεται σήμερα με το όνομα *Κλασική* ή *Νευτώνεια Φυσική*. Αυτό γίνεται προς διάκριση των κατακτήσεων του $20^{ου}$ αιώνα -βασικά, της *Θεωρίας της Σχετικότητας* του Einstein (Αϊνστάιν) και της *Κβαντικής Μηχανικής* των Schrödinger (Σρέντιγκερ) και Heisen berg (Χάιζενμεργκ)- που αποτελούν το σώμα της *Σύγχρονης Φυσικής*.

Εμείς θα δώσουμε μια συνοπτική περιγραφή της φυσικομαθηματικής θεωρίας του Newton, από την οποία θα αντλήσουμε πολλά παραδείγματα "εφαρμοσμένων ΔΕ". Τα βασικά, λοιπόν, στοιχεία της Νευτώνειας φυσικής είναι τα ακόλουθα:

(i) Για να μελετήσουμε την κίνηση οποιουδήποτε αντικείμενου ή σώματος σ, το αποσπάμε νοητά από τον υπόλοιπο φυσικό κόσμο ή σύμπαν, Σ.

(ii) Υποθέτουμε ότι κάποια από τα υπόλοιπα σώματα του σύμπαντος διατηρούν τις μεταξύ τους αποστάσεις, δηλαδή μένουν ακίνητα το ένα ως προς το άλλο. Αυτά τα σώματα αποτελούν το λεγόμενο *σύστημα αναφοράς*, ΣΑ. Ένα ΣΑ αποτελεί αναπαράσταση της έννοιας του χώρου. Ο τελευταίος είναι τρισδιάστατος, πράγμα που σημαίνει ότι κάθε ΣΑ είναι ισοδύναμο με τον Ευκλείδειο τρισδιάστατο χώρο $\mathbb{R}^3$.

(iii) Σε πρώτη προσέγγιση, κάθε σώμα σ μπορεί να θεωρείται πως έχει μηδενικό όγκο, οπότε αναφέρεται ως *υλικό σημείο* ή *σωμάτιο*. Αυτό μας επιτρέπει να προσδιορίζουμε πλήρως τη θέση του στο χώρο, δίνοντας τις συντεταγμένες του αντίστοιχου σωμάτιου σε κάποιο ΣΑ. Με άλλα λόγια, η κίνηση του τυχαίου σωμάτιου σ προσδιορίζεται πλήρως από μια τριάδα (τμηματικά ομαλών) συναρτήσεων $(x(t),\ y(t),\ z(t))$ του χρόνου.

(iv) Κάθε σωμάτιο σ χαρακτηρίζεται από έναν θετικό αριμθό m που λέγεται *μάζα* του σ.

(v) Η κίνηση του τυχαίου σωμάτιου σ επηρεάζεται από το περιβάλλον του. Η συνολική επίδραση του περιβάλλοντος ονομάζεται *δύναμη που ασκείται στο* σ, ή *δύναμη που υφίσταται το* σ, και περιγάφεται από μια τριάδα συναρτήσεων $(f_1(t),\ f_2(t),\ f_3(t))$. Σε μια ειδική κατηγορία ΣΑ, τα λεγόμενα *αδρανειακά συστήματα αναφοράς* (ΑΣΑ) η επίδραση του περιβάλλοντος στο σ εκφράζεται από τη σχέση

(1) $$m\,x''(t) = f_1(t),\quad m\,y''(t) = f_2(t),\quad m\,z''(t) = f_3(t).$$

Αυτό το αξίωμα για το πώς ένα σωμάτιο επηρεάζεται από το περιβάλλον του ονομάζεται *δεύτερος νόμος της μηχανικής* (του Newton).

Με *στιγμιαία ταχύτητα* του σωμάτιου εννοούμε τις συναρτήσεις

(2) $$(\upsilon_1(t),\ \upsilon_2(t),\ \upsilon_3(t)) := (x'(t),\ y'(t),\ z'(t)).$$

Στιγμιαία επιτάχυνση ονομάζεται η τριάδα

(3) $$(a_1(t),\ a_2(t),\ a_3(t)) := (\upsilon_1{}'(t),\ \upsilon_2{}'(t),\ \upsilon_3{}'(t)).$$

Χρησιμοποιώντας την ταχύτητα και την επιτάχυνση, μπορούμε να δώσουμε στο 2^o νόμο της

Νευτονικής μηχανικής τη μορφή

(4) $m\,\upsilon_1{}'(t) = f_1(t), \quad m\,\upsilon_2{}'(t) = f_2(t), \quad m\,\upsilon_3{}'(t) = f_3(t).$

και

(5) $m\,a_1(t) = f_1(t), \quad m\,a_2(t) = f_2(t), \quad m\,a_3(t) = f_3(t).$

αντίστοιχα.

Στην σπάνια περίπτωση που οι *συνιστώσες της δύναμης*, δηλαδή οι συναρτήσεις $(f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ δίνονται ρητά, οι (1) αποτελούν ένα σύστημα τριών ΔΕ δεύτερης τάξης, μόνο από τυπική άποψη. Γιατί, σε κάθε μια από αυτές εμφανίζεται μόνο μία από τις άγνωστες συναρτήσεις $(x(t), y(t), z(t))$. Ανάλογα, οι (4) μπορεί να θεωρηθούν ότι αποτελούν ένα σύστημα ΔΕ πρώτης τάξης, αλλά τα μέλη του συστήματος δεν είναι συζευγμένα.

Στις ρεαλιστικές περιπτώσεις, οι συνιστώσες της δύναμης προσδιορίζονται έμμεσα, με την ακόλουθη έννοια. Η x-συνιστώσα της δύναμης, για παράδειγμα, δε μας δίνεται με τη μορφή μιας συνάρτησης αποκλειστικά του t, αλλά μέσω μιας συνάρτησης του τύπου $F_1(t, x, y, z, x', y', z')$. Συνεπώς, ο δεύτερος νόμος της Νευτωνικής μηχανικής εκφράζεται από ένα σύστημα συζευγμένων ΔΕ δεύτερης τάξης της μορφής

(6α) $m\,x'' = F_1(t, x, y, z, x', y', z'),$

(6β) $m\,y'' = F_2(t, x, y, z, x', y', z'),$

(6γ) $m\,z'' = F_3(t, x, y, z, x', y', z').$

Για να πάρουμε μια σαφέστερη εικόνα της θεωρίας του Newton, θα περιοριστούμε στην περίπτωση της ευθύγραμμης κίνησης. Θα υποθέσουμε, λοιπόν, ότι το σωμάτιο σ κινείται κατά μήκος μιας ευθείας Ε ενός αδρανειακού συστήματος αναφοράς (ΑΣΑ). Χωρίς βλάβη στη γενικότητα, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η ευθεία Ε ταυτίζεται με τον άξονα x του Καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων που χρησιμοποιεί το συγκεκριμένο ΑΣΑ. Τότε, για τη μελέτη της κίνησης του σ αρκεί μόνο η πρώτη από τις εξισώσεις (1). Για ευκολία, τη γράφουμε στη μοφή

(7) $m\,x''(t) = f(t).$

΄Οταν η συνάρτηση $f(t)$ που περιγράφει τη δύναμη η οποία ασκείται στο σώμα σ δίνεται ρητά, η εξίσωση (7) λύνεται εύκολα με "δύο διαδοχικές ολοκληρώσεις". Την ακριβή σημασία αυτού του όρου θα την εξηγήσουμε αργότερα. Προς το παρόν, μπορεί να θεωρηθεί ως η τεχνική με την οποία λύσαμε προηγούμενες ΔΕ και ακολουθούμε στο επόμενο

Παράδειγμα

Ας υποθέσουμε ότι η δύναμη είναι σταθερή: $f(t) = f_0$. Τότε η (7) γίνεται

(8) $m\,x''(t) = f_0.$

Ισοδύναμα,

(9) $m\,\upsilon'(t) = f_0,$

όπου

(10) $$\upsilon(t) := x'(t).$$

Από την (9) αμέσως συνάγεται ότι

(11) $$\upsilon(t) = \frac{f_0}{m}\, t + c_1.$$

Σύμφωνα με την (10), αυτό σημαίνει ότι

(12) $$x'(t) = \frac{f_0}{m}\, t + c_1$$

και άρα

(13) $$x(t) = \frac{1}{2}\, \frac{f_0}{m}\, t^2 + c_1\, t + c_2.$$

Ας θεωρήσουμε, τώρα, μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή t_0 της κίνησης του σ. Τότε από τήν (13) έπεται ότι

(14) $$x(t_0) = c_1\, t_0 + c_2 + \frac{1}{2}\, \frac{f_0}{m}\, {t_0}^2,$$

(15) $$x'(t_0) = c_1 + \frac{f_0}{m}\, t_0.$$

Η $x(t_0)$ δεν είναι παρά η συντεταγμένη θέσης του σωμάτιου τη στιγμή t_0. Για συντομία, θα τη συμβολίζουμε με x_0. Η $x'(t_0)$, από την άλλη, παριστάνει την ταχύτητα που έχει το σ την ίδια χρονική στιγμή t_0. Αν συμβολίσουμε αυτή την ταχύτητα με υ_0, τότε μπορούμε να ξαναγράψουμε τις (14), (15) στη μορφή

(16) $$x_0 = c_1\, t_0 + c_2 + \frac{1}{2}\, \frac{f_0}{m}\, {t_0}^2$$

και

(17) $$\upsilon_0 = c_1 + \frac{f_0}{m}\, t_0,$$

αντίστοιχα.

Από την τελευταία έπεται ότι

(18) $$c_1 = \upsilon_0 - \frac{f_0}{m}\, t_0.$$

Η αντικατάσταση αυτής της σχέσης στην (16) δίνει την

(19) $$c_2 = x_0 - \upsilon_0\, t_0 + \frac{1}{2}\, \frac{f_0}{m}\, {t_0}^2 .$$

Συνεπώς, η (13) γίνεται

(20) $$x(t) = \left(\upsilon_0 - \frac{f_0}{m}\, t_0\right) t + x_0 - \upsilon_0\, t_0 + \frac{1}{2}\, \frac{f_0}{m}\, {t_0}^2 + \frac{1}{2}\, \frac{f_0}{m}\, t^2$$

Αυτή απλοποιείται για να γίνει

(21) $$x(t) = x_0 + \upsilon_0 (t - t_0) + \frac{1}{2}\, \frac{f_0}{m}\, (t - t_0)^2$$

Παρατήρηση

Για να είμαστε ακριβείς, την προηγούμενη σχέση έπρεπε να τη γράφουμε σαν

(22) $$x(t,\, t_0,\, x_0,\, \upsilon_0,\, m,\, f_0) = x_0 + \upsilon_0 (t - t_0) + \frac{1}{2}\, \frac{f_0}{m}\, (t - t_0)^2$$

Με αυτό τον τρόπο θα δείχναμε καθαρά ότι, εκτός από την ανεξάρτητη μεταβλητή t, η x εξαρτιέται από τα εξής σύνολα παραμέτρων:

(i) Τις αρχικές τιμές $\{t_0, x_0, \upsilon_0\}$,

(ii) Τις παραμέτρους $\{m, f_0\}$ που εμφανίζονται στην ίδια τη διαφορική εξίσωση και προσδιορίζουν το μάζα του σώματος και τη δύναμη που ασκείται σ' αυτό, αντίστοιχα.

Από την (22) είναι φανερό ότι, όσο αφορά την εξάρτησή της από τις φυσικές παραμέτρους $\{m, f_0\}$, η κίνηση καθορίζεται όχι από κάθε μία ξεχωριστά, αλλά από το λόγο f_0/m. Για κάθε επιλογή της τιμής αυτού του κλάσματος, η τροχιά του σώματος προσδιορίζεται πλήρως από την τριάδα των αρχικών τιμών.

Στην περίπτωση που $t_0 = 0$, η (21) γίνεται

(23) $$x = x_0 + \upsilon_0\, t + \frac{1}{2}\,\frac{f_0}{m}\,t^2$$

Αυτή η έκφραση για τη συνάρτηση θέσης μας επιτρέπει να να διαπιστώσουμε ευκολότερα το ακόλουθο γεγονός, το οποίο αναφέρεται ως *πρώτος νόμος της Νευτώνειας μηχανικής*: Η κίνηση ενός σώματος σ εξαρτιέται, αλλά δεν καθορίζεται αποκλειστικά και μόνο από την ασκούμενη σ' αυτό δύναμη. Γιατί, στην περίπτωση όπου $f_0 = 0$, η τελευταία σχέση γίνεται $x = x_0 + \upsilon_0\, t$ και άρα το σώμα θα κινείται ακόμα και αν δεν υφίσταται την επίδραση μιας δύναμης. Αρκεί η αρχική του ταχύτητα να είναι μη μηδενική

΄Οπως ήδη τονίσαμε, τις περισσότερες φορές η συνάρτηση $f(t)$ η οποία περιγράφει τη δύναμη που ασκείται σ' ένα σώμα, δίνεται έμμεσα και όχι ρητά. Καθορίζεται, δηλαδή, μέσω μιας συνάρτησης τριών μεταβλητών, της μορφής $F(t, x, \upsilon)$. Τότε, η $f(t)$ προκύπτει αντικαθιστώντας τις μεταβλητές x και v από τις συναρτήσεις $x(t)$ και $x'(t)$, αντίστοιχα.

Παράδειγμα

$$F(t, x, \upsilon) = e^{-t} - x^3 - \upsilon \quad \to \quad f(t) = F(t, x(t), x'(t)) = e^{-t} - x^3(t) - x'(t).$$

$$F(t, x, \upsilon) = -k\, \sin x \quad \to \quad f(t) = F(t, x(t), x'(t)) = -k \sin[x(t)].$$

$$F(t, x, \upsilon) = -k\,x - r\,\upsilon \quad \to \quad f(t) = F(t, x(t), x'(t)) = -k\,x(t) - r\,x'(t).$$

Ας σταθούμε στην τελευταία από αυτές τις περιπτώσεις, υποθέτοντας ότι $k, r > 0$. Τότε η εξίσωση που εκφράζει το 2ο νόμο της Νευτωνικής μηχανικής γίνεται

(24) $$m\,x''(t) = -k\,x(t) - r\,x'(t)$$

και μπορεί να ερμηνευτεί με τον ακόλουθο τρόπο. Η συνολική δύναμη που ασκείται στο σώμα αποτελεί υπέρθεση των εξής δύο δυνάμεων. Η πρώτη αντιστοιχεί στον όρο $-k\,x(t)$ και άρα το μέγεθός της, $k\,|x(t)|$, είναι ανάλογο προς την απόσταση $|x(t)|$ του σ από το σημείο $x = 0$. Το πρόσημό της είναι αντίθετο από εκείνο της στιγμιαίας θέσης $x(t)$ του σ. Αν λοιπόν τη στιγμή t η συντεταγμένη $x(t)$ είναι θετική, τότε η δύναμη $-k\,x(t)$ που ασκείται στο σ είναι αρνητική και αντίστροφα. Αυτό σημαίνει ότι για θετικά x αυτή η δύναμη έχει αρνητική φορά, με άλλα λόγια "κοιτάει" προς το σημείο Ο, όπου $x = 0$. Αντίθετα, για αρνητικά x, η πιο πάνω δύναμη έχει θετική φορά, δηλαδή και πάλι κοιτάει προς το σημείο Ο. Αυτό σημαίνει ότι, σε κάθε περίπτωση, η δύναμη $-k\,x(t)$ τείνει να φέρει το σώμα στο σημείο Ο. Συχνά, το σημείο Ο αντιστοιχεί στη θέση ισορροπίας του σ, δηλαδή στη θέση όπου ακινητούσε προτού επιδράσουν επάνω του οι δυνάμεις που το έθεσαν σε κίνηση. Γι' αυτό, η δύναμη $-k\,x(t)$ ονομάζεται *δύναμη επαναφοράς* (στο σημείο ισορροπίας).

Από τη μεριά της, η δύναμη $-r\,x'(t)$ είναι, σε μέγεθος, ανάλογη προς τη στιγμιαία ταχύτητα $x'(t)$ του σώματος κι έχει αντίθετη φορά. Από φυσική άποψη, αυτή η δύναμη συνήθως παριστάνει την αντίσταση που προβάλλει στην κίνηση του σώματος το ρευστό που το περιβάλλει, γ.π. ο αέρας. Αυτή η δύναμη προκαλεί συνεχώς απώλεια ενέργειας, με αποτέλεσμα την επάνοδο του σώματος στη θέση ισορροπίας.

Το ζήτημα των διαστάσεων

Ας υποθέσουμε ότι μας δίνεται προς λύση η ΔΕ

(25) $$x' = g(t),$$

όπου $g(t)$ δοσμένη συνάρτηση, ας πούμε η $g(t) = t^2$. Ως συνήθως, υποθέτουμε ότι οι τιμές τόσο της ανεξάρτητης μεταβλητή t, όσο και των συναρτήσεων $x(t)$, $g(t)$ είναι πραγματικοί αριθμοί. Για τον μαθηματικό, λοιπόν, και τα δύο μέλη της εξίσωσης (25) είναι "καθαροί" αριθμοί και άρα δεν υπάρχει πρόβλημα με το να πούμε ότι είναι ίσοι. Όμως, για τον επιστήμονα των εφαρμογών, τα πράγματα δεν είναι τόσο απλά. Κι ο λόγος είναι ότι οι ανεξάρτητες και άλλες μεταβλητές που υπεισέρχονται σε μια διαφορική εξίσωση που τον ενδιαφέρει παριστάνουν φυσικές, χημικές κ.ά. ποσότητες που έχουν συγκριμένες διαστάσεις. Για παράδειγμα, αν η μεταβλητή t παριστάνει το χρόνο κι αυτός μετριέται σε sec (δευτερόλεπτα), τότε η έκφραση t^2 έχει τη διάσταση του χρόνου στο τετράγωνο, οπότε μετριέται σε $\sec^2$. Αν, από την άλλη, η ποσότητα η οποία παριστάνεται από τη συνάρτηση $x(t)$ έχει τη διάσταση του μήκους, τότε το αριστερό μέλος της (25) έχει τη διάσταση (μήκος/χρόνος). Ο λόγος δεν είναι άλλος από τον ορισμό της παραγώγου. Το κλάσμα στο δεξί μέλος της ισότητας

(26) $$x'(t) = \lim_{\tau\to 0} \tfrac{x(t+\tau)-x(t)}{\tau}$$

είναι προφανώς ο λόγος μιας ποσότητας με διάσταση χώρου προς μια ποσότητα με διάσταση χρόνου.

Το συνολικό συμπέρασμα είναι ότι η ισότητα των δύο μελών της (25) είναι απαράδεκτη. Για να αποκτήσει νόημα αυτή η σχέση, θα πρέπει να ερμηνεύεται με τον ακόλουθο, για παράδειγμα, τρόπο: Το δεξί της μέλος πολλαπλασιάζεται με τον διαστατικό αριθμό 1 $(\mathrm{cm}\cdot\sec^{-3})$.

Πιο αντιπροσωπευτικό παράδειγμα είναι η εξίσωση

(27) $$m\,x'' = -k\,x - r\,x'$$

που δώσαμε νωρίτερα. Εδώ, η ανεξάρτητη μεταβλητή t παριστάνει το χρόνο και η (άγνωστη) συνάρτηση $x = x(t)$ προσδιορίζει τη θέση ενός σωμάτιου μάζας m πάνω σε μια ευθεία. Αυτό σημαίνει ότι η ποσότητα x έχει διαστάσεις μήκους. Αν λοιπόν παραστήσουμε τη διάσταση της τυχαίας ποσότητας y με $[y]$, τότε η διάσταση του αριστερού μέλους της εξίσωσης (27) είναι

(28) $$[m\,x''] = \tfrac{\mu\acute{\alpha}\zeta\alpha\cdot\mu\acute{\eta}\kappa o\varsigma}{(\chi\rho\acute{o}\nu o\varsigma)^2}.$$

Αν γ.π. οι μονάδες μάζας, μήκους και χρόνου είναι οι kg (χιλιόγραμμο), m (μέτρο) και δευτερόλεπτο (sec), αντίστοιχα, τότε οι μονάδα μέτρησης της ποσότητας $m\,x''$ θα είναι η

(29) $$\mathrm{N} := \frac{1\,\mathrm{kg}\cdot 1\,\mathrm{m}}{(1\,\mathrm{sec})^2}$$

που ονομάζεται Newton. Αλλά τότε, και η διάσταση καθενός από τους όρους του δεξιού μέλους της (27) θα πρέπει να είναι ίση με $[m\,x'']$. Αυτό σημαίνει ότι

(30) $$[k\,x] = \frac{\mu\acute{\alpha}\zeta\alpha \cdot \mu\acute{\eta}\kappa o\varsigma}{(\chi\rho\acute{o}\nu o\varsigma)^2}\,.$$

Συνεπώς, η παράμετρος k δεν μπορεί να είναι αδιάστατη. Συγκεκριμένα,

(31) $$[k] = \frac{\mu\acute{\alpha}\zeta\alpha \cdot \mu\acute{\eta}\kappa o\varsigma}{[x]\,(\chi\rho\acute{o}\nu o\varsigma)^2} = \frac{\mu\acute{\alpha}\zeta\alpha}{(\chi\rho\acute{o}\nu o\varsigma)^2}\,,$$

πράγμα που σημαίνει ότι η μονάδα μέτρησης της παραμέτρου k είναι το $\mathrm{kg}/\mathrm{sec}^2$ ή N/m.

Ανάλογα,

(32) $$[r\,x'] = \frac{\mu\acute{\alpha}\zeta\alpha \cdot \mu\acute{\eta}\kappa o\varsigma}{(\chi\rho\acute{o}\nu o\varsigma)^2}$$

οπότε

(33) $$[r\,] = \frac{\mu\acute{\alpha}\zeta\alpha \cdot \mu\acute{\eta}\kappa o\varsigma}{[x']\,(\chi\rho\acute{o}\nu o\varsigma)^2} = \frac{\mu\acute{\alpha}\zeta\alpha \cdot \mu\acute{\eta}\kappa o\varsigma}{(\mu\acute{\eta}\kappa o\varsigma/\chi\rho\acute{o}\nu o\varsigma)\,(\chi\rho\acute{o}\nu o\varsigma)^2} = \frac{\mu\acute{\alpha}\zeta\alpha}{\chi\rho\acute{o}\nu o\varsigma}\,.$$

΄Αρα η παράμετρος r έχει ως μονάδα μέτρησης το kg/sec.

Πληθυσμιακά μοντέλα

Μια από τις συχνότερες εφαρμογές των ΔΕ είναι η κατασκευή μαθηματικών μοντέλων ή προτύπων τα οποία περιγράφουν την εξέλιξη του πληθικού αριθμού κάποιου βιολογικού είδους.

Για να δούμε κάποια παραδείγματα, ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση $N(t)$ παριστάνει τον πληθυσμό κάποιου βιολογικού είδους τη χρονική στιγμή t. Ως συγκεκριμένο παράδειγμα μπορούμε να θεωρούμε ότι η $N(t)$ δηλώνει τον συνολικό πληθυσμό μιας χώρας ή ολόκληρης της γης. Βέβαια, το μέγεθος ενός πληθυσμού συνήθως εκφράζεται με ακέραιους αριθμούς, οπότε η αντίστοιχη συνάρτηση δεν είναι καν συνεχής. Ωστόσο, για πολύ μεγάλους πληθυσμούς, η προσέγγιση του μεγέθους τους από μια διαφορίσιμη συνάρτηση δεν οδηγεί σε αξιόλογα σφάλματα. Αν γ.π. κάποιο μοντέλο που περιγράφει την εξέλιξη του πληθυσμού της χώρας μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το έτος $t = 2044$ οι κάτοικοι της Ελλάδας θα είναι 12.095.748,36 και όχι 12.095.748, δε ... θα χαθεί ο κόσμος. ΄Ετσι κι αλλιώς, η αναπαραγωγή των ειδών είναι, ουσιαστικά, μια συνεχής διαδικασία και μόνο για στατιστικούς λόγους υπολογίζονται μόνο τα ήδη γεννημένα άτομα και όχι κι εκείνα που κυοφορούνται. ΄Ενα από τα τελευταία θα μπορούσε να αντιστοιχεί στο 0,36 του πιο πάνω φανταστικού αποτελέσματος.

Επιστρέφοντας στις σοβαρές διαστάσεις της κατασκευής πληθυσμιακών μοντέλων, σημειώνουμε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $N(t)$ εκφράζει τον ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται η τιμή αυτής της συνάρτησης τη στιγμή t. Το βασικό, λοιπόν, στοιχείο στην κατασκευή μοντέλων εξέλιξης του πληθυσμού ενός βιολογικού είδους είναι ο εντοπισμός των παραγόντων που επηρεάζουν το ρυθμό αναπαραγωγής του συγκεκριμένου είδους.

Ένας από αυτούς τους παράγοντες είναι το ίδιο το πλήθος του βιολογικού είδους που μελετάμε. Όσο αφορά τον ρόλο αυτού παράγοντα, αυτός μπορεί να είναι πότε θετικός και πότε αρνητικός. Για παράδειγμα, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι, όσο μεγαλύτερος είναι ο πληθυσμός του, τόσο μεγαλύτερη είναι η πιθανότητα συνεύρεσης των μελών διαφορετικού φύλου του είδους, άρα και του ρυθμού αναπαραγωγής. Από την άλλη, το μεγάλο πλήθος μπορεί να οδηγήσει σε σπανιότητα των πηγών διατροφής που προσφέρει το οικολογικό περιβάλλον του συγκεκριμένου βιολογικού είδους. Η υπεραλίευση, για παράδειγμα, έχει μειώσει σε επικίνδυνο βαθμό τα ψάρια που αποτελούν βασική πηγή τροφής για το ανθρώπινο είδος. Άρα, το να είναι μεγάλος ο αριθμός των ατόμων ενός είδους μπορεί να συνεπάγεται τη μείωση του ρυθμού αύξησης του πληθυσμού του.

Σε όλα, πάντως, τα μοντέλα στα οποία ως μόνος παράγοντας που επηρεάζει το ρυθμό αλλαγής του πληθυσμού είναι αυτός ο ίδιος ο πληθυσμός του είδους, έχουμε να κάνουμε με μια ΔΕ της μορφής

(34) $$N' = F(N).$$

Το μόνο που αλλάζει από μοντέλο σε μοντέλο είναι η μορφή της συνάρτησης $F(N)$. Η επιλογή αυτής της συνάρτησης γίνεται με βάση τα ακόλουθα κριτήρια.

(i) Απλότητα της εξίσωσης (34) από μαθηματική άποψη. Η μαθηματική θεωρία μας εξασφαλίζει το επιλύσιμο της (34) για κάθε συνεχή συνάρτηση $F(N)$. Ωστόσο, μόνο για απλές $F(N)$ μπορούμε να κατασκευάσουμε ρητά τις λύσεις της βασικής εξίσωσης (34), ή, τουλάχιστον να συναγάγουμε τα κύρια χαρακτηριστικά αυτών των λύσεων.

(ii) Ενσωμάτωση των παρατηρήσεων για το πως επιδρούν στον ρυθμό αλλαγής N' οι μεγάλες και μικρές τιμές του N.

(iii) Συμφωνία της εξέλιξης που συνάγεται από λύσεις της (34) με εκείνη που παρατηρείται στη φύση (γ.π. στατιστικά στοιχεία για την εξέλιξη του πληθυσμού της γης ή μιας συγκεκριμένης χώρας, καταγραφές των ψαριών μιας λίμνης ή θαλάσσιας περιοχής κλπ).

Αν στηριχτούμε αποκλειστικά και μόνο στο πρώτο κριτήριο, τότε θα οδηγηθούμε στην επιλογή

(35) $$F(N) = a\,N,$$

όπου το a παριστάνει μια σταθερή με μονάδες T^{-1}, με T την μονάδα χρόνου. Αυτή η επιλογή για την συνάρτηση $F(N)$ οδηγεί στην ΔΕ

(36) $$N' = a\,N,$$

που εκφράζει την ακόλουθη υπόθεση: Ο ρυθμός με τον οποίο αλλάζει ο πληθυσμός (τη χρονική στιγμή t) είναι ανάλογος προς την τιμή του (την ίδια χρονική στιγμή t) .

Γενικά, η συνάρτηση

(37) $$\sigma(t) := \frac{N'(t)}{N(t)}$$

ονομάζεται *σχετικός ρυθμός αλλαγής του πληθυσμού*. Από την (36) έπεται ότι η ποσότητα $\sigma(t)$ έχει διάσταση $(\chi\rho\acute{o}\nu o\varsigma)^{-1}$ και άρα μετριέται σε μονάδες T^{-1}. Συνήθως, η τιμή του σχετικού ρυθμού αλλαγής του πληθυσμού δίνεται σε ποσοστά, για παράδειγμα "2% το χρόνο". Αυτή η έκφραση σημαίνει ότι $\sigma(t) = 0,\,02\,/\,\acute{\varepsilon}\tau o\varsigma$.

Χρησιμοποιώντας τον όρο που μόλις εισαγάγαμε, μπορούμε να πούμε ότι το μοντέλο που αντιστοιχεί στη ΔΕ (36), περιγράφει μια κατάσταση όπου ο σχετικός ρυθμός αλλαγής του πληθυσμού είναι σταθερός και ίσος με a. ΄Οταν $a = 1$, η (36) ταυτίζεται με την πρώτη-πρώτη ΔΕ που αναφέραμε σ' αυτό το βιβλίο (βλ. εξ. (1.2) - δηλαδή την εξίσωση (2) του εδάφιου 1). Ωστόσο, όπως θα ανακαλύψουμε στο πρώτο εδάφιο του επόμενου κεφάλαιου, η συγκεκριμένη τιμή της παραμέτρου a δεν επηρεάζει τον τρόπο επίλυσης της ΔΕ (36). Με άλλα λόγια, η ΔΕ που πρωτοπαρουσιάσαμε εμφανίζεται και στα απλούστερα μοντέλα εξέλιξης βιολογικών πληθυσμών, πράγμα που αναδείχνει τη σημασία αυτής της εξίσωσης από την άποψη των εφαρμογών.

11. Επίλυση ΔΕ με τη βοήθεια συστημάτων αυτόματων αλγεβρικών υπολογισμών

Τις τελευταίες δεκαετίες έχουν αναπτυχθεί ειδικά προγράμματα για ηλεκτρονικούς υπολογιστές, τα οποία, με απλές εντολές, όχι μόνο κατασκευάζουν γρήγορα σύνθετες γραφικές παραστάσεις, αλλά προχωρούν και στην αυτόματη και ταχύτατη ανάλυση συναρτήσεων, ακόμα και πολλών μεταβλητών. Με άλλα λόγια, με τη βοήθεια τέτοιων προγραμμάτων, μπορεί κανείς να υπολογίσει τις παραγώγους μιας συνάρτησης, αόριστα και ορισμένα ολοκληρώματα, τα όρια ακολουθιών και σειρών και όλες τις άλλες καθαρά μαθηματικές πράξεις και διαδικασίες που συναντάει στο πλαίσιο του διαφορικού και ολοκληρωτικού λογισμού. Επιπλέον, τα ίδια προγράμματα ή πακέτα επιλύουν αυτόματα πολλές συνήθεις ΔΕ και συστήματα εξισώσεων αυτού του είδους.

Αυτά τα προγράμματα αναφέρονται με τον όρο ***συστήματα αλγεβρικών υπολογισμών*** **(ΣΑΥ)** και, ανάμεσα στα πιο διαδεδομένα, θα βρεί κανείς αυτά με την εμπορική ονομασία *Macsyma*, *Maple*, *Mathematica*, *MuPad*, *Reduce*.΄Ολα τους μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε προσωπικούς υπολογιστές -επιτραπέζιους και φορητούς- και αποτελούν ανεκτίμητης αξίας εργαλεία για όποιον ασχολείται με τις θετικές επιστήμες και ιδιαίτερα με τα εφαρμοσμένα μαθηματικά. Παρόλο που οι εντολές τους είναι συνταγμένες στα αγγλικά, η εξοικείωση με τα ΣΑΥ μπορεί να επιτευχθεί σε πολύ σύντομο χρονικό διάστημα. Γι αυτό, παροτρύνουμε τον αναγνώστη αυτών των σημειώσεων να αφιερώσει το χρόνο που απαιτείται για να μια πρώτη γνωριμία με κάποιο από τα ΣΑΥ που αναφέραμε πιο πάνω. Είμαστε βέβαιοι ότι, ο χρόνος που θα αφιερώσει σ' αυτή την προσπάθεια θα αποδειχτεί μια πολύ έξυπνη "επένδυση".

Ο χώρος αυτών των σημειώσεων δεν μας επιτρέπει να παρουσιάσουμε μιαν αναλυτική εισαγωγή στα ΣΑΥ. Γι' αυτό, είμαστε υποχρεωμένοι να παραπέμψουμε τον ενδιαφερόμενο αναγνώστη στο βοήθημα *Ανώτερα Μαθηματικά με Mathematica, Maple και άλλα συστήματα αλγεβρικών υπολογισμών* του συγγραφέα αυτών των σημειώσεων ή σε ένα από τα άλλα συγγράμματα που παραθέτουμε στη Βιβλιογραφία. Ωστόσο, αν ο αναγνώστης έχει πρόσβαση σε οποιονδήποτε υπολογιστή στον οποίο έχει "φορτωθεί" το σύστημα *Mathe*□ *matica*, τότε μπορεί να χρησιμοποιήσει αποτελεσματικά τα στοιχεία αυτού του συστήματος που παρουσιάζουμε στο υπόλοιπο αυτού του εδάφιου.

Τα βασικά στοιχεία του *Mathematica* που είναι απαραίτητα για την αυτόματη ανάλυση συναρτήσεων και επίλυση ΔΕ τα οποία σκοπεύουμε να παρουσιάσουμε θα δοθούν μέσω μιας σειράς παραδειγμάτων. Για να αναπαράξει τα ίδια αποτελέσματα, ο αναγνώστης θα πρέπει να συντάξει τις εντολές που εμφανίζονται με έντονα γράμματα στις αντίστοιχες κυψελίδες, ακριβώς όπως δίνονται στο κείμενο.

Παράδειγμα (*Γραφική παράσταση συνάρτησης*)

Στο *Mathematica*, κάθε μαθηματικός υπολογισμός γίνεται σε δύο βήματα. Αρχικά, σε μια κυψελίδα (cell) εισαγωγής δοσμένων (input), ορίζουμε τη συνάρτηση που θέλουμε να επεξεργαστούμε, τις τιμές των παραμέτρων που εμφανίζονται στο πρόβλημά μας και την πράξη που θέλουμε να εκτελέσει ο υπολογιστής.

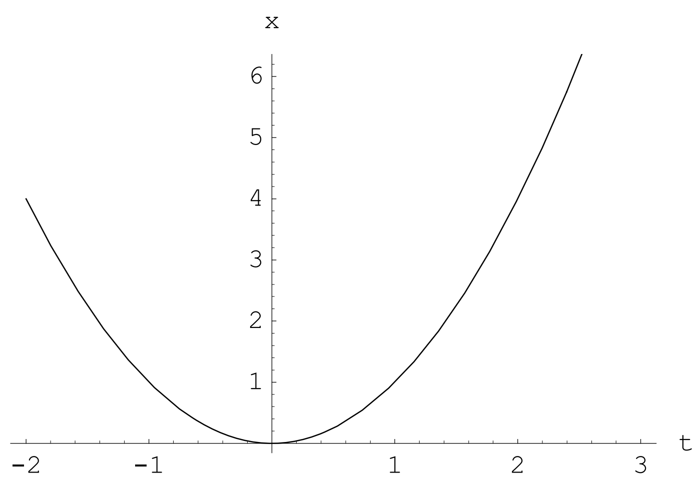
Στη συνέχεια, πατάμε τα πλήκτρα εκτέλεσης των εντολών (γ.π. Shift+Enter), οπότε ο υπολογιστής παράγει το επιθυμητό αποτέλεσμα και το παρουσιάζει σε μια κυψελίδα εξαγομένων (output).

Σ' αυτό το παράδειγμα, δείχνουμε τον τρόπο με τον οποίο κατασκευάζεται το γράφημα της συνάρτησης $f(t) := t^2$, $a \le t \le b$, δηλαδή η καμπύλη

$$\Gamma = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : x = f(t), \quad a \le t \le b\}$$

του επίπεδου $t\,x$.

Η βασική εντολή για την κατασκευή γραφικών παραστάσεων είναι η Plot (=σχεδίασε).



Παρατήρηση

1. Στο *Mathematica*, η συνάρτηση $f(t)$ παριστάνεται πάντοτε με $f[t]$, δηλαδή, με την ανεξάρτητη μεταβλητή μέσα σε αγκύλη και όχι σε παρένθεση.

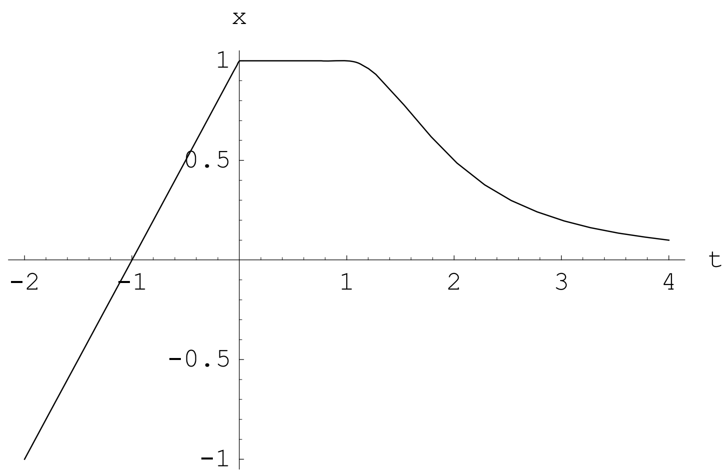
2. Η εντολή Clear[x] οδηγεί στο "σβήσιμο" της σημασίας ή της τιμής που έχει δοθεί στο γράμμα x, στο πλαίσιο κάποιου υπολογισμού. Θα πρέπει να χρησιμοποιείται ως το τελευταίο στοιχείο κάθε αλυσίδας εντολών, έτσι ώστε το ίδιο γράμμα ή σύμπλεγμα γραμμάτων και αριθμών να μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε έναν επόμενο κύκλο υπολογισμών, χωρίς να "μπερδεύεται" το πρόγραμμα.

Παράδειγμα (*Γραφική παράσταση τμηματικά οριζόμενης συνάρτησης*)

Σ' αυτό το παράδειγμα, δείχνουμε τον τρόπο με τον οποίο κατασκευάζεται το γράφημα μιας συνάρτησης με διαφορετικό τύπο σε διαφορετικά τμήματα του πεδίου ορισμού της, όπως είναι η

$$f(t) = \begin{cases} t+1, & t < 0 \\ 1, & 0 \le t \le 1 \\ \frac{1}{(t-1)^2+1}, & t > 1 \end{cases}$$

In[6]:=
```
f[t_] := 1 + t /; t < 0
f[t_] := 1 /; 0 ≤ t ≤ 1
f[t_] := 1/(1 + (t - 1)^2) /; t > 1
a = -2;
b = 4;
Plot[f[t], {t, a, b}, AxesLabel → {"t", "x"}];
Clear[f, g, h, a, b]
```



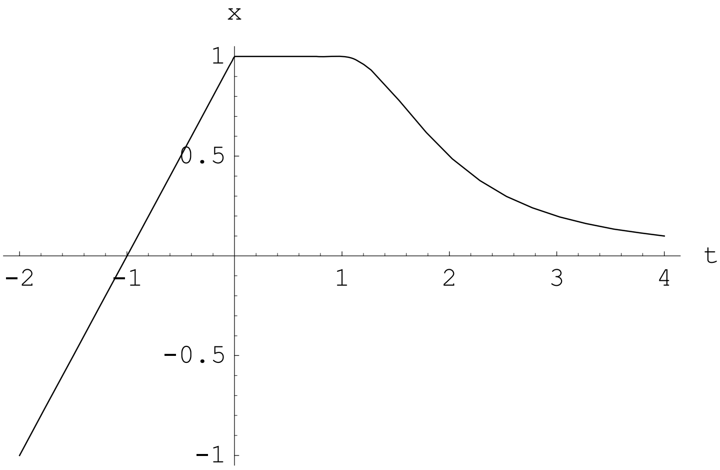
Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε με τη βοήθεια της εντολής

Piecewise[{{$f_1[t]$, I_1}, {$f_2[t]$, I_2}, …, {$f_n[t]$, I_n}}],

στην οποία περιέχονται n ζευγάρια της μορφής {$f_j[t]$, I_j}, όσα και τα διαστήματα στα οποία έχουμε χωρίσει το πεδίο ορισμού της $f(t)$.

In[13]:=
```
f[t_] := Piecewise[{{1 + t, t < 0}, {1, 0 ≤ t ≤ 1}, {1/(1 + (t - 1)^2), t > 1}}]

a = -2;
b = 4;
Plot[f[t], {t, a, b}, AxesLabel → {"t", "x"}];
Clear[f, g, h, a, b]
```



Παράδειγμα (*Ταυτόχρονη γραφική παράσταση πολλών συναρτήσεων*)

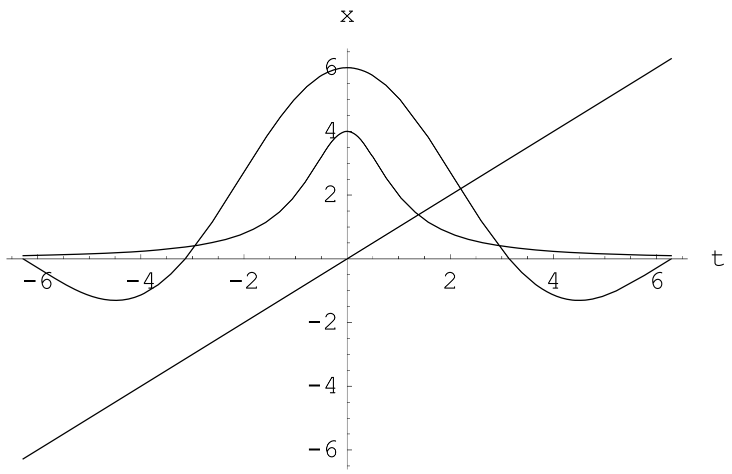
Η επόμενη κυψελίδα περιέχει τα στοιχεία που οδηγούν στην κατασκευή των γραφημάτων των τριών συναρτήσεων

$$f(t) := t, \qquad g(t) := \frac{4}{1+t^2}, \qquad h(t) := 6\,\frac{\sin t}{t}, \qquad -2\pi \le t \le 2\pi,$$

στο ίδιο σχήμα.

Παρατήρηση. Σημειώστε ότι, στο *Mathematica*, όλες οι καθιερωμένες συναρτήσεις, όπως οι $\sin t$ (ημίτονο), $\cos t$ (συνημίτονο) κλπ, εκφράζονται με το πρώτο τους γράμμα κεφαλαίο: Sin[t], Cos[t], κλπ.

In[18]:=
```
f[t_] := t
g[t_] := 4/(1 + t^2)
h[t_] := 6 Sin[t]/t
a = -2 Pi;
b = 2 Pi;
Plot[{f[t], g[t], h[t]}, {t, a, b}, AxesLabel → {"t", "x"}];
Clear[f, g, h, a, b]
```



Παράδειγμα (*Υπολογισμός παραγώγων μιας συνάρτησης*)

Στην κυψελίδα που ακολουθεί παρουσιάζουμε δύο εναλλακτικούς τρόπους υπολογισμού της παραγώγου (πρώτης τάξης) της συνάρτησης

$$f(t) := a\, t^3\, e^{-2\,t} + \tfrac{b}{1+t^2} + c\, t \sin t,$$

In[25]:=
```
f[t_] := a * t^3 Exp[-2 * t] + b/(1 + t^2) + c * t * Sin[t]
f'[t]
D[f[t], t]
```

Out[26]= $-2\,a\,e^{-2\,t}\,t^3 + 3\,a\,e^{-2\,t}\,t^2 + c\cos(t)\,t - \dfrac{2\,b\,t}{(t^2+1)^2} + c\sin(t)$

Out[27]= $-2\,a\,e^{-2\,t}\,t^3 + 3\,a\,e^{-2\,t}\,t^2 + c\cos(t)\,t - \dfrac{2\,b\,t}{(t^2+1)^2} + c\sin(t)$

Ο υπολογισμός της παραγώγου δεύτερης τάξης της ίδιας συνάρτησης γίνεται με τον τρόπο που δείχνουμε στην επόμενη κυψελίδα. Ανάλογες είναι και οι εντολές που οδηγούν στις παραγώγους μεγαλύτερης τάξης.

In[28]:=
```
f''[t]
D[f[t], t, t]

Clear[f]
```

Out[28]= $4\,a\,e^{-2t}\,t^3 - 12\,a\,e^{-2t}\,t^2 + \frac{8\,b\,t^2}{(t^2+1)^3} + 6\,a\,e^{-2t}\,t - c\sin(t)\,t + 2\,c\cos(t) - \frac{2\,b}{(t^2+1)^2}$

Out[29]= $4\,a\,e^{-2t}\,t^3 - 12\,a\,e^{-2t}\,t^2 + \frac{8\,b\,t^2}{(t^2+1)^3} + 6\,a\,e^{-2t}\,t - c\sin(t)\,t + 2\,c\cos(t) - \frac{2\,b}{(t^2+1)^2}$

Παράδειγμα (*Υπολογισμός ολοκληρωμάτων μιας συνάρτησης*)

Με τις εντολές της κυψελίδας που ακολουθεί, παράγεται ένα αόριστο ολοκλήρωμα, $\int f(t)\,d\,t$, της συνάρτησης

$$f(t) := t^3 + t\cos t.$$

In[31]:=
```
f[t_] := t^3 + t*Cos[t]
Integrate[f[t], t]
```

Out[32]= $\frac{t^4}{4} + \sin(t)\,t + \cos(t)$

Αντίθετα, η τροποποίηση της εντολής Integrate[ ] που δείχνουμε στην επόμενη κυψελίδα οδηγεί στο ορισμένο ολοκλήρωμα της ίδιας συνάρτησης στο διάστημα $-\pi \le t \le 2\,\pi$, δηλαδή στον αριθμό

$$\int_{-\pi}^{2\pi} (t^3 + t\cos t)\,d\,t.$$

In[33]:=
```
Integrate[f[t], {t, -Pi, 2*Pi}]
Clear[f]
```

Out[33]= $2 + \frac{15\,\pi^4}{4}$

Παρατήρηση: Στο σύστημα *Mathematica,* ο αστερίσκος (*) που δηλώνει την πράξη του πολλαπλασιασμού μπορεί να παραλείπεται. Αντ' αυτού, μπορούμε να αφήνουμε ένα κενό διάστημα ανάμεσα στους παράγοντες:

In[35]:=
```
3*4*5
3 4 5
```

Out[35]= 60

Out[36]= 60

In[37]:=
```
a*t^3 + b*t*Cos[t]
a t^3 + b t Cos[t]
```

Out[37]= $a\,t^3 + b\cos(t)\,t$

Out[38]= $a\,t^3 + b\cos(t)\,t$

Παράδειγμα (*Επίλυση αλγεβρικής εξίσωσης*)

Το σύστημα *Mathematica* προχωράει στη λύση μιας αλγεβικής εξίσωσης με την εντολή Solve (=λύσε). Προσέξτε το διπλό ίσον (==) στη διατύπωση της εξίσωσης

$$x^2 - 2\,x + 3 = 0$$

που θέλουμε να λύσουμε. Είναι απαραίτητο για να καταλάβει πρόγραμμα ότι πρόκειται για εξίσωση και όχι για την "τιμή" ή το νέο όνομα της σύνθετης μαθηματικής έκφρασης $x^2 - 2\,x + 3$.

In[39]:=
```
Solve[x^2 - 2 x + 3 == 0, x]
```

Out[39]= $\{\{x \to 1 - i\sqrt{2}\}, \{x \to 1 + i\sqrt{2}\}\}$

Παράδειγμα (*Επίλυση διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης*)

Σ' αυτό το παράδειγμα, δείχνουμε τον τρόπο με τον οποίο λύνει το *Mathematica* μια ΔΕ της μορφής $x' = f(t)$. Στη συγκεκριμένη περίπτωση,

$$f(t) := a\,t^3 + b\,t\cos t.$$

Η βασική εντολή για την επίλυση ΔΕ είναι η DSolve.

In[40]:=
```
f[t_] := a t^3 + b t Cos[t]
DSolve[x'[t] == f[t], x[t], t]
Clear[f]
```

Out[41]= $\left\{\left\{x(t) \to \frac{a\,t^4}{4} + b\sin(t)\,t + c_1 + b\cos(t)\right\}\right\}$

Παράδειγμα (*Επίλυση προβλήματος αρχικών τιμών*)

Για το *Mathematica,* τόσο η ΔΕ όσο και η αρχική συνθήκη που απαρτίζουν ένα ΠΑΤ είναι εξισώσεις. Συνεπώς, τα δύο αυτά στοιχεία,

$$x' = f(t), \quad x(t_0) = x_0,$$

πρέπει να εισαχθούν ως ένα σύστημα δύο εξισώσεων. Αυτό επιτυγχάνεται, γράφοντάς τα μέσα σε αγκύλες:

In[43]:=
```
f[t_] := 2 t - 3 t^2
DSolve[{x'[t] == f[t], x[1] == 3}, x[t], t]
Clear[f]
```

Out[44]= $\{\{x(t) \to -t^3 + t^2 + 3\}\}$

Παράδειγμα (*Επίλυση διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης*)

Σ' αυτό το παράδειγμα, το *Mathematica* καλείται να λύσει μια ΔΕ της μορφής $x'' = f(t)$.

```
In[46]:= f[t_] := a t + b Cosh[t]
         DSolve[x''[t] == f[t], x[t], t]
         Clear[f]
```

Out[47]= $\left\{\left\{x(t) \to \frac{a\, t^3}{6} + c_2\, t + c_1 + b \cosh(t)\right\}\right\}$

Παράδειγμα (*Επίλυση ΠΑΤ για ΔΕ δεύτερης τάξης*)

Οι εντολές που ακολουθούν οδηγούν στη λύση του ΠΑΤ

$$x'' = 1 + t, \qquad x(0) = a, \qquad x'(0) = b.$$

```
In[49]:= f[t_] := 1 + t
         DSolve[{x''[t] == f[t], x[0] == a, x'[0] == b}, x[t], t]
         Clear[f]
```

Out[50]= $\left\{\left\{x(t) \to \frac{1}{6}\,(t^3 + 3\, t^2 + 6\, b\, t + 6\, a)\right\}\right\}$

Παράδειγμα (*Επίλυση συστήματος ΔΕ πρώτης τάξης*)

Με τις εντολές της επόμενης κυψελίδας, λύνεται το σύστημα των ΔΕ πρώτης τάξης

$$x' = -y, \qquad\qquad y' = x.$$

```
In[52]:= DSolve[{x'[t] == -y[t], y'[t] == x[t]}, {x[t], y[t]}, t]
```

Out[52]= $\{\{x(t) \to c_1 \cos(t) - c_2 \sin(t),\ y(t) \to c_2 \cos(t) + c_1 \sin(t)\}\}$

Παράδειγμα (*Επίλυση ΠΑΤ για σύστημα δύο ΔΕ πρώτης τάξης*)

Με τις επόμενες εντολές λύνεται το σύστημα των ΔΕ του προηγούμενου παραδείγματος, υπό τις αρχικές συνθήκες

$$x(0) = 1, \qquad y(0) = 0.$$

```
In[53]:= DSolve[{x'[t] == y[t], y'[t] == x[t], x[0] == 1, y[0] == 0}, {x[t], y[t]}, t]
```

Out[53]= $\left\{\left\{x(t) \to \frac{1}{2}\, e^{-t}\,(1 + e^{2\,t}),\ y(t) \to \frac{1}{2}\, e^{-t}\,(-1 + e^{2\,t})\right\}\right\}$

Κεφάλαιο ΙΙ

Συνήθεις διαφορικές εξισώσεις 1ης τάξης

Το παρόν κεφάλαιο είναι αφιερωμένο στην συστηματική μελέτη συνήθων διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης. Ακριβέστερα, θα ασχοληθούμε με τις διαφορικές εξισώσεις (ΔΕ) πρώτης τάξης για τις οποίες έχουν αναπτυχθεί ειδικές μέθοδοι ή τεχνικές επίλυσης.

Για να αποσαφηνίσουμε ακόμα περισσότερο το πλαίσιο της συζήτησής μας, ας υποθέσουμε ότι το γράμμα t παριστάνει την ανεξάρτητη μεταβλητή και το x την άγνωστη συνάρτηση (ή εξαρτημένη μεταβλητή). Τότε, κάθε ΔΕ πρώτης τάξης μπορεί να θεωρείται πως έχει την ***κανονική μορφή***

$$x' = F(t, x),$$

όπου η συνάρτηση $F(t, x)$ ορίζεται με σαφήνεια σε κάποια περιοχή Ω του επίπεδου $t\,x$.

Ένα εύλογο συμπέρασμα είναι ότι οι επιμέρους ιδιότητες της συνάρτησης $F(t, x)$ παίζουν καθοριστικό ρόλο, όχι μόνο στην ύπαρξη λύσεων, αλλά και στον τρόπο κατασκευής τους. Στα αμέσως επόμενα εδάφια, λοιπόν, θα δείξουμε ότι αυτό το συμπέρασμα ευσταθεί, παρουσιάζοντας τεχνικές επίλυσης που στηρίζονται στη μορφή αυτής της συνάρτησης .

1. ΔΕ της μοφής $x' = f(t)$

Θα ξεκινήσουμε την ανάλυση των κανονικών ΔΕ πρώτης τάξης, $x' = F(t, x)$, από την ειδικότερη περίπτωση όπου η $F(t, x)$ είναι ανεξάρτητη από την x, δηλαδή από εκείνες της μορφής

(1) $$x' = f(t), \qquad t \in I.$$

Η συνάρτηση $f(t)$ θεωρείται γνωστή και συνεχής στο διάστημα I της πραγματικής ευθείας $\mathbb{R}$.

Στο πρώτο κεφάλαιο μελετήσαμε αρκετά παραδείγματα τέτοιου είδους ΔΕ. Το βασικό συμπέρασμα της τότε μελέτης μας ήταν το εξής. Αν η $f(t)$ είναι η παράγωγος μιας από τις συναρτήσεις $F(t)$ του φτωχού επιστήμονα, τότε η γενική λύση της (1) βρίσκεται αμέσως και δίνεται από την έκφραση

(2) $$x = F(t) + c.$$

Για να διατυπώσουμε το ίδιο συμπέρασμα και με έναν διαφορετικό τρόπο, θα υπενθυμίσουμε τον ακόλουθο ορισμό. Ας υποθέσουμε ότι έχει δοθεί η συνάρτηση $f(t)$, $t \in I$, και η $F(t)$ είναι τέτοια που $F'(t) = f(t)$, $t \in I$. Τότε ονομάζουμε την $F(t)$ ***αόριστο ολοκλήρωμα της $f(t)$*** και τη συμβολίζουμε με $\int f(t)\,d\,t$.

Για παράδειγμα, η $F_0(t) = t^2$ είναι ένα αόριστο ολοκλήρωμα της $f(t) = 2\,t$. Ένα άλλο αόριστο ολοκλήρωμα της $f(t) = 2\,t$ είναι η συνάρτηση $F_1(t) = t^2 + 1$. Γενικότερα, κάθε συνάρτηση της μορφής

(3) $$F_c(t) = t^2 + c, \qquad c \in \mathbb{R},$$

είναι ένα αόριστο ολοκλήρωμα της $f(t) = 2\,t$. Γι' αυτό, σε πολλά βιβλία συναντάμε διατυπώσεις σαν την ακόλουθη:

"Αν $f(t) = t^n$, $n \neq -1$, τότε $\int f(t)\,d\,t = \frac{1}{n+1}\,t^{n+1} + c$"

Εμείς, ωστόσο, με το σύμβολο $\int f(t)\,d\,t$ θα εννοούμε ένα μόνο από τα άπειρα αόριστα ολοκληρώματα της συνάρτησης $f(t)$. Με άλλα λόγια, το σύμβολο $\int f(t)\,d\,t$ θα δηλώνει μια συγκεκριμένη συνάρτηση και όχι μια μονοπαραμετρική οικογένεια συναρτήσεων. Αυτή η σύμβαση μας επιτρέπει να λέμε ότι κάθε συνάρτηση της μορφής

(4) $$x = \int f(t)\,d\,t + c$$

είναι λύση της ΔΕ $x' = f(t)$, όταν η $f(t)$, $t \in I$, είναι συνεχής.

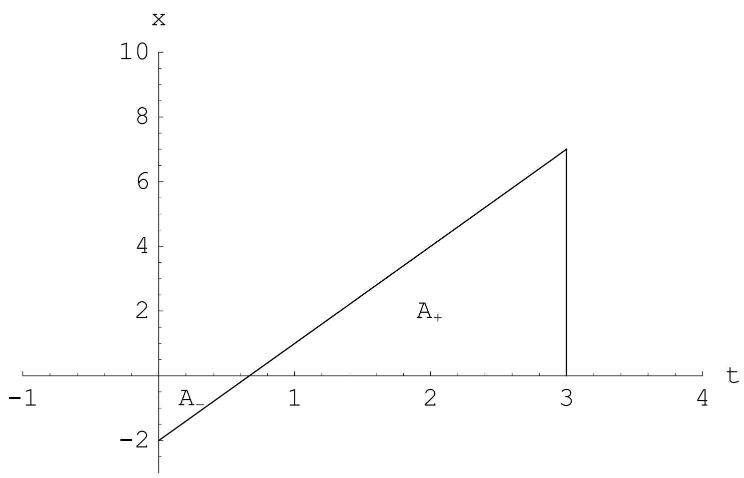
Η αρχική μας μελέτη των εξισώσεων της μορφής (1) είχε οδηγήσει και στο ακόλουθο συμπέρασμα: Με βάση τις συναρτήσεις που θεωρούμε ως γνωστές, είναι αδύνατο να λύσουμε την απλή ΔΕ

(5) $$x' = \frac{1}{t}, \quad t > 0,$$

παρόλο που η συνάρτηση $f(t) = t^{-1}$, $t > 0$, είναι συνεχής. Κι αυτό γιατί, ο κατάλογος των γνωστών μας συναρτήσεων δεν περιέχει συνάρτηση της οποίας η παράγωγος είναι ίση με t^{-1}.

Την διέξοδο σ' αυτό το πρόβλημα μας την προσφέρει μια μαθηματική έννοια που επίσης λέγεται ολοκλήρωμα. Πρόκειται για το είδος το οποίο, προς διάκριση, ονομάζουμε ορισμένο ολοκλήρωμα. Για να είμαστε ακριβείς, ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση $g(\xi)$ έχει ως πεδίο ορισμού κάποιο διάστημα I της πραγματικής ευθείας και τα a, b είναι τυχαία σημεία αυτού του διαστήματος. Τότε, το αντικείμενο που δίνει λύση στο πρόβλημά μας είναι το ***ορισμένο ολοκλήρωμα (του) Riemann της $g(\xi)$ από το σημείο a ως το σημείο b***, το οποίο συμβολίζεται με $\int_a^b g(\xi)\,d\,\xi$.

Ο χώρος και ο στόχος αυτού του βιβλίου δεν μας επιτρέπει να μπούμε σε λεπτομέρειες σχετικά με τον ορισμό αυτού του ολοκληρώματος. Αρκεί μόνο να αναφέρουμε ότι πρόκειται για το όριο ακολουθιών, οι οποίες προσεγγίζουν το εμβαδόν μιας περιοχής του Ευκλείδειου επίπεδου που ορίζεται από το γράφημα της συνάρτησης $g(\xi)$. Για να γίνουμε σαφέστεροι, ας θεωρήσουμε το υποσύνολο A του Ευκλείδειου επίπεδου $\mathbb{R}^2$ που βρίσκεται ανάμεσα στην καμπύλη $\Gamma := \{(\xi,\ x) \in \mathbb{R}^2 : x = g(\xi)\}$, τον άξονα ξ και τις ευθείες $\xi = a$ και $\xi = b > a$. Ο άξονας ξ χωρίζει αυτό το σύνολο στα τμήματα A_+ και A_-, όπου το x είναι θετικό και αρνητικό, αντίστοιχα. Η κατάσταση που αντιστοιχεί στην επιλογή $g(\xi) = \xi^2 - 5$, $a = 0, 5$ και $b = 4, 3$ παριστάνεται στο επόμενο σχήμα.



Όταν, λοιπόν, το αντίστοιχο όριο υπάρχει, τότε ο αριθμός $\int_a^b g(\xi)\,d\,\xi$ παριστάνει τη διαφορά των εμβαδών $E(A_+)$ και $E(A_-)$ των περιοχών A_+ και A_-, αντίστοιχα:

(6) $$\int_a^b g(\xi)\,d\,\xi = E(A_+) - E(A_-).$$

Έτσι κι αλλιώς, τα μόνα στοιχεία που χρειαζόμαστε από τη θεωρία του ορισμένου ολοκληρώματος είναι οι ακόλουθες βασικές ιδιότητες:

(i) $\int_a^b g(\xi)\,d\,\xi = -\int_b^a g(\xi)\,d\,\xi$ (συνακόλουθα, $\int_a^a g(\xi)\,d\,\xi = 0$).

(ii) Αν $a < b < c$, τότε $\int_a^c g(\xi)\,d\,\xi = \int_a^b g(\xi)\,d\,\xi + \int_b^c g(\xi)\,d\,\xi$.

(iii) Αν $f(\xi) = \kappa\, g(\xi) + \lambda\, h(\xi)$, τότε $\int_a^b f(\xi)\,d\,\xi = \kappa \int_a^b g(\xi)\,d\,\xi + \lambda \int_a^b h(\xi)\,d\,\xi$.

(iv) Αν η συνάρτηση $g(\xi)$ είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα που έχει ως άκρα του τα σημεία a, b, τότε το ολοκλήρωμα (6) υπάρχει.

Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι η συνάρτηση $g(\xi)$ είναι συνεχής στο διάστημα I κι ότι το a παριστάνει ένα συγκεκριμένο στοιχείο αυτού του διαστήματος. Τότε από την ιδιότητα (iv) έπεται ότι το ορισμένο ολοκλήρωμα $\int_a^t g(\xi)\,d\,\xi$ υπάρχει για κάθε $t \in I$. Αυτό το γεγονός ισοδυναμεί με το ότι, η έκφραση $\int_a^t g(\xi)\,d\,\xi$ ορίζει μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ολόκληρο το διάστημα I. Αυτό το συμπέρασμα, μαζί με το σημαντικό για μας χαρακτηριστικό αυτής της συνάρτησης, περιγράφεται από το

Θεμελιώδες θεώρημα του διαφορικού λογισμού

Ας υποτεθεί ότι η συνάρτηση $g(\xi)$ είναι συνεχής στο διάστημα I και το a είναι ένα συγκεκριμένο σημείο αυτού του διαστήματος. Τότε η συνάρτηση

(7) $$G(t) := \int_a^t g(\xi)\,d\,\xi,$$

ορίζεται σε κάθε σημείο του διαστήματος I και είναι διαφορίσιμη. Επιπλέον,

(8) $$G'(t) = g(t), \qquad t \in I.$$

Παρατήρηση: Η (8) σημαίνει ότι η συνάρτηση $\int_a^t g(\xi)\,d\xi$ αποτελεί αόριστο ολοκλήρωμα της $g(t)$, $t \in I$. Άρα, το συμπέρασμα του θεωρήματος μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής: Για κάθε συνεχή συνάρτηση $g(t)$, $t \in I$, υπάρχει αόριστο ολοκλήρωμα.

Τώρα, είναι εύκολο να δούμε γιατί το θεμελιώδες θεώρημα μας βγάζει από το αδιέξοδο στο οποίο είχαμε περιέλθει. Όπως έχουμε υποθέσει, η συνάρτηση $f(t)$ στο δεξί μέλος της ΔΕ $x' = f(t)$ είναι συνεχής στο διάστημα I. Άρα, αυτόματα, ορίζεται και η νέα συνάρτηση $\int_a^t f(\xi)\,d\xi$ που έχει το ίδιο πεδίο ορισμού και την ίδια παράγωγο με την (άγνωστη) συνάρτηση x. Συνεπώς, οι συναρτήσεις x και $\int_a^t f(\xi)\,d\xi$ διαφέρουν κατά μία σταθερή ποσότητα. Ισοδύναμα,

(9) $$x = \int_a^t f(\xi)\,d\xi + c.$$

Με άλλα λόγια, όταν η συνάρτηση $f(t)$, $t \in I$, είναι συνεχής, τότε η ΔΕ $x' = f(t)$ έχει πάντα λύσεις. Μάλιστα, το σύνολο των λύσεών της ταυτίζεται με την οικογένεια των συναρτήσεων $\int_a^t f(\xi)\,d\xi + c$, όπου a τυχαίο σημείο του διαστήματος I.

Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι το $t_0 \in I$. Τότε, από την (9) αμέσως έπεται ότι

(10) $$x(t_0) = \int_a^{t_0} f(\xi)\,d\xi + c.$$

Συνακόλουθα,

(11) $$c = x(t_0) - \int_a^{t_0} f(\xi)\,d\xi$$

και άρα η (9) γράφεται σαν

(12) $$x = x(t_0) + \int_a^t f(\xi)\,d\xi - \int_a^{t_0} f(\xi)\,d\xi = x(t_0) + \int_{t_0}^t f(\xi)\,d\xi.$$

Αλλά αυτό σημαίνει ότι αποδείξαμε το ακόλουθο

Θεώρημα

Ας υποτεθεί ότι η συνάρτηση $f(t)$ είναι συνεχής στο διάστημα I και ότι το $t_0 \in I$. Τότε το ΠΑΤ

(13) $$x' = f(t), \qquad x(t_0) = x_0,$$

έχει ως μοναδική λύση τη συνάρτηση

(14) $$x = x_0 + \int_{t_0}^t f(\xi)\,d\xi,$$

η οποία ορίζεται σε ολόκληρο το διάστημα I.

Είναι πολύ πιθανό ότι, σ' αυτό το σημείο, ο αναγνώστης νοιώθει αμήχανος. Συνεχώς μιλάμε για συναρτήσεις της μορφής $\int_a^t f(\xi)\,d\xi$ και ποτέ δε δίνουμε τον τύπο τους. Αυτή η πιθανή αμηχανία οφείλεται σε παρεξήγηση! Γιατί, από τη στιγμή που θα επιλέξουμε το a, η έκφραση $\int_a^t f(\xi)\,d\xi$ **είναι** ο τύπος μιας συνάρτησης. Αυτό είναι το βασικό νόημα του θεμελιώδους θεωρήματος του διαφορικού λογισμού και άρα ο λόγος για τον οποίο αξίζει να το θεωρούμε κι εμείς ως θεμελιώδες: Κάνει τον φτωχό επιστήμονα πλούσιο.

Για να συνειδητοποιήσουμε το βιος μας, χωρίς να αποκτήσουμε τη νοοτροπία του νεόπλουτου, ας γυρίσουμε προσωρινά στις γνωστές μας συναρτήσεις. Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι $f(t) = t^{\rho}$, όπου $\rho \neq -1$ τυχαίος ρητός αριθμός και $t > 0$. Αυτή είναι μια συνεχής συνάρτηση κι όπως γνωρίζουμε από παλιά

(15) $$\Phi(t) := \int f(t)\, d\, t = \int t^{\rho}\, d\, t = \tfrac{t^{\rho+1}}{\rho+1}.$$

Αλλά, σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα, και η συνάρτηση με τύπο $\int_a^t f(\xi)\, d\, \xi$, όπου $a,\ t > 0$, αποτελεί αόριστο ολοκήρωμα της $f(t) = t^{\rho}$. Συνεπώς, υπάρχει σταθερή c τέτοια που

(16) $$\int_a^t f(\xi)\, d\, \xi = \int f(t)\, d\, t + c \equiv \Phi(t) + c.$$

Από αυτή τη σχέση έπεται ότι

(17) $$0 = \int_a^a f(\xi)\, d\, \xi = \Phi(a) + c.$$

Άρα η (16) γίνεται

(18) $$\int_a^t f(\xi)\, d\, \xi = \Phi(t) - \Phi(a).$$

Με άλλα λόγια,

(19) $$\int_a^t f(\xi)\, d\, \xi = \tfrac{t^{\rho+1}}{\rho+1} - \tfrac{a^{\rho+1}}{a+1}.$$

Από τον τρόπο με τον οποίο καταλήξαμε στον τύπο (18) έπεται ότι αυτός ισχύει γενικά. Άρα, όταν έχουμε να κάνουμε με τις γνωστές μας συναρτήσεις, μπορούμε να τον χρησιμοποιούμε για να γράφουμε τη συνάρτηση $\int_a^t f(\xi)\, d\, \xi$ σε οικεία μορφή -όπως μόλις κάναμε για την $f(t) = t^{\rho},\ t > 0,\ \rho \in \mathbb{Q}$.

Στη γενικότερη περίπτωση, πρέπει να εθιστούμε στην ιδέα ότι το ολοκλήρωμα $\int_a^t f(\xi)\, d\, \xi$ ορίζει μια νέα συνάρτηση. Έτσι, δε θα διστάζουμε να παρουσιάσουμε μιαν έκφραση της μορφής $\int_a^t f(\xi)\, d\, \xi$ ως λύση κάποιας ΔΕ ή ενός ΠΑΤ.

Παράδειγμα

Ας υποθέσουμε ότι μας ζητούν να βρούμε τις λύσεις του ΠΑΤ

$$x' = \sqrt{1 + t^2 + t^6}\,,\quad t \in \mathbb{R},\quad x(0) = 1.$$

Είναι φανερό ότι η συνάρτηση

$$f(t) = \sqrt{1 + t^2 + t^6}\,,\qquad t \in \mathbb{R},$$

είναι συνεχής. Συνεπώς, η

$$G(t) := \int_0^t \sqrt{1 + \xi^2 + \xi^6}\ d\, \xi$$

ορίζεται σε όλη την πραγματική ευθεία, είναι διαφορίσιμη και $G(0) = 0$.

Σύμφωνα με το θεώρημα που μόλις αποδείξαμε, το δοσμένο ΠΑΤ έχει ως μοναδική λύση τη συνάρτηση

$$x = 1 + \int_0^t \sqrt{1 + \xi^2 + \xi^6}\ d\, \xi.$$

Βέβαια, δεν αποκλείεται η συνάρτηση η οποία ορίζεται από ένα ολοκλήρωμα της μορφής $\int_a^t f(\xi)\, d\, \xi$ να είναι και ... επώνυμη. Κλασικό είναι το επόμενο

Παράδειγμα

Η συνάρτηση

(20) $$g(t) = \frac{1}{t}, \quad t \in (0, \infty),$$

είναι συνεχής. Συνεπώς, η

(21) $$G(t) := \int_1^t \frac{1}{\xi}\, d\,\xi$$

ορίζεται σε όλο το διάστημα $(0, \infty)$ και είναι διαφορίσιμη. Συγκεκριμένα,

(22) $$G''(t) = \frac{1}{t}, \quad t \in (0, \infty).$$

Προφανώς, ο ορισμός (21) της $G(t)$ συνεπάγεται ότι

(23) $$G(1) = 0.$$

Από τις δύο τελευταίες σχέσεις αμέσως έπεται ότι η συνάρτηση $G(t)$ αποτελεί τη μοναδική λύση του ΠΑΤ

(24) $$x' = \frac{1}{t}, \quad t \in (0, \infty), \quad x(1) = 0.$$

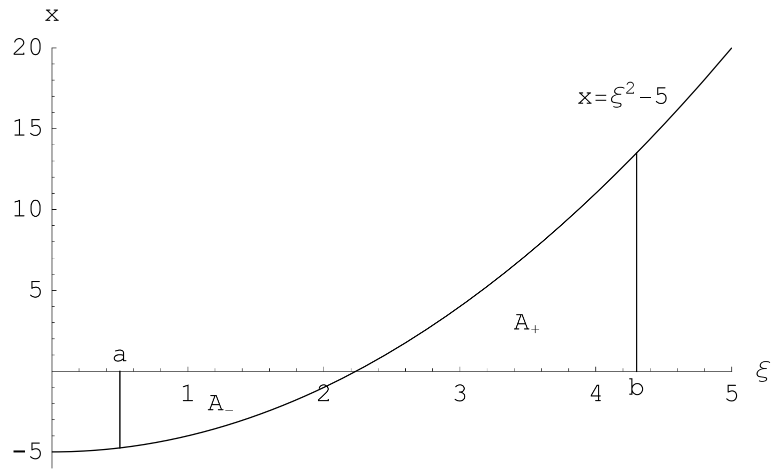
Από τις συναρτήσεις που ορίζονται μέσω του θεμελιώδους θεωρήματος του διαφορικού λογισμού, η παραπάνω $G(t)$ είναι ανάμεσα στις επώνυμες. Ονομάζεται ***λογαριθμική συνάρτηση*** και συμβολίζεται με ln ή log. Με άλλα λόγια,

(25) $$\boxed{\ln(t) \equiv \log(t) := \int_1^t \frac{1}{\xi}\, d\,\xi, \quad t \in (0, \infty)}$$

Ο αριθμός $\ln(t)$ λέγεται ***φυσικός ή Νεπέριος λογάριθμος του t***.

Βέβαια, ανεξάρτητα από το αν μια συνάρτηση της μορφής $\int_a^t f(\xi)\, d\,\xi$ είναι επώνυμη ή όχι, είμαστε υποχρεωμένοι να αντιμετωπίσουμε το ζήτημα του υπολογισμού των τιμών της. Αυτό επιτυγχάνεται είτε με προσεγγιστικό υπολογισμό του ολοκληρώματος Riemann με βάση τον ορισμό του, είτε με άλλες μεθόδους που δεν ενδιαφέρουν την παρούσα συζήτηση. Εκείνο που έχει σημασία από πρακτική άποψη είναι ότι, στις μέρες μας, οι τιμές συναρτήσεων σαν την λογαριθμική παρέχονται ταχύτατα και με μεγάλη ακρίβεια από ηλεκτρονικούς υπολογιστές, ακόμα και του χεριού. Παλιότερα, την ίδια ανάγκη εκάλυπταν βιβλία με λιγότερο ή περισσότερο αναλυτικούς πίνακες.

Σήμερα, μάλιστα, τα συστήματα αλγεβρικών υπολογισμών είναι σε θέση να κατασκευάζουν γρήγορα και γραφικές παραστάσεις σαν αυτή του επόμενου σχήματος για την λογαριθμική συνάρτηση. Από τέτοιες γραφικές παραστάσεις παίρνουμε αμέσως μια συνολική εικόνα του τρόπου με τον οποίο μεταβάλλονται οι τιμές της συνάρτησης που μας ενδιαφέρει -πράγμα που αποτελεί και το βασικό χαρακτηριστικό της συνάρτησης από την άποψη των εφαρμογών.



Η λογαριθμική συνάρτηση έχει μια σειρά από αξιοσημείωτες ιδιότητες. Για παράδειγμα,

(i) Είναι ***γνησίως αύξουσα***, δηλαδή,

(26) $$t_2 > t_1 \;\Rightarrow\; \ln(t_2) > \ln(t_1),$$

και το πεδίο τιμών της είναι ολόκληρη η πραγματική ευθεία (βλ. προηγούμενο σχήμα).

(ii) Μηδενίζεται στο σημείο $t = 1$:

(27) $$\ln(1) = 0.$$

(iii) Απεικονίζει το γινόμενο δύο ομόσημων αριθμών σε άθροισμα δύο πραγματικών:

(28) $$s\,t > 0 \quad\Rightarrow\quad \ln(s\,t) = \ln|s| + \ln|t|.$$

(iv) Αν ο ρ είναι ρητός αριθμός, τότε

(29) $$\ln(t^{\rho}) = \rho\ln(t)$$

Οι παραπάνω ιδιότητες της λογαριθμικής συνάρτησης προκύπτουν αμέσως από τον ορισμό της, (25). Το συμπέρασμα ότι είναι γνησίως αύξουσα, για παράδειγμα, συνάγεται αμέσως από το γεγονός ότι η παράγωγός της είναι παντού θετική:

(30) $$\ln'(t) = \frac{1}{t} > 0, \quad t \in (0, \infty).$$

Από αυτή την ιδιότητα και την (iv) μπορεί εύκολα ν' αποδειχτεί και το ότι $\ln(0, \infty) = \mathbb{R}$.

Η δεύτερη ιδιότητα είναι προφανής. Η απόδειξη της τρίτης είναι απλή και την παρουσιάζουμε υποθέτοντας ότι οι s, t είναι και οι δυο θετικοί:

$$\ln(s) + \ln(t) := \int_1^s \frac{1}{\xi}\,d\xi + \int_1^t \frac{1}{\xi}\,d\xi = \int_1^{s\,t} \frac{1}{\xi}\,d\xi + \int_{s\,t}^s \frac{1}{\xi}\,d\xi + \int_1^t \frac{1}{\xi}\,d\xi.$$

΄Ομως, αφού το $s > 0$,

$$\int_{s\,t}^s \frac{1}{\xi}\,d\xi = \int_{s\,t}^s \frac{1}{(\xi/s)}\,d(\xi/s) = \int_t^1 \frac{1}{\zeta}\,d\zeta = -\int_1^t \frac{1}{\zeta}\,d\zeta, \quad \zeta := \xi/s.$$

Συνεπώς, η προηγούμενη σχέση γίνεται

$$\ln(s) + \ln(t) = \int_1^{s\,t} \frac{1}{\xi}\,d\xi - \int_1^t \frac{1}{\zeta}\,d\zeta + \int_1^t \frac{1}{\xi}\,d\xi = \int_1^{s\,t} \frac{1}{\xi}\,d\xi \equiv \ln(s\,t).$$

Τέλος, από τον κανόνα της αλυσσίδας έπεται ότι

$$[\ln(t^{\rho})]' = \ln'(t^{\rho})\,(t^{\rho})' = \frac{1}{t^{\rho}}\,\rho\, t^{\rho-1} = \rho\, t^{-1}$$

Ισοδύναμα,

$$[\ln(t^{\rho})]' = \rho\,[\ln(t)]' \quad .$$

οπότε

$$\ln(t^{\rho}) = \rho \ln(t) + c.$$

Αλλά για $t = 1$, η τελευταία σχέση γίνεται $0 = 0 + c$. Συνακόλουθα, $\ln(t^{\rho}) = \rho \ln(t)$.

Με τη λογαριθμική συνάρτηση στον κατάλογο των γνωστών μας συναρτήσεων, μπορούμε πλέον να δώσουμε σε απλή μορφή και τη γενική λύση της ΔΕ

(31) $$x' = \frac{1}{t}, \quad t \in (0, \infty).$$

Είναι η 1-παραμετρική οικογένεια των συναρτήσεων

(32) $$x = \ln t + c.$$

Μάλιστα, με τη βοήθεια της λογαριθμικής συνάρτησης, μπορούμε πλέον να λύσουμε και την

(33) $$x' = x,$$

με την οποία ξεκινήσαμε το ... παιχνίδι των ΔΕ.

Γιατί, από το γεγονός ότι η λογαριθμική συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα έπεται ότι υπάρχει και η αντίστροφή της. Με άλλα λόγια, υπάρχει συνάρτηση φ που ορίζεται σε όλη την πραγματική ευθεία και με τρόπο ώστε

(34) $$\varphi \circ \ln(t) \equiv \varphi(\ln(t)) = t, \quad t \in (0, \infty),$$

και

(35) $$\ln \circ \varphi(s) \equiv \ln(\varphi(s)) = s, \qquad s \in \mathbb{R}.$$

Αυτό είναι άμεση απόρροια του θεωρήματος της αντίστροφης συνάρτησης.

Μάλιστα, το ίδιο θεώρημα μας εξασφαλίζει ότι η φ είναι και διαφορίσιμη. ΄Αρα, μπορούμε να εφαρμόσουμε στην (34) τον κανόνα της αλυσίδας για να πάρουμε

(36) $$(\varphi \circ \ln)'(t) \equiv \varphi'(\ln(t))\,\ln'(t) = 1, \quad t \in (0, \infty).$$

΄Ομως, $\ln'(t) = 1/t$. Συνεπώς

(37) $$\varphi'(\ln(t)) = t.$$

Με βάση την (34) αυτή σχέση γράφεται και σαν

(38) $$\varphi'(\ln(t)) = \varphi(\ln(t)) \,.$$

Με άλλα λόγια,

(39) $$\varphi'(s) = \varphi(s), \qquad s \in \mathbb{R}.$$

Αυτό σημαίνει ότι η αντίστροφη της λογαριθμικής έχει την καταπληκτική ιδιότητα να μένει αναλλοίωτη κατά τη διαδικασία της παραγώγισης!

Όπως και η αντίστροφή της, η νέα συνάρτηση φ αναφέρεται με ξεχωριστό όνομα και σύμβολο. Ονομάζεται ***εκθετική συνάρτηση*** και συμβολίζεται με exp. Έτσι, οι σχέσεις που βρήκαμε παραπάνω γράφονται σαν

(40) $$\exp(\ln(t)) = t, \quad t \in (0, \infty),$$

(41) $$\ln(\exp(s)) = s, \quad s \in \mathbb{R},$$

(42) $$\exp'(s) = \exp(s), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Πέρα από το να είναι λύση της ΔΕ (33), η εκθετική συνάρτηση έχει μια σειρά από ξεχωριστές ιδιότητες που προκύπτουν αμέσως από τον ορισμό της:

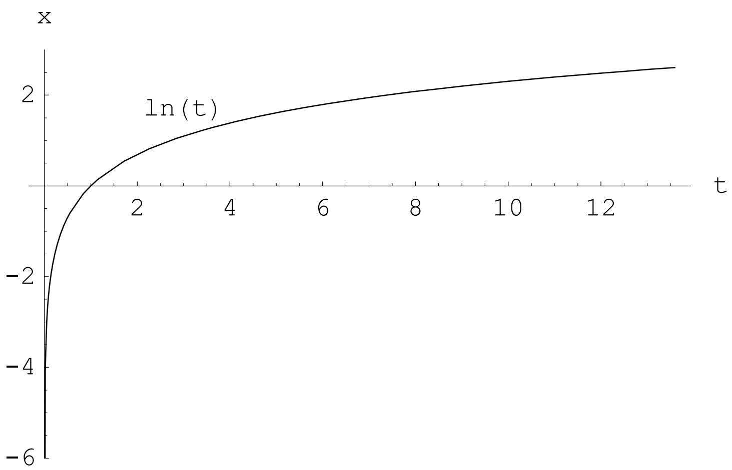
(i) Είναι γνησίως αύξουσα και παίρνει μόνο θετικές τιμές. Ειδικότερα,

(43) $$\exp(0) = 1.$$

(ii) Απεικονίζει το άθροισμα δύο πραγματικών αριθμών στο γινόμενο δύο θετικών:

(44) $$\exp(r + s) = \exp(r)\exp(s).$$

Παρατήρηση. Θέτοντας $r = -s$ στην τελευταία σχέση και λαβαίνοντας υπόψη την (43), βρίσκουμε ότι $\exp(-s)\exp(s) = 1$. Συνακόλουθα, $\exp(-s) = 1/\exp(s)$. Τα γραφήματα των συναρτήσεων $\exp(s)$ και $\exp(-s)$ που παρουσιάζουμε στο επόμενο σχήμα δείχνουν με σαφήνεια τη συμπεριφορά αυτών των συναρτήσεων.



Όπως μόλις διαπιστώσαμε, η εκθετική συνάρτηση $\exp(t)$ αποτελεί λύση της ΔΕ $x'(t) = x(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Παραμένει, όμως, αναπάντητο το ερώτημα ποιό είναι το σύνολο των λύσεων αυτής της εξίσωσης. Για να βρούμε την απάντηση, αρκεί να γράψουμε την παραπάνω ΔΕ στη μορφή

(45) $$x'(t) - x(t) = 0$$

και να παρατηρήσουμε ότι αυτή είναι ισοδύναμη με την

(46) $$\exp(-t)\,[x'(t) - x(t)] = 0.$$

Γιατί, όπως ήδη αναφέραμε, η $\exp(t)$, άρα και η $\exp(-t)$, παίρνει μόνο θετικές τιμές.

Αλλά η τελευταία σχέση είναι ταυτόσημη με την

(47) $$[x(t)\exp(-t)\,]' = 0$$

Συνεπώς,

(48) $$x(t)\exp(-t) = c$$

και άρα

(49) $$x(t) = c\exp(t).$$

Με άλλα λόγια, αποδείξαμε το εξής

Θεώρημα

Το σύνολο των λύσεων της ΔΕ

(50) $$x'(t) = x(t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

αποτελείται από τις συναρτήσεις της μορφής

(51) $$x = c\exp(t),$$

όπου c τυχαία πραγματική σταθερή.

΄Οπως σημειώσαμε, η λογαριθμική συνάρτηση $\ln(t)$ είναι γνησίως αύξουσα και το πεδίο τιμών της καλύπει όλη την πραγματική ευθεία. Επιπλέον, $\ln(1) = 0$. ΄Αρα, σε κάποιο σημείο του άξονα t, μετά το $t = 1$, η $\ln(t)$ θα παίρνει την τιμή 1. Από το γεγονός ότι η $\ln(t)$ είναι γνησίως αύξουσα έπεται ότι αυτό θα είναι και το μοναδικό σημείο όπου η $\ln(t)$ γίνεται μονάδα. Γι' αυτό αξίζει να του δώσουμε όνομα, ας το πούμε e.

Με άλλα λόγια, ο αριθμός e ορίζεται ως η μοναδική λύση της εξίσωσης

(52) $$\ln(e) = 1.$$

Πιο πάνω δείξαμε ότι, αν ο ρ είναι ρητός αριθμός, τότε

(53) $$\ln(t^{\rho}) = \rho\ln(t)$$

΄Αρα, αυτόματα ορίζονται οι ρητές δυνάμεις του πραγματικού αριθμού που ονομάσαμε e κι έχουν την ακόλουθη ιδιότητα:

(54) $$\ln(e^{\rho}) = \rho\ln(e) = \rho, \quad \rho \in \mathbb{Q}.$$

Τώρα, από τη σχέση της λογαριθμικής συνάρτησης προς την εκθετική έπεται ότι η ταυτότητα (54) γράφεται σαν

(55) $$e^{\rho} = \exp(\rho), \quad \rho \in \mathbb{Q}.$$

Συνακόλουθα, ο αριθμός e μπορεί να οριστεί ως η τιμή της εκθετικής συνάρτησης $\exp(s)$ στο σημείο $s = 1$:

(56) $$e = \exp(1).$$

Η (55) αποτελεί την αφετηρία για να ορίσουμε τη δύναμη e^s του αριθμού e για κάθε . $s \in \mathbb{R}$. Συγκεκριμένα, θέτουμε

(57) $$\boxed{e^s := \exp(s), \quad s \in \mathbb{R}}$$

Με βάση αυτό τον ορισμό, από δω και στο εξής θα χρησιμοποιούμε τις e^s και $\exp(s)$ ως εναλλακτικές μορφές της εκθετικής συνάρτησης.

Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι το λ παριστάνει έναν τυχαίο πραγματικό αριθμό. Τότε, η έκφραση $e^{\lambda t}$, $t \in \mathbb{R}$, ορίζει μια 1-παραμετρική οικογένεια διαφορίσιμων συναρτήσεων με την ακόλουθη ιδιότητα:

(58) $$(e^{\lambda t})' \equiv [\exp(\lambda t)]' = \exp'(\lambda t)\,(\lambda t)' = \lambda \exp'(\lambda t).$$

Αλλά, όπως αποδείξαμε πιο πάνω, $\exp'(\lambda t) = \exp(\lambda t)$. Συνεπώς, η προηγούμενη σχέση γίνεται

(59) $$(e^{\lambda t})' = \lambda\, e^{\lambda t}.$$

Αυτό δείχνει ότι η συνάρτηση $e^{\lambda t}$ αποτελεί λύση της ΔΕ

(60) $$x' = \lambda\, x, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Με απλή επανάληψη των βημάτων που οδήγησαν στην επίλυση της $x' = x$, μπορεί κανείς να βρει και τη γενική λύση της 1-παραμετρικής οικογένειας των ΔΕ (60):

(61) $$x = c\, e^{\lambda t}.$$

Οι συναρτήσεις αυτής της μορφής θα δεσπόσουν με την παρουσία τους σε όλο το υπόλοιπο αυτού του βιβλίου. Μάλιστα, κάποιοι συνδυασμοί τους εμφανίζονται τόσο συχνά που αξίζει να τους παραστήσουμε με ειδικό σύμβολο. Πρόκειται για τις λεγόμενες ***υπερβολικές συναρτήσεις*** (υπερβολικό ημίτονο, συνημίτονο κλπ) οι οποίες ορίζονται ως εξής:

(62) $$\sinh(t) := \tfrac{1}{2}\,(e^t - e^{-t}), \qquad \cosh(t) := \tfrac{1}{2}\,(e^t + e^{-t}),$$

(63) $$\tanh(t) := \frac{\sinh(t)}{\cosh(t)} = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}, \quad \text{cotanh}(t) := \frac{1}{\tanh(t)}.$$

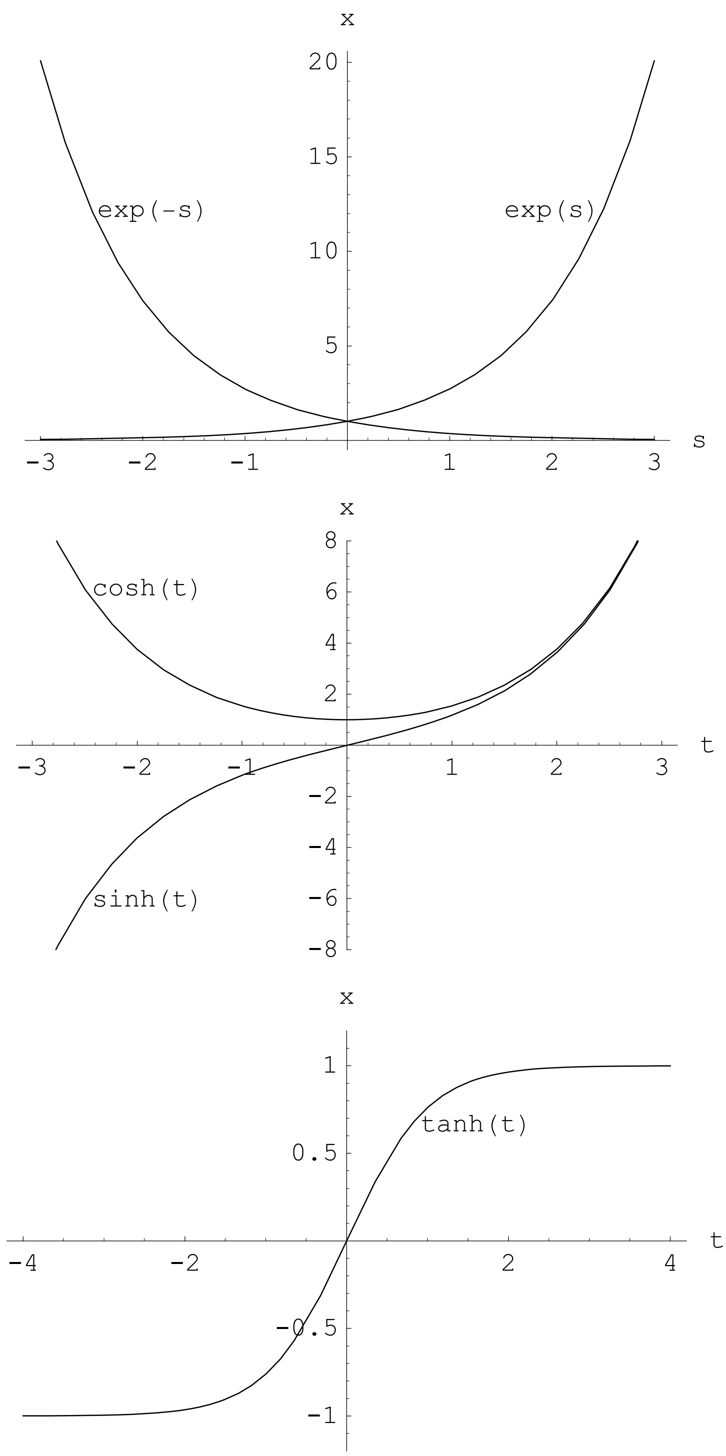
Η βασική σχέση

(64) $$\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$$

αποδείχνεται πολύ εύκολα. Το ίδιο εύκολα αποδείχνεται και το γεγονός ότι οι συναρτήσεις $\sinh(t)$ και $\cosh(t)$ αποτελούν η μία αόριστο ολοκλήρωμα της άλλης:

(65) $$\sinh'(t) = \cosh(t), \quad \cosh'(t) = \sinh(t).$$

Τα επόμενα δύο σχήματα διευκρινίζουν τη συμπεριφορά των συναρτήσεων $\sinh(t)$, $\cosh(t)$ και $\tanh(t)$, η οποία συνάγεται εύκολα από τους αντίστοιχους ορισμούς.



Για $s = \ln(t)$, $t > 0$, ο ορισμός (57) οδηγεί στο ακόλουθο αποτέλεσμα:

(66) $$e^{\ln(t)} := \exp(\ln(t)) = t, \quad t > 0.$$

Κατά συνέπεια, αν το $\rho \in \mathbb{Q}$, τότε

(67) $$e^{\rho \ln(t)} = e^{\ln(t^{\rho})} = \exp(\ln(t^{\rho})) = t^{\rho}$$

Αυτή η σχέση μας οδηγεί στο να επεκτείνουμε την έννοια της δύναμης ενός θετικού αριθμού t από τους ρητούς στους πραγματικούς αριθμούς, θέτοντας

(68) $$\boxed{t^a := e^{a \ln t}, \quad t > 0, \quad a \in \mathbb{R}}$$

Αφήνουμε για άσκηση του αναγνώστη την απόδειξη του γεγονότος ότι η γενικευμένη δύναμη του τυχαίου θετικού αριθμού t είναι διαφορίσιμη συνάρτηση, για την οποία ισχύει ο γνωστός τύπος της παραγώγου:

(69) $$f(t) = t^a \quad \Rightarrow \quad f(t) = a\, t^{a-1}, \quad t > 0, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Ο τρόπος με την οποίο ορίσαμε τη λογαριθμική συνάρτηση, δηλαδή ως τη μοναδική λύση ενός ΠΑΤ, μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για τον ορισμό πολλών άλλων νέων συναρτήσεων. Για ορισμένες απ' αυτές, ο χαρακτηρισμός νέες ίσως θα πρέπει να τεθεί μέσα σε εισαγωγικά. Πρόκειται για εκείνες που, σαν τη λογαριθμική, μπορεί να τις έχει γνωρίσει ο αναγνώστης σε διαφορερικό πλαίσιο. Αυτό ισχύει, ειδικότερα, για τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις και τις αντίστροφές τους.

Για τον παραπάνω λόγο, θα κλείσουμε παρουσιάζοντας δυο ΠΑΤ που οδηγούν σε μια νέα και μια "νέα" συνάρτηση, αντίστοιχα. Στο μεταξύ, θα σημειώσουμε ότι, μια σειρά από νέες συναρτήσεις παράγεται αμέσως από τη σύνθεση των καινούργιων μελών της οικογένειας των γνωστών μας, $e^{\pm t}$ κλπ, με οποιαδήποτε "παλιά". Αυτές οι νέες συναρτήσεις αποκτούν "κάρτα μέλους" αυτόματα. Παράδειγμα αποτελεί η συνάρτηση $\exp(-t^2)$ που προκύπτει από τη σύνθεση της e^{-t} με την t^2.

Παράδειγμα

Να λυθεί το ΠΑΤ

(70) $$x' = e^{-t^2}, \quad t \in \mathbb{R}, \qquad x(0) = a.$$

Λύση: Η συνάρτηση $f(t) = e^{-t^2}$ είναι συνεχής, γιατί αποτελεί τη σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων $g(t) = e^{-t}$ και $h(t) = t^2$. Συνακόλοθα, το θεμελιώδες θεώρημα μας παρέχει αυτόματα τη μοναδική λύση του δοσμένου ΠΑΤ:

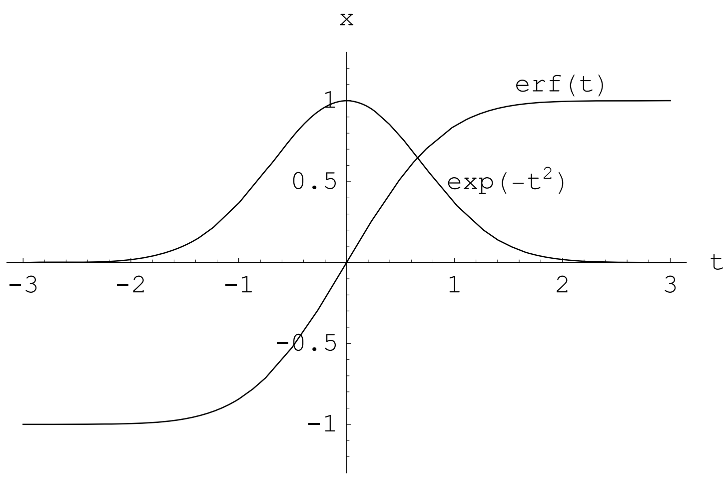
(71) $$x = a + \int_0^t e^{-\xi^2}\, d\xi\,.$$

Ειδικότερα, αν θέλουμε η $x(t)$ να μηδενίζεται στο σημείο $t = 0$, τότε η μοναδική λύση του αντίστοιχου ΠΑΤ δίνεται από τη συνάρτηση $\int_0^t e^{-\xi^2}\, d\xi$. Η τελευταία είναι επίσης μια επώνυμη νέα συνάρτηση. Από τη σημασία της στη στατιστική ανάλυση έχει πάρει το όνομα ***συνάρτηση σφάλματος*** (error function) και συμβολίζεται με $\operatorname{erf}(t)$. Ακριβέστερα,

(72) $$\operatorname{erf}(t) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-\xi^2}\, d\xi,$$

όπου π ένας άρρητος αριθμός που ορίζεται στο επόμενο παράδειγμα.

Από το γεγονός ότι $\operatorname{erf}'(t) = \left(2 \big/ \sqrt{\pi}\right) e^{-t^2}$ αμέσως συνάγεται ότι η συνάρτηση σφάλματος είναι γνησίως αύξουσα. Αυτό φαίνεται καθαρά και από τη γραφική της παράσταση που δίνεται στο επόμενο σχήμα.



Παράδειγμα

Να λυθεί το ΠΑΤ

(73) $$x' = \frac{1}{1+t^2}, \quad t \in \mathbb{R}, \qquad x(0) = 0.$$

Λύση: Προφανώς, η συνάρτηση $f(t) = (1+t^2)^{-1}$ είναι συνεχής. Κατά συνέπεια, η μοναδική λύση αυτού του ΠΑΤ δίνεται από τη συνάρτηση $\int_0^t (1+\xi^2)^{-1}\, d\,\xi$, $t \in \mathbb{R}$. Αυτή είναι γνωστή ως ***τόξο εφαπτομένης t*** και συμβολίζεται με $\arctan(t)$ ή $\tan^{-1}(t)$.

Με άλλα λόγια, το ΠΑΤ επιδέχεται ως μοναδική λύση τη συνάρτηση

(74) $$x = \arctan(t) \equiv \tan^{-1}(t) := \int_0^t \frac{1}{1+\xi^2}\, d\,\xi, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Από το γεγονός ότι

(75) $$\arctan'(t) = \frac{1}{1+t^2} > 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

αμέσως έπεται ότι η συνάρτηση $\arctan(t)$ είναι γνησίως αύξουσα. Από την άλλη, αν $R > 1$, τότε

(76) $$\arctan(R) = \int_0^R \frac{1}{1+\xi^2}\, d\,\xi = \int_0^1 \frac{1}{1+\xi^2}\, d\,\xi + \int_1^R \frac{1}{1+\xi^2}\, d\,\xi.$$

Τώρα,

(77) $$\int_0^1 \frac{1}{1+\xi^2}\, d\,\xi \le \int_0^1 1\, \mathrm{d}\xi \le 1, \qquad \int_1^R \frac{1}{1+\xi^2}\, d\,\xi \le \int_1^R \frac{1}{\xi^2}\, d\,\xi = 1 - \frac{1}{R}.$$

Συνεπώς,

(78) $$\arctan(R) \le 2 - \frac{1}{R}, \qquad R > 1.$$

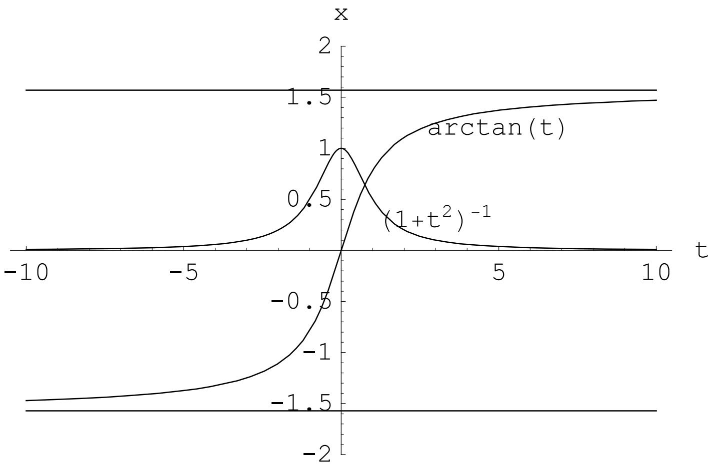
Συνακόλουθα,

(79) $$\lim_{R\to\infty} \arctan(R) \le 2.$$

Αυτό σημαίνει ότι η (γνησίως αύξουσα) συνάρτηση $\arctan(t)$ είναι και πάνω φραγμένη. Συνεπώς, έχει ελάχιστο πάνω φράγμα στο οποίο πλησιάζει ασυμπτωτικά καθώς το $t \to \infty$. Για ιστορικούς λόγους, το διπλάσιο αυτού του ελάχιστου πάνω φράγμαματος συμβολίζεται με το γράμμα π. Με άλλα λόγια

(80) $$\frac{\pi}{2} := \sup_{t\geq 0} \{ \arctan(t) \}.$$

Είναι γνωστό και αποδείχνεται σχετικά εύκολα ότι $\pi \simeq 3,14$. Από την άλλη, είναι προφανές ότι η $\arctan(t)$ είναι περιττή. Συνεπώς, έχει μέγιστο κάτω φράγμα, το οποίο δεν μπορεί παρά να είναι ο αριθμός $-\pi/2$. Αυτόν πλησιάζει η $\arctan(t)$, καθώς το $t \to -\infty$. Αυτά τα στοιχεία αρκούν για δώσουν την ολική εικόνα της συνάρτησης $\arctan(t)$, η οποία και αναδείχνεται στο επόμενο σχήμα.



Αφού η $G(t) := \arctan(t)$, $t \in \mathbb{R}$, είναι γνησίως αύξουσα, θα έχει και αντίστροφη. Ας την ονομάσουμε προσωρινά $T(s)$, $s \in (-\pi/2, \pi/2)$. Αυτό σημαίνει ότι

(81) $$T \circ G(t) \equiv T(G(t)) = t, \quad t \in \mathbb{R},$$

(82) $$G \circ T(s) \equiv G(T(s)) = s, \quad s \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}).$$

Εφαρμόζοντας στην πρώτη από αυτές τις σχέσεις τον κανόνα της αλυσίδας, καταλήγουμε στη σχέση

(83) $$[T(G(t))]' = T'(G(t))\, G'(t) = 1.$$

Συνεπώς,

(84) $$T'(G(t)) = \frac{1}{G'(t)} = 1 + t^2 \quad \Leftrightarrow \quad T'(s) = 1 + T^2(s).$$

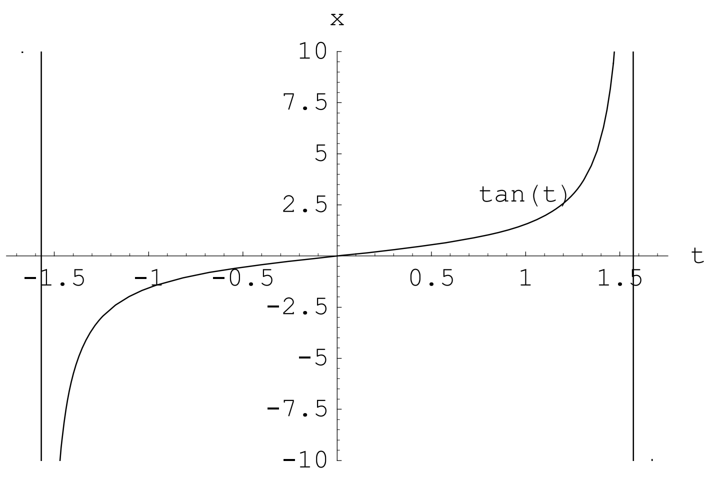
Η αντίστροφη της συνάρτηση $\arctan(t)$ είναι, φυσικά, η ***συνάρτηση της εφαπτομένης***. Δηλαδή,

(85) $$T(s) \equiv \tan(s), \quad s \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}),$$

οπότε η σχέση (84) γράφεται σαν

(86) $$\tan'(s) = \tan^2(s) + 1.$$

Συνεπώς, και η συνάρτηση $\tan(s)$, $s \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, είναι γνησίως αύξουσα, με τις τιμές της να μαβάλλονται όπως δείχνει το επόμενο σχήμα.



Για υστερότερη χρήση, σημειώνουμε ότι, αν θέσουμε $x = \tan(t)$, τότε η σχέση

(87) $$\tan'(t) = \tan^2(t) + 1, \qquad t \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}),$$

που βρήκαμε παραπάνω, γράφεται σαν

(88) $$x' = x^2 + 1$$

΄Αρα η $x = \tan(t)$ ικανοποιεί μια μη γραμμική ΔΕ της μορφής $x' = f(x)$.

Για να ενσωματώσουμε στον κατάλογο των γνωστών μας συναρτήσεων και τις άλλες τριγωνομετρικές, προχωράμε στους ακόλουθους ορισμούς:

(89) $$\sin(t) := \frac{\tan(t)}{\sqrt{1+\tan^2(t)}}, \qquad \cos(t) := \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(t)}}, \qquad t \in (-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}).$$

Από αυτούς τους ορισμούς και την (88) αμέσως έπονται οι ακόλουθες σχέσεις:

(90) $$\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$$

(91) $$\sin'(t) = \cos(t), \qquad \cos'(t) = -\sin(t).$$

Για παράδειγμα, η απόδειξη της πρώτης των (91) ακολουθεί τα εξής βήματα:

$$\begin{aligned}\sin'(t) &= \left[x(1+x^2)^{-1/2}\right]' \\ &= x'(1+x^2)^{-1/2} - x^2\, x'(1+x^2)^{-3/2} \\ &= x'(1+x^2)^{-3/2} = (1+x^2)^{-1/2} = \cos(t).\end{aligned}$$

Είναι φανερό ότι η συνάρτηση $\sin(t)$ είναι περιττή με

(92) $$\lim_{t \nearrow \pi/2} \{\sin(t)\} = 1.$$

Συνακόλουθα,

(93) $$\lim_{t \searrow -\pi/2} \sin(t) = -1.$$

Από την άλλη, η $\cos(t)$ είναι άρτια και

(94) $$\lim_{t \searrow -\pi/2} \cos(t) = \lim_{t \nearrow \pi/2} \cos(t) = 0$$

΄Αρα, οι συναρτήσεις $\sin(t)$ και $\cos(t)$ επεκτείνονται ως συνεχείς συναρτήσεις σε όλο το κλειστό διάστημα $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Αρκεί να επιλέξουμε ως τιμές τους στα άκρα αυτού του διαστήματος τις $\sin(-\pi/2) = -1$, $\sin(\pi/2) = 1$ και $\cos(-\pi/2) = \cos(\pi/2) = 0$, αντίστοιχα.

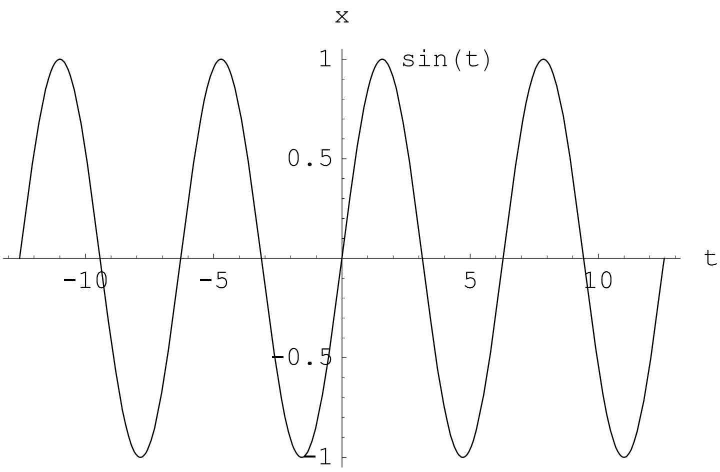
Μάλιστα, ακολουθώντας την καθιερωμένη πρακτική, μπορούμε να επεκτείνουμε το πεδίο ορισμού τους σε όλη την πραγματική ευθεία. Αρκεί να τις ορίσουμε αρχικά στο διάστημα $[-\pi, \pi]$. Για το σκοπό αυτό θέτουμε

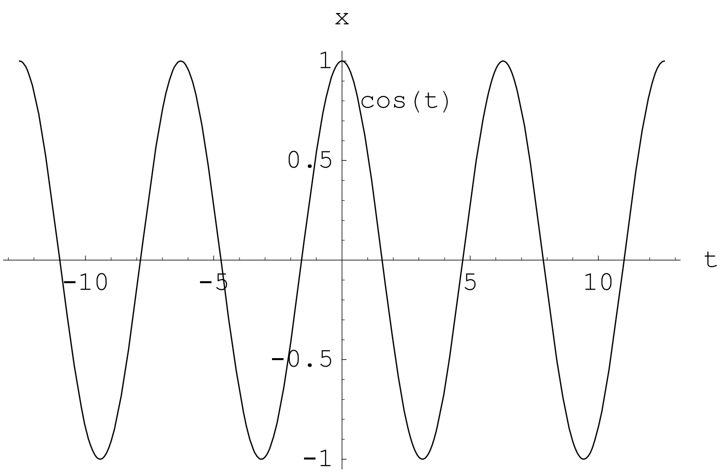
(95) $$\sin(t \pm \tfrac{\pi}{2}) = \pm\cos(t), \qquad \cos(t \pm \tfrac{\pi}{2}) = \mp\sin(t), \quad t \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]$$

Στη συνέχεια, επιβάλλουμε τη συνθήκη

(96) $$\sin(t + 2n\pi) = \sin(t), \qquad \cos(t + 2n\pi) = \cos(t), \quad t \in [-\pi, \pi], \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Με αυτό τον τρόπο, οι συναρτήσεις $\sin(t)$ και $\cos(t)$ ορίζονται για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Από τη συνθήκη (96) έπεται ότι είναι περιοδικές με περίοδο 2π. Εύκολα αποδείχνεται ότι είναι και διαφορίσιμες. Η ποιοτική τους συμπεριφορά φαίνεται καθαρά και στα δύο επόμενα σχήματα.





Ασκήσεις

1. Να λυθούν τα παρακάτω ΠΑΤ της μορφής

$$x' = f(t), \qquad x(a) = b,$$

χωρίς να χρησιμοποιηθούν τριγωνομετρικές ή άλλες "περίπλοκες" συναρτήσεις.

α) $f(t) = \frac{1}{1+t^4}$, $t \in \mathbb{R}$, $a = -1$, $b = 1$.

β) $f(t) = \sqrt{1+t^2}$, $t \in \mathbb{R}$, $a = 0$, $b = 1$.

γ) $f(t) = \begin{cases} 1, & t < 0 \\ \sqrt{1+t^2}, & t \geq 0 \end{cases}$ $a = 0$, $b = 0$.

δ) $f(t) = \begin{cases} \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, & t < 0 \\ 1 - \sqrt{1+t^4}, & t \geq 0 \end{cases}$ $a = 0$, $b = 1$.

ε) $f(t) = \begin{cases} \sqrt{1+t^4}, & t < 0 \\ \frac{1}{1+t^4}, & t \geq 0 \end{cases}$ $a = 0$, $b = -2$.

στ) $f(t) = \begin{cases} \sqrt{1+t^6}, & t < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}, & t \geq 0 \end{cases}$ $a = 1$, $b = 0$.

2.α) Να δειχτεί $\frac{1}{2} < \ln 2 < 1$.

Υπόδειξη: Θεωρείστε δύο ορθογώνια παραλληλόγραμμα του επίπεδου $t - x$, τα οποία έχουν ως κοινή βάση το διάστημα $1 \leq t \leq 2$ του άξονα t και ύψος $\frac{1}{2}$ και 1, αντίστοιχα.

β) Να δειχτεί ότι η λογαριθμική συνάρτηση, $\ln t$, δεν έχει άνω ή κάτω φράγμα. Αναλυτικότερα, δείξτε ότι

$$\lim_{t\to\infty} \ln t = \infty, \qquad \lim_{t\searrow 0} \ln t = -\infty.$$

Υπόδειξη: Από τη σχέση $\ln(t^{\rho}) = \rho \ln(t)$, $\rho \in \mathbb{Q}$, και το μέρος (α) έπεται ότι

$$\ln(2^n) = n \ln(2) > \frac{n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Για οσοδήποτε μεγάλο $M > 0$, υπάρχει φυσικός αριθμός n τέτοιος που $n > 2M$. Δείξτε ότι, αρκεί να επιλέξουμε το $t > 2^n$ για να εξασφαλίσουμε ότι $\ln t > M$.

3. Να δειχτεί ότι

$$\lim_{t\to\infty} \exp t = \infty, \qquad \lim_{t\to-\infty} \exp t = 0.$$

4. Ν' αποδειχτούν οι ακόλουθες σχέσεις:

(i) $\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1$, $\tanh^2(t) = 1 - \frac{1}{\cosh^2(t)}$

(ii) $\sinh'(t) = \cosh(t)$, $\cosh'(t) = \sinh(t)$.

(iii) $\tanh'(t) = 1 - \tanh^2(t)$.

5. Να λυθεί το ΠΑΤ $x' = f(t)$, $x(a) = b$, όταν

α) $f(t) = \frac{1}{t-1}$, $t > 1$, $a = 2$, $b = 1$.

β) $f(t) = 2t + \frac{1}{t}$, $t > 0$, $a = 1$, $b = 0$.

γ) $f(t) = \begin{cases} 1, & t < 1 \\ \frac{1}{t}, & t \geq 1 \end{cases}$ $a = 0$, $b = -1$.

δ) $f(t) = 3\,e^t$, $t \in \mathbb{R}$, $a = 0$, $b = 0$.

ε) $f(t) = 2\,(t - e^{-2\,t})$, $t \in \mathbb{R}$, $a = 1$, $b = 0$.

στ) $f(t) = \frac{1}{t} - 2\,e^{2\,t}$, $t > 0$, $a = 1$, $b = 0$.

ζ) $f(t) = \begin{cases} e^t, & t < 0 \\ \frac{1}{t+1}, & t \geq 0 \end{cases}$ $a = 0$, $b = -1$.

η) $f(t) = \sinh t - 2\cosh t$, $t \in \mathbb{R}$, $a = 0$, $b = 3$.

θ) $f(t) = \begin{cases} e^t, & t < 0 \\ \frac{1}{\cosh^2 t}, & t \geq 0 \end{cases}$ $a = 0$, $b = 2$.

6. Να λυθεί το ΠΑΤ $x' = f(t)$, $x(a) = b$, όταν

α) $f(t) = 2\,t + \frac{1}{t^2+1}$, $t \in \mathbb{R}$, $a = 0$, $b = 1$.

β) $f(t) = \sin t + \cos t$, $t \in \mathbb{R}$, $a = \frac{\pi}{2}$, $b = 1$.

γ) $f(t) = \sin t \cos t$, $t \in \mathbb{R}$, $a = 0$, $b = \frac{\pi}{2}$.

δ) $f(t) = t\cos t$, $t \in \mathbb{R}$, $a = 0$, $b = 1$.

ε) $f(t) = \frac{\cos t}{2+\sin t}$, $t \in \mathbb{R}$, $a = -\frac{\pi}{2}$, $b = -3$.

στ) $f(t) = \begin{cases} 1, & t < 0 \\ \cos t, & t \geq 0 \end{cases}$ $a = -2$, $b = -1$.

ζ) $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t^2+1}, & t < 0 \\ \cos t, & 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \end{cases}$ $a = 0$, $b = 0$.

η) $f(t) = \begin{cases} \cos t, & t < 0 \\ \frac{1}{\cos^2 t}, & 0 \leq t < \frac{\pi}{2} \end{cases}$ $a = -\frac{\pi}{2}$, $b = 0$.

7. Να λυθούν τα ακόλουθα ΠΑΤ της μορφής

$$x' = f(t), \quad x(a) = b.$$

α) $f(t) = e^{-(t-1)^2}$, $t \in \mathbb{R}$, $a = 1$, $b = 1$.

β) $f(t) = e^{-t^2} + \frac{1}{1+t^2}$, $t \in \mathbb{R}$, $a = 0$, $b = \pi$.

γ) $f(t) = \frac{\sin t}{t}$, $t \in \mathbb{R}$, $a = 0$, $b = 1$.

δ) $f(t) = \frac{\sinh t}{t}$, $t \in \mathbb{R}$, $a = 0$, $b = -1$.

8. Ελέγξετε τις λύσεις των Ασκ. 5, 6 και 7 με τη βοήθεια του *Mathematica*.

Υπόδειξη. Ο έλεγχος της λύσης ενός ΠΑΤ με τη βοήθεια του *Mathematica* μπορεί να γίνει είτε άμεσα είτε έμμεσα. Αυτοί οι εναλλακτικοί τρόποι έχουν το ακόλουθο νόημα:

(i) *Άμεσος έλεγχος*: Απλώς αντικαθιστούμε τη λύση που βρήκαμε στην ΔΕ και την αρχική συνθήκη.

(ii) *Έμμεσος έλεγχος*: Ζητάμε από το *Mathematica* να λύσει το πρόβλημα από την αρχή και συγκρίνουμε τη λύση που μας δίνει με αυτήν που έχουμε βρει εκ των προτέρων.

Πιο αξιόπιστο είναι το αποτέλεσμα του άμεσου ελέγχου. Γιατί, **και το *Mathematica* κάνει λάθη**!

Για να λύσετε τη αυτή την άσκηση, μπορείτε να στηριχτείτε στο ακόλουθο

Υπόδειγμα

Η λύση του ΠΑΤ

(*) $$x' = \frac{1-t}{1+t} - e^{-t} \ , \quad t > -1, \quad x(0) = -1,$$

δίνεται από τη συνάρτηση

$$x = e^{-t} - t + 2\ln(1+t), \quad t > -1.$$

Η άμεση επαλήθευση του γεγονότος ότι αυτή η συνάρτηση αποτελεί λύση του ΠΑΤ (*) γίνεται με τον ακόλουθο τρόπο:

Βήμα 1^o

Ορίζουμε το ζευγάρι {ΔΕ, Αρχική Συνθήκη} -το {DE, IC} της επόμενης κυψελίδας.

Σημ. Όπως δείχνει και το παράδειγμα, καλό είναι να απελευθερώσουμε όλα τα σύμβολα που εμφανίζονται στην διατύπωση του προβλήματος από το νόημα που τυχόν απόκτησαν σε προηγούμενη χρήση. Για το σκοπό αυτό, τα τοποθετούμε μέσα σε μιαν αγκύλη, γ.π. [x,y,…,z], και προσθέτουμε ως πρώτο στοιχείο της αρχικής κυψελίδας την εντολή Clear[x,y,…,z].

In[127]:=
```
Clear[DE, IC, f, x, a, b]
DE = x'[t] == (1 - t)/(1 + t) - Exp[-t];
IC = x[0] == 1;
{DE, IC}
```

Out[130]= $\left\{x'(t) = \frac{1-t}{t+1} - e^{-t}, x(0) = 1\right\}$

Βήμα 2^o

Ορίζουμε την συνάρτηση που διεκδικεί τον τίπλο της λύσης του δοσμένου ΠΑΤ, και την αντικαθιστούμε στο ζευγάρι {ΔΕ,ΑΣ}.

In[131]:=
```
x[t_] = e^-t - t + 2 Log[1 + t]
FullSimplify[{DE, IC}]
Clear[DE, IC, f, x, a, b]
```

Out[131]= $-t + e^{-t} + 2\log(t+1)$

Out[132]= {True, True}

Παρατήρηση

Για να μη χάνουμε άσκοπα χρόνο γράφοντας από την αρχή την ΔΕ και την ΑΣ κάθε ΠΑΤ που μας δίνεται για λύση, μπορούμε να αναδιατυπώσουμε το προηγούμενο παράδειγμα με τον τρόπο που υποδείχνει η επόμενη κυψελίδα. Δηλαδή, γράφουμε πρώτα την γενική μορφή του ζευγαριού {ΔΕ, ΑΣ} και, στη συνέχεια, προσδιορίζουμε τα επιμέρους στοιχεία του.

Αυτό μας επιτρέπει να διατυπώνουμε και να λύνουμε κάθε άλλο πρόβλημα της ίδιας μορφής πάρα πολύ γρήγορα. Γιατί, το μόνο που χρειάζεται να κάνουμε από το δεύτερο πρόβλημα και μετά είναι να αντιγράψουμε (copy&paste) ολόκληρη την κυψελίδα του αρχικού προβλήματος και να τροποποιήσουμε ένα μικρό υποσύνολο των στοιχείων της.

In[134]:=

```
Clear[DE, IC, f, x, a, b]
DE = x'[t] == f[t];
IC = x[a] == b;
f[t_] = (1 - t)/(1 + t) - Exp[-t];
a = 0;  b = 1;
{DE, IC}
x[t_] = ⅇ^-t - t + 2 Log[1 + t]
FullSimplify[{DE, IC}]
Clear[DE, IC, f, x, a, b]
```

Out[139]= $\left\{x'(t) = \frac{1-t}{t+1} - e^{-t},\ x(0) = 1\right\}$

Out[140]= $-t + e^{-t} + 2\log(t+1)$

Out[141]= {True, True}

Για να υλοποιήσουμε τον έμμεσο έλεγχο του αποτελέσματος, αρκεί να δώσουμε στο *Mathematica* τις επόμενες εντολές. Βέβαια, κάποιες από αυτές, όπως οι DSolve[DE,x[t],t] και FullSimplify[%], μπορεί να παραληφθούν. Εμείς τις έχουμε συμπεριλάβει, για να μπορέσει ο αναγνώστης να συγκρίνει τα δικά του ενδιάμεσα αποτελέσματα με τη λύση που δίνει το *Mathematica.*

Συνήθως, αυτή η σύγκριση διευκολύνεται με το να απλοποιήσουμε την μορφή της λύσης στην οποία καταλήγει αρχικά το *Mathematica.* Αυτό επιτυγχάνεται με την εντολή FullSimplify[%] (= απλοποίησε πλήρως το προηγούμενο αποτέλεσμα).

In[143]:=
```
Clear[DE, IC, f, x, a, b]
DE = x'[t] == f[t];
IC = x[a] == b;
f[t_] = (1 - t)/(1 + t) - Exp[-t];
a = 0;   b = 1;
{DE, IC}
DSolve[DE, x[t], t]
FullSimplify[%]
DSolve[{DE, IC}, x[t], t]
FullSimplify[%]
Clear[DE, IC, f, x, a, b]
```

Out[148]= $\left\{x'(t) = \frac{1-t}{t+1} - e^{-t},\ x(0) = 1\right\}$

Out[149]= $\{\{x(t) \to -t + e^{-t} + c_1 + 2\log(t+1)\}\}$

Out[150]= $\{\{x(t) \to -t + e^{-t} + c_1 + 2\log(t+1)\}\}$

Out[151]= $\{\{x(t) \to -e^{-t}\,(e^t\, t - 2\, e^t \log(t+1) - 1)\}\}$

Out[152]= $\{\{x(t) \to -t + e^{-t} + 2\log(t+1)\}\}$

2. Γραμμικές ΔΕ πρώτης τάξης

Έχουμε ήδη λύσει τις εξισώσεις της μορφής

(1) $$x' = x$$

και

(2) $$x' = f(t),$$

όπου η $f(t)$ είναι δοσμένη συνάρτηση, συνεχής στο διάστημα που μας ενδιαφέρει.

Θυμίζουμε ότι, στην πρώτη περίπτωση η γενική λύση δίνεται από τη μονοπαραμετρική οικογένεια συναρτήσεων

(3) $$x = c\, e^t$$

και στη δεύτερη από την

(4) $$x = c + \int f(t)\, d\, t,$$

όπου με $\int f(t)\ d\, t$ εννοούμε ένα συγκεκριμένο αόριστο ολοκλήρωμα της $f(t)$.

Στο παρόν εδάφιο θα δείξουμε ότι μπορούμε εύκολα να λύσουμε και κάθε εξίσωση της μορφής

(4) $$x' = f(t) + g(t)\, x, \quad t \in I,$$

όπου $f(t)$, $g(t)$ δοσμένες συναρτήσεις, συνεχείς στο διάστημα I της πραγματικής ευθείας.

Προτού κατασκευάσουμε την λύση, θα υπενθυμίσουμε ότι κάθε εξίσωση που μπορεί να γραφτεί στην παραπάνω μορφή λέγεται γραμμική. Ειδικότερα, όταν η (5) δεν περιέχει τον όρο $f(t)$, όταν δηλαδή είναι της μορφής

(5) $$x' = g(t)\, x, \quad t \in I,$$

τότε η εξίσωση λέγεται ομογενής (γραμμική). Διαφορετικά, λέγεται μη ομογενής.

Για την κατασκευή της γενικής λύσης της γραμμικής εξίσωσης (4) θα παρουσιάσουμε δύο εναλλακτικές μεθόδους. Η πρώτη ξεκινάει από την ανάλυση της αντίστοιχης ομογενούς, δηλαδή της ΔΕ (5). Είναι φανερό ότι μια λύση αυτής της εξίσωσης είναι η μηδενική συνάρτηση. Για να εξετάσουμε άν επιδέχεται και άλλες λύσεις, υποθέτουμε ότι η άγνωστη συνάρτηση είναι μη μηδενική σε κάποιο σημείο a του διαστήματος I. Σ' αυτή την περίπτωση, η συνάρτηση x, αφού είναι υποχρεωτικά συνεχής στο I, θα είναι μη μηδενική και σε κάποιο διάστημα $\tilde{I} \subset I$ που περιέχει το σημείο a. Συνακόλουθα, στο $\tilde{I}$, η (5) είναι ισοδύναμη με την

(6) $$\frac{x'}{x} = g(t), \qquad t \in \tilde{I}.$$

Η τελευταία, όμως, είναι ισοδύναμη με την

(7) $$(\ln|x|)' = g(t), \qquad t \in \tilde{I}.$$

Συνεπώς,

(8) $$\ln|x| = \int g(t)\,dt + \tilde{c}.$$

όπου $\tilde{c}$ τυχαία σταθερή.

Με άλλα λόγια,

(9) $$|x| = e^{\int g(t)\,dt + \tilde{c}} = e^{\tilde{c}}\, e^{\int g(t)\,dt}.$$

Αφού η εκθετική συνάρτηση είναι πάντοτε θετική, η τελευταία σχέση μας λέει το εξής: Η λύση $x(t)$ της ΔΕ (5) δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο του διαστήματος $\tilde{I}$. ΄Αρα, είτε θα είναι παντού θετική και ίση με $x = e^{\tilde{c}}\, e^{\int g(t)\,dt}$, είτε παντού αρνητική και ίση με $x = -e^{\tilde{c}}\, e^{\int g(t)\,dt}$. Αν θυμηθούμε ότι το σημείο $a \in I$ επιλέχτηκε τυχαία, θα συμπεράνουμε αμέσως ότι το προηγούμενο αποτέλεσμα ισχύει για όλο το διάστημα I.

Συγκεντώνοντας τα προηγούμενα αποτελέσματα, μπορούμε να πούμε ότι η γενική λύση της ομογενούς γραμμικής εξίσωσης (5) δίνεται από την μονοπαραμετρική οικογένεια συναρτήσεων

(10) $$x = c\, e^{\int g(t)\,dt}$$

όπου το c παριστάνει οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό.

Παράδειγμα

(i) Αν η $g(t)$ είναι σταθερή, αν δηλαδή $g(t) = k$, τότε μπορούμε να θέσουμε

(11) $$\int g(t)\,dt = \int k\,dt = k\,t.$$

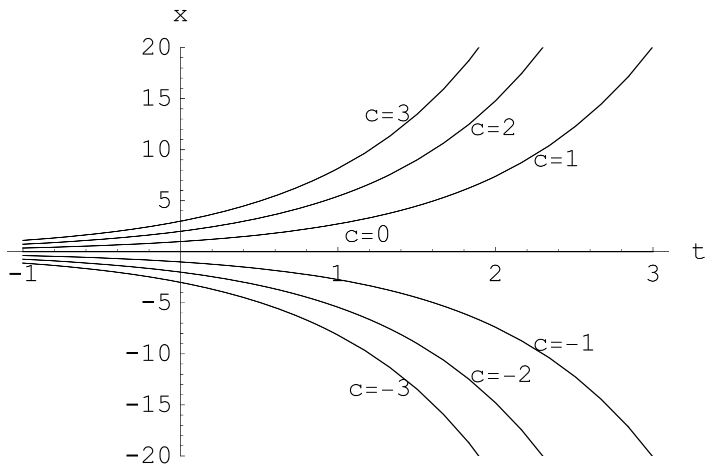
Συνεπώς, η γενική λύση της εξίσωσης

(12) $$x' = k\,x$$

δίνεται από την έκφραση

(13) $$x = c\,e^{k\,t}$$

Στο επόμενο σχήμα δείχνουμε το γράφημα ορισμένων από τις λύσεις (13), στην περίπτωση όπου $k = 1$. Η γραφική παράσταση έχει κατασκευαστεί περιορίζοντας την ανεξάρτητη μεταβλητή στο διάστημα $-1 \leq t \leq 3$ και το πεδίο τιμών των λύσεων στο $-20 \leq x(t) \leq 20$.



(ii) Αν η $g(t) = k + l\,t$, με k, l τυχαίες σταθερές, τότε μπορούμε να θέσουμε

(14) $$\int g(t)\,d\,t = \int (k + l\,t)\,d\,t = k\,t + \tfrac{1}{2}\,l\,t^2.$$

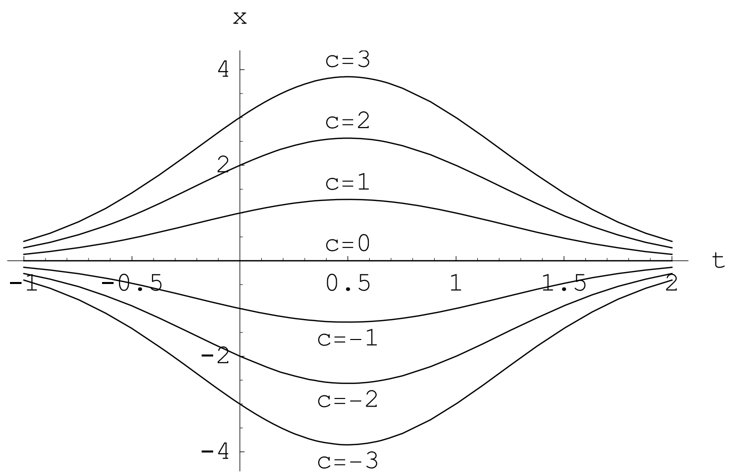
Συνεπώς, η γενική λύση της εξίσωσης

(15) $$x' = (k + l\,t)\,x$$

δίνεται από την έκφραση

(16) $$x = c\,e^{k\,t + \frac{1}{2}\,l\,t^2}.$$

Στο επόμενο σχήμα δείχνουμε ορισμένες από τις ολοκληρωτικές καμπύλες της ΔΕ (15), για την περίπτωση όπου $k = 1$, $l = -2$.



Αξίζει τώρα να παρατηρήσουμε ότι η γενική λύση (10) της ομογενούς ΔΕ $x' = g(t)\,x$ έχει την ακόλουθη δομή. Το βασικό της στοιχείο είναι η συνάρτηση

$$u(t) := e^{\int g(t)\,dt} \tag{16}$$

η οποία, προφανώς, είναι και λύση της $x' = g(t)\,x$. Κάθε άλλη λύση αυτής της εξίσωσης είναι ένα σταθερό πολλαπλάσιο της $u(t)$, δηλαδή είναι της μορφής $c\,u(t)$.

Αυτή η παρατήρηση μας οδηγεί στο να εξετάσουμε το ενδεχόμενο να υπάρχουν λύσεις και της μη ομογενούς ΔΕ (4) με τη μορφή πολλαπλάσιου της $u(t)$. Προφανώς, οι συναρτήσεις που έχουν ακριβώς τη μορφή $c\,u(t)$ δίνουν απλώς και μόνο λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς. ΄Αρα το μόνο που αξίζει να διερευνηθεί είναι η πιθανότητα να υπάρχουν λύσεις της μη ομογενούς με τη μορφή του γινόμενου της $u(t)$ με μία μη σταθερή συνάρηση $y(t)$.

Ας υποθέσουμε, λοιπόν, ότι

$$x(t) = y(t)\,u(t), \tag{17}$$

όπου $y(t)$ τυχαία διαφορίσιμη συνάρτηση και $u(t)$ η βασική λύση (16) της ομογενούς. Τότε,

$$x' = y'\,u + y\,u', \tag{18}$$

και άρα, με αντικατάσταση στη ΔΕ (4), βρίσκουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$y'\,u + y\,u' = f + g\;y\,u\,. \tag{19}$$

΄Ομως, από τον ορισμό (16) της συνάρτησης u έπεται ότι $u' = g\,u$ και $u(t) > 0$, για κάθε t στο διάστημα ορισμού της g . ΄Αρα η προηγούμενη σχέση είναι ισοδύναμη με την

$$y'(t) = \frac{f(t)}{u(t)}\,. \tag{20}$$

Συνακόλουθα,

$$y(t) = \int \frac{f(t)}{u(t)}\,d\,t + c. \tag{21}$$

Πραγματικά, λοιπόν, υπάρχουν λύσεις της μη ομογενούς ΔΕ (4) οι οποίες είναι της μορφής $y(t)\,u(t)$ και δίνονται από την έκφραση

$$x = \left[c + \int \frac{f(t)}{u(t)}\,d\,t\right] u(t) \tag{22}$$

Η τεχνική επίλυσης της μη ομογενούς ΔΕ πρώτης τάξης που οδήγησε στον τύπο (22) ονομάζεται ***μέθοδος της μεταβολής της σταθερής (ή της παραμέτρου)***. Το όνομά της έχει προφανή προέλευση: Για να φτάσουμε στην γενιική λύση (22), δεχτήκαμε ως υπόθεση εργασίας ότι, η λύση της μη ομογενούς είναι της μορφής στην οποία καταλήγουμε, όταν, στη θέση της παραμέτρου c της γενικής λύσης $c\,u(t)$ της αντίστοιχης ομογενούς, βάλουμε μια μη σταθερή συνάρτηση. ΄Οπως θα διαπιστώσουμε στο επόμενο κεφάλαιο, η ίδια τεχνική είναι εξίσου αποτελεσματική και στην επίλυση μη ομογενών εξισώσεων μεγαλύτερης τάξης.

Επιστρέφοντας στο ζήτημα των λύσεων της ΔΕ (4), σημειώνουμε ότι εκείνο που έχουμε αποδείξει ως τώρα είναι ότι, κάθε μέλος της οικογένειας των συναρτήσεων (22) αποτελεί λύση της παραπάνω ΔΕ. Γενικά, όμως, αυτό δεν σημαίνει ότι αμέσως ισχύει και το αντίστροφο. Δηλαδή, ότι κάθε λύση της (4) είναι μέλος της μονοπαραμετρικής οικογένειας (22).

Ωστόσο, στην προκείμενη περίπτωση, το αντίστροφο όντως ισχύει. Για να το αποδείξουμε, αρκεί να υποθέσουμε ότι η συνάρτηση $z(t)$, $t \in I$, είναι μια τυχαία λύση της ΔΕ (4). Αυτό σημαίνει ότι $z' = f + g\,z$, για κάθε $t \in I$. Αν, από την άλλη, η $x(t)$, $t \in I$, είναι οποιοδήποτε μέλος της οικογένειας (22), τότε $x' = f + g\,x$. Συνεπώς, $z' - x' = g\,(z - x)$, για κάθε $t \in I$. Με άλλα λόγια, η συνάρτηση $\upsilon(t) := z(t) - x(t)$ είναι υποχρεωτικά λύση της ομογενούς ΔΕ $\upsilon' = g\,\upsilon$. Άρα, $\upsilon = C\,u(t)$, όπου C τυχαία σταθερή. Συνακόλουθα, $z = x + C\,u$. Αλλά, αυτό σημαίνει ότι και η λύση $z(t)$ γράφεται στη μορφή (22). Απλώς, τη θέση της αυθαίρετη σταθερής c παίρνει η $\tilde{c} = c + C$.

Συγκεντρώνοντας τα προηγούμενα αποτελέσματα, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι έχουμε πλέον αποδείξει το ακόλουθο

Θεώρημα

Η γενική λύση της μη ομογενούς γραμμικής εξίσωσης

(23) $$x' = f(t) + g(t)\,x \qquad t \in I,$$

όπου $f(t)$, $g(t)$ συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα I, δίνεται από τη μονοπαραμετρική οικογένεια συναρτήσεων

(24) $$\boxed{x = \left[c + \int \tfrac{f(t)}{u(t)}\,d\,t\right] u(t), \qquad u(t) := e^{\int g(t)\,d\,t}}$$

Παρατήρηση. Η γενική λύση (24) της ΔΕ (23) γράφεται σαν

(25) $$x = x_o + x_\varepsilon,$$

όπου

(26) $$x_o := c\,u(t), \qquad x_\varepsilon := u(t) \int \tfrac{f(t)}{u(t)}\,d\,t, \qquad u(t) := e^{\int g(t)\,d\,t}.$$

Όπως αποδείξαμε παραπάνω, οι συναρτήσεις $c\,u(t)$ αποτελούν τη γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς, $x' = g(t)\,x$. Από την άλλη, η συνάρτηση $u(t) \int [f(t)/u(t)]\,d\,t$ αποτελεί λύση της (23), αφού προκύπτει από την (24) όταν $c = 0$. Συνεπώς, μπορούμε να αναδιατυπώσουμε το προηγούμενο θεώρημα ως εξής.

Η γενική λύση μιας ΔΕ της μορφής (23) *κατασκευάζεται προσθέτοντας οποιαδήποτε ειδική λύση αυτής της εξίσωσης στην γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς.*

Παράδειγμα

Πρόβλημα: Να βρεθεί η γενική λύση της μη ομογενούς γραμμικής εξίσωσης

$$x' = 2\cos t - x\,, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Στη συνέχεια, να βρεθεί η λύση που σέβεται τη συνθήκη $x(0) = 1$.

Λύση

Σ' αυτή την περίπτωση

$$f(t) = 2\cos t, \quad g(t) = -1.$$

΄Αρα,

$$u(t) := e^{\int g(t)\,d t} = e^{-t},$$

οπότε

$$\int \frac{f(t)}{u(t)}\,d t = \int 2\cos t\, e^t\,d t.$$

Τώρα,

$$\int \cos t\, e^t\,d t = \int (\sin t)'\, e^t\,d t = \sin t\, e^t - \int \sin t\,(e^t)'\,d t = \sin t\, e^t - \int \sin t\, e^t\,d t$$
$$= \sin t\, e^t + \int (\cos t)'\, e^t\,d t = \sin t\, e^t + \cos t\, e^t - \int \cos t\,(e^t)'\,d t.$$

Συνεπώς,

$$\int \cos t\, e^t\,d t = \frac{1}{2}\, e^t(\sin t + \cos t).$$

΄Αρα, η γενική λύση της παραπάνω εξίσωσης δίνεται από την έκφραση

$$x = \left[c + \int \frac{f(t)}{u(t)}\,d t\right] u(t) = [c + e^t(\sin t + \cos t)]\, e^{-t} = c\, e^{-t} + \sin t + \cos t.$$

Το προηγούμενο αποτέλεσμα συνεπάγεται ότι

$$x(0) = c + 1.$$

Από την σύγκριση αυτής της σχέσης με την αρχική συνθήκη $x(0) = 1$ έπεται ότι $c = 0$. Αυτό σημαίνει ότι η (μοναδική) λύση του ΠΑΤ $x' = 2\cos t - x$, $t \in \mathbb{R}$, $x(0) = 1$, δίνεται από τη συνάρτηση $x = \sin t + \cos t$, $t \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα

Πρόβλημα: Να βρεθεί η γενική λύση της μη ομογενούς γραμμικής εξίσωσης

$$x' = 2\,t\,(1 - x), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Λύση

Στην προκείμενη περίπτωση,

$$f(t) = 2\,t, \quad g(t) = -2\,t,$$

και άρα

$$\int g(t)\,d t = -t^2.$$

Συνακόλουθα,

$$u(t) := e^{\int g(t)\,d t} = e^{-t^2}$$

και

$$\int \frac{f(t)}{u(t)}\,d t = \int 2\,t\,e^{t^2}\,d t = \int \left(e^{t^2}\right)'\,d t = e^{t^2}.$$

Συνεπώς, την γενική λύση της πιο πάνω ΔΕ συναποτελούν οι συναρτήσεις

$$x = e^{-t^2}\,(c + e^{t^2}) = 1 + c\,e^{-t^2}.$$

Ως εισαγωγή στην εναλλακτική διαδικασία επίλυσης των γραμμικών εξισώσεων πρώτης τάξης, ας εξετάσουμε την ακόλουθη παραλλαγή του προηγούμενου παραδείγματος.

Παράδειγμα

Πρόβλημα: Να βρεθεί η γενική λύση της μη ομογενούς γραμμικής εξίσωσης

$$x' = 2\,t\,(t^2 - x)\,, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Λύση

Η δοσμένη ΔΕ είναι ισοδύναμη με την

$$x' + 2\,t\,x = 2\,t^3.$$

Αν το αριστερό μέλος αυτής της ΔΕ ήταν η παράγωγος μιας συνάρτησης της μορφής $y(t)\,x(t)$, τότε η λύση της θα βρισκόταν αμέσως, με απλή ολοκλήρωση.

Ωστόσο, το να μετατρέψουμε την έκφραση $x' + 2\,t\,x$ στη μορφή $(y\,x)'$ δεν είναι και τόσο δύσκολο. Αρκεί να την πολλαπλασιάσουμε με τη συνάρτηση e^{t^2}. Γιατί, τότε

$$e^{t^2}(x' + 2\,t\,x) = e^{t^2}\,x' + (e^{t^2})'\,x = (e^{t^2}\,x)'.$$

Αφού η συνάρτηση e^{t^2} δεν παίρνει παρά μόνο θετικές τιμές, αυτός ο πολλαπλασιασμός είναι θεμιτός και μας επιτρέπει να πούμε ότι η προς λύση ΔΕ είναι ισοδύναμη με την

$$(e^{t^2}\,x)' = 2\,t^3\,e^{t^2}.$$

΄Αρα,

$$e^{t^2}\,x = \int 2\,t^3\,e^{t^2}\,d\,t + c,$$

οπότε

$$x = e^{-t^2}\left(\int 2\,t^3\,e^{t^2}\,d\,t + c\right).$$

Τώρα, η κατά παράγοντες ολοκλήρωση οδηγεί στο εξής αποτέλεσμα:

$$\int 2\,t^3\,e^{t^2}\,d\,t = \int t^2\,(e^{t^2})'\,d\,t = t^2\,e^{t^2} - \int 2\,t\;e^{t^2}\,d\,t = t^2\,e^{t^2} - e^{t^2}$$

Συνεπώς, η γενική λύση της ΔΕ του προβλήματος δίνεται από τις συναρτήσεις της μοφής

$$x = e^{-t^2}\,(t^2\,e^{t^2} - e^{t^2} + c) = c\,e^{-t^2} + t^2 - 1.$$

Η παρουσίαση της δεύτερης μεθόδου που οδηγεί στη γενική λύση των μη ομογενών γραμμικών εξισώσεων διευκολύνεται με το να γράψουμε τη γενική τους μορφή ως εξής:

(27) $$x' + s(t)\,x = f(t) \qquad t \in I.$$

Στο πρότυπο του προηγούμενου παραδείγματος, το πρώτο βήμα αυτής της μεθόδου έγκειται στο να μετατρέψουμε το αριστερό μέλος της (27) στην παράγωγο μιας διαφορίσιμης συνάρτησης.

Για το σκοπό αυτό, παρατηρούμε ότι, αν η συνάρτηση $S(t)$ είναι ένα αόριστο ολοκλήρωμα της συνεχούς συνάρτησης $s(t)$, τότε

(28) $$(e^{S(t)})' = e^{S(t)}\, S'(t) = e^{S(t)}\, s(t).$$

Τώρα, αφού $e^{S(t)} > 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$, η εξίσωση (27) δεν αλλάζει αν πολλαπλασιαστεί με την συνάρτηση $e^{S(t)}$. Με άλλα λόγια, η (27) είναι ισοδύναμη προς την

(29) $$e^{S(t)}\, x' + e^{S(t)}\, s(t)\, x = e^{S(t)}\, f(t) \qquad t \in I.$$

Αλλά, με βάση την (28), η τελευταία γράφεται σαν

(30) $$e^{S(t)}\, x' + (e^{S(t)})'\, x = e^{S(t)}\, f(t) \qquad t \in I.$$

Ισοδύναμα,

(31) $$(e^{S(t)}\, x)' = e^{S(t)}\, f(t), \qquad t \in I.$$

Αφού το αριστερό μέλος αυτής της ΔΕ είναι ρητά η παράγωγος της συνάρτησης $e^{S(t)}\, x$, ο αρχικός μας στόχος έχει επιτευχθεί.

Ουσιαστικά, έχουμε επιτύχει κάτι περισσότερο. Συγκεκριμένα, η (31) είναι της μορφής $y' = F(t)$, όπου $y := e^{S(t)}\, x$, $F(t) := e^{S(t)}\, f(t)$. ΄Αρα, $y = c + \int F(t)\, d\, t$. Ισοδύναμα,

(32) $$e^{S(t)}\, x = c + \int e^{S(t)}\, f(t)\, d\, t$$

και άρα

(33) $$x = e^{-S(t)}[c + \int e^{S(t)}\, f(t)\, d\, t]$$

όπου

(34) $$S(t) = \int s(t)\, d\, t.$$

Παρατήρηση. Είναι προφανές ότι η γενική λύση (33) της μη ομογενούς γραμμικής εξίσωσης δεν μπορεί να είναι διαφορετική από εκείνη που βρήκαμε με τη μέθοδο της μεταβολής της παραμέτρου. Πραγματικά, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι η (27) μετατρέπεται στην (4) θέτοντας $s(t) = -g(t)$, για να διαπιστώσουμε ότι οι λύσεις (24) και (33) είναι ταυτόσημες.

Από την (28) μπορούμε να συνεχίσουμε με τρόπο ώστε να βρούμε απ' ευθείας τη λύση του ΠΑΤ

(35α) $$x' + s(t)\, x = f(t), \qquad t \in I,$$

(35β) $$x(t_0) = x_0, \qquad t_0 \in I$$

Γιατί, από την (28) έπεται ότι

(36) $$\int_{t_0}^{t} (e^{S(\xi)}\, x)'\, d\,\xi = \int_{t_0}^{t} e^{S(\xi)}\, f(\xi)\, d\,\xi$$

Ισοδύναμα,

(37) $$e^{S(t)}\, x(t) - e^{S(t_0)}\, x(t_0) = \int_{t_0}^{t} e^{S(\xi)}\, f(\xi)\, d\,\xi$$

Συνακόλουθα,

(38) $$x(t) = e^{-[S(t)-S(t_0)]}\, x(t_0) + e^{-S(t)} \int_{t_0}^{t} e^{S(\xi)}\, f(\xi)\, d\,\xi$$

Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι η προηγούμενη σχέση γράφεται και στην ακόλουθη μορφή.

(39) $$x(t) = e^{-[S(t)-S(t_0)]}\, x(t_0) + \; e^{-[S(t)-S(t_0)]} \int_{t_0}^{t} e^{S(\xi)-S(t_0)}\, f(\xi)\, d\,\xi$$

Γιατί, $e^{S(t_0)}\, e^{-S(t_0)} = 1$ και η ποσότητα $e^{-S(t_0)}$, ως σταθερή, μπορεί να την περάσει μέσα στο ολοκλήρωμα. Αρκεί τώρα να λάβουμε υπόψη την αρχική συνθήκη $x(t_0) = x_0$ και να εισαγάγουμε την συνάρτηση

(40) $$T(t) := S(t) - S(t_0) \equiv \int_{t_0}^{t} s(\xi)\, d\,\xi,$$

για να δώσουμε στο προηγούμενο αποτέλεσμα την ακόλουθη μορφή:

(41) $$x(t) = e^{-T(t)} \left[x_0 + \; \int_{t_0}^{t} e^{T(\xi)}\, f(\xi)\, d\,\xi\, \right].$$

Με άλλα λόγια έχουμε πλέον αποδείξει το ακόλουθο

Θεώρημα

Ας υποτεθεί ότι οι συναρτήσεις $s(t)$, $f(t)$ είναι συνεχείς στο διάστημα I κι ότι το x_0 παριστάνει έναν τυχαίο πραγματικό αριθμό. Τότε το ΠΑΤ

$$x' + s(t)\, x = f(t), \quad t \in I, \qquad x(t_0) = x_0, \quad t_0 \in I,$$

έχει μία μόνο λύση. Αυτή ισχύει σε όλο διάστημα I και δίνεται από την συνάρτηση

$$x(t) = e^{-T(t)} \left[x_0 + \; \int_{t_0}^{t} e^{T(\xi)}\, f(\xi)\, d\,\xi\, \right], \qquad T(t) := \int_{t_0}^{t} s(\xi)\, d\,\xi, \quad t \in I.$$

Παράδειγμα

Πρόβλημα: Να λυθεί το ΠΑΤ

$$x' - 2\, t\, x = t, \qquad t \in \mathbb{R}, \qquad x(0) = 0.$$

Λύση

Στην προκείμενη περίπτωση $s(t) = -2\, t$, $f(t) = t$, $t_0 = x_0 = 0$. ΄Αρα,

$$T(t) := \int_{t_0}^{t} s(\xi)\, d\,\xi = \int_{t_0}^{t} (-2\,\xi)\, d\,\xi = -t^2$$

Συνεπώς,

$$x(t) = e^{-T(t)} \left[x_0 + \; \int_{t_0}^{t} e^{T(\xi)}\, f(\xi)\, d\,\xi\, \right] = e^{t^2} \int_{0}^{t} e^{-\xi^2}\, \xi\, d\,\xi$$

$$= e^{t^2} \int_{0}^{t} \left(-\tfrac{1}{2}\, e^{-\xi^2}\right)'\, d\,\xi = \tfrac{1}{2}\, e^{t^2} (1 - e^{-t^2}),$$

ή

$$x(t) = \tfrac{1}{2}\, (e^{t^2} - 1)$$

Παράδειγμα

Πρόβλημα: Να λυθεί το ΠΑΤ

$$t\,x' + 2\;x = 4\,t^2, \quad t \in \mathbb{R}, \qquad x(1) = 2.$$

Λύση

Αρχικά παρατηρούμε ότι, για $t \neq 0$, η ΔΕ γράφεται στη μοφφή $x' + s(t)\,x = f(t)$, με $s(t) = 2\,t^{-1}$, $f(t) = 4\,t$. Αφού $t_0 = 1$, περιοριζόμαστε στο διάστημα $t > 0$, οπότε

$$T(t) := \int_{t_0}^{t} s(\xi)\,d\,\xi = \int_{1}^{t} 2\,\xi^{-1}\,d\,\xi = 2\ln t.$$

΄Αρα

$$x(t) = e^{-T(t)}\left[x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{T(\xi)}\,f(\xi)\,d\,\xi\right] = t^{-2}\left[2 + \int_{1}^{t}\xi^2(4\,\xi)\,d\,\xi\right] = t^{-2}\left[2 + (t^4 - 1)\right]$$

ή

$$x(t) = t^{-2} + t^2, \qquad t > 0.$$

Παράδειγμα

Πρόβλημα: Να λυθεί το ΠΑΤ

$$(1 - t^2)\,x' - t\;x = 1, \quad t \in \mathbb{R}, \qquad x(0) = 0.$$

Λύση

Στο διάστημα $(-1, 1)$, το οποίο περιέχει και το $t_0 = 0$, η ΔΕ γράφεται στην μορφή $x' + s(t)\,x = f(t)$, με

$$s(t) = -\frac{t}{1-t^2}, \qquad f(t) = \frac{1}{1-t^2}.$$

Συνεπώς,

$$T(t) := \int_{t_0}^{t} s(\xi)\,d\,\xi = \int_{0}^{t}\left(-\frac{\xi}{1-\xi^2}\right)d\,\xi = \frac{1}{2}\int_{0}^{t}[\ln(1-\xi^2)]'\,d\,\xi = \frac{1}{2}\ln(1-t^2).$$

΄Αρα,

$$x(t) = e^{-T(t)}\left[x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{T(\xi)}\,f(\xi)\,d\,\xi\right] = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\int_0^t \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{1-\xi^2}\,d\,\xi = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\,d\,\xi.$$

΄Ομως,

$$\int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\,d\,\xi = \sin^{-1}(t).$$

΄Αρα, η λύση του δοσμένου ΠΑΤ δίνεται από την συνάρτηση

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\sin^{-1}(t), \qquad t \in (-1, 1).$$

Ασκήσεις

1. Να βρεθεί η γενική λύση κάθε μιας από τις επόμενες ΔΕ. Σε κάθε περίπτωση, να προσδιοριστεί και η συνάρτηση που σέβεται την αντίστοιχη αρχική συνθήκη.

α) $x' = 2\,t^3 - t\,x\,,\quad t \in \mathbb{R},\qquad x(0) = 0.$

β) $x' + x = 2\,(t-1)^2\,,\quad t \in \mathbb{R},\qquad x(0) = 12.$

γ) $x' = 2\,t\sin t + x\,,\quad t \in \mathbb{R},\qquad x(0) = 3.$

δ) $x' + (\sin t)\,x = \sin t\,,\quad t \in \mathbb{R},\qquad x(\frac{\pi}{2}) = 2.$

ε) $x' + (\tan t)\,x = \tan t\,,\quad t \in (-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}),\qquad x(0) = 2.$

στ) $t\,x' + x = t\,e^{2\,t}\,,\quad t < 0,\qquad x(-1) = -\frac{1}{2\,e^2}.$

ζ) $x' + 2\,x = \tanh t\,,\quad t \in \mathbb{R},\qquad x(1) = 2.$

2. Να λυθούν τα παρακάτω ΠΑΤ, αφού πρώτα βρεθεί η γενική λύση της αντίστοιχης ΔΕ.

α) $x' - x = f(t)\,,\quad f(t) := \begin{cases} 1, & t \le 0 \\ 1-t, & t > 0 \end{cases}\qquad x(0) = 1.$

β) $x' + x = f(t)\,,\quad f(t) := \begin{cases} t, & t \le 0 \\ t^2, & t > 0 \end{cases}\qquad x(0) = 2.$

γ) $x' + 2\,x = f(t)\,,\quad f(t) := \begin{cases} e^{-t}, & t \le 0 \\ 1+t^2, & t > 0 \end{cases}\qquad x(0) = 0.$

δ) $x' = t + g(t)\,x\,,\quad g(t) := \begin{cases} 0, & t \le 0 \\ t, & t > 0 \end{cases}\qquad x(0) = 1.$

ε) $x' = t - g(t)\,x\,,\quad g(t) := \begin{cases} \frac{t}{1+t^2}, & t \le 0 \\ t, & t > 0 \end{cases}\qquad x(0) = 0.$

στ) $x' = t^2 - g(t)\,x\,,\quad g(t) := \begin{cases} 1, & t \le 0 \\ 1+\tanh t, & t > 0 \end{cases}\qquad x(0) = 0.$

ζ) $x' = \cos t - g(t)\,x\,,\quad g(t) := \begin{cases} 1, & t \le 0 \\ \cos t, & t > 0 \end{cases}\qquad x(-\pi) = 0.$

3. Να λυθούν τα ακόλουθα ΠΑΤ

α) $x' - 2\,x = t^2 - 1\,,\qquad t \in \mathbb{R},\quad x(0) = 0.$

β) $x' - 2\,t\,x = e^{-t^2}\,,\qquad t \in \mathbb{R},\quad x(0) = 0.$

γ) $x' - 2\,t\,x = 2\,,\qquad t \in \mathbb{R},\quad x(0) = \sqrt{\pi}\,.$

δ) $x' + (\tan t)\,x = 3\cos t\,,\qquad t \in (-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}),\quad x(0) = -1$

ε) $x' + (\tanh t)\,x = 1\,,\qquad t \in \mathbb{R},\quad x(0) = 1$

στ) $x' + (\tanh t)\, x = 1 + \cosh t$, $t \in \mathbb{R}$, $x(0) = 0$

ζ) $t\, x' + x = t^2$, $t > 0$, $x(1) = 0$

η) $t(t-2)\, x' - 2\, x = t$, $0 < t < 2$, $x(1) = 1$

θ) $x' - (\sin 2\, t)\, x = 2$, $t \in \mathbb{R}$, $x(0) = 1$

ι) $x' - 2\, x = f(t)$, $f(t) := \begin{cases} -1, & t \leq 0 \\ t^2 - 1, & t > 0 \end{cases}$ $x(0) = 0.$

κ) $x' + 3\, x = f(t)$, $f(t) := \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 1 - e^{-t}, & t > 0 \end{cases}$ $x(0) = 1.$

λ) $x' + 4\, x = f(t)$, $f(t) := \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \tanh t, & t > 0 \end{cases}$ $x(0) = 1.$

μ) $x' + (\tanh t)\, x = f(t)$, $f(t) := \begin{cases} 1, & t \leq 0 \\ \frac{1}{\cosh t} & t > 0 \end{cases}$ $x(0) = 0.$

ν) $x' - x = f(t)$, $f(t) := \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t(1-t), & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$ $x(0) = 1.$

4. Να λυθούν οι ασκήσεις 1-3 με τη βοήθεια του *Mathematica*. Σε κάθε περίπτωση, να κατασκευαστεί το ταυτόχρονο γράφημα ορισμένων μελών της γενικής λύσης. Να δοθεί, επίσης, μια γραφική παράσταση της λύσης του αντίστοιχου ΠΑΤ.

Για να λύσετε αυτή την άσκηση, μπορείτε να ακολουθήσετε το εξής

Υπόδειγμα

Πρόβλημα

Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ $x' = 2\sin t - x$, καθώς και η ειδική λύση που σέβεται την αρχική συνθήκη $x(\pi/2) = 3$. Στη συνέχεια, να κατασκευαστεί το ταυτόχρονο γράφημα ορισμένων μελών της γενικής λύσης και μια γραφική παράσταση λύσης του ΠΑΤ.

Λύση

Χρησιμοποιώντας τον τύπο του θεωρήματος, εύκολα βρίσκουμε ότι, η γενική λύση της ΔΕ

$$x' = 2\sin t - x$$

είναι της μορφής

$$x = c\, e^{-t} + \sin t - \cos t.$$

Το ίδιο αποτέλεσμα δίνει και το *Mathematica:*

In[154]:=
```
Clear[t, x, f, g]
eq = x'[t] == f[t] + g[t] x[t];
f[t_] = 2 Sin[t];
g[t_] = -1;
eq
FullSimplify[DSolve[eq, x[t], t]]
Clear[t, x, f, g]
```

Out[158]= $x'(t) = 2\sin(t) - x(t)$

Out[159]= $\{\{x(t) \to e^{-t} c_1 - \cos(t) + \sin(t)\}\}$

Για να κατασκευάσουμε ένα δείγμα των αντίστοιχων ολοκληρωτικών καμπυλών, ορίζουμε αρχικά τη συνάρτηση των μετβλητών t και c

$$X(t, c) = c\, e^{-t} + \sin t - \cos t.$$

Στη συνέχεια, με την εντολή Table[X[t,c],{c, -0.8, 0.8, 0.2}] κατασκευάζουμε τις ειδικές λύσεις που προκύπτουν όταν η σταθερή ολοκλήρωσης c πάρει τιμές από το $-0,8$ ως το $0,8$ με βήματα μήκους $0,2$.

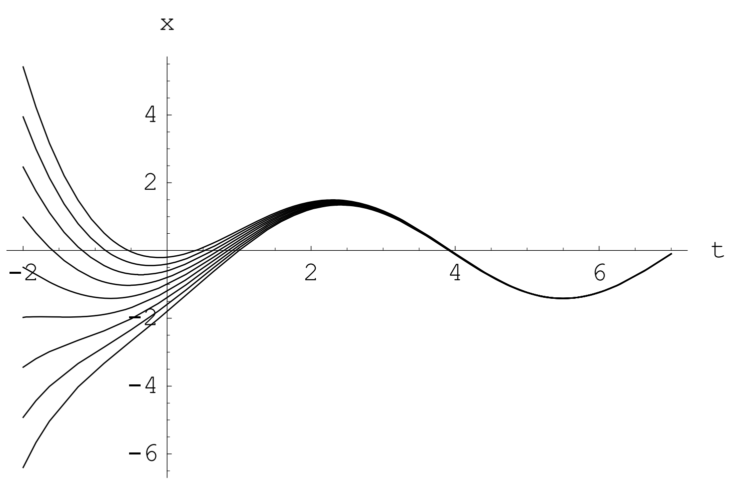
Το νόημα των υπόλοιπων εντολών φαίνεται και από το αποτέλεσμα.

In[161]:=
```
Clear[x, t, X, c]
X[t_, c_] = c e^-t - Cos[t] + Sin[t]
ολοκλκαμπύλες = Table[X[t, c], {c, -0.8, 0.8, 0.2}]
Plot[Evaluate[ολοκλκαμπύλες], {t, -2, 7},
  Compiled → False , PlotRange → All, AxesLabel → {"t", "x"}];

Clear[x, t, X, c]
```

Out[162]= $e^{-t} c - \cos(t) + \sin(t)$

Out[163]= $\{-\cos(t) - 0.8\, e^{-t} + \sin(t),\ -\cos(t) - 0.6\, e^{-t} + \sin(t),\ -\cos(t) - 0.4\, e^{-t} + \sin(t),$
$-\cos(t) - 0.2\, e^{-t} + \sin(t),\ -\cos(t) + 0.\, e^{-t} + \sin(t),\ -\cos(t) + 0.2\, e^{-t} + \sin(t),$
$-\cos(t) + 0.4\, e^{-t} + \sin(t),\ -\cos(t) + 0.6\, e^{-t} + \sin(t),\ -\cos(t) + 0.8\, e^{-t} + \sin(t)\}$



Από τη γενική λύση της ΔΕ αμέσως έπεται ότι

$$x(\pi/2) = c\, e^{-\pi/2} + 1.$$

Συνεπώς, η μοναδική λύση του ΠΑΤ

$$x' = 2\sin t - x, \qquad x(\pi/2) = 3,$$

δίνεται από τη συνάρτηση

$$x = 2\, e^{(\pi/2)-t} + \sin t - \cos t.$$

Αυτό το αποτέλεσμα δίνει και το *Mathematica:*

In[166]:=

```
Clear[t, x, f, g]
eq = x'[t] == f[t] + g[t] x[t];
f[t_] = 2 Sin[t];
g[t_] = -1;
IC = x[Pi / 2] == 3;
{eq, IC}
FullSimplify[DSolve[{eq, IC}, x[t], t]]
Clear[t, x, f, g]
```

Out[171]= $\left\{x'(t) = 2\sin(t) - x(t),\, x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3\right\}$

Out[172]= $\left\{\left\{x(t) \to -\cos(t) + 2\, e^{\frac{\pi}{2}-t} + \sin(t)\right\}\right\}$

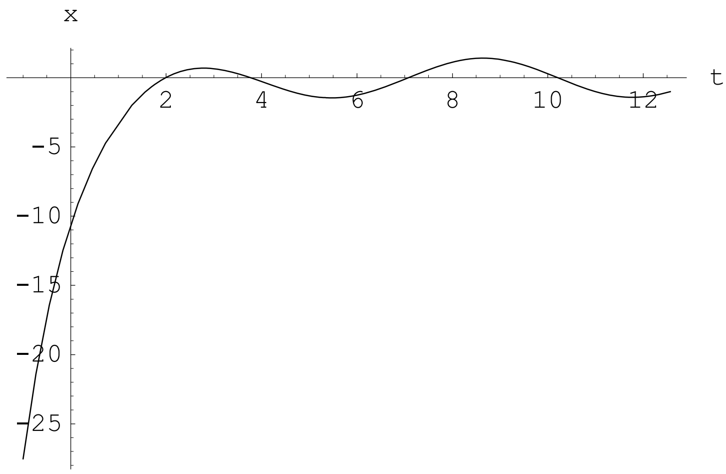
Για να κατασκευάσουμε τη γραφική παράσταση της λύσης

$$x = 2\, e^{(\pi/2)-t} + \sin t - \cos t.$$

του ΠΑΤ, ακολουθούμε τη γνωστή διαδικασία:

In[174]:=
```
Clear[x]
x[t_] = -2 ⅇ^(π/2-t) - Cos[t] + Sin[t]
Plot[x[t], {t, -1, 4 Pi}, Compiled→ False ,
  PlotRange → All, AxesLabel → {"t", "x"}];
Clear[
 x]
```

Out[175]= $-\cos(t) - 2\,e^{\frac{\pi}{2}-t} + \sin(t)$



3. Εφαρμογές γραμμικών ΔΕ στην οικολογία και φυσική

Ακόμα και οι απλούστερες γραμμικές ΔΕ πρώτης τάξης βρίσκουν αρκετές εφαρμογές στην οικολογία, τη φυσική και άλλες επιστήμες. Ενδεικτικά είναι τα ακόλουθα παραδείγματα που, όλα ανεξαιρέτως, αντιστοιχούν στην ΔΕ

(1) $$x' = a + k\,x\,,$$

με a, $k \neq 0$ τυχαίες πραγματικές σταθερές. Θυμίζουμε ότι, η γενική λύση της (1) δίνεται από τις συναρτήσεις της μορφής

(2) $$x = c\,e^{k\,t} - \frac{a}{k}\,.$$

Πληθυσμιακό μοντέλο του Malthus

΄Οπως αναφέραμε στο πρώτο κεφάλαιο, ένα από τα απλούστερα μοντέλα για την εξέλιξη του πληθυσμού, $N(t)$, κάποιου βιολογικού είδους είναι εκείνο που υποθέτει ότι, ο σχετικός ρυθμός αλλαγής,

(3) $$\sigma(t) := \frac{N'(t)}{N(t)}\,,$$

είναι σταθερός. Είναι το λεγόμενο ***μαλθουσικό (ή μαλθουσιανό) μοντέλο*** (από τον βρετανό οικονομολόγο Thomas Malthus (1766-1834). Στο βασικό του έργο, An Essay on the Principle of Population (1798), ο Malthus καταλήγει στο συμπέρασμα ότι "Population, when unchecked, increases in a geometrical ratio. Subsistence only increases in an arithmetical ratio." Οι απόψεις του για τον τρόπο με τον οποίο οι φυσικοί πόροι και οι πόλεμοι καθορίζουν την εξέλιξη του πληθυσμού επηρέασε δραστικά και την σκέψη του Δαρβίνου (Charles Darwin (1809-1882).

΄Οταν, λοιπόν, $\sigma(t) = a$, τότε η χρονική εξέλιξη του πληθυσμού περιγράφεται από τις λύσεις της ΔΕ

(4) $$N' = a\,N.$$

Προφανώς, στα πληθυσμιακά μοντέλα, μόνο οι θετικές τιμές της συνάρτησης $N(t)$ έχουν νόημα. ΄Αρα, η (4) δηλώνει ότι η παράγωγος της $N(t)$ είναι πάντα θετική ή αρνητική, ανάλογα με το πρόσημο της σταθερής a. Συνακόλουθα, η επιλογή $a > 0$ σημαίνει ότι το μοντέλο περιγράφει την περίπτωση όπου, όσο μεγαλύτερος είναι ο πληθυσμός τόσο μεγαλύτερη είναι και η ταχύτητα αύξησής του. Ανάλογα, η επιλογή $a < 0$ αντιστοιχεί στα μοντέλα, σύμφωνα με τα οποία, όσο μεγαλύτερος είναι ο πληθυσμός τόσο μεγαλύτερη είναι και η ταχύτητα μείωσής του.

Αυτό φαίνεται καθαρά και από τη γενική λύση

(5) $$N = c\,e^{a\,t}$$

της εξίσωσης (4). Από αυτήν αμέσως έπεται ότι, την τυχαία χρονική στιγμή t_0 ο πληθυσμός του είδους είναι ίσος με

(6) $$N(t_0) = c\,e^{a\,t_0}.$$

΄Αρα, $c = N(t_0)\,e^{-a\,t_0}$, οπότε η (5) γράφεται σαν

(7) $$N = N(t_0)\,e^{a(t-t_0)}.$$

Συνεπώς, το απλό μοντέλο που μόλις κατασκευάσαμε προβλέπει εκθετική αύξηση ή μείωση του πληθυσμού, ανάλογα με το αν η παράμετρος a του ίδιου του μοντέλου είναι θετική ή αρνητική.

Ας μείνουμε στην περίπτωση όπου $a > 0$ κι ας ονομάσουμε τον αριθμό $N(t_0)$ αρχικό πληθυσμό του είδους που μελετάμε. Τότε η έκφραση (7) δηλώνει ότι, ο πληθυσμός θα γίνει τεράστιος σε μέγεθος, μέσα σε σύντομο χρονικό διάστημα -όσο μικρός κι αν είναι ο αρχικός πληθυσμός κι όσο μικρός κι αν είναι ο σχετικός ρυθμός αύξησής του.

Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι ο ανθρώπινος πληθυσμός της γης είναι σήμερα τρία δισεκατομμύρια κι ότι από τώρα και στο εξής θα αυξάνεται με σταθερό σχετικό ρυθμό 2% το χρόνο. Τότε, μετά από ένα αιώνα ο πληθυσμός της γης θα είναι περίπου ίσος με

(8) $$N = N(t_0)\,e^{a(t-t_0)} = 3\cdot 10^9 \exp\left[\left(0,\,02\,\frac{1}{\acute{\epsilon}\tau o\varsigma}\right)\cdot(100\,\acute{\epsilon}\tau\eta)\right] = 3\cdot 10^9\,e^2 \simeq 22,\,17\cdot 10^9.$$

Δηλαδή, θα έχει ξεπεράσει τα 22 δις.

Αδρανοποίηση ραδιενεργών υλικών

΄Ολα τα χημικά στοιχεία της φύσης εμφανίζονται σε διάφορες παραλλαγές που ονομάζονται ***ισότοπα***. Αυτό ισχύει τόσο για τα ελαφριά, όπως το υδρογόνο, όσο και για τα βαριά, όπως το ουράνιο. Η διαφορά ενός ισότοπου από το άλλο βρίσκεται στη σύσταση του πυρήνα. Ακριβέστερα, όλα τα ισότοπα ενός στοιχείου έχουν στον πυρήνα τους τον ίδιο αριθμό πρωτονίων, αλλά διαφορετικό αριθμό νετρονίων.

Οι πυρήνες ορισμένων ισοτόπων είναι ασταθείς και συνεχώς διασπώνται, εκπέμποντας και ακτινοβολία. Αυτά τα ισότοπα λέγονται ραδιενεργά. Χαρακτηριστικό είναι το παράδειγμα του άνθρακα, C. Αυτό το στοιχείο το βρίσκουμε κυρίως στη μορφή του σταθερού ισότοπου C^{12} (άνθρακας-12). Ωστόσο, κάθε δείγμα άνθρακα περιέχει και ένα ποσοστό του σταθερού ισότοπου C^{13}, καθώς και του ραδιενεργού C^{14}.

Η διάσπαση ενός ασταθούς πυρήνα θεωρείται πως είναι μια αμιγώς κβαντομηχανική διαδικασία. Αυτό σημαίνει ότι είναι πιθανοκρατική, οπότε ο χρόνος ζωής κάθε πυρήνα ενός ραδιενεργού ισότοπου είναι απροσδιόριστος. Εμπειρικά, ωστόσο, έχει διαπιστωθεί ότι, ο συνολικός αριθμός των ασταθών πυρήνων, $N(t)$, που περιέχει ένα ραδιενεργό υλικό μειώνεται με ρυθμό ανάλογο προς τον ίδιο τον $N(t)$. Με άλλα λόγια, η μεταβολή του $N(t)$ περιγράφεται από την ίδια εξίσωση (4), αλλά με το a αρνητικό. Γι αυτό, προτιμάμε να την γράψουμε στη μορφή

(9) $$N' = -b\,N,$$

όπου $b > 0$.

Συνεπώς, αν τη χρονική στιγμή t_0 ο αριθμός των ασταθών πυρήνων είναι $N(t_0)$, τότε, μετά από το χρονικό διάστημα $t - t_0$, θα έχει γίνει

(10) $$N = N(t_0)\,e^{-b(t-t_0)}$$

Η σταθερή b διαφέρει από ισότοπο σε ισότοπο και άρα είναι χαρακτηριστική του ρυθμού με τον οποίο διασπάται το καθένα τους. Για τον άνθρακα-14 (C^{14}) η παράμετρος $b \approx 1,21 \times 10^{-4}$/έτος. Ωστόσο, στις πηγές που δίνουν πληροφορίες για τις ιδιότητες των χημικών στοιχείων (Περιοδικοί Πίνακες) δεν αναφέρεται η τιμή της σταθερής b για καθένα από τα ραδιενεργά ισότοπα, αλλά ο ***χρόνος ημιζωής*** τους (half-life). Πρόκειται για το χρονικό διάστημα $T_{1/2}$ που απαιτείται για να μειωθεί το πλήθος των ραδιενεργών πυρήνων στο μισό του αρχικού. Σύμφωνα με την (10), αυτό το χρονικό διάστημα προσδιορίζεται από τη συνθήκη $1/2 = e^{-b\,T_{1/2}}$. Άρα,

(11) $$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{b} \approx \frac{0{,}693}{b}$$

Ειδικότερα για τον C^{14}, $T_{1/2} = 5,730$ έτη.

Επειδή ο λόγος του C^{14} προς το C^{12} στην ατμόσφαιρα είναι σταθερός, το ίδιο ισχύει και για το σώμα των ανθρώπων και των άλλων έμβιων όντων. Αλλά, μόνο όσο αυτά βρίσκονται στη ζωή. Μόλις πεθάνουν, η απορρόφηση C^{14} από την ατμόσφαιρα σταματάει. Άρα, με τη συνεχή διάσπασή του, αυτό το ισότοπο όλο και μειώνεται στο νεκρό σώμα και στα οστά τους. Συνεπώς, σε χρόνο T μετά το θάνατό τους, ο άνθρακας-14 έχει μειωθεί στο $N/N_0 = e^{-b\,T}$ του αρχικού. Αυτό το φαινόμενο αποτελεί και τη βάση της μεθόδου που χρησιμοποιείται στην παλεοντολογία και την αρχαιολογία για να προσδιορίσουν την "ηλικία" των ευρημάτων τους (radioactive dating): Το ποσοστό του άνθρακα-14 που βρίσκεται σήμερα σε απομεινάρια οργανισμών μας επιτρέπει να εκτιμήσουμε το πότε περίπου πέθαναν και, άρα, το πριν από πόσους αιώνες βρίσκονταν στη ζωή.

Ο νόμος της ψύξης του Newton

Η διαδικασία με την οποία ένα σώμα ανταλλάσσει θερμότητα με το περιβάλλον του είναι περίπλοκη. Πάντως, το βασικό χαρακτηριστικό της είναι ότι, σε οποιοδήποτε υλικό, η θερμική ενέργεια (θερμότητα) ρέει από το θερμότερο μέρος του (αυτό με τη μεγαλύτερη θερμοκρασία) προς το ψυχρότερο (το μέρος με τη χαμηλότερη θερμοκρασία).

Το απλούστερο δυνατό μοντέλο για να περιγράψουμε την ανταλλαγή θερμότητας ενός σώματος Σ με το περιβάλλον του το χρωστάμε στον Νεύτωνα. Οι βασικές συνιστώσες αυτού του μοντέλου είναι οι εξής υποθέσεις:

α) Κάθε χρονική στιγμή, t, όλα τα μέρη του σώματος, Σ, έχουν την ίδια θερμοκρασία, $T(t)$.

β) Το περιβάλλον του Σ βρίσκεται σε θερμοκρασία T_π, που δεν αλλάζει με το χρόνο.

γ) Ο ρυθμός με τον οποίο αλλάζει η θερμοκρασία του Σ είναι ανάλογος της διαφοράς $T_\pi - T(t)$.

Από την κατεύθυνση ροής της θερμότητας που ήδη αναφέραμε, έπεται ότι το Νευτωνικό μοντέλο αντιστοιχεί στην ΔΕ

(12) $$T' = k(T_\pi - T),$$

με την σταθερή k υποχρεωτικά θετική. Γιατί, μόνο με $k > 0$ "σώζονται τα φαινόμενα" -η (12) συμφωνεί με την παρατήρηση. ΄Ολοι γνωρίζουμε ότι, όσο η θερμοκρασία του περιβάλλοντος είναι μεγαλύτερη από εκείνη του σώματος, το σώμα απορροφά θερμότητα από το περιβάλλον και η θερμοκρασία του αυξάνει. Αντίθετα, όσο η $T_\pi < T(t)$, το σώμα εκλύει θερμότητα και ψύχεται.

Το μοντέλο του Newton δίνει μιαν αρκετά ικανοποιητική προσέγγιση της διαδικασίας ανταλλαγής θερμότητας ενός σώματος με το περιβάλλον του. Και, παρόλο που καλύπτει τόσο το ζέσταμα όσο και το πάγωμα του σώματος, έχει καθιερωθεί με τον τίτλο *νόμος της ψύξης*. Θα πρέπει, πάντως να σημειώσουμε ότι, η αντίστοιχη ΔΕ (12) δίνει μιαν αρκετά πιστή περιγραφή του φυσικού φαινόμενου, όταν η σταθερή k προσαρμόζεται στο υλικό από το οποίο είναι φτιαγμένο το Σ και το ρευστό (αέρας, νερό, κλπ) που αποτελεί το περιβάλλον του.

΄Ετσι ή αλλιώς, η γενική λύση της (12) δίνεται από την έκφραση

(13) $$T = T_\pi + c\, e^{-k\,t}.$$

Αν, λοιπόν, τη στιγμή $t = 0$ η θερμοκρασία του σώματος είναι T_0, τότε $T_0 = T_\pi + c$. Συνεπώς, η (13) γράφεται σαν

(14) $$T = T_\pi + (T_0 - T_\pi)\, e^{-k\,t},$$

την οποία μπορούμε, πλέον, να θεωρούμε ως την τελική έκφραση του νόμου της ψύξης του Νεύτονα.

Θα πρέπει, τώρα, να παρατηρήσουμε δύο εμφανή μειονεκτήματα της Νευτωνικής προσέγγισης στο φυσικό φαινόμενο που περιγράψαμε. Το πρώτο είναι ότι μας δίνει ένα ***σημειακό μοντέλο*** του σώματος. Με αυτό τον όρο δηλώνεται το γεγονός ότι, στην Νευτωνική εικόνα, η θερμοκρασία του σώματος Σ θεωρείται ενιαία. ΄Ομως, όταν πάρουμε ... μια γεμιστή γαλοπούλα που βρίσκεται σε θερμοκρασία $T_0 = 25\,°\mathrm{C}$ και την τοποθετήσουμε στο φούρνο που έχουμε θερμάνει στους $T_\pi = 200\,°\mathrm{C}$, η θερμοκρασία όλων των μερών της γαλοπούλας δεν θα αρχίσει να αυξάνει σύμφωνα με το νόμο (14). Διαφορετικά, όλοι θα ξέραμε ... πως να ψήσουμε μια ωραία γεμιστή γαλοπούλα. Συγκεκριμένα, η θερμότητα του περιβάλλοντος απορροφιέται από τα εξωτερικά μέρη του σώματος Σ και στη συνέχεια διαδίδεται στο εσωτερικό του.

Το δεύτερο μειονέκτημα του μοντέλου του Νεύτωνα έχει πάλι να κάνει με ... την γαλοπούλα: Για να φτάσει στους 200 °C και να ψηθεί, απαιτείται άπειρος χρόνος! Ο λόγος είναι ότι, σύμφωνα με την (14), η θερμοκρασία $T(t)$ του σώματος πλησιάζει εκείνη του περιβάλλοντος μόνο ασυμπτωτικά, δηλαδή καθώς το $t \to \infty$.

Βέβαια, το αστείο σταματάει ευθύς μόλις παρατηρήσουμε ότι, σε σχετικά μικρό χρονικό διάστημα, η διαφορά $T(t) - T_\pi$ έχει γίνει πολύ μικρότερη από την αρχική. Γιατί,

(15) $$\frac{T-T_\pi}{T_0-T_\pi} = e^{-k\,t}.$$

Αν, λοιπόν, θέλουμε η διαφορά της θερμοκρασίας του σώματος από εκείνη του περιβάλλοντος να γίνει ένα χιλιοστό της αρχικής, αρκεί να περιμένουμε T sec, όπου $e^{-k\,T} = 10^{-3}$. Αυτό σημαίνει ότι $k\,T \approx 6,9$. Μια αντιπροσωπευτική τιμή της παραμέτρου k είναι η $k \approx 0,02/\text{sec}$. ΄Αρα $T \approx 345$ sec ≈ 6 min.

Κατακόρυφη κίνηση απλού σώματος

Για ένα σώμα σ μάζας m που κινείται ευθύγραμμα, ο $2^{ος}$ νόμος του Νεύτωνα εκφράζεται από την ΔΕ

(16) $$m\,x'' = F(t, x, x').$$

Θυμίζουμε ότι, στην (16), η συνάρτηση $x(t)$ παριστάνει την στιγμιαία θέση του σ και η $F(t, x, x')$ τη δύναμη που ασκείται σ' αυτό.

Σε ορισμένες περιπτώσεις, η δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι ανεξάρτητη από τη στιγμιαία θέση του. Σ' αυτές τις περιπτώσεις, η (16) γίνεται

(17) $$m\,x'' = F(t, x').$$

Ισοδύναμα,

(18) $$m\,\upsilon' = F(t, \upsilon),$$

όπου

(19) $$\upsilon(t) := x'(t)$$

η συνάρτηση της στιγμιαίας ταχύτητας του σ.

Προφανώς, η (18) ανήκει στις ΔΕ πρώτης τάξης που μελετάμε στον παρόν κεφάλαιο. Εικότερα, όταν η συνάρτηση της δύναμης είναι της μορφής

(20) $$F(t, \upsilon) = \alpha(t) + \beta(t)\,\upsilon$$

η εξίσωση (18) ανάγεται στην γραμμική

(21) $$m\,\upsilon' = \alpha(t) + \beta(t)\,\upsilon$$

Ας θεωρήσουμε, για παράδειγμα, την κακόρυφη κίνηση ενός σώματος κοντά στην επιφάνεια της γης. Σ' αυτή την περίπτωση, η δύναμη που υφίσταται το σώμα έχει ως συνιστώσες την έλξη της γης και την αντίσταση του αέρα. Η πρώτη ονομάζεται ***βάρος*** του σώματος και, στο βαθμό που η κίνηση του σώματος περιορίζεται σε μικρές αποστάσεις από την επιφάνεια της γης, αυτή η δύναμη είναι σταθερή. Το μέτρο της δίνεται από το γινόμενο $m\,g$, όπου $g \approx 9,8\ \mathrm{m/sec^2}$.

Η αντίσταση του αέρα εξαρτιέται από την στιγμιαία ταχύτητα του σώματος, το σχήμα και τη σύστασή του. Στο απλούστερο δυνατό μοντέλο, το μέτρο της δίνεται από το γινόμενο $l\,|x'|$, όπου l μια θετική σταθερή με μονάδες μάζα/χρόνος, η οποία αναφέρεται ως ***συντελεστής της αντίστασης***.

Αν, λοιπόν, παραστήσουμε το ύψος του σώματος (απόσταση από το έδαφος) τη χρονική στιγμή t με $x(t)$, τότε η κίνησή του περιγράφεται από τις λύσεις της ΔΕ

(22) $$m\,x'' = -m\,g - l\,x'.$$

Συνακόλουθα, η εξίσωση για την ταχύτητα γίνεται

(23) $$m\,\upsilon' = -m\,g - l\,\upsilon.$$

Η γενική λύση της τελευταίας δίνεται από την έκφραση

(24) $$\upsilon = c\,e^{-(l/m)\,t} - \frac{m\,g}{l},$$

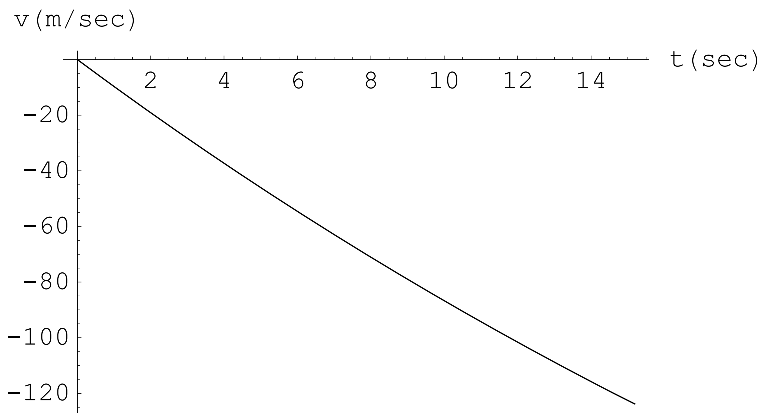
που γράφεται και στην ακόλουθη μορφή

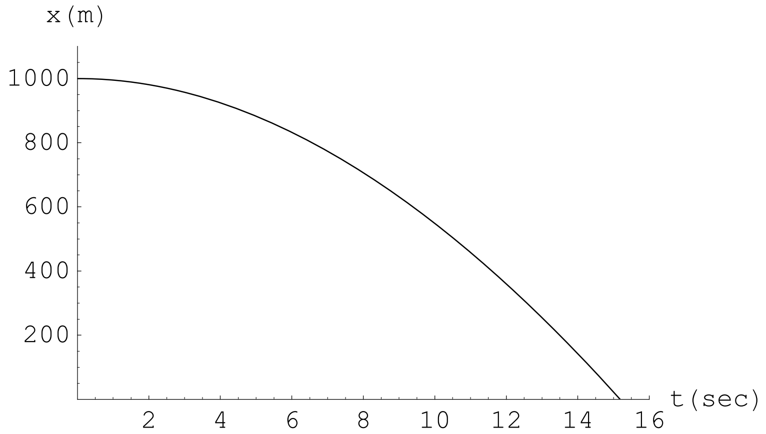
(25) $$\upsilon = \upsilon_0\,e^{-l\,t/m} + \frac{m\,g}{l}\,(e^{-l\,t/m} - 1), \quad \upsilon_0 := \upsilon(0).$$

Τέλος, με απλή ολοκήρωση, οδηγούμαστε και στην οικογένεια των συναρτήσεων που περιγράφει το στιγμιαίο ύψος του σώματος:

(26) $$x = x_0 - \frac{m\,g}{l}\,t - \frac{m}{l}\,(\upsilon_0 + \frac{m\,g}{l})\,(1 - e^{-l\,t/m}), \qquad x_0 := x(0).$$

Στα επόμενα δύο σχήματα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των (25) και (26) για την περίπτωση ενός σώματος μάζας $m = 80\,\mathrm{kg}$ που αφήνεται να πέσει ($\upsilon_0 = 0$) από ύψος 1,000 m. Ο συντελεστής αντίστασης έχει υποτεθεί ίσος με $l = 2\,\mathrm{kg/sec}$. Από το δεύτερο σχήμα φαίνεται καθαρά ότι, κάτω από αυτές τις συνθήκες, το σώμα χρειάζεται περίπου T =15,2 sec για να φτάσει στο έδαφος. Η ταχύτητα που έχει αναπτύξει στο μεταξύ έχει μέτρο $\upsilon_{\max}$ =124m/sec, περίπου. Για σύγκριση, μπορεί κανείς εύκολα να υπολογίσει τις αντίστοιχες τιμές όταν η αντίσταση του αέρα θεωρηθεί αμελητέα: $T \approx 14,3$ sec, $\upsilon_{\max} = 140\,m/\mathrm{sec}$.





4. ΔΕ της μοφής $x' = f(x)$ (Αυτόνομες)

Η ρητή επίλυση μη γραμμικών εξισώσεων πρώτης τάξης είναι εφικτή μόνο σε ειδικές περιπτώσεις. Είναι εκείνες στις οποίες το δεξί μέλος της κανονικής μορφής

(1) $$x' = F(t, x)$$

είναι ειδικού τύπου. Με αυτό εννοούμε ότι η $F(t, x)$ εξαρτιέται ρητά μόνο από τη μεταβλητή x, ή είναι γινόμενο μιας συνάρτησης του t και μιας συνάρτησης του x, κ.λπ.

Στο παρόν εδάφιο και στα αμέσως επόμενα, θα μελετήσουμε μερικές από αυτές τις περιπτώσεις, αρχίζοντας από την εξής: Η εξίσωση που μας ενδιαφέρει είναι της μορφής

(2) $$x' = X(x).$$

Κάθε ΔΕ αυτής της μορφής ονομάζεται ***αυτόνομη***. Ο χαρακτηρισμός οφείλεται στα φυσικά, βιολογικά και άλλα συστήματα των οποίων η χρονική εξέλιξη περιγράφεται ικανοποιητικά από εξισώσεις της μορφής (2) .΄Οπως θα φανεί από τα παραδείγματα που θα μελετήσουμε σε λίγο, αυτά τα συστήματα θεωρούνται πως εξελίσσονται αυτόνομα, δηλαδή χωρίς να επηρεάζονται από εξωτερικούς παράγοντες.

΄Οσο αφορά τη συνάρτηση $X(x)$, θα υποθέσουμε ότι, αν μηδενίζεται, αυτό συμβαίνει σε ένα αριθμήσιμο σύνολο σημείων της πραγματικής ευθείας, τα οποία είναι ευδιάκριτα. Αν η $X(x)$ μηδενίζεται μόνο σε ένα σημείο, τότε αυτή η συνθήκη ισχύει αυτόματα. Στην περίπτωση που μηδενίζεται στα σημεία $\{x_j\}$, $j = 1, 2, ...$, τότε η συνθήκη σημαίνει ότι, για κάθε x_j, υπάρχει ένα ανοιχτό διάστημα I_j, το οποίο δεν περιέχει άλλο σημείο μηδενισμού της συνάρτησης $X(x)$.

Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι η συνάρτηση $x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, είναι σταθερή και ίση με μια από τις ρίζες της $X(x)$, ότι δηλαδή $x(t) = x_j$. Τότε, από τη μια πλευρά $x'(t) = 0$ κι από την άλλη $X(x_j) = 0$. Συνεπώς, κάθε σταθερή συνάρτηση της μορφής $x(t) = x_j$ αποτελεί λύση της πιο πάνω εξίσωσης.

Ας θεωρήσουμε, στη συνέχεια, ένα από τα ανοιχτά διαστήματα στα οποία χωρίζουν τον άξονα x οι ρίζες x_j της $X(x)$. Σ' αυτό το διάστημα, η ΔΕ (2) μπορεί να γραφτεί στη μορφή

(3) $$\frac{1}{X(x)}\, x' = 1.$$

΄Αρα

(4) $$\int \frac{1}{X(x)}\, x'\, d\,t = \int 1\, d\,t + c,$$

οπότε

(5) $$\int \frac{1}{X(x)}\, d\,x = t + c.$$

Αυτή η σχέση παριστάνει λύσεις της ΔΕ (2) σε μπλεγμένη (=πεπλεγμένη) μορφή. Για να γίνει σαφές το τι εννοούμε, ας εξετάσουμε το ακόλουθο

Παράδειγμα

Προφανώς, η ΔΕ

(6) $$x' = 1 - x^2,$$

είναι της μορφής (2) με $F(x) = 1 - x^2$. Οι ρίζες αυτής της συνάρτησης είναι οι αριθμοί $x_1 = -1$ και $x_2 = 1$. Συνακόλουθα, η (6) επιδέχεται ως λύσεις τις σταθερές συναρτήσεις

(7) $$x(t) = -1, \qquad x(t) = 1.$$

Από την άλλη, όταν το x ανήκει σ' ένα από τα ανοιχτά διαστήματα $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ και $(1, \infty)$, η (6) είναι ισοδύναμη με την

(8) $$\frac{1}{1-x^2}\, x' = 1.$$

Η λύση της τελευταίας δίνεται έμμεσα από τη σχέση

(9) $$\int \frac{1}{1-x^2}\, d\,x = t + c.$$

΄Ομως,

(10) $$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right).$$

΄Αρα, το αριστερό μέλος της (9) είναι ίσο με

(11) $$\int \frac{1}{1-x^2}\, d\,x = \frac{1}{2}\int (\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x})\, d\,x$$

$$= \frac{1}{2}\,(\ln|\,1+x\,| - \ln|\,1-x\,|) = \frac{1}{2}\,\ln|\,\frac{1+x}{1-x}\,|$$

Συνεπώς, η (9) γίνεται

(12) $$\frac{1}{2}\,\ln|\,\frac{1+x}{1-x}\,| = t + c$$

ή

(13) $$|\,\frac{1+x}{1-x}\,| = e^{2\,(t+c)}\,.$$

Τώρα, αν $(1+x)\,(1-x) = 1-x^2 > 0$, τότε η προηγούμενη έκφραση γράφεται σαν

(14) $$\frac{1+x}{1-x} = e^{2\,(t+c)}.$$

Αυτή λύνεται εύκολα ως προς x για να δώσει

(15) $$x = \frac{e^{2\,(t+c)}-1}{e^{2\,(t+c)}+1}\,.$$

Ανάλογα, όταν $(1+x)\,(1-x) = 1-x^2 < 0$, η (13) είναι ισοδύναμη με την

(16) $$\frac{1+x}{1-x} = -e^{2\,(t+c)},$$

από την οποία προκύπτει ότι

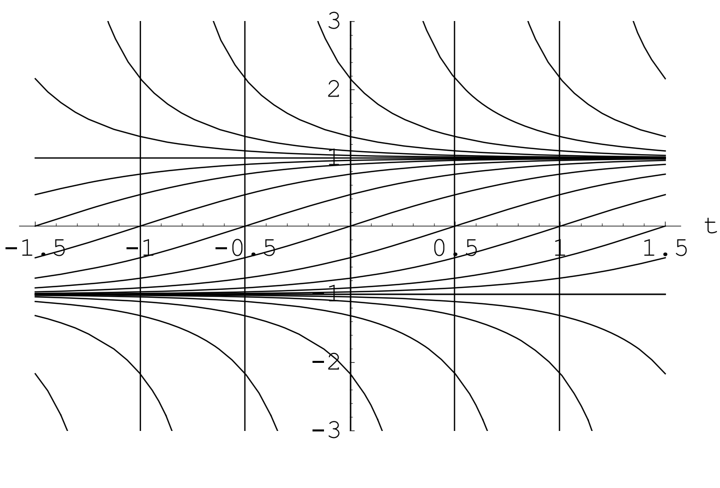
(17) $$x = \frac{e^{2\,(t+c)}+1}{e^{2\,(t+c)}-1}\,.$$

΄Αρα, εκτός από τις σταθερές λύσεις $x(t) = \pm 1$, η ΔΕ (6) επιδέχεται και τις

(18) $$x = \frac{e^{2\,(t+c)}-1}{e^{2\,(t+c)}+1} = \frac{e^{t+c}-e^{-(t+c)}}{e^{t+c}+e^{-(t+c)}} \equiv \tanh(t+c), \quad \text{αν } 1-x^2 > 0,$$

(19) $$x = \frac{e^{2\,(t+c)}+1}{e^{2\,(t+c)}-1}\;\frac{e^{t+c}+e^{-(t+c)}}{e^{t+c}-e^{-(t+c)}} \equiv \text{cotanh}\,(t+c), \quad \text{αν } 1-x^2 < 0.$$

Στο επόμενο σχήμα δείχνουμε τις ολοκληρωτικές καμπύλες που αντιστοιχούν τόσο τις σταθερές λύσεις $x = \pm 1$, όσο και σε ορισμένα από τα μέλη των οικογενειών (18) και (19).



΄Οπως συνάγεται αμέσως και από τις εκφράσεις (18), οι λύσεις που δίνονται από τον τύπο $x = \tanh(t + c)$ είναι φραγμένες ($-1 < x(t) < 1$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$) και τείνουν ασυμπτωτικά στις ευθείες $x = \pm 1$ του επίπεδου $t - x$. Δηλαδή, $x(t) \to \pm 1$, καθώς η ανεξάρτητη μεταβλητή $t \to \pm\infty$.

Αντίθετα, οι λύσεις που περιγράφονται από τον τύπο $x = \operatorname{cotanh}(t + c)$ δεν είναι φραγμένες, αφού $\operatorname{cotanh}(t + c) \to \pm\infty$, κατώς το t πλησιάζει την τιμή $t_c = -c$ από δεξιά και αριστερά, αντίστοιχα. Από την άλλη, $\operatorname{cotanh}(t + c) \nearrow -1$, καθώς το $t \to -\infty$, ενώ $\operatorname{cotanh}(t + c) \searrow 1$, καθώς το $t \to \infty$.

Η παραπάνω συμπεριφορά των λύσεων της ΔΕ (6) φαίνεται καθαρά στο προηγούμενο σχήμα. Στο ίδιο σχήμα αναδείχνεται με σαφήνεια κι ένα γενικό χαρακτηριστικό των λύσεων των μη γραμμικών εξισώσεων: Συνήθως, δεν έχουν όλες οι λύσεις τους το ίδιο πεδίο ορισμού. Ισοδύναμα, η λύση του αντίστοιχου ΠΑΤ ισχύει για ένα διάστημα της ανεξάρτητης μεταβλητής που εξαρτιέται από την αρχική τιμή της συνάρτησης $x(t)$.

Στο παράδειμά μας, τόσο οι σταθερές λύσεις όσο κι εκείνες που δίνονται από τον τύπο $x = \tanh(t + c)$ ορίζονται σε ολόκληρη την πραγματική ευθεία. Αντίθετα, εκείνες που ορίζονται από τον τύπο $x = \operatorname{cotanh}(t + c)$ έχουν ως πεδίο ορισμού το διάστημα $(-\infty, -c)$ ή το $(-c, \infty)$, ανάλογα με το αν $x(t) < -1$ ή $x(t) > 1$, αντίστοιχα.

Παράδειγμα

Η ΔΕ

(20) $$x' = \cos x,$$

είναι επίσης αυτόνομη. Η συνάρτηση $F(x) = \cos x$ μηδενίζεται στα σημεία

(21) $$x_n = (2\,n + 1)\,(\pi/2), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Συνεπώς, κάθε μία από τις σταθερές συναρτήσεις

(22) $$x(t) = x_n, \quad t \in \mathbb{R},$$

αποτελεί λύση της ΔΕ (20).

Στα ανοιχτά διαστήματα (x_n, x_{n+1}), η (20) είναι ισοδύναμη με την

(23) $$\frac{1}{\cos x}\, x' = 1.$$

Συνεπώς,

(24) $$\int \frac{1}{\cos x}\, d\,x = t + c.$$

Οποιονδήποτε πίνακα ολοκληρωμάτων κι αν κοιτάξουμε, θα δούμε ότι η συνάρτηση $\ln|\sec x + \tan x|$ αποτελεί αόριστο ολοκλήρωμα της $\sec x \equiv 1/\cos x$. Αυτό επαληθεύεται εύκολα. Με την ίδια ευκολία επαληθεύεται και η ταυτότητα

(25) $$\sec x + \tan x = \frac{1+\tan(\frac{x}{2})}{1-\tan(\frac{x}{2})}$$

Με άλλα λόγια,

(26) $$\int \frac{1}{\cos x}\, d\,x = \ln|\sec x + \tan x| = \ln\left|\frac{1+\tan(\frac{x}{2})}{1-\tan(\frac{x}{2})}\right|$$

Συνακόλουθα, η (24) γίνεται

(27) $$\left| \frac{1+\tan(\frac{x}{2})}{1-\tan(\frac{x}{2})} \right| = e^{t+c}$$

Αν, λοιπόν, $1 - \tan^2(x/2) > 0$, τότε

(28) $$\tan(\tfrac{x}{2}) = \frac{e^{t+c}-1}{e^{t+c}+1} \equiv \tanh(\tfrac{t+c}{2}).$$

Στην αντίθετη περίπτωση,

(29) $$\tan(\tfrac{x}{2}) = \frac{e^{t+c}+1}{e^{t+c}-1} \equiv \operatorname{cotanh}(\tfrac{t+c}{2}).$$

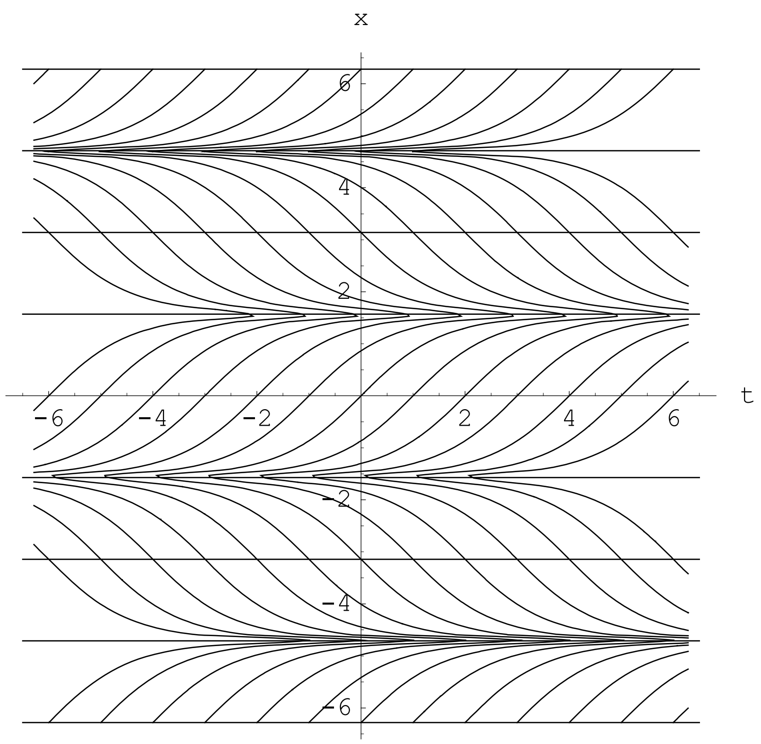
Αυτό σημαίνει ότι, εκτός από τις σταθερές λύσεις $x(t) = (2n+1)(\pi/2)$, η ΔΕ (6) επιδέχεται και τις

(30) $$x = 2\arctan[\tanh(\tfrac{t+c}{2})], \quad \text{αν } 1 - \tan^2(x/2) > 0,$$

(31) $$x = 2\arctan[\operatorname{cotanh}(\tfrac{t+c}{2})], \quad \text{αν } 1 - \tan^2(x/2) < 0.$$

Με άλλα λόγια, ο τύπος (30) ισχύει στο διάστημα $(-\pi/2, \pi/2)$, καθώς και στα διαστήματα που προκύπτουν από την μετατόπιση του προηγούμενου κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π. Ανάλογα, ο τύπος (31) ισχύει στα διαστήματα $(-\pi, -\pi/2)$ και $(\pi/2, \pi)$, καθώς και στα $(-\pi + 2\kappa\pi, -\pi/2 + 2\kappa\pi)$ και $(\pi/2 + 2\kappa\pi, \pi + 2\kappa\pi)$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

Οι ολοκληρωτικές καμπύλες που αντιστοιχούν σε ορισμένες από τις λύσεις που ορίζονται από τους τύπους (30) και (31) φαίνονται το επόμενο σχήμα.



Ασκήσεις

1.Να βρεθεί το σύνολο των λύσεων $\{x(t)\}$ των παρακάτω αυτόνομων ΔΕ. Σε κάθε περίπτωση, να κατασκευαστεί ένα σχήμα με αντιπροσωπευτικές ολοκληρωτικές καμπύλες.

(i) $x' = 4\,x^2$.

(ii) $x' = -9\,x^2$.

(iii) $x' = -\,(x-3)^2$.

(iv) $x' = (1-x)\,(x-2)$.

(v) $x' = (x-1)\,(x-2)\,(x-3)$.

(vi) $x\,x' = x-1$.

(vii) $x' = \frac{1}{2+\cos(2\,x)}$.

2. Για κάθε μία από τις παρακάτω ΔΕ να βρεθεί η λύση $x(t)$ που σέβεται την συνθήκη $x(t_0) = x_0$.

(i) $x' = \sqrt{x}$, $(t_0, x_0) = (1, 1)$.

(ii) $x' = -3\,x^2$ $(t_0, x_0) = (1, -1)$.

(iii) $x' = (x-1)^{1/3}$, $(t_0, x_0) = (2, 1)$.

(iv) $x' = (x+2)\,(x-3)$, $(t_0, x_0) = (0, 0)$.

(v) $x' = (x^2-1)\,(x-3)$, $(t_0, x_0) = (0, 0)$.

(vi) $x\,x' = x-1$, $(t_0, x_0) = (3, 2)$.

3. Να συγκριθούν οι λύσεις που βρήκατε στις Ασκ. 1, 2, με τα αντίστοιχα αποτελέσματα που δίνει το *Mathematica*.

5. Μη γραμμικά, αυτόνομα πληθυσμιακά μοντέλα

Μια από τις συχνότερες εφαρμογές των αυτόνομων εξισώσεων είναι η κατασκευή μαθηματικών μοντέλων ή προτύπων τα οποία περιγράφουν την εξέλιξη του πληθυσμού κάποιου βιολογικού είδους. Κλασικό, πλέον, παράδειγμα αυτής της κατηγορίας είναι το λεγόμενο ***λογιστικό μοντέλο***. Πρόκειται για την υπόθεση ότι, ο πληθυσμός, $N(t)$, ενός είδους μεταβάλλεται σύμφωνα με τη ΔΕ

(1) $$N' = a\,N + b\,N^2,$$

όπου a, b σταθερές (παράμετροι), με διάσταση (χρόνος)$^{-1}$ και (χρόνος)$^{-2}$ αντίστοιχα. Αυτό σημαίνει ότι, (και) στο λογιστικό μοντέλο, ο ρυθμός (ταχύτητα) αλλαγής, $N'(t)$, του πληθυσμού δεν επηρεάζεται από εξωτερικούς παράγοντες. Καθορίζεται πλήρως από αυτό καθαυτό το μέγεθος του πληθυσμού, $N(t)$. Με άλλα λόγια, έχουμε να κάνουμε με μιαν αυτόνομη εξέλιξη.

Θα πρέπει, ωστόσο, να σημειώσουμε ότι, στην πραγαματικότητα, η (1) δεν παριστάνει μία μόνο ΔΕ, αλλά μια 2-παραμετρική οικογένεια τέτοιων εξισώσεων. Κατά συνέπεια, θα έπρεπε να μιλάμε για λογιστικά μοντέλα και όχι μοντέλο. Για να καταλήξουμε σε ένα συγκεκριμένο μέλος της 2-παραμετρικής οικογένειας των λογιστικών μοντέλων θα πρέπει πρώτα να επιλέξουμε συγκεκριμένες τιμές για τις παραμέτρους a και b.

Για μη μηδενικές τιμές της συνάρτησης $N(t)$, η ΔΕ (1) γράφεται σαν

(2) $$\frac{N'}{N} = a + b\,N.$$

΄Αρα, αντίθετα από το γραμμικό μοντέλο $N' = a\,N$ που μελετήσαμε σε προηγούμενο εδάφιο, στο λογιστικό μοντέλο, ο σχετικός ρυθμός μεταβολής του πληθυσμού, $\sigma(t) := N'(t)/N(t)$, δεν είναι σταθερός.

Επειδή διευκολύνει την παράσταση του τελικού αποτελέσματος, θα εισαγάγουμε τις σταθερές

(3) $$k := -b, \quad m := -\frac{a}{b}.$$

Αυτές μας επιτρέπουν να γράψουμε τη ΔΕ (1) στη μορφή

(4) $$N' = k\,N\,(m - N).$$

Προφανώς, δύο λύσεις της τελευταίας είναι οι σταθερές συναρτήσεις $N(t) = 0$ και $N(t) = m$. Στην ειδικότερη περίπτωση όπου $m = 0$, αυτές οι λύσεις ταυτίζονται. Εμείς θα υποθέσουμε ότι $m \neq 0$ και μάλιστα ότι η παράμετρος m είναι θετική. Αν θέλει, ο αναγνώστης μπορεί να συμπληρώσει τη μελέτη μας, εξετάζοντας τις περιπτώσεις όπου $m = 0$ και $m < 0$.

Αν λοιπόν $m > 0$, τότε στα διαστήματα $(-\infty, 0)$, $(0, m)$ και $(0, \infty)$ του άξονα N η ΔΕ (4) είναι ισοδύναμη με την

(5) $$\frac{N'}{N\,(m-N)} = k.$$

Συνεπώς,

(6) $$\int \frac{N'}{N\,(m-N)}\,d\,t = \int k\,d\,t + c,$$

ή

(7) $$\int \frac{1}{N\,(m-N)}\,d\,N = k\;t + c.$$

΄Ομως,

(8) $$\frac{1}{N\,(m-N)} = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{m-N}\right),$$

και άρα

(9) $$\int \frac{1}{N\,(m-N)}\,d\,N = \frac{1}{m}[\ln|N| - \ln|m-N|] = \frac{1}{m}\ln\left|\frac{N}{m-N}\right|.$$

Συνεπώς, η (6) γίνεται

(10) $$\ln\left|\frac{N}{m-N}\right| = m\,k\;(t - C), \quad C := -\frac{c}{k}.$$

΄Αρα

(11) $$\left|\frac{N}{m-N}\right| = \exp[m\,k\;(t - C)].$$

Αυτή η σχέση γράφεται και στη μορφή

(12) $$\frac{N}{m-N} = B\exp(m\,k\,t)$$

θέτοντας $\exp[-m\,k\,C] = \pm B$, όταν $N(m-N) > 0$, ή $N(m-N) < 0$, αντίστοιχα. Συνεπώς,

(13) $$N = \frac{m\,B\,e^{m\,k\,t}}{1+B\,e^{m\,k\,t}}$$

Από αυτήν έπεται ότι

(14) $$N(t_0) = \frac{m\,B\,e^{m\,k\,t_0}}{1+B\,e^{m\,k\,t_0}}.$$

Συνακόλουθα

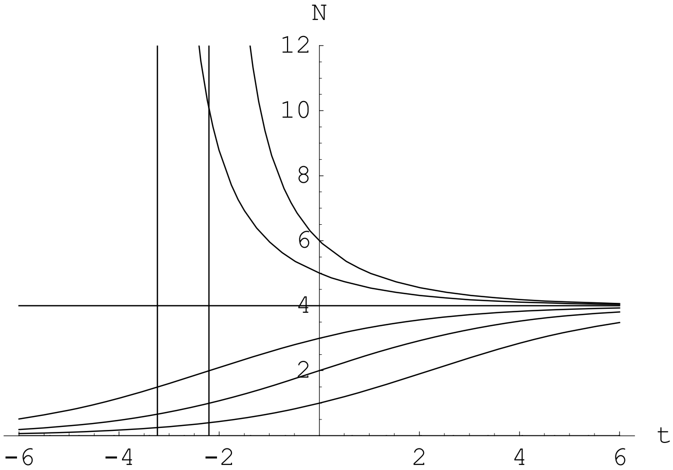
(15) $$B\,e^{m\,k\,t_0} = \frac{N(t_0)}{m-N(t_0)}$$

και άρα η λύση (13) γράφεται και στη μορφή

(16) $$\boxed{N = \frac{m\,N(t_0)\,e^{m\,k\,(t-t_0)}}{m+N(t_0)[\,e^{m\,k\,(t-t_0)}-1]} \equiv \frac{m\,N(t_0)}{N(t_0)+[m-N(t_0)]\,e^{-m\,k\,(t-t_0)}}}$$

Στο επόμενο σχήμα δείχνουμε τις ολοκληρωτικές καμπύλες της ΔΕ (1) που αντιστοιχούν στις ακόλουθες τιμές των παραμέτρων :

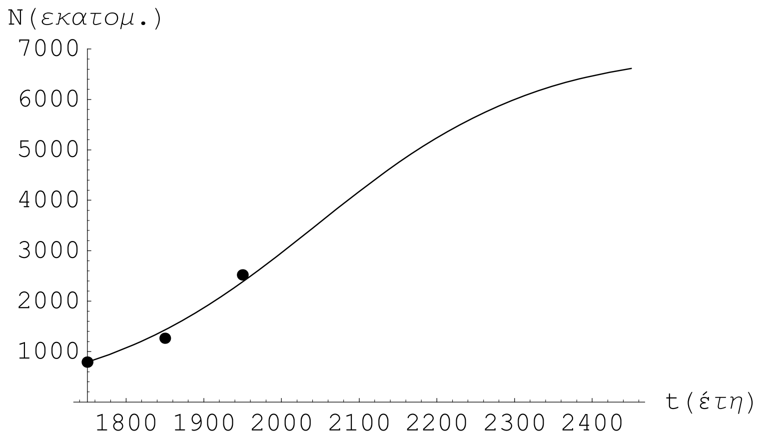
$$m = 4,\ k = 1/8,\ t_0 = 0,\quad N(t_0) \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$



Όπως συνάγεται από την αναλυτική έκφραση (16) και φαίνεται στο σχήμα, το λογιστικό μοντέλο προβλέπει την ακόλουθη εξέλιξη του πληθυσμού για θετικές τιμές των παραμέτρων k, m. Αν η αρχική τιμή του, $N(t_0)$, είναι μικρότερη από m, τότε ο πληθυσμός θα αυξάνει συνεχώς, πλησιάζοντας την τιμή-οροφή m, καθώς το $t \to \infty$. Αντίθετα, αν $N(t_0) > m$, τότε ο πληθυσμός θα μειώνεται συνεχώς, τείνοντας ασυμπτωτικά στην ίδια τιμή m.

Από πρόσφατα στατιστικά στοιχεία του ΟΗΕ προκύπτει ότι κατά τα έτη 1750, 1850 και 1950, ο πλυθησμός της γής ήταν 791, 1.262 και 2.521 εκατομμύρια, αντίστοιχα. Αυτές οι τιμές αντιστοιχούν στις μαύρες κουκίδες του επόμενου σχήματος. Στο ίδιο σχήμα, παρουσιάζουμε και την ολοκληρωτική καμπύλη της λογιστικής εξίσωσης (4), όπως ορίζεται από τον τύπο (16), με αρχικές τιμές $t_0 = 1750$έτη, $N(t_0) = 791 \cdot 10^6$. Οι σταθερές του μοντέλου έχουν επιλεγεί ίσες με $k = 10^{-12}$ και $m = 7 \cdot 10^9$, αντίστοιχα. Αυτό σημαίνει ότι, στο συγκεκριμένο μοντέλο, το σταθερό μέρος του σχετικού ρυθμού αύξησης του πληθυσμού της γής, δηλαδή η παράμετρος $a = k\,m$, είναι ίση με $7 \cdot 10^{-3}$/έτος, ή 0,7% το χρόνο.

Όπως φαίνεται από το σχήμα, στο βαθμό που το αντίστοιχο μοντέλο περιγράφει με πιστότητα την εξέλιξη του πληθυσμού της γής, μέσα στους επόμενους τέσσερις αιώνες, οι κάτοικοί της θα έχουν αυξηθεί κατά τέσσερα δισεκατομμύρια.



Ασκήσεις

1. Για κάθε μια από τις ακόλουθες ΔΕ, να βρεθεί η λύση $N(t)$ που σέβεται την αρχική συνθήκη $N(0) = N_0 > 0$. Στη συνέχεια, ερμηνεύοντας αυτές τις ΔΕ ως πληθυσμιακά μοντέλα, να μελετηθεί η εξέλιξη του πληθυσμού που προβλέπει καθεμιά τους. Ειδικότερα, να εξηγηθεί η σημασία του αριθμού N_0 και των παραμέτρων που εμφανίζονται στις ίδιες τις ΔΕ.

(i) $N' = \frac{N}{T}\,(1 - \frac{N}{m}),\qquad T > 0,\quad m < 0.$

(ii) $N' = -\frac{N}{T}\,(1 - \frac{N}{m}),\qquad T > 0,\quad m > 0.$

(iii) $N' = \frac{N}{T}\,(1 - \frac{N}{m}) + k,\qquad T > 0,\quad m > 0,\quad k > 0.$

(iv) $N' = \frac{N}{T}\,(1 - \frac{N}{m}) + k\,N,\qquad T > 0,\quad m > 0,\quad k > 0.$

(v) $N' = -\frac{N}{T}\,\ln(\frac{N}{m}),\qquad T > 0,\quad m > 0.$

2. Λύστε την προηγούμενη άσκηση με τη βοήθεια του *Mathematica*. Για κάθε μία από τις λύσεις του αντίστοιχου ΠΑΤ, επιλέξτε συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων της ΔΕ και κατασκευάστε γραφικές παραστάσεις της εξέλιξης του πληθυσμού που προβλέπει το κάθε μοντέλο για διαφορετικές τιμές του N_0.

6. ΔΕ της μορφής $x' = T(t)\,X(x)$ (Χωρισμένων μεταβλητών)

Μια προφανής γενίκευση των αυτόνομων ΔΕ είναι εκείνες όπου το δεξί μέλος της $x' = F(t, x)$ γράφεται ως γινόμενο μιας συνάρτησης του t και μιας του x. Δηλαδή, είναι της μορφής

(1) $$x' = T(t)\,X(x),$$

όπου, βέβαια, καμία από τις συναρτήσεις $T(t)$ και $X(x)$ δεν μηδενίζεται ταυτοτικά. Κάθε ΔΕ αυτής της μορφής λέγεται χωριζόμενων ή, καλύτερα, ***(δια)χωρισμένων μεταβλητών***. Ως συγκεκριμένο παράδειγμα μπορούμε να θεωρούμε την $x' = 2\,t\,x^2$.

Όσο αφορά τη συνάρτηση $X(x)$, θα διατηρήσουμε την συνθήκη του προηγούμενου εδάφιου: Τα σημεία στα οποία τυχόν μηδενίζεται η $X(x)$ είναι ευδιάκριτα. Αν, λοιπόν, το x_j είναι ένα από αυτά τα σημεία, τότε η σταθερή συνάρτηση $x(t) = x_j$ αποτελεί λύση της πιο πάνω εξίσωσης.

Από την άλλη, στο τυχαίο ανοιχτό διάστημα I που δεν περιέχει σημείο μηδενισμού (ρίζα) της $X(x)$, η ΔΕ (1) μπορεί να γραφτεί στη μορφή

(2) $$\frac{1}{X(x)}\,x' = T(t).$$

Συνεπώς,

(3) $$\int \frac{1}{X(x)}\,x'\,d\,t = \int T(t)\,d\,t + c$$

και άρα

(4) $$\int \frac{1}{X(x)}\,d\,x = \int T(t)\,d\,t + c.$$

Όταν ο υπολογισμός των αόριστων ολοκληρωμάτων είναι εφικτός, η (4) οδηγεί σε μια σχέση της μορφής $\varphi(x) = \upsilon(t) + c$. Στο βαθμό που αυτή μπορεί να λυθεί ως προς τη μεταβλητή x, μας δίνει ρητά εκφρασμένες λύσεις της ΔΕ (1). Διαφορετικά - κι αυτή είναι συνήθως η περίπτωση- η $\varphi(x) = \upsilon(t) + c$ θεωρείται ως έμμεση έκφραση των λύσεων της ΔΕ (1).

Παρατήρηση. Από πρακτική άποψη, αξίζει να σημειώσουμε το ακόλουθο συμπέρασμα της ανάλυσης που μόλις προηγήθηκε. Η αντικατάσταση $t \to \int T(t)\,d\,t$ μετατρέπει τις λύσεις της αυτόνομης ΔΕ $x' = X(x)$ σε λύσεις της ΔΕ χωρισμένων μεταβλητών $x' = T(t)\,X(x)$.

Παράδειγμα

Η μη γραμμική ΔΕ

(5) $$x' = 2\,t\,x^2,$$

την οποία ήδη αναφέραμε, είναι της μορφής $x' = T(t)\,X(x)$, με $T(t) = 2\,t$, $X(x) = x^2$. Άρα, μία λύση της (5) είναι η μηδενική συνάρτηση $x(t) = 0$.

Στα διαστήματα $x < 0$, $x > 0$, η εξίσωση (5) γράφεται σαν

(6) $$x^{-2}\,x' = 2\,t,$$

οπότε

(7) $$\int x^{-2}\,d\,x = \int 2\,t\,d\,t + c.$$

Συνεπώς

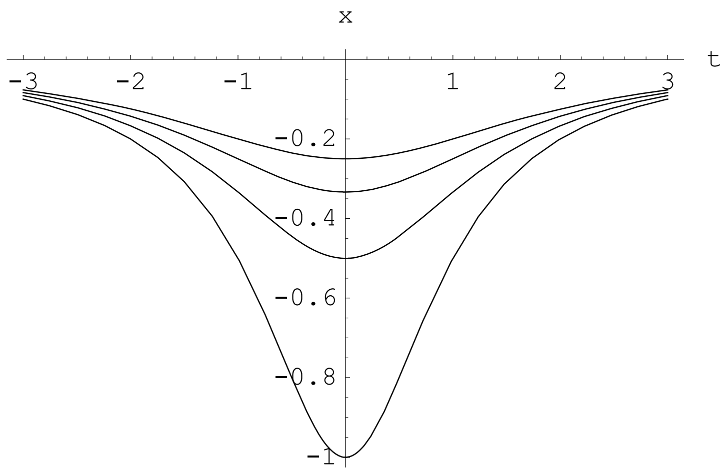
(8) $$-x^{-1} = t^2 + c.$$

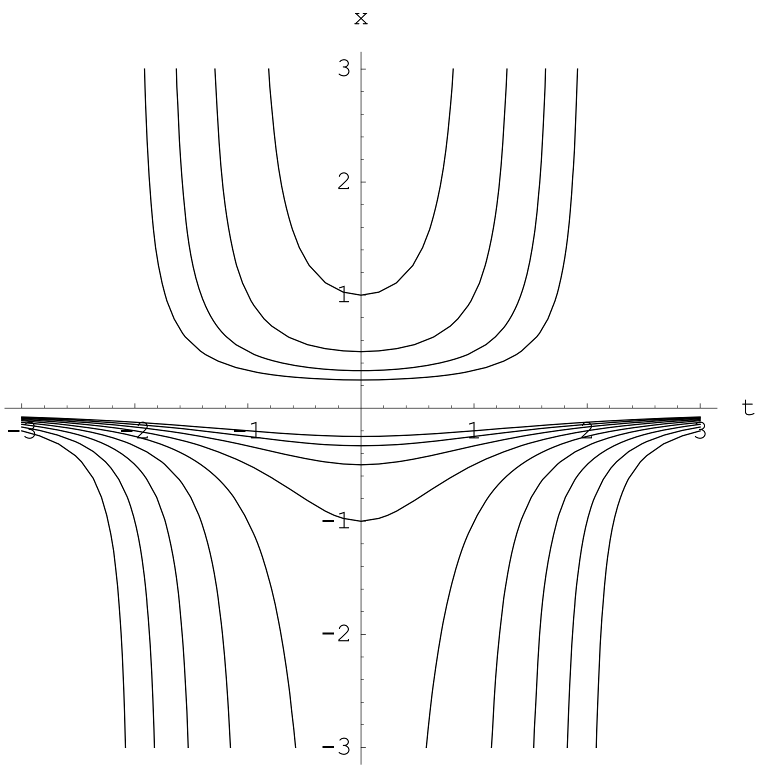
Θέτοντας $c = -C$, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι, οι μη μηδενικές λύσεις της (5) δίνονται από τον τύπο

(9) $$x = \frac{1}{C - t^2}.$$

Παρατήρηση. Και στο παράδειγμα που μόλις μελετήσαμε αναδείχνεται σαφώς το χαρακτηριστικό των μη γραμμικών ΔΕ να μην έχουν, συνήθως, όλες οι λύσεις τους το ίδιο πεδίο ορισμού. Συγκεκριμένα, τόσο η μηδενική λύση $x(t) = 0$, όσο και εκείνες που ορίζονται από τον τύπο (9) με $C < 0$, έχουν ως πεδίο ορισμού ολόκληρη την πραγματική ευθεία, $\mathbb{R}$. Αυτό φαίνεται καθαρά στο αμέσως επόμενο σχήμα, όπου δείχνουμε τις ολοκληρωτικές καμπύλες της ΔΕ (5) που αντιστοιχούν στις ακέραιες τιμές -1, -2, -3 και -4 της παραμέτρου C.

Αντίθετα, οι λύσεις που δίνονται από τον τύπο (9) με $C > 0$ δεν είναι φραγμένες και έχουν ως πεδίο ορισμού τα διαστήματα $\left(-\infty, -\sqrt{C}\right)$, $\left(-\sqrt{C}, \sqrt{C}\right)$ και $\left(\sqrt{C}, \infty\right)$. Ένα τμήμα των ολοκληρωτικών καμπυλών που ορίζονται από τον τύπο (9), όταν η παράμετρος C παίρνει μία από τις τιμές $\{1, 2, 3, 4\}$ δίνεται στο μεθεπόμενο σχήμα.





Παράδειγμα

Η ΔΕ

(13) $$x' = 2\,t\,(1 - x^2)$$

είναι επίσης χωρισμένων μεταβλητών, δηλαδή της μορφής $x' = T(t)\,X(x)$. Όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, $T(t) = 2\,t$, αλλά τώρα $X(x) = 1 - x^2$.

Αφού $X(\pm 1) = 0$, οι σταθερές συναρτήσεις $x(t) = \pm 1$ αποτελούν τις προφανείς λύσεις της ΔΕ (13). Στα διαστήματα του άξονα x που δεν περιέχουν τα σημεία ± 1, η παραπάνω ΔΕ είναι ισοδύναμη με την

(14) $$\frac{1}{1-x^2}\,x' = 2\,t,$$

οπότε

(15) $$\int \frac{1}{1-x^2}\,d\,x = \int 2\,t\,d\,t + c.$$

Για τη συνέχεια, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα του πρώτου Παραδείγματος του προηγούμενου εδάφιου. Το μόνο που χρειάζεται να κάνουμε για να καταλήξουμε στις λύσεις της ΔΕ (13) είναι η αντικατάσταση $t \to \int 2\,t\,d\,t$. Ειδικότερα, από την (15) συνάγουμε ότι

(16) $$\frac{1}{2}\ln\left|\,\frac{1+x}{1-x}\,\right| = t^2 + c$$

και άρα

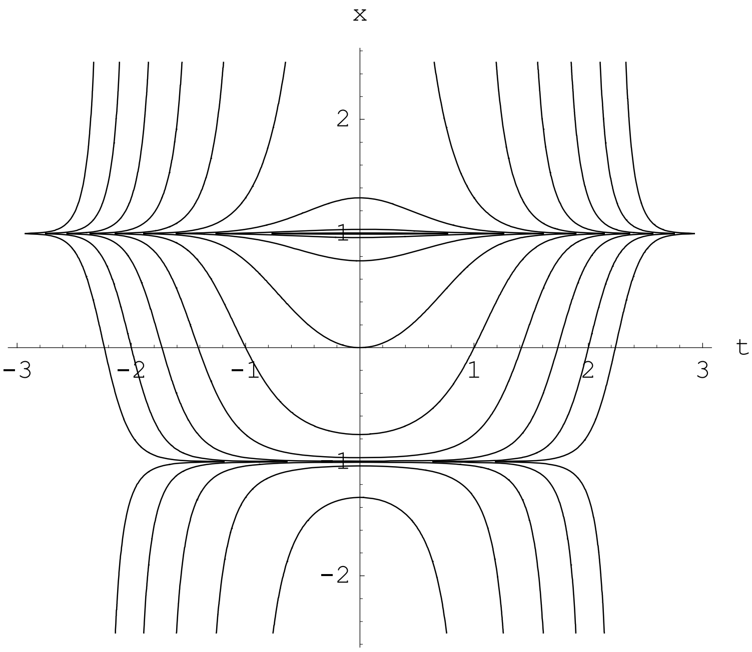
(17) $$\left|\,\frac{1+x}{1-x}\,\right| = e^{2\,(t^2+c)}\,.$$

Τελικά, εκτός από τις σταθερές λύσεις $x = \pm 1$, η ΔΕ (13) επιδέχεται και τις

(18) $$x = \frac{e^{2\,(t^2+c)}-1}{e^{2\,(t^2+c)}+1} = \frac{e^{t^2+c}-e^{-(t^2+c)}}{e^{t^2+c}+e^{-(t^2+c)}} \equiv \tanh\,(t^2 + c), \quad \text{αν}\ \ 1 - x^2 > 0,$$

(19) $$x = \frac{e^{2\,(t^2+c)}+1}{e^{2\,(t^2+c)}-1} = \frac{e^{t^2+c}+e^{-(t^2+c)}}{e^{t^2+c}-e^{-(t^2+c)}} \equiv \text{cotanh}\,(t^2 + c), \quad \text{αν}\ 1 - x^2 < 0.$$

Ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα των ολοκληρωτικών καμπυλών που αντιστοιχούν στις λύσεις (18) και (19) δίνεται στο επόμενο σχήμα.



Παράδειγμα

Η μη γραμμική ΔΕ

(22) $$x' = 3\,t^2\,(1 + x^2)$$

είναι της μορφής $x' = T(t)\,X(x)$, με $T(t) = 3\,t^2$, $X(x) = 1 + x^2$.

Η συνάρτηση $X(x)$ δε μηδενίζεται, συνεπώς η (22) είναι ισοδύναμη προς την

(23) $$\frac{1}{1+x^2}\,x' = 3\,t^2.$$

Από αυτήν έπεται ότι

(24) $$\int \frac{1}{1+x^2}\,d\,x = \int 3\,t^2\,d\,t + c$$

οπότε

(25) $$\arctan x = t^3 + c.$$

΄Αρα το σύνολο των λύσεων της ΔΕ (22) δίνεται από τον τύπο

(26) $$x = \tan(t^3 + c\,).$$

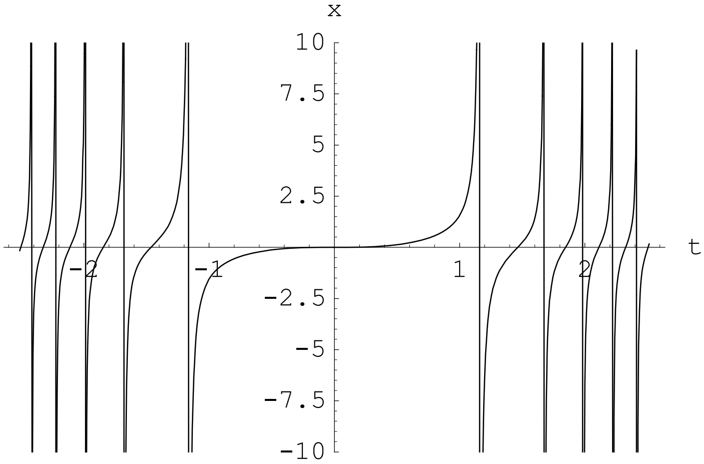
΄Οπως γνωρίζουμε, η συνάρτηση $\tan\theta$ δεν ορίζεται στα σημεία $\theta_n = (2\,n + 1)\,(\pi/2)$, $n \in \mathbb{Z}$. Ακριβέστερα, τείνει στο $\pm\infty$, καθώς η μεταβλητή θ πλησιάζει ένα από τα σημεία θ_n από τ' αριστερά ή τα δεξιά, αντίστοιχα. Συνακόλουθα, οι λύσεις (26) απειρίζονται καθώς η ανεξάρτητη μεταβλητή t πλησιάζει τα σημεία

(27) $$t_n = [(2\,n + 1)\,(\pi/2) - c]^{1/3}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Αυτή η συμπεριφορά των λύσεων φαίνεται καθαρά στο επόμενο σχήμα, στο οποίο δείχνουμε ορισμένες από τις ολοκληρωτικές καμπύλες που ορίζονται από τον τύπο (26) όταν $c = 0$. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, οι λύσεις απειρίζονται καθώς πλησιάζουμε τα σημεία $t_n = (2\,n + 1)^{1/3}\,(\pi/2)^{1/3}$. Ισοδύναμα, οι λύσεις με $c = 0$ ορίζονται μόνο στα ανοιχτά διαστήματα

$I_n = (t_{n-1},\, t_n)$. ΄Οπως φαίνεται και στο σχήμα, το μήκος, T_n, αυτών των διαστημάτων μηδενίζεται καθώς το $n \to \pm\infty$, αφού

(28) $$T_n := t_n - t_{n-1} = [(2\,n+1)^{1/3} - (2\,n-1)^{1/3}]\,(\pi/2)^{1/3}\,.$$



Παράδειγμα

Η μη γραμμική ΔΕ

(29) $$x' = \tfrac{t^2}{1+x^2}$$

είναι της μορφής $x' = T(t)\,X(x)$, με $T(t) = t^2$, $X(x) = (1+x^2)^{-1}$, και άρα χωρισμένων μεταβλητών.

Στην προκείμενη περίπτωση, όμως, η συνάρτηση $X(x)$ δεν έχει ρίζες στον πραγματικό άξονα. ΄Αρα, είναι ισοδύναμη με την

(30) $$(1+x^2)\,x' = t^2.$$

Συνεπώς,

(31) $$\int (1+x^2)\,d\,x = \int t^2\,d\,t + c,$$

οπότε

(32) $$x + \tfrac{1}{3}\,x^3 = \tfrac{1}{3}\,t^3 + c.$$

Ισοδύναμα,

(33) $$3\,x + x^3 = t^3 + C.$$

Αυτή η σχέση δίνει έμμεσα όλες τις λύσεις της ΔΕ (29), με την έννοια ότι λύνεται, κατ’ αρχήν, για να δώσει την x ως συνάρτηση της t (και της παραμέτρου C, φυσικά). Αυτό οφείλεται στο ακόλουθο γεγονός. Από τη μια, η (33) γράφεται σαν

(34) $$u(t,\, x) := 3\,x + x^3 - t^3 = C.$$

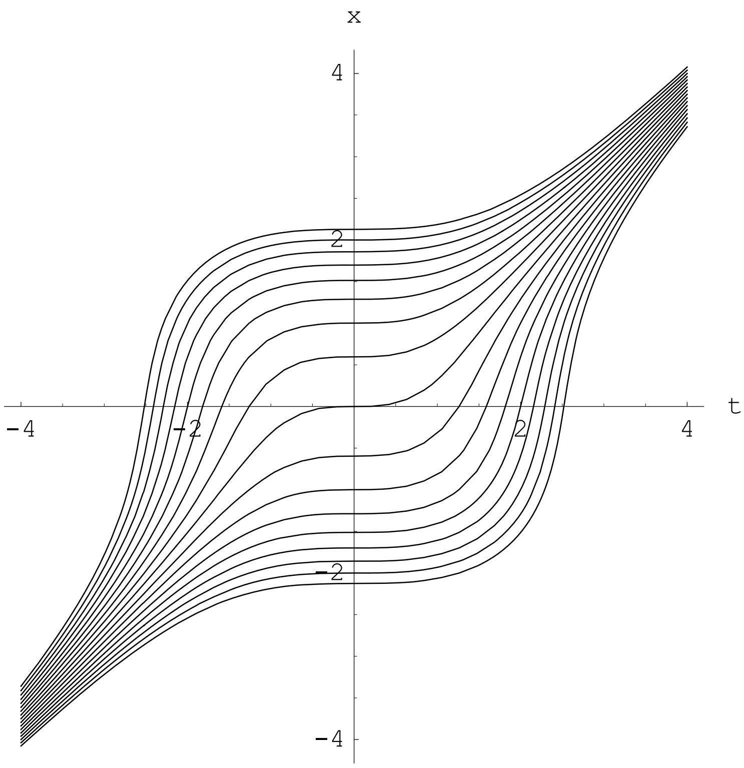
Από την άλλη,

(35) $$\partial_x u(t,\, x) = 3\,(1+x^2) \neq 0.$$

Με βάση το θεώρημα της μπλεγμένης (έμμεσα οριζόμενης) συνάρτησης, η (35) συνεπάγεται ότι οι ολοκληρωτικές καμπύλες της ΔΕ (30) ταυτίζονται με τις ισοσταθμικές της συνάρτησης $u(t, x)$, δηλαδή με τα ακόλουθα υποσύνολα του Ευκλείδειου επίπεδου:

(36) $$I_u := \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : 3\,x + x^3 - t^3 = C\}$$

Λεπτομέρειες για την παραπάνω αντιστοιχία θα δώσουμε στο επόμενο εδάφιο. Εδώ, περιοριζόμαστε να σημειώσουμε ότι, το επόμενο σχήμα δίνει μια ποιοτική εικόνα των ισοσταθμικών καμπυλών της συνάρτησης $u(t, x) = 3\,x + x^3 - t^3$, $(t, x) \in \mathbb{R}^2$, και, ταυτόχρονα, των ολοκληρωτικών καμπυλών της ΔΕ (30).



Παράδειγμα

Η ΔΕ

(37) $$(x^2 - 1)\,x' + t^2 = 0$$

μπορεί να θεωρηθεί ως χωρισμέων μεταβλητών, αφού, όταν $x(t) \neq \pm 1$, γράφεται στη μορφή $x' = T(t)\,X(x)$, με $T(t) = t^2$, $X(x) = (1 - x^2)^{-1}$.

Από την (37) αμέσως έπεται ότι,

(38) $$\int (1 - x^2)\,d\,x = \int t^2\,d\,t + \tilde{c}$$

Τα ολοκληρώματα υπολογίζονται εύκολα, οπότε καταλήγουμε στη σχέση

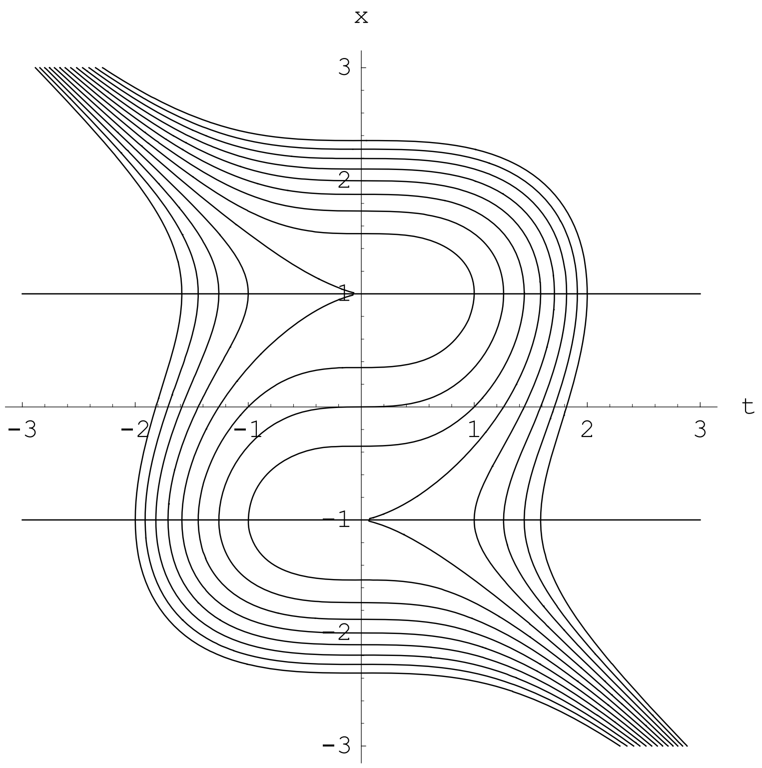
(39) $$x - \frac{1}{3}\,x^3 = \frac{1}{3}\,t^3 + \tilde{c}.$$

Με άλλα λόγια, οι λύσεις της ΔΕ (24) προσδιορίζονται έμμεσα από τη σχέση

(40) $$3\,x - x^3 - t^3 = c$$

όπου c τυχαίος πραγματικός αριθμός.

Στο επόμενο σχήμα δείχνουμε τις ολοκληρωτικές καμπύλες των σταθερών λύσεων $x(t) = \pm 1$, καθώς και ορισμένων από τις λύσεις που ορίζονται έμμεσα από την εξίσωση (40).



Ασκήσεις

1. Να λυθούν οι παρακάτω ΔΕ. Σε κάθε περίπτωση, κατασκευάστε ορισμένες καμπύλες του επίπεδου $t\,x$ που να δίνουν άμεσα ή έμμεσα μια ποιοτική εικόνα των αντίστοιχων λύσεων.

(i) $x' = (t-2)\,(2\,x-1)$.

(ii) $x' = \frac{t-2}{2\,x-1}$.

(iii) $x' = \frac{2\sin(2\,t)}{2\,x-1}$.

(iv) $x' = 2\,t^2\,x^2$.

(v) $x' = \frac{(1-x^2)}{t}$.

(vi) $x' = \frac{x\cos t}{1+x^2}$.

(vii) $x' = \frac{2\,t}{2\,x+e^x}$.

(viii) $x' = \frac{3\,t^2}{\cosh x}$.

2. Να λυθούν τα ακόλουθα ΠΑΤ. Σε κάθε περίπτωση, να προσδιοριστεί και το διάστημα της ανεξάρτητης μεταβλητής στο οποίο ισχύει η λύση.

(i) $x' = \frac{2\sin(2\,t)}{2\,x-1}$, $\quad x(\pi/2) = 2$.

(ii) $x' = 2\,t^2\,(x-1)^2, \quad x(0) = -2.$

(iii) $x' = \frac{\sqrt{1-x^2}}{t}, \quad x(1) = -1.$

(iv) $x' = \frac{2\,t-e^{-t}}{2\,x+e^x}, \quad x(1) = -1.$

(v) $x' = \frac{1-3\,t^2}{\cosh x}, \quad x(0) = 1.$

(vi) $x' = \frac{2\,t}{1-\sinh x}, \quad x(0) = 0.$

(vii) $x' = \frac{x\cos t}{1+2\,x^2}, \quad x(\pi/2) = 1.$

7. ΔΕ της μορφής $x' = G(x/t)$, Bernoulli και Ricatti

7.1 ΔΕ της μορφής $x' = G(x/t)$ (Ομογενείς)

Σε πολλές περιπτώσεις το δεξί μέλος της ΔΕ $x' = F(t, x)$ μπορεί να γραφτεί στη μορφή $F(t, x) = G(x/t)$, όπου $G(z)$ μια συνάρτηση που είναι συνεχής στο διάστημα I της πραγματικής ευθείας. Τότε η ΔΕ χαρακτηρίζεται ***ομογενής***. Αυτός ο χαρακτηρισμός μπορεί να δημιουργήσει σύγχυση, αφού όρος "ομογενής" χρησιμοποιείται και στο πλαίσιο των γραμμικών ΔΕ, αλλά με διαφορετικό νόημα. Προσοχή, λοιπόν.

Μια ΔΕ που είναι ομογενής με την παρούσα έννοια ανάγεται σε χωρισμένων μεταβλητών ως εξής: Αρχικά εισάγουμε μια νέα εξαρτημένη μεταβλητή, ας την πούμε y, θέτοντας

(1) $$x = t\,y \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = t\,y(t).$$

Από τον κανόνα του Leibniz για την παραγώγιση γινομένου έπεται ότι

(2) $$x' = y + t\,y'.$$

Συνακόλουθα, η ΔΕ

(3) $$x' = G(\tfrac{x}{t})$$

μετατρέπεται στην

(4) $$y + t\,y' = G(y).$$

Στα παραπάνω εξυπακούεται ότι $t \neq 0$. Συνεπώς, η (4) είναι ισοδύναμη με την

(5) $$y' = \frac{H(y)}{t}, \quad H(y) := G(y) - y,$$

που είναι χωρισμένων μεταβλητών.

Προφανώς, κάθε σταθερή συνάρτηση $y(t) = y_j$, όπου y_j ρίζα της συνάρτησης $H(y)$, αποτελεί λύση της ΔΕ (5). Στα διαστήματα του άξονα y που δεν περιέχουν ρίζες της $H(y)$, η (5) είναι ισοδύναμη με την

(6) $$\frac{y'}{H(y)} = \frac{1}{t}.$$

Τότε

(7) $$\int \frac{y'}{H(y)}\, d\, t = \int \frac{1}{t}\, d\, t + c,$$

ή

(8) $$\int \frac{1}{H(y)}\, d\, y = \ln|\, t\,| + c$$

Αυτή η σχέση δίνει έμμεσα τη συνάρτηση $y(t)$ και άρα οδηγεί σε λύσεις της αρχικής ΔΕ.

Παράδειγμα

Ας θεωρήσουμε τη μη γραμμική ΔΕ

(9) $$t^2\, x' = (2\, t\, + x)\, x$$

΄Οταν $t = 0$, συντελεστής του x' μηδενίζεται. ΄Αρα το $t = 0$ είναι ανώμαλο σημείο της ΔΕ (9). Στα διαστήματα $t < 0$ και $t > 0$, από την άλλη, η (9) είναι ισοδύναμη με την ομογενή ΔΕ

(10) $$x' = G\left(\frac{x}{t}\right), \qquad G(y) := (2 + y)\, y.$$

Αφού $H(y) := G(y) - y = y(y + 1)$, η τελευταία μετατρέπεται στην (βλ. εξ. (5))

(11) $$y' = \frac{y(y+1)}{t}\,,$$

που είναι χωρισμένων μεταβλητών.

Προφανώς, η (11) επιδέχεται τις σταθερές λύσεις $y(t) = 0$ και $y(t) = -1$. Αυτό σημαίνει ότι η αρχική ΔΕ (9) επιδέχεται τις λύσεις $x(t) = 0$ και $x(t) = -t$.

Στα διαστήματα του άξονα y που δεν περιέχουν τα σημεία $y = 0$ και $y = -1$, οι λύσεις της (11) δίνονται από τον τύπο (8). Στην περίπτωση που εξετάζουμε

$$\int \frac{1}{H(y)}\, d\, y = \int \frac{1}{y(y+1)}\, d\, y = \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{1+y}\right) d\, y = \ln|\, y\,| - \ln|\, 1 + y\,| = \ln\left|\, \frac{y}{1+y}\,\right|$$

Συνακόλουθα, ο τύπος (8) γίνεται

(12) $$\ln\left|\, \frac{y}{1+y}\,\right| = \ln\,|\, t\,| + c.$$

Ισοδύναμα

(13) $$\ln\left|\, \frac{y}{(1+y)\, t}\,\right| = c$$

και άρα η ποσότητα $y/(1 + y)\, t$ είναι μια μη μηδενική σταθερή. Αυτό σημαίνει ότι

(14) $$\frac{y}{1+y} = C\, t,$$

οπότε

(15) $$y = \frac{C\, t}{1 - C\, t}.$$

Συνεπώς,

(16) $$x = t\, y\, = \frac{C\, t^2}{1 - C\, t}.$$

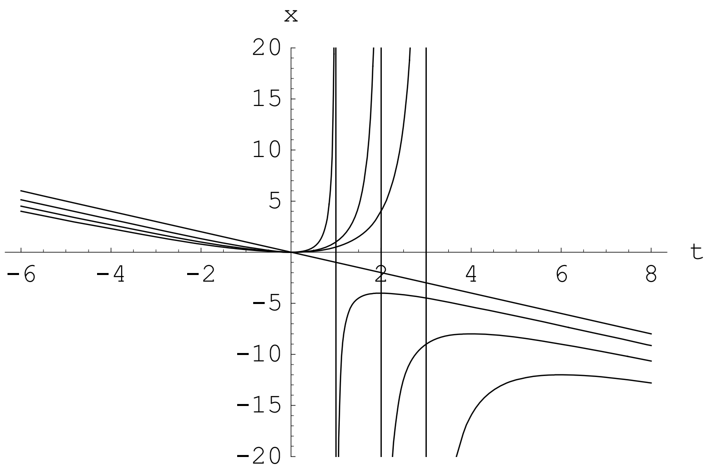
Σ' αυτό το σημείο μπορούμε να άρουμε και τον περιορισμό $C \neq 0$, αφού η ΔΕ (9) έχει ως λύση και τη μηδενική συνάρτηση $x(t) = 0$.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι, το πεδίο ορισμού των λύσεων που δίνονται από τον τύπο (16) εξαρτιέται από την παράμετρο C. Συγκεκριμένα, ως πεδίο ορισμού της μηδενικής λύσης μπορούμε να θεωρήσουμε οποιοδήποτε τμήμα της πραγματικής ευθείας. Αντίθετα, οι λύσεις που αντιστοιχούν σε $C \neq 0$ ορίζονται σε διαστήματα της μορφής $(-\infty, C^{-1})$ και (C^{-1}, ∞), το πολύ. Μια από αυτές τις δύο οικογένειες διαστημάτων περιέχει πάντοτε το σημείο $t = 0$.

Από την (16) αμέσως έπεται ότι

(17) $$x' = \frac{C\,t\,(2 - C\,t)}{(1 - C\,t)^2}$$

Συνεπώς, όλες οι συναρτήσεις της μορφής (16) που ορίζονται σε μια γειτονιά του $t = 0$, καθώς και οι παράγωγοί τους, μηδενίζονται σ' αυτό το σημείο: $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$. ΄Αρα, οι αντίστοιχες ολοκληρωτικές καμπύλες διέρχονται από το σημείο $(0, 0)$ του επίπεδου $t - x$, εφαπτόμενες στον άξονα t. Αυτή η συμπεριφορά φαίνεται καθαρά στο επόμενο σχήμα, όπου δίνεται η γραφική παράσταση των συναρτήσεων (16) για $C = 1$, $1/2$ και $1/3$.



Είναι φανερό ότι, οι τρεις ολοκληρωτικές καμπύλες που αντιστοιχούν στις λύσεις με πεδίο ορισμού τα διαστήματα $(-\infty, 1)$, $(-\infty, 2)$ και $(-\infty, 3)$ διέρχονται από την αρχή των αξόνων $t - x$ και έχουν τον άξονα t ως κοινή εφαπτομένη. Ωστόσο, από την άποψη της ΔΕ (19), το τμήμα $t > 0$ αυτών των καμπυλών δεν είναι απαραίτητο να θεωρείται ως συνέχεια του τμήματος $t < 0$. Για παράδειγμα, το τμήμα $0 < t < 1$ της καμπύλης που αντιστοιχεί στην τιμή $C = 1$, μπορεί να θεωρηθεί ως συνέχεια οποιασδήποτε από τις ολοκληρωτικές καμπύλες του διαστήματος $-\infty < t < 0$ που συγκλίνουν στο σημείο $(0, 0)$.

Με άλλα λόγια, όχι μόνο η

(18) $$x = \frac{t^2}{1 - t}, \qquad -\infty < t < 1,$$

αλλά και κάθε συνάρτηση της μορφής

(19) $$x = \begin{cases} \frac{C\,t^2}{1 - C\,t}, & t \leq 0 \\ \frac{t^2}{1 - t}, & 0 \leq t < 1 \end{cases}$$

όπου $C \geq 0$, αποτελεί λύση της ΔΕ (9) στο διάστημα $-\infty < t < 1$.

Ανάλογα, κάθε συνάρτηση της μορφής

(20) $$x = \begin{cases} \frac{C t^2}{1-C t}, & t \leq 0 \\ \frac{t^2}{2-t}, & 0 \leq t < 2 \end{cases}$$

όπου $C \geq 0$, αποτελεί λύση της ΔΕ (9) στο διάστημα $-\infty < t < 2$, και όχι μόνο η $x = t^2/(2-t)$.

Το ότι από το σημείο (0,0) του επίπεδου $t-x$ διέρχονται άπειρες ολοκληρωτικές καμπύλες της ΔΕ (9) αντικατοπτρίζει το γεγονός ότι το ΠΑΤ

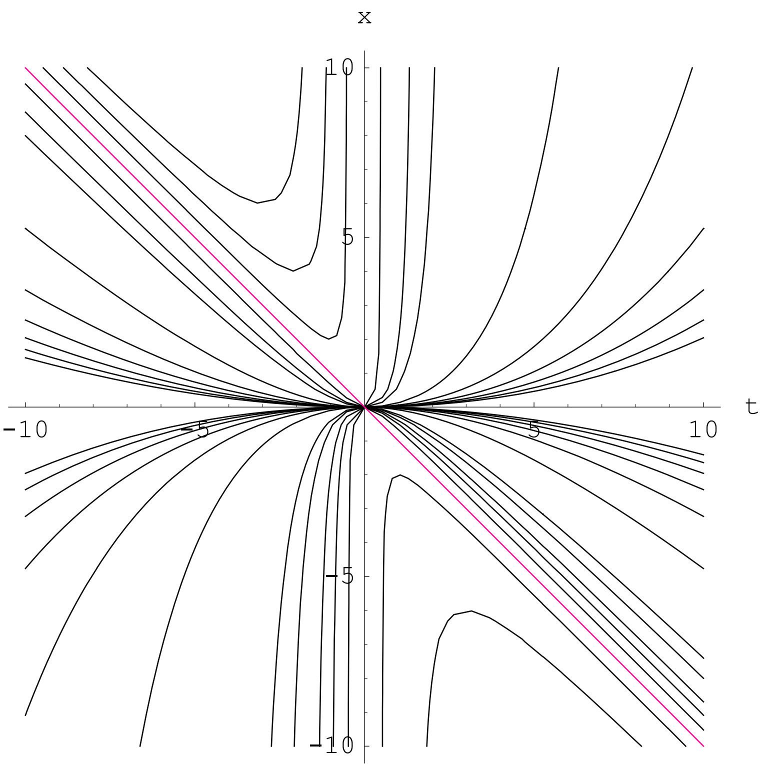
(21) $$t^2 x' = (2t + x)x, \quad x(t_0) = x_0,$$

δεν έχει μονοσήμαντη λύση όταν $(t_0, x_0) = (0, 0)$.

Αντίθετα, όταν το αρχικό σημείο $(t_0, x_0) \neq (0, 0)$, το ΠΑΤ (21) έχει μοναδική λύση που δίνεται από την έκφραση

(22) $$x = \frac{t^2}{t_\kappa - t}, \quad t_\kappa := t_0\left(1 + \frac{t_0}{x_0}\right).$$

Για λόγους πληρότητας, στο επόμενο σχήμα δείχνουμε ορισμένες από τις καμπύλες που ορίζονται από τον τύπο (16), καθώς κι εκείνες που αντιστοιχούν στις λύσεις $x(t) = 0$ και $x(t) = -t$.



Παράδειγμα

Η μη γραμμική ΔΕ

(23) $$x' = \frac{3t - 4x}{4(t-x)}$$

είναι ομογενής, αφού γράφεται στη μορφή

(24) $$x' = G(\tfrac{x}{t}), \qquad G(y) := \frac{3-4y}{4(1-y)}.$$

Η συνάρτηση

(25) $$H(y) := G(y) - y = \frac{3-4y-4(1-y)y}{4(1-y)} = \frac{3-8y+4y^2}{4(1-y)}$$

μηδενίζεται όταν $y = 1/2,\ 3/2$. Άρα, η ΔΕ $y' = t^{-1} H(y)$ επιδέχεται τις σταθερές λύσεις $y_1(t) = 1/2$ και $y_2(t) = 3/2$. Συνακόλουθα, οι συναρτήσεις $x_1(t) = (1/2)\,t$ και $x_2(t) = (3/2)\,t$ αποτελούν λύσεις της ΔΕ (23).

Τώρα,

(26) $$\int \frac{1}{H(y)}\,d\,y = \int \frac{4(1-y)}{3-8y+4y^2}\,d\,y = -\frac{1}{2}\int \frac{8y-8}{3-8y+4y^2}\,d\,y = -\frac{1}{2}\ln|4y^2-8y+3|$$

Άρα, στην προκείμενη περίπτωση, ο τύπος (8) γίνεται

(27) $$-\frac{1}{2}\ln|4y^2-8y+3| = \ln|t| + c.$$

Ισοδύναμα

(28) $$\ln|(4y^2-8y+3)\,t^2| = -2\,c$$

ή

(29) $$(4y^2-8y+3)\,t^2 = C,$$

όπου C τυχαίος μη μηδενικός αριθμός.

Όμως, $t\,y = x$. Άρα η προηγούμενη σχέση γίνεται

(30) $$4x^2 - 8\,t\,x + 3\,t^2 = C.$$

Η τελευταία λύνεται εύκολα για να δώσει

(31) $$x = t \pm \frac{1}{2}\sqrt{C+t^2}.$$

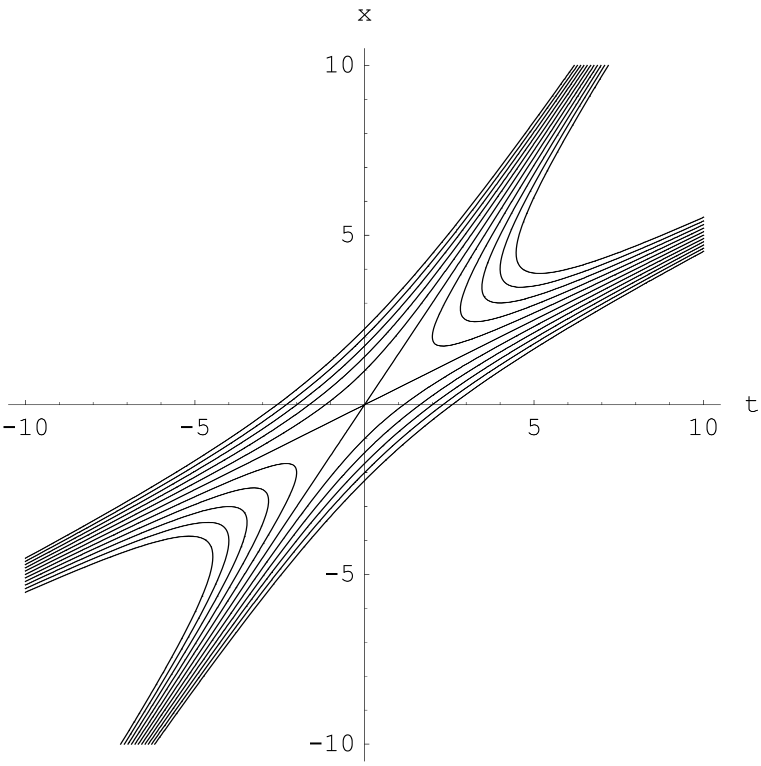
Σ' αυτό το σημείο, αξίζει να παρατηρήσουμε ότι, για $C = 0$, ο τύπος (31) αναπαράγει τις λύσεις $x_1(t) = (1/2)\,t$ και $x_2(t) = (3/2)\,t$. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να άρουμε τον αρχικό περιορισμό $C \neq 0$, έτσι ώστε όλες οι λύσεις της ΔΕ (23) να εκφράζονται από την (31).

Από αυτή την έκφραση είναι φανερό ότι, οι λύσεις που αντιστοιχούν σε αρνητικές τιμές της παραμέτρου C ορίζονται μόνο έξω από το διάστημα $-|C|^{1/2} \le t \le |C|^{1/2}$. Για παράδειγμα, όταν $C = -16$, ο τύπος (31) ορίζει την ακόλουθη τετράδα λύσεων της ΔΕ (23):

(32) $$x = t + \frac{1}{2}\sqrt{t^2-16}, \qquad x = t - \frac{1}{2}\sqrt{t^2-16}, \qquad t < -4$$

(33) $$x = t + \frac{1}{2}\sqrt{t^2-16}, \qquad x = t - \frac{1}{2}\sqrt{t^2-16}, \qquad t > 4.$$

Στο επόμενο σχήμα δείχνουμε τις ευθείες $x = (1/2)\,t$ και $x = (3/2)\,t$, μαζί με ορισμένες από τις ισοσταθμικές καμπύλες της συνάρτησης $u(x, t) = 4x^2 - 8\,t\,x + 3\,t^2$. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι, για $C < 0$, η συνθήκη $u(x, t) = C$ ορίζει δύο παραβολικού τύπου καμπύλες. Μία στο πρώτο και μία στο τρίτο τεταρτημόριο του επίπεδου $t - x$. Το πάνω τμήμα κάθε μιας από αυτές τις παραβολές αντιστοιχεί στη λύση $x = t + (1/2)\sqrt{C+t^2}$, ενώ το κάτω τμήμα αντιστοιχεί $x = t - (1/2)\sqrt{C+t^2}$.



Θα πρέπει να σημειωθεί ότι, το πεδίο ορισμού των λύσεων που δίνονται από τον τύπο (16) εξαρτιέται από την παράμετρο C. Συγκεκριμένα, η μηδενική λύση ορίζεται σε όλη την πραγματική ευθεία, αλλά οι λύσεις που αντιστοιχούν σε $C \neq 0$ περιορίζονται σε διαστήματα της μορφής $(-\infty, C^{-1})$ και (C^{-1}, ∞). Μια από αυτές τις δύο 1-παραμετρικές οικογένειες διαστημάτων περιέχει πάντοτε το σημείο $t = 0$. Από την (16) έπεται ότι

(17) $$x' = \frac{C\,t\,(2 - C\,t)}{(1 - C\,t)^2}$$

΄Αρα, για όλες τις συναρτήσεις που ορίζονται από τον τύπο (16), $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$. Συνεπώς, οι ολοκληρωτικές καμπύλες όλων των λύσεων που ορίζονται στα διαστήματα τα οποία περιέχουν το σημείο $t = 0$ διέρχονται από το σημείο $(0, 0)$ του επίπεδου $t - x$, εφαπτόμενες στον άξονα t. Επειδή και η μηδενική συνάρτηση $x(t) = 0$ είναι λύση της ΔΕ, αυτό έχει ως συνέπεια τα αντίστοιχα ΠΑΤ να έχουν μονοσήμαντη λύση μόνο στα ανοιχτά διαστήματα που βρίσκονται αριστερά ή δεξιά του μηδενός.

Ασκήσεις

1. Να λυθούν οι ακόλουθες ομογενείς ΔΕ.

(i) $x' = \frac{2\,t + x}{x}$

(ii) $x' = \frac{2\,t + x}{t + x}$

(iii) $t\,x' = \sqrt{t^2 + x^2}$

(iv) $t\,x' = x - \sqrt{t^2 + x^2}$

(v) $t\,x' = x + \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + x^2}}$

2. Να λυθούν τα ακόλουθα ΠΑΤ

(i) $x' = \frac{t-x}{t+2x}$, $x(0) = 1$.

(ii) $t(t+x)x' = t^2 + tx + x^2$, $x(1) = 2$.

(iii) $t x x' = x^2 + t\sqrt{t^2+x^2}$, $x(1) = 1$.

7.2 ΔΕ Bernoulli

Ως ***εξίσωση Bernoulli*** αναφέρεται κάθε μη γραμμική ΔΕ της μορφής

(1) $$x' + p(t)\,x = q(t)\,x^{\gamma}, \quad \gamma \notin \{0, 1\}.$$

Ο λόγος για τον οποίο αποκλείουμε τις τιμές 0 και 1 για τον εκθέτη γ είναι ότι γι αυτές τις τιμές η (1) είναι γραμμική.

Προφανώς, η μηδενική συνάρτηση $x(t) = 0$ αποτελεί λύση της εξίσωσης Bernoulli. Στα διαστήματα μη μηδενισμού της $x(t)$, η εισαγωγή της νέας εξαρτημένης μεταβλητής

(2) $$\upsilon(t) = x^{1-\gamma}(t)$$

μετατρέπει την (1) στη γραμμική

(3) $$\upsilon' + (1-\gamma)\,p(t)\,v = (1-\gamma)\,q(t)$$

Απόδειξη: Από την (2) έπεται ότι

(4) $$\upsilon' = (1-\gamma)\,x^{-\gamma}\,x'$$

Από την άλλη η (1) γράφεται σαν

(5) $$x^{-\gamma}\,x' + p(t)\,x^{1-\gamma} = q(t)$$

Η αντικατάσταση των (2), (4) στην (5) δίνει την

$$(1-\gamma)^{-1}\,\upsilon' + p(t)\,\upsilon = q(t)$$

που είναι ταυτόσημη με την (3).

Παράδειγμα

Σε κάθε διάστημα που δεν περιέχει το μηδέν, η ΔΕ

(6) $$t\,x' + 2\,x + 2\,t\,x^2 = 0$$

είναι ισοδύναμη με την

(7) $$x' + \frac{2}{t}\,x = -2\,x^2$$

Η τελευταία είναι της μορφής (1), με $p(t) = 2/t$, $q(t) = -2$, $\gamma = 2$. ΄Αρα, με την εισαγωγή της νέας εξαρτημένης μεταβλητής

(8) $$\upsilon = x^{-1},$$

μετατρέπεται στην

(9) $$\upsilon' - \frac{2}{t}\,\upsilon = 2.$$

Η γενική λύση της (9) είναι της μορφής

(10) $$\upsilon = c\,t^2 - 2\,t,$$

πράγμα που σημαίνει ότι η (6) επιδέχεται λύσεις της μορφής

(11) $$x = \frac{1}{t(c\,t-2)}\,.$$

Παράδειγμα

Η ΔΕ

(12) $$x' + \tanh t\,x = x^3$$

είναι της μορφής (1) με $p(t) = \tanh t$, $q(t) = 1$, $\gamma = 3$. Συνεπώς, η αντικατάσταση

(13) $$x \to \upsilon = x^{-2}$$

οδηγεί στην γραμμική ΔΕ

(14) $$\upsilon' - 2\,(\tanh t)\,\upsilon = -2\,.$$

Οι λύσεις της τελευταίας δίνονται από τις συναρτήσεις

(15) $$\upsilon = \cosh^2 t(c - 2\tanh t).$$

΄Αρα, η εξίσωση Bernoulli (12) επιδέχεται λύσεις της μορφής

(16) $$x = \pm\frac{1}{\cosh t\,\sqrt{c-2\tanh t}}\,.$$

Παρατήρηση. Σημειώστε ότι $x(0) = \pm 1\big/\sqrt{c}$ και ότι οι λύσεις που παραμένουν φραγμένες είναι εκείνες για τις οποίες $c \geq 2$.

Ασκήσεις

1. Να λυθούν τα ακόλουθα ΠΑΤ.

(i) $t\,x' + x + t\,x^2 = 0,\quad x(1) = 1.$

(ii) $x' + x = x^2,\quad x(0) = 2.$

(iii) $x' = x(t+x),\quad x(0) = 1.$

(iv) $t\,x' + x = x^{1/3},\quad x(1) = 0.$

(v) $x' - x = x^{1/2},\quad x(0) = 1.$

(vi) $x' - x = e^t\,x^{3/2},\quad x(0) = 1.$

7.3 ΔΕ Ricatti

Κάθε μη γραμμική ΔΕ της μορφής

(1) $$x' = f(t) + g(t)\,x + h(t)\,x^2,$$

ονομάζεται ***εξίσωση Ricatti***. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι, στην περίπτωση που η συνάρτηση $f(t)$ μηδενίζεται, η ΔΕ Ricatti ανάγεται σε μια Bernoulli.

Για τις ΔΕ Ricatti, δεν υπάρχει γενικός αλγόριθμος που να τις μετατρέπει σε έναν από τους τύπους των εξισώσεων που γνωρίζουμε να λύνουμε. Ωστόσο, αυτό είναι εφικτό όταν, με τον ένα ή τον άλλο τρόπο, έχουμε καταφέρει να εντοπίσουμε μια συγκεκριμένη λύση τους.

Ας υποθέσουμε, λοιπόν, ότι η $u(t)$ είναι μια γνωστή λύση της ΔΕ (1). Τότε, η αντικατάσταση

(2) $$x(t) = u(t) + \frac{1}{\upsilon(t)}, \qquad \upsilon(t) \neq 0,$$

μετατρέπει την (1) στη γραμμική

(3) $$\upsilon' + [g(t) + 2\,h(t)\,u(t)]\,\upsilon + h(t) = 0.$$

Απόδειξη: Από την (2) έπεται ότι

(4) $$x' = u' - \upsilon^{-2}\,\upsilon'$$

΄Αρα η (1) γράφεται σαν

(5) $$u' - \upsilon^{-2}\,\upsilon' = f(t) + g(t)\,(u + \upsilon^{-1}) + h(t)\,(u + \upsilon^{-1})^2$$

Ισοδύναμα,

(6) $$u' - \upsilon^{-2}\,\upsilon' = f(t) + g(t)\,(u + \upsilon^{-1}) + h(t)\,(u^2 + 2\,u\,\upsilon^{-1} + \upsilon^{-2}).$$

΄Ομως η $u(t)$ είναι λύση της (1). Αυτό σημαίνει ότι,

(7) $$u' = f(t) + g(t)\,u + h(t)\,u^2.$$

Συνεπώς η (6) γίνεται

$$-\upsilon^{-2}\,\upsilon' = g(t)\,v^{-1} + h(t)\,(2\,u\,\upsilon^{-1} + \upsilon^{-2}).$$

που είναι ταυτόσημη με την (3).

Παράδειγμα

Η ΔΕ

(8) $$x' = 1 + t\,x - x^2$$

γράφεται στη μορφή (1) με $f(t) = 1$, $g(t) = t$ και $h(t) = -1$.

Από την άλλη μεριά, εύκολα επαληθεύεται ότι η (8) επιδέχεται ως λύση τη συνάρτηση

(9) $$u(t) = t.$$

΄Αρα, η αντικατάσταση

(10) $$x(t) = t + \frac{1}{\upsilon(t)}$$

μετατρέπει την (8) στη γραμμική

(11) $$\upsilon' - t\,\upsilon = 1.$$

Η γενική λύση της ομογενούς που αντιστοχεί στην (11) είναι της μορφής $c\,e^{t^2/2}$. ΄Αρα, η γενική λύση αυτής της ΔΕ δίνεται από τον τύπο

(12) $$\upsilon = c\,e^{t^2/2} + e^{t^2/2} \int_0^t e^{-\xi^2/2}\,d\,\xi.$$

Ισοδύναμα,

(13) $$\upsilon = c\,e^{t^2/2} + e^{t^2/2}\sqrt{2}\int_0^{t/\sqrt{2}} e^{-\zeta^2}\,d\,\zeta.$$

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση σφάλματος, μπορούμε να γράψουμε την (13) στη μορφή

(14) $$\upsilon = e^{t^2/2}\left[c + \sqrt{2}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\mathrm{Erf}\left(t\big/\sqrt{2}\right)\right]$$

΄Αρα, η ΔΕ Ricatti (8) επιδέχεται λύσεις της μορφής

(15) $$x = t + \frac{1}{\upsilon} = t + \frac{1}{e^{t^2/2}\left(c+\sqrt{\pi/2}\,\mathrm{Erf}\left(t/\sqrt{2}\right)\right)} = t + \frac{e^{-t^2/2}}{c+\sqrt{\pi/2}\,\mathrm{Erf}\left(t/\sqrt{2}\right)}\ .$$

Παράδειγμα

Στα διαστήματα που δεν περιέχουν το μηδέν, η ΔΕ

(16) $$t^2\,x' + t\,x = t^2\,x^2 - 1$$

είναι ισοδύναμη με την

(17) $$x' = -t^{-2} - t^{-1}\,x + x^2.$$

Αυτή είναι μια ΔΕ Ricatti, αφού έχει τη μορφή (1), με $f(t) = -t^{-2}$, $g(t) = -t^{-1}$ και $h(t) = 1$.

Μια λύση της (16) -άρα και της (17)- είναι η συνάρτηση t^{-1}. ΄Αρα, εισάγοντας την εξαρτημένη μεταβλητή υ, μέσω της

(18) $$x = t^{-1} + \frac{1}{\upsilon(t)},$$

μπορούμε να μετατρέψουμε την (17) στη γραμμική

(19) $$\upsilon' + t^{-1}\,\upsilon = -1.$$

Η γενική λύση της τελευταίας δίνεται από την έκφραση

(20) $$\upsilon = c\,t^{-1} - \frac{t}{2}.$$

΄Αρα, οι συναρτήσεις

(21) $$x = t^{-1} + \frac{1}{c\,t^{-1} - \frac{t}{2}} = t^{-1} + \frac{2\,t}{2\,c - t^2}$$

αποτελούν λύσεις της (16).

Ασκήσεις

1. Να κατασκευστούν γενικού τύπου λύσεις των παρακάτω ΔΕ Ricatti, αφού πρώτα αποδειχτεί ότι, η αντίστοιχη συνάρτηση $x_1(t)$ αποτελεί ειδική λύση τους.

(i) $x' = 1 - t\,x + x^2, \quad x_1 = t.$

(ii) $x' = e^t + x - e^{-t}\,x^2, \quad x_1 = e^t.$

(iii) $x' = 1 + 2\,t^{-2} - t\,x - 3\,x^2, \quad x_1 = t^{-1}.$

8. Καμπύλες του Ευκλείδειου επίπεδου

Διάφορα υποσύνολα του Ευκλείδειου επίπεδου, $\mathbb{R}^2$, χαρακτηρίζονται ως καμπύλες. Έχουμε ήδη συναντήσει τις καμπύλες που αντιστοιχούν στα γραφήματα συναρτήσεων. Πρόκειται για υποσύνολα της μορφής

(1) $$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = f(x)\}$$

όπου f μια συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού κάποιο διάστημα της πραγματικής ευθείας.

Παράδειγμα

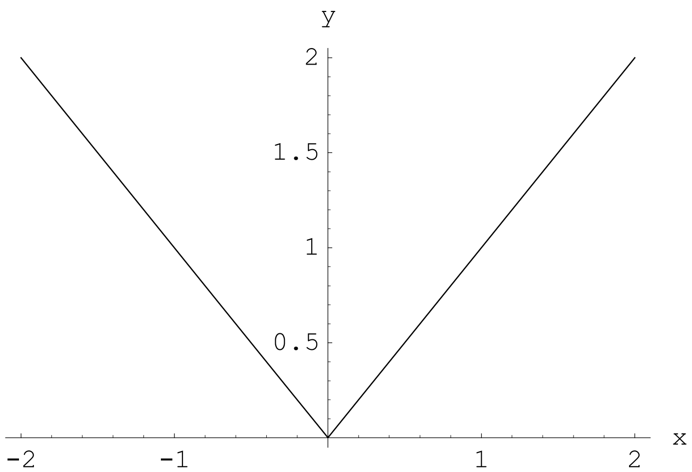
Η συνάρτηση

$$f(x) = |x|, \quad x \in I = [-2, 2]$$

ορίζει την "καμπύλη"

$$\Gamma = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = |x| \}$$

του επόμενου σχήματος. Προφανώς, το υποσύνολο Γ αποτελείται από την ένωση δύο ευθύγραμμων τμημάτων.



Παράδειγμα

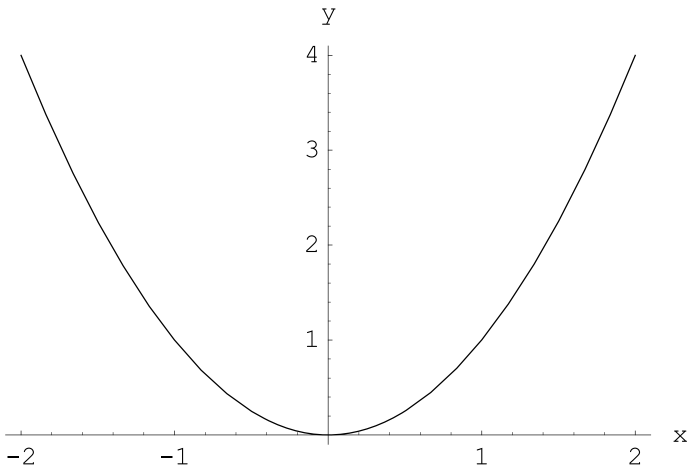
Η συνάρτηση

$$f(x) = x^2, \quad x \in I = [-2, 2]$$

ορίζει την παραβολική καμπύλη

$$\Gamma = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2 \}$$

του σχήματος που ακολουθεί.



Παράδειγμα

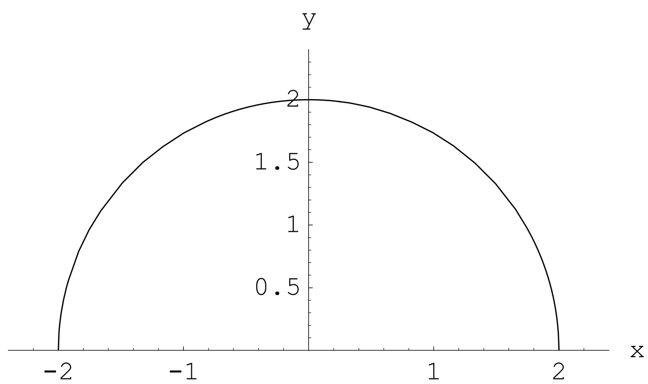
Η συνάρτηση

$$f(x) = \sqrt{4 - x^2}, \quad x \in I = [-2, 2]$$

ορίζει την καμπύλη

$$\Gamma = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sqrt{4 - x^2}\right\}.$$

Πρόκειται για το ημικύκλιο που δείχνουμε στο επόμενο σχήμα.

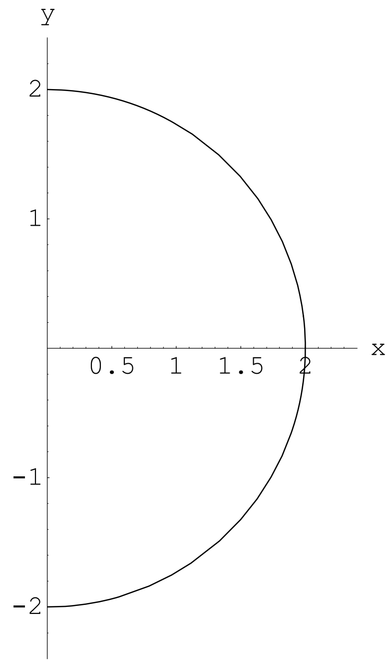


Σημειώστε ότι, οι συναρτήσεις του πρώτου και του τρίτου παραδείγματος δεν είναι διαφορίσιμες. Στην πρώτη περίπτωση, αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η αριστερή παράγωγος δεν συμφωνεί με τη δεξιά στο σημείο $x = 0$. Στη δεύτερη, το πρόβλημα παρουσιάζεται στα άκρα, $x = \pm 2$, του πεδίου ορισμού $I = [-2, 2]$. Σ' αυτά τα σημεία η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ δεν υπάρχει (απειρίζεται).

Στο πλαίσιο των ΣΔΕ τάξης n, μας ενδιαφέρουν συναρτήσεις που ορίζονται σε ένα διάστημα της πραγματικής ευθείας και έχουν παράγωγο μέχρι και τάξης n σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού τους. Γι' αυτό, σύνολα της μορφής (1) θα τα αποκαλούμε *καμπύλες*, αν η συνάρτηση $f(x)$ έχει ως πεδίο ορισμού κάποιο διάστημα I της πραγματικής ευθείας, $\mathbb{R}$, (ίσως και ολόκληρη την πραγματική ευθεία) και είναι, τουλάχιστον, διαφορίσιμη.

Παρατήρηση: Από τη σκοπιά αυτού του ορισμού, ακόμα και μια συνάρτηση με τύπο $f(x) = a\,x + b$, ορίζει καμπύλη, παρόλο που, από γεωμετρική άποψη, το υποσύνολο $\Gamma = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 :\ y = f(x)\}$ είναι μια ευθεία γραμμή (ή ένα τμήμα της).

Είναι φανερό ότι, και το ημικύκλιο του επόμενου σχήματος δικαιούται τον τίτλο της καμπύλης.



Πραγματικά, αυτό το ημικύκλιο ταυτίζεται με το σύνολο

(2) $$\Gamma = \left\{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 :\ x = \sqrt{4 - y^2}\right\}$$

του οποίου ο ορισμός δε διαφέρει ουσιαστικά από εκείνον του ημικύκλιου του προηγούμενου παραδείγματος. Απλώς, στην τωρινή περίπτωση, η συντεταγμένη x ενός σημείου του Γ καθορίζεται από μια συνάρτηση της συντεταγμένης y, ενώ στην προηγούμενη γινόταν το αντίστροφο. Για λόγους ... δημοκρατικής τάξης, θα δεχτούμε στο κλάμπ των καμπυλών του επίπεδου και τα υποσύνολα της μορφής

(3) $$\Gamma = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 :\ x = g(y)\}$$

όπου η συνάρτηση $g(y)$ είναι, τουλάχιστον, διαφορίσιμη σε κάποιο διάστημα I της πραγματικής ευθείας.

Από την άλλη, ως καμπύλες του $\mathbb{R}^2$ χαρακτηρίζονται και σύνολα της μορφής

(4) $$\Sigma_c = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi(x,\ y) = c\},$$

όπου $\varphi(x,\ y)$ συγκεκριμένη συνάρτηση δύο μεταβλητών και c ένα στοιχείο του πεδίου τιμών της. Κλασικό παράδειγμα αποτελεί η συνάρτηση $\varphi(x,\ y) = x^2 + y^2$. Η συνθήκη $\varphi(x,\ y) = 1$

ισχύει για κάθε σημείο ενός κύκλου με κέντρο το σημείο $(x, y) = (0, 0)$ και ακτίνα μονάδα.

Με το όρο *καμπύλη του* $\mathbb{R}^2$ θα εννοούμε και σύνολα της μορφής (4), με την εξής προϋπόθεση: Σε κάθε σημείο του Σ_c, οι μερικές παράγωγοι πρώτης τάξης της συνάρτησης $\varphi(x, y)$,

(5) $$\partial_x \varphi(x, y) \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y), \qquad \partial_y \varphi(x, y) \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y),$$

υπάρχουν και δε μηδενίζονται ταυτόχρονα.

Αυτή η συνθήκη καθιστά τον τελευταίο ορισμό μιας καμπύλης του $\mathbb{R}^2$ ισοδύναμο με τον προηγούμενο. Η ισοδυναμία συνάγεται από το επόμενο βασικό θεώρημα, η απόδειξη του οποίου θα πρέπει να αναζητηθεί σε κάποιο από τα καθιερωμένα βιβλία ανάλυσης. Για μας, σημασία έχει μόνο το συμπέρασμά του, και άρα οι προϋποθέσεις κάτω από τις οποίες ισχύει. Γι' αυτό, πριν το διατυπώσουμε, θα σταθούμε σε δυο ορισμούς που τυχόν δεν είναι οικείοι στον αναγνώστη. Ο πρώτος αφορά την τοπολογική ιδιότητα της συνεκτικότητας ενός υποσύνολου Ω του $\mathbb{R}^n$. Θα λέμε, λοιπόν ότι το Ω είναι *συνεκτικό*, αν δεν προκύπτει από την ένωση συνόλων που είναι ξένα μεταξύ τους (δεν τέμονται ανά δύο). Για παράδειγμα, το

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$$

είναι ένα μη συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$, αφού

$$\Omega = \Omega_1 \bigcup \Omega_2, \quad \Omega_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\} \quad \Omega_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$$

και $\Omega_1 \bigcap \Omega_2 = \emptyset$.

Ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ που είναι και συνεκτικό, θα το λέμε *περιοχή* ή *χωρίο*. Τέλος, με $C^m(\Omega)$ θα συμβολίζουμε την οικογένεια ή κλάση των συναρτήσεων που έχουν συνεχείς (μερικές) παραγώγους μέχρι και τάξης m στο ανοιχτό υποσύνολο Ω του $\mathbb{R}^n$. Οι συνεχείς συναρτήσεις απαρτίζουν την κλάση $C(\Omega) \equiv C^0(\Omega)$.

Θεώρημα της πεπλεγμένης συνάρτησης

Ας υποτεθεί ότι συνάρτηση $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$, όπου Ω περιοχή του $\mathbb{R}^2$, ανήκει στην κλάση $C^1(\Omega)$ και ότι αριθμός c είναι η τιμή της φ στο σημείο $(a, b) \in \Omega$.

Αν $\partial_y \varphi(a, b) \neq 0$, τότε υπάρχει συνάρτηση $f_c(x)$, διαφορίσιμη σε κάποιο ανοιχτό διάστημα I_a γύρω από το σημείο $x = a$, τέτοια που η σχέση $\varphi(x, y) = c$ να είναι ταυτόσημη με την $y = f_c(x)$.

Αν $\partial_x \varphi(a, b) \neq 0$, τότε υπάρχει συνάρτηση $g_c(y)$, διαφορίσιμη σε κάποιο ανοιχτό διάστημα I_b γύρω από το σημείο $y = b$, τέτοια που η σχέση $\varphi(x, y) = c$ να είναι ταυτόσημη με την $x = g_c(y)$.

Παρατήρηση. Το θεώρημα μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής. Αν οι μερικές παράγωγοι της $\varphi(x, y)$ δε μηδενίζονται ταυτόχρονα στο σημείο (a, b) του $\mathbb{R}^2$, τότε η εξίσωση

(6) $$\varphi(x, y) = c := \varphi(a, b)$$

μπορεί να λυθεί με τρόπο ώστε, η μία από τις δυο ανεξάρτητες μεταβλητές x, y να εκφραστεί ως συνάρτηση της άλλης.

Από πρακτική άποψη αυτό σημαίνει ότι το θεώρημα μας επιτρέπει να ξεμπλέξουμε τις μεταβλητές x, y που αρχικά είναι μπλεγμένες έτσι όπως περιγράφεται απο τη σχέση $\varphi(x, y) = c$, μέ τρόπο ώστε η μια απ' αυτές να εμφανίζεται μόνο στην αριστερή πλευρά του ίσον και η άλλη στη δεξιά. Από την άποψη του αποτελέσματος, μπορούμε να το ονομάσουμε θεώρημα της ξεμπλεγμένης συνάρτησης.

Από γεωμετρική άποψη, το θεώρημα της πεπλεγμένης ή μπλεγμένης (=έμμεσα οριζόμενης) συνάρτησης έχει το ακόλουθο νόημα: Ένα τμήμα του σύνολου

(7) $$\Sigma_c := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi(x, y) = c\}$$

γύρω από το σημείο (a, b) ταυτίζεται με ένα σύνολο της μορφής

(8) $$\Gamma_x = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f_c(x)\},$$

αν $\partial_y \varphi(a, b) \neq 0$, και με ένα σύνολο της μορφής

(9) $$\Gamma_y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = g_c(y)\},$$

αν $\partial_x \varphi(a, b) \neq 0$.

Παράδειγμα

Αν $\varphi(x, y) = x^2 + y^2$, τότε είναι προφανές ότι το σύνολο $\Sigma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi(x, y) = 1\}$ δεν είναι κενό, αφού, εκτός των άλλων, περιέχει το σημείο $(x, y) = (0, 1)$. Από την άλλη $\partial_x \varphi(x, y) = 2x$, $\partial_y \varphi(x, y) = 2y$. Αυτές οι συναρτήσεις μηδενίζονται ταυτόχρονα μόνο στο σημείο $(0, 0)$, το οποίο δεν ανήκει στο Σ_1.

Θεωρούμε, τώρα, το τυχαίο σημείο $(a, b) \in \Sigma_1$, με $b > 0$. Όταν το $y > 0$, η

(10) $$\varphi(x, y) = x^2 + y^2 = 1$$

είναι ισοδύναμη με την $y = \sqrt{1 - x^2}$. Άρα το σημείο (a, b) περιέχεται στο σύνολο

$$\Gamma_x = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}, \qquad f(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad -1 < x < 1.$$

Ανάλογα, όταν το $y < 0$, η (10) είναι ισοδύναμη με την $y = -\sqrt{1 - x^2}$. Συνεπώς το τυχαίο σημείο $(a, b) \in \Sigma_1$, με $b < 0$, περιέχεται στο τμήμα

$$\Gamma_x = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}, \quad f(x) = -\sqrt{1 - x^2}, \quad -1 < x < 1.$$

του Σ_1.

Με τον ίδιο τρόπο, η σχέση $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 = 1$ είναι ισοδύναμη με την $x = -\sqrt{1 - y^2}$, όταν $x < 0$, και με την $x = \sqrt{1 - y^2}$, όταν $x > 0$. Συνεπώς, κάθε σημείο $(a, b) \in \Sigma_1$, με $a < 0$, περιέχεται στο τμήμα

$$\Gamma_y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = g(y)\}, \quad g(y) = -\sqrt{1 - y^2}, \quad -1 < y < 1,$$

ενώ κάθε σημείο $(a, b) \in \Sigma_1$, με $a > 0$, περιέχεται στο τμήμα

$$\Gamma_y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = g(y)\}, \quad g(y) = \sqrt{1 - y^2}, \quad -1 < y < 1.$$

Μέσω ομαλών συναρτήσεων δύο μεταβλητών, μπορούμε να ορίσουμε και 1-παραμετρικές οικογένειες καμπυλών του επίπεδου $\mathbb{R}^2$. Συγκεκριμένα, ας υποθέσουμε ότι η

$\varphi(x, y)$ είναι μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού κάποια περιοχή Ω του $\mathbb{R}^2$ κι ότι ο αριθμός c ανήκει στο πεδίο τιμών της $\varphi(x, y)$. Τότε η συνθήκη $\varphi(x, y) = c$ ορίζει ένα υποσύνολο της περιοχής Ω, το οποίο, τμηματικά τουλάχιστον, έχει τη δομή αυτού που ονομάσαμε καμπύλη.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι, συνήθως, κάθε σύνολο της μορφής

$$\Sigma_c := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi(x, y) = c\}, \tag{11}$$

όπου c τυχαίο σημείο του πεδίου τιμών της $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$, ονομάζεται *ισοσταθμική καμπύλη της συνάρτησης* $\varphi(x, y)$. Ωστόσο, δεν έχουν όλα τα σύνολα αυτού του είδους τη δομή μιας καμπύλης. Το θεώρημα της έμμεσα οριζόμενης συνάρτησης μας παρέχει ικανές συνθήκες για να είναι το σύνολο Σ_c καμπύλη, με την έννοια που δώσαμε παραπάνω.

Το ίδιο θεώρημα μας οδηγεί και στην εικόνα της οικογένειας καμπυλών που ορίζεται μέσω μιας συνάρτησης δύο μεταβλητών. Για το σκοπό αυτό, αρκεί να θεωρήσουμε ότι, το c της συνθήκης $\varphi(x, y) = c$ μεταβάλλεται σε κάποιο διάστημα I του πεδίου τιμών της $\varphi(x, y)$. Αν σ' αυτό το διάστημα οι παράγωγοι της $\varphi(x, y)$ εξακολουθούν να μη μηδενίζονται ταυτόχρονα, τότε τα σύνολα της μορφής $\Sigma_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi(x, y) = c\}$, $c \in I$, συναποτελούν μιαν οικογένεια καμπυλών, τα μέλη της οποίας διακρίνονται από την τιμή της παραμέτρου c.

Παράδειγμα

(i) Η συνάρτηση $\varphi(x, y) = y - x^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, έχει ως πεδίο τιμών ολόκληρη την πραγματική ευθεία. Συνεπώς, η συνθήκη

$$y - x^2 = c \tag{12}$$

έχει νόημα για κάθε πραγματικό αριθμό c. Για κάθε συγκεκριμένη τιμή του c, το αντίστοιχο υποσύνολο

$$\Sigma_c := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - x^2 = c\} \tag{13}$$

του $\mathbb{R}^2$ είναι μια ομαλή καμπύλη παραβολικού τύπου. Το σύνολο $\{\Sigma_c\}_{c \in \mathbb{R}}$ αποτελεί την οικογένεια των ισοσταθμικών καμπυλών της συνάρτησης $\varphi(x, y) = y - x^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(ii) Ας θεωρήσουμε και πάλι την συνάρτηση $\varphi(x, y) = x^2 + y^2$ με πεδίο ορισμού ολόκληρο το Ευκλείδειο επίπεδο $\mathbb{R}^2$. Τότε η συνθήκη

$$x^2 + y^2 = c \tag{14}$$

έχει νόημα για κάθε μη αρνητικό αριθμό c. Για $c = 0$ γίνεται $x^2 + y^2 = 0$, που ισχύει μόνο όταν $(x, y) = (0, 0)$. ΄Αρα, το σύνολο $\Sigma_0 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi(x, y) = 0\}$ αποτελείται από ένα μόνο σημείο και δεν μπορεί να ονομαστεί καμπύλη. Αντίθετα, για $c > 0$, τα σύνολα της μορφής

$$\Sigma_c := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = c\} \tag{15}$$

είναι κύκλοι ακτίνας $\sqrt{c}$ με κέντρο το σημείο $(x, y) = (0, 0)$.

9. Ακριβείς ΔΕ

Θεωρούμε μια διαφορίσιμη συνάρτηση $f(x)$, $x \in I$, της οποίας το γράφημα περιέχεται στην περιοχή Ω:

(1) $$\Gamma_f = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 : \; y = f(x)\} \subset \Omega.$$

Αν η περιοχή Ω αποτελεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\varphi(x, y)$, τότε η συνάρτηση

(2) $$u(x) := \varphi(x,\, f(x)), \quad x \in I,$$

ονομάζεται *περιορισμός της* $\varphi(x, y)$ *στην καμπύλη* Γ_f. Η $u(x)$ εκφράζει τον τρόπο με τον οποίο μεταβάλλονται οι τιμές της $\varphi(x, y)$, καθώς κινούμαστε κατά μήκος της Γ_f.

Αν οι μερικές παράγωγοι της $\varphi(x, y)$ ορίζονται σε κάθε σημείο της καμπύλης $\Gamma(f)$, τότε η $u(x)$ είναι διαφορίσιμη. Εύκολα αποδείχνεται ότι η παράγωγος της $u(x)$ δίνεται από τον ακόλουθο τύπο:

(3) $$u'(x) = \partial_x \varphi(x,\, f(x)) + \partial_y \varphi(x,\, f(x))\, f'(x).$$

Για συντομία, αυτός ο τύπος συνήθως γράφεται στη μορφή

(4) $$u' = \partial_x \varphi(x,\, y) + \partial_y \varphi(x,\, y)\, y',$$

όπου υπονοείται ότι $y = f(x)$. Μάλιστα, το δεξί μέλος αυτής της σχέσης συχνά συμβολίζεται με $D_x\, \varphi(x, y)$ και αναφέρεται ως *ολική παράγωγος της* $\varphi(x, y)$ *ως προς τη μεταβλητή* x. Με άλλα λόγια,

(5) $$D_x\, \varphi(x,\, y) := \partial_x \varphi(x,\, y) + \partial_y \varphi(x,\, y)\, y'.$$

Παράδειγμα

Ας υποθέσουμε ότι $\varphi(x, y) = x^2 + y^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, και $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Τότε, το γράφημα της $f(x)$, $\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; y = x^2\}$, είναι μια παραβολική καμπύλη του $\mathbb{R}^2$. Ο περιορισμός της συνάρτησης $\varphi(x, y)$ σ' αυτή την καμπύλη δίνει την

$$u(x) := \varphi(x,\, f(x)) = x^2 + (x^2)^2 = x^2 + x^4, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Στην προκείμενη περίπτωση, $\partial_x \varphi(x, y) = 2\,x$, $\partial_y \varphi(x, y) = 2\,y$, και άρα ο τύπος (4) γίνεται

$$u'(x) = 2\,x + 2\,f(x)\,f'(x) = 2\,x + 2\,x^2(2\,x) = 2\,x + 4\,x^3.$$

΄Οπως αναμενόταν, το αποτέλεσμα του προκύπτει με την εφαρμογή του τύπου (4) είναι ίδιο με αυτό που δίνει η απ' ευθείας παραγώγιση της $u(x) = x^2 + x^4$.

Τα παραπάνω ισχύουν ειδικότερα για κάθε τμήμα της ισοσταθμικής καμπύλης

(6) $$\Sigma_c := \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 : \; \varphi(x,\, y) = c\}$$

που μπορεί να παρασταθεί με τη μορφή $y = f_c(x)$, $x \in I_c$. Το τμήμα $y > 0$ του κύκλου $\Sigma_c := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 = c,\; c > 0\}$, το οποίο παριστάνεται από τη σχέση $y = \sqrt{c - x^2}$, $x \in I_c = \left(-\sqrt{c}\,,\; \sqrt{c}\right)$, αποτελεί παράδειγμα αυτού που εννοούμε.

Τότε, όπως είδαμε παραπάνω, η συνάρτηση

(7) $$u(x) := \varphi(x,\, f_c(x)), \quad x \in I_c,$$

απλώς εκφράζει τις τιμές της $\varphi(x, y)$ κατά μήκος του τμήματος

(8) $$\Gamma_{f_c} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f_c(x)\}$$

της ισοσταθμικής καμπύλης Σ_c. Συνεπώς, η $u(x)$ είναι σταθερή και ίση με c σε όλο το διάστημα I_c:

(9) $$u(x) = c, \quad x \in I_c.$$

Συνακόλουθα,

(10) $$u'(x) = D_x\,\varphi(x, y) := \partial_x \varphi(x, y) + \partial_y \varphi(x, y)\, y' = 0, \quad x \in I_c.$$

Ισοδύναμα,

(11) $$A(x, y) + B(x, y)\, y' = 0, \quad x \in I_c,$$

όπου

(12) $$A(x, y) := \partial_x \varphi(x, y), \quad B(x, y) := \partial_y \varphi(x, y).$$

Είναι φανερό ότι η παραπάνω ανάλυση ισχύει για όλες τις ισοσταθμικές καμπύλες της $\varphi(x, y)$ και άρα έχουμε αποδείξει το ακόλουθο

Θεώρημα

Ας υποθέσουμε ότι δίνεται η ΔΕ

(13) $$A(x, y) + B(x, y)\, y' = 0,$$

για την άγνωστη συνάρτηση $y = f(x)$, όπου οι $A(x, y)$, $B(x, y)$ έχουν ως κοινό πεδίο ορισμού την περιοχή Ω του $\mathbb{R}^2$. Αν υπάρχει συνάρτηση $\varphi(x, y)$, τέτοια που

(14) $$A(x, y) = \partial_x \varphi(x, y)\,, \quad B(x, y) = \partial_y \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \Omega,$$

τότε, κάθε διαφορίσιμη συνάρτηση $y = f_c(x)$, $x \in I_c$, που τυχόν ορίζεται από τη συνθήκη

(15) $$\varphi(x, y) = c$$

αποτελεί λύση της (13).

Παρατήρηση. Στο παρόν, αλλά και σε πολλά από τα επόμενα εδάφια, η ανεξάρτητη μεταβλητή συμβολίζεται με x και η εξαρτημένη με y. Είναι προφανές ότι, η αντικατάσταση

$$(x, y) \to (t, x)$$

μετατρέπει την ΔΕ (13) στην $A(t, x) + B(t, x)\, x' = 0$, η οποία έχει τη μορφή που χρησιμοποιήσαμε στα προηγούμενα εδάφια.

Ορισμός. Οι ΔΕ που ικανοποιούν τις προϋποθέσεις του θεωρήματος λέγονται *ακριβείς*.

Ο χαρακτηρισμός οφείλεται στη σύνδεση των εξισώσεων αυτού του είδους με την έννοια των διαφορικών. Επειδή δεν υποθέτουμε ότι ο αγνώστης είναι εξοικειωμένος με την αντίστοιχη μαθηματική θεωρία, θα περιοριστούμε σε ορισμένες επισημάνσεις που δεν επηρεάζουν το υπόλοιπο της συζήτησής μας. Συγκεκριμένα, η έκφραση

$$\omega := A(x, y)\, d\, x + B(x, y)\, d\, y \tag{16}$$

όπου οι συναρτήσεις $A(x, y)$, $B(x, y)$ έχουν ως κοινό πεδίο ορισμού κάποια περιοχή Ω του $\mathbb{R}^2$ ονομάζεται *διαφορική μορφή πρώτης τάξης* ή, απλούστερα, *διαφορικό.* Έχει το νόημα γραμμικής απεικόνισης διανυσματικών πεδίων της περιοχής Ω στους πραγματικούς αριθμούς. Όταν οι συντελεστές $A(x, y)$ και $B(x, y)$ είναι η μερικές παράγωγοι μιας συνάρτησης $\varphi(x, y)$, $(x, y) \in \Omega$, όπως στην (14), η έκφραση ω λέγεται *ακριβές διαφορικό.*

Στην περίπτωση που η διαφορική μορφή ω απεικονίζει κάθε διανυσματικό πεδίο στη μηδενική συνάρτηση, γράφουμε $\omega = 0$. Ισοδύναμα,

$$A(x, y)\, d\, x + B(x, y)\, d\, y = 0. \tag{17}$$

Όταν το y παριστάνει μια συνάρτηση του x, η (17) ανάγεται στην

$$[A(x, y) + B(x, y)\, y']\, d\, x = 0. \tag{18}$$

Η τελευταία ισχύει εάν και μόνο όταν η συνάρτηση $y = f(x)$ αποτελεί λύση της ΔΕ (13). Συνακόλουθα, όταν το διαφορικό (16), από το οποίο προκύπτει η (18), είναι ακριβές, τότε και η αντίστοιχη ΔΕ (13) χαρακτηρίζεται ως ακριβής.

Παράδειγμα

Η γραμμική ΔΕ

$$2\, x\, y + (1 + x^2)\, y' = 0$$

είναι της μορφής (13) με

$$A(x, y) = 2\, x\, y, \qquad B(x, y) = 1 + x^2, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Αυτές οι συναρτήσεις αποτελούν τις μερικές παραγώγους της

$$\varphi(x, y) = (1 + x^2)\, y,$$

αφού

$$\partial_x \varphi(x, y) = 2\, x\, y, \qquad \partial_y \varphi(x, y) = 1 + x^2.$$

Άρα η πιο πάνω ΔΕ είναι ακριβής.

Η συνθήκη

$$\varphi(x, y) = c \quad \Leftrightarrow \quad (1 + x^2)\, y = c$$

που ορίζει τις ισοσταθμικές καμπύλες της συνάρτησης $\varphi(x, y)$, λύνεται πάντοτε ως προς y. Ως αποτέλεσμα παίρνουμε τη γενική λύση

$$y = f_c(x) = \tfrac{c}{1+x^2}\ , \qquad x \in I_c = \mathbb{R},$$

της ΔΕ $2\, x\, y + (1 + x^2)\, y' = 0$.

□

Παράδειγμα

Η μη γραμμική ΔΕ

$$x + y\,y' = 0$$

είναι ακριβής. Σ' αυτή την περίπτωση

$$A(x, y) = x, \quad B(x, y) = y, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

και είναι προφανές ότι

$$A(x, y) = \partial_x \varphi(x, y), \quad B(x, y) = \partial_y \varphi(x, y), \quad \varphi(x, y) = \tfrac{1}{2}\,(x^2 + y^2).$$

Η συνθήκη

$$\varphi(x, y) = c \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}\,(x^2 + y^2) = c$$

λύνεται ως προς y για κάθε $c > 0$. Αναλυτικότερα,

$$y = f_c(x) = \sqrt{2\,c - x^2}, \quad x \in I_c = \left(-\sqrt{2\,c}, \sqrt{2\,c}\right)$$

όταν $y > 0$,

$$y = f_c(x) = -\sqrt{2\,c - x^2}, \quad x \in I_c = \left(-\sqrt{2\,c}, \sqrt{2\,c}\right),$$

όταν $y < 0$. Άρα, κάθε συνάρτηση της μορφής $y = \pm\sqrt{C - x^2}$ αποτελεί λύση της ΔΕ $x + y\,y' = 0$.

□

Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$, όπου Ω ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$, ανήκει στην οικογένεια ή κλάση $C^2(\Omega)$. Με αυτό εννοούμε ότι οι μερικές παράγωγοι της $\varphi(x, y)$ μέχρι και δεύτερης τάξης ορίζονται σε κάθε σημείο $(x, y) \in \Omega$ και είναι συνεχείς συναρτήσεις.

Θυμίζουμε ότι, για μια συνάρτηση $\varphi(x, y)$, με πεδίο ορισμού κάποιο ανοιχτό υποσύνολο Ω του $\mathbb{R}^2$, ορίζονται κατ' αρχήν τέσσερες μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης, οι

(19) $$\partial_{x\,x} \varphi(x, y) \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, y), \qquad \partial_{y\,y} \varphi(x, y) \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(x, y),$$

(20) $$\partial_{y\,x} \varphi(x, y) \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y\,\partial x}(x, y), \qquad \partial_{x\,y} \varphi(x, y) \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial y}(x, y).$$

Όμως, σύμφωνα με το *θεώρημα (του) Schwarz*, οι λεγόμενες *μικτές παράγωγοι*, $\partial_{y\,x} \varphi(x, y)$ και $\partial_{x\,y} \varphi(x, y)$, όταν είναι συνεχείς, ταυτίζονται . Με άλλα λόγια, αν

(21) $$A(x, y) = \partial_x \varphi(x, y), \quad B(x, y) = \partial_y \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \Omega,$$

και οι $\partial_y A(x, y)$, $\partial_x B(x, y)$ είναι συνεχείς, τότε

(22) $$\partial_y A(x, y) = \partial_x B(x, y), \qquad (x, y) \in \Omega.$$

Ο αναγνώστης δε θα έχει δυσκολία στο να διαπιστώσει ότι, σε όλα τα παραδείγματα ακριβών ΔΕ της μορφής

(23) $$A(x, y) + B(x, y)\,y' = 0$$

που εξετάσαμε παραπάνω, οι συναρτήσεις $A(x, y)$ και $B(x, y)$ σέβονται τη συνθήκη (22). Εύλογα λοιπόν γεννιέται το ερώτημα αν ισχύει και το αντίστροφο. Αν δηλαδή αρκεί να ισχύει η (22) για να είναι οι συναρτήσεις $A(x, y)$, $B(x, y)$ η μερική παράγωγος, ως προς x και y αντίστοιχα, μιας συνάρτησης $\varphi(x, y)$. Γιατί, σ' εκείνη την περίπτωση, οι ισοσταθμικές καμπύλες της $\varphi(x, y)$ θα μας παρέχουν έμμεσα, δηλαδή μέσω μιας σχέσης της μορφής $\varphi(x, y) = c$, λύσεις της ΔΕ (23).

Πραγματικά, το αντίστροφο ισχύει, αλλά με μια βασική προϋπόθεση: Η περιοχή Ω, που αποτελεί το κοινό πεδίο ορισμού των συναρτήσεων $A(x, y)$ και $B(x, y)$, πρέπει να είναι *απλά συνεκτική*. Αυτή είναι μια τοπολογική συνθήκη και σημαίνει ότι, τα σημεία που βρίσκονται στο εσωτερικό κάθε νοητής κλειστής καμπύλης της περιοχής Ω ανήκουν στην ίδια την Ω.

Παράδειγμα

(i) Ολόκληρο το Ευκλείδειο επίπεδο $\mathbb{R}^2$ είναι απλά συνεκτικό. Το ίδιο ισχύει για κάθε ανοιχτό διάστημα (παραλληλόγραμμο) του $\mathbb{R}^2$ και το εσωτερικό ενός κύκλου.

(ii) Το σύνολο που προκύπτει αφαιρώντας ένα ή περισσότερα ευδιάκριτα σημεία του $\mathbb{R}^2$ δεν είναι απλά συνεκτικό. Το ίδιο ισχύει για την περιοχή που βρίσκεται έξω από έναν κυκλικό δίσκο, καθώς και για τον δακτύλιο

$$\Delta(a, b) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; 0 < a < x^2 + y^2 < b\}.$$

Για να δούμε τα βασικά στοιχεία της απόδειξης του σχετικού θεωρήματος, θα σταθούμε σε ένα οικείο, απλό

Παράδειγμα

Η ΔΕ

(24) $$y + x\, y' = 0,$$

είναι της μορφής (23), με

(25) $$A(x, y) = y, \qquad B(x, y) = x.$$

Συνεπώς,

(26) $$\partial_y A(x, y) = 1, \quad \partial_x B(x, y) = 1.$$

Άρα $\partial_y A(x, y) = \partial_x B(x, y)$ για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Θέλουμε, λοιπόν, να βρούμε μια συνάρτηση $\varphi(x, y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, τέτοια που

(27) $$\partial_x \varphi(x, y) = y\,, \quad \partial_y \varphi(x, y) = x, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Θα πρέπει να είναι φανερό ότι, οι (27) είναι δυο μερικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης για την άγνωστη συνάρτηση $\varphi(x, y)$. Παρά το βαρύγδουπο όνομά τους, αυτές οι εξισώσεις λύνονται πολύ εύκολα. Αρκεί να προσέξει κανείς τον ορισμό της μερικής παραγώγου. Συγκεκριμένα, αν θεωρήσουμε το y σταθερό, τότε η πρώτη από αυτές, είναι μια απλούστατη συνήθης ΔΕ που ολοκληρώνεται αμέσως για να δώσει $\varphi(x, y) = x\, y + c$. Βέβαια, η "σταθερή ολοκλήρωσης" c δεν είναι υποχρεωτικά η ίδια για διαφορετικές τιμές του y. Άρα, ορθότερο είναι να γράψουμε τη λύση στη μορφή

(28) $$\varphi(x, y) = x\,y + f(y),$$

όπου $f(y)$ τυχαία διαφορίσιμη συνάρτηση. Και πραγματικά, αφού κάθε συνάρτηση $f(y)$ είναι σαν μια σταθερή για την παραγώγιση ως προς τη μεταβλητή x, $\partial_x[x\,y + f(y)] = y$.

Τώρα, από την έκφραση που μόλις βρήκαμε για τη $\varphi(x, y)$ έπεται ότι

(29) $$\partial_y \varphi(x, y) = x + f'(y).$$

Όμως, η $\varphi(x, y)$ θα πρέπει να είναι λύση και της δεύτερης από τις ΜΔΕ του συστήματος (27), δηλαδή της

(30) $$\partial_y \varphi(x, y) = x.$$

Από τις (29) και (30) αμέσως συνάγεται ότι $f'(y) = 0$, οπότε $f(y) = C$. Αλλά τότε $\varphi(x, y) = x\,y + C$. Για το σκοπό μας, βέβαια, αρκεί να υπάρχει και μία μόνο συνάρτηση της οποίας οι παράγωγοι να δίνουν τις συναρτήσεις $A(x, y)$ και $B(x, y)$. Με άλλα λόγια, μας αρκεί η λύση του συστήματος (27) που αντιστοιχεί στην επιλογή $C = 0$:

(31) $$\varphi(x, y) = x\,y, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Επιστρέφοντας στο ζήτημα των λύσεων της ΣΔΕ (24), ας εξετάσουμε τις ισοσταθμικές καμπύλες της $\varphi(x, y) = x\,y$. Αυτές ορίζονται από τη συνθήκη

(32) $$\varphi(x, y) = x\,y = \lambda,$$

όπου λ τυχαίος πραγματικός αριθμός. Όταν $\lambda = 0$, το υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ που ορίζεται από τη συνθήκη (32) αποτελείται από το σημείο $(x, y) = (0, 0)$ και τις ημιευθείες $x = 0$, $y \neq 0$, και $x \neq 0$, $y = 0$. Για $\lambda \neq 0$, η (32) ορίζει καμπύλες υπερβολικού τύπου, οι οποίες περιγράφονται και από τη σχέση $y = \lambda/x$. Γενικά, όταν $x \neq 0$ η (32) λύνεται ως προς y για κάθε τιμή της παραμέτρου λ και παρέχει λύσεις της ΔΕ $y + x\,y' = 0$ στη μορφή

(33) $$y = f_\lambda(x) = \frac{\lambda}{x}.$$

□

Θεώρημα

Ας υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις $A(x, y)$, $\partial_y A(x, y)$, $B(x, y)$, $\partial_x B(x, y)$ είναι συνεχείς σε κάθε σημείο του ανοιχτού παραλληλόγραμμου

(34) $$\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \alpha < x < \beta,\ \gamma < y < \delta\}.$$

Τότε η ΔΕ

(35) $$A(x, y) + B(x, y)\,y' = 0$$

είναι ακριβής, εάν και μόνο όταν

(36) $$\partial_y A(x, y) = \partial_x B(x, y), \quad (x, y) \in \Omega.$$

Παρατήρηση. Όπως σημειώσαμε πιο πάνω, το ανοιχτό παραλληλόγραμμο αποτελεί παράδειγμα απλά συνεκτικού υποσύνολου του $\mathbb{R}^2$. Γενικότερα, μια απλά συνεκτική περιοχή Ω του $\mathbb{R}^2$ μπορεί να καλυφθεί από ανοιχτά παραλληλόγραμμα που τέμνονται ανά δύο. Αν με τον τρόπο που υποδείχνει το θεώρημα κατασκευάσουμε τις συναρτήσεις $\varphi_1(x, y)$ και $\varphi_2(x, y)$ με πεδίο ορισμού τα ανοιχτά παραλληλόγραμμα Ω_1 και Ω_2, αντίστοιχα, τότε

$$\varphi_1(x, y) = \varphi_2(x, y), \quad \text{όταν } (x, y) \in \Omega_1 \bigcap \Omega_2.$$

Συνεπώς, η $\varphi_2(x, y)$, $(x, y) \in \Omega_2$, μπορεί να θεωρηθεί ως επέκταση της $\varphi_1(x, y)$, $(x, y) \in \Omega_1$ και αντίστροφα. Ισοδύναμα, οι $\varphi_1(x, y)$, $\varphi_2(x, y)$ μπορεί να θεωρηθούν ως οι τύποι, στις περιοχές Ω_1 και Ω_2, αντίστοιχα, μιας συνάρτησης $\varphi_{12}(x, y)$ που έχει ως πεδίο ορισμού το απλά συνεκτικό σύνολο $\Omega_1 \bigcup \Omega_2$. Η απλή συνεκτικότητα της τυχαίας περιοχής Ω του $\mathbb{R}^2$ μας επιτρέπει να συνεχίσουμε αυτή την διαδικασία με τρόπο ώστε να μην υπάρξει ποτέ διαφωνία ανάμεσα στις συναρτήσεις $\varphi_j(x, y)$, $(x, y) \in \Omega_j$, και $\varphi_k(x, y)$, $(x, y) \in \Omega_k$, όταν $\Omega_j \bigcap \Omega_k \neq \emptyset$.

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι η ΔΕ (34) είναι ακριβής. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει συνάρτηση $\varphi(x, y)$, $(x, y) \in \Omega$, τέτοια ώστε

(37) $$A(x, y) = \partial_x \varphi(x, y), \quad B(x, y) = \partial_y \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \Omega.$$

Αλλά τότε,

(38) $$\partial_y A(x, y) = \partial_y (\partial_x \varphi)(x, y) \equiv \partial_{yx} \varphi(x, y),$$

(39) $$\partial_x B(x, y) = \partial_x (\partial_y \varphi)(x, y) \equiv \partial_{xy} \varphi(x, y).$$

Η υπόθεση ότι οι συναρτήσεις $\partial_y A(x, y)$, $\partial_x B(x, y)$ είναι συνεχείς σημαίνει πλέον ότι και οι μικτές παράγωγοι της $\varphi(x, y)$ είναι συνεχείς. Αλλά, τότε οι μικτές παράγωγοι είναι και μεταξύ τους ίσες. Από τις σχέσεις (38) και (39) έπεται ότι $\partial_y A(x, y) = \partial_x B(x, y)$. Με άλλα λόγια, αυτή η σχέση ισχύει αναγκαστικά όταν η ΔΕ είναι ακριβής και οι συναρτήσεις $A(x, y)$, $\partial_y A(x, y)$, $B(x, y)$, $\partial_x B(x, y)$ είναι συνεχείς.

Για να δείξουμε ότι η (36) είναι ικανή να εξασφαλίσει την ύπαρξη μιας συνάρτησης $\varphi(x, y)$, $(x, y) \in \Omega$, της οποίας παράγωγοι είναι οι συναρτήσεις $A(x, y)$ και $B(x, y)$, ακολουθούμε τα βήματα του τελευταίου παραδείγματος. Συγκεκριμένα, επιλέγουμε αρχικά έναν αριθμό $y_1 \in I_y = (\gamma, \delta)$ και θέτουμε

(40) $$\partial_x \varphi(x, y_1) = A(x, y_1).$$

Αυτή είναι μια απλή ΔΕ της μορφής $F'(x) = G(x)$, όπου η συνάρτηση $G(x)$, $x \in I_x = (\alpha, \beta)$, είναι συνεχής. Αφού η γενική λύση της τελευταίας δίνεται από την έκφραση $F(x) = \int G(x)\, d x + C$, μπορούμε να γράψουμε τη λύση της (40) σαν

(41) $$\varphi(x, y_1) = \int A(x, y_1)\, d x + C_1.$$

Για μιαν άλλη τιμή y_2 της μεταβλητής y, θέτουμε

(42) $$\partial_x \varphi(x, y_2) = A(x, y_2),$$

οπότε,

(43) $$\varphi(x, y_2) = \int A(x, y_2)\, d x + C_2.$$

Γενικότερα, καθώς το y διατρέχει το διάστημα $I_y = (\gamma, \delta)$, ορίζεται η 1-παραμετρική οικογένεια ΣΔΕ

(44) $$\partial_x \varphi(x, y) = A(x, y), \quad x \in I_x,$$

με το y στο ρόλο της παραμέτρου. Η αντίστοιχη οικογένεια λύσεων δίνεται από την έκφραση

(45) $$\varphi(x, y) = \int A(x, y)\, d x + f(y), \quad (x, y) \in \Omega,$$

όπου με $f(y)$ δηλώνουμε μια τυχαία διαφορίσιμη συνάρτηση που εξαρτιέται μόνο από τη μεταβλητή y.

Από την (45) αμέσως έπεται ότι

(46) $$\partial_y \varphi(x, y) = \partial_y \int A(x, y)\, d x + f'(y) = \int \partial_y A(x, y)\, d x + f'(y).$$

Όμως, η συνάρτηση $\varphi(x, y)$ πρέπει να σέβεται και τη συνθήκη

(47) $$\partial_y \varphi(x, y) = B(x, y).$$

Ο συνδυασμός των δύο τελευταίων σχέσεων οδηγεί αμέσως στην

(48) $$f'(y) = B(x, y) - \int \partial_y A(x, y)\, d x.$$

Εδώ, πρέπει να σταθούμε για να παρατηρήσουμε ότι, η σχέση (48) έχει νόημα μόνο όταν και το δεξιό μέλος της εξαρτιέται μόνο από τη μεταβλητή y. Το ότι αυτή η συνθήκη ισχύει, παρά το γεγονός ότι και οι δύο όροι του δεξιού μέλους περιέχουν τη μεταβλητή x, διαπιστώνεται ως εξής:

Προφανώς,

(49) $$\partial_x \left[B(x, y) - \int \partial_y A(x, y)\, d x\right] = \partial_x B(x, y) - \partial_x \int \partial_y A(x, y)\, d x.$$

Αλλά, σύμφωνα με την υπόθεση, η συνάρτηση $\partial_y A(x, y)$ είναι συνεχής. Άρα, το θεμελιώδες θεώρημα του διαφορικού λογισμού μας εξασφαλίζει ότι

(50) $$\partial_x \int \partial_y A(x, y)\, d x = \partial_y A(x, y).$$

Με άλλα λόγια, το δεξί μέλος της (49) είναι ίσο με $\partial_x B(x, y) - \partial_y A(x, y)$. Όμως, σύμφωνα με την υπόθεση, $\partial_x B(x, y) = \partial_y A(x, y)$. Έτσι, η (49) γίνεται

$$\partial_x \left[B(x, y) - \int \partial_y A(x, y)\, d x\right] = 0,$$

που σημαίνει ότι πραγματικά το το δεξιό μέλος της (48) δεν εξαρτιέται από τη μεταβλητή x.

Ολοκληρώνοντας τώρα την (48), καταλήγουμε στην

(51) $$f(y) = \int \left[B(x, y) - \int \partial_y A(x, y)\, d x\right] d y.$$

Η αντικατάσταση αυτής στην (45) δίνει το ακόλουθο αποτέλεσμα

(52) $$\varphi(x, y) = \int A(x, y)\, d x + \int \left[B(x, y) - \int \partial_y A(x, y)\, d x\right] d y.$$

Από την κατασκευή της, η συνάρτηση που ορίζεται από την (52) έχει ως μερικές παραγώγους πρώτης τάξης τις $A(x, y)$ και $B(x, y)$, αντίστοιχα, και άρα η απόδειξη του πρώτου σκέλους του θεωρήματος ολοκληρώθηκε.

Παρατήρηση

Αν είχαμε ολοκληρώσει πρώτα την $\partial_y \varphi(x, y) = B(x, y)$, θα είχαμε καταλήξει στην

(53) $$\varphi(x, y) = \int B(x, y)\, d\, y + g(x).$$

Από αυτήν και τη συνθήκη $\partial_x \varphi(x, y) = A(x, y)$, θα οδηγούμασταν στην

(54) $$g'(x) = A(x, y) - \int \partial_x B(x, y)\, d\, y\,.$$

για να καταλήξουμε στον ακόλουθο τύπο για τη συνάρτηση $\varphi(x, y)$:

(55) $$\varphi(x, y) = \int B(x, y)\, d\, y + \int [A(x, y) - \int \partial_x B(x, y)\, d\, y]\, d\, x.$$

Τις λεπτομέρειες αυτής της κατασκευής, καθώς και την απόδειξη της ισοδυναμίας των (52) και (55), τις αφήνουμε για άσκηση του αναγνώστη.

□

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι άμεση απόρροια του θεωρήματος που μόλις αποδείξαμε.

Πόρισμα

Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση $\varphi(x, y)$, $(x, y) \in \Omega$, είναι αυτή που ορίζεται από την (52) ή την (55). Τότε, η συνθήκη $\varphi(x, y) = c$ ορίζει, έμμεσα, μια 1-παραμετρική οικογένεια λύσεων της ΔΕ $A(x, y) + B(x, y)\, y' = 0$.

Απόδειξη: Θεωρούμε την ισοσταθμική καμπύλη

$$\Sigma_c := \{(x, y) \in \Omega : \varphi(x, y) = c\}$$

της $\varphi(x, y)$. Στα σημεία της Σ_c όπου η συνάρτηση $B(x, y)$ δε μηδενίζεται, η σχέση $\varphi(x, y) = c$ μπορεί να λυθεί για να δώσει την y ως συνάρτηση της x: $y = f_c(x)$.

Κατά μήκος της ισοσταθμικής Σ_c, η συνάρτηση $u(x) := \varphi(x, f_c(x))$ είναι σταθερή και ίση με c, οπότε $u'(x) = 0$. Αλλά,

$$u'(x) = \partial_x \varphi(x, f_c(x)) + \partial_y \varphi(x, f_c(x))\, f_c{}'(x),$$

ενώ, από την κατασκευή της, η συνάρτηση $\varphi(x, y)$, $(x, y) \in \Omega$, έχει την ιδιότητα ότι

$$\partial_x \varphi(x, y) = A(x, y), \quad \partial_y \varphi(x, y) = B(x, y), \quad (x, y) \in \Omega.$$

΄Αρα, η σχέση $u'(x) = 0$ γράφεται σαν

$$A(x, f_c(x)) + B(x, f_c(x))\, f_c{}'(x) = 0.$$

Αυτό όμως σημαίνει ότι η συνάρτηση $y = f_c(x)$ αποτελεί λύση της ΔΕ $A(x, y) + B(x, y)\, y' = 0$, οπότε η απόδειξη του πορίσματος ολοκληρώθηκε.

□

Παρατήρηση. Από πρακτική άποψη, είναι συνήθως προτιμότερο η κατασκευή της συνάρτησης $\varphi(x, y)$ να γίνεται με τη διαδοχική επίλυση των μελών του υπερκαθορισμένου συστήματος $\partial_x \varphi(x, y) = A(x, y)$, $\partial_y \varphi(x, y) = B(x, y)$. Ωστόσο, για να έχει ο αναγνώστης στη διάθεσή του ένα πρότυπο όλων των εναλλακτικών επιλογών, στο αμέσως επόμενο παράδειγμα λύνουμε την ίδια ΔΕ με τρεις διαφορετικούς τρόπους.

Παράδειγμα

Η μη γραμμική ΔΕ

(56) $$y - x + (x + y)\, y' = 0$$

είναι της μορφής $A(x, y) + B(x, y)\, y' = 0$, με

(57) $$A(x, y) = y - x, \quad B(x, y) = x + y.$$

Αφού $\partial_y A(x, y) = 1 = \partial_x B(x, y)$, η παραπάνω ΔΕ είναι ακριβής.

Σύμφωνα με τον τύπο (52),

(58) $$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \int A(x, y)\, d\, x + \int [B(x, y) - \int \partial_y A(x, y)\, d\, x]\, d\, y \\ &= \int (y - x)\, d\, x + \int [(x + y) - \int 1\, d\, x]\, d\, y \\ &= \int (y - x)\, d\, x + \int [(x + y) - x]\, d\, y \\ &= \int (y - x)\, d\, x + \int y\, d\, y = x\, y - \tfrac{1}{2}\, x^2 + \tfrac{1}{2}\, y^2. \end{aligned}$$

Σύμφωνα με τον τύπο (55),

(59) $$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \int B(x, y)\, d\, y + \int [A(x, y) - \int \partial_x B(x, y)\, d\, y]\, d\, x \\ &= \int (x + y)\, d\, y + \int [(y - x) - \int 1\, d\, y]\, d\, x \\ &= \int (x + y)\, d\, y + \int [(y - x) - y]\, d\, x \\ &= \int (x + y)\, d\, y - \int x\, d\, x = x\, y + \tfrac{1}{2}\, y^2 - \tfrac{1}{2}\, x^2 \end{aligned}$$

Από την άλλη, στην περίπτωση που εξετάζουμε, το σύστημα $\partial_x \varphi(x, y) = A(x, y)$, $\partial_y \varphi(x, y) = B(x, y)$ γίνεται

(60) $$\partial_x \varphi(x, y) = y - x, \qquad \partial_y \varphi(x, y) = x + y.$$

Η πρώτη από αυτές τις ΜΔΕ λύνεται αμέσως για να δώσει

(61) $$\varphi(x, y) = x\, y - \tfrac{1}{2}\, x^2 + f(y).$$

Από αυτήν έπεται ότι

(62) $$\partial_y \varphi(x, y) = y + f'(y).$$

Συγκρίνοντας αυτό το αποτέλεσμα με την ΜΔΕ $\partial_y \varphi(x, y) = x + y$, συμπεραίνουμε ότι $f'(y) = y$. Συνεπώς, με την επιλογή $f(y) = (1/2)\, y^2$ εξασφαλίζεται η συμβατότητα της λύσης της πρώτης ΜΔΕ μ' εκείνες της δεύτερης, οπότε

(63) $$\varphi(x, y) = x\, y - \tfrac{1}{2}\, x^2 + \tfrac{1}{2}\, y^2.$$

Η συνθήκη $\varphi(x, y) = c$, η οποία ορίζει τις ισοσταθμικές καμπύλες της συνάρτησης $\varphi(x, y)$ που μόλις κατασκευάσαμε, γίνεται

(64) $$y^2 + 2\,x\,y - x^2 = 2\,c$$

Αυτή λύνεται ως προς y σε όλα τα σημεία όπου $\partial_y \varphi(x, y) = x + y \neq 0$. Ως αποτέλεσμα, παίρνουμε τις εκφράσεις

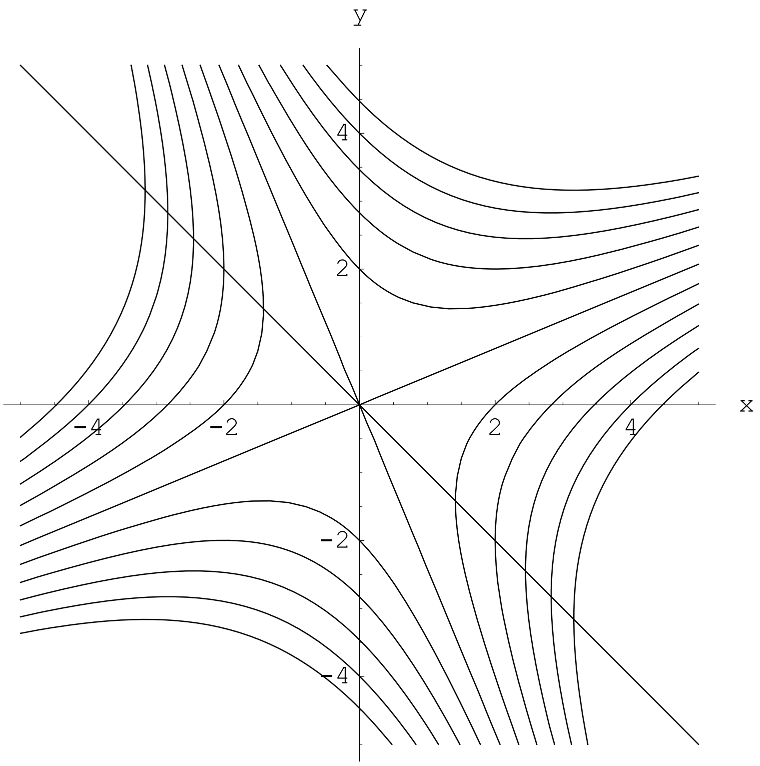
(65) $$y = -x + \sqrt{2\,(c + x^2)}\,, \quad y = -x - \sqrt{2\,(c + x^2)}\,,$$

οι οποίες παριστάνουν λύσεις της αρχικής ΔΕ (56).

Στο επόμενο σχήμα, παρουσιάζουμε ένα αντιπροσωπευτικό υποσύνολο των ισοσταθμικών καμπυλών της παραπάνω συνάρτησης $\varphi(x, y)$, καθώς και την ευθεία $y = -x$.
Στην τιμή $c = 0$ αντιστοιχούν οι ευθείες $y = \left(\sqrt{2} - 1\right)x$ και $y = -\left(\sqrt{2} + 1\right)x$. Αυτές αποτελούν και ολοκληρωτικές "καμπύλες" της ΔΕ (56).

Οι ισοσταθμικές καμπύλες που αντιστοιχούν σε μη μηδενικές τιμές της παραμέτρου c είναι υπερβολές που διακρίνονται σε δύο κατηγορίες. Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν εκείνες που αντιστοιχούν σε θετικές τιμές της παραμέτρου c. Στο σχήμα, είναι αυτές που δεν τέμνονται από την ευθεία $y = -x$. Το ότι δε συναντούν την ευθεία $y = -x$ αντικατοπτρίζει το γεγονός ότι, σε κάθε τους σημείο, η σχέση $\varphi(x, y) = c$ λύνεται ως προς y για να δώσει μια από τις δύο συναρτήσεις (65), ανάλογα με το αν το y είναι θετικό ή αρνητικό. Αυτό σημαίνει ότι οι ισοσταθμικές καμπύλες της πρώτης κατηγορίας αποτελούν και ολοκληρωτικές καμπύλες της ΔΕ (56).

Η δεύτερη κατηγορία ισοσταθμικών καμπυλών της $\varphi(x, y)$ αποτελείται από τις υπερβολές που αντιστοιχούν σε αρνητικές τιμές της παραμέτρου c. Όλα τα μέλη αυτής της κατηγορίας τέμνονται από την ευθεία $y = -x$. Τα σημεία τομής είναι ακριβώς εκείνα όπου η σχέση $\varphi(x, y) = c$ δεν μπορεί να τεθεί στη μορφή $y = f_c(x)$. Στα υπόλοιπα σημεία κάθε μιας από αυτές τις καμπύλες η μετατροπή της $\varphi(x, y) = c$ στην $y = f_c(x)$ είναι εφικτή και δίνεται από τις (65). Αυτό σημαίνει ότι κάθε μια από τις υπερβολές $\varphi(x, y) = c < 0$ παριστάνει δύο ολοκληρωτικές καμπύλες της ΔΕ (56). Η μία ολοκληρωτική καμπύλη της ΔΕ (56) αποτελείται από το τμήμα της υπερβολής $\varphi(x, y) = c < 0$ που βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y = -x$. Η δεύτερη ταυτίζεται με το κάτω από την $y = -x$ τμήμα της υπερβολής.



□

Θα κλείσουμε αυτό το εδάφιο ... επιστρέφοντας στην αρχή του. Στόχος μας είναι να τονίσουμε δύο σημαντικές, και όχι μόνο από πρακτική άποψη, πλευρές του ζητήματος των ακριβών ΔΕ.

Υπενθυμίζουμε, λοιπόν, ότι το να είναι η ΔΕ $A(x,\ y) + B(x,\ y)\, y' = 0$ ακριβής ισοδυναμεί με το να είναι το αριστερό της μέλος η ολική παράγωγος ως προς x, $D_x\, \varphi(x,\ y)$, μιας ομαλής συνάρτησης $\varphi(x,\ y)$. Με άλλα λόγια, θα πρέπει να ισχύει ότι

$$A(x,\ y) + B(x,\ y)\, y' = \partial_x \varphi(x,\ y) + \partial_y \varphi(x,\ y)\, y'.$$

Αυτό σημαίνει ότι ο αναγνώστης μπορεί εύκολα να κατασκευάσει όσες ακριβείς ΔΕ επιθυμεί και να γνωρίζει τη λύση τους από την αρχή! Το μόνο που χρειάζεται να κάνει είναι να επιλέγει κάθε φορά μία λιγότερο ή περισσότερο περίπλοκη συνάρτηση δύο μεταβλητών και να υπολογίζει την ολική της παράγωγο ως προς μία από τις ανεξάρτητες μεταβλητές.

Αν το επιχειρήσει, θα είναι γρήγορα σε θέση να λύνει αμέσως και τις ακριβείς ΔΕ που κατασκεύασε ένας τρίτος. Και όχι μόνο. Θα είναι επίσης σε θέση να μετατρέπει και αρκετές μη ακριβείς σε ακριβείς και να τις λύνει το ίδιο εύκολα. Για τις μετατρέψιμες σε ακριβείς, θα μιλήσουμε αναλυτικότερα στο επόμενο εδάφιο. Εδώ θα σταθούμε στο πρώτο σκέλος της προσπάθειας του αναγνώστη και θα ξεκινήσουμε με την αυτονόητη υπόδειξη. Αρχίζουμε πάντα από τα απλά!

Συγκεκριμένα, καλά θα έκανε ο φίλος αναγνώστης να ξεκινήσει κατασκευάζοντας έναν κατάλογο με την ολική παράγωγο ορισμένων απλών συναρτήσεων, σαν αυτόν που ακολουθεί:

$$\varphi(x,\ y) = x + y, \qquad D_x\, \varphi(x,\ y) = 1 + y',$$

$$\varphi(x,\ y) = f(x) + g(y), \qquad D_x\, \varphi(x,\ y) = f'(x) + g'(y)\, y',$$

$$\varphi(x,\,y) = x\,y, \qquad D_x\,\varphi(x,\,y) = y + x\,y',$$

$$\varphi(x,\,y) = x\,/\,y, \qquad D_x\,\varphi(x,\,y) = \frac{y - x\,y'}{y^2},$$

$$\varphi(x,\,y) = y\,/\,x, \qquad D_x\,\varphi(x,\,y) = -\frac{y - x\,y'}{x^2},$$

$$\varphi(x,\,y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}\,, \qquad D_x\,\varphi(x,\,y) = \frac{x + y\,y'}{x^2 + y^2},$$

$$\varphi(x,\,y) = \arctan(y\,/\,x), \qquad D_x\,\varphi(x,\,y) = -\frac{y - x\,y'}{x^2 + y^2}.$$

Από αυτόν και μόνο τον σύντομο κατάλογο προκύπτουν αμέσως άπειρες σε πλήθος ακριβείς ΔΕ και, ταυτόχρονα, οι λύσεις τους.

Παράδειγμα

(i) Με βάση το δεύτερο στοιχείο του καταλόγου, μπορούμε να κατασκευάσουμε όσες ΔΕ θέλουμε -μία για κάθε συγκεκριμένη επιλογή των συναρτήσεων $f(x)$ και $g(y)$. Για παράδειγμα, η επιλογή $f(x) = x^2$, $g(y) = -y^2$, οδηγεί στην ακριβή ΔΕ

$$2\,x - 2\,y\,y' = 0,$$

που οι λύσεις της βρίσκονται από τη σχέση

$$x^2 - y^2 = c.$$

(ii) Από το τρίτο στοιχείο του καταλόγου έπεται ότι η ΔΕ $y + x\,y' = 0$ είναι ακριβής και οι λύσεις της παριέχονται στη σχέση $x\,y = c$.

(iii) Συνδυάζοντας τις δύο προηγούμενες επιλογές, $\varphi_1(x,\,y) = x^2 - y^2$ και $\varphi_2(x,\,y) = x\,y$, μπορούμε να φτιάξουμε τη συνάρτηση

$$\varphi(x,\,y) = \kappa\varphi_1(x,\,y) + \lambda\varphi_2(x,\,y) = \kappa\,(x^2 - y^2) + \lambda\,x\,y,$$

όπου κ, λ, τυχαίοι μη μηδενικοί αριθμοί, για να καταλήξουμε στην οικογένεια των ακριβών ΔΕ

$$\kappa(2\,x - 2\,y\,y') + \lambda(y + x\,y') = 2\,\kappa\,x + \lambda\,y - (2\,\kappa\,y - \lambda\,x)\,y' = 0.$$

Η συγκεκριμένη επιλογή $\kappa = -1/2$, λ=1, παράγει την ΔΕ $y - x + (x + y)\,y' = 0$ που μελετήσαμε διεξοδικά στο προηγούμενο παράδειγμα.

(iv) Η μη γραμμική ΔΕ

$$y + (x + 3\,y^2)\,y' = 0$$

γράφεται σαν

$$y + x\,y' + 3\,y^2\,y' = 0,$$

ή

$$D_x(x\,y) + D_x(y^3) = D_x(x\,y + y^3) = 0$$

΄Αρα λύσεις της προκύπουν από τη συνθήκη

$$\varphi(x,\,y) := x\,y + y^3 = c$$

□

Ασκήσεις

1. Κάθε μία από τις παρακάτω ΔΕ να ελεγχθεί αν είναι ακριβής ή όχι. Για εκείνες που είναι ακριβείς, να βρεθεί μια οικογένεια λύσεων με τη μορφή της συνθήκης $\varphi(x, y) = c$. Όπου είναι δυνατό, η λύση να εκφραστεί ρητά στη μορφή $y = f(x, c)$.

(i) $(x + y)\, y' + y + 2\, x = 0$

(ii) $(x - 3\, y^2)\, y' + y + 2\, x = 0$

(iii) $(2\, x - y)\, y' + y + 2\, x = 0$

(iv) $2\, y\, y' = \frac{x+1}{x}$

(v) $2\, x\, y\, y' = x + 1$

(vi) $(x - 2\, y)\, y' + y + \cos x = 0$

(vii) $(x - 2\, y)\, y' - 2\, y + \cos x = 0$

(viii) $3\, x^2 + y + x\, y' = 0$

(ix) $3\, x^2 + y + 2\, x\, y' = 0$

(x) $3\, x^2 + y + 2\, x\, y' = 0$

(xi) $\frac{2+y}{x^2} - \frac{y'}{x} = 0$

(xii) $\frac{2+y}{x} - y' = 0$

(xiii) $\frac{2\, x - y + (x + 2\, y)\, y'}{x^2 + y^2} = 0$

(xiv) $2\, x - y + (x + 2\, y)\, y' = 0$

(xv) $2\, x\, y\, e^{-x\, y^2}\, y' = 8\, x + y^2\, e^{-x\, y^2}$

(xvi) $2\, e^{-(x^2 + y^2)} (x + y\, y') = 1$

2. Με τη βοήθεια του *Mathematica*, κατασκευάστε τις ισοσταθμικές καμπύλες των συναρτήσεων $\varphi(x, y)$, μέσω των οποίων εκφράζεται η λύση των ακριβών ΔΕ της προηγούμενης άσκησης. Ως πρότυπο, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το παράδειγμα που ακολουθεί.

Σε κάθε περίπτωση ξεχωριστά, προσδιορίστε επακριβώς τα τμήματα των ισοσταθμικών καμπυλών της συνάρτησης $\varphi(x, y)$, τα οποία αποτελούν ολοκληρωτικές καμπύλες της αντίστοιχης ΔΕ.

Παράδειγμα

Με τις εντολές που ακολουθούν κατασκευάζονται ισοσταθμικές καμπύλες της συνάρτησης

$$\varphi(x, y) = x^2 - x\, y - y^2,$$

μέσω της οποίας ορίζονται οι λύσεις της ακριβούς ΔΕ

$$(x + 2\, y)\, y' + y - 2\, x = 0.$$

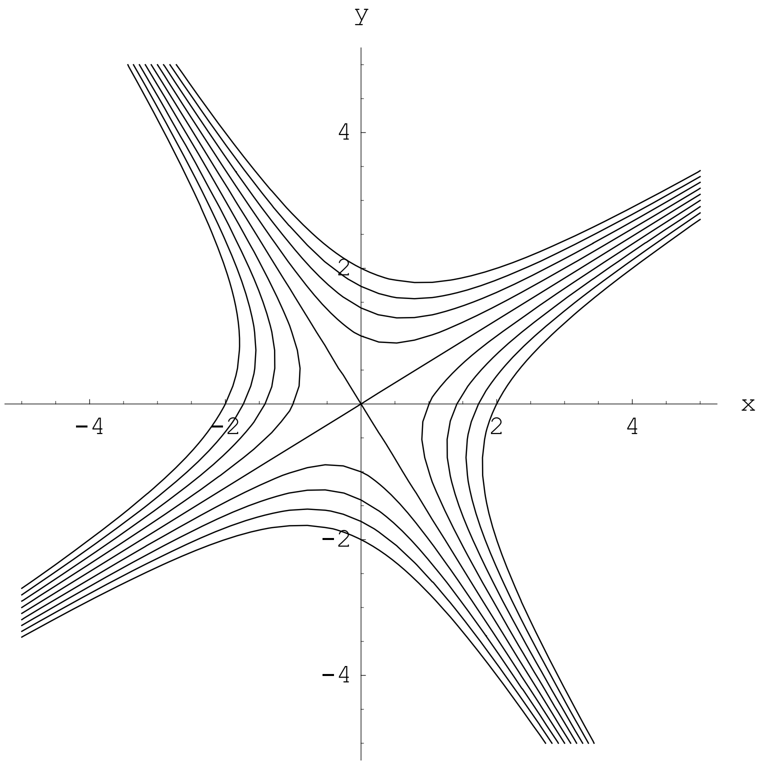
Οι τιμές της παραμέτρου c έχουν επιλεγεί να ανήκουν στο σύνολο $\{-4, -3, ..., 3, 4\}$ και οι μεταβλητές x, y έχουν περιοριστεί στα διαστήματα $-5 \leq x \leq 5$, $-5 \leq y \leq 5$ (γιατί;).

In[92]:=

```
<< Graphics`ImplicitPlot`
```

In[101]:=

```
φ[x_, y_] = x^2 - x y - y^2;
ισοσταθμικές = Table[ φ[x, y] == c, {c, -4, 4}];
ImplicitPlot[ισοσταθμικές, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}, AxesLabel → {"x", "y"}];
Clear[φ]
```



10. Μετατρέψιμες σε ακριβείς

Εισαγωγή

Συχνά, οι συναρτήσεις $A(x, y)$, $B(x, y)$ στη ΔΕ

(1) $$A(x, y) + B(x, y)\, y' = 0$$

δεν ικανοποιούν τη σχέση

(2) $$\partial_y A(x, y) = \partial_x B(x, y),$$

αλλά μπορούμε να βρούμε μια συνάρτηση $E(x, y)$, τέτοια ώστε η (2) να ισχύει για τις

(3) $$\tilde{A}(x, y) := E(x, y)\, A(x, y), \quad \tilde{B}(x, y) := E(x, y)\, B(x, y).$$

Με άλλα λόγια,

(4) $$\partial_y \tilde{A}(x, y) = \partial_x \tilde{B}(x, y),$$

σε κάποια περιοχή Ω του επίπεδου, $\mathbb{R}^2$.

Σ' αυτή την περίπτωση, η ΔΕ

(5) $$\tilde{A}(x, y) + \tilde{B}(x, y)\, y' = 0$$

είναι ακριβής. Συνεπώς, με τη μέθοδο του προηγούμενου εδάφιου, μπορούμε να κατασκευάσουμε μια συνάρτηση $\varphi(x, y)$, $(x, y) \in \Omega$, τέτοια ώστε η συνθήκη

(6) $$\varphi(x, y) = c$$

να ορίζει, έμμεσα, λύσεις της (5). ΄Ομως, η ΔΕ (5) είναι ισοδύναμη με την (1), αφού δεν είναι παρά η ίδια η (1) πολλαπλασιασμένη με την (προφανώς, μη μηδενική) συνάρτηση $E(x, y)$. ΄Αρα, η συνθήκη (6) οδηγεί και σε λύσεις της αρχικής ΔΕ, (1).

Η συνάρτηση $E(x, y)$ που μας επιτρέπει να μετατρέψουμε την μη ακριβή ΔΕ (1) σε ακριβή ονομάζεται *ολοκληρωτικός παράγοντας ή πολλαπλασιαστής (του) Euler*. Για κάποιες ΔΕ η εύρεση ενός τέτοιου παράγοντα είναι αρκετά εύκολη. Αυτές αποτελούν και την κατηγορία των ΔΕ που η επίλυσή τους με τη βοήθεια ενός πολλαπλασιαστή Euler είναι πρακτικά εφικτή.

Παράδειγμα

Η γραμμική ΔΕ

$$6\,x + 2\,y + (x + 1)\,y' = 0,$$

είναι της μορφής (1), με

$$A(x, y) = 6\,x + 2\,y, \qquad B(x, y) = x + 1.$$

Αφού

$$\partial_y A(x, y) = 2, \quad \partial_x B(x, y) = 1.$$

η παραπάνω ΔΕ δεν είναι ακριβής.

΄Ομως, αν πολλαπλασιάσουμε τις συναρτήσεις $A(x, y)$ και $B(x, y)$ με την $E(x, y) = x + 1$, θα πάρουμε τις

$$\tilde{A}(x, y) = 2\,(x + 1)\,(3\,x + y), \qquad \tilde{B}(x, y) = (x + 1)^2.$$

Εύκολα βρίσκουμε ότι

$$\partial_y \tilde{A}(x, y) = 2\,(x + 1) = \partial_x \tilde{B}(x, y).$$

Συνεπώς, η ΔΕ

$$2\,(x + 1)\,(3\,x + y)\,y + (x + 1)^2\,y' = 0$$

είναι ακριβής και ισοδύναμη με την αρχική, όταν $x + 1 \neq 0$.

Το σύστημα των ΜΔΕ

$$\partial_x \varphi(x, y) = \tilde{A}(x, y), \qquad \partial_y \varphi(x, y) = \tilde{B}(x, y)$$

που καθορίζει τη συνάρτηση $\varphi(x, y)$ συγκεκριμενοποιείται στο

$$\partial_x \varphi(x, y) = 2\,(x+1)\,(3\,x+y), \quad \partial_y \varphi(x, y) = (x+1)^2.$$

Η δεύτερη από αυτές τις ΜΔΕ λύνεται αμέσως για να δώσει

$$\varphi(x, y) = (x+1)^2\, y + f(x),$$

όπου $f(x)$ τυχαία διαφορίσιμη συνάρτηση. Από αυτή την έκφραση για την $\varphi(x, y)$ έπεται ότι

$$\partial_x \varphi(x, y) = 2\,(x+1)\, y + f'(x).$$

Αυτή πρέπει να συμφωνεί με το πρώτο μέλος του παραπάνω συστήματος ΜΔΕ. Αυτό σημαίνει ότι, τελικά, η $f(x)$ δεν μπορεί να είναι τελείως αυθαίρετη, αλλά θα πρέπει να είναι λύση της ΣΔΕ

$$f'(x) = 6\, x(x+1).$$

Αυτή ολοκληρώνεται αμέσως για να δώσει

$$f(x) = 2\,x^3 + 3\,x^2 + C = x^2(2\,x+3) + C.$$

Η επιλογή $C = 0$ είναι θεμιτή, οπότε, ως λύση των πιο πάνω ΜΔΕ, μπορούμε να πάρουμε την

$$\varphi(x, y) = (x+1)^2\, y + x^2(2\,x+3)$$

Τελικά, η συνθήκη $\varphi(x, y) = c$ οδηγεί στην ακόλουθη γενική λύση της ΣΔΕ με την οποία ξεκινήσαμε.

$$y = \frac{c}{(x+1)^2} - \frac{x^2(2\,x+3)}{(x+1)^2}.$$

□

Παράδειγμα

Η μη γραμμική ΔΕ

$$(x-y)\, y + (1+x^2)\, y' = 0,$$

είναι της μορφής (1) με

$$A(x, y) = (x-y)\, y, \quad B(x, y) = 1 + x^2.$$

Αφού

$$\partial_y A(x, y) = x - 2\,y, \quad \partial_x B(x, y) = 2\,x.$$

η παραπάνω ΔΕ δεν είναι ακριβής.

Επιδέχεται, όμως, ως πολλαπλασιαστή Euler τη συνάρτηση $E(x, y) = (1+x^2)^{-3/2}\, y^{-2}$. Πραγματικά, αν θέσουμε

$$\tilde{A}(x, y) = (1+x^2)^{-3/2}\, y^{-2}\, A(x, y) = (1+x^2)^{-3/2}\,(x-y)\, y^{-1},$$

$$\tilde{B}(x, y) = (1 + x^2)^{-3/2} y^{-2} B(x, y) = (1 + x^2)^{-1/2} y^{-2},$$

θα διαπιστώσουμε ότι

$$\partial_y \tilde{A}(x, y) = -x(1 + x^2)^{-3/2} y^{-2} = \partial_x \tilde{B}(x, y).$$

Αυτό σημαίνει ότι, η (ισοδύναμη με την αρχική, όταν $y \neq 0$) ΔΕ

$$(1 + x^2)^{-3/2} (x - y) y^{-1} + (1 + x^2)^{-1/2} y^{-2} y' = 0$$

είναι ακριβής,

Σ' αυτή την περίπτωση, το σύστημα των ΜΔΕ

$$\partial_x \varphi(x, y) = \tilde{A}(x, y), \quad \partial_y \varphi(x, y) = \tilde{B}(x, y)$$

που καθορίζει τη συνάρτηση $\varphi(x, y)$ γίνεται

$$\partial_x \varphi(x, y) = (1 + x^2)^{-3/2} (x - y) y^{-1}, \quad \partial_y \varphi(x, y) = (1 + x^2)^{-1/2} y^{-2}.$$

Η δεύτερη από αυτές τις ΜΔΕ λύνεται αμέσως για να δώσει

$$\varphi(x, y) = -(1 + x^2)^{-1/2} y^{-1} + f(x),$$

όπου $f(x)$ τυχαία διαφορίσιμη συνάρτηση. Συνεπώς,

$$\partial_x \varphi(x, y) = x(1 + x^2)^{-3/2} y^{-1} + f'(x).$$

Αυτή η έκφραση θα συμφωνεί με την πρώτη ΜΔΕ του παραπάνω συστήματος αν

$$f'(x) = -(1 + x^2)^{-3/2}.$$

Μια λύση αυτής είναι η

$$f(x) = -x (1 + x^2)^{-1/2}$$

οπότε

$$\varphi(x, y) = -(1 + x^2)^{-1/2} y^{-1} - x (1 + x^2)^{-1/2} = -(x + y^{-1}) (1 + x^2)^{-1/2}.$$

Συνεπώς, η συνθήκη $\varphi(x, y) = c$ δίνει την ακόλουθη οικογένεια λύσεων της αρχικής ΣΔΕ:

$$y = \frac{1}{x - c\sqrt{1 + x^2}}$$

Είναι προφανές ότι, η αρχική ΣΔΕ αυτού του παραδείγματος επιδέχεται και την λύση $y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$.

□

Δεν είναι λίγες οι φορές που ένας πολλαπλασιαστής Euler για δοσμένη μη ακριβή ΔΕ εντοπίζεται "με το μάτι". Αυτή η άμεση τεχνική εύρεσης ενός πολλαπλασιαστή Euler, στηρίζεται στις επισημάνσεις με τις οποίες κλείσαμε το προηγούμενο εδάφιο. Οι περιπτώσεις που εξετάζουμε στο αμέσως επόμενο παράδειγμα εξηγούν το πώς εφαρμόζεται αυτή η πολύτιμη, από πρακτική άποψη, μέθοδος.

Παράδειγμα

(i) Η γραμμική ΔΕ $y - x\, y' = 0$ δεν είναι ακριβής, αφού, σ' αυτή την περίπτωση $A(x, y) = y$, $B(x, y) = -x$, οπότε $\partial_y A(x, y) = 1$, ενώ $\partial_x B(x, y) = -1$. Ωστόσο, αρκεί να την πολλαπλασιάσουμε με τη συνάρτηση $-x^{-2}$ για να μετατραπεί αμέσως σε ακριβή. Αυτή η παρατήρηση προκύπτει από τον κατάλογο των ολικών παραγώγων που κατασκευάσαμε στο προηγούμενο εδάφιο, στην τέταρτη θέση του οποίου βρίσκουμε τη σχέση

$$D_x(y/x) = -x^{-2}(y - x\, y').$$

Συνεπώς, οι λύσεις της $y - x\, y' = 0$ προκύπτουν από εκείνες της ακριβούς ΔΕ $D_x(y/x) = 0$. Αυτές, βέβαια, ορίζονται από τη σχέση $y/x = c$, οπότε $y = c\, x$.

(ii) Και η μη γραμμική ΔΕ

$$2\, x(x^2 + y^2) - y + x\, y' = 0$$

δεν είναι ακριβής. Τώρα,

$$A(x, y) = 2\, x(x^2 + y^2) - y, \quad B(x, y) = x\,,$$

οπότε

$$\partial_y A(x, y) = 4\, x\, y - 1, \quad \partial_x B(x, y) = 1.$$

Το τελευταίο στοιχείο του πίνακα στον οποίο αναφερθήκαμε μας υποδείχνει ότι η συνάρτηση $(x^2 + y^2)^{-1}$ αποτελεί πολλαπλασιαστή Euler για την παραπάνω ΔΕ. Πραγματικά, αν την πολλαπλασιάσουμε με $(x^2 + y^2)^{-1}$, θα καταλήξουμε στην

$$2\, x - \frac{y - x\, y'}{x^2 + y^2} = 0,$$

που γράφεται σαν

$$D_x(x^2) + D_x[\arctan(y/x)] = 0.$$

΄Αρα, λύσεις της αρχικής ΔΕ προκύπτουν από τη σχέση

$$x^2 + \arctan(y/x) = c,$$

από την οποία έπεται ότι

$$y = x \tan(c - \tfrac{1}{2}\, \kappa\, x^2).$$

□

Η συστηματική μέθοδος κατασκευής ενός πολλαπλασιαστή Euler για μια μη ακριβή ΔΕ της μορφής $A(x, y) + B(x, y)\, y' = 0$ ξεκινάει από την αναλυτική γραφή της συνθήκης (4). Συγκεκριμένα, από τον ορισμό (3) των νέων συντελεστών $\tilde{A}(x, y)$ και $\tilde{B}(x, y)$ έπεται ότι η συνθήκη $\partial_y \tilde{A}(x, y) = \partial_x \tilde{B}(x, y)$ γράφεται αναλυτικά ως εξής:

(7) $\quad \partial_y E(x, y)\, A(x, y) + E(x, y)\, \partial_y A(x, y) = \partial_x E(x, y)\, B(x, y) + E(x, y)\, \partial_x B(x, y)$

Παραλείποντας τη ρητή αναφορά στις ανεξάρτητες μεταβλητές x και y, μπορούμε να γράψουμε την (7) στην απλούστερη μορφή

(8) $$B\, \partial_x E - A\, \partial_y E + (\partial_x B - \partial_y A)\, E = 0.$$

Έτσι ή αλλιώς, είναι φανερό ότι έχουμε να κάνουμε με μια ΜΔΕ πρώτης τάξης για τη συνάρτηση $E(x, y)$. Από την ανάλυση των ΜΔΕ αυτού του είδους συνάγεται ότι, η εύρεση της γενικής λύσης της (7) είναι ισοδύναμη με την εύρεση της λύσης της αρχικής ΣΔΕ $A(x, y) + B(x, y)\, y' = 0$. Συνεπώς, από πρακτική άποψη, η επίλυση μιας μη ακριβούς ΣΔΕ μέσω πολλαπλασιαστή Euler δεν έχει νόημα, παρά μόνο στις ακόλουθες περιπτώσεις:

(i) Οι συναρτήσεις $A(x, y)$ και $B(x, y)$ είναι τέτοιες η αντίστοιχη ΜΔΕ (8) λύνεται εύκολα.

(ii) Μπορούμε εύκολα να εντοπίσουμε ειδικές λύσεις της ΜΔΕ (8). Ο λόγος είναι ότι, η κατασκευή ενός ολοκληρωτικού παράγοντα δεν προϋποθέτει την εύρεση της γενικής λύσης της (8).

Και οι δυο αυτές περιπτώσεις αντιστοιχούν σε απλές μορφές του πολλαπλασιαστή Euler. Γι' αυτό, ο εντοπισμός τους γίνεται συνήθως αντίστροφα. Οι λεπτομέρειες αυτής της διαδικασίας περιγράφονται στο υπόλοιπο μέρος αυτού του εδάφιου.

Ολοκληρωτικοί παράγοντες της μορφής $E(x, y) = f(x)$, $E(x, y) = g(y)$

Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας της μορφής $E(x, y) = f(x)$. Τότε η (8) γίνεται

(9) $$B\, f' + (\partial_x B - \partial_y A)\, f = 0.$$

Είναι προφανές ότι η συνάρτηση $f(x)$ δεν μπορεί να είναι η μηδενική. Άρα, η (9) είναι ισοδύναμη με την

(10) $$\frac{f'}{f} = \frac{\partial_y A - \partial_x B}{B}$$

Όμως, το αριστερό μέλος της (10) είναι συνάρτηση μόνο του x. Συνεπώς, το ίδιο θα πρέπει να ισχύει και για το δεξί.

Αν, λοιπόν, οι συναρτήσεις $A(x, y)$, $B(x, y)$ που εμφανίζονται στην αρχική ΣΔΕ είναι τέτοιες που, πραγματικά, ο λόγος $(\partial_y A - \partial_x B) / B$ είναι ανεξάρτητος από τη μεταβλητή y, αν δηλαδή

(11) $$\frac{\partial_y A - \partial_x B}{B} = \alpha(x),$$

τότε η (10) μετατρέπεται στη γραμμική ΔΕ

(12) $$f' = \alpha(x)\, f.$$

Η τελευταία λύνεται αμέσως και μας παρέχει έναν ολοκληρωτικό παράγοντα της αρχικής ΣΔΕ, στη μορφή

(13) $$f = C\, e^{\int \alpha(x)\, d x}.$$

Ανάλογα, αν υποθέσουμε ότι η ΣΔΕ $A(x, y) + B(x, y)\, y' = 0$ επιδέχεται έναν ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής $E(x, y) = g(y)$, τότε η συνθήκη (8) γίνεται

(14) $$-A\, g' + (\partial_x B - \partial_y A)\, g = 0.$$

Συνακόλουθα,

(15) $$\frac{g'}{g} = \frac{\partial_x B - \partial_y A}{A}.$$

Επειδή το αριστερό μέλος αυτής της σχέσης εξαρτιέται μόνο από το y, το ίδιο πρέπει να ισχύει και για το δεξί. Αν λοιπόν οι συναρτήσεις $A(x, y)$, $B(x, y)$ είναι τέτοιες που ο λόγος $(\partial_x B - \partial_y A)/A$ είναι ανεξάρτητος από τη μεταβλητή x, αν δηλαδή

(16) $$\frac{\partial_x B - \partial_y A}{A} = \beta(y),$$

τότε η (15) γίνεται

(17) $$g' = \beta(y)\, g.$$

Συνεπώς, η αρχική ΔΕ επιδέχεται ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής

(18) $$g = C\, e^{\int \beta(y)\, d\, y}.$$

Παράδειγμα

Στην περίπτωση της μη γραμμικής ΔΕ

$$y + (2\, x - y\, e^y)\, y' = 0,$$

οι αρχικοί συντελεστές είναι ίσοι με

$$A(x,\, y) = y, \quad B(x,\, y) = 2\, x - y\, e^y.$$

Συνεπώς,

$$\partial_y A(x,\, y) = 1, \quad \partial_x B(x,\, y) = 2,$$

πράγμα που σημαίνει ότι η συγκεκριμένη ΔΕ δεν είναι ακριβής.

Από την άλλη,

$$\frac{\partial_x B - \partial_y A}{A} = \frac{1}{y}.$$

Συνεπώς, η παραπάνω ΔΕ επιδέχεται ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής

$$g = C\, e^{\int \beta(y)\, d\, y} = C\, e^{\ln|y|} = C\, y.$$

Πολλαπλασιάζοντας την αρχική ΔΕ με y, καταλήγουμε στην ακριβή

$$y^2 + (2\, x\, y - y^2\, e^y)\, y' = 0.$$

Για να λύσουμε την τελευταία, ακολουθούμε την διαδικασία που περιγράψαμε στο προηγούμενο εδάφιο. Πιο συγκεκριμένα, αναζητάμε αρχικά μια συνάρτηση $\varphi(x, y)$ που σέβεται τις συνθήκες

$$\partial_x \varphi(x,\, y) = y^2, \quad \partial_y \varphi(x,\, y) = 2\, x\, y - y^2\, e^y.$$

Η πρώτη από αυτές τις συνθήκες συνεπάγεται ότι

$$\varphi(x,\, y) = x\, y^2 + f(y)$$

Από αυτήν έπεται ότι

$$\partial_y \varphi(x,\, y) = 2\, x\, y + f'(y).$$

Συγκρίνοντας αυτή τη σχέση με τη δεύτερη από τις παραπάνω συνθήκες, οδηγούμαστε στην

$$f'(y) = -y^2 e^y.$$

Από αυτήν, με κατά παράγοντες ολοκλήρωση, βρίσκουμε ότι

$$f(y) = -(y^2 - 2y + 2)e^y + C.$$

Χωρίς να επηρεάσουμε τη γενικότητα του τελικού αποτελέσματος, θέτουμε $C = 0$, οπότε η πιο πάνω έκφραση για την $\varphi(x, y)$ γίνεται

$$\varphi(x, y) = x y^2 - (y^2 - 2y + 2)e^y$$

Συμπερασματικά, λύσεις της αρχικής ΔΕ δίνονται, έμμεσα, από τη σχέση

$$x y^2 - (y^2 - 2y + 2)e^y = c.$$

Ολοκληρωτικοί παράγοντες άλλης μορφής

Με ανάλογο τρόπο προσδιορίζεται η σχέση που πρέπει να ικανοποιούν οι συντελεστές $A(x, y)$ και $B(x, y)$ για να μετατρέπεται η ΣΔΕ $A(x, y) + B(x, y)\,y' = 0$ σε ακριβή, μέσω ενός πολλαπλασιαστή Euler άλλων ειδικών μορφών.

Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα ότι, η $A + B\,y' = 0$ επιδέχεται ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής $E(x, y) = f(x + y)$. Τότε η ΜΔΕ (8) γίνεται

(19) $$(B - A)\,f' + (\partial_x B - \partial_y A)\,f = 0.$$

Ισοδύναμα,

(20) $$\frac{f'}{f} = \frac{\partial_y A - \partial_x B}{B - A}.$$

Αφού το αριστερό μέλος της (20) είναι συνάρτηση μόνο του $x + y$, το ίδιο θα πρέπει να ισχύει και για το δεξί.

Αν, λοιπόν, ο λόγος $(\partial_y A - \partial_x B)/(B - A)$ είναι μια συνάρτηση του συνδυασμού $x + y$, αν δηλαδή

(21) $$\frac{\partial_y A - \partial_x B}{B - A} = \alpha(x + y),$$

τότε η (20) ισοδυναμεί με τη γραμμική ΣΔΕ

(22) $$f' = \alpha(\xi)\,f.$$

Συνεπώς, η αρχική ΔΕ επιδέχεται πολλαπλασιαστή Euler της μορφής

(23) $$E(x, y) = f(x + y)\,, \quad f(\xi) = C\,e^{\int \alpha(\xi)\,d\xi}.$$

Παράδειγμα

Στην περίπτωση της μη γραμμικής ΔΕ

(24) $$x^2 + 2xy + (x^2 + 3xy + y^2)\,y' = 0,$$

οι συντελεστές δίνονται από τους ακόλουθους τύπους.

$$A(x, y) = x^2 + 2xy, \quad B(x, y) = x^2 + 3xy + y^2.$$

Συνεπώς,

$$\partial_y A = 2\,x, \quad \partial_x B = 2\,x + 3\,y,$$

και άρα η παραπάνω ΔΕ δεν είναι ακριβής.

Ωστόσο,

$$\frac{\partial_y A - \partial_x B}{B - A} = \frac{-3\,y}{x\,y + y^2} = -\frac{3}{x + y} = \alpha(x + y)$$

Αυτό σημαίνει ότι η ΔΕ (24) μετατρέπεται σε ακριβή αν πολλαπλασιαστεί με τη συνάρτηση $E(x, y) = f(x + y)$, όπου

$$f(\xi) = C\,e^{\int \alpha(\xi)\,d\,\xi} = C\,e^{-3\ln|\xi|} = \frac{C}{|\xi|^3}.$$

Η επιλογή $f(\xi) = \xi^{-3}$ οδηγεί στον πολλαπλασιαστή Euler $E(x, y) = (x + y)^{-3}$ και στους νέους συντελεστές

$$\tilde{A}(x, y) = (x + y)^{-3}\,A(x, y) = \frac{x^2 + 2\,x\,y}{(x+y)^3}, \quad \tilde{B}(x, y) = (x + y)^{-3}\,B(x, y) = \frac{x^2 + 3\,x\,y + y^2}{(x+y)^3}.$$

Συνεπώς, το σύστημα των ΜΔΕ που καθορίζουν τη συνάρτηση $\varphi(x, y)$ γίνεται

$$\partial_x \varphi(x, y) = \frac{x^2 + 2\,x\,y}{(x+y)^3}, \qquad \partial_y \varphi(x, y) = \frac{x^2 + 3\,x\,y + y^2}{(x+y)^3}.$$

Η δεύτερη από αυτής τις ΜΔΕ γράφεται σαν

$$\partial_y \varphi(x, y) = \frac{1}{x+y} + \frac{x\,y}{(x+y)^3}$$

και ολοκληρώνεται αμέσως για να δώσει

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) &= \ln\left|x + y\right| + x\int \frac{y}{(x+y)^3}\,d\,y = \ln\left|x + y\right| + x\left(-\frac{1}{2}\right)\left[\frac{y}{(x+y)^2} - \int \frac{1}{(x+y)^2}\,d\,y\right] \\ &= \ln\left|x + y\right| - \frac{x}{2}\left[\frac{y}{(x+y)^2} + \frac{1}{x+y}\right] + f(x) \\ &= \ln\left|x + y\right| - \frac{1}{2}\,\frac{x^2 + 2\,x\,y}{(x+y)^2} + f(x).\end{aligned}$$

Από αυτήν έπεται ότι

$$\begin{aligned}\partial_x \varphi(x, y) &= \frac{1}{x+y} - \frac{1}{2}\left[\frac{y}{(x+y)^2} + \frac{1}{x+y}\right] - \frac{x}{2}\left[-2\,\frac{y}{(x+y)^3} - \frac{1}{(x+y)^2}\right] + f'(x) \\ &= \frac{x^2 + x\,y}{(x+y)^3} + f'(x)\end{aligned}$$

Η σύγκριση της τελευταίας με την πρώτη ΜΔΕ του συστήματος οδηγεί στο συμπέρασμα ότι $f'(x) = 0$, οπότε $f(x) = C$. Η επιλογή $C = 0$ δεν περιορίζει τη γενικότητα του τελικού αποτελέσματος, οπότε

$$\varphi(x, y) = \ln\left|x + y\right| - \frac{1}{2}\,\frac{x^2 + 2\,x\,y}{(x+y)^2}.$$

Τέλος, η συνθήκη $\varphi(x, y) = c$ ορίζει, έμμεσα, λύσεις της αρχικής ΔΕ.

Ας σημειωθεί ότι η ΔΕ (24) είναι ομογενής που επιδέχεται και τη λύση $y = -x$. Η τελευταία δεν περιέχεται στο σύνολο των λύσεων που ορίζει η συνθήκη $\varphi(x, y) = c$. Ένα δείγμα των ολοκληρωτικών καμπυλών της ΔΕ που μελετήσαμε φαίνεται στο επόμενο σχήμα. Οι ευθείες $y = (1/2)\left(-3 \pm \sqrt{5}\right)x$ που εμφανίζονται στο σχήμα δεν παριστάνουν ολοκληρωτικές καμπύλες. Απλώς προσδιορίζουν τα σημεία όπου ο συντελεστής $B(x, y)$ μηδενίζεται, οπότε η σχέση $\varphi(x, y) = c$ δεν μπορεί να τεθεί στη μορφή $y = f_c(x)$. Με άλλα λόγια, τα σημεία τομής των ευθειών $y = (1/2)\left(-3 \pm \sqrt{5}\right) x$ με τις ισοσταθμικές καμπύλες της $\varphi(x, y)$ χωρίζουν τις τελευταίες σε ξένα μεταξύ τους τμήματα, καθένα από τα οποία αποτελεί ολοκληρωτική καμπύλη της ΔΕ (24).

Με ανάλογο τρόπο, η υπόθεση ότι υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας της μορφής $E(x, y) = f(x\, y)$ κάνει τη συνθήκη (8) να πάρει την ακόλουθη μορφή:

(25) $$\frac{f'}{f} = \frac{\partial_y A - \partial_x B}{y\, B - x\, A}$$

Αφού το αριστερό μέλος της (25) είναι συνάρτηση μόνο του γινομένου $x\, y$, το ίδιο θα πρέπει να ισχύει και για το δεξί. Αν, λοιπόν, ο λόγος $(\partial_y A - \partial_x B)/(B - A)$ είναι μια συνάρτηση του συνδυασμού $x\, y$, αν δηλαδή

(26) $$\frac{\partial_y A - \partial_x B}{y\, B - x\, A} = \alpha(x\, y),$$

τότε η (25) μετατρέπεται στη γραμμική ΔΕ $f' = \alpha(\xi)\, f$. Συνεπώς, υπάρχει ολοκληρωτικός παράγοντας της αρχικής ΔΕ με τη μορφή

(27) $$E(x, y) = f(x\, y)\,, \quad f(\xi) = C\, e^{\int \alpha(\xi)\, d\xi}.$$

Παράδειγμα

Στην περίπτωση της μη γραμμικής ΔΕ

(28) $$\frac{y(6\, x^2 - y^2)}{4\, x} + (x^2 - y^2)\, y' = 0, \quad x \neq 0,$$

οι συντελεστές δίνονται από τους ακόλουθους τύπους.

$$A(x, y) = \frac{y(6\, x^2 - y^2)}{4\, x}, \quad B(x, y) = x^2 - y^2.$$

Συνεπώς,

$$\partial_y A = \frac{6\, x^2 - 3\, y^2}{4\, x}, \quad \partial_x B = 2\, x,$$

και άρα η παραπάνω ΔΕ δεν είναι ακριβής.

Από την άλλη,

$$\frac{\partial_y A - \partial_x B}{y\, B - x\, A} = \frac{6\, x^2 - 3\, y^2 - 8\, x^2}{4\, x\, y\, (x^2 - y^2) - x\, y (6\, x^2 - y^2)} = \frac{1}{x\, y} = \alpha(x\, y)$$

Αυτό σημαίνει ότι, για την (24), υπάρχει πολλαπλασιαστής Euler της μορφής $E(x, y) = f(x\, y)$, όπου

$$f(\xi) = C\, e^{\int \alpha(\xi)\, d\xi} = C\, e^{\ln|\xi|} = C\, |\, \xi\, |.$$

Αν επιλέξουμε την ειδικότερη λύση $f(\xi) = 4\, \xi$, θα οδηγηθούμε στον πολλαπλασιαστή $E(x, y) = 4\, x\, y$. Τότε, οι νέοι συντελεστές δίνονται από τις εκφράσεις

$$\tilde{A}(x, y) = 4\, x\, y\, \frac{y(6\, x^2 - y^2)}{4\, x} = y^2 (6\, x^2 - y^2), \quad \tilde{B}(x, y) = 4\, x\, y\, B(x, y) = 4\, x\, y (x^2 - y^2).$$

Συνεπώς, η συνάρτηση $\varphi(x, y)$ προκύπτει από τη λύση του συστήματος

$$\partial_x \varphi(x, y) = y^2 (6\, x^2 - y^2), \quad \partial_y \varphi(x, y) = 4\, x\, y (x^2 - y^2).$$

Η πρώτη από αυτές τις ΜΔΕ ολοκληρώνεται αμέσως για να δώσει

$$\varphi(x, y) = 2 x^3 y^2 - x y^4 + g(y),$$

οπότε

$$\partial_y \varphi(x, y) = 4 x^3 y - 4 x y^3 + g'(y).$$

Συγκρίνοντας αυτό το αποτέλεσμα με τη δεύτερη από τις παραπάνω ΜΔΕ, συμπεραίνουμε ότι $g'(y) = 0$. Άρα η $g(y)$ είναι σταθερή και, χωρίς να μειώσουμε τη γενικότητα του τελικού αποτελέσματος, μπορούμε να τη θεωρήσουμε μηδενική. Έτσι, η συνάρτηση $\varphi(x, y)$ γίνεται

$$\varphi(x, y) = 2 x^3 y^2 - x y^4.$$

Η συνθήκη $\varphi(x, y) = c$ που ορίζει τις ισοσταθμικές καμπύλες είναι μια απλή εξίσωση δεύτερου βαθμού για την y^2:

$$2 x^3 y^2 - x y^4 = c.$$

Στα σημεία του επίπεδου $x - y$ που δεν βρίσκονται πάνω στις ευθείες $y = 0$ και $y = \pm x$, η προηγούμενη αλγεβρική εξίσωση λύνεται εύκολα για να δώσει το ακόλουθο σύνολο λύσεων της ΔΕ (28):

$$y = \pm \sqrt{x^2 \pm x^{-1} \sqrt{x^6 - c x}} .$$

Ασκήσεις

1. Δείχτε ότι οι ακόλουθες ΔΕ επιδέχονται ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής $E(x, y) = f(x)$. Χρησιμοποιώντας έναν παράγοντα αυτού του είδους, κατασκευάστε, ρητά ή έμμεσα εκφρασμένες, μονοπαραμετρικές οικογένειες λύσεων.

(i) $2 y^2 + 3 x + 2 x y y' = 0$.

(ii) $y(2 + 3 x + 2 y) + (2 + x) (x + 2 y) y' = 0$.

(iii) $2 (1 + x y) \cos x + y \sin x + x \sin x\, y' = 0$.

(iv) $\sin x + \cos x + 2 e^{-x} y y' = 0$.

2. Δείχτε ότι οι ακόλουθες ΔΕ επιδέχονται ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής $E(x, y) = f(y)$. Χρησιμοποιώντας έναν παράγοντα αυτού του είδους, κασκευάστε, ρητά ή έμμεσα εκφρασμένες, μονοπαραμετρικές οικογένειες λύσεων.

(i) $y + 3 + (3 y - 2 x) y' = 0$.

(ii) $y \cos y + [x \cos y - 2 (1 + x y) \sin y] y' = 0$.

(iii) $y + (x + y + 2 x y^2) y' = 0$.

(iv) $y(1 + \cosh y) + [1 + \cosh y - 2 (1 + x y) \sinh y] y' = 0$.

3. Να δειχτεί ότι η σχέση

$$\frac{\partial_y A - \partial_x B}{y A - x B} = \alpha(x^2 + y^2)$$

αποτελεί αναγκαία και ικανή συνθήκη για να επιδέχεται η ΔΕ $A(x, y) + B(x, y)\, y' = 0$ πολλαπλασιαστή Euler της μορφής $E(x, y) = f(x^2 + y^2)$.

4. Να δειχτεί ότι η συνθήκη

$$x\, y(\partial_y A - \partial_x B) = r\, y\, B - s\, x\, A$$

εξασφαλίζει την ύπαρξη πολλαπλασιαστή Euler της μορφής $E(x, y) = x^r\, y^s$ για την ΔΕ $A(x, y) + B(x, y)\, y' = 0$.

5. Να λυθούν οι παρακάτω ΔΕ μέσω ενός πολλαπλασιαστή Euler:

(i) $(x + 2) \sin y + \cos y\, y' = 0$.

(ii) $\sin y - 2\, y\, e^{-x} \sin x + (\cos y + 2\, e^{-x} \cos x)\, y' = 0$.

(iii) $x^2\, y^3 + x(1 + y^2)\, y' = 0$, (βλ. Ασκ. 4).

(iv) $y(x + y) \cos x + [(x - y) \sin x - 2]\, y' = 2\,(1 + y \sin x)$.

(v) $(x^2 + y^2)\, y + 4\, x\,(e^{-x} + y) + [(x^2 + y^2) + 4\,(e^{-x} + y)]\, y' = 0$.

(vi) $x(5\, e^x + 4\, x\, y)\, y' = (x + 2)\, y\, e^x + 3\, x\, y^2$, (βλ. Ασκ. 4) .

6. α) Να αποδειχτεί η ακόλουθη πρόταση: Αν η ΔΕ

(*) $$A(x, y) + B(x, y)\, y' = 0$$

είναι ακριβής και παραμένει ακριβής όταν πολλαπλασιστεί με την μη σταθερή ομαλή συνάρτηση $E(x, y)$, τότε η συνθήκη $E(x, y) = c$ ορίζει, έμμεσα, λύσεις της ΔΕ (*).

β) Ας υποτεθεί ότι, κάθε μία από τις συναρτήσεις $E_1(x, y)$, $E_2(x, y)$ αποτελεί πολλαπλασιαστή Euler της ΔΕ (*) και δεν είναι (σταθερό) πολλαπλάσιο της άλλης. Δείχτε ότι η συνθήκη

$$\frac{E_1(x,y)}{E_2(x,y)} = c$$

ορίζει, έμμεσα, λύσεις της (*).

7. Κάθε μια από τις ακόλουθες ΔΕ επιδέχεται ως ολοκληρωτικούς παράγοντες συναρτήσεις της αντίστοιχης μορφής $E_1(x, y)$ και $E_2(x, y)$. Βρείτε ένα ζευγάρι παραγόντων αυτού του είδους και λύστε την ΔΕ, χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της Ασκ. (6β).

(i) $(x + 2) \sin y + \cos y\, y' = 0$, $E_1(x, y) = f(x)$, $E_2(x, y) = g(y)$.

(ii) $4 + 2\, y^2 - (2\, x + 1)\, y\, y' = 0$, $E_1(x, y) = f(x)$, $E_2(x, y) = g(y)$.

(iii) $2\,(y + 1) + (2 + x + 3\, y)\, y' = 0$, $E_1(x, y) = f(x + y)$, $E_2(x, y) = g(y)$.

Κεφάλαιο ΙΙΙ

Συμμετρίες διαφορικών εξισώσεων 1ης τάξης

1. Μετασχηματισμοί του $\mathbb{R}^2$

Θεωρούμε δύο συναρτήσεις $V(x, y)$, $W(x, y)$ με κοινό πεδίο ορισμού μια περιοχή Ω του $\mathbb{R}^2$. Οι τιμές αυτών των συναρτήσεων σε κάποιο συγκεκριμένο σημείο (a, b) της περιοχής Ω συναποτελούν το ζευγάρι των πραγματικών αριθμών $(V(a, b), W(a, b))$. Ας ονομάσουμε το τελευταίο *εικόνα του* (a, b). Καθώς, λοιπόν, τα ζευγάρια (x, y) διατρέχουν την περιοχή Ω, οι εικόνες τους καλύπτουν μιαν άλλη περιοχή, Ψ, του $\mathbb{R}^2$. Για ευκολία, ας συμβολίσουμε με (υ, w) την εικόνα του τυχαίου σημείου $(x, y) \in \Omega$. Με άλλα λόγια, ας θέσουμε,

(1) $$\upsilon = V(x, y), \quad w = W(x, y), \quad (x, y) \in \Omega.$$

Τότε, υπάρχει το ενδεχόμενο οι τελευταίες σχέσεις να λύνονται ως προς τις μεταβλητές x, y, έτσι ώστε να καταλήγουμε στις

(2) $$x = X(v, w), \quad y = Y(\upsilon, w), \quad (\upsilon, w) \in \Psi.$$

Σ' αυτή την περίπτωση λέμε ότι η απεικόνιση $\psi : (x, y) \to (\upsilon, w)$ που ορίζεται από τις (1) είναι αντιστρέψιμη.

Αν ονομάσουμε ω την αντίστροφη της ψ, τότε η απεικόνιση $\omega : (\upsilon, w) \to (x, y)$ ορίζεται από τις (2). Προφανώς,

(3) $$\omega \circ \psi(x, y) = (x, y), \quad (x, y) \in \Omega,$$

(4) $$\psi \circ \omega(\upsilon, w) = (\upsilon, w), \quad (\upsilon, w) \in \Psi.$$

Παράδειγμα

Ένα απλό, αλλά σημαντικό, παράδειγμα αντιστρέψιμης απεικόνισης είναι η $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ που ορίζεται από τις σχέσεις

$$\upsilon = x + y + 1, \quad w = x - y - 2, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Είναι φανερό ότι

$$\upsilon + w = 2x - 1, \quad \upsilon - w = 2y + 3.$$

Συνεπώς, η αντίστροφη, $\omega \equiv \psi^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, της απεικόνισης $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ορίζεται από τις σχέσεις

$$x = \tfrac{1}{2}(v + w + 1), \quad y = \tfrac{1}{2}(v - w - 3), \quad (v, w) \in \mathbb{R}^2.$$

Το παράδειγμα που μόλις εξετάσαμε αποτελεί στοιχείο της οικογένειας των γραμμικών μετασχηματισμών του $\mathbb{R}^2$. Αυτή η οικογένεια αποτελείται από αντιστρέψιμες απεικονίσεις της μορφής (1) όπου οι συναρτήσεις $V(x, y)$, $W(x, y)$ είναι γραμμικοί συνδυασμοί των μεταβλητών x και y. Με άλλα λόγια, πρόκειται για τις απεικονίσεις $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ που ορίζονται από σχέσεις της μορφής

(5) $$\upsilon = V(x, y) := \alpha\, x + \beta\, y + \kappa, \quad w = W(x, y) := \gamma\, x + \delta\, y + \lambda, \;\; (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

όπου οι α, β, κ, γ, δ και λ είναι τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί οι οποίοι σέβονται την συνθήκη

(6) $$a\,\delta - \beta\,\gamma \neq 0.$$

Αξίζει να σημειώσουμε ότι συχνά οι γραμμικοί μετασχηματισμοί παριστάνονται μέσω της άλγεβρας των πινάκων. Συγκεκριμένα, αν υιοθετήσουμε το συμβολισμό των πινάκων, τότε το ζευγάρι (x, y) αντιστοιχεί σε έναν πίνακα 1×2, δηλαδή με μια γραμμή και δύο στήλες. Ως ανάστροφος, $(x, y)^T$, του πίνακα (x, y) ορίζεται ο πίνακας με δύο γραμμές και μία στήλη (2×1 πίνακας)

(7) $$(x, y)^T \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Η τετράδα $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ αντιστοιχίζεται στον 2×2 πίνακα

(8) $$A := \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

οπότε οι σχέσεις (5) παίρνουν την ακόλουθη μορφή

(9) $$\begin{pmatrix} \upsilon \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \kappa \\ \lambda \end{pmatrix}$$

Ο συνδυασμός $\alpha\,\delta - \beta\,\gamma$ ονομάζεται *ορίζουσα του πίνακα A* και συμβολίζεται με $\det(A)$. ΄Αρα η συνθήκη (6) γράφεται σαν

(10) $$\det(A) := \alpha\,\delta - \beta\,\gamma \neq 0.$$

Από την άποψη των πινάκων, αυτή είναι η αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι ο πίνακας A αντιστρέψιμος. Να υπάρχει, δηλαδή, 2×2 πίνακας B, τέτοιος ώστε $A\,B = B\,A = I$, όπου I ο λεγόμενος *ταυτοτικός πίνακας*

(11) $$I := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

΄Οταν υπάρχει, ο αντίστροφος του πίνακα A συμβολίζεται με A^{-1}. Στην περίπτωσή μας είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι

(12) $$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

Από αυτό το γεγονός και την (9) αμέσως έπεται ότι

(13) $$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v - \kappa \\ w - \lambda \end{pmatrix}$$

Αν γράψουμε την προηγούμενη σχέση αναλυτικά θα δούμε ότι

(14) $$x = a\,v + b\,w + k, \qquad y = c\,v + d\,w + l\,,$$

όπου

(15α) $$a = \frac{\delta}{\det(A)}, \quad b = -\frac{\beta}{\det(A)}, \quad k = \frac{\beta\lambda-\delta\kappa}{\det(A)},$$

(15β) $$c = -\frac{\gamma}{\det(A)} \quad d = \frac{\alpha}{\det(A)}, \quad l = \frac{\gamma\kappa-\alpha\lambda}{\det(A)}.$$

΄Αρα η αντίστροφη μιας γραμμικής απεικόνισης είναι κι αυτή γραμμική.

Ας επιστρέψουμε στις σχέσεις (5) κι ας παρατηρήσουμε ότι

(16) $$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x V(x, y) & \partial_y V(x, y) \\ \partial_x W(x, y) & \partial_y W(x, y) \end{pmatrix}$$

΄Αρα, η συνθήκη $\det(A) \neq 0$, η οποία εξασφαλίζει την αντιστρεψιμότητα της γραμμικής απεικόνισης, είναι ισοδύναμη με τον μη μηδενισμό της ορίζουσας του πίνακα των μερικών παραγώγων των συναρτήσεων $V(x, y)$ και $W(x, y)$. Η ορίζουσα αυτού του πίνακα ονομάζεται *ορίζουσα (του) Jacobi* (Γιακόμπι) και συχνά συμβολίζεται με $\partial(V, W)/\partial(x, y)$. Με άλλα λόγια

(17) $$\frac{\partial(V,W)}{\partial(x,y)} := \det\begin{pmatrix} \partial_x V & \partial_y V \\ \partial_x W & \partial_y W \end{pmatrix}$$

Ο μη μηδενισμός της ορίζουσας Jacobi αποτελεί ικανή συνθήκη για να είναι μια απεικόνιση αντιστρέψιμη και στη γενικότερη περίπτωση των μη γραμμικών απεικονίσεων. Αυτό είναι το νόημα του επόμενου θεωρήματος.

Θεώρημα της αντίστροφης απεικόνισης

Ας υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις $V(x, y)$, $W(x, y)$ είναι κλάσης $C^1(\Omega)$ σε μια περιοχή περιοχή Ω του $\mathbb{R}^2$. Αν η ορίζουσα Jacobi $\frac{\partial(V,W)}{\partial(x,y)}$ δε μηδενίζεται στο σημείο $(a, b) \in \Omega$, τότε η απεικόνιση $\psi : \Omega \to \mathbb{R}^2$ που ορίζουν οι σχέσεις

$$\upsilon = V(x, y), \quad w = W(x, y), \quad (x, y) \in \Omega$$

είναι αντιστρέψιμη.

Ακριβέστερα, υπάρχουν συναρτήσεις $X(\upsilon, w)$, $Y(\upsilon, w)$ που είναι κλάσης $C^1(\Psi)$ σε μια γειτονιά Ψ του σημείου $(p, q) = (V(a, b), W(a, b))$ και τέτοιες που η απεικόνιση $\omega : \Psi \to \Omega$ η οποία ορίζεται από τις σχέσεις

$$x = X(v, w), \quad y = Y(v, w), \quad (v, w) \in \Psi.$$

είναι $1 - 1$ (αμφιμονοσήμαντη).

Παράδειγμα

Το σύνολο

(18) $$\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$$

δεν είναι άλλο από το δεξιό τμήμα του επίπεδου $x - y$. Η απεικόνιση $\psi : \Omega \to \mathbb{R}^2$ που ορίζεται από τις σχέσεις

(19) $$r = R(x, y) := \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \Theta(x, y) := \arctan(y/x), \quad (x, y) \in \Omega,$$

είναι αντιστρέψιμη.

Συγκεκριμένα

(20α) $$\partial_x R(x,\,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \partial_y R(x,\,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

(20β) $$\partial_x \Theta(x,\,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} \qquad \partial_y \Theta(x,\,y) = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Συνεπώς,

(21) $$\det\begin{pmatrix} \partial_x R & \partial_y R \\ \partial_x \Theta & \partial_y \Theta \end{pmatrix} = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} + \frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

και άρα

(22) $$\frac{\partial(R,\Theta)}{\partial(x,y)} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \neq 0, \quad (x,\,y) \in \Omega$$

Η εικόνα $\Psi = \psi(\Omega)$ της περιοχής Ω είναι το εξής τμήμα του επίπεδου $r-\theta$:

(23) $$\Psi := \{(r,\,\theta) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 < r < \infty,\ -\tfrac{\pi}{2} < \theta < \tfrac{\pi}{2}\}$$

Εύκολα επαληθεύεται ότι, η αντίστροφη απεικόνιση $\varphi : \Psi \to \Omega$ ορίζεται από τις σχέσεις

(24) $$x = X(r,\,\theta) = r\cos\theta, \quad y = Y(r,\,\theta) = r\sin\theta, \quad (r,\,\theta) \in \Psi.$$

Παρατήρηση. Διατηρώντας τους ίδιους τύπους (24), μπορούμε να επεκτείνουμε την απεικόνιση $\varphi : \Psi \to \Omega$ στην $\tilde{\varphi} : \tilde{\Psi} \to \tilde{\Omega}$, όπου

(25) $$\tilde{\Omega} := \{(r,\,\theta) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 < r < \infty,\ -\pi < \theta < \pi\}$$

Τότε, η εικόνα, $\tilde{\Omega}$, της ανοιχτής λωρίδας $\tilde{\Psi}$ του επίπεδου $r-\theta$ είναι το σύνολο που προκύπτει αν από το επίπεδο $x-y$ αφαιρέσουμε την ημιευθεία

(26) $$L := \{(x,\,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \le 0,\ y = 0\}.$$

Σημείωση. Από τις (24), αμέσως έπεται ότι, ο πίνακας Jacobi της $\tilde{\varphi} : \tilde{\Psi} \to \tilde{\Omega}$ δίνεται από την έκφραση

(27) $$\begin{pmatrix} \partial_r X & \partial_\theta X \\ \partial_r Y & \partial_\theta Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \cos\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

Συνακόλουθα,

(28) $$\frac{\partial(X,Y)}{\partial(r,\theta)} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r \neq 0, \quad (r,\,\theta) \in \tilde{\Psi}.$$

Η (27) αποτελεί ειδική περίπτωση του γενικού τύπου για τον πίνακα Jacobi της αντίστροφης απεικόνισης. Συγκεκριμένα, από τον τύπο (12), αμέσως συνάγεται ότι ο αντίστροφος του πίνακα

(29) $$J := \begin{pmatrix} \partial_x V(x,\,y) & \partial_y V(x,\,y) \\ \partial_x W(x,\,y) & \partial_y W(x,\,y) \end{pmatrix}$$

είναι ο

(30) $$J^{-1} = \frac{1}{\partial(V,W)/\partial(x,y)} \begin{pmatrix} \partial_y W(x,\,y) & -\partial_y V(x,\,y) \\ -\partial_x W(x,\,y) & \partial_x V(x,\,y) \end{pmatrix}$$

Αυτή η σχέση γράφεται και στη μορφή

$$(31) \qquad \begin{pmatrix} \partial_{\upsilon} X(\upsilon, w) & \partial_{w} X(\upsilon, w) \\ \partial_{\upsilon} Y(\upsilon, w) & \partial_{w} Y(\upsilon, w) \end{pmatrix} = \frac{1}{\partial(V,W)/\partial(x,y)} \begin{pmatrix} \partial_y W(x, y) & -\partial_y V(x, y) \\ -\partial_x W(x, y) & \partial_x V(x, y) \end{pmatrix}$$

Εξυπακούεται ότι, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (1) ή (2), όλες οι εκφράσεις που εμφανίζονται στην (31) γράφονται συναρτήσει των μεταβλητών x και y, ή των υ και w, αντίστοιχα.

Ασκήσεις

1. Ο μετασχηματισμός $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ορίζεται από τις σχέσεις

$$\upsilon = \frac{x}{1-x}, \qquad w = \frac{y}{1-x}.$$

α) Υπολογίστε την ορίζουσα Jacobi του ψ και κατασκευάστε τον αντίστροφό του.

β) Προσδιορίστε την εικόνα της ευθείας $y = x,\ \ x < 1$, του επίπεδου $x - y$ στο επίπεδο $v - w$. Ειδικότερα, προσδιορίστε την εικόνα των σημείων $x = -4,\ -2,\ -1,\ -1/2$ και 1/2 αυτής της ευθείας.

γ) Τι είδους καμπύλη αποτελεί η εικόνα της τυχαίας ευθείας $y = a\,x + b$;

2. Θεωρήστε τον μετασχηματισμό $\psi : (x, y) \to (\upsilon, w)$ του $\mathbb{R}^2$ που ορίζεται από τις σχέσεις

$$\upsilon = x + y, \qquad w = x - y.$$

Υπολογίστε την αντίστοιχη ορίζουσα Jacobi και κατασκευάστε τον αντίστροφο του ψ.

3. Το ίδιο με την προηγούμενη άσκηση, όταν

$$\upsilon = x \cosh t - y \sinh t, \qquad w = -x \sinh t + \cosh t,$$

όπου t τυχαίος πραγματικός αριθμός.

4. Να κατασκευαστεί ο αντίστροφος του επόμενου μετασχηματισμού του $\mathbb{R}^2$:

$$M : (s, \rho) \to (x, t) = (s \cosh \rho\ ,\ s \sinh \rho)$$

2. Μετασχηματισμοί ΣΔΕ πρώτης τάξης

΄Οπως είδαμε στο εδάφιο για τις ομογενείς εξισώσεις πρώτης τάξης, συχνά, η επίλυση μιας ΔΕ διευκολύνεται με την "αλλαγή μεταβλητών". Ο λόγος είναι ότι, επιλέγοντας κατάλληλα το νέο ζευγάρι μεταβλητών, μπορούμε να καταλήξουμε σε μια ΔΕ αρκετά απλούστερη από την αρχική. Για παράδειγμα, η νέα ΔΕ μπορεί να ανήκει σε μια από τις κατηγορίες των οποίων γνωρίζουμε τη μέθοδο επίλυσης, ενώ δεν ίσχυε το ίδιο και για εκείνη που μας δόθηκε προς λύση.

Ας υποθέσουμε, λοιπόν, ότι μας δίνεται προς λύση μια ΔΕ της μορφής

$$(1) \qquad y' = F(x, y),$$

με τη συνάρτηση $F : \Omega \to \mathbb{R}$ να είναι ομαλή στην περιοχή Ω του $\mathbb{R}^2$, και θέλουμε να αλλάξουμε τις μεταβλητές x, y για να πάμε στις υ, w. Με τι πρέπει να αντικαταστήσουμε το αριστερό μέλος της (1); Γιατί, το δεξί μέλος αυτής της εξίσωσης δεν παρουσιάζει κανένα απολύτως πρόβλημα.

Συγκεκριμένα, ας υποθέσουμε ότι, ο *σημειακός μετασχηματισμός* (=αντιστρέψιμη απεικόνιση) $\psi : (x, y) \to (\upsilon, w)$ δίνεται από τους τύπους

(2) $$\upsilon = V(x, y), \quad w = W(x, y), \quad (x, y) \in \Omega,$$

και ο αντίστροφος $\omega : (\upsilon, w) \to (x, y)$ από τους

(3) $$x = X(\upsilon, w), \quad y = Y(\upsilon, w), \quad (\upsilon, w) \in \Psi.$$

Τότε την θέση της συνάρτησης $F(x, y)$ παίρνει η συνάρτηση

(4) $$\Phi(\upsilon, w) := F(X(v, w), Y(v, w)).$$

Η δυσκολία με το αριστερό μέλος της (1) οφείλεται στο γεγονός ότι το y' παριστάνει την παράγωγο, $f'(x)$, της (άγνωστης) συνάρτησης, $f(x)$, και ο αντικαταστάτης της $f'(x)$ δεν προσδιορίζεται αμέσως από τους τύπους (2). Ωστόσο, αυτή η δυσκολία δεν είναι και ανυπέρβλητη. Για να την αντιμετωπίσουμε, αρκεί να υποθέσουμε ότι η $f(x)$ αποτελεί λύση της ΔΕ (1) σε κάποιο διάστημα I και να θεωρήσουμε την αντίστοιχη ολοκληρωτική καμπύλη

(5) $$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; y = f(x), \; x \in I\}.$$

Τότε, κατά μήκος της Γ, οι σχέσεις (2) γίνονται

(6) $$\upsilon = \alpha(x) := V(x, f(x)), \quad w = \beta(x) := W(x, f(x)), \quad x \in I.$$

Προφανώς, οι συναρτήσεις $\alpha(x)$, $\beta(x)$, $x \in I$, αποτελούν τον περιορισμό των $V(x, y)$ και $W(x, y)$, αντίστοιχα, στην ολοκληρωτική καμπύλη Γ. ΄Αρα

(7) $$\alpha'(x) = \partial_x V(x, f(x)) + \partial_y V(x, f(x)) \, f'(x) \equiv D_x \, V(x, y),$$

(8) $$\beta'(x) = \partial_x W(x, f(x)) + \partial_y W(x, f(x)) \, f'(x) \equiv D_x \, W(x, y).$$

Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι η $\alpha'(x)$ δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο του διαστήματος $J \subset I$. Τότε, από το θεώρημα της αντίστροφης συνάρτησης έπεται ότι, η εξίσωσχη $\upsilon = \alpha(x)$ μπορεί να λυθεί ως προς την μεταβλητή x και να δώσει την

(9) $$x = h(\upsilon), \quad \upsilon \in \tilde{J} = f(J).$$

Συνακόλουθα, η σχέση $w = \beta(x)$ μετατρέπεται στην

(10) $$w = g(\upsilon) := \beta(h(\upsilon)), \quad \upsilon \in \tilde{J}.$$

Η παράγωγος της συνάρτησης $g(v)$ υπολογίζεται εύκολα, χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας και το θεώρημα της αντίστροφης συνάρτησης:

(11) $$w' \equiv g'(\upsilon) = \beta'(h(\upsilon)) \, h'(\upsilon) = \beta'(h(\upsilon)) \, \frac{1}{\alpha'(h(\upsilon))}.$$

Αλλά από τις (7), (8), αμέσως συνάγεται ότι

(12) $$\beta'(x) \, \frac{1}{\alpha'(x)} = \frac{D_x \, W(x,y)}{D_x \, V(x,y)}$$

΄Αρα, η (11) γίνεται

(13) $$w' \equiv g'(\upsilon) = \frac{\partial_x W(x,y)+\partial_y W(x,y)\, f\,'(x)}{\partial_x V(x,y)+\partial_y V(x,y)\, f\,'(x)}$$

όπου, βέβαια, οι x, y νοούνται ως συναρτήσεις της "παραμέτρου" υ:

(14) $$x = h(\upsilon), \quad y = f(h(\upsilon)), \quad \upsilon \in \tilde{J}.$$

Σημείωση. Οι προηγούμενη ανάλυση έδειξε το πώς γράφεται η παράγωγος $w' = g'(\upsilon)$ της συνάρτηση $w = g(\upsilon)$ στις μεταβλητές x, y (βλ. τον τύπο (13)). Ωστόσο, η διαδικασία που ακολουθήσαμε ισχύει απαράλλαχτη και όταν οι ρόλοι των (x, y) και (υ, w) αντιστραφούν. Με αυτό τον τρόπο, η λύση του αρχικού μας προβλήματος παίρνει την ακόλουθη μορφή. Η παράγωγος $y' = f'(x)$ της συνάρτησης $y = f(x)$ μετασχηματίζεται σύμφωνα με τον τύπο

(15) $$y' \equiv f'(x) = \frac{D_\upsilon\, Y(\upsilon,w)}{D_\upsilon\, X(\upsilon,w)} \equiv \frac{\partial_\upsilon Y(\upsilon,w)+\partial_w Y(\upsilon,w)\, g'(\upsilon)}{\partial_\upsilon X(\upsilon,w)+\partial_w X(\upsilon,w)\, g'(\upsilon)}.$$

Βέβαια, και σ' αυτή τη σχέση, εξυπακούεται ότι οι μεταβλητές υ, w αντικαθίστανται τελικά από τις συναρτήσεις $V(x, y)$ και $W(x, y)$, αντίστοιχα.

Επιστρέφοντας στο ζήτημα του συνολικού μετασχηματισμού της ΔΕ (1), σημειώνουμε το εξής: Η υπόθεση ότι η συνάρτηση $y = f(x)$ αποτελεί λύση της ΔΕ $y' = F(x, y)$ σημαίνει πως $f\,'(x) = F(x, f(x))$. ΄Αρα, η (13) γίνεται

(16) $$w' \equiv g'(\upsilon) = \frac{\partial_x W(x,y)+\partial_y W(x,y)\, F(x, y)}{\partial_x V(x,y)+\partial_y V(x,y)\, F(x, y)}.$$

Τελικά, η μορφή της ΔΕ (1) στις μεταβλητές υ, w δίνεται από την (16). Με την αίρεση, βέβαια, ότι στο δεξί της μέλος υπονοούνται οι αντικαταστάσεις (14). Για να την γράψουμε ρητά συναρτήσει των υ και w, δεν έχουμε παρά να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο για τον αντίστροφο του πίνακα Jacobi. ΄Ενας απλός αλγεβρικός υπολογισμός οδηγεί στο ακόλουθο αποτέλεσμα:

(17) $$\frac{\partial_x W(x,y)+\partial_y W(x,y)\, F(x, y)}{\partial_x V(x,y)+\partial_y V(x,y)\, F(x, y)} = \frac{\partial_\upsilon Y(\upsilon,w)-\Phi(\upsilon,w)\, \partial_\upsilon X(\upsilon,w)}{\Phi(\upsilon,w)\, \partial_w X(\upsilon,w)-\partial_w Y(\upsilon,w)}$$

Συνοψίζοντας, μπορούμε να προβάλουμε τον εξής ισχυρισμό: Η ανάλυση που προηγήθηκε αποτελεί απόδειξη του ακόλουθου σημαντικού θεωρήματος:

Θεώρημα

Ας υποθέσουμε ότι οι τύποι

$$\upsilon = V(x, y), \quad w = W(x, y), \quad (x, y) \in \Omega,$$

$$x = X(v, w), \quad y = Y(\upsilon, w), \quad (\upsilon, w) \in \Psi,$$

ορίζουν έναν σημειακό μετασχηματισμό (=αντιστρέψιμη απεικόνιση) της περιοχής Ω του $\mathbb{R}^2$ στην περιοχή Ψ. Τότε η ΔΕ

$$y' = F(x, y), \quad (x, y) \in \Omega,$$

μετασχηματίζεται στην

$$w' = Z(\upsilon, w), \quad (\upsilon, w) \in \Psi,$$

όπου

$$Z(\upsilon, w) := \frac{\partial_\upsilon Y(\upsilon,w) - \Phi(\upsilon,w)\, \partial_\upsilon X(\upsilon,w)}{\Phi(\upsilon,w)\, \partial_w X(\upsilon,w) - \partial_w Y(\upsilon,w)}, \quad \Phi(\upsilon, w) := F(X(\upsilon, w),\, Y(\upsilon, w)).$$

Παράδειγμα

Ας υποθέσουμε ότι αλλάζουμε μόνο την ανεξάρτητη μεταβλητή και από την x πηγαίνουμε στην $\upsilon = \varphi(x)$. Τότε οι τύποι του μετασχηματισμού απλοποιούνται δραστικά για να γίνουν.

$$\upsilon = \varphi(x), \quad w = y, \quad (x, y) \in \Omega,$$

$$x = X(\upsilon) \equiv \varphi^{-1}(\upsilon), \quad y = w, \quad (\upsilon, w) \in \Psi.$$

Συνεπώς, η διαφορική εξίσωση $y' = F(x,\ y)$ μετασχηματίζεται στην

$$w' = \Phi(\upsilon, w)\, X'(\upsilon), \qquad \Phi(\upsilon, w) = F(X(\upsilon),\ w).$$

Ως ειδικότερο παράδειγμα, θεωρούμε την ΔΕ

$$x\, y' + y = 0.$$

Στην περιοχή

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ x > 0\}$$

η πιο πάνω ΔΕ γράφεται σαν

$$y' = F(x, y) := -\frac{y}{x}.$$

Οι σχέσεις

$$\upsilon = V(x) = \ln x, \qquad w = W = y,$$

ορίζουν τον μετασχηματισμό $\psi : \Omega \to \mathbb{R}^2$.

Σ' αυτή την περίπτωση, $\Psi := \psi(\Omega) = \mathbb{R}^2$. Είναι φανερό ότι η αντίστροφη απεικόνιση, $\omega = \psi^{-1} : \Psi \to \Omega$ ορίζεται από τους τύπους

$$x = X(\upsilon) = e^\upsilon, \quad y = w.$$

Συνεπώς,

$$\Phi(\upsilon, w) = F(X(\upsilon),\ w) = -w\, e^{-\upsilon}.$$

΄Αρα η

$$w'(v) = \Phi(v, w)\, X'(v)$$

γίνεται

$$w' = (-w\, e^{-\upsilon})\, e^\upsilon = -w\ .$$

Με άλλα λόγια, η νέα μορφή της ΔΕ $x\, y' + y = 0$ είναι η

$$w' = -w.$$

΄Οπως γνωρίζουμε, οι λύσεις της τελευταίας δίνονται από τις συναρτήσεις

$$w = c\, e^{-\upsilon}, \quad \upsilon \in \mathbb{R}.$$

Αλλά, $\upsilon = \ln x$, $w = y$. ΄Αρα, αυτές οι συναρτήσεις αντιστοιχούν στις

$$y = \frac{c}{x}, \quad x > 0,$$

οι οποίες παριστάνουν, βέβαια, τις λύσεις της αρχικής ΔΕ.

Για να βρούμε την ακριβή αντιστοιχία ανάμεσα σ' αυτές τις δυο οικογένειες λύσεων, θα πρέπει να λάβουμε υπόψη την ακριβή αντιστοιχία των σημείων της περιοχής Ω του επίπεδου $x - y$ προς τα σημεία της περιοχής $\Psi := \psi(\Omega)$ του επίπεδου $\upsilon - w$. Αυτή η αντιστοιχία φαίνεται καθαρά στα επόμενα δύο σχήματα. Στο πρώτο, δείχνουμε τα γραφήματα των λύσεων $w = c\, e^{-\upsilon}$ για $c \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Τα γραφήματα των αντίστοιχων λύσεων $y = c / x$ φαίνονται στο δεύτερο σχήμα.

Παράδειγμα

Στην περίπτωση που αλλάζουμε μόνο την εξαρτημένη μεταβλητή y, οι τύποι του μετασχηματισμού γίνονται

$$x = X(\upsilon, w) = \upsilon, \qquad y = Y(\upsilon, w),$$

$$\upsilon = V(x, y) = x, \qquad w = W(x, y)$$

΄Αρα, ο γενικός τύπος που δίνει την καινούργια μορφή της ΔΕ $y' = F(x, y)$ ανάγεται στον

$$w' = \frac{\Phi(\upsilon, w) - \partial_\upsilon Y(\upsilon, w)}{\partial_w Y(\upsilon, w)}, \qquad \Phi(\upsilon, w) := F(\upsilon, Y(\upsilon, w))$$

Ως ειδικότερο παράδειγμα θεωρούμε την τυχαία ομογενή ΔΕ

$$y' = G(y / x).$$

Θέτοντας

$$W(x, y) = \frac{y}{x}, \quad x > 0,$$

καταλήγουμε στους εξής απλούς τύπους για τον σημειακό μετασχηματισμό και τον αντίστροφό του:

$$\upsilon = x, \quad w = \frac{y}{x}, \quad x > 0,$$

$$x = \upsilon, \quad y = \upsilon\, w.$$

΄Αρα,

$$\Phi(\upsilon, w) = G(w),$$

κι έτσι η καινούργια ΔΕ γίνεται

$$w' = \frac{H(w)}{\upsilon}, \quad H(w) := G(w) - w.$$

Αυτή είναι χωρισμένων μεταβλητών και, όπως είδαμε στο αντίστοιχο εδάφιο, λύνεται με απλή ολοκλήρωση.

Παράδειγμα

Η μέθοδος του μετασχηματισμού είναι ιδιαίτερα αποτελεσματική στην περίπτωση των ΔΕ πρώτης τάξης της ακόλουθης μορφής:

(18) $$y' = G\left(\frac{\gamma\, x+\delta\, y+\lambda}{\alpha\, x+\beta\, y+\kappa}\right).$$

΄Οπως είδαμε παραπάνω, όταν $\alpha\,\delta - \beta\,\gamma \neq 0$, οι σχέσεις

(19) $$\upsilon = V(x,\, y) = \alpha\, x + \beta\, y + \kappa, \quad w = W(x,\, y) = \gamma\, x + \delta\, y + \lambda, \quad (x,\, y) \in \mathbb{R}^2,$$

ορίζουν έναν αντιστρέψιμο μετασχηματισμό $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ του Ευκλείδειου επίπεδου. Λαβαίνοντας υπόψη ότι, στην προκείμενη περίπτωση,

(20) $$\Phi(\upsilon,\, w) = G\left(\frac{w}{\upsilon}\right),$$

αμέσως βλέπουμε ότι το θεώρημα αυτού του εδάφιου δίνει το ακόλουθο αποτέλεσμα:

(21) $$w' = \frac{\gamma+\delta\, G(w/\upsilon)}{\alpha+\beta\, G(w/\upsilon)}\ .$$

Αυτή η ΔΕ είναι ομογενής και απλουστεύεται ακόμα περισσότερο μέσω του μετασχηματισμού τον οποίο εφαρμόσαμε στο προηγούμενο παράδειγμα.

Συνεχίζοντας την ανάλυση της ΔΕ (18), υποθέτουμε πλέον ότι $\alpha\,\delta = \beta\,\gamma$, οπότε πρέπει να διακρίνουμε δύο περιπτώσεις. ΄Οταν το $\delta \neq 0$, οπότε $\alpha = (\beta/\delta)\,\gamma$, εισάγουμε τις νέες συντεταγμένες

(22) $$\upsilon = x, \quad w = \gamma\, x + \delta\, y.$$

Τότε

(23) $$\Phi(\upsilon,\, w) = G\left(\frac{w+\lambda}{(\beta/\delta)\, w+\kappa}\right).$$

Από τις (22) αμέσως βρίσκουμε ότι ο αντίστροφος μετασχηματισμός ορίζεται από τις σχέσεις

(24) $$x = X(\upsilon,\, w) = \upsilon, \quad y = Y(\upsilon,\, w) = \delta^{-1}(w - \gamma\, \upsilon).$$

΄Αρα

(25α) $$\partial_\upsilon X(\upsilon,\, w) = 1, \quad \partial_w X(\upsilon,\, w) = 0,$$

(25β) $$\partial_\upsilon Y(\upsilon,\, w) = -\lambda, \quad \partial_w Y(\upsilon,\, w) = \delta^{-1}.$$

Κατά συνέπεια, για τη νέα μορφή της αρχικής ΔΕ παίρνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

(26) $$w' = \gamma + \delta\, G\left(\frac{w+\lambda}{(\beta/\delta)\, w+\kappa}\right).$$

Αυτή είναι μια αυτόνομη εξίσωση που λύνεται με απ’ ευθείας ολοκλήρωση.

Στην περίπτωση που το $\delta = 0$, θα πρέπει να μηδενίζεται και το γινόμενο $\beta\,\gamma$. ΄Ετσι, οδηγούμαστε στις εξής υποπεριπτώσεις:

i) $\beta = 0$ και $\gamma = 0$. Τότε το δεξί μέλος της αρχικής ΔΕ (18) γίνεται $G\left(\frac{\lambda}{\alpha\, x+\kappa}\right)$ και άρα η ΔΕ λύνεται με απευθείας ολοκλήρωση.

ii) $\beta = 0$ και $\gamma \neq 0$. Τότε το δεξί μέλος της (18) γίνεται $G\left(\frac{\gamma\, x+\lambda}{\alpha\, x+\kappa}\right)$. Και πάλι η αρχική ΔΕ λύνεται με απευθείας ολοκλήρωση.

iii) $\beta \neq 0$ και $\gamma = 0$, Τότε η (18) είναι της μορφής

(27) $$y' = G\left(\frac{\lambda}{\alpha\,x+\beta\,y+\kappa}\right)$$

Σ' αυτή την περίπτωση, εισάγουμε τις συντεταγμένες

(28) $$\upsilon = x, \quad w = \alpha\,x + \beta\,y + \kappa.$$

οπότε

(29) $$x = X(\upsilon, w) = \upsilon, \quad y = Y(\upsilon, w) = \beta^{-1}(w - \alpha\,\upsilon - \kappa)$$

Με αυτό τον τρόπο, καταλήγουμε στην αυτόνομη ΔΕ

(30) $$w' = \alpha + \beta\,G\left(\frac{\lambda}{w}\right).$$

Παράδειγμα

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να βρούμε τη μορφή της ΔΕ

(31) $$y' = F(x, y) := \frac{x+y(1-x^2-y^2)}{x(1-x^2-y^2)-y}$$

στις πολικές συντεταγμένες (r, θ). Τη σχέση αυτών των συντεταγμένων με τις Καρτεσιανές (x, y) την είδαμε αναλυτικά στο προηγούμενο εδάφιο. Συνοπτικά,

(32) $$x = X(\theta, r) = r\cos\theta, \quad y = Y(\theta, r) = r\sin\theta.$$

Ας θεωρήσουμε τις θ, r ως τη νέα ανεξάρτητη και εξαρτημένη μεταβλητή, αντίστοιχα. Τότε, σύμφωνα με τον τύπο του θεωρήματος, η εξίσωση (31) μετατρέπεται στην

(33) $$r' = \frac{\partial_\theta Y(\theta,r) - \Phi(\theta,r)\,\partial_\theta X(\theta,r)}{\Phi(\theta,r)\,\partial_r X(\theta,r) - \partial_r Y(\theta,r)} = \frac{r\cos\theta + \Phi(\theta,r)\,r\sin\theta}{\Phi(\theta,r)\cos\theta - \sin\theta} = r\,\frac{1+\Phi(\theta,r)\tan\theta}{\Phi(\theta,r) - \tan\theta}$$

όπου

(34) $$\Phi(\theta, r) := F(r\cos\theta, r\sin\theta) = \frac{r\cos\theta + r\sin\theta(1-r^2)}{r\cos\theta(1-r^2) - r\sin\theta} = \frac{1+(1-r^2)\tan\theta}{(1-r^2) - \tan\theta}$$

Η αντικατάσταση της (34) στην (33) δίνει το ακόλουθο αποτέλεσμα.

(35) $$r' = r\,\frac{(1-r^2) - \tan\theta + [\,1+(1-r^2)\tan\theta]\tan\theta}{1+(1-r^2)\tan\theta - [\,(1-r^2) - \tan\theta]\tan\theta} == r\,(1-r^2)\,\frac{1+\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$$

Με άλλα λόγια, στις πολικές συντεταγμένες, η ΔΕ (31) παίρνει την ακόλουθη απλή μορφή:

(36) $$r' = r(1-r^2), \qquad r > 0.$$

Η (36) είναι μια απλή αυτόνομη εξίσωση, η οποία λύνεται εύκολα με την μέθοδο που παρουσιάσαμε στο αντίστοιχο εδάφιο. Γι' αυτό, τις λεπτομέρειες της επίλυσής της τις αφήνουμε για άσκηση του αναγνώστη. Εδώ, απλώς επισημαίνουμε ότι, η (36) επιδέχεται τις σταθερές λύσεις $r(\theta) = \pm 1$, ενώ στα ανοιχτά διαστήματα $0 < r < 1$, $1 < r < \infty$, είναι ισοδύναμη με την

(37) $$\frac{r'}{r(1-r^2)} = 1$$

Οι λύσεις της τελευταίας γράφονται στην ακόλουθη μορφή:

(38) $$r = \frac{r_0\, e^{\theta}}{\sqrt{1+r_0^2(e^{2\theta}-1)}}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

όπου $r_0 = r(0)$.

Είναι προφανές ότι, η ΔΕ (31) δεν έχει νόημα όταν ο παρονομαστής της $F(x, y)$ μηδενίζεται, δηλαδή όταν

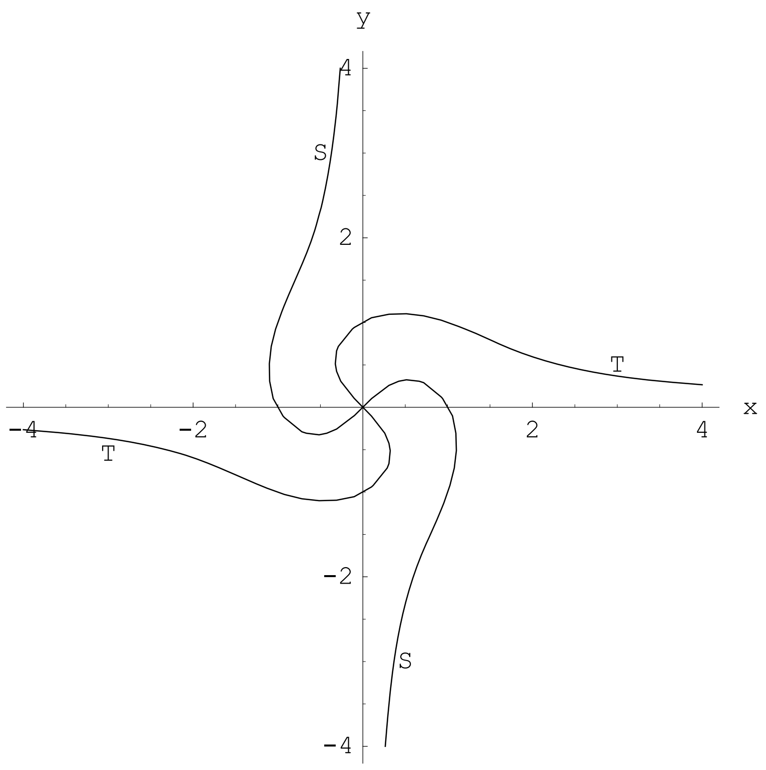
(39) $$x(1 - x^2 - y^2) - y = 0.$$

Στις συντεταγμένες θ, r αυτό συμβαίνει εκεί όπου

(40) $$\tan\theta = (1 - r^2).$$

Η εξίσωση (39) ορίζει μια καμπύλη, S, του επίπεδου $x - y$, την οποία δείχνουμε στο επόμενο σχήμα. Στο ίδιο σχήμα, δείχνουμε και την καμπύλη Τ, κατά μήκος της οποίας μηδενίζεται ο αριθμητής της $F(x, y)$.

Καθώς, λοιπόν, μια ολοκληρωτική καμπύλη της ΔΕ (31) πλησιάζει την καμπύλη S, η κλίση της ολοκληρωτικής καμπύλης απειρίζεται. Αυτή η συμπεριφορά φαίνεται καθαρά στο μεθεπόμενο σχήμα, στο οποίο δείχνουμε το τμήμα $x > 0$ ορισμένων ολοκληρωτικών καμπυλών της (31) και της καμπύλης S.



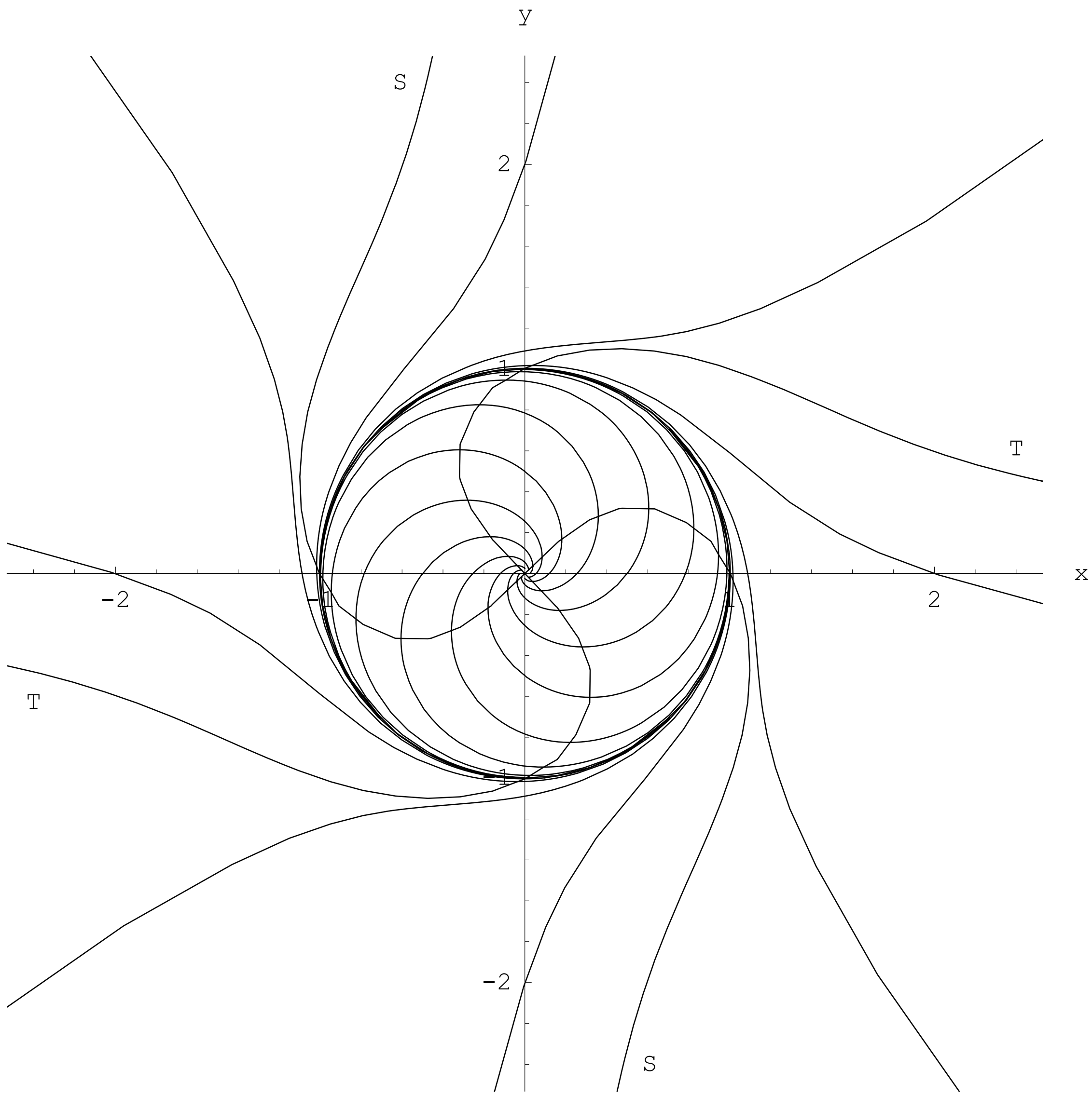
Για να αποκτήσουμε σαφέστερη εικόνα της αντιστοιχίας των λύσεων της κανούργιας ΔΕ, (36), προς εκείνες της αρχικής, (31), στο επόμενο σχήμα δείχνουμε το τμήμα $\theta \geq 0$ των ολοκληρωτικών καμπυλών της (36) που αντιστοιχούν στις αρχικές τιμές $r_0 = 1/5$, $r_0 = 1$ και $r_0 = 2$. Στο μεθεπόμενο σχήμα, δείχνουμε την εικόνα αυτών των καμπυλών στο επίπεδο $x - y$.

Θα πρέπει, λοιπόν, να σημειωθεί ότι, κάθε μια από τις τρεις ολοκληρωτικές καμπύλες της ΔΕ (36) που δείχνουμε στο πρώτο σχήμα, αντιστοιχεί σε περισσότερες από μία ολοκληρωτικές καμπύλες της (31). Για παράδειγμα, η ολοκληρωτική καμπύλη $r = 1$ της (36) απεικονίζεται στο μοναδιαίο κύκλο $x^2 + y^2 = 1$ του επίπεδου $x - y$. ΄Ομως, οι αντίστοιχες ολοκληρωτικές καμπύλες της (31) αποτελούνται μόνο το πάνω τμήμα, $y > 0$, και το κάτω τμήμα, $y < 0$, αυτού του κύκλου, **ξεχωριστά**.

Ανάλογα, η ολοκληρωτική καμπύλη της (36) που αρχίζει στο σημείο $(\theta, r) = (0, 2)$ και τείνει ασυμπτωτικά προς την ευθεία $r = 1$ καθώς το $\theta \to \infty$, απεικονίζεται στην ελικοειδή καμπύλη, E_2, του επίπεδου $x - y$ που ξεκινάει από το σημείο $(x, y) = (2, 0)$ και όλο πλησιάζει προς τον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$, καθώς περιστρέφεται γύρω από αυτόν. Παρόλο που αυτό δε φαίνεται καθαρά στο σχήμα, η E_2 ποτέ δεν ταυτίζεται με τον μοναδιαίο κύκλο. Συνακόλουθα, η παραπάνω ελικοειδής καμπύλη τέμνει την καμπύλη S άπειρες φορές. Κάθε τμήμα της E_2 που ορίζεται από δύο διαδοχικές συναντήσεις της με την καμπύλη S αποτελεί ολοκληρωτική καμπύλη της ΔΕ (31). Ακόμα και αν περιορίσουμε την μεταβλητή θ σ' ένα διάστημα μήκους 2π, η E_2 θα κόψει την S σε δύο διαφορετικά σημεία. Τα τρία, ξένα μεταξύ τους τμήματα της E_2 που ορίζονται από αυτά τα δύο σημεία τομής αντιστοιχούν σε τρεις διαφορετικές ολοκληρωτικές καμπύλες της (31).

Ακριβώς το ίδιο ισχύει για την ολοκληρωτική καμπύλη της (36) που ξεκινάνει από το σημείο $(\theta, r) = (0, 1/5)$ και,καθώς το $\theta \to \infty$, όλο και πλησιάσει την ευθεία $r = 1$. Αυτή απεικονίζεται στην ελικοειδή καμπύλη, $E_{1/5}$, του επίπεδου $x - y$ που ξεκινάει από το σημείο $(x, y) = (1/5, 0)$ και όλο πλησιάζει προς τον κύκλο $x^2 + y^2 = 1$, καθώς περιστρέφεται γύρω από την αρχή των αξόνων, (0,0).

Το επόμενο σχήμα περιλαμβάνει ορισμένες από τις ολοκληρωτικές καμπύλες της ΔΕ (31), καθώς και τις καμπύλες S και Τ. Αυτή η γραφική παράσταση δίνει μια πλήρη ποιοτική εικόνα όλων των λύσεων της μη γραμμικής ΔΕ που μελετήσαμε σ' αυτό το Παράδειγμα.


y
x
S
S
T
T
2
-2
2
-2
1
-1
1
-1

Ασκήσεις

1.Θεωρήστε την ΔΕ

$$x\,y' + y = 0.$$

Να βρεθεί η μορφή της σε καθένα από τα παρακάτω ζευγάρια μεταβλητών. Σε κάθε περίπτωση, να λυθεί η μετασχηματισμένη ΔΕ και να αντιστοιχηθούν οι λύσεις της σε εκείνες τις αρχικής

(i) $(\upsilon, w) = (x, x\,y)$

(ii) $(\upsilon, w) = (\frac{x-y}{2}, \frac{x+y}{2})$

2. Να βρεθεί η μορφή κάθε μιας από τις παρακάτω ΔΕ στις αντιστοιχες νέες μεταβλητές v, w. Το λ παριστάνει έναν τυχαίο θετικό αριθμό.

(i) $y' = \frac{x+y}{2x-y}$, $\quad (\upsilon, w) = (\lambda\,x, \lambda\,y)$

(i) $y' = x - \frac{y^2}{x}$, $\quad (\upsilon, w) = (\lambda\,x, \lambda^2\,y)$

(i) $y' = x\,\frac{x^2-y}{x^2+y}$, $\quad (\upsilon, w) = (\lambda\,x, \lambda^2\,y)$

(i) $y' = \frac{y}{x} + \frac{x^2(2\,x^3-y)}{4\,x^3-3\,y}$, $\quad (\upsilon, w) = (\lambda\,x, \lambda^3\,y)$

3. Να λυθούν οι ακόλουθες ΔΕ

(i) $y' = \frac{x-y}{x+y+1}$

(ii) $y' = \frac{x+y}{x+y+2}$

(iii) $y' = \left(\frac{2\,x+y}{x+2\,y}\right)^2$

(iv) $y' = \left(\frac{2\,x+y}{2\,x+y-4}\right)^2$

(v) $y' = \frac{(x-1)^2+6\,y(1-x)+9\,y^2}{(x+1)^2+4\,y(1+x)+4\,y^2}$

(vi) $y' = \frac{9+12\,x+18\,y+4\,x^2+12\,x\,y+9\,y^2}{9-12\,x-18\,y+4\,x^2+12\,x\,y+9\,y^2}$

4. Να λυθούν οι παρακάτω ΔΕ, αφού πρώτα βρεθεί η μορφή τους στις συντεταγμένες s, τ, οι οποίες ορίζονται από τις σχέσεις

$$x = s\cosh\tau\,,\quad y = s\sinh\tau.$$

(i) $y' = \frac{x(4-x^2-y^2)+y}{x-y(4-x^2-y^2)}$

(ii) $y' = \frac{3\,x(9-x^2-y^2)+y}{x-3\,y(9-x^2-y^2)}$

(iii) $y' = \frac{4\,y-x(x^2+y^2-16)}{4\,x-y(16-x^2-y^2)}$

3. Συμμετρίες ΣΔΕ πρώτης τάξης

Μια ΔΕ δεν αλλάζει υποχρεωτικά μορφή, όταν αλλάζουμε τις μεταβλητές της. Μάλιστα, ορισμένες φορές συμβαίνει ακριβώς το αντίθετο και, τότε, μιλάμε για συμμετρία της συγκεκριμένης ΔΕ. Με άλλα λόγια, *συμμετρία μιας ΔΕ* ονομάζεται κάθε μετασχηματισμός της ανεξάρτητης ή/και της εξαρτημένης μεταβλητής που αφήνει τη μορφή της ΔΕ αναλλοίωτη.

Παράδειγμα

Ας θεωρήσουμε, ως παράδειγμα, οποιαδήποτε ΔΕ της μορφής

(1) $$y' = f(x),$$

όπου $f(x)$, $x \in I$, τυχαία συνάρτηση που είναι συνεχής στο διάστημα I της πραγματικής ευθείας, $\mathbb{R}$. Ο απλός σημειακός μετασχηματισμός $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ που ορίζεται από τους τύπους

(2) $$\upsilon = V(x,\, y) = \, : x, \quad w = W(x,\, y) := y + a, \quad (x,\, y) \in \mathbb{R}^2,$$

όπου a τυχαίος πραγματικός αριθμός, δεν επηρεάζει τη μορφή της ΔΕ. Αυτό σημαίνει ότι, η αντικατάσταση $(x,\, y) \to (\upsilon,\, w)$ οδηγεί στη

(3) $$w' = f(\upsilon).$$

Αυτό συνάγεται αμέσως από τον γενικό τύπο του μετασχηματισμού μιας κανονικής ΔΕ πρώτης τάξης που αποδείξαμε στο προηγούμενο εδάφιο

(4) $$\boxed{\begin{gathered} y' = F(x,\ y) \ \to \ w' = Z(\upsilon,\, w) \\ Z(\upsilon,\, w) : = \frac{\partial_\upsilon Y(\upsilon,w) - \Phi(\upsilon,w)\, \partial_\upsilon X(\upsilon,w)}{\Phi(\upsilon,w)\, \partial_w X(\upsilon,w) - \partial_w Y(\upsilon,w)}, \quad \Phi(\upsilon,\, w) := F(X(\upsilon,\, w),\, Y(\upsilon,\, w)) \end{gathered}}$$

Στην περίπτωση που μελετάμε, $F(x,\ y) = f(x)$ και ο αντίστροφος μετασχηματισμός $T^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ δίνεται από τους τύπους

(5) $$x = X(\upsilon,\, w) := x, \quad y = Y(\upsilon,\, w) := w - a, \quad (\upsilon,\, w) \in \mathbb{R}^2.$$

΄Αρα,

(6α) $$\Phi(\upsilon,\, w) := F(X(\upsilon,\, w),\, Y(\upsilon,\, w)) = f(\upsilon),$$

(6β) $$\partial_\upsilon X(\upsilon,\, w) = 1, \ \ \partial_w X(\upsilon,\, w) = 0, \ \ \partial_\upsilon Y(\upsilon,\, w) = 0, \ \ \partial_w Y(\upsilon,\, w) = 1.$$

Συνεπώς, με αντικατάσταση στην (4), βρίσκουμε ότι

(7) $$Z(\upsilon,\, w) = f(\upsilon).$$

Αυτό αποδείχνει την (3), πράγμα που σημαίνει ότι όλες αξεραίτως οι ΔΕ ης μορφής (1) μένουν αμετάβλητες κατά τους μετασχηματισμούς (2).

Για να αποκτήσουμε μιαν εποπτική εικόνα του πως εκφράζεται η συμμετρία των ΔΕ της μορφής (1) από τη σκοπιά των λύσεών τους, θα δώσουμε στον τυχαίο σημειακό μετασχηματισμό

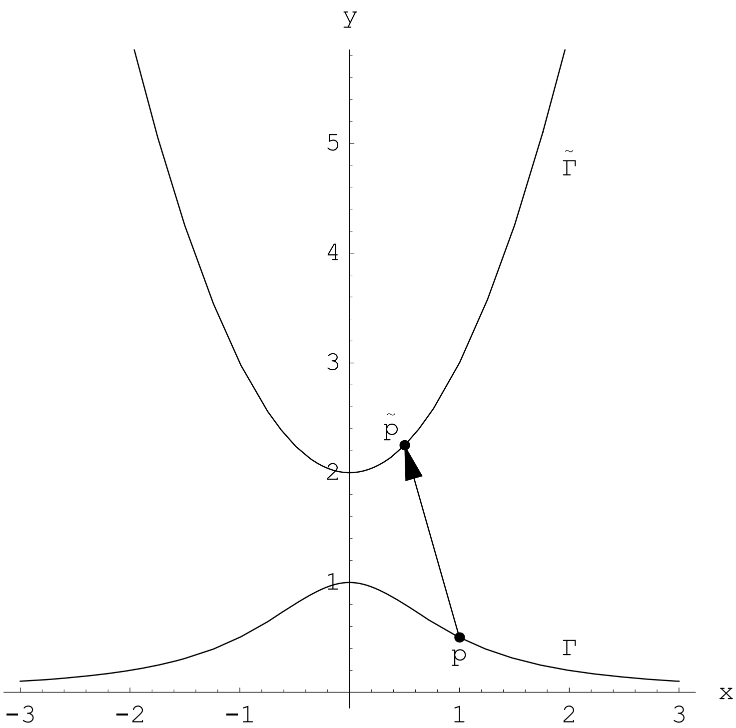
(8) $$T : (x, y) \to (\upsilon, w) = (V(x, y),\ W(x, y))$$

το ακόλουθο νόημα. Το σημείο p του Ευκλείδειου επίπεδου, το οποίο έχει συνταγμένες (x, y) ως προς κάποιο Καρτεσιανό σύστημα αξόνων x, y, μετατοπίζεται στο σημείο $\tilde{p}$ που έχει συντεταγμένες (υ, w). Συνακόλουθα, η καμπύλη

(9) $$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = S(x)\}$$

μετατοπίζεται για να γίνει

(10) $$\tilde{\Gamma} = \{(\upsilon, w) \in \mathbb{R}^2 : \upsilon = V(x, S(x)),\ w = W(x, S(x))\}$$



Ας υποθέσουμε, λοιπόν, ότι η συνάρητη $S(x)$ αποτελεί λύση της ΔΕ $y' = f(x)$. Τότε η Γ είναι μια ολοκληρωτική καμπύλη αυτής της ΔΕ. Με βάση τον τύπο (2), η καμπύλη $\tilde{\Gamma}$ που προκύπτει από τη μετατόπιση της Γ, ορίζεται από τις σχέσεις

(11) $$\upsilon = x, \qquad w = S(x) + a.$$

Αντικαθιστώντας την πρώτη από αυτές στη δεύτερη, συμπεραίνουμε ότι η $\tilde{\Gamma}$ προσδιορίζεται από τη σχέση

(12) $$w = \tilde{S}(\upsilon) := S(\upsilon) + a$$

Από το γεγονός ότι η $S(x)$ είναι λύση της ΔΕ $y' = f(x)$, έπεται ότιη $S'(x) = f(x)$. Συνεπώς,

(13) $$\tilde{S}'(\upsilon) = S'(\upsilon) = f(\upsilon).$$

Με άλλα λόγια, η συνάρτηση $\tilde{S}(\upsilon)$ αποτελεί λύση της ΔΕ $w' = f(\upsilon)$ που είναι ταυτόσημη με την $y' = f(x)$. Συνακόλουθα, η καμπύλη $\tilde{\Gamma}$ που ορίζεται από την (12) είναι κι αυτή ολοκληρωτική καμπύλη της ΔΕ $y' = f(x)$.

Συνοψίζοντας, έχουμε καταλήξει στο ακόλουθο συμπέρασμα: Ο μετασχηματισμός $T : (x, y) \to (\upsilon, w)$ που ορίζεται από τις σχέσεις (2) απεικονίζει λύσεις της ΔΕ $y' = f(x)$ σε λύσεις της ίδιας ΔΕ και, συνακόλουθα, ολοκληρωτικές καμπύλες αυτής της ΔΕ σε ολοκληρωτικές καμπύλες της. Αναλυτικότερα, ο τύπος (12) δείχνει ότι η ολοκληρωτική καμπύλη $\tilde{\Gamma}$ προκύπτει με το να αλλάξουμε τη συντεταγμένη y κάθε σημείου της Γ κατά την ίδια ποσότητα a. Με άλλα λόγια, η $\tilde{\Gamma}$ προκύπτει με το να σύρουμε την Γ προς τη (θετική ή αρνητική) κατεύθυνση του άξονα y (ανάλογα με το αν το a είναι θετικό ή αρνητικό).

Αυτό το συμπέρασμα γενικεύεται αμέσως για να καλύψει κάθε σημειακό μετασχηματισμό που αφήνει τη μορφή μιας ΔΕ αναλλοίωτη. Με άλλα λόγια, όταν ο μετασχηματισμός $T : (x, y) \to (\upsilon, w)$ αποτελεί συμμετρία μιας ΔΕ, τότε απεικονίζει λύσεις αυτής της ΔΕ σε λύσεις της.

Το παραπάνω αποτέλεσμα έχει εξαιρετική σημασία για τις ΔΕ κάθε είδους, δηλαδή τόσο για τις ΣΔΕ όσο και για τις ΜΔΕ όποια κι αν είναι η τάξη τους. Ο λόγος είναι ότι, συχνά, μια ΔΕ δεν έχει μόνο μία συμμετρία, αλλά ολόκληρες οικογένειες, οι οποίες και αποτελούν ομάδες, με την αλγεβρική έννοια αυτού του όρου.

Το παράδειγμα που μόλις εξετάσαμε είναι αντιπροσωπευτικό. Όπως είδαμε, ο μετασχηματισμός (2) αφήνει αναλλοίωτη τη ΔΕ $y' = f(x)$ όποια κι αν είναι η τιμή του a. Με άλλα λόγια, οι τύποι (2) ορίζουν μια μονοπαραμετρική οικογένεια συμμετριών της $y' = f(x)$. Αν ονομάσουμε T_a τον μετασχηματισμό (2) που αντιστοιχεί σε μια συγκεκριμένη τιμή του a, τότε, ο αντίστροφός του, $T_a{}^{-1}$, υπάρχει για κάθε $a \in \mathbb{R}$. Μάλιστα, σύμφωνα με τις (5), $T_a{}^{-1} = T_{-a}$. Από την άλλη μεριά, αν μετά τον μετασχηματισμό T_a εφαρμόσουμε τον T_b, τότε το αποτέλεσμα είναι ταυτόσημο μ' εκείνο που προκύπτει αν εφαρμόσουμε εξ αρχής τον μετασχηματισμό T_{a+b}. Με άλλα λόγια, η σύνθεση $T_b \circ T_a$ των μετασχηματισμών T_a, T_b ορίζεται για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$ και $T_b \circ T_a = T_{a+b}$. Συνεπώς, η μονοπαραμετρική οικογένεια μετασχηματισμών $\{T_a\}_{a \in \mathbb{R}}$ αποτελεί ομάδα (με προφανές ταυτοτικό στοιχείο τον μετασχηματισμό T_0).

Το πλαίσιο αυτού του βιβλίου δε μας επιτρέπει να επεκταθούμε περισσότερο στο αντικείμενο των συμμετριών των ΔΕ. Περιοριζόμαστε να σημειώσουμε ότι πρόκειται για έναν τομέα των μαθηματικών που ξεκίνησε με τις μελέτες του Νορβηγού μαθηματικού Sophus Lie στα τέλη του $19^{ου}$ αιώνα και στις μέρες μας γνωρίζει εκρηκτική άνθιση.

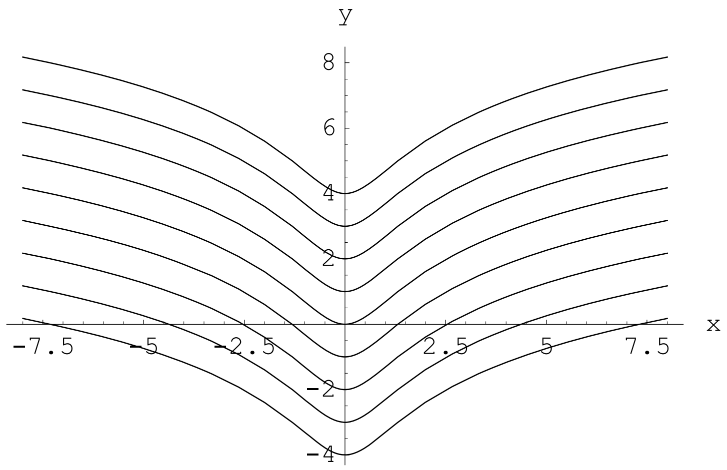
Επιστρέφοντας στην ομάδα συμμετριών $\{T_a\}_{a \in \mathbb{R}}$ της ΔΕ $y' = f(x)$, επισημαίνουμε το εξής σημαντικό γεγονός. Αφού ο μετασχηματισμός T_a είναι συμμετρία αυτής της ΔΕ για κάθε $a \in \mathbb{R}$, η σχέση (12) ορίζει μιαν ολοκληρωτική καμπύλη για κάθε $a \in \mathbb{R}$. Με άλλα λόγια, κάθε μέλος της οικογένειας $\{\Gamma_a\}_{a \in \mathbb{R}}$, όπου

(14) $$\Gamma_a := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = S(x) + a\}$$

και $S(x) = \int f(x)\, d\, x$, αποτελεί ολοκληρωτική καμπύλη της ΔΕ $y' = f(x)$.

Όπως δείξαμε στο αντίστοιχο εδάφιο, οι συναρτήσεις $y = S(x) + a$ αποτελούν το σύνολο των λύσεων της ΔΕ $y' = f(x)$. Συνεπώς, με το να παράγει την λύση $y = S(x) + a$ από την $y = S(x)$, η ομάδα συμμετριών $\{\Gamma_a\}_{a \in \mathbb{R}}$ είναι σε θέση να παράξει όλες ανεξαιρέτως τις λύσεις της ΔΕ $y' = f(x)$ από μία και μόνο, την $y = S(x)$. Συνακόλουθα, όλες ανεξαιρέτως οι ολοκληρωτικές καμπύλες της ΔΕ $y' = f(x)$ προκύπτουν με μετατόπιση της Γ_0 και άρα συναποτελούν την παραπάνω οικογένεια $\{\Gamma_a\}_{a \in \mathbb{R}}$. Αυτή η ιδιότητα αναδείχνεται καθαρά στο επόμενο σχήμα, στο οποίο διακρίνονται ορισμένες από τις ολοκληρωτικές καμπύλες της ΔΕ

$y' = 2\,x/(x^2+1)$. Είναι εκείνες που ανιστοιχούν στις λύσεις $y = \ln(x^2+1) + a$, $a = 0, \pm1, \pm2, \pm3$ και ±4.



Παράδειγμα

Ως δεύτερο παράδειγμα, θα μελετήσουμε τις συμμετρίες των αυτόνομων ΔΕ, δηλαδή εκείνων που γράφονται στη μορφή

(15) $$y' = g(y),$$

όπου $g(y)$, τυχαία συνεχής συνάρτηση. Θα δείξουμε ότι κάθε σημειακός μετασχηματισμός $T_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ της μορφής

(16) $$\upsilon = : V(x,\, y) = x + a, \quad w = W(x,\, y) := y, \quad (x,\, y) \in \mathbb{R}^2,$$

όπου a τυχαίος πραγματικός αριθμός, αφήνει τη μορφή της ΔΕ (15) αναλλοίωτη. Με άλλα λόγια, η αντικατάσταση $(x,\, y) \to (\upsilon,\, w)$ μετατρέπει την (15) στην

(17) $$w' = g(w).$$

Πραγματικά, αρκεί να σημειώσουμε ότι, σ' αυτή την περίπτωση, $F(x,\; y) = g(y)$ και ο αντίστροφος μετασχηματισμός $T_a^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ δίνεται από τους τύπους

(18) $$x = X(\upsilon,\, w) := v - a, \quad y = Y(\upsilon,\, w) := w, \quad (\upsilon,\, w) \in \mathbb{R}^2.$$

Συνεπώς,

(19) $$\Phi(\upsilon,\, w) := F(X(\upsilon,\, w),\, Y(\upsilon,\, w)) = g(w),$$

(20) $$\partial_\upsilon X(\upsilon,\, w) = 1, \;\; \partial_w X(\upsilon,\, w) = 0, \;\; \partial_\upsilon Y(\upsilon,\, w) = 0, \;\; \partial_w Y(\upsilon,\, w) = 1.$$

Η αντικατάσταση των (19) και (20) στην (4) οδηγεί αμέσως στο ακόλουθο αποτέλεσμα:

(21) $$Z(\upsilon,\, w) = g(w).$$

Αυτό σημαίνει ότι, κατά τον μετασχηματισμό (16), η (15) μετατρέπεται στην (17). Αλλά, ως ΔΕ, οι (15) και (17) είναι ταυτόσημες. Άρα, ο μετασχηματισμός $T_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ που ορίζεται από τις (16) είναι συμμετρία όλων αξεραίτως των αυτόνομων ΔΕ πρώτης τάξης. Αυτό ισχύει για κάθε $a \in \mathbb{R}$ και, μάλιστα, με τρόπο ώστε το σύνολο $\{T_a\}_{a\in\mathbb{R}}$ να αποτελεί (αλγεβρική) ομάδα. Ο τελευταίος ισχυρισμός αποδείχνεται πολύ εύκολα, κατά το πρότυπο του προηγούμενο παραδείγματος.

Επαναλαμβάνοντας τα επιχειρήματα που αναπτύξαμε στο προηγούμενο παράδειγμα, μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε και το ακόλουθο αποτέλεσμα: Αν η $y = S(x)$ είναι μια συγκεκριμένη λύση της ΔΕ (15), τότε το ίδιο ισχύει και για κάθε συνάρτηση της μορφής

(22) $$y = \tilde{S}(x) := S(x - a).$$

Πραγματικά, όταν $y = S(x)$, τότε οι τύποι (16) γίνονται

(23) $$\upsilon = x + a, \qquad w = S(x).$$

Η πρώτη από αυτές τις σχέσεις γράφεται σαν $x = \upsilon - a$, οπότε η δεύτερη γίνεται $w = S(\upsilon - a)$. Αυτή, όμως, είναι ταυτόσημη με τη σχέση (22).

΄Οσο αφορά τις ολοκληρωτικές καμπύλες της ΔΕ $y' = g(y)$, η (22) έχει το ακόλουθο νόημα. Η ολοκληρωτική καμπύλη Γ_a που αντιστοιχεί στη λύση (22) με $a \neq 0$ παράγεται με το να μετακινήσουμε κάθε σημείο της Γ_0 παράλληλα προς τον άξονα x και σε απόσταση $|a|$ από την αρχική του θέση. Αν το $a > 0$, η μετατόπιση γίνεται προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα x, αλλιώς προς την αντίθετη.

Ως συγκεκριμένο παράδειγμα, μπορούμε να εξετάσουμε την ΔΕ

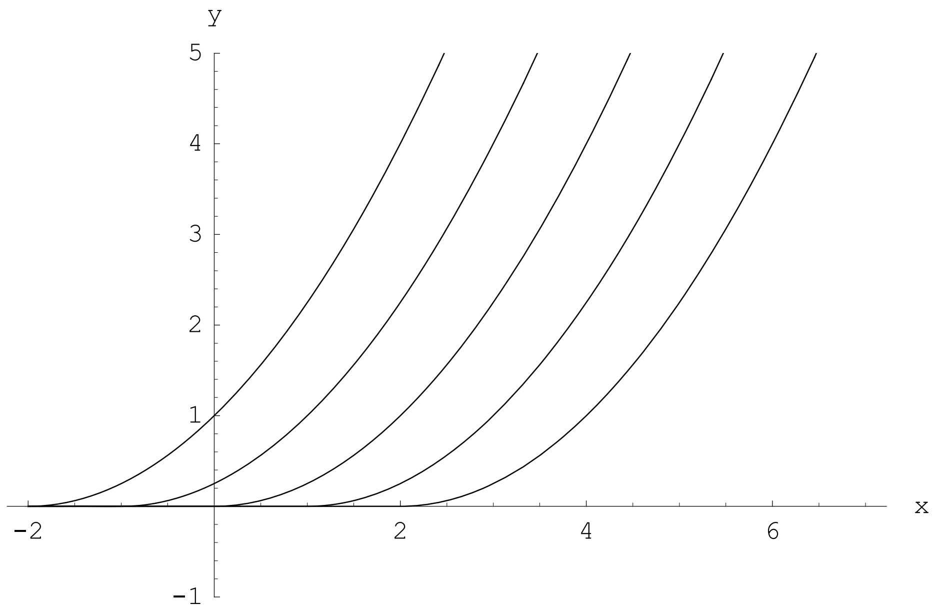
(24) $$y' = \sqrt{y},$$

που ορίζεται από την επιλογή $g(y) = \sqrt{y}, \quad y \geq 0$. Εύκολα, λοιπόν, απαληθεύεται ότι η $y = (x/2)^2, \quad x \geq 0$, αποτελεί λύση της (24). Συνεπώς, κάθε συνάρτηση της μορφής

(25) $$y = \frac{1}{4}(x - a)^2, \qquad x \geq a, \quad a \in \mathbb{R},$$

αποτελεί λύση της ΔΕ (24). Στο επόμενο σχήμα, δείχνουμε τις ολοκληρωτικές καμπύλες που αντιστοιχούν στις λύσεις (25) όταν $a = 0, \ \pm 1$ και ± 2. Σημειώστε ότι, η καμπύλη που αντιστοιχει στην τιμή $a = 1$, για παράδειγμα, προκύπτει από την μετατόπιση προς τα δεξιά της ολοκληρωτικής καμπύλης που αντιστοιχεί στην $a = 0$.

Σημειώστε, επίσης ότι η ΔΕ (24) επιδέχεται και την λύση $y(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}$. Η αντίστοιχη ολοκληρωτική καμπύλη ταυτίζεται με τον άξονα x του σχήματος. Είναι φανερό ότι η μετατόπιση αυτής της "καμπύλης" προς τα δεξιά ή προς τ' αριστερά δεν παράγει μια νέα ολοκληρωτική καμπύλη της ΔΕ (24). Οι ολοκληρωτικές καμπύλες αυτού του είδους, εκείνες δηλαδή που μένουν ανεπηρέαστες από κάποια ομάδα συμμετριών μιας ΔΕ, ονομάζονται *αναλλοίωτες ολοκληρωτικές καμπύλες* της συγκεκριμένης ΔΕ. Για την ποιοτική ανάλυση μη γραμμικών ΔΕ, ο εντοπισμός των αναλλοίωτων ολοκληρωτικών καμπυλών αποτελεί στοιχείο πολύτιμο. Ο λόγος είναι ότι, οι αναλλοίωτες αποτελούν τα χαρακτηριστικά στοιχεία της δομής του συνόλου των ολοκληρωτικών καμπυλών μιας ΔΕ και άρα μας δίνουν μια σαφή ποιοτική εικόνα της συμπεριφοράς όλων των υπολοίπων λύσεων αυτής της ΔΕ.



Από τον τύπο (4) που μας δίνει τη μορφή την οποία αποκτάει η ΔΕ $y' = F(x, y)$ κατά τον τυχαίο σημειακό μετασχηματισμό $(x, y) \to (\upsilon, w)$, μπορούμε αμέσως να βρούμε και τη συνθήκη για την ύπαρξη συμμετρίας της παραπάνω ΔΕ. Συγκεκριμένα, το να μείνει η ΔΕ $y' = F(x, y)$ αναλλοίωτη σημαίνει ότι, στις συντεταγμένες υ, w, έχει την ακόλουθη μορφή:

(26) $$w' = F(\upsilon, w).$$

Με άλλα λόγια, η ΔΕ $y' = F(x, y)$ διατηρεί τη μορφής της κατά τον μετασχηματισμό $(x, y) \to (\upsilon, w)$ εάν και μόνο όταν η συνάρτηση $Z(\upsilon, w)$ που ορίζεται στην (4) είναι ίδια με την $F(x, y)$. Σύμφωνα με τον ορισμό της $Z(\upsilon, w)$, αυτό συμβαίνει εάν και μόνο όταν

(27) $$\frac{\partial_\upsilon Y(\upsilon,w) - \Phi(\upsilon,w)\,\partial_\upsilon X(\upsilon,w)}{\Phi(\upsilon,w)\,\partial_w X(\upsilon,w) - \partial_w Y(\upsilon,w)} = F(\upsilon, w)$$

Λύνοντας αυτή την εξίσωση ως προς $\Phi(\upsilon, w)$, βρίσκουμε ότι

(28) $$\frac{\partial_\upsilon Y(\upsilon,w) + \partial_w Y(\upsilon,w)\,F(\upsilon,w)}{\partial_\upsilon X(\upsilon,w) + \partial_w X(\upsilon,w)\,F(\upsilon,w)} = \Phi(\upsilon, w).$$

Όμως, $\Phi(\upsilon, w) := F(X(\upsilon, w), Y(\upsilon, w))$. Συνεπώς, η (28) είναι ταυτόσημη με την

(29) $$\boxed{\frac{\partial_\upsilon Y(\upsilon,w) + \partial_w Y(\upsilon,w)\,F(\upsilon,w)}{\partial_\upsilon X(\upsilon,w) + \partial_w X(\upsilon,w)\,F(\upsilon,w)} = F(X(\upsilon, w), Y(\upsilon, w))}$$

Εναλλακτικά, μπορούμε να συνδυάσουμε την (27) με την (17) του προηγούμενου εδάφιου, για να καταλήξουμε στην

(30) $$\boxed{\frac{\partial_x W(x,y) + \partial_y W(x,y)\,F(x,y)}{\partial_x V(x,y) + \partial_y V(x,y)\,F(x,y)} = F(V(x, y), W(x, y))}$$

Με άλλα λόγια, έχουμε αποδείξει το ακόλουθο

Θεώρημα

Η (30) αποτελεί την ικανή και αναγκαία συνθήκη για να μένει η ΔΕ $y' = F(x, y)$ αναλλοίωτη κατά τον σημειακό μετασχηματισμό $T : (x, y) \to (\upsilon, w) = (V(x, y), W(x, y))$. Αυτή η συνθήκη παίρνει τη μορφή (29), όταν εκφραστεί με βάση τις συναρτήσεις που εμφανίζονται στον αντίστροφο, $T^{-1} : (\upsilon, w) \to (x,\ y) = (X(\upsilon, w),\ Y(\upsilon, w))$, του T.

Δυστυχώς, το παραπάνω θεώρημα δεν είναι και πολύ χρήσιμο από πρακτική άποψη. Με αυτό εννοούμε ότι, δεν μας επιτρέπει να εντοπίσουμε εύκολα όλους τους σημειακούς μετασχηματισμούς που αφήνουν τη μορφή της ΔΕ $y' = F(x,\ y)$ αμετάβλητη. Αυτή η δυσκολία αντιμετωπίζεται με την "απειροστή μέδοδο" του Lie, που αποτελεί και τη μεγάλη συνεισφορά αυτού του ερευνητή στο αντικείμενο των ΔΕ. Ουσιαστικά, η μέθοδος του Lie έγκειται στην αντικατάσταση της περίπλοκης συνθήκης (30) από μιαν απλούστερη γραμμική, η οποία προκύπτει από την απειροστή μορφή των σημειακών μετασχηματισμών. Για λεπτομέρειες, είμαστε υποχρεωμένοι να παραπέμψουμε τον αναγνώστη στα ειδικότερα συγγράμματα που ασχολούνται με τις συμμετρίες των ΔΕ. Εδώ, θα περιοριστούμε στην παρουσίαση μιας ακόμα ομάδας σημειακών μετασχηματισμών και μιας μη γραμμικής ΔΕ που είναι συμμετρική ως προς αυτούς τους μετασχηματισμούς.

Παράδειγμα

Ας θεωρήσουμε τον μετασχηματισμό

(31) $$T_t : (x,\ y) \to (\upsilon, w) = (V(x, y),\ W(x, y)) = (x \cos t\ -\ y \sin t,\ x \sin t\ +\ y \cos t),$$

όπου t τυχαίος πραγματικός αριθμός. Εύκολα διαπιστώνεται ότι, ο αντίστροφος αυτού του μετασχηματισμού παίρνει την ακόλουθη μορφή:

(32) $$T_t^{-1} : (\upsilon, w) \to (x,\ y) = (X(\upsilon, w),\ Y(\upsilon, w)) = (\upsilon \cos t\ +\ w \sin t,\ -\upsilon \sin t\ +\ w \cos t).$$

Από την (31) αμέσως έπεται ότι

(33) $$\begin{aligned} \upsilon^2 + w^2 &= (x \cos t\ -\ y \sin t)^2 + (x \sin t\ +\ y \cos t)^2 \\ &= x^2 \cos^2 t\ +\ y^2 \sin^2 t + x^2 \sin^2 t\ + y^2 \cos^2 t\ = x^2 +\ y^2 \end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι τα σημεία $(x,\ y)$ και (υ, w) έχουν την ίδια απόσταση από την αρχή, (0,0), των αξόνων.

Αν $(x,\ y) \neq (0, 0)$, τότε το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το $(0, 0)$ με το $(x,\ y)$ σχηματίζει με τον άξονα x γωνία $\theta_0 = \arctan(y/x)$. Αντίστοιχα, το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει το $(0, 0)$ με το (υ, w) σχηματίζει με τον άξονα x γωνία $\theta = \arctan(w/\upsilon)$. Από την (31) έπεται ότι

(34) $$\frac{w}{\upsilon} = \frac{\tan t + (y/x)}{1 - (y/x) \tan t} \quad \Leftrightarrow \quad \tan\theta = \tan(\theta_0 + t).$$

Συνεπώς, ο μετασχηματισμός (31), όταν ερμηνεύεται ως μετακίνηση του σημείου $(x,\ y)$ στο (υ, w), σημαίνει μια περιστροφή κατά γωνία t γύρω από την αρχή των αξόνων. Εύκολα αποδείχνεται ότι το σύνολο $\{T_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ αποτελεί ομάδα. Πρόκειται για τη λεγόμενη *ομάδα περιστροφών του Ευκλείδειου επίπεδου*.

Από τον ορισμό, (31), της περιστροφής έπεται ότι

(35) $$\partial_x V(x, y) = \cos t, \quad \partial_y V(x, y) = -\sin t, \quad \partial_x W(x, y) = \sin t, \quad \partial_y W(x, y) = \cos t.$$

΄Αρα, το κριτήριο (30), για να αφήνει η περιστροφή τη ΔΕ $y' = F(x, y)$ αναλλοίωτη, παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$\frac{\tan t + F(x, y)}{1 - \tan t\, F(x, y)} = F(x\cos t - y\sin t,\, x\sin t + y\cos t). \tag{36}$$

Μια ΔΕ που ικανοποιεί αυτό το κριτήριο είναι η

$$y' = \frac{x + y(1 - x^2 - y^2)}{x(1 - x^2 - y^2) - y}, \tag{37}$$

την οποία συναντήσαμε στο προηγούμενο εδάφιο. Πραγματικά, αν θέσουμε

$$\frac{y}{x} = \tan\theta_0, \quad x^2 + y^2 = r^2, \tag{38}$$

τότε

$$F(x, y) := \frac{x + y(1 - x^2 - y^2)}{x(1 - x^2 - y^2) - y} = \frac{1 + (1 - r^2)\tan\theta_0}{(1 - r^2) - \tan\theta_0}. \tag{39}$$

Συνακόλουθα,

$$\begin{aligned}\frac{\tan t + F(x, y)}{1 - \tan t\, F(x, y)} &= \frac{[(1 - r^2) - \tan\theta_0]\tan t + 1 + (1 - r^2)\tan\theta_0}{(1 - r^2) - \tan\theta_0 - [1 + (1 - r^2)\tan\theta_0]\tan t} \\ &= \frac{(1 - r^2)(\tan\theta_0 + \tan t) + 1 - \tan\theta_0 \tan t}{(1 - r^2)(1 - \tan\theta_0 \tan t) - (\tan\theta_0 + \tan t)} = \frac{(1 - r^2)\tan(\theta_0 + t) + 1}{(1 - r^2) - \tan(\theta_0 + t)}.\end{aligned} \tag{40}$$

Από την άλλη, με τη βοήθεια των (33) και (34), εύκολα συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned}F(x\cos t - y\sin t,\, x\sin t + y\cos t) \equiv F(v, w) &= \frac{1 + (1 - r^2)\tan\theta}{(1 - r^2) - \tan\theta} \\ &= \frac{1 + (1 - r^2)\tan(\theta_0 + t)}{(1 - r^2) - \tan(\theta_0 + t)}\end{aligned} \tag{41}$$

Οι (40), (41) δείχνουν ότι ο ισχυρισμός μας ευσταθεί. Με άλλα λόγια, η ομάδα των περιστροφών του Ευκλείδειου επίπεδου αφήνει τη μορφή της ΔΕ (37) αμετάβλητη.

Με βάση όσα παρατηρήσαμε νωρίτερα για τη σημασία των μετασχηματισμών που αφήνουν μια ΔΕ αναλλοίωτη, η συμμετρία της ΔΕ (37) ως προς την ομάδα των περιστροφών έχει το εξής επακόλουθο. Περιστρέφοντας μιαν ολοκληρωτική καμπύλη Γ_0 της (37) κατά γωνία t γύρω από την αρχή των αξόνων $x - y$, καταλήγουμε καμπύλη Γ_t. Με εξαίρεση την περίπτωση όπου η Γ_0 είναι αναλλοίωτη, η Γ_t είναι διαφορετική από την αρχική και αποτελεί επίσης ολοκληρωτική καμπύλη της ΔΕ (37). Για την ακρίβεια, η Γ_t μπορεί να αποτελείται από τμήματα καθένα από τα οποία είναι μια ολοκληρωτική καμπύλη της ΔΕ (37), όπως μπορεί να διαπιστώσει κανείς μελετώντας το τελευταίο σχήμα του προηγούμενου εδάφιου. Ωστόσο, αυτή η λεπτομέρεια δεν αλλάζει την ουσία του συμπεράσματός μας.

Η συμμετρία της ΔΕ (37) ως προς την ομάδα των περιστροφών είναι και ο λόγος για τον οποίο η παραπάνω ΔΕ απλοποιείται δραστικά, όταν εκφραστεί στις πολικές συντεταγμένες (r, θ). Αναλυτικότερα, οι μεταβολές της θ αντιστοιχούν σε περιστροφές του επίπεδου $x - y$. Συνακόλουθα, μια ΔΕ που δεν επηρεάζεται από τέτοιου είδους περιστροφές δεν μπορεί να περιέχει τη μεταβλητή θ ρητά, όταν εκφραστεί στις συντεταγμένες (r, θ). Και, πραγματικά, όπως είδαμε στο προηγούμενο εδάφιο, η (37) μετατρέπεται στην $r' = r(1 - r^2)$ που είναι αυτόνομη. Οι αναλλοίωτες λύσεις της τελευταίας (ως προς τις μεταθέσεις $\theta \to \theta + a$) είναι οι σταθερές λύσεις $r(\theta) = 0$, $r(\theta) = \pm 1$. Από αυτές, η $r(\theta) = 1$ αντιστοιχεί στον μοναδιαίο κύκλο $x^2 + y^2 = 1$ του επίπεδου $x - y$. Τα τμήματα $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$, $-1 < x < 1$, αυτού του κύκλου αποτελούν ολοκληρωτικές καμπύλες της ΔΕ (37). Ακριβέστερα, είναι οι αναλλοίωτες ολοκληρωτικές καμπύλες της (37), με την έννοια που διευκρινήσαμε παραπάνω: Οποιαδήποτε περιστροφή γύρω από την αρχή των αξόνων μετατοπίζει τα τόξα $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ κατά μήκος του κύκλου $x^2 + y^2 = 1$.

Παράδειγμα (Εξίσωση Clairaut)

Η

(42) $$y'^2 - x\,y' + y = 0$$

ανήκει στις μη γραμμικές ΔΕ πρώτης τάξης που φέρουν το όνομα (του) Clairaut (Κλερό). Στην πραγματικότητα, η (42) εκφράζει με ενιαίο τρόπο το ζευγάρι των ΔΕ

(43) $$y' = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 4\,y}}{2}$$

Με απλή αντικατάσταση, αμέσως διαπιστώνεται ότι η (42) διατηρεί τη μορφή της, κατά τους μετασχηματιμούς

(44) $$(x,\, y) \to (\tilde{x},\, \tilde{y}) = (a\,x,\, a^2\,y),$$

όπου a τυχαίος μη μηδενικός αριθμός.

Το ίδιο εύκολα επαληθεύεται το γεγονός ότι, οι συναρτήσεις

(45) $$y = x - 1, \qquad y = \frac{1}{4}\,x^2$$

αποτελούν λύσεις της (42). Προφανώς, η ολοκληρωτική καμπύλη που αντιστοιχεί στην πρώτη είναι μια ευθεία με κλίση 45^o ως προς τον άξονα x, η οποία τέμνει τον άξονα y στο σημείο $y = -1$. Με τη σειρά της, η ολοκληρωτική καμπύλη που αντιστοιχεί στη δεύτερη από τις λύσεις (45) είναι μια παραβολή, συμμετρική ως προς τον άξονα y.

Τώρα, με βάση τις σχέσεις (44), οι (45) μετασχηματίζονται στις

(46) $$a^{-2}\,\tilde{y} = a^{-1}\,\tilde{x} - 1, \qquad a^{-2}\,\tilde{y} = \frac{1}{4}\,a^{-2}\,\tilde{x}^2.$$

Αλλά αυτές απλοποιούνται για να γίνουν

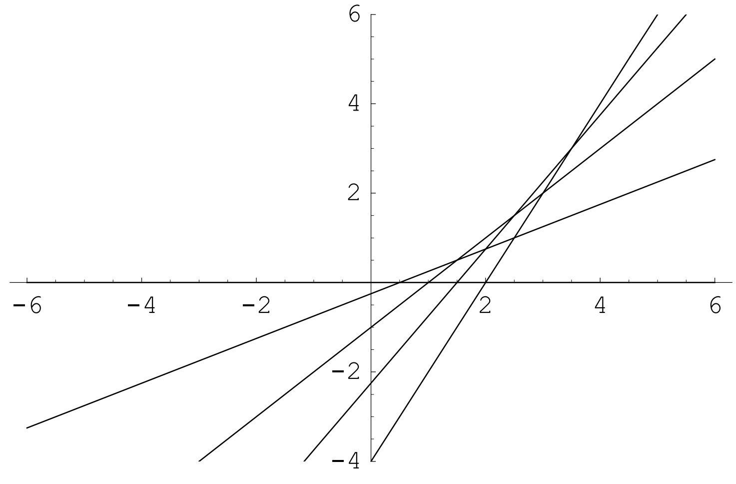
(47) $$\tilde{y} = a(\tilde{x} - a), \qquad \tilde{y} = \frac{1}{4}\,\tilde{x}^2.$$

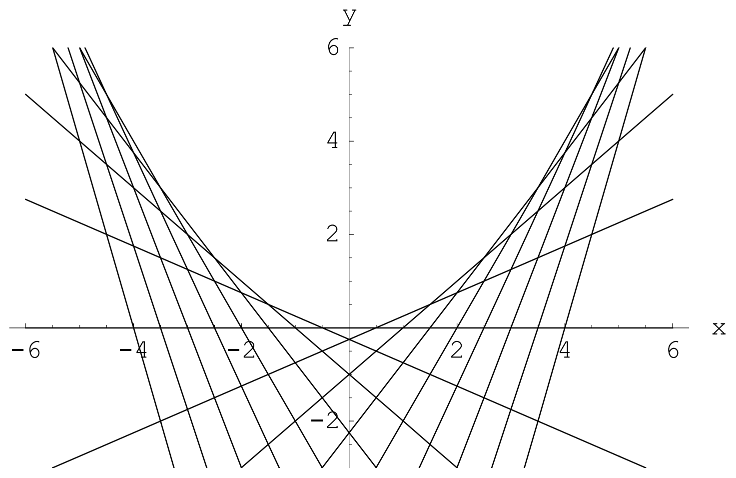
Αυτό σημαίνει ότι, κατά τους μετασχηματιμούς (44) η λύση $y = \frac{1}{4}\,x^2$ απεικονίζεται στον εαυτό της, οπότε και η αντίστοιχη παραβολή είναι μια αναλλοίωτη ολοκληρωτική καμπύλη της ΔΕ (42). Αντίθετα, η λύση $y = x - 1$ μετασχηματίζεται στην $y = a(x - a)$, που και πάλι αντιστοιχεί σε μια ευθεία, αλλά διαφορετική από την αρχική, όταν $a \neq 1$. Η ευθεία $y = a(x - a)$ έχει κλίση a ως προς τον άξονα x και τέμνει τον άξονα y στο σημείο $y = -a^2$.

Με άλλα λόγια, από την λύση $y = x - 1$, η ομάδα των μετασχηματισμών (44) παράγει την μονοπαραμετρική οικογένεια λύσεων

(48) $$y = a(x - a).$$

Από γεωμετρική άποψη, η ομάδα (44) παράγει μια οικογένεια ευθειών ξεκινώντας από την ευθεία $y = x - 1$. Το επόμενο σχήμα δείχνει την αρχική ευθεία $y = x - 1$, καθώς και τις μεταθέσεις της, $y = a(x - a)$, για $a = 1/2$, 3/2 και 2. Στο μεθεπόμενο, δείχνουμε ακόμα περισσότερα μέλη της οικογένειας (48).





Στο τελευταίο σχήμα αρχίζει να αναφαίνεται και η σχέση της οικογένειας των ευθειών (48) προς την παραβολή (αναλλοίωτη καμπύλη) $y = x^2/4$. Συγκεκριμένα, δύο ευθείες της οικογένειας (48) που αντιστοιχούν σε γειτονικές τιμές της παραμέτρου a τέμνονται σε ένα σημείο $(x_c,\ y_c)$, το οποίο προσδιορίζεται εύκολα. Γιατί, αν η πρώτη αντιστοιχεί στην τιμή a και η δεύτερη στην $a + h$, τότε ορίζονται, αντίστοιχα, από τις σχέσεις

(49) $$y_a = a(x - a), \qquad y_{a+h} = (a + h)[x - (a + h)]$$

Στο σημείο όπου τέμνοναι, $y_a = y_{a+h}$. Από αυτή τη συνθήκη και την (49) έπεται ότι

(50) $$x_c = 2\,a + h$$

Η αντικατάσταση αυτής της τιμής του x σε οποιαδήποτε από τις (49) οδηγεί στο ακόλουθο αποτέλεσμα

(51) $$y_c = a(a + h).$$

Απαλείφοντας την παράμετρο a από τις (50) και (51) , καταλήγουμε στη σχέση που χαρακτηρίζει τις συντεταγμένες του σημείου τομής:

(52) $$y_c = \left(\frac{x_c - h}{2}\right)\left(\frac{x_c + h}{2}\right)$$

Είναι πλέον φανερό ότι, στο όριο $h \to 0$, η τελευταία σχέση γίνεται

(53) $$y_c = \frac{x_c^2}{4},$$

που δεν είναι άλλη από εκείνη που περιγράφει την αναλλοίωτη παραβολή.

Η καμπύλη που ορίζεται από μια μονοπαραμετρική οικογένεια καμπυλών με τον τρόπο που οδήγησε από την $y_a = a(x - a)$ στην (53) ονομάζεται *περιβάλλουσα* (της αρχικής οικογένειας καμπυλών). Το προηγούμενο σχήμα αποσαφηνίζει τη γεωμετρική βάση αυτής της ορολογίας.

Ασκήσεις

1. Δείχτε ότι καθεμιά από τις παρακάτω ΔΕ είναι συμμετρική ως προς την αντίστοιχη ομάδα μετασχηματισμών $T_a : (x, y) \to (\tilde{x}, \tilde{y})$.

(i) $y' = \frac{3x - y}{x - 3y}$, $\qquad (\tilde{x}, \tilde{y}) = (a\,x, a\,y)$.

(ii) $y' = 2x\frac{x^2 - 3y}{x^2 + 4y}$, $\qquad (\tilde{x}, \tilde{y}) = (a\,x, a^2\,y)$.

(iii) $y' = x^3 \sin(y/x^4)$, $\qquad (\tilde{x}, \tilde{y}) = (a\,x, a^4\,y)$.

(iv) $y' = \frac{y}{x + \cos(y/x)}$, $\qquad (\tilde{x}, \tilde{y}) = \left(\frac{x}{1 - a\,y}, \frac{y}{1 - a\,y}\right)$.

(v) $y' = \frac{x(1 - x^2 - y^2) + y}{x - y(1 - x^2 - y^2)}$, $\qquad (\tilde{x}, \tilde{y}) = (x\cosh a - y\sinh a, -x\sinh a + \cosh a)$.

2. α) Δείχτε ότι οι συναρτήσεις

$$y = \pm 1, \qquad y = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

αποτελούν λύσεις της ΔΕ

$$y^2(1 + y'^2) = 1.$$

β) Κατασκευάστε την μονοπαραμετρική οικογένεια λύσεων $\{y_a(x)\}$ που παράγεται από τις $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ μέσω της ομάδας συμμετρίας της $T_a : (x, y) \to (x + a, y)$.

γ) Κατασκευάστε τα γραφήματα ορισμένων μελών της οικογένειας $\{y_a(x)\}$ και δείχτε γραφικά και αναλυτικά ότι οι $y = \pm 1$ αποτελούν περιβάλλουσες αυτής της οικογένειας.

3. Θεωρείστε την μονοπαραμετρική οικογένεια συναρτήσεων

$$y_a(x) = a(x - a)$$

Δείχτε ότι, η απαλοιφή της παραμέτρου a από την προηγούμενη εξίσωση και την

$$y_a'(x) = a$$

οδηγεί στην ΔΕ Clairaut

$$y'^2 - x\,y' + y = 0.$$

4. α) Υποθέστε ότι οι καμπύλες $\{\Gamma_a\}$του επίπεδου $x - y$ ορίζονται από την εξίσωση

$$y = F(x,\ a),$$

όπου η συνάρτηση $F(x,\ a)$, $(x,\ a) \in \mathbb{R}^2$ είναι ομαλή. Δείχτε ότι, η

$$\partial_a F(x,\ a) = 0$$

αποτελεί ικανή συνθήκη για να τέμνονται τα γειτονικά μέλη της οικογένειας $\{\Gamma_a\}$. Αν η τελευταία εξίσωση λύνεται ως προς την παράμετρο a στη μορφή $a = f(x)$, τότε η καμπύλη Γ που ορίζεται από την $y = F(x,\ f(x))$ αποτελεί την *περιβάλλουσα* των $\{\Gamma_a\}$.

Υπόδειξη: $$F(x,\ a+h) - F(x,\ a) = h\, \partial_a F(x,\ a) + o(h^2)$$

β) Χρησιμοποιείστε το προηγούμενο αποτέλεσμα για να κατασκευάσετε τις περιβάλλουσες των καμπυλών που ορίζουν οι ακόλουθες σχέσεις

(i) $y = \frac{a\,x-1}{a^2}$.

(ii) $y = \sqrt{4-(x-a)^2}$.

(iii) $y = 2\,a + \sqrt{9-(x-a)^2}$.

Κεφάλαιο IV

Το γενικό πρόβλημα αρχικών τιμών για ΔΕ πρώτης τάξης

1. Εισαγωγή

Στο αντίστοιχο εδάφιο του δεύτερου κεφάλαιου, αποδείξαμε ότι, το πρόβλημα αρχικών τιμών (ΠΑΤ) για τις γραμμικές εξισώσεις πρώτης τάξης με συνεχείς συντελεστές έχει πάντα λύση και μάλιστα μοναδική. Συγκεκριμένα, αποδείξαμε το ακόλουθο

Θεώρημα

Ας υποτεθεί ότι οι συναρτήσεις $f(t)$, $g(t)$ είναι συνεχείς στο διάστημα I και ο x_0 τυχαίος πραγματικός αριθμός. Τότε το ΠΑΤ

$$x' = f(t) + g(t)\,x, \quad t \in I, \qquad x(t_0) = x_0, \quad t_0 \in I,$$

έχει (μόνο μία) λύση. Αυτή ισχύει σε όλο διάστημα I και δίνεται από τη συνάρτηση

$$x(t) = e^{G(t)}\left[x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-G(\xi)} f(\xi)\,d\xi\right], \quad G(t) := \int_{t_0}^{t} g(\xi)\,d\xi, \quad t \in I.$$

Από την άλλη μεριά, συναντήσαμε πολλά παραδείγματα μη γραμμικών ΔΕ όπου το αντίστοιχο ΠΑΤ είτε δεν είχε καμία λύση, είτε είχε περισσότερες από μία. Σε άλλες περιπτώσεις η λύση του ΠΑΤ ήταν μοναδική, αλλά δεν ίσχυε σε όλο το διάστημα τιμών της ανεξάρτητης μεταβλητής. Αυτά τα παραδείγματα οδηγούν με φυσικό τρόπο στο ακόλουθο ερώτημα: Σε ποιον βαθμό το παραπάνω θεώρημα που αφορά τις γραμμικές εξισώσεις μπορεί να γενικευτεί για να καλύψει ένα ευρύτερο υποσύνολο των ΔΕ πρώτης και μεγαλύτερης τάξης;

Μια τέτοια γενίκευση δεν έχει απλώς θεωρητική σημασία. Γιατί, στις περισσότερες περιπτώσεις είναι αδύνατο να κατασκευάσουμε ρητά την λύση ακόμα και απλών ΔΕ. Οι μέθοδοι που παρουσιάσαμε για την επίλυση ΔΕ ειδικού τύπου (ακριβών, ομογενών, Benoulli, κλπ) μπορεί να δίνουν την αντίθετη εντύπωση. Ωστόσο, γεγονός είναι ότι, οι ΔΕ που ανήκουν σ' αυτές τις ειδικές κατηγορίες αποτελούν ένα αμελητέο -από αριθμητική άποψη- υποσύνολο των ΔΕ πρώτης τάξης. Κατά συνέπεια, η επίλυση της πλειονότητας των ΔΕ μπορεί να γίνει μόνο προσεγγιστικά και, σε τελική ανάλυση, με τη βοήθεια υπολογιστών. Όμως, η προσεγγιστική και η αριθμητική επίλυση των ΔΕ προϋποθέτουν το μαθηματικό πλαίσιο που εξασφαλίζει το κύρος των αποτελεσμάτων τους. Αυτό ισχύει ιδιαίτερα για την αριθμητική επίλυση των ΔΕ, η οποία αντιμετωπίζει και μια σειρά από δικά της, εγγενή, προβλήματα.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αποδείξουμε ότι, πραγματικά, το βασικό μέρος του θεωρήματος που αφορά τις γραμμικές ΔΕ πρώτης τάξης μπορεί να γενικευτεί για να καλύψει ένα πολύ ευρύτερο υποσύνολο ΔΕ και όχι μόνο πρώτης τάξης. Όταν λέμε το βασικό μέρος του θεωρήματος εννοούμε αυτό που αφορά την ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης του ΠΑΤ. Ακριβέστερα, θα δείξουμε ότι, χωρίς ιδιαίτερα αυστηρές προϋποθέσεις, το ΠΑΤ

$$x' = F(t, x), \qquad x(t_0) = x_0,$$

έχει λύση, και μάλιστα μοναδική. Με τη διαφορά, ότι

α) Η ύπαρξη και η μοναδικότητα της λύσης εξασφαλίζονται μόνο σε μια γειτονιά του αρχικού σημείου t_0 και

β) Η λύση δεν μπορεί να εκφραστεί με έναν απλό τύπο, σαν κι αυτόν που ισχύει στη γραμμική περίπτωση.

Ωστόσο, αυτοί οι περιορισμοί δε μειώνουν καθόλου τη σημασία των αποτελεσμάτων που ακολουθούν.

Από την άποψη των εννοιών που θα χρησιμοποιήσουμε για να καταλήξουμε στα προαναγγελθέντα αποτελέσματα, δύο είναι οι βασικές: Η έννοια της συγκλίνουσας ακολουθίας συναρτήσεων κι εκείνη της ολοκληρωτικής εξίσωσης. Την πρώτη θα τη χρησιμοποιήσουμε εκτενώς και στα επόμενα εδάφια, ειδικότερα σ' αυτό που αναφέρεται στην επίλυση ΔΕ με τη "μέθοδο των σειρών". Γι' αυτό, στο επόμενο εδάφιο, παρουσιάζουμε μια σύνοψη του κεφάλαιου της μαθηματικής ανάλυσης που αφορά τις συγκλίνουσες ακολουθίες και σειρές. Ο αναγνώστης που έχει ευχέρεια σ' αυτό τον τομέα της μαθηματικής ανάλυσης μπορεί να το παραλείψει.

Όσο αφορά την έννοια της ολοκληρωτικής εξίσωσης, ουσιαστικά θα χρειαστούμε μόνο τον ορισμό της. Για το σκοπό αυτό, ας θεωρήσουμε την συνάρτηση $x(t) = a\,t^2$, $t \in [0, 1]$. Τότε,

$$\int_0^1 x(s)\,d s = \int_0^1 (a\,s^2)\,d s = \frac{a}{3},$$

$$\int_0^1 s\,x(s)\,d s = \int_0^1 (a\,s^3)\,d s = \frac{a}{4},$$

$$\int_0^1 s^2\,x(s)\,d s = \int_0^1 (a\,s^4)\,d s = \frac{a}{5},$$

και άρα,

$$\int_0^1 (t-s)^2\,x(s)\,d s = t^2\,\frac{a}{3} - 2\,t\,\frac{a}{4} + \frac{a}{5} = \frac{1}{3}\,x(t) + a\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2}\,t\right)$$

Ισοδύναμα,

$$\int_0^1 3\,(t-s)^2\,x(s)\,d s - x(t) = \frac{3\,a}{10}\,(2 - 5\,t).$$

Για $a = 10$, η προηγούμενη γίνεται

$$\int_0^1 3\,(t-s)^2\,x(s)\,d s - x(t) = 6 - 15\,t,$$

και επιδέχεται ως λύση την $x(t) = 10\,t^2$.

Ωστόσο, μπορούμε να ξεκινήσουμε από την τελευταία σχέση και να θεωρήσουμε τη συνάρτηση $x(t)$ ως άγνωστη. Τότε, η παραπάνω σχέση αποκτάει το νόημα μιας εξίσωσης. Κάθε εξίσωση αυτού του είδους, όπου η άγνωστη συνάρτηση περιέχεται οπωσδήποτε στην προς ολοκλήρωση έκφραση, ονομάζεται ***ολοκληρωτική εξίσωση***.

Ολοκληρωτικές εξισώσεις υπάρχουν πολλών ειδών. Αυτά που συναντάμε συχνότερα είναι εκείνα που φέρουν τα ονόματα των Fredholm (Φρέντχολμ) και Volterra, αντίστοιχα. Συγκεκριμένα, ως ***ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm*** χαρακτηρίζεται οποιαδήποτε είναι της μορφής

$$\int_a^b G(t, s, x(s))\, d s + p(t)\, x(t) = f(t),$$

όπου $G(t, s, x)$, $p(t)$ και $f(t)$ γνωστές συναρτήσεις. Ειδικότερα, όταν η συνάρτηση $G(t, s, x)$ είναι της μορφής $G(t, s, x) = K(t, s)\, x$, τότε η ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm γίνεται

$$\int_a^b K(t, s)\, x(s)\, d s + p(t)\, x(t) = f(t)$$

και χαρακτηρίζεται ως ***γραμμική***. Διφορετικά, η εξίσωση λέγεται ***μη γραμμική***. Είναι φανερό ότι, η ολοκληρωτική εξίσωση που κατασκευάσαμε πιο πάνω ανήκει στην κατηγορία των γραμμικών.

Με τον όρο ***ολοκληρωτική εξίσωση Volterra*** εννοούμε μιαν εξίσωση της μορφής

$$\int_a^t G(t, s, x(s))\, d s + p(t)\, x(t) = f(t).$$

Αυτό που την διακρίνει είναι ότι, το ολοκλήρωμα το οποίο περιέχει την άγνωστη συνάρτηση δεν αφορά ένα παγιωμένο, αλλά ένα μεταβλητό διάστημα. ΄Οπως θα διαπιστώσουμε σύντομα, αυτό το είδος των ολοκληρωτικών εξισώσεων είναι εκείνο που συνδέεται άρρηκτα με τα προβλήματα αρχικών τιμών. Μια ολοκληρωτική εξίσωση Volterra λέγεται ***γραμμική***, όταν είναι της μορφής

$$\int_a^t K(t, s)\, x(s)\, d s + p(t)\, x(t) = f(t).$$

Διαφορετικά, την χαρακτηρίζουμε ως ***μη γραμμική***.

Ο βασικός λόγος για τον οποίο οι ολοκληρωτικές εξισώσεις εμπλέκονται στην ανάλυση του ΠΑΤ είναι ότι η απόδειξη της ύπαρξης και της μοναδικότητας των λύσεών τους είναι μεθοδολογικά απλούστερη. Το τι ακριβώς εννοούμε, θα φανεί καθαρά στο μεθεπόμενο εδάφιο.

2. Συναρτήσεις που ορίζονται από ακολουθίες και σειρές

Ακολουθίες και σειρές πραγματικών αριθμών

Ας υποθέσουμε ότι το πεδίο ορισμού της απεικόνισης $f : S \to \mathbb{R}$ είναι ένα αριθμήσιμο σύνολο. Αυτό σημαίνει ότι, ανάμεσα στα στοιχεία του S και τα στοιχεία του συνόλου των φυσικών αριθμών, $\mathbb{N}$, υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία. Για παράδειγμα, το S μπορεί να ταυτίζεται με το $\mathbb{N}$, ή ν' αποτελείται από τους μη αρνητικούς ακέραιους, οπότε $S = \{0\} \bigcup \mathbb{N}$, ή να περιλαμβάνει όλους τους ακέραιους αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι από τον m, ή να ταυτίζεται με το σύνολο των άρτιων ή περιττών αριθμών, κλπ. Τότε, η απεικόνιση $f : S \to \mathbb{R}$ ονομάζεται (άπειρη) ***ακολουθία πραγματικών αριθμών***.

Παράδειγμα

(i) $f(n) = n^2, \qquad n \in \mathbb{N},$

(ii) $f(n) = \frac{1}{n^3}, \qquad n \in S = \{2, 4, 6, \ldots\} \equiv \{n \in \mathbb{N} : n = 2\, k,\ k \in \mathbb{N}\},$

(iii) $f(n) = \frac{1}{n!}, \qquad n \in S = \{0, 1, 2, \ldots\} \equiv \{0\} \bigcup \mathbb{N}.$

Με τον όρο ***ακολουθία*** αναφέρεται και το υποσύνολο $f(S)$ του $\mathbb{R}$, το οποίο αποτελείται από τις τιμές της απεικόνισης ή συνάρτησης $f : S \to \mathbb{R}$. Μάλιστα, το πεδίο τιμών $f(S)$ μιας ακολουθίας συνήθως συμβολίζεται με $\{f_n\}_{n\in S}$ και το στοιχείο f_n αυτού του συνόλου ονομάζεται ***n-στός όρος της ακολουθίας***. Στα επόμενα, όπου δεν υπάρχει λόγος σύγχυσης, θα χρησιμοποιούμε το απλούστερο σύμβολο $\{f_n\}$ στη θέση του $\{f_n\}_{n\in S}$.

Λέμε ότι μια ακολουθία $\{f_n\}$ ***συγκλίνει*** όταν υπάρχει αριθμός a, τέτοιος που, για κάθε $\varepsilon > 0$, οσοδήποτε μικρό, μπορούμε να βρούμε έναν φυσικό αριθμό $N(\varepsilon)$, τέτοιον ώστε

(1) $$| f_n - a | < \varepsilon, \quad \text{αν } n > N(\varepsilon).$$

Σ' αυτή την περίπτωση, ονομάζουμε τον a ***όριο της ακοκουθίας*** $\{f_n\}$, πράγμα που δηλώνουμε γράφοντας

(2) $$\lim_{n\to\infty} f_n = a.$$

Στην αντίθετη περίπτωση, λέμε ότι η ακολουθία ***αποκλίνει***.

Συχνά, χρησιμοποιείται και η έκφραση

(3) $$\lim_{n\to\infty} f_n = \infty.$$

Αυτή σημαίνει ότι, για οσοδήποτε μεγάλο $M > 0$, υπάρχει κάποιο N, τέτοιο ώστε $f_n > M$, αν $n > N$. Ανάλογα, έκφραση $\lim_{n\to\infty} f_n = -\infty$ δηλώνει ότι για οποιοδήποτε $m < 0$, υπάρχει ένα N, τέτοιο ώστε $f_n < m$, αν $n > N$.

Παράδειγμα

(i) Αν $f_n = n^{-1}$, τότε $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$. Πραγματικά, για δοσμένο $\varepsilon > 0$, αρκεί να επιλέξουμε ως $N(\varepsilon)$ τον πρώτο φυσικό αριθμό που έπεται του ε^{-1} για να εξασφαλίσουμε ότι η σχέση $n > N(\varepsilon)$ θα συνεπάγεται την $| f_n | < \varepsilon$: Αφού

$$n > N(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad \tfrac{1}{n} < \tfrac{1}{N(\varepsilon)},$$

έπεται ότι $n^{-1} < \varepsilon$, όταν $N(\varepsilon) > \varepsilon^{-1}$.

(ii) Η ακολουθία με n-στό όρο $f_n = (-1)^n$ αποκλίνει.

(iii) Αν $f(n) = n^2$, τότε $\lim_{n\to\infty} f_n = \infty$.

Με τον όρο ***ακολουθία (τύπου) Cauchy*** χαρακτηρίζουμε κάθε ακολουθία $\{f_n\}$ που έχει την εξής ιδιότητα: Για οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$, υπάρχει φυσικός αριθμός $N(\varepsilon)$, τέτοιος που $| f_m - f_n | < \varepsilon$, όταν $m, n > N(\varepsilon)$. Το θεώρημα, σύμφωνα με το οποίο, μια ακολουθία συγκλίνει εάν και μόνο όταν είναι Cauchy, αναφέρεται ως ***κριτήριο σύγκλισης του Cauchy***.

Ένα άλλο θεώρημα που χρησιμοποιείται ως κριτήριο της σύγκλισης μιας ακολουθίας είναι το εξής: Αν $f_{n+1} \geq f_n$ και η ακολουθία $\{f_n\}$ είναι άνω φραγμένη, τότε συγκλίνει. Το ίδιο ισχύει και όταν είναι κάτω φραγμένη και $f_{n+1} \leq f_n$.

Οι όροι που χρησιμοποιούνται στη διατύπωση αυτού του θεωρήματος έχουν το ακόλουθο νόημα: Η ακολουθία $\{f_n\}$ λέγεται ***άνω φραγμένη*** αν υπάρχει αριθμός M, τέτοιος που $f_n \leq M$ για κάθε n. Ανάλογα, η $\{f_n\}$ χαρακτηρίζεται ***κάτω φραγμένη*** αν υπάρχει αριθμός m, τέτοιος που $f_n \geq m$ για κάθε n.

Κάθε ακολουθία $\{f_n\}$ ορίζει αυτόματα μιαν άλλη, εκείνη της οποίας ο n-στός όρος, s_n, είναι ίσος με το άθροισμα των n πρώτων όρων της $\{f_n\}$:

(4) $$s_n := \sum_{j=1}^{n} f_j.$$

Ας υποθέσουμε ότι η ακολουθία $\{s_n\}$ συγκλίνει στον αριθμό s:

(5) $$\lim_{n\to\infty} s_n = s.$$

Αυτό σημαίνει ότι

(6) $$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f_j = s,$$

που συνήθως γράφεται στη μορφή

(7) $$\sum_{j=1}^{\infty} f_j = s.$$

Σ' αυτή την περίπτωση λέμε ότι η (άπειρη) ***σειρά*** με j-στό όρο f_j ***συγκλίνει*** στον αριθμό s.

Ωστόσο, η έκφραση $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ αποκαλείται σειρά, ακόμα και όταν το όριο $\lim_{n\to\infty} (\sum_{j=1}^{n} f_j)$ δεν υπάρχει. Για παράδειγμα, όταν $f_j = j^{-1}$, λέμε ότι δίνεται η σειρά

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots,$$

παρά το γεγονός ότι ακολουθία

$$s_n := \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

δε συγκλίνει και άρα το $\lim_{n\to\infty} (\sum_{j=1}^{n} j^{-1})$ δεν υπάρχει. Προς διάκριση, λέμε ότι, σ' αυτή την περίπτωση, η σειρά ***αποκλίνει***.

Παράδειγμα

Η σειρά $\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j}$ συγκλίνει. Πραγματικά,

(8) $$s_n := \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \frac{2^n-1}{2^n}$$

οπότε,

(9) $$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n-1}{2^n} = 1.$$

Άρα,

(10) $$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \equiv \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^j} = 1.$$

Όταν υιοθετείται η σκοπιά της σειράς, η ακολουθία $\{s_n\}$ που ορίζεται στην (4) ονομάζεται ***ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς*** $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$.

Διάφορες συνθήκες που εξασφαλίζουν τη σύγκλιση μιας σειράς ονομάζονται ***κριτήρια σύγκλισης***. Ανάμεσά τους βρίσκουμε

(i) **Το κριτήριο του Cauchy** : Η σειρά $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ συγκλίνει, εάν και μόνο όταν

$$\sum_{j=m+1}^{n} f_j \to 0, \quad \text{καθώς τα } m,\, n \to \infty.$$

(ii) **Το κριτήριο του λόγου** : Αν κανείς από τους όρους f_j δε μηδενίζεται και

$$\lim_{j\to\infty} \left| \frac{f_{j+1}}{f_j} \right| = r,$$

τότε η σειρά συγκλίνει αν $r < 1$ και αποκλίνει άν $r > 0$.

(iii) **Το κριτήριο της σύγκρισης** : Αν $0 \leq f_j \leq g_j$ και η σειρά $\sum_{j=1}^{\infty} g_j$ συγκλίνει, τότε το ίδιο ισχύει και για την $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$.

Ακολουθίες και σειρές συναρτήσεων

Ας υποθέσουμε ότι, για κάθε $j \in \mathbb{N}$, η $f_j(t)$ είναι μια πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού κάποιο διάστημα I της πραγματικής ευθείας. Τότε το σύνολο $\{f_j(t)\}$, αναφέρεται ως ***ακολουθία συναρτήσεων***. Είναι φανερό, ότι για κάθε συγκεκριμένη τιμή της μεταβλητής t, το σύνολο $\{f_j(t)\}$ αποτελεί μιαν ακολουθία πραγματικών αριθμών, οπότε ισχύουν οι αντίστοιχοι ορισμοί και τα κριτήρια σύγκλισης που δώσαμε στο προηγούμενο εδάφιο. Είναι επίσης φανερό ότι, μια ακολουθία συναρτήσεων μπορεί να συγκλίνει σε ορισμένα σημεία του κοινού πεδίου ορισμού των μελών της και να αποκλίνει σε άλλα.

Παράδειγμα

Θεωρούμε την ακολουθία $\{f_j(t)\}$, όπου $f_j(t) = t^j$, $t \in \mathbb{R}$. Από το γεγονός ότι

$$\left| \frac{f_{j+1}(t)}{f_j(t)} \right| = \left| \frac{t^{j+1}}{t^j} \right| = |t|$$

έπεται ότι η ακολουθία $\{t^n\}$ συγκλίνει όταν $|t| < 1$ και αποκλίνει όταν $|t| > 1$. Από την άλλη, η ακολουθία των αριθμών $(-1)^n$ αποκλίνει, ενώ εκείνη των αριθμών $(1)^n$ συγκλίνει. Συνεπώς, η ακολουθία των συναρτήσεων $f_j(t) = t^n$ συγκλίνει για κάθε t στο διάστημα $(-1, 1]$. Αναλυτικότερα,

(11) $$\lim_{j\to\infty} t^j = \begin{cases} 0, & -1 < t < 1 \\ 1, & t = 1 \end{cases}$$

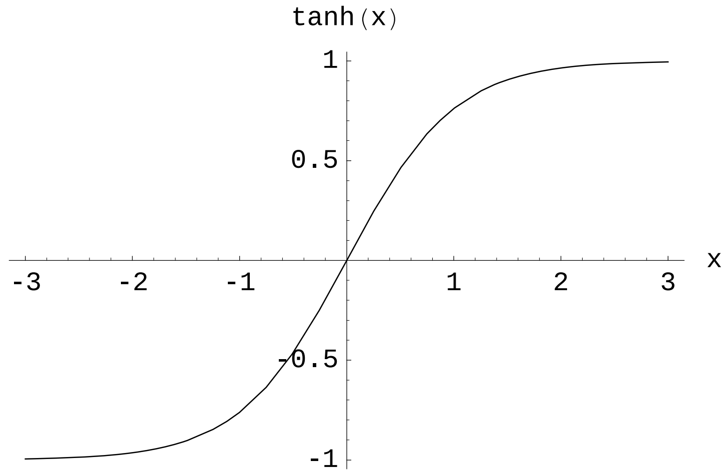
Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι η ακολουθία των συναρτήσεων $\{f_j(t)\}$, $t \in I$, συγκλίνει όταν το t ανήκει στο υποσύνολο S του διαστήματος I. Τότε αυτόματα ορίζεται η συνάρτηση

(12) $$f(t) := \lim_{j\to\infty} f_j(t), \quad t \in S \subset I.$$

□

Παράδειγμα

(i) Ας θυμηθούμε την συνάρτηση της υπερβολικής εφαπτομένης, $\tanh(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Όπως φαίνεται καθαρά κι από την γραφική παράστασή της, η $\tanh(x)$ είναι γνησίως αύξουσα ($\tanh'(x) > 0$) και φραγμένη ($|\tanh(x)| < 1$).

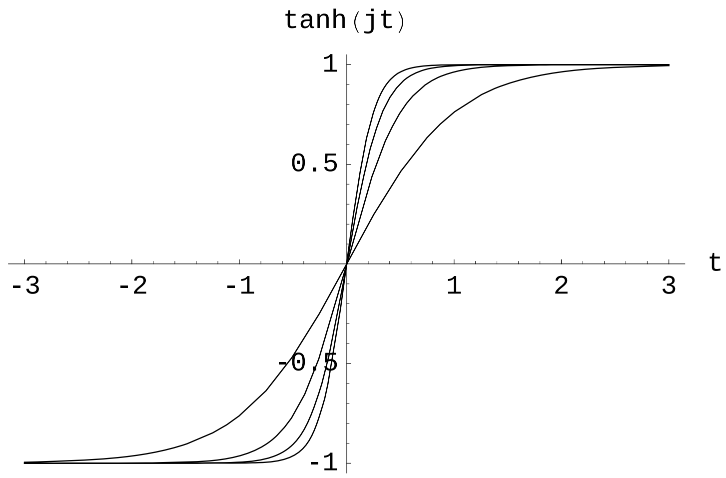


Θεωρούμε, τώρα την ακολουθία των συναρτήσεων $f_j(t) = \tanh(j\,t)$, $t \in \mathbb{R}$. Από τις ιδιότητες της $\tanh(x)$ που αναφέραμε πιο πάνω, συνάγεται αμέσως ότι, για κάθε συγκεκριμένο $t > 0$, η ακολουθία $\tanh(j\,t)$ είναι αύξουσα και άνω φραγμένη. Αξιωματικά, κάθε ακολουθία πραγματικών αριθμών με αυτές τις δύο ιδιότητες συγκλίνει.

Ανάλογα, για κάθε συγκεκριμένο $t < 0$, η ακολουθία $\tanh(j\,t)$ είναι φθίνουσα και κάνω φραγμένη και άρα συγκλίνει, αξιωματικά. Συνεπώς,

(13) $$f(t) := \lim_{j \to \infty} \tanh(j\,t) = \begin{cases} -1, & t < 0 \\ 0, & t = 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

Το επόμενο σχήμα, στο οποίο δείχνουμε το γράφημα των τεσσάρων πρώτων μελών της ακολουθίας $f_j(t) = \tanh(j\,t)$, δείχνει καθαρά την οριακή συμπεριφορά αυτής της ακολουθίας.



(ii) Η ακολουθία των συναρτήσεων $f_n(t) = n(1 + n^2\,t^2)^{-1}$, $t \in \mathbb{R}$, συγκλίνει μόνο όταν $t \neq 0$. Συγκεκριμένα,

(14) $$\lim_{j \to \infty} \frac{n}{1 + n^2\,t^2} = 0, \quad t \neq 0\,.$$

Συνεπώς, η συνάρτηση $f(t) := \lim_{n \to \infty} n(1 + n^2\,t^2)^{-1}$ έχει ως πεδίο ορισμού το υποσύνολο της πραγματικής ευθείας $S = (-\infty, 0) \bigcup (0, \infty)$.

□

Ιδιαίτερη σημασία στην ανάλυση των συναρτήσεων, γενικά, και στη μελέτη των ΔΕ, ειδικότερα, έχει η έννοια της ομοιόμορφης σύγκλισης μιας ακολουθίας συναρτήσεων. Με αυτό τον όρο εννοούμε την εξής συμπεριφορά. Θεωρούμε μιαν ακολουθία συναρτήσεων $\{f_j(t)\}$, $t \in I$, η οποία συγκλίνει σε κάθε σημείο του διαστήματος I και άρα ορίζει την συνάρτηση $f(t) := \lim_{j\to\infty} f_j(t)$, $t \in I$. Αν για οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$, μπορούμε να βρούμε έναν φυσικό αριθμό $N(\varepsilon)$, τέτοιον ώστε $|\, f(t) - f_j(t)\,| < \varepsilon$ όταν $j > N(\varepsilon)$, τότε λέμε ότι η ακολουθία $\{f_j(t)\}$, $t \in I$, ***συγκλίνει στη συνάρτηση*** $f(t)$ ***ομοιόμορφα στο διάστημα*** I.

Παρατήρηση. Η ομοιόμορφη σύγκλιση μιας ακολουθίας συναρτήσεων διαφέρει από την ***γενική*** ή ***σημειακή σύγκλιση*** ως προς το εξής: Στην γενική περίπτωση, ο αριθμός N που αποτελεί το κατώφλι για να ισχύει η ανισότητα $|f(t) - f_j(t)| < \varepsilon$ εξαρτιέται όχι μόνο από το ε, αλλά και από το σημείο t του διαστήματος I όπου εξετάζεται η σύγκλιση.

Παράδειγμα

Η ακολουθία των συναρτήσων $f_j(t) = \frac{1}{j(1+j^2 t^2)}$, $t \in \mathbb{R}$, συγκλίνει ομοιόμορφα στον $\mathbb{R}$, πράγμα που δεν ισχύει για την ακολουθία $g_j(t) = \frac{1}{1+j^2 t^2}$, $t \in \mathbb{R}$. Αναλυτικότερα,

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{j(1+j^2 t^2)} = f(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{15}$$

$$\lim_{j\to\infty} \frac{1}{1+j^2 t^2} = g(t) = \begin{cases} 1, & t \neq 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases} \tag{16}$$

Το συμπέρασμα ότι η ακολουθία $f_j(t) = \frac{1}{j(1+j^2 t^2)}$ συγκλίνει ομοιόμορφα συνάγεται αμέσως όταν παρατηρήσουμε ότι

$$\frac{1}{j(1+j^2 t^2)} \leq \frac{1}{j}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{17}$$

Συνεπώς, για δοσμένο $\varepsilon > 0$, αρκεί να επιλέξουμε ως $N(\varepsilon)$ οποιονδήποτε φυσικό αριθμό μεγαλύτερο από τον ε^{-1}, για να ισχύει η συνεπαγωγή

$$j > N(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad |f(t) - f_j(t)| = \frac{1}{j(1+j^2 t^2)} < \varepsilon\,. \tag{18}$$

Το ότι δεν ισχύει το ίδιο και για την ακολουθία των συναρτήσεων $g_j(t)$, μπορεί να το αποδείξει από μόνος του ο αναγνώστης.

Το κριτήριο του Cauchy για τη σύγκλιση μιας ακολουθίας αριθμών γενικεύεται για να μας δώσει την αναγκαία και ικανή συνθήκη για την ομοιόμορφη σύγκλιση ακολουθιών συναρτήσεων:

Θεώρημα

Η ακολουθία των συναρτήσεων $f_j(t)$, $t \in I$, συγκλίνει ομοιόμορφα στο διάσττημα I, εάν και μόνο όταν, για οποιοδήποτε $\varepsilon > 0$, μπορούμε να βρούμε έναν φυσικό αριθμό $N(\varepsilon)$, τέτοιον ώστε $|f_j(t) - f_k(t)| < \varepsilon$ για κάθε $t \in I$, όταν $j, k > N(\varepsilon)$.

Η σημασία της ομοιόμορφης σύγκλισης αναδείχνεται στα δύο επόμενα θεωρήματα.

Θεώρημα

Αν οι συναρτήσεις που απαρτίζουν την ακολουθία $\{f_j(t)\}$ είναι συνεχείς και η τελευταία συγκλίνει ομοιόμορφα στο διάσττημα I, τότε και η συνάρτηση $f(t) := \lim_{j\to\infty} f_j(t)$, $t \in I$, είναι συνεχής.

Ας υποθέσουμε ότι η ακολουθία $\{f_j(t)\}$, $t \in I$, η οποία συγκλίνει στην συνάρτηση $f(t)$, αποτελείται από διαφορίσιμες συναρτήσεις. Τότε, η $f(t)$ δεν είναι αναγκαστικά διαφορίσιμη. Ακόμα κι αν είναι, γενικά δεν ευσταθεί ότι $f'(t) = \lim_{j\to\infty} f_j'(t)$. Ικανές συνθήκες για να ισχύει αυτή η σχέση δίνονται από το ακόλουθο

Θεώρημα

Αν το διάστημα I είναι κλειστό και

(i) Η συγκλίνουσα ακολουθία $\{f_j(t)\}$, $t \in I$, αποτελείται από συνεχώς διαφορίσιμες συναρτήσεις,

(ii) Η ακολουθία $\{f_j'(t)\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο διάστημα I,

τότε η συνάρτηση $f(t) := \lim_{j\to\infty} f_j(t)$ είναι διαφορίσιμη και $f'(t) = \lim_{j\to\infty} f_j'(t)$.

□

Ας υποθέσουμε ότι το σύνολο $\{f_j(t)\}$, $t \in I$, αποτελεί μια ακολουθία συναρτήσεων με κοινό πεδίο ορισμού το διάστημα I της πραγματικής ευθείας. Τότε, αρκεί να θέσουμε

(19) $$s_n(t) := \sum_{j=1}^{n} f_j(t),$$

για να καταλήξουμε στη νέα ακολουθία συναρτήσεων $\{s_n(t)\}$, $t \in I$. Το όριο της ακολουθίας $\{s_n(t)\}$, καθώς το n τείνει στο άπειρο, ονομάζεται ***σειρά των συναρτήσεων*** $\{f_j(t)\}$, $t \in I$, και συμβολίζεται με $\sum_{j=1}^{\infty} f_j(t)$. Με άλλα λόγια

(20) $$\sum_{j=1}^{\infty} f_j(t) := \lim_{j\to\infty} s_n(t).$$

Συνεπώς, όταν λέμε ότι, στο σημείο t του διαστήματος I, η σειρά $\sum_{j=1}^{\infty} f_j(t)$ συγκλίνει, εννοούμε ότι, στο ίδιο σημείο, το όριο της ακολουθίας $\{s_n(t)\}$ υπάρχει. Ανάλογα, η δήλωση ότι η σειρά $\sum_{j=1}^{\infty} f_j(t)$ ***συγκλίνει ομοιόμορφα*** στο διάστημα I, σημαίνει ότι η ακολουθία $\{s_n(t)\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα. Μια ικανή συνθήκη για την ομοιόμορφη σύγκλιση μιας σειράς παρέχεται από το

Κριτήριο M του Weierstrass (Βάιερστρας): Αν τα μέλη της ακολουθίας $\{f_j(t)\}$, $t \in I$, είναι φραγμένα, αν δηλαδή υπάρχουν μη αρνητικές σταθερές $\{M_j\}$ τέτοιες ώστε $|f_j(t)| \le M_j$, και η σειρά $\sum_{j=1}^{\infty} M_j$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{j=1}^{\infty} |f_j(t)|$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο διάστημα I (οπότε, το ίδιο ισχύει και για την $\sum_{j=1}^{\infty} f_j(t)$).

□

Παράδειγμα

(i) Η σειρά

$$\sum_{j=0}^{\infty} f_j(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} = 1 + t + \frac{1}{2!}\, t^2 + \frac{1}{3!}\, t^3 + \ldots$$

συγκλίνει για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Αυτό συνάγεται από το κριτήριο του λόγου: Για οποιοδήποτε $t \in \mathbb{R}$,

$$\left|\frac{f_{j+1}(t)}{f_j(t)}\right| = \left|\frac{j!\, t^{j+1}}{(j+1)!\, t^j}\right| = \frac{|t|}{j+1}.$$

Συνεπώς,

$$\lim_{j\to\infty} \left|\frac{f_{j+1}(t)}{f_j(t)}\right| = 0 .$$

(ii) Σύμφωνα με το κριτήριο M του Weierstrass, η σειρά

$$\sum_{j=1}^{\infty} f_j(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin(j\,t)}{2^j} = \frac{1}{2}\sin t + \frac{1}{4}\sin(2\,t) + \frac{1}{8}\sin(3\,t) + ...$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στην πραγματική ευθεία. Γιατί,

$$|f_j(t)| = \left|\frac{\sin(j\,t)}{2^j}\right| \leq \frac{1}{2^j}$$

και

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = 1.$$

□

΄Οπως γνωρίζουμε, η συνάρτηση

(21) $$f(t) = \sum_{n=0}^{m} c_n\, t^n = c_0 + c_1\, t + c_2\, t^2 + ... + c_m\, t^m, \qquad t \in \mathbb{R},$$

όπου $\{c_n\}$ ένα σύνολο από $m+1$ τυχαίους πραγματικούς αριθμούς, ονομάζεται ***πολυώνυμο βαθμού m***. Είναι φανερό ότι, στο σημείο $t = 0$, όλοι οι όροι της πολυωνυμικής συνάρτησης (21) μηδενίζονται, εκτός από τον πρώτο. Με άλλα λόγια, $f(0) = c_0$.

Παραγωγίζοντας την (21) βρίσκουμε ότι

(22) $$f'(t) = \sum_{n=1}^{m} n\, c_n\, t^{n-1} = c_1 + 2\, c_2\, t + ... + m\, c_m\, t^{m-1}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Συνακόλουθα, $f'(0) = c_1$. Επαγωγικά, καταλήγουμε στούς παρακάτω τύπους για την παράγωγο τάξης k της πολυωνυμικής συνάρτησης (21) :

(23α) $$f^{(k)}(t) = \sum_{n=k}^{m} n\,(n-1)\cdots(n-k+1)\, c_n\, t^{n-k}\,, \quad k = 0, 1, 2, ..., m,$$

(23β) $$f^{(k)}(t) = 0, \quad k > m.$$

όπου $f^{(0)}(t) \equiv f(t)$.

Από τη σχέση (23α) έπεται ότι

(24) $$f^{(k)}(0) = k\,(k-1)\cdots(1)\, c_k \equiv k!\, c_k$$

και άρα

(25) $$c_k = \frac{1}{k!}\, f^{(k)}(0), \qquad k = 0, 1, 2, ..., m.$$

Αυτό σημαίνει ότι το σύνολο των συντελεστών του πολυώνυμου, $\{c_n\}$, και το σύνολο $\{f^{(n)}(0)\}$ αλληλοκαθορίζονται. Κατά συνέπεια, οποιοδήποτε από αυτά τα δύο σύνολα προσδιορίζει επακριβώς την πολυωνυμική συνάρτηση $\sum_{n=0}^{m} c_n\, t^n$.

Οι παραπάνω παρατηρήσεις δεν αλλάζουν αν, αντί για την (21), θεωρήσουμε τη συνάρτηση

(26) $$f(t) = \sum_{n=0}^{m} c_n (t-\tau)^n = c_0 + c_1(t-\tau) + c_2(t-\tau)^2 + ... + c_m(t-\tau)^m, \qquad t \in \mathbb{R},$$

όπου τ τυχαίος πραγματικός αριθμός. Γιατί και η (26) δεν είναι παρά ένα πολυώνυμο βαθμού m ως προς τη μεταβλητή t. Απλώς, οι σχέσεις (25) που συνδέουν τους συντελεστές c_k με τις παραγώγους της $f(t)$ ισχύουν όταν το $t = \tau$. Με άλλα λόγια,

(27) $$c_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(\tau), \qquad k = 0, 1, 2, ..., m.$$

Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι η $\{c_n\}$, $n = 0, 1, 2, ...$, είναι μια συγκεκριμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών. Τότε από την ακολουθία των συναρτήσεων $f_n(t) = c_n(t-\tau)^n$, $t \in \mathbb{R}$, ορίζεται η σειρά, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(t-\tau)^n$, που ονομάζεται ***δυναμοσειρά με κέντρο το σημείο τ***.

Ο σημαντικός ρόλος των δυναμοσειρών στον τομέα των ΔΕ θα αναδειχτεί πολύ σύντομα. Προς το παρόν, θα σταθούμε σε ορισμένα ζητήματα που αφορούν τη σύγκλισή τους και θα ξεκινήσουμε από το ακόλουθο προφανές συμπέρασμα. Μια δυναμοσειρά συγκλίνει οπωσδήποτε στο κέντρο της, αφού

(28) $$t = \tau \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t-\tau)^n = c_0.$$

Εκείνο, λοιπόν, που ενδιαφέρει είναι αν συγκλίνει και σε κάποιο άλλο σημείο της πραγματικής ευθείας. Αν αυτό συμβαίνει, το επόμενο θεώρημα μας εξασφαλίζει τη σύγκλιση και σε ένα διάστημα της ανεξάρτητης μεταβλητής t γύρω από το κέντρο της δυναμοσειράς

Θεώρημα Abel

Αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(t-\tau)^n$ συγκλίνει όταν $t = a \neq \tau$, τότε συγκλίνει σε κάθε σημείο του διαστήματος $(\tau - |\tau - a|, \ \tau + |\tau - a|)$.

□

Ας υποθέσουμε ότι το $r > 0$ και ότι η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(t-\tau)^n$ συγκλίνει σε κάθε σημείο του διαστήματος $(\tau - r, \ \tau + r)$. Τότε το $(\tau - r, \ \tau + r)$ ονομάζεται ***διάστημα σύγκλισης*** και ο αριθμός r ***ακτίνα σύγκλισης*** της δυναμοσειράς.

Συνεπώς, το θεώρημα να του Abel, επιδέχεται την εξής αναδιατύπωση. Μια σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(t-\tau)^n$ που συγκλίνει όταν $t = a \neq \tau$ έχει ακτίνα σύγκλισης τουλάχιστον ίση με $|\tau - a|$.

Όταν η δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(t-\tau)^n$ συγκλίνει σε κάθε σημείο ενός ανοιχτού διαστήματος I το οποίο περιέχει το τ, τότε η συνάρτηση

(29) $$f(t) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t-\tau)^n, \quad t \in I,$$

χαρακτηρίζεται ***αναλυτική στο σημείο τ***.

Είναι φανερό ότι, μια δυναμοσειρά $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(t-\tau)^n$ της οποίας οι συντελεστές c_n μηδενίζονται όταν $n > m$ ταυτίζεται με την πολυωνυμική συνάρτηση $\sum_{n=0}^{m} c_n(t-\tau)^n$. Κατά συνέπεια, οι συγκλίνουσες δυναμοσειρές μπορούν να θεωρηθούν γενίκευση των πολυωνυμικών συναρτήσεων. Μάλιστα, οι συγκλίνουσες δυναμοσειρές έχουν όλες τις ιδιότητες των πολυωνύμων που αναφέραμε νωρίτερα:

(i) Προσδιορίζονται μονοσήμαντα από την ακολουθία των συντελεστών τους $\{c_n\}$:

Αν $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t-\tau)^n$, $g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(t-\tau)^n$ και $c_n = d_n$, τότε $f(t) = g(t)$.

(ii) Ανήκουν στην κλάση $C^{\infty}(I)$: Δηλαδή, η συνάρτηση $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t-\tau)^n$, $t \in I$, έχει παραγώγους κάθε τάξης, οι οποίες, μάλιστα, υπολογίζονται παραγωγίζοντας τη σειρά όρο προς όρο

(30) $$f^{(k)}(t) = \sum_{n=k}^{\infty} n\,(n-1)\cdots(n-k+1)\, c_n\, t^{n-k}\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Συνακόλουθα

(31) $$c_n = \frac{1}{n!}\, f^{(n)}(0).$$

(iii) Προστίθενται και πολλαπλασιάζονται όπως τα πολυώνυμα: Αν, σε μια γειτονιά I του τ, οι δυναμοσειρές $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (t-\tau)^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} d_n (t-\tau)^n$ συγκλίνουν στις συναρτήσεις $f(t)$ και $g(t)$, αντίστοιχα, τότε

(32) $$f(t) + g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n + d_n)\,(t-\tau)^n,$$

(33) $$f(t)\, g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n (t-\tau)^n, \qquad \gamma_n = \sum_{j=0}^{n} c_j\, d_{n-j}$$

Η πρώτη από αυτές τις ιδιότητες έχει την ακόλουθη, σημαντική για μας, συνέπεια: Ας υποθέσουμε ότι μια ΔΕ επιδέχεται ως λύση μια συνάρτηση που ορίζεται από κάποια συγκλίνουσα δυναμοσειρά. Τότε, για να βρούμε την λύση, αρκεί η ίδια η ΔΕ να μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε το σύνολο των συντελεστών $\{c_n\}$. Εδώ ακριβώς στηρίζεται η λεγόμενη ***μέθοδος των σειρών*** για την επίλυση ΔΕ, την οποία θα μελετήσουμε αναλυτικά σε ειδικό κεφάλαιο.

Ανάπτυγμα Taylor

Όπως σημειώσαμε νωρίτερα, κάθε δυναμοσειρά, που συγκλίνει σε κάποιο διάστημα I γύρω από το κέντρο της, ορίζει μια συνάρτηση κλάσης $C^{\infty}(I)$. Η έννοια του αναπτύγματος Taylor αφορά την αντίστροφη κατασκευή: Ξεκινώντας από μια γνωστή συνάρτηση $u(t)$, $t \in I$, η οποία ανήκει στην κλάση $C^{\infty}(I)$, να βρούμε μια δυναμοσειρά η οποία συγκλίνει στην $u(t)$. Θεμέλιο αυτής της κατασκευής αποτελούν τα πολυώνυμα και το θεώρημα, τα οποία επίσης φέρουν το όνομα του Taylor.

Για να θυμηθούμε τις παραπάνω έννοιες, ας υποθέσουμε ότι στο σημείο $\tau \in I$, η $u(t)$, $t \in I$, έχει παράγωγο μέχρι και τάξης m, τουλάχιστον. Τότε μπορούμε να ορίσουμε κάθε μια από τις ακόλουθες συναρτήσεις

(34) $$T_{u,j}(t-\tau) := \sum_{k=0}^{j} \frac{1}{k!}\, u^{(k)}(\tau)\,(t-\tau)^k\,, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, m.$$

Προφανώς, η συνάρτηση $T_{u,j}(t-\tau)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού j στην ανεξάρτητη μεταβλητή t. Είναι ακριβώς αυτό που ονομάζεται *πολυώνυμο Taylor βαθμού j της $u(t)$ (με κέντρο το σημείο τ)*:

Παράδειγμα

Ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \le 0 \\ 1 + t^3, & t \ge 0 \end{cases}$$

Από τον τύπο της εύκολα συνάγεται ότι

$$u'(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 3\,t^2, & t \geq 0 \end{cases} \qquad u''(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 6\,t, & t \geq 0 \end{cases}$$

$$u^{(3)}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 6, & t > 0 \end{cases} \qquad u^{(j)}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 0, & t > 0 \end{cases}, \quad j = 4,\ 5,\ \ldots$$

Αυτό σημαίνει ότι η $u(t)$ έχει παράγωγο κάθε τάξης σε όλα τα σημεία του πεδίου ορισμού της, εκτός από το $t = 0$. Σ' αυτό το σημείο υπάρχουν οι παράγωγοι της $u(t)$ μέχρι και δεύτερης τάξης, μόνο.

Συνακόλουθα, αν για κέντρο επιλέξουμε το σημείο $\tau = 0$, τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε μόνο τα εξής πολυώνυμα Taylor της πιο πάνω συνάρτησης:

$$T_{u,0}(t) = 1, \qquad T_{u,1}(t) = 1, \qquad T_{u,2}(t) = 1.$$

Αντίθετα, αν για κέντρο επιλέξουμε ένα σημείο $\tau \neq 0$, τότε μπορούμε να κατασκευάσουμε το αντίστοιχο πολυώνυμο Taylor οποιουδήποτε βαθμού. Αναλυτικότερα,

(i) Αν $\tau < 0$, τότε $T_{u,j}(t - \tau) = 1$, για κάθε $j \geq 0$.

(ii) Αν $\tau > 0$, τότε

$$T_{u,0}(t - \tau) = 1 + \tau^3,$$

$$T_{u,1}(t - \tau) = 1 + \tau^3 + 3\,\tau^2 (t - \tau) = 1 - 2\,\tau^3 + 3\,\tau^2\,t$$

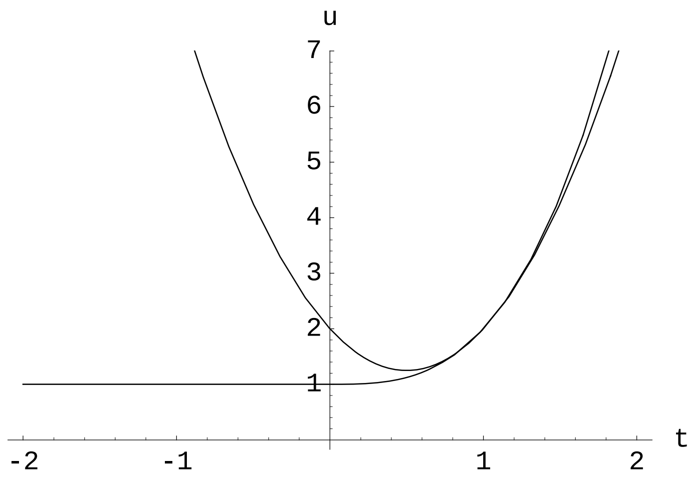
$$T_{u,2}(t - \tau) = 1 + \tau^3 + 3\,\tau^2 (t - \tau) + \frac{1}{2!}\,6\,\tau\,(t - \tau)^2 = 1 + \tau^3 - 3\,\tau^2\,t + 3\,\tau\;t^2$$

$$T_{u,j}(t - \tau) = 1 + \tau^3 + 3\,\tau^2 (t - \tau) + \frac{1}{2!}\,6\,\tau\,(t - \tau)^2 + \frac{1}{3!}\,6\,(t - \tau)^3 = 1 + t^3, \quad j \geq 3.$$

Στο επόμενο σχήμα δείχνουμε τα γραφήματα της ίδιας της $u(t)$ και του πολυώνυμου Taylor $T_{u,2}(t - 1)$. Από τους πιο πάνω τύπους έπεται ότι

$$T_{u,2}(t - 1) = \left(1 + \tau^3 - 3\,\tau^2\,t + 3\,\tau\;t^2\right)_{\tau=1} = 2 - 3\,t + 3\;t^2.$$

Αυτό σημαίνει ότι, η καμπύλη που αντιστοιχεί στο τριώνυμο Taylor $T_{u,2}(t - 1)$ είναι μια παραβολή. Το σχήμα δείχνει καθαρά ότι, όσο η μεταβλητή t παραμένει στη γειτονιά του σημείου $t = 1$, η συνάρτηση $T_{u,2}(t - 1)$ δεν διαφέρει και πολύ από την αρχική συνάρτηση $u(t)$.



Το ακόλουθο θεώρημα εκφράζει αυστηρά και γενικά αυτό που μόλις παρατηρήσαμε στο σχήμα και, στην ουσία, αποτελεί τη γενίκευση του θεωρήματος μέσης τιμής.

Θεώρημα Taylor

Ας υποθέσουμε ότι η παράγωγος τάξης $n+1$, $u^{(n+1)}$, της συνάρτησης u υπάρχει σε κάθε σημείο του κλειστού διαστήματος I που έχει ως άκρα τους αριθμούς τ, t. (Αυτό σημαίνει ότι $I = [\tau, t]$ αν το $\tau < t$, αλλά $I = [t, \tau]$ αν το $\tau > t$).

Τότε υπάρχει ένας αριθμός t_0 ανάμεσα στους τ και t, τέτοιος ώστε

(35) $$u(t) - T_{u,n}(t-\tau) = \frac{1}{(n+1)!}\, u^{(n+1)}(t_0)\, (t-\tau)^{n+1},$$

όπου $T_{u,n}(t-\tau)$ το πολυώνυμο Taylor βαθμού n της $u(t)$ με κέντρο το σημείο τ.

Με άλλα λόγια, το πολυώνυμο Taylor $T_{u,n}(t-\tau)$ μπορεί να θεωρηθεί ως προσέγγιση της συνάρτησης $u(t)$. Ακριβέστερα, η ποσότητα που θα παραλείψουμε, αν, αντί για τον αριθμό $u(t)$, χρησιμοποιήσουμε τον $T_{u,n}(t-\tau)$ είναι ίση με

(36) $$R_{u,n}(t-\tau) := \frac{1}{(n+1)!}\, u^{(n+1)}(t_0)\, (t-\tau)^{n+1}$$

Γι' αυτό, η $R_{u,n}(t-\tau)$ ονομάζεται *υπόλοιπο* (*στη μορφή Lagrange* (Λαγκράνζ)) *της* $u(t)$.

Πόρισμα

Ας υποθέσουμε ότι η $u^{(n+1)}(t)$ είναι φραγμένη στο διάστημα I, δηλαδή ότι υπάρχει σταθερή M τέτοια που $|u^{(n+1)}(t_0)| \leq M$, για κάθε $t_0 \in I$. Τότε,

(37) $$\left| R_{u,n}(t-\tau) \right| \leq \frac{1}{(n+1)!}\, M \left| t-\tau \right|^{n+1}$$

και άρα

(38) $$\lim_{t\to\tau} \frac{R_{u,n}(t-\tau)}{(t-\tau)^n} = 0.$$

Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι η συνάρτηση $u(t)$, $t \in I$, ανήκει στην κλάση $C^{\infty}(I)$. Τότε, τα πολυώνυμα Taylor $T_{u,n}(t-\tau)$, $\tau \in I$, ορίζονται γιά κάθε $n \in \{0\} \bigcup \mathbb{N}$. Σ' αυτή την περίπτωση έχει νόημα να εξετάσουμε αν το $\lim_{n\to\infty} R_{u,n}(t-\tau)$ υπάρχει. Αν διαπιστώσουμε ότι

(39) $$\lim_{n\to\infty} R_{u,n}(t-\tau) = 0,$$

τότε, με βάση την (35), θα συμπεράνουμε ότι,

(40) $$u(t) = \lim_{n\to\infty} T_{u,n}(t-\tau) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\, u^{(k)}(\tau)\,(t-\tau)^k\ .$$

Η $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\, u^{(k)}(\tau)\,(t-\tau)^k$ ονομάζεται *σειρά Taylor της* $C^{\infty}(I)$ *συνάρτησης* $u(t)$, $t \in I$, (*με κέντρο το σημείο* $\tau \in I$).

Όταν ισχύει η (39), οπότε η αντίστοιχη σειρά Taylor συγκλίνει στην $u(t)$, $t \in I$, τότε λέμε ότι η συνάρτηση $u(t)$ είναι *αναλυτική στο σημείο* τ. Μια συνάρτηση λέγεται (σκέτα) *αναλυτική* αν είναι αναλυτική σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της.

Παράδειγμα

(i) ΄Οπως γνωρίζουμε, η συνάρτηση

$$u(t) = e^t, \quad t \in \mathbb{R},$$

ανήκει στην κλάση $C^{\infty}(\mathbb{R})$. Μάλιστα, για κάθε φυσικό αριθμό n, η παράγωγος τάξης n της e^t είναι ίδια με την e^t: $u^{(n)}(t) = u(t)$. Συνεπώς,

(41) $$R_{u,n}(t-\tau) := \frac{1}{(n+1)!}\, u^{(n+1)}(t_0)\,(t-\tau)^{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}\, u(t_0)\,(t-\tau)^{n+1}$$

Από την άλλη, μπορεί ν' αποδειχτεί ότι, για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό x,

(42) $$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

΄Αρα,

(43) $$\lim_{n\to\infty} R_{u,n}(t-\tau) = 0.$$

οπότε

(44) $$e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\, e^{\tau}\,(t-\tau)^k.$$

Αφού αυτό το ανάπτυγμα ισχύει για κάθε $\tau \in \mathbb{R}$, έπεται ότι η συνάρτηση e^t, $t \in \mathbb{R}$, είναι αναλυτική.

Ειδικότερα, για $\tau = 0$, η (44) γίνεται

(45) $$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, t^n.$$

Με τον ίδιο τρόπο καταλήγουμε στην αναπαράσταση

(46) $$e^{-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\, t^n.$$

(ii) Και οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις $\cos t$, $\sin t$ ανήκουν στην κλάση $C^\infty(\mathbb{R})$. Η παράγωγός τους τάξης n στο σημείο $t = 0$ υπολογίζεται εύκολα, πράγμα που οδηγεί στις ακόλουθες αναπαραστάσεις.

(47) $$\cos t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} t^{2n}, \qquad \sin t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{2n+1}.$$

Το ίδιο εύκολα αποδείχνεται ότι και οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι αναλυτικές σε όλη την πραγματική ευθεία.

(iii) Είναι αυτονόητο ότι κάθε πολυωνυμική συνάρτηση είναι αναλυτική στον $\mathbb{R}$.

(iv) Η συνάρτηση

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \le 0 \\ 1 + t^3, & t \ge 0 \end{cases}$$

που εξετάσαμε σε προηγούμενο παράδειγμα είναι αναλυτική στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, \infty)$, όχι όμως και στο σημείο $t = 0$.

(v) Βέβαια, η προηγούμενη συνάρτηση δεν θα μπορούσε να είναι αναλυτική, αφού δεν ανήκει στην κλάση $C^\infty(\mathbb{R})$. Για να πειστεί ότι, οι συναρτήσεις που είναι αναλυτικές στην πραγματική ευθεία αποτελούν ένα γνήσιο υποσύνολο των $C^\infty(\mathbb{R})$, καλούμε τον αναγνώστη να αποδείξει ότι η συνάρτηση

$$u(t) = \begin{cases} e^{1/(1-t^2)}, & |t| < 1 \\ 0, & t \notin (-1, 1) \end{cases}$$

ανήκει στην κλάση $C^\infty(\mathbb{R})$, αλλά δεν είναι αναλυτική (στα σημεία $t = \pm 1$).

3. Η μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων του Picard

3. 1. Ισοδυναμία του ΠΑΤ με Ολοκληρωτική εξίσωση

Το πρόβλημα που θέλουμε να αντιμετωπίσουμε είναι το εξής:

Δίνεται μια συνάρτηση $F(t, x)$ με πεδίο ορισμού κάποια περιοχή (=ανοιχτό και συνεκτικό υποσύνολο) Ω του $\mathbb{R}^2$ και το ζευγάρι των αριθμών $(t_0, x_0) \in \Omega$. Ζητιέται μια συνάρτηση $x(t)$ με πεδίο ορισμού ένα διάστημα I που περιέχει το σημείο t_0 κι η οποία έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

α) Αποτελεί λύση της ΔΕ

(1) $$x' = F(t, x),$$

β) Στο σημείο t_0 παίρνει την προκαθορισμένη τιμή x_0:

(2) $$x(t_0) = x_0.$$

Ως αφετηρία της ανάλυσής μας θα πάρουμε και πάλι το γραμμικό πρόβλημα και, για ευκολία, θα υποθέσουμε αρχικά ότι

(3) $$t_0 = x_0 = 0.$$

΄Οταν, λοιπόν,

(4) $$F(t, x) = f(t) + g(t)\, x,$$

και οι συναρτήσεις $f(t)$, $g(t)$ είναι συνεχείς στο διάστημα I μέσα στο οποίο βρίσκεται το σημείο $t = 0$, τότε το ΠΑΤ

(5) $$x' = F(t, x), \qquad x(0) = 0,$$

έχει μία μόνο λύση, την

(6) $$x(t) = \int_0^t P(t, \xi)\, f(\xi)\, d\,\xi, \quad t \in I, \qquad P(t, \xi) := \exp\Big[\int_\xi^t g(\zeta)\, d\,\zeta\Big].$$

Επειδή από διάφορα παραδείγματα γίνεται φανερό ότι ο τελευταίος τύπος δεν μπορεί να γενικευτεί στις περιπτώσεις όπου η ΔΕ δεν είναι γραμμική, θέλουμε να διερευνήσουμε εναλλακτικούς τρόπους ανάλυσης του ίδιου ΠΑΤ (5). Αν υπάρχουν, μπορεί κάποιος από αυτούς να επιδέχεται γενίκευση που ισχύει και στο μη γραμμικό πρόβλημα.

Για το σκοπό αυτό, ας θυμηθούμε ότι, στην ακόμα απλούστερη περίπτωση όπου η $g(t)$ μηδενίζεται, η λύση του αντίστοιχου ΠΑΤ $x' = f(t)$, $x(0) = 0$, δίνεται από το θεμελιώδες θεώρημα του διαφορικού λογισμού: $x(t) = \int_0^t f(\xi)\, d\,\xi$

Αν, λοιπόν, μηχανικά γενικεύσουμε τον τελευταίο τύπο για την περίπτωση του ΠΑΤ

(7) $$x' = f(t) + g(t)\, x, \quad x(0) = 0,$$

θα καταλήξουμε στην έκφραση

(8) $$x(t) = \int_0^t [f(\xi) + g(\xi)\, x(\xi)]\, d\,\xi.$$

Τώρα όμως αντιμετωπίζουμε το εξής πρόβλημα. Το ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος της (8) δεν μπορεί να υπολογιστεί, γιατί η συνάρτηση $x(t)$ είναι άγνωστη. Ωστόσο, αυτό δεν είναι και τόσο σημαντικό πρόβλημα. Την ίδια κατάσταση αντιμετωπίσαμε νωρίτερα, όταν δεν ήταν δυνατό να υπολογίσουμε ρητά το ολοκλήρωμα $\int_0^t f(\xi)\, d\,\xi$ με βάση τις γνωστές συναρτήσεις. Τότε αρκούσε η υπόθεση ότι η προς ολοκλήρωση συνάρτηση $f(t)$ ήταν συνεχής για να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι το ολοκλήρωμα υπάρχει.

Για να γίνουμε σαφέστεροι, ας υποθέσουμε ότι, το ΠΑΤ (7) έχει λύση κι ότι αυτή η λύση δίνεται από την συνάρτηση $x(t)$. Αυτό σημαίνει ότι, σε κάθε σημείο ξ του διαστήματος I,

(9) $$x'(\xi) = f(\xi) + g(\xi)\, x(\xi).$$

Αφού είναι διαφορίσιμη, η συνάρτηση $x(\xi)$ είναι αναγκαστικά και συνεχής. ΄Ομως, το ίδιο έχουμε υποθέσει ότι ισχύει και για τις $f(\xi)$, $g(\xi)$. ΄Αρα, η συνάρτηση $f(\xi) + g(\xi)\, x(\xi)$ είναι συνεχής στο διάστημα I. Αλλά τότε, το ολοκλήρωμα $\int_0^t [f(\xi) + g(\xi)\, x(\xi)]\, d\,\xi$ υπάρχει, για κάθε $t \in I$, και είναι ίσο προς το $\int_0^t x'(\xi)\, d\,\xi$.

Από την άλλη μεριά,

(10) $$\int_0^t x'(\xi)\, d\,\xi = x(t) - x(0) = x(t),$$

λόγω της αρχικής συνθήκης $x(0) = 0$. Συνεπώς

(11) $$x(t) = \int_0^t [f(\xi) + g(\xi)\, x(\xi)]\, d\,\xi, \quad t \in I.$$

Με άλλα λόγια, αποδείξαμε την ακόλουθη

Πρόταση

Αν η συνάρτηση $x(t)$, $t \in I$, αποτελεί λύση του ΠΑΤ (7), τότε σε κάθε σημείο του διαστήματος I ισχύει η σχέση (11).

Ας ξεχάσουμε, τώρα, τον τρόπο με τον οποίο καταλήξαμε στην (11) κι ας υποθέσουμε ότι τα μόνα γνωστά στοιχεία αυτής της σχέσης είναι οι συναρτήσεις $f(t)$ και $g(t)$. Τότε η (11) αποκτά το νόημα μιας εξίσωσης με άγνωστη τη συνάρτηστη $x(t)$. Με βάση τον ορισμό που δώσαμε στην Εισαγωγή, είναι μια γραμμική ολοκληρωτική εξίσωση Volterra. Αυτό φαίνεται καθαρότερα, αν την γράψουμε στη μορφή

(12) $$\int_0^t g(\xi)\, x(\xi)\, d\,\xi - x(t) = h(x), \qquad h(x) := -\int_0^t f(\xi)\, d\,\xi, \quad t \in I.$$

Ξεκινάμε, λοιπόν, από την ολοκληρωτική εξίσωση (11), υποθέτοντας ότι έχει ως λύση τη συνεχή συνάρτηση $x(t)$. Τότε, από το θεμελιώδες θεώρημα του διαφορικού λογισμού αμέσως έπεται το ακόλουθο συμπέρασμα: Το δεξί μέλος της (11) είναι μια διαφορίσιμη συνάρτηση που μηδενίζεται στο σημείο $t = 0$ κι έχει ως παράγωγο την $f(t) + g(t)\, x(t)$. Προφανώς, το ίδιο θα ισχύει και για το αριστερό μέλος της, οπότε η συνάρτηση $x(t)$ έχει τις εξής ιδιότητες:

(13) $$x'(t) = f(t) + g(t)\, x(t), \qquad x(0) = 0.$$

Αλλά, αυτό σημαίνει ότι ισχύει και η ακόλουθη

Πρόταση

Αν η συνάρτηση $x(t)$, $t \in I$, αποτελεί συνεχή λύση της ολοκληρωτικής εξίσωσης (12), τότε είναι λύση και του ΠΑΤ (7).

Από τις πιο πάνω παρατηρήσεις έπεται ότι η ολοκληρωτική εξίσωση (12) είναι ισοδύναμη με το ΠΑΤ (7). Συνακόλουθα, για να δείξουμε ότι το ΠΑΤ έχει μοναδική λύση, αρκεί να αποδείξουμε ότι αυτό ισχύει για την ολοκληρωτική εξίσωση (7).

Αξίζει, τώρα, να σημειώσουμε ότι, η απόδειξη της ισοδυναμίας του ΠΑΤ (7) προς την ολοκληρωτική εξίσωση (12) δεν στηρίχτηκε στην ειδική μορφή (4) της συνάρτησης $F(t, x)$, αλλά αποκλειστικά και μόνο στο γεγονός ότι η πιο πάνω συνάρτηση είναι συνεχής στο υποσύνολο $\Omega = I \times \mathbb{R}$ του $\mathbb{R}^2$. Ούτε η επιλογή $(t_0, x_0) = (0, 0)$ έπαιξε κανένα ρόλο. Άρα, η ισοδυναμία του ΠΑΤ

$$x' = F(t, x), \quad x(t_0) = x_0,$$

προς την ολοκληρωτική εξίσωση (ΟΕ)

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(\xi, x(\xi))\, d\,\xi$$

θα πρέπει να ισχύει σε κάθε περίπτωση όπου η $F(t, x)$ είναι συνεχής σε μια περιοχή Ω του $\mathbb{R}^2$. Πραγματικά, αρκεί να επαναλάβουμε τα ίδια επιχειρήματα, για να αποδείξουμε το ακόλουθο

Θεώρημα

Αν η συνάρτηση $F(t, x)$ είναι συνεχής στην περιοχή Ω του $\mathbb{R}^2$ και το σημείο $(t_0, x_0) \in \Omega$, τότε υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία ανάμεσα στις συνεχείς λύσεις της ΟΕ

(14) $$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(\xi, x(\xi))\, d\xi$$

και τις λύσεις του ΠΑΤ

(15) $$x' = F(t, x), \quad x(t_0) = x_0.$$

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση $x(t)$ αποτελεί συνεχή λύση της ΟΕ (14). Αυτό σημαίνει ότι

α) Υπάρχει ένα ανοιχτό διάστημα, $I_{(t_0,x_0)}$, γύρω από το σημείο t_0 του άξονα t, τέτοιο που η καμπύλη $(t, x(t))$, $t \in I_{(t_0,x_0)}$, να περιέχεται στο πεδίο ορισμού Ω της $F(t, x)$ και

β) Σε κάθε σημείο του διαστήματος $I(t_0, x_0)$ ισχύει η σχέση (14).

Αλλά τότε, η συνάρτηση $\varphi(t) := F(t, x(t))$ είναι συνεχής στο διάστημα $I_{(t_0,x_0)}$. Άρα, από το θεμελιώδες θεώρημα του διαφορικού λογισμού έπεται ότι η

(16) $$\Phi(t) := \int_{t_0}^{t} \varphi(\xi)\, d\xi = \int_{t_0}^{t} F(\xi, x(\xi))\, d\xi$$

είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο του $I_{(t_0,x_0)}$ και μηδενίζεται στο σημείο t_0. Συγκεκριμένα,

(17) $$\Phi'(t) = \varphi(t) \equiv F(t, x(t)).$$

Σύμφωνα με την (14), $x(t) = x_0 + \Phi(t)$. Άρα η λύση $x(t)$ της ΟΕ είναι διαφορίσιμη στο διάστημα $I_{(t_0,x_0)}$ με παράγωγο ίση προς $x'(t) = F(t, x(t))$. Επιπλέον, $x(t_0) = x_0$. Άρα, η $x(t)$, $t \in I(t_0, x_0)$, αποτελεί λύση και του ΠΑΤ (15).

Για ν' αποδείξουμε το αντίστροφο, ξεκινάμε υποθέτοντας ότι η $x(t)$ αποτελεί λύση του ΠΑΤ (15). Αυτό σημαίνει ότι

α) Υπάρχει ένα ανοιχτό διάστημα, $I_{(t_0,x_0)}$, γύρω από το σημείο t_0 του άξονα t, όπου η συνάρτηση $x(t)$ είναι διαφορίσιμη,

β) Η καμπύλη $(t, x(t))$, $t \in I_{(t_0,x_0)}$, περιέχεται στο πεδίο ορισμού Ω της $F(t, x)$ και

γ) Σε κάθε σημείο του διαστήματος $I_{(t_0,x_0)}$ ισχύει η σχέση (15) και στο t_0 η $x(t)$ παίρνει την τιμή x_0.

Αφού, λοιπόν, η $x(t)$ είναι διαφορίσιμη, θα είναι και συνεχής στο $I_{(t_0,x_0)}$. Επειδή και η $F(t, x)$ είναι συνεχής στην περιοχή Ω, η συνάρτηση $\varphi(t) := F(t, x(t))$ είναι συνεχής και άρα ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό διάστημα που περιέχεται στο $I_{(t_0,x_0)}$. Με άλλα λόγια, το ολοκλήρωμα

$$\Psi(t) := \int_{t_0}^{t} \varphi(\xi)\, d\xi = \int_{t_0}^{t} F(\xi, x(\xi))\, d\xi$$

υπάρχει για κάθε $t \in I_{(t_0,x_0)}$. Από την υπόθεση ότι $x'(t) = F(t, x(t))$ έπεται ότι αυτό το ολοκλήρωμα θα είναι ίσο με το $\int_{t_0}^{t} x(\xi)\, d\xi$. Αλλά, στο t_0, η $x(t)$ είναι ίση με x_0. Άρα,

$$\int_{t_0}^{t} x(\xi)\, d\xi = x(t) - x(t_0) = x(t) - x_0.$$

Συνεπώς,

$$x(t) - x_0 = \int_{t_0}^{t} F(\xi, x(\xi))\, d\,\xi,$$

πράγμα που αποδείχνει ότι η λύση $x(t)$ του ΠΑΤ (15) είναι και λύση της ΟΕ (14) στο διάστημα $I_{(t_0,x_0)}$.

3. 2. Η γραμμική περίπτωση

Όπως τονίσαμε επανηλειμμένα, η λύση του γραμμικού ΠΑΤ

(1) $$x'(t) = f(t) + g(t)\, x(t), \quad t \in I, \qquad x(0) = 0,$$

δίνεται ρητά από τον τύπο

(2) $$x(t) = \int_0^t e^{G(t)-G(\xi)}\, f(\xi)\, d\,\xi, \qquad G(t) := \int_0^t g(\xi)\, d\,\xi.$$

Από την ισοδυναμία αυτού του ΠΑΤ προς την ολοκληρωτική εξίσωση (ΟΕ)

(3) $$x(t) = \int_0^t [f(\xi) + g(\xi)\, x(\xi)]\, d\,\xi, \quad t \in I,$$

έπεται ότι ο τύπος (2) δίνει τη λύση και αυτής της εξίσωσης.

Πραγματικά, με απλή αντικακατάσταση, βρίσκουμε ότι

(4) $$\begin{aligned}\int_0^t g(\xi)\, x(\xi)\, d\,\xi &= \int_0^t g(\xi)\Big[\int_0^{\xi} e^{G(\xi)-G(\zeta)}\, f(\zeta)\, d\,\zeta\Big]\, d\,\xi \\ &= \int_0^t g(\xi)\, e^{G(\xi)}\Big[\int_0^{\xi} e^{-G(\zeta)}\, f(\zeta)\, d\,\zeta\Big]\, d\,\xi \\ &= \int_0^t G'(\xi)\, e^{G(\xi)}\Big[\int_0^{\xi} e^{-G(\zeta)}\, f(\zeta)\, d\,\zeta\Big]\, d\,\xi \\ &= \int_0^t [e^{G(\xi)}]'\Big[\int_0^{\xi} e^{-G(\zeta)}\, f(\zeta)\, d\,\zeta\Big]\, d\,\xi.\end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας κατά μέρη, καταλήγουμε στην σχέση

(5) $$\begin{aligned}\int_0^t g(\xi)\, x(\xi)\, d\,\xi &= e^{G(t)}\int_0^t e^{-G(\zeta)}\, f(\zeta)\, d\,\zeta - \int_0^t e^{G(\xi)}\, e^{-G(\xi)}\, f(\xi)\, d\,\xi \\ &= e^{G(t)}\int_0^t e^{-G(\zeta)}\, f(\zeta)\, d\,\zeta - \int_0^t f(\xi)\, d\,\xi.\end{aligned}$$

Συνεπώς,

(6) $$\int_0^t f(\xi)\, d\,\xi + \int_0^t g(\xi)\, x(\xi)\, d\,\xi = e^{G(t)}\int_0^t e^{-G(\zeta)}\, f(\zeta)\, d\,\zeta = x(t),$$

κι έτσι επαληθεύεται το γεγονός ότι η (2) αποτελεί λύση της ΟΕ (3). Επιπλέον, το αντίστοιχο θεώρημα μας διαβεβαιώνει ότι η λύση του ΠΑΤ (1) είναι μοναδική. Συνεπώς, η συνάρτηση

$$x(t) = \int_0^t e^{G(t)-G(\xi)}\, f(\xi)\, d\,\xi, \qquad G(t) := \int_0^t g(\xi)\, d\,\xi, \quad t \in I,$$

αποτελεί και τη μόνη συνεχή λύση της παραπάνω ΟΕ.

Ωστόσο, το κύριο ζήτημα είναι αν μπορούμε να βρούμε τη λύση της ΟΕ (3), χωρίς να ξέρουμε τη λύση του ισοδύναμου ΠΑΤ. Πραγματικά, αυτό είναι δυνατό και η αντίστοιχη τεχνική ονομάζεται ***μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων του Picard*** (Πικάρ). Το όνομά της οφείλεται στο γεγονός ότι η αναζητούμενη λύση αποτελεί το όριο μιας ακολουθίας συναρτήσεων, κάθε μέλος της οποίας κατασκευάζεται από το προηγούμενο, και αποτελεί όλο και καλύτερη προσέγγιση στη συνάρτηση-λύση.

Συγκεκριμένα, ας θεωρήσουμε την ακολουθία των συναρτήσεων $\{x_j(t)\}$, $t \in I$, που ορίζεται με τον ακόλουθο τρόπο:

(7)
$$\begin{aligned} x_0(t) &= 0 \\ x_1(t) &= \int_0^t f(\xi)\, d\xi, \\ x_2(t) &= \int_0^t [f(\xi) + g(\xi)\, x_1(\xi)]\, d\xi, \\ x_n(t) &= \int_0^t [f(\xi) + g(\xi)\, x_{n-1}(\xi)]\, d\xi, \qquad n = 3, 4, \ldots \end{aligned}$$

Είναι φανερό ότι κάθε μέλος της ακολουθίας $\{x_j(t)\}$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, είναι μια διαφορίσιμη συνάρτηση που μηδενίζεται στο $t = 0$. Αν αποδείξουμε ότι, καθώς το $n \to \infty$, η ακολουθία συγκλίνει σε μια συνάρτηση $x(t)$ σε όλο το διάστημα I, τότε θα έχουμε επιτύχει το σκοπό μας.

Ας υποθέσουμε προς το παρόν ότι $t > 0$. Τότε, από το γεγονός ότι οι $f(\xi)$, $g(\xi)$ είναι συνεχείς στο συμπαγές διάστημα $[0, t]$, έπεται ότι αυτές οι συναρτήσεις είναι φραγμένες και μάλιστα φτάνουν τη μέγιστη τιμή τους σε ένα ή περισσότερα σημεία του πιο πάνω διαστήματος. Το ίδιο, προφανώς, ισχύει και για τις $|f(\xi)|$, $|g(\xi)|$. Με άλλα λόγια, οι αριθμοί

(8)
$$M := \max_{\xi \in [0,t]} |f(\xi)|, \qquad k := \max_{\xi \in [0,t]} |g(\xi)|,$$

υπάρχουν και

(9)
$$|f(\xi)| \le M, \qquad |g(\xi)| \le k, \qquad \xi \in [0, t].$$

Συνακόλουθα

(10)
$$\begin{aligned} |x_1(t) - x_0(t)| &= \left| \int_0^t f(\xi)\, d\xi \right| \le M \int_0^t d\xi = M\, t \\ |x_2(t) - x_1(t)| &= \left| \int_0^t g(\xi)\, [x_1(\xi) - x_0(\xi)]\, d\xi \right| \le k \int_0^t \left| x_1(\xi) - x_0(\xi) \right| d\xi \\ &\le k \int_0^t M\, \xi\, d\xi = k\, M\, \tfrac{t^2}{2} \\ |x_3(t) - x_2(t)| &= \left| \int_0^t g(\xi)\, [x_2(\xi) - x_1(\xi)]\, d\xi \right| \le k \int_0^t \left| x_2(\xi) - x_1(\xi) \right| d\xi \\ &\le k \int_0^t k\, M\, \tfrac{\xi^2}{2}\, d\xi = k^2\, M\, \tfrac{t^3}{3!} \end{aligned}$$

Τέλος, με επαγωγή, καταλήγουμε στη γενική εκτίμηση

(11)
$$|x_n(t) - x_{n-1}(t)| \le k^{n-1}\, M\, \tfrac{t^n}{n!}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Ισοδύναμα,

(12)
$$\left| \Delta x_n(t) \right| \le \tfrac{M}{k}\, \tfrac{(k\, t)^n}{n!}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

όπου

(13) $$\Delta x_n(t) := x_n(t) - x_{n-1}(t).$$

Η εκτίμηση (12) μας επιτρέπει να δείξουμε ότι η ακολουθία $\{x_j(t)\}$ συγκλίνει και μάλιστα ομοιόμορφα σε κάθε συμπαγές (κλειστό και φραγμένο) διάστημα που περιέχεται στο I. Συγκεκριμένα, ας θυμηθούμε αρχικά ότι η έκφραση $t^n / n!$ αποτελεί τον n-στό όρο της σειράς που συγκλίνει στην εκθετική συνάρτηση:

(14) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = e^t.$$

Συνακόλουθα, αν το r είναι ένας θετικός αριθμός, τέτοιος ώστε το διάστημα $[0, r]$ να περιέχεται στο I, τότε

(15) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{k} \frac{(k\,r)^n}{n!} = \frac{M}{k} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{M}{k} \frac{(k\,r)^n}{n!} - 1\right) = \frac{M}{k} (e^{k\,r} - 1).$$

Επιπλέον,

(16) $$\frac{(k\,r)^n}{n!} \geq \frac{(k\,t)^n}{n!}, \qquad t \in [0, r].$$

΄Αρα, η απόλυτη τιμή του n-στού όρου της σειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \Delta x_n(t)$ είναι μικρότερη από τον n-στό όρο της σειράς (14). Αλλά τότε, από το κριτήριο του Weierstrass έπεται ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \Delta x_n(t)$ συγκλίνει απόλυτα και ομοιόμορφα στο διάστημα $[0, r]$.

Από την άλλη,

(17) $$\begin{aligned} x_n(t) &= x_n(t) - x_{n-1}(t) + x_{n-1}(t) = x_n(t) - x_{n-1}(t) + x_{n-1}(t) - x_{n-2}(t) + x_{n-2}(t) \\ &= [x_n(t) - x_{n-1}(t)] + [x_{n-1}(t) - x_{n-2}(t)] + \ldots + [x_2(t) - x_1(t)] + x_1(t) \\ &= [x_n(t) - x_{n-1}(t)] + [x_{n-1}(t) - x_{n-2}(t)] + \ldots + [x_2(t) - x_1(t)] + [x_1(t) - x_0(t)], \end{aligned}$$

όπου, για να γράψουμε την τελευταία έκφραση, στηριχτήκαμε στην υπόθεση ότι $x_0(t) = 0$.

Ξαναγράφουμε την προηγούμενη σχέση στη μορφή

(18) $$x_n(t) = \sum_{j=1}^{n} [x_j(t) - x_{j-1}(t)] \equiv \sum_{j=1}^{n} \Delta x_j(t),$$

για να γίνει φανερό το εξής: O n-στός όρος της ακολουθίας $\{x_j(t)\}$ ταυτίζεται με το n-στό μερικό άθροισμα της σειράς $\sum_{j=1}^{\infty} \Delta x_j(t)$. Αφού λοιπόν η τελευταία συγκλίνει ομοιόμορφα, το ίδιο θα ισχύει και για την ακολουθία $\{x_j(t)\}$.

Η ομοιόμορφη σύγκλιση της ακολουθίας $\{x_n(t)\}$ που μόλις αποδείξαμε έχει δύο σημαντικά επακόλουθα. Πρώτον, αφού κάθε μια από τις συναρτήσεις $x_n(t)$ είναι συνεχής, το ίδιο θα ισχύει και για την

(19) $$x(t) := \lim_{n \to \infty} x_n(t).$$

Από την άλλη, οι συναρτήσεις

(20) $$G_n(\xi) := g(\xi)\, x_n(\xi), \quad \xi \in [0, r],$$

είναι συνεχείς και η ακολουθία $\{G_n(\xi)\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο διάστημα $[0, r]$. Συγκεκριμένα,

(21) $$\lim_{n\to\infty} G_n(\xi) = g(\xi)\, x(\xi), \qquad \xi \in [0, r].$$

Με τη σειρά της, η ομοιόμορφη σύγκλιση της ακολουθίας $\{G_n(\xi)\}$ μας επιτρέπει να αλλάξουμε τη σειρά ολοκλήρωσης και υπολογισμού του ορίου, για να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι

(22) $$\lim_{n\to\infty} \int_0^t g(\xi)\, x_{n-1}(\xi)\, d\,\xi \equiv \lim_{n\to\infty} \int_0^t G_{n-1}(\xi)\, d\,\xi$$
$$= \int_0^t \lim_{n\to\infty} G_{n-1}(\xi)\, d\,\xi = \int_0^t g(\xi)\, x(\xi)\, d\,\xi\ .$$

Συνεπώς,

(23) $$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = \lim_{n\to\infty} \int_0^t [f(\xi) + g(\xi)\, x_{n-1}(\xi)]\, d\,\xi = \int_0^t [f(\xi) + g(\xi)\, x(\xi)]\, d\,\xi$$

Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση $x(t)$ στην οποία συγκλίνει η ακολουθία $\{x_n(t)\}$ αποτελεί λύση της ΟΕ (3).

Μένει να εξετάσουμε αν ΟΕ (3) έχει περισσότερες από μία λύσεις. Για να αντιμετωπίσουμε αυτό το πρόβλημα, υποθέτουμε ότι, εκτός από την $x(t)$, η (3) επιδέχεται ως λύση και την συνάρτηση $y(t)$. Με άλλα λόγια, υποθέτουμε ότι

(24) $$x(t) = \int_0^t [f(\xi) + g(\xi)\, x(\xi)]\, d\,\xi, \quad y(t) = \int_0^t [f(\xi) + g(\xi)\, y(\xi)]\, d\,\xi.$$

Τότε,

(25) $$x(t) - y(t) = \int_0^t g(\xi)\, [x(\xi) - y(\xi)]\, d\,\xi,$$

οπότε

(26) $$|\, x(t) - y(t)\,| = \left| \int_0^t g(\xi)\, [x(\xi) - y(\xi)]\, d\,\xi \right|$$
$$\le \int_0^t g(\xi) \left| x(\xi) - y(\xi) \right| d\,\xi \le M \int_0^t \left| x(\xi) - y(\xi) \right| d\,\xi.$$

Τώρα, η συνάρτηση

(27) $$z(t) := \int_0^t |\, x(\xi) - y(\xi)\,|\, d\,\xi, \quad t \ge 0$$

έχει τις εξής ιδιότητες: Είναι διαφορίσιμη, με παράγωγο ίση προς

(28) $$z'(t) = |\, x(t) - y(t)\,|,$$

και

(29) $$z(0) = 0, \quad z(t) > 0, \quad t > 0.$$

Άρα, η εκτίμηση

(30) $$\left| x(t) - y(t) \right| \le M \int_0^t \left| x(\xi) - y(\xi) \right| d\,\xi$$

γράφεται και σαν

(31) $$z'(t) \le M\, z(t).$$

Ισοδύναμα

(32) $$[e^{M\,t}\, z(t)]' \le 0.$$

Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη αυτής της ανισότητας και λαβαίνοντας υπόψη τις (29), συμπεραίνουμε ότι

(33) $$e^{M\,t}\,z(t) \leq 0, \quad t > 0.$$

Συνεπώς,

(34) $$z(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = y(t), \quad t \geq 0.$$

Με άλλα λόγια η λύση της ΟΕ (3) δεν επιδέχεται περισσότερες από μία λύσεις.

Παρατηρήσεις

1. Τα επιχειρήματα που χρησιμοποιήσαμε ισχύουν απαράλλαχτα και για το τμήμα $t < 0$ του διαστήματος I όπου ορίζονται οι συναρτήσεις $f(t)$, $g(t)$.

2. Το γενικότερο πρόβλημα όπου το αρχικό σημείο (t_0, x_0) δεν είναι το $(0, 0)$ αντιμετωπίζεται με την απλή αλλαγή συντεταγμένων:

(35) $$(t, x) \to (\upsilon, w) = (t - t_0, x - x_0).$$

Αυτό σημαίνει ότι η ακολουθία Picard $\{x_n(t)\}$ που συγκλίνει στη μοναδική λύση $x(t)$ του ΠΑΤ

(36) $$x' = f(t) + g(t)\,x, \quad t \in I, \qquad x(t_0) = x_0, \quad t_0 \in I,$$

δίνεται από τους τύπους

(37) $$\begin{aligned} x_0(t) &= x_0 \\ x_1(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\xi)\,d\,\xi, \\ x_n(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} [f(\xi) + g(\xi)\,x_{n-1}(\xi)]\,d\,\xi, \quad n = 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

Παράδειγμα

Πρόβλημα

Να λυθεί το ΠΑΤ

(38) $$x' = 2\,t + x, \qquad x(0) = 1,$$

με τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων του Picard.

Λύση

Προτού κατασκευάσουμε την ακολουθία Picard, αξίζει να υπολογίσουμε την απάντηση που μας δίνει ο γνωστός τύπος

(39) $$x(t) = e^{G(t)}\left[x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-G(\xi)}\,f(\xi)\,d\,\xi\right], \quad G(t) := \int_{t_0}^{t} g(\xi)\,d\,\xi, \quad t \in I.$$

Στην περίπτωσή μας, $f(t) = 2\,t$, $g(t) = 1$, $t_0 = 0$, $x_0 = 1$. Άρα,

(40) $$G(t) = \int_0^t 1\,d\,\xi = t,$$

(41) $$\int_{t_0}^{t} e^{-G(\xi)}\,f(\xi)\,d\,\xi = 2\int_0^t e^{-\xi}\,\xi\,d\,\xi = 2 - 2\,(t+1)\,e^{-t},$$

οπότε

(42) $$x(t) = 3\, e^t - 2\,(t+1)$$

Από την άλλη μεριά, ο τύπος (37) για τα μέλη της ακολουθίας Picard δίνει τα εξής αποτελέσματα:

(43)
$$\begin{aligned}
x_0(t) &= 1\\
x_1(t) &= 1 + \int_0^t (2\,t+1)\,d\,\xi = 1 + t + t^2,\\
x_2(t) &= 1 + t^2 + \int_0^t x_1(\xi)\,d\,\xi = 1 + t^2 + \int_0^t (1+\xi+\xi^2)\,d\,\xi\\
&= 1 + t^2 + t + \tfrac{1}{2}\,t^2 + \tfrac{1}{3}\,t^3 = 1 + t + \tfrac{3}{2}\,t^2 + \tfrac{1}{3}\,t^3\\
x_3(t) &= 1 + t^2 + \int_0^t x_2(\xi)\,d\,\xi = 1 + t^2 + \int_0^t (1+\xi+\tfrac{3}{2}\,\xi^2 + \tfrac{1}{3}\,\xi^3)\,d\,\xi\\
&= 1 + t^2 + (t + \tfrac{1}{2}\,t^2 + \tfrac{1}{2}\,t^3 + \tfrac{1}{3\cdot 4}\,t^4)\\
&= 1 + t + \tfrac{3}{2}\,t^2 + \tfrac{1}{2}\,t^3 + \tfrac{1}{3\cdot 4}\,t^4,\\
x_4(t) &= 1 + t^2 + \int_0^t (1+\xi+\tfrac{3}{2}\,\xi^2 + \tfrac{1}{2}\,\xi^3 + \tfrac{1}{3\cdot 4}\,\xi^4)\,d\,\xi =\\
&= 1 + t^2 + t + \tfrac{1}{2}\,t^2 + \tfrac{1}{2}\,t^3 + \tfrac{1}{2\cdot 4}\,t^3 + \tfrac{1}{3\cdot 4\cdot 5}\,t^5\\
&= 1 + t + \tfrac{3}{2}\,t^2 + \tfrac{1}{2}\,t^3 + \tfrac{1}{2\cdot 4}\,t^4 + \tfrac{1}{3\cdot 4\cdot 5}\,t^5\\
x_5(t) &= 1 + t^2 + \int_0^t (1+\xi+\tfrac{3}{2}\,\xi^2 + \tfrac{1}{2}\,\xi^3 + \tfrac{1}{2\cdot 4}\,\xi^4 + \tfrac{1}{3\cdot 4\cdot 5}\,\xi^5)\,d\,\xi\\
&= 1 + t^2 + (t + \tfrac{1}{2}\,t^2 + \tfrac{1}{2}\,t^3 + \tfrac{1}{2\cdot 4}\,t^4 + \tfrac{1}{2\cdot 4\cdot 5}\,t^5 + \tfrac{1}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\,t^6)\\
&= 1 + t + \tfrac{3}{2}\,t^2 + \tfrac{1}{2}\,t^3 + \tfrac{1}{2\cdot 4}\,t^4 + \tfrac{1}{2\cdot 4\cdot 5}\,t^5 + \tfrac{1}{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\,t^6
\end{aligned}$$

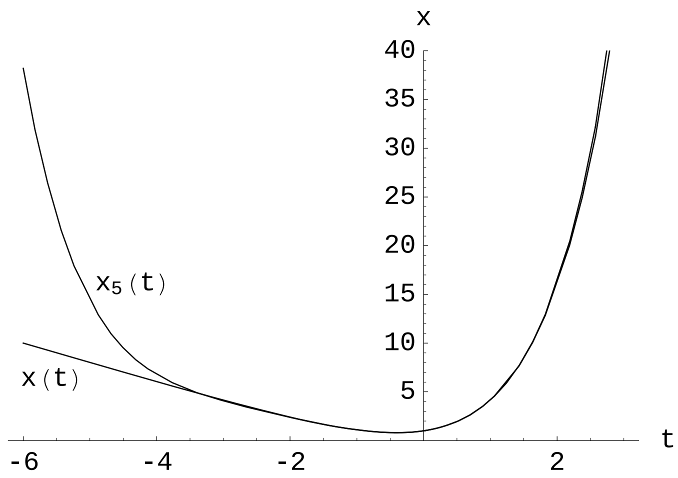
Για να συγκρίνουμε αυτά τα αποτελέσματα με την ακριβή λύση (42), θα πρέπει να θυμηθούμε ότι

(44) $$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = 1 + t + \frac{1}{2}\,t^2 + \frac{1}{2\cdot 3}\,t^3 + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}\,t^4 + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\,t^5 + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\,t^6 + \ldots$$

Συνεπώς,

(45) $$x(t) = 3\, e^t - 2\,(t+1) = 1 + t + \frac{3}{2}\,t^2 + \frac{1}{2}\,t^3 + \frac{1}{2\cdot 4}\,t^4 + \frac{1}{2\cdot 4\cdot 5}\,t^5 + \frac{1}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\,t^6 + \ldots,$$

Το συμπέρασμα της σύγκρισης είναι το αναμενόμενο: Όσο μεγαλύτερο είναι το n, τόσο καλύτερα η συνάρτηση $x_n(t)$ πλησιάζει την ακριβή λύση του ΠΑΤ. Στο επόμενο σχήμα γίνεται μια γραφική σύγκριση της προσέγγισης $x_5(t)$ στην ακριβή λύση (43). Είναι φανερό ότι, όσο πλησιέστερα προς το αρχικό σημείο $t = 0$ βρίσκεται η ανεξάρτητη μεταβλητή, τόσο εγγύτερα είναι και η συνάρτηση $x_5(t)$ στην $x(t) = 3\, e^t - 2\,(t+1)$.



Παράδειγμα

Πρόβλημα

Να λυθεί το ΠΑΤ

(46) $$x' = 5\cos t + 2\,x, \qquad x(\pi/2) = 1,$$

με τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων του Picard.

Λύση

Στην προκείμενη περίπτωση, $f(t) = 5\cos t$, $g(t) = 2$, $t_0 = \pi/2$, $x_0 = 1$. ΄Αρα,

(47) $$G(t) = \int_{t_0}^{t} 2\,d\xi = 2\,(t - t_0) = 2\,t - \pi,$$

(48) $$\int_{t_0}^{t} e^{-G(\xi)}\,f(\xi)\,d\xi = 5\int_{t_0}^{t} e^{-2\,(\xi - t_0)}\cos\xi\,d\xi = e^{\pi - 2\,t}(\mathrm{sint} - 2\cos t) - 1$$

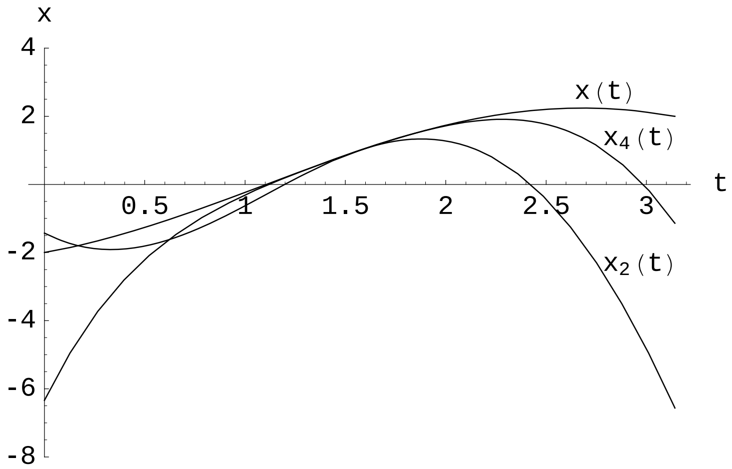
και ο τύπος (39) δίνει το ακόλουθο αποτέλεσμα για την ακριβή λύση του ΠΑΤ:

(49) $$x(t) = \sin t - 2\cos t.$$

Ο τύπος (37), από την άλλη, οδηγεί στις εξής εκφράσεις για τα τρία πρώτα μέλη της προσεγγιστικής ακολουθίας Picard:

(50) $$\begin{aligned}
x_0(t) &= 1\\
x_1(t) &= 1 + \int_{\pi/2}^{t}(5\cos\xi + 2)\,d\xi\\
&=1+5(\sin \mathrm{t}-1)+2\mathrm{t}-\pi=2\mathrm{t}+5\sin \mathrm{t}-4-\pi,\\
x_2(t) &= 5\sin t - 4 + 2\int_{t_0}^{t} x_1(\xi)\,d\xi\\
&= 5\sin t - 4 + 2\int_{\pi/2}^{t}(2\,\xi + 5\sin\xi - 4 - \pi)\,d\xi\\
&= 5\sin t - 4 + 2\,(t^2 - 5\cos t - 4\,t - \pi\,t) - 2\left(\frac{\pi^2}{4} - 4\,\frac{\pi}{2} - \pi\,\frac{\pi}{2}\right)\\
&= \frac{\pi^2}{2} + 4\,\pi - 4 - 2\,(4 + \pi)\,t + 2\,t^2 + 5\sin t - 10\cos t
\end{aligned}$$

Το σχήμα που ακολουθεί μας επιτρέπει να συγκρίνουμε την $x_2(t)$ με την ακριβή λύση (49), αλλά και με την $x_4(t)$, την οποία καλείται ο αναγνώστης να υπολογίσει, για άσκηση.



Ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν τα τέσσερα πρώτα μέλη, $x_0(t),...,x_3(t)$, της ακολουθίας Picard, για τα ακόλουθα ΠΑΤ. Να βρεθεί, επίσης, η ακριβής λύση καθενός τους.

(i) $x' = t - x$, $x(0) = 1$.

(ii) $x' = t(1 - x)$, $x(0) = 2$.

(iii) $x' = \sin(2t) - 2x$, $x(\pi/2) = -1$.

(iv) $x' = 1 - x\sin t$, $x(0) = 0$.

(v) $x' = 1 + 2tx$, $x(0) = 0$.

(vi) $tx' = x + t$, $x(1) = -1$.

(vi) $x' = x\tanh t$, $x(0) = -1$.

2. Με τη βοήθεια του *Mathematica*, κατασκευάστε και συγκρίνετε τα γραφήματα της προσεγγιστικής συνάρτησης $x_3(t)$ και της ακριβούς λύσης $x(t)$, στη γειτονιά του σημείου t_0.

3. Στο πλαίσιο του *Mathematica*, κατασκευάστε ένα πρόγραμμα (σειρά εντολών) το οποίο να υπολογίζει τα μέλη της ακολουθίας Picard, αυτόματα. Χρησιμοποιώντας αυτό το πρόγραμμα, ελέγξετε τα αποτελέσματα που βρήκατε "με το χέρι" στην Ασκ.1.

3.3. Η μη γραμμική περίπτωση

Το ΠΑΤ που λύσαμε με τη μέθοδο Picard στο προηγούμενο εδάφιο ήταν της μορφής

(1) $$x' = F(t, x), \quad t \in I, \qquad x(0) = 0, \quad 0 \in I,$$

με την $F(t, x) = f(t) + g(t)\, x$ και με τις $f(t)$, $g(t)$ συνεχείς στο διάστημα I. Χωρίς να περιορίσουμε τη γενικότητα των αποτελεσμάτων μας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το διάστημα I ήταν ανοιχτό. Συνακόλουθα, το σύνολο $\Omega = I \times \mathbb{R}$ αποτελούσε μια περιοχή (ανοιχτό και συνεκτικό υποσύνολο) του $\mathbb{R}^2$, η οποία περιείχε το αρχικό σημείο $(x_0, t_0) = (0, 0)$.

Με τις παραπάνω προϋποθέσεις, η $F(t, x)$ και η μερική παράγωγός της ως t έχουν οπωσδήποτε τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) Η ίδια η συνάρτηση $F(t, x)$ είναι συνεχής στην περιοχή Ω.

(ii) Η $\partial_x F(t, x)$ είναι επίσης συνεχής στην Ω, γιατί $\partial_x F(t, x) = g(t)$. Κατά συνέπεια, η $\partial_x F(t, x)$ είναι συνεχής και σε κάθε κλειστό παραλληλόγραμμο που ανήκει στην Ω.

Αν το Π είναι ένα από τα παραλληλόγραμμα που αναφέρονται στη συνθήκη (ii), τότε η συνάρτηση $\partial_x F(t, x)$ είναι και φραγμένη στο Π. Μάλιστα, υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο αυτού του παραλληλόγραμμου, στο οποίο η $\partial_x F(t, x)$ φτάνει και την μέγιστη τιμή της. (Αυτό ισχύει, γενικότερα, για κάθε συνάρτηση που είναι συνεχής σε ένα συμπαγές (δηλαδή, κλειστό και φραγμένο) υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$).

Αναρωτιέται, λοιπόν, κανείς αν το σχήμα των διαδοχικών προσεγγίσεων του Picard μπορεί να δώσει τα ίδια αποτελέσματα και στη γενικότερη περίπτωση των μη γραμμικών ΔΕ, με την προϋπόθεση ότι η $F(t, x)$ εξακολουθεί να σέβεται τις δυο παραπάνω συνθήκες. Θα δούμε ευθύς αμέσως ότι το θεώρημα που αποδείξαμε νωρίτερα όντως ισχύει και σ' αυτό το γενικότερο πλαίσιο, αλλά με κάποιον περιορισμό στο διάστημα ισχύος της λύσης.

Για να δούμε αν οι παραπάνω συνθήκες μας επιτρέπουν να χρησιμοποιήσουμε το επαναληπτικό σχήμα του Picard και στην μη γραμμική περίπτωση, εισάγουμε και πάλι την ακολουθία των συναρτήσεων $\{x_j(t)\}$, $j = 1, 2, 3, \ldots$, όπου

(2) $$\begin{aligned} x_0(t) &= 0 \\ x_1(t) &= \int_0^t F(\xi, x_0(\xi))\, d\,\xi = \int_0^t F(\xi, 0)\, d\,\xi, \\ x_2(t) &= \int_0^t F(\xi, x_1(\xi))\, d\,\xi, \\ x_n(t) &= \int_0^t F(\xi, x_{n-1}(\xi))\, d\,\xi. \end{aligned}$$

Η πρώτη μας υπόθεση είναι ότι η $F(t, x)$ ορίζεται και είναι συνεχής σε μια περιοχή Ω, η οποία περιέχει το (κλειστό) παραλληλόγραμμο

(3) $$\Pi := \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : -a \le t \le a, \ -b \le x \le b\}.$$

Συνακόλουθα, η $F(t, x)$ είναι φραγμένη και μάλιστα παίρνει τη μέγιστη τιμή της, M, σε ένα ή περισσότερα σημεία του Π.

Αν, λοιπόν, θέσουμε

(4) $$M := \max_{(t,x)\in\Pi} |F(t, x)|,$$

τότε,

$$(5) \qquad |x_1(t)| = \left| \int_0^t F(\xi, 0)\, d\xi \right| \le M \int_0^t d\xi = M\, t, \quad 0 \le t \le a.$$

Ανάλογα,

$$(6) \qquad |x_1(t)| = \left| \int_0^{-|t|} F(\xi, 0)\, d\xi \right| = \left| \int_{-|t|}^0 F(\xi, 0)\, d\xi \right| \le M \int_{-|t|}^0 d\xi = M\,|t|, \quad -a \le t \le 0.$$

Συνεπώς,

$$(7) \qquad |x_1(t)| \le M\,|t|, \qquad t \in [-a, a].$$

Αυτό σημαίνει ότι, στο διάστημα $-a \le t \le a$, το γράφημα της πρώτης προσεγγιστικής συνάρτησης $x_1(t)$ παραμένει ανάμεσα στις ευθείες $x = M\,t$ και $x = -M\,t$. Αν η κλίση $\pm M$ των ευθειών $x = \pm M\,t$ δεν υπερβαίνει σε απόλυτη τιμή το λόγο b/a, τότε αυτές δεν τέμνουν την πάνω και κάτω πλευρά του Π, αλλά τις κατακόρυφες πλευρές του, όπως συμβαίνει στο ακόλουθο σχήμα:

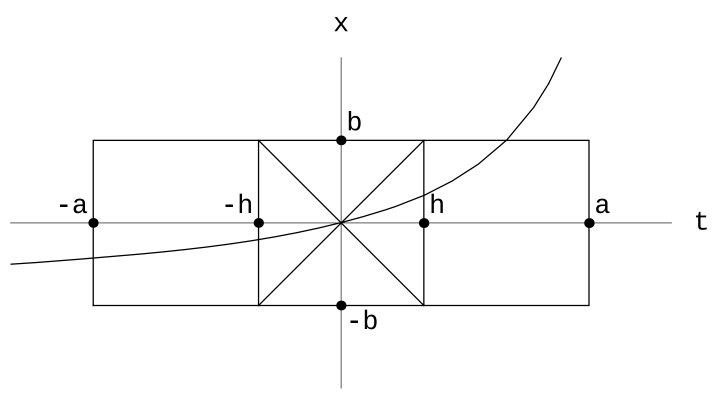
Σ' αυτή την περίπτωση, η συνάρτηση $\varphi_1(\xi) = F(\xi, x_1(\xi))$, που εμφανίζεται στο ολοκλήρωμα $\int_0^t F(\xi, x_1(\xi))\, d\xi$, ορίζεται και είναι συνεχής σ' όλο το διάστημα $[-a, a]$. Συνακόλουθα, η

$$x_2(t) = \int_0^t F(\xi, x_1(\xi))\, d\xi$$

ορίζεται και είναι συνεχής στο διάστημα $-a \le t \le a$. Το ίδιο ισχύει και για τα επόμενα μέλη της ακολουθίας $\{x_j(t)\}$.

Όμως, αν η κλίση $\pm M$ των ευθειών $x = \pm M\,t$ υπερβαίνει σε απόλυτη τιμή τον λόγο b/a, τότε αυτές διασχίζουν την πάνω και κάτω πλευρά του Π, στα σημεία όπου $t = \pm b/M$. Αυτή την εκδοχή παριστάνει το σχήμα που ακολουθεί.

Σ' αυτή την περίπτωση, υπάρχει το εξής ενδεχόμενο: Για κάποιες τιμές της μεταβλητής ξ, έξω από το διάστημα $[-b/M, b/M]$ αλλά μέσα στο $[-a, a]$, το γράφημα της συνάρτησης $x_n(\xi)$ εξέρχεται από το Π, όπως γίνεται στο επόμενο σχήμα. Τότε, δεν είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε αν η απόλυτη τιμή της συνάρτησης $\varphi_n(\xi) = F(\xi, x_n(\xi))$ φράσσεται από τον αριθμό M. Συνακόλουθα, δεν μπορούμε να επαναλάβουμε τις εκτιμήσεις που χρησιμοποιήσαμε στην γραμμική περίπτωση.



Για να αποφύγουμε αυτό το ενδεχόμενο, θέτουμε

(8) $$h := \min\{a,\ b/M\}.$$

και περιοριζόμαστε στο κλειστό παραλληλόγραμμο

(9) $$\Pi_h := \{(t,\, x) \in \mathbb{R}^2 : -h \le t \le h,\ -b \le x \le b\}.$$

Με αυτόν τον τρόπο, εξασφαλίζουμε αρχικά την φραγή

(10) $$|\, x_1(t)\,| \;\le M \,|\, t\,| \;\le M\, h \le b.$$

Επαγωγικά, καταλήγουμε στη γενικότερη εκτίμηση

(11) $$|\, x_n(t)\,| = \left| \int_0^t F(\xi,\, x_{n-1}(\xi))\, d\,\xi \right| \le b.$$

Από την άλλη,

(12) $$|\, x_{n+1}(t) - x_n(t)\,| = \left| \int_0^t \{F(\xi,\, x_n(\xi)) - F(\xi,\, x_{n-1}(\xi))\}\, d\,\xi \right|$$

Αν, και στην περίπτωση που εξετάζουμε, η

(13) $$G(t,\, x) := \partial_x F(t,\, x)$$

υπάρχει, τότε από το θεώρημα μέσης τιμής έπεται ότι

(14) $$F(t,\, x_n) - F(t,\, x_{n-1}) = (x_n - x_{n-1})\, \partial_x F(t,\, z), \quad z \in (x_{n-1},\, x_{n-1}).$$

΄Αρα, αν υπάρχει αριθμός k τέτοιος που

(15) $$|\, \partial_x F(t,\, x)\,| \;\le k, \qquad (t,\, x) \in \Pi_h,$$

τότε μπορούμε να πούμε ότι

(16) $$\left| x_{n+1}(t) - x_n(t) \right| \;\le k \int_0^t \left| x_n(\xi) - x_{n-1}(\xi) \right| d\,\xi, \quad t \in [0,\, a].$$

Με βάση το θεώρημα που αναφέραμε παραπάνω, η $\partial_x F(t,\, x)$ σέβεται τη συνθήκη (15) όταν είναι συνεχής στο συμπαγές σύνολο Π. Με άλλα λόγια, η συνέχεια της $\partial_x F(t,\, x)$ στο Π εξασφαλίζει την ισχύ την εκτίμησης (16).

Γενικότερα, η ισχύς της εκτίμησης (16) εξασφαλίζεται και όταν η $F(t,\, x)$ σέβεται την ακόλουθη ασθενέστερη συνθήκη: Υπάρχει σταθερή k, τέτοια ώστε

(17) $$|\, F(t,\, x_2) - F(t,\, x_1)\,| \;\le k\; |\, x_2 - x_1\,|,$$

για όλα τα ζευγάρια $(t,\, x_1)$, $(t,\, x_2)$ που ανήκουν στο Π. Η τελευταία ονομάζεται *συνθήκη (του) Lipschitz* (Λίψιτς) ως προς τη δεύτερη μεταβλητή.

Τώρα πλέον, οι εκτιμήσεις του γραμμικού προβλήματος ισχύουν απαράλλαχτες, στο βαθμό που η ανεξάρτητη μεταβλητή t παραμένει στο διάστημα $[-h,\, h]$. Συγκεκριμένα, για $t \in [0,\, h]$, βρίσκουμε ότι

(18) $$|\, x_1(t) - x_0(t)\,| = \left| \int_0^t F(\xi,\, 0)\, d\,\xi \right| \le M \int_0^t d\,\xi = M\, t,$$

(19) $$| x_2(t) - x_1(t) | = \left| \int_0^t \{F(\xi, x_1(\xi)) - F(\xi, 0)\} \, d\xi \right| \leq$$
$$k \int_0^t \left| x_1(\xi) - x_0(\xi) \right| d\xi \leq k \int_0^t M\, \xi \, d\xi = k\, M \, \frac{t^2}{2},$$

(20) $$| x_3(t) - x_2(t) | = \left| \int_0^t \{F(\xi, x_2(\xi)) - F(\xi, x_1(\xi))\} \, d\xi \right| \leq$$
$$k \int_0^t \left| x_2(\xi) - x_1(\xi) \right| d\xi \leq k \int_0^t k\, M \, \frac{\xi^2}{2} \, d\xi = k^2\, M \, \frac{t^3}{3!}$$

και, επαγωγικά,

(21) $$| x_n(t) - x_{n-1}(t) | \leq k^{n-1}\, M \, \frac{t^n}{n!}.$$

Συνακόλουθα, η ακολουθία $\{x_j(t)\}$ συγκλίνει σε μια συνάρτηση $x(t)$ που αποτελεί και την μοναδική λύση της μη γραμμικής ολοκληρωτικής εξίσωσης Volterra

(22) $$x(t) = \int_0^t F(\xi, x(\xi)) \, d\xi, \quad t \in [0, h].$$

Αφού τα παραπάνω επιχειρήματα ισχύουν και για $t \in [-h, 0]$ και δεν επηρεάζονται από την επιλογή του αρχικού σημείου, έπεται ότι έχουμε αποδείξει το ακόλουθο θεμελιακό

Θεώρημα (Picard-Lindelof)

Ας υποτεθεί ότι η συνάρτηση $F(t, x)$

(i) Είναι συνεχής στο συμπαγές σύνολο

(23) $$\Pi_{(t_0, x_0)} := \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : t_0 - a \leq t \leq t_0 + a, \ x_0 - b \leq x \leq x_0 + b\}$$

όπου a, b τυχαίοι θετικοί αριθμοί,

(ii) Σέβεται τη συνθήκη Lipschitz

(24) $$| F(t, x_2) - F(t, x_1) | \leq k \, | x_2 - x_1 |, \qquad (t, x_1), \ (t, x_2) \in \Pi_{(t_0, x_0)}$$

Τότε το ΠΑΤ

(25) $$x' = F(t, x), \qquad x(t_0) = x_0,$$

έχει μοναδική λύση στο διάστημα $t_0 - h \leq t \leq t_0 + h$, όπου

(26) $$h = \min\{a, \ b / M\}, \quad M := \max_{(t,x) \in \Pi_{(t_0, x_0)}} | F(t, x) |$$

Αυτή η λύση δίνεται από το όριο $n \to \infty$ της ακολουθίας των διαφορίσιμων συναρτήσεων οι οποίες ορίζονται από τους τύπους

(27) $$x_0(t) = x_0$$
$$x_1(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(\xi, x_0(\xi)) \, d\xi = x_0 + \int_{t_0}^t F(\xi, x_0) \, d\xi,$$
$$x_n(t) = x_0 + \int_{t_0}^t F(\xi, x_{n-1}(\xi)) \, d\xi, \quad n = 2, 3, \ldots$$

Παράδειγμα

Πρόβλημα

Να λυθεί με τη μέθοδο των διαδοχικών προσεγγίσεων το ΠΑΤ

(28) $$x' = x^2, \qquad x(0) = 1.$$

Λύση

Στην προκείμενη περίπτωση

(29) $$F(t, x) = x^2, \qquad (t, x) \in \Omega = \mathbb{R}^2,$$

και το δοσμένο ΠΑΤ λύνεται ακριβώς. Συγκεκριμένα, η μοναδική του λύση δίνεται από τη συνάρτηση

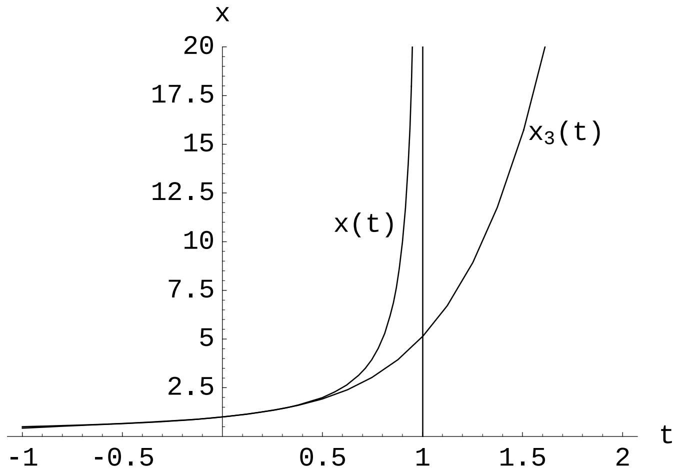
(30) $$x(t) = \frac{1}{1-t}, \qquad t < 1.$$

Από την άλλη, οι τύποι (27) δίνουν τις ακόλουθες εκφράσεις για τα πρώτα τέσσερα μέλη της ακολουθίας Picard:

(31)
$$\begin{aligned}
x_0(t) &= 1 \\
x_n(t) &= 1 + \int_0^t F(\xi, x_{n-1}(\xi))\, d\xi \\
x_1(t) &= 1 + \int_0^t F(\xi, x_0(\xi))\, d\xi = 1 + \int_0^t F(\xi, 0)\, d\xi = 1 + \int_0^t (1)^2\, d\xi = 1 + t, \\
x_2(t) &= 1 + \int_0^t F(\xi, x_1(\xi))\, d\xi = 1 + \int_0^t (1+\xi)^2\, d\xi \\
&= 1 + \frac{1}{3}(t+1)^3 - \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{3}(t^3 + 3t^2 + 3t) = 1 + t + t^2 + \frac{1}{3}t^3, \\
x_3(t) &= 1 + \int_0^t F(\xi, x_2(\xi))\, d\xi = 1 + \int_0^t \left(1 + \xi + \xi^2 + \frac{1}{3}\xi^3\right)^2 d\xi \\
&= 1 + t + t^2 + t^3 + \frac{2}{3}t^4 + \frac{1}{3}t^5 + \frac{1}{9}t^6 + \frac{1}{63}t^7
\end{aligned}$$

Ο υπολογισμός των επόμενων μελών της ακολουθίας γίνεται επίπονος. Ωστόσο, το πολυώνυμο $x_3(t)$ αποτελεί μιαν αρκετά καλή προσέγγιση της ακριβούς λύσης (30) στη γειτονιά του αρχικού σημείου $t = 0$. Αυτό αναδείχνεται και από το επόμενο σχήμα. Για λόγους σύγκρισης, υπενθυμίζουμε και την σειρά Taylor της (30), με κέντρο το $t = 0$:

(32) $$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n = 1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + t^6 + t^7 + \ldots$$



Ο γενικός τύπος (27) μας επιτρέπει να εκτιμήσουμε και το σφάλμα που "διαπράττουμε", όταν χρησιμοποιούμε τον n-στό όρο της ακολουθίας Picard ως προσέγγιση της συνάρτησης στην οποία αυτή η ακολουθία.

Συγκεκριμένα, η λύση στην οποία συγκλίνει η ακολουθία Picard είναι η συνάρτηση

(33) $$x(t) := \lim_{n\to\infty} x_n(t).$$

΄Ομως,

(34) $$x_n(t) = \sum_{j=1}^{n} [x_j(t) - x_{j-1}(t)]$$

΄Αρα, η (33) γράφεται και στην ακόλουθη μορφή:

(35) $$x(t) = \sum_{j=1}^{\infty} [x_j(t) - x_{j-1}(t)]$$

Συνακόλουθα,

(36) $$\begin{aligned} x(t) - x_n(t) &= \sum_{j=1}^{\infty} [x_j(t) - x_{j-1}(t)] - \sum_{j=1}^{n} [x_j(t) - x_{j-1}(t)] \\ &= \sum_{j=n+1}^{\infty} [x_j(t) - x_{j-1}(t)]. \end{aligned}$$

Από την (36) έπεται ότι

(37) $$| x(t) - x_n(t) | \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} | x_j(t) - x_{j-1}(t) |.$$

Αν, για ευκολία, υποθέσουμε ότι $t_0 = 0$, τότε η εκτίμηση (21) και η (37) οδηγούν στο ακόλουθο συμπέρασμα:

(38) $$\begin{aligned} \left| x(t) - x_n(t) \right| &\leq \sum_{j=n+1}^{\infty} k^{j-1} M \frac{t^j}{j!} \\ &\leq \sum_{j=n+1}^{\infty} k^{j-1} M \frac{h^j}{j!} = \frac{M}{k} \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{(k\,h)^j}{j!}. \end{aligned}$$

Από την άλλη μεριά,

(39) $$\sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{s^j}{j!} \leq \frac{s^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{s^j}{j!} = \frac{s^{n+1}}{(n+1)!}\, e^s .$$

΄Αρα,

(40) $$\left| x(t) - x_n(t) \right| \le \frac{M}{k} \frac{(k\,h)^{n+1}}{(n+1)!} e^{k\,h}.$$

Αυτό σημαίνει ότι, αν μείνουμε στον n-στό όρο της ακολουθίας $\{x_j(t)\}$, θα έχουμε μια συνάρτηση η οποία, στο διάστημα $[0, h]$, δεν απέχει από την λύση $x(t)$ περισσότερο από $(M / k)\,(k\,h)^{n+1}\, e^{k\,h} / (n+1)!$.

Παράδειγμα

Ας επανέλθουμε στο ΠΑΤ, $x' = x^2$, $x(0) = 1$, που μελετήσαμε στο προηγούμενο παράδειγμα κι ας υποθέσουμε ότι $a = 2$, $b = 1$. Τότε

(41) $$\Pi_{(t_0, x_0)} = \Pi_{(0,1)} := \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : -2 \le t \le 2,\ 0 \le x \le 2\},$$

(42) $$M := \max_{(t,x) \in \Pi(t_0, x_0)} |F(t, x)| = \max_{x \in [0,2]} x^2 = 4,$$

(43) $$h = \min\{a,\ b / M\} = \min\{2,\ \tfrac{1}{4}\} = \tfrac{1}{4},$$

(44) $$k := \max_{(t,x) \in \Pi(t_0, x_0)} |\partial_x F(t, x)| = \max_{x \in [0,2]} 2\,x = 4.$$

Συνεπώς, ο τύπος (40) για το φράγμα του σφάλματος γίνεται

(45) $$\left| x(t) - x_n(t) \right| \le \frac{M}{k} \frac{(k\,h)^{n+1}}{(n+1)!} e^{k\,h} = \frac{e^2}{(n+1)!}.$$

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστούν τα τέσσερα πρώτα μέλη, $x_0(t)...x_3(t)$, της ακολουθίας Picard, για τα ακόλουθα ΠΑΤ. Να βρεθεί, επίσης, η ακριβής λύση καθενός τους και να προσδιοριστεί επακριβώς το διάστημα ισχύος της λύσης.

(i) $x' = 1 - x^2$, $x(0) = 0$.

(ii) $x' = t(1 - x^2)$, $x(0) = 2$.

(iii) $x' = t - x^2$, $x(0) = 2$.

(iv) $x' = x^2 e^{-t}$, $x(0) = -1$.

(v) $x' = (1 - x^2) \cos t$, $x(\pi / 2) = -2$.

(vi) $x' = x(x + 2)(x - 3)$, $x(0) = 0$.

(vi) $x' = x(t + x)$, $x(0) = 3$.

2. Για καθένα από τα ΠΑΤ της προηγούμενης άσκησης, να προσδιοριστεί ο θετικός αριθμός h που καθορίζει το διάστημα στο οποίο η ακολουθία Picard συγκλίνει οπωσδήποτε. Επίσης να υπολογιστεί ένα φράγμα για το σφάλμα της προσέγγισης $x_3(t)$.

3. Ν' αποδειχτεί ότι, η λύση του ΠΑΤ στην οποία οδηγεί η μέθοδος Picard στην μη γραμμική περίπτωση είναι επίσης μοναδική.

4. Να προσδιοριστεί η περιοχή του επίπεδου $t - x$ στην οποία οι ακόλουθες συναρτήσεις σέβονται την συνθήκη Lipschitz ως προς τη μεταβλητή x.

(i) $F(t, x) = 1 - x^2$

(ii) $F(t, x) = 1 - t x^2$

(iii) $F(t, x) = \sqrt{x - 1}$

(iv) $F(t, x) = \sqrt{x - t}$

(v) $F(t, x) = (x - t^2)^{1/3}$

5. Να δοθεί ένα παράδειγμα στο οποίο η συνάρτηση $F(t, x)$ παραβιάζει τη συνθήκη Lipschitz του θεωρήματος Picard-Lindelof και να μελετηθούν οι λύσεις του αντίστοιχου ΠΑΤ.

6. Με τη βοήθεια του *Mathematica*, κατασκευάστε και συγκρίνετε τα γραφήματα της προσεγγιστικής συνάρτησης $x_3(t)$ και της ακριβούς λύσης $x(t)$ των ΠΑΤ της Ασκ. 1, σ' ένα ανοιχτό διάστημα το οποίο περιέχει τόσο το αρχικό σημείο t_0, όσο και τα άκρα του πεδίου ορισμού της $x(t)$.

7. Στο πλαίσιο του *Mathematica*, κατασκευάστε ένα πρόγραμμα (σειρά εντολών) το οποίο να υπολογίζει τα μέλη της ακολουθίας Picard, αυτόματα. Χρησιμοποιώντας αυτό το πρόγραμμα, ελέγξτε τα αποτελέσματα που βρήκατε "με το χέρι" στην Ασκ.1.

Κεφάλαιο V

Γραμμικές διαφορικές εξισώσεις 2ης τάξης

1. Εισαγωγή

Στο πρώτο κεφάλαιο (Θεμέλια) εξετάσαμε κάποιες γραμμικές ΔΕ δεύτερης και ανώτερης τάξης και εντοπίσαμε τα κύρια χαρακτηριστικά των λύσεων που κατασκευάσαμε. Με το παρόν κεφάλαιο αρχίζουμε την συστηματική μελέτη των ΔΕ αυτού του είδους, ξεκινώντας από εκείνες της δεύτερης τάξης.

Τα βασικότερα χαρακτηριστικά των εξισώσεων αυτής της κατηγορίας μπορούν να εντοπιστούν μελετώντας την

(1) $$u''(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Το γεγονός ότι η δεύτερης τάξης παράγωγος $u''(t)$ της άγωστης συνάρτησης $u(t)$ μηδενίζεται για όλες τις τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής t συνεπάγεται ότι η πρώτης τάξης παράγωγος της $u(t)$ είναι σταθερή:

(2) $$u'(t) = c_1.$$

Αλλά τότε

(3) $$u(t) = c_1\, t + c_2.$$

Με τον ίδιο τρόπο, δηλαδή με δύο διαδοχικές ολοκληρώσεις, μπορούμε να λύσουμε και τις κάπως πιο περίπλοκες εξισώσεις της μορφής

(4) $$u'' = f(t), \quad t \in I,$$

όπου η $f(t)$, $t \in I$, είναι δοσμένη συνάρτηση, συνεχής στο διάστημα I της πραγματικής ευθείας, $\mathbb{R}$. Για παράδειγμα, αν $f(t) = 2$, τότε η πρώτη ολοκλήρωση της

(5) $$u'' = 2$$

οδηγεί στην ΔΕ πρώτης τάξης

(6) $$u' = 2\,t + c_1.$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία, καταλήγουμε στην έκφραση

(7) $$u = c_1\, t + c_2 + t^2, \quad t \in I.$$

Τονίζουμε ότι, η διαδικασία που μας οδήγησε στην (7) εξασφαλίζει ότι αυτή η έκφραση περιέχει όλες ανεξαιρέτως τις λύσεις της ΔΕ (5). Με άλλα λόγια, η (7) αποτελεί **την γενική** λύση της πιο πάνω εξίσωσης.

Παρόλο που η εξίσωση που μόλις αναλύσαμε είναι απλή, οι λύσεις της -στη μορφή (7)- αναδείχνουν όλα ενεξαιρέτως τα χαρακτηριστικά των εξισώσεων που θα μελετήσουμε συστηματικά στο παρόν κεφάλαιο. Κι αυτές είναι οι εξισώσεις της μορφής

(8) $$u'' = f(t) + g(t)\, u + h(t)\, u', \qquad t \in I,$$

όπου $u \equiv u(t)$ είναι η άγνωστη και f, g και h συγκεκριμένες (δοσμένες) συνεχείς συναρτήσεις με κοινό πεδίο ορισμού κάποιο διάστημα I της πραγματικής ευθείας, $\mathbb{R}$.

Θυμίζουμε ότι η (8) αποτελεί την ***κανονική μορφή των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων δεύτερης τάξης***. Γενικότερα, μια (συνήθης) ΔΕ δεύτερης τάξης χαρακτηρίζεται ως ***γραμμική*** αν μπορεί να τεθεί στη μορφή

(9) $$a(t)\, u'' + b(t)\, u' + c(t)\, u = \rho(t), \quad t \in I.$$

Οι συναρτήσεις με τις οποίες πολλαπλασιάζεται η άγνωστη συνάρτηση και οι παράγωγοί της ονομάζονται ***συντελεστές της εξίσωσης***, ενώ η $\rho(t)$ αποκαλείται ***συνάρτηση εξαναγκασμού*** ή ***όρος (της) πηγής***.

Αυτές και άλλες ονομασίες για τη συνάρτηση $\rho(t)$ οφείλονται στις διάφορες εφαρμογές που βρίσκουν οι εξισώσεις της μορφής (9) στη φυσική και άλλες επιστήμες. Παραδείγματα τέτοιου είδους εφαρμογών θα εξετάσουμε αναλυτικά αργότερα. Υπενθυμίζουμε ότι, στην περίπτωση που η $\rho(t)$ είναι η μηδενική συνάρτηση, μια ΣΔΕ της μορφής (9) λέγεται ***ομογενής***. Στην αντίθετη περίπτωση η (9) χαρακτηρίζεται ***μη ομογενής***. Απ' αυτή την άποψη, η συνάρτηση $\rho(t)$ είναι ο ***όρος μη ομογένειας***.

Είναι φανερό ότι, στα τμήματα του διαστήματος I στα οποία ο συντελεστής $a(t)$ δεν μηδενίζεται, κάθε εξίσωση της μορφής (9) αποκτάει την κανονική μορφή (8), με το να θέσουμε

(10) $$f(t) = \frac{\rho(t)}{a(t)}, \quad g(t) = -\frac{c(t)}{a(t)}, \quad h(t) = -\frac{b(t)}{a(t)}.$$

Κάθε σημείο του I στο οποίο ο συντελεστής $a(t)$ μηδενίζεται ονομάζεται ***ανώμαλο*** ή ***ιδιάζον σημείο της διαφορικής εξίσωσης*** (9). Αυτός ο χαρακτηρισμός πηγάζει από την ιδιόμορφη συμπεριφορά που εμφανίζουν οι λύσεις, καθώς η ανεξάρτηση μεταβλητή t πλησιάζει ένα από ανώμαλα σημεία που τυχόν έχει η εξίσωση.

Παράδειγμα

(i) Οι συντελεστές της ΔΕ

(11) $$u'' - t\, u = \sin t, \quad t \in \mathbb{R},$$

είναι οι συναρτήσεις $a(t) = 1$, $b(t) = 0$, $c(t) = -t$ και όρος εξαναγκασμού ή πηγής η συνάρτηση $\rho(t) = \sin t$. Προφανώς, έχουμε να κάνουμε με μια μη ομογενή εξίσωση. Αφού δεν υπάρχουν τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής στις οποίες ο συντελεστής $a(t)$ μηδενίζεται, η πιο πάνω ΔΕ δεν έχει ανώμαλα σημεία.

(ii) Ο συντελεστής $a(t) = t^2$ της ομογενούς ΔΕ

(12) $$t^2\, u'' + t\, u' - u = 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

μηδενίζεται όταν $t = 0$. ΄Αρα το μηδέν αποτελεί ιδιάζον σημείο της εξίσωσης. Στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, \infty)$, η εξίσωση (12) μπορεί να τεθεί στην κανονική μορφή

(13) $$u'' = -\frac{1}{t}\, u' + \frac{1}{t^2}\, u.$$

(iii) Ο συντελεστής $a(t) = 1 - t^2$ της ομογενούς ΔΕ

(14) $$(1 - t^2)\, u'' + 2\, t\, u' + u = 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

μηδενίζεται όταν $t = \pm 1$. Συνεπώς, τα ανώμαλα σημεία αυτής της ΔΕ είναι τα $t = \pm 1$. Στα διαστήματα $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ και $(1, \infty)$, η εξίσωση (14) γράφεται στην κανονική μορφή

(15) $$u'' = \frac{2\, t}{t^2 - 1}\, u' + \frac{1}{t^2 - 1}\, u.$$

□

Επιστρέφουμε, τώρα, στη γενική λύση $u(t) = c_1\, t + c_2 + t^2$ της μη ομογενούς ΔΕ $u'' = 2$, για να παρατηρήσουμε ότι αυτή έχει την μορφή μιας διπαραμετρικής οικογένειας συναρτήσεων. Οι δυο παράμετροι που διακρίνουν τα μέλη της οικογένειας είναι οι ***σταθερές ολοκλήρωσης*** c_1 και c_2. Όπως θα διαπιστώσουμε σύντομα, το ίδιο ακριβώς συμβαίνει και με τη γενική λύση όλων των εξισώσεων δεύτερης τάξης της κατηγορίας που μελετάμε- έχει αναγκαστικά τη μορφή μιας 2-παραμετρικής οικογένειας συναρτήσεων.

Παράδειγμα

Ο αναγνώστης μπορεί εύκολα να επαληθεύσει το γεγονός ότι, κάθε συνάρτηση της μορφής

(16) $$u = c_1\, e^t + c_2\, e^{-t} + t^2 + 2$$

αποτελεί λύση της μη ομογενούς ΔΕ

(17) $$u'' = u - t^2.$$

Σύντομα θα αποδείξουμε ότι κάθε λύση αυτής της εξίσωσης είναι της μορφής (16). Άρα, η 2-παραμετρική οικογένεια συναρτήσεων (16) αποτελεί τη γενική λύσης της (17).

□

Όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή t παίρνει την τιμή t_0, η (16) δίνει τις σχέσεις

(18) $$u(t_0) = c_1\, t_0 + c_2 + t_0^2, \qquad u'(t_0) = 2\, t_0 + c_1.$$

Από αυτές αμέσως συνάγεται ότι τα ζευγάρια των αριθμών $\{c_1, c_2\}$ και $\{u(t_0), u'(t_0)\}$ αλληλοκαθορίζονται. Επειδή ο αριθμός t_0 αποτελεί την αρχή του διαστήματος $[t_0, t_0 + T)$, $T > 0$, οι αριθμοί $\{u(t_0), u'(t_0)\}$ λέγονται ***αρχικές τιμές*** -της συνάρτησης $u(t)$ και της παραγώγου της, αντίστοιχα. Κατά συνέπεια, αυτό που ακολουθεί ονομάζεται ***πρόβλημα αρχικών τιμών*** (**ΠΑΤ**).

Πρόβλημα

Δίνονται οι συγκεκριμένοι πραγματικοί αριθμοί a και b. Να βρεθούν οι λύσεις της ΔΕ $u'' = 2$ που σέβονται τις ***αρχικές συνθήκες***

(19) $$u(t_0) = a, \qquad u'(t_0) = b, \quad t_0 \in \mathbb{R}.$$

Λύση

Από τις σχέσεις (18) έπεται ότι το πιο πάνω πρόβλημα έχει λύση εάν και μόνο όταν οι παράμετροι c_1, c_2 αποτελούν λύση του αλγεβρικού συστήματος

(20) $$c_1\, t_0 + c_2 + t_0^2 = a, \quad 2\, t_0 + c_1 = b.$$

Αλλά η τελευταία εξίσωση λύνεται αμέσως για να δώσει $c_1 = b - 2\, t_0$. Η αντικατάσταση αυτού του αποτελέσματος στην πρώτη δίνει $b\, t_0 - t_0^2 + c_2 = a$. Άρα $c_2 = a - b\, t_0 + t_0^2$.

□

Συμπερασματικά, για το πιο πάνω ΠΑΤ ισχύουν τα εξής:

(i) Το πρόβλημα έχει λύση, την

(21) $$u = a - b\, t_0 + t_0^2 + (b - 2\, t_0)\, t + t^2.$$

(ii) Αυτή είναι η μοναδική λύση του προβλήματος, γιατί, πρώτο, η έκφραση (21) περιέχει όλες ανεξαιρέτως τις λύσεις της ΔΕ και, δεύτερο, οι τιμές των παραμέτρων c_1, c_2 προσδιορίστηκαν από τις συνθήκες (19) μονοσήμαντα.

(iii) Η λύση του, (21), ισχύει σε όλο το διάστημα ορισμού των συντελεστών και της συνάρτησης εξαναγκασμού της ΔΕ, δηλαδή σε όλη την πραγματική ευθεία.

Παράδειγμα

Με ανάλογο τρόπο αντιμετωπίζεται το ΠΑΤ που απαρτίζεται από τη ΔΕ $u'' = u - t^2$ και τις αρχικές συνθήκες (19). Γιατί, από τη γενική λύση (16) έπεται ότι αυτές οι συνθήκες είναι ισοδύναμες προς το αλγεβρικό σύστημα

(22) $$c_1\, e^{t_0} + c_2\, e^{-t_0} + t_0^2 + 2 = a, \quad c_1\, e^{t_0} - c_2\, e^{-t_0} + 2\, t_0 = b.$$

Αλλά αυτό το σύστημα λύνεται εύκολα ως προς τις παραμέτρους c_1, c_2 με προσθαφαίρεση των μελών του. Η λύση του είναι μοναδική και δίνεται από τις ακόλουθες εκφράσεις.

(23) $$c_1 = \frac{1}{2}\,(a + b - 2 - 2\, t_0 - t_0^2)\, e^{-t_0}, \quad c_2 = \frac{1}{2}\,(a - b - 2 + 2\, t_0 - t_0^2)\, e^{t_0}.$$

Συνακόλουθα, η λύση του ΠΑΤ

(24) $$u'' = u - t^2, \quad u(t_0) = a, \quad u'(t_0) = b, \quad t_0 \in \mathbb{R},$$

δίνεται από τη συνάρτηση

(25) $$u = \frac{1}{2}\,(a + b - 2 - 2\, t_0 - t_0^2)\, e^{t - t_0} + \frac{1}{2}\,(a - b - 2 + 2\, t_0 - t_0^2)\, e^{t_0 - t} + t^2 + 2.$$

□

Τα συγκεκριμένα παραδείγματα που μελετήσαμε υποδείχνουν ότι θα πρέπει να ισχύει το ακόλουθο

Θεμελιώδες θεώρημα

Ας υποτεθεί ότι, οι συναρτήσεις f, g και h είναι συνεχείς στο διάστημα I της πραγματικής ευθείας και οι a, b είναι τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί.. Τότε το ΠΑΤ

(26α) $$u'' = f(t) + g(t)\,u + h(t)\,u', \qquad t \in I,$$

(26β) $$u(t_0) = a, \;\; u'(t_0) = b, \qquad t_0 \in I,$$

έχει μοναδική λύση, η οποία ορίζεται σε ολόκληρο το διάστημα I.

□

Πραγματικά, το θεώρημα που μόλις διατυπώσαμε ισχύει, αλλά, δυστυχώς, η απόδειξή του δεν είναι απλή. Επιπλέον, το θεώρημα γενικεύεται για να καλύψει τις γραμμικές εξισώσεις κάθε τάξης, αλλά και συστήματα τέτοιων εξισώσεων. Για τους παραπάνω λόγους, μεταθέτουμε την απόδειξη του θεμελιώδους θεωρήματος σε διαφορετικό κεφάλαιο, εκεί όπου θα μελετήσουμε αναλυτικά συστήματα που απαρτίζονται από ΔΕ πρώτης τάξης. Εδώ, αρκεί να διευκρινίσουμε το γιατί η αντιμετώπιση του ΠΑΤ για συστήματα ΔΕ πρώτης τάξης καλύπτει την περίπτωση που μας ενδιαφέρει.

Ας ορίσουμε, λοιπόν, τη συνάρτηση $\upsilon(t) := u'(t)$. Τότε, μπορούμε να γράψουμε το ΠΑΤ (26) στη μορφή

(27α) $$u' = \upsilon, \qquad \upsilon' = f(t) + g(t)\,u + h(t)\,\upsilon, \quad t \in I,$$

(27β) $$u(t_0) = a, \quad \upsilon(t_0) = b, \quad t_0 \in I.$$

Με αυτό τον τρόπο, το αρχικό πρόβλημα μετατράπηκε σε ένα ΠΑΤ για το ζευγάρι των συναρτήσεων $\{u(t), \upsilon(t)\}$.

Με τη σειρά του, αυτό το πρόβλημα αποτελεί ειδικότερη περίπτωση του ΠΑΤ

(28α) $$u' = F(t, u, \upsilon), \qquad \upsilon' = G(t, u, \upsilon), \quad t \in I,$$

(28β) $$u(t_0) = a, \quad \upsilon(t_0) = b, \quad t_0 \in I.$$

$$u = u_o + u_\varepsilon,$$

□

Ας παρατηρήσουμε, τώρα, ότι στη γενική λύση, $u = c_1\,t + c_2 + t^2$, της ΔΕ $u'' = 2$ διακρίνονται με σαφήνεια δύο μέρη. Εκείνο στο οποίο εμφανίζονται οι σταθερές ολοκλήρωσης και το "υπόλοιπο". Με άλλα λόγια, η πιο πάνω λύση γράφεται σαν

(29) $$u = u_o + u_\varepsilon,$$

όπου

(30) $$u_o = c_1\,t + c_2, \qquad u_\varepsilon = t^2.$$

Το τμήμα u_o αποτελεί τη γενική λύση της εξίσωσης $u'' = 0$, η οποία προκύπτει από την $u'' = f(t)$ αν θέσουμε $f(t) = 0$. Αυτό είναι και το μέρος που περιέχει και τις παραμέτρους c_1, c_2. Αντίθετα, το τμήμα u_ε της u είναι μια ειδική λύση της εξίσωσης $u''(t) = 2$, δηλαδή μια συγκεκριμένη συνάρτηση, ανεξάρτητη από παραμέτρους.

Και όσα μόλις παρατηρήσαμε για τη ΔΕ $u'' = 2$ ισχύουν για όλες τις γραμμικές ΔΕ δεύτερης τάξης. Δηλαδή, οι λύσεις κάθε ΔΕ της μορφής (8) αποτελούνται από το άθροισμα

(31) $$u(t) = u_o(t) + u_\varepsilon(t),$$

όπου $u_o(t)$ η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς και $u_\varepsilon(t)$ μια ειδική (χωρίς αυθαίρετες σταθερές) της (8).

Παράδειγμα

΄Οπως αναφέραμε νωρίτερα, η γενική λύση της μη ομογενούς ΔΕ

$$u'' = u - t^2$$

δίνεται από τη 2-παραμετρική οικογένεια συναρτήσεων

$$u = c_1\, e^t + c_2\, e^{-t} + t^2 + 2.$$

Προφανώς, αυτή η έκφραση γράφεται σαν

$$u = u_o + u_\varepsilon, \quad u_o := c_1\, e^t + c_2\, e^{-t}, \qquad u_\varepsilon := t^2 + 2.$$

Ο αναγνώστης δε θα έχει καμία δυσκολία να επαληθεύσει ότι κάθε μέλος της 2-παραμετρικής οικογένειας συναρτήσεων u_o αποτελεί λύση της ομογενούς εξίσωσης $u'' = u$, ενώ η συνάρτηση u_ε είναι λύση της μη ομογενούς $u'' = u - t^2$.

□

Αυτό που θα αναδείξει η παραπέρα μελέτη μας είναι ότι, το κύριο πρόβλημα στην επίλυση μιας γραμμικής ΔΕ δεύτερης τάξης είναι η κατασκευή λύσεων της αντίστοιχης ομογενούς. Γι' αυτό, αξίζει να σταθούμε σε μια απλή ιδιότητα των ομογενών εξισώσεων που αποτελεί τη βάση της μεθόδου επίλυσής τους.

Για να περιγράψουμε αυτή την θεμελιακή ιδιότητα, θα ξεκινήσουμε από την ακόλουθη παρατήρηση. Ας υποθέσουμε ότι η συνάρτηση $u_1(t)$ αποτελεί λύση της ομογενούς γραμμικής εξίσωσης $u'' = g(t)\, u + h(t)\, u'$. Είναι φανερό ότι και κάθε συνάρτηση της μορφής $c_1\, u_1(t)$, με c_1 τυχαία σταθερή, αποτελεί λύση αυτής της ΔΕ. Το ίδιο, φυσικά θα ισχύει και για κάθε πολλαπλάσιο $c_2\, u_2(t)$ μιας δεύτερης λύσης της παραπάνω εξίσωσης. Εκείνο που δεν είναι προφανές είναι το τι ισχύει για το άθροισμα τέτοιων λύσεων. Η απάντηση σ' αυτό το ερώτημα περιέχεται στο επόμενο

Θεώρημα

Ας υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις $u_1(t)$ και $u_2(t)$ αποτελούν λύσεις της ομογενούς γραμμικής εξίσωσης

$$u'' = g(t)\, u + h(t)\, u'. \tag{32}$$

Τότε, το ίδιο ισχύει και για κάθε γραμμικό συνδυασμό τους, δηλαδή για κάθε συνάρτηση της μορφής

$$u(t) = c_1\, u_1(t) + c_2\, u_2(t) \tag{33}$$

όπου $c_1,\ c_2$ αυθαίρετες σταθερές.

Απόδειξη

Το γεγονός ότι οι $u_1(t)$, $u_2(t)$ αποτελούν λύσεις της (32) σημαίνει ότι

$$u_1'' = g(t)\, u_1 + h(t)\, u_1', \qquad u_2'' = g(t)\, u_2 + h(t)\, u_2'.$$

Συνεπώς,

$$u'' = c_1\, u_1'' + c_2\, u_2'' = c_1[g(t)\, u_1 + h(t)\, u_1'] + c_2[g(t)\, u_2 + h(t)\, u_2']$$
$$= g(t)[c_1\, u_1 + c_2\, u_2] + h(t)[c_1\, u_1' + c_2\, u_2']$$
$$= g(t)\, u + h(t)\, u'.$$

Σημείωση. Το περιεχόμενο αυτού του θεωρήματος συνήθως διατυπώνεται και με τον ακόλουθο τρόπο: Στις ομογενείς γραμμικές ΔΕ ισχύει η ***αρχή της επαλληλίας*** ή ***υπέρθεσης***.

□

Δυστυχώς, η αρχή της επαλληλίας δεν ισχύει και στις μη γραμμικές εξισώσεις. Για παράδειγμα, ένα μη γραμμικό ανάλογο της ΔΕ (32) είναι η

(34) $$u'' = g(t)\, u^2 + h(t)\, u'$$

Σ' αυτή την περίπτωση, η αντικατάσταση του συνδυασμού $u(t) = c_1\, u_1(t) + c_2\, u_2(t)$ στην (34) δίνει το ακόλουθο αποτέλεσμα

(35) $$u'' = c_1\, u_1'' + c_2\, u_2'' = c_1[g(t)\, u_1^2 + h(t)\, u_1'] + c_2[g(t)\, u_2^2 + h(t)\, u_2']$$
$$= g(t)[c_1\, u_1^2 + c_2\, u_2^2] + h(t)[c_1\, u_1' + c_2\, u_2']$$
$$= g(t)[c_1\, u_1^2 + c_2\, u_2^2] + h(t)\, u'.$$

΄Ομως,

(36) $$u^2 = (c_1\, u_1 + c_2\, u_2)^2 \neq c_1\, u_1^2 + c_2\, u_2^2.$$

Άρα το τελευταίο μέλος της (35) δεν είναι ίσο με $g(t)\, u^2 + h(t)\, u'$. Αυτό σημαίνει ότι ο γραμμικός συνδυασμός $u(t) = c_1\, u_1(t) + c_2\, u_2(t)$ δύο λύσεων της (34) δεν αποτελεί λύση αυτής της ΔΕ.

Η αρχή της επαλληλίας αποκτάει τη βαρύνουσα σημασία της όταν συνδυαστεί με την έννοια της ανεξαρτησίας δύο συναρτήσεων. Για να καταλάβουμε αυτή την έννοια, ας θεωρήσουμε δυο απλές συναρτήσεις, τις $u_1(t) = 1$ και $u_2(t) = t$, $t \in \mathbb{R}$. Είναι προφανές ότι, καμία από αυτές τις συναρτήσεις δεν είναι πολλαπλάσιο της άλλης. Με άλλα λόγια, δεν υπάρχουν σταθερές λ, μ, **διαφορετικές από το μηδέν**, τέτοιες που μία τουλάχιστον από τις σχέσεις

(37) $$u_2(t) = \lambda\, u_1(t), \quad u_1(t) = \mu\, u_2(t)$$

να ισχύει **για κάθε** $t \in \mathbb{R}$.

(Επειδή, στην περίπτωση που εξετάζουμε, $u_2(1) = 1$, οι σχέσεις (37), με $\lambda = \mu = 1$, ισχύουν στο σημείο $t = 1$, αλλά πουθενά αλλού).

Δύο συναρτήσεις $u_1(t)$, $u_2(t)$ για τις οποίες ισχύει μία τουλάχιστον από τις σχέσεις (37) σε κάθε σημείο ενός διαστήματος I χαρακτηρίζονται ως ***γραμμικά εξαρτημένες στο*** I. Στην αντίθετη περίπτωση ονομάζονται ***γραμμικά ανεξάρτητες***.

Παράδειγμα

(i) Αν $\alpha \neq \beta$, οι συναρτήσεις $u_1(t) = t^\alpha$, $u_2(t) = t^\beta$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες σε οποιοδήποτε διάστημα της πραγματικής ευθείας (το οποίο επιλέγουμε ως κοινό πεδίο ορισμού τους).

(ii) Αν $m \neq n$, τα πολυώνυμα $p_m(t)$, $p_n(t)$, βαθμού m και n, αντίστοιχα, στη μεταβλητή t είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

(iii) Οι συναρτήσεις e^t, e^{-t} είναι επίσης γραμμικά ανεξάρτητες σε οποιοδήποτε διάστημα της πραγματικής ευθείας. Το ίδιο ισχύει για τα ζευγάρια $\{\sin t,\ \cos t\}$, $\{t^\alpha,\ \sin t\}$, $\{t^\alpha,\ \cos t\}$, $\{t^\alpha,\ e^t\}$ και άλλα παρόμοια.

□

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι οι παραπάνω ορισμοί της γραμμικής αλληλεξάρτησης ή ανεξαρτησίας δύο συναρτήσεων είναι ισοδύναμοι με τους ακόλουθους:

Οι $u_1(t)$, $u_2(t)$, $t \in I$ είναι γραμμικά εξαρτημένες (η μία από την άλλη) αν υπάρχουν σταθερές c_1, c_2, όχι και οι δύο μηδενικές, τέτοιες που

(38) $$c_1\, u_1(t) + c_2\, u_2(t) = 0, \quad \text{για κάθε } t \in I.$$

Αντίθετα, αν οι μόνες τιμές των σταθερών c_1, c_2 για τις οποίες ισχύει η (38) είναι οι $c_1 = c_2 = 0$, τότε οι συναρτήσεις $u_1(t)$, $u_2(t)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Πραγματικά, αν μία τουλάχιστον από τις c_1, c_2 είναι μη μηδενική, τότε η (38) μετατρέπεται αμέσως στην (37). Αν γ.π. η $c_2 \neq 0$, τότε η (38) γράφεται σαν $u_2(t) = \lambda\, u_1(t)$, με $\lambda = -c_1 / c_2$. Αν, πάλι, η $c_1 \neq 0$, τότε η (38) γράφεται σαν $u_1(t) = \mu\, u_2(t)$, με $\mu = -c_2 / c_1$.

Αντίθετα, αν οι μόνες τιμές των σταθερών c_1, c_2 για τις οποίες ισχύει η (38) είναι οι $c_1 = c_2 = 0$, τότε είναι αδύνατο να λύσουμε την (38) ως προς μια από τις δυο συναρτήσεις $u_1(t)$, $u_2(t)$ και να την γράψουμε ως πολλαπλάσιο της άλλης.

□

Οι έννοιες που έχουμε εισαγάγει μας επιτρέπουν να δώσουμε ένα σαφές περίγραμμα όλων των βασικών στοιχείων του παρόντος κεφάλαιου. Πρόκειται για τα συμπεράσματα που αναφέρονται στο ακόλουθο θεμελιακό

Θεώρημα

Ας υποτεθεί ότι

(i) Οι συναρτήσεις $f(t)$, $g(t)$, και $h(t)$ είναι συνεχείς στο διάστημα I.

(ii) Οι συναρτήσεις $u_1(t)$, $u_2(t)$ αποτελούν γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης

$$u'' = g(t)\, u + h(t)\, u', \qquad t \in I.$$

Τότε,

(i) Η γενική λύση αυτής της εξίσωσης δίνεται από τη 2-παραμετική οικογένεια συναρτήσεων

$$u_o(t) = c_1\, u_1(t) + c_2\, u_2(t)$$

όπου c_1, c_2 τυχαίες σταθερές.

(ii) Υπάρχει αλγοριθμικός τρόπος κατασκευής μιας ειδικής λύσης $u_\varepsilon(t)$ της μη ομογενούς εξίσωσης

$$u'' = f(t) + g(t)\,u + h(t)\,u', \quad t \in I.$$

(iii) Η γενική λύση της τελεταίας δίνεται από την 2-παραμετική οικογένεια συναρτήσεων

$$u(t) = u_o(t) + u_\varepsilon(t).$$

□

Η πλήρης αποσαφήνιση αυτού του θεωρήματος δεν μπορεί παρά να γίνει σταδιακά. Γι' αυτό, ο αναγνώστης θα πρέπει να κάνει λίγο υπομονή. Ωστόσο, μπορεί από τώρα να έχει μια ολική εικόνα του "δάσους" και να καταλάβει γιατί, στα αμέσως επόμενα κεφάλαια, στεκόμαστε λίγο παραπάνω σε κάποια "δέντρα".

Προτού, όμως, ξεκινήσουμε την ανάλυση των επιμέρους στοιχείων του παραπάνω θεωρήματος, θα θέλαμε να τονίσουμε τον καθοριστικό -και άρα περιοριστικό- ρόλο της υπόθεσης ότι η ΔΕ που εξετάζουμε είναι κανονικής μορφής και οι συναρτήσεις f, g και h συνεχείς. ΄Αμεση θετική απόρροια αυτής της υπόθεσης είναι, για παράδειγμα, το γεγονός ότι οι λύσεις της ΔΕ

$$u'' = f(t) + g(t)\,u + h(t)\,u', \quad t \in I,$$

ανήκουν στην κλάση $C^2(I)$. *Απόδειξη*: Το ότι η $u(t)$ είναι λύση σημαίνει ότι η δεύτερης τάξης παράγωγός της υπάρχει. Συνακόλουθα, η $u'(t)$ είναι αναγκαστικά συνεχής στο διάστημα I. Αλλά τότε το δεξί μέλος της παραπάνω ΔΕ είναι μια συνεχής συνάρτηση. Το ίδιο προφανώς θα ισχύει και για το αριστερό.

Στην αρνητική κατεύθυνση, η άρση οποιασδήποτε συνιστώσας της βασικής υπόθεσης οδηγεί σε τελείως διαφορετικά αποτελέσματα από εκείνα που προβλέπουν τα θεωρήματα αυτού του εδάφιου. Αρκεί γ.π. να υποθέσουμε ότι η $f(t)$ παρουσιάζει αλματική ασυνέχεια σε κάποιο σημείο του διαστήματος I, για να μην υπάρχει καν λύση της ΔΕ $u'' = f(t)$.

Σαν δεύτερο παράδειγμα, ας θεωρήσουμε την ομογενή ΔΕ

(39) $$t^2\,u'' - 4\,t\,u' + 6\,u = 0, \quad t \geq 0.$$

Εύκολα επαληθεύεται ότι, κάθε συνάρτηση της μορφής

(40) $$u = c_1\,t^2 + c_2\,t^3, \quad t \geq 0,$$

αποτελεί λύση της (39). Από την (40) έπεται ότι, $u(0) = 0$ και, με την έννοια της από δεξιά παραγώγου, $u'(0) = 0$. Συνεπώς, το ΠΑΤ $u(0) = a$, $u'(0) = b$ για την ΔΕ (39) δεν έχει λύση, παρά μόνο όταν $a = b = 0$. Αλλά και τότε, η λύση δεν είναι μοναδική, αφού **κάθε** λύση της μορφής (40) σέβεται τις αρχικές συνθήκες.

Ασκήσεις

1. Να βρεθούν οι λύσεις της ΔΕ $u'' = f(t)$ που σέβονται τις αρχικές συνθήκες

$$u(t_0) = a, \quad u'(t_0) = b,$$

για τις ακόλουθες περιπτώσεις.

(i) $f(t) = 12\,t(1-t)$, $t_0 = 0$, $a = 1$, $b = -1$.

(ii) $f(t) = 2\,(1-e^{-t})$, $t_0 = 0$, $a = 0$, $b = 1$.

(iii) $f(t) = 4\cos(2\,t)$, $t_0 = \pi/2$, $a = 2$, $b = 0$.

(iv) $f(t) = 6\,t + \sinh t$, $t_0 = 0$, $a = -1$, $b = -2$.

(v) $f(t) = \begin{cases} 2, & t < 0 \\ 1+\cos t, & t \geq 0 \end{cases}$ $t_0 = -1$, $a = 0$, $b = 1$.

(vi) $f(t) = \begin{cases} 1, & t < 0 \\ e^{-t}, & t \geq 0 \end{cases}$ $t_0 = 0$, $a = 2$, $b = -1$.

2. Να δειχτεί ότι τα ακόλουθα ζευγάρια συναρτήσεων είναι γραμμικά ανεξάρτητα στο κοινό διάστημα ορισμού τους, I.

(i) $\{1,\ t\}$, $I = \mathbb{R}$.

(ii) $\{t,\ t^3\}$, $I = \mathbb{R}$.

(iii) $\{\sqrt{t},\ t\}$, $I = [0, \infty)$.

(iv) $\{p_m(t),\ p_n(t)\}$, $I = \mathbb{R}$, όπου $p_m(t)$, $p_n(t)$, πολυώνυμα βαθμού m και $n \neq m$, αντίστοιχα.

(v) $\{e^t,\ e^{-t}\}$, $I = \mathbb{R}$.

(vi) $\{e^t,\ \cosh t\}$, $I = \mathbb{R}$.

(vii) $\{\sin t,\ \cos t\}$, $I = \mathbb{R}$.

(viii) $\{e^t,\ \sin t\}$, $I = \mathbb{R}$.

(ix) $\{t,\ 2\,t + \cos t\}$, $I = \mathbb{R}$.

(x) $\{t,\ |t|\}$, $I = \mathbb{R}$.

(xi) $\{t^2,\ u(t)\}$, $u(t) := \begin{cases} 2\,t, & -1 \leq t \leq 0 \\ t^2, & 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$ $I = [-1, 1]$.

(xii) $\{t^{-2},\ u(t)\}$, $u(t) := \begin{cases} t^{-2}, & 0 < t \leq 1 \\ t^2, & t \geq 1 \end{cases}$ $I = (0, \infty)$.

2. Θεμελιώδη συστήματα λύσεων

Θα αρχίσουμε την απόδειξη του γενικού θεωρήματος με το οποίο κλείσαμε το προηγούμενο εδάφιο, δείχνοντας ότι η γενική λύση της ομογενούς ΔΕ κατασκευάζεται από οποιοδήποτε ζευγάρι γραμμικά ανεξάρτητων λύσεών της. Αλλά, προτού ξεκινήσουμε, θα σημειώσουμε ότι η ύπαρξη τέτοιων λύσεων εξασφαλίζεται από αυτό που, στο προηγούμενο εδάφιο, ονομάσαμε θεμελιώδες θεώρημα.

Πραγματικά, ας υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις $g(t)$, $h(t)$, $t \in I$ είναι συνεχείς και πως το t_0 είναι τυχαίο σημείο του διαστήματος I. Τότε, από το θεμελιώδες θεώρημα έπεται ότι, καθένα από τα ΠΑΤ

(1) $$u'' = g(t)\, u + h(t)\, u', \quad t \in I, \qquad u(t_0) = 1, \quad u'(t_0) = 0,$$

(2) $$u'' = g(t)\, u + h(t)\, u', \quad t \in I, \qquad u(t_0) = 0, \quad u'(t_0) = 1,$$

έχει μονοσήμαντη λύση που ορίζεται σε όλο το διάστημα I.

Αν ονομάσουμε τις αντίστοιχες λύσεις $u_1(t)$ και $u_2(t)$, τότε, αυτές θα είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Στην αντίθετη περίπτωση θα ίσχυε αναγκαστικά μία από τις σχέσεις $u_2(t) = \lambda\, u_1(t)$, $u_1(t) = \mu\, u_2(t)$, όπου λ, μ, συγκεκριμένες σταθερές. Εδικότερα, στο σημείο t_0 θα είχαμε είτε $u_2(t_0) = \lambda\, u_1(t_0)$, ή $u_1(t_0) = \mu\, u_2(t_0)$. Η δεύτερη εκδοχή αποκλείεται, αφού $u_1(t_0) = 1$ και $u_2(t_0) = 0$. Η πρώτη, από την άλλη μεριά, θα συνεπαγόταν την $\lambda = 0$, πράγμα που θα σήμαινε ότι $u_2(t) = 0$, $t \in I$, και άρα $u_2'(t) = 0$, $t \in I$. Αλλά, κάτι τέτοιο έρχεται σε αντίθεση με το γεγονός ότι $u_2'(t_0) = 1$.

□

Έχοντας εξασφαλίσει την ύπαρξη δύο γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων $u_1(t)$, $u_2(t)$ της ομογενούς ΔΕ

(3) $$u'' = g(t)\, u + h(t)\, u', \qquad t \in I,$$

μπορούμε πλέον να δείξουμε ότι το σύνολο των λύσεών της καλύπτεται από τους γραμμικούς συνδυασμούς των $u_1(t)$, $u_2(t)$.

Θεώρημα

Ας υποτεθεί ότι

(i) Οι συναρτήσεις $g(t)$ και $h(t)$ είναι συνεχείς στο διάστημα I.

(ii) Οι συναρτήσεις $u_1(t)$, $u_2(t)$ αποτελούν γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (3).

Τότε, η γενική λύση αυτής της εξίσωσης δίνεται από τη 2-παραμετρική οικογένεια συναρτήσεων

(4) $$u = c_1\, u_1(t) + c_2\, u_2(t)$$

όπου c_1, c_2 τυχαίες σταθερές.

Απόδειξη

Για να αποδείξουμε το θεώρημα, αρκεί να αποδείξουμε ότι, για οποιαδήποτε λύση, $\upsilon(t)$, της (3), μπορούμε να βρούμε ένα ζευγάρι σταθερών, (c_1, c_2), τέτοιο ώστε

$$\upsilon(t) = c_1\, u_1(t) + c_2\, u_2(t), \quad t \in I.$$

Πραγματικά, ας υποθέσουμε ότι η $\upsilon(t)$ είναι τυχαία λύση της ΔΕ (3). Επιλέγουμε ένα τυχαίο σημείο $t_0 \in I$ και θέτουμε

(5) $$a := \upsilon(t_0), \qquad b := \upsilon'(t_0).$$

Στη συνέχεια, θεωρούμε το σύνολο των λύσεων της μορφής (4) και εξετάζουμε ποια από τα μέλη του σέβονται τις αρχικές συνθήκες

(6) $$u(t_0) = a, \qquad u'(t_0) = b.$$

Οι τελευταίες γράφονται αναλυτικά ως εξής:

(7) $$c_1\, u_1(t_0) + c_2\, u_2(t_0) = a, \qquad c_1\, u_1'(t_0) + c_2\, u_2'(t_0) = b$$

Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη με $u_2'(t_0)$, τη δεύτερη με $u_2(t_0)$ και αφαιρώντας κατά μέλη βρίσκουμε ότι

(8) $$c_1[u_1(t_0)\, u_2'(t_0) - u_1'(t_0)\, u_2(t_0)] = a\, u_2'(t_0) - b\, u_2(t_0)$$

Ανάλογα, πολλαπλασιάζοντας την πρώτη με $u_1'(t_0)$, τη δεύτερη με $u_1(t_0)$ και αφαιρώντας κατά μέλη καταλήγουμε στην

(9) $$c_2[u_1(t_0)\, u_2'(t_0) - u_1'(t_0)\, u_2(t_0)] = a\, u_1'(t_0) - b\, u_1(t_0)$$

Προφανώς, αν η ποσότητα

(10) $$W_{(u_1,u_2)}(t_0) := u_1(t_0)\, u_2'(t_0) - u_1'(t_0)\, u_2(t_0)$$

είναι μη μηδενική, τότε οι (8) και (9), αντίστοιχα, προσδιορίζουν τις c_1, c_2, μονοσήμαντα.

Με την προϋπόθεση, λοιπόν, ότι οι $u_1(t)$, $u_2(t)$ είναι τέτοιες που

(11) $$W_{(u_1,u_2)}(t_0) \neq 0,$$

υπάρχουν τιμές των c_1, c_2, τέτοιες ώστε η λύση $u = c_1\, u_1(t) + c_2\, u_2(t)$ της (3) να σέβεται και τις αρχικές συνθήκες (6). Από την άλλη, είναι προφανές ότι και η συνάρτηση $\upsilon(t)$, $t \in I$, με την οποία ξεκινήσαμε, αποτελεί λύση του ίδιου ΠΑΤ. ΄Ομως, σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα, το παραπάνω ΠΑΤ επιδέχεται μόνο μία λύση. Συνεπώς, $\upsilon(t) = u(t)$, $t \in I$.

Σε λίγο θα δείξουμε ότι η (11) ισχύει για οποιοδήποτε ζευγάρι γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων της (3). ΄Αρα, το θεώρημα έχει ήδη αποδειχτεί.

□

Παράδειγμα

(i) Ας θεωρήσουμε την συνάρτηση $u_1(t) = e^t$, $t \in \mathbb{R}$. Από την ιδιότητα $(e^t)' = e^t$ της εκθετικής συνάρτησης αμέσως έπεται ότι $u_1''(t) = u_1(t)$.

Από την άλλη, $(e^{-t})' = -e^t$. Συνεπώς και για τη συνάρτηση $u_2(t) = e^{-t}$, $t \in \mathbb{R}$, ισχύει ότι $u_2''(t) = u_2(t)$. Με άλλα λόγια, οι παραπάνω $u_1(t)$, $u_2(t)$ αποτελούν λύσεις της ομογενούς ΔΕ $u'' = u$.

Αλλά οι e^t, e^{-t} είναι γραμμικά ανεξάρτητες στην πραγματική ευθεία. Συνεπώς, η γενική λύση της

$$u'' = u$$

δίνεται από την 2-παραμετρική οικογένεια συναρτήσεων

$$u = c_1\, e^t + c_2\, e^{-t}$$

(ii) Εύκολα επαληθεύεται ότι οι συναρτήσεις $u_1(t) = \sqrt{t}$, $u_2(t) = t^2$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες στο διάστημα $I = (0, \infty)$ κι ότι κάθε μιας τους αποτελεί λύση της ΔΕ

$$u'' = -\tfrac{1}{t^2}\, u + \tfrac{3}{t}\, u', \qquad t > 0.$$

Συνεπώς, το σύνολο των συναρτήσεων της μορφής

$$u = c_1 \sqrt{t} + c_2 t^2, \quad t > 0,$$

αποτελεί τη γενική λύση της παραπάνω ΔΕ.

□

Το συμπέρασμα του θεωρήματος που μόλις αποδείξαμε αποτελεί τον λόγο για τον οποίο κάθε ζευγάρι γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων της ομογενούς ΔΕ (3) ονομάζεται ***θεμελιώδες σύνολο λύσεων*** αυτής της εξίσωσης. Ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων μιας ομογενούς γραμμικής ΔΕ λέγεται και ***βάση του χώρου των λύσεων*** (της συγκεκριμένης πάντα ΔΕ).

□

Στο γενικό ζήτημα της γραμμικής αλληλεξάρτησης ή ανεξαρτησίας δύο διαφορίσιμων συναρτήσεων $u(t)$, $\upsilon(t)$, $t \in I$, καθοριστικό ρόλο παίζει η συνάρτηση

$$W_{(u,\upsilon)}(t) := \det\begin{pmatrix} u(t) & \upsilon(t) \\ u'(t) & \upsilon'(t) \end{pmatrix}, \quad t \in I, \tag{12}$$

που ονομάζεται ***ορίζουσα (του) Wronski των συναρτήσεων*** $u(t)$, $\upsilon(t)$. Αυτό φαίνεται αμέσως από το επόμενο

Θεώρημα

Ας υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις $u(t)$, $\upsilon(t)$ είναι διαφορίσιμες στο διάστημα I. Αν δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητες στο διάστημα I, τότε η ορίζουσα Wronski των $u(t)$, $\upsilon(t)$ μηδενίζεται σε κάθε σημείο του I. Αντίθετα, αν υπάρχει ακόμα και ένα σημείο του διαστήματος I στο οποίο η $W_{(u,\upsilon)}(t)$ δε μηδενίζεται, τότε οι $u(t)$, $\upsilon(t)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες στο διάστημα I.

Απόδειξη

Αν οι $u(t)$, $\upsilon(t)$ έχουν γραμμική αλληλεξάρτηση στο διάστημα I, τότε θα ισχύει μία τουλάχιστον από τις σχέσεις

$$u(t) = \lambda\, \upsilon(t), \quad \upsilon(t) = \mu\, u(t), \quad t \in I,$$

όπου λ, μ σταθερές. Στην πρώτη περίπτωση

$$W_{(u,\upsilon)}(t) = [\lambda\, \upsilon(t)]\, \upsilon'(t) - \upsilon(t)[\lambda\, \upsilon'(t)] = 0$$

Στην δεύτερη,

$$W_{(u,\upsilon)}(t) = u(t)[\mu\, u(t)] - [\mu\, u(t)]\, u'(t) = 0.$$

Για την απόδειξη του δεύτερου σκέλους του θεωρήματος, υποθέτουμε ότι υπάρχει διαφορίσιμη συνάρτηση της μορφής

$$x(t) := c_1\, u(t) + c_2\, \upsilon(t)$$

που μηδενίζεται σε κάθε σημείο του διαστήματος I. Τότε

$$x(t_0) = c_1\, u(t_0) + c_2\, \upsilon(t_0) = 0,$$

$$x'(t_0) = c_1\, u'(t_0) + c_2\, \upsilon'(t_0) = 0.$$

Αυτές οι σχέσεις μπορεί να θεωρηθούν ως ένα γραμμικό σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων για τις άγνωστες c_1, c_2. Αφού, σύμφωνα με την υπόθεση

$$W_{(u,\upsilon)}(t_0) := u(t_0)\, \upsilon'(t_0) - u'(t_0)\, \upsilon(t_0) \neq 0,$$

το σύστημα έχει ως μοναδική λύση την

$$c_1 = c_2 = 0.$$

Συνεπώς, οι $u(t)$, $\upsilon(t)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες στο διάστημα I.

Παρατήρηση. Το θεώρημα διατυπώνεται και ως εξής:

(i) Ο μηδενισμός της ορίζουσας Wronski είναι αναγκαία συνθήκη για τη γραμμική αλληλεξάρτηση διαφορίσιμων συναρτήσεων (όχι όμως και ικανή).

(ii) Ο μη μηδενισμός της ορίζουσας Wronski σε ένα μόνο σημείο είναι ικανή συνθήκη για τη γραμμική ανεξαρτησία διαφορίσιμων συναρτήσεων (όχι όμως και αναγκαία).

□

Παράδειγμα

(i) Η ορίζουσα Wronski των συναρτήσεων

$$u(t) = t^3, \qquad \upsilon(t) = t^2\, |\, t\, |, \qquad t \in \mathbb{R},$$

μηδενίζεται σε όλη την πραγματική ευθεία. Ωστόσο, οι παραπάνω $u(t)$, $\upsilon(t)$ <u>είναι</u> γραμμικά ανεξάρτητες στον $\mathbb{R}$.

(ii) Οι συναρτήσεις

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ t^3, & t > 0 \end{cases}, \qquad \upsilon(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ t^4, & t > 0 \end{cases}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητες στον $\mathbb{R}$. Ωστόσο, η $W_{(u,\upsilon)}(t)$ μηδενίζεται, και μάλιστα, όχι μόνο σε ένα σημείο, αλλά σε ολόκληρο το διάστημα $t \leq 0$.

□

Στην ειδικότερη περίπτωση που οι συναρτήσεις $u(t)$, $\upsilon(t)$ αποτελούν λύσεις της ομογενούς ΔΕ (3), τα συμπεράσματα του προηγούμενου θεωρήματος μπορεί να να ενισχυθούν:

Θεώρημα

Ας υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις $u(t)$, $\upsilon(t)$ είναι λύσεις της ΔΕ $u'' = g(t)\, u + h(t)\, u'$, $t \in I$, όπου οι συντελεστές $g(t)$ και $h(t)$ είναι συνεχείς στο διάστημα I.

Τότε,

(i) Οι $u(t)$, $\upsilon(t)$ είναι γραμμικά εξαρτημένες εάν και μόνο όταν

(13) $$W_{(u,\upsilon)}(t) = 0, \qquad t \in I.$$

(ii) Οι $u(t)$, $\upsilon(t)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες εάν και μόνο όταν

(14) $$W_{(u,\upsilon)}(t) \neq 0, \qquad t \in I.$$

Απόδειξη

Ἐχουμε ήδη αποδείξει ότι η (13) ισχύει αναγκαστικά, όταν έχουμε να κάνουμε με διαφορίσιμες συναρτήσεις που η μία εξαρτιέται γραμμικά από την άλλη. Ἀρα, το "μόνο όταν" της πρότασης ισχύει αυτόματα. Μένει να αποδείξουμε ότι, στην περίπτωση που οι $u(t)$, $\upsilon(t)$ είναι λύσεις της ΔΕ (3), η παραπάνω συνθήκη είναι και ικανή να εξασφαλίσει τη γραμμική αλληλεξάρτηση των $u(t)$, $\upsilon(t)$.

Για το σκοπό αυτό αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει γραμμικός συνδυασμός της μορφής $c_1\, u(t) + c_2\, \upsilon(t)$ που μηδενίζεται σε κάθε σημείο του διαστήματος I, χωρίς αυτό να συνεπάγεται ότι και οι δύο συντελεστές c_1, c_2 είναι μηδενικοί.

Ας θεωρήσουμε, λοιπόν, το τυχαίο σημείο t_0 του διαστήματος I κι ας θέσουμε

$$c_1\, u(t_0) + c_2\, \upsilon(t_0) = 0, \qquad c_1\, u'(t_0) + c_2\, \upsilon'(t_0) = 0.$$

Αυτές οι σχέσεις μπορεί να θεωρηθούν ως ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων για τους συντελεστές c_1, c_2. Επειδή, σύμφωνα με την υπόθεση

$$W_{(u,\upsilon)}(t_0) := u(t_0)\, \upsilon'(t_0) - u'(t_0)\, \upsilon(t_0) = 0,$$

το παραπάνω σύστημα επιδέχεται μη μηδενικές λύσεις. Αν υποθέσουμε ότι το ζευγάρι (c_1, c_2) είναι μία από αυτές τις λύσεις, τότε η συνάρτηση

$$x(t) := c_1\, u(t) + c_2\, \upsilon(t),$$

έχει τις ακόλουθες ιδιότητες. Πρώτον, αποτελεί λύση της (3), αφού είναι γραμμικός συνδυασμός δύο λύσεών της. Δεύτερο, τόσο η ίδια η $x(t)$, όσο και η παράγωγός της, μηδενίζονται στο σημείο $t_0 \in I$. Αλλά τότε, από το θεμελιώδες θεώρημα έπεται ότι η $x(t)$ είναι η μοναδική λύση του ΠΑΤ

$$u'' = g(t)\, u + h(t)\, u', \quad t \in I, \qquad u(t_0) = 0,\ u'(t_0) = 0,\ t_0 \in I.$$

Συνακόλουθα, η $x(t)$ μηδενίζεται σε κάθε σημείο του διαστήματος I (γιατί;) κι έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη του πρώτου σκέλους του θεωρήματος.

Το δεύτερο σκέλος του θεωρήματος είναι άμεση απόρροια του πρώτου. Τις λεπτομέρειες τις αφήνουμε για άσκηση του αναγνώστη.

□

Παρατήρηση. Από το συμπέρασμα (ii) του θεωρήματος έπεται ότι η προϋπόθεση (11), στην οποία στηρίχτηκε η απόδειξη του πρώτου θεωρήματος, ισχύει πάντοτε.

Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι, βασικά, η ορίζουσα Wronski δύο λύσεων της ομογενούς ΔΕ υπολογίζεται χωρίς να γνωρίζουμε την ρητή έκφρασή τους.

Θεώρημα του Abel

Ας υποτεθεί ότι

(i) Οι συναρτήσεις $g(t)$ και $h(t)$ είναι συνεχείς στο διάστημα I.

(ii) Οι συναρτήσεις $u_1(t),\ u_2(t)$, $t \in I$, είναι λύσεις της ομογενούς ΔΕ (3).

Τότε,

$$W_{(u_1,u_2)}(t) = C_{(u_1,u_2)} \exp\left[\int h(t)\, d\, t\right], \quad t \in I, \tag{15}$$

όπου $C_{(u_1,u_2)}$ μια ποσότητα που εξαρτιέται από τις u_1, u_2, όχι όμως και από τη μεταβλητή t.

Απόδειξη

Αφού οι $u_1(t),\ u_2(t)$ είναι λύσεις της ΔΕ (3),

$$u_1'' = g(t)\, u_1 + h(t)\, u_1', \qquad u_2'' = g(t)\, u_2 + h(t)\, u_2', \quad t \in I.$$

Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη από αυτές τις σχέσεις με u_2, τη δεύτερη με u_1 και αφαιρώντας κατά μέλη, καταλήγουμε στην

$$u_1''\, u_2 - u_2''\, u_1 = h(t)\, (u_1'\, u_2 - u_1\, u_2') \tag{16}$$

Τώρα,

$$W_{(u_1,u_2)}(t) = u_1\, u_2' - u_1'\, u_2$$

και άρα

$$W_{(u_1,u_2)}{}'(t) = (u_1'\, u_2' + u_1\, u_2'') - (u_1''\, u_2 + u_1'\, u_2') = u_1\, u_2'' - u_1''\, u_2.$$

Συνακόλουθα, η (16) γράφεται σαν

$$W' = h(t)\, W, \qquad W := W_{(u_1,u_2)}(t). \tag{17}$$

Η τελευταία είναι μια απλή γραμμική εξίσωση πρώτης τάξης με γενική λύση

$$W = C \exp\left[\int h(t)\, d\, t\right],$$

όπου το C δηλώνει μιαν ανεξάρτητη από την μεταβλητή t ποσότητα.

□

Παρατήρηση

Ο τύπος του Abel για την ορίζουσα Wronski των τυχαίων λύσεων της ομογενούς ΔΕ (3) υποδηλώνει τα ακόλουθα αποτελέσματα

(i) Η ορίζουσα Wronski δύο τυχαίων λύσεων της ΔΕ (3) είτε μηδενίζεται σε όλο το διάστημα I είτε είναι παντού μη μηδενική.

(ii) Η ορίζουσα Wronski ενός θεμελιώδους συστήματος λύσεων $\{u_1, u_2\}$ της ομογενούς ΔΕ μπορεί, ουσιαστικά, να υπολογιστεί χωρίς να είναι γνωστές οι συναρτήσεις u_1, u_2. Συγκεκριμένα, το μέρος που εκφράζει την εξάρτηση της ορίζουσας από την μεταβλητή t προσδιορίζεται πλήρως από τον συντελεστή $h(t)$.

(i) Οι ορίζουσες Wronski δύο θεμελιωδών συστημάτων $\{u_1, u_2\}$, $\{\upsilon_1, \upsilon_2\}$ της ομογενούς ΔΕ είναι ανάλογες η μία προς την άλλη.

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί η ορίζουσα Wronski, $W_{(u,\upsilon)}(t)$, καθενός από τα παρακάτω ζευγάρια συναρτήσεων, $\{u(t), \upsilon(t)\}$, $t \in I$. Σε κάθε περίπτωση, να εξηγηθεί αν το αποτέλεσμα επιτρέπει να συμπεράνουμε ότι, οι συναρτήσεις $u(t)$, $\upsilon(t)$ είναι ανεξάρτητες ή όχι, στο διάστημα I.

(i) $\{1,\ t^3\}$, $I = \mathbb{R}$.

(ii) $\left\{\sqrt{t},\ t\right\}$, $I = (0, \infty)$.

(iii) $\left\{t\sqrt{|t|},\ |t|\sqrt{|t|}\right\}$, $I = \mathbb{R}$.

(iv) $\{1 + t^2,\ t(t-1)\}$, $0 < t < 1$

(v) $\{\sinh(2\,t),\ \sinh t\}$, $I = \mathbb{R}$.

(vi) $\{\sin(t + \frac{\pi}{2}), \cos t\}$, $I = \mathbb{R}$.

(vii) $\{t^2,\ 2\,t^2 + \cos^2 t\}$, $I = \mathbb{R}$.

(viii) $\{(t+1)^2,\ \upsilon(t)\}$, $\upsilon(t) := \begin{cases} (t+1)^2, & -1 \le t \le 0 \\ 2\,(t+1) + 1, & t \ge 0 \end{cases}$ $I = [-1, \infty)$.

(ix) $\{\sin t, \upsilon(t)\}$, $\upsilon(t) := \begin{cases} \sin t, & -\frac{\pi}{2} < t \le 0 \\ t(t+1), & 0 \le t < \frac{\pi}{2} \end{cases}$ $I = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

2. Για καθένα από τα επόμενα ζευγάρια συναρτήσεων, $\{u_1(t), u_2(t)\}$, $t \in I$,

α) Επαληθεύστε ότι αποτελεί λύση της αντίστοιχης ΔΕ.

β) Ελέγξτε αν είναι και θεμελιώδες σύνολο λύσεων αυτής της ΔΕ.

(i) $\{\sinh t,\ e^t\}$, $I = \mathbb{R}$, $u'' = u$

(ii) $\{2\sin(2\,t) - 3\cos(2\,t),\ 3\cos(2\,t-1)\}$, $I = \mathbb{R}$, $u'' - 2\,u = 0$.

(iii) $\{t(t+1),\ t^2\}$, $I = \mathbb{R}$. $t^2\,u'' - 2\,t\,u' + 2\,u = 0$.

(iv) $\left\{\sqrt{t},\ t + 2\sqrt{t}\right)$, $I = (0, \infty)$, $2\,t^2\,u'' - t\,u' + u = 0$.

(v) $\{t,\ (t+1)\,e^t\}$, $I = \mathbb{R}$, $t^2\,u'' - t\,(t+2)\,u' + (t+2)\,u = 0$

(vi) $\{t,\ \cos t\}$, $I = \mathbb{R}$, $(1 + t\tan t)\,u'' - t\,u' + u = 0$

(vii) $\left\{\frac{\sin t}{\sqrt{t}},\ \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\right\}$, $I = (0, \infty)$, $4\,t^2\,u'' + 4\,t\,u' + (4\,t^2 - 1)\,u = 0$.

(viii) $\left\{\frac{\sinh t}{\sqrt{t}},\ \frac{e^t(1-e^{-2\,t})}{\sqrt{t}}\right\}$, $I = (0, \infty)$, $4\,t^2\,u'' + 4\,t\,u' - (4\,t^2 + 1)\,u = 0$.

(ix) $\left\{t,\ 1 + t\ln\sqrt{\frac{t-1}{t+1}}\right\}$, $I = (-1, 1)$, $(1 - t^2)\,u'' - 2\,t\,u' + 2\,u = 0$.

3. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Abel, υπολογίστε την μορφή της ορίζουσας Wronski κάθε θεμελιώδους σύνολου λύσεων των παρακάτω ΔΕ.

(i) $u'' = 4\,u + u'$.

(ii) $u'' = t\,u$.

(iii) $u'' - t\,u' + 2\,u = 0$.

(iv) $t^2\,u'' + 2\,t\,u' - 3\,u = 0$.

(v) $(1 + t^2)\,u'' - t\,u' + (t + 1)\,u = 0$.

(vi) $(2 + \cos t)\,u'' - \sin t\,u' + u = 0$.

(vii) $(1 - t^2)\,u'' - 2\,t\,u' + 6\,u = 0$.

(viii) $4\,t^2\,u'' + 4\,t\,u' - (4\,t^2 + 1)\,u = 0$.

3. Εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές

΄Οπως έχουμε τονίσει (και συνάγεται από τα προηγούμενα θεωρήματα), το πρώτο βήμα στην κατεύθυνση επίλυσης μιας γραμμικής ΔΕ δεύτερης τάξης αποτελεί η εύρεση δύο γραμμικά ανεξάρτητων λύσεων της αντίστοιχης ομογενούς.

Ωστόσο, αυτό το βήμα είναι πολύ δύσκολο να υλοποιηθεί στη γενική περίπτωση. Εξαίρεση αποτελούν οι ομογενείς ΔΕ με σταθερούς συντελεστές και όσες ανάγονται σ' αυτές, μέσω σημειακών μετασχηματισμών της ανεξάρτητης ή/και της εξαρτημένης μεταβλητής. Στο παρόν εδάφιο θα μελετήσουμε την πρώτη κατηγορία, αφήνοντας την δεύτερη για το επόμενο. Με άλλα λόγια, θα επικεντρώσουμε την προσοχή μας στις ΔΕ που γράφονται στη μορφή

(1) $$u'' + 2\,\kappa\,u' + \lambda\,u = 0,$$

όπου κ, λ τυχαίες πραγματικές σταθερές.

Ο λόγος για τον οποίο γράψαμε τον συντελεστή της πρώτης παραγώγου στη μορφή $2\,\kappa$ είναι ότι απλοποιεί την έκφραση της γενικής λύσης που θα κατασκευάσουμε σε λίγο. Πριν στραφούμε στην κατασκευή αυτής της λύσης, θα σημειώσουμε ότι κάθε ***ομογενής γραμμική εξίσωση δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές***, δηλαδή κάθε ΔΕ της μορφής

(2) $$a\,u'' + b\,u' + c\,u = 0,$$

με a, b, c δοσμένες στεθερές, ανάγεται αμέσως στην ***κανονική μορφή*** (1). Γιατί, είναι προφανές ότι, η ΔΕ (2) είναι δεύτερης τάξης εάν και μόνο όταν $a \neq 0$. Αυτό μας επιτρέπει να διαιρέσουμε όλους τους όρους με το συντελεστή a και, θέτοντας $(b/a) = 2\,\kappa$, $(c/a) = \lambda$, να καταλήξουμε στην (1).

Ας ξεκινήσουμε από την ειδικότερη περίπτωση όπου ο συντελεστής κ είναι μηδενικός, οπότε η (1) γίνεται

(3) $$u'' + \lambda\,u = 0.$$

Το ενδεχόμενο $\lambda = 0$ το έχουμε εξετάσει απανειλημμένα και γνωρίζουμε ότι, η αντίστοιχη γενική λύση είναι της μορφής $u = c_1 + c_2\, t$. Γνωρίζουμε επίσης ότι, $(e^t)' = e^t$ και άρα, για οποιαδήποτε σταθερή k, $(e^{\pm k\,t})' = \pm k\, e^{\pm k\,t}$. Συνεπώς,

(4) $$(e^{\pm k\,t})'' = \pm k\,(e^{\pm k\,t})' = (\pm k)^2\, e^{\pm k\,t} = k^2\, e^{\pm k\,t}.$$

Αυτό σημαίνει ότι οι συναρτήσεις $e^{k\,t}$, $e^{-k\,t}$ είναι λύσεις της ΔΕ

(5) $$u'' = k^2\, u.$$

΄Οταν το $k \neq 0$, οι $e^{k\,t}$, $e^{-k\,t}$ είναι και γραμμικά ανεξάρτητες στην πραγματική ευθεία. ΄Αρα συναποτελούν θεμελιώδες σύνολο λύσεων της (5).

Αλλά, αυτό σημαίνει ότι έχουμε ήδη βρει την γενική λύση της (3) όταν το λ είναι αρνητικό. Συγκεκριμένα, στην περίπτωση που το $\lambda < 0$, αρκεί να θέσουμε $k = \sqrt{-\lambda}$ για να δώσουμε στην (3) τη μορφή (5) και να πάρουμε ως γενική λύση την

(6) $$u = c_1\, e^{k\,t} + c_2\, e^{-k\,t}, \qquad k = \sqrt{-\lambda}\,.$$

Παρατήρηση. Η προηγούμενη λύση μπορεί να εκφραστεί και με τις ***υπερβολικές συναρτήσεις***

(7) $$\sinh t := \tfrac{1}{2}\,(e^t - e^{-t}), \qquad \cosh t := \tfrac{1}{2}\,(e^t + e^{-t}).$$

Από αυτούς τους ορισμούς αμέσως έπεται ότι

(8) $$e^t = \cosh t + \sinh t, \qquad e^{-t} = \cosh t - \sinh t.$$

Συνακόλουθα,

(9) $$\begin{aligned} c_1\, e^{k\,t} + c_2\, e^{-k\,t} &= c_1(\cosh k\,t + \sinh k\,t) + c_2(\cosh k\,t - \sinh k\,t) \\ &= (c_1 + c_2)\cosh k\,t + (c_1 - c_2)\sinh k\,t. \end{aligned}$$

΄Αρα η λύση (6) γράφεται σαν

(10) $$u = \tilde{c}_1 \cosh k\,t + \tilde{c}_2 \sinh k\ t,$$

όπου

(11) $$\tilde{c}_1 = c_1 + c_2, \qquad \tilde{c}_2 = c_1 - c_2.$$

Μένει να εξετάσουμε την περίπτωση όπου το λ είναι θετικό. Ειδικότερα, όταν το $\lambda = 1$, η (3) γράφεται στη μορφή

(12) $$u'' = -u,$$

που δηλώνει το εξής: Η δεύτερης τάξης παράγωγος της άγνωστης συνάρτησης $u(t)$ διαφέρει από την $u(t)$ μόνο ως προς το πρόσημο. Για να βρούμε, λοιπόν, λύσεις της (12), αρκεί να θυμηθούμε ότι $(\sin t)' = \cos t$, $(\cos t)' = -\sin t$. Γιατί, από αυτές τις σχέσεις αμέσως έπεται ότι

(13) $$(\sin t)'' = (\cos t)' = -\sin t, \qquad (\cos t)'' = -(\sin t)' = -\cos t.$$

΄Αρα, κάθε μία από τις συναρτήσεις $\sin t$, $\cos t$ αποτελεί λύση της $u'' = -u$. Συνακόλουθα, οι γραμμικοί συνδυασμοί τους,

(14) $$u = c_1 \cos t + c_2 \sin\ t,$$

μας δίνουν και τη γενική λύση της (12).

Από αυτή την παρατήρηση εύκολα συνάγεται ότι, η 2-παραμετρική οικογένεια συναρτήσεων

(14) $$u = c_1 \cos k\, t + c_2 \sin\, k\, t.$$

αποτελεί τη γενική λύση της ΔΕ

$$u'' = -k^2\, u, \quad k \neq 0.$$

Αλλά αυτό σημαίνει ότι έχουμε ήδη βρει και τη γενική λύση της (3) όταν το $\lambda > 0$. Συγκεκριμένα, αρκεί να θέσουμε $k = \sqrt{\lambda}$, για να έχουμε στη μορφή (14) τη γενική λύση της (3), στην περίπτωση που η παράμετρος λ είναι θετική.

Συγκεντρώνοντας τα προηγούμενα αποτελέσματα, μπορούμε να ισχυριστούμε ότι αποδείξαμε το ακόλουθο

Θεώρημα

Η γενική λύση της (μονοπαραμετρικής οικογένειας των) ΔΕ (3) δίνεται από τις συναρτήσεις

$$u = c_1 \cos \sqrt{-\lambda}\ t + c_2 \sin\ \sqrt{-\lambda}\ t,$$

$$u = c_1 + c_2\, t,$$

και

$$u = c_1 \cosh \sqrt{\lambda}\ t + c_2 \sinh \sqrt{\lambda}\ t,$$

όταν η παράμετρος λ της ίδιας της ΔΕ είναι αρνητική, μηδενική και θετική, αντίστοιχα.

□

Παρατήρηση

Στην διατύπωση του θεωρήματος προτιμήσαμε να εκφράσουμε τη λύση για $\lambda > 0$, χρησιμοποιώντας τις υπερβολικές συναρτήσεις $\sinh t$ και $\cosh t$, έτσι ώστε να υπάρχει συμμετρία με την αντίστοιχη έκφραση όταν το $\lambda < 0$. Ωστόσο, πολύ βολικότερη είναι η έκφραση της λύσης μέσω της εκθετικής συνάρτησης, χάρη στο γεγονός ότι η τελευταία έχει την ακόλουθη χαρακτηριστική ιδιότητα

(15) $$e^t\, e^s = e^{t+s}.$$

Αναρωτιέται, λοιπόν, κανείς αν μπορεί να αντικαταστήσει και τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις στη λύση για $\lambda < 0$ από κάτι πιο εύχρηστο. Πραγματικά, αυτό επιτυγχάνεται με το ακόλουθο τέχνασμα, που θέτει σε ίση μοίρα τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις με τις υπερβολικές.

Η λογική του τεχνάσματος στηρίζεται στην παρατήρηση ότι, χρησιμομοποιώντας τον συμβολισμό των μιγαδικών αριθμών, μπορούμε να γράψουμε το ζευγάρι $(\cos t,\ \sin t)$ στη μορφή $\cos t\ + i \sin t$. Απλώς για συντομία, την τελευταία θα τη γράφουμε ως $e^{i\,t}$. Με άλλα λόγια,

(16) $$e^{i\,t} := \cos t\ + i \sin t := (\cos t,\ \sin t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Από αυτό τον ορισμό αμέσως έπεται ότι

(17) $$e^{-it} = \cos(-t) + i\sin(-t) = \cos t - i\sin t.$$

Συνδυάζοντας, τις (16) και (17), καταλήγουμε στις σχέσεις

(18) $$\cos t = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it}), \qquad \sin t = \frac{1}{2i}(e^{it} - e^{-it}).$$

Με βάση αυτές τις σχέσεις, η έκφραση $u = c_1 \cos k t + c_2 \sin k t$, όπου c_1, c_2 και k τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί, γράφεται σαν

(19) $$u = c_1 \frac{1}{2}(e^{ikt} + e^{-ikt}) + c_2 \frac{1}{2i}(e^{ikt} - e^{-ikt}).$$

Ισοδύναμα,

(20) $$u = C_1 e^{ikt} + C_2 e^{-ikt},$$

όπου

(21) $$C_1 = \frac{1}{2}(c_1 - i c_2), \qquad C_2 = \frac{1}{2}(c_1 + i c_2).$$

Προφανώς, όταν $k = \sqrt{-\lambda}$, $\lambda < 0$, η (20) παριστάνει τη γενική λύση της ΔΕ (3) που αναφέρεται στο θεώρημα.

□

Με το τέχνασμα του να συμβολίσουμε το ζευγάρι $(\cos t, \ \sin t)$ με e^{it}, καταφέραμε να γράψουμε τη λύση της ΔΕ (3) όταν $\lambda < 0$ μέσω μιας συνάρτησης που μοιάζει με την εκθετική. Ωστόσο, δεν αποδείξαμε ακόμα ότι η τελευταία διαθέτει την ιδιότητα (15) που κάνει την εκθετική εύχρηστη. Και όμως. Από τον ορισμό (15) έπεται ότι

(22) $$e^{i(t+s)} = \cos(t+s) + i\sin(t+s).$$

για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς t, s.

Με τη σειρά τους, οι τριγωνομετρικές ταυτότητες

(23) $$\cos(t+s) = \cos t \cos s - \sin t \sin s, \qquad \sin(t+s) = \sin t \cos s + \cos t \sin s.$$

μας επιτρέπουν να γράψουμε την (22) σαν

(24) $$e^{i(t+s)} = \cos t \cos s - \sin t \sin s + i(\sin t \cos s + \cos t \sin s).$$

Από την άλλη, ο ορισμός του πολλαπλασιασμού δύο μιγαδικών αριθμών συνεπάγεται ότι

(25) $$\begin{aligned} e^{it} e^{is} &= (\cos t + i\sin t)(\cos s + i\sin s) \\ &= \cos t \cos s - \sin t \sin s + i(\sin t \cos s + \cos t \sin s). \end{aligned}$$

Η σύγκριση των (19) και (20) οδηγεί αμέσως στο επιθυμητό αποτέλεσμα:

(26) $$e^{it} e^{is} = e^{i(t+s)}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Με την ευκαιρία, σημειώνουμε ότι, ο ορισμός (16) μπορεί να επεκταθεί με τρόπο ώστε η βασική ιδιότητα $e^z e^w = e^{z+w}$ να ισχύει για κάθε ζευγάρι μιγαδικών αριθμών z, w. Αυτό επιτυγχάνεται με το να θέσουμε

(27) $$\boxed{e^{s+it} := e^s(\cos t + i\sin t), \quad s, \ t \in \mathbb{R}.}$$

□

Έχοντας βρει την γενική λύση όλων των ΔΕ της μορφής $u'' + \lambda u = 0$, μπορούμε να αντιμετωπίσουμε εύκολα και το ζήτημα της επίλυσης εξισώσεων της γενικότερης μορφής (1). Ένας τρόπος για να επιτύχουμε αυτόν τον στόχο είναι να βασιστούμε σε μια "υπόθεση εργασίας" που χρησιμοποιείται συχνά στην επίλυση συνήθων διαφορικών εξισώσεων - και όχι μόνο: Να υποθέσουμε ότι υπάρχει λύση $u(t)$ της (1) που έχει τη μορφή γινομένου δύο συναρτήσεων, δηλαδή ότι

(28) $$u(t) = \upsilon(t)\, w(t).$$

Σ' αυτή την περίπτωση,

(29) $$u' = \upsilon' w + \upsilon w', \qquad u'' = \upsilon'' w + 2\,\upsilon' w' + \upsilon w'',$$

οπότε η (1) γίνεται

(30) $$\upsilon'' w + 2\,\upsilon' w' + \upsilon w'' + 2\,\kappa\,(\upsilon' w + \upsilon w') + \lambda\, \upsilon\, w = 0.$$

Ισοδύναμα,

(31) $$\upsilon\, w'' + 2\,(\upsilon' + \kappa\,\upsilon)\, w' + (\upsilon'' + 2\,\kappa\ \upsilon' + \lambda\,\upsilon)\, w = 0.$$

Από αυτή τη μορφή της ΔΕ (1) προκύπτει αμέσως η ακόλουθη παρατήρηση. Αν η συνάρτηση $\upsilon(t)$ επιλεγεί να είναι μια μη μηδενική λύση της ΔΕ

(32) $$\upsilon' + \kappa\,\upsilon = 0,$$

τότε θα έχουμε $\upsilon'' = -\kappa\,\upsilon' = \kappa^2\,\upsilon$ και η (31) αναχθεί στην

(33) $$w'' + (\lambda - \kappa^2)\, w = 0.$$

Αλλά εμείς γνωρίζουμε ήδη πως να λύνουμε τόσο την (32) όσο και την (33). Συγκεκριμένα, οι γενική λύση της πρώτης δίνεται από την έκφραση

(34) $$\upsilon = c\, e^{-\kappa t},$$

και της δεύτερης από την

(35α) $$w = A\,t + B, \quad \text{αν} \quad \lambda = \kappa^2,$$

(35β) $$w = A\,e^{k t} + B\,e^{-k t}, \quad k := \sqrt{\lambda - \kappa^2}\,, \quad \text{αν}\ \lambda \neq \kappa^2.$$

Σημειώνουμε ότι στην τελευταία έκφραση οι παράμετροι A, B είναι, γενικά, μιγαδικοί αριθμοί. Αν θέλουμε να περιοριστούμε σε πραγματικές παραμέτρους, θα πρέπει να διακρίνουμε την περίπτωση όπου $\lambda > \kappa^2$ από εκείνη όπου $\lambda < \kappa^2$. Στην πρώτη, η σταθερή $k := \sqrt{\lambda - \kappa^2}$ είναι πραγματική, οπότε η (35β) με $A, B \in \mathbb{R}$ παριστάνει πραγματικές λύσεις της (33). Στη δεύτερη περίπτωση, η σταθερή είναι φανταστική, αφού $k := \sqrt{\lambda - \kappa^2} = i\,\sqrt{\kappa^2 - \lambda}$.

Έτσι ή αλλιώς έχουμε αποδείξει το ακόλουθο

Θεώρημα

Η γενική λύση της ομογενούς γραμμικής εξίσωσης δεύτερης τάξης

$$u'' + 2\,\kappa\, u' + \lambda\, u = 0$$

δίνεται από τις παρακάτω διπαραμετρικές οικογένειες πραγματικών συναρτήσεων:

(i) Αν $\lambda - \kappa^2 < 0$, τότε

$$u = c_1\, e^{-(\kappa+k)\,t} + c_2\, e^{-(\kappa-k)\,t}, \qquad k := \sqrt{\kappa^2 - \lambda}.$$

(ii) Αν $\lambda - \kappa^2 = 0$, τότε

$$u = (c_1\, t + c_2)\, e^{-\kappa\, t}.$$

(iii) Αν $\lambda - \kappa^2 > 0$, τότε

$$u = e^{-\kappa\, t}(c_1 \cos\omega\, t + c_2 \sin\omega\, t), \qquad \omega := \sqrt{\lambda - \kappa^2}.$$

□

Παράδειγμα

(i) Συγκρίνοντας την ΔΕ

(36) $$u'' + 2\, u' + u = 0$$

με τη γενική μορφή (1), συμπεραίνουμε ότι, στην προκείμενη περίπτωση, $\kappa = 1 = \lambda$. ΄Αρα, $\lambda - \kappa^2 = 0$ και, σύμφωνα με το θεώρημα, η γενική λύση της ΔΕ (36) δίνεται από την έκφραση

(37) $$u = (c_1\, t + c_2)\, e^{-t}.$$

(ii) Στην περίπτωση της ΔΕ

(38) $$u'' + 8\, u' - 9\, u = 0,$$

$\kappa = 4$, $\lambda = -9$ και άρα $\lambda - \kappa^2 = -25$. Συνεπώς, η γενική λύση αυτής της ΔΕ είναι της μορφής

(39) $$u = c_1\, e^{-9\, t} + c_2\, e^{t}.$$

(iii) Ανάλογα, η ΔΕ

(40) $$u'' + 8\, u' + 25\, u = 0$$

είναι της μορφής (1) με $\kappa = 4$, $\lambda = 25$. ΄Αρα $\lambda - \kappa^2 = 9$, οπότε η γενική λύση της (40) δίνεται από την 2-παραμετρική οικογένεια συναρτήσεων

(41) $$u = e^{-4\, t}(c_1 \cos 3\, t + c_2 \sin 3\, t).$$

□

Μια διαφορετική σκοπιά

Σχολιάζοντας τον τρόπο με τον οποίο καταλήξαμε στη γενική λύση των ΔΕ της μορφής (1) και (2), ο αναγνώστης θα μπορούσε να παρατηρήσει ότι θα ήταν απίθανο να σκεφτεί από μόνος του ότι η λύση μπορεί να είναι της μορφής γινόμενου συναρτήσεων. Με άλλα λόγια, θα μπορούσε να θέσει το ερώτημα αν υπάρχουν άλλες μέθοδοι αντιμετώπισης του ίδιου προβλήματος -μέθοδοι που θα έβλεπε ως πιθανό να τις εφεύρει κι ο ίδιος.

Βέβαια, γενικός κανόνας που να οδηγεί με φυσικό τρόπο στη λύση των μαθηματικών ή άλλων προβλημάτων δεν υπάρχει. Θα μπορούσαμε μόνο να μιλήσουμε για κάποιες μεθοδολογικές τακτικές και μία από αυτές είναι η

Αναγωγή του νέου προβλήματος που δίνεται προς λύση σε κάποιο οικείο.

Αυτό ακριβώς καταφέραμε να κάνουμε παραπάνω με την υπόθεση εργασίας $u(t) = \upsilon(t)\, w(t)$· μετατρέψαμε το πρόβλημα της επίλυσης των ΔΕ της μορφής (1) σ' εκείνο της επίλυσης των γνωστού τύπου εξισώσεων (32) και (33).

Εναλλακτικά, θα μπορούσε κανείς να εξετάσει αν υπάρχει σημειακός μετασχηματισμός που μετατρέπει τις ΔΕ (1) ή (2) σε κάποια που δεν περιέχει την πρώτη παράγωγο της άγνωστης συνάρτησης.

Ο τρίτος δρόμος θα μπορούσε να είναι ο εξής: ΄Οταν, στη μορφή (2), το $b = 0$ και το $c \neq 0$, τότε, οι βασικές λύσεις είναι της μορφής $e^{\pm k\, t}$, $k = \sqrt{-c/a}$. Θα μπορούσε, λοιπόν, να αναρωτηθεί κανείς μήπως υπάρχουν λύσεις της ίδιας μορφής και στην περίπτωση που ο συντελεστής b δεν είναι μηδενικός.

Ας υποθέτουμε ότι αυτό ισχύει, δηλαδή, ότι υπάρχει λύση της (2) που έχει τη μορφή $u = e^{r\, t}$. Η αντικατάσταση αυτής της έκφρασης στην (2) δίνει αμέσως το ακόλουθο αποτέλεσμα:

(42) $$(a\, r^2 + b\, r + c\,)\, e^{r\, t} = 0$$

Αλλά η συνάρτηση $e^{r\, t}$ είναι πάντα θετική. ΄Αρα η (42) θα ισχύει εάν και μόνο όταν η σταθερή r είναι λύση της αλγεβρικής εξίσωσης

(43) $$a\, r^2 + b\, r + c = 0.$$

Με άλλα λόγια, η ΔΕ (2) πραγματικά επιδέχεται λύσεις της μορφής $e^{r\, t}$ και αυτές δίνονται από τις συναρτήσεις

(44) $$u_\pm = e^{r_\pm\, t}$$

όπου

(45) $$r_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\, a\, c}}{2\, a}.$$

Αν θέσουμε

(46) $$\kappa := \frac{b}{2\, a}, \qquad \lambda := \frac{c}{a},$$

τότε η (45) γίνεται

(47) $$r_\pm = -\kappa \pm \sqrt{\kappa^2 - \lambda}\,.$$

΄Αρα, οι λύσεις (44) συμφωνούν μ' εκείνες που βρήκαμε με την προηγούμενη τεχνική. Με την εξής σημαντική διαφορά: ΄Οταν το $\lambda = \kappa^2$, τότε $r_+ = r_- = -\kappa$. Αυτό σημαίνει ότι, η παρούσα μέθοδος μας δίνει μόνο μία λύση, την $e^{-\kappa\, t}$. Συνεπώς, για να κατασκευάσουμε την γενική λύση της (2), χρειάζεται να βρούμε και μια δεύτερη λύση της, γραμμικά ανεξάρτητη από την $u_1(t) = e^{-\kappa\, t}$.

Για το σκοπό αυτό, θα μπορούσαμε να σκεφτούμε το ενδεχόμενο ότι, η δεύτερη λύση είναι της μορφής

(48) $$u_2(t) = c(t)\, u_1(t) = c(t)\, e^{-\kappa\, t}.$$

Πραγματικά, από την (48) έπεται ότι

(49) $$u_2' = (c' - \kappa\, c)\, e^{-\kappa\, t},$$

(50) $$u_2'' = (c'' - \kappa\, c')\, e^{-\kappa\, t} - \kappa(c' - \kappa\, c)\, e^{-\kappa\, t} = (c'' - 2\, \kappa\, c' + \kappa^2\, c)\, e^{-\kappa\, t}$$

Η αντικατάσταση των (48), (49) και (50) οδηγεί στην ακόλουθη σχέση

(51) $$(c'' - 2\kappa c' + \kappa^2 c)\, e^{-\kappa t} + 2\kappa (c' - \kappa c)\, e^{-\kappa t} + \kappa^2 c\, e^{-\kappa t} = 0,$$

η οποία απλοποιείται αμέσως για να γίνει

(52) $$c''\, e^{-\kappa t} = 0.$$

Συνεπώς, $c'' = 0$ και άρα

(53) $$c = c_1 + c_2\, t.$$

Η διαδικασία που μόλις ολοκληρώσαμε έδειξε ότι, όντως υπάρχουν λύσεις της μορφής $c(t)\, u_1(t)$ και δίνονται από την έκφραση

(54) $$u_2 = (c_1 + c_2\, t)\, e^{-\kappa t}.$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι αυτή η έκφραση δε μας δίνει μόνο μια δεύτερη θεμελιακή λύση, αλλά τη γενική λύση της εξίσωσης που μελετάμε.

□

Παρατήρηση. Όπως έχουμε ήδη τονίσει, όταν η συνάρτηση $u_1(t)$ είναι λύση μιας ομογενούς γραμμικής εξίσωσης, τότε, το ίδιο ισχύει και για κάθε πολλαπλάσιό της, δηλαδή για κάθε συνάρτηση της μορφής $c_1\, u_1(t)$. Έτσι, η υπόθεση εργασίας $u_2(t) = c(t)\, u_1(t)$ που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω για να καταλήξουμε στην (54) μπορεί να θεωρηθεί ότι ταιριάζει στον ακόλουθο ευρεστικό κανόνα.

Αν η $c_1\, u_1(t)$ είναι λύση μιας ομογενούς γραμμικής ΔΕ δεύτερης τάξης, τότε υπάρχει μια δεύτερη λύση, γραμμικά ανεξάρτητη από την πρώτη, η οποία προκύπτει με την αντικατάσταση της σταθερής c_1 από μια συνάρτηση της $c(t)$.

Γι' αυτό, ο παραπάνω ευρεστικός κανόνας ονομάζεται και ***μέθοδος της μεταβολής της σταθερής (ή παραμέτρου)***. Την είχαμε πρωτοπαρουσιάσει στο πλαίσιο των γραμμικών ΔΕ πρώτης τάξης. Όμως, η αποτελεσματικότητα αυτής της μεθόδου θα αναδειχτεί περισσότερο όταν στραφούμε στις ΔΕ με μη σταθερούς συντελεστές.

Ασκήσεις

1. Να βρεθεί η γενική λύση καθεμιάς από τις παρακάτω ΔΕ. Στη συνέχεια, να προσδιοριστεί η ειδική λύση που σέβεται τις αντίστοιχες αρχικές συνθήκες

$$u(0) = A, \quad u'(0) = B.$$

Τέλος, να κατασκευαστεί το γράφημα της ειδικής λύσης, επιλέγοντας το διάστημα της ανεξάρτητης μεταβλητής t, τέτοιο ώστε να προκύπτει σαφής εικόνα της ολικής συμπεριφοράς αυτής της λύσης.

(i) $4u'' + 4u' + 5u = 0, \quad A = 1, \quad B = 0.$

(ii) $4u'' - 4u' + 5u = 0, \quad A = 1, \quad B = 0.$

(iii) $u'' - 2u' + 5u = 0, \quad A = 0, \quad B = 2.$

(iv) $u'' - 2u' + u = 0, \quad A = 2, \quad B = -2.$

(v) $u'' - 2u' - 3u = 0, \qquad A = -3, \quad B = 0.$

(vi) $16u'' + 8u' - 3u = 0, \qquad A = 0, \quad B = 0.$

2. Να λυθεί η Ασκ.1 με τη βοήθεια του *Mathematica*.

4. Φυσικές εφαρμογές

Μηχανικές ταλαντώσεις.

Ένα ελικοειδές ελατήριο (σούστα) αντιστέκεται στη συμπίεση ή το ξέντωμά του. Με άλλα λόγια, τείνει να διατηρήσει το φυσικό του μήκος, L. Αυτό σημαίνει ότι, σε κάθε σώμα Σ που είναι προσδεμένο σ' ένα από τα ελεύθερα άκρα του, το παραμορφωμένο ελατήριο ασκεί κάποια δύναμη, $F_{\varepsilon\lambda}$. Το μέγεθος της $F_{\varepsilon\lambda}$ εξαρτιέται τόσο από την κατασκευή του ελατήριου όσο και από την αλλαγή του μήκους του, ΔL. Όταν το κλάσμα $\Delta L/L$ είναι μικρό, τότε μια ικανοποιητική αναπαράσταση της δύναμης που ασκεί το ελατήριο στο Σ δίνεται από τη σχέση $F_{\varepsilon\lambda} = -k\,|\Delta L|$. Η θετική παράμετρος k δείχνει το πόσο ισχυρό είναι το ελατήριο και, άρα, εκφράζει την κατασκευή του.

Χαρακτηριστικό είναι το παράδειγμα ενός ελατήριου που το ένα άκρο του είναι στερεωμένο στο "ταβάνι" και στο άλλο έχει προσδεθεί ένα σώμα Σ μάζας m. Όταν το σύστημα ισορροπεί στην κατακόρυφη διεύθυνση, έχουμε την κατάσταση που παριστάνει το επόμενο σχήμα. Αν αυτή η κατάσταση αντιστοιχεί στην επιμήκυνση (ξέντωμα) του ελατήριου κατά ΔL_0, τότε το Σ ισορροπεί υπό την επίδραση δύο δυνάμεων: Του βάρους του, B, και της δύναμης $F_{\varepsilon\lambda} = -k\,\Delta L_0$ που ασκεί επάνω του το ελατήριο. Αυτό σημαίνει ότι η ολική δύναμη, F, που υφίσταται το Σ μηδενίζεται:

(1) $$F = B + F_{\varepsilon\lambda} = 0.$$

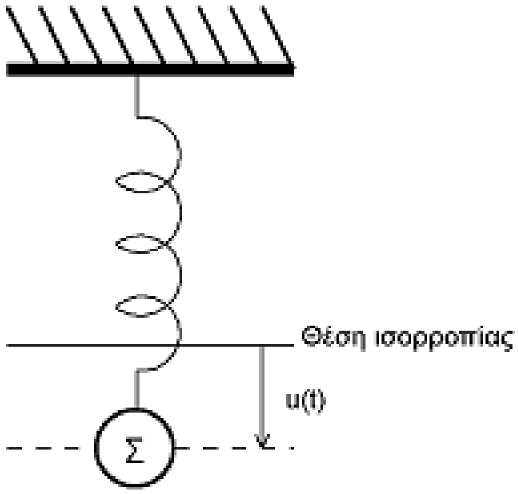
Αν θεωρήσουμε ως θετική την προς το πάτωμα κατεύθυνση, τότε το βάρος του σώματος είναι ίσο με το γινόμενο $m\,g$, όπου $g \approx 9,8\, m/\mathrm{sec}^2$. Συνεπώς, η (1) γίνεται

(2) $$m\,g - k\,\Delta L_0 = 0,$$

οπότε

(3) $$\Delta L_0 = \frac{m\,g}{k}$$

Από αυτή τη σχέση έπεται ότι όσο μεγαλύτερη είναι η χαρακτηριστική σταθερή k, τόσο μικρότερη θα είναι η επιμήκυνση του ελατήριου. Ισοδύναμα, αν κρεμάσουμε δύο σώματα του ίδιου βάρους σε δύο ελατήρια με χαρακτηριστικές k_1 και $k_2 > k_1$, αντίστοιχα, τότε το δεύτερο ελατήριο θα ξεντώσει λιγότερο -είναι το πιο ισχυρό ή "σφιχτό".



Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι τραβάμε το σώμα Σ προς τα κάτω και μετά το αφήνουμε, ή το χτυπάμε ελαφρά προς τα πάνω. Τότε θα παρατηρήσουμε ότι το Σ αρχίζει να ανεβοκατεβαίνει και, μετά από μερικές ταλαντώσεις, θα σταματήσει στη θέση όπου ισορροπούσε αρχικά. Αυτές οι ταλαντώσεις και η απόσβεσή τους μπορούν να εξηγηθούν με πολύ απλό τρόπο.

Ας επιλέξουμε ως άξονα x την κατακόρυφη ευθεία κατά μήκος της οποίας κινείται το Σ, με τη θετική του φορά προς τα κάτω. Ως αρχή αυτού του άξονα βολεύει να θεωρήσουμε το σημείο όπου ισορροπούσε το Σ αρχικά. Τότε, ο 2ος νόμος της Νευτωνικής μηχανικής παίρνει την ακόλουθη μορφή: Τη χρονική στιγμή t, η ***θέση*** του Σ δίνεται από τον αριθμό $x = u(t)$, όπου $u(t)$ μια λύση της ΔΕ

(4) $$m\,u''(t) = F(t), \qquad t \in I.$$

Στην προκείμενη περίπτωση, η συνολική δύναμη $F(t)$ που δρα στο Σ έχει τις ακόλουθες συνιστώσες:

(i) Το βάρος $B = m\,g$ του ίδιου του σώματος Σ.

(ii) Την "δύναμη επαναφοράς", $F_{\varepsilon\lambda}(t) = -k[\Delta L_0 + u(t)]$ που ασκεί στο Σ το ελατήριο.

(iii) Την αντίσταση του αέρα. Είναι η δύναμη που κάνει το Σ να χάνει διαρκώς ενέργεια, με αποτέλεσμα να επανέρχεται στη θέση ισορροπίας. ΄Οπως τονίσαμε και με άλλη ευκαιρία, ο τύπος $F_{\alpha\nu\tau}(t) = -r\,u'(t)$ δίνει μια (ικανοποιητική για μικρές ταχύτητες) αναπαράσταση αυτής της δύναμης.

Συνεπώς, η εξίσωση (4) γίνεται

(5) $$m\,u'' = m\,g - k(\Delta L_0 + u) - r\,u',$$

όπου, για ευκολία, παραλείψαμε την ρητή αναφορά της ανεξάρτητης μεταβλητής, t. Αλλά, από την συνθήκη ισορροπίας (2) έπεται ότι η (5) γίνεται

(6) $$m\,u'' = -k\,u - r\,u'$$

Τώρα, είναι φανερό ότι αρκεί να θέσουμε

(7) $$\frac{r}{m} = 2\,\kappa, \qquad \frac{k}{m} = \lambda$$

για να φέρουμε την (6) στη μορφή

(8) $$u'' + 2\kappa u' + \lambda u = 0,$$

που μελετήσαμε νωρίτερα. Σημειώνουμε, ωστόσο, ότι, σε αντίθεση με τη γενική περίπτωση, οι φυσικές σταθερές κ, λ είναι πάντα θετικές.

□

Θυμίζουμε ότι η μορφή της γενικής λύσης της (8) καθορίζεται από το πρόσημο του συνδυασμού $\lambda - \kappa^2$. Αφού στην προκείμενη περίπτωση $\lambda > 0$, μπορούμε να θέσουμε

(9) $$\lambda = \omega_0^2, \qquad \omega_0 := \sqrt{\frac{k}{m}}\,,$$

και να περιγράψουμε τις τρεις δυνατές περιπτώσεις με τον ακόλουθο τρόπο:

(i) $\omega_0 > \kappa \iff r^2 < 4\,m\,k$ (***Φθίνουσα αρμονική ταλάντωση***).

Κάτω από αυτή την προϋπόθεση, η λύση γίνεται

(10) $$u = e^{-\kappa t}(c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t), \qquad \omega := \sqrt{\omega_0^2 - \kappa^2}\,.$$

Είναι φανερό ότι σ' αυτή την περίπτωση η κίνηση του σώματος Σ είναι μια ***φθίνουσα ταλάντωση***. Κι αυτό γιατί, όσο εξαρτιέται από τον παράγοντα $c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t$, το σωμάτιο ταλαντεύεται γύρω από το σημείο $x = 0$ με ***γωνιακή ταχύτητα*** ω, δηλαδή με συχνότητα $\nu = \omega / 2\pi$. Από την άλλη, ο παράγοντας $e^{-\kappa t}$ φθίνει συνεχώς. Σαν αποτέλεσμα, η μέγιστη απομάκρυνση του Σ από τη θέση ισορροπίας μειώνεται σε κάθε κύκλο της ταλάντωσης.

Σημειώστε ότι, η ***στιγμιαία ταχύτητα*** του Σ δίνεται από τη συνάρτηση

(11) $$\upsilon := u'(t) = e^{-\kappa t}[(\omega c_2 - \kappa c_1)\cos\omega t - (\omega c_1 + \kappa c_2)\sin\omega t]$$

Συνεπώς, η ταχύτητα μηδενίζεται τις στιγμές $\{t_j\}$, κατά τις οποίες

(12) $$\tan\omega t_j = \frac{\omega c_2 - \kappa c_1}{\omega c_1 + \kappa c_2}$$

Στο επόμενο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της φθίνουσας ταλάντωσης ενός συγκεκριμένου σώματος. Οι τρεις καμπύλες του σχήματος αντιστοιχούν σε διαφορετικές τιμές της ταχύτητας που έχει το σώμα τη χρονική στιγμή $t = 0$. Και για τις τρεις περιπτώσεις έχουμε υποθέσει ότι, την στιγμή $t = 0$ το σώμα βρίσκεται στο σημείο $x = 0$.

(ii) $\omega_0 = \kappa \iff r^2 = 4\,m\,k$ (***Κρίσιμη απόσβεση***).

Τώρα, η κίνηση του σώματος Σ περιγράφεται από την γενική λύση

(13) $$u = (c_1 t + c_2)\, e^{-\kappa t}.$$

Από αυτή την έκφραση γίνεται φανερό ότι, εξ αιτίας του παράγοντα $e^{-\kappa t}$, η απόσταση $|u(t)|$ του Σ από το σημείο $x = 0$ θα μειώνεται πολύ γρήγορα. Από την άλλη, ο παράγοντας $c_1 t + c_2$ μπορεί να μηδενιστεί για μία το πολύ τιμή της χρονικής μεταβλητής t. Συνακόλουθα, το Σ είτε θα παραμείνει στη μια πλευρά σημείου ισορροπίας καθ' όλη τη διάρκεια της κίνησής του, είτε θα "καταφέρει" να περάσει κάποια στιγμή από την άλλη, για να παραμείνει εκεί έως ότου πάψει να κινείται. Οι εναλλατικές περιπτώσεις επεξηγούνται από το επόμενο σχήμα.

(iii) $\omega_0 < \kappa \iff r^2 > 4\,m\,k$ (***Υπερκρίσιμη απόσβεση***).

΄Οταν η συντελεστής αντίστασης ξεπεράση το κατώφλι ω_0, η γενική λύση που περιγράφει την κίνηση του Σ δίνεται από τις συναρτήσεις

$$(14) \qquad u = c_1\, e^{-(\kappa+\nu)\,t} + c_2\, e^{-(\kappa-\nu)\,t}, \qquad \nu := \sqrt{\kappa^2 - \omega_0{}^2}\,.$$

Από τον ορισμό της σταθερής ν και το γεγονός ότι $\kappa > 0$ έπεται ότι $\kappa \pm \nu > 0$. Συνακόλουθα, οι συναρτήσεις $e^{-(\kappa\pm\nu)\,t}$ είναι φθίνουσες. Αυτό συνεπάγεται ότι, και σ' αυτή την περίπτωση, η απόσταση $|\,u(t)\,|$ του σώματος Σ από το σημείο $x = 0$ μειώνεται πολύ γρήγορα. Γενικά, η κίνηση του Σ έχει τα ίδια χαρακτηριστικά μ' εκείνη που αντιστοιχεί στη συνθήκη $\omega_0 = \kappa$. Η μόνη αξιόλογη διαφορά είναι ότι, στην προκείμενη περίπτωση, τα χαρακτηριστικά της κίνησης είναι ευσταθή ως προς μικρές αλλαγές της παραμέτρου κ. Αντίθετα, στην περίπτωση όπου $\omega_0 = \kappa$ μια μικρή μείωση της τιμής της κ (ελάττωση του συντελεστή αντίστασης) αρκεί για να μετατρέψει την κίνηση σε φθίνουσα ταλάντωση. Το προηγούμενο σχήμα δείχνει και τις εναλλατικές μορφές κίνησης και για την περίπτωση όπου $\omega_0 < \kappa$.

Ηλεκτρικές ταλαντώσεις.

Στην περίπτωση ενός απλού ηλεκτρικού κυκλώματος οι παράμετροι κ και λ της εξίσωσης

$$u'' + 2\,\kappa\,u' + \lambda\,u = 0,$$

αποκτούν διαφορετική φυσική σημασία. Για να δούμε αναλυτικά το νόημά τους, θα χρειαστεί να υπενθυμίσουμε την δομή ενός τέτοιου κυκλώματος και τις αντίστοιχες φυσικές έννοιες.

Αρχίζουμε από τα βασικά στοιχεία του απλού ηλεκτρικού κυκλώματος, που είναι τα εξής:

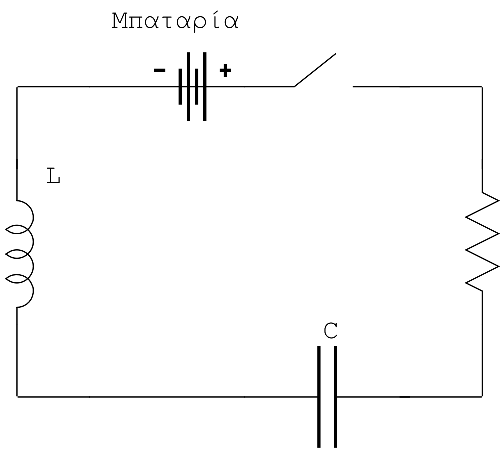
(i) Ένας ***πυκνωτής***, δηλαδή μια συσκευή στην οποία μπορεί να συσσωρεύεται ηλεκτρικό φορτίο. Χαρακτηρίζεται μονοσήμαντα από μια θετική σταθερή C, η οποία εκφράζει την ***χωρητικότητα*** (αποθηκευτική ικανότητα) του πυκνωτή. Η σταθερή C χρησιμοποιείται και ως σύμβολο του ίδιου του πυκνωτή. Ως μονάδα χωρητικότητας χρησιμοποιείται το Farad, που συμβολίζεται με το γράμμα F. Συνήθως, η χωρητικότητα είναι τόσο μικρή που μετριέται σε εκατομμυριοστά του Farad ή μικρο-Farad, μF: $1\,\mu F = 10^{-6}\,F$.

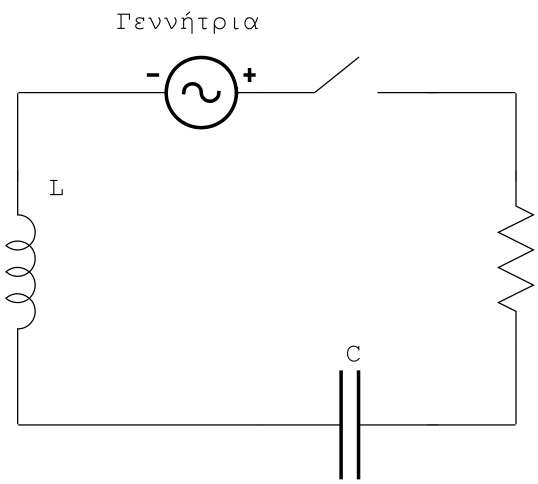
(ii) Μιαν ***αντίσταση***, δηλαδή μια συσκευή που καθορίζει την αντίσταση μετακίνησης ηλεκτρικού φορτίου προς ή από τον πυκνωτή ή, ισοδύναμα, κατά μήκος του ηλεκτρικού κυκλώματος. Η αντίσταση συμβολίζεται με R. Η αντίστοιχη μονάδα μέτρησης είναι το Ohm, που συμβολίζεται με Ω.

(iii) Ένα ***πηνίο***, δηλαδή μια συσκευή που καθορίζει την αντίσταση του κυκλώματος στην αλλαγή της ταχύτητας ροής του φορτίου. Αυτή η ιδιότητα ονομάζεται ***αυτεπαγωγή*** και εκφράζεται από μια θετική σταθερή L, η οποία συμβολίζει και το ίδιο το πηνίο. Μονάδα μέτρησης της αυτεπαγωγής είναι το Henry, το οποίο συμβολίζεται με H. Συνήθως, οι τιμές αυτεπαγωγής που συναντάμε είναι της τάξης του μιλι-Henry, $m\,H$. ($1\,m\,H = 10^{-3}\,H$).

(iv) Μια ***μπαταρία*** ή ***γεννήτρια***, δηλαδή μια συσκευή που, σαν αντλία, εξωθεί το φορτίο να μετακινείται κατά μήκος του κυκλώματος ή προς και από τον "οπλισμό" του πυκνωτή.

Ένα κύκλωμα με τα παραπάνω στοιχεία παριστάνεται γραφικά με τον τρόπο που δείχνουν τα δύο επόμενα σχήματα. (Η πλάγια γραμμή δίπλα στην πηγή (μπαταρία ή γεννήτρια) συμβολίζει τον διακόπτη).





Ακολουθώντας τον καθιερωμένο συμβολισμό, εισάγουμε πρώτα τις συναρτήσεις $Q(t)$, $I_\sigma(t)$ και $V_\sigma(t)$, στις οποίες δίνουμε την ακόλουθη φυσική σημασία:

(i) Η $Q(t)$ παριστάνει το ***ηλεκτρικό φορτίο*** του πυκνωτή την χρονική στιγμή t. Ακριβέστερα, η συνάρτηση $Q(t)$ εκφράζει το φορτίο που βρίσκεται στο ένα από τα δύο μεταλικά φύλλα του πυκνωτή. Στο άλλο φύλλο, που είναι ηλεκτρικά μονωμένο από το πρώτο, συσσωρεύται το ίδιο σε μέγεθος, αλλά αντίθετο σε πρόσημο, φορτίο, δηλαδή $-Q(t)$. Ως μονάδα φορτίου συνήθως υιοθετείται το Coulomb (C).

(ii) Η $I_\sigma(t)$ εκφράζει το ηλεκτρικό φορτίο που διέρχεται από κάποιο σημείο, σ, του κυκλώματος ανά μονάδα χρόνου και λέγεται ***ηλεκτρικό ρεύμα***. Η συνηθισμένη μονάδα ρεύματος είναι το Ampère (A).

Για παράδειγμα, ας θεωρήσουμε ότι το $I_Q(t)$ παριστάνει το φορτίο που διέρχεται ανά μονάδα χρόνου από ένα σημείο του κυκλώματος ακριβώς έξω από τον πυκνωτή. Αυτό το φορτίο είναι ίσο μ' εκείνο που "κερδίζει" ή "χάνει" ο πυκνωτής. Συνεπώς, η συνάρτηση $I_Q(t)$ εκφράζει τον ρυθμό με τον οποίο αυξάνει ή μειώνεται το φορτίο στον πυκνωτή. Με άλλα λόγια, $I_Q(t) = Q'(t)$.

΄Ομως, στην απλή διάταξη που μελετάμε, το ηλεκτρικό ρεύμα είναι το ίδιο σε όλα τα σημεία του κυκλώματος. Γι αυτό το συμβολίζουμε $I(t)$, οπότε η παραπάνω σχέση γίνεται

(15) $$I(t) = Q'(t).$$

(iii) Η $V_\sigma(t)$ παριστάνει τη στιγμιαία ***διαφορά ηλεκτρικού δυναμικού*** στους ακροδέκτες του στοιχείου σ του κυκλώματος και μετριέται σε Volt (V). Αυτή η συνάρτηση καθορίζεται από τις δύο προηγούμενες και την τιμή της σταθερής που χαρακτηρίζει το στοιχείο σ. Συγκεκριμένα,

(16) $$V_C(t) = Q(t)/C, \qquad V_R(t) = R\,I(t), \qquad V_L(t) = L\,I'(t).$$

Η αρχή της διατήρησης του ηλεκτρικού φορτίου οδηγεί στον ***1ο νόμο του Kirchhoff***:

Το άθροισμα των $V_R(t)$, $V_C(t)$ και $V_L(t)$ πρέπει να είναι ίσο προς τη διαφορά δυναμικού, $E(t)$, στους ακροδέκτες της πηγής (γεννήτριας ή μπαταρίας). Με άλλα λόγια, σε κάθε απλό κύκλωμα ισχύει η συνθήκη

(17) $$R\,I(t) + \frac{1}{C}\,Q(t) + L\,I'(t) = E(t).$$

Αλλά από την (15) έπεται ότι αυτή η συνθήκη γράφεται και ως εξής:

(18) $$L\,Q''(t) + R\,Q'(t) + \frac{1}{C}\,Q(t) = E(t).$$

Συνεπώς, η χρονική εξέλιξη του ηλεκτρικού φορτίου που βρίσκουμε στον πυκνωτή ενός απλού ηλεκτρικού κυκλώματος περιγράφεται από μια, γενικά μη ομογενή, ΔΕ δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές. ΄Οταν το κύκλωμα δεν περιλαμβάνει μπαταρία ή γεννήτρια, το δεξί μέλος της (18) μηδενίζεται, οπότε καταλήγουμε σε μια ομογενή ΔΕ, της ίδιας μορφής με την (6). Ακριβέστερα, η (18) προκύπτει από την (6), μέσω της αντικατάστασης

(19) $$(m,\ k,\ r,\ u) \to (L,\ C^{-1},\ R,\ Q).$$

Συνακόλουθα, οι λύσεις της (18) εμπίπτουν σε μια από τις τρεις επόμενες κατηγορίες, όπου, τώρα

(20) $$\omega_0 := \frac{1}{\sqrt{L\,C}}, \qquad \kappa := \frac{R}{2\,L}.$$

(i) $\omega_0 > \kappa \iff R^2 < 4\,L/\,C$ (***Φθίνουσα αρμονική ταλάντωση***).

(21) $$Q = e^{-\kappa t}(c_1 \cos\omega\,t + c_2 \sin\omega\,t), \qquad \omega := \sqrt{\omega_0{}^2 - \kappa^2}.$$

(ii) $\omega_0 = \kappa \iff R^2 = 4\,L/\,C$ (***Κρίσιμη απόσβεση***).

(22) $$Q = (c_1\,t + c_2)\,e^{-\kappa t}.$$

(iii) $\omega_0 < \kappa \iff R^2 > 4\,L/\,C$ (***Υπερκρίσιμη απόσβεση***) .

(23) $$Q = c_1\,e^{-(\kappa+\nu)\,t} + c_2\,e^{-(\kappa-\nu)\,t}, \qquad \nu := \sqrt{\kappa^2 - \omega_0{}^2}.$$

□

Κλείνοντας αυτή την σύντομη ανάλυση των απλών ηλεκτρικών κυκλωμάτων θα σημειώσουμε ότι,

(i) Παραγωγίζοντας την βασική εξίσωση (18) και λαβαίνοντας υπόψη τη σχέση $Q'(t) = I(t)$ καταλήγουμε στην

(24) $$L\, I''(t) + R\, I'(t) + \frac{1}{C}\, I(t) = E'(t).$$

Αυτή την εξίσωση συντάμε συχνότερα στις εφαρμογές, δοσμένου ότι, η φυσική παράμετρος ενός κυκλώματος που συνήθως μετριέται με το κατάλληλο όργανο είναι το ρεύμα του.

(ii) Οι σχέσεις (15) και (16) καθορίζουν και τις σχέσεις των μονάδων στις οποίες μετράμε τόσο τα αδρανή στοιχεία R, L και C, όσο και τις καταστατικές ποσότητες Q και I του κυκλώματος. Για παράδειγμα, από την (15) έπεται ότι

(25) $$1\, A = 1\, C / \text{sec} \iff 1 \text{ Ampère} = (1 \text{ Coulomb}) / (1 \text{ sec}).$$

Ανάλογα, από την πρώτη των (16) συνάγεται ότι $C = Q / V$. Συνεπώς,

(26) $$1\, F = 1\, C / V \iff 1 \text{ Farad} = (1 \text{ Coulomb}) / (1 \text{ Volt}).$$

Με τον ίδιο τρόπο, η τρίτη των (16) συνεπάγεται ότι $L = V / I'$. Συνακόλουθα,

(27) $$1\, H = 1\, V / (A / \text{sec}) = 1\, V \cdot \text{sec} / A \iff 1 \text{ Henry} = 1 \text{ Volt} \cdot \text{sec/Ampère}.$$

Από αυτές τις σχέσεις αμέσως έπεται ότι το γινόμενο $L\, C$ έχει την φυσική διάσταση

$$H\, F = (1\, V \cdot \text{sec} / A)\, (1\, C / V) = C\, \text{sec} / A = \text{sec}^2.$$

Ασκήσεις

1. Να λυθούν τα ακόλουθα ΠΑΤ, τα οποία αναφέρονται στη διάταξη του προτελευταίου σχήματος (το σώμα Σ στην ελεύθερη άκρη του ελατήριου που κρέμεται από το ταβάνι). Σε όλες τις περιπτώσεις, η μάζα του Σ και ο συντελεστής αντίστασης του αέρα θεωρούνται ίσες με $m = 2\,\text{kg}$ και $r = 0,\, 4\, N \cdot \text{sec} / m$, αντίστοιχα. Η σταθερή σκληρότητας του ελατήριου, k, δίνεται κατά περίπτωση.

Για κάθε ΠΑΤ ξεχωριστά, να υπολογιστεί η στιγμιαία ταχύτητα του Σ, καθώς και η συχνότητα με την οποία τυχόν ταλαντώνεται. Επίσης να δοθεί η γραφική παράσταση της θέσης και της ταχύτητας του Σ, για το χρονικό διάστημα $t \geq 0$.

(i) $u(0) = 10\,\text{cm}$, $u'(0) = 0$, $k = 2,\, 02\, N / m$.

(ii) $u(0) = 0$, $u'(0) = -10\,\text{cm} / \text{sec}$, $k = 2,\, 02\, N / m$.

(iii) $u(0) = 10\,\text{cm}$, $u'(0) = -10\,\text{cm} / \text{sec}$, $k = 2,\, 02\, N / m$.

(iv) $u(0) = 10\,\text{cm}$, $u'(0) = 0$, $k = 0,\, 02\, N / m$.

(v) $u(0) = 0$, $u'(0) = 10\,\text{cm} / \text{sec}$, $k = 0,\, 02\, N / m$.

(vi) $u(0) = 10\,\text{cm}$, $u'(0) = 10\,\text{cm} / \text{sec}$, $k = 0,\, 02\, N / m$.

(vii) $u(0) = 10\,\text{cm}$, $u'(0) = -3\,\text{cm} / \text{sec}$, $k = 0,\, 015\, N / m$.

(viii) $u(0) = 0$, $u'(0) = -3\,\text{cm} / \text{secc}$, $k = 0,\, 015\, N / m$.

(ix) $u(0) = 10\,\text{cm}$, $u'(0) = 0$, $k = 0,\, 015\, N / m$.

2. Να λυθούν τα ακόλουθα ΠΑΤ, τα οποία αφορούν την διάταξη του επόμενου σχήματος -ένα ηλεκτρικό κύκλωμα $R\,C\,L$ χωρίς πηγή- αλλά με τον διακόπτη κλειστό. Για όλα τα ΠΑΤ, $L = 50\,m\,H$, $R = 10\,\Omega$, ενώ η χωρητικότητα C του πυκνωτή δίνεται κατά περίπτωση.

Σε κάθε περίπτωση, να δοθεί η γραφική παράσταση του ηλεκτρικού ρεύματος που διατρέχει το κύκλωμα, για το χρονικό διάστημα $t \geq 0$.

(i) $I(0) = 0,3\,A$, $I'(0) = 0,1\,A/\sec$, $C = 400\,\mu\,F$

(ii) $I(0) = 0,3\,A$, $I'(0) = 0$, $C = 400\,\mu\,F$

(iii) $I(0) = 0$, $I'(0) = 0,1\,A/\sec$, $C = 400\,\mu\,F$

(iv) $I(0) = 0,3\,A$, $I'(0) = 0,1\,A/\sec$, $C = 2.000\,\mu\,F$

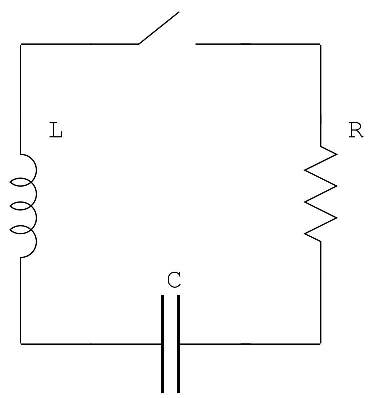
(v) $I(0) = 0,3\,A$, $I'(0) = 0$, $C = 2.000\,\mu\,F$

(vi) $I(0) = 0$, $I'(0) = 0,1\,A/\sec$, $C = 2.000\,\mu\,F$

(vii) $I(0) = 0,3\,A$, $I'(0) = 0,1\,A/\sec$, $C = 3.125\,\mu\,F$

(viii) $I(0) = 0,3\,A$, $I'(0) = 0$, $C = 3.125\,\mu\,F$

(ix) $I(0) = 0$, $I'(0) = 0,1\,A/\sec$, $C = 3.125\,\mu\,F$



5. Υποβιβασμός τάξης

Ενθαρρυμένοι από το αποτέλεσμα του ευρεστικού κανόνα που χρησιμοποιήσαμε στο τελευταίο μέρος του εδάφιου για τις ΔΕ με σταθερούς συντελεστές, επανερχόμαστε στην εξής

Εικασία

Αν η $u_1(t)$ είναι λύση μιας ομογενούς γραμμικής ΔΕ δεύτερης τάξης, τότε μια δεύτερη λύση της ίδιας εξίσωσης, γραμμικά ανεξάρτητη από την πρώτη, είναι της μορφής

(1) $$u(t) = c(t)\, u_1(t)$$

όπου $c(t)$ μη σταθερή συνάρτηση.

Αν το συμπέρασμα αυτής της εικασίας αληθεύει, τότε η αντικατάσταση της (1) στην

(2) $$u'' = g(t)\, u + h(t)\, u'$$

θα πρέπει να οδηγεί στον προσδιορισμό της συνάρτησης $c(t)$.

Τώρα, από την (2) έπεται ότι

(3) $$u' = c'\, u_1 + c\, u_1', \quad u'' = c''\, u_1 + 2\, c'\, u_1' + c\, u_1''.$$

Η αντικατάσταση των (2) και (3) στην (1) οδηγεί στην ακόλουθη σχέση

(4) $$c''\, u_1 + 2\, c'\, u_1' + c\, u_1'' = g\, c\, u_1 + h(c'\, u_1 + c\, u_1').$$

΄Ομως, έχουμε υποθέσει ότι η $u_1(t)$ αποτελεί λύση της (1), ότι δηλαδή

(5) $$u_1'' = g\, u_1 + u_1' .$$

΄Αρα η προηγούμενη εξίσωση απλοποιείται σημαντικά και γίνεται

(6) $$c''\, u_1 + c'(2\, u_1' - h\, u_1) = 0.$$

Τόσο η $u_1(t)$ όσο και η $h(t)$ είναι γνωστές συναρτήσεις. Συνεπώς, η προηγούμενη είναι μια ομογενής γραμμική εξίσωση δεύτερης τάξης για την άγνωστη συνάρτηση $c(t)$. Το αξιοσημείωτο είναι, μάλιστα, ότι η (6) δεν περιέχει την ίδια την $c(t)$, αλλά τις παραγώγους της. Κατά συνέπεια, αν θέσουμε

(7) $$\psi(t) := c'(t),$$

τότε η (6) θα μετατραπεί στην ομογενή γραμμική πρώτης τάξης

(8) $$u_1\, \psi' + (2\, u_1' - h\, u_1)\, \psi = 0.$$

Σ' αυτό ακριβώς το γεγονός, δηλαδή στο ότι, για την εύρεση της συνάρτησης $c(t)$ και άρα της δεύτερης λύσης της αρχικής ΔΕ, αρκεί να λύσουμε μιαν εξίσωση πρώτης και όχι δεύτερης τάξης, οφείλει το όνομά της η πιο πάνω τεχνική επίλυσης. Ονομάζεται ***μέθοδος του υποβιβασμού της τάξης*** (της ΔΕ).

Για να ολοκληρώσουμε τη διαδικασία επίλυσης, σημειώνουμε ότι η (8) γράφεται σαν

(9) $$\frac{\psi'}{\psi} + 2\, \frac{u_1'}{u_1} - h = 0.$$

Ολοκληρώνοντας την προηγούμενη σχέση, βρίσκουμε ότι

(10) $$\ln\,|\,\psi\,| + 2\ln|\,u_1\,| - \int h(t)\,d\,t = \tilde{c}_2,$$

οπότε

(11) $$\psi = \frac{c_2}{[u_1(t)]^2}\exp[\int h(t)\,d\,t].$$

Από αυτή την έκφραση και την $c'(t) = \psi(t)$ αμέσως έπεται ότι

(12) $$c(t) = c_1 + c_2\,\upsilon(t), \qquad \upsilon(t) := \int \frac{1}{[u_1(t)]^2}\exp[\int h(t)\,d\,t]\,d\,t$$

Συνεπώς,

(13) $$u = c(t)\,u_1(t) = [c_1 + c_2\,\upsilon(t)]\,u_1(t).$$

Είναι φανερό ότι το τμήμα $c_1\,u_1(t)$ της τελευταίας έκφρασης είναι ανάλογο της γνωστής λύσης με την οποία ξεκινήσαμε. Τη νέα λύση αποτελεί η συνάρτηση $c_2\,\upsilon(t)\,u_1(t)$, η οποία είναι γραμμικά ανεξάρτητη από την $c_1\,u_1(t)$, αφού η $\upsilon(t)$ δεν είναι σταθερή.

Συμπερασματικά, η τεχνική του υποβιβασμού της τάξης οδήγησε στο ακόλουθο

Θεώρημα

Αν η συνάρτηση $u_1(t)$ αποτελεί λύση της ομογενούς γραμμικής ΔΕ

$$u'' = g(t)\,u + h(t)\,u', \quad t \in I,$$

όπου $g(t)$, $h(t)$ δοσμένες συναρτήσεις, συνεχείς στο διάστημα I της πραγματικής ευθείας, τότε η γενική λύση της παραπάνω ΔΕ δίνεται από τη 2-παραμετρική οικογένεια συναρτήσεων

$$u = c_1\,u_1(t) + c_2\,u_2(t),$$

όπου

$$u_2(t) = u_1(t)\int \frac{1}{[u_1(t)]^2}\exp[\int h(t)\,d\,t]\,d\,t.$$

□

Παράδειγμα

Ας θεωρήσουμε την ομογενή ΔΕ

(14) $$(1 - t^2)\,u'' - 2\,t\,u' + 2\,u = 0, \qquad -1 < t < 1.$$

Μπορούμε εύκολα να εντοπίσουμε μια λύση αυτής της εξίσωσης στις συναρτήσεις της μορφής

(15) $$u_1(t) = t^a.$$

Γιατί, η αντικατάσταση της (15) στην (14) οδηγεί αμέσως στην εξίσωση

$$(1 - t^2)\,a(a-1)\,t^{a-2} - 2\,t\,a\,t^{a-1} + 2\,t^a = 0,$$

που απλοποιείται για να γίνει

(16) $$(a\;-1)\,(a\,t^{-2} - a - 2\;)\,t^a = 0.$$

Συνεπώς, $a = 1$.

Από την άλλη, η κανονική μορφή της (14) είναι η

(17) $$u'' = -\frac{2}{1-t^2}\, u + \frac{2\,t}{1-t^2}\, u'.$$

΄Αρα, στην προκείμενη περίπτωση,

(18) $$h(t) = \frac{2\,t}{1-t^2},$$

οπότε

(19) $$\int h(t)\,d\,t = -\ln(1-t^2), \qquad \exp[\int h(t)\,d\,t] = (1-t^2)^{-1}.$$

Συνακόλουθα,

(20) $$\int \frac{1}{[u_1(t)]^2} \exp[\int h(t)\,d\,t]\,d\,t = \int \frac{1}{t^2}\,\frac{1}{1-t^2}\,d\,t = \int (\frac{1}{t^2} + \frac{1}{1-t^2})\,d\,t$$
$$= \int (\frac{1}{t^2} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+t} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-t})\,d\,t = -\frac{1}{t} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t}$$

Τέλος, από το θεώρημα που μόλις αποδείξαμε έπεται ότι μια δεύτερη λύση της (14), γραμμικά ανεξάρτητη από την $u_1(t) = t$, δίνεται από την έκφραση

(21) $$u_2(t) = -1 + \frac{1}{2}\,t\,\ln\frac{1+t}{1-t}.$$

□

Παράδειγμα

Με την ίδια υπόθεση εργασίας που χρησιμοποιήσαμε στο προηγούμενο παράδειγμα, μπορεί κανείς να εντοπίσει την λύση

(22) $$u_1(t) = \frac{1}{t}, \quad t > 0,$$

της ΔΕ

(23) $$t^2\,u'' + 3\,t\,u' + u = 0, \qquad t > 0.$$

Η κανονική μορφή της τελευταίας είναι η

(24) $$u'' = -\frac{1}{t^2}\,u - \frac{3}{t}\,u'.$$

Σ' αυτή την περίπτωση, λοιπόν,

(25) $$h(t) = -\frac{3}{t},$$

οπότε,

(26) $$\int h(t)\,d\,t = -3\ln t, \qquad \exp[\int h(t)\,d\,t] = t^{-3}.$$

Συνακόλουθα,

(27) $$\int \frac{1}{[u_1(t)]^2} \exp[\int h(t)\,d\,t]\,d\,t = \int \frac{1}{(t^{-1})^2}\,t^{-3}\,d\,t = \ln t$$

΄Ετσι, με βάση το προηγούμενο θεώρημα, συμπεραίνουμε ότι, η γενική λύση της ΔΕ (23) δίνεται από την έκφραση

(28) $$u = c_1\,u_1(t) + c_2\,u_2(t) = c_1\,t^{-1} + c_2\,t^{-1}\ln t = t^{-1}(c_1 + c_2 \ln t), \;\; t > 0.$$

□

Παράδειγμα

Το γεγονός ότι, η συνάρτηση

(29) $$u_1(t) = e^t$$

αποτελεί λύση της ΔΕ

(30) $$t\,u'' - (t+3)\,u' + 3\,u = 0, \quad t > 0,$$

επαληθεύται με απλή αντικατάσταση.

Σε κανονική μορφή, η (30) γράφεται ως εξής:

(31) $$u'' = -\frac{3}{t}\,u + \frac{t+3}{t}\,u', \quad t > 0.$$

Σ' αυτή την ΔΕ,

(32) $$h(t) = \frac{t+3}{t}, \quad t > 0,$$

οπότε,

(33) $$\int h(t)\,d\,t = t + 3\ln t, \qquad \exp\left[\int h(t)\,d\,t\right] = t^3\,e^t.$$

Από τις (29) και (33) έπεται ότι,

(34) $$\int \frac{1}{[u_1(t)]^2}\exp\left[\int h(t)\,d\,t\right]d\,t = \int e^{-2\,t}\,t^3\,e^t\,d\,t = \int t^3\,e^{-t}\,d\,t.$$

Η κατά παράγοντες ολοκλήρωση δίνει

(35) $$\int t^3\,e^{-t}\,d\,t = -(6 + 6\,t + 3\,t^2 + t^3)\,e^{-t},$$

οπότε, μια δεύτερη λύση της ΔΕ (30), γραμμικά ανεξάρτητη από την $u_1(t) = e^t$, δίνεται από τη συνάρτηση

(36) $$u_2(t) = u_1(t)\int \frac{1}{[u_1(t)]^2}\exp\left[\int h(t)\,d\,t\right]d\,t = e^t\int t^n\,e^{-t}\,d\,t$$
$$= -(6 + 6\,t + 3\,t^2 + t^3)$$

□

Ασκήσεις

1. Για καθεμιά από τις επόμενες ΔΕ,

α) Επαληθεύστε ότι η αντίστοιχη συνάρτηση $u_1(t)$ αποτελεί λύση της.

β) Βρείτε μια δεύτερη λύση της ίδιας ΔΕ, γραμμικά ανεξάρτητη από την $u_1(t)$.

(i) $t^2\,u'' + 4\,t\,u' + 2\,u = 0, \qquad u_1(t) = t^{-1}.$

(ii) $t^2\,u'' - t\,u' - 3\,u = 0, \qquad u_1(t) = t^{-1}.$

(iii) $4\,t^2\,u'' - 4\,t\,u' + 3\,u = 0, \qquad u_1(t) = \sqrt{t}\,.$

(iv) $4\,t\,(t\,u'' + u') + (t^2 - 9)\,u = 0, \qquad u_1(t) = t^{-3/2}(\cos t + t\sin t).$

(v) $(1 - t^2)\,u'' - 2\,t\,u' + 6\,u = 0 \qquad u_1(t) = 3\,t^2 - 1$

(vi) $(1 + t \tan t)\, u'' - t\, u' + u = 0, \qquad u_1(t) = t.$

(vii) $2\, t^2 (1 + 2\, t)\, u'' = t(1 + 8\, t + 4\, t^2)\, u' - 3\, (1 + 5\, t + 2\, t^2), \qquad u_1(t) = \sqrt{t}\,.$

(viii) $(t - \sinh t \cosh\, t)\, u'' = 2 \tanh t\, (u - t\, u') = 0, \qquad u_1(t) = t.$

6. Εξισώσεις Euler-Cauchy

Η ΔΕ που λύσαμε στο προτελευταίο παράδειγμα ανήκει σε μια πολύ ενδιαφέρουσα κατηγορία γραμμικών εξισώσεων που φέρει το όνομα των Euler (΄Οηλερ) και Cauchy (Κωσύ). ΄Οσο αφορά, ειδικότερα, τις ομογενείς ΔΕ δεύτερης τάξης, ***εξίσωση Euler-Cauchy*** ονομάζεται οποιοδήποτε μέλος της 2-παραμετρικής οικογένειας

(1) $$t^2\, u'' + \kappa\, t\, u' + \lambda\, u = 0.$$

Η οικογένεια των εξισώσεων Euler-Cauchy είναι ενδιαφέρουσα για πολλούς λόγους. Πρώτα απ' όλα, είναι από τις λίγες ΔΕ με μεταβλητούς συντελεστές που λύνονται ακριβώς -με την έννοια ότι, η γενική τους λύση εκφράζεται μέσω των γνωστών μας συναρτήσεων. Από την άλλη, η ποικιλία της συμπεριφοράς που εμφανίζουν στη γειτονιά του ανώμαλου σημείου $t = 0$ τις κάνει αντιπροσωπευτικές όλων των γραμμικών ΔΕ με σημεία ανωμαλίας. Τέλος, οι ΔΕ Euler-Cauchy αποτελούν το προσφορότερο εργαστήριο αφαρμογής των τεχνικών επίλυσης που έχουμε ως τώρα αναπτύξει, όπως εκείνης του υποβιβασμού τάξης και του σημειακού μετασχηματισμού. Συγκεκριμένα, μετασχηματίζονται εύκολα σε εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές και άρα αποτελούν την γέφυρα ανάμεσα στις τελευταίες και την κατηγορία των ΔΕ όπου οι συντελεστές μεταβάλλονται με τρόπο περίπλοκο. Για τους παραπάνω λόγους, θα μελετήσουμε τις ΔΕ Euler-Cauchy όσο διεξοδικότερα γίνεται.

Μέθοδος τελεστών και υποβιβασμού τάξης

Η πρώτη τεχνική που θα χρησιμοποιήσουμε στην επίλυση των εξισώσεων της μορφής (1) στηρίζεται στην ακόλουθη παρατήρηση: Σε μια συνάρτηση της μορφής t^s, $t > 0$, η διαδικασία της παραγώγισης έχει ως αποτέλεσμα τη μείωση του εκθέτη κατά μία μονάδα:

(2) $$(t^s)' = s\, t^{s-1}.$$

Συνεπώς, αν την παραγώγιση διαδεχτεί ο πολλαπασιασμός με t, η τιμή του εκθέτη θα αποκατασταθεί:

(3) $$t\, (t^s)' = s\, t^s.$$

Στο σημείο αυτό αξίζει να εισαγάγουμε στη συζήτησή μας την έννοια του τελεστή. ΄Ετσι ονομάζεται κάθε απεικόνιση ενός διανυσματικού χώρου U σε κάποιον άλλο V. Μια τέτοια απεικόνιση παριστάνεται με τη συνηθισμένη αλυσίδα συμβόλων

(4) $$A : U \to V,$$

αλλά συχνά περιγράφεται με τον ακόλουθο τρόπο. Θεωρούμε ότι το A είναι ένα αυτόνομο νοητικό υποκείμενο που λέγεται ***τελεστής*** και το οποίο, δρώντας στο στοιχείο u του χώρου U, δίνει ως αποτέλεσμα το στοιχείο $A\, u \equiv A(u)$ του χώρου V.

Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι το V παριστάνει το χώρο των συναρτήσεων που έχουν ως κοινό πεδίο ορισμού ένα διάστημα I, ενώ το U συμβολίζει όλες τις διαφορίσιμες συναρτήσεις που ανήκουν στον V. Τότε, η διαδικασία που οδηγεί από την τυχαία συνάρτηση $u(t)$, $t \in I$, στην παράγωγό της, $u'(t)$, μπορεί να να περιγραφτεί ως εξής:

Ο ***τελεστής της παραγώγισης*** D, δρώντας στην συνάρτηση $u \in U$, παράγει την συνάρτηση $D\,u := u'$, η οποία ανήκει στον χώρο V.

Με σύμβολα, αυτή η διαδικασία γράφεται στη μορφή

(5) $$D : u \to D\,u := u'.$$

΄Οπως έχουμε επισημάνει από την αρχή της συζήτησής μας, η απεικόνιση

(6) $$D : U \to V$$

που ορίζεται μ' αυτό τον τρόπο είναι γραμμική.

Ανάλογα, η διαδικασία του πολλαπλασιασμού κάθε συνάρτησης $u(t)$, $t \in I$, με τη συγκεκριμένη συνάρτηση $f(t) = t$ μπορεί να ειδωθεί ως η δράση ενός πολλαπλασιαστικού τελεστή p πάνω στη συνάρτηση u:

(7) $$p : u \to p\,u := t\,u$$

Εύκολα μπορούμε να κατασκευάσουμε καινούργιους τελεστές συνθέτοντας δύο ή περισσότερους γνωστούς. Συγκεκριμένα, ας υποθέσουμε ότι

(i) Ο χώρος στον οποίο δρα ο τελεστής T_1 είναι ο U_1 κι εκείνος στον οποίο δρα ο T_2 είναι ο U_2.

(ii) Το σύνολο των αποτελεσμάτων της δράσης του T_1 περιέχεται στο χώρο U_2, δηλαδή $T_1(U_1) \subset U_2$.

Τότε η σύνθεση $T_2 \circ T_1$ των τελεστών T_1 και T_2 δεν είναι παρά ο τελεστής που ορίζεται από τη διαδοχική δράση πρώτα του T_1 κι ύστερα του T_2.

Προσοχή: Η σειρά των τελεστών T_1, T_2 στη σύνθεση $T_2 \circ T_1$ είναι πολύ σημαντική. Ο τελεστής $T_1 \circ T_2$ όχι μόνο διαφέρει, γενικά, από τον $T_2 \circ T_1$, αλλά μπορεί και να μην ορίζεται. Η ύπαρξή του προϋποθέτει ότι $T_2(U_2) \subset U_1$, πράγμα που δεν ισοδυναμεί με τη συνθήκη $T_1(U_1) \subset U_2$.

Παράδειγμα

Ας υποθέσουμε ότι U_1 είναι ο χώρος των συναρτήσεων που ορίζονται σε ολόκληρη την πραγματική ευθεία και U_2 είναι το υποσύνολο που αποτελείται από τα διαφορίσιμα στοιχεία του U_1.

Συνεπώς, ο χώρος U_2 μπορεί να θεωρηθεί ως το πεδίο ορισμού του διαφορικού τελεστή D. Η δράση του τελευταίου στο τυχαίο στοιχείο $u_2 \in U_2$ παράγει τη συνάρτηση u_2' που δεν είναι υποχρεωτικά διαφορίσιμη. Αν, για παράδειγμα

$$u_2(t) = \begin{cases} 2\,(t-1), & t \le 1 \\ t^2 - 1, & t \ge 1 \end{cases}$$

τότε

$$u_2'(t) = \begin{cases} 2, & t \le 1 \\ 2\,t, & t \ge 1 \end{cases}$$

Η τελευταία είναι συνεχής, όχι όμως και διαφορίσιμη.

Αυτή η παρατήρηση σημαίνει ότι η δράση του τελεστή D στο τυχαίο στοιχείο u_2 του U_2 παράγει μια συνάρτηση που οπωσδήποτε ανήκει στο χώρο U_1 αλλ' όχι υποχρεωτικά και στον ίδιο τον U_2.

Με τη σειρά του, ο πολλαπλασιαστικός τελεστής (7) ορίζεται σε κάθε στοιχείο u_1 του χώρου U_1. Αυτό ισχύει ειδικότερα για τα στοιχεία του U_2, αφού $U_2 \subset U_1$. Με άλλα λόγια, αν η συνάρτηση $u_2 \in U_2$, τότε η $\tilde{u}_2 = p\,u_2$ υπάρχει και ορίζεται από τον τύπο

(8) $$u_2(t) = t\,u_2(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Μάλιστα, σ' αυτή την περίπτωση, και η νέα συνάρτηση $\tilde{u}_2$ είναι διαφορίσιμη:

(9) $$\tilde{u}_2'(t) = u_2(t) + t\,u_2'(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Από τις προηγούμενες παρατηρήσεις συνάγονται αμέσως τα ακόλουθα συμπεράσματα:

(i) Η σύνθεση $D \circ p$ δεν ορίζεται σε ολόκληρο το χώρο U_1, γιατί τα στοιχεία του $p(U_1)$ δεν είναι υποχρεωτικά διαφορίσιμες συναρτήσεις. Ορίζεται, όμως, στον υπόχωρο U_2 του U_1 και τότε

(10) $$D \circ p\,u_2 = D(t\,u_2) = u_2 + t\,u_2'.$$

(ii) Ούτε η σύνθεση $p \circ D$ ορίζεται σε ολόκληρο το χώρο U_1, αφού δεν είναι όλες οι συναρτήσεις που ανήκουν στον U_1 διαφορίσιμες. Ορίζεται όμως στον υπόχωρο U_2 του U_1 και τότε

(11) $$p \circ D\,u_2 = p\,u_2' = t\,u_2'.$$

Από τις (10), (11) γίνεται φανερό ότι οι τελεστές $D \circ p$ και $p \circ D$ διαφέρουν ριζικά, αφού

(12) $$D \circ p\,u_2 - p \circ D\,u_2 = u_2.$$

□

΄Οταν, όπως στο παράδειγμά μας, οι συνθέσεις $T_1 \circ T_2$ και $T_2 \circ T_1$ δύο τελεστών έχουν ένα κοινό πεδίο ορισμού, ας πούμε το διανυσματικό χώρο V, τότε η διαφορά $T_1 \circ T_2 - T_2 \circ T_1$ ονομάζεται ***αντιμεταθέτης*** των T_1, T_2 και συμβολίζεται με $[T_1, T_2]$. Με άλλα λόγιια,

(13) $$[T_1, T_2] := T_1 \circ T_2 - T_2 \circ T_1.$$

Με αυτό τον συμβολισμό, η (12) γράφεται σαν

(14) $$[D, p]\,u_2 = u_2,$$

ή, με την ακόμα απλούστερη μορφή,

(15) $$[D, p] = \mathbb{1},$$

όπου $\mathbb{1}$ ο ***ταυτοτικός τελεστής*** $\mathbb{1} : u_2 \to \mathbb{1}\,u_2 = u_2$.

□

Επιστρέφοντας στην ανάλυση της ΔΕ (1), σημειώνουμε αρχικά ότι, με τον συμβολισμό που εισαγάγαμε στην προηγούμενη παράγραφο, η σχέση $t\,(t^s)' = s\,t^s$ γράφεται σαν

(16) $$p\circ D\,u_2 = s\,u_2, \qquad u_2(t) := t^s, \quad t > 0.$$

Για ευκολία, τον τελεστή $p\circ D$ θα τον συμβολίζουμε στη συνέχεια με $t\,D$. Έτσι την προηγούμενη σχέση θα τη γράφουμε στη μορφή

(17) $$t\,D\,u_2 = s\,u_2.$$

Ανεξάρτητα από τον τρόπο με τον οποίο παριστάνουμε τον τελεσή $p\circ D$, αυτή η σχέση εκφράζει το ακόλουθο σημαντικό γεγονός: Όταν ο τελεστής $t\,D$ δρα σε μια συνάρτηση της μορφής t^s, το αποτέλεσμα είναι απλώς και μόνο ο πολλαπλασιασμός της συνάρτησης με τη σταθερή s. Πολύ εύκολα διαπιστώνεται ότι κάτι τέτοιο δεν ισχύει για κάθε διαφορίσιμη συνάρτηση. Γι' αυτό, κάθε συνάρτηση για την οποία ισχύει η (17) ονομάζεται ***χαρακτηριστική συνάρτηση*** ή ***ιδιοσυνάρτηση του τελεστή*** $t\,D$ και η σταθερή s ***χαρακτηριστική τιμή*** ή ***ιδιοτιμή του τελεστή*** $t\,D$.

Θεωρούμε, τώρα, μια τυχαία συνάρτηση $u(t)$ της οποίας η δεύτερης τάξης παράγωγος υπάρχει. Τότε, η επαναληπτική δράση του τελεστή $t\,D$ στην $u(t)$ δίνει το ακόλουθο αποτέλεσμα:

(18) $$(t\,D)^2\,u := t\,D\circ t\,D\,u = t\,D(t\,u') = t^2\,u'' + t\,u'.$$

Συνεπώς, η ΔΕ (1) γράφεται σαν

(19) $$(t\,D)^2\,u - t\,D\,u + \kappa\,t\,D\,u + \lambda\,u = 0.$$

Ισοδύναμα,

(20) $$[(t\,D)^2 + (\kappa - 1)\,t\,D + \lambda]\,u = 0.$$

Από την άλλη, η (17) συνεπάγεται ότι

(21) $$(t\,D)^2\,u_2 = t\,D(s\,u_2) = s^2\,u_2.$$

Συνακόλουθα, στην περίπτωση όπου $u = u_2$, η (20) γίνεται

(22) $$[s^2 + (\kappa - 1)\,s + \lambda]\,u_2 = 0.$$

Αλλά αυτή σημαίνει ότι, αν η παράμετρος s είναι ίση με μια από τις ρίζες του τριώνυμου $s^2 + (\kappa - 1)\,s + \lambda$, τότε η συνάρτηση $u_2(t)$ θα είναι λύση της ΔΕ (1).

Οι ρίζες του πιο πάνω τριώνυμου δίνονται από τον τύπο

(23) $$s_\pm = \tfrac{1}{2}\left[1 - \kappa \pm \sqrt{(\kappa - 1)^2 - 4\,\lambda}\,\right]$$

Ισοδύναμα,

(24) $$s_\pm = \mu \pm \sqrt{\mu^2 - \lambda}, \qquad \mu := \tfrac{1-\kappa}{2}.$$

Στην περίπτωση όπου η παράμετρος λ δεν είναι ίση με $\mu^2 = (1-\kappa)^2/4$, οι ρίζες $s_\pm$ είναι διαφορετικές. Τότε, οι συναρτήσεις

(25) $$u_+ = t^{s_+}, \qquad u_- = t^{s_-}$$

είναι γραμμικά ενεξάρτητες και αποτελούν ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων της ΔΕ (1).

Στην αντίθετη περίπτωση, όταν δηλαδή $\lambda = \mu^2$, η πιο πάνω διαδικασία δίνει μόνο μία λύση, την $u_1 = t^\mu$. Τότε, είναι απαραίτητο να στραφούμε στην τεχνική του υποβιβασμού τάξης για να κατασκευάσουμε μια δεύτερη λύση, ανεξάρτητη από την u_1. Με άλλα λόγια, πρέπει να στηριχτούμε στο θεώρημα του προηγούμενου εδάφιου.

Συγκεκριμένα, χωρίς να περιορίσουμε την γενικότητα της ανάλυσής μας, υποθέτουμε ότι η ανεξάρτητη μεταβλητή παίρνει μόνο θετικές τιμές και γράφουμε την (1) στην κανονική μορφή

(26) $$u'' = -\frac{\kappa}{t}\, u' - \frac{\lambda}{t^2}\, u, \quad t > 0.$$

΄Αρα, σ' αυτή την περίπτωση $h(t) = -\kappa\, t^{-1}$, οπότε $\int h(t)\, d\, t = -\kappa \ln t$. Συνεπώς, ο τύπος

(26) $$u_2(t) = u_1(t) \int \frac{1}{[u_1(t)]^2} \exp[\int h(t)\, d\, t]\, d\, t,$$

που μας παρέχει τη δεύτερη λύση, γίνεται

(27) $$u_2(t) = t^\mu \int t^{-2\mu-\kappa}\, d\, t$$

΄Ομως, $2\,\mu := 1 - \kappa$, οπότε

(28) $$u_2(t) = t^\mu \ln t.$$

Θα πρέπει, τώρα, να σημειώσουμε ότι, οι λύσεις που βρήκαμε νωρίτερα για την περίπτωση όπου το $\lambda \neq \mu^2$ έχουν τελείως διαφορετική συμπεριφορά, ανάλογα με το αν το λ είναι μικρότερο ή μεγαλύτερο από το μ^2. Στην πρώτη περίπτωση και οι δυο ρίζες $s_\pm$ είναι πραγματικές, Οι αντίστοιχες λύσεις γράφονται σαν

(29) $$u_+ = t^{\mu+\nu}, \qquad u_- = t^{\mu-\nu}, \qquad \nu := \sqrt{\mu^2 - \lambda}$$

Στη δεύτερη περίπτωση, όταν δηλαδή το $\lambda > \mu^2$, οι ρίζες είναι μιγαδικές συζυγείς. ΄Αρα, οι αντίστοιχες λύσεις γράφονται σαν

(30) $$u_+ = t^{\mu+i\,\omega}, \qquad u_- = t^{\mu-i\,\omega}, \qquad \omega := \sqrt{\lambda - \mu^2}$$

΄Ομως,

(31) $$t^{\mu+i\,\omega} := e^{(\mu+i\,\omega)\ln t} = e^{\mu \ln t}\, e^{i\,\omega \ln t} = t^\mu[\cos(\omega \ln t) + i \sin(\omega \ln t)]$$

΄Αρα, αν θέλουμε το θεμελιώδες σύνολο των λύσεών μας να απαρτίζεται από πραγματικές συναρτήσεις, θα επιλέξουμε τις λύσεις

(32) $$u_1 = t^\mu \cos(\omega \ln t) \qquad u_2 = t^\mu \sin(\omega \ln t)$$

Τέλος, εύκολα διαπιστώνεται ότι ο μετασχηματισμός $(t,\ u) \to (x,\ y) = (-t,\ u)$ αφήνει την μορφή της ΔΕ (1) αναλλοίωτη. Συνεπώς, οι λύσεις που βρήκαμε πιο πάνω κι οι οποίες ισχύουν μόνο στο διάστημα $t > 0$ απεικονίζονται στις λύσεις της ΔΕ

(33) $$x^2\, y'' + \kappa\, x\, y' + \lambda\, y = 0, \qquad x < 0.$$

Αλλά,

(34) $$y(x) = u(t(x)) = u(-x), \quad x < 0,$$

Αυτό σημαίνει ότι, οι λύσεις της (33) προκύπτουν από εκείνες που βρήκαμε νωρίτερα, θέτοντας όπου t το $-x$. Με άλλα λόγια, οι λύσεις τις (1) για $t<0$ προκύπτουν από τις λύσεις της ίδιας εξίσωσης, κάνοντας την αντικατάσταση $t \to -t$ και επιβάλλοντας τον περιορισμό $t<0$. Αλλά, αυτή η συνδυασμένη ενέργεια είναι ταυτόσημη με την αντικατάσταση $t \to |t|$.

Ανακεφαλαιώνοντας, μπορούμε πλέον να πούμε ότι, με τον συνδυασμό των προηγούμενων αποτελεσμάτων, έχουμε αποδείξει το ακόλουθο

Θεώρημα

Ας υποτεθεί ότι το διάστημα I δεν περιέχει το μηδέν. Τότε, η γενική λύση της ΔΕ

$$t^2\, u'' + \kappa\, t\, u' + \lambda\, u = 0, \quad t \in I,$$

δίνεται από τις συναρτήσεις της μορφής

$$u = |t|^{\mu}\,[c_1\, \upsilon_1(|t|) + c_2\, \upsilon_2(|t|)], \qquad \mu := \tfrac{1-\kappa}{2},$$

όπου το ζευγάρι $\{\upsilon_1(t), \upsilon_2(t)\}$ ταυτίζεται με το

(i) $\{t^{\nu},\ t^{-\nu}\}$, $\nu := \sqrt{\mu^2 - \lambda}$, όταν $\lambda < \mu^2$,

(ii) $\{1,\ \ln t\}$, όταν $\lambda = \mu^2$,

(iii) $\{\cos(\omega \ln t),\ \sin(\omega \ln t)\}$, $\omega := \sqrt{\lambda - \mu^2}$, όταν $\lambda > \mu^2$.

□

Παράδειγμα

(i) Προφανώς, η ΔΕ

(35) $$t^2\, u'' + 4\, t\, u' + 2\, u = 0$$

είναι Euler-Cauchy. Προκύπτει από τη γενική μορφή (1), όταν στις παραμέτρους κ, λ δοθούν οι τιμές $\kappa = 4$, $\lambda = 2$.

Συνεπώς,

$$\mu := \tfrac{1}{2}\,(1-\kappa) = -\tfrac{3}{2}, \qquad \mu^2 = \tfrac{9}{4} > \lambda,$$

οπότε βρισκόμαστε στην περίπτωση (i) του θεωρήματος. Αφού,

$$\nu := \sqrt{\mu^2 - \lambda} = \tfrac{1}{2},$$

η γενική λύση της ΔΕ (35) δίνεται από τις συναρτήσεις

(36) $$u = |t|^{-3/2}\,(c_1\,|t|^{1/2} + c_2\,|t|^{-1/2}) = c_1\,|t|^{-1} + c_2\,|t|^{-2},$$

σε κάθε διάστημα I το οποίο περιέχεται είτε στο $(-\infty, 0)$ είτε στο $(0, \infty)$.

(ii) Η ΔΕ

(37) $$t^2\, u'' - 3\, t\, u' + 4\, u = 0$$

αντιστοιχεί στην επιλογή $\kappa = -3$, $\lambda = 4$. Τώρα,

$$\mu := \tfrac{1}{2}(1-\kappa) = 2, \qquad \mu^2 = 4 = \lambda.$$

΄Αρα, σύμφωνα με το θεώρημα, η γενική λύση της (37) δίνεται από την 2-παραμετρική οικογένεια συναρτήσεων

(38) $$u = t^2(c_1 + c_2 \ln |t|).$$

(iii) Τέλος, η επιλογή $\kappa = 1$, $\lambda = 1$, οδηγεί στην ΔΕ

(39) $$t^2 u'' + t u' + u = 0.$$

Αφού

$$\mu := \tfrac{1}{2}(1-\kappa) = 0,$$

είμαστε στην περίπτωση όπου το $\lambda > \mu^2$. Συγκεκριμένα, $\omega := \sqrt{\lambda - \mu^2} = 1$, οπότε η γενική λύση της (39) παίρνει την ακόλουθη μορφή:

(40) $$u = |t| \, [c_1 \cos(\ln |t|) + c_2 \sin(\ln |t|)]$$

□

Αναγωγή σε ΔΕ με σταθερούς συντελεστές

΄Οπως σημειώσαμε στην εισαγωγή αυτού του εδάφιου, οι ΔΕ Euler-Cauchy μετασχηματίζονται σε γραμμικές εξισώσεις της ίδιας τάξης, αλλά με σταθερούς στυντελεστές. ΄Ενας γενικός τρόπος για να καταλήξει κανείς σ' αυτή την διαπίστωση είναι να ξεκινήσει ανάποδα. Να εξετάσει, δηλαδή, ποια είναι η μορφή στην οποία καταλήγουν οι ΔΕ με σταθερούς συντελεστές κατά τον τυχαίο σημειακό μετασχηματισμό της ανεξάρτητης και της εξαρτημένης μεταβλητής τους.

Επειδή αυτή η διαδικασία είναι κάπως περίπλοκη, εμείς θα στηριχτούμε στην ακόλουθη παρατήρηση. ΄Οταν ο εκθέτης s στη συνάρτηση t^s, $t > 0$, είναι τυχαίος πραγματικός αριθμός και όχι ρητός, τότε αυτή ορίζεται με τον ακόλουθο τρόπο

(41) $$t^s := e^{s \ln t}$$

Αυτός ο ορισμός μας παρακινεί στο να εισαγάγουμε τη μεταβλητή x μέσω της σχέσης

(42) $$x = \ln t, \qquad t > 0.$$

΄Οπως γνωρίζουμε, η αντίστροφη απεικόνιση ορίζεται από την σχέση

(43) $$t = e^x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Η αλλαγή μεταβλητής $t \to x$ έχει ως επακόλουθο τον μετασχηματισμό της τυχαίας ομαλής συνάρτητης $u(t) = t^s$ στην

(44) $$y(x) := u(t(x)) = u(e^x)$$

Αντίστροφα,

(45) $$u(t) = y(x(t)) = y(\ln t)$$

΄Αρα, με τον κανόνα της αλυσσίδας οδηγούμαστε στις ακόλουθες σχέσεις:

(46α) $$u'(t) = y'(x(t))\, x'(t) = y'(x(t))\, t^{-1}$$

(46β) $$u''(t) = [y''(x(t))\ t^{-1}]\,t^{-1} + y'(x(t))\,(-t^{-2}) = t^{-2}[y''(x(t)) - y'(x(t))]$$

Για συντομία, γράφουμε τις δυο τελευταίες σχέσεις στη μορφή

(47) $$t\,u' = y', \qquad t^2\,u'' = y'' - y',$$

και τις αντικαθιστούμε στην ΔΕ $t^2\,u'' + \kappa\,t\,u' + \lambda\,u = 0$. Το αποτέλεσμα είναι η ΔΕ με σταθερούς συντελεστές

(48) $$y'' + (\kappa - 1)\,y' + \lambda\,y = 0$$

Για την επίλυση της (48) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα του προηγούμενου εδάφιου. Συγκεκριμένα, θέτοντας

(49) $$2\,\mu := 1 - \kappa,$$

συμπεραίνουμε ότι η γενική λύση της (48) δίνεται από τις ακόλουθες εκφράσεις

(i) Αν $\lambda - \mu^2 < 0$, τότε

$$y = c_1\,e^{(\mu+\nu)\,x} + c_2\,e^{(\mu-\nu)\,x}, \qquad \nu := \sqrt{\mu^2 - \lambda}\,.$$

(ii) Αν $\lambda - \mu^2 = 0$, τότε

$$y = (c_1\,x + c_2)\,e^{\mu\,x}.$$

(iii) Αν $\lambda - \mu^2 > 0$, τότε

$$y = e^{\mu\,x}(c_1\cos\omega\,x + c_2\sin\omega\,x), \qquad \omega := \sqrt{\lambda - \mu^2}\,.$$

Αρκεί, πλέον, να αντικαταστήσουμε στις παραπάνω εκφράσεις το x από το $\ln t$ για να πάρουμε τη γενική λύση της ΔΕ $t^2\,u'' + \kappa\,t\,u' + \lambda\,u = 0$ στην ακόλουθη μορφή:

(i) Αν $\lambda - \mu^2 < 0$, τότε

$$u = c_1\,t^{\mu+\nu} + c_2\,t^{\mu-\nu}, \qquad \nu := \sqrt{\mu^2 - \lambda}\,.$$

(ii) Αν $\lambda - \mu^2 = 0$, τότε

$$u = (c_1\ln t + c_2)\,t^{\mu}\,.$$

(iii) Αν $\lambda - \mu^2 > 0$, τότε

$$u = t^{\mu}\,[c_1\cos(\omega\ln t) + c_2\sin(\omega\ln t)], \qquad \omega := \sqrt{\lambda - \mu^2}\,.$$

΄Οπως, αναμενόταν, το αποτέλεσμα στο οποίο καταλήξαμε μέσω του μετασχηματισμού της ΔΕ Euler-Cauchy σε μία με σταθερούς συντελεστές, είναι ταυτόσημο με εκείνο που έδωσε η μέθοδος των τελεστών.

Ασκήσεις

1. Να βρεθεί η γενική λύση καθεμιάς από τις παρακάτω ΔΕ και να λυθεί το αντίστοιχο ΠΑΤ

$$u(t_0) = A, \qquad u'(t_0) = B.$$

(i) $t^2 u'' - t u' + 2 u = 0, \qquad t_0 = 1, \quad A = 1, \quad B = 2.$

(ii) $9 t^2 u'' + 3 t u' - 8 u = 0, \qquad t_0 = 1, \quad A = 1, \quad B = -1.$

(iii) $t^2 u'' - 3 t u' + 5 u = 0, \qquad t_0 = 1, \quad A = 0, \quad B = -2.$

(iv) $4 t^2 u'' + u = 0, \qquad t_0 = 1, \quad A = 2, \quad B = -1.$

(v) $t^2 u'' - 5 t u' + 8 u = 0, \qquad t_0 = -2, \quad A = -2, \quad B = 3.$

(vi) $4 t^2 u'' + 17 u = 0, \qquad t_0 = -1, \quad A = -3, \quad B = 0.$

(vii) $9 t^2 u'' + 3 t u' + u = 0, \qquad t_0 = -1, \quad A = 0, \quad B = 1.$

(viii) $3 t^2 u'' - t u' + u = 0, \qquad t_0 = -1, \quad A = 1, \quad B = -1.$

(ix) $9 t^2 u'' + 3 t u' + 82 u = 0, \qquad t_0 = -1 \quad A = 1, \quad B = -1.$

2. Με τη βοήθεια του *Mathematica*, λύστε την προηγούμενη άσκηση και καταστευάστε την ολοκληρωτική καμπύλη που αντιστοιχεί στη λύση του καθενός από ΠΑΤ ξεχωριστά.

7. Ομογενείς ΔΕ με μεταβλητούς συντελεστές

Οι ομογενείς εξισώσεις Euler-Cauchy που μελετήσαμε στο προηγούμενο εδάφιο, αποτελούν ένα από τα λίγα παραδείγματα εξισώσεων με μεταβλητούς συντελεστές που λύνονται ακριβώς. Το ότι οι λύσεις τους εκφράζονται μέσω των γνωστών μας συναρτήσεων μπορεί να αποδοθεί στο γεγονός ότι, οι ΔΕ Euler-Cauchy μετασχηματίζονται σε εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές.

Οι ΔΕ που δεν εντάσσονται άμεσα ή έμμεσα στην κατηγορία εκείνων με σταθερούς συντελεστές λύνονται μόνο "προσεγγιστικά", με τη λεγόμενη μέθοδο των σειρών. Ισοδύναμα, κάθε εξίσωση με μεταβλητούς συντελεστές ορίζει καινούργιες συναρτήσεις. Αυτό ισχύει ακόμα και για την απλή ΔΕ

(1) $$u'' = t\, u,$$

που φαίνεται να διαφέρει ελάχιστα από την

(2) $$u'' = \lambda\, u,$$

της οποίας τις λύσεις, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, κατασκευάσαμε ρητά στο πρώτο εδάφιο.

Το τι εννοούμε λέγοντας ότι οι ομογενείς ΔΕ με μεταβλητούς συντελεστές ορίζουν νέες, γενικά, συναρτήσεις, συνάγεται από το θεμελιώδες θεώρημα, σύμφωνα με το οποίο

α) Κάθε ΔΕ της μορφής $u'' = g(t)\, u + h(t)\, u'$, $t \in I$, με συνεχείς συντελεστές, έχει λύσεις,

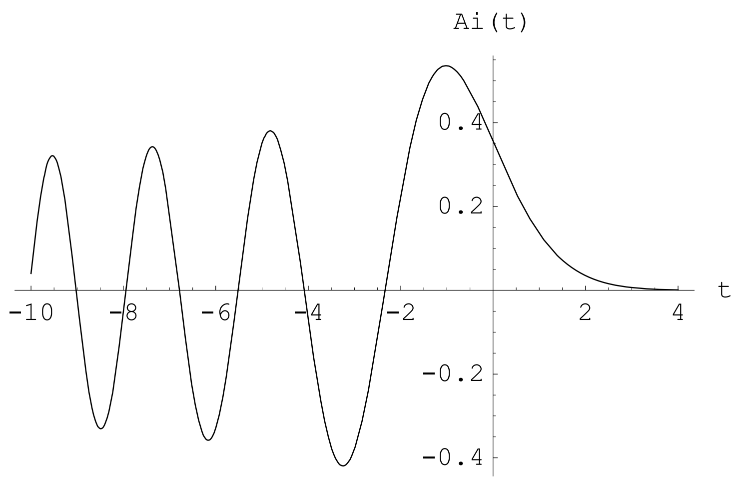
β) Αυτές οι λύσεις ταξινομούνται σε (άπειρα) ζευγάρια γραμμικά ανεξάρτητων συναρτήσεων (τα θεμελιώδη σύνολα) και,

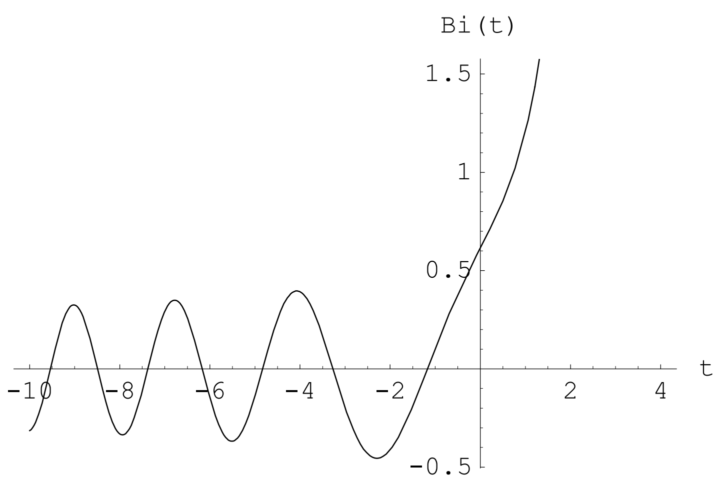
γ) Τα μέλη κάθε θεμελιώδους συνόλου προσδιορίζονται μονοσήμαντα από την τιμή που παίρνει η $u(t)$ και η παράγωγός της σε κάποιο σημείο του διαστήματος I.

Ας θεωρήσουμε, ως παράδειγμα, την ΔΕ (2). Με βάση το θεμελιώδες θεώρημα, είμαστε σίγουροι ότι, υπάρχει μια συνάρτηση $u_1(t)$, $t \in \mathbb{R}$, που αποτελεί λύση της (2) και προσδιορίζεται μονοσήμαντα από τις τιμές $u_1(0) = 1$, $u_1'(0) = 1$. Υπάρχει, επίσης, και μια δεύτερη λύση της ΔΕ (2), ας την πούμε $u_2(t)$, $t \in \mathbb{R}$, που καθορίζεται από τις αρχικές τιμές $u_2(0) = 1$, $u_2'(0) = -1$. Αυτή είναι οπωσδήποτε γραμμικά ανεξάρτητη από την πρώτη, οπότε το $\{u_1(t), u_2(t)\}$ είναι ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων της ΔΕ (2). Θα μπορούσαμε, λοιπόν, να σταματήσουμε εδώ, λέγοντας ότι έχουμε προσδιορίσει τις "νέες" συναρτήσεις $u_1(t)$ και $u_2(t)$, πλήρως.

Βέβαια, εμείς γνωρίζουμε ήδη τις λύσεις της ΔΕ (2) και αυτός είναι ο λόγος που θέσαμε τη λέξη νέες μέσα σε εισαγωγικά. ΄Οταν $\lambda = 1$, για παράδειγμα, οι παραπάνω αρχικές τιμές οδηγούν στο σύνολο $\{e^t, e^{-t}\}$. Αυτό, ωστόσο, δεν αναιρεί το γεγονός ότι οι συναρτήσεις e^t και e^{-t} ορίζονται και ως οι λύσεις της ΔΕ $u'' = u$ με αρχικές τιμές $u(0) = 1$, $u'(0) = 1$ και $u(0) = 1$, $u'(0) = -1$, αντίστοιχα.

Με αυτή, λοιπόν, την έννοια, η ΔΕ (1) ορίζει πραγματικά νέες συναρτήσεις -χωρίς εισαγωγικά. Πρόκειται για συναρτήσεις που ο τύπος τους δεν γράφεται χρησιμοποιώντας τις ήδη γνωστές. Για το λόγο αυτό, η (1) είναι "επώνυμη" - ονομάζεται ***εξίσωση (του) Airy*** (΄Ειρυ). Το ίδιο όνομα φέρουν και δυο καινούργιες συναρτήσεις που ορίζονται από την (1) και συγκεκριμένες αρχικές συνθήκες, τις οποίες θα προσδιορίσουμε στη συνέχεια. Οι ***συναρτήσεις Airy*** συμβολίζονται με $\mathrm{Ai}(t)$ και $\mathrm{Bi}(t)$, αντίστοιχα. Τα δύο επόμενα σχήματα δίνουν μια σαφή ποιοτική εικόνα αυτών των συναρτήσεων.





Προτού δώσουμε τον ακριβή ορισμό των συναρτήσων (του) Airy, Ai(t) και Bi(t), θα σημειώσουμε ότι, η ποιοτική εικόνα που αναδείχνεται στα δύο προηγούμενα σχήματα μπορούσε να είχε προβλευτεί. Γιατί, στη γειτονιά του τυχαίου σημείου $t = \lambda$, η ΔΕ Airy δεν διαφέρει ουσιαστικά από την (2).

Με άλλα λόγια, αν περιορίσουμε την μεταβλητή t σ' ένα διάστημα της μορφής $(\lambda - \varepsilon,\ \lambda + \varepsilon)$, με το $\varepsilon > 0$ και αρκετά μικρό, τότε η τιμή του συντελεστή t στο δεξί μέλος της εξίσωσης Airy δεν θα διαφέρει ουσιαστικά από το λ. Συνεπώς, στο διάστημα $\lambda - \varepsilon < t < \lambda + \varepsilon$, η γενική λύση της (2) θα δίνει μια καλή προσέγγιση της λύσης $u(t)$ της (1).

Με αυτό το σκεπτικό, καταλήγουμε στις ακόλουθες εκτιμήσεις:

(i) $\lambda < 0$,

$$u(t) \sim c_1 \cos \sqrt{-\lambda}\ t + c_2 \sin \sqrt{-\lambda}\ t, \quad \lambda - \varepsilon < t < \lambda + \varepsilon.$$

(ii) $\lambda = 0$,

$$u(t) \sim c_1 + c_2\, t, \qquad -\varepsilon < t < \varepsilon.$$

(iii) $\lambda > 0$,

$$u(t) \sim c_1\, e^{\sqrt{\lambda}\ t} + c_2\, e^{-\sqrt{\lambda}\ t}, \quad \lambda - \varepsilon < t < \lambda + \varepsilon.$$

Από τις παραπάνω εκφράσεις συνάγεται αμέσως ότι, στο διάστημα $t < 0$, οι λύσεις της εξίσωσης Airy πρέπει να ταλαντώνονται. Στη γειτονιά του $t = 0$, θα πρέπει να μεταβάλλονται γραμμικά. Τέλος, στην περιοχή $t > 0$, η μεταβολή των λύσεων της εξίσωσης Airy θα είναι αναγκαστικά εκθετικού τύπου. Μάλιστα, καθώς το $t \to \infty$, ορισμένες λύσεις θα αυξάνουν (σε απόλυτη τιμή) χωρίς φραγμό και άλλες θα φθίνουν συνεχώς. Αυτές οι εκτιμήσεις για τη συμπεριφορά των λύσεων της εξίσωσης Airy συμφωνούν απόλυτα με τα προηγούμενα σχήματα.

Με τελικό στόχο την κατασκευή των λύσεων της εξίσωσης Airy και άλλων ομοειδών ΔΕ, θα επανέλθουμε, προσωρινά, στην ΔΕ (2) και ειδικότερα στην περίπτωση όπου $\lambda = 1$. Θα υποθέσουμε, όμως, ότι δεν γνωρίζουμε ούτε τη λύση της ΔΕ

(3) $$u'' = u.$$

ούτε την συνάρτηση e^t και τις ιδιότητές της.

Ας υποθέσουμε, λοιπόν, ότι η ΔΕ (3) έχει λύσεις. Ακριβέστερα, ας υποθέσουμε ότι μια λύση της (3) δίνεται από τη συνάρτηση $f(t)$, που έχει ως πεδίο ορισμού κάποιο ανοιχτό διάστημα I της πραγματικής ευθείας. Από αυτή την υπόθεση και μόνο έπεται ότι, η δεύτερης τάξης παράγωγος της $f(t)$ ορίζεται σε κάθε σημείο του διαστήματος I. Συνακόλουθα, η $f(t)$ ανήκει στην κλάση $C^1(I)$ -είναι συνεχώς παραγωγίσιμη στο διάστημα I. Αλλά, από την (3) έπεται ότι

(4) $$f''(t) = f(t).$$

για κάθε $t \in I$. Άρα και η συνάρτηση $f''(t)$ ανήκει στην κλάση $C^1(I)$. Αλλά, αυτό σημαίνει ότι η ίδια η $f(t)$ είναι μέλος της κλάσης $C^3(I)$. Είναι πλέον προφανές ότι, η κυκλική επανάληψη του αυτού του επιχειρήματος οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η $f(t)$ ανήκει στην κλάση $C^\infty(I)$ -έχει συνεχείς παραγώγους κάθε τάξης.

Αυτό μας επιτρέπει να παραγωγίσουμε τη σχέση (4) όσες φορές θέλουμε. Αρχικά, θα βρούμε ότι

(5) $$f^{(3)}(t) = f'(t), \qquad f^{(4)}(t) = f''(t) = f(t).$$

Αλλά, επαγωγικά, οι (4) και (5) οδηγούν στις

(6) $$f^{(2n)}(t) = f(t), \qquad f^{(2n-1)}(t) = f'(t), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Αν, λοιπόν, το $\tau \in I$ και

(7) $$a := f(\tau), \qquad b := f'(\tau),$$

τότε από τις (6) έπεται ότι

(8) $$f^{(2n)}(\tau) = a, \qquad f^{(2n-1)}(\tau) = b, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Με άλλα λόγια, οι παράγωγοι κάθε τάξης $k \geq 2$ της $f(t)$ στο σημείο $t = \tau$ καθορίζονται από το ζευάρι $\{a, b\}$.

Το γεγονός ότι η συνάρτηση $f(t)$ ανήκει στην κλάση $C^\infty(I)$ και, ουσιαστικά, γνωρίζουμε τις παραγώγους $f^{(k)}(\tau)$ της $f(t)$ για κάθε k, μας προτρέπει να εξετάσουμε την αντίστοιχη σειρά Taylor, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(\tau)\,(t-\tau)^k$. Αν αυτή συγκλίνει σε μια γειτονιά του σημείου τ, τότε η $f(t)$ θα έχει προσδιοριστεί πλήρως.

Στην προκείμενη περίπτωση, το τελικό αποτέλεσμα δεν επηρεάζεται αν υποθέσουμε ότι το διάστημα I περιέχει το μηδέν. Αυτή η υπόθεση μας επιτρέπει να επιλέξουμε το $\tau = 0$ ως κέντρο του αναπτύγματος Taylor και να καταλήξουμε στο ακόλουθο αποτέλεσμα:

(9) $$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)\, t^k &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} f^{(2n)}(0)\, t^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!} f^{(2n-1)}(0)\, t^{(2n-1)} \\ &= a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} t^{2n} + b \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!} t^{(2n-1)}\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του λόγου, συμπεραίνουμε αμέσως ότι και οι δύο σειρές του τελευταίου μέλους της (9) συγκλίνουν για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Ας ονομάσουμε τις αντίστοιχες συναρτήσεις $C(t)$ και $S(t)$. Με άλλα λόγια

(10) $$C(t) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} t^{2n}, \qquad S(t) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)!} t^{(2n-1)}\,.$$

$$u'' = u.$$

΄Ομως, η σύγκλιση αυτών των δύο σειρών συνεπάγεται την σύγκλιση του πρώτου μέλους της (9). Αν ονομάσουμε το όριο αυτής της σειράς $u_{(a,b)}(t)$, τότε η (9) γράφεται σαν

(11) $$u_{(a,b)}(t) = a\, C(t) + b\, S(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Το ότι οι συναρτήσεις $C(t)$ και $S(t)$ όντως αποτελούν λύσεις της ΔΕ (3) επαληθεύεται πολύ εύκολα. Αρκεί να θυμηθούμε ότι, η παράγωγος μιας συνάρτησης που ορίζεται από συγκλίνουσα δυναμοσειρά υπολογίζεται παραγωγίζοντας την σειρά όρο προς όρο. ΄Ετσι, για παράδειγμα,

(12) $$C'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}\, 2n\, t^{2n-1}.$$

Αλλά, ο όρος αυτής της σειράς που αντιστοιχεί στο $n = 0$ μηδενίζεται, ενώ

(13) $$\frac{k}{k!} = \frac{k}{1\cdot 2\cdots(k-1)\cdot k} = \frac{1}{1\cdot 2\cdots(k-1)} = \frac{1}{(k-1)!}.$$

΄Αρα, η (12) γράφεται σαν

(14) $$C'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2\,n-1)!}\, t^{2\,n-1}.$$

Συνεπώς,

(15) $$C''(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2\,n-1)!}\,(2\,n-1)\,t^{2\,n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2\,n-2)!}\, t^{2\,n-2}$$

Τώρα, για να συγκρίνουμε την τελευταία έκφραση με τη σειρά (10) που ορίζει την $C(t)$, θα πρέπει να την γράψουμε με τρόπο ώστε ο αθροιστικός δείχτης n να αρχίζει από το μηδέν. Αλλά αυτό είναι εύκολο. Δεν έχουμε παρά να εισαγάγουμε τον καινούργιο δείχτη m, θέτοντας

(16) $$m = n - 1, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Με αυτό τον τρόπο, η (15) γίνεται

(17) $$C''(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2\,m)!}\, t^{2\,m}$$

Προφανώς, το σύμβολο που χρησιμοποιούμε για τον αθροιστικό δείχτη δεν παίζει κανέναν απολύτως ρόλο στον ορισμό μιας σειράς. Άρα, η σειρά (17) είναι ταυτόσημη με την (10) για την $C(t)$. Με άλλα λόγια, $C''(t) = C(t)$, πράγμα που σημαίνει ότι η συνάρτηση $C(t)$ είναι όντως λύση της ΔΕ (3).

Από τις (10) και (14) αμέσως συνάγεται ότι

(18) $$C(0) = 1, \qquad C'(0) = 0.$$

Σύμφωνα, τώρα, με το θεμελιώδες θεώρημα, υπάρχει μία και μοναδική συνάρτηση που αποτελεί λύση της ΔΕ (3) και συμφωνεί με τις αρχικές συνθήκες $u(0) = 1$, $u'(0) = 0$.΄Αρα, αυτή η συνάρτηση δεν μπορεί να είναι άλλη από την $C(t)$.

Με ανάλογο τρόπο, από την σειρά που ορίζει τη συνάρτηση $S(t)$ στην (10), βρίσκουμε ότι

(19) $$S(0) = 0, \qquad S'(0) = 1.$$

Συνεπώς, η $S(t)$ μπορεί να θεωρηθεί ως η συνάρτηση που ορίζεται μονοσήμαντα από την απαίτηση α) Να είναι λύση της ΔΕ (3) και β) Να σέβεται τις αρχικές συνθήκες $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$.

Τέλος, από τις (11), (18) και (19) καταλήγουμε στο ακόλουθο συμπέρασμα. Κάθε μέλος της διπαραμετρικής οικογένειας συναρτήσεων $u_{(a,b)}(t)$ αποτελεί την μοναδική της ΔΕ (3) που συμφωνεί με τις αρχικές συνθήκες $u(0) = a$, $u'(0) = b$.

Ας υποθέσουμε, ειδικότερα, ότι $\{a, b\} = \{1, 1\}$. Τότε, η (11) γίνεται

(20) $$\begin{aligned} u_{(1,1)}(t) &= C(t) + S(t) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2\,n)!}\, t^{2\,n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2\,n-1)!}\, t^{(2\,n-1)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, t^{n}, \qquad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Αυτή, λοιπόν, είναι η μοναδική συνάρτηση που έχει την ιδιότητα να αποτελεί λύση της ΔΕ (3) και να σέβεται τις συνθήκες $u(0) = 1$, $u'(0) = 1$. Αλλά εμείς γνωρίζουμε ήδη τη λύση αυτού του ΠΑΤ στη μορφή $u(t) = e^t$. Συνεπώς, η "καινούργια" συνάρτηση $u_{(1,1)}(t)$ που ορίζεται στην (20) δεν μπορεί να είναι άλλη από την εκθετική, e^t, την οποία ορίσαμε σε προηγούμενο εδάφιο με τελείως διαφορετικό τρόπο. Ανάλογα αποδείχνεται ότι, οι συναρτήσεις $C(t)$ και $S(t)$ δεν είναι άλλες από τις $\cosh t$ και $\sinh t$, αντίστοιχα.

□

Ας στρέψουμε, πλέον, την προσοχή μας στην ΔΕ Airy (1) κι ας υποθέσουμε ότι η $u(t)$ είναι μια λύσης της, η οποία ορίζεται σε κάποιο ανοιχτό διάστημα I γύρω από το μηδέν. Από αυτή την υπόθεση και μόνο έπεται ότι, οι παράγωγοι της $u(t)$ μέχρι και δεύτερης τάξης υπάρχουν σε κάθε σημείο του διαστήματος I . Συνακόλουθα, η συνάρτηση $t\,u(t)$ είναι διαφορίσιμη στο διάστημα I. Αλλά, τότε, η ίδια η ΔΕ (1) συνεπάγεται ότι υπάρχει και η παράγωγος της $u''(t)$. Συγκεκριμένα,

(21) $$u^{(3)}(t) = (t\,u(t))' = u(t) + t\,u'(t)$$

Από τις προηγούμενες παρατηρήσεις έπεται ότι το τελευταίο μέλος αυτής της σχέσης είναι διαφορίσιμη συνάρτηση. Συνακόλουθα, η παράγωγος της $u^{(3)}(t)$ υπάρχει σε κάθε σημείο του διαστήματος I και είναι ίση με

(22) $$u^{(4)}(t) = (u(t) + t\,u'(t)\,)' = 2\,u'(t) + t\,u''(t).$$

Επαγωγικά, λοιπόν, καταλήγουμε στο ακόλουθο συμπέρασμα: Η συνάρτηση $u(t)$ ανήκει στην κλάση $C^\infty(I)$. Μάλιστα, δεν είναι δύσκολο να βρούμε έναν αναδρομικό τύπο για την παράγωγο τάξης $n \geq 2$ της $u(t)$.

Συγκεκριμένα, με απλή επαγωγή, μπορεί κανείς να δείξει ότι η παράγωγος τάξης n της συνάρτησης

(23) $$\upsilon(t) = f(t)\,g(t)$$

δίνεται από τον τύπο

(24) $$\upsilon^{(n)}(t) = \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!\,(n-m)!}\, f^{(m)}(t)\, g^{(n-m)}(t) = \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!\,(n-m)!}\, f^{(n-m)}(t)\, g^{(m)}(t).$$

Ειδικότερα, όταν

(24) $$f(t) = t,$$

τότε

(25) $$f'(t) = 1, \quad f^{(m)}(t) = 0, \quad m > 1,$$

και ο τύπος (24) ανάγεται στον

(26) $$[t\,g(t)]^{(n)}\,(t) = t\,g^{(n)}(t) + n\,g^{(n-1)}(t), \qquad n \geq 0.$$

Εναλλακτικά, μπορεί κανείς ν' αποδείξει την τελευταία σχέση απ' ευθείας, χρησιμοποιώντας και πάλι την επαγωγική μέθοδο.

Τώρα, ο συνδυασμός της ΔΕ Airy, $u''(t) = t\,u(t)$, με την σχέση (26) δίνει το ακόλουθο αποτέλεσμα:

(27) $$u^{(n+2)}(t) = [t\,u(t)]^{(n)} = t\,u^{(n)}(t) + n\,u^{(n-1)}(t)\,, \quad n \geq 0.$$

΄Οταν $t = 0$, ο προηγούμενος τύπος ανάγεται στην αναδρομική σχέση

(28) $$u^{(n+2)}(0) = n\,u^{(n-1)}(0), \qquad n \geq 0,$$

η οποία γράφεται και στη μορφή

(29) $$u^{(n+3)}(0) = (n+1)\,u^{(n)}(0), \quad n \geq -1.$$

Είναι φανερό ότι, η (29) μας επιτρέπει να υπολογίσουμε όλους τους συντελεστές της σειράς Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,u^{(n)}(0)\,t^n$, με βάση τους $u(0)$ και $u'(0)$. Για παράδειγμα,

(30) $$u^{(2)}(0) = 0, \quad u^{(3)}(0) = u'(0), \quad u^{(4)}(0) = 2\,u(0), \quad u^{(5)}(0) = 3\,u^{(2)}(0) = 0,$$
$$u^{(6)}(0) = 4\,u^{(3)}(0) = 4\,u'(0), \quad u^{(7)}(0) = 5\,u^{(4)}(0) = 10\,u(0).$$

Ωστόσο, για να απλοποιήσουμε τις τελικές εκφράσεις, θα γράψουμε την σειρά Taylor, χρησιμοποιώντας τους συντελεστές

(31) $$a_n := \frac{u^{(n)}(0)}{n!}.$$

Προδικάζοντας και το αποτέλεσμα ότι η σειρά συγκλίνει σε όλη την πραγματική ευθεία, μπορούμε να πούμε ότι

(32) $$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\,t^n, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Πραγματικά, από τον ορισμό (31) των a_n έπεται ότι η αναδρομική σχέση (29) είναι ισοδύναμη προς την

(33) $$(n+3)!\,a_{n+3} = n!\,(n+1)\,a_n.$$

΄Οταν $n = -1$, η (33) απλώς εκφράζει το γεγονός ότι $a_2 = 0$. Άρα, όταν $n \geq 0$, απλοποιείται για να γίνει

(34) $$a_{n+3} = \frac{1}{(n+2)\,(n+3)}\,a_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Προφανώς, η αναδρομική σχέση (34) συνδέει τους συντελεστές που ο δείχτης τους διαφέρει κατά τρεις μονάδες. ΄Ετσι, ξεκινώντας από το $n = 0$, βρίσκουμε ότι

(35) $$a_3 = \frac{1}{2\cdot 3}\,a_0, \quad a_6 = \frac{1}{5\cdot 6}\,a_3 = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}\,a_0, \quad a_9 = \frac{1}{8\cdot 9}\,a_6 = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9}\,a_0,$$

και, με επαγωγική γενίκευση,

(36) $$a_{3k} = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9\cdots(3k-1)\,3k}\,a_0, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Ανάλογα, παίρνοντας για αφετηρία το $n = 1$, βρίσκουμε ότι

(37) $$a_4 = \frac{1}{3\cdot 4}\,a_1, \quad a_7 = \frac{1}{6\cdot 7}\,a_4 = \frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}\,a_1, \quad a_{10} = \frac{1}{9\cdot 10}\,a_7 = \frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 9\cdot 10}\,a_1,$$

και, γενικεύοντας τις προηγούμενες,

(38) $$a_{3k+1} = \frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 9\cdot 10\cdots 3k(3k+1)}\,a_1, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Τέλος, όλοι οι συντελεστές της μορφής a_{3k+2}, μηδενίζονται, αφού $a_2 = 0$:

(39) $$a_{3k+2} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Από τους πιο πάνω τύπους για τους συντελεστές εύκολα συνάγεται ότι, το κριτήριο του λόγου για την σύγκλιση της αντίστοιχης δυναμοσειράς ικανοποιείται.

□

Από τον ορισμό (31) έπεται ότι

(40) $$a_0 = u(0), \qquad a_1 = u'(0).$$

΄Αρα, η σειρά (32) προσδιορίζεται πλήρως, αμέσως μόλις επιλεγούν οι αρχικές τιμές, $u(0)$ και $u'(0)$. Με άλλα λόγια, η (32) παριστάνει μιαν 2-παραμετρική οικογένεια συναρτήσεων, όπου τον ρόλο των παραμέτρων παίζουν οι δύο πρώτοι συντελεστές a_0 και a_1.

Τώρα πλέον, είμαστε σε θέση να δώσουμε μιαν ακριβή εικόνα των συναρτήσεων Airy. Συγκεκριμένα, η $\mathrm{Ai}(t)$ ορίζεται ως η λύση που αντιστοιχεί στις αρχικές συνθήκες

(41) $$u(0) = \frac{1}{3^{2/3}\,\Gamma(\frac{2}{3})}, \quad u'(0) = -\frac{1}{3^{1/3}\,\Gamma(\frac{1}{3})}.$$

Σ' αυτές τις εκφράσεις, το $\Gamma(x)$ παριστάνει την ***συνάρτηση γάμμα*** (του Euler), η οποία ορίζεται από το ακόλουθο γενικευμένο ολοκλήρωμα:

(42) $$\Gamma(x) := \int_0^\infty \xi^{x-1}\, e^{-\xi}\, d\,\xi, \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -2, -3, \ldots\}$$

Η χαρακτηριστική της ιδιότητα,

(43) $$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x),$$

η οποία είναι άμεση απόρροια του ορισμού (42), δείχνει ότι η συνάρτηση γάμμα αποτελεί επέκταση της παραγοντικής, $n!$, από το σύνολο των μη αρνητικών ακεραίων σε όλη (σχεδόν) την πραγματική ευθεία.

Συνεπώς,

(44) $$\mathrm{Ai}(t) = \frac{1}{3^{2/3}\,\Gamma(\frac{2}{3})} \left\{1 + \frac{1}{2\cdot 3}\, t^3 + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9}\, t^6 + \ldots + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9\cdots(3k-1)\,3k}\, t^{3k} + \ldots\right\}$$
$$- \frac{1}{3^{1/3}\,\Gamma(\frac{1}{3})} \left\{t + \frac{1}{3\cdot 4}\, t^4 + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}\, t^7 + \ldots + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 9\cdot 10\cdots 3k(3k+1)}\, t^{3k+1} + \ldots\right\}$$

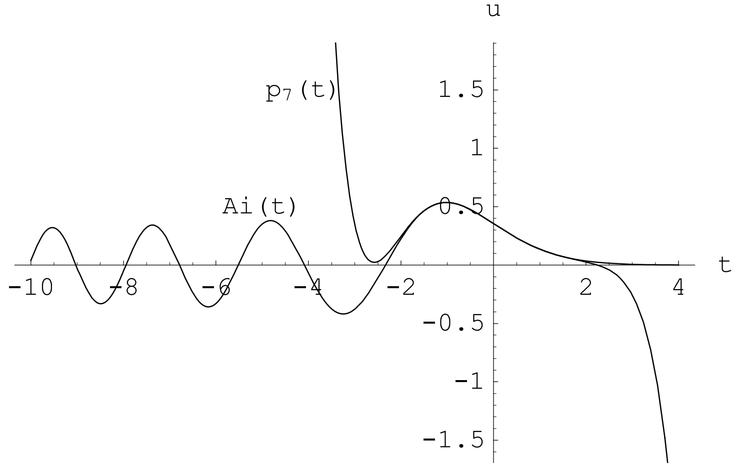
Ανάλογα, η $\mathrm{Bi}(t)$ ορίζεται ως η λύση της εξίσωσης Airy που αντιστοιχεί στις αρχικές συνθήκες

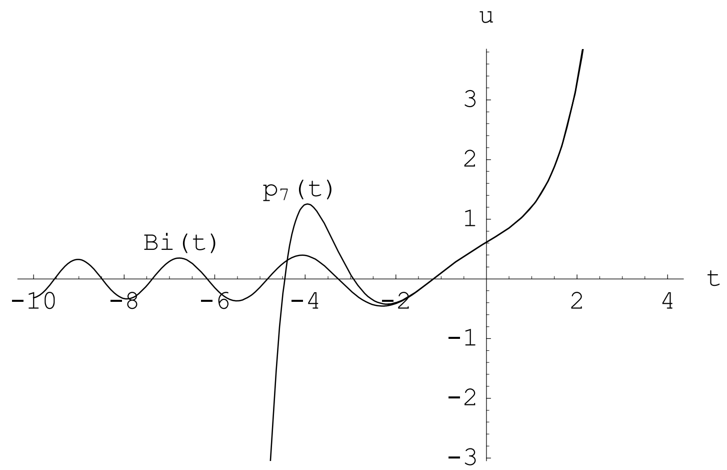
(45) $$u(0) = \frac{1}{3^{1/6}\,\Gamma(\frac{2}{3})}, \qquad u'(0) = \frac{\sqrt{3}}{3^{1/3}\,\Gamma(\frac{1}{3})}\ .$$

Συνεπώς,

(46) $$\mathrm{Bi}(t) = \frac{\sqrt{3}}{3^{2/3}\,\Gamma(\frac{2}{3})} \left\{1 + \frac{1}{2\cdot 3}\, t^3 + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9}\, t^6 + \ldots + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9\cdots(3k-1)\,3k}\, t^{3k} + \ldots\right\}$$
$$+ \frac{\sqrt{3}}{3^{1/3}\,\Gamma(\frac{1}{3})} \left\{t + \frac{1}{3\cdot 4}\, t^4 + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}\, t^7 + \ldots + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 9\cdot 10\cdots 3k(3k+1)}\, t^{3k+1} + \ldots\right\}$$

Στα επόμενα δύο σχήματα συγκρίνεται το γράφημα των συναρτήσεων Airy $\mathrm{Ai}(t)$, και $\mathrm{Bi}(t)$, αντίστοιχα, με τις προσεγγίσεις $p_7(t)$ που ορίζονται από τις προηγούμενες εκφράσεις όταν διατηρηθούν μόνο οι όροι μέχρι και τάξης t^7. Είναι φανερό ότι, στη γειτονιά του μηδενός η διαφορά είναι ελάχιστη.





Ασκήσεις

1. α) Να βρεθεί η λύση με την μορφή συγκλίνουσας σειράς των παρακάτω ΠΑΤ, χρησιμοποιώντας την μέθοδο του παρόντος εδάφιου.

β) Να βρεθεί η ακριβής λύση καθενός από αυτά τα ΠΑΤ.

γ) Να κατασκευαστεί το αντάπτυγμα Taylor με κέντρο το t_0 της ακριβούς λύσης και να συγκριθεί με το αποτέλεσμα που βρήκατε στο πρώτο μέρος της άσκησης.

(i) $u' = 2\,u,$ $\quad t_0 = 0, \quad u(t_0) = 1.$

(ii) $u' = 2\,t\,u,$ $\quad t_0 = 0, \quad u(t_0) = 1.$

(iii) $u' = u^2,$ $\quad t_0 = 1, \quad u(t_0) = 1.$

(iv) $u' = t\,u^2,$ $\quad t_0 = 0, \quad u(t_0) = -2.$

(iv) $u' = \sqrt{1 - u^2}$, $t_0 = 0$, $u(t_0) = 0$.

(v) $u'' = u$, $t_0 = 0$, $u(t_0) = 0$, $u'(t_0) = 1$.

(vi) $u'' + 2u' + 2u = 0$, $t_0 = 0$, $u(t_0) = 0$, $u'(t_0) = 1$.

(vii) $t^2 u'' - 3 t u' + 3u = 0$, $t_0 = 1$, $u(t_0) = 1$, $u'(t_0) = -1$.

(viii) $t^2 u'' - t u' + u = 0$, $t_0 = 1$, $u(t_0) = 0$, $u'(t_0) = 1$.

8. Η μέθοδος της μεταβολής των παραμέτρων (σταθερών)

Έχοντας μελετήσει αρκετά διεξοδικά τις ομογενείς γραμμικές ΔΕ δεύτερης τάξης, δεν μένει παρά να στραφούμε στις μη ομογενείς.

Θεωρούμε, λοιπόν, την ΔΕ

(1) $$u'' = f(t) + g(t)\,u + h(t)\,u', \quad t \in I,$$

περιοριζόμενοι και πάλι στο ακόλουθο πλαίσιο:

(i) Οι συναρτήσεις $f(t)$, $g(t)$, $h(t)$ είναι γνωστές και συνεχείς στο διάστημα I.

Τώρα, βέβαια, εξυπακούεται και ότι η $f(t)$, $t \in I$, δεν είναι η μηδενική συνάρτηση. Διαφορετικά, η (1) θα αναγόταν στην αντίστοιχη ομογενή

(2) $$u'' = g(t)\,u + h(t)\,u', \quad t \in I.$$

Στην προηγούμενη υπόθεση, μπορούμε, πλέον, να προσθέσουμε και την

(ii) Γνωρίζουμε δύο συναρτήσεις, τις $u_1(t)$ και $u_2(t)$, που είναι γραμμικά ανεξάρτητες στο διάστημα I και λύσεις της ΔΕ (2). Με άλλα λόγια, το ζευγάρι $\{u_1(t), u_2(t)\}$ αποτελεί θεμελιώδες σύνολο λύσεων, οπότε η γενική λύση της (2) δίνεται από την

(3) $$u_o(t) = c_1\,u_1(t) + c_2\,u_2(t), \qquad t \in I,$$

όπου c_1, c_2 τυχαίες σταθερές.

Συνεπώς, το μόνο που χρειάζεται για να κατασκευάσουμε τη γενική λύση της (1) είναι να εντοπίσουμε μιαν ειδική λύση αυτής της ΔΕ. Αλλά, αυτό μπορούμε να το επιτύχουμε στηριζόμενοι στην πείρα που αποκτήσαμε λύνοντας τις μη ομογενείς γραμμικές ΔΕ πρώτης τάξης. Η επιτυχία της τεχνικής που χρησιμοποιήσαμε σ' εκείνη την περίπτωση μας παρωθεί στο να εξετάσουμε το ακόλουθο

Ενδεχόμενο: Ίσως υπάρχουν λύσεις της μη ομογενούς ΔΕ (1) οι οποίες είναι της μορφής

(4) $$u(t) = \alpha(t)\,u_1(t) + \beta(t)\,u_2(t),$$

όπου $\alpha(t)$, $\beta(t)$ κατάλληλα επιλεγμένες συναρτήσεις.

Για να διερευνήσουμε αυτό το ενδεχόμενο, δεν έχουμε παρά να αντικαταστήσουμε την έκφραση (4) στην (1). Το άμεσο αποτέλεσμα της αντικατάστασης είναι η

(5) $$(\alpha\,u_1 + \beta\,u_2)'' = f + g\,(\alpha\,u_1 + \beta\,u_2) + h\,(\alpha\,u_1 + \beta\,u_2)',$$

όπου, για ευκολία, παραλείπεται κάθε αναφορά στην ανεξάρτητη μεταβλητή t. Ισοδύναμα,

(6) $$\alpha'' u_1 + 2\,\alpha' u_1' + \alpha\, u_1'' + \beta'' u_2 + 2\,\beta' u_2' + \beta\, u_2'' = f + g\,(\alpha\, u_1 + \beta\, u_2) + h\,(\alpha' u_1 + \alpha\, u_1' + \beta' u_2 + \beta\, u_2').$$

Όμως, σύμφωνα με την αρχική υπόθεση, οι u_1, u_2 είναι λύσεις της ομογενούς ΔΕ (2). Συνεπώς,

(7) $$\alpha\, u_1'' = \alpha\, g\, u_1 + \alpha\, h\, u_1', \qquad \beta\, u_2'' = \beta\, g\, u_2 + \beta\, h\, u_2'.$$

Άρα, η εξίσωση (6) απλοποιείται και γίνεται

(8) $$\alpha'' u_1 + 2\,\alpha' u_1' + \beta'' u_2 + 2\,\beta' u_2' = f + h\,(\alpha' u_1 + \beta' u_2).$$

Έτσι, καταλήγουμε στο ακόλουθο συμπέρασμα: Αν υπάρχουν συναρτήσεις $\alpha(t)$, $\beta(t)$ που λύνουν την τελευταία εξίσωση, τότε, πραγματικά, η μη ομογενής ΔΕ (1) επιδέχεται λύσεις της μορφής (4).

Αλλά, τέτοιες συναρτήσεις δεν είναι δύσκολο να βρεθούν. Αυτό γίνεται φανερό αν προσέξουμε ότι η (8)

α) Γράφεται και στη μορφή

(9) $$(\alpha' u_1 + \beta' u_2)' + \alpha' u_1' + \beta' u_2' = f + h\,(\alpha' u_1 + \beta' u_2),$$

β) Είναι μία εξίσωση με δύο αγνώστους - τις συναρτήσεις $\alpha(t)$ και $\beta(t)$.

Η δεύτερη παρατήρηση μας δείχνει ότι, για να προσδιορίσουμε τις $\alpha(t)$, $\beta(t)$, μπορούμε να επιβάλουμε και μια δεύτερη συνθήκη που να είναι συμβατή με την (9). Αλλά, η ίδια η (9) μας υποδείχνει και ποια είναι η καλύτερη επιλογή για τη δεύτερη συνθήκη. Δεν μπορεί να είναι άλλη από την

(10) $$\alpha' u_1 + \beta' u_2 = 0.$$

Γιατί, με αυτή την επιλογή, η (9) απλουστεύεται αμέσως και γίνεται.

(11) $$\alpha' u_1' + \beta' u_2' = f.$$

Είναι φανερό ότι, οι (10) και (11) αποτελούν ένα γραμμικό σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων για το ζευγάρι $\{\alpha', \beta'\}$ που λύνεται εύκολα. Συγκεκριμένα, πολλαπλασιάζοντας το πρώτο μέλος του συστήματος με u_2', το δεύτερο με u_2 και αφαιρώντας κατά μέλη καταλήγουμε στην

(12) $$(u_1\, u_2' - u_1'\, u_2)\,\alpha' = -u_2\, f.$$

Με ανάλογο τρόπο βρίσκουμε ότι

(13) $$(u_1\, u_2' - u_1'\, u_2)\,\beta' = u_1\, f.$$

Συνακόλουθα, αν η συνάρτηση

(14) $$W_{(u_1,u_2)} := (u_1\, u_2' - u_1'\, u_2)$$

δεν μηδενίζεται σε κανένα σημείο του διαστήματος I, τότε οι (13), (14) λύνονται μονοσήμαντα ως προς τις α', β' για να δώσουν

(15) $$\alpha' = -\frac{u_2\, f}{W_{(u_1,u_2)}}, \qquad \beta' = \frac{u_1\, f}{W_{(u_1,u_2)}}.$$

΄Ομως, η συνάρτηση $W_{(u_1,u_2)}(t)$ δεν είναι άλλη από την ορίζουσα Wronski των συναρτήσεων $u_1(t)$, $u_2(t)$. Και αυτή είναι όντως μη μηδενική σε όλο το πεδίο ορισμού των μελών ενός θεμελιώδους συνόλου. ΄Αρα η (15) ισχύει, ως έχει.

Θα πρέπει, τώρα, να σημειωθεί ότι, οι συναρτήσεις που εμφανίζονται στο δεξί μέλος των εξισώσεων (15) είναι συνεχείς. Συνεπώς, οι πιο πάνω εξισώσεις λύνονται αμέσως για να δώσουν

(16) $$\alpha(t) = C_1 - \int \frac{u_2 f}{W_{(u_1,u_2)}}\, d\,t, \qquad \beta(t) = C_2 + \int \frac{u_1 f}{W_{(u_1,u_2)}}\, d\,t.$$

Αλλά αυτό σημαίνει ότι, το ενδεχόμενο να έχει η ΔΕ (1) λύσεις της μορφής (4), ισχύει. Γιατί, όλα τα στοιχεία που απαιτούνται για τον υπολογισμό των συναρτήσεων $\alpha(t)$ και $\beta(t)$ είναι γνωστά από την υπόθεση. Μάλιστα, η υπόθεση εργασίας που υιοθετήσαμε δεν μας οδήγησε στο να βρούμε μόνο μιαν ειδική λύση της (1), αλλά τη γενική λύση αυτής της ΔΕ. Αυτό φαίνεται από την αντικατάσταση των εκφράσεων (16) στην (4) που δίνει το ακόλουθο αποτέλεσμα:

(17) $$u = C_1\, u_1(t) + C_2\, u_2(t) - u_1(t) \int \frac{u_2 f}{W_{(u_1,u_2)}}\, d\,t + u_2(t) \int \frac{u_1 f}{W_{(u_1,u_2)}}\, d\,t$$

Είναι φανερό ότι το τμήμα $C_1\, u_1(t) + C_2\, u_2(t)$ αυτής της έκφρασης αναπαράγει τη γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς και, άρα, το υπόλοιπο μας δίνει μιαν ειδική λύση της (1).

Με αυτό το αποτέλεσμα, ολοκληρώνεται, ουσιαστικά, και η ανάλυση των γραμμικών ΔΕ δεύτερης τάξης που είχαμε οριοθετήσει στην αρχή αυτού του κεφάλαιου. Βέβαια, στο κεφάλαιο που είναι αφιερωμένο στην αναλυτική παρουσίαση της μεθόδου των σειρών, θα επανέλθουμε στο ζήτημα της κατασκευής λύσεων των ομογενών ΔΕ αυτής της κατηγορίας. Αυτό δεν αναιρεί το γεγονός ότι, έχουμε ολοκληρώσει την απόδειξη του βασικού θεωρήματος που παρουσιάσαμε στην εισαγωγή αυτού του κεφάλαιου, το οποίο μπορεί πλέον να διατυπωθεί με σαφήνεια ως εξής:

Θεώρημα

Ας υποτεθεί ότι

(i) Οι συναρτήσεις $f(t)$, $g(t)$, και $h(t)$ είναι συνεχείς στο διάστημα I.

(ii) Οι συναρτήσεις $u_1(t)$, $u_2(t)$ αποτελούν γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς ΔΕ

$$u'' = g(t)\, u + h(t)\, u', \quad t \in I.$$

Τότε η γενική λύση της μη ομογενούς ΔΕ

$$u'' = f(t) + g(t)\, u + h(t)\, u', \quad t \in I,$$

δίνεται από την 2-παραμετρική οικογένεια συναρτήσεων

$$u = C_1\, u_1(t) + C_2\, u_2(t) - u_1(t) \int \frac{u_2 f}{W_{(u_1,u_2)}}\, d\,t + u_2(t) \int \frac{u_1 f}{W_{(u_1,u_2)}}\, d\,t,$$

όπου

$$W_{(u_1,u_2)} := (u_1\, u_2' - u_1'\, u_2).$$

Ειδικότερα, οι συναρτήσεις

$$u_o := C_1\, u_1(t) + C_2\, u_2(t)$$

απελούν τη γενική λύση της ομογενούς ΔΕ, ενώ η συνάρτηση

(18) $$\boxed{u_\varepsilon := -u_1(t) \int \frac{u_2\, f}{W_{(u_1,u_2)}}\, d\, t + u_2(t) \int \frac{u_1\, f}{W_{(u_1,u_2)}}\, d\, t}$$

αποτελεί μιαν ειδική λύση της μη ομογενούς.

□

Παράδειγμα

Θεωρούμε την μη ομογενή ΔΕ

(19) $$u'' = t + u, \quad t \in \mathbb{R},$$

Σ' αυτή την περίπτωση

$$f(t) = t, \quad g(t) = 1, \;\; h(t) = 0$$

Από την άλλη, γνωρίζουμε ότι, ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων της αντίστοιχης ομογενούς είναι το $\{u_1(t),\; u_2(t)\} = \{e^t,\, e^{-t}\}$. Άρα,

$$W_{(u_1,u_2)} = e^t (e^{-t})' - (e^t)'\, e^{-t} = -e^t\, e^{-t} - e^t\, e^{-t} = -2\,,$$

$$\int \frac{u_2\, f}{W_{(u_1,u_2)}}\, d\, t {=} \int \frac{t\, e^{-t}}{(-2)}\, d\, t = \frac{1}{2} \int t\, (e^{-t})'\, d\, t = \frac{1}{2} \left\{t\, e^{-t} - \int e^{-t}\, d\, t\right\} = \frac{1}{2}\, e^{-t} (t+1),$$

$$\int \frac{u_1\, f}{W_{(u_1,u_2)}}\, d\, t = \int \frac{t\, e^t}{(-2)}\, d\, t = -\frac{1}{2} \int t\, (e^t)'\, d\, t = -\frac{1}{2} \left\{t\, e^t - \int e^t\, d\, t\right\} = -\frac{1}{2}\, e^t (t-1).$$

Από το θεώρημα έπεται ότι μια ειδική λύση της ΔΕ (19) δίνεται από τη συνάρτηση

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(t) &= -u_1(t) \int \frac{u_2\, f}{W_{(u_1,u_2)}}\, d\, t + u_2(t) \int \frac{u_1\, f}{W_{(u_1,u_2)}}\, d\, t \\ &= -e^t\, \frac{1}{2}\, e^{-t} (t+1) + e^{-t} \left\{-\frac{1}{2}\, e^t (t-1)\right\} = -\frac{1}{2} \{(t+1) + (t-1)\}. \end{aligned}$$

Η τελευταία έκφραση απλοποιείται αμέσως για να δώσει

(20) $$u_\varepsilon(t) = -t.$$

Συνακόλουθα, η γενική λύση της (19) δίνεται από τις συναρτήσεις

(21) $$u = C_1\, e^t + C_2\, e^{-t} - t.$$

□

Παράδειγμα

Η ΔΕ

(22) $$u'' = 4\, e^t + 4\, u, \quad t \in \mathbb{R},$$

έχει ως αντίστοιχη ομογενή την $u'' = 4\, u$. Είναι, πλέον, προφανές ότι δύο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της τελευταίας είναι οι συναρτήσεις $u_1(t) = e^{2\,t}$ και $u_1(t) = e^{-2\,t}$. Η αντίστοιχη ορίζουσα Wronski υπολογίζεται εύκολα:

$$W_{(u_1,u_2)} = e^{2\,t} (e^{-2\,t})' - (e^{2\,t})'\, e^{-2\,t} = -4.$$

Στην προκείμενη περίπτωση, ο όρος εξαναγκασμού δίνεται από τη συνάρτηση $f(t) = 4\, e^t$. ΄Αρα,

$$\int \frac{u_2 f}{W_{(u_1,u_2)}}\, d\,t = \int \frac{4\,e^t\,e^{-2\,t}}{(-4)}\, d\,t = -\int e^{-t}\, d\,t = e^{-t}\,.$$

$$\int \frac{u_1 f}{W_{(u_1,u_2)}}\, d\,t = \int \frac{4\,e^t\,e^{2\,t}}{(-4)}\, d\,t = -\int e^{3\,t}\, d\,t = -\frac{1}{3}\, e^{3\,t}.$$

Συνεπώς, μια ειδική λύση της (22) είναι η

(23) $$u_\varepsilon(t) = -u_1(t) \int \frac{u_2 f}{W_{(u_1,u_2)}}\, d\,t + u_2(t) \int \frac{u_1 f}{W_{(u_1,u_2)}}\, d\,t$$

$$= -e^{2\,t}(e^{-t}\,) + e^{-2\,t}(-\tfrac{1}{3}\, e^{3\,t}) = -\tfrac{4}{3}\, e^t.$$

Τέλος, η γενική λύση της μη ομογενούς ΔΕ (22) αποτελείται από τις συναρτήσεις της μορφής

(24) $$u = C_1\, e^{2\,t} + C_2\, e^{-2\,t} - \tfrac{4}{3}\, e^t$$

Παράδειγμα

Η ΔΕ

(25) $$u'' = 2\,e^t + u, \quad t \in \mathbb{R},$$

διαφέρει από την (19) μόνο ως προς τον όρο εξαναγκασμού, ο οποίος τώρα είναι ίσος με $f(t) = 2\,e^t$. ΄Αρα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ίδιο θεμελιώδες σύνολο λύσεων, $\{e^t,\, e^{-t}\}$, της αντίστοιχης ομογενούς, για να βρούμε ότι

$$\int \frac{u_2 f}{W_{(u_1,u_2)}}\, d\,t = \int \frac{2\,e^t\,e^{-t}}{(-2)}\, d\,t = -\int 1\, d\,t = -t\,,$$

$$\int \frac{u_1 f}{W_{(u_1,u_2)}}\, d\,t = \int \frac{2\,e^t\,e^t}{(-2)}\, d\,t = -\int e^{2\,t}\, d\,t = -\frac{1}{2}\, e^{2\,t}.$$

Συνεπώς, μια ειδική λύση της (25) είναι η

(26) $$u_\varepsilon(t) = -u_1(t) \int \frac{u_2 f}{W_{(u_1,u_2)}}\, d\,t + u_2(t) \int \frac{u_1 f}{W_{(u_1,u_2)}}\, d\,t$$

$$= -e^t(-t\,) + e^{-t}(-\tfrac{1}{2}\, e^{2\,t}) = e^t(t - \tfrac{1}{2})$$

Αυτό το αποτέλεσμα μας επιτρέπει να γράψουμε την γενική λύση της μη ομογενούς ΔΕ (25) στη μορφή

(27) $$u = C_1\, e^t + C_2\, e^{-t} + e^t\,(t - \tfrac{1}{2}).$$

Παρατήρηση. Το τμήμα $-(1/2)\,e^t$ της ειδικής λύσης (26) είναι της ίδιας ακριβώς μορφής με το δεύτερο στοιχείο του θεμελιώδους συνόλου $\{e^t,\, e^{-t}\}$. Συνεπώς, μπορεί να παραληφθεί, οπότε θα καταλήξουμε στην ειδική λύση

(28) $$\tilde{u}_\varepsilon(t) = t\,e^t.$$

Αυτό φαίνεται καθαρά και από την έκφραση (27) για την γενική λύση. Συγκεκριμένα, η (27) γράφεται και με τον ακόλουθο τρόπο

(29) $$u = (C_1 - \tfrac{1}{2})\,e^t + C_2\, e^{-t} + \,t\,e^t$$

Ισοδύναμα,

(30) $$u = \tilde{C}_1\, e^t + C_2\, e^{-t} + \,t\,e^t\,,$$

όπου $\tilde{C}_1 = C_1 - 1/2$. Από αυτή την έκφραση συνάγεται αμέσως ότι η συνάρτηση $2\,t\,e^t$ αποτελεί ειδική λύση της (25).

□

Παράδειγμα

Συγκρίνοντας την μη ομογενή ΔΕ

(31) $$u'' + 2\,u' + u = t\,, \quad t \in \mathbb{R},$$

με την κανονική μορφή $u' = f(t) + g(t)\,u + h(t)\,u'$, συμπεραίνουμε ότι, σ' αυτή την περίπτωση,

$$f(t) = t\,, \quad g(t) = -1, \; h(t) = -2$$

Η αντίστοιχη ομογενής έχει σταθερούς συντελεστές, οπότε λύνεται εύκολα.΄Ενα θεμελιώδες σύνολο λύσεών της είναι το ζευγάρι $\{u_1, \; u_2\} = \{e^{-t}, \, t\,e^{-t}\}$. Άρα

$$W_{(u_1,u_2)} = e^{-t}(t\,e^{-t})' - (e^{-t})'\,t\,e^{-t} = e^{-2\,t},$$

$$\int \frac{u_2\,f}{W_{(u_1,u_2)}}\,d\,t = \int \frac{t^2\,e^{-t}}{e^{-2\,t}}\,d\,t = \int t^2\,e^t\,d\,t = \int t^2\,(e^t)'\,d\,t$$
$$= t^2\,e^t - 2\int t\,e^t\,d\,t = t^2\,e^t - 2[t\,e^t - \int e^t\,d\,t] = e^t(t^2 - 2\,t + 2)\,,$$

$$\int \frac{u_1\,f}{W_{(u_1,u_2)}}\,d\,t = \int \frac{t\,e^{-t}}{e^{-2\,t}}\,d\,t = \int t\,e^t\,d\,t = t\,e^t - \int e^t\,d\,t = e^t(t-1).$$

Συνεπώς, μια ειδική λύση της ΔΕ (31) είναι η συνάρτηση

(32) $$u_\varepsilon(t) = -u_1(t)\,e^t(t^2 - 2\,t + 2) + u_2(t)\,e^t(t-1)$$
$$= -e^{-t}\,e^t(t^2 - 2\,t + 2) + t\,e^{-t}\,e^t(t-1) = t - 2.$$

Συνακόλουθα, η γενική λύση της (31) είναι της μορφής

(33) $$u = C_1\,e^{-t} + C_2\,t\,e^{-t} + t - 2.$$

□

Παράδειγμα

Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του προηγούμενου παραδείγματος, μπορούμε εύκολα να βρούμε μιαν ειδική λύση της ΔΕ

(34) $$u'' + 2\,u' + u = 4\,t\,e^t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Γιατί, η αντίστοιχη ομογενής είναι ίδια μ' εκείνη της (31) και η μόνη διαφορά βρίσκεται στον όρο εξαναγκασμού. Στην προκείμενη περίπτωση $f(t) = 4\,t\,e^t$, οπότε

$$\int \frac{u_2\,f}{W_{(u_1,u_2)}}\,d\,t = \int \frac{4\,t\,e^t\,t\,e^{-t}}{e^{-2\,t}}\,d\,t = 4\int t^2\,e^{2\,t}\,d\,t = 2\int t^2\,(e^{2\,t})'\,d\,t$$
$$= 2\,\{t^2\,e^{2\,t} - 2\int t\,e^{2\,t}\,d\,t\} = 2\,\{t^2\,e^{2\,t} - \int t\,(e^{2\,t})'\,d\,t\}$$

$$= 2\{t^2 e^{2t} - [t\,e^{2t} - \int e^{2t}\,d\,t]\} = e^{2t}(2\,t^2\, - 2\,t + \,1),$$

$$\int \frac{u_1 f}{W_{(u_1,u_2)}}\,d\,t = \int \frac{4\,t\,e^t\,e^{-t}}{e^{-2t}}\,d\,t = 4\int t\,e^{2t}\,d\,t = 2\int t\,(e^{2t})'\,d\,t$$
$$= 2\,(t\,e^{2t} - \int e^{2t}\,d\,t) = e^{2t}(2\,t - 1).$$

Συνεπώς,

(35)
$$u_\varepsilon(t) = -u_1(t)\int \frac{u_2 f}{W_{(u_1,u_2)}}\,d\,t + u_2(t)\int \frac{u_1 f}{W_{(u_1,u_2)}}\,d\,t$$
$$= -e^{-t}\,e^{2t}(2\,t^2\, - 2\,t + \,1) + t\,e^{-t}\,e^{2t}(2\,t - 1) = e^t(t-1).$$

□

Παρατήρηση

΄Οταν ο όρος εξαναγκασμού μιας μη ομογενούς ΔΕ είναι άθροισμα συναρτήσεων, τότε μια ειδική λύση της συγκεκριμένης ΔΕ κατασκευάζεται προσθέτοντας τις ειδικές λύσεις που αντιστοιχούν σε καθέναν από τους όρους της συνάρτησης εξαναγκασμού. Γιατί, αν

(36)
$$f(t) = \sum_{j=1}^n f_j(t)$$

τότε

(37)
$$\int \frac{u_k f}{W_{(u_1,u_2)}}\,d\,t = \int \frac{u_k}{W_{(u_1,u_2)}}\,(\sum_{j=1}^n f_j(t))\,d\,t = \sum_{j=1}^n \int \frac{u_k f_j}{W_{(u_1,u_2)}}\,d\,t, \quad k = 1, 2.$$

Πρακτικά, αυτό σημαίνει το εξής. Αν, για παράδειγμα, έχουμε ήδη καταστευάσει ειδικές λύσεις των εξισώσεων

$$u'' = f(t) + g(t)\,u + h(t)\,u', \quad u'' = F(t) + g(t)\,u + h(t)\,u',$$

τότε δε χρειάζεται να επαναλάβουμε τη δουλειά μας για να βρούμε μιαν ειδική λύση της

$$u'' = f(t) + F(t) + g(t)\,u + h(t)\,u'$$

□

Παράδειγμα

Σε δύο από τα προηγούμενα παραδείγματα βρήκαμε ότι οι συναρτήσεις

(38)
$$u_{\varepsilon,1} = t - 2, \qquad u_{\varepsilon,1} = e^t(t-1)$$

αποτελούν ειδικές λύσεις των μη ομογενών ΔΕ

$$u'' + 2\,u' + u = t$$

και

$$u'' + 2\,u' + u = 4\,t\,e^t,$$

αντίστοιχα.

Συνεπώς, μια ειδική λύση της ΔΕ

(39)
$$u'' + 2\,u' + u = t(3 - 8\,e^t)$$

δίνεται από την συνάρτηση

(40) $$u_\varepsilon = 3\, u_{\varepsilon,1} - 2\, u_{\varepsilon,2} = 3\,(t-2) - 2\, e^t (t-1).$$

□

Παράδειγμα

Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να βρούμε μιαν ειδική λύση της μη ομογενούς ΔΕ

(41) $$t^2\, u'' - 4\, t\, u' + 6\, u = t^3.$$

Αρχικά, σημειώνουμε ότι, το $t = 0$ αποτελεί σημείο ανωμαλίας της (41). Γι' αυτό, η ανάλυσή μας πρέπει να περιοριστεί σε ένα διάστημα της πραγματικής ευθείας που δεν περιέχει το μηδέν. Χωρίς να μειώσουμε τη γενικότητα του τελικού αποτελέσματος θα υποθέσουμε ότι $t > 0$. Σ' αυτό το διάστημα, η (41) είναι ισοδύναμη με την

(42) $$u'' = t - \frac{6}{t^2}\, u + \frac{4}{t}\, u'.$$

Στην προκείμενη περίπτωση, λοιπόν,

(43) $$f(t) = t, \quad g(t) = -6\, t^{-2}, \;\; h(t) = 4\, t^{-1}.$$

Προφανώς, η αντίστοιχη της (41) ομογενής είναι Euler-Cauchy. Από το σχετικό θεώρημα συμπεραίνουμε ότι, ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων της ομογενούς δίνεται από το ζευγάρι $\{u_1,\; u_2\} = \{t^2,\, t^3\}$. Η ορίζουσα Wronski αυτού του ζευγαριού είναι ίση με

(44) $$W_{(u_1,u_2)} = t^2 (t^3)' - (t^2)'\, t^3 = t^4,$$

οπότε,

$$\int \frac{u_2\, f}{W_{(u_1,u_2)}}\, d\,t = \int \frac{t^3\, t}{t^4}\, d\,t = \int 1\, d\,t = t,$$

$$\int \frac{u_1\, f}{W_{(u_1,u_2)}}\, d\,t = \int \frac{t^2\, t}{t^4}\, d\,t = \int t^{-1}\, d\,t = \ln t\,.$$

Συνεπώς, μιαν ειδική λύση της ΔΕ (41) αποτελεί η συνάρτηση

(45) $$u_\varepsilon(t) = -t^2\, t\, + t^3 \ln t\, = t^3 (\ln t - 1).$$

□

Παρατήρηση

Ένα λάθος που γίνεται συχνά στην κατασκευή ειδικής λύσης μιας μη ομογενούς γραμμικής ΔΕ δεύτερης τάξης είναι το εξής. Τις περισσότερες φορές, η προς επίλυση εξίσωση δίνεται στη μορφή

(46) $$a(t)\, u'' + b(t)\, u' + c(t)\, u = \rho(t),$$

με $a(t) \neq 1$. Το συχνό λάθος που αναφέραμε είναι να χρησιμοποιείται ο τύπος που μας παρέχει το θεώρημα, με τη συνάρτηση $\rho(t)$ στη θέση της $f(t)$.

Για ν' αποφεύγουμε αυτό το λάθος, θα πρέπει, προτού εφαρμόσουμε τους τύπους του θεωρήματος, να φέρνουμε την (46) στη μορφή (1). Με άλλα λόγια, για μια ΔΕ της μορφής (46), η συνάρτηση που στην (1) συμβολίζεται με $f(t)$ είναι η $-\rho(t)/a(t)$.

Ασκήσεις

1. Να βρεθεί η γενική λύση των παρακάτω ΔΕ, με την μέθοδο της μεταβολής των παραμέτρων.

(i) $u'' = t^2 - u$,

(ii) $u'' + u = 3 \sin 2\,t$,

(iii) $u'' + 4\,u = 4 \sin 2\,t$,

(iv) $u'' + 4\,u = 9\,(t+1) \sin t$,

(v) $u'' + 2\,u' + 2\,u = 2\,t$,

(vi) $u'' + 2\,u' + 2\,u = 5 \sin t$,

(vii) $u'' + 2\,u' + 2\,u = 10\,(t - \sin t)$,

(viii) $9\,t^2\,u'' + 3\,t\,u' + u = t$,

(ix) $3\,t^2\,u'' + t\,u' - u = 16\,t$,

(x) $4\,t^2\,u'' + 5\,u = 5\,t$.

2. Να λυθούν τα επόμενα ΠΑΤ, της μορφής

$$u(t_0) = A, \qquad u'(t_0) = B.$$

Σε κάθε περίπτωση, να κατασκευαστεί μια γραφική παράσταση που να δείχνει την ποιοτική συμπεριφορά της λύσης σε όλο το πεδίο ορισμού της.

(i) $u'' = t(t+1) - u$, $(t_0, A, B) = (0, 1, 0)$

(ii) $u'' + u = 3 \sin t$, $(t_0, A, B) = (\pi/2, 0, 1)$

(iii) $u'' + 4\,u = 4 \sin 2\,t + \sin t$, $(t_0, A, B) = (0, 1, -1)$

(iv) $u'' + 2\,u' - 3\,u = 9\,t$, $(t_0, A, B) = (0, -1, -1)$

(v) $u'' + 2\,u' + u = t^2$, $(t_0, A, B) = (0, 0, -1)$

(vi) $u'' + 2\,u' + 5\,u = 4\,e^{-t}$, $(t_0, A, B) = (0, 1, 0)$

(vii) $25\,t^2\,u'' + 15\,t\,u' + u = t$, $(t_0, A, B) = (1, 1, 0)$

(viii) $16\,t^2\,u'' + 8\,t\,u' - 15\,u = 33\,t$, $(t_0, A, B) = (-1, 0, -1)$

(ix) $9\,t^2\,u'' + 3\,t\,u' + 10\,u = 13\,t$, $(t_0, A, B) = (1, 2, -1/3)$

3. Ελέγξετε τις λύσεις των Ασκ. 1 και 2 με τη βοήθεια του *Mathematica*.

9. Η μέθοδος προσδιορισμού των συντελεστών

Συχνά, τα ολοκληρώματα στον τύπο (18) του προηγούμενου εδάφιου για μιαν ειδική λύση των μη ομογενών ΔΕ είναι δύσκολο να υπολογιστούν. Από την άλλη μεριά, μια προσεκτική εξέταση των παραδειγμάτων εκείνου του εδάφιου οδηγούν στην ακόλουθη διαπίστωση. Οι ειδικές λύσεις των μη ομογενών ΔΕ της μορφής

(1) $$a\,u'' + b\,u' + c\,u = \rho(t),$$

όπου a, b, c σταθερές, είναι συναρτήσεις της ίδιας μορφής με τον όρο εξαναγκασμού, $\rho(t)$.

Προς διευκόλυνση του αναγνώστη, συγκεντρώνουμε τα αντίστοιχα αποτελέσματα στον ακόλουθο πίνακα.

	Διαφορική εξίσωση	*Ειδική λύση*
(i)	$u'' = t + u$	$-t$
(ii)	$u'' = 4\,e^t + 4\,u$	$-\frac{4}{3}\,e^t$
(iii)	$u'' = 2\,e^t + u$	$t\,e^t$
(iv)	$u'' + 2\,u' + u = t$	$t - 2$
(v)	$u'' + 2\,u' + u = 4\,t\,e^t$	$e^t(t-1)$
(vi)	$u'' + 2\,u' + u = 3\,t - 8\,t\,e^t$	$-6 + 3\,t + 2\,e^t(1-t)$.

Από αυτόν τον πίνακα συνάγεται, λοιπόν, ο ακόλουθος εμπειρικός **κανόνας**:

Αν ο όρος εξαναγκασμού είναι πολυώνυμο βαθμού n, το ίδιο ισχύει και για την ειδική λύση. Αν ο όρος εξαναγκασμού έχει τη μορφή εκθετικής συνάρτησης ή γινόμενου εκθετικής συνάρτησης με πολυώνυμο, τότε η ειδική λύση θα είναι της ίδιας μορφής.

Εξαίρεση από τον κανόνα φαίνεται να αποτελεί η περίπτωση (iii). Όμως, αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η e^t αποτελεί λύση της αντίστοιχης ομογενούς. Συνεπώς, ένα πολλαπλάσιο αυτής της συνάρτησης δεν μπορεί να αποτελέσει ειδική λύση της μη ομογενούς.

Ανάλογες διαπιστώσεις σε ομοειδή παραδείγματα οδηγούν στην ακόλουθη τεχνική για την κατασκευή ειδικής λύσης γραμμικών ΔΕ δεύτερης τάξης της μορφής (1):

α) Πρώτα βρίσκουμε δυο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις, $u_1(t)$, $u_2(t)$, της αντίστοιχης ομογενούς.

β) Αν ο όρος εξαναγκασμού έχει τη μορφή της πρώτης στήλης του επόμενου πίνακα, τότε υποθέτουμε ότι υπάρχει ειδική λύση με τη μορφή της συνάρτησης που υποδείχνει η δεύτερη στήλη. Τόσο οι συντελεστές β_j, γ_j, όσο και η παράμετρος s, που εμφανίζονται στις συναρτήσεις της δεύτερης στήλης είναι, αρχικά, απροσδιόριστοι. Οι τιμές τους προσδιορίζονται μέσω της απαίτησης οι παραπάνω συναρτήσεις να αποτελούν λύση της συγκεκριμένης ΔΕ που μας ενδιαφέρει.

Όρος εξαναγκασμού *Μορφή ειδικής λύσης*

(i) $p_n(t) := \alpha_0 + \alpha_1\, t + \ldots + \alpha_n\, t^n$ $\qquad t^s(\beta_0 + \beta_1\, t + \ldots + \beta_{n-1}\, t^{n-1} + \beta_n\, t^n)$

(ii) $p_n(t)\, e^{\kappa\, t}$ $\qquad t^s(\beta_0 + \beta_1\, t + \ldots + \beta_{n-1}\, t^{n-1} + \beta_n\, t^n)\, e^{\kappa\, t}$

(iii) $p_n(t)\, e^{\kappa\, t} \cos \lambda\, t,$ $\qquad t^s(\beta_0 + \beta_1\, t + \ldots + \beta_{n-1}\, t^{n-1} + \beta_n\, t^n)\, e^{\kappa\, t} \cos \lambda\, t$

ή $p_n(t)\, e^{\kappa\, t} \sin \lambda\, t$ $\qquad + t^s(\gamma_0 + \gamma_1\, t + \ldots + \gamma_{n-1}\, t^{n-1} + \gamma_n\, t^n)\, e^{\kappa\, t} \sin \lambda\, t.$

Σημείωση

1. Αν καμία από τις συναρτήσεις που απαρτίζουν τον όρο εξαναγκασμού δεν ταυτίζεται με μία από τις λύσεις $u_1(t)$, $u_2(t)$, της αντίστοιχης ομογενούς, η παράμετρος s μπορεί να επιλεγεί, από την αρχή, ίση με το μηδέν.

2. Αν ο όρος εξαναγκασμού της ΔΕ (1) είναι της μορφής $\sum_{j=1}^{m} \rho_j(t)$, όπου καθένας από τους όρους $\rho_j(t)$ είναι ομοειδής προς τα στοιχεία της πρώτης στήλης του προηγούμενου πίνακα, τότε μια ειδική λύση (1) δίνεται από το άθροισμα των ειδικών λύσεων των ΔΕ

(2) $$a\, u'' + b\, u' + c\, u = \rho_j(t), \qquad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Τα παραδείγματα που ακολουθούν αποσαφηνίζουν τις λεπτομέρειες αυτής της τεχνικής που, για προφανείς λόγους, ονομάζεται ***μέθοδος των (αρχικά) απροσδιόριστων συντελεστών*** ή ***μέθοδος προσδιορισμού των συντελεστών***.

□

Παράδειγμα

Ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων της ομογενούς ΔΕ που αντιστοιχεί στην

(3) $$u'' - u = 1 - t + 2\, t^2$$

$$u'' - u = 1 - t + 2\, t^2$$

είναι το $\{u_1,\ u_2\} = \{e^t,\ e^{-t}\}$. Προφανώς, καμία από τις συναρτήσεις που απαρτίζουν τον όρο εξαναγκασμού της (3) δεν ταυτίζεται με κάποιο από τα μέλη του ζευγαριού $\{e^t,\ e^{-t}\}$. Γι' αυτό, ως ειδική λύση της μη ομογενούς ΔΕ (3), δοκιμάζουμε το τριώνυμο

(4) $$u_\varepsilon = \beta_0 + \beta_1\, t + \beta_2\, t^2$$

Από την προηγούμενη έκφραση αμέσως έπεται ότι

(5) $$u_\varepsilon' = \beta_1 + 2\, \beta_2\, t, \quad u_\varepsilon'' = 2\, \beta_2.$$

Συνεπώς,

(6) $$u_\varepsilon'' - u_\varepsilon = 2\, \beta_2 - \beta_0 - \beta_1\, t - \beta_2\, t^2.$$

Συγκρίνοντας αυτό το αποτέλεσμα με την (3), συμπεραίνουμε ότι, η u_ε θα είναι λύση της παραπάνω ΔΕ εάν και μόνο όταν

(7) $$2\, \beta_2 - \beta_0 = 1, \quad \beta_1 = 1, \quad \beta_2 = -2.$$

Από τις (7) έπεται ότι, $\beta_0 = -5$, οπότε η ειδική λύση της μορφής (4) δίνεται από τη συνάρτηση

(8) $$u_\varepsilon = -5 + t - 2\, t^2.$$

□

Παράδειγμα

Για να κατασκευάσουμε μιαν ειδική λύση της ΔΕ

(9) $$u'' - 4\,u = 2\,(1 - t + 2\,t^2)\,e^{-2\,t}\,,$$

αρχικά, σημειώνουμε ότι, οι συναρήσεις $e^{2\,t}$ και $e^{-2\,t}$ αποτελούν γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της $u'' - 4\,u = 0$. Τώρα, στο δεξί μέλος της (9) εμφανίζεται η συνάρτηση $2\,e^{-2\,t}$ που δεν είναι ανεξάρτητη από την $e^{-2\,t}$. Σύμφωνα, λοιπόν, με τον κανόνα που αναφέραμε, ως ειδική λύση της μη ομογενούς ΔΕ (9), πρέπει να δοκιμάσουμε μια συνάρτηση της μορφής

(10) $$u_\varepsilon = t^s(\beta_0 + \beta_1\,t + \beta_2\,t^2)\,e^{-2\,t} = (\beta_0\,t^s + \beta_1\,t^{s+1} + \beta_2\,t^{s+2})\,e^{-2\,t}.$$

Ο υπολογισμός της δεύτερης παραγώγου της u_ε είναι απλός αλλά αλγεβρικά περίπλοκος. Από την άλλη μεριά, υπάρχει ένας αρκετά απλούστερος τρόπος για τον προσδιορισμό της παραμέτρου s και του συντελεστή β_2. Γι' αυτό δίνουμε το τελικό αποτέλεσμα και αφήνουμε την επαλήθευσή του για άσκηση του αναγνώστη:

(11) $$\begin{aligned} u_\varepsilon' = \{&\beta_0\,s(s-1)\,t^{s-2} + s[\beta_1(s+1) - 4\,\beta_0]\,t^{s-1} \\ &+[\beta_2(s+1)\,(s+2) - 4\,\beta_1(s+1) + 4\,\beta_0]\,t^s \\ &-[4\,\beta_2(s+2) - 4\,\beta_1]\,t^{s+1} + 4\,\beta_2\,t^{s+2}\}\,e^{-2\,t}. \end{aligned}$$

Συνακόλουθα,

(12) $$\begin{aligned} u_\varepsilon'' - 4\,u_\varepsilon = \{&\beta_0\,s(s-1)\,t^{s-2} + s[\beta_1(s+1) - 4\,\beta_0]\,t^{s-1} \\ &+ [\beta_2(s+1)\,(s+2) - 4\,\beta_1(s+1)]\,t^s - 4\,\beta_2(s+2)\,t^{s+1}\}\,e^{-2\,t}. \end{aligned}$$

Τώρα, απλώς, μένει να συγκρίνουμε την τελευταία έκφραση με τον όρο εξαναγκασμού της ΔΕ (9). Ξεκινάμε από τον τελευταίο όρο της (12), ο οποίος περιέχει την μεγαλύτερη δύναμη του t: Η συνάρτηση $-4\,\beta_2(s+2)\,t^{s+1}$ γίνεται $4\,t^2$ μόνο αν

(13) $$s = 1, \qquad \beta_2 = -\tfrac{1}{3}.$$

Με βάση αυτές τις τιμές για την παράμετρο s και τον συντελεστή β_2, η σύγκριση των υπόλοιπων όρων δίνε αμέσως το ακόλουθο αποτέλεσμα:

(14) $$\beta_0 = -\tfrac{1}{2}, \qquad \beta_1 = 0.$$

Συνεπώς, η ειδική λύση (10) συγκεκριμενοποείται για να γίνει

(15) $$u_\varepsilon = -t(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}\,t^2)\,e^{-2\,t}.$$

□

Η απλούστερη διαδικασία την οποία υπαινιχτήκαμε νωρίτερα, στηρίζεται στην ακόλουθη παρατήρηση: Στη δοκιμαστική έκφραση (10) για την ειδική λύση, ο όρος με την ψηλότερη δύναμη της ανεξάρτητης μεταβλητής είναι ο

(16) $$U_\varepsilon = \beta_2\,t^{s+2}\,e^{-2\,t}.$$

Αυτός είναι που θα καθορίσει και την τιμή της παραμέτρου s. Γι' αυτό τον λόγο, μπορούμε να ξεκινήσουμε τους υπολογισμούς μας αντικαθιστώντας τον "κυρίαρχο" όρο (16) στην ΔΕ (9).

Από την (16) αμέσως έπεται ότι

(17) $$U_\varepsilon'' = \beta_2[(s+1)(s+2)\,t^s - 4\,(s+2)\,t^{s+1} + 4\,t^{s+2}]\,e^{-2\,t}$$

Συνεπώς,

(18) $$U_\varepsilon'' - 4\,U_\varepsilon = \beta_2[(s+1)(s+2)\,t^s - 4\,(s+2)\,t^{s+1}]\,e^{-2\,t}$$

Συγκρίνοντας, τώρα, τον κυρίαρχο όρο της τελευταίας έκφρασης με τον όρο εξαναγκασμού της (9), καταλήγουμε στο ίδιο με πριν αποτέλεσμα: Η παράμετρος s και ο συντελεστής β_2 πρέπει να έχουν τις τιμές (13).

Αλλά, τότε, η έκφραση (10) για την υπό δοκιμή ειδική λύση γίνεται

(19) $$u_\varepsilon = (\beta_0\,t + \beta_1\,t^2 - \tfrac{1}{3}\,t^3)\,e^{-2\,t}$$

Ο υπολογισμός των παραγώγων αυτής της συνάρτησης είναι αρκετά απλούστερος από εκείνον που οδηγεί στην (11). Συγμεκριμένα,

(20) $$u_\varepsilon' = [\beta_0 + 2\,(\beta_1 - \beta_0)\,t - (1 + 2\,\beta_1)\,t^2 + \tfrac{2}{3}\,t^3]\,e^{-2\,t},$$

(21) $$u_\varepsilon'' = [2\,(\beta_1 - 2\,\beta_0) - 2\,(1 + 4\,\beta_1 - 2\,\beta_0)\,t + 4\,(1+\beta_1)\,t^2 + \tfrac{4}{3}\,t^3]\,e^{-2\,t}.$$

Συνακόλουθα,

(22) $$u_\varepsilon'' - 4\,u_\varepsilon = [2\,(\beta_1 - 2\,\beta_0) - 2\,(1 + 4\,\beta_1)\,t + 4\,t^2]\,e^{-2\,t}\,.$$

Η σύγκριση του δεξιού μέλους αυτής της εξίσωσης με τον όρο εξαναγκασμού της (9) οδηγεί αμέσως στο αποτέλεσμα (14) και, τέλος, στην έκφραση (15) για την ειδική λύση.

□

Παράδειγμα

Η αντίστοιχη ομογενής της ΔΕ

(23) $$u'' + 4\,u' + 5\,u = 16\,t\sin t$$

έχει σταθερούς συντελεστές. Με βάση τα αποτελέσματα του σχετικού εδάφιου, εύκολα βρίσκουμε ότι το ζευγάρι $\{e^{-2\,t}\cos t,\ e^{-2\,t}\sin t\}$ αποτελεί θεμελιώδες σύνολο λύσεων της ομογενούς. Αφού ο όρος εξαναγκασμού της (23) είναι γραμμικά ανεξάρτητος από τις συναρτήσεις $e^{-2\,t}\cos t$ και $e^{-2\,t}\sin t$, ως ειδική λύση της (23) δοκιμάζουμε την

(24) $$u_\varepsilon = (\beta_0 + \beta_1\,t)\cos t + (\gamma_0 + \gamma_1\,t)\sin t$$

Ένας απλός υπολογισμός δείχνει ότι

(25) $$u_\varepsilon' = (\beta_1 + \gamma_0 + \gamma_1\,t)\cos t - (\beta_0 - \gamma_1 + \beta_1\,t)\sin t,$$

(26) $$u_\varepsilon'' = -(\beta_0 - 2\,\gamma_1 + \beta_1\,t)\cos t - (2\,\beta_1 + \gamma_0 + \gamma_1\,t)\sin t$$

Συνεπώς,

(27) $$u_\varepsilon''' + 4\,u_\varepsilon' + 5\,u_\varepsilon = [4\,\beta_0 + 4\,\beta_1 + 4\,\gamma_0 + 2\,\gamma_1 + 4\,(\beta_1 + \gamma_1)\,t]\cos t$$
$$+[-4\,\beta_0 - 2\,\beta_1 + 4\,(\gamma_0 + \gamma_1) + 4\,(\gamma_1 - \beta_1)\,t]\sin t.$$

Για να συμφωνεί η τελευταία έκφραση με το όρο εξαναγκασμού της (23), θα πρέπει να ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

(28α) $$2\,\beta_0 + 2\,\beta_1 + 2\,\gamma_0 + \gamma_1 = 0, \quad \beta_1 + \gamma_1 = 0,$$

(28β) $$-2\,\beta_0 - \beta_1 + 2\,(\gamma_0 + \gamma_1) = 0, \quad \gamma_1 - \beta_1 = 4.$$

Αυτό το σύστημα λύνεται εύκολα για να δώσει

(29) $$\beta_0 = 2, \quad \beta_1 = -2\,, \quad \gamma_0 = -1, \quad \gamma_1 = 2.$$

΄Αρα, μια ειδική λύση της ΔΕ (23) αποτελεί η συνάρτηση

(30) $$u_\varepsilon = 2\,(1-t)\cos\,t - (1-2\,t)\sin t.$$

□

Ασκήσεις

1. Να βρεθεί μια ειδική λύση των παρακάτω ΔΕ με τη μέθοδο του προσδιορισμού των συντελεστών.

(i) $u'' - 4\,u = 8\,t(t-1)$,

(ii) $u'' - 4\,u = 1 - e^{-2\,t}$,

(iii) $u'' + 9\,u = 1 - \sin 3\,t$,

(iv) $u'' + 9\,u = 4\,(1-3\,t)^2 \sin t$,

(v) $u'' + 4\,u' - 5\,u = 1 - e^t$,

(vi) $u'' + 4\,u' + 3\,u = t^2 - e^{-t}$,

(vii) $u'' + 4\,u' + 8\,u = e^{-2\,t}(1 + \sin 2\,t)$

(viii) $u'' - 4\,u' + 8\,u = 1 - 3\,t + 2\sin 2\,t$,

(ix) $u'' - 4\,u' + 4\,u = 8\,(1-t^3) + 3\,e^t$,

(x) $u'' - 4\,u' + 4\,u = (1-t)\,e^{3\,t}$.

2. **Εξαναγκασμένες μηχανικές ταλαντώσεις**

Θεωρούμε ένα σώμα Σ που είναι προσδεμένο στην άκρη ενός ελατήριου. Υποθέτουμε ότι εκτός από τη δύναμη επαφοράς του ελατήριου και την αντίσταση του ρευστού (αέρα, νερού κλπ) μέσα στο οποίο κινείται, το Σ υφίσταται και μια δύναμη που περιγράφεται από τη συνάρτηση $f(t)$. Διατηρώντας την αναπαράσταση του Εδαφ. 4 για τη δύναμη που ασκεί το ελατήριο και την αντίσταση του ρευστού, καταλήγουμε στην ακόλουθη έκφραση του 2ου νόμου του Νεύτωνα:

(*) $$m\,u'' + r\,u' + k\,u = f(t)$$

α) Να βρεθεί η γενική λύση της μη ομογενούς ΔΕ (*), στην περίπτωση όπου $f(t) = \sin t$ και

$$m = 2\,\text{kg}, \quad r = 0,5\,N\cdot\text{sec}/m, \quad k = (65/32)\,N/m = 2,03125\,N/m.$$

β) Να λυθούν τα ακόλουθα ΠΑΤ:

(i) $u(0) = 10\,\text{cm}, \quad u'(0) = 0,$

(ii) $u(0) = 0, \qquad u'(0) = -10\,\text{cm}/\text{sec}.$

(iii) $u(0) = 10\,\text{cm}, \quad u'(0) = -10\,\text{cm}/\text{sec}.$

γ) Δείχτε ότι, μετά από ορισμένο χρονικό διάστημα, οι λύσεις των προηγούμενων ΠΑΤ καταλήγουν στις αντίστοιχες ειδικές λύσεις της ΔΕ (*).

δ) Με τη βοήθεια του *Mathematica*, να κατασκευαστούν οι γραφικές παραστάσεις των λύσεων του προηγούμενου μέρους για το χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq 40$ sec. Σχολιάστε το αποτέλεσμα με βάση το συμπέρασμα του μέρους (γ).

3. **Το φαινόμενο του συντονισμού**

Υποθέστε ότι η αντίσταση του ρευστού είναι αμελητέα, οπότε η ΔΕ (*) ανάγεται στην

$$m\,u'' + k\,u = f(t).$$

α) Να βρεθεί η γενική λύση της τελευταίας ΔΕ, όταν $m = 2$ kg , $k = 2\,N/m$ και

(i) $f(t) = \sin(4\,t/10)$, (ii) $f(t) = \sin(9\,t/10)$, (iii) $f(t) = \sin(99\,t/100)$.

β) Για κάθε μία από τις προηγούμενες εκφράσεις για την δύναμη εξαναγκασμού $f(t)$, να λυθούν τα ακόλουθα ΠΑΤ

(i) $u(0) = 10\,\text{cm}, \quad u'(0) = 0,$ (ii) $u(0) = 0, \quad u'(0) = -10\,\text{cm}/\text{sec}.$

γ) Με τη βοήθεια του *Mathematica*, να κατασκευαστούν τα γραφήματα των λύσεων που βρήκατε στο προηγούμενο μέρος για το χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq 140$ sec και να σχολιαστεί το αποτέλεσμα.

δ) Να βρεθεί η γενική λύση του ΠΑΤ

$$m\,u'' + k\,u = \alpha \sin(\omega\,t + \beta), \quad u(0) = A, \quad u'(0) = B,$$

όπου m, k, ω, α, β, A και B τυχαίοι πραγματικοί αριθμοί, από τους οποίους οι τρεις πρώτοι θετικοί. Να εξεταστεί ειδικότερα η περίπτωση όπου η γωνιακή συχνότητα ω διαφέρει ελάχιστα από τον αριθμό $\sqrt{k/m}$ και να συνδεθεί το αντίστοιχο αποτέλεσμα με τις γραφικές παραστάσεις του μέρους (γ).

4. **Εξαναγκασμένες ηλεκτρικές ταλαντώσεις**

Να λυθεί το ΠΑΤ

$$L\,I''(t) + R\,I'(t) + \frac{1}{C}\,I(t) = E'(t), \quad I(0) = a, \quad I'(0) = b$$

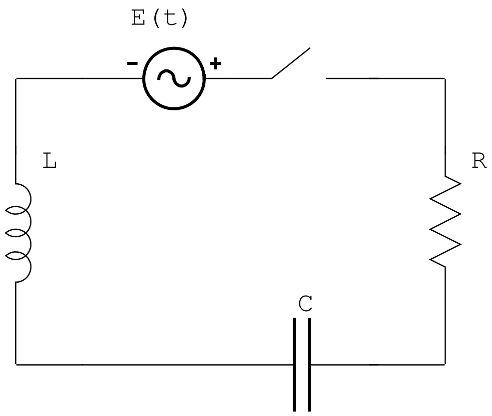
που αφορά το ηλεκτρικό κύκλωμα του επόμενου σχήματος, στις ακόλουθες περιπτώσεις:

(i) $L = 10\,m\,H, \quad R = 10\,\Omega, \quad C = 80\,\mu\,F, \quad E(t) = 100\sin(200\,t), \quad a = 0,1\,A, \quad b = 0,2\,A/\text{sec}.$

(ii) $L = 10\,m\,H, \quad R = 50\,\Omega, \quad C = 80\,\mu\,F, \quad E(t) = 100\sin(200\,t), \quad a = 0, \quad b = 0,2\,A/\text{sec}.$

(iii) $L = 2\,m\,H, \quad R = 5\,\Omega, \quad C = 8\,\mu\,F, \quad E(t) = 10\cos(60\,t), \quad a = 0,1\,A, \quad b = -0,1\,A/\text{sec}.$

Σε κάθε περίπτωση ξεχωριστά, να κατασκευστεί η γραφική παράσταση της λύσης, πρώτα για ένα χρονικό διάστημα της τάξης του 0, 01 secμετά το $t = 0$ και μετά για ένα πολύ μεγαλύτερο χρονικό διάστημα. Να συναχθεί το φυσικό συμπέρασμα στο οποίο οδηγεί η σύγκριση αυτών των δύο γραφικών παραστάσεων. Να προσδιοριστεί ο βαθμός στον οποίο αυτό το συμπέρασμα υποστηρίζεται από τις αντίστοιχες αναλυτικές λύσεις.



5. Θεωρήστε το ηλεκτρικό κύκλωμα της προηγούμενης άσκησης, αλλά χωρίς την αντίσταση. Περιγράψτε το φυσικό συμπέρασμα που προκύπτει από τις αναλυτικές λύσεις των ΠΑΤ της Ασκ. 4 και συγκρίνετε αυτό το συμπέρασμα με εκείνο της Ασκ. 3.

Βιβλιογραφία

Διαφορικός και ολοκληρωτικός λογισμός

Στα Ελληνικά:

1. Spivak, M. *Διαφορικός και ολοκληρωτικός λογισμός -Μια εισαγωγή στην ανάλυση*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 1991.
2. Thomas, B. G. & Finney, R. L., *Απειροστικός Λογισμός* (Τόμ. Α′, Β′), Πανεπιστημικές Εκδόσεις Κρήτης, 1995.
3. Παπαντωνίου, Β. Ι., Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών -Θεωρία και ασκήσεις (2η έκδ.) Γαρταγάνης, 1989.

Στα Αγγλικά:

1. Edwards, C. H. Jr, *Advanced calculus of several variables*, Dover, 1994.
2. Edwards, C. H. Jr & Penney, D. E., *Calculus and analytic geometry* (3rd ed.), Prentice-Hall, 1990.
3. Hildebrand, F. B. *Advanced calculus for applications* (2nd ed.), Prentice-Hall, 1976.
4. Kreyszig, E. J., *Advanced engineering mathematics* (8th ed.), John Wiley & Sons,1999
5. Lebedev, N. N., *Special functions and their applications*, Dover, 1972.
6. Shilov, G. E. *Elementary real and complex analysis*, Dover, 1996.
7. Widder, D. V. *Advanced calculus* (2nd ed.), Dover, 1989.

Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις

Στα Ελληνικά:

1. Δάσιος, Γ. , *Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις*,

Πανεπιστήμιο Πατρών, 1991.

2. Σιαφαρίκας, Π., *Εφαρμογές των Συνήθων Διαφορικών Εξισώσεων* (Τόμ. I, II),

Πάτρα, 2000.

3. Τραχανάς, Σ., *Διαφορικές Εξισώσεις* (4η έκδ.,Τόμ. 1ος),

Πανεπιστημικές Εκδόσεις Κρήτης, 1995.

Στα Αγγλικά:

1. Arnold, V. I. *Ordinary differential equations* (3rd ed),

Springer, 1992.

2. Birkhoff, G. & Rota, J. -C., *Ordinary differential equations* (4th ed),

John Wiley & Sons, 1989.

3. Boyce, W. E & DiPrima, R. C., *Elementary differential equations and boundary value problems* (7th ed),

John Wiley & Sons, 2001.

4. Coddington, E. A. & Levinson, E., *Theory of ordinary differential equations*,

McGraw-Hill, 1955.

5. Dreyer, T.P., *Modelling with ordinary differential equations*,

CRC Press, 1993.

6. Edwards, C. H. Jr. & Penney. D. E. *Elementary differential equations with boundary value problems* (3rd ed).,

Prentice-Hall, 1993.

7. Ince, E. L. *Ordinary differential equations*,

Dover, 1956.

Συμμετρίες διαφορικών εξισώσεων

Στα Ελληνικά:

1. Τσουμπελής, Δ., *Εισαγωγή στην έννοια της συμμετρίας των διαφορικών εξισώσεων*,

Διαλέξεις στο πλαίσιο του διεθνούς σεμινάριου *Συμμετρίες Διαφοριμών Εξισώσεων*,

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Πατρών, 10/4-15/5/2003, 100 σελ.

2. Τσουμπελής, Δ. *Ανώτερα μαθηματικά με Mathematica, Maple και άλλα συστήματα αλγεβικών υπολογισμών* (Τόμ. Β′, Κεφ. 14ο, σ. 613-687),

Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών, 2003.

Στα Αγγλικά:

1. Bluman, G.W. & Anco. C. A., *Symmetry and integration methods for differential equations*
   Springer , 2002.
2. Bluman, G.W. and Kumei, S., *Symmetries and differential equations*,
   Springer, 1989.
3. Hydon, P. E., *Symmetry methods for differential equations: A beginner' s guide*,
   Cambridge University Press, 2000.
4. Ibragimov, N. H., *Elementary Lie Group Analysis and Ordinary Differential Equations*,
   John Wiley & Sons, 1999.
5. Olver, P. J., *Applications of Lie groups to differential equations* (2nd ed.),
   Springer, 1993.
6. Stephani, H., *Differential equations: Their solutions using symmetries*,
   Cambridge University Press, 1989.

Συστήματα αυτόματων αλγεβρικών υπολογρισμών

Στα Ελληνικά:

1. Παπαδάκης, Κ. Ε., *Εισαγωγή στο Mathematica* (2η έκδ),
   Εκδόσεις Τζιόλα, 2002.
2. Τσουμπελής, Δ., *Ανώτερα μαθηματικά με Mathematica, Maple και άλλα συστήματα αλγεβικών υπολογισμών* (Τόμοι Α΄, Β΄),
   Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών, 2003.

Στα Αγγλικά:

1. Abell, M. L., *Differential Equations with Mathematica* (2nd ed.),
   Academic Press, 1997.
2. Barrow D., *Solving Differential Equations With Maple* VI,
   Brooks Cole, 1998.
3. Betounes, D., *Differential Equations - Theory and applications with Maple*,
   Springer-TELOS, 2001.
4. Coombes K. R., *Differential Equations with Mathematica* (2nd ed.),
   John Wiley & Sons, 1998.

5. Davis J. H., *Differential Equations with Maple: An Interactive Approach*, Birkhauser, 2000.
6. Gray, A., Mezzino, M. & Pinsky, M. A., *Introduction to Ordinary Differential Equations with Mathematica -An integrated multimedia approach*, TELOS, 1997.