Μεθοδολογία για τις

Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις

Από την Ενότητα του Ελληνικού Ανοικτού Πανεπιστημίου

Σπουδές στις Φυσικές Επιστήμες

Ανέπτυξα την παρακάτω μεθοδολογία που με βοήθησε να ανταπεξέλθω στο μάθημα των διαφορικών εξισώσεων ως φοιτητής στο ΕΑΠ . Δεν μπορώ να υποσχεθώ ότι δεν περιέχει λάθη. Τα παραδείγματα είναι από εργασίες που εκπόνησα στην διάρκεια της χρονιάς .Ελπίζω να σας φανεί χρήσιμο , εάν βρείτε λάθη παρακαλώ επικοινωνήστε μαζί μου να τα διορθώσω.

Γιώργος Νικολιδάκης

nikoligeo@gmail.com

Γενικά : *Η γενική λύση των διαφορικών είναι μια οικογένεια καμπυλών και πρέπει να περιέχει τόσες σταθερές όση και η τάξη της διαφορικής.*

Με τον όροθεμελιώδες σύνολο λύσεων εννοούμε, ότι οι λύσεις πρέπει να είναι λύσεις της διαφορικής και ταυτόχρονα να είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

ΠΑΤ (Πρόβλημα αρχικών τιμών)

Όταν πρέπει να βρεθεί μια συνάρτηση που να ικανοποιεί την διαφορική και δεδομένες συνθήκες οι οποίες αφορούν τις τιμές της άγνωστης συνάρτησης και των παραγώγων της σε ένα σημείο. Οι συνθήκες αυτές λέγονται αρχικές συνθήκες.

$y(0) = y'(0) = 1$

ΠΣΤ (Πρόβλημα Συνοριακών Τιμών)

Όταν οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται από τη ζητούμενη συνάρτηση δίνονται σε διαφορετικά σημεία το πρόβλημα λέγεται ***Πρόβλημα Συνοριακών Τιμών (Π.Σ.Τ.)*** *και οι συνθήκες λέγονται* ***Συνοριακές Συνθήκες****.*

$y(0) = y'(1) = 1$

Όταν η συνάρτηση είναι πεπλεγμένη πχ $xe^y + 2y = c$ *και μας δίνει συνθήκη* $y(1) = 1$ *αντικαθιστώ το για χ=1, y=1*

Και η γενική λύση είναι $xe^y + 2y = e + 2$

Χωριζόμενων Μεταβλητών

Έχει την μορφή

$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ *εάν η* $f(x,y)$ *μπορεί να γραφεί σαν δύο ξεχωριστές συναρτήσεις* $f(x,y) = f_1(x)f_2(x)$

τότε $\frac{dy}{dx} = f_1(x)f_2(x) \Rightarrow \frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$ *στην τελευταία έχουμε χωρίασει τις μεταβλητές*

Ολοκληρώνουμε και τα δύο μέλη της παραπάνω

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx$$

Μπορεί να γραφτεί και όπως παρακάτω

$$P(x)Q(y)dx + R(x)S(y)dy = 0 \Rightarrow P(x)Q(y)dx = -R(x)S(y)dy \Rightarrow \frac{P(x)}{R(x)}d(x) = -\frac{S(y)}{Q(y)}d(y)$$

είναι στην ουσία μια ακριβής ΣΔΕ και είναι του τύπου

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0$$

$P_y = Q_x = 0$, P_y, Q_x *είναι οι μερικές παράγωγοι*

Το χαρακτηριστικό είναι ότι οποιοσδήποτε παράγοντας εμφανίζεται στις εκφράσεις των $P(x), Q(y)$ *εξαρτάται μόνο από το x η μόνο από το y*

Αν θέλουμε μια λύση που περνά από το (x_0, y_0)

$$\int_{x_0}^{x} P(t)dx + \int_{y_0}^{y} Q(t)dx = 0$$

Παράδειγμα

Να λυθεί το Πρόβλημα αρχικών τιμών ΡΑΤ $xy' = 1 - y^2$, $y(1) = 0$, *όπου* $y = y(x), x \neq 0$

Λύση

Η Σ.Δ.Ε που μας δίνεται είναι μια διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών.

$$xy' = 1 - y^2 \Leftrightarrow x\frac{dy}{dx} = 1 - y^2 \Leftrightarrow xdy = dx(1 - y^2)$$

$$1 - y^2 \neq 0 \Rightarrow y \neq \pm 1 , x \neq 0$$

$$\frac{dy}{(1-y^2)} = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \frac{dy}{(1+y)(1-y)} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dy}{(1+y)(1-y)} = \int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\int \frac{dy}{(1+y)} + \int \frac{dy}{(1-y)}\right) = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{1}{2}ln|1+y| - \frac{1}{2}ln|1-y|$$
$$= ln|x| + c_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right| = \frac{1}{2}ln|x|^2 + c_1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}ln\left|\frac{1+y}{1-y}\right| - \frac{1}{2}ln|x|^2 = c_1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}ln\left|\frac{1+y}{x^2(1-y)}\right| = c_1$$

$$\Leftrightarrow ln\left|\frac{1+y}{x^2(1-y)}\right| = 2c_1 \Leftrightarrow e^{2c_1} = \left|\frac{1+y}{x^2(1-y)}\right| \Leftrightarrow \frac{1+y}{x^2(1-y)} = \pm e^{2c_1} \ (1)$$

Αντικαθιστούμε την $\pm e^{2c_1}$ με μια νέα σταθερά c

$$(1) \Rightarrow \frac{1+y}{x^2(1-y)} = c \Leftrightarrow 1+y = x^2(1-y)c \Leftrightarrow y + x^2yc = x^2c - 1 \Leftrightarrow y = \frac{x^2c-1}{x^2c+1} \ (2)$$

Η (2) είναι η γενική λύση της διαφορικής.

Εξετάζουμε τις αρχικές συνθήκες για να αποφανθούμε για την τιμή της σταθεράς c

$$(2) \xRightarrow{y(1)=0} 0 = \frac{c-1}{c+1} \Leftrightarrow c-1 = 0 \Leftrightarrow c = 1$$

Επομένως τελικά η ειδική λύση της διαφορικής είναι :

$$y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

Ελέγχουμε τις τιμές που έχουμε εξαιρέσει.

$$y = \frac{x^2-1}{x^2+1} \neq \pm 1 \ \text{ισχύει πάντα αφού μας δίνεται ότι } x \neq 0$$

Ομογενείς

$$y'(x) = f(x,y)$$

Όπου $f(x,y)$είναι ομογενείς μηδενικού βαθμού ως προς x και y

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y)$$

Η Διαφορική μορφή της ομογενούς

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

$\text{όπου } P(x,y), Q(x,y) \text{ είναι ομογενείς ως πρός τις μεταβλητές τους βαθμού } n$

Αν αντιμετωπίζουμε την διαφορική μορφή θέτουμε

$$u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = ux \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}x + \frac{dx}{dx}u \Rightarrow dy = dx\frac{du}{dx}x + dx\frac{dx}{dx}u \Rightarrow \boldsymbol{dy = xdu + udx}$$

Αν αντιμετωπίζουμε τη λυμένη μορφή θέτουμε

$$y(x) = xu(x) \Rightarrow y'(x) = x'u(x) + xu'(x) = u(x) + xu'(x)$$

Η αρχική μετατρέπεται σε χωριζόμενων μεταβλητών.

Αντικαθιστούμε προς τα πίσω.

παράδειγμα

Να λυθεί το πρόβλημα συνοριακών τιμών ΠΑΤ

$$xy' = y + \sqrt{x^2+y^2} \ , y(1) = 0 \ \text{ όπου } y = y(x), x > 0$$

Λύση

Η συνάρτηση που μας δίνεται γράφεται :

$$y' = \frac{y + \sqrt{x^2+y^2}}{x} \ (1)\ , x \neq 0$$

Έστω

$$f(x,y) = \frac{y + \sqrt{x^2+y^2}}{x}$$

Σχηματίζουμε τη συνάρτηση

$$f(tx,ty) = \frac{ty + \sqrt{t^2x^2 + t^2y^2}}{tx} = \frac{ty + t\sqrt{x^2+y^2}}{tx} = \frac{y + \sqrt{x^2+y^2}}{x} = t^0\, f(x,y)$$

Επομένως η συνάρτηση είναι ομογενής μηδενικού βαθμού ως προς x και y.

Θέτουμε $y(x) = xu(x) \Rightarrow y'(x) = u(x) + xu'(x)$ *(2)*

Αντικαθιστούμε στην (1)

$$y' = \frac{y + \sqrt{x^2+y^2}}{x} \Rightarrow u + xu' = \frac{xu + \sqrt{x^2 + x^2u^2}}{x} \Rightarrow u + xu' = \frac{xu + x\sqrt{1+u^2}}{x} \Rightarrow u + xu' = u + \sqrt{1+u^2} \Rightarrow$$

$$xu' = \sqrt{1+u^2} \Rightarrow xdu = \left(\sqrt{1+u^2}\right)\, dx\ (3)$$

Η (3) είναι διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών.

$$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{dx}{x}\ (4)$$

όπου υποθέσαμε ότι $\sqrt{1+u^2}\ \neq 0$ *το οποίο ισχύει δια κάθε u και* $x \neq 0$ *το οποίο μας δίνεται*

Θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}$

Χρησιμοποιούμε την αντικατάσταση

$$\sqrt{1+u^2} = \sqrt{1}(u-t) \Rightarrow 1 + u^2 = u^2 - 2ut + t^2 \Rightarrow u = \frac{t^2-1}{2t}$$

$$du = \frac{(t^2-1)'2t - (t^2-1)(2t)'}{(2t)^2}dt = \frac{4t^2 - 2t^2}{4t^2}dt = \frac{4t^2 - 2t^2 + 2}{4t^2}dt = \frac{t^2+1}{2t^2}dt$$

Αντικαθιστούμε στο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \int \frac{\frac{t^2+1}{2t^2}}{\frac{t^2-1}{2t} - t}dt = \int \frac{2t(t^2+1)}{-2t^2(t^2+1)}dt = \int -\frac{dt}{t} = -ln|t| + c_1$$

Με αντικατάσταση προς τα πίσω έχουμε $\sqrt{1+u^2} = \sqrt{1}(u-t)\ \Rightarrow t = u - \sqrt{1+u^2}$

$$\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = -ln|t| + c_1 = -ln\left|u - \sqrt{1+u^2}\right| + c_1$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω εργαζόμαστε στην (4)όπου ολοκληρώνουμε και τα δύο μέλη

$$\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow -ln\left|u - \sqrt{1+u^2}\right| + c_1 = ln|x|$$

Αντικαθιστούμε την

$$y(x) = xu(x) \Rightarrow u = \frac{y}{x}$$

$$-ln\left|\frac{y}{x} - \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}\right| + c_1 = ln|x| \Rightarrow -ln\left|\frac{\frac{y}{x} - \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}}{x}\right| = -c_1 \Rightarrow \frac{\frac{y}{x} - \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}}{x} = \pm e^{c_1} \;\; (5)$$

Αντικαθιστούμε την $\pm e^{c_1}$ με μια νέα σταθερά c

$$(5) \Rightarrow \frac{\frac{y}{x} - \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}}{x} = c \Rightarrow \frac{y}{x} - \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = cx \Leftrightarrow \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{y}{x} - cx \Rightarrow 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = \left(\frac{y}{x} - cx\right)^2 \Rightarrow$$

$$1 + \frac{y^2}{x^2} = \frac{y^2}{x^2} - 2cx\frac{y}{x} + cx^2 \Rightarrow 1 = -2cy + cx^2 \Rightarrow y = \frac{cx^2 - 1}{2c} \;\; (5)$$

Η (5) είναι η γενική λύση της διαφορικής.

Εξετάζουμε τις αρχικές συνθήκες για να αποφανθούμε για την τιμή της σταθεράς c

$$(5) \xRightarrow{y(1)=0} \frac{c-1}{2c} = 0 \Rightarrow c - 1 = 0 \Leftrightarrow c = 1 \;\text{όπου υποθέσαμε ότι}\; 2c \neq 0 \;\text{το οποίο ισχύει.}$$

Επομένως τελικά η ειδική λύση της διαφορικής είναι :

$$y = \frac{x^2 - 1}{2}$$

Ακριβείς ή τέλειου διαφορικού

$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ *(1)*

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

Φέρνουμε τη συνάρτηση στη διαφορική μορφή, ελέγχουμε αν ισχύει η παραπάνω εάν ισχύει υπολογίζουμε τη γενική λύση:

$$F(x,y) = \int_a^x P(t,y)dt + \int Q(a,y)dy = c \;\; (2)$$

Το α είναι αυθαίρετη σταθερά και μπορούμε να την αντικαταστήσουμε με ότι μας βολεύει στο τέλος αν περισεύει.

Για κάθε ΠΑΤ με $y(x_0) = y_0$ δίνει αμέσως την καμπύλη που διέρχεται από το σημείο

$$\int_{x_0}^x P(t,y)dt + \int_{y_0}^y Q(x_0,t)dt = c$$

$$\text{Ή αλλιώς} \quad \frac{\partial F}{\partial x} = P(x,y) \;, \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x,y)$$

$$F(x,y) = \int P(t,y)dt + \Phi(y) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left[\int P(t,y)dt\right] + \Phi(y) = Q(x,y)$$

Από την τελευταία υπολογίζουμε τη Φ(y)

Ολοκληρωτικός παράγοντας ή πολλαπλασιαστής Euler

$u(x,y)$	$r(u)$
x	$\dfrac{P_y - Q_x}{Q}$
y	$\dfrac{P_y - Q_x}{-P}$
$x+y$	$\dfrac{P_y - Q_x}{Q-P}$
xy	$\dfrac{P_y - Q_x}{yQ - xP}$
x^2+y^2	$\dfrac{P_y - Q_x}{2(xQ - yP)}$

Ο ολοκληρωτικός παράγοντας θα είναι

$\mu(x,y) = e^{\int r(u)du}$

Αφού υπολογίσουμε τον ολοκληρωτικό παράγοντα πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της (1) με τον παράγοντα και η εξίσωση γίνεται τέλειου διαφορικού οπότε η λύση της δίνεται από την (2)

Από την (2) μπορεί να προκύψει κάποια παράσταση του α f(α) οπότε αντικαθιστώ $c_1 = c + f(a)$

$Εάν\ με\ τον\ παράγοντα\ x^m y^n\ η\ εξίσωση\ γίνεται\ ακριβής\ τότε\ ο\ ολοκληρωτικός\ παράγοντας\ είναι$

$\mu(x,y) = x^m y^n$

Παράδειγμα

Να βρεθεί ο ολοκληρωτικός παράγοντας για καθεμιά από τις παρακάτω ΣΔΕ

$\alpha)\ xy^3dx + (x^2y^2 - 1)dy = 0\ , y > 0$

$\beta)\ (3xy - 2y^2)dx + (2x^2 - 3xy)dy = 0\ , x, y > 0$

γ) $(xe^{-y} + 1)dx + dy = 0\ όπου\ y = y(x)$

Λύση

(α) *Μας δίνεται η Σ.Δ.Ε*

$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = xy^3dx + (x^2y^2 - 1)dy = 0$

$P(x,y) = xy^3\ , Q(x,y) = x^2y^2 - 1$

$P_y = \dfrac{\partial P}{\partial y} = 3xy^2\ και\ Q_x = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2xy^2$

$P_y - Q_x = xy^2\ , \dfrac{P_y - Q_x}{-P} = -\dfrac{xy^2}{xy^3} = -\dfrac{1}{y}$

Επομένως η διαφορική εξίσωση δέχεται ένα ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής

$\mu(y) = e^{\int \frac{P_y - Q_x}{-P} dy} = e^{\int -\frac{1}{y} dy} = e^{-ln|y|} = e^{ln|y|^{-1}} = |y|^{-1}$

(β) *Μας δίνεται η Σ.Δ.Ε*

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = (3xy - 2y^2)dx + (2x^2 - 3xy)dy = 0$$

$$P(x,y) = 3xy - 2y^2 \,, Q(x,y) = 2x^2 - 3xy$$

$$P_y = \frac{\partial P}{\partial y} = 3x - 4y \;\; \kappa\alpha\iota \; Q_x = \frac{\partial Q}{\partial x} = 4x - 3y$$

$$P_y - Q_x = -x - y \,, \frac{P_y - Q_x}{yQ - xP} = \frac{-x - y}{2yx^2 - 3xy^2 - \; 3x^2y - 2xy^2} = \frac{-x - y}{xy(-x - y)} = \frac{1}{xy}$$

Επομένως η διαφορική εξίσωση δέχεται ένα ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής

$$\mu(xy) = e^{\int \frac{P_y - Q_x}{yQ - xP} dxy} = e^{\int \frac{1}{xy} dxy} = e^{ln\,|xy|} = |xy| = xy \;\; x, y > 0$$

(γ) *Μας δίνεται η Σ.Δ.Ε*

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = (xe^{-y} + 1)dx + dy = 0$$

$$P(x,y) = xe^{-y} + 1 \,, Q(x,y) = 1$$

$$P_y = \frac{\partial P}{\partial y} = -xe^{-y} \; \kappa\alpha\iota \; Q_x = \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

$$P_y - Q_x = -xe^{-y} \,, \frac{P_y - Q_x}{-P} = \frac{-xe^{-y}}{xe^{-y}} = -1$$

Επομένως η διαφορική εξίσωση δέχεται ένα ολοκληρωτικό παράγοντα της μορφής

$$\mu(y) = e^{\int \frac{P_y - Q_x}{-P} dy} = e^{\int -1 dy} = e^{-y}$$

<u>Γραμμικής πρώτης τάξης</u>

$$\frac{dy}{dx} = f_0(x) + yf_1(x)$$

Τη γράφουμε στη μορφή

$$y'(x) + f_1(x)y(x) = f_0(x)$$

Προσοχή να την γράψουμε στην παραπάνω τυπική μορφή πριν βρούμε τον ολοκληρωτικό παράγοντα.

δέχεται πολλαπλασιαστή που είναι ο ολοκληρωτικός παράγοντας

$$\mu(x) = e^{\int f_1(x)dx}$$

Πολλαπλασιάζουμε τη ΣΔΕ με $\mu(x)$

$$y'(x)e^{\int f_1(x)dx} + f_1(x)y(x)e^{\int f_1(x)dx} = f_0(x)e^{\int f_1(x)dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left[y(x)e^{\int f_1(x)dx}\right] = e^{\int f_1(x)dx} f_0(x) \;\Rightarrow y(x)e^{\int f_1(x)dx} = \int e^{\int f_1(x)dx} f_0(x) + c$$

$$y(x) = \left[c + \int f_0(x)e^{\int f_1(x)dx}dx\right]e^{-\int f_1(x)dx}$$

παράδειγμα

$$u'(x)-\frac{4}{x}u(x)=4x^3 \qquad (4)$$

Η (4) είναι γραμμική Σ.Δ.Ε πρώτης τάξης , υπολογίζουμε τον ολοκληρωτικό παράγοντα.

$$\mu(x)=e^{-\int\frac{4}{x}dx}=e^{-4\,ln|x|}=x^{-4}$$

Πολλαπλασιάζουμε την (4) με τον παράγοντα x^{-4} *που υπολογίσαμε παραπάνω*

$$x^{-4}u'-4x^{-5}u=4x^{-1}\Rightarrow\frac{d(x^{-4}u)}{dx}=4x^{-1}\Rightarrow\int\frac{d(x^{-4}u)}{dx}dx=\int 4x^{-1}dx \;\Rightarrow x^{-4}u=4\,ln|x|+c_1$$

$$\Rightarrow x^{-4}y^4=4\,ln|x|+c_1\Rightarrow x^{-4}y^4-4\,ln|x|=c$$

Η παραπάνω εξίσωση σε πεπλεγμένη μορφή αποτελεί λύση της διαφορικής εξίσωσης

Bernoulli

$$\frac{dy}{dx}+f(x)y=g(x)y^n\;,n\neq 0{,}1$$

$$y'+f(x)y=g(x)y^n\;,n\neq 0{,}1$$

Μπορούμε να την καταλάβουμε γιατί αν n=0 θα ήταν γραμμική πρώτου βαθμού.

Πολλαπλασιάζουμε με $\frac{1-n}{y^n}$

Εισάγουμε μια νέα μεταβλητή

$$u=y^{1-n}\Rightarrow u'=(1-n)y^{-n}\,y'$$

Αντικαθιστούμε και παίρνουμε μια γραμμική πρώτης τάξης

$$u'+(1-n)f(x)u=(1-n)g(x)$$

Παράδειγμα

ΝΑ λυθεί η συνήθης διαφορική εξίσωση $(x^4+y^4)dx-xy^3dy=0\;,y=y(x),x,y\neq 0$

Λύση

Η διαφορική εξίσωση γράφεται

$$(x^4+y^4)dx-xy^3dy=0\Rightarrow -xy^3\frac{dy}{dx}+y^4=-x^4\Rightarrow\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=x^3y^{-3}\;(1)$$

Που είναι μια διαφορική εξίσωση Bernoulli της μορφής

$$\frac{dy}{dx}+f(x)y=g(x)y^n$$

Όπου $f(x)=-\frac{1}{x}\;,g(x)=x^3\;και\;n=-3$

Πολλαπλασιάζουμε την (1) με τον όρο $4y^3$

$$4y^3y'-\frac{4y^4}{x}=4x^3\;(2)$$

Θέτουμε $u(x) = y^4 \Rightarrow u'(x) = 4y^3y'$ (3)

$$(2) \overset{(3)}{\Rightarrow} u'(x) - \frac{4}{x}u(x) = 4x^3 \ (4)$$

Η (4) είναι γραμμική Σ.Δ.Ε πρώτης τάξης , υπολογίζουμε τον ολοκληρωτικό παράγοντα.

$$\mu(x) = e^{-\int \frac{4}{x}dx} = e^{-4\,ln|x|} = x^{-4}$$

Πολλαπλασιάζουμε την (4)με τον παράγοντα x^{-4} *που υπολογίσαμε παραπάνω*

$$x^{-4}u' - 4x^{-5}u = 4x^{-1} \Rightarrow \frac{d(x^{-4}u)}{dx} = 4x^{-1} \Rightarrow \int \frac{d(x^{-4}u)}{dx}dx = \int 4x^{-1}dx \ \Rightarrow x^{-4}u = 4\,ln|x| + c_1$$

$$\Rightarrow x^{-4}y^4 = 4\,ln|x| + c_1 \Rightarrow x^{-4}y^4 - 4\,ln|x| = c \ \ (5)$$

Η παραπάνω εξίσωση (5) σε πεπλεγμένη μορφή αποτελεί λύση της διαφορικής εξίσωσης

Ricatti

$\frac{dy}{dx} + f(x)y = g(x)y^2 + h(x)$ (1) *μπορεί να είναι* $f(x) = 0$

$$y' + f(x)y = g(x)y^2 + h(x)$$

Όταν $h(x) = 0$ *έχουμε Bernoulli μπορεί ακόμη και να είναι* $f(x) = 0$

Την αναγνωρίζουμε από τον όρο y^2 *και από το ότι μας δίνεται και μια μερική λύση.*

Αν γνωρίζουμε μια ειδική λύση $y = y_1(x)$ *τότε μπορούμε να βρούμε και τη γενική λύση*

Λύση 1:

Εισάγουμε μια νέα μεταβλητή :

$$y = y_1(x) + \frac{1}{u} \ , y' = y_1'(x) - \frac{u'}{u^2}$$

Αντικαθιστούμε και η (1) γίνεται γραμμική πρώτης τάξης

Λύση 2:

$$\frac{dy_1}{dx} + f(x)y_1 = g(x){y_1}^2 + h(x) \ \ (2)$$

Αφαιρούμε (1)-(2) και θέτουμε $z = y - y_1$

$$\frac{dz}{dx} + f(x)z = g(x)(z + 2y_1)z$$

$$\frac{dz}{dx} + [f(x) - 2y_1g(x)]z = g(x)z^2$$

Η παραπάνω είναι Bernoulli

Παράδειγμα

Δίνεται η ΣΔΕ

$$y' + y^2 - \frac{2}{x^2} = 0 \ \ , y = y(x), x \neq 0$$

Να βρεθεί μια μερική λύση της μορφής $y(x) = k/x$ *και στην συνέχεια βρείτε τη γενική της λύση*

Λύση

Η διαφορική εξίσωση $y' + y^2 - \frac{2}{x^2} = 0\ (1)$ *που μας δίνεται γράφεται ως εξής*

$$y' = -y^2 + \frac{2}{x^2}$$

Που είναι μια διαφορική εξίσωση Ricatti της μορφής

$$\frac{dy}{dx} + f(x)y = g(x)y^2 + h(x)$$

Όπου: $f(x) = 0\ , g(x) = -1, h(x) = \frac{2}{x^2}$

Σύμφωνα με την εκφώνηση θα επιβεβαιώσουμε ότι δέχεται λύσεις της μορφής :

$$y(x) = \frac{k}{x}$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω έχουμε :

$$y'(x) = -\frac{k}{x^2}$$

Αντικαθιστούμε στην (1)

$$-\frac{k}{x^2} + \frac{k^2}{x^2} - \frac{2}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{k^2 - k - 2}{x^2} = 0 \Leftrightarrow k^2 - k - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k = -1 \end{cases}$$

Επομένως παρατηρούμε ότι λύσεις της μορφής $y(x) = \frac{k}{x}$ *επαληθεύουν την (1) και μάλιστα ότι υπάρχουν και δύο τιμές για το k οι οποίες την επαληθεύουν*

$$y_1(x) = -\frac{1}{x}, y_2(x) = \frac{2}{x},$$

$Επιλέγουμε\ να\ εγραστούμε\ με\ την\ \ y_1(x) = -\frac{1}{x}$

$Θέτουμε:\ z(x) = y(x) - y_1(x) \Rightarrow z(x) = y(x) + \frac{1}{x} \Leftrightarrow y(x) = z(x) - \frac{1}{x}\ (2)$

$Υπολογίζουμε\ την\ παράγωγο\ ως\ προς\ x\ \ της\ (2){:}\ y'(x) = z'(x) + \frac{1}{x^2}\ (3)$

Αντικαθιστούμε την (2), (3) στην (1) και έχουμε :

$$(1) \xRightarrow{(2),(3)} y' + y^2 - \frac{2}{x^2} = 0 \Leftrightarrow z' + \frac{1}{x^2} + \left(z - \frac{1}{x}\right)^2 - \frac{2}{x^2} = 0 \Leftrightarrow z' + \frac{1}{x^2} + z^2 - \frac{2z}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow z' - \frac{2}{x}z = -z^2\ (4)$$

Η (4) είναι μια διαφορική εξίσωση Bernoulli την οποία πολλαπλασιάζουμε με τον παράγοντα $-z^{-2}$

$$-z^{-2}z' + z^{-2}\frac{2}{x}z = (-z^2)(-z^{-2}) \Leftrightarrow -z^{-2}z' + z^{-1}\frac{2}{x} = 1\ (5)$$

$Θέτουμε:\ u = z^{-1} \Leftrightarrow u' = -z^{-2}z'$ *(6)*

και η (5) γίνεται :

$$-z^{-2}z' + z^{-1}\frac{2}{x} = 1 \Rightarrow u' + u\frac{2}{x} = 1 \ (7)$$

Η (7) είναι Σ.Δ.Ε γραμμική πρώτης τάξης που για να την επιλύσουμε υπολογίζουμε τον ολοκληρωτικό παράγοντα :

$$\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\,ln|x|} = x^2 \ (8)$$

Πολλαπλασιάζουμε την (7) με τον ολοκληρωτικό παράγοντα x^2

$$(7) \overset{(8)}{\Rightarrow} x^2u' + 2xu = x^2 \Leftrightarrow \frac{d(x^2u)}{dx} = x^2 \Leftrightarrow \int \frac{d(x^2u)}{dx}dx = \int x^2\,dx \Leftrightarrow x^2u = \frac{x^3}{3} + c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u = \frac{x}{3} + \frac{c}{x^2} \overset{(6)}{\Leftrightarrow} z^{-1} = \frac{x}{3} + \frac{c}{x^2} \Rightarrow z^{-1} = \frac{x^3}{3x^2} + \frac{3c}{3x^2} \Rightarrow \ z = \frac{3x^2}{x^3+3c} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} y = \frac{3x^2}{x^3+3c} - \frac{1}{x} \ (9)$$

Η (9) δίνει τη γενική λύση της (1)

Μεθοδολογία Επίλυσης διαφορικών (…μέχρι τώρα)

Γράφουμε τη ΣΔΕ στη μορφή

$$y' = f(x,y)$$

Με βάση τη μορφή αυτή ελέγχουμε αν είναι:

1. *Ομογενής αν* $f(tx,ty) = f(x,y)$
2. *Γραμμική αν έχει τη μορφή* $y'(x) + f_1(x)y(x) = f_0(x)$
3. *Bernouli αν έχει τη μορφή* $y' + f(x)y = g(x)y^n\ , n \neq 0{,}1$
4. *Ricatti αν έχει τη μορφή* $y' + f(x)y = g(x)y^2 + h(x)$

Ένα τίποτα από αυτά δεν συμβαίνει τότε τη γράφουμε στη μορφή:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

Και ελέγχουμε αν είναι

1. *Χωριζόμενων μεταβλητών αν* $P(x)dx + Q(y)dy = 0$
2. *Ακριβής ή τέλειου διαφορικού αν* $\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$

Ένα τίποτα από αυτά δεν συμβαίνει τότε αναζητούμε πολλαπλασιαστή Euler
$\mu(x,y) = e^{\int r(u)du}$

Εάν τίποτα από αυτά δεν ισχύει τότε δεν υπάγεται στις παραπάνω κατηγορίες και πρέπει να διαβάσουμε παρακάτω…

*Γραμμική ανεξαρτησία των λύσεων **ορίζουσα του Wronski***

Έστω ότι $y_1(x), y_2(x)$ *είναι δυο λύσεις της Δ.Ε.:* $y'' + A_1(x)y' + A_2(x)y = 0$

Η παραπάνω λύσεις γράφονται σαν γραμμικός συνδυασμός $y = c_1y_1 + c_2y_2$ *Αρκεί η ορίζουσα:*

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$$

Να μην μηδενίζεται πουθενά, (δεν έχει καμιά ρίζα), στο (κοινό) πεδίο ορισμού των y1(x),y1'(x), y2(x), y2'(x).

Το κριτήριο αυτό οφείλεται στον Πολωνό μαθηματικό G. Wronski,

*(Βρόνσκι 1778-1853). Η ορίζουσα W(x) ονομάζεται "**ορίζουσα του Wronski**"Η γραμμική ομογενής Σ.Δ.Ε. n-τάξης έχει πάντα n γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις. Αν $y_1(x), y_2(x) \dots y_n(x)$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της, τότε η γενική λύση της (1) είναι $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x)$ όπου $c_1, c_2, \dots, c_n$ είναι αυθαίρετες σταθερές. Το σύνολο των n γραμμικώς ανεξάρτητων λύσεων της (1) αποτελεί **βάση του διανυσματικού χώρου των λύσεων** της και λέγεται **Θεμελιώδες Σύνολο Λύσεων** της Σ.Δ.Ε. (1).*

Β βαθμού Ομογενείς με σταθερούς συντελεστές

$ay'' + by' + cy = 0$

Έχει λύση $y = e^{\rho x}$

$\alpha\rho^2\, e^{\rho x} + b\rho e^{\rho x} + ce^{\rho x} = (\alpha\rho^2 + b\rho + c)e^{\rho x} = 0$

Βρίσκουμε τις λύσεις ρ_1, ρ_2 της χαρακτηριστικής εξίσωσης

$y_1(\chi) = e^{\rho_1 x}, y_2(\chi) = e^{\rho_2 x}$

Γενική λύση όταν έχουμε δύο ρίζες ρ_1, ρ_2

$y = c_1e^{\rho_1 x} + c_2e^{\rho_2 x}$

Όταν έχουμε διπλή ρίζα $\rho_1 = \rho_2$ η μία λύση θα είναι

$y_1 = e^{\rho x}$

Η δεύτερη λύση της εξίσωσης θα είναι :

$y_1 = xe^{\rho x}$

Και η γενική λύση θα είναι:

$y = c_1e^{\rho x} + c_2xe^{\rho x}$

Αν έχει δυο μιγαδικές ρίζες, που είναι συζυγείς η μια της άλλης:

$a + ib\,, a - ib$

Στην περίπτωση αυτή, οι μιγαδικές συναρτήσεις:

$y_1 = e^{(a+ib)x}\,, y_2 = e^{(a-ib)x}$

είναι δυο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις.

Η γενική λύση θα είναι ο γραμμικός συνδυασμός των παραπάνω λύσεων

$y(x) = c_1y_1(x) + c_1^*y_2(x) = c_1e^{(a+bi)x} + c_1^*e^{(a-bi)x} = c_1e^{ax}e^{bix} + c_1^*e^{ax}e^{-bix}$

Όπου c_1 μιγαδικός αριθμός και c_1^* ο συζυγής του.

Τελικά (**) προκύπτει ότι μπορούμε να αντικαταστήσουμε τις μιγαδικές λύσεις

$y_1 = e^{(a+ib)x}\,, y_2 = e^{(a-ib)x}$

Με τις

$y_1 = e^{ax}\, cos(bx)\ \,, y_2 = e^{ax}sin(bx)$

Έτσι ώστε να προκύπτει τελικά η γενική λύση

$y = e^{ax}\big(c_1cos(bx) + c_2sin(bx)\big)$

Παράδειγμα

Να βρεθεί η γενική λύση των συνήθων διαφορικών εξισώσεων (Σ.Δ.Ε.):

$i)\ y''(x) + y'(x) = 0$

$ii)\ y''(x) - 2y'(x) + 5y(x) = 0$

Λύση

Οι Σ.Δ.Ε που μας δίνονται είναι ομογενείς διαφορικές εξισώσεις Β βαθμού με σταθερούς συντελεστές.

Η διαφορικές αυτές δέχονται λύσεις της μορφής

$y = e^{\rho x}$

Αντικαθιστώντας στην διαφορική την παραπάνω λύση βγάζουμε την χαρακτηριστική εξίσωση όπου ανάλογα με τις ρίζες της διαμορφώνεται και η γενική λύση

i) $y''(x) + y'(x) = 0$

Βρίσκουμε την χαρακτηριστική εξίσωση

$\rho^2 e^{\rho x} + \rho e^{\rho x} = (\rho^2 + \rho)e^{\rho x} = 0 \Rightarrow \rho(\rho + 1) = 0$

Ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης

$\rho_1 = 0$ *πολλαπλότητας 1*

$\rho_2 = -1$ *πολλαπλότητας 1*

Στην ρίζα $\rho_1 = 0$ *αντιστοιχεί η λύση* $y_1(x) = e^{0x}$

Στην ρίζα $\rho_2 = -1$ *αντιστοιχεί η λύση* $y_2(x) = e^{-x}$

Επομένως η γενική λύση θα είναι ο γραμμικός συνδυασμός των παραπάνω λύσεων

$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = c_1 + c_2 e^{-x}$

ii) $y''(x) - 2y'(x) + 5y(x) = 0$

Βρίσκουμε την χαρακτηριστική εξίσωση

$\rho^2 e^{\rho x} - 2\rho e^{\rho x} + 5e^{\rho x} = 0 \Rightarrow \rho^2 - 2\rho + 5 = 0$

Ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης

$\rho_1 = 1 + 2i$ *πολλαπλότητας 1*

$\rho_2 = 1 - 2i$ *πολλαπλότητας 1*

Επομένως έχουμε ένα ζευγάρι συζυγών μιγαδικών ριζών πολλαπλότητας 1, όπου αντιστοιχούν δύο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις

$y_1(x) = e^x \cos(2x), \qquad y_2(x) = e^x \sin(2x)$

Επομένως η γενική λύση θα είναι ο γραμμικός συνδυασμός των παραπάνω λύσεων

$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = c_1 e^x \cos(2x) + c_2 e^x \sin(2x)$

Ν βαθμού Ομογενείς με σταθερούς συντελεστές

$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + a_{n-2}y^{(n-2)})(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0$

Έχει λύσεις της μορφής $y = e^{\rho x}$

Χαρακτηριστική εξίσωση βαθμού n όσο και η διαφορική και συντελεστές a_{n-i} *από την διαφορική*

$\rho^n \ + a_{n-1}\rho^{n-1} + \cdots + a_1\rho + \alpha_0 = 0$

Βρίσκουμε τις ρίζες της παραπάνω

1. *Σε κάθε απλή πραγματική ρίζα ρ αντιστοιχεί λύση της μορφής:*

$y_\rho(x) = e^{\rho x}$

2. *Σε κάθε πραγματική ρίζα **ρ** πολλαπλότητας **s** αντιστοιχούν **s** γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της μορφής:*

$y_1(x) = e^{\rho x}, y_2(x) = xe^{\rho x}, y_3(x) = x^2 e^{\rho x}, \cdots, y_s(x) = x^{s-1}e^{\rho x}$

3. *Σε κάθε ζεύγος απλών συζυγών μιγαδικών ριζών έστω* $r + ui$, $r - ui$ *πολλαπλότητας 1 αντιστοιχούν 2 γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της μορφής:*

$y_1(x) = e^{rx}\cos(ux)\,, \qquad y_2(x) = e^{rx}\sin(ux)$

4. *Σε κάθε ζεύγος συζυγών μιγαδικών ριζών έστω* $r + ui$, $r - ui$ *πολλαπλότητας t αντιστοιχούν 2t γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της μορφής:*

$y_{11}(x) = e^{rx}\cos(ux)\,, y_{12}(x) = e^{rx}x\cos(ux)\,, y_{13}(x) = e^{rx}x^2\cos(ux)\,, \cdots, y_{1t}(x) = e^{rx}x^{t-1}\cos(ux)$

$y_{21}(x) = e^{rx}\sin(ux)\,, y_{22}(x) = e^{rx}x\sin(ux)\,, y_{23}(x) = e^{rx}x^2\sin(ux)\,, \cdots, y_{2t}(x) = e^{rx}x^{t-1}\sin(ux)$

Σημείωση: *όταν έχουμε μιγαδικές ρίζες ρ=* $r + ui$ $r, u \in \mathbb{R}$ *με βαθμό πολλαπλότητας t , τότε οι αντίστοιχες γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της διαφορικής θα είναι στην πραγματικότητα :*

$e^{(r+ui)x}, \qquad xe^{(r+ui)x}, x^2e^{(r+ui)x}, \ldots, x^{t-1}e^{(r+ui)x}$

Οι οποίες δεν είναι πλέον πραγματικές συναρτήσεις. Εν τούτοις, με τη βοήθεια του γνωστού τύπου του Euler

$e^{ibx} = \cos(bx) + i\sin(bx)\,, e^{-bx} = \cos(bx) - i\sin(bx)$

μπορούμε να αντικαταστήσουμε τις t μιγαδικές λύσεις με τις 2t πραγματικές λύσεις

$e^{rx}\cos(ux)\,, e^{rx}x\cos(ux)\,, e^{rx}x^2\cos(ux)\,, \cdots, e^{rx}x^{t-1}\cos(ux)$

$e^{rx}\sin(ux)\,, e^{rx}x\sin(ux)\,, e^{rx}x^2\sin(ux)\,, \cdots, e^{rx}x^{t-1}\sin(ux)$

Οι μιγαδικές ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου εμφανίζονται σε ζεύγη $r + ui$, $r - ui$ *συζυγών μιγαδικών, έτσι, εύκολα προκύπτει ότι το σύνολο των 2t πραγματικών λύσεων αντιστοιχεί και στις δύο συζυγείς μιγαδικές ρίζες.*

Γενική λύση θα είναι ο γραμμικός συνδυασμός των λύσεων ανάλογα με τις ρίζες της χαρακτηριστικής

Παράδειγμα

Να βρεθεί η γενική λύση των συνήθων διαφορικών εξισώσεων (Σ.Δ.Ε.):

$i)\ y'''(x) + 3y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 0$

$ii)\ y^{(4)}(x) - \ 2y'''(x) + y''(x) = 0$

Λύση

i) $y'''(x) + 3y''(x) + 2y'(x) + y(x) = 0$

Βρίσκουμε την χαρακτηριστική εξίσωση

$\rho^3 + 3\rho^2 + 3\rho + 1 = (\rho + 1)^3 = 0$

Ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης

$\rho_1 = -1$ *πολλαπλότητας 3*

Στην παραπάνω λύση αντιστοιχούν τρείς γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις

$y_1(x) = e^{-x}$, $\quad y_2(x) = xe^{-x}$, $\quad y_3(x) = x^2e^{-x}$

Επομένως η γενική λύση θα είναι ο γραμμικός συνδυασμός των παραπάνω λύσεων

$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + c_3y_3(x) = c_1e^{-x} + c_2xe^{-x} + c_3x^2e^{-x}$

ii) $y^{(4)}(x) - 2y'''(x) + y''(x) = 0$

Βρίσκουμε την χαρακτηριστική εξίσωση

$\rho^4 - 2\rho^3 + \rho^2 = \rho^2(\rho^2 - 2\rho + 1) = 0$

Ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης

$\rho_{1,2} = 0$ *πολλαπλότητας 2*

$\rho_{3,4} = 1$ *πολλαπλότητας 2*

Στην παραπάνω λύση αντιστοιχούν τέσσερις γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις

Στην ρίζα $\rho_{1,2} = 0$ *αντιστοιχούν οι λύσεις* $y_1(x) = e^{0x}, y_2(x) = xe^{0x}$

Στην ρίζα $\rho_{3,4} = 1$ *αντιστοιχούν οι λύσεις* $y_3(x) = e^x, y_4(x) = xe^x$

Επομένως η γενική λύση θα είναι ο γραμμικός συνδυασμός των παραπάνω λύσεων

$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + c_3y_3(x) + c_3y_3(x) + c_4y_4(x) = c_1 + c_2x + c_3e^x + c_4xe^x$

Ν βαθμού Μη Ομογενείς με σταθερούς συντελεστές

$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + a_{n-2}y^{(n-2)}(x) + \cdots + a_1y'(x) + a_0y(x) = f(x)$ (1)

Η γενική λύση της μη ομογενούς ισούται με την γενική λύση της ομογενούς $y_{o\mu}$ *συν μια οποιαδήποτε μερική λύση της πλήρους εξίσωσης* y_μ

$y(x) = y_{o\mu} + y_\mu$

Για να βρούμε την λύση της μη ομογενούς

1ος Τρόπος : Μέθοδος προσδιοριστέων συντελεστών

2ος Τρόπος: Μέθοδος μεταβολής των παραμέτρων Lagrance

1ος Τρόπος : Μέθοδος προσδιοριστέων συντελεστών

Εφαρμόζεται μόνο όταν ο μη ομογενής όρος $f(x)$ *έχει τη μορφή*

$f(x) = e^{ax}[P_m(x)\,cos(bx) + Q_s sin(bx)]$

Συνήθως όταν είναι πολυώνυμο , e^x*,ημίτονο, συνημίτονο*

Όπου a,b πραγματικού και $P_m(x), Q_s(x)$ πολυώνυμα βαθμού m ,s αντίστοιχα

Μία λύση της (1) έχει τη μορφή:

$$y_\mu(x) = x^\pi e^{ax}[R_n(x)\cos(bx) + \Pi_n sin(bx)]$$

π *είναι η πολλαπλότητα με την οποία ο αριθμός $a + ib$ εμφανίζεται ως ρίζα της χαρακτηριστικής εξίσωσης της ομογενούς*

$$\rho^n + a_{n-1}\rho^{n-1} + \cdots + a_1\rho + \alpha_0 = 0$$

Και τα πολυώνυμα :

$$R_n(x) = r_n x^n + r_{n-1}x^{n-1} + \cdots + r_1 x^1 + r_0$$

$$\Pi_n(x) = \pi_n x^n + \pi_{n-1}x^{n-1} + \cdots + \pi_1 x^1 + \pi_0$$

Είναι πολυώνυμα του x βαθμού $n = max\{m, s\}$

Τα $r_n, r_{n-1}, \dots, r_1, r_0$ και $\pi_n, \pi_{n-1}, \dots, \pi_1, \pi_0$ είναι απροσδιόριστοι συντελεστές που πρέπει να ***προσδιοριστούν*** αντικαθιστώντας την $y_\mu(x)$ *στην (1)*

Μεθοδολογία:

Βρίσκουμε την λύση της ομογενούς

Θέτουμε το $f(x)$ στη μορφή:

$$f(x) = e^{ax}[P_m(x)\cos(bx) + Q_s(x)sin(bx)]$$

Σημειώνουμε τους συντελεστές a,b,m,s

Σχηματίζουμε το μιγαδικό $a + ib$ και βλέπουμε πόσες φορές εμφανίζεται σαν λύση στη χαρακτηριστική εξίσωση

(μπορεί να εμφανίζεται 0 φορές)

Ο μιγαδικός θέλει προσοχή και δίνω παράδειγμα :

Έστω a=0 , b=0 τότε $a + ib = 0$ και για να προσδιορίσουμε το π ψάχνουμε πόσες φορές το 0 παρουσιάζεται σαν ρίζα στις ρίζες της ομογενούς.

Έστω a=2 , b=0 τότε $a + ib = 2$ και για να προσδιορίσουμε το π ψάχνουμε πόσες φορές το 2 παρουσιάζεται σαν ρίζα στις ρίζες της ομογενούς.

Έστω a=0 , b=1 τότε $a + ib = i$ και για να προσδιορίσουμε το π ψάχνουμε πόσες φορές το i παρουσιάζεται σαν ρίζα στις ρίζες της ομογενούς.

Από τα δεδομένα a,b,m,s σχηματίζουμε τη λύση

$$y_\mu(x) = x^\pi e^{ax}[R_n(x)\cos(bx) + \Pi_\nu(x)sin(bx)]$$

Όπου τα πολυώνυμα έχουν απροσδιόριστους συντελεστές πχ αν βρούμε ότι m=2 και s=1

$$R_2(x) = r_2x^2 + r_1x + r_0$$

$$\Pi_1(x) = \pi_1 x + \pi_0$$

Προσοχή εάν βρούμε πχ $P_m(x) = 0$, $Q_s(x) = 1$ τότε και το m και το s είναι βαθμού 0 και άρα $R_0(x) = r_0$, $\Pi_0(x) = \pi_0$

Βρίσκουμε την $y_\mu(x)'$, $y_\mu(x)''$,… $y_\mu(x)^{(n)}$

Προσοχή αντικαθιστούμε στην (1) την λύση της μη ομογενούς όχι τη γενική λύση

Αντικαθιστούμε στην (1)και απαιτούμε η συνάρτηση που θα πάρουμε να ικανοποιείται ταυτοτικά , αυτό σημαίνει ότι πρέπει οι συντελεστές ομοβάθμιων όρων ή των ίδιων τριγωνομετρικών όρων να είναι ίσοι.

Από τις σχέσεις ισότητας προκύπτει ένα σύστημα από τη λύση του οποίου προσδιορίζουμε τους συντελεστές r_n, π_n

Η γενική λύση θα είναι:

$y(x) = y_{o\mu} + y_\mu$

Προσοχή ενώ στη λύση της ομογενούς $y_{o\mu}$ *υπάρχουν οι γνωστές αυθαίρετες σταθερές* $c_1, c_2, .. c_n$ *στη λύση της μη ομογενούς* y_μ *δεν βάζουμε αυθαίρετες σταθερές.*

Επίσης προσοχή εάν βρούμε πχ ότι $e^{ax}[0\, cos(bx) + 1 sin(bx)]$ *το πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού και επομένως*

Η λύση θα είναι $x^\pi e^{ax}[R_n(x)\, cos(bx) + \Pi_\nu(x) sin(bx)] = x^\pi e^{ax}[A\, cos(bx) + B sin(bx)]$ *δηλαδή το μηδέν πριν το cos έγινε μεταβλητή A αφού και τα* $R_n(x)$ *και* $\Pi_\nu(x)$ *γίνονται τελικά ίσου βαθμού!!*

Εάν δεν μπορούμε να γράψουμε τον μη ομογενή όρο στην μορφή

$f(x) = e^{ax}[P_m(x)\, cos(bx) + Q_s sin(bx)]$

Πχ $f(x) = x - e^{ax}$

Τότε ισχύει η παρακάτω ιδιότητα :

*Ιδιότητα των γραμμικών μη ομογενών εξισώσεων όταν **ο μη ομογενής όρος** μπορεί να γραφεί σαν **άθροισμα** Μ προσθετέων.*

$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + a_{n-2}y^{(n-2)})(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)$

*Μια μερική λύση της παραπάνω μη ομογενούς είναι (προσοχή **δεν** είναι η γενική λύση)*

$y_{\mu 1}(\chi) + y_{\mu 2}(\chi) + \cdots + y_{\mu n}(\chi)$

$y_{\mu 1}(\chi)$ *είναι μιά λύση της εξίσωσης*

$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + a_{n-2}y^{(n-2)})(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f_1(x)$

$y_{\mu 2}(\chi)$ *είναι μιά λύση της εξίσωσης*

$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + a_{n-2}y^{(n-2)})(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f_2(x)$

$y_{\mu n}(\chi)$ *είναι μιά λύση της εξίσωσης*

$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + a_{n-2}y^{(n-2)})(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f_n(x)$

Στην παραπάνω περίπτωση σπάμε την εξίσωση σε δύο ή περισσότερες και βρίσκουμε μια μερική λύση σαν να ήταν ξεχωριστές εξισώσεις και στη συνέχεια προσθέτουμε τις μερικές λύσεις και τους ακόμη απροσδιόριστους συντελεστές και προσδιορίζουμε τους συντελεστές σαν μια ενιαία εξίσωση.

Παράδειγμα

Δίνεται η Σ.Δ.Ε.:

$y'''(x) + y''(x) - 2y'(x) = x - e^x \qquad (1)$

με τις συνθήκες:

$y(0) = 0\,, y'(0) = 1, y''(0) = 2 \qquad (2)$

i) Τι είδους πρόβλημα είναι το (1) – (2), αρχικών ή συνοριακών τιμών και γιατί;

ii) Να βρεθεί η λύση του (1) – (2) αποκλειστικά με χρήση της μεθόδου των προσδιοριστέων συντελεστών για την εύρεση μιας λύσης της (1).

Λύση

i) *Το πρόβλημα που μας δίνεται είναι πρόβλημα αρχικών τιμών γιατί οι συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται από την διαφορική αναφέρονται στο ίδιο σημείο x=0.*

ii) $y'''(x) + y''(x) - 2y'(x) = x - e^x$ *(1)*

Η Σ.Δ.Ε που μας δίνονται είναι μη ομογενής διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές.

Θα βρούμε πρώτα μια λύση της ομογενούς

Θα αναζητήσουμε μια λύση της μορφής $y = e^{\rho x}$

Αντικαθιστώντας στην διαφορική την παραπάνω λύση βγάζουμε την χαρακτηριστική εξίσωση

$\rho^3 e^{\rho x} + \rho^2\, e^{\rho x} - 2\rho\, e^{\rho x} = (\rho^3 + \rho^2 - 2\rho)e^{\rho x} = 0 \Rightarrow \rho(\rho^2 + \rho - 2) = 0$

Ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης

$\rho_1 = 0$ *πολλαπλότητας 1*

$\rho_2 = -2$ *πολλαπλότητας 1*

$\rho_3 = 1$ *πολλαπλότητας 1*

Στην ρίζα $\rho_1 = 0$ *αντιστοιχεί η λύση* $y_1(x) = e^{0x}$

Στην ρίζα $\rho_2 = -2$ *αντιστοιχεί η λύση* $y_2(x) = e^{-2x}$

Στην ρίζα $\rho_3 = 1$ *αντιστοιχεί η λύση* $y_3(x) = e^x$

Επομένως η γενική λύση της ομογενούς θα είναι ο γραμμικός συνδυασμός των παραπάνω λύσεων

$y_{o\mu}(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + c_3 y_3(x) = c_1 + c_2 e^{-2x} + c_3 e^x$

Προχωρούμε στον εντοπισμό μια μερικής λύσης της μη ομογενούς

Η μη ομογενής όρος είναι

$f(x) = x - e^x$

Ο όρος αυτός δεν μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$f(x) = e^x[(1+1)\,cos(0x) + 0sin(0x)]$

Μπορεί όμως να γραφεί σαν άθροισμα δύο προσθετέων $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$

Όπου $f_1(x) = x$, $f_2(x) = -e^x$

Η γενική λύση της μη ομογενούς ισούται με την γενική λύση της ομογενούς $y_{o\mu}$ *συν μια οποιαδήποτε μερική λύση της πλήρους εξίσωσης* y_μ

$y(x) = y_{o\mu} + y_\mu$

Θα αναζητήσουμε μια μερική λύση για την μη ομογενή χρησιμοποιώντας την μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών, κατά την οποία ο μη ομογενής όρος θα πρέπει να μπορεί να γραφεί στη μορφή.

$f(x) = e^{ax}[P_m(x)\cos(bx) + Q_s \sin(bx)]$

Η ***πρώτη*** *μη ομογενής εξίσωση είναι*

$y'''(x) + y''(x) - 2y'(x) = x$

Ο μη ομογενής όρος x μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$x = e^{0x}[x\cos(0x) + 0\sin(0x)]$

Όπου παρατηρούμε ότι $a = 0, b = 0$

$P_2 \equiv x$ *πολυώνυμο βαθμού m=1*

$Q_0 \equiv 0$ *πολυώνυμο βαθμού s =0*

Σύμφωνα με τα παραπάνω η διαφορική εξίσωση δέχεται λύσεις της μορφής:

$y_{\mu 1}(x) = x^\pi e^{ax}[R_n(x)\cos(bx) + \Pi_n \sin(bx)]$

Η ρίζα $a + bi = 0$ *εμφανίζεται με βαθμό πολλαπλότητας 1 στην ομογενή επομένως π=1 και* $n = max\{1,0\} = 1$

επομένως η μορφή μιας λύσης της μη ομογενούς θα είναι :

$y_{\mu 1} = xe^{0x}[(Ax + B)\cos(0x) + (\Gamma x + \Delta)\sin(0x)] = x(Ax + B) = Ax^2 + Bx$

Η ***Δεύτερη*** *μη ομογενής εξίσωση είναι*

$y'''(x) + y''(x) - 2y'(x) = -e^x$

Ο μη ομογενής όρος e^x *μπορεί να γραφεί στη μορφή:*

$e^x = e^x[-1\cos(0x) + 0\sin(0x)]$

Όπου παρατηρούμε ότι $a = 1, b = 0$

$P_2 \equiv -1$ *πολυώνυμο βαθμού m=0*

$Q_0 \equiv 0$ *πολυώνυμο βαθμού s =0*

Σύμφωνα με τα παραπάνω η διαφορική εξίσωση δέχεται λύσεις της μορφής:

$y_{\mu 2}(x) = x^\pi e^{ax}[R_n(x)\cos(bx) + \Pi_n \sin(bx)]$

Η ρίζα $a + bi = 1$ *εμφανίζεται με βαθμό πολλαπλότητας 1 στην ομογενή επομένως π=1 και* $n = max\{0,0\} = 0$

επομένως η μορφή μιας λύσης της μη ομογενούς θα είναι :

$y_{\mu 2} = xe^x[\Gamma\cos(0x) + \Delta\sin(0x)] = \Gamma xe^x$

Η τελική μορφή μιας λύσης της μη ομογενούς πριν τον προσδιορισμό των συντελεστών θα διαμορφωθεί με την πρόσθεση των μερικών λύσεων.

$y_\mu = y_{\mu 1} + y_{\mu 2} = Ax^2 + Bx + \Gamma x e^x$*(2)*

Θα προσδιορίσουμε τους συντελεστές Α,Β,Γ αντικαθιστώντας τις παραγώγους της y_μ *στην διαφορική εξίσωση*

$y'''(x) + y''(x) - 2y'(x) = x - e^x$

$y'_\mu = 2Ax + B + \Gamma e^x + \Gamma x e^x$

$y''_\mu = 2A + 2\Gamma e^x + \Gamma x e^x$

$y'''_\mu = 3\Gamma e^x + \Gamma x e^x$

$3\Gamma e^x + \Gamma x e^x + 2A + 2\Gamma e^x + \Gamma x e^x - 2(2Ax + B + \Gamma e^x + \Gamma x e^x) = x - e^x \Rightarrow$

$5\Gamma e^x + 2\Gamma x e^x + 2A - 4Ax - 2B - 2\Gamma e^x - 2\Gamma x e^x = x - e^x \Rightarrow$

$3\Gamma e^x - 4Ax - 2B + 2A = x - e^x$

Απαιτούμε από την παραπάνω εξίσωση να ισχύει ταυτοτικά και εξισώνουμε τους ομοιοβάθμιους όρους

$$\left.\begin{array}{r} 3\Gamma = -1 \\ -4A = 1 \\ -2B + 2A = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \Gamma = -1/3 \\ A = -1/4 \\ B = -1/4 \end{cases}$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω αντικαθιστούμε τους συντελεστές που προσδιορίσαμε στην (2) και μια μερική λύση της μη ομογενούς διαφορικής είναι

$$y_\mu(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{3}xe^x$$

Και κατά συνέπεια η γενική λύση της διαφορικής βρίσκεται προσθέτοντας τις γενικές λύσεις της ομογενούς και την μερική λύση της μη ομογενούς

$$y(x) = y_{o\mu}(x) + y_\mu(x) = c_1 + c_2 e^{-2x} + c_3 e^x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{1}{3}xe^x$$

Στην συνέχεια θα υπολογίσουμε τις σταθερές c_1, c_2, c_3 *από τις αρχικές συνθήκες*

Υπολογίζουμε πρώτα τις παραγώγους της $y(x)$

$$y'(x) = -2c_2 e^{-2x} + c_3 e^x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} - \frac{1}{3}(e^x + xe^x)$$

$$y''(x) = 4c_2 e^{-2x} + c_3 e^x - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}(2e^x + 2xe^x)$$

Εφαρμόζουμε τις αρχικές συνθήκες

$y(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 + c_3 = 0$ (1)

$$y'(0) = 1 \Rightarrow -2c_2 + c_3 - \frac{7}{12} = 1 \ (2)$$

$$y''(0) = 2 \Rightarrow 4c_2 + c_3 - \frac{7}{6} = 2 \ (3)$$

Από το σύστημα των (1),(2),(3) έχουμε

$$\left.\begin{aligned} c_1+c_2+c_3&=0\\ -2c_2+c_3-\frac{7}{12}&=1\\ 4c_2+c_3-\frac{7}{6}&=2 \end{aligned}\right\}\Rightarrow \left.\begin{aligned} c_1+c_2+c_3&=0\\ c_3&=2c_2+\frac{19}{12}\\ 4c_2+2c_2+\frac{19}{12}&=\frac{19}{6} \end{aligned}\right\}\Rightarrow \left.\begin{aligned} c_1+c_2+c_3&=0\\ c_3&=2c_2+\frac{19}{12}\\ c_2&=\frac{19}{72} \end{aligned}\right\}\Rightarrow \left.\begin{aligned} c_1+c_2+c_3&=0\\ c_3&=\frac{19}{9}\\ c_2&=\frac{19}{72} \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1=-\dfrac{19}{8}\\ c_3=\dfrac{19}{9}\\ c_2=\dfrac{19}{72} \end{cases}$$

Επομένως τελικά η λύση του ΠΑΤ είναι

$$y(x)=-\frac{19}{8}+\frac{19}{72}\,e^{-2x}+\frac{19}{9}e^{x}-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{4}x-\frac{1}{3}xe^{x}$$

2ος Τρόπος: Μέθοδος μεταβολής των παραμέτρων ή μέθοδος του Lagrange

Είναι γενική μέθοδος και εφαρμόζεται για οποιαδήποτε γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές ή με συντελεστές συναρτήσεις του x και ανεξάρτητα από τη μορφή της f(x)

Εφαρμόζεται επίσης όταν για παράδειγμα δεν μπορεί να γραφεί ο μη ομογενής όρος στην μορφή για να εφαρμόσουμε την προηγούμενη μέθοδο των προσδιοριστούν συντελεστών πχ αν υπάρχει ό όρος στη μη ομογενή x^{-1} το οποίο δεν είναι πολυώνυμο του x αλά ρητή συνάρτηση του x.

Εάν οι συντελεστές δεν είναι σταθεροί εμείς γνωρίζουμε να λύνουμε συναρτήσεις του Euler και συναρτήσεις με ελάττωση της τάξης, σε κάθε περίπτωση η Lagrange ξεκινά όταν έχουμε την γενική λύση της ομογενούς.

$$y^{(n)}(x)+a_{n-1}y^{(n-1)}(x)+a_{n-2}y^{(n-2)}(x)+\cdots+a_1y'(x)+a_0y(x)=f(x)\ \ (1)$$

Η γενική λύση της ομογενούς θα είναι:

$$y_{o\mu}(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+..c_ny_n(x)$$

Αναζητούμε μια λύση της μη ομογενούς

$$y_{\mu}(x)=c_1(x)y_1(x)+c_2(x)y_2(x)+..c_n(x)y_n(x)$$

*Δηλαδή οι σταθερές c_1, c_2 …. της ομογενούς **μεταβλήθηκαν** σε συναρτήσεις $c_1(\chi), c_2(\chi)\ldots\ldots c_n(x)$ στη λύση της μη ομογενούς και προσδιορίζονται από την επίλυση του συστήματος:*

$$c_1'(x)y_1(x)+c_2'(x)y_2(x)+..c_n'(x)y_n(x)=0$$

$$c_1'(x)y_1'(x)+c_2'(x)y_2'(x)+..c_n'(x)y_n'(x)=0$$

$$c_1'(x)y_1''(x)+c_2'(x)y_2''(x)+..c_n'(x)y_n''(x)=0$$

……………………………………………………..

$$c_1'(x)y_1^{(n-2)}(x)+c_2'(x)y_2^{(n-2)}(x)+..c_n'(x)y_n^{(n-2)}(x)=0$$

$$c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x)+c_2'(x)y_2^{(n-1)}(x)+..c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x)=f(x)$$

Είναι ένα $n\,x\,n$ σύστημα με άγνωστες τις παραγώγους $c_1'(x), c_2'(x),..,c_n'(x)$

Παρατηρούμε ότι η πρώτη εξίσωση του συστήματος είναι ο γραμμικός συνδυασμός των λύσεων

$y_1(x), y_2(x), \dots y_n(x)$ *με συντελεστές τις παραγώγους των αγνώστων συναρτήσεων* $c_1'(x), c_2'(x), \dots, c_n'(x)$

Η δεύτερη εξίσωση του συστήματος είναι ο γραμμικός συνδυασμός των πρώτων παραγώγων των λύσεων των

$y_1'(x), y_2'(x), \dots, y_n'(x)$ *με συντελεστές πάλι τις παραγώγους των αγνώστων συναρτήσεων* $c_1'(x), c_2'(x), \dots, c_n'(x)$

Κοκ

Προσοχή για να γράψω την τελευταία εξίσωση που στο δεύτερο μέρος εμφανίζεται και η μη ομογενής πρέπει να φέρω την διαφορική στην τυπική μορφή που σημαίνει ότι φέρνω το συντελεστής του $y^{(n)}(x)$ *να είναι μονάδα*

Το παραπάνω σύστημα έχει πάντοτε μοναδική λύση γιατί η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων είναι η ορίζουσα Wronski των συναρτήσεων $y_1(x), y_2(x), \dots y_n(x)$ *και φυσικά είναι διάφορη του μηδενός δεδομένου ότι οι συναρτήσεις είναι n γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς εξίσωσης.*

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & \cdots & y_n''(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = W[y_1(x), y_2(x), \dots y_n(x)] \neq 0$$

Μετά την επίλυση του συστήματος προκύπτουν οι συναρτήσεις

$c_1'(x), c_2'(x), \dots c_n'(x)$

*Τις οποίες αν **ολοκληρώσουμε** προκύπτουν οι συναρτήσεις που θέλουμε να προσδιορίσουμε.*

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε τη σταθερά της ολοκλήρωσης ίση με 0 γιατί ψάχνουμε μια από όλες τις μερικές λύσεις της (1)

*Η **δυσκολία** έγκειται στον υπολογισμό των ολοκληρωμάτων.*

Μία λύση της μη ομογενούς επομένως θα είναι:

$y_\mu(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + \dots c_n(x)y_n(x)$

<u>Μεθοδολογία μεταβολής των παραμέτρων :</u>

Εάν δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών πχ αν υπάρχει ό όρος στη μη ομογενή x^{-1} *το οποίο δεν είναι πολυώνυμο του x αλά ρητή συνάρτηση του x τότε χρησιμοποιούμε Μεθοδολογία μεταβολής των παραμέτρων.*

Βρίσκουμε την λύση της ομογενούς

$y_{o\mu}(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \dots c_ny_n(x)$

Και στη συνέχεια βρίσκουμε μία λύση της μη ομογενούς διαφορικής

Σχηματίζουμε το σύστημα (αντικαθιστούμε τους συντελεστές $c_1, c_2, \dots$ *σε* $c_1(x), c_2(x), c_3(x) \dots$

$c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) + \dots c_n'(x)y_n(x) = 0$

$c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) + \dots c_n'(x)y_n'(x) = 0$

$c_1'(x)y_1''(x) + c_2'(x)y_2''(x) + .. c_n'(x)y_n''(x) = 0$

………………………………………………………..

$c_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + c_2'(x)y_2^{(n-2)}(x) + .. c_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0$

$c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + c_2'(x)y_2^{(n-1)}(x) + .. c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = f(x)$

Το επιλύουμε συνήθως με μέθοδο Gramer και παίρνουμε τις λύσεις

$c_1'(x), c_2'(x), .. c_n'(x)$

Ολοκληρώνουμε κάθε μία για να πάρουμε τελικά

$c_1(x) = \int c_1'(x)\, dx\, , c_2(x) = \int c_2'(x)\, dx\, , c_n(x) = \int c_{3n}'(x)\, dx$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε τη σταθερά της ολοκλήρωσης ίση με 0 γιατί ψάχνουμε μια από όλες τις μερικές λύσεις της (1) και η γενική λύση θα είναι:

$y(x) = y_{o\mu}(x) + y_\mu(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + .. c_ny_n(x) + c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + .. c_n(x)y_n(x)$

Προσοχή στη λύση της μη ομογενούς όπως παραπάνω $c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$ *δεν είναι* $c_1(x) + c_2(x)$

Παράδειγμα

Δίνεται η Σ.Δ.Ε.:

$y'''(x) - 6y''(x) + 11y'(x) - 6y(x) = e^x$

Να λυθεί (αποκλειστικά) με χρήση της μεθόδου μεταβολής των παραμέτρων (Lagrange) όταν είναι γνωστό ότι οι συναρτήσεις , $y_1(x) = e^x$, $y_1(x) = e^{2x}$, $y_3(x) = e^{3x}$ αποτελούν ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων της αντίστοιχης ομογενούς της, δηλαδή της

$y'''(x) - 6y''(x) + 11y'(x) - 6y(x) = 0$

Λύση

Εφόσον έχουμε το θεμελιώδες σύνολο των λύσεων της ομογενούς η γενική λύση προκύπτει από τον γραμμικό συνδυασμό των λύσεων.

$y_{o\mu}(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + c_3y_3(x) = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x}$

Θα βρούμε μια λύση της μη ομογενούς εφαρμόζοντας τη μέθοδο μεταβολής των παραμέτρων.

Θα αναζητήσουμε μια λύση της μορφής

$y_\mu(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + c_3(x)y_3(x)$

Όπου θα προσδιορίσουμε τις συναρτήσεις $c_1(x), c_2(x), c_3(x)$

Καταστρώνουμε το σύστημα με τις παραγώγους των παραπάνω συναρτήσεων να ικανοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις

$$\left.\begin{array}{l} c_1'(x)e^x + c_2'(x)e^{2x} + c_3'(x)e^{3x} = 0 \\ c_1'(x)(e^x)' + c_2'(x)(e^{2x})' + c_3'(x)(e^{3x})' = 0 \\ c_1'(x)(e^x)'' + c_2'(x)(e^{2x})'' + c_3'(x)(e^{3x})'' = e^x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} c_1'(x)e^x + c_2'(x)e^{2x} + c_3'(x)e^{3x} = 0 \\ c_1'(x)e^x + c_2'(x)2e^{2x} + c_3'(x)3e^{3x} = 0 \\ c_1'(x)e^x + c_2'(x)4e^{2x} + c_3'(x)9e^{3x} = e^x \end{array}\right\}$$

Η ορίζουσα των συντελεστών είναι :

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = 6e^x e^{2x} e^{3x} - 6e^x e^{2x} e^{3x} + 2e^x e^{2x} e^{3x} = 2e^{6x}$$

$$\Delta_{C_1'(x)} = \begin{vmatrix} 0 & e^{2x} & e^{3x} \\ 0 & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = 3e^x e^{2x} e^{3x} - 2e^x e^{2x} e^{3x} = e^{6x}$$

$$\Delta_{C_2'(x)} = \begin{vmatrix} e^x & 0 & e^{3x} \\ e^x & 0 & 3e^{3x} \\ e^x & e^x & 9e^{3x} \end{vmatrix} = -3e^x e^x e^{3x} + e^x e^x e^{3x} = -2e^{5x}$$

$$\Delta_{C_3'(x)} = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & 0 \\ e^x & 2e^{2x} & 0 \\ e^x & 4e^{2x} & e^x \end{vmatrix} = 2e^{4x} - e^{4x} = e^{4x}$$

Και η λύση του συστήματος είναι

$$c_1'(x) = \frac{\Delta_{C_1'(x)}}{\Delta} = \frac{e^{6x}}{2e^{6x}} = \frac{1}{2}$$

$$c_2'(x) = \frac{\Delta_{C_2'(x)}}{\Delta} = \frac{-2e^{5x}}{2e^{6x}} = -e^{-x}$$

$$c_3'(x) = \frac{\Delta_{C_3'(x)}}{\Delta} = \frac{e^{4x}}{2e^{6x}} = \frac{1}{2}e^{-2x}$$

Ολοκληρώνοντας τις παραπάνω συναρτήσεις ως προς x προκύπτουν οι $c_1(x), c_2(x), c_3(x)$

$$c_1(x) = \int c_1'(x)\,dx = \int \frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}x$$

$$c_2(x) = \int c_2'(x)\,dx = \int -e^{-x}\,dx = e^{-x}$$

$$c_3(x) = \int c_3'(x)\,dx = \int \frac{1}{2}e^{-2x}\,dx = -\frac{1}{4}e^{-2x}$$

Όπου θέσαμε χωρίς βλάβη της γενικότητας τη σταθερά της ολοκλήρωσης ίση με 0 γιατί ψάχνουμε μια από όλες τις μερικές λύσεις της διαφορικής.

Σύμφωνα με τα παραπάνω μια λύση της μη ομογενούς είναι :

$$y_\mu(x) = \frac{1}{2}xe^x + e^{-x}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}e^{3x} = \frac{1}{2}xe^x + e^x - \frac{1}{4}e^x = \frac{1}{2}xe^x + \frac{3}{4}e^x$$

συνεπώς η γενική λύση της διαφορικής βρίσκεται προσθέτοντας τις γενικές λύσεις της ομογενούς και την μερική λύση της μη ομογενούς

$$y(x) = y_{o\mu}(x) + y_\mu(x) = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x} + \frac{1}{2}xe^x + \frac{3}{4}e^x$$

<u>Σημείωση :</u>

Η μερική λύση της μη ομογενούς με τη ην μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών δίνει το αποτέλεσμα

$$y_\mu(x) = \frac{1}{2}xe^x$$

Η προσθήκη του όρου $\frac{3}{4}e^{x}$με τη μέθοδο μεταβολής των παραμέτρων αποτελεί αποδεκτή μερική λύση αφού ο όρος αυτός δεν μεταβάλλεται στις παραγωγίσεις και οι συντελεστές της ομογενούς 1,-6,11,-6 που έχουν συνολικό άθροισμα 0 τελικά τον μηδενίζουν.

Εξισώσεις Euler N Βαθμού μη ομογενείς

$$(ax+b)^n y^{(n)}(x) + a_{n-1}\,(ax+b)^{n-1}\,y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(ax+b)y'(x) + a_0 y(x) = f(x) \ \ (1)$$

Οι συντελεστές είναι δυνάμεις του x βαθμού ίσου με την τάξη της αντίστοιχης παραγώγου α≠ 0

Με ένα απλό μετασχηματισμό γίνονται διαφορικές με σταθερούς συντελεστές

Θέτουμε

$$ax+b = e^{at} \ \Rightarrow t = \frac{1}{a}ln(ax+b) \ \ a \neq 0 \ \ ,\frac{dt}{dx} = \frac{1}{ax+b}$$

$$y(x) = y\left(\frac{e^{at}-b}{a}\right) = Y(t)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{ax+b}Y'(t)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{ax+b}Y'(t)\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{ax+b}\right)Y'(t) + \frac{1}{ax+b}\frac{d}{dx}[Y'(t)] =$$

$$-\left(\frac{a}{(ax+b)^2}\right)Y'(t) + \frac{1}{ax+b}\frac{d}{dt}[Y'(t)]\frac{dt}{dx} = \frac{1}{(ax+b)^2}[-Y'(t)+Y''(t)]$$

Αντικαθιστούμε στην διαφορική εξίσωση την $y(x), y'(x), y''(x), κλπ$

Παρατηρούμε σε κάθε αντικατάσταση ενός όρου ο όρος $(ax+b)^n$ *απλοποιείται με τον όρο* $\frac{1}{(ax+b)^n}$

Έτσι ώστε τελικά να προκύψει μια μη ομογενής διαφορική με σταθερούς συντελεστές και την καινούρια $Y(t)$ *που μπορούμε να επιλύσουμε.*

Εξισώσεις Euler Β βαθμού

$ax^2y'' + bxy' + cy = 0$ *(1)*

$a(x+1)^2y'' + b(x+1)y' + cy = 0$

$a(\alpha x+\beta)^2y'' + b(\alpha x+\beta)y' + cy = 0$

Η μεθοδολογία αυτή διαφέρει από την γενική μεθοδολογία , είναι πιο γρήγορη

Αναζητούμε λύση της μορφής

$y = x^s, y = (x+1)^s, y = (\alpha x+\beta)^s$

Εξετάζουμε την περίπτωση (1) όπου Αναζητούμε λύση της μορφής $y = x^s$

Βρίσκουμε την $y' = sx^{s-1}, y'' = s(s-1)x^{s-2}$ *και αντικαθιστούμε στην διαφορική*

$ax^2s(s-1)x^{s-2} + bxsx^{s-1} + cx^s = 0 \Rightarrow ax^2s^2x^{s-2} - ax^2sx^{s-2} + bxsx^{s-1} + cx^s = 0$

$\Rightarrow ax^s s^2 - asx^s + bsx^s + cx^s = 0$

$[as^2 + (b-a)s + c]x^s = 0$

Μνημονικός τύπος για το τριώνυμο : $as^2 + (b-a)s + c$

Δευτεροβάθμιο τριώνυμο του s που οι ρίζες του αντιστοιχούν στις λύσεις

$y = c_1x^{s_1} + c_2x^{s_2}$

Εάν η δευτεροβάθμια έχει διπλή ρίζα τότε μόνο η μία λύση μπορεί να έχει τη μορφή της δύναμης του x

$y_1 = x^s$

Η δεύτερη λύση θα είναι

$y_2 = x^s ln|x|$

Και η γενική λύση θα είναι :

$y = c_1x^s + c_2x^s ln|x|$

Αν είχαμε τρίτης τάξης Euler και είχαμε τρείς ρίζες ίσες τότε $y_2 = x^s ln|x|^2$ *??*

Εάν έχουμε μιγαδικές ρίζες $a + bi, a - bi$

$y_1 = x^{a+bi} = x^a x^{bi} = x^a (e^{lnx})^{bi} = \cos(blnx) + \sin(blnx)$

$y_1 = x^{a-bi} = x^a x^{-bi} = x^a (e^{lnx})^{-bi} = \cos(blnx) - \sin(blnx)$

Παράδειγμα

Δίνεται η Σ.Δ.Ε. τύπου Euler: $x^2y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = 0 \ \ (1) \ \ , x \neq 0$

i) Να βρεθούν δύο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της (1), της μορφής x^λ. Ποια είναι η ορίζουσα Wronski αυτών;

ii) ii) Με χρήση της μεθόδου μεταβολής των παραμέτρων, να βρεθεί η γενική λύση της:

$$x^2y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = x^4e^x \quad , x \neq 0$$

Λύση

Για τη διαφορική $x^2y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = 0 \ \ (1) \ \ , x \neq 0$

Η οποία είναι ΣΔΕ τύπου Euler με συντελεστές δυνάμεις του x βαθμού ίσου με την τάξη της αντίστοιχης παραγώγου.

i)

Αναζητούμε λύση της μορφής

$y_\lambda(x) = x^\lambda$

Βρίσκουμε τις παραγώγους της $y_\lambda(x)$

$y_\lambda'(x) = \lambda x^{\lambda-1}, y_\lambda''(x) = \lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2}$ *και αντικαθιστούμε στην (1)*

$x^2\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2} - 2x\lambda x^{\lambda-1} + 2x^\lambda = 0 \Rightarrow x^2\lambda^2x^{\lambda-2} - x^2\lambda x^{\lambda-2} - 2x\lambda x^{\lambda-1} + cx^\lambda = 0$

$\Rightarrow x^\lambda\lambda^2 - \lambda x^\lambda - 2\lambda x^\lambda + 2x^\lambda = 0$

$[\lambda^2 - 3\lambda + 2]x^\lambda = 0$

το τριώνυμο $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ *έχει ρίζες* $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$

Συνεπώς υπάρχουν δύο λύσεις της διαφορικής

$y_1(x) = x\ , y_2(x) = x^2$

Η ορίζουσα Wronski είναι :

$$W[y_1(x), y_2(x)] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 2x^2 - x = x^2 \neq 0\ , \text{γιά } x \neq 0$$

Και επομένως οι λύσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητες

ii)

Έχουμε βρει το θεμελιώδες σύνολο των λύσεων ομογενούς από τη i) και η γενική λύση προκύπτει από τον γραμμικό συνδυασμό των λύσεων.

$$y_{o\mu}(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = c_1 x\ + c_2 x^2$$

Θα βρούμε μια λύση της μη ομογενούς εφαρμόζοντας τη μέθοδο μεταβολής των παραμέτρων.

Η μη ομογενής γράφεται ως εξής:

$$x^2 y''(x) - 2xy'(x) + 2y(x) = x^4 e^x \Leftrightarrow y''(x) - \frac{2}{x} y'(x) + \frac{2}{x^2} y(x) = x^2 e^x$$

Θα αναζητήσουμε μια λύση της μορφής

$$y_\mu(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x)$$

Όπου θα προσδιορίσουμε τις συναρτήσεις $c_1(x), c_2(x)$

Καταστρώνουμε το σύστημα με τις παραγώγους των παραπάνω συναρτήσεων να ικανοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις

$$\left.\begin{array}{l} c_1'(x)x + c_2'(x)x^2 = 0 \\ c_1'(x) + c_2'(x)2x = x^2 e^x \end{array}\right\}$$

Η ορίζουσα των συντελεστών είναι :

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = x^2$$

$$\Delta_{C_1'(x)} = \begin{vmatrix} 0 & x^2 \\ x^2 e^x & 2x \end{vmatrix} = -x^4 e^x$$

$$\Delta_{C_2'(x)} = \begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & x^2 e^x \end{vmatrix} = x^3 e^x$$

Και η λύση του συστήματος είναι

$$c_1'(x) = \frac{\Delta_{C_1'(x)}}{\Delta} = \frac{-x^4 e^x}{x^2} = -x^2 e^x$$

$$c_2'(x) = \frac{\Delta_{C_2'(x)}}{\Delta} = \frac{x^3 e^x}{x^2} = x e^x$$

Ολοκληρώνοντας τις παραπάνω συναρτήσεις ως προς x προκύπτουν οι $c_1(x), c_2(x)$

$$c_1(x) = \int c_1'(x)\,dx = \int -x^2e^x\,dx = -\int x^2(e^x)'\,dx = -x^2e^x + \int 2xe^x\,dx =$$

$$-x^2e^x + 2\int x\,e^x dx = -x^2e^x + 2xe^x - 2\int e^x dx = -x^2e^x + 2xe^x - 2e^x$$

$$c_2(x) = \int c_2'(x)\,dx = \int x\,e^x dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x$$

Όπου θέσαμε χωρίς βλάβη της γενικότητας τη σταθερά της ολοκλήρωσης ίση με 0 γιατί ψάχνουμε μια από όλες τις μερικές λύσεις της διαφορικής.

Σύμφωνα με τα παραπάνω μια λύση της μη ομογενούς είναι :

$$y_\mu(x) = c_1(x)x + c_2(x)x^2 = -x^3e^x + 2x^2e^x - 2xe^x + x^3e^x - x^2e^x = x^2e^x - 2xe^x$$

$$y_\mu(x) = x^2e^x - 2xe^x$$

Συνεπώς η γενική λύση της διαφορικής βρίσκεται προσθέτοντας τις γενικές λύσεις της ομογενούς και την μερική λύση της μη ομογενούς

$$y(x) = y_{o\mu}(x) + y_\mu(x) = c_1x + c_2x^2 + x^2e^x - 2xe^x$$

Μέθοδος Υποβιβασμού της τάξης

Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται κυρίως σε Γραμμικές ομογενείς διαφορικές δεύτερης τάξεως Αν είναι γνωστή μία λύση και ζητάμε να βρούμε τη γενική λύση της Σ.Δ.Ε

Έτσι, αρκεί να βρούμε δύο γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της y_1, y_2 και η γενική της λύση θα δίνεται από το γραμμικό συνδυασμό

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) \quad (3)$$

Όπου c_1 και c_2 αυθαίρετες σταθερές.

Μας δίνει μια λύση της (1), την y_1 επομένως χρειάζεται να βρούμε μια δεύτερη λύση της Σ.Δ.Ε. (1), την οποία να αντικαταστήσουμε στην (3) και να προκύψει η γενική λύση y(x).

Για να βρούμε τη δεύτερη αυτή λύση της (1) που θα είναι συγχρόνως γραμμικώς ανεξάρτητη της λύσης y_1 θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο υποβιβασμού τάξης . Για τη μέθοδο αυτή, θα εφαρμόσουμε τα ακόλουθα βήματα:

Βήμα 1: *Εισάγουμε τη νέα άγνωστη συνάρτηση u(x), αναζητώντας λύση y_2της μορφής*

$y_2(x) = u(x)y_1(x)$ *(4)*

Τότε, παραγωγίζουμε την (4) διαδοχικά δύο φορές και παίρνουμε

$$y_2'(x) = u'(x)y_1 + u(x)y_1'(x) \quad (5)$$

$$y_2''(x) = u''(x)y_1(x) + 2u'(x)y_1'(x) + u(x)y_1''(x) \quad (6)$$

Βήμα 2: *Η y_2 πρέπει να είναι λύση της Σ.Δ.Ε. (1), δηλαδή να την ικανοποιεί. Έτσι, αντικαθιστούμε τις (4), (5) και (6) στην (1) και κάνουμε τις προκύπτουσες αναγωγές. Η εξίσωση στην οποία καταλήγουμε, περιέχει* *τη γνωστή συνάρτηση y_1 και τις παραγώγους της y_1' , y_1'' και μόνον τις παραγώγους u' και u'' της άγνωστης συνάρτησης u. Η ίδια η συνάρτηση u έχει εξαλειφθεί!*

Βήμα 3: *Εισάγουμε τη συνάρτηση*

$\Phi(x) = u'(x)$ *(7)*

και κατά συνέπεια τη

$\Phi'(x) = u''(x)$ *(8)*

στην εξίσωση στην οποία καταλήξαμε στο βήμα 2, και η νέα Σ.Δ.Ε. είναι πρώτης τάξης ως προς την άγνωστη συνάρτηση $\Phi(x)$.

Βήμα 4: *Βρίσκουμε τη γενική λύση $\Phi(\chi)$ της πρώτης τάξης Σ.Δ.Ε. που προέκυψε στο βήμα 3.*

Βήμα 5: *Με γνωστή τη συνάρτηση $\Phi(\chi)$, λύνουμε την εξίσωση (7) με απευθείας ολοκλήρωση και υπολογίζουμε τη συνάρτηση u(x).*

Βήμα 6: *Αντικαθιστούμε τη γνωστή πλέον συνάρτηση u(x) στην (4) και βρίσκουμε τη συνάρτηση $y_2(x)$ η οποία είναι λύση της (1), γραμμικώς ανεξάρτητη της y_1 Είναι χρήσιμο σ΄ αυτό το σημείο να επαληθεύσουμε ότι αυτά πράγματι ισχύουν.*

Βήμα 7: *Αντικαθιστούμε τις y_1και y_2 στην (3) και βρίσκουμε τη γενική λύση της Σ.Δ.Ε. (1).*

ΜΕΘΟΔΟΣ ΣΕΙΡΩΝ

*Η **Μέθοδος των Σειρών** είναι μια γενική μέθοδος για κάθε είδους Σ.Δ.Ε., γραμμικές και μη γραμμικές, αλλά εφαρμόζεται συνήθως σε γραμμικές ομογενείς Σ.Δ.Ε. δεύτερης τάξης, με μη σταθερούς συντελεστές, οι οποίες δεν έχουν μορφή κατάλληλη ώστε να επιλυθούν με τη μέθοδο Euler ούτε μπορούν να αντιμετωπισθούν με τη μέθοδο υποβιβασμού τάξης.*

Με τη Μέθοδο των Σειρών μελετούμε Σ.Δ.Ε. της μορφής

$A(x)y''(x) + B(x)y'(x) + T(x) = 0 \;\; (1)$

όπου A(x),B(x),T(x) πραγματικές συναρτήσεις του x, σε μια μικρή περιοχή γύρω από ένα σημείο x_0 δηλαδή αναζητούμε λύση όταν οι αρχικές συνθήκες ορίζονται γύρω από το x_0 ή όταν ζητείται γενική λύση γύρω από το x_0

Το x_0 μπορεί να είναι:

- *ομαλό*
- *κανονικό ανώμαλο*
- *μη κανονικό ανώμαλο*

σημείο για τη Σ.Δ.Ε. (1). Για να χαρακτηρίσουμε ένα σημείο x_0 γύρω από το οποίο θέλουμε να μελετήσουμε τη Σ.Δ.Ε. (1), ως ομαλό, κανονικό ανώμαλο ή μη κανονικό ανώμαλο, τη φέρνουμε στη μορφή

$y''(x) + P(x)y'(x) + Q(x)y(x) = 0 \ \ (2)$

όπου $P(x) = B(x)/A(x)$ *και* $Q(x) = \Gamma(x)/A(x)$

Ένα σημείο x_0 θα χαρακτηρίζεται ως:

· ***Ομαλό*** *εάν οι συναρτήσεις P(x) και Q(x) της (2) ορίζονται και είναι αναλυτικές στο x_0.*

· ***Κανονικό ανώμαλο***, *εάν οι συναρτήσεις $(x - x_0)P(x)$ και $(x - x_0)^2 Q(x)$ είναι συγχρόνως αναλυτικές στο x_0*

· ***Μη κανονικό ανώμαλο***, *εάν το x_0 δεν είναι ούτε ομαλό ούτε κανονικό ανώμαλο σημείο.*

Θα αναπτύξουμε τη μέθοδο επίλυσης της Σ.Δ.Ε. (1) σε περιοχή γύρω από ένα ομαλό ή κανονικό ανώμαλο σημείο της, που βασίζεται στη θεωρία του Frobenious.

Σύμφωνα με τη μέθοδο, αναζητούμε λύσεις της μορφής

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{\lambda+n} \quad (3)$$

όπου λ είναι μια κατάλληλα επιλεγμένη σταθερά και x_0 το κέντρο της περιοχής μελέτης της Σ.Δ.Ε. αλλά και το σημείο ανάπτυξης της σειράς. Οι λύσεις αυτές συγκλίνουν σε μια μικρή περιοχή γύρω από το σημείο x_0 Δεδομένου ότι ο μετασχηματισμός $t = x - x_0$ μεταφέρει τη μελέτη της Σ.Δ.Ε. από το σημείο x_0 στο σημείο 0, θα επιλέξουμε για απλότητα να μελετήσουμε την (1) σε περιοχή του σημείου 0. Ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

Μεθοδολογία

Για να μπορεί να εφαρμοστεί η μεθόδου Frobenius θα πρέπει η Σ.Δ.Ε. (1) να μην περιέχει μη κανονικά ανώμαλα σημεία. Έτσι, κατ' αρχήν πρέπει να διερευνήσουμε την (1) ως προς το είδος των σημείων x στα οποία ορίζεται. Γράφουμε την (1) στη μορφή

$y''(x) + P(x)y'(x) + Q(x)y(x) = 0 \ \ (2)$

Ελέγχουμε αν υπάρχουν σημεία στα οποία οι P(x) και ή Q(x) δεν ορίζονται.

Περίπτωση 1: *Εάν δεν υπάρχουν τέτοια σημεία, τότε η (1) ορίζεται μόνο σε ομαλά σημεία και η λύση της βρίσκεται άμεσα, με αντικατάσταση της δυναμοσειράς στη Σ.Δ.Ε. και απευθείας υπολογισμό των συντελεστών της σειράς.*

1. *Αναζητούμε λύση της (1) της μορφής*

   $$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n(x-x_0)^n \ \ (2)$$

2. *Παραγωγίζουμε την $y(x)$ που ορίσαμε στην (2) διαδοχικά δύο φορές (αν για n=0 ή n=1 ο* αντίστοιχος όρος της σειράς είναι μηδενικός η άθροιση ξεκινά από το n=1 ή to n=2).

   $$y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n\alpha_n(x-x_0)^n\,,y''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)\alpha_n(x-x_0)^{n-2}$$

   και αντικαθιστούμε τις $y,\ y',\ y''$ στη Σ.Δ.Ε.

3. *Σκοπός του βήματος αυτού είναι να ρυθμίσει τους δείκτες άθροισης στις τρείς σειρές κατά τέτοιον τρόπο, ώστε να εμφανίσουν την ίδια δύναμη του x ως κοινό παράγοντα και επίσης η άθροιση να ξεκινάει σε όλες από την ίδια τιμή του δείκτη. Προκειμένου να μπορέσουμε να αθροίσουμε αυτές τις σειρές θα πρέπει να είναι όλες δυναμοσειρές του ίδιου όρου, και επομένως θα κάνουμε μια μετάθεση των δεικτών ώστε να εμφανίζονται με τον ίδιο όρο. Η άθροιση είναι ανεξάρτητη από τον δείκτη. Με αυτό τον τρόπο, η εξίσωση θα εκφραστεί ως μηδενισμός μιας σειράς.*
4. *Ο αναδρομικός τύπος υπολογίζεται από το γεγονός ότι η εξίσωση θα εκφραστεί ως μηδενισμός μιας σειράς, στη μορφή*

   $$\sum_{n=0}^{\infty}\left[f(\lambda_1+sn)c_n+g\big(\lambda_1+s(n-1)\big)c_{n-1}\right]x^{sn}=0 \ \ (6)$$

   Η (6) θα ισχύει για κάθε x όταν όλοι οι συντελεστές της σειράς του αριστερού μέλους είναι μηδέν και έτσι προκύπτει ο αναγωγικός τύπος

   $$c_n=-\frac{\big(\lambda_1+s(n-1)\big)}{f(\lambda_1+sn)}c_{n-1}\ \ ,n\geq 1 \ \ \ (7)$$

5. *Τελικά η λύση είναι να αναπτύξουμε τον αναδρομικό τύπο και να αντικαταστήσουμε στην εξίσωση*

   $$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n x^n=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n+\cdots \ \ \ (8)$$

   Όπου οι συντελεστές υπολογίζονται από τον αναδρομικό τύπο , και στο τέλος θα βρούμε ένα τύπο

   $$y(x)=a_0\sum_{n=0}^{\infty}(\dots)+a_1\sum_{n=0}^{\infty}(\dots)$$

Που είναι η γενική λύση μια γενική προσέγγιση για τον υπολογισμό του α_0, α_1 είναι πχ $\alpha_0 \neq 0, \alpha_1 = 0$ και στη συνέχεια υπολογίζουμε το $y_1(x)$ από την (8) στη συνέχεια αντιστρέφουμε $\alpha_1 \neq 0, \alpha_0 = 0$ και υπολογίζουμε το $y_2(x)$

Περίπτωση 2: *Εάν υπάρχει σημείο x_0 στο οποίο οι P(x) και ή Q(x) δεν ορίζονται (ανώμαλο σημείο), τότε ελέγχουμε αν οι συναρτήσεις $(x - x_0)P(x)$ και $(x - x_0)^2Q(x)$ είναι συγχρόνως αναλυτικές στο σημείο αυτό. Εάν αυτό ισχύει, το x_0 είναι κανονικό ανώμαλο και η λύση της Σ.Δ.Ε. υπολογίζεται με τη μέθοδο του Frobenius. Εάν δεν ισχύει, το x_0 είναι μη κανονικό ανώμαλο σημείο και η μέθοδος του Frobenius δεν εφαρμόζεται. Στη συνέχεια, αφού εξασφαλίσουμε ότι μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο του Frobenius*

Αναζητούμε λύσεις της μορφής

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (x - x_0)^{n+\lambda} \quad (2)$$

Υπολογίζουμε την εξίσωση δεικτών για το λ :

$$\lambda(\lambda - 1) + p_0\lambda + q_0 = 0 \text{ όπου } p_0 = \lim_{x\to 0}(xp(x)) \text{ και } q_0 = \lim_{x\to 0}(x^2q(x))$$

Προχωρούμε στα υπόλοιπα βήματα 2,3,4,5 όπως παραπάνω

Από την εξίσωση των δεικτών (3) υπολογίζουμε τις τιμές του λ

Χρήσιμες *σχέσεις για την αναγνώριση του αθροίσματος της σειράς στην οποία έχουμε καταλήξει, όταν αυτό είναι δυνατόν, είναι οι ακόλουθες στις οποίες ο n είναι πάντα φυσικός αριθμός.*

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n \text{ με } 0! = 1$$

$$(2n)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (2n - 1)(2n)$$

$$(2n + 1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots (2n - 1)(2n)(2n + 1)$$

$$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 4 \dots (2n - 2)(2n) = 2^n \cdot n!$$

$$(2n + 1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2n - 1)(2n + 1)$$

$$sinx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n + 1)!} x^{2n+1} \quad (19)$$

$$cosx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \quad (20)$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (21)$$

$$lnx = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n} \quad ,x > 0 \quad (22)$$

Παράδειγμα για το σημείο να είναι ομαλό κανονικό και $x_0 = 0$

Μας δίνεται η Σ.Δ.Ε

$(1-x)y''(x) - y'(x) + xy(x) = 0$ *(1)*

Την φέρνουμε στην τυπική μορφή με τον συντελεστή της μεγαλύτερης τάξης ίσο με μονάδα

$$y''(x) - \frac{1}{(1-x)}\, y'(x) + \frac{x}{(1-x)} y(x) = 0$$

όπου παρατηρούμε ότι είναι της μορφής $y''(x) - p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$

με $p(x) = -\dfrac{1}{(1-x)}$ *και* $q(x) = \dfrac{x}{(1-x)}$

Όπου παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις $p(x)$*και* $q(x)$ *είναι αναλυτικές για κάθε* $x \in \mathbb{R}$ *εκτός από το σημείο* $x = 1$ *επομένως το σημείο* $x_0 = 0$ *είναι ομαλό (αναλυτικό) της (1).*

Αναζητούμε λύση της (1) της μορφής

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n \quad (2)$$

Παραγωγίζουμε την $y(x)$ *που ορίσαμε στην (2) διαδοχικά δύο φορές (αν για n=0 ή n=1 ο* αντίστοιχος όρος της σειράς είναι μηδενικός η άθροιση ξεκινά από το n=1 ή to n=2).

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\alpha_n x^{n-1}, y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\alpha_n x^{n-2}$$

και αντικαθιστούμε τις $y,\ y',\ y''$ *στη Σ.Δ.Ε. (1).*

$$(1-x)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\alpha_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} n\alpha_n x^{n-1} + x\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\alpha_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\alpha_n x^{n-1} - \alpha_1 x^0 - \sum_{n=2}^{\infty} n\alpha_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^{n+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\alpha_1 x^0 + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\alpha_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} [n(n-1)\alpha_n + n\alpha_n] x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^{n+1} = 0$$

Παρατηρούμε ότι οι σειρές που εμφανίζονται είναι δυναμοσειρές του $x^{n-2}, x^{n-1}, x^{n+1}$

Προκειμένου να μπορέσουμε να αθροίσουμε αυτές τις σειρές θα πρέπει να είναι όλες δυναμοσειρές του ίδιου όρου, και επομένως θα κάνουμε μια μετάθεση των δεικτών ώστε να εμφανίζονται με τον όρο x^{n-1} *,στην πρώτη δυναμοσειρά θα θέσουμε* $n-2=m-1 \Rightarrow n=m+1$ *, στην τρίτη δυναμοσειρά* $n+1=k-1 \Rightarrow n=k-2$

$$-\alpha_1 x^0+\sum_{m=1}^{\infty}(m+1)m\alpha_{m+1}x^{m-1}-\sum_{n=2}^{\infty}[n(n-1)\alpha_n+n\alpha_n]x^{n-1}+\sum_{k=2}^{\infty}\alpha_{k-2}x^{k-1}=0$$

Η άθροιση είναι ανεξάρτητη από τον δείκτη και επομένως η παραπάνω σχέση γίνεται :

$$-\alpha_1 x^0+\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)\alpha_{n+1}x^{n-1}-\sum_{n=2}^{\infty}[n(n-1)\alpha_n+n\alpha_n]x^{n-1}+\sum_{n=2}^{\infty}\alpha_{n-2}x^{n-1}=0$$

$$-a_1 x^0+2a_2x^0+\sum_{n=2}^{\infty}n(n+1)\alpha_{n+1}x^{n-1}-\sum_{n=2}^{\infty}[n(n-1)\alpha_n+n\alpha_n]x^{n-1}+\sum_{n=2}^{\infty}\alpha_{n-2}x^{n-1}=0$$

$$-a_1 x^0+2a_2x^0+\sum_{n=2}^{\infty}[n(n+1)\alpha_{n+1}-n(n-1)\alpha_n-n\alpha_n+\alpha_{n-2}]\,x^{n+1}=0 \quad (3)$$

Η σχέση (3) ισχύει για κάθε x επομένως θα πρέπει οι συντελεστές του x^n *που εμφανίζονται στην (3) να είναι όλοι ίσοι με το μηδέν*

$$\left.\begin{matrix}-a_1x^0+2a_2x^0=0\\ n(n+1)\alpha_{n+1}-n(n-1)\alpha_n-n\alpha_n+\alpha_{n-2}=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow \left.\begin{matrix}2a_2=a_1\\ \alpha_{n+1}=\dfrac{n^2\alpha_n-n\alpha_n+n\alpha_n-\alpha_{n-2}}{n(n+1)}\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$a_2=\frac{1}{2}a_1$$

$$\alpha_{n+1}=\frac{n^2\alpha_n-n\alpha_n+n\alpha_n-\alpha_{n-2}}{n(n+1)}$$

Παράδειγμα για το σημείο να είναι κανονικό ανώμαλο και $x_0=0$

Μας δίνεται η Σ.Δ.Ε

$$x^2y''(x)+xy'(x)+\left(x^2-\frac{1}{9}\right)y(x)=0 \quad (1)$$

(α) *Την φέρνουμε στην τυπική μορφή με τον συντελεστή της μεγαλύτερης τάξης ίσο με μονάδα*

$$y''(x)-\frac{1}{x}\,y'(x)+\frac{\left(x^2-\frac{1}{9}\right)}{x^2}y(x)=0\Rightarrow y''(x)+\frac{1}{x}\,y'(x)+\left(1-\frac{1}{9x^2}\right)y(x)=0$$

όπου παρατηρούμε ότι είναι της μορφής $y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)=0$

με $p(x)=\dfrac{1}{x}$ *και* $q(x)=1-\dfrac{1}{9x^2}$

Παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις $p(x)$*και* $q(x)$ *δεν ορίζονται στο σημείο* $x_0=0$ *επομένως το σημείο* $x_0=0$ *είναι ανώμαλο σημείο της συνάρτησης (1). Σχηματίζουμε τις συναρτήσεις* $xp(x)$ *και* $x^2q(x)$

$$xp(x)=\frac{1}{x}x=1\,,\qquad x^2q(x)=x^2-\frac{x^2}{9x^2}=x^2-\frac{1}{9}$$

Παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις $xp(x)$ *και* $x^2q(x)$ *είναι αναλυτικές για κάθε* $x \in \mathbb{R}$ *επομένως το σημείο* $x_0 = 0$ *είναι κανονικό ανώμαλο σημείο της (1).*

(β)

Αναζητούμε λύσεις της μορφής

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^{n+\lambda} \ \ (2)$$

Υπολογίζουμε την εξίσωση δεικτών για το λ :

$$\lambda(\lambda-1) + p_0\lambda + q_0 = 0 \text{ όπου } p_0 = \lim_{x\to 0}(xp(x)) = 1 \text{ και } q_0 = \lim_{x\to 0}(x^2q(x)) = -\frac{1}{9}$$

Επομένως η εξίσωση των δεικτών διαμορφώνεται ως εξής:

$$\lambda(\lambda-1) + \lambda - \frac{1}{9} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \frac{1}{9} = 0 \ \ (3)$$

Παραγωγίζουμε την $y(x)$ *που ορίσαμε στην (2) διαδοχικά δύο φορές (αν για n=0 ή n=1 ο* αντίστοιχος όρος της σειράς είναι μηδενικός η άθροιση ξεκινά από το n=1 ή to n=2).

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)\alpha_n x^{n+\lambda-1}, y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)(n+\lambda-1)\alpha_n x^{n+\lambda-2}$$

και αντικαθιστούμε τις $y,\ y',\ y''$ *στη Σ.Δ.Ε. (1).*

$$x^2\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)(n+\lambda-1)\alpha_n x^{n+\lambda-2} + x\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)\alpha_n x^{n+\lambda-1} + \left(x^2 - \frac{1}{9}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n x^{n+\lambda} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)(n+\lambda-1)\alpha_n x^{n+\lambda} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+\lambda)\alpha_n x^{n+\lambda} + \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n x^{n+\lambda+2} - \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n x^{n+\lambda} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+\lambda)(n+\lambda-1)\alpha_n + (n+\lambda)\alpha_n - \frac{1}{9}\alpha_n\right]x^{n+\lambda} + \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n x^{n+\lambda+2} = 0$$

Παρατηρούμε ότι οι σειρές που εμφανίζονται είναι δυναμοσειρές του $x^{n+\lambda}, x^{n+\lambda+2}$ *. Προκειμένου να μπορέσουμε να αθροίσουμε αυτές τις σειρές θα πρέπει να είναι όλες δυναμοσειρές του ίδιου όρου, και επομένως θα κάνουμε μια μετάθεση των δεικτών ώστε να εμφανίζονται με τον όρο* $x^{n+\lambda}$ *. Στην δεύτερη δυναμοσειρά θέτουμε* $n+\lambda+2 = m+\lambda \Rightarrow n = m-2$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+\lambda)(n+\lambda-1)\alpha_n + (n+\lambda)\alpha_n - \frac{1}{9}\alpha_n\right]x^{n+\lambda} + \sum_{m=2}^{\infty}\alpha_{m-2}x^{m+\lambda} = 0 \Leftrightarrow$$

Η άθροιση είναι ανεξάρτητη από τον δείκτη και επομένως η παραπάνω σχέση γίνεται :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+\lambda)(n+\lambda-1)\alpha_n + (n+\lambda)\alpha_n - \frac{1}{9}\alpha_n\right]x^{n+\lambda} + \sum_{n=2}^{\infty}\alpha_{n-2}x^{n+\lambda} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+\lambda)(n+\lambda-1)\alpha_n+(n+\lambda)\alpha_n-\frac{1}{9}\alpha_n\right]x^{n+\lambda}+\sum_{n=2}^{\infty}\alpha_{n-2}x^{n+\lambda}=0 \Leftrightarrow$$

$$\left[\lambda(\lambda-1)+\lambda-\frac{1}{9}\right]a_0x^{\lambda}+\left[(1+\lambda)\lambda+1+\lambda-\frac{1}{9}\alpha_1\right]a_1x^{1+\lambda}+$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+\lambda)(n+\lambda-1)\alpha_n+(n+\lambda)\alpha_n-\frac{1}{9}\alpha_n+\alpha_{n-2}\right]x^{n+\lambda}=0 \quad (4)$$

Η σχέση (4) ισχύει για κάθε x επομένως θα πρέπει οι συντελεστές του x^n που εμφανίζονται στην (3) να είναι όλοι ίσοι με το μηδέν

$$\left[\lambda(\lambda-1)+\lambda-\frac{1}{9}\right]\alpha_0=0 \Leftrightarrow \left[\lambda^2-\frac{1}{9}-\lambda+\lambda\right]\alpha_0=0 \overset{(3)}{\Rightarrow} 0\alpha_0=0$$

$$\left[(1+\lambda)\lambda+(1+\lambda)-\frac{1}{9}\right]\alpha_1=0 \Leftrightarrow \left(2\lambda+1+\lambda^2-\frac{1}{9}\right)\alpha_1=0 \overset{(3)}{\Rightarrow} (1+2\lambda)\alpha_1=0 \quad (5)$$

$$(n+\lambda)(n+\lambda-1)\alpha_n+(n+\lambda)\alpha_n-\frac{1}{9}\alpha_n+\alpha_{n-2}=0$$

$$\Leftrightarrow \left[(n+\lambda)(n+\lambda-1)+(n+\lambda)-\frac{1}{9}\right]a_n+\alpha_{n-2}=0 \Leftrightarrow$$

$$\left[(n+\lambda)(n+\lambda)-\frac{1}{9}\right]a_n=-\alpha_{n-2} \Leftrightarrow \left[n^2+2n\lambda+\lambda^2-\frac{1}{9}\right]a_n=\alpha_{n-2} \overset{(3)}{\Rightarrow} [n(n+2\lambda)]a_n=\alpha_{n-2} \Leftrightarrow$$

$$a_n=-\frac{1}{n(n+2\lambda)}\alpha_{n-2}\,, n=2,3,4,\ldots \quad (6)$$

(γ)

Από την εξίσωση των δεικτών (3) υπολογίζουμε τις τιμές του λ

$$\lambda^2-\frac{1}{9}=0 \Rightarrow \lambda_1=\frac{1}{3},\lambda_2=-\frac{1}{3}$$

$$\text{Για } \lambda_1=\frac{1}{3} \text{ η (6) γίνεται } a_n=-\frac{1}{n(n+2/3)}\alpha_{n-2}, \qquad n=2,3,4..$$

$$(1+2\lambda)\alpha_1=0 \Rightarrow \left(1+\frac{2}{3}\right)\alpha_1=0 \Rightarrow \alpha_1=0$$

Υπολογίζουμε τους συντελεστές a_n

$$a_1=0$$

$$a_2=-\frac{1}{2\cdot 2\left(1+\frac{1}{3}\right)}\alpha_0=-\frac{1}{2^{2\cdot 1}\cdot 1!\left(1+\frac{1}{3}\right)}\alpha_0 \qquad (7)$$

$$a_3=-\frac{1}{3\left(3+\frac{2}{3}\right)}\alpha_1=0$$

$$a_4=-\frac{1}{4\left(4+\frac{2}{3}\right)}\alpha_2=\left(-\frac{1}{4\cdot 2\left(2+\frac{1}{3}\right)}\right)\left(-\frac{1}{2^{2\cdot 1}\cdot 1!\left(1+\frac{1}{3}\right)}\right)\alpha_0=\frac{1}{2^{2\cdot 2}\,2!\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(2+\frac{1}{3}\right)}\alpha_0$$

$$a_5 = -\frac{1}{5\left(5+\frac{2}{3}\right)}\alpha_3 = 0$$

$$a_6 = \frac{1}{6\left(6+\frac{2}{3}\right)}\alpha_4 = \left(-\frac{1}{2\cdot 3\cdot 2\left(3+\frac{1}{3}\right)}\right)\left(\frac{1}{2^{2\cdot 2}\ 2!\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(2+\frac{1}{3}\right)}\right)\alpha_0$$

$$= -\frac{1}{2^{2\cdot 3}\ 3!\left(3+\frac{2}{3}\right)\left(2+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)}\alpha_0$$

…

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2\cdot n}\ n!\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(2+\frac{1}{3}\right)\left(3+\frac{2}{3}\right)\cdots\left(n+\frac{1}{3}\right)}\alpha_0 \quad (8)$$

$$a_{2n+1} = 0$$

Το ότι η (8) ισχύει μπορούμε να το αποδείξουμε επαγωγικά ως εξής :

Η (8) ισχύει για n=1 αφού αντικαθιστώντας στην (8) καταλήγουμε στην (7). Εστω ότι ισχύει για n=k δηλαδή

$$a_{2k} = \frac{(-1)^\kappa}{2^{2\cdot \kappa}\ \kappa!\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(2+\frac{1}{3}\right)\left(3+\frac{2}{3}\right)\cdots\left(\kappa+\frac{1}{3}\right)}\alpha_0$$

Θα δείξουμε ότι ισχύει για $n = k+1$

$$a_{2(k+1)} = a_{2k+2} = -\frac{1}{(2\kappa+2)\left(2k+2+\frac{2}{3}\right)}\alpha_{2k} =$$

$$= \left(\frac{(-1)}{(2\kappa+2)\left(2k+2+\frac{2}{3}\right)}\right)\left(\frac{(-1)^\kappa}{2^{2\cdot \kappa}\ \kappa!\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(2+\frac{1}{3}\right)\left(3+\frac{2}{3}\right)\cdots\left(\kappa+\frac{1}{3}\right)}\right)\alpha_0$$

$$= \frac{(-1)^{\kappa+1}}{2(\kappa+1)2\left(k+1+\frac{1}{3}\right)2^{2\cdot \kappa}\ \kappa!\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(2+\frac{1}{3}\right)\left(3+\frac{2}{3}\right)\cdots\left(\kappa+\frac{1}{3}\right)}\alpha_0 =$$

$$= \frac{(-1)^{\kappa+1}}{2^{2\cdot \kappa+2}\ (\kappa+1)!\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(2+\frac{1}{3}\right)\left(3+\frac{2}{3}\right)\cdots\left(\kappa+\frac{1}{3}\right)\left(k+1+\frac{1}{3}\right)}\alpha_0$$

Επομένως η λύση της (1) που προκύπτουν για τις τιμές λ=1/3 σύμφωνα με τη (2) είναι:

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n x^{n+\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n x^{n+\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{3}}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{2n}x^{2n} + x^{\frac{1}{3}}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{2n+1}x^{2n+1}$$

$$= a_0 x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{1}{3}}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_{2n}x^{2n} + x^{\frac{1}{3}}\sum_{n=0}^{\infty}0x^{n+1}$$

$$= x^{\frac{1}{3}}\left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_{2n}x^{2n}\right) = a_0 x^{\frac{1}{3}}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^\kappa}{2^{2\cdot \kappa}\ \kappa!\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(2+\frac{1}{3}\right)\left(3+\frac{2}{3}\right)\cdots\left(\kappa+\frac{1}{3}\right)}\right]$$

Για $\lambda_1 = -\dfrac{1}{3}$ *η (6) γίνεται* $a_n = -\dfrac{1}{n(n-2/3)}\alpha_{n-2}, \qquad n = 2,3,4..$

$$(1+2\lambda)\alpha_1 = 0 \Rightarrow \left(1-\frac{2}{3}\right)\alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$$

Υπολογίζουμε τους συντελεστές a_n

$a_1 = 0$

$$a_2 = -\frac{1}{2\cdot 2\left(1-\frac{1}{3}\right)}\alpha_0 = -\frac{1}{2^{2\cdot 1}\cdot 1!\left(1-\frac{1}{3}\right)}\alpha_0 \qquad (7)$$

$$a_3 = -\frac{1}{3\left(3-\frac{2}{3}\right)}\alpha_1 = 0$$

$$a_4 = -\frac{1}{4\left(4-\frac{2}{3}\right)}\alpha_2 = \left(-\frac{1}{4\ \cdot 2\left(2-\frac{1}{3}\right)}\right)\left(-\frac{1}{2^{2\cdot 1}\cdot 1!\left(1-\frac{1}{3}\right)}\right)\alpha_0 = \frac{1}{2^{2\cdot 2}\ 2!\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(2-\frac{1}{3}\right)}\alpha_0$$

$$a_5 = -\frac{1}{5\left(5-\frac{2}{3}\right)}\alpha_3 = 0$$

$$a_6 = \frac{1}{6\left(6-\frac{2}{3}\right)}\alpha_4 = \left(-\frac{1}{2\cdot 3\cdot 2\left(3-\frac{1}{3}\right)}\right)\left(\frac{1}{2^{2\cdot 2}\ 2!\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(2-\frac{1}{3}\right)}\right)\alpha_0$$
$$= -\frac{1}{2^{2\cdot 3}\ 3!\left(3-\frac{2}{3}\right)\left(2-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)}\alpha_0$$

…

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^{2\cdot n}\ n!\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(2-\frac{1}{3}\right)\left(3-\frac{2}{3}\right)\cdots\left(n-\frac{1}{3}\right)}\alpha_0 \quad (8)$$

$a_{2n+1} = 0$

Το ότι η (8) ισχύει μπορούμε να το αποδείξουμε επαγωγικά όπως προηγουμένως:

Επομένως η λύση της (1) που προκύπτει για τις τιμές λ=-1/3 σύμφωνα με τη (2) είναι:

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n x^{n+\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n x^{n-\frac{1}{3}} = x^{-\frac{1}{3}}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{2n}x^{2n} + x^{-\frac{1}{3}}\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{2n+1}x^{2n+1}$$

$$= a_0 x^{-\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_{2n}x^{2n} + x^{-\frac{1}{3}}\sum_{n=0}^{\infty}0x^{n+1} = x^{-\frac{1}{3}}\left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_{2n}x^{2n}\right)$$

$$= a_0 x^{-\frac{1}{3}}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\kappa}}{2^{2\cdot\kappa}\ \kappa!\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(2-\frac{1}{3}\right)\left(3-\frac{2}{3}\right)\cdots\left(\kappa-\frac{1}{3}\right)}\right]$$

Συστήματα Διαφορικών εξισώσεων

Μέθοδος απαλοιφής Παράδειγμα 1

1) *Παίρνουνε την πρώτη εξίσωση και την παραγωγίζουμε*
2) *Εμφανίζεται μια πρώτη παράγωγος που δεν την θέλουμε και μια μεταβλητή που δεν την θέλουμε*
3) *Αντικαθιστούμε την πρώτη παράγωγο από την δεύτερη και την μεταβλητή από την πρώτη.*
4) *Η εξίσωση που προκύπτει από την απαλοιφή είναι μεγαλύτερης τάξης*

$$\left.\begin{matrix} y_1' = 3y_1 + y_2 \\ y_2' = y_1 + 3y_2 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} y_2 = y_1' - 3y_1 \\ (y_1' - 3y_1)' = y_1 + 3(y_1' - 3y_1) \end{matrix}\right\}$$

$$y_1'' - 6y_1' + 8y_1 = 0$$

Η εξίσωση που προκύπτει από την απαλοιφή είναι μεγαλύτερης τάξης

$$y_1(x) = c_1 e^{4x} + c_2 e^{2x}$$

Από τη δεύτερη συνάρτηση

$$y_2 = y_1' - 3y_1 \Rightarrow y_2 = 4c_1 e^{4x} + 2c_2 e^{2x} - 3c_1 e^{4x} - 3c_2 e^{2x} \Rightarrow$$

$$y_2 = c_1 e^{4x} - c_2 e^{2x}$$

Μέθοδος απαλοιφής Παράδειγμα 2

Με τη μεθοδο της απαλοιφής να βρεθεί η λύση του ΠΑΤ

$$\left\{\begin{matrix} x'(t) = -3x(t) + 4y(t) \\ y'(t) = -2x(t) + 3y(t) \end{matrix}\right\} \; x(0) = 1 \, , y(0) = 5$$

Από το πρώτο σύστημα έχουμε

$$4y(t) = x'(t) + 3x(t) \;\; (2)$$

Παραγωγίζουμε το πρώτο σύστημα.

$$x''(t) = -3x'(t) + 4y'(t) = -3x'(t) - 8x(t) + 3 \cdot 4y(t) = -3x'(t) - 8x(t) + 3\big(x'(t) + 3x(t)\big) \Rightarrow$$

$$x''(t) = -3x'(t) - 8x(t) + 3x'(t) + 9x(t) = x(t) \Rightarrow$$

$$x''(t) - x(t) = 0 \;\; (2)$$

Η (2) είναι μια γραμμική ομογενής με σταθερούς συντελεστές της οποίας η χαρακτηριστική εξίσωση είναι

$$\lambda^2 - 1 = 0 \, , \lambda = \pm 1$$

Και η γενική λύση είναι

$$x(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{-t}$$

Από την (2)υπολογίζουμε το $y(t)$

$$y(t) = \frac{1}{4}x'(t) + \frac{3}{4}x(t) = \frac{1}{4}(c_1e^t + c_2e^{-t})' + \frac{3}{4}(c_1e^t + c_2e^{-t}) = \frac{1}{4}c_1e^t \ - \frac{1}{4}c_2e^{-t} + \frac{3}{4}c_1e^t + \frac{3}{4}c_2e^{-t} \Rightarrow$$

$$y(t) = c_1e^t + \frac{1}{2}c_2e^{-t}$$

Εφαρμόζουμε τις αρχικές συνθήκες

$$x(0) = 1 \Rightarrow c_1e^0 + c_2e^{-0} = 1 \Rightarrow c_1 + c_2 = 1 \quad (3)$$

$$y(0) = 5 \Rightarrow c_1e^0 + \frac{1}{2}c_2e^{-0} = 5 \Rightarrow c_1 + \frac{1}{2}c_2 = 5 \quad (4)$$

Από τις (4) και (5) έχουμε

$$(1 - c_2) + \frac{1}{2}c_2 = 5 \Rightarrow -\frac{1}{2}c_2 = 4 \ \Rightarrow c_2 = -8$$

Από την (3) υπολογίζουμε την c_1

$$c_1 + c_2 = 1 \Rightarrow c_1 - 8 = 1 \Rightarrow c_1 = 9$$

Επομένως η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι

$$x(t) = 9e^t - 8e^{-t}$$

$$y(t) = 9e^t - 4e^{-t}$$

Μέθοδος των πινάκων

Περιπτώσεις ιδιοτιμών

1.Διακεκριμένες

Αν έχουμε n-διακεκριμένες ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ Με τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $Y_{\lambda_1}, Y_{\lambda_2}, \dots, Y_{\lambda_n}$

Τότε οι λύσεις είναι $e^{\lambda_1 x}\, Y_{\lambda_1}, e^{\lambda_2 x}\, Y_{\lambda_2}, \dots, e^{\lambda_n x}\, Y_{\lambda_n}$ αποτελούν n γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις και η γενική λύση δίνεται από τη σχέση.

$$Y = c_1e^{\lambda_1 x}\, Y_{\lambda_1} + c_2e^{\lambda_2 x}\, Y_{\lambda_2} + \cdots + c_ne^{\lambda_n x}\, Y_{\lambda_n}$$

2.Πολαπλές

Έστω τώρα λ μια ιδιοτιμή του πίνακα Α αλεγεβρικής πολλαπλότητας m. Έστω επίσης m ο αριθμός των γραμμικά ανεξάρτητων ιδιοδιανυσμάτων (απλών και γενικευμένων) που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ. *Τότε μπορούμε να βρούμε m γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του (4), τις*

$$e^{\lambda x}\zeta, e^{\lambda x}(x\zeta + n), e^{\lambda x}\left(\frac{x^2}{2!}\zeta + xn + \theta\right), \dots\dots, e^{\lambda x}\left(\frac{x^{m-1}}{(m-1)!}\zeta + \cdots + \delta\right)$$

όπου ζ απλό ιδιοδιάνυσμα και η,….,δ γενικευμένα ιδιοδιανύσματα του Α που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ (βλ. Τσιγγέλης). *Επί πλέον αν αυτές οι λύσεις βρεθούν για κάθε διακεκριμένη ιδιοτιμή θα καταλήξουμε σε n-γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του* (4).

3.Μιγαδικές

Στην περίπτωση που λ είναι μια μιγαδική ιδιοτιμή του Α, τότε $\bar{\lambda}$(ο συζυγής του λ) είναι επίσης ιδιοτιμή του Α. Επειδή δε $AY_\lambda = \lambda Y_\lambda$ και Α πραγματικός πίνακας, προκύπτει ότι

$$\bar{A}\ \overline{Y_\lambda} = \bar{\lambda}\,\overline{Y_\lambda} \ \Rightarrow A\ \overline{Y_\lambda} = \bar{\lambda}\,\overline{Y_\lambda}$$

δηλαδή αν το ιδιοδιάνυσμα Y_λ αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ, τότε το $\overline{Y_\lambda}$ αντιστοιχεί στην $\bar{\lambda}$.

Έστω τώρα $\lambda = a + ib$ μια ιδιοτιμή του πίνακα Α και Y_λ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα. Το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της λύσης $e^{\lambda x}Y_\lambda$ του συστήματος (4) είναι επίσης λύσεις του (4). Προκύπτει δε ότι η γενική λύση είναι της μορφής

$$Y = e^{ax}\{c_1[ReY_\lambda cosbx - ImY_\lambda sinbx] + c_2[ImY_\lambda cosbx + ReY_\lambda sinbx]\}$$

όπου ReY_λ το πραγματικό και ImY_λ το φανταστικό μέρος του Y_λ. Ακόμη η αντίστοιχη λύση του (4) μπορεί να γραφεί και στη μορφή

$$Y = c_1 e^{\lambda x}Y_\lambda + c_2 e^{\bar{\lambda}x}\,\overline{Y_\lambda}$$

Γενικά αν ο πίνακας είναι συμμετρικός διαγωνοποιείται από χέρι

Παράδειγμα 1 με ιδιοτιμές διακεκριμένες

$$y_1' = 4y_1 - y_2$$
$$y_2' = -4y_1 + 4y_2$$

Γράφουμε το σύστημα με τη μορφή πινάκων

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

ή $Y' = AY$

βρίσκουμε τη χαρακτηριστική εξίσωση του πίνακα Α $|A - I\lambda| = 0$

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ -4 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 8\lambda + 12 = 0$$

Βρίσκουμε τις λύσεις και επομένως τις ιδιοτιμές του πίνακα

$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 6$

Βρίσκουμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα Y_{λ_1}και Y_{λ_1}

Για $\lambda_1 = 2$ *έχουμε* $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow 2\xi_1 - \xi_2 = 0\,, \xi_2 = 2\xi_1\,, \qquad Y_{\lambda_1} = [1 \quad 2]^T$

Οι λύσεις είναι της μορφής $Y = \xi e^{\lambda x}$

$Y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{2x}$

Για $\lambda_2 = 6$ *έχουμε* $\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -2\xi_1 - \xi_2 = 0\,, \xi_2 = -2\xi_1\,, \qquad Y_{\lambda_2} = [1 \quad -2]^T$

Οι λύσεις είναι της μορφής $Y = \xi e^{\lambda x}$

$Y_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{6x}$

Η γενική λύση δίνεται από τη σχέση

$Y = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{2x} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{6x}$

$Y_1 = c_1 e^{2x} + c_2 e^{6x}$

$Y_2 = 2c_2 e^{2x} - 2c_2 e^{6x}$

Παράδειγμα 2 με ιδιοτιμές διακεκριμένες

$x'(t) = -3x(t) + 4y(t)$
$y'(t) = -2x(t) + 3y(t)$

Γράφουμε το σύστημα σε μορφή πινάκων

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

Βρίσκουμε την χαρακτηριστική εξίσωση του πίνακα A

$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 4 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (3-\lambda)(-3-\lambda) + 8 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0$

Βρίσκουμε ότι ο πίνακας A έχει ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ *Στη συνέχεια βρίσκουμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα.*

Για $\lambda_1 = 1$ *θα έχουμε*

$(A-1)X_1 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -4u + 4v = 0 \\ -2u + 2v = 0 \end{cases} \Rightarrow v = u$

Επιλέγουμε $u = 1$ *οπότε προκύπτει το ιδιοδιάνυσμα του A:* $X_1 = [1 \quad 1]^T$

Για $\lambda_1 = -1$ *θα έχουμε*

$(A-(-1))X_1 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2u + 4v = 0 \\ -2u + 4v = 0 \end{cases} \Rightarrow v = \frac{1}{2}u$

Επιλέγουμε $u = 1$ *οπότε προκύπτει το δεύτερο ιδιοδιάνυσμα του A:* $X_1 = [1 \quad 1/2]^T$

Βρήκαμε διακεκριμένες ιδιοτιμές και απλά ιδιοδιανύσματα συνεπώς οι λύσεις είναι της μορφής $Y_i = X_i e^{\lambda x}$

$Y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t$

$Y_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} e^{-t}$

Οι δύο λύσεις είναι γραμμικά ανεξάρτητες και η γενική λύση δίνεται από τη σχέση :

$Y = c_1 Y_1 + c_2 Y_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} e^{-t}$

$x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$

$y(t) = c_1 e^t + \frac{1}{2} c_2 e^{-t}$

όπου οι c_1, c_2 *είναι αυθαίρετες σταθερές*

Εφαρμόζουμε τις αρχικές συνθήκες

$x(0) = 1 \Rightarrow c_1 e^0 + c_2 e^{-0} = 1 \Rightarrow c_1 + c_2 = 1 \quad (3)$

$y(0) = 5 \Rightarrow c_1 e^0 + \frac{1}{2} c_2 e^{-0} = 5 \Rightarrow c_1 + \frac{1}{2} c_2 = 5 \quad (4)$

Από τις (4) και (5) έχουμε

$(1 - c_2) + \frac{1}{2} c_2 = 5 \Rightarrow -\frac{1}{2} c_2 = 4 \Rightarrow c_2 = -8$

Από την (3) υπολογίζουμε την c_1

$c_1 + c_2 = 1 \Rightarrow c_1 - 8 = 1 \Rightarrow c_1 = 9$

Επομένως η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών είναι

$x(t) = 9e^t - 8e^{-t}$

$y(t) = 9e^t - 4e^{-t}$

Με ιδιοτιμές πολλαπλές

Εάν το ένα ιδιοδιάνυσμα είναι το X_1 *και το γενικευμένο είναι το* X_2 *τότε η λύση θα είναι*

$Y_1 = X_1 e^{\lambda x}$
$Y_2 = (x X_1 + X_2) e^{\lambda x}$

Παράδειγμα

$x'(t) = -4x(t) + y(t)$
$y'(t) = -x(t) - 2y(t)$

Γράφουμε το σύστημα σε μορφή πινάκων

$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$

A

Βρίσκουμε την χαρακτηριστική εξίσωση του πίνακα Α

$$\begin{vmatrix} -4-\lambda & 1 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-2-\lambda)(-4-\lambda)+1=0 \Rightarrow (\lambda+3)^2=0$$

Βρίσκουμε ότι ο πίνακας Α έχει την ιδιοτιμή $\lambda_1, \lambda_2 = -3$ *που είναι πολλαπλότητας 2 . Στη συνέχεια βρίσκουμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα.*

Για $\lambda_1 = -3$ *θα έχουμε*

$$(A+3)X_1 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -u+v=0 \\ -u+v=0 \end{cases} \Rightarrow v = u$$

Επιλέγουμε $u = 1$ *οπότε προκύπτει το απλό ιδιοδιάνυσμα του Α:* $X_1 = [1 \quad 1]^T$

Μια λύση του συστήματος 1 που είναι της μορφής $Y_i = X_i e^{\lambda x}$

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t}$$

Ο πίνακας Α δεν έχει άλλα απλά ιδιοδιανύσματα γραμμικά ανεξάρτητα από το X_1 *και προχωρούμε στον υπολογισμό του γενικευμένου ιδιοδιανύσματος λύνοιντας την εξίσωση*

$$(A+3)X_2 = X_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -u+v=1 \\ -u+v=1 \end{cases} \Rightarrow v = u+1$$

Επιλέγουμε $u = 0$ *οπότε προκύπτει το δεύτερο ιδιοδιάνυσμα του Α:* $X_1 = [0 \quad 1]^T$

Και επομένως μια δεύτερη λύση του συστήματος γραμμικά ανεξάρτητη της προηγούμενης είναι:

$$Y_2 = e^{3t}\left(t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = e^{-3t}\begin{bmatrix} t \\ t+1 \end{bmatrix}$$

Και η γενική λύση του συστήματος είναι :

$$Y = c_1Y_1 + c_2Y_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}e^{-3t} + c_2\begin{bmatrix} t \\ t+1 \end{bmatrix}e^{-3t} \Rightarrow \begin{matrix} x(t) = c_1e^{-3t} + c_2te^{-3t} \\ y(t) = c_1e^{-3t} + c_2(t+1)e^{-3t} \end{matrix}$$

όπου οι c_1, c_2 *είναι αυθαίρετες σταθερές*

Με ιδιοτιμές μιγαδικές

Πχ βρίσκω τη λύση της χαρακτηριστικής $\lambda_{1,2} = 2 \pm 3i$ *και το ιδιοδιάνυσμα είναι*

$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3i \end{bmatrix}$*και μια λύση έιναι*

$Y_1 = c_1 e^{\lambda x} Y_\lambda$ *δηλαδή* $Y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3i \end{bmatrix} e^{(2+3i)t} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3i \end{bmatrix} e^{2i}(cos3t + isin3t)$

Το δεύτερο ιδιοδιάνυσμα θα είναι το συζυγές του και η λύση θα είναι

$Y_1 = c_2 e^{\bar{\lambda} x}\,\overline{Y_\lambda}$ *δηλαδή* $Y_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3i \end{bmatrix} e^{(2-3i)t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3i \end{bmatrix} e^{2i}(cos3t - isin3t)$

παράδειγμα

$x'(t) = 2x(t) - y(t)$
$y'(t) = 9x(t) + 2y(t)$

Γράφουμε το σύστημα σε μορφή πινάκων

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 9 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

Βρίσκουμε την χαρακτηριστική εξίσωση του πίνακα A

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 9 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2-\lambda)(2-\lambda) + 9 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$$

Βρίσκουμε ότι η χαρακτηριστική εξίσωση του πίνακα A έχει μιγαδικές συζυγείς ιδιοτιμές $\lambda_1 = 2 + 3i, \lambda_2 = 2 - 3i$

Για την ιδιοτιμή $\lambda_1 = 2 + 3i$ *έχουμε*

$$\begin{bmatrix} -3i & -1 \\ 9 & -3i \end{bmatrix}$$

$$(A+3)X_1 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -3i & -1 \\ 9 & -3i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -3iu - v = 0 \\ -9u - 3iv = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3iu = v \\ -9u - 3iv = 0 \end{cases}$$

Επιλέγουμε $u = 1$ *οπότε προκύπτει το ιδιοδιάνυσμα του A:* $X_1 = [1 \quad -3i]^T$

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} i$$

$$ReX_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ και } ImX_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Έστω τώρα $\lambda = a + ib$ *μια ιδιοτιμή του πίνακα A και* Y_λ *το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα. Το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της λύσης* $e^{\lambda x} Y_\lambda$ *του συστήματος (4) είναι επίσης λύσεις του (4). Προκύπτει δε ότι η γενική λύση είναι της μορφής*

$$Y = e^{ax}\{c_1[ReY_\lambda cosbx - ImY_\lambda sinbx] + c_2[ImY_\lambda cosbx + ReY_\lambda sinbx]\}$$

όπου ReY_λ *το πραγματικό και* ImY_λ *το φανταστικό μέρος του* Y_λ. Ακόμη η αντίστοιχη λύση του (4) μπορεί να γραφεί και στη μορφή

$$Y = c_1 e^{\lambda x} Y_\lambda + c_2 e^{\bar{\lambda} x} \overline{Y_\lambda}$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{2t}\left\{c_1\left[\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} cos3t - \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} sin3t\right] + c_2\left[\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} cos3t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} sin3t\right]\right\}$$

$$x(t) = e^{2t}(c_1 cos3t + c_2 sin3t)$$

$$y(t) = e^{2t}(3c_1 sin3t - 3c_2 cos3t)$$

όπου οι c_1, c_2 *είναι αυθαίρετες σταθερές*

Επίλυση μη ομογενών Σ.Σ.Δ.Ε

Η λύση του μη ομογενούς συστήματος

$Y' = AY + F$

Βρίσκουμε μια μερική λύση την οποία και προσθέτουμε στη γενική λύση του ομογενούς συστήματος.Για την εύρεση μιας μερικής λύσης εφαρμόζουμε τις μεθόδους των προσδιοριστέων συντελεστών και τη μέθοδο μεταβολής των παραμέτρων.

1^{o} *Παράδειγμα με σύστημα μη ομογενές*

Έστω το σύστημα

$$x'(t) = 3x(t) - y(t) + 1$$
$$y'(t) = 9x(t) - 3y(t) + t$$

Οι λύσεις του ομογενούς συστήματος είναι

$$x(t) = c_1 + c_2 t$$
$$y(t) = 3c_1 + c_2(3t - 1)$$

Αναζητούμε μερική λύση του μη ομογενούς σύμφωνα με τη μέθοδο μεταβολής των παραμέτρων της μορφής

$$x(t) = u_1(t) + u_2(t)t$$
$$y(t) = 3u_1(t) + u_2(t)(3t - 1)$$

Τα $u_1(t), u_2(t)$ *ικανοποιούν τη σχέση*

$$u_1'(t)\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} + u'_2(t)\begin{bmatrix}t\\3t-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\t\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} u_1'(t) + tu_2'(t) = 1 \\ 3u_1'(t) + (3-1)u_2'(t) = t \end{array}$$

Που έχει λύση $u_1'(t) = t^2 - 3t + 1\, , u_2'(t) = 3 - t$

Επομένως

$$u_1(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} + t\, , u_2(t) = 3t - \frac{t^2}{2}$$

Και μια μερική λύση του συστήματος είναι

$$X_\mu(t) = \left(\frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} + t\right)\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} + \left(3t - \frac{t^2}{2}\right)\begin{bmatrix}1\\3t-1\end{bmatrix}$$

Και η γενική λύση

$$x(t) = c_1 + c_2 t - \frac{t^3}{3} + \frac{3t^2}{2} + t$$

$$y(t) = 3c_1 + c_2(3t - 1) - \frac{t^3}{2} + 5t^2$$

2^o *Παράδειγμα με σύστημα μη ομογενές*

Το σύστημα

$$\begin{aligned} x'(t) &= -4x(t) + y(t) \\ y'(t) &= -x(t) - 2y(t) + 9 \end{aligned} \qquad (1)$$

Γράφεται σε ισοδύναμη μορφή πινάκων

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

Για να βρούμε τη γενική λύση του μη ομογενούς συστήματος (1) πρέπει να βρούμε πρώτα τη γενική λύση $X_o(t)$ *του ομογενούς συστήματος*

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \qquad (3)$$

και στη συνέχεια θα βρούμε μια μερική λύση $X_\mu(t)$ *του μη ομογενούς συστήματος (1) και η γενική λύση θα είναι το άθροισμα* $X_o(t) + X_\mu(t)$

παραπάνω στο «Παράδειγμα με ιδιοτιμές πολλαπλές» έχουμε βρει τη γενική λύση του ομογενούς συστήματος $X_o(t)$

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{-3t} + c_2 t e^{-3t} \\ y(t) &= c_1 e^{-3t} + c_2 (t+1) e^{-3t} \end{aligned}$$

$$X_o(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{bmatrix} t \\ t+1 \end{bmatrix} e^{-3t}$$

όπου οι c_1, c_2 *είναι αυθαίρετες σταθερές*

Για να βρούμε την μερική λύση $X_\mu(t)$ *θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο μεταβολής των παραμέτρων όπου αναζητούμε λύση του συστήματος της μορφής :*

$$\begin{aligned} x(t) &= u_1(t) e^{-3t} + u_2(t) t e^{-3t} \\ y(t) &= u_1(t) e^{-3t} + u_2(t)(t+1) e^{-3t} \end{aligned}$$

Ή ισοδύναμα:

$$X_\mu(t) = u_1(t) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t} + u_2(t) \begin{bmatrix} t \\ t+1 \end{bmatrix} e^{-3t} \qquad (4)$$

Όπου οι συναρτήσεις $u_1(t), u_2(t)$ *πληρούν τη σχέση:*

$$u_1'(t) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t} + u'_2(t) \begin{bmatrix} t \\ t+1 \end{bmatrix} e^{-3t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ισοδύναμα το γραμμικό σύστημα:

$$\begin{aligned} u_1'(t) e^{-3t} + u'_2(t) t e^{-3t} &= 0 \\ u_1'(t) e^{-3t} + u'_2(t)(t+1) e^{-3t} &= 9 \end{aligned}$$

Επιλύουμε το παραπάνω σύστημα με τη μέθοδο Crammer

Η ορίζουσα των συντελεστών είναι :

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{-3t} & te^{-3t} \\ e^{-3t} & (t+1)e^{-3t} \end{vmatrix} = e^{-6t}(t+1) - te^{-6t} = e^{-6t}$$

$$\Delta_{u_1'(t)} = \begin{vmatrix} 0 & te^{-3t} \\ 9 & (t+1)e^{-3t} \end{vmatrix} = -9te^{-3t}$$

$$\Delta_{u_2'(t)} = \begin{vmatrix} e^{-3t} & 0 \\ e^{-3t} & 9 \end{vmatrix} = 9e^{-3t}$$

Και η λύση του συστήματος είναι

$$u_1'(t) = \frac{\Delta_{u_1'(t)}}{\Delta} = \frac{-9te^{-3t}}{e^{-6t}} = -9te^{3t}$$

$$u_2'(t) = \frac{\Delta_{u_2'(t)}}{\Delta} = \frac{9e^{-3t}}{e^{-6t}} = 9e^{3t}$$

Ολοκληρώνοντας τις παραπάνω συναρτήσεις ως προς t προκύπτουν οι $u_1(t), u_2(t)$

$$u_1(t) = \int u_1'(t)\,dt = \int -9te^{3t}\,dt = -9\int t\left(\frac{1}{3}e^{3t}\right)'dt = -3te^{3t} + 3\int e^{3t}\,dt = -3te^{3t} + e^{3t} \Rightarrow$$

$$u_1(t) = (1-3t)e^{3t}$$

$$u_2(t) = \int u_2'(t)\,dt = \int 9e^{3t}\,dt = 9\int \left(\frac{1}{3}e^{3t}\right)'dt = 3e^{3t}$$

Επομένως μια μερική λύση του συστήματος (1) είναι σύμφωνα με την (4) :

$$X_\mu(t) = (1-3t)e^{3t}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}e^{-3t} + 3e^{3t}\begin{bmatrix}t\\t+1\end{bmatrix}e^{-3t} = (1-3t)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix}t\\t+1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix} \quad (5)$$

Και η γενική λύση του μη ομογενούς συστήματος είναι :

$$X(t) = X_o(t) + X_\mu(t) = c_1\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}e^{-3t} + c_2\begin{bmatrix}t\\t+1\end{bmatrix}e^{-3t} + \begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}$$

Ή ισοδύναμα:

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1e^{-3t} + c_2te^{-3t} + 1 \\ y(t) &= c_1e^{-3t} + c_2(t+1)e^{-3t} + 4 \end{aligned} \quad (6)$$

όπου οι c_1, c_2 *είναι αυθαίρετες σταθερές*

Εφαρμόζουμε τις αρχικές συνθήκες $x(0) = 2,\ y(0) = 6$ *στη γενική λύση που βρήκαμε στο (6)*

$$\begin{aligned} x(0) &= 2 \Rightarrow c_1 = 1 \\ y(0) &= 6 \Rightarrow c_1 + c_2 + 4 = 6 \Rightarrow c_2 = 1 \end{aligned}$$

Σύμφωνα με τις τιμές των σταθερών που υπολογίσαμε παραπάνω η λύση του προβλήματος των αρχικών τιμών είναι:

$$\begin{aligned} x(t) &= (t+1)e^{-3t} + 1 \\ y(t) &= (t+2)e^{-3t} + 4 \end{aligned}$$

Εφαρμογές

Αν ο ρυθμός μεταβολής x’(t) μιας ποσότητας της ουσίας Α μειώνεται αναλόγως της υπάρχουσας ποσότητας x(t) της ουσίας Α με σταθερά αναλογίας -2 και προστίθεται ουσία Α με ρυθμό sint. Κατά συνέπεια θα ισχύει: x’(t)=-2x(t)+sint

Η παράγωγος της ορμής ως προς το χρόνο ενός σώματος ισούται με τη συνισταμένη δύναμη που ασκούνται σε αυτό

$$\frac{d}{dt}(mu) = \Sigma F$$

Αν θέλουμε να βάλουμε την θέση (x,y,z) στην παραπάνω σχέση

$$\frac{d}{dt}(mu) = \Sigma F \Leftrightarrow m\frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right) = \Sigma F$$

Δύναμη επαναφοράς του ελατηρίου $F(t) =- \kappa\chi(t)$ *και εάν το ελατήριο κρέμεται από το ταβάνι κατακόρυφο ελατήριο και επιμηκύνεται κατά* l *από το φυσικό του μήκος με τη δύναμη του βάρους* $mg = kl$

Παράρτημα

Β βαθμού μη Ομογενείς με σταθερούς συντελεστές

$ay'' + by' + cy = R(x)$

Η γενική λύση της μη ομογενούς ισούται με την γενική λύση της ομογενούς συν μια οποιαδήποτε μερική λύση της πλήρους εξίσωσης

Πολυώνυμο (γραμμικός συνδυασμός δυνάμεων)	*Πολυώνυμο ίδιου βαθμού*
Γραμμικός συνδυασμός ημιτόνου και συνημίτονου	*Γραμμικός συνδυασμός ημιτόνου και συνημίτονου ίδιου ορίσματος*
Πολυώνυμο Χ εκθετικό	*Πολυώνυμο Χ εκθετικό*

Εξισώσεις με συμμετρία μετατόπισης ως προς y

Είναι του τύπου $F(y'', y', x) = 0$

Όπου απουσιάζει η μεταβλητή y και εμφανίζονται μόνο οι παράγωγοί της .Ανάγονται σε πρωτοτάξιες με αλλαγή μεταβλητής

$y' = u\ \sigma\varepsilon\ F(u', u, x) = 0$

Παραμένουν αμετάβλητες στην αντικατάσταση $y \longrightarrow y + a$

Εξισώσεις με συμμετρία κλίμακας ως προς y

Παραμένουν αμετάβλητες στην αντικατάσταση $y \longrightarrow \lambda y$

συμμετρία κλίμακας έχουν οι εξισώσεις που είναι ομογενή πολυώνυμα ως προς τις μεταβλητές $\boldsymbol{y, y', y''}$

$y'' + Py' + Qy = 0$ *Βαθμός ομογένειας 1*

$yy'' + Ay'^2 + Byy' = 0$ *Βαθμός ομογένειας 2*

$y^2y'' + Ayy'y'' + By^3 = 0$ *Βαθμός ομογένειας 3*

Οι συντελεστές είναι συναρτήσεις του x

Εάν βάλουμε $y \longrightarrow \lambda y$ *θα πάρουμε* λ^d *όπου d ο βαθμός ομογένειας ο οποίος απαλείφεται.*

Ανάγονται σε πρωτοτάξιες με απλή αλλαγή εξαρτημένης μεταβλητής.

$y = e^Y$, $y' = Y'e^x$, $y'' = (Y'' + y'^2)e^Y$

Ορθογώνιες τροχιές : *Απαλείφουμε το κ , παραγωγίζουμε και βάζουμε* $-\frac{1}{y} = y'$ *και λύνουμε τη διαφορική αυτό που προκύπτει είναι η ορθογώνια τροχιά.*

Παράδειγμα

Να βρεθούν οι ορθογώνιες τροχιές της οικογένειας καμπυλών που ορίζονται από την εξίσωση ,
$y = e^{x+k}$ (1) όπου k θετικός αριθμός.

Λύση

Μας δίνεται η εξίσωση

$y = e^{x+k}$ (1) , $k > 0$

Υπολογίζουμε το κ

$lny = lne^{x+k} \Rightarrow x + k = lny \Rightarrow k = lny - x$ (2)

Έστω ένα σημείο (x,y) όπου τέμνονται μια από τις καμπύλες της εξίσωσης που μας δίνεται και μια από τις καμπύλες από τις ορθογώνιες τροχιές. Στο σημείο αυτό η κλίση της καμπύλης που μας δίνεται βρίσκεται από την παράγωγό της (1)

$$\frac{dy}{dx} = e^{x+k} \ (3)$$

Αντικαθιστούμε το κ από τη (2)

$$\frac{dy}{dx} = e^{lny} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y \ (3)$$

Επίσης η κλίση της αντίστοιχης ορθογώνιας τροχιάς που διέρχεται από το ίδιο σημείο δίνεται από την αντίθετη και αντίστροφη της (3)αφού γνωρίζουμε ότι το γινόμενο των κλίσεων τους για να είναι κάθετες μας κάνει -1

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{y} \ (4)$$

Η (4) περιγράφει σε διαφορική μορφή την εξίσωση των ορθογώνιων τροχιών, η λύση της θα μας δώσει την ζητούμενη εξίσωση. Παρατηρούμε ότι είναι διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης χωριζόμενων μεταβλητών :

$$ydy = -dx \Rightarrow \int ydy = \int -dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = -x + c_1 \Rightarrow y^2 = -2x + 2c_1$$

Αντικαθιστούμε τη $2c_1$ με μια νέα μεταβλητή τη c

$$y^2 = -2x + c$$

Η παραπάνω είναι η εξίσωση της οικογένειας καμπυλών με ορθογώνιες τροχιές ως αναφορά τις οικογένειες καμπυλών της (1)

Παραπομπές

$(**)$*Χρησιμοποιώντας τους τύπους το Euler*

$$e^{ibx} = cos(bx) + isin(bx)\,, e^{-bx} = cos(bx) - isin(bx)$$

μπορούμε να πάρουμε τα πραγματικά μέρη της λύσης

$$y(x) = c_1 e^{ax} e^{bix} + c_1^* e^{ax} e^{-bix} = e^{ax}\big(c_1 cos(bx) + c_1 isin(bx)\big) + e^{ax}\big(c_1^* cos(bx) - c_1^* isin(bx)\big) =$$

$$= e^{ax}[(c_1 + c_1^*)\, cos(bx) + i(c_1 - c_1^*) sin(bx)]$$

Το άθροισμα $B = c_1 + c_1^*$ μας δίνει ένα πραγματικό αριθμό

Το άθροισμα $A = i(c_1 - c_1^*)$ μας δίνει επίσης ένα πραγματικό αριθμό

Επομένως τελικά η λύση της διαφορικής γράφεται:

$$y(x) = A\, e^{ax} sin(bx) + Be^{ax}\, cos(bx)$$

$$y = e^{ax}\big(c_1 cos(bx) + c_2 sin(bx)\big)$$

Εάν θέσουμε $c_1 = Asin\varphi\,, c_2 = Acos\varphi$

$$y = e^{ax}\big(c_1 cos(bx) + c_2 sin(bx)\big) = e^{ax}\big(Asin\varphi\, cos(bx) + Acos\varphi\, sin(bx)\big) = e^{ax} Asin(bx + \varphi)$$

Εάν θέσουμε $c_1 = Acos\varphi \;\; c_2 = -Asin\varphi$,

$$y = e^{ax}\big(c_1 cos(bx) + c_2 sin(bx)\big) = e^{ax}\big(Acos\varphi\, cos(bx) - Asin\varphi\, sin(bx)\big) = e^{ax} Acos(bx + \varphi)$$

Χρήσιμοι τύποι

$$lne^a = a\,, a = e^{\ln a}$$

$$e^{2\ln|a|} = e^{\ln|a|^2} = |a|^2 = a^2$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} = ln|\,f(x)|$$

Είναι χρήσιμο να θυμηθούμε το σχήμα Horner

Το σχήμα Horner κατασκευάζεται ως εξής:

Στην **πρώτη γραμμή** γράφουμε τους **συντελεστές** του πολυωνύμου $P(x)$.

Στην **τελευταία θέση** της **πρώτης** γραμμής γράφουμε το ρ, δηλαδή το 2.

Στην **πρώτη θέση** της **τρίτης** γραμμής τον **πρώτο** συντελεστή του $P(x)$.

Κάθε στοιχείο της δεύτερης γραμμής προκύπτει με **πολλαπλασιασμό**(*) του **αμέσως προηγούμενου στοιχείου** της **τρίτης** γραμμής, επί $\rho=2$.

Κάθε άλλο στοιχείο της **τρίτης** γραμμής προκύπτει ως **άθροισμα** των αντίστοιχων στοιχείων της **πρώτης** και δεύτερης γραμμής.

Το τελευταίο στοιχείο της **τρίτης** γραμμής είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x - 2)$, δηλαδή η τιμή του πολυωνύμου $P(2)$.

Τα **άλλα** στοιχεία της **τρίτης** γραμμής είναι οι **συντελεστές** του **πηλίκου** της διαίρεσης.

Συντελεστές P(x) $\rho = 2$

1	−3	−3	11	−6	2
	2	−2	−10	2	
1	−1	−5	1	−4	

Συντελεστές πηλίκου $\pi(x)$ — **Υπόλοιπο $\upsilon = P(2)$**

Τελικά, η **ταυτότητα** της **διαίρεσης** του **πολυωνύμου** παίρνει την μορφή:

$$P(x) = (x-2)\ \pi(x) + \upsilon$$

$$P(x) = (x-2)(x^3 - x^2 - 5x + 1) + (-4)$$