διάγραμμα

ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

ΘΕΩΡΙΑ - ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

ΑΝΑΛΥΤΙΚΑ ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΑΘΗΝΑ 1996

Πρόλογος

Οι σημειώσεις αυτές γράφτηκαν για τους φοιτητές του Εθνικού Μετσόβιου Πολυτεχνείου και καλύπτουν πλήρως το μάθημα των διαφορικών εξισώσεων. Η σειρά για τα Μαθηματικά περιλαμβάνει επίσης τις Μιγαδικές Συναρτήσεις, τη Μαθηματική Ανάλυση Ι & ΙΙ καθώς επίσης και τη Στατιστική-Πιθανότητες.

Σκοπός των σημειώσεων αυτών είναι να δοθούν με σαφήνεια και απλότητα όλες οι έννοιες και οι εφαρμογές των διαφορικών εξισώσεων, διατηρώντας όμως παράλληλα την επιστημονική αυστηρότητα και ευκρίνεια που πρέπει να διέπει τέτοιες προσπάθειες.

Το φυλλάδιο έχει χωριστεί σε επτά κεφάλαια. Στο πρώτο γίνεται λόγος γενικά περί διαφορικών και δεν τοποθετήθηκαν ασκήσεις. Υπάρχει απλώς για λόγους πληρότητας. Στο δεύτερο αναπτύσσονται οι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξεως και στο τρίτο οι γραμμικές διαφορικές εξισώσεις ανωτέρας τάξεως. Στο τέταρτο κεφάλαιο επεξεργαζόμαστε τις γραμμικές δ.ε. με σταθερούς συντελεστές και στο πέμπτο παρουσιάζουμε το μετασχηματισμό Laplace που αποτελεί βασικό κομμάτι των διαφορικών. Τέλος στο έκτο κεφάλαιο παρουσιάζουμε ενδιαφέρουσες εφαρμογές των διαφορικών εξισώσεων όπως η επίλυση διαφορικών με δυναμοσειρές και συστήματα διαφορικών εξισώσεων.

Στο τελευταίο κεφάλαιο, το έβδομο, βάλαμε πολλές γενικές ασκήσεις, οι οποίες πιστεύουμε θα βοηθήσουν στην πλήρη κατανόηση του αντικειμένου . Πολλές από αυτές υπήρξαν θέματα παλαιοτέρων εξετάσεων. Τέλος η συγγραφική ομάδα θα ήθελε να ευχαριστήσει τον κ. Π. Νικολακόπουλο που της εμπιστεύθηκε την εργασία αυτή καθώς και εσάς που προτιμήσατε τις σημειώσεις αυτές για τη μελέτη σας και ταυτόχρονα να εγγυηθεί την ορθότητα και αρτιότητά τους.

Φ. Φωτόπουλος

Α. Χαραλαμπάκης

Περιεχόμενα

Πρόλογος **2**
Περιεχόμενα **3**
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΓΕΝΙΚΑ ΠΕΡΙ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ **8**
Α. ΘΕΩΡΙΑ 8
1. Εισαγωγικές Έννοιες - Ορισμοί 8
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΣΥΝΗΘΕΙΣ Δ.Ε. ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΕΩΣ **12**
Α. ΘΕΩΡΙΑ 12
1. Γενικά 12
2. Διαφορικές Εξισώσεις Χωριζομένων Μεταβλητών. 13
2.1 Ομογενείς Διαφορικές Εξισώσεις Πρώτης Τάξης. 15
2.2 Διαφορικές Εξισώσεις Της Μορφής: 17
3. Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις Πρώτης Τάξεως 19
3.1 Γενικά 19
3.2 Η Εξίσωση Bernoulli 21
3.3 Η Εξίσωση Riccati 23
4. Διαφορικές Εξισώσεις Ολικού Διαφορικού 24
5. Ολοκληρώνων Παράγοντας ή Πολλαπλασιαστής Euler 28
6. Διαφορικές Εξισώσεις Πρώτης Τάξης Υπό Πεπλεγμένη Μορφή 31
6.1 Διαφορικές Εξισώσεις Lagrange 31
6.2 Διαφορικές Εξισώσεις Clairaut 32
6.2.1 Ισογώνιες Τροχιές 33
Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ 35
Άσκηση 2.1 35
Άσκηση 2.2 36
Άσκηση 2.3 37
Άσκηση 2.4 39
Άσκηση 2.5 40
Άσκηση 2.6 41
Άσκηση 2.7 42
Άσκηση 2.8 44

Άσκηση 2.9 45
Άσκηση 2.10..45
Άσκηση 2.11..46
Άσκηση 2.12..47
Άσκηση 2.13..48
Άσκηση 2.14..49
Άσκηση 2.15..50
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ Δ.Ε. ΑΝΩΤΕΡΑΣ ΤΑΞΕΩΣ 52
Α. ΘΕΩΡΙΑ 52
1. Γενικά Για Τις Διαφορικές Εξισώσεις Ανωτέρας Τάξεως 52
2. Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις Ανώτερης Τάξης...52
2.1 Ομογενείς Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις...53
2.2 Μη Ομογενείς Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις 55
3. Υποβιβασμός Της Τάξης Γραμμικής Διαφορικής Εξίσωσης 55
Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ 57
Άσκηση 3.1 57
Άσκηση 3.2 58
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ Δ.Ε. ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ....................59
Α. ΘΕΩΡΙΑ 59
1. Η Γραμμική Δ.Ε. Δευτέρας Τάξεως Με Σταθερούς Συντελεστές.......................59
1.1 Εύρεση Γενικής Λύσης Ομογενούς 59
1.2 Εύρεση Μερικής Λύσης Μη Ομογενούς Γραμμικής Δ.Ε. Δευτέρας Τάξης 61
1.2.1 Μέθοδος Της Μεταβολής Των Παραμέτρων Του Lagrange 62
1.2.2 Μέθοδος Των Προσδιοριστέων Συντελεστών 63
2.Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις Τάξης Ανώτερης Του 2. 64
2.1 Γραμμικές Δ.Ε. Τάξης Ανώτερης Του 2 Με Σταθερούς Συντελεστές............64
2.1.1 Εύρεση Της Γενικής Λύσης Της Ομογενούς.......................................65
2.1.2 Εύρεση Της Μερικής Λύσης Της Μη Ομογενούς 67
2.2 Η Διαφορική Εξίσωση Του Euler 67
Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ 69
Άσκηση 4.1 69
Άσκηση 4.2 69

Άσκηση 4.3 70
Άσκηση 4.4 70
Άσκηση 4.5 71
Άσκηση 4.6 71
Άσκηση 4.7 73
Άσκηση 4.8 74
Άσκηση 4.9 75
Άσκηση 4.10 76
Άσκηση 4.11 77
Άσκηση 4.12 77
Άσκηση 4.13 79
Άσκηση 4.14 80
Άσκηση 4.15 81
Άσκηση 4.16 82
Άσκηση 4.17 83
Άσκηση 4.18 84
Άσκηση 4.19 84
Άσκηση 4.20 85
Άσκηση 4.21 86

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE 88

Α. ΘΕΩΡΙΑ 88
1. Γενικά - Ιδιότητες Μετασχηματισμού Laplace 88
2. Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace 91
3. Βηματική Συνάρτηση ή Συνάρτηση Heaviside 93

Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ 95
Άσκηση 5.1 95
Άσκηση 5.2 95
Άσκηση 5.3 96
Άσκηση 5.4 98
Άσκηση 5.5 99
Άσκηση 5.6 100
Άσκηση 5.7 100

Άσκηση 5.8 101
Άσκηση 5.9 103
Άσκηση 5.10 105
Άσκηση 5.11 106
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: ΕΠΙΛΥΣΗ Δ.Ε. ΜΕ ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ - ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ Δ.Ε. 107
Α. ΘΕΩΡΙΑ 107
Ι. ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ 107
1. Γενικά Περί Δυναμοσειρών 107
1.1 Συναρτήσεις Υπό Την Μορφή Δυναμοσειρών & Παράγωγοι Αυτών. 107
2. Ομαλά Σημεία - Επίλυση Με Δυναμοσειρές 110
ΙΙ. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ 113
3. Γενικά Για Τα Συστήματα Διαφορικών Εξισώσεων 113
4. Γραμμικά Συστήματα Διαφορικών Εξισώσεων 113
5. Επίλυση Συστημάτων Διαφορικών Εξισώσεων 114
5.1 Επίλυση Συστημάτων Με Την Μέθοδο Της Απαλοιφής 114
5.2 Επίλυση Συστημάτων Με Την Μέθοδο Του Μετασχηματισμού Laplace 115
5.3 Επίλυση Συστημάτων Με Την Μέθοδο Του Euler 116
Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ 119
Άσκηση 6.1 119
Άσκηση 6.2 121
Άσκηση 6.3 122
Άσκηση 6.4 124
Άσκηση 6.5 125
Άσκηση 6.6 126
Άσκηση 6.7 128
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7: ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ **..... 130**
Άσκηση 7.1 130
Άσκηση 7.2 131
Άσκηση 7.3 131
Άσκηση 7.4 132
Άσκηση 7.5 133
Άσκηση 7.6 134

Άσκηση 7.7 135
Άσκηση 7.8 136
Άσκηση 7.9 137
Άσκηση 7.10.. 138

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΓΕΝΙΚΑ ΠΕΡΙ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Α. ΘΕΩΡΙΑ

1. Εισαγωγικές Έννοιες - Ορισμοί

Μια εξίσωση που περιέχει μια ή περισσότερες άγνωστες συναρτήσεις και τις παραγώγους της μέχρι μιας ορισμένης τάξεως ονομάζεται **διαφορική εξίσωση.** Όταν οι άγνωστες συναρτήσεις είναι μιας μεταβλητής τότε η εξίσωση ονομάζεται **συνήθης διαφορική εξίσωση**, ενώ όταν οι άγνωστες συναρτήσεις είναι πολλών μεταβλητών τότε η εξίσωση ονομάζεται **μερική διαφορική εξίσωση**. Εμείς θα ασχοληθούμε με συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, οπότε και για λόγους απλότητας στο εξής λέγοντας διαφορικές εξισώσεις θα εννοούμε συνήθεις διαφορικές εξισώσεις, τις οποίες και εξετάζουμε.

Η **γενική ή πεπλεγμένη μορφή** μιας συνήθους διαφορικής εξισώσεως είναι η εξής:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

Η διαφορική εξίσωση (1) καλείται γενικά **διαφορική εξίσωση n - τάξεως** (διότι περιέχει παραγώγους μέχρι n τάξης).Σε μερικές περιπτώσεις μια διαφορική εξίσωση μπορεί να γραφεί και στην μορφή:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) \qquad (2)$$

Η μορφή (2) ονομάζεται **κανονική ή λυμένη μορφή της διαφορικής εξισώσεως.**

Ονομάζουμε **λύση** της διαφορικής εξισώσεως κάθε πραγματική συνάρτηση y(x) , ορισμένη και n φορές παραγωγίσιμη σε κατάλληλο ανοιχτό διάστημα $I \subset$ R,έτσι ώστε η συνάρτηση F να ορίζεται και να ισχύει η (1) ή η (2) για κάθε x$\in I$.

Το x ονομάζεται **ανεξάρτητη μεταβλητή** και το y **άγνωστη συνάρτηση.** Το γράφημα κάθε λύσεως y(x) ονομάζεται **ολοκληρωτική καμπύλη** της διαφορικής εξισώσεως.

<u>Παραδείγματα:</u>

Η διαφορική εξίσωση:

$$y'' = xy' - y^2$$

είναι δευτέρας τάξεως διαφορική εξίσωση σε κανονική (λυμένη) μορφή.

Η διαφορική εξίσωση της ταλάντωσης:

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -k \cdot x \qquad \text{m,k} > 0$$

είναι δευτέρας τάξεως, με ανεξάρτητη μεταβλητή το t και άγνωστη συνάρτηση το x.

Η διαφορική εξίσωση:

$$x\ln(y' - y) - e^{y''} = 0$$

είναι δευτέρας τάξεως σε πεπλεγμένη μορφή.

Μια διαφορική εξίσωση μπορεί να μην έχει λύση, να έχει μοναδική λύση ή να έχει περισσότερες από μια λύσεις. Στην τελευταία περίπτωση, συνήθως αναζητάμε μία εκ των λύσεων, έτσι ώστε να ικανοποιούνται κάποιες συνθήκες, οι οποίες συνήθως αφορούν το φυσικό πρόβλημα από το οποίο προέρχεται η διαφορική εξίσωση.

Η εύρεση μιας λύσης της διαφορικής εξίσωσης, η οποία ικανοποιεί κάποιες συνθήκες, ονομάζεται **πρόβλημα αρχικών τιμών ή πρόβλημα Cauchy** και οι συνθήκες οι οποίες πρέπει να ικανοποιούνται ονομάζονται **αρχικές συνθήκες ή συνθήκες Cauchy.** Εάν η f συνάρτηση της (2) είναι συνεχής τότε το πρόβλημα αρχικών τιμών έχει τουλάχιστον μία λύση ,ενώ αν η f είναι διαφορίσιμη, εν γένει η (2) έχει άπειρες λύσεις, **οι οποίες εξαρτώνται από n αυθαίρετες σταθερές (όσες και η τάξη της διαφορικής εξίσωσης).**

Η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών λοιπόν συνίσταται στην εύρεση της **γενικής λύσης της διαφορικής εξίσωσης** και στην συνέχεια στον υπολογισμό της τιμής των n πραγματικών σταθερών, ώστε να βρούμε την μοναδική λύση που μας ενδιαφέρει.

Γενικά θα λέμε ότι η συνάρτηση:

$$y = \varphi (x, C_1, C_2, \ldots , C_n) \qquad (3)$$

που εξαρτάται από τις πραγματικές σταθερές C_1, C_2, … , C_n είναι **γενική λύση** της διαφορικής εξίσωσης (2) όταν για κάθε C_1, C_2, … ,C_n η (3) είναι λύση της (2) και για κάθε αρχικές συνθήκες του πεδίου ορισμού της f υπάρχει ακριβώς ένας "συνδυασμός" των C_1, C_2, … ,C_n έτσι ώστε η y να ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες.

Κάθε λύση που παίρνουμε για συγκεκριμένη επιλογή των C_1, C_2, … ,C_n ονομάζεται **μερική λύση της διαφορικής εξισώσεως (2).**

<u>Παράδειγμα</u>:

Η διαφορική εξίσωση:

$$y'' = y' + 2y \qquad (*)$$

όπως θα δούμε έχει ως γενική λύση την:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} \qquad (**)$$

Πράγματι, είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι για κάθε επιλογή των πραγματικών σταθερών C_1,C_2 η (**) επαληθεύει την (*).Εξάλλου αν θεωρήσουμε ότι έχουμε τις αρχικές συνθήκες:

$$y(x_o) = y_o \ , \ y'(x_o) = y_1$$

(Έχουμε δύο αρχικές συνθήκες διότι έχουμε δύο σταθερές C_1,C_2 που θέλουμε να υπολογίσουμε) και με την βοήθεια της (**) έχουμε το σύστημα:

$$C_1 e^{2Xo} + C_2 e^{-Xo} = Y_o$$
$$2C_1 e^{2Xo} - C_2 e^{-Xo} = Y_1$$

το οποίο έχει μοναδική λύση την:

$$C_1 = \frac{y_0 + y_1}{3} \cdot e^{-2\cdot x_0}, C_2 = \frac{2y_0 - y_1}{3} \cdot e^{x_0}$$

Έτσι, η γενική λύση της (*) είναι πράγματι η (**).

Τέλος, είναι δυνατόν μια διαφορική εξίσωση να έχει εκτός από την γενική λύση και άλλες λύσεις, οι οποίες δεν είναι δυνατόν να προκύψουν από την γενική λύση **όποια και να είναι η επιλογή των πραγματικών σταθερών**. Αυτές οι λύσεις ονομάζονται **ιδιάζουσες λύσεις**.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΣΥΝΗΘΕΙΣ Δ.Ε. ΠΡΩΤΗΣ ΤΑΞΕΩΣ

Α. ΘΕΩΡΙΑ

1. Γενικά

Ως συνήθεις διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης χαρακτηρίζονται οι διαφορικές εξισώσεις οι οποίες περιέχουν μόνο την άγνωστη συνάρτηση y(x) και την πρώτη παράγωγο της y′(x):

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (1)$$

Αν μπορούμε να λύσουμε την (1) ως προς y′ τότε θα έχουμε:

$$y' = H(x, y) \qquad (2)$$

Θέτοντας $y' = dx / dy$ και $H(x, y) = - P(x,y) / Q(x,y)$ η (2) γράφεται:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \qquad (3)$$

Όπως ήδη έχουμε πει, η λύση (ή αλλιώς **το γενικό ολοκλήρωμα της διαφορικής εξίσωσης)** της (1) θα είναι μια σχέση της μορφής:

$$\Psi(x, y, C) = 0 \qquad (4)$$

Για κάθε C η (4) παριστάνει μια καμπύλη στον R^2 (ολοκληρωτική καμπύλη) , γι′ αυτό και λέμε ότι η (4) παριστάνει μια **μονοπαραμετρική (λόγω της μιας αυθαίρετης σταθεράς) οικογένεια καμπύλων στον R^2.**

2. Διαφορικές Εξισώσεις Χωριζομένων Μεταβλητών.

Ως **διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών** ονομάζουμε εκείνη την συνήθη διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης, που έχει την μορφή:

$$y' = f(x)g(y) \qquad (1)$$

δηλαδή το δεύτερο μέρος αποτελείται από δύο παράγοντες, εκ των οποίων ο ένας εξαρτάται από το x και ο άλλος από το y.

Η λύση των διαφορικών εξισώσεων χωριζομένων μεταβλητών γίνεται ως εξής:

Χωρίζουμε τις μεταβλητές:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) \cdot dx$$

Ολοκληρώνουμε την παραπάνω σχέση αόριστα:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) \cdot dx + C$$

Χρησιμοποιούμε την αρχική συνθήκη $y(x_o) = y_o$ και προσδιορίζουμε το C. Τέλος, από την σχέση g(y) = 0 προσδιορίζουμε τις ιδιάζουσες λύσεις (αν υπάρχουν).

Παρατήρηση: Από εδώ και στο εξής το ολοκλήρωμα $\int f(x)dx$ θα αντιπροσωπεύει μια αρχική της f και όχι το σύνολο των σταθερών. Συνεπώς κατά τον υπολογισμό των αόριστων ολοκληρωμάτων **δεν** θα βάζουμε εκ νέου σταθερές. **Ο τελικός αριθμός των σταθερών που περιέχονται στην γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης, θα πρέπει να είναι ίδιος με την τάξη της διαφορικής εξίσωσης.** Επίσης αξίζει να σημειωθεί ότι λέγοντας ότι το C είναι "αυθαίρετη σταθερά" εννοούμε ότι παίρνει όλες τις **επιτρεπτές** τιμές (για τις οποίες η έκφραση της γενικής λύσης έχει νόημα).

<u>Παράδειγμα</u>:

Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών: y′ sinx = y(y - 1)

Λύση:

Αρχικά θέτουμε y′ = dx / dy και **χωρίζουμε τις μεταβλητές** (π.χ. αριστερά τα y, δεξιά τα x) με απλές πράξεις.

$$\frac{dy}{dx}\cdot\sin x = y\cdot(y-1)$$
$$\frac{dy}{y\cdot(y-1)} = \frac{dx}{\sin x}$$

Στην συνέχεια ολοκληρώνουμε και παίρνουμε την γενική λύση. Δεν μας πειράζει να μην παρουσιάσουμε το αποτέλεσμα ως "y=…",αφού μερικές φορές αυτό είναι εφικτό, ενώ άλλες όχι.

$$\int\frac{1}{y(y-1)}dy = \int\frac{1}{\sin x}dx + c$$

$$\ln\frac{y-1}{y} = \ln(\tan\frac{x}{2}) + \ln c, c>0$$
$$\frac{y-1}{y} = c\cdot\tan(\frac{x}{2}), c>0$$

Μετά αξιοποιούμε τις αρχικές συνθήκες που μας δίνονται, ώστε να βρούμε την ζητούμενη μερική λύση: Έχουμε y(π/2) = 2,οπότε με απλή αντικατάσταση στην γενική λύση προκύπτει c=1/2 και γι′ αυτή την τιμή της c προκύπτει η λύση του προβλήματος αρχικών τιμών.

$$\frac{2-1}{2} = c\cdot\tan(\frac{\pi}{4})$$

$$\frac{y-1}{y} = \frac{1}{2}\tan(\frac{x}{2})$$

Τέλος οι συναρτήσεις y = 1, y = 0 είναι ιδιάζουσες λύσεις της διαφορικής εξίσωσης, διότι την επαληθεύουν χωρίς να συμπεριλαμβάνονται στην γενική λύση. Ειδικά σ' αυτή την περίπτωση, η y = 0 μπορεί να συμπεριληφθεί στη γενική λύση εάν θέσουμε $c \geq 0$.

Σε διαφορικές εξισώσεις χωριζόμενων μεταβλητών μετασχηματίζονται και οι παρακάτω περιπτώσεις:

2.1 Ομογενείς Διαφορικές Εξισώσεις Πρώτης Τάξης.

Πρώτα πρέπει να ορίσουμε την **ομογενή συνάρτηση:** Μια συνάρτηση ονομάζεται ομογενής βαθμού α, όταν ισχύει για t>0:

$$f(tx, ty) = t^{\alpha} f(x, y)$$

Έστω τώρα ότι έχουμε μια διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης. Αυτή όπως είδαμε είναι δυνατόν να γραφτεί στην μορφή:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \qquad (1)$$

Έστω επίσης ότι οι συναρτήσεις P,Q είναι **ομογενείς συναρτήσεις του ίδιου βαθμού**. Τότε η (1) μετατρέπεται σε διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών, εάν κάνουμε τον μετασχηματισμό **y = xu(x).**Τότε έχω **dy = udx + xdu** (διαφόριση).Εάν αντικαταστήσουμε στην (1) τα παραπάνω, προκύπτει διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών η οποία λύνεται εύκολα.

Η παραπάνω διαδικασία ισχύει και στην περίπτωση που έχουμε την αρχική διαφορική εξίσωση με την μορφή **y′ = f(x, y),**και η f είναι ομογενής συνάρτηση **μηδενικού βαθμού.** Ουσιαστικά πρόκειται για την ίδια περίπτωση με την παραπάνω , αφού όταν οι P,Q είναι ομογενείς του ίδιου βαθμού, το πηλίκο τους (- P / Q) ,δηλαδή η f είναι ομογενής μηδενικού βαθμού:

$$f(tx,ty) = -\frac{P(tx,ty)}{Q(tx,ty)} = -\frac{t^a P(x,y)}{t^a Q(x,y)} = -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} = t^0 \cdot f(x,y)$$

<u>**Παράδειγμα**</u>**:**

Να λυθεί η παρακάτω ομογενής διαφορική εξίσωση, με την διαδικασία που περιγράφτηκε παραπάνω:

$$(x + y)dx + (x - y)dy = 0$$

Είναι πολύ εύκολο να δειχτεί ότι οι συναρτήσεις P(x, y) = x + y, Q(x, y) = x - y είναι ομογενείς πρώτου βαθμού. Θέτουμε y = x u(x) & dy = udx + xdu οπότε έχω:

$(x + xu)dx + (x - xu)(xdu + udx) = 0$

$(x + xu + xu - xu^2)dx + (x^2 - x^2u)du = 0$

$(1 + 2u - u^2)dx + x(1 - u)du = 0$

Τελικά:

$$\frac{dx}{x} = -\frac{(1-u)du}{(1+2u-u^2)}$$

οπότε και προχωρούμε κανονικά την επίλυση αυτής της διαφορικής εξίσωσης χωριζομένων μεταβλητών. Αφού βρούμε την συνάρτηση u(x) βρίσκουμε πολύ εύκολα την y ,αφού y(x) = x u(x).

2.2 Διαφορικές Εξισώσεις Της Μορφής:

$$y' = f\left(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right) \qquad (1)$$

Οι διαφορικές εξισώσεις αυτής της μορφής, για διάφορες περιπτώσεις συνδυασμού των συντελεστών a,b,c,a′,b′,c′ μετατρέπονται σε ομογενείς διαφορικές εξισώσεις και λύνονται όπως περιγράφτηκε παραπάνω.

Εάν c = c′ = 0 τότε η f είναι ομογενής μηδενικού βαθμού, οπότε θέτοντας **y = xu(x)** κατά τα γνωστά οδηγούμαστε σε διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών.

Εάν το γραμμικό σύστημα:

$$\begin{aligned} ax+by+c&=0 \\ a'x+b'y+c'&=0 \end{aligned}$$

έχει μοναδική λύση την (x_o,y_o) τότε κάνουμε τον μετασχηματισμό:

$$x = x_o + u$$
$$y = y_o + v(u)$$

Τότε έχουμε:

$$dx = du \text{ , } dy = dv \text{ οπότε } y'(x) = dy / dx = dv / du = v'(u)$$

οπότε η διαφορική μας εξίσωση μετατρέπεται στην:

$$v'(u) = f\left(\frac{au+bv}{a'u+b'v}\right)$$

η οποία είναι ομογενής μηδενικού βαθμού, δηλαδή οδηγούμαστε στην προηγούμενη περίπτωση.

Εάν το σύστημα:

$$\begin{aligned} ax + by + c &= 0 \\ a'x + b'y + c' &= 0 \end{aligned}$$

έχει άπειρες λύσεις, τότε είναι γνωστό ότι υπάρχει $\lambda \in R$,τέτοιο ώστε α = λα′ και b = λb′.Τότε η διαφορική εξίσωση παίρνει την μορφή:

$$y' = f\left(\frac{\lambda \cdot (a'x + b'y) + c}{a'x + b'y + c'}\right)$$

Σ′ αυτή την περίπτωση κάνουμε το μετασχηματισμό:

$$u(x) = ax + by(x)$$

και η διαφορική μας εξίσωση παίρνει την μορφή:

$$u' = a' + b' f\left(\frac{\lambda \cdot u + c}{u + c'}\right)$$

η οποία είναι χωριζόμενων μεταβλητών, και λύνεται κατά τα γνωστά.

Περαιτέρω παραδείγματα για την εμπέδωση των παραπάνω μεθοδολογιών παρατίθενται στην ενότητα των ασκήσεων.

3. Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις Πρώτης Τάξεως

3.1 Γενικά

Μια διαφορική εξίσωση της μορφής:

$$y' + P(x)\, y = Q(x) \qquad (1)$$

ονομάζεται **γραμμική διαφορική εξίσωση**.(Έχουμε γραμμική σχέση ως προς τους αγνώστους y,y′)

Για Q(x, y) = 0 παίρνουμε την αντίστοιχη **ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση.**

$$y' + P(x)\, y = 0 \qquad (2)$$

Η (2) λύνεται εύκολα, διότι είναι διαφορική εξίσωση χωριζόμενων μεταβλητών. Η γενική λύση λοιπόν της (2) είναι η:

$$y(x) = c \cdot e^{-\int P(x)dx} \qquad (3)$$

Την παραπάνω σχέση γενικά μπορούμε να την χρησιμοποιούμε χωρίς απόδειξη κατά τις εξετάσεις (αν και εξαρτάται και από τον καθηγητή).

Με βάση τη λύση της ομογενούς προκύπτει η γενική λύση της (1).Συγκεκριμένα, ισχύει **ότι αν $y_o(x)$ είναι η γενική λύση της ομογενούς (2) και $y_\mu(x)$ είναι μια μερική λύση της διαφορικής εξίσωσης (1) , τότε η γενική λύση της (1) είναι το άθροισμα: $y(x) = y_o(x) + y_\mu(x)$.**

Σ′ αυτή τη περίπτωση, η πραγματική σταθερά της γενικής λύσης της (1), προέρχεται από την σταθερά της γενικής λύσης της ομογενούς.

Αφού βρήκαμε εύκολα την γενική λύση της ομογενούς, αναζητούμε μια οποιαδήποτε μερική λύση της (1),ώστε σύμφωνα με τα παραπάνω να βρούμε την γενική λύση της (1). Η μέθοδος που θα περιγράψουμε ονομάζεται **μέθοδος των αυθαίρετων συντελεστών του Lagrange** και χρησιμοποιείται και στις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης ή και ανώτερης τάξης**.** Η διαδικασία είναι η εξής:

Αυθαίρετα θεωρούμε ότι η μερική λύση της (1) που αναζητούμε έχει την μορφή:

$$y(x) = c(x) \cdot e^{-\int P(x)dx} \qquad (4)$$

δηλαδή έχει ίδια μορφή με την γενική λύση της ομογενούς, μόνο που η σταθερά c έχει αντικατασταθεί από μια **άγνωστη** συνάρτηση c(x).(Είναι προφανές ότι η (1) δεν μπορεί να έχει λύση ακριβώς ίδιας μορφής με την αντίστοιχη ομογενή!).**Σκοπός μας είναι η εύρεση κατάλληλης συνάρτησης c(x) έτσι ώστε η (4) <u>πράγματι</u> να είναι μερική λύση της (1).**Προφανώς η (4) θα επαληθεύει την (1),οπότε αντικαθιστούμε, αφού πρώτα παραγωγίσουμε την (4):

$$y_\mu'(x) = c'(x)e^{-\int P(x)dx} + c(x)(-f(x))e^{-\int P(x)dx}$$

Αντικαθιστούμε τις $y_\mu(x)$, $y'_\mu(x)$ στην (1) οπότε έχουμε:

$$c'(x)e^{-\int P(x)dx} - c(x)f(x)e^{-\int P(x)dx} + c(x)f(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

$$c'(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

$$c'(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx}$$

και με ολοκλήρωση παίρνω:

$$c(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$$

Παρατηρήστε ότι επειδή ψάχνω για **<u>μία</u> μερική λύση** δεν προσθέτω στην παραπάνω έκφραση σταθερές ολοκλήρωσης. Στη συνέχεια αντικαθιστώ την c(x) στην (4) και με βάση την σχέση $y(x) = y_o(x) + y_\mu(x)$ που αναφέρθηκε παραπάνω, βρίσκουμε την γενική λύση της (1).Η σχέση αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί και χωρίς απόδειξη (πάντα όμως αυτό εξαρτάται από το καθηγητή) και είναι:

$$\boxed{y(x)=e^{-\int P(x)dx}\left[c+\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx\right]}$$

Με βάση τον παραπάνω τύπο, η λύση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης ανάγεται σε απλό υπολογισμό ολοκληρωμάτων. Τέλος υπάρχουν και οι παρακάτω περιπτώσεις, οι οποίες ανάγονται σε γραμμικές διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης:

3.2 Η Εξίσωση Bernoulli

Μια διαφορική εξίσωση καλείται διαφορική εξίσωση του Bernoulli όταν έχει την παρακάτω μορφή:

$$y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha}$$

(1)

όπου $\alpha \neq 1,0$ διότι τότε θα έχουμε γραμμική διαφορική εξίσωση και ομογενή διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης, αντίστοιχα. Η επίλυση της Bernoulli γίνεται ως εξής:

θέτουμε $\mathbf{u(x) = y^{1-\alpha}(x)}$ το οποίο με παραγώγιση δίνει $(1-\alpha)\, y^{-\alpha} y' = u'$.

Αντικαθιστούμε τα παραπάνω στην (1),οπότε με απλές πράξεις προκύπτει γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης ως προς u(x),η οποία λύνεται κατά τα γνωστά.

$$\frac{u'}{(1-a)y^{-a}} + P(x)y + Q(x)y^{a} = 0$$
$$\frac{u'}{1-a} + P(x)y^{1-a} + Q(x) = 0$$

και τελικά:

$$u'(x) + (1-a)P(x)u(x) + (1-a)Q(x) = 0$$

Οι παραπάνω σχέσεις δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν χωρίς απόδειξη. Είναι προφανές λοιπόν ότι το μόνο το οποίο πρέπει να θυμόμαστε είναι οι μορφές των εξισώσεων (Bernoulli, Riccati κλπ),οι αντίστοιχοι μετασχηματισμοί με τους οποίους αυτοί λύνονται καθώς και οι βασικές λύσεις προβλημάτων (γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτου βαθμού κλπ)

Παράδειγμα

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση:

$$y' + \frac{y}{2+x} + (2+x)y^{4} = 0 \qquad (*)$$

Η (*) είναι διαφορική εξίσωση Bernoulli, με P(x) = 1 / (2 + x) και Q(x) = 2 +x ενώ α = 4.Σύμφωνα με τα προηγούμενα θέτουμε u = y^{1-4} = y^{-3} οπότε έχουμε u′ = (-3) y^{-4} y′ και προκύπτει η διαφορική εξίσωση ως προς u(x):

$$u'(x) - \frac{u(x)}{2+x} - 3(2+x) = 0$$

Αφού βρούμε την γενική λύση της παραπάνω (u(x)) θέτουμε $y(x) = u^{-1/3}(x)$ οπότε βρήκαμε την γενική λύση της (*). Τέλος, αξιοποιούμε τις αρχικές συνθήκες, αν αυτές δίνονται.

3.3 Η Εξίσωση Riccati

Μια διαφορική εξίσωση που έχει την μορφή:

$$y' + P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) = 0 \qquad (1)$$

ονομάζεται **διαφορική εξίσωση του Riccati**. Γενικά οι διαφορικές εξισώσεις αυτής της μορφής είναι δύσκολο να λυθούν. Η (1) είναι όμως εύκολο να λυθεί ,εάν γνωρίζουμε εκ των προτέρων μια μερική της λύση (ιδιάζουσα ή και όχι).

Γι' αυτό και κατά τις εξετάσεις εάν δίνεται άσκηση της μορφής "Να λύσετε την διαφορική εξίσωση…...εάν γνωρίζετε ότι έχει την…. για μερική λύση", τότε η διαφορική εξίσωση θα πρέπει να είναι εξίσωση Riccati.

Έστω $y_1(x)$ η γνωστή εκ των προτέρων μερική λύση. Θεωρούμε τον μετασχηματισμό:

$$y(x) = y_1(x) + \frac{1}{u(x)}$$

Με βάση αυτόν τον μετασχηματισμό αυτό ,η (1) μετατρέπεται σε γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτου βαθμού ως προς u(x) και λύνεται εύκολα. Στη συνέχεια με την βοήθεια του μετασχηματισμού που χρησιμοποιήσαμε, προσδιορίζουμε την ζητούμενη y(x) και τέλος αξιοποιούμε τις τυχόν αρχικές συνθήκες που μας δίνονται.

Παράδειγμα

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση:

$$y' - e^{-x}y^2 + 3y - 3e^{x} = 0 \qquad (*)$$

εάν είναι γνωστό ότι έχει ως μερική λύση την $y_1(x) = e^x$.

Η (*) είναι Riccati.Σύμφωνα με τα παραπάνω θεωρούμε το μετασχηματισμό:

$$y(x) = e^x + \frac{1}{u(x)}$$

οπότε έχουμε:

$$y'(x) = e^x - \frac{u'(x)}{u^2(x)}$$

Αντικαθιστώντας στην (*) προκύπτει η γραμμική διαφορική εξίσωση ως προς u(x):

$$u'(x) - u(x) + e^{-x} = 0$$

Η γενική λύση της παραπάνω είναι η:

$$u(x) = ce^x + \frac{1}{2}e^{-x}$$

οπότε η γενική λύση της (*) είναι:

$$y(x) = e^x + \frac{2e^{-x}}{2c + e^{-2x}}$$

4. Διαφορικές Εξισώσεις Ολικού Διαφορικού

Έστω συνάρτηση δυο μεταβλητών F(x, y).Το ολικό διαφορικό αυτής θα είναι το:

$$dF(x,y) = \frac{\partial.F}{\partial.x}dx + \frac{\partial.F}{\partial.y}dy$$

Αν θέσουμε $\frac{\partial.F}{\partial.x} = P(x,y), \frac{\partial.F}{\partial.y} = Q(x,y)$ τότε έχουμε ότι μια σχέση της μορφής dF(x, y) = 0 δεν είναι παρά μια διαφορική εξίσωση της μορφής P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.Σ’αυτή τη περίπτωση η διαφορική εξίσωση λέγεται **πλήρης ή ακριβής.**

Το ερώτημα λοιπόν που γεννάται είναι **ποια σχέση πρέπει να πληρούν οι P,Q έτσι ώστε η παραπάνω διαφορική εξίσωση να είναι το ολικό διαφορικό μιας συνάρτησης F(x, y) εξισωμένο με το μηδέν.**

Εάν η έκφραση P(x, y)dx + Q(x, y)dy είναι ολικό διαφορικό μιας F(x,y) τότε η λύση της P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 δεν είναι παρά η F(x, y) = c, με c σταθερά. Είναι λοιπόν προφανές ότι εάν μας δοθεί μια διαφορική εξίσωση, και δεν είναι κάποιας γνωστής μορφής θα πρέπει να ελέγξουμε εάν αποτελεί ολικό διαφορικό μιας συναρτήσεως.

Αναγκαία συνθήκη για να υπάρχει τέτοια συνάρτηση F(x,y) είναι η:

$$\boxed{\frac{\partial .P}{\partial .y}(x,y) = P_y = \frac{\partial .Q}{\partial .x}(x,y) = Q_x}$$

Εάν ισχύει η παραπάνω σχέση, τότε προχωρούμε στην εύρεση της F(x,y) κάτι που σημαίνει και την λύση της διαφορικής εξισώσεως, αφού αυτή δεν είναι παρά η F(x,y) = c. Η εύρεση της F(x,y) μπορεί να γίνει με δύο τρόπους:

1ος τρόπος

Με λύση του παρακάτω διαφορικού συστήματος (οι ισότητες προκύπτουν εύκολα από τα παραπάνω).Αυτό γίνεται με ολοκλήρωση μιας εκ των δύο σχέσεων και αντικατάσταση στην δεύτερη σχέση.

Πρέπει να προσέξουμε έτσι ώστε αν ολοκληρώσουμε πρώτη την πρώτη σχέση,(δηλαδή ολοκληρώσουμε ως προς x) τότε η σταθερή ολοκλήρωσης θα είναι συνάρτηση του y και αυτούσια θα αντικατασταθεί στην δεύτερη σχέση και αντίστροφα.

$$\frac{\partial .F}{\partial .x} = P \ , \frac{\partial .F}{\partial .y} = Q$$

Παράδειγμα

Να λυθεί η παρακάτω διαφορική εξίσωση:

$$x^2ydx + 1/3x^3dy = 0 \qquad (1)$$

Παρατηρούμε ότι αν $P(x,y)=x^2y$ και $Q(x,y)=1/3x^3$ έχουμε ότι $P_y = x^2 = Q_x$. Σύμφωνα με τα παραπάνω η (1) είναι πλήρης. Αναζητούμε λοιπόν συνάρτηση F(x,y) τέτοια ώστε η έκφραση dF(x,y) = 0 να ισοδυναμεί με την (1).Από την πρώτη σχέση του διαφορικού συστήματος έχουμε:

$$F(x,y) = \int x^2 ydx = \frac{yx^3}{3} + c(y)$$

Την παραπάνω έκφραση αντικαθιστούμε στην δεύτερη σχέση του διαφορικού συστήματος:

$$\frac{\partial .F}{\partial .y} = \frac{x^3}{3} \Rightarrow \frac{x^3}{3} + c'(y) = \frac{x^3}{3} \Rightarrow c'(y) = 0 \Rightarrow c(y) = c_1$$

Σ’ αυτή τη περίπτωση η c(y) βγήκε σταθερή, σε άλλες περιπτώσεις όμως μπορεί να είναι μια κοινή συνάρτηση του y.Όπως είναι γνωστό, η λύση της διαφορικής εξίσωσης (1), ή το γενικό ολοκλήρωμα της, δίνεται από την σχέση F(x,y) = c:

$$F(x,y) = c_2 \Rightarrow \frac{yx^3}{3} + c_1 = c_2 \Rightarrow \frac{yx^3}{3} = c$$

2ος τρόπος

Θα μπορούσαμε απευθείας να βρούμε την F(x,y) με την βοήθεια της σχέσης:

$$F(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(t,y)dt+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,t)dt$$

Όταν το (x_o,y_o) = (0,0) ανήκει στο χωρίο που ορίζονται οι P,Q ο τύπος απλοποιείται και γίνεται:

$$F(x,y)=\int_{0}^{x}P(t,y)dt+\int_{0}^{y}Q(0,t)dt$$

Αφού βρούμε την F(x,y) η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι σε πεπλεγμένη μορφή:

F(x,y) = c

Παρατήρηση: *Από τη στιγμή που ισχύει η σχέση P_y = Q_x η διαφορική μας εξίσωση θα πρέπει να είναι έκφραση ολικού διαφορικού μιας συνάρτησης F.*

Διευκρίνιση: *Η έκφραση της μορφής P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 όπως είδαμε σε μερικές περιπτώσεις μας οδηγεί στην dF(x,y) = 0.Λέγοντας όμως ότι η σχέση F(x,y) = c δίνει την γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης, δεν εννοούμε ότι η F(x,y) είναι σταθερή συνάρτηση, και αυτό γιατί η P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 είναι διαφορική εξίσωση και όχι ταυτότητα που ισχύει για κάθε $(x,y)\in D$, D σύνολο στο οποίο dF = Pdx + Qdy.Η F(x,y) = c απλώς για διάφορες τιμές του c δίνει την ισοσταθμική που περνά από το σημείο (x_o,y_o) του D με $F(x_o,y_o)$=c,δηλαδή δίνει την F(x,y) = $F(x_o,y_o)$.Οι ισοσταθμικές όμως που ορίζονται έτσι είναι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης.*

5. Ολοκληρώνων Παράγοντας ή Πολλαπλασιαστής Euler

Όπως είδαμε, η επίλυση μιας διαφορικής εξίσωσης της μορφής P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 (*) με την βοήθεια του ολικού διαφορικού μιας συνάρτησης είναι εύκολη, αλλά μπορεί να εφαρμοστεί μόνο όταν ισχύει η σχέση:

$$\boxed{\frac{\partial.P}{\partial.y}(x,y)=P_y=\frac{\partial.Q}{\partial.x}(x,y)=Q_x} \quad (1)$$

Εάν δεν ισχύει η (1),μπορούμε να εφαρμόσουμε το εξής τέχνασμα: **Αναζητούμε συνάρτηση μ(x,y) τέτοια ώστε η έκφραση μ(x,y)P(x,y)dx + μ(x,y)Q(x,y)dy να είναι ολικό διαφορικό μιας F(x,y).Προφανώς εξακολουθεί να ισχύει ότι μ(x,y)P(x,y)dx + μ(x,y)Q(x,y) = 0 ενώ αφού η νέα διαφορική εξίσωση είναι ολικό διαφορικό μιας συνάρτησης F θα έχω:**

$$\boxed{\frac{\partial.}{\partial.y}\left(\mu.(x,y)P(x,y)\right)=\frac{\partial.}{\partial.x}\left(\mu.(x,y)Q(x,y)\right)}$$

Με απλές πράξεις καταλήγουμε στην σχέση που θα πρέπει να ικανοποιεί η μ(x,y):

$$\mathbf{P\mu_y - Q\mu_x = \mu(Q_x - P_y)} \qquad \mathbf{(2)}$$

όπου $\mu_y=\frac{\partial.\mu}{\partial.y}, Q_x=\frac{\partial.Q}{\partial.x}$ κλπ.

Η συνάρτηση μ(x,y) **ονομάζεται ολοκληρώνων παράγοντας ή πολλαπλασιαστής Euler**. Αφού βρούμε κατάλληλο πολλαπλασιαστή, η νέα μας διαφορική εξίσωση θα είναι πλήρης και συνεπώς εύκολη στη λύση της. **Η γενική λύση της νέας διαφορικής εξίσωσης θα είναι ίδια με την γενική λύση της αρχικής**

διαφορικής εξίσωσης. Αν και ενδέχεται να υπάρξει πρόβλημα το οποίο αφορά απώλεια λύσεων , αυτό δεν θα μας απασχολήσει ιδιαίτερα.

Επειδή η εύρεση μιας συνάρτησης μ(x,y) που να εξαρτάται και από το x και από το y είναι περίπλοκή διαδικασία, συνήθως αναζητούμε απλούστερες συναρτήσεις, όπως για παράδειγμα συναρτήσεις μόνο του x ή μόνο του y ή συναρτήσεις του πηλίκου y/x κλπ. Η εύρεση της συνάρτησης μ γίνεται με την βοήθεια της σχέσης (2). Με εξάσκηση στις ασκήσεις θα μπορούμε να καταλαβαίνουμε ποιας μορφής είναι ο πολλαπλασιαστής που αναζητούμε. Αναλυτικά έχουμε:

- **Πολλαπλασιαστής που να εξαρτάται μόνο από το x:**

Σ’ αυτή τη περίπτωση έχουμε μ = μ(x) οπότε $\mu_y = 0$, $\mu_x = \mu'(x)$ οπότε η (2) γίνεται:

$$\mu.'(x) + \frac{Q_x - P_y}{Q}\mu(x) = 0$$

η οποία είναι ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης, και λύνεται εύκολα. Η παραπάνω σχέση έχει νόημα όταν η έκφραση $\frac{Q_x - P_y}{Q}$ είναι συνάρτηση **μόνο του x** και μόνο σ’ αυτή τη περίπτωση θα επιλέγουμε λοιπόν να αναζητήσουμε πολλαπλασιαστή αυτής της μορφής. **Συνεπώς η έκφραση:** ($\frac{Q_x - P_y}{Q}$) **αποτελεί ένα είδος κριτηρίου.**

- **Πολλαπλασιαστής που να εξαρτάται μόνο από το y:**

Όμοια σ’ αυτή τη περίπτωση έχουμε μ = μ(y) οπότε $\mu_x = 0$, $\mu_y = \mu'(y)$ οπότε η (2) γίνεται:

$$\mu.'(y) - \frac{Q_x - P_y}{P}\mu(y) = 0$$

η οποία είναι ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης. Η παραπάνω σχέση έχει νόημα όταν η έκφραση $\frac{Q_x - P_y}{P}$ είναι συνάρτηση **μόνο του y** και μόνο σ' αυτή τη περίπτωση θα επιλέγουμε λοιπόν να αναζητήσουμε πολλαπλασιαστή αυτής της μορφής. **Συνεπώς εάν δεν ισχύει το κριτήριο της προηγούμενης περίπτωσης ελέγχουμε την παραπάνω έκφραση, για το αν είναι συνάρτηση μόνο του y ή όχι.**

- **Πολλαπλασιαστής της μορφής μ(x,y) = μ(z),όπου z είναι δοσμένη συνάρτηση των x,y:**

Σ' αυτή τη περίπτωση έχουμε $\mu_x = \mu'(z)z_x$ και $\mu_y = \mu'(x)z_y$. Αντικαθιστώντας αυτά στην σχέση (2) παίρνουμε την εξής έκφραση για το μ:

$$\mu.'(z) - \frac{Q_x - P_y}{Pz_y - Qz_x}\mu.(z) = 0$$

Η παραπάνω είναι ομογενής γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης και έχει νόημα όταν η έκφραση $\frac{Q_x - P_y}{Pz_y - Qz_x}$ είναι συνάρτηση μόνο του z.

Σε κάθε περίπτωση για να λυθεί η αρχική διαφορική εξίσωση χρειάζεται να βρούμε **ένα μόνο οποιοδήποτε πολλαπλασιαστή** και στη συνέχεια να λύσουμε την νέα διαφορική εξίσωση μ(x,y)P(x,y)dx + μ(x,y)Q(x,y)dy = 0 ως ολικό διαφορικό. Η γενική λύση της προηγούμενης, θα είναι και γενική λύση της αρχικής διαφορικής εξίσωσης P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0.

Η εύρεση του πολλαπλασιαστή γίνεται με επίλυση των διαφορικών εξισώσεων που αυτός ικανοποιεί. Για επιπλέον μελέτη ασκήσεις παρατίθενται στο τμήμα των ασκήσεων, αργότερα στο κεφάλαιο.

6. Διαφορικές Εξισώσεις Πρώτης Τάξης Υπό Πεπλεγμένη Μορφή

Σ' αυτή την παράγραφο, θα μας απασχολήσουν οι διαφορικές εξισώσεις Lagrange και Clairaut.

6.1 Διαφορικές Εξισώσεις Lagrange

Οι διαφορικές εξισώσεις Lagrange έχουν την μορφή:

$$y = xf(y') + g(y') \qquad (1)$$

Οι διαφορικές αυτές εξισώσεις λύνονται ως εξής:

- θέτουμε $y'(x) = p(x)$ οπότε $y''(x) = p'(x)$.
- παραγωγίζουμε την (1): $y' = f(y') + xf'(y')y'' + g'(y')y''$

Με βάση τις παραπάνω σχέσεις παίρνουμε:

$$(p - f(p))\frac{dx}{dp} - xf'(p) = g'(p)$$

η οποία είναι γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης, ως προς $x(p)$, δηλαδή x είναι η άγνωστη συνάρτηση και p η μεταβλητή.

Αφού βρούμε την γενική λύση της $x(p) = Q(c,p)$ και επειδή $p=y'$ έχουμε:

$$x(p) = Q(c,p)$$
$$y(p) = xf(p) + g(p)$$

Από τις παραπάνω σχέσεις απαλείφουμε το p και έχουμε την γενική λύση της (1).Αν η απαλοιφή δεν είναι εφικτή, τότε έχουμε την λύση σε πεπλεγμένη μορφή, με το p παράμετρο.

6.2 Διαφορικές Εξισώσεις Clairaut

Οι διαφορικές εξισώσεις Clairaut έχουν την μορφή:

$$y = xy' + f(y') \qquad (1)$$

Οι διαφορικές αυτές εξισώσεις λύνονται ως εξής:

- θέτουμε $y'(x) = p(x)$ οπότε $y''(x) = p'(x)$.
- παραγωγίζουμε την (1) ως προς x: $y' = y' + xy'' + f(y')y''$

Με βάση τις παραπάνω σχέσεις παίρνουμε:

$$(x + f'(p))\frac{dx}{dp} = 0$$

Από την οποία παίρνουμε:

$$\frac{dp}{dx} = 0 \qquad \text{ή} \qquad x + f'(p) = 0$$

Από την πρώτη σχέση παίρνουμε την **γενική λύση**, η οποία είναι:

$$y = xc + f(c)$$

δηλαδή μια μονοπαραμετρική οικογένεια ευθειών.

Από την δεύτερη σχέση προκύπτει σε κανονική ή σε πεπλεγμένη μορφή μια **ιδιάζουσα λύση:**

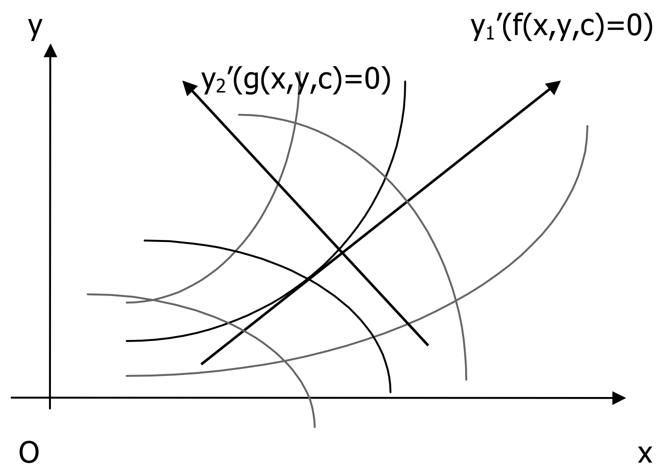
$$x = -f'(p)$$
$$y = xp + f(p)$$

6.2.1 Ισογώνιες Τροχιές

Θεωρούμε την γενική λύση μιας διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης:

$$f\,(x,y,c) = 0 \qquad (1)$$

Είναι γνωστό πως η (1) αποτελεί **μια μονοπαραμετρική οικογένεια καμπύλων** και για κάθε τιμή της σταθεράς c προκύπτει μια καμπύλη στο επίπεδο. Τίθεται το ερώτημα: **Υπάρχει μια άλλη οικογένεια καμπύλων g (x,y,c) = 0 (2) έτσι ώστε κάθε καμπύλη της (2) να τέμνει υπό κάποια συγκεκριμένη σταθερή γωνία οποιαδήποτε καμπύλη της (1);**



Θεωρώντας ένα τυχαίο σημείο τομής των δύο οικογενειών και θέτοντας τις εφαπτόμενες των καμπύλων στο σημείο τομής να σχηματίζουν συγκεκριμένη σταθερή γωνία μεταξύ τους, παίρνουμε (με y_1 τη κλίση της (1) δηλαδή της δοθείσας οικογένειας καμπύλων και y_2 την κλίση της (2) δηλαδή την κλίση της ζητούμενης οικογένειας καμπύλων) ότι οι κλίσεις των καμπύλων ακολουθούν τη παρακάτω σχέση:

$$y'_1 = \frac{y'_2 - \tan\phi}{1 + \tan\phi . y'_2} \qquad (3)$$

Για την λύση λοιπόν του προβλήματος που τέθηκε παραπάνω ακολουθούμε τα εξής βήματα:

Από την (1) με παραγώγιση προκύπτει η διαφορική εξίσωση F(x,y,y′) = 0,η οποία έχει ως γενική λύση την (1).

Θεωρούμε την διαφορική εξίσωση $F(x,y,\frac{y'-\tan\phi}{1+\tan\phi.y'})=G(x,y,y')=0$.Η λύση της G(x,y,y′) = 0 δεν είναι παρά η ζητούμενη μονοπαραμετρική οικογένεια καμπύλων g(x,y,c) = 0 .

Τέλος πρέπει να σημειώσουμε ότι στην περίπτωση που φ= π / 2 οι καμπύλες ονομάζονται **ορθογώνιες** ενώ η (3) γίνεται :

$$y'_1=-\frac{1}{y'_2}$$

και προφανώς η νέα διαφορική εξίσωση έχει την μορφή:

$$F(x,y,-\frac{1}{y'})=G(x,y,y')=0$$

B. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 2.1

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση:

$$(y-1)^2dx+(xy-2x+\frac{x-1}{y})dy=0,\ y\neq 0.$$

Λύση:

$$\frac{1}{P}\left(\frac{dQ}{dx}-\frac{dP}{dy}\right)=\frac{1}{(y-1)^2}\left(\frac{1}{y}-y\right)=\frac{1+y}{y(y-1)}$$

$$\rightarrow \mu(y)=\exp(\int\frac{1+y}{y(y-1)}dy)=\frac{y}{(y-1)^2},y\neq 1$$

$$ydx+\frac{y}{(y-1)^2}(xy-2x+\frac{x-1}{y})dy=0$$

Επομένως έχουμε ολικό διαφορικό που έχει ως γενικό ολοκλήρωμα τη σχέση:

$$xy+\frac{y}{y-1}=c \quad (1)$$

Το y = 0 είναι λύση της (1) άρα έχει προστεθεί μια λύση που όμως λόγω των αρχικών συνθηκών αποκλείεται. Η y = 1 αποκλείεται λόγω της (1) είναι όμως λύση της ΔΕ. Βλέπουμε επίσης ότι πήραμε το μ(y) μετά από δοκιμές και όχι κατόπιν κάποιας συγκεκριμένης μεθοδολογίας. Δηλαδή για να λύσουμε μια ΔΕ κατά Euler δοκιμάζουμε τα μ(x),μ(y),μ(xy), κλπ. έως ότου να πληρωθεί η συνθήκη μ(u)=f(u).

Άσκηση 2.2

Να λυθεί η ΔΕ:

$$xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$$

Λύση:

Γενικά όταν έχουμε ρίζες, σκεφτόμαστε καταρχήν το ενδεχόμενο να είναι η ΔΕ ομογενής.

Πράγματι η ΔΕ είναι ομογενής και εκτελούμε έτσι το μετασχηματισμό y = ux οπότε:

$$y' = u + u'x$$

και επομένως με την αντικατάσταση αυτή παίρνουμε:

$$u' = \frac{1}{|x|}\sqrt{1-u^2} \qquad (1)$$

παρατηρούμε δε ότι η έκφραση (1) είναι μια ΔΕ χωριζομένων μεταβλητών γιατί όπως ξέρουμε u′=du/dx ή u′=du/dy ανάλογα με το ποια είναι η δεύτερη μεταβλητή. Εδώ η δεύτερη μεταβλητή είναι η x και άρα u′=du/dx οπότε τελικά λαμβάνουμε:

$$\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{dx}{|x|} \qquad (2)$$

Η δεύτερη δυσκολία της άσκησης είναι η επίλυση αυτού του ολοκληρώματος. Παρατηρούμε ότι το u πρέπει να ανήκει υποχρεωτικά στο (-1,1) καθότι η υπόρριζη ποσότητα τότε μόνο είναι θετική. Το δε x, δύναται να ανήκει στο x>0 ή στο x<0 καθώς βρίσκεται εντός απολύτου και έτσι δε μας ενδιαφέρει. Επιλύουμε το ολοκλήρωμα:

$$Arcsinu = \ln x + \ln C \Rightarrow Arcsinu = \ln Cx \Rightarrow u = \sin(\ln Cx) \Rightarrow y = x\sin(\ln Cx),\ C > 0.$$

$$Arcsinu = -\ln|x| + \ln C \Rightarrow Arcsinu = -\ln(-x) + \ln C \Rightarrow Arcsinu = \ln(\frac{C}{-x}) \Rightarrow y = x\sin(\ln\frac{C}{-x}),\quad C > 0.$$

Στην πρώτη περίπτωση είχαμε x>0 ενώ στη δεύτερη x<0. **Άρα έπρεπε να διαχωρίσουμε τις λύσεις τις ΔΕ. Κάτι τέτοιο πρέπει πάντοτε να γίνεται όταν έχουμε ρίζες ή / και απόλυτα στα ολοκληρώματα καθώς η ποσότητα εντός του ln πρέπει να είναι θετική.** Μια άλλη παρατήρηση που πρέπει οπωσδήποτε να κάνουμε είναι οι λύσεις y = x και y = -x που είναι οι ιδιάζουσες αφού το u γίνεται +1,-1 και άρα μηδενίζεται η υπόρριζη ποσότητα.

<u>Συμπέρασμα</u>: **Όταν σε μια ΔΕ διαιρούμε με κάποιον παράγοντα (εδώ με την ρίζα) υποθέτουμε αυτόματα ότι ο παράγοντας είναι διάφορος του μηδενός για να έχει νόημα η διαίρεση. Έτσι όμως χάνουμε (πολλές φορές) λύσεις.** Οι ιδιάζουσες λύσεις ανήκουν συνήθως σ' αυτή την κατηγορία. Στο τέλος της επιλύσεως πρέπει πάντοτε να ελέγχουμε αν έχουμε και άλλες λύσεις της ΔΕ που δεν περιγράφονται από τη γενική της λύση.

Άσκηση 2.3

Να επιλυθεί η παρακάτω ΔΕ:

$$y' = \frac{x + y - 2}{-x + y - 4}$$

Λύση:

Η δοσμένη ΔΕ είναι γνωστής μορφής και η διαδικασία επίλυσής της περιγράφεται αναλυτικά στη θεωρία. Έτσι έχουμε να λύσουμε το σύστημα αριθμητή - παρονομαστή και να κάνουμε τον αντίστοιχο για κάθε περίπτωση μετασχηματισμό.

$$\left.\begin{array}{l} x + y - 2 = 0 \\ -x + y - 4 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x,y) = (-1,3) \Rightarrow \begin{array}{l} u = x + 1,\ v = y - 3 \\ x = u - 1,\ y = v + 3 \end{array}$$

οπότε με αντικατάσταση παίρνουμε:

$$\frac{dv}{du} = \frac{u+v}{-u+v}$$

που θέτουμε v = zu για να οδηγηθούμε στην ΔΕ χωριζομένων μεταβλητών

$$\frac{dz}{du} = \frac{1}{u}\left[\frac{-z^2+2z+1}{z-1}\right] \Rightarrow \int \frac{z-1}{-z^2+2z+1}dz = \int \frac{du}{u} + C_1,\ C_1 \in R$$
$$\Rightarrow -\frac{1}{2}\ln C = \ln|u| + C_1 \Rightarrow -\ln\left|1+2z-z^2\right| = \ln u^2 - \ln C,\ C>0$$
$$\Rightarrow u^2 = \frac{C}{\ln\left|1+2z-z^2\right|} \Rightarrow u^2\left(1+2z-z^2\right) = C,\ C>0$$

Αν τώρα θέσουμε z = u / v, u = x+1 και v = y-3 τότε το γενικό ολοκλήρωμα της δοσμένης ΔΕ παίρνει την παρακάτω μορφή:

$$\left(x+1\right)^2 + 2(y-3)(x+1) - (y-3)^2 = C, \quad C>0$$

Δεν ξεχνάμε δηλαδή να μετατρέψουμε τη Γενική Λύση της ΔΕ ως προς x,y.Οι ιδιάζουσες λύσεις της ΔΕ προκύπτουν από την παρακάτω ισότητα:

$$1+2z+z^2=0 \Rightarrow z=1+\sqrt{2} \ \ \& \ \ z=1-\sqrt{2}$$

και επομένως οι ιδιάζουσες λύσεις της αρχικής εξισώσεως είναι οι ευθείες:

$$\frac{y-3}{x+1} = 1+\sqrt{2} \quad \& \quad \frac{y-3}{x+1} = 1-\sqrt{2}$$

Αυτό ήταν ένα άλλο παράδειγμα στο οποίο έπρεπε να διακρίνουμε και να μελετήσουμε χωριστές περιπτώσεις για τις τιμές που μηδενίζουν τον παράγοντα με τον οποίο διαιρέσαμε. Έχουμε πει πως με τον τρόπο αυτό χάνονται λύσεις. Αν βρούμε τις ρίζες του παράγοντα αυτού και τις θέσουμε στην αρχική εξίσωση (όπως κάναμε παραπάνω) τότε παίρνουμε και τις λύσεις που αρχικά χάνονται και έτσι δεν υπάρχει βλάβη στη γενικότητα της λύσης. Εξάλλου αυτή είναι και η μόνη "δυσκολία" των διαφορικών εξισώσεων.

Άσκηση 2.4

Να λυθεί η παρακάτω ΔΕ (ονομάζεται διαφορική εξίσωση Bernoulli).

$$y' + \frac{y}{2+x} + (2+x)y^4 = 0$$

Λύση:

Σύμφωνα και με αυτά που έχουμε πει στη θεωρία εκτελούμε το μετασχηματισμό:

$$u = y^{1-4} = y^{-3} = \frac{1}{y^3}$$

ο οποίος οδηγεί στην εξής μετατροπή:

$$u' - \frac{3}{2+x}u - 3(2+x) = 0$$

που είναι προφανώς μια γραμμική ΔΕ η γενική λύση της οποίας κατά τα γνωστά είναι

$$u(x) = \left[C(2+x) - 3\right](2+x)^2$$

οπότε και η γενική λύση της δοσμένης εξίσωσης είναι:

$$y(x) = \left[u(x)\right]^{-1/3} = \left[\left[C(2+x) - 3\right](2+x)^2\right]^{-1/3}$$

Η λύση που ικανοποιεί την αρχική τιμή y(0) = -1 αντιστοιχεί στη σταθερά C=11/8. Επομένως η ζητούμενη μερική λύση είναι η :

$$y(x) = \frac{2}{\sqrt[3]{(2+x)^2(11x-2)}}, \quad -2 < x < \frac{2}{11}.$$

Άσκηση 2.5

Να λυθεί η παρακάτω ΔΕ (διαφορική εξίσωση Riccati) που έχει τη μερική λύση $y_1 = e^x$

$$y' - e^{-x}y^2 + 3y - 3e^x = 0$$

Λύση:

Προφανώς έχουμε διαφορική εξίσωση Riccati αφού μας δίδεται μια μερική λύση της διαφορικής. Εξάλλου και με έναν έλεγχο της μορφής της ΔΕ προκύπτει ότι αυτή είναι όμοια με τη γενική μορφή της ΔΕ Riccati. Έτσι σύμφωνα με τη θεωρία αρκεί να κάνουμε την αντικατάσταση:

$$y = y_1 + \frac{1}{u(x)} = e^x + \frac{1}{u(x)}$$

οπότε εκτελώντας τις πράξεις η δοσμένη εξίσωση ανάγεται εύκολα σε γραμμική διαφορική εξίσωση $u' - u + e^{-x} = 0$ η οποία έχει γ.λ.:

$$u(x) = C\,e^x + \frac{1}{2}e^{-x} \Rightarrow y(x) = e^x + \frac{2}{2C\,e^x + e^{-x}} = e^x + \frac{2e^{-x}}{2C + e^{-2x}}$$

που προφανώς ισχύει για κάθε διάστημα $2C + e^{-2x} \neq 0$..

Η μερική λύση που ικανοποιεί την αρχική συνθήκη y(0) = -1 είναι εκείνη για την οποία C = -1, δηλ. η:

$$y(x) = e^{x} + \frac{2e^{-x}}{-2 + e^{-2x}}$$

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι η λύση $y = e^{x}$ είναι ιδιάζουσα. Γενικά για να λύσουμε μια ΔΕ Bernoulli ή Riccati αρκεί να εκτελέσουμε την κατάλληλη αντικατάσταση, οπότε παίρνουμε γραμμικές διαφορικές εξισώσεις των οποίων η λύση είναι εύκολο να βρεθεί.

Άσκηση 2.6

Να λυθεί η παρακάτω διαφορική εξίσωση:

$$\left(xy \sin xy - \cos xy\right)dx + x^{2} \sin xy dy = 0$$

Λύση:

Γενικά όταν έχουμε παραστάσεις τριγωνομετρικές που προφανώς δεν επιλύονται εύκολα (αλλά και σε άλλες περιπτώσεις) κοιτάζουμε μήπως η εξίσωση αυτή είναι **άμεσα ολοκληρώσιμη** αν με άλλα λόγια είναι ολικό διαφορικό. Ονομάζουμε P τον συντελεστή του dx και Q το συντελεστή του dy. Παραγωγίζουμε τα P,Q ως προς y,x αντίστοιχα:

$$P(x,y) = xy \sin xy - \cos xy \Rightarrow \frac{dP}{dy} = x \sin xy + xyx \cos xy + x \sin xy$$

$$Q(x,y) = x^{2} \sin xy \Rightarrow \frac{dQ}{dx} = 2x \sin xy + x^{2} y \cos xy$$

Προφανώς έχομε ισότητα των μερικών παραγώγων και άρα λέμε ότι η ΔΕ είναι άμεσα ολοκληρώσιμη ή ότι έχουμε ολικό διαφορικό. Η διαδικασία επίλυσης είναι απλή και περιγράφεται στη θεωρία. Αρχίζουμε είτε από το P είτε από το Q (ας πούμε από το Q). Αν ονομάσουμε f(x,y) τη γενική μορφή της ΔΕ δηλαδή f(x,y)=c, τότε έχουμε:

$$f(x,y)=\int Q\,dy+c_1(x) \quad \Rightarrow f(x,y)=\int x^2\sin xy dx+c_1(x) \quad \Rightarrow$$

$$f(x,y)=x\int \sin(xy)d(xy)+c_1(x) \quad \Rightarrow f(x,y)=-x\cos(xy)+c_1(x) \quad (1)$$

Παραγωγίζοντας ως προς x τη σχέση (1) παίρνουμε:

$$f_X=P=-\cos(xy)+xy\sin(xy)+c_1'(x)=xy\sin(xy)-\cos(xy)$$

Κάνοντας τις αναγωγές έχουμε:

$$c_1'(x)=0\Rightarrow c_1(x)=c_1$$

συνεπώς

$$f(x,y)=-x\cos(xy)+c_1$$

Τότε όμως f(x,y) = c = -xcos(xy)+c_1 $\Rightarrow$ xcos(xy)=c′ που είναι και η γενική λύση της εξίσωσης σε πεπλεγμένη μορφή.

Άσκηση 2.7

Να επιλυθεί η ΔΕ της μορφής:

$$(y-1)^2dx+(xy-2x+\frac{x-1}{y})dy=0, \qquad (x,y)\in R^2 \quad \& \quad y\neq 0$$

Λύση:

Προφανώς αν εκτελέσουμε τις πράξεις, η ΔΕ δεν είναι ολικού διαφορικού. Επίσης δεν ανήκει σε καμιά από τις γνωστές μορφές που έχομε μελετήσει (Bernulli,Riccati, γραμμική, ομογενής, κλπ.). Η τελευταία μας ελπίδα είναι να βρεθεί κάποιος παράγοντας (ολοκληρώνων όπως ονομάζεται) ώστε η ΔΕ να γίνει εξίσωση ολικού διαφορικού.

Επειδή δεν γνωρίζουμε αν ο παράγοντας αυτός θα είναι ως προς x, y ή ως προς και τα δυο, κάνουμε δοκιμές. Αν σε κάποια δοκιμή πάρουμε ότι ο ολοκληρώνων παράγοντας είναι συνάρτηση μόνο αυτού που αρχικά θέσαμε, τότε θα είναι μοναδικός και κατάλληλος. Έτσι έχουμε εδώ ότι :

$$\frac{1}{P}\left(\frac{\partial . Q}{\partial . x} - \frac{\partial . P}{\partial . y}\right) = \frac{1}{(y-1)^2}\left(\frac{1}{y} - y\right)$$

που είναι προφανώς συνάρτηση μόνο αυτού που υποθέσαμε (δηλαδή του y) άρα είναι μοναδικός και κατάλληλος και ισούται με :

$$\text{ì}(y) = \frac{y}{(y-1)^2}, \; y \neq 1$$

Αν πολλαπλασιάσουμε και τα δυο μέλη της δοσμένης ΔΕ με το μ(y) τότε παίρνουμε την εξής ΔΕ ολικού διαφορικού που είναι άμεσα ολοκληρώσιμη όπως έχουμε δει:

$$ydx + \left(xy - 2x + \frac{x-1}{y}\right)\frac{y}{(y-1)^2}dy = 0, \quad y \neq 0,1.$$

της οποίας το γενικό ολοκλήρωμα είναι:

$$xy + \frac{y}{y-1} = C, \quad y > 1 \;\; \text{ç} \;\; y < 1.$$

Παρατηρούμε ότι ο πολλαπλασιαστής μηδενίζεται για y = 1. Πρέπει να ελέγξουμε κατά πόσο οι συναρτήσεις αυτές είναι λύσεις της δοσμένης ΔΕ. Η y = 0 περιέχεται στο γενικό ολοκλήρωμα που βρήκαμε ενώ δεν ορίζεται στην δοσμένη εξίσωση. Η y = 1 είναι λύση της αρχικής αλλά δεν περιέχεται στη γενική εξίσωση που βρήκαμε και που περιγράφει τις λύσεις της ΔΕ. Άρα **με τη μέθοδο του ολοκληρώνοντα παράγοντα είναι δυνατόν να χαθούν λύσεις.** Αυτό όπως είδαμε συμβαίνει επειδή ο ολοκληρώνων παράγοντας δεν ορίζεται στο πεδίο ορισμού της ΔΕ.

Άσκηση 2.8

Να λυθεί η ΔΕ με εξίσωση $(y')^3-(x-1)e^y=0$.

Λύση:

Έχουμε μια ΔΕ πεπλεγμένης μορφής και άρα θέτουμε y′=p οπότε παίρνουμε στη συνέχεια μια ΔΕ Bernoulli την οποία και λύνουμε.

$$y=\ln\frac{(y')^3}{x-1}=\ln\frac{p^3}{x-1}.$$

Στην συνέχεια παραγωγίζουμε ως προς x, γνωρίζοντας ότι y′=p. Έτσι:

$$p=\frac{3p'(x-1)-p}{p(x-1)}\Rightarrow p'=\frac{1}{3(x-1)}p+\frac{1}{3}p^2\Rightarrow p(x)=\left[C(x-1)^{1/3}-\frac{x-1}{4}\right]^{-1}$$

Αφού λύσαμε τη ΔΕ Bernoulli που εμφανίστηκε θέτουμε p(x) = y′ και ολοκληρώνουμε για να βρούμε τη λύση της δοσμένης ΔΕ ως προς y. Τελικά παίρνουμε:

$$y=-\ln\left[C-\frac{(x-1)^{4/3}}{4}\right]$$

Άσκηση 2.9

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $(y')^3 - (x-1)e^y = 0$.

Λύση:

Θα λύσουμε την εξίσωση ως προς x και έπειτα θα την παραγωγίσουμε ως προς y αφού πρώτα θέσουμε y′=p. Με σχέσεις αυτά που σκεφτήκαμε γράφονται:

$$\left(y'\right)^3 - (x-1)e^y = 0 \Rightarrow x = \left(y'\right)^3 e^{-y} + 1 \Rightarrow x = p^3 e^{-y} + 1 \Rightarrow x = p^3 e^{-y} + 1 \quad (1)$$

Παραγωγίζουμε τώρα ως προς y. Χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή καθώς τα x,p και το y είναι εξαρτημένα μεταξύ τους. Έτσι θα πάρουμε:

$$\frac{1}{p} = 3p^2 e^{-y}\frac{dp}{dy} - p^3 e^{-y} \Rightarrow \frac{dp}{dy} - \frac{1}{3}p - \frac{e^y}{3}p^{-3} = 0 \Rightarrow p^4 = Ce^{(4/3)y} - 4e^y$$

Τέλος πρέπει να απαλείψουμε το p μεταξύ των σχέσεων (1) και της τελευταίας. Έτσι θα πάρουμε:

$$y = -\ln\left[C - \frac{(x-1)^{4/3}}{4}\right]$$

που είναι και η γενική λύση της ΔΕ.

Άσκηση 2.10

Να βρεθεί η ΔΕ Clairaut που έχει ιδιάζουσα λύση y = lnx.Στην συνέχεια να επιλυθεί η εξίσωση που βρέθηκε.

Λύση:

Ως γνωστόν η ΔΕ Clairaut έχει τη μορφή y=xy′+f(y′) και η ιδιάζουσα λύση της την επαληθεύει άρα:

$$\ln x = x\frac{1}{x} + f(\frac{1}{x}) \Rightarrow \ln x - 1 = f(\frac{1}{x}) \Rightarrow -\ln\frac{1}{x} - 1 = f(\frac{1}{x}) \Rightarrow f(y') = -\ln y' - 1$$

όπου θέσαμε 1/x=y′. Αντικαθιστώ το f(y′) στη γενική έκφραση της ΔΕ Clairaut οπότε:

$$y = xy' - \ln y' - 1$$

που είναι η ζητούμενη ΔΕ.

Τώρα θα περάσουμε στο δεύτερο μέρος της εκφώνησης. Θα την επιλύσουμε θέτοντας y′=p Έχουμε y=xp-lnp-1 την οποία και παραγωγίζουμε ως προς x προσέχοντας ότι τα x,p,y είναι εξαρτημένα.

$$y' = 1p + x\frac{dp}{dx} - \frac{1}{p}\frac{dp}{dx} \Rightarrow p = p + x\frac{dp}{dx} - \frac{1}{p}\frac{dp}{dx} \Rightarrow \frac{dp}{dx}(x - \frac{1}{p}) = 0 \quad (1)$$

Από τη σχέση (1) έχουμε ότι x=1/p ή ότι dp/dx=0⇒p′=0⇒p=c άρα η γενική ΔΕ είναι
y=xc-lnc-1 (x=1/p, y=-lnp) και απαλείφοντας το p προκύπτει η ιδιάζουσα λύση y=lnx.

<u>Παρατήρηση</u>: όταν στη ΔΕ έχουμε τον παράγοντα y′ ως φ(y′) συμφέρει να θέτουμε y′=p και να επιλύουμε τη ΔΕ ως Clairaut ή Lagrange.

Άσκηση 2.11

Να λυθεί η $y = y' + y'^2$.

Λύση:

Αυτό είναι ένα άλλο παράδειγμα που δίνεται για να τονίσουμε τη σημασία της παραπάνω παρατήρησης. Πράγματι αν θέσουμε y'=p τότε παίρνουμε (ΔΕ Lagrange):

$$y = p + p^2 \Rightarrow y' = \frac{dp}{dx} + 2p\frac{dp}{dx} \Rightarrow p = (1+2p)\frac{dp}{dx} \Rightarrow \frac{dx}{dp} = \frac{1+2p}{p}$$

την οποία ολοκληρώνουμε:

$$x(p) = \int \frac{(1+2p)}{p}dp + C \Rightarrow x(p) = \int \frac{dp}{p} + 2\int dp + C \Rightarrow x(p) = \ln p + 2p + C$$

που είναι η ζητούμενη εξίσωση.

Άσκηση 2.12

Βρείτε τις ισογώνιες τροχιές των καμπύλων $x^2 = 2c(y - x\sqrt{3})$, όταν η γωνία των καμπύλων και των τροχιών είναι φ=60°.

Λύση:

Θα παραγωγίσουμε τη δοσμένη εξίσωση για να απαλείψουμε το c:

$$2x = 2c(y' - \sqrt{3}) \Rightarrow x(y' - \sqrt{3}) = 2(y - x\sqrt{3}) \Rightarrow xy' - 2y = -x\sqrt{3}$$

Στη συνέχεια θέτουμε όπου $y' \to \dfrac{y' - \tan\varphi}{1 + \tan\varphi\, y'} = \dfrac{y' - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}\, y'}$, $\tan\varphi = 60^\circ$ και παίρνουμε τη ΔΕ των ζητούμενων τροχιών:

$$x\frac{y'-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}y'}-2y=-x\sqrt{3}\Rightarrow(2x-\sqrt{3}y)y'=y$$

.

Η τελευταία εξίσωση είναι ομογενής ΔΕ οπότε θέτουμε y/x=u(x)⇒y=ux, y′=u′x+u άρα:

$$(2x-\sqrt{3}ux)(u'x+u)=ux\Rightarrow x(2-\sqrt{3}u)u'=\sqrt{3}u^2-u\Rightarrow\frac{2-\sqrt{3}u}{u(1-\sqrt{3}u)}du=\frac{dx}{x}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int\left(\frac{2}{u}+\frac{\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}u}\right)du=\int\frac{dx}{x}+c_1\Rightarrow 2\ln|u|-\ln\left|1-\sqrt{3}u\right|=\ln|x|+\ln c\Rightarrow\frac{u^2}{1-\sqrt{3}u}=xc$$

και για u=y/x έχουμε τη ζητούμενη οικογένεια τροχιών:

$$y^2=x^2c(x-\sqrt{3}y)\,.$$

Άσκηση 2.13

Να βρείτε τις ορθογώνιες τροχιές της οικογένειας των ελλείψεων

$$2x^2+y^2=a^2,\quad a\in R^*$$

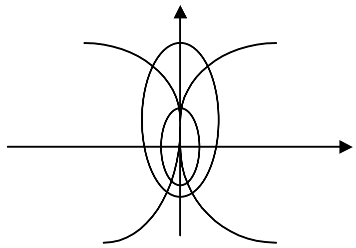
Λύση:

Διώχνουμε το α παραγωγίζοντας τη δοσμένη εξίσωση ως προς x (το y εξαρτάται από το x).

2x+yy′=0 (1).

Αν στην προηγούμενη θέσουμε όπου y′ το -1 / y′ (μην ξεχνάμε ότι θέλουμε ορθογώνιες τροχιές) παίρνουμε 2x+y(-1/y′)=0 οπότε έχουμε διαδοχικά:

$$2xy'-y=0\Rightarrow\frac{dy}{y}=\frac{dx}{2x}\Rightarrow 2\ln|y|=\ln|x|+\ln c\Rightarrow y^2=xc\,.$$



Άρα οι παραβολές ως προς τον άξονα Οx τέμνουν ορθογώνια την οικογένεια των ελλείψεων (βλέπε σχήμα δίπλα).

Άσκηση 2.14

Να λυθεί η ΔΕ:

$$\arcsin y' = x + y \qquad (1)\ .$$

Λύση:

Θα εκμεταλλευτούμε τον ορισμό της arcsinx=y $\Rightarrow$ x=siny οπότε η δοσμένη εξίσωση γράφεται:

$$y' = \sin(x + y)$$

και επειδή το x+y εντός του ημίτονου μας περιορίζει, θα το θέσουμε ίσο με μια βοηθητική συνάρτηση z(x)=x+y άρα παραγωγίζοντας θα πάρουμε:

$$1 + y' = z'(x) \Rightarrow z'(x) - 1 = y' = \sin z(x) \Rightarrow z' = 1 + \sin z$$

δηλαδή ΔΕ χωριζομένων μεταβλητών, την οποία ολοκληρώνουμε άμεσα:

$$\frac{dz}{1+\sin z} = dx \Rightarrow \int \frac{dz}{1+\sin z} = \int dx + C \Rightarrow \int \frac{dz}{1+\sin z} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{(t+1)^2} = -\frac{2}{t+1}$$

αφού θέσαμε :

$$\tan\left(\frac{z}{2}\right) = t \Rightarrow \sin z = \frac{2t}{1+t^2} \Rightarrow dz = \frac{2dt}{1+t^2}$$

και επομένως παίρνουμε:

$$-\frac{2}{1+\tan(z/2)} = x + C \Rightarrow (x+c)(1+\tan\frac{x+y}{2})+2=0$$

που είναι η ζητούμενη λύση.

Άσκηση 2.15

Να βρεθεί το μ έτσι ώστε η διαφορική εξίσωση που έχει μορφή:

$$y' - e^{x}y^2 - 3y - 3e^{-x} = 0$$

να έχει μια λύση της μορφής $y=\mu e^{-x}$ και στη συνέχεια να λυθεί η ΔΕ για μια τιμή του μ.

Λύση:

Θέτουμε την μερική λύση της ΔΕ στη δοσμένη εξίσωση και υπολογίζουμε το μ. Σημειώνεται ότι το μ είναι πραγματικός αριθμός.

$$y=\mu e^{-x} \Rightarrow y' = -\mu e^{-x} \Rightarrow -\mu e^{-x} - e^{x}e^{-2x}\mu^2 - 3\mu e^{-x} - 3e^{-x} = 0 \Rightarrow e^{-x}(\mu^2+4\mu+3)=0 \Rightarrow \mu=(-1,-3)$$

Η ΔΕ που είναι τύπου Ricatti θα έχει λύσεις τις $y_1 = -e^{-x}$ και $y_2 = -3e^{-x}$. Θα λύσουμε τη ΔΕ αυτή με τη μερική λύση y_1 σύμφωνα με τον τρόπο λύσης που ήδη έχουμε γνωρίσει.

Έχουμε:

$$y(x) = -e^{-x} + \frac{1}{z(x)} \Rightarrow y'(x) = e^{-x} - \frac{1}{z^2} z'(x) \quad ,$$

αντικαθιστούμε στη ΔΕ, άρα:

$$e^{-x} - \frac{z'}{z^2} - e^{x}\left(e^{-2x} + \frac{1}{z^2} - 2\frac{e^{-x}}{z}\right) - 3\left(-e^{-x} + \frac{1}{z}\right) - 3e^{-x} = 0 \Rightarrow z' + z = -e^{x}$$

που όμως είναι γραμμική ΔΕ ως προς z(x) που λύνεται ως εξής:

$$z(x) = e^{-\int dx}\left(C + \int (-e^{x}) e^{\int dx} dx\right) = e^{-x}\left(C - \int e^{2x} dx\right) = Ce^{-x} - \frac{e^{x}}{2} \Rightarrow y(x) = -e^{-x} + \frac{2e^{x}}{2C - e^{2x}}$$

που είναι και η ζητούμενη λύση της ΔΕ.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ Δ.Ε. ΑΝΩΤΕΡΑΣ ΤΑΞΕΩΣ

Α. ΘΕΩΡΙΑ

1. Γενικά Για Τις Διαφορικές Εξισώσεις Ανωτέρας Τάξεως

Η γενική μορφή μιας διαφορικής εξισώσεως n - τάξεως είναι η:

$$F\,(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)}) = 0$$

ενώ η κανονική της μορφή είναι η:

$$y^{(n)} = f\,(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n-1)})$$

Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, η γενική λύση μιας διαφορικής εξίσωσης περιέχει **μια** αυθαίρετη σταθερά. Όμοια, μια διαφορική εξίσωση n - τάξεως θα έχει γενική λύση με n αυθαίρετες σταθερές. Επίσης, ενώ στα προβλήματα αρχικών τιμών διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης χρειαζόμασταν μία αρχική συνθήκη, εδώ χρειαζόμαστε n αρχικές συνθήκες. Διαφορικές εξισώσεις ανωτέρας τάξης, ιδιαίτερα δεύτερης τάξης απαντώνται ευρύτατα σε εφαρμογές π.χ. της Φυσικής.

Στο κεφάλαιο αυτό θα περιοριστούμε στην μελέτη γραμμικών διαφορικών εξισώσεων ανώτερης τάξης.

2. Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις Ανώτερης Τάξης

Οι γραμμικές διαφορικές εξισώσεις ανώτερης τάξης έχουν την μορφή:

$$a_n(x)\,y^{(n)} + a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)\,y = g(x) \qquad (1)$$

Οι συναρτήσεις $a_i(x)$ ονομάζονται **συντελεστές** της διαφορικής εξίσωσης ,ενώ η συνάρτηση g(x) ονομάζεται **όρος εξαναγκασμού**. Για g(x) = 0 παίρνουμε την αντίστοιχη **ομογενή διαφορική εξίσωση:**

$$a_n(x)\,y^{(n)} + a_{n-1}(x)\,y^{(n-1)} + \dots + a_0(x)\,y = 0 \qquad (2)$$

Τέλος, όταν οι συντελεστές a_i είναι σταθεροί αριθμοί,(δηλαδή όταν οι συναρτήσεις $a_i(x)$ είναι σταθερές) τότε έχουμε **γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές.**(η οποίες θα εξεταστούν στο επόμενο κεφάλαιο).Ειδικότερα έχουμε:

2.1 Ομογενείς Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις

Έστω η διαφορική εξίσωση:

$$y^{(n)} + p(x)y^{(n-1)} + \dots + q(x)y = 0 \qquad (1)$$

Αυτή αποτελεί όπως είδαμε ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση.(Προκύπτει εύκολα από την (2) της προηγούμενης παραγράφου).

Η γενική λύση της (1) αποδεικνύεται ότι είναι η:

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \dots + c_ny_n(x) \qquad (2)$$

όπου c_1,c_2, … ,c_n είναι οι n το πλήθος αυθαίρετοι συντελεστές, και y_1,y_2, … ,y_n είναι n γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της (1). Αυτό είναι εύλογο, διότι ο χώρος των λύσεων της (1) είναι n διαστάσεως, και οι y_1,y_2, … ,y_n ως n το πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις αποτελούν **μια βάση του χώρου των λύσεων της**

(1).Κάθε λύση της (1) θα δίνεται ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης του χώρου των λύσεων της (1),δηλαδή η (2) είναι **η γενική λύση της (1).**Κάθε τέτοιο σύνολο λύσεων $y_1, y_2, \ldots, y_n$ θα ονομάζεται **θεμελιώδες σύνολο λύσεων της διαφορικής εξίσωσης.**

Η εύρεση της γενικής λύσης της ομογενούς (1) είναι ,όπως θα δούμε στην επόμενη παράγραφο, απολύτως απαραίτητη για την εύρεση της γενικής λύσης της κανονικής διαφορικής εξίσωσης:

$$y^{(n)} + p(x)y^{(n-1)} + \ldots + q(x)y = g(x) \qquad (3)$$

Συνεπώς για την εύρεση της γενικής λύσης της ομογενούς (1),αντιμετωπίζουμε δύο προβλήματα:

- Την εύρεση n το πλήθος μερικών λύσεων της ομογενούς και
- Τον έλεγχο αν είναι αυτές γραμμικώς ανεξάρτητες ή όχι.

Το (a) θα μας απασχολήσει μόνο για τις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης και αναλύεται ως ειδική μεθοδολογία στο επόμενο κεφάλαιο.

Το (b) μπορεί εύκολα όμως να απαντηθεί γενικά, με χρήση της **ορίζουσας του Wronski**. Έστω ότι έχουμε n το πλήθος συναρτήσεις $y_1, y_2, \ldots, y_n \in C^n(I)$,(Αυτό σημαίνει ότι πρόκειται για συνεχείς συναρτήσεις και n φορές παραγωγίσιμες στο διάστημα I) και θέλουμε να ελέγξουμε αν είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Ορίζουμε την ορίζουσα Wronski:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & \ldots & y_n \\ y'_1 & \ldots & y'_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Αποδεικνύεται ότι **εάν υπάρχει ένα $x_o \in I$ τέτοιο ώστε $W(x_o) \neq 0$,** οι συναρτήσεις $y_1, y_2, \ldots, y_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Το x_o είναι της επιλογής μας, αρκεί βέβαια να ανήκει στο I.(συνήθως χρησιμοποιούμε το μηδέν).

2.2 Μη Ομογενείς Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις

Όπως είδαμε αυτές έχουν την μορφή:

$$y^{(n)} + p(x)y^{(n-1)} + \ldots + q(x)y = g(x) \qquad (1)$$

Αποδεικνύεται ότι το σύνολο των λύσεων της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης (1) είναι η γραμμική πολλαπλότητα:

$$y_\mu + \Lambda(\, I \,)$$

όπου y_μ είναι μια οποιαδήποτε μερική λύση της (1) και $\Lambda(\, I \,)$ είναι ο n-διάστατος χώρος των λύσεων της αντίστοιχης ομογενούς:

$$y^{(n)} + p(x)y^{(n-1)} + \ldots + q(x)y = 0 \qquad (2)$$

Πρακτικά, αυτό σημαίνει ότι αν $y_\Gamma(x)$ είναι η γενική λύση της ομογενούς (2) και $y_\mu(x)$ είναι μια οποιαδήποτε μερική λύση της κανονικής διαφορικής εξίσωσης (1),τότε η γενική λύση y(x) της (1) δίνεται από την σχέση:

$$y(x) = y_\Gamma(x) + y_\mu(x) \qquad (3)$$

3. Υποβιβασμός Της Τάξης Γραμμικής Διαφορικής Εξίσωσης

Ο υποβιβασμός της τάξης γραμμικής διαφορικής εξίσωσης ή αλλιώς η μέθοδος d'Alembert είναι ένα χρήσιμο εργαλείο επίλυσης διαφορικών εξισώσεων. Εφαρμόζεται σε ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις n - τάξεως και τις μετατρέπει σε (n - 1) τάξεως επίσης γραμμικές διαφορικές εξισώσεις, με απαραίτητη προϋπόθεση να γνωρίζουμε μια μερική λύση $y_1(x)$ **μη μηδενική**.

Έστω η n - τάξης γραμμική διαφορική εξίσωση:

$$y^{(n)} + p(x)y^{(n-1)} + \ldots + q(x)y = 0 \qquad (1)$$

Εκτελούμε το μετασχηματισμό $y(x) = y_1(x)u(x)$ οπότε η (1) γίνεται μετά από απλές πράξεις:

$$u^{(n)} + (p(x) + n\frac{y'_1}{y_1})u^{(n-1)} + \ldots + q_1(x)u' = 0$$

Με την αντικατάσταση $g'(x) = u(x)$ προκύπτει μια (n-1) τάξης ομογενής διαφορική εξίσωση:

$$g^{(n-1)} + (p(x) + n\frac{y'_1}{y_1})g^{(n-2)} + \ldots + q_1(x)g = 0$$

Η μέθοδος αυτή συνήθως δεν ζητείται στις εξετάσεις. Μπορεί όμως να δοθεί μια γραμμική διαφορική εξίσωση π.χ. τρίτης τάξης με μια δοσμένη μερική λύση, οπότε θα πρέπει να κάνουμε υποβιβασμό της σε δεύτερης τάξης και στην συνέχεια να προσπαθήσουμε να λύσουμε την δεύτερης τάξης, σύμφωνα με μεθοδολογία που αναπτύσσεται σε επόμενο κεφάλαιο.

Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 3.1

Δυο γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις $y_1(x)$,$y_2(x)$ της ΔΕ:

$$y'' + \frac{2}{x}y' + e^{x}y = 0$$

ικανοποιούν τη σχέση W(1)=2. Ζητείται η W(10).

Λύση:

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1\, y_2' - y_2 y_1' \Rightarrow W' = y_1\, y_2'' - y_2 y_1'' \quad \mathbf{(1)}$$

και αν εκμεταλλευτούμε τη δοσμένη εξίσωση θα πάρουμε:

$$\left.\begin{array}{l} y_1'' + \dfrac{2}{x}y_1' + e^{x}y = 0 \\ y_2'' + \dfrac{2}{x}y_2' + e^{x}y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

πολλαπλασιάζουμε την πρώτη με y_2 και τη δεύτερη με y_1 και λόγω της σχέσης (1) θα πάρουμε W'+(2/x)W=0 που είναι μια βασική σχέση και ισχύει πάντοτε. Είναι επίσης μια ΔΕ χωριζομένων μεταβλητών την οποία και επιλύουμε στη συνέχεια:

$$\frac{dW}{W} + 2\frac{dx}{x} = 0 \Rightarrow \int\frac{dW}{W} + 2\int\frac{dx}{x} = 0 \Rightarrow \ln W + 2\ln x = 0 \Rightarrow \ln Wx^2 = \ln C \Rightarrow Wx^2 = C \Rightarrow W = Cx^{-2}$$

όμως W(1)=2 άρα C=2 και έτσι W(10)=2/100.

Άσκηση 3.2

Με τη βοήθεια της ορίζουσας Wronski να δειχθεί ότι οι $y_1 = x$ και $y_2 = x^4$ αποτελούν θεμελιώδες σύστημα λύσεων της ΔΕ:

$$x^2 y'' - 4xy' + 4y = 0$$

Να δοθεί η γενική της λύση.

Λύση:

Αντικαθιστούμε τις y_1, y_2 στη ΔΕ και βλέπουμε ότι την ικανοποιούν άρα καταρχήν είναι λύσεις της. Θεωρούμε την ορίζουσα του Wronski

$$\begin{vmatrix} x & x^4 \\ 1 & 4x^3 \end{vmatrix} = 4x^4 - x^4 = 3x^4 \neq 0$$

Η ορίζουσα είναι διάφορη του 0 άρα οι y_1, y_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες και αποτελούν ως εκ τούτου θεμελιώδες σύστημα λύσεων.

Εξάλλου η γενική λύση της ΔΕ θα έχει τη μορφή:

$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \Rightarrow y(x) = C_1 x + C_2 x^4$ με C_1, C_2 σταθερές.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ Δ.Ε. ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟΥΣ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΕΣ

Α. ΘΕΩΡΙΑ

1. Η Γραμμική Δ.Ε. Δευτέρας Τάξεως Με Σταθερούς Συντελεστές

Η γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξεως με σταθερούς συντελεστές έχει κατά τα γνωστά την μορφή:

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = g(x) \qquad (1)$$

ενώ η αντίστοιχη ομογενής:

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0 \qquad (2)$$

Η επίλυση της (1) συνίσταται όπως ήδη έχουμε πει στην εύρεση της γενικής λύσης της ομογενούς (2) και στην εύρεση μιας οποιασδήποτε μερικής λύσης της (1).**Τότε η γενική λύση της (1) δεν είναι παρά το άθροισμα της γενικής λύσης της ομογενούς και της μερικής λύσης της μη ομογενούς διαφορικής εξίσωσης.**

1.1 Εύρεση Γενικής Λύσης Ομογενούς

Θεωρούμε την ομογενή διαφορική εξίσωση:

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0 \qquad (1)$$

Υποθέτουμε αυθαίρετα ότι η (1) έχει λύσεις της μορφής y(x) = $e^{\lambda x}$.Αφού είναι λύσεις, παραγωγίζουμε κατάλληλα την y(x)και αντικαθιστούμε στην(1):

$$y'(x) = \lambda . e^{\lambda . x} \quad , \quad y''(x) = \lambda .^2 e^{\lambda . x}$$

οπότε προκύπτει:

$$\lambda .^2 e^x + \lambda . a e^x + b e^x = 0$$
$$e^x (\lambda .^2 + \lambda . a + b) = 0$$

όμως $e^x \neq 0$ για κάθε $x \in R$. οπότε για την παράμετρο λ παίρνω:

$$\lambda^2 + \lambda a + \lambda b = 0 \qquad (2)$$

Η (2) ονομάζεται **χαρακτηριστική εξίσωση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης.** Από το αποτέλεσμα αυτής, δηλαδή από το είδος των ριζών λ_1, λ_2 αυτής θα προκύψει **το είδος των συναρτήσεων που θα επιλέξουμε εμείς, ώστε να "χτίσουμε" την γενική λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης.**

Μην ξεχνάμε ότι πρέπει να επιλέξουμε n το πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης. Ο πίνακας που ακολουθεί, δίνει για κάθε περίπτωση ριζών της (2) την γενική λύση της ομογενούς. Μπορούμε να τις χρησιμοποιούμε απευθείας, χωρίς απόδειξη της γραμμικής ανεξαρτησίας των μερικών λύσεων που επιλέγουμε. Έχουμε:

Ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης	**Γενική λύση της ομογενούς**
$\lambda_1, \lambda_2 \in R$, με $\lambda_1 \neq \lambda_2$	$y_0(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$
$\lambda_1, \lambda_2 \in R$, με $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$	$y_0(x) = c_1 e^{\lambda . x} + c_2 x e^{\lambda . x}$
$\lambda_1, \lambda_2 \in C$, με $\lambda_{1,2} = \kappa \pm \nu i$	$y_0(x) = e^{\kappa . x}(c_1 \cos(\nu x) + c_2 \sin(\nu x))$

Πράγματι:

- Εάν έχω δύο ρίζες λ_1,λ_2 πραγματικές και άνισες τότε προφανώς οι $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}$ αποτελούν λύσεις της ομογενούς και μάλιστα γραμμικώς ανεξάρτητες, όπως είναι πολύ εύκολο να αποδείξουμε με την βοήθεια της ορίζουσας Wronski.
- Εάν έχω μια διπλή πραγματική ρίζα ($\lambda_1,\lambda_2 \in R$, με $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$) τότε προφανώς έχουμε μία ρίζα, την $e^{\lambda x}$.Η άλλη προκύπτει με υποβιβασμό της τάξης (μέθοδος d’Alembert) και έτσι είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι η $xe^{\lambda x}$ αποτελεί λύση της ομογενούς, και μάλιστα πάλι με την ορίζουσα Wronski αποδεικνύουμε ότι οι $e^{\lambda x}$, $xe^{\lambda x}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες και συνεπώς το σύνολο λύσεων $e^{\lambda x}$, $xe^{\lambda x}$ είναι θεμελιώδες για την ομογενή διαφορική εξίσωση.
- Εάν έχω μιγαδικές λύσεις τότε αυτές προφανώς θα είναι συζυγείς. Θεωρώντας π.χ. την $\lambda_1 = \kappa + \nu i$ και με την βοήθεια του τύπου του Euler : $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ έχω την λύση:

$$y(x) = e^{\kappa x}(\cos(\nu x) + i\sin(\nu x)).$$

Παρατηρούμε ότι και το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της παραπάνω έκφρασης αποτελούν ξεχωριστά λύσεις της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης, και μάλιστα είναι και γραμμικώς ανεξάρτητες μεταξύ τους. Τελικά σε κάθε περίπτωση έχουμε την γενική λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης.

1.2 Εύρεση Μερικής Λύσης Μη Ομογενούς Γραμμικής Δ.Ε. Δευτέρας Τάξης

Αυτή γίνεται με δύο τρόπους: με την **μέθοδο μεταβολής των παραμέτρων του Lagrange** και με την **μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών.**

1.2.1 Μέθοδος Της Μεταβολής Των Παραμέτρων Του Lagrange

Η μέθοδος αυτή έχει ήδη αναλυθεί σε προηγούμενο κεφάλαιο, και αφορούσε διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης. Στην περίπτωση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων δευτέρας τάξης κάνουμε τα εξής:

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = g(x) \qquad (1)$$

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0 \qquad (2)$$

Θεωρούμε ότι η αντίστοιχη ομογενής διαφορική εξίσωση (2) έχει λυθεί και έστω ότι βρέθηκε ότι η γενική της λύση είναι η:

$$y_o(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

όπου $y_1(x)$,$y_2(x)$ είναι θεμελιώδες σύνολο λύσεων της ομογενούς. Υποθέτουμε ότι η μη ομογενής διαφορική εξίσωση (1) έχει μια μερική λύση της μορφής:

$$y_o(x) = c_1(x)\, y_1(x) + c_2(x)\, y_2(x) \quad (3)$$

και μάλιστα επιλέγουμε τις $c_1(x)$,$c_2(x)$ **αυθαίρετα** έτσι ώστε:

$$c_1'(x)\, y_1(x) + c_2'(x)\, y_2(x) = 0 \qquad (4)$$

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις που προκύπτουν από το ότι η (3) επαληθεύει την (1),την εξίσωση (4) καθώς και το ότι οι $y_1(x)$,$y_2(x)$ είναι λύσεις της αντίστοιχης ομογενούς, προκύπτει:

$$c_1'(x)\, y_1'(x) + c_2'(x)\, y_2'(x) = g(x) \qquad (5)$$

Πρακτικά η μερική λύση θα δίνεται από την σχέση:

$$y_o(x) = c_1(x)\, y_1(x) + c_2(x)\, y_2(x)$$

ενώ οι συναρτήσεις $c_1(x)$,$c_2(x)$ θα προκύπτουν από το διαφορικό σύστημα:

$$c_1'(x)\, y_1'(x) + c_2'(x)\, y_2'(x) = g(x)$$
$$c_1'(x)\, y_1(x) + c_2'(x)\, y_2(x) = 0$$

1.2.2 Μέθοδος Των Προσδιοριστέων Συντελεστών

Θεωρούμε την διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 = g(x) \quad (1)$$

με χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 \quad (2)$$

Στις μη ομογενείς γραμμικές διαφορικές εξισώσεις **με σταθερούς συντελεστές,** εάν ο όρος εξαναγκασμού g(x) έχει ειδική μορφή, μπορούμε να "μαντέψουμε" την μορφή που θα έχει μια μερική τους λύση.

Θα πρέπει να μάθουμε να χρησιμοποιούμε λοιπόν τον παρακάτω πίνακα πάρα πολύ καλά, διότι ουσιαστικά με αυτόν η εύρεση μιας μερικής λύσης ανάγεται σε λύση γραμμικού συστήματος.

Για τον προσδιορισμό μιας μερικής λύσης, θα βρίσκουμε από το πίνακα την κατάλληλη μορφή, και θα την αντικαθιστούμε στην (1).Θα προκύπτει μια εκ ταυτότητας ισότητα πολυωνύμων, οπότε οδηγούμαστε σε γραμμικό σύστημα που, όπως αποδεικνύεται ,έχει πάντα λύση. Τα πάντα λοιπόν εξαρτώνται από την επιλογή κατάλληλης μορφής μερικής λύσης από το πίνακα:

Όρος εξαναγκασμού	**Προσδιοριστέα μερική λύση**
$\beta_k x^k + \ldots + \beta_1 x + \beta_0$	$A_k x^k + \ldots + A_1 x + A_0$, με p(0)≠0 και $x^{\nu}(A_k x^k + \ldots + A_1 x + A_0)$ όταν το μηδέν είναι ν-πλή ρίζα του p(λ)
$(\beta_k x^k + \ldots + \beta_1 x + \beta_0)e^{ax}$	$(A_k x^k + \ldots + A_1 x + A_0)e^{ax}$, με p(α)≠0 και $x^{\nu}(A_k x^k + \ldots + A_1 x + A_0)e^{ax}$ όταν το α είναι ν-πλή ρίζα του p
$(\beta_k x^k + \ldots + \beta_1 x + \beta_0)e^{ax} \begin{cases} \cos(\beta . x) \\ \sin(\beta . x) \end{cases}$	$[(A_k x^k + \ldots + A_1 x + A_0)\cos\beta . x +$ $+ (B_k x^k + \ldots + B_1 x + B_0)\sin\beta . x]e^{ax}$ όταν p(α + βi) ≠ 0 $x^{\nu}[(A_k x^k + \ldots + A_1 x + A_0)\cos\beta . x +$ $+ (B_k x^k + \ldots + B_1 x + B_0)\sin\beta . x]e^{ax}$ όταν (α + βi) ν-πλή ρίζα του p

Για την κατανόηση της λειτουργίας του πίνακα, ναλύεται πλήρως μεγάλος αριθμός ασκήσεων στο τμήμα Β του κεφαλαίου.

2.Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις Τάξης Ανώτερης Του 2.

2.1 Γραμμικές Δ.Ε. Τάξης Ανώτερης Του 2 Με Σταθερούς Συντελεστές.

Η επίλυση αυτού του είδους των διαφορικών εξισώσεων αποτελεί ουσιαστικά γενίκευση πραγμάτων που αναφέρθηκαν παραπάνω. Θεωρούμε την εξίσωση:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = g(x) \qquad (1)$$

όπου a_i πραγματικοί σταθεροί συντελεστές. Η (1) είναι λοιπόν γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές και έχει αντίστοιχη ομογενή:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = 0 \qquad (2)$$

Για την εύρεση της γενικής λύσης της (1),**ακριβώς όμοια με τα προηγούμενα, θα βρίσκουμε την γενική λύση της ομογενούς (2) καθώς και μια οποιαδήποτε μερική λύση της (1),και τότε η γενική λύση της (1) θα είναι το άθροισμα της γενικής λύσης της ομογενούς και της μερικής λύσης της μη ομογενούς.**

Η γενική λύση της ομογενούς (2) θα είναι της μορφής:

$$y_0(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x) \qquad (3)$$

όπου $c_1, c_2, \ldots, c_n$ είναι n το πλήθος πραγματικοί αυθαίρετοι συντελεστές και $y_1, y_2, \ldots, y_n$ είναι ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων της ομογενούς (2),δηλαδή πρόκειται για n το πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητες μερικές λύσεις της ομογενούς (2).

2.1.1 Εύρεση Της Γενικής Λύσης Της Ομογενούς

Θεωρούμε την **χαρακτηριστική εξίσωση της διαφορικής εξίσωσης:**

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

Είναι προφανές ότι πρόκειται για ένα πολυώνυμο (**το χαρακτηριστικό πολυώνυμο**) με σταθερούς πραγματικούς συντελεστές. Οι λύσεις του μπορεί να είναι πραγματικές (απλές ή διπλές ή κ - πολλαπλότητας) καθώς και μιγαδικές προφανώς **συζυγείς.**

Σε κάθε ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου θα αντιστοιχούμε μια μερική λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης ως εξής:

Ρίζες χαρακτηριστικής εξίσωσης	**Μερική λύση της ομογενούς**
λ∈R , πολ/τας ένα	$y_1(x) = e^{\lambda . x}$
λ∈R , πολ/τας κ ≤ n	$y_1(x) = e^{\lambda . x}, y_2(x) = xe^{\lambda . x}, \dots, y_\kappa(x) = x^{\kappa - 1}e^{\lambda . x}$
λ∈C , με λ = κ + νi πολ/τας ξ. (καλύπτουμε και την συζυγή λύση $\overline{\lambda}$ που επίσης είναι πολλαπλότητας ξ. Πράγματι δίπλα παρατίθενται 2ξ μερικές λύσεις,σε ζευγάρια)	$y_1(x) = e^{\kappa . x}\cos(\nu x), y_2 = e^{\kappa . x}\sin(\nu x)$ $y_3(x) = xe^{\kappa . x}\cos(\nu x), y_4 = xe^{\kappa . x}\sin(\nu x)$ … $y_{2\xi - 1}(x) = x^{\xi - 1}e^{\kappa . x}\cos(\nu x), y_{2\xi} = x^{\xi - 1}e^{\kappa . x}\sin(\nu x)$

<u>Παράδειγμα</u>:

Να βρείτε την γενική λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης:

$$y^{(4)} - 4y^{(3)} + 5y^{(2)} - y' + 4y = 0 \quad (*)$$

Λύση:

Η (*) έχει ως χαρακτηριστικό πολυώνυμο το:

$$p(\lambda) = \lambda^4 - 4\lambda^3 + 5\lambda^2 - 4\lambda + 4$$

Το οποίο παραγωγίζεται ως εξής:

$$p(\lambda) = (\lambda - 2)^2(\lambda^2 + 1)$$

Το πολυώνυμο έχει ρίζες το 2 πολ/τας 2 και το ± i. Συνεπώς η γενική λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης είναι η:

$$y_0(x) = c_1 e^{2x} + c_2 xe^{2x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x$$

2.1.2 Εύρεση Της Μερικής Λύσης Της Μη Ομογενούς

Όπως είδαμε, η γενική λύση της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης θα δίνεται από τη σχέση:

$$y_0(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x)$$

Θεωρούμε ότι η μη ομογενής έχει μια μερική λύση της μορφής:

$$y_0(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x) + \ldots + c_n(x) y_n(x)$$

Όπως αποδεικνύεται ,οι συναρτήσεις $c_i(x)$ προκύπτουν από το διαφορικό σύστημα:

$$\begin{gathered}
c_1'(x) y_1(x) + c_2'(x) y_2(x) + \ldots + c_n'(x) y_n(x) = 0 \\
c_1'(x) y_1'(x) + c_2'(x) y_2'(x) + \ldots + c_n'(x) y_n'(x) = 0 \\
c_1'(x) y_1''(x) + c_2'(x) y_2''(x) + \ldots + c_n'(x) y_n''(x) = 0 \\
\ldots\ldots \\
c_1'(x) y_1^{(n-1)}(x) + c_2'(x) y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + c_n'(x) y_n^{(n-1)}(x) = 0
\end{gathered}$$

Η μέθοδος που περιγράψαμε όπως έχει ήδη ειπωθεί ονομάζεται **μέθοδος της μεταβολής των παραμέτρων Lagrange.**Μπορούμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε την **μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών** με τον τρόπο που περιγράφηκε σε προηγούμενη παράγραφο, εάν ο όρος εξαναγκασμού έχει κάποια ειδική μορφή.

2.2 Η Διαφορική Εξίσωση Του Euler

Μια διαφορική εξίσωση της μορφής:

$$(ax+b)^n y^{(n)}(x)+(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)}(x)+\ldots+a_0 y(x)=g(x) \qquad (1)$$

ονομάζεται **διαφορική εξίσωση του Euler.**

Η λύση της προκύπτει από την αντικατάσταση:

$$(ax+b)=e^t \qquad (2)$$

οπότε προκύπτει μια γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές, την οποία και επιλύουμε κατά τα γνωστά. Τελικά, αντικαθιστούμε ξανά το t με βάση την σχέση (2) και προκύπτει η ζητούμενη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης Euler.

Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 4.1

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση: $y'' + y' - 2y = 0$.

Λύση:

Η χαρακτηριστική της εξίσωση είναι $\lambda^2+\lambda-2=0 \Rightarrow (\lambda-1)(\lambda+2)=0 \Rightarrow \lambda=1$ ή $\lambda=-2$ άρα θα έχει τη γενική λύση $y(x)=C_1e^x + C_2e^{-2x}$.

Άσκηση 4.2

Ομοίως για τη διαφορική εξίσωση $y''- 4y=0$ που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $y(0)=0$ και $y'(0)=1$.

Λύση:

Η χαρακτηριστική της εξίσωση είναι $\lambda^2-4=0 \Rightarrow (\lambda-2)(\lambda+2)=0 \Rightarrow \lambda=2$ ή $\lambda=-2$ άρα θα έχει γενική λύση:

$$y(x)= C_1e^{2x} + C_2e^{-2x}.$$

Από τις αρχικές συνθήκες έχουμε

$$y(0)=0 \Rightarrow C_1+C_2=0 \ (1)$$

καθώς επίσης $y'(0)=0 \Rightarrow 2C_1-2C_2=1$ (2).

Από τις σχέσεις (1) & (2) προκύπτει $C_1=1/4$ και $C_2=-1/4$ οπότε η μερική λύση που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες είναι:

$$y(x)=(1/4)(e^{2x}-e^{-2x})=\sinh(2x)/2.$$

Άσκηση 4.3

Ομοίως για την $y''+2ay'+a^2y=0$ που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες $y(a)=1$, $y'(a)=0$.

Λύση:

Η χαρακτηριστική εξίσωση της ΔΕ είναι $\lambda^2+2a\lambda+a^2=0 \Rightarrow (\lambda+a)^2=0 \Rightarrow \lambda=-a$ (διπλή) άρα η γενική λύση θα δίδεται από τη σχέση $y(x)=C_1e^{-ax}+xC_2e^{-ax}$**.** Εφαρμόζουμε τώρα τις αρχικές συνθήκες οπότε και παίρνουμε:

$$\left.\begin{array}{l}(C_1+aC_2)e^{-a^2}=1\\ \left(-aC_1+C_2-C_2a^2\right)e^{-a^2}=0\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}C_1=(1-a^2)e^{a^2}\\ C_2=ae^{a^2}\end{array}\right\}$$

Επομένως η ζητούμενη λύση θα είναι η $y(x)=(1-a^2+ax)e^{a(a-x)}$.

Άσκηση 4.4

Ομοίως για την $y''(t)-4y'(t)+7y(t)=0$ με $y(1)=0$ και $y'(1)=1$.

Λύση:

Παίρνουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\lambda^2-4\lambda+7=0$ που έχει τις συζυγείς μιγαδικές ρίζες:

$$2+i\sqrt{3}, \quad 2-i\sqrt{3} \quad \Rightarrow y(t)=C_1e^{2t}\cos(\sqrt{3}t)+C_2e^{2t}\sin(\sqrt{3}t).$$

Εξάλλου εφαρμόζοντας τις αρχικές συνθήκες θα πάρουμε:

$$C_1=-\frac{e^{-2}\sin\sqrt{3}}{\sqrt{3}}, \quad C_2=\frac{e^{-2}\cos\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

οπότε και προκύπτει με αντικατάσταση η ζητούμενη λύση.

Άσκηση 4.5

Ομοίως για $y^{(4)}-y=0$.

Λύση:

Γράφουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$\lambda^4-1=0 \Rightarrow (\lambda^2-1)(\lambda^2+1)=0 \Rightarrow \lambda=1, \lambda=-1$ και $\lambda= +i. \lambda= -i$. οι δυο μιγαδικές.

Οι μερικές λύσεις θα είναι οι cosx, sinx, e^x, e^{-x} επομένως θα έχουμε:

$$y(x)=C_1\cos x + C_2\sin x + C_3e^x + C_4e^{-x}.$$

Άσκηση 4.6

Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση που έχει την παρακάτω μορφή:

$$y''+4y'+4y=x^{-2}e^{-2x}, \quad x>0$$

Λύση:

Θα λύσουμε καταρχήν την αντίστοιχη ομογενή και κατόπιν θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο μεταβολής των παραμέτρων που περιγράφεται στη θεωρία. Έτσι έχουμε:

$$\lambda^2+4\lambda+4=0 \Rightarrow (\lambda+2)^2=0 \Rightarrow \lambda= -2 \text{ (διπλή)} \Rightarrow y_o(x)=C_1e^{-2x} + xC_2e^{-2x}$$

Αρκεί να υπολογιστούν οι σταθερές C_1 και C_2. Αυτό θα γίνει ως εξής:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \Rightarrow y' = C_1 y_1' + C_2 y_2' + \left[C_1' y_1 + C_2' y_2\right]$$

όμως όπως έχουμε δει η εντός της αγκύλης έκφραση είναι μηδέν. Ξαναπαραγωγίζουμε:

$$y'' = C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + \left[C_1' y_1' + C_2' y_2'\right]$$

Θέτοντας ομοίως το εντός της αγκύλης μέρος ίσο με μηδέν καταλήγουμε σε σύστημα των C_1,C_2. Τελικά:

$$C_1(x) = -\int \frac{y_1(x)g(x)}{W(x)}dx, \qquad C_2(x) = \int \frac{y_1(x)g(x)}{W(x)}dx$$

όπου W(x) η ορίζουσα Wronski των y_1,y_2 και g(x) το σταθερό μέρος της δοσμένης ΔΕ. Αντικαθιστούμε στις παραπάνω εκφράσεις των σταθερών και παίρνουμε:

$$C_1(x) = -\int \frac{xe^{-2x}x^{-2}e^{-2x}}{e^{-4x}}dx = -\int \frac{dx}{x} = -\ln x, \quad C_2(x) = \int \frac{e^{-2x}x^{-2}e^{-2x}}{e^{-4x}}dx = \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}$$

αφού είναι σαφές ότι εδώ $W(x)=e^{-4x}$. Επομένως μια μερική λύση της ΔΕ είναι η:

$$y_m = -e^{-2x}\ln x - e^{-2x} = -e^{-2x}(\ln x + 1)$$

συνεπώς η γενική λύση της διαφορικής θα είναι η:

$$y(x)=C_1e^{-2x}+C_2xe^{-2x}-e^{-2x}(\ln x+1)$$

δηλαδή το άθροισμα της λύσης της ομογενούς καθώς και της μερικής (μιας) λύσης της διαφορικής.

Άσκηση 4.7

Να λυθεί η διαφορική: $y'''+y'=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$.

Λύση:

Θα λύσουμε την αντίστοιχη ομογενή και ύστερα θα ακολουθήσουμε τη μέθοδο μεταβολής των παραμέτρων (προφανώς θα έχουμε τρεις). Έτσι θα βρούμε μια μερική λύση της διαφορικής. Η γενική τότε λύση θα είναι το άθροισμα της λύσεως της αντίστοιχης ομογενούς και της μερικής που βρήκαμε.

Αυτά με μαθηματικές σχέσεις εκφράζονται ως εξής:

$$y'''+y'=0 \Rightarrow \ddot{e}^3+\ddot{e}=0 \Rightarrow \ddot{e}(\ddot{e}^2+1)=0 \Rightarrow \ddot{e}=0 \quad \ddot{e}=i \quad \ddot{e}=-i \Rightarrow y_1=1, y_2=\cos x, y_3=\sin x$$

$$y_o=C_1+C_2\cos x+C_3\sin x$$

$$C_1'+C_2'\cos x+C_3'\sin x=0 \quad \Rightarrow \quad C_1'=\frac{\sin x}{\cos^2 x} \Rightarrow C_1=\frac{1}{\cos x}$$

$$-C_2'\sin x+C_3'\cos x=0 \quad \Rightarrow \quad C_2'=-\frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow C_2=\ln|\cos x|$$

$$-C_2'\cos x-C_3'\sin x=\frac{\sin x}{\cos^2 x} \quad \Rightarrow \quad C_3'=-\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \Rightarrow C_3=-\tan x+x$$

επομένως θα έχουμε με βάση τα παραπάνω:

$$y_m = \frac{1}{\cos x} + \cos x \ln\left|\cos x\right| + (x - \tan x)\sin x \Rightarrow$$

$$y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x + \frac{1}{\cos x} + \cos x \ln\left|\cos x\right| + (x - \tan x)\sin x$$

Πρέπει στο σημείο αυτό να διευκρινίσουμε κάτι σημαντικό. Τα C_1,C_2 και C_3 που βρήκαμε είναι τρεις τιμές αποδεκτές. Δε σημαίνει ότι είναι οι μοναδικές. Έτσι τα αντικαθιστούμε στη **μερική** λύση της διαφορικής. Στη δε λύση της ομογενούς, παρόλο που εμφανίζονται πάλι (εξάλλου στην τελική εξίσωση y(x) που γράψαμε εμφανίζονται πάλι οι σταθερές αυτές) δεν πρέπει να τις αντικαταστήσουμε.

Δηλαδή **παρόλο που γνωρίζουμε τρεις τιμές για τις σταθερές C που ικανοποιούν τη διαφορική, δεν τις αντικαθιστούμε στη λύση της ομογενούς και επομένως εμφανίζονται στη γενική λύση.** Αυτό δε σημαίνει ότι δε λύσαμε την εξίσωση, αλλά ότι στη λύση υπάρχουν τρεις ανεξάρτητες (πραγματικές) σταθερές.

Άσκηση 4.8

Να λυθεί η διαφορική $y''+y=x^2+x-1$.

Λύση:

Καταρχήν έχουμε μια διαφορική ανωτέρας τάξεως με σταθερούς συντελεστές και β′ μέλος γνωστής μορφής. Θα λύσουμε τη διαφορική αυτή με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών. Έτσι αρχικά θα βρούμε τη γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς:

$\lambda^2 + 1=0 \Rightarrow \lambda=-i$ ή $\lambda=i \Rightarrow y_1=\cos x$ και $y_2=\sin x \Rightarrow y_o=C_1\cos x+C_2\sin x$.

Τώρα θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών:

$$y_m = A_2 x^2 + A_1 x + A_0 \qquad p(0)=1\neq 0$$

$$2A_2 + A_2x^2 + A_1x + A_0 = x^2 + x - 1 \Rightarrow A_2x^2 + A_1x + 2A_2 + A_0 = x^2 + x - 1$$

από την ισότητα των συντελεστών προκύπτουν εύκολα $A_1=1, A_2=1, A_0=-3$.

$$\to y_m = x^2 + x - 3 \Rightarrow y = C_1\cos x + C_2\sin x + x^2 + x - 3$$

που είναι και η ζητούμενη γενική λύση.

Άσκηση 4.9

Να λυθεί η διαφορική $y^{(5)}+y''=6x-2$.

Λύση:

Η συλλογιστική είναι όμοια με αυτή της προηγούμενης άσκησης.

$p(\lambda)=\lambda^5+\lambda^2=\lambda^2(\lambda^3+1)=\lambda^2(\lambda+1)(\lambda^2-\lambda+1) \Rightarrow \lambda_{1,2}=0, \lambda_3=-1,\ \lambda_{4,5}=\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Επομένως η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς είναι:

$$y_o = C_1 + C_2x + C_3e^{-x} + (C_4\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_5\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)e^{x/2}$$

Επειδή τώρα το 0 είναι διπλή ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, μια μερική λύση της δοσμένης εξισώσεως είναι της μορφής:

$$y_m = x^2(Ax + B) = Ax^3 + Bx^2 \Rightarrow y^{(5)}{}_m + y''_m = 6Ax + 2B = 6x - 2$$

(αντικαταστήσαμε την y_m στη δοσμένη διαφορική εξίσωση). Από την τελευταία σχέση προκύπτουν Α = 1 και Β = -1 άρα η ζητούμενη μερική λύση είναι η $y_m=x^2(x-1)$.

Τώρα πλέον προσθέτουμε τη γλ της ομογενούς και τη μερική λύση που βρήκαμε:

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + (C_4 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_5 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)e^{x/2} + x^2(x-1) \, .$$

Άσκηση 4.10

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση $y'' - y = xe^{x/2}$.

Λύση:

Θα χρησιμοποιήσουμε πάλι τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών. Έτσι λύνουμε αρχικά την ομογενή διαφορική:

$$p(\lambda)=\lambda^2-1 \Rightarrow \lambda=1 \text{ ή } \lambda=-1 \Rightarrow y_1=e^x \, , \, y_2=e^{-x}$$

συνεπώς η γενική λύση της ομογενούς είναι:

$$y_o = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

Το ½ δεν είναι ρίζα του p(λ) άρα αναζητούμε μια μερική λύση της δοθείσης εξισώσεως της μορφής $y_m=(Ax+B)e^{x/2}$. Θέτουμε το y_m στην αρχική εξίσωση κάνουμε έπειτα στοιχειώδεις πράξεις και τελικά καταλήγουμε στη σχέση:

$$\left(-\frac{3A}{4}x + A - \frac{3B}{4}\right)e^{x/2} = xe^{x/2} \Rightarrow -\frac{3A}{4}x + A - \frac{3B}{4} = x \Rightarrow A = -\frac{4}{3} \quad , \; B = -\frac{16}{9}$$

$$\to y_m = -\frac{4}{3}(x+\frac{4}{3})e^{x/2} \Rightarrow y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{4}{3}(x+\frac{4}{3})e^{x/2}$$

Άσκηση 4.11

Ομοίως για την $y'''-3y'-2y=(18x-6)e^{-x}$.

Λύση:

Εδώ έχουμε $p(\lambda)=\lambda^3-3\lambda-2=(\lambda+1)^2(\lambda-2) \Rightarrow \lambda_{1,2}=-1$ και $\lambda_3=2$ επομένως η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς θα έχει ως εξής:

$$y_o=(C_1+C_2x)e^{-x}+C_3e^{2x}$$

επειδή το -1 είναι διπλή ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, η ζητούμενη μερική λύση είναι της μορφής:

$$y_m=x^2(Ax+B)e^{-x}=(Ax^3+Bx^2)e^{-x}$$

την οποία και αντικαθιστούμε στην δοσμένη εξίσωση και μετά από στοιχειώδεις πράξεις παίρνουμε:

$$(-18Ax+6A-6B)e^{-x}=(18x-6)e^{-x} \Rightarrow -3Ax+A-B=3x-1 \Rightarrow A=-1 \text{ και } B=0.$$

Άρα η ζητούμενη μερική λύση της ΔΕ θα είναι η $y_m=-x^3e^{-x}$ και επομένως η γλ.:

$$y=(C_1+C_2x)e^{-x}+C_3e^{2x}-x^3e^{-x}\ .$$

Άσκηση 4.12

Ομοίως για την $y'''-y''-2y'=(100x-25)\cos 2x$.

Λύση:

Είναι $p(\lambda)=\lambda^3-\lambda^2-2\lambda=\lambda(\lambda^2-\lambda-2)=\lambda(\lambda-2)(\lambda+1)\Rightarrow\ \lambda_1=0,\ \ \lambda_2=2,\ \ \lambda_3=-1$. Επομένως η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς θα έχει ως εξής:

$$y_o = C_1 + C_2e^{2x} + C_3e^{-x}\ .$$

Επειδή το 2i. δεν είναι ρίζα του p(λ), η ζητούμενη μερική λύση θα είναι της μορφής:

$$y_m=(Ax+B)\cos2x+(\Gamma x+\Delta)\sin2x.$$

Θέτουμε αυτή στη δοσμένη εξίσωση και παίρνουμε κατόπιν μερικών πράξεων:

$$2\left[2(A-3Ã)x-7A+2B-2Ã-6Ä\right]\cos2x+2\left[2(3A+Ã)x+2Á+6Â-7Ã+2Ä\right]\sin2x=(100x-25)\cos2x$$

απ' όπου συνεπάγονται οι δυο επόμενες εξισώσεις:

$$4(A-3\Gamma)x-14A+4B-4\Gamma-12\Delta=100x-25$$
$$4(3A+\Gamma)x+4A+12B-14\Gamma+4\Delta=0$$

που δίνουν με τη σειρά τους τις παρακάτω εξισώσεις:

$4A-12\Gamma=100$ (1), $3A+\Gamma=0$ (2), $-14A+4B-4\Gamma-12\Delta= -25$ (3), $4A+12B-14\Gamma+4\Delta= -11/8$

από τις οποίες προκύπτουν εξαιρετικά εύκολα οι τιμές των σταθερών Α,Β,Γ,Δ:

$$A=\frac{5}{2},\quad B=\frac{73}{8},\quad Ã=\frac{15}{2},\quad Ä=\frac{11}{8}.$$

Άρα η ζητούμενη μερική λύση θα είναι η:

$$y_m = \frac{1}{8}(20x-73)\cos 2x + \frac{1}{8}(-60x-11)\sin 2x \Rightarrow$$

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-x} + \frac{1}{8}(20x-73)\cos 2x + \frac{1}{8}(-60x-11)\sin 2x$$

Άσκηση 4.13

Ομοίως για την $y^{(5)} + 8y^{(4)} + 26y''' + 40y'' + 25y' = (-120x-60)e^{-2x}\cos x$.

Λύση:

Είναι $p(\lambda)=\lambda^5+8\lambda^4+26\lambda^3+40\lambda^2+25\lambda=\lambda(\lambda^2+4\lambda+5)^2 \Rightarrow \lambda_1=0$, $\lambda_{2,3}$ = -2+i. , $\lambda_{4,5=}$ -2-i. Επειδή δε το -2+i. είναι διπλή ρίζα του p(λ), η ζητούμενη μερική λύση της μη ομογενούς θα είναι της μορφής:

$$y_m = x^2\left[\left(Ax + B\right)\cos x + (\text{Ãx+Ä})\sin x\right]e^{-2x}$$

οπότε αντικαθιστώντας και εκτελώντας στοιχειώδεις πράξεις παίρνουμε τελικά:

$$[24x(2A-\Gamma)-8(6A-2B+6\Gamma+\Delta)]\cos x+[24x(A+2\Gamma)+8(6A+B-6\Gamma+2\Delta)]\sin x =$$
$$(-120x-60)\cos x \Rightarrow A=-2,\quad B=-9/5,\quad \Gamma=1,\quad \Delta=99/10.$$

Επομένως η ζητούμενη μερική λύση θα είναι η:

$$y_m = x^2\left[\left(-2x-\frac{9}{5}\right)\cos x + \left(x+\frac{99}{10}\right)\sin x\right]e^{-2x}$$

από την οποία προκύπτει εύκολα η ζητούμενη γενική λύση της διαφορική εξισώσεως αθροίζοντάς την με τη γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς που βρήκαμε παραπάνω.

Άσκηση 4.14

Να λυθεί η διαφορική $x^2y''-4xy'+6y=0$.

Λύση:

Θέτουμε:

$$x = e^t \Rightarrow t = \ln x \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = e^{-t}\dot{y}\ .$$

Επίσης σύμφωνα με το γνωστό μας κανόνα της αλυσίδας θα πάρουμε:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx} = \left(e^{-t}\frac{d^2y}{dt^2} - e^{-t}\frac{dy}{dt}\right)e^{-t} = \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)e^{-2t} = (\ddot{y} - \dot{y})e^{-2t}$$

Με αντικατάσταση των x, dy / dx και d^2y / dx^2 στη δοθείσα εξίσωση, παίρνουμε την :

$$y''-5y'+6y = 0$$

η οποία είναι ομογενής με σταθερούς συντελεστές. Η γενική της λύση θα είναι η:

$$u(t) = C_1e^{2t} + C_2e^{3t}$$

και άρα η γενική λύση της δοσμένης διαφορικής εξισώσεως είναι:

$$y(x) = C_1x^2 + C_2|x|^3 = C_1x^2 + C_2'x^3, \quad x \neq 0$$

Άσκηση 4.15

Ομοίως για την $x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^5 \ln|x|$.

Λύση:

Θέτουμε:

$$x = e^t \Rightarrow t = \ln x \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = e^{-t}\dot{y} \; .$$

επίσης σύμφωνα με το γνωστό μας κανόνα της αλυσίδας θα πάρουμε:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx} = \left(e^{-t}\frac{d^2y}{dt^2} - e^{-t}\frac{dy}{dt}\right)e^{-t} = \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)e^{-2t} = (\ddot{y} - \dot{y})e^{-2t}$$

Με αντικατάσταση των x, dy / dx και d^2y / dx^2 στη δοθείσα εξίσωση, παίρνουμε την :

$$y''-3y'+2y=te^{5t}.$$

οπότε αρκεί να λύσουμε την τελευταία. Θα την λύσουμε πχ με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών και μετά τις πράξεις παίρνουμε:

$$y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t} + \frac{1}{12}(t - \frac{7}{12})e^{5t}$$

Επομένως η λύση της δοσμένης εξισώσεως θα είναι η:

$$y(x) = C_1|x| + C_2 x^2 + \frac{1}{12}(\ln|x| - \frac{7}{12})|x|^5$$

<u>Παρατήρηση</u>: η μορφή αυτή των ΔΕ είναι γνωστή ως μορφή Eyler και λύνεται **πάντα** ακολουθώντας τα βήματα αυτά. Δηλαδή θέτουμε $x=e^t$ (εδώ) και παραγωγίζουμε αυτή τόσες φορές όσες η τάξη της ΔΕ. Μετά προκύπτει (ομογενής ή μη) διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές ως προς y′ και αυτή επιλύεται κατά τα γνωστά.

Άσκηση 4.16

Να λυθεί η ΔΕ $x^2 y'' + xy' - y = e^x (x-1), \quad x>0$.

Λύση:

Παίρνω καταρχήν την αντίστοιχη ομογενή διαφορική εξίσωση:

$$x^2 y'' + xy' - y = 0$$

και ενεργώ κατά τα γνωστά. Θέτουμε :

$$x = e^t \Rightarrow t = \ln x \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = e^{-t}\dot{y}\ .$$

επίσης σύμφωνα με το γνωστό μας κανόνα της αλυσίδας θα πάρουμε:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dt}\left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx} = \left(e^{-t}\frac{d^2y}{dt^2} - e^{-t}\frac{dy}{dt}\right)e^{-t} = \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)e^{-2t} = (\ddot{y} - \dot{y})e^{-2t}$$

Με αντικατάσταση των x, dy / dx και d^2y / dx^2 στη δοθείσα εξίσωση, παίρνουμε την:

y″-y=0 $\Rightarrow \lambda^2-1=0 \Rightarrow \lambda=1$ ή $\lambda=-1 \Rightarrow$ γενική λύση της ομογενούς $y_o = C_1x+C_2(1/x)$.

Επίσης θα έχω το σύστημα:

$$C_1' x + C_2' \frac{1}{x} = 0 \qquad \& \qquad C_1' - C_2' \frac{1}{x^2} = e^x \frac{x-1}{x^2}$$

τότε όμως θα πάρω:

$$C_1 = \frac{e^x}{2x} \ , C_2 = -\frac{e^x}{2(x-2)} \ .$$

Δηλαδή μετά την αντικατάσταση σε μια ΔΕ Euler μπορώ να δουλέψω είτε με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών είτε με τη μέθοδο μεταβολής των παραμέτρων.

Μια μερική λοιπόν λύση θα είναι η $y_m = 2\frac{e^x}{x}$ και άρα η γενική λύση της ΔΕ είναι:

$$y = C_1 x + C_2 \frac{1}{x} + 2\frac{e^x}{x} \ .$$

Άσκηση 4.17

Αν y_1, y_2 είναι οι λύσεις της ΔΕ x″(t)+2x′(t)+5x(t)=f(t) όπου f συνεχής συνάρτηση, να δειχθεί ότι $\lim\limits_{x \to \infty} \left| y_1(t) - y_2(t) \right| = 0$.

Λύση:

Γνωρίζουμε ότι αν οι y_1, y_2 είναι λύσεις της ΔΕ τότε η $y_1 - y_2$ θα είναι λύση της ομογενούς εξίσωσης x″+2x′+5x=0. (αν δεν το γνωρίζουμε είναι εξαιρετικά απλό να το δείξουμε). Η χαρακτηριστική εξίσωση της ομογενούς ΔΕ είναι η:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \Rightarrow \lambda = -1+2i. \text{ ή } \lambda = -1-2i.$$

και συνεπώς η γενική λύση της ομογενούς ΔΕ θα έχει ως εξής:

$$x_o(t)=C_1e^{-t}\cos 2t+C_2e^{-t}\sin 2t=y_1-y_2$$
$$\left|C_1e^{-t}\cos 2t+C_2e^{-t}\sin 2t\right|=\left|y_1-y_2\right|\Rightarrow\left|y_1-y_2\right|=\left|e^{-t}(C_1\cos 2t+C_2\sin 2t)\right|\Rightarrow$$
$$\left|y_1-y_2\right|\le e^{-t}\left(\left|C_1\right|+\left|C_2\right|\right)\xrightarrow{t\to\infty}0$$

άρα δείχθηκε το ζητούμενο όριο.

Άσκηση 4.18

Δίνεται η διαφορική εξίσωση $x''+a_1(t)x'+a_2(t)x=0$ (1). Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός $x=e^w$ ανάγει την (1) σε μια διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης τύπου Riccati.

Λύση:

Έχουμε διαδοχικά:

$$x=e^w\Rightarrow x'=e^w w'\Rightarrow x''=e^w w'^2+e^w w''$$

Αντικαθιστούμε στη δοσμένη σχέση τα παραπάνω οπότε λαμβάνουμε:

$$e^w w'^2+e^w w''+e^w w' a_1(t)+e^w a_2(t)=0\Rightarrow w'^2+w''+w' a_1(t)+a_2(t)=0$$

Θέτοντας τώρα όπου w′ το z καταλήγουμε σε ΔΕ πρώτης τάξης τύπου Riccati.

$$z'=-a_2(t)-a_1(t)z-z^2\ .$$

Άσκηση 4.19

Δίνεται η ΔΕ $y''-3y'+f(x)y=0$. Αν y_1,y_2 είναι δυο (μερικές) λύσεις της, να βρεθεί η συνάρτηση $f(x)$ ώστε $y_2=e^xy_1$.

Λύση:

Προφανώς οι y_1 και $e^x y_1$ ικανοποιούν τη δοσμένη εξίσωση. Συνεπώς:

$$y_1'' - 3y_1' + f(x)y_1 = 0 \quad (1)$$
$$(e^x y_1)'' - 3(e^x y_1)' + f(x)e^x y_1 = 0 \Rightarrow (y_1'' - 3y_1' + f(x)y_1) + 2y_1' - 2y_1 = 0 \quad (2)$$

Λόγω της (1) η (2) δίνει:

$$2y_1' - 2y_1 = 0 \Rightarrow y_1 = y_1' \Rightarrow \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

άρα η γενική λύση της θα είναι η $y_1 = Ce^x$, η οποία όμως θα πρέπει να ικανοποιεί τη δοσμένη ΔΕ. Έχουμε:

$$\left(Ce^x\right)'' - 3\left(Ce^x\right)' + f(x)Ce^x = 0 \Rightarrow Ce^x(-2 + f(x)) = 0 \Rightarrow f(x) = 2$$

Άρα η ζητούμενη συνάρτηση είναι η σταθερή συνάρτηση 2.

Άσκηση 4.20

Να λυθεί η ΔΕ με μορφή: $x^2 y'' + 2x(x-1)y' + 2(1 - x + x^2)y = 0$ $y(\pi)=0, y'(\pi)=1$

Λύση:

Για x διάφορο του μηδενός έχουμε:

$$y'' + 2\frac{x-1}{x}y' + 2\frac{1-x+x^2}{x^2}y = 0 \Rightarrow p(x) = 2\frac{x-1}{x}, \quad q(x) = 2\frac{1-x+x^2}{x^2}$$

με p(x),q(x) συνεχείς σε κάθε διάστημα I που δεν περιέχει το 0.Ένα θεμελιώδες σύνολο λύσεων είναι το :

$$y_1 = xe^{-x}\cos x,\;\; y_2 = xe^{-x}\sin x$$

αφού η ορίζουσα Wronski για κάθε x∈I είναι διάφορη του μηδενός.

$$\begin{vmatrix} xe^{-x}\cos x & xe^{-x}\sin x \\ e^{-x}(\cos x - x\sin x) & e^{-x}(\sin x + x\cos x) \end{vmatrix} = x^2 e^{-2x} \neq 0$$

Η γενική λύση της ΔΕ θα είναι τότε η:

$$y(x) = xe^{-x}(C_1\cos x + C_2\sin x), x \neq 0$$

οπότε θα πάρουμε από αρχικές συνθήκες:

$$y(\eth) = -\eth e^{-x} C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \qquad y'(\eth) = -\eth e^{-\eth} C_2 = 1 \Rightarrow C_2 = \frac{e^{\eth}}{\eth}$$

άρα η γενική λύση της δοσμένης ΔΕ θα είναι η:

$$y(x) = \frac{1}{\eth} xe^{\eth - x}\sin x$$

Άσκηση 4.21

Να βρεθεί η γενική λύση της ΔΕ του Bessel:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0, x > 0$$

αν είναι γνωστό ότι η συνάρτηση $y_1(x) = x^{-1/2}\cos x$ είναι μια λύση της.

Λύση:

Υπολογίζουμε αρχικά το παρακάτω ολοκλήρωμα:

$$-\int p(x)dx = -\int \frac{x}{x^2}dx = -\int \frac{1}{x}dx = -\ln|x| = \ln\left|\frac{1}{x}\right|$$

επομένως θα είναι :

$$e^{-\int p(x)dx} = \frac{1}{x}, x > 0$$

ώστε τελικά να πάρουμε:

$$\int \frac{1}{y^2}e^{-\int p(x)dx}dx = \int \frac{1}{x^{-1}\cos^2 x}\frac{1}{x}dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Τελικά παίρνουμε μετά από αυτά:

$$y_2(x) = x^{-1/2}\cos x\frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow y_2(x) = x^{-1/2}\sin x.$$

που είναι η ζητούμενη λύση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

Α. ΘΕΩΡΙΑ

1. Γενικά - Ιδιότητες Μετασχηματισμού Laplace

Όπως έχουμε δει ως τώρα, η επίλυση διάφορων διαφορικών εξισώσεων ουσιαστικά συνίσταται στην **αναγνώριση** της μορφής της εξίσωσης και στην χρησιμοποίηση του κατάλληλου για την περίπτωση μετασχηματισμού, ή την κατάλληλη επιλογή μερικών λύσεων με βάση την θεωρία κλπ.

Είναι προφανές, ότι το πλήθος των εξισώσεων που μπορούν να λυθούν κατ' αυτό τον τρόπο είναι περιορισμένο.

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζεται ένα νέο "εργαλείο" επίλυσης διαφορικών εξισώσεων, **ο μετασχηματισμός Laplace,** με την βοήθεια του οποίου μετατρέπουμε μια συνάρτηση f(t) ορισμένη για t > 0,στην αντίστοιχη μετασχηματισμένη κατά Laplace συνάρτηση F(s).Ο μετασχηματισμός ορίζεται ως εξής:

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$

Συμβολίζουμε:

$F(s) = L\{ f(t) \}$

ενώ θεωρούμε ότι ο μετασχηματισμός ορίζεται όπου ορίζεται το παραπάνω ολοκλήρωμα, χωρίς να το αναφέρουμε αυτό στη συνέχεια. Ο ορισμός αυτός δεν θα μας απασχολήσει σχεδόν καθόλου. Αυτό που θα μας απασχολήσει είναι οι ιδιότητες του μετασχηματισμού που θα μας βοηθήσουν στην επίλυση των ασκήσεων. **Η πολύ καλή γνώση των ιδιοτήτων είναι απαραίτητη για την επίλυση των ασκήσεων.**

Με την βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace μια διαφορική εξίσωση μη γνωστής μορφής μετατρέπεται σε μια άλλη διαφορική εξίσωση ή ακόμη και σε απλή αλγεβρική εξίσωση! Με την επίλυση των νέων εξισώσεων, προσδιορίζουμε τις μετασχηματισμένες των άγνωστων συναρτήσεων και με τη βοήθεια του **αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace** βρίσκουμε τις ζητούμενες λύσεις.

Είναι προφανές ότι ο μετασχηματισμός Laplace αποτελεί ένα ισχυρότατο εργαλείο επίλυσης διαφορικών εξισώσεων, το οποίο όμως έχει το σημαντικό μειονέκτημα ότι εφαρμόζεται μόνο για $t \geq 0$.Συνεπώς για την λύση των ασκήσεων:

Θεωρούμε την άγνωστη συνάρτηση (y(x)) και μετασχηματίζουμε κατά Laplace ολόκληρη την διαφορική εξίσωση που η y(x) ικανοποιεί. Βασικός μας σκοπός είναι η εμφάνιση στην εξίσωση μόνο της F(s) που είναι η μετασχηματισμένη κατά Laplace της άγνωστης συνάρτησης.

Λύνουμε ως προς F(s). Χρησιμοποιούμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace για να προσδιορίσουμε από την F(s) τελικά την y(x). Οι ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Ιδιότητες Μετασχηματισμού Laplace	**Εφαρμογές**
Ορισμός: $F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$ **Θεωρούμε γενικά στον πίνακα ότι:** **L{f(t)} = F(s)**	Με βάση τον ορισμό αποδεικνύεται ότι ισχύει: L{1} = F(s) = 1/s
<u>Ιδιότητα 1</u> Γραμμικότητα: L{ cf(t) } = cL{ f(t) } $L\{f_1(t) + f_2(t)\} = L\{f_1(t)\} + L\{f_2(t)\}$	
	Έχω L{1} = 1/s

Ιδιότητα 2 L{e^{at}f(t)} = F(s-α)	Άρα L{e^{at}} = F(s - α) = 1 / (s - α) Επίσης αποδεικνύεται ότι ισχύει: $L\{\cos at\} = \dfrac{s}{s^2+a^2}$ $L\{\sin at\} = \dfrac{a}{s^2+a^2}$
Ιδιότητα 3 $L\{f(\lambda.t)\} = \dfrac{1}{\lambda}.F\left(\dfrac{s}{\lambda}\right)$	
Ιδιότητα 4 $L\{f(t-a)\} = e^{-as}F(s)$	
Ιδιότητα 5 $L\{t^{\nu} f(t)\} = (-1)^{\nu} F^{(\nu)}(s)$	για f(t) = 1 και ν = 1 έχω: $L\{tf(t)\} = L\{t\} = (-1)^1\left(\dfrac{1}{s}\right)' \Rightarrow$ $L\{t\} = \dfrac{1}{s^2}$
Ιδιότητα 6 $L\left\{\int_0^t f(u)du\right\} = \dfrac{F(s)}{s}$	
Ιδιότητα 7 $L\{\dfrac{f(t)}{t}\} = \int_s^{+\infty} F(u)du$	
Ιδιότητα 8 $L\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$ $L\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$ $L\{f'''(t)\} = s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)$	π.χ. για την f(t) = t^2 αφού L{t}= 1 / s^2 : $L\{t^2\} = F(s)$ $L\{t\} = L\{\dfrac{(t^2)'}{2}) = \dfrac{1}{2}L\{(t^2)'\} =$ $= \dfrac{1}{2}(sF(s) - 0) = \dfrac{1}{s^2} \Rightarrow$ $F(s) = L\{t^2\} = \dfrac{2}{s^3}$ Το ζητούμενο βρίσκεται βέβαια πιο εύκολα από την ιδιότητα 5,όμοια με το

	άλλο παράδειγμα. Η επαλήθευση του αποτελέσματος αφήνεται ως άσκηση.
<u>Ιδιότητα 9</u> Ισχύει : $\int_0^t f(t)g(t-u)du = \int_0^t g(t)f(t-u)du$ όπου f(t),g(t) συναρτήσεις του t.Τα παραπάνω ολοκληρώματα αποδεικνύεται εύκολα ότι είναι μεταξύ τους ίσα και αποτελούν την **συνέλιξη των συναρτήσεων f(t),g(t).**Συμβολίζουμε την συνέλιξη των δύο συναρτήσεων με αστερίσκο π.χ. (f∗g)(t)	
<u>Βασική Ιδιότητα</u> Έστω L{f(t)} = F(s).Η λαπλασιανή F(s) **πάντοτε** ικανοποιεί την σχέση: $\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$ Συνεπώς η παραπάνω συνθήκη είναι αναγκαία για μια συνάρτηση F(s) ώστε αυτή να αποτελεί λαπλασιανή μιας f(t).Η συνθήκη δεν είναι ικανή.	Με βάση αυτή την ιδιότητα, εάν η F(s) δίνεται ως πηλίκο πολυωνύμων, ο βαθμός του αριθμητή πρέπει να είναι μικρότερος από το βαθμό του παρανομαστή.

Πριν προχωρήσουμε σε μερικά παραδείγματα πρέπει να εισάγουμε την έννοια του **αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace:**

2. Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace

Ορίζουμε τον αντίστροφο του μετασχηματισμού Laplace με βάση τη σχέση:

$$L\{f(t)\} = F(s) \Leftrightarrow L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$$

Οι κυριότερες ιδιότητες του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace (προκύπτουν από τις ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace) είναι:

Ιδιότητες Αντίστροφου Μετασχηματισμού Laplace	**Εφαρμογές**
Θεωρούμε γενικά στον πίνακα ότι: $L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$	
<u>Ιδιότητα 1</u> Γραμμικότητα: $L^{-1}\{c_1F_1(s)+\ldots+c_nF_n(s)\} =$ $= c_1L^{-1}\{F_1(s)\}+\ldots+c_nL^{-1}\{F_n(s)\} =$ $= c_1f_1(t)+\ldots+c_nf_n(t)$	
<u>Ιδιότητα 2</u> Παράγωγος: $L^{-1}\{(-1)^v F^{(v)}(s)\} = t^n f(t)$	Π.χ. για ν = 1 έχω: $L^{-1}\{-F'(s)\} = tf(t)$
<u>Ιδιότητα 3</u> Ισχύει: $L^{-1}\{F(s)\cdot G(s)\} = (f*g)(t)$	Θεωρούμε ότι $L^{-1}\{G(s)\} = g(t)$ ενώ ως $(f*g)(t)$ ορίζουμε την **συνέλιξη** των συναρτήσεων f,g.
<u>Ιδιότητα 4</u> Μετατόπιση: $L^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at} f(t)$	

Για τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace χρησιμοποιούμε ειδική μεθοδολογία:

Πρώτα εξετάζουμε εάν ο αντίστροφος Laplace είναι δυνατόν να βρεθεί απευθείας από τις παραπάνω βασικές ιδιότητες.

Αν η F(s) είναι πηλίκο πολυωνύμων, τότε όπως έχει ήδη έχουμε πει ο βαθμός του πολυωνύμου του αριθμητή είναι οπωσδήποτε μικρότερος από το βαθμό του πολυωνύμου του παρανομαστή. Θα κάνουμε ανάλυση του κλάσματος σε απλούστερα, σύμφωνα με την γνωστή θεωρία πολυωνύμων και λόγω της γραμμικότητας θα παίρνουμε τον αντίστροφο Laplace κάθε κλάσματος ξεχωριστά. Για παράδειγμα εάν το πολυώνυμο του παρανομαστή έχει απλή ρίζα το ρ_1,διπλή πραγματική το ρ_2 και δύο μιγαδικές ρίζες (συζυγείς) τότε η ανάλυση θα γίνει ως εξής:

$$\frac{A(s)}{B(s)} = \frac{A_1}{s-p_1} + \frac{A_2}{(s-p_2)^2} + \frac{A_3 s + A_4}{as^2 + bs + c}$$

όπου οι $A_{1,2,3,4}$ πραγματικοί που βρίσκονται με την ισότητα πολυωνύμων που προκύπτει με απλές πράξεις, ενώ το τριώνυμο του παρανομαστή έχει αρνητική διακρίνουσα. Παρατηρήστε ότι όταν έχουμε ένα τριώνυμο ως παράγοντα του πολυωνύμου του παρανομαστή με αρνητική διακρίνουσα, δεν το λύνουμε αλλά κάνουμε το μετασχηματισμό $as^2 + bs + c = (s + d)^2 + e$ και δουλεύουμε με την βοήθεια της ιδιότητας της **μετατόπισης (ιδιότητα 4).**

Όταν έχουμε την F(s) σε λογαριθμική μορφή ή αντίστροφη τριγωνομετρική, βρίσκουμε πρώτα την αντίστροφη κατά Laplace της F′(s) και στην συνέχεια λόγω της ιδιότητας 2 και της γραμμικότητας έχουμε:

$$L^{-1}\{-F'(s)\} = tf(t) \Rightarrow f(t) = -\frac{L^{-1}\{F'(s)\}}{t}$$

Για την εμπέδωση των παραπάνω ,υπάρχουν πολλές ασκήσεις στις οποίες αναλύονται όλες οι μεθοδολογίες, στο τμήμα Β του κεφαλαίου.

3. Βηματική Συνάρτηση ή Συνάρτηση Heaviside

Για τον καλύτερο χειρισμό και την εύρεση αντίστροφων κατά Laplace στις δίκλαδες ή πολύκλαδες συναρτήσεις, χρησιμοποιούμε τη **βηματική συνάρτηση** η οποία ορίζεται ως εξής:

$$H_a(t) = H(t-a) = \begin{cases} 0, t < a \\ 1, t \geq a \end{cases}, a \geq 0$$

Η αντίστροφη κατά Laplace της βηματικής συνάρτησης είναι:

$$L\{H(t-a)\} = L\{H_a(t)\} = \frac{e^{-as}}{s}$$

Σημαντική ιδιότητα της βηματικής συνάρτησης είναι η:

$$L\{H_a(t) f(t-a)\} = e^{-as} F(s)$$

από την οποία προκύπτει:

$$L^{-1}\{e^{-as} F(s)\} = H_a(t) f(t-a)$$

Η βηματική συνάρτηση χρησιμοποιείται στις πολύκλαδες συναρτήσεις π.χ. σε μια τρίκλαδη ως εξής:

$$f(t) = \begin{cases} \mathrm{g}_1(\mathrm{t}) \ , \ 0 \leq \mathrm{t} \leq \mathrm{t}_1 \\ \mathrm{g}_2(t) \ , \ \mathrm{t}_1 \leq t \leq t_2 \\ \mathrm{g}_3(\mathrm{t}) \ , \quad \mathrm{t}_2 \leq \mathrm{t} \end{cases}$$

Η f(t) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$f(t) = \mathrm{g}_1(t) H_0(t) - g_1(t) H_{t_1}(t) + g_2(t) H_{t_1}(t) - g_2(t) H_{t_2}(t) + g_3(t) H_{t_2}(t)$$

Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 5.1

Να προσδιορισθεί η μερική λύση της διαφορικής εξισώσεως y΄΄- y=sint, που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες y(0)=0, y΄(0)=1.

Λύση:

Η εφαρμογή του μετασχηματισμού Laplace στην εξίσωση μάς δίνει:

$$L\{y''\} - L\{y\} = L(\sin t) \;\Rightarrow\; s^2 Y(s) - s0 - 1 - Y(s) = \frac{1}{s^2+1} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{s^2+2}{\left(s^2-1\right)\left(s^2+1\right)} = \frac{3}{4}\frac{1}{s-1} - \frac{3}{4}\frac{1}{s+1} - \frac{1}{2}\frac{1}{s^2+1} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = L^{-1}\{Y(s)\} = \frac{3}{4}e^{t} - \frac{3}{4}e^{-t} - \frac{1}{2}\sin t.$$

που επαληθεύει τη δοσμένη εξίσωση και τις αρχικές συνθήκες.

Άσκηση 5.2

Ομοίως για την y΄΄-3y΄+2y=e ^{5t} με y(0) = 1 και y΄(0) = 2.

Λύση:

Με εφαρμογή του μετασχηματισμού Laplace παίρνουμε εύκολα:

$$L\{y''\}-3L\{y'\}+2L\{y\}=L\{e^{5t}\}$$
$$L\{y''\}=s^2y(s)-sy(0)-y'(0)=s^2y(s)$$
$$L\{y'\}=sy(s)-y(0)=sy(s)$$
$$\rightarrow L\{y''\}-3L\{y'\}+2L\{y\}=s^2y(s)-3sy(s)+2y(s)=y(s)(s^2-3s+2)$$

επομένως η δοσμένη εξίσωση θα γραφτεί ως εξής:

$$y(s)(s^2-3s+2)=\frac{1}{s-5}\Rightarrow y(s)=\frac{1}{(s-1)(s-5)(s-2)}$$

σπάμε σε απλά κλάσματα την παραπάνω έκφραση οπότε παίρνουμε:

$$y(s)=\frac{2}{3}\frac{1}{s-2}+\frac{1}{4}\frac{1}{s-1}+\frac{1}{12}\frac{1}{s-5}\Rightarrow y(t)=L^{-1}\{y(s)\}=\frac{2}{3}e^{2t}+\frac{1}{4}e^{t}+\frac{1}{12}e^{5t}$$

δηλαδή η δοσμένη εξίσωση λύθηκε.

Άσκηση 5.3

Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών (ΠΑΤ) $y'''+y''-y'-4y=2-4t$ με $y(1)=1/2$, $y'(1)=y''(1)=0$.

Λύση:

Σημαντικό είναι το γεγονός ότι στην περίπτωση που οι αρχικές τιμές δίνονται σε σημείο διάφορο του μηδενός (πχ $y(1)$, $y(-1)$ κλπ.) τότε δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε άμεσα τα όσα γνωρίζουμε από το μετασχηματισμό Laplace. Συνεπώς για να λύσουμε το πρόβλημα αυτό θα κάνουμε το μετασχηματισμό $t=x+1$ άρα $u(x)=y(x+1)$ και το παραπάνω πρόβλημα μετασχηματίζεται πλέον ως εξής:

$$u''' + u'' - 4u' - 4u = -2 - 4x, \quad u(0) = \frac{1}{2}, \ u'(0) = u''(0) = 0.$$

$$\Rightarrow L\{u'''\} = s^3 u(s) - s^2 u(0) - su'(0) - u''(0) = s^3 u(s) - \frac{1}{2} s^2$$

$$L\{u''\} = s^2 u(s) - su(0) - u'(0) = s^2 u(s) - \frac{1}{2} s$$

$$L\{u'\} = su(s) - u(0) = su(s) - \frac{1}{2}$$

$$L\{-2 - 4x\} = -\frac{2}{s} - \frac{4}{s^2} = -2\frac{s+2}{s^2}$$

και άρα η δοσμένη εξίσωση μετατρέπεται στην παρακάτω αλγεβρική:

$$p(s)u(s) - \frac{1}{2}(s^2 + s - 4) = -2\frac{s+2}{s^2}$$

όπου p(s) είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο s^3+s^2-4s-4 της εξισώσεως, οπότε:

$$u(s) = \frac{1}{2}\frac{s^2 + s - 4}{P(s)} - 2\frac{s+2}{s^2 P(s)} \Rightarrow u(s) = -\frac{1}{2}\frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{4}{3}\frac{1}{s+1} - \frac{1}{12}\frac{1}{s-2} - \frac{1}{4}\frac{1}{s+2}$$

και στη συνέχεια με χρήση του αντιστρόφου μετασχηματισμού L^{-1} παίρνουμε:

$$u(x) = L^{-1}\{u(s)\} = -\frac{1}{2} + x + \frac{4}{3}e^{-x} - \frac{1}{12}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}$$

και εκτελώντας την αντικατάσταση x=t-1 θα πάρουμε τελικά τη λύση :

$$y(t) = u(t-1) = -\frac{3}{2} + t + \frac{4}{3}e^{-t+1} - \frac{1}{12e^2}e^{2t} - \frac{e^2}{4}e^{-2t}$$

Άσκηση 5.4

Να λυθεί η παρακάτω ολοκληρωτική εξίσωση:

$$\int_0^t y(u)y(t-u)du = 2y(t)+t-2$$

Λύση:

Έχουμε τη συνέλιξη (y*y)(t)=2y(t)+t-2 οπότε εφαρμόζω το μετασχηματισμό Laplace χωρίς να λαμβάνω υπόψη το t χάρη απλότητας και παίρνω:

$$L\{y*y\}=2L\{y\}+L\{t\}-2L\{1\}\Rightarrow y^2(s)-2y(s)-\frac{1}{s^2}+2\frac{1}{s}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^2(s)-2y(s)-\frac{2s-1}{s^2}=0\rightarrow Ä=4-4\frac{2s-1}{s^2}=4\left(\frac{s^2-2s+1}{s^2}\right)>0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(s)=\frac{2\pm 2\frac{s-1}{s}}{2}=1\pm\frac{s-1}{s}\Rightarrow y_1(s)=\frac{2s-1}{s},\quad y_2(s)=\frac{1}{s}$$

και κατόπιν αυτών θα εφαρμόσουμε τον αντίστροφο του μετασχηματισμού Laplace

$$y(t)=L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}=1$$

η άλλη λύση απορρίπτεται. Πράγματι για s να τείνει στο άπειρο το όριο το y(s) είναι το 2 διάφορο του μηδενός. **Αυτό είναι μια βασικότατη ιδιότητα του μετασχηματισμού Laplace και βοηθά στο να λύνονται ορθά πολλές ασκήσεις. Δηλαδή πρέπει να ελέγχουμε κατά πόσο κάθε φορά όταν το s τείνει στο άπειρο, το όριο τείνει στο μηδέν.** Τα λοιπά κατά τα γνωστά.

Άσκηση 5.5

Να λυθεί η διαφορική x″-2x′+x=t-sint με x′(0)=x(0)=0.

Λύση:

Καταρχήν θα μπορούσαμε να λύσουμε την αντίστοιχη ομογενή της ΔΕ και ύστερα να λύσουμε 2 διαφορικές x″-2x′+x=t και x″-2x′+x=sint κτλ.

Εδώ θα προσπαθήσουμε να τη λύσουμε απλά χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό του Laplace. Έτσι θα έχουμε:

$$L\{x''\}-2L\{x'\}+L\{x\}=L\{t\}-L\{\sin t\}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow s^2X-sx(0)-x'(0)-2(sX-x(0))+X=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+1}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow s^2X-2sX+X=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2+1}\Rightarrow X(s^2-2s+1)=\frac{1}{(s^2+1)s^2}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow X=\frac{1}{(s^2+1)s^2(s-1)^2}$$

και μάλιστα όταν το s τείνει στο άπειρο το X τείνει στο μηδέν άρα δεκτό.

Εφαρμόζουμε τον αντίστροφο του μετασχηματισμού Laplace οπότε παίρνουμε:

$$x(t)=L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}+2L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}+\frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\}-\frac{3}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}-\frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t)=t+2+\frac{1}{2}te^t-\frac{3}{2}e^t-\frac{1}{2}\cos t$$

που είναι η ζητούμενη λύση.

Άσκηση 5.6

Δίνεται το πρόβλημα αρχικών τιμών y″ = f(t) με y(0) = 1, y′(0) = 0 όπου

$$f(t)=\begin{cases}\sin t, & 0\le t<\pi\\ \cos t, & \pi\le t<\infty\end{cases}.$$

Λύση:

Αφού έχουμε δίκλαδη συνάρτηση, θα χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση Heaviside οπότε η f(t) γράφεται:

f(t)=sint+H(t-π)(cost-sint)=sint+H(t-π)(sin(t-π)-cos(t-π)).

Εφαρμόζουμε το μετασχηματισμό Laplace στην εξίσωση L{y″}=L{f(t)} άρα

$$s^2y(s)-s=\frac{1}{s^2+1}+e^{-\pi s}\left(\frac{1}{s^2+1}-\frac{s}{s^2+1}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(s)=\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2(s^2+1)}+e^{-\pi s}\left(\frac{1}{s^2(s^2+1)}+\frac{1}{s(s^2+1)}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t)=L^{-1}\{y(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right\}+L^{-1}\left\{e^{-\pi s}\left(\frac{1}{s^2(s^2+1)}+\frac{1}{s(s^2+1)}\right)\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t)=1+t+\sin t+H(t-\pi)\left[t-\sin t-1+\cos t\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(t)=\begin{cases}1+t-\sin t, & 0\le t<\pi\\ -\pi+2t-\cos t, & \pi\le t\end{cases}$$

Άσκηση 5.7

Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$ty''+(2t+3)y'+(t+3)y= e^{-t}, \quad y(0)=a,\ y'(0)=1/3 - a.$$

Λύση:

Εφαρμόζουμε μετασχηματισμό Laplace:

$$L\{ty''\} = -\frac{d}{ds}L\{y''\} = -\left(s^2 y(s) - as - \frac{1}{3} + a\right)' = -2sy - s^2 y'$$
$$L\{(2t+3)y'\} = 2L\{ty'\} + 3L\{y'\} = (3s-2)y - 2sy'$$
$$L\{(t+3)y\} = L\{ty\} + 3L\{y\} = -y' + 3y$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω η δοσμένη εξίσωση γράφεται:

$$y' - \frac{1}{s+1}y = -\frac{1}{(s+1)^3} - \frac{2a}{(s+1)^2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ y(s) = (s+1)\left[C + \frac{a}{(s+1)^2} - \frac{1}{3(s+1)^3}\right]$$

Βλέπουμε ότι εμφανίζεται η σταθερά C. Δεν είναι όμως όλες οι λύσεις δεκτές. Είπαμε σε μια προηγούμενη παρατήρηση ότι όταν το s τείνει στο άπειρο, τότε το y(s) πρέπει υποχρεωτικά να τείνει στο μηδέν. Αν στη συγκεκριμένη περίπτωση υπολογίσουμε το όριο, αυτό θα είναι μηδέν όταν και μόνο όταν C=0. Επομένως η δεκτή λύση θα είναι η παρακάτω:

$$y(s) = \frac{a}{s+1} + \frac{1}{3(s+1)^2} \Rightarrow\ y(t) = ae^{-t} + \frac{1}{3}te^{-t}$$

Άσκηση 5.8

α) Αν f(0)=g(0) δείξτε ότι f′(t)*g(t) = f(t)*g′(t).

β) Βρείτε τη λύση της y″(t)+ty′(t)-y(t) = 0 (1) για y(0) = 0 και y′(0) = 1.

Λύση:

α) Πρόκειται για συνέλιξη οπότε βάση του ορισμού έχουμε:

$$(f'*g)(t)=\int_0^t f'(u)g(t-u)du = f(u)g(t-u)\Big|_0^t - \int_0^t f(u)g'(t-u)\frac{d}{du}(t-u)du =$$

$$= f(t)g(0)-f(0)g(t)+\int_0^t f(u)g'(t-u)du = f(t)*g'(t)=\left(f*g'\right)(t)$$

β) Κατά τα γνωστά με χρήση μετασχηματισμού Laplace:

$$L\{y''(t)\}=s^2y(s)-sy(0)-y'(0)=s^2y(s)-1$$
$$L\{y'(t)\}=sy(s)-y(0)=sy(s)$$
$$L\{ty'(t)\}=-\frac{d}{ds}(sy(s))=-y(s)-sy'(s)$$

οπότε η δοσμένη εξίσωση γράφεται:

$$s^2y(s)-1-y(s)-sy'(s)-y(s)=0 \Rightarrow y'(s)+\frac{2-s^2}{2}y(s)=-\frac{1}{s}$$

καταλήξαμε δηλαδή σε γραμμική ΔΕ 1ης τάξης την οποία λύνουμε εύκολα πχ λύνοντας αρχικά την ομογενή και μετά βρίσκοντας μια μερική λύση. Με οποιοδήποτε πάντως τρόπο και αν εργαστούμε βρίσκουμε ότι:

$$y(s)=\frac{e^{s^2/2}}{s^2}C+\frac{1}{s^2}$$

Όπως κάναμε όταν εμφανίστηκε η σταθερά C έτσι και τώρα πρέπει του s τείνοντος στο άπειρο το y(s) να τείνει στο μηδέν.

Άρα η μόνη δεκτή σταθερά που ικανοποιεί τη βασική αυτή προϋπόθεση του μετασχηματισμού Laplace θα είναι η C = 0 οπότε έχουμε:

$$y(s)=\frac{1}{s^2}\Rightarrow y(t)=L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}=t\Rightarrow y(t)=t.$$

που είναι και η ζητούμενη τελική λύση.

Άσκηση 5.9

α) Να σχεδιασθεί η συνάρτηση H(t-2)-H(t-3)

β) Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace της

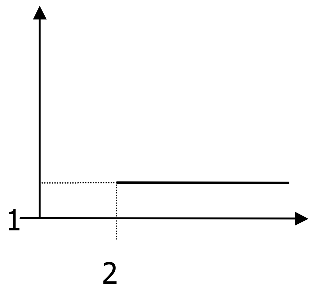
$$f(t)=\begin{cases}0, & t<2\\ e^t, & 2<t<3\\ 0, & t>3\end{cases}.$$

Λύση:

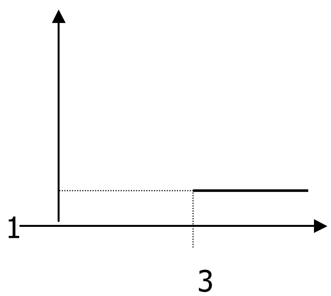
α) Για τη γραφική παράσταση σκεφτόμαστε ως εξής. H(t-2) σημαίνει ότι είναι 1 όταν t-2>0⇒t>2 και 0 όταν t-2<0⇒t<2.

Άρα κάνουμε τη γραφική παράσταση του σχήματος 1. Τώρα για την H(t-3) έχουμε ότι αυτή είναι 1 όταν t>3 και 0 όταν t<3.Κάνουμε τη γραφική παράσταση του σχήματος 2.

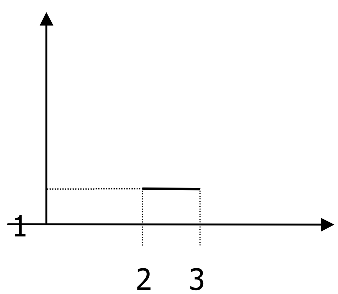
Τέλος και από τα δυο μαζί προκύπτει η γραφική παράσταση του σχήματος 3 που είναι και η ζητούμενη.



σχήμα 1



σχήμα 2



σχήμα 3

β) Η f(t) προφανώς γράφεται (εκμεταλλευόμενοι τις ιδιότητες της συνάρτησης Heaviside) ως εξής:

$$f(t)=e^t\Big(H(t-2)-H(t-3)\Big)\Rightarrow L\{f(t)\}=L\Big\{e^t\Big(H(t-2)-H(t-3)\Big)\Big\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow L\{f(t)\}=L\{e^tH(t-2)\}-L\{e^tH(t-3)\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow L\{f(t)\}=L\{e^{t-2+2}H(t-2)\}-L\{e^{t-3+3}H(t-3)\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow L\{f(t)\}=e^2\frac{e^{-2s}}{s-1}+e^3\frac{e^{-3s}}{s-1}$$

που είναι ο ζητούμενος μετασχηματισμός. Παρατηρείστε ότι "αναγκαστήκαμε" να γράψουμε το e^t ως e^{t+2-2} για να εφαρμόσουμε τη γνωστή ιδιότητα L{e^tH(t)}=1/(s-1) όπου βέβαια t εμείς θέσαμε t-2 και t-3.

Άσκηση 5.10

Να υπολογιστεί το : $\displaystyle\int_0^\infty t\cos t e^{-2t}dt$.

Λύση:

Ισχύουν διαδοχικά τα εξής:

$$L\{t\cos tH(t)\}=\Big(L\{\cos tH(t)\}\Big)'=-\left(\frac{s}{s^2+1}\right)'=\frac{s^2-1}{\left(s^2+1\right)^2}$$

οπότε για s=2 παίρνουμε ότι

$$t\cos te^{-2t}H(t)=\frac{3}{25}$$

Επειδή δε το H(t) στο διάστημα (0,∞) έχει τιμή 1 παίρνουμε από τον ορισμό:

$$\int_0^{\infty} t\cos t e^{-2t} dt = \frac{3}{25}$$

Άσκηση 5.11

Να λυθεί η ΔΕ: $y'(t) = \sin t + \int_0^t y(t-u)\cos u du$, όταν y(0) = 0.

Λύση:

Έχουμε σύμφωνα με τη θεωρία της συνέλιξης:

$$\int_0^t y(t-u)\cos u du = y(t)*\cos t \Rightarrow L\{y(t)*\cos t\} = L\{y(t)\}L\{\cos t\} =$$

$$= y(s)\frac{s}{s^2+1} \rightarrow L\{y'(t)\} = sy(s) - y(0) = sy(s)$$

$$L\{\sin t\} = \frac{1}{s^2+1} \rightarrow sy(s) = \frac{1}{s^2+1} + y(s)\frac{s}{s^2+1} \Rightarrow y(s) = \frac{1}{s^3}$$

και τελικά με χρήση του αντιστρόφου μετασχηματισμού Laplace παίρνουμε τη λύση:

$$y(t) = L^{-1}\{y(s)\} = L^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} \Rightarrow y(t) = \frac{1}{2}t^2$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6: ΕΠΙΛΥΣΗ Δ.Ε. ΜΕ ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ - ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ Δ.Ε.

Α. ΘΕΩΡΙΑ

Ι. ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ

1. Γενικά Περί Δυναμοσειρών

Ως **δυναμοσειρά με κέντρο το x_0**, ορίζουμε την σειρά συναρτήσεων:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (x - x_0)^\nu, a_\nu \in R$$

Επίσης ορίζουμε ως **ακτίνα σύγκλισης R της δυναμοσειράς τον αριθμό:**

$$R = \begin{cases} 0, \rho. \to \infty \\ \dfrac{1}{\rho}, 0 < \rho. < \infty \\ +\infty, \rho. = 0 \end{cases}$$

όπου $\rho. = \overline{\lim}.\sqrt[\nu]{a_\nu}$.Το ρ μπορεί να υπολογισθεί και από το όριο $\lim.\left|\dfrac{a_{\nu+1}}{a_\nu}\right|$ όταν αυτό υπάρχει.Η σειρά συγκλίνει για $|x - x_o|<R$ και αποκλίνει για $|x - x_o|>R$.

1.1 Συναρτήσεις Υπό Την Μορφή Δυναμοσειρών & Παράγωγοι Αυτών.

Μια συνάρτηση f η οποία μπορεί σε περιοχή του x_0 να γραφεί σε μορφή δυναμοσειράς με κέντρο το x_o,ονομάζεται **αναλυτική στο σημείο x_0.**

Θεωρούμε την συνάρτηση:

$$f(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu(x-x_0)^\nu \quad , \ \mathrm{x}\in(\mathrm{x}_0-R,x_0+R) \qquad (1)$$

Η συνάρτηση αυτή στο συγκεκριμένο πεδίο ορισμού έχει παραγώγους οποιασδήποτε τάξεως. Αυτές γράφονται ως εξής:

$$f'(x)=\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu a_\nu(x-x_0)^{\nu-1}=\sum_{\nu=0}^{\infty}(\nu+1)a_{\nu+1}(x-x_0)^\nu$$

$$f''(x)=\sum_{\nu=2}^{\infty}\nu(\nu-1)a_\nu(x-x_0)^{\nu-2}=\sum_{\nu=0}^{\infty}(\nu+2)(\nu+1)a_{\nu+2}(x-x_0)^\nu$$

......

$$f^{(k)}(x)=\sum_{\nu=0}^{\infty}(\nu+k)(\nu+k-1)\ldots(\nu+1)a_{\nu+k}(x-x_0)^\nu$$

Εάν πληρούνται κάποιες προϋποθέσεις, που περιγράφουμε στην επόμενη παράγραφο, είναι δυνατόν να λυθεί μια διαφορική εξίσωση, εάν θεωρήσουμε ότι η λύση έχει την μορφή της (1) και αντικαταστήσουμε τις παραγώγους της (όπως αναγράφονται παραπάνω) στην διαφορική εξίσωση. Εκτελώντας τις απαραίτητες πράξεις καταλήγουμε σε εκ ταυτότητας ίσα πολυώνυμα, και εξισώνοντας τους αντίστοιχους συντελεστές παίρνουμε όπως θα δούμε την λύση της διαφορικής εξισώσεως.

Κατά τον υπολογισμό των παραγώγων της f σε μορφή δυναμοσειράς, πρέπει το όρισμα του αθροίσματος (εδώ το ν) να ξεκινά από τον ίδιο αριθμό (εδώ μετατρέψαμε όλες τις δυναμοσειρές ώστε το ν να ξεκινά από το 0) αλλιώς θα αντιμετωπίσουμε πρόβλημα στις περαιτέρω πράξεις. Για να μετατρέψουμε μια δυναμοσειρά της οποίας το ν ξεκινά από το α ώστε να ξεκινά από το b ≠ α, εκτελούμε τα παρακάτω:

Θέτουμε :

$$\nu-a=k-b\Rightarrow\begin{cases}\nu=k+a-b\\ k=\nu-a+b\end{cases}$$

και αντικαθιστούμε στην παράσταση όπου ν το ίσο του από την άνω ισότητα ενώ στο σύμβολο του αθροίσματος θέτουμε "άθροισμα από k = b εώς ∞".

Πράγματι, από την κάτω ισότητα για ν = α παίρνω k = b.Προφανώς το ∞ παραμένει το ίδιο. Αφού συντάξουμε πλήρως την δυναμοσειρά μας και αντικαταστήσουμε όλα τα ν με τα k,μπορούμε (αφού είναι θέμα συμβολισμού) να γράψουμε όπου k το ν.

Για παράδειγμα, θα μετατρέψουμε την f'(x) έτσι ώστε το άθροισμα να ξεκινά από το μηδέν. Έχουμε:

$$v-1=k-0 \Rightarrow \begin{cases} v=k+1-0=k+1 \\ k=v-1+0=v-1 \end{cases}$$

Έτσι έχω: $$f'(x)=\sum_{v=1}^{\infty} v a_v (x-x_0)^{v-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+1}(x-x_0)^k$$

Το τελικό αποτέλεσμα μπορεί να γραφεί:

$$f'(x)=\sum_{v=0}^{\infty}(v+1)a_{v+1}(x-x_0)^v$$

Σε αντίθετη περίπτωση, εάν θελήσουμε να μετατρέψουμε ένα άθροισμα έτσι ώστε το ν να ξεκινά από το b όπου b > α και **δεν θέλουμε να αλλάξουμε την μορφή της παράστασης** μπορούμε απλά να αναπτύξουμε τους όρους από το α έως το b. Έτσι για παράδειγμα :

$$f'(x)=\sum_{v=0}^{\infty}(v+1)a_{v+1}(x-x_0)^v = (0+1)a_{0+1}(x-x_0)^0 + \sum_{v=1}^{\infty}(v+1)a_{v+1}(x-x_0)^v \Rightarrow$$

$$f'(x)=a_1+\sum_{v=1}^{\infty}(v+1)a_{v+1}(x-x_0)^v$$

2. Ομαλά Σημεία - Επίλυση Με Δυναμοσειρές

Θεωρούμε τη διαφορική εξίσωση:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \qquad (1)$$

όπου οι συναρτήσεις p,q,g αναπτύσσονται σε περιοχή του x_o σε δυναμοσειρές με κέντρο το x_o.Το σημείο x_o τότε ονομάζεται **ομαλό σημείο της διαφορικής εξισώσεως (1).**

Τότε αποδεικνύεται ότι κάθε λύση της (1) γράφεται υπό την μορφή δυναμοσειράς με κέντρο x_o σε κατάλληλη περιοχή του x_0 (δηλαδή στο διάστημα (x_o - ρ, x_0 + ρ), ρ > 0). Με βάση τα παραπάνω είναι εύκολο να λύσουμε διαφορικές εξισώσεις σύμφωνα με το παράδειγμα και τις ασκήσεις που παρατίθενται παρακάτω.

Παράδειγμα:

Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών:

$$y'' + y = 0 \quad y(0) = 0, y'(0) = 1 \quad (*)$$

Λύση:

Θα επιδιώξουμε να βρούμε τη λύση της διαφορικής εξίσωσης με την βοήθεια δυναμοσειρών. Το 0 είναι ομαλό σημείο της (*) οπότε σύμφωνα με τη θεωρία μια λύση της αναπτύσσεται ως δυναμοσειρά γύρω από το 0,δηλαδή η λύση θα έχει τη μορφή:

$$y(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu x^\nu$$

(επιλέξαμε το 0 ως κέντρο ,διότι μπορούμε έτσι να αξιοποιήσουμε και τις αρχικές συνθήκες που μας δίνονται).Έτσι έχω:

$$y(0)=0 \Rightarrow a_0 = 0$$
$$y'(0)=1 \Rightarrow a_1 = 1$$

διότι έχω:

$$y(x)=\sum_{v=0}^{\infty} a_v x^v = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

$$y'(x)=\sum_{v=0}^{\infty} (v+1) a_{v+1} x^v = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots$$

Η λύση όπως περιγράφηκε παραπάνω, προφανώς θα ικανοποιεί τη (*):

$$\sum_{v=0}^{\infty} (v+2)(v+1) a_{v+2} x^v + \sum_{v=0}^{\infty} a_v x^v = 0$$

Αφού και στις δύο εκφράσεις το ν ξεκινά από το 0 μπορώ να τις συγχωνεύσω σε μία. Ταυτόχρονα βγάζω ως κοινό παράγοντα το x^v.

$$\sum_{v=0}^{\infty} [(v+2)(v+1) a_{v+2} + a_v] x^v = 0$$

Παρατηρήστε ότι γενικά για να μπορέσουμε να κάνουμε πράξεις με δυναμοσειρές θα πρέπει αυτές να έχουν κοινή αρχή. Επιπλέον για να μπορέσουμε να φτάσουμε σε κάποιο συμπέρασμα,(εδώ συμπεραίνουμε ότι η έκφραση μεταξύ των αγκύλων είναι μηδέν) θα πρέπει να βγάλουμε κοινό παράγοντα μια έκφραση του x οπότε φροντίζουμε όλα τα x να είναι υψωμένα στον ίδιο εκθέτη. Για να πετύχουμε τα παραπάνω, χρησιμοποιούμε την μεθοδολογία που αναπτύχθηκε προηγουμένως στο κεφάλαιο.

Η προηγούμενη έκφραση σημαίνει ότι για κάθε ν ισχύει:

$$(v+2)(v+1)a_{v+2} + a_v = 0 \Rightarrow a_{v+2} = -\frac{a_v}{(v+2)(v+1)}$$

Με βάση την παραπάνω σχέση, και το γεγονός ότι $a_0 = 0, a_1 = 1$,προκύπτουν όλοι οι συντελεστές. Συγκεκριμένα ισχύει:

$$a_{2k} = 0, k = 0,1,2,3,\ldots$$

ενώ για τους περιττούς δείκτες:

$$a_3 = -\frac{1}{2\cdot 3} \quad , \quad a_5 = -\frac{a_3}{4\cdot 5} = \frac{1}{5!} \quad , \quad a_7 = -\frac{a_5}{6\cdot 7} = -\frac{1}{7!}$$

και γενικά έχω:

$$a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$$

Η γενική λύση λοιπόν της διαφορικής εξίσωσης θα είναι η:

$$y(x) = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sin x, x \in R$$

Η παραπάνω λύση θα μπορούσε να προκύψει με απλή επίλυση της διαφορικής εξίσωσης. (Είναι δευτέρας τάξεως με σταθερούς συντελεστές).

<u>Παρατήρηση</u>: Από δω και στο εξής όπου αναγράφουμε το σύμβολο $\sum$ και μόνο αυτό θα εννοούμε $\sum\limits_{v=0}^{\infty}$.

II. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

3. Γενικά Για Τα Συστήματα Διαφορικών Εξισώσεων

Συχνά η μελέτη ενός προβλήματος Φυσικής ,Μαθηματικών ή Μηχανικής οδηγεί σ’ ένα σύνολο εξισώσεων, στο οποίο εμφανίζονται περισσότερες από μία άγνωστες συναρτήσεις $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ και οι παράγωγοί τους μέχρι κάποιου βαθμού. Το σύνολο αυτό των εξισώσεων λέμε ότι αποτελεί ένα **σύστημα διαφορικών εξισώσεων.**

Το σύστημα αυτό θα έχει την μορφή:

$$\begin{cases} F_1(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(\nu_1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(\nu_2)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(\nu_n)}) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(\nu_1)}, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(\nu_2)}, \ldots, y_n, y_n', \ldots, y_n^{(\nu_n)}) = 0 \end{cases}$$

4. Γραμμικά Συστήματα Διαφορικών Εξισώσεων

Ένα σύστημα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης σε κανονική μορφή θα λέγεται **γραμμικό** όταν είναι της μορφής:

$$(1) \qquad \begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + \ldots + a_{1n}(x)y_n + g_1(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = a_{n1}(x)y_1 + \ldots + a_{nn}(x)y_n + g_n(x) \end{cases}$$

όπου όλες οι συναρτήσεις της (1) είναι ορισμένες σε ένα μη εκφυλισμένο διάστημα I. Το σύστημα (1) μπορεί να γραφεί σε διανυσματική μορφή ως εξής:

$$(2) \qquad y' = A(x)y + g(x)$$

όπου A(x) είναι ο πίνακας$\left(a_{ij}(x)\right)_{n\times n}$ ενώ y, g(x) είναι τα διανύσματα (πίνακες στήλη):

$$y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix} \text{ και } g(x)=\begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \cdots \\ g_n(x) \end{pmatrix}$$

Όταν g(x) = 0 τότε το σύστημα (1) ονομάζεται ομογενές.

5. Επίλυση Συστημάτων Διαφορικών Εξισώσεων

5.1 Επίλυση Συστημάτων Με Την Μέθοδο Της Απαλοιφής

Όταν έχουμε ένα γραμμικό σύστημα διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές, μπορούμε με παραγωγίσεις και γραμμικούς συνδυασμούς των εξισώσεων να "δημιουργήσουμε" μια διαφορική εξίσωση με μία μόνο άγνωστη συνάρτηση. Στη συνέχεια λύνουμε την διαφορική αυτή εξίσωση και από την λύση της, κατά τα γνωστά, προσδιορίζουμε τις λύσεις και των υπόλοιπων άγνωστων συναρτήσεων.

Η μέθοδος αυτή ονομάζεται **μέθοδος της απαλοιφής** κατ' αναλογία προς την μέθοδο της απαλοιφής των συστημάτων αλγεβρικών εξισώσεων και μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για γραμμικά συστήματα διαφορικών εξισώσεων με μη σταθερούς συντελεστές ή και για μη γραμμικά συστήματα.

Παράδειγμα:

Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}\begin{cases} x''+2x-y=0 \\ y'-6x+3y=1 \end{cases}$$

Λύση:

Πολλαπλασιάζουμε την (1) με το 3 και προσθέτουμε στην (2).Έτσι προκύπτει:

(3) $3x'' + y' = 1$

Παραγωγίζουμε την (1) και την προσθέτουμε στην (3) οπότε έχουμε:

(4) $x''' + y' = 1$

Η (4) έχει κατά τα γνωστά τη γενική λύση:

$$x(t) = C_1 + C_2 e^{-2t} + C_3 e^{-t} + \frac{1}{2}t$$

Αντικαθιστούμε στην (1) οπότε προκύπτει εύκολα:

$$y(t) = 2C_1 + 6C_2 e^{-2t} + 3C_3 e^{-t} + 1$$

5.2 Επίλυση Συστημάτων Με Την Μέθοδο Του Μετασχηματισμού Laplace

Κατά την μέθοδο αυτή, εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό Laplace σε κάθε μία από τις εξισώσεις του συστήματός μας, λαμβάνοντας υπόψη τις αρχικές τιμές που θα μας δίνονται.

Με αυτό τον τρόπο καταλήγουμε σε ένα γραμμικό αλγεβρικό σύστημα ως προς τις λαπλασιανές $Y_i(s) = L\{y_i\}$. (y_i είναι οι άγνωστες συναρτήσεις).Αφού επιλύσουμε εύκολα το αλγεβρικό αυτό σύστημα, εφαρμόζουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace για $t \geq 0$,οπότε προκύπτουν οι άγνωστες συναρτήσεις y_i.

<u>Παράδειγμα</u>:

Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} x' = 2x - 2y \\ y' = 4x - 2y + \delta.(t-\pi) \end{cases}, x(0) = 1, y(0) = 0$$

Εφαρμόζουμε τον μετασχηματισμό Laplace σε κάθε μία από τις εξισώσεις του συστήματός μας, λαμβάνοντας υπόψη τις αρχικές τιμές.Έτσι προκύπτει το εξής σύστημα:

$$\left\{\begin{matrix} sX - 1 = 2X - 2Y \\ sY = 4X - 2Y + e^{-\pi s} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} (s-2)X + 2Y = 1 \\ -4X + (s+2)Y = e^{-\pi s} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$X = \frac{s}{s^2+4} + \frac{2}{s^2+4} - \frac{2}{s^2+4}e^{-\pi s}, Y = \frac{4}{s^2+4} + \left(\frac{s}{s^2+4} - \frac{2}{s^2+4}\right)e^{-\pi s}$$

Άρα η λύση του συστήματος θα είναι:

$$x(t) = \cos(2t) + \sin(2t) - 2H(t-\pi)\sin(2t)$$
$$y(t) = 2\sin(2t) + H(t-\pi)(\cos(2t) - \sin(2t))$$

5.3 Επίλυση Συστημάτων Με Την Μέθοδο Του Euler

Η μέθοδος του Euler ή μέθοδος των χαρακτηριστικών μεγεθών εφαρμόζεται στην περίπτωση ομογενούς συστήματος διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης με σταθερούς συντελεστές, δηλαδή στην περίπτωση συστημάτων της μορφής:

$$(1) \qquad y' = A \cdot y$$

όπου y το διάνυσμα των άγνωστων συναρτήσεων:

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Κατά την μέθοδο του Euler,θα αναζητούμε τις ιδιοτιμές του πίνακα Α.Οι ιδιοτιμές του πίνακα Α αποτελούν ,όπως είναι γνωστό, λύσεις της χαρακτηριστικής εξίσωσης του Α:

$$(2) \qquad |A - \lambda . I| = 0$$

Ένα διάνυσμα υ ≠ 0 αποτελεί ιδιοδιάνυσμα όταν υπάρχει λεC τέτοιο ώστε:

(3) Αυ = λυ ή (Α - λ)Ι = 0

Αν λεC είναι μια ιδιοτιμή του Α και υ είναι το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα, τότε αποδεικνύεται ότι η διανυσματική συνάρτηση **φ = e^{λx} υ** αποτελεί λύση του συστήματος (1).

Συνεπώς θα αναζητούμε από την (2) τις ιδιοτιμές του πίνακα Α και με βάση την (3) θα αναζητούμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα. **Θα πρέπει όμως να προσέχουμε ώστε να επιλέγουμε γραμμικώς ανεξάρτητα μεταξύ τους ιδιοδιανύσματα.** Αν πράγματι έχουν επιλεχθεί n το πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητα μεταξύ τους ιδιοδιανύσματα, **αποδεικνύεται ότι οι συναρτήσεις**:

$$\phi_{1.} = e^{\lambda_1 x} u_1, \dots, \phi_{.n} = e^{\lambda_n x} u_n$$

(όπου $λ_1$,$λ_2$,...,$λ_n$ είναι οι αντίστοιχες ιδιοτιμές των ιδιοδιανυσμάτων) **αποτελούν θεμελιώδες σύνολο λύσεων του συστήματος (1).**

Κατά την εύρεση των ιδιοτιμών ενδέχεται κάποιες από αυτές να είναι ρίζες της (2) με πολλαπλότητα κ μεγαλύτερη του 1.Σε κάθε τέτοια ιδιοτιμή θα αντιστοιχούμε κ το πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.

Παρατήρηση: Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούνται σε κάθε ιδιοτιμή δεν είναι μοναδικά. Αντίθετα, πχ στη περίπτωση ιδιοτιμής που είναι απλή ρίζα της (2),αν αντικαταστήσουμε στην (3) θα έχουμε 1 ελεύθερο άγνωστο, στη περίπτωση που η ιδιοτιμή είναι διπλή ρίζα της (2),τότε το σύστημα (3) θα έχει 2 ελεύθερους αγνώστους κοκ. Τα παραπάνω αναλύονται διεξοδικά στις σχετικές ασκήσεις.

Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 6.1

Να λυθεί η διαφορική εξίσωση του Airy y″-xy=0 με τη βοήθεια δυναμοσειρών.

Λύση:

Με τη βοήθεια δυναμοσειρών η δοσμένη εξίσωση γράφεται:

$$y'' - xy = 0 \Rightarrow \sum (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - x\sum a_n x^n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum a_n x^{n+1} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a_2 x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1}\right]x^n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a_2 = 0 \quad \text{êáé} \quad (n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_2 = 0 \quad \text{êáé} \quad a_{n+2} = \frac{a_{n-1}}{(n+1)(n+2)} \quad \forall \; n \geq 1 \; \text{ìå} \; n \in N$$

τώρα εμείς θα θέτουμε n=1,2,… μέχρι να βρούμε με ποιο τρόπο επαναλαμβάνεται η ακολουθία.

Μπορεί να μην υπάρχει συγκεκριμένος τύπος οπότε και η επίλυση της άσκησης θα σταματήσει εδώ. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα έχουμε:

$$n = 1 \rightarrow \; a_3 = \frac{a_0}{6} = \frac{a_0}{1*2*3} = \frac{a_0}{3!}$$
$$n = 2 \rightarrow \; a_4 = \frac{a_1}{12}$$
$$n = 3 \rightarrow \; a_5 = \frac{a_0}{20} = 0$$
$$n = 4 \rightarrow \; a_6 = \frac{a_3}{30} = \frac{a_0}{2*3*5*6} = \frac{a_0}{2*5*3^2\,2!}$$

Ήδη από εδώ και πέρα μπορούμε να βγάλουμε τα εξής συμπεράσματα:

$$a_{3n} = \frac{a_0}{2*5*8*.....*(3n-1)*3^n\,n!}, \quad n = 1,2,3...$$
$$a_{3n+1} = \frac{a_1}{4*7*10*....*(3n+1)*3^n\,n!}, \quad n=1,2,3,...$$

και επομένως έχουμε την εξής γενική λύση:

$$y(x) = a_0\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n x^{3n}\right] + a_1\left[x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{3n+1}\right]$$

Αν τώρα θέσω $a_0=0$ παίρνω $y_2(x)$ λύση της ΔΕ. Αν επίσης $a_1=0$ παίρνω $y_1(x)$ άλλη μια λύση της ΔΕ. Τότε $y(x)=a_0y_1(x)+a_1y_2(x)$ μια λύση της ΔΕ. Για να δούμε αν τα $y_1(x)$ και $y_2(x)$ αποτελούν γενική λύση της ΔΕ αρκεί να πάρουμε ορίζουσα Wronski.

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

άρα έχουμε θεμελιώδες σύστημα λύσεων που κατά συνέπεια εκφράζει τη γενική λύση της ΔΕ.

Άσκηση 6.2

Να λυθεί με τη βοήθεια δυναμοσειρών η ΔΕ Legendre:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + a(a+1)y = 0, \quad a \in R$$

Λύση:

Για λόγους ευκολίας η εξίσωση αυτή γράφεται:

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{a(a+1)}{1-x^2}y = 0 \Rightarrow \quad p(x) = -\frac{2x}{1-x^2}, \quad q(x) = \frac{a(a+1)}{1-x^2}$$

Προφανώς τώρα οι p(x) και q(x) αναπτύσσονται σε δυναμοσειρά με κέντρο το 0 και ακτίνα 1. Επομένως κάθε λύση της εξίσωσης μπορεί να γραφτεί υπό τη μορφή δυναμοσειράς. Αν τώρα μετά την παρατήρηση αυτή η οποία είναι απαραίτητη να γίνεται , έρθουμε στην αρχική μορφή και αντικαταστήσουμε την y(x) παίρνουμε:

$$(1-x^2)\sum (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - 2x\sum (n+1)a_{n+1}x^n + a(a+1)\sum a_n x^n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum (n+2)(n+1)a_{n+2}x^{n+2} - \sum 2(n+1)a_{n+1}x^{n+1} +$$

$$\sum a(a+1)a_n x^n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a_2 + ba_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 2na_n + ba_n\right]x^n = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_2 = -\frac{b}{2}a_0 \quad \text{êáé} \quad a_{n+2} = \frac{n(n+1)-b}{(n+2)(n+1)}a_n, \quad n = 0,1,2,\ldots.$$

Έτσι θα αρχίσουμε να βρίσκουμε διάφορους συντελεστές έως ότου να καταλήξουμε σε κάποια μορφή ακολουθίας:

$$a_4 = \frac{2*3-b}{3*4}a_2 = -\frac{b}{4}\left(1-\frac{b}{2*3}\right)a_0$$

$$a_6 = \frac{4*5-b}{5*6}a_4 = -\frac{b}{6}\left(1-\frac{b}{2*3}\right)\left(1-\frac{b}{4*5}\right)a_0$$

$$a_{2k} = \frac{b}{2k}\left(1-\frac{b}{2*3}\right)\left(1-\frac{b}{4*5}\right)....\left(1-\frac{b}{(2k-2)(2k-1)}\right)a_0, \quad k=2,3,...$$

ομοίως αν εκτελέσουμε την ίδια διαδικασία για περιττούς δείκτες συντελεστών θα πάρουμε το γενικό όρο της ακολουθίας τους:

$$a_{2k-1} = \frac{1}{2k+1}\left(1-\frac{b}{1*2}\right)\left(1-\frac{b}{3*4}\right)...\left(1-\frac{b}{(2k-2)(2k)}\right)a_1, \quad k=1,2,....$$

Συνεπώς η γενική λύση της δοσμένης ΔΕ Legendre θα είναι η

$$y(x)=a_0y_1(x)+a_1y_2(x)$$

όπου $y_1(x),y_2(x)$ οι παρακάτω εκφράσεις:

$$y_1(x)=1-\frac{a(a+1)}{2}x^2-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{a(a+1)}{2k}\left(1-\frac{a(a+1)}{2*3}\right)...\left(1-\frac{a(a+1)}{(2k-2)(2k-1)}\right)x^{2k}$$

$$y_2(x)=x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\left(1-\frac{a(a+1)}{1*2}\right)...\left(1-\frac{a(a+1)}{2k(2k-1)}\right)x^{2k+1}$$

Άσκηση 6.3

Να επιλυθεί το σύστημα:

$$y''+z''+y'=\sin 2x$$

$$2y''+z''=2x$$

Λύση:

Αφαιρώντας τις δυο σχέσεις παίρνουμε το ισοδύναμο σύστημα:

$$2y'' + z'' = 2x$$
$$y'' - y' = 2x - \sin 2x$$

Για τη δεύτερη εξίσωση λύνω την ομογενή:

$$y'' - y' = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 0,1 \Rightarrow y(x) = C_1 + C_2 e^x$$

Θα προχωρήσουμε με τη μέθοδο μεταβολής των παραμέτρων. Θα μπορούσαμε επίσης να επιλύσουμε την άσκηση και με τη μέθοδο των προσδιοριστέων συντελεστών. Τελικά θα πάρουμε τις εξής τιμές για τις δυο σταθερές:

$$C_1 = -\int \frac{y_2 g}{W(x)} dx = -\int \frac{e^x (2x - \sin 2x)}{\begin{vmatrix} 1 & e^x \\ 0 & e^x \end{vmatrix}} dx = -\int (2x - \sin 2x) dx$$

$$\text{και}\ C_2 = \int \frac{y_1 g}{W(x)} dx$$

χωρίς να ληφθούν υπόψη οι μεταβλητές της ολοκλήρωσης. Τελικά έχω:

$$y(x) = C_1 + C_2 e^x - (x^2 + 2x - x) - \frac{\cos 2x}{10} + \frac{\sin 2x}{5}$$

είναι σαφές ότι τώρα πρέπει να προσδιορίσουμε το z. Για να το επιτύχουμε ανατρέχουμε στην εξίσωση 2y″+z″=2x λύνοντας ως προς z. Τότε όμως θα έχουμε:

$$z'' = -C_2 e^x + 2(x+1) - \frac{2}{5}\cos 2x + \frac{4}{5}\sin 2x$$

το z μπορεί να εμφανισθεί αν ολοκληρώσουμε δυο φορές την παραπάνω σχέση, οπότε και θα έχουμε δυο ακόμα σταθερές.

Άσκηση 6.4

Να λυθεί το σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} x' &= -x + y + z + e^t \\ y' &= x - y + z + e^{3t} \\ z' &= x + y + z + 4 \end{aligned}\right\} \qquad x(0) = y(0) = z(0) = 0$$

Λύση:

Θα λύσουμε αυτό το σύστημα με εφαρμογή του μετασχηματισμού Laplace.

$$\left.\begin{aligned} sX(s) - x(0) &= -X + Y + Z + \frac{1}{s-1} \\ sY(s) - y(0) &= X - Y + Z + \frac{1}{s-3} \\ sZ(s) - z(0) &= X + Y + Z + \frac{4}{s} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} sX(s) &= -X + Y + Z + \frac{1}{s-1} \\ sY(s) &= X - Y + Z + \frac{1}{s-3} \\ sZ(s) &= X + Y + Z + \frac{4}{s} \end{aligned}\right\}$$

δηλαδή γραμμικό σύστημα επιλύεται πολύ εύκολα από εδώ και πέρα. Ενδεικτικά αναφέρουμε μια λύση:

$$X(s) = \frac{s^4 + 2s^3 - 11s^2 - 14s + 24}{s(s^2 - 4)(s+1)(s-1)(s-3)}$$

Άσκηση 6.5

Να επιλυθεί το σύστημα:

$$\dot{x}(t) = 4x + y$$

$$\dot{y}(t) = -2x + y$$

Λύση:

Θα επιλύσουμε το σύστημα αυτό χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Euler. Κατά τη μέθοδο αυτή παίρνουμε τον πίνακα του συστήματος και επιλύουμε τη χαρακτηριστική εξίσωση. Δηλαδή:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} 4-\text{ë} & 1 \\ -2 & 1-\text{ë} \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{ë}^2 - 5\text{ë} + 6 = 0 \Rightarrow \text{ë}_1 = 2 \quad \wedge \quad \text{ë}_2 = 3$$

Τώρα για κάθε ιδιοτιμή θα πρέπει να βρίσκω κατά τα γνωστά από την Γραμμική Άλγεβρα ένα διάνυσμα u_i όπου i. το πλήθος των ιδιοτιμών.

$$(A - 2I)u_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow 2a + b = 0 \Rightarrow a = 1 \rightarrow b = -2 \Rightarrow u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

παρατηρούμε ότι μας ενδιαφέρει **ένα μόνο διάνυσμα u_1 που να ικανοποιεί την αρχική σχέση.** Ομοίως και για το άλλο διάνυσμα έχουμε:

$$(A - 3I)u_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow a = 1 \rightarrow b = -1 \Rightarrow u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

επομένως η γενική λύση του συστήματος μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = c_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Άσκηση 6.6

Να επιλυθεί το σύστημα:

$$y' = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} y$$

Λύση:

Παίρνω τη χαρακτηριστική εξίσωση το συστήματος (ο πίνακας του συστήματος δίνεται) οπότε θα έχω:

$$\begin{vmatrix} 2-\text{ë} & 2 & 1 \\ 1 & 3\text{-ë} & 1 \\ 1 & 2 & 2\text{-ë} \end{vmatrix} = \text{ë}^3\text{-7ë}^2\text{+11ë-5} = 0 \Rightarrow \quad (\text{ë-5})(\text{ë-1})^2 = 0$$

<u>**Σημείωση**</u>: Για να επιλύσουμε το πολυώνυμο 3ου βαθμού θα μπορούσαμε να κάνουμε σχήμα horner για τα -1,+1,-5,+5. Θα την υποβιβάζαμε έτσι σε πολυώνυμο δευτέρου βαθμού το οποίο όμως είναι και τέλειο τετράγωνο.

Στο θέμα αυτό, παρατηρούμε ότι μια ρίζα είναι διπλή και συγκεκριμένα η ρίζα ρ=1. Καταρχήν θα βρούμε το ιδιοδιάνυσμα κατά τα γνωστά που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1=5$. Αν υποθέσουμε ότι αυτό είναι το u=(a,b,c) τότε έχουμε το σύστημα:

$$(A-5I)u = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -3a+2b+c=0 \\ a-2b+c=0 \\ a+2b-3c=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \text{a=b=c}$$

Προφανώς τώρα ένα τέτοιο διάνυσμα θα είναι το u=(1,1,1).

Τώρα θα επεξεργαστούμε τη διπλή ιδιοτιμή $\lambda_2=\lambda_3=1$. Προφανώς είναι:

$$(A - I)v = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b+c=0 \\ a+2b+c=0 \\ a+2b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow v=(a,-a-c,c)$$

Βλέπουμε ότι εδώ, δυο από τους τρεις αγνώστους μπορούν να πάρουν αυθαίρετες τιμές και συγκεκριμένα οι a,c. Τότε το b θα εξαρτάται από τα a,c. Άρα δίνοντας δυο τυχαίες τιμές στα a,c βρίσκουμε μια τιμή για το b.

Επειδή το ιδιοδιάνυσμα v εξαρτάται από δυο ανεξάρτητες μεταβλητές, είναι επιτακτική η ανάγκη να βρούμε δυο τέτοια ιδιοδιανύσματα, δηλαδή:

στην εξίσωση $a+2b+c=0 \Rightarrow b=1, c=0 \Rightarrow a=-2$ και $b=0, c=1 \Rightarrow a=-1$

Άρα $v_1=(-2,1,0)$ και $v_2=(-1,0,-1)$.

Είναι σε αυτό το σημείο χρήσιμες οι εξής παρατηρήσεις:

- Για την εύρεση των ιδιοδιανυσμάτων, στηριζόμαστε στο γεγονός ότι θέλουμε ένα από τα ιδιοδιανύσματα. Επομένως μπορούμε κάθε φορά να δίνουμε οποιαδήποτε τιμή εμείς θέλουμε στις ανεξάρτητες μεταβλητές και να υπολογίζουμε τις εξαρτημένες. Συνήθως δίνουμε 0 ή 1 γιατί βολεύουν τις πράξεις.
- Το πλήθος των ανεξάρτητων μεταβλητών θα είναι ίσο με την πολλαπλότητα των ιδιοτιμών. Δηλαδή για απλές ιδιοτιμές θα έχουμε 1 ανεξάρτητη μεταβλητή για κάθε ιδιοδιάνυσμα. Για διπλής πολλαπλότητας ιδιοτιμές θα έχουμε 2 ανεξάρτητες μεταβλητές για κάθε ιδιοδιάνυσμα κοκ.
- Είναι σαφές ότι θα πρέπει να ελέγχουμε αν τα εξαγόμενα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε ιδιοτιμή κάποιας πολλαπλότητας διάφορης της 1, είναι Γραμμικώς Ανεξάρτητα (ΓΑ). Πράγματι στο παράδειγμά μας τα v_1, v_2 είναι ΓΑ.

Η γενική λύση του προβλήματος θα είναι η:

$$y(x)=C_1e^{5x}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+C_2e^{x}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}+C_3e^{x}\begin{bmatrix}-2\\1\\0\end{bmatrix}$$

Άσκηση 6.7

Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{cases} tx' = x + y \\ ty' = -3x+5y \end{cases}$$

Λύση:

Παρατηρούμε ότι οι x′ και y′ είναι πολλαπλασιασμένες με το t, οπότε έχουμε όμοια μορφή με αυτή της ΔΕ Euler και για την επίλυσή της εφαρμόζουμε το γνωστό μετασχηματισμό $t=e^z$ άρα:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{du}{dz}\frac{dz}{dt}=u'(z)\frac{1}{t}, \quad \text{äéïôé} \quad x(t)=x(e^z)=u(z)$$
$$\frac{dy}{dt}=\frac{dw}{dz}\frac{dz}{dt}=w'(z)\frac{1}{t}, \quad \text{äéïôé} \quad y(t)=y(e^z)=w(z)$$

Με την αντικατάσταση αυτή το σύστημα μετασχηματίζεται στο ακόλουθο εντελώς ισοδύναμο σύστημα ως προς u και w:

$$\begin{cases} u' = u + w \\ w' = -3u+5w \end{cases}$$

Για τις ιδιοτιμές του πίνακα του συστήματος έχουμε:

$$|A-\lambda I|=0 \;\Rightarrow\; \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix}=0 \;\Rightarrow\; \lambda^2-6\lambda+8=0$$

και άρα έχουμε τις ιδιοτιμές $\lambda_1=2$ και $\lambda_2=4$. Βρίσκουμε τα ιδιοδιανύσματα ακολουθώντας κατά τα γνωστά τη μεθοδολογία που γνωρίζουμε:

$$(A-\lambda_1 I)V_1=0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}=0 \Rightarrow v_1=v_2 \Rightarrow V_1=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(A-\lambda_2 I)V_2=0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}=0 \Rightarrow 3v_1=v_2 \Rightarrow V_2=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Άρα η λύση του συστήματος θα είναι (ως προς z,w):

$$\begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}=C_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}e^{2z}+C_2\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}e^{4z}$$

Θέτουμε όμως τώρα z=lnt (η αντίστροφη του μετασχηματισμού) οπότε η γενική λύση του δοσμένου συστήματος ΔΕ θα είναι η :

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}=C_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}t^2+C_2\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}t^4$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7: ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 7.1

Να λυθεί η ΔΕ $(3x^2+y)dx+x(1+2x^2y+2y^2)dy=0$

Λύση:

Είναι προφανές ότι δεν έχουμε ολικό διαφορικό. Βλέπουμε επίσης ότι η μορφή της ΔΕ δεν είναι παραπλήσια με κάποια από αυτές που έχουμε μελετήσει ως τώρα. Όταν φτάνουμε σε τέτοιο αδιέξοδο, αναζητούμε κάποιον (πιθανόν) ολοκληρώνοντα παράγοντα. Αν και τότε δεν βρούμε έναν τέτοιο παράγοντα, η ΔΕ δεν μπορεί να λυθεί με τις γνώσεις αυτές που έχουμε.

$$\frac{1}{\text{ì}}\frac{d\text{ì}}{dy}=\frac{1}{P}\left(\frac{dQ}{dx}-\frac{dP}{dy}\right)=2y=f(y)$$

$$d\mu/\mu dy=2y \Rightarrow d\mu/\mu=2ydy \Rightarrow \ln|\mu(y)|=y^2+C_1=y^2 \Rightarrow \mu(y)=e^{y^2}$$

Παρατηρήστε ότι αγνοήσαμε τη σταθερά ολοκλήρωσης C_1 αφού ενδιαφερόμαστε για έναν μόνο ολοκληρώνοντα παράγοντα από την οικογένεια που προκύπτει. Πολλαπλασιάζουμε και τα δυο μέλη της δοσμένης ΔΕ με τον παράγοντα που βρήκαμε οπότε παίρνουμε:

$$(3x^2+y)e^{y^2}dx+x(1+2x^2y+2y^2)e^{y^2}dy=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow F(x,y)\equiv x(x^2+y)e^{y^2}=C$$

Άσκηση 7.2

Να λυθεί η ΔΕ:

$$y' = \frac{(x+y)^a}{(x+y)^b + (x+y)^c} - 1, \quad a,b,c \in R, \quad x+y>0$$

Λύση:

Κάνω το μετασχηματισμό u(x)=y(x)+x οπότε και παίρνω:

$$u' - 1 = \frac{u^a}{u^b + u^c} - 1 \Rightarrow u' = \frac{u^a}{u^b + u^c} \Rightarrow \left[\left(u^{(b-a)} + u^{(c-a)}\right)\right] du = dx \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{u^{b-a+1}}{b-a+1} + \frac{u^{c-a+1}}{c-a+1} = x + C$$

Εξαιρείται μόνο η περίπτωση που b-a = -1 και c-a = -1 όπου δεν έχουμε λογάριθμο.

Άσκηση 7.3

Να δοθεί λύση για τη διαφορική $y' + p(x)y + q(x)y^a = 0$, $y>0$, $a \in R \setminus \{0,1\}$

Λύση:

Θα χρησιμοποιήσουμε ολοκληρώνοντα παράγοντα της μορφής $\mu(x,y) = y^{\lambda}\mu(x)$, $\lambda \in R$.

Πράγματι στην περίπτωση αυτή παίρνουμε διαδοχικά:

$$\left(py+qy^{a}\right)dx+dy=0\Rightarrow \frac{dì}{dx}-\left(py+qy^{a}\right)\frac{dì}{dy}+ì(-p-aqy^{a-1})=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow y^{ë}ì'(x)-(py+qy^{a})ëy^{ë-1}ì(x)+y^{ë}ì(x)(-p-aqy^{a-1})=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow ì'(x)-(p+qy^{a-1})ëì(x)-ì(x)(p+aqy^{a-1})=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{ì'(x)}{ì(x)}=p(1+ë)+q(á+ë)y^{a-1}$$

Θέτοντας τώρα λ = -α, παίρνουμε την παρακάτω έκφραση:

$$\frac{ì'(x)}{ì(x)}=p(x)(1-a)\Rightarrow ì(x)=e^{(1-a)\int_{x_o}^{x}p(t)dt}\Rightarrow ì(x,y)=\exp\left[(1-a)\int_{x_o}^{x}p(t)dt\right]$$

Άσκηση 7.4

Να λυθεί η ΔΕ ty″+(2t+3)y′+(t+3)y=ae^{-t}.

Λύση:

Θα λύσουμε τη διαφορική αυτή με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace F(s)=L{y(t)} οπότε και θα πάρουμε διαδοχικά τα παρακάτω:

$$L\{ty''\}=-L\left\{(-1)^{1}t^{1}y(t)\right\}=-\frac{d}{ds}\left(s^{2}Y(s)-sy(0)-y'(0)\right)=-2sY-s^{2}Y'-y(0)$$
$$L\{(2t+3)y'\}=2L\{ty'\}+3L\{y'\}=-2\frac{d}{ds}(sY-y(0))+3sY(s)-3y(0)=$$
$$=-2Y(s)-2sY'(s)+3sY(s)-3y(0)$$
$$L\{(t+3)y\}=L\{ty\}+3L\{y\}=-Y'(s)+3Y(s)$$
$$L\{ae^{-t}\}=aL\{e^{-t}\}=\frac{a}{s+1}$$

Αντικαθιστούμε όλα αυτά, τα οποία βρήκαμε κατά τα γνωστά, στη δοσμένη ΔΕ οπότε:

$$Y'(s) - \frac{1}{s+1} Y(s) = -\frac{a}{(s+1)^3} - \frac{2y(0)}{(s+1)^2}$$

Προέκυψε λοιπόν, μια άλλη ΔΕ γνωστής πλέον μορφής την οποία λύνουμε εύκολα.

Βρίσκουμε τότε ότι η γενική λύση της τελευταίας θα είναι η:

$$Y(s) = (s+1)\left[C + \frac{a}{s(s+1)^3} + \frac{y(0)}{\left(s+1\right)^2} \right]$$

Όπως όμως επανειλημμένα έχουμε πει, εξετάζουμε αν το s τείνοντας στο άπειρο η Y(s) (ή μάλλον το όριό της) τείνει στο μηδέν. Για $s \to \infty$ θα έχουμε υποχρεωτικά C=0 άρα:

$$Y(s) = \frac{a}{s(s+1)^2} + \frac{y(0)}{s+1}$$

Και αν ακόμη την εκφράσουμε ως προς t όπως ήταν αρχικά, παίρνουμε:

$$Y(t) = \frac{a}{3} te^{-t} + y(0)e^{-t}$$

Άσκηση 7.5

Να λυθεί η ΔΕ $y'^2 - y' = y$.

Λύση:

Θα μπορούσαμε να πούμε:

$$y'^2 - y' = y \Rightarrow y'^2 - y' - y = 0 \Rightarrow y' = \frac{1 \pm \sqrt{1+4y}}{2} \Rightarrow \frac{2dy}{1 \pm \sqrt{1+4y}} = dx$$

αλλά από το σημείο αυτό και πέρα οι πράξεις είναι πολύ δύσκολες. Επομένως πρέπει να σκεφτούμε κάποια άλλη λύση. Η παρουσία μόνο του όρου y′ μας κάνει να θέσουμε y′=p. Πράγματι τότε η διαφορική εξίσωση δίνει διαδοχικά:

$$p^2 - p = y \Rightarrow p = 2p\frac{dp}{dx} - \frac{dp}{dx} \Rightarrow (2 - \frac{1}{p})dp = dx \Rightarrow x = 2p - \ln p + C$$

οπότε λαμβάνοντας υπόψη τον αρχικό μετασχηματισμό παίρνουμε τελικά:

$$x = 2y' - \ln y' + C$$

Άσκηση 7.6

Να λυθεί η παρακάτω ΔΕ:

$$x^{2/3} + y'^{2/3} = a^{2/3}$$

Λύση:

Θα κάνουμε τον εξής μετασχηματισμό γνωστό από τον ολοκληρωτικό λογισμό:

$$x = a\sin^3 t \quad \text{και} \quad y = a\cos^3 t$$

$$\frac{dy}{dx} = a\cos^3 t \Rightarrow dy = a\cos^3 t dx = a\cos^3 t a 3\sin^2 t\cos t = a^2 3\cos^4 t\sin^2 t$$
$$\Rightarrow dy = 3a^2\cos^4 t\sin^2 t$$

επομένως θα έχουμε τη γενική λύση (ως προς t):

$$y=\frac{3a^2}{16}\left(t+\frac{\sin 2t}{4}-\frac{\sin 4t}{4}-\frac{\sin 6t}{12}\right)+C\,,\qquad x=a\sin^3 t$$

Άσκηση 7.7

Να λυθεί η παρακάτω διαφορική εξίσωση:

$$x\sqrt{1+y'^2}=ay'$$

Λύση:

Γνωρίζουμε από την τριγωνομετρία ότι ισχύει:

$$\cosh^2 t=1+\sinh^2 t$$

επομένως αν πούμε y′=sinht τότε θα πάρουμε διαδοχικά:

$$y'=\sinh t\Rightarrow\sqrt{1+y'^2}=\sqrt{1+\sin^2 ht}=\sqrt{\cosh^2 t}=\cosh t$$

$$x\cosh t=a\sinh t\Rightarrow x=a\frac{\sinh t}{\cosh t}\Rightarrow x=a\tanh t\quad(1)$$

επίσης από τον αρχικό μετασχηματισμό θα έχουμε:

$$y'=\sinh t\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\sinh t\Rightarrow dy=\sinh t dx\xrightarrow{(1)}dy=\sinh t d(a\tanh t)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow dy=\sinh t a(1+\tanh^2 t)dt\Rightarrow dy=a\sinh t\frac{1}{\cosh^2 t}dt\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=-\frac{a}{\cosh t}+C\,,\quad C\in R$$

που είναι και η ζητούμενη λύση (ως προς t).

Άσκηση 7.8

Να λυθεί με τη βοήθεια δυναμοσειρών η διαφορική $(1-x^2)y''-xy'=2$ με $y(0)=y'(0)=0$.

Λύση:

Προφανώς και με κέντρο το 0 θα αναπτύξουμε τα y′ και y″ σε δυναμοσειρές:

$$y' = \sum_{k=0} (k+1)C_{k+1}x^k \quad \text{êáé} \quad y'' = \sum_{k=0} (k+2)(k+1)C_{k+2}x^k$$

μετά από αντικατάσταση των παραπάνω στη δοθείσα ΔΕ παίρνουμε:

$$(1-x^2)\sum_{k=0} (k+2)(k+1)C_{k+2}x^k - x\sum_{k=0} (k+1)C_{k+1}x^k - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0} (k+2)(k+1)C_{k+2}x^k - \sum_{k=0} (k+2)(k+1)C_{k+2}x^{k+2} - \sum_{k=0} (k+1)C_{k+1}x^{k+1} = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2*1*C_2 + 3*2*C_3x + \sum_{k=2} (k+2)(k+1)C_{k+2}x^k - \sum_{k=2} k(k-1)C_kx^k - 1*C_1x -$$

$$- \sum_{k=2} kC_kx^k - C_1x = 2 \Rightarrow 2C_2 + (6C_3 - C_1)x$$

$$+ \sum_{k=2} \left[(k+2)(k+1)C_{k+2} - k(k-1)C_k - kC_k\right]x^k = 2$$

από την τελευταία όμως αυτή σχέση προκύπτουν τα παρακάτω:

$2C_2=2 \Rightarrow C_2=1$, $6C_3-C_1=0 \Rightarrow C_1=6C_3$ μα $C_0=0 \Rightarrow C_1=0 \Rightarrow C_3=0$ και ακόμη

$$C_{k+2} = \frac{k(k-1)+k}{(k+2)(k+1)} C_k$$

Άσκηση 7.9

Να επιλυθεί η ολοκληρωτική εξίσωση:

$$\int_0^t y(x)y(t-x)dx = 2y(t) + te^{-3t} - 2e^{-3t}$$

Λύση:

Ακολουθώντας τα γνωστά έχουμε:

$$\int_0^t y(x)y(t-x)dx = 2y(t) + te^{-3t} - 2e^{-3t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (y * y) = 2y + te^{-3t} - 2e^{-3t} \xrightarrow{Laplace}$$

$$\Rightarrow y^2(s) = 2y(s) + \frac{1}{(s+3)^2} - \frac{2}{s+3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(s) = 1 \pm \frac{s+2}{s+3} \Rightarrow y(s) = \frac{2s+5}{s+3} \quad \vee \quad y(s) = \frac{1}{s+3}$$

είναι προφανές ότι η πρώτη λύση απορρίπτεται αφού για $s \to \infty \Rightarrow y(s)$ δεν τείνει στο μηδέν. Επομένως δεκτή μόνον η δεύτερη λύση ώστε τελικά να πάρουμε:

$$y(s) = \frac{1}{s+3} \xrightarrow{L^{-1}} y(t) = e^{-3t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^t e^{-3x}e^{-3t}e^{3x}dx = \int_0^t e^{-3x+3x-3t}dx = \int_0^t e^{-3t}dx = e^{-3t}\int_0^t dx = te^{-3t}$$

δηλαδή η λύση y(s) που βρήκαμε παραπάνω είναι εν γένει αποδεκτή. Προσοχή όμως **η συνάρτηση y(x) πρέπει να είναι συνεχής για να είναι παραγωγίσιμη** κάτι που εμείς δεχτήκαμε αφού είναι (υποθέσαμε) ολοκληρώσιμη.

Άσκηση 7.10

Να βρεθεί με τη βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace η τιμή του ολοκληρώματος:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt$$

Λύση:

Το ολοκλήρωμα μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{t} dt$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση f(t)=H(t) με μετασχηματισμό Laplace 1/s. Η συνάρτηση f(t)/t θα έχει τότε μετασχηματισμένη Laplace:

$$L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{+\infty} F(u)du \Rightarrow \quad L\left\{\frac{H(t)}{t}\right\} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{u} du \Rightarrow \quad \int_0^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{t}} e^{-st} dt = \int_s^{+\infty} \frac{du}{u}$$

οπότε για s=1 και για s=2 παίρνουμε τα παρακάτω:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = \int_1^{+\infty} \frac{du}{u} \quad \text{êáé} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2t}}{t} dt = \int_2^{+\infty} \frac{du}{u}$$

τις δυο αυτές σχέσεις τις αφαιρούμε κατά μέλη οπότε και έχουμε:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-2t}}{t} dt = \int_1^{+\infty} \frac{du}{u} - \int_2^{+\infty} \frac{du}{u} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt = \int_1^{2} \frac{du}{u} + \int_2^{+\infty} \frac{du}{u} - \int_2^{+\infty} \frac{du}{u} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt = \int_1^{2} \frac{du}{u} = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 - 0 = \ln 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-2t}}{t} dt = \ln 2$$