ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΣΥΝΗΘΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Γιωργος–Σωκρατης Δ.–Σ. Σμυρλης

Λευκωσια, Εαρ 2008

᾿Αντί προλόγου

Τό ἀνά χεῖρας ἐγχειρίδιο προῆλθε ἀπό τίς σημειώσεις τῶν διαλέξεων τοῦ μαθήματος *Συνήθεις Διαφορικές ᾿Εξισώσεις ΜΑΣ 203*, στό τμῆμα Μαθηματικῶν καί Στατιστικῆς τοῦ Πανεπιστημίου Κύπρου κατά στό χρονικό διάστημα 1994-2008. Τό μάθημα αὐτό εἶναι ἑξαμηνιαῖο καί προσφέρεται κατά τήν διάρκεια τοῦ ἐαρινοῦ ἑξαμήνου σέ φοιτητές τοῦ τετάρτου ἑξαμήνου. Κάποιες ἑνότητες (ἤ ὑποενότητες), καθώς καί τό *Κεφάλαιο 8*, προέρχονται ἀπό τίς σημειώσεις τῶν διαλέξεων τοῦ ἀντιστοίχου μεταπτυχιακοῦ μαθήματος *ΜΑΣ 603*, κατά τά ἔτη 1998 καί 2000. Δοθέντος ὅτι οἱ φοιτητές τοῦ τετάρτου ἑξαμήνου ἔχουν ἤδη παρακολουθήσει τά μαθήματα τοῦ Ἀπειροστικοῦ Λογισμοῦ καί Γραμμικῆς Ἀλγέβρας, καί ἔχουν κάποια στοιχειώδη γνώση μεθοδολογίας ἐπιλύσεως Συνήθων Διαφορικῶν ᾿Εξισώσεων, τό ἀνά χεῖρας ἐγχειρίδιο, καθώς καί τό μάθημα στό ὁποῖο φιλοδοξεῖ νά ἀποτελέσει βοήθημα, ξεπερνᾶ σέ ἐπίπεδο ἕνα εἰσαγωγικό μάθημα στίς Συνήθεις Διαφορικές ᾿Εξισώσεις. Τό ἀνά χεῖρας ἀποτελεῖ λοιπόν σημειώσεις ἑνος προχωρημένου προπτυχιακοῦ μαθήματος.

Οἱ ἑνότητες καί ἀσκήσεις μέ ἀστερίσκο(*) εἶναι σίγουρα πέραν τῶν ἀπαιτήσεων ἑνός προπτυχιακοῦ μαθημάτος, εἴτε λόγῳ τοῦ βαθμοῦ δυσκολίας καί προαπαιτουμένων γνώσεων εἴτε λόγῳ χρονικῶν περιορισμῶν. ῾Ο δέ τρόπος παρουσιάσεως, εἶναι προσαρμοσμένος στό ἐπίπεδο τῶν φοιτητῶν οἱ ὁποῖο παρακολουθοῦν τό μάθημα. ῾Υπάρχουν δέ περιπτώσεις ὅπου θέματα καί μέθοδοι ἀναπτύσσονται ἐκτενέστερα ἀπ' ὅτι ἀπαιτεῖ ὁ βαθμός τῆς δυσκολίας τους, ἐπειδή ἀκριβῶς ἔχουν παρατηρηθεῖ κάποιες χαρακτηριστικές ἀδυναμίες στούς φοιτητές.

Θά ἤθελα νά εὐχαριστήσω τόν Βασίλη Νεστορίδη γιά τά ποικίλα του σχόλια, κατά τά προκαταρκτικά στάδια τῆς συγγραφῆς τοῦ ἀνά χεῖρας καί ἐν ὅσῳ ἦταν ἐπισκέπτης στό τμῆμα Μαθηματικῶν καί Στατιστικῆς τοῦ Πανεπιστημίου Κύπρου καθώς καί τόν Γιῶργο Ἀκρίβη τόσο γιά τήν προσεκτική καί εἰς βάθος διόρθωση τοῦ κειμένου ὅσο καί τίς πάμπολλές του παρατηρήσεις. ᾿Επίσης εὐχαριστῶ γιά τίς παρατηρήσεις, ἐπισημάνσεις καί διορθώσεις τούς Ἀποστόλη Χατζηδῆμο καί Βαγγέλη Στεφανόπουλο οἱ ὁποῖοι ἐδίδαξαν τό μάθημα αὐτό κατά τήν διάρκεια τῶν ἐαρινῶν ἑξαμήνων τῶν ἐτῶν 2001 καί 2006, ἀντιστοίχως.

Λευκωσία, ῎Εαρ 2008.

Κατάλογος περιεχομένων

Κεφάλαιο 1

Εἰσαγωγικά

1.1 Ἱστορικά στοιχεῖα

Leibniz καί Newton

Ὁ ὅρος *Διαφορική Ἐξίσωση* χρησιμοποιεῖται γιά πρώτη φορά τό 1676 σέ ἐργασία τοῦ Leibniz[1] [11] στά Λατινικά ὡς

ÆQUATIO DIFFERENTIALIS.

Ἤτοι: *Ἐξίσωση Διαφορικῶν*. Ἡ ἀρχική αὐτή ὀνομασία ὑποδηλοῖ ὅτι πρόκειται περί σχέσεως μεταξύ τῶν *διαφορικῶν* dx καί dy, δηλαδή *ἀπειροελαχίστων μεταβολῶν* τῶν μεταβλητῶν x καί y ἀντιστοίχως.

Ἡ ἔναρξη τῆς μελέτης τῶν Διαφορικῶν Ἐξισώσεων (ΔΕ) προηγεῖται τῆς εἰσαγωγῆς τοῦ ἀνωτέρω ὅρου καί πραγματοποιεῖται παραλλήλως μέ τήν εἰσαγωγή καί μελέτη τῆς παραγώγου καί γενικότερα μέ τήν ἀνάπτυξη τοῦ *Ἀπειροστικοῦ Λογισμοῦ* – δεύτερο ἥμισυ τοῦ $17^{ου}$ αἰῶνος. Ὡστόσο προβλήματα καταλήγοντα σέ μελέτη διαφορικῶν ἐξισώσεων εἶχαν τεθεῖ καί μελετηθεῖ ἀρκετά ἐνωρίτερα, καί συγκεκριμένα πρίν κάν ὁρισθεῖ ἡ παράγωγος. Ἀναφέρομε χαρακτηριστικά τό *Πρῶτο πρόβλημα τοῦ de Beaune*[2] [54], τό ὁποῖο ἐτέθη τό 1638 καί στό ὁποῖο:

Ζητεῖται καμπύλη $y(x)$ μέ τήν ἰδιότητα ὅτι γιά κάθε τῆς σημεῖο P, ἡ ἐφαπτομένη στό P τέμνει τόν ἄξονα τῶν x, σέ σημεῖο τό ὁποῖο ἀπέχει σταθερή ἀπόσταση a ἀπό τήν προβολή τοῦ P στόν ἄξονα τῶν x.

---

[1] Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716). Γερμανός μαθηματικός καί φιλόσοφος. Ἴσως ὁ μεγαλύτερος μαθηματικός τῆς ἐποχῆς του. Ὅρισε, σχεδόν ταυτοχρόνως μέ τόν Fermat, τήν παράγωγο, καί ἀπετέλεσε ἕναν ἀπό τούς σκαπανεῖς τοῦ Ἀπειροστικοῦ Λογισμοῦ. Συνήθως ὑπέγραφε χρησιμοποιῶντας τήν ἐκλατινισμένη ἐκδοχή τοῦ ὀνόματός του: Gothofredo Gulielmo Leibnitio.

[2] Florimond de Beaune (1601–1652). Γάλλος νομομαθής καί ἐρασιτέχνης μαθηματικός.

Ἡ λύση τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος ἐδημοσιεύθη τό 1684 ἀπό τόν Leibniz στό *Nova methodus pro maximis et minimis* [29]. Καταλήγει δέ στήν διαφορική ἐξίσωση $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{a}$ μέ λύση τήν ἐκθετική συνάρτηση.

Ἡ γνώση μας ἐν σχέσει μέ τήν γέννηση καί τήν νηπιακή περίοδο τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων εἶναι μᾶλλον νεφελώδης. λόγῳ τῆς ἀπουσίας ἐπιστημονικῶν περιοδικῶν, κυριώτερή μας πηγή ἀποτελεῖ ἡ ἀλληλογραφία μεταξύ σημαινόντων μαθηματικῶν τῆς ἐποχῆς ἐκείνης. Ἀναμφιβόλως σημαντική ἡμερομηνία αὐτῆς τῆς περιόδου εἶναι ἡ ἑνδεκάτη Νοεμβρίου 1675 ὅταν ὁ Leibniz γράφει ἐπί φύλλου χάρτου

$$\int y\,dy = \frac{1}{2}y^2,$$

ὅπου, πέραν τοῦ ὅτι ἐπιλύει μία διαφορική ἐξίσωση, ἄν καί ἰδιαιτέρως ἁπλή ἀκόμη καί γιά τά δεδομένα τῆς ἐποχῆς του[3], εἰσάγει καί τό σύμβολο τοῦ ὁλοκληρώματος (βλέπε [11]). Τό σύμβολο αὐτό θά ἀποτελέσει στό μέλλον ἰσχυρό ἐργαλεῖο. Στόν Leibniz ἀποδίδεται καί ὁ σύγχρονος συμβολισμός τῶν διαφορικῶν.

Γνωστό πρόβλημα τοῦ Leibniz τό ὁποῖο καταλήγει σέ διαφορική ἐξίσωση ἀποτελεῖ τό *Πρόβλημα τοῦ ἰσοχρόνου*. Στό πρόβλημα αὐτό, τό ὁποῖο ἐτέθη ἀπό τόν ἴδιο τόν Σεπτέμβριο τοῦ 1687 στήν ἐφημερίδα *Nouvelles de la République des lettres*,

Ζητεῖται ἡ καμπύλη ἐπί τῆς ὁποίας, σῶμα κατερχόμενο ὑπό τήν ἐπίδραση τῆς βαρύτητος, κατέρχεται μέ σταθερά κατακόρυφη συνιστῶσα τῆς ταχύτητος.

Τό πρόβλημα ἐλύθη ἀπό τόν Huygens[4], ἕνα μόλις μήνα ἀργότερα, ἄν καί κατά τρόπο ὄχι ἀπολύτως ἱκανοποιητικό. Ἡ πρώτη αὐστηρή λύση ἐδημοσιεύθη ἀπό τόν Leibniz τό 1689 [30]. Ἡ μέθοδος *χωρισμοῦ τῶν μεταβλητῶν* (*separation of variables*) ἐμελετήθη γιά πρώτη φορά ἀπό τόν Leibniz τό 1691 [11], κατά τήν διαδικασία ἐπιλύσεως τῆς ἐξισώσεως

$$y\frac{dy}{dx} = X(x)\,Y(y),$$

ἡ ὁποία προέκυψε ἀπό τήν μελέτη τοῦ *ἀντιστρόφου προβλήματος τῶν ἐφαπτομένων.*

Παραλλήλως μέ τόν Leibniz, συστηματική μελέτη τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων ἐπραγματοποίησε ὁ Newton[5]. Στό γνωστότερό του ἔργο *Principia*[6] [39], ὑπάρχει ἐκτενής ἀναφορά στίς

[3]Ὁ συστηματικός ὑπολογισμός ὁλοκληρωμάτων, καί συγκεκριμένα μηκῶν, ἐμβαδῶν καί ὄγκων, ἀρχίζει ἤδη ἀπό τά μέσα τοῦ 16ου αἰῶνος, ἤτοι, ἕναν αἰῶνα πρό τῆς ἀνακαλύψεως τοῦ Ἀπειροστικοῦ Λογισμοῦ.

[4]Christaan Huygens (1629–1695), Ὁλλανδός μαθηματικός καί φυσικός φιλόσοφος στόν ὁποῖο ὀφείλει πολλά ὁ Leibniz κατά τήν περίοδο κατά τήν ὁποία ζοῦσαν καί οἱ δύο στό Παρίσι.

[5]Sir Isaac Newton (1642–1727). Ἄγγλος μαθηματικός, φυσικός καί φιλόσοφος, γνωστός στήν ἑλληνική βιβλιογραφία καί ὡς *Νεύτων*. Θεωρεῖται σίγουρα ὁ σημαντικότερος βρεττανός ἐπιστήμων τῆς ἐποχῆς του. Ὑπῆρξε δέ ὁ πρῶτος ἄγγλος στόν ὁποῖο ἀπενεμήθη ὁ τίτλος τοῦ Sir γιά επιστημονικά ἐπιτεύγματα.

[6]*Philosophiæ naturalis principia mathematica* (1686) ἤ *Μαθηματικές ἀρχές τῆς φυσικῆς φιλοσοφίας*.

διαφορικές ἐξισώσεις καί τήν προέλευση αὐτῶν. Ἰδιαιτέρως ὅμως στό ἔργο *Methodus fluxionum et serierum infinitarum*[7] [38], ὁ Newton χωρίζει τίς διαφορικές ἐξισώσεις, καλούμενες ἀπό τόν ἴδιο *ροϊκές ἐξισώσεις*, στίς ἀκόλουθες τρεῖς κατηγορίες:

(i) Σ' αὐτές ὅπου ἡ *ροή* (ἤ *συνάρτηση ροῆς*) εἶναι συνάρτηση μόνο τοῦ x ἤ μόνο τοῦ y, δηλαδή ἐξισώσεις τῆς μορφῆς

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \quad \text{ἤ} \quad \frac{dy}{dx} = f(y),$$

(ii) Σ' αὐτές ὅπου ἡ ροή εἶναι συνάρτηση καί τῶν δύο καί

(iii) Στίς διαφορικές ἐξισώσεις μέ μερικές παραγώγους.

Ὁ Newton ἐχρησιμοποιοῦσε γιά τήν παράγωγο $\dfrac{dy}{dx}$ τόν συμβολισμό $\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}$. Ὁ σύγχρονος συμβολισμός τῶν διαφορικῶν, ἐπεκράτησε στήν Βρεττανία ἕναν αἰῶνα ἀργότερα ἀπό τήν ὑπόλοιπη Εὐρώπη, λόγῳ τῆς γνωστῆς διενέξεως μεταξύ Newton καί Leibniz γιά τήν πατρότητα τοῦ *Ἀπειροστικοῦ Λογισμοῦ*[8], μέ ἐξόχως δυσάρεστες συνέπειες γιά τήν ἀνάπτυξη τοῦ *Διαφορικοῦ Λογισμοῦ* στήν χώρα αὐτή. Εἶναι χαρακτηριστικό ὅτι γιά δύο σχεδόν αἰῶνες, οἱ ἄγγλοι μαθηματικοί, πιστοί στίς ὑποθῆκες τοῦ Newton, ἀπαξιοῦσαν νά ἀσχοληθοῦν μέ τίς ἀναλυτικές μεθόδους τίς ὁποῖες εἰσήγαγε ὁ Leibniz στόν ἀπειροστικό λογισμό, μέ ἀποτέλεσμα τήν σχεδόν πλήρη ἀπομόνωση τῶν Μαθηματικῶν στήν Βρεττανία ἀπό τά τεκταινόμενα στήν ὑπόλοιπη Εὐρώπη.

Ὁ Newton ἐθεώρησε τήν ἀνακάλυψη τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων τόσο σημαντική, ὥστε τήν ἐκωδικοποίησε σ' ἕνα ἀνάγραμμα τό ὁποῖο σέ ἐλεύθερη ἀπόδοση μᾶς λέγει ὅτι:

Οἱ νόμοι τῆς φύσεως ἐκφράζονται μέ διαφορικές ἐξισώσεις.

[7] Τό ἔργο αὐτό, ἄν καί συνεγράφη στά λατινικά τό 1671, δέν ἐξεδόθη παρά μόνον μεταφρασμένο στά ἀγγλικά ἀπό τόν John Colson τό 1736.

[8] Ἡ διαμάχη αὐτή ἄρχιζει τό 1684 ὅταν ὁ Leibniz ἐξέδωσε τό μνημειῶδες ἔργο του *Nova methodus pro maximis et minimis* [29], ὅπου ἐμφανίζεται ἡ πρώτη συστηματική μελέτη τοῦ Ἀπειροστικοῦ Λογισμοῦ (*Calculus*) καί στήν ὁποία δέν ὑπάρχει ἡ παραμικρή ἀναφορά σέ ἐργασίες τοῦ Newton. Ἡ Ἀγγλική Σχολή τῶν Μαθηματικῶν, ἐθεώρησε ὅτι ὁ Leibniz διέπραξε λογοκλοπία, διότι κατά τήν ἐπίσκεψή του στήν Ἀγγλία τό 1676, κατέστη κοινωνός ἐπιστολῶν οἱ ὁποῖες περιεῖχαν τίς μέχρι τότε ἀνακαλύψεις στήν περιοχή. Σήμερα ἐπικρατεῖ ἡ ἄποψη ὅτι ὁ Ἀπειροστικός Λογισμός ἀνεκαλύφθη ἀνεξαρτήτως καί ἀπό τούς δύο. Ἀπό τόν μέν Newton τό 1671, ἀπό τόν δέ Leibniz κατά τήν περίοδο 1672–1675 μέ σημαντικά διαφορετική προσέγγιση τῶν θεμελιωδῶν ἐννοιῶν καί ἀποτελεσμάτων. Ἡ διένεξη ἔφθασε νά γενικευθεῖ τόσο μεταξύ τῶν ἐπιστημονικῶν ὅσο καί τῶν διπλωματικῶν κύκλων τῆς Εὐρώπης. Ὁ Newton ὑπῆρξε αὐτός ὁ ὁποίος εἶχε τά ἰσχυρότερα κοινωνικά καί πολιτικά ἐρείσματα, σέ ἀντίθεση μέ τήν αὐτοαπομόνωση τοῦ Leibniz. Καί ὁ μέν Newton ἀπέθανε δοξασμένος καί ἐτάφη μάλιστα στό κοιμητήριο τοῦ Westminster Abbey, ὁ δέ Leibniz ἀπέθανε θεωρούμενος λογοκλόπος καί στήν κηδεία του παρέστη μόνο ὁ προσωπικός του γραμματέας.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα εἶναι ὁ *Νόμος Ψύξεως τοῦ Newton*[9]

$$\frac{dT}{dt} = -\kappa\,(T - T_\pi)\,,$$

ὅπου $T = T(t)$, ἀποτελεῖ τήν μεταβαλλόμενη θερμοκρασία σώματος τό ὁποῖο ἐκτίθεται σέ περιβάλλον σταθερᾶς θερμοκρασίας T_π καί κ θετική σταθερά, γνωστή ὡς σταθερά θερμικῆς ἀγωγιμότητος (τοῦ συγκεκριμένου σώματος). Ὁ ἀνωτέρω νόμος μᾶς λέγει ὅτι ὁ ρυθμός μεταβολῆς τῆς θερμοκρασίας τοῦ σώματος dT/dt εἶναι ἀνάλογος τῆς ἑκάστοτε διαφορᾶς $T - T_\pi$ τῶν θερμοκρασιῶν σώματος καί περιβάλλοντος.

Η Μεθοδος των Δυναμοσειρων. Μία ἀπό τίς σημαντικότερες συνεισφορές τοῦ Newton ἦταν ἡ μέθοδος ἐπιλύσεως τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων διά τοῦ ὑπολογισμοῦ τῶν συντελεστῶν τῶν ἀντιστοίχων δυναμοσειρῶν. Ἡ ἐπίλυση διαφορικῶν ἐξισώσεων διά τῆς μεθόδου τῶν δυναμοσειρῶν, ἀποτελεῖ πραγματοποίηση τοῦ δευτέρου ἀναγράμματος τοῦ Newton τό ὁποῖο οὐσιαστικά λέγει ὅτι:

Γιά νά ἐπιλυθεῖ μία διαφορική ἐξίσωση θά πρέπει νά ἀντικατастάθοῦν οἱ συναρτήσεις μέ δυναμοσειρές καί νά ἐξισώθοῦν οἱ συντελεστές τῶν ἀντιστοίχων δυνάμεων.[10]

Ὁ Newton στό *Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum* [38], ἐφαρμόζοντας τήν ἀνωτέρω ἀνακάλυψη γιά τήν ἐπίλυση τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως

$$\left(\frac{dy}{dx} = \right)\ \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 1 - 3x + y + x^2 + xy,$$

μέ ἀρχική συνθήκη $y(0) = 0$, κατασκευάζει τήν ἑξῆς δυναμοσειρά:

$$y = x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{30}x^5 - \frac{1}{45}x^6\,;\ \&c.$$

Ἀξίζει νά σημειωθεῖ ἐδῶ ὅτι ἤδη ἀπό τό 1668 ἔχομε τήν πρώτη (στήν Εὐρώπη) ἀνάπτυξη συναρτήσεως, συγκεκριμένα τῆς $\log(1+x)$, σέ δυναμοσειρά ἀπό τόν Nicolaus Mercator (1620–1687), δημοσιευμένη στό ἔργο του *Logarithmotechnica*, ἄν καί ἤδη δύο αἰῶνες πρίν, μαθηματικοί στήν νότια Ἰνδία εἶχαν ἀναπτύξει σέ δυναμοσειρά τριγωνομετρικές συναρτήσεις (βλέπε [23]). Οἱ δέ *Σειρές Taylor* ἐμφανίζονται πολύ ἀργότερα καί συγκεκριμένα τό 1715 ἀπό τόν Brook Taylor (1685–1731). Ὁ Newton παρά τό γεγονός ὅτι ἀνέπτυξε τήν μέθοδο,

---

[9] Βλέπε τήν σχετική *Ὑποενότητα 2.6.4* στήν σελίδα 97.

[10] Τό ἀνάγραμμα ἐμφανίζεται σέ γράμμα τό ὁποῖο ἐστάλη στόν Leibniz στίς 26 Ὀκτωβρίου 1676, μέσῳ τοῦ Oldenburg, κωδικοποιημένο στήν μορφή:

6a, 2c, d, ae, 13e, 2f, 7i, 3l, 9n, 4o, 4q, 2r, 4s, 8t, 12u, x.

Ἀπεκρυπτογραφήθη ἀργότερα στά λατινικά ὡς: *Data æquatione quotcumque fluentes quantitates involvente, fluxiones invenire et vice versa.*

δέν τήν ἐχρησιμοποίησε ποτέ γιά τήν εὕρεση δυναμοσειρῶν γνωστῶν συναρτήσεων, μέσῳ τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων τίς ὁποῖες οἱ συναρτήσεις αὐτές ἱκανοποιοῦν. Ἀντιθέτως, ὁ Leibniz, μέσῳ τῆς μεθόδου αὐτῆς ἀνακάλυψε τήν δυναμοσειρά τῆς ἐκθετικῆς τό 1675. Ἐπί τῆς μεθόδου τῶν δυναμοσειρῶν βασίζεται τό *Θεώρημα τοῦ Fuchs*[11] (συμφώνως πρός τό ὁποῖο οἱ λύσεις γραμμικῶν ἐξισώσεων μέ πραγματικούς ἀναλυτικούς συντελεστές καί μή ὁμοιογενεῖς ὅρους εἶναι ἐπίσης πραγματικές ἀναλυτικές), ἀλλά σέ μεγάλο βαθμό καί ἡ μελέτη τῶν λύσεων συνήθων διαφορικῶν ἐξισώσεων μέ ἰδιάζοντα σημεῖα. Ἐπίσης τό *Θεώρημα Cauchy–Kowalevski*[12] τό ὁποῖο ἐξασφαλίζει τοπική ὕπαρξη λύσεων σέ προβλήματα ἀρχικῶν τιμῶν πραγματικῶν ἀναλυτικῶν μερικῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων, ἀποτελεῖ καί αὐτό ἐφαρμογή τῆς μεθόδου τῶν δυναμοσειρῶν.

Jacob καί Johann Bernoulli

Σκαπανεῖς στήν μελέτη τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων θεωροῦνται καί οἱ ἀδελφοί Bernoulli, Jacob (1654–1705) καί Johann (1667–1748), ἀπό τήν Ἑλβετία, οἱ ὁποῖοι δέν εἶχαν πάντοτε ἁρμονικές μεταξύ τους σχέσεις. Ὁ Jacob, ὁ ὁποῖος θεωρεῖται δάσκαλος τοῦ Johann καί μαθητής τοῦ Leibniz, ἔδωσε τήν πρώτη αὐστηρή λύση στό πρόβλημα ἰσοχρόνου τό 1690 [6], καί κατ' αὐτόν τόν τρόπο, ἐγκαινίασε μία ἐποχή σημαντικῶν ἀνακαλύψεων καί αὐστηρῶν ἀποδείξεων, στήν περιοχή τῶν ΔΕ καί τοῦ Διαφορικοῦ Λογισμοῦ γενικότερα, μέ κέντρο τήν Βασιλεία. Ἀπόγονοι, μέ τήν ἔννοια δασκάλου–μαθητοῦ, τῶν ἀδελφῶν Bernoulli εἶναι οἱ μετέπειτα μεγάλοι μαθηματικοί Euler καί Lagrange καθώς καί πλῆθος μεταγενεστέρων καί συγχρόνων μαθηματικῶν, μέ συνεισφορά στήν περιοχή τῶν ΔΕ, ὅπως οἱ Fourier, Poisson, Dirichlet, Kronecker, Lipschitz, Klein, Lindemann, Minkowski, Hilbert, Friedrichs καί Lax.[13] Σημειωτέον ὅτι στήν διένεξη μεταξύ Leibniz καί Newton οἱ ἀδελφοί Bernoulli καθώς καί οἱ μαθητές τους ἐτάχθησαν ἀναφανδόν μέ τό μέρος τοῦ πρώτου.

Τό ὄνομα τῶν Bernoulli φέρουν οἱ ἐξισώσεις τῆς μορφῆς:

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y + q(x)y^n.$$

Ἡ ἐπίλυση τῶν ἀνωτέρω ἀπασχόλησε τῶν Jacob γιά μεγάλο μέρος τοῦ 1695, γεγονός τό ὁποῖο τόν ὤθησε νά ὀργανώσει ἐπίσημο διαγωνισμό γιά τήν ἐπίλυσή τους. Ὁ Johann πρότεινε σχεδόν ἀμέσως δύο λύσεις [9]. Στήν κομψότερη ἐκ τῶν δύο ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωση καθίσταται γραμμική μέσῳ τοῦ μετασχηματισμοῦ $u = y^{1-n}$.

[11] Lazarus Immanuel Fuchs (1833-1902). Γερμανός μαθηματικός.

[12] Sophia Kowalevskaya (1850–1891). Ρωσίδα μαθηματικός. Ὑπῆρξε φοιτήτρια τοῦ Weierstrass καί ἔλαβε διδακτορικό ἀπό τό Πανεπιστήμιο τοῦ Göttingen. Τό φύλο της τήν ἐμπόδισε νά λάβει ἀκαδημαϊκή θέση παρά τήν σημαντική της συνεισφορά στά Μαθηματικά.

[13] Ἐκτενής κατάλογος διδακτορικῶν στίς μαθηματικές ἐπιστῆμες ἀπό τόν $17^{\text{ο}}$ αἰῶνα ἕως καί σήμερα βρίσκεται στήν ἱστοσελίδα *The Mathematics Genealogy Project* [37]. Συμφώνως πρός τήν ἱστοσελίδα αὐτή ὁ Jacob Bernoulli ἔχει, μέχρι σήμερα, πέραν τῶν τριάντα χιλιάδων ἀπογόνων.

Το Προβλημα του Βραχιστοχρονου. Ἕνα ἄλλο πρόβλημα στό ὁποῖο ἀμφότεροι οἱ ἀδελφοί συνεισέφεραν ἦταν τό *Πρόβλημα τῆς Βραχιστοχρόνου* [8], ὅπου

Ζητεῖται ἡ καμπύλη ἡ ὁποία συνδέει δοθέντα σημεῖα A καί B τοῦ κατακόρυφου ἐπιπέδου, μέ τήν ἰδιότητα ὅτι, ἄν ὑλικό σημεῖο κινεῖται, μόνο ὑπό τήν ἐπίδραση καί μόνον τῆς βαρύτητος, ἐπί τῆς καμπύλης αὐτῆς, καταλήγει στό σημεῖο B, ἐντός βραχίστου χρόνου.

Σ' αὐτό τό πρόβλημα, μέ τό ὁποῖο εἶχε ἀσχοληθεῖ πλῆθος ἐπιφανῶν ἐπιστημόνων, μεταξύ τῶν ὁποίων οἱ Γαλιλαῖος καί Fermat[14], ὑπῆρξαν ποικίλες προσεγγίσεις καί ἐδόθησαν διάφορες λύσεις ἀλλά καί εἰκασίες γιά τήν λύση. Συγκεκριμένα ὁ Γαλιλαῖος στό μνημειῶδες ἔργο του, *Discorsi e dimonstrazioni matematiche* [20] τό ὁποῖο ἐξεδόθη τό 1638, ἀπέδειξε ὅτι, στήν περίπτωση ὅπου τό AB σχηματίζει γωνία 45^o μέ τό κατακόρυφο ἐπίπεδο, ἄν σῶμα κινεῖται ἐπί τοῦ τεταρτοκυκλίου τό ὁποῖο συνδέει τά A καί B, χρειάζεται λιγότερο χρόνο παρά ἐάν ἐκινεῖτο ἐπί τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος AB. Αὐτό τόν ὤθησε στό νά προβεῖ στήν ἐσφαλμένη εἰκασία ὅτι τό τεταρτοκύκλιο ἀποτελεῖ καί τήν βραχιστόχρονο διαδρομή. Τό 1696, ὁ Johann Bernoulli, κατόπιν παροτρύνσεως τοῦ ἀδελφοῦ του Jacob, ὀργάνωσε δημόσιο διαγωνισμό πρός ἐπίλυση τοῦ προβλήματος [8]. Οἱ πέντε λύσεις οἱ ὁποῖες ὑπεβλήθησαν ἀπό τούς Leibniz, Newton (ἡ ὁποία ἐστάλη ἀνωνύμως), Jacob καί Johann Bernoulli καί L'Hôpital[15] ἦσαν ὅλες ὀρθές.

Κομψότερη ὅλων τῶν λύσεων θεωρεῖται αὐτή τοῦ Johann Bernoulli [10] καί βασίζεται στόν *Νόμο τῆς διαθλάσεως τοῦ Snell.* (*Ἀρχή τοῦ Fermat*). Συμφώνως πρός τόν νόμο τοῦ Snell, ἄν σέ δύο ὁμοιογενῆ μέσα, M_1 καί M_2, τά ὁποῖα χωρίζονται ἀπό διεπιφάνεια S, ἡ ταχύτης τοῦ φωτός (ἤ ἄλλου κύματος) εἶναι v_1 καί v_2, ἀντιστοίχως, τότε μία ἀκτίνα φωτός ἡ ὁποία διαπερνᾶ τό M_1 καί προσκρούει στήν S σχηματίζουσα γωνία α_1 μέ τήν κάθετο στήν S, διαθλᾶται καί συνεχίζει τήν πορεία της στό M_2, σχηματίζουσα γωνία α_2 μέ τήν κάθετο στήν S, τέτοια ὥστε: $v_1/\sin\alpha_1 = v_2/\sin\alpha_2$. Σημειωτέον ὅτι ἡ διάθλαση τοῦ φωτός (ἤ οἱουδήποτε ἄλλου κύματος), ὀφείλεται στό ὅτι τό φώς ἐπιλέγει τήν βραχιστόχρονη διαδρομή. Ὑποθέτομε λοιπόν ὅτι τό κατερχόμενο σῶμα, στήν διαδρομή του ἀπό τό A στό B, διασχίζει N λεπτά ὁριζόντια στρώματα. Ἐντός δέ τοῦ στρώματος, τό ὁποῖο εὑρίσκεται σέ κατακόρυφη ἀπόσταση y χαμηλότερα τοῦ A, τό σῶμα θά ἔχει, λόγῳ τοῦ *Νόμου τοῦ Γαλιλαίου*, ταχύτητα $v = \sqrt{2gy}$. Λόγῳ λοιπόν τῶν διαφορετικῶν ταχυτήτων διελεύσεως στά διάφορα στρώματα, τό σῶμα, εἰς ἀναζήτηση τῆς βραχιστόχρονης διαδρομῆς, θά ὑποστεῖ διάθλαση σέ κάθε διεπιφάνεια ἡ ὁποία χωρίζει δύο γειτονικά στρώματα. Ἐφαρμόζοντας τόν Νόμο τοῦ Snell σέ κάθε διεπιφάνεια

[14] Pierre de Fermat, (1601–1665). Γάλλος δικηγόρος καί μαθηματικός. Θεωρεῖται καί αὐτός ἕνας ἀπό τούς θεμελιωτές τοῦ Ἀπειροστικοῦ Λογισμοῦ.

[15] Guillaume François Antoine Marquis de L'Hôpital (1661–1704). Γάλλος μαθηματικός. Εἶχε διδαχθεῖ Calculus ἀπό τόν Johann Bernoulli στό Παρίσι τό 1691. Εἶναι γνωστός κυρίως γιά τόν *Κανόνα L'Hôpital* ὁ ὁποῖος μᾶς ἐπιτρέπει νά βρίσκομε ὅρια σέ μορφές ἀπροσδιοριστίας.

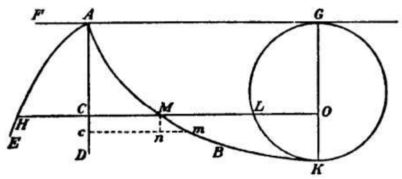
λαμβάνομε

$$\frac{v_1}{\sin\alpha_1} = \frac{v_2}{\sin\alpha_2} = \cdots = \frac{v_N}{\sin\alpha_N} = c,$$

ὅπου α_k, ἡ γωνία τήν ὁποία σχηματίζει ἡ ταχύτης τοῦ σώματος μέ τήν κατακόρυφη ὅταν διασχίζει τό $k-$στό στρῶμα καί c σταθερά. Ἄν τώρα τό N τείνει στό ἄπειρο, θά λάβομε γιά τήν διαδρομή $y = y(x)$ τήν διαφορική ἐξίσωση

$$c = \frac{v}{\sin\alpha} = \Big(2gy\big(1+(y')^2\big)\Big)^{1/2},$$

διότι $\sin\alpha = \big(1+(y')^2\big)^{-1/2}$. Ὁ τρόπος προσεγγίσεως τοῦ προβλήματος ἀπό τόν Johann Bernoulli ἀποτελεῖ πρόδρομο τοῦ *Λογισμοῦ τῶν Μεταβολῶν* καί ταυτοχρόνως μία προσεγγιστική μέθοδο ἡ ὁποία εἶναι ὑλοποιήσιμη ἀριθμητικῶς. Σημειωτέον ὅτι, στήν αὐστηρότερή του διατύπωση, μέσῳ τοῦ *Λογισμοῦ τῶν Μεταβολῶν*, τό πρόβλημα τοῦ βραχιστοχρόνου καταλήγει ἐπίσης στήν ἴδια διαφορική ἐξίσωση. Ἡ δέ ζητούμενη καμπύλη, ἀποτελεῖ τό *κυκλοειδές* [49], τό ὁποῖο ἀποτελεῖ τήν τροχιά ἑνός σημείου τῆς περιφέρειας ὅταν αὐτή κινεῖται ἐπί ὁριζόντιας εὐθείας (βλέπε σχῆμα 1.1).



Σχῆμα 1.1: Τό κυκλοειδές.

Euler καί Lagrange

Ἡ περιοχή τῶν ΔΕ κυριαρχεῖται, κατά τήν διάρκεια μεγάλου μέρους τοῦ $18^{ου}$ αἰῶνος ἀπό τήν παρουσία τῶν Euler[16] καί Lagrange[17]. Ὁ μέν Euler ἦταν μαθητής τοῦ Johann Bernoulli ἐνῶ ὁ Lagrange μαθητής τοῦ Euler. Κοινή αὐτῶν συνεισφορά ἡ εἰσαγωγή τῆς *μεθόδου μεταβολῆς τῶν παραμέτρων*, γιά τήν ἐπίλυση τῆς μή ὁμοιογενοῦς γραμμικῆς ἐξισώσεως, βασισμένη σέ ἰδέες τοῦ Euler στά 1740, ἀλλά μέ τελική μορφή ἀποδιδόμενη στόν Lagrange σέ ἐργασία τοῦ 1774 [28] (βλέπε *Ἑνότητα 5.5*). Ἐπίσης ἐμελέτησαν τά γραμμικά συστήματα διαφορικῶν ἐξισώσεων ἀπ' ὅπου προέκυψε καί ἡ εἰσαγωγή τῶν θεμελιωδῶν ἐννοιῶν καί ἡ συστηματική μελέτη τῆς Γραμμικῆς Ἀλγέβρας. Ἀξίζει νά σημειωθεῖ ὅτι, ἀπό τήν ἀλληλογραφία μεταξύ Euler καί Johann Bernoulli, καί συγκεκριμένα ἀπό ἐπιστολή μέ ἡμερομηνία 15 Σεπτεμβρίου 1739, μαθαίνομε ὅτι βρίσκεται σέ ἐξέλιξη ἡ μελέτη τῆς $n-$στῆς τάξεως ὁμοιογενοῦς γραμμικῆς ἐξισώσεως μέ σταθερούς συντελεστές

$$\alpha_n\frac{d^ny}{dx^n} + \alpha_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + \alpha_1\frac{dy}{dx} + \alpha_0 y = 0, \tag{1.1}$$

[16] Leonhard Euler (1707–1783). Ἑλβετός μαθηματικός, μαθητής τοῦ Johann Bernoulli.

[17] Compte Joseph–Louis Lagrange (1736–1813). Γάλλος μαθηματικός, μαθητής τοῦ Euler.

καί ὅτι ἀναζητοῦνται λύσεις τῆς μορφῆς $\varphi(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$. Διαπιστοῦται δέ ὅτι τό λ ἀποτελεῖ ρίζα τοῦ *χαρακτηριστικοῦ πολυωνύμου* τῆς (1.1),

$$p(\lambda) \;=\; \alpha_n\lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0.$$

Ἐπίσης, στήν ἴδια ἐργασία, ἀναφέρεται ὅτι κατ' ἀνάλογο τρόπο δύνανται νά εὑρεθοῦν (μέ τήν χρήση κατάλληλου μετασχηματισμοῦ) καί οἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως

$$\alpha_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + \alpha_{n-1}x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + \alpha_1 x\frac{dy}{dx} + \alpha_0 y \;=\; 0.$$

Ἡ ἀνωτέρω, παρά τό γεγονός ὅτι συνήθως φέρει τό ὄνομα τοῦ Euler καί σπανιότερα τοῦ Cauchy[18], εἶχε μελετηθεῖ ἀπό τόν Johann Bernoulli τό 1700 περίπου. Ἡ γενική ὅμως λύση τῆς (1.1), ἡ ὁποία καλύπτει καί τίς περιπτώσεις πολλαπλῶν ἤ καί μιγαδικῶν ριζῶν τοῦ χαρακτηριστικοῦ πολυωνύμου, ἐδημοσιεύθη τό 1743 ἀπό τόν Euler [15]. Ὁ Euler ἐμελέτησε καί τήν ἀντίστοιχη μή ὁμοιογενῆ, ἐνῶ ἡ περίπτωση τῶν μεταβλητῶν συντελεστῶν ἐμελετήθη ἀργότερα ἀπό τόν Lagrange μεταξύ 1762 καί 1765 [28]. Μεταξύ ἄλλων ὁ Lagrange ἀπέδειξε ὅτι τό σύνολο τῶν λύσεων τῆς ἐξισώσεως

$$\alpha_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + \alpha_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + \alpha_1(x)\frac{dy}{dx} + \alpha_0(x)\,y \;=\; 0, \tag{1.2}$$

ἀποτελεῖ $n-$διάστατο γραμμικό χῶρο, παρά τό γεγονός ὅτι τότε δέν ἦταν ἀκόμη διαθέσιμη ἡ αὐστηρή ὁρολογία τῶν Γραμμικῆς Ἀλγέβρας.

Ἰδιαιτέρως νά σημειωθεῖ ὅτι ἡ *μέθοδος ὑποβιβασμοῦ τῆς τάξεως*[19] τῆς ἐξισώσεως (1.2), ἀνεκαλύφθη ἀπό τόν d'Alembert[20] [1] (βλέπε *Ἑνότητα 5.6*). Στόν d'Alembert ἀποδίδεται καί ὁ τύπος τῆς λύσεως τῆς μονοδιάστατης *ἐξισώσεως κύματος*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \;=\; c^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

διατυπωμένης ὡς *πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν.* Ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωση περιγράφει τήν ταλάντωση παλλομένης χορδῆς. Τό $u = u(x,t)$, ἀποτελεῖ τήν ἀπομάκρυνση τῆς χορδῆς ἀπό τήν θέση ἰσορροπίας, ἐνῶ τό c τήν ταχύτητα διαδόσεως τοῦ ἦχου.

Τήν ἴδια περίπου ἐποχή ὁ Laplace[21], μελετοῦσε φυσικά φαινόμενα καί πῶς ἀπό αὐτά προκύπτουν διαφορικές ἐξισώσεις. Μέ τήν παρουσία του δίδεται ἔμφαση στό πῶς τά ἤδη ὑπάρχοντα

[18] Augustin Louis Cauchy (1789–1857). Γάλλος μαθηματικός. Μεταξύ τῶν πολλῶν συνεισφορῶν του ἡ αὐστηροποίηση τοῦ ὁρισμοῦ τοῦ ὁρίου διά τῆς χρήσεως τῶν δ καί ε.

[19] Δοθέντος ὅτι γνωρίζομε μία μή μηδενική λύση τῆς (1.2), μέσῳ τῆς μεθόδου αὐτῆς, εἶναι δυνατόν νά ἀναγάγομε τό πρόβλημά τῆς ἐπιλύσεως τῆς (1.2), σέ πρόβλημα ἐπιλύσεως κάποιας ἐξισώσεως τάξεως $n-1$.

[20] Jean le Rond d'Alembert (1717–1783). Γάλλος μαθηματικός καί φυσικός.

[21] Marquis Pierre–Simon de Laplace (1749–1827). Γάλλος μαθηματικός, φυσικός καί ἀστρονόμος. Ὑπῆρξε γνωστός γιά τήν συχνή χρήση τῆς φράσεως, *il est aisé de voir.*

ἀποτελέσματα δύνανται νά ἐφαρμοσθοῦν σέ φυσικά φαινόμενα. Τό ὄνομά του φέρει καί ἡ ἐξίσωση δυναμικοῦ

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

καθώς καί ὁ ἀντίστοιχος *μερικός διαφορικός τελεστής* $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \partial^2/\partial x_i^2$. Σημαντική εἶναι ἡ συνεισφορά του στήν *Οὐράνια Μηχανική* ἡ ὁποία ἐπισφραγίζεται ἀπό τό πεντάτομο ἔργο *Traité de mécanique céleste* (1799–1825). Τόν μετασχηματισμό Laplace, ἄν καί δικαίως του ἀποδίδεται, δέν τόν ἐχρησιμοποίησε ποτέ γιά τήν ἐπίλυση διαφορικῶν ἐξισώσεων. Κάτι τέτοιο συνέβη πολύ ἀργότερα. Ἀναμφιβόλως σημαντική, στήν περιοχή τῶν ΔΕ, ὑπῆρξε καί ἡ παρουσία του Gauss[22] ὁ ὁποῖος, μεταξύ πολλῶν ἄλλων, ἀνέπτυξε τήν *Θεωρία Διαταραχῶν* (*Perturbation Theory*) [21].

Ἐκτός τῆς Γραμμικῆς Ἀλγέβρας πολλοί ἄλλοι κλάδοι τῶν Μαθηματικῶν ὀφείλουν τήν γένεσή τους στίς διαφορικές ἐξισώσεις. Ἡ Διαφορική Γεωμετρία ἀποκτᾶ τήν σύγχρονή της ἐκδοχή ὅταν ὁ Lie[23] ἀναλύει τό πρόβλημα τῆς ὁλοκληρώσεως ἐξισώσεων ἐπί συγκεκριμένων ἐπιφανειῶν καί διαπιστώνει τήν ἀνάγκη λεπτομεροῦς μελέτης τῆς ὁμάδος τῶν ἀμφιδιαφορισίμων συναρτήσεων, ἀργότερα γνωστῆς ὡς *Ὁμάδος Lie*. Προσφάτως, ἡ *Μαθηματική Θεωρία τοῦ Χάους* γεννᾶται ἐν πολλοῖς ἀπό τήν ἀνάγκη κατανοήσεως χαοτικῶν φαινομένων ἐμφανιζομένων στίς διαφορικές ἐξισώσεις στά δυναμικά συστήματα. Στήν δέ περίπτωση τῆς Ἀριθμητικῆς Ἀναλύσεως, μέγα μέρος τοῦ κλάδου ἀσχολεῖται μέ τήν ἀριθμητική ἐπίλυση διαφορικῶν ἐξισώσεων.

Σύγχρονη ἐποχή

Ἀπό τά μέσα περίπου τοῦ 19^{ου} αἰῶνος, παύουν πλέον οἱ μαθηματικοί νά ἀσχολοῦνται ἀποκλειστικῶς μέ τήν μεθοδολογία ἐπιλύσεως διαφορικῶν ἐξισώσεων, ἀφοῦ καθίσταται πλέον σαφές ὅτι οἱ πλεῖστες τῶν ἐξισώσεων δέν δύνανται νά ἐπιλυθοῦν καί νά προκύψει λύση ἐκπεφρασμένη μέσῳ στοιχειωδῶν συναρτήσεων καί ὁλοκληρωμάτων αὐτῶν, ἤτοι: *λύση σέ κλειστή μορφή*. Εἶναι μάλιστα ἀξιοσημείωτο ὅτι ὁ Liouville[24] τό 1841 ἀπέδειξε ὅτι ἡ ἐξίσωση

$$x' = t^2 + x^2,$$

δέν ἔχει λύση ἐκφράσιμη μέσῳ στοιχειωδῶν συναρτήσεων καί ὁλοκληρωμάτων [35].

Καθώς βελτιώνονται τά διαθέσιμα ἀναλυτικά ἐργαλεῖα, μελετᾶται ἡ φύση τῶν λύσεων, χωρίς νά εἶναι αὐτές γνωστές. Τό θεώρημα ὑπάρξεως λύσεων σέ προβλήματα ἀρχικῶν τιμῶν,

[22] Carl Friedrich Gauss (1777–1855). Μεγάλος γερμανός μαθηματικός, ἀλλά καί φυσικός καί ἀστρονόμος. Θεωρεῖται ὁ μέγιστος τῆς ἐποχῆς του.

[23] Sophus Lie (1842–1899). Νορβηγός μαθηματικός

[24] Joseph Liouville (1809–1882). Γάλλος μαθηματικός.

δηλαδή, συνδυασμοῦ διαφορικῆς ἐξισώσεως καί ἀρχικῆς συνθήκης,

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad x(\tau) = \xi, \tag{1.3}$$

μέσῳ $\varepsilon-$προσεγγιστικῶν λύσεων ἐμφανίζεται ἀπό τόν Lipschitz[25] τό 1876 ἄν καί ἡ διαδικασία ἦταν γνωστή στόν Cauchy ἀπό τό 1820 περίπου[26]. Τό δέ *θεώρημα ὑπάρξεως καί μοναδικότητος* λύσεων τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν, καί ἰδιαιτέρως τῆς ἰσοδύναμης ὁλοκληρωτικῆς αὐτοῦ μορφῆς

$$x(t) = \xi + \int_\tau^t f\big(s, x(s)\big)\, ds, \tag{1.4}$$

ὅταν ἡ συνάρτηση ροῆς f εἶναι *συνεχής Lipschitz*[27] ὡς προς x, μέσῳ τῆς *ἐπαναληπτικῆς διαδικασίας τοῦ Picard*, ἤτοι, τῆς ἀναδρομικῆς ἀκολουθίας

$$\varphi_0(t) = \xi, \quad \varphi_{n+1}(t) = \xi + \int_\tau^t f\big(s, \varphi_n(s)\big)\, ds, \quad n = 0,1,2,\ldots,$$

προκύπτει ἀπό ἐργασίες τῶν Picard[28] τό 1893 καί Lindelöf[29] τό 1894 ἄν καί ἡ μέθοδος αὐτή πιστεύεται ὅτι ἦταν ἐπίσης γνωστή στόν Cauchy. Ἐμφανίζεται δέ γιά πρώτη φορά ἀπό τόν Liouville τό 1838, στήν γραμμική της ὅμως ἐκδοχή, δηλαδή, στήν περίπτωση ὅπου

$$f(t,x) = p(t)\,x + q(t).$$

Ἡ ἐπαναληπτική διαδικασία τοῦ Picard ἀπετέλεσε (καί ἐξακολουθεῖ νά ἀποτελεῖ) ἐξ ἴσου σημαντικό ἐργαλεῖο στήν Θεωρία τῶμ Ἐξελικτικῶν Μερικῶν Διαφορικῶν Ἐξισώσεων. Λύσεις προβλημάτων ἀρχικῶν τιμῶν παραβολικῶν καί ὑπεβολικῶν ἐξισώσεων, γραμμικῶν ἀλλά καί οἱονεῖ γραμμικῶν, δύνανται νά προκύψουν ὡς ὅρια καταλλήλων ἀναδρομικῶν ἀκολουθιῶν Picard.

Ἀπό τά τέλη τοῦ 19^{ου} αἰῶνος, μέ τήν συμβολή τῶν Poincaré[30] καί Lyapunov[31], σηματοδοτεῖται ἡ σύγχρονη ἐποχή στήν μελέτη τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων. Ἐκτός ἀπό τήν μελέτη τῆς ὑπάρξεως καί μοναδικότητος λύσεων λαμβάνει χώρα ἡ συστηματική μελέτη τῆς εὐστάθειας, τῆς ὁμαλῆς ἐξαρτήσεως τῶν λύσεων ἀπό παραμέτρους, τῆς ὑπάρξεως περιοδικῶν λύσεων καί τῶν ἰδιοτήτων αὐτῶν, καθώς ἐπίσης καί τῆς ποιοτικῆς θεωρίας τῶν δυναμικῶν συστημάτων.

[25] Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (1832–1903). Γερμανός μαθηματικός.

[26] Οἱ $\varepsilon-$προσεγγιστικές λύσεις ἀποτελοῦν συναρτήσεις μέ πολυγωνικά γραφήματα, ἤτοι, συνεχεῖς καί κατά τμήματα γραμμικές συναρτήσεις. Ἔχουν τήν ἰδιότητα ὅτι σέ κάθε ὑποδιάστημα στό ὁποῖο εἶναι γραμμικές, *ἀποτυγχάνουν νά ἱκανοποιήσουν τήν* (1.4) *τό πολύ κατά* ε. (Βλέπε *Ἑνότητα 3.4*).

[27] Βλέπε *Ὁρισμό 3.1.5* στήν σελίδα 115.

[28] Charles Émile Picard (1856–1941). Γάλλος μαθηματικός

[29] Ernst Leonard Lindelöf (1870–1946). Σουηδός μαθηματικός.

[30] Jules Henri Poincaré (1854–1912). Γάλλος μαθηματικός.

[31] Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (1857–1918). Ρῶσσος μαθηματικός.

Ἄς μή μᾶς διαφεύγει ὅτι οἱ διαφορικές ἐξισώσεις προέρχονται ἀπό φυσικά φαινόμενα στά ὁποῖα οἱ μέν ἀρχικές συνθῆκες ἐκτιμῶνται κατά προσέγγιση, ἡ δέ συνάρτηση ροῆς ἀποτελεῖ συνήθως ἁπλουστευμένη ἐκδοχή τοῦ φυσικοῦ προβλήματος. Λαμβάνονται συνήθως ὑπ' ὄψη μία σειρά ἀπό παραδοχές, οἱ ὁποῖες καθιστοῦν τήν συνάρτηση ροῆς εὐκολότερη πρός μελέτη. Οἱ λύσεις τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων θά ἦσαν ὡς ἐκ τούτου ἄνευ φυσικῆς σημασίας ἄν μικρές μεταβολές τῶν ἀρχικῶν τιμῶν καί τῆς συναρτήσεως ροῆς, εἶχαν ὡς ἀποτέλεσμα σημαντικές ποιοτικές ἤ ποσοτικές μεταβολές σ' αὐτές, δοθέντος ὅτι τόσο οἱ ἀρχικές συνθῆκες ὅσο καί οἱ ροές προέρχονται ἀπό προσεγγίσεις φυσικῶν μοντέλων. Κατέστη λοιπόν εὔλογη ἡ μελέτη τῆς *ὁμαλῆς ἐξαρτήσεως τῶν λύσεων ἀπό παραμέτρους* (ὅπως γιά παράδειγμα οἱ *ἀρχικές συνθῆκες* ἀλλά καί ἀπό παραμέτρους οἱ ὁποῖες συναρτοῦν τήν ἴδια τήν ροή) καί τοῦ *καλῶς τοποθετημένου* (*well-posedness*) τῶν προβλημάτων ἀρχικῶν τιμῶν.

Ἀπό τίς ἀρχές τοῦ 20^{οῦ} αἰῶνος, καθίσταται αἰσθητότερη ἡ παρουσία τῆς Ρωσσικῆς σχολῆς μέ ἐκπροσώπους, ἐκτός τοῦ Lyapunov, τῶν Andronov[32] καί Pontryagin[33], οἱ ὁποῖο ἀσχολήθησαν, ἐκτός ἀπό τήν εὐστάθεια τῶν λύσεων (καί περιοδικῶν λύσεων) καί μέ τόν *ἔλεγχο τῶν αὐτομάτων*. Ὁ δέ Lefschetz[34] μελέτησε τήν ποιοτική θεωρία καί γεωμετρικά χαρακτηριστικά τῶν δυναμικῶν συστημάτων. Σημαντικότατη εἶναι βεβαίως καί πρόσφατη συνεισφορά τῶν Andrey Nikolaevich Kolmogorov (1903–1987) καί V.I. Arnold (1937–) , μέ ἔμφαση τήν γεωμετρική θεώρηση. Τόσο ἡ Διαφορική Γεωμετρία ὅσο καί Ἀλγεβρική Τοπολογία καθίστανται πλέον ἀπαραίτητα ἐργαλεῖα. Τά ὀνόματα τῶν Kolmogorov καί Arnold συνδέονται μέ αὐτό τοῦ Jürgen Moser στό *Θεώρημα KAM ἤ Kolmogorov-Arnold-Moser*[35], συμφώνως πρός τό ὁποῖο, ἐπαρκῶς μικρές διαταραχές σέ *ὁλοκληρώσιμο σύστημα*, ἀφήνουν μετρήσιμη περιοχή τοῦ χώρου ἀμετάβλητη ποιοτικῶς. Τό δέ μέτρο τῆς περιοχῆς μειοῦται ὅσο μεγαλώνει ἡ διαταραχή.

Ἀπό τήν δεκαετία τοῦ '70 καί μετά ἔχει δοθεῖ νέα ὤθηση στίς διαφορικές ἐξισώσεις λόγῳ τῆς ἀνάγκης κατανοήσεως χαοτικῶν φαινομένων τά ὁποῖα συνδέονται μή γραμμικά συστήματα συνήθων διαφορικῶν ἐξισώσεων. Δέν θά ἦταν ὑπερβολή νά λεχθεῖ ὅτι ὅλα τά γνωστά χαοτικά φαινόμενα[36] ἐμφανίζονται καί στίς διαφορικές ἐξισώσεις καί μάλιστα σέ αὐτόνομα

[32] Aleksandr Aleksandrovich Andronov (1901–1952). Ρῶσσος μαθηματικός καί φυσικός. Εἶναι ἀξιοσημείωτο ὅτι οἱ Πῶσοι ἐρίζουν τήν πατρότητα τῆς *διακλαδώσεως τοῦ Hopf* (*Hopf bifurcation*), τήν ὁποία ἀποδίδουν στόν Andronov.

[33] Lev Semenovich Pontryagin (1908–1988). Ρωσσοεβραϊκῆς καταγωγῆς μαθηματικός, ὁ ὁποῖος ἐτυφλώθη σέ ἡλικία 14 ἐτῶν.

[34] Solomon Lefschetz (1884–1972). Ρωσσοεβραϊκῆς καταγωγῆς μαθηματικός. Τό 1905 μετανάστευσε στίς Ἡνωμένες Πολιτεῖες, ὅπου καί πῆρε διδακτορικό στά Μαθηματικά. Ἀπό τό 1925 καί μετά ὑπῆρξε καθηγητής στό Princeton.

[35] Τό θεώρημα αὐτό ἐπροτάθη ἀπό τόν Kolmogorov στό *Dokl. Akad. Nauk. USSR*, **98**, 527 (1954). Ἀπεδείχθη ἀνεξαρτήτως ἀπό τούς Arnold, *Uspekhi Mat. Nauk*, **18**, 85 (1963) καί τόν Moser, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, no 1*, (1962).

[36] Ὁ Mitchell J. Feigenbaum (1944–) εἶχε ὁρίσει ὡς *χαοτική διαδικασία* (*chaotic process*) αὐτή ἡ ὁποία δέν

μή γραμμικά συστήματα. Πολλά δέ ἐξ αὐτῶν ἐνεφανίσθησαν γιά πρώτη φορά στίς διαφορικές ἐξισώσεις. Χαρακτηριστικό παράδειγμα ἀποτελεῖ τό μή γραμμικό σύστημα

$$\begin{cases} \dot{x} &= -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= -bz + xy, \end{cases}$$

γνωστό ὡς *σύστημα Lorenz*[37]. Σ' αὐτό τό σύστημα, μεταβάλλοντας τίς παραμέτρους σ, r καί b, δυνάμεθα νά παρατηρήσομε πλειάδα χαοτικῶν φαινομένων, μεταξύ τῶν ὁποίων καί ἡ *ἐπαλληλία διπλασιασμῶν περιόδου* (*period doubling cascade*), καθώς καί ποικιλία *παράξενων ἑλκυστῶν* (*strange attractors*), γνωστῶν ὡς *ἑλκυστῶν Lorenz*. Στά χαοτικά αὐτά φαινόμενα ἡ λύση ὁρίζεται γιά κάθε θετικό χρόνο καί παραμένει φραγμένη. Τό δέ σύνολο τῶν ὁριακῶν καταστάσεων βρίσκεται σ' ἕνα συμπαγές ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}^3$ διαστάσεως Hausdorff μικρότερης τοῦ δύο.

Ἀριθμητικές μέθοδοι

Ἤδη ἀπό τήν ἐποχή τοῦ Newton, ὁ ὁποῖος εἰσήγαγε τήν μέθοδο τῶν δυναμοσειρῶν, ὑπῆρξε ἐνδιαφέρον γιά τήν προσέγγιση τῶν λύσεων τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων, δοθέντος ὅτι πολύ ἐνωρίς κατέστη σαφές ὅτι ἡ μεθοδολογία ἐπιλύσεως δέν ἀποτελεῖ πανάκεια. Πέραν τῶν ἀριθμητικῶν ἀπαντήσεων τίς ὁποῖες λαμβάνομε χρησιμοποιῶντας *μεθόδους πεπερασμένων διαφορῶν, πεπερασμένα στοιχεῖα* ἤ *φασματικές μεθόδους*, πολύ συχνά λαμβάνομε καί πληροφορίες οἱ ὁποῖες μᾶς ἐπιτρέπουν νά ἀναπτύξομε τήν ποιοτική θεωρία. Ἡ μέθοδος μέ τήν ὁποία ὁ Johann Bernoulli ἔλυσε τό Πρόβλημα τοῦ Βραχιστοχρόνου ἀποτελεῖ μία προσεγγιστική διαδικασία ὅπου διακριτοποιοῦνται οἱ τιμές τῆς ταχύτητος τοῦ κατερχομένου σώματος. Καθώς ἡ *λεπτότης* τῆς διακριτοποιήσεως τείνει στό μηδέν οἱ προσεγγιστική λύση συγκλίνει καί τό ὅριο ἀποτελεῖ τήν ζητουμένη καμπύλη. Ἀπό τό γεγονός λοιπόν ὅτι μία προσεγγιστική διαδικασία συγκλίνει προκύπτει ἡ ἀκριβής λύση τοῦ προσεγγιζομένου προβλήματος.

Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ EULER. Πλεῖστα ἀποτελέσματα ὑπάρξεως λύσεων προέκυψαν ἐμμέσως ἀπό τήν σύγκλιση κάποιας προσεγγιστικῆς μεθόδου. Χαρακτηριστικό παράδειγμα ἀποτελεῖ τό ἰσχυρότερο ἀποτέλεσμα ὑπάρξεως λύσεων τῶν Cauchy–Lipschitz, μέσῳ τῶν $\varepsilon-$προσεγγιστικῶν λύσεων, οἱ ὁποῖες οὐσιαστικά ἀποτελοῦν τίς προσεγγιστικές λύσεις τίς ὁποῖες μᾶς παρέχει ἡ μέθοδος πεπερασμένων διαφορῶν τοῦ Euler [17]. Στήν μέθοδο αὐτή ἡ παράγωγος

περιέχει *ἀναγνωρίσιμες μορφές ἤ μοτίβα* (*recognizable patterns*) [18], [19], ἄρα ἐκ πρώτης ὄψεως ἡ φράση *γνωστά χαοτικά φαινόμενα* ἔρχεται σέ ἀντίφαση μέ τόν ὁρισμό τοῦ Feigenbaum. Ὡστόσο σήμερα ὑπάρχει αὐστηρός ὁρισμός, ἡ δέ γένεση καί φύση κάποιων χαοτικῶν διαδικασιῶν ἔχει κατανοηθεῖ σέ μεγάλο βαθμό.

[37] Ἀνεκαλύφθη ἀπό τόν Ἀμερικάνο μετεωρολόγο Edward N. Lorenz (1917–) καί πρωτοεμφανίστηκε σέ ἐργασία του 1963 περί τῆς ροῆς ἀερίων μαζῶν στήν ἀτμόσφαιρα.

$x'(t)$ προσεγγίζεται ἀπό πηλίκο διαφορῶν

$$\frac{x(t+h)-x(t)}{h}.$$

Γιά νά προσεγγισθεῖ λοιπόν ἡ λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (1.3) στό διάστημα $[\tau, \tau+\gamma]$, κατασκευάζομε μία διαμέριση $N+1$ σημείων τοῦ διαστήματος αὐτοῦ

$$\tau = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < t_N = \tau+\gamma,$$

ὅπου

$$\tau_k = \tau + kh = \tau + k\frac{\gamma}{N},$$

$k = 0, 1, \ldots, N$. Ἀκολούθως ὑπολογίζομε τίς προσεγγιστικές τιμές, x_k, $k = 1, \ldots, N$, τῆς λύσεως στά σημεῖα τῆς διαμερίσεως συμφώνως πρός τόν ἀναδρομικό τύπο

$$x_0 = \xi, \quad x_{k+1} = x_k + hf(\tau_k, x_k).$$

Τέλος, ὁρίζεται ὡς *προσεγγιστική λύση* ἡ συνάρτηση μέ γράφημα τήν πολυγωνική γραμμή ἡ ὁποία συνδέει τά σημεῖα (τ_k, x_k), $k = 0, 1, \ldots, N$. Ἀποδεικνύεται ὅτι, ἄν ἡ f εἶναι ἐπαρκῶς ὁμαλή, τότε ἡ ἀνωτέρω προσέγγιση συγκλίνει στήν λύση τοῦ (1.3), καθώς τό h τείνει στό μηδέν. Δοθέντος βεβαίως ὅτι ὑπάρχει λύση σ' ὅλο τό ἀνωτέρω διάστημα. Ἰδιαιτέρως, ἡ ἀνωτέρω μέθοδος εἶναι πρώτης τάξεως ἀκριβείας, δηλαδή ἄν $x_h(t)$ ἡ προσεγγιστική λύση γιά διαμέριση λεπτότητος $h = \gamma/N$, καί $x(t)$ ἡ ἀκριβής λύση, τότε

$$\max_{\tau \le t \le \tau+\gamma} \big|x_h(t) - x(t)\big| = \mathcal{O}(h).$$

Ἡ μέθοδος αὐτή ἐλάχιστα χρησιμοποιεῖται σήμερα γιά ἀριθμητικές προσεγγίσεις λόγῳ τῆς χαμηλῆς της ἀκριβείας καί τῆς ἀπουσίας ἀπολύτου εὐσταθείας. Ὡστόσο ἔχει χρησιμοποιηθεῖ σέ ἀποδείξεις ὑπάρξεως λύσεων τόσο στήν περιοχή τῶν Συνήθων, ὅσο καί στήν περιοχή τῶν Μερικῶν Διαφορικῶν Ἐξισώσεων.

Ἡ μέθοδος Euler ἀποτελεῖ προσέγγιση τῆς σειρᾶς Taylor τῆς λύσεως:

$$x(t+h) \approx x(t) + h\,x'(t) = x(t) + h\,f\big(t, x(t)\big).$$

Τό 1768 ὁ Euler διεπίστωσε ὅτι ἡ προσέγγιση βελτιώνεται ἄν στήν προσέγγιση προστεθεῖ καί ὁ ἀμέσως ἑπόμενος ὅρος οὗ ἀναπτύγματος Taylor τῆς λύσεως [17]:

$$\begin{aligned} x(t+h) &\approx x(t) + h\,x'(t) + \tfrac{1}{2}h^2 x'' \\ &= x(t) + h\,f\big(t, x(t)\big) + \tfrac{1}{2}h^2\Big(f_t\big(t, x(t)\big) + f_x\big(t, x(t)\big)x'(t)\Big) \\ &= x(t) + h\,f\big(t, x(t)\big) + \tfrac{1}{2}h^2\Big(f_t\big(t, x(t)\big) + f_x\big(t, x(t)\big)f\big(t, x(t)\big)\Big). \end{aligned}$$

Κατ' αὐτόν τόν τρόπο, τό γράφημα τῆς προσεγγιστικῆς λύσεως καθίσταται ἕνωση παραβολῶν (ἀντί εὐθυγράμμων τμημάτων) καί ἡ προσέγγιση πράγματι συγκλίνει στήν ἀκριβῆ λύση ταχύτερα, δοθέντος ὅμως ὅτι ἡ συνάρτηση ροῆς f εἶναι συνεχῶς διαφορίσιμη. Συγκεκριμένα, ἄν $x_h(t)$ ἡ προσεγγιστική λύση γιά διαμέριση λεπτότητος $h = \gamma/N$, καί $x(t)$ ἡ ἀκριβής λύση, τότε

$$\max_{\tau \leq t \leq \tau+\gamma} \big| x_h(t) - x(t) \big| = \mathcal{O}(h^2).$$

Οἱ *Ἀριθμητικές Διαφορικές Ἐξισώσεις* ἀποτελοῦν σήμερα ἕνα τεράστιο κλάδο στόν ὁποῖο συνεισφέρουν, ὄχι μόνο ἐφαρμοσμένοι μαθηματικοί, ἀλλά καί μηχανικοί, φυσικοί, χημικοί, βιολόγοι, οἰκονομολόγοι, καθώς ἐπίσης καί καθαροί μαθηματικοί. Ἡ μελέτη τῆς εὐστάθειας, τῆς συγκλίσεως, τῆς ἐκτιμήσεως τοῦ σφάλματος τῶν ἀριθμητικῶν μεθόδων ἔχει ἀνοίξει σημαντικά προβλήματα σέ πλεῖστες περιοχές τῶν Μαθηματικῶν ὅπως στήν Γραμμική Ἄλγεβρα, στήν Συναρτησιακή Ἀνάλυση (Μελέτη διακριτῶν τελεστῶν, εἰδικοί χῶροι Sobolev, θεωρία διαταραχῶν, θεωρία προσεγγίσεων κλπ.), καί συχνά στήν Μιγαδική Ἀνάλυση καί στήν Γεωμετρία.

Μή ἐξαιρετέα ἀπό τήν ἀναφορά μας δέν θά πρέπει νά εἶναι καί τά σχετικῶς προσφάτως ἀναπτυχθέντα, μέσῳ τῶν ἀριθμητικῶν μεθόδων, εἰδικευμένα γιά διαφορικές ἐξισώσεις, γραφικά λογισμικά (graphics softwares), τά ὁποῖα ἀποτελοῦν ἄριστο ἐποπτικό μέσο, τόσο γιά τόν ἐρευνητή, ὅσο καί γιά τόν φοιτητή. Ἐκτός ἀπό τά γραφήματα τῶν λύσεων διαφορικῶν ἐξισώσεων, μᾶς παρέχουν τήν δυνατότητα ἐποπτείας φασματικῶν πεδίων, πεδίων διευθύνσεων, ὁλοκληρωτικῶν καμπυλῶν καί ποικίλων χαοτικῶν φαινομένων τά ὁποῖα ἐμφανίζονται σέ λύσεις διαφορικῶν ἐξισώσεων.

1.2 Ἐναρκτήριο παράδειγμα

Tractrix

Ἐνῶ ὁ Leibniz διέμενε στό Παρίσι (1672–1676) καί ἐδιδάσκετο Μαθηματικά ἀπό τόν Huygens, ὁ διάσημος ἀρχιτέκτων καί ἀνατόμος Claude Perrault (1613–1688) τοῦ ἔθεσε τό ἀκόλουθο πρόβλημα (βλέπε [24]):

Νά βρεθεῖ καμπύλη μέ τήν ἰδιότητα ὅτι σέ κάθε της σημεῖο P, ἡ ἐφαπτόμενη τέμνει τόν ἄξονα τῶν x σέ σημεῖο Q κατά τρόπον ὥστε τό μῆκος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος PQ νά ἰσοῦται μέ σταθερό μῆκος α.

Γιά νά καταστήσει ὁ Perrault τό ἐρώτημα εὐληπτότερο, ἐχρησιμοποίησε ἕνα ὡρολόγιο τσέπης[38], ἡ ἁλυσίδα τοῦ ὁποίου, εἶχε τό σταθερό μῆκος α, ἐνῶ τό κέντρο περιστροφῆς τῶν δεικτῶν, ἀπετέλεσε τό τυχόν σημεῖο τῆς ζητούμενης καμπύλης. Τό δέ ἄκρο τῆς ἁλυσίδος ἐκινεῖτο πάνω σέ τραπέζι. Ἀνέφερε δέ ὅτι οὐδείς μαθηματικός στό Παρίσι ἤ τήν Μασσαλία, ὑπονοῶντας τόν Fermat, κατόρθωσε νά βρεῖ τήν λύση. Ὁ Leibniz ἐδημοσίευσε ἐν τέλει τήν λύση στά 1693 (βλέπε [32]), ἰσχυριζόμενος ὅτι τήν ἐγνώριζε γιά ἀρκετό διάστημα.

Ἄν θεωρήσομε ὅτι ἡ ζητούμενη καμπύλη ἀποτελεῖ τό γράφημα τῆς συναρτήσεως $y = f(x)$, τότε στό σημεῖο $P = (x_0, y_0)$, τοῦ γραφήματός της, ἡ ἐξίσωση ἐφαπτομένης θά εἶναι ἡ

$$y - y_0 \;=\; f'(x_0)(x - x_0),$$

ἡ ὁποία τέμνει τόν ἄξονα τῶν x στό σημεῖο $Q = (X(x_0), 0)$ γιά τό ὁποῖο ἰσχύει ὅτι:

$$-y_0 \;=\; f'(x_0)\big(X(x_0) - x_0\big),$$

ἤ ἰσοδύναμα

$$X(x_0) \;=\; x_0 - \frac{y_0}{f'(x_0)} \;=\; x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Ἡ δέ ἀπόσταση PQ ἰσοῦται μέ α, ἄρα

$$\begin{aligned}
\alpha^2 &= (x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2 \\
&= \left(x_0 - \left(x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right)\right)^2 + \big(f(x_0) - 0\big)^2 \\
&= \left(\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}\right)^2 + \big(f(x_0)\big)^2 \\
&= \big(f(x_0)\big)^2 \cdot \left(\frac{1}{\big(f'(x_0)\big)^2} + 1\right).
\end{aligned}$$

[38] Horologio portabili suæ thecæ argenteæ.

Λύοντας λοιπόν ὡς πρός $f'(x_0)$ λαμβάνομε

$$f'(x_0) \;=\; \pm\frac{f(x_0)}{\sqrt{\alpha^2 - \big(f(x_0)\big)^2}}. \tag{1.5}$$

Ἀντικατασταθῶντας τό x_0 ἀπό τήν μεταβλητή x, τήν $f(x)$ ἀπό τήν y καί τήν παράγωγο ἀπό τόν κλασσικό της συμβολισμό, ἡ (1.5) γράφεται ὡς

$$\frac{dy}{dx} \;=\; -\frac{y}{\sqrt{\alpha^2 - y^2}}. \tag{1.6}$$

Τό ἀρνητικό πρόσημο ἐπελέγη ὥστε ἡ ἐφαπτόμενη νά τέμνει τόν ἄξονα τῶν x φθίνουσα. Ἐπιλογή τοῦ θετικοῦ προσήμου θά ὁδηγοῦσε στήν συμμετρική, ὡς πρός τόν ἄξονα τῶν x, καμπύλη. Ἡ (1.6) ἀποτελεῖ μία ἐξίσωση στήν ὁποία ἡ κλίση τῆς ζητουμένης καμπύλης (ἤ ὁ ρυθμός μεταβολῆς τῆς συναρτήσεως τῆς ὁποίας ἀποτελεῖ τό γράφημα) δίδεται συναρτήσει τῆς τιμῆς της. Ἀποτελεῖ λοιπόν μιά *διαφορική ἐξίσωση*. Πραγματοποιῶντας τόν μετασχηματισμό $z^2 = \alpha^2 - y^2$, λαμβάνομε

$$z \;=\; \sqrt{\alpha^2 - y^2}, \quad y^2 \;=\; \alpha^2 - z^2, \quad \text{καί} \quad y\,dy \;=\; -z\,dz.$$

Ἡ (1.6) λοιπόν λαμβάνει τήν μορφή:

$$\frac{dz}{dx} \;=\; \frac{\alpha^2 - z^2}{z^2} \quad \text{ἤ} \quad \frac{z^2}{\alpha^2 - z^2}\cdot\frac{dz}{dx} \;=\; 1.$$

Ἰσοδύναμα

$$\left(-1 + \frac{\alpha}{2}\Big(\frac{1}{\alpha - z} + \frac{1}{\alpha + z}\Big)\right)\frac{dz}{dx} \;=\; 1,$$

μέ λύση

$$-\frac{\alpha}{2}\log\left(\frac{\alpha + z}{\alpha - z}\right) - z \;=\; x + c.$$

Ἡ σταθερά c ἡ ὁποία προκύπτει ἀπό τήν ὁλοκλήρωση δύναται νά παραλειφθεῖ, δοθέντος ὅτι παράλληλες μετατοπίσεις τῆς ζητούμενης καμπύλης δέν ἀλλοιώνουν τίς ἀπαιτούμενές της ἰδιότητες. Ὁ ἀντίστροφος μετασχηματισμός $z = \sqrt{\alpha^2 - y^2}$ παρέχει ἐν τέλει τήν καμπύλη

$$x \;=\; -\sqrt{\alpha^2 - y^2} - \alpha\log\left(\frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - y^2}}{y}\right).$$

Ἡ ἀνωτέρω καμπύλη ὀνομάζεται *tractrix* καί στά ἑλληνικά *ἕλκουσα*. Ὁ δέ ἄξονας τῶν x ἐπί τοῦ ὁποίου βρίσκεται τό ἄκρο τῆς ἁλυσίδος ἀποτελεῖ τήν *directrix* καί στά ἑλληνικά *διευθετοῦσα*. Σημειωτέον ὅτι, τόσο ὁ Leibniz ὅσο καί ὁ Huygens, ἐμελέτησαν περιπτώσεις προσδιορισμοῦ τῆς ἕλκουσας γιά προβλήματα ὅπου ἡ διευθετοῦσα δέν ἀποτελεῖ πλέον τόν ἄξονα τῶν x ἀλλά ποικιλία γνωστῶν καμπυλῶν. Ὁ ἀναγνώστης ἐνθαρρύνεται νά ἀνακαλύψει τήν ἕλκουσα στήν περίπτωση κατά τήν ὁποία ἡ διευθετοῦσα ἀποτελεῖ τόν κύκλο.

1.3 Ὀνοματολογία

Τό ἀντικείμενο τοῦ ἀνά χεῖρας ἐγχειριδίου εἶναι οἱ

Συνήθεις Διαφορικές Ἐξισώσεις
(Ordinary Differential Equations)

Ἐξισώσεις: Ἄρα ὑπάρχει κάποιο ζητούμενο τό ὁποῖο ἀποτελεῖ ἄγνωστη συνάρτηση. Ἀποτελοῦν λοιπόν *συναρτησιακές* ἐξισώσεις.

Διαφορικές: Ἄρα τό ζητούμενο εἶναι συνάρτηση ἡ ὁποία ἐμφανίζεται στήν ἐξίσωση διαφορισμένη. Στήν ἐξίσωση ἐμφανίζεται ἐν γένει καί μή διαφορισμένη, ἡ ζητουμένη συνάρτηση.

Συνήθεις: Προσδιορισμός εἰς ἀντιδιαστολήν πρός τίς *μερικές* διαφορικές ἐξισώσεις (ΜΔΕ), ὅπου στήν ἐξίσωση ἐμφανίζονται μερικές παράγωγοι τῆς ζητουμένης συναρτήσεως ὡς πρός περισσότερες ἀπό μία μεταβλητές. Στίς συνήθεις διαφορικές ἐξισώσεις (ΣΔΕ), οἱ ζητούμενες συναρτήσεις, εἶναι συναρτήσεις μιᾶς μόνο μεταβλητῆς, τήν ὁποία θά καλοῦμε *χρόνο*.

1.3.1 Χαρακτηριστικά παραδείγματα

Παρατίθενται κάτωθι γνωστά παραδείγματα συνήθων διαφορικῶν ἐξισώσεων.

(i) $x' = f(t)$. Λύση αὐτῆς τό ἀόριστο ὁλοκλήρωμα τῆς f.

(ii) $\frac{1}{2} m \dot{r}^2 - \frac{GmM}{r} = E$. Διατήρηση ἐνεργείας ὑπό τήν ἐπίδραση τῆς βαρύτητος.

(iii) $\ddot{\vartheta} + \frac{g}{L} \sin \vartheta = 0$. Ἡ ἐξίσωση ἡ ὁποία περιγράφει τήν κίνηση τοῦ ἐκκρεμοῦς.

(iv) $x'' + \delta x' + \omega^2 x = 0, \quad \delta > 0$. Κίνηση ἐλατηρίου μέ ἀπόσβεση.

(v) $x'' + \varepsilon(x^2 - 1)x' + x = 0$. Ἐξίσωση ταλαντωτοῦ τοῦ Van der Pol.

(vi) $t^2 x'' + t x' + (t^2 - \nu^2)x = 0$. Ἐξίσωση Bessel[39]. Λύσεις οἱ συναρτήσεις Bessel.

[39]Friedrich Wilhelm Bessel (1784–1846). Γερμανός ἀστρονόμος.

(vii) $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k x^{(k)} = 0.$ Ἐξίσωση Euler.

(viii) $\begin{cases} \dfrac{dH}{dt} = \alpha H - \beta HP, \\ \dfrac{dP}{dt} = -\gamma P + \delta HP. \end{cases}$ Σύστημα ἀνταγωνιζομένων εἰδῶν τῶν Lotka–Volterra.

1.3.2 Τό βασικό πρόβλημα

Ἡ γενικότερη μορφή τήν ὁποία δύναται νά λάβει μία συνήθης διαφορική ἐξίσωση εἶναι:

$$F\left(t, x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}\right) = 0, \tag{1.7}$$

ὅπου $x^{(k)} = d^k x/dt^k$ καί $n \geq 1$. Οἱ συναρτήσεις F καί x δύνανται νά εἶναι *βαθμωτές* (*scalar*) ἤ καί *διανυσματικές*.

Τό βασικό πρόβλημα στίς συνήθεις διαφορικές ἐξισώσεις, εἶναι ἡ εὕρεση *λύσεως*, ἡ ὁποία στήν περίπτωση τῆς (1.7), ἀποτελεῖ μία n φορές συνεχῶς διαφορίσιμη συνάρτηση φ, ὁρισμένη σέ κάποιο διάστημα I, ἡ ὁποία ἱκανοποιεῖ τήν

$$F\left(t, \varphi^{(0)}(t), \varphi^{(1)}(t), \ldots, \varphi^{(n)}(t)\right) = 0 \quad \text{διά κάθε } t \in I.$$

Ἡ (1.7) ἔχει, ἐν γένει, ἄπειρες τό πλῆθος λύσεις (αὐστηρός ὁρισμός τῶν ὁποίων θά δοθεῖ στήν *Ἑνότητα 1.5* στήν σελίδα 27). Ἡ ἀνωτέρω μορφή τῶν συνήθων διαφορικῶν ἐξισώσεων δέν προσφέρεται γιά μελέτη. Σαφῶς καταλληλότερη εἶναι ἡ *ἄμεση μορφή* (ἤ ἄλλως *λυμένη μορφή*.)

Ὁρισμός 1.3.1. *Ἐξισώσεις ἄμεσης ἤ λυμένης μορφῆς (explicit),εἶναι οἱ συνήθεις διαφορικές ἐξισώσεις στίς ὁποῖες ἡ παράγωγος τῆς ὑψηλοτέρας τάξεως τῆς ζητουμένης συναρτήσεως ἡ ὁποία ἐμφανίζεται στήν ἐξίσωση, δίδεται συναρτήσει τῶν παραγώγων χαμηλοτέρας τάξεως αὐτῆς, καθώς ἐνδεχομένως καί τῆς μεταβλητῆς t.*

Γιά παράδειγμα οἱ ἐξισώσεις

$$x' = f(t,x), \quad x'' = g(t,x,x')$$

καί γενικότερα

$$x^{(n)} = h\left(t, x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(n-1)}\right),$$

καθώς ἐπίσης καί τό σύστημα συνήθων διαφορικῶν ἐξισώσεων

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t, x_1, \ldots, x_N), \\ x_2' = f_2(t, x_1, \ldots, x_N), \\ \quad \vdots \\ x_N' = f_n(t, x_1, \ldots, x_N). \end{cases}$$

Μία ἐξίσωση ἡ ὁποία δέν εἶναι ἄμεσης μορφῆς, ὀνομάζεται *ἔμμεσης* ἤ ἄλλως *πεπλεγμένης μορφῆς*[40](*implicit*). Γιά παράδειγμα ἡ ἐξίσωση διατηρήσεως ἐνέργειας βαρυτικοῦ πεδίου

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \frac{GmM}{r} = E,$$

δύναται νά ἀναχθεῖ σέ κάθε μία ἀπό τίς δύο ἐξισώσεις ἄμεσης μορφῆς

$$\frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2GM}{r}},$$

ἑκάστη τῶν ὁποίων ἔχει τήν δική της ἰδιαίτερη φυσική σημασία. Στήν περίπτωση τοῦ θετικοῦ προσήμου, περιγράφει τήν πτώση σώματος μάζας m καί συνολικῆς μηχανικῆς ἐνέργειας E κατακορύφως πρός τήν γῆ (ἤ γενικότερα πρός οὐράνιο σῶμα) μάζας M, ἐνῶ στήν περίπτωση τοῦ ἀρνητικοῦ προσήμου τήν κατακόρυφη ἀπομάκρυνση ἀπό τήν γῆ. Ἡ ἀναγωγή αὐτή εἶναι ἐφικτή ὁποτεδήποτε δύναται νά ἐφαρμοσθεῖ τό *Θεώρημα τῆς ἐμμέσως ὁρισμένης (ἤ ἄλλως πεπλεγμένης) συναρτήσεως*. Ὡστόσο στό ἀνά χεῖρας ἐγχειρίδιο, θά ἀσχοληθοῦμε σχεδόν ἀποκλειστικῶς, μέ συνήθεις διαφορικές ἐξισώσεις ἄμεσης μορφῆς.

Ὅπως ἔχει ἤδη λεχθεῖ ὁ ἐπιθετικός προσδιορισμός *συνήθεις* εἰσήχθη εἰς ἀντιδιαστολήν πρός τόν ὅρο *μερικές* διαφορικές ἐξισώσεις (ΜΔΕ). Στίς ἑπόμενες δύο ὑποενότητες θά δοῦμε τί εἶναι ἀφ’ ἑνός οἱ μερικές διαφορικές ἐξισώσεις καί ἀκολούθως ποιά ἄλλα εἴδη διαφορικῶν ἐξισώσεων ὑπάρχουν.

---

[40] Ἡ ἐπικρατήσασα Ἑλληνική ἀπόδοση τῶν ὅρων *explicit* (ἀντιστοίχως *implicit*), μέ μαθηματικά συμφραζόμενα, εἶναι *λυμένης μορφῆς* (ἀντιστοίχως *πεπλεγμένης μορφῆς*). Συμφώνως πρός τό ἀγγλοελληνικό λεξικό *Penguin-Hellenews*, explicit (ἀντιστοίχως implicit) = ρητός· σαφής, συγκεκριμένος, ἀπερίφραστος, (ἀντιστοίχως = ὑπονοούμενος, ἀνέκφραστος, σιωπηρός). Ἐνῶ στό ἀγγλοαγγλικό λεξικό *Oxford Dictionary*, ἑρμηνεύεται ὡς: stated in detail, leaving nothing merely implied; definite (ἀντιστοίχως implied though not plainly expressed, virtually explained (*in*)). Πράγματι ὁ χαρακτηρισμός implicit (παράγωγο τοῦ ρήματος imply = συνεπάγομαι), εἶναι εὔστοχος. Γιά παράδειγμα, μία συνάρτηση ὀνομάζεται implicitly defined ἄν δέν ἔχομε στήν διάθεσή μας τόν τύπο της, ἀλλά αὐτή ὁρίζεται μέσῳ κάποιας ἰδιότητός της. Ὁρίζεται λοιπόν *ἐμμέσως*. Ἀντιθέτως ὁ ὅρος *πεπλεγμένη μορφή*, ὡς ἀπόδοση τοῦ ὅρου *implicit* δέν δύναται νά χαρακτηρισθεῖ εὔστοχος διότι ὅταν ὀνομάζομε ἕνα μαθηματικό ἀντικείμενο *πεπλεγμένο* οὐδόλως διαφωτίζομε, δεδομένου ὅτι ὀλίγα μαθηματικά ἀντικείμενα δέν εἶναι (ἤ δέν ὑπῆρξαν στό παρελθόν, πρό τῆς καλῆς κατανοήσεως αὐτῶν) πεπλεγμένα. Εἶναι λοιπόν, ὁ χαρακτηρισμός αὐτός, ἐκ τῆς φύσεως τῶν μαθηματικῶν ἀντικειμένων, καταχρηστικός. Χαρακτηριστικά ἀναφέρομε τήν ἀπόδοση στά Ἑλληνικά, τοῦ *implicit function theorem* ὡς *θεωρήματος πεπλεγμένης συναρτήσεως*, τό ὁποῖο ἀναφέρεται σέ συναρτήσεις οἱ ὁποῖες εἶναι ὁρίσιμες ἐφ’ ὅσον οἱ τιμές τους καί οἱ μεταβλητές τους ἱκανοποιοῦν κάποια σχέση μεταξύ τους. Ἀξίζει ἐπίσης νά ἀναφερθεῖ ὅτι στίς Ἀριθμητικές Διαφορικές Ἐξισώσεις ἔχομε τά explicit (ἀντιστοίχως implicit) schemes. Ἤτοι, *σχήματα πεπερασμένων διαφορῶν τῶν ὁποίων ὁ ἑπόμενος ἀναδρομικός ὅρος δίδεται ὡς συνάρτηση τῶν προηγουμένων ὅρων (ἀντιστοίχως προκύπτει ἐμμέσως ἀπό σχέση τήν ὁποία ἱκανοποιεῖ μέ προηγούμενους ὅρους).* Προτείνομε λοιπόν ὡς καταλληλότερη ἀπόδοση, ἀναλόγως τῶν συμφραζομένων, γιά τόν ὅρο *explicit* (ἀντιστοίχως *implicit*) τούς ὅρους: *ἄμεσος, ἀμέσως ὁριζόμενος* ἤ *ἀμέσως ἐκφραζόμενος* (ἀντιστοίχως *ἔμμεσος, ἐμμέσως ὁριζόμενος* ἤ *ἐμμέσως ἐκφραζόμενος*).

1.3.3 Μερικές διαφορικές ἐξισώσεις

Οἱ μερικές διαφορικές ἐξισώσεις (partial differential equations, teilweise Differentialgleichungen, equazioni differenziali parziali), ἤ διαφορικές ἐξισώσεις μέ μερικές παραγώγους (équations différentielles aux derivées partielles, дифференциальные уравнения в частных производных), ἀποτελοῦν τρόπον τινά, γενίκευση τῶν συνήθων διαφορικῶν ἐξισώσεων, διότι σ' αὐτές ἐμφανίζονται μερικές παράγωγοι τῆς ζητουμένης συναρτήσεως ὡς πρός διάφορες μεταβλητές. Χρονολογικῶς, οἱ μερικές διαφορικές ἐξισώσεις ἐμφανίζονται καί μελετῶνται, σχεδόν ταυτοχρόνως μέ τίς συνήθεις.

Παραδείγματα

(i) $u_t + uu_x = 0.$ Ἐξίσωση Burger. Περιγράφει τά μονοδιάστατα κύματα κρούσεως.

(ii) $u_t + uu_x = \varepsilon u_{xxx}.$ Ἐξίσωση Korteweg[41]–de Vries. Μοντέλο κυμάτων ἀβαθῶν ὑδάτων.

(iii) $\Delta u = \sum_{i=i}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0.$ Ἐξίσωση Laplace. Ἀποτελεῖ τήν ἐξίσωση δυναμικοῦ.

(iv) $u_t = k\Delta u.$ Ἐξίσωση Θερμότητος.

(v) $u_{tt} = c^2\Delta u.$ Κυματική ἐξίσωση. Περιγράφει τήν διάδοση κυμάτων.

(vi) $f_t + rSf_S + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 f_{SS} = rf.$ Ἐξίσωση Black–Scholes[42].

(vii) $\begin{cases} \boldsymbol{u}_t + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} = \nu\Delta\boldsymbol{u}, \\ \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0. \end{cases}$ Ἐξισώσεις[43] Navier[44]–Stokes[45].

---

[41]Diederik Johannes Korteweg (1848–1941). Ὁλλανδός μηχανικός καί μαθηματικός.

[42]Ἡ ἐξίσωση αὐτή, ἡ ὁποία *τιμολογεῖ τά προαιρετικά δικαιώματα* (*options pricing*), ἐμφανίζεται γιά πρώτη φορά στήν ἐργασία τῶν Fischer Black (1938–1995) καί Myron Scholes (1941–), *The pricing of options and corporate liabilities*, J. Polit. Econ., 81:3, σελ. 637–654, 1973. Ἐξ αἰτίας τῆς ἐργασίας αὐτῆς, καθώς καί τῶν προεκτάσεών της, ἀπενεμήθη τό βραβεῖο Nobel στά Οἰκονομικά τό 1997, στούς Scholes καί Merton.

[43]Οἱ ἐξισώσεις Navier–Stokes ἀποτελοῦν μοντέλο περιγραφῆς τῆς μή συμπιεστῆς ροῆς. Ἡ σταθερά ν ἀποτελεῖ τό κινηματικό ἰξῶδες.

[44]Claude Navier (1785–1840). Γάλλος πολιτικός μηχανικός καί ἀργότερα μαθητής τοῦ Fourier.

[45]George Gabriel Stokes (1819–1903). Ἰρλανδός προτεστάντης μαθηματικός.

(viii) $\begin{cases} u_x = v_y, \\ v_x = -u_y. \end{cases}$ Ἐξισώσεις[46] Cauchy–Riemann[47].

1.3.4 Ἄλλα εἴδη διαφορικῶν ἐξισώσεων

Ἀξίζει νά ἀναφερθοῦν καί τά κάτωθι παραδείγματα διαφορικῶν ἐξισώσεων, οἱ ὁποῖες δέν δύνανται νά χαρακτηρισθοῦν ὡς *συνήθεις* ἤ *μερικές*, ἀποτελοῦν ὡστόσο καί αὐτές διαφορικές ἐξισώσεις καί ἡ μελέτη τους παρουσιάζει ἰδιαίτερο ἐνδιαφέρον.

(i) $x'(t)+\int_\tau^t K(t,s)\,x(s)\,ds = r(t).$ Ὁλοκληροδιαφορική ἐξίσωση.

(ii) $x'(t) = x(t-d).$ Ὑστεροδιαφορική ἐξίσωση[48].

(iii) $(-\Delta)^\alpha u = f,\ \alpha\in\mathbb{R}.$ Ψευδοδιαφορική ἐξίσωση. (Pseudo Differential Equation).

(iv) $x'(t) = x\big(x(t)\big).$ Συναρτησιακή διαφορική ἐξίσωση.

1.4 Βασικές ἔννοιες

Ἔστω ἡ συνήθης διαφορική ἐξίσωση

$$x' = f(t,x).$$

Σ' αὐτήν τήν μορφή, ἡ ὁποία δέν ἀποτελεῖ τήν γενικότερη δυνατή, ἀλλά τήν συνηθέστερη στό ἀνά χεῖρας ἐγχειρίδιο, ἀπό τοῦδε καί εἰς τό ἑξῆς θά χρησιμοποιοῦμε γιά τά στοιχεῖα της, ἀντί τῶν λατινικῶν χαρακτήρων, τήν κάτωθι περιγραφή:

[46]Οἱ ἐξισώσεις αὐτές ἱκανοποιοῦνται ἀπό τά πραγματικά καί φανταστικά μέρη τῶν ὁλομόρφων συναρτήσεων. Ἄν f ὁλόμορφη συνάρτηση καί $f(z) = f(x,y) = u(x,y) + \mathrm{i}\,v(x,y)$, ὅπου $z = x + \imath y$, τότε οἱ συναρτήσεις u καί v ἱκανοποιοῦν τό σύστημα ἐξισώσεων Cauchy–Riemann.

[47]Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826–1866). Μεγάλος Γερμανός μαθηματικός. Μαθητής τοῦ Gauss.

[48]Ἤ ἄλλως *ΔΕ μέ ὑστέρηση* (*delay differential equations*), εἶναι οἱ ἐξισώσεις στίς ὁποῖες ὁ ρυθμός μεταβολῆς τῆς ζητουμένης συναρτήσεως, δίδεται συναρτήσει τιμῶν αὐτῆς σέ προηγούμενη ἤ προηγούμενες χρονικές στιγμές. Ἐνδέχεται δέ νά ἐμφανίζονται καί μερικές παράγωγοι τῆς ζητουμένης.

t Ἡ μεταβλητή, ἡ ὁποία εἶναι πραγματική.
Θά τήν καλοῦμε *χρόνο*.

x Ἡ *ζητουμένη συνάρτηση* ἤ ἡ *λύση* τῆς ΣΔΕ
ἡ ὁποία δύναται νά εἶναι βαθμωτή ἤ διανυσματική.
Ἀποτελεῖ συνάρτηση τοῦ χρόνου.

f Ἡ *ροή* (*flux*) τῆς ΣΔΕ ἤ ἡ *συνάρτηση ροῆς*
ἡ ὁποία ἐπίσης δύναται νά εἶναι βαθμωτή ἤ διανυσματική.
Ροή καλεῖται καί ἡ συνάρτηση f στήν ἐξίσωση
$x^{(n)} = f\big(t, x^{(0)}, \ldots, x^{(n-1)}\big)$.

Παρατήρηση. Οἱ τιμές τίς ὁποῖες λαμβάνουν ἡ ζητουμένη συνάρτηση, καθώς καί ἡ συνάρτηση ροῆς εἶναι, στό μέγιστο μέρος τοῦ ἐγχειριδίου, πραγματικές ἤ πραγματικά διανύσματα. Περιστασιακῶς, καί ἰδιαιτέρως στά *Κεφάλαια 5* καί *8*, θά μελετηθοῦν ἐξισώσεις ὅπου τόσο ἡ ζητουμένη συνάρτηση ὅσο καί ἡ συνάρτηση ροῆς λαμβάνουν ὡς τιμές μιγαδικούς ἀριθμούς, ἤ γενικότερα, μιγαδικά διανύσματα.

1.4.1 Τάξη

Ὁρισμός 1.4.1. *Τάξη* (order) *μιᾶς συνήθους διαφορικῆς ἐξισώσεως εἶναι ἡ τάξη τῆς ὑψηλοτέρας παραγώγου τῆς ζητουμένης συναρτήσεως ἡ ὁποία ἐμφανίζεται στήν ἐξίσωση.*

Παραδείγματα

$F(t, x, x') = 0, \quad x' = f(t, x).$ Πρώτης τάξεως.

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x. \end{cases}$$ Σύστημα πρώτης τάξεως.

$x'' = f(x, x'), \quad x'' + \omega^2 x = 0, \quad \ddot{\boldsymbol{r}} = -\dfrac{GM}{r^3}\boldsymbol{r}.$ Δευτέρας τάξεως.

$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \cdots + a_0 x = b.$ $n-$στῆς τάξεως.

1.4.2 Γραμμικότης

Ὁρισμός 1.4.2. *Ἡ συνήθης διαφορική ἐξίσωση*

$$F\left(t, x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}\right) = 0,$$

ὀνομάζεται γραμμική (linear), *ἄν ἡ F εἶναι τῆς μορφῆς:*

$$F = \alpha_n(t)\, x^{(n)} + \cdots + \alpha_1(t)\, x^{(1)} + \alpha_0(t)\, x^{(0)} + \beta(t).$$

Ἡ συνηθέστερη γραφή τῶν γραμμικῶν ἐξισώσεων εἶναι:

$$p_n(t)\,x^{(n)} + \cdots + p_1(t)\,x^{(1)} + p_0(t)\,x^{(0)} \;=\; q(t),$$

ἤ ἰσοδύναμα

$$\sum_{k=0}^{n} p_k(t)\,x^{(k)} \;=\; q(t),$$

ὅπου $p_n(t) \not\equiv 0$. Οἱ συναρτήσεις p_k ὀνομάζονται *συντελεστές τῆς ἐξισώσεως*, ἐνῶ ἡ συνάρτηση q ὀνομάζεται *μή ὁμοιογενής ὅρος*. Ἄν ἡ συνάρτηση q εἶναι ταυτοτικῶς μηδενική, τότε ἡ ἐξίσωση ὀνομάζεται *ὁμοιογενής*, ἐνῶ στήν περίπτωση κατά τήν ὁποία $q(t) \not\equiv 0$, ἡ ἐξίσωση ὀνομάζεται *μή ὁμοιογενής*[49].

Ἡ γενικότερη δυνατή μορφή μιᾶς γραμμικῆς συνήθους διαφορικῆς ἐξισώσεως εἶναι:

$$P_n(t)\,\boldsymbol{x}^{(n)} + P_{n-1}(t)\,\boldsymbol{x}^{(n-1)} + \cdots + P_1(t)\,\boldsymbol{x}^{(1)} + P_0(t)\,\boldsymbol{x}^{(0)} \;=\; \boldsymbol{q}(t),$$

ὅπου οἱ συντελεστές ἀποτελοῦν πίνακες, $P_k \in \mathbb{R}^{M\times N}$, ἐνῶ ὁ μή ὁμοιογενής ὅρος καί ἡ ζητουμένη συνάρτηση εἶναι διανύσματα, $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^M$ καί $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N$. Ἡ μορφή ὅμως αὐτή δέν θά μᾶς ἀπασχολήσει ἐπί τοῦ παρόντος. Γιά λόγους οἰκονομίας συμβόλων, οἱ γραμμικές ἐξισώσεις γράφονται καί ὡς:

$$\mathcal{L}x \;=\; q(t), \tag{1.8}$$

[49] Σχεδόν στό σύνολο τῆς ἑλληνικῆς βιβλιογραφίας τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων, ὁ ἑλληνικῆς προελεύσεως διεθνής ἐπιστημονικός ὅρος *homogeneous* ἀποδίδεται διά τοῦ ὅρου *«ὁμογενής»* (ἤτοι: *ὁ καταγόμενος ἀπό τό ἴδιον γένος*), ἀντί τοῦ ὅρου *«ὁμοιογενής»* (ἤτοι: *ὁ ἀποτελούμενος ἀπό ὅμοια στοιχεῖα*). Ἀμφότερες οἱ ἑρμηνεῖες ἐλήφθησαν ἀπό τό *Λεξικό τῆς Νέας Ἑλληνικῆς Γλώσσας* τοῦ Γ. Μπαμπινιώτη. Ὁ ὅρος αὐτός ἀποτελεῖ ἀπόδοση τοῦ διεθνοῦς ὅρου *homogeneous*. Παρά τό γεγονός ὅτι δέν ἀποτελεῖ στόχο τοῦ ἀνά χεῖρας ἐγχειριδίου ἡ εἰς βάθος ἀναθεώρηση τῆς ὁρολογίας, κάποιες τροποποιήσεις οἱ ὁποῖες ἀποδίδουν ἐπιτυχέστερα τίς ἔννοιες, τίς καθιστοῦν εὐληπτότερες καί περιορίζουν τίς συγχύσεις, εἶναι ἀπαραίτητες. Ἱστορικά ὁ ὅρος *ὁμογενής* ἐμφανίζεται μέ μαθηματικά συμφραζόμενα στά *Στοιχεῖα* τοῦ Εὐκλείδου, ὅπου ὁμιλεῖ περί λόγων ὁμογενῶν μεγεθῶν (μῆκος ἀνά μῆκος, ἐμβαδόν ἀνά ἐμβαδόν, ὄγκος ἀνά ὄγκο). Τό δέ *ὅμοιο*, ὡς πρόθεμα ἤ ὡς ἐπίθετο, γιά παράδειγμα στήν περίπτωση τῆς *ὁμοιότητος τριγώνων*, σημαίνει ὅτι τά τρίγωνα αὐτά ἔχουν σταθερούς λόγους ἀντιστοίχων πλευρῶν. Γενικότερα δύο γεωμετρικά σχήματα καλοῦνται ὅμοια ἄν τό ἕνα ἀποτελεῖ σμίκρυνση ἤ μεγέθυνση τοῦ ἄλλου. Οἱ ἐξισώσεις περί ὧν ὁ λόγος, χαρακτηρίζονται ἀπό τήν ἰδιότητα ὅτι: *Ὁποτεδήποτε ἡ φ ἀποτελεῖ λύση αὐτῶν καί c σταθερά, τότε καί ἡ $c\varphi$ ἀποτελεῖ ἐπίσης λύση.* Ἡ $c\varphi$ ὅμως ἀποτελεῖ *μεγέθυνση* (ἤ *σμίκρυνση*) τῆς φ. Ὡς ἐκ τούτου, γιά κάθε συνάρτηση τήν ὁποία περιέχει ὁ χῶρος λύσεων τῶν ἐξισώσεων αὐτῶν, περιέχει καί ὅλες τίς *ὅμοιες* αὐτῆς. Ἐπίσης ἀναφέρομε ὅτι ὁ ὅρος *homogeneous*, ὁ ὁποῖος ἐμφανίζεται καί στήν Χημεία ὡς χαρακτηρισμός μειγμάτων καί γενικότερα ὑλικῶν, ἔχει ἀποδοθεῖ ἀπό Ἕλληνες φυσικούς καί χημικούς ὡς *ὁμοιογενής*. Τό ἴδιο συμβαίνει καί μέ τήν Κοινωνιολογία ὅπου ὁ ὅρος *homogeneous population* ἀποδίδεται ὡς *ὁμοιογενής πληθυσμός*. Ὁμοιογενεῖς (καί ὄχι ὁμογενεῖς) χαρακτηρίζονται ἐνίοτε καί πληθυσμιακές ὁμάδες. Θά πρέπει τέλος νά λεχθεῖ, ὅτι στήν νεοελληνική, οἱ ὅροι *ὁμογενής* καί *ὁμογένεια* (= ἴδιον γένος, ἐθνική προέλευση), χρησιμοποιοῦνται κυρίως σέ σχέση μέ τόν ἑλληνισμό τῆς διασπορᾶς. Συνεπῶς, λόγῳ τῶν ἀνωτέρω, χρησιμοποιοῦμε στό ἀνά χεῖρας τούς ὅρους *ὁμοιογενής* καί *ὁμοιογένεια*.

ὅπου

$$\mathcal{L} = p_n(t)D^n + p_{n-1}(t)D^{n-1} + \cdots + p_1(t)D + p_0(t)$$

καί $D = d/dt$. Τό ἀνωτέρω σύμβολο $\mathcal{L}$ ὀνομάζεται *γραμμικός συνήθης διαφορικός τελεστής*. Ἀποτελεῖ μία γραμμική ἀπεικόνιση μεταξύ χώρων συναρτήσεων. Ἡ σημασία τῆς γραμμικότητος φαίνεται στά κάτωθι ἀποτελέσματα:

Πρόταση 1.4.1. *Ἄν οἱ φ_1, $\varphi_2, \ldots, \varphi_m$ εἶναι n φορές διαφορίσιμες συναρτήσεις, τότε*

$$\mathcal{L}[c_1\varphi_1 + \cdots + c_m\varphi_m] = c_1\mathcal{L}[\varphi_1] + \cdots + c_m\mathcal{L}[\varphi_m],$$

γιά κάθε c_1, c_2, ..., c_m στό $\mathbb{R}$. □[50]

Ἄμεση συνέπεια τῆς ἀνωτέρω εἶναι:

Πόρισμα 1.4.2. *Ἄν οἱ συναρτήσεις $\varphi_1,\ldots,\varphi_m$, ἱκανοποιοῦν τήν γραμμική ἐξίσωση*

$$\mathcal{L}x = 0 \tag{1.9}$$

καί $c_1, c_2, \ldots, c_m$ σταθερές, τότε καί ἡ $\varphi = c_1\varphi_1 + \cdots + c_m\varphi_m$ τήν ἱκανοποιεῖ ἐπίσης. □

Ὅπως θά δοῦμε ἀργότερα, μετά τόν ὁρισμό τῆς λύσεως, τό ἀνωτέρω πόρισμα μᾶς παρέχει ὅτι: *Ἄν X τό σύνολο τῶν λύσεων τῆς (1.9), τότε τό X ἀποτελεῖ γραμμικό χῶρο.*

Στήν περίπτωση δέ τῶν μή ὁμοιογενῶν ἐξισώσεων ἔχομε:

Πόρισμα 1.4.3. *Ἄν ἡ φ_0 ἱκανοποιεῖ τήν (1.8), τότε κάθε ἄλλη συνάρτηση ἡ ὁποία ἱκανοποιεῖ τήν (1.8) εἶναι τῆς μορφῆς $\varphi_0 + \varphi$ ὅπου $\varphi \in X$ καί X τό σύνολο τῶν συναρτήσεων οἱ ὁποῖες ἱκανοποιοῦν τήν (1.9).* □

1.4.3 Βαθμωτές ἐξισώσεις καί συστήματα

Ἡ συνήθης διαφορική ἐξίσωση

$$x' = f(t, x),$$

καλεῖται *βαθμωτή* (*scalar*), ὅταν ἡ ζητουμένη συνάρτηση x, καθώς καί ἡ συνάρτηση ροῆς f, λαμβάνουν πραγματικές τιμές. Βαθμωτή εἶναι καί ἡ $n-$στῆς τάξεως ἐξίσωση

$$x^{(n)} = g\big(t, x^{(0)}, \ldots, x^{(n-1)}\big),$$

[50]Τό σύμβολο □ εἰσήχθη ἀπό τόν Οὖγγρο μαθηματικό Paul R. Halmos (1914–) καί σηματοδοτεῖ τό πέρας μαθηματικῶν ἀποδείξεων. Εἶναι ἀξιοσημείωτο ὅτι ὁ Halmos σέ ἐκδήλωση μετριοφροσύνης ἔγραψε στό αὐτοβιογραφικό του ἔργο, *I have a photographic memory* [25], ὅτι ἡ εἰσαγωγή τοῦ συμβόλου αὐτοῦ ὑπῆρξε ἡ σημαντικότερη συνεισφορά του στά Μαθηματικά.

ὅπου οἱ x καί g λαμβάνουν πραγματικές τιμές. Ἐνῶ οἱ ἐξισώσεις:

$$\begin{cases} x' &= f(t,x,y), \\ y' &= g(t,x,y), \end{cases}$$

ἀποτελοῦν *σύστημα* (*system*) συνήθων διαφορικῶν ἐξισώσεων. Συγκεκριμένα, σύστημα δύο ἐξισώσεων μέ δύο ἄγνωστες συναρτήσεις, ἤ σύστημα 2×2. Γενικότερα οἱ ἐξισώσεις:

$$\begin{cases} x_1' &= f_1(t,x_1,\ldots,x_N), \\ x_2' &= f_2(t,x_1,\ldots,x_N), \\ &\vdots \\ x_N' &= f_N(t,x_1,\ldots,x_N), \end{cases}$$

ἤ συντομογραφικῶς

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}),$$

ὅπου

$$\boldsymbol{x} = (x_1,x_2,\ldots,x_N), \quad \boldsymbol{f} = (f_1,f_2,\ldots,f_N),$$

ἀποτελοῦν σύστημα N ἐξισώσεων μέ N ἄγνωστες συναρτήσεις, ἤ σύστημα $N\times N$.

1.4.4 Γραμμικά συστήματα

Ἰδιαίτερο ἐνδιαφέρον παρουσιάζουν τά *γραμμικά συστήματα*. Ἦτοι, συστήματα τῆς μορφῆς

$$\begin{cases} x_1' &= a_{11}(t)\,x_1 + \cdots + a_{1N}(t)\,x_N + b_1(t), \\ x_2' &= a_{21}(t)\,x_1 + \cdots + a_{2N}(t)\,x_N + b_2(t), \\ &\vdots \\ x_N' &= a_{N1}(t)\,x_1 + \cdots + a_{NN}(t)\,x_N + b_N(t), \end{cases}$$

τῶν ὁποίων ἡ γραφή, μέσῳ συμβολισμοῦ διανυσμάτων, ἁπλουστεύεται ὡς

$$\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t), \tag{1.10}$$

ὅπου $\boldsymbol{x}$ καί $\boldsymbol{b}$ τά διανύσματα στῆλες

$$\boldsymbol{x} = (x_1,\ldots,x_N)^T, \quad \boldsymbol{b}(t) = \big(b_1(t),\ldots,b_N(t)\big)^T$$

καί $A(t) = \big(a_{ij}(t)\big)_{i,j=1,\ldots,N}$. Τό διάνυσμα $\boldsymbol{b}$ ὀνομάζεται *μή ὁμοιογενής ὅρος*. Ἰδιαιτέρως στήν περίπτωση ὅπου $\boldsymbol{b}\equiv\boldsymbol{0}$, τό ἀνωτέρω σύστημα ὀνομάζεται *ὁμοιογενές*, ἐνῶ στήν ἀντίθετη περίπτωση *μή ὁμοιογενές*. Ὁ πίνακας $A(t)$ εἶναι γνωστός ὡς *πίνακας τῶν συντελεστῶν*. Εἰδικότερα ὅταν οἱ συντελεστές τοῦ συστήματος $a_{ij}(t)$ εἶναι σταθερές συναρτήσεις, τότε ἔχομε ἕνα *σύστημα σταθερῶν συντελεστῶν*. Ἡ γραμμικότης τοῦ συστήματος (1.10) μᾶς ἐπιτρέπει διατύπωση προτάσεων ἀναλόγων τῶν 1.4.1, 1.4.2 καί 1.4.3.

1.4.5 Αὐτόνομες ἐξισώσεις

Ὁρισμός 1.4.3. *Μία συνήθης διαφορική ἐξίσωση ὀνομάζεται αὐτόνομη (autonomous), ἄν ἡ συνάρτηση ροῆς δέν ἐξαρτᾶται ἀπό τήν μεταβλητή t.*

Γιά παράδειγμα οἱ ἐξισώσεις

$$x' = f(x), \qquad x'' = g(x, x'), \qquad x''' = h(x, x', x''),$$

εἶναι αὐτόνομες, ὅπως ἐπίσης καί τό σύστημα

$$\begin{cases} x' = f(x, y), \\ y' = g(x, y), \end{cases}$$

εἶναι αὐτόνομο, ἐνῶ οἱ ἐξισώσεις

$$x' = g(t), \quad \alpha x'' + \beta x' + \gamma x = \sin \omega t,$$

δέν εἶναι. Χαρακτηριστική ἰδιότης τῶν αὐτονόμων ἐξισώσεων εἶναι ἡ ἑξῆς:

Πρόταση 1.4.4. *Ἄν ἡ συνάρτηση $\varphi = \varphi(t)$ ἱκανοποιεῖ τήν ἐξίσωση $x' = f(x)$, τότε τό ἴδιο ἰσχύει καί γιά τήν $\psi(t) = \varphi(t + \tau)$, γιά κάθε $\tau \in \mathbb{R}$.* □

Κάθε μή αὐτόνομη ἐξίσωση, ἤ μή αὐτόνομο σύστημα, δύνανται νά καταστοῦν αὐτόνομα μέ τήν προσθήκη μιᾶς ἐπί πλέον διαστάσεως. Συγκεκριμένα, ἡ ἐξίσωση

$$x' = f(t, x), \tag{1.11}$$

καθίσταται *ἰσοδύναμη* μέ τό σύστημα

$$\begin{cases} T' = 1, \\ X' = f(T, X), \end{cases} \tag{1.12}$$

τό ὁποῖο εἶναι βεβαίως αὐτόνομο. Ἐδῶ *ἰσοδύναμη* σημαίνει ὅτι:

(i) *Ἄν ἡ συνάρτηση $\varphi : I \to \mathbb{R}$, ἱκανοποιεῖ τήν* (1.11), *τότε τό ζεῦγος συναρτήσεων $\big(t, \varphi(t)\big) : I \to \mathbb{R}^2$ ἱκανοποιεῖ τό σύστημα* (1.12).

Ἀντιστρόφως:

(ii) *Ἄν $\big(\tau(t), \psi(t)\big) : I \to \mathbb{R}^2$, ἱκανοποιεῖ τήν* (1.12), *τότε $\tau(t) = t + c$, γιά κάποια σταθερά c, ὁπότε $\psi'(t) = f\big(t + c, \psi(t)\big)$ καί ἄρα ἡ $\varphi(t) = \psi(t - c)$ ἱκανοποιεῖ τήν* (1.11).

Γενικότερα ἰσχύει ὅτι:

Πρόταση 1.4.5. *Τό $N-$διάστατο μή αὐτόνομο σύστημα*

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}),$$

ὅπου $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^N$, εἶναι ἰσοδύναμο μέ ἕνα αὐτόνομο $N+1-$διάστατο σύστημα στό ὁποῖο ὁ χρόνος ἀποτελεῖ ἐπί πλέον συνιστῶσα τῆς ζητουμένης συναρτήσεως. Ἤτοι:

$$\begin{cases} T' = 1, \\ \boldsymbol{X}' = \boldsymbol{f}(T, \boldsymbol{X}). \end{cases}$$

Απόδειξη. Βλέπε *Ἄσκηση* 1.5.3 στήν σελίδα 35. □

᾿Ασκήσεις

1.4.1 Ποία γενική μορφή ἔχει μία δευτέρας τάξεως βαθμωτή, συνήθης διαφορική ἐξίσωση;

1.4.2 Ποία γενική μορφή ἔχει μία δευτέρας τάξεως βαθμωτή, γραμμική, συνήθης διαφορική ἐξίσωση;

1.4.3 Ποία γενική μορφή ἔχει μία τρίτης τάξεως βαθμωτή, αὐτόνομη, συνήθης διαφορική ἐξίσωση;

1.4.4 Νά ἀποδειχθεῖ ἡ *Πρόταση 1.4.4*.

1.4.5 Νά διατυπωθεῖ καί νά ἀποδειχθεῖ κατάλληλη γενίκευση τῆς *Προτάσεως 1.5.1* στήν ὁποία ἀντί $n-$στῆς τάξεως βαθμωτή ἔχομε $n-$στῆς τάξεως σύστημα $N \times N$ καί αὐτό καθίσταται ἰσοδύναμο μέ πρώτης τάξεως $nN \times nN$ σύστημα.

1.4.6* Εἶναι ἄραγε δυνατόν ἕνα $N \times N$ αὐτόνομο σύστημα, $(N > 1)$, νά καταστεῖ ἰσοδύναμο μέ ἕνα μή αὐτόνομο σύστημα $(N-1) \times (N-1)$;

1.5 Προβλήματα ἀρχικῶν τιμῶν

Στό ὑπόλοιπο τοῦ ἐγχειριδίου, θά μᾶς ἀπασχολήσουν κυρίως οἱ ἀκόλουθες μορφές συνήθων διαφορικῶν ἐξισώσεων:

(i) $\quad x' = f(t, x), \quad x, f \in \mathbb{R}$. Βαθμωτή πρώτης τάξεως.

(ii) $\quad \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x}, \boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^N$. Σύστημα πρώτης τάξεως.

(iii) $\quad x^{(n)} = f\left(t, x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(n-1)}\right)$. Βαθμωτή $n-$στῆς τάξεως.

Παρατηρήσεις

(i) Σημειωτέον ὅτι ἡ μορφή (i) ἀποτελεῖ ταυτοχρόνως εἰδική περίπτωση τῶν (ii) καί (iii).

(ii) Ἡ μορφή (iii) δύναται νά γενικευθεῖ περαιτέρω, ἄν τά x καί f καταστοῦν διανύσματα ὁπότε ἔχομε σύστημα $n-$στῆς τάξεως. Μέ κατάλληλη διαδικασία, ἀνάλογη αὐτῆς ἡ ὁποία ἐφηρμόσθη στήν *Πρόταση 1.5.1*, καί αὐτή ἡ περίπτωση ἀνάγεται σέ σύστημα πρώτης τάξεως (βλέπε *Ἄσκηση* 1.4.5 στήν σελίδα 27).

(iii) Περιστασιακῶς θά μελετηθοῦν συνήθεις διαφορικές ἐξισώσεις στίς ὁποῖες τά x, f ἀνήκουν στό $\mathbb{C}$ ἤ γενικότερα $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f} \in \mathbb{C}^N$.

1.5.1 Ὁρισμός λύσεως

Ὁρισμός 1.5.1. *Ἔστω $f : D \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, ὅπου D ἀνοικτό ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}^2$. Ἡ συνάρτηση φ ἀποτελεῖ λύση (solution) τῆς ἐξισώσεως*

$$x' = f(t, x),$$

ἄν ἔχει πεδίο ὁρισμοῦ ἕνα μή κενό ἀνοικτό διάστημα I, ἐπί τοῦ ὁποίου εἶναι συνεχῶς διαφορίσιμη καί ἱκανοποιοῦνται τά ἀκόλουθα:

(*i*) *Γιά κάθε $t \in I$ ἰσχύει ὅτι $\big(t, \varphi(t)\big) \in D$ καί*

(*ii*) $\varphi'(t) = f\big(t, \varphi(t)\big)$ *γιά κάθε $t \in I$.*

Παρατηρήσεις

(i) Ἡ πρώτη ἀπαίτηση τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ εἶναι ἀπαραίτητη γιά νά δύναται νά ὁρισθεῖ τό $f\big(t, \varphi(t)\big)$. Ἡ ἀπαίτηση αὐτή ἐνίοτε παραλείπεται ὡς αὐτονόητη.

(ii) Τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς λύσεως μιας συνήθους διαφορικῆς ἐξισώσεως ἀποτελεῖ *ὑποχρεωτικῶς* διάστημα. Ὁποτεδήποτε δέν διευκρινίζεται τό εἶδος τοῦ διαστήματος, τότε θά ὑποθέτομε αὐτομάτως ὅτι εἶναι ἀνοικτό. Ὡστόσο ὁρίζονται λύσεις καί σέ κλειστά ἤ ἡμιανοικτά διαστήματα. Ἀξίζει νά σημειωθεῖ ὅτι ἡ $\varphi(t) = t^{-1}$ ἀποτελεῖ λύση τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως $x' = -x^2$, σέ ὁποιοδήποτε διάστημα τό ὁποῖο εἶναι ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}^+$ ἤ $\mathbb{R}^-$. Δέν δυνάμεθα ὅμως νά ὁμιλοῦμε γιά λύση στό $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Σ' ὅλες τίς μορφές διαφορικῶν ἐξισώσεων, συνήθων ἤ μή, τό πεδίο ὁρισμοῦ ἀποτελεῖ ὑποχρεωτικῶς ἕνα *συνεκτικό* σύνολο, διότι μία διαφορική ἐξίσωση περιγράφει τρόπο διαδόσεως πληροφοριῶν καί ὡς ἐκ τούτου δέν ἐπιτρέπονται οἱ διακοπές.

(iii) Ὁρισμός λύσεως δύναται βεβαίως νά δοθεῖ καί στήν περίπτωση συστημάτων καθώς καί ἐξισώσεων ἀνωτέρας τάξεως. (Βλέπε *Ἄσκηση* 1.5.1 ἡ ὁποιά ἀκολουθεῖ.)

Παράδειγμα.

Πρόβλημα. *Ἡ περιουσία κάποιου ἀνθρώπου μεταβάλλεται μέ ρυθμό ἀνάλογο τοῦ τετραγώνου τῆς ἑκάστοτε ἀξίας της. Ἄν πρό ἑνός ἔτους ἡ περιουσία αὐτή ἄξιζε 1000 λίρες καί σήμερα ἀξίζει 2000 λίρες, τότε πόσο θά ἀξίζει μετά ἀπό ἕξη μῆνες καί πόσο μετά ἀπό δεκαοκτώ μῆνες.*

Απάντηση. Ἡ ἀξία τῆς ἐν λόγῳ περιουσίας ἱκανοποιεῖ τήν διαφορική ἐξίσωση

$$x' = \kappa x^2, \tag{1.13i}$$

ὅπου κ θετική σταθερά. Ἄν ὑποθέσομε ὅτι ὁ χρόνος μετρᾶται σέ ἔτη καί τό x σέ λίρες, τότε ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωση θά συνοδεύεται ἀπό τίς συνθῆκες

$$x(-1) = 1000 \qquad \text{καί} \qquad x(0) = 2000. \tag{1.13ii}$$

Χρησιμοποιῶντας μέσα, τά ὁποῖα θά ἀναπτύξομε ἀναλυτικότερα στό *Κεφάλαιο 2*, προκύπτει ὅτι ἡ ἡ συνάρτηση

$$x(t) = \frac{2000}{1-t},$$

ἱκανοποιεῖ τίς (1.13i)–(1.13ii). Στήν ἐρώτηση *τί συμβαίνει μετά ἀπό 0.5 καί 1.5 χρόνια*, χρησιμοποιῶντας τόν ἀνωτέρω τύπο λαμβάνομε:

$$x(0.5) = 4000 \qquad \text{καί} \qquad x(1.5) = -4000.$$

Αὐτό βεβαίως δέν δύναται νά εἶναι ὀρθό, ἀφοῦ πῶς εἶναι δυνατόν ἡ περιουσία ἐνῶ αὐξάνεται ξαφνικά νά ἀποκτήσει ἀρνητική τιμή!

Δέν ἔχομε λάβει ἀνωτέρω ὑπ' ὄψη ὅτι ἡ λύση μιᾶς συνήθους διαφορικῆς ἐξισώσεως ἔχει ὡς πεδίο ὁρισμοῦ ἕνα διάστημα. Γενικότερα ἡ λύση μιας διαφορικῆς ἐξισώσεως, μερικῆς ἤ συνήθους, ἔχει ὡς πεδίο ὁρισμοῦ ἕνα συνεκτικό σύνολο. Εἰδικότερα ὅμως μία συνήθης διαφορική ἐξίσωση περιγράφει τρόπο διαδόσεως κάποιας πληροφορίας. Ἡ πληροφορία δέν εἶναι δυνατόν νά πηδᾶ ἀπό τό ἕνα διάστημα στό ἄλλο. Στό συγκεκριμένο παράδειγμα ἡ συνάρτηση

$$\varphi(t) = \frac{2000}{1-t},$$

ὡς λύση συνήθους διαφορικῆς ἐξισώσεως, δύναται νά ὁρίζεται εἴτε στό διάστημα $(-\infty, 1)$ εἴτε στό διάστημα $(1, \infty)$ καί λόγῳ τῶν λοιπῶν δεδομένων (1.13ii), ἐπιλέγεται ὑποχρεωτικῶς τό πρῶτο διάστημα. Στήν ἐρώτηση λοιπόν: *Μέ τί ἰσοῦται ἡ περιουσία μετά ἀπό δεκαοκτώ μῆνες;* Ἡ ἀπάντηση εἶναι ὅτι: *Τά δεδομένα τοῦ προβλήματος δέν ἐπιτρέπουν στήν περιουσία νά ὁρίζεται πέραν τοῦ ἑνός ἔτους ἀπό σήμερα* ἤ ὅτι: *Τό συγκεκριμένο μοντέλο περιγραφῆς τῆς περιουσίας δέν δύναται νά ἔχει ἔννοια γιά $t \geq 1$.*

1.5.2 Ἰσοδυναμία βαθμωτῶν ἐξισώσεων $n-$στῆς τάξεως μέ κατάλληλα συστήματα πρώτης τάξεως

Οἱ $n-$στῆς τάξεως βαθμωτές συνήθεις διαφορικές ἐξισώσεις δύνανται νά καταστοῦν ἰσοδύναμες μέ συστήματα $n \times n$ πρώτης τάξεως. Ἄς τό δοῦμε κατ' ἀρχάς στό κατωτέρω παράδειγμα:

$$x'' = x, \tag{1.14}$$

ὅπου, ἄν ἡ $\varphi : I \to \mathbb{R}$, εἶναι δίς διαφορίσιμη συνάρτηση στό I ἀνοικτό διάστημα, ἡ ὁποία ἀποτελεῖ λύση τῆς (1.14) καί ὁρίσομε τίς φ_1 καί φ_2 ὡς

$$\varphi_1 = \varphi, \quad \varphi_2 = \varphi',$$

τότε

$$\begin{aligned} \varphi_1' &= \varphi' \;=\; \varphi_2, \\ \varphi_2' &= \varphi'' \;=\; \varphi \;=\; \varphi_1. \end{aligned}$$

Ἤτοι, τό ζεῦγος (φ_1, φ_2) ἀποτελεῖ λύση τοῦ συστήματος

$$\begin{cases} x_1' \;=\; x_2, \\ x_2' \;=\; x_1. \end{cases} \tag{1.15}$$

Ἰσχύει καί τό ἀντίστροφο:

Ἄν τό ζεῦγος συναρτήσεων (ψ_1, ψ_2) *ἀποτελεῖ λύση τοῦ συστήματος* (1.15) *καί θέσομε* $\psi = \psi_1$, *τότε* $\psi_1' = \psi_2$, ψ_2 *διαφορίσιμη, ἄρα* ψ_1 *δίς διαφορίσιμη καί* $\psi'' = \psi_1'' = \psi_2' = \psi_1 = \psi$. *Ἄρα ἡ* ψ *ἀποτελεῖ λύση τῆς ἐξισώσεως* $x'' = x$.

Γενικότερα ἰσχύει ὅτι:

Πρόταση 1.5.1. *Ἄν ἡ* $\varphi : I \to \mathbb{R}$, *ὅπου* I *ἀνοικτό διάστημα, λύση τῆς ἐξισώσεως* $n-$*στῆς τάξεως*

$$x^{(n)} \;=\; f\big(t, x^{(0)}, \dots, x^{(n-1)}\big) \tag{1.16}$$

καί

$$\varphi_1 = \varphi,\ \varphi_2 = \varphi', \dots, \varphi_n = \varphi^{(n-1)},$$

τότε ἡ $n-$*άδα* $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ *ἀποτελεῖ λύση τοῦ συστήματος ἐξισώσεων*

$$\begin{cases} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= x_3, \\ & \vdots \\ x_{n-1}' &= x_n, \\ x_n' &= f(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases} \tag{1.17}$$

Ἀντιστρόφως, ἄν ἡ $n-$*άδα* $\psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)$, $\psi_k \in C^1(I)$, *γιά* $k = 1, \dots, n$, *ἀποτελεῖ λύση τοῦ συστήματος ἐξισώσεων* (1.17), *τότε ἡ πρώτη της συνιστῶσα,* $\psi = \psi_1$, *ἀποτελεῖ λύση τῆς ἐξισώσεως* (1.16). □

Ἡ ἀνωτέρω πρόταση μᾶς λέγει ὅτι οἱ (1.16) καί (1.17) εἶναι ἰσοδύναμες. Ἡ ἰσοδυναμία αὐτή πραγματοποιεῖται μέσῳ μιᾶς 1–1 καί ἐπί ἀντιστοιχίας τῶν λύσεων τῶν (1.16) καί (1.17). Κατ' ἀνάλογο τρόπο, ἕνα $n-$στῆς τάξεως σύστημα $N \times N$ καθίσταται ἰσοδύναμο μέ ἕνα σύστημα $nN \times nN$ πρώτης τάξεως (βλέπε *Ἄσκηση* 1.5.5 στήν σελίδα 35).

1.5.3 Γενική λύση

Μία συνήθης διαφορική ἐξίσωση ἔχει, ἐν γένει, ἄπειρες τό πλῆθος λύσεις. Γιά παράδειγμα ἡ ἐξίσωση

$$x' = x,$$

ἔχει ὡς λύσεις ὅλες τίς συναρτήσεις $\varphi(t) = c\,\mathrm{e}^t$, ὅπου $c \in \mathbb{R}$, ἐνῶ ἡ ἐξίσωση δευτέρας τάξεως

$$x'' = x,$$

ἔχει ὡς λύσεις της ὅλες τίς συναρτήσεις $\varphi(t) = c_1\,\mathrm{e}^t + c_2\,\mathrm{e}^{-t}$, ὅπου c_1, c_2 στό $\mathbb{R}$. Παρομοίως τό σύστημα συνήθων διαφορικῶν ἐξισώσεων

$$\begin{cases} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= x_1, \end{cases}$$

ἔχει ὡς λύσεις ὅλα τά ζεύγη συναρτήσεων $\boldsymbol{\varphi} = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ ὅπου

$$\varphi_1(t) = c_1\,\mathrm{e}^t + c_2\,\mathrm{e}^{-t}, \quad \varphi_2(t) = c_1\,\mathrm{e}^t - c_2\,\mathrm{e}^{-t},$$

γιά $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Οἱ λύσεις ἐνίοτε δίδονται ἐμμέσως ὅπως γιά παράδειγμα στήν περίπτωση τῆς ἐξισώσεως

$$x' = \frac{1+t^2}{1+x^2},$$

τῆς ὁποίας οἱ λύσεις δίδονται *ἐμμέσως* ἀπό τήν σχέση

$$x + \frac{1}{3}x^3 = t + \frac{1}{3}t^3 + c.$$

Στά προηγηθέντα παραδείγματα συνήθων διαφορικῶν ἐξισώσεων, εἴχαμε παραστάσεις στίς ὁποῖες περιελάμβανοντο ὅλες οἱ λύσεις αὐτῶν μέ τήν βοήθεια παραμέτρων. Εἴχαμε τίς *γενικές* τους λύσεις.

Ὁρισμός 1.5.2. *Γενική (general) λύση ἤ ἄλλως γενικό ὁλοκλήρωμα συνήθους διαφορικῆς ἐξισώσεως, καλεῖται μία παράσταση τῆς μορφῆς*

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{c}),$$

ἤ ἀκόμη γενικότερα τῆς μορφῆς

$$\boldsymbol{\Phi}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{c}) = 0,$$

ὅπου $\boldsymbol{c} = (c_1, \ldots, c_n)$, ἡ ὁποία περιλαμβάνει ὅλες τίς λύσεις τῆς ἐξισώσεως γιά τίς διάφορες τιμές τοῦ $\boldsymbol{c} \in \Omega$, ὅπου Ω ἀνοικτό ἐν γένει ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}^n$.

Εἰς ἀντιδιαστολή πρός τήν γενική λύση ἡ εἰδική (particular) λύση ἤ εἰδικό ὁλοκλήρωμα, ἀποτελεῖ λύση ἡ ὁποία προκύπτει ἀπό συγκεκριμένη τιμή τῆς παραμέτρου $\boldsymbol{c} = (c_1, \ldots, c_n)$.

Παρατήρηση. Ὁ ἀνωτέρω ὁρισμός δέν συνεπάγεται βεβαίως καί ὕπαρξη τέτοιας γενικῆς λύσεως. Ὅπως ὅμως θά φανεῖ ἀργότερα, ἄν ἡ συνάρτηση ροῆς εἶναι ἐπαρκῶς ὁμαλή, τότε πράγματι αὐτό εἶναι ἐφικτό.

1.5.4 Ἀρχικές συνθῆκες

Σ' ὅλα τά προηγηθέντα παραδείγματα, εἴδαμε ὅτι οἱ συνήθεις διαφορικές ἐξισώσεις ἔχουν ἄπειρες τό πλῆθος λύσεις. Ἡ μοναδικότης λύσεων ἐξασφαλίζεται μέ τήν προσθήκη κάποιων ἐπί πλέον συνθηκῶν. Μία κατηγορία τέτοιων συνθηκῶν εἶναι οἱ *ἀρχικές συνθῆκες*[51] (*initial conditions*), οἱ ὁποῖες ἔχουν τήν μορφή:

$$x(\tau) = \xi, \tag{1.18i}$$

ἄν ἡ ἐξίσωσή μας εἶναι βαθμωτή πρώτης τάξεως, ἤ τήν μορφή

$$x_1(\tau) = \xi_1,\, x_2(\tau) = \xi_2, \dots, x_N(\tau) = \xi_N, \quad \text{ἤ} \quad \boldsymbol{x}(\tau) = \boldsymbol{\xi}, \tag{1.18ii}$$

ἄν ἔχομε σύστημα πρώτης τάξεως ἤ τέλος τήν μορφή

$$x^{(0)}(\tau) = \xi_1,\, x^{(1)}(\tau) = \xi_2, \dots, x^{(n-1)}(\tau) = \xi_n, \tag{1.18iii}$$

ἄν ἔχομε $n-$στῆς τάξεως βαθμωτή συνήθη διαφορική ἐξίσωση.

Ἡ σύζευξη συνήθους διαφορικῆς ἐξισώσεως καί ἀρχικῆς συνθήκης (ἤ ἀρχικῶν συνθηκῶν), ὀνομάζεται *πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν* (*initial value problem*) ἤ *ΠΑΤ*. Ἔχει συνήθως μία ἀπό τίς κάτωθι μορφές:

(i) Βαθμωτή πρώτης τάξεως:

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(\tau) = \xi. \end{cases} \tag{1.19i}$$

(ii) Σύστημα πρώτης τάξεως:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}), \\ \boldsymbol{x}(\tau) = \boldsymbol{\xi}, \end{cases} \tag{1.19ii}$$

ὅπου $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, \dots, f_N)$ καί $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)$.

(iii) Βαθμωτή τάξεως n:

$$\begin{cases} x^{(n)} = f\big(t, x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(n-1)}\big) \\ x^{(0)}(\tau) = \xi_1,\; x^{(1)}(\tau) = \xi_2, \dots,\; x^{(n-1)}(\tau) = \xi_n. \end{cases} \tag{1.19iii}$$

Ἀπό τοῦδε καί εἰς τό ἑξῆς θά χρησιμοποιοῦμε γιά τά στοιχεῖα τῶν ἀρχικῶν συνθηκῶν τήν κάτωθι περιγραφή:

[51] Οἱ *ἀρχικές συνθῆκες* δέν ἐξασφαλίζουν πάντοτε τήν μοναδικότητα. Ὅπως θά δοῦμε ἀργότερα, γιά νά ἔχομε μοναδικότητα, χρειαζόμαστε κάποια ἐπί πλέον στοιχεῖα, ὅπως γιά παράδειγμα τήν ὁμαλότητα τῆς συναρτήσεως ροῆς.

τ	ἀρχικός χρόνος,
ξ ἤ $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$	ἀρχική τιμή (ἤ ἀρχικές τιμές),
(τ, ξ) ἤ $(\tau, \boldsymbol{\xi})$	ἀρχική συνθήκη (ἤ ἀρχικές συνθῆκες).

Ὁρισμός 1.5.3. *Ἔστω $f: D \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, ὅπου D ἀνοικτό ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}^2$ καί $(\tau, \xi) \in D$. Ἡ συνάρτηση φ ὀνομάζεται λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν $(1.19i)$, ἄν ὁρίζεται ἐπί ἀνοικτοῦ διαστήματος I, ἐπί τοῦ ὁποίου εἶναι συνεχῶς διαφορίσιμη καί ἐντός τοῦ ὁποίου βρίσκεται ὁ ἀρχικός χρόνος τ καί ἱκανοποιοῦνται ταυτοχρόνως τά ἀκόλουθα:*

(i) *Γιά κάθε $t \in I$ ἰσχύει ὅτι $\big(t, \varphi(t)\big) \in D$,*

(ii) $\varphi'(t) = f\big(t, \varphi(t)\big)$ *γιά κάθε $t \in I$ καί*

(iii) $\varphi(\tau) = \xi$.

Ἤτοι: *Ἡ φ εἶναι λύση τῆς συνήθους διαφορικῆς ἐξισώσεως καί ἱκανοποιεῖ τήν ἀρχική συνθήκη.*

Παρατήρηση. Ἄν ἡ $\varphi : I \to \mathbb{R}$ ἀποτελεῖ λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(\tau) = \xi, \end{cases}$$

καί $\tau^* \in I$, τότε ἡ φ ἀποτελεῖ καί λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(\tau^*) = \varphi(\tau^*). \end{cases}$$

Ἀποτελεῖ λοιπόν ἡ συγκεκριμένη συνάρτηση φ, λύση, ἀπείρων προβλημάτων ἀρχικῶν τιμῶν, τῆς ἰδίας συνήθους διαφορικῆς ἐξισώσεως.

1.5.5 Περίπτωση μιγαδικοῦ χρόνου*

Στό ἀνά χεῖρας ἐγχειρίδιο δέν θά μᾶς ἀπασχολήσει ἡ περίπτωση ὅπου ὁ χρόνος t εἶναι μιγαδικός. Παρά ταῦτα, ἡ περίπτωση αὐτή παρουσιάζει ἐνδιαφέρον καί ἀκολούθως θά δοῦμε σέ ποιά μορφή διατυπώνεται τό ἀντίστοιχο πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν. Ἔστω D ἀνοικτό ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{C}^2$ καί $f : D \to \mathbb{C}$ ἀναλυτική συνάρτηση ὡς πρός ἑκάστη τῶν δύο μεταβλητῶν της. Ἔστω $\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$, ἀναλυτική, ὅπου Ω ἀνοικτό ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{C}$. Ἡ φ ὀνομάζεται λύση τῆς *μιγαδικῆς συνήθους διαφορικῆς ἐξισώσεως*

$$\frac{dw}{dz} = f(z,w),$$

ἄν ἰσχύουν τά ἀκόλουθα δύο:

(i) $\big(z, \varphi(z)\big) \in D$ γιά κάθε $z \in \Omega$ καί

(ii) $\varphi'(z) = f\big(z, \varphi(z)\big)$ γιά κάθε $z \in \Omega$.

Στήν περίπτωση προβλημάτων ἀρχικῶν τιμῶν, ἡ ἀρχική συνθήκη (ζ, ω), θά πρέπει νά ἀποτελεῖ ἐσωτερικό σημεῖο τοῦ D. Ἡ δέ ἱκανοποίησή τῆς θά ἔχει τήν μορφή $\varphi(\zeta) = \omega$. Κατ' ἀναλογίαν δυνάμεθα ὁρίσομε λύση μιγαδικοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν στήν περίπτωση ἐξισώσεων $n-$στῆς τάξεως, καθώς καί συστημάτων.

Παραδείγματα

(i) Παρατηρῆστε ὅτι ἐνῶ, στήν πραγματική του ἐκδοχή, τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν:

$$\begin{cases} x' = x^2, \\ x(0) = 1, \end{cases}$$

ἔχει λύση $\varphi(t) = \dfrac{1}{1-t}$ μέ μέγιστο πεδίο ὁρισμοῦ τό $I = (-\infty, 1)$, τό ἀντίστοιχο μιγαδικό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν:

$$\begin{cases} \dfrac{dw}{dz} = w^2, \\ w(0) = 1, \end{cases}$$

ἔχει ὡς λύση τήν $\varphi(z) = \dfrac{1}{1-z}$ μέ πεδίο ὁρισμοῦ τώρα τό $\mathbb{C} \setminus \{1\}$!

(ii) Στήν περίπτωση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} \dfrac{dw}{dz} = \dfrac{1}{2w}, \\ w(1) = 1, \end{cases}$$

στήν μέν πραγματική ἐκδοχή αὐτό ἔχει ὡς λύση τήν

$$\varphi(t) = \sqrt{t},$$

ὁρισμένη στό $(0, \infty)$, τό ὁποῖο ἀποτελεῖ καί τό μέγιστο διάστημα στό ὁποῖο εἶναι ὁρίσιμη ὡς λύση. Στήν δέ μιγαδική του ἐκδοχή, ἔχει ὡς λύση κάποια *ἐπιφάνεια Riemann* καί συγκεκριμένα αὐτήν στήν ὁποία ὁρίζεται ἡ μιγαδική τετραγωνική ρίζα.

Ἀσκήσεις

1.5.1 Νά δοθοῦν ὁρισμοί τῶν λύσεων στίς περιπτώσεις (ii) καί (iii) τῆς σελίδος 27.

1.5.2 Νά δοθοῦν ὁρισμοί γιά τό τί εἶναι λύση τῶν προβλημάτων ἀρχικῶν τιμῶν (1.19ii) καί (1.19iii), ἀνωτέρω.

1.5.3 Νά ἀποδειχθεῖ ἡ *Πρόταση 1.4.5.*

Υποδειξη. Θά πρέπει νά δειχθεῖ ὅτι ὑπάρχει κατάλληλη 1–1 καί ἐπί ἀντιστοιχία μεταξύ τῶν λύσεων τῶν δύο συστημάτων.

1.5.4 Πῶς καθίσταται ἡ ἐξίσωση $x^{(3)} = x + 1$, ἰσοδύναμη μέ σύστημα πρώτης τάξεως;

1.5.5 Ἔστω $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ σταθερός πίνακας. Πῶς καθίσταται τό $n-$στῆς τάξεως $N\times N$ σύστημα $\boldsymbol{x}^{(n)} = A\boldsymbol{x}$ ἰσοδύναμο μέ $nN\times nN$ σύστημα πρώτης τάξεως;

1.5.6 (Συνέχεια) Νά γίνει τό ἴδιο γιά τήν ἐξίσωση

$$\boldsymbol{x}^{(n)} = \boldsymbol{f}\big(t, \boldsymbol{x}^{(0)}, \ldots, \boldsymbol{x}^{(n-1)}\big),$$

ὅπου $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^N$.

1.5.7 Νά ἀποδειχθεῖ ἡ *Πρόταση 1.5.1.*

1.5.8 Δείξατε ὅτι ἄν μία συνάρτηση $\varphi : I \to \mathbb{R}$, ἀποτελεῖ λύση τῆς ἐξισώσεως

$$x' = \alpha x + \beta,$$

ὅπου α, β σταθερές, τότε $\varphi \in C^\infty(I)$.[52]

1.5.9 Ἔστω ὅτι ἡ συνάρτηση ροῆς $f = f(t,x)$ εἶναι k φορές συνεχῶς διαφορίσιμη στό $D \subset \mathbb{R}^2$ καί φ ἀποτελεῖ λύση τῆς ἐξισώσεως $x' = f(t,x)$ στό I. Δείξατε ὅτι $\varphi \in C^{k+1}(I)$. Ἰδιαιτέρως ἄν $f \in C^\infty(D)$, τότε καί $\varphi \in C^\infty(I)$.

Υποδειξη. Εἶναι εὐκολότερο νά δειχθεῖ ἐπαγωγικῶς (μέ ἐπαγωγή ἐπί τοῦ k) κάτι γενικότερο: *Ἔστω ὅτι ἡ συνάρτηση ροῆς $f = f(t, x_1, \ldots, x_\ell)$ εἶναι k φορές συνεχῶς διαφορίσιμη στό $D \subset \mathbb{R}^{\ell+1}$ καί φ ἀποτελεῖ λύση τῆς ἐξισώσεως*

$$x^{(\ell)} = f\big(t, x, x', \ldots, x^{(\ell-1)}\big),$$

στό ἀνοικτό διάστημα I. Δείξατε ὅτι $\varphi \in C^{k+1}(I)$.

1.5.10 (Γενίκευση) Ἔστω ὅτι ἡ συνάρτηση ροῆς f εἶναι k φορές συνεχῶς διαφορίσιμη στό D καί φ ἀποτελεῖ λύση τοῦ (1.19iii) στό I. Δείξατε ὅτι $\varphi \in C^{k+n}(I)$. Ἰδιαιτέρως ἄν $f \in C^\infty(D)$, τότε καί $\varphi \in C^\infty(I)$.

1.5.11 Ἔστω ὅτι ἡ $\varphi : I \to \mathbb{R}$, ὅπου I ἀνοικτό διάστημα, ἀποτελεῖ λύση τῆς ἐξισώσεως $x' = \mathrm{e}^{-x^2}$. Δείξατε ὅτι $\varphi \in C^\infty(I)$.

---

[52] Ὑπενθυμίζομε ὅτι, ἄν Ω ἀνοικτό ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}^n$, τότε τό $C^k(\Omega)$ ἀποτελεῖ τό σύνολο ὅλων τῶν συναρτήσεων ἀπό τό Ω στό $\mathbb{R}$ (ἤ γενικότερα στό $\mathbb{R}^m$) μέ συνεχεῖς ὅλες τίς μερικές παραγώγους τάξεως ἕως καί $k-$στῆς, δηλαδή τίς $\dfrac{\partial^\alpha \partial^\beta f}{\partial t^\alpha \partial x^\beta}$, μέ $\alpha + \beta \le k$. Ἄν $\Omega = I$, ἀνοικτό διάστημα, ὁρίζομε κατ' ἀναλογίαν

$$C^k(I) = \Big\{ u : I \to \mathbb{R} \text{ συνάρτηση } : u^{(\ell)} \text{ συνεχής γιά κάθε } \ell = 1, \ldots, k \Big\},$$

ἐνῶ

$$C^\infty(I) = \Big\{ u : I \to \mathbb{R} \text{ συνάρτηση } : u^{(\ell)} \text{ συνεχής γιά κάθε } \ell \in \mathbb{N} \Big\}.$$

1.5.12 Ἔστω $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ λύση τῆς συνήθους διαφορικῆς ἐξισώσεως

$$x' = \sqrt{x^2 + t^2}.$$

Δείξατε ὅτι

$$\lim_{t\to-\infty} \varphi(t) = -\infty \quad \text{καί} \quad \lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = +\infty.$$

Υποδειξη. Παρατηρῆστε ὅτι $\varphi'(t) \geq 1$ ὁποτεδήποτε $|t| \geq 1$.

1.5.13 Νά διατυπωθεῖ ὁ ὁρισμός λύσεως προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν γιά τήν περίπτωση $n-$στῆς τάξεως βαθμωτῆς ἐξισώσεως, καθώς καί γιά τήν περίπτωση συστήματος πρώτης τάξεως.

1.5.14 Ἔστω $f : D \to \mathbb{R}$ συνεχής, ὅπου $D \subset \mathbb{R}^2$ ἀνοικτό. Ἄν I ἀνοικτό διάστημα καί φ, $\psi : I \to \mathbb{R}$ λύσεις τῆς ἐξισώσεως

$$x' = f(t, x),$$

δείξατε ὅτι ἡ συνάρτηση $\zeta(t) = \max\{\varphi(t), \psi(t)\}$ ἀποτελεῖ ἐπίσης λύση τῆς ἀνώτερω.

Υποδειξη. Ἔστω $t \in I$. Διακρίνατε δύο περιπτώσεις. [A] $\varphi(t) > \psi(t)$, ὁπότε $\zeta(s) = \varphi(s)$ σέ κατάλληλο ὑποδιάστημα τοῦ I πού περιέχει τό t. [B] $\varphi(t) = \psi(t)$, ὁπότε $\varphi'(t) = f\big(t, \varphi(t)\big) = f\big(t, \psi(t)\big) = \psi'(t)$. Χρησιμοποιῶντας τόν ἐψιλοντικό ὁρισμό τῆς παραγώγου δείξατε ὅτι ἡ ζ εἶναι διαφορίσιμη στό t.

1.5.15 Ἔστω $f : D \to \mathbb{R}$ συνεχής, ὅπου $D \subset \mathbb{R}^2$ ἀνοικτό καί φ, $\psi : [\tau, T] \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμες συναρτήσεις καί ἔστω ὅτι ἡ φ ἱκανοποιεῖ τήν διαφορική ἐξίσωση

$$\varphi'(t) = f\big(t, \varphi(t)\big), \quad t \in [\tau, T],$$

ἐνῶ ἡ ψ τήν διαφορική ἀνισότητα

$$\psi'(t) < f\big(t, \psi(t)\big), \quad t \in [\tau, T].$$

Ἄν ἐπί πλέον ἰσχύει ὅτι

$$\psi(\tau) < \varphi(\tau), \tag{1.20}$$

τότε δείξατε ὅτι

$$\psi(t) < \varphi(t),$$

γιά κάθε $t \in [\tau, T]$.

Υποδειξη. Σέ ἀντίθετη περίπτωση θά ὑπῆρχε $s \in (\tau, T]$ ὥστε $\psi(s) = \varphi(s)$ καί s ἐλάχιστο μέ τήν ἰδιότητα αὐτή. Ἄρα $\psi(t) < \varphi(t)$ γιά κάθε $t \in [\tau, s)$ καί ὡς ἐκ τούτου $\varphi'(s) \geq \psi'(s)$. Συνεπῶς θά εἴχαμε

$$f\big(s, \psi(s)\big) > \psi'(s) \geq \varphi'(s) = f\big(s, \varphi(s)\big) = f\big(s, \psi(s)\big).$$

Ἄτοπο.

1.5.16 (Συνέχεια) Δείξατε ὅτι τό συμπέρασμα στήν προηγούμενη ἄσκηση ἰσχύει ἀκόμη καί στήν περίπτωση κατά τήν ὁποία ἡ (1.20) ἀντικατασταθεῖ ἀπό τήν

$$\psi(\tau) \leq \varphi(\tau).$$

1.5.17* Νά ἐπιλυθεῖ τό (μιγαδικό) πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν

$$\frac{dw}{dz} = \mathrm{e}^{-w}, \quad w(1) = 0.$$

Τί ἀκριβῶς ἀποτελεῖ ἡ λύση;

1.6 Συνοριακές συνθῆκες*

Μία ἄλλη κατηγορία συνθηκῶν οἱ ὁποῖες συνοδεύουν τίς συνήθεις διαφορικές ἐξισώσεις εἶναι οἱ *συνοριακές συνθῆκες* (*boundary conditions*), ὅπου μᾶς δίδονται πληροφορίες γιά τήν ζητουμένη συνάρτηση στά σύνορα τοῦ πεδίου τιμῶν τῆς λύσεως, τά ὁποῖα ἀποτελοῦν συνήθως τά ἄκρα κλειστοῦ διαστήματος ἐντός τοῦ ὁποίου ἀναζητοῦμε τήν λύση. Ἡ σύζευξη συνήθους διαφορικῆς ἐξισώσεως καί συνοριακῶν συνθηκῶν ὀνομάζεται *πρόβλημα συνοριακῶν τιμῶν* (*boundary value problem.*)

Παραδείγματα

$$(i) \quad \begin{cases} x' + x = \sin t, \\ x(0) = x(1). \end{cases}$$

$$(ii) \quad \begin{cases} \big(p(t)\,x'\big)' = q(t)\,x + r(t), \\ \alpha_0 x(a) + \alpha_1 x'(a) = A, \\ \beta_0 x(b) + \beta_1 x'(b) = B. \end{cases}$$

Τό ζητούμενο σ' ἕνα πρόβλημα συνοριακῶν τιμῶν, τό ὁποῖο περιλαμβάνει συνοριακές συνθῆκες στά a, b, εἶναι κάποια συνάρτηση φ ἡ ὁποία ἀποτελεῖ ταυτοχρόνως λύση τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως στό $[a,b]$ καί ἱκανοποιεῖ τίς συνοριακές συνθῆκες. Τέτοιου εἴδους προβλήματα διατυπώνονται συνήθως γιά γραμμικές ἐξισώσεις[53], ὅπου εἶναι γνωστή a priori ἡ ὕπαρξη λύσεων σ' ὁλόκληρο τό διάστημα στό ὁποῖο εἶναι συνεχεῖς οἱ συντελεστές τῆς ἐξισώσεως καί ὁ μή ὁμοιογενής ὅρος. Σέ μή γραμμικές ἐξισώσεις, ἔχομε συνήθως μόνο τοπική ὕπαρξη λύσεων καί ὡς ἐκ τούτου ἡ διατύπωση προβλήματος συνοριακῶν τιμῶν, παρουσιάζει ἐπιπρόσθετες δυσκολίες.

Ἡ παρουσία συνοριακῶν συνθηκῶν δέν ἐξασφαλίζει πάντοτε τήν μοναδικότητα. Οἱ περιπτώσεις *μή μοναδικότητος* ἀπομονώνονται μέσῳ τῆς μελέτης τῶν *προβλημάτων ἰδιοτιμῶν* (*eigenvalue problems*). (Βλέπε *Ἄσκηση* 1.6.1). Αὐτά ἀποτελοῦν προβλήματα συνοριακῶν τιμῶν ὅπου τόσο ἡ ἐξίσωση ὅσο καί οἱ συνοριακές συνθῆκες εἶναι *ὁμοιογενεῖς* (βλέπε *Ὁρισμό 1.6.1*) καί ἔχουν, ἐκτός τῆς προφανοῦς ταυτοτικῶς μηδενικῆς λύσεως, καί ἄλλες μή μηδενικές.

Πρόβλημα. *Γιά ποιές τιμές τῆς παραμέτρου λ τό πρόβλημα συνοριακῶν τιμῶν*

$$\begin{cases} x'' + \lambda x = 0, \\ x(0) = x(\pi) = 0, \end{cases}$$

ἔχει λύση ἐκτός τῆς μή ταυτοτικῶς μηδενικῆς;

[53] Βεβαίως ἐνδιαφέρον παρουσιάζουν καί μή γραμμικά προβλήματα συνοριακῶν τιμῶν. Στό ἀνά χεῖρας ἐγχειρίδιο θά μᾶς ἀπασχολήσουν μόνο γραμμικά τέτοια προβλήματα.

Απαντηση. Ἡ γενική λύση τῆς ἐξισώσεως $x'' + \lambda x = 0$ εἶναι:

$$(i)\ \text{Γιά } \lambda > 0\text{:}\quad \varphi(t) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}\, t + c_2 \sin\sqrt{\lambda}\, t,$$

$$(ii)\ \text{Γιά } \lambda = 0\text{:}\quad \varphi(t) = c_1 t + c_2,$$

$$(iii)\ \text{Γιά } \lambda < 0\text{:}\quad \varphi(t) = c_1 \cosh\sqrt{-\lambda}\, t + c_2 \sinh\sqrt{-\lambda}\, t.$$

Ἡ μοναδική περίπτωση ἐκ τῶν ἀνωτέρω ὅπου ἱκανοποιοῦνται οἱ συνοριακές συνθῆκες σέ μή τετριμμένη λύση εἶναι ἡ $\varphi(t) = \sin nt$, ὅπου $n \in \mathbb{N}$. Οἱ τιμές $\lambda_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$, ὀνομάζονται *ἰδιοτιμές* τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος. Οἱ ἀντίστοιχες (μή μηδενικές) λύσεις εἶναι οἱ συναρτήσεις $\varphi_n(t) = \sin nt$, οἱ ὁποῖες ὀνομάζονται καί *ἰδιοσυναρτήσεις* (*eigenfunctions*) τοῦ προβλήματος.

Στήν συνηθέστερη τους μορφή, τά προβλήματα συνοριακῶν τιμῶν διατυπώνονται ὡς σύζευξη

(i) *Μιᾶς γραμμικῆς βαθμωτῆς συνήθους διαφορικῆς $n-$στῆς τάξεως ἐξισώσεως καί*

(ii) *n γραμμικῶν σχέσεων μεταξύ τῶν*

$$x(a),\, x'(a), \ldots, x^{(n-1)}(a) \qquad \textit{καί} \qquad x(b),\, x'(b), \ldots, x^{(n-1)}(b),$$

ὅπου a, b τά ἄκρα τοῦ διαστήματος στό ὁποῖο ἀναζητοῦμε τήν λύση. Οἱ ἀνωτέρω σχέσεις ἀποτελοῦν τίς *συνοριακές συνθῆκες*.

Ἕνα λοιπόν πρόβλημα συνοριακῶν τιμῶν ἔχει συνήθως τήν μορφή:

$$\begin{cases} x^{(n)} + p_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + p_0(t)x \;=\; q(t), \quad t \in [a,b], \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{ij} x^{(j)}(a) + \sum_{j=0}^{n-1} \beta_{ij}\, x^{(j)}(b) \;=\; \gamma_i, \quad i = 1, \ldots, n, \end{cases} \tag{1.21}$$

ὅπου p_k, $q \in C[a,b]$, ἐνῶ α_{ij}, β_{ij}, γ_i σταθερές.

Ὁρισμός 1.6.1. *Οἱ συνοριακές συνθῆκες τοῦ προβλήματος συνοριακῶν τιμῶν (1.21) ὀνομάζονται ὁμοιογενεῖς ἄν $\gamma_i = 0$ γιά κάθε $i = 1, \ldots, n$. Ἄν ἐπί πλέον $q \equiv 0$, τότε τό ἀνωτέρω πρόβλημα συνοριακῶν τιμῶν ὀνομάζεται ὁμοιογενές.*

Ἀσκήσεις

1.6.1 Δείξατε ὅτι τό πρόβλημα συνοριακῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x'' + \lambda x \;=\; q(t), \\ x(a) = \alpha,\; x(b) = \beta, \end{cases}$$

ἔχει μοναδική λύση ἄν καί μόνο ἄν τό λ δέν ἀποτελεῖ ἰδιοτιμή τοῦ ὁμοιογενοῦς προβλήματος συνοριακῶν τιμῶν:

$$\begin{cases} x'' + \lambda x = 0, \\ x(a) = x(b) = 0. \end{cases}$$

1.6.2 Ποιές οἱ ἰδιοτιμές τοῦ προβλήματος συνοριακῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x'' + \lambda x = 0, \\ x(0) = x'(1) = 0 \end{cases};$$

1.6.3 Δείξατε ὅτι στό πρόβλημα συνοριακῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x'' + \lambda x = 0, \\ \alpha_0 x(a) + \alpha_1 x'(a) = 0, \ \beta_0 x(b) + \beta_1 x'(b) = 0, \end{cases}$$

ὅπου (α_0, α_1), $(\beta_0, \beta_1) \neq (0,0)$, ὑπάρχουν ἄπειρες τιμές τοῦ $\lambda \in \mathbb{R}$, γιά τίς ὁποῖες ἔχει μή τετριμμένες λύσεις.

1.7 Μοναδικότης

1.7.1 Τοπική καί καθολική μοναδικότης

Ἡ προσθήκη ἀρχικῶν συνθηκῶν δέν περιορίζει πάντοτε τίς λύσεις σέ μία. Γιά παράδειγμα στό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν:

$$\begin{cases} x' = |x|^{1/2}, \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

οἱ συναρτήσεις

$$\varphi_1(t) = 0 \qquad \text{καί} \qquad \varphi_2(t) = \frac{1}{4} t^2 \mathrm{sgn} t,$$

οἱ ὁποῖες ὁρίζονται σ' ὅλο τό $\mathbb{R}$, εἶναι ἀμφότερες λύσεις. Γενικότερα τό προβλήμα ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x' = |x|^{\alpha}, \\ x(0) = 0, \end{cases} \tag{1.22}$$

ὅπου $\alpha \in (0,1)$, ἔχει ἄπειρες τό πλῆθος λύσεις. Συγκεκριμένα ἄν t_1, $t_2 \in \mathbb{R}$ μέ $t_1 \leq 0 \leq t_2$, τότε ἑκάστη τῶν συναρτήσεων οἱ ὁποῖες δίδονται ἀπό τόν τύπο:

$$\varphi_{t_1,t_2}(t) = \begin{cases} -\big((1-\alpha)(t_1 - t)\big)^{\frac{1}{1-\alpha}} & \text{ἄν } t < t_1, \\ 0 & \text{ἄν } t \in [t_1, t_2], \\ \big((1-\alpha)(t - t_2)\big)^{\frac{1}{1-\alpha}} & \text{ἄν } t > t_2, \end{cases} \tag{1.23}$$

ἀποτελεῖ λύση τοῦ (1.22). Λύσεις ἐπίσης προκύπτουν ὅταν τά t_1 καί t_2 ἀνωτέρω ἀντικατασταθοῦν ἀπό τά $-\infty$ καί $+\infty$ ἀντιστοίχως (βλέπε *Ἄσκηση* 1.7.1 στήν σελίδα 46). Εἴδαμε λοιπόν ὅτι τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν (1.22) δέν ἔχει μοναδική λύση. Παραβιάζεται δηλαδή ἡ *μοναδικότης* (*uniqueness*).

Τί ἀκριβῶς ὅμως εἶναι ἡ μοναδικότης λύσεων προβλημάτων ἀρχικῶν τιμῶν;

Στόν ὁρισμό ὁ ὁποῖος ἀκολουθεῖ διακρίνομε δύο περιπτώσεις. Τήν *τοπική* καί τήν *καθολική* μοναδικότητα:

Ὁρισμός 1.7.1. *Ἔστω τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν:*

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(\tau) = \xi, \end{cases} \tag{1.24}$$

ὅπου $f : D \to \mathbb{R}$ *συνεχής,* D *ἀνοικτό ὑποσύνολο τοῦ* $\mathbb{R}^2$ *καί* $(\tau,\xi) \in D$.

(*i*) *Λέγεται ὅτι τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν* (1.24) *ἀπολαμβάνει τοπικῆς μοναδικότητος* (*local uniqueness*)*, ἄν ὑπάρχει ἀνοικτό διάστημα* J*,* $\tau \in J$*, τέτοιο ὥστε, ὁποτεδήποτε οἱ συναρτήσεις*

$$\varphi_1 : I_1 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \varphi_2 : I_2 \longrightarrow \mathbb{R},$$

εἶναι λύσεις τοῦ (1.24) *καί* $I = I_1 \cap I_2 \cap J$*, τότε*

$$\varphi_1|_I = \varphi_2|_I.$$

Ἤτοι: Οἱ φ_1*,* φ_2 *περιορισμένες στό* I *ταυτίζονται. Σέ μία τέτοια περίπτωση λέγεται ὅτι τό* (1.24) *ἀπολαμβάνει μοναδικότητος στό* J*.*

(*ii*) *Λέγεται ὅτι τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν* (1.24) *ἀπολαμβάνει καθολικῆς μοναδικότητος* (*global uniqueness*)*, ἄν ὁποτεδήποτε οἱ συναρτήσεις*

$$\varphi_1 : I_1 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \varphi_2 : I_2 \longrightarrow \mathbb{R},$$

εἶναι λύσεις τοῦ (1.24)*, τότε*

$$\varphi_1|_{I_1 \cap I_2} = \varphi_2|_{I_1 \cap I_2}.$$

Ἤτοι: Οἱ φ_1*,* φ_2 *ταυτίζονται σ' ὅλο τό κοινό πεδίο ὁρισμοῦ τους.*

Γεωμετρικῶς ἡ τοπική μοναδικότης τῶν λύσεων σημαίνει ὅτι:

Γιά κάθε σημεῖο (τ,ξ) *στό* D*, ὑπάρχει περιοχή αὐτοῦ* Ω*, ὥστε ἄν τά γραφήματα δύο λύσεων συνήθους διαφορικῆς ἐξισώσεως διέρχονται ἀπό τό* (τ,ξ)*, τότε τά γραφήματα αὐτά ταυτίζονται σ' ὅλο τό* Ω.

1.7.2 Παράδειγμα προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν ἀπολαμβάνοντος τοπικῆς ἀλλά ὄχι καί καθολικῆς μοναδικότητος

Στό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν (1.22) παραβιάζεται ἡ μοναδικότης, διότι ὅπως θά δοῦμε ἀργότερα, ἡ συνάρτηση ροῆς $f(x) = |x|^\alpha$, $\alpha \in (0,1)$, δέν εἶναι ἐπαρκῶς *ὁμαλή* κοντά στό $x = 0$. Εἶναι συνεχής, ἀλλά ὄχι συνεχῶς διαφορίσιμη καί ὡς ἐκ τούτου τό θεώρημα μοναδικότητος λύσεων, τό ὁποῖο θά δοῦμε ἀργότερα (*Θεώρημα 3.2.1*), δέν ἐφαρμόζεται. Ἀντιθέτως, γύρω ἀπό ὁποιαδήποτε ἄλλη τιμή τοῦ x, γιά παράδειγμα γύρω ἀπό τό $x = 1$, ἡ συνάρτηση ροῆς εἶναι ἐπαρκῶς ὁμαλή καί μάλιστα

$$|x|^\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^+).$$

Ἡ ὁμαλότης τῆς ροῆς, ὅπως θά δοῦμε στό *Κεφάλαιο 3*, ἐξασφαλίζει τήν *τοπική* μοναδικότητα στό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x' = |x|^\alpha, & \alpha \in (0,1) \\ x(0) = 1, \end{cases} \tag{1.25}$$

γεγονός ὅμως, τό ὁποῖο στό συγκεκριμένο παράδειγμα, ἀποδεικνύεται καί μέ στοιχειωδέστερα μέσα:

Ἔστω $\varphi : I \to \mathbb{R}$ λύση τοῦ (1.25), ὅπου I ἀνοικτό διάστημα καί $0 \in I$. Ἐπειδή $\varphi(0) = 1 \neq 0$, τότε λόγῳ συνεχείας τῆς φ ὑπάρχει ἀνοικτό διάστημα J, ὑποσύνολο τοῦ I, στό ὁποῖο ἀνήκει τό 0 καί στό ὁποῖο ἡ φ εἶναι θετική. Ὁπότε θά ἔχομε ὅτι:

$$\frac{\varphi'(t)}{\big(\varphi(t)\big)^\alpha} = 1 \quad \text{γιά κάθε} \quad t \in J.$$

Ὁλοκληρώνοντας τήν ἀνωτέρω στό τυχόν διάστημα $[0,t] \subset J$, λαμβάνομε

$$\frac{1}{1-\alpha}\big(\varphi(t)\big)^{1-\alpha} = t + c, \tag{1.26}$$

τό ὁποῖο ἰσχύει ὑποχρεωτικῶς γιά κάθε t στό J, γιά κάποια σταθερά c. Ἡ σταθερά c, λόγῳ τῆς ἀρχικῆς συνθήκης $x(0) = 1$, ἰσοῦται μέ $c = \dfrac{1}{1-\alpha}$. Συνεπῶς ἡ (1.26) παρέχει ὅτι

$$\varphi(t) = \big((1-\alpha)t + 1\big)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \tag{1.27}$$

γιά κάθε t στό J. Ἰδιαιτέρως ἡ συνάρτηση

$$\tilde{\varphi}(t) = \big((1-\alpha)t + 1\big)^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad t \in \tilde{J} = \left(-\frac{1}{1-\alpha}, +\infty\right), \tag{1.28}$$

ἀποτελεῖ λύση τοῦ (1.25), ὁρισμένη σ' ὅλο το $\tilde{J}$.

Θά δείξομε τώρα ὅτι ἡ φ ταυτίζεται μέ τήν $\tilde{\varphi}$ στό κοινό πεδίο ὁρισμοῦ αὐτῶν, ἤτοι στό ἀνοικτό διάστημα $I \cap \tilde{J}$, ἀπ' ὅπου θά προκύψει ὅτι τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν (1.25) ἀπολαμβάνει μοναδικότητος σ' ὅλο τό $\tilde{J}$. Ἄν αὐτό δέν συνέβαινε, τότε θά ὑπῆρχε $\tau \in I \cap \tilde{J}$ ὥστε $\varphi(\tau) \neq \tilde{\varphi}(\tau)$. Ἔστω $\tau > 0$. (Παρομοίως ἀντιμετωπίζεται καί ἡ περίπτωση $\tau < 0$.) Ὁρίζομε

$$S = \left\{ t \in I \cap \tilde{J} \ \& \ t \geq 0 \, : \, \varphi|_{[0,t]} = \tilde{\varphi}|_{[0,t]} \right\}.$$

Προφανῶς $S \neq \emptyset$. Ἰδιαιτέρως, ἔχομε ἤδη διαπιστώσει ὅτι $J \cap [0, +\infty) \subset S$, δηλαδή τό S περιέχει ἀνοικτό διάστημα τό ὁποῖο περιλαμβάνει τό 0. Τό S εἶναι ἄνω φραγμένο ἀπό τό τ. Ἔστω $T = \sup S$.

Κατ' ἀρχάς ἰσχύει ὅτι $\varphi|_{[0,T)} = \tilde{\varphi}|_{[0,T)}$. Πράγματι, ἄν $T' \in (0, T)$, τότε τό T' δέν ἀποτελεῖ ἄνω φράγμα τοῦ S. Ἄρα ὑπάρχει $T'' > T'$ ὥστε $T'' \in S$, δηλαδή οἱ φ καί $\tilde{\varphi}$ ταυτίζονται στό $[0, T'']$ καί ἰδιαιτέρως $\varphi(T') = \tilde{\varphi}(T')$.

Ὅμως οἱ φ καί $\tilde{\varphi}$ εἶναι συνεχεῖς στό T καί ἐπειδή ταυτίζονται στό $[0, T)$, ὑποχρεωτικῶς ταυτίζονται καί στό T. Ἐπίσης, ἡ $\tilde{\varphi}$ εἶναι θετική στό T, καί τό ἴδιο ἰσχύει καί γιά τήν φ ἡ ὁποία ἱκανοποιεῖ καί τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x' = |x|^\alpha \\ x(T) = \tilde{\varphi}(T) > 0. \end{cases}$$

Ἐπαλαμβάνοντας τήν ἴδια διαδικασία μέ αὐτήν τήν ὁποία ἀκολουθήσαμε στήν ἀρχή τῆς παραγράφου, καταλήγομε ἐκ νέου στήν ἱκανοποίηση τῆς (1.26) ἀπό τήν φ, αὐτή ὅμως τήν φορά σέ κάποιο ἀνοικτό διάστημα J' τό ὁποῖο περιλαμβάνει τό T. Αὐτό σημαίνει ὅτι οἱ φ καί $\tilde{\varphi}$ ταυτίζονται καί πέραν τοῦ T. Ἄτοπο διότι εἴχαμε ὑποθέσει ὅτι τό T εἶναι τό ἐλάχιστο ἄνω φράγμα τοῦ S. Ἀπολαμβάνει λοιπόν τό (1.25) τοπικῆς μοναδικότητος.

Ἀπολαμβάνει μόνον τοπικῆς καί ὄχι καθολικῆς μοναδικότητος, διότι, ἀριστερά τοῦ σημείου $\tau = -\dfrac{1}{1-\alpha}$, ὅπου $\varphi(\tau) = 0$, ἡ μοναδικότης παραβιάζεται. Ἡ φ δύναται νά ἐπεκταθεῖ ἀριστερά τοῦ τ κατά ἄπειρους τρόπους, ἀφοῦ θά πρέπει νά ἱκανοποιεῖ τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x' = |x|^\alpha, \\ x(\tau) = 0, \end{cases}$$

τό ὁποῖο ἔχει ἄπειρες τό πλῆθος λύσεις. Δύναται εὐκόλως μάλιστα νά διαπιστωθεῖ ὅτι γιά κάθε $t_1 \leq \tau = -\dfrac{1}{1-\alpha}$, οἱ συναρτήσεις ψ_{t_1}, ὅπου

$$\psi_{t_1}(t) = \begin{cases} -\big((1-\alpha)(t_1 - t)\big)^{\frac{1}{1-\alpha}} & \text{ἄν} \quad t < t_1, \\ 0 & \text{ἄν} \quad t \in [t_1, \tau], \\ \big((1-\alpha)(t-\tau)\big)^{\frac{1}{1-\alpha}} & \text{ἄν} \quad t > \tau, \end{cases} \tag{1.29}$$

ἀποτελοῦν λύσεις τοῦ (1.25). Κατασκευάσαμε λοιπόν ἄπειρες τό πλῆθος λύσεις τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (1.25). Ναί μέν οἱ ψ_{t_1} εἶναι ἄπειρες τό πλῆθος, ἀλλά ταυτίζονται ὅλες στό διάστημα

$$\tilde{J} = \Big(-\frac{1}{1-\alpha}, \infty\Big).$$

Ἡ μοναδικότης λοιπόν, μόνον ὡς ἔννοια τοπική, ὑφίσταται στό (1.25).

Παρατήρηση. Ἄν τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(\tau) = \xi, \end{cases} \tag{1.30}$$

ἀπολαμβάνει τοπικῆς μοναδικότητος στά διαστήματα J_1 καί J_2 ($\tau \in J_1 \cap J_2$), τότε ἀπολαμβάνει τοπικῆς μοναδικότητος καί στήν ἕνωση αὐτῶν $J_1 \cup J_2$, ὅπως προκύπτει ἄμεσα ἀπό τόν ὁρισμό. Γενικότερα, ἄν τό (1.30) ἀπολαμβάνει τοπικῆς μοναδικότητος στά διαστήματα J_i, $i \in S$, τότε ἀπολαμβάνει τοπικῆς μοναδικότητος καί στό διάστημα $J = \cup_{i\in S} J_i$. Ἰδιαιτέρως, ἄν θέσομε

$$\mathcal{U} = \big\{ J : J \text{ ἀνοικτό διάστημα στό ὁποῖο τό (1.30) ἀπολαμβάνει τοπικῆς μοναδικότητος} \big\},$$

τότε τό (1.30) ἀπολαμβάνει τοπικῆς μοναδικότητος στό $J_{\max} = \cup_{J\in\mathcal{U}} J$, τό ὁποῖο εἶναι βεβαίως καί τό μέγιστο διάστημα μέ τήν ἰδιότητα αὐτή. Ἀποδείξαμε λοιπόν τό κατωτέρω ἀποτέλεσμα:

Πρόταση 1.7.1. *Ἄν τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν* (1.30) *ἀπολαμβάνει τοπικῆς μοναδικότητος, τότε ὑπάρχει μέγιστο διάστημα $J_{\max}$ στό ὁποῖο ἀπολαμβάνει τοπικῆς μοναδικότητος.* □

1.7.3 Τοπική μοναδικότης παντοῦ συνεπάγεται καθολική μοναδικότητα ἐπίσης παντοῦ!

Ἡ παραβίαση τῆς καθολικῆς μοναδικότητος σέ κάποιο πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν, συνεπάγεται ὅτι παραβιάζεται σέ κάποιο ἄλλο πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν ἡ τοπική μοναδικότης, ὅπως προκύπτει ἀπό τό ἀκόλουθο ἀποτέλεσμα:

Πρόταση 1.7.2. *Ἔστω $f : D \to \mathbb{R}$ συνεχής. Ἄν τό πρόβλημα ἀρχικῶν*

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(\tau) = \xi, \end{cases} \tag{1.31}$$

ἀπολαμβάνει τοπικῆς μοναδικότητος γιά κάθε $(\tau,\xi) \in D$, τότε ἀπολαμβάνει καί καθολικῆς μοναδικότητος γιά κάθε $(\tau,\xi) \in D$.

Απόδειξη. Ἔστω ὅτι γιά κάποιο $(\tau,\xi) \in D$ τό (1.31) δέν ἀπολαμβάνει καθολικῆς μοναδικότητος. Τότε θά ὑπῆρχαν λύσεις

$$\varphi_1 : I_1 \to \mathbb{R} \quad \text{καί} \quad \varphi_2 : I_2 \to \mathbb{R},$$

τοῦ (1.31) ὥστε $\tau \in I = I_1 \cap I_2$ καί

$$\varphi_1|_I \neq \varphi_2|_I.$$

Ἔστω $t_1 \in I$, ὥστε $\varphi_1(t_1) \neq \varphi_2(t_1)$. Ἄς ὑποθέσομε ὅτι $t_1 > \tau$. (Ἡ περίπτωση $t_1 < \tau$ ἀντιμετωπίζεται παρομοίως). Τότε τό σύνολο

$$S = \{ t \in I \cap [\tau, \infty) \ : \ \varphi_1|_{[\tau,t)} = \varphi_2|_{[\tau,t)} \},$$

εἶναι μή κενό, (ἀφοῦ λόγῳ τοπικῆς μοναδικότητος οἱ φ_1 καί φ_2 θά πρέπει νά ταυτίζονται σέ κάποια περιοχή τοῦ τ). Ἐπίσης εἶναι ἄνω φραγμένο, ἀφοῦ κάθε στοιχεῖο τοῦ S εἶναι μικρότερο τοῦ t_1. Ἄρα τό σύνολο S ἔχει ἐλάχιστο ἄνω φράγμα $\tau^* = \sup S$. Ἰσχύει ὅτι $\tau^* \in (\tau, t_1]$ καί ὡς ἐκ τούτου $\tau^* \in I$. Ἐπί πλέον θά πρέπει νά ἰσχύει ὅτι:

$$\varphi_1|_{[\tau,\tau^*)} = \varphi_2|_{[\tau,\tau^*)},$$

διότι ἄν γιά κάποιο $t_2 \in [\tau, \tau^*)$, ἴσχυε ὅτι $\varphi_1(t_2) \neq \varphi_2(t_2)$, τότε θά εἴχαμε ὅτι

$$\varphi_1|_{[\tau,t)} \neq \varphi_2|_{[\tau,t)} \quad \text{γιά κάθε} \quad t > t_2$$

καί ὡς ἐκ τούτου τό t_2 θά ἦταν ἄνω φράγμα τοῦ S, ἄρα $t_2 \geq \tau^*$, ὅπερ ἄτοπο.

Λόγῳ ὅμως τῆς συνεχείας τῶν φ_1 καί φ_2 στό τ^* θά ἔχομε ὅτι:

$$\varphi_1(\tau^*) = \lim_{t \to \tau^*_-} \varphi_1(t) = \lim_{t \to \tau^*_-} \varphi_2(t) = \varphi_2(\tau^*).$$

Ἔστω $\xi^* = \varphi_1(\tau^*) = \varphi_2(\tau^*)$. Τότε οἱ φ_1, φ_2, πέραν τοῦ ὅτι ταυτίζονται στό τ^*, ἀποτελοῦν καί λύσεις τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(\tau^*) = \xi^*, \end{cases}$$

τό ὁποῖο ὅμως, ἐξ ὑποθέσεως, ἀπολαμβάνει τοπικῆς μοναδικότητος. Ἤτοι, ὑπάρχει περιοχή $I_\varepsilon = (\tau^* - \varepsilon, \tau^* + \varepsilon)$, στήν ὁποία οἱ φ_1, φ_2 ταυτίζονται.

Συνολικῶς λοιπόν οἱ φ_1 καί φ_2 ταυτίζονται σ' ὅλο τό $[\tau, \tau^*) \cup I_\varepsilon = [\tau, \tau^* + \varepsilon)$ καί ὡς ἐκ τούτου θά εἴχαμε ὅτι:

$$\tau^* + \varepsilon \leq \sup S = \tau^*.$$

Ὅπερ ἄτοπο. □

1.7.4 Μιγαδική ἐκδοχή τῆς μοναδικότητος*

Στήν περίπτωση τοῦ μιγαδικοῦ χρόνου ἡ συνάρτηση ροῆς εἶναι ἀναλυτική ὡς πρός ἑκάστη τῶν μεταβλητῶν της καί ἡ ζητουμένη λύση εἶναι ἐπίσης ἀναλυτική. Ἡ ἔννοια τῆς τοπικῆς μοναδικότητος δέν ὑφίσταται λόγῳ τῆς ἐγγενοῦς ὁμαλότητος τῆς συναρτήσεως ροῆς. Τά προβλήματα ἀρχικῶν τιμῶν μιγαδικοῦ χρόνου ἀπολαμβάνουν λοιπόν καθολικῆς μοναδικότητος. Ὅμως,ἐπειδή ἡ τομή διδιαστάτων ἀνοικτῶν συνεκτικῶν συνόλων δένἀποτελεῖ ἀπαραιτήτως συνεκτικό σύνολο, δύο λύσεις τοῦἰδίου προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν δέν ὑποχρεοῦνται νάἰσοῦνται σ' όλη τήν τομή τῶν πεδίων ὁρισμοῦ αὐτῶν,ἀλλά σέ κατάλληλη συνεκτική συνιστῶσα:

Ὁρισμός 1.7.2. *Ἔστω τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν:*

$$\begin{cases} \dfrac{dw}{dz} = f(z,w), \\ w(\zeta) = \omega, \end{cases} \tag{1.32}$$

ὅπου $D \subset \mathbb{C}^2$ *ἀνοικτό καί* $f : D \to \mathbb{C}$ *ἀναλυτική ὡς πρός ἀμφότερες τίς μεταβλητές της καί* $(\zeta, \omega) \in D$. *Λέγεται ὅτι τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν* (1.32) *ἀπολαμβάνει καθολικῆς μοναδικότητος, ἄν ὁποτεδήποτε οἱ συναρτήσεις*

$$\varphi_1 : U_1 \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad \varphi_2 : U_2 \longrightarrow \mathbb{C},$$

εἶναι λύσεις τοῦ (1.32), *τότε* $\varphi_1|_U = \varphi_2|_U$, *ὅπου* U *ἡ συνεκτική συνιστῶσα τοῦ συνόλου* $U_1 \cap U_2$ *ἡ ὁποία περιέχει τό* ζ.

Στήν περίπτωση πραγματικοῦ χρόνου ἡ μοναδικότης ἐξασφαλίζεται μέσῳ τῆς ὁμαλότητος τῆς ροῆς. Στήν περίπτωση τοῦ μιγαδικοῦ χρόνου ἡ ροή εἶναι ἀναλυτική. Αὐτό τό γεγονός ἔχει ὡς συνέπεια τήν κάτωθι πρόταση:

Πρόταση 1.7.3. *Τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν* (1.32) *ἀπολαμβάνει καθολικῆς μοναδικότητος.*

Απόδειξη. Ἄν φ_1 καί φ_2 λύσεις τοῦ (1.32), τότε αὐτές εἶναι ἄπειρες φορές διαφορίσιμες, ὡς ἀναλυτικές, καί ἰδιαιτέρως, ἐπαγωγικῶς ἀποδεικνύεται ὅτι

$$\varphi_1^{(n)}(\zeta) = \varphi_2^{(n)}(\zeta) \quad \text{διά κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Ἐπειδή οἱ φ_1 καί φ_2 εἶναι ἀναλυτικές, ἡ ἀνωτέρω ἔχει ὡς συνέπεια ὅτι αὐτές ταυτίζονται στήν συνεκτική συνιστῶσα τῆς τομῆς τῶν πεδίων ὁρισμοῦ αὐτῶν ἡ ὁποία περιέχει τό ζ.

Παρατήρηση. Ὑπάρχουν πλεῖστα παράδειγματα λύσεων μιγαδικῶν προβλημάτων ἀρχικῶν τιμῶν μέ λύσεις οἱ ὁποῖες δέν ταυτίζονται στό κοινό πεδίο ὁρισμοῦ αὐτῶν. Στά παραδείγματα αὐτά οἱ λύσεις ἀποτελοῦν *ἐπιφάνειες Riemann.* (Βλέπε *Ἑνότητα 3.5.*)

Ἀσκήσεις

1.7.1 Ἀποδείξατε ὅτι πράγματι ὅλες οἱ φ_{t_1,t_2} οἱ ὁποῖες ὁρίζονται ἀπό τήν (1.23) ἀποτελοῦν λύσεις τοῦ (1.22). Ἀποδείξατε ἐπίσης ὅτι λύσεις τοῦ (1.22) ἀποτελοῦν τόσο ἡ ταυτοτικῶς μηδενική συνάρτηση, ὅσο καί οἱ συναρτήσεις

$$\varphi_{t_1,\infty} = \begin{cases} -\big((1-\alpha)(t_1-t)\big)^{\frac{1}{1-\alpha}} & \text{ἄν } t < t_1, \\ 0 & \text{ἄν } t \geq t_1, \end{cases}$$

γιά κάθε $t_1 \leq 0$, καθώς καί οἱ

$$\varphi_{-\infty,t_2} = \begin{cases} 0 & \text{ἄν } t \leq t_2, \\ \big((1-\alpha)(t-t_2)\big)^{\frac{1}{1-\alpha}} & \text{ἄν } t > t_2, \end{cases}$$

γιά κάθε $t_2 \geq 0$.

1.7.2* (Συνέχεια) Δείξατε ὅτι ἄν φ λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (1.22), τότε ἡ φ θά ταυτίζεται, ἐκεῖ ὅπου ὁρίζεται, εἴτε μέ τήν ταυτοτικῶς μηδενική συνάρτηση, εἴτε μέ κάποια ἐκ τῶν φ_{t_1,t_2} γιά κατάλληλα t_1, t_2, εἴτε μέ κάποια ἀπό τίς $\varphi_{t_1,\infty}$ ἤ $\varphi_{-\infty,t_2}$ γιά ἐπίσης κατάλληλο t_1 ἤ t_2.

1.7.3 Ἀποδείξατε ὅτι ὅλες οἱ ψ_{t_1,t_2} οἱ ὁποῖες ὁρίζονται ἀπό τήν (1.29) ἀποτελοῦν πράγματι λύσεις τοῦ (1.25). Ἰδιαιτέρως ἄν $I = (-\frac{1}{1-\alpha}, \infty)$, τότε

$$\psi_{t_1,t_2}|_I = \psi_{t_1',t_2'}|_I,$$

γιά κάθε $t_1,\ t_1' \leq 0$ καί $t_2,\ t_2' \geq 0$.

1.7.4 Νά δοθοῦν οἱ λεπτομέρειες τῆς ἀποδείξεως ὅτι γιά κάθε πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν ἀπολαμβάνοντος τοπικῆς μοναδικότητος ὑπάρχει μέγιστο ἀνοικτό διάστημα στό ὁποῖο τό πρόβλημα αὐτό ἀπολαμβάνει μοναδικότητος. (Βλέπε σχετική Παρατήρηση σελίδος 43.)

1.7.5 Κατασκευάστε ἄπειρες τό πλῆθος λύσεις γιά τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν:

$$\begin{cases} x' = |x-1|^{1/2}, \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

1.7.6 Κατασκευάστε ὅλες τίς λύσεις τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x' = |x^2-1|^{1/2}, \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Υποδειξη. Ἡ συνάρτηση $\varphi(t) \equiv 1$ ἀποτελεῖ λύση τοῦ ἀνωτέρω. Τό ἴδιο καί ἡ συνάρτηση

$$\psi(t) = \begin{cases} -\cosh(-t+\pi) & \text{ἄν} \quad t \leq -\pi, \\ \cos t & \text{ἄν} \quad t \in (-\pi, 1), \\ \cosh t & \text{ἄν} \quad t \geq 1. \end{cases}$$

Οἱ ὑπόλοιπες λύσεις κατασκευάζονται κατά τρόπο ἀνάλογο μέ τίς λύσεις τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (1.25).

1.7.7 Κατασκευάστε ὅλες τίς λύσεις τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x' = p(t)|x|^{\alpha} \\ x(0) = 1, \end{cases}$$

ὅπου $p \in C(\mathbb{R})$ καί $\alpha \in (0,1)$.

1.7.8 Δείξατε ὅτι τά προβλήματα ἀρχικῶν τιμῶν

(i) $\begin{cases} x' = x, \\ x(0) = 0, \end{cases}$

(ii) $\begin{cases} x' = p(t)\,x \\ x(0) = 0, \end{cases}$ ὅπου p συνεχής συνάρτηση.

(iii)* $\begin{cases} x' = |x|^{\alpha} \\ x(0) = 0, \end{cases}$ ὅπου $\alpha \geq 1$.

ἔχουν ὅλα μοναδική λύση, τήν ταυτοτικῶς μηδενική.

Υποδειξεις. Στό (i) ἄν πολλαπλασιάσουμε ἐπί τῆς συναρτήσεως $\mu(t) = \mathrm{e}^{-t}$, τότε ἡ ΔΕ καθίσταται ἰσοδύναμη μέ τήν $(\mathrm{e}^{-t}x)' = 0$ καί λόγῳ τῆς ἀρχικῆς συνθήκης, ἡ συνάρτηση x εἶναι ἡ μηδενική.

Στό (ii) ὁ ὁλοκληρωτικός παράγων εἶναι: $\mu(t) = \mathrm{e}^{-\int_0^t p(s)\,ds}$.

Στό (iii) ἀρχικῶς μελετοῦμε τήν περίπτωση $t \geq 0$. Ἔστω φ λύση διάφορη τῆς μηδενικῆς. Ἐπειδή φ αὔξουσα, τότε $\varphi(t_0) > 0$ γιά κάποιο $t_0 > 0$. Ἰδιαιτέρως θά ὑπάρχει κάποιο $t_1 > 0$ ὥστε $0 < \varphi(t_1) < 1$. Ὁπότε στό διάστημα $[0, t_1]$ ἡ φ θά ἱκανοποιεῖ:

$$\varphi' - \varphi \leq \varphi' - |\varphi|^{\alpha} = 0.$$

Ἄν λοιπόν πολλαπλασιάσομε ἐπί e^{-t} καί ὁλοκληρώσομε στό $[0, t_1]$ καταλήγομε στό ὅτι $\varphi(t_1) \leq 0$, τό ὁποῖο εἶναι ἄτοπο.

1.7.9 Ἀποδείξατε, χρησιμοποιῶντας τίς μέχρι τώρα γνώσεις σας, ὅτι τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x' = |x|^{1/2}, \\ x(0) = 1, \end{cases} \tag{1.33}$$

ἀπολαμβάνει πράγματι τοπικῆς μοναδικότητος.

Υποδειξη. Χρησιμοποιῶντας συνεπαγωγές, ἀποδείξατε ὅτι ἄν ἡ συνάρτηση $\varphi : I \to \mathbb{R}$, ὅπου $0 \in I$, ἱκανοποιεῖ τό (1.33), τότε ὑποχρεωτικῶς $\varphi(t) = \frac{1}{4}(t+1)^2$, γιά κάθε t στό διάστημα $(-1, \infty)$.

1.7.10* Ἔστω ὅτι $D \subset \mathbb{R}^2$ ἀνοικτό, $f : D \to \mathbb{R}$ συνεχής καί γιά κάθε $(\tau, \xi) \in \mathbb{R}^2$ τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(\tau) = \xi, \end{cases}$$

ἀπολαμβάνει καθολικῆς μοναδικότητος. Δείξατε ὅτι ὑπάρχει διαμέριση τοῦ D τῆς ὁποίας τά στοιχεῖα εἶναι τά γραφήματα τῶν λύσεων τῆς $x' = f(t, x)$.

Υποδειξη. Στό σύνολο D ὁρίζομε τήν ἑξῆς σχέση:

$$(\tau_1, \xi_1) \sim (\tau_2, \xi_2),$$

ἄν καί μόνον ἄν, τά (τ_1, ξ_1) καί (τ_2, ξ_2) ἀνήκουν στό γράφημα τῆς ἴδιας λύσεως. Δεῖξτε ὅτι πράγματι $\sim$ ἀποτελεῖ σχέση ἰσοδυναμίας. Εἶναι ἀπαραίτητο νά δειχθεῖ ὅτι κάθε λύση ἐπεκτείνεται σέ λύση ὁρισμένη σέ μέγιστο διάστημα.

1.7.11* Μιμούμενοι τήν διαδικασία στήν παρατήρηση τῆς σελίδος 41 ἀποδεῖξτε ὅτι, ἄν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής καί $f(x) \neq 0$ γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x' = f(x), \\ x(\tau) = \xi, \end{cases}$$

ἀπολαμβάνει καθολικῆς μοναδικότητος γιά κάθε (τ, ξ) στό $\mathbb{R}^2$.

1.8 Γεωμετρική θεώρηση

Ἀπό τήν Ἀναλυτική Γεωμετρία ὑπενθυμίζομε ὅτι:

Ἄν $x : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *διαφορίσιμη συνάρτηση, ὅπου* I *ἀνοικτό διάστημα, τότε τό διάνυσμα*

$$\boldsymbol{t} = \Big(1, \frac{dx(t^*)}{dt}\Big),$$

ἐφάπτεται στό γράφημα τῆς συναρτήσεως στό σημεῖο $\big(t^*, x(t^*)\big)$. *Ἐνῶ τό διάνυσμα*

$$\boldsymbol{n} = \Big(-\frac{dx(t^*)}{dt}, 1\Big),$$

τέμνει καθέτως τό γράφημα τῆς προαναφερθείσης συναρτήσεως στό ἴδιο σημεῖο. Ἡ γωνία ω, *τήν ὁποία σχηματίζει τό διάνυσμα* $\boldsymbol{t}$ *μέ τόν ἄξονα τῶν* t, *ἔχει ἐφαπτομένη*

$$\tan\omega = \frac{dx(t^*)}{dt}.$$

Γενικότερα, ἄν ἡ

$$\boldsymbol{\xi}(s) = \big(t(s), x(s)\big), \qquad s \in I,$$

ἀποτελεῖ διαφορίσιμη καμπύλη στό ἐπίπεδο $t - x$, *τότε τό διάνυσμα:*

$$\boldsymbol{t} = \Big(\frac{dt(s^*)}{ds}, \frac{dx(s^*)}{ds}\Big),$$

ἐφάπτεται στήν καμπύλη στό σημεῖο $\big(t(s^*), x(s^*)\big)$, *ἐνῶ τό διάνυσμα:*

$$\boldsymbol{n} = \Big(-\frac{dx(s^*)}{ds}, \frac{dt(s^*)}{ds}\Big),$$

τήν τέμνει καθέτως στό ἴδιο σημεῖο.

Ἔστω τώρα ἡ συνήθης διαφορική ἐξίσωση:

$$xx' + t = 0, \tag{1.34}$$

ἡ ὁποία δύναται νά *ὁλοκληρωθεῖ* καί νά μᾶς παραχωρήσει

$$x^2 + t^2 = c.$$

Ἤτοι: *Οἰκογένεια ὁμόκεντρων κύκλων, μέ κέντρο τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων.*

Καμμία καμπύλη τῆς ἀνωτέρω οἰκογενείας δέν ἀποτελεῖ συνάρτηση. Ἡ (1.34), γιά $x \neq 0$, λαμβάνει τήν ἑξῆς ἄμεση μορφή:

$$x' = -\frac{t}{x}$$

καί ἔχει ὡς λύσεις ὅλες τίς συναρτήσεις τῆς μορφῆς:

$$\varphi(t) = \sqrt{c - t^2} \quad \textit{καί} \quad \varphi(t) = -\sqrt{c - t^2}.$$

ὅπου $c > 0$ καί $t \in (-\sqrt{c}, \sqrt{c})$. Τό γράφημα ἑκάστης τῶν ἀνωτέρω κεῖται ἐπί περιφέρειας κύκλου μέ κέντρο τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων.

Ὅπως φαίνεται ἀπό τό ἀνωτέρω παράδειγμα, οἱ καμπύλες αὐτές, τίς ὁποῖες θά καλοῦμε *ὁλοκληρωτικές καμπύλες* (*integral curves*) καί προσεκτικός ὁρισμός τους θά δοθεῖ στήν συνέχεια, ἀποτελοῦν γενίκευση τῶν λύσεων συνήθων διαφορικῶν ἐξισώσεων, δεδομένου ὅτι οἱ λύσεις εἶναι ὑποχρεωτικῶς συναρτήσεις. Οἱ ὁλοκληρωτικές καμπύλες δέν δύνανται νά *ἐκφρασθοῦν παραμετρικῶς*[54] μέ παράμετρο τό t ἤ τό x πάντοτε. Θά ἦταν ὅμως δυνατόν νά ἐκφρασθοῦν παραμετρικῶς ἀπό μία τρίτη μεταβλητή, ὥστε νά ἀποτελοῦν *κανονικές καμπύλες*.

Ὁρισμός 1.8.1. *Μία καμπύλη $\boldsymbol{x} : I \to \mathbb{R}^n$ ὅπου I ἀνοικτό διάστημα, θά ὀνομάζεται κανονική (regular) ἄν ἰσχύουν τά ἀκόλουθα:*

(*i*) *Ἡ $\boldsymbol{x}$ εἶναι διαφορίσιμη σ' ὅλο τό I καί*

(*ii*) *$\dot{\boldsymbol{x}}(s) \neq 0$ γιά κάθε $s \in I$, ὅπου $\dot{} = \dfrac{d}{ds}$.*

Ἄν λοιπόν ἐκφράσομε παραμετρικῶς τίς ὁλοκληρωτικές καμπύλες τῆς (1.34) μέ τήν παράμετρο s, δηλαδή:

$$t = t(s), \quad x = x(s),$$

θά ἔχομε ὅτι:

$$0 = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}(t^2 + x^2) = t\dot{t} + x\dot{x}.$$

Ἤτοι, ἡ καμπύλη ἡ ὁποία ἔχει ἐκφρασθεῖ παραμετρικῶς ἀπό τό s, ἔχει τήν ἰδιότητα ὅτι, σέ κάθε της σημεῖο (t^*, x^*), τό ἐφαπτόμενό της διάνυσμα στό σημεῖο αὐτό εἶναι κάθετο στό (t^*, x^*). Σημειωτέον ὅτι, ἄν ἡ $x = x(t)$ ἀποτελεῖ λύση τῆς

$$x' = f(t, x), \tag{1.35}$$

τότε, δεδομένου ὅτι τό ἐφαπτόμενο διάνυσμα στό σημεῖο $\big(t^*, x(t^*)\big)$ τοῦ γραφήματός της, εἶναι παράλληλο πρός τό διάνυσμα $\big(1, x'(t^*)\big)$, εἶναι δυνατόν νά γραφεῖ ἡ (1.35) ὡς σχέση καθετότητος διανυσμάτων

$$0 = x' - f(t, x) = \big(1, x'\big) \cdot \big(-f(t, x), 1\big),$$

[54]Χρησιμοποιοῦμε στό ἀνά χεῖρας τήν περίφραση *ἐκφράζω παραμετρικῶς* εἰς ἀπόδοση τοῦ ἀγγλοσαξωνικοῦ ὅρου *parametrize*. Ἐμφανίζεται συχνά στήν ἑλληνική βιβλιογραφία καί ἡ ἀπόδοση *παραμετρικοποιῶ*.

τό ὁποῖο γεωμετρικῶς περιγράφεται ὡς ἑξῆς:

Λύση τῆς (1.35) *εἶναι κάθε διαφορίσιμη συνάρτηση τῆς ὁποίας τό γράφημα εἶναι κάθετο στό διάνυσμα* $\big(-f(t,x),1\big)$, *ἤ ἰσοδύναμα, ἐφαπτόμενο στό διάνυσμα* $\big(1,f(t,x)\big)$, *σέ κάθε σημεῖο* (t,x) *ἀπό τό ὁποῖο διέρχεται.*

Ἡ ἐξίσωση (1.34) ἐμφανίζεται ἐναλλακτικῶς στήν βιβλιογραφία καί ὡς

$$t\dot{t} + x\dot{x} \,=\, 0, \tag{1.36}$$

ἤ

$$t\,dt + x\,dx \,=\, 0.$$

Ἐννοιεῖται ὅτι τά dt καί dx, ἐδῶ δέν ἀποτελοῦν διαφορικά, ἀλλά τίς συνιστῶσες t καί x, ἀντιστοίχως, τοῦ ἐφαπτομένου διανύσματος. Οἱ ἀνωτέρω μορφές ἐπιτρέπουν *ἱκανοποίησή* τους, ὄχι μόνον ἀπό λύσεις τῆς (1.34), οἱ ὁποῖες εἶναι βεβαίως συναρτήσεις, ἀλλά καί ἀπό καμπύλες, οἱ ὁποῖες δέν ἀποτελοῦν γραφήματα συναρτήσεων, ὅπως γιά παράδειγμα ἀπό τόν κύκλο. Πράγματι, ἡ καμπύλη

$$t \,=\, \varrho\cos s, \quad x \,=\, \varrho\sin s, \quad s\in\mathbb{R},$$

ἱκανοποιεῖ τήν (1.36) χωρίς νά ἀποτελεῖ γράφημα συναρτήσεως.

Ἄν ὅμως ἡ καμπύλη

$$t \,=\, T(s), \quad x \,=\, X(s), \quad s\in I,$$

ἱκανοποιεῖ τήν ἐξίσωση

$$M(t,x)\,\dot{t} + N(t,x)\,\dot{x} \,=\, 0$$

καί $\dot{T}(s)\neq 0$ γιά κάθε $s\in K\subset I$, ὅπου K ἀνοικτό διάστημα, τότε ἡ καμπύλη $\big(T(s),X(s)\big)$, $s\in K$, δύναται νά ἐκφρασθεῖ παραμετρικῶς ἀπό τό t. Πράγματι ἡ $T=T(s)$ θά εἶναι 1-1 στό K, ἐπί ἑνός ἐπίσης ἀνοικτοῦ διαστήματος J. Ἐπίσης, ἡ $T^{-1}:J\to K$, θά εἶναι ἐπίσης 1-1, ἐπί καί διαφορίσιμη. Ἄν θέσομε $\varphi(t)=X\big(T^{-1}(t)\big)$, τότε ἡ $\varphi:J\to\mathbb{R}$, θά εἶναι διαφορίσιμη, ὡς σύνθεση τέτοιων, καί θά ἰσχύει ὅτι:

$$\varphi'(t) \,=\, \frac{dX}{ds}\cdot\frac{dT^{-1}(t)}{dt} \,=\, \frac{dX}{ds}\left(\frac{dT}{ds}\right)^{-1} \,=\, \frac{\dot{X}}{\dot{T}},$$

ὁπότε τελικῶς

$$\dot{T}\big(T^{-1}(t)\big)\varphi'(t) \,=\, \dot{X}\big(T^{-1}(t)\big), \tag{1.37}$$

γιά κάθε $t\in J$. Ἑπομένως, ἄν γιά κάθε $s\in K$ ἰσχύει ὅτι:

$$M\big(T(s),X(s)\big)\dot{T}(s) + N\big(T(s),X(s)\big)\dot{X}(s) \,=\, 0,$$

τότε λόγῳ τῆς (1.37) θά ἰσχύει καί ὅτι:

$$M\big(t,\varphi(t)\big) + N\big(t,\varphi(t)\big)\,\varphi'(t) \,=\, 0,$$

γιά κάθε $t\in J$.

1.8.1 Ὁλοκληρωτικές καμπύλες

Ὁρισμός 1.8.2. *Ἔστω ἡ συνήθης διαφορική ἐξίσωση*

$$M(t,x)\,dt + N(t,x)\,dx \;=\; 0, \tag{1.38}$$

ὅπου M, N, *συνεχεῖς ἐπί τοῦ* D, *καί* D *ἀνοικτό ὑποσύνολο τοῦ* $\mathbb{R}^2$. *Ὑποθέτομε ἐπίσης ὅτι:*

$$\big(M(t,x), N(t,x)\big) \;\neq\; (0,0),$$

γιά κάθε $(t,x)\in D$. *Μία κανονική καμπύλη* $\boldsymbol{\zeta}(s) = \big(T(s), X(s)\big)$ *μέ* $s \in I$, *ὅπου* I *ἀνοικτό διάστημα, ὀνομάζεται ὁλοκληρωτική καμπύλη τῆς ἐξισώσεως* (1.38), *ἄν γιά κάθε* $s\in I$,

$$\big(M(\boldsymbol{\zeta}(s)), N(\boldsymbol{\zeta}(s))\big)\cdot\dot{\boldsymbol{\zeta}}(s) \;=\; 0,$$

ἤ ἰσοδύναμα

$$M\big(\boldsymbol{\zeta}(s)\big)\frac{dT}{ds} + N\big(\boldsymbol{\zeta}(s)\big)\frac{dX}{ds} \;=\; 0.$$

Ἤτοι, τό διάνυσμα $\boldsymbol{P}\big(\boldsymbol{\zeta}(s)\big) = \big(M(\boldsymbol{\zeta}(s)), N(\boldsymbol{\zeta}(s))\big)$, *εἶναι κάθετο στήν καμπύλη στό σημεῖο* $\boldsymbol{\zeta}(s) = \big(T(s), X(s)\big)$.

Παρατηρήσεις

(i) Ἄν γιά κάποιο $s_0 \in I$, ἔχομε ὅτι $T(s_0) \neq 0$, τότε ὑπάρχει ἀνοικτό διάστημα J, ὥστε $s_0\in J \subset I$, ὅπου

$$T(s) \;\neq\; 0, \quad \text{γιά κάθε } s \in J.$$

Τότε ἡ ὁλοκληρωτική καμπύλη, περιορισμένη στό J, θά ἀποτελεῖ γράφημα λύσεως τῆς συνήθους διαφορικῆς ἐξισώσεως

$$M(t,x) + N(t,x)\,x' \;=\; 0.$$

Βλέπε *Ἄσκηση* 1.8.4 στήν σελίδα 52.

(ii) Ἡ ἔννοια τῆς μοναδικότητος ἐπεκτείνεται κατά φυσιολογικό τρόπο καί στίς ὁλοκληρωτικές καμπύλες τίς διερχόμενες ἀπό δοθέν σημεῖο (τ,ξ). Ἐπεκτείνεται τόσο ὡς ἔννοια τοπική, ὅσο καί ὡς ἔννοια καθολική (βλέπε *Ἄσκηση* 1.8.3 στήν σελίδα 52).

(iii) Στήν περίπτωση ὅπου ὑπάρχουν συνθῆκες ἐξασφαλίζουσες τήν μοναδικότητα, γιά τίς ὁλοκληρωτικές καμπύλες τῆς

$$M(t,x) + N(t,x)x' \;=\; 0,$$

ὅπου M, $N \in C(D)$ καί D ἀνοικτό ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}^2$, δηλαδή ἐξασφαλίζουσες ὅτι, ἀπό κάθε $(\tau,\xi) \in D$, διέρχεται μόνο μία ὁλοκληρωτική καμπύλη, ἀποδεικνύεται ὅτι οἱ ὁλοκληρωτικές καμπύλες ἀποτελοῦν διαμέριση τοῦ D (βλέπε *Ἄσκηση* 1.8.5 στήν σελίδα 53).

1.8.2 Πεδία διευθύνσεων καί γραμμικά στοιχεῖα

Πεδία διευθύνσεων. Θά ἦταν δυνατόν νά θεωρήσομε μία βαθμωτή συνήθη διαφορική ἐξίσωση πρώτης τάξεως ὡς μία συνάρτηση ἡ ὁποία ἀπεικονίζει τά σημεῖα (t, x) τοῦ ἐπιπέδου $\big($ἤ γενικότερα $(t, \boldsymbol{x}) \in D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ στήν διανυσματική περίπτωση$\big)$, σέ διάνυσματα $\big(1, f(t, x)\big)$ $\big($ἤ γενικότερα στά $\big(1, \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})\big)\big)$. Ἀποτελεῖ λοιπόν ἕνα *πεδίο διευθύνσεων* ἤ *διανυσματικό πεδίο* (*vector field*), στόν $\mathbb{R}^2$ (ἤ γενικότερα στό D). Γενικότερα ἔχομε τόν ἀκόλουθο ὁρισμό:

Ὁρισμός 1.8.3. *Ἔστω Ω ἀνοικτό ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}^n$ καί $\boldsymbol{F} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ συνεχής. Ἄν $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \neq 0$, γιά κάθε $\boldsymbol{x} \in \Omega$, τότε ἡ $\boldsymbol{F}$ θά λέγεται ὅτι ἀποτελεῖ ἕνα πεδίο διευθύνσεων στό Ω. Ἄν δέ $\boldsymbol{x} \in \Omega$, τό διάνυσμα $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ θά ἀποτελεῖ τήν διεύθυνση τοῦ πεδίου στό σημεῖο $\boldsymbol{x}$.*

Τό δέ ζητούμενο, ἡ λύση, θά εἶναι ὑπό αὐτή τήν θεώρηση, μία καμπύλη, ἡ ὁποία, σέ κάθε σημεῖο ἀπό τό ὁποῖο διέρχεται, ἐφάπτεται τοῦ διανύσματος στό σημεῖο ἐκεῖνο.

Γραμμικά στοιχεῖα. Μία συνήθης διαφορική ἐξίσωση ὁρίζει σέ κάθε σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου ἕνα *γραμμικό στοιχεῖο* (*linear element*).

Ὁρισμός 1.8.4. *Μία τριάδα (t, x, p) ὀνομάζεται γραμμικό στοιχεῖο, ἄν τό ζεῦγος (t, x) ἀποτελεῖ σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου ἐνῶ ἡ p ὁρίζει τήν κλίση εὐθείας ἡ ὁποία διέρχεται ἀπό τό σημεῖο αὐτό.*

Παρατηρῆστε ὅτι τό γραμμικό στοιχεῖο δύναται νά ὁρισθεῖ ἀκόμη καί στήν περίπτωση ἐξισώσεως ἔμμεσης μορφῆς $F(t, x, x') = 0$. Ὁπότε, τά γραμμικά στοιχεῖα θά ἀποτελοῦν τό σύνολο

$$E = \big\{(t, x, p) \in \mathbb{R}^3 \ : \ F(t, x, p) = 0\big\}.$$

Ἀσκήσεις

1.8.1 Ἔστωσαν οἱ ὁλοκληρωτικές καμπύλες $\Phi_1(t, x) = c_1$, $\Phi_2(t, x) = c_2$, τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων $x' = f_1(t, x)$, $x' = f_2(t, x)$, ἀντιστοίχως. Ἄν ἰσχύει ὅτι

$$f_1(t, x) f_2(t, x) = -1,$$

γιά κάθε t, x, τότε δείξατε ὅτι σέ κάθε σημεῖο στό ὁποῖο τέμνονται οἱ ἀνωτέρω καμπύλες, τέμνονται καθέτως.

1.8.2 (Συνέχεια) Τί θά ἔπρεπε νά ἰσχύει ὥστε νά τέμνονται ὑπό γωνία α;

1.8.3 Πῶς θά ἦταν δυνατόν νά ὁρισθοῦν οἱ ἔννοιες τῆς τοπικῆς καί καθολικῆς μοναδικότητος στίς ὁλοκληρωτικές καμπύλες;

1.8.4 Ἐξηγῆστε γιατί ἰσχύουν τά ὅσα ἀναφέρονται στήν παρατήρηση (i) τῆς σελίδος 51.

1.8.5 Δείξατε ὅτι ὅταν ὑπάρχουν συνθῆκες ἐξασφαλίζουσες τήν μοναδικότητα, γιά τίς ὁλοκληρωτικές καμπύλες τῆς

$$M(t,x) + N(t,x)x' = 0,$$

ὅπου $M, N \in C(D)$ καί D ἀνοικτό ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}^2$, τότε οἱ ὁλοκληρωτικές καμπύλες ἀποτελοῦν διαμέριση τοῦ D.

1.9 Ὁλοκληρωτική μορφή

Τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(\tau) = \xi, \end{cases}$$

εἶναι δυνατόν νά γραφεῖ καί ὡς:

$$x(t) = \xi + \int_\tau^t f\big(s, x(s)\big)\, ds,$$

ἡ ὁποία ἀποτελεῖ τήν *ὁλοκληρωτική μορφή* (*integral form*) ἤ ἄλλως *ὁλοκληρωτική διατύπωση* (*integral formulation*) αὐτοῦ. Ἡ πρόταση ἡ ὁποία ἀκολουθεῖ θεμελιώνει τήν ἰσοδυναμία τῶν δύο μορφῶν.

Πρόταση 1.9.1. (***Ἀρχή τῆς ἰσοδυναμίας***) *Ἔστω ὅτι ἡ συνάρτηση $f : D \to \mathbb{R}$ εἶναι συνεχής, ὅπου D ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}^2$ ἀνοικτό, $\varphi : I \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη συνάρτηση, ὅπου I ἀνοικτό διάστημα, $\big(t, \varphi(t)\big) \in D$ γιά κάθε $t \in I$ καί $\tau \in I$. Τότε τά ἀκόλουθα εἶναι ἰσοδύναμα:*

$$\begin{cases} \varphi'(t) = f\big(t, \varphi(t)\big), & \text{γιά κάθε } t \in I \\ \varphi(\tau) = \xi, \end{cases} \tag{1.39i}$$

καί

$$\varphi(t) = \xi + \int_\tau^t f\big(s, \varphi(s)\big)\, ds, \qquad \text{γιά κάθε } t \in I. \tag{1.39ii}$$

Απόδειξη. Κατ' ἀρχάς θά χρησιμοποιήσομε τό ἀκόλουθο Λῆμμα:

Λῆμμα. *Μέ τίς ὑποθέσεις τῆς ἀνωτέρω προτάσεως ἡ συνάρτηση $\psi(t) = f\big(t, \varphi(t)\big)$ εἶναι συνεχής στό I.*

Απόδειξη του Λήμματος. Κατ' ἀρχάς θά δείξομε ὅτι ἡ συνάρτηση $\psi(t) = f\big(t, \varphi(t)\big)$ θά εἶναι συνεχής στό I. Ἡ συνέχεια τῆς f δύναται νά ὁρισθεῖ ὡς ἑξῆς:

Ἡ f εἶναι συνεχής στό $(t_0, x_0) \in D$ ἄν διά κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ ὥστε ὁποτεδήποτε $(t,x) \in D$ καί

$$|t - t_0| < \delta \quad \text{καί} \quad |x - x_0| < \delta,$$

τότε

$$|f(t,x) - f(t_0,x_0)| < \varepsilon.$$

Ἔστω τώρα $t_0 \in I$ καί $\varepsilon > 0$. Ἐπειδή ἡ φ εἶναι συνεχής στό t_0, τότε γιά τό $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon)$ τό ὁποῖο λαμβάνομε ἀπό τήν συνέχεια τῆς f στό $\big(t_0, \varphi(t_0)\big)$ ὑπάρχει $\delta_2 > 0$ ὥστε:

$$|t - t_0| < \delta_2 \quad \Longrightarrow \quad |\varphi(t) - \varphi(t_0)| < \delta_1.$$

Ἔστω $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ καί $|t - t_0| < \delta$. Λόγῳ τῆς ἀνωτέρω ἔχομε: $|\varphi(t) - \varphi(t_0)| < \delta_1 \leq \delta$ καί συνεπῶς

$$|t - t_0| < \delta \quad \text{καί} \quad |\varphi(t) - \varphi(t_0)| < \delta.$$

Συνολικῶς, ἡ συνέχεια τῆς f στό $\big(t_0, \varphi(t_0)\big)$ σέ συνδυασμό μέ τό γεγονός ὅτι $\delta_1 \leq \delta$ παρέχει ὅτι

$$|\psi(t) - \psi(t_0)| = \big|f\big(t, \varphi(t)\big) - f\big(t_0, \varphi(t_0)\big)\big| < \varepsilon. \qquad \square$$

(1.39i) $\Longrightarrow$ (1.39ii):

Λόγῳ τοῦ ἀνωτέρω Λήμματος, ἡ ψ εἶναι συνεχής στό I ἄρα εἶναι καί ὁλοκληρώσιμη στό ἴδιο διάστημα. Δηλαδή ἡ φ' εἶναι ὁλοκληρώσιμη σέ κάθε κλειστό ὑποδιάστημα τοῦ I. Ὅταν ὁλοκληρώσομε τήν διαφορική ἐξίσωση τοῦ (1.39i) στό $[\tau, t]$ λαμβάνομε:

$$\int_\tau^t \varphi'(s)\, ds = \int_\tau^t f\big(s, \varphi(s)\big)\, ds \tag{1.40}$$

καί λόγῳ τοῦ *Θεμελιώδους Θεωρήματος τοῦ Ἀπειροστικοῦ Λογισμοῦ:*

$$\varphi(t) - \varphi(\tau) = \int_\tau^t f\big(s, \varphi(s)\big)\, ds.$$

Ἐνσωματώνοντας τήν ἀρχική συνθήκη $\varphi(\tau) = \xi$ στήν ἀνωτέρω λαμβάνομε

$$\varphi(t) = \xi + \int_\tau^t f\big(s, \varphi(s)\big)\, ds,$$

ἡ ὁποία ἰσχύει γιά κάθε $t \in I$, λόγῳ τοῦ αὐθαιρέτου στήν ἐπιλογή τοῦ t. Τό t ἐπιτρέπεται βεβαίως νά εἶναι καί μικρότερο τοῦ τ ὁπότε ἁπλῶς ἀλλάζει ἡ φορά τῆς ὁλοκληρώσεως στήν (1.40).

(1.39ii) $\Longrightarrow$ (1.39i): Ὅταν παραγωγίσομε τήν (1.39ii) λαμβάνομε

$$\varphi'(t) = f\big(t, \varphi(t)\big),$$

γιά κάθε $t \in I$. Ἄν θέσομε στήν (1.39ii) $t = \tau$, λαμβάνομε $\varphi(\tau) = \xi$. **ὅ.ἔ.δ.**[55]

Ἀσκήσεις

1.9.1 Νά διατυπωθεῖ ἡ ὁλοκληρωτική μορφή ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ στό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν (1.19ii), καί ἀκολούθως νά διατυπωθεῖ καί νά ἀποδειχθεῖ ἡ ἀντίστοιχη ἀρχή ἰσοδυναμίας.

1.9.2 Νά διατυπωθεῖ ἡ ὁλοκληρωτική μορφή ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ στό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν (1.19iii), καί ἀκολούθως νά διατυπωθεῖ καί νά ἀποδειχθεῖ ἡ ἀντίστοιχη ἀρχή ἰσοδυναμίας.

1.9.3 Ἄν ἡ συνάρτηση $\varphi : I \to \mathbb{R}$ ἀποτελεῖ λύση τῆς συνήθους διαφορικῆς ἐξισώσεως $x' = f(t,x)$, ὅπου f συνεχής ἐπί τοῦ γραφήματος τῆς φ, τότε γιά κάθε $s,t \in I$ ἰσχύει ὅτι

$$\varphi(s) - \varphi(t) \;=\; \int_s^t f\big(\sigma, \varphi(\sigma)\big)\, d\sigma.$$

1.9.4 Ἔστω $f \in C^k(D)$ καί $\varphi \in C(I)$ ὥστε

$$\varphi(t) \;=\; \xi + \int_\tau^t f\big(s, \varphi(s)\big)\, ds,$$

γιά κάθε $t \in I$. Δείξατε ὅτι $\varphi \in C^{k+1}(I)$.

1.9.5 Ἔστω ὅτι ἡ φ ἀποτελεῖ λύση τῆς συνήθους διαφορικῆς ἐξισώσεως $x' = f(t,x)$ στό $I = (a,b)$, ὅπου $a,b \in \mathbb{R}$ καί $f \in C(\mathbb{R}^2)$. Ἄν ἡ φ εἶναι φραγμένη στό I, τότε τά ὅρια

$$\lim_{t\to a^+} \varphi(t), \quad \lim_{t\to b^-} \varphi(t),$$

ὑπάρχουν στό $\mathbb{R}$.

Υποδειξη. Ἔστω $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (a,b)$ ἀκολουθία μέ ὅριο τό b. Τότε ἡ ἀκολουθία $\{\varphi(t_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ἐπειδή εἶναι φραγμένη ἔχει συγκλίνουσα ὑπακολουθία, ἔστω τήν $\{\varphi(s_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ μέ ὅριο τό $\ell \in [A,B] = [\inf\varphi, \sup\varphi]$. Γιά κάθε $t \in (a,b)$ καί $n \in \mathbb{N}$ θά ἔχομε

$$\varphi(t) - \varphi(s_n) \;=\; \int_{s_n}^t f\big(s, \varphi(s)\big)\, ds. \tag{1.41}$$

Ἄν $K = [a,b] \times [A,B]$ καί

$$M \;=\; \max_{(t,x)\in K} |f(t,x)| \;<\; \infty,$$

τότε τό δεξιό μέλος τῆς (1.41) δύναται νά φραχθεῖ ἀπολύτως, γιά $s_n \geq t$, ὡς

$$\Big|\int_t^{s_n} f\big(s,\varphi(s)\big)\, ds\Big| \;\leq\; \int_t^{s_n} \big|f\big(s,\varphi(s)\big)\big|\, ds \;\leq\; M|s_n - t| \;\leq\; M|b-t|,$$

ὁπότε ἡ (1.41) συνεπάγεται ὅτι

$$|\varphi(t) - \varphi(s_n)| \;\leq\; M|t-b|,$$

τό ὁποῖο ἔχει ὡς συνέπεια, καθώς τό n τείνει στό ἄπειρο, τήν ἀνισότητα

$$|\varphi(t) - \ell| \;\leq\; M|t-b|,$$

ἀπό τήν ὁποία ἕπεται τό ζητούμενο.

[55] Ἀποτελοῦν τά ἀρχικά τῶν λέξεων *ὅπερ ἔδει δεῖξαι*, τά ὁποῖα ἐμφανίζονται γιά πρώτη φορά στά *Στοιχεῖα* τοῦ Εὐκλείδου (4ος αἰών π.Χ.) γιά νά σηματοδοτήσουν τό πέρας μαθηματικῶν ἀποδείξεων. Ἀπεδόθησαν δέ στά λατινικά ὡς *quod erat demostrandum*, μέ τά γνώριμα ἀρχικά *QED*. Σημειωτέον ὅτι στά ἀρχαῖα ἑλληνικά μαθηματικά κειμένα ἐμφανίζονται καί τά ἀρχικά *ὅ.ἔ.π.*, τά ὁποῖα ἀποτελοῦν τά ἀρχικά τῆς φράσεως *ὅπερ ἔδει ποιῆσαι*, φράση ἡ ὁποία ἀκολουθοῦσε τήν ὁλοκλήρωση γεωμετρικῶν κατασκευῶν. Ἡ φράση αὐτή ἀπεδόθη στά λατινικά ὡς *quod erat faciendum*.

1.9.6 (Γενίκευση) Ἔστω ὅτι ἡ διανυσματική συνάρτηση $\boldsymbol{\varphi} : I \to \mathbb{R}^N$ ἀποτελεῖ λύση τοῦ συστήματος συνήθων διαφορικῶν ἐξισώσεων $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ στό διάστημα $I = (a, b)$, ὅπου $a, b \in \mathbb{R}$ καί ἔστω ὅτι $\boldsymbol{f} \in C(\mathbb{R}^N)$. Ἄν ἡ $\boldsymbol{\varphi}$ εἶναι φραγμένη στό I, τότε ἀμφότερα τά ὅρια

$$\lim_{t\to a^+} \boldsymbol{\varphi}(t), \qquad \lim_{t\to b^-} \boldsymbol{\varphi}(t),$$

ὑπάρχουν στό $\mathbb{R}^N$.

1.9.7 Ἔστω $f \in C(\mathbb{R}^2)$ καί ἔστω ὅτι ἡ συνάρτηση φ ἀποτελεῖ λύση τῆς συνήθους διαφορικῆς ἐξισώσεως $x' = f(t, x)$ στό ἀνοικτό διάστημα (α, β), μέ $\beta < \infty$, καί ἡ $\varphi(t)$ δέν συγκλίνει σέ πραγματικό ἀριθμό καθώς τό t τείνει στό β ἐξ ἀριστερῶν, τότε δείξατε ὅτι $\lim_{t\to\beta^-} \varphi(t) \in \{-\infty, +\infty\}$.

Υποδειξη. Ἄν $\lim_{t\to\beta^-} \varphi(t) \notin \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, τότε θά $A, B \in \mathbb{R}$ καί ἀκολουθίες $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ καί $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ὥστε:

$$s_n,\ t_n \to \beta^-, \quad s_n < t_n < s_{n+1} < t_{n+1}, \varphi(s_n) = A < B = \varphi(t_n), \quad \varphi[s_n, t_n] = [A, B].$$

Ὅμως

$$B - A = \big|\varphi(s_n) - \varphi(t_n)\big| = \Big| \int_{s_n}^{t_n} f\big(s, \varphi(s)\big)\, ds \Big| \le M |s_n - t_n|,$$

ὅπου

$$M = \max_{(t,x)\in[s_1,\beta]\times[A,B]} \big|f(t, x)\big|.$$

Ὅπερ ἄτοπο.

1.9.8 (Γενίκευση) Ἔστω $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}^N$ συνεχής καί ἔστω ὅτι ἡ συνάρτηση $\boldsymbol{\varphi} : I \to \mathbb{R}^N$, ὅπου $I = (\alpha, \beta)$ ἀνοικτό διάστημα μέ $\beta < \infty$, ἀποτελεῖ λύση τοῦ συστήματος συνήθων διαφορικῶν ἐξισώσεων $\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ στό I. Ἔστω ἐπίσης ὅτι ἡ $\boldsymbol{\varphi}(t)$ δέν συγκλίνει σέ κάποιο στοιχεῖο τοῦ $\mathbb{R}^N$ καθώς τό t τείνει στό β. Δείξατε ὅτι $\lim_{t\to\beta^-} \|\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{t})\| = \infty$.

Κεφάλαιο 2

Ἐξισώσεις πρώτης τάξεως

Στό παρόν κεφάλαιο, θά ἀσχοληθοῦμε μέ τήν μεθοδολογία ἐπιλύσεως βαθμωτῶν συνήθων διαφορικῶν ἐξισώσεων πρώτης τάξεως τῆς μορφῆς:

$$x' = f(t, x). \tag{2.1}$$

Τό μεγαλύτερο μέρος τῆς μεθοδολογίας ἀναφέρεται σέ γραμμικές ἐξισώσεις, ἐξισώσεις χωριζομένων μεταβλητῶν ἤ περιπτώσεων οἱ ὁποῖες ἀνάγονται στά προηγούμενα δύο εἴδη. Ἐπίσης θά μελετήσομε στοιχειώδη θεωρητικά ἀποτελέσματα ὑπάρξεως, μοναδικότητος καί καθολικότητος τῶν λύσεων τά ὁποῖα συνοδεύουν τήν μεθοδολογία.

Ἰδιαίτερη ἔμφαση δίδεται στήν μελέτη παραδειγμάτων ἐξισώσεων πρώτης τάξεως ἐμφανιζομένων σέ φυσικές ἐφαρμογές καί συγκεκριμένα παραδειγμάτων ἀπό τήν Φυσική, Χημεία, Βιολογία καί Οἰκονομικά.

Παρά τήν ἁπλή μορφή τῆς (2.1), δέν ὑπάρχει γενική μέθοδος δυνάμενη νά τήν ἐπιλύσει καί νά μᾶς ἐπιτρέψει νά ἐκφράσομε τήν λύση της μέσῳ στοιχειωδῶν συναρτήσεων. Δέν εἶναι πάντοτε ἐφικτή ἡ εὕρεση λύσεων σέ *κλειστή μορφή*.

Μία συνήθης διαφορική ἐξίσωση ἔχει λύση σέ κλειστή μορφή (closed form solution), ἄν ἡ λύση της εἶναι ἐκφράσιμη μέσῳ στοιχειωδῶν συναρτήσεων καί ὁλοκληρωμάτων αὐτῶν.

Ἡ δυνατότης εὑρέσεως τέτοιας μορφῆς δυστυχῶς δέν ἀποτελεῖ τόν κανόνα. Θά ἦταν δυνατόν νά παραφράσομε σχετική ρήση τοῦ Isaac Newton ἀναφερόμενη στόν ὑπολογισμό ὁλοκληρωμάτων:

Ὁποτεδήποτε μία συνήθης διαφορική ἐξίσωση ἔχει λύση σέ κλειστή μορφή, αὐτό ἀποτελεῖ ἕνα εὐχάριστο ἀτύχημα.

2.1 Γραμμικές ἐξισώσεις

Στίς γραμμικές βαθμωτές ἐξισώσεις πρώτης τάξεως

$$x' = p(t)x + q(t), \tag{2.2}$$

ὅπου p, q συνεχεῖς συναρτήσεις ἐπί ἀνοικτοῦ διαστήματος I, ἡ συνάρτηση q ὀνομάζεται *μή ὁμοιογενής ὅρος*, ἐνῶ ἡ συνάρτηση p *συντελεστής τῆς ἐξισώσεως*. Ἰδιαιτέρως ὅταν $q \equiv 0$, τότε ἡ ἐξίσωση ὀνομάζεται *ὁμοιογενής*, ἐνῶ ἄν $q \not\equiv 0$, τότε ἡ ἐξίσωση ὀνομάζεται *μή ὁμοιογενής*. Στήν περίπτωση τῆς ὁμοιογενοῦς ἐξισώσεως, πολύ συχνά παρουσιάζεται στήν βιβλιογραφία ἡ ἀκόλουθη μεθοδολογία ἐπιλύσεως αὐτῆς:

$$\begin{aligned}
& & x' &= p(t)\,x \\
&\Longrightarrow & \frac{dx}{x} &= p(t)\,dt \\
&\Longrightarrow & \int \frac{dx}{x} &= \int p(t)\,dt \\
&\Longrightarrow & \log|x| &= \int p(t)\,dt + c \\
&\Longrightarrow & x &= \tilde{c}\,\mathrm{e}^{\int p(t)\,dt}
\end{aligned}$$

Ἡ ἀνωτέρω διαδικασία χρειάζεται διευκρινίσεις καί περιορισμούς, ὡστόσο, ὅπως θά δοῦμε ἀμέσως μετά, εἶναι δυνατόν νά αὐστηροποιηθεῖ ἡ ἀνωτέρω διαδικασία. Ἰδιαιτέρως ἡ συνάρτηση ἡ ὁποία προέκυψε ἀνωτέρω

$$\mu(t) = \mathrm{e}^{-\int p(t)\,dt}, \tag{2.3}$$

ὀνομάζεται *ὁλοκληρωτικός παράγων* (*integrating factor*) τῆς (2.2). Ὀνομάζεται κατ' αὐτό τόν τρόπο, διότι ὅπως θά δοῦμε ἐν συνεχείᾳ, ὅταν πολλαπλασιάσομε τήν ἐξίσωση, μέ τήν θετική αὐτή συνάρτηση, ἡ ἐξίσωση καθίσταται *ὁλοκληρώσιμη*.

Αὐστηροποίηση. Ἔστω λοιπόν ὅτι ἡ συνάρτηση $\varphi : J \to \mathbb{R}$, ἱκανοποιεῖ τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν τῆς ἀντίστοιχης μή ὁμοιογενοῦς ἐξισώσεως:

$$\begin{cases} x' = p(t)x + q(t), \\ x(\tau) = \xi, \end{cases} \tag{2.4}$$

ὅπου J ἀνοικτό διάστημα. Ἐννοεῖται ἐδῶ βεβαίως ὅτι $\tau \in J \subset I$ καί ὅτι ἡ φ εἶναι συνεχῶς διαφορίσιμη ἐπί τοῦ J. Ἄν πολλαπλασιάσομε μέ τόν ὁλοκληρωτικό παράγοντα (2.3) καταλλήλως διαμορφωμένο, λαμβάνομε τίς ἀκόλουθες ἰσοδύναμες μορφές:

$$
\begin{aligned}
& e^{-\int_\tau^t p(s)\,ds}\big(\varphi'(t) - p(t)\varphi(t)\big) = e^{-\int_\tau^t p(s)\,ds} q(t), \quad \varphi(\tau) = \xi \\
\Longleftrightarrow \quad & \Big(e^{-\int_\tau^t p(s)\,ds}\varphi(t)\Big)' = e^{-\int_\tau^t p(s)\,ds} q(t), \quad \varphi(\tau) = \xi \\
\Longleftrightarrow \quad & e^{-\int_\tau^s p(\sigma)\,d\sigma}\varphi(s)\Big|_\tau^t = \int_\tau^t e^{-\int_\tau^s p(\sigma)d\sigma} q(s)\,ds, \quad \varphi(\tau) = \xi \\
\Longleftrightarrow \quad & e^{-\int_\tau^t p(s)\,ds}\varphi(t) - \varphi(\tau) = \int_\tau^t e^{-\int_\tau^s p(\sigma)\,d\sigma} q(s)\,ds, \quad \varphi(\tau) = \xi \\
\Longleftrightarrow \quad & \varphi(t) = e^{\int_\tau^t p(s)\,ds}\varphi(\tau) + e^{\int_\tau^t p(s)\,ds}\int_\tau^t e^{-\int_\tau^s p(\sigma)\,d\sigma} q(s)\,ds, \quad \varphi(\tau) = \xi.
\end{aligned}
$$

Ὅλες οἱ ἀνωτέρω ἰσχύουν γιά κάθε $t \in J$. Οἱ τελευταῖες δύο σχέσεις εἶναι ἰσοδύναμες μέ τήν

$$\varphi(t) = e^{\int_\tau^t p(s)\,ds}\xi + e^{\int_\tau^t p(s)\,ds}\int_\tau^t e^{-\int_\tau^s p(\sigma)\,d\sigma} q(s)\,ds,$$

ἤ ἁπλούστερα

$$\varphi(t) = e^{\int_\tau^t p(s)\,ds}\xi + \int_\tau^t e^{\int_s^t p(\sigma) d\sigma} q(s)\,ds, \tag{2.5}$$

γιά κάθε $t \in J$. Ὁ τύπος (2.5) ὅτι μᾶς παρέχει λύση σέ κλειστή μορφή ἐπί τοῦ διαστήματος J. Ἐπίσης τό δεξιό μέλος τῆς (2.5) ὁρίζεται ἐφ' ὅλου τοῦ I, ὄχι μόνον ἐπί τοῦ J.

Ἔχομε λοιπόν τό πρῶτο ἀποτέλεσμα *ὑπάρξεως καί μοναδικότητος*:

Πρόταση 2.1.1. *Ἔστωσαν p, q συνεχεῖς συναρτήσεις ἐπί τοῦ ἀνοικτοῦ διαστήματος I καί $\tau \in I$. Τότε τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν (2.4) ἔχει μοναδική λύση ἡ ὁποία ὁρίζεται σ' ὅλο τό I καί δίδεται ἀπό τήν (2.5).*

Απόδειξη. Προκύπτει ἀπό τίς ἀνωτέρω ἰσοδυναμίες.

Πράγματι ἡ κατεύθυνση '$\Longrightarrow$" ἀποτελεῖ τήν ἀπόδειξη τῆς *μοναδικότητος*:

Ἄν $\psi(t)$ ἄλλη λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (2.4), τότε λόγῳ τῶν προηγηθεισῶν συνεπαγωγῶν,

$$\Longrightarrow \cdots \Longrightarrow \qquad \psi(t) = e^{\int_\tau^t p(s)ds}\xi + \int_\tau^t e^{\int_s^t p(\sigma)\,d\sigma} q(s)\,ds = \varphi(t)$$

καί ἐπί πλέον ἡ ψ ἀνωτέρω ὁρίζεται σ' ὅλο τό I.

Ἡ δέ κατεύθυνση '$\Longleftarrow$" τῶν ἀνωτέρω ἰσοδυναμιῶν, ἀποτελεῖ τήν ἀπόδειξη τῆς *ὑπάρξεως* λύσεων:

Ἔστω ὅτι ἡ συνάρτηση $\varphi : I \to \mathbb{R}$ δίδεται ἀπό τόν τύπο:

$$\varphi(t) = e^{\int_\tau^t p(s)\,ds}\xi + \int_\tau^t e^{\int_s^t p(\sigma)\,d\sigma} q(s)\,ds. \tag{2.6}$$

Τότε λόγῳ τῶν ἀντιστρόφων συνεπαγωγῶν:

$$\Longrightarrow \cdots \Longrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} \varphi'(t) & = & p(t)\varphi(t) + q(t), \quad t \in I \\ \varphi(\tau) & = & \xi. \end{array} \right.$$

Ἄρα ἡ φ ἀποτελεῖ λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (2.4) στό διάστημα I καί συνεπῶς πράγματι *ὑπάρχει* λύση στό I. □

Παρατηρήσεις

(i) Τό ἀνωτέρω ἀποτέλεσμα μᾶς παρέχει τρία στοιχεῖα:

α′. *Ὕπαρξη* λύσεως τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν,

β′. *Μοναδικότητα* τῶν λύσεων αὐτοῦ καί

γ′. *Καθολικότητα* τῆς λύσεως, δηλαδή ὁρισιμότητά της σ' ὅλο τό I, τό ἀνοικτό διάστημα στό ὁποῖο εἶναι συνεχεῖς οἱ p καί q. Πρέπει νά τονισθεῖ ἐδῶ ὅτι εἶναι σπάνια τά ἀποτελέσματα ὑπάρξεως στίς διαφορικές ἐξισώσεις ὅπου ἡ λύση ὁρίζεται *καθολικῶς*. Τά πλεῖστα ἀποτελέσματα *ὑπάρξεως* μᾶς ἐξασφαλίζουν *τοπική λύση*, δηλαδή λύση σέ κάποιο ἀνοικτό διάστημα, τό ὁποῖο ἀποτελεῖ μικρή συνήθως περιοχή τοῦ ἀρχικοῦ χρόνου καί γνήσιο ὑποσύνολο *μεγιστικοῦ* διαστήματος στό ὁποῖο εἶναι δυνατόν νά ὁρισθεῖ ἡ λύση.

Εἶναι ἐπίσης δυνατόν νά ἐξαχθοῦν καί τά ἑξῆς συμπεράσματα:

δ′. Ἡ φ, ὅπως φαίνεται στήν (2.5), πέραν τοῦ ὅτι εἶναι συνεχῶς διαφορίσιμη ὡς πρός t, ἐξαρτᾶται ὁμαλῶς καί ὡς ἀπό τόν ἀρχικό χρόνο τ καί τήν ἀρχική τιμή ξ. Πόσο ὁμαλῶς; (Βλέπε *Ἄσκηση* 2.1.7 ἡ ὁποία ἀκολουθεῖ).

ε′. Ἄν εἴχαμε ὅτι $p, q \in C^k(I)$, τότε θά εἴχαμε ὅτι $\varphi \in C^{k+1}(I)$. Ἰδιαιτέρως στήν περίπτωση ὅπου ἰσχύει ὅτι $p, q \in C^\infty(I)$, τότε καί γιά τήν λύση ἰσχύει κατ' ἀναλογίαν ὅτι $\varphi \in C^\infty(I)$ (βλέπε *Ἄσκηση* 2.1.8 *ἡ ὁποία ἀκολουθεῖ).*

ϝ′. *Ἄν γράψομε τήν λύση του προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & p(t)x + q(t), \\ x(\tau) & = & \xi, \end{array} \right. \tag{2.7}$$

ὡς $\varphi = \varphi(t;\xi,q)$, *τότε ἔχομε ὅτι:*

$$\varphi(t;\xi,q) = \xi\, \varphi(t;1,0) + \varphi(t;0,q).$$

Ὡς ἐκ τούτου, κάθε λύση τῆς ἐξισώσεως $x' = p(t)x + q(t)$ γράφεται ὡς ἄθροισμα κάποιας εἰδικῆς λύσεως τῆς μή ὁμοιογενοῦς ἐξισώσεως σύν καταλλήλο πολλαπλάσιο ἐπίσης εἰδικῆς, μή μηδενικῆς, λύσεως τῆς ἀντίστοιχης ὁμοιογενοῦς.

Ἰδιαιτέρως, ἡ λύση $\varphi(t;\xi,q)$ εἶναι γραμμική ὡς πρός (ξ,q). Αὐτό σημαίνει ὅτι, γιά κάθε $c_1,c_2,\xi_1,\xi_2\in\mathbb{R}$, $q_1,q_2\in C(I)$, ἰσχύει ὅτι

$$\varphi\big(t;c_1(\xi_1,q_1)+c_2(\xi_2,q_2)\big) \;=\; c_1\,\varphi(t;\xi_1,q_1)+c_2\,\varphi(t;\xi_2,q_2).$$

(ii) Ὅπως ἔχει ἤδη ἀναφερθεῖ, ἡ λύση ἡ ὁποία δίδεται ἀπό τήν (2.6), ἀποτελεῖ λύση σέ κλειστή μορφή, παρά τό γεγονός ὅτι ὁ ὑπολογισμός τῶν ἀορίστων ὁλοκληρωμάτων τά ὁποῖα ἐμφανίζονται στό δεξιό μέλος τῆς (2.6) δέν εἶναι πάντοτε ἐφικτός μέσῳ στοιχειωδῶν συναρτήσεων.

(iii) Ἔστω ὁ πυρήνας $S(t,s)=\mathrm{e}^{\int_s^t p(\sigma)\,d\sigma}$. Τότε ὁ τύπος (2.5) λαμβάνει τήν μορφή

$$x(t) \;=\; S(t,\tau)\xi+\int_\tau^t S(t,s)\,q(s)\,ds. \tag{2.8}$$

Αὐτό ἀποτελεῖ τήν *Ἀρχή τοῦ Duhamel*[56]. Ἰδιαιτέρως, στήν περίπτωση τῆς ὁμοιογενοῦς ἐξισώσεως $x' \;=\; p(t)x$, κάθε λύση τῆς φ, ἱκανοποιεῖ τήν

$$\varphi(t) \;=\; S(t,s)\,\varphi(s). \tag{2.9}$$

Ἡ τελευταία ἰδιότης καθιστᾶ τόν πυρῆνα $S(t,s)$ *ἡμιομάδα*. Ἐκφράσεις ἀνάλογες τῶν (2.8) καί (2.9) ἐμφανίζονται τόσο σέ γραμμικά συστήματα συνήθων διαφορικῶν ἐξισώσεων, ὅσο καί σέ ἐξελικτικές γραμμικές μερικές διαφορικές ἐξισώσεις.

Παραδείγματα

(i) *Ἔστω I ἀνοικτό διάστημα, p, $q\in C(I)$ καί $\psi: I\to\mathbb{R}$ λύση τῆς ἐξισώσεως*

$$x' \;=\; p(t)x+q(t). \tag{2.10}$$

Δείξατε ὅτι κάθε ἄλλη λύση $\varphi: I\to\mathbb{R}$ τῆς (2.10) ἔχει τήν μορφή $\varphi=\psi+c\,\zeta$, ὅπου c σταθερά, φ μή μηδενική λύση τῆς (2.10) καί ζ μή μηδενική λύση τῆς ἀντίστοιχης ὁμοιογενοῦς ἐξισώσεως.

Απόδειξη. Οἱ φ, $\psi: I\to\mathbb{R}$ ἱκανοποιοῦν ἀμφότερες τήν (2.10). Ἄρα:

$$\varphi'(t) \;=\; p(t)\varphi(t)+q(t), \quad \psi'(t) \;=\; p(t)\psi(t)+q(t),$$

ὁπότε ἡ διαφορά αὐτῶν $\zeta(t)=\varphi(t)-\psi(t)$ θά ἱκανοποιεῖ τήν ἐξίσωση

$$x' \;=\; p(t)x. \tag{2.11}$$

[56]Jean-Marie Duhamel (1797–1872). Γάλλος μαθηματικός.

Ισχυρισμος. *Ἔστω $\tau \in I$. Τότε κάθε τῆς (2.11) εἶναι τῆς μορφῆς*

$$\zeta(t) \;=\; c\,\mathrm{e}^{\int_\tau^t p(s)\,ds},$$

γιά κάποιο $c \in \mathbb{R}$.

Πράγματι, ἄν $\zeta'(t) = p(t)\zeta(t)$, τότε $\mathrm{e}^{-\int_\tau^t p(s)\,ds}\big(\zeta'(t) - p(t)\zeta(t)\big) = 0$ ἤ ἰσοδύναμα

$$\Big(\mathrm{e}^{-\int_\tau^t p(s)\,ds}\zeta(t)\Big)' \;=\; 0,$$

ἤτοι ὑπάρχει σταθερά c ὥστε

$$\mathrm{e}^{-\int_\tau^t p(s)\,ds}\zeta(t) \;=\; c,$$

ἀπ' ὅπου προκύπτει τελικῶς ὅτι:

$$\zeta(t) \;=\; c\,\mathrm{e}^{\int_\tau^t p(s)\,ds}.$$

Δύναται νά λεχθεῖ ὅτι:

Ἡ γενική λύση τῆς μή ὁμοιογενοῦς ἐξισώσεως γράφεται ὡς ἄθροισμα εἰδικῆς λύσεως τῆς μή ὁμοιογενοῦς καί τῆς γενικῆς λύσεως τῆς ὁμοιογενοῦς.

(ii) *Νά βρεθεῖ ἡ γενική λύση τῆς ἐξισώσεως:*

$$t\,x' \;=\; \alpha\,x + 1, \qquad \alpha \neq 0. \tag{2.12}$$

Επιλυση. Ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωση γράφεται, σέ ἄμεση μορφή ὡς:

$$x' \;=\; \frac{\alpha x}{t} + \frac{1}{t}$$

καί ἔχει λύσεις μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό $\mathbb{R}^-$ ἤ τό $\mathbb{R}^+$. Κάθε συνάρτηση τῆς μορφῆς:

$$\mathrm{e}^{-\int(\alpha/t)dt} \;=\; c|t|^{-\alpha}$$

ἀποτελεῖ ὁλοκληρωτικό της παράγοντα. Ἰδιαιτέρως, ἄν πολλαπλασιασθεῖ ἡ ἐξίσωσή μας ἐπί $\mu(t) = |t|^{-\alpha}$, λαμβάνομε:

$$|t|^{-\alpha}\Big(x' - \frac{\alpha}{t}x\Big) \;=\; \frac{|t|^{-\alpha}}{t} \qquad \text{ἤ} \qquad \big(|t|^{-\alpha}x\big)' \;=\; \frac{|t|^{-\alpha}}{t},$$

ἤ ἰσοδύναμα:

$$|t|^{-\alpha}x \;=\; -\frac{|t|^{-\alpha}}{\alpha} + c,$$

ὅπου c σταθερά καί τελικῶς

$$x \;=\; -\frac{1}{\alpha} + c|t|^{\alpha}. \tag{2.13}$$

Ἡ x ἀνωτέρω ἀποτελεῖ τήν γενική λύση τῆς (2.12). Σημειωτέον ὅτι, ἐπειδή ἡ ροή ὁρίζεται ὅταν $t \neq 0$ καί οἱ λύσεις τῆς (2.12) θά ὁρίζονται στό $\mathbb{R}^-$ ἤ στό $\mathbb{R}^+$. Ὄχι ὅμως σ' ὅλο το $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(iii) *Νά λυθεῖ τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν:*

$$\begin{cases} x' = \dfrac{\alpha x + 1}{t}, \\ x(1) = 1. \end{cases} \tag{2.14}$$

Επιλυση. Ὁ ἀρχικός χρόνος μᾶς ἐπιβάλλει νά ἐπιλέξομε ὡς πεδίο ὁρισμοῦ τῆς λύσεως τό ἀνοικτό διάστημα $\mathbb{R}^+$. Γιά νά εὕρομε τήν λύση ἀπομένει νά προσδιορίσομε τήν τιμή τοῦ c στήν (2.13). Δηλαδή:

$$1 = x(1) = -\frac{1}{\alpha} + c,$$

ὁπότε $c = 1 + \dfrac{1}{\alpha}$ καί ἐν τέλει

$$x = -\frac{1}{\alpha} + \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) |t|^{\alpha}.$$

Ἰδιαιτέρως, ἡ λύση τοῦ (2.14), ἡ ὁποία ὁρίζεται σ' ὁλο τό $\mathbb{R}^+$, εἶναι ἡ

$$\varphi(t) = -\frac{1}{\alpha} + \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) t^{\alpha}. \tag{2.15}$$

Παρατηρῆστε ὅτι τό δεξιό μέλος τῆς (2.15) ἔχει ὡς πεδίο ὁρισμοῦ ὅλο τό $\mathbb{R}$ στήν περίπτωση ὅπου τό α εἶναι θετικό ἀκέραιος, ὄχι ὅμως καί ἡ λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (2.14).

(iv) *Ποιές συνεχεῖς συναρτήσεις f ἱκανοποιοῦν τήν σχέση*

$$f(t) = \int_0^t f(s)\, ds, \tag{2.16}$$

γιά κάθε t σέ κάποιο ἀνοικτό διάστημα I στό ὁποῖο ἀνήκει καί τό 0.

Επιλυση. Ἐφ' ὅσον ἡ f εἶναι συνεχής, τότε τό δεξιό μέλος τῆς (2.16) ἀποτελεῖ συνεχῶς διαφορίσιμη συνάρτηση, ὡς ἀόριστο ὁλοκλήρωμα συνεχοῦς. Ἄρα τό ἴδιο συμβαίνει καί στό ἀριστερό μέλος. Ἤτοι, ἡ f εἶναι, ἐκεῖ ὅπου ὁρίζεται, συνεχῶς διαφορίσιμη. Παραγωγίζοντας τήν (2.16) λαμβάνομε

$$f'(t) = f(t).$$

Ἄρα ἡ f ἀποτελεῖ λύση τῆς $x' = x$ καί ὡς ἐκ τούτου $f(t) = c\,\mathrm{e}^t$. (Γιατί;) Ὅμως ἀπό τήν (2.16) προκύπτει ὅτι $f(0) = 0$ καί κατά συνέπεια $c = 0$. Ἐν τέλει λοιπόν, ἄν ἡ f ἱκανοποιεῖ τήν (2.16), θά πρέπει $f \equiv 0$.

Μέχρι αὐτοῦ τοῦ σημείου, μέ τήν βοήθεια λογικῶν συλλογισμῶν, διεπιστώθη ὅτι, ἄν μία συνάρτηση f ἱκανοποιεῖ τήν (2.16), τότε $f \equiv 0$. Ἤτοι, ὅτι τό σύνολο τῶν λύσεων τῆς (2.16) εἶναι ὑποσύνολο τοῦ μονοσυνόλου μέ στοχεῖο τήν συνάρτηση $f \equiv 0$. Ἀπομένει νά διαπιστωθεῖ ὅτι ἡ συνάρτηση $f \equiv 0$ πράγματι ἱκανοποιεῖ τήν (2.16) τό ὁποῖο εἶναι ἐμφανές. Τό τελευταῖο αὐτό βῆμα ἀποτελεῖ τήν *ἐπαλήθευση*.

Ἀσκήσεις

2.1.1 Σέ κάθε ἕνα ἀπό τά κατωτέρω προβλήματα ἀρχικῶν τιμῶν, νά βρεθεῖ τό μέγιστο πεδίο ὁρισμοῦ τῆς λύσεως χωρίς νά λυθεῖ τό ἴδιο:

(i) $(\log t)\, x' + \mathrm{e}^{1/t}\, x = \sin t, \quad x(2) = 0,$

(ii) $x' + (\tan t)\, x = \sin t, \quad x\big(\frac{3}{\pi}\big) = 0,$

(iii) $(1 - t^2)x' + tx = 1, \quad x(0) = 1,$

(iv) $x' + (\cot t)x = \dfrac{1}{t}, \quad x\big(\frac{3\pi}{2}\big) = 0,$

(v) $\big(\log(2t-1)\big)\, x' + (\cot t)x = (1 - t^2)^{1/2}, \quad x\big(\frac{3}{4}\big) = 0.$

2.1.2 Νά βρεθεῖ ἡ γενική λύση τῶν κατωτέρω ἐξισώσεων:

(i) $x' + \dfrac{1}{t}x = \dfrac{\mathrm{e}^t}{t}, \quad t > 0,$

(ii) $t\, x' + x = \mathrm{e}^{-t}, \quad t < 0,$

(iii) $t^2\, x' + 3tx = \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t}, \quad t > 0,$

(iv) $x' - (\tan t)x = \cos t, \quad t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}),$

(v) $x' + x = \dfrac{1}{1 + t^2}.$

2.1.3 Νά ἐπιλυθοῦν τά κάτωθι προβλήματα ἀρχικῶν τιμῶν. Σέ ποιό ἀνοικτό διάστημα ὁρίζονται οἱ λύσεις τους;

(i) $x' + (\cot t)\, x = \sin t, \quad x\big(\frac{\pi}{2}\big) = 1,$

(ii) $tx' + 2x = \dfrac{\sin t}{t}, \quad x\big(\frac{\pi}{2}\big) = 0,$

(iii) $t(2+t)\, x' + 2(1+t)\, x = 1 + 3t^2, \quad x(-1) = 1,$

(iv) $(1 - t^2)\, x' - t\, x = t(1 - t^2), \quad x(0) = 0,$

(v) $x' - \dfrac{1}{t}\, x = \sin t, \quad x\big(\frac{\pi}{2}\big) = 0.$

2.1.4 Ἕνα ὄχι ἀσύνηθες λάθος στόν Ἀπειροστικό Λογισμό εἶναι νά πιστεύει κανείς ὅτι ὁ κανόνας τοῦ γινομένου γιά τίς παραγώγους λέγει ὅτι $(fg)' = f'g'$. Ἄν $f(x) = e^{x^2}$, τότε νά διαπιστωθεῖ μέ ἀπόδειξη κατά πόσον ὑπάρχει ἀνοικτό διάστημα (a, b) καί μή μηδενική συνάρτηση g ὁρισμένη ἐπί τοῦ (a, b) ὥστε ὁ λανθασμένος αὐτός κανόνας τοῦ γινομένου νά ἰσχύει γιά κάθε x στό (a, b).

Putnam 1988. Βλέπε [45].

2.1.5 Γιά κάθε μία ἀπό τίς κατωτέρω σχέσεις νά βρεθεῖ συνεχής συνάρτηση f ἡ ὁποία ἱκανοποεῖ τήν σχέση σέ κάποιο διάστημα I:

(i) $f(t) = 1 + \int_0^t f(s)\, ds, \quad 0 \in I,$

(ii) $f(t) = \xi + \alpha \int_\tau^t f(s)\, ds, \quad \tau \in I,$

(iii) $f(t) = 1 - \int_0^t s f(s)\, ds, \quad 0 \in I,$

(iv) $f(t) = t - \int_1^t \mathrm{e}^{-s} f(s)\, ds, \quad 1 \in I,$

(v)* $f(t) = \int_0^t \left(\int_0^s f(\sigma)\, d\sigma \right) ds, \quad 0 \in I.$

Υποδειξη. Στήν περίπτωση (v) ἄν προσθέσομε κατά μέλη $\int_0^t f(s)\, ds$ λαμβάνομε

$$f(t) + \int_0^t f(s)\, ds = \int_0^t \left(\int_0^s f(\sigma)\, d\sigma \right) ds + \int_0^t f(s)\, ds.$$

Συνεπῶς ἄν θέσομε $g(t) = f(t) + \int_0^t f(s)\, ds$, τότε ἡ g ἱκανοποιεῖ τήν $g(t) = \int_0^t g(s)\, ds$ (βλέπε λυμένο παράδειγμα (iv) στήν σελίδα 63).

2.1.6 Νά βρεθοῦν ὅλες οἱ πραγματικές, συνεχῶς διαφορίσιμες συναρτήσεις, ὁρισμένες σ' ὅλο τό $\mathbb{R}$, οἱ ὁποῖες ἱκανοποιοῦν τήν σχέση

$$\big(f(x)\big)^2 = \int_0^x \left[\big(f(t)\big)^2 + \big(f'(t)\big)^2 \right] dt + 1990.$$

Putnam 1990. Βλέπε [45].

2.1.7 Ἔστω ὅτι $p, q \in C(I)$ καί $\tau \in I$. Δείξατε ὅτι ἡ λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x' = p(t)x + q(t), \\ x(\tau) = \xi, \end{cases} \tag{2.17}$$

εἶναι συνεχῶς διαφορίσιμη ὡς πρός τ καί ξ.

2.1.8 (Συνέχεια) Ἄν ὑποτεθεῖ ὅτι $p, q \in C^k(I)$, δείξατε ὅτι κάθε λύση $\varphi : I \to \mathbb{R}$ τῆς $x' = p(t)x + q(t)$, ἀνήκει στό $C^{k+1}(I)$. Ἐπίσης, ἡ εἶναι $k+1$ φορές συνεχῶς διαφορίσιμη ὡς πρός τ καί ξ.

2.1.9 Ἔστω $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x' - x = 1, \\ x(0) = \xi. \end{cases}$$

Πῶς ἐξαρτᾶται τό ὅριο $\lim_{t \to +\infty} \varphi(t)$ ἀπό τήν ἀρχική τιμή ξ.

2.1.10 Ἔστω α, β θετικές σταθερές. Δείξατε ὅτι κάθε λύση τῆς ἐξισώσεως

$$x' + \alpha x = \mathrm{e}^{-\beta t},$$

τείνει στό μηδέν ὅταν τό t τείνει στό σύν ἄπειρον.

2.1.11 Ἄν ἡ συνάρτηση $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ εἶναι συνεχής καί περιοδική, μέ περίοδο T, δείξατε ὅτι τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν:

$$x' + x = p(t), \quad x(0) = \xi,$$

ἔχει, γιά κατάλληλο $\xi \in \mathbb{R}$, περιοδική λύση ψ, μέ περίοδο T. Ἄν φ ἄλλη λύση τῆς ἰδίας ἐξισώσεως, τότε δείξατε ὅτι:

$$\lim_{t\to+\infty}\big(\varphi(t)-\psi(t)\big) = 0.$$

Υποδειξη. Τό ξ γιά τό ὁποῖο τό ἀνωτέρω πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν ἔχει περιοδική λύση εἶναι

$$\xi = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-T}}\int_0^T \mathrm{e}^s p(s)\,ds.$$

2.1.12 Δίδονται οἱ συνεχεῖς συναρτήσεις $p, q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, οἱ ὁποῖες ἱκανοποιοῦν τίς

$$p(t) \le -\varepsilon \quad \text{γιά κάθε} \quad t \in \mathbb{R}, \tag{2.18}$$

ὅπου $\varepsilon > 0$ καί

$$\lim_{t\to+\infty} q(t) = 0.$$

Δείξατε ὅτι κάθε λύση τῆς

$$x' = p(t)x + q(t),$$

τείνει στό μηδέν ὅταν τό t τείνει στό σύν ἄπειρο.

2.1.13* (Συνέχεια) Τό συμπέρασμα τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως ἐξακολουθεῖ νά ἰσχύει, ἄν ἡ ὑπόθεση (2.18) ἀντικατασταθεῖ ἀπό τήν

$$\int_0^\infty p(t)\,dt = -\infty.$$

2.1.14 Δείξατε ὅτι ἄν ἡ συνάρτηση φ_k ἀποτελεῖ λύση τῆς ἐξισώσεως $x' = p_k(t)x$, γιά $k = 1, \dots, n$, τότε ἡ $\varphi = \varphi_1\varphi_2\dots\varphi_n$ ἀποτελεῖ λύση τῆς ἐξισώσεως

$$x' = \big(p_1(t) + \ldots + p_n(t)\big)\,x.$$

2.1.15 Ἔστω I ἀνοικτό διάστημα. Ἄν οἱ συναρτήσεις $\varphi_j : I \to \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$, ἱκανοποιοῦν τίς διαφορικές ἐξισώσεις

$$\varphi_j' = p\,\varphi_j + q_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

ὅπου $p, q_j \in C(I)$, τότε ἡ $\varphi = \sum_{j=1}^n \varphi_j$ ἱκανοποιεῖ τήν ἐξίσωση $\varphi' = p\varphi + q$, ὅπου $q = \sum_{j=1}^n q_j$.

2.1.16 Δίδονται οἱ συνεχῶς διαφορίσιμες συναρτήσεις $\varphi_1, \varphi_2 : I \to \mathbb{R}$, ὅπου I ἀνοικτό διάστημα. Ποία γραμμική ἐξίσωση πρώτης τάξεως ἔχει ὡς γενική λύση τήν

$$x = c\,\varphi_1 + \varphi_2,$$

ὅπου c σταθερά;

2.1.17 **Ἐξισώσεις Bernoulli**[57]: Δίδεται ἡ συνήθης διαφορική ἐξίσωση

$$x' = p(t)x + q(t)x^n, \tag{2.19}$$

ὅπου $p, q : I \to \mathbb{R}$ συνεχεῖς καί $n \ne 0, 1$.

(i) Διαπιστώσατε ὅτι ὁ μετασχηματισμός

$$y = x^{1-n},$$

τήν καθιστᾶ γραμμική ὡς πρός y.

[57] Οἱ ἐξισώσεις αὐτές ἔλαβαν τήν ὀνομασία τους ἀπό τόν Jacob Bernoulli. Ἡ ἐπίλυσή τους ὅμως ἐδόθη ἀπό τόν Leibniz τό 1696.

(ii) Νά βρεθεῖ ἡ γενική λύση τῆς ἐξισώσεως (2.19).

(iii) Νά βρεθεῖ ἡ γενική λύση τῶν ἀκολούθων ἐξισώσεων Bernoulli:

(i) $x' = \dfrac{t}{x} + \dfrac{x}{t}$,

(ii) $t\,x' - x + t^3x^2 = 0$,

(iii) $x' = 4x + \mathrm{e}^{-t}x^{\frac{3}{4}}$,

(iv) $t\,x' - x + 3t^2x^2 = 0$,

(v) $x' = \dfrac{\mathrm{e}^{-t} - 2x^2}{x}$.

2.1.18 Νά ἐπιλυθεῖ τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν:

$$\begin{cases} x' = x + \dfrac{t - t^2}{x}, \\ x(1) = 1. \end{cases}$$

Σέ ποιό διάστημα ὁρίζεται ἡ λύση;

2.1.19 Νά προσδιορισθοῦν ὅλες οἱ συνεχεῖς καί θετικές συναρτήσεις $f : [0, a] \to \mathbb{R}$, ὅπου $a > 0$, τῶν ὁποίων ἡ μέση τιμή σέ κάθε διάστημα $[0, x] \subset [0, a]$, ὅπου $x > 0$, εἶναι ἴση μέ τόν γεωμετρικό μέσο τῶν $f(0)$ καί $f(x)$. (Ὑπενθυμίζεται ὅτι ἡ μέση τιμή τῆς συναρτήσεως f στό $[a, b]$ δίδεται ἀπό τόν τύπο

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx,$$

ἐνῶ ὁ γεωμετρικός μέσος τῶν A καί B δίδεται ἀπό τόν τύπο $\sqrt{AB}$.)

2.1.20 Δείξατε ὅτι ἡ λύση $\varphi = \varphi(t, \varepsilon)$ τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν:

$$\begin{cases} x' = \varepsilon x - x^3, \\ x(0) = 1, \end{cases}$$

ἱκανοποιεῖ τήν

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varphi(t, \varepsilon) = (2t + 1)^{-\frac{1}{2}}.$$

Ποιό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν ἱκανοποιεῖ τό ἀνωτέρω ὅριο;

2.1.21 **Ἐξισώσεις Riccati**[58]: Ἔστω ἡ συνήθης διαφορική ἐξίσωση:

$$x' = \alpha(t) + \beta(t)\,x + \gamma(t)\,x^2. \tag{2.20}$$

Ἄν καί δέν ὑπάρχει γενική μέθοδος ἐπιλύσεως τῆς ἀνωτέρω, δυνάμεθα νά εὕρομε τήν γενική της λύση, μέ τήν προϋπόθεση ὅτι γνωρίζομε κάποια εἰδική της λύση. Δείξατε ὅτι ἄν φ εἰδική λύση τῆς (2.20) καί θέσομε

$$x = \varphi + \frac{1}{v},$$

τότε ἡ v ἱκανοποιεῖ τήν γραμμική ἐξίσωση

$$v' = -\big(\beta(t) + 2\gamma(t)\varphi(t)\big)\,v - \gamma(t).$$

[58]Οἱ ἐξισώσεις αὐτές ἔλαβαν τήν ὀνομασία τους ἀπό τόν Ἑνετό εὐγενῆ καί μαθηματικό Jacopo Francesco Riccati (1676–1754), ὁ ὁποῖος ἐμελέτησε εἰδική τους περίπτωση τό 1712 [46]. Ἡ γενικότερή τους ἐκδοχή ἐμελετήθη ἀπό τόν d'Alembert το 1763.

2.1.22 Νά βρεθεῖ ἡ γενική λύση τῶν κατωτέρω ἐξισώσεων Riccati, τῶν ὁποίων δίδεται εἰδική λύση:

(i) $x' = 1 + t^2 - 2tx + x^2, \ \varphi(t) = t,$

(ii) $x' = \sin^2 t + (\cot t)x - x^2, \ \varphi(t) = \sin t,$

(iii) $x' = 1 - t\,\mathrm{e}^t x + \mathrm{e}^t x^2, \ \varphi(t) = t,$

(iv) $x' = 1 + (1 - 2\cosh t)x + x^2, \ \varphi(t) = \mathrm{e}^t.$

2.1.23 Νά βρεθεῖ ἡ γενική λύση τῆς ἐξισώσεως

$$x' = \alpha h(t) + \big(\alpha + h(t)\big)\, x + x^2,$$

ἡ ὁποία ἀποτελεῖ ἐξίσωση Riccati, ἀφοῦ βρεθεῖ προφανής εἰδική της λύση.

2.1.24 Ἄν στήν δευτέρας τάξεως γραμμική ὁμοιογενῆ

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0,$$

θέσομε $x = \mathrm{e}^y$, τότε ἡ ἀνωτέρω ἀνάγεται σέ ἐξίσωση Riccati μέ ζητούμενη συνάρτηση τήν $z = y'$. Νά λυθεῖ κατ' αὐτό τόν τρόπο ἡ ἐξίσωση:

$$x'' + x = 0.$$

2.1.25 **Κατά κλάδους ὁρισμένη ροή:** Ἔστω ὅτι δίδεται τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν

$$x' = \begin{cases} 2x - 1 & \text{ἄν} \quad x \geq \frac{3}{5}, \\ 2 - 3x & \text{ἄν} \quad x < \frac{3}{5}, \end{cases} \qquad x(0) = 0.$$

Νά ἐπιλυθεῖ ἀφοῦ παρατηρήσετε ὅτι ἡ συνάρτηση ροῆς εἶναι συνεχής.

Υπόδειξη. Δοθέντος ὅτι ἡ ἀρχική τιμή εἶναι μικρότερη τοῦ $\frac{3}{5}$, τότε ἡ λύση φ τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν σέ κάποια περιοχή τοῦ ἀρχικοῦ χρόνου $\tau = 0$, θά ἱκανοποιεῖ τήν ἀνισότητα $\varphi(t) < \frac{3}{5}$ καί κατά συνέπεια θά ἀποτελεῖ λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν

$$x' = 2 - 3x, \quad x(0) = 0,$$

τό ὁποῖο ὁρίζει λύση σ' ὅλο τό διάστημα ὅπου ἡ φ εἶναι μικρότερη τοῦ $\frac{3}{5}$. Ἐκεῖ ὅπου λαμβάνει τήν τιμή $\frac{3}{5}$ καθώς καί μεγαλύτερες αὐτῆς τιμές, ἡ φ θά ἱκανοποιεῖ τόν ἄλλο κλάδο τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως.

2.1.26 Νά ἐπιλυθεῖ τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν:

$$\begin{cases} x' = |x| + 1, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

2.1.27 Νά ἐπιλυθεῖ τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν:

$$\begin{cases} x' = x^2 + 4\max\{x + 1, 0\}, \\ x(2) = -2. \end{cases}$$

2.1.28 Ἔστω ὅτι ἡ οἰκογένεια τῶν ὁλοκληρωτικῶν καμπυλῶν τῆς ἐξισώσεως:

$$x' = p(t)x + q(t),$$

τέμνεται ἀπό τήν εὐθεῖα $t = \tau$. Δεῖξτε ὅτι οἱ ἐφαπτόμενες τῶν σημείων τομῆς εἴτε εἶναι μεταξύ τους παράλληλες, εἴτε διέρχονται ἀπό τό ἴδιο σημεῖο.

2.2 Ἐξισώσεις χωριζομένων μεταβλητῶν

Συνήθεις διαφορικές ἐξισώσεις *χωριζομένων μεταβλητῶν* ἤ *διαχωριζόμενες* (*separable*), εἶναι οἱ ἐξισώσεις στίς ὁποῖες ἡ ροή ἔχει τήν μορφή:

$$f(t,x) = g(t)\,h(x). \tag{2.21}$$

Οἱ ἐξισώσεις αὐτές ἐμελετήθησαν γιά πρώτη φορά ἀπό τόν Leibniz περί τό 1691. Δέν εἶναι καθόλου ἀσυνήθης, στήν ἀσκησιολογική λογοτεχνία τῶν συνήθων διαφορικῶν ἐξισώσεων, ἡ κατωτέρω διαδικασία:

$$\begin{aligned} & x' &&= g(t)\,h(x) \\ \iff\quad & \frac{dx}{dt} &&= g(t)\,h(x) \\ \iff\quad & \frac{dx}{h(x)} &&= g(t)\,dt \\ \iff\quad & \int \frac{dx}{h(x)} &&= \int g(t)\,dt + c. \end{aligned}$$

Δυστυχῶς ἡ ἀνωτέρω διαδικασία οὐδόλως δύναται νά χαρακτηρισθεῖ ὡς *μαθηματική*, παρά τό γεγονός ὅτι καταλήγει συνήθως στό ὀρθό ἀποτέλεσμα. Ὁδηγούμεθα ἐνίοτε σέ ἐπισφαλῆ συμπεράσματα ὅταν θεωροῦμε τήν παράγωγο ὡς πηλίκο διαφορικῶν καί πραγματοποιοῦμε ἀκολούθως τόν ἀνωτέρω *συμβολικό λογισμό* (βλέπε *Ἄσκηση* 2.2.4). Ὡστόσο, στήν διαδικασία αὐτή ἐμπεριέχονται ὅλες οἱ ἀπαιτούμενες πληροφορίες οἱ ὁποῖες μας ἐπιτρέπουν νά τήν καταστήσομε αὐστηρή ὑπό κατάλληλες προϋποθέσεις. Ὅταν δέ καταστεῖ αὐστηρή, δύναται πράγματι νά ἀποτελέσει μία μνημονική μέθοδο ἐπιλύσεως τῶν ἐξισώσεων αὐτῶν.

Αὐστηροποίηση. Ἔστω ὅτι ἔχομε τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x' = g(t)\,h(x), \\ x(\tau) = \xi, \end{cases} \tag{2.22}$$

ὅπου $g : (\tau_1, \tau_2) \to \mathbb{R}$, $h : (\xi_1, \xi_2) \to \mathbb{R}$ συνεχεῖς συναρτήσεις καί $\tau \in (\tau_1, \tau_2)$, $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$.

Περιπτωση I. Ἄν $h(\xi) = 0$, τότε ἡ σταθερή συνάρτηση $\varphi(t) = \xi$ ἀποτελεῖ λύση τοῦ (2.22). Σημειωτέον ὅτι ἡ συνάρτηση $\varphi(t) = \xi$ δέν ἀποτελεῖ ἀπαραιτήτως καί τήν μοναδική λύση. (Βλέπε πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν (1.22) στήν σελίδα 39 ὅπου ἡ σταθερή λύση δέν ἀποτελεῖ καί τήν μόνη λύση.)

Περιπτωση II. Ἄν $h(\xi) \neq 0$, τότε λόγῳ συνεχείας τῆς συναρτήσεως h ὑπάρχει ἀνοικτό διάστημα $(x_1, x_2) \subset (\xi_1, \xi_2)$ στό ὁποῖο ἡ h δέν μηδενίζεται καί ὡς ἐκ τούτου διατηρεῖ πρόσημο[59]. Ἔστω ὅτι ἡ συνάρτηση $\varphi : I \to \mathbb{R}$, ὅπου I ἀνοικτό διάστημα[60] καί $\tau \in I$, ἀποτελεῖ λύση τοῦ (2.22). Τότε $\varphi(\tau) = \xi \in (x_1, x_2)$ καί λόγῳ τῆς συνεχείας τῆς φ στό τ ὑπάρχει ἀνοικτό διάστημα $J \subset I$, $\tau \in J$, ὥστε $\varphi(t) \in (x_1, x_2)$, γιά κάθε $t \in J$. Ὡς ἐκ τούτου λοιπόν

$$h\big(\varphi(t)\big) \neq 0, \qquad \text{γιά κάθε } t \in J.$$

Ἔχομε λοιπόν ὅτι γιά κάθε $t \in J$

$$\varphi'(t) = g(t)\, h\big(\varphi(t)\big) \qquad \text{ἤ} \qquad \frac{\varphi'(t)}{h\big(\varphi(t)\big)} = g(t).$$

Συνεπῶς, ὁλοκληρώνοντας στό διάστημα $[\tau, t]$, ὅπου $t \in J$, λαμβάνομε ἰσοδύναμα ὅτι:

$$\int_\tau^t \frac{\varphi'(s)}{h\big(\varphi(s)\big)}\, ds = \int_\tau^t g(s)\, ds,$$

γιά κάθε $t \in J$, καί χρησιμοποιῶντας τό κανόνα τῆς ἁλυσίδος λαμβάνομε:

$$\int_{\varphi(\tau)}^{\varphi(t)} \frac{1}{h(\eta)}\, d\eta = \int_\tau^t g(s)\, ds, \tag{2.23}$$

γιά κάθε $t \in J$. Ὁπότε ἄν ὁρίσομε τίς συναρτήσεις G, H ὡς:

$$H(x) = \int_\xi^x \frac{1}{h(z)} dz \qquad \text{καί} \qquad G(t) = \int_\tau^t g(s)\,,$$

τότε ἡ (2.23) γράφεται ὡς:

$$H\big(\varphi(t)\big) - H\big(\varphi(\tau)\big) = G(t) - G(\tau), \quad \text{γιά κάθε}\, t \in J.$$

Χρησιμοποιῶντας δέ ὅτι $H\big(\varphi(\tau)\big) = H(\xi) = 0$ καθώς καί ὅτι $G(\tau) = 0$, ἡ ἀνωτέρω γράφεται ἁπλούστερα ὡς

$$H\big(\varphi(t)\big) = G(t), \quad \text{γιά κάθε}\, t \in J. \tag{2.24}$$

Μοναδικοτης. Ἔστω $\psi : \tilde{I} \to \mathbb{R}$ μία ἄλλη λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (2.22). Ἐπαναλαμβάνοντας τήν διαδικασία τήν ὁποία ἀκολουθήσαμε γιά τήν φ, λαμβάνομε ὅτι ὑπάρχει (μέγιστο) διάστημα $\tilde{J} \subset \tilde{I}$, μέ $\tau \in \tilde{J}$, ὥστε νά ἰσχύει ὅτι $\psi(t) \in (x_1, x_2)$, $h\big(\psi(t)\big) \neq 0$ καί

$$H\big(\psi(t)\big) = G(t), \quad \text{γιά κάθε } t \in \tilde{J}. \tag{2.25}$$

[59]Δυνάμεθα μάλιστα νά ὑποθέσομε ὅτι τό διάστημα (x_1, x_2) εἶναι καί τό *μέγιστο* στό ὁποῖο ἀφ' ἑνός περιέχεται τό ξ καί ἀφ' ἑτέρου δέν μηδενίζεται ἡ h. Πράγματι, ἔστω γιά παράδειγμα ὅτι $\xi \in \mathbb{R}^+$. Ἐφ' ὅσον ἡ συνάρτηση $h : (\xi_1, \xi_2) \to \mathbb{R}$ εἶναι συνεχής καί τό σύνολο $\mathbb{R}^+$ εἶναι ἀνοικτό, τότε καί τό σύνολο $U = h^{-1}\big[\mathbb{R}^+\big]$ εἶναι ἐπίσης ἀνοικτό καί συνεπῶς ἀποτελεῖ ἕνωση ξένων ἀνά δύο ἀνοικτῶν διαστημάτων, ἤτοι, $U = \bigcup_{a \in A} I_a$. Τό ζητούμενο διάστημα (x_1, x_2) θά εἶναι τό μοναδικό ἐκ τῶν ἀνοικτῶν διαστημάτων I_a, $a \in A$, στό ὁποῖο ἀνήκει τό ξ. Τά δέ ἄκρα x_1, x_2 εἴτε ταυτίζονται μέ τά ξ_1, ξ_2, εἴτε σέ κάποιο (ἤ ἀμφότερα) μηδενίζεται ἡ h.

[60]Παρομοίως, δυνάμεθα νά ὑποθέσομε ὅτι τό J ἀποτελεῖ τό μέγιστο ὑποδιάστημα τοῦ I μέ τίς ἰδιότητες αὐτές.

Συνδυάζοντας τίς (2.24) καί (2.25) λαμβάνομε ὅτι

$$H\big(\varphi(t)\big) \;=\; H\big(\psi(t)\big),$$

γιά κάθε $t \in J \cap \tilde{J}$. Ἐπειδή ὅμως ἡ h διατηρεῖ πρόσημο στό διάστημα (x_1, x_2), τότε ἡ H εἶναι γνησίως μονότονη καί ἄρα ἡ ἀνωτέρω ἔχει ὡς συνέπεια ὅτι:

$$\varphi(t) \;=\; \psi(t),$$

γιά κάθε $t \in J \cap \tilde{J}$.

Αμεση εκφραση της λυσεως. Ἰδιαιτέρως, ἡ συνάρτηση H εἶναι, στό διάστημα (x_1, x_2), γνησίως μονότονη, συνεχῶς διαφορίσιμη καί

$$H'(x) \;=\; \frac{1}{h(x)} \;\neq\; 0.$$

Ἄρα $\boldsymbol{Ran}(H) = (\eta_1, \eta_2)$ γιά κάποια $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ (γιατί;). Μάλιστα $0 \in (\eta_1, \eta_2)$ διότι $H(\xi) = 0$. Ἐπί πλέον ἡ H ἔχει (μοναδική) ἀντίστροφη

$$H^{-1} : (\eta_1, \eta_2) \to (x_1, x_2),$$

ἡ ὁποία εἶναι ἐπίσης γνησίως αὔξουσα, συνεχῶς διαφορίσιμη καί ἐπί. Ἄρα ἡ (2.24) συνεπάγεται ὅτι

$$\varphi(t) \;=\; H^{-1}\big(G(t)\big), \tag{2.26}$$

γιά κάθε $t \in J$.

Πεδιο τοπικης μοναδικοτητος. Τό τελευταῖο ἐρώτημα εἶναι: *Ποῦ ὁρίζεται ἡ λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν* (2.22) *κατά μοναδικό τρόπο;* Τό δεξιό μέλος τῆς (2.26) ἔχει ἔννοια ἐφ' ὅσον τό $G(t)$ ἀνήκει στό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς H^{-1}. Δηλαδή ἄν $G(t) \in (\eta_1, \eta_2)$. Μέγιστο ἀνοικτό διάστημα, ὑποδιάστημα (t_1^*, t_2^*) τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ τῆς G $\big($τό ὁποῖο ταυτίζεται μέ τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς g, ἤτοι, τό $(\tau_1, \tau_2)\big)$ στό ὁποῖο ἱκανοποιεῖται ἡ ἀνωτέρω καί στο ὁποῖο ἀνήκει τό τ, δυνάμεθα ἐπίσης νά ὁρίσουμε. (Πῶς;) Στό διάστημα (t_1^*, t_2^*) ὁρίζεται τό δεξιό μέλος τῆς (2.24), ἱκανοποιεῖ τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν (2.22) καί ταυτοχρόνως ἡ λύση ἀπολαμβάνει μοναδικότητος. Τό διάστημα αὐτό εἶναι μέγιστο ὑπό τήν ἔννοια ὅτι πέραν τῶν ἄκρων του εἴτε ἡ g δέν ὁρίζεται εἴτε ἡ $h \circ \varphi$ μηδενίζεται, ὁπότε ἡ μοναδικότης ἐνδέχεται νά παραβιάζεται.

Παρατήρηση. Μέ ἰσοδυναμίες λοιπόν λαμβάνομε τήν ὁλοκληρωτική καμπύλη/λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (2.22):

$$H(x) - G(t) \;=\; 0.$$

Γενικότερα, τό γενικό ὁλοκλήρωμα τῆς $x' = g(t)h(x)$ περιγράφεται ἀπό τήν οἰκογένεια καμπυλῶν

$$H(x) - G(t) = c,$$

ὅπου $c \in \mathbb{R}$.

Παραδείγματα

(i) *Νά βρεθοῦν οἱ ὁλοκληρωτικές καμπύλες τῆς ἐξισώσεως:*

$$x' = \frac{2t}{1+3x^2}. \tag{2.27}$$

Επιλυση. Ἡ (2.27) δύναται νά γραφεῖ ἰσοδύναμα ὡς:

$$(1+3x^2)\, x' = 2t. \tag{2.28}$$

Τόσο τό δεξιό, ὅσο καί τό ἀριστερό της μέλος ἀποτελοῦν παραγώγους, ὡς πρός t, γνωστῶν μας παραστάσεων. Ὡς ἐκ τούτου ἡ (2.28) γράφεται:

$$\frac{d}{dt}\left(x + x^3\right) = \frac{d}{dt} t^2,$$

ἤ ἰσοδύναμα:

$$x + x^3 - t^2 = c, \tag{2.29}$$

ὅπου c αὐθαίρετη σταθερά. Ἡ (2.29) περιγράφει μία μονοπαραμετρική οἰκογένεια καμπυλῶν στό ἐπίπεδο, τίς ὁλοκληρωτικές καμπύλες τῆς (2.27)

(ii) *Νά λυθεῖ τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν:*

$$x' = \frac{2t}{1+3x^2}, \qquad x(0) = 0. \tag{2.30}$$

Επιλυση. Ἡ ἀρχική συνθήκη θά μᾶς ἐπιτρέψει νά ἐπιλέξομε τήν τιμή τῆς σταθερᾶς c στήν (2.29). Ἔχομε:

$$c = x(0) + \big(x(0)\big)^3 - 0^2 = 0.$$

Ἄρα ἡ ὁλοκληρωτική καμπύλη ἡ ὁποία περιέχει τό γράφημα τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (2.30) εἶναι ἡ

$$x + x^3 - t^2 = 0. \tag{2.31}$$

Στήν πραγματικότητα, ὅπως θά δοῦμε κατωτέρω, ἡ καμπύλη ἡ ὁποία περιγράφεται ἀνωτέρω, δηλαδή ἡ

$$\Gamma = \left\{ (t,x) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x + x^3 - t^2 = 0 \right\},$$

ἀποτελεῖ τό γράφημα συναρτήσεως $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, δηλαδή συναρτήσεως μέ πεδίο ὁρισμοῦ ὁλόκληρο τό $\mathbb{R}$. Ἤτοι, τό ἀνωτέρω πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν ἔχει καθολικῶς ὁρισμένη λύση.

Αὐτό ἀποδεικνύεται ὡς ἑξῆς:

Ἡ $\alpha(x) = x + x^3$ εἶναι συνάρτηση 1-1 καί ἐπί ἀπό τό $\mathbb{R}$ στό $\mathbb{R}$, διότι $\alpha'(x) \geq 1$, $\alpha(0) = 0$, ἄρα $\alpha(x) \geq x$ γιά $x \geq 0$, ἐνῶ $\alpha(x) \leq x$ γιά $x < 0$. Ἄρα λόγῳ συνεχείας λαμβάνει ὅλες τίς πραγματικές τιμές καί λόγῳ γνήσιας μονοτονίας τίς λαμβάνει ἀπό μία φορά. Ἄρα ἡ α ἔχει ἀντίστροφη $\alpha^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ἡ ὁποία εἶναι 1–1, ἐπί, συνεχής καί συνεχῶς διαφορίσιμη.

Γενικότερα εἶναι δυνατόν νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

Πρόταση 2.2.1. *Ἔστω $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχῶς διαφορίσιμη συνάρτηση ἡ ὁποία ἱκανοποιεῖ*

$$\alpha'(x) > 0 \quad \textit{γιά κάθε } x \in \mathbb{R} \quad \textit{καί} \quad \lim_{x\to\pm\infty} \alpha(x) = \pm\infty.$$

Τότε ἡ α ἔχει συνεχῶς διαφορίσιμη ἀντίστροφη $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ἡ ὁποία ἐπίσης ἱκανοποιεῖ

$$\beta'(x) > 0 \quad \textit{γιά κάθε } x \in \mathbb{R} \quad \textit{καί} \quad \lim_{x\to\pm\infty} \beta(x) = \pm\infty. \qquad \square$$

Κατά συνέπεια ἡ α ἔχει ἀντίστροφη συνάρτηση, ἔστω β, ἡ ὁποία εἶναι ἐπίσης 1–1, ἐπί καί γνησίως αὔξουσα. Ἰδιαιτέρως:

$$\beta'(x) = \frac{1}{\alpha'\big(\beta(x)\big)} = \frac{1}{1 + \beta^2(x)}$$

καί ὡς ἐκ τούτου $\beta \in C^\infty(\mathbb{R})$. Συνεπῶς

$$\begin{aligned} x + x^3 - t^2 = 0 &\iff \alpha(x) - t^2 = 0 \\ &\iff x = \beta(t^2). \end{aligned}$$

Ἄρα ἡ συνάρτηση β ὁρίζεται σ' ὅλο τό $\mathbb{R}$ καί εἶναι C^∞ ὡς σύνθεση τέτοιων. Ὡστόσο ἡ ἀνωτέρω διαδικασία δέν μᾶς προσφέρει τήν λύση σέ ἄμεση μορφή. Μᾶς τήν προσφέρει σέ ἔμμεση μορφή. Αὐτό ἀποτελεῖ τόν κανόνα στήν ἐπίλυση τῶν ἐξισώσεων χωριζομένων μεταβλητῶν.

(iii) *Δίδεται τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν:*

$$x' = \frac{2t - 1}{x^3 - x}, \qquad x(-1) = -2. \tag{2.32}$$

Νά βρεθεῖ ἡ λύση καθώς καί τό μέγιστο διάστημα στό ὁποῖο αὐτή ὁρίζεται.

Επιλυση. Ἡ ἐξίσωσή μας εἶναι διαχωριζόμενη καί δύναται νά γραφεῖ ὡς:

$$(x^3 - x)x' = 2t - 1,$$

μέ τήν προϋπόθεση ὅτι $x^3 - x \neq 0$ ἤ ἰσοδύναμα $x \neq -1, 0, 1$. Ἡ ἀρχική συνθήκη ἐπιβάλλει ὡς μέγιστο πεδίο ὁρισμοῦ τῆς $h(x) = \frac{1}{x^3 - x}$, τό $I = (-\infty, -1)$. Ἑπομένως ὁλοκληρώνοντάς την λαμβάνομε:

$$\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} = t^2 - t + c. \tag{2.33}$$

Λόγῳ τῆς ἀρχικῆς συνθήκης $x(-1) = -2$, δυνάμεθα νά δοῦμε ἀμέσως ὅτι $c = 0$, ὁπότε ἡ (2.33) λαμβάνει τήν μορφή:

$$x^4 - 2x^2 = 4t^2 - 4t,$$

ἡ ὁποία κατά σύμπτωση δύναται νά *βελτιωθεῖ* πολύ ἄν προσθέσομε τήν μονάδα καί στά δύο της μέλη:

$$x^4 - 2x^2 + 1 = 4t^2 - 4t + 1,$$

ἤ ἰσοδύναμα

$$(x^2 - 1)^2 = (2t - 1)^2,$$

ἄρα

$$x^2 - 1 = \pm(2t - 1).$$

ἤ

$$x^2 = 1 \pm (2t - 1). \tag{2.34}$$

Ἡ ἀρχική συνθήκη $x(-1) = -2$, μᾶς ἐπιβάλλει νά ἐπιλέξομε τό ἀρνητικό πρόσημο. Ὡς ἐκ τούτου ἡ (2.34) λαμβάνει τήν μορφή:

$$x^2 = 1 - (2t - 1) = 2 - 2t.$$

Ἄρα

$$x = \pm\sqrt{2 - 2t}.$$

Ἐπικαλούμενοι ἐκ νέου τήν ἀρχική συνθήκη ὁδηγούμεθα καί πάλιν στήν ἐπιλογή τοῦ ἀρνητικοῦ προσήμου. Ἡ (μοναδική) λύση λοιπόν τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (2.32) εἶναι ἡ συνάρτηση

$$\varphi(t) = -\sqrt{2 - 2t}.$$

Τό πεδίο ὁρισμοῦ τοῦ δεξιοῦ μέλους τῆς ἀνωτέρω εἶναι τό ἀνοικτό διάστημα $I = (-\infty, 1)$. Ἐπειδή ὅμως, ὅπως ἤδη ἔχομε δεῖ, $x \neq -1, 0, 1$, τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς λύσεως θά πρέπει νά περιορισθεῖ στό διάστημα:

$$I = (-\infty, 1/2),$$

ὥστε ἡ φ νά μήν λαμβάνει τίς τιμές $-1, 0$ καί 1.

(iv) *Δίδεται ἡ ἐξίσωση*

$$g(t)dt + h(x)dx = 0.$$

Νά βρεθεῖ ἡ ὁλοκληρωτική της καμπύλη ἡ ὁποία διέρχεται ἀπό τό σημεῖο (τ, ξ).

Επιλυση. Πρόκειται οὐσιαστικά περί τῆς ἐξισώσεως

$$g(t) + h(x)x' = 0. \tag{2.35}$$

Ἄν θέσομε $G' = g$ καί $H' = h$, τότε ἡ (2.35) καθίσταται ἰσοδύναμη μέ

$$\frac{d}{dt}\Big(G(t) + H\big(x(t)\big)\Big) = 0$$

ἤ

$$G(t) + H(x) = c.$$

Ἡ τιμή τῆς σταθερᾶς c προσδιορίζεται ἀπό τήν *ἀρχική συνθήκη*, δηλαδή τήν ὑποχρέωση τῆς ὁλοκληρωτικῆς καμπύλης νά διέρχεται ἀπό τό (τ, ξ). Ἄρα τελικῶς ἡ ζητούμενη ὁλοκληρωτική καμπύλη περιγράφεται ἀπό τήν ἐξίσωση:

$$G(t) + H(x) = G(\tau) + H(\xi).$$

Παρατηρῆστε ὅτι ἡ ἀνωτέρω γράφεται ἰσοδύναμα καί ὡς

$$\int_\tau^t g(s)ds + \int_\xi^x h(y)dy = 0.$$

2.2.1 Ἐξισώσεις ὁμοιογενῶν ροῶν

Εἰδική κατηγορία ἐξισώσεων, οἱ ὁποῖες μέ κατάλληλο μετασχηματισμό ἀνάγονται σέ διαχωριζόμενες ἐξισώσεις, εἶναι οἱ *ἐξισώσεις ὁμοιογενῶν ροῶν*[61]. Αὐτές εἶναι οἱ πρώτης τάξεως ἐξισώσεις στίς ὁποῖες ἡ συνάρτηση ροῆς εἶναι ὁμοιογενής ὡς πρός t καί x. Δηλαδή ἔχει τήν ἰδιότητα

$$f(t,x) = g\left(\frac{x}{t}\right),$$

ἡ ὁποία εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν ἰδιότητα

$$f(\lambda t, \lambda x) = f(t,x), \tag{2.36}$$

[61] Στά πλεῖστα τῶν Ἑλληνικῶν συγγραμμάτων συνήθων διαφορικῶν ἐξίσωσεων, χρησιμοποιεῖται ὁ ἀτυχέστατος ὅρος *ὁμογενεῖς ἐξισώσεις* γιά νά περιγράψει τίς ἀνωτέρω, καθ' ἣν στιγμήν, ὁ ἴδιος ἀκριβῶς χαρακτηρισμός, χρησιμοποιεῖται γιά τήν περιγραφή κάποιων ἐξισώσεων ἐντελῶς διαφορετικῆς μορφῆς. Βλέπε σελίδα 23 καί σχετική ὑποσημείωση στήν ἴδια σελίδα.

γιά κάθε $\lambda \neq 0$. Ἡ (2.36) μᾶς λέγει ὅτι ἡ f εἶναι ὁμοιογενής βαθμοῦ μηδέν[62] ὡς πρός (t, x). Ἡ ἐπίλυση ἐξισώσεων μέ ὁμοιογενεῖς ροές ἀνάγεται στήν ἐπίλυση ἐξισώσεων χωριζομένων μεταβλητῶν. Ἄν θέσομε

$$u = \frac{x}{t} \qquad \text{ἤ} \qquad x = t\,u,$$

λαμβάνομε:

$$\begin{aligned} x' = g\Big(\frac{x}{t}\Big) \quad &\Longleftrightarrow \quad (t\,u)' = g(u) \\ &\Longleftrightarrow \quad t\,u' + u = g(u) \\ &\Longleftrightarrow \quad u' = \frac{\big(g(u) - u\big)}{t}. \end{aligned}$$

Ἡ τελευταία ἀποτελεῖ πράγματι ἐξίσωση χωριζομένων μεταβλητῶν.[63]

Παραδείγματα

(i) *Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση*

$$x' = \frac{t^2 + 3x^2}{2tx}. \tag{2.37}$$

Επιλυση. Ἡ ροή τῆς (2.37) εἶναι ὁμοιογενής. Παρατηρῆστε ὅτι ἡ διαφορική ἐξίσωση ἔχει ἔννοια ὅταν $x, t \neq 0$. Ἡ (2.37) γράφεται καί ὡς

$$x' = \frac{t^2 + 3x^2}{2tx} = \frac{1 + 3(x/t)^2}{2(x/t)} = g\left(\frac{x}{t}\right),$$

ὅπου

$$g(u) = \frac{1 + 3u^2}{2u}.$$

Ἄν λοιπόν θέσομε $x = tu$, τότε ἡ ἐξίσωση τήν ὁποία ἱκανοποιεῖ εἶναι ἡ

$$u' = \frac{g(u) - u}{t} = \frac{1}{t}\left(\frac{1 + 3u^2}{2u} - u\right) = \frac{1}{t} \cdot \frac{1 + u^2}{2u}.$$

Ἡ ἀνωτέρω γράφεται ἰσοδύναμα ὡς

$$\frac{2uu'}{1 + u^2} = \frac{1}{t},$$

ἡ ὁποία μᾶς ἐπιτρέπει νά ὁλοκληρώσομε ὡς πρός t καί νά λάβομε:

$$\log(1 + u^2) = \log|t| + \bar{c}.$$

[62] Μιά συνάρτηση $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ ὀνομάζεται *ὁμοιογενής βαθμοῦ* α, ὅπου α πραγματικός ἀριθμός, ἄν γιά κάθε $\lambda > 0$ ἰσχύει ὅτι:

$$f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^{\alpha} f(x_1, \ldots, x_n).$$

Οἱ συναρτήσεις αὐτές ἀποτελοῦν τίς λύσεις τῆς μερικῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως τοῦ Euler $\boldsymbol{x} \cdot \nabla u = \alpha u$.

[63] Τό τέχνασμα αὐτό χρησιμοποιήθηκε γιά πρώτη φορά ἀπό τόν Leibniz τό 1691.

ἢ ἁπλούστερα $1+u^2 = ct$, ὁπότε $1+\dfrac{x^2}{t^2} = ct$, ἢ καλύτερα

$$t^2 + x^2 = ct^3, \tag{2.38}$$

ὅπου $t \in \mathbb{R}^-$ ἢ $t \in \mathbb{R}^+$.

(ii) *Νά ἐπιλυθεῖ τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν*

$$x' = \frac{t^2 + 3x^2}{2tx}, \quad x(1) = 1.$$

Ποιό εἶναι τό μέγιστο πεδίο ὁρισμοῦ τῆς λύσεως;

Επιλυση. Λόγῳ τοῦ προηγουμένου παραδείγματος ἡ λύση τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως ἱκανοποιεῖ τήν (2.38). Ὅταν ἐνσωματώσομε τήν ἀρχική συνθήκη, $x(1) = 1$, λαμβάνομε ὅτι $c = 2$. Τελικῶς:

$$x = \pm\sqrt{2t^3 - t^2}$$

καί λόγῳ τῆς ἀρχικῆς συνθήκης ἐπιλέγομε τό θετικό πρόσημο, ἐνῶ ἡ λύση θά ἔχει ὡς πεδίο ὁρισμοῦ τό διάστημα $(1/2, \infty)$.

Ἀσκήσεις

2.2.1 Νά ἀποδειχθεῖ ἡ *πρόταση 2.2.1.*

2.2.2 Νά ἐπιλυθοῦν οἱ κάτωθι ἐξισώσεις, ἀφοῦ διαπιστωθεῖ ὅτι εἶναι χωριζομένων μεταβλητῶν

(i) $x' = \dfrac{t^m}{x^n}$,

(ii) $x' = \dfrac{t^2}{1+x^2}$,

(iii) $x' = \dfrac{t+\mathrm{e}^t}{x-1}$,

(iv) $x' = \dfrac{at+b}{cx+d}$,

(v) $x' = 1 + t + x + tx$.

2.2.3 Νά ἐπιλυθοῦν τά κατωτέρω προβλήματα ἀρχικῶν τιμῶν:

(i) $xx' + t\,\mathrm{e}^t = 0, \quad x(0) = 1$,

(ii) $\cos(3x)x' + \sin(2t) = 0, \quad x\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$,

(iii) $x' = \dfrac{x^2}{t}, \quad x(1) = 2$,

(iv) $(3x^2 - 4)\,x' - 3t^2 = 0, \quad x(1) = 0$,

(v) $3t^2 - (3x^2 - 4)\,x' = -1, \quad x(0) = 1$.

2.2.4 Προσπαθῆστε νά βρεῖτε τήν γενική λύση τῆς ἐξισώσεως

$$x' = x^{1/3},$$

ἀκολουθῶντας τόν συμβολικό λογισμό στήν σελίδα 69. Ἀκολούθως βρέστε τήν σωστή ἀπάντηση.

Υπόδειξη. Βλέπε *Ἄσκηση* 1.7.1 στήν σελίδα 46.

2.2.5 Νά βρεθεῖ κατάλληλος μετασχηματισμός, ὁ ὁποῖος νά καθιστᾶ τήν ἐξίσωση ἐπιλύει τήν

$$x' = f(at + bx + c),$$

χωριζομένων μεταβλητῶν.

2.2.6* Δίδεται τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x' = g(t)\,h(x), \\ x(\tau) = \xi, \end{cases} \tag{2.39}$$

ὅπου $g, h \in C(\mathbb{R})$.

(i) Ἄν ὑπάρχουν $c_1, c_2 \geq 0$, ὥστε

$$0 < h(x) \leq c_1|x| + c_2, \tag{2.40}$$

γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε δείξατε ὅτι τό ἀνωτέρω πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν ἔχει καθολικῶς ὁρισμένη λύση.

(ii) Τί συμβαίνει ἄν ἡ (2.40) ἀντικατασταθεῖ ἀπό τήν

$$|h(x)| \leq c_1|x| \log|x| + c_2,$$

γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$;

Υπόδειξη. Στήν περίπτωση (i) ἄν θέσομε $H(x) = \int_\xi^x \frac{d\zeta}{h(\zeta)}$, τότε ἡ H εἶναι γνησίως αὔξουσα καί ἐπίσης

$$\lim_{x\to\pm\infty} H(x) = \pm\infty.$$

Ἄρα ἡ H^{-1} ὁρίζεται, καί εἶναι C^1 σ' ὅλο τό $\mathbb{R}$. Καταλήγομε δέ στό συμπέρασμα ὅτι ἄν φ λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (2.39), τότε ἡ (2.40) ἔχει ὡς συνέπεια ὅτι $\varphi(t) = H^{-1}\big(\int_\tau^t g(s)\,ds\big)$.

2.2.7 Ἀφοῦ παρατηρήσετε ὅτι ἑκάστη τῶν κάτωθι ἐξισώσεων ἔχει ὁμοιογενῆ ροή, ἀκολούθως νά βρεῖτε τήν γενική τους λύση.

(i) $x' = \dfrac{t+x}{x},$

(ii) $x' = \dfrac{t+3x}{t-3x},$

(iii) $x' = \dfrac{t^2+3x^2}{t^2-3x^2},$

(iv) $x' = \dfrac{t^2+tx+x^2}{tx},$

2.2.8 Δίδεται ἡ ἐξίσωση
$$x' = \frac{a_1 t + b_1 x + c_1}{a_2 t + b_2 x + c_2}$$
ὅπου $a_1 b_2 \neq a_2 b_1$. Δείξατε ὅτι μέ κατάλληλο μετασχηματισμό $T = t - \tau$, $X = x - \xi$, ἡ ἐξίσωση δύναται νά ἀναχθεῖ σέ ἐξίσωση ὁμοιογενοῦς ροῆς.

2.2.9 Νά ἐπιλυθοῦν οἱ ἐξισώσεις:

$$\begin{aligned}
&\text{(i)} & x' &= \frac{2t + x - 9}{t + x + 1}, \\
&\text{(ii)} & x' &= \frac{t + x + 2}{t - x + 1}, \\
&\text{(iii)} & x' &= \frac{5t + x + 2}{t - 5x + 1}, \\
&\text{(iv)} & x' &= \frac{2t + x + 5}{2t - x + 5}.
\end{aligned}$$

2.2.10 Μέ ποίον τροπο ἀνάγεται ἡ ἐξίσωση
$$x' = f\left(\frac{a_1 t + b_1 x + c_1}{a_2 t + b_2 x + c_2}\right),$$
σέ ἐξίσωση μέ ὁμοιογενῆ ροή;

2.2.11* Νά προσδιορισθοῦν ὅλες οἱ συνεχεῖς συναρτήσεις f, οἱ ὁποῖες ἱκανοποιοῦν τήν σχέση
$$f(t) + 1 = \int_0^t f(s)\big(f(s) - 1\big)\, ds.$$

Υποδειξη. Κατ' ἀρχάς διαπιστοῦται εὐκόλως ὅτι μία συνάρτηση f ἱκανοποιεῖ τήν ἀνωτέρω ὁλοκληρωτική ἐξίσωση ἄν καί μόνον ἄν ἀποτελεῖ λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν
$$\begin{cases} x' = x(x-1), \\ x(0) = -1, \end{cases}$$
τό ὁποῖο ἔχει ὡς λύση τήν $\varphi(t) \equiv -1$. Θά πρέπει νά δείξομε ὅτι αὐτή εἶναι καί μοναδική λύση. Ἄν $\psi : I \to \mathbb{R}$, ἄλλη λύση τοῦ ἰδίου προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν, τότε ὑπάρχει $t_1 \in I$, ὥστε $\psi(t_1) \neq -1$. Ἄς ὑποθέσομε γιά παράδειγμα ὅτι $\psi(t_1) = \xi < -1$. (Ἡ περίπτωση $\xi > -1$ θά πρέπει ἐπίσης νά ἐξετασθεῖ.) Σέ μία τέτοια περίπτωση εἰναι δυνατόν νά κατασκευασθεῖ διάστημα $[t_1, t_2)$, ὅπου ἡ ψ εἶναι γνησίως αὔξουσα, λαμβάνει τιμές μικρότερες τοῦ -1 καί $\psi(t_2) = -1$. (Τό t_2 ἀποτελεῖ τήν πρώτη τιμή δεξιά τοῦ t_1 ὅπου ἡ ψ λαμβάνει τήν τιμή -1, καί βεβαίως τέτοια ὑπάρχει.) Ταυτοχρόνως ἡ ψ ἱκανοποιεῖ καί τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν
$$\begin{cases} x' = x(x-1), \\ x(t_1) = \xi, \end{cases}$$
μέ *μοναδική λύση* (γιατί;) τήν
$$\psi(t) = \left(1 - \frac{\xi - 1}{\xi} \mathrm{e}^{t - t_1}\right)^{-1},$$
ἡ ὁποία ἔχει ὡς πεδίο ὁρισμοῦ περιέχον τό διάστημα $[t_1, \infty)$. Στό διάστημα αὐτό ἡ ψ ἔχει τήν ἰδιότητα $\psi(t) < -1$. Ἄρα δέν δύναται νά ἰσχύει ὅτι $\psi(t_2) = -1$.

2.2.12* Νά προσδιορισθοῦν ὅλες οἱ συνεχεῖς συναρτήσεις f οἱ ὁποῖες ἱκανοποιοῦν τήν σχέση
$$f(t) + 1 = \int_0^t f(s)\big(sf(s) - 1\big)\, ds.$$

2.2.13 Δείξατε ὅτι κάθε εὐθεῖα διερχόμενη ἀπό τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων, τέμνει ὑπό τήν ἴδια γωνία ὅλες τίς ὁλοκληρωτικές καμπύλες δοθείσης συνήθους διαφορικῆς ἐξισώσεως ὁμοιογενοῦς ροῆς.

2.2.14 **Διασταλτική ἰδιότης:** Δείξατε ὅτι ἄν $\Gamma = \big\{\big(t(s), x(s)\big) \,:\, s\in I\big\}$ ὁλοκληρωτική καμπύλη ἐξισώσεως ὁμοιογενοῦς ροῆς καί λ μή μηδενικός πραγματικός ἀριθμός, τότε καί τό σύνολο τῶν σημείων

$$\Gamma_\lambda = \big\{\big(\lambda t(s), \lambda x(s)\big) \,:\, s\in I\big\},$$

ἀποτελεῖ ὁλοκληρωτική καμπύλη τῆς ἰδίας ἐξισώσεως.

2.2.15 (Συνέχεια) Ἰσχύει καί τό ἀντίστροφο: Ἄν μία συνήθης διαφορική ἐξίσωση ἔχει τήν διασταλτική ἰδιότης, τότε εἶναι ὁμοιογενοῦς ροῆς.

2.3 Ἀκριβεῖς ἐξισώσεις

Ἔστω ὅτι ἐπιθυμοῦμε νά εὕρομε τήν γενική λύση τῆς ἐξισώσεως:

$$2t + x + (t+2x)x' = 0. \tag{2.41}$$

Ἄν ὑπῆρχε συνάρτηση $\Phi = \Phi(t,x)$ ὥστε $\Phi_t = 2t + x$ καί $\Phi_x = t + 2x$, τότε ἡ (2.41) θά ἦταν δυνατόν νά γραφεῖ ἰσοδύναμα ὡς

$$\Phi_t(t,x) + \Phi_x(t,x)x' = 0. \tag{2.41$'$}$$

Ἔστω $\varphi : I \to \mathbb{R}$ λύση τῆς ἀνωτέρω, ὅπου I ἀνοικτό διάστημα. Λόγῳ τοῦ κανόνος τῆς ἁλυσίδος ἡ ἡ φ θά ἱκανοποιοῦσε τήν

$$\frac{d}{dt}\Phi\big(t,\varphi(t)\big) = 0 \quad \text{γιά κάθε } t\in I,$$

ἤ ἰσοδύναμα θά ὑπῆρχε πραγματική σταθερά c ὥστε

$$\Phi\big(t,\varphi(t)\big) = c \quad \text{γιά κάθε } t\in I.$$

Ἄν λοιπόν ὑπῆρχε τέτοια συνάρτηση Φ, τότε τά γραφήματα τῶν λύσεων τῆς (2.41) θά ἀποτελοῦσαν *ἰσοσταθμικές καμπύλες*[64] τῆς Φ. Σέ μία τέτοια λοιπόν περίπτωση ἡ (2.41) θά καθίστατο ἰσοδύναμη μέ τήν

$$\Phi(t,x) = c. \tag{2.41$''$}$$

Ἄν λοιπόν εἴχαμε στήν διάθεσή μας μία τέτοια Φ, θά κατορθώναμε νά ὁλοκληρώσομε τήν (2.41) καί νά καταλήξομε σέ μία οἰκογένεια ὁλοκληρωτικῶν καμπυλῶν.

[64]Ὑπενθυμίζεται ὅτι ἄν $\Psi : U \to \mathbb{R}$ συνάρτηση, ὅπου $U\subset\mathbb{R}^2$ καί $c\in\mathbb{R}$ σταθερά, τά σύνολα

$$\Gamma_c = \big\{(x,y) \,:\, \Psi(x,y) = c\big\},$$

ἀποτελοῦν τίς ἰσοσταθμικές καμπύλες τῆς Ψ.

Ὑπάρχει ὅμως τέτοια συνάρτηση Φ;

Ἄν ὑπῆρχε, τότε θά εἴχαμε:

$$\Phi_t(t,x) = 2t + x \quad \text{καί} \quad \Phi_x(t,x) = t + 2x,$$

ὁπότε, λόγῳ τῆς πρώτης ἐκ τῶν ἀνωτέρω, ἡ Φ θά ἦταν τῆς μορφῆς $\Phi(t,x) = t^2 + tx + g(x)$ ἐνῶ λόγῳ τῆς δεύτερης θά εἴχαμε ὅτι:

$$t + 2x = \Phi_x(t,x) = \big(t^2 + tx + g(x)\big)_x = t + g'(x),$$

ἀπ' ὅπου προκύπτει ὅτι $g'(x) = 2x$ καί ἐν τέλει ὅτι $g(x) = x^2 + c$. Ἡ $\Phi(t,x) = t^2 + tx + x^2$ πληροῖ λοιπόν τίς ἀπαιτείσεις μας καί ἡ ἐξίσωση (2.41) καθίσταται τελικῶς ἰσοδύναμη μέ τήν

$$t^2 + tx + x^2 = c,$$

ἡ ὁποία ἀποτελεῖ μονοπαραμετρική οἰκογένεια ὁλοκληρωτικῶν καμπυλῶν. Τό ἐρώτημα γενικεύεται κατωτέρω:

Πρoβλημα. *Δίδεται ἡ συνήθης διαφορική ἐξίσωση*

$$M(t,x) + N(t,x)x' = 0. \tag{2.42}$$

Ὑπάρχει συνάρτηση $\Phi = \Phi(t,x)$ ὥστε

$$\Phi_t(t,x) = M(t,x) \quad \textit{καί} \quad \Phi_x(t,x) = N(t,x)$$

καί ὡς ἐκ τούτου, οἱ ἰσοσταθμικές καμπύλες τῆς Φ:

$$\Gamma_c = \big\{ (t,x) \ : \ \Phi(t,x) = c \big\}, \quad c \in \mathbb{R},$$

νά ἀποτελοῦν τίς ὁλοκληρωτικές καμπύλες τῆς (2.42);

Απαντηση. Ἔστω ὅτι πράγματι ὑπῆρχε. Τότε θά εἴχαμε:

$$\Phi_t = M, \qquad \Phi_x = N,$$

ἄρα ἄν $\Phi \in C^2$, ὁπότε $(\Phi_t)_x = (\Phi_x)_t$, τότε θά εἴχαμε:

$$M_x = (\Phi_t)_x = (\Phi_x)_t = N_t.$$

Κάτι τέτοιο ὅμως, δηλαδή $M_x = N_t$, σπανίως συμβαίνει. Ἡ ἀπάντηση λοιπόν στό πρόβλημα δέν εἶναι πάντοτε καταφατική. Ἡ σχέση αὐτή ἡ ὁποία προκύπτει, ἐκτός τοῦ ὅτι εἶναι ἀναγκαία, εἶναι καί ἱκανή, ὅπως φαίνεται ἀπό τήν κατωτέρω πρόταση:

Πρόταση 2.3.1. *Ἔστω* $D = (t_1, t_2) \times (x_1, x_2)$ *καί* $M, N \in C^1(D)$. *Τότε ὑπάρχει συνάρτηση* $\Phi = \Phi(t, x)$, *δίς συνεχῶς διαφορίσιμη στό* D *ὥστε:*

$$\Phi_t(t, x) \ = \ M(t, x) \qquad \textit{καί} \qquad \Phi_x(t, x) \ = \ N(t, x)$$

γιά κάθε $(t, x) \in D$, *ἄν καί μόνον ἄν* $M_x = N_t$.

Απoδειξη. Ἀπομένει ἡ ἀπόδειξη τοῦ ἱκανοῦ. Ἔστω ὅτι ἰσχύει $M_x = N_t$ σ' ὅλο τό D καί (t_0, x_0) ἕνα τυχόν σημεῖο τοῦ D. Θέτομε:

$$\Phi(t, x) \ = \ \int_{x_0}^{x} N(t, \xi) d\xi + g(t), \tag{2.43}$$

ὅπου $g(t)$ προσδιοριστέα συνάρτηση Παραγωγίζοντας τήν (2.43) ὡς πρός t λαμβάνομε:

$$\Phi_t(t, x) \ = \ \int_{x_0}^{x} N_t(t, \xi) d\xi + g'(t). \tag{2.44}$$

Ἡ ἀλλαγή τῆς σειρᾶς παραγωγίσεως καί ὁλοκληρώσεως ἐπιτρέπεται λόγῳ τοῦ ὅτι ἡ N εἶναι συνεχῶς διαφορίσιμη[65]. Ἀντικαθιστῶντας τήν N_t μέ τήν M_x στήν (2.44) λαμβάνομε:

$$\begin{aligned} \Phi_t(t, x) = & \int_{x_0}^{x} M_x(t, \xi)\, d\xi + g'(t) \\ = & \ M(t, x) - M(t, x_0) + g'(t). \end{aligned}$$

[65]Γενικότερα ἰσχύει τό κατωτέρω ἀποτέλεσμα:

Λῆμμα 2.3.2. *Ἔστω* $K \in C([a, b] \times [c, d])$ *καί* K *συνεχῶς διαφορίσιμη ὥς πρός τήν δεύτερη μεταβλητή* t, *δηλαδή* $K_t \in C([a, b] \times [c, d])$. *Ἄν* $f(t) = \int_a^b K(s, t)\, ds$, *τότε ἡ* f *εἶναι συνεχῶς διαφορίσιμη ἐπί τοῦ διαστήματος* $[c, d]$ *καί ἰσχύει ὅτι:*

$$f'(t) \ = \ \int_a^b K_t(s, t)\, ds.$$

γιά κάθε $t \in [c, d]$.

Απoδειξη. Παρατηροῦμε ὅτι

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h} \ = \ \frac{1}{h} \int_a^b \big(K(s, t+h) - K(s, t)\big)\, ds \ = \ \int_a^b \frac{1}{h} \Big(\int_0^h K_t(s, t+\sigma)\, d\sigma \Big)\, ds.$$

Λόγῳ ὅμως τῆς ὁμοιομόρφου συνεχείας τῆς K_t στό $[a, b] \times [c, d]$ ἡ διαφορά

$$\frac{1}{h} \Big(\int_0^h K_t(s, t+\sigma)\, d\sigma \Big) - K_t(s, t),$$

εἶναι δυνατόν νά καταστεῖ μικροτέρα τοῦ τυχόντος ε ἄν τό $|h|$ φραχθεῖ ἀπό κατάλληλο $\delta > 0$, ὅπερ σημαίνει ὅτι

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} \ = \ \int_a^b K_t(s, t)\, ds. \qquad \square$$

Ἐπειδή τώρα $\Phi_t = M$, θά ἔχομε ὅτι $g'(t) = M(t, x_0)$. Ἐν τέλει ἡ συνάρτηση

$$\Phi(t,x) \;=\; \int_{x_0}^{x} N(t,\xi)\,d\xi + \int_{t_0}^{t} M(s,x_0)\,ds,$$

ὅπως διαπιστοῦται ἀπό τά ἀνωτέρω, πληροῖ τίς ἀπαιτήσεις τῆς προτάσεως καί ἐπί πλέον ἰσχύει ὅτι $\Phi \in C^2(D)$. **ὅ.ἔ.δ.**

Παρατήρηση. Στήν ἀνωτέρω πρόταση εἶχε ὑποτεθεῖ ὅτι τό πεδίο ὁρισμοῦ D τῶν M καί N ἀποτελεῖ ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο. Ἡ ὑπόθεση αὐτή δύναται νά ἀντικατασταθεῖ ἀπό τήν ἀσθενέστερη ὑπόθεση ὅτι τό D εἶναι *ἁπλά συνεκτικό*, δηλαδή εἶναι ὁμοιομορφικό πρός ὀρθογώνιο παραλληλόγραμμο, ἰδιαιτέρως, σημαίνει ὅτι τό D δέν ἔχει τρύπες.

Προκύπτει λοιπόν κατά φυσιολογικό τρόπο ὁ ὁρισμός:

Ὁρισμός 2.3.1. *Ἔστω $D \subset \mathbb{R}^2$ ἀνοικτό. Μία συνήθης διαφορική ἐξίσωση τῆς μορφῆς*

$$M(t,x) + N(t,x)\,x' \;=\; 0, \tag{2.45}$$

ὀνομάζεται ἀκριβής (exact), στό D ἄν ὑπάρχει συνεχῶς διαφορίσιμη συνάρτηση $\Phi = \Phi(t,x)$ ὥστε:

$$\Phi_t(t,x) \;=\; M(t,x) \qquad \textit{καί} \qquad \Phi_x(t,x) \;=\; N(t,x), \tag{2.46}$$

γιά κάθε $(t,x) \in D$.

2.3.1 Πολλαπλασιαστής τοῦ Euler

Οἱ ὑποχρεώσεις (2.46) εἶναι πολύ περιοριστικές γιά τίς συναρτήσεις M καί N στήν (2.45). Αὐτό σημαίνει ὅτι σπανιότατα μία ἐξίσωση εἶναι ἀκριβής. Τίθεται εὐλόγως τό ἐρώτημα κατά πόσον ὑπάρχει τρόπος νά *καταστεῖ* ἀκριβής μία μή ἀκριβής ἐξίσωση. Θά ἀντιμετωπίσομε τό ἐρώτημα αὐτό μέ τήν εἰσαγωγή, ἐκ νέου, καταλλήλου ὁλοκληρωτικοῦ παράγοντος. Ἔστω ἡ μή ἀκριβής ἐξίσωση

$$M(t,x) + N(t,x)\,x' \;=\; 0, \tag{2.47}$$

δηλαδή: $M_x \neq N_t$ καί ἔστω ὅτι ἀναζητοῦμε κατάλληλη μή μηδενική συνάρτηση $\mu = \mu(t,x)$, για τήν ὁποία ἡ προκύπτουσα ἰσοδύναμη ἐξίσωση

$$\mu(t,x)\,M(t,x) + \mu(t,x)\,N(t,x)\,x' \;=\; 0$$

νά εἶναι ἀκριβής, δηλαδή: $(\mu M)_x \;=\; (\mu N)_t$ ἤ ἰσοδύναμα

$$N\mu_t - M\mu_x + (N_t - M_x)\,\mu \;=\; 0,$$

ἤ ἰσοδύναμα

$$N\,\frac{\mu_t}{\mu} - M\,\frac{\mu_x}{\mu} \;=\; M_x - N_t. \tag{2.48}$$

Ἡ ἀνωτέρω ἀποτελεῖ μία *μερική διαφορική ἐξίσωση* ὡς πρός μ, ἀφοῦ ἐμφανίζονται σ' αὐτή μερικές παράγωγοι τῆς ἄγνωστης συναρτήσεως μ, ὡς πρός t καί x. Ἡ διαδικασία εὑρέσεως τῶν λύσεων αὐτῆς τῆς ἐξισώσεως εἶναι σημαντικά πολυπλοκότερη ἀπό αὐτή τῆς συνήθους διαφορικῆς ἐξισώσεως (2.47). Παρατηροῦμε ὡστόσο, ὅτι δέν μᾶς ἐνδιαφέρει ἡ εὕρεση τῆς γενικῆς λύσεως τῆς (2.48), ἀλλά κάποιας μή μηδενικῆς λύσεως. Ἰδιαιτέρως, θά δοῦμε πῶς ἁπλοποιεῖται ἡ (2.48), καί ἀνάγεται σέ συνήθη διαφορική ἐξίσωση, ὅταν ἀναζητοῦμε πολλαπλασιαστή τοῦ Euler εἰδικῆς μορφῆς. Ἕνας τέτοιος ὁλοκληρωτικός παράγων μ ὀνομάζεται *πολλαπλασιαστής τοῦ Euler* (*Euler multiplier*.)

Παραδείγματα

(i) *Νά διαπιστωθεῖ ὅτι ἡ ἐξίσωση*

$$(t+x^2)+txx' \;=\; 0, \tag{2.49}$$

δέν εἶναι ἀκριβής. Ἐν συνεχείᾳ νά ἐπιλυθεῖ, ἀφοῦ ἐξακριβωθεῖ ὅτι ὑπάρχει πολλαπλασιαστής τοῦ Euler τῆς μορφῆς $\mu=\mu(t)$.

Επιλυση. Πράγματι ἡ (2.49) δέν εἶναι ἀκριβής διότι

$$M_x(t,x) \;=\; 2x \;\neq\; x \;=\; N_t(t,x).$$

Ἄν ὑπῆρχε πολλαπλασιαστής τοῦ Euler ἐξαρτώμενος μόνο ἀπό τό t, δηλαδή $\mu=\mu(t)$, τότε $\mu_t=\mu'$ καί $\mu_x=0$. Ἡ (2.48) λοιπόν θά ἐλάμβανε τήν μορφή

$$N\mu'+(N_t-M_x)\,\mu \;=\; 0 \qquad \text{ἤ} \qquad \frac{\mu'}{\mu} \;=\; \frac{M_x-N_t}{N},$$

ἡ ὁποία ἔχει λύση (ἐξαρτώμενη ἀπό τό t), ἄν τό δεξιό μέλος, δηλαδή ἡ $\dfrac{M_x-N_t}{N}$, ἀποτελεῖ συνάρτηση τοῦ t. Πράγματι αὐτό ἰσχύει:

$$\frac{M_x(t,x)-N_t(t,x)}{N(t,x)} \;=\; \frac{(t+x^2)_x-(tx)_t}{tx} \;=\; \frac{2x-x}{tx} \;=\; \frac{1}{t}.$$

Ἀναζητοῦμε λοιπόν πολλαπλασιαστή τοῦ Euler ὁποῖος ἱκανοποιεῖ τήν ἐξίσωση

$$\frac{\mu'}{\mu} \;=\; \frac{1}{t}.$$

Μία μή μηδενική λύση εἶναι ἡ $\mu(t) \;=\; t$. Πολλαπλασιάζοντας τήν (2.49) ἐπί t τήν καθιστοῦμε ἀκριβῆ. Πράγματι:

$$\big(\mu M(t,x)\big)_x \;=\; \big(t(t+x^2)\big)_x \;=\; 2tx \;=\; \big(t(tx)\big)_t \;=\; \big(\mu N(t,x)\big)_t.$$

Ἀκολούθως βρίσκομε $\Phi(t,x)$ ὥστε:

$$\Phi(t,x)_t \;=\; \mu M(t,x) \;=\; t^2 + tx^2 \qquad \text{καί} \qquad \Phi_x \;=\; \mu N(t,x) \;=\; t^2 x.$$

Ἔχομε λοιπόν ὅτι $\Phi(t,x)_t = t^2 + tx^2$, ἄρα

$$\Phi(t,x) \;=\; \frac{t^3}{3} + \frac{t^2x^2}{2} + g(x).$$

Διαφορίζοντας τήν ἀνωτέρω ὡς πρός x λαμβάνομε:

$$\Phi(t,x)_x \;=\; \left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^2x^2}{2} + g(x)\right)_x \;=\; t^2x + g'(x),$$

ἀπ' ὅπου προκύπτει ὅτι $g'(x) = 0$ καί ἄρα μία Φ ἡ ὁποία ἱκανοποιεῖ τίς ἀνωτέρω εἶναι ἡ

$$\Phi(t,x) \;=\; \frac{t^3}{3} + \frac{t^2x^2}{2}$$

καί ἐν τέλει ἡ γενική λύση τῆς (2.49) εἶναι

$$\frac{t^3}{3} + \frac{t^2x^2}{2} \;=\; c,$$

ἡ ὁποία μᾶς παρέχει *ἔμμεσως ὁρισμένη λύση*. Ἀπό τό παράδειγμα αὐτό προκύπτει ὅτι:

Ὑπάρχει πολλαπλασιαστής τοῦ Euler τῆς μορφῆς $\mu = \mu(t)$, ἄν καί μόνο ἄν ἡ παράσταση $(M_x - N_t)/N$ εἶναι συνάρτηση μόνο τοῦ t.

(ii) *Ἔστω ἡ μή ἀκριβής συνήθης διαφορική ἐξίσωση*

$$M(t,x) + N(t,x)x' \;=\; 0.$$

Νά βρεθεῖ ἡ σχέση ἡ ὁποία πρέπει νά ἱκανοποιεῖται μεταξύ τῶν M καί N ὥστε νά ὑπάρχει ὁλοκληρωτικός παράγων τῆς μορφῆς

α΄. $\mu = \mu(x)$,

β΄. $\mu = \mu(tx)$.

Απαντηση. Στήν περίπτωση ὅπου ἀναζητοῦμε πολλαπλασιαστή τοῦ Euler $\mu = \mu(x)$, ἡ (2.48) καθίσταται

$$-M\mu' + (N_t - M_x)\,\mu \;=\; 0 \qquad \text{ἤ} \qquad \frac{\mu'}{\mu} \;=\; \frac{N_t - M_x}{M}.$$

Ὑπάρχει πράγματι λοιπόν τέτοιος πολλαπλασιαστής τοῦ Euler, ἄν καί μόνο ἄν ἡ παράσταση

$$\frac{N_t - M_x}{M},$$

εἶναι συνάρτηση μόνο τοῦ x. Στήν περίπτωση ὅπου ἀναζητοῦμε πολλαπλασιαστή τοῦ Euler $\mu = \mu(tx)$, ἔχομε κατ' ἀρχάς:

$$\mu_t = x\mu' \qquad \text{καί} \qquad \mu_x = t\mu',$$

ὁπότε ἡ (2.48) λαμβάνει τήν μορφή:

$$xN\mu' - tM\mu' + (N_t - M_x)\,\mu = 0,$$

ἤ ἰσοδύναμα

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{M_x - N_t}{xN - tM}.$$

Ἄρα θά πρέπει τό δεξιό μέλος τῆς ἀνωτέρω νά ἀποτελεῖ συνάρτηση τοῦ tx.

Ἀσκήσεις

2.3.1 Ἀφοῦ διαπιστωθεῖ ὅτι ἑκάστη τῶν κατωτέρω ἐξισώσεων εἶναι ἀκριβής, ἀκολούθως νά ἐπιλυθεῖ:

(i) $x + t\,x' = 0,$

(ii) $x - t + (x + t)\,x' = 0,$

(iii) $x + \mathrm{e}^t + (t + 2x)\,x' = 0,$

(iv) $x^2 + (2tx + \mathrm{e}^x)\,x' = 0,$

(v) $x\,\mathrm{e}^{tx} + 1 + (t\,\mathrm{e}^{tx} - 2x)x' = 0.$

2.3.2 Διαπιστώσατε ὅτι ἑκάστη τῶν κατωτέρω ἐξισώσεων δέν εἶναι ἀκριβής. Ἐπιλύσατε αὐτές λαμβάνοντας ὑπ' ὄψιν τό γεγονός ὅτι ὑπάρχει πολλαπλασιαστής τοῦ Euler ἐξαρτώμενος μόνο ἀπό τό t ἤ μόνο ἀπό τό x, ὁ ὁποῖος τίς καθιστᾶ ἀκριβεῖς.

(i) $x + (1 + x + t\,x)\,x' = 0,$

(ii) $1 + (x\tan x - t\tan x - 1)\,x' = 0,$

(iii) $x + (t + t\,x)\,x' = 0,$

(iv) $1 + 2t^2 + 2t\,x + x' = 0,$

(v) $t^2 x - 1 + t^3 x' = 0.$

2.3.3 Ἔστω ἡ μή ἀκριβής συνήθης διαφορική ἐξίσωση:

$$M(t,x) + N(t,x)\,x' = 0.$$

Ποία σχέση πρέπει νά πληροῦται μεταξύ τῶν M καί N ὥστε νά ὑπάρχει πολλαπλασιαστής τοῦ Euler τῆς μορφῆς $\mu = \mu(\zeta)$ ὅπου:

(i) $\zeta = t + x,$

(ii) $\zeta = a\,t + b\,x,$

(iii) $\zeta = t^\alpha x^\beta,$

(iv) $\zeta = t^\gamma + x^\gamma,$

(v) $\zeta = e^t \cos x$.

2.3.4 Ποία σχέση πρέπει νά πληροῦται μεταξύ τῶν M καί N ὥστε νά ὑπάρχει πολλαπλασιαστής τοῦ Euler τῆς μορφῆς $\mu = \mu(\zeta)$, ὅπου $\zeta = P(t,x)$;

2.3.5 Νά βρεθεῖ πολλαπλασιαστής τοῦ Euler τῆς μορφῆς $\mu(t,x) = t^m x^n$, ὁ ὁποῖος καθιστᾶ τήν ἐξίσωση

$$2tx + x^3 + (3t^2 + tx^2)x' = 0,$$

ἀκριβῆ. Ἀκολούθως νά βρεθεῖ ἡ γενική λύση τῆς ἀνωτέρω.

2.3.6 Ἀφοῦ δειχθεῖ ὅτι ἡ ἐξίσωση

$$M(t) + N(x)\,x' = 0,$$

εἶναι ἀκριβής, ἀκολούθως νά εὑρεθεῖ ἡ γενική της λύση.

2.3.7 Πῶς καθίσταται ἡ ἐξίσωση

$$M(x) + N(t)\,x' = 0,$$

ἀκριβής;

2.3.8 Πῶς καθίσταται ἀκριβής μία ἐξίσωση χωριζομένων μεταβλητῶν;

2.3.9 Νά βρεθοῦν ὅλες οἱ διαφορίσιμες συναρτήσεις f μέ $f(0) = -2$, γιά τίς ὁποῖες ἡ διαφορική ἐξίσωση

$$1 + x^2 \sin t + f(t)\,xx' = 0,$$

εἶναι ἀκριβής. Ἐν συνεχείᾳ νά λυθεῖ ἡ διαφορική ἐξίσωση γιά τήν συγκεκριμένη f πού βρήκατε.

2.3.10 Ἔστω ὅτι οἱ συναρτήσεις μ_1 καί μ_2 εἶναι πολλαπλασιαστές τοῦ Euler τῆς ἐξισώσεως

$$M(t,x) + N(t,x)x' = 0. \tag{2.50}$$

Δείξατε ὅτι ὁποτεδήποτε ὁ λόγος μ_1/μ_2 εἶναι μή σταθερός, τότε ἡ σχέση

$$\frac{\mu_1(t,x)}{\mu_2(t,x)} = c, \tag{2.51}$$

ἀποτελεῖ ὁλοκληρωτική καμπύλη τῆς (2.50).

Υποδειξη. Ἔστω $\big(t(s), x(s)\big)$, $s \in I$, ἡ καμπύλη (2.51) σέ παραμετρική μορφή. Παραγωγίζοντας ὡς πρός s λαμβάνομε:

$$\left(\frac{\mu_{1,t}}{\mu_1} - \frac{\mu_{2,t}}{\mu_2}\right)\frac{dt}{ds} + \left(\frac{\mu_{1,x}}{\mu_1} - \frac{\mu_{2,x}}{\mu_2}\right)\frac{dx}{ds} = 0. \tag{2.52}$$

Ἐπίσης, δοθέντος ὅτι ἑκάστη τῶν μ_1, μ_2 ἀποτελεῖ πολλαπλασιαστή Euler τῆς (2.50) ἰσχύει ὅτι

$$N\frac{\mu_{j,t}}{\mu_j} - M\frac{\mu_{j,x}}{\mu_j} = M_x - N_t, \quad j = 1,2.$$

Ἀφαιρῶντας τίς δύο ἀνωτέρω λαμβάνομε

$$\left(\frac{\mu_{1,t}}{\mu_1} - \frac{\mu_{2,t}}{\mu_2}\right)N - \left(\frac{\mu_{1,x}}{\mu_1} - \frac{\mu_{2,x}}{\mu_2}\right)M = 0. \tag{2.53}$$

Συνδυάζοντας τίς (2.52) καί (2.53) λαμβάνομε ὅτι

$$M\frac{dt}{ds} + N\frac{dx}{ds} = 0,$$

δοθέντος ὅτι

$$\left(\frac{\mu_{1,t}}{\mu_1} - \frac{\mu_{2,t}}{\mu_2}, \frac{\mu_{1,x}}{\mu_1} - \frac{\mu_{2,x}}{\mu_2}\right) \neq (0,0),$$

τό ὁποῖο προκύπτει ἀπό τό γεγονός ὅτι ὁ λόγος μ_1/μ_2 δέν εἶναι σταθερός.

2.4 Γένεση τῶν συνήθων διαφορικῶν ἐξισώσεων

Ἡ μέχρι τώρα ἐμπειρία μας, μᾶς ἐπιτρέπει νά εἰκάσομε ὅτι οἱ λύσεις μιᾶς συνήθους διαφορικῆς ἐξισώσεως τῆς μορφῆς

$$x' = f(t,x),$$

ἀποτελοῦν οἰκογένεια καμπυλῶν τοῦ ἐπιπέδου tx, περιγραφομένων ἀπό μία σχέση τῆς μορφῆς

$$\Phi(t,x,c) = 0.$$

Γιά παράδειγμα ἡ ἐξίσωση $x' = x$, ἔχει ὡς λύσεις ὅλες τίς συναρτήσεις τῶν ὁποίων τό γράφημα περιγράφεται ἀπό τήν μονοπαραμετρική οἰκογένεια καμπυλῶν $x = c\mathrm{e}^t$, ἐνῶ στήν ἐξίσωση

$$x' = 1 + x^2,$$

ἀντιστοιχεῖ ἡ οἰκογένεια τῶν ὁλοκληρωτικῶν καμπυλῶν

$$x = \tan(t+c).$$

Τό φυσιολογικό ἐρώτημα τό ὁποῖο προκύπτει εἶναι κατά πόσον ἰσχύει καί τό ἀντίστροφο. Δηλαδή:

Δοθείσης οἰκογενείας καμπυλῶν (ἐπαρκῶς ὁμαλῶν),

$$\Phi(t,x,c) = 0, \tag{2.54}$$

ὑπάρχει συνήθης διαφορική ἐξίσωση $x' = f(t,x)$ τῆς ὁποίας οἱ ὁλοκληρωτικές καμπύλες περιγράφονται ἀπό τήν ἀνωτέρω;

Αὐτό πράγματι ἰσχύει, ἐφ' ὅσον ἡ σχέση (2.54) δύναται νά λυθεῖ ὡς πρός c. Ἄν δηλαδή ἡ (2.54) ἔχει τήν μορφή

$$\Psi(t,x) = c,$$

τότε ὑποθέτοντας ὅτι $x = x(t)$ καί παραγωγίζοντας ὡς πρός t λαμβάνομε

$$\Psi_t(t,x) + \Psi_x(t,x)x' = 0 \qquad \text{ἤ} \qquad x' = -\frac{\Psi_t(t,x)}{\Psi_x(t,x)},$$

ἡ ὁποία ἔχει ἔννοια ἐκεῖ ὅπου δέν μηδενίζεται ὁ παρονομαστής. Συνήθης διαφορική ἐξίσωση προκύπτει ἀκόμη καί χωρίς νά λύσομε τήν (2.54) ὡς πρός c. Ἄν παραγωγίσομε τήν (2.54) ὡς πρός t λαμβάνομε

$$\Phi_t(t,x,c) + \Phi_x(t,x,c)x' = 0. \tag{2.55}$$

Ἑπομένως οἱ (2.54) καί (2.55) μᾶς ἐπιτρέπουν νά ἀπαλείψομε τό c καί νά καταλήξομε σέ μία ἐξίσωση τῆς μορφῆς $F(t,x,x') = 0$. Γιά παράδειγμα ἡ οἰκογένεια

$$x = c\,\mathrm{e}^{ct},$$

δύσκολα ἐπιλύεται ὡς πρός c. Ἄν παραγωγίσομε ὡς πρός t λαμβάνομε

$$x' = c^2 \mathrm{e}^{ct},$$

ἄρα διαιρῶντας τις μέ τήν προϋπόθεση ὅτι $xx' \neq 0$, λαμβάνομε $\dfrac{x'}{x} = c$ καί ἐν τέλει ἡ διαφορική ἐξίσωση τήν ὁποία λαμβάνομε θά εἶναι ἡ

$$x = \frac{x'}{x} \mathrm{e}^{t\,x'/x},$$

ἡ ὁποία δέν γράφεται εὐκόλως σέ ἄμεση μορφή.

Γενικότερα στήν περίπτωση διπαραμετρικῶν (ἀντιστοίχως $n-$παραμετρικῶν) οἰκογενειῶν καμπυλῶν, μέ διαδοχική ἀπαλοιφή τῶν παραμέτρων καταλήγομε σέ μία συνήθη διαφορική ἐξίσωση δευτέρας (ἀντιστοίχως $n-$στῆς) τάξεως.

Παραδείγματα

$$(i) \qquad x = c_1 \mathrm{e}^{c_2 t} \iff \log x = \log c_1 + c_2 t$$
$$\iff (\log x)'' = 0$$
$$\iff x'' x = \big(x'\big)^2$$

$$(ii) \qquad x = c_1 \cos t + c_2 \sin t \iff x \csc t = c_1 \cot t + c_2$$
$$\iff (x \csc t)' = (c_1 \cot t)'$$
$$\iff x' \csc t - x \cos t \csc^2 t = -c_1 \csc^2 t$$
$$\iff x' \sin t - x \cos t = -c_1$$
$$\iff \big(x' \sin t - x \cos t\big)' = 0$$
$$\iff x'' \sin t + x' \cos t - x' \cos t + x \sin t = 0$$
$$\iff x'' + x = 0.$$

᾿Ασκήσεις

2.4.1 Ἀφοῦ ἀπαλείψετε τό c νά βρεῖτε τίς ἐξισώσεις πρώτης τάξεως, οἱ ὁποῖες ἔχουν ὡς λύσεις τίς κατωτέρω μονοπαραμετρικές οἰκογένειες:

(i) $x = \varphi_1 + c\,\varphi_2$,

(ii) $x = c \sin ct$,

(iii) $x^2 = c\,t$,

(iv) $\mathrm{e}^{cx} = t$.

2.4.2 Ἀφοῦ ἀπαλείψετε τά c_1, c_2, νά προσδιορίσεται τίς ἐξισώσεως δευτέρας τάξεως, οἱ ὁποῖες ἔχουν ὡς λύσεις τίς κατωτέρω διπαραμετρικές οἰκογένειες:

(i) $x = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t)$,

(ii) $x = c_1 e^{c_2\varphi_1(t)}$,

(iii) $x = e^{c_1 t} + e^{c_2 t}$,

(iv) $x^2 + c_1 t^2 = c_2$.

2.4.3 Γιατί δέν συμβαίνει τό ἴδιο καί στήν διπαραμετρική οἰκογένεια

$$x = e^{c_1 c_2 t};$$

2.4.4 Νά ἀπαλείψετε τά c_1, c_2 καί c_3 στήν

$$x = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + c_3\varphi_3(t),$$

ὅπου φ_i, $i = 1,2,3$, δοθεῖσες συναρτήσεις καί νά βρεῖτε τήν τρίτης τάξεως ἐξίσωση ἡ ὁποία προκύπτει.

2.5 Ὀρθογώνιες οἰκογένειες καμπυλῶν

Πρόβλημα. *Δίδεται ἡ οἰκογένεια καμπυλῶν $\{\Gamma_c\}_{c\in I}$, ὅπου*

$$\Gamma_c = \{ (t,x) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \Phi(t,x,c) = 0 \}$$

καί I ἀνοικτό διάστημα. Ὑπάρχει οἰκογένεια καμπυλῶν $\{\Delta_d\}_{d\in J}$, ὅπου J ἀνοικτό ἐπίσης διάστημα, ὥστε ὁποτεδήποτ δύο καμπύλες, μία ἀπό κάθε οἰκογένεια, τέμνονται, νά τέμνονται καθέτως;

Ὅπως θά δοῦμε ἐν συνεχείᾳ, ἡ ἀπάντηση στό ἐρώτημα εἶναι θετική, ἄν ὑποθέσομε ὅτι ἡ Φ εἶναι ἀρκετά ὁμαλή.

Παράδειγμα. Ἔστω

$$\Gamma_c = \{ (t,x) \ :| \ tx = c \}, \quad c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Ἡ $\{\Gamma_c\}_{c\in\mathbb{R}}$ ἀποτελεῖ οἰκογένεια ὑπερβολῶν. Ἑκάστη καμπύλη τῆς οἰκογενείας δύναται νά περιγραφεῖ παραμετρικῶς ἀπό τό t. Πράγματι:

$$\Gamma_c = \left\{ \left(t, \frac{c}{t}\right) \ : \ t \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \right\},$$

δηλαδή ἡ Γ_c ἀποτελεῖ τό γράφημα τῆς συναρτήσεως

$$x(t) = \frac{c}{t}, \quad t \neq 0.$$

Δυνάμεθα νά ἀπαλείψομε τό c, ἀφοῦ ἀρχικῶς τό ἀπομονώσομε καί μετά παραγωγίσομε ὡς πρός t. Δηλαδή

$$t\,x = c \iff x + t\,x' = 0 \iff x' = -\frac{x}{t}.$$

Ἡ οἰκογένεια τῶν ὑπερβολῶν, $\{\Gamma_c\}_{c\in\mathbb{R}}$, ἀποτελεῖ τίς λύσεις τῆς συνήθους διαφορικῆς ἐξισώσεως:

$$x' = -\frac{x}{t}.$$

Ἡ ἀνωτέρω συνήθης διαφορική ἐξίσωση γράφεται ἰσοδύναμα ὡς:

$$\big(1,x'\big)\cdot\Big(\frac{x}{t},1\Big) = 0,$$

τό ὁποῖο μᾶς λέγει ὅτι τό γράφημα τῆς Γ_c στό σημεῖο (t_0,x_0) εἶναι κάθετο στό διάνυσμα $(x_0/t_0,1)$ ἤ ἰσοδύναμα παράλληλο πρός τό διάνυσμα $(-t_0/x_0,1)$. Ἡ ζητούμενη ὀρθογώνια αὐτῆς οἰκογένεια περιγράφεται ἀπό τήν ἑξῆς ἰδιότητα:

Γιά κάθε σημεῖο (t_0,x_0) ἀπό τό ὁποῖο κάποια καμπύλη αὐτῆς τῆς οἰκογενείας διέρχεται, ἡ καμπύλη αὐτή εἶναι κάθετη στό διάνυσμα $(t_0/x_0,1)$. Ἰσοδύναμα αὐτό σημαίνει ὅτι:

$$\big(1,x'\big)\cdot\big(-t/x,1\big) = 0,$$

ἑπομένως

$$x' = \frac{t}{x} \qquad \text{ἤ} \qquad xx' - t = 0$$

καί μετά τήν ὁλοκλήρωση καθίσταται ἰσοδύναμη μέ

$$x^2 - t^2 = d,$$

γιά κατάλληλο μή μηδενικό d, ἡ ὁποία, γιά $d \neq 0$, ἀποτελεῖ ἐπίσης οἰκογένεια ὑπερβολῶν.

Ἔστω ὅτι τώρα μᾶς δίδεται ἡ οἰκογένεια καμπυλῶν $\{\Gamma_c\}_{c\in I}$. Τότε ἀπό τό προηγούμενο παράδειγμα προκύπτει ἡ ἑξῆς διαδικασία:

Βρίσκομε τήν πρώτης τάξεως συνήθη διαφορική ἐξίσωση μέ τήν ὁποία ἡ οἰκογένεια εἶναι ἰσοδύναμη, ἀφοῦ προηγουμένως λύσομε ὡς πρός c:

$$\Phi(t,x,c) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x' = f(t,x).$$

Αὐτή γράφεται ὡς:

$$\big(1,x'\big)\cdot\big(-f(t,x),1\big) = 0.$$

Ἡ ὀρθογώνια οἰκογένεια τῆς $\{\Gamma_c\}_{c\in I}$ θά ἱκανοποιεῖ, σέ κάθε σημεῖο ἀπό τό ὁποῖο διέρχεται, τήν σχέση:

$$\Big(1,x'\Big)\cdot\Big(\frac{1}{f(t,x)},1\Big) = 0.$$

Ἤτοι: θά ἀποτελεῖται ἀπό τίς ὁλοκληρωτικές καμπύλες τῆς

$$x' = -\frac{1}{f(t,x)}.$$

Ἡ νέα οἰκογένεια καμπυλῶν ἀποτελεῖ τίς λεγόμενες ὀρθογώνιες τροχιές ὡς πρός τήν ἀρχική οἰκογένεια.

2.5.1 Πλαγίως τεμνόμενες οἰκογένειες

Ἔστω ὅτι τώρα θέλομε νά γενικεύσομε τό προηγούμενο πρόβλημα:

ΠΡΟΒΛΗΜΑ. *Δίδεται οἰκογενεία καμπυλῶν* $\{\Gamma_c\}_{c\in I}$. *Εἶναι ἄραγε δυνατόν να κατασκευασθεῖ οἰκογένεια* $\{\Delta_d\}_{d\in J}$, *ὥστε σέ κάθε σημεῖο ὅπου τέμνονται, μία καμπύλη τῆς πρώτης οἰκογενείας μέ μία καμπύλη τῆς δεύτερης, νά τέμνονται ὑπό γωνία* ω;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ. Τά προηγηθέντα μᾶς δίδουν καταφατική ἀπάντηση στήν περίπτωση κατά τήν ὁποία $\omega = \pi/2$. Ἐν συνεχείᾳ θά δοῦμε πῶς ἀντιμετωπιζεται ἡ περίπτωση $\omega \neq \pi/2$. Κατ' ἀρχάς ὑπενθυμίζομε ἀπό τήν Ἀναλυτική Γεωμετρία ὅτι τά μή μηδενικά διανύσματα

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2), \quad \boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2)$$

σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία $\omega \neq \pi/2$, ἄν

$$\tan\omega = \frac{\dfrac{\beta_2}{\beta_1} - \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}}{1 + \dfrac{\alpha_2\beta_2}{\alpha_1\beta_1}} = \frac{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1}{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2}.$$

Κατ' αὐτό τόν τρόπο τό ἀνωτέρω πρόβλημα ἀνάγεται στό ἑξῆς:

Δίδεται οἰκογένεια καμπυλῶν $\{\Gamma_c\}_{c\in I}$ *ἡ ὁποία ἀποτελεῖ τίς ὁλοκληρωτικές καμπύλες τῆς συνήθους διαφορικῆς ἐξισώσεως* $x' = f(t,x)$. *Νά βρεθεῖ ἡ συνήθης διαφορική ἐξίσωση* $x' = g(t,x)$, *μέ ὁλοκληρωτικές καμπύλες τέμνουσες τίς καμπύλες* $\{\Gamma_c\}_{c\in I}$ *ὑπό γωνία* ω.

Ὅμως στό τυχόν σημεῖο (t_0, x_0) ἔχομε ὅτι:

$$\big(-f(t_0,x_0), 1\big) \perp \Gamma_c, \qquad \big(-g(t_0,x_0), 1\big) \perp \Delta_d$$

καί ἐπειδή οἱ Γ_c καί Δ_d τέμνονται κατά γωνία ω προκύπτει ὅτι:

$$\tan\omega = \frac{-f(t_0,x_0) + g(t_0,x_0)}{1 + f(t_0,x_0)g(t_0,x_0)}.$$

Ἰσοδύναμα

$$g(t_0,x_0) = \frac{f(t_0,x_0) + \tan\omega}{1 - (\tan\omega) f(t_0,x_0)}.$$

Παράδειγμα. Νά βρεθεῖ ἡ οἰκογένεια καμπυλῶν, ἡ ὁποία σχηματίζει γωνία $\pi/6$ μέ τήν οἰκογένεια ἐλλείψεων $x^2 + \sqrt{3}\,t^2 = c$, $c > 0$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ. Ἡ οἰκογένεια ἐλλείψεων $x^2 + \sqrt{3}t^2 = c$, ἀποτελεῖ τίς ὁλοκληρωτικές καμπύλες τῆς συνήθους διαφορικῆς ἐξισώσεως

$$2xx' + 2\sqrt{3}t = 0 \qquad \text{ἤ} \qquad x' = -\frac{\sqrt{3}\,t}{x}.$$

Ἐπειδή $\tan(\pi/6) = \sqrt{3}/3$, ἡ ζητούμενη οἰκογένεια ἀποτελεῖ τίς ὁλοκληρωτικές καμπύλες τῆς ἐξισώσεως

$$x' = \frac{-\dfrac{\sqrt{3}\,t}{x} + \dfrac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \dfrac{\sqrt{3}}{3} \cdot \dfrac{\sqrt{3}\,t}{x}},$$

ἤ ἰσοδύναμα

$$x' = \sqrt{3} \cdot \frac{\dfrac{x}{3t} - 1}{\dfrac{x}{t} + 1},$$

ἡ ὁποία λύεται ὡς ἐξίσωση ὁμοιογενοῦς ροῆς (βλέπε σελίδα 75).

Ἀσκήσεις

2.5.1 Νά βρεθοῦν οἱ ὀρθογώνιες τροχιές τῶν κατωτέρω οἰκογενειῶν καμπυλῶν:

(i) $x = c\,t^2$,

(ii) $x^2 + t^2 = c$,

(iii) $x = c\,e^t$,

(iv) $t^2 + 2\,x^2 = c$,

(v) $x = c\,t$,

(vi) $t^2 + x^2 = c\,t$.

2.5.2 Νά βρεθοῦν οἱ οἰκογένειες καμπυλῶν οἱ ὁποῖες σχηματίζουν γωνία $\pi/4$ μέ τίς κατωτέρω οἰκογένειες:

(i) $x = c\,t$,

(ii) $t^2 + x^2 = c$,

(iii) $t^2 - x^2 = c$,

(iv) $t\,x = c$,

(v) $t^2 - 2t\,x - x^2 = c$.

2.5.3 Νά βρεθοῦν ὅλες οἱ καμπύλες μέ τήν ἰδιότης ὅτι σέ κάθε σημεῖο τους P ἡ ἐφαπτομένη τέμνει τόν ἄξονα τῶν x στό σημεῖο A καί τόν ἄξονα τῶν t στό σημεῖο B ὥστε $BA = AP$.

2.6 Φυσικές ἐφαρμογές

Οἱ διαφορικές ἐξισώσεις ἀποτελοῦν ἴσως τόν κατ’ ἐξοχήν ἐφαρμοσμένο κλάδο τῶν Μαθηματικῶν. Οἱ περισσότερες ἀπό τίς μελετούμενες ἐξισώσεις, προέρχονται ἀπό προβλήματα τῆς Φυσικῆς, τῆς Χημείας, τῆς Βιολογίας, τῶν Οἰκονομικῶν ἀλλά καί ἄλλων κλάδων τῶν Μαθηματικῶν, ὅπως γιά παράδειγμα τῆς Διαφορικῆς Γεωμετρίας. Στήν παράγραφο αὐτή θά δοῦμε μερικά τέτοια παραδείγματα.

2.6.1 Σχάση ραδιενεργῶν ἰσοτόπων

Οἱ πυρῆνες τῶν ραδιενεργῶν ἰσοτόπων διασπῶνται, ἤ ἄλλως ὑφίστανται *σχάση*, καί ἡ μάζα τους μειώνεται μέ σταθερό σχετικό ρυθμό. Ἄν λοιπόν $m = m(t)$ εἶναι ἡ μάζα τήν χρονική στιγμή t, τότε σέ μετά ἀπό μικρό χρονικό διάστημα Δt, ἡ μάζα θά μεταβληθεῖ κατά τόν ἀκόλουθο τρόπο:

$$m(t+\Delta t) \approx m(t) - \alpha m(t)\Delta t, \tag{2.56}$$

ὅπου α θετική σταθερά. Ἄρα

$$\frac{m(t+\Delta t) - m(t)}{\Delta t} \approx -\alpha m(t) \tag{2.57}$$

καί τελικῶς ὅταν τό $\Delta t \to 0$ λαμβάνομε τήν διαφορική ἐξίσωση

$$\frac{dm}{dt} = -\alpha m. \tag{2.58}$$

Ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωση μᾶς λέγει ὅτι, *ὁ ρυθμός μειώσεως τῆς μάζας τοῦ ραδιενεργοῦ ἰσοτόπου, εἶναι ἀνάλογος τῆς ἑκάστοτε μάζας αὐτοῦ.*

Ἄλλως: ὁ σχετικός ρυθμός μεταβολῆς, ὁ ὁποῖος ἀποτελεῖ τό λόγο m'/m, εἶναι σταθερός. Ἡ σταθερά α προσδιορίζεται ἀπό μία ἄλλη πληροφορία, τό *χρόνο ὑποδιπλασιασμοῦ*, ἤτοι, τό χρόνο ὁ ὁποῖος ἀπαιτεῖται γιά νά ἀπομείνει τό ἥμισυ τῆς ἀρχικῆς μάζας.

Παράδειγμα. Ὁ χρόνος ὑποδιπλασιασμοῦ τοῦ ραδιενεργοῦ ἰσοτόπου τοῦ ἄνθρακα 14 εἶναι περίπου 5568 ἔτη. Ποῖος εἶναι ὁ χρόνος ὑποεκατονταπλασιασμοῦ τοῦ ἰσοτόπου αὐτοῦ;

Απαντηση. Ἄν ὁ χρόνος t μετρᾶται σέ ἔτη, τότε γνωρίζομε ὅτι:

$$m' = -\alpha m \quad \text{καί} \quad m(5568) = \frac{m(0)}{2},$$

ὁπότε ἰσοδύναμα

$$m(t) = m(0)\,\mathrm{e}^{-\alpha t} \quad \text{καί} \quad m(5568) = \frac{m(0)}{2},$$

καί ἐν τέλει $\mathrm{e}^{-5568\alpha} = 1/2$. Ἰσοδύναμα

$$\alpha = \frac{\log 2}{5568} \approx .00012449.$$

Ἄν λοιπόν T ὁ ζητούμενος χρόνος, τότε

$$\frac{m(0)}{100} = m(T) = m(0)\,\mathrm{e}^{-\alpha T}$$

καί συνεπῶς $\mathrm{e}^{-\alpha T} = 1/100$, ἤ

$$T = \frac{\log 100}{\alpha} \approx 36993\,\text{ἔτη περίπου}.$$

Ὁ ζητούμενος λοιπόν χρόνος εἶναι 36993 περίπου ἔτη.

Παρατήρηση. Ἡ μάζα $m(t)$ τοῦ ραδιενεργοῦ ἰσοτόπου ἰσοῦται μέ $m(0)\mathrm{e}^{-\alpha t}$. Ἄν εἶναι γνωστός ὁ χρόνος ὑποδιπλασιασμοῦ T_h, τότε

$$m(T_h) \;=\; m(0)\,\mathrm{e}^{-\alpha T_h} \;=\; \frac{1}{2}m(0),$$

καί ἄρα $T_h = \log 2/\alpha$. Ἄρα ἡ μάζα τοῦ σώματος δύναται νά γραφεῖ καί ὡς

$$m(t) \;=\; m(0)\,\mathrm{e}^{-\frac{\log 2}{T_h}t} \;=\; m(0)\,2^{-t/T_h}.$$

Ἐπίσης, ἡ (2.58) δύναται νά γραφεῖ ὡς

$$m' \;=\; -\frac{\log 2}{T_h}\,m,$$

ὅταν εἶναι γνωστός ὁ χρόνος ὑποδιπλασιασμοῦ.

2.6.2 Πληθυσμιακές δυναμικές

Πρόβλημα. *Ἔστω ὅτι πληθυσμός N_0 βακτηριδίων τοποθετεῖται σέ καλλιέργεια τήν χρονική στιγμή $t = 0$. Ἔστω $N(t)$ ὁ πληθυσμός σέ μετέπειτα χρονική στιγμή t. Ὑποθέτομε ὅτι τόσο ἡ τροφή ὅσο καί ὁ χῶρος εἶναι ἀπεριόριστοι καί δεχόμαστε ὅτι ὁ ρυθμός αὐξήσεως τοῦ πληθυσμοῦ εἶναι ἀνάλογος τοῦ ἑκάστοτε πληθυσμοῦ. Νά βρεθεῖ τό N συναρτήσει τοῦ χρόνου.*

Ἔχομε βεβαίως καί ἐδῶ περίπτωση σταθεροῦ σχετικοῦ ρυθμοῦ μεταβολῆς τοῦ πληθυσμοῦ ὁ ὁποῖος περιγράφεται ἀπό τήν ἐξίσωση

$$\frac{dN(t)}{dt} \;=\; \kappa N(t). \tag{2.59}$$

Ἡ λύση τῆς ἀνωτέρω, ἀφοῦ ἐνσωματωθοῦν οἱ ἀρχικές συνθῆκες, θά εἶναι

$$N(t) \;=\; N(0)\,\mathrm{e}^{\kappa t}. \tag{2.60}$$

Ἡ ἀνωτέρω ἀποτελεῖ ἀκόμη μία περίπτωση ἐκθετικῆς αὐξήσεως.

Ἄς ὑποθέσομε τώρα ὅτι, ὁ πληθυσμός τῆς γῆς αὐξάνεται μέ ρυθμό 2.5% τό χρόνο. Συνεπῶς ἡ τιμή τῆς σταθερᾶς κ στήν (2.60) θά προκύψει ὡς ἑξῆς:

$$N(1) \;=\; 1.025N(0) \;=\; \mathrm{e}^{\kappa}N(0),$$

ἄρα

$$\kappa \;=\; \log 1.025 \;\approx .0246937\,\text{περίπου}.$$

Συνεπῶς ὁ πληθυσμός τῆς γῆς θά διπλασιασθεῖ σέ T χρόνια, ὅπου $\mathrm{e}^{\kappa T} = 2$, ἤ

$$T \;=\; \frac{\log 2}{\kappa} \;\approx\; 28.0710\,\text{χρόνια περίπου}.$$

Παρατήρηση. Ἄν ἡ σταθερά κ στήν (2.59) εἶναι ἀρνητική, τότε ἔχομε ἐξίσωση περιγράφουσα σταθερό σχετικό ρυθμό μειώσεως.

2.6.3 Ἀνατοκισμός

Ἡ αὔξηση τοκιζομένου κεφαλαίου λαμβάνει χώρα μέ σταθερό σχετικό ρυθμό. Ἰσχύει ἡ ἐξίσωση:

$$S' = \alpha S, \tag{2.61}$$

ὅπου S τό τοκιζόμενο ποσό καί α θετική σταθερά. Κατά παρόμοιο τρόπο ἐξελίσσεται καί το ποσό τοῦ χρέους L:

$$L' = \beta L,$$

ὅπου β ἐπίσης θετική σταθερά.

Παραδείγματα

(i) *Νά ὑπολογισθεῖ ἡ σταθερά α, δοθέντος ὅτι τό προσφερόμενο ἐτήσιο ἐπιτόκιο εἶναι 7%.*

Απαντηση. Ἡ λύση τῆς (2.61) δίδεται ἀπό τόν τύπο:

$$S(t) = S(0)\,\mathrm{e}^{\alpha t},$$

ὅπου τό t μετρᾶται σέ ἔτη. Δοθέντος λοιπόν ὅτι τό ἐτήσιο ἐπιτόκιο εἶναι 7%, τότε θά ἔχομε ὅτι:

$$1.07\,L(0) = L(1) = L(0)\,\mathrm{e}^{\alpha}.$$

Ἄρα $\alpha = \log 1.07 \approx .06742966$.

(ii) *Ἔστω τώρα μία πολυπλοκότερη περίπτωση, ὅπου κάποιος γιά ἀποπληρωμή δανείου 100000 λιρῶν, τοκιζομένων πρός 9% ἀνά ἔτος, καταβάλλει s λίρες τό μήνα. Ὑποθέτομε τό ποσό καταβάλλεται κατά συνεχῆ τρόπο, δηλαδή σέ διάστημα T μηνῶν, ὅπου T πραγματικός, καταβάλλει sT λίρες. Τό ζητούμενο εἶναι ἡ διαφορική ἐξίσωση ἡ ὁποία περιγράφει τήν ἐξέλιξη τοῦ δανείου. Ἰδιαιτέρως, μέ τί πρέπει νά ἰσοῦται τουλάχιστον τό s ὥστε τό δάνειο νά ἀποπληρωθεῖ κάποτε. Ἐπίσης, σέ πόσο χρόνο θά ἀποπληρωθεῖ τό δάνειο, ἄν $s = 1000$ λίρες ἀνά μήνα.*

Απαντηση. Ἐφ' ὅσον ὁ χρεώστης καταβάλλει s λίρες μηνιαίως, αὐτό σημαίνει ὅτι καταβάλλει $12s$ λίρες ἐτησίως. Ἐντός χρόνου Δt, ἡ τιμή τοῦ ὀφειλόμενου ποσοῦ θά μεταβληθεῖ συμφώνως μέ τόν κατωτέρω τύπο:

$$x(t+\Delta) \approx x(t) + \alpha x(t)\Delta t - 12s\Delta t.$$

Συνεπῶς, ἡ διαφορική ἐξίσωση ἡ ὁποία διέπει τήν ἐξέλιξη τοῦ δανείου, στήν ὁποία ὁ χρόνος μετρᾶται σέ ἔτη καί ἡ ἀξία τοῦ δανείου σέ λίρες, θά εἶναι ἡ

$$x' = \alpha x - 12s,$$

ὅπου α θετική σταθερά, ἡ ὁποία βάσει τοῦ προηγουμένου παραδείγματος, ἰσοῦται μέ

$$\alpha = \log 1.09 \approx .0861777.$$

Ἡ λύση τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως δίδεται ἀπό τόν τύπο:

$$x(t) = \frac{12s}{\alpha} + \left(x_0 - \frac{12s}{\alpha}\right) \mathrm{e}^{\alpha t},$$

ὅπου $x_0 = 100000$ λίρες. Ἡ $x(t)$ φθίνει μόνο ὅταν $x_0 - 12s/\alpha < 0$, ἰσοδύναμα ἄν

$$s > \alpha x_0/12 \approx 718.18 \,\text{λίρες περίπου τό μήνα.}$$

Ἄν δηλαδή καταβάλλονται ὀλιγότερα τῶν περίπου 718.18 λιρῶν τό μήνα, τότε τό δάνειο οὐδέποτε θά ἀποπληρωθεῖ. Συνεχῶς θά αὐξάνεται. Τέλος, ἄν $s = 1000$ λίρες τό μήνα, τότε τό χρέος ἀποπληροῦται σέ χρόνο T, ὅπου $x(T) = 0$, ἤ

$$\frac{12s}{\alpha} + \left(x_0 - \frac{12s}{\alpha}\right) \mathrm{e}^{\alpha T} = 0.$$

Ἰσοδύναμα

$$T = \frac{1}{\alpha} \log \left(\frac{\frac{12s}{\alpha}}{\frac{12s}{\alpha} - x_0} \right) = 14.6949\ldots \text{ἔτη.}$$

2.6.4 Νόμος ψύξεως τοῦ Newton

Συμφώνως μέ τόν νόμο ψύξεως τοῦ Newton, ἄν ἕνα ὁμοιογενές σῶμα θερμοκρασίας T ἐκτεθεῖ σέ περιβάλλον σταθερᾶς θερμοκρασίας T_π, τότε ἡ θερμοκρασία τοῦ σώματος θά μεταβάλλεται μέ τήν πάροδο τοῦ χρόνου, ὁλοένα πλησιάζουσα τήν θερμοκρασία τοῦ περιβάλλοντος, μέ ρυθμό ἀνάλογο τῆς ἑκάστοτε διαφορᾶς τῶν δύο θερμοκρασιῶν. Συνεπῶς, θά ἱκανοποιεῖ τήν διαφορική ἐξίσωση:

$$T' = -\kappa(T - T_\pi),$$

ὅπου κ θετική σταθερά, ἡ ὁποία ὀνομάζεται σταθερά θερμικῆς ἀγωγιμότητος. Ἡ λύση τῆς ἀνωτέρω εἶναι:

$$T(t) = T_\pi + (T_0 - T_\pi)\mathrm{e}^{-\kappa t},$$

ἡ ὁποία τείνει ἐκθετικά πρός τήν θερμοκρασία τοῦ περιβάλλοντος. Βλέπε σχετικές *Ἀσκήσεις* 2.6.11, 2.6.12, 2.6.13 καί 2.6.14 οἱ ὁποῖες ἀκολουθοῦν.

2.6.5 Μείξη

Ἔστω ὅτι μᾶς δίδεται τό ἀκόλουθο πρόβλημα μείξεως:

Πρoβλημα. *Δοχεῖο περιέχει 1000ml (ἤ 1lt) διαλύματος νεροῦ καί ἅλατος στό ὁποῖο εἰσρέει ἀπό βαλβίδα εἰσόδου διάλυμα ἅλατος συγκεντρώσεως Q ἴσου μέ 10gr ἀνά λίτρο, μέ ρυθμό P ἴσο μέ 10ml ἀνά ὥρα. Συγχρόνως, ἀπό βαλβίδα ἐξόδου ἐκρέει διάλυμα μέ τόν ἴδιο ρυθμό. Ἐντός τοῦ δοχείου ὑπάρχει ἕλιξ ἀναδεύουσα τό διάλυμα καί ἐξασφαλίζουσα ὅτι ἀνά πᾶσα στιγμή τό διάλυμα νεροῦ καί ἅλατος εἶναι ὁμοιογενές. Νά διατυπωθεῖ ἡ ἐξίσωση ἡ ὁποία περιγράφει τήν ἐξέλιξη τῆς συγκεντρώσεως τοῦ διαλύματος σέ ἅλας. Ἄν ὑποθέσομε ὅτι κατ' ἀρχάς τό δοχεῖο περιεῖχε καθαρό νερό, νά λυθεῖ τό ἀντίστοιχο πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν. Ποία ἡ ὁριακή συγκέντρωση;*

Απαντηση. Ἔστω $S = S(t)$ ἡ μάζα τοῦ ἅλατος στό διάλυμα μετρουμένη σέ γραμμάρια. Δοθέντος ὅτι ἡ συγκέντρωση τοῦ ἅλατος δέν εἶναι τίποτα ἄλλο ἀπό τήν ποσότητα S διά τοῦ ὄγκου τοῦ δοχείου, $V = 1000$, μετρουμένου σέ χιλιοστόλιτρα (*ml*), ἀρκεῖ νά εὕρομε τήν ἐξίσωση ἡ ὁποία διέπει τήν S. Ἐντός χρόνου Δt (μετρουμένου σέ ὧρες) εἰσέρχονται στό δοχεῖο:

$$\Delta S_1 = P \cdot Q \cdot \Delta t = \frac{10}{1000} \cdot \frac{10}{1} \cdot \Delta t = \frac{\Delta t}{10},$$

ἐνῶ κατά τήν διάρκεια ἐπίσης Δt ἐξέρχονται ἀπό τό δοχεῖο:

$$\Delta S_2 = P \cdot \frac{S(t)}{1000} \cdot \Delta t = \frac{10}{1} \cdot \frac{S(t)}{1000} \cdot \Delta t = \frac{S\Delta t}{100}.$$

Ἡ ἐξίσωση λοιπόν τοῦ S μετρουμένου σέ γραμμάρια καί τοῦ χρόνου σέ ὧρες θά εἶναι

$$S' = \frac{1}{10} - \frac{1}{100}S.$$

Τό δέ ἀντίστοιχο πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν θά εἶναι

$$\begin{cases} S' = \dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{100}S, \\ S(0) = 0, \end{cases}$$

μέ λύση:

$$S(t) = 10\left(1 - \mathrm{e}^{-t/100}\right)$$

καί ὁριακή τιμή:

$$S_\infty = \lim_{t\to+\infty} S(t) = 10.$$

Ἄρα ἄν $C(t)$, ἡ συγκέντρωση τοῦ ἅλατος στό διάλυμα, τότε $C(t) = S(t)/V$. Συνεπῶς

$$C(t) = \frac{\left(1 - \mathrm{e}^{-t/100}\right)}{100} \qquad \text{καί} \qquad C_\infty = \lim_{t\to+\infty} C(t) = \frac{1}{100}(\text{gr/ml}).$$

2.6.6 Ὁριακή ταχύτης

Τό φυσικό πρόβλημα ἐδῶ περιγράφει τήν κίνηση σώματος πίπτοντος ἀπό μεγάλο ὕψος πρός τήν γῆ, ἐπιταχυνομένου ὑπό τήν ἐπίδραση τῆς βαρύτητος καί ἐπιβραδυνομένου ὑπό τήν ἐπίδραση τῆς ἀτμοσφαιρικῆς τριβῆς. Οἱ δυνάμεις αὐτές ἐξισορροποῦνται καί τό πίπτον σῶμα λαμβάνει *ὁριακή ταχύτητα*, τάχιστα, συμφώνως πρός τίς παρατηρήσεις, ἀσυμπτωτικῶς, συμφώνως μέ τήν θεωρία, ὅπως θά ἀποδειχθεῖ. Στήν περίπτωση τῶν ἀλεξιπτωτιστῶν, πρό τοῦ ἀνοίγματος τοῦ ἀλεξιπτώτου, ἡ ταχύτης αὐτή εἶναι περίπου $180-200\mathrm{km/h}$. Στήν περίπτωση μεταλλικῶν σφαιρῶν ἡ ταχύτης εἶναι τόσο μεγάλη ὥστε δύναται, λόγῳ τῆς ἐκλυομένης θερμότητος, νά προκληθεῖ ἀνάφλεξη τῆς σφαίρας. Στό ὑπό μελέτη φυσικό μοντέλο, θεωροῦμε ὅτι ἡ δύναμη τριβῆς εἶναι ἀνάλογη τοῦ τετραγώνου τῆς ταχύτητος. Ἄν λοιπόν v ἀποτελεῖ τήν ταχύτητα, ἡ ἐξίσωση ἡ ὁποία περιγράφει τήν ἐξέλιξη τῆς ταχύτητος θά πρέπει νά εἶναι

$$v' = g - \kappa v^2, \tag{2.62}$$

ὅπου g ἡ ἐπιτάχυνση βαρύτητος τῆς γῆς, $g = 9.81\mathrm{m/sec}^2$ καί κ θετική σταθερά. Δυνάμεθα νά θέσομε ὡς ἀρχική συνθήκη $v(0) = 0$. Αὐτό σημαίνει ὅτι ἀφήνομε τό σῶμα νά πέσει χωρίς ἀρχική ὤθηση. Ἡ γενική λύση τῆς (2.62), ἡ ὁποία λύεται ὡς ἐξίσωση χωριζομένων μεταβλητῶν, εἶναι ἡ

$$v(t) = \sqrt{\frac{g}{\kappa}}\tanh\left(\sqrt{\kappa g}(t+c)\right).$$

Μέ ἐνσωμάτωση τῆς ἀρχικῆς συνθήκης ἀπαλλασσόμεθα ἀπό τήν σταθερά καί λαμβάνομε τήν λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν

$$v(t) = \sqrt{\frac{g}{\kappa}}\tanh\left(\sqrt{\kappa g}\,t\right).$$

Ὑπενθυμίζομε ὅτι:

$$\lim_{t\to+\infty}\tanh t = 1,$$

ἄρα ἡ ὁριακή ταχύτης τοῦ πίπτοντος σώματος v_∞ θά ἰσοῦται μέ

$$v_\infty = \lim_{t\to+\infty} v(t) = \sqrt{\frac{g}{\kappa}}.$$

Ἡ τιμή αὐτή μηδενίζει τήν συνάρτηση ροῆς.

Παρατήρηση. Ἡ ὁριακή ταχύτης δύναται νά ὑπολογισθεῖ σέ πολυπλοκότερες μορφές δυνάμεων τριβῆς, ἀκόμα καί ὅταν δέν εἶναι δυνατόν νά εὕρομε τήν λύση τῆς ἐξισώσεως σέ κλειστή μορφή. Δυνάμεθα νά τήν ὑπολογίσομε χρησιμοποιῶντας τήν ἰδιότητά της νά μηδενίζει τήν συνάρτηση ροῆς τῆς ἐξισώσεώς μας. Ἔστω ὅτι ἔχομε παραλλαγή τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος, ὅπου ἡ δύναμη τῆς τριβῆς εἶναι ἀνάλογη τοῦ κύβου τῆς ταχύτητος. Τότε ἡ ἐξίσωσή μας θά ἔχει τήν μορφή:

$$v' = g - \kappa v^3. \tag{2.63}$$

Ἡ ἀνωτέρω λύεται ὡς ἐξίσωση χωριζομένων μεταβλητῶν:

$$\frac{v'}{g-\kappa v^3} = 1$$

καί ὁλοκληρώνοντας λαμβάνομε ὡς λύση τήν

$$\frac{\alpha}{g}\left(\frac{1}{6}\log\left(\frac{1-\alpha^3 v^3}{(1-\alpha v)^3}\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2\alpha v+1}{\sqrt{3}}\right)\right) = t+c, \tag{2.64}$$

ὅπου $\alpha = (g/\kappa)^{1/3}$. Ἐνσωματώνοντας τήν ἀρχική συνθήκη λαμβάνομε

$$c = \frac{\pi}{6\sqrt{3}\kappa^{1/3}g^{2/3}}.$$

Ἡ ἀνωτέρω ἀποτελεῖ *ἐμμέσως ὁριζόμενη λύση*. Σίγουρα ὄχι λύση σέ κλειστή μορφή. Συνεπῶς ἡ εὕρεση τῆς ὁριακῆς ταχύτητος δέν φαίνεται νά εἶναι ἐφικτή μέσῳ τῆς (2.64). Ὅμως παρατηρῶντας προσεκτικότερα τήν (2.63) βλέπομε ὅτι ἡ ταχύτης τοῦ πίπτοντος σώματος συνεχῶς αὐξάνεται, δηλαδή $v' > 0$, ἐνῶ ὁ ρυθμός αὐξήσεως τῆς ταχύτητος (ἤτοι, ἡ ἐπιτάχυνση) μειώνεται, λόγῳ τῆς αὐξήσεως τῆς ταχύτητος. Ἡ ὁριακή ταχύτης $v = v_\infty$, ἀντιπροσωπεύει τήν τιμή ἐκείνη, ὅπου ἡ ταχύτης παύει πλέον νά αὐξάνεται, δηλαδή $v'_\infty = 0$, δηλαδή

$$g-\kappa v_\infty^3 = 0 \iff v_\infty = \left(\frac{g}{\kappa}\right)^{1/3}.$$

Γιά περαιτέρω συζήτηση βλέπε τήν *Ἄσκηση* 2.6.30 στήν σελίδα 110.

2.6.7 Ταχύτης διαφυγῆς

Ἔστω ὅτι σῶμα ἐκτινάσσεται κατακόρυφα πρός τά ἄνω μέ ἀρχική ταχύτητα v_0. Ἄν ὑποτεθεῖ ὅτι ἡ τριβή τήν ὁποία συναντᾶ εἶναι ἀμελητέα, τότε τό σῶμα θά φτάσει σέ μέγιστο ὕψος $h_{max} = v_0^2/2g$ μέ τήν ἐπί πλέον προϋπόθεση ὅτι ἡ ἐπιτάχυνση βαρύτητος g παραμένει σταθερή κατά τήν διάρκεια τῆς ἀνόδου. Αὐτό ἀποτελεῖ εὔλογη προσέγγιση, ὅταν τό ἀνώτατο ὕψος εἶναι μερικά χιλιόμετρα ($\delta g/g = -\delta h/3200$ σέ km). Γιά μεγαλύτερες ὅμως ἀπομακρύνσεις πρέπει νά λαμβάνεται ὑπ' ὄψη ἡ μεταβολή τοῦ g. Ὁ νόμος τῆς *Παγκοσμίου Ἕλξεως* (*Universal Attraction*) ἔχει ὡς συνέπεια ὅτι:

$$g = \frac{GM}{R^2},$$

ὅπου G ἡ σταθερά τῆς παγκοσμίου ἕλξεως, M ἡ μάζα τῆς γῆς καί R ἡ ἀκτίνα τῆς γῆς. Ὁ τύπος αὐτός ἰσχύει καί στήν περίπτωση τῆς βαρύτητος οἱουδήποτε οὐρανίου σώματος μάζας M σέ ἀπόσταση R ἀπό τό κέντρο μάζας αὐτοῦ. Ἄρα λοιπόν ἡ ἐξίσωση κινήσεως τοῦ σώματος τό ὁποῖο ἐκσφενδονίζεται κατακορύφως πρός τά ἄνω μέ ἀρχική ταχύτητα v_0 θά εἶναι

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{GM}{r^2}, \tag{2.65}$$

ὅπου r ἡ ἑκάστοτε ἀπόσταση τοῦ σώματος ἀπό τό κέντρο τῆς γῆς. Ἐπειδή ὅμως $v = \dfrac{dr}{dt}$, ἡ (2.65) λαμβάνει τήν μορφή

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2},$$

ἡ ὁποία εἶναι μέν δευτέρας τάξεως ἀλλά καθίσταται πρώτης τάξεως ἄν ἀρχικῶς πολλαπλασιάσομε ἀμφοτέροθεν ἐπί $\dfrac{dr}{dt}$:

$$\frac{d^2r}{dt^2}\frac{dr}{dt} = -\frac{GM}{r^2}\frac{dr}{dt},$$

καί ἀκολούθως τήν ὁλοκληρώσομε, ὁπότε λαμβάνομε

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \frac{GM}{r} = c.$$

Ἄν πολλαπλασιάσομε μάλιστα τήν ἀνωτέρω ἐπί τήν μάζα m τοῦ ἐκσφενδονισθέντος σώματος, λαμβάνομε τόν *Νόμο Διατηρήσεως τῆς Ἐνέργειας*. Ἡ σταθερά c προσδιορίζεται ἀπό τά ἀρχικά δεδομένα. Ἦτοι:

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{R}.$$

Ἐνσωματώνοντας τήν ἀρχική θέση R καί ταχύτητα v_0, λαμβάνομε τήν διαφορική ἐξίσωση ἔμμεσης μορφῆς:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \frac{GM}{r} = \frac{1}{2}v_0^2 - \frac{GM}{R},$$

ἡ ὁποία εἶναι ἰσοδύναμη μέ

$$\frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{v_0^2 + \frac{2GM}{r} - \frac{2GM}{R}}.$$

Λόγῳ τοῦ ὅτι ἡ ἐξίσωση ἡ ὁποία μᾶς ἐνδιαφέρει περιγράφει τήν κίνηση τοῦ σώματος πρός τά ἄνω, ἐπιλέγομε τό θετικό πρόσημο. Ἀντικαθιστῶντας

$$\alpha = 2GM > 0 \qquad \textit{καί} \qquad \beta = v_0^2 - \frac{2GM}{R},$$

λαμβάνομε τήν ἑξῆς ἐξίσωση

$$r' = \sqrt{\beta + \frac{\alpha}{r}}, \tag{2.66}$$

μέ ἀρχική συνθήκη $r(0) = R$.

Διακρίνομε τρεῖς περιπτώσεις:

(i) $\beta < 0$: Τότε, ὅταν τό σῶμα φθάσει σέ ἀπόσταση

$$r_{max} = -\frac{\alpha}{\beta} = \frac{2GM}{\dfrac{2GM}{R} - v_0^2},$$

ἀπό τό κέντρο τῆς γῆς, τό δεξιό μέλος τῆς (2.66) μηδενίζεται καί ἀκολούθως τό σῶμα ἀρχίζει νά πίπτει ἐλευθέρως. Σ' αὐτήν λοιπόν τήν περίπτωση τό σῶμα δέν κατορθώνει νά διαφύγει ἀπό τό βαρυτικό πεδίο. Στήν θέση $r = r_{max}$ ἡ κινητική ἐνέργεια τοῦ σώματος ἔχει μετατραπεῖ σέ δυναμική.

(ii) $\beta = 0$: Τότε ἡ (2.66) λαμβάνει τήν μορφή

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{\alpha}{r}} \qquad \text{ἤ} \qquad r^{1/2}\frac{dr}{dt} = \sqrt{\alpha},$$

ἀπό τήν ὁποία ἕπεται ὅτι:

$$\frac{2}{3}r^{3/2} = \sqrt{\alpha}\, t + c.$$

Μέ ἐνσωμάτωση τῶν ἀρχικῶν συνθηκῶν καταλήγομε στήν ἔκφραση

$$r(t) = \left(\frac{3}{2}\big(\sqrt{\alpha}\, t + \frac{2}{3}R^{3/2}\big)\right)^{2/3},$$

ἡ ὁποία ἀποτελεῖ λύση ὁριζόμενη γιά κάθε $t > 0$ καί ἐπί πλέον ἰσχύει ὅτι

$$\lim_{t\to+\infty} r(t) = +\infty,$$

ὅπερ σημαίνει ὅτι τό σῶμα ἐν τέλει κατορθώνει σ' αὐτή τήν περίπτωση νά *διαφύγει* ἀπό τό βαρυτικό πεδίο.

(iii) $\beta > 0$: Τότε ἀπό τήν (2.66) λαμβάνομε

$$r' = \sqrt{\frac{\beta+\alpha}{r}} \geq \sqrt{\beta}$$

καί ὁλοκληρώνοντας τήν τελευταία ἀνισότητα στό διάστημα $[0,t]$, λαμβάνομε

$$r(t) \geq \sqrt{\beta}t + R,$$

ἀπ' ὅπου συνεπάγεται ὅτι

$$\lim_{t\to\infty} r(t) = \infty.$$

Ἄρα καί σ' αὐτή τήν περίπτωση τό σῶμα διαφεύγει ἀπό τό βαρυτικό πεδίο τῆς γῆς.

Τό σῶμα λοιπόν διαφεύγει ἀπό τό βαρυτικό πεδίου τῆς γῆς (ἤ οἱουδήποτε ἄλλου οὐρανίου σώματος) ἄν καί μόνο ἄν $\beta \geq 0$ ἤ ἰσοδύναμα

$$v_0 \geq \sqrt{\frac{2GM}{R}}.$$

Ἡ ποσότης $v_e = \sqrt{\dfrac{2GM}{R}}$ ὀνομάζεται *ταχύτης διαφυγῆς*.

Παρατήρηση. Ἡ μέθοδος μέ τήν ὁποία ἀντιμετωπίσαμε τό πρόβλημα εὑρέσεως ταχύτητος διαφυγῆς, μᾶς ἐπιτρέπει νά λύσομε τήν ἐξίσωση δευτέρας τάξεως

$$x'' = f(x), \tag{2.67}$$

ὅπου, ἄν ἡ F ἀποτελεῖ ἀόριστο ὁλοκλήρωμα τῆς f, τότε ἡ (2.67) θά ἔχει ὡς συνέπεια

$$\frac{1}{2}\left(x'\right)^2 - F(x) = E,$$

μέ E σταθερά. Ἡ E ὁποία στήν συγκεκριμένη περίπτωση ὀνομάζεται *ἐνέργεια*. Ἡ ἀνωτέρω ἐξίσωση ἀποτελεῖ ἐπίσης νόμο διατηρήσεως τῆς ἐνέργειας.

2.6.8 Σκύλος καταδιώκει λαγό

Πρόβλημα. *Λαγός κινεῖται ἐπί τοῦ ἄξονος τῶν x μέ σταθερή ταχύτητα α καί σκύλος καταδιώκει τόν λαγό μέ σταθεροῦ μέτρου ταχύτητα β. Ἄν ὁ λαγός ξεκινᾶ ἀπό τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων καί ὁ σκύλος ἀπό τό σημεῖο $(0,h)$, νά βρεθεῖ ποιά διαδρομή θά ἀκολουθήσει ὁ σκύλος.*

Απαντηση. Ἡ θέση τοῦ λαγοῦ τήν χρονική στιγμή t θά εἶναι ἡ $\boldsymbol{r}_\lambda(t) = (\alpha\, t, 0)$. Ἄν τώρα $\boldsymbol{r}_\sigma = \big(x(t), y(t)\big)$ ἡ θέση τοῦ σκύλου τήν ἴδια χρονική στιγμή, τότε ἔχομε

(i) Ἐπειδή τό μέτρο τῆς ταχύτητος τοῦ σκύλου εἶναι σταθερό θά ἔχομε ὅτι

$$\dot{\boldsymbol{r}}_\sigma^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \beta^2,$$

ὅπου $\dot{} = \dfrac{d}{dt}$.

(ii) Τό γεγονός ὅτι ὁ σκύλος καταδιώκει τόν λαγό συνεπάγεται ὅτι:

$$\dot{\boldsymbol{r}}_\sigma \parallel \boldsymbol{r}_\lambda - \boldsymbol{r}_\sigma \qquad \text{ἤ} \qquad (\dot{x}, \dot{y}) \parallel (\alpha t - x, -y).$$

Ἔν ὅσῳ $\dot{y} \neq 0$, τά t καί x δύνανται νά ἐκφρασθοῦν συναρτήσει τοῦ y, καί συγκεκριμένα

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\dot{x}}{\dot{y}} = -\frac{\alpha t - x}{y}.$$

Συνεπῶς

$$y\frac{dx}{dy} - x = -\alpha t,$$

ὁπότε παραγωγίζοντας ὡς πρός y λαμβάνομε

$$y\frac{d^2x}{dy^2} = -\alpha\frac{dt}{dy}.$$

Τέλος, ἄν

$$s = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2(\tau) + \dot{y}^2(\tau)}\, d\tau = \beta t,$$

τό μῆκος τῆς τροχιᾶς τό ὁποῖο καλύπτει ὁ σκύλος σέ χρόνο t, τότε θά ἔχομε

$$\frac{dt}{dy} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^{-1}\frac{ds}{dy} = \frac{1}{\beta}\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2},$$

διότι ἐναλλακτικῶς τό μῆκος s δύναται νά ὁρισθεῖ καί ὡς

$$s = \int_0^y \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy \qquad \text{ἄρα} \qquad \frac{ds}{dy} = \sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}.$$

Ἄν τώρα $z = \dfrac{dx}{dy}$, τότε ἡ z ἱκανοποιεῖ, ὡς πρός y τήν ἐξίσωση

$$yz' = -\frac{\alpha}{\beta}\sqrt{1+z^2} \qquad \text{ἤ} \qquad \frac{z'}{\sqrt{1+z^2}} = -\frac{\alpha}{\beta}\frac{1}{y}$$

Ὁλοκληρώνοντας καί ἐνσωματώνοντας τήν ἀρχική συνθήκη, ὅπου γιά $t = 0$, ἰσχύει ὅτι $y = h$ καί $\dfrac{dx}{dy} = 0$, προκύπτει ὅτι:

$$\log\left(z+\sqrt{1+z^2}\right) = -\frac{\alpha}{\beta}\log\left(\frac{y}{h}\right).$$

Λύοντας ὡς πρός z λαμβάνομε ὅτι:

$$z = \frac{dx}{dy} = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{y}{h}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}} - \left(\frac{h}{y}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}}\right]. \tag{2.68}$$

Διακρίνομε δύο περιπτώσεις γιά τίς τιμές τοῦ $r = \dfrac{\alpha}{\beta}$:

- $r = 1$. Ὁπότε ὁλοκληρώνοντας τήν (2.68) ὡς πρός y λαμβάνομε

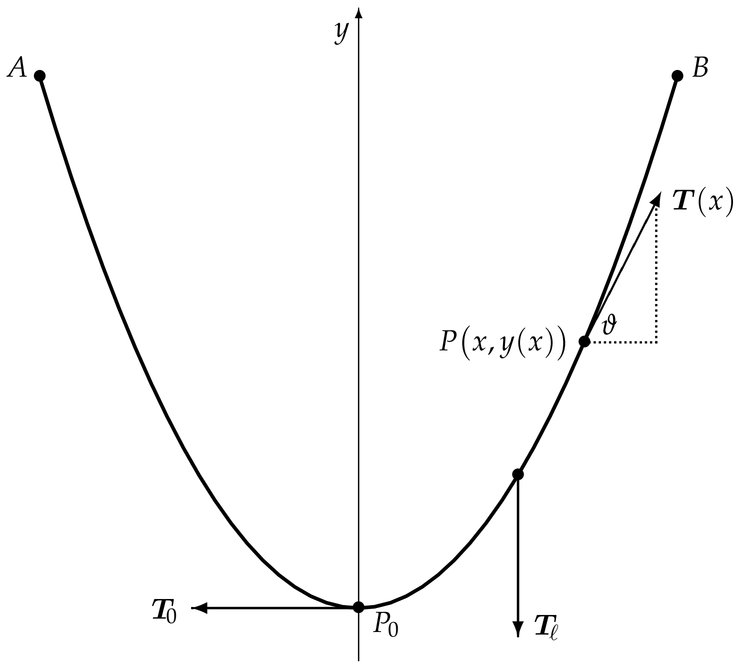
  $$x = -\frac{1}{2}\left(\frac{y^2-h^2}{2h} - h\log\left(\frac{y}{h}\right)\right),$$

  ἀπ' ὅπου προκύπτει ὅτι ὁ σκύλος δέν φθάνει ποτέ τό λαγό.

- $r \neq 1$. Ὁπότε ὁλοκληρώνοντας τήν (2.68) ὡς πρός y λαμβάνομε

  $$x = -\frac{1}{2}\left(\frac{y^{r+1}-h^{r+1}}{(r+1)h^r} - \frac{y^{-r+1}-h^{-r+1}}{(-r+1)h^{-r}}\right),$$

  καί δύναται νά διαπιστωθεῖ ὅτι ὁ σκύλος φθάνει τό λαγό μόνο ἄν $r < 1$.



Σχῆμα 2.1: Ἁλυσοειδές

2.6.9 Εὔκαμπτος ἐπικρεμμαμένη ἁλυσίς (catenary)

Ἕνα διάσημο πρόβλημα τό ὁποῖο ἀπησχόλησε πλείστους μαθηματικούς τοῦ $17^{\text{ου}}$ αἰῶνος ὑπῆρξε τό πρόβλημα εὑρέσεως τοῦ σχήματος τό ὁποῖο λαμβάνει μία εὔκαμπτος ἐπικρεμμαμένη ἁλυσίς[66]. Ἡ ζητουμένη καμπύλη εἶναι γνωστή ὡς *catenary*[67] ἤ *ἁλυσοειδές*.

Πρόβλημα. Νά εὑρεθεῖ τό σχῆμα τό ὁποῖο λαμβάνει ἁλυσίς, ὑπό τήν ἐπίδραση τῆς βαρύτητος, κρεμμαμένη ἀπό τά δύο της ἄκρα.

Ἀπαντηση. Ὑποθέτομε ὅτι ὁ ἄξων τῶν y διέρχεται ἀπό τό κατώτατο ἄκρο τῆς ἁλυσίδος AB καί ἔστω $P_0 = (0, y_0)$ οἱ συντεταγμένες τοῦ σημείου αὐτοῦ. Ἔστω τώρα $P = P(x, y)$ τυχόν σημεῖο τῆς ἁλυσίδος καί ℓ τό μῆκος τῆς ἁλυσίδος ἀπό τό P_0 στό P. Θέτοντας $y = y(x)$,

[66] Ὁ Γαλιλαῖος τό 1638 [20] ἔγραψε ὅτι ἡ καμπύλη αὐτή εἶναι *ad unguem* (=*μετά μεγάλης ἀκριβείας*) ἡ παραβολή. Περί τά εἴκοσι χρόνια ἀργότερα ὁ Huygens διεπίστωσε ὅτι κάτι τέτοιο δέν ἰσχύει. Ἡ λύση τοῦ προβλήματος, ἤτοι, τῆς εὑρέσεως *linea catenaria funicularis* (*τοῦ σχήματος εὐκάμπτου κρεμμαμένης ἁλυσίδος*), ἐδόθη τελικῶς ἀνεξαρτήτως ἀπό τούς Leibniz [31] καί Johann Bernoulli [7] τό 1691. Ἡ λύση τήν ὁποία δίδομε ἀνωτέρω βασίζεται στίς ἰδέες τοῦ δευτέρου.

[67] Catena στά Λατινικά σημαίνει *ἁλυσίς*.

ἔχομε:

$$\ell \;=\; \ell(x) \;=\; \int_0^x \sqrt{1+\big(y'(\eta)\big)^2}\, d\eta.$$

Ἄν δέ $\varrho = \varrho(\ell)$ εἶναι ἡ γραμμική πυκνότης τῆς ἁλυσίδος, τότε τό βάρος μεταξύ τῶν P_0 καί P θά ἰσοῦται μέ

$$T_\ell \;=\; \int_0^\ell \varrho(\lambda)\, d\lambda. \tag{2.69}$$

Ἡ ζητουμένη καμπύλη θά προσδιορισθεῖ ἀπό τήν ἰσορροπία τῶν τριῶν δυνάμεων οἱ ὁποῖες ἐφαρμόζονται στό τεμάχιο τῆς ἁλυσίδος P_0P. Συγκεκριμένα ἰσχύει (βλέπε σχῆμα)

$$\boldsymbol{T}_0 + \boldsymbol{T}_\ell + \boldsymbol{T}(x) \;=\; 0, \tag{2.70}$$

ὅπου $\boldsymbol{T}_0$ ἡ ὁριζόντια δύναμη ἡ ὁποία ἐξασκεῖται στό σημεῖο P_0 τοῦ τεμαχίου καί $\boldsymbol{T}(x)$ ἡ δύναμη ἡ ὁποία ἐξασκεῖται στό ἄλλο ἄκρο τοῦ τεμαχίου, ἡ ὁποία ἔχει διεύθυνση ἐφαπτόμενη στήν καμπύλη. Προβάλλοντας τήν (2.70) στούς ἄξονες τῶν x, y λαμβάνομε

$$-T_0 + T(x)\,\cos\vartheta \;=\; 0 \qquad \text{καί} \qquad -\,T_\ell + T(x)\,\sin\vartheta \;=\; 0, \tag{2.71}$$

ἀντιστοίχως. Ἔχομε συμβολίσει μέ T_0, T_ℓ καί $T(x)$ τά μέτρα τῶν $\boldsymbol{T}_0$, $\boldsymbol{T}_\ell$ καί $\boldsymbol{T}(x)$, ἀντιστοίχως. Ἡ δέ γωνία ϑ ἀποτελεῖ τό τόξο τῆς ἐφαπτομένης τῆς κλίσεως τῆς ζητουμένης καμπύλης, δηλαδή $\tan\vartheta = y'(x)$. Συνδυάζοντας τίς (2.69) καί (2.71) λαμβάνομε

$$T_0\,\tan\vartheta \;=\; T_0\, y'(x) \;=\; T_\ell \;=\; \int_0^\ell \varrho(\lambda)\, d\lambda.$$

Παραγωγίζοντας τήν ἀνωτέρω ὡς πρός x λαμβάνομε

$$y''(x) \;=\; \frac{1}{T_0}\,\varrho(\ell)\,\frac{d\ell}{dx} \;=\; \frac{\varrho(\ell)}{T_0}\sqrt{1+(y'(x))^2}.$$

Ἰδιαιτέρως, στήν περίπτωση κατά τήν ὁποία ἡ ἁλυσίς εἶναι ὁμοιογενής (δηλαδή, $\varrho(\ell) = \varrho_0$), θέτοντας $p(x) = y'(x)$, ἡ ἀνωτέρω λαμβάνει τήν ἀκόλουθη ἁπλουστευμένη μορφή

$$p' \;=\; \kappa\,\big(1+p^2\big)^{1/2}, \tag{2.72}$$

ὅπου $\kappa = \varrho_0/T_0$. Χρησιμοποιῶντας τό γενονός ὅτι

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \;=\; \log\big(x+\sqrt{1+x^2}\big) + c,$$

καθώς καί τήν ἀρχική συνθήκη $z(0) = y'(0) = 0$, ἀποκτοῦμε τήν λύση τῆς (2.72) διά τῆς μεθόδου χωρισμοῦ τῶν μεταβλητῶν ἡ ὁποία θά ἱκανοποιεῖ τήν

$$\log\big(z+\sqrt{1+z^2}\big) \;=\; \kappa x,$$

ἀπ' ὅπου λαμβάνομε ὅτι

$$z(x) = \frac{e^{\kappa x} - e^{-\kappa x}}{2},$$

καί ὁλοκληρώνοντας ὡς πρός x λαμβάνομε τελικῶς τόν τύπο τῆς ζητουμένης καμπύλης

$$y = \frac{1}{\kappa}\cosh(\kappa x) + c.$$

Ἀσκήσεις

2.6.1 Νά βρεθεῖ ὁ χρόνος ὑποδιπλασιασμοῦ τοῦ Πλουτωνίου-241 (Pu_{94}^{241}), ἄν εἶναι γνωστό ὅτι αὐτό μειοῦται συμφώνως μέ τήν ἐξίσωση

$$M' = -.0525M,$$

ὅπου ὁ χρόνος μετρᾶται σέ ἔτη. Ποιό ποσοστό τῆς ἀρχικῆς ποσότητος ἀπομένει μετά ἀπό ἕνα αἰῶνα;

2.6.2 Ὁ χρόνος ὑποδιπλασιασμοῦ τοῦ Ραδίου-226 (Ra_{88}^{226}) εἶναι 1620 ἔτη. Ποιός εἶναι ὁ χρόνος ὑποεκατονταπλασιασμοῦ τοῦ ἰδίου ἰσοτόπου;

2.6.3 Δίδεται ὅτι ἡ μάζα τοῦ ραδιενεργοῦ ἰσοτόπου Ἀϊνσταϊνίου-253 (Es_{99}^{253}) χάνει τό ἕνα της τρίτο κάθε 11.7 ἡμέρες. Ἔστω ὅτι σέ κλειστό δοχεῖο περιέχον ἀρχικῶς 100mg Ἀϊνσταϊνίου-253 εἰσρέει Ἀϊνσταϊνιο-253 μέ σταθερό ρυθμό 2mg ἀνά ἡμέρα. Νά βρεθεῖ ἡ διαφορική ἐξίσωση ἡ ὁποία περιγράφει τήν ἐξέλιξη τῆς μάζας Ἀϊνσταϊνίου-253 στό δοχεῖο. Ἀκολούθως νά λυθεῖ τό ἀντίστοιχο πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν. Τέλος νά βρεθεῖ τό ποσόν τῆς ὁριακῆς μάζας Ἀϊνσταϊνίου-253. Ἤτοι τό

$$\lim_{t\to+\infty} M(t),$$

ὅπου $M(t)$ ἀποτελεῖ τήν μάζα τήν χρονική στιγμή t.

2.6.4 Ἔστω ὅτι ποσότης ραδιενεργοῦ ὑλικοῦ, χρόνου ὑποδιαπλασιασμοῦ T_h, ἔχει μάζα m_1 τήν χρονική στιγμή t_1 καί μάζα m_2 τήν χρονική στιγμή t_2. Δείξατε ὅτι:

$$T_h = \frac{(t_2 - t_1)\log 2}{\log(m_1/m_2)}.$$

2.6.5 Ἔστω ὅτι τό ραδιενεργό ἰσότοπο A ὑφίσταται σχάση μέ χρόνο ἡμισείας ζωῆς T_A, μετατρεπόμενο ἐξ ὁλοκλήρου σέ ραδιενεργό ἰσότοπο B ἄλλου στοιχείου, μέ χρόνου ἡμισείας ζωῆς T_B, τό ὁποῖο μέ τήν σειρά του ὑφίσταται σχάση, μετατρεπόμενο ἐξ ὁλοκλήρου σέ μή ραδιενεργό στοιχεῖο C. Ὑποθέτομε ὅτι κατά τίς προαναφερθεῖσες σχάσεις δέν ὑπάρχει ἀπώλεια μάζης. Ἄν κατά τήν χρονική στιγμή $\tau = 0$ ὑπάρχει ποσότης m_A τοῦ ἰσοτόπου A καί μόνον αὐτοῦ, νά βρεθοῦν οἱ ἐξισώσεις οἱ ὁποῖες περιγράφουν τήν εξέλιξη τῶν μαζῶν τῶν τριῶν στοιχείων. Πότε μεγιστοποιεῖται ἡ μάζα τοῦ B; Πότε μεγιστοποιεῖται ὁ ρυθμός αὐξήσεως τοῦ C;

2.6.6 (Συνέχεια) Νά γενικευθεῖ τό ἀνωτέρω πρόβλημα στήν περίπτωση n ($n \geq 2$) ραδιενεργῶν ἰσοτόπων καί ἑνός μή ραδιενεργοῦ.

2.6.7 Κάποιος τοκίζει ποσόν 200000 λιρῶν πρός 8% τό χρόνο. Συχρόνως ἀποσύρει ἀπό τήν τράπεζα, πρός ἐξυπηρέτηση τῶν ἀναγκῶν του, s λίρες τό μήνα. Ποία εἶναι ἡ μεγίστη τιμή τοῦ ρυθμοῦ ἀποσύρσεως s_{max} ἡ ὁποία δέν μειώνει τό κατατεθέν ποσόν; Ἄν ὑποθέσομε ὅτι ὁ ρυθμός ἀποσύρσεως εἶναι διπλάσιος τοῦ s_{max}, τότε σέ πόσο χρόνο ἐξαντλεῖται τό κατατεθέν ποσόν;

2.6.8 Ποιό ἀπό τά δύο ἐπιτόκια εἶναι μεγαλύτερο, 1% τό μήνα, ἤ 12% τό χρόνο;

2.6.9 Ποιό ἀπό τά δύο ἐπιτόκια εἶναι μεγαλύτερο, 3% τό τρίμηνο ἤ 4% τό τετράμηνο;

2.6.10 Πληθυσμός βακτηριδίων σέ καλλιέργεια πενταπλασιάζεται σέ μία ὥρα. Σέ πόσες ὧρες χιλιαπλασιάζεται;

2.6.11 Φιάλη ὑγροῦ θερμοκρασίας 100^0C τοποθεῖται σέ ψυγεῖο θερμοκρασίας 10^0C. Ἄν σέ μία ὥρα ἡ θερμοκρασία τοῦ ὑγροῦ φθάνει στούς 40^0C, σέ πόση ὥρα θά φθάσει στούς 11^0C;

2.6.12 Σῶμα ἄγνωστης θερμοκρασίας τοποθετεῖται σέ περιβάλλον σταθερᾶς θερμοκροσίας 30^0C. Ἄν μετά ἀπό δέκα λεπτά ἡ θερμοκρασία τοῦ σώματος εἶναι 0^0C καί μετά ἀπό εἴκοσι λεπτά 15^0C, νά εὑρεθεῖ ἡ ἄγνωστη ἀρχική θερμοκρασία τοῦ σώματος.

2.6.13 Ὁμοιογενές σῶμα θερμοκρασίας 100^0C τοποθετεῖται σέ περιβάλλον σταθερᾶς θερμοκρασίας. Ἄν ἡ θερμοκρασία τοῦ σώματος σέ μία ὥρα ἔχει πέσει στούς 90^0C ἐνῶ μετά ἀπό τρεῖς ὧρες στούς 72.9^0C, ποιά εἶναι ἡ θερμοκρασία τοῦ περιβάλλοντος;

2.6.14 Δύο ποτήρια ἴσης χωρητικότητος, εἶναι γεμάτα ὡς τήν μέση μέ νερό. Τό νερό στό πρῶτο ἔχει θερμοκρασία Θ_1 ἐνῶ στό δεύτερο Θ_2. Ἄν τά ποτήρια αὐτά ἐκτεθοῦν σέ περιβάλλον σταθερῆς θερμοκρασίας Θ_π γιά χρόνο T καί τότε τό περιεχόμενο τοῦ δεύτερου ποτηριοῦ ἀναμειχθεῖ μέ τό περιεχόμενο τοῦ πρώτου στό πρῶτο ποτήρι, ἡ θερμοκρασία τοῦ μείγματος θά διαφέρει ἀπό αὐτή τήν ὁποία θά εἴχαμε ἄν ἡ ἀνάμειξη ἐλάμβανε χώρα πρός τῆς ἐκθέσεως στό περιβάλλον;

Υποδειξη. Δίδεται ὅτι, ἄν ἀναμείξομε ποσότητα m_1 θερμοκρασίας T_1 καί ποσότητα m_2 θερμοκρασίας T_2 τοῦ ἰδίου ὁμοιογενοῦς σώματος, τότε τό μείγμα θά ἔχει θερμοκρασία $\bar{T} = \dfrac{m_1 T_1 + m_2 T_2}{m_1 + m_2}$.

2.6.15 Ἕνα δοχεῖο περιέχει 50 λίτρα νεροῦ, ἐντός τοῦ ὁποίου ἔχουν διαλυθεῖ 10 γραμμάρια ἅλατος. Ἀπό τήν χρονική στιγμή $t = 0$ καθαρό νερό εἰσέρχεται ἐντός τοῦ δοχείου, μέ ρυθμό 2 λίτρα ἀνά λεπτό, καί τό μείγμα ἐκρέει τοῦ δοχείου μέ τόν ἴδιο ρυθμό καί καταλήγει σέ δεύτερο δοχεῖο χωρητικότητος ἐπίσης 50 λίτρων τό ὁποῖο ἀρχικῶς περιέχει καθαρό νερό. Τό περίσσευμα ἐκρέει ἀπό τό δεύτερο δοχεῖο σέ ὀχετό. Ποία χρονική στιγμή τό δεύτερο δοχεῖο ἔχει τήν μέγιστη ποσότητα ἅλατος;

2.6.16 (Συνέχεια) Νά γενικευθεῖ τό ἀνωτέρω πρόβλημα ὅταν ἔχομε n δοχεῖα.

2.6.17 Σῶμα ἐκτινάσσεται κατακορύφως πρός τά ἄνω μέ ἀρχική ταχύτητα v_0 καί κινεῖται ὑπό τήν ἐπίδραση τῆς βαρύτητος καί τῆς ἀτμοσφαιρικῆς τριβῆς ἡ ὁποία εἶναι ἀνάλογη τοῦ τετραγώνου τῆς ἑκάστοτε ταχύτητος, δηλαδή $\gamma_{\text{τριβῆς}} = \kappa v^2$. Νά ὑπολογισθεῖ τό ἀνώτατο ὕψος στό ὁποῖο θά φθάσει τό σῶμα, καί ὁ χρόνος ὁ ὁποῖος ἀπαιτεῖται γιά νά φθάσει στό ὕψος αὐτό.

2.6.18 (Συνέχεια) Ἄν $h(\kappa)$ τό ἀνώτατο ὕψος καί $\tau(\kappa)$ ὁ χρόνος ὁ ὁποῖος ἀπαιτεῖται γιά νά φθάσει ἐκεῖ τό σῶμα, δείξατε ὅτι:

$$\lim_{\kappa\to 0} h(\kappa) = \frac{v_0^2}{2g} \qquad \text{καί} \qquad \lim_{\kappa\to 0} \tau(\kappa) = \frac{v_0}{g}. \tag{2.73}$$

2.6.19 (Συνέχεια) Νά διαπιστωθεῖ ὅτι οἱ σχέσεις (2.73) ἱκανοποιοῦνται ἀκόμη καί στήν περίπτωση κατά τήν ὁποία ἡ δύναμη τριβῆς εἶναι ἀνάλογη τῆς ἑκάστοτε ταχύτητος, δηλαδή $\gamma_{\text{τριβῆς}} = \kappa v$.

2.6.20 Ἡ περιουσία κάποιου ἐπιχειρηματία αὐξάνεται μέ ρυθμό ἀνάλογο τοῦ τετραγώνου τῆς ἑκάστοτε ἀξίας της. Ἄν πρό ἑνός ἔτους ἡ περιουσία του ἄξιζε 1000 λίρες ἐνῶ σήμερα ἀξίζει 2000 λίρες, νά βρεῖτε πόσο θά ἀξίζει μετά ἀπό 6 μῆνες καί πόσο μετά ἀπό 18 μῆνες.

2.6.21 Τορπίλη ἐκτοξεύεται ἀπό ὑποβρύχιο. Τήν στιγμή κατά τήν ὁποία ἐξαντλοῦνται τά καύσιμά της, ἔχει ταχύτητα $60km/h$. Ἄν ἡ ταχύτης ὑποδιπλασιάζεται μετά τήν κάλυψη ἑνός χιλιομέτρου, νά βρεθεῖ ποῦ ἀκριβῶς θά σταματήσει ἡ τορπίλη, ἄν ὑποτεθεῖ ὅτι ἡ δύναμη τῆς τριβῆς εἶναι ἀνάλογη τῆς ταχύτητος. (Ὑποθέτομε ὅτι ἡ βαρύτης δέν ἐπηρρεάζει τήν κίνηση τῆς τορπίλης.)

2.6.22 Ἡμισφαιρική κολυμβήθρα, ἀκτῖνος R, εἶναι κατά τήν χρονική στιγμή $\tau = 0$ πλήρης ὁμοιογενοῦς ὑγροῦ. Στήν βάση τῆς κολυμβήθρας ὑπάρχει μικρά κυκλική ὀπή ἀκτῖνος r ($r \ll R$) ἀπ' ὅπου ἐξέρχεται τό ὑγρό. Ἄν, συμφώνως μέ τόν *νόμο τοῦ Torricelli*[68] ἡ ταχύτης τοῦ ὑγροῦ κατά τήν ἔξοδο εἶναι $v = \sqrt{2gh}$, ὅπου h ἡ ἑκάστοτε στάθμη τοῦ ὑγροῦ, νά ὑπολογισθεῖ πόσος χρόνος ἀπαιτεῖται διά τήν κένωση τῆς κολυμβήθρας.

2.6.23 (Συνέχεια) Νά ἐπιλυθεῖ τό ἴδιο πρόβλημα στήν περίπτωση κατά τήν ὁποία ἡ κολυμβήθρα εἶναι παραβολοειδής.

2.6.24 Σφαιρική σταγόνα νεροῦ ἐξατμίζεται κατά τήν διάρκεια τῆς πτώσεώς της μέ ρυθμό ἀνάλογο τοῦ ἐμβαδοῦ τῆς ἑκάστοτε ἐπιφανείας της. Δίδεται ὅτι ἀρχικῶς ἡ σταγόνα εἶχε διάμετρο 3mm, ἐνῶ 10 λεπτά ἀργότερα ἡ διάμετρός της μειώθηκε στά 2mm. Σέ πόση ὥρα θά ἔχει διάμετρο 1mm;

2.6.25 Ἔστω ὅτι σφαιρική σταγόνα νεροῦ, ἐνῶ πίπτει πρός τήν γῆ ὑπό τήν ἐπίδραση τῆς βαρύτητος g, ἀπορροφᾶ ὑδρατμούς μέ ρυθμό ἀνάλογο τῆς ἑκάστοτε ἐπιφανείας. Ἄν οἱ ἀπορροφώμενοι ὑδρατμοί βρίσκονται σέ ἠρεμία καί ἡ ἀρχική ἀκτίνα τῆς σταγόνας εἶναι ἴση μέ μηδέν, δείξατε ὅτι ἡ σταγόνα πίπτει μέ σταθερή ἐπιτάχυνση $g/4$.

Υποδειξη. Ἐδῶ ἡ διαφορική ἐξίσωση θά προκύψει ἀπό τό δεύτερο νόμο τοῦ Newton:

$$\frac{d}{dt}\big(m(t)\,v(t)\big) \;=\; m(t)\,g.$$

2.6.26 Ἔστω ὅτι σφαιρική σταγόνα νεροῦ ἐνῶ πίπτει πρός τήν γῆ ὑπό τήν ἐπίδραση τῆς βαρύτητος g διασχίζει ὁμοιογενές νέφος καί ἀπορροφᾶ ὅσους ὑδρατμούς βρίσκει στήν διαδρομή της. Ὑποθέτομε ὅτι οἱ ἀπορροφώμενοι ὑδρατμοί βρίσκονται σέ ἠρεμία. Ἄν ἡ ἀρχική της ἀκτίνα ἦταν ἴση μέ μηδέν, δείξατε ὅτι ἡ σταγόνα πίπτει μέ σταθερή ἐπιτάχυνση $g/7$.

2.6.27 Ἔστω δυναμικό πεδίο, στό ὁποῖο ἡ ἑλκτική δύναμη δίδεται ἀπό τόν τύπο

$$F(x) \;=\; -m\,\mathrm{e}^{-|x|},$$

ὅπου m ἡ μάζα τοῦ ἑλκομένου σώματος καί x ἡ ἀπόσταση ἀπό τό κέντρο τοῦ δυναμικοῦ πεδίου. Ποία ἡ ταχύτης διαφυγῆς ἀπό τό σημεῖο x_0;

2.6.28 Νά διαπιστωθεῖ ὅτι στό πρόβλημα καταδιώξεως λαγοῦ ἀπό σκύλο, τῆς σελίδος 103, ὁ σκύλος θά κατορθώσει νά συλλάβει τόν λαγό ἄν καί μόνον ἄν $\alpha < \beta$.

2.6.29 **Σχετικιστική ταχύτης**: Ἔστω ὅτι σῶμα κινεῖται ὑπό τήν ἐπίδραση βαρυτικοῦ πεδίου σταθερᾶς ἐπιταχύνσεως g καί ὅτι ἡ μάζα σώματος κινουμένου μέ ταχύτητα v ἰσοῦται μέ

$$m \;=\; m(v) \;=\; \frac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}},$$

ὅπου m_0 ἡ μάζα ἠρεμίας καί c ἡ ταχύτης τοῦ φωτός. Δείξατε ὅτι ἡ ταχύτης σώματος ὑπό τήν ἐπίδραση τῆς βαρύτητος τείνει πρός τήν ταχύτητα τοῦ φωτός c.

Υποδειξη. Δεύτερος νόμος τοῦ Newton: $\dfrac{d}{dt}(Mv) = F$.

[68] Evangelista Torricelli (1608-1647). Ἰταλός Φυσικός καί Μαθηματικός, γνωστός κυρίως γιά τήν ἀνακάλυψη τοῦ βαρομέτρου

2.6.30* Ἔστω ὅτι σῶμα ἀφήνεται νά πέσει ἀπό μεγάλο ὕψος καί ἡ ταχύτης του ἱκανοποιεῖ τήν διαφορική ἐξίσωση

$$v' = f(v),$$

ὅπου f ἐπαρκῶς ὁμαλή συνάρτηση καί

$$f(v) > 0 \quad \text{ὅταν} \quad v \in [0, v_*),$$

ἐνῶ $f(v_*) = 0$. Δείξατε ὅτι ἡ ὁριακή ταχύτης τοῦ σώματος εἶναι ἡ v_*.

Υποδειξη. Πρέπει νά δειχθεῖ ὅτι τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν

$$v' = f(v), \;\; v(0) = 0,$$

ἔχει λύση ὁρισμένη σ' ὅλο τό $\mathbb{R}^+$, ἡ ὁποία εἶναι αὔξουσα καί ἄνω φραγμένη ἀπό τό v_*. Συγκλίνει δέ στό v_* διότι ἄν

$$\lim_{t \to +\infty} v(t) = v_\infty < v_*,$$

τότε

$$v(t) \geq Mt$$

ὅπου

$$M = \min_{v \in [0, v_\infty]} f(v) > 0.$$

Ἄτοπο. Ἐπίσης, στήν περίπτωση κατά τήν ὁποία ἡ f δέν εἶναι ἐπαρκῶς ὁμαλή (γιά παράδειγμα $f = |v - v_*|^{1/2}$) τό σῶμα ἐνδέχεται νά λαμβάνει τήν ὁριακή του ταχύτητα σέ πεπερασμένο χρόνο.

Κεφάλαιο 3

Ὕπαρξη καί μοναδικότης

Ἡ συνήθης τριάδα θεμελιωδῶν θεωρημάτων στίς διαφορικές ἐξισώσεις, ὄχι μόνο τίς συνήθεις, περιλαμβάνει τά ἀκόλουθα εἴδη θεωρημάτων:

(i) *Ὑπάρξεως* λύσεων,

(ii) *Μοναδικότητος* λύσεων καί

(iii) *Ὁμαλῆς Ἐξαρτήσεως* τῶν λύσεων ἀπό παραμέτρους.

Στό παρόν κεφάλαιο, θά δοῦμε τά ἀκόλουθα ἀποτελέσματα:

(i) Ὅσον ἀφορᾶ τήν ὕπαρξη λύσεων, θά ἀναπτυχθοῦν:

α′. Ἡ *Μέθοδος Picard*, διά τῆς ὁποίας κατασκευάζεται κατάλληλη ἀναδρομική ἀκολουθία προσεγγιστικῶν λύσεων. Ἡ ἀκολουθία αὐτή συγκλίνει (καί μάλιστα *ὁμοιομόρφως*) στήν λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν. Ἡ μέθοδος αὐτή ἀπαιτεῖ ἀπό τήν συνάρτηση ροῆς νά ἱκανοποιεῖ τήν *συνθήκη Lipschitz*, ὡς πρός τήν δεύτερη μεταβλητή.

β′. Ἡ *Μέθοδος Peano*, ἡ ὁποία συνίσταται στήν κατασκευή τῶν *$\varepsilon-$προσεγγιστικῶν λύσεων* τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν. Ἡ μέθοδος αὐτή ἐφαρμόζεται σέ κάθε πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν, ὅπου συνάρτηση ροῆς εἶναι ἁπλῶς συνεχής.

Ἀμφότερες οἱ μέθοδοι ὁδηγοῦν σέ τοπικά ἀποτελέσματα ὑπάρξεως λύσεων.

(ii) Ἡ μοναδικότης λύσεων τῶν προβλημάτων ἀρχικῶν τιμῶν, θά προκύψει ὡς συνέπεια τῆς ἱκανοποιήσεως, ἀπό τήν συνάρτηση ροῆς, τῆς συνθήκης Lipschitz ὡς πρός τήν δεύτερη μεταβλητή. Μή ἱκανοποίηση τῆς συνθήκης Lipschitz δυνατόν νά ἔχει ὡς συνέπεια τήν μή μοναδικότητα.

(iii) Θά δοῦμε ἐπίσης πῶς, μέ τήν εἰσαγωγή τῶν καταλλήλων νορμῶν, γενικεύονται ὅλα τά ἀνωτέρω ἀποτελέσματα στήν περίπτωση συστημάτων συνήθων διαφορικῶν ἐξισώσεων καί κατά συνέπεια καί σέ διαφορικές ἐξισώσεις (καί συστήματα διαφορικῶν ἐξισώσεων) οἱασδήποτε τάξεως.

(iv) Ἀναφορά τῶν ἀντιστοίχων θεωρημάτων ὑπάρξεως καί μοναδικότητος στήν περίπτωση τῶν ἐξισώσεων μιγαδικοῦ χρόνου πραγματοποιεῖται στήν *Ἑνότητα 3.5.* Ἡ συνάρτηση ροῆς ἐξαρτᾶται ἀναλυτικῶς ὡς πρός ὅλες της τίς μεταβλητές.

(v) Μέ τό πρόβλημα τῆς ἐπεκτασιμότητος τῶν λύσεων πέραν τῶν διαστημάτων τά ὁποῖα μᾶς παρέχουν τά θεωρήματα ὑπάρξεως, τά ὁποῖα ὅπως ἔχει ἤδη ἀναφερθεῖ, ἔχουν τοπικό χαρακτήρα, θά ἀσχοληθοῦμε στό *Κεφάλαιο 6.* Συγκεκριμένα θά δοῦμε ὅτι:

α΄. Κάθε πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν διαθέτει *μεγίστως ὁρισμένη λύση* (ἤτοι, λύση ὁρισμένη σέ μέγιστο ἀνοικτό διάστημα), ὅταν πληροῦνται συνθῆκες οἱ ὁποῖες ἐξασφαλίζουν τήν μοναδικότητα, ἐνῶ ὑπάρχει *μεγιστικά ὁρισμενη λύση* (ἤτοι, λύση τῆς ὁποίας τό πεδίο ὁρισμοῦ δέ δύναται νά ἐπεκταθεῖ περαιτέρω), ὅταν δέν εἶναι δυνατόν νά ὑποτεθεῖ ἡ καθολική μοναδικότης.

β΄. Ὑπάρχουν συνθῆκες οἱ ὁποῖες ἐξασφαλίζουν τήν ὕπαρξη καθολικῆς λύσεως ἤ τήν *ἔκρηξη* τῶν λύσεων σέ πεπερασμένο χρόνο.

(vi) Ἡ ἐξάρτηση τῶν λύσεων προβλημάτων ἀρχικῶν τιμῶν ἀπό παραμέτρους, θά ἀποτελέσει τό ἀντικείμενο τοῦ *Κεφαλαίου 7.* Στό κεφάλαιο αὐτό παρουσιάζεται σειρά ἀποτελεσμάτων τά ὁποῖα θεμελιώνουν τήν ὁμαλή ἐξάρτηση τῶν λύσεων προβλημάτων ἀρχικῶν τιμῶν τόσο ἀπό τίς ἀρχικές συνθῆκες ὅσο καί ἀπό παραμέτρους ἀπό τίς ὁποῖες ἐξαρτᾶται ὁμαλῶς ἡ ροή.

3.1 Προκαταρκτικά

Ἡ κατανόηση ὄχι μόνο τῶν ἀποδείξεων ἀλλά καί τῆς διατυπώσεως τῶν θεμελιωδῶν θεωρημάτων, ἀπαιτεῖ τήν καλή γνώση τῆς ὁμοιόμορφης συγκλίσεως ἀκολουθιῶν συναρτήσεων καί τῶν ἰδιοτήτων της. Ἰδιαιτέρως δέ μας ἐνδιαφέρουν οἱ ἰδιότητες ἐκεῖνες οἱ ὁποῖες περνοῦν στό ὁμοιόμορφο ὅριο τῆς ἀκολουθίας. Ἐπίσης ἀπαιτεῖται ὁ ὁρισμός τῆς συνεχείας Lipschitz.

3.1.1 Ἀνοικτά καί κλειστά σύνολα

Τά σύνολα στά ὁποῖα *ζοῦν* οἱ λύσεις τῶν συνήθων διαφορικῶν ἐξισωσέων ἀποτελοῦν ὑποσύνολα Εὐκλειδείων χώρων, τοῦ $\mathbb{R}^N$ καί $\mathbb{C}^N$. Ὁρίζομε κατ' ἀρχάς τά σύνολα:

(i) Ἀνοικτή μπάλα κέντρου $\boldsymbol{\xi}$ καί ἀκτῖνος $r > 0$.

$$B_r(\boldsymbol{\xi}) \;=\; \big\{\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N \;:\; \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}\|_2 < r\big\},$$

ὅπου $\|\boldsymbol{x}\|_2 = \|(x_1, \ldots, x_N)\|_2 = (x_1^2 + \cdots + x_N^2)^{1/2}$ ἡ Εὐκλείδεια νόρμα.

(ii) Κλειστή μπάλα κέντρου $\boldsymbol{\xi}$ καί ἀκτῖνος $r > 0$. $\overline{B}_r(\boldsymbol{\xi}) = \big\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N \;:\; \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}\|_2 \le r\big\}$.

(iii) Σφαῖρα κέντρου $\boldsymbol{\xi}$ καί ἀκτῖνος $r > 0$: $S_r(\boldsymbol{\xi}) = \big\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N \;:\; \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}\|_2 = r\big\}$.

Ἀκολουθεῖ ἡ ἔννοια τοῦ ἀνοικτοῦ συνόλου.

Ὁρισμός 3.1.1. *Ἔστω $D \subset \mathbb{R}^N$. Τό D ὀνομάζεται ἀνοικτό ἄν γιά κάθε $\boldsymbol{x} \in D$ ὑπάρχει $\varepsilon > 0$ ὥστε $B_\varepsilon(\boldsymbol{x}) \subset D$. Ἰσοδύναμα, τό D ἀποτελεῖ ἕνωση ἀνοικτῶν μπαλῶν.*

Παραδείγματα ἀνοικτῶν συνόλων.

(i) Τά ἀνοικτά διαστήματα ἀποτελοῦν ἀνοικτά ὑποσύνολα τοῦ $\mathbb{R}$.

(ii) Οἱ ἀνοικτές μπάλες.

(iii) Τά ἀνοικτά ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα. Δηλαδή τά σύνολα τῆς μορφῆς:

$$K \;=\; (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_N, b_N).$$

(iv) Οἱ ἀνοικτοί ἡμιχῶροι: $H^+ = \big\{(x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N \;:\; x_1 > 0\big\}$.

(v) Αὐθαίρετες ἑνώσεις καθώς καί πεπερασμένες τομές ἀνοικτῶν συνόλων ἀποτελοῦν ἀνοικτά σύνολα.

Συμπληρωματική ἔννοια ἡ ἔννοια τοῦ κλειστοῦ συνόλου:

Ὁρισμός 3.1.2. *Ἔστω $C \subset \mathbb{R}^N$. Τό C ὀνομάζεται κλειστό ἄν γιά κάθε συγκλίνουσα ἀκολουθία στοιχείων τοῦ C καί τό ὅριο ἀποτελεῖ στοιχεῖο τοῦ C.*

Ὑπενθυμίζεται ὅτι μία ἀκολουθία $\{\boldsymbol{x}^n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^N$ λέγεται ὅτι συγκλίνει στό $\boldsymbol{x}$ ἄν καί μόνον ἄν $\|\boldsymbol{x}^n - \boldsymbol{x}\| \to 0$. Γιά ἐκτενέστερη συζήτηση περί συγκλίσεως καθώς καί νορμῶν στόν $\mathbb{R}^N$ βλέπε Ἑνότητα 3.3.

Παραδείγματα κλειστῶν συνόλων.

(i) Τά κλειστά διαστήματα ἀποτελοῦν κλειστά ὑποσύνολα τοῦ $\mathbb{R}$.

(ii) Οἱ κλειστές μπάλες.

(iii) Τά κλειστά ὀρθογώνια παραλληλεπίπεδα. Δηλαδή τά σύνολα τῆς μορφῆς:

$$K = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_N, b_N].$$

(iv) Οἱ κλειστοί ἡμιχῶροι: $K^+ = \{(x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N \,:\, x_1 \geq 0\}$.

(v) Αὐθαίρετες τομές καθώς καί πεπερασμένες ἑνώσεις κλειστῶν συνόλων ἀποτελοῦν κλειστά σύνολα.

(vi) Τά συμπληρώματα ἀνοικτῶν. Συγκεκριμένα, εἶναι δυνατόν νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τό σύνολο C εἶναι κλειστό ἄν καί μόνον ἄν τό $\mathbb{R}^N \setminus C$ εἶναι ἀνοικτό.

3.1.2 Συμπάγεια

Σ' ἕνα σύνηθες μάθημα *Πραγματικῆς Ἀναλύσεως* ἤ *Τοπολογίας*, ἡ ἔννοια τῆς *συμπάγειας* (*compactness*), ὁρίζεται κατά τρόπο ἰδιαιτέρως ἀφηρημένο[69] γιά τά δεδομένα τοῦ ἀνά χεῖρας ἐγχειριδίου. Ἐπειδή ὅλα τά *συμπαγῆ* σύνολα τά ὁποῖα θά μᾶς ἀπασχολήσουν ἀποτελοῦν ὑποσύνολα τοῦ $\mathbb{R}^N$ ἤ τοῦ $\mathbb{C}^N$, θά ἀρκεσθοῦμε στόν ἀκόλουθο ὁρισμό:

Ὁρισμός 3.1.4. *Ἔστω K ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}^N$. Τό K ὀνομάζεται συμπαγές (compact), ἄν εἶναι κλειστό καί φραγμένο.*

Χαρακτηριστικά παραδείγματα συμπαγῶν συνόλων:

(i) Κλειστά διαστήματα στόν $\mathbb{R}$.

(ii) Γινόμενα κλειστῶν διαστημάτων στόν $\mathbb{R}^N$.

(iii) Κλειστές σφαῖρες στόν $\mathbb{R}^N$. (Καθώς ἐπίσης καί στόν $\mathbb{C}^N$.)

(iv) Κλειστά ὑποσύνολα συμπαγῶν.

(v) Πεπερασμένες ἑνώσεις τῶν ἀνωτέρω.

(vi) Τομές ὅλων τῶν ἀνωτέρω.

Ἀναφέρομε χωρίς ἀπόδειξη[70] τίς ἀκόλουθες ἰδιότητες:

[69] Αὐστηρός ὁρισμός συμπάγειας:

Ὁρισμός 3.1.3. *Ἔστω X μετρικός χῶρος καί K ὑποσύνολο τοῦ X. Τό K ὀνομάζεται συμπαγές, ἄν κάθε ἀνοικτή κάλυψη τοῦ K (δηλαδή, συλλογή ἀνοικτῶν ὑποσυνόλων τοῦ X τῶν ὁποίων ἡ ἕνωση νά περιέχει τό K) ἔχει πεπερασμένη ὑποκάλυψη.*

[70] Γιά ἀπόδειξη τῶν ἰδιοτήτων αὐτῶν, βλέπε W. Rudin [48].

(i) Ἔστω K συμπαγές ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}^N$, τότε κάθε ἀκολουθία στοιχείων τοῦ K ἔχει συγκλίνουσα ὑπακολουθία σέ στοιχεῖο τοῦ K. Ἰσχύει καί τό ἀντίστροφο: Ἄν σέ κάποιο ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}^N$ κάθε ἀκολουθία ἔχει συγκλίνουσα ὑπακολουθία, τότε αὐτό εἶναι συμπαγές.

(ii) Κάθε ἄπειρο ὑποσύνολο συμπαγοῦς ἔχει σημεῖο συσσωρεύσεως.

(iii) Ἔστω $\boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^N$ συνεχής, ὅπου D ἀνοικτό ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}^M$. Τότε γιά κάθε $K \subset D$ συμπαγές καί ἡ εἰκόνα τοῦ K μέσῳ τῆς $\boldsymbol{f}$, ἤτοι, τό σύνολο $\boldsymbol{f}[K]$, εἶναι ἐπίσης συμπαγές.

(iv) Ἔστω K συμπαγές ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}^N$ καί $f : K \to \mathbb{R}$ συνεχής. Τότε ἡ f εἶναι φραγμένη καί τόσο τό ἐλάχιστο ἄνω φράγμα, ὅσο καί τό μέγιστο κάτω φράγμα τῆς f λαμβάνονται, δηλαδή, ὑπάρχουν x_m καί x_M στό K ὥστε

$$f(x_m) = \inf\{ f(x) \quad x \in K\} \qquad \textit{καί} \qquad f(x_M) = \sup\{ f(x) \ : \ x \in K\}.$$

Ἄρα ἡ f δέν εἶναι ἁπλῶς φραγμένη ἀλλά *λαμβάνει* ἐλάχιστο καί μέγιστο, καί ὡς ἐκ τούτου, τά inf καί sup, ἀνωτέρω δύνανται νά ἀντικατασταθοῦν μέ min καί max, ἀντιστοίχως.

Παρατήρηση. Πολύ συχνά ἀναφέρεται ὅτι:

Ἡ ἰδιότης A ἱκανοποιεῖται τοπικῶς στό σύνολο D.

Αὐτό σημαίνει ἡ ἰδιότης A ἱκανοποιεῖται σέ κάθε συμπαγές ὑποσύνολο τοῦ D. Ἐπί παραδείγματι, μιά συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ εἶναι τοπικῶς φραγμένη.

3.1.3 Συνέχεια Lipschitz

Ὁρισμός 3.1.5. *Ἔστω $g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Λέγεται ὅτι ἡ g ἱκανοποιεῖ τήν συνθήκη Lipschitz, ἤ εἶναι συνεχής Lipschitz στό $[a, b]$ μέ σταθερά $\kappa > 0$, ἄν ἰσχύει ὅτι:*

$$\big|g(x_1) - g(x_2)\big| \le \kappa\, |x_1 - x_2|,$$

γιά κάθε $x_1, x_2 \in [a, b]$.

Λῆμμα 3.1.1. *Ἄν ἡ συνάρτηση $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ εἶναι συνεχῶς διαφορίσιμη, τότε ἱκανοποιεῖ τήν συνθήκη Lipschitz στό $[a, b]$ μέ σταθερά*

$$\kappa = \max_{x \in [a,b]} \big|g'(x)\big|.$$

Αποδειξη. Ἐφ’ ὅσον ἡ $|g'|$ εἶναι συνεχής στό κλειστό διάστημα $[a,b]$, τότε ἡ $|g'|$ λαμβάνει μέγιστο στό $[a,b]$. Ἔστω $\kappa = \max_{x\in[a,b]}|g'(x)|$, τότε συνεπείᾳ τοῦ *Θεωρήματος τῆς Μέσης Τιμῆς* θά ἔχομε:

$$g(x_1) - g(x_2) = (x_1 - x_2)\, g'(\xi),$$

γιά κάποιο $\xi \in (x_1, x_2)$. Ἄρα

$$\big|g(x_1) - g(x_2)\big| \le \kappa\, |x_1 - x_2|.$$ **ὅ.ἔ.δ.**

Παρατήρηση. Ἡ συνθήκη ἤ συνέχεια Lipschitz σέ κλειστό διάστημα εἶναι ἀσθενέστερη τῆς συνεχοῦς διαφορισιμότητος, ὅπως μόλις ἀποδείξαμε. Στήν πραγματικότητα εἶναι *γνησίως* ἀσθενέστερη. Αὐτό φαίνεται ἀπό τήν συνάρτηση $g(x) = |x|$, ἡ ὁποία ἱκανοποιεῖ τήν συνθήκη Lipschitz σ’ ὅλο τό $\mathbb{R}$ μέ σταθερά $\kappa = 1$, ἀλλά δέν εἶναι διαφορίσιμη στό $x = 0$. Ἰδιαιτέρως, ὑπάρχει συνάρτηση πουθενά διαφορίσιμη καί ταυτοχρόνως ἱκανοποιοῦσα τήν συνθήκη Lipschitz παντοῦ. (Βλέπε [48].) Ἐπίσης, διαπιστοῦται εὐκόλως ὅτι ἡ συνέχεια Lipschitz εἶναι ἰσχυρότερη τῆς ὁμοιόμορφης συνεχείας. (Γιατί;) Στήν πραγματικότητα εἶναι *γνησίως* ἰσχυρότερη ὅπως προκύπτει ἀπό τό παράδειγμα τῆς συναρτήσεως $g(x) = |x|^{1/2}$, ἡ ὁποία εἶναι ὁμοιομόρφως συνεχής σέ κάθε κλειστό διάστημα $[-\alpha,\alpha]$. Ἡ g ὅμως δέν εἶναι συνεχής Lipschitz σέ κανένα διάστημα τῆς μορφῆς $[-\alpha,\alpha]$. Πράγματι, ἔστω ὅτι ὑπῆρχε $\kappa > 0$ ὥστε

$$\Big||x_1|^{1/2} - |x_2|^{1/2}\Big| \le \kappa|x_1 - x_2|$$

γιά κάθε $x_1, x_2 \in [-\alpha,\alpha]$. Ὁπότε ἰδιαιτέρως γιά $x_1 = x$ καί $x_2 = 0$ θά εἴχαμε:

$$\Big||x|^{1/2} - |0|^{1/2}\Big| \le \kappa|x - 0|.$$

Ἄρα γιά $x \neq 0$

$$|x|^{1/2} \le \kappa|x| \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{\kappa^2} \le |x|. \tag{3.1}$$

Ὅμως ἡ (3.1) δέν δύναται νά ἰσχύει ταυτοχρόνως γιά κάθε $x \in [-\alpha,\alpha]$ καί ἰδιαιτέρως δέν δύναται νά ἰσχύει γιά $|x| < \dfrac{1}{\kappa^2}$.

Ἔχομε λοιπόν τήν ἀκόλουθη διαβάθμιση ἰσχύος, γιά συναρτήσεις ὁριζόμενες σέ κλειστό διάστημα, ἀρχίζοντας ἀπό τήν ἀσθενέστερη ἰδιότητα:

(i) Ὁμοιόμορφη συνέχεια,

(ii) Συνέχεια Lipschitz καί

(iii) Συνεχής διαφορισιμότης.

Ἡ συνθήκη Lipschitz στίς συνήθεις διαφορικές ἐξισώσεις

Στό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(\tau) = \xi, \end{cases}$$

ἡ ἱκανοποίηση τῆς συνθήκης Lipschitz ὡς πρός τήν δεύτερη μεταβλητή τῆς συναρτήσεως ροῆς f ἐξασφαλίζει μοναδικότητα τῶν λύσεων, ὅπως θά δοῦμε στήν συνέχεια τοῦ παρόντος κεφαλαίου. Συγκεκριμένα, ἄν D ($\subset \mathbb{R}^2$) τό πεδίο ὁρισμοῦ (καί συνεχείας) τῆς f, λέγεται ὅτι ἡ f *ἱκανοποιεῖ τήν συνθήκη Lipschitz ὡς πρός τήν δεύτερη μεταβλητή στό* D ἄν ὑπάρχει $L > 0$ τέτοιο ὥστε

$$\left|f(t,x_1) - f(t,x_2)\right| \le L\,|x_1 - x_2|,$$

γιά κάθε $(t,x_1),(t,x_2) \in D$. Ἡ ἀνωτέρω συνθήκη εἶναι πολύ περιοριστική γιά τήν f. Γιά παράδειγμα, δέν ἱκανοποιεῖται ἡ συνθήκη αὐτή γιά τήν $f(t,x) = tx$ μέ $D = \mathbb{R}^2$, ἐνῶ ἀποτελεῖ τήν ροή γραμμικῆς ἐξισώσεως τῆς ὁποίας τά προβλήματα ἀρχικῶν τιμῶν, ὅπως ἔχομε ἤδη δεῖ στό *Κεφάλαιο 2*, ἀπολαμβάνουν καθολικῆς μοναδικότητος. Ἔχομε λοιπόν τόν ἀκόλουθο ὁρισμό:

Ὁρισμός 3.1.6. *Ἔστω $D \subset \mathbb{R}^2$ ἀνοικτό καί $f \in C(D)$. Λέγεται ὅτι ἡ συνάρτηση f ἱκανοποιεῖ τήν συνθήκη Lipschitz τοπικῶς στό D, ἄν γιά κάθε σύνολο*

$$K = [\tau - \alpha, \tau + \alpha] \times [\xi - \beta, \xi + \beta] \subset D,$$

ὑπάρχει $L = L_K$ ὥστε

$$\left|f(t,x_1) - f(t,x_2)\right| \le L_K|x_1 - x_2|,$$

γιά κάθε $(t,x_1),(t,x_2) \in K$.

Ἡ τοπική συνθήκη Lipschitz ὡς πρός τήν δεύτερη μεταβλητή ἱκανοποιεῖται ἀπό συναρτήσεις συνεχῶς διαφορίσιμες ὡς πρός x.

3.1.4 Ὁμοιόμορφη σύγκλιση

Στά θεωρήματα ὑπάρξεως, οἱ λύσεις θά προκύψουν ὡς ὅρια ὁμοιομόρφως συγκλινουσῶν ἀκολουθιῶν προσεγγιστικῶν λύσεων. Τόσο ἡ ἔννοια τῆς ὁμοιόμορφης συγκλίσεως, ὅσο καί διάφορες ἰδιότητες τῶν ἀκολουθιῶν οἱ ὁποῖες μεταφέρονται στό ὅριο μέσῳ τῆς ὁμοιόμορφης συγκλίσεως, θά ἀποτελέσουν τό ἀντικείμενο αὐτῆς τῆς ἑνότητος.

Ὁρισμός 3.1.7. *Ἔστω S μή κενό σύνολο καί $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ἀκολουθία συναρτήσεων, ὅπου $\varphi_n : S \to \mathbb{R}$. Λέγεται ὅτι ἡ $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ὁμοιομόρφως ἐπί τοῦ S στήν $\varphi : S \to \mathbb{R}$, τοῦ n τείνοντος στό ἄπειρο, ἄν γιά κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει $N = N(\varepsilon)$ φυσικός ὥστε:*

$$n > N \implies \left|\varphi_n(t) - \varphi(t)\right| < \varepsilon \qquad \text{γιά κάθε } t \in S.$$

Ἤτοι: Ἡ ἀκολουθία συναρτήσεων συγκλίνει σέ κάθε $t \in S$ καί γιά κάθε $\varepsilon > 0$, τό N ἐξαρτᾶται ἀπό τό ε καί εἶναι ἀνεξάρτητο ἀπό τό t.

Ἡ συνάρτηση φ ὀνομάζεται ὁμοιόμορφο ὅριο τῆς ἀκολουθίας.

Ἡ ὁμοιόμορφη σύγκλιση εἶναι βεβαίως ἰσχυροτέρα τῆς *κατά σημεῖον* συγκλίσεως. Στήν κατά σημεῖον σύγκλιση, τό N ἐξαρτᾶται, ὄχι μόνο ἀπό τό ε, ἀλλά καί ἀπό τό t.

Ὁρισμός 3.1.8. *Ἔστω S μή κενό σύνολο καί $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ἀκολουθία συναρτήσεων, ὅπου $\varphi_n : S \to \mathbb{R}$. Λέγεται ὅτι ἡ $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει κατά σημεῖον ἐπί τοῦ S στήν $\varphi : S \to \mathbb{R}$, τοῦ n τείνοντος στό ἄπειρο, ἄν γιά κάθε $t \in S$*

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \varphi(t).$$

Παραδείγματα

(i) Ἔστω ἡ ἀκολουθία συναρτήσεων $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, ὅπου $\varphi_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, μέ τύπο $\varphi_n(t) = t^n$. Προφανῶς

$$\varphi(t) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{ἄν} \quad t \neq 1, \\ 1 & \text{ἄν} \quad t = 1, \end{cases}$$

κατά σημεῖο. Ἡ ἀνωτέρω σύγκλιση δέν εἶναι ὁμοιόμορφη στό I ὅπως θά προκύψει ἀπό τήν *Πρόταση 3.1.2* ἡ ὁποία ἀκολουθεῖ. Ὡστόσο, εὐκόλως διαπιστοῦται ὅτι ἡ ἀνωτέρω ἀκολουθία συγκλίνει ὁμοιομόρφως στό διάστημα $[0,\alpha]$ γιά κάθε $\alpha < 1$.

(ii) Ἔστω ἡ ἀκολουθία συναρτήσεων $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, ὅπου $\varphi_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, μέ τύπο

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{ἄν} \quad t \in \left[0, \dfrac{1}{3n}\right), \\[2ex] 9n^2 t - 3n & \text{ἄν} \quad t \in \left[\dfrac{1}{3n}, \dfrac{2}{3n}\right), \\[2ex] 9n - 9n^2 t & \text{ἄν} \quad t \in \left[\dfrac{2}{3n}, \dfrac{3}{3n}\right), \\[2ex] 0 & \text{ἄν} \quad t \in \left[\dfrac{3}{3n}, 1\right]. \end{cases}$$

Προφανῶς ἡ $\varphi_n(t)$ τείνει κατά σημεῖο στήν ταυτοτικῶς μηδενική συνάρτηση $\varphi \equiv 0$. Ὅμως

$$\int_0^1 \varphi_n(t)\, dt = 1 \qquad \text{ἐνῶ} \qquad \int_0^1 \varphi(t)\, dt = 0.$$

Ἄρα λόγῳ τῆς *Προτάσεως 3.1.3*, ἡ ὁποία ἀκολουθεῖ, καί ἐδῶ ἡ σύγκλιση δέν εἶναι ὁμοιόμορφη. Παρά ταῦτα ἡ σύγκλιση εἶναι ὁμοιόμορφη σέ κάθε διάστημα $[\alpha, 1]$, ὅπου $\alpha > 0$, ἀφοῦ ἰσχύει τελικῶς ὅτι $\varphi_n\big|_{[\alpha,1]} = 0$.

Θά χρειασθοῦμε ἀκόλουθες ἰδιότητες τῆς ὁμοιόμορφης συγκλίσεως ἀκολουθιῶν συναρτήσεων:

Πρόταση 3.1.2. *Ἔστω S μή κενό ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}$ καί $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ἀκολουθία συνεχῶν συναρτήσεων, $\varphi_n : S \to \mathbb{R}$. Ἄν ἡ $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ὁμοιομόρφως ἐπί τοῦ S μέ ὅριο τήν συνάρτηση $\varphi : S \to \mathbb{R}$, τότε ἡ φ εἶναι ἐπίσης συνεχής ἐπί τοῦ S. Ἤτοι:*

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\lim_{t\to\tau}\varphi_n(t)\Big) = \lim_{t\to\tau}\Big(\lim_{n\to\infty}\varphi_n(t)\Big). \tag{3.2}$$

Ἀποδειξη. Ἔστω $\tau\in S$, $\varepsilon>0$ καί $N = N\big(\varepsilon/3\big)$, τό ὁποῖο προκύπτει ἀπό τόν ὁρισμό τῆς ὁμοιόμορφης συγκλίσεως τῆς ἀκολουθίας $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, ὁπότε

$$\big|\varphi_N(t)-\varphi(t)\big| < \frac{\varepsilon}{3},$$

γιά κάθε $t\in S$. Ἐπειδή ἡ φ_N εἶναι συνεχής στό τ ὑπάρχει $\delta>0$ ὥστε:

$$|t-\tau| < \delta \quad\Longrightarrow\quad \big|\varphi_N(t)-\varphi_N(\tau)\big| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ἔστω τώρα $|t-\tau|<\delta$, Τότε

$$\begin{aligned}\big|\varphi(t)-\varphi(\tau)\big| &\le \big|\varphi(t)-\varphi_N(t)\big| + \big|\varphi_N(t)-\varphi_N(\tau)\big| + \big|\varphi_N(\tau)-\varphi(\tau)\big|\\ &< \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Ἄρα πράγματι ἡ φ εἶναι συνεχής. □

Παρατήρηση. Ἡ (3.2) ἀποδεικνύεται ἀκόμη καί στήν περίπτωση κατά τήν ὁποία οἱ ὅροι τῆς $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ δέν εἶναι συνεχεῖς. Βλέπε *Ἄσκηση* 3.1.10 στήν σελίδα 122.

Πρόταση 3.1.3. *Ἔστω $\varphi_n : [\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}$, ἀκολουθία συνεχῶν συναρτήσεων, ἡ ὁποία συγκλίνει ὁμοιομόρφως ἐπί τοῦ $[\alpha,\beta]$ στήν $\varphi : [\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$. Ἄν $\tau\in[\alpha,\beta]$ καί ὁρίσομε τίς συναρτήσεις*

$$\psi_n(t) = \int_\tau^t \varphi_n(s)\,ds, \quad t\in[\alpha,\beta],$$

τότε ἡ ἀκολουθία $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, συγκλίνει ἐπίσης ὁμοιομόρφως ἐπί τοῦ $[\alpha,\beta]$ στήν ψ, ὅπου

$$\psi(t) = \int_\tau^t \varphi(s)\,ds, \quad t\in[\alpha,\beta].$$

Ἤτοι:

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\int_\tau^t \varphi_n(s)\,ds\Big) = \int_\tau^t\big(\lim_{n\to\infty}\varphi_n(s)\big)\,ds.$$

Αποδειξη. Ἔστω ὅτι $n \geq N(\varepsilon)$, ὅπου $N(\varepsilon)$ συμφώνως πρός τόν *Ὁρισμό 3.1.7*. Τότε

$$|\psi_n(t) - \psi(t)| = \Big| \int_\tau^t \varphi_n(s)\, ds - \int_\tau^t \varphi(s)\, ds \Big|$$

$$\leq \int_\tau^t |\varphi_n(s) - \varphi(s)|\, ds \leq \varepsilon(\beta - \alpha).$$

Ἔχει χρησιμοποιηθεῖ ἡ ἰδιότης τῶν ὁλοκληρωμάτων, ὅτι, ἄν $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ συνεχής, τότε:

$$\Big| \int_a^b g(s) \Big| \leq \int_a^b |g(s)|\, ds. \tag{3.3}$$

□

Παρατήρηση. Ἡ *Πρόταση 3.1.3* ἰσχύει καί στήν περίπτωση κατά τήν ὁποία ἡ $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ἀποτελεῖ ἀκολουθία ὁλοκληρωσίμων κατά Riemann (ὄχι ἀπαραιτήτως συνεχῶν) συναρτήσεων. (Βλέπε *Ἄσκηση* 3.1.11 στήν σελίδα 122.)

Ὁ ορισμός τῆς ὁμοιόμορφης συγκλίσεως ἀπαιτεῖ τήν γνώση τοῦ ὁρίου. Ἔχομε γενικότερα τόν ὁρισμό (ὁποῖος δέν προϋποθέτει τήν γνώση ὁρίου)

Ὁρισμός 3.1.9. *Ἔστω S μή κενό σύνολο καί $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ἀκολουθία συναρτήσεων, ὅπου $\varphi_n : S \to \mathbb{R}$. Λέγεται ὅτι ἡ $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ εἶναι ὁμοιομόρφως ἀκολουθία Cauchy ἐπί τοῦ S, ἄν γιά κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ὥστε*

$$m, n > N \implies \big|\varphi_m(t) - \varphi_n(t)\big| < \varepsilon \qquad \text{γιά κάθε } t \in S.$$

Εὐκόλως διαπιστοῦται ὅτι οἱ *ὁρισμοί 3.1.7* καί *3.1.9* εἶναι ἰσοδύναμοι. (Βλέπε *Ἄσκηση* 3.1.9 στήν σελίδα 122.)

Παρατηρῆστε τώρα ὅτι ἡ ἀκολουθία συναρτήσεων

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}, \quad t \in \mathbb{R},$$

δέν συγκλίνει ὁμοιομόρφως ἐφ' ὅλου τοῦ $\mathbb{R}$. Συγκλίνει ὅμως ὁμοιομόρφως σέ κάθε φραγμένο ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}$.

Ὁρισμός 3.1.10. *Ἔστω S μή κενό σύνολο καί $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ἀκολουθία συναρτήσεων, ὅπου $\varphi_n : S \to \mathbb{R}$. Λέγεται ὅτι ἡ $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει τοπικῶς ὁμοιομόρφως ἐπί τοῦ S στήν συνάρτηση $\varphi : S \to \mathbb{R}$, ἄν συγκλίνει ὁμοιομόρφως ἐπί τοῦ K, γιά κάθε K συμπαγές ὑποσύνολο τοῦ S.*

Τέλος, σημαντικό ρόλο στήν σύγκλιση τῶν προσεγγιστικῶν λύσεων θά ἀποτελέσει καί τό κατωτέρω κριτήριο:

Πρόταση 3.1.4. (***Κριτήριο Weierstrass***) *Ἔστω S μή κενό ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}$ καί $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ἀκολουθία πραγματικῶν συναρτήσεων μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό S γιά τίς ὁποῖες ἰσχύει:*

$$\sup_{t\in S}\left|\varphi_{n+1}(t)-\varphi_n(t)\right| \leq M_n \qquad \textit{καί} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty.$$

Τότε ἡ ἀκολουθία $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ὁμοιομόρφως στό S.

Απόδειξη. Ἀρκεῖ νά δειχθεῖ ὅτι ἡ ἀνωτέρω ἀκολουθία εἶναι ὁμοιομόρφως Cauchy. Ὅμως, λόγῳ τῆς (3.1.4), ἡ ἀκολουθία τῶν μερικῶν ἀθροισμάτων $\sigma_n = M_1 + \cdots + M_n$, $n \in N$, συγκίνει. Κατά συνέπειαν, γιά κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει N ὥστε ὁποτεδήποτε m, $n > N$, τότε

$$M_m + \cdots + M_n < \varepsilon.$$

Ὡς ἐκ τούτου θά ἔχομε:

$$\left|\varphi_m(t)-\varphi_n(t)\right| \leq \sum_{k=m}^{n-1}\left|\varphi_{k+1}(t)-\varphi_k(t)\right| \leq M_m + \cdots + M_{n-1} < \varepsilon.$$

γιά κάθε $t \in S$. □

᾿Ασκήσεις

3.1.1 Ποιές από τίς κατωτέρω συναρτήσεις εἶναι συνεχεῖς Lipschitz στό παραπλεύρως ἀναγραφόμενο διάστημα:

(i) $f(x) = x\log|x|$, $[-1,1]$,

(ii) $f(x) = |x|^{1/3}$, $[-1,1]$,

(iii) $f(x) = |x|^{1/3}$, $[1,\infty)$,

(iv) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$, $[-1,1]$,

(v) $f(x) = \sqrt{1+x^2}$, $\mathbb{R}$,

(vi) $f(x) = \sin x^2$, $\mathbb{R}$.

3.1.2 Δείξατε ὅτι ἡ συνάρτηση $f(x) = |x|^{1/2}$ ἱκανοποιεῖ τήν συνθήκη Lipschitz στό διάστημα $[a,+\infty)$ διά κάθε $a > 0$.

3.1.3 Ἔστω I κλειστό διάστημα καί $C^{0,1}(I)$ τό σύνολο τῶν συναρτήσεων οἱ ὁποῖες εἶναι συνεχεῖς Lipschitz στό I. Δείξατε ὅτι:

$$C(I) \subset C^{0,1}(I) \subset C^1(I)$$

Ἰδιαίτερως, δείξατε ὅτι οἱ ἀνωτέρω σχέσεις ἐγκλεισμοῦ εἶναι γνήσιες.

3.1.4* (Συνέχεια) Δείξατε ὅτι ὁ χῶρος $C^{0,1}(I)$, ὅπου I κλειστό διάστημα, εἶναι χῶρος[71] Banach[72] ὡς πρός τήν νόρμα

$$\|f\| = \max_{x\in I}|f(x)| + \sup_{\substack{x,y\in I\\ x\neq y}}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}.$$

[71] Βλέπε *Ἑνότητα 8.3.*

[72] Stefan Banach (1892–1945). Πολωνός μαθηματικός. Τό ὄνομά του συνδέεται μέ ἀριθμό θεμελιωδῶν ἀποτελεσμάτων τῆς Συναρτησιακῆς Ἀναλύσεως. Σημειωτέον ὅτι ὅταν ὅρισε τούς *χώρους Banach*, τούς ἐκαλοῦσε *χώρους τύπου B*.

3.1.5 Δείξατε ὅτι ἡ ἀκολουθία συναρτήσεων $\varphi_n(t) = t^n$ συγκλίνει ὁμοιόμορφα στό διάστημα $[-a, a]$ διά κάθε $a \in (0,1)$.

3.1.6 Ἔστω ὅτι ἡ ἀκολουθία συνεχῶν συναρτήσεων $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, ὅπου $\varphi_n : I \to \mathbb{R}$ καί I κλειστό διάστημα, συγκλίνει ὁμοιομόρφως ἐπί τοῦ I. Ἔστω $f : D \to \mathbb{R}$ συνεχής, ὅπου D ἀνοικτό ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}^2$ καί συνεχής Lipschitz ὡς πρός τήν δεύτερη μεταβλητή στό κλειστό καί φραγμένο σύνολο K, τό ὁποῖο εἶναι ὑποσύνολο τοῦ D καί περιέχει τά γραφήματα τῶν φ_n, $n \in N$. Δείξατε ὅτι ἡ ἀκολουθία συναρτήσεων

$$\psi_n(t) = f\big(t, \varphi_n(t)\big), \quad t \in I,$$

συγκλίνει τοπικῶς ὁμοιομόρφως ἐπί τοῦ I.

3.1.7 (Συνέχεια) Ἔστω ὅτι ἡ ἀκολουθία συνεχῶν συναρτήσεων $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, ὅπου $\varphi_n : I \to \mathbb{R}$ καί I διάστημα, συγκλίνει τοπικῶς ὁμοιομόρφως ἐπί τοῦ I. Ἔστω ὅτι $f : D \to \mathbb{R}$ συνεχής, ὅπου D ἀνοικτό ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}^2$ τό ὁποῖο περιέχει τά γραφήματα τῶν φ_n, $n \in N$ καί τῆς φ. Δείξατε ὅτι ἡ ἀκολουθία συναρτήσεων

$$\psi_n(t) = f\big(t, \varphi_n(t)\big), \quad t \in I,$$

συγκλίνει τοπικῶς ὁμοιομόρφως ἐπί τοῦ I.

3.1.8 Ἔστω ὅτι ἡ ἀκολουθία συνεχῶν συναρτήσεων $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, ὅπου $\varphi_n : S \to \mathbb{R}$ καί S μή κενό ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}$, συγκλίνει ὁμοιομόρφως στήν φ. Ἄν $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ἀκολουθία σημείων στό S συγκλίνουσα στό $t \in S$ καί φ συνεχής στό t, δείξατε ὅτι

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t_n) = \varphi(t).$$

Ἰσχύει τό ἀνωτέρω συμπέρασμα, ἄν ἡ σύγκλιση εἶναι κατά σημεῖο;

3.1.9 Δείξατε ὅτι οἱ *Ὁρισμοί 3.1.7* καί *3.1.9* εἶναι ἰσοδύναμοι.

3.1.10 Ἔστω S μή κενό ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}$ καί $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ὁμοιομόρφως συγκλίνουσα (ἐπί τοῦ S) ἀκολουθία συναρτήσεων (ὄχι ἀπαραιτήτως συνεχῶν) μέ ὅριο τήν συνάρτηση φ. Ἄν γιά κάθε $n \in \mathbb{N}$ τό ὅριο

$$\lim_{t\to\tau} \varphi_n(t) = \ell_n,$$

ἀποτελεῖ πραγματικό ἀριθμό, τότε τό ἴδιο συμβαίνει καί γιά τό ὅριο

$$\lim_{t\to\tau} \varphi(t) = \ell.$$

Ἐπί πλέον ἰσχύει ὅτι

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{t\to\tau} \varphi_n(t)\right) = \lim_{t\to\tau}\left(\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t)\right).$$

3.1.11 Ἔστω $\varphi_n : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, ἀκολουθία συναρτήσεων ὁλοκληρωσίμων κατά Riemann ἡ ὁποία συγκλίνει ὁμοιομόρφως ἐπί τοῦ $[\alpha, \beta]$ στήν $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$. Ἄν $\tau \in [\alpha, \beta]$ καί ὁρίσομε τίς συναρτήσεις

$$\psi_n(t) = \int_\tau^t \varphi_n(s)\, ds, \quad t \in [\alpha, \beta],$$

τότε ἡ ἀκολουθία $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, συγκλίνει ἐπίσης ὁμοιομόρφως ἐπί τοῦ $[\alpha, \beta]$ στήν ψ, ὅπου

$$\psi(t) = \int_\tau^t \varphi(s)\, ds, \quad t \in [\alpha, \beta].$$

3.1.12 Δείξατε ὅτι ἡ ἀκολουθία $\varphi_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$ συγκλίνει τοπικῶς ὁμοιομόρφως ἐπί τοῦ $\mathbb{R}$.

3.1.13 Ἔστω I ἀνοικτό διάστημα καί $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ἀκολουθία συνεχῶν συναρτήσεων τοπικῶς ὁμοιομόρφως συγκλίνουσα ἐπί τοῦ I. Ἄν $\tau\in I$ καί
$$\psi_n(t) = \int_\tau^t \varphi_n(s)\,ds, \quad t\in I,$$
τότε ἡ ἀκολουθία $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, συγκλίνει ἐπίσης τοπικῶς ὁμοιομόρφως ἐπί τοῦ I στήν
$$\psi(t) = \int_\tau^t \varphi(s)\,ds, \quad t\in I.$$

3.1.14 Χρησιμοποιῶντας τό *Κριτήριο Weierstrass* δείξατε ὅτι τό ἄθροισμα $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2}$ ὁρίζει συνεχῆ συνάρτηση σ' ὅλο τό $\mathbb{R}$. Δείξατε ὅτι καί τό ἄθροισμα $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n\sin nt}{n!}$ ὁρίζει συνεχῆ συνάρτηση σ' ὅλο τό $\mathbb{R}$.

3.1.15 Ἐξετάστε κατά πόσον τό ἄθροισμα $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{x}{n}\right)$ ὁρίζει συνεχῆ συνάρτηση.

3.2 Ὕπαρξη καί Μοναδικότης

Ἡ ἀναδρομική διαδικασία Picard θά μᾶς ὁδηγήσει στό πρῶτο ἀποτέλεσμα *Ὑπάρξεως* καί *Μοναδικότητος* λύσεων, ὅταν ἡ ροή ἱκανοποιεῖ τήν συνθήκη Lipschitz ὡς πρός τήν δεύτερη μεταβλητή. Ἐν συνεχείᾳ, θά δοῦμε καί δυνατότητα κατασκευῆς λύσεως ἀκόμη κι' ἄν δέν πληροῦται ἡ συνθήκη Lipschitz.

3.2.1 Ἀναδρομική ἀκολουθία Picard

Στό θεώρημα ὑπάρξεως καί μοναδικότητος, ἡ λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν
$$\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(\tau) = \xi, \end{cases}$$
θά προκύψει ὡς ὅριο συναρτήσεων, οἱ ὁποῖες ἀποτελοῦν προσεγγιστικές λύσεις καί τίς ὁποῖες ὁρίζει ἡ κατωτέρω ἀναδρομική ἀκολουθία:
$$\varphi_0(t) = \xi, \quad \varphi_{n+1}(t) = \xi + \int_\tau^t f\big(s,\varphi_n(s)\big)\,ds, \quad n\in\mathbb{N},$$
γνωστή ὡς *ἀναδρομική ἀκολουθία Picard*. Ἡ ἀνωτέρω ἀναδρομική κατασκευή ὀνομάζεται *ἐπαναληπτική διαδικασία Picard*[73] (*Picard iteration*). Αὐτό τό ὁποῖο θά χρειασθεῖ νά ἀποδείξομε εἶναι ὅτι ἡ ἀνωτέρω ἀκολουθία συναρτήσεων, ὅταν περιορισθεῖ σέ κατάλληλο κλειστό διάστημα, συγκλίνει σέ μιά συνάρτηση φ, ἡ ὁποία ἀποτελεῖ λύση τοῦ προβλήματος

[73]Τήν διαδικασία αὐτή πιθανότατα ἐγνώριζε καί ὁ Cauchy ἀλλά ἐδημοσιεύθη διά πρώτη φορά ἀπό τόν Liouville στό περιοδικό J. de Math. (1838), σέ κάποια ὅμως ειδική της μορφή. Φέρει δέ τό ὄνομα τοῦ Picard, ὁ ὁποῖος τήν ἀνέπτυξε στήν γενικότερή της μορφή (J. de Math. (1893)). Μέσῳ τῆς ἀναδρομικῆς αὐτῆς διαδικασίας λαμβάνονται συγκλίνουσες σέ λύση ἀκολουθίες διαδοχικῶν προσεγγίσεων λύσεων, ὄχι μόνον προβλημάτων ἀρχικῶν τιμῶν συνήθων διαφορικῶν ἐξισώσεων, ἀλλά καί ἐξελικτικῶν προβλημάτων μερικῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων.

ἀρχικῶν τιμῶν. Εἰδικότερα, ὅτι ἱκανοποιεῖ τήν ὁλοκληρωτική του μορφῆς. Συγκεκριμένα, ἄν ἀποδειξομε ὅτι ὑπάρχει κλειστό διάστημα I, στό ὁποῖο ἡ ἀνωτέρω ἀκολουθία συναρτήσεων συγκλίνει ὁμοιομόρφως, τότε θά ἔχομε τόν ἑξῆς συλλογισμό:

$$\begin{array}{cccc} & \varphi_n(t) & \longrightarrow & \varphi(t) \\ \Longrightarrow & f\big(t,\varphi_n(t)\big) & \longrightarrow & f\big(t,\varphi(t)\big) \\ \Longrightarrow & \xi + \int_\tau^t f\big(s,\varphi_n(s)\big)\,ds & \longrightarrow & \xi + \int_\tau^t f\big(s,\varphi(s)\big)\,ds \\ \Longrightarrow & \varphi_{n+1}(t) & \longrightarrow & \xi + \int_\tau^t f\big(s,\varphi(s)\big)\,ds \end{array}$$

ὅπου ὅλες οἱ ἀνωτέρω συγκλίνουν ὁμοιομόρφως στό I. Ἐπειδή ὅμως οἱ ἀκολουθίες $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ καί $\{\varphi_{n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνουν στό ἴδιο ὅριο, τότε:

$$\varphi(t) \;=\; \xi + \int_\tau^t f\big(s,\varphi(s)\big)\,ds. \tag{3.4}$$

Ὅπερ σημαίνει ὅτι ἡ ὁλοκληρωτική μορφή τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν θά εἶχε λύση μία συνεχῆ συνάρτηση, ἡ ὁποία ὅμως ὑποχρεοῦται νά εἶναι συνεχῶς διαφορίσιμη, δεδομένου ὅτι τό δεξιό μέλος τῆς (3.4) ἀποτελεῖ συνεχῶς διαφορίσιμη συνάρτηση. Ἰσοδύναμα, τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν θά εἶχε λύση. Σημειωτέον ὅτι ἐφ' ὅσον ἡ φ ἱκανοποιεῖ τήν (3.4) ὑποχρεωτικῶς, ἐκτός ἀπό συνεχής, θά εἶναι καί συνεχῶς διαφορίσιμη. (Γιατί;)

Παράδειγμα. Ἔστω τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x' \;=\; t+x, \\ x(0) \;=\; 1. \end{cases} \tag{3.5}$$

Ἡ ἐπαναληπτική μέθοδος Picard δημιουργεῖ τήν ἑξῆς ἀναδρομική ἀκολουθία συναρτήσεων:

$$\begin{aligned}
\varphi_0(t) &= \xi = 1,\\
\varphi_1(t) &= \xi + \int_\tau^t f\big(s,\varphi_0(s)\big)\,ds \;=\; 1 + \int_0^t (s+1)\,ds\\
&= 1 + t + \frac{t^2}{2},\\
\varphi_2(t) &= \xi + \int_\tau^t f\big(s,\varphi_1(s)\big)\,ds \;=\; 1 + \int_0^t \left(s+1+s+\frac{s^2}{2}\right)\,ds\\
&= 1 + t + t^2 + \frac{t^3}{6},\\
\varphi_3(t) &= \xi + \int_\tau^t f\big(s,\varphi_2(s)\big)\,ds \;=\; 1 + \int_0^t \left(s+1+s+s^2+\frac{s^3}{6}\right)\,ds\\
&= 1 + t + t^2 + \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{24},\\
\varphi_4(t) &= \xi + \int_\tau^t f\big(s,\varphi_3(s)\big)\,ds\\
&= 1 + \int_0^t \left(s+1+s+s^2+\frac{s^3}{3}+\frac{s^4}{24}\right)\,ds\\
&= 1 + t + t^2 + \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{12} + \frac{t^5}{120}.
\end{aligned}$$

Ἐπαγωγικῶς δύναται νά ἀποδειχθεῖ ὅτι:

$$\begin{aligned}
\varphi_n(t) &= 1 + t + 2\left(\frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots + \frac{t^n}{n!}\right) + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\\
&= 2\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} - 1 - t + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

καί τελικῶς:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) &= 1 + t + 2\big(\mathrm{e}^t - 1 - t\big)\\
&= 2\mathrm{e}^t - 1 - t.
\end{aligned}$$

Ἡ ἀνωτέρω σύγκλιση, εἶναι ὁμοιόμορφη σέ κάθε φραγμένο ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}$. Πράγματι, ἔστω $[a,b] \subset \mathbb{R}$, τότε $[a,b] \subset [-\ell,\ell]$, ὅπου $\ell = \max\{|a|,|b|\}$. Ὁπότε στό διάστημα $[-\ell,\ell]$ ἔχομε ὅτι

$$\big|\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)\big| \;\le\; \frac{|t|^n}{n!} + \frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!} \;\le\; \frac{\ell^n}{n!} + \frac{\ell^{n+1}}{(n+1)!} \;=\; M_n,$$

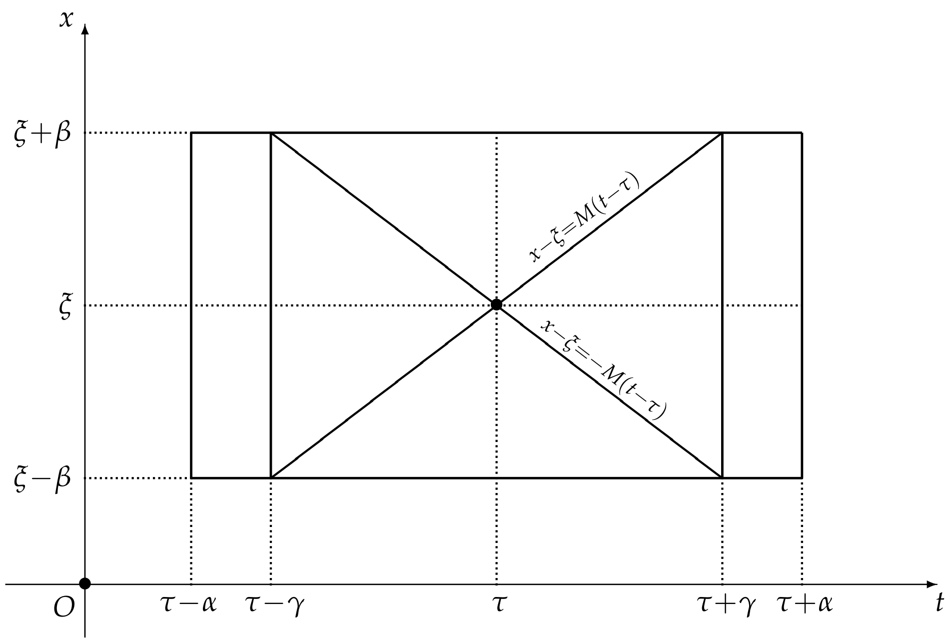
καί

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n \;\le\; 2\mathrm{e}^{\ell}.$$

Ἄρα, λόγῳ τοῦ κριτηρίου Weierstrass, ἡ $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ὁμοιομόρφως στό αὐθαιρέτως ἐπιλεγέν κλειστό διάστημα $[a,b]$. Ἤτοι, ἡ ἀκολουθία συναρτήσεων $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, συγκλίνει τοπικῶς ὁμοιομόρφως στό $\mathbb{R}$. Τό ὁμοιόμορφο ὅριο $\varphi(t) = 2e^t - 1 - t$, ἀποτελεῖ λύση τοῦ (3.5). Μάλιστα, τήν μοναδική ὅπως εἶναι ἤδη γνωστό ἀπό τήν *Πρόταση 2.1.1*, στήν σελίδα 59. Σημειωτέον ὅτι ἡ ἀκολουθία $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ δέν συγκλίνει ὁμοιομόρφως στό $\mathbb{R}$ διότι $\sup_{t\in\mathbb{R}}|\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)| = \infty$.

3.2.2 Θεώρημα Ὑπάρξεως καί Μοναδικότητος

Στήν παροῦσα ὑποενότητα θά δοῦμε πῶς ἡ ἱκανοποίηση τῆς συνθήκης Lipschitz ὡς πρός τήν δεύτερη μεταβλητή τῆς συναρτήσεως ροῆς, ἐξασφαλίζει ταυτοχρόνως, *Ὕπαρξη* καί *Μοναδικότητα* λύσεων σέ προβλήματα ἀρχικῶν τιμῶν.



Σχῆμα 3.1: Τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς λύσεως

Θεώρημα 3.2.1. **(*Picard–Lindelöf*)** *Ἔστω $f : D \to \mathbb{R}$ συνεχής, ὅπου D ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}^2$ ἀνοικτό,*

$$K = [\tau - \alpha, \tau + \alpha] \times [\xi - \beta, \xi + \beta] \subset D,$$

γιά κάποια α, β θετικά, καί

$$M = \max_{(t,x)\in K} |f(t,x)|.$$

Ἐπίσης, ἔστω ὅτι ἡ f ἱκανοποιεῖ τήν συνθήκη Lipschitz ὡς πρός τήν δεύτερη μεταβλητή στό K, δηλαδή

$$\big|f(t,x_1) - f(t,x_2)\big| \le L\,|x_1 - x_2|,$$

γιά κάθε (t,x_1), $(t,x_2) \in K$. *Τότε τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν:*

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(\tau) = \xi, \end{cases} \tag{3.7}$$

ἔχει λύση φ *ὁριζόμενη στό διάστημα* $I = [\tau - \gamma, \tau + \gamma]$, *ὅπου*

$$\gamma = \min\left\{\alpha, \frac{\beta}{M}\right\}. \tag{3.8}$$

Ἡ φ *προκύπτει ὡς ὁμοιόμορφο ὅριο τῆς ἀναδρομικῆς ἀκολουθίας Picard στό* I, *ἡ ὁποία ὁρίζεται ὡς*

$$\varphi_0(t) = \xi \qquad \textit{καί} \qquad \varphi_{n+1}(t) = \xi + \int_\tau^t f\big(s, \varphi_n(s)\big)\, ds,$$

γιά κάθε $n \in \mathbb{N}$ *καί* $t \in I$. *Ἐπί πλέον τό* (3.7) *ἀπολαμβάνει μοναδικότητος στό διάστημα* $I = [\tau - \gamma, \tau + \gamma]$.

Παρατήρηση. Στήν ἐκφυλισμένη περίπτωση ὅπου $M = \sup_{(t,x)\in K} \big|f(t,x)\big| = 0$, θέτομε $\gamma = \alpha$. Στήν περίπτωση αὐτή τό (3.7) ἔχει ὡς λύση τήν σταθερή συνάρτηση.

Ἀποδειξη.

[Α] Ὕπαρξη:

[Α.1] *Ἡ ἀκολουθία Picard εἶναι καλῶς ὁρισμένη.* Κατασκευάζομε σέ πρῶτο στάδιο λύση στό διάστημα $[\tau, \tau + \gamma]$. Ὁρίζομε λοιπόν στό διάστημα $[\tau, \tau + \gamma]$ τήν ἀκολουθία Picard:

$$\varphi_0(t) = \xi \qquad \text{καί} \qquad \varphi_{n+1}(t) = \xi + \int_\tau^t f\big(s, \varphi_n(s)\big)\, ds, \tag{3.9}$$

γιά κάθε $n \in \mathbb{N}$. Στόχος μας εἶναι νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ ἀνωτέρω ἀναδρομική ἀκολουθία συγκλίνει ὁμοιομόρφως στό $[\tau, \tau + \gamma]$. Κατ' ἀρχάς θά πρέπει νά δειχθεῖ ὅτι ἡ ἀκολουθία συναρτήσεων $\{\varphi_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$, *ὁρίζεται καλῶς* στό διάστημα $[\tau, \tau + \gamma]$. Συγκεκριμένα, ὅτι τό δεξιό μέλος τῆς (3.9) ἔχει ἔννοια γιά κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ὅπερ σημαίνει ὅτι θά πρέπει νά ἀποδειχθεῖ ὅτι τό ζεῦγος $\big(s, \varphi_n(s)\big)$ ἀνήκει στό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς f γιά κάθε $s \in [\tau, \tau + \gamma]$ καί $n \in \mathbb{N}$. Πρός τοῦτο ἀρκεῖ νά ἀποδειχθεῖ ὅτι

$$\big(s, \varphi_n(s)\big) \in K \qquad \text{γιά κάθε} \quad s \in [\tau, \tau + \gamma],$$

γιά κάθε $n \in \mathbb{N}$, τό ὁποῖο σημαίνει ὅτι

$$\varphi_n(s) \in [\xi - \beta, \xi + \beta] \qquad \text{γιά κάθε} \quad s \in [\tau, \tau + \gamma].$$

Ἰσοδύναμα:

$$\big|\varphi_n(s) - \xi\big| \le \beta \qquad \text{γιά κάθε} \quad s \in [\tau, \tau + \gamma]. \tag{3.10}$$

Ἡ (3.10) θά ἀποδειχθεῖ ἐπαγωγικῶς, καί ὅπως θά φανεῖ, τό γ ἐπελέγη γι' αὐτόν ἀκριβῶς τό λόγο, ὅπως φαίνεται ἀπό τήν (3.8).

Γιά $n = 0$, ἔχομε ὅτι $\varphi_0(t) = \xi$, ὁπότε ἡ (3.10) ἰσχύει. Ἔστω ὅτι ἡ (3.10) ἰσχύει γιά $n = k$ ὁπότε

$$\left|\varphi_k(s) - \xi\right| \leq \beta \qquad \text{γιά κάθε} \quad s \in [\tau, \tau + \gamma].$$

Ἑπομένως ἡ φ_{k+1} ὁρίζεται καλῶς στό διάστημα $[\tau, \tau + \gamma]$ καί θά ἔχομε

$$\varphi_{k+1}(t) = \xi + \int_\tau^t f\big(s, \varphi_k(s)\big)\, ds \qquad \text{γιά κάθε} \quad t \in [\tau, \tau + \gamma].$$

Ἄρα:

$$\begin{aligned} |\varphi_{k+1}(t) - \xi| &= \Big|\int_\tau^t f\big(s, \varphi_k(s)\big)\, ds\Big| \leq \int_\tau^t \big|f\big(s, \varphi_k(s)\big)\big|\, ds \\ &\leq M(t - \tau) \qquad (3.11) \\ &\leq M\gamma \\ &\leq \beta. \qquad (3.12) \end{aligned}$$

Ἡ (3.11) ἰσχύει διότι $\big|f\big(s, \varphi_k(s)\big)\big| \leq M$ στο K. Ἐνῶ ἡ (3.12) ἀποτελεῖ συνέπεια τῆς (3.8). Ἐν τέλει λοιπόν ἔχομε

$$\varphi_{k+1}(t) \in [\xi - \beta, \xi + \beta], \qquad \text{γιά κάθε} \quad t \in [\tau, \tau + \gamma].$$

Συνεπῶς, ἡ ἐπαγωγική μέθοδος ἐφαρμόζεται καί ἡ $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ὁρίζεται καλῶς.

[A.2] *Ἡ ἀκολουθία $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ὁμοιομόρφως ἐπί τοῦ I.* Θά μελετήσομε κατ' ἀρχάς τήν περίπτωση ὅπου $t \in [\tau, \tau + \gamma]$. Ἔχομε:

$$\begin{aligned} \big|\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)\big| &= \Big|\int_\tau^t \Big(f\big(s, \varphi_n(s)\big) - f\big(s, \varphi_{n-1}(s)\big)\Big)\, ds\Big| \\ &= \int_\tau^t \big|f\big(s, \varphi_n(s)\big) - f\big(s, \varphi_{n-1}(s)\big)\big|\, ds \\ &= L \int_\tau^t \big|\varphi_n(s) - \varphi_{n-1}(s)\big|\, ds, \end{aligned}$$

ὅπου ἡ τελευταία ἀποτελεῖ συνέπεια τῆς συνθήκης Lipschitz. Εἰδικότερα γιά $n = 0$ ἰσχύει ὅτι:

$$\begin{aligned} \big|\varphi_1(t) - \varphi_0(t)\big| &= \big|\varphi_1(t) - \xi\big| = \Big|\int_\tau^t f\big(s, \varphi_0(s)\big)\, ds\Big| \\ &= M(t - \tau). \end{aligned}$$

Ὁμοίως γιά $n = 1$ ἰσχύει:

$$\begin{aligned}\big|\varphi_2(t) - \varphi_1(t)\big| \;&\le\; L\int_\tau^t \big|\varphi_1(s) - \varphi_0(s)\big|\,ds \;\le\; L\int_\tau^t M(s-\tau)\,ds \\ &=\; \frac{ML}{2}(t-\tau)^2.\end{aligned}$$

Ἐπαγωγικῶς, ἔχομε

$$\begin{aligned}\big|\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)\big| \;&\le\; L\int_\tau^t \big|\varphi_n(s) - \varphi_{n-1}(s)\big|\,ds \;\le\; L\int_\tau^t \frac{ML^{n-1}(s-t)^n}{n!}\,ds \\ &=\; \frac{M}{L}\,\frac{L^{n+1}(t-\tau)^{n+1}}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

Ὅπως θά δοῦμε, ἡ ὁμοιόμορφη σύγκλιση στό διάστημα $[\tau, \tau+\gamma]$, θά προκύψει ἀπό τό *Κριτήριο Weierstrass*, (*Πρόταση 3.1.4* στήν σελίδα 121.) Στήν ἀναδρομική ἀκολουθία ἡ ὁποία κατασκευάσθηκε ἐπί τοῦ διαστήματος $[\tau, \tau+\gamma]$ ἔχομε:

$$\big|\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)\big| \;\le\; \frac{M}{L}\,\frac{L^{n+1}(t-\tau)^{n+1}}{(n+1)!} \;\le\; \frac{M}{L}\,\frac{(L\gamma)^{n+1}}{(n+1)!} \;=\; M_n,$$

ἐνῷ

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_n \;=\; \frac{M}{L}(\mathrm{e}^{L\gamma} - 1) \;<\; \infty.$$

Ἄρα βάσει τοῦ *Κριτηρίου Weierstrass* (*Πρόταση 3.1.4*), ἡ $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ὁμοιομόρφως στό $[\tau, \tau+\gamma]$.

[A.3] *Τό ὅριο τῆς ἀκολουθίας Picard ἀποτελεῖ λύση τοῦ* (3.7). Ἔστω $\varphi : [\tau, \tau+\gamma] \longrightarrow \mathbb{R}$, τό ὅριο αὐτῆς τῆς ἀκολουθίας. Ἡ ὁμοιόμορφη σύγκλιση τῆς ἀκολουθίας ἔχει τίς ἀκόλουθες συνέπειες:

(i) Ἡ φ εἶναι συνεχής, ὡς ὁμοιόμορφο ὅριο συνεχῶν συναρτήσεων. (Βλέπε *Πρόταση 3.1.2* στήν σελίδα 119.)

(ii) Ἡ ἀκολουθία συναρτήσεων $\psi_n(t) = f\big(t, \varphi_n(t)\big)$, συγκλίνει ἐπίσης ὁμοιομόρφως, στό $[\tau, \tau+\gamma]$, μέ ὅριο τήν συνάρτηση $\psi(t) = f\big(t, \varphi(t)\big)$ διότι

$$\big|f\big(t, \varphi_n(t)\big) - f\big(t, \varphi(t)\big)\big| \;\le\; L\,\big|\varphi_n(t) - \varphi(t)\big|.$$

(iii) Ἡ κατωτέρω σύγκλιση

$$\begin{aligned}\zeta_n(t) \;&=\; \xi + \int_\tau^t f\big(s, \varphi_n(s)\big)\,ds \\ &\longrightarrow\; \xi + \int_\tau^t f\big(s, \varphi(s)\big)\,ds \;=\; \zeta(t),\end{aligned}$$

εἶναι ἐπίσης ὁμοιόμορφη στό $[\tau, \tau+\gamma]$, λόγῳ τῆς *Προτάσεως 3.1.3 στήν σελίδα 119.*

Ὅμως $\zeta_n = \varphi_{n+1}$ καί ἐπειδή

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n \;=\; \lim_{n\to\infty} \varphi_{n+1},$$

τότε $\zeta(t) = \varphi(t)$. Αὐτό συνεπάγεται ὅτι:

$$\varphi(t) \;=\; \xi + \int_\tau^t f\big(s, \varphi(s)\big)\, ds \qquad \text{γιά κάθε } t \in [\tau, \tau+\gamma]. \tag{3.13}$$

Ἄρα ἡ $\varphi(t)$ ἱκανοποιεῖ τήν ὁλοκληρωτική μορφή τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (3.7). Ἐπίσης, τό δεξιό μέλος τῆς (3.13) ἀποτελεῖ συνεχῶς διαφορίσιμη συνάρτηση, ὡς ἀόριστο ὁλοκλήρωμα συνεχοῦς. Συνεπῶς, ἡ $\varphi(t)$ εἶναι λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν στό διάστημα $[\tau, \tau+\gamma]$. Ἡ κατασκευή τῆς λύσεως στό διάστημα $[\tau-\gamma, \tau]$ πραγματοποιεῖται ἀναλόγως. (Βλέπε *Ἄσκηση* 3.2.5 στήν σελίδα 135.)

[B] Μοναδικότης:

Ἔστω $\psi : J \to \mathbb{R}$ ἄλλη λύση τοῦ ἰδίου προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν, ὅπου J ἀνοικτό διάστημα καί $\tau \in J$. Θά πρέπει νά δείξομε ὅτι οἱ φ καί ψ ταυτίζονται στό $J \cap [\tau-\gamma, \tau+\gamma]$. Χωρίς βλάβη τῆς γενικότητος ὑποθέτομε ὅτι $J \subset [\tau-\gamma, \tau+\gamma]$. Θά δείξομε κατ' ἀρχάς ὅτι

$$\xi - \beta \;\le\; \psi(t) \;\le\; \xi + \beta \quad \text{γιά κάθε} \quad t \in J,$$

ἤ ἰσοδύναμα ὅτι

$$\big(t, \psi(t)\big) \in K \quad \text{γιά κάθε} \quad t \in J.$$

Ἄν αὐτό δέν συνέβαινε, τότε θά ὑπῆρχε $t_1 \in J$ ὥστε $\psi(t_1) > \xi+\beta$ ἤ $\psi(t_1) < \xi-\beta$. Ὑποθέτομε ὅτι $t_1 > \tau$. (Ἀναλόγως πράττομε ὅταν $t_1 < \tau$.) Δυνάμεθα σέ μία τέτοια περίπτωση νά ὁρίσομε τό *τελευταῖο* t ὥστε $\big(t, \psi(t)\big) \in K$. Θέτομε:

$$S \;=\; \big\{\, t \in [\tau, \tau+\gamma] \;:\; \psi|_{[\tau,t]} \subset K \,\big\}.$$

Τό S εἶναι μή κενό διότι $\tau \in S$ καί φράσσεται ἄνω ἀπό τό t_1, καί ὡς ἐκ τούτου ἔχει ἐλάχιστο ἄνω φράγμα, ἔστω $\tau^* = \sup S$. Προφανῶς $\tau^* < t_1 \le \tau+\gamma$. Ἐπαφίεται στόν ἀναγνώστη νά δείξει ὅτι:

(i) $\psi|_{[\tau,\tau^*]} \subset K$.

(ii) $\psi(\tau^*) = \xi - \beta$ ἤ $\psi(\tau^*) = \xi + \beta$.

Λόγῳ τῆς (i)

$$\big|\psi(t) - \xi\big| \;=\; \Big|\int_\tau^t f\big(s, \psi(s)\big)\, ds\Big| \;\le\; \int_\tau^t \big|f\big(s, \varphi(s)\big)\big|\, ds \;\le\; M(t-\tau),$$

γιά κάθε $t \in [\tau, \tau^*]$. Συνδυάζοντας τήν ἀνωτέρω καί τήν (ii) λαμβάνομε

$$\beta \;=\; \big|\psi(\tau^*) - \xi\big| \;\le\; M(\tau^* - \tau) \;<\; M\gamma.$$

Ἄτοπο διότι $\gamma \leq M/\beta$. Ἔχοντας δείξει ὅτι $\psi|_J \subset K$, ἀποδεικνύομε τήν μοναδικότητα, κατ' ἀρχάς στό διάστημα $[\tau, \tau+\gamma]$. Ἡ ἀπόδειξη τῆς μοναδικότητος στό $[\tau-\gamma, \tau]$ πραγματοποιεῖται ἀναλόγως. (Βλέπε *Ἄσκηση* 3.2.5.)

Θά δείξομε λοιπόν ὅτι οἱ φ καί ψ ταυτίζονται στό J τό ὁποῖο ἔχει ὑποτεθεῖ ὑποσύνολο τοῦ $I = [\tau-\gamma, \tau+\gamma]$. Γιά κάθε $t \in [\tau, \tau+\gamma] \cap J$ ἔχομε:

$$\varphi(t) \;=\; \xi + \int_\tau^t f\big(s, \varphi(s)\big)\, ds, \qquad \psi(t) \;=\; \xi + \int_\tau^t f\big(s, \psi(s)\big)\, ds. \tag{3.14}$$

Ὅμως, τά γραφήματα τῶν φ καί ψ, περιορισμένων στό $[\tau, \tau+\gamma] \cap J$, περιέχονται στό K, στό ὁποῖο ἱκανοποιεῖται ἡ συνθήκη Lipschitz ὡς πρός τήν δεύτερη μεταβλητή μέ σταθερά L. Ἀφαιρῶντας τίς φ καί ψ στήν (3.14), λαμβάνομε

$$\begin{aligned} \big|\varphi(t) - \psi(t)\big| = \Big| \int_\tau^t \big(f\big(s,\varphi(s)\big) - f\big(s,\psi(s)\big)\big)\, ds \Big| \;\leq\; \int_\tau^t \big|f\big(s,\varphi(s)\big) - f\big(s,\psi(s)\big)\big|\, ds \\ \leq L \int_\tau^t \big|\varphi(s) - \psi(s)\big|\, ds. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Κατά συνέπειαν, ἄν θέσομε

$$d(t) \;=\; \int_\tau^t |\varphi(s) - \psi(s)|\, ds, \tag{3.16}$$

θά ἔχομε ὅτι ἡ d εἶναι συνεχῶς διαφορίσιμη καθώς καί ὅτι

$$d(t) \;\geq\; 0, \quad \text{γιά κάθε} \quad t \geq \tau. \tag{3.17}$$

Ἀπό τήν (3.15) προκύπτει ὅτι:

$$d'(t) \;=\; \big|\varphi(t) - \psi(t)\big| \;\leq\; L \int_\tau^t \big|\varphi(s) - \psi(s)\big|\, ds \;=\; L\, d(t).$$

Συνεπῶς γιά κάθε $t \in [\tau, \tau+\gamma] \cap J$ θά ἔχομε τίς ἰσοδυναμίες:

$$\begin{aligned} d'(t) - L\, d(t) \leq 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathrm{e}^{-Lt}\big(d'(t) - L\, d(t)\big) \leq 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \big(\mathrm{e}^{-Lt} d(t)\big)' \leq 0, \end{aligned}$$

ὁπότε ὁλοκληρώνοντας τήν τελευταία στό διάστημα $[\tau, t]$ λαμβάνομε

$$\mathrm{e}^{-Lt} d(t) - \mathrm{e}^{-L\tau} d(\tau) \leq 0 \cdot (t - \tau) \tag{3.18}$$

καί ἐπειδή λόγῳ τῆς (3.16), $d(\tau) = 0$, ἡ (3.18) λαμβάνει τήν μορφή

$$d(t) \;\leq\; 0. \tag{3.19}$$

Συνδυάζοντας τήν (3.17) μέ τήν (3.19) θά ἔχομε $d(t) = 0$ γιά κάθε $t \in [\tau, \tau+\gamma]$ καί συνεπῶς $d'(t) = \big|\varphi(t) - \psi(t)\big| = 0$. Ἄρα οἱ δύο λύσεις ταυτίζονται στό $[\tau, \tau+\gamma]$. **ὅ.ἔ.δ.**

Ἡ ἀποδεικτική διαδικασία τήν ὁποία ἀκολουθήσαμε μᾶς ἐπιτρέπει νά διατυπώσομε τό ἀκόλουθο πόρισμα:

Πόρισμα 3.2.2. *Ἔστω $f : D \to \mathbb{R}$ συνεχής, ὅπου D ἀνοικτό ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}^2$. Ἄν ἡ f εἶναι διαφορίσιμη ὡς πρός τήν δεύτερη μεταβλητή x στό D καί*

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} \in C(D),$$

τότε τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(\tau) = \xi, \end{cases} \tag{3.20}$$

ἔχει λύση γιά κάθε $(\tau,\xi) \in D$. Τό δέ (3.20) ἀπολαμβάνει τοπικῆς μοναδικότητος.

Απόδειξη. Ἀφοῦ $(\tau,\xi) \in D$ καί D ἀνοικτό, ὑπάρχουν α, $\beta > 0$, ὥστε

$$K = [\tau - \alpha, \tau + \alpha] \times [\xi - \beta, \xi + \beta] \subset D.$$

Ἄν $L = \max_{(t,x)\in K} |f_x(t,x)|$, τότε ἡ f ἱκανοποιεῖ τήν συνθήκη Lipschitz ὡς πρός τήν δεύτερη μεταβλητή μέ σταθερά L καί λόγῳ τοῦ *Θεωρήματος 3.2.1* τό (3.20) ἔχει μοναδική λύση στό $[\tau - \gamma, \tau + \gamma]$, ὅπου $\gamma = \min\{\alpha, \beta/M\}$ καί $M = \max_{(t,x)\in K} |f(t,x)|$. □

3.2.3 Τοπική συνθήκη Lipschitz καί καθολική μοναδικότης

Τό *Θεώρημα 3.2.1* ἔχει τοπική ἰσχύ. Κατασκευάζει λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν σέ μιά περιοχή τοῦ ἀρχικοῦ χρόνου, ἐν γένει κατά πολύ μικρότερη ἀπ' αὐτήν στήν ὁποία τό πρόβλημα ἔχει λύση καί ἀποφαίνεται γιά τήν μοναδικότητα λύσεων μόνο στό συγκεκριμένο διάστημα. Στήν παροῦσα ὑποενότητα θά δοῦμε πῶς δύναται νά καταστεῖ ἡ μοναδικότης *καθολική*. Στήν ἀπόδειξη τῆς μοναδικότητος, ἐχρησιμοποιήθη τό γεγονός ὅτι ἡ συνάρτηση ροῆς f ἱκανοποιεῖ τήν συνθήκη Lipschitz σέ κάποιο συμπαγές ὑποσύνολο K τοῦ πεδίου ὁρισμοῦ D τῆς f. Συγκεκριμένα, ὑποθέσαμε ὅτι ὑπάρχει $L > 0$, τέτοιο ὥστε, γιά κάθε (t,x_1), (t,x_2) στό K νά ἰσχύει ὅτι

$$\big|f(t,x_1) - f(t,x_2)\big| \le L\,|x_1 - x_2|.$$

Ἀπαίτηση ἀπό τήν f νά ἱκανοποιεῖ τήν ἀνωτέρω ἀνισότητα γιά κάθε (t,x_1), (t,x_2) στό D, καί ἰδιαιτέρως μέ τήν ἴδια σταθερά L γιά ὅλο τό D, θά ἦταν ὑπερβολική.

Γιά παράδειγμα στήν γραμμική ἐξίσωση $x' = tx$, δέν ἱκανοποιεῖται τέτοια καθολική συνθήκη Lipschitz, παρά τό γεγονός ὅτι οἱ λύσεις τῶν ἀντιστοίχων προβλημάτων ἀρχικῶν τιμῶν ἀπολαμβάνουν καθολικῆς ὑπάρξεως καί μοναδικότητος.

Λογικότερη ἀπαίτηση ἀποτελεῖ ἡ *τοπική* ἱκανοποίηση τῆς συνθήκης Lipschitz. (Βλέπε *Ὁρισμό 3.1.6*.) Τοπικῶς Lipschitz ὡς πρός τήν δεύτερη μεταβλητή εἶναι ὅλες οἱ συναρτήσεις ροῆς τῶν ὁποίων ἡ μερική παράγωγος ὡς πρός x εἶναι συνεχής στό πεδίο ὁρισμοῦ της D. Ἰδιαιτέρως, ἄν $K = [\tau - \alpha, \tau + \alpha] \times [\xi - \beta, \xi + \beta] \subset D$, τότε

$$\big|f(t,x_1) - f(t,x_2)\big| \le L_K\,|x_1 - x_2,|, \tag{3.21}$$

γιά κάθε (t,x_1), $(t,x_2)\in K$, ὅπου

$$L_K \,=\, \max_{(t,x)\in K} \big|f_x(t,x)\big|.$$

Ἡ (3.21) ἀποτελεῖ συνέπεια τοῦ *Θεωρήματος τῆς Μέσης Τιμῆς*. Ἔχομε λοιπόν κατ' ἀρχάς τό κατωτέρω ἀποτέλεσμα τό ὁποῖο ἀποτελεῖ ἄμεση συνέπεια τοῦ *Θεωρήματος 3.2.1*:

Πόρισμα 3.2.3. *Ἔστω $f : D \to \mathbb{R}$, ὅπου D ἀνοικτό ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}^2$, συνεχής καί τοπικῶς Lipschitz ὡς πρός τήν δεύτερη μεταβλητή x. Τότε γιά κάθε (τ,ξ) στό D, ὑπάρχει διάστημα I, $\tau\in I$, στό ὁποῖο τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν:*

$$\begin{cases} x' \,=\, f(t,x), \\ x(\tau) \,=\, \xi, \end{cases}$$

ἀπολαμβάνει ὑπάρξεως καί τοπικῆς μοναδικότητος λύσεων. □

Ἰδιαιτέρως ὅμως ἔχομε τό κατωτέρω ἰσχυρό ἀποτέλεσμα *καθολικῆς μοναδικότητος:*

Πρόταση 3.2.4. *Ἔστω $f : D \to \mathbb{R}$ συνεχής, ὅπου D ἀνοικτό ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}^2$ καί f ἱκανοποιεῖ τοπικῶς τήν συνθήκη Lipschitz ὡς πρός τήν δεύτερη μεταβλητή. Τότε γιά κάθε $(\tau,\xi)\in D$ τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν*

$$\begin{cases} x' \,=\, f(t,x) \\ x(\tau) \,=\, \xi, \end{cases} \tag{3.22}$$

ἀπολαμβάνει καθολικῆς μοναδικότητος.

Πρωτη Αποδειξη. Λόγῳ τοῦ *Πορίσματος 3.2.3*, διά κάθε $(\tau,\xi)\in D$, τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν (3.22) ἀπολαμβάνει τοπικῆς μοναδικότητος. Συνεπῶς, ἐξ αἰτίας τῆς *Προτάσεως 1.7.2* στήν σελίδα 43, ὅλα τά ἀνωτέρω προβλήματα ἀρχικῶν τιμῶν ἀπολαμβάνουν καθολικῆς μοναδικότητος. □

Δευτερη Αποδειξη. Ἡ ἀπόδειξη αὐτή πραγματοποιεῖται χωρίς τήν χρήση τῆς *Προτάσεως 1.7.2*. Ἔστω $I = (\alpha,\beta)$, ὅπου α, $\beta\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$. Θά ἀποδειχθεῖ κατ' ἀρχάς ὅτι οἱ λύσεις ταυτίζονται στό $[\tau,\beta)$. Ἡ ἀπόδειξη στό $(\alpha,\tau]$ πραγματοποιεῖται ἀναλόγως. Ἔστω

$$S \,=\, \big\{\, t\in I \,:\, \varphi_1(s)=\varphi_2(s) \text{ γιά κάθε } s\in[\tau,t)\,\big\}.$$

Τό S εἶναι μή κενό διότι συμφώνως πρός τό *Θεώρημα 3.2.1* δυνάμεθα νά κατασκευάσομε διάστημα $[\tau-\gamma,\tau+\gamma]$ ὅπου ὑπάρχει μοναδική λύση. Ἄν οἱ φ_1, φ_2 δέν ταυτίζονται, τότε θά ὑπάρχει $t_1 > t$, ὥστε $\varphi_1(t_1)\neq\varphi_2(t_1)$ καί ὡς ἐκ τούτου τό t_1 θά εἶναι ἄνω φράγμα τοῦ S. Ἔστω t_2 τό ἐλάχιστο ἄνω φράγμα τοῦ S. Τότε $\tau < t_2 \le t_1$. Ἐπίσης

$$\varphi_1\big|_{[\tau,t_2)} \,=\, \varphi_2\big|_{[\tau,t_2)},$$

λόγῳ τοῦ ὅτι τό t_2 ἀποτελεῖ ἐλάχιστο ἄνω φράγμα. Ἐπειδή ὅμως οἱ φ_1, φ_2 ὁρίζονται στό t_2, ὑποχρεωτικῶς θά εἶναι συνεχεῖς στό t_2. Ἑπομένως θά ἔχομε:

$$\varphi_1(t_2) = \lim_{t \to t_2^-} \varphi_1(t) = \lim_{t \to t_2^-} \varphi_2(t) = \varphi_2(t_2).$$

Ἔστω $\eta = \varphi_1(t_2)$. Τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(t_2) = \eta, \end{cases} \tag{3.23}$$

ἔχει μοναδική λύση σέ κάποιο κλειστό διάστημα τῆς μορφῆς $[t_2 - \delta, t_2 + \delta]$, ὅπου δ θετικό, βάσει τοῦ *Θεωρήματος 3.2.1*. Ἑκάστη τῶν φ_1, φ_2 ἀποτελοῦν λύσεις τοῦ (3.23). Ἄρα οἱ φ_1, φ_2 ταυτίζονται καί πέραν τοῦ t_2. Ἄτοπο. □

Ἄμεση συνέπεια τῆς ἀποτέρω προτάσεως ἀποτελεῖ τό ἀκόλουθο πόρισμα:

Πόρισμα 3.2.5. *Ἔστω $f : D \to \mathbb{R}$ συνεχής, ὅπου D ἀνοικτό ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}^2$. Ἄν ἡ f εἶναι διαφορίσιμη ὡς πρός τήν δεύτερη μεταβλητή x στό D καί $f_x \in C(D)$, τότε τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν*

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(\tau) = \xi, \end{cases}$$

ἀπολαμβάνει καί καθολικῆς μοναδικότητος γιά κάθε $(\tau, \xi \in D)$. □

Ἀσκήσεις

3.2.1 Ἐξηγῆστε πῶς προκύπτει ἐπαγωγικῶς ὁ τύπος (3.6).

3.2.2 Νά βρεθεῖ ὁ γενικός τύπος τῆς ἀναδρομικῆς ἀκολουθίας Picard γιά τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x' = 2x + 1, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Ἀποδείξατε ὅτι ἡ ἀκολουθία αὐτή συγκλίνει ὁμοιομόρφως σέ κάθε κλειστό διάστημα, καί τό ὅριό της ἀποτελεῖ τήν μοναδική λύση τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν.

3.2.3 Νά κάνετε τό ἴδιο γιά τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν:

$$\begin{cases} x' = \alpha(t)x, \\ x(\tau) = \xi, \end{cases}$$

ὅπου $\alpha \in C(I)$ καί I ἀνοικτό διάστημα μέ $\tau \in I$. Σέ ποιά διαστήματα συγκλίνει ἡ ἀκολουθία Picard ὁμοιομόρφως;

Υποδειξη. Ὁ γενικός τύπος τοῦ ἀναδρομικῆς ἀκολουθίας Picard εἶναι

$$\varphi_n(t) = \Big(1 + A(t) + \frac{1}{2}A^2(t) + \cdots + \frac{1}{n!}A^n(t)\Big)\xi,$$

ὅπου $A(t) = \displaystyle\int_\tau^t \alpha(s)\,ds$.

3.2.4 Νά κάνετε τό ἴδιο γιά τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν:

$$\begin{cases} x' \,=\, \alpha(t)x + \beta(t), \\ x(\tau) \,=\, \xi, \end{cases}$$

ὅπου $\alpha,\, \beta \in C(I)$ καί I ἀνοικτό διάστημα μέ $\tau \in I$. Σέ ποιά διαστήματα συγκλίνει ἡ ἀκολουθία Picard ὁμοιομόρφως;

Υποδειξη. Ὁ γενικός τύπος τῆς ζητούμενης ἀναδρομικῆς ἀκολουθίας Picard εἶναι (γιά $n \geq 1$)

$$\varphi_n(t) \,=\, \xi \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\Big(\int_\tau^t \alpha(s)\,ds\Big)^k + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}\bigg(\int_\tau^t \Big(\int_s^t \alpha(\sigma)\,d\sigma\Big)^k \beta(s)\,ds\bigg).$$

Ὁ ἀνωτέρω τύπος ἀποδεικνύεται μέ ἤ χωρίς τήν χρήση τῆς ταυτότητος

$$\int_\tau^t f(s)\Big(\int_\tau^s g(\sigma)\,d\sigma\Big)\,ds \,=\, \int_\tau^t \Big(\int_s^t f(\sigma)\,d\sigma\Big)\,g(s)\,ds.$$

3.2.5 Στίς ἀποδείξεις, τόσο τῆς ὑπάρξεως ὅσο καί τῆς μοναδικότητος, δέν πραγματοποιήσαμε τήν κατασκευή λύσεως στό διάστημα $[\tau - \gamma, \tau]$ καί στό ἴδιο διάστημα δέν ἀποδείξαμε τήν μοναδικότητα. Ἀφοῦ μελετήθοῦν προσεκτικά οἱ προαναφερθεῖσες ἀποδείξεις, νά συμπληρωθοῦν τά κενά.

3.2.6 Δείξατε ὅτι μέ τίς ὑποθέσεις τοῦ *Θεωρήματος 3.2.1* ἡ ἀναδρομική ἀκολουθία Picard ἀφ' ἑνός μέν θά ὁρίζετο καλῶς καί ἀφ' ἑτέρου θά συνέκλινε ὁμοιομόρφως στήν λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν, ἀκόμη καί στήν περίπτωση κατά τήν ὁποία ὁ πρῶτος της ὅρος φ_0 ἐπελέγετο ὡς τυχοῦσα συνεχής συνάρτηση, ἱκανοποιοῦσα τήν ἀνισότητα $\big|\varphi_0(t) - \xi\big| \leq \beta$ γιά κάθε $t \in [\tau - \gamma, \tau + \gamma]$.

3.2.7 Ἄν ἡ συνάρτηση $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ ἱκανοποιεῖ τοπικῶς τήν συνθήκη Lipschitz καί $f(\xi) = 0$ γιά κάποιο $\xi \in (a,b)$, τότε νά βρεθεῖ ἡ λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x' \,=\, f(x), \\ x(\tau) \,=\, \xi. \end{cases}$$

3.2.8 Ἔστω μιά συνάρτηση $f : D \to \mathbb{R}$, ὅπου D ἀνοικτό ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}^2$, ἱκανοποιεῖ τοπικῶς τήν συνθήκη Lipschitz καί $\varphi_1,\ \varphi_2 : I \to \mathbb{R}$ λύσεις τῆς $x' = f(t,x)$. Ἄν $\varphi_1(\tau) < \varphi_2(\tau)$ γιά κάποιο $\tau \in I$, τότε $\varphi_1(t) < \varphi_2(t)$ γιά κάθε t στό κοινό πεδίο ὁρισμοῦ τῶν φ_1 καί φ_2.

3.2.9 Ἔστω f τοπικῶς Lipschitz στό $\mathbb{R}$ καί $\varphi_1, \varphi_2 : I \to \mathbb{R}$, λύσεις τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως $x' = f(x)$, ὅπου I ἀνοικτό διάστημα. Ἄν ἐπί πλέον ὑπάρχουν $\tau_1, \tau_2 \in I$, τέτοια ὥστε $\tau_1 < \tau_2$ καί

$$\varphi_1(\tau_1) \,<\, \varphi_2(\tau_2) \,<\, \varphi_1(\tau_2),$$

τότε ὑπάρχει $\tau > 0$ τέτοιο ὥστε $\varphi_1(t+\tau) = \varphi_2(t)$, γιά κάθε t γιά τό ὁποῖο ὁρίζονται ταυτοχρόνως τά $\varphi_1(t+\tau)$ καί $\varphi_2(t)$.

3.2.10 Ἔστω f τοπικῶς Lipschitz στό $\mathbb{R}$ καί $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, λύσεις τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως $x' = f(x)$. Ἄν $\varphi_1[\mathbb{R}] = \mathbb{R}$, τότε ὑπάρχει $\tau \in \mathbb{R}$ ὥστε $\varphi_1(t+\tau) = \varphi_2(t)$, γιά κάθε $t \in \mathbb{R}$.

3.2.11 Ἔστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τοπικῶς Lipschitz καί ἀρτία. (Ἤτοι, $f(-x) = f(x)$.) Δείξατε ὅτι κάθε λύση φ τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x' \,=\, f(x), \\ x(0) \,=\, 0, \end{cases}$$

εἶναι περιττή. (Ἤτοι, $\varphi(-t) = -\varphi(t)$.)

3.2.12 Ἐστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τοπικῶς Lipschitz καί περιττή. $\big($Ἤτοι, $f(-x)=-f(x)$.$\big)$ Δείξατε ὅτι κάθε λύση φ τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x' = f(x), \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

εἶναι ταυτικῶς μηδενική.

3.2.13 Ἔστω ὅτι ἡ συνάρτηση $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ εἶναι τοπικῶς συνεχής Lipschitz καί $\xi_1,\,\xi_2\in(a,b)$, $\xi_1<\xi_2$, ρίζες τῆς f. Δηλαδή, $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

(i) Δείξατε ὅτι ἄν ἡ $\varphi:I\to\mathbb{R}$ ἀποτελεῖ λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x' = f(x), \\ x(\tau) = \xi, \end{cases} \tag{3.24}$$

ὅπου I ἀνοικτό διάστημα, $\tau\in I$ καί $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$, τότε $\varphi(t)\in(\xi_1,\xi_2)$ γιά κάθε $t\in I$.

(ii)* Δείξατε ὅτι τό ἀνωτέρω πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν ἔχει καθολικῶς ὁρισμένη λύση. [Ἤτοι, ὅτι ἔχει λύση μέ πεδίο ὁρισμοῦ ὅλο τό $\mathbb{R}$.]

(iii)* Ἄν ἐπί πλέον ἡ f εἰναι θετική στό διάστημα (ξ_1,ξ_2), τότε θά ἰσχύει ὅτι

$$\lim_{t\to-\infty}\varphi(t) = \xi_1 \qquad \textit{καί} \qquad \lim_{t\to+\infty}\varphi(t) = \xi_2.$$

Υποδειξη. Ἔστω ξ_1, ξ_2 διαδοχικές ρίζες τῆς f καί f θετική στό (ξ_1,ξ_2). Ὁρίζομε

$$T(\eta) = \tau + \int_\xi^\eta \frac{d\lambda}{f(\lambda)},\ \ \eta\in(\xi_1,\xi_2).$$

Ἡ T εἶναι γνησίως αὔξουσα καί $T'>0$ στό (ξ_1,ξ_2). Ἐπίσης

$$\begin{aligned} T(\eta) &= \tau + \int_\xi^\eta \frac{d\lambda}{f(\lambda)-f(\xi_2)} \geq \tau + \int_\xi^\eta \frac{d\lambda}{\max_{\eta\in[\xi_1,\xi_2]}|f'(\eta)|(\xi_2-\lambda)} \\ &= \tau + \frac{1}{\max_{\eta\in[\xi_1,\xi_2]}|f'(\eta)|}\log\left(\frac{\xi_2-\xi}{\xi_2-\eta}\right), \end{aligned}$$

καί συνεπῶς $\lim_{\eta\to\xi_2}T(\eta)=+\infty$. Παρομοίως, $\lim_{\eta\to\xi_1}T(\eta)=-\infty$. Ὡς ἐκ τούτου, ἡ $T:(\xi_1,\xi_2)\to\mathbb{R}$ εἶναι γνησίως αὔξουσα καί $1-1$ καί ἐπί. Ἔστω $\varphi(t)=T^{-1}(t)$. Τότε ἡ φ ἀποτελεῖ λύση τοῦ (3.24) καί ἔχει πεδίο ὁρισμοῦ τό $\mathbb{R}$ καί ἱκανοποιεῖ $\lim_{t\to-\infty}\varphi(t)=\xi_1$, $\lim_{t\to+\infty}\varphi(t)=\xi_2$.

3.2.14 Ἔστω $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ συνεχής καί $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$, ὅπου $\xi_1,\xi_2\in(a,b)$ καί $\xi_1<\xi_2$. Ἄν ἐπί πλέον $f(\xi)>0$ γιά κάθε $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$, τότε δείξατε ὅτι τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x' = f(x), \\ x(0) = \xi, \end{cases} \tag{3.25}$$

ἀπολαμβάνει ὑπάρξεως καί μοναδικότητος στό διάστημα $I=(T_1,T_2)$, ὅπου

$$T_1 = \int_\xi^{\xi_1}\frac{d\lambda}{f(\lambda)} \quad \text{καί} \quad T_2 = \int_\xi^{\xi_2}\frac{d\lambda}{f(\lambda)}.$$

[Σημειοῦται ὅτι $T_1,T_2\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$.]

3.2.15 (Συνέχεια) Νά δοθεῖ παράδειγμα ὅπου ἡ λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (3.25) ἐπεκτείνεται μέν πέραν τοῦ $t=T_1$ ἤ $t=T_2$, ἀλλά παύει νά ἀπολαμβάνει μοναδικότητος. [Ὑποθέτομε ὅτι ὅλες οἱ ὑποθέσεις τῆς προηγουμένης ἀσκήσεως ἐξακολουθοῦν νά ἰσχύουν.]

3.2.16 Νά λυθεῖ τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν:

$$\begin{cases} x' = \mathrm{e}^t \tan x, \\ x(0) = \pi. \end{cases}$$

3.2.17 Ἄν μιά συνάρτηση φ ἀποτελεῖ λύση τῆς $x' = f(x)$ στό διάστημα I καί ἡ f ἱκανοποιεῖ τήν συνθήκη Lipschitz, τότε μόνο ἕνα ἀπό τά κατωτέρω δύναται νά συμβαίνει:

(i) φ σταθερή σ' ὅλο τό I,

(ii) φ γνησίως αὔξουσα σ' ὅλο τό I ἤ

(iii) φ γνησίως φθίνουσα σ' ὅλο τό I.

Υποδειξη. Κατ' ἀρχάς διαπιστώσατε ὅτι ἀρκεῖ νά δειχθεῖ ὅτι:

(i) $f\big(\varphi(t)\big) = 0$ σ' ὅλο τό I, ἤ

(ii) $f\big(\varphi(t)\big) > 0$ σ' ὅλο τό I, ἤ τέλος

(iii) $f\big(\varphi(t)\big) < 0$ σ' ὅλο τό I.

Ἀκολούθως ὅτι ἄν γιά κάποιο $\tau \in I$ ἰσχύει ὅτι $f\big(\varphi(\tau)\big) = 0$, τότε λόγῳ μοναδικότητος $\varphi(t) = \varphi(\tau)$ γιά κάθε $t \in I$. Τέλος ὅτι ἄν $f\big(\varphi(\tau_1)\big) > 0$ γιά κάποιο $\tau \in I$ καί $f\big(\varphi(\tau_2)\big) \le 0$ γιά κάποιο ἄλλο $\tau_2 \in I$, τότε θά ὑπάρχει $\tau_3 \in (\tau_1, \tau_2)$ ὥστε $f\big(\varphi(\tau_3)\big) = 0$.

3.2.18 Ἄν ἡ συνεχής συνάρτηση d ἱκανοποιεῖ τήν ἀνισότητα

$$\big|d(t)\big| \le M \int_\tau^t \big|d(s)\big|\, ds,$$

γιά κάθε $t \in [\tau, \tau + \gamma]$, τότε δείξατε ὅτι ἡ $d(t)$ μηδενίζεται ταυτοτικῶς στό $[\tau, \tau + \gamma]$.

3.2.19 Ἔστω ὅτι $f \in D$, ὅπου $D \subset \mathbb{R}^2$ ἀνοικτό καί

$$\big|f(t, x_1) - f(t, x_2)\big| \le L\,|x_1 - x_2|,$$

γιά κάθε $(t, x_1), (t, x_2) \in D$, γιά κάποιο $L > 0$. Ἄν $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}$ λύσεις τῆς ἐξισώσεως

$$x' = f(t, x),$$

ὅπου I ἀνοικτό διάστημα, δείξατε ὅτι γιά κάθε $\tau, t \in I$ ἰσχύει ἡ ἀνισότης

$$\big|\varphi(t) - \psi(t)\big| \le \mathrm{e}^{L|t-\tau|}\big|\varphi(\tau) - \psi(\tau)\big|.$$

3.2.20 Ἄν φ_n ὁ $n-$στός ὅρος τῆς *ἀναδρομικῆς ἀκολουθίας Picard* (στό *Θεώρημα 3.2.1*) καί φ τό ὅριό της, δείξατε ὅτι

$$\big|\varphi_{n+1}(t) - \varphi(t)\big| \le L \int_\tau^t \big|\varphi_n(s) - \varphi(s)\big|\, ds,$$

γιά κάθε $t \in [\tau - \gamma, \tau + \gamma]$ καί ὡς ἐκ τούτου ἀποδεῖξτε ἐπαγωγικῶς ὅτι:

$$\big|\varphi_n(t) - \varphi(t)\big| \le \frac{ML^n|t-\tau|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Οἱ σταθερές L καί M ὁρίζονται στό *Θεώρημα 3.2.1*.

3.2.21 Ἔστω ὅτι μᾶς δίδεται ἡ συνάρτηση ροῆς

$$f(t,x) = \begin{cases} 0 & \text{ἄν} \quad t = 0, \\ 2t & \text{ἄν} \quad 0 < t \leq 1,\ x < 0, \\ 2t - \dfrac{4}{x} & \text{ἄν} \quad 0 < t \leq 1,\ 0 \leq x \leq t^2, \\ -2t & \text{ἄν} \quad 0 < t \leq 1,\ t^2 \leq x. \end{cases}$$

Διαπιστώσατε ὅτι ἡ f εἶναι συνεχής στό $[0,1] \times \mathbb{R}$ καί φραγμένη ἀπολύτως ἀπό τό 2. Ἄν $(\tau,\xi) = (0,0)$, τότε ἡ ἀναδρομική ἀκολουθία Picard στό διάστημα $[0,1]$ ἱκανοποιεῖ:

$$\varphi_0(t) = 0, \quad \varphi_{2m}(t) = -t^2, \quad \varphi_{2m-1}(t) = t^2,$$

γιά κάθε $m \in \mathbb{N}$. Ἄρα ἡ συνέχεια τῆς f δέν ἔχει ὡς συνέπεια τήν σύγκλιση τῆς $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Διαπιστώσατε ἐπίσης ὅτι τά δύο ὁριακά σημεῖα τῆς ἀκολουθίας $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ δέν ἀποτελοῦν λύσεις.

3.2.22 Ἡ μοναδικότης τῶν λύσεων δύναται νά ἐξασφαλισθεῖ καί μέ συνθῆκες ἄσχετες τῆς ὁμαλότητος τῆς ροῆς.

Ἔστω $f : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ συνεχής καί $f(x) > 0$ γιά κάθε $x \in (\alpha,\beta)$. Δείξατε ὅτι τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x' = f(x), \\ x(\tau) = \xi, \end{cases}$$

ἀπολαμβάνει καθολικῆς μοναδικότητος γιά κάθε $\xi \in (\alpha,\beta)$.

Υποδειξη. Ἔστω $F(x) = \displaystyle\int_\xi^x \frac{dy}{f(y)}$, ἡ ὁποία ὁρίζεται καλῶς γιά κάθε $x \in (\alpha,\beta)$, λόγῳ τοῦ ὅτι ἡ f εἶναι συνεχής καί θετική. Τότε ἡ F εἶναι συνεχῶς διαφορίσιμη, γνησίως αὔξουσα καί ἔχει συνεχῶς διαφορίσιμη ἀντίστροφο F^{-1}. Ἑπομένως ἄν $\varphi : I \to \mathbb{R}$ λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν, ἡ φ θά ἱκανοποιεῖ $F\big(\varphi(t)\big) = t - \tau$ γιά κάθε $t \in I$, ἄρα $\varphi(t) = F^{-1}(t-\tau)$. Ἡ ἀνωτέρω διαδικασία δέν ἐπιτρέπει τήν ὕπαρξη δύο λύσεων. [Γιατί;]

3.2.23 (Συνέχεια) Ἔστω $f : J \to \mathbb{R}$ συνεχής, ὅπου J ἀνοικτό διάστημα, $\xi \in J$ καί $f(\xi) \neq 0$. Δείξατε ὅτι τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x' = f(x), \\ x(\tau) = \xi, \end{cases}$$

ἀπολαμβάνει τοπικῆς μοναδικότητος.

3.2.24 Ἄν $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ συνεχής καί συνεχής Lipschitz ὡς πρός τήν δεύτερη μεταβλητή, δηλαδή

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \leq L|x_1 - x_2|, \tag{3.26}$$

γιά κάποιο $L > 0$ καί γιά κάθε (t,x_1), $(t,x_2) \in \mathbb{R}^2$: Τότε τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(\tau) = \xi, \end{cases} \tag{3.27}$$

ἔχει, γιά κάθε ἀρχική συνθήκη $(\tau,\xi) \in \mathbb{R}^2$, μοναδική καθολικῶς ὁρισμένη λύση.

Υποδειξη. Ἡ λύση προκύπτει μέσῳ τῆς ἀκολουθίας Picard, ἡ ὁποία εἶναι καλῶς ὁρισμένη σ' ὅλο τό $\mathbb{R}$ καί συγκλίνει, λόγῳ τῆς (3.26), τοπικῶς ὁμοιομόρφως στό $\mathbb{R}$.

3.2.25 (Συνέχεια) Ἐξακολουθεῖ νά ἔχει καθολική λύση τό (3.27) ἄν ἡ f τοπικῶς συνεχής Lipschitz ὡς πρός τήν δεύτερη μεταβλητή ἀντί συνεχής Lipschitz ὡς πρός τήν δεύτερη μεταβλητή;

3.2.26 Δείξατε ὅτι ἡ ἀναδρομική ἀκολουθία συναρτήσεων

$$\varphi_0(t) \;=\; 0 \qquad \textit{καί} \qquad \varphi_{n+1}(t) \;=\; \int_0^t \Big(1+\varphi_n^2(s)\Big)\,ds,$$

συγκλίνει τοπικῶς ὁμοιομόρφως στό διάστημα $\Big(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\Big)$. Ποῦ συγκλίνει;

3.2.27 Δίδεται ἡ ἀναδρομική ἀκολουθία συναρτήσεων

$$\varphi_0(t) \;=\; 0 \qquad \textit{καί} \qquad \varphi_{n+1} \;=\; t-\int_0^t \varphi_n^2(s)\,ds,$$

γιά $n\in\mathbb{N}$, οἱ ὁποῖες ὁρίζονται ἐφ' ὅλου τοῦ $\mathbb{R}$. Δείξατε ὅτι

(i) Γιά κάθε $n\ge 1$ ἡ φ_n δέν εἶναι φραγμένη.

(ii) Ἡ $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει τοπικῶς ὁμοιομόρφως ἐφ' ὅλου τοῦ $\mathbb{R}$ σέ κάποια φ μέ πεδίο τιμῶν τό $(-1,1)$.

3.2.28 Νά εὑρεθεῖ τό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν k μέ ἀκόλουθη ἰδιότητα: Γιά κάθε θετική, διαφορίσιμη συνάρτηση f ἱκανοποιοῦσα τήν $f'(x)>f(x)$ σ' ὅλο τό $\mathbb{R}$, ὑπάρχει $M\in\mathbb{R}$ ὥστε $f(x)>\mathrm{e}^{kx}$ γιά κάθε $x>M$.

Putnam 1994. Βλέπε [45].

3.2.29* (Osgood) Ἡ μοναδικότης ἐξασφαλίζεται καί ἀπό συνθήκη ἀσθέστερη τῆς συνεχείας Lipschitz ὡς πρός τήν δεύτερη μεταβλητή. Συγκεκριμένα:

Ἔστω $K=[\tau-\alpha,\tau+\alpha]\times[\xi-\beta,\xi+\beta]$, ὅπου $\alpha,\,\beta>0$, καί ἐπίσης ἔστω ὅτι γιά κάθε (t,x_1), $(t,x_2)\in K$ μέ $|x_1-x_2|\le\ell$, ἰσχύει ὅτι

$$\big|f(t,x_1)-f(t,x_2)\big| \;\le\; g\big(|x_1-x_2|\big),$$

ὅπου $g:(0,\ell)\to\mathbb{R}^+$, συνεχής καί ἱκανοποιεῖ

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^l \frac{dr}{g(r)} \;=\; \infty.$$

Τότε τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν

$$\left\{\begin{array}{l} x' \;=\; f(t,x),\\ x(\tau) \;=\; \xi, \end{array}\right. \tag{3.28}$$

ἀπολαμβάνει μοναδικότητος σ' ὅλο τό $[\tau-\alpha,\tau+\alpha]$.

Υπόδειξη. Ἄν φ, ψ λύσεις τοῦ (3.28), τότε $\big|\varphi'-\psi'\big|\le g\big(|\varphi-\psi|\big)$. Ἔστω τώρα ὅτι γιά κάποιο t_1 ἰσχύει ὅτι $\big|\varphi(t_1)-\psi(t_1)\big|=\eta>0$ καί $\omega=\omega(t)$ λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν

$$\left\{\begin{array}{l} x' \;=\; 2g(x),\\ x(t_1) \;=\; \eta. \end{array}\right.$$

Τότε ἡ ω εἶναι μοναδική στό $[\tau,t_1]$ καί ἐπιπλέον ἰσχύει ὅτι

$$\big|\varphi(t)-\psi(t)\big| \;>\; \omega(t), \quad \text{γιά κάθε } t\in[\tau,t_1].$$

Ἄτοπο.

3.2.30** Ἔστω $f,g:D\to\mathbb{R}$ συνεχεῖς, ὅπου D ἀνοικτό ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}^2$ καί μία τουλάχιστον ἐκ τῶν δύο ἱκανοποιεῖ, τοπικῶς στό D, τήν συνθήκη Lipschitz. Ἔστω ὅτι

$$f(t,x) \;\le\; g(t,x) \;\; \text{γιά κάθε} \;\; (t,x)\in D \tag{3.29i}$$

καί
$$\xi \leq \eta. \tag{3.29ii}$$

Ἄν οἱ φ, ψ ἀποτελοῦν λύσεις τῶν προβλημάτων ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(\tau) = \xi, \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = g(t,x), \\ x(\tau) = \eta, \end{cases}$$

ἀντιστοίχως, τότε δείξατε ὅτι
$$\varphi(t) \leq \psi(t), \tag{3.30}$$

γιά κάθε $t \geq \tau$ στό ὁποῖο ἀμφότερες οἱ λύσεις ὁρίζονται. Ἄν μία τουλάχιστον ἐκ τῶν ἀνισοτήτων (3.29i) καί (3.29ii) εἶναι γνησία, τότε τό αὐτό συμβαίνει καί μέ τήν (3.30).

3.3 Περίπτωση συστημάτων

Ἀνάλογο τοῦ *Θεωρήματος 3.2.1* ἰσχύει στήν περίπτωση προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν γιά συστήματα συνήθων διαφορικῶν ἐξισώσεων. Τόσο στόν ὁρισμό τῆς συνθήκης Lipschitz, γιά διανυσματικές συναρτήσεις διανυσματικῆς μεταβλητῆς, ὅσο καί στήν ἀπόδειξη τῶν ἀναλόγων θεωρημάτων, χρειάζεται ὁ ὁρισμός καί κάποιες ἰδιότητες κατάλληλης νόρμας στόν $\mathbb{R}^n$. Ἰδιαιτέρως ὅμως, ἡ ἔννοια τῆς νόρμας εἰσάγεται γιά νά περιγράψει τόν τρόπο συγκλίσεως ἀκολουθιῶν διανυσμάτων καί διανυσματικῶν συναρτήσεων.

3.3.1 Νόρμες σέ Εὐκλείδειους χώρους

Ὑπενθυμίζομε τόν κατωτέρω ὁρισμό:

Ὁρισμός 3.3.1. *Μία συνάρτηση $\|\cdot\| : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$, ὀνομάζεται νόρμα ἄν ἱκανοποιεῖ τά ἑξῆς:*

(i) $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$ *γιά κάθε* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N$. *Ἰδιαιτέρως* $\|\boldsymbol{x}\| = 0$ *ἄν καί μόνον ἄν* $\boldsymbol{x} = 0$,

(ii) $\|\alpha \boldsymbol{x}\| = |\alpha| \cdot \|\boldsymbol{x}\|$ *γιά κάθε* $\alpha \in \mathbb{R}$ *καί* $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N$,

(iii) $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ *γιά κάθε* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^N$.

Ἡ ἰδιότης (i) εἶναι γνωστή ὡς θετικότης. Ἡ ἰδιότης (ii) ἀποτελεῖ τήν γραμμικότητα. Ἡ δέ ἰδιότης (iii) εἶναι γνωστή ὡς τριγωνική ἀνισότης.

Παρατήρηση. Ἀνάλογος ὁρισμός ὑπάρχει γιά τήν περίπτωση τῶν μιγαδικῶν διανυσμάτων. Ἀρκεῖ νά ἀντικατασταθοῦν τά $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^N$ μέ $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}^N$, στό ἀνωτέρω ὁρισμό.

Οἱ πλέον δημοφιλεῖς νόρμες στόν $\mathbb{R}^N$ εἶναι οἱ $p-$νόρμες:

Πρόταση 3.3.1. *Ἔστω* $p \in [0,\infty]$. *Ὁρίζομε τίς συναρτήσεις* $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ *(ἀντιστοίχως,* $\|\cdot\|_p : \mathbb{C}^N \to \mathbb{R}$*) ὡς ἀκολούθως*

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^{N} |x_k|^p \right)^{1/p} & \text{ἄν} \quad 1 \le p < \infty, \\ \max\limits_{k=1,\dots,N} |x_k| & \text{ἄν} \quad p = \infty, \end{cases} \tag{3.31}$$

ὅπου $\boldsymbol{x} = (x_1,\dots,x_N)$. *Τότε ἑκάστη ἐξ αὐτῶν ἀποτελεῖ νόρμα στόν* $\mathbb{R}^N$ *(ἀντιστοίχως, νόρμα στόν* $\mathbb{C}^N$*).* □

Απόδειξη. Βλέπε *Ἄσκηση* 3.3.9 στήν σελίδα 150.

Παρατήρηση. Ἡ ἀνωτέρω πρόταση εἶναι δυνατόν νά ὁρίσει καί νόρμες πινάκων. Κάθε πίνακας $A \in \mathbb{R}^{M\times N}$ δύναται νά ἐκληφθεῖ καί ὡς διάνυσμα τοῦ $\mathbb{R}^{MN}$, δεδομένου μάλιστα ὅτι $\mathbb{R}^{M\times N} \simeq \mathbb{R}^{MN}$. Ἑπομένως ἄν $A = (a_{ij})_{i=1,\dots,M,\, j=1,\dots,N}$, τότε κατ' ἀναλογίαν εἶναι δυνατόν νά ὁρισθοῦν οἱ $p-$νόρμες πινάκων ὡς:

$$\| A \|_p = \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^{M} \sum_{\ell=1}^{N} |a_{k\ell}|^p \right)^{1/p} & \text{ἄν} \quad 1 \le p < \infty \\ \max\limits_{\substack{k=1,\dots,M \\ \ell=1,\dots,N}} |a_{k\ell}| & \text{ἄν} \quad p = \infty. \end{cases} \tag{3.32}$$

Ὡστόσο, στήν περίπτωση τῶν πίνακων εἶναι *βολικότερες* οἱ *ἐπαγόμενες νόρμες*, οἱ ὁποῖες ἐπάγονται ἀπό τίς ἤδη ὁρισθεῖσες νόρμες διανυσμάτων.

Ἐπαγόμενες νόρμες πινάκων

Πρόταση 3.3.2. *Ἔστω* $A \in \mathbb{R}^{M\times N}$ *καί*

$$\|A\|_p = \sup_{\|\boldsymbol{x}\|_p = 1} \|A\boldsymbol{x}\|_p. \tag{3.33}$$

Ἡ ἀνωτέρω ὁρισθεῖσα συνάρτηση $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{M\times N} \to \mathbb{R}$ *ἀποτελεῖ νόρμα ἐπί τοῦ χώρου* $\mathbb{R}^{M\times N}$. *Ἀποτελεῖ τήν ἐπαγώμενη* $p-$*νόρμα. Ἰσοδύναμα ἡ ἐπαγώμενη* $p-$*νόρμα δύναται νά ὁρισθεῖ καί ὡς*

$$\|A\|_p = \sup_{\|\boldsymbol{x}\|_p \neq 0} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|_p}{\|\boldsymbol{x}\|_p}. \tag{3.33'}$$

Απόδειξη. Ἐπαφίεται στόν ἀναγνώστη. (Βλέπε *Ἄσκηση* 3.3.11.)

Υἱοθετοῦμε τήν Εὐκλείδεια νόρμα. Στό ὑπόλοιπο τοῦ ἐγχειριδίου ὅταν ἀναφερόμεθα σέ νόρμα διανύσματος, θά ἐννοοῦμε τήν $2-$νόρμα ἤ *Εὐκλείδειο νόρμα*, ἐνῶ ὅταν ἀναφερόμεθα σέ νόρμα πίνακα θά ἐννοοῦμε τήν ἐπαγώμενη $2-$νόρμα, ἐκτός καί ἄν διευκρινισθεῖ ἄλλως. Γιά λόγους ἁπλουστεύσεως παραλείλεται ὁ δείκτης $p = 2$ στήν νόρμα.

Ἔχομε καί τίς κατωτέρω ἰδιότητες γιά τίς νόρμες πινάκων καί διανυσμάτων:

Πρόταση 3.3.3. *Ἄν $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^N$, $A\in\mathbb{R}^{M\times N}$ καί $B\in\mathbb{R}^{N\times P}$ τότε ἰσχύουν τά ἀκόλουθα:*

(*i*) $\|A\boldsymbol{x}\| \le \|A\|\cdot\|\boldsymbol{x}\|$.

(*ii*) $\|AB\| \le \|A\|\cdot\|B\|$.

Απόδειξη. Γιά τήν (i), ἄν $\boldsymbol{x}\neq 0$, τότε

$$\|A\boldsymbol{x}\| = \frac{\|A\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}\cdot\|\boldsymbol{x}\| \le \sup_{\boldsymbol{y}\neq 0}\frac{\|A\boldsymbol{y}\|}{\|\boldsymbol{y}\|}\cdot\|\boldsymbol{x}\| \le \|A\|\cdot\|\boldsymbol{x}\|.$$

Γιά τήν (ii), ἄν $\boldsymbol{x}\neq 0$, ἔχομε

$$\|AB\boldsymbol{x}\| = \|A(B\boldsymbol{x})\| \le \|A\|\cdot\|B\boldsymbol{x}\| \le \|A\|\cdot\|B\|\cdot\|\boldsymbol{x}\|,$$

τό ὁποῖο λαμβάνομε ἐφαρμόζοντας δύο φορές τήν (i). Ὡς ἐκ τούτου

$$\frac{\|AB\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \le \|A\|\cdot\|B\|$$

καί κατά συνέπεια

$$\|AB\| = \sup_{\|\boldsymbol{x}\|\neq 0}\frac{\|AB\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \le \|A\|\cdot\|B\|. \qquad \square$$

Ἄμεση συνέπεια τῆς ἰδιότητος (ii) τῆς ἀνωτέρω προτάσεως τό πόρισμα:

Πόρισμα 3.3.4. *Ἔστω $A\in\mathbb{R}^{N\times N}$, τότε*

$$\|A^n\| \le \|A\|^n,$$

γιά κάθε $n\in\mathbb{N}$. $\square$

Ἐπίσης θά χρειαστοῦμε τά ἀκόλουθα:

Πρόταση 3.3.5. *Ἔστω $\boldsymbol{b}(t) = \big(b_1(t),\dots,b_N(t)\big)$ καί $A(t) = \big(a_{k,\ell}(t)\big)_{k,\ell=1}^N$ συνεχεῖς συναρτήσεις. Τότε οἱ συναρτήσεις $\beta(t) = \|\boldsymbol{b}(t)\|$, $\alpha(t) = \|A(t)\|$, εἶναι ἐπίσης συνεχεῖς.*

Αποδειξη. Γιά τήν συνάρτηση $\alpha(t)$ ἔχομε:

$$\begin{aligned}\big\|\big(A(s)-A(t)\big)\boldsymbol{x}\big\|^2 &= \sum_{k=1}^N\Big(\sum_{\ell=1}^N\big(a_{k\ell}(s)-a_{k\ell}(t)\big)x_\ell\Big)^2\\ &\le \sum_{k=1}^N\Big(\sum_{\ell=1}^N\big(a_{k\ell}(s)-a_{k\ell}(t)\big)^2\cdot\sum_{\ell=1}^N x_\ell^2\Big)\\ &= \Big(\sum_{k=1}^N\sum_{\ell=1}^N\big(a_{k\ell}(s)-a_{k\ell}(t)\big)^2\Big)\cdot\|\boldsymbol{x}\|^2,\end{aligned}$$

γιά κάθε $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^{N\times N}$. Συνεπῶς

$$\|A(s)-A(t)\| \le \Big(\sum_{k=1}^N\sum_{\ell=1}^N\big(a_{k\ell}(s)-a_{k\ell}(t)\big)^2\Big)^{1/2},$$

καί δοθέντος ὅτι

$$\big|\alpha(t)-\alpha(s)\big| = \big|\|A(s)\|-\|A(t)\|\big| \le \|A(s)-A(t)\|,$$

ἔχομε συνολικῶς ὅτι

$$\big|\alpha(t)-\alpha(s)\big| \le \Big(\sum_{k=1}^N\sum_{\ell=1}^N\big(a_{k\ell}(s)-a_{k\ell}(t)\big)^2\Big)^{1/2}.$$

Τό δεξιό μέλος τῆς ἀνωτέρω καθίσταται ὁσοδήποτε μικρό ἄν τό t πλησιάσει ἐπαρκῶς τό s, τό ὁποῖο ἀποδεικνύει τήν συνέχεια τῆς συναρτήσεως $\alpha(t)$. □

Ἐπίσης θά χρειασθοῦμε τίς ἀκόλουθες προτάσεις:

Πρόταση 3.3.6. *Ἔστω $\boldsymbol{f}:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^N$, ὅπου $\boldsymbol{f}=(f_1,f_2,\dots,f_N)$, συνεχής συνάρτηση. Τότε*

$$\Big\|\int_\alpha^\beta \boldsymbol{f}(t)\,dt\Big\|_p \le \int_\alpha^\beta\|\boldsymbol{f}(t)\|_p\,dt, \tag{3.34}$$

γιά κάθε $p\in[1,\infty]$. Ὑπενθυμίζομε ὅτι $\int_\alpha^\beta \boldsymbol{f}(t)\,dt = \Big(\int_\alpha^\beta f_1(t)\,dt,\dots,\int_\alpha^\beta f_N(t)\,dt\Big)$.

Αποδειξη. Οἱ περιπτώσεις $p=1,\infty$ εἶναι προφανεῖς. Ἔστω $p\in(1,\infty)$ καί $N=2$, τότε ἡ (3.34) γράφεται ἰσοδύναμα ὡς

$$\Big|\int_a^b f_1(t)\,dt\Big|^p+\Big|\int_a^b f_2(t)\,dt\Big|^p \le \Big|\int_a^b\big(|f_1(t)|^p+|f_2(t)|^p\big)^{1/p}dt\Big|^p.$$

Ἀντικαθιστοῦμε τήν f_2 μέ $\lambda^{1/p}f_2$, $\lambda\in[0,1]$. Γιά $\lambda=0$ ἔχομε ταυτότητα. Ἀρκεῖ νά δείξομε ὅτι ἡ παράγωγος ὡς πρός λ τοῦ ἀριστεροῦ μέλους εἶναι μικρότερη ἤ τῆς παραγώγου ὡς πρός λ τοῦ δεξιοῦ μέλους. Ἤτοι, ἀρκεῖ νά δείξομε ὅτι

$$\Big|\int_a^b f_2(t)\Big|^p \le \Big(\int_a^b\big(|f_1(t)|^p+\lambda|f_2(t)|^p\big)^{1/p}\Big)^{p-1}dt\cdot\int_a^b\frac{|f_2(t)|^p}{\big(|f_1(t)|^p+\lambda|f_2(t)|^p\big)^{1-1/p}}\,dt.$$

Ἄν ὁρίσομε τό q ὥστε $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, τότε ἡ ἀνωτέρω γράφεται ἰσοδύναμα ὡς

$$\Big|\int_a^b f_2(t)\Big| \le \left(\int_a^b \big(|f_1(t)|^p+\lambda|f_2(t)|^p\big)^{1/p}dt\right)^{1/q}\cdot\left(\int_a^b \frac{|f_2(t)|^p}{\big(|f_1(t)|^p+\lambda|f_2(t)|^p\big)^{1/q}}\,dt\right)^{1/p},$$

τό ὁποῖο ἀποτελεῖ ἐφαρμογή τῆς ἀνισότητος Hölder. Γιά $N>2$ χρησιμοποιοῦμε ἐπαγωγή. Ἔστω ὅτι ἡ (3.34) ἰσχύει γιά $N=k$ καί $\boldsymbol{f}=(f_1,\dots,f_{k+1})$. Θέτομε

$$g(t) \;=\; \big(|f_1(t)|^p+\cdots+|f_k(t)|^p\big)^{1/p}.$$

Ὁπότε ἔχομε

$$\begin{aligned}\left(\int_a^b \big(|f_1(t)|^p+\cdots+|f_k(t)|^p+|f_{k+1}(t)|^p\big)^{1/p}dt\right)^p &= \left(\int_a^b \big(|g(t)|^p+|f_{k+1}(t)|^p\big)^{1/p}dt\right)^p\\ &\ge \Big|\int_a^b |g(t)|\,dt\Big|^p+\Big|\int_a^b |f_{k+1}(t)|\,dt\Big|^p\\ &= \Big|\int_a^b \big(|f_1(t)|^p+\cdots+|f_k(t)|^p\big)^{1/p}dt\Big|^p+\Big|\int_a^b |f_{k+1}(t)|\,dt\Big|^p,\end{aligned}$$

τό ὁποῖο ἀποδεικνύει τήν ἐπαγωγική ὑπόθεση. □

Πρόταση 3.3.7. *Ἔστω $A(t):[\alpha,\beta]\longrightarrow\mathbb{R}^{N\times N}$, συνεχής συνάρτηση. Τότε*

$$\Big\|\int_\alpha^\beta A(t)\,dt\Big\| \;\le\; \int_\alpha^\beta \|A(t)\|\,dt.$$

Ὑπενθυμίζεται ὅτι, ἄν $A(t)=\big(a_{k\ell}(t)\big)$, τότε $\displaystyle\int_\alpha^\beta A(s)\,ds=\left(\int_\alpha^\beta a_{k\ell}(s)\,ds\right)$.

Ἀπόδειξη. Ἔστω $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^N$, $\boldsymbol{x}\neq 0$. Τότε

$$\Big\|\int_\alpha^\beta A(t)\boldsymbol{x}\,dt\Big\| \;\le\; \int_\alpha^\beta \|A(t)\boldsymbol{x}\|\,dt \;\le\; \int_\alpha^\beta \|A(t)\|\cdot\|\boldsymbol{x}\|\,ds \;=\; \left(\int_\alpha^\beta \|A(t)\|\,ds\right)\cdot\|\boldsymbol{x}\|.$$

Ἡ πρώτη ἀνισότης ἰσχύει λόγῳ τῆς *Προτάσεως 3.3.6*. Συνεπῶς

$$\Big\|\int_\alpha^\beta A(t)\,dt\Big\| \;=\; \sup_{\boldsymbol{x}\neq 0}\frac{\Big\|\int_\alpha^\beta A(t)\boldsymbol{x}\,dt\Big\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \;\le\; \int_\alpha^\beta \|A(t)\|\,dt.$$ □

Παρατήρηση. Οἱ *Προτάσεις 3.3.6* καί *3.3.7* ἰσχύουν καί στήν περίπτωση ὅπου ὁ Εὐκλείδειος χῶρος $\mathbb{R}^N$ ἀντικατασταθεῖ ἀπό τυχόντα χῶρο Banach $\mathcal{X}$. Σέ μία τέτοια περίπτωση τό ὁλοκλήρωμα συνεχοῦς συναρτήσεως $\boldsymbol{f}:[a,b]\longrightarrow\mathcal{X}$ ὁρίζεται κατά φυσιολογικό τρόπο μέ ἀθροΐσματα Riemann, δηλαδή

$$\int_a^b \boldsymbol{f}(t)\,dt \;=\; \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{f}(\tau_{n,j}),$$

ὅπου $\tau_{n,j} \in [a+(j-1)h_n, a+jh_n]$ καί $h_n = (b-a)/n$. Ὡς ἐκ τούτου

$$\Big\| \int_a^b \boldsymbol{f}(t)\,dt \Big\| = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \Big\| \sum_{j=1}^n \boldsymbol{f}(a+jh_n) \Big\| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^n \Big\| \boldsymbol{f}(a+jh_n) \Big\|$$
$$= \int_a^b \|\boldsymbol{f}(t)\|\,dt.$$

Σύγκλιση ἀκολουθιῶν διανυσμάτων

Κατά ἀπολύτως φυσιολογικό τρόπο ὁρίζεται ἡ σύγκλιση ἀκολουθιῶν διανυσμάτων:

Ὁρισμός 3.3.2. *Ἔστω $\{\boldsymbol{x}^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ἀκολουθία διανυσμάτων στόν $\mathbb{R}^N$, ὅπου*

$$\boldsymbol{x}^n = (x_1^n, x_2^n, \ldots, x_N^n).$$

Λέγεται ὅτι ἡ $\{\boldsymbol{x}^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στό $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N$ ἄν $\lim_{n\to\infty} \|\boldsymbol{x}^n - \boldsymbol{x}\| = 0$.

Ἡ σύγκλιση ἀκολουθιῶν διανυσμάτων χαρακτηρίζεται πλήρως ἀπό τήν:

Πρόταση 3.3.8. *Ἔστω $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}^n \in \mathbb{R}^N$, ὅπου $n \in \mathbb{N}$, μέ συντεταγμένες $\boldsymbol{x}^n = (x_1^n, \ldots, x_N^n)$ καί $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_N)$. Τότε ἰσχύει ὅτι: $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}^n = \boldsymbol{x}$ ἄν καί μόνον ἄν:*

$$\lim_{n\to\infty} x_\varrho^n = x_\varrho, \qquad \text{γιά κάθε} \quad \varrho = 1, \ldots, N. \qquad \square$$

Παρατήρηση. Ὅλες οἱ $p-$νόρμες εἶναι μεταξύ τους ἰσοδύναμες. Δηλαδή, ἄν $p, q \in [1, \infty]$, τότε ὑπάρχουν σταθερές $\alpha, \beta > 0$ ὥστε

$$\alpha\|\boldsymbol{x}\|_p \leq \|\boldsymbol{x}\|_q \leq \beta\|\boldsymbol{x}\|_p,$$

γιά κάθε $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$. Ἡ *ἰσοδυναμία* αὐτή ἔχει ὡς συνέπεια ὅτι: *Μία ἀκολουθία διανυσμάτων $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στόν $\mathbb{R}^N$, συγκλίνει ὡς πρός τήν $p-$νόρμα, ἄν καί μόνον ἄν συγκλίνει ὡς πρός τήν $q-$νόρμα, γιά κάθε p, $q \in [1, \infty]$.* (Βλέπε *Ἄσκηση* 3.3.1 στήν σελίδα 149.) Γενικότερα ὅλες οἱ νόρμες στόν $\mathbb{R}^N$, καί ἀκόμη γενικότερα, σέ κάθε γραμμικό χῶρο πεπερασμένης διαστάσεως, εἶναι μεταξύ τους ἰσοδύναμες.

Διανυσματική ἐκδοχή κριτηρίου Weierstrass

Κατ' ἀρχάς ἡ ὁμοιόμορφη σύγκλιση ἀκολουθιῶν εἶναι δυνατόν νά ὁρισθεῖ καί γιά ἀκολουθίες διανυσματικῶν συναρτήσεων:

Ὁρισμός 3.3.3. *Ἔστω S μή κενό σύνολο καί $\{\boldsymbol{\varphi}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ἀκολουθία διανυσματικῶν συναρτήσεων, ὅπου $\boldsymbol{\varphi}_n : S \to \mathbb{R}^N$. Λέγεται ὅτι ἡ $\{\boldsymbol{\varphi}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ὁμοιομόρφως στήν $\boldsymbol{\varphi}$ ἐπί τοῦ S καθώς τό n τείνει στό ἄπειρο ἄν γιά κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει $M \in \mathbb{N}$ ὥστε ἄν $n \geq M$, τότε*

$$\big\|\boldsymbol{\varphi}_n(t) - \boldsymbol{\varphi}(t)\big\| < \varepsilon,$$

γιά κάθε $t \in S$.

Κατ' ἀναλογία ὁρίζεται πότε μία ἀκολουθία διανυσμάτων εἶναι ὁμοιομόρφως Cauchy. Ἡ τοπικῶς ὁμοιόμορφη σύγκλιση ὁρίζεται ἀναλόγως. Τό κριτήριο Weierstrass ἐξασφαλίζει ὁμοιόμορφη σύγκλιση καί στήν περίπτωση διανυσματικῶν συναρτήσεων:

Πρόταση 3.3.9. (***Διανυσματική ἐκδοχή κριτηρίου Weierstrass***) *Ἔστω S μή κενό ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}$ καί $\{\boldsymbol{\varphi}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ἀκολουθία διανυσματικῶν συναρτήσεων μέ πεδίο ὁρισμοῦ τό S καί πεδίο τιμῶν τό $\mathbb{R}^N$ γιά τίς ὁποῖες ἰσχύει:*

$$\sup_{t\in S}\left\|\boldsymbol{\varphi}_{n+1}(t)-\boldsymbol{\varphi}_n(t)\right\| \le M_n \qquad \textit{καί} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty.$$

Τότε ἡ ἀκολουθία $\{\boldsymbol{\varphi}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ὁμοιομόρφως στό S. □

Διανυσματική ἐκδοχή τῆς συνθήκης Lipschitz

Εἴμεθα τώρα σέ θέση νά ὁρίσομε τήν συνθήκη Lipschitz σέ διανυσματική μορφή:

Ὁρισμός 3.3.4. *Ἔστω ὅτι $S \subset \mathbb{R}^M$ καί $\boldsymbol{g} : S \to \mathbb{R}^N$.*

(*i*) *Λέγεται ὅτι ἡ $\boldsymbol{g}$ ἱκανοποιεῖ τήν συνθήκη Lipschitz (ἤ εἶναι συνεχής Lipschitz) στό D μέ σταθερά L ἄν:*

$$\left\|\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_1)-\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_2)\right\| \le L\,\|\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2\|.$$

γιά κάθε $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2 \in S$.

(*ii*) *Ἔστω D ἀνοικτό ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}^N$. Λέγεται ὅτι ἡ $\boldsymbol{g}$ ἱκανοποιεῖ τήν συνθήκη Lipschitz τοπικῶς στό D ἄν γιά κάθε $K = \prod_{j=1}^{N}[a_j, b_j] \subset D$ ὑπάρχει $L_K > 0$ ὥστε ἡ $\boldsymbol{g}$ νά ἱκανοποιεῖ τήν συνθήκη Lipschitz στό K μέ σταθερά L_K.*

Κατ' ἀνάλογο τρόπο, μέ τήν βαθμωτή ἐκδοχή, ἰσχύει ὅτι:

Λῆμμα 3.3.10. *Ἄν $D \subset \mathbb{R}^N$ ἀνοικτό καί $\boldsymbol{g} : D \to \mathbb{R}^N$ συνεχῶς διαφορίσιμη, τότε ἡ $\boldsymbol{g}$ ἱκανοποιεῖ τήν συνθήκη Lipschitz τοπικῶς στό D.*

Απόδειξη. Ἐπαφίεται στόν ἀναγνώστη. □

Ἰσχύει καί στήν περίπτωση τῶν συστημάτων ἡ ἴδια διαβάθμιση ἰσχύος μεταξύ συνεχοῦς διαφορισιμότητος, συνεχείας Lipschitz καί ὁμοιόμορφης συνεχείας.

3.3.2 Διανυσματική ἐκδοχή τοῦ Θεωρήματος Picard–Lindelöf

Διατυπώνομε τώρα τήν γενίκευση τοῦ *Θεωρήματος 3.2.1.* Ἡ ἀπόδειξη αὐτοῦ ἐπαφίεται στόν ἀναγνώστη ὡς ἄσκηση.

Θεώρημα 3.3.11. (*Picard-Lindelöf*) *Έστω $\boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^N$ συνεχής συνάρτηση, ὅπου D ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}^{N+1}$ ἀνοικτό,*

$$K = [\tau - \alpha, \tau + \alpha] \times \overline{B}_\beta(\boldsymbol{\xi}) \subset D,$$

γιά κάποια α, $\beta > 0$. Ἔστω $M = \max\limits_{(t,x)\in K} \left\| \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) \right\|$ καί ὑποθέτομε ὅτι ἡ $\boldsymbol{f}$ ἱκανοποιεῖ τήν συνθήκη Lipschitz ὡς πρός τήν δεύτερη μεταβλητή στό K, δηλαδή:

$$\left\| \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}_1) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}_2) \right\| \leq L \left\| \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2 \right\|$$

γιά κάθε $(t, \boldsymbol{x}_1)$, $(t, \boldsymbol{x}_2) \in K$, γιά κάποιο L θετικό. Τότε τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}), \\ \boldsymbol{x}(\tau) = \boldsymbol{\xi}, \end{cases} \tag{3.35}$$

ἔχει λύση $\boldsymbol{\varphi}$ ὁριζόμενη στό διάστημα $[\tau - \gamma, \tau + \gamma]$, ὅπου $\gamma = \min\{\alpha, \beta/M\}$. Ἡ $\boldsymbol{\varphi}$ προκύπτει ὡς ὁμοιόμορφο ὅριο τῆς ἀναδρομικῆς ἀκολουθίας Picard, ἤτοι,

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\varphi}_n(t), \quad t \in [\tau - \gamma, \tau + \gamma]$$

ὅπου:

$$\boldsymbol{\varphi}_0(t) = \boldsymbol{\xi} \qquad \textit{καί} \qquad \boldsymbol{\varphi}_{n+1}(t) = \boldsymbol{\xi} + \int_\tau^t \boldsymbol{f}\big(s, \boldsymbol{\varphi}_n(s)\big)\, ds,$$

γιά κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τέλος τό (3.35) ἀπολαμβάνει μοναδικότητος στό $[\tau - \gamma, \tau + \gamma]$.

Σχεδιαγραμμα της αποδειξεως. Κατ' ἀναλογίαν μέ τήν ἀπόδειξη τοῦ *Θεωρήματος 3.2.1* ἀκολουθοῦμε τά ἑξῆς βήματα:

Βημα 1. Ἡ ἀναδρομικῶς ὁρισμένη ἀκολουθία $\{\boldsymbol{\varphi}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ εἶναι καλῶς ὁρισμένη.

Ἀρκεῖ νά ἀποδειχθεῖ ὅτι γιά κάθε $t \in [\tau - \gamma, \tau + \gamma]$

$$\boldsymbol{\varphi}_n(t) \in B_\beta(\boldsymbol{\xi}) \quad \textit{γιά κάθε} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Αὐτό δύναται νά ἀποδειχθεῖ ἐπαγωγικῶς.

Βημα 2. Ἰσχύει ἡ ἀνισότης

$$\left\| \boldsymbol{\varphi}_{n+1}(t) - \boldsymbol{\varphi}_n(t) \right\| \leq \frac{M}{L} \frac{(L|t-\tau|)^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{M}{L} \frac{(L\gamma)^{n+1}}{(n+1)!}, \tag{3.36}$$

γιά κάθε $n \in \mathbb{N}$ καί ἐπιτρέπει τήν ἐφαρμογή κατάλληλης ἐκδοχῆς τοῦ *Λήμματος Weierstrass* καί συνεπάγεται τήν ὁμοιόμορφη σύγκλιση τῆς ἀκολουθίας $\{\boldsymbol{\varphi}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Ἡ (3.36) ἀποδεικνύεται ἐπαγωγικῶς. Ἀποτελεῖ συνέπεια τῆς ἀνισότητος

$$\left\| \boldsymbol{\varphi}_{n+1}(t) - \boldsymbol{\varphi}_n(t) \right\| \leq \int_\tau^t \left\| \boldsymbol{\varphi}_{n+1}(s) - \boldsymbol{\varphi}_n(s) \right\| ds.$$

Ἡ ὁποία ἀποδεικνύεται ἐπίσης ἐπαγωγικῶς. (Ἡ ἀνωτέρω ἰσχύει για $t \geq \tau$. Γιά $t < \tau$ ἰσχύει μέ ἀρνητικό πρόσημο στό δεξιό μέλος.)

Βημα 3. Ἡ ἀπόδειξη τῆς τοπικῆς μοναδικότητος περιλαμβάνει δύο σκέλη, κατ' ἀναλογίαν πρός τήν βαθμωτή περίπτωση. Ἔστω $\psi : J \to \mathbb{R}^N$ ἄλλη λύση. Τότε ἀφ' ἑνός μεν πρέπει νά δείξομε ὅτι

$$\psi(t) \in \overline{B}_\beta(\boldsymbol{\xi}) \quad \text{γιά κάθε} \quad t \in [\tau - \gamma, \tau + \gamma].$$

Ἀφ' ἑτέρου, ἄν θέσομε $\Delta(t) = \displaystyle\int_\tau^t \big\|\boldsymbol{\varphi}(s) - \psi(s)\big\|$, κατά τρόπο ἀνάλογο μέ τήν ἀπόδειξη τῆς μοναδικότητος στό *Θεώρημα 3.2.1* λαμβάνομε τήν ἀνισότητα

$$\Delta'(t) - L\,\Delta(t) \leq 0,$$

γιά κάθε $t \geq \tau$, ἀπ' ὅπου προκύπτει ὅτι $\Delta \equiv 0$ καί κατά συνέπεια $\boldsymbol{\varphi}(t) = \psi(t)$, για $t \geq \tau$. Κατά παρόμοιο τρόπο πραγματοποιεῖται ἡ ἀπόδειξη γιά $t < \tau$. □

3.3.3 Τοπική Lipschitz καί καθολική μοναδικότης

Ὁ *Ὁρισμός 3.1.6* στήν σελίδα 117 δύναται εὐκόλως νά γενικευθεῖ στήν περίπτωση διανυσματικῶν συναρτήσεων:

Ὁρισμός 3.3.5. *Μέ τά συμφραζόμενα τῶν συστημάτων συνήθων διαφορικῶν ἐξισώσεων, θά λέγεται ὅτι ἡ συνεχής συνάρτηση $\boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^N$, ὅπου D ἀνοικτό ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}^{N+1}$, εἶναι τοπικῶς Lipschitz ὡς πρός τήν δεύτερη μεταβλητή, ἄν γιά κάθε K ὑποσύνολο τοῦ D, τῆς μορφῆς*

$$K = [\tau - \alpha, \tau + \alpha] \times \overline{B}_\beta(\boldsymbol{\xi}),$$

ὑπάρχει $L = L_K > 0$ ὥστε:

$$\big\|\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}_1) - \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}_2)\big\| \leq L_K \,\|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2\|,$$

γιά κάθε $(t, \boldsymbol{x}_1)$, $(t, \boldsymbol{x}_2)$ στό K.

Κατ' ἀναλογία καί ἡ *Πρόταση 3.2.4* στήν σελίδα 133 δύναται καί αὐτή νά γενικευθεῖ καί στήν περίπτωση συστημάτων:

Πρόταση 3.3.12. *Ἔστω $\boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^N$ συνεχής, ὅπου D ἀνοικτό ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}^{N+1}$ καί $\boldsymbol{f}$ ἱκανοποιεῖ τοπικῶς τήν συνθήκη Lipschitz ὡς πρός τήν δεύτερη μεταβλητή $\boldsymbol{x}$. Τότε γιά κάθε $(\tau, \boldsymbol{\xi}) \in D$ τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν*

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}), \\ \boldsymbol{x}(\tau) = \boldsymbol{\xi}, \end{cases}$$

ἀπολαμβάνει καθολικῆς μοναδικότητος.

Δοθέντος ὅτι καί στήν περίπτωση τῶν συστημάτων ἡ τοπική συνθήκη Lipschitz ἀποτελεῖ συνέπεια τῆς συνεχοῦς διαφορισιμότητος, ἔχομε καί ἐδῶ τό ἀκόλουθο πόρισμα, γενίκευση τοῦ *Πορίσματος 3.2.5* στήν σελίδα 134:

Πόρισμα 3.3.13. *Ἔστω $\boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_N) : D \to \mathbb{R}^N$ συνεχής, ὅπου D ἀνοικτό ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}^{N+1}$. Ἄν ἡ $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$, εἶναι διαφορίσιμη ὡς πρός τήν δεύτερη μεταβλητή $\boldsymbol{x}$ στό D καί*

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}} = \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_\ell}\right)_{k,\ell=1}^{N} \in C(D),$$

τότε τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}), \\ \boldsymbol{x}(\tau) = \boldsymbol{\xi}, \end{cases}$$

ἔχει λύση γιά κάθε $(\tau, \boldsymbol{\xi}) \in D$, ἡ ὁποία ἀπολαμβάνει καί καθολικῆς μοναδικότητος. □

Ἀσκήσεις

3.3.1 Νά ἀποδειχθεῖ ὅτι γιά κάθε $p, q \in [1, \infty]$ ὑπάρχουν $\alpha, \beta > 0$ ὥστε

$$\alpha \|\boldsymbol{x}\|_p \le \|\boldsymbol{x}\|_q \le \beta \|\boldsymbol{x}\|_p,$$

γιά κάθε $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N$.

3.3.2* Ὅλες οἱ νόρμες στόν $\mathbb{R}^N$ εἶναι ἰσοδύναμες.

3.3.3 Ἔστω $\Phi_n : I \to \mathbb{R}^{N \times N}$, $n \in \mathbb{N}$, ἀκολουθία συνεχῶν συναρτήσεων, ὅπου I ἀνοικτό διάστημα. Ἄν ἡ $\{\Phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ συγκίνει τοπικῶς ὁμοιομόρφως ἐπί τοῦ I στήν $\Phi : I \to \mathbb{R}^{N \times N}$, δείξατε ὅτι καί ἡ Φ εἶναι συνεχής. (Ἡ σύγκλιση εἶναι ὁμοιόμορφη ὡς πρός τήν ἐπαγώμενη νόρμα πινάκων στόν $\mathbb{R}^{N \times N}$.)

3.3.4 Δίδεται τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x' = y, \ y' = -x, \\ x(0) = 1, \ y(0) = 0. \end{cases}$$

Νά βρεθεῖ ὁ γενικός ὅρος τῆς ἀναδρομικῆς ἀκολουθίας Picard. Νά βρεθεῖ τό ὅριο αὐτῆς τῆς ἀκολουθίας καί νά ἀποδειχθεῖ ὅτι ἡ σύγκλιση εἶναι ὁμοιόμορφη σέ κάθε κλειστό διάστημα.

3.3.5 Νά γίνει τό ἴδιο στό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν:

$$\begin{cases} x' = y, \ y' = x, \\ x(0) = 1, \ y(0) = 0. \end{cases}$$

3.3.6 Νά κατασκευασθεῖ ἡ ἀκολουθία Picard ἡ ὁποία προσεγγίζει τήν λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν

$$x'' = x, \quad x(0) = 1, \ x'(0) = 0.$$

3.3.7 Κατασκευάστε τήν ἀκολουθία Picard ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ στό δευτέρας τάξεως βαθμωτό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x'' = f(t, x), \\ x(\tau) = \xi, \ x'(\tau) = \eta, \end{cases}$$

ἀφοῦ προηγουμένως κατασκευάσετε ἰσοδύναμο σύστημα πρώτης τάξεως, δοθέντος ὅτι ἡ f εἶναι ἐπαρκῶς ὁμαλή ὡς πρός x.

3.3.8 Νά βρεθεῖ ὁ γενικός τύπος τῆς ἀναδρομικῆς ἀκολουθίας Picard ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ στό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}, \\ \boldsymbol{x}(\tau) = \boldsymbol{\xi}, \end{cases}$$

ὅπου $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^N$ καί $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$.

3.3.9 Νά ἀποδειχθεῖ πλήρως ἡ *Πρόταση 3.3.1.*

3.3.10 Νά ἀποδειχθεῖ τό *Λῆμμα 3.3.10.*

3.3.11 Δεῖξτε ὅτι οἱ ἐπαγόμενες $p-$νόρμες πινάκων $\big($βλέπε (3.33)$\big)$, ἀποτελοῦν πράγματι νόρμες.

3.3.12 Τόσο στήν ὕπαρξη, ὅσο καί στήν μοναδικότητα, μιμηθεῖτε τήν ἀπόδειξη τοῦ *Θεωρήματος 3.2.1* καί ἐφαρμόσατε ὅλες τίς ἰδιότητες τῆς Εὐκλειδείου νόρμας τοῦ $\mathbb{R}^N$ ὥστε νά προκύψει ἡ ἀπόδειξη τοῦ *Θεωρήματος 3.3.11.*

3.3.13 Ἔστω $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^{N+1} \to \mathbb{R}^N$ συνεχής καί ἰσχύει ὅτι

$$\big\|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}_1) - \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}_2)\big\| \le L(t)\,\big\|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2\big\|,$$

γιά κάθε $t \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \mathbb{R}^N$, γιά κάποια συνεχῆ συνάρτηση $L = L(t)$. Δείξατε ὅτι γιά κάθε $(\tau,\boldsymbol{\xi}) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^N$ τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}), \\ \boldsymbol{x}(\tau) = \boldsymbol{\xi}, \end{cases}$$

ἔχει καθολική λύση (ἤτοι, λύση μέ πεδίο ὁρισμοῦ ὅλο τό $\mathbb{R}$) καί ἀπολαμβάνει καθολικῆς μοναδικότητος.

3.3.14 Δίδεται τό $N\times N$ σύστημα συνήθων διαφορικῶν ἐξισώσεων:

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}), \tag{3.37}$$

ὅπου $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ καί ἔστω ὅτι ἡ $\boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^N$ συνεχής, ὅπου D ἀνοικτό ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}^N$, ἱκανοποιεῖ τοπικῶς τήν συνθήκη Lipschitz. Ἄν ἡ συνάρτηση $\boldsymbol{\varphi} : I \to \mathbb{R}^N$ ἀποτελεῖ λύση τῆς (3.37) καί ἐπί πλέον $\boldsymbol{\varphi}(\tau_1) = \boldsymbol{\varphi}(\tau_2)$, γιά κάποια τ_1, $\tau_2 \in I$, ὅπου $\tau_1 < \tau_2$, δείξατε ὅτι ἡ συνάρτηση $\boldsymbol{\varphi}$ εἶναι περιοδική μέ περίοδο $T = \tau_2 - \tau_1$ καί ὡς ἐκ τούτου τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς $\boldsymbol{\varphi}$ δύναται νά ἐπεκταθεῖ σ' ὅλο τό $\mathbb{R}$.

Υπόδειξη. Ἄν θέσομε $\psi(t) = \boldsymbol{\varphi}(t+T)$, τότε οἱ συναρτήσεις $\boldsymbol{\varphi}$ καί ψ ὑποχρεωτικῶς ταυτίζονται λόγῳ τῆς μοναδικότητος τῶν λύσεων τῆς (3.37).

3.3.15 **Θεώρημα ἐμμέσως ὁρισμένης συναρτήσεως[74]:** Ἔστω $F = F(t,x) : D \to \mathbb{R}^2$ συνεχῶς διαφορίσιμη συνάρτηση, ὅπου $D \subset \mathbb{R}^2$ ἀνοικτό. Ἄν

$$F(\tau,\xi) = 0 \quad \text{καί} \quad F_x(\tau,\xi) \neq 0$$

γιά κάποιο $(\tau,\xi) \in D$, τότε ὑπάρχει $\varphi : I \to \mathbb{R}$ συνεχῶς διαφορίσιμη συνάρτηση, ὅπου $\tau \in I$ καί I ἀνοικτό διάστημα, ὥστε

$$\varphi(\tau) = \xi \quad \text{καί} \quad F\big(t,\varphi(t)\big) = 0 \quad \text{γιά κάθε}\, t \in I.$$

Πῶς γενικεύεται τό ἀνωτέρω θεώρημα στήν περίπτωση κατά τήν ὁποία τό $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^N$ καί $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$ καί $F : D \to \mathbb{R}^N$;

[74] Ἤ ἄλλως *Θεώρημα πεπλεγμένης συναρτήσεως*. Βλέπε σχετική ὑποσημείωση στήν σελίδα 19.

Υποδειξη. Ἄν ὑπῆρχε τέτοια φ, τότε θά εἴχαμε

$$\frac{d}{dt}F\big(t,\varphi(t)\big) = F_t\big(t,\varphi(t)\big) + F_x\big(t,\varphi(t)\big)\varphi'(t),$$

ὁπότε ἡ φ θά ἱκανοποιοῦσε τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x' = -\dfrac{F_t(t,x)}{F_x(t,x)}, \\ x(\tau) = \xi. \end{cases}$$

Συνεπῶς ἡ ὑπάρξη τῆς φ ἀνάγεται στήν ὕπαρξη λύσεως τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν.

3.3.16* Νά διατυπωθεῖ καί νά ἀποδειχθεῖ τό *Θεώρημα Picard–Lindelöf* στήν περίπτωση κατά τήν ὁποία ἡ ζητούμενη συνάρτηση καθώς καί ἡ συνάρτηση ροῆς λαμβάνουν τιμές σέ χῶρο Banach.

Υποδειξη. Θά πρέπει κατ' ἀρχάς νά ὁρισθεῖ καταλλήλως τό ὁλοκλήρωμα Riemann συνεχῶν συναρτήσεων $g : [\alpha,\beta] \to X$, ὅπου X χῶρος Banach.

3.3.17* (Συνέχεια τῶν δύο προηγουμένων ἀσκήσεων) Νά διατυπωθεῖ καί νά ἀποδειχθεῖ κατάλληλη ἐκδοχή τοῦ *Θεωρήματος τῆς ἐμμέσως ὁρισμένης συναρτήσεως* ὅταν ἡ συνάρτηση F καί ἡ μεταβλητή x λαμβάνουν τιμές σέ χῶρο Banach.

3.4 $\varepsilon-$Προσεγγιστικές λύσεις*

Ἔχομε ἤδη ἀποδείξει ὕπαρξη καί μοναδικότητα τῶν λύσεων σέ προβλήματα ἀρχικῶν τιμῶν, στά ὁποῖα ἡ συνάρτηση ροῆς ἱκανοποιεῖ τοπικῶς τήν συνθήκη Lipschitz ὡς πρός τήν δεύτερη μεταβλητή. Ἡ ἱκανοποίηση τῆς συνθήκης Lipschitz χρειάστηκε στήν ἀπόδειξη τῆς ὁμοιόμορφης συγκλίσεως τῆς ἀκολουθίας Picard. Εἴδαμε ἐπίσης ὅτι ἡ συνθήκη Lipschitz ἐξασφαλίζει τήν μοναδικότητα λύσεων στά προβλήματα ἀρχικῶν τιμῶν, ἐνῶ ὑπάρχουν παραδείγματα ὅπου ἡ ροή εἶναι συνεχής ἀλλά ὄχι συνεχής Lipschitz στά ὁποῖα ἡ μοναδικότης παραβιάζεται. Ὡστόσο, ἡ ὕπαρξη λύσεων στά προβλήματα ἀρχικῶν τιμῶν ἐξασφαλίζεται καί χωρίς τήν ἱκανοποίηση τῆς συνθήκης Lipschitz. Σ' αὐτή τήν ἑνότητα θά ἀναπτυχθεῖ ἡ *μέθοδος τῶν $\varepsilon-$προσεγγιστικῶν λύσεων*[75] καί ἡ λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν θά προκύψει ὡς ὅριο τέτοιων *λύσεων*. Κοινό τῶν δύο μεθόδων εἶναι ὅτι ἐξασφαλίζουν καί οἱ δύο λύση στό ἴδιο ἀκριβῶς κλειστό διάστημα.

Ὁρισμός 3.4.1. *Ἔστω τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν*

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(\tau) = \xi, \end{cases} \tag{3.38}$$

[75] Ἡ μέθοδος αὐτή ἀνεπτύχθη ἀπό τόν Cauchy στίς διαλέξεις του στήν École Polytechnique μεταξύ τῶν ἐτῶν 1820–30. Συνοψίζεται σ' ἕνα memoir μέ τίτλο: *Sur l'intégration des équations différentielles*, Πράγα (1835). Ὡστόσο, ἡ οὐσία τῆς μεθόδου χρονολογεῖται ἀπό τόν Euler (1768). Ἡ δέ *βελτιωμένη* ἐκδοχή της ἐδόθη ἀπό τόν Lipschitz στό Bul. Sc. Math. 10 (1876), σελ. 149.

ὅπου $f : D \to \mathbb{R}$ *συνεχής,* $D \subset \mathbb{R}^2$ *ἀνοικτό,* $I = [\alpha, \beta]$ *καί* $\tau \in I$. *Ἡ συνάρτηση* $\varphi : I \to \mathbb{R}$ *ὀνομάζεται* $\varepsilon-$*προσεγγιστική λύση τοῦ* (3.38) *ἄν ἰσχύουν τά ἀκόλουθα:*

(i) *Ἡ* φ *εἶναι συνεχής στό* I.

(ii) *Ἡ* φ *εἶναι κατά τμήματα γραμμική.* (*Piecewise linear.*) *Συγκεκριμένα ὑπάρχουν* τ_k, $k = 0, \dots, n$,

$$\alpha = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_n = \beta,$$

ὥστε ὅταν ἡ φ *περιορισθεῖ σέ καθένα ἀπό τά διαστήματα* $[\tau_{k-1}, \tau_k]$ *νά εἶναι πολυώνυμο, πρώτου τό πολύ βαθμοῦ.*

(iii) *Γιά κάθε* $t \in I$, *τό ζεῦγος* $(t, \varphi(t))$ *ἀνήκει στό* D, *δηλαδή ἔχει ἔννοια ἡ* $f(t, \varphi(t))$.

(iv) *Γιά κάθε* $t \in I$ *καί* $t \neq \tau_k$, $k = 0, \dots, n$, *ἰσχύει ὅτι:*

$$\left|\varphi'(t) - f\big(t, \varphi(t)\big)\right| \leq \varepsilon. \tag{3.39}$$

(v) *Τέλος ἰσχύει ὅτι* $\left|\varphi(\tau) - \xi\right| \leq \varepsilon$.

Παρατηρήσεις

(i) Στήν περίπτωση κατά τήν ὁποία ἱκανοποιοῦνται οἱ ἰδιότητες $(i) - (iv)$ τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ, τότε ἔχομε ἁπλῶς $\varepsilon-$προσεγγιστική λύση τῆς συνήθους διαφορικῆς ἐξισώσεως. Ἡ δέ ἰδιότης (v) ἀποτελεῖ τήν $\varepsilon-$προσέγγιση τῆς ἀρχικῆς συνθήκης.

(ii) Λόγῳ τῶν ἰδιοτήτων (i) καί (ii) τῶν $\varepsilon-$προσεγγιστικῶν λύσεων συνάγομε ὅτι:

$$\varphi(t) = \varphi(\tau_{k-1}) + \frac{\varphi(\tau_k) - \varphi(\tau_{k-1})}{\tau_k - \tau_{k-1}}(t - \tau_{k-1}),$$

γιά κάθε t στό διάστημα $[\tau_{k-1}, \tau_k]$. Ἤτοι: Τό γράφημα τῆς φ στό διάστημα $[\tau_{k-1}, \tau_k]$ εἶναι τό εὐθύγραμμο τμῆμα τό ὁποῖο συνδέει τά σημεῖα $\big(\tau_{k-1}, \varphi(\tau_{k-1})\big)$ καί $\big(\tau_k, \varphi(\tau_k)\big)$. Συνολικῶς τό γράφημα τῆς φ σ' ὅλο τό $[\alpha, \beta]$ ἀποτελεῖ πολυγωνική γραμμή. (Μία τέτοια φ ὀνομάζεται *affine*.)

(iii) Ἄν ὁλοκληρώσομε τήν (3.39) στό διάστημα $[\tau, t]$ λαμβάνομε:

$$\left|\varphi(t) - \varphi(\tau) - \int_\tau^t f\big(s, \varphi(s)\big)\, ds\right| \leq \varepsilon|t - \tau| \tag{3.40}$$

καί σέ συνδυασμό μέ τήν ἰδιότητα (v) ἕπεται ὅτι

$$\begin{aligned}\left|\varphi(t) - \xi - \int_\tau^t f\big(s, \varphi(s)\big)\, ds\right| &\leq \left|\varphi(t) - \varphi(\tau) - \int_\tau^t f\big(s, \varphi(s)\big)\, ds\right| + |\varphi(\tau) - \xi| \\ &\leq \varepsilon|t - \tau| + \varepsilon.\end{aligned}$$

Ἄρα ἡ φ ἀποτελεῖ προσεγγιστική λύση καί τῆς ὁλοκληρωτικῆς μορφῆς τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν. Ἰδιαιτέρως, ἄν ἡ ἀρχική συνθήκη ἱκανοποιεῖται ἀκριβῶς, δηλαδή $\varphi(\tau) = \xi$, τότε ἡ φ θά ἱκανοποιεῖ τελικῶς

$$\left|\varphi(t) - \xi - \int_\tau^t f\big(s, \varphi(s)\big)\, ds\right| \le \varepsilon |t - \tau|.$$

Τό θεώρημα τό ὁποῖο ἀκολουθεῖ ἀποτελεῖ τό ἰσχυρότερο ἀποτέλεσμα ὑπάρξεως λύσεων τοῦ ἀνά χεῖρας ἐγχειριδίου. Εἶναι τό ἰσχυρότερο διότι παρέχει ὕπαρξη λύσεων ἐνῶ ἀπαιτεῖ ἀπό τήν συνάρτηση ροῆς μόνον συνέχεια καί ὄχι συνέχεια Lipschitz. Ταυτοχρόνως ὅμως δέν παρέχει μοναδικότητα.

Θεώρημα 3.4.1. **(***Cauchy-Lipschitz***)** *Ἔστω ὅτι $f : D \to \mathbb{R}$ συνεχής, ὅπου $D \subset \mathbb{R}^2$ ἀνοικτό, $(\tau, \xi) \in D$,*

$$K = [\tau - \alpha, \tau + \alpha] \times [\xi - \beta, \xi + \beta] \subset D,$$

καί $\max\limits_{(t,x)\in K} |f(t,x)| = M$. Τότε τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν:

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(\tau) = \xi, \end{cases} \tag{3.41}$$

ἔχει λύση φ ἡ ὁποία ὁρίζεται στό διάστημα $I = [\tau - \gamma, \tau + \gamma]$, ὅπου $\gamma = \min\{\alpha, \beta/M\}$. Ἡ φ προκύπτει ὡς ὁμοιόμορφο ὅριο κατάλληλης ἀκολουθίας $\varepsilon-$προσεγγιστικῶν λύσεων.

Περιγραμμα αποδειξεως. Ἡ ἀπόδειξη συνίσταται στά ἑξῆς:

(i) Γιά κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει $\varepsilon-$προσεγγιστική λύση φ_ε τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (3.41) ὁρισμένη ἐπί τοῦ κλειστοῦ διαστήματος $I = [\tau - \gamma, \tau + \gamma]$, ἡ ὁποία ἱκανοποιεῖ τήν ἀρχική συνθήκη ἀκριβῶς, δηλαδή $\varphi_\varepsilon(\tau) = \xi$.

(ii) Κατάλληλη ἀκολουθία τέτοιων $\varepsilon-$προσεγγιστικῶν λύσεων, συγκεκριμένα μία ἀκολουθία τῆς μορφῆς $\{\varphi_{\varepsilon_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, ὅπου $\varepsilon_n \searrow 0$, ἀποτελεῖ *ἰσοσυνεχές* καί φραγμένο ὑποσύνολο τοῦ $C(I)$. Χρησιμοποιῶντας τό *Λῆμμα Arzelà-Ascoli* λαμβάνομε ὁμοιομόρφως συγκλίνουσα ὑπακολουθία τῆς $\{\varphi_{\varepsilon_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$. Τό ὅριο αὐτῆς θά εἶναι λύση τοῦ (3.41).

3.4.1 Κατασκευή $\varepsilon-$προσεγγιστικῶν λύσεων

Ἡ ὕπαρξη $\varepsilon-$προσεγγιστικῶν λύσεων προκύπτει ἀπό τό κατωτέρω κατασκευαστικό λῆμμα:

Λῆμμα 3.4.2. *Ἔστω $f : D \to \mathbb{R}$, ὅπου $D \subset \mathbb{R}^2$ ἀνοικτό, συνεχής συνάρτηση,*

$$K = [\tau - \alpha, \tau + \alpha] \times [\xi - \beta, \xi + \beta] \subset D,$$

καί $M = \max_{(t,x)\in K} |f(t,x)|$. *Ἔστω* $\gamma = \min\{\alpha, \beta/M\}$. *Τότε γιά κάθε* $\varepsilon > 0$ *ὑπάρχει* $\varepsilon-$*προσεγγιστική λύση* φ *τοῦ* (3.41) *ὁρισμένη στό διάστημα* $I = [\tau-\gamma, \tau+\gamma]$ *καί ἱκανοποιοῦσα τήν ἀρχική συνθήκη* $\varphi(\tau) = \xi$.

Ἀποδειξη. Πραγματοποιοῦμε κατ' ἀρχάς τήν κατασκευή στό διάστημα $[\tau, \tau+\gamma]$. Ἡ κατασκευή στό διάστημα $[\tau-\gamma, \tau]$ πραγματοποιεῖται κατ' ἀνάλογο τρόπο. Ἐπειδή τό K εἶναι συμπαγές, τότε ἡ f εἶναι ὁμοιομόρφως συνεχής στό K, ὁπότε γιά τό δοθέν $\varepsilon > 0$, ὑπάρχει $\delta > 0$, ὥστε ὁποτεδήποτε

$$|t_1 - t_2| < \delta \qquad \textit{καί} \qquad |x_1 - x_2| < \delta,$$

νά ἰσχύει ὅτι

$$\big|f(t_1, x_1) - f(t_2, x_2)\big| < \varepsilon.$$

Ἔστω τώρα $n \in \mathbb{N}$ ὥστε:

$$h = \frac{\gamma}{n} < \min\left\{\delta, \frac{\delta}{M}\right\}$$

καί ἔστω ὅτι ὁρίζομε τά σημεῖα:

$$\tau_k = \tau + kh, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Τότε κατασκευάζομε τήν κατωτέρω ἀναδρομικῶς ὁριζόμενη συνάρτηση φ ὅπου

$$\varphi(\tau) = \xi$$

καί δοθέντος ὅτι ἡ φ ἔχει ὁρισθεῖ στό διάστημα $I_k = [\tau_{k-1}, \tau_k]$, ὁρίζομε

$$\varphi(t) = \varphi(\tau_k) + f\big(\tau_k, \varphi(\tau_k)\big)(t - \tau_k),$$

γιά κάθε $t \in I_{k+1} = [\tau_k, \tau_{k+1}]$. Θά δείξομε ὅτι ἡ φ εἶναι πράγματι $\varepsilon-$προσεγγιστική λύση τοῦ (3.41). Οἱ ἰδιότητες (i), (ii) καί (v) τοῦ *Ὁρισμοῦ* 3.38 στήν σελίδα 151, ἱκανοποιοῦνται αὐτομάτως. Ἡ ἰδιότης (iii) ἀποτελεῖ συνέπεια τῆς ἀνισότητος

$$\big|\varphi(t) - \xi\big| \le M|t - \tau|, \tag{3.42}$$

τήν ὁποία καί θά ἀποδείξομε ἐπαγωγικῶς. Συγκεκριμένα, στό $I_1 = [\tau_0, \tau_1] = [\tau, \tau+h]$, ἡ φ ἔχει τήν μορφή

$$\varphi(t) = \varphi(\tau_0) + f\big(\tau_0, \varphi(\tau_0)\big)(t - \tau_0) = \xi + f(\tau, \xi)(t - \tau).$$

Ἄρα

$$\big|\varphi(t) - \xi\big| = \big|f(\tau, \xi)\big| \cdot |t - \tau| \le M|t - \tau|.$$

Ἔστω τώρα ὅτι ἡ (3.42) ἰσχύει στό διάστημα I_k. Τότε ἰδιαιτέρως γιά $t = \tau_k \in I_k$ θά ἰσχύει ὅτι:

$$|\varphi(\tau_i) - \xi| \leq M|\tau_i - \tau|.$$

Ἑπομένως $(\tau_k, \varphi(\tau_k) \in K$ καί συνεπῶς ἡ f ὁρίζεται στό σημεῖο $\big(\tau_k, \varphi(\tau_k)\big)$. Ὁπότε στό I_{k+1} ἡ φ ἔχει τήν μορφή:

$$\varphi(t) = \varphi(\tau_k) + f\big(\tau_k, \varphi(\tau_k)\big)(t - \tau_k),$$

θά ἔχομε

$$\begin{aligned} |\varphi(t) - \xi| &\leq |\varphi(\tau_k) - \xi| + \big|f\big(\tau_k, \varphi(\tau_k)\big)\big|\, |t - \tau_k| \\ &\leq M|\tau_k - \tau| + M|t - \tau_k| = M|t - \tau|. \end{aligned}$$

Ἀπομένει ἡ ἀπόδειξη τῆς ἰδιότητος (iv). Ἔστω $t \in (\tau_{k-1}, \tau_k)$. Λόγῳ τοῦ τρόπου μέ τόν ὁποῖο ὁρίσθηκε ἡ φ θά ἔχομε:

$$\varphi'(t) - f\big(t, \varphi(t)\big) = f\big(\tau_{k-1}, \varphi(\tau_{k-1})\big) - f\big(t, \varphi(t)\big).$$

Ἀρκεῖ λοιπόν νά δείξομε ὅτι:

$$|\tau_{k-1} - t| < \delta \quad \textit{καί} \quad \big|\varphi(\tau_{k-1}) - \varphi(t)\big| < \delta,$$

γιά κάθε $t \in I_k$. Ἡ πρώτη ἀπό τίς ἀνωτέρω ἀνισότητες ἰσχύει διότι γιά κάθε $t \in I_k$ ἔχομε:

$$0 \leq t - \tau_{k-1} \leq \tau_k - \tau_{k-1} = h < \delta,$$

ἐνῶ γιά τήν δεύτερη

$$\big|\varphi(t) - \varphi(\tau_{k-1})\big| = \big|f\big(\tau_{k-1}, \varphi(\tau_{k-1})\big)\big| \cdot \big|t - \tau_{k-1}\big| < M \cdot \frac{\delta}{M} = \delta. \qquad \square$$

3.4.2 Λῆμμα Arzelá–Ascoli

Ὅπως ἔχει ἤδη ἀναφερθεῖ, ἡ λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(\tau) = \xi, \end{cases}$$

θά προκύψει ὡς ὁμοιόμορφο ὅριο κατάλληλης ἀκολουθίας $\{\varphi_{\varepsilon_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\varepsilon_n \searrow 0$, ἀπό $\varepsilon-$προσεγγιστικές λύσεις. Συγκεκριμένα, ἐάν ἐγνωρίζαμε ὅτι ἡ $\{\varphi_{\varepsilon_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ ἦταν ὁμοιομόρφως συγκλίνουσα ἐπί τοῦ διαστήματος $[\tau - \gamma, \tau + \gamma]$, μέ ὅριο τήν συνάρτηση φ, τότε λόγῳ τῆς ἀνισότητος (3.40), δεδομένου ὅτι ἑκάστη τῶν προσεγγιστικῶν λύσεων φ_{ε_n} ἱκανοποιεῖ τήν ἀρχική συνθήκη, θά εἴχαμε ὅτι

$$\Big|\varphi_{\varepsilon_n}(t) - \xi - \int_\tau^t f\big(s, \varphi_{\varepsilon_n}(s)\big)\, ds\Big| \leq \varepsilon_n|t - \tau|,$$

γιά κάθε $t \in [\tau - \gamma, \tau + \gamma]$, ἡ ὁποία μέ τήν σειρά της θά εἶχε ὡς συνέπεια ὅτι τό ὁμοιόμορφο ὅριο φ θά ἱκανοποιοῦσε τήν ἀνισότητα

$$\left|\varphi(t) - \xi - \int_\tau^t f\big(s, \varphi(s)\big)\, ds\right| \leq 0,$$

γιά κάθε $t \in [\tau - \gamma, \tau + \gamma]$, διότι $\varphi_{\varepsilon_n} \to \varphi$ ὁμοιομόρφως καί χρησιμοποιῶντας τό ἐπιχείρημα τῆς σελίδος 129 συνάγομε ὅτι

$$\zeta_n(t) = \int_\tau^t f\big(s, \varphi_{\varepsilon_n}(s)\big)\, ds \to \int_\tau^t f\big(s, \varphi(s)\big)\, ds = \zeta(t),$$

ὁμοιομόρφως στό $[\tau - \gamma, \tau + \gamma]$. Ὡς ἐκ τούτου ἡ φ θά ἀποτελοῦσε λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (3.4.2).

Γιά νά ἀποδειχθεῖ ὅμως ἡ ὕπαρξη τέτοιας ὑπακολουθίας $\varepsilon-$προσεγγιστικῶν λύσεων ἀπαιτεῖται ἡ χρήση τοῦ λήμματος Arzelà–Ascoli[76].

Λῆμμα 3.4.3. (*Arzelà–Ascoli*) *Ἔστω $\mathcal{F} \subset C[\alpha, \beta]$ ἰσοσυνεχής καί φραγμένη οἰκογένεια συναρτήσεων. Τότε κάθε ἀκολουθία $\{\psi_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ ἔχει ὁμοιομόρφως συγκλίνουσα ὑπακολουθία.*

Πρό τῆς ἀποδείξεως παραθέτομε τόν ὁρισμό τῆς ἰσοσυνεχείας:

Ὁρισμός 3.4.2. *Ἕνα σύνολο συναρτήσεων $\mathcal{F} \subset C[\alpha, \beta]$ ὀνομάζεται ἰσοσυνεχές (equicontinuous) ἄν γιά κάθε t_1, $t_2 \in [\alpha, \beta]$ καί $\psi \in \mathcal{F}$ ὑπάρχει $\varepsilon > 0$ ὥστε ὁποτεδήποτε:*

$$|t_1 - t_2| < \delta,$$

νά ἕπεται ὅτι

$$|\psi(t_1) - \psi(t_2)| < \varepsilon.$$

Ἤτοι, τό ε εἶναι ἀνεξάρτητο τόσο ἀπό τίς ψ ὅσο καί ἀπό τά t_1, $t_2 \in [\alpha, \beta]$.

Παρατήρηση. Ἐννοεῖται ἐδῶ ὅτι ἡ οἰκογένεια συναρτήσεων $\mathcal{F}$ ὀνομάζεται *φραγμένη* ἄν ὑπάρχει $M > 0$ ὥστε

$$|\psi(t)| \leq M,$$

γιά κάθε $\psi \in \mathcal{F}$ καί $t \in [\alpha, \beta]$.

[76] Guido Ascoli (1843–1896), Cesare Arzelà (1847–1912). Τό λῆμμα αὐτό ἀρχικῶς ἀπεδείχθη ἀπό τόν Ascoli γιά ἰσο-Lipschitz συνεχεῖς συναρτήσεις στό *Le curve limiti di una varietà data di curve, Rend. Accad. Lincei*, nu. 18 (1884), σελ. 521–586. Ὁ Arzelà ἔδωσε τήν ἐπέκταση τοῦ λήμματος γιά γενική οἰκογένεια ἰσοσυνεχῶν συναρτήσεων στό *Sulle funzioni di linee, Mem. Accad. Sc. Bologna*, Serie 5, Tomo 5 (1894–5), σελ. 225–244.

Απόδειξη του λήμματος. Ἔστω $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ καί $\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ οἱ ρητοί τοῦ διαστήματος $[\alpha,\beta]$. Τότε ἡ ἀκολουθία $\{\psi_n(r_1)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ἀποτελεῖ φραγμένη ἀκολουθία πραγματικῶν ἀριθμῶν καί ὡς ἐκ τούτου ἔχει συγκλίνουσα ὑπακολουθία, ἔστω τήν $\{\psi_{1,n}(r_1)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Ὁμοίως ἡ ἀκολουθία $\{\psi_{1,n}(r_2)\}_{n\in\mathbb{N}}$, ἡ ὁποία εἶναι ἐπίσης φραγμένη ἔχει συγκλίνουσα ὑπακολουθία, ἔστω τήν $\{\psi_{2,n}(r_2)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Ἀναδρομικῶς κατασκευάζομε τίς συγκλίνουσες ὑπακολουθίες $\{\psi_{k,n}(r_k)\}_{n\in\mathbb{N}}$, οὕτως ὥστε ἡ $\{\psi_{k,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ νά εἶναι ὑπακολουθία τῆς $\{\psi_{k-1,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ καί ἡ $\{\psi_{k,n}(r_k)\}_{n\in\mathbb{N}}$ νά συγκλίνει. Θά δείξομε ὅτι ἡ ἀκολουθία $\varphi_n = \psi_{n,n}$, $n\in\mathbb{N}$, ἡ ὁποία προκύπτει ἀπό τό προηγηθέν *διαγώνιο ἐπιχείρημα* καί συγκλίνει σέ κάθε ρητό στό $[\alpha,\beta]$, συγκλίνει καί ὁμοιομόρφως στό $[\alpha,\beta]$. Χρησιμοποιοῦμε πρός τοῦτο κατάλληλο ἐπιχείρημα τῶν τριῶν $\varepsilon/3$. Ἔστω $\varepsilon > 0$. Τότε λόγῳ τῆς ἰσοσυνεχείας ὑπάρχει $\delta > 0$ ὥστε ὁποτεδήποτε

$$t_1,\, t_2 \in [\alpha,\beta], \quad |t_1 - t_2| < \delta \qquad \text{καί} \qquad \psi \in \mathcal{F},$$

ἰσχύει ὅτι

$$|\psi(t_1) - \psi(t_2)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ἐπιλέγομε ρητούς $r_1,\dots,r_k$ ὥστε $\alpha \le r_1 < r_2 < \cdots < r_k \le \beta$ καί

$$r_{j+1} - r_j < \delta, \quad j = 1,\dots,k-1.$$

Ἐπειδή οἱ ἀκολουθίες $\{\varphi_n(r_j)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $j = 1,\dots,k$, συγκλίνουν, ὑπάρχει $N\in\mathbb{N}$ ὥστε

$$m,n \ge N \quad \Longrightarrow \quad |\varphi_m(r_j) - \varphi_n(r_j)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

ταυτοχρόνως γιά κάθε $j = 1,\dots,k$. Ἔστω τώρα $t\in[\alpha,\beta]$. Τότε $t\in[r_j, r_{j+1}]$ γιά κάποιο $j = 1,\dots,k-1$ καί ὡς ἐκ τούτου $|t - r_j| < \delta$. Συνεπῶς θά ἔχομε:

$$\begin{aligned}\big|\varphi_m(t) - \varphi_n(t)\big| &\le \big|\varphi_m(t) - \varphi_m(r_j)\big| + \big|\varphi_m(r_j) - \varphi_n(r_j)\big| + \big|\varphi_n(r_j) - \varphi_n(t)\big|\\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Ἄρα ἡ $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ εἶναι ὁμοιομόρφως Cauchy καί συνεπῶς συγκλίνει ὁμοιομόρφως. **ὅ.ἔ.δ.**

3.4.3 Ἀπόδειξη τοῦ Θεωρήματος Cauchy–Lipschitz

Εἴμεθα τώρα ἕτοιμοι νά ὁλοκληρώσομε τήν ἀπόδειξη τοῦ *Θεωρήματος 3.4.1*. Ἀπομένει νά ἐξακριβωθεῖ ὅτι τό σύνολο τῶν $\varepsilon-$προσεγγιστικῶν λύσεων $\mathcal{F} = \{\varphi_{\varepsilon_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, ὅπου $\varepsilon_n \searrow 0$, εἶναι φραγμένο καί ἰσοσυνεχές. Τό ὅτι τό $\mathcal{F}$ εἶναι φραγμένο προκύπτει ἀπό τήν (3.42). Γιά τήν ἀπόδειξη τῆς ἰσοσυνεχείας, ἔστω φ $\varepsilon-$προσεγγιστική λύση, $t,\tilde{t}\in[\tau-\gamma,\tau+\gamma]$, ὅπου $t<\tilde{t}$ καί ἔστω ὅτι μεταξύ τῶν t καί $\tilde{t}$ παρεμβάλλονται τά $\tau_{k+1},\dots,\tau_\ell$, δηλαδή

$$\tau_k \le t < \tau_{k+1} < \ldots < \tau_\ell \le \tilde{t} < \tau_{\ell+1}.$$

Τότε θά ἔχομε

$$\begin{aligned}\varphi(\tilde{t})-\varphi(t) &= \big(\varphi(\tilde{t})-\varphi(\tau_\ell)\big)+\big(\varphi(\tau_\ell)-\varphi(\tau_{\ell-1})\big)+\cdots+\big(\varphi(\tau_{k+1})-\varphi(t)\big)\\ &= f\big(\tau_\ell,\varphi(\tau_\ell)\big)(\tilde{t}-\tau_\ell)+f\big(\tau_{\ell-1},\varphi(\tau_{\ell-1})\big)(\tau_\ell-\tau_{\ell-1})+\cdots+\\ &\quad + f\big(\tau_k,\varphi(\tau_k)\big)(\tau_{k+1}-t),\end{aligned}$$

ὁπότε

$$\begin{aligned}\big|\varphi(\tilde{t})-\varphi(t)\big| &\le \big|f\big(\tau_\ell,\varphi(\tau_\ell)\big)\big|\cdot|\tilde{t}-\tau_\ell|+\big|f\big(\tau_{\ell-1},\varphi(\tau_{\ell-1})\big)\big|\cdot|\tau_\ell-\tau_{\ell-1}|+\cdots+\\ &\quad +\big|f\big(\tau_k,\varphi(\tau_k)\big)\big|\cdot|\tau_{k+1}-t|\\ &\le M|\tilde{t}-\tau_\ell|+M|\tau_\ell-\tau_{\ell-1}|+\cdots+M|\tau_{k+1}-t| \;=\; M|\tilde{t}-t|,\end{aligned}$$

ὅπερ ἀποδεικνύει τήν ἰσοσυνέχεια καί ὁλοκληρώνει τήν ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος. **ὅ.ἔ.δ.**

Παρατηρήσεις

(i) Ἡ ἐπιλογή τοῦ ὀρθογωνίου παραλληλογράμμου K, στό πεδίο ὁρισμοῦ D τῆς f, τό ὁποῖο ὑπετέθη ἀνοικτό ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}^2$, μέ κέντρο βάρους δοθέν σημεῖο αὐτοῦ, εἶναι πάντοτε ἐφικτή. Συνεπῶς ἡ διατύπωση τοῦ *Θεωρήματος 3.4.1* θά ἦταν δυνατόν νά ἁπλουστευθεῖ καί ὡς ἑξῆς:

Πόρισμα 3.4.4. *Ἔστω $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ συνεχής, ὅπου $D \subset \mathbb{R}^2$ ἀνοικτό καί $(\tau,\xi) \in D$. Τότε τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν*

$$\begin{cases} x' = f(t,x),\\ x(\tau) = \xi,\end{cases}$$

ἔχει λύση. □

(ii) Τά συμπεράσματα τοῦ *Λήμματος Arzelà–Ascoli* ἰσχύουν καί στήν περίπτωση κατά τήν ὁποία ἡ οἰκογένεια $\mathcal{F}$ ἀποτελεῖ ἰσοσυνεχῆ οἰκογένεια φραγμένων συναρτήσεων ὡς πρός κάποια μετρική, καί ὁρισμένων ἐπί συμπαγοῦς μετρικοῦ χώρου (ἤ ἀκόμη γενικότερα, ἐπί ὁλικῶς φραγμένου χώρου[77].)

(iii) Στήν περίπτωση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x' = |x|^{1/2},\\ x(0) = 0,\end{cases}$$

[77]Ἕνας μετρικός χῶρος $\langle X,d\rangle$ ὀνομάζεται *ὁλικῶς φραγμένος* ἄν γιά κάθε $\varepsilon > 0$ ὁ X καλύπτεται ἀπό πεπερασμένου πλήθους ἀνοικτές μπάλες ἀκτῖνος ε.

ὅλες οἱ $\varepsilon-$προσεγγιστικές λύσεις οἱ ὁποῖες κατασκευάζονται ἀπό τήν *Πρόταση 3.4.2* εἶναι ταυτοτικῶς μηδενικές. Ἄρα ὑπάρχει μοναδικό ὅριο $\varepsilon-$προσεγγιστικῶν λύσεων παρά τό γεγονός ὅτι τό ἀντίστοιχο πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν ἔχει ἄπειρες λύσεις. Ἑπομένως στήν περίπτωση ἡ ὁποία παραβιάζεται ἡ μοναδικότης, ἡ *Μέθοδος Peano* δέν κατασκευάζει ἀπαραιτήτως ὅλες τίς λύσεις.Ὡστόσο, στήν περίπτωση κατά τήν ὁποία στό ἴδιο πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν θέσομε $\varphi_\varepsilon(\tau) = \varepsilon$, λαμβάνομε, ὡς ὁμοιόμορφο ὅριο, κάποια μή ταυτοτικῶς μηδενική λύση. Ποιά;

(iv) Οἱ $\varepsilon-$προσεγγιστικές λύσεις οἱ ὁποῖες κατασκευάζονται ἀπό τήν *Πρόταση 3.4.2* εἶναι ἐν πολλοῖς ὑπομιμνήσκουσες τῶν προσεγγιστικῶν λύσεων τῆς *Μεθόδου Euler* (γνωστῆς ὡς *Forward Euler*.) Συγκεκριμένα, ἡ λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(\tau) = \xi, \end{cases} \tag{3.43}$$

προσεγγίζεται στό διάστημα $[\tau, \tau+\gamma]$ ἀπό συνάρτηση x_h τῆς ὁποίας τό γράφημα ἀποτελεῖ πολυγωνική καμπύλη. Ἡ x_h προσδιορίζεται ἀπό $N-$άδα διακριτῶν τιμῶν x_n, $n = 0,1,\ldots,N$, οἱ τιμές στίς κορυφές τῆς πολυγωνικῆς γραμμῆς, ὅπου ἡ τιμή x_n προσεγγίζει τήν λύση στήν χρονική στιγμή $t_n = \tau + nh$ μέ $h = \gamma/N$. Οἱ τιμές τῆς x_n ἀποτελοῦν ὅρους τῆς ἀκολουθίας μέ ἀναδρομικό τύπο

$$x_0 = \xi, \quad x_k = x_{k-1} + hf(t_{k-1}, x_{k-1}), \quad k = 1,\ldots,N.$$

Γιά τήν ἀπόδειξη τῆς συγκλίσεως τῆς ἀνωτέρω ἀκολουθίας στήν λύση τοῦ (3.43) ἀπαιτεῖται ἐπί πλέον ὁμαλότης στήν συνάρτηση ροῆς. (Βλέπε *Ἄσκηση* 3.4.4 στήν σελίδα 160.)

(v) Ἄν τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν ἔχει μοναδική λύση, τότε κάθε ἀκολουθία $\varepsilon-$προσεγγιστικῶν λύσεων συγκλίνει σ' αὐτήν. (Βλέπε *Ἄσκηση* 3.4.1 στήν σελίδα 160.)

3.4.4 Διανυσματική ἐκδοχή τοῦ θεωρήματος Cauchy–Lipschitz

Χωρίς ἰδιαίτερη δυσκολία δυνάμεθα νά ὁρίσομε $\varepsilon-$προσεγγιστικές λύσεις διανυσματικῶν προβλημάτων ἀρχικῶν τιμῶν καί νά ἀποδείξομε ὅτι τέτοιες ὑπάρχουν. Ἰδιαιτέρως ἰσχύει ὅτι:

Θεώρημα 3.4.5. (*Cauchy-Lipschitz*) *Ἔστω $\boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^N$ συνεχής, ὅπου $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$ ἀνοικτό, $K = [\tau-\alpha, \tau+\alpha] \times \overline{B}_\beta(\boldsymbol{\xi}) \subset D$ καί $M = \max_{(t,x)\in K} \|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})\|$, τότε τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν:*

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}), \\ \boldsymbol{x}(\tau) = \boldsymbol{\xi}, \end{cases} \tag{3.44}$$

ἔχει λύση $\boldsymbol{\varphi}$ ὁρισμένη στό διάστημα $I = [\tau-\gamma, \tau+\gamma]$, ὅπου $\gamma = \min\{\alpha, \beta/M\}$. Ἡ $\boldsymbol{\varphi}$ προκύπτει ὡς ὁμοιόμορφο ὅριο $\varepsilon-$προσεγγιστικῶν λύσεων. □

Παρομοίως ἔχομε καί τό ἀκόλουθο πόρισμα

Πόρισμα 3.4.6. *Ἔστω* $\boldsymbol{f} : D \longrightarrow \mathbb{R}^N$ *συνεχής, ὅπου* $D \subset \mathbb{R}^{N+1}$ *ἀνοικτό καί* $(\tau, \boldsymbol{\xi}) \in D$. *Τότε τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν*

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}), \\ \boldsymbol{x}(\tau) = \boldsymbol{\xi}, \end{cases}$$

ἔχει λύση. □

Ἀσκήσεις

3.4.1 Ἀποδείξατε ὅτι ἄν τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(\tau) = \xi, \end{cases}$$

δέχεται μοναδική λύση, τότε κάθε ἀκολουθία $\varepsilon-$προσεγγιστικῶν λύσεων $\{\varphi_{\varepsilon_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\varepsilon_n \searrow 0$, τοῦ ἀνωτέρω, συγκλίνει ὁμοιομόρφως.

3.4.2 Ἔστω ὅτι ἡ ἀκολυθία $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ἀποτελεῖ τοπικῶς ὁμοιομόρφως συγκλίνουσα ἀκολουθία ἐπί διαστήματος I λύσεων τῆς ἐξισώσεως $x' = f(t, x)$ μέ ὅριο τήν συνάρτηση φ. Δείξατε ὅτι ἡ φ εἶναι ἐπίσης λύση τῆς $x' = f(t, x)$.

3.4.3 Ἔστω $f \in C(K)$, ὅπου $K = [\tau - \alpha, \tau + \alpha] \times [\xi - \beta, \xi + \beta]$. Ἄν $M = \max_{(t,x)\in K} |f(t, x)|$ καί $\gamma = \min\{\alpha, \beta/M\}$, τότε τό σύνολο τῶν λύσεων τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(\tau) = \xi, \end{cases}$$

στό διάστημα $[\tau - \gamma, \tau + \gamma]$, εἶναι ἰσοσυνεχές.

3.4.4 (Σύγκλιση τῆς μεθόδου Euler) Ἔστω ὅτι τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(\tau) = \xi, \end{cases} \tag{3.45}$$

ἔχει λύση στό διάστημα $I = [\tau, \tau + \gamma]$, ὅπου $\gamma > 0$ καί ἡ f ἱκανοποιεῖ τήν συνθήκη Lipschitz ὡς πρός τήν δεύτερη μεταβλητή. Ὁρίζομε ὡς $\varphi_n : I \to \mathbb{R}$ τήν $\varepsilon-$προσεγγιστική λύση ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ στήν διαμέριση $\tau = \tau_0 < \tau + h < \cdots < \tau + nh = \tau + \gamma$, ὅπου $h = \gamma/n$. Δείξατε ὅτι ἡ ἀκολουθία $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στήν λύση τοῦ (3.43) ὁμοιομόρφως στό $[\tau, \tau + \gamma]$. Ἰδιαιτέρως, δείξατε ὅτι ὑπάρχει σταθερά $C > 0$, ἀνεξάρτητη τοῦ n, ὥστε

$$\max_{t\in[\tau,\tau+\gamma]} |\varphi_n(t) - \varphi(t)| \le \frac{C}{n}.$$

Ἤτοι, ἡ μέθοδος εἶναι *πρώτης τάξεως ἀκριβείας*.

3.4.5 Ἔστω ὅτι τό σύνολο $\mathcal{S}$ ἀποτελεῖται ἀπό ὅλες τίς λύσεις τοῦ (μή κατ' ἀνάγκη ἀπολαμβάνοντος μοναδικότητος) προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x' = f(t, x), \\ x(\tau) = \xi. \end{cases} \tag{3.46}$$

μέ πεδίο ὁρισμοῦ $I = [\tau - \gamma, \tau + \gamma]$ (τό $\gamma > 0$ ἔχει ὁρισθεῖ στήν διατύπωση τοῦ Θεωρήματος 3.4.1), τότε δείξατε ὅτι ἡ συνάρτηση

$$\varphi(t) \;=\; \sup_{\psi \in \mathcal{S}} \psi(t),$$

εἶναι φραγμένη καί ἀποτελεῖ λύση τοῦ (3.46). Ἡ φ ἀποτελεῖ τήν *μέγιστη λύση* τῆς (3.46).

Υποδειξη. Κατ' ἀρχάς δείξατε ὅτι ἄν $\psi \in \mathcal{S}$, τότε $|\psi(t) - \zeta| \le \beta$ γιά κάθε $t \in I$. Ἄρα ἡ φ εἶναι φραγμένη. Ἀκολούθως δείξατε ὅτι ἄν $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{S}$, τότε $\max\{\psi_1, \psi_2\} \in \mathcal{S}$. Ἔστω $\varepsilon > 0$. Ἐπιλέγομε $\{\tau_i\} i = 1^N \subset I$ ὥστε $0 < \tau_i - \tau_{i-1} < \varepsilon$ καί $\{\psi_i^\varepsilon\}_{i=1}^N \subset \mathcal{S}$ ὥστε $\psi_i^\varepsilon(\tau_i) > \varphi(\tau_i) - \varepsilon$. Θέτομε $\psi^\varepsilon = \max\{\psi_1^\varepsilon, \ldots, \psi_N^\varepsilon\}$. Δείξατε ὅτι ἡ $\lim_{\varepsilon \to 0} \psi^\varepsilon = \varphi$.

3.4.6 Νά ἀποδειχθεῖ τό *Θεώρημα 3.4.5*.

3.4.7 Νά διατυπωθεῖ καί νά ἀποδειχθεῖ τό *Θεώρημα Cauchy–Peano* στήν περίπτωση κατά τήν ὁποία ἡ ζητούμενη συνάρτηση καθώς καί ἡ συνάρτηση ροῆς λαμβάνουν τιμές σέ χῶρο Banach.

3.5 Μιγαδικές ἐξισώσεις*

Ἔστω τώρα ὅτι ὁ χρόνος μας εἶναι μιγαδικός. Ἔχομε ἤδη δεῖ πῶς διατυποῦται τό μιγαδικό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν. (Βλέπε *Ὑποενότητα 1.5.5* στίς σελῖδες 33–34). Ἡ μιγαδική συνάρτηση ροῆς ἀποτελεῖ ἀναλυτική συνάρτηση καί ὡς ἐκ τούτου αὐτό θά μᾶς ἐπιτρέψει τήν ἐκ νέου χρήση τῆς ἀναδρομικῆς ἀκολουθίας Picard. Στό σημεῖο αὐτό θά εἰσαγάγομε τόν ἀκόλουθο συμβολισμό:

(i) Ἀνοικτός δίσκος ἀκτῖνος ϱ καί κέντρου $\zeta \in \mathbb{C}$:

$$B(\zeta, \varrho) \;=\; \big\{\, z \in \colon\ |z - \zeta| < \varrho \,\big\},$$

(ii) Κλειστός δίσκος ἀκτῖνος ϱ καί κέντρου $\zeta \in \mathbb{C}$:

$$\overline{B}(\zeta, \varrho) \;=\; \big\{\, z \in \mathbb{C}\ :\ |z - \zeta| \le \varrho \,\big\}.$$

3.5.1 Ὕπαρξη

Ἔχομε τό κατωτέρω ἀποτέλεσμα ὑπάρξεως λύσεων:

Θεώρημα 3.5.1. *Ἔστω D ἀνοικτό ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{C}^2$ καί $f : D \to \mathbb{C}$ ἀναλυτική ὡς πρός ἑκάστη τῶν μεταβλητῶν της. Ἔστω ἐπίσης $(\zeta, \omega) \in D$ καί*

$$K \;=\; \overline{B}(\zeta, \alpha) \times \overline{B}(\omega, \beta) \;\subset\; D,$$

γιά κάποια α, $\beta > 0$. Ἄν

$$M \;=\; \max_{(z,w) \in K} \big| f(z, w) \big|$$

καί $\gamma = \min\{\alpha, \beta/M\}$, *τότε τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν*

$$\begin{cases} \dfrac{dw}{dz} = f(z,w), \\ w(\zeta) = \omega, \end{cases} \tag{3.47}$$

ἔχει λύση στό $\Omega = B(\zeta, \gamma)$.

Περιγραμμα της αποδειξεως. Ἡ λύση τοῦ (3.47) θά προκύψει ὡς τό ὅριο τῆς ἀναδρομικῆς ἀκολουθίας Picard

$$\varphi_0(z) = \omega, \qquad \varphi_{n+1}(z) = \omega + \int_\zeta^z f\big(\eta, \varphi_n(\eta)\big)\, d\eta,$$

γία $n \in \mathbb{N}$, ὅπου $z \in \overline{B}(\zeta, \gamma)$ καί ἡ ὁλοκλήρωση ἐκτελεῖται ἐπί αὐθαίρετης καμπύλης ἡ ὁποία συνδέει τά ζ καί z καί εὑρίσκεται ἐξ ὁλοκλήρου ἐντός τοῦ $\Omega = B(\zeta, \gamma)$. Ἐπειδή τό Ω εἶναι *ἁπλά συνεκτικό* χωρίο, τό ἀνωτέρω ὁλοκλήρωμα εἶναι καλῶς ὁρισμένο (μέ τήν προϋπόθεση βεβαίως ὅτι $\big(\eta, \varphi_n(\eta)\big) \in K$ γιά κάθε η τό ὁποῖο βρίσκεται ἐπί τῆς καμπύλης.)

Βῆμα πρῶτο: *Ἡ ἀναδρομική ἀκολουθία Picard ὁρίζεται καλῶς.*

Αὐτό ἀποδεικνύεται ὅπως καί στό *Θεώρημα 3.2.1*. Ἐδῶ ἐπιλέγομε ὡς καμπύλη ὁλοκληρώσεως τό εὐθύγραμμο τμῆμα τό ὁποῖο συνδέει τά ζ καί z καί ἀποδεικνύομε ἐπαγωγικῶς ὅτι:

$$\big|\varphi_n(z) - \omega\big| \le M|z-\zeta| \le \gamma.$$

Βῆμα δεύτερο: *Ἡ ἀναδρομική ἀκολουθία Picard συγκλίνει ὁμοιομόρφως στό* $\overline{B}(\zeta, \gamma)$.

Ὅπως καί στήν ἀπόδειξη τοῦ *Θεωρήματος 3.2.1*, εἶναι δυνατόν νά ἀποδειχθεῖ ἐπαγωγικῶς ὅτι

$$\big|\varphi_{n+1}(z) - \varphi_n(z)\big| \le \frac{M}{L}\frac{(L|z-\zeta|)^{n+1}}{(n+1)!} \le \frac{M}{L}\frac{(L\gamma)^{n+1}}{(n+1)!}, \tag{3.48}$$

ὅπου

$$L = \max_{(z,w)\in K} \big|f_w(z,w)\big| \tag{3.49}$$

καί ἡ ὁμοιόμορφη σύγκλιση θά προκύψει ἐκ νέου μέ τήν ἐφαρμογή τοῦ *Κριτηρίου Weierstrass* ἐφ' ὅσον ἡ (3.48) ἔχει ὡς συνέπεια τήν

$$\sum_{n=0}^{\infty} \big|\varphi_{n+1}(z) - \varphi_n(z)\big| \le \frac{M}{L}\,\mathrm{e}^{L\gamma}.$$

Ἐπί πλέον χρησιμοποιοῦμε τό γεγονός ὅτι: *κάθε ὁμοιόμορφο ὅριο ἀκολουθίας ἀναλυτικῶν συναρτησεων ἄποτελεῖ ἐπίσης ἀναλυτική συνάρτηση.*

Βῆμα τρίτο: *Τό ὅριο φ τῆς ἀκολουθίας Picard ἱκανοποιεῖ τήν ὁλοκληρωτική μορφή τοῦ* (3.47)*:*

$$\varphi(z) = \omega + \int_{\zeta}^{z} f\big(\eta, \varphi(\eta)\big)\, d\eta, \tag{3.50}$$

γιά κάθε $z \in \overline{B}(\zeta, \gamma)$ καί ὡς ἐκ τούτου καί τό (3.47). Ἐκ νέου, ἡ ὁμοιόμορφη σύγκλιση τῆς $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ἐγγυᾶται ὅτι ἀφ' ἑνός μέν τό ὅριο ἀποτελεῖ ἐπίσης ἀναλυτική συνάρτηση, ἀφ' ἑτέρου τά ὅρια περνοῦν στό ὁλοκλήρωμα καί σύνθεση καί ἐν τέλει ἡ φ ἱκανοποιεῖ τήν (3.50). Ἡ ἰσοδυναμία προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν καί τῆς ὁλοκληρωτικῆς του μορφῆς εἶναι προφανής. □

3.5.2 Μοναδικότης

Πρόταση 3.5.2. *Ἔστω D ἀνοικτό ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{C}^2$ καί $f : D \to \mathbb{C}$ ἀναλυτική ὡς πρός ἑκάστη τῶν μεταβλητῶν της. Τότε γιά κάθε $(\zeta, \omega) \in D$ τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν*

$$\begin{cases} \dfrac{dw}{dz} = f(z, w), \\ w(\zeta) = \omega, \end{cases} \tag{3.51}$$

ἀπολαμβάνει καθολικῆς μοναδικότητος.

Απόδειξη. Βλέπε *Πρόταση 1.7.3.* □

Παρατήρηση. Ὅλα τά ἀνωτέρω ἀποτελέσματα δύνανται εὐκόλως νά γενικευθοῦν γιά συστήματα συνήθων διαφορικῶν ἐξισώσεων μιγαδικοῦ χρόνου. (Βλέπε *Ἄσκηση* 3.5.5 στήν σελίδα 164.)

Παράδειγμα. Τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν

$$w' = \mathrm{e}^{w}, \quad w(-1) = 0, \tag{3.52}$$

ἔχει λύση τήν συνάρτηση $\varphi(z) = -\log(-z)$, ἡ ὁποία ἀποτελεῖ ἐπιφάνεια Riemann. Εἶναι δυνατόν νά κατασκευάσομε δύο λύσεις αὐτοῦ, μέ κοινό πεδίο ὁρισμοῦ ὄχι ἁπλά συνεκτικό χωρίο στό ὁποῖο νά μήν ταυτίζονται. Ἰδιαιτέρως, ἄν $\alpha \in (-\pi, \pi)$ καί

$$\Omega_\alpha = \mathbb{C} \smallsetminus \big\{\, (r\cos\alpha, r\sin\alpha) \;:\; r \geq 0 \,\big\},$$

τότε ἡ συνάρτηση $\varphi_\alpha(z) = -\log(-z)$ ὁρίζεται στό Ω_α ὡς λύση τοῦ (3.52) καί ἰσχύει ὅτι, ἄν $\alpha_1 < \alpha_2$, τότε

$$\big|\varphi_{\alpha_1}(z) - \varphi_{\alpha_2}(z)\big| = 2\pi,$$

γιά κάθε $z = (r\cos\vartheta, r\sin\vartheta)$, ὅπου $\vartheta \in (\alpha_1, \alpha_2)$. Εἰδικῶς ἄν

$$\alpha_1 = \pi + \frac{1}{2n}, \; \alpha_2 = \pi + \frac{1}{n},$$

καί $z = e^{i\vartheta}$, $\vartheta \in (\alpha_1, \alpha_2)$, τότε

$$\left|\varphi_{\alpha_1}(z) - \varphi_{\alpha_2}(z)\right| = 2\pi,$$

ἐνῶ συγχρόνως

$$|z-(-1)| < \frac{1}{n},$$

ὅπερ σημαίνει ὅτι στήν μιγαδική ἐκδοχή τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν δέν ἀναμένομε κάν νά ἱκανοποιεῖται ἡ τοπική μοναδικότης. (Βλέπε *ὁρισμό 1.7.1.*)

Ἀσκήσεις

3.5.1 Ἄν p καί q ἀκέραιες ἀναλυτικές συναρτήσεις, νά λυθεῖ τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} w' = p(z)w + q(z), \\ w(\zeta) = \omega. \end{cases}$$

3.5.2 Νά ἐπιλυθοῦν τά προβλήματα ἀρχικῶν τιμῶν

(i) $w' = w^2$, $w(0) = 1$.

(ii) $w'' = w$, $w(0) = 1$, $w'(0) = 1$.

(iii) $w' = e^{-w}$, $w(1) = 0$.

(iv) $w' = \dfrac{1}{2w}$, $w(1) = 1$.

3.5.3 Ποία ἐπιφάνεια Riemann ἀποτελεῖ τήν λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν

$$w' = \frac{\alpha}{w}, \ w(1) = 1;$$

3.5.4 Διατύπωση καί ἀπόδειξη τοῦ *Θεωρήματος τῆς ἐμμέσως ὁρισμένης συναρτήσεως* στήν μιγαδική του ἐκδοχή.

3.5.5 Νά διατυπωθεῖ καί νά ἀποδειχθεῖ ἡ διανυσματική ἐκδοχή τοῦ *Θεωρήματος 3.5.1* στήν σελίδα 161.

3.5.6* Ἔστω f, g μή σταθερές ἀκέραιες ἀναλυτικές συναρτήσεις. Ἄν ἰσχύει ὅτι

$$g'(z) = f\big(g(z)\big) \quad \text{διά κάθε } z \in \mathbb{C},$$

τότε δείξατε ὅτι ἡ f εἶναι γραμμική.

Κεφάλαιο 4

Γραμμικά συστήματα

Στό ἀνά χεῖρας ἐγχειρίδιο ἡ θεωρία τῶν γραμμικῶν συστημάτων συνήθων διαφορικῶν ἐξισώσεων πρώτης τάξεως προηγεῖται τῆς μελέτης τῆς θεωρίας τῶν βαθμωτῶν ἐξισώσεων ὑψηλοτέρων τάξεων. Ὅπως ἔχομε ἤδη δεῖ, ἡ γραμμική βαθμωτή ἐξίσωση

$$x^{(n)} + p_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + p_0(t)x^{(0)} \;=\; q(t),$$

καθίσταται ἰσοδύναμη μέ κατάλληλο γραμμικό σύστημα πρώτης τάξεως τῆς μορφῆς

$$\boldsymbol{x}' \;=\; A(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t),$$

ὅπου $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ καί $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ γιά κάθε t. (Βλέπε *Πρόταση 1.5.1* στήν σελίδα 30). Ὡς ἐκ τούτου, θεωρητικά ἀποτελέσματα ὑπάρξεως, μοναδικότητος καί καθολικότητος τῶν λύσεων προβλημάτων ἀρχικῶν τιμῶν γραμμικῶν ἐξισώσεων ὑψηλοτέρων τάξεων προκύπτουν ὡς πορίσματα ἀντιστοίχων ἀποτελεσμάτων ἀφορούντων γραμμικά συστήματα πρώτης τάξεως.

4.1 Θεμελιώδης πίνακας λύσεων

Στήν περίπτωση τῆς θεωρήσεως γραμμικῶν συστημάτων συνήθων διαφορικῶν ἐξισώσεων ἔχομε στήν διάθεσή μας ἕνα ἰσχυρότατο ἀποτέλεσμα. Ὅπως θά δοῦμε ἀμέσως μετά, ἡ μέθοδος Picard ἐξασφαλίζει καθολική ὕπαρξη καί μοναδικότητα λύσεων. Συγκεκριμένα ἔστω ὅτι ἔχομε τό ἀκόλουθο μή ὁμοιογενές πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}' \;=\; A(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t), \\ \boldsymbol{x}(\tau) \;=\; \boldsymbol{\xi}, \end{cases} \tag{4.1}$$

ὅπου $\boldsymbol{x} = (x^1, \dots, x^N)$ ἡ ζητούμενη διανυσματική συνάρτηση, $A : I \to \mathbb{R}^{N\times N}$, $\boldsymbol{b} : I \to \mathbb{R}^N$ συνεχεῖς συναρτήσεις ἐπί τοῦ διαστήματος I στό ὁποῖο ἀνήκει καί ὁ ἀρχικός χρόνος τ. Τό (4.1) δύναται νά γραφεῖ καί ὡς

$$x_j' \;=\; \sum_{k=1}^{N} a_{jk}(t)x_k + b_j(t), \quad x_j(\tau) \;=\; \xi_j, \quad j = 1, \dots, N. \tag{4.1'}$$

Συμφώνως πρός τό *Θεώρημα 3.3.11*, ἡ λύση τοῦ (4.1) ὁρίζεται καί εἶναι μοναδική *τοπικῶς* καί συγκεκριμένα σ' ἕνα διάστημα $J = [\tau - \gamma, \tau + \gamma]$, γνήσιο ὑποσύνολο τοῦ I. Ὅπως θά δοῦμε ἀμέσως μετά, ἡ γραμμικότης τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος μᾶς ἐπιτρέπει νά ἐξαγάγομε καθολική ὕπαρξη καί μοναδικότητα. Δηλαδή, ὅπως καί στήν βαθμωτή γραμμική ἐξίσωση πρώτης τάξεως, ἔχομε λύση ὁρισμένη σ' ὅλο τό I.

4.1.1 Θεμελιῶδες πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν

Ἡ λύση τοῦ (4.1) εἶναι δυνατόν νά προκύψει ὡς τοπικῶς ὁμοιόμορφο ὅριο τῆς ἀναδρομικῆς ἀκολουθίας Picard. Στήν παροῦσα ὅμως ὑποενότητα, ἡ μέθοδος Picard, θά χρησιμοποιηθεῖ γιά κάποιο τροποποιημένο πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν, τό *Θεμελιῶδες πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν*, τό ὁποῖο θά μᾶς δώσει ἕναν ὁλοκληρωτικό παράγοντα γιά τήν διαφορική ἐξίσωση τοῦ (4.1).

Ἔχομε τό ἀκόλουθο ἀποτέλεσμα:

Πρόταση 4.1.1. *Ἔστω ὅτι τό I εἶναι ἕνα ἀνοικτό διάστημα καί $A : I \to \mathbb{R}^{N\times N}$ συνεχής, δηλαδή, ὅλα τά στοιχεῖα τῆς πινακοσυναρτήσεως $A = A(t)$ ἀποτελοῦν συνεχεῖς συναρτήσεις ἐπί τοῦ I. Τότε τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν:*

$$\begin{cases} X' = A(t)X, \\ X(\tau) = \mathcal{I}, \end{cases}$$

ὅπου $X = (x^{ij})_{i,j=1,\dots,N}$ ὁ πίνακας ὁ ὁποῖος ἀντιπροσωπεύει τήν ζητούμενη συνάρτηση, $\tau \in I$ καί $\mathcal{I}$ ὁ μοναδιαῖος πίνακας στό $\mathbb{R}^{N\times N}$, ἔχει μοναδική λύση Φ, ὁρισμένη σ' ὅλο τό I. Ἡ λύση προκύπτει ὡς τό ὅριο τοπικῶς ὁμοιομόρφως συγκλίνουσας ἀκολουθίας πινακοσυναρτήσεων ἡ ὁποία λαμβάνεται ἀπό τήν ἐπαναληπτική διαδικασία Picard, ἤτοι, ἀπό τήν ἀναδρομική ἀκολουθία

$$\Phi_0(t) = \mathcal{I}, \quad \Phi_{n+1}(t) = \mathcal{I} + \int_\tau^t A(s)\Phi_n(s)\,ds,$$

ὅπου $n \in \mathbb{N}$, $t \in I$. Ἐπί πλέον ἡ Φ ἀποτελεῖ ἀντιστρέψιμο πίνακα γιά κάθε t στό I καί ὁ ἀντίστροφός του ἱκανοποιεῖ τήν διαφορική ἐξίσωση:

$$\left(\Phi^{-1}(t)\right)' = -\Phi^{-1}(t)A(t).$$

Παρατήρηση. Τό σύστημα (4.1.1) εἶναι ἔχει διάσταση N^2 διότι ἀποτελεῖται ἀπό N^2 ἐξισώσεις καί ἡ ζητούμενη διανυσματική συνάρτηση (ἤ πινακοσυνάρτηση) $X = (x^{ij})_{i,j=1,\dots,N}$, ἔχει N^2 προσδιοριστέες συνιστῶσες. Ἐναλλακτικῶς γράφεται καί ὡς

$$\frac{dx^{ij}}{dt} = \sum_{k=1}^{N} a_{ik}(t)\,x^{kj}, \quad x^{ij}(\tau) = \delta_{ij}, \quad i,j = 1,\dots,N,$$

ὅπου $\mathcal{I} = \{\delta_{ij}\}_{i,j=1,\dots,N}$.

᾿Επίλυση τοῦ μή ὁμοιογενοῦς προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν

Πρίν προχωρήσομε στήν ἀπόδειξη τῆς *Προτάσεως 4.1.1* ἄς δοῦμε πῶς δυνάμεθα νά ἐκφράσομε τήν λύση τοῦ μή ὁμοιογενοῦς προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (4.1) μέσῳ τῆς καθολικῶς ὁρισμένης λύσεως Φ τοῦ (4.1.1). Ἡ Φ θά χρησιμοποιηθεῖ ὡς ὁλοκληρωτικός παράγων. Ἄν πολλαπλασιάσομε ἐξ ἀριστερῶν τήν ἐξίσωση στό (4.1) ἐπί τόν ἀντίστροφο τοῦ $\Phi(t)$ λαμβάνομε

$$\Phi^{-1}(t)\boldsymbol{x}' \;=\; \Phi^{-1}(t)A(t)\boldsymbol{x} + \Phi^{-1}(t)\boldsymbol{b}(t),$$

ἤ

$$\Phi^{-1}(t)\boldsymbol{x}' - \Phi^{-1}(t)A(t)\boldsymbol{x} \;=\; \Phi^{-1}(t)\boldsymbol{b}(t).$$

Ὅμως, λόγῳ τῆς (4.1.1), ἡ ανωτέρω γράφεται ὡς

$$\Phi^{-1}(t)\boldsymbol{x}' + \big(\Phi^{-1}(t)\big)'\boldsymbol{x} \;=\; \Phi^{-1}(t)\,\boldsymbol{b}(t),$$

ἤ ἰσοδύναμα,

$$\Big(\Phi^{-1}(t)\boldsymbol{x}\Big)' \;=\; \Phi^{-1}(t)\,\boldsymbol{b}(t).$$

Ὁλοκληρώνοντας τήν ἀνωτέρω στό διάστημα $[\tau, t]$ λαμβάνομε

$$\Phi^{-1}(t)\boldsymbol{x}(t) - \Phi^{-1}(\tau)\boldsymbol{x}(\tau) \;=\; \int_\tau^t \Phi^{-1}(s)\boldsymbol{b}(s)\,ds.$$

Τέλος, ἐνσωματώνοντας τίς ἀρχικές συνθῆκες $\boldsymbol{x}(\tau)=\boldsymbol{\xi}$ καί $\Phi(\tau)=\mathcal{I}$, λαμβάνομε

$$\boldsymbol{x}(t) \;=\; \Phi(t)\,\boldsymbol{\xi} + \Phi(t)\int_\tau^t \Phi^{-1}(s)\,\boldsymbol{b}(s)\,ds. \tag{4.2}$$

Ὁ ἀνωτέρω τύπος ἀποτελεῖ ἔκφραση τῆς λύσεως τοῦ ἐν γένει μή ὁμοιογενοῦς προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (4.1) σέ κλειστή μορφή. Στήν (4.2) φαίνεται ἡ γραμμική καί ὁμαλή ἐξάρτηση τῆς λύσεως ἀπό τά $\boldsymbol{\xi}$ καί $\boldsymbol{b}(t)$. (Βλέπε *Ἄσκηση* 4.1.6 στήν σελίδα 178.) Παρατηρῆστε ὅτι ὁ τύπος (4.2) ἀποτελεῖ γενίκευση τοῦ τύπου (2.5) στήν σελίδα 59.

Παρατήρηση. Ἡ διαδικασία τήν ὁποία ἀκολουθήσαμε ἀνωτέρω καί κατάληξαμε στήν ἔκφραση τῆς λύσεως (4.2) τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (4.1) ἐξασφαλίζει ὄχι μόνο ὕπαρξη ἀλλά καί μοναδικότητα, γιά τόν ἴδιο λόγο γιά τόν ὁποῖο αὐτό συνέβαινε στήν περίπτωση τῆς βαθμωτῆς γραμμικῆς ἐξισώσεως πρώτης τάξεως. (Βλέπε *Ἑνότητα 2.1.*) Ἐπίσης ὁ ἴδιος τύπος ὁρίζει καθολική λύση, ἤτοι λύση ὁρισμένη ἐφ' ὅλου τοῦ ἀνοικτοῦ διαστήματος I.

᾿Απόδειξη τῆς Προτάσεως 4.1.1

Ἡ κατωτέρω ἀπόδειξη ἀποτελεῖ ἐν πολλοῖς ἐπανάληψη τῆς ἀποδείξεως τοῦ *Θεωρήματος 3.2.1* στήν σελίδα 126. Ἰδιαίτερη ἔμφαση δίδεται ἐδῶ στό καθολικῶς ὁρισμένο τῆς λύσεως.

[A] Ὕπαρξη καί καθολικότητα τῆς λύσεως

Τό καλῶς ὁρισμένο τῆς ἀκολουθίας $\{\Phi_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Κατ' ἀρχάς δυνάμεθα νά διαπιστώσομε ὅτι ἡ ἀναδρομική ἀκολουθία (4.1.1) ὁρίζεται καλῶς σ' ὅλο τό I. Πράγματι, ὁ ἀναδρομικός τύπος

$$\Phi_{n+1}(t) \;=\; \mathcal{I} + \int_\tau^t A(s)\Phi_n(s)\,ds,$$

δέν μᾶς δημιουργεῖ κανένα πρόβλημα *καλῶς ὁρισμένου*, διότι τό δεξιό μέλος τοῦ ἀνωτέρω ἔχει ἔννοια σ' ὅλο τό I, ἐφ' ὅσον ἡ Φ_n ὁρίζεται καί εἶναι συνεχής σ' ὅλο τό I. Ὁρίζεται λοιπόν καλῶς μιά ἀκολουθία συνεχῶν συναρτήσεων $\Phi_n : I \to \mathbb{R}^{N\times N}$, $n\in\mathbb{N}$.

Τοπικῶς ὁμοιόμορφη σύγκλιση τῆς $\{\Phi_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$. Ἔστω $J \subset I$ κλειστό διάστημα καί $\tau, t\in J$, τότε

$$\Phi_{n+1}(t) - \Phi_n(t) \;=\; \int_\tau^t A(s)\big(\Phi_n(s) - \Phi_{n-1}(s)\big)\,ds,$$

ὁπότε γιά $t > \tau$ ἔχομε

$$\begin{aligned}
\big\|\Phi_{n+1}(t) - \Phi_n(t)\big\| \;&=\; \Big\|\int_\tau^t A(s)\big(\Phi_n(s) - \Phi_{n-1}(s)\big)\,ds\Big\| \\
&\le\; \int_\tau^t \big\|A(s)\big(\Phi_n(s) - \Phi_{n-1}(s)\big)\big\|\,ds \\
&\le\; \int_\tau^t \|A(s)\|\cdot\big\|\Phi_n(s) - \Phi_{n-1}(s)\big\|\,ds \\
&\le\; M\int_\tau^t \big\|\Phi_n(s) - \Phi_{n-1}(s)\big\|\,ds,
\end{aligned}$$

ὅπου[78] $M = \max_{t\in J}\|A(t)\| < \infty$. Ἐδῶ πρέπει νά τονισθεῖ ὅτι τέτοιος πραγματικός M ὑπάρχει, ἐπειδή τό J εἶναι κλειστό καί φραγμένο καί A συνεχής, ἐνῶ ἐνδέχεται νά ἰσχύει $\sup_{t\in I}\|A(t)\| = \infty$. Γι' αὐτό ἄλλωστε ἐπελέγη τό κλειστό καί φραγμένο διάστημα J. Εἶναι ἐπίσης σημαντικό νά λεχθεῖ ὅτι ἡ συνάρτηση α, ὅπου $\alpha(t) = \|A(t)\|$, εἶναι συνεχής καί ἄρα ὁλοκληρώσιμη. Ἰδιαιτέρως γιά $n = 0$ ἔχομε

$$\begin{aligned}
\big\|\Phi_1(t) - \Phi_0(t)\big\| \;&=\; \big\|\Phi_1(t) - \mathcal{I}\big\| \\
&=\; \Big\|\int_\tau^t A(s)\,ds\Big\| \;\le\; M(t-\tau),
\end{aligned}$$

[78] Ὑπενθυμίζομε ὅτι, γιά τά μέν διανύσματα στόν $\mathbb{R}^N$ χρησιμοποιοῦμε τήν $2-$νόρμα ἤ ἄλλως Εὐκλείδεια νόρμα, ἐνῶ γιά τούς πίνακες τήν ἐπαγώμενη $2-$νόρμα. Ἰδιότητες τῆς ἀνωτέρω νόρμας ἐμφανίζονται στήν *Πρόταση 3.3.3* στήν σελίδα 142.

ἐνῶ γιά $n=1$ ἔχομε

$$\begin{aligned}\big\|\Phi_2(t)-\Phi_1(t)\big\| &\leq M\int_\tau^t \big\|\Phi_1(s)-\Phi_0(s)\big|\,ds\\ &\leq M\int_\tau^t M(s-\tau)\,ds \;=\; \frac{M^2(t-\tau)^2}{2!}\end{aligned}$$

καί ἐπαγωγικῶς δυνάμεθα νά ἀποδείξομε ὅτι

$$\|\Phi_{n+1}(t)-\Phi_n(t)\| \;\leq\; \frac{M^{n+1}(t-\tau)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Δοθέντος λοιπόν τοῦ ὅτι τό J εἶναι φράγμενο σύνολο, ἄν $J\subset[\tau-\ell,\tau+\ell]$ γιά κάποιο $\ell>0$, τότε

$$\|\Phi_{n+1}(t)-\Phi_n(t)\| \;\leq\; \frac{M^{n+1}(t-\tau)^{n+1}}{(n+1)!} \;\leq\; \frac{M^{n+1}\ell^{n+1}}{(n+1)!} \;=\; M_n.$$

Ἐπειδή λοιπόν $\sum_{n=0}^{\infty} M_n = \mathrm{e}^{M\ell}-1<\infty$, ἡ διανυσματική ἐκδοχή τοῦ κριτηρίου Weierstrass (*Πρόταση 3.3.9*) συνεπάγεται ὅτι ἡ ἀνωτέρω ἀκολουθία εἶναι ὁμοιομόρφως συγκλίνουσα στό J. Τό δέ J ἀποτελεῖ αὐθαιρέτως ἐπιλεγμένο κλειστό διάστημα, ὑποσύνολο τοῦ I, συνεπῶς ἔχομε ὅτι ἡ $\{\Phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει τοπικῶς ὁμοιομόρφως στό I. Ἄν Φ τό ὅριο τῆς $\{\Phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, τότε λόγῳ τῶν ἀνωτέρω, ἡ Φ ἀποτελεῖ λύση σ' ὅλο τό I, τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (4.1.1). Ἡ περίπτωση $t<\tau$ ἀντιμετωπίζεται παρομοίως.

[B] Μοναδικότης

Ἔστω ὅτι οἱ πινακοσυναρτήσεις Φ καί Ψ ἀποτελοῦν λύσεις στό I οἱ ὁποῖες διαφέρουν στό t_0 γιά τό ὁποῖο ὑποθέτομε ὅτι $t_0>\tau$. (Ἡ περίπτωση $t_0<\tau$ μελετᾶται ἀναλόγως.) Τότε θά εἴχαμε

$$\Phi(t) \;=\; \mathcal{I}+\int_\tau^t A(s)\Phi(s)\,ds \quad \text{καί} \quad \Psi(t) \;=\; \mathcal{I}+\int_\tau^t A(s)\Psi(s)\,ds.$$

Ἄρα γιά $t\in[\tau,t_0]$

$$\begin{aligned}\big\|\Phi(t)-\Psi(t)\big\| = \Big\|\int_\tau^t A(s)\big(\Phi(s)-\Psi(s)\big)\,ds\Big\| &\leq \int_\tau^t \big\|A(s)\big\|\cdot\big\|\Phi(s)-\Psi(s)\big\|\,ds\\ &\leq M\int_\tau^t \big\|\Phi(s)-\Psi(s)\big\|\,ds, \end{aligned} \tag{4.3}$$

ὅπου $M=\max_{s\in[\tau,t_0]}\big\|A(s)\big\|$. Ἄν θέσομε

$$d(t) \;=\; \int_\tau^t \big\|\Phi(s)-\Psi(s)\big\|\,ds,$$

τότε ἀπό τίς (4.3) καί (4.1.1) λαμβάνομε $d(t)\geq 0$ καί $d'(t)-Md(t)\leq 0$ ὅταν $t\in[\tau,t_0]$, ὁπότε ὅπως καί στήν ἀπόδειξη τοῦ *Θεωρήματος 3.2.1*, προκύπτει ὅτι $d(t)=0$ σ' ὅλο τό $[\tau,t_0]$. Ἄτοπο. Ἄρα $\Phi\equiv\Psi$.

[Γ] Ἀπόδειξη τῆς (4.1.1)

Ἄν ἡ πινακοσυνάρτηση Φ ἦταν ἀντιστρέψιμη καί ἡ Φ^{-1} ἦταν διαφορίσιμη, τότε θά εἴχαμε

$$\begin{aligned}
\Phi^{-1}(t)\,\Phi(t) = \mathcal{I} \quad &\Longrightarrow \quad \big(\Phi^{-1}(t)\,\Phi(t)\big)' = 0 \\
&\Longrightarrow \quad \big(\Phi^{-1}(t)\big)'\Phi(t) + \Phi^{-1}(t)\,\Phi'(t) = 0 \\
&\Longrightarrow \quad \big(\Phi^{-1}(t)\big)' = -\Phi^{-1}(t)\,\Phi'(t)\,\Phi^{-1}(t) \\
&\Longrightarrow \quad \big(\Phi^{-1}(t)\big)' = -\Phi^{-1}(t)\,A(t)\,\Phi(t)\,\Phi^{-1}(t) \\
&\Longrightarrow \quad \big(\Phi^{-1}(t)\big)' = -\Phi^{-1}(t)\,A(t).
\end{aligned}$$

Δηλαδή ἡ Φ^{-1} θά ἦταν λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} X' = -XA(t), \\ X(\tau) = \mathcal{I}. \end{cases}$$

Ἡ ὕπαρξη μοναδικῆς καί καθολικῶς ὁρισμένης λύσεως Ψ, τοῦ (4.1.1) προκύπτει μέ μικρές τροποποιήσεις τῆς προηγηθείσης διαδικασίας. Πράγματι, ἄν $Y = X^T$, τότε ὁ πίνακας Y ἱκανοποιεῖ τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν:

$$\begin{cases} Y' = -A^T(t)Y, \\ Y(\tau) = \mathcal{I}, \end{cases}$$

τό ὁποῖο, ὅπως ἔχομε ἤδη δείξει, ἔχει μοναδική καθολικῶς ὁρισμένη λύση. Ἔστω λοιπόν Ψ ἡ λύση τοῦ (4.1.1). Ἄν δείξομε ὅτι ὁ πίνακας $\Omega = \Psi\Phi$ εἶναι ὁ μοναδιαῖος γιά κάθε $t \in I$, τότε αὐτό θά σημαίνει ὅτι, ἀφ' ἑνός μέν ἡ Φ εἶναι ἀντιστρέψιμη γιά κάθε t στό I, ἡ δέ Ψ, ἡ ὁποία εἶναι διαφορίσιμη, ὡς λύση τοῦ (4.1.1), θά ἀποτελεῖ τόν ἀντίστροφο τῆς Φ. Πράγματι στό $t = \tau$ ἔχομε

$$\Omega(\tau) = \Phi(\tau)\Psi(\tau) = \mathcal{I}\mathcal{I} = \mathcal{I}.$$

Παραγωγίζοντας τήν πινακοσυνάρτηση $\Omega(t)$ λαμβάνομε

$$\begin{aligned}
\Omega'(t) &= \Psi'(t)\Phi(t) + \Psi(t)\Phi'(t) \\
&= -\Psi(t)A(t)\Phi(t) + \Psi(t)A(t)\Phi(t) = 0.
\end{aligned}$$

Ἄρα ἡ $\Omega(t)$ ἰσοῦται μέ τόν μοναδιαῖο πίνακα. **ὅ.ἔ.δ.**

Παρατήρηση. Ἡ *Πρόταση 4.1.1* ἔχει καί μιγαδική ἐκδοχή τῆς ὁποίας ἡ ἀπόδειξη δέν παρουσιάζει οὐδεμία ἐπιπρόσθετη δυσκολία. (Βλέπε *Ἄσκηση* 4.1.5 στήν σελίδα 178.) Συγκεκριμένα, τό μόνο τό ὁποῖο ἀλλάζει στήν μιγαδική ἐκδοχή εἶναι ὅτι οἱ τιμές τῶν στοιχείων τοῦ πίνακα $A(t)$ εἶναι μιγαδικές. Ὁ χρόνος παραμένει φυσικά πραγματικός, ἐνῶ ἡ ζητούμενη πινακοσυνάρτηση/λύση λαμβάνει τιμές στόν $\mathbb{C}^{N\times N}$. Ὁμοίως καί τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν (4.1) ἔχει μιγαδική ἐκδοχή στήν ὁποία ἐκτός τοῦ πίνακα $A(t)$, τόσο οἱ τιμές τοῦ μή ὁμοιογενοῦς ὅρου $\boldsymbol{b}(t)$, ὅσο καί τῆς ἀρχικῆς τιμῆς $\boldsymbol{\xi}$ ἀνήκουν στό $\mathbb{C}^N$.

4.1.2 Χῶρος λύσεων

Ἔστω $\boldsymbol{\varphi}$, $\psi : I \to \mathbb{R}^N$ λύσεις τοῦ γραμμικοῦ συστήματος

$$\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x},$$

καί α, $\beta \in \mathbb{R}$. Παρατηροῦμε ὅμως ὅτι καί ἡ συνάρτηση $\alpha\boldsymbol{\varphi} + \beta\psi$ ἀποτελεῖ ἐπίσης λύση τῆς (4.1.2). Αὐτό σημαίνει ὅτι τό σύνολο τῶν λύσεων τῆς (4.1.2) ἀποτελεῖ γραμμικό χῶρο, ὑπόχωρο τοῦ $C^1(I\,;\mathbb{R}^N)$. Ἔστω τώρα $\Phi(t) = \big(\boldsymbol{\varphi}^1(t), \dots, \boldsymbol{\varphi}^N(t)\big)$, ὅπου δηλαδή τά διανύσματα $\boldsymbol{\varphi}^j(t) = \big(\varphi^{ij}(t)\big)_{i=1,\dots,N}$, γιά $j = 1, \dots, N$ καί $t \in I$, ἀποτελοῦν τίς στῆλες τῆς πινακοσυναρτήσεως $\Phi(t)$ ἡ ὁποία ἔχει ὁρισθεῖ ὡς λύση τοῦ (4.1.1). Τότε ἰσχύουν οἱ ἰσοδυναμίες:

$$\begin{aligned}
\Phi' = A(t)\,\Phi \quad &\Longleftrightarrow \quad \big(\boldsymbol{\varphi}^1, \dots, \boldsymbol{\varphi}^N\big)' = A(t)\big(\boldsymbol{\varphi}^1, \dots, \boldsymbol{\varphi}^N\big) \\
&\Longleftrightarrow \quad \big(\boldsymbol{\varphi}^1, \dots, \boldsymbol{\varphi}^N\big)' = \big(A(t)\boldsymbol{\varphi}^1, \dots, A(t)\,\boldsymbol{\varphi}^N\big) \\
&\Longleftrightarrow \quad (\boldsymbol{\varphi}^j)' = A(t)\,\boldsymbol{\varphi}^j, \quad j = 1, \dots, N.
\end{aligned}$$

Ἤτοι: *Ἑκάστη τῶν στηλῶν τῆς πινακοσυναρτήσεως $\Phi(t)$ ἀποτελεῖ λύση τοῦ γραμμικοῦ συστήματος* (4.1.2).

Ἄν τώρα $\psi(t) = \big(\psi_1(t), \dots, \psi_N(t)\big)$, $t \in I$, τυχοῦσα λύση τοῦ (4.1.2) καί $\boldsymbol{\xi} = \psi(\tau)$, γιά κάποιο τ στό διάστημα I, τότε λόγῳ μοναδικότητος, ἡ ψ θά ἀποτελεῖ τήν*λύση* τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}' = A(t)\,\boldsymbol{x}, \\ \boldsymbol{x}(\tau) = \boldsymbol{\xi}. \end{cases} \tag{4.4}$$

Ἡ διανυσματική συνάρτηση $\boldsymbol{\zeta}(t) = \Phi(t)\boldsymbol{\xi}$ ἀποτελεῖ ἐπίσης λύση τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν διότι

$$\boldsymbol{\zeta}(\tau) = \Phi(\tau)\,\boldsymbol{\xi} = \mathcal{I}\,\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi},$$

καί

$$\boldsymbol{\zeta}'(t) = \Phi'(t)\,\boldsymbol{\xi} = A(t)\,\Phi(t)\,\boldsymbol{\xi} = A(t)\,\boldsymbol{\zeta}(t).$$

Λόγῳ τῆς μοναδικότητος τῶν λύσεων τοῦ (4.4), οἱ δύο λύσεις ταυτίζονται. Ἤτοι:

$$\begin{aligned}
\psi(t) &= \Phi(t)\,\boldsymbol{\xi} = \Phi(t)\,\psi(\tau) \\
&= \psi_1(\tau)\,\boldsymbol{\varphi}^1(t) + \cdots + \psi_N(\tau)\,\boldsymbol{\varphi}^N(t).
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Ἄρα λοιπόν:

Κάθε λύση τοῦ συστήματος (4.1.2) *ἀποτελεῖ γραμμικό συνδυασμό τῶν στηλῶν τοῦ $\Phi(t)$.*

Συγκεκριμένα ἡ $k-$στήλη τοῦ πίνακα $\Phi(t)$ ἰσοῦται μέ $\Phi(t)\boldsymbol{e}_k$, ὅπου $\boldsymbol{e}_k$ ἡ $k-$στήλη του μοναδιαίου πίνακα, δηλαδή τό διάνυσμα στήλη τό ὁποῖο ἔχει παντοῦ μηδενικά ἐκτός ἀπό τήν $k-$συνιστῶσα ὅπου ἔχει ὡς στοιχεῖο τήν μονάδα. Ἄρα $\boldsymbol{\varphi}^k = \Phi \boldsymbol{e}_k$, δηλαδή ἡ $\boldsymbol{\varphi}^k$ ἀποτελεῖ τήν λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}' = A(t)\,\boldsymbol{x}, \\ \boldsymbol{x}(\tau) = \boldsymbol{e}_k. \end{cases}$$

Συνεπῶς ἡ (4.5) μᾶς λέγει ὅτι:

Οἱ στῆλες τοῦ Φ παράγουν τό σύνολο τῶν λύσεων τοῦ γραμμικοῦ ὁμοιογενοῦς συστήματος (4.1.2).

Θά δοῦμε τώρα ὅτι οἱ στῆλες τῆς πινακοσυναρτήσεως $\Phi(t)$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητες, δηλαδή ὅτι ἀποτελοῦν γραμμικῶς ἀνεξάρτητες διανυσματικές συναρτήσεις. Ἔστω ὅτι γιά κάποιους πραγματικούς $c_1, \dots, c_N$ εἴχαμε ὅτι

$$c_1\boldsymbol{\varphi}^1(t) + \cdots + c_N\boldsymbol{\varphi}^N(t) \equiv 0.$$

Δηλαδή, ὁ ἀνωτέρω γραμμικός συνδυασμός, δέν ἀρκεῖ νά μηδενίζεται γιά κάποια τιμή τοῦ t ἀλλά πρέπει νά ἀποτελεῖ τό μηδενικό στοιχεῖο τοῦ γραμμικοῦ χώρου, ἤτοι, τήν ταυτοτικῶς μηδενική συνάρτηση[79]. Ὅμως

$$c_1\boldsymbol{\varphi}^1(t) + \cdots + c_N\boldsymbol{\varphi}^N(t) = \Phi(t)\boldsymbol{c},$$

ὅπου $\boldsymbol{c}$ τό διανύσμα στήλη μέ στοιχεῖα τά $c_1, \dots, c_N$. Θέτοντας $t = \tau$ ὁ πίνακας $\Phi(t)$ λαμβάνει τήν τιμή $\mathcal{I}$, ὁπότε συνδυάζοντας τίς (4.1.2) καί (4.1.2) γιά $t = \tau$ λαμβάνομε ὅτι

$$0 = \mathcal{I}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}.$$

Ἄρα $\boldsymbol{c} = 0$ ἤ $c_1 = c_2 = \ldots = c_N = 0$ καί ἄρα πράγματι οἱ στῆλες τοῦ $\Phi(t)$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητες. Ἄρα λοιπόν οἱ στῆλες τῆς πινακοσυναρτήσεως Φ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητες καί παράγουν τό χῶρο τῶν λύσεων τοῦ (4.1.2) ἄρα ἀποτελοῦν βάση. Ὡς ἐκ τούτου ὁ χῶρος τῶν λύσεων τοῦ (4.1.2) ἔχει διάσταση N. Ἔχομε δείξει τήν πρόταση:

Πρόταση 4.1.2. *Ἔστω $A(t) = \big(a_{ij}(t)\big)_{i,j=1,\dots,N}$ συνεχής στό ἀνοικτό διάστημα I. Τότε τό σύνολο $\mathcal{X}$ τῶν λύσεων τοῦ συστήματος*

$$\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x},$$

ἀποτελεῖ $N-$διάστατο γραμμικό χῶρο, ὑπόχωρο τοῦ $C^1(I\,;\mathbb{R}^N)$. Βάση τοῦ $\mathcal{X}$ ἀποτελοῦν οἱ στῆλες τῆς πινακοσυναρτήσεως Φ ἡ ὁποία ἔχει ὁρισθεῖ ὡς ἡ λύση τοῦ συστήματος (4.1.1). □

[79]Γιά παράδειγμα στό γραμμικό χῶρο τῶν πολυωνύμων ἐπί τοῦ $\mathbb{R}$, τά στοιχεῖα t καί t^2 εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα, ἄν καί ὁ γραμμικός τους συνδυασμός $\alpha t + \beta t^2$, μηδενίζεται γιά $t = 0$.

Παράδειγμα. Ἔστω τό σύστημα

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -x_1, \end{cases}$$

ἤ

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x} \quad \text{ὅπου} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Εὐκόλως διαπιστοῦται ὅτι οἱ διανυσματικές συναρτήσεις

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = (\cos t, -\sin t)^T \quad \text{καί} \quad \boldsymbol{\psi}(t) = (\sin t, \cos t)^T,$$

ἀποτελοῦν λύσεις οἱ ὁποῖες εἶναι καί γραμμικῶς ἀνεξάρτητες, διότι ἄν $c_1\boldsymbol{\varphi} + c_2\boldsymbol{\psi} = 0$, τότε

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1\boldsymbol{\varphi}(0) + c_2\boldsymbol{\psi}(0) = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

καί ἑπομένως $c_1 = c_2 = 0$. Παρατηροῦμε ἐπίσης ὅτι οἱ $\boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{\psi}$ παράγουν ὅλες τίς λύσεις τοῦ (4.1.2). Πράγματι, ἄν $\boldsymbol{\zeta}$ λύση καί $\boldsymbol{\zeta}(0) = \boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$, τότε

$$\boldsymbol{\zeta}(t) = \xi_1\boldsymbol{\varphi}(t) + \xi_2\boldsymbol{\psi}(t),$$

διότι τόσο τό ἀριστερό μέλος ὅσο καί τό δεξιό μέλος τῆς ἀνωτέρω, ἀποτελοῦν λύσεις τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}, \\ \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{\xi}, \end{cases}$$

τό ὁποῖο ἀπολαμβάνει καθολικῆς μοναδικότητος. Ταυτοχρόνως, ἡ πινακοσυνάρτηση

$$\Phi(t) = \big(\boldsymbol{\varphi}(t), \boldsymbol{\psi}(t)\big) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

ἀποτελεῖ *Θεμελιώδη Πίνακα Λύσεων* τοῦ (4.1.2) τόν ὁποῖο ὁρίζομε ἀμέσως μετά. (Ὅπως θά δοῦμε ἀργότερα ὁ Φ ἀποτελεῖ τήν ἐκθετική τοῦ πίνακα A.)

Ἔχομε τόν ὁρισμό:

Ὁρισμός 4.1.1. *Ἔστω $A(t) = \big(a_{ij}(t)\big)_{i,j=1,\ldots,N}$ καί $a_{ij}(t)$ συνεχεῖς στό ἀνοικτό διάστημα I.*

(*i*) *Κάθε πίνακας $\Psi(t) : I \to \mathbb{R}^{N\times N}$, τοῦ ὁποίου οἱ στῆλες ἀποτελοῦν βάση τοῦ χώρου τῶν λύσεων τοῦ*

$$\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x},$$

ὀνομάζεται θεμελιώδης πίνακας λύσεων ($\Theta\Pi\Lambda$) *τοῦ* (i).

(*ii*) *Ἄν οἱ διανυσματικές συναρτήσεις* $\psi^j(t)$, $j = 1, \ldots, N$, *ἀποτελοῦν βάση τοῦ χώρου λύσεων τοῦ (i), τότε τό σύνολο*

$$\mathcal{B} = \{\boldsymbol{\psi}^1, \ldots, \boldsymbol{\psi}^N\},$$

ὀνομάζεται θεμελιῶδες σύνολο λύσεων ($\Theta\Sigma\Lambda$) *τοῦ* (i).

Ἡ πρόταση ἡ ὁποία ἀκολουθεῖ περιέχει χαρακτηρισμούς τοῦ θεμελιώδους πίνακα λύσεων καί ὡς ἐκ τούτου καί τοῦ θεμελιώδους συνόλου λύσεων:

Πρόταση 4.1.3. *Ἔστω* $A : I \to \mathbb{R}^{N\times N}$ *συνεχής πινακοσυνάρτηση, ὅπου* I *ἀνοικτό διάστημα καί* $\psi^1, \ldots, \psi^N : I \to \mathbb{R}^N$ *λύσεις τοῦ γραμμικοῦ συστήματος*

$$\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x}.$$

Ἔστω Ψ *ἡ πινακοσυνάρτηση μέ στῆλες τίς* $\psi^1, \ldots, \psi^N$. *Τότε τά κάτωθι εἶναι ἰσοδύναμα:*

(*i*) *Ὁ* Ψ *εἶναι θεμελιώδης πίνακας λύσεων τοῦ* (4.1.3).

(*ii*) *Τό σύνολο* $\{\psi^1, \ldots, \psi^N\}$ *ἀποτελεῖ θεμελιῶδες σύνολο λύσεων τοῦ* (4.1.3).

(*iii*) *Ὑπάρχει* τ *στό* I *τέτοιο ὥστε* $\det\Psi(\tau) \neq 0$.

(*iv*) *Γιά κάθε* t *στό* I *ἰσχύει ὅτι* $\det\Psi(t) \neq 0$.

(*v*) *Ὑπάρχει ἀντιστρέψιμος πίνακας* $C \in \mathbb{R}^{N\times N}$ *τέτοιος ὥστε* $\Psi(t) = \Phi(t)\,C$, *ὅπου* $\Phi(t)$ *ἡ λύση τοῦ* (4.1.1).

Απόδειξη. Τά (*i*) καί (*ii*) εἶναι ἰσοδύναμα λόγῳ τοῦ *Ὁρισμοῦ* 4.1.1.

(*ii*) $\Longrightarrow$ (*iv*): Ἔστω τυχόν $\tau \in I$. Θά δείξομε ὅτι $\det\Psi(\tau) \neq 0$. Ἐφ' ὅσον τό $\{\psi^1, \ldots, \psi^N\}$ ἀποτελεῖ θεμελιῶδες σύνολο λύσεων, τότε γιά κάθε $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^N$, ἡ λύση $\boldsymbol{\varphi}$ τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}' = A(t)\,\boldsymbol{x}, \\ \boldsymbol{x}(\tau) = \boldsymbol{\xi}, \end{cases}$$

δύναται νά ἐκφρασθεῖ ὡς γραμμικός συνδυασμός τῶν $\boldsymbol{\psi}^1, \ldots, \boldsymbol{\psi}^N$. Δηλαδή ὑπάρχουν πραγματικές σταθερές $c_1,\ldots,c_N$, ὥστε $\boldsymbol{\varphi} = c_1\boldsymbol{\psi}^1 + \cdots + c_N\boldsymbol{\psi}^N$. Εἰδικῶς γιά $t = \tau$ ἰσχύει ὅτι

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\varphi}(\tau) = c_1\boldsymbol{\psi}^1(\tau) + \cdots + c_N\boldsymbol{\psi}^N(\tau) = \Psi(\tau)\,\boldsymbol{c}.$$

Αὐτό σημαίνει ὅτι γιά κάθε $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^N$, τό γραμμικό σύστημα

$$\Psi(\tau)\,\boldsymbol{c} = \boldsymbol{\xi},$$

μέ ἄγνωστο τό διάνυσμα $\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^N$, ἔχει λύση. Ἑπομένως, λόγῳ τῆς *Προτάσεως 9.1.6* στήν σελίδα 336, καί συγκεκριμένα λόγῳ τῆς ἰσοδυναμίας τῶν i καί iii, τῆς ἰδίας προτάσεως, θά πρέπει ὁ πίνακας $\Psi(\tau)$ νά εἶναι ἀντιστρέψιμος. Ἰσοδύναμα $\det \Psi(\tau) \neq 0$.

$(iv) \Longrightarrow (iii)$: Προφανές.

$(iii) \Longrightarrow (v)$: Ἔστω $\tau \in I$ καί $\det \Psi(\tau) \neq 0$. Τότε οἱ πινακοσυναρτήσεις $\Phi(t)\Psi(\tau)$ καί $\Psi(t)$, ὅπου $\Phi(t)$ ἡ λύση τοῦ (4.1.1), ἱκανοποιοῦν τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν:

$$\begin{cases} X' = A(t)\,X, \\ X(\tau) = \Psi(\tau). \end{cases}$$

Ἄρα λόγῳ μοναδικότητος ταυτίζονται. Συνεπῶς

$$\Psi(t) = \Phi(t)\,\Psi(\tau),$$

γιά κάθε $t \in I$.

$(v) \Longrightarrow (i)$: Ἄν $\boldsymbol{\zeta}$ λύση τοῦ συστήματος $\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x}$, τότε γιά κάποιο $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^N$ θά ἰσχύει

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\zeta}(t) &= \Phi(t)\,\boldsymbol{\xi} = \Psi(t)\,C^{-1}\,\boldsymbol{\xi} = \Psi(t)\,\boldsymbol{\eta} \\ &= \eta_1 \boldsymbol{\psi}^1(t) + \cdots + \eta_N \boldsymbol{\psi}^N(t), \end{aligned}$$

ὅπου $\boldsymbol{\eta} = C^{-1}\,\boldsymbol{\xi}$. Ἄρα κάθε λύση τοῦ $\boldsymbol{x}' = A(t)\,\boldsymbol{x}$ γράφεται ὡς γραμμικός συνδυασμός τῶν στηλῶν τοῦ πίνακα $\Psi(t)$. Ἰσοδύναμα, οἱ στῆλες τῆς πινακοσυναρτήσεως $\Psi(t)$ παράγουν τίς λύσεις τοῦ $\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x}$. Ἑπομένως λόγῳ τῆς *Προτάσεως 9.1.2* στήν σελίδα 331, ὁ $\Psi(t)$ ἀποτελεῖ θεμελιώδη πίνακα λύσεων. **ὅ.ἔ.δ.**

Ἔχομε ἤδη ἀποδείξει (βλέπε (4.1.2)) ὅτι:

Πόρισμα 4.1.4. *Ἄν $\Psi : I \to \mathbb{R}^{N\times N}$ θεμελιώδης πίνακας λύσεων τοῦ* (4.1.3), *τότε ἡ πινακοσυνάρτηση $\Phi(t) = \Psi(t)\Psi^{-1}(\tau)$ ἀποτελεῖ τήν λύση τοῦ γραμμικοῦ συστήματος* (4.1.1). □

Εὐκόλως προκύπτει ὅτι:

Πόρισμα 4.1.5. *Ἄν Φ καί Ψ θεμελιώδεις πίνακες λύσεων τοῦ συστήματος $\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x}$, τότε ὑπάρχει σταθερός ἀντιστρέψιμος πίνακας $C \in \mathbb{R}^{N\times N}$ ὥστε $\Psi(t) = \Phi(t)\,C$, γιά κάθε $t \in I$.*

Απόδειξη. Βλέπε *Ἄσκηση* 4.1.15 στήν σελίδα 179. □

Ἀκολουθεῖ ἡ πολύ χρήσιμη πρόταση, γνωστή καί ὡς *Ἐξίσωση Abel*[80]:

[80] Niels Henrik Abel (1802–1829). Νορβηγός μαθηματικός.

Πρόταση 4.1.6. (Ἐξίσωση Abel) *Ἔστω $A : I \to \mathbb{R}^{N\times N}$ συνεχής, ὅπου I ἀνοικτό διάστημα καί Ψ πίνακας $N \times N$ μέ στῆλες λύσεις τοῦ συστήματος $\boldsymbol{x}' = A(t)\,\boldsymbol{x}$. Ἄν $w(t) = \det\Psi(t)$, τότε ἡ συνάρτηση w ἱκανοποιεῖ τήν γραμμική ἐξίσωση*

$$w'(t) \;=\; \boldsymbol{Tr}A(t)\,w(t).$$

Ὡς ἐκ τούτου ἰσχύει ἡ ταυτότης τοῦ Jacobi[81]*:*

$$w(t) \;=\; \mathrm{e}^{\int_\tau^t \boldsymbol{Tr}A(s)\,ds}\,w(\tau),$$

γιά κάθε t καί τ στό I.

Ἀποδειξη. Ὑποθέτομε κατ' ἀρχάς ὅτι ὁ πίνακας Ψ ἀποτελεῖ θεμελιώδη πίνακα λύσεων τοῦ συστήματος $\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x}$ καί ὡς ἐκ τούτου εἶναι ἀντιστρέψιμος γιά κάθε t στό πεδίο ὁρισμοῦ αὐτοῦ I. Ἔχομε λοιπόν

$$\begin{aligned} w' \;&=\; \det\big((\boldsymbol{\psi}^1)', \boldsymbol{\psi}^2, \dots, \boldsymbol{\psi}^N\big) + \cdots + \det\big(\boldsymbol{\psi}^1, \boldsymbol{\psi}^2, \dots, (\boldsymbol{\psi}^N)'\big) \\ &=\; \det\big(A(t)\boldsymbol{\psi}^1, \boldsymbol{\psi}^2, \dots, \boldsymbol{\psi}^N\big) + \cdots + \det\big(\boldsymbol{\psi}^1, \boldsymbol{\psi}^2, \dots, A(t)\boldsymbol{\psi}^N\big). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Ἐπειδή γιά κάθε t στό διάστημα I ἰσχύει ὅτι $\det\Psi(t) \neq 0$, τότε τό σύνολο τῶν διανυσμάτων $\mathcal{B} = \big\{\boldsymbol{\psi}^1(t), \dots, \boldsymbol{\psi}^N(t)\big\}$ ἀποτελεῖ βάση το $\mathbb{R}^N$ καί ἄρα τό διάνυσμα $A(t)\boldsymbol{\psi}^k(t)$, ὅπου $k = 1, 2, \dots, N$, γράφεται ὡς γραμμικός συνδυασμός αὐτῶν:

$$A(t)\,\boldsymbol{\psi}^k(t) \;=\; c_{k1}\boldsymbol{\psi}^1(t) + c_{k2}\boldsymbol{\psi}^2(t) + \cdots + c_{kN}\boldsymbol{\psi}^N(t) \;=\; \Psi(t)\,\boldsymbol{c}_k,$$

ὅπου $\boldsymbol{c}_k = (c_{k1}, \dots, c_{kN})$. Συνολικῶς, γιά κάθε $t \in I$

$$A(t)\,\Psi(t) \;=\; \Psi(t)\,C,$$

ὅπου $C = (c_{ij})_{i,j=1,\dots,N}$ κατάλληλος πίνακας. Γιά $k = 1$, ἐξ αἰτίας τῆς γραμμικότητος τῆς ὁρίζουσας θά ἰσχύει ὅτι

$$\det\big(A(t)\boldsymbol{\psi}^1(t), \boldsymbol{\psi}^2(t), \dots, \boldsymbol{\psi}^N(t)\big) \;=\; \sum_{k=1}^N c_{k1}\det\big(\boldsymbol{\psi}^k(t), \boldsymbol{\psi}^2(t), \dots, \boldsymbol{\psi}^N(t)\big).$$

Ἐπειδή ὅμως ἡ ὁρίζουσα μηδενίζεται ὅταν δύο στῆλες πίνακα ἰσοῦνται (βλέπε ἰδιότητα (iii) στήν σελίδα 336), τότε μόνο ὁ πρῶτος ὅρος τοῦ δεξιοῦ μέλους δέν μηδενίζεται, δηλαδή

$$\begin{aligned} \det\big(A(t)\,\boldsymbol{\psi}^1(t), \boldsymbol{\psi}^2(t), \dots, \boldsymbol{\psi}^N(t)\big) \;&=\; c_{11}\det\big(\boldsymbol{\psi}^1(t), \boldsymbol{\psi}^2(t), \dots, \boldsymbol{\psi}^N(t)\big) \\ &=\; c_{11}\,w(t). \end{aligned}$$

[81] Carl Gustav Jacobi (1804-1851). Ἑβραϊκῆς καταγωγῆς Γερμανός μαθηματικός.

Μέ τόν ἴδιο τρόπο λαμβάνομε ὅτι γιά κάθε $k = 1, 2, \dots, N$ ἰσχύει

$$\det\big(\psi^1(t), \dots, A(t)\psi^k(t), \dots, \psi^N(t)\big) \; = \; c_{kk}\, w(t).$$

Συνδυάζοντας τίς (4.1.2) καί (4.6) λαμβάνομε

$$w'(t) \; = \; (c_{11} + \cdots + c_{NN}) \; w(t) \; = \; \boldsymbol{Tr} C \, w(t).$$

Ὅμως λόγῳ τῆς (4.1.2), $C = \Psi^{-1}(t)\, A(t)\Psi(t)$. Ἄρα ἡ ἀνωτέρω γράφεται

$$w'(t) \; = \; \boldsymbol{Tr}\big(\Psi^{-1}(t)\, A(t)\Psi(t)\big)\, w(t) \; = \; \boldsymbol{Tr} A(t)\, w(t),$$

ὅπου ἡ τελευταία ἰσότης ἰσχύει λόγῳ τῆς *Προτάσεως 9.1.3* στήν σελίδα 334. Ἄν τώρα ὁ Ψ δέν εἶναι θεμελιώδης πίνακας λύσεων τοῦ συστήματος $\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x}$ τότε $\Psi(t) = \Phi(t) C$, ὅπου Φ θεμελιώδης πίνακας λύσεων καί C σταθερός $N \times N$ πίνακας, ἐξ αἰτίας τοῦ γεγονότος ὅτι οἱ στῆλες τοῦ Ψ γράφονται ὡς γραμμικοί συνδυασμοί τῶν στηλῶν τοῦ Φ. Ἔστω λοιπόν $w(t) = \det \Psi(t)$, τότε

$$\frac{d}{dt} w(t) \; = \; \frac{d}{dt} \det \Psi(t) \; = \; \frac{d}{dt} \det(\Phi(t)\, C) \; = \; \frac{d}{dt} \det \Phi(t) \; \det C. \tag{4.7}$$

Ὅμως ἡ συνάρτηση $\det \Phi(t)$ ἱκανοποιεῖ τήν ἐξίσωση Abel, δηλαδή

$$\frac{d}{dt} \det \Phi(t) \; = \; \boldsymbol{Tr} A(t) \det \Phi(t). \tag{4.8}$$

Ἑπομένως συνδυάζοντας τίς (4.7) καί (4.8) λαμβάνομε

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} w(t) &= \boldsymbol{Tr} A(t) \; \det \Phi(t) \; \det C \\ &= \boldsymbol{Tr} A(t) \; \det \Psi(t) \; = \; \boldsymbol{Tr} A(t)\, w(t). \end{aligned}$$

ὅ.ἔ.δ.

Παρατήρηση. Ἡ συνάρτηση w, ὁποία ὁρίσθηκε ἀνωτέρω, ὀνομάζεται *Βρονσκιανή* τοῦ συστήματος $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$, πρός τιμήν τοῦ Wronski[82]. Λόγῳ τῆς (4.1.6) οἱ Βρονσκιανές ἑνός συστήματος διαφέρουν μεταξύ τους κατά μία πολλαπλασιαστική σταθερά.

Ἀσκήσεις

4.1.1 Δείξατε ὅτι τό σύστημα (4.1) ἔχει μοναδική καθολικῶς ὁρισμένη λύση.

Υποδειξη. Βλέπε σχετική συζήτηση στήν *Παρατήρηση* τῆς σελίδος 167.

4.1.2 Ἔστω $\varphi_1, \varphi_2 \in C^1(I)$ καί $w(\varphi_1, \varphi_2)(t) = 0$ (ὅπου w ἡ βρονσκιανή ὁρίζουσα) γιά κάθε $t \in I$. Ἰσχύει ἀπαραιτήτως ὅτι οἱ φ_1 καί φ_2 εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητες;

[82] Josef Hoëné Wronski (1778–1853). Πολωνός μαθηματικός, ὁ ὁποῖος ἔζησε τό μεγαλύτερο μέρος τῆς ζωῆς του στήν Γαλλία.

4.1.3 Ποία ἡ γενική λύση τοῦ συστήματος $X' = A(t)X$, ὅπου $A : I \to \mathbb{R}^{N\times N}$ συνεχής καί $X \in \mathbb{R}^{N\times N}$;

4.1.4 Δοθείσης πινακοσυναρτήσεως $\Phi \in C^1(I\,;\mathbb{R}^{N\times N})$, ἡ ὁποία γιά κάθε $t \in I$ ἀποτελεῖ ἀντιστρέψιμο πίνακα μέ διαφορίσιμο ἀντίστροφο, νά βρεθεῖ ποιά γραμμική ὁμοιογενῆ συνήθη διαφορική ἐξίσωση ἱκανοποιεῖ. (Συγκεκριμένα, ποιό $N^2 \times N^2$ γραμμικό ὁμοιογενές σύστημα ἱκανοποιεῖ.)

Υποδειξη. Τό σύστημα τό ὁποῖο ἱκανοποιεῖται ἀπό τήν $\Phi(t)$ εἶναι τό $X' = \Phi'\Phi^{-1}X$.

4.1.5 Νά διατυπωθεῖ ἡ *Μιγαδική Ἐκδοχή* τῆς *Προτάσεως 4.1.1*. Τί θά ἀλλάξει στήν ἀπόδειξη; (Βλέπε τήν *Παρατήρηση* στήν σελίδα 170.)

4.1.6 Ἔστω $\boldsymbol{\varphi}\big(t;\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{b}(t)\big)$ ἡ λύση τοῦ (4.1). Τότε δείξατε ὅτι

$$\max_{t\in[t_1,t_2]} \big\|\boldsymbol{\varphi}\big(t;\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{b}(t)\big) - \boldsymbol{\varphi}\big(t;\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{b}(t)\big)\big\| \le \max_{t\in[t_1,t_2]} \big\|\Phi(t)\big\| \cdot \big\|\boldsymbol{\xi}_1 - \boldsymbol{\xi}_2\big\|,$$

καί

$$\max_{t\in[t_1,t_2]} \|\boldsymbol{\varphi}\big(t;\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{b}_1(t)\big) - \boldsymbol{\varphi}\big(t;\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{b}_2(t)\big)\| \le$$
$$\le |t_1 - t_2| \max_{t\in[t_1,t_2]} \|\Phi(t)\| \cdot \max_{t\in[t_1,t_2]} \|\Phi^{-1}(t)\| \cdot \max_{t\in[t_1,t_2]} \|\boldsymbol{b}_1(t) - \boldsymbol{b}_2(t)\|,$$

ὅπου $t_1,\ t_2 \in I$.

4.1.7 Ἔστω I ἀνοικτό διάστημα, $A \in C(I\,;\mathbb{R}^{N\times N})$, $\boldsymbol{b} \in C(I\,;\mathbb{R}^N)$, καί $\alpha,\beta,\tau \in I$. Ἄν $B_\alpha, B_\beta \in \mathbb{R}^{N\times N}$, νά βρεθεῖ ποία συνθήκη πρέπει νά ἱκανοποιεῖται μεταξύ τῶν B_α, B_β καί τῆς λύσεως Φ τοῦ (4.1.1), ὥστε τό πρόβλημα συνοριακῶν τιμῶν

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}' = A(t)\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t), \\ B_\alpha \boldsymbol{x}(\alpha) + B_\beta \boldsymbol{x}(\beta) = \boldsymbol{d}, \end{cases}$$

νά ἔχει λύση γιά κάθε $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}^N$.

4.1.8 Νά ἐκφρασθοῦν οἱ λύσεις τῶν ὁμοιογενῶν προβλημάτων ἀρχικῶν τιμῶν

$$(i)\ \begin{cases} X' = A(t)X, \\ X(\tau^*) = C, \end{cases} \qquad (ii)\ \begin{cases} X' = A(t)X - XA(t), \\ X(\tau^*) = C, \end{cases}$$
$$(iii)\ \begin{cases} X' = -A^T(t)X, \\ X(\tau^*) = C, \end{cases} \qquad (iv)\ \begin{cases} X' = XA^T(t) - A^T(t)X, \\ X(\tau^*) = C, \end{cases}$$

μέσῳ τῆς πινακοσυναρτήσεως Φ ἡ ὁποία ἀποτελεῖ λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (4.1.1) στήν σελίδα 166.

4.1.9 Νά ἐκφρασθεῖ ἡ λύση τῶν μή ὁμοιογενῶν προβλημάτων ἀρχικῶν τιμῶν

$$(i)\ \begin{cases} \boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t) \\ \boldsymbol{x}(\tau^*) = \xi^*, \end{cases} \qquad (ii)\ \begin{cases} \boldsymbol{x}' = -A^T(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t) \\ \boldsymbol{x}(\tau^*) = \xi^*, \end{cases}$$

μέσῳ τῆς πινακοσυναρτήσεως Φ ἡ ὁποία ἀποτελεῖ λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (4.1.1) στήν σελίδα 166.

4.1.10 Νά ἐκφρασθοῦν οἱ λύσεις τῶν μή ὁμοιογενῶν συστημάτων

$$(i)\ \begin{cases} X' = -X\,A(t) + B(t) \\ X(\tau^*) = C, \end{cases} \qquad (ii)\ \begin{cases} X' = X\,A^T(t) + B(t) \\ X(\tau^*) = C, \end{cases}$$

$$(iii)\ \begin{cases} X' = A(t)\,X + B(t) \\ X(\tau^*) = C, \end{cases} \qquad (iv)\ \begin{cases} X' = -A(t)^T\,X + B(t) \\ X(\tau^*) = C, \end{cases}$$

μέσῳ τῆς πινακοσυναρτήσεως Φ ἡ ὁποία ἀποτελεῖ λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (4.1.1) στήν σελίδα 166.

4.1.11 Νά ἐκφρασθοῦν οἱ λύσεις τῶν συστημάτων

$$(i)\quad \begin{cases} X' = A(t)\,X - X\,B(t), \\ X(\tau^*) = C, \end{cases} \qquad (ii)\quad \begin{cases} X' = A(t)\,X + X\,B^T(t), \\ X(\tau^*) = C, \end{cases}$$

$$(iii)\quad \begin{cases} X' = X\,A^T(t) - B^T(t)\,X, \\ X(\tau^*) = C, \end{cases} \qquad (iv)\quad \begin{cases} X' = X\,A^T(t) + B(t)\,X, \\ X(\tau^*) = C, \end{cases}$$

συναρτήσει τῶν λύσεων Φ, Ψ τῶν συστημάτων

$$\begin{cases} X' = A(t)\,X, \\ X(\tau) = \mathcal{I} \end{cases} \qquad \begin{cases} X' = B(t)\,X, \\ X(\tau) = \mathcal{I}, \end{cases}$$

ἀντιστοίχως.

4.1.12* Εἶναι δυνατόν νά ἐκφρασθεῖ ἡ λύση Ψ τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} X' = -A(t)\,X, \\ X(\tau) = \mathcal{I}, \end{cases}$$

μέσῳ τῆς πινακοσυναρτήσεως Φ ἡ ὁποία ἀποτελεῖ λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (4.1.1) στήν σελίδα 166;

Απαντηση. Ἔκφραση ἀνάλογη τῶν ζητουμένων στίς ἀσκήσεις 4.1.8-4.1.11 δέν εἶναι ἐν γένει ἐφικτή. Εἶναι ὅμως δυνατόν ἡ ζητούμενη λύση νά ὁρισθεῖ ὡς τό κατωτέρω ὅριο:

$$\Psi(t) = \lim_{n\to\infty} \Phi(t_{n,n-1})\,\Phi^{-1}(t_{n,n})\,\Phi(t_{n,n-2})\,\Phi^{-1}(t_{n,n-1})\cdots\Phi(t_{n,0})\,\Phi^{-1}(t_{n,1}),$$

ὅπου $t_{n,k} = \tau + k(t-\tau)$.

4.1.13* Εἶναι δυνατόν νά ἐκφρασθεῖ ἡ λύση Ψ τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} X' = A(t)^T\,X, \\ X(\tau) = \mathcal{I}, \end{cases}$$

μέσῳ τῆς πινακοσυναρτήσεως Φ ἡ ὁποία ἀποτελεῖ λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (4.1.1) στήν σελίδα 166·

4.1.14 Νά ἀποδειχθεῖ τό *Πόρισμα 4.1.4.*

4.1.15 Νά ἀποδειχθεῖ τό *Πόρισμα 4.1.5.*

4.1.16 Ἄν οἱ πίνακες $A(t)$ καί $\int_\tau^t A(s)\,ds$ ἀντιμετατίθενται γιά κάθε $t \in I$, τότε δεῖξτε ὅτι ὁ γενικός τύπος τῆς ἀναδρομικῆς ἀκολουθίας

$$\Phi_0(t) = \mathcal{I}, \quad \Phi_{n+1}(t) = \mathcal{I} + \int_\tau^t A(s)\Phi_n(s)\,ds,$$

δίδεται ἀπό τήν

$$\Phi_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\left(\int_\tau^t A(s)ds\right)^k.$$

Ὡς ἐκ τούτου, ἡ λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν

$$X' = A(t)X, \; X(\tau) = \mathcal{I},$$

δίδεται ἀπό τήν σειρά

$$\Phi(t) \,=\, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\int_{\tau}^{t} A(s)\, ds \right)^{n}.$$

Γιατί συγκλίνει ἡ ἀνωτέρω σειρά;

Υποδειξη. Ἀρχικῶς παρατηροῦμε ὅτι ἄν οἱ πίνακες $A(t)$ καί $\int_{\tau}^{t} A(s)\, ds$ ἀντιμετατίθενται, τότε ἰσχύει ὅτι

$$\int_{\tau}^{t} A(s) \left(\int_{\tau}^{s} A(\sigma) d\sigma \right)^{k} ds \,=\, \frac{1}{k+1} \left(\int_{\tau}^{t} A(s) ds \right)^{k+1}.$$

Χρησιμοποιοῦμε τώρα μαθηματική ἐπαγωγή.

4.1.17 Ἄν Φ καί Ψ θεμελιώδεις πίνακες λύσεων τοῦ συστήματος $\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x}$, ὅπου $A \in C(I)$, τότε δείξατε ὅτι

$$\Phi(t)\Phi^{-1}(s) \,=\, \Psi(t)\Psi^{-1}(s),$$

γιά κάθε $s, t \in I$.

4.1.18 Ἔστω Φ_1, Φ_2 θεμελιώδεις πίνακες λύσεων τοῦ συστήματος $\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x}$ καί w_1, w_2 οἱ ἀντίστοιχες Βρονσκιανές. Δείξατε ὅτι:

$$\frac{w_1'}{w_1} \,=\, \frac{w_2'}{w_2}.$$

4.1.19 Δείξατε ὅτι στήν περίπτωση τοῦ συστήματος (4.1.1) στήν σελίδα 166, ἡ ἀναδρομική ἀκολουθία Picard $\{\Phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ἰσοῦται μέ $\Phi_n = \sum_{k=0}^{n} B_k$ ὅπου

$$B_0(t) \,=\, \mathcal{I} \quad \textit{καί} \quad B_{n+1}(t) \,=\, \int_{\tau}^{t} A(s) B_n(s)\, ds.$$

Ἀκολούθως, ἄν $J \subset I$, κλειστό διάστημα, $\tau \in J$ καί $M = \max_{t\in J} \|A(t)\|$, δείξατε ὅτι

$$\|B_n(t)\| \,\le\, \frac{M^n |t-\tau|^n}{n!},$$

καί τέλος ὅτι ἡ $\{\Phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, συγκλίνει τοπικῶς ὁμοιόμορφως στό I.

4.1.20 Ἔστω $\Phi(t;\tau)$ ἡ λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (4.1.1), τήν ὁποία θεωροῦμε συνάρτηση ὄχι μόνο τοῦ χρόνου ἀλλά καί τοῦ ἀρχικοῦ χρόνου τ. Δείξατε ὅτι ἰσχύει ἡ ταυτότης:

$$\Phi(t\,;\,\tau_1) \,=\, \Phi(t\,;\,\tau_2)\, \Phi(\tau_2\,;\,\tau_1),$$

γιά κάθε $t, \tau_1, \tau_2 \in I$. Ἐπίσης δείξατε ὅτι

$$\Phi(t\,;\,\tau)\, \Phi(\tau\,;\,t) \,=\, \mathcal{I}.$$

Παρατηρῆστε ὅτι ἡ σχέση (4.2) στήν σελίδα 167 γράφεται καί ὡς

$$\boldsymbol{\varphi}(t) \,=\, \Phi(t\,;\,\tau)\, \boldsymbol{\xi} + \int_{\tau}^{t} \Phi(t\,;\,s)\, \boldsymbol{b}(s)\, ds.$$

Τέλος δείξατε ὅτι

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \Phi(t\,;\,\tau) \,=\, -\Phi(t\,;\,\tau)\, A(\tau).$$

4.1.21* (Συνέχεια) Ἔστω $\Phi : I \to \mathbb{R}^{N\times N}$, ἡ λύση τοῦ συστήματος (4.1.1) στήν σελίδα 166. Δείξατε ὅτι

$$\Phi(t) \,=\, \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(\mathcal{I} + \frac{t-\tau}{n} A\Big(\tau + k\frac{t-\tau}{n}\Big) \right),$$

γιά κάθε $t \in I$.

Υποδειξη. Ἐφαρμόζοντας ἀλλεπάλληλα τήν (4.1.20) λαμβάνομε

$$\Phi(t) \;=\; \Phi(t;\tau) \;=\; \prod_{k=1}^{n} \Phi(t_k\,;\,t_{k-1}),$$

ὅπου $t_k = \tau + k(t-\tau)/n$. Ἀρκεῖ λοιπόν νά δειχθεῖ ὅτι

$$\Phi(t_k;t_{k-1}) \;=\; \mathcal{I} + \frac{t-\tau}{n} A\left(\tau + k\frac{t-\tau}{n}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

4.1.22* **Γενίκευση τῆς προηγουμένης:** Ἔστω $h_n = (t-\tau)/n$ καί $t_{n,k} = \tau + kh_n$. τότε ἰσχύει ὅτι

$$\Phi(t) \;=\; \prod_{k=1}^{n}\left(\mathcal{I} + h_n A(t_{n,k}) + \frac{h_n^2}{2!}A^2(t_{n,k}) + \cdots + \frac{h_n^m}{m!}A^m(t_{n,k})\right) + \mathcal{O}(h_n^m).$$

4.1.23 Νά ἐπιλυθεῖ τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} X' \;=\; X^2, \\ X(0) \;=\; C, \end{cases}$$

ὅπου $C \in \mathbb{R}^{N\times N}$. Γιά ποίους πίνακες C τό ἀνωτέρω ἔχει καθολική λύση;

Λυση. $\Phi(t) \;=\; C(\mathcal{I} - tC)^{-1}$.

4.2 Ἐκθετική τετραγωνικῶν πινάκων

Ἡ ἐκθετική συνάρτηση πινάκων θά καταστεῖ δυνατόν νά ὁρισθεῖ μέσῳ τῆς θεωρίας τῶν γραμμικῶν συστημάτων. Συγκεκριμένα, θά ὁρισθεῖ ὡς ἡ λύση κατάλληλου προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν. Κάτι τέτοιο βεβαίως δύναται νά συμβεῖ καί στήν βαθμωτή περίπτωση ὅπου ἡ ἐκθετική συνάρτηση $\mathrm{e}^{\alpha\, t}$ θά ἦταν δυνατόν νά ὁρισθεῖ μέ καθένα ἀπό τούς ἀκόλουθους ἰσοδύναμους τρόπους:

(i) Ὡς τό ὅριο τῆς σειρᾶς

$$1 + \alpha t + \frac{\alpha^2 t^2}{2!} + \cdots + \frac{\alpha^n t^n}{n!} + \cdots .$$

(ii) Ὡς τό ὅριο τῆς ἀκολουθίας

$$\left(1 + \frac{\alpha t}{n}\right)^n, \quad n \to \infty.$$

(iii) Ὡς ἡ μοναδική καί καθολικῶς ὁρισμένη λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x' \;=\; \alpha\, x, \\ x(0) \;=\; 1. \end{cases}$$

Στήν παροῦσα ἑνότητα ὁ ὁρισμός τῆς ἐκθετικῆς συναρτήσεως τετραγωνικῶν πινάκων θά προκύψει μέ διαδικασία ἀνάλογη τῆς τελευταίας, ἐνῶ θά διαπιστωθεῖ ὅτι τόσο ὁ πρῶτος ὅσο καί ὁ δεύτερος ὁρισμός εἶναι ἰσοδύναμοι. (Βλέπε *Ἄσκηση* 4.2.11 στήν σελίδα 189.)

Ὁρισμός 4.2.1. *Ἔστω $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ σταθερός πίνακας καί $\Phi(t)$ ἡ καθολικῶς ὁρισμένη, ἤτοι, ἐφ' ὅλου τοῦ $\mathbb{R}$, μοναδική λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν:*

$$\begin{cases} X' = A\,X, \\ X(0) = \mathcal{I}, \end{cases} \tag{4.9}$$

ὅπως προκύπτει ἀπό τήν Πρόταση 4.1.1. Ἡ πινακοσυνάρτηση Φ ὀνομάζεται ἐκθετική τοῦ πίνακα A καί συμβολίζεται μέ e^{tA}.

Παρατηρήσεις

(i) Ἡ ἐκθετική, ὡς λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (4.9) ἀποτελεῖ συνάρτηση τοῦ χρόνου ἀλλά καί τοῦ πίνακα A, δηλαδή $\Phi = \Phi(t, A)$. Ἡ συμβολισμός αὐτῆς, δηλαδή e^{tA}, *ὑποθέτει* ὅτι ἡ ἐκθετική εἶναι συνάρτηση τοῦ tA. Δηλαδή ὁ συμβολισμός ὑποθέτει ταύτιση τῶν $\Phi(st, A)$ καί $\Phi(t, sA)$. Αὐτό βεβαίως χρειάζεται ἀπόδειξη. Συγκεκριμένα θά δείξομε τό ἀκόλουθο:

Ἄν $\Phi(t, A)$ ἡ λύση τοῦ (4.9), *τότε γιά κάθε $s, t \in \mathbb{R}$ καί $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ ἰσχύει ὅτι:*

$$\Phi(st, A) = \Phi(t, sA).$$

Απόδειξη. Ἔστω $\Psi(t) = \Phi(st, A) - \Phi(t, sA)$. Τότε $\Psi(0) = 0$ καί

$$\begin{aligned} \Psi'(t) &= s\,\Phi'(st, A) - \Phi'(t, sA) = sA\,\Phi(st, A) - sA\,\Phi(t, sA) \\ &= sA\,\Psi(t). \end{aligned}$$

Ἄρα ἡ $\Psi(t)$ ἱκανοποιεῖ τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} X' = sA\,X, \\ X(0) = 0, \end{cases}$$

μέ μοναδική λύση τήν ταυτοτικά μηδενική. Ἄρα πράγματι $\Phi(st, A) = \Phi(t, sA)$. □

(ii) Ἡ ἐκθετική δύναται νά ὁρισθεῖ καί στήν περίπτωση κατά τήν ὁποία ὁ πίνακας A ἔχει μιγαδικά στοιχεῖα. Τόσο ὁ ὁρισμός, ὅσο καί ἡ διαδικασία κατασκευῆς τῆς ἐκθετικῆς μιγαδικοῦ πίνακα δέν συνεπάγεται ἐπιπρόσθετες δυσκολίες.

(iii) Ἄν λοιπόν $\Phi(t) = \mathrm{e}^{tA}$, τότε ὁ πίνακας e^{A}, δέν εἶναι ἄλλος ἀπό τόν $\Phi(1) = \mathrm{e}^{1\cdot A}$.

Ἀκολουθοῦν ὁρισμένες βασικές ἰδιότητες τῆς ἐκθετικῆς. Ἀπό κάποιες ἀπό αὐτές προκύπτει ἡ ἰσοδυναμία τῶν διαφόρων ὁρισμῶν.

Πρόταση 4.2.1. *Ἔστω $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$. Τότε ἡ ἀκολουθία μερικῶν ἀθροισμάτων*

$$\Phi_n(t) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} A^k, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

συγκλίνει τοπικῶς ὁμοιομόρφως σ' ὅλο τό $\mathbb{R}$ μέ ὅριο τήν ἐκθετική τοῦ πίνακα A. Δηλαδή

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n(t) \;=\; \mathrm{e}^{tA}.$$

Ἀπόδειξη. Εὐκόλως διαπιστοῦται ὅτι ἡ $\Phi_n(t)$ ἀποτελεῖ τόν $n-$ιοστό ὅρο τῆς ἀναδρομικῆς ἀκολουθίας Picard ἡ ὁποία ὁρίζεται στό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} X' \;=\; AX, \\ X(0) \;=\; \mathcal{I}. \end{cases}$$

Ὡς ἐκ τούτου, ὅπως καί στήν ἀπόδειξη τῆς *Προτάσεως 4.1.1*, συγκλίνει τοπικῶς ὁμοιομόρφως στήν λύση τοῦ (4.2) ἡ ὁποία εἶναι βεβαίως ἡ e^{tA}. **ὅ.ἔ.δ.**

Παρατήρηση. Στό παρόν κεφάλαιο ἐμφανίζονται συχνά δυναμοσειρές πινάκων ἤ ἄλλως *σειρές Neumann*, δηλαδή ἀθροίσματα τῆς μορφῆς $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n A^n$, στά ὁποῖα ὁ ἐναρκτήριος ὅρος εἶναι ὁ $\alpha_0 A^0$. Ἄν καί ἡ μηδενική δύναμη τετραγωνικοῦ πίνακα δέν δύναται νά ὁρισθεῖ πάντοτε, θά ὑποθέτομε ὅτι $A^0 = \mathcal{I}$, ὁποτεδήποτε τέτοιος ἔχομε ἐμφάνιση τοῦ A^0 σέ μερικό, ἤ ἄπειρο ἄθροισμα δυναμοσειρᾶς πινάκων.

Ἡ πρόταση ἡ ὁποία ἀκολουθεῖ περιλαμβάνει μερικές ἀπό τίς βασικότερες ἰδιότητες τῆς ἐκθετικῆς:

Πρόταση 4.2.2. *Ἰδιότητες τῆς ἐκθετικῆς. Ἔστω $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$, s, t πραγματικοί ἀριθμοί καί $n \in \mathbb{N}$. Τότε*

(*i*) $\mathrm{e}^{0A} \;=\; \mathcal{I}$,

(*ii*) $\left(\mathrm{e}^{tA}\right)' \;=\; Ae^{tA}$,

(*iii*) $\mathrm{e}^{tA} \in C^{\infty}(\mathbb{R}\,;\,\mathbb{R}^{N\times N})$.

(*iv*) *Ἄν $f : I \to \mathbb{R}$ διαφορίσιμη στό $t \in I$, τότε* $\left(\mathrm{e}^{f(t)A}\right)' = f'(t)A\,\mathrm{e}^{f(t)A}$.

(*v*) $A\mathrm{e}^{tA} \;=\; \mathrm{e}^{tA}A$,

(*vi*) $\mathrm{e}^{(s+t)A} \;=\; \mathrm{e}^{sA}\mathrm{e}^{tA}$,

(*vii*) $\left(\mathrm{e}^{tA}\right)^{-1} \;=\; \mathrm{e}^{-tA}$,

(*viii*) $A\mathrm{e}^{tB} \;=\; \mathrm{e}^{tB}A \iff AB = BA$,

(ix) $\mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{tB} = \mathrm{e}^{t(A+B)} \iff AB = BA$,

Υποδειξη. Οἱ (i) καί (ii) προκύπτουν ἀπό τόν ὁρισμό. Ἐπειδή $\big(\mathrm{e}^{tA}\big)' = A\,\mathrm{e}^{tA}$, τότε ἐπαγωγικῶς δυνάμεθα νά ἀποδείξομε ὅτι $\mathrm{e}^{A} \in C^n(\mathbb{R}\,;\,\mathbb{R}^{N\times N})$, ἀπ' ὅπου προκύπτει ἡ (iii). Για τήν (iv), ἄν $\Phi(t)$ ἡ λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν $X' = AX$, $X(0) = \mathcal{I}$, τότε $\mathrm{e}^{f(t)A} = \Phi\big(f(t)\big)$. Ἐπειδή f διαφορίσιμη στό t καί Φ διαφορίσιμη παντοῦ, τότε λόγῳ τοῦ *Κανόνος τῆς ἁλυσίδος* θά ἰσχύει ὅτι

$$\begin{aligned}\Big(\mathrm{e}^{f(t)A}\Big)' &= \Big(\Phi\big(f(t)\big)\Big)' = f'(t)\Phi'\big(f(t)\big) = f'(t)A\Phi\big(f(t)\big)\\ &= f'(t)A\,\mathrm{e}^{f(t)A}.\end{aligned}$$

Γιά τήν (v) παρατηρῆστε ὅτι ἡ πινακοσυνάρτηση $\Phi(t) = A\mathrm{e}^{tA} - \mathrm{e}^{tA}A$ ἱκανοποιεῖ τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν $X' = AX$, $X(0) = 0$. Ἄρα $\Phi \equiv 0$. Ἡ (vi) προκύπτει ἐπίσης λόγῳ τῆς μοναδικότητος. Ἡ διαφορά ἀριστεροῦ καί δεξιοῦ μέλους ἱκανοποιεῖ, λόγῳ τῆς (v), τό ἴδιο πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν. Ποιό; Ἡ (ix) ἀπαιτεῖ περισσότερη δουλειά. Ἄν $AB = BA$, τότε λόγῳ ἐπίσης μοναδικότητος $\mathrm{e}^{tA}B = B\mathrm{e}^{tA}$ καί τέλος ἡ $\Phi(t) = \mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{tB} - \mathrm{e}^{t(A+B)}$ ἀποτελεῖ λύση τοῦ προβλήματος ἀρικῶν τιμῶν

$$X' = AX,\ X(0) = 0,$$

ἄρα $\Phi(t) \equiv 0$. Γιά τό ἀντίστροφο, παραγωγίσατε τήν $\mathrm{e}^{tA}\mathrm{e}^{tB} = \mathrm{e}^{t(A+B)}$ δίς καί θέσατε $t = 0$. □

Ἄμεσα ἀπό τήν *Ἰδιότητα* (iv) ἀνωτέρω προκύπτει τό ἀκόλουθο πόρισμα:

Πόρισμα 4.2.3. *Ἔστω $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ καί $g \in C(I)$, ὅπου I ἀνοικτό διάστημα καί $\tau \in I$. Τότε ἡ λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν*

$$\begin{cases} X' = g(t)\,A\,X,\\ X(\tau) = \mathcal{I},\end{cases}$$

εἶναι ἡ πινακοσυνάρτηση $\Phi(t) = \mathrm{e}^{\left(\int_\tau^t g(s)\,ds\right)A}$. □

Παρατήρηση. Ὅλες οἱ ἰδιότητες τῶν πινάκων στήν *Πρόταση 4.2.2* ἐξακολουθοῦν νά ἰσχύουν ἀκόμη καί ἄν οἱ πίνακες A καί B ἔχουν μιγαδικά στοιχεῖα, δηλαδή $A, B \in \mathbb{C}^{N\times N}$. Ἡ ἀπόδειξη τῶν ἰδιοτήτων αὐτῶν στήν μιγαδική ἐκδοχή τους δέν συνεπάγεται οὐδεμία ἐπιπρόσθετη δυσκολία.

Στά ἀναπτύγματα σέ σειρές Neumann ὑπάρχει τύπος τοῦ ὑπολοίπου ἀνάλογος μέ αὐτόν τῶν ἀναπτυγμάτων Taylor. Ἰδιαιτέρως, γιά τήν ἐκθετική πινάκων ἔχομε τό ἀκόλουθο ἀποτέλεσμα:

Πρόταση 4.2.4. *Ἔστω* $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$ *καί* $t \in \mathbb{R}$ *τότε*

$$\mathrm{e}^{tA} = \mathcal{I} + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \cdots + \frac{t^n}{n!}A^n + R_n,$$

ὅπου

$$\|R_n\| \le \frac{|t|^{n+1}\|A\|^{n+1}\mathrm{e}^{|t|\|A\|}}{(n+1)!}.$$

Απόδειξη. Γνωρίζομε ὅτι ἡ ἐκθετική e^{tA} ἀποτελεῖ τοπικῶς ὁμοιόμορφο ὅριο τῆς ἀναδρομικῆς ἀκολουθίας Picard, $\{\Phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, ἡ ὁποία ἰσοῦται μέ

$$\Phi_n(t) = \mathcal{I} + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \cdots + \frac{t^n}{n!}A^n$$

καί προσεγγίζει τήν λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν

$$X' = AX, \ X(0) = \mathcal{I}.$$

Ἐπίσης $\big\|\mathrm{e}^{tA} - \Phi_n(t)\big\| = \lim_{n\to\infty}\big\|\Phi_m(t) - \Phi_n(t)\big\|$ καί

$$\begin{aligned}
\big\|\Phi_m - \Phi_n(t)\big\| &\le \sum_{k=n}^{m-1}\big\|\Phi_{k+1}(t) - \Phi_k(t)\big\| \\
&\le \sum_{k=n}^{m-1}\left\|\frac{t^{k+1}}{(k+1)!}A^{k+1}\right\| \\
&\le \sum_{k=n}^{m-1}\frac{|t|^{k+1}\|A\|^{k+1}}{(k+1)!} \\
&\le \sum_{k=n}^{\infty}\frac{|t|^{k+1}\|A\|^{k+1}}{(k+1)!} \\
&= \mathrm{e}^{\|A\|\cdot|t|} - \sum_{k=0}^{n}\frac{|t|^k\|A\|^k}{k!} \\
&= \frac{|t|^{n+1}\|A\|^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^{\vartheta\|A\|},
\end{aligned}$$

γιά κάποιο $\vartheta \in (0, |t|)$, συμφώνως πρός τόν τύπο ὑπολοίπου τῆς σειρᾶς Taylor,. Ἡ ἴδια ἀνισότης ἰσχύει καί στό ὅριο, δηλαδή

$$\big\|\mathrm{e}^{tA} - \Phi_n(t)\big\| \le \frac{|t|^{n+1}\|A\|^{n+1}}{(n+1)!}\mathrm{e}^{\vartheta\|A\|},$$

ἀπ' ὅπου προκύπτει ἡ (4.2.4). □

Πόρισμα 4.2.5. *Ἄν* $\|A\| \ll 1$, *τότε*

$$\mathrm{e}^{A} = \mathcal{I} + A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots + \frac{1}{n!}A^n + \mathcal{O}\big(\|A\|^{n+1}\big).$$

Ἰδιαιτέρως δέ, ἄν $|h| \ll 1$, ὅπου $h \in \mathbb{R}$ (ἤ $h \in \mathbb{C}$) , τότε

$$e^{hA} = \mathcal{I} + hA + \frac{h^2}{2!}A^2 + \cdots + \frac{h^n}{n!}A^n + \mathcal{O}\big(h^{n+1}\big). \qquad \square$$

Εἴδαμε ὅτι ἡ λύση τοῦ βαθμωτοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x' = a(t)\,x, \\ x(\tau) = \xi, \end{cases}$$

εἶναι ἡ $\varphi(t) = e^{\int_\tau^t a(s)\,ds}\xi$, ἐνῶ τοῦ ἀντιστοίχου διανυσματικοῦ μέ σταθερούς συντελεστές

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}' = A\,\boldsymbol{x}, \\ \boldsymbol{x}(\tau) = \boldsymbol{\xi}, \end{cases}$$

ἡ $\boldsymbol{\varphi}(t) = e^{(t-\tau)A}\boldsymbol{\xi}$. Ἕνα εὔλογο ἐρώτημα τό ὁποῖο τίθεται αὐτόματα εἶναι κατά πόσον ἡ λύση τοῦ διανυσματικοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν μέ μεταβλητούς συντελεστές

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}' = A(t)\,\boldsymbol{x}, \\ \boldsymbol{x}(\tau) = \boldsymbol{\xi}, \end{cases}$$

εἶναι ἡ

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = e^{\int_\tau^t A(s)\,ds}\boldsymbol{\xi}.$$

Ἡ ἀπάντηση στό ἐρώτημα αὐτό εἶναι ἐν γένει ἀρνητική. Ἡ πρόταση ἡ ὁποία ἀκολουθεῖ δίδει μιά γενική περίπτωση ὅπου ἡ (4.2) πράγματι ἀποτελεῖ τήν λύση τοῦ (4.2).

Πρόταση 4.2.6. *Ἔστω $A \in C(I\,; \mathbb{R}^{N\times N})$ γιά τήν ὁποία ἰσχύει ὅτι*

$$A(s)\,A(t) = A(t)\,A(s), \quad \text{γιά κάθε } s,t \in I.$$

Τότε ἡ πινακοσύναρτηση $e^{\int_\tau^t A(s)\,ds}$ ἀποτελεῖ τήν λύση τοῦ

$$\begin{cases} X' = A(t)\,X, \\ X(\tau) = \mathcal{I}, \end{cases} \tag{4.10}$$

ὅπου $\tau \in I$.

Απόδειξη. Ἀκολουθοῦμε διαδικασία διαφορετικῆς αὐτῆς ἡ ὁποία ἀκολουθήθηκε στήν *Ἄσκηση* 4.1.16 στήν σελίδα 179. Ἔχομε κατ' ἀρχάς ὅτι γιά κάθε $t, s \in I$

$$A(s)\left(\int_\tau^t A(\sigma)\,d\sigma\right) = \left(\int_\tau^t A(\sigma)\,d\sigma\right)A(s),$$

τό ὁποιο ἰσχύει διότι ἀφ' ἑνός μέν ἰσχύει γιά $t = \tau$ καί ἰσοῦνται οἱ παράγωγοι ὡς πρός t τοῦ ἀριστεροῦ δεξιοῦ μέλους τῆς ἀνωτέρω. Παρομοίως ἀποδεικνύεται ὅτι

$$\int_\tau^s A(\sigma)\,d\sigma \int_s^t A(\sigma)\,d\sigma = \int_s^t A(\sigma)\,d\sigma \int_\tau^s A(\sigma)\,d\sigma,$$

γιά κάθε $s,\ t,\ \tau \in I$. Ἡ ἀπόδειξη προκύπτει παραγωγίζοντας ὡς πρός t, ἀφοῦ προηγουμένως διαπιστωθεῖ ὅτι γιά $t = s$ τά ἀνωτέρω ἰσοῦνται. Ἡ ἀνωτέρω ἀντιμεταθετικότης σέ συνδυασμό μέ τήν *Ἰδιότητα* (ix) τῆς ἐκθετικῆς πινάκων (βλέπε σελίδα 184) μᾶς παρέχει ὅτι

$$\mathrm{e}^{\int_\tau^{t+h} A(s)\,ds} \;=\; \mathrm{e}^{\int_\tau^{t} A(s)\,ds}\,\mathrm{e}^{\int_t^{t+h} A(s)\,ds},$$

ὁποτεδήποτε τά $\tau, t, t+h \in I$. Ἔστω τώρα $\Phi(t) = \mathrm{e}^{\int_\tau^{t} A(s)\,ds}$, ὁπότε

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\big(\Phi(t+h)-\Phi(t)\big) \;&=\; \frac{1}{h}\left(\mathrm{e}^{\int_\tau^{t+h} A(s)\,ds} - \mathrm{e}^{\int_\tau^{t} A(s)\,ds}\right)\\ &=\; \frac{1}{h}\left(\mathrm{e}^{\int_t^{t+h} A(s)\,ds}\mathrm{e}^{\int_\tau^{t} A(s)\,ds} - \mathrm{e}^{\int_\tau^{t} A(s)\,ds}\right)\\ &=\; \frac{1}{h}\left(\mathrm{e}^{\int_t^{t+h} A(s)\,ds} - \mathcal{I}\right)\mathrm{e}^{\int_\tau^{t} A(s)\,ds},\end{aligned}$$

Ὅμως $\int_t^{t+h} A(s)\,ds = \mathcal{O}(h)$ καί ὡς ἐκ τούτου

$$\mathrm{e}^{\int_t^{t+h} A(s)\,ds} \;=\; \mathcal{I} + \int_t^{t+h} A(s)\,ds + \mathcal{O}(h^2).$$

Ἑπομένως

$$\frac{1}{h}\left(\mathrm{e}^{\int_t^{t+h} A(s)\,ds} - \mathcal{I}\right) \;=\; \frac{1}{h}\int_t^{t+h} A(s)\,ds + \mathcal{O}(h).$$

Θέτοντας $h \to 0$ λαμβάνομε ὅτι

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\mathrm{e}^{\int_t^{t+h} A(s)\,ds} - \mathcal{I}\right) \;=\; A(t).$$

Συνολικῶς λοιπόν ἔχομε

$$\frac{1}{h}\left(\mathrm{e}^{\int_\tau^{t+h} A(s)\,ds} - \mathrm{e}^{\int_\tau^{t} A(s)\,ds}\right) \;=\; \big(A(t)+\mathcal{O}(h)\big)\,\mathrm{e}^{\int_\tau^{t} A(s)\,ds},$$

τό ὁποῖο ὅταν τό h τείνει στό 0 ὁδηγεῖ στό ζητούμενο. □

Ἀπό τήν ἀνωτέρω ἀποδεικτική διαδικασία προκύπτει καί τό ἀκόλουθο πόρισμα:

Πόρισμα 4.2.7. *Ἄν $H \in C^1(I\,;\mathbb{R}^{N\times N})$ καί ἰσχύει ὅτι $H(t)\,H'(t) = H'(t)\,H(t)$, γιά κάθε $t \in I$, τότε*

$$\frac{d}{dt}\mathrm{e}^{H(t)} \;=\; H'(t)\,\mathrm{e}^{H(t)},$$

γιά κάθε $t \in I$. □

Κατόπιν τοῦ ἀνωτέρω πορίσματος τίθεται τό ἑξῆς εὔλογο ἐρώτημα:

Μέ τί ἰσοῦται ἡ $\dfrac{d}{dt}\left(\mathrm{e}^{H(t)}\right)$ *ὅταν* $H(t)H'(t) \neq H'(t)H(t)$ *;*

Ἀποδεικνύεται ὅτι
$$\frac{d}{dt}\mathrm{e}^{H(t)} = \int_0^1 \mathrm{e}^{s\,H(t)}H'(t)\mathrm{e}^{(1-s)\,H(t)}\,ds.$$
Βλέπε *Ἀσκήσεις* 4.2.12, 4.2.13 οἱ ὁποῖες ἀκολουθοῦν.

Ὁλοκληρώνομε τήν παροῦσα ἑνότητα μέ τό ἀκόλουθο ἀποτέλεσμα, τό ὁποῖο ἔχει ποικίλες ἐφαρμογές:

Πρόταση 4.2.8. (Trotter 1959 [53]) *Ἔστω A, $B \in \mathbb{C}^{N\times N}$. Τότε ἰσχύει ὅτι*
$$\lim_{n\to\infty}\left(\mathrm{e}^{\frac{t}{n}A}\mathrm{e}^{\frac{t}{n}B}\right)^n = \mathrm{e}^{t(A+B)},$$
γιά κάθε $t\in\mathbb{R}$.

Ἀποδειξη. Συνεπείᾳ τῆς *Πρότασεως 4.2.4* ἰσχύει ὅτι
$$\mathrm{e}^{\frac{t}{n}A}\mathrm{e}^{\frac{t}{n}B} = \mathcal{I} + \frac{t}{n}A + \frac{t}{n}B + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$
Ταυτοχρόνως ἔχομε ὅτι
$$\left(\mathcal{I} + \frac{t(A+B)}{n}\right)^n - \mathrm{e}^{t(A+B)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$
□

Ἐνδιαφέρουσα γενίκευση τῆς ἀνωτέρω προτάσεως ἀποτελεῖ ἡ *Ἄσκηση* 4.2.9 ἡ ὁποία ἀκολουθεῖ.

Ἀσκήσεις

4.2.1 Δείξατε ὅτι ἄν $A\in\mathbb{R}^{N\times N}$, τότε
$$\det\left(\mathrm{e}^{tA}\right) = \mathrm{e}^{(Tr\,A)\,t}.$$

4.2.2 Δείξατε χρησιμοποιῶντας ἐπαγωγή, ὅτι ὁ $n-$οστός ὅρος τῆς ἀναδρομικῆς ἀκολουθίας Picard γία τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν
$$\begin{cases} X' = AX, \\ X(\tau) = \mathcal{I}, \end{cases}$$
ἰσοῦται μέ $\Phi_n(t) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(t-\tau)^k}{k!}A^k$.

4.2.3 Ἔστω $A\in\mathbb{R}^{N\times N}$. Γιά ποιούς πίνακες $B\in\mathbb{R}^{N\times N}$ ἡ λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν
$$\begin{cases} X' = AX - XA, \\ X(0) = B, \end{cases}$$
εἶναι σταθερή;

4.2.4 Δείξατε ὅτι ὁ πίνακας e^{tA} εἶναι ὀρθομοναδιαῖος ἄν καί μόνον ἄν ὁ A εἶναι ἀντισυμμετρικός. [Ὑπενθυμίζεται ὅτι ἕνας πίνακας B ὀνομάζεται *ὀρθομοναδιαῖος* ἄν $B^T = B^{-1}$, ἐνῷ ἕνας πίνακας B ὀνομάζεται *ἀντισυμμετρικός* ἄν $B^T = -B$.]

4.2.5 Δεῖξτε ὅτι ἡ ἀκολουθία πινακοσυναρτήσεων, ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπό τήν (4.1.16), συγκλίνει τοπικῶς ὁμοιομόρφως καί κατ' ἀνάλογο τρόπο, τό ὅριο αὐτῆς γράφεται ὡς

$$\Phi(t) \;=\; \mathrm{e}^{\int_\tau^t A(s)\,ds}.$$

4.2.6 (Συνέχεια) Ἐξηγῆστε γιατί ἐν γένει ἡ

$$\Phi(t) \;=\; \mathrm{e}^{\int_\tau^t A(s)\,ds},$$

δέν ἀποτελεῖ λύση τῆς $X' = A(t)X$.

4.2.7 Ἔστω $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$. Τότε δείξατε ὅτι

$$\left(\mathrm{e}^{\frac{t}{n}A}\mathrm{e}^{\frac{t}{n}B}\right)^n \;=\; \mathrm{e}^{t(A+B)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right).$$

4.2.8 **(G. Strang 1968)** Ἔστω $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$. Τότε δείξατε ὅτι

$$\left(\mathrm{e}^{\frac{t}{2n}A}\mathrm{e}^{\frac{t}{n}B}\mathrm{e}^{\frac{t}{2n}A}\right)^n \;=\; \mathrm{e}^{t(A+B)} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{4.11}$$

Ἡ (4.11) ἀποτελεῖ τό *Strang's splitting scheme* [52], τό ὁποῖο ἔχει ἐφαρμογές στήν ἀριθμητική ἐπίλυση διαφορικῶν ἐξισώσεων, καθ' ὅτι ἀποτελεῖ δευτέρας τάξεως προσέγγιση καταλλήλως διασπώμενου διαφορικοῦ τελεστοῦ.

4.2.9* **(Γενίκευση τῆς Προτάσεως 4.2.8)** Ἔστω $A, B \in C(I\,;\mathbb{R}^{N\times N})$, ὅπου I ἀνοικτό διάστημα. Ἄν $\Phi(t\,;\,\tau)$, $\Psi(t\,;\,\tau)$, $\Omega(t\,;\,\tau)$ οἱ λύσεις τῶν προβλημάτων ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} X' = A(t)X, \\ X(\tau) = \mathcal{I} \end{cases}, \quad \begin{cases} X' = B(t)X, \\ X(\tau) = \mathcal{I} \end{cases}, \quad \begin{cases} X' = \big(A(t)+B(t)\big)X, \\ X(\tau) = \mathcal{I} \end{cases},$$

ἀντιστοίχως, γιά κάποιο $\tau\in I$, τότε δείξατε ὅτι

$$\Omega(t\,;\,\tau) \;=\; \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^n \Phi(t_{n,k}\,;\,t_{n,k-1})\,\Psi(t_{n,k}\,;\,t_{n,k-1}),$$

ὅπου $t_{n,k} = \tau + k(t-\tau)/n$.

4.2.10* Ἄν $B\in\mathbb{R}^{N\times N}$ καί $\|B\| < 1$, τότε δείξατε ὅτι ἡ σειρά

$$B - \frac{1}{2}B^2 + \frac{1}{3}B^3 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}B^n + \cdots,$$

συγκλίνει. Ἄν τό ὅριό της τό ὀνομάσομε A δείξατε ὅτι $\mathrm{e}^A = \mathcal{I} + B$.

4.2.11* Ἔστω $A\in\mathbb{R}^{N\times N}$, σταθερός πίνακας. Δείξατε ὅτι ἡ ἀκολουθία πινακοσυναρτήσεων

$$\Phi_n(t) \;=\; \left(\mathcal{I} + \frac{t}{n}A\right)^n,$$

συγκλίνει στήν e^{tA} τοπικῶς ὁμοιομόρφως στό $\mathbb{R}$.

4.2.12* Ἄν οἱ σταθεροί πίνακες A, $B \in \mathbb{R}^{N\times N}$ δέν ἀντιμετατίθενται ($AB \neq BA$) νά ὑπολογισθεῖ ἡ τιμή τοῦ πίνακα $\Phi'(0)$, ἄν $\Phi(t) = \mathrm{e}^{A+tB}$.

Υποδειξη. Ἄν ὁρίσομε ὡς $\Psi = \Psi(t,\varepsilon)$ τήν λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν $X' = (A+\varepsilon B)\,X$, $X(0) = \mathcal{I}$, τότε

$$\Psi(t,\varepsilon) \;=\; \mathrm{e}^{tA} + \varepsilon\int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)\,A}\,B\,\Psi(s,\varepsilon)\,ds.$$

Ἄν θέσομε $\Psi(t,\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \Psi_n(t)$, (τό ὁποῖο βεβαίως ἐπιτρέπεται διότι ἡ ροή ἐξαρτᾶται *ἀναλυτικά* ἀπό τό ε ἄρα τό ἴδιο καί ἡ λύση), τότε ἀπό τήν ἀνωτερω προκύπτει ὅτι $\Psi_1(t) = \int_0^t \mathrm{e}^{(t-s)\,A}\, B\, \mathrm{e}^{s\,A}\, ds$. Τό ζητούμενο ἰσοῦται μέ $\Psi_1(1)$.

4.2.13* (Συνέχεια) Ἔστω ὅτι $H \in C^1(I\,;\,\mathbb{R}^{N\times N})$. Δείξατε ὅτι

$$\frac{d}{dt}\mathrm{e}^{H(t)} \;=\; \int_0^1 \mathrm{e}^{s\,H(t)} H'(t) \mathrm{e}^{(1-s)\,H(t)}\, ds,$$

γιά κάθε $t \in I$.

4.2.14*(Συνέχεια) Μέ τί ἰσοῦται ἡ δεύτερη παράγωγος τῆς $\mathrm{e}^{H(t)}$;

4.2.15**Ἔστω X χῶρος Banach καί $T : X \to X$ φραγμένος τελεστής. Πῶς δύναται νά ὁρισθεῖ ἡ ἐκθετική τοῦ T;

4.2.16***(Pólya 1928 [44])** Ἔστω $\Phi : [0,T] \to \mathbb{C}^{N\times N}$ συνεχής πινακοσυνάρτηση μέ τίς ἰδιότητες

$$\Phi(s+t) \;=\; \Phi(s)\Phi(t), \quad \text{γιά κάθε } s,t \in [0,T] \text{ τέτοια ὥστε } s+t \in [0,T],$$

καί $\Phi(0) = \mathcal{I}$. Δείξατε ὅτι ὑπάρχει πίνακας A ὥστε $\Phi(t) = \mathrm{e}^{tA}$.

Υπόδειξη. Ἡ Φ εἶναι ὁλοκληρώσιμη καί ἰσχύει ὅτι

$$\int_0^t \Phi(s)\, ds \;=\; \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} h_n \Phi(k\,h_n),$$

ὅπου $h_n = t/n$. Ὅμως $\Phi(k\,h_n) = \big(\Phi(h_n)\big)^k$ καί $\sum_{k=1}^{n} h_n\, \Phi(k\,h_n) \;=\; h_n \sum_{k=1}^{n} \big(\Phi(h_n)\big)^k$. Ἰδιαιτέρως

$$\begin{aligned}\frac{\Phi(h_n)-\mathcal{I}}{h_n} \sum_{k=1}^{n} h_n\, \Phi(k\,h_n) \;&=\; \frac{\Phi(h_n)-\mathcal{I}}{h_n} \sum_{k=1}^{n} h_n\, \Phi(h_n)^k \\ &=\; \Phi\big((n+1)h_n\big) - \mathcal{I} \;=\; \Phi(t+h_n) - \mathcal{I}.\end{aligned}$$

Ἐπειδή ὅμως $\Phi(0) = \mathcal{I}$ καί Φ συνεχής, ὑπάρχει $t_0 > 0$, τέτοιο ὥστε

$$\|\Phi(s) - \Phi(0)\| \;=\; \|\Phi(s) - \mathcal{I}\| \;<\; \frac{1}{2}, \qquad \text{γιά κάθε } t \in [0,t_0].$$

Συνεπῶς

$$\Big\|\frac{1}{t}\int_0^t \Phi(s)\, ds - \mathcal{I}\Big\| \;\leq\; \frac{1}{t}\int_0^t \|\Phi(s) - \mathcal{I}\|\, ds \;\leq\; \frac{1}{2}.$$

Ὡς ἐκ τούτου, λόγῳ τῆς *Προτάσεως 9.1.7* στήν σελίδα 337, ὁ πίνακας $\frac{1}{t}\int_0^t \Phi(s) ds$ εἶναι ἀντιστρέψιμος, καί κατά συνέπεια καί ὁ $\int_0^t \Phi(s)\, ds$. Ἄρα γιά $0 < t \leq t_0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Phi(h_n)-\mathcal{I}}{h_n} \;=\; \left(\int_0^t \Phi(s)\, ds\right)^{-1} \left(\Phi(t) - \mathcal{I}\right).$$

Ἄν ὀνομάσομε τό ἀνωτέρω ὅριο A ἔχομε

$$\Phi(t) \;=\; \mathcal{I} + A \int_0^t \Phi(s)\, ds.$$

Τό ἀνωτέρω ἀποτελεῖ τήν ὁλοκληρωτική μορφή τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (4.2).

4.2.17*(Συνέχεια) Νά γενικευθεῖ τό ἀνωτέρω ἀποτέλεσμα στήν περίπτωση ὅπου ἡ $\Phi(t)$ ἀποτελεῖ συνεχῆ ἀπεικόνιση στό χῶρο $\mathcal{B}(X)$ τῶν φραγμένων τελεστῶν χώρου Banach X.

4.2.18* (Συνέχεια) Νά μελετηθεῖ κατά πόσον ἰσχύει ἡ ἀκόλουθη γενίκευση.

Ἔστω I ἀνοικτό διάστημα καί $K \in C(I \times I\,; \mathbb{C}^{N\times N})$ ὥστε $K(t,t) = \mathcal{I}$ γιά κάθε $t \in I$ καί

$$K(t,s) \;=\; K(t,\tau)\, K(\tau,s),$$

γιά κάθε $t,s,\tau \in I$. Τότε $K \in C^1(I \times I\,; \mathbb{C}^{N\times N})$ καί ὑπάρχει πίνακας $A \in C(I\,; \mathbb{C}^{N\times N})$ ὥστε

$$\frac{d}{dt} K(t,s) \;=\; A(t)\, K(t,s),$$

γιά κάθε $t,s \in I$.

4.3 Ὑπολογισμός τῆς ἐκθετικῆς πινάκων

Στήν παροῦσα ἑνότητα θά δοῦμε ποιά διαδικασία ἀκολουθοῦμε γιά νά ὑπολογίσομε τήν ἐκθετική τετραγωνικῶν πινάκων.

4.3.1 Γενική θεώρηση

[A] Διαγωνιοποιήσιμοι πίνακες

Ξεκινοῦμε ἀπό τό ἀκόλουθο ἀποτέλεσμα τό ὁποῖο μᾶς ἐπιτρέπει νά ἀντιμετωπίσομε τήν περίπτωση κατασκευῆς τῆς ἐκθετικῆς τετραγωνικοῦ πίνακα:

Πρόταση 4.3.1. *Ἔστω $A, B, D, U \in \mathbb{R}^{N\times N}$ ὅπου U ἀντιστρέψιμος καί D διαγώνιος, μέ $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_N)$. Τότε ἰσχύουν τά ἀκόλουθα:*

(i) $\mathrm{e}^{tD} = \operatorname{diag}\left(\mathrm{e}^{td_1}, \ldots, \mathrm{e}^{td_N}\right)$.

(ii) *Ἄν $B = U^{-1}AU$ τότε $\mathrm{e}^{tB} \;=\; U^{-1}\mathrm{e}^{tA}U$,*

γιά κάθε $t \in \mathbb{R}$. Τά ἀνωτέρω ἰσχύουν καί στήν περίπτωση ὅπου A, D, $U \in \mathbb{C}^{N\times N}$.

Ἀπόδειξη. Γιά τό (i) παρατηρῆστε ὅτι τόσο ἡ πινακοσυνάρτηση e^{tD}, ὅσο καί ἡ

$$E(t) \;=\; \operatorname{diag}\big(\mathrm{e}^{td_1}, \ldots, \mathrm{e}^{td_N}\big),$$

ἀποτελοῦν λύσεις τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν

$$X' \;=\; DX, \quad X(0) \;=\; \mathcal{I}$$

καί λόγῳ μοναδικότητος τῶν λύσεων τοῦ ἀνωτέρω, οἱ δύο πινακοσυναρτήσεις ταυτίζονται.

Γιά τό (ii) εἶναι εὔκολο νά διαπιστωθεῖ ὅτι ἡ πινακοσυνάρτηση $\Phi(t) = U^{-1}\mathrm{e}^{tA}U$ ἀποτελεῖ λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν

$$X' \;=\; BX, \quad X(0) \;=\; \mathcal{I},$$

ὅπως ἐπίσης καί ἡ e^{tB}. Λόγῳ δέ τῆς μοναδικότητος τῶν λύσεων τοῦ ἀνωτέρω θά ἔχομε τελικῶς ὅτι $\mathrm{e}^{tB} \equiv U^{-1}\mathrm{e}^{tA}U$. □

Ἄν ὁ A εἶναι ἕνας διαγωνιοποιήσιμος πίνακας καί γράφεται ὡς $A = U^{-1}DU$, ὅπου $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_N)$ τότε

$$\mathrm{e}^{tA} = U^{-1}\mathrm{e}^{tD}U = U^{-1}\mathrm{diag}\left(\mathrm{e}^{d_1 t}, \ldots, \mathrm{e}^{d_N t}\right) U.$$

Ἤτοι, τά στοιχεῖα τοῦ e^{tA} εἶναι τῆς μορφῆς $a_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{N} c_{ij}^{k}\,\mathrm{e}^{d_k t}$. Ἰδιαιτέρως, ἄν A διαγωνιοποιήσιμος, τότε ἔχει N γραμμικῶς ἀνεξάρτητα ἰδιοδιανύσματα, τίς $\{\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_N\}$, οἱ ὁποῖες ἀντιστοιχοῦν στίς ἰδιοτιμές $d_1, \ldots, d_N$. Σ' αὐτή τήν περίπτωση τό σύνολο

$$\mathcal{B} = \left\{\mathrm{e}^{d_1 t}\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \mathrm{e}^{d_N t}\boldsymbol{\xi}_N\right\},$$

ἀποτελεῖ θεμελιῶδες σύνολο λύσεων τοῦ συστήματος $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$. Ὡς ἐκ τούτου, κάθε λύση τοῦ συστήματος αὐτοῦ θά εἶναι τῆς μορφῆς

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = c_1\,\mathrm{e}^{d_1 t}\boldsymbol{\xi}_1 + \cdots + c_N\,\mathrm{e}^{d_N t}\boldsymbol{\xi}_N.$$

[B] Μή διαγωνιοποιήσιμοι πίνακες

Ἄν τώρα ὁ πίνακάς μας δέν εἶναι διαγωνιοποιήσιμος, τότε εἶναι δυνατόν νά λάβει τήν κανονική μορφή Jordan

$$A = U^{-1}JU,$$

ὅπου U ἀντιστρέψιμος (ἐν γένει $U \in \mathbb{C}^{N\times N}$) καί

$$J = \begin{pmatrix} J_0 & & & 0 \\ & J_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_k \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(J_0, J_1, \ldots, J_k),$$

ὅπου $J_0 = \mathrm{diag}\big(\mu_1, \ldots, \mu_{N_0}\big) \in \mathbb{C}^{N_0\times N_0}$ ἐνῶ γιά $\ell = 1, \ldots, k$

$$J_\ell = \begin{pmatrix} \lambda_\ell & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_\ell & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_\ell & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_\ell \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{N_\ell\times N_\ell}$$

καί $N_0 + N_1 + \cdots + N_k = N$. Ἰσχύει ὅτι

$$J^m = \mathrm{diag}\left(J_0^m, J_1^m, \ldots, J_k^m\right),$$

καί ἐπομένως

$$\begin{aligned}
e^{tJ} &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} J^m = \mathrm{diag}\Big(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} J_0^m, \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} J_1^m, \ldots, \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} J_k^m \Big) \\
&= \mathrm{diag}\left(e^{tJ_0}, e^{tJ_1}, \ldots, e^{tJ_k} \right).
\end{aligned}$$

Ἀπομένει νά δοῦμε μέ τί ἰσοῦνται οἱ πίνακες J_ℓ^m. Ἔχομε ὅτι

$$J_\ell = \lambda_\ell \mathcal{I} + S,$$

ὅπου S ὁ *πίνακας μετατόπιση* (*shift matrix*).

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

καί ὡς ἐκ τούτου

$$S^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad S^{N_\ell - 1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

καί $S^m = 0$, ὅταν $m \geq N_\ell$, αὐτό σημαίνει ὅτι ὁ πίνακας S εἶναι *μηδενοδύναμος*. Ἑπομένως ἡ σειρά Neumann ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ στήν ἐκθετική τοῦ πίνακα S (καθώς καί κάθε μηδενοδύναμου πίνακα) εἶναι πεπερασμένη:

$$\begin{aligned}
e^{tS} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} S^k = \sum_{k=0}^{N_l - 1} \frac{t^k}{k!} S^k \\
&= \mathcal{I} + tS + \frac{t^2}{2!} S^2 + \cdots + \frac{t^{N_l - 1}}{(N_l - 1)!} S^{N_l - 1}
\end{aligned}$$

καί συνεπῶς, ἐπειδή οἱ πίνακες S καί $\mathcal{I}$ ἀντιμετατίθενται, ἐφαρμόζοντας τήν *Ἰδιότητα ix* στήν σελίδα 184, λαμβάνομε

$$\begin{aligned} e^{tJ_\ell} &= e^{t(\lambda_\ell \mathcal{I}+S)} = e^{\lambda_\ell t\mathcal{I}} e^{tS} = e^{\lambda_\ell t} e^{tS} \\ &= e^{\lambda_\ell t}\Big(\mathcal{I} + tS + \frac{t^2}{2!}S^2 + \cdots + \frac{t^{N_l-1}}{(N_l-1)!}S^{N_l-1}\Big) \\ &= \begin{pmatrix} e^{\lambda_\ell t} & te^{\lambda_\ell t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda_\ell t} & \cdots & \frac{t^{N_l-1}}{(N_l-1)!}e^{\lambda_\ell t} \\ & e^{\lambda_\ell t} & te^{\lambda_\ell t} & \cdots & \frac{t^{N_l-2}}{(N_l-2)!}e^{\lambda_\ell t} \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & e^{\lambda_\ell t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ἰσοδύναμη γραφή τῆς ἐκθετικῆς τοῦ J_ℓ:

$$e^{tJ_\ell} = e^{t\lambda_\ell}\Big(\mathcal{I} + tS + \frac{t^2}{2!}S^2 + \cdots \frac{t^{N_\ell-1}}{(N_\ell-1)!}S^{N_\ell-1}\Big).$$

Ἐπίσης, ἄν ὁ πίνακας $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ ἔχει *μοναδική* ἰδιοτιμή μ $\big($δηλ. $P_A(\lambda) = (\mu-\lambda)^N\big)$ μέ γεωμετρική πολλαπλότητα 1, τότε

$$e^{tA} = e^{\mu t}\big(B_0 + tB_1 + \cdots + t^{N-1}B_{N-1}\big),$$

ὅπου $B_0, \dots, B_{N-1} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ κατάλληλοι σταθεροί πίνακες. (Γιατί;)

Τά ἀνωτέρω μᾶς ἐπιτρέπουν νά ἐξαγάγομε ὅτι ἄν $e^{tA} = \big(b_{ij}(t)\big)$, θά ἰσχύει ὅτι

$$b_{ij}(t) = \sum_{\ell=1}^{m} p_\ell^{ij}(t)\, e^{\lambda_\ell t},$$

ὅπου $\lambda_\ell \in \mathbb{C}$ ἰδιοτιμή τοῦ A καί $p_\ell^{ij}(t)$ πολυώνυμου βαθμοῦ τό πολύ ἴσου μέ τήν διαφορά τῆς ἀλγεβρικῆς μεῖον τήν γεωμετρική πολλαπλότητα τῆς ἰδιοτιμῆς λ_ℓ.

[Γ] Ἔκφραση τῆς $\varphi(t) = e^{tA}\xi$ μέσῳ ἰδιοτιμῶν καί γενικευμένων ἰδιοχώρων

Ἰδιαιτέρως ἔστω ὅτι τό ζητούμενο εἶναι ἡ λύση τοῦ συστήματος

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}' = A\,\boldsymbol{x}, \\ \boldsymbol{x}(\tau) = \boldsymbol{\xi}, \end{cases}$$

ὅπου $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^N$. Ἄν οἱ ἰδιοτιμές τοῦ πίνακα A εἶναι οἱ $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ μέ πολλαπλότητες $\mu_1, \dots, \mu_k$, ἀντιστοίχως, τότε λόγῳ τῆς *Προτάσεως 9.1.12* τῆς σελίδος 341 ἔχομε ὅτι

$$\mathbb{C}^N = X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_k,$$

ὅπου

$$X_\ell \;=\; \left\{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^N \;:\; (A-\lambda_\ell\mathcal{I})^{\mu_k}\boldsymbol{x} = 0 \,\right\} \;=\; \mathcal{N}\left[(A-\lambda_\ell)^{\mu_\ell}\right], \qquad \ell = 1,\dots,k.$$

Ἤτοι, ὁ $\mathbb{C}^N$ γράφεται ὡς εὐθύ ἄθροισμα τῶν γενικευμένων ἰδιοχώρων τοῦ πίνακα A. Ἡ ἀρχική τιμή $\boldsymbol{\xi}$ στό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν (4.3.1) γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ὡς

$$\boldsymbol{\xi} \;=\; \boldsymbol{\xi}_1 + \cdots + \boldsymbol{\xi}_k,$$

ὅπου $\boldsymbol{\xi}_\ell \in X_\ell$. Συγχρόνως $(A-\lambda_\ell\mathcal{I})^n\boldsymbol{\xi}_\ell = 0$, γιά κάθε $n \ge \mu_\ell$. Συνεπῶς

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{tA}\,\boldsymbol{\xi}_k &= \mathrm{e}^{\lambda_\ell t\mathcal{I}+t(A-\lambda_\ell\mathcal{I})}\,\boldsymbol{\xi}_k \;=\; \mathrm{e}^{\lambda_\ell t\mathcal{I}}\,\mathrm{e}^{t(A-\lambda_\ell\mathcal{I})}\,\boldsymbol{\xi}_k \\
&= \mathrm{e}^{\lambda_\ell t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}(A-\lambda_\ell\mathcal{I})^n\,\boldsymbol{\xi}_k \;=\; \mathrm{e}^{\lambda_\ell t}\sum_{n=0}^{\mu_\ell-1}\frac{t^n}{n!}(A-\lambda_\ell\mathcal{I})^n\,\boldsymbol{\xi}_k.
\end{aligned}$$

Συνολικῶς λοιπόν, ἡ λύση τοῦ (4.3.1) θά εἶναι ἡ

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{(t-\tau)A}\,\boldsymbol{\xi} \;&=\; \sum_{\ell=1}^{k}\mathrm{e}^{(t-\tau)A}\,\boldsymbol{\xi}_\ell \\
&=\; \sum_{\ell=1}^{k}\mathrm{e}^{\lambda_\ell(t-\tau)}\sum_{n=0}^{\mu_\ell-1}\frac{(t-\tau)^n}{n!}(A-\lambda_\ell\mathcal{I})^n\,\boldsymbol{\xi}_\ell.
\end{aligned}$$

Ἀσκήσεις

4.3.1 Νά ὑπολογισθοῦν οἱ ἐκθετικές τῶν ἀκολούθων πινάκων

$$(i)\ \begin{pmatrix} 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\qquad (ii)\ \begin{pmatrix} 0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},$$

$$(iii)\ \begin{pmatrix} a & b\\ b & a\end{pmatrix},\qquad (iv)\ \begin{pmatrix} a & b\\ -b & a\end{pmatrix},$$

$$(v)\ \begin{pmatrix} 1 & 0\\ a & 1\end{pmatrix},\qquad (vi)\ \begin{pmatrix} 0 & a\\ b & 0\end{pmatrix}.$$

4.3.2 Νά ὑπολογισθοῦν οἱ ἐκθετικές τῶν ἀκολούθων πινάκων

$$(i)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\qquad (ii)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$(iii)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\\ 3 & 0 & 0\end{pmatrix},\qquad (iv)\ \begin{pmatrix} a & b & c\\ c & a & b\\ b & c & a\end{pmatrix}.$$

4.3.3 Ἔστω $A = (a_{k\ell})_{k,\ell=1}^N \in \mathbb{R}^{N\times N}$, ὅπου $a_{k\ell} = 1$, γιά κάθε $k,\ell = 1,\dots,N$. Νά ὑπολογισθεῖ ἡ ἐκθετική τοῦ πίνακα A.

4.3.4 Ἄν ὁ πίνακας $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ εἶναι διαγωνιοποιήσιμος μέ ἀρνητικές ἰδιοτιμές δείξατε ὅτι κάθε λύση τοῦ συστήματος
$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x},$$
τείνει στό 0 καθώς τό t τείνει στό σύν ἄπειρο.

4.3.5 (Συνέχεια) Τό ἴδιο συμπέρασμα ἰσχύει ἄν ἀντί γιά ἀρνητικές ἰδιοτιμές, ὁ πίνακες A ἔχει ἰδιοτιμές μέ ἀρνητικά πραγματικά μέρη, ἀκόμη καί στήν περίπτωση κατά τήν ὁποία ὁ A δέν εἶναι διαγωνιοποιήσιμος.

4.3.6 Ἔστω $P \in \mathbb{R}^{N\times N}$ ὁ πίνακας μέ τήν ἰδιότητα $P\boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{e}_{k+1}$, γιά $k = 1, \dots, N-1$ καί $P\boldsymbol{e}_N = \boldsymbol{e}_1$. Νά βρεθεῖ ἡ ἐκθετική τοῦ P.

4.3.7 Νά βρεθεῖ ἡ γενική λύση τοῦ συστήματος
$$\boldsymbol{x}'' = A\boldsymbol{x},$$
ὅπου $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^N$ καί $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$, σταθερός πίνακας.

4.3.8 Νά ἐκφρασθεῖ ἡ γενική λύση τοῦ συστήματος
$$\boldsymbol{x}' = tA\boldsymbol{x},$$
συναρτήσει τῆς ἐκθετικῆς τοῦ πίνακα A.

4.3.9 Ἔστω $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ διαγωνιοποιήσιμος πίνακας μέ θετικές ἰδιοτιμές καί $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ ἡ λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν
$$\begin{cases} t\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}, \\ \boldsymbol{x}(1) = \boldsymbol{\xi}. \end{cases}$$
Δείξατε ὅτι $\lim_{t\to 0^+} \boldsymbol{\varphi}(t) = 0$.

4.3.10 (Συνέχεια) Τό ἀνωτέρω ἰσχύει ἀκόμη κι' ἄν ὁ πίνακας A ἔχει μόνο ἰδιοτιμές μέ θετικά πραγματικά μέρη καί δέν εἶναι ἀπαραιτήτως διαγωνιοποιήσιμος.

4.3.11 Δοθέντος ὅτι οἱ A, B καί C ἀποτελοῦν σταθερούς τετραγωνικούς πίνακες $N \times N$, νά βρεθεῖ ἡ γενική λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν
$$\begin{cases} X' = AX + XB, \\ X(\tau) = C. \end{cases}$$

4.3.12 Ἔστω $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ σταθερός ἀντιστρέψιμος πίνακας. Δείξατε ὅτι ἡ γενική λύση τῆς ἐξισώσεως
$$X^{(n)} = A^n X,$$
ὅπου $X \in \mathbb{R}^{N\times N}$, εἶναι τῆς
$$\Phi(t) = \sum_{k=1}^{n} e^{\omega^k tA} C_k, \quad \text{ὅπου} \quad \omega = \mathrm{e}^{\frac{2\pi i}{n}},$$
καί C_k, $k = 1, \dots, n$, σταθεροί πίνακες.

4.3.13 (Συνέχεια) Ποία ἡ γενική λύση τῆς ἐξισώσεως
$$\boldsymbol{x}^{(n)} = A\,\boldsymbol{x};$$

4.3.14 Νά βρεθεῖ *πυρήνας* $K = K(t, s)$ ὥστε ἡ λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν
$$\begin{cases} x^{(n)} = f(t), \\ x^{(k)}(\tau) = 0,\, k = 0, \dots, n-1, \end{cases} \tag{4.12}$$

νά γράφεται ὡς

$$\varphi(t) = \int_\tau^t K(t,s)\, f(s)\, ds.$$

Ὑπόδειξη. Τό ἀνωτέρω πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν γράφεται ἰσοδύναμα ὡς πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν συστήματος $n \times n$ πρώτης τάξεως:

$$\begin{gathered} x_1' = x_2,\ x_2' = x_3, \dots, x_{n-1}' = x_n,\ x_n' = f(t), \\ x_1(\tau) = x_2(\tau) = \cdots = x_n(\tau) = 0, \end{gathered}$$

ἤ ἰσοδύναμα

$$\boldsymbol{x}' = S\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t),\ \ \boldsymbol{x}(\tau) = 0, \tag{4.12'}$$

ὅπου S ὁ πίνακας μετατόπιση καί $\boldsymbol{f}(t) = \big(0, \dots, 0, f(t)\big)^T$. Ἡ $\boldsymbol{\varphi}(t) = \int_\tau^t \mathrm{e}^{(t-\tau)S} \boldsymbol{f}(s)\, ds$ ἀποτελεῖ τήν λύση τοῦ (4.12′). Ἄν $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, τότε ἡ φ_1 ἀποτελεῖ τήν λύση τοῦ (4.12). Ἐν τέλει ἰσχύει ὅτι

$$\varphi_1(t) = \int_\tau^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} f(s)\, ds.$$

4.3.15 (Συνέχεια) Ἔστω $a_0, a_1 \in C^n(I)$, ὅπου I ἀνοικτό διάστημα καί $a_1(t) > 0$, γιά κάθε $t \in I$. Ἄν ὁ διαφορικός τελεστής $\mathcal{L}$ ὁρίζεται ὡς $\mathcal{L}x = a_1(t)x' + a_0(t)x$, νά βρεθεῖ πυρήνας $K = K(t,s)$ ὥστε ἡ λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} \mathcal{L}^n x = f(t), \\ x^{(k)}(\tau) = 0,\ k = 0, \dots, n-1, \end{cases}$$

νά γράφεται ὡς

$$\varphi(t) = \int_\tau^t K(t,s)\, f(s)\, ds.$$

[Ὁ $\mathcal{L}^n$ ἀποτελεῖ ἐπίσης διαφορικό τελεστή ὁριζόμενο ἀναδρομικῶς ὡς $\mathcal{L}^{k+1}x = \mathcal{L}^k\big(\mathcal{L}x\big)$.]

4.3.16 Ἄν οἱ ἰδιοτιμές τοῦ πίνακα $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ εἶναι διακριτές, τότε τό σύστημα

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x},$$

ἔχει λύση $\boldsymbol{\varphi} = \big(\varphi_1, \dots, \varphi_N\big) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$, γιά τήν ὁποία οἱ $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητες.

4.3.17 Ἄν $a + d < 0$ καί $ad - bc > 0$ δείξατε ὅτι ὅλες οἱ λύσεις τοῦ συστήματος

$$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \boldsymbol{x},$$

τείνουν στό μηδέν καθώς τό t τείνει στό $+\infty$.

4.3.18 Ἔστω ὅτι ὁ πίνακας $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ ἔχει *μοναδική* ἰδιοτιμή μ $\big($δηλ. $P_A(\lambda) = (\mu - \lambda)^N\big)$ μέ γεωμετρική πολλαπλότητα 1. Δείξατε ὅτι

$$\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{\mu t}\big(B_0 + tB_1 + \cdots + t^{N-1}B_{N-1}\big),$$

ὅπου $B_0, \dots, B_{N-1} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ κατάλληλοι σταθεροί πίνακες.

4.3.19 Ἔστω $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ ἀντιστρέψιμος διαγωνιοποιήσιμος πίνακας μέ πραγματικές ἰδιοτιμές. Δείξατε ὅτι ὅλες οἱ λύσεις τοῦ $N \times N$ συστήματος δευτέρας τάξεως

$$\boldsymbol{x}'' = -A^2 \boldsymbol{x},$$

εἶναι φραγμένες σ' ὅλο τό $\mathbb{R}$.

4.3.20 Ἕνας πίνακας $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ ὀνομάζεται *κυκλικός* (*circulant*) ἄν εἶναι τῆς μορφῆς

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{N-1} & a_N \\ a_N & a_1 & \cdots & a_{N-2} & a_{N-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \cdots & a_N & a_1 \end{pmatrix}.$$

Δείξατε ὅτι ὁ ἀνωτέρω πίνακας διαγωνοποιεῖται ὡς $A = U^*DU$ ὅπου U^* ὁ συζυγής τοῦ ἀναστρόφου τοῦ U, ἐνῷ

$$U^* = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega_N & \omega_N^2 & \cdots & \omega_N^{N-1} \\ 1 & \omega_N^2 & \omega_N^4 & \cdots & \omega_N^{2N-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \omega_N^{N-1} & \omega_N^{2(N-1)} & \cdots & \omega_N^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix},$$

καί $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ μέ

$$\lambda_j = \sum_{k=1}^{N} e^{\frac{2\pi i (k-1)(j-1)}{N}} a_k.$$

Ἀκολούθως ὑπολογίσατε τήν ἐκθετική τοῦ A.

4.4 Ἐπίλυση γραμμικῶν συστημάτων

Στήν παροῦσα ἑνότητα θά ἀναπτυχθεῖ μεθοδολογία ἐπιλύσεως συστημάτων τῆς μορφῆς

$$\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t),$$

ὅπου $A \in C(I\,;\mathbb{R}^{N\times N})$ καί $\boldsymbol{b} \in C(I\,;\mathbb{R}^N)$. Συνοδεύονται ἀπό ἀρχική συνθήκη τῆς μορφῆς

$$\boldsymbol{x}(\tau) = \boldsymbol{\xi}.$$

Ὁ A ἀποτελεῖ τόν πίνακα τῶν συντελεστῶν. Στήν παροῦσα ἑνότητα θά περιορισθοῦμε στήν περίπτωση κατά τήν ὁποία ὁ A εἶναι σταθερός πίνακας. Ἡ λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (4.4) – (4.4) στήν περίπτωση τῶν σταθερῶν συσντελεστῶν, δέν εἶναι ἄλλη ἀπό τήν

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = e^{(t-\tau)A}\boldsymbol{\xi} + \int_\tau^t e^{(t-s)\,A}\,\boldsymbol{b}(s)\,ds,$$

ὅπου $\boldsymbol{\xi}$ σταθερό διάνυσμα στόν $\mathbb{R}^N$ καί $\tau \in I$. Ὁ ὑπολογισμός λοιπόν τῶν λύσεων τοῦ (4.4) συνδέεται μέ τόν ὑπολογισμό τῆς ἐκθετικῆς τοῦ A. Ξεκινοῦμε ἀπό τήν ὁμοιογενῆ περίπτωση.

4.4.1 Πραγματικές διακριτές ἰδιοτιμές

Ἄν τό λ ἀποτελεῖ ἰδιοτιμή τοῦ πίνακα $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ μέ ἰδιοδιάνυσμα $\boldsymbol{\xi}$, τότε ἡ διανυσματική συνάρτηση

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = e^{\lambda t}\boldsymbol{\xi},$$

ἀποτελεῖ λύση τοῦ συστήματος

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}.$$

Πράγματι,

$$\boldsymbol{\varphi}'(t) = \lambda e^{\lambda t}\boldsymbol{\xi} = e^{\lambda t}A\boldsymbol{\xi} = A\boldsymbol{\varphi}(t).$$

Κατά συνέπεια, ἄν ὁ πίνακας A ἔχει N διακεκριμένες ἰδιοτιμές: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N$, τότε σ' αὐτές θά ἀντιστοιχοῦν N γραμμικῶς ἀνεξάρτητα ἰδιοδιανύσματα: $\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \ldots, \boldsymbol{\xi}_N$. Οἱ δέ διανυσματικές συναρτήσεις

$$e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{\xi}_1, e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{\xi}_2, \ldots, e^{\lambda_N t}\boldsymbol{\xi}_N,$$

ἀποτελοῦν λύσεις τοῦ (4.4.1). Εἶναι στήν πραγματικότητα γραμμικῶς ἀνεξάρτητες λύσεις, ἀφοῦ $\det \Phi(0) \neq 0$ καί ὡς ἐκ τούτου, θεμελιῶδες σύνολο λύσεων τοῦ συστήματος αὐτοῦ.

Παράδειγμα. Ἔστω τό σύστημα

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2, \\ x_2' = 4x_1 + x_2. \end{cases}$$

Ὁ πίνακας τοῦ συστήματος εἶναι ὁ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix},$$

μέ ἰδιοτιμες λ_1, λ_2, ἱκανοποιοῦσες τήν ἐξίσωση

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = (\lambda+1)(\lambda-3) = 0.$$

Ἄρα $\lambda_1 = 3$ καί $\lambda_2 = -1$. Τά ἀντίστοιχα ἰδιοδιανύσματα εἶναι τά

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Σ' αὐτά ἀντιστοιχοῦν οἱ ἀκόλουθες λύσεις τοῦ (4.4.1):

$$\boldsymbol{\varphi}_1(t) = e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{\varphi}_2(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ἡ δέ γενική λύση τοῦ (4.4.1) εἶναι ἡ

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = c_1\boldsymbol{\varphi}_1(t) + c_2\boldsymbol{\varphi}_2(t) = c_1 e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ἄν τώρα τό ζητούμενο εἶναι ἡ ἐπίλυση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2, \\ x_2' = 4x_1 + x_2, \\ x_1(0) = 2,\ x_2(0) = 0. \end{cases}$$

Ὁπότε θά πρέπει νά βρεθοῦν c_1, c_2 γιά τήν $\boldsymbol{\varphi}$ στήν (4.4.1), ὥστε $\boldsymbol{\varphi}(0) = (2,0)^T$. Ἰσοδύναμα

$$c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

τό ὁποῖο ἀποτελεῖ ἕνα γραμμικό σύστημα 2×2 μέ λύση $c_1 = c_2 = 1$. Τελικῶς ἡ λύση τοῦ (4.4.1) θά εἶναι ἡ

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{3t} + \mathrm{e}^{-t} \\ 2\mathrm{e}^{3t} - 2\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}.$$

4.4.2 Μιγαδικές ἰδιοτιμές

Ἔστω τώρα ὅτι στό ὑπό μελέτη σύστημα

$$\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x},$$

ὁ πίνακας A εἶχε τήν μιγαδική ἰδιοτιμή $\lambda = \alpha + \mathrm{i}\beta$ καί τό ἀντίστοιχο μιγαδικό ἰδιοδιάνυσμα $\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\zeta} + \mathrm{i}\boldsymbol{\eta}$, δηλαδή

$$A\boldsymbol{\xi} = \lambda\boldsymbol{\xi},$$

καί ἄν πάρομε τήν συζυγῆ παράσταση τῶν ἀνωτέρω ἔχομε

$$A\overline{\boldsymbol{\xi}} = \overline{\lambda}\,\overline{\boldsymbol{\xi}},$$

τό ὁποῖο σημαίνει ὅτι καί τό συζυγές τοῦ λ ἀποτελεῖ ἰδιοτιμή μέ ἀντίστοιχο ἰδιοδιάνυσμα τό συζυγές τοῦ $\boldsymbol{\xi}$. Τά $\boldsymbol{\zeta}$ καί $\boldsymbol{\eta}$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα, διότι ἄν αὐτό δέν συνέβαινε, θά ὑπῆρχε διάνυσμα μή μηδενικό $\boldsymbol{\vartheta} \in \mathbb{R}^N$ καί πραγματικές σταθερές μ, ν (ὄχι καί οἱ δύο μηδενικές) ὥστε $\boldsymbol{\zeta} = \mu\boldsymbol{\vartheta}$ καί $\boldsymbol{\eta} = \nu\boldsymbol{\vartheta}$. Ἑπομένως

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\zeta} + \mathrm{i}\boldsymbol{\eta} = (\mu + \mathrm{i}\nu)\boldsymbol{\vartheta},$$

καί κατά συνέπεια

$$A(\mu + \mathrm{i}\nu)\boldsymbol{\vartheta} = A\boldsymbol{\xi} = \lambda\boldsymbol{\xi} = \lambda(\mu + \mathrm{i}\nu)\boldsymbol{\vartheta}.$$

Ἀπλοποιῶντας τό $\mu + \mathrm{i}\nu \neq 0$ λαμβάνομε $A\boldsymbol{\vartheta} = \lambda\boldsymbol{\vartheta}$. Ἄτοπο διότι τό δεξιό μέρος εἶναι πραγματικό ἐνῶ τό ἀριστερό μή πραγματικό. Παραλλήλως ἡ διανυσματική συνάρτηση

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}(t) &= \mathrm{e}^{\lambda t}\boldsymbol{\xi} = \mathrm{e}^{\alpha + \mathrm{i}\beta t}\,(\boldsymbol{\zeta} + \mathrm{i}\boldsymbol{\eta}) \\ &= \mathrm{e}^{\alpha t}(\cos\beta t + \mathrm{i}\sin\beta t)\left(\boldsymbol{\zeta} + \mathrm{i}\boldsymbol{\eta}\right) \\ &= \left(\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t\,\boldsymbol{\zeta} - \mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t\,\boldsymbol{\eta}\right) + \mathrm{i}\left(\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t\,\boldsymbol{\zeta} + \mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t\,\boldsymbol{\eta}\right), \end{aligned}$$

ἀποτελεῖ λύση τοῦ συστήματός μας. Στήν πραγματικότητα, μέ τήν ἀνωτέρω διαδικασία κατασκευάσαμε δύο γραμμικῶς ἀνεξάρτητες λύσεις. Τόσο τό πραγματικό μέρος τῆς $\boldsymbol{\varphi}$

$$\mathcal{R}e\,\boldsymbol{\varphi}(t) = \frac{1}{2}\big(\boldsymbol{\varphi}(t) + \overline{\boldsymbol{\varphi}}(t)\big) = \mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t\,\boldsymbol{\zeta} - \mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t\,\boldsymbol{\eta},$$

ὅσο καί τό φανταστικό της μέρος

$$\mathcal{I}m\,\boldsymbol{\varphi}(t) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\big(\boldsymbol{\varphi}(t) - \overline{\boldsymbol{\varphi}}(t)\big) = \mathrm{e}^{\alpha t}\sin\beta t\,\boldsymbol{\zeta} + \mathrm{e}^{\alpha t}\cos\beta t\,\boldsymbol{\eta},$$

ἀποτελοῦν λύσεις καί μάλιστα γραμμικῶς ἀνεξάρτητες.

Παράδειγμα. Ὁ πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix},$$

ἔχει ἰδιοτιμές $\lambda_{1,2} = -1 \pm 2\mathrm{i}$ καί ἀντιστοίχως ἰδιοδιανύσματα

$$\boldsymbol{\xi}_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}.$$

Ἀκολουθῶντας τήν ἀνωτέρω διαδικασία, λαμβάνομε τίς λύσεις

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\varphi}(t) &= \mathrm{e}^{-t}\cos 2t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \mathrm{e}^{-t}\sin 2t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t}\cos 2t \\ -\mathrm{e}^{-t}\sin 2t \end{pmatrix}, \\
\boldsymbol{\psi}(t) &= \mathrm{e}^{-t}\sin 2t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{e}^{-t}\cos 2t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t}\sin 2t \\ \mathrm{e}^{-t}\cos 2t \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

οἱ ὁποῖες ἀντιστοιχοῦν στό πραγματικό καί μιγαδικό μέρος ἀντιστοίχως. Παρατηροῦμε ὅτι ὁ πίνακας μέ στῆλες τό $\boldsymbol{\varphi}(0)$ καί $\boldsymbol{\psi}(0)$ εἶναι ὁ μοναδιαῖος καί ὡς ἐκ τούτου ὁ πίνακας μέ στῆλες τά $\boldsymbol{\varphi}(t)$ καί $\boldsymbol{\psi}(t)$ ἀποτελεῖ τήν ἐκθετική τοῦ A, ἤτοι

$$\mathrm{e}^{tA} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t}\cos 2t & \mathrm{e}^{-t}\sin 2t \\ -\mathrm{e}^{-t}\sin 2t & \mathrm{e}^{-t}\cos 2t \end{pmatrix}$$

λόγῳ μοναδικότητος. (Τίνος;)

4.4.3 Ἐπαναλαμβανόμενες ἰδιοτιμές

Ἰδιαίτερο ἐνδιαφέρον παρουσιάζει ἡ περίπτωση κατά τήν ὁποία ὁ πίνακας μας δέν εἶναι διαγωνιοποιήσιμος, γεγονός τό ὁποῖο, ὅπως ἔχομε δεῖ, ὀφείλεται στό γεγονός ὅτι ὑπάρχει ἰδιοτιμή μέ ἀλγεβρική πολλαπλότητα μεγαλύτερη τῆς γεωμετρικῆς.

Παραδείγματα

(i) Ὁ πίνακας $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ ἔχει ὡς μόνη ἰδιοτιμή τό $\lambda = 1$, ἀλγεβρικῆς πολλαπλότητος 2 καί ἕνα μόνο γραμμικῶς ἀνεξάρτητο ἰδιοδιάνυσμα τό $\boldsymbol{\xi} = (1, -1)^T$. Ἤτοι, ἡ γεωμετρική πολλαπλότης τῆς ἰδιοτιμῆς $\lambda = 1$ ἰσοῦται μέ 1 καί συνεπῶς διαφέρει κατά ἕνα ἀπό τήν ἀλγεβρική της πολλαπλότητα. Ὁ πίνακας A θά ἔχει ὑποχρεωτικῶς τήν ἀκόλουθη ἀνάλυση Jordan:

$$A = U^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}U,$$

ὅπου U κατάλληλος πίνακας, ἐνῶ

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{tA} &= U^{-1}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & t\mathrm{e}^t \\ 0 & \mathrm{e}^t \end{pmatrix}U = U^{-1}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^t & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^t \end{pmatrix}U + U^{-1}\begin{pmatrix} 0 & t\mathrm{e}^t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U \\ &= \mathrm{e}^t\mathcal{I} + t\mathrm{e}^t B, \end{aligned}$$

ὅπου $B = U^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}U$. Λαμβάνομε κατ' ἀρχάς τήν λύση

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \mathrm{e}^t\boldsymbol{\xi} = \left(\mathrm{e}^t, -\mathrm{e}^t\right)^T.$$

Λόγῳ τῆς μορφῆς τήν ὁποία ἔχει ἡ ἐκθετική τοῦ τεμάχους Jordan ἀναζητοῦμε ὡς δεύτερη λύση διανυσματική συνάρτηση τῆς μορφῆς

$$\boldsymbol{\psi}(t) = \mathrm{e}^t\boldsymbol{\alpha} + t\mathrm{e}^t\boldsymbol{\beta}.$$

Ἡ $\boldsymbol{\psi}' = A\boldsymbol{\psi}$ ἔχει ὡς συνέπεια ὅτι

$$(A-\mathcal{I})\boldsymbol{\beta} = 0 \qquad \text{καί} \qquad (A-\mathcal{I})\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta},$$

ἄρα $\boldsymbol{\beta}$ ἰδιοδιάνυσμα μέ ἰδιοτιμή $\lambda = 1$. Προκύπτει λοιπόν ἡ λύση $\boldsymbol{\alpha} = (-1,0)^T$, $\boldsymbol{\beta} = (1,-1)^T$ καί συνεπῶς

$$\boldsymbol{\psi} = \left(-\mathrm{e}^t + t\mathrm{e}^t, -t\mathrm{e}^t\right)^T.$$

Τό σύνολο $\{\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\psi}\}$ ἀποτελεῖ θεμελιῶδες σύνολο λύσεων τοῦ συστήματος $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$. (Γιατί;)

(ii) Ἔστω ὁ πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Τότε $p_A(\lambda) = (2-\lambda)^3$. Ἡ τριπλή ἰδιοτιμή $\lambda = 2$ ἔχει μόνο ἕνα γραμμικῶς ἀνεξάρτητο ἰδιοδιάνυσμα, τό $\boldsymbol{\xi} = (1,1,1)^T$. Συγχρόνως ἔχομε ὅτι

$$(A-2\mathcal{I})\,\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi} \qquad \text{καί} \qquad (A-2\mathcal{I})\,\boldsymbol{\vartheta} = \boldsymbol{\eta},$$

ὅπου $\boldsymbol{\eta} = (0,0,1)^T$ καί $\boldsymbol{\vartheta} = (-1,0,1)^T$. Συνεπῶς οἱ διανυσματικές συναρτήσεις

$$\boldsymbol{\varphi}(t) \;=\; \mathrm{e}^{2t}\boldsymbol{\xi} \;=\; \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\psi}(t) \;=\; t\mathrm{e}^{2t}\boldsymbol{\xi}+\mathrm{e}^{2t}\boldsymbol{\eta} \;=\; t\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\omega}(t) \;=\; \frac{t^2}{2}\mathrm{e}^{2t}\boldsymbol{\xi}+t\mathrm{e}^{2t}\boldsymbol{\eta}+\mathrm{e}^{2t}\boldsymbol{\vartheta} \;=\; \frac{t^2}{t}\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+t\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+\mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},$$

ἀποτελοῦν θεμελιῶδες σύνολο λύσεων τοῦ συστήματος $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$. Ὡς ἐκ τούτου

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{tA} \;&=\; \big(\boldsymbol{\varphi}(t)\ \boldsymbol{\psi}(t)\ \boldsymbol{\omega}(t)\big)\cdot\big(\boldsymbol{\varphi}(0)\ \boldsymbol{\psi}(0)\ \boldsymbol{\omega}(0)\big)^{-1}\\
&=\; \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}1 & t & -1+\dfrac{t^2}{2}\\ 1 & t & \dfrac{t^2}{2}\\ 1 & 1+t & 1+t+\dfrac{t^2}{2}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}\\
&=\; \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix}1+t-\dfrac{t^2}{2} & -2t+\dfrac{t^2}{2} & t\\ t-\dfrac{t^2}{2} & 1-2t+\dfrac{t^2}{2} & t\\ -\dfrac{t^2}{2} & -t+\dfrac{t^2}{2} & 1\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

4.4.4 Μή ὁμοιογενῆ συστήματα

Τό πρόβλημα τό ὁποῖο ἀκολουθεῖ ἀποτελεῖ διδιάστατη ἐκδοχή τῶν *Προβλημάτων Μείξεως* τό ὁποῖο ἔχομε δεῖ στό *Κεφάλαιο 2*.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ. *Ἔστω ὅτι δίδονται δύο δοχεῖα A καί B χωρητικότητος $2\,lt$ καί $3\,lt$ ἀντιστοίχως τά ὁποῖα ἀρχικῶς εἶναι πλήρη καθαροῦ ὕδατος. Στό δοχεῖο A εἰσέρχεται διάλυμα ἅλατος καί ὕδατος περιεκτικότητος $4gr/lt$ μέ ρυθμό $3\,lt/min$, ἐνῶ στό δοχεῖο B εἰσέρχεται διάλυμα ἅλατος καί ὕδατος περιεκτικότητος $10gr/lt$ μέ ρυθμό ἐπίσης $3\,lt/min$. Ὑποθέτομε ὅτι τά δύο αὐτά δοχεῖα συνδέονται μέ δύο ἀγωγούς. Ἐκ τοῦ πρώτου ἀγωγοῦ ἐξέρχεται ἀπό τό δοχεῖο A καί εἰσέρχεται στό B διάλυμα μέ ρυθμό $6\,lt/min$, ἐνῶ ἐκ τοῦ δευτέρου ἀγωγοῦ ἐξέρχεται ἀπό τό B καί εἰσέρχεται στό A διάλυμα μέ ρυθμό $3\,lt/min$. Τέλος ἀπό τρίτο ἀγωγό ἐξέρχεται ἀπό τό δοχεῖο B καί καταλήγει σέ ὀχετό διάλυμα μέ ρυθμό $6\,lt/min$. Ὑποθέτομε* *ὅτι καθ' ὅλην τήν ἐξέλιξη τῆς ἀνωτέρω διαδικασίας τό διάλυμα εἰς ἕκαστο τῶν δοχείων εἶναι ὁμοιογενές.*

(*i*) *Νά διαπιστωθεῖ ὅτι ὁ συνολικός ὄγκος τοῦ διαλύματος παραμένει σταθερός εἰς ἕκαστο τῶν δύο δοχείων.*

(*ii*) *Ἄν x καί y εἶναι οἱ περιεκτικότητες σέ ἅλας τῶν δύο δοχείων, νά βρεθεῖ ποιό (μή ὁμοιογενές) σύστημα συνήθων διαφορικῶν ἐξισώσεων ἱκανοποιεῖται ἀπό τίς περιεκτικότητες αὐτές καί ποιό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν.*

(*iii*) *Νά διαπιστωθεῖ ὅτι τό σύστημα αὐτό ἔχει κάποια σταθερή λύση (x_0, y_0). Ἐπιπροσθέτως ἄν θέσομε $z = x - x_0$, $w = y - y_0$, νά διαπιστωθεῖ ὅτι τό ζεῦγος (z, w) ἱκανοποιεῖ τό ἀντίστοιχο ὁμοιογενές σύστημα.*

(*iv*) *Νά βρεθεῖ ἔκφραση τῶν δύο περιεκτικοτήτων καί νά διαπιστωθεῖ ὅτι ὑπάρχουν ὁριακές περιεκτικότητες.*

Απαντηση. Ἄν x καί y οἱ περιεκτικότητες σέ ἅλας τῶν δύο δοχείων, τότε σέ χρόνο Δt ἔχομε τήν μεταβολή

$$
\begin{aligned}
x(t+\Delta t) &= x(t) + \Big(\frac{4\,gr}{lt}\cdot\frac{3\,lt}{min} - \frac{6\,lt}{min}\cdot\frac{x}{2\,lt} + \frac{3\,lt}{min}\cdot\frac{y}{3\,lt}\Big)\cdot\Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2)\\
y(t+\Delta t) &= y(t) + \Big(\frac{10\,gr}{lt}\cdot\frac{3\,lt}{min} + \frac{6\,lt}{min}\cdot\frac{x}{2\,lt} - \frac{(3+6)\,lt}{min}\cdot\frac{y}{3\,lt}\Big)\cdot\Delta t + \mathcal{O}(\Delta t^2).
\end{aligned}
$$

Συνεπῶς τό ἱκανοποιούμενο σύστημα ἀπό τά x καί y εἶναι

$$
\left\{
\begin{aligned}
x' &= -\frac{6}{2}x + \frac{3}{3}y + 12\\
y' &= \frac{6}{2}x - \frac{9}{3}y + 30,
\end{aligned}
\right.
\tag{4.13i}
$$

ἤ

$$\boldsymbol{x}' = A\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b},$$

ὅπου

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 1\\ 3 & -3\end{pmatrix} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 12\\ 30\end{pmatrix}.$$

Οἱ δέ ἀρχικές συνθῆκες εἶναι οἱ

$$x(0) = 0, \qquad y(0) = 0.$$

Ἡ σταθερή λύση τοῦ (4.13i) δέν εἶναι ἄλλη ἀπό τό ζεῦγος (x_0, y_0) τό ὁποῖο μηδενίζει τήν συνάρτηση ροῆς $A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$, δηλαδή

$$\begin{pmatrix} x_0\\ y_0\end{pmatrix} = -A^{-1}\boldsymbol{b} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -3 & -1\\ -3 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 12\\ 30\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11\\ 21\end{pmatrix}.$$

Ἂν θέσομε $z = x - x_0$ καί $w = w - y_0$ τότε εὐκόλως διαπιστοῦται ὅτι

$$\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}' = \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right)' = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \boldsymbol{b}$$

$$= A \left(\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right) + \boldsymbol{b} = A \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} + A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \boldsymbol{b} = A \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}.$$

Ἡ ἀρχική συνθήκη γιά τό (z, w) εἶναι

$$\begin{pmatrix} z(0) \\ w(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 11 \\ 21 \end{pmatrix}.$$

Ἑπομένως, ἄν (ζ, ω) λύση τοῦ προβληματος ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} z(0) \\ w(0) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 11 \\ 21 \end{pmatrix},$$

τότε

$$\begin{pmatrix} \zeta(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix} = -\mathrm{e}^{tA} \begin{pmatrix} 11 \\ 21 \end{pmatrix}.$$

Ὅμως $A = -3\mathcal{I} + S$, ὅπου $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ καθώς καί $S^{2n} = 3^n \mathcal{I}$ καί $S^{2n+1} = 3^n S$. Συνεπῶς

$$\mathrm{e}^{tS} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{2k!} S^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!} S^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{3}t^{2k}}{2k!} \mathcal{I} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{3}t^{2k+1}}{(2k+1)!} S$$

$$= \begin{pmatrix} \cosh \sqrt{3}t & \frac{\sqrt{3}}{3} \sinh \sqrt{3}t \\ \sqrt{3} \sinh \sqrt{3}t & \cosh \sqrt{3}t. \end{pmatrix}$$

Ἑπομένως

$$\mathrm{e}^{tA} = \mathrm{e}^{-3t\mathcal{I}} \cdot \mathrm{e}^{tS} = \mathrm{e}^{-3t} \begin{pmatrix} \cosh \sqrt{3}t & \frac{\sqrt{3}}{3} \sinh \sqrt{3}t \\ \sqrt{3} \sinh \sqrt{3}t & \cosh \sqrt{3}t \end{pmatrix}.$$

Ἄρα τελικῶς, ἄν (φ, ψ) ἡ ζητούμενη λύση τοῦ (4.13), τότε

$$\begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta(t) \\ \omega(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

$$= -\mathrm{e}^{-3t} \begin{pmatrix} \cosh \sqrt{3}t & \frac{\sqrt{3}}{3} \sinh \sqrt{3}t \\ \sqrt{3} \sinh \sqrt{3}t & \cosh \sqrt{3}t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 11 \\ 21 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 \\ 21 \end{pmatrix}.$$

Ἡ ἀνωτέρω συνεπάγεται ὅτι

$$\lim_{t\to\infty}\begin{pmatrix}\varphi(t)\\ \psi(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}11\\ 21\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\varphi_\infty\\ \psi_\infty\end{pmatrix}.$$

Ἀσκήσεις

4.4.1 Νά βρεθεῖ ἡ γενική λύση τῶν συστημάτων

$(i)\quad \boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{pmatrix}\boldsymbol{x}.\qquad (ii)\quad \boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix}1 & -2\\ -4 & 1\end{pmatrix}\boldsymbol{x}.$

$(iii)\quad \boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix}-3 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & -2\end{pmatrix}\boldsymbol{x}.\qquad (iv)\quad \boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\boldsymbol{x}.$

$(v)\quad \boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}\boldsymbol{x}.\qquad (vi)\quad \boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & -2\end{pmatrix}\boldsymbol{x}.$

4.4.2 (Συνέχεια) Πῶς συμπεριφέρονται οἱ λύσεις ἑκάστου τῶν ἀνωτέρω συστημάτων καθώς $t \to +\infty$.

4.4.3 Νά βρεθεῖ ἡ γενική λύση τῶν συστημάτων

$(i)\quad \boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix}t & t\\ 4t & -2t\end{pmatrix}\boldsymbol{x}.\qquad (ii)\quad \boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix}\cos t & -2\cos t\\ 3\cos t & -4\cos t\end{pmatrix}\boldsymbol{x}.$

$(iii)\quad \boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix}2\mathrm{e}^t & -\mathrm{e}^t\\ -\mathrm{e}^t & 2\mathrm{e}^t\end{pmatrix}\boldsymbol{x}.\qquad (iv)\quad \boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix}2t^2 & -t^2\\ 3t^2 & -2t^2\end{pmatrix}\boldsymbol{x}.$

4.4.4 Νά βρεθεῖ ἡ γενική λύση τῶν συστημάτων

$(i)\quad \boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix}t & \sin t\\ \sin t & t\end{pmatrix}\boldsymbol{x}.\qquad (ii)\quad \boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix}t & \cosh t\\ 0 & t\end{pmatrix}\boldsymbol{x}.$

$(iii)\quad \boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix}t^3 & t\\ -t & t^3\end{pmatrix}\boldsymbol{x}.\qquad (iv)\quad \boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix}t^3 & t\\ t & t^3\end{pmatrix}\boldsymbol{x}.$

4.4.5 Νά βρεθεῖ ἡ γενική λύση τοῦ συστήματος

$$\boldsymbol{x}' = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 2 & 0 & -1\\ -3 & 2 & 3\end{pmatrix}\boldsymbol{x},$$

ἀφοῦ διαπιστωθεῖ ὅτι ἔχει τριπλή ἰδιοτιμή.

4.4.6 Νά βρεθεῖ ἡ γενική λύση τοῦ συστήματος $\boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x}$ ὅπου

$$A(t) = \begin{pmatrix}t & t^2 & t^3 & t^4\\ t^4 & t & t^2 & t^3\\ t^3 & t^4 & t & t^2\\ t^2 & t^3 & t^4 & t\end{pmatrix}.$$

4.4.7 Ἔστω $A \in \mathbb{R}_+^{N\times N}$. Δείξατε ὅτι τό σύστημα $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ ἔχει λύση $\boldsymbol{\varphi}$ ἡ ὁποία τείνει στό ἄπειρο καθώς τό t τείνει στό σύν ἄπειρο. $\big($Δηλαδή, $\lim_{t\to+\infty}\|\boldsymbol{\varphi}(t)\| = +\infty.\big)$

4.4.8 Ὑπάρχει τετραγωνικός πίνακας A μέ θετικά στοιχεῖα γιά τόν ὁποῖο τό σύστημα $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ νά ἔχει λύση $\boldsymbol{\varphi}$ ἡ ὁποία νά τείνει στό ἄπειρο καθώς τό t τείνει στό πλήν ἄπειρο; (Δηλαδή, $\lim_{t\to-\infty} \|\boldsymbol{\varphi}(t)\| = +\infty$.)

4.4.9 Ἄν $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ καί Φ θεμελιώδης πίνακας λύσεων τοῦ συστήματος $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ τότε δείξατε ὅτι

$$\mathrm{e}^{tA} = \Phi(t)\,\Phi^{-1}(0).$$

4.4.10 Ἔστω $A = (a_{k\ell})_{k,\ell=1}^{N} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ μέ $a_{k\,\ell} > 0$, γιά κάθε $k,\ell = 1,\dots,N$. Δείξατε ὅτι τό σύστημα $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ ἔχει λύση $\boldsymbol{\varphi}$ γιά τήν ὁποία ἰσχύει ὅτι

$$\lim_{t\to+\infty} \|\boldsymbol{\varphi}(t)\| = \infty.$$

4.4.11 Ἔστω $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_2,\dots,\varphi_N)$ λύση τοῦ συστήματος $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$, ὅπου $A = (a_{k\ell})_{k,\ell=1}^{N} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ καί $a_{k\,\ell} \geq 0$, γιά κάθε $k,\ell = 1,\dots,N$. Ἔστω ἐπί πλέον ὅτι

$$\lim_{t\to+\infty} \boldsymbol{\varphi}(t) = 0.$$

Ἰσχύει ὅτι οἱ συναρτήσεις $\varphi_1,\dots,\varphi_N$ εἶναι γραμμικῶς ἐξαρτημένες;

Putnam 1995. Βλέπε [45].

4.5 Περί ἀλληλοκαταδιωκομένων ἐντόμων*

Ἐνδιαφέρουσα ἐφαρμογή τῆς θεωρίας τῶν γραμμικῶν συστημάτων ἀποτελεῖ ἕνα ἀρκετά δημοφιλές πρόβλημα, τό ὁποῖο ἐμφανίζεται σέ πλεῖστες συλλογές αἰνιγμάτων καί γρίφων Μαθηματικῆς Ἀναλύσεως: *Τό πρόβλημα τῶν ἀλληλοκαταδιωκομένων ἐντόμων.*

4.5.1 Τό πρόβλημα στήν κλασσική του ἐκδοχή

Πρόβλημα. *Τέσσερεις κατσαρίδες εἶναι τοποθετημένες στίς κορυφές τετραγώνου. Ἡ πρώτη καταδιώκει τήν δεύτερη, ἡ δεύτερη τήν τρίτη, ἡ τρίτη τήν τέταρτη καί ἡ τέταρτη τήν πρώτη μέ τήν ἴδια ταχύτητα. Πόση ἀπόσταση θά καλύψουν μέχρι νά συναντηθοῦν;*

Απαντηση. Ἔστω $\boldsymbol{x} = (x_1,x_2)$, $\boldsymbol{y} = (y_1,y_2)$, $\boldsymbol{z} = (z_1,z_2)$, $\boldsymbol{w} = (w_1,w_2)$ οἱ ἑκάστοτε θέσεις τῶν τεσσάρων κατσαρίδων. Ἄν ὑποτεθεῖ, χωρίς βλάβη τῆς γενικότητος, ὅτι ἀρχικῶς εὑρίσκονται στά σημεῖα $\boldsymbol{A} = (1,0)$, $\boldsymbol{B} = (0,1)$, $\boldsymbol{\Gamma} = (-1,0)$ καί $\boldsymbol{\Delta} = (0,-1)$ τοῦ ἐπιπέδου καί κινοῦνται μέ ταχύτητα μοναδιαίου μέτρου, τότε τά $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{w}$ θά ἱκανοποιοῦν τό σύστημα συνήθων διαφορικῶν ἐξισώσεων

$$\boldsymbol{x}' = \frac{\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|},\ \boldsymbol{y}' = \frac{\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\|},\ \boldsymbol{z}' = \frac{\boldsymbol{w}-\boldsymbol{z}}{\|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{z}\|},\ \boldsymbol{w}' = \frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{w}\|}, \tag{4.14i}$$

ὅπου $\|\cdot\|$ ἡ Εὐκλείδεια νόρμα. Οἱ ἀρχικές συνθῆκες μας εἶναι οἱ

$$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{A},\ \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{B},\ \boldsymbol{z}(0) = \boldsymbol{\Gamma},\ \boldsymbol{w}(0) = \boldsymbol{\Delta}. \tag{4.14ii}$$

Τό (4.14i)–(4.14ii) ἀποτελεῖ πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν συστήματος 8×8. Ἄν

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

ὁ ὀρθογώνιος πίνακας στροφῆς κατά $\pi/2$ καί τά διανύσματα $\boldsymbol{\varphi}$, ψ, $\boldsymbol{\zeta}$, $\boldsymbol{\omega}$ ἀποτελοῦν λύση τοῦ (4.14i)–(4.14ii), τότε καί τά $U\boldsymbol{\omega}$, $U\boldsymbol{\varphi}$, $U\psi$, $U\boldsymbol{\zeta}$ θά ἀποτελοῦν ἐπίσης λύση τοῦ ἰδίου προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν. Λόγῳ μοναδικότητος λύσεων τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν θά ἔχομε:

$$\psi = U\boldsymbol{\varphi}, \quad \boldsymbol{\zeta} = U\psi, \quad \boldsymbol{\omega} = U\boldsymbol{\zeta} \quad \textit{καί} \quad \boldsymbol{\varphi} = U\boldsymbol{\omega}.$$

Ἑπομένως οἱ ἐξισώσεις (4.14i) δύνανται νά καταστοῦν *ἀνεξάρτητες* μεταξύ τους. Συνεπῶς ἡ κίνηση τῆς πρώτης κατσαρίδας θά περιγράφεται ἀπό τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν:

$$\boldsymbol{x}' = \frac{U\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}}{\|U\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}\|}, \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{A} = (1,0).$$

Ἔστω ὅτι ἡ $\boldsymbol{\varphi}$ λύση τοῦ (4.5.1) καί ἔστω

$$\alpha(t) = \|U\boldsymbol{\varphi}(t) - \boldsymbol{\varphi}(t)\|^{-1} \qquad \textit{καί} \qquad \beta(t) = \int_0^t \alpha(s)ds.$$

Τότε ἡ λύση $\boldsymbol{\varphi}$ θά ἱκανοποιεῖ καί τήν

$$\boldsymbol{\varphi}'(t) = \frac{1}{\alpha(t)}\big(U\boldsymbol{\varphi}(t) - \boldsymbol{\varphi}(t)\big) = \beta'(t)(U - \mathcal{I})\boldsymbol{\varphi}(t),$$

ὅπου $\beta(t) = \displaystyle\int_0^t \frac{ds}{a(s)}$, καί ὡς ἐκ τούτου

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \mathrm{e}^{\beta(t)}(U - \mathcal{I})\boldsymbol{\varphi}(0),$$

ὅπου $\mathcal{I}$ ὁ μοναδιαῖος 2×2 πίνακας. Ἰσχύει προφανῶς ὅτι

$$\mathrm{e}^{t(U-\mathcal{I})} = \mathrm{e}^{tU}\mathrm{e}^{-t\mathcal{I}} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t}\cos t & -\mathrm{e}^{-t}\sin t \\ \mathrm{e}^{-t}\sin t & \mathrm{e}^{-t}\cos t \end{pmatrix}$$

καί ὡς ἐκ τούτου

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \mathrm{e}^{-\beta(t)}\big(\cos\beta(t), \sin\beta(t)\big).$$

Ἐπίσης

$$(U - \mathcal{I})\,\boldsymbol{\varphi}(t) = \mathrm{e}^{-\beta(t)}\big(\cos\beta(t) - \sin\beta(t), \cos\beta(t) + \sin\beta(t)\big)$$

καί συνεπῶς

$$\big\|(U - \mathcal{I})\,\boldsymbol{\varphi}(t)\big\| = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\beta(t)}.$$

Ὅμως ἐξ ὑποθέσεως $\|\boldsymbol{\varphi}'(t)\| = 1$ ἄρα

$$\begin{aligned} 1 &= \|\boldsymbol{\varphi}'(t)\| \\ &= \Big\| -\mathrm{e}^{-\beta(t)}\beta'(t)\big(\cos\beta(t), \sin\beta(t)\big) + \mathrm{e}^{-\beta(t)}\beta'(t)\big(-\sin\beta(t), \cos\beta(t)\big)\Big\| \\ &= \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\beta(t)}\,\beta'(t). \end{aligned}$$

Ὁλοκληρώνοντας τήν ἀνωτέρω στό $[0,t]$ ἔχομε

$$\mathrm{e}^{-\beta(t)} = 1 - \frac{t}{\sqrt{2}},$$

διότι $\beta(0) = 0$. Ὁπότε

$$\beta(t) = -\log\left(1 - \frac{t}{\sqrt{2}}\right).$$

Ἑπομένως

$$\|\boldsymbol{\varphi}(t) - \boldsymbol{\chi}(t)\| = \|(U - \mathcal{I})\,\boldsymbol{\varphi}(t)\| = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-\beta(t)} = \sqrt{2} - t.$$

Ἄρα ἐν τέλει οἱ κατσαρίδες συναντῶνται μετά ἀπό χρόνο $T = \sqrt{2}$. Ἑκάστη ἐξ αὐτῶν μέχρι τότε θά ἔχει καλύψει ἀπόσταση

$$s = \int_0^{\sqrt{2}} \|\boldsymbol{x}'(t)\|\,dt = \sqrt{2}.$$

Ἤτοι, ἑκάστη τῶν κατσαρίδων θά ἔχει καλύψει ἀπόσταση ἴση τῆς πλευρᾶς τοῦ τετραγώνου μέχρι νά συναντηθοῦν ὅλες μαζί στό κέντρο αὐτοῦ. Ἡ ἀνωτέρω διαδικασία μᾶς δίδει καί τόν τύπο τῆς τροχιᾶς:

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \tau\big(\cos(\log\tau), -\sin(\log\tau)\big),$$

ὅπου $\tau = 1 - t/\sqrt{2}$.

Διά τῶν πολικῶν συντεταγμένων

Ἄν τό διδιάστατο διάνυσμα $\boldsymbol{x}$ στό σύστημα (4.5.1) θεωρηθεῖ μιγαδικός ἀριθμός σέ πολική μορφή $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}$, τότε θά ἱκανοποιεῖται τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν:

$$z' = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}z - z}{|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}z - z|}, \quad z(0) = 1.$$

Ὁ πίνακας στροφῆς κατά $\pi/2$ ἀντικαθίσταται μέ τήν μιγαδική πολλαπλασιαστική σταθερά $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2} = \mathrm{i}$. Ἐπίσης

$$z' = \left(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}\right)^{\cdot} = \dot{r}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta} + \mathrm{i}r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}\dot{\vartheta},$$

ὅπου $\dot{} = \dfrac{d}{dt}$. Ἔχομε

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}z - z}{|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}z - z|} = \frac{(\mathrm{i}-1)r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}}{|(\mathrm{i}-1)r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}|} = \frac{(\mathrm{i}-1)r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}}{\sqrt{2}\,r} = \frac{(\mathrm{i}-1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}}{\sqrt{2}}.$$

Συνεπῶς ἐν τέλει ἡ ἐξίσωσή μας λαμβάνει τήν μορφή:

$$\dot{r}e^{i\vartheta} + ire^{i\vartheta}\dot{\vartheta} = \frac{(i-1)e^{i\vartheta}}{\sqrt{2}},$$

ἤ

$$\dot{r} + ir\dot{\vartheta} = \frac{(i-1)}{\sqrt{2}}.$$

Ἡ ἀνωτέρω διαδικασία μᾶς παρέχει τό ἀκόλουθο πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν:

$$\begin{cases} \dot{r} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \; r\dot{\vartheta} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ r(0) = 1, \; \vartheta(0) = 0, \end{cases}$$

ἀπ' ὅπου προκύπτει ἡ μοναδική λύση

$$r = 1 - \frac{t}{\sqrt{2}}, \quad \vartheta = -\log\big(\sqrt{2} - t\big),$$

γία t μικρότερο τοῦ $\sqrt{2}$.

4.5.2 Περίπτωση κανονικοῦ πολυγώνου

Εὐλόγως προκύπτει τό ἑξῆς ἐρώτημα:

Πρόβλημα. *Πῶς γενικεύεται τό ἀνωτέρω πρόβλημα ὅταν οἱ κατσαρίδες εἶναι ἀρχικῶς τοποθετημένες στίς κορυφές κανονικοῦ $n-$γώνου;*

Απαντηση. Ὅπως καί στήν περίπτωση τοῦ τετραγώνου ἄν τά διανύσματα $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$,..., $\boldsymbol{x}_n$ περιγράφουν τήν ἑκάστοτε θέση ἑκάστης τῶν n κατσαρίδων, τότε ἱκανοποιεῖται τό ἀκόλουθο σύστημα συνήθων διαφορικῶν ἐξισώσεων:

$$\boldsymbol{x}_1' = \frac{\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1}{\|\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1\|}, \; \boldsymbol{x}_2' = \frac{\boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_2}{\|\boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_2\|}, \dots, \boldsymbol{x}_n' = \frac{\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_n}{\|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_n\|}, \tag{4.15i}$$

μέ ἀρχικές συνθῆκες

$$\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{A}_i, \; i = 1, \dots, n, \tag{4.15ii}$$

ὅπου A_i, $i = 1, \dots, n$ οἱ κορυφές κανονικοῦ $n-$γώνου ἐγγεγραμμένου σέ μοναδιαῖο κύκλο. Τό (4.15i)-(4.15ii) ἀποτελεῖ πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν μή γραμμικοῦ συστήματος $2n \times 2n$. Ἔστω U_n ὁ πίνακας στροφῆς κατά γωνία $\omega_n = 2\pi/n$:

$$U_n = \begin{pmatrix} \cos\omega_n & -\sin\omega_n \\ \sin\omega_n & \cos\omega_n \end{pmatrix}.$$

Ὅπως καί πρίν, χρησιμοποιῶντας τήν μοναδικότητα λύσεων τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν, λαμβάνομε ὅτι $\boldsymbol{x}_2 = U_n\boldsymbol{x}_1$ καί καταλήγομε στό κάτωθι ἁπλούστερο πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν:

$$\boldsymbol{x}' = \frac{U_n\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}}{\|U_n\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}\|}, \quad \boldsymbol{x}(0) = (1, 0).$$

Ὑποθέτοντας ἐκ νέου ὅτι $\boldsymbol{\varphi}$ λύση τοῦ (4.5.2), θέτομε ὅπως καί πρίν

$$\alpha(t) \;=\; \|U_n\boldsymbol{\varphi}(t) - \boldsymbol{\varphi}(t)\|^{-1} \qquad \textit{καί} \qquad \beta(t) \;=\; \int_0^t \alpha(s)\,ds.$$

Ἐπίσης

$$\mathrm{e}^{tU_n} \;=\; \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{t\cos\omega_n}\cos(t\sin\omega_n) & -\mathrm{e}^{t\cos\omega_n}\sin(t\sin\omega_n) \\ \mathrm{e}^{t\cos\omega_n}\sin(t\sin\omega_n) & \mathrm{e}^{t\cos\omega_n}\cos(t\sin\omega_n) \end{pmatrix},$$

ἐνῶ

$$(\boldsymbol{\xi}, U_n\boldsymbol{\xi}) \;=\; \cos\omega_n\|\boldsymbol{\xi}\|^2,$$

καί κατά συνέπεια

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varphi}(t) \;&=\; \mathrm{e}^{\beta(t)(U_n - \mathcal{I})}\boldsymbol{\varphi}(0) \;=\; \mathrm{e}^{-\beta(t)}\mathrm{e}^{\beta(t)U_n}\boldsymbol{\varphi}(0) \\ &=\; \mathrm{e}^{\beta(t)(\cos\omega_n - 1)}\big(\cos\left(\beta(t)\sin\omega_n\right), \sin\left(\beta(t)\sin\omega_n\right)\big). \end{aligned}$$

Τώρα

$$\begin{aligned} \|(U_n - \mathcal{I})\boldsymbol{\varphi}\|^2 \;&=\; \|U_n\boldsymbol{\varphi}\|^2 + \|\boldsymbol{\varphi}\|^2 - 2(U_n\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}) \;=\; 2\|\boldsymbol{\varphi}\|^2 - 2(U_n\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}) \\ &=\; (2 - 2\cos\omega_n)\|U_n\boldsymbol{\varphi}\|^2 \;=\; 4\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)|U_n\boldsymbol{\varphi}|^2 \end{aligned}$$

καί τέλος

$$\|(U_n - \mathcal{I})\boldsymbol{\varphi}\| \;=\; 2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\|U_n\boldsymbol{\varphi}\| \;=\; 2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\mathrm{e}^{\beta(t)(\cos\omega_n - 1)}.$$

Ὅμως

$$\beta'(t) \;=\; \|(U_n - \mathcal{I})\boldsymbol{\varphi}(t)\|^{-1}$$

καί συνεπῶς

$$2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\mathrm{e}^{\beta(t)(\cos\frac{2\pi}{n} - 1)}\beta'(t) \;=\; 1$$

ἀπ' ὅπου, ὁλοκληρώνοντας καί θέτοντας $\beta(0) = 0$, λαμβάνομε

$$-\frac{1}{\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)}\,\mathrm{e}^{\beta(t)(\cos\omega_n - 1)} \;=\; t - \frac{1}{\sin\left(\dfrac{\pi}{n}\right)}$$

ἤ ἄλλως

$$\mathrm{e}^{\beta(t)(\cos\omega_n - 1)} \;=\; 1 - t\,\sin\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

ἀπ' ὅπου προκύπτει ὅτι οἱ κατσαρίδες συναντῶνται σέ χρόνο $T = 1/\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ ἐνῶ ἔχει καλυφθεῖ καί ἀπόσταση $s = 1/\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$. Ὁ τύπος τῆς τροχιᾶς δύναται νά ὑπολογισθεῖ κατ' ἀνάλογο τρόπο.

4.5.3 Ἔντομα στόν τριδιάστατο χῶρο

Ἐνδιαφέρον εἶναι καί τό πρόβλημα ὅπου *οἱ μῦγες*, αὐτή τήν φορά, εἶναι τοποθετημένες στίς κορυφές κανονικοῦ πολυέδρου. Ὅμως, τό μόνο κανονικό πολύεδρο στό ὁποῖο ἡ ὁμάδα τῶν μεταθέσεων περιέχει στοιχεῖο τάξεως ἴσης μέ τόν ἀριθμό τῶν κορυφῶν, εἶναι τό κανονικό τετράεδρο. Ὡς ἐκ τούτου τριδιάστατη γενίκευση τοῦ προβλήματος ἔχει ἔννοια μόνο στήν περίπτωση τοῦ κανονικοῦ τετραέδρου:

ΠΡΟΒΛΗΜΑ. *Τέσσερεις μῦγες εἶναι τοποθετημένες στίς κορυφές κανονικοῦ τετραέδρου. Ἄν ἡ πρώτη καταδιώκει τήν δεύτερη, ἡ δεύτερη τήν τρίτη, ἡ τρίτη τήν τέταρτη καί ἡ τέταρτη τήν πρώτη μέ τήν ἴδια ταχύτητα, τότε νά βρεθεῖ πόση ἀπόσταση θά ἔχουν καλύψει μέχρι νά συναντηθοῦν.*

ΑΠΑΝΤΗΣΗ. Ἔστω λοιπόν ὅτι τό τετράεδρο εἶναι ἐγγεγραμμένο σέ μοναδιαία σφαῖρα καί ἀρχικῶς $(t=0)$ οἱ μῦγες βρίσκονται στίς κορυφές $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ καί $\boldsymbol{d}$ μέ συνιστῶσες

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{a} &= (0,0,1)\,,\\
\boldsymbol{b} &= \left(0,\frac{2\sqrt{2}}{3},-\frac{1}{3}\right),\\
\boldsymbol{c} &= \left(\frac{\sqrt{6}}{3},-\frac{\sqrt{2}}{3},-\frac{1}{3}\right) \quad \textit{καί}\\
\boldsymbol{d} &= \left(-\frac{\sqrt{6}}{3},-\frac{\sqrt{2}}{3},-\frac{1}{3}\right).
\end{aligned}$$

Μιά ἀπό τίς ἰδιότητες τοῦ κανονικοῦ τετραέδρου εἶναι ἡ ὕπαρξη ὀρθογωνίου πίνακα $U\in\mathbb{R}^{3\times 3}$ ὁ ὁποῖος μεταθέτει τίς κορυφές του:

$$U\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b},\ U\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c},\ U\boldsymbol{c} = \boldsymbol{d},\ U\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a}.$$

Συγκεκριμένα, τά ἀνωτέρω πραγματοποιοῦνται ἀπό τόν πίνακα

$$U = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ -\frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

ὁ ὁποῖος ἐπί πλέον ἱκανοποιεῖ τά ἀκόλουθα:

(i) $U^4 = \mathcal{I}$,

(ii) Ἔχει χαρακτηριστικό (καί ταυτοχρόνως ἐλάχιστο) πολυώνυμο τό

$$p_U(\lambda) = -(\lambda^3+\lambda^2+\lambda+1),$$

καί ἰδιοτιμές -1, i, $-$i.

(iii) Τό $\boldsymbol{\xi} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ἀποτελεῖ ἰδιοδιάνυσμα τῆς ἰδιοτιμῆς $\lambda = -1$.

Κατ' ἀναλογία πρός τήν διδιάστατη περίπτωση θά ἔχομε ὅτι ἡ κίνηση τῶν μυγῶν θά περιγράφεται ἀπό τό σύστημα:

$$\boldsymbol{x}' = \frac{\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|}, \ \boldsymbol{y}' = \frac{\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{z}-\boldsymbol{y}\|}, \ \boldsymbol{z}' = \frac{\boldsymbol{w}-\boldsymbol{z}}{\|\boldsymbol{w}-\boldsymbol{z}\|}, \ \boldsymbol{w}' = \frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{w}\|}, \tag{4.16i}$$

μέ ἀρχικές συνθῆκες

$$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{a}, \ \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{b}, \ \boldsymbol{z}(0) = \boldsymbol{c} \quad \textit{καί} \quad \boldsymbol{w}(0) = \boldsymbol{d} \tag{4.16ii}$$

Τό (4.16i)–(4.16ii) ἀποτελεῖ ἕνα πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν μή γραμμικοῦ 12×12 συστήματος συνήθων διαφορικῶν ἐξισώσεων. Πάλιν ὅπως καί πρίν, ἄν $\boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{\chi}$, $\boldsymbol{\psi}$, $\boldsymbol{\omega}$ λύση τοῦ (4.14i)–(4.14ii), τότε καί ἡ $U\boldsymbol{\omega}$, $U\boldsymbol{\varphi}$, $U\boldsymbol{\chi}$, $U\boldsymbol{\psi}$ ἀποτελεῖ ἐπίσης λύση καί ὡς ἐκ τούτου, λόγῳ μοναδικότητος λύσεων, θά ἔχομε:

$$\boldsymbol{\chi} = U\boldsymbol{\varphi}.$$

Συνεπῶς ἡ κίνηση τῆς πρώτης κατσαρίδας, $\boldsymbol{\varphi}$, περιγράφεται ἀπό τήν λύση τοῦ 3×3 προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν:

$$\boldsymbol{x}' = \frac{U\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}}{\|U\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}\|}, \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{a}.$$

Ἐκ νέου θέτομε

$$\alpha(t) = \|U\boldsymbol{\varphi}(t)-\boldsymbol{\varphi}(t)\|^{-1} \qquad \textit{καί} \qquad \beta(t) = \int_0^t \alpha(s)\,ds.$$

Ὅπως καί πρίν θά ἔχομε

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \mathrm{e}^{\beta(t)(U-\mathcal{I})}\boldsymbol{\varphi}(0).$$

Ἄν $\boldsymbol{\xi}$ μοναδιαῖο ἰδιοδιάνυσμα τῆς ἰδιοτιμῆς $\lambda = -1$ καί $\boldsymbol{\eta}$ μοναδιαῖο ἰδιοδιάνυσμα τῆς $\lambda = \mathrm{i}$, τότε ἡ τριάδα $\{\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}, \bar{\boldsymbol{\eta}}\}$ θά ἀποτελεῖ ὀρθοκανονική βάση τοῦ $\mathbb{C}^3$ καί θά ἔχομε

$$\boldsymbol{\varphi}(0) = (\boldsymbol{\varphi}(0),\boldsymbol{\xi})\boldsymbol{\xi} + (\boldsymbol{\varphi}(0),\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\eta} + (\boldsymbol{\varphi}(0),\bar{\boldsymbol{\eta}})\bar{\boldsymbol{\eta}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{\xi} + \sigma\boldsymbol{\eta} + \bar{\sigma}\bar{\boldsymbol{\eta}},$$

διότι

$$\big(\boldsymbol{\varphi}(0),\boldsymbol{\xi}\big) = (0,0,1)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ἐπίσης εὐκόλως ἀποδεικνύεται ὅτι $|\sigma| = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Ἑπομένως

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi}(t) &= \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-2\beta(t)}\boldsymbol{\xi} + \mathrm{e}^{-\beta(t)}\left(\sigma\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta(t)}\boldsymbol{\eta} + \bar{\sigma}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta(t)}\bar{\boldsymbol{\eta}}\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-2\beta(t)}\boldsymbol{\xi} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-\beta(t)}\left(\frac{\sigma}{|\sigma|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta(t)}\boldsymbol{\eta} + \frac{\bar{\sigma}}{|\bar{\sigma}|}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta(t)}\bar{\boldsymbol{\eta}}\right),\end{aligned}$$

καί ὡς ἐκ τούτου

$$(U-\mathcal{I})\boldsymbol{\varphi}(t) \;=\; -\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{e}^{-2\beta(t)}\boldsymbol{\xi} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,\mathrm{e}^{-\beta(t)}\left(\frac{(1-\mathrm{i})\sigma}{\sqrt{2}|\sigma|}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta(t)}\boldsymbol{\eta} + \frac{(1+\mathrm{i})\bar{\sigma}}{\sqrt{2}|\bar{\sigma}|}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta(t)}\bar{\boldsymbol{\eta}}\right).$$

Ἄρα ἐν τέλει

$$\|(U-\mathcal{I})\boldsymbol{\varphi}(t)\|^2 \;=\; \frac{4}{3}\mathrm{e}^{-4\beta(t)} + \frac{4}{3}\mathrm{e}^{-2\beta(t)},$$

καί ἐν τέλει

$$\beta'(t) \;=\; \alpha(t) \;=\; \frac{1}{\|(U-\mathcal{I})\boldsymbol{\varphi}(t)\|} \;=\; \left(\frac{4}{3}\mathrm{e}^{-4\beta(t)} + \frac{4}{3}\mathrm{e}^{-2\beta(t)}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Ἡ συνάρτηση λοιπόν β θά ἱκανοποιεῖ τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν:

$$\beta'(t) \;=\; \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\mathrm{e}^{2\beta}}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2\beta}}}, \quad \beta(0) \;=\; 0.$$

Οἱ μῦγες θά συναντηθοῦν ὅταν ἡ συνάρτηση $\beta=\beta(t)$ ἀπειρισθεῖ διότι

$$\beta(t) \;=\; \frac{1}{\|(U-\mathcal{I})\boldsymbol{\varphi}(t)\|} \;=\; \frac{1}{\|\boldsymbol{\varphi}(t)-\boldsymbol{\psi}(t)\|}.$$

Ἀναζητοῦμε λοιπόν T_∞ ὥστε $\beta(T_\infty)=+\infty$. Ἔχομε λοιπόν:

$$\beta'\left(\mathrm{e}^{-4\beta(t)} + \mathrm{e}^{-2\beta(t)}\right)^{\frac{1}{2}} \;=\; \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \beta(0) \;=\; 0,$$

ἤ

$$\mathrm{e}^{-\beta}\beta'\left(1 + \mathrm{e}^{-2\beta(t)}\right)^{\frac{1}{2}} \;=\; \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \beta(0) \;=\; 0.$$

Ἄν θέσομε $\mathrm{e}^{-\beta}=\gamma$ ἡ ἀνωτέρω καθίσταται

$$-\gamma'\left(1+\gamma^2\right)^{\frac{1}{2}} \;=\; \frac{\sqrt{3}}{2},$$

μέ *συνοριακές συνθῆκες* $\gamma(0)=1$ καί $\gamma(T_\infty)=0$. Ὑπενθυμίζομε ὅτι:

$$\int\sqrt{1+x^2}\,dx \;=\; \frac{1}{2}\left(\log(x+\sqrt{1+x^2}) + x\sqrt{1+x^2}\right) + c,$$

τό ὁποῖο ἔχει ἔννοια γιά κάθε $x\in\mathbb{R}$. Λόγῳ τῶν (4.5.3) καί (4.5.3) θά ἔχομε

$$\frac{1}{2}\left(\log(\gamma+\sqrt{1+\gamma^2}) + \gamma\sqrt{1+\gamma^2}\right) \;=\; -\frac{\sqrt{3}}{2}t + c.$$

Δοθέντος ὅμως ὅτι $\gamma(0)=1$, θά ἔχομε ὅτι

$$c \;=\; \frac{1}{2}\left(\log(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2}\right)$$

καί ἐν τέλει, ἐπειδή $\gamma(T_\infty) = 0$, λαμβάνομε ἀπό τήν (4.5.3) ὅτι

$$T_\infty = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\log(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}\right) = 1.32535786\ldots.$$

Κατ' ἀναλογία πρός τίς δύο διαστάσεις εὐλόγως δυνάμεθα νά διερωτηθοῦμε καί γιά τό ἑξῆς:

Πρόβλημα. *Τέσσερεις κατσαρίδες, οἱ κ_1, κ_2, κ_3 καί κ_4, μέ σταθερές ταχύτητες v_1, v_2, v_3 καί v_4, βρίσκονται στίς κορυφές (μή κανονικοῦ) τετραέδρου ΑΒΓΔ. Ἄν ἡ κ_1 καταδιώκει τήν κ_2, ἡ κ_2 τήν κ_3, ἡ κ_3 τήν κ_4 καί ἡ κ_4 τήν κ_1 τί θά συμβεῖ; Ὑπό ποιές προϋποθέσεις συναντῶνται ταυτοχρόνως;*

Ἡ περίπτωση πέραν τῶν τεσσάρων ἐντόμων εἶναι δυνατόν νά ἀντιμετωπισθεῖ, ἐφ' ὅσον ὑπάρχει θετική ἀπάντηση στό ἑξῆς:

Πρόβλημα. *Ὑπάρχουν σημεῖα $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$, $n > 4$, στόν $\mathbb{R}^3$, τά ὁποῖα νά μήν εἶναι συνεπίπεδα ὥστε:*

$$\|\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1\| = \|\boldsymbol{x}_3 - \boldsymbol{x}_2\| = \cdots = \|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{x}_{n-1}\| = \|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_n\|,$$

καί πίνακας $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ὁ ὁποῖος νά τά μεταθέτει

$$U\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2,\ U\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}_3, \ldots, U\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x}_1\,;$$

Γενίκευση βεβαίως τοῦ ἀνωτέρου ἐρωτήματος εἶναι εὔλογη καί σέ διαστάσεις ὑψηλότερες τῆς τρίτης.

Ἀσκήσεις

4.5.1 Ἔστω ὅτι n περιττός καί ὅτι πάλι ἔχομε n κατσαρίδες, τίς $\kappa_1, \ldots, \kappa_n$, τοποθετημένες στίς κορυφές κανονικοῦ $n-$γώνου, ἀλλά ἡ κ_1 καταδιώκει τήν κ_3, ἡ κ_2 τήν κ_4 κ.ο.κ.. Τί θά συμβεῖ;

4.5.2 (Γενίκευση τοῦ προηγουμένου) Ἔστω ὅτι m, $n \in \mathbb{N}$ καί $(m, n) = 1$. Ἔστω ὅτι ἡ κ_1 καταδιώκει τήν κ_{m+1}, ἡ κ_2 καταδιώκει τήν κ_{m+2} κ.ο.κ.. Τί θά συμβεῖ;

4.5.3 Τρεῖς κατσαρίδες, οἱ κ_1, κ_2 καί κ_3, μέ σταθερές ταχύτητες v_1, v_2, v_3, βρίσκονται στίς κορυφές τριγώνου ΑΒΓ. Ἄν ἡ κ_1 καταδιώκει τήν κ_2, ἡ κ_2 τήν κ_3 καί ἡ κ_3 τήν κ_1, τί θά συμβεῖ; Ὑπό ποιές προϋποθέσεις συναντῶνται ταυτόχρονα;

Υπόδειξη. Παρατηρῆστε ὅτι ἄν οἱ ταχύτητες εἶναι ἀνάλογες τῶν μηκῶν τῶν πλευρῶν τίς ὁποῖες πρέπει νά διανύσουν οἱ κατσαρίδες, τότε οἱ ἑκάστοτε θέσεις τῶν κατσαρίδων σχηματίζουν τρίγωνο ὅμοιο τοῦ ἀρχικοῦ καί ἀντιστρόφως.

4.5.4 Ἄν ἀντί στίς κορυφές τετραγώνου, οἱ κατσαρίδες εἶναι τοποθετημένες ἐπί τῶν κορυφῶν ρόμβου, τότε δείξατε ὅτι οἱ κατσαρίδες δέν θά συναντηθοῦν ταυτοχρόνως.

4.5.5 Νά διαπιστωθεῖ ὅτι στόν κύβο, μέ κέντρο βάρους τήν ἀρχή τῶν ἀξόνων, ὑπάρχει ὀρθογώνιος πίνακας U, ὁ ὁποῖος μεταθέτει ἕξη ἀπό τίς κορυφές του, πλήν δύο ἀντιδιαμετρικῶν καί ὡς ἐκ τούτου δύναται νά ἀντιμετωπισθεῖ κατάλληλη περίπτωση τοῦ προηγηθέντος προβλήματος γιά ἕξη σημεῖα στόν $\mathbb{R}^3$.

4.5.6 (Συνέχεια) Τί συμβαίνει, κατ' ἀναλογίαν μέ τό προηγούμενο πρόβλημα, στό κανονικό δωδεκάεδρο;

Κεφάλαιο 5

Γραμμικές βαθμωτές ἐξισώσεις

Στό παρόν κεφάλαιο θά ἀσχοληθοῦμε τόσο μέ τήν θεωρία ὅσο καί μέ τήν μεθοδολογία ἐπιλύσεως βαθμωτῶν γραμμικῶν συνήθων διαφορικῶν ἐξισώσεων $n-$στῆς τάξεως. Θά μελετήσομε, ὡς ἐπί τό πλεῖστον, γραμμικά προβλήματα. Ἡ θεωρία καθώς καί ἡ μεθοδολογία ἐπιλύσεως τῶν ἐξισώσεων δευτέρας τάξεως, γραμμικῶν καί μή, δύνανται στίς περισσότερες τῶν περιπτώσεων, νά γενικευθοῦν στίς ἐξισώσεις $n-$στῆς τάξεως. Στήν περίπτωση τῶν βαθμωτῶν ἐξισώσεων πρώτης τάξεως, εἴχαμε δεῖ πῶς λύεται τό γραμμικό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν καί πῶς ἡ λύση του ἐν τέλει λαμβάνει κλειστή μορφή. Δυσκολίες εἴχαμε στήν ἐπίλυση τόσο μή γραμμικῶν προβλημάτων ὅσο καί γραμμικῶν συστημάτων. Ὅπως θά δοῦμε ἐν συνεχείᾳ, οἱ δυσκολίες στήν ἐπίλυση βαθμωτῶν ἐξισώσεων ἀνωτέρας τάξεως ἀρχίζουν ἤδη ἀπό τίς γραμμικές ἐξισώσεις δευτέρας τάξεως, ὅπου ἄν κάποια ἀπ’ αὐτές ἐπιλύεται, τότε αὐτό ἀποτελεῖ πράγματι ἕνα εὐχάριστο ἀτύχημα. Ὑπάρχει πλειάδα περιωνύμων γραμμικῶν ἐξισώσεων. Ἀναφέρομε μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα:

(i) $x'' + \omega^2 x = 0$ — *Ἁρμονική ταλάντωση.*

(ii) $(1-t^2)\,x'' - t\,x' + \alpha^2 x = 0$ — *Ἐξίσωση Chebyshev*[83].

(iii) $(1-t^2)x'' - 2t\,x' + \alpha(\alpha+1)x = 0$ — *Ἐξίσωση Legendre*[84].

(iv) $t^2 x'' + t\,x' + (t^2 - \nu^2)x = 0$ — *Ἐξίσωση Bessel.*

(v) $x'' - t\,x = 0$ — *Ἐξίσωση Airy*[85].

(vi) $x'' - 2tx' + \lambda x = 0$ — *Ἐξίσωση Hermite*[86].

(vii) $t^n x^{(n)} + \alpha_{n-1} t^{n-1} x^{(n-1)} + \cdots + \alpha_1 t\, x^{(1)} + \alpha_0 x = 0$ — *Ἐξίσωση Euler.*

[83]Chebyshev, Pafnuty Lvovich (1821-1894). Ρῶσσος μαθηματικός.

[84]Adrien-Marie Legendre (1752–1833). Γάλλος μαθηματικός.

[85]George Biddell Airy (1801-1892). Ἄγγλος μαθηματικός.

[86]Charles Hermite (1822–1901). Γάλλος μαθηματικός.

5.1 Θεμελιώδη θεωρήματα

Ἡ γενικότερη δυνατή μορφή τήν ὁποία δύναται νά ἔχει μιά βαθμωτή συνήθης διαφορική ἐξίσωση $n-$στῆς τάξεως εἶναι

$$F\big(t, x^{(0)}, \dots, x^{(n)}\big) \;=\; 0,$$

ἐνῶ ἡ γενικότερη ἐκδοχή ἐξισώσεως ἄμεσης (ἤ λυμένης) μορφῆς γράφεται ὡς:

$$x^{(n)} \;=\; f\big(t, x^{(0)}, \dots, x^{(n-1)}\big).$$

Τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν διατυποῦται μέ τήν προσθήκη n ἀρχικῶν συνθηκῶν:

$$x^{(k-1)}(\tau) \;=\; \xi_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Τό δέ ἀνωτέρω πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν, ὅπως ἔχομε δεῖ, δύναται νά καταστεῖ ἰσοδύναμο μέ κατάλληλο πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν πρώτης τάξεως συστήματος $n \times n$ γιά τό ὁποῖο ἰσχύει τό *Θεώρημα Ὑπάρξεως καί Μοναδικότητος Picard–Lindelöf 3.3.11* καθώς καί τό *Θεώρημα Ὑπάρξεως Cauchy–Lipschitz 3.4.5.* Ἔχομε λοιπόν τό κάτωθι ἀποτέλεσμα:

Πρόταση 5.1.1. *Ἔστω $f : D \to \mathbb{R}$ συνεχής, ὅπου $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ἀνοικτό, $(\tau, \xi_1, \dots, \xi_n) \in D$, καί ἔστω ὅτι ἡ f ἱκανοποιεῖ τήν συνθήκη Lipschitz τοπικῶς ὡς πρός τήν δεύτερη ἕως καί $n-$στή μεταβλητές, ἤτοι, διά κάθε C συμπαγές ὑποσύνολο τοῦ D, ὑπάρχει $\kappa = \kappa_C > 0$, τέτοιο ὥστε*

$$|f(t, \boldsymbol{x}) - f(t, \boldsymbol{y})| \;\le\; \kappa \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|,$$

γιά κάθε $(t, \boldsymbol{x}), (t, \boldsymbol{y}) \in C$. $\big($Ὑπενθυμίζομε ὅτι χρησιμοποιοῦμε τήν Εὐκλείδεια νόρμα: $\|\boldsymbol{x}\|^2 = |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2\big)$. Τότε τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x^{(n)} \;=\; f\big(t, x^{(0)}, \dots, x^{(n-1)}\big), \\ x(\tau) \;=\; \xi_1, \dots, x^{(n-1)}(\tau) \;=\; \xi_n \end{cases} \tag{5.1}$$

ἔχει λύση σέ κλειστό διάστημα $J = [\tau - \gamma, \tau + \gamma]$, γιά κατάλληλο $\gamma > 0$. Ἡ λύση αὐτή εἶναι μοναδική. Ἰδιαιτέρως, τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν (5.1) *ἀπολαμβάνει καθολικῆς μοναδικότητος.*

Σχεδιαγραμμα Αποδειξεως. Τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν (5.1) καθίσταται ἰσοδύναμο μέ τό σύστημα πρώτης τάξεως

$$\begin{cases} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= x_3, \\ &\vdots \\ x_{n-1}' &= x_n, \\ x_n' &= f(t, x_1, \dots, x_n), \end{cases} \tag{5.2i}$$

μέ ἀρχικές συνθῆκες

$$x_k(\tau) \,=\, \xi_k, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{5.2ii}$$

Τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν (5.2) ἔχει λύση, ἡ ὁποία ἀπολαμβάνει καί τοπικῆς μοναδικότητος λόγῳ τοῦ *Θεωρήματος 3.3.11* στήν σελίδα 147 καί τῆς *Προτάσεως 3.3.12* στήν σελίδα 148. □

Ἀνάλογη πρόταση, πόρισμα τοῦ *Θεωρήματος 3.4.1*, δύναται νά διατυπωθεῖ στήν περίπτωση κατά τήν ὁποία δέν ἔχομε δεδομένη τήν ἱκανοποίηση τῆς συνθήκης Lipschitz.

5.1.1 Γραμμικές ἐξισώσεις

Ἡ γραμμική βαθμωτή ἐξίσωση $n-$στῆς τάξεως ἐμφανίζεται συνήθως στήν μορφή:

$$x^{(n)} + p_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + p_0(t)x^{(0)} \,=\, h(t). \tag{5.3}$$

Οἱ συναρτήσεις p_i, $i = 0, \ldots, n-1$, ὀνομάζονται *συντελεστές* τῆς ἐξισώσεως, ἐνῶ ἡ συνάρτηση h ὀνομάζεται *μή ὁμοιογενής ὅρος*. Ἄν $h(t) \equiv 0$ $\big($ἀντιστοίχως $h(t) \not\equiv 0\big)$, τότε ἡ (5.3) ὀνομάζεται *ὁμοιογενής* (ἀντιστοίχως *μή ὁμοιογενής*). Κατ' οἰκονομίαν, ἡ (5.3) γράφεται καί ὡς:

$$\mathcal{L}x \,=\, h(t),$$

ὅπου

$$\mathcal{L} \,=\, D^n + p_{n-1}(t)D^{n-1} + \cdots + p_0(t) \quad \textit{καί} \quad D \,=\, \frac{d}{dt}.$$

Τό σύμβολο $\mathcal{L}$ ἀποτελεῖ ἕνα *Γραμμικό Συνήθη Διαφορικό Τελεστή* $n-$στῆς τάξεως. Στήν γραμμική περίπτωση τό θεώρημα ὑπάρξεως καί μοναδικότητος εἶναι καθολικό. Ἰδιαιτέρως, στήν περίπτωση τῆς δευτέρας τάξεως διατυποῦται ὡς ἑξῆς:

Πρόταση 5.1.2. *Ἔστω $p, q, h : I \to \mathbb{R}$, ὅπου I ἀνοικτό διάστημα, συνεχεῖς καί $\tau \in I$. Τότε τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν:*

$$\begin{cases} x'' + p(t)x' + q(t)x \,=\, h(t), \\ x(\tau) \,=\, \xi_0, \quad x'(\tau) \,=\, \xi_1, \end{cases} \tag{5.4}$$

ἔχει μοναδική λύση φ, ὁρισμένη ἐφ' ὅλου τοῦ I.

Ἀποδειξη. Τό (5.4) εἶναι ἰσοδύναμο μέ τό κάτωθι σύστημα πρώτης τάξεως:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= -q(t)x_1 - p(t)x_2 + h(t), \end{aligned}$$

μέ ἀρχικές συνθῆκες:

$$x_1(\tau) \,=\, \xi_0, \; x_2(\tau) \,=\, \xi_1,$$

τό ὁποῖο δύναται νά γραφεῖ καί ὡς πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}' = A(t)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}(t), \\ \boldsymbol{x}(\tau) = \boldsymbol{\xi}, \end{cases} \tag{5.5}$$

ὅπου $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$, $\boldsymbol{\xi} = (\xi_0, \xi_1)$, $\boldsymbol{b}(t) = \big(0, h(t)\big)$ καί

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q(t) & -p(t) \end{pmatrix}.$$

Τό (5.5) ἔχει μοναδική καθολικῶς ὁρισμένη λύση, ἤτοι, ὁρισμένη σ' ὅλο τό ἀνοικτό διάστημα I συμφώνως πρός τήν *Πρόταση 4.1.1*. Ἄν δηλαδή ἡ πινακοσυνάρτηση Φ ἀποτελεῖ τήν μοναδική καθολικῶς ὁρισμένη λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} X' = A(t)X, \\ X(\tau) = \mathcal{I}, \end{cases}$$

τότε ἡ διανυσματική συνάρτηση

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \Phi(t)\,\boldsymbol{\xi} + \Phi(t)\int_\tau^t \Phi^{-1}(s)\,\boldsymbol{b}(s)\,ds \tag{5.6}$$

ἀποτελεῖ τήν μοναδική καθολικῶς ὁρισμένη λύση τοῦ (5.5). Ἄν τώρα $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2)$, τότε ἡ φ_1, ἡ ὁποία ὁρίζεται σ' ὅλο τό I, θά ἀποτελεῖ τήν ζητούμενη λύση τοῦ (5.4). □

Τό ἀνωτέρω ἀποτέλεσμα γενικεύεται γιά γραμμικές ἐξισώσεις $n-$στῆς τάξεως:

Πρόταση 5.1.3. *Ἔστω $p_0, \dots, p_{n-1}, q : I \to \mathbb{R}$, ὅπου I ἀνοικτό διάστημα, συνεχεῖς συναρτήσεις καί $\tau \in I$. Τότε τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν:*

$$\begin{cases} x^{(n)} + p_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + p_0(t)x^{(0)} = h(t), \\ x^{(k-1)}(\tau) = \xi_k, \quad k = 1, \dots, n, \end{cases}$$

ἔχει μοναδική λύση φ ὁρισμένη σ' ὅλο τό I.

Απόδειξη. Ἐπαφίεται στόν ἀναγνώστη.

Παρατήρηση. Αὐτό τό ὁποῖο καθιστᾶ τό ἀποτέλεσμα τῆς *Προτάσεως 5.1.3* ἰσχυρότερο εἶναι ὁ καθολικός ὁρισμός τῆς λύσεως:

Ἡ φ ὁρίζεται σ' ὅλο τό I.

Εἶναι σημαντικό νά τονισθεῖ ὅτι ἡ *Πρόταση 5.1.1* μᾶς ἐξασφαλίζει λύση μόνο *τοπικῶς*, δηλαδή σέ μιά, μικρή ἐν γένει, περιοχή τοῦ ἀρχικοῦ χρόνου. Ὑπάρχουν περιπτώσεις, ὅπως τό μή γραμμικό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν:

$$\begin{cases} x'' \;=\; 2t\,x\,x' + x^2, \\ x(0) \;=\; 2,\; x'(0) \;=\; 0, \end{cases}$$

μέ μοναδική λύση τήν

$$\varphi(t) \;=\; \frac{2}{1-t^2}, \qquad t \in (-1,1),$$

ὅπου παρά τό γεγονός ὅτι ἡ συνάρτηση ροῆς

$$f\big(t,x,x'\big) \;=\; 2txx' + x^2,$$

τῆς συνήθους διαφορικῆς ἐξισώσεως, ὁρίζεται καί εἶναι ὁμαλή γιά κάθε t, x, $x' \in \mathbb{R}$, ἡ λύση δέν δύναται νά ἐπεκταθεῖ πέραν τοῦ διαστήματος $(-1,1)$.

Ἀσκήσεις

5.1.1 Νά ἀποδειχθεῖ ἡ *Πρόταση 5.1.1*, ἡ ὁποία, ὅπως ἔχει ἀναφερθεῖ, ἀποτελεῖ συνέπεια τῆς *Προτάσεως 1.5.1* καί τοῦ *Θεωρήματος 3.3.11*. Ἰδιαιτέρως, νά ἐκτιμηθεῖ τό μῆκος τοῦ διαστήματος, στό ὁποῖο ὁρίζεται ἡ μοναδική λύση.

5.1.2 Νά ἀποδειχθεῖ ἡ *Πρόταση 5.1.3*.

5.1.3 Ἀποδείξατε ὡς συνέπεια τῆς *Προτάσεως 5.1.2* ὅτι ἄν οἱ συναρτήσεις p, q, h εἶναι k φορές συνεχῶς διαφορίσιμες, τότε ἡ μοναδική λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (5.4) εἶναι $k+2$ φορές συνεχῶς διαφορίσιμη.

Υποδειξη. Χρησιμοποιήσατε ἐπαγωγή στό k, ἀρχίζοντας ἀπό $k = 0$.

5.1.4 Στά προβλήματα ἀρχικῶν τιμῶν γραμμικῶν ἐξισώσεων τά ὁποῖα ἀκολουθοῦν, νά προσδιορίσετε τό πεδίο ὁρισμοῦ τῶν λύσεων

(i) $(1-t^2)x'' + x = \log t, \quad x(\frac{1}{2}) = 1,\, x'(\frac{1}{2}) = 0,$

(ii) $x'' + \sqrt{t}\,x' + x = t, \quad x(\pi) = 0,\, x'(\pi) = 1,$

(iii) $t^2x'' + (\log t)x' + (\tan t)x = 0, \quad x(\mathrm{e}) = 0,\, x'(\mathrm{e}) = 0,$

(iv) $(t-t^2)x'' + (\sin t)x' + x = 1, \quad x(\frac{1}{2}) = 0,\, x'(\frac{1}{2}) = 0,$

(v) $(\cos t)x'' + (\sin t)x' + x = 0, \quad x(\pi) = 1,\, x(\pi) = 0,$

(vi) $(\log t)\, x^{(3)} + \sqrt{1-t^2}\, x \;=\; 1, \quad x(\frac{1}{3}) = x'(\frac{1}{3}) = x''(\frac{1}{3}) = 0.$

5.1.5 Πόσο ὁμαλές εἶναι οἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως $x''' + t|t|x = 0$ καί σέ ποιό διάστημα ὁρίζονται;

5.1.6 Ἀφοῦ μέ κατάλληλο τρόπο ἀπαλείψετε τά c_1 καί c_2 νά προσδιορίσετε τήν ἐξίσωση δευτέρας τάξεως μέ γενική λύση

$$x \;=\; c_1\mathrm{e}^t + c_2\mathrm{e}^{-t}.$$

5.1.7 Ἔστω οἱ διαφορικοί τελεστές $\mathcal{L}_1 = D - g_1(t)$ καί $\mathcal{L}_2 = D - g_2(t)$, ὅπου g_1, g_2 συνεχῶς διαφορίσιμες συναρτήσεις ἐπί κάποιου ἀνοικτοῦ διαστήματος I. Νά βρεθεῖ ἡ γενική λύση τῶν ἐξισώσεων:

(i) $\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2 x = 0$.

(ii) $\mathcal{L}_2\mathcal{L}_1 x = 0$.

Πότε ἔχουν τίς ἴδιες λύσεις;

5.1.8 Τί σχέση ἔχουν τά p, q μέ τά g_1, g_2, ἄν

$$\mathcal{L} = D^2 + p(t)D + q(t), \quad \mathcal{L}_1 = D - g_1, \quad \mathcal{L}_1 = D - g_1$$

καί

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1\mathcal{L}_2\,;$$

5.1.9 (Συνέχεια) Νά λυθεῖ μέ τήν μέθοδου τῆς ἀνωτέρω ἀσκήσεως ἡ ἐξίσωση:

$$x'' - 5x' + 6x = 0.$$

5.1.10 Χρησιμοποιῶντας καταλλήλως τήν (5.6) δεῖξτε ὅτι ὑπάρχουν συναρτήσεις φ_1, φ_2 καί πυρήνας $K = K(t,s)$, ὁρισμένες γιά κάθε s, t στό I, ὥστε ἡ λύση τοῦ πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν (5.4) νά λαμβάνει τήν μορφή

$$\varphi(t) = \xi_0\varphi_1(t) + \xi_1\varphi_2(t) + \int_\tau^t K(t,s)\,h(s)\,ds.$$

Πόσο ὁμαλές εἶναι οἱ φ_1, φ_2 καί K; Ἰδιαιτέρως, ἄν θέσομε

$$(\mathcal{K}h)(t) = \int_\tau^t K(t,s)\,h(s)\,ds, \quad h \in C(I),$$

τότε ἰσχύει ὅτι

$$\mathcal{L}\mathcal{K}h = h.$$

Ἤτοι: *Ὁ ὁλοκληρωτικός τελεστής $\mathcal{K}$ ἀποτελεῖ ἀριστερό ἀντίστροφο τοῦ διαφορικοῦ τελεστοῦ L.*

Γιά ποιές συναρτήσεις h ἰσχύει ὅτι

$$\mathcal{K}\mathcal{L}h = h\,;$$

5.1.11 (Συνέχεια) Νά γενικευθεῖ ἡ προηγούμενη ἄσκηση γιά ἐξισώσεις $n-$στῆς τάξεως.

5.1.12 (Συνέχεια) Νά προσδιορισθεῖ ὁ πυρήνας $\mathcal{K}$ σέ καθένα ἀπό τούς ἀκόλουθους διαφορικούς τελεστές:

(i)	$\mathcal{L} = D^2 + 1,$	(ii)	$\mathcal{L} = D^2 - 1,$	(iii)	$\mathcal{L} = D^2 + D + 1,$
(iv)	$\mathcal{L} = D^2 - D + 1,$	(v)	$\mathcal{L} = D^4 - 1,$	(vi)	$\mathcal{L} = D^4 + 1,$
(vii)	$\mathcal{L} = D,$	$(viii)$	$\mathcal{L} = D + p(t),$	(ix)	$\mathcal{L} = D^n,$
(x)	$\mathcal{L} = (D+1)^n,$	(xi)	$\mathcal{L} = (D^2-1)^n,$	(xii)	$\mathcal{L} = (D^2+1)^n,$
$(xiii)$	$\mathcal{L} = \sum_{k=0}^n D^k,$	(xiv)	$\mathcal{L} = \sum_{k=0}^n (-1)^k D^k,$	(xv)	$\mathcal{L} = \sum_{k=0}^n D^{2k}.$

5.1.13* (Συνέχεια) Ἔστω $\mathcal{L}$ διαφορικός τελεστής τάξεως n καί $K = K(t,s)$ ὁ πυρῆνας αὐτοῦ. Νά βρεθεῖ ὁ πυρῆνας τοῦ $\mathcal{L}^r$, ὅπου r θετικός ἀκέραιος.

5.2 Ὁ χῶρος τῶν λύσεων

Ἡ σημασία τῆς γραμμικότητος τοῦ συνήθους διαφορικοῦ τελεστοῦ τῆς ἐξισώσεως

$$\mathcal{L}x \;=\; x^{(n)} + p_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + p_0(t), x^{(0)} \;=\; 0, \tag{5.7}$$

ὅπου $p_0, \dots, p_{n-1} \in C(I)$ καί I ἀνοικτό διάστημα, φαίνεται στό ὅτι:

Ἄν οἱ φ_1, $\varphi_2 \in C^n(I)$ *καί* c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$ *σταθερές, τότε:*

$$\mathcal{L}[c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2] \;=\; c_1\mathcal{L}\varphi_1 + c_2\mathcal{L}\varphi_2.$$

Ἀπ' ὅπου προκύπτει ὅτι:

Ὁποτεδήποτε οἱ φ_1, φ_2, *ἀποτελοῦν λύσεις τῆς* (5.7) *ἐπί τοῦ ἀνοικτοῦ διαστήματος* I *καί* c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$ *σταθερές, τότε τό ἴδιο ἰσχύει καί γιά τήν*

$$\varphi \;=\; c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2,$$

ἤ ἰσοδύναμα:

Οἱ λύσεις τῆς (5.7) *ἀποτελοῦν γραμμικό χῶρο.*

Ὅπως θά προκύψει ἀπό τίς *Προτάσεις 5.2.1* καί *5.2.2* ὁ χῶρος τῶν λύσεων τῆς (5.7) εἶναι $n-$διάστατος. Ἄς θυμηθοῦμε κατ' ἀρχάς τί σημαίνει γραμμική ἀνεξαρτησία.

5.2.1 Γραμμική ἀνεξαρτησία

Κατ' ἀναλογίαν πρός τίς διανυσματικές συναρτήσεις ἔχομε τόν ἀκόλουθο ὁρισμό:

Ὁρισμός 5.2.1. *Οἱ συναρτήσεις* $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in C(I)$, *καλοῦνται γραμμικῶς ἀνεξάρτητες, ἄν ὁποτεδήποτε*

$$c_1\varphi_1(t) + \cdots + c_n\varphi_n(t) \;=\; 0 \qquad \textit{γιά κάθε } t \in I,$$

γιά κάποιες σταθερές $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$, *τότε*

$$c_1 \;=\; \cdots \;=\; c_n \;=\; 0.$$

Ἄν οἱ συναρτήσεις $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ *δέν εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητες, τότε αὐτές καλοῦνται γραμμικῶς ἐξηρτημένες.*

Παραδείγματα

(i) Μιά συνάρτηση φ εἶναι *γραμμικῶς ἀνεξάρτητη*, ἄν

$$c\varphi \equiv 0 \qquad \Longrightarrow \qquad c = 0.$$

Ἰσοδύναμα : *Ἡ* φ *δέν εἶναι ταυτοτικῶς μηδενική.*

(ii) Δύο συναρτήσεις φ_1 καί φ_2 εἶναι γραμμικῶς ἐξηρτημένες, ἄν ὑπάρχουν σταθερές c_1, c_2, ὄχι καί οἱ δύο μηδέν, ὥστε $c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 = 0$. Ἐφ' ὅσον δέν εἶναι καί δύο μηδέν, ἔστω γιά παράδειγμα ὅτι $c_1 \neq 0$, τότε θά ἔχομε ὅτι:

$$\varphi_1 = -\frac{c_2}{c_1}\,\varphi_2.$$

Ἤτοι: *Ἡ μία θά εἶναι πολλαπλάσιο τῆς ἄλλης.*

(iii) Ἄν $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ διάφορες ἀνά δύο σταθερές, τότε οἱ συναρτήσεις $\mathrm{e}^{a_1 t}, \dots, \mathrm{e}^{a_n t}$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητες.

Ἀπόδειξη. Πραγματοποιεῖται ἐπαγωγικῶς. Γιά $n=1$ ἡ συνάρτηση $\mathrm{e}^{a_1 t}$ εἶναι μή μηδενική ἄρα γραμμικῶς ἀνεξάρτητη. Ἔστω ὅτι ἡ ὑπόθεση ἰσχύει γιά $n = k$, δηλαδή ὁποτεδήποτε οἱ πραγματικοί ἀριθμοί a_1, $a_2, \dots, a_k$ εἶναι διάφοροι ἀνά δύο, τότε οἱ συναρτήσεις $\mathrm{e}^{a_1 t}, \dots, \mathrm{e}^{a_k t}$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητες. Ἔστω τώρα $a_1, \dots, a_{k+1}$ διάφοροι ἀνά δύο πραγματικοί ἀριθμοί καί κάποιες σταθερές $c_1, \dots, c_k$, c_{k+1} γιά τίς ὁποῖες ἰσχύει ὅτι

$$c_1\mathrm{e}^{a_1 t} + \cdots + c_k\mathrm{e}^{a_k t} + c_{k+1}\mathrm{e}^{a_{k+1} t} = 0. \tag{5.8}$$

Ἀπομονώνοντας τό c_{k+1} λαμβάνομε

$$c_{k+1} = -\left(c_1\mathrm{e}^{(a_1-a_{k+1})t} + \cdots + c_k\mathrm{e}^{(a_k-a_{k+1})t}\right).$$

Ἄν τώρα παραγωγίσομε τήν ἀνωτέρω ὡς πρός t ἔχομε

$$0 = -\left(c_1(a_1-a_{k+1})\mathrm{e}^{(a_1-a_{k+1})t} + \cdots + c_k(a_k-a_{k+1})\mathrm{e}^{(a_k-a_{k+1})t}\right),$$

ὅποτε λόγῳ τῆς ἐπαγωγικῆς μας ὑποθέσεως ($n = k$) θά ἔχομε

$$c_1(a_1-a_{k+1}) = \cdots = c_k(a_k-a_{k+1}) = 0$$

καί ἐπειδή οἱ σταθερές a_i εἶναι διάφορες ἀνά δύο, τότε

$$c_1 = \cdots = c_k = 0$$

καί ὡς ἐκ τούτου ἡ (5.8) ἐκφυλίζεται στήν

$$c_{k+1}\mathrm{e}^{a_{k+1} t} = 0,$$

πράγμα τό ὁποῖο συμβαίνει μόνο ἄν $c_{k+1} = 0$. **ὅ.ἔ.δ.**

Τά ἀποτελέσματα τά ὁποῖα ἀκολουθοῦν μας δίδουν βα΄ση καί διάσταση τοῦ χώρου τῶν λύσεων.

Πρόταση 5.2.1. *Ἔστω I ἀνοικτό διάστημα, $\tau \in I$, $p_j \in C(I)$, $j = 0, 1, \dots, n-1$, καί $\varphi_i : I \to \mathbb{R}$ ἡ καθολικῶς ὁρισμένη λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν*

$$\begin{cases} x^{(n)} + p_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + p_0(t)x^{(0)} = 0, \\ x^{(j-1)}(\tau) = \delta_{ij},\ j = 1, \dots, n, \end{cases} \tag{E_i}$$

ὅπου $i = 1, \dots, n$. Ἄν ἡ $\psi \in C^n(I)$ ἀποτελεῖ λύση τῆς (5.7), τότε

$$\psi(t) = \psi^{(0)}(\tau)\,\varphi_1(t) + \cdots + \psi^{(n-1)}(\tau)\,\varphi_n(t),$$

γιά κάθε $t \in I$.

Απόδειξη. Ἔστω ζ ἡ συνάρτηση ἡ ὁποία δίδεται ὡς ὁ ἀκόλουθος γραμμικός συνδυασμός τῶν $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$

$$\zeta(t) \,=\, \psi^{(0)}(\tau)\,\varphi_1(t) + \cdots + \psi^{(n-1)}(\tau)\,\varphi_n(t).$$

Τότε τόσο ἡ ψ ὅσο καί ζ ἀποτελοῦν καθολικῶς ὁρισμένες (δηλαδή ὁρισμένες ἐφ' ὅλου τοῦ I), λύσεις τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν:

$$\begin{cases} x^{(n)} + p_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + p_0(t)x^{(0)} = 0, \\ x^{(k-1)}(\tau) = \varphi^{(k-1)}(\tau),\ k = 1, \ldots, n, \end{cases}$$

καί ἄρα λόγῳ τῆς μοναδικότητος τῶν λύσεων τοῦ ἀνωτέρω

$$\zeta \,\equiv\, \psi.$$

ὅ.ἔ.δ.

Παρατήρηση. Εἴδαμε λοιπόν ὅτι οἱ $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, οἱ ὁποῖες ἔχουν ὁρισθεῖ ὡς οἱ λύσεις τῶν προβλημάτων ἀρχικῶν τιμῶν $(E_1), \ldots, (E_n)$, ἀντιστοίχως, *παράγουν* τόν χῶρο τῶν λύσεων τῆς

$$x^{(n)} + p_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + p_0(t)x^{(0)} = 0. \tag{5.9}$$

Στήν πραγματικότητα, ὅπως προκύπτει ἀπό τήν πρόταση ἡ ὁποία ἀκολουθεῖ, ἀποτελοῦν καί *βάση* τοῦ χῶρου τῶν λύσεων:

Πρόταση 5.2.2. *Οἱ συναρτήσεις $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, οἱ ὁποῖες ὁρίζονται ὡς οἱ λύσεις τῶν προβλημάτων ἀρχικῶν τιμῶν $(E_1), \ldots, (E_n)$, ἀποτελοῦν βάση τοῦ χώρου τῶν λύσεων τῆς* (5.9).

Απόδειξη. Ἔχομε ἤδη δεῖ ὅτι οἱ $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ παράγουν ὅλες τίς λύσεις τῆς (5.9). Ἀρκεῖ λοιπόν νά δείξομε ὅτι εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητες. Ἔστω $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ σταθερές γιά τίς ὁποῖες ἰσχύει

$$c_1\varphi_1 + \cdots + c_n\varphi_n \equiv 0, \tag{5.10}$$

σ' ὅλο τό I. Ἄν παραγωγίσομε τήν (5.10) $j-1$ φορές, ὅπου $j = 1, \ldots, n$, καί θέσομε $t = \tau$ λαμβάνομε:

$$c_1\varphi_1^{(j-1)}(\tau) + \cdots + c_n\varphi_n^{(j-1)}(\tau) \equiv 0,$$

καί λόγῳ τῶν ἀρχικῶν συνθηκῶν τῶν (E_i) θά ἔχομε:

$$c_1\delta_{1j} + \cdots + c_n\delta_{nj} \,=\, 0,$$

ἤ ἰσοδύναμα

$$c_j \,=\, 0,$$

καί αὐτό γιά κάθε $j = 1, \ldots, n$, τό ὁποῖο σημαίνει ὅτι οἱ $\varphi_1 \ldots, \varphi_n$ εἶναι πράγματι γραμμικῶς ἀνεξάρτητες. □

Ὁρισμός 5.2.2. *Ἔστω $p_0, \dots, p_{n-1} \in C(I)$ καί $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in C^n(I)$. Ἡ $n-$άδα $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ ὀνομάζεται θεμελιῶδες σύνολο λύσεων (ἤ ΘΣΛ) τῆς*

$$x^{(n)} + p_{n-1}(t)\, x^{(n-1)} + \cdots + p_0(t)\, x^{(0)} \;=\; 0, \tag{5.11}$$

ἄν ἀποτελεῖ βάση τοῦ χώρου τῶν λύσεων της. Ἤτοι: Ἄν οἱ $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ εἶναι ἀφ' ἑνός μέν γραμμικῶς ἀνεξάρτητες καί ἀφ' ἑτέρου κάθε λύση τῆς (5.11) γράφεται ὡς γραμμικός συνδυασμός αὐτῶν.

Πόρισμα 5.2.3. *Τό σύνολο $\mathcal{X}$ τῶν λύσεων τῆς ἐξισώσεως (5.11) ἀποτελεῖ γραμμικό χῶρο διαστάσεως n.* □

Προβλημα. *Πότε n λύσεις τῆς (5.11) ἀποτελοῦν θεμελιῶδες σύνολο λύσεων;*

Ἡ ἀκόλουθη πρόταση μᾶς δίδει ἕναν χαρακτηρισμό:

Πρόταση 5.2.4. *Ἔστω $p_0, \dots, p_n : I \to \mathbb{R}$ συνεχεῖς συναρτήσεις, ὅπου I ἀνοικτό διάστημα καί ἔστω $\varphi_1, \dots, \varphi_n : I \to \mathbb{R}$ λύσεις τῆς*

$$x^{(n)} + p_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + p_0(t)x^{(0)} \;=\; 0. \tag{5.12}$$

Τό σύνολο λύσεων $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ ἀποτελεῖ βάση τοῦ χώρου τῶν λύσεων ἄν καί μόνο ἄν γιά κάποιο $\tau \in I$

$$\begin{vmatrix} \varphi_1^{(0)}(\tau) & \varphi_2^{(0)}(\tau) & \cdots & \varphi_n^{(0)}(\tau) \\ \varphi_1^{(1)}(\tau) & \varphi_2^{(1)}(\tau) & \cdots & \varphi_n^{(1)}(\tau) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(\tau) & \varphi_2^{(n-1)}(\tau) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(\tau) \end{vmatrix} \neq 0. \tag{5.13}$$

Αποδειξη. Ἀποδεικνύομε τήν ἀνωτέρω γιά $n=2$. Ἡ ἀπόδειξη τῆς γενικότερης περιπτώσεως δύναται νά πραγματοποιηθεῖ ὁμοίως:

"$\Longrightarrow$" :

Ἔστω ὅτι ἡ $\varphi = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$ ἀποτελεῖ τήν γενική λύση τῆς

$$x'' + p(t)x' + q(t)x \;=\; 0.$$

Τότε αὐτό συνεπάγεται ὅτι γιά κάθε ξ_0, ξ_1 στό $\mathbb{R}$, ὑπάρχουν c_1, c_2 ὥστε ἡ

$$\psi \;=\; c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2,$$

νά ἀποτελεῖ λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0, \tag{5.14i}$$

$$x(\tau) = \xi_0, \ x'(\tau) = \xi_1. \tag{5.14ii}$$

Ἰσοδύναμα τό *ἀλγεβρικό* σύστημα:

$$\begin{cases} c_1\varphi_1(\tau) + c_2\varphi_2(\tau) = \xi_0, \\ c_1\varphi_1'(\tau) + c_2\varphi_2'(\tau) = \xi_1, \end{cases}$$

μέ ἀγνώστους τά c_1, c_2, θά εἶχε λύση γιά κάθε ξ_0, $\xi_1 \in \mathbb{R}$. Κάτι τέτοιο συμβαίνει, ἄν καί μόνο ἄν ὁ πίνακας

$$W = \begin{pmatrix} \varphi_1(\tau) & \varphi_2(\tau) \\ \varphi_1'(\tau) & \varphi_2'(\tau) \end{pmatrix},$$

εἶναι ἀντιστρέψιμος ἤ ἰσοδύναμα ἡ ὁρίζουσά του εἶναι μή μηδενική.

"$\Longleftarrow$" :

Ἔστω $\varphi : I \to \mathbb{R}$ τυχοῦσα λύση τῆς (5.14i) καί τ ἡ χρονική στιγμή γιά τήν ὁποία ἰσχύει ἡ (5.13). Ἄν

$$\xi_0 = \varphi(\tau), \quad \xi_1 = \varphi'(\tau),$$

τότε ἡ φ ἀποτελεῖ τήν μοναδική λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (5.14). Θά δείξομε ὅτι ὑπάρχουν c_1, c_2, ὥστε ἡ συνάρτηση

$$\psi = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2,$$

νά εἶναι ἐπίσης λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (5.14). Πράγματι, δεδομένου ὅτι γιά κάθε c_1, c_2 στό $\mathbb{R}$, ἡ $\psi = c_1\varphi + c_2\varphi$ ἀποτελεῖ λύση τῆς ἐξισώσεως (5.14i), ἀρκεῖ νά βρεθοῦν c_1, c_2 ὥστε νά ἱκανοποιοῦνται ταυτοχρόνως οἱ ἀρχικές συνθῆκες (5.14ii). Ἰσοδύναμα

$$\begin{cases} c_1\varphi_1(\tau) + c_2\varphi_2(\tau) = \xi_0, \\ c_1\varphi_1'(\tau) + c_2\varphi_2'(\tau) = \xi_1. \end{cases} \tag{5.15}$$

Οἱ ἐξισώσεις (5.15) ἀποτελοῦν ἀλγεβρικό γραμμικό σύστημα δύο ἐξισώσεων μέ δύο ἀγνώστους: τίς σταθερές c_1, c_2. Ἡ ὁρίζουσα τοῦ συστήματος

$$\Delta = \begin{vmatrix} \varphi_1(\tau) & \varphi_2(\tau) \\ \varphi_1'(\tau) & \varphi_2'(\tau) \end{vmatrix},$$

εἶναι, ἐκ τῆς ὑποθέσεως (5.13), μή μηδενική καί, ὡς ἐκ τούτου, τό σύστημα (5.15) ἔχει μοναδική λύση τό ζεῦγος:

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} \xi_0 & \varphi_2(\tau) \\ \xi_1 & \varphi_2'(\tau) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi_1(\tau) & \varphi_2(\tau) \\ \varphi_1'(\tau) & \varphi_2'(\tau) \end{vmatrix}}, \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} \varphi_1(\tau) & \xi_0 \\ \varphi_1'(\tau) & \xi_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi_1(\tau) & \varphi_2(\tau) \\ \varphi_1'(\tau) & \varphi_2'(\tau) \end{vmatrix}}.$$

Ἡ $\psi = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$ λοιπόν ἀποτελεῖ λύση τοῦ (5.14), ὅπως ἐπίσης καί ἡ προαναφερθεῖσα τυχοῦσα φ. Λόγῳ τῆς μοναδικότητος λύσεων, οἱ δύο λύσεις ταυτίζονται καί ὡς ἐκ τούτου:

$$\varphi = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2,$$

ὅπερ σημαίνει ὅτι πράγματι κάθε λύση τῆς (5.14i) γράφεται ὡς γραμμικός συνδυασμός τῶν φ_1 καί φ_2. □

5.2.2 Βρονσκιανή

Ὁρισμός 5.2.3. *Ἔστω $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in C^n(I)$, ὅπου I ἀνοικτό διάστημα. Τότε ἡ ὁρίζουσα:*

$$w\big(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)\big) = \begin{vmatrix} \varphi_1^{(0)}(t) & \cdots & \varphi_n^{(0)}(t) \\ \varphi_1^{(1)}(t) & \cdots & \varphi_n^{(1)}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix},$$

ὀνομάζεται Βρονσκιανή[87] *(Wronskian). Ἡ Βρονσκιανή συνήθως συμβολίζεται ὡς w.*

Στήν περίπτωση κατά τήν ὁποία οἱ συναρτήσεις $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ ἀποτελοῦν λύσεις τῆς

$$\mathcal{L}x = x^{(n)} + p_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + p_0(t)x^{(0)} = 0,$$

ἄν ἡ Βρονσκιανή τῶν $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ δέ μηδενίζεται γιά κάποιο συγκεκριμένο $\tau \in I$, τότε δέν θά μηδενίζεται πουθενά στό I. Αὐτό ἐξ αἰτίας τοῦ ὅτι τό προαναφερθέν γραμμικό σύστημα (5.15) δέν θά εἶχε ἀπαραιτήτως λύση, σ' ἕνα πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν μέ ἀρχικό χρόνο $\tau' \in I$, γιά τό ὁποῖο ἡ Βρονσκιανή θά μηδενιζόταν.

Πρόταση 5.2.5. (Abel) *Ἔστω $\varphi_1 \dots, \varphi_n$ λύσεις τῆς*

$$x^{(n)} + p_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + p_0(t)x^{(0)} = 0,$$

στό ἀνοικτό διάστημα I, στό ὁποῖο εἶναι συνεχεῖς οἱ συντελεστές τῆς ἐξισώσεως, $p_0, \dots, p_{n-1}$. Τότε ἡ Βρονσκιανή w τῶν $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ ἱκανοποιεῖ τήν διαφορική ἐξίσωση:

$$w' = -p_{n-1}(t)\, w,$$

γνωστή ὡς ἐξίσωση Abel. Κατά συνέπεια γιά κάθε τ, $t \in I$ ἰσχύει ὅτι:

$$w(t) = w(\tau)\, \mathrm{e}^{-\int_\tau^t p_{n-1}(s)\, ds}. \tag{5.16}$$

Ἄρα ἄν ἡ Βρονσκιανή δέν μηδενίζεται σέ κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή τ τοῦ διαστήματος I, τότε δέν μηδενίζεται πουθενά στό διάστημα I.

[87] Ὀφείλει τό ὄνομά της στόν Πολωνό μαθηματικό Józef Maria Hoëne-Wronski (1776–1853), ὁ ὁποῖος ἔζησε τό μεγαλύτερο μέρος τῆς ζωῆς του στήν Γαλλία.

Αποδειξη. Ἀκολουθεῖ ἡ ἀπόδειξη γιά $n = 2$. Ἡ γενική περίπτωση ἐπαφίεται στόν ἀναγνώστη. Ἰσχύει ὅτι

$$\frac{d}{dt}w(\varphi_1,\varphi_2) = \frac{d}{dt}\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varphi_1' & \varphi_2' \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1'' & \varphi_2'' \end{vmatrix}.$$

Ὅμως

$$\begin{vmatrix} \varphi_1' & \varphi_2' \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{vmatrix} = 0,$$

ἐνῶ, λόγῳ τοῦ ὅτι οἱ φ_1, φ_2 ἱκανοποιοῦν τήν (5.12) ἔχομε:

$$\varphi_1'' = -p\varphi_1' - q\varphi_1, \quad \varphi_2'' = -p\varphi_2' - q\varphi_2,$$

ἄρα

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1'' & \varphi_2'' \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ -p\varphi_1' - q\varphi_1 & -p\varphi_2' - q\varphi_2 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ -p\varphi_1' & -p\varphi_2' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ -q\varphi_1 & -q\varphi_2 \end{vmatrix} \\
&= -p\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{vmatrix} - q\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1 & \varphi_2 \end{vmatrix} = -p\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Ἐν τέλει λοιπόν

$$\frac{d}{dt}w(\varphi_1,\varphi_2)(t) = -p(t)\,w(\varphi_1,\varphi_2)(t),$$

ἀπ' ὅπου προκύπτει ἡ (5.16). **ὅ.ἔ.δ.**

Ἔχομε λοιπόν τό ἑξῆς ἀποτέλεσμα:

Πρόταση 5.2.6. *Ἔστω $p_0,\dots,p_{n-1} \in C(I)$ καί $\varphi_1,\dots,\varphi_n \in C^n(I)$ λύσεις τῆς*

$$x^{(n)} + p_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + p_0(t)x^{(0)} = 0. \tag{5.17}$$

Τότε τά κάτωθι εἶναι ἰσοδύναμα:

(*i*) *Τό $\{\varphi_1,\dots,\varphi_n\}$ εἶναι θεμελιῶδες σύνολο λύσεων.*

(*ii*) *Οἱ $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητες.*

(*iii*) *Οἱ $\varphi_1,\dots,\varphi_n$ παράγουν τό χῶρο λύσεων τῆς* (5.17).

(*iv*) *$w(\varphi_1,\dots,\varphi_n)(\tau) \neq 0$ γιά κάποιο $\tau \in I$.*

(*v*) *$w(\varphi_1,\dots,\varphi_n)(t) \neq 0$ γιά κάθε $t \in I$.*

Ἀποδειξη. Ἡ ἰσοδυναμία τῶν 1, 2, καί 3 προκύπτει ἀπό τήν θεωρία τῆς *Γραμμικῆς Ἄλγεβρας*. Συγκεκριμένα, ἐπειδή ἡ διάσταση τοῦ χώρου λύσεων, ὅπως ἔχομε ἀποδείξει (*Πόρισμα 5.2.3*), ἰσοῦται μέ n, τότε n λύσεις ἀποτελοῦν βάση ἄν καί μόνο ἄν εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητες ἤ ἰσοδύναμα ἄν παράγουν τό χῶρο. Ἐπίσης ἰσοδύναμες εἶναι καί οἱ 4 καί 5 λόγῳ τῆς *Προτάσεως 5.2.5.* Τέλος οἱ 3 καί 4 εἶναι ἰσοδύναμες λόγῳ τῆς *Προτάσεως 5.2.4.* **ὅ.ἔ.δ.**

Ἀσκήσεις

5.2.1 Ἔστω $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$, $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$, $n-$άδες λύσεων τῆς

$$x^{(n)} + p_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + p_0(t)x^{(0)} = 0,$$

στό ἀνοικτό διάστημα I, τότε ὑπάρχουν σταθερές c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$ ὄχι καί οἱ δύο μηδενικές, ὥστε:

$$c_1 w(\varphi_1, \dots, \varphi_n)(t) + c_2 w(\psi_1, \dots, \psi_n)(t) = 0.$$

5.2.2 Ἄν οἱ θετικές σταθερές $a_1, a_2, \dots, a_n$ εἶναι διάφορες ἀνά δύο, τότε δείξατε ὅτι οἱ συναρτήσεις

$$\cos a_1 t, \dots, \cos a_n t, \ \sin a_1 t, \dots, \sin a_n t,$$

εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητες.

5.2.3 Ἔστω $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ θεμελιῶδες σύνολο λύσεων τῆς (5.11). Εἶναι δυνατόν οἱ φ_1, φ_2 νά μηδενίζονται ταυτοχρόνως σέ κάποιο $\tau \in I$;

5.2.4 Ἔστω φ μή ταυτοτικῶς μηδενική λύση τῆς (5.11) στό ἀνοικτό διάστημα I καί $\tau \in I$. Δείξατε ὅτι δέν δύναται ἡ φ νά ἔχει διπλή ρίζα στό τ, δηλαδή:

$$\varphi(\tau) = \varphi'(\tau) = 0.$$

5.2.5 Ἔστω ὅτι I ἀνοικτό διάστημα καί ἡ συνάρτηση $\varphi(t) = t \sin t$ ἀποτελεῖ λύση τῆς

$$x'' + p(t)x' + q(t) = 0.$$

Εἶναι δυνατόν τό I νά περιέχει τό 0;

5.2.6 Ἄν $p, q \in C(\mathbb{R})$, τότε ἡ $\varphi(t) = \mathrm{e}^{t^2} - 1$ δέν δύναται νά ἀποτελεῖ λύση τῆς

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0.$$

5.2.7 Δείξατε ὅτι ἄν τό ζεῦγος $\{\varphi, \psi\}$ ἀποτελεῖ θεμελιῶδες σύνολο λύσεων τῆς (5.11) στό I, τότε εἶναι ἀδύνατο οἱ φ καί ψ νά ἔχουν κοινό τοπικό ἀκρότατο.

5.2.8 Δείξατε ὅτι ἄν τό ζεῦγος $\{\varphi, \psi\}$ ἀποτελεῖ θεμελιῶδες σύνολο λύσεων τῆς (5.11) στό I, τότε εἶναι ἀδύνατο οἱ φ καί ψ νά ἔχουν κοινό σημεῖο καμπῆς $\tau \in I$ στό ὁποῖο τό ζεῦγος $\big(p(\tau), q(\tau)\big) \neq (0, 0)$.

5.2.9 Δείξατε ὅτι ἄν $\{\varphi, \psi\}$ θεμελιῶδες σύνολο λύσεων τῆς (5.11) στό I, τότε μεταξύ δύο διαδοχικῶν ριζῶν τῆς φ ὑπάρχει μοναδική ρίζα τῆς ψ.

5.2.10 Ἄν τά $\{\varphi_1, \varphi_2\}$, $\{\psi_1, \psi_2\}$ ἀποτελοῦν θεμελιώδη σύνολα λύσεων τῆς

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0,$$

τότε ὑπάρχει σταθερός ἀντιστρέψιμος πίνακας $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ὥστε:

$$\begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{pmatrix},$$

γιά κάθε t στό ὁποῖο εἶναι συνεχεῖς οἱ p καί q.

5.2.11 Ἔστω $p, q \in C(\mathbb{R})$. Εἶναι δυνατόν ἡ συνάρτηση $\varphi(t) = t^3$ νά ἀποτελεῖ λύση τῆς ἐξισώσεως

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0,$$

σ' ὅλο τό $\mathbb{R}$;

5.2.12 Ἄν $p_0, \dots, p_{n-1} \in C(\mathbb{R})$ καί ἡ συνάρτηση $\varphi(t) = t^k$ ἀποτελεῖ λύση τῆς ἐξισώσεως

$$x^{(n)} + p_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + p_0(t)x = 0,$$

σ' ὅλο τό $\mathbb{R}$, τότε δείξατε ὅτι $n > k$.

5.2.13 Νά γενικευθεῖ ἡ προηγούμενη ἄσκηση στήν περίπτωση τῆς ἐξισώσεως $n-$στῆς τάξεως.

5.2.14 Ἔστω οἱ $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ εἶναι διακεκριμένοι πραγματικοί ἀριθμοί καί $p_1(t), \dots, p_n(t)$ πολυώνυμα. Δεῖξτε ὅτι

$$p_1(t)\mathrm{e}^{\alpha_1 t} + \cdots + p_n(t)\mathrm{e}^{\alpha_n t} \equiv 0$$

ἄν καί μόνον ἄν

$$p_1 \equiv p_2 \equiv \dots \equiv p_n \equiv 0.$$

5.2.15 Ἔστω $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in C^n(I)$, ὅπου $I \subset \mathbb{R}$ ἀνοικτό διάστημα. Ἄν δίδεται ἐπί πλέον ὅτι

$$w\big(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)\big) \neq 0,$$

γιά κάθε $t \in I$, τότε ἰσχύει ἡ ἰσοδυναμία:

$$\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_n & x \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \cdots & \varphi_n' & x' \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \varphi_1^{(n)} & \varphi_2^{(n)} & \cdots & \varphi_n^{(n)} & x^{(n)} \end{vmatrix} = 0$$

ἄν καί μόνο ἄν

$$x = c_1\varphi_1 + \cdots + c_n\varphi_n.$$

5.2.16 Νά κατασκευασθεῖ γραμμική ἐξίσωση δευτέρας τάξεως ἡ ὁποία ἔχει ὡς θεμελιῶδες σύνολο λύσεων τό $\{\sin t, \sin 2t\}$.

5.2.17 Δείξατε ὅτι οἱ συναρτήσεις:

$$\varphi_{ijk} = t^{n_i}\mathrm{e}^{r_j t}\cos\omega_k t, \quad i, j, k \in \mathbb{N},$$

εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητες δεδομένου ὅτι τά στοιχεῖα ἑκάστης τῶν ἀκολουθιῶν $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, $\{r_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ καί $\{\omega_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ εἶναι διάφορα ἀνά δύο.

5.2.18 Δίδεται ἡ $n-$στῆς τάξεως βαθμωτή γραμμική συνήθης διαφορική ἐξίσωση μέ σταθερούς συντελεστές:

$$\alpha_n x^{(n)} + \cdots + \alpha_0 x = 0, \quad \alpha_n \neq 0 \tag{5.18}$$

καί τό χαρακτηριστικό της πολυώνυμο

$$p(\zeta) = \alpha_n\zeta^n + \cdots + \alpha_0.$$

Δείξατε ὅτι:

(i) Ἄν r πραγματική ρίζα τοῦ p πολλαπλότητος μ, τότε οἱ συναρτήσεις:

$$\mathrm{e}^{rt},\ t\mathrm{e}^{rt}, \ldots, t^{\mu-1}\mathrm{e}^{rt},$$

αποτελοῦν λύσεις τῆς (5.18).

(ii) Ἄν ἡ $\xi + \mathrm{i}\eta$ ἀποτελεῖ μιγαδική ρίζα τοῦ p πολλαπλότητος μ, τότε οἱ συναρτήσεις:

$$t^{\nu}\mathrm{e}^{\xi t}\cos\eta t,\ t^{\nu}\mathrm{e}^{\xi t}\sin\eta t, \quad \nu = 0, \ldots, \mu - 1,$$

ἀποτελοῦν λύσεις τῆς (5.18).

5.2.19 Ἔστω $\Xi = (\zeta_{k\ell})_{k,\ell=1}^{n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, I ἀνοικτό διάστημα, $\tau \in I$ καί $p_0, \ldots, p_{n-1} \in C(I)$. Ὁρίζομε ὡς φ_k τήν λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} \mathcal{L}x = x^{(n)} + p_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + p_0(t)x = 0, \\ x^{(\ell-1)}(\tau) = \zeta_{k\ell},\ \ell = 1, \ldots, n, \end{cases} \tag{E_k}$$

ὅπου $k = 1, \ldots, n$. Δείξατε ὅτι οἱ συναρτήσεις $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ ἀποτελοῦν θεμελιῶδες σύνολο λύσεων τῆς ἐξισώσεως $\mathcal{L}x = 0$ ἄν καί μόνον ἄν ὁ πίνακας Ξ εἶναι ἀντιστρέψιμος.

5.3 Ἐξισώσεις μέ σταθερούς συντελεστές

Ἐξισώσεις μέ σταθερούς συντελεστές εἶναι οἱ γραμμικές ἐξισώσεις τῆς μορφῆς

$$\alpha_n x^{(n)} + \alpha_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + \alpha_0 x^{(0)} = 0, \tag{5.19}$$

ὅπου $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ σταθερές καί $\alpha_n \neq 0$, ἤ ἁπλούστερα

$$\mathcal{L}x = 0,$$

ὅπου

$$\mathcal{L} = \alpha_n D^n + \cdots + \alpha_1 D + \alpha_0,$$

καί $D = d/dt$. Ἡ πρώτη παρατήρηση σχετικά μέ τίς ἀνωτέρω ἐξισώσεις εἶναι ὅτι ἀφήνουν τίς ἐκθετικές συναρτήσεις *σχεδόν* ἀναλλοίωτες. Πράγματι

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(\mathrm{e}^{rt}\right) &= \alpha_n \frac{d^n}{dt^n}\mathrm{e}^{rt} + \cdots + \alpha_1 \frac{d}{dt}\mathrm{e}^{rt} + \alpha_0\mathrm{e}^{rt} \\ &= \alpha_n r^n \mathrm{e}^{rt} + \cdots + \alpha_1 r\mathrm{e}^{rt} + \alpha_0\mathrm{e}^{rt} \\ &= \big(\alpha_n r^n + \cdots + \alpha_1 r + \alpha_0\big)\mathrm{e}^{rt} = p_L(r)\mathrm{e}^{rt}, \end{aligned}$$

ὅπου

$$p_L(\zeta) = \alpha_n\zeta^n + \cdots + \alpha_1\zeta + \alpha_0.$$

Τό ἀνωτέρω πολυώνυμο εἶναι τό γνωστό ὡς *χαρακτηριστικό πολυώνυμο* τῆς (5.19). Ἔχομε λοιπόν ἤδη τό πρῶτο συμπέρασμα:

Πρόταση 5.3.1. *Ἡ συνάρτηση* e^{rt} *ἀποτελεῖ λύση τῆς* (5.19) *ἄν καί μόνον ἄν ἡ τιμή* r *ἀποτελεῖ ρίζα τοῦ χαρακτηριστικοῦ της πολυωνύμου.* □

Ἰδιαιτέρως στήν περίπτωση ὅπου $L = \alpha D^2 + \beta D + \gamma$, ἄν οἱ πραγματικοί $r_1 \neq r_2$ ἀποτελοῦν καί οἱ δύο ρίζες τοῦ χαρακτηριστικοῦ πολυωνύμου $p_L(\zeta) = \alpha\zeta^2 + \beta\zeta + \gamma$, τότε τό $\{\mathrm{e}^{r_1 t}, \mathrm{e}^{r_2 t}\}$ ἀποτελεῖ θεμελιῶδες σύνολο λύσεων τῆς $\mathcal{L}x = 0$. Βλέπε *Παράδειγμα* (iii), στήν σελίδα 224. Ἡ ἀνωτέρω πρόταση δέν μᾶς παρέχει καμμία πληροφορία γιά τήν περίπτωση κατά τήν ὁποία οἱ ρίζες τοῦ χαρακτηριστικοῦ πολυωνύμου εἶναι ἴσες μεταξύ τους ἤ μιγαδικές. Συνολική εἰκόνα τοῦ τί ἀκριβῶς συμβαίνει σ' ὅλες τίς περιπτώσεις τῆς ἐξισώσεως δευτέρας τάξεως μᾶς παραχωρεῖ ἡ κάτωθι πρόταση:

Πρόταση 5.3.2. *Ἔστω* $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ *ἡ διακρίνουσα τοῦ χαρακτηριστικοῦ πολυωνύμου τῆς ἐξισώσεως*

$$\alpha x'' + \beta x' + \gamma x \;=\; 0. \tag{5.20}$$

Τότε ἡ γενική τῆς λύση φ*, δύναται νά ἔχει μιά ἀπό τίς κάτωθι μορφές:*

(*i*) *Ἄν* $\Delta > 0$ *καί* r_1, r_2 *οἱ ἄνισες πραγματικές ρίζες τοῦ χαρακτηριστικοῦ πολυωνύμου, τότε:*

$$\varphi(t) \;=\; c_1\mathrm{e}^{r_1 t} + c_2\mathrm{e}^{r_2 t}.$$

(*ii*) *Ἄν* $\Delta = 0$ *καί* r *ἡ διπλή πραγματική ρίζα τοῦ χαρακτηριστικοῦ πολυωνύμου, τότε:*

$$\varphi(t) \;=\; (c_1 t + c_2)\mathrm{e}^{rt}.$$

(*iii*) *Ἐνῶ, τέλος, ἄν* $\Delta < 0$ *καί* $\lambda \pm \mathrm{i}\mu$ *οἱ συζυγεῖς μιγαδικές ρίζες τοῦ χαρακτηριστικοῦ πολυωνύμου, τότε:*

$$\varphi(t) \;=\; \mathrm{e}^{\lambda t}\big(c_1\cos(\mu t) + c_2\sin(\mu t)\big).$$

Απόδειξη. Σέ κάθε μία ἀπό τίς τρεῖς περιπτώσεις ἀνωτέρω ἔχομε ἔκφραση τῆς γενικῆς λύσεως τῆς μορφῆς

$$\varphi(t) \;=\; c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Δεδομένου ὅτι τό σύνολο τῶν λύσεων τῆς (5.20) ἀποτελεῖ γραμμικό χῶρο διαστάσεως 2, γιά νά ἀποδείξομε ὅτι ἑκάστη τῶν ἀνωτέρω ἐκφράσεων ἀποτελεῖ τήν γενική λύση, ἀρκεῖ νά δείξομε, σέ κάθε μία ἀπό τίς περιπτώσεις (i), (ii) καί (iii), τά ἑξῆς:

(*a*) Ἑκάστη τῶν φ_1, φ_2 εἶναι πράγματι λύση *καί*

(*b*) Οἱ συναρτήσεις φ_1 καί φ_2 εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητες, ἤ ἰσοδύναμα

$$w(\varphi_1, \varphi_2)(t) \;\neq\; 0.$$

σ' ὅλο τό $\mathbb{R}$, ὅπου w ἡ βρονσκιανή τῶν φ_1, φ_2.

Ἡ ἐξακρίβωση τῶν (a) καί (b) ἐπαφίεται στόν ἀναγνώστη. □

Σημειωση. Ἡ ἀνωτέρω ἀπόδειξη δύναται νά χαρακτηρισθεῖ ὡς ἀνορθόδοξη. Συχνότατα στήν βιβλιογραφία τῶν *Συνήθων Διαφορικῶν Ἐξισώσεων* ἀκολουθεῖται κάποια διαδικασία, ἡ ὁποία ξεκινᾶ ἀπό τήν διαφορική ἐξίσωση καί καταλήγει μέ ἰσοδυναμίες στήν γενική της λύση. Ἰδιαιτέρως στήν περίπτωση (i), ὅπου $\varDelta > 0$ καί

$$r_1 + r_2 = -\frac{\beta}{\alpha}, \quad r_1 r_2 = \frac{\gamma}{\alpha},$$

ἔχομε:

$$\begin{aligned}
\alpha x'' + \beta x' + \gamma x = 0 \quad &\iff \quad x'' - (r_1 + r_2)x' + r_1 r_2 x = 0 \\
&\iff \quad \big(x' - r_2 x\big)' - r_1\big(x' - r_2 x\big) = 0 \\
&\iff \quad x' - r_2 x = c\,\mathrm{e}^{r_1 t} \\
&\iff \quad \mathrm{e}^{-r_2 t}\big(x' - r_2 x\big) = c\,\mathrm{e}^{(r_1 - r_2)t} \\
&\iff \quad \big(\mathrm{e}^{-r_2 t} x\big)' = c\,\mathrm{e}^{(r_1 - r_2)t} \\
&\iff \quad \mathrm{e}^{-r_2 t} x = c\,\frac{\mathrm{e}^{(r_1 - r_2)t}}{r_1 - r_2} + c_2 \\
&\iff \quad x = c_1 \mathrm{e}^{r_1 t} + c_2 \mathrm{e}^{r_2 t}.
\end{aligned}$$

Παρομοίως στήν περίπτωση (ii), ὅπου $\varDelta = 0$ καί $r = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$, $r^2 = \dfrac{\gamma}{\alpha}$ ἔχομε:

$$\begin{aligned}
\alpha x'' + \beta x' + \gamma x = 0 \quad &\iff \quad x'' - 2rx' + r^2 x = 0 \\
&\iff \quad \big(x' - rx\big)' - r\big(x' - rx\big) = 0 \\
&\iff \quad x' - rx = c\,\mathrm{e}^{rt} \\
&\iff \quad \mathrm{e}^{-rt}\big(x' - rx\big) = c_1 \\
&\iff \quad \big(\mathrm{e}^{-rt} x\big)' = c_1 \\
&\iff \quad \mathrm{e}^{-rt} x = c_1 t + c_2 \\
&\iff \quad x = (c_1 t + c_2)\,\mathrm{e}^{rt}.
\end{aligned}$$

Τέλος, στήν περίπτωση (iii) τά πράγματα περιπλέκονται. Ἐάν ἐθεωρεῖτο δεδομένη ἡ γνώση τῆς ἐκθετικῆς μιγαδικῶν, e^{zt}, $z \in \mathbb{C}$, καί τῶν ἰδιοτήτων της, τότε μέ παρόμοια διαδικασία θά καταλήγαμε στήν γενική λύση. Στό ἴδιο ἀποτέλεσμα ὅμως δυνάμεθα νά καταλήξομε καί ἀποφεύγοντας τήν χρήση τῶν μιγαδικῶν. Ἄς παρατηρήσομε, μελετῶντας προσεκτικῶς τήν διαδικασία τήν ὁποία ἀκολουθήσαμε στίς περιπτώσεις (i) καί (ii), ὅτι καταλήξαμε στήν γενική λύση ἀφοῦ προηγουμένως *παραγοντοποιήσαμε* τόν διαφορικό τελεστή:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \alpha D^2 + \beta D + \gamma \\
&= \alpha(D - r_1)(D - r_2) \qquad \text{ἤ} \qquad \alpha(D - r)^2,
\end{aligned}$$

ὅπου $D = d/dt$. Εἶναι ἄραγε δυνατόν νά ἐπιτευχθεῖ τό ἴδιο στήν περίπτωση (iii); Συγκεκριμένα: *Ὑπάρχουν συναρτήσεις g, h ὥστε*

$$\alpha D^2 + \beta D + \gamma = \alpha\big(D - g(t)\big)\big(D - h(t)\big);$$

Τό ὁποῖο σημαίνει ὅτι:

$$\begin{aligned}
(D - g)(D - h)x = (D - g)\big(x' - hx\big) &= \big(x' - hx\big)' - g\big(x' - hx\big) \\
&= x'' - (g + h)x' + \big(gh - h'\big)x.
\end{aligned}$$

Ἄρα θά εἴχαμε:

$$D^2-(g+h)D+(-h'+gh) \;=\; D^2+\frac{\beta}{\alpha}D+\frac{\gamma}{\alpha},$$

ἤ ἰσοδύναμα

$$g+h \;=\; -\frac{\beta}{\alpha} \qquad \text{καί} \qquad -h'+gh \;=\; \frac{\gamma}{\alpha}.$$

Τό ἀνωτέρω σύστημα μετά τήν ἀντικατάσταση

$$g \;=\; -\frac{\beta}{\alpha}-h,$$

στήν δεύτερη ἐξίσωση καταλήγει στήν βαθμωτήν συνήθη διαφορική ἐξίσωση πρώτης τάξεως

$$h' \;=\; -\Big(h^2+\frac{\beta}{\alpha}h+\frac{\gamma}{\alpha}\Big), \tag{5.21}$$

τῆς ὁποίας δέν ἀναζητοῦμε τήν γενική λύση ἀλλά *κάποια* λύση h. Σημειωτέον ὅτι στίς περιπτώσεις (i) καί (ii) μιά τέτοια λύση εἶναι ἡ σταθερά (π.χ. $h = r_1$, r_2 ἤ r), ἐνῶ στήν περίπτωση (iii) καμμιά πραγματική σταθερά δέν δύναται νά ἀποτελέσει λύση διότι

$$h^2+\frac{\beta}{\alpha}h+\frac{\gamma}{\alpha} \;=\; \Big(h+\frac{\beta}{2\alpha}\Big)^2+\frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha^2} \;\geq\; \frac{4\alpha\gamma-\beta^2}{4\alpha^2} \;>\; 0.$$

Ἡ γενική λύση τῆς (5.21), ἡ ὁποία ἐπιλύεται ὡς ἐξίσωση χωριζομένων μεταβλητῶν, εἶναι ἡ

$$h \;=\; -\frac{\beta}{2\alpha}-\frac{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}}{2\alpha}\tan\Big(\frac{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}}{2\alpha}(t+c)\Big).$$

Ἐπιλέγομε τήν h γιά $c=0$, ὁπότε ἡ g θά ἰσοῦται πρός

$$g \;=\; -\frac{\beta}{2\alpha}+\frac{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}}{2\alpha}\tan\Big(\frac{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}}{2\alpha}t\Big).$$

ἤ ἁπλούστερα

$$g \;=\; \xi+\eta\tan(\eta t) \qquad \text{καί} \qquad h \;=\; \xi-\eta\tan(\eta t),$$

ὅπου

$$\xi \;=\; -\frac{\beta}{2\alpha} \qquad \text{καί} \qquad \eta \;=\; \frac{\sqrt{4\alpha\gamma-\beta^2}}{2\alpha} \;\neq\; 0.$$

Ἄρα, ὁ τελεστής $\mathcal{L}$ πράγματι παραγοντοποιεῖται καί ἔχομε τίς ἀκόλουθες ἰσοδυναμίες ὅπου οἱ σταθερές διατηροῦν τά ἴδια σύμβολα ὄχι ὅμως ἀπαραιτήτως καί τίς ἴδιες τιμές. Ἔστω $\tau \in I$. ἔχομε λοιπόν:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}x \;=\; 0 \qquad &\Longleftrightarrow \qquad (D-g)\big((D-h)x\big) \;=\; 0\\
&\Longleftrightarrow \qquad (D-h)x \;=\; c\,\mathrm{e}^{\int_\tau^t g(s)\,ds}\\
&\Longleftrightarrow \qquad \mathrm{e}^{-\int_\tau^t h(s)\,ds}\big(x'-h(t)x\big) \;=\; c\,\mathrm{e}^{\int_\tau^t (g(s)-h(s))\,ds}\\
&\Longleftrightarrow \qquad \big(\mathrm{e}^{-\int_\tau^t h(s)\,ds}x\big)' \;=\; c\,\mathrm{e}^{2\eta\int_\tau^t \tan(\eta s)\,ds}.
\end{aligned}$$

Ὅμως

$$\mathrm{e}^{2\eta\int_\tau^t \tan(\eta s)\,ds} \;=\; c\mathrm{e}^{-2\log|\cos(\eta t)|} \;=\; c\sec^2(\eta t).$$

Συνεπῶς οἱ ἀνωτέρω ἰσοδυναμίες συνεχίζονται ὡς ἑξῆς:

$$\begin{aligned}
&\Longleftrightarrow \quad \mathrm{e}^{-\int_\tau^t\big(\xi-\eta\tan(\eta s)\big)\,ds}x \;=\; c_1\int_\tau^t \sec^2(\eta s)\,ds+c_2\\
&\Longleftrightarrow \quad x \;=\; \mathrm{e}^{\xi t+\log|\cos(\eta t)|}\big(c_1\tan(\eta t)+c_2\big)\\
&\Longleftrightarrow \quad x \;=\; \mathrm{e}^{\xi t}\cos(\eta t)\big(c_1\tan(\eta t)+c_2\big)\\
&\Longleftrightarrow \quad x \;=\; \mathrm{e}^{\xi t}\big(c_1\sin(\eta t)+c_2\cos(\eta t)\big),
\end{aligned}$$

ἡ ὁποία καί εἶναι ἡ ἀναμενόμενη μορφή.

Ἡ *Πρόταση 5.3.2* γενικεύεται ὡς ἑξῆς:

Πρόταση 5.3.3. (Euler (1743) [15]) *Ἔστω* $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ *πραγματικές σταθερές καί* $\alpha_n \neq 0$ *καί* $\mathcal{L}$ *ὁ γραμμικός διαφορικός τελεστής*

$$\mathcal{L} \;=\; \alpha_n D^n + \cdots + \alpha_1 D + \alpha_0,$$

ὅπου $D = d/dt$ *ἐνῶ*

$$p(\zeta) \;=\; \alpha_n \zeta^n + \cdots + \alpha_1 \zeta + \alpha_0,$$

τό χαρακτηριστικό πολυώνυμο τοῦ τελεστοῦ. Ἄν τό $p(\zeta)$ *ἔχει ὡς ρίζες:*

(i) *Πραγματικές* $r_1, \ldots, r_k$ *μέ πολλαπλότητες* $\mu_1, \ldots, \mu_k$ *ἀντιστοίχως καί*

(ii) *Μιγαδικές* $a_1 \pm ib_1, \ldots, a_\lambda \pm ib_\lambda$ *μέ πολλαπλότητες* $\mu_{k+1}, \ldots, \mu_{k+\lambda}$ *ἀντιστοίχως, ὅπου*

$$\mu_1 + \cdots + \mu_k + 2(\mu_{k+1} + \cdots + \mu_{k+\lambda}) \;=\; n.$$

Τότε ἡ γενική λύση τῆς ἐξισώσεως $\mathcal{L}x = 0$

$$\alpha_n x^{(n)} + \cdots + \alpha_1 x^{(1)} + \alpha_0 x^{(0)} \;=\; 0,$$

εἶναι ἡ

$$\varphi(t) \;=\; \sum_{\varrho=1}^{k} p_\varrho(t) \mathrm{e}^{r_\varrho t} + \sum_{\sigma=1}^{\lambda} \mathrm{e}^{a_\sigma t} \big(q_{1,\sigma}(t) \cos \beta_\varrho t + q_{2,\sigma}(t) \sin \beta_\varrho t\big),$$

ὅπου p_ϱ *πολυώνυμα βαθμοῦ τό πολύ* $\mu_\varrho - 1$*, ἐνῶ* $q_{1,\sigma}$*,* $q_{2,\sigma}$ *πολυώνυμα βαθμοῦ τό πολύ* $\mu_{k+\sigma} - 1$. □

Παραδείγματα

(i) Ἔστω ἡ ἐξίσωση

$$x^{(4)} - 2x^{(2)} + x \;=\; 0,$$

τότε τά χαρακτηριστικό της πολυώνυμο εἶναι τό

$$p(\zeta) \;=\; \zeta^4 - 2\zeta^2 + 1$$

μέ ρίζες τίς $\lambda = \pm 1$ ἑκάστη πολλαπλότητος 2. Συνεπῶς ἡ γενική λύση τῆς ἐξισώσεως θά εἶναι, βάσει τῆς προτάσεως ἡ

$$\varphi(t) \;=\; (c_1 t + c_2)\mathrm{e}^t + (c_3 t + c_4)\mathrm{e}^{-t}.$$

(ii) Ἔστω τώρα ἡ ἐξίσωση:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{n-k} x^{(k)} \;=\; 0.$$

Τό χαρακτηριστικό της πολυώνυμο εἶναι

$$p(\zeta) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^{n-k} \zeta^{k} \;=\; (\zeta+\alpha)^{n},$$

τό ὁποῖο ἔχει ὡς ρίζα μόνο τήν $\lambda = -\alpha$ μέ πολλαπλότητα n. Ὡς ἐκ τούτου ἡ γενική της λύση τήν

$$x \;=\; \big(c_1 + c_2 t + \cdots + c_n t^{n-1}\big)\mathrm{e}^{\alpha t}.$$

Φυσική ἐφαρμογή. *Τμῆμα μήκους h ὁμοιογενοῦς ἁλυσῖδος μήκους ℓ, ἡ ὁποία εἶναι τοποθετημένη ἐπάνω σέ τραπέζι, κρέμμεται ἀπό τό ἄκρο τοῦ τραπεζιοῦ καί ὑπό τήν ἐπίδραση τῆς βαρύτητος ἀρχίζει τήν πτώση πρός τό πάτωμα. Ἄν ὑποθέσομε ὅτι ἡ τριβή κυλίσεως τῆς ἁλυσῖδος στό τραπέζι εἶναι μηδενική, ὑπολογίστε τόν χρόνο ὁ ὁποῖος ἀπαιτεῖται γιά νά ἐγκαταλείψει ἡ ἁλυσίς τό τραπέζι.*

Επιλυση. Ἔστω ὅτι κατά τήν χρονική στιγμή t τό μῆκος τῆς ἁλυσῖδος τό ὁποῖο ἔχει ἤδη ἐγκαταλείψει τό τραπέζι εἶναι $x = x(t)$ ἐνῶ κινεῖται μέ ταχύτητα $v(t) = x'(t)$. Ἡ διαφορική ἐξίσωση ἡ ὁποία περιγράφει τήν κίνηση τῆς ἁλυσῖδος προκύπτει ἀπό τόν *Δεύτερο Νόμο τοῦ Νεύτωνα*:

$$\frac{d}{dt}\big(m\,v(t)\big) \;=\; F(t). \tag{5.22}$$

Ἤτοι: Ὁ ρυθμός μεταβολῆς τῆς ὁρμῆς σώματος ἰσοῦται μέ τήν δύναμη ἡ ὁποία ἀσκεῖται ἐπ' αὐτοῦ. Στήν συγκεκριμένη περίπτωση ἡ ἀσκούμενη δύναμη $F(t)$ ἀποτελεῖ τό γινόμενο τῆς μάζας τοῦ τμήματος τῆς ἁλυσῖδος τό ὁποῖο ἔχει ἐγκαταλείψει τό τραπέζι ἐπί τῆς ἐπιταχύνσεως τῆς βαρύτητος g, δηλαδή

$$F(t) \;=\; m(t)\,g.$$

Ἰδιαιτέρως, ἡ μάζα τοῦ τμήματος τό ὁποῖο ἔχει ἐγκαταλείψει τό τραπέζι ἰσοῦται μέ

$$m(t) \;=\; m\frac{x(t)}{\ell},$$

λόγῳ τῆς ὑποτεθείσης ὁμοιογενείας τῆς ἁλυσῖδος. Ἡ (5.22) γράφεται ὡς

$$m\,v'(t) \;=\; m\frac{x(t)}{\ell}\,g,$$

ἤ ἁπλούστερα

$$x''(t) \;=\; \frac{g}{\ell}\,x(t),$$

τῆς ὁποίας ἡ γενική λύση εἶναι ἡ

$$\varphi(t) = c_1 \exp\Big(\sqrt{\frac{g}{\ell}}\, t\Big) + c_2 \exp\Big(-\sqrt{\frac{g}{\ell}}\, t\Big). \tag{5.23}$$

Οἱ ἀρχικές συνθῆκες τοῦ προβλήματος εἶναι

$$x(0) = h \quad \text{καί} \quad x'(0) = 0,$$

οἱ ὁποῖες ὅταν ἐνσωματωθοῦν στήν (5.23) λαμβάνομε γιά τούς συντελεστές c_1, c_2 τό σύστημα

$$x(0) = c_1 + c_2 = h \quad \text{καί} \quad x'(0) = c_1 - c_2 = 0,$$

ἀπ' ὅπου προκύπτει ὅτι $c_1 = c_2 = \dfrac{h}{2}$ καί

$$\varphi(t) = \frac{h}{2}\bigg(\exp\Big(\sqrt{\frac{g}{\ell}}\, t\Big) + \exp\Big(-\sqrt{\frac{g}{\ell}}\, t\Big)\bigg) = h\cosh\Big(\sqrt{\frac{g}{\ell}}\, t\Big).$$

Τέλος, ἄν T ὁ χρόνος ὁ ὁποῖος ἀπαιτεῖται γιά νά ἐγκαταλείψει ἡ ἅλυσίς τό τραπέζι, τότε

$$\ell = \varphi(T) = h\cosh\Big(\sqrt{\frac{g}{\ell}}\, T\Big),$$

ὁπότε

$$T = \sqrt{\frac{\ell}{g}} \cosh^{-1}\Big(\frac{\ell}{h}\Big).$$

5.3.1 Ἐξισώσεις Euler

Ὀνομάζονται οἱ γραμμικές ἐξισώσεις τῆς μορφῆς

$$\alpha_n t^n x^{(n)} + \alpha_{n-1} t^{n-1} x^{(n-1)} + \cdots + \alpha_0 x^{(0)} = 0,$$

ὅπου $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ πραγματικές σταθερές καί $\alpha_n \neq 0$. Ἰδιαιτέρως, στήν περίπτωση τῆς δευτέρας τάξεως λαμβάνουν τήν μορφή

$$\alpha t^2 x'' + \beta t\, x' + \gamma\, x = 0, \tag{5.24}$$

ὅπου α, β, γ πραγματικές σταθερές, $\alpha \neq 0$. Οἱ ἀνωτέρω ἐξισώσεις ἔχουν ὡς πεδίο ὁρισμοῦ τῶν λύσεων τους τό $\mathbb{R}^-$ ἤ τό $\mathbb{R}^+$. Οἱ ἐξισώσεις Euler μ' ἕνα ἁπλούστατο μετασχηματισμό ἀνάγονται στίς γραμμικές μέ σταθερούς συντελεστές. Συγκεκριμένα ἄν θέσομε

$$x(t) = \begin{cases} z(\log t) & \text{ἄν} \quad t > 0, \\ z\big(\log(-t)\big) & \text{ἄν} \quad t < 0, \end{cases}$$

τότε γιά $t > 0$ (καί παρομοίως γιά $t < 0$) θά ἔχομε:

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{dz(\log t)}{dt} \\ &= z'(\log t)\frac{d\log t}{dt} \;=\; \frac{z'(\log t)}{t}, \end{aligned}$$

καί

$$\begin{aligned} x''(t) &= \frac{d}{dt}x'(t) \;=\; \frac{d}{dt}\left(\frac{z'(\log t)}{t}\right) \\ &= \frac{1}{t}\left(\frac{z''(\log t)}{t}\right) - \frac{1}{t^2}z'(\log t) \\ &= \frac{z''(\log t) - z'(\log t)}{t^2}, \end{aligned}$$

καί τελικῶς

$$\begin{aligned} \alpha t^2 x'' + \beta t\, x' + \gamma x &= \alpha t^2 \frac{z''(\log t) - z'(\log t)}{t^2} + \beta t \frac{z'(\log t)}{t} + \gamma z(\log t) \\ &= \alpha\, z''(\log t) + (\beta - \alpha) z'(\log t) + \gamma\, z(\log t). \end{aligned}$$

Ἔχομε ἐν τέλει ὅτι ἡ (5.24) εἶναι ἰσοδύναμη μέ τήν

$$\alpha\, z''(\log t) + (\beta - \alpha) z'(\log t) + \gamma\, z(\log t) \;=\; 0,$$

τήν ὁποία γνωρίζομε πῶς νά ἀντιμετωπίσομε. Ἡ ἀνωτέρω διαδικασία δύναται πολύ ἁπλά νά γενικευθεῖ στήν περίπτωση τῆς ἐξισώσεως $n-$στῆς τάξεως, ἀλλά καί ἀκόμη γενικότερα τῆς ἐξισώσεως:

$$\alpha_n (t - t_0)^n x^{(n)} + \alpha_{n-1}(t - t_0)^{n-1} x^{(n-1)} + \cdots + \alpha_0 x \;=\; 0,$$

ὅπου ὁ ἀντίστοιχος μετασχηματισμός θά εἶναι ὁ

$$x(t) \;=\; \begin{cases} z\big(\log(t - t_0)\big) & \text{ἄν} \;\; t > t_0, \\ z\big(\log(t_0 - t)\big) & \text{ἄν} \;\; t < t_0. \end{cases}$$

Παραδείγματα

(i) *Νά βρεθεῖ ἡ γενική λύση τῆς*

$$t^2 x'' + t x' - x \;=\; 0.$$

Επιλυση. Διά τοῦ μετασχηματισμοῦ $x(t) = z(\log t)$ λαμβάνομε τήν ἀκόλουθη ἐξίσωση μέ ἄγνωστη συνάρτηση τήν z:

$$z'' - z \;=\; 0.$$

μέ γενική λύση
$$\zeta(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}.$$
Ὅμως $x(t) = z(\log t)$, ἄρα ἡ γενική λύση θά ἔχει τήν μορφή
$$\varphi(t) \;=\; c_1 e^{\log t} + c_2 e^{-\log t} \;=\; c_1 t + c_2 \frac{1}{t}.$$

(ii) *Νά γίνει τό ἴδιο στήν ἐξίσωση*
$$t^2 x'' + t x' + x \;=\; 0.$$

Επιλυση. Γιά $t > 0$, μέ τόν μετασχηματισμό $x(t) = z(\log t)$ λαμβάνομε γιά τήν z τήν ἐξίσωση:
$$z'' + z \;=\; 0.$$
ἡ ὁποία ἔχει γενική λύση
$$\zeta(t) \;=\; c_1 \cos t + c_2 \sin t.$$
Ὅμως $x(t) = z(\log t)$, ἄρα ἡ γενική λύση τῆς ἀρχικῆς μας ἐξισώσεως εἶναι:
$$\varphi(t) \;=\; c_1 \cos(\log t) + c_2 \sin(\log t).$$
Ἀναλόγως πράττοντες λαμβάνομε στήν περίπτωση $t < 0$ ὡς γενική λύση τήν
$$\varphi(t) \;=\; c_1 \cos\big(\log(-t)\big) + c_2 \sin\big(\log(-t)\big).$$

(iii) *Γιά ποιό β ἡ λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν*
$$\begin{cases} t^2 x'' + t x' - x = 0, \\ x(1) \;=\; 1,\; x'(1) \;=\; \beta, \end{cases}$$
ἐπεκτείνεται συνεχῶς στό $t = 0$;

Απαντηση. Ἡ γενική λύση τῆς ἐξισώσεως ὅπως ἔχομε ἤδη δεῖ εἶναι ἡ
$$\varphi \;=\; c_1 t + c_2 \frac{1}{t}.$$
Ἄν ἐνσωματώσομε τίς ἀρχικές συνθῆκες στήν ἀνωτέρω λαμβάνομε
$$1 \;=\; \varphi(1) \;=\; c_1 + c_2, \beta = \varphi'(1) \;=\; c_1 - c_2,$$
ἀπ' ὅπου προκύπτει ὅτι:
$$c_1 \;=\; \frac{1+\beta}{2} \qquad \text{καί} \qquad c_2 \;=\; \frac{1-\beta}{2},$$

καί τελικῶς
$$\varphi(t) \;=\; \frac{1+\beta}{2}t + \frac{1-\beta}{2}\frac{1}{t}.$$
Προφανῶς ἡ λύση τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν εἶναι συνεχῶς ἐπεκτάσιμη στό μηδέν ἄν καί μόνο ἄν ἔχει ὅριο ὅταν $t \to 0^+$, τό ὁποῖο συμβαίνει ἄν $c_2 = 0$, ἤ ἰσοδύναμα $\beta = 1$.

(iv) *Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση:*
$$t^3x^{(3)} + tx^{(1)} - x^{(0)} \;=\; 0.$$

Επιλυση. Ἔχομε

$$\begin{aligned}
x(t) &= z(\log t)\\
x'(t) &= z'(\log t)\frac{1}{t}\\
x''(t) &= z''(\log t)\frac{1}{t^2} - z'(\log t)\frac{1}{t^2}\\
x'''(t) &= z'''(\log t)\frac{1}{t^3} - 3z''(\log t)\frac{1}{t^3} + 2z'(\log t)\frac{1}{t^3},
\end{aligned}$$

ὁπότε ἔχομε

$$\begin{aligned}
0 &= t^3x^{(3)} + tx^{(1)} - x^{(0)}\\
&= \left(z''' - 3z'' + 2z'\right) + z' - z\\
&= z''' - 3z'' + 3z' - z \;=\; (D-1)^3 z.
\end{aligned}$$

Τό χαρακτηριστικό πολυώνυμο γιά τήν z εἶναι

$$p(\zeta) \;=\; \zeta^3 - 3\zeta^2 + 3\zeta - 1 \;=\; (\zeta-1)^3,$$

καί ὡς ἐκ τούτου ἡ γενική λύση γιά τό z θά εἶναι

$$z(t) \;=\; \mathrm{e}^t(c_1 + c_2t + c_3t^2).$$

Ὁπότε δοθέντος ὅτι $x(t) = z(\log t)$ θά ἔχομε:

$$x(t) \;=\; t\left(c_1 + c_2\log t + c_3(\log t)^2\right).$$

Ἀσκήσεις

5.3.1 Νά βρεθεῖ ἡ γενική λύση τῶν κάτωθι ἐξισώσεων:

(i) $x'' + 2x' + x \;=\; 0,$

(ii) $x'' + \omega^2 x = 0$,

(iii) $x'' + 2x' + 2x = 0$,

(iv) $x'' - 2x' - 15x = 0$,

(v) $x'' - 2x' + 15x = 0$.

5.3.2 Νά βρεθεῖ ἡ γενική λύση τῆς ἐξισώσεως

$$x'' - 2x' + \lambda x = 0,$$

γιά τίς διάφορες πραγματικές τιμές τοῦ λ.

5.3.3 Νά ἐπιλυθοῦν τά προβλήματα ἀρχικῶν τιμῶν:

(i) $x'' + 2x' + x = 0 \quad , \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0$,

(ii) $x'' + x = 0 \quad , \quad x(\pi) = 1, \quad x'(\pi) = 0$,

(iii) $x'' + x' + x = 0 \quad , \quad x(-1) = 1, \quad x'(-1) = -1$,

(iv) $x'' + 4x' - 5x = 0 \quad , \quad x(2) = 1, \quad x'(2) = 0$,

(v) $x'' + 4x' + 4x = 0 \quad , \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = -1$.

5.3.4 Νά λυθοῦν οἱ κάτωθι ἐξισώσεις καί νά βρεθεῖ τό πεδίο όρισμοῦ τῶν λύσεων αὐτῶν.

(i) $t^2 x'' - tx' + x = 0$,

(ii) $2t^2 x'' + 2tx' + x = 0$,

(iii) $t^2 x'' + tx' + x = 0$,

(iv) $(t-1)^2 x'' + 4(t-1)x' + x = 0$,

(v) $(2t+1)^2 x'' - (4t+2)x' - 4x = 0$.

5.3.5 Ἔστω $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ λύση τῆς ἐξισώσεως

$$x'' + \alpha x' + \beta x = 0.$$

Ἄν $\alpha, \beta > 0$, δείξατε ὅτι $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = 0$.

5.3.6 Γιά ποιό β ἡ λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} t^2 x'' + tx' - x = 0 \\ x(1) = 1, \ x'(1) = \beta, \end{cases}$$

ἔχει ὡς ὅριο τό μηδέν ὅταν τό t τείνει στό σύν ἄπειρο;

5.3.7 Δίδεται ἡ ἐξίσωση

$$t^2 x'' + \kappa t x' + \lambda x = 0.$$

Ἄν $\kappa > 1$ καί $\lambda > 0$, τότε δείξατε ὅτι κάθε λύση τῆς ἀνωτέρω τείνει στό μηδέν καθώς τό t τείνει στό σύν ἄπειρο.

5.3.8 Ποία σχέση πρέπει νά ἱκανοποιεῖται μεταξύ τῶν $p(t)$ καί $q(t)$ ὥστε κατάλληλος μετασχηματισμός τῆς μορφῆς $x(t) = z\big(u(t)\big)$ νά καθιστᾶ τήν ἐξίσωση

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0,$$

ἰσοδύναμη μέ ἐπίσης γραμμική ὁμοιογενῆ ἐξίσωση δευτέρας τάξεως, ἡ ὁποία ὅμως ἔχει σταθερούς συντελεστές, μέ ἄγνωστη συνάρτηση τήν z;

5.3.9 Νά βρεθοῦν οἱ λύσεις τῶν κάτωθι προβλημάτων συνοριακῶν τιμῶν:

(i) $x' + x = 0, \quad x(0) + x(\log 2) = 1.$

(ii) $x' = \alpha x + \beta, \quad x(1) = \gamma x(0).$

(iii) $x'' + x = \sin t, \quad x(0) = x(\pi) = 0.$

(iv) $x'' = x, \quad x(0) = 0, \ x(\log \pi) = 1.$

(v) $t^2 x'' = 4x, \quad x(\log 2) = 0, \ x(\log 3) = 1.$

5.3.10 Νά βρεθοῦν οἱ τιμές τῆς παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$, γιά τίς ὁποῖες τά ἀκόλουθα ὁμοιογενῆ προβλήματα συνοριακῶν τιμῶν ἔχουν λύσεις πλήν τῆς ταυτοτικῶς μηδενικῆς.

(i) $x'' + \lambda x = 0, \quad x(0) = x(2\pi) = 0.$

(ii) $x'' + \lambda x = 0, \quad x(0) = x'(1) = 0.$

(iii) $t^2 x'' + t x' + \lambda x = 0, \quad x(a) = x'(b)$ καί $x'(a) = x(b)$ ὅπου $a < b$.

5.3.11 Νά διατυπωθεῖ πρόταση ἀνάλογη τῆς 5.3.2 γιά τίς ἐξισώσεις Euler.

5.3.12 Νά βρεθοῦν ὁμοιογενεῖς ἐξισώσεις μέ σταθερούς συντελεστές οἱ ὁποῖοι δέχονται ὡς λύση τήν

(i) $\varphi(t) = t^{10}$,

(ii) $\varphi(t) = t^{10} \mathrm{e}^{10t}$,

(iii) $\varphi(t) = t^{10} \cos t$,

(iv) $\varphi(t) = t^{10} \mathrm{e}^{-3t} \cos t$,

(v) $\varphi(t) = t^{10} \mathrm{e}^{3t} \cos t + t\mathrm{e}^{10t} \cos 3t$.

5.3.13 Ἔστω ὅτι ἡ ἐξίσωση $x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \cdots + a_0 x = 0$ δέχεται ὡς λύσεις τίς $t^2 \cos t$ καί $t \cos 2t$. Ποιά εἶναι μικρότερη τιμή τοῦ n γιά τήν ὁποία εἶναι δυνατόν νά ἰσχύει κάτι τέτοιο;

5.3.14 Νά βρεθεῖ ἡ γενική λύση τῶν κάτωθι ὁμοιογενῶν ἐξίσωσεων:

(i) $x^{(4)} - x = 0,$

(ii) $x^{(4)} + x = 0,$

(iii) $x^{(6)} - 2x^{(3)} + x = 0,$

(iv) $x^{(6)} + 2x^{(3)} + x = 0,$

(v) $x^{(2n)} - 2x^{(n)} + x = 0,$

(vi) $x^{(2n)} + 2x^{(n)} + x = 0.$

5.3.15 Νά βρεθοῦν οἱ γενικές λύσεις τῶν:

(i) $x^{(n)} + x = 0,$

(ii) $x^{(n)} - x = 0,$

(iii) $x^{(2n)} - 2x^{(n)} + x = 0,$

(iv) $x^{(2n)} + 2x^{(n)} + x = 0,$

(v) $(D^2 + 1)^n \, x = 0,$

(vi) $(D^m - 1)^n\, x \,=\, 0.$

5.3.16 Ἔστω $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$, πραγματικές σταθερές καί $\mathcal{L}$ ὁ διαφορικός τελεστής

$$\mathcal{L} \,=\, D^n + \alpha_{n-1}D^{n-1} + \cdots + \alpha_1 D + \alpha_0,$$

ὅπου $D = \dfrac{d}{dt}$. Ἄν $p_L(\zeta) = \zeta^n + \alpha_{n-1}\zeta^{n-1} + \cdots + \alpha_1\zeta + \alpha_0$, τό χαρακτηριστικό πολυώνυμο τοῦ $\mathcal{L}$ δείξατε ὅτι

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[t^k e^{\lambda t}] &= p_L(\lambda)t^k e^{\lambda t} + \binom{k}{1} p_L'(\lambda)t^{k-1}e^{\lambda t} + \binom{k}{2} p_L''(\lambda)t^{k-2}e^{\lambda t} + \cdots + \binom{k}{k} p_L^{(k)}(\lambda)e^{\lambda t} \\ &= \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j} p_L^{(j)}(\lambda)\, t^{k-j}e^{\lambda t}.\end{aligned}$$

Ὡς ἐκ τούτου, ἡ συνάρτηση $t^k e^{\lambda t}$ ἀποτελεῖ λύση τῆς ἐξισώσεως $\mathcal{L}x = 0$ ἄν καί μόνον ἄν ἡ λ ἀποτελεῖ ρίζα τοῦ p_L πολλαπλότητος τουλάχιστον k.

5.3.17 Ὑποθέτοντας ὅτι ἡ γενική λύση τῆς ἐξισώσεως

$$\alpha x'' + \beta x' + \gamma x \,=\, 0,$$

ἐκφράζεται ὡς δυναμοσειρά τῆς μορφῆς $\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$, ὑπολογίστε τούς συντελεστές c_n συναρτήσει τῶν α, β, γ. Ἀκολούθως δείξατε ὅτι ἡ δυναμοσειρά πού βρήκατε ἔχει ἄπειρη ἀκτίνα συγκλίσεως καί ὅτι πράγματι ὁρίζει τήν γενική λύση τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως.

5.3.18 Στήν φυσική ἐφαρμογή τῆς σελίδος 237 εἰσάγομε ἕνα νέο δεδομένο, τήν τριβή κυλίσεως. Συγκεκριμένα, κατά τήν κίνηση τῆς ἁλυσῖδος στό τραπέζι ὑποθέτομε ὅτι ἀσκεῖται δύναμη τριβῆς ἀνάλογη τῆς ἑκάστοτε μάζας τῆς ἁλυσῖδος ἡ ὁποία ἔχει ἀπομείνει στό τραπέζι. Συνολικῶς, στήν ἁλυσίδα ἀσκεῖται ἡ δύναμη

$$F \,=\, F_{\text{βαρύτητος}} - F_{\text{τριβῆς}} \,=\, m(t)\, g - \gamma\big(m - m(t)\big),$$

ὅπου γ θετική σταθερά. Νά βρεθεῖ ἡ χρόνος ὁ ὁποῖος ἀπαιτεῖται ὥστε ἡ ἁλυσίς νά ἐγκαταλείψει τό τραπέζι, ἄν ἀρχικῶς τμῆμα αὐτῆς μήκους h κρέμμεται.

5.4 Μή ὁμοιογενεῖς ἐξισώσεις

Ὅπως ἔχει ἤδη λεχθεῖ (βλέπε *Προτάσεις 1.4.2* καί *1.4.3*) ἐνῶ οἱ λύσεις τῆς ὁμοιογενοῦς ἐξισώσεως ἀποτελοῦν γραμμικό χῶρο, οἱ λύσεις τῆς μή ὁμοιογενοῦς ἀποτελοῦν γραμμικό σύμπλοκο. Συγκεκριμένα ἰσχύει ὅτι:

Πρόταση 5.4.1. *Ἔστω φ_0 λύση τῆς*

$$\mathcal{L}x \,=\, h(t), \tag{5.25}$$

ὅπου

$$\mathcal{L} \,=\, D^n + p_{n-1}(t)D^{n-1} + \cdots + p_0(t),$$

καί $D = d/dt$. *Ἔστω ἐπίσης* $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ *θεμελιῶδες σύνολο λύσεων τῆς* $\mathcal{L}x = 0$. *Τότε ἡ παράσταση*

$$x = \varphi_0 + c_1\varphi_1 + \cdots + c_n\varphi_n,$$

ἀποτελεῖ τήν γενική λύση τῆς (5.25).

Απόδειξη. Ἡ ἰσοδυναμία προκύπτει ἀπό τόν ὁρισμό τοῦ θεμελιώδους συνόλου λύσεων:

$$\mathcal{L}x = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = c_1\varphi_1 + \cdots + c_n\varphi_n.$$

Ἐπειδή ὅμως $\mathcal{L}\varphi_0 = h(t)$ θά ἔχομε τίς ἰσοδυναμίες:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}x = h \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathcal{L}x = \mathcal{L}\varphi_0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \mathcal{L}(x - \varphi_0) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x - \varphi_0 = c_1\varphi_1 + \cdots + c_n\varphi_n \\ &\Longleftrightarrow \quad x = \varphi_0 + c_1\varphi_1 + \cdots + c_n\varphi_n. \end{aligned}$$

ὅ.ἔ.δ.

Συνεπῶς λοιπόν ἡ εὕρεση τῆς γενικῆς λύσεως τῆς μή ὁμοιογενοῦς ἐξισώσεως ἀνάγεται στά:

(i) Εὕρεση γενικῆς λύσεως τῆς ὁμοιογενοῦς.

(ii) Εὕρεση *εἰδικῆς* λύσεως τῆς μή ὁμοιογενοῦς.

5.4.1 Μέθοδος προσδιορισμοῦ τῶν συντελεστῶν

Ἡ μέθοδος ἐφαρμόζεται στήν ἐπίλυση ἐξισώσεων μέ σταθερούς συντελεστές καί μή ὁμοιογενοῦς ὅρου εἰδικῆς μορφῆς. Δηλαδή ἐξισώσεων, οἱ ὁποῖες στήν περίπτωση τῶν ἐξισώσεων δευτέρας τάξεως, εἶναι τῆς μορφῆς:

$$\alpha x'' + \beta x' + \gamma x = q(t),$$

ὅπου ὁ μή ὁμοιογενής ὅρος q εἶναι μιᾶς ἀπό τίς κάτωθι μορφές:

(i) Πολυωνυμική συνάρτηση.

(ii) Ἐκθετική συνάρτηση, δηλαδή $q(t) = \mathrm{e}^{rt}$.

(iii) Ἡμίτονο ἤ συνημίτονο, δηλαδή $q(t) = \sin\omega t$ ἤ $q(t) = \cos\omega t$.

(iv) Γινόμενο πολυωνύμου ἐπί ἐκθετικῆς, δηλαδή $q(t) = p(t)\mathrm{e}^{rt}$, ὅπου p πολυώνυμο.

(v) Γινόμενο πολυωνύμο ἐπί ἡμιτόνου ἤ συνημιτόνου, δηλαδή μή ὁμοιογενής ὅρος τῆς μορφῆς $q(t) = p(t)\sin\omega t$ ἤ $q(t) = p(t)\cos\omega t$, ὅπου p πολυώνυμο.

(vi) Γινόμενο πολυωνύμου, ἐκθετικῆς καί ἡμιτόνου ἤ συνημιτόνου, δηλαδή μή ὁμοιογενής ὅρος τῆς μορφῆς $q(t) = p(t)\mathrm{e}^{rt}\sin\omega t$ ἤ $q(t) = p(t)\mathrm{e}^{rt}\cos\omega t$, ὅπου $p(t)$ πολυώνυμο.

(vii) Γραμμικός συνδυασμός τῶν προηγουμένων περιπτώσεων.

Τό σημαντικό στοιχεῖο ἐδῶ εἶναι ὅτι, σέ κάθε μία ἀπό τίς ἀνωτέρω μορφές, ὑπάρχει εἰδική λύση *παρομοίας* μορφῆς μέ τόν μή ὁμοιογενῆ ὅρο.

Παραδείγματα

(i) *Νά βρεθεῖ εἰδική λύση τῆς ἐξισώσεως*

$$\alpha x'' + \beta x' + \gamma x \;=\; \mathrm{e}^{rt},$$

γιά τίς διάφορες τιμές τῶν α, β, γ *καί* r.

Επιλυση. Θά ἀναζητήσομε εἰδική λύση τῆς μορφῆς $\varphi = A\mathrm{e}^{rt}$, ὅπου A προσδιοριστέα σταθερά. Ἔχομε:

$$\mathcal{L}\left(A\mathrm{e}^{rt}\right) \;=\; \alpha\left(A\mathrm{e}^{rt}\right)'' + \beta\left(A\mathrm{e}^{rt}\right)' + \gamma\left(A\mathrm{e}^{rt}\right) \;=\; A(\alpha r^2 + \beta r + \gamma)\mathrm{e}^{rt}.$$

Συνεπῶς ἄν

$$p(r) \;=\; \alpha r^2 + \beta r + \gamma \;\neq\; 0,$$

τότε ἡ συνάρτηση

$$\varphi_0(t) \;=\; \frac{1}{\alpha r^2 + \beta r + \gamma}\mathrm{e}^{rt} \;=\; \frac{1}{p_L(r)}\mathrm{e}^{rt},$$

ἀποτελεῖ εἰδική λύση, ὅπου $p_L(\lambda) \;=\; \alpha\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma$, τό χαρακτηριστικό πολυώνυμο τοῦ τελεστοῦ $\mathcal{L}$.

(ii) *Τί συμβαίνει ὅμως ὅταν τό* r *μηδενίζει τό πολυώνυμο;*

Απαντηση. Σ' αὐτή τήν περίπτωση ἐπιτρέπομε στόν ἐκθέτη $\varrho \in \mathbb{R}$ νά *μεταβάλλεται* καί ἀκολούθως παραγωγίζομε ὡς πρός ϱ. Ἑπομένως ἔχομε:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\big(\mathrm{e}^{\varrho t}\big) \;=\; p(\varrho)\mathrm{e}^{\varrho t} \quad &\Longrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial\varrho}\mathcal{L}\big(\mathrm{e}^{\varrho t}\big) \;=\; \frac{\partial}{\partial\varrho}\big(p(\varrho)\mathrm{e}^{\varrho t}\big) \\
&\Longrightarrow \quad \mathcal{L}\Big(\frac{\partial}{\partial\varrho}\big(\mathrm{e}^{\varrho t}\big)\Big) \;=\; \big(p'(\varrho) + tp(\varrho)\big)\mathrm{e}^{\varrho t} \\
&\Longrightarrow \quad \mathcal{L}\big(t\mathrm{e}^{\varrho t}\big) \;=\; \big(p'(\varrho) + tp(\varrho)\big)\mathrm{e}^{\varrho t}. \qquad (5.26)
\end{aligned}$$

Ἄν θέσομε στήν ἀνωτέρω $\varrho = r$, καί χρησιμοποιήσομε τό γεγονος ὅτι $p(r) = 0$ θά ἔχομε:

$$\mathcal{L}\left(t\mathrm{e}^{rt}\right) \;=\; p'(r)\mathrm{e}^{rt}$$

Ἄν λοιπόν $p'(r) = \alpha r + \beta \neq 0$ (ἤτοι ἡ $\varrho = r$ εἶναι ἁπλή ρίζα), τότε ἡ συνάρτηση

$$\varphi_0(t) \;=\; \frac{1}{2\alpha r + \beta} t\mathrm{e}^{rt} \;=\; \frac{1}{p'_L(r)} t\mathrm{e}^{rt},$$

ἀποτελεῖ εἰδική λύση τῆς μή ὁμοιογενοῦς. Ἡ περίπτωση αὐτή ὀνομάζεται περίπτωση *ἁπλοῦ συντονισμοῦ*.

Τέλος ἄν τό r ἀποτελεῖ διπλή ρίζα τοῦ χαρακτηριστικοῦ πολυωνύμου, δηλαδη $p(r) = p'(r) = 0$, τότε ἀν παραγωγίσομε ἐκ νέου τήν (5.26), λαμβάνομε:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial \varrho} \mathcal{L}\left(t\mathrm{e}^{\varrho t}\right) = \frac{\partial}{\partial \varrho}\left(p'(\varrho) + \varrho p(\varrho)\right) \mathrm{e}^{\varrho t} \\
&\implies \quad \mathcal{L}\left(t^2 \mathrm{e}^{\varrho t}\right) = \left(p''(\varrho) + 2tp'(\varrho) + t^2 p(\varrho)\right) \mathrm{e}^{\varrho t}
\end{aligned}$$

Ὁπότε γιά $\varrho = r$ λαμβάνομε:

$$\mathcal{L}\left(t^2 \mathrm{e}^{rt}\right) \;=\; p''(r)\mathrm{e}^{rt} \;=\; 2\alpha \mathrm{e}^{rt}.$$

Στήν τελευταία περίπτωση στήν ὁποία ἔχομε *διπλό συντονισμό* εἴδική λύση εἶναι ἡ

$$\varphi_0(t) \;=\; \frac{1}{2\alpha} \mathrm{e}^{rt} \;=\; \frac{1}{p''_L(r)} \mathrm{e}^{rt}.$$

(iii) *Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση*

$$\mathcal{L}x \;=\; x'' + x \;=\; \cos \omega t,$$

γιά τίς διάφορες τιμές τοῦ ω.

Επιλυση. Ἀναζητοῦμε εἰδική λύση τῆς μορφῆς

$$\varphi \;=\; A\cos \omega t + B \sin \omega t,$$

ὁπότε

$$\varphi'' + \varphi \;=\; A(1-\omega^2)\cos \omega t + B(1-\omega^2)\sin \omega t.$$

Συνεπῶς γιά $\omega \neq \pm 1$, μία εἰδική λύση θά εἶναι ἡ

$$\varphi(t) \;=\; \frac{1}{1-\omega^2} \cos \omega t.$$

Στήν περίπτωση ὅμως κατά τήν ὁποία $\omega = 1$ ἤ -1, τότε παραγωγίζοντας ὡς πρός ω λαμβάνομε:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial \omega} \mathcal{L}\left(A\cos \omega t + B\sin \omega t\right) \;= \\
&\qquad = \frac{\partial}{\partial \omega}\left(A(1-\omega^2)\cos \omega t + B(1-\omega^2)\sin \omega t\right),
\end{aligned}$$

ὁπότε ἰσοδύναμα:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\,(-At\sin\omega t + Bt\cos\omega t) \;&=\\ &= \left(1-\omega^2\right)(-At\sin\omega t + Bt\cos\omega t) - 2A\omega\cos\omega t - 2B\omega\sin\omega t.\end{aligned}$$

Συνεπῶς, ἄν θέσομε $\omega = 1$, λαμβάνομε:

$$\mathcal{L}\big(-At\cos t + Bt\sin t\big) \;=\; -2A\sin t - 2B\cos t.$$

Ἄν θέσομε $A = 0$ καί $B = -\dfrac{1}{2}$, τότε τό δεξιό μέλος τῆς ἀνωτέρω καθίσταται ἴσο πρός $h(t) = \cos t$. Συνεπῶς ἡ συνάρτηση

$$\varphi(t) \;=\; -\frac{1}{2}\,t\sin t,$$

ἀποτελεῖ εἰδική λύση τῆς ἐξισώσεως $x'' + x = \cos t$.

(iv) *Νά ἐπιλυθεῖ ἡ μή ὁμοιογενής ἐξίσωση Euler:*

$$t^3x^{(3)} + tx^{(1)} - x^{(0)} \;=\; t.$$

Επιλυση. Πραγματοποιῶντας τόν μετασχηματισμό $x(t) = z(\log t)$ καταλήγομε στήν ἐξίσωση

$$z'''(\log t) - 3z''(\log t) + 3z'(\log t) - z(\log t) \;=\; t,$$

ἡ ὁποία δύναται νά γραφεῖ ἰσοδύναμα ὡς:

$$z'''(t) - 3z''(t) + 3z'(t) - z(t) \;=\; \mathrm{e}^t,$$

μέ τόν ὁμοιογενῆ ὅρο νά ὑφίσταται τριπλό συντονισμό. Ἀναζητῶντας εἰδική αὐτῆς λύση τῆς μορφῆς

$$\psi(t) \;=\; At^3\mathrm{e}^t,$$

διαπιστώνομε ὅτι $A = 1/6$. Ὡς ἐκ τούτου, λόγῳ τοῦ προηγουμένου παραδείγματος ἡ γενική λύση ὡς πρός z θά εἶναι:

$$z(t) \;=\; \mathrm{e}^t\Big(c_1 + c_2t + c_3t^2 + \frac{t^3}{6}\Big).$$

καί ὡς ἐκ τούτου, πραγματοποιῶντας τόν ἀντίστροφο μετασχηματισμό λαμβάνομε:

$$x(t) \;=\; t\Big(c_1 + c_2\log t + c_3(\log t)^2 + \frac{(\log t)^3}{6}\Big),$$

ἡ ὁποία ἀποτελεῖ τήν γενική λύση τῆς ἐξισώσεώς μας.

Συνολικῶς λοιπόν ἰσχύει τό ἑξῆς ἀποτέλεσμα:

Πρόταση 5.4.2. *Ἔστω ἡ συνήθης διαφορική ἐξίσωση*

$$\alpha_n x^{(n)} + \alpha_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + \alpha_0 x^{(0)} \;=\; h(t), \tag{5.27}$$

ὅπου α_i, $i = 1, \cdots, n$, πραγματικές σταθερές, $\alpha_n \neq 0$ καί

$$p_{\mathcal{L}}(\zeta) \;=\; \alpha_n\zeta^n + \alpha_{n-1}\zeta^{n-1} + \cdots + \alpha_0,$$

τό χαρακτηριστικό αὐτῆς πολυώνυμο. Τότε ἰσχύουν τά ἀκόλουθα:

(i) *Ἄν ὁ μή ὁμοιογενής ὅρος εἶναι ἡ συνάρτηση $h(t) = \mathrm{e}^{rt}$, τότε ἡ ἐξίσωση (5.27) ἔχει εἰδική λύση τῆς μορφῆς $\varphi(t) = A\mathrm{e}^{rt}$, ἄν $p(r) \neq 0$ (ἤτοι ἡ r δέν εἶναι ρίζα τοῦ χαρακτηριστικοῦ πολυωνύμου). Ἐνῶ ἄν r ρίζα πολλαπλότητος k, τότε ἔχει εἰδική λύση τῆς μορφῆς $At^k\mathrm{e}^{rt}$, ὅπου*
$$A \;=\; \frac{1}{p^{(k)}(r)}.$$

(ii) *Ἄν $h(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$, τότε ἡ ἐξίσωση (5.27) ἔχει εἰδική λύση τῆς μορφῆς $\varphi(t) = C\cos\omega t + D\sin\omega t$, ἄν $p(\mathrm{i}\omega) \neq 0$ (ἤτοι, ἡ φανταστική τιμή $i\omega$ δέν εἶναι ρίζα τοῦ p). Ἐνῶ ἄν $p(\mathrm{i}\omega) = 0$ $\big($ἤτοι, ἡ $\mathrm{i}\omega$ ἀποτελεῖ ρίζα τοῦ $p_{\mathcal{L}}(\zeta)\big)$, ἔχει εἰδική λύση τῆς μορφῆς $\varphi(t) = t^k(C\cos\omega t + D\sin\omega t)$, ὅπου k ἡ πολλαπλότης τῆς ρίζας.*

(iii) *Ἄν ὁ μή ὁμοιογενής ὅρος ἀποτελεῖ πολυώνυμο βαθμοῦ n, τότε ἡ ἐξίσωση (5.27) ἔχει εἰδική λύση ἐπίσης πολυώνυμο βαθμοῦ n, $n+1, n+k$ ἄν τό $\zeta = 0$ δέν ἀποτελεῖ ρίζα τοῦ χαρακτηριστικοῦ πολυωνύμου, εἶναι ἁπλή ρίζα, ἤ εἶναι ρίζα πολλαπλότητος k, ἀντιστοίχως.*

(iv) *Ἄν $h(t) = q(t)\mathrm{e}^{rt}$, ὅπου $q(t)$ πολυώνυμο βαθμοῦ n, τότε ἡ ἐξίσωση (5.27) ἔχει εἰδική λύση ἐπίσης πολυώνυμο ἐπί τήν ἐκθετική e^{rt}, μέ τό πολυώνυμο νά εἶναι βαθμοῦ n, $n+1$, $n+k$ ἄν τό $\zeta = r$ δέν εἶναι ρίζα τοῦ χαρακτηριστικοῦ πολυωνύμου, εἶναι ἁπλή ρίζα, ἤ εἶναι ρίζα πολλαπλότητος k, ἀντιστοίχως.*

(v) *Ἄν ὁ μή ὁμοιογενής ὅρος $h(t)$ εἶναι τῆς μορφῆς:*

$$h(t) \;=\; \mathrm{e}^{rt}(q_1(t)\cos\omega t + q_2(t)\sin\omega t),$$

ὅπου $q_1(t)$, $q_2(t)$, πολυώνυμα μέ μέγιστο τῶν δύο βαθμό n, τότε ἡ ἐξίσωση (5.27) ἔχει εἰδική λύση τῆς ἰδίας μορφῆς

$$\varphi(t) \;=\; \mathrm{e}^{rt}\big(\bar{q}_1(t)\cos\omega t + \bar{q}_2(t)\sin\omega t\big),$$

ὅπου ὁ μέγιστος βαθμός τῶν πολυωνύμων $\bar{q}_1$, $\bar{q}_2$ εἶναι $n+k$ ἄν τό $\zeta = r + \mathrm{i}\omega$ ἀποτελεῖ ρίζα τοῦ χαρακτηριστικοῦ πολυωνύμου πολλαπλότητος k $(k \geq 0)$.

Απόδειξη. Παραλείπεται.

Ὁρισμός 5.4.1. *Ἔστω ἡ γραμμική συνήθης διαφορική ἐξίσωση $n-$στῆς τάξεως μέ σταθερούς συντελεστές:*

$$\alpha_n x^{(n)} + \alpha_{n-1} x^{(n-1)} + \cdots + \alpha_0 x^{(0)} \,=\, h(t), \quad \alpha_n \neq 0, \tag{5.28}$$

μέ μή ὁμοιογενῆ ὅρο τῆς μορφῆς:

$$h(t) \,=\, \mathrm{e}^{rt}\big(p(t)\cos\omega t \,+\, q(t)\sin\omega t\big),$$

ὅπου $p(t)$, $q(t)$ πολυώνυμα καί $\omega \in \mathbb{R}$. Λέγεται ὅτι ὁ ὅρος $h(t)$ ὑφίσταται ἁπλό (ἀντιστοίχως $k-$πλό) συντονισμό ἄν ὁ $z = r + \mathrm{i}\omega$ ἀποτελεῖ ἁπλή (ἀντιστοίχως $k-$πλή) ρίζα τοῦ χαρακτηριστικοῦ πολυωνύμου τῆς (5.28).

Ἀσκήσεις

5.4.1 Νά βρεθεῖ *εἰδική λύση* τῆς ἐξισώσεως

$$x'' + x \,=\, h(t),$$

ὅταν ὁ μή ὁμοιογενής ὅρος εἶναι:

$$\begin{array}{rlrlrl}
(i) & h(t) = 1, & (ii) & h(t) = \mathrm{e}^{t}, & (iii) & h(t) = t,\\
(iv) & h(t) = \mathrm{e}^{-2t}, & (v) & h(t) = \cosh t, & (vi) & h(t) = t^2,\\
(vii) & h(t) = \cos 2t, & (viii) & h(t) = \sin t, & (ix) & h(t) = t\cos t,\\
(x) & h(t) = \cosh t\,\cos t, & (xi) & h(t) = t\,\mathrm{e}^{3t}\cos 2t, & (xii) & h(t) = t^2\sin t,\\
(xiii) & h(t) = t^2\cos 2t, & (xiv) & h(t) = t^2 e^{2t}\cos 2t, & (xv) & h(t) = t\cos t + t^2\sin 2t.
\end{array}$$

5.4.2 Νά γίνει τό ἴδιο γιά τήν ἐξίσωση

$$x'' - 2x' + x \,=\, h(t),$$

ὅταν ὁ μή ὁμοιογενής ὅρος εἶναι:

$$\begin{array}{rlrlrl}
(i) & h(t) = \mathrm{e}^{t}, & (ii) & h(t) = \mathrm{e}^{2t}, & (iii) & h(t) = t^n,\\
(iv) & h(t) = t^n\mathrm{e}^{t}, & (v) & h(t) = t\mathrm{e}^{t}\cos t, & (vi) & h(t) = \cosh t,\\
(vii) & h(t) = t\sinh t, & (viii) & h(t) = t^n\mathrm{e}^{t}, & (xi) & h(t) = t^n\cosh t.
\end{array}$$

5.4.3 Νά βρεθεῖ ἡ γενική λύση τῶν κάτωθι μή ὁμοιογενῶν Euler:

$$\begin{array}{rlrl}
(i) & t^2x'' + tx' - x = t, & (ii) & t^2x'' + tx' - x = \log t,\\
(iii) & t^2x'' + tx' + x = t + 1/t, & (iv) & t^2x'' + tx' + x = t + \log t/t,\\
(v) & t^2x'' + tx' + x = \log t, & (vi) & t^2x'' + tx' + x = \cos(\log t),\\
(vii) & t^2x'' - 3tx' + 4x = 1, & (viii) & t^2x'' - 3tx' + 4x = t^2,\\
(ix) & t^2x'' - 3tx' + 4x = \log t, & (x) & t^2x'' - 3tx' + 4x = \cos(\log t).
\end{array}$$

5.4.4 Δίδεται ἡ μή ὁμοιογενής Euler

$$\alpha t^2x'' + \beta tx' + \gamma x \,=\, t^r\big(p_1(\log t)\cos(\omega\log t) + p_2(\log t)\sin(\omega\log t)\big).$$

Πότε ἔχομε συντονισμό;

5.4.5 Νά βρεθεῖ ἡ γενική λύση τῶν κάτωθι μή ὁμοιογενῶν ἐξίσωσεων:

$$\begin{array}{llll} (i) & x^{(6)} + 2x^{(3)} + x = \mathrm{e}^t, & (ii) & (D-\alpha)^n x = \mathrm{e}^{\beta t}, \\ (iii) & (D^2-\alpha^2)^n x = \mathrm{e}^{\beta t}, & (iv) & (D^2+\alpha D+\beta)^n x = \mathrm{e}^{rt}, \\ (v) & (D^2+\alpha^2)^n x = \sin\beta t, & (vi) & (D^2+\alpha D+\beta)^n x = \mathrm{e}^{rt}\sin\omega t. \end{array}$$

5.4.6 Νά βρεθεῖ ἡ γενική λύση σέ κάθε μία ἀπό τίς ἀκόλουθες ἐξισώσεις:

$$\begin{array}{llll} (i) & x''' - 4x'' - x' + 4x = 3\mathrm{e}^{-t}, & (ii) & x'''' + 4x'' + 4x = 1, \\ (iii) & x''' + x'' + x' + x = \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}, & (iv) & x''' + x' = 2\cos t, \\ (v) & x'''' + 2x'' + x = \cos t + t^2\mathrm{e}^t, & (vi) & x''' + x' = 2\cos t. \end{array}$$

5.4.7 Νά βρεθεῖ ἡ λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x'' + x = \cos\lambda t, \\ x(0) = x'(0) = 0, \end{cases}$$

ὡς συνάρτηση τῶν t καί λ. Ἰδιαιτέρως δείξατε ὅτι ἡ λύση τήν ὁποία βρήκατε εἶναι $C^1(\mathbb{R})$ ὡς πρός λ.

5.4.8 **Κατά κλάδους ὁρισμένος μή ὁμοιογενής ὅρος.** Νά λυθεῖ τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν:

$$\begin{cases} x'' - x = \begin{cases} \mathrm{e}^t & \text{ἄν} \quad t \geq 0, \\ \mathrm{e}^{-2t} & \text{ἄν} \quad t < 0, \end{cases} \\ x(\log 2) = 1, \quad x'(\log 2) = 0. \end{cases} \tag{5.29}$$

Υπόδειξη. Στό διάστημα $(0,\infty)$ δυνάμεθα νά εὕρομε τήν λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν φ_+, ἐνῶ στό διάστημα $(-\infty,0)$ εἶναι δυνατόν νά εὑρεθεῖ ἡ γενική λύση ἡ ὁποία εἶναι τῆς μορφῆς $\varphi_- = \varphi_0 + c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$. Δεδομένου ὅτι

$$\varphi_+ = \varphi|_{\mathbb{R}^+}, \quad \varphi_- = \varphi|_{\mathbb{R}^-}$$

ὅπου φ ἡ μοναδική λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (5.29) καί $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$, τότε σίγουρα ὅταν $t \to 0$ οἱ φ_- καί φ_+ καί οἱ παράγωγοι αὐτῶν, πρέπει νά ταυτίζονται. Τά c_1, c_2 δύνανται νά προσδιορισθοῦν ὥστε:

$$\lim_{t\to 0^-}\varphi_-(t) = \lim_{t\to 0^+}\varphi_+(t), \quad \lim_{t\to 0^-}\varphi'_-(t) = \lim_{t\to 0^+}\varphi'_+(t).$$

5.4.9 Ἔστω α, β, γ, $\delta > 0$. Δείξατε ὅτι κάθε λύση τῆς ἐξισώσεως:

$$\alpha x'' + \beta x' + \gamma x = \mathrm{e}^{-\delta t},$$

τείνει στό μηδέν ὅταν τό t τείνει στό σύν ἄπειρο.

5.4.10 Ἔστω α, β, $\gamma > 0$ καί

$$\lim_{t\to+\infty} p(t) = 0.$$

Δείξατε ὅτι κάθε λύση τῆς ἐξισώσεως:

$$\alpha x'' + \beta x' + \gamma x = p(t),$$

τείνει στό μηδέν ὅταν τό t τείνει στό σύν ἄπειρο.

5.4.11 Ἔστω $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ λύση τῆς ἐξισώσεως

$$x'' - 2x' + x = 2\mathrm{e}^t.$$

(i) Ἄν $\varphi(t) > 0$ γιά κάθε πραγματικό t, τότε $\varphi'(t) > 0$ γιά κάθε πραγματικό t; Ἐξηγῆστε τήν ἀπάντηση σας.

(ii) Ἄν $\varphi'(t) > 0$ γιά κάθε πραγματικό t, τότε $\varphi''(t) > 0$ γιά κάθε πραγματικό t; Ἐξηγῆστε τήν ἀπάντηση σας.

Putnam 1987. Βλέπε [45].

5.4.12 Ἔστω f δίς συνεχῶς διαφορίσιμη πραγματική συνάρτηση ἱκανοποιοῦσα τήν

$$f(x) + f''(x) = -xg(x)f'(x),$$

ὅπου $g(x) \geq 0$ γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δείξατε ὅτι ἡ $f(x)$ εἶναι φραγμένη.

Putnam 1997. Βλέπε [45].

5.4.13 Ἔστω $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ἡ λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x'' + 8x' + 25x = \cos t, \\ x(0) = x'(0) = 0. \end{cases}$$

Δείξατε ὅτι ὑπάρχουν κατάλληλες σταθερές $\alpha, \omega \in \mathbb{R}$ ὥστε:

$$\lim_{t \to +\infty} \big(\varphi(t) - \alpha \cos(t + \omega)\big) = 0.$$

Berkeley qualifying examinations, Summer 1984. Βλέπε [50].

5.5 Μεταβολή τῶν παραμέτρων

Πρόβλημα. *Ἔστω ὅτι τό $\{\varphi_1, \varphi_2\}$ ἀποτελεῖ θεμελιῶδες σύνολο λύσεων τῆς*

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0,$$

ὅπου p, $q \in C(I)$. Νά λυθεῖ τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x'' + p(t)x' + q(t)x = h(t), \\ x(\tau) = \xi_0, \; x'(\tau) = \xi_1, \end{cases} \tag{5.30}$$

ὅπου $h \in C(I)$ καί $\tau \in I$.

Επιλυση. Τό ἀνωτέρω πρόβλημα λύεται μέ τήν *Μέθοδο τῆς Μεταβολῆς τῶν Παραμέτρων* (*Variation of Parameters*), ἡ ὁποία ὄχι μόνο μᾶς παρέχει τήν λύση τῆς μή ὁμοιογενοῦς ἐξισώσεως, ἀλλά μᾶς παρέχει, ὅπως θά δοῦμε καί ἕνα πολύ εὔχρηστο τύπο. Ὡς γνωστόν, ἡ γενική λύση τῆς ὁμοιογενοῦς ἐξισώσεως εἶναι

$$\varphi = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2.$$

Ἡ μέθοδός μας ὀνομάζεται *μεταβολή τῶν παραμέτρων*, διότι συνίσταται στήν εὕρεση μεταβλητῶν συντελεστῶν $u_1(t)$, $u_2(t)$ γιά τούς ὁποίους ἡ συνάρτηση

$$\psi = u_1\varphi_1 + u_2\varphi_2,$$

ἀποτελεῖ λύση τῆς ἀντίστοιχης μή ὁμοιογενοῦς. Ἔχομε

$$\psi' = u_1'\varphi_1 + u_2'\varphi_2 + u_1\varphi_1' + u_2\varphi_2'. \tag{5.31}$$

Πρίν παραγωγίσομε γιά δεύτερη φορά, ἀπαιτοῦμε ἀπό τίς προσδιοριστέες συναρτήσεις u_1 καί u_2 νά ἱκανοποιοῦν:

$$u_1'\varphi_1 + u_2'\varphi_2 = 0, \tag{5.32}$$

ἡ ὁποία θά ἀποτελέσει μία ἀπό τίς δύο ἐξισώσεις τίς ὁποῖες χρειαζόμεθα γιά τόν προσδιορισμό τῶν u_1, u_2. Παραγωγίζοντας ὅ,τι ἀπέμεινε ἀπό τήν (5.31), λαμβάνομε:

$$\psi'' = u_1'\varphi_1' + u_2'\varphi_2' + u_1\varphi_1'' + u_2\varphi_2''.$$

Ἀντικαθιστῶντας τά ψ, ψ' καί ψ'' λαμβάνομε

$$\begin{aligned} h &= \psi'' + p\psi' + q\psi \\ &= u_1'\varphi_1' + u_2'\varphi_2' + u_1\varphi_1'' + u_2\varphi_2'' p\big(u_1\varphi_1' + u_2\varphi_2'\big) + q\big(u_1\varphi_1 + u_2\varphi_2\big) \\ &= u_1\big(\varphi_1'' + p\varphi_1' + q\varphi_1\big) + u_2\big(\varphi_2'' + p\varphi_2' + q\varphi_2\big) + u_1'\varphi_1' + u_2'\varphi_2'. \end{aligned}$$

Ἐν τέλει λαμβάνομε τήν δεύτερη ἐξίσωση γιά τά u_1 καί u_2:

$$u_1'\varphi_1' + u_2'\varphi_2' = h. \tag{5.33}$$

Οἱ (5.32) καί (5.33) ἀποτελοῦν σύστημα 2×2 μέ ὁρίζουσα τήν Βρονσκιανή τῶν φ_1 καί φ_2, ἡ ὁποία εἶναι μή μηδενική, ἄρα τό σύστημα ἔχει μοναδική λύση τό ζεῦγος:

$$u_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \varphi_2 \\ h & \varphi_2' \end{vmatrix}}{w(\varphi_1, \varphi_2)}, \quad u_2' = \frac{\begin{vmatrix} \varphi_1 & 0 \\ \varphi_1' & h \end{vmatrix}}{w(\varphi_1, \varphi_2)},$$

ἤ ἁπλούστερα

$$u_1' = \frac{-\varphi_2 h}{w(\varphi_1, \varphi_2)}, \quad u_2' = \frac{\varphi_1 h}{w(\varphi_1, \varphi_2)}.$$

Ὁπότε *μία λύση* τῆς μή ὁμοιογενοῦς θά εἶναι ἡ

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \varphi_1(t)\int_\tau^t u_1'(s)\,ds + \varphi_2(t)\int_\tau^t u_2'(s)\,ds \\ &= \varphi_1(t)\int_\tau^t \frac{-\varphi_2(s)h(s)}{w\big(\varphi_1(s), \varphi_2(s)\big)}\,ds + \varphi_1(t)\int_\tau^t \frac{\varphi_1(s)h(s)}{w\big(\varphi_1(s), \varphi_2(s)\big)}\,ds \\ &= \int_\tau^t \frac{\begin{vmatrix} \varphi_1(s) & \varphi_1(t) \\ \varphi_2(s) & \varphi_2(t) \end{vmatrix}}{w\big(\varphi_1(s), \varphi_2(s)\big)}\,h(s)\,ds, \end{aligned} \tag{5.34}$$

ἡ ὁποία ὅπως εὐκόλως διαπιστοῦται, ἱκανοποιεῖ καί τίς ἀρχικές συνθῆκες:

$$\psi(\tau) = \psi'(\tau) = 0,$$

ἄρα ἀποτελεῖ τήν μοναδική λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (5.30), γιά $\xi_0 = \xi_1 = 0$.

Παρατήρηση. Ἡ ψ γράφεται καί ὡς

$$\psi(t) = \int_\tau^t K(t,s)\,h(s)\,ds = (\mathcal{K}h)\,(t).$$

Τό σύμβολο $\mathcal{K}$ ἀποτελεῖ ἕνα *ὁλοκληρωτικό τελεστή*. Ἰδιαιτέρως ἰσχύει ὅτι γιά κάθε $h \in C(I)$

$$\mathcal{L}\mathcal{K}h = h \qquad \text{ἤ} \qquad \mathcal{L}\mathcal{K} = \mathcal{I},$$

καί ἄν $\psi \in C^2(I)$, μέ $\psi(\tau) = \psi'(\tau) = 0$, τότε

$$\mathcal{K}\mathcal{L}\psi = \psi.$$

Τρόπον τινά λοιπόν, ὁ ὁλοκληρωτικός τελεστής $\mathcal{K}$ ἀποτελεῖ ἀντίστροφο τοῦ διαφορικοῦ τελεστοῦ $\mathcal{L}$.

Παράδειγμα. *Νά λυθεῖ τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν*

$$\begin{cases} x'' + \omega^2 x = p(t), \\ x(\tau) = x'(\tau) = 0, \end{cases}$$

ὅπου ω θετική σταθερα, $p \in C(I)$, I ἀνοικτό διάστημα καί $\tau \in I$.

Επιλυση. Οἱ συναρτήσεις $\{\cos\omega t, \sin\omega t\}$ ἀποτελοῦν θεμελιῶδες σύνολο λύσεων τῆς ἀντιστοίχου ὁμοιογενοῦς. Ἡ δέ Βρονσκιανή αὐτῶν ἰσοῦται μέ

$$w(t) = \begin{vmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\omega\sin\omega t & \omega\cos\omega t \end{vmatrix} = \omega.$$

Εἶναι λοιπόν σταθερή. Λόγῳ τῆς (5.34) ἡ

$$\psi(t) = \frac{1}{\omega}\int_\tau^t \begin{vmatrix} \cos\omega s & \cos\omega t \\ \sin\omega s & \sin\omega t \end{vmatrix} p(s)\,ds = \frac{1}{\omega}\int_\tau^t \sin\big(\omega(t-s)\big)\,p(s)\,ds,$$

θά ἀποτελεῖ τήν ζητούμενη λύση.

Γενίκευση. Ἡ μέθοδος τῆς μεταβολῆς τῶν παραμέτρων δύναται νά γενικευθεῖ καί στήν περίπτωση τῶν ἐξισώσεων $n-$στῆς τάξεως. Ἔστω λοιπόν ὅτι ἡ $n-$άδα $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ ἀποτελεῖ θεμελιῶδες σύνολο λύσεων τῆς ἐξισώσεως

$$\mathcal{L}x = 0,$$

ὅπου

$$\mathcal{L} \;=\; D^n + p_{n-1}(t)D^{n-1} + \cdots + p_0(t).$$

Ἄς ὑποθέσομε ὅτι ἀναζητοῦμε τήν λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} \mathcal{L}x \;=\; h(t), \\ x^{(k)}(\tau) \;=\; 0,\; k = 0, \ldots, n-1. \end{cases} \tag{5.35}$$

Ὅπως καί στήν περίπτωση τῆς δευτέρας τάξεως θά ἀναζητήσομε λύση μέ μεταβλητούς συντελεστές

$$\psi(t) \;=\; u_1(t)\varphi_1(t) + \cdots + u_n(t)\varphi_n(t).$$

Ὁ προσδιορισμός τῶν n ἀγνώστων *μεταβλητῶν συντελεστῶν* καθίσταται ἐφικτός ὅταν ἔχομε στήν διάθεσή μας n κατάλληλες ἐξισώσεις. Οἱ $n-1$ ἐξ αὐτῶν ἐπιλέγονται *αὐθαιρέτως*, ἐνῶ μόνο ἡ $n-$στή ἀποτελεῖ τήν διαφορική ἐξίσωση. Ἔχομε λοιπόν:

$$\psi'(t) \;=\; \sum_{l=1}^{n} u_l'(t)\varphi_l(t) + \sum_{l=1}^{n} u_l(t)\varphi_l'(t), \tag{5.36}$$

ὁπότε ἡ πρώτη μας ἐξίσωση θά εἶναι ἡ

$$u_1'(t)\varphi_1(t) + \cdots + u_n'(t)\varphi_n(t) \;=\; 0. \tag{5.37}$$

Παραγωγίζοντας ἐκ νέου, τήν (5.36), καί χρησιμοποιῶντας τήν (5.37) λαμβάνομε:

$$\psi''(t) \;=\; \sum_{l=1}^{n} u_l'(t)\varphi_l'(t) + \sum_{l=1}^{n} u_l(t)\varphi_l''(t),$$

ἀπ' ὅπου καί ἡ δεύτερη μας ἐξίσωση:

$$u_1'(t)\varphi_1'(t) + \cdots + u_n'(t)\varphi_n'(t) \;=\; 0.$$

Μέ αὐτή τήν διαδικασία προκύπτουν οἱ πρῶτες $n-1$ ἐξισώσεις. Συγκεκριμένα ἡ $k-$στή παράγωγος τῆς ψ θά εἶναι ἡ

$$\psi^{(k)}(t) \;=\; \sum_{l=1}^{n} u_l'(t)\varphi_l^{(k-1)}(t) + \sum_{l=1}^{n} u_l(t)\varphi_l^{(k)}(t),$$

ἀπ' ὅπου προκύπτει καί ἡ $k-$στή ἐξίσωση γιά τίς $u_1, \ldots, u_n$

$$u_1'(t)\varphi_1^{(k-1)}(t) + \cdots + u_n'(t)\varphi_n^{(k-1)}(t) \;=\; 0.$$

Τέλος ἡ $n-$στή παράγωγος τῆς ψ θά εἶναι ἡ

$$\psi^{(n)}(t) \;=\; \sum_{l=1}^{n} u_l'(t)\varphi_l^{(n-1)}(t) + \sum_{l=1}^{n} u_l(t)\varphi_l^{(n)}(t).$$

Ἀντικαθιστῶντας τά $\psi, \psi', \dots, \psi^{(n)}$ μέ αὐτό μέ τό ὁποῖο ἰσοῦνται λαμβάνομε

$$\begin{aligned} h &= \psi^{(n)} + p_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + p_0 x^{(0)} \\ &= u_1'\varphi_1^{(n-1)} + \cdots + u_n'\varphi_n^{(n-1)} + u_1\varphi_1^{(n)} + \cdots + u_n\varphi_n^{(n)} \\ &\quad + p_{n-1}\big(u_1\varphi_1^{(k)} + \cdots + u_n\varphi_n^{(k)}\big) + \cdots + p_0\big(u_1\varphi_1 + \cdots + u_n\varphi_n\big) \\ &= u_1(\varphi_1^{(n)} + p_{n-1}\varphi_1^{(n-1)} + \cdots + p_0\varphi_1) + \cdots + \\ &\quad + u_n(\varphi_n^{(n)} + p_{n-1}\varphi_n^{(n-1)} + \cdots + p_0\varphi_n) + u_1'(t)\varphi_1^{(n-1)} + \cdots + u_n'\varphi_n^{(n-1)} \\ &= 0 + \cdots + 0 + u_1'(t)\varphi_1^{(n-1)} + \cdots + u_n'\varphi_n^{(n-1)}, \end{aligned}$$

ἡ ὁποία ἀποτελεῖ καί τήν $n-$στή ἐξίσωση. Συνολικῶς ἔχομε τό σύστημα

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} \varphi_1(t)\, u_1'(t) & + & \cdots & + & \varphi_n(t)\, u_n'(t) & = & 0, \\ \varphi_1'(t)\, u_1'(t) & + & \cdots & + & \varphi_n'(t)\, u_n'(t) & = & 0, \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t)\, u_1'(t) & + & \cdots & + & \varphi_n^{(n-1)}(t)\, u_n'(t) & = & h, \end{array} \right.$$

τό ὁποῖο ἔχει λύση διότι ἡ ὁρίζουσα τοῦ συστήματος εἶναι ἡ Βρονσκιανή ἡ ὁποία δέν μηδενίζεται λόγῳ τοῦ ὅτι οἱ $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ ἀποτελοῦν θεμελιῶδες σύνολο λύσεων. Ἡ λύση τοῦ συστήματος αὐτοῦ λαμβάνεται μέ τόν νόμο τοῦ Cramer[88]:

$$u_k'(t) = \frac{w_k\big(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)\big)}{w\big(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)\big)}, \quad k = 1, \dots, n,$$

ὅπου

$$w(t) = w\big(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)\big),$$

ἡ Βρονσκιανή, ἐνῶ οἱ συναρτήσεις

$$w_k(t) = w_k\big(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)\big),$$

$k = 1, \dots, n$ δίδονται ἀπό τόν τύπο

$$w_k(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \cdots & \varphi_{k-1}(t) & 0 & \varphi_{k+1}(t) & \cdots & \varphi_n(t) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-2)}(t) & \cdots & \varphi_{k-1}^{(n-2)}(t) & 0 & \varphi_{k+1}^{(n-2)}(t) & \cdots & \varphi_n^{(n-2)}(t) \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \cdots & \varphi_{k-1}^{(n-1)}(t) & h & \varphi_{k+1}^{(n-1)}(t) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}.$$

[88] Cramer, Gabriel (1704–1752). Γαλλόφωνος Ἑλβετός μαθηματικός.

Ἄν τώρα $\tau \in I$, ὅπου I τό πεδίο ὁρισμοῦ τῶν λύσεων, τότε μιά λύση τῆς ἐξισώσεως $\mathcal{L}x = h$ θά εἶναι ἡ

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \varphi_1(t)\int_\tau^t u_1'(s)\,ds + \cdots + \varphi_n(t)\int_\tau^t u_n'(s)\,ds \\ &= \varphi_1(t)\int_\tau^t \frac{w_1(s)}{w(s)}\,ds + \cdots + \varphi_n(t)\int_\tau^t \frac{w_n(s)}{w(s)}\,ds \;=\; \int_\tau^t \frac{W(t,s)}{w(s)} h(s)\,ds, \end{aligned}$$

ὅπου

$$W(t,s) \;=\; \begin{vmatrix} \varphi_1(s) & \cdots & \varphi_{n-1}(s) & \varphi_n(s) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-2)}(s) & \cdots & \varphi_{n-1}^{(n-2)}(s) & \varphi_n^{(n-2)}(s) \\ \varphi_1(t) & \cdots & \varphi_{n-1}(t) & \varphi_n(t) \end{vmatrix},$$

καί εἶναι μάλιστα ἡ λύση ἐκείνη ἡ ὁποία ἱκανοποιεῖ καί τίς ἀρχικές συνθῆκες

$$\psi(\tau) \;=\; \psi'(\tau) \;=\; \cdots \;=\; \psi^{(n-1)}(\tau).$$

Ἄρα εἶναι καί ἡ μοναδική λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (5.35).

Παρατήρηση. Εἴμαστε σέ θέση νά παρατηρήσομε ὅτι ἡ λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (5.35) δίδεται, ὅπως καί στήν περίπτωση τῆς δευτέρας τάξεως, μέσῳ ὁλοκληρωτικοῦ τελεστοῦ ἐπί τοῦ μή ὁμοιογενοῦς ὅρου:

$$\psi(t) \;=\; \int_\tau^t K(t,s)h(s)\,ds \;=\; (\mathcal{K}h)(t),$$

ὅπου

$$K(t,s) \;=\; \frac{\begin{vmatrix} \varphi_1(s) & \cdots & \varphi_{n-1}(s) & \varphi_n(s) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-2)}(s) & \cdots & \varphi_{n-1}^{(n-2)}(s) & \varphi_n^{(n-2)}(s) \\ \varphi_1(t) & \cdots & \varphi_{n-1}(t) & \varphi_n(t) \end{vmatrix}}{w\big(\varphi_1(s),\ldots,\varphi_n(s)\big)}.$$

Ὁ τελεστής $\mathcal{K}$ ἀποτελεῖ τό *δεξιό* ἀντίστροφο τοῦ *διαφορικοῦ τελεστοῦ* L. Πράγματι, ἄν h τυχοῦσα συνεχής συνάρτηση στό ἀνοικτό διάστημα I, τότε

$$L\mathcal{K}h \;=\; h,$$

διότι ἡ $\mathcal{K}h$ ἀποτελεῖ τήν λύση τοῦ (5.35). Συμβολικά

$$L\mathcal{K} \;=\; \mathcal{I},$$

ὅπου $\mathcal{I}$ ἡ ταυτοτική συνάρτηση στό $C(I)$. Σέ κατάλληλο σύνολο ὁ $\mathcal{K}$ ἀποτελεῖ καί ἀριστερό ἀντίστροφο. Ἄν τώρα $\psi \in C^n(I)$ καί $\psi(\tau) = \cdots = \psi^{(n-1)}(\tau) = 0$, τότε

$$\mathcal{K}L\psi = \psi,$$

ἤ διαφορετικά

$$\mathcal{K}L = \mathcal{I}.$$

Ἀσκήσεις

5.5.1 Νά βρεθεῖ ἡ γενική λύση τῶν κάτωθι ἐξισώσεων

$$\begin{array}{llll} (i) & x'' - 2x' + x = \mathrm{e}^t/t, & (ii) & x'' + x = \sin^2 2t, \\ (iii) & x'' + 4x = \sec t, & (iv) & x'' + 2x' + x = \sec^2 t, \\ (v) & t^2x'' + 2tx' + 9x = t^3\mathrm{e}^t, & (vi) & t^2x'' + tx' - 9x = t^3\mathrm{e}^{3t}. \end{array}$$

5.5.2 Στά παραδείγματα τά ὁποῖα ἀκολουθοῦν, νά εὑρεθεῖ ἡ γενική λύση διά τῆς μεθόδου τῆς μεταβολῆς τῶν παραμέτρων:

$$\begin{array}{llll} (i) & x''' + x' = \tan t, & (ii) & x''' - 2x'' - x' + 2x = \mathrm{e}^{4t}, \\ (iii) & x''' - x'' + x' - x = \mathrm{e}^{-t}\sin t, & (iv) & x'''' + 2x'' + x = \sin t. \end{array}$$

5.5.3 Νά ἐπιλυθεῖ τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x'' - \lambda^2 x = p(t), \\ x(\tau) = \xi_0, \, x'(\tau) = \xi_1, \end{cases}$$

ὅπου p συνεχής στό ἀνοικτό διάστημα I καί $\tau \in I$.

5.5.4 Ἔστω $p \in C(\mathbb{R})$ περιοδική συνάρτηση μέ περίοδο T. Ὑπάρχουν α, β ὥστε ἡ λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x'' - x = p(t), \\ x(0) = \alpha, \; x'(0) = \beta, \end{cases}$$

νά εἶναι περιοδική;

Υπόδειξη. Νά ἐκφρασθεῖ ἡ λύση τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν μέσῳ τῆς μεθόδου μεταβολῆς τῶν παραμέτρων.

5.5.5 Νά βρεθεῖ τύπος ὁποῖος νά δίδει εἰδική λύση τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως

$$x''' - x'' + x' - x = h(t).$$

5.5.6 Νά βρεθεῖ τύπος ὁποῖος νά δίδει εἰδική λύση τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως

$$x''' - x' - x = h(t).$$

5.5.7 Νά βρεθεῖ τύπος ὁποῖος νά δίδει εἰδική λύση τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως

$$x''' - 3x'' + 3x' - x = h(t).$$

5.5.8 Νά βρεθεῖ τύπος ὁποῖος νά δίδει εἰδική λύση τῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως

$$t^3x''' - 3t^2x'' + 6tx' - 6x = h(t).$$

γιά $t > 0$.

5.6 Ὑποβιβασμός τῆς τάξεως

Γενική μέθοδος ἐπιλύσεως τῆς γραμμικῆς (ὁμοιογενοῦς ἤ μή) τάξεως δύο ἤ μεγαλυτέρας, δέν ὑπάρχει. Στήν περίπτωση τῶν ἐξισώσεων δευτέρας τάξεως ὑπάρχει ἡ δυνατότης νά εὑρεθεῖ ἡ γενική λύση, ἄν εἶναι γνωστή μιά μή μηδενική λύση αὐτῆς. Γενικότερα, ἄν σέ μιά γραμμική ἐξίσωση $n-$στῆς τάξεως εἶναι γνωστές k γραμμικῶς ἀνεξάρτητες λύσεις, τότε εἶναι δυνατόν νά ἀναχθεῖ ἡ ἐξίσωση αὐτή σέ ἐξίσωση τάξεως $n-k$.

Πρόβλημα. *Ἀφοῦ διαπιστωθεῖ ὅτι ἡ* e^t *ἀποτελεῖ λύση τῆς*

$$tx'' - (2t+1)x' + (t+1)x = 0, \tag{5.38}$$

νά βρεθεῖ ἡ γενική της λύση.

Επιλυση. Πράγματι ἡ e^t ἀποτελεῖ λύση τῆς (5.38). Ἡ εὕρεση τῆς γενικῆς λύσεως αὐτῆς καθίσταται ἐφικτή μέ τόν κάτωθι μετασχηματισμό[89]

$$x = \mathrm{e}^t v.$$

Ὁπότε:

$$x' = \mathrm{e}^t v' + \mathrm{e}^t v \qquad \text{καί} \qquad x'' = \mathrm{e}^t v'' t + 2\mathrm{e}^t v' + \mathrm{e}^t v.$$

Ἀντικαθιστῶντας στήν (5.38) λαμβάνομε:

$$t(\mathrm{e}^t v'' + 2\mathrm{e}^t v' + \mathrm{e}^t v) - (2t+1)(\mathrm{e}^t v' + \mathrm{e}^t v) + (t+1)\mathrm{e}^t v = 0,$$

ἤ

$$t(v'' + 2v' + v) - (2t+1)(v' + v) + (t+1)v = 0,$$

ἤ

$$tv'' + (2t - 2t - 1)v' + (t - 2t - 1 + t + 1)v = 0,$$

ἤ ἰσοδύναμα:

$$tv'' - v' = 0.$$

Ἡ ἀνωτέρω διαφορική ἐξίσωση τοῦ v ἄν καί δευτέρας τάξεως, δύναται νά ἐπιλυθεῖ ὡς ἐξίσωση πρώτης τάξεως:

$$\frac{v''}{v'} = \frac{1}{t},$$

ἄρα $v' = c_1 t$ καί ἐν τέλει

$$v = c_1 t^2 + c_2.$$

[89] Ὁ μετασχηματισμός αὐτός ὁ ὁποῖος ὁδηγεῖ στόν *ὑποβιβασμό τῆς τάξεως* (*reduction of order*) εἰσήχθη ἀπό τόν Jean D'Alembert (1717–1783).

Ὁπότε γιά τήν ἐξίσωση (5.38) λαμβάνομε τελικῶς ὡς γενική λύση τήν:

$$x = \mathrm{e}^t(c_1t^2 + c_2).$$

Ἡ ἀνωτέρω εἶναι πράγματι ἡ γενική της λύση διότι οἱ συναρτήσεις e^t καί $t^2\mathrm{e}^t$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητες. [Γιατί ;]

Γενική περίπτωση

Προβλημα. *Δοθέντος ὅτι ἡ φ ἀποτελεῖ μή μηδενική λύση τῆς ἐξισώσεως*

$$x'' + px' + qx = 0,$$

τότε νά βρεθεῖ ἡ λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν:

$$\begin{cases} x'' + p(t)x' + q(t)x = h(t), \\ x(\tau) = \xi_0,\ x'(\tau) = \xi_1. \end{cases} \tag{5.39}$$

Μεθοδολογια Επιλυσεως. Θέτομε ἐκ νέου $x = \varphi v$ ὁπότε

$$x' = \varphi v' + \varphi' v, \qquad x'' = \varphi v'' + 2\varphi' v' + \varphi'' v.$$

Ἀντικαθιστῶντας στήν ἐξίσωση ἔχομε:

$$\begin{aligned} x'' + px' + qx &= \varphi v'' + 2\varphi' v' + \varphi'' v + p(\varphi v' + \varphi' v) + q\varphi v \\ &= v(\varphi'' + p\varphi' + q\varphi) + \varphi v'' + (2\varphi' + p\varphi)v' \\ &= \varphi v'' + (2\varphi' + p\varphi)v'. \end{aligned}$$

Ἄρα ἀναγόμεθα στήν ἐξίσωση

$$\varphi v'' + (2\varphi' + p\varphi)v' = h, \tag{5.40}$$

ἡ ὁποία δύναται νά ἐπιλυθεῖ ὡς γραμμική πρώτης τάξεως:

$$v'' + \left(\frac{2\varphi' + p\varphi}{\varphi}\right)v' = \frac{h}{\varphi}.$$

Ὡς ὁλοκληρωτικό παράγοντα αὐτῆς, δυνάμεθα νά ἐπιλέξομε τήν συνάρτηση:

$$\begin{aligned} \mu(t) &= \exp\Big(\int_\tau^t \frac{2\varphi'(s) + p(s)\varphi(s)}{\varphi(s)}\,ds\Big) \\ &= \exp\Big(\int_\tau^t \frac{2\varphi'(s)}{\varphi(s)}\,ds\Big)\exp\Big(\int_\tau^t p(s)\,ds\Big) \\ &= \exp\big(2\log|\varphi(t)|\big)\exp\Big(\int_\tau^t p(s)\,ds\Big) = \varphi^2(t)\exp\Big(\int_\tau^t p(s)\,ds\Big), \end{aligned}$$

γιά κάποιο $\tau \in I$. Ἄν λοιπόν πολλαπλασιάσομε μ' αὐτόν τήν (5.40) θά ἔχομε:

$$\Big(\varphi^2(t)\,\mathrm{e}^{\int_\tau^t p(s)\,ds} v'\Big)' = \varphi(t)\,h(t)\,\mathrm{e}^{\int_\tau^t p(s)\,ds}. \tag{5.41}$$

Ὅμως, ἐπειδή $x' = \varphi' v + \varphi v'$, τότε

$$\varphi^2(t)v' = \varphi(t)x' - \varphi(t)\varphi'(t)v = \varphi(t)x' - \varphi'(t)x.$$

Κατ' αὐτό τόν τρόπο ἡ (5.41) λαμβάνει τήν μορφή:

$$\Big(\mathrm{e}^{\int_\tau^t p(s)\,ds}\big(\varphi(t)x' - \varphi'(t)x\big)\Big)' = \varphi(t)h(t)\mathrm{e}^{\int_\tau^t p(s)\,ds}.$$

Ὁλοκληρώνοντας στό διάστημα $[\tau, t]$ καί ἐνσωματώνοντας τίς ἀρχικές συνθῆκες τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (5.39) λαμβάνομε

$$\mathrm{e}^{\int_\tau^t p(s)\,ds}\big(\varphi(t)x' - \varphi'(t)x\big) - \big(\varphi(\tau)\xi_1 - \varphi'(\tau)\xi_0\big) = \int_\tau^t \varphi(s)h(s)\mathrm{e}^{\int_\tau^s p(\sigma)d\sigma}\,ds,$$

ἤ

$$\varphi(t)x' - \varphi'(t)x = \mathrm{e}^{-\int_\tau^t p(s)\,ds}\big(\varphi(\tau)\xi_1 - \varphi'(\tau)\xi_0\big) + \int_\tau^t \varphi(s)h(s)\mathrm{e}^{-\int_s^t p(\sigma)d\sigma}\,ds,$$

ἡ ὁποία ἀποτελεῖ πρώτης τάξεως πλέον ἐξίσωση. Ἄρα λοιπόν ἡ τάξη τῆς ἀρχικῆς ἐξισώσεως ἔχει ἤδη μειωθεῖ κατά ἕνα. Τοιουτοτρόπως, τό ἀρχικό πρόβλημα ἀνήχθη στό κατωτέρω πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν

$$x' - \Big(\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}\Big)x = g(t), \quad x(\tau) = \xi_0,$$

τό ὁποῖο εἶναι πρώτης τάξεως καί

$$g(t) = \frac{1}{\varphi(t)}\,\mathrm{e}^{-\int_\tau^t p(s)\,ds}\big(\varphi(\tau)\xi_1 - \varphi'(\tau)\xi_0\big) + \int_\tau^t \varphi(s)r(s)\,\mathrm{e}^{-\int_s^t p(\sigma)d\sigma}\,ds.$$

Σημειωτέον τήν ἀνωτέρω διαδικασία πρέπει νά ὑποθέσομε ὅτι $\varphi(\tau) \neq 0$.

Ἀσκήσεις

5.6.1 Νά εὑρεθεῖ ἡ γενική λύση τῆς ἐξισώσεως

$$(1-t)\,x'' + t\,x' - x = 2(t-1)^2\mathrm{e}^{-t},$$

δεδομένου ὅτι ἡ $\varphi = \mathrm{e}^t$ ἀποτελεῖ εἰδική λύση τῆς ἀντίστοιχης ὁμοιογενοῦς.

5.6.2 Νά ἐπιλυθεῖ τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} t\,x'' - (1+t)x' + x = t^2\mathrm{e}^{2t}, \\ x(1) = x'(1) = 0, \end{cases}$$

δεδομένου ὅτι ἡ συνάρτηση $\varphi = t+1$ ἀποτελεῖ λύση τῆς ἀντίστοιχης ὁμοιογενοῦς συνήθους διαφορικῆς ἐξισώσεως τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος.

5.6.3 Νά βρεθεῖ ἡ γενική λύση τῆς μή ὁμοιογενοῦς ἐξισώσεως δευτέρας τάξεως

$$x'' - \frac{\varphi''}{\varphi} x = h,$$

ἀφοῦ πρῶτα βρεθεῖ κατάλληλη λύση τῆς ἀντίστοιχης μή ὁμοιογενοῦς. Νά ἐκφρασθεῖ ἡ γενική λύση μέ κατάλληλο ὁλοκλήρωμα.

5.6.4 Δεῖξτε ὅτι ἄν ἡ φ ἀποτελεῖ λύση τῆς ἐξισώσεως

$$x''' + p_2(t)x'' + p_1(t)x' + p_0(t)x = 0$$

καί $x = \varphi(t)y$, τότε ἡ y ἱκανοποιεῖ τήν ἐξίσωση

$$\varphi y''' + \left(3\varphi' + p_2\varphi\right) y'' + \left(3\varphi'' + 2p_2\varphi' + p_1\varphi\right) y' = 0.$$

5.6.5 Νά βρεθεῖ ἡ γενική λύση τῆς ἐξισώσεως

$$(2-t)\,x''' + (2t-3)\,x'' - t\,x' + x = 0,$$

δεδομένου ὅτι ἡ $\varphi(t) = \mathrm{e}^t$ ἀποτελεῖ λύση αὐτῆς.

5.6.6 Νά βρεθεῖ ἡ γενική λύση τῆς ἐξισώσεως

$$(t^3 + 3t^2)\,x''' - (3t^2 + 6t)\,x'' + (6t+6)x' - 6x = 0,$$

δεδομένου ὅτι οἱ συναρτήσεις $\varphi_1(t) = t^2$ καί $\varphi_2(t) = t^3$ ἀποτελοῦν λύσεις αὐτῆς.

5.7 Μή γραμμικές ἐξισώσεις

Σ' αὐτή τήν παράγραφο θά δοῦμε δύο μεθόδους οἱ ὁποῖες μᾶς ἐπιτρέπουν νά ἀναγάγομε μή γραμμικές ἐξισώσεις δευτέρας (ἤ ἀνωτέρας) τάξεως εἰδικῶν μορφῶν σέ πρώτης (ἤ μειωμένης κατά ἕνα) τάξεως. Συγκεκριμένα ἡ ἐπίλυσή τους θά ἀναχθεῖ σέ ἐπίλυση δύο ἐξισώσεων πρώτης τάξεως βαθμωτῶν.

5.7.1 Αὐτόνομες ἐξισώσεις

Εἶναι οἱ ἐξισώσεις τῆς μορφῆς

$$x'' = f(x, x'). \tag{5.42}$$

Ἡ ἀναγωγή σέ ἐξισώσεις πρώτης τάξεως πραγματοποιεῖται μέσῳ ἀναζητήσεως συναρτήσεως *ροῆς* u γιά τήν ὁποία ἰσχύει ὅτι:

$$x' = u(x). \tag{5.43}$$

Παραγωγίζοντας τήν (5.43) ὡς πρός t λαμβάνομε:

$$x'' = u'(x)x' = u'(x)u(x).$$

Ὡς ἐκ τούτου ἡ (5.42) λαμβάνει τήν μορφή

$$u'(x)u(x) = f\big(x, u(x)\big),$$

ἤ

$$u'(x) = \frac{f\big(x, u(x)\big)}{u(x)},$$

ἡ ὁποία ἀποτελεῖ ἐξίσωση πρώτης τάξεως μέ ζητούμενη συνάρτηση τήν u καί μεταβλητή αὐτῆς τήν x.

Πρόβλημα. *Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση:*

$$xx'' = (x')^2.$$

Επιλυση. Ἡ ἐξίσωσή μας γράφεται:

$$x'' = \frac{(x')^2}{x}.$$

Ἀναζητοῦμε u ἱκανοποιοῦσα τήν ἐξίσωση $x' = u(x)$ ὁπότε λόγῳ τῶν ἀνωτέρω ἡ u θά πρέπει νά ἱκανοποιεῖ τήν ἐξίσωση

$$u' = \frac{f(x,u)}{u} = \frac{u^2/x}{u} = \frac{u}{x},$$

ἀπ' ὅπου προκύπτει ὅτι $u = c_1 x$, γιά κάποιο c_1 σταθερό. Ἄρα ἡ x θά ἱκανοποιεῖ τήν ἐξίσωση πρώτης τάξεως

$$x' = c_1 x,$$

ἡ ὁποία ἔχει γενική λύση

$$x = c_2 \mathrm{e}^{c_1 t},$$

καί ἀποτελεῖ *διπαραμετρική οἰκογένεια.*

5.7.2 Μή γραμμικές ὁμοιογενεῖς

Εἶναι οἱ ἐξισώσεις τῆς μορφῆς

$$F(t, x, x', x'') = 0,$$

ὅπου ἡ F εἶναι *ὁμοιογενής ὡς πρός* x. Ἤτοι

$$F(t, \lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) = \lambda^\alpha F(t, x_1, x_2, x_3),$$

γιά κάθε λ θετικό, γιά κάποιο α στό $\mathbb{R}$. Ἐδῶ ὁ μετασχηματισμός μας εἶναι

$$x = \mathrm{e}^y,$$

ὁπότε

$$x' = \mathrm{e}^y y', \qquad x'' = \mathrm{e}^y\big(y' + (y')^2\big).$$

Ἄρα

$$\begin{aligned} 0 = F\big(t, x, x', x''\big) &= F\big(t, \mathrm{e}^y, \mathrm{e}^y y', \mathrm{e}^y\big(y'' + (y')^2\big)\big) \\ &= (\mathrm{e}^y)^a F\big(t, 1, y', y'' + (y')^2\big), \end{aligned}$$

ἤ ἰσοδύναμα:

$$F(t, 1, y', y'' + (y')^2) = 0,$$

ἡ ὁποία ἀποτελεῖ οὐσιαστικά ἐξίσωση πρώτης τάξεως.

Σημειωτέον ὅτι ἡ ἴδια ἁπλούστευση ἐπιτυγχάνεται καί μέσῳ τοῦ μετασχηματισμοῦ $x = -\mathrm{e}^y$ ὁ ὁποῖος πραγματοποιεῖται ὅταν ἡ λύση λαμβάνει ἀρνητικές τιμές.

Πρoβλημα. *Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση:*

$$xx'' = t(x')^2.$$

Επιλυση. Ἡ ἀνωτέρω εἶναι τῆς μορφῆς $F(t, x, x', x'') = 0$, ὅπου

$$F(t, x, x', x'') = xx'' - t(x')^2.$$

Εἶναι προφανές ὅτι ἡ ἀνωτέρω F εἶναι ὡς πρός x ὁμοιογενής. Μέ τόν προηγηθέντα μετασχηματισμό $x = \mathrm{e}^y$ ἡ ἐξίσωση μας λαμβάνει τήν μορφή:

$$\mathrm{e}^y \mathrm{e}^y (y'' + (y')^2) = t\big(\mathrm{e}^y y'\big)^2,$$

ἤ ἁπλούστερα:

$$y'' = (t-1)(y')^2,$$

ἡ ὁποία λύεται ὡς ἐξίσωση χωριζομένων μεταβλητῶν:

$$(y')^{-2} y'' = (t-1),$$

ἤ

$$-\Big((y')^{-1}\Big)' = \left(\frac{t^2}{2} - t\right)',$$

ὁπότε

$$-(y')^{-1} = \frac{t^2}{2} - t + c_1,$$

καί ἄρα

$$y' = -\frac{1}{\dfrac{t^2}{2} - t + c_1} = -\frac{2}{(t-1)^2 + 2c_1 - 1}.$$

Γιά νά βρεθεῖ ἡ γενική ἔκφραση τῆς x θά πρέπει νά ὑπολογισθεῖ τό ἀνωτέρω ἀόριστο ὁλοκλήρωμα, στό ὁποῖο θά ἐμφανίζονται δύο ἐλεύθερες σταθερές c_1, c_2 καί ἀκολούθως θά προβοῦμε στόν ἀντίστροφο μετασχηματισμό

$$x = \log y,$$

ἤ $x = \log(-y)$.

Ἀσκήσεις

5.7.1 Νά βρεθεῖ ἡ γενική λύση στίς ἐξισώσεις οἱ ὁποῖες ἀκολουθοῦν:

(i) $x'' + (x')^2 - \mathrm{e}^{-x} = 0.$ (ii) $xx'' + (x')^3 = 0.$ (iii) $x'' = t^2 x.$

(iv) $xx'' = \dfrac{(x')^2}{t}.$ (v) $x^2x'' + x\,(x')^2 - \dfrac{1}{2} = 0.$ (vi) $x'' + x\,(x')^3 = 0.$

(vii) $xx'' + f(t)(x')^2 = 0.$ $(viii)$ $x'x'' + f(t)x^2 = 0.$ (xi) $x'' + 3xx' + x^3 = 1.$

5.7.2 Τί συμβαίνει ἄν ἐπιχειρήσομε νά ἐπιλύσομε τήν ἐξίσωση

$$\alpha x'' + \beta x' + \gamma = 0,$$

ὡς αὐτόνομη;

5.7.3 Τί συμβαίνει ἄν ἐπιχειρήσομε νά ἐπιλύσομε τήν ἐξίσωση

$$x'' + p(t)x' + q(t) = 0,$$

ὡς ὁμοιογενῆ ὡς πρός x;

5.7.4 Τί συμβαίνει ἄν ἐπιχειρήσομε νά ἐπιλύσομε τήν ἐξίσωση

$$\alpha t^2 x'' + \beta t x' + \gamma = 0,$$

ὡς ὁμοιογενῆ ὡς πρός x;

Κεφάλαιο 6

᾿Επεκτασιμότης τῶν λύσεων

Τά θεμελιώδη θεωρήματα ὑπάρξεως 3.3.11 καί 3.4.5, ἐξασφαλίζουν λύση *τοπικῶς* καί συγκεκριμένα σ' ἕνα *μικρό* διάστημα μέ μέσο τόν ἀρχικό χρόνο. Εἶναι ἄραγε αὐτό ὅ,τι καλύτερο δυνάμεθα νά ἐπιτύχομε; Ἡ ἀπάντηση, εἶναι βεβαίως ἀρνητική. Στήν πραγματικότητα, ὅταν ὑπάρχουν συνθῆκες ἐξασφαλίζουσες *καθολική μοναδικότητα*, τότε εἴμαστε σέ θέση νά κατασκευάσομε *μεγίστως ὁρισμένη λύση*, δηλαδή νά ἐπεκτείνομε τήν λύση ὅσο αὐτό εἶναι δυνατόν. Συγχρόνως θά δοῦμε πῶς ἐξασφαλίζεται ἡ καθολικότης στήν ὕπαρξη τῶν λύσεων.

6.1 Λύση ὁρισμένη σέ μέγιστο διάστημα

Χρησιμοποιῶντας καθαρῶς συνολοθεωρητικές μεθόδους, εἴμεθα τώρα σέ θέση νά ἀποδείξομε ὅτι, ὅταν πληροῦνται προϋποθέσεις ἐξασφαλίζουσες τήν καθολική μοναδικότητα στίς λύσεις προβλήματων ἀρχικῶν τιμῶν, τότε εἶναι δυνατός ὁ ὁρισμός *μεγίστως ὁρισμένων λύσεων*. Ἀργότερα θά δοῦμε ὅτι, ἀκόμη κι' ἄν δέν πληροῦνται τέτοιες προϋποθέσεις, ὑπάρχουν *μεγιστικῶς ὁρισμένες λύσεις*, δηλαδή λύσεις οἱ ὁποῖες δέν ἀποτελοῦν τόν γνήσιο περιορισμό ἄλλων λύσεων. (Βλέπε *Πρόταση 6.3.1* στήν σελίδα 279) Αὐτές οἱ μεγιστικῶς ὁρισμένες λύσεις δύνανται νά εἶναι ἄπειρες τό πλῆθος σέ προβλήματα ἀρχικῶν τιμῶν στά ὁποῖα ἡ συνάρτηση ροῆς δέν ἱκανοποιεῖ συνθῆκες ἐξασφαλίζουσες τήν μοναδικότητα. (Βλέπε γιά παράδειγμα τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν (1.22) στήν σελίδα 39.)

Ἔχομε συγκεκριμένα τό ἑξῆς ἀποτέλεσμα:

Πρόταση 6.1.1. *Ἔστω ὅτι στό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν*

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(\tau) = \xi, \end{cases} \tag{6.1}$$

ἱκανοποιοῦνται συνθῆκες ἐξασφαλίζουσες τήν καθολική μοναδικότητα λύσεων. Τότε τό (6.1) *ἔχει μεγίστως ὁρισμένη λύση.*

Ἤτοι: ὑπάρχει μοναδική λύση $\varphi : I \to \mathbb{R}$, (ὅπου I ἀνοικτό διάστημα), τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (6.1) μέ τήν ἰδιότητα: Ἄν $\psi : J \to \mathbb{R}$ ἄλλη λύση, τότε τό J εἶναι ὑποσύνολο τοῦ I καί ἡ ψ ἀποτελεῖ περιορισμό τῆς φ στό J.

Περίγραμμα της Αποδείξεως. Ἔστω $\mathcal{S}$ τό σύνολο ὅλων τῶν λύσεων τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (6.1). [Ἐννοιεῖται βεβαίως ὅτι κάθε τέτοια λύση ἔχει πεδίο ὁρισμοῦ ἀνοικτό διάστημα τό ὁποῖο περιέχει τό τ.) Ὁρίζομε τώρα

$$\varphi = \bigcup_{\psi\in\mathcal{S}} \psi. \tag{6.2}$$

Ἡ ἀνωτέρω *ἕνωση συναρτήσεων* ἀποτελεῖ τήν ἕνωση τῶν γραφημάτων τους. Δηλαδή, ἄν $\psi\in\mathcal{S}$, τότε

$$\psi = \{\, \big(t, \psi(t)\big) \;:\; t\in\mathcal{D}\boldsymbol{om}(\psi) \,\}$$

καί ὡς ἐκ τούτου, ἡ φ ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπό τήν (6.2) εἶναι ἐκ πρώτης ὄψεως ἕνα σύνολο διατεταγμένων ζευγῶν. Γιά νά ἀποτελεῖ συνάρτηση (ἤ γράφημα συναρτήσεως), θά πρέπει νά ἰσχύει τό μονοσήμαντο. Δηλαδή ὁποτεδήποτε

$$(t,\eta),\ \text{καί}\ (t,\zeta) \in \varphi \quad \text{τότε} \quad \eta = \zeta.$$

Γιά νά ἀποδειχθεῖ λοιπόν ὅτι ἡ φ ἀνωτέρω εἶναι ἡ ζητούμενη λύση, ἀπαιτοῦνται τά ἀκόλουθα:

(i) Ἡ φ εἶναι συνάρτηση. Αὐτό ἀποτελεῖ συνέπεια τῆς καθολικῆς μοναδικότητος.

(ii) Ἡ φ εἶναι λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (6.1). Αὐτό προκύπτει ἀπό τό γεγονός ὅτι ἡ φ ἀποτελεῖ ἕνωση τέτοιων λύσεων.

(iii) Ἡ φ εἶναι μεγίστως ὁρισμένη. Ἤτοι, κάθε ἄλλη λύση ἀποτελεῖ περιορισμό αὐτῆς. Πράγματι αὐτό προκύπτει ἀπό τόν ὁρισμό της (6.2).

ὅ.ἔ.δ.

Τό ἑπόμενο ἐρώτημα τό ὁποῖο τίθεται εἶναι μέχρι ποῦ εἶναι δυνατόν νά ὁρισθεῖ ἡ λύση. Διαισθητικῶς, μελετῶντας πεδία ροῆς μέσῳ ὑπολογιστῶν, ἡ ἀπάντηση ἡ ὁποία λαμβάνεται εἶναι:

Ἡ λύση ὁρίζεται μέχρις ὅτου τό γράφημά της ἐξέλθει ἀπό τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς συναρτήσεως ροῆς.

Ἡ ἐξόδος τοῦ γραφήματος τῆς λύσεως ἀπό τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς ροῆς δύναται νά λάβει χώραν κατά διάφορους τρόπους.

Παραδείγματα

(i) Στό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x' = x^2 \\ x(0) = 1 \end{cases},$$

ἡ λύση δέν δύναται νά ὁρισθεῖ πέραν τοῦ $t = 1$, ὅπου ἀπειρίζεται καί τό γράφημά της ἐξέρχεται *καθέτως* ἀπό τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς ροῆς.

(ii) Στό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x' = 1 + \sqrt{1-x} \\ x(0) = 1 \end{cases},$$

ἰσχύει ὅτι ἄν φ λύση, τότε $\varphi(t) \geq t$. Ἡ λύση βεβαίως ὁρίζεται ἐφ' ὅσον $\varphi(t) \leq 1$. Ὡς ἐκ τούτου γιά κάποια χρονική στιγμή $t^* \leq 1$ τό γράφημα τῆς λύσεως ἐξέρχεται *ὁριζοντίως* ἀπό τό πεδίο ὁρισμοῦ τῆς ροῆς.

Τί συμβαίνει ὅμως ὅταν δέν ἔχομε συνθῆκες ἐξασφαλίζουσες τήν μοναδικότητα;

Στήν περίπτωση αὐτή, ὅπως θά δοῦμε, κάθε λύση δύναται νά ἐπεκταθεῖ ἐπίσης πρός κάποια μεγίστως ὁρισμένη λύση. Ἐπειδή ὅμως αὐτό δέν πραγματοποιεῖται ἀπαραιτήτως κατά μοναδικό τρόπο, ὑπάρχουν δηλαδή ἐνδεχομένως πολλές τέτοιες μέγιστες ἐπεκτάσεις, δέν θά τίς καλοῦμε μέγιστες ἀλλά *μεγιστικές*.

6.2 Ἐπίτευξη καθολικῆς λύσεως

Σ' αὐτή τήν ἑνότητα θά μᾶς ἀπασχολήσει τό ἑξῆς ἐρώτημα:

Πρoβλημα. *Ποιές συνθῆκες πρέπει νά πληροῖ ἡ συνάρτηση ροῆς f, ὥστε τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν*

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(\tau) = \xi, \end{cases} \tag{6.3}$$

νά ἔχει καθολική λύση;

Γενική ἀπάντηση σ' αὐτό τό ἐρώτημα δέν ὑπάρχει. Ὑπάρχουν ἀπαντήσεις σέ εἰδικές περιπτώσεις. Συγκεκριμένα ἔχομε ἤδη δεῖ ὅτι στίς γραμμικές ἐξισώσεις κάτι τέτοιο ἰσχύει. Ἄν δηλαδή στό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x' = p(t)x + q(t) \\ x(\tau) = \xi, \end{cases}$$

οἱ συναρτήσεις p καί q εἶναι συνεχεῖς στό ἀνοικτό διάστημα I στό ὁποῖο ἀνήκει καί ὁ ἀρχικός χρόνος τ, τότε τό ἀνωτέρω πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν ἔχει λύση σ' ὅλο τό I. Ἰδιαιτέρως, ἄν $I = \mathbb{R}$, τότε τό ἀνωτέρω ἔχει καθολική λύση.

Τί ἀκριβῶς συμβαίνει ὅταν δέν ἔχομε καθολική λύση;

Συγκεκριμένα, ἄν ἡ μέγιστα ὁρισμένη λύση ἑνός προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν δέν δύναται νά ἐπεκταθεῖ πέραν τοῦ $\beta < \infty$ (ἤ ἀντιστοίχως γιά τιμές μικρότερες τοῦ $\alpha > -\infty$), τότε τί ἀκριβῶς συμβαίνει μέ τήν λύση πλησίον τοῦ β; (ἤ ἀντιστοίχως πλησίον τοῦ α;)

Τήν ἀπάντηση μᾶς τήν δίδει ἡ ἀκόλουθη πρόταση:

Πρόταση 6.2.1. *Ἔστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ συνεχής καί συνεχής Lipschitz ὡς πρός τήν δεύτερη μεταβλητή. Ἔστω $\varphi : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$, μεγίστως ὁρισμένη λύση τοῦ (6.3). Ἄν $\beta < \infty$ (ἀντιστοίχως $\alpha > -\infty$), τότε*

$$\lim_{t\to\beta^-} \varphi(t) = -\infty \quad ἤ \quad \lim_{t\to\beta^-} \varphi(t) = +\infty. \tag{6.4}$$

(Ἀντιστοίχως $\lim_{t\to\alpha^+} \varphi(t) \in \{-\infty, +\infty\}$.)

Θά χρειαστοῦμε τά ἑξῆς λήμματα:

Λῆμμα 6.2.2. *Ἔστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ συνεχής καί συνεχής Lipschitz ὡς πρός τήν δεύτερη μεταβλητή. Ἔστω $\varphi : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$, λύση τοῦ (6.3.) Ἄν $\beta < \infty$ (ἀντιστοίχως $\alpha > -\infty$) καί $\varphi|_{[\tau,\beta)}$ φραγμένη (ἀντιστοίχως $\varphi|_{(\alpha,\tau]}$ φραγμένη), τότε τό ὅριο $\lim_{t\to\beta^-} \varphi(t)$ (ἀντιστοίχως $\lim_{t\to\alpha^+} \varphi(t)$), ὑπάρχει στό $\mathbb{R}$.*

Ἀποδειξη. Βλέπε *Ἄσκηση* 1.9.5, στήν σελίδα 55. □.

Λῆμμα 6.2.3. *Ἔστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ συνεχής καί συνεχής Lipschitz ὡς πρός τήν δεύτερη μεταβλητή. Ἔστω $\varphi : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν*

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(\tau) = \xi. \end{cases} \tag{6.5}$$

Ἄν $\beta < \infty$ (ἀντιστοίχως, $\alpha > -\infty$) καί τό ὅριο $\lim_{t\to\beta^-} \varphi(t)$ ὑπάρχει στό $\mathbb{R}$ (ἀντιστοίχως, τό ὅριο $\lim_{t\to\alpha^+} \varphi(t)$ ὑπάρχει στό $\mathbb{R}$), τότε ἡ φ δύναται νά ἐπεκταθεῖ καί πέραν τοῦ β, (ἀντιστοίχως, δύναται νά ἐπεκταθεῖ γιά τιμές μικρότερες τοῦ α) καί ὡς ἐκ τούτου ἡ φ δέν ἀποτελεῖ μεγίστως ὁρισμένη λύση τοῦ (6.5).

Αποδειξη. Ἔστω ὅτι:

$$\lim_{t\to\beta^-} \varphi(t) = \eta \in \mathbb{R}$$

καί $\psi : [\beta-\gamma, \beta+\gamma]$ λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(\beta) = \eta. \end{cases} \tag{6.6}$$

Ὡς γνωστόν τέτοια ὑπάρχει γιά κάποιο $\gamma > 0$. Τότε ἡ συνάρτηση:

$$\zeta(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{ἄν} \quad t \in (\alpha,\beta) \\ \\ \psi(t) & \text{ἄν} \quad t \in [\beta,\beta+\gamma), \end{cases}$$

θά δείξομε ὅτι ἀποτελεῖ λύση τοῦ (6.5). Πράγματι ἡ ζ ἱκανοποιεῖ τήν ἀρχική συνθήκη $x(\tau) = \xi$, καθώς καί τήν διαφορική ἐξίσωση $x' = f(t,x)$, γιά κάθε t στό διάστημα $(\alpha,\beta+\gamma)$, ἐκτός ἐνδεχομένως στό $t=\beta$. Ἀρκεῖ λοιπόν νά δείξομε ὅτι ἡ ζ εἶναι πράγματι διαφορίσιμη στό β καί

$$\zeta'(\beta) = f\big(\beta,\zeta(\beta)\big) = f(\beta,\eta). \tag{6.7}$$

Ἡ δεξιά παράγωγος τῆς ζ στό $t=\beta$, προφανῶς ὑπάρχει καί ἰσοῦται μέ $f(\beta,\eta)$, ἀφοῦ ἡ ζ ἀποτελεῖ λύση τοῦ (6.6) στό $[\beta,\beta+\gamma)$. Ἄν τώρα $t<\beta$, τότε λόγῳ τῆς ὁλοκληρωτικῆς μορφῆς τοῦ (6.5) ἔχομε:

$$\zeta(t) = \xi + \int_\tau^t f\big(s,\zeta(s)\big)\,ds. \tag{6.8}$$

Ἄν τώρα $t \to \beta^-$, τότε τό ἀριστερό μέλος τῆς (6.8) τείνει, ἐξ ὑποθέσεως, στό η ἐνῶ τό δεξιό στό $\displaystyle\int_\tau^\beta f\big(s,\zeta(s)\big)\,ds$ διότι ἡ συνάρτηση $\omega(t) = f\big(t,\varphi(t)\big)$ εἶναι συνεχής στό $[\tau,\beta)$ καί ἐπεκτείνεται συνεχῶς στό β μέ $\omega(\beta) = \lim_{t\to\beta^-} f\big(t,\varphi(t)\big) = f(\beta,\eta)$. Ἄρα

$$\eta = \xi + \int_\tau^\beta f\big(s,\zeta(s)\big)\,ds. \tag{6.9}$$

Ἀφαιρῶντας τίς (6.8) καί (6.9) καί διαιρῶντας διά $t-\beta$ λαμβάνομε:

$$\frac{\zeta(t)-\zeta(\beta)}{t-\beta} = \frac{1}{t-\beta}\int_\beta^t f\big(s,\zeta(s)\big)\,ds \to f(\beta,\eta).$$

Ἡ ἀντίστοιχη περίπτωση πλησίον τοῦ α ἀντιμετωπίζεται παρομοίως. □

Απόδειξη της Προτάσεως 6.2.1. Ἄν $\varphi : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$, μέγιστα ὁρισμένη λύση καί $\beta < \infty$, τότε βάσει τῶν *Λημμάτων 6.2.2* καί *6.2.3*, ἡ φ δέν εἶναι φραγμένη στό διάστημα $[\tau,\beta)$. Ἄν ἐπί πλέον δέν ἰσχύει ἡ (6.4), τότε γιά τήν φ θά πρέπει νά ὑπάρχουν ἀκολουθίες t_n καί s_n, $n \in \mathbb{N}$, ὥστε:

$$s_n,\, t_n \in (\alpha, \beta), \quad s_n,\, t_n \to \beta$$

καί A, $B \in \mathbb{R}$ ὥστε:

$$\varphi(s_n) \leq A\ , \quad \varphi(t_n) \geq B \quad \textit{καί} \quad A < B.$$

Οἱ ἀκολουθίες αὐτές, λόγῳ συνεχείας τῆς φ καί ἰδιαιτέρως τοῦ *Θεωρήματος τῆς Ἐνδιαμέσου Τιμῆς*, δύνανται νά ἐπιλεγοῦν ὥστε:

(i) $s_1 < t_1 < s_2 < t_2 < \cdots$.

(ii) $\varphi(s_n) = A$ καί $\varphi(t_n) = B$ γιά κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(iii) $f[s_n, t_n] = [A, B]$ γιά κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Ὡς ἐκ τούτου ἄν

$$M = \max_{[\tau,\beta]\times[A,B]} |f(t,x)|,$$

τότε

$$\begin{aligned} |B - A| &= |\varphi(t_n) - \varphi(s_n)| \\ &\leq \int_{s_n}^{t_n} \big|f\big(s, \varphi(s)\big)\big|\, ds \\ &\leq M|t_n - s_n|. \end{aligned}$$

Ἄτοπο, διότι $|B - A| > 0$ ἐνῶ $|t_n - s_n| \to 0$. □

Στήν παροῦσα ἑνότητα θά δοῦμε ὁρισμένα χαρακτηριστικά παραδείγματα καθολικῶς ὁρισίμων λύσεων:

6.2.1 Φραγμένη ροή

Ἔστω $f \in C(\mathbb{R}^2)$ καί τοπικῶς συνεχής Lipschitz ὡς πρός τήν δεύτερη μεταβλητή. Ἔστω ἐπίσης ὅτι $|f(t,x)| \leq M < \infty$, γιά κάθε $(t,x) \in \mathbb{R}^2$. Ἄν τώρα $\varphi : (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$, λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(\tau) = \xi, \end{cases}$$

τότε προφανῶς γιά $t > \tau$ ἰσχύει ὅτι:

$$|\varphi(t) - \varphi(\tau)| = \left|\int_\tau^t f\big(s, \varphi(s)\big)\, ds\right|$$

$$\leq \int_\tau^t \big|f\big(s, \varphi(s)\big)\big|\, ds \leq \leq M(t - \tau).$$

Πράττοντας ἀναλόγως γιά $t < \tau$ λαμβάνομε τελικῶς ὅτι σ' ὅλες τίς περιπτώσεις

$$|\varphi(t) - \varphi(\tau)| \leq M|t - \tau|.$$

Ὡς ἐκ τούτου δέν εἶναι δυνατόν λύση τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν νά ἐκραγεῖ σέ πεπερασμένο χρόνο. Ἤτοι, ἡ (6.4) δέν δύναται νά συμβαίνει.

Ἄρα, λόγῳ τῆς *Προτάσεως 6.2.1*, ἄν ἡ συνάρτηση ροῆς εἶναι φραγμένη, τότε τό ἀντίστοιχο πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν δέχεται καθολική λύση.

6.2.2 Ὑπογραμμική ροή

Ἡ ἀπαίτηση ἀπό τήν συνάρτηση ροῆς νά εἶναι φραγμένη εἶναι σίγουρα ὑπερβολική. Τό ἴδιο ἀποτέλεσμα λαμβάνεται καί μέ τήν ὑπόθεση ὅτι ἡ ροή εἶναι *ὑπογραμμική* ὡς πρός x, δηλαδή:

$$|f(t,x)| \leq \alpha(t)|x| + \beta(t)\,,$$

ὅπου $\alpha(t)$, $\beta(t) \geq 0$ καί συνεχεῖς.

Ἄν $\varphi : I \to \mathbb{R}$ ἡ λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν

$$x' = f(t,x), \;\; x(\tau) = \xi$$

καί φ_-, φ_+, λύσεις τῶν

$$\begin{cases} x' = -\big(\alpha(t)|x| + \beta(t)\big) \\ x(\tau) = -|\xi| \end{cases}, \qquad \begin{cases} x' = \alpha(t)|x| + \beta(t)) \\ x(\tau) = |\xi|, \end{cases}$$

οἱ ὁποῖες ὁρίζονται σ' ὅλο τό $\mathbb{R}$ (γιατί;), τότε προφανῶς θά ἰσχύει ὅτι:

$$\min\{\varphi_-(t), \varphi_+(t)\} \leq \varphi(t) \leq \max\{\varphi_-(t), \varphi_+(t)\}. \tag{6.10}$$

(Γιατί;) Ἑκάστη τῶν $\varphi_\pm$ ὁρίζεται καθολικῶς (γιατί;) καί ὡς ἐκ τούτου, λόγῳ τῆς (6.10), ἡ φ δέν δύναται νά ἐκραγεῖ σέ πεπερασμένο χρόνο.

Ὡς ἐκ τούτου, λόγῳ τῆς *Προτάσεως* 6.4, ἡ φ δύναται νά ὁρισθεῖ σ' ὅλο τό $\mathbb{R}$.

6.2.3 Ροή ὁμοιομόρφως Lipschitz

Σ’ αὐτή τήν ὑποενότητα μελετοῦμε τήν περίπτωση ὅπου ἡ συνάρτηση ροῆς, ἀφ’ ἑνός μέν ὁρίζεται σ’ ὅλο τό $\mathbb{R}^2$, ἀφ’ ἑτέρου ἱκανοποιεῖ τήν ἀνισότητα

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \;\leq\; \alpha(t)\,|x_1 - x_2|\,, \tag{6.11}$$

γιά κάθε $t,\, x_1,\, x_2 \in \mathbb{R}$ γιά κάποια συνεχῆ συνάρτηση $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$.

Σ’ αὐτή τήν περίπτωση ἔχομε τά ἀκόλουθα:

(i) Ἡ ἀναδρομική ἀκολουθία Picard, $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, ἡ ὁποία προσεγγίζει τήν λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(\tau) = \xi, \end{cases} \tag{6.12}$$

ὁρίζεται καλῶς σ’ ὅλο τό $\mathbb{R}$ ἐφ’ ὅσον ἡ f ὁρίζεται σ’ ὅλο τό $\mathbb{R}^2$.

(ii) Ἡ $\{\varphi_n\}$ ἱκανοποιεῖ τήν ἀνισότητα

$$|\varphi_{n+1}(t) - \varphi_n(t)| \;\leq\; \frac{M}{\kappa}\frac{\kappa^{n+1}|t-\tau|^{n+1}}{(n+1)!} \;\leq\; \frac{M}{\kappa}\frac{(\kappa l)^{n+1}}{(n+1)!},$$

ὅταν $|t-\tau| \leq l$ καί

$$\kappa \;=\; \max_{|t-\tau|\leq l} \alpha(t),$$

ἐνῶ

$$M \;=\; \max_{|t-\tau|\leq l,\, |x|\leq r(l)} |f(t,x)|,$$

ὅπου $r(l) = \mathrm{e}^{\kappa l}$.

(iii) Ἡ $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ λοιπόν εἶναι τοπικῶς ὁμοιομόρφως ἀκολουθία Cauchy σ’ ὅλο τό $\mathbb{R}$. Τό ὅριό της ἀποτελεῖ καθολική λύση τοῦ (6.12).

6.2.4 Αὐτόνομες μέ ἄπειρο ὁλοκλήρωμα χρόνου

Ἀναφερόμεθα στήν περίπτωση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x' \;=\; f(x) \\ x(\tau \;=\; \xi, \end{cases} \tag{6.13}$$

ὅπου, ἀφ' ἑνός μέν πληροῦνται συνθῆκες ἐξασφαλίζουσες τήν μοναδικότητα, ἀφ' ἑτέρου δέ $f(x) > 0$, γιά κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τότε θά δοῦμε ὅτι, ἡ λύση τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος ἐπεκτείνεται σ' ὅλο τό $[\tau, \infty)$ (ἀντιστοίχως σ' ὅλο τό $(-\infty, \tau]$), ἄν καί μόνο ἄν

$$\int_\xi^\infty \frac{d\eta}{f(\eta)} = +\infty.$$

(Ἀντιστοίχως $\int_\xi^{-\infty} \big(1/f(\eta)\big)\, d\eta < -\infty$.) Πράγματι, ἔστω ὅτι $f(x) > 0$, σ' ὅλο τό $\mathbb{R}$. Ὁρίζομε τήν συνάρτηση $T : [\xi, \infty) \to \mathbb{R}$, ὡς ἑξῆς:

$$T(x) = \tau + \int_\xi^x \frac{d\eta}{f(\eta)}.$$

Προφανῶς ἡ T εἶναι γνησίως αὔξουσα, μέ θετική παράγωγο, καί συνεχῶς διαφορίσιμη στό πεδίο ὁρισμοῦ της. Ἐπίσης ἡ T εἶναι 1-1 καί ἐπί ἀπό τό $[\xi, \infty)$ στό $[\tau, t^*)$, ὅπου

$$\tau + \int_\xi^\infty \frac{ds}{f(s)} = t^* \in (\tau, \infty) \cup \{+\infty\}.$$

Ἄρα ἡ T εἶναι ἀντιστρέψιμη, μέ συνεχῶς διαφορίσιμη ἀντίστροφο. Ἰδιαιτέρως γιά τήν $T^{-1} : [\tau, t^*) \to [\xi, \infty)$ θά ἰσχύει ὅτι:

$$\lim_{t \to t^*} T^{-1}(t) = +\infty. \tag{6.14}$$

Ἐπί πλέον θά ἔχομε ὅτι

$$\begin{aligned} \big(T\big(\varphi(t)\big)\big)' &= T'\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t) \\ &= \frac{1}{f\big(\varphi(t)\big)} \cdot f\big(\varphi(t)\big) = 1. \end{aligned}$$

Ἐπειδή ὅμως $T\big(\varphi(\tau)\big) = T(\xi) = \tau$, τότε θά ἔχομε ὅτι

$$T\big(\varphi(t)\big) = t$$

καί τοιουτοτρόπως

$$\varphi(t) = T^{-1}(t).$$

Λόγῳ ὅμως τῆς (6.14), ἡ φ ἐπεκτείνεται σ' ὅλο τό $[\tau, \infty)$ ἄν καί μόνο ἄν $t^* = +\infty$. Ἄν $t^* < \infty$, τότε

$$\lim_{t \to t^*} \varphi(t) = +\infty$$

καί ἡ φ ἐκρήγνυται σέ πεπερασμένο χρόνο.

Ἡ περίπτωση ὅπου

$$\int_{\tau}^{-\infty} \frac{1}{f(\eta)}\, d\eta \;=\; -\infty,$$

ἀντιμετωπίζεται κατά τόν ἴδιο τρόπο.

Παρατήρηση. Δυναται εὐκόλως νά διαπιστωθεῖ ὅτι τό ἀνωτέρω κριτήριο παραχωρεῖ *a fortiori* ἀποτελέσματα καθολικότητος:

Ἄν ἡ θετική συνάρτηση g ἱκανοποιεῖ:

$$|f(t,x)| \;\le\; g(x),$$

γιά κάθε $(t,x) \in R^2$, καί

$$\int_{\tau}^{\infty} \frac{1}{g(d\eta)}\, d\eta \;=\; +\infty,$$

τότε τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(\tau) = \xi, \end{cases}$$

ἔχει καθολική λύση. (Ἄσκηση.)

6.2.5 Αὐτόνομες μέ μηδενιζόμενη ροή

Ἀναφερόμεθα στήν περίπτωση ἡ ὁποία περιγράφεται στήν πρόταση ἡ ὁποία ἀκολουθεῖ. Μέρος αὐτῆς ἐμφανίζεται στήν *Ἄσκηση* 3.2.13 τῆς σελίδος 136.

Πρόταση 6.2.4. *Ἔστω $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ συνεχής Lipschitz καί ξ_1, $\xi_2 \in (\alpha, \beta)$, διαδοχικές ρίζες τῆς f, δηλαδή $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$ καί $f(x) \neq 0$ γιά κάθε $x \in (\xi_1, \xi_2)$. Ἔστω ὅτι $\varphi : I \to \mathbb{R}$ λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν*

$$\begin{cases} x' \;=\; f(x) \\ x(\tau) \;=\; \xi \end{cases}$$

ὅπου $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$. Τότε ἰσχύουν τά ἀκόλουθα:

(*i*) *$\varphi(t) \in (\xi_1, \xi_2)$ γιά κάθε $t \in I$.*

(*ii*) *Ἡ φ εἶναι γνησίως μονότονη.*

(*iii*) *Τό ἀνωτέρω πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν ἔχει καθολική λύση.*

(iv) *Ἄν* $f(\xi) > 0$, *τότε:*

$$\lim_{t\to-\infty} \varphi(t) = \xi_1 \quad \textit{καί} \quad \lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = \xi_2.$$

Αποδειξη. Οἱ τιμές τῆς φ παραμένουν στό ἀνοικτό διάστημα (ξ_1, ξ_2) διότι ἄν αὐτό δέν συνέβαινε, τότε γιά κάποια χρονική στιγμή θά ἔπρεπε $\varphi(t^*) = \xi_1$ ἤ ξ_2. Ἐπειδη ὅμως οἱ σταθερές συναρτήσεις $\varphi_1(t) = \xi_1$ καί $\varphi_2(t) = \xi_2$, ἀποτελοῦν λύσεις τῆς $x' = f(x)$, τότε λόγῳ μοναδικότητος, ἄν μιά ἄλλη λύση ἐλάμβανε σέ κάποια χρονική στιγμή κάποια ἀπό τίς δύο αὐτές τιμές, θά ἔπρεπε νά ταυτίζεται μ' αὐτήν παντοῦ. Ἡ φ εἶναι γνησίως μονότονη καί ἡ $f\big(\varphi(t)\big)$ διατηρεῖ τό πρόσημό της. (Βλέπε *Ἄσκηση* 3.2.17 στήν σελίδα 137.) Ἡ καθολικότης τῆς μεγίστως ὁρισμένης λύσεως τοῦ ἀνωτέρω προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν, προκύπτει ἀπό τό γεγονός ὅτι ἡ λύση ἐκεῖ ὅπου ὁρίζεται, φράσσεται ἀπό τά ξ_1 καί ξ_2.

Τέλος, στήν ἰδιότητα 4, ἐπειδή ἡ φ θά εἶναι αὔξουσα καί φραγμένη ἀπό τό ξ_2, τότε τό ὅριο

$$\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = \alpha,$$

θά ὑπάρχει στό $\mathbb{R}$ καί μάλιστα θά ἰσχύει ὅτι

$$\xi < \alpha \le \xi_2.$$

Ἄν ὅμως ἴσχυε ὅτι $\alpha < \xi_2$, τότε προφανῶς $\varphi(t) \le \alpha$ γιά κάθε $t \in \mathbb{R}$, ὁπότε γιά κάθε $t \in [\tau, \infty)$ θά ἴσχυε ὅτι

$$\varphi'(t) = f\big(\varphi(t)\big) \ge \max_{x\in[\xi,\alpha]} f(x) = \beta > 0.$$

Ἄρα:

$$\varphi(t) \ge \varphi(\tau) + \beta(t-\tau) \to +\infty.$$

Ἄτοπο. □

Ἀσκήσεις

6.2.1 Δείξατε ὅτι ἕκαστο ἐκ τῶν κάτωθι προβλημάτων ἀρχικῶν τιμῶν ἔχει καθολική λύση:

(i) $x' = \sin x$,

(ii) $x' = \cos tx$,

(iii) $x' = \tan^{-1} x$,

(iv) $x' = x\log(x^2+1)$,

(v) $x' = e^t \cos x$,

(vi) $x' = \tanh x$,

(vii) $x' = e^{t^2}\sqrt[3]{x^3+1}$.

6.2.2 Σέ καθένα ἀπό τά κάτωθι παραδείγματα συνήθων διαφορικῶν ἐξισώσεων, νά μελετηθεῖ κατά πόσον ὑπάρχει καθολική λύση:

(i) $x' = x^2 - \sin^2 t,$

(ii) $x' = x^2 - \cos^2 t,$

(iii) $x' = \sinh^2 x - \cos^2 t,$

(iv) $x' = \sin^2 t - \sinh^2 x.$

Ποῖες ἐκ τῶν ἀνωτέρω ἔχουν μή φραγμένες λύσεις;

6.2.3 Δίδεται τό πολυώνυμο $p(x) = x^3 + x + \lambda$. Δείξατε ὅτι γιά κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, τό p ἔχει μοναδική πραγματική ρίζα $r = r(\lambda)$. Ἰδιαιτέρως, δείξατε ὅτι ἡ $r \in C^\infty(\mathbb{R})$.

6.2.4 Ἔστω ὅτι ἡ συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, ἱκανοποιεῖ:

$$|f(t,x)| \le g(x),$$

γιά κάθε $(t,x) \in R^2$, καί

$$\int_\tau^\infty \frac{1}{g(\eta)}\, d\eta = +\infty. \tag{6.15}$$

Τότε τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x' = f(t,x), \\ x(\tau) = \xi, \end{cases} \tag{6.16}$$

ἔχει λύση στό $[\tau, t)$. Ἄν ἐπί πλέον εἴχαμε ὅτι

$$|f(t,x)| \le g(|x|),$$

γιά κάθε $(t,x) \in \mathbb{R}^2$, τότε τό (6.16) θά ἀπελάμβανε καθολικότητος λύσεων.

6.2.5 Δείξατε ὅτι τά σύστημα

$$\begin{cases} x' &= \alpha(1 - x^2 - y^2) \\ y' &= \beta(1 - x^2 - y^2), \end{cases}$$

ἔχει καθολική λύση γιά κάθε ἀρχικές συνθῆκες.

6.2.6 Νά ἀποδειχθεῖ ἡ *Πρόταση 2.2.1 στήν σελίδα 73.*

Υπόδειξη. Ἡ ἀντίστροφη συνάρτηση β ἱκανοποιεῖ τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{\alpha(x)} \\ x\big(\alpha(0)\big) = 0. \end{cases}$$

Δείξατε ὅτι τό ἀνωτέρω ἔχει μοναδική καθολική λύση.

6.3 Μεγιστικῶς ὁρισμένη λύση*

Ἔχομε δεῖ ὅτι τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x' &= f(t,x) \\ x(\tau) &= \xi \end{cases}$$

ἔχει λύση σέ κατάλληλο διάστημα $[\tau-\gamma,\tau+\gamma]$, ὅπου $\gamma>0$, ἀκόμη καί μέ τήν ὑπόθεση ὅτι ἡ f εἶναι ἁπλῶς συνεχής σέ κάποιο D ἀνοικτό ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}^2$ μέ $(\tau,\xi)\in D$. Ἡ λύση αὐτή ὁρίζεται *τοπικῶς*. Τό διάστημα τό ὁποῖο μᾶς παρέχουν τά προαναφερθέντα ἀποτελέσματα ὑπάρξεως δύναται νά ἐπεκταθεῖ. Ἄν ὁρίσομε ὡς $\tilde{\varphi}$ λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x' &= (t,x) \\ x(\tau+\gamma) &= \varphi(\tau+\gamma), \end{cases}$$

ὁριζόμενη στό διάστημα $[\tau+\gamma-\gamma_1,\tau+\gamma+\gamma_1]$, ἡ ὁποία προκύπτει ἀπό τό *Θεώρημα 3.4.1*, τότε ἡ συνάρτηση φ_1 ἡ ὁποία ὁρίζεται ὡς

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{ἄν} \quad t\in[\tau-\gamma,\tau+\gamma] \\ \tilde{\varphi}(t) & \text{ἄν} \quad t\in(\tau+\gamma,\tau+\gamma+\gamma_1], \end{cases}$$

ἀποτελεῖ ἐπίσης λύση καί τῶν προβλημάτων ἀρχικῶν τιμῶν ἀνωτέρω καί ἰδιαιτέρως ἐπέκταση τῆς φ. Ἡ διαδικασία τῶν διαδοχικῶν ἐπεκτάσεων δύναται νά συνεχιστεῖ ἐπ' ἄπειρον, τόσο ἐκ δεξιῶν ὅσο καί ἐξ ἀριστερῶν τοῦ ἀρχικοῦ χρόνου. Βεβαίως αὐτό δέν σημαίνει ὅτι κατ' αὐτό τόν τρόπο δυνάμεθα νά κατασκευάσομε λύση μέ πεδίο ὁρισμοῦ ὅλο τό $\mathbb{R}$. Γιά παράδειγμα στήν περίπτωση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x' &= x^2 \\ x(0) &= 1, \end{cases}$$

ἡ λύση εἶναι ἡ συνάρτηση $\varphi(t)=1/(1-t)$, ἡ ὁποία δέν δύναται νά ὁρισθεῖ στό $[1,\infty)$, παρά τό γεγονός ὅτι ἡ ροή ὁρίζεται παντοῦ καί εἶναι ὁμαλή ($f\in C^\infty$). Ἐκεῖνο ὅμωςτό ὁποῖο δύναται νά ὁρισθεῖ εἶναι *μεγιστικῶς*[90] *ὁρισμένη λύση*. Ἤτοι, λύση μέ μεγιστικό πεδίο ὁρισμοῦ, ἤ ἁπλούστερα, λύση ἡ ὁποία δέν δέχεται περαιτέρω ἐπεκτάσεις. Στήν δέ περίπτωση ὅπου ἔχομε συνθῆκες ἐξασφαλίζουσες τήν μοναδικότητα, ἡ λύση αὐτή δέν θά εἶναι τίποτα ἄλλο ἀπό τήν μεγίστως ὁρισμένη λύση.

Συγκεκριμένα ἔχομε τά ἀκόλουθα ἀποτελέσματα:

Πρόταση 6.3.1. *Τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν*

$$\begin{cases} x' &= f(t,x) \\ x(\tau) &= \xi, \end{cases} \tag{6.17}$$

ὅπου $f\in C(D)$, $D\subset\mathbb{R}$ *ἀνοικτό καί* $(\tau,\xi)\in D$, *δέχεται μεγιστικῶς ὁρισμένη λύση.*

[90]Ὁ ὅρος *μεγιστικός* ἀποτελεῖ ἀπόδοση τοῦ ἀγγλικοῦ ὅρου *μαξιμαλ*.

Απόδειξη. Ἡ ἀπόδειξη εἶναι καθαρῶς συνολοθεωρητική. Γίνεται χρήση τοῦ *Λήμματος τοῦ Zorn*[91], τό ὁποῖο εἶναι ἰσοδύναμο τοῦ *Ἀξιώματος τῆς Ἐπιλογῆς*. Ἰδιαιτέρως θά χρησιμοποιήσομε τήν ἀκόλουθη ἐκδοχή:

Λῆμμα 6.3.2. (***Λῆμμα τοῦ Zorn***) *Ἄν $\langle S, \prec \rangle$, μερικῶς διατεταγμένο σύνολο καί A ὑποσύνολο αὐτοῦ, τότε τό A περιέχει μεγιστική ἁλυσίδα*[92].

Ἔστω τώρα $\mathcal{F} = \{\varphi \,:\, \varphi\, \text{λύση τοῦ}\, (6.17)\}$. Στήν *Θεωρία Συνόλων* μιά συνάρτηση δέν εἶναι τίποτα ἄλλο ἀπό τό γράφημά της, ἤτοι, $\varphi = \{ (t, \varphi(t)) \,|\, t \in \mathcal{D}om(\varphi) \}$. Ἄρα τό σύνολο $\mathcal{F}$ εἶναι μερικῶς διατεταγμένο ὡς πρός τήν σχεση τοῦ περιέχεσθαι. Δηλαδή:

$$\varphi_1 \subset \varphi_2 \iff \varphi_2 \text{ ἐπέκταση τῆς } \varphi_1.$$

Λόγῳ τοῦ *Λήμματος τοῦ Zorn* ὑπάρχει μεγιστική ἁλυσίς $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$. Ἡ ζητούμενη μεγιστικῶς ὁρισμένη συνάρτηση θά εἶναι ἡ

$$\varphi = \bigcup \mathcal{C}.$$

Ἐπαφίεται στόν ἀναγνώστη νά διαπιστώσει ὅτι ἡ ἀνωτέρω φ εἶναι πράγματι συνάρτηση, εἶναι λύση τοῦ (6.17) καί τέλος εἶναι καί μεγιστικῶς ὁρισμένη. □.

Παρατηρήσεις

(i) Ἔχομε ἤδη δεῖ παράδειγμα προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν τό ὁποῖο ἔχει ἄπειρες λύσεις. Συγκεκριμένα τό

$$\begin{cases} x' = |x|^\alpha \\ x(0) = 0, \end{cases}$$

ὅπου $\alpha \in (0, 1)$, ἔχει ὡς μεγιστικῶς ὁρισμένες λύσεις ὅλες τίς φ_{t_1,t_2} οἱ ὁποῖες ὁρίζονται ὡς:

$$\varphi_{t_1,t_2}(t) = \begin{cases} -\left((1-\alpha)(t_1 - t)\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} & \text{ἄν } t < t_1 \\ 0 & \text{ἄν } t \in [t_1, t_2] \\ \left((1-\alpha)(t - t_2)\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} & \text{ἄν } t > t_2, \end{cases}$$

ὅπου τά t_1, t_2 ἐπελέγησαν αὐθαιρέτως ὥστε $t_1 \leq 0 \leq t_2$.

[91] Max Zorn (1906–1993). Γερμανός μαθηματικός, μαθητής τοῦ Emil Artin. Τό *Λῆμμα τοῦ Zorn* ἀποδίδεται στόν Πωλονό μαθηματικό Kazimierz Kuratowski (1896–1980) ὁ ὁποῖος τό ἀνακάλυψε πρῶτος.

[92] Ἕνα ὑποσύνολο τοῦ S τό ὁποῖο εἶναι ὁλικῶς διατεταγμένο ὡς πρός $\prec$ ὀνομάζεται *ἁλυσίς*. Μία ἁλυσίς ὀνομάζεται *μεγιστική* ἄν δέν ἀποτελεῖ γνήσιο ὑποσύνολο ἄλλης ἁλυσίδος.

(ii) Εἶναι δυνατός ὁ ὁρισμός *μεγιστικῶς ὁρισμένης* ὁλοκληρωτικῆς καμπύλης. Ἄν μᾶς δίδεται κάποια συγκεκριμένη ὁλοκληρωτική καμπύλη, ἡ μεγιστική θά ἀποτελεῖ ἕνα μεγιστικό στοιχεῖο τοῦ συνόλου τῶν ἐπεκτάσεών της. Σέ περίπτωση κατά τήν ὁποία ἱκανοποιοῦνται συνθῆκες ἐξασφαλίζουσες τήν μοναδικότητα, ἔχομε ὕπαρξη *μεγίστως ὁρισμένης* ὁλοκληρωτικῆς καμπύλης.

Κεφάλαιο 7

ʼΕξάρτηση λύσεων ἀπό παραμέτρους

Τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν:

$$\begin{cases} x' = \lambda x \\ x(\tau) = \xi, \end{cases} \tag{7.1}$$

ἔχει ὡς μοναδική λύση τήν συνάρτηση

$$\varphi(t) = \xi e^{\lambda(t-\tau)}, \tag{7.2}$$

ἡ ὁποία ἀποτελεῖ, ὄχι μόνο συνάρτηση τοῦ t, ἀλλά καί συνάρτηση τοῦ ἀρχικοῦ χρόνου τ, τῆς ἀρχικῆς τιμῆς ξ, καθώς ἐπίσης καί τῆς παραμέτρου λ ἡ ὁποία ἐμφανίζεται ἐντός τῆς συναρτήσεως ροῆς λ. Ἡ συνάρτηση φ ἀνωτέρω, ἐξαρτᾶται *ὁμαλῶς* (στήν συγκεκριμένη περίπτωση κατά τρόπο C^∞ ἤ ἀκόμη καλύτερα ἀναλυτικῶς), ὄχι μόνο ἀπό τόν χρόνο t, ἀλλά καί ἀπό τόν ἀρχικό χρόνο τ, τήν ἀρχική τιμή ξ καί τήν παράμετρο λ. Ὅπως θά δοῦμε κάτι τέτοιο ἰσχύει ὁποτεδήποτε ἡ ροή f εἶναι ἐπαρκῶς ὁμαλή. Στήν παρών λοιπόν κεφάλαιο μελετοῦμε πόσον ὁμαλῶς ἐξαρτῶνται οἱ λύσεις προβλημάτων ἀρχικῶν τιμῶν ἀπό τίς προαναφερθεῖσες παραμέτρους. Ὑποθέτομε πάντοτε ὅτι πληροῦνται κατάλληλες συνθῆκες ἐξασφαλίζουσες τήν μοναδικότητα λύσεων στά προβλήματα ἀρχικῶν τιμῶν.

7.1 Τό καλῶς τοποθετημένο

Γιατί ὅμως εἶναι τόσο σημαντική ἡ μελέτη τῆς ἐξαρτήσεως τῶν λύσεων ἀπό τίς διάφορες παραμέτρους τοῦ προβλήματος;

Ἄς θυμηθοῦμε ὅτι οἱ διαφορικές ἐξισώσεις περιγράφουν φυσικά φαινόμενα στά ὁποῖα οἱ μέν ἀρχικές συνθῆκες ἐκτιμῶνται κατά προσέγγιση, ἡ δέ συνάρτηση ροῆς ἀποτελεῖ συνήθως ἁπλουστευμένη ἐκδοχή τῆς ἀντίστοιχης συναρτήσεως ροῆς τοῦ φυσικοῦ προβλήματος. Χρησιμοποιεῖται συνήθως, μία σειρά παραδοχῶν, οἱ ὁποῖες καθιστοῦν τήν συνάρτηση ροῆς εὐκολότερη στήν μελέτη.

Ἡ ἐξίσωση τῆς ἁρμονικῆς ταλαντώσεως γιά παράδειγμα, ἡ ὁποία περιγράφει τήν κίνηση τοῦ ἐκκρεμοῦς

$$x'' + \omega^2 x = 0 \tag{7.3}$$

ἀποτελεῖ προσέγγιση τῆς ἐξισώσεως

$$\vartheta'' + \frac{g}{l}\sin\vartheta = 0, \tag{7.4}$$

ὅπου πέραν τῆς *γραμμικοποιήσεως* τοῦ προβλήματος στό ὁποῖο τό $\sin x$ προσεγγίζεται ἀπό τό x, ἄς μή μᾶς διαφεύγει ὅτι, τόσο ἡ ἐπιτάχυνση βαρύτητος g, ὅσο καί τό μῆκος l, ἐκτιμῶνται μέ ὅση ἀκρίβεια ἐπιτρέπουν τά ὄργανα μετρήσεως. Τό γεγονός ὅτι ἡ κίνηση τοῦ ἐκκρεμοῦς πράγματι προσεγγίζεται *καλῶς* ἀπό τήν λύση τῆς (7.3) ἀποτελεῖ συνέπεια τῆς ὁμαλῆς ἐξαρτήσεως *μικρῶν λύσεων* τῆς (7.4) ἀπό παραμέτρους καί μικρές μεταβολές τῆς ροῆς. Τά ἀποτελέσματα τοῦ κλάδου τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων θά ἦσαν ἄνευ φυσικῆς σημασίας καί ἐφαρμογῶν ἄν μικρές μεταβολές τῶν ἀρχικῶν τιμῶν καί τῆς συναρτήσεως ροῆς εἶχαν ὡς ἀποτέλεσμα σημαντικές ποιοτικές ἤ ποσοτικές μεταβολές στίς λύσεις.

Ἕνα λοιπόν πρόβλημα εἶναι *καλῶς τοποθετημένο* ἄν ἐκτός ἀπό ὕπαρξη καί μοναδικότητα τῆς λύσεων ἔχομε καί ὁμαλή ἐξάρτηση τῆς λύσεως ἀπό τίς διάφορες παραμέτρους οἱ ὁποῖες ἐμφανίζονται στό πρόβλημα. Αὐτό σημαίνει ὅτι:

Μικρή μεταβολή τῶν παραμέτρων δέν ἔχει ὡς συνέπεια τήν δραματική μεταβολή τῆς λύσεως.

Ἤ καλύτερα:

Ἡ μεταβολή τῆς λύσεως ἐλέγχεται ἀπό τήν μεταβολή τῶν διαφόρων παραμέτρων.

7.2 Θεωρία Διαταραχῶν

Ξεκινοῦμε μέ τήν μελέτη τοῦ πῶς εἶναι δυνατόν νά *ἐλεγχθεῖ* ἡ μεταβολή τῆς λύσεως ἀπό τήν μεταβολή τῆς συναρτήσεως ροῆς. Αὐτό ἀποτελεῖ ἀποτέλεσμα τῆς *Θεωρίας Διαταραχῶν* (*Perturbation Theory*).

Ἄς δοῦμε κατ' ἀρχάς τό ἀκόλουθο πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x' = \kappa x + \varepsilon \\ x(\tau) = \xi, \end{cases}$$

μέ λύση

$$\varphi(t,\varepsilon) = -\frac{\varepsilon}{\kappa} + \left(\xi + \frac{\varepsilon}{\kappa}\right) \mathrm{e}^{\kappa(t-\tau)}$$

καί ὡς ἐκ τούτου

$$\varphi(t,\varepsilon) - \varphi(t,0) = \frac{\varepsilon}{\kappa}\left(\mathrm{e}^{\kappa(t-\tau)} - 1\right),$$

τό ὁποῖο μᾶς λέγει ὅτι:

Ἡ διαταραχή ε τῆς συναρτήσεως ροῆς ἔχει ὡς συνέπεια, ἐλεγχόμενη ἀπό τό ε, διαταραχή τῆς λύσεως.

Ὅπως φαίνεται ἀπό τήν πρόταση ἡ ὁποία ἀκολουθεῖ, ἡ γενική περίπτωση δέν διαφέρει πολύ ἀπό τό παράδειγμα τό ὁποῖο μόλις εἴδαμε.

Πρόταση 7.2.1. *Ἔστω $f, g : D \to \mathbb{R}$, ὅπου D ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}^2$ ἀνοικτό, συνεχεῖς καί συνεχεῖς Lipschitz ὡς πρός τήν δεύτερη μεταβλητή*

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \;\le\; \kappa|x_1 - x_2|$$

καί

$$|g(t,x_1) - g(t,x_2)| \;\le\; \kappa|x_1 - x_2|,$$

γιά κάθε (t,x_1), $(t,x_2) \in D$, καί ἐπί πλέον

$$|f(t,x) - g(t,x)| \le \varepsilon,$$

γιά κάθε $(t,x) \in D$. Ἄν φ, $\psi : I \to \mathbb{R}$ λύσεις τῶν προβλημάτων ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(\tau) = \xi \end{cases} , \qquad \begin{cases} x' = g(t,x) \\ x(\tau) = \xi \end{cases}$$

ἀντιστοίχως, μέ γραφήματα ἐντός τοῦ D, τότε θά ἰσχύει ἡ ἀνισότης

$$|\varphi(t) - \psi(t)| \;\le\; \frac{\varepsilon}{\kappa}\left(\mathrm{e}^{\kappa|t-\tau|} - 1\right),$$

γιά κάθε $t \in I$.

Ἀποδειξη. Ἀποδεικνύομε τήν πρόταση πρῶτα γιά $t > \tau$. ἡ περίπτωση $t < \tau$ πραγματοποιεῖται παρομοίως. Ἔχομε λοιπόν:

$$\varphi(t) \;=\; \xi + \int_\tau^t f\big(s,\varphi(s)\big)\,ds, \quad \psi(t) \;=\; \xi + \int_\tau^t f\big(s,\psi(s)\big)\,ds,$$

τίς ὁποῖες ὅταν ἀφαιρέσομε λαμβάνομε

$$\begin{aligned} |\varphi(t) - \psi(t)| \;&=\; \left|\int_\tau^t f\big(s,\varphi(s)\big) - g\big(s,\psi(s)\big)\,ds\right| \\ &\le\; \int_\tau^t \big|f\big(s,\varphi(s)\big) - g\big(s,\varphi(s)\big)\,ds\big| + \int_\tau^t \big|g\big(s,\varphi(s)\big) - g\big(s,\psi(s)\big)\big|\,ds \\ &\le\; \varepsilon(t-\tau) + \kappa\int_\tau^t |\varphi(s) - \psi(s)|\,ds. \end{aligned} \tag{7.5}$$

Ἄν τώρα θέσομε

$$\Delta(t) \;=\; \int_\tau^t |\varphi(s) - \psi(s)|\, ds,$$

ἡ (7.5) παραχωρεῖ τήν ἀκόλουθη συνήθη διαφορική ἀνισότητα:

$$\Delta'(t) - \kappa\Delta(t) \;\le\; \varepsilon(t-\tau)$$

ὁπότε πολλαπλασιάζοντας ἐπί τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ παράγοντος $\mathrm{e}^{-\kappa(t-\tau)}$, λαμβάνομε

$$\Big(\mathrm{e}^{-\kappa(t-\tau)}\Delta(t)\Big)' \;\le\; \varepsilon(t-\tau)\mathrm{e}^{-\kappa(t-\tau)},$$

τό ὁποῖο ἀκολούθως ὁλοκληρώνομε στό διάστημα $[\tau, t]$ καί ἔχομε

$$\mathrm{e}^{-\kappa(t-\tau)}\Delta(t) \;\le\; \varepsilon\left(-\frac{t-\tau}{\kappa} - \frac{1}{\kappa^2}\right)\mathrm{e}^{-\kappa(t-\tau)} + \frac{\varepsilon}{\kappa^2}.$$

$$\begin{aligned} \big|\varphi(t) - \psi(t)\big| = \Delta'(t) \;&\le\; \kappa\Delta(t) + \varepsilon(t-\tau) \\ &\le\; \frac{\varepsilon}{\kappa}\big(\mathrm{e}^{\kappa(t-\tau)} - 1\big) \;=\; \frac{\varepsilon}{\kappa}\big(\mathrm{e}^{\kappa|t-\tau|} - 1\big). \end{aligned}$$ □

Τό ἀνωτέρω ἀποτέλεσμα γενικεύεται εὐκόλως στήν περίπτωση συστημάτων:

Πρόταση 7.2.2. *Ἔστω $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} : D \to \mathbb{R}^m$ συνεχεῖς, ὅπου D ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}^{m+1}$ ἀνοικτό. Ὑποθέτομε ἐπίσης ὅτι οἱ $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$ εἶναι συνεχεῖς Lipschitz ὡς πρός τίς τελευταῖες m μεταβλητές. Δηλαδή*

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}_1) - \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}_2)| \;&\le\; \kappa|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|, \\ |\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{x}_1) - \boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{x}_2)| \;&\le\; \kappa|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|, \end{aligned}$$

γιά κάθε $(t,\boldsymbol{x}_1)$, $(t,\boldsymbol{x}_2) \in D$, ὅπου κ θετική σταθερά. Ἐπί πλέον ἔστω ὅτι

$$|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{x})| \le \varepsilon$$

γιά κάθε $(t,\boldsymbol{x}) \in D$. Ἄν $\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi} : I \to \mathbb{R}^m$ λύσεις τῶν προβλημάτων ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}' \;=\; \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{x}(\tau) \;=\; \boldsymbol{\xi} \end{cases}, \qquad \begin{cases} \boldsymbol{x}' \;=\; \boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{x}(\tau) \;=\; \boldsymbol{\xi} \end{cases},$$

ἀντιστοίχως, μέ γραφήματα ἐντός τοῦ D τότε θά ἰσχύει ἡ ἀνισότης

$$|\boldsymbol{\varphi}(t) - \boldsymbol{\psi}(t)| \;\le\; \frac{\varepsilon}{\kappa}\left(\mathrm{e}^{\kappa|t-\tau|} - 1\right),$$

γιά κάθε $t \in I$.

Απόδειξη. Ἄσκηση □.

7.3 Ὁμαλή ἐξάρτηση ὡς πρός x

Σ' αὐτή τήν ἑνότητα θά μελετηθεῖ πῶς ἡ ὁμαλή ἐξάρτηση τῆς συναρτήσεως ροῆς $f = f(t,x)$, ὡς πρός τήν δεύτερη μεταβλητή x, ἔχει ὡς συνέπεια τήν ἐξ ἴσου ὁμαλή ἐξάρτηση τῶν λύσεων τῆς ἀντιστοίχου διαφορικῆς ἐξισώσεως, τόσο ἀπό τόν ἀρχικό χρόνο τ, ὅσο καί ἀπό τήν ἀρχική τιμή ξ.

Συγκεκριμένα στήν *Ὑποενότητα 7.3.1*, θά δοῦμε τήν περίπτωση ὅπου ἔχομε ἁπλῶς συνέχεια Lipschitz τῆς f ὡς πρός x καί οἱ λύσεις εἶναι συνεχεῖς ἐπίσης Lipschitz ὡς πρός τ καί ξ. Στήν δέ *Ὑποἑνότητα 7.3.2* θά δοῦμε πῶς ἡ συνεχής διαφορισιμότης τῆς f ὡς πρός x συνεπάγεται τήν συνεχῆ διαφορισιμότητα τῶν λύσεων ὡς πρός τ καί ξ.

7.3.1 Ἐξάρτηση Lipschitz ἀπό τίς ἀρχικές συνθῆκες

Τό ἀποτέλεσμα τό ὁποῖο ἀκολουθεῖ μᾶς παρέχει ὅτι μέ τίς ὑποθέσεις τοῦ *Θεωρήματος Picard–Lindelöf*, (στήν σελίδα 126), ἡ προκύπτουσα λύση ἀφ' ἑνός μέν ὁρίζεται ὡς συνάρτηση, ὄχι μόνο τοῦ χρόνου ἀλλά καί τῶν ἀρχικῶν συνθηκῶν, ἀφ' ἑτέρου ὅτι εἶναι συνεχής Lipschitz ὡς πρός τόν ἀρχικό χρόνο τ καί τήν ἀρχική τιμή ξ.

Πρόταση 7.3.1. *Ἔστω $f : D \to \mathbb{R}$ συνεχής, ὅπου D ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}^2$ ἀνοικτό, $K = [\sigma-2\alpha, \sigma+2\alpha]\times[\eta-2\beta, \eta+2\beta] \subset D$ γιά κάποια α, β θετικά, καί $M = \max_{(t,x)\in K}|f(t,x)|$. Ἐπίσης, ὑποθέτομε ὅτι ἡ f ἱκανοποιεῖ τήν συνθήκη Lipschitz ὡς πρός τήν δεύτερη μεταβλητή:*

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \le \kappa\,|x_1 - x_2|,$$

γιά κάθε (t,x_1), $(t,x_2) \in K$. Ἔστω $\varphi = \varphi(t;\tau,\xi)$ ἡ λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(\tau) = \xi \end{cases}$$

ἡ ὁποία εἶναι ὁρισμένη κατά μοναδικό τρόπο στό διάστημα $I = [\tau-\gamma, \tau+\gamma]$, ὅπου $\gamma = \min\{\alpha, \beta/M\}$, γιά κάθε $\tau \in [\sigma-\alpha, \sigma+\alpha]$ καί $\xi \in [\eta-\beta, \eta+\beta]$, βάσει τοῦ Θεωρήματος 3.2.1. Τότε ἡ φ εἶναι συνεχής Lipschitz τόσο ὡς πρός τόν ἀρχικό χρόνο τ ὅσο καί πρός τήν ἀρχική τιμή ξ καί συγκεκριμένα ἰσχύουν οἱ ἀνισότητες:

$$|\varphi(t;\tau_1,\xi) - \varphi(t;\tau_2,\xi)| \le M e^{\kappa|t-\tau_1|}|\tau_1 - \tau_2|, \tag{7.6}$$

$$|\varphi(t;\tau,\xi_1) - \varphi(t;\tau,\xi_2)| \le e^{\kappa|t-\tau|}|\xi_1 - \xi_2|\,. \tag{7.7}$$

Παρατήρηση. Ἡ *Πρόταση 7.3.1*, πέραν τῆς συνεχείας Lipschitz ὡς πρός τίς ἀρχικές συνθῆκες μᾶς παρέχει καί τήν ὁρισιμότητα τῆς λύσεως $\varphi = \varphi(t;\tau,\xi)$ στό *πλάγιο* παραλληλεπίπεδο

$$\tau \in [\sigma-\alpha,\sigma+\alpha], \quad \xi \in [\eta-\beta,\eta+\beta], \quad t \in [\tau-\gamma,\tau+\gamma].$$

Απόδειξη. Ἔστω $\varphi_n(t;\tau,\xi)$ ἡ ἀναδρομική ἀκολουθία Picard

$$\begin{aligned} \varphi_0(t;\tau,\xi) &= \xi, \\ \varphi_{n+1}(t;\tau,\xi) &= \xi + \int_\tau^t f\big(s,\varphi_n(s;\tau,\xi)\big)\,ds \quad , \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

ἡ ὁποία ὁρίζεται καλῶς γιά κάθε $t \in I$, $\tau \in [\sigma-\alpha,\sigma+\alpha]$ καί $\xi \in [\eta-\beta,\eta+\beta]$. Ὁρίζομε τήν ἀκολουθία συναρτήσεων

$$\chi_n(t,\tau,\xi,h) = \frac{1}{h}\big(\varphi_n(t;\tau,\xi+h) - \varphi_n(t;\tau,\xi)\big).$$

ἡ ὁποία ἱκανοποιεῖ τά ἑξῆς

$$\chi_0(t,\tau,\xi,h) = 1 \quad \text{καί} \tag{7.8}$$

$$|\chi_{n+1}(t,\tau,\xi,h)| \le 1 + \kappa\int_\tau^t |\chi_n(s,\tau,\xi,h)|\,ds \tag{7.9}$$

διότι

$$\varphi_{n+1}(t;\tau,\xi+h) - \varphi_{n+1}(t;\tau,\xi) = h + \int_\tau^t \Big(f\big(s,\varphi_n(s;\tau,\xi+h)\big) - f\big(s,\varphi_n(s;\tau,\xi)\big)\Big)\,ds$$

καί

$$\begin{aligned} &\Big|\varphi_{n+1}(t;\tau,\xi+h) - \varphi_{n+1}(t;\tau,\xi)\Big| \le \\ &\le |h| + \int_\tau^t \Big|f\big(s,\varphi_n(s;\tau,\xi+h)\big) - f\big(s,\varphi_n(s;\tau,\xi)\big)\Big|\,ds \\ &\le |h| + \kappa\int_\tau^t |\varphi_n(s;\tau,\xi+h) - \varphi_n(s;\tau,\xi)|\,ds. \end{aligned}$$

Ἀπό τίς (7.8) καί (7.9) προκύπτει ἐπαγωγικῶς ὅτι

$$|\chi_n(t,\tau,\xi,h)| \le 1 + \kappa|t-\tau| + \ldots + \frac{\kappa^n|t-\tau|^n}{n!}$$

καί ὡς ἐκ τούτου

$$|\chi_n(t,\tau,\xi,h)| \le \mathrm{e}^{\kappa|t-\tau|},$$

ἤ ἰσοδύναμα

$$|\varphi_n(t;\tau,\xi+h)-\varphi_n(t;\tau,\xi)| \le |h|e^{\kappa|t-\tau|}$$

καί λόγῳ τῆς ὁμοιόμορφης συγκλίσεως τῆς $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ τά φ_n δύνανται νά ἀντικατασταθοῦν ἀνωτέρω ἀπό τό ὁμοιόμορφό τους, ὡς πρός t, ὅριο φ καί ἔτσι νά λάβομε τήν (7.7). Ἡ (7.6) προκύπτει ἀναλόγως ἀρκεῖ νά ὁρίσομε τήν ἀκολουθία

$$\zeta_n(t,\tau,\xi,h) = \frac{1}{h}\big(\varphi_n(t;\tau+h,\xi)-\varphi_n(t;\tau,\xi)\big),$$

καί νά διαπιστώσομε παρομοίως ὅτι

$$\zeta_0(t,\tau,\xi,h) = 0 \qquad \text{καί}$$

$$|\zeta_{n+1}(t,\tau,\xi,h)| \le M+\kappa\int_\tau^t |\zeta_n(s,\tau,\xi,h)|\,ds$$

ἀπ' ὅπου προκύπτει ἐπαγωγικῶς ὅτι

$$\begin{aligned}\big|\zeta_n(t,\tau,\xi,h)\big| &\le M\left(1+\kappa|t-\tau|+\ldots+\frac{\kappa^{(n-1)}|t-\tau|^{(n-1)}}{(n-1)!}\right)\\ &\le M\,e^{\kappa|t-\tau|}.\end{aligned}$$

□

Παρατήρηση. Ἡ ἀπόδειξη τῆς *Προτάσεως 7.3.1*, στήν περίπτωση τῆς ἐξαρτήσεως Lipschitz ὡς πρός τήν ἀρχική τιμή, δύναται νά ἐπιτευχθεῖ καί χωρίς τήν χρήση τῆς ἀναδρομικῆς ἀκολουθίας Picard:

Πρόταση 7.3.2. *Ἔστω $\varphi_1,\varphi_2 : I \to \mathbb{R}$ λύσεις τῆς ἐξισώσεως $x' = f(t,x)$ μέ ἀρχικές συνθῆκες*

$$\varphi_1(\tau) = \xi_1 \quad , \quad \varphi_2(\tau) = \xi_2,$$

ἀντιστοίχως. Ἄν ἡ f ἱκανοποιεῖ τήν συνθήκη Lipschitz:

$$|f(t,x_1)-f(t,x_2)| \le k|x_1-x_2|,$$

τότε γιά κάθε $t\in I$ ἰσχύει ὅτι:

$$|\varphi_1(t)-\varphi_2(t)| \le |\xi_1-\xi_2|e^{k|t-\tau|} \tag{7.10}$$

Ἀπόδειξη. Ἡ ἀπόδειξη τῆς (7.10) πραγματοποιεῖται κατ' ἀρχάς γιά $t\ge\tau$. Ἡ περίπτωση $t<\tau$ πραγματοποιεῖται παρομοίως. Οἱ ὁλοκληρωτικές μορφές τῶν προβλημάτων ἀρχικῶν τιμῶν τά ὁποῖα ἱκανοποιοῦν οἱ φ_1, φ_2 στό διάστημα I, ἔχουν ὡς ἑξῆς:

$$\varphi_1(t) = \xi_1+\int_\tau^t f\big(s,\varphi_1(s)\big)\,ds, \tag{7.11}$$

$$\varphi_2(t) = \xi_2+\int_\tau^t f\big(s,\varphi_2(s)\big)\,ds. \tag{7.12}$$

Ἄν ἐφαρμόσομε τήν τριγωνική ἀνισότητα στίς (7.11) καί (7.12) λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| &\leq |\xi_1 - \xi_2| + \int_\tau^t \big|f\big(s, \varphi_1(s)\big) - f\big(s, \varphi_2(s)\big)\big|\, ds \\ &\leq |\xi_1 - \xi_2| + \kappa \int_\tau^t |\varphi_1(s) - \varphi_2(s)|\, ds \end{aligned} \tag{7.13}$$

Ἄρα ἄν θέσομε

$$\Delta(t) = \int_\tau^t |\varphi_1(s) - \varphi_2(s)|\, ds,$$

τότε λόγῳ τῆς (7.13) ἡ Δ ἱκανοποιεῖ τήν ἀνισότητα:

$$\Delta' - \kappa\Delta \leq |\xi_1 - \xi_2|\,. \tag{7.14}$$

Πολλαπλασιάζοντας τήν ἀνωτέρω ἐπί τοῦ ὁλοκληρωτικοῦ παράγοντος e^{-kt} λαμβάνομε:

$$\mathrm{e}^{-kt}\big(\Delta'(t) - k\Delta(t)\big) \leq \mathrm{e}^{-kt}|\xi_1 - \xi_2|,$$

ἤ

$$\big(\mathrm{e}^{-kt}\Delta(t)\big)' \leq \mathrm{e}^{-kt}|\xi_1 - \xi_2|$$

καί ἀκολούθως ὁλοκληρώνοντάς την στό $[\tau, t]$, ὅπου $t \geq \tau$, λαμβάνομε:

$$\mathrm{e}^{-kt}\Delta(t) - \mathrm{e}^{-k\tau}\Delta(\tau) \leq \frac{|\xi_1 - \xi_2|}{k}(\mathrm{e}^{-k\tau} - \mathrm{e}^{-kt})\,. \tag{7.15}$$

Δεδομένου ὅμως ὅτι $\Delta(\tau) = 0$ ἡ (7.15) λαμβάνει τήν μορφή:

$$\Delta(t) \leq \frac{|\xi_1 - \xi_2|}{k}(\mathrm{e}^{k(t-\tau)} - 1).$$

Συνδυάζοντας τήν ἀνωτέρω μέ τήν (7.14) λαμβάνομε:

$$\begin{aligned} |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| &= \Delta'(t) \leq \kappa\Delta(t) + |\xi_1 - \xi_2| \\ &\leq |\xi_1 - \xi_2|(\mathrm{e}^{k(t-\tau)} - 1) + |\xi_1 - \xi_2| = |\xi_1 - \xi_2|\mathrm{e}^{k(t-\tau)}. \end{aligned}$$

Ἡ περίπτωση $t < \tau$ ἀποδεικνύεται ἀναλόγως. □

Παρατήρηση. Ἡ (7.7) εἶναι δυνατόν νά γραφεῖ καί ὡς:

$$|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)| \leq |\varphi_1(\tau) - \varphi_2(\tau)|\, \mathrm{e}^{k|t-\tau|},$$

ἡ ὁποία μᾶς λέγει ὅτι:

Ἡ ἀπόσταση τῶν γραφημάτων, ὡς συνάρτηση τοῦ χρόνου, δύο διαφορετικῶν λύσεων τῆς ἰδίας συνήθους διαφορικῆς ἐξισώσεως, μεταβάλλεται τό πολύ ἐκθετικῶς, μέ συντελεστή στόν ἐκθέτη τήν σταθερά τῆς συνθήκης Lipschitz.

7.3.2 Συνεχῶς διαφορίσιμη ἐξάρτηση τῆς ροῆς*

Σ' αὐτή τήν ὑποενότητα θά δοῦμε τό ἀκόλουθο ἀποτέλεσμα:

Θεώρημα 7.3.3. *Ἔστω $f \in C(D)$, ὅπου D ἀνοικτό ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}^2$. Ἐπίσης ἔστω ὅτι ἡ f εἶναι συνεχῶς διαφορίσιμη ὡς πρός τήν δευτέρη μεταβλητή στό D. Ἄν $\varphi = \varphi(t;\tau,\xi)$ ἡ λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν*

$$\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(\tau) = \xi, \end{cases} \tag{7.16}$$

τότε ἡ φ εἶναι συνεχῶς διαφορίσιμη ὡς πρός τ καί ξ.

Παρατήρηση. Κατ' ἀρχάς θά πρέπει νά ἐπισημανθεῖ ὅτι ἡ $\varphi = \varphi(t;\tau,\xi)$, δύναται νά ὁρισθεῖ σ' ἕνα ἀνοικτό ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}^3$ ὅπου γιά κάθε $(\tau,\xi) \in D$, ἀποτελεῖ λύση τοῦ ἀντίστοιχου προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν.

Ἀπόδειξη.

Α. Ὑποθέτομε κατ' ἀρχάς ὅτι ἡ f εἶναι $C^{1,1}$ ὡς πρός x. Δηλαδή, ὅτι ἡ f εἶναι συνεχῶς διαφορίσιμη ὡς πρός x καί ἡ f_x εἶναι τοπικῶς συνεχής Lipschitz ἐπίσης ὡς πρός x. Ἄν ἡ φ ἦταν συνεχῶς διαφορίσιμη ὡς πρός τ καί ξ, τότε οἱ φ_τ καί φ_ξ θά ἱκανοποιοῦσαν τά κάτωθι προβλήματα ἀρχικῶν τιμῶν:

$$\varphi_\tau' = f_x\big(t,\varphi(t;\tau,\xi)\big)\,\varphi_\tau, \qquad \varphi_\tau(\tau;\tau,\xi) = -f(\tau,\xi), \tag{7.17i}$$

$$\varphi_\xi' = f_x\big(t,\varphi(t;\tau,\xi)\big)\,\varphi_\xi, \qquad \varphi_\xi(\tau;\tau,\xi) = 1, \tag{7.17ii}$$

ἀντιστοίχως. Ὁπότε θά εἴχαμε ὅτι:

$$\begin{aligned} \varphi_\tau(t;\tau,\xi) &= -f(\tau,\xi)\,\mathrm{e}^{\int_\tau^t f_x\left(s,\varphi(s;\tau,\xi)\right)\,ds}, \\ \varphi_\xi(t;\tau,\xi) &= \mathrm{e}^{\int_\tau^t f_x\left(s,\varphi(s;\tau,\xi)\right)\,ds}, \end{aligned}$$

ἀντιστοίχως. Γιά τήν ἀναδρομική ἀκολουθία Picard ἡ ὁποία προσεγγίζει τήν λύση τοῦ (7.16) ἔχομε ὅτι $\varphi_0(t;\tau,\xi) = \xi$ ὁπότε

$$\varphi_{0,\tau} = 0 \quad \text{ἐνῶ} \quad \varphi_{0,\xi} = 1$$

καί ἀναδρομικῶς

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1,\tau}(t) &= -f(\tau,\xi) + \int_\tau^t f_x\big(s,\varphi_n(s;\tau,\xi)\big)\,\varphi_{n,\tau}(s)\,ds \\ \varphi_{n+1,\xi}(t) &= 1 + \int_\tau^t f_x\big(s,\varphi_n(s;\tau,\xi)\big)\,\varphi_{n,\xi}(s)\,ds. \end{aligned}$$

Ἀρκεῖ νά δειχθεῖ ὅτι οἱ ἀκολουθίες

$$\{\varphi_{n,\tau}(t;\tau,\xi)\}_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{καί} \quad \{\varphi_{n,\xi}(t;\tau,\xi)\}_{n\in\mathbb{N}},$$

συγκλίνουν ὁμοιομόρφως στό $I=[\tau-\gamma,\tau+\gamma]$.[93] Ὅμως ἔχομε ὅτι:

$$\begin{aligned}\left|\varphi_{n+1,\xi}(t)-\varphi_{n,\xi}(t)\right| &\le \left|\int_\tau^t \big(f_x(s,\varphi_n)\varphi_{n,\xi}(s)-f_x(s,\varphi_{n-1})\varphi_{n,\xi}(s)\big)\, ds\right|\\ &\le \kappa\int_\tau^t \left|\varphi_{n,\xi}(s)-\varphi_{n-1,\xi}(s)\right| ds\\ &\quad +\int_\tau^t |f_x(s,\varphi_n)-f_x(s,\varphi_{n-1})|\, ds\cdot \max_{t\in I}\left|\varphi_{n,\xi}(t)\right|,\end{aligned}$$

ὅπου $\kappa=\max_{(t,x)\in K}|f_x(t,x)|$. Ἐπειδή ὅμως $\varphi_{0,\xi}=1$, τότε λαμβάνομε ἀναδρομικῶς

$$\begin{aligned}\left|\varphi_{1,\xi}\right| &\le 1+\kappa|t-\tau|,\\ &\dots\\ \left|\varphi_{n,\xi}\right| &\le 1+\kappa|t-\tau|+\ldots+\frac{\kappa^n}{n!}|t-\tau|^n\end{aligned}$$

καί ὡς ἐκ τούτου λαμβάνομε ὅτι

$$\left|\varphi_{n\xi}(t)\right| \le \mathrm{e}^{\kappa|t-\tau|} \le \mathrm{e}^{\kappa\gamma},$$

ὁπότε τελικῶς

$$\begin{aligned}\left|\varphi_{n+1,\xi}(t)-\varphi_{n,\xi}(t)\right| &\le \kappa\int_\tau^t \left|\varphi_{n,\xi}(s)-\varphi_{n-1,\xi}(s)\right| ds\\ &\quad +\mathrm{e}^{\kappa\gamma}\lambda\int_\tau^t \left|\varphi_{n,\xi}(s)-\varphi_{n-1,\xi}(s)\right| ds\\ &= (\kappa+\mathrm{e}^{\kappa\gamma}\lambda)\int_\tau^t \left|\varphi_{n,\xi}(s)-\varphi_{n-1,\xi}(s)\right| ds,\end{aligned}$$

ὅπου

$$\lambda = \sup_{h\neq 0}\left|\frac{f_x(t,\xi+h)-f_x(t,\xi)}{h}\right|.$$

[93] Ὑπενθυμίζομε τό λῆμμα:

Λῆμμα 7.3.4. *Ἔστω $\varphi_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ ἀκολουθία διαφορισίμων συναρτήσεων. Ἄν $\varphi_n\to\varphi$ καί $\varphi_n'\to\psi$, ὁμοιομόρφως στό $[a,b]$ τότε ἡ φ εἶναι διαφορίσιμη καί ἰσχύει ὅτι $\varphi'=\psi$.*

□.

Ὡς ἐκ τούτου, ἀναλόγως μέ τήν ἀπόδειξη τοῦ *Θεωρήματος 3.2.1* στήν σελίδα 126, χρησιμοποιῶντας τήν ἀνωτέρω ἀνισότητα, λαμβάνομε ἐπαγωγικῶς ὅτι

$$\begin{aligned}\left|\varphi_{n+1,\xi}(t)-\varphi_{n,\xi}(t)\right| &\leq (\kappa+\mathrm{e}^{\kappa\gamma}\lambda)^n\,\frac{|t-\tau|^{n+1}}{(n+1)!}\\ &\leq (\kappa+\mathrm{e}^{\kappa\gamma}\lambda)^n\,\frac{\gamma^{n+1}}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

Ἄρα, λόγῳ τοῦ *Κριτηρίου Weierstraß*, ἡ ἀκολουθία $\{\varphi_{n,\xi}\}_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ὁμοιομόρφως

Παρομοίως πράττομε γιά τήν ἀκολουθία $\{\varphi_{n,\tau}\}_{n\in\mathbb{N}}$.

B. Ἔστω τώρα ἡ δυσκολότερη περίπτωση ὅπου $f,\, f_x\in C(D)$.

Θέτομε

$$\psi(t;\xi,h) \;=\; \frac{1}{h}\left(\varphi(t,\xi+h)-\varphi(t,\xi)\right),$$

τότε

$$\begin{aligned}\psi(\tau;\xi,h) &= 1\\ \psi'(t;\xi,h) &= \frac{1}{h}\left(f\big(t,\varphi(t,\xi+h)\big)-f\big(t,\varphi(t,\xi)\big)\right)\\ &= f_x\big(t,\zeta(t,\xi,h)\big)\cdot\left(\frac{\varphi(t,\xi+h)-\varphi(t,\xi)}{h}\right)\\ &= f_x\big(t,\zeta(t,\xi,h)\big)\psi(t;\xi,h),\end{aligned}$$

ὅπου $\zeta(t,\xi,h)$ μεταξύ τῶν $\varphi(t,\xi)$ καί $\varphi(t,\xi+h)$. Ἄρα

$$\psi'(t;\xi,h) \;=\; f_x\big(t,\varphi(t,\xi)\big)\psi(t;\xi,h)-\Delta(t,\xi,h)\psi(t;\xi,h),$$

ὅπου

$$E(t,\xi,h) \;=\; f_x\big(t,\zeta(t,\xi,h)\big)-f_x\big(t,\varphi(t,\xi)\big)$$

καί ἄν

$$K \;=\; [\tau-\gamma+\tau+\gamma]\times[\eta-\beta,\eta+\beta],$$

τότε

$$\lim_{h\to 0}E(t,\xi,h) \;=\; 0, \quad \text{ὁμοιομόρφως στό } K.$$

Ἐπίσης $|\psi(t;\xi,h)| \leq e^{\lambda|t-\tau|} \leq e^{\lambda\gamma}$, ὅπου

$$\lambda = \sup\left\{\left|f_x\big(t,\varphi(t,\xi)\big)\right| + |E(t,\xi,h)|\right\}.$$

Ἄρα ἡ $\psi(t,\xi,h)$ ἀποτελεῖ $\varepsilon-$προσεγγιστική λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x' = f_x\big(t,\varphi(t,\xi)\big)\,x \\ x(\tau) = 1, \end{cases} \tag{7.18}$$

ὅπου

$$\varepsilon = e^{\lambda\gamma} \max_{(t,\xi)\in K} \left|f_x(t,\varphi\big(t,\xi+h)\big) - f_x(t,\varphi(t,\xi))\right| = \varepsilon(h).$$

Προφανῶς $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$. Ἔστω τώρα $\psi(t,\xi,0)$ λύση τοῦ (7.18). Τότε

$$|\psi(t,\xi,h) - \psi(t,\xi,0)| \leq \varepsilon(h)\left(e^{\kappa|t-\tau|} - 1\right)$$

καί ἐν τέλει

$$\lim_{h\to 0}\psi(t,\xi,h) = \psi(t,\xi,0),$$

ὁμοιομόρφως στό K □

Παρατήρηση. Τό *Θεώρημα 7.3.3* εἶναι δυνατόν νά γενικευθεῖ στήν περίπτωση τῶν συστημάτων:

Θεώρημα 7.3.5. *Ἔστω D ἀνοικτό ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}^{n+1}$ καί $f : D \to \mathbb{R}^n$ συνεχής καί συνεχῶς διαφορίσιμη ὡς πρός τίς τελευταῖες n μεταβλητές. Ἄν $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}(t;\tau,\boldsymbol{\xi})$ ἡ λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν*

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{x}(\tau) = \boldsymbol{\xi}, \end{cases} \tag{7.19}$$

τότε ἡ $\boldsymbol{\varphi}$ εἶναι συνεχῶς διαφορίσιμη ὡς πρός τ καί $\boldsymbol{\xi}$. □.

Ἀσκήσεις

7.3.1 Δείξατε ὅτι ἡ λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x' + x = e^{\lambda t} \\ x(\tau) = \xi \end{cases}$$

εἶναι ἄπειρες φορές παραγωγίσιμη ὡς πρός λ, τ, $\xi \in \mathbb{R}$.

7.3.2 Ἐξηγήσατε πῶς ἡ *Πρόταση 7.3.1* δύναται νά γενικευθεῖ καί γιά συστήματα ἐξισώσεων.

7.3.3 Ἄν $\varphi(t,\xi)$ ἡ συνάρτηση ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπό τήν *Πρόταση 7.3.1*, δείξατε ὅτι

$$\varphi(t,\xi) \;=\; \varphi(t,\xi_0) + \int_{\xi_0}^{\xi} \mathrm{e}^{\int_\tau^t f_x\left(s,\varphi(s,\eta)\right)\,ds}\,d\eta,$$

δοθέντος βεβαίως ὅτι ἡ f εἶναι συνεχῶς διαφορίσιμη ὡς πρός x.

7.3.4 Ἡ ὁμαλή ἐξάρτηση ἀπό τόν ἀρχικό χρόνο προκύπτει ὡς συνέπεια τοῦ γεγονότος ὅτι μία συνήθης διαφορική ἐξίσωση (ἤ σύστημα ἐξισώσεων), εἶναι ἰσοδύναμο μέ ἕνα ἄλλο αὐτόνομο σύστημα τό ὁποῖο ἔχει μιά ἐπί πλέον διαστάση, τό χρόνο, σέ συνδυασμό μέ τό ἀποτέλεσμα τῆς ἀνωτέρω ἀσκήσεως.

7.3.5 **Ἀνισότης Gronwall**: Ἔστω $f,\, g \in C[a,b]$ καί $\kappa > 0$, σταθερά. Ἄν ἰσχύει ὅτι

$$f(t) \;\le\; \kappa + \int_a^t f(s)\,g(s)\,ds,$$

γιά κάθε $t\in[a,b]$ τότε θά ἰσχύει ὅτι

$$f(t) \;\le\; \kappa\,\mathrm{e}^{\int_a^t g(s)\,ds},$$

γιά κάθε $t\in[a,b]$.

7.3.6 Νά βρεθοῦν ὅλες οἱ μή ἀρνητικές συναρτήσεις $f \in C[a,b]$, οἱ ὁποῖες ἱκανοποιοῦν

$$f(t) \;\le\; \int_a^t f(s)\,ds,$$

γιά κάθε $t\in[a,b]$.

7.3.7 Ἔστω $\varphi,\psi,\zeta : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχεῖς συναρτήσεις καί $\zeta(t) > 0$ γιά κάθε $t \in [a,b]$. Ὑποθέσατε ἐπί πλέον ὅτι:

$$\varphi(t) \;\le\; \psi(t) + \int_a^t \zeta(s)\varphi(s)\,ds$$

γιά κάθε $t \in [a,b]$. Ἀποδείξατε ὅτι γιά κάθε $t \in [a,b]$ ἰσχύει ὅτι:

$$\varphi(t) \;\le\; \psi(t) + \int_a^t \zeta(s)\psi(s)\mathrm{e}^{\int_s^t \zeta(\sigma)d\sigma}\,ds.$$

Υποδειξη. Θέσατε

$$\Delta(t) = \int_a^t \zeta(s)\varphi(s)\,ds$$

καί ἀποδείξατε ὅτι

$$\Delta' - \zeta\Delta \;\le\; \zeta\psi.$$

7.3.8 Ἔστω $\varphi(t,\varepsilon)$ ἡ λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x' \;=\; \frac{1}{\varepsilon}\sin\varepsilon x \\[2ex] x(0) \;=\; 1, \end{cases}$$

ὅπου $\varepsilon \neq 0$. Δείξατε ὅτι

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varphi(t,\varepsilon) \;=\; \mathrm{e}^t.$$

7.3.9 Ἔστω $\varphi(t,\varepsilon)$ ἡ λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\varepsilon}\sin(\varepsilon x^2) \\ x(0) = 1, \end{cases}$$

ὅπου $\varepsilon \neq 0$. Νά βρεθεῖ τό $\lim_{\varepsilon\to 0}\varphi(t,\varepsilon)$.

7.3.10* Ἔστω D ἀνοικτό ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}^{n+1}$ καί $f : D \to \mathbb{R}^n$ συνεχής καί συνεχῶς διαφορίσιμη ὡς πρός τίς τελευταῖες n μεταβλητές. Ἄν $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}(t;\tau,\boldsymbol{\xi})$ ἡ λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{x}(\tau) = \boldsymbol{\xi}, \end{cases}$$

τότε ἰσχύει ὁ κατωτέρω *Διατηρητικός Νόμος*:

$$\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial\tau}(t;\tau,\boldsymbol{\xi}) + \sum_{j=1}^{n} f_j(\tau,\boldsymbol{\xi})\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial\xi_j} = 0,$$

ὅπου $\boldsymbol{f} = (f_1,\ldots,f_n)$.

Κεφάλαιο 8

Αὐτοσυζυγῆ προβλήματα ἰδιοτιμῶν

Τό παρόν κεφάλαιο προέκυψε ἀπό παραδόσεις τοῦ μεταπτυχιακοῦ μαθήματος ἐπί τῶν συνήθων διαφορικῶν ἐξισώσεων καί προϋποθέτει γνώσεις *Πραγματικῆς, Μιγαδικῆς* καθώς ἐπίσης καί *Συναρτησιακῆς Ἀναλύσεως.* Ἐν τάχει ἀναφορά ὁρισμῶν καί γνωστῶν ἀποτελεσμάτων Συναρτησιακῆς Ἀναλύσεως λαμβάνει χώρα στήν *Ἑνότητα 8.3.* Στήν ἴδια ἑνότητα, παρατίθενται, μετ' ἀποδείξεως, ἀποτελέσματα σχετικά μέ τήν φασματική ἀνάλυση συμπαγῶν αὐτοσυζυγῶν τελεστῶν χώρων Hilbert.

8.1 Εἰσαγωγικά

Ἡ *Ἐξίσωση Θερμότητος* ἐμφανίζεται πολύ συχνά ὡς πρόβλημα ἀρχικῶν/συνοριακῶν τιμῶν μέ ἁπλουστευμένη μονοδιάστατη ἐκδοχή αὐτοῦ τήν ἑξῆς:

$$\begin{cases} u_t \;=\; u_{xx}, \\ u(x,0) \;=\; f(x), \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \end{cases} \tag{8.1}$$

ὅπου $t > 0,\ x \in (0,1)$. Τό ἀνωτέρω πρόβλημα εἶναι δυνατόν νά ἐπιλυθεῖ διά τῆς *μεθόδου χωρισμοῦ τῶν μεταβλητῶν*, δηλαδή ἀναζητήσεως λύσεως τῆς μορφῆς

$$u(x,t) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(t)\varphi_n(x),$$

ὅπου κάθε ὅρος τοῦ ἀθροίσματος ἱκανοποιεῖ τήν διαφορική ἐξίσωση. Ἤτοι:

$$\alpha_n'(t)\varphi_n(x) \;=\; \alpha_n(t)\varphi_n''(x),$$

ὁπότε, ἐκεῖ ὅπου δέν μηδενίζονται τά α_n, φ_n, ἰσχύει ὅτι:

$$\frac{\alpha_n'(t)}{\alpha_n(t)} \;=\; \frac{\varphi_n''(x)}{\varphi_n(x)}.$$

Τό δεξιό μέλος τῆς ἀνωτέρω εἶναι συνάρτηση μόνο τοῦ t, ἐνῶ τό δεξιό μόνο τοῦ x. Ἄρα θά πρέπει νά εἶναι καί τά δύο μέλη σταθερά. Συγκεκριμένα θά πρέπει νά ἱκανοποιοῦνται ὅλες οἱ ἐξισώσεις

$$\frac{\alpha_n'(t)}{\alpha_n(t)} = \frac{\varphi_n''(x)}{\varphi_n(x)} = \lambda_n,$$

γιά κατάλληλες σταθερές λ_n, $n \in \mathbb{N}$. Ὡς ἐκ τούτου θά πρέπει νά ἱκανοποιοῦνται ταυτοχρόνως οἱ διαφορικές ἐξισώσεις

$$\varphi_n'' = \lambda_n \varphi_n, \quad \alpha_n' = \lambda_n \alpha_n$$

γιά κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ἐδῶ ὑπάρχουν τριῶν εἰδῶν λύσεις ἀναλόγως μέ τό πρόσημο τοῦ λ_n. Συγκεκριμένα

(i) Ἄν $\lambda_n > 0$, τότε

$$\varphi_n(x) = c_n \cosh\left(\sqrt{\lambda_n}\, x\right) + d_n \sinh\left(\sqrt{\lambda_n}\, x\right), \quad \alpha_n(t) = b_n \mathrm{e}^{\lambda_n t}.$$

(ii) Ἄν $\lambda_n = 0$, τότε

$$\varphi_n(x) = c_n x + d_n, \quad \alpha_n(t) = b_n.$$

(iii) Ἄν $\lambda_n < 0$, τότε

$$\varphi_n(x) = c_n \cos\left(\sqrt{-\lambda_n}\, x\right) + d_n \sin\left(\sqrt{-\lambda_n}\, x\right), \quad \alpha_n(t) = b_n \mathrm{e}^{\lambda_n t}.$$

ὅπου b_n, c_n, d_n, σταθερές.

Ἡ ὑποχρέωση τῆς λύσεως τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν/συνοριακῶν τιμῶν νά ἱκανοποιεῖ τήν συνοριακή συνθήκη $u(0) = u(1)$, συνεπάγεται ὅτι $\lambda_n < 0$ καί συγκεκριμένα, $\lambda_n = -n^2\pi^2$. Ἰδιαιτέρως οἱ συναρτήσεις α_n, φ_n, δύνανται νά ἐπιλεγοῦν ὡς οἱ

$$\alpha_n(t) = \mathrm{e}^{-n^2\pi^2 t}, \quad \varphi_n(x) = \sin n\pi t.$$

Ἡ ἀνωτέρω ἐπιλογή καθιστᾶ ἐφικτή καί τήν ἱκανοποίηση τῆς ἀρχικῆς συνθήκης $u(x,0) = f(x)$ γιά *ἐπαρκῶς ὁμαλές* ἀρχικές τιμές. Πράγματι, κάθε συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, ἱκανοποιοῦσα τίς συνθῆκες $f(0) = f(1) = 0$, δύναται νά γραφεῖ ὡς (ἄπειρος) γραμμικός συνδυασμός ἡμιτόνων:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin n\pi x,$$

ὅπου

$$f_n = \frac{1}{2}\int_0^1 f(x) \sin n\pi x \, dx$$

καί ὡς ἐκ τούτου ἡ λύση τοῦ (8.1) γράφεται ὡς

$$u(x,t) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} f_n\, \mathrm{e}^{-n^2\pi^2 t} \sin n\pi x.$$

Τά ἡμίτονα, δηλαδή οἱ συναρτήσεις $\varphi_n(x) = \sin n\pi x$, ἀποτελοῦν τίς *ἰδιοσυναρτήσεις* καταλλήλου *προβλήματος ἰδιοτιμῶν* (βλέπε σχετική *Ἑνότητα 1.6*). Ὅπως θά δοῦμε στό παρόν κεφάλαιο, ἡ δυνατότης αὐτή ὑπάρχει σέ πλειάδα προβλημάτων ἀρχικῶν/συνοριακῶν τιμῶν. Συγκεκριμένα, αὐτά τά ὁποῖα καταλήγουν σέ *αὐτοσυζυγές πρόβλημα συνοριακῶν τιμῶν*, καί σέ μία τέτοια περίπτωση, κάθε λογική ἀρχική συνθήκη δύναται νά γραφεῖ ὡς γραμμικός συνδυασμός ἰδιοσυναρτήσεων.

8.2 Προβλήματα ἰδιοτιμῶν

8.2.1 Παραδείγματα

Ἄς δοῦμε μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα ξεκινῶντας ἀπό αὐτό τό ὁποῖο μόλις συναντήσαμε:

(i) Ἔστω τό πρόβλημα συνοριακῶν τιμῶν

$$\begin{cases} -x'' \;=\; \lambda x \\ x(0) = x(1) = 0, \end{cases} \tag{8.2}$$

ὅπου λ ἐν γένει μιγαδικός ἀριθμός. Οἱ λύσεις τοῦ ἀνωτέρω οἱ ὁποῖες ἱκανοποιοῦν τήν ἀρχική συνθήκη $x(0) = 0$ εἶναι τῆς μορφῆς:

$$\varphi(t) \;=\; c \sin \lambda^{\frac{1}{2}} t.$$

Ἡ δεύτερη συνοριακή συνθήκη συνεπάγεται ὅτι: $c \sin \lambda^{\frac{1}{2}} \;=\; 0$. Ἄρα τό (8.2) ἔχει μή ταυτοτικῶς μηδενική λύση, ἄν καί μόνο ἄν $\lambda \;=\; n^2\pi^2$, γιά κάποιο n θετικό ἀκέραιο. Αὐτά τά λ ὀνομάζονται *ἰδιοτιμές* τοῦ προβλήματος (8.2). Οἱ ἀντίστοιχες μή ταυτοτικῶς μηδενικές λύσεις ἤ *ἰδιοσυναρτήσεις* εἶναι οἱ

$$\varphi_n(t) \;=\; \sqrt{2} \sin n\pi t, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ὁ συντελεστής $c = \sqrt{2}$, ἐπελέγη ὥστε

$$\int_0^1 \varphi_k(t)\varphi_l(t)\, dt \;=\; \delta_{kl},$$

ὅπου δ_{kl} τό σύμβολο τοῦ Kronecker[94] Ὅπως θά δοῦμε ἀργότερα, κάτι τέτοιο εἶναι ἐφικτό σέ μία μεγάλη κλάση προβλημάτων συνοριακῶν τιμῶν. Στό πρόβλημα συνοριακῶν τιμῶν (8.2) λάβαμε τήν *ὀρθοκανονική σειρά τῶν ἡμιτόνων*, ἡ ὁποία, ὅπως θά δοῦμε ἀργότερα, ἀποτελεῖ *ὀρθοκανονική βάση* τοῦ $L^2[0,1]$.

[94] Leopold Kronecker (1823–1891). Γερμανός μαθηματικός, μαθητής τοῦ Dirichlet.

(ii) Μιά ἀκόμη ἁπλούστερη περίπτωση ἀποτελεῖ τό πρόβλημα συνοριακῶν τιμῶν

$$\begin{cases} \mathrm{i}x' = \lambda x \\ x(0) = x(1), \end{cases} \tag{8.3}$$

ὅπου i ἡ φανταστική μονάδα. Ἐδῶ οἱ ἰδιοτιμές εἶναι

$$\lambda_k = 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

μέ ἀντίστοιχες ἰδιοσυναρτήσεις τίς

$$\varphi_k(t) = \mathrm{e}^{-2k\pi \mathrm{i} t}. \tag{8.4}$$

Παρατηρῆστε ὅτι ἐδῶ ἰσχύει:

$$\int_0^1 \varphi_k(t)\overline{\varphi_l}(t)\,dt = \delta_{kl},$$

ὅπου $\bar{z}$ ὁ συζυγής μιγαδικός τοῦ z. Θά δοῦμε ἀργότερα ὅτι οἱ ἰδιοσυναρτήσεις τοῦ (8.3) ἀποτελοῦν ἐπίσης ὀρθοκανονική βάση τοῦ $L^2[0,1]$.

(iii) Ἄς δοῦμε τώρα μία ἐλαφρῶς τροποποιημένη ἐκδοχή τοῦ παραδείγματος ii. Ἔστω τό πρόβλημα συνοριακῶν τιμῶν:

$$\begin{cases} \mathrm{i}x' = \lambda x \\ \alpha x(0) = x(1), \end{cases} \tag{8.5}$$

ὅπου α μιγαδική σταθερά. Ἔστω λ_k, $k\in\mathbb{Z}$, οἱ ἰδιοτιμές καί φ_k, $k\in\mathbb{Z}$, οἱ ἀντίστοιχες ἰδιοσυναρτήσεις τοῦ (8.5). Εὐκόλως διαπιστοῦται ὅτι:

$$\lambda_k = \mathrm{i}\log\alpha + 2k\pi, \quad \text{ἐνῶ} \quad \varphi_k(t) = \mathrm{e}^{-\lambda_k t}.$$

Ἄν θέσομε

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_0^1 \varphi(t)\overline{\psi}(t)\,dt,$$

τότε ἰσχύουν τά ἀκόλουθα:

$$\langle \mathcal{L}\varphi_k, \varphi_l \rangle = \lambda_k \langle \varphi_k, \varphi_l \rangle \quad \text{καί} \quad \langle \varphi_k, \mathcal{L}\varphi_l \rangle = \overline{\lambda_l}\langle \varphi_k, \varphi_l \rangle,$$

ὅπου $\mathcal{L}x = \mathrm{i}x'$, ἄρα

$$\langle \mathcal{L}\varphi_k, \varphi_l \rangle - \langle \varphi_k, \mathcal{L}\varphi_l \rangle = (\lambda_k - \overline{\lambda_l})\langle \varphi_k, \varphi_l \rangle. \tag{8.6}$$

Ὅμως λόγῳ τῆς συνοριακῆς συνθήκης, ἰσχύει ἐπίσης ὅτι:

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{L}\varphi_k, \varphi_l\rangle - \langle \varphi_k, \mathcal{L}\varphi_l\rangle &= \mathrm{i}\int_0^1 \left(\varphi_k'\overline{\varphi_l} + \varphi_k\overline{\varphi_l'}\right)\, dt \\ &= \mathrm{i}\varphi_k\bar{\varphi}_l\big|_0^1 \\ &= \mathrm{i}\varphi_k(1)\overline{\varphi_l}(1) - \mathrm{i}\varphi_k(0)\overline{\varphi_l}(0) \\ &= \mathrm{i}(\alpha\bar{\alpha} - 1)\varphi_k(0)\overline{\varphi_l}(0). \end{aligned} \tag{8.7}$$

Συνδυάζοντας τίς (8.6) καί (8.7) προκύπτει ὅτι:

$$(\lambda_k - \overline{\lambda_l})\langle \varphi_k, \varphi_l\rangle \;=\; \mathrm{i}(\alpha\bar{\alpha} - 1)\varphi_k(0)\overline{\varphi_l}(0).$$

Ὁπότε ἄν $|\alpha| = 1$, τότε:

(i) Θέτοντας $k = l$, προκύπτει ὅτι οἱ ἰδιοτιμές εἶναι πραγματικές.

(ii) Θέτοντας $k \neq l$, προκύπτει ὅτι ἄν $\lambda_k \neq \lambda_l$, τότε $\langle \varphi_k, \varphi_l\rangle = 0$. Ἤτοι, οἱ ἀντίστοιχες ἰδιοσυναρτήσεις εἶναι ὀρθογώνιες.

Συνολικῶς λοιπόν ἄν $|\alpha| = 1$, τότε οἱ ἰδιοτιμές εἶναι πραγματικές ἐνῶ οἱ ἰδιοσυναρτήσεις οἱ ὁποῖες ἀντιστοιχοῦν σέ διαφορετικές ἰδιοτιμές εἶναι ὀρθογώνιες. Ἄν ὅμως $|\alpha| \neq 1$, τότε οἱ ἰδιοτιμές δέν εἶναι ἀπαραιτήτως πραγματικές οὔτε οἱ ἰδιοσυναρτήσεις οἱ ὁποῖες ἀντιστοιχοῦν σέ διαφορετικές ἰδιοτιμές εἶναι ὀρθογώνιες. Ἄν μηδενίζεται ἡ (8.7), τότε θά ἰσχύει ὅτι:

$$\langle \varphi_k, \mathcal{L}\varphi_l\rangle \;=\; \langle \mathcal{L}\varphi_k, \varphi_l\rangle,$$

ἡ ὁποία ἀποτελεῖ σχέση κεντρικῆς σημασίας καί εἶναι γνωστή ὡς *συνθήκη αὐτοσυζυγίας*.

8.2.2 Αὐτοσυζυγῆ προβλήματα ἰδιοτιμῶν

Ἔστω $\mathcal{L}$ ἕνας συνήθης διαφορικός τελεστής $n-$στῆς τάξεως

$$\mathcal{L}x \;=\; p_0(t)x^{(n)} + \ldots + p_n(t)x^{(0)}, \tag{8.8}$$

ὅπου οἱ p_j, γνωστοί ὡς *συντελεστές* τῆς ἐξισώσεως, εἶναι ἐν γένει μιγαδικές συναρτήσεις γιά τίς ὁποῖεςςἀπαιτοῦμε νά ἰσχύουν $p_j \in C^{n-j}[a,b]$, καθώς καί $p_0(t) \neq 0$ γιά κάθε $t \in [a,b]$. Σημειωτέον ὅτι, στήν μέχρι τώρα μελέτη τέτοιων γραμμικῶν διαφορικῶν τελεστῶν στό ἀνά χεῖρας, διά λόγους ἁπλουστεύσεως εἶχε ὑποτεθεῖ ὅτι $p_0(t) \equiv 1$. Ἡ ὑπόθεση αὐτή παραμερίζεται καθώςςἐνδέχεται νά ἐπηρεάζει τήν αὐτοσυζυγία τοῦ τελεστοῦ, ὅπως θά διαφανεῖ ἀμέσως μετά. Ἔστω ἐπίσης οἱ *συνοριακοί τελεστές*

$$U_j x \;=\; \sum_{k=1}^{n}\left(A_{jk}x^{(k-1)}(a) + B_{jk}x^{(k-1)}(b)\right), \qquad j = 1,\ldots,n, \tag{8.9}$$

ὅπου A_{jk}, B_{jk}, $j,k = 1,\ldots,n$, σταθερές καί $\boldsymbol{U} = (U_1,\ldots,U_n)$. Ὁ $\boldsymbol{U}$ δύναται νά θεωρηθεῖ ὡς γραμμικός τελεστής:

$$\boldsymbol{U} : C^{n-1}[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Δίδεται λοιπόν ὁ ἀκόλουθος ὁρισμός:

Ὁρισμός 8.2.1. *Τό πρόβλημα συνοριακῶν τιμῶν*

$$\mathcal{L}x = \lambda x, \quad \boldsymbol{U}x = 0, \tag{8.10}$$

ὅπου $\lambda \in \mathbb{C}$, καλεῖται πρόβλημα ἰδιοτιμῶν. Ὀνομάζεται δέ αὐτοσυζυγές ἄν

$$\langle Lu, v\rangle = \langle u, Lv\rangle, \tag{8.11}$$

γιά κάθε u, $v \in C^n[a,b]$ οἱ ὁποῖες ἱκανοποιοῦν τίς συνοριακές συνθῆκες

$$\boldsymbol{U}u = \boldsymbol{U}v = 0.$$

Προφανῶς ἡ ταυτοτικῶς μηδενική συνάρτηση εἶναι πάντοτε λύση τοῦ (8.10). Ἄν γιά κάποιο λ ὑπάρχει μή μηδενική λύση, τότε αὐτό τό λ ὀνομάζεται ἰδιοτιμή τοῦ προβλήματος. Ἡ δέ λύση ὀνομάζεται ἰδιοσυνάρτηση.

Σημειοῦται ὅτι τό ἐσωτερικό γινόμενο ἡ ὁποία ἐμφανίζεται στήν (8.11) εἶναι τό

$$\langle u, v\rangle = \int_a^b u(t)\overline{v}(t)\,dt.$$

Σ' αὐτό τό σημεῖο θά ὁρισθεῖ ὁ συζυγής διαφορικός τελεστής:

Ὁρισμός 8.2.2. *Ὁ γραμμικός συνήθης διαφορικός τελεστής $\mathcal{L}^*$ ἡ ὁποία δίδεται ἀπό τόν τύπο*

$$\mathcal{L}^*x = (-1)^n(\overline{p}_0(t)x)^{(n)} + (-1)^{n-1}(\overline{p}_1(t)x)^{(n-1)} + \ldots + \overline{p}_n(t)x, \tag{8.12}$$

ὀνομάζεται συζυγής τελεστής τοῦ διαφορικοῦ τελεστοῦ $\mathcal{L}$ στήν (8.8). Ἄν ἐπί πλέον ἰσχύει ὅτι $\mathcal{L}^* = \mathcal{L}$, τότε ὁ $\mathcal{L}$ ὀνομάζεται αὐτοσυζυγής.

Στήν πραγματικότητα, ὁ $\mathcal{L}^*$ ἀποτελεῖ τόν μοναδικό γραμμικό συνήθη διαφορικό τελεστή γιά τόν ὁποῖο ἰσχύει ὅτι:

$$\langle \mathcal{L}u, v\rangle = \langle u, \mathcal{L}^*v\rangle,$$

διά κάθε u, v στόν χῶρο[95] $C_0^n[a,b]$ (βλέπε *Ἄσκηση* 8.2.2). Ἐπισημαίνομε ὅτι, γιά νά εἶναι ἕνα πρόβλημα συνοριακῶν τιμῶν αὐτοσυζυγές, θά πρέπει ὁ τελεστής $\mathcal{L}$ νά εἶναι αὐτοσυζυγής. Δηλαδή $\mathcal{L}^* = \mathcal{L}$ (βλέπε *Ἄσκηση* 8.2.3). Ὅπως ὅμως εἴδαμε στό τρίτο παράδειγμα, στήν σελίδα 300, ἡ συνθήκη αὐτή δέν εἶναι καί ἱκανή. Ἰσχύει ὅμως ὅτι:

Γιά κάθε αὐτοσυζυγῆ τελεστή, ὑπάρχουν κατάλληλες συνοριακές συνθῆκες, ὥστε ὁ συνδυασμός τῶν δύο νά ἀποτελεῖ αὐτοσυζυγές πρόβλημα ἰδιοτιμῶν. (Βλέπε *Ἄσκηση* 8.2.4).

Τά ἀκόλουθα εἶναι μερικά ἀπό τά συνηθέστερα αὐτοσυζυγῆ προβλήματα συνοριακῶν τιμῶν:

(i) Στήν περίπτωση διαφορικοῦ τελεστοῦ μέ σταθερούς συντελεστές

$$\mathcal{L} = a_n \frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0, a_n \neq 0,$$

ἡ αὐτοσυζυγία τοῦ τελεστοῦ ὑφίσταται ἄν καί μόνον ἄν, οἱ συντελεστές ἀρτίας τάξεως εἶναι πραγματικοί, ἐνῶ οἱ συντελεστές περιττῆς τάξεως εἶναι καθαρά φανταστικοί. Τό ἀντίστοιχο πρόβλημα ἰδιοτιμῶν,

$$\begin{cases} \mathcal{L}x = 0 \\ \boldsymbol{U}x = 0, \end{cases}$$

καθίσταται αὐτοσυζυγές μέ τίς συνοριακές συνθῆκες:

$$x(a) = x'(a) = \ldots = x^{(k-1)}(a) = 0,$$
$$x(b) = x'(b) = \ldots = x^{(k-1)}(b) = 0,$$

στήν περίπτωση κατά τήν ὁποία $n = 2k$, ἐνῶ ἄν $n = 2k+1$, τότε καθίσταται αὐτοσυζυγές μέ τίς συνοριακές συνθῆκες

$$x^{(l)}(a) = x^{(l)}(b) = 0,\ l = 0, \ldots, k-1 \quad \text{καί} \quad x^{(k)}(b) - x^{(k)}(a) = 0.$$

(ii) Χαρακτηριστική εἶναι ἡ περίπτωση τοῦ προβλήματος συνοριακῶν τιμῶν

$$\begin{cases} -(p(t)x')' + q(t)x = \lambda x \\ \alpha_0 x(a) + \alpha_1 x'(a) = 0 \\ \beta_0 x(b) + \beta_1 x'(b) = 0, \end{cases}$$

μέ $p(t) \in C^1[a,b]$, $q(t) \in C[a,b]$ πραγματικές συναρτήσεις, $p(t) \neq 0$, τό ὁποῖο εἶναι αὐτοσυζυγές ἄν: $\bar{\alpha}_0\alpha_1 = \alpha_0\bar{\alpha}_1$ καί $\bar{\beta}_0\beta_1 = \beta_0\bar{\beta}_1$ (βλέπε *Ἄσκηση* 8.2.5).

[95] Ὑπενθυμίζεται ὅτι:

$$C_0^n[a,b] = \{\varphi \in C^n[a,b] \ : \ \text{ὑπάρχει } \varepsilon > 0 \text{ τέτοιο ὥστε:} \quad \varphi_{[a,a+\varepsilon)} = \varphi_{(b-\varepsilon,b]} = 0\}.$$

(iii) Ἔστω $p_i(t) \in C^i[a,b]$, $i = 0,\ldots,n$, πραγματικές συναρτήσεις. Τότε καί τό κάτωθι πρόβλημα

$$\begin{cases} \mathcal{L}x = \sum_{i=0}^{n}(p_i(t)x^{(i)})^{(i)} = \lambda x \\ \\ x^{(j)}(a) = x^{(j)}(b) = 0, \ j = 0,\ldots,n-1. \end{cases}$$

εἶναι αὐτοσυζυγές (βλέπε *Ἄσκηση* 8.2.6).

(iv) Γενικότερα, κάθε αὐτοσυζυγής τελεστής $\mathcal{L}$ τάξεως n ὑποχρεοῦται νά εἶναι τῆς μορφῆς:

$$\mathcal{L}x = \sum_{k=0}^{n} i^k q_k(\cdots(q_k(q_k(t)x)')'\cdots)',$$

ὅπου $q_k \in C^k[a,b]$ καί οἱ συναρτήσεις q_k^{k+1} λαμβάνουν πραγματικές τιμές γιά $k = 0,\ldots,n$ (βλέπε *Ἄσκηση* 8.2.7).

Θεώρημα 8.2.1. *Ἄν τό πρόβλημα συνοριακῶν τιμῶν (*8.10*) εἶναι αὐτοσυζυγές, τότε οἱ ἰδιοτιμές του εἶναι πραγματικές, ἀριθμήσιμες τό πλῆθος καί χωρίς πεπερασμένο ὁριακό σημεῖο. Οἱ δέ ἰδιοσυναρτήσεις οἱ ὁποῖες ἀντιστοιχοῦν σέ διαφορετικές ἰδιοτιμές εἶναι μεταξύ τους ὀρθογώνιες. Γενικότερα, ἄν σέ ὄχι κατ' ἀνάγκη αὐτοσυζυγές πρόβλημα ἰδιοτιμῶν, ὑπάρχει μιγαδικός (ἐν γένει) ἀριθμός λ τό ὁποῖο δέν ἀποτελεῖ ἰδιοτιμή, τότε τό σύνολο τῶν ἰδιοτιμῶν δέν περιέχει πεπερασμένο ὁριακό σημεῖο καί εἶναι ὡς ἐκ τούτου ἀριθμήσιμο.*

Απόδειξη. Ἔστω ὅτι λ ἰδιοτιμή τοῦ (8.10) μέ ἰδιοσυνάρτηση φ, ἤτοι: $\mathcal{L}\varphi = \lambda\varphi$. Ὅμως

$$0 = \langle \mathcal{L}\varphi, \varphi\rangle - \langle \varphi, \mathcal{L}\varphi\rangle = (\lambda - \bar{\lambda})\langle \varphi, \varphi\rangle.$$

Ἄρα λ πραγματικός, ἀφοῦ $\varphi \not\equiv 0$. Ἄν τώρα λ_1, λ_2 διακριτές ἰδιοτιμές, μέ ἀντίστοιχες ἰδιοσυναρτήσεις φ_1 καί φ_2, τότε κατ' ἀναλογίαν θά ἔχομε

$$0 = \langle \mathcal{L}\varphi_1, \varphi_2\rangle - \langle \varphi_1, \mathcal{L}\varphi_2\rangle = (\lambda_1 - \lambda_2)\langle \varphi_1, \varphi_2\rangle.$$

Ἄρα φ_1 καί φ_2 ὀρθογώνιες. Ἔστω τώρα $\varphi_j(t,\lambda)$, $j = 1,\ldots,n$, οἱ λύσεις τῆς ἐξισώσεως $\mathcal{L}x = \lambda x$ μέ ἀρχικές συνθῆκες

$$\varphi_j^{(k-1)}(\tau,\lambda) = \delta_{jk}, \tag{8.13}$$

γιά κάποιο $\tau \in [a,b]$. Ἑκάστη τῶν $\varphi_j^{(k-1)}(t,\lambda)$ εἶναι συνεχής ὡς πρός t καί ἀκεραία ἀναλυτική ὡς πρός λ. Πράγματι, τά $\varphi_j^{(k-1)}(t,\lambda)$ ἀποτελοῦν τοπικῶς ὁμοιομόρφως ὅρια καταλλήλων ἀκολουθιῶν Picard τῶν ὁποίων οἱ ὅροι εἶναι ἀκέραιες ἀναλυτικές συναρτήσεις καί ὡς ἐκ τούτου τό ἴδιο ἰσχύει καί γιά τά ὅρια. Τό (8.10) ἔχει μή μηδενική λύση, ἄν ὑπάρχουν $c_1, \dots, c_n$, ὄχι ὅλα μηδέν, ὥστε ἡ $\varphi = c_1\varphi_1 + \dots + c_n\varphi_n$ νά ἱκανοποιεῖ τίς συνοριακές συνθῆκες $U_j x = 0$, $j = 1, \dots, n$. Αὐτό σημαίνει ὅτι τό γραμμικό σύστημα

$$\sum_{j=1}^{n} c_j U_k \varphi_j \;=\; 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

μέ ἄγνωστο $\boldsymbol{c} = (c_1, \dots, c_n)$, ἔχει μή μηδενική λύση καί ὡς ἐκ τούτου ἡ ὁρίζουσα τοῦ πίνακα $W = (U_k\varphi_j)_{k,j=1,\dots,n}$, μηδενίζεται. Ἡ ὁρίζουσα ὅμως αὐτή εἶναι ἀκέραια ἀναλυτική συνάρτηση ὡς πρός λ καί μή ταυτοτικῶς μηδενική, ἀφοῦ δέν μηδενίζεται σέ μή πραγματικές τιμές. Οἱ ρίζες μιᾶς ἀκεραίας ἀναλυτικῆς συναρτήσεως δέν δύνανται νά ἔχουν πεπερασμένο σημεῖο συσσωρεύσεως. Τό τελευταῖο ἐπιχείρημα λειτουργεῖ καί στήν περίπτωση κατά τήν ὁποία τό πρόβλημα δέν εἶναι αὐτοσυζυγές ἀλλά ἔχει λ τό ὁποῖο δέν ἀποτελεῖ ἰδιοτιμή. □

Ἀσκήσεις

8.2.1 Ἀποδείξατε ὅτι:

$$\langle Lu, v\rangle - \langle u, \mathcal{L}^* v\rangle \;=\; B(u,v)(b) - B(u,v)(a),$$

ὅπου

$$B(u,v)(t) \;=\; \sum_{1\le m\le n} \sum_{\substack{j+k=m-1\\ j,k\ge 0}} (-1)^j u^{(k)}(t)\big(p_{n-m}(t)\overline{v}(t)\big)^{(j)}.$$

Ὡς ἐκ τούτου, ἄν $\mathcal{L} = \mathcal{L}^*$ καί γιά κάθε u, $v \in C^n[a,b]$ οἱ ὁποῖες ἱκανοποιοῦν τίς $\boldsymbol{U}u = \boldsymbol{U}v = 0$, ἰσχύει ὅτι:

$$B(u,v)(b) \;=\; B(u,v)(a),$$

τότε τό πρόβλημα συνοριακῶν τιμῶν (8.10) εἶναι αὐτοσυζυγές.

8.2.2 Δείξατε ὅτι ὁ τελεστής $\mathcal{L}^*$ θά ἦταν δυνατόν νά ὁρισθεῖ ὡς ὁ μοναδικός γραμμικός συνήθης διαφορικός τελεστής γιά τόν ὁποῖο ἰσχύει ὅτι:

$$\langle \mathcal{L}u, v\rangle \;=\; \langle u, \mathcal{L}^* v\rangle,$$

διά κάθε u, v στόν χῶρο $C_0^n[a,b]$.

8.2.3 Δείξατε ὅτι, γιά νά εἶναι ἕνα πρόβλημα ἰδιοτιμῶν αὐτοσυζυγές θά πρέπει ὁ τελεστής $\mathcal{L}$ νά εἶναι αὐτοσυζυγής.

8.2.4 Δείξατε ὅτι γιά κάθε αὐτοσυζυγῆ τελεστή, ὑπάρχουν κατάλληλες συνοριακές συνθῆκες, ὥστε ὁ συνδυασμός τῶν δύο νά ἀποτελεῖ αὐτοσυζυγές πρόβλημα ἰδιοτιμῶν.

8.2.5 Δείξατε ὅτι τό πρόβλημα ἰδιοτιμῶν

$$\begin{cases} -(p(t)x')' + q(t)x \;=\; \lambda x \\ \alpha_0 x(a) + \alpha_1 x'(a) \;=\; 0 \\ \beta_0 x(b) + \beta_1 x'(b) \;=\; 0, \end{cases}$$

μέ $p(t) \in C^1[a,b]$, $q(t) \in C[a,b]$ πραγματικές συναρτήσεις, $p(t) \neq 0$, εἶναι αὐτοσυζυγές ἄν $\bar{\alpha}_0\alpha_1 = \alpha_0\bar{\alpha}_1$ καί $\bar{\beta}_0\beta_1 = \beta_0\bar{\beta}_1$.

8.2.6 Ἔστω $p_i(t)$, $i = 0, \ldots, n$, πραγματικές συναρτήσεις καί $p_i(t) \in C^i[a,b]$. Τότε καί τό κάτωθι πρόβλημα ἰδιοτιμῶν

$$\begin{cases} \mathcal{L}x = \sum_{i=0}^{n} (p_i(t)x^{(i)})^{(i)} = \lambda x \\ x^{(j)}(a) = x^{(j)}(b) = 0, \;\; j = 0, \ldots, n-1. \end{cases}$$

εἶναι αὐτοσυζυγές.

8.2.7 Δείξατε ὅτι κάθε αὐτοσυζυγής τελεστής $\mathcal{L}$ τάξεως n εἶναι τῆς μορφῆς:

$$\mathcal{L}x = \mathrm{i}^n q_n(\cdots(q_n(q_n(t)x)')'\cdots)' + \cdots + \mathrm{i}q_1(q_1(t)x)' + q_0(t)x,$$

ὅπου $q_k \in C^k[a,b]$ καί οἱ συναρτήσεις q_k^{k+1} λαμβάνουν πραγματικές τιμές γιά $k = 0, \ldots, n$.

8.3 Στοιχεῖα Συναρτησιακῆς Ἀναλύσεως

8.3.1 Χῶροι Hilbert

Γιά τίς ἀνάγκες τῆς παρούσης ἑνότητος, οἱ γραμμικοί μας χῶροι θά θεωροῦνται αὐτομάτως ὅτι εἶναι ἐπί τοῦ σώματος τῶν μιγαδικῶν ἀριθμῶν. Ὑπενθυμίζομε ὅτι *χῶρος Banach*, εἶναι ἕνας γραμμικός χῶρος B μέ νόρμα, $\|\cdot\|$, ὁ ὁποῖος εἶναι πλήρης ὡς πρός αὐτή. Ἤτοι, ὁποτεδήποτε μία ἀκολουθία $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, στοιχείων τοῦ B, εἶναι *ἀκολουθία Cauchy*[96], τότε αὐτή συγκλίνει στό B.

Ὁρισμός 8.3.1. *Ἔστω H γραμμικός χῶρος ἐπί τοῦ $\mathbb{C}$. Μιγαδικό ἐσωτερικό γινόμενο εἶναι μία συνάρτηση*

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : H \times H \longrightarrow \mathbb{C},$$

γιά τήν ὁποία νά ἰσχύουν τά ἀκόλουθα:

(*i*) $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x,z\rangle + \beta\langle y,z\rangle$, *γιά κάθε* $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ *καί* $x,y,z\in H$,

(*ii*) $\langle x,x\rangle \geq 0$ *γιά κάθε* $x\in H$, *ἐνῶ ἡ ἰσότης ἰσχύει μόνο γιά* $x = 0\in H$,

(*iii*) $\langle y,x\rangle = \overline{\langle x,y\rangle}$, *γιά κάθε* x, y *στόν* H.

Ἄν H γραμμικός χῶρος μέ ἐσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$, τότε ἡ συνάρτηση

$$H \ni u \longrightarrow \|u\| = |\langle u,u\rangle|^{1/2} \in \mathbb{R},$$

ἀποτελεῖ νόρμα ἐπί τοῦ H, τήν *ἐπαγόμενη* ἀπό τό ἐσωτερικό γινόμενο. Αὐτό ἀποτελεῖ συνέπεια τῆς *ἀνισότητος Cauchy–Schwartz* ὅπου, γιά κάθε $u,v\in H$ ἰσχύει ὅτι:

$$|\langle u,v\rangle| \leq \|u\|\cdot\|v\|. \tag{8.14}$$

[96] Ἔστω B χῶρος μέ νόρμα $\|\cdot\|$, καί $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ἀκολουθία στοιχείων τοῦ B. Ἡ $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ὀνομάζεται ἀκολουθία Cauchy, ἄν γιά κάθε ε θετικό ὑπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ὥστε, ὁποτεδήποτε $m,n > N$, τότε $\|v_m - v_n\| < \varepsilon$.

Ἄρα λοιπόν κάθε χῶρο μέ ἐσωτερικό γινόμενο εἶναι ταυτοχρόνως καί χῶρος μέ νόρμα. Ἰδιαιτέρως ἡ (8.14) ἔχει ὡς συνέπεια τήν

$$\|u\| = \sup_{\|v\|=1} \langle u, v\rangle, \tag{8.15}$$

καθώς ἐπίσης καί τό γεγονός ὅτι: *Ἄν $u_n \to u$ καί $v_n \to v$, τότε:*

$$\langle u_n, v_n\rangle \longrightarrow \langle u, v\rangle. \tag{8.16}$$

Χῶρος Hilbert [97] εἶναι ἕνας γραμμικός χῶρος H, μέ ἐσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$ - μιγαδικό γιά τίς ἀνάγκες τῆς παρούσης ἑνότητος - ὁ ὁποῖος εἶναι πλήρης ὡς πρός τήν ἐπαγόμενη ἀπό τό ἐσωτερικό γινόμενο νόρμα. Ἕνας χῶρος Hilbert εἶναι λοιπόν, ἕνας χῶρος μέ ἐσωτερικό γινόμενο ὁ ὁποῖος εἶναι χῶρος Banach ὡς πρός τήν ἐπαγόμενη ἀπό τό ἐσωτερικό γινόμενο, νόρμα. Οἱ χῶροι Hilbert οἱ ὁποῖοι θά μᾶς ἀπασχολήσουν στό παρόν κεφάλαιο εἶναι οἱ χῶροι $L^2[a,b]$, δηλαδή οἱ χῶροι τῶν μετρησίμων συναρτήσεων $f : [a,b] \to \mathbb{C}$, τῶν ὁποίων τό τετράγωνο τῆς ἀπολύτου τιμῆς ἔχει φραγμένο ὁλοκλήρωμα

$$\int_a^b |f(t)|^2\, dt < \infty.$$

Σ' αὐτούς τούς χώρους, δύο συναρτήσεις *ταυτίζονται* ἄν διαφέρουν μόνον σέ σύνολο μηδενικοῦ μέτρου. Τό δέ ἐσωτερικό γινόμενο δύο συναρτήσεων ὁρίζεται ὡς τό ὁλοκλήρωμα

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)\overline{g}(t)\, dt,$$

ἐνῶ ἡ ἐπαγόμενη ἀπό τό ἐσωτερικό γινόμενο νόρμα θά εἶναι ἡ

$$\|f\| = \left(\int_a^b |f(t)|^2\, dt\right)^{1/2},$$

γνωστή ὡς *L^2-νόρμα*. Στό χῶρο $L^2[a,b]$ βρίσκονται βεβαίως καί οἱ συνεχεῖς συναρτήσεις στό $[a,b]$, δηλαδή $C[a,b] \subset L^2[a,b]$, οἱ ὁποῖες ἀποτελοῦν καί πυκνό ὑποσύνολο. Αὐτό σημαίνει ὅτι κάθε στοιχεῖο τοῦ $L^2[a,b]$ δύναται νά προσεγγισθεῖ ἀπό στοιχεῖα τοῦ $C[a,b]$ ὡς πρός τήν ἀνωτέρω νόρμα. Μάλιστα ὁ χῶρος $L^2[a,b]$ δύναται νά θεωρεῖται καί ὡς ἡ *πλήρωση* τοῦ $C[a,b]$ ὡς πρός τήν ἀνωτέρω νόρμα. Εἶναι σημαντικό νά λεχθεῖ ὅτι πυκνά στόν $L^2[a,b]$ εἶναι καί τά σύνολα $C^n[a,b]$, τῶν n φορές συνεχῶς διαφορισίμων συναρτήσεων, καθώς καί ὁ χῶρος $C_0^\infty(a,b)$. Ὑπενθυμίζεται ἐπίσης ὅτι οἱ χῶροι $C[a,b]$ ἀποτελοῦν χώρους *Banach*. Συγκεκριμένα, πλήρεις χώρους ὡς πρός τήν νόρμα

$$|f| = \max_{t\in[a,b]} |f(t)|.$$

[97] David Hilbert (1862–1943). Μεγάλος γερμανός μαθηματικός μαθητής τοῦ Felix Klein. Παρά τό γεγονός ὅτι τό ὀνομά του εἶναι εὐρύτερα χνωστό λόγῳ τῶν *Χώρων Hilbert*, ἡ παρουσία του εἶναι σημαντική σέ πολλούς κλάδους τῶν Μαθηματικῶν. Κάποια δέ ἀπό τά 23 προβλήματα τά ὁποῖα ἔθεσε στό Second International Congress of Mathematicians τό 1900 στό Παρίσι ἐξακολουθοῦν νά ἀπασχολοῦν τήν μαθηματική κοινότητα.

Ἡ πληρότης τοῦ $C[a,b]$ προκύπτει ἀπό τό γεγονός ὅτι, ἀφ' ἑνός, σέ μία ἀκολουθία συνεχῶν συναρτήσεων, ὁμοιομόρφως Cauchy , ὁρίζεται τό *κατά σημεῖο* ὅριο. Τό ὅριο αὐτό, ὡς ὁμοιόμορφο ἀκολουθίας συνεχῶν συναρτήσεων, ἀποτελεῖ ἐπίσης συνεχῆ συνάρτηση. Τήν ἀνωτέρω νόρμα, θά καλοῦμε ἀπό τώρα καί στό ἑξῆς *ὁμοιόμορφη νόρμα* εἰς ἀντιδιαστολή τῆς L^2-νόρμας τήν ὁποία ὁρίσαμε προηγουμένως. Ἰσχύει μάλιστα ὅτι ἡ ὁμοιόμορφη νόρμα εἶναι ἰσχυροτέρα τῆς L^2. Πράγματι

$$\|u\| = \left(\int_a^b |u(t)|^2\,dt\right)^{1/2} \leq (b-a)^{1/2}\,|u|.$$

Ἄρα ἄν $u_n \to u$ ὁμοιομόρφως, τότε συγκλίνει καί ὡς πρός τήν L^2-νορμα. Τό ἀντίστροφο δέν ἰσχύει. Ἔστω, γιά παράδειγμα, $u_n(t) = t^n$, $t \in [0,1]$. Τότε $\|u_n\| \to 0$, ἐνῶ ὡς πρός τήν ὁμοιόμορφη νόρμα δέν συγκλίνει πουθενά.

Ἀκολουθεῖ ὁ ὁρισμός τῶν ὀρθοκανονικῶν βάσεων:

Ὁρισμός 8.3.2. *Ἔστω H χῶρος Hilbert καί $B \subset H$. Τό B ὀνομάζεται ὀρθοκανονική βάση τοῦ H ἄν ἰσχύουν τά ἀκόλουθα:*

(*i*) *Τά στοιχεῖα τοῦ B εἶναι ὀρθογώνια μεταξύ τους. Ἤτοι: ἄν $f, g \in B$ καί $f \neq g$, τότε $\langle f, g\rangle = 0$.*

(*ii*) *Οἱ γραμμικοί συνδυασμοί τῶν στοιχείων τοῦ B εἶναι πυκνοί στό H.*

(*iii*) *Κάθε στοιχεῖο τοῦ B εἶναι μοναδιαίου μέτρου.*

Χαρακτηριστικές ἰδιότητες τῶν ὀρθοκανονικῶν βάσεων:

(i) Κάθε χῶρος Hilbert ἔχει ὀρθοκανονική βάση. Αὐτό ἀποτελεῖ συνέπεια τοῦ *Λήμματος τοῦ Zorn* (βλέπε *Πρόταση 6.3.2*). Ὅλες δέ οἱ ὀρθοκανονικές βάσεις ἑνός χώρου Hilbert ἔχουν τόν ἴδιο πληθάριθμο, ὁ ὁποῖος ὀνομάζεται *ὀρθογώνια διάσταση* (βλέπε Hewitt & Stromberg [27]), ἡ ὁποία εἶναι μικρότερη ἤ ἴση τῆς διαστάσεως τοῦ ἰδίου χώρου ὡς γραμμικοῦ χώρου.

(ii) Ἄν ὁ χῶρος εἶναι διαχωρίσιμος - ἤτοι, ἔχει ἀριθμήσιμο πυκνό ὑποσύνολο - τότε ἡ ὀρθοκανονική βάση εἶναι ἀριθμήσιμη. Οἱ χῶροι $L^2[\Omega]$, ὅπου Ω ἀνοικτό ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}^m$, εἶναι διαχωρίσιμοι. (Σημειωτέον ὅτι ἡ διάσταση τῶν χώρων $L^2[\Omega]$, ὡς γραμμικῶν χώρων, εἶναι ὑπεαριθμίσιμη, ἰσοπληθική τοῦ $\mathbb{R}$).

(iii) Ἔστω $\{\zeta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ὀρθοκανονική βάση τοῦ διαχωρίσιμου χώρου Hilbert H. Ἄν $f \in H$, τότε

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{n}\langle f, \zeta_k\rangle\zeta_k - f\right\| = 0. \tag{8.17}$$

Εἴθισται δέ ὡς ἐκ τούτου ἡ κατωτέρω γραφή τῶν στοιχείων f τοῦ H ὡς *ἄπειρος γραμμικός συνδυασμός* στοιχείων τῆς ὀρθοκανονικῆς βάσεως:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \zeta_n \rangle \zeta_n.$$

Τά $\langle f, \zeta_n \rangle$, $n \in \mathbb{N}$, ὀνομάζονται *συντελεστές Fourier*[98].

(iv) Ἰσχύει ἐπίσης ὅτι:

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle f, \zeta_k \rangle|^2 \leq \|f\|^2. \tag{8.18}$$

γιά κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ἡ ἀνωτέρω εἶναι γνωστή ὡς *ἀνισότης Bessel*.

Υποδειξη. Ἀρκεῖ νά ἀναπτυχθεῖ τό τετράγωνο

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} \langle f, \zeta_k \rangle \zeta_k \right\|^2 \geq 0.$$

(v) Συνέπεια δέ τῆς (8.17) ἡ ταυτότης

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, \zeta_n \rangle|^2, \tag{8.19}$$

γνωστή ὡς *ταυτότης Παρσεαλ*[99].

8.3.2 Φραγμένοι τελεστές

Ἔστω τώρα H χῶρος Hilbert καί $\mathcal{K} : H \to H$ γραμμική ἀπεικόνιση, δηλαδή

$$\mathcal{K}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{K} f + \beta \mathcal{K} g,$$

γιά κάθε α, $\beta \in \mathbb{C}$ καί f, $g \in H$. Ἡ $\mathcal{K}$ ὀνομάζεται *γραμμικός τελεστής* ἐπί τοῦ H. Ἄν ἐπί πλέον ἰσχύει ὅτι:

$$\sup_{\|u\| \neq 0} \frac{\|\mathcal{K} u\|}{\|u\|} = M < \infty,$$

τότε ὁ $\mathcal{K}$ ὀνομάζεται *φραγμένος* τελεστής. Ὁ δέ ἀριθμός M ἀνωτέρω, ὁρίζεται ὡς ἡ *νόρμα* τοῦ $\mathcal{K}$ καί ἔχει πράγματι ἰδιότητες νόρμας ἐπί τοῦ χώρου τῶν φραγμένων τελεστῶν $\mathcal{B}(H)$ ἐπί

[98] Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830). Γάλλος μαθηματικός, μαθητής τοῦ Lagrange.

[99] Marc Antoine Parseval de Chênes (1755-1836). Γάλλος μαθηματικός.

τοῦ χώρου H. Ὁ $\mathcal{B}(H)$ ἀποτελεῖ γραμμικό χῶρο ἐπί τοῦ $\mathbb{C}$, διότι ὁποτεδήποτε $\mathcal{K}, \mathcal{L} \in \mathcal{B}(H)$ καί $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, τότε $\alpha\mathcal{K} + \beta\mathcal{L} \in \mathcal{B}(H)$. Ἰσχύει μάλιστα ὅτι:

$$\sup_{\|u\|=1} \|\mathcal{K}u\| = \|\mathcal{K}\|,$$

μέ συνέπειες:

$$\|\mathcal{K}u\| \leq \|\mathcal{K}\| \cdot \|u\|,$$

γιά κάθε $u \in H$, καθώς καί ὅτι:

$$\|\mathcal{K}\,\mathcal{L}\| \leq \|\mathcal{K}\| \cdot \|\mathcal{L}\|,$$

ὁποτεδήποτε $\mathcal{K}, \mathcal{L}$ φραγμένοι τελεστές ἐπί τοῦ H καί $\mathcal{K}\mathcal{L}$ ἡ σύνθεση αὐτῶν. Ὁ δέ χῶρος $\mathcal{B}(H)$ ἀποτελεῖ χῶρο Banach ὡς πρός τήν προαναφερθεῖσα νόρμα. Δίδομε τούς κάτωθι ὁρισμούς:

Ὁρισμός 8.3.3. *Ἔστω H χῶρος Hilbert καί $\mathcal{K} : H \to H$, φραγμένος τελεστής.*

(i) *Ὁ $\mathcal{K}$ ὀνομάζεται αὐτοσυζυγής ἄν*

$$\langle \mathcal{K}u, v \rangle = \langle u, \mathcal{K}v \rangle,$$

γιά κάθε u, $v \in H$.

(ii) *Ὁ $\mathcal{K}$ ὀνομάζεται θετικός ἄν*

$$\langle \mathcal{K}u, u \rangle \geq 0,$$

γιά κάθε $u \in H$.

(iii) *Ὁ $\mathcal{K}$ ὀνομάζεται συμπαγής ἄν ὁποτεδήποτε ἡ ἀκολουθία $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ εἶναι φραγμένη (ὡς πρός τήν ἐπαγόμενη νόρμα), τότε ἡ ἀκολουθία $\{\mathcal{K}u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ἔχει συγκλίνουσα ὑπακολουθία.*

Θά μᾶς χρειασθοῦν τά ἀκόλουθα ἀποτελέσματα:

Λῆμμα 8.3.1. *Ἔστω H χῶρος Hilbert καί $\mathcal{K} : H \to H$, αὐτοσυζυγής φραγμένος τελεστής. Τότε ἰσχύει ὅτι:*

$$\|\mathcal{K}\| = \sup_{\|u\|=1} |\langle \mathcal{K}u, u \rangle|.$$

Απόδειξη. Ἐξ ὁρισμοῦ $\|\mathcal{K}\| = \sup_{\|u\|=1} \|\mathcal{K}u\|$, ὁπότε ἔστω

$$\sup_{\|u\|=1} |\langle \mathcal{K}u, u\rangle| \;=\; M.$$

Τότε προφανῶς γιά $\|u\| = 1$ θά ἔχομε:

$$|\langle \mathcal{K}u, u\rangle| \;\leq\; \|\mathcal{K}u\|\cdot\|u\| \;=\; \|\mathcal{K}u\| \;\leq\; \|\mathcal{K}\|.$$

Ἄρα $\|\mathcal{K}\| \geq M$. Ἄν τώρα $u, v \in$, ὥστε $\|u\| = \|v\| = 1$, τότε

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{K}(u+v), u+v\rangle &= \langle \mathcal{K}u, u\rangle + \langle \mathcal{K}v, v\rangle + 2\mathcal{R}e\langle \mathcal{K}u, v\rangle \;\leq\; M\|u+v\|^2 \\
\langle \mathcal{K}(u-v), u-v\rangle &= \langle \mathcal{K}u, u\rangle + \langle \mathcal{K}v, v\rangle - 2\mathcal{R}e\langle \mathcal{K}u, v\rangle \;\geq\; -M\|u-v\|^2.
\end{aligned}$$

Ἀφαιρῶντας λαμβάνομε:

$$4\mathcal{R}e\langle \mathcal{K}u, v\rangle \;\leq\; 2M(\|u\|^2 + \|v\|^2) \;=\; 4M$$

καί ἄν $\mathcal{K}u \neq 0$ ἀντικαθιστοῦμε τό v μέ $\mathcal{K}u/\|\mathcal{K}u\|$ ὁπότε τελικῶς

$$4\mathcal{R}e\langle \mathcal{K}u, \mathcal{K}u/\|\mathcal{K}u\|\rangle \;\leq\; 4M,$$

ἤ $\|\mathcal{K}u\| \leq M$, καί ὡς ἐκ τούτου $\|\mathcal{K}\| \leq M$. □

Λῆμμα 8.3.2. *Ἔστω H χῶρος Hilbert καί $\mathcal{K} : H \to H$, θετικός αὐτοσυζυγής τελεστής. Τότε*

$$\|\mathcal{K}u\|^2 \;\leq\; \|\mathcal{K}\|\,\langle \mathcal{K}u, u\rangle, \tag{8.20}$$

γιά κάθε $u \in H$.

Απόδειξη. Γιά κάθε $u, v \in H$ καί $\lambda \in \mathbb{R}$ ἰσχύει ὅτι:

$$\langle \mathcal{K}(u+\lambda v), u+\lambda v\rangle \;\geq\; 0$$

ἤ

$$\lambda^2\langle \mathcal{K}v, v\rangle + 2\lambda\mathcal{R}e\langle \mathcal{K}u, v\rangle + \langle \mathcal{K}u, u\rangle \;\geq\; 0,$$

τό ὁποῖο συνεπάγεται ὅτι:

$$\langle \mathcal{K}u, u\rangle\,\langle \mathcal{K}v, v\rangle \;\geq\; |\langle \mathcal{K}u, v\rangle|^2,$$

γιά κάθε $u, v \in H$. Ἡ (8.20) προκύπτει ἀπό τό *Λῆμμα 8.3.1* σέ συνδυασμό μέ τήν (8.15). □

Λῆμμα 8.3.3. *Ἔστω H χῶρος Hilbert καί $\mathcal{K} : H \to H$ συμπαγής αὐτοσυζυγής τελεστής. Τότε ὑπάρχει $v \in H$, $v \neq 0$, γιά τό ὁποῖο $\mathcal{K}v = \mu v$ καί $\mu = \pm\|\mathcal{K}\|$.*

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη τῆς γενικότητος ὑποθέτομε ὅτι $\mathcal{K} \neq 0$. Ἔστω $M = \|\mathcal{K}\|$ καί ἔστω $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ ἀκολουθία γιά τήν ὁποία

$$\|u_n\| = 1 \quad \text{καί} \quad \|\mathcal{K}u_n\| \to M.$$

Τότε ὁ τελεστής $u \to (M^2 - \mathcal{K}^2)u$ εἶναι θετικός καί αὐτοσυζυγής. Ταυτοχρόνως

$$\langle (M^2 - \mathcal{K}^2)u_n, u_n\rangle = M^2 - \|\mathcal{K}u_n\|^2 \to 0$$

καί λόγῳ τῆς (8.20) προκύπτει ὅτι:

$$(M^2 - \mathcal{K}^2)u_n \to 0. \tag{8.21}$$

Ἐξ αἰτίας τῆς συμπάγειας τοῦ $\mathcal{K}$, ὑπάρχει ὑπακολουθία τῆς $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, τήν ὁποία καλοῦμε $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ καί γιά τήν ὁποία ἡ $\{\mathcal{K}v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει. Ἔστω $w \in H$ τό ὅριο τῆς $\{\mathcal{K}v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, τότε

$$\mathcal{K}^2 v_n \to \mathcal{K}w$$

καί προσθέτοντας στήν ἀνωτέρω τήν (8.21) λαμβάνομε

$$M^2 v_n \to \mathcal{K}w,$$

ὁπότε $\|\mathcal{K}w\| = M^2$ καί τελικῶς

$$w = \lim_{n\to\infty} \mathcal{K}v_n = \frac{1}{M^2}\mathcal{K}w.$$

Προφανῶς $\|w\| = M \neq 0$. Ἄν $\mathcal{K}w = Mw$, τότε θέτομε $v = w$, ἄλλως θέτομε $v = (\mathcal{K} - M)w$, διότι

$$\begin{aligned} \mathcal{K}v = \mathcal{K}(\mathcal{K} - M)w &= \mathcal{K}^2 w - M\mathcal{K}w = M^2 w - M\mathcal{K}w \\ &= -M(\mathcal{K} - M)w = -Mv. \end{aligned}$$

□

8.4 Κατασκευή πυρῆνος τοῦ Green

Ἔστω τώρα τό μή ὁμοιογενές πρόβλημα συνοριακῶν τιμῶν

$$\begin{cases} \mathcal{L}x = \lambda x + f \\ \boldsymbol{U}x = 0, \end{cases} \tag{8.22}$$

ὅπου $f \in C[a,b]$. Εἰδική λύση τῆς ἐξισώσεως $\mathcal{L}x = \lambda x + f$, προκύπτουσα διά τῆς *μεθόδου τῆς μεταβολῆς τῶν παραμέτρων* (βλέπε *Ἑνότητα 5.5*), δίδεται ἀπό τόν τύπο:

$$\psi(t,\lambda) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(t,\lambda) \int_a^t \frac{1}{p_0(s)} \frac{W_k(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)(s,\lambda)}{W(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)(s,\lambda)} f(s)\, ds, \tag{8.23}$$

ὅπου $\{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\}$, θεμελιῶδες σύνολο λύσεων τῆς $\mathcal{L}x = \lambda x$, οἱ ὁποῖες ὁρίζονται ἀπό τήν (8.13),

$$W(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)(s,\lambda) = \begin{vmatrix} \varphi_1(s,\lambda) & \ldots & \varphi_n(s,\lambda) \\ \varphi_1'(s,\lambda) & \ldots & \varphi_n'(s,\lambda) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(s,\lambda) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(s,\lambda) \end{vmatrix}$$

ἡ βρονσκιανή ὁρίζουσα τῶν $\{\varphi_1,\ldots,\varphi_n\}$, ἐνῶ W_k ἡ ὁρίζουσα τοῦ πίνακα ἡ ὁποία προκύπτει ὅταν ἡ $k-$στή στήλη τῆς βρονσκιανῆς ἀντικατασταθεῖ ἀπό τό διάνυσμα

$$\boldsymbol{e}_n = (0,\ldots,0,1).$$

Ἡ (8.23) γράφεται καί ὡς

$$\psi(t,\lambda) = \int_a^b K(t,s,\lambda) f(s)\, ds, \tag{8.24}$$

ὅπου ὁ πυρῆνας K ἰσοῦται μέ μηδέν ὅταν $t \le s$ ἐνῶ ἰσοῦται μέ

$$K(t,s,\lambda) = \frac{1}{p_0(s)} \frac{\begin{vmatrix} \varphi_1(s,\lambda) & \ldots & \varphi_n(s,\lambda) \\ \varphi_1'(s,\lambda) & \ldots & \varphi_n'(s,\lambda) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-2)}(s,\lambda) & \ldots & \varphi_n^{(n-2)}(s,\lambda) \\ \varphi_1(t,\lambda) & \ldots & \varphi_n(t,\lambda) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi_1(s,\lambda) & \ldots & \varphi_n(s,\lambda) \\ \varphi_1'(s,\lambda) & \ldots & \varphi_n'(s,\lambda) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-2)}(s,\lambda) & \ldots & \varphi_n^{(n-2)}(s,\lambda) \\ \varphi_1^{(n-1)}(s,\lambda) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(s,\lambda) \end{vmatrix}}$$

ὅταν $t \ge s$. Εὐκόλως διαπιστοῦται ἡ ἰσχύς τῶν κάτωθι ἰδιοτήτων τοῦ πυρῆνος $K(t,s,\lambda)$:

(i) $\partial_t^\nu K(t,s,\lambda)$ συνεχής γιά κάθε $\nu = 0,\ldots,n-2$, $s,t \in [a,b]$ καί $\lambda \in \mathbb{C}$.

(ii) $\partial_t^{n-1} K(t,s,\lambda)$, $\partial_t^n K(t,s,\lambda)$ συνεχεῖς γιά κάθε $s \ne t$ καί $\lambda \in \mathbb{C}$.

(iii) $\partial_t^{n-1}K(s^+,s,\lambda)-\partial_t^{n-1}K(s^-,s,\lambda)=\dfrac{1}{p_0(s)}$.

(iv) $LK(\cdot,s,\lambda)=\lambda K(\cdot,s,\lambda)$ γιά κάθε $t\neq s$, $\lambda\in\mathbb{C}$.

Ὁ πυρήν K δύναται νά *τροποποιηθεῖ* ὥστε οἱ συναρτήσεις ψ οἱ ὁποῖες ὁρίζονται ἀπό τήν (8.24) νά ἱκανοποιοῦν καί τίς συνοριακές συνθῆκες $\boldsymbol{U}\psi = 0$. Αὐτό ἐπιτυγχάνεται ἐπιλέγοντας κατάλληλους συντελεστές c_j, $j=1,\dots,n$, ὥστε ὁ τροποποιημένο πυρῆνας

$$G(t,s,\lambda) \;=\; K(t,s,\lambda)+\sum_{j=1}^{n}c_j(s,\lambda)\varphi_j(t,\lambda),$$

νά ἱκανοποιεῖ τίς συνοριακές συνθῆκες $\boldsymbol{U}G=0$. Ἔστω λοιπόν ὅτι:

$$0 \;=\; U_kG \;=\; U_kK+\sum_{j=1}^{n}c_jU_k\varphi_j,\quad k=1,\dots,n.$$

Ὁπότε οἱ συντελεστές c_j, $j=1,\dots,n$, θά ἱκανοποιοῦν τό γραμμικό σύστημα

$$\sum_{k=1}^{n}U_k\varphi_j\,c_j \;=\; -U_kK,\quad k=1,\dots,n.$$

Στό ἀνωτέρω σύστημα, οἱ συντελεστές $U_k\varphi_j$, εἶναι συναρτήσεις τοῦ λ, ἐνῶ οἱ μή ὁμοιογενεῖς ὅροι $-U_kK$, συναρτήσεις τοῦ λ καί τοῦ s. Τό ἀνωτέρω σύστημα ἔχει μοναδική λύση ἄν καί μόνον ἄν, ὁ πίνακας τῶν συντελεστῶν εἶναι ἀντιστρέψιμος. Ἔστω $\lambda\notin\Lambda$, ὅπου Λ τό σύνολο τῶν ἰδιοτιμῶν. Συνεπῶς οἱ συντελεστές $c_j=c_j(s,\lambda)$, $j=1,\dots,n$, ὁρίζονται γιά κάθε $s\in[a,b]$, $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\Lambda$, εἶναι δέ ἀναλυτικές γιά κάθε λ στό ὁποῖο ὁρίζονται. Στήν πραγματικότητα, οἱ c_j εἶναι *μερομορφικές* στό $\mathbb{C}$. Ἔστω λοιπόν τώρα

$$G(t,s,\lambda) \;=\; K(t,s,\lambda)+\sum_{j=1}^{n}c_j(s,\lambda)\varphi_j(t,\lambda).$$

Πέραν τοῦ ὅτι ἡ G ἱκανοποιεῖ τίς συνοριακές συνθῆκες

$$U_kG \;=\; 0,\quad k=1,\dots,n,$$

ἄν ὁρίσομε τήν συνάρτηση ψ ἀπό τήν συνέλιξη

$$\psi(t,\lambda) \;=\; \int_a^b G(t,s,\lambda)f(s)\,ds, \tag{8.25}$$

ὅπου $f\in\mathbb{C}[a,b]$, $\lambda\notin\Lambda$, τότε θά ἔχομε ὅτι: $L\psi=\lambda\psi+f$ καί ἐπίσης ὅτι:

$$\begin{aligned}\psi^{(k)}(a,\lambda) &= \int_a^b \partial_t^kG(a,s,\lambda)f(s)\,ds\\ \psi^{(k)}(b,\lambda) &= \int_a^b \partial_t^kG(b,s,\lambda)f(s)\,ds\end{aligned}$$

ὅπου $k = 0, \ldots, n-1$. (Ἡ περίπτωση $k = n-1$ ἀπαιτεῖ περισσότερη προσοχή). Ἐν τέλει θά ἔχομε ὅτι:

$$U_j\psi(\cdot,\lambda) \;=\; \int_a^b U_jG(\cdot,s,\lambda)f(s)\,ds \;=\; 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Κατά συνέπειαν ἡ συνάρτηση ψ ἡ ὁποία ὁρίζεται ἀπό τήν (8.25) ἀποτελεῖ τήν μοναδική λύση τοῦ μή ὁμοιογενοῦς προβλήματος (8.22) γιά κάθε $\lambda \notin \Lambda$.

Ὁ πυρήν G τόν ὁποῖο κατασκευάσαμε ὀνομάζεται *πυρήν τοῦ Green*[100]. Ἰδιαιτέρως, ὁ πυρήν τοῦ Green ὁρίζει ἕνα ὁλοκληρωτικό τελεστή $\mathcal{G}_\lambda$:

$$\mathcal{G}_\lambda \;:\; C[a,b] \;\longrightarrow\; C^n[a,b] \cap \mathcal{N}(\boldsymbol{U}),$$

ὅπου[101]

$$\mathcal{N}(\boldsymbol{U}) \;=\; \{\varphi \in C^{n-1}[a,b] \;:\; \boldsymbol{U}\varphi = 0\}, \tag{8.26}$$

μέ τύπο

$$(\mathcal{G}_\lambda f)(t) \;=\; \int_a^b G(t,s,\lambda)f(s)\,ds.$$

Ἔχομε τό ἀκόλουθο ἀποτέλεσμα:

Θεώρημα 8.4.1. *Ἄν ὑπάρχει $\lambda \in \mathbb{C}$ τό ὁποῖο νά μήν ἀποτελεῖ ἰδιοτιμή τοῦ (ὄχι κατ' ἀνάγκην αὐτοσυζυγοῦς) προβλήματος συνοριακῶν τιμῶν (8.10), τότε ὑπάρχει μοναδική συναρτήση $G = G(t,s,\lambda)$, $t,s \in [a,b]$ καί $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$, μέ τίς ἀκόλουθες ἰδιότητες:*

(*i*) *Οἱ $\partial_t^\nu G(t,s,\lambda)$ εἶναι συνεχεῖς γιά κάθε $\nu = 0, \ldots, n-2$, $s,t \in [a,b]$ καί $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$.*

(*ii*) *Οἱ $\partial_t^{n-1}G(t,s,\lambda)$ καί $\partial_t^n G(t,s,\lambda)$ συνεχεῖς γιά κάθε $s \neq t$ καί $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$.*

(*iii*) *Ἰσχύει ὅτι:*

$$\partial_t^{n-1}G(s^+,s,\lambda) - \partial_t^{n-1}G(s^-,s,\lambda) = \frac{1}{p_0(s)},$$

γιά κάθε $s \in [a,b]$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$.

(*iv*) *Ἐπίσης ἰσχύει ὅτι: $LG(\cdot,s,\lambda) = \lambda G(\cdot,s,\lambda)$ γιά κάθε $t \neq s$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$.*

(*v*) *Ἡ G ἱκανοποιεῖ τίς συνοριακές συνθῆκες:*

$$U_jG(\cdot,s,\lambda) \;=\; 0, \quad j = 1, \ldots, n.$$

[100] George Green (1793-1841). Ἄγγλος μαθηματικός.

[101] Ὁ $\mathcal{N}(\boldsymbol{U})$ ἀποτελεῖ τόν *μηδενοχῶρο* (*νυλλ σπαςε*) τοῦ συνοριακοῦ τελεστοῦ $\boldsymbol{U}$.

(vi) *Τέλος ἄν* $\psi(t,\lambda) = \int_a^t G(t,s,\lambda)f(s)\,ds$, *ὅπου* $f \in C[a,b]$, *τότε* $\mathcal{L}\psi(\cdot,\lambda) = \lambda\psi(\cdot,\lambda) + f(\cdot)$ *καί* $\boldsymbol{U}\psi = 0$, *γιά κάθε* $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$.

Απόδειξη. Ἀπομένει ἡ ἀπόδειξη τῆς μοναδικότητος. Ἔστω ὅτι ὑπῆρχε καί δεύτερη τέτοια συνάρτηση $\tilde{G}$. Τότε θά εἴχαμε ὅτι $G - \tilde{G} \in C^n[a,b]$, γιά κάθε $s,t \in [a,b]$ καί ὅτι

$$(\mathcal{L}-\lambda)(G-\tilde{G}) \;=\; 0, \quad \boldsymbol{U}(\tilde{G}-G) \;=\; 0.$$

Ἄρα θά εἴχαμε ὅτι $G - \tilde{G} \equiv 0$, ἀφοῦ τό λ δέν ἀποτελεῖ ἰδιοτιμή. □

Παρατηρήσεις

(i) Ὁ G τόν ὁποῖο κατασκευάσαμε ἀνωτέρω ἰσοῦται μέ

$$G(t,s,\lambda) \;=\; \frac{D(t,s,\lambda)}{\det\big(U_j\varphi_k(\cdot,\lambda)\big)},$$

ὅπου

$$D(t,s,\lambda) \;=\; \begin{vmatrix} K(t,s,\lambda) & \varphi_1(t,s,\lambda) & \cdots & \varphi_n(t,s,\lambda) \\ U_1K(\cdot,s,\lambda) & U_1\varphi_1(\cdot,\lambda) & \cdots & U_1\varphi_n(\cdot,\lambda) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ U_nK(\cdot,s,\lambda) & U_n\varphi_1(\cdot,\lambda) & \cdots & U_n\varphi_n(\cdot,\lambda) \end{vmatrix}$$

Βλέπε *Ἄσκηση* 8.4.1.

(ii) Τό πρόβλημα συνοριακῶν τιμῶν

$$\begin{cases} \mathcal{L}x \;=\; \lambda x + f \\ \boldsymbol{U}x \;=\; \boldsymbol{\xi}, \end{cases} \tag{8.27}$$

τό ὁποῖο ἀποτελεῖ μή ὁμοιογενές πρόβλημα συνοριακῶν τιμῶν μέ μή ὁμοιογενεῖς συνοριακές συνθῆκες, ἔχει μοναδική λύση γιά κάθε μιγαδικό λ ὁ ὁποῖος δέν ἀποτελεῖ ἰδιοτιμή τοῦ ἀντίστοιχου ὁμοιογενοῦς προβλήματος συνοριακῶν τιμῶν μέ μηδενικές συνοριακές συνθῆκες. Ἡ λύση $\psi = \psi(t; f, \boldsymbol{\xi}\,)$ τοῦ (8.27) προκύπτει ἀπό τήν *ἀρχή τῆς ὑπερθέσεως*, ἤτοι:

$$\psi(t;f,\boldsymbol{\xi}) \;=\; \psi(t;f,0) + \psi(t,0,\boldsymbol{\xi}),$$

μέ

$$\psi(t;0,\boldsymbol{\xi}) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\varphi_k(t)$$

ὅπου $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ θεμελιῶδες σύνολο λύσεων τῆς ἐξισώσεως $\mathcal{L}x = 0$ καί

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \left(U_i \varphi_j\right)^{-1} \boldsymbol{\xi}.$$

Συνολικῶς λοιπόν θά ἔχομε ὅτι:

$$\psi(\cdot; f, \boldsymbol{\xi}) = \mathcal{G}_\lambda f + \boldsymbol{\varphi}^T \cdot \left(U_i \varphi_j\right)^{-1} \boldsymbol{\xi},$$

ὅπου $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$.

Παραδείγματα

(i) Εὐκόλως δύναται νά διαπιστωθεῖ ὅτι στό πρῶτο παράδειγμα τό ὁποῖο εἴδαμε στήν σελίδα 299 ὁ πυρήν τοῦ Green εἶναι:

$$G(t, s, \lambda) = \begin{cases} \frac{\sin \lambda^{1/2} t \, \sin \lambda^{1/2}(1-s)}{\lambda^{1/2} \sin \lambda^{1/2}} & \textit{ἄν} \quad t \leq s \\ \\ \frac{\sin \lambda^{1/2}(1-t) \, \sin \lambda^{1/2} s}{\lambda^{1/2} \sin \lambda^{1/2}} & \textit{ἄν} \quad t > s. \end{cases}$$

(Βλέπε *Ἄσκηση* 8.4.2).

(ii) Στό δεύτερο παράδειγμα τῆς σελίδος 300 ὁ πυρήν τοῦ Green θά εἶναι ὁ

$$G(t, s, \lambda) = \begin{cases} -\frac{e^{i\lambda(s-t-1/2)}}{2 \sin \frac{\lambda}{2}} & \textit{ἄν} \quad t \leq s \\ \\ -\frac{e^{i\lambda(s-t+1/2)}}{2 \sin \frac{\lambda}{2}} & \textit{ἄν} \quad t > s. \end{cases}$$

(Βλέπε *Ἄσκηση* 8.4.3).

᾿Ασκήσεις

8.4.1 Δείξατε ὅτι ὁ πυρήν Green ἰσοῦται μέ

$$G(t, s, \lambda) = \frac{D(t, s, \lambda)}{\det\left(U_j \varphi_k(\cdot, \lambda)\right)},$$

ὅπου

$$D(t, s, \lambda) = \begin{vmatrix} K(t, s, \lambda) & \varphi_1(t, s, \lambda) & \cdots & \varphi_n(t, s, \lambda) \\ U_1 K(\cdot, s, \lambda) & U_1 \varphi_1(\cdot, \lambda) & \cdots & U_1 \varphi_n(\cdot, \lambda) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ U_n K(\cdot, s, \lambda) & U_n \varphi_1(\cdot, \lambda) & \cdots & U_n \varphi_n(\cdot, \lambda) \end{vmatrix}$$

8.4.2 Δείξατε ὅτι ὁ πυρήν τοῦ Green τοῦ προβλήματος ἰδιοτιμῶν i, στήν σελίδα 299 εἶναι:

$$G(t, s, \lambda) = \begin{cases} \frac{\sin \lambda^{1/2} t \sin \lambda^{1/2}(1-s)}{\lambda^{1/2} \sin \lambda^{1/2}} & \textit{ἄν} \quad t \leq s \\ \\ \frac{\sin \lambda^{1/2}(1-t) \sin \lambda^{1/2} s}{\lambda^{1/2} \sin \lambda^{1/2}} & \textit{ἄν} \quad t > s. \end{cases}$$

8.4.3 Δείξατε ὅτι στό παράδειγμα ii τῆς σελίδος 300 ὁ πυρήν Green θά εἶναι:

$$G(t,s,\lambda) = \begin{cases} -\dfrac{e^{i\lambda(s-t-1/2)}}{2\sin\frac{\lambda}{2}} & \text{ἄν} \quad t \leq s \\ -\dfrac{e^{i\lambda(s-t+1/2)}}{2\sin\frac{\lambda}{2}} & \text{ἄν} \quad t > s. \end{cases}$$

8.5 Φασματική ἀνάλυση τοῦ τελεστοῦ Green

Στήν παροῦσα ἑνότητα θά δοῦμε πῶς ὁ ἀντίστροφος τοῦ διαφορικοῦ τελεστοῦ $\mathcal{L}$, ἀποτελεῖ ἕναν ὁλοκληρωτικό τελεστή, ὁ ὁποῖος δύναται νά ὁρισθεῖ ἐφ' ὅλου τοῦ $L^2[a,b]$. Ἰδιαιτέρως ἀποτελεῖ ἕναν συμπαγῆ αὐτοσυζυγῆ τελεστή καί ἔχει πραγματικές ἰδιοτιμές καί ἰδιοσυναρτήσεις οἱ ὁ ὁποῖες δύνανται νά ληφθοῦν ὥστε νά ἀποτελοῦν ὀρθοκανονική βάση τοῦ $L^2[a,b]$.

8.5.1 Κατασκευή ἰδιοτιμῶν καί ἰδιοσυναρτήσεων

Ἀπό τώρα καί στό ἑξῆς θά ὑποθέτομε ὅτι τό πρόβλημά μας εἶναι αὐτοσυζυγές καί τό $\lambda = 0$ δέν ἀποτελεῖ ἰδιοτιμή. Κάτι τέτοιο δύναται νά ὑποτεθεῖ χωρίς βλάβη τῆς γενικότητος ἀφοῦ ἄν τό μηδέν εἶναι ἰδιοτιμή, τότε ἀντικαθιστοῦμε τό διαφορικό τελεστή $\mathcal{L}$ μέ τόν $\mathcal{L} - \lambda_0$, γιά κάποιο πραγματικό λ_0 ὁ ὁποῖος δέν ἀποτελεῖ ἰδιοτιμή. Σ' αὐτή τήν περίπτωση, κατ' οἰκονομία, θέτομε

$$G(t,s) = G(t,s,0).$$

Ὡς $\mathcal{G}$ ὁρίζομε τόν ἀκόλουθο ὁλοκληρωτικό τελεστή:

$$(\mathcal{G}v)(t) = \int_a^b G(t,s)v(s)\,ds \quad , \qquad v \in C[a,b].$$

Ἰδιότητες τοῦ τελεστοῦ $\mathcal{G}$:

(i) *Ὁ $\mathcal{G}$ ἐπεκτείνεται ἐφ' ὅλου τοῦ $L^2[a,b]$ ὡς φραγμένος τελεστής.*

Πράγματι, ἔστω $u \in C[a,b]$, τότε:

$$\begin{aligned} \|\mathcal{G}u\|^2 &= \langle \mathcal{G}u, \mathcal{G}u \rangle = \int_a^b \left| \int_a^b G(t,s)u(s)\,ds \right|^2 dt \\ &\leq (b-a)\left(\max_{a\leq s,t\leq b} |G(t,s)| \right)^2 \int_a^b |u(s)|^2\,ds. \end{aligned}$$

Ἄρα

$$\|\mathcal{G}u\| \leq \gamma \|u\|, \tag{8.28}$$

ὅπου

$$\gamma = (b-a)^{1/2} \max_{a \le s,t \le b} |G(t,s)|. \tag{8.29}$$

Ἔστω τώρα ὅτι $u \in L^2[a,b]$, τότε ὑπάρχει ἀκολουθία συνεχῶν συναρτήσεων $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, συγκλίνουσα ὡς πρός τήν L^2-νόρμα στήν v. Ὁπότε ἐξ αἰτίας τῆς (8.28)

$$\|\mathcal{G}(u_k - u_l)\| \le \gamma \|u_k - u_l\|,$$

ἀπ' ὅπου προκύπτει ὅτι ἡ ἀκολουθία $\{\mathcal{G}u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, εἶναι L^2-Cauchy. Συνεπῶς ἔχει μοναδικό ὅριο, τό ὁποῖο ὁρίζομε ὡς $\mathcal{G}u$. Τό ἀνωτέρω ὅριο εἶναι ἀνεξάρτητο τῆς ἐπιλογῆς τῆς ἀκολουθίας $u_n \to u$, καί βεβαίως ἄν u συνεχής, τότε ὅριο τῆς ἀκολουθίας $\{\mathcal{G}u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, συμπίπτει μέ τήν εἰκόνα $\mathcal{G}u$. Πράγματι λοιπόν, ὁ τελεστής $\mathcal{G}$ ὁ ὁποῖος ὁρίζεται κατ' αὐτό τόν τρόπο *καλῶς* ἐφ' ὅλου τοῦ $L^2[a,b]$ ὡς φραγμένος τελεστής. Ἀπό τόν ὁρισμό τῆς νόρμας τελεστοῦ $\|\mathcal{G}\| = \sup_{\|u\|=1} \|\mathcal{G}u\|$, προκύπτει ὅτι:

$$\|\mathcal{G}\| \le (b-a)^{1/2} \max_{a \le s,t \le b} |G(t,s)|.$$

(ii) *Ὁ $\mathcal{G}$ εἶναι αὐτοσυζυγής.*

Ὄντως, ἔστω $f,g \in C[a,b]$ καί $u = \mathcal{G}f$, $v = \mathcal{G}g$. Τότε

$$\begin{cases} Lu = f \\ \boldsymbol{U}u = 0 \end{cases} \quad \text{καί} \quad \begin{cases} Lv = g \\ \boldsymbol{U}v = 0 \end{cases}.$$

Συνεπείᾳ ὅμως τῆς αὐτοσυζυγίας τοῦ προβλήματος ἰδιοτιμῶν μας, θά ἔχομε:

$$\langle Lu, v\rangle = \langle u, Lv\rangle \quad \text{ἤ} \quad \langle f, \mathcal{G}g\rangle = \langle \mathcal{G}f, g\rangle.$$

Ἄν τώρα $f,g \in L^2[a,b]$, τότε ὑπάρχουν $f_n, g_n \in C[a,b]$, $n\in\mathbb{N}$, ὥστε:

$$f_n \to f, \ \ g_n \to g \quad \text{ἄρα} \quad \langle f_n, g_n\rangle \to \langle f, g\rangle.$$

Ὁπότε

$$\langle \mathcal{G}f, g\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \mathcal{G}f_n, g_n\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle f_n, \mathcal{G}g_n\rangle = \langle f, \mathcal{G}g\rangle.$$

Πράγματι λοιπόν ὁ τελεστής $\mathcal{G}$ εἶναι αὐτοσυζυγής. Ὅμως

$$\langle \mathcal{G}f, g\rangle - \langle f, \mathcal{G}g\rangle = \int_a^b \int_a^b \big(G(t,s) - \overline{G}(s,t)\big) f(s)\overline{g}(t)\, ds\, dt. \tag{8.30}$$

Ἄρα $G(t,s) = \overline{G}(s,t)$ σχεδόν παντοῦ στό $[a,b]\times[a,b]$. Ὡς γνωστόν, ὁ G εἶναι συνεχής, ὅταν $n>1$, ἐνῶ ὅταν $n=1$, εἶναι συνεχής γιά $t \ne s$ καί ἔχει πλευρικά ὅρια ὅταν $t=s$. Ὡς ἐκ τούτου ἡ (8.30) συνεπάγεται ὅτι

$$\overline{G}(t,s) = G(s,t), \tag{8.31}$$

παντοῦ γιά $n>1$, ἐνῶ γιά $t\ne s$, ὅταν $n=1$.

(iii) *Ὁ ὁλοκληρωτικός τελεστής $\mathcal{G}$ ἀποτελεῖ τόν ἀντίστροφο τοῦ διαφορικοῦ τελεστοῦ $\mathcal{L}$ σέ κατάλληλους χώρους.*

Ἄν δηλαδή $f \in C[a,b]$ καί $u = \mathcal{G}f$, τότε $u \in C^n[a,b] \cap \mathcal{N}(\boldsymbol{U})$ καί $Lu = f$, ἐνῶ ἄν $u \in C^n[a,b] \cap \mathcal{N}(\boldsymbol{U})$ καί $w = \mathcal{G}Lu$, τότε $Lw = Lu$ καί $\boldsymbol{U}w = 0$, ἄρα $\mathcal{L}(u-w) = 0$ καί $\boldsymbol{U}(u-w) = 0$, ὁπότε ἐφ' ὅσον τό $\lambda = 0$ δέν ἀποτελεῖ ἰδιοτιμή τοῦ $\mathcal{L}$, τότε $w = u$ καί ὡς ἐκ τούτου $\mathcal{G}\mathcal{L}u = u$. Συνολικῶς

$$\begin{array}{lll} (a) & \mathcal{L}\mathcal{G}f = f & \text{γιά κάθε} \quad f \in C[a,b]. \\ (b) & \mathcal{G}Lu = u & \text{γιά κάθε} \quad u \in C^n[a,b] \cap \mathcal{N}(\boldsymbol{U}). \end{array}$$

(iv) *Οἱ τελεστές $\mathcal{L}$ καί $\mathcal{G}$ ἔχουν τίς ἴδιες ἰδιοσυναρτήσεις καί ἀντίστροφες ἰδιοτιμές.*

Ἄν δηλαδή ὁ ἀριθμός λ ἀποτελεῖ ἰδιοτιμή τοῦ $\mathcal{L}$, μέ ἀντίστοιχη ἰδιοσυνάρτηση φ, τότε θά ἔχομε $\mathcal{L}\varphi = \lambda\varphi$ καί βεβαίως $\boldsymbol{U}\varphi = 0$. Ὡς ἐκ τούτου

$$\mathcal{G}\mathcal{L}\varphi = \lambda\mathcal{G}\varphi,$$

ὁπότε

$$\varphi = \lambda\mathcal{G}\varphi.$$

Ἤτοι: *Ἄν τό λ ἀποτελεῖ ἰδιοτιμή τοῦ $\mathcal{L}$ μέ ἀντίστοιχη ἰδιοσυνάρτηση φ, τότε τό $\frac{1}{\lambda}$ ἀποτελεῖ ἰδιοτιμή τοῦ $\mathcal{G}$ μέ ἀντίστοιχη ἰδιοσυνάρτηση ἐπίσης φ. Ἰσχύει καί τό ἀντίστροφο.*

Θά χρειαστοῦμε τώρα τό ἀκόλουθο λῆμμα:

Λῆμμα 8.5.1. *Ἔστω ὅτι ἡ ἀκολουθία $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2[a,b]$ εἶναι φραγμένη, δηλαδή $\|u_n\| \leq M$. Τότε ἡ ἀκολουθία $\{\mathcal{K}u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ἀποτελεῖται ἀπό συνεχεῖς συναρτήσεις οἱ ὁποῖες εἶναι ὁμοιομόρφως φραγμένες καί ἰσοσυνεχεῖς.*

Ὑπενθυμίζομε τόν ὁρισμό:

Ὁρισμός 8.5.1. *Ἡ οἰκογένεια συναρτήσεων $\mathcal{F} \subset C[a,b]$ ὀνομάζεται ἰσοσυνεχής, ἄν γιά κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει $\delta > 0$ ὥστε γιά κάθε $u \in \mathcal{F}$*

$$|x-y| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |u(x) - u(y)| < \varepsilon.$$

Ἤτοι: Τό δ δέν ἐξαρτᾶται οὔτε ἀπό τά x, y, οὔτε ἀπό τίς συναρτήσεις u.

Χαρακτηριστική ἰδιότης συμπάγειας τῶν ἰσοσυνεχῶν συναρτήσεων εἶναι τό *Λῆμμα Arzelá–Ascoli* (βλέπε *Λῆμμα 3.4.3* στήν σελίδα 156), τό ὁποῖο μᾶς ἐξασφαλίζει ὅτι:

Κάθε ἰσοσυνεχής καί φραγμένη ἀκολουθία στόν χῶρο $C[a,b]$, ἔχει ὁμοιομόρφως συγκλίνουσα ὑπακολουθία.

᾿Απόδειξη τοῦ Λήμματος 8.5.1

῾Ο πυρήν G ἐπεκτείνεται συνεχῶς καί εἶναι φραγμένος είς ἕκαστον τῶν κλειστῶν τριγωνικῶν χωρίων:

$$\begin{aligned} \Delta^- &= \{ (t,s) \in [a,b] \times [a,b] \,:\, t \le s \}, \\ \Delta^+ &= \{ (t,s) \in [a,b] \times [a,b] \,:\, t \ge s \}, \end{aligned}$$

λόγῳ τοῦ *Θεωρήματος 8.4.1.* (῎Αν ἡ τάξη n τοῦ διαφορικοῦ τελεστοῦ $\mathcal{L}$ εἶναι μεγαλύτερη ἴση τοῦ 2, τότε ὁ G εἶναι συνεχής στό $[a,b] \times [a,b]$. ῎Αν ὅμως $n = 1$, τότε ὁ G ἔχει ἀσυνέχεια κατά μῆκος τῆς γραμμῆς $t = s$). ῎Εχομε λοιπόν:

$$\begin{aligned} (\mathcal{G}u)(t) &= \int_a^b G(t,s)u(s)\,ds = \int_a^t G(t,s)u(s)\,ds + \int_t^b G(t,s)u(s)\,ds \\ &= \left(\mathcal{G}^- u\right)(t) + \left(\mathcal{G}^+ u\right)(t). \end{aligned}$$

Θά ἀποδείξομε τά ζητούμενα τοῦ λήμματος δι' ἕκαστον τῶν ὁλοκληρωτικῶν τελεστῶν $\mathcal{G}^-, \mathcal{G}^+$. Λόγῳ συμμετρίας ἀρκεῖ ἡ μία ἐκ τῶν δύο περιπτώσεων. Περιοριζόμεθα λοιπόν στήν μελέτη τοῦ $\mathcal{G}^-$.

Α. *᾿Ισοσυνέχεια.*

῎Εστω $R = \max_{(t,s)\in\Delta^-} |G(t,s)|$, $v_n = \mathcal{G}^- u_n$ καί $a \le t_1 \le t_2 \le b$. Τότε

$$\begin{aligned} v_n(t_2) - v_n(t_1) &= \int_a^{t_2} G(t_2,s)u_n(s)\,ds - \int_a^{t_1} G(t_1,s)u_n(s)\,ds \\ &= \int_{t_1}^{t_2} G(t_2,s)u_n(s)\,ds + \int_a^{t_1} \left(G(t_2,s) - G(t_1,s)\right) u_n(s)\,ds. \end{aligned}$$

῞Ομως

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_1}^{t_2} G(t,s)u_n(s)\,ds \right| &\le \left(\int_{t_1}^{t_2} |G(t,s)|^2\,ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{t_1}^{t_2} |u_n(s)|^2\,ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\le RM(t_2 - t_1)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

ἐνῶ

$$\begin{aligned} &\left| \int_a^{t_1} \left(G(t_2,s) - G(t_1,s)\right) u_n(s)\,ds \right| \le \\ &\le \left(\int_a^{t_1} |G(t_2,s) - G(t_1,s)|^2\,ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^{t_1} |u_n(s)|^2\,ds \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{8.32}$$

᾿Αλλά ἐπειδή ἡ G ἐπεκτείνεται συνεχῶς στό συμπαγές Δ^-, τότε εἶναι καί ὁμοιομόρφως συνεχής, ἤτοι, γιά κάθε $\delta > 0$ ὑπάρχει $\varepsilon > 0$, τέτοιο ὥστε:

$$|t_1 - t_2| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |G(t_1,s) - G(t_2,s)| < \varepsilon$$

καί ὡς ἐκ τούτου, ὅταν $|t_1 - t_2| < \delta$, τό δεξιό μέλος τῆς (8.32) καθίσταται μικρότερο ἤ ἴσο τοῦ $M(b-a)^{\frac{1}{2}}\varepsilon$. Ἤτοι, ἡ διαφορά $|v_n(t_1) - v_n(t_1)|$ καθίσταται ὁσοδήποτε μικρό ἀνεξαρτήτως τῶν s, t_1, t_2 καί u_n.

Β. *Ἡ* $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *εἶναι ὁμοιομόρφως φραγμένη.*

Πράγματι

$$\begin{aligned} |v_n(t)| = \Big|\int_a^t G(t,s)u_n(s)\,ds\Big| &\le \Big(\int_a^t |G(t,s)|^2\,ds\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_a^t |u_n(s)|^2\,ds\Big)^{\frac{1}{2}} \\ &\le RM(b-a)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$ □

Ἀπό τά ἀνωτέρω προκύπτει ὅτι:

Πόρισμα 8.5.2. *Ὁ τελεστής* $\mathcal{G} : L^2[a,b] \to L^2[a,b]$ *εἶναι συμπαγής.* □

Ὁλοκληρώνομε τήν παροῦσα ὑποενότητα μέ τό ἀκόλουθο ἀποτέλεσμα τό ὁποῖο περιγράφει τήν *φασματική ἀνάλυση* τοῦ τελεστοῦ $\mathcal{G}$:

Θεώρημα 8.5.3. *Ὁ τελεστής* $\mathcal{G} : L^2[a,b] \to L^2[a,b]$, *ἔχει ὀρθοκανονική ἀκολουθία ἰδιοσυναρτήσεων* $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, *μέ ἀντίστοιχες ἰδιοτιμές* μ_k, $k\in\mathbb{N}$, *ὥστε*

$$|\mu_1| \ge |\mu_2| \ge \cdots \ge |\mu_k| \to 0$$

καί

$$\mathcal{G}v = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \langle v, \psi_k\rangle \psi_k,$$

γιά κάθε $v\in L^2[a,b]$.

Απόδειξη. Ἐπειδή ὁ ὁλοκληρωτικός τελεστής $\mathcal{G} : L^2[a,b] \to L^2[a,b]$, εἶναι συμπαγής καί αὐτοσυζυγής, τότε λόγῳ τοῦ *Λήμματος 8.3.3*, ὑπάρχει $v\in L^2[a,b]$, $v \neq 0$, ὥστε

$$\mathcal{G}v = \mu v$$

καί $\mu = \pm\|\mathcal{G}\|$. Ἔστω τώρα $\mu_1 = \mu$,

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &= \frac{1}{\|v\|}v(t), \\ G_1(t,s) &= G(t,s) - \mu_1\psi(t)\overline{\psi_1}(s) \quad \text{καί} \\ (\mathcal{G}_1u)(t) &= \int_a^b G_1(t,s)u(s)\,ds = (\mathcal{G}u)(t) - \langle u,\psi_1\rangle\psi_1(t). \end{aligned}$$

Τότε ὁ πυρήνας G_1 εἶναι ἐξ ἴσου ὁμαλός μέ τόν G καί προφανῶς ὁ τελεστής $\mathcal{G}_1$ εἶναι ἐπίσης αὐτοσυζυγής καί φραγμένος. Ἐπαναλαμβάνοντας τήν προηγούμενη διαδικασία, δεδομένου ὅτι $\|\mathcal{G}_1\| \neq 0$, τό ὁποῖο θά δείξομε ἀργότερα, λαμβάνομε ἰδιοτιμή μ_2 καί μοναδιαῖα ἰδιοσυνάρτηση ψ_2, ὥστε $\mathcal{G}_1\psi_2 = \mu_2\psi_2$. Ὅμως γιά κάθε $u \in L^2[a,b]$ ἰσχύει ὅτι:

$$\langle \mathcal{G}_1 u, \psi_1 \rangle = \langle u, \mathcal{G}_1\psi_1 \rangle = \langle u, \mathcal{G}\psi_1 - \mu_1\psi_1 \rangle = 0.$$

Ἄρα $\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = 0$. Ἐπίσης

$$\mathcal{G}\psi_2 = \mathcal{G}_1\psi_2 + \mu_1\langle \psi_1, \psi_2 \rangle \psi_2 = \mu_2\psi_2.$$

Ἄρα τό μ_2 ἀποτελεῖ ἰδιοτιμή καί τοῦ $\mathcal{G}$ καί ὡς ἐκ τούτου $|\mu_2| \leq |\mu_1|$. Ἡ ἐπαγωγική αὐτή διαδικασία αὐτή δύναται νά συνεχισθεῖ μέ κατασκευή ἰδιοτιμῶν τοῦ τελεστοῦ $\mathcal{G}$:

$$|\mu_1| \geq |\mu_2| \geq \ldots \geq |\mu_m| \geq 0,$$

ἐφ' ὅσον βεβαίως σέ κανένα βῆμα δέν συμβεῖ $G_m \equiv 0$. Ἄν $G_m \equiv 0$ γιά κάποιο m, τότε βεβαίως $\mathcal{G}_m = 0$. Αὐτό θά ἐσήμαινε ὅτι γιά κάθε $v \in C[a,b]$ θά ἴσχυε ὅτι:

$$0 = \mathcal{L}\mathcal{G}_m v = \mathcal{L}\mathcal{G}v - \sum_{k=1}^{m} \mu_m \langle v, \psi_k \rangle \psi_k = v - \sum_{k=1}^{m} \langle v, \psi_k \rangle \psi_k.$$

Ἤτοι, κάθε συνεχής συνάρτηση θά ἦταν δυνατόν νά γραφεῖ ὡς πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός. Ἄτοπο.

Ἡ ἀκολουθία $|\mu_k|$, $k \in \mathbb{N}$, εἶναι φθίνουσα καί φραγμένη ἀπό τό 0 ἄρα συγκλίνει σέ κάποιο $\mu \geq 0$. Ἔστω ὅτι $\mu \neq 0$. Ἐπειδή $\mathcal{G}$ συμπαγής καί $\|\psi_k\| = 1$, ἕπεται ὅτι ἡ ἀκολουθία $\{\mathcal{G}\psi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, ἔχει συγκλίνουσα ὑπακολουθία

$$\mathcal{G}\psi_{m_k} \longrightarrow w.$$

Ἐπειδή ὅμως

$$\|\mathcal{G}\psi_{m_k}\| = \|\mu_{m_k}\psi_{m_k}\| = |\mu_{m_k}| \cdot \|\psi_{m_k}\| \longrightarrow \mu \neq 0,$$

τότε $w \neq 0$. Συγχρόνως

$$\langle \mathcal{G}\psi_{m_k}, \mathcal{G}\psi_{m_{k+1}} \rangle = \langle \mu_{m_k}\psi_{m_k}, \mu_{m_{k+1}}\psi_{m_{k+1}} \rangle = \mu_{m_k}\mu_{m_{k+1}} \langle \psi_{m_k}, \psi_{m_{k+1}} \rangle = 0,$$

ἐνῶ λόγῳ τῆς (8.16) στήν σελίδα 307 ἔχομε:

$$\langle \mathcal{G}\psi_{m_k}, \mathcal{G}\psi_{m_{k+1}} \rangle \longrightarrow \langle w, w \rangle = \|w\|^2 \neq 0.$$

Ὅπερ ἄτοπο. Ἄρα, $\mu_k \to 0$. Ἄν τώρα $v \in L^2[a,b]$, τότε

$$\mathcal{G}_m v = \mathcal{G}v - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \langle v, \psi_k \rangle \psi_k$$

καί

$$\|\mathcal{G}_m v\| \;\leq\; \|\mathcal{G}_m\| \cdot \|v\| \;=\; |\mu_m| \cdot \|v\| \;\longrightarrow\; 0,$$

τό ὁποῖο σημαίνει ὅτι

$$\mathcal{G}v \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \langle v, \psi_k \rangle \psi_k,$$

μέ τήν ἀνωτέρω σειρά νά συγκλίνει ὡς πρός τήν νόρμα τοῦ $L^2[a,b]$. □

8.5.2 Ἀνάπτυγμα σέ ἰδιοσυναρτήσεις

Ξεκινοῦμε ἀπό τό κάτωθι ἀποτέλεσμα τό ὁποῖο ἀναλύει κατά ἀρκετά *ὁμαλό τρόπο* τίς λύσεις τοῦ μή ὁμοιογενοῦς προβλήματος:

Θεώρημα 8.5.4. *Ἔστω $u \in C^n[a,b] \cap \mathcal{N}(\boldsymbol{U})$ καί $\{\varphi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, ἡ ἀκολουθία τῶν ἰδιοσυναρτήσεων τοῦ τελεστοῦ $\mathcal{G}$. Τότε*

$$u \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \langle u, \varphi_n \rangle \varphi_n.$$

Ἡ δέ σύγκλιση τῆς ἀνωτέρω σειρᾶς εἶναι ὁμοιόμορφη στό $[a,b]$.

Απόδειξη. Ἔστω $u \in C^n[a,b] \cap \mathcal{N}(\boldsymbol{U})$ καί $v = Lu$. Τότε $v \in C[a,b] \subset L^2[a,b]$ καί $\mathcal{G}v = u$. Ὅπως ὅμως καί στήν ἀπόδειξη τοῦ *Θεωρήματος 8.5.3*, ἔχομε

$$\mathcal{G}_m v \;=\; \mathcal{G}v - \sum_{k=1}^{m} \mu_k \langle v, \psi_k \rangle \psi_k \tag{8.33}$$

καί

$$\|\mathcal{G}_m v\| \;\leq\; \|\mathcal{G}_m\| \cdot \|v\| \;\leq\; \mu_m \|v\| \;\to\; 0,$$

καθώς $m \to \infty$. Συνεπῶς τό ἀριστερό μέλος τῆς (8.33) τείνει στό μηδέν ὡς πρός τήν L^2-νόρμα. Θά δείξομε ὅτι τό δεξιό μέλος ἀποτελεῖ ἀκολουθία ὁμοιομόρφως Cauchy. Ἔχομε:

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=\varrho}^{\sigma} \mu_k \langle v, \psi_k \rangle \psi_k \right| \;&=\; \left| \mathcal{G} \left(\sum_{k=\varrho}^{\sigma} \langle v, \psi_k \rangle \psi_k \right) \right| \\
&\leq\; \gamma (b-a)^{1/2} \left\| \sum_{k=\varrho}^{\sigma} \langle v, \psi_k \rangle \psi_k \right\| \\
&=\; \gamma (b-a)^{1/2} \left(\sum_{k=\varrho}^{\sigma} |\langle v, \psi_k \rangle|^2 \right)^{1/2},
\end{aligned}$$

διότι $\|\mathcal{G}v\| \leq \gamma(b-a)^{\frac{1}{2}}\|v\|$. Τό δεξιό μέλος τῆς ἀνωτέρω δύναται νά καταστεῖ ὁσοδήποτε μικρό γιά ἀρκετά μεγάλα ϱ καί σ, ἀφοῦ

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^2 |\langle v, \psi_k\rangle|^2 = \|\mathcal{G}v\|^2 < \infty.$$

Ἄρα πράγματι ἡ σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \langle v, \psi_k\rangle \psi_k,$$

συγκλίνει ὁμοιομόρφως μέ ὅριο τήν συνάρτηση $\mathcal{G}v$. Ἀφοῦ ὅμως $u = \mathcal{G}v$ καί

$$\langle u, \psi_m\rangle = \langle \mathcal{G}v, \psi_m\rangle = \langle v, \mathcal{G}\psi_m\rangle = \langle v, \mu_m\psi_m\rangle = \mu_m\langle v, \psi_m\rangle,$$

τότε

$$u = \mathcal{G}v = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k\langle v, \psi_k\rangle\psi_k = \sum_{k=1}^{\infty} \langle u, \psi_k\rangle\psi_k$$

καί ἡ ἀνωτέρω σειρά συγκλίνει ὁμοιομόρφως στό $[a, b]$. □

Πόρισμα τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος:

Πόρισμα 8.5.5. *Ἄν $u \in C^n[a, b] \cap \mathcal{N}(\boldsymbol{U})$ καί $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ἡ ἀκολουθία τῶν ἰδιοσυναρτήσεων τοῦ τελεστοῦ $\mathcal{G}$, τότε*

$$\|u\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle u, \psi_k\rangle|^2.$$

Ἡ ἀνωτέρω εἶναι γνωστή ὡς ταυτότης Parseval.

Τό θεώρημα τό ὁποῖο ἀκολουθεῖ μᾶς παραχωρεῖ τήν *πληρότητα* τῶν ἰδιοσυναρτήσεων:

Θεώρημα 8.5.6. *Ἡ $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, ἀποτελεῖ ὀρθοκανονική βάση τοῦ $L^2[a, b]$. Συγκεκριμένα, γιά κάθε $v \in L^2[a, b]$ ἰσχύει ὅτι:*

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, \psi_k\rangle\psi_k,$$

μέ τήν ἀνωτέρω σειρά νά συγκλίνει ὡς πρός τήν L^2−νόρμα.

Ἀποδειξη. Ἔστω $v \in L^2[a, b]$. Ἐπειδή τό $C^n[a, b] \cap \mathcal{N}(\boldsymbol{U})$ εἶναι πυκνό στό $L^2[a, b]$, τότε γιά κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει $v_\varepsilon \in C^n[a, b] \cap \mathcal{N}(\boldsymbol{U})$ ὥστε $\|v - v_\varepsilon\| < \varepsilon$. Ὁπότε:

$$\begin{aligned}\left\| v - \sum_{k=1}^{m} \langle v, \psi_k\rangle\psi_k \right\| &\leq \\ &\leq \|v - v_\varepsilon\| + \left\| v_\varepsilon - \sum_{k=1}^{m} \langle v_\varepsilon, \psi_k\rangle\psi_k \right\| + \left\| \sum_{k=1}^{m} \langle v_\varepsilon - v, \psi_k\rangle\psi_k \right\|.\end{aligned}$$

Τό δεξιό μέλος τῆς ἀνωτέρω εἶναι δυνατόν νά καταστεῖ ὁσοδήποτε μικρό γιά ἐπαρκῶς μεγάλο m καί ἄρα μικρό ε. □

Παρατήρηση. Ὁ πυρήν G δύναται νά ἐκφρασθεῖ ὡς ἀνάπτυγμα στοιχείων κατάλληλης ὀρθοκανονικῆς βάσεως. Συγκεκριμένα, ἰσχύει ὅτι, ἄν $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, ἡ ὀρθοκανονική ἀκολουθία ἰδιοσυναρτήσεων τοῦ τελεστοῦ $\mathcal{G}$, ἡ ὁποία ἀποτελεῖ καί ὀρθοκανονική βάση τοῦ $L^2[a,b]$, τότε τό σύνολο

$$\mathcal{B} \;=\; \big\{\psi_k(t)\overline{\psi}_l(s) \;\big|\; k,l\in\mathbb{N}\big\},$$

ἀποτελεῖ ὀρθοκανονική βάση τοῦ $L^2\left([a,b]\times[a,b]\right)$ (βλέπε *Ἄσκηση* 8.5.1). Τά ἐσωτερικά γινόμενα στόν χῶρο $L^2\left([a,b]\times[a,b]\right)$, τοῦ πυρῆνος G μέ τά στοιχεῖα τῆς $\mathcal{B}$ λαμβάνουν τίς ἀκόλουθες τιμές

$$\begin{aligned}\langle G,\psi_k\overline{\psi}_l\rangle &= \int_a^b\left(\int_a^b G(t,s)\psi_l(s)\,ds\right)\overline{\psi}_k(t)\,dt\\ &= \int_a^b \mu_l\psi_l(t)\overline{\psi}_k(t)\,dt \;=\; \delta_{kl}\,\mu_l.\end{aligned}$$

Ὡς ἐκ τούτου

$$\begin{aligned}G(t,s) &= \sum_{k,l\in\mathbb{N}}\langle G,\psi_k\overline{\psi}_l\rangle\psi_k(t)\overline{\psi}_l(s)\\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}}\mu_k\psi_k(t)\overline{\psi}_k(s)\\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{\lambda_k}\psi_k(t)\overline{\psi}_k(s).\end{aligned}$$

Ἡ ἀνωτέρω σειρά συγκλίνει ὡς πρός τήν νόρμα τοῦ χώρου $L^2\left([a,b]\times[a,b]\right)$. Κατ' ἀνάλογο τρόπο εἶναι δυνατόν νά δειχθεῖ ὅτι:

$$G(t,s,\lambda) \;=\; \sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{1}{\lambda_k-\lambda}\psi_k(t)\overline{\psi}_k(s),$$

Βλέπε *Ἄσκηση* 8.5.2.

Ἀσκήσεις

8.5.1 Δείξατε ὅτι, ἄν $\{\psi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, ὀρθοκανονική βάση τοῦ $L^2[a,b]$, τότε τό σύνολο

$$\mathcal{B} \;=\; \{\psi_k(t)\overline{\psi}_l(s) \mid k,l\in\mathbb{N}\,\},$$

ἀποτελεῖ ὀρθοκανονική βάση τοῦ $L^2\left([a,b]\times[a,b]\right)$.

Υποδειξη. Ἄν $v\in L^2\left([a,b]\times[a,b]\right)$, τότε γιά κάθε $\varepsilon>0$, ὑπάρχει συνάρτηση v_ε τῆς μορφῆς

$$v_\varepsilon(x,y) \;=\; \sum_{k=1}^{n} f_k(x)\,g_k(y),$$

ὅπου $f_k,g_k\in C[a,b]$ καί $\|v_\varepsilon-v\|<\varepsilon$.

8.5.2 Δείξατε ὅτι:

$$G(t,s,\lambda) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{\lambda_k - \lambda} \psi_k(t)\overline{\psi}_k(s).$$

8.5.3 Δείξατε ὅτι ὁ πυρήν τοῦ Green τοῦ προβλήματος ἰδιοτιμῶν i στην σελίδα 299 ἐκφράζεται ὡς ἀνάπτυγμα ἰδιοσυναρτήσεων ὡς

$$G(t,s,\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\sin k\pi t \sin k\pi s}{k^2 - \lambda},$$

γιά κάθε $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$.

8.5.4 Δείξατε ὅτι:

$$\int_a^b \int_a^b |G(t,s)|^2 \, ds\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^2,$$

καί ἀκολούθως ὅτι:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Μέ τί ἰσοῦται τό κάτωθι ἄθροισμα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \,;$$

8.5.5 (Συνέχεια) Νά ὑπολογισθεῖ τό ἄθροισμα $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\varrho}}$, ὅπου ϱ θετικός ἀκέραιος.

8.5.6 Δείξατε ὅτι ἄν $n \geq 2$, τότε ἡ σειρά

$$G(t,s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \psi_k(t)\overline{\psi}_k(s),$$

συγκλίνει ὁμοιομόρφως.

Κεφάλαιο 9

Παράρτημα

9.1 Στοιχεῖα Γραμμικῆς Ἄλγεβρας

Στήν παροῦσα ἑνότητα παρουσιάζονται συνοπτικῶς βασικοί ὁρισμοί καί ἀποτελέσματα τῆς *Γραμμικῆς Ἄλγεβρας*. Ἰδιαίτερη ἔμφαση δίδεται στούς τετραγωνικούς πίνακες καί στό *διαγωνιοποιήσιμο* αὐτῶν.

9.1.1 Γραμμικοί χῶροι

Ὁρισμός 9.1.1. *Ἔστω X μή κενό σύνολο ἐφοδιασμένο μέ ἐσωτερική πράξη, τήν ὁποία θά καλοῦμε πρόσθεση καί θά συμβολίζομε μέ '$+$' καί ὡς πρός τήν ὁποία τό σύνολο X ἀποτελεῖ ἀβελιανή ὁμάδα. Ἔστω ἐπίσης ὅτι τό X εἶναι ἐφοδιασμένο μέ ἐξωτερική πράξη ἐπί τοῦ $\mathbb{R} \times X$, (ἀντιστοίχως ἐπί τοῦ $\mathbb{C} \times X$), ἤτοι $\mu \cdot \boldsymbol{x} \in X$ για κάθε μ στό $\mathbb{R}$ (ἀντιστοίχως $\mathbb{C}$) καί $\boldsymbol{x}$ στό X. Τήν ἐξωτερική πράξη θά καλοῦμε ἐξωτερικό ἤ βαθμωτό πολλαπλασιασμό καί θά συμβολίζομε μέ '$\cdot$'. Τό X ὀνομάζεται γραμμικός χῶρος ἐπί τοῦ σώματος $\mathbb{R}$ (ἀντιστοίχως $\mathbb{C}$), ἄν ἱκανοποιοῦνται τά ἀκόλουθα*

(i) $\quad (\mu\nu) \cdot \boldsymbol{x} = \mu \cdot (\nu \cdot \boldsymbol{x})$, *γιά κάθε μ, $\nu \in \mathbb{R}$ (ἀντιστοίχως $\mathbb{C}$) καί $\boldsymbol{x} \in X$.*

(ii) $\quad (\mu + \nu) \cdot \boldsymbol{x} = \mu \cdot \boldsymbol{x} + \nu \cdot \boldsymbol{x}$ *καί*

$\mu \cdot (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \mu \cdot \boldsymbol{x} + \mu \cdot \boldsymbol{y}$ *γιά κάθε μ, $\nu \in \mathbb{R}$ (ἀντιστοίχως $\mathbb{C}$) καί $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in X$.*

(iii) $\quad 1 \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$, *γιά κάθε $\boldsymbol{x} \in X$, ὅπου 1 ἡ μονάδα στό $\mathbb{R}$ (ἀντιστοίχως στό $\mathbb{C}$).*

Παραδείγματα γραμμικῶν χώρων

(i) Τό σύνολο τῶν $N-$διαστάτων πραγματικῶν διανυσμάτων, ἤτοι τό $\mathbb{R}^N$.

(ii) Τό σύνολο τῶν $N-$διαστάτων μιγαδικῶν διανυσμάτων, ἤτοι τό $\mathbb{C}^N$, τό ὁποῖο ἀποτελεῖ διανυσματικό χῶρο τόσο ἐπί τοῦ $\mathbb{R}$, ὅσο καί ἐπί τοῦ $\mathbb{C}$.

(iii) Τό σύνολο τῶν πραγματικῶν πινάκων $M \times N$, δηλαδή τό $\mathbb{R}^{M\times N}$. Παρομοίως καί τό σύνολο τῶν ἀντιστοίχων μιγαδικῶν πινάκων $\mathbb{C}^{M\times N}$.

(iv) Τό σύνολο $C(I)$ τῶν συνεχῶν πραγματικῶν συναρτήσεων ἐπί τοῦ διαστήματος I. Παρομοίως καί τό σύνολο τῶν μιγαδικῶν συναρτήσεων ἐπί τοῦ I, συμβολιζόμενο μέ $C(I\,;\mathbb{C})$.

(v) Τό σύνολο $C^n(I)$ τῶν n φορές συνεχῶς διαφορισίμων συναρτήσεων ἐπί τοῦ διαστήματος I. Κατ' ἀναλογίαν ὁρίζεται τό $C^n(I\,;\mathbb{C})$.

(vi) Τό σύνολο $C^n(I;\mathbb{R}^N)$ τῶν n φορές συνεχῶς διαφορισίμων διανυσματικῶν συναρτήσεων ἐπί τοῦ διαστήματος I μέ τιμές στόν $\mathbb{R}^N$.

(vii) Τό σύνολο $\mathcal{P}_n[a,b]$ τῶν πολυωνύμων ἐπί τοῦ $[a,b]$, βαθμοῦ μικρότερου ἤ ἴσου τοῦ n.

9.1.2 Γραμμική ἀνεξαρτησία

Ὁρισμός 9.1.2. *Ἔστω X γραμμικός χῶρος ἐπί τοῦ $\mathbb{R}$ (ἀντιστοίχως $\mathbb{C}$) καί $x_1, \ldots, x_n \in X$.*

(*i*) *Γραμμικός συνδυασμός τῶν στοιχείων $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$, ὀνομάζεται κάθε παράσταση στῆς μορφῆς $c_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + c_n\boldsymbol{x}_n$, ὅπου $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ (ἀντιστοίχως $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$.)*

(*ii*) *Λέγεται ὅτι τά στοιχεῖα $x_1, \ldots, x_n$ παράγουν τόν X ὅταν κάθε στοιχεῖο x τοῦ χώρου X γράφεται ὡς γραμμικός συνδυασμός τους: δηλαδή, ὅταν ὑπάρχουν πραγματικοί (ἀντιστοίχως μιγαδικοί) ἀριθμοί $c_1, \ldots, c_n$, τέτοιοι ὥστε*

$$x = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n.$$

(*iii*) *Ἔστω S ὑποσύνολο τοῦ X. Λέμε ὅτι τό S παράγει τόν X, ὅταν κάθε στοιχεῖο τοῦ X γράφεται ὡς γραμμικός συνδυασμός στοιχείων τοῦ S.*

(*iv*) *Τά $x_1, \ldots, x_n$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα ὅταν ὁποτεδήποτε*

$$c_1x_1 + \cdots + c_nx_n = 0,$$

γιά πραγματικούς (ἀντιστοίχως μιγαδικούς) ἀριθμούς $c_1, \ldots, c_n$, τότε $c_k = 0$, γιά κάθε $k = 1, \ldots, n$.

(*v*) *Λέμε ὅτι τά στοιχεῖα τοῦ S, ὅπου $S \subset X$, εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα, ἄν τά στοιχεῖα κάθε πεπερασμένου ὑποσυνόλου τοῦ S εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα.*

(*vi*) *Τά $x_1, \ldots, x_n$ εἶναι γραμμικῶς ἐξαρτημένα ἄν δέν εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα, δηλαδή ἄν ὑπάρχουν πραγματικοί (ἀντιστοίχως μιγαδικοί) ἀριθμοί $c_1, \ldots, c_n$, ὄχι ὅλοι μηδέν, ὥστε*

$$c_1x_1 + \cdots + c_nx_n = 0.$$

(*vii*) *Ἄν τά στοιχεῖα τοῦ συνόλου S, ὅπου $S \subset X$, εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα καί συγχρόνως παράγουν τόν X, τότε λέγεται ὅτι τό S ἀποτελεῖ βάση τοῦ X.*

Ἀποδεικνύεται ὅτι:

Πρόταση 9.1.1. *Ἔστω X γραμμικός χῶρος ἐπί τοῦ $\mathbb{R}$ (ἀντιστοίχως $\mathbb{C}$). Τότε ὁ X ἔχει βάση. Ἰδιαιτέρως ἰσχύουν τά ἀκόλουθα:*

(*i*) *Ἄν τό σύνολο $S \subset X$ παράγει τόν X τότε τό S περιέχει βάση. Ἤτοι, ὑπάρχει $B \subset S$ καί B βάση τοῦ X.*

(*ii*) *Ἄν τά στοιχεῖα τοῦ συνόλου $A \subset X$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα, τότε τό A ἐπεκτείνεται σέ βάση. Ἤτοι, ὑπάρχει βάση B τοῦ X, γιά τήν ὁποία $A \subset B$.*

(*iii*) *Ὅλες οἱ βάσεις ἑνός γραμμικοῦ χώρου ἔχουν τόν ἴδιο πλῆθος στοιχείων.*

Παρατήρηση. Τό κοινό αὐτό πλῆθος τῶν στοιχείων τῶν βάσεων ἑνός γραμμικοῦ χώρου X ὀνομάζεται *διάσταση* τοῦ χώρου. Συμβολίζεται μέ $\dim X$. Ὅταν μάλιστα θέλομε νά διευκρινίσομε ἐπί ποίου σώματος ὁ X ἔχει τήν διάσταση αὐτή (ἡ ὁποία δύναται νά ἀποτελεῖ οἱονδήποτε πεπερασμένο ἤ ἄπειρο πληθικό) χρησιμοποιοῦμε τόν συμβολισμό $\dim_{\mathbb{R}} X$ (ἀντιστοίχως $\dim_{\mathbb{C}} X$.)

Ἡ ἀκόλουθη πρόταση χαρακτηρίζει τήν βάση γραμμικοῦ χώρου πεπερασμένης διαστάσεως:

Πρόταση 9.1.2. *Ἔστω X γραμμικός χῶρος διαστάσεως N καί $x_1, x_2, \ldots, x_N$, στοιχεῖα τοῦ X. Τότε τά κάτωθι εἶναι ἰσοδύναμα:*

(*i*) *Τό σύνολο $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ ἀποτελεῖ βάση τοῦ X.*

(*ii*) *Τά στοιχεῖα x_1, x_2, $\ldots, x_N$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα.*

(*iii*) *Τά στοιχεῖα x_1, x_2, $\ldots, x_N$ παράγουν τόν X.*

Απόδειξη. Βλέπε G. Strang, *Linear Algebra* [51]. □

Παραδείγματα

(i) Ἔστω $e_k = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ τό διάνυσμα μέ τήν μονάδα στήν k θέση, καί 0 σ' ὅλες τίς ὑπόλοιπες θέσεις. Τότε τό σύνολο $\{e_1, \ldots, e_N\}$ ἀποτελεῖ βάση τοῦ $\mathbb{R}^N$. Ἤτοι, τό $\mathbb{R}^N$ ἔχει διάσταση N. Ἡ βάση $\{e_1, \ldots, e_N\}$ εἴθισται νά καλεῖται *συνήθης βάση* τοῦ $\mathbb{R}^N$.

(ii) Παρομοίως ὁ χῶρος $\mathbb{C}^N$ ἔχει διάσταση N ὅταν θεωρηθεῖ ὡς γραμμικός χῶρος ἐπί τοῦ $\mathbb{C}$ μέ βάση τό σύνολο $\{e_1, \ldots, e_N\}$, ἐνῶ ἔχει διάσταση $2N$ ὅταν θεωρηθεῖ ὡς γραμμικός χῶρος ἐπί τοῦ $\mathbb{R}$. Μία βάση στήν δεύτερη περίπτωση εἶναι ἡ $\{e_k, ie_k \mid k = 1, \ldots, N\}$.

(iii) Ἔστω $E_{ij} \in \mathbb{R}^{M \times N}$ ὁ πίνακας μέ στοιχεῖο τήν μονάδα στήν θέση (i, j), καί μέ μηδενικά στίς ὑπόλοιπες θέσεις. Τότε τό σύνολο $\{E_{ij} \,:\, i = 1, \ldots, M, \, j = 1, \ldots, N\}$ ἀποτελεῖ βάση τοῦ $\mathbb{R}^{M \times N}$. Ἰδιαιτέρως, ἄν $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{M \times N}$ τότε $A = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} a_{ij} E_{ij}$. Ἑπομένως $\dim \mathbb{R}^{M \times N} = MN$.

(iv) Ὁ χῶρος $\mathcal{P}_n[a, b]$ ἔχει ὡς μία βάση τά μονώνυμα $\{1, t, \ldots, t^n\}$ καί ἑπομένως ἔχει διάσταση $n + 1$.

(v) Τέλος ὁ χῶρος $C(I)$ εἶναι ἀπειροδιάστατος διότι περιέχει ὅλα τά μονώνυμα t^k, $k = 0, 1, \ldots,$ τά ὁποῖα εἶναι γραμικῶς ἀνεξάρτητα. Ἰδιαιτέρως ἰσχύει ὅτι τά στοιχεῖα τοῦ συνόλου

$$\left\{ \mathrm{e}^{\lambda t} \,:\, \lambda \in \mathbb{R} \right\},$$

εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα καί εἶναι σέ πλῆθος ὅσοι καί οἱ πραγματικοί ἀριθμοί. Στήν πραγματικότητα ἡ βάση τοῦ $C(I)$ εἶναι ἰσοπληθική μέ τό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Συμβολικῶς: $\dim C(I) = 2^{\aleph_0}$.

9.1.3 Γραμμικοί ὑπόχωροι

Ὁρισμός 9.1.3. *Ἔστω X ἕνας γραμμικός χῶρος ἐπί τοῦ $\mathbb{R}$ (ἀντιστοίχως $\mathbb{C}$) καί ἔστω Y ἕνα μή κενό ὑποσύνολο τοῦ X. Τό Y ὀνομάζεται γραμμικός ὑπόχωρος τοῦ X ὅταν γιά κάθε μ, ν στό $\mathbb{R}$ (ἀντιστοίχως $\mathbb{C}$) καί $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ στό Y τό $\mu \cdot \boldsymbol{x} + \nu \cdot \boldsymbol{y}$ ἀνήκει στό Y. Ὁ Y ὀνομάζεται γνήσιος ὑπόχωρος τοῦ X, ὅταν ἀποτελεῖ γνήσιο ὑποσύνολο τοῦ X.*

Παρατηρήσεις

(i) Κάθε γραμμικός ὑπόχωρος εἶναι καί ἀφ' ἑαυτοῦ γραμμικός χῶρος ὡς πρός τίς πράξεις τίς ὁποῖες *κληρονομεῖ* ἀπό τόν ἀρχικό χῶρο.

(ii) Πολύ συχνά, ὅταν μᾶς ζητεῖται νά δείξομε ὅτι κάποιο σύνολο ἀποτελεῖ γραμμικό χῶρο, γιά λόγους συντομίας, ἀντί νά ἐλέγξομε πλήρως ὅλες τίς ἰδιότητες οἱ ὁποῖες ὁρίζουν τόν γραμμικό χῶρο, ἀρκεῖ νά δείξομε ὅτι ἁπλῶς ἀποτελεῖ γραμμικό ὑπόχωρο γνωστοῦ γραμμικοῦ χώρου.

(iii) Ἄν ὁ Y εἶναι γραμμικός ὑπόχωρος τοῦ χώρου X καί $\dim X = n \in \mathbb{N}$ τότε $\dim Y \leq \dim X$. Ἡ ἰσότης ἰσχύει μόνον ὅταν οἱ δύο χῶροι ταυτίζονται.

Παραδείγματα

(i) Ὁ χῶρος $C^n(I)$ ἀποτελεῖ γνήσιο ὑπόχωρο τοῦ $C(I)$. Γενικότερα, ὁ $C^k(I)$ ἀποτελεῖ ὑπόχωρο τοῦ $C^\ell(I)$, ἄν καί μόνο ἄν $k \geq \ell$.

(ii) Τό σύνολο τῶν διαγωνίων πινάκων $N \times N$ ἀποτελεῖ ὑπόχωρο τοῦ συνόλου τῶν τετραγωνικῶν πινάκων $N \times N$.

Εὐθέα ἀθροίσματα γραμμικῶν ὑποχώρων

Ἔστω X_1, X_2 γραμμικοί ὑπόχωροι τοῦ γραμμικοῦ χώρου X. Τό σύνολο

$$Y = \{x_1 + x_2 \,:\, x_1 \in X_1 \ \&\ x_2 \in X_2\},$$

ἀποτελεῖ ἐπίσης γραμμικό ὑπόχωρο τοῦ X καί ὀνομάζεται *ἄθροισμα* τῶν X_1 καί X_2. Συμβολικά $Y = X_1 + X_2$. Ἰδιαιτέρως, ἄν $X_1 \cap X_2 = \{0\}$, τότε τό Y ὀνομάζεται *εὐθύ ἄθροισμα* τῶν X_1 καί X_2. Συμβολικά $Y = X_1 \oplus X_2$. Ἀποδεικνύεται εὐκόλως ὅτι *Ἄν $y \in X_1 \oplus X_2$ τότε ὑπάρχουν μοναδικά $x_1 \in X_1$ καί $x_2 \in X_2$ γιά τά ὁποῖα $y = x_1 + x_2$.*

Γενικότερα, ἔστω $X_1, \dots, X_k$ γραμμικοί ὑπόχωροι τοῦ X καί

$$X = \{x_1 + x_2 + \cdots + x_k \,:\, x_1 \in X_1,\, x_2 \in X_2, \dots, x_k \in X_k\} = X_1 + X_2 + \cdots + X_k,$$

Λέμε ὅτι ὁ X ἀποτελεῖ εὐθύ ἄθροισμα τῶν $X_1,\dots,X_k$, ἄν γιά κάθε $i, j = 1, \dots, k$ μέ $i \neq j$ ἰσχύει ὅτι $X_i \cap X_j = \{0\}$. Συμβολικά

$$X = X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_k.$$

Ἀποδεικνύεται ὅτι *Ἄν ὁ X ἀποτελεῖ εὐθύ ἄθροισμα τῶν $X_1, \dots, X_k$, τότε κάθε $x \in X$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ὡς ἄθροισμα στοιχείων τῶν $X_1, \dots, X_k$.*

Ἐπίσης, ἰσχύει ὅτι: *Ἄν B_i βάση τοῦ X_i, $i = 1, \dots, k$, τότε τό σύνολο $B = \cup_{i=1}^{k} B_i$ ἀποτελεῖ βάση τοῦ X.*

9.1.4 Τετραγωνικοί πίνακες

Ἡ ἔννοια τοῦ πίνακα, οἱ πράξεις μεταξύ πινάκων, καθώς καί ὁ μηδενικός καί μοναδιαῖος πίνακας $\mathcal{I} = (\delta_{ij})_{i,j=1,\dots,N}$, θεωροῦνται γνωστά. Στήν παροῦσα ὑποενότητα θά δοῦμε κάποια εἰδικά χαρακτηριστικά τῶν τετραγωνικῶν πινάκων, δηλαδή τῶν στοιχείων τῶν $\mathbb{R}^{N\times N}$ καί $\mathbb{C}^{N\times N}$.

Ὁρισμός 9.1.4. *Ἔστω $A, B \in \mathbb{R}^{N\times N}$ (ἀντιστοίχως $A, B \in \mathbb{C}^{N\times N}$).*

(i) *Οἱ πίνακες A, B λέμε ὅτι ἀντιμετατίθενται ἄν $AB = BA$.*

(ii) *Ἀνάστροφος τοῦ $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,N}$ εἶναι ὁ πίνακας $A^T = (a_{ji})_{i,j=1,\dots,N}$. Ἤτοι, ὁ πίνακας ὁ ὁποῖος στήν $(i,j)-$θέση ἔχει τό $(j,i)-$στοιχεῖο τοῦ πίνακα A.*

(iii) *Ὁ $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ ὀνομάζεται συμμετρικός ὅταν ἰσοῦται μέ τόν ἀνάστροφό του, δηλαδή $A^T = A$. Ὁ $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ ὀνομάζεται ἀντισυμμετρικός ὅταν ἰσοῦται μέ τόν ἀντίθετο τοῦ ἀναστρόφου αὐτοῦ, δηλαδή $A^T = -A$.*

(iv) *Ὁ $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ (ἀντιστοίχως $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$) ὀνομάζεται ἀντιστρέψιμος ὅταν ὑπάρχει πίνακας $B \in \mathbb{R}^{N\times N}$ (ἀντιστοίχως $B \in \mathbb{C}^{N\times N}$) τέτοιος ὥστε $AB = BA = \mathcal{I}$, ὅπου ὁ $\mathcal{I}$ εἶναι ὁ μοναδιαῖος πίνακας στόν $\mathbb{R}^{N\times N}$ καί $\mathbb{C}^{N\times N}$. Ἀποδεικνύεται ὅτι ἄν ὁ A εἶναι ἀντιστρέψιμος ὑπάρχει μοναδικός τέτοιος B, καλεῖται δέ ἀντίστροφος τοῦ A καί συμβολίζεται μέ A^{-1}.*

(v) *Οἱ πίνακες A καί B ὀνομάζονται ὅμοιοι ὅταν ὑπάρχει ἀντιστρέψιμος πίνακας U τέτοιος ὥστε $B = U^{-1}AU$.*

(vi) *Ἡ διαγώνιος ἑνός πίνακα $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,N}$ ἀποτελεῖται ἀπ' ὅλα τά στοιχεῖα $a_{ii}, i = 1,\dots,N$. Ἕνας πίνακας ὀνομάζεται διαγώνιος ὅταν ὅλα τά στοιχεῖα του ἐκτός τῆς διαγωνίου εἶναι μηδενικά, ἤτοι,*

$$i \neq j \quad \longrightarrow \quad a_{ij} = 0.$$

Γιά τούς διαγώνιους πίνακας χρησιμοποιεῖται συνήθως τό γράμμα D. Συγκεκριμένα, συμβολίζομε μέ $D = \operatorname{diag}(d_1,\dots,d_N)$ τόν διαγώνιο πίνακα μέ στοιχεῖα στήν διαγώνιο τά $d_1,\dots,d_N$.

(vii) *Ὁ $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ (ἀντιστοίχως $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$) ὀνομάζεται διαγωνιοποιήσιμος ὅταν ὑπάρχουν, ἕνας διαγώνιος πίνακας $D \in \mathbb{C}^{N\times N}$ καί ἕνας ἀντιστρέψιμος πίνακας $U \in \mathbb{C}^{N\times N}$ τέτοιος ὥστε $A = U^{-1}DU$.*

$(viii)$ *Ἴχνος τετραγωνικοῦ πίνακα A ὀνομάζεται τό ἄθροισμα τῶν στοιχείων τῆς διαγωνίου αὐτοῦ καί συμβολίζεται μέ $\boldsymbol{Tr}(A)$. Ἤτοι, ἄν $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ (γενικότερα ἄν $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$) ἰσχύει ὅτι*

$$\boldsymbol{Tr}(A) \;=\; a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{NN}.$$

Ἔχομε τίς ἑξῆς ἰδιότητες τοῦ ἴχνους:

Πρόταση 9.1.3. *Ἔστω A, B καί U πίνακες $N \times N$ καί U ἀντιστρέψιμος, τότε ἰσχύουν τά ἀκόλουθα*

(i) $\boldsymbol{Tr}(AB) = \boldsymbol{Tr}(BA)$.

(ii) $\boldsymbol{Tr}(U^{-1}AU) = \boldsymbol{Tr}(A)$.

Απόδειξη. Γιά τήν (i) ἔστω $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,N}$ καί $B = (b_{ij})_{i,j=1,\dots,N}$. Τότε

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Tr}(AB) &= \sum_{k=1}^{N} (AB)_{kk} = \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N} a_{kl}b_{lk} \\ &= \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N} b_{lk}a_{kl} = \sum_{k=1}^{N} (BA)_{kk} = \boldsymbol{Tr}(BA). \end{aligned}$$

Ἡ (ii) ἀποτελεῖ συνέπεια τῆς (i), ἀφοῦ $\boldsymbol{Tr}(U^{-1}A \cdot U) = \boldsymbol{Tr}(U \cdot U^{-1}A)$. □

Ἔστω τώρα ἡ συνάρτηση $A : I \to \mathbb{R}^{N\times N}$. Τήν συνάρτηση A την ὀνομάζομε *πινακο-συνάρτηση*. Ἄν $A(t) = \big(a_{ij}(t)\big)_{i,j=1,\dots,N}$, ἡ A εἶναι συνεχής (ἀντιστοίχως διαφορίσιμη, ἀντιστοίχως ἀνήκει στό $C^n(I\,;\mathbb{R}^{N\times N})$ ἄν καί μόνον ἄν ὅλες οἱ $a_{ij}(t)$ εἶναι συνεχεῖς (ἀντιστοίχως διαφορίσιμες, ἀντιστοίχως ἀνήκει στό $C^n(I)$). Ἐπίσης ὁρίζομε ὡς

$$\frac{d}{dt}A(t) = \left(\frac{da_{ij}(t)}{dt}\right) \qquad \textit{καί} \qquad \int_\tau^t A(s)\,ds = \left(\int_\tau^t a_{ij}(s)\,ds\right).$$

Πρόταση 9.1.4. *Ἄν $A, B \in C^1(I\,;\mathbb{R}^{N\times N})$, τότε*

$$\frac{d}{dt}(AB) = \frac{dA}{dt}B + A\frac{dB}{dt}. \tag{9.1}$$

□

Παρατήρηση. Στήν περίπτωση ὅπου $A = B$ ἡ (9.1) λαμβάνει τήν μορφή

$$\frac{d}{dt}\left(A^2\right) = \frac{dA}{dt}A + A\frac{dA}{dt} \neq 2A\frac{dA}{dt},$$

διότι οἱ πίνακες A καί $\dfrac{dA}{dt}$ δέν ἀντιμετατίθενται ἐν γένει.

Ὑπενθυμίζομε ὅτι ἄν $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,N} \in \mathbb{R}^{N\times N}$, (ἀντιστοίχως $\mathbb{C}^{N\times N}$), τότε ὡς $\det A$ συμβολίζομε τήν *ὁρίζουσα* αὐτοῦ, ἡ ὁποία ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

Ὁρισμός 9.1.5. *Ἔστω $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,N}$ ἕνας τετραγωνικός πίνακας. Τότε ἡ ὁρίζουσα αὐτοῦ εἶναι ἡ ἑξῆς*

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_N} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1,\sigma(1)}\cdots a_{N,\sigma(N)},$$

ὅπου S_N εἶναι ἡ ὁμάδα μεταθέσεων τῶν στοιχείων $\{1,2,\dots,N\}$ καί $\operatorname{sgn}(\sigma)$ τό πρόσημο τῆς μεταθέσεως σ. Συγκεκριμένα, $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$, ἄν σ ἀρτία, ἐνῶ $\operatorname{sgn}(\sigma) = -1$, ἄν σ περιττή.

Ἡ ὁρίζουσα ἔχει τίς ἀκόλουθες ἰδιότητες:

Πρόταση 9.1.5. *Ἔστω $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ (γενικότερα $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$). Γράφομε τόν πίνακα A ὡς*

$$A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_N),$$

ὅπου $\boldsymbol{a}_k$ ἡ $k-$στήλη τοῦ πίνακα A. Τότε ἰσχύουν τά ἀκόλουθα:

(*i*) *Ἡ ὁρίζουσα εἶναι γραμμική ὡς πρός ἑκάστη τῶν στηλῶν της:*

$$\begin{aligned}&\det\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,c_1\boldsymbol{\alpha}_{k,1}+c_2\boldsymbol{\alpha}_{k,2},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_N\right) = \\ &\quad = c_1\det\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_{k,1},\ldots,\boldsymbol{\alpha}_N\right)+c_2\det\left(\boldsymbol{\alpha}_2,\,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_{k,2},\ldots,\boldsymbol{\alpha}_N\right),\end{aligned}$$

ὅπου c_1 καί c_2 πραγματικοί (γενικότερα μιγαδικοί) ἀριθμοί.

(*ii*) *Ἄν ἀντιμετατεθοῦν δύο στῆλες ἑνός πίνακα τότε ἀλλάζει τό πρόσημο τῆς ὁρίζουσας αὐτοῦ.*

(*iii*) *Ἡ ὁρίζουσα μηδενίζεται ὅταν δύο στῆλες εἶναι ἴσες.*

(*iv*) *Ἄν $A,\, B\,! \in \mathbb{R}^{N\times N}$ (γενικότερα $A,\, B\in\mathbb{C}^{N\times N}$), τότε* $\det AB = \det A\cdot\det B$.

(*v*) *Ἄν $A\in\mathbb{R}^{N\times N}$ (γενικότερα $A\in\mathbb{C}^{N\times N}$), τότε* $\det A^T = \det A$.

(*vi*) *Ἰσχύει ὁ ἑξῆς τύπος τῆς παραγώγου τῆς ὁρίζουσας:*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\det\left(\psi^1,\psi^2,\ldots,\psi^N\right) &= \det\left((\psi^1)',\psi^2,\ldots,\psi^N\right)+\\ &+\det\left(\psi^1,\,(\psi^2)',\ldots,\psi^N\right)+\cdots+\det\left(\psi^1,\,\psi^2,\ldots,(\psi^N)'\right). \quad \square\end{aligned}$$

Ἡ πρόταση ἡ ὁποία ἀκολουθεῖ *χαρακτηρίζει* τήν ἀντιστρεψιμότητα πινάκων

Πρόταση 9.1.6. *Ἔστω $A\in\mathbb{R}^{N\times N}$ (ἀντιστοίχως $A\in\mathbb{C}^{N\times N}$). Τά ἀκόλουθα εἶναι ἰσοδύναμα:*

(*i*) *Ὁ A εἶναι ἀντιστρέψιμος.*

(*ii*) *Ἄν $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^N$, τότε ἰσχύει ἡ ἰσοδυναμία*

$$A\boldsymbol{x} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boldsymbol{x} = 0.$$

(*iii*) *Τό γραμμικό σύστημα $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ἔχει λύση γιά κάθε $\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^N$.*

(*iv*) *Τό γραμμικό σύστημα $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ ἔχει μοναδική λύση γιά κάθε $\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^N$.*

(*v*) *Οἱ γραμμές τοῦ A εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητες.*

(*vi*) *Οἱ στῆλες τοῦ A εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητες.*

(*vii*) $\det A \neq 0$.

Απόδειξη. Βλέπε G. Strang, *Linear Algebra* [51]. □

Τό ἀντιστρέψιμον ἑνός πίνακα εἶναι ἰδιότης *εὐσταθής* ὑπό τήν ἑξῆς ἔννοια:

Πρόταση 9.1.7. *Ἔστω $A, B \in \mathbb{R}^{N\times N}$ καί A ἀντιστρέψιμος. Ἄν*

$$\|B - A\| \le \frac{1}{\|A^{-1}\|},$$

τότε καί ὁ πίνακας B εἶναι ἀντιστρέψιμος. Ἰδιαιτέρως ἄν $E \in \mathbb{R}^{N\times N}$ καί $\|E\| \le 1$ τότε ὁ πίνακας $\mathcal{I} + E$ εἶναι ἀντιστρέψιμος.

Απόδειξη. Ἀποδεικνύομε τόν δεύτερο ἰσχυρισμό. Ἄν $Z_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k Z^k$, τότε ἡ ἀκολουθία $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ εἶναι ἀκολουθία Cauchy διότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Z_{n+1} - Z_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|E^n\| \le \sum_{n=1}^{\infty} \|E\|^n = \frac{\|E\|}{1 - \|E\|},$$

ὁπότε τό *Κριτήριο Weierstrass*ἐφαρμόσιμο καί $Z_n \to Z \in \mathbb{R}^{N\times N}$. Συγχρόνως

$$(\mathcal{I} + E)\, Z_n = \mathcal{I} + (-1)^n E^{n+1}\, ra\, \mathcal{I}$$

καί $(\mathcal{I} + E)\, Z_n \to (\mathcal{I} + E)\, Z$ ἄρα $(\mathcal{I} + E) Z = \mathcal{I}$. Μέ ἀνάλογη συλλογιστική ἀποδεικνύεται καί ὁ πρῶτος ἰσχυρισμός. □

9.1.5 Γραμμικές ἀπεικονίσεις

Ὁρισμός 9.1.6. *Ἔστω X, Y γραμμικοί χῶροι ἐπί τοῦ $\mathbb{R}$ (ἀντιστοίχως $\mathbb{C}$) καί ἀπεικόνιση $f : X \to Y$. Ἄν*

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y),$$

γιά κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (ἀντιστοίχως $\mathbb{C}$) καί $x, y \in X$, τότε ἡ f ὀνομάζεται γραμμική ἀπεικόνιση ἀπό τό X στό Y.

Παράδειγμα. Κάθε πίνακας $A \in \mathbb{R}^{M\times N}$ ὁρίζει τήν γραμμική ἀπεικόνιση

$$f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M \qquad \text{ὅπου} \qquad f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}.$$

Ἐπίσης ὁρίζομε:

Ὁρισμός 9.1.7. *Ἔστω X, Y γραμμικοί χῶροι ἐπί τοῦ $\mathbb{R}$ (ἀντιστοίχως $\mathbb{C}$) καί $f : X \to Y$ γραμμική ἀπεικόνιση. Τότε ὁρίζομε ὡς*

(i) Πυρήνα τῆς f, συμβολικά $\mathcal{N}(f)$, τό σύνολο

$$\mathcal{N}(f) = \{x \in X : f(x) = 0\}.$$

(ii) *Πεδίο τιμῶν τῆς f, συμβολικῶς $\boldsymbol{Ran}(f)$, τό σύνολο*

$$\boldsymbol{Ran}(f) \;=\; \big\{f(x) \;:\; x \in X\big\}.$$

Παρατηρήσεις

(i) Δοθέντος ὅτι κάθε πίνακας A ὁρίζει γραμμική ἀπεικόνιση εἶναι εὔλογοι οἱ συμβολισμοί $\mathcal{N}(A)$ καί $\boldsymbol{Ran}(A)$.

(ii) Διαπιστοῦται εὐκόλως ὅτι τόσο ὁ πυρήνας ὅσο καί τό πεδίο τιμῶν μιᾶς γραμμικῆς ἀπεικονίσεως $f : X \to Y$ ἀποτελοῦν γραμμικούς ὑποχώρους τῶν X καί Y ἀντιστοίχως.

Ἰσχύει μάλιστα ὅτι

Πρόταση 9.1.8. *Ἔστω $f : X \to Y$ γραμμική ἀπεικόνιση, ὅπου X καί Y γραμμικοί χῶροι ἐπί τοῦ $\mathbb{R}$ (ἀντιστοίχως $\mathbb{C}$). Τότε ἰσχύει ὅτι*

$$\dim \mathcal{N}(f) + \dim \boldsymbol{Ran}(f) \;=\; \dim X. \qquad \square$$

Ἰδιαιτέρως ἄν $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ (ἀντιστοίχως $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$) ἰσχύει ἡ ἰσοδυναμία

$$\mathcal{N}(A) \;=\; \{0\} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boldsymbol{Ran}(A) \;=\; \mathbb{R}^N \text{ (ἀντιστοίχως } \mathbb{C}^N\text{)}.$$

Τέλος δίδομε καί τόν ὁρισμό:

Ὁρισμός 9.1.8. *Ἔστω X γραμμικός χῶρος καί $f : X \to X$ γραμμική ἀπεικόνιση. Ἄν Y γραμμικός ὑπόχωρος τοῦ X τότε ὁ Y ὀνομάζεται ἀναλλοίωτος ὡς προς f ἄν $f(Y) \subset Y$.*

Παράδειγμα. Ἄν $f : X \to X$ γραμμική ἀπεικόνιση, τότε τό πεδίο τιμῶν αὐτῆς $\boldsymbol{Ran}(f)$, ἀποτελεῖ ἀναλλοίωτο ὑπόχωρο τοῦ X. Πράγματι, $f[\boldsymbol{Ran}(f)] \subset f[X] = \boldsymbol{Ran}(f)$.

9.1.6 Ἰδιοτιμές καί ἰδιοδιανύσματα

Ὁρισμός 9.1.9. *Ἔστω $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$, $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{C}^N$ καί $\lambda \in \mathbb{C}$. Ἄν ἰσχύει ὅτι $\boldsymbol{\xi} \neq 0$ καί*

$$A\boldsymbol{\xi} \;=\; \lambda\boldsymbol{\xi}, \tag{9.2}$$

τότε τό λ ὀνομάζεται ἰδιοτιμή τοῦ A καί τό $\boldsymbol{\xi}$ ἰδιοδιάνυσμα τοῦ A τό ὁποῖο ἀντιστοιχεῖ στήν ἰδιοτιμή λ.

Παρατήρηση. Ἡ (9.2) γράφεται ἰσοδύναμα

$$(A - \lambda\mathcal{I})\,\boldsymbol{\xi} \;=\; 0,$$

ὅπου $\mathcal{I}$ ὁ μοναδιαῖος $N \times N$ πίνακας, ἤ διαφορετικά $\boldsymbol{xi} \in \mathcal{N}(A - \lambda\mathcal{I})$. Τό γεγονός ὅτι τό ἰδιοδιάνυσμα δέν εἶναι μηδενικό σημαίνει ὅτι ὁ πίνακας $A - \lambda\mathcal{I}$ εἶναι μή ἀντιστρέψιμος ἤ ἰσοδύναμα $\det(A - \lambda\mathcal{I}) = 0$. Παρατηροῦμε ὅτι ἄν $z \in \mathbb{C}$, τότε ἡ συνάρτηση

$$p_A(z) \;=\; \det(A - z\mathcal{I}),$$

ἀποτελεῖ πολυώνυμο N βαθμοῦ (γιατί;) τό ὁποῖο ἀποτελεῖ τό *χαρακτηριστικό πολυώνυμο* τοῦ πίνακα A. Ἀντιστρόφως, ἄν τό λ εἶναι μία ρίζα τοῦ χαρακτηριστικοῦ πολυωνύμου τότε $\det(A - \lambda\mathcal{I}) = 0$ καί ἑπομένως ὁ πίνακας $A - \lambda\mathcal{I}$ δέν εἶναι ἀντιστρέψιμος, ἄρα ἡ ἐξίσωση $(A - \lambda\mathcal{I})\,\boldsymbol{x} = 0$ ἔχει μή μηδενική ρίζα. Ἔχομε λοιπόν δείξει ὅτι:

Πρόταση 9.1.9. *Ὁ μιγαδικός ἀριθμός λ ἀποτελεῖ ἰδιοτιμή τοῦ πίνακα $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$ ἄν καί μόνον ἄν εἶναι ρίζα τοῦ χαρακτηριστικοῦ πολυωνύμου τοῦ A, δηλαδή $p_A(\lambda) = 0$.* □

Ἔστω τώρα ὅτι ὁ πίνακας ἔχει τίς διακριτές ἰδιοτιμές $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ καί τά ἀντίστοιχα ἰδιοδιανύσματα $\boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_k$. Τά ἰδιοδιανύσματα αὐτά εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα. Αὐτό ἀποδεικνύεται ἐπαγωγικῶς. Γιά $k = 1$ δέν ἔχομε τίποτα νά ἀποδείξομε. Ἔστω ὅτι τό ἀποδεικτέο ἰσχύει γιά $k = \ell$ καί ὅτι

$$c_1\boldsymbol{\xi}_1 + \cdots + c_\ell\boldsymbol{\xi}_\ell + c_{\ell+1}\boldsymbol{\xi}_{\ell+1} \;=\; 0. \tag{9.3}$$

Τότε

$$\begin{aligned} 0 \;&=\; A\left(c_1\boldsymbol{\xi}_1 + \cdots + c_\ell\boldsymbol{\xi}_\ell + c_{\ell+1}\boldsymbol{\xi}_{\ell+1}\right) \\ &=\; c_1\lambda_1\boldsymbol{\xi}_1 + \cdots + c_\ell\lambda_\ell\boldsymbol{\xi}_\ell + c_{\ell+1}\lambda_{\ell+1}\boldsymbol{\xi}_{\ell+1}, \end{aligned} \tag{9.4}$$

ὁπότε, ἀφαιρῶντας ἀπό τήν (9.4) τήν (9.3) πολλαπλασιασμένη ἐπί $\lambda_{\ell+1}$ λαμβάνομε

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{\ell+1})\boldsymbol{\xi}_1 + \cdots + c_\ell(\lambda_\ell - \lambda_{\ell+1})\boldsymbol{\xi}_\ell \;=\; 0.$$

Ἐφαρμόζοντας τήν ἐπαγωγική ὑπόθεση, οἱ ἀνωτέρω συντελεστές θά πρέπει νά μηδενίζονται, δηλαδή:

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{\ell+1}) \;=\; \cdots \;=\; c_\ell(\lambda_\ell - \lambda_{\ell+1}) \;=\; 0.$$

Ἐπειδή ὅμως τά λ_j εἶναι διακριτά, ἔχομε $c_1 = \ldots = c_\ell = 0$ καί λόγῳ τῆς (9.3) καί $c_{\ell+1} = 0$.

Ἐκ τῶν ἀνωτέρω προκύπτει τό ἀκόλουθο ἀποτέλεσμα:

Πρόταση 9.1.10. *Ἔστω ὅτι ὁ $N \times N$ πίνακας A ἔχει N γραμμικῶς ἀνεξάρτητα ἰδιοδιανύσματα, $\boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_N$, μέ ἀντίστοιχες ἰδιοτιμές τίς $\lambda_1, \dots, \lambda_N$, (ὄχι ἀπαραιτήτως διακριτές.) Τότε ὁ A εἶναι διαγωνιοποιήσιμος καί συγκεκριμένα $A = U\Lambda U^{-1}$, ὅπου $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$, ἐνῶ ὁ U ἀποτελεῖ τόν πίνακα μέ στῆλες τά $\boldsymbol{\xi}_1, \dots, \boldsymbol{\xi}_N$.*

Απόδειξη. Ἔχομε ὅτι

$$A\boldsymbol{\xi}_k = \lambda_k \boldsymbol{\xi}_k, \qquad k = 1, \ldots, N,$$

ἤ ἰσοδύναμα

$$AU = U\Lambda, \qquad \text{ὅπου} \quad \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_N).$$

Ἐπειδή ὅμως τά $\boldsymbol{\xi}_1, \ldots, \boldsymbol{\xi}_N$ εἶναι γραμμικῶς ἀνεξάρτητα, τότε ὁ πίνακας U εἶναι ἀντιστρέψιμος καί συνεπῶς $A = U\Lambda U^{-1}$. Ἤτοι, ὁ πίνακας A εἶναι διαγωνιοποιήσιμος. □

Ἄν λοιπόν ἕνας $N \times N$ πίνακας A ἔχει διακριτές ἰδιοτιμές, θά ἔχει καί N γραμμικῶς ἀνεξάρτητα ἰδιοδιανύσματα καί ὡς ἐκ τούτου θά εἶναι διαγωνιοποιήσιμος. Τό πρόβλημα ἐμφανίζεται ἀπό τήν στιγμή ὅπου ἕνας πίνακας ἔχει πολλαπλές ἰδιοτιμές.

Ὁρισμός 9.1.10. *Ἔστω λ μιά ἰδιοτιμή τοῦ πίνακα A. Ἡ ἀλγεβρική πολλαπλότης τῆς λ εἶναι ἡ πολλαπλότης τῆς λ ὡς ρίζας τοῦ χαρακτηριστικοῦ πολυωνύμου $p_A(z)$.*

Παραδείγματα

(i) Ἄν $A = \mathcal{I} \in \mathbb{R}^{N\times N}$, τότε $P_{\mathcal{I}}(z) = (1-z)^N$, τό ὁποῖο ἔχει $z=1$ ὡς μόνη ἰδιοτιμή μέ πολλαπλότητα N. Παρατηροῦμε ταυτοχρόνως ὅτι τά στοιχεῖα τῆς συνήθους βάσεως τοῦ $\mathbb{R}^N$, δηλαδή τά $\boldsymbol{e}_k$, $k = 1, \ldots, N$, ἀποτελοῦν ἰδιοδιανύσματα τοῦ $\mathcal{I}$.

(ii) Ἄν τώρα ὁ πίνακάς μας εἶναι ὁ

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N\times N},$$

διαπιστοῦται εὐκόλως ὅτι $p_A(z) = (\lambda - z)^N$ τό ὁποῖο ἔχει ὡς μόνη ρίζα τήν $z = \lambda$ μέ πολλαπλότητα N. Συνεπῶς ὁ πίνακας A ἔχει ὡς μόνη ἰδιοτιμή τήν $z = \lambda$ μέ ἀλγεβρική πολλαπλότητα N. Παρατηροῦμε ταυτοχρόνως ὅτι

$$A\boldsymbol{\xi} = \lambda\boldsymbol{\xi} \qquad \text{ἄν καί μόνον ἄν} \qquad \boldsymbol{\xi} = \mu \boldsymbol{e}_1.$$

Ἄρα ὁ A ἔχει μόνο ἕνα γραμμικῶς ἀνεξάρτητο ἰδιοδιάνυσμα.

Ἐκεῖνο τό ὁποῖο διαφέρει στά ἀνωτέρω παραδείγματα εἶναι ἡ *Γεωμετρική Πολλαπλότης* τῆς ἰδιοτιμῆς:

Ὁρισμός 9.1.11. *Ἔστω $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$ καί $\lambda \in C$ ἰδιοτιμή τοῦ A.*

(*i*) *Τό σύνολο*

$$E_\lambda \;=\; \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^N \;:\; A\boldsymbol{x} = \lambda\, \boldsymbol{x} \,\},$$

τό ὁποῖο ἀποτελεῖ ἕναν γραμμικό ὑπόχωρο τοῦ $\mathbb{C}^N$, *καλεῖται ἰδιόχωρος ἰδιοτιμῆς* λ.

(*ii*) *Ἐάν* $M_\lambda = \dim_{\mathbb{C}} E_\lambda$, *τότε τό* M_λ *ὁρίζεται ὡς ἡ γεωμετρική πολλαπλότης τῆς* λ.

Ἰσχύουν τά ἑξῆς:

Πρόταση 9.1.11. *Ἔστω* $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$ *καί* $\lambda \in \mathbb{C}$ *ἰδιοτιμή τοῦ* A, *τότε ἡ γεωμετρική πολλαπλότης τῆς* λ *δέν ὑπερβαίνει τήν ἀλγεβρική της πολλαπλότητα. Ἰδιαιτέρως, ὁ πίνακας* A *εἶναι διαγωνιοποιήσιμος, ἄν καί μόνον ἄν σέ κάθε του ἰδιοτιμή ἰσοῦνται οἱ δύο πολλαπλότητες.*

Ἀποδειξη. Βλέπε G.H Golub & C.F. Van Loan, *Matrix Computations* [22]. □

Ἄν ὁ πίνακας $A \in \mathbb{C}^{N\times N}$ δέν εἶναι διαγωνιοποιήσιμος καί ἔχει ὡς ἰδιοτιμές τίς $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ μέ πολλαπλότητες $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k$, ἀντιστοίχως, τότε τά σύνολα

$$X_\ell \;=\; \{\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^N \;:\; (A - \lambda_\ell \mathcal{I})^{\mu_k} \boldsymbol{x} = 0 \,\} \;=\; \mathcal{N}\,[(A-\lambda_\ell)^{\mu_\ell}]\,,$$

ἀποτελοῦν γραμμικούς ὑπόχωρους τοῦ $\mathbb{C}^N$, οἱ ὁποῖοι ὀνομάζονται *γενικευμένοι ἰδιόχωροι*. Συγκεκριμένα ἰσχύει ἡ πρόταση:

Πρόταση 9.1.12. *Ὁ* $\mathbb{C}^N$ *γράφεται ὡς εὐθύ ἄθροισμα τῶν γενικευμένων ἰδιοχώρων τοῦ πίνακα* A. *Ἤτοι:*

$$\mathbb{C}^N \;=\; X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_k.$$

Ἐπί πλέον οἱ X_ℓ, $\ell = 1, \ldots, k$ *εἶναι ἀναλλοίωτοι ὡς πρός* A.

Ἀποδειξη. Βλέπε Brauer & Nohel, *Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations* [12]. □

Ἰδιαιτέρως ὅταν ὁ πίνακας A δέν εἶναι διαγωνιοποιήσιμος, τότε λαμβάνει τήν *Κανονική Μορφή Jordan*[102] (*Jordan Canonical Form*),

$$A \;=\; U^{-1} J U,$$

[102] Marie Ennemond Camille Jordan (1838-1922). Γάλλος μηχανικός καί μαθηματικός. Τό ὄνομά του συνδέεται ἐπίσης μέ τίς *κλειστές καμπύλες Jordan*. *Σημειωτέον ὅτι ὁ Jordan τοῦ ὁποίου τό ὄνομα ἀναφέρεται στήν διαδικασία ἐπιλύσεως γραμμικῶν συστημάτων Gauss-Jordan, εἶναι ὁ Wilhelm Jordan (1842-1899).*

ὅπου $U \in \mathbb{C}^{N\times N}$ ἀντιστρέψιμος καί

$$J = \begin{pmatrix} J_0 & & & 0 \\ & J_1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & J_k \end{pmatrix} \tag{9.5}$$

ὅπου $J_0 = \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_{N_0})$ ἐνῶ γιά $\ell = 1, \ldots, k$

$$J_\ell = \begin{pmatrix} \lambda_\ell & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_\ell & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_\ell & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_\ell \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N_\ell \times N_\ell}$$

καί $N_0 + N_1 + \cdots + N_k = N$. (Γιά μία ἀπόδειξη βλέπε P.R Halmos, *Finite Dimensional Vector Spaces* [26]). Οἱ ἰδιοτιμές μ_i καί λ_j εἶναι ἐν γένει μιγαδικοί ἀριθμοί. Σημειωτέον ὅτι ἡ (9.5) γράφεται καί ὡς

$$J = \mathrm{diag}(J_0, J_1, \ldots, J_k).$$

Οἱ πίνακες J_ℓ εἶναι γνωστοί ὡς *Jordan blocks*[103]. Ὅπως ἔχομε ἤδη δεῖ στό *Παράδειγμα ii* στήν σελίδα 340, ὁ J_ℓ ἔχει μοναδική ἰδιοτιμή μέ ἀλγεβρικῆς πολλαπλότητος N_ℓ καί γεωμετρικῆς πολλαπλότητος 1 καί ὡς ἐκ τούτου ὁ J_ℓ δέν εἶναι διαγωνιοποιήσιμος. Στήν κανονική μορφή Jordan ἐμφανίζεται τό block J_ℓ ἄν ἡ *ἀλγεβρική πολλαπλότης* τῆς ἰδιοτιμῆς λ_ℓ μεῖον τήν *γεωμετρική πολλαπλότητα* τῆς ἰδίας ἰδιοτιμῆς διαφέρουν.

[103] Ἑλληνιστί *block* = *τέμαχος* (τό).

Βιβλιογραφία

[1] J. LE ROND D'ALEMBERT, *Suite des recherches sur le calcul intégral, quatrième partie: Méthodes pour intégrer quelques équations différentielles*, Hist. Acad. Berlin, tome IV, σελ. 275–291, 1748.

[2] V. I. ARNOLD, *Ordinary Differential Equations*, Springer Verlag, 1994.

[3] C. ARZELÀ, *Sulle funzioni di linee,* Mem. Accad. Sc. Bologna, Serie 5, Tomo **5**, σελ. 225–244, 1894–5.

[4] G. ASCOLI, *Le curve limiti di una varietà data di curve*, Rend. Accad. Lincei, nu. 18, σελ. 521–586, 1884.

[5] R. BELLMAN, *Introduction to Matrix Analysis, 2nd ed.*, CLASSICS in Applied Mathematics, SIAM, **19,** 1997.

[6] JAC. BERNOULLI, *Analysis problematis ante hac propositi, de inventione lineæ descensus a corpore gravi percurrendæ uniformiter, sic ut temporibus æqualibus æquales altitudines emetiatur: & alterius cujusdam Problematis Propositio*, Acta Eruditorum, **9**, σελ. 217–219, 1690

[7] JOH. BERNOULLI, *Solutio problematis funicularii*, exhibita a Joh. Bernoulli, Basil. Med. Cand., Acta Eruditorum, **10**, 1691, σελ. 274–276· *Opera* I, σελ. 48–51.

[8] JOH. BERNOULLI, *Problema novum ad cuius solutionem Matematici invitantur*, Acta Eruditorum, **15**, σελ. 264–269, 1696.

[9] JOH. BERNOULLI, *De Conoidibus et Sphæroidibus quædam. Solutio analytica Aequationis in Actis A. 1695, pag. 553 propositæ (A Fratre Jac. Bernoullio),* Acta Eruditorum **16**, σελ. 113–118, 1697.

[10] JOH. BERNOULLI, *Solitioque Problematis a se in Actis 1696, p.269, proposit, de invenienda Linea Brachystochrona,* Acta Eruditorum, **16**, σελ. 206, 1697.

[11] E. BODEMAN, *Ed.*, *Die Leibniz-Handschriften der Königlichen Öffentlichen Bibliothek zu Hannover*, Hannover, 1889, ἀνατύπωση 1966. [Περιλαμβάνεται πλήρης κατάλογος τῶν χειρογράφων τοῦ Leibniz καθώς καί ὁρισμένα ἀποσπάσματα κειμένων, τά ὁποῖα δέν ἀπαντῶνται ἀλλοῦ.]

[12] F. BRAUER, J. A. NOHEL, *The Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations, an Introduction*, Dover, 1969.

[13] A. L. CAUCHY, *Résumé des Leçons données a l'Ecole Royale Polytechnique. Suite du Calcul Infinitéssimal;*, 1824. [Ἐκδόσεις: Equations différentielles ordinaires, Ἐπιμέλεια ἐκδόσεως Chr. Gilain, 1981.]

[14] E. A. CODDINGTON, N. LEVINSON, *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw Hill, 1955.

[15] L. EULER, *De integratione æquationum differentialium altiorum gradium*, Miscellanea Berolinensia, vol. **XI**, σελ. 193–242, 1743.

[16] L. EULER, *Methodus inveniedi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*, Opera Omnia, vol., **XXIV**, 1744.

[17] L. EULER, *Instutiones Calculi Integralis*, Volumen Secundum, Opera Omnia, vol. **XI**, 1768.

[18] M. J. FEIGENBAUM, *Quantitative Universality for a class of Nonlinear Transformations*, J. Stat. Phys, **19**, 25, 1978.

[19] M. J. FEIGENBAUM, *Universal Behavior in Nonlinear Systems*, Los Alamos Science, **1**, 4, 1980.

[20] G. GALILEI, *Discorsi e dimonstrazioni matematiche, intorno á due nuove scienze, attenenti alla mecanica & i movimenti locali, del Signor Galileo Galilei Linceo, Filosofo a matematico primario del Serenissimo Grand Duca di Toscana*, ΛΕΙΔΑ 1638.

[21] C. F. GAUSS, *Werke*, ed. Köngl. Ges. de Wiss. Göttingen, 12 τόμοι. Ἀνατύπωση, Georg Olms Verlag, 1973.

[22] G. H. GOLUB, C. F. VAN LOAN, *Matrix Computations, 3rd edition*, The Johns Hopkins University Press, 1996.

[23] R. C. GUPTA, *The Madhava-Gregory series*, The Mathematics Educator (India), **7**, σελ. 67–70, 1973.

[24] E. HAIRER, G. WANNER, *Analysis by its History*, Springer Verlag, 2000.

[25] P. R. Halmos, *I have a photographic memory*, American Mathematical Society, Providence, 1987.

[26] P. R. Halmos, *Finite Dimensional Vector Spaces*, Springer Verlag, 1958.

[27] E. Hewitt, K. Stromberg, *Real and Abstract Analysis*, Springer Verlag, 1965.

[28] J. L. de Lagrange, *Oeuvres*, 14 τόμοι, ἐκδοθέντες ἀπό τούς J.A. Serret καί G. Darboux, Παρίσι 1867–1882. Ἀνατύπωση, Georg Olms Verlag, 1973.

[29] G. W. Leibniz, *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quæ nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, & singulare pro illis calculi genus*, Acta Eruditorum, **3**, σελ. 467, 1684.

[30] G. W. Leibniz, *De linea isochrona in qua grave sine acceleratione descendit et de controversia cum DN. Abbate D.C.*, Acta Eruditorum, **8**, σελ. 195, 1689.

[31] G. W. Leibniz, *De linea in quam flexile se pondere proprio curvat, ejusque usu insigni adinveniendas quotcunque medias proportionales & logarithmos,* Acta Eruditorum, **10**, σελ. 277–281 καί 435–439, 1691.

[32] G. W. Leibniz, *Supplementum geometriæ dimensoriæ, seu generalissima omnium tetragonismorum effectio per motum: similiterque multiplex constructio linea ex data tangentium conditione,* Acta Eruditorum **12**, σελ. 385–392, 1693.

[33] E. Lindelöf, *Sur l'application des méthodes d'approximationsuccessives à l'étude des intégrales réelles des équations différentielles ordinaires*, J. de Math., 4e série, vol. **10**, σελ. 117–128, 1894.

[34] J. Liouville, *Sur la Théorie de variation des constantes arbitraires*, Liouville J. de Math., vol. **3**, σελ. 342–349, 1838.

[35] J. Liouville, *Remarques nouvelles sur l'équation de Riccatti*, J. des Math. pures et appl., **6**, σελ. 342–349, 1841.

[36] MacTutor History of Mathematics Archive, *Indexes of Biographies.* Ἰστοσελίδες τοῦ University of St Andrews, Scotland. Διεύθυνση:

`http://turnbull.dcs.st-and.ac.uk/history/BiogIndex.html`

[37] The Mathematics Genealogy Project, Ὑπηρεσία τοῦ North Dakota State University, Fargo, North Dakota. Διεύθυνση:

`http://genealogy.math.ndsu.nodak.edu/html/search.phtml`

[38] I. Newton, *Methodus Fluxionum et Serierum Infinitarum,* χειρόγραφο τοῦ 1671, ἐξεδόθη μεταφρασμένο στά ἀγγλικά ἀπο τό λατινικό πρωτότυπο τό 1736, στά Opuscula mathematica, vol. I.

[39] I. Newton, *Philosophiæ naturalis principia mathematica,* Londini, 1686. Δευτέρα ἔκδοση 1713, τρίτη 1726, ἀγγλική μετάφραση 1803.

[40] G. Peano, *Démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires*, Math. Annalen, vol. **37**, σελ. 182–228, 1890.

[41] O. Perron, *Ein neuer Existenzbeweis für die Integrale eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen*, Math Annalen, vol, **78**, σελ. 378–384, 1918.

[42] E. Picard, *Mémoire sur la Théorie des éqquations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives*, J. de Math. pures et appl., 4e série, vol. **6**, σελ. 145–210, 1890.

[43] H. Poincaré, *Mémoire sur les courbes définies par les équations différentielles*, J. de Math., 3e série, vol. **7**, σελ. 375–422, 1881.

[44] G. Pólya, *Über die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion in Matrizkalkul*, Sitzber. Akad. Berlin, σελ. 96–99, 1928.

[45] William L. Putnam Mathematical Competitions for American University Students. Διεύθυνση ἱστοσελίδος:

http://www.unl.edu/amc/a-activities/a7-problems/putnamindex.shtml

[46] J. Riccati, *Soluzione generale del Problema inverso á raggi osculatori,..., determinar la curva, a cui convenga una tal'espressione*, Giornale de' Letterati d'Italia, **11** (1712), σελ. 204–220.

[47] E. J. Routh, *A Treatise on the stability of a given state of motions*, Being the essay to which the Adams prize was adjudged in 1877, in the University of Cambridge, London.

[48] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd ed., McGraw Hill, 1976.

[49] G. F. Simmons, *Differential Equations with Applications and Historical Notes*, 2nd ed., McGraw–Hill, Inc., 1991.

[50] P. N. de Souza, J.-N. Silva, *Berkeley problems in mathematics*, Problem Books in Mathematics, Third edition, Springer-Verlag, New York, 2004.

[51] G. Strang, *Linear Algebra and its applications*, 3rd ed., Academic Press, 1988.

[52] G. Strang, *On the construction and comparison of difference schemes*, SIAM J. Numer. Anal., τόμος 5, σελ. 506–517, 1968.

[53] H. F. Trotter, *On the Products of Semigroups of Operators*, Proc. Amer. Math. Soc., σελ. 545–551, 1959.

[54] G. Wanner, *Les équations différentielles ont 350 ans*, L'Enseignement Mathématique, **30**, σελ. 365–385, 1988.

Κατάλογος Σχημάτων

Εὑρετήριο