Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ
Προβλήματα ΣΔΕ

Καθηγητής: Αθανασόπουλος Κωνσταντίνος
Βοηθός: Σφακιανάκης Νικόλαος

Τελευταία Ενημέρωση: 29 Ιουνίου 2004

Περιεχόμενα

Οι περισσότερες ασκήσεις είναι από τις σημειώσεις του μαθήματος [Αθα04], και κάποιες είναι από το βιβλίο [Τρα89]. Όσες δεν αναφέρουν προέλευση είναι από τις σημειώσεις του μαθήματος [Αθα04].

1 Πρώτης Τάξης ΣΔΕ

1.1 Χωριζομένων Μεταβλητών

Είναι Διαφορικές Εξισώσεις της μορφής:

$$x'(t) = A(t)B\big(x(t)\big).$$

Αφού βρούμε τις σταθερές λύσεις, προχωράμε χωρίζοντας εξαρτημένες και ανεξάρτητες μεταβλητές,

$$\frac{x'(t)}{B\big(x(t)\big)} = A(t),$$

και τα δύο μέλη είναι συναρτήσεις του t οπότε ολοκληρώνουμε ως προς t:

$$\int \frac{x'(t)}{B\big(x(t)\big)}dt = \int A(t)dt + c,\ c \in \mathbb{R},$$

στο αριστερό ολοκλήρωμα κάνουμε αλλαγή μεταβλητών $x(t) = x$ και έτσι παίρνουμε:

$$\int \frac{1}{B(x)}dx = \int A(t)dt + c,\ c \in \mathbb{R},$$

αφού υπολογιστούν τα ολοκληρώματα επιστρέφουμε στην αρχική μεταβλητή - συνάρτηση $x(t)$.

Πρόβλημα 1 ***-Σελ 12 Ασκ 1(δ)-*** *Να λύσετε την ΔΕ* $x' = x - x^2$.

Λύση
Οι σταθερές λύσεις είναι οι $x(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}$ και $x(t) = 1, \forall t \in \mathbb{R}$.
Για $x \neq 0, 1$ έχουμε,

$$\frac{x'}{x - x^2} = 1$$

Ολοκληρώνοντας κατά μέρη και κάνοντας αλλαγή μεταβήτών $x = x(t)$ στο αριστερό ολοκλήρωμα προκύπτει:

$$\int \frac{1}{x - x^2}dx = \int 1dt \Rightarrow \ln|x| - \ln|1 - x| = t + c, c \in \mathbb{R}$$

$$|\frac{x}{1 - x}| = Ae^t, A > 0.$$

Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις οι οποίες λειτουργούν και ως επιπλέον περιορισμοί.

- Για $x < 0$,

$$\frac{-x}{1 - x} = Ae^t \Rightarrow x(Ae^t - 1) = Ae^t, A > 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{Ae^t}{Ae^t - 1}, A > 0, t < -\ln A \text{ (γιατί;)}$$

- Για $0 < x < 1$,

$$\frac{x}{1 - x} = Ae^t \Rightarrow x(Ae^t + 1) = Ae^t, A > 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{Ae^t}{Ae^t + 1}, A > 0, t \in \mathbb{R} \text{ (γιατί;)}$$

- Για $x > 1$,

$$\frac{x}{-(1 - x)} = Ae^t \Rightarrow x(Ae^t - 1) = Ae^t, A > 0 \Rightarrow$$

$$x = \frac{Ae^t}{Ae^t - 1}, A > 0, t > -\ln A \text{ (γιατί;)}$$

Η πρώτη και η τρίτη λύση είναι τοπικές (δεν ισχύουν για όλα τα $t \in \mathbb{R}$), ενώ η δεύτερη είναι καθολική (ισχύει για κάθε $t \in \mathbb{R}$). Όπως θα δούμε σε καταλληλότερο παράδειγμα πρέπει οι τοπικές και καθολικές λύσεις να συνδυαστούν ώστε να έχουμε λύσεις για κάθε $t \in \mathbb{R}$. □

Πρόβλημα 2 ***-Σελ 12 Ασκ 2(α)-*** *Να λύσετε το πρόβλημα* $x' = \frac{x \log x}{\sin t}$ *με Α.Σ* $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.

<u>*Λύση*</u>
<u>Σταθερή</u> λύση είναι η $x(t) = 1, \forall t \in \mathbb{R}, t \neq k\pi$ και ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες. Εφόσον η συνάρτηση $f(t,x) = \frac{x\log x}{\sin t}$ είναι C^1 και η σταθερή λύση ικανοποιεί την ΑΣ, έχουμε ότι είναι η μοναδική λύση του προβλήματος και τελειώσαμε.
Μια άλλη λύση του προβλήματος είναι η εξής:
Πρώτα παρατηρούμε ότι $x > 0$, $t \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
Για $x\log x \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$ το πρόβλημα γίνεται,

$$\frac{x'}{x\log x} = \frac{1}{\sin t}$$

Με ολοκλήρωση παίρνουμε,

$$\int \frac{1}{x\log x}dx = \int \frac{1}{\sin t}dt$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα είναι απλό, $\int \frac{1}{x\log x}dx = \log|\log x|$.
Το δεύτερο ολοκλήρωμα είναι πιο δύσκολο, $\int \frac{1}{\sin t}dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sin(t/2)\cos(t/2)}dt$
$= \frac{1}{2}\int \frac{\sin^2(t/2)+\cos^2(t/2)}{\sin(t/2)\cos(t/2)}dt = \frac{1}{2}\int \frac{\sin(t/2)}{\cos(t/2)}dt + \frac{1}{2}\int \frac{\cos(t/2)}{\sin(t/2)}dt = \cdots = \frac{1}{2}\log\big|\tan(t/2)\big|$
Έτσι το πρόβλημα γίνεται,

$$\log|\log x| = \frac{1}{2}\log\big|\tan(t/2)\big| + c \Rightarrow$$

$$|\log x| = A\sqrt{\big|\tan(t/2)\big|},\ \text{με } A > 0.$$

Διακρίνουμε τώρα τις εξής περιπτώσεις:

- Για <u>$x > 1$</u>,

$$\log x = A\sqrt{\big|\tan(t/2)\big|} \Rightarrow x = e^{A\sqrt{\left|\tan(t/2)\right|}}$$

- Για <u>$x < 1$</u>,

$$-\log x = A\sqrt{\big|\tan(t/2)\big|} \Rightarrow x = e^{-A\sqrt{\left|\tan(t/2)\right|}}$$

Λαμβάνοντας υπόψη μας τις ΑΣ ($t = \frac{\pi}{2}, x = 1$) βρίσκουμε και στις δύο περιπτώσεις ότι $A = 0$.
Έτσι τελικά $x(t) = 1$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.
Βλέπουμε λοιπόν ότι η λύση είναι σταθερή, άρα έπρεπε να το αντιληφθούμε εξαρχής, οπότε επιστρέφουμε στην αρχή και ξαναμελετάμε τις σταθερές λύσεις του προβλήματος. □

Πρόβλημα 3 ***-Σελ 12 Ασκ 3-*** *Να λύσετε τη ΔΕ* $x'(t) = \sqrt{|x(t)|}$

<u>*Λύση*</u>
Πρώτα παρατηρούμε ότι $x'(t) \geq 0$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Δηλαδή η λύση που θα βρούμε πρέπει να είναι αύξουσα συνάρτηση.
<u>Σταθερή</u> λύση είναι $x(t) = 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.
Για $\sqrt{|x|} \neq 0$ έχουμε ότι $x' > 0$, και έτσι παίρνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις,

- Αν <u>$x > 0$</u>,

$$x' = x^{1/2} \Rightarrow \frac{x'}{x^{1/2}} = 1 \Rightarrow \int \frac{1}{x^{1/2}}dx = \int dt \Rightarrow 2\sqrt{x} = t + c_1 \Rightarrow$$

$$x(t) = \Big(\frac{t+c_1}{2}\Big)^2.$$

Αν $t \leq -c_1$ τότε $x'(t) = t + c_1 \leq 0$ το οποίο αντιτίθεται στον περιορισμό $x' \geq 0$. Έτσι σε αυτή την περίπτωση $t > -c_1$.

- Αν $\underline{x < 0}$,

$$x' = (-x)^{1/2} \Rightarrow \frac{x'}{(-x)^{1/2}} = 1 \Rightarrow \int \frac{1}{(-x)^{1/2}} dx = \int dt$$

Με αλλαγή μεταβλητών ($y = -x$), στο αριστερό ολοκλήρωμα,

$$-\int y^{-1/2} dy = t + c_2 \Rightarrow y^{1/2} = -\frac{t+c_2}{2} \Rightarrow y = \Big(\frac{-t-c_2}{2}\Big)^2.$$

Επιστρέφοντας στις αρχικές μεταβλητές παίρνουμε,

$$x(t) = -\Big(\frac{t+c_2}{2}\Big)^2.$$

Όπως πριν αν $t \geq -c_2$ παίρνουμε $x'(t) = -t - c_2 \leq 0$ το οποίο αντιτίθεται στον περιορισμό $x' \geq 0$. Έτσι σε αυτή την περίπτωση $t < -c_2$.

Συνοψίζοντας, οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι λύσεις,

$$\phi(t) = \begin{cases} \Big(\frac{t+c_2}{2}\Big)^2, & t > -c_2 \\ 0, & t \in [-c_1, -c_2] \\ -\Big(\frac{t+c_1}{2}\Big)^2, & t < -c_1 \end{cases}, \qquad \phi(t) = \begin{cases} \Big(\frac{t+c}{2}\Big)^2, & t \geq -c \\ -\Big(\frac{t+c}{2}\Big)^2, & t \leq -c \end{cases}$$

$$\phi(t) = \begin{cases} 0, & t \geq -c \\ -\Big(\frac{t+c}{2}\Big)^2, & t < -c \end{cases}, \qquad \phi(t) = \begin{cases} 0, & t \leq -c \\ \Big(\frac{t+c}{2}\Big)^2, & t < -c \end{cases}$$

□

Πρόβλημα 4 *Να λύσετε τη ΔΕ* $x'(t) = \frac{1}{\sqrt{|x(t)|}}$

Λύση

Αρχικά παρατηρούμε ότι η ΔΕ είναι χωριζομένων μεταβλητών και δεν έχει σταθερή λύση. Επιπλέον βλέπουμε ότι πρέπει $x'(t) > 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$, δηλαδή η λύση πρέπει να είναι γνησίως αύξουσα. Όπως και στην προηγούμενη άσκηση θα πάρουμε περιπτώσεις στο πρόσημο της $x(t)$ για να σκοτώσουμε το απόλυτο.

- Αν $\underline{x(t) > 0}$,

$$x' = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow x^{1/2}x' = 1 \Rightarrow \frac{2}{3}x^{3/2} = t + c_1 \Rightarrow x^{3/2} = \frac{3}{2}t + c_1 \Rightarrow x(t) = \big(\frac{3}{2}t + c_1\big)^{2/3}.$$

Η συνθήκη που έχουμε είναι $x'(t) > 0$ οπότε παραγωγίζοντας την παραπάνω παίρνουμε:

$$x'(t) > 0 \Rightarrow \frac{2}{3}\big(\frac{3}{2}t + c_1\big)^{-1/3} \cdot \frac{3}{2} > 0 \Rightarrow \big(\frac{3}{2}t + c_1\big)^{1/3} > 0 \Rightarrow t > -\frac{2}{3}c_1$$

- Αν $\underline{x(t) < 0}$,

$$x' = \frac{1}{\sqrt{-x}} \Rightarrow (-x)^{1/2}x' = 1 \Rightarrow -\frac{2}{3}(-x)^{3/2} = t + c_2 \Rightarrow (-x)^{3/2} = -\frac{3}{2}t + c_2 \Rightarrow$$

$$x(t) = -\big(-\frac{3}{2}t + c_2\big)^{2/3}.$$

Η συνθήκη που έχουμε είναι $x'(t) > 0$ οπότε παραγωγίζοντας την παραπάνω παίρνουμε:

$$x'(t) > 0 \Rightarrow -\frac{2}{3}\big(-\frac{3}{2}t + c_2\big)^{-1/3} \cdot \frac{-3}{2} > 0 \Rightarrow \big(-\frac{3}{2}t + c_2\big)^{1/3} > 0 \Rightarrow t < \frac{2}{3}c_2$$

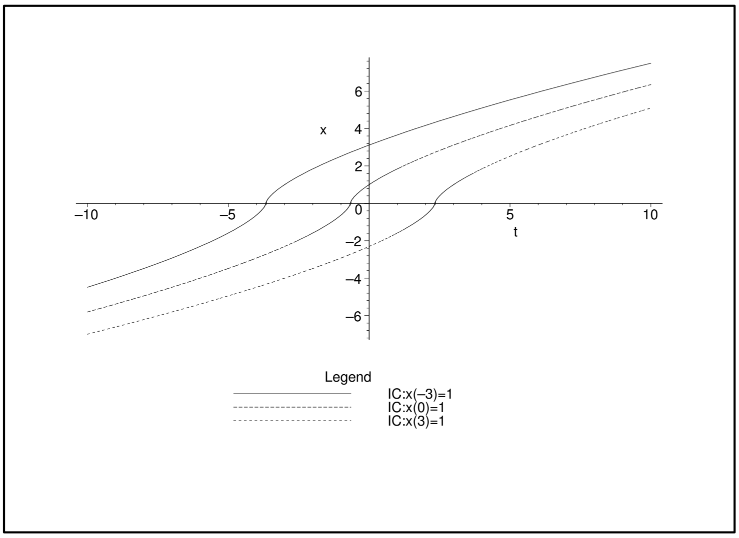
Συνοψίζοντας, οι ακόλουθες συναρτήσεις είναι λύσεις.
Συγκεκριμένα, αν $c = c_1 + c_2 < 0$ η λύση διαμορφώνεται ως εξής:

$$\phi(t) = \begin{cases} \big(\frac{3}{2}t + c_1\big)^{2/3}, & t > -\frac{2}{3}c_1 \\ -\big(-\frac{3}{2}t + c_2\big)^{2/3}, & t < \frac{2}{3}c_2 \end{cases},$$

αν $c = c_1 + c_2 = 0$ και $c' = -c_1 = c_2$ τότε η λύση διαμορφώνεται ως εξής:

$$\phi(t) = \begin{cases} \big(\frac{3}{2}t + c'\big)^{2/3}, & t > \frac{2}{3}c' \\ -\big(-\frac{3}{2}t + c'\big)^{2/3}, & t < \frac{2}{3}c' \end{cases}.$$

Αν τέλος $c \leq 0$ δεν υπάρχει λύση. Στη γραφική παράσταση που ακολουθεί φαίνεται η δεύτερη λύση ($c_2 = -c_1$) για διάφορες αρχικές συνθήκες.



□

Πρόβλημα 5 ***-Σελ 12 Ασκ 4-*** *Σώμα μάζας m αφήνεται να πέσει στο έδαφος. Αν η αντίσταση του αέρα είναι ανάλογη του τετραγώνου του μέτρου της ταχύτητας με σταθερά $k > 0$, να βρείτε την ταχύτητα v του σώματος τη χρονική στιγμή t. Αποδείξτε επίσης την ύπαρξη οριακής ταχύτητας $\lim_{t\to+\infty} v(t)$ και υπολογίστε την.*

Λύση

Η εξίσωση της κίνησης είναι $m\frac{dv}{dt} = mg - mkv^2$ όπου $k > 0$ είναι σταθερά. Η εξίσωση έχει σταθερή λύση την ταχύτητα $v(t) = \sqrt{\frac{g}{k}}$ η οποία απορρίπτεται διότι δεν ικανοποιεί τις ΑΣ $(t = 0, v = 0)$. Για τις άλλες λύσεις έχουμε,

$$\int \frac{1}{g - kv^2} dv = \int dt + c$$

Τώρα παρατηρούμε ότι,

$$\int \frac{1}{g - kv^2} dv = \frac{1}{k} \int \frac{1}{\frac{g}{k} - v^2} dv = \frac{1}{k} \int \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{g}{k}} - v\right)\left(\sqrt{\frac{g}{k}} + v\right)} dv =$$

$$\frac{1}{2k} \int \Big(\frac{\sqrt{\frac{k}{g}}}{\sqrt{\frac{g}{k}} - v} + \frac{\sqrt{\frac{k}{g}}}{\sqrt{\frac{g}{k}} + v} \Big) dv = \frac{1}{2\sqrt{kg}} \Big[\int \frac{1}{v + \sqrt{\frac{g}{k}}} dv - \int \frac{1}{v - \sqrt{\frac{g}{k}}} dv \Big] =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{kg}} \log \Big| \frac{v + \sqrt{\frac{g}{k}}}{v - \sqrt{\frac{g}{k}}} \Big|$$

Έτσι έχουμε,

$$\log \Big| \frac{v + \sqrt{\frac{g}{k}}}{v - \sqrt{\frac{g}{k}}} \Big| = 2t\sqrt{kg} + c_1 \Rightarrow \Big| \frac{v + \sqrt{\frac{g}{k}}}{v - \sqrt{\frac{g}{k}}} \Big| = Ae^{2t\sqrt{kg}}$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις αρχικές συνθήκες $(t = 0, v = 0)$ παίρνουμε ότι $A = 1$, επίσης από τη φύση του προβλήματος έχουμε ότι $v(t) \geq 0$ και $t \geq 0$ έτσι διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις,

- Αν $v > \sqrt{\frac{g}{k}}$, τότε $v = \sqrt{\frac{g}{k}} \cdot \frac{e^{2t\sqrt{kg}}+1}{e^{2t\sqrt{kg}}-1}$ που δεν ορίζεται για $t = 0$.

- Αν $v < \sqrt{\frac{g}{k}}$ έχουμε ότι $v(t) = \sqrt{\frac{g}{k}} \cdot \frac{e^{2t\sqrt{kg}}-1}{e^{2t\sqrt{kg}}+1}$.

Έτσι η λύση του προβλήματος είναι η,

$$v(t) = \sqrt{\frac{g}{k}} \cdot \frac{e^{2t\sqrt{kg}} - 1}{e^{2t\sqrt{kg}} + 1}, t \geq 0.$$

Η λύση αυτή είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση του t (γιατί;) οπότε και η ζητούμενη οριακή ταχύτητα είναι,

$$\lim_{t \to +\infty} v(t) = \sqrt{\frac{g}{k}}$$

□

1.2 Πλήρεις

Είναι διαφορική εξισώση της μορφής:

$$P(t, x)x' + Q(t, x) = 0.$$

Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι η προηγούμενη ΔΕ πλήρης όποτε οι P, Q είναι C^1 διαφορίσιμες σε ανοικτό ορθογώνιο είναι η εξής:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Όποτε ικανοποιείται η σχέση αυτή, υπάρχει C^1 διαφορίσιμη $G(t,x)$ ώστε:

$$\frac{\partial G}{\partial x} = P \text{ και } \frac{\partial G}{\partial t} = Q,$$

και τότε η ΔΕ γράφεται στη μορφή:

$$\frac{\partial G(t,x)}{\partial x}x' + \frac{\partial G(t,x)}{\partial t} = 0.$$

Εφόσον βρούμε *μία* τέτοια συνάρτηση, η γενική λύση της αρχικής ΔΕ δίνεται (συνήθως πεπλεγμένα) από τη σχέση:

$$G(t,x) = c,\ c \in \mathbb{R}.$$

Πρόβλημα 6 -*Σελ 17 Ασκ 1(α)-* *Να λύσετε την ΔΕ* $(te^x + 2x)x' + e^x = 0$

<u>*Λύση*</u>

Αυτή η ΔΕ είναι πλήρης διότι $\frac{\partial(te^x+2x)}{\partial t} = e^x$ και $\frac{\partial(e^x)}{\partial x} = e^x$.
Έτσι ψάχνουμε για μία συνάρτηση $G(t,x)$ τέτοια ώστε,

$$\frac{\partial G}{\partial x}(t,x) = te^x + 2x, \qquad \frac{\partial G}{\partial t}(t,x) = e^x$$

Από τη δεύτερη σχέση παίρνουμε, ολοκληρώνοντας ως προς t, ότι:

$$G(t,x) = te^x + c(x),\ \text{για κάποια } C^1 \text{ συνάρτηση } c.$$

Προσέξτε ότι η σταθερά που προκύπτει είναι σταθερά ως προς t αλλά γενικά εξαρτάται από το x. Παραγωγίζοντας προκύπτει ότι $\frac{\partial G}{\partial x} = te^x + c'(x)$ ενώ από την πρώτη σχέση έχουμε ότι $\frac{\partial G}{\partial x} = te^x + 2x$ οπότε πρέπει $c'(x) = 2x$. Μία τέτοια επιλογή είναι η $c(x) = x^2$. Οπότε μία $C^1(\mathbb{R}^2)$ συνάρτηση $G(t,x)$ που ικανοποιεί την αρχική ΔΕ είναι η εξής:

$$G(t,x) = te^x + x^2.$$

Άρα η γενική λύση $x(t)$ της αρχικής ΔΕ δίνεται πεπλεγμένα από τη σχέση:

$$te^x + x^2 = c,\ c \in \mathbb{R}.$$

□

Πρόβλημα 7 -*Σελ 17 Ασκ 1(δ)-* *Να λύσετε τη ΔΕ* $(3t^2x^2 + \sin t)x' + (2tx^3 + x\cos t) = 0$

<u>*Λύση*</u>

Αυτή η ΔΕ είναι πλήρης διότι $\frac{\partial(3t^2x^2+\sin t)}{\partial t} = 6tx^2 + \cos t$ και $\frac{\partial(2tx^3+x\cos t)}{\partial x} = 6tx^2 + \cos t$.
Έτσι ψάχνουμε για μία συνάρτηση $G(t,x)$ τέτοια ώστε:

$$\frac{\partial G(t,x)}{\partial x} = 3t^2x^2 + \sin t, \qquad \frac{\partial G(t,x)}{\partial t} = 2tx^3 + x\cos t$$

Ολοκληρώνοντας τη δεύτερη σχέση ως προς t παίρνουμε ότι:

$$G(t,x) = t^2x^3 + x\sin t + c(x),\ \text{για κάποια } C^1 \text{ συνάρτηση } c.$$

Παρατηρήστε ότι η σταθερά που προκύπτει είναι συνάρτηση του x. Παραγωγίζουμε ως προς x και παίρνουμε $\frac{\partial G}{\partial x} = 3t^2x^2 + \sin t + c'(x)$, όμως η πρώτη σχέση δίνει $\frac{\partial G}{\partial x} = 3t^2x^2 + \sin t$ άρα $c'(x) = 0$ οπότε η $c(x)$ είναι σταθερά συνάρτηση. Έτσι μία $C^1(\mathbb{R}^2)$ συνάρτηση $G(t,x)$ είναι η εξής:

$$G(t,x) = t^2x^3 + x\sin t.$$

Τελικά η λύση της αρχικής ΔΕ δίνεται πεπλεγμένα από τη σχέση:

$$t^2x^3 + x\sin t = c,\ c \in \mathbb{R}.$$

□

1.3 Πολλαπλασιαστές Euler

Όπως και οι Πλήρεις έτσι και αυτές είναι διαφορικές εξισώσεις της μορφής:

$$P(t,x)x' + Q(t,x) = 0.$$

Εάν η ΔΕ δεν είναι Πλήρης, δηλαδή $\frac{\partial P}{\partial t} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$, *προσπαθούμε* να την μετατρέψουμε σε Πλήρη πολλαπλασιάζοντας την με κατάλληλη συνάρτηση (Παράγοντας).
Φυσικά η δυσκολία έγκειται στην εύρεση του κατάλληλο παράγοντα. Για το σκοπό αυτό διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν
$$\frac{\partial}{\partial x}\Big[\frac{1}{P}(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial t})\Big] = 0$$
πολλαπλασιάζουμε τη ΔΕ με
$$E(t,x) = e^{\int \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial t}\right)dt}$$

- Αν
$$\frac{\partial}{\partial t}\Big[\frac{1}{Q}(\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\partial Q}{\partial x})\Big] = 0$$
πολλαπλασιάζουμε τη ΔΕ με
$$E(t,x) = e^{\int \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx}$$

Οπότε η ΔΕ μετατρέπεται σε Πλήρη και συνεχίζουμε όπως στην προηγούμενη παράγραφο.

Πρόβλημα 8 ***-Σελ 17 Ασκ 2(β)-*** *Να λύσετε τη ΔΕ* $x' = e^{2t} + x - 1$.

Λύση

Η ΔΕ γράφεται ως εξής: $x'+(-e^{2t}-x+1) = 0$. Έχουμε ότι $P(t,x) = 1$ και $Q(t,x) = -e^{2t}-x+1$. Παρατηρούμε ότι $\frac{\partial P}{\partial t} = 0 \neq \frac{\partial Q}{\partial x} = -1$ οπότε η ΔΕ δεν είναι πλήρης. Όμως ορίζοντας την συνάρτηση:

$$\mu(t,x) := \frac{1}{P}\Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial t}\Big) = -1 \text{ βλέπουμε ότι } \frac{\partial \mu}{\partial x} = 0$$

Έτσι μπορούμε να μετατρέψουμε τη ΔΕ σε πλήρη πολλαπλασιάζοντας με:

$$E(t,x) = e^{\int \mu(t,x)dt} = e^{-t}.$$

Παίρνουμε λοιπόν:

$$e^{-t}x' + (-e^{t} - xe^{-t} + e^{-t}) = 0$$

Τώρα ορίζουμε $P_1(t,x) = e^{-t}$ και $Q_1(t,x) = -e^{t} - xe^{-t} + e^{-t}$ και παρατηρούμε ότι $\frac{\partial P_1}{\partial t} = -e^{-t} = \frac{\partial Q_1}{\partial x}$ οπότε συμπεραίνουμε ότι η νέα ΔΕ είναι πλήρης. Ψάχνουμε λοιπόν μία συνάρτηση $G(t,x)$ με τις ιδιότητες,

$$\frac{\partial G}{\partial x} = e^{-t} \text{ και } \frac{\partial G}{\partial t} = -e^{t} - xe^{-t} + e^{-t}.$$

Ολοκληρώνοντας την πρώτη σχέση ως προς x παίρνουμε ότι,

$$G(t,x) = xe^{-t} + c(t),\ c(t) \in C^1$$

Παραγωγίζοντας ως προς t παίρνουμε ότι $\frac{\partial G}{\partial t} = -xe^{-t} + c'(t)$ ενώ από τη δεύτερη σχέση έχουμε ότι $\frac{\partial G}{\partial t} = -e^t - xe^{-t} + e^{-t}$ άρα $c'(t) = -e^t + e^{-t} \Rightarrow c(t) = -e^t - e^{-t}$ οπότε μία συνάρτηση $G(t,x)$ είναι η εξής,

$$G(t,x) = xe^{-t} - e^t - e^{-t} = (x-1)e^{-t} - e^t.$$

Τελικά η γενική λύση της αρχικής ΔΕ δίνεται από τη σχέση,

$$(x-1)e^{-t} - e^t = c \Rightarrow x = e^{2t} + ce^t + 1, \ c \in \mathbb{R}.$$

□

1.4 Γραμμικές Πρώτης Τάξης

Είναι Διαφορικές Εξισώσεις της μορφής:

$$x' + f(t)x + g(t) = 0.$$

Με πολλαπλασιασμό με κατάλληλο πολλαπλασιαστή Euler:

$$E(t) = e^{\int f(t)dt}$$

η ΔΕ γίνεται Πλήρης και επαναλαμβάνοντας τις διαδικασίες των προηγούμενων παραγράφων βρίσκουμε ως γενική λύση τη συνάρτηση:

$$x(t) = ce^{-\int f(t)dt} - e^{-\int f(t)dt}\int g(t)e^{\int f(t)dt}dt$$

$$= e^{-\int f(t)dt}\Big(c - \int g(t)e^{\int f(t)dt}dt\Big), \ c \in \mathbb{R}.$$

Πρόβλημα 9 -*Σελ 18 Ασκ 1(γ)*- *Να λύσετε την ΔΕ $x' + \frac{2}{t}x = \frac{\cos t}{t^2}$ με αρχική συνθήκη* $(\pi, 0)$.

Λύση

Η εξίσωση γράφεται στη μορφή $x' + f(t)x + g(t) = 0$ με $f(t) = \frac{2}{t}$ και $g(t) = -\frac{\cos t}{t^2}$. Κάνουμε τις εξής παρατηρήσεις,

- $\int f(t)dt = \int \frac{2}{t}dt = \ln t^2$,
- $e^{\int f(t)dt} = t^2$,
- $e^{-\int f(t)dt} = \frac{1}{t^2}$,
- $\int g(t)e^{\int f(t)dt}dt = \int -\frac{\cos t}{t^2}t^2 dt = -\sin t$.

Έτσι η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι η εξής:

$$x(t) = e^{-\int f(t)dt}\Big(c - \int g(t)e^{\int f(t)dt}dt\Big) = \frac{1}{t^2}(c + \sin t), \ c \in \mathbb{R}.$$

Λαμβάνουμε υπόψη τις αρχικές συνθήκες $(t_0, x_0) = (\pi, 0)$ και προκύπτει ότι $c = 0$ και έτσι η τελική λύση του προβλήματος είναι:

$$x(t) = \frac{\sin t}{t^2}, \ t \neq 0.$$

□

Πρόβλημα 10 -*Σελ 19 Ασκ 3-* *Στην* $x' + f(t)x = g(t)$ *οι συναρτήσεις* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *είναι συνεχείς και* $M := \inf\{f(t) : t \in \mathbb{R}\} > 0$*, ενώ* $\lim_{t\to+\infty} g(t) = 0$*. Να αποδείξετε ότι* $\lim_{t\to+\infty} \phi(t) = 0$ *για κάθε λύση* ϕ *της ΔΕ.*

Λύση
Η ΔΕ γράφεται ως εξής,

$$x'(t) + f(t)x - g(t) = 0$$

με γενική λύση

$$x(t) = e^{-\int_{t_0}^t f(s)ds}\Big(c + \int_{t_0}^t g(y)e^{\int_{t_0}^y f(s)ds}dy\Big)$$

Αν η ϕ ικανοποιεί τις ΑΣ $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ τότε $c = x_0$ και

$$\phi(t) = e^{-\int_{t_0}^t f(s)ds}\Big(x_0 + \int_{t_0}^t g(y)e^{\int_{t_0}^y f(s)ds}dy\Big)$$

$$= \underbrace{x_0 e^{-\int_{t_0}^t f(s)ds}}_{A} + \underbrace{e^{-\int_{t_0}^t f(s)ds}\int_{t_0}^t g(y)e^{\int_{t_0}^y f(s)ds}dy}_{B}$$

Για να φράξουμε τη συνάρτηση ϕ μελετάμε τα A, B.

- Για το A πρέπει να παρατηρήσουμε ότι καθώς $t \to +\infty$ προκύπτει ότι $t > t_0$. Επιπλέον η συνάρτηση f είναι θετική. Έτσι φράσσουμε το εκθετικό με τον παρακάτω τρόπο:

$$|A| = |x_0|e^{-\int_{t_0}^t f(s)ds} \le |x_0|e^{-\int_{t_0}^t Mds} = |x_0|e^{-M(t-t_0)} \to 0 \text{ καθώς } t \to +\infty,$$

- Για το B κάνουμε τις ίδιες παρατηρήσεις οπότε και παίρνουμε:

$$|B| = \Big|e^{-\int_{t_0}^t f(s)ds}\int_{t_0}^t g(y)e^{\int_{t_0}^y f(s)ds}dy\Big| = \Big|\int_{t_0}^t g(y)e^{-\int_y^t f(s)ds}dy\Big|$$

$$\le \int_{t_0}^t |g(y)|e^{-\int_y^t f(s)ds}dy \le \int_{t_0}^t |g(y)|e^{-\int_y^t Mds}dy \le \int_{t_0}^t |g(y)|e^{-M(t-y)}dy$$

$$\le \frac{\int_{t_0}^t |g(y)|e^{My}dy}{e^{Mt}}$$

Μας ενδιαφέρει το όριο του κλάσματος καθώς $t \to +\infty$. Για το σκοπό αυτό θεωρούμε τη συνάρτηση $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $h(t) = \int_{t_0}^t |g(y)|e^{My}dy$. Η συνάρτηση h είναι θετική, αύξουσα και C^1(γιατί;). Αν επιπλέον η h είναι φραγμένη στο $[t_0, +\infty)$ το όριο του κλάσματος είναι μηδέν. Αν η h δεν είναι φραγμένη τότε από την μονοτονία της θα έχουμε ότι $\lim_{t\to+\infty} h(t) = +\infty$. Εφαρμόζοντας τον κανόνα του de L'Hospital έχουμε:

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{h(t)}{e^{Mt}} = \lim_{t\to+\infty}\frac{h'(t)}{Me^{Mt}} = \lim_{t\to+\infty}\frac{|g(t)|e^{Mt}}{Me^{Mt}} = \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{M}|g(t)| = 0.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι σε κάθε περίπτωση $\lim_{t\to+\infty} \phi(t) = 0$. □

Πρόβλημα 11 -*Σελ 19 Ασκ 4-* *Βρείτε όλες τις* C^1 *συναρτήσεις* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *με την ιδιότητα* $\int_0^1 f(ts)ds = 2f(t)$ *για κάθε* $t \neq 0$*.*

Λύση
Με αλλαγή μεταβλητών ($y = ts$) στο ολοκλήρωμα έχουμε ότι,

$$2f(t) = \int_0^1 f(ts)ds = \frac{1}{t}\int_0^t f(y)dy \Rightarrow 2tf(t) = \int_0^t f(y)dy.$$

Παραγωγίζοντας,

$$2f(t) + 2tf'(t) = f(t) \Rightarrow 2tf'(t) + f(t) = 0 \Rightarrow f'(t) = -\frac{f(t)}{2t},$$

Έτσι για $t \neq 0$ η συνάρτηση f είναι C^1 λύση της ΔΕ χωριζομένων μεταβλητών:

$$x' = -\frac{x}{2t}.$$

Η τελευταία έχει ώς σταθερή λύση την $x(t) = 0$. Για τις μη σταθερές λύσεις έχουμε τα εξής:

$$\frac{x'}{x} = -\frac{1}{2t} \Rightarrow \log|x| = -\frac{1}{2}\log|t| + c \Rightarrow |x(t)| = \frac{A}{\sqrt{|t|}},\ \forall t \neq 0.$$

Παρατηρούμε ότι για τις μη-σταθερές λύσεις $x(t)$ της ΔΕ ισχύει:

$$\lim_{t\to 0} x(t) = \pm\infty,$$

ενώ η f είναι C^1 συνάρτηση και λύση του ιδίου προβλήματος. Οπότε η f πρέπει να είναι σταθερή λύση του προβλήματος, έτσι $f(t) = 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. □

1.5 Ομογενείς

Είναι Διαφορικές Εξισώσεις της μορφής:

$$P(t, x)x' + Q(t, x) = 0,$$

με

$$P(\lambda t, \lambda x) = \lambda^k P(t, x) \text{ και } Q(\lambda t, \lambda x) = \lambda^k Q(t, x).$$

Ανήκουν στην κατηγορία των διαφορικών εξισώσεων όπου κάνουμε αλλάγή μεταβλητών. Έτσι θέτουμε $y = \frac{x}{t}$ και η ΔΕ γίνεται:

$$y' = \frac{-Q(1, y) - yP(1, y)}{tP(1, y)},\ t \neq 0.$$

Παρατηρούμε ότι είναι Χωριζομένων Μεταβλητών οπότε και λύνουμε αντίστοιχα ως προς y και τέλος επιστρέφουμε στην αρχική μεταβλητή $x(t) = ty$.

Πρόβλημα 12 ***-Σελ 25 Ασκ 1(β)-*** *Να λύσετε τη ΔΕ* $(t - x\cos\frac{x}{t}) + x't\cos\frac{x}{t} = 0$

Λύση
Γράφοντας τη ΔΕ στη μορφή:

$$\big(t\cos\frac{x}{t}\big)x' + \big(t - x\cos\frac{x}{t}\big) = 0,$$

βλέπουμε ότι είναι Ομογενής βαθμού 1. Για $t \neq 0$ η ΔΕ γράφεται στη μορφή:

$$\big(\cos\frac{x}{t}\big)x' + \big(1 - \frac{x}{t}\cos\frac{x}{t}\big) = 0.$$

Συνεχίζουμε με την αλλαγή μεταβλητών $y = \frac{x}{t}$, οπότε $x' = y + ty'$ και η ΔΕ γίνεται:

$$\cos y(y + ty') + (1 - y\cos y) = 0 \Rightarrow y\cos y + y' t\cos y + 1 - y\cos y \Rightarrow$$

$$y'\cos y = -\frac{1}{t},\ t \neq 0.$$

Η ΔΕ αυτή είναι χωριζομένων μεταβλητών και συνεχίζοντας ανάλογα παίρνουμε ότι:

$$\int \cos y dy = -\int \frac{1}{t}dt + c \Rightarrow \sin y = -\log t + c \Rightarrow$$

$$y(t) = \arcsin(c - \log t)$$

Επιστρέφοντας στις αρχικές μεταβλητές μέσω της $y = \frac{x}{t}$ παίρνουμε τη γενική λύση του αρχικού προβλήματος:

$$x(t) = t\arcsin(c - \log t).$$

□

Πρόβλημα 13 -*Σελ 25 Ασκ 2-* *Να βρεθούν όλες οι διαφορίσιμες συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με την ακόλουθη ιδιότητα: Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τους άξονες, το γράφημα της f και την ευθεία $x = t$ ισούται με τον λόγο $\frac{t^3}{f(t)}$.*

Λύση

Ψάχνουμε για διαφορίσιμες συναρτήσεις f με την ιδιότητα,

$$\int_0^t f(s)ds = \frac{t^3}{f(t)} \text{ με } f(t) \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Παραγωγίζοντας(γιατί μπορούμε;) παίρνουμε:

$$f(t) = \frac{3t^2 f(t) - t^3 f'(t)}{\big(f(t)\big)^2} \Rightarrow t^3 f'(t) = 3t^2 f(t) - \big(f(t)\big)^3$$

Άρα η f είναι λύση της ΔΕ $t^3x' = 3t^2x - x^3$ που είναι ομογενής 3ου βαθμού. Για $t \neq 0$ η ΔΕ γράφεται ως εξής:

$$x' = 3\Big(\frac{x}{t}\Big) - \Big(\frac{x}{t}\Big)^3$$

Θέτουμε τώρα $y = \frac{x}{t}$ οπότε $x' = ty' + y$ και η ΔΕ γίνεται:

$$ty' + y = 3y - y^3 \Leftrightarrow y' = \frac{y(2 - y^2)}{t},$$

που είναι χωριζομένων μεταβλητών με σταθερές λύσεις τις ευθείες $y(t) = -\sqrt{2},\ 0,\ \sqrt{2}$. Οι υπόλοιπες λύσεις βρίσκονται με ολοκλήρωση,

$$\int \frac{1}{y(2 - y^2)}dy = \int \frac{1}{t}dt + c_1 \Rightarrow \int \frac{1}{y(y^2 - 2)}dy = -\log|t| + c_1 = \log\frac{c}{|t|} \Rightarrow$$

$$\int\Big(-\frac{1}{2y}+\frac{1}{4(y-\sqrt{2})}+\frac{1}{4(y+\sqrt{2})}\Big)dy=\log\frac{c}{|t|}\Rightarrow$$
$$-\frac{1}{2}\log|y|+\frac{1}{4}\log|y-\sqrt{2}|+\frac{1}{4}\log|y+\sqrt{2}|=\log\frac{c}{|t|}\Rightarrow$$
$$\log\frac{|y^2-2|^{1/4}}{|y|^{1/2}}=\log\frac{c}{|t|}\Rightarrow\frac{|y^2-2|^{1/4}}{|y|^{1/2}}=\frac{c}{|t|}\Rightarrow|y^2-2|-y^2\frac{c^4}{t^4}=0.$$

Επιστρέφοντας τώρα στις αρχικές μεταβλητές μέσω της $y=\frac{x}{t}$ παίρνουμε ότι:

$$\Big|\frac{x^2}{t^2}-2\Big|-\frac{x^2c^4}{t^6}=0\Rightarrow|x^2-2t^2|=x^2\frac{c^4}{t^4}.$$

□

1.6 Bernoulli

Είναι Διαφορικές Εξισώσεις της μορφής:

$$x'+f(t)x+g(t)x^k=0,$$

με $k\in\mathbb{R}-\{0,1\}$. Ανήκουν στην κατηγορία των διαφορικών εξισώσεων όπου κάνουμε αλλαγή μεταβλητών. Σταθερή λύση είναι η $x(t)=0$. Για τις άλλες λύσεις θέτουμε $y=x^{1-k}$ οπότε προκύπτει

$$x=yx^k,\qquad y'=(1-k)x^{-k}x'\Rightarrow x'=\frac{y'x^k}{1-k},$$

και η ΔΕ γίνεται:

$$y'+(1-k)f(t)y+(1-k)g(t)=0.$$

Παρατηρούμε ότι πλέον είναι Γραμμική 1ης τάξης οπότε συνεχίζουμε ανάλογα.

Πρόβλημα 14 ***-Σελ 25 Ασκ 3(α)-*** *Να λύσετε τη ΔΕ* $tx'-x=x^2\log t$.

Λύση

Βλέπουμε ότι η συνάρτηση $x(t)=0$ είναι σταθερή λύση της ΔΕ. Για τις άλλες λύσεις και για $t\neq0$ η ΔΕ γίνεται:

$$x'-\frac{1}{t}x-\frac{\log t}{t}x^2=0,$$

η οποία είναι Bernoulli με $f(t)=-\frac{1}{t}$, $g(t)=-\frac{\log t}{t}$ και $k=2$. Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητών $y=x^{1-2}=\frac{1}{x}$, παίρνουμε ότι $x=x^2y$, $x'=-x^2y$ και η ΔΕ γίνεται:

$$-x^2y'-x^2\frac{1}{t}y+\frac{\log t}{t}x^2=0\Rightarrow y'+\frac{1}{t}y+\frac{\log t}{t}=0.$$

Η νέα ΔΕ είναι Γραμμική 1ης τάξης και η γενική της λύση δίνεται από τη σχέση:

$$y(t)=e^{-\int\frac{1}{t}dt}\Big(c-\int\frac{\log t}{t}e^{\int\frac{1}{t}dt}dt\Big)\Rightarrow y(t)=\frac{1}{t}\big(c-\int t\log t dt\big)\Rightarrow$$
$$y(t)=\frac{c-t\log t+t}{t},\ c\in\mathbb{R}.$$

Επιστρέφοντας στις προηγούμενες ματαβλητές μέσω της $y=\frac{1}{x}$ παίρνουμε:

$$x(t)=\frac{t}{c-t\log t+t},\ c\in\mathbb{R}.$$

□

Πρόβλημα 15 ***-Σελ 25 Ασκ 3(β)-*** *Να λύσετε τη ΔΕ* $x' + x = tx^3$.

Λύση
Η ΔΕ γράφεται στη μορφή:

$$x' + x - tx^3 = 0,$$

η οποία έχει σταθερή λύση τη $x(t) = 0$. Για τις άλλες λύσεις παρατηρούμε ότι η ΔΕ είναι Bernoulli με $f(t) = 1$ και $g(t) = -t$ και $k = 3$. Συνεχίζουμε κάνοντας αλλαγή μεταβλητών $y = x^{1-3} = \frac{1}{x^2}$ απ'οπου έχουμε ότι $x = x^3 y$ και $x' = -\frac{1}{2}x^3 y'$ και έτσι η ΔΕ γίνεται:

$$-\frac{1}{2}x^3 y' + x^3 y - tx^3 = 0 \Rightarrow y' - 2y + 2t = 0.$$

Η τελευταία είναι Γραμμική 1ης τάξης με γενική λύση την:

$$y(t) = e^{-\int -2dt}\Big(c - \int 2te^{\int -2dt}dt\Big) \Rightarrow y(t) = e^{2t}\Big(c - \int 2te^{-2t}dt\Big) \Rightarrow$$

$$y(t) = e^{2t}\Big(c + te^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-2t}\Big) \Rightarrow y(t) = ce^{2t} + t + \frac{1}{2},\ c \in \mathbb{R}.$$

Επιστρέφοντας στις προηγούμενες μεταβλητές μέσω της $y = \frac{1}{x^2}$ παίρνουμε τη γενική λύση του αρχικού προβλήματος:

$$x(t) = \sqrt{\frac{1}{ce^{2t} + t + \frac{1}{2}}},\ c \in \mathbb{R}.$$

□

2 Συστήματα ΣΔΕ

Θεωρούμε τα γραμμικά συστήματα ΔΕ της μορφής:

$$x'(t) = A(t)x + B(t),$$

όπου $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ το διάνυσμα των αγνώστων συναρτήσεων και $A : I \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $B : I \to \mathbb{R}^n$ συνεχείς.

2.1 Ομογενή Συστήματα ΣΔΕ

Είναι συστήματα ΣΔΕ της μορφής:

$$x'(t) = A(t)x(t).$$

Σχόλια:

- Ο χώρος λύσεων έχει διάσταση n, συνεπώς ψάχνουμε για n γρ. ανεξάρτητες λύσεις του συστήματος.

- Οι συναρτήσεις,

$$\phi_1(t) = \begin{pmatrix} \phi_{11}(t) \\ \phi_{12}(t) \\ \vdots \\ \phi_{1n}(t) \end{pmatrix}, \phi_2(t) = \begin{pmatrix} \phi_{21}(t) \\ \phi_{22}(t) \\ \vdots \\ \phi_{2n}(t) \end{pmatrix}, \dots, \phi_n(t) = \begin{pmatrix} \phi_{n1}(t) \\ \phi_{n2}(t) \\ \vdots \\ \phi_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

  αποτελούν βάση του χώρου λύσεων αν είναι *γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις του συστήματος*. Μία μέθοδος για τον έλεγχο της γραμμικής ανεξαρτησίας των λύσεων αυτών είναι η συνθήκη της ορίζουσας του Wronski,

$$W(t_0) = \begin{vmatrix} \phi_{11}(t_0) & \phi_{21}(t_0) & \cdots & \phi_{n1}(t_0) \\ \phi_{12}(t_0) & \phi_{22}(t_0) & \cdots & \phi_{n2}(t_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_{1n}(t_0) & \phi_{2n}(t_0) & \cdots & \phi_{nn}(t_0) \end{vmatrix} \neq 0,$$

  για κάποιο t_0 (οπότε και για κάθε t_0).

- Εάν οι συναρτήσεις $\Big\{\phi_1(t), \dots, \phi_n(t)\Big\}$ αποτελούν βάση του χώρου λύσεων του Ομογενούς Συστήματος $x'(t) = A(t)x(t)$ τότε η γενική λύση του θα είναι:

$$\phi(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \cdots + c_n\phi_n(t).$$

Πολύ χρήσιμο εργαλείο είναι και ο τύπος του Liouville, ειδικά στην περίπτωση που δεν γνωρίζουμε μία από τις συναρτήσεις $\phi_i(t)$ της βάσης του χώρου λύσεων του συστήματος.

$$W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^{t} TrA(s)ds},$$

όπου $TrA(t)$ είναι το ίχνος του πίνακα A (δηλαδή το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου του). Μία εφαρμογή του τύπου του Liouville θα δούμε στην αμέσως επόμενη άσκηση.

Πρόβλημα 16 ***-Σελ 34 Ασκ 1-*** *Να λύσετε το σύστημα των ΔΕ:*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{t} & \frac{2}{t} \\ \frac{-1}{t} & \frac{-5}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \ t > 0,$$

γνωρίζοντας ότι η $\phi_1(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{t^3} \\ \frac{-1}{t^3} \end{pmatrix}$, $t > 0$ *είναι λύση του.*

<u>*Λύση*</u>

Με δεδομένη μία ειδική λύση $\phi_1(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{t^3} \\ \frac{-1}{t^3} \end{pmatrix}$, $t > 0$ αρκεί να βρούμε μία επιπλέον ειδική λύση $\phi_2(t)$ που να είναι γρ. ανεξάρτητη προς την ϕ_1. Έστω $\phi_2(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$. Ζητάμε η ορίζουσα:

$$W(t) = \begin{vmatrix} \frac{2}{t^3} & x(t) \\ \frac{-1}{t^3} & y(t) \end{vmatrix},$$

να είναι μη-μηδενική $W(t_0) \neq 0$ για κάποιο $t_0 > 0$. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί επιλέγοντας $t = 1$ και $x(1) = 1$ και $y(1) = 0$ (δική μας η επιλογή) οπότε και θα έχουμε ότι $W(1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = 1$.

Υπολογίζουμε τώρα την ορίζουσα $W(t)$ στη γενική της περίπτωση με δύο διαφορετικούς τρόπους:

- Πρώτα από τον τύπο του Liouville παίρνουμε ότι:

$$W(t) = W(1)\exp\int_1^t Tr(A)(s)ds = 1 \cdot \exp\int_1^t -\frac{7}{s}ds = \frac{1}{t^7}.$$

- Με απευθείας υπολογισμό της ορίζουσας παίρνουμε ότι:

$$W(t) = \frac{2}{t^3}y(t) + \frac{1}{t^3}x(t).$$

Έτσι για τις συναρτήσεις $x(t), y(t)$ πρέπει να ισχύει ότι:

$$\frac{2}{t^3}y(t) + \frac{1}{t^3}x(t) = \frac{1}{t^7} \Rightarrow y(t) = \frac{1}{2t^4} - \frac{1}{2}x(t).$$

Η συνάρτηση $\phi_2(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ είναι λύση του αρχικού συστήματος οπότε οι $x(t)$, $y(t)$ ικανοποιούν επιπλέον τη σχέση:

$$x'(t) = -\frac{2}{t}x(t) + \frac{2}{t}y(t) \text{ (πρώτη γραμμή του συστήματος).}$$

Συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις παίρνουμε:

$$x'(t) + \frac{3}{t}x(t) - \frac{1}{t^5} = 0.$$

Η τελευταία είναι Γραμμική 1ης τάξης με $f(t) = \frac{3}{t}$ και $g(t) = -\frac{1}{t^5}$ και λύνοντας την ανάλογα (για $t > 0$) παίρνουμε ότι μία λύση της δίνεται από τη σχέση:

$$x(t) = -e^{-\int f(t)dt}\int g(t)e^{\int f(s)ds}dt \text{ (γιατί;)} = -\frac{1}{t^4}.$$

Για να συμπληρώσουμε την ειδική λύση $\phi_2(t)$ υπολογίζουμε και το $y(t)$ από τη σχέση:

$$y(t) = \frac{1}{2t^4} - \frac{1}{2}x(t) = \frac{1}{t^4}.$$

Έτσι έχουμε καταφέρει να βρούμε μία δεύτερη ειδική λύση $\phi_2(t)$ του συστήματος η οποία είναι γραμμικώς ανεξάρτητη της πρώτης ειδική λύση $\phi_1(t)$ (γιατί;), οπότε κάθε άλλη λύση του συστήματος είναι γραμμικός συνδυασμός των ειδικών αυτών λύσεων:

$$\phi(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) = c_1\begin{pmatrix} \frac{2}{t^3} \\ \frac{-1}{t^3} \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} \frac{-1}{t^4} \\ \frac{1}{t^4} \end{pmatrix}$$

□

2.2 Μη-Ομογενή Συστήματα ΣΔΕ

Είναι συστήματα ΣΔΕ της μορφής:

$$x'(t) = A(t)x + B(t).$$

Η λύση τους ανάγεται στην εύρεση της *Γενικής Λύσης του αντίστοιχου Ομογενούς Συστήματος* $\phi_{\text{ομο}}(t)$ και στον υπολογισμό *μίας Ειδικής Λύσης του μη-Ομογενούς* $\phi_{\text{ειδ}}(t)$. Το άθροισμα αυτών των δύο λύσεων είναι η *Γενική Λύση του μη-Ομογενούς Συστήματος*,

$$\phi(t) = \phi_{\text{ομο}}(t) + \phi_{\text{ειδ}}(t).$$

- Για την $\phi_{\text{ομο}}(t)$ εφαρμόζουμε τις τεχνικές της προηγούμενης παραγράφου. Βρίσκουμε δηλαδή $\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n(t)$ γρ. ανεξάρτητες ειδικές λύσεις του ομογενούς και παίρνουμε:

$$\phi_{\text{ομο}}(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \ldots + c_n\phi_n(t).$$

- Για τον υπολογισμό της $\phi_{\text{ειδ}}(t)$ θα χρησιμοποιήσουμε τη «διαίσθηση» μας ή την μέθοδο Lagrange (ή αλλιώς μέθοδος μεταβολής των σταθερών) η οποία έχει ως εξής:
  - Έχοντας λύσει το αντίστοιχο ομογενές σύστημα έχουμε στη διάθεση μας μία βάση $\Big\{\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots, \phi_n(t)\Big\}$ του χώρου λύσεων του ομογενούς.
  - Υπολογίζουμε τώρα τις συναρτήσεις:

$$u_i(t) = \int \frac{W(\phi_1, \phi_2, \ldots, \overbrace{B}^{i-\text{οστή}}, \ldots, \phi_n)(t)}{W(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_i, \ldots, \phi_n)(t)} dt$$

  για κάθε $i = 1, \ldots, n$.
  - Και παίρνουμε μία ειδική λύση του συστήματος,

$$\phi_{\text{ειδ}}(t) = u_1(t)\phi_1(t) + u_2(t)\phi_2(t) + \ldots + u_n(t)\phi_n(t).$$

Κλείνουμε παρατηρώντας ότι η γενική λύση του μη-ομογενούς συστήματος θα είναι η εξής:

$$\phi(t) = \phi_{\text{ομο}}(t) + \phi_{\text{ειδ}}(t).$$

Πρόβλημα 17 ***-Σελ 37 Ασκ 1***(α)- *Να λύσετε το σύστημα των ΔΕ:*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{t} & \frac{2}{t} \\ -\frac{1}{t} & -\frac{5}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}, \ t > 0.$$

Λύση
Το αντίστοιχο ομογενές σύστημα είναι:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{t} & \frac{2}{t} \\ -\frac{1}{t} & -\frac{5}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

το οποίο έχουμε ήδη λύσει (*Σελ 34 Ασκ 1*) και βρήκαμε ως γενική λύση να έχει την εξής:

$$\phi_{\text{ομο}}(t) = c_1 \begin{pmatrix} \frac{2}{t^3} \\ -\frac{1}{t^3} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{t^4} \\ \frac{1}{t^4} \end{pmatrix},$$

με

$$\phi_1(t) = \begin{pmatrix} \frac{2}{t^3} \\ -\frac{1}{t^3} \end{pmatrix}, \ \phi_2(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{t^4} \\ \frac{1}{t^4} \end{pmatrix}$$

να αποτελούν βάση του χώρου λύσεων του ομογενούς.
Μας λείπει τώρα μία ειδική λύση του μη-ομογενούς. Η μέθοδος Lagrange μας λέει ότι μία τέτοια ειδική λύση είναι η συνάρτηση,

$$\phi_{\text{ειδ}}(t) = u_1(t)\phi_1(t) + u_2(t)\phi_2(t),$$

όπου,

$$u_1(t) = \int \frac{W(B, \phi_2)(t)}{W(\phi_1, \phi_2)(t)} dt, \ u_2(t) = \int \frac{W(\phi_1, B)(t)}{W(\phi_1, \phi_2)(t)} dt,$$

με διάνυσμα μη-ομογενοποίησης,

$$B(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}.$$

Υπολογίζουμε τώρα,

$$W(\phi_1, \phi_2)(t) = \det \begin{pmatrix} 2/t^3 & -1/t^4 \\ -1/t^3 & 1/t^4 \end{pmatrix} = \frac{1}{t^7},$$

$$W(B, \phi_2)(t) = \det \begin{pmatrix} 1 & -1/t^4 \\ t & 1/t^4 \end{pmatrix} = \frac{t+1}{t^4},$$

$$W(\phi_1, B)(t) = \det \begin{pmatrix} 2/t^3 & 1 \\ -1/t^3 & t \end{pmatrix} = \frac{2t+1}{t^3}.$$

Με βάση τις ορίζουσες αυτές προκύπτει ότι οι συναρτήσεις που αντικαθιστούν τις σταθερές είναι οι εξής:

$$u_1(t) = \int \frac{W(B, \phi_2)(t)}{W(\phi_1, \phi_2)(t)} dt = \int t^3 + t^4 dt = \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{5}t^5,$$

$$u_2(t) = \int \frac{W(\phi_1, B)(t)}{W(\phi_1, \phi_2)(t)} dt = \int 2t^5 + t^4 dt = \frac{1}{3}t^6 + \frac{1}{5}t^5.$$

Και τώρα η μέθοδος Lagrange μας δίνει μία ειδική λύση του μη-ομογενούς συστήματος ΔΕ,

$$\begin{aligned} \phi_{\text{ειδ}}(t) &= u_1(t)\phi_1(t) + u_2(t)\phi_2(t) \\ &= (\frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{5}t^5) \begin{pmatrix} \frac{2}{t^3} \\ \frac{-1}{t^3} \end{pmatrix} + (\frac{1}{3}t^6 + \frac{1}{5}t^5) \begin{pmatrix} \frac{-1}{t^4} \\ \frac{1}{t^4} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3t}{10} + \frac{t^2}{15} \\ \frac{-t}{20} + \frac{2t^2}{15} \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Συνδυάζουμε τώρα τη γενική λύση του ομογενούς και την ειδική λύση του μη-ομογενούς και παίρνουμε την γενική λύση του μη-ομογενούς:

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \phi_{\text{ομο}}(t) + \phi_{\text{ειδ}}(t) \\ &= c_1 \begin{pmatrix} \frac{2}{t^3} \\ \frac{-1}{t^3} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \frac{-1}{t^4} \\ \frac{1}{t^4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3t}{10} + \frac{t^2}{15} \\ \frac{-t}{20} + \frac{2t^2}{15} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

3 Συστήματα με σταθερούς συντελεστές

Τα συστήματα με σταθερούς συντελεστές αποτελούν ειδική περίπτωση του προηγούμενου κεφαλαίου που μπορούν όμως να λυθούν με απλούστερες μεθόδους. Πέρα από τις σημειώσεις του μαθήματος [Αθα04], να μελετήσετε το Κεφάλαιο 7 στο βιβλίο [Τρα89] και την Παράγραφο 5.4 στο βιβλίο [Στρ95] για δύο εναλλακτικές μεθόδους λύσης των συστημάτων αυτών. Ιδιαίτερα μπορεί να δει κανείς την μέθοδο που παρουσιάζεται στον [Τρα89] η οποία βασίζεται στη λύση δευτέρου βαθμού ΔΕ με σταθερούς συντελεστές.

Στο Κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με την λύση του 3×3 συστήματος με σταθερούς συντελεστές και *διακεκριμένες πραγματικές ιδιοτιμές* καθώς επίσης με τη λύση του 2×2 συστήματος με σταθερούς συντελεστές σε *όλες του τις εκδοχές*, χρησιμοποιώντας τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A.

Τα μη-ομογενή συστήματα θα αντιμετωπίζονται με τον ίδιο τρόπο όπως και τα μη-ομογενή συστήματα μη σταθερών συντελεστών.

3.1 3×3 με διακεκριμένες πραγματικές ιδιοτιμές

Θεωρούμε ένα 3×3 σύστημα ΔΕ με σταθερούς συντελεστές. Υποθέτουμε ότι ο πίνακας A έχει 3 πραγματικές και άνισες μεταξύ τους ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Τότε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα v_1, v_2, v_3 θα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (γιατί;) και έτσι οι συναρτήσεις:

$$\phi_1(t) = e^{\lambda_1 t} v_1, \ \phi_2(t) = e^{\lambda_2 t} v_2, \ \phi_3(t) = e^{\lambda_3 t} v_3,$$

θα είναι γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις του Ομογενούς Συστήματος (γιατι;). Οπότε η *γενική λύση του ομογενούς συστήματος* θα είναι ο τυχόν γραμμικώς συνδυασμός τους (γιατί;)

$$\phi_{\text{ομο}}(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + c_3\phi_3(t).$$

Για το αντίστοιχο μη-ομογενές θα πρέπει να βρούμε επιπλέον μία *ειδική λύση* $\phi_{\text{ειδ}}(t)$ του *μη-ομογενούς* και ως *γενική λύση του μη-ομογενούς* θα έχουμε τη συνάρτηση:

$$\phi(t) = \phi_{\text{ομο}}(t) + \phi_{\text{ειδ}}(t).$$

Πρόβλημα 18 ***-Σελ 44 Ασκ 3-*** *Να λύσετε το σύστημα των ΔΕ:*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ \sin t \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Λύση

Το σύστημα είναι μη-ομογενές, οπότε η λύση μας θα σπάσει σε δύο μέρη. Αρχικά θα βρούμε τη γενική λύση του ομογενούς και έπειτα θα συνεχίσουμε με τον υπολογισμό μίας ειδικής λύσης του μη-ομογενούς. Η τελική μας γενική λύση του μη-ομογενούς θα είναι το άθροισμα των δύο αυτών λύσεων.

- Ξεκινάμε από το αντίστοιχο ομογενές:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

  για το οποίο βρίσκουμε χωρίς πράξεις (γιατί;) ότι οι ιδιοτιμές του είναι $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 2$ με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

  Έτσι η γενική λύση του ομογενούς συστήματος θα είναι:

$$\begin{aligned} \phi_{\text{ομο}}(t) &= c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + c_3 e^{\lambda_3 t} v_3 \\ &= c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_1 e^t + c_2 e^{-2t} + c_3 e^{2t} \\ -3c_2 e^{-2t} \\ c_3 e^{2t} \end{pmatrix} \qquad . \end{aligned}$$

- Περνάμε τώρα στον εντοπισμό μία ειδικής λύσης του μη-ομογενούς.
Πάντα μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο μεταβολής των σταθερών που είδαμε στην παράγραφο 2.2, ακριβώς όπως και στην προηγούμενη παράγραφο. Τώρα όμως θα κάνουμε κάτι διαφορετικό, το οποίο βασίζεται περισσότερο στη διαίσθηση μας. Έστω $\phi_{\text{ειδ}}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ η ζητούμενη ειδική λύση. Η ειδική λύση ικανοποιεί το σύστημα, δηλαδή:

$$\begin{aligned} x' &= x + y + z \\ y' &= -2y + t \\ z' &= 2z + \sin t \end{aligned}$$

Μπορούμε να βρούμε *μια ειδική* λύση με απλό τρόπο παρατηρώντας τη μορφή των παραπάνω ΔΕ, συγκεκριμένα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $y(t) = at + b$ και $z(t) = a\cos t + b\sin t$ και αντικαθιστώντας αντίστοιχα στη 2η και 3η εξίσωση να προσδιορίζουμε τις σταθερές a, b και να βρούμε μία ειδική λύση της μορφής:

$$\begin{aligned} z(t) &= -\tfrac{1}{5}\cos t - \tfrac{2}{5}\sin t \\ y(t) &= \tfrac{1}{2}t - \tfrac{1}{4} \\ x'(t) &= x + \tfrac{1}{2}t - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5}\cos t - \tfrac{2}{5}\sin t \end{aligned}$$

Μένει να εντοπίσουμε τη συνάρτηση $x(t)$ και κρίνοντας από τη μορφή της 3ης έξίσωσης εικάζουμε ότι $x(t) = a\cos t + b\sin t + ct + d$, αντικαθιστούμε και βρίσκουμε ότι:

$$x(t) = \frac{3}{10}\cos t + \frac{1}{10}\sin t - \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}.$$

Έτσι μία ειδική λύση του προβλήματος είναι η εξής:

$$\phi_{\text{ειδ}}(t) = \begin{pmatrix} \frac{3}{10}\cos t + \frac{1}{10}\sin t - \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{5}\cos t - \frac{2}{5}\sin t \end{pmatrix}.$$

Περνάμε τέλος στη γενική λύση του μη-ομογενούς:

$$\begin{aligned} \phi(t) &= \phi_{\text{ομο}}(t) + \phi_{\text{ειδ}}(t) \\ &= \begin{pmatrix} c_1e^t + c_2e^{-2t} + c_3e^{2t} \\ -3c_2e^{-2t} \\ c_3e^{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{10}\cos t + \frac{1}{10}\sin t - \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2}t - \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{5}\cos t - \frac{2}{5}\sin t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

3.2 2×2 πλήρης μελέτη

Θεωρούμε το 2×2 ομογενές σύστημα ΔΕ με σταθερούς συντελεστές:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Η λύση αυτού του συστήματος των ΔΕ εξαρτάται από το είδος των ιδιοτιμών του πίνακα A -για την ακρίβεια η λύση εξαρτάται από τη διαγωνιοποίηση του πίνακα A. Σύμφωνα με το Θεωμελειώδες

Θεώρημα της Άλγεβρας ο πίνακας των σταθερών συντελεστών $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ έχει πάντα δύο ιδιοτιμές (είτε δύο διακριτές πραγματικές είτε μία διπλή πραγματική είτε δύο συζυγείς μιγαδικές).

Γνωρίζουμε επιπλέον ότι η διάσταση του χώρου λύσεων του συστήματος θα είναι 2, οπότε αρκεί να βρούμε 2 γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις

$$\phi_1(t) = \begin{pmatrix} \phi_{11}(t) \\ \phi_{12}(t) \end{pmatrix},\ \phi_2(t) = \begin{pmatrix} \phi_{21}(t) \\ \phi_{22}(t) \end{pmatrix}$$

του συστήματος και τότε ο τυχόν γραμμικώς συνδυασμός τους θα είναι η γενική λύση του προβλήματος, δηλαδή

$$\phi(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t),\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Συγκεκριμένα διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- Αν ο A έχει δύο διακριτές πραγματικές ιδιοτιμές $\lambda_1 \neq \lambda_2$ με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα v_1, v_2 τότε οι ειδικές λύσεις του συστήματος:

  $$\phi_1(t) = e^{\lambda_1 t}v_1,\ \phi_2(t) = e^{\lambda_2 t}v_2$$

  είναι γραμμικώς ανεξάρτητες(γιατί;) οπότε η γενική λύση του συστήματος θα είναι:

  $$\phi(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}v_2.$$

- Αν ο A έχει μία διπλή πραγματική ιδιοτιμή λ με αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα v, έχουμε έτοιμη μία ειδική λύση του συστήματος, συγκεκριμένα:

  $$\phi_1(t) = e^{\lambda t}v.$$

  Για να βρούμε μία δεύτερη ειδική λύση εργαζόμαστε ως εξής:
  Λύνουμε το σύστημα ως προς u,

  $$(A - \lambda I)u = v.$$

  Ο ισχυρισμός είναι ότι η συνάρτηση:

  $$\phi_2(t) = te^{\lambda t}v + e^{\lambda t}u$$

  είναι λύση του συστήματος (γιατί;) και είναι γρ. ανεξάρτητη προς τη άλλη λύση $\phi_1(t)$(γιατί;). Τέλος η γενική λύση του συστήματος θα είναι:

  $$\phi(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t)$$

- Αν ο A έχει δύο μιγαδικές ιδιοτιμές (που θα είναι συζυγείς) $\lambda, \bar{\lambda}$ τότε τα ιδιοδιανύσματα τους θα είναι και αυτά συζυγή $v, \bar{v}$. Ακριβώς όπως και στην πρώτη περίπτωση η γενική λύση του προβλήματος θα είναι:

  $$\phi(t) = c_1 e^{\lambda t}v + c_2 e^{\bar{\lambda} t}\bar{v},$$

  επιλέγοντας τέλος τις σταθερές c_1, c_2 ως συζυγείς μιγαδικές απλοποιείται η $\phi(t)$ στο σημείο να μην εμπεριέχει την φανταστική μονάδα.

Αν τέλος το σύστημα μας δεν είναι ομογενές τότε πρέπει, επιπλέον, να βρούμε μία ειδική λύση του μη-ομογενούς οπότε το άθροισμα αυτών των λύσεων θα είναι η γενική λύση του μη-ομογενούς:

$$\phi(t) = \phi_{\text{ομο}}(t) + \phi_{\text{ειδ}}(t).$$

Πρόβλημα 19 *-Σελ 48 Ασκ 3(α)- Να λύσετε το σύστημα των ΔΕ:*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2e^t \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

Λύση

- Ξεκινάμε με το αντίστοιχο ομογενές.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Βρίσκουμε ότι ο πίνακας A έχει δύο διαφορετικές πραγματικές ιδιοτιμές $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Έχουμε έτσι δύο γρ. ανεξάρτητες λύσεις του ομογενούς:

$$\phi_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \phi_2(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

και τη γενική λύση του ομογενούς:

$$\phi_{\text{ομο}}(t) = c_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

- Συνεχίζουμε με την εύρεση μίας ειδικής λύσης του μη-ομογενούς με την μέθοδο μεταβολής των σταθερών.
Υπολογίζουμε τις συναρτήσεις:

$$u_1(t) = \int \frac{W(B, \phi_2)(t)}{W(\phi_1, \phi_2)(t)} dt = \int \frac{-2 - t^2 e^{-t}}{-2} dt = t - (\frac{1}{2}t^2 + t + 1)e^{-t},$$

$$u_2(t) = \int \frac{W(\phi_1, B)(t)}{W(\phi_1, \phi_2)(t)} dt = \int \frac{t^2 e^t - 2e^{2t}}{-2} dt = \frac{1}{2}e^{2t} - (\frac{1}{2}t^2 - t + 1)e^t.$$

Μία ειδική λύση του μη-ομογενούς θα είναι:

$$\phi_{\text{ειδ}}(t) = u_1(t)\phi_1(t) + u_2(t)\phi_2(t)$$

$$= e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Big(t - (\frac{1}{2}t^2 + t + 1)e^{-t}\Big) + e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Big(\frac{1}{2}e^{2t} - (\frac{1}{2}t^2 - t + 1)e^t\Big)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Big(te^t - \frac{1}{2}t^2 - t - 1\Big) + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Big(\frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}t^2 + t - 1\Big).$$

Κλείνουμε γράφοντας την γενική λύση του μη-ομογενούς:

$$\phi(t) = \phi_{\text{ομο}}(t) + \phi_{\text{ειδ}}(t)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Big((c_1 + t)e^t - \frac{1}{2}t^2 - t - 1\Big) + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Big(c_2 e^{-t} + \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}t^2 + t - 1\Big).$$

□

3.3 ΣΔΕ που μετατρέπονται σε σύστημα

Σε αυτή την παράγραφο θα ασχοληθούμε με μία τεχνική η οποία μετατρέπει διαφορικές εξισώσεις μεγαλύτερης από 1ης τάξης με σταθερούς συντελεστές σε αντίστοιχης τάξης συστήματα. Η βασική ιδέα είναι να προσθέσουμε νέες μεταβλητές (υπό την έννοια των αγνώστων συναρτήσεων).

Θα ασχοληθούμε με ΔΕ μεγαλύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές όπου η μετατροπή τους σε σύστημα θα μας δίνει ένα 2×2 μη-ομογενές σύστημα με σταθερούς συντελεστές ή ένα 3×3 μη-ομογενές σύστημα με σταθερούς συντελεστές και διακεκριμένες πραγματικές ιδιοτιμές.

- Αν η ΔΕ είναι δεύτερης τάξης (δηλαδή εμφανίζονται y, y', y'') τότε θέτουμε $y' = z$. Αντικαθιστούμε στην αρχική ΔΕ όπου και πλέον εμφανίζονται y, z, z' και λύνουμε ως προς z'. Το σύστημα που θα προκύψει θα έχει για πρώτη γραμμή την ΔΕ $y' = z$ και ως δεύτερη τη ΔΕ που πήραμε όταν λύσαμε ως προς z' την αρχική ΔΕ.

- Αν η ΔΕ είναι τρίτης τάξης (δηλαδή εμφανίζονται y, y', y'', y''') τότε θέτουμε $y' = z$. Αντικαθιστούμε στη ΔΕ και εμφανίζονται πλέον y, z, z', z''. Προχωράμε σε μία ακόμη αντικατάσταση $z' = w$. Αντικαθιστούμε στη ΔΕ και εμφανίζονται πλέον y, z, w, w' οπότε και λύνουμε ως προς w'. Το σύστημα που θα προκύψει θα έχει για πρώτη γραμμή την ΔΕ $y' = z$ ως δεύτερη γραμμή τη ΔΕ $z' = w$ και ως τρίτη γραμμή τη ΔΕ που πήραμε όταν λύσαμε ως προς w' την αρχική ΔΕ.

Έχοντας εκτελέσει τις παραπάνω διαδικασίες η ΔΕ έχει μετατραπεί σε σύστημα ΔΕ μορφής που έχουμε μελετήσει στις προηγούμενες παραγράφους και η λύση του οποίου περιλαμβάνει την αρχικά ζητούμενη συνάρτηση $y(x)$. Στις ασκήσεις που ακολουθούν θα οδηγήσουμε τη ΔΕ εξίσωση μέχρι το σημείο όπου και εμφανίζεται το αντίστοιχο σύστημα.

Πρόβλημα 20 *Να λύσετε το σύστημα τις παρακάτω ΔΕ μεγαλύτερης τάξης αφού τις μετατρέψετε σε συστήματα ΔΕ:*

1. $y'' - y = x \sin x$
2. $y'' - 6y' + 9y = 10 \cos x$
3. $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x$
4. $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 25x \sin x$

<u>*Λύση*</u>

1. Στη ΔΕ $y'' - y = x \sin x$ θέτουμε
$$y' = z,$$
και παίρνουμε $z' - y = x \sin x$, λύνουμε ως προς z' και προκύπτει ότι
$$z' = y + x \sin x.$$
Η αρχική ΔΕ γράφεται ως σύστημα:
$$\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x \sin x \end{pmatrix}.$$
Το σύστημα αυτό είναι ένα 2×2 μη-ομογενές σύστημα με δύο διαφορετικές πραγματικές ιδιοτιμές $-1, 1$.
Η λύση της ΔΕ είναι:
$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^x - \frac{1}{2}(\cos x + x \sin x).$$

2. Στη ΔΕ $y'' - 6y' + 9y = 10\cos x$ θέτουμε

$$y' = z,$$

και παίρνουμε $z' - 6z + 9y = 10\cos x$, λύνουμε ως προς z' και προκύπτει ότι

$$z' = -9y + 6z + 10\cos x.$$

Η αρχική ΔΕ γράφεται ως σύστημα:

$$\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 10\cos x \end{pmatrix}.$$

Το σύστημα αυτό είναι ένα 2×2 μη-ομογενές σύστημα με μία διπλή ιδιοτιμή 3.
Η λύση της ΔΕ είναι:

$$y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x} + \frac{4}{5}\cos x - \frac{3}{5}\sin x.$$

3. Στη $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x$ θέτουμε

$$y' = z,$$

και παίρνουμε $z' - 2z + 2y = e^x \sin x$, λύνουμε ως προς z' και προκύπτει ότι

$$z' = -2y + 2z + e^x \sin x.$$

Η αρχική ΔΕ γράφεται ως σύστημα:

$$\begin{pmatrix} y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^x \sin x \end{pmatrix}.$$

Το σύστημα αυτό είναι ένα 2×2 μη-ομογενές σύστημα με δύο συζηγείς μιγαδικές ιδιοτιμές $1 + i, 1 - i$.
Η λύση της ΔΕ είναι:

$$y(x) = c_1 e^x \sin x + c_2 e^x \cos x + \frac{1}{2} e^x (\sin x + x\cos x).$$

4. Στη ΔΕ $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 25x \sin x$ θέτουμε

$$y' = z,$$

και παίρνουμε $z'' - 6z' + 11z - 6y = 25x \sin x$, θέτουμε επιπλέον

$$z' = w,$$

και παίρνουμε $w' - 6w + 11z - 6y = 25x \sin x$, λύνουμε ως προς w' και προκύπτει ότι

$$w' = 6y - 11z + 6w + 25x \sin x.$$

Η αρχική ΔΕ γράφεται ως σύστημα:

$$\begin{pmatrix} y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 25x \sin x \end{pmatrix}.$$

Το σύστημα αυτό είναι ένα 3×3 μη-ομογενές σύστημα με τρεις διαφορετικές πραγματικές ιδιοτιμές $1, 2, 3$.
Η λύση της ΔΕ είναι:

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{3x} - \frac{5}{2} x \cos x - 3 \cos x + 2 \sin x).$$

□

Για οποιεσδήποτε παρατηρήσεις ή διορθώσεις παρακαλούμε να επικοινωνήσετε ηλεκτρονικά στις διευθύνσεις sfaknikj@math.uoc.gr ή athanako@math.uoc.gr.

Αναφορές

[Στρ95] Gilbert Strang, *Γραμμική Άλγεβρα και Εφαρμογές*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 1995.

[Τρα89] Στέφανος Τραχανάς, *Διαφορικές Εξισώσεις Ι*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 1989.

[Αθα04] Κωνσταντίνος Αθανασόπουλος, *Απειροστικός Λογισμός ΙΙΙ (Διαφορικές Εξισώσεις)*, Σημειώσεις Μαθήματος, 2004.