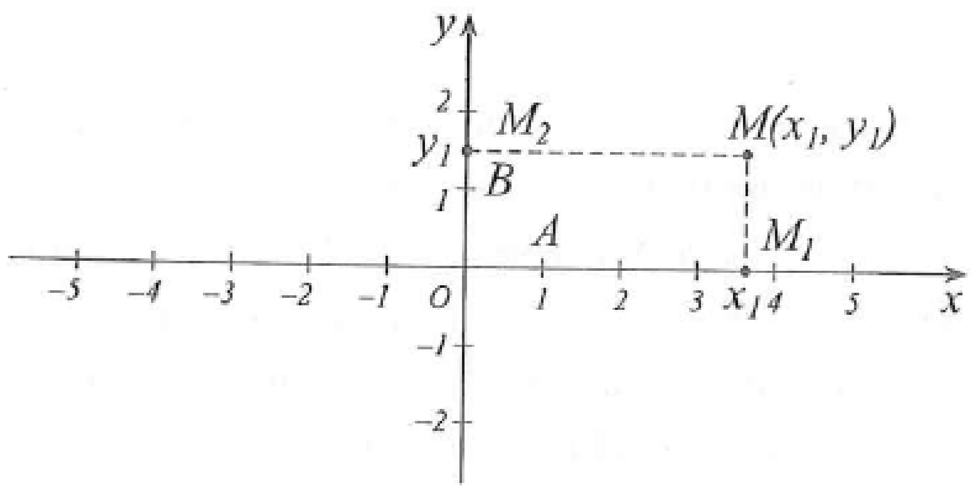
Αναλυτική Γεωμετρία

Συστήματα συντεταγμένων

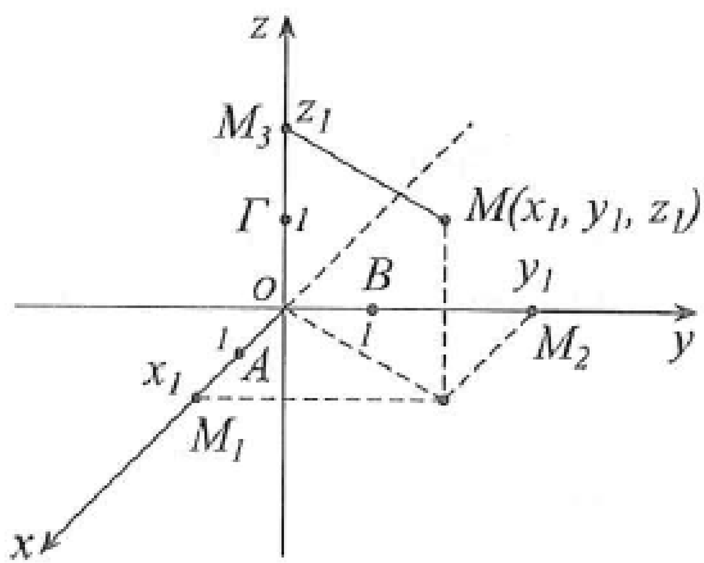
Στο επίπεδο

I. Στο επίπεδο $\mathbb{R}^2$ θεωρούμε δύο κάθετες ευθείες $x'x$ και $y'y$ που τέμνονται στο σημείο O. Τις ευθείες αυτές τις κάνουμε *άξονες* παίρνοντας και για τις δύο ως αρχή το O, όπου αντιστοιχούμε το μηδέν, και καθορίζοντας τις μονάδες πάνω σ' αυτές με τα σημεία A στην ευθεία $x'x$ και B στην ευθεία $y'y$.



Στο χώρο

ΙΙ. Θεωρούμε στο χώρο $\mathbb{R}^3$ τρεις ευθείες $x'x$, $y'y$, $z'z$ που περνάνε από το ίδιο σημείο O και είναι κάθετες μεταξύ τους ανά δύο. Αυτές τις τρεις ευθείες τις κάνουμε άξονες, παίρνοντας ως αρχή και στις τρεις ευθείες το κοινό σημείο τους O και για μονάδες τα σημεία A, B, Γ στις ευθείες $x'x$, $y'y$, $z'z$ αντίστοιχα.



στο επίπεδο (R^2) | στο χώρο (R^3)

Απόσταση δύο σημείων:

δύο σημεία: $M(x_1,y_1)$ και $N(x_2,y_2)$ στο επίπεδο

$$d(M,N)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

Δύο σημεία: $M(x_1,y_1,z_1)$, $N(x_2,y_2,z_2)$ στο χώρο

$$d(M,N)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$

στο επίπεδο (R^2)

ευθεία

Κάθε εξίσωση στο επίπεδο της μορφής: **Ax +By + Γ = 0** με $A \neq 0$ ή $B \neq 0$

παριστάνει μία ευθεία και αντίστροφα.

Συντελεστής διεύθυνσης ευθείας: $\lambda = -\frac{A}{B}$ εκφράζει την εφαπτομένη της γωνίας

που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα xx'

η ευθεία είναι: παράλληλη στο διάνυσμα: $\vec{\delta} = (B, -A)$

και κάθετη στο διάνυσμα: $\vec{n} = (A, B)$

δύο ευθείες ε_1, ε_2 είναι : παράλληλες: $\boldsymbol{\lambda_1 = \lambda_2}$ & κάθετες: $\boldsymbol{\lambda_1 \lambda_2 = -1}$

Απόσταση του σημείου Μ (x_o,y_o) από ευθεία: $$\boxed{d(M_0, \varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$$

Αναλυτική Γεωμετρία

στο επίπεδο (R^2)

Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται
από δύο σημεία $M_1(x_1,y_1)$ και $M_2(x_2,y_2)$ είναι:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ενώ η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται
από σημείο $M_1(x_1,y_1)$ και έχει
συντελεστή διεύθυνσης λ είναι:

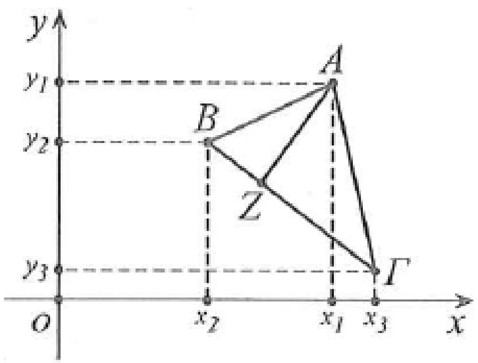
$$y-y_1=\lambda(x-x_1)$$

Τρία σημεία του επιπέδου
$M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$ και $M_3(x_3,y_3)$
βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία όταν ισχύει:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Εμβαδόν τριγώνου
με κορυφές τα σημεία Α (x_1,y_1), Β (x_2,y_2)
και Γ (x_3,y_3) είναι:

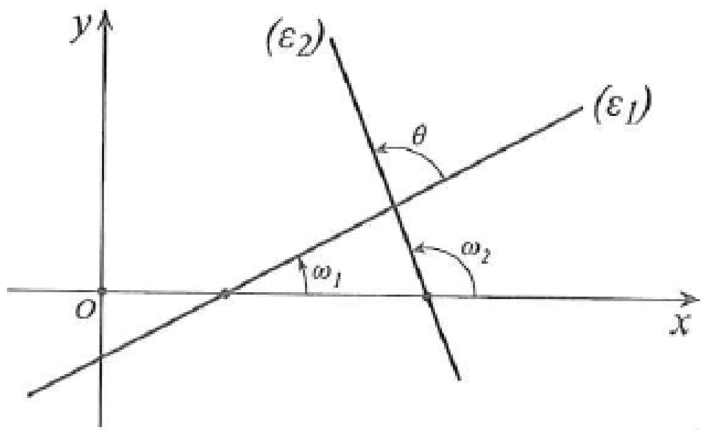
$$E=\frac{1}{2}\overline{|AZ|}\,\overline{|B\Gamma|}=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{matrix}\right\|$$



στο επίπεδο (R^2)

Γωνία δύο ευθειών:

Αν ω_1 και ω_2 είναι οι γωνίες κλίσης δύο ευθειών τότε θα είναι $\theta = \omega_2 - \omega_1$



$$\varepsilon\varphi\theta = \varepsilon\varphi(\omega_2 - \omega_1) = \frac{\varepsilon\varphi\omega_2 - \varepsilon\varphi\omega_1}{1 + \varepsilon\varphi\omega_1\, \varepsilon\varphi\omega_2} = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}$$

Αναλυτική Γεωμετρία

στο χώρο (R^3)

επίπεδο

Κάθε εξίσωση της μορφής: **Αx +By + Γz + Δ = 0**

με τους συντελεστές Α, Β, Γ, όχι όλους 0 παριστάνει ένα επίπεδο και αντίστροφα.

Τρία σημεία του χώρου $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ και $M_3(x_3,y_3,z_3)$, τα οποία δεν είναι συνευθειακά ορίζουν ένα επίπεδο με εξίσωση:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

δύο επίπεδα είναι:

παράλληλα όταν: $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{\Gamma_1}{\Gamma_2} = \lambda$

κάθετα όταν: $A_1A_2 + B_1B_2 + \Gamma_1\Gamma_2 = 0$

γωνία δύο επιπέδων: $$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + \Gamma_1\Gamma_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + \Gamma_1^2}\,\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + \Gamma_2^2}}$$

στο χώρο (R^3)

επίπεδο

απόσταση του επίπεδου Αx +Βy + Γz + Δ = 0 από το σημείο A_o (x_o,y_o,z_o)

$$\delta = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma z_0 + \Delta|}{\sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2}}$$

το διάνυσμα η(Α,Β,Γ) είναι κάθετο στο επίπεδο.

η ευθεία στο χώρο

η εξίσωση μίας ευθείας στο χώρο ορίζεται ως η τομή δύο επιπέδων και εκφράζεται με τις εξισώσεις δύο επιπέδων:

Αx + Βy + Γz + Δ = 0

Α΄x +Β΄y + Γ΄z + Δ΄ = 0

η εξίσωση μίας ευθείας που διέρχεται από δύο σημεία M_1 (x_1,y_1,z_1) και M_2(x_2,y_2,z_2) είναι:

$$\frac{x - x_1}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{z - z_1}{z_1 - z_2}$$

στο επίπεδο (R^2) — στο χώρο (R^3)

κύκλος — **σφαίρα**

λέγεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ που ισαπέχουν από ένα σταθερό σημείο Κ.

εξίσωση:

κέντρο: Κ (x_o,y_o) — Κ (x_o,y_o,z_o)

$$(x-x_o)^2+(y-y_o)^2=\rho^2$$

$$(x-x_o)^2+(y-y_o)^2+(z-z_o)^2=\rho^2$$

γενική μορφή εξίσωσης:

$$x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0$$

$$x^2+y^2+z^2+Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$$

όπου: $A^2+B^2-4\Gamma>0$

παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2}\right)$

και ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}$

$A^2+B^2+\Gamma^2-4\Delta>0$

παριστάνει σφαίρα με κέντρο $K\left(-\frac{A}{2},\ -\frac{B}{2},\ -\frac{\Gamma}{2}\right)$

και ακτίνα $\rho=\frac{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2-4\Delta}}{2}$

εφαπτόμενη ευθεία σε κύκλο:

στο σημείο: $A(x_1,y_1)$

$$xx_1+yy_1=\rho^2$$

επίπεδο σε σφαίρα στο σημείο: Α (x_1,y_1,z_1)

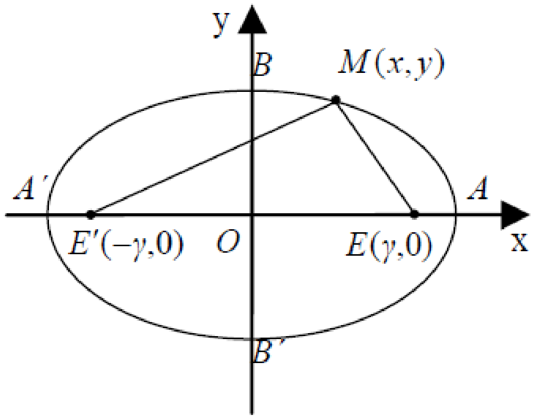
$$xx_1+yy_1+zz_1+\frac{A}{2}(x+x_1)+\frac{B}{2}(y+y_1)+\frac{\Gamma}{2}(z+z_1)+\Delta=0$$

στο επίπεδο (R^2)

έλλειψη

εξίσωση:

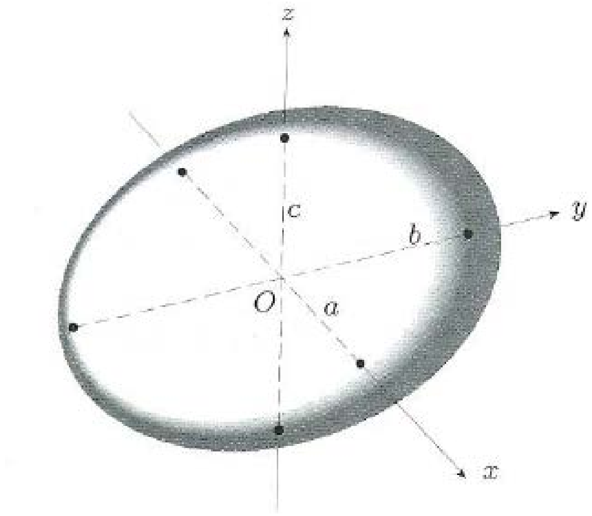
$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1, \quad \text{όπου} \quad \beta=\sqrt{\alpha^2-\gamma^2}$$



στο χώρο (R^3)

ελλειψοειδές

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



στο επίπεδο (R^2)

παραβολή

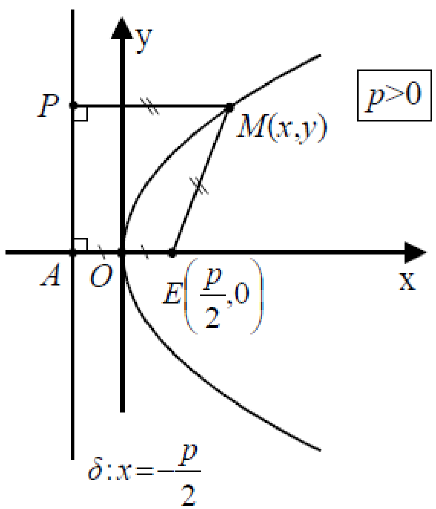
εξίσωση:

$$y^2 = 2px$$

παριστάνει παραβολή

με κέντρο $E\left(\frac{p}{2},0\right)$

και διευθετούσα $\delta : x = -\frac{p}{2}$

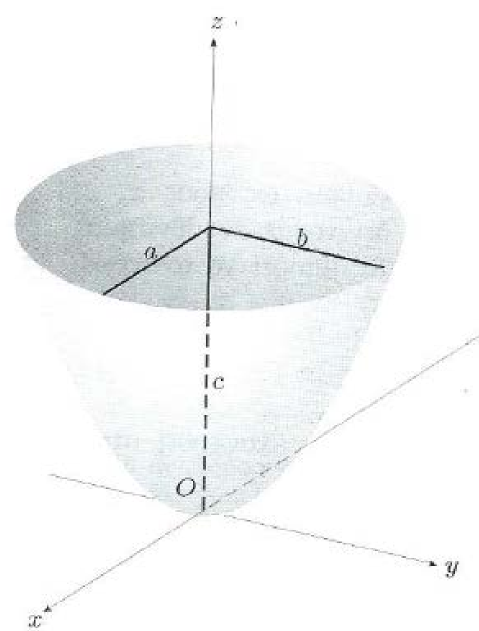


στο χώρο (R^3)

παραβολοειδές

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

καλείται ελλειπτικό παραβολοειδές



στο επίπεδο (R^2)

παραβολή

εξίσωση εφαπτόμενης της παραβολής:

στο σημείο $M_1(x_1, y_1)$

$$yy_1 = p(x + x_1)$$

αν μία παραβολή έχει εξίσωση:

$$x^2 = 2py$$

τότε η εφαπτόμενη είναι:

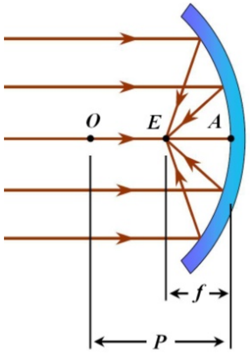
$$xx_1 = p(y + y_1)$$

στο χώρο (R^3)

παραβολοειδές

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

αν θέσουμε α=b τότε το παραβολοειδές ονομάζεται κυκλικό παραβολοειδές ή παραβολοειδές εκ περιστροφής



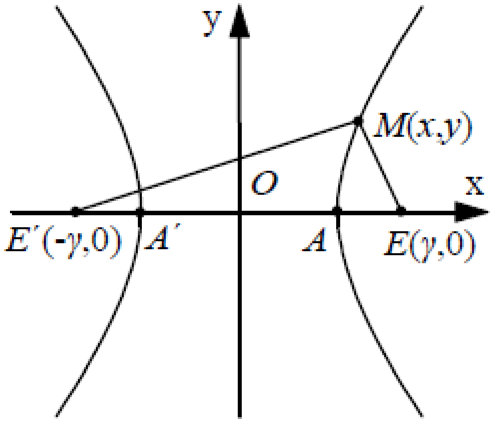
στο επίπεδο (R^2)

υπερβολή

η εξίσωση της υπερβολής C με εστίες τα σημεία $E'(-\gamma,0)$, $E(\gamma,0)$ και σταθερή διαφορά 2α είναι

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1$$

όπου $\beta=\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}$



εκκεντρότητα

$$\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}>1$$

εφαπτομένη

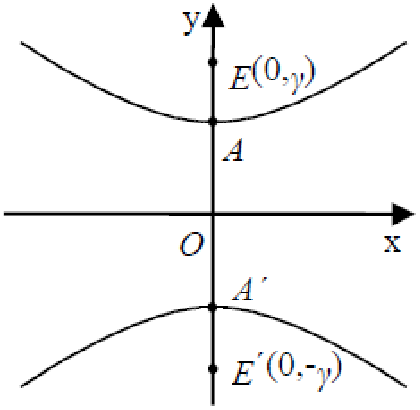
$M_1(x_1,y_1)$

$$\frac{xx_1}{\alpha^2}-\frac{yy_1}{\beta^2}=1$$

- Αν τώρα πάρουμε σύστημα συντεταγμένων Oxy με άξονα των y την ευθεία $E'E$ και άξονα των x τη μεσοκάθετο του $E'E$ και εργαστούμε όπως πριν, θα βρούμε ότι η εξίσωση της υπερβολής C είναι:

$$\frac{y^2}{\alpha^2}-\frac{x^2}{\beta^2}=1$$

όπου $\beta=\sqrt{\gamma^2-\alpha^2}$



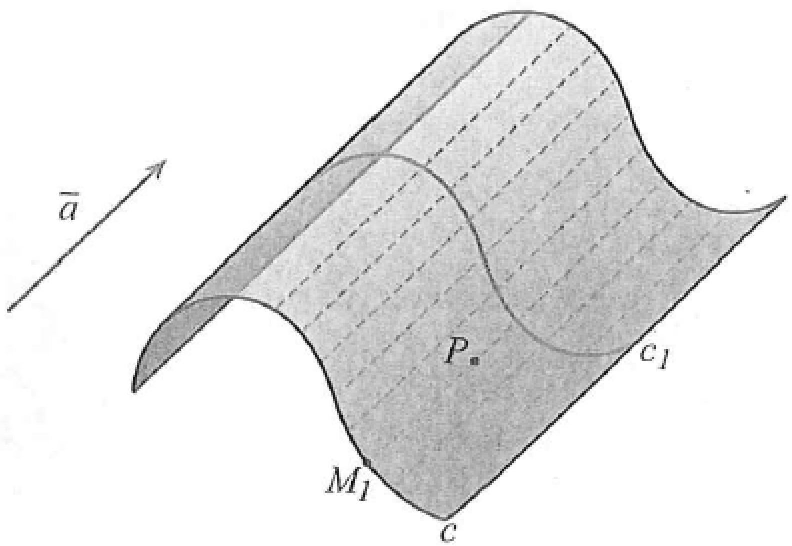
Κυλινδρικές Επιφάνειες

Μια επιφάνεια λέγεται *κυλινδρική* όταν παράγεται από τη συνεχή κίνηση μιας ευθείας έτσι ώστε:

i) η ευθεία να έχει σταθερή διεύθυνση $\bar{a}$,

ii) να συναντά δοσμένη καμπύλη c.

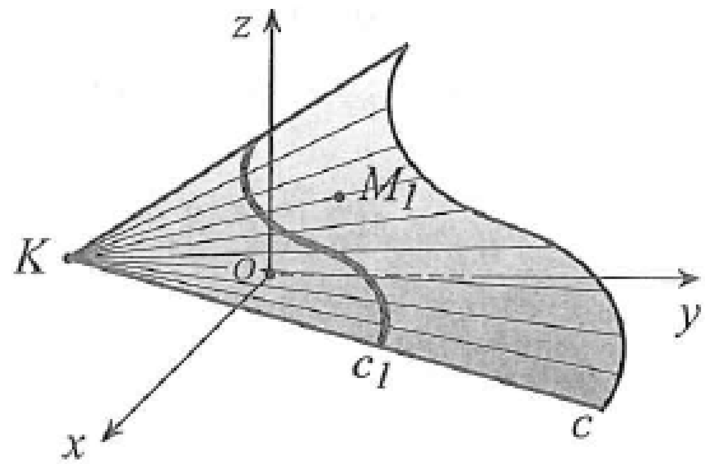
Κάθε ευθεία που βρίσκεται επάνω στην επιφάνεια και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\bar{a}$ λέγεται *γενέτειρα* της κυλινδρικής επιφάνειας, ενώ η δοσμένη καμπύλη c λέγεται *οδηγός καμπύλη*.



Κωνικές Επιφάνειες

Μία επιφάνεια λέγεται *κωνική* όταν παράγεται από τη συνεχή κίνηση μιας ευθείας η οποία: i) περνά από σταθερό σημείο K και ii) συναντά μια δοσμένη καμπύλη c.

Αυτή η ευθεία λέγεται *γενέτειρα*, το σταθερό σημείο K *κορυφή* και η σταθερή καμπύλη c *οδηγός καμπύλη*.



Ασκήσεις

⇨ Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο $A(-2,3)$ και είναι κάθετη στην ευθεία $2x-3y+6=0$. Ποιο είναι το σημείο τομής των δύο ευθειών;

- Η ευθεία $2x-3y+6=0$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\frac{2}{3}$. Άρα η ζητουμένη ευθεία, που είναι κάθετη σ'αυτήν, θα έχει συντελεστή διεύθυνσης $-\frac{3}{2}$ και, επειδή διέρχεται από το σημείο $A(-2,3)$, θα έχει εξίσωση $y-3=-\frac{3}{2}(x+2)$, δηλαδή $y=-\frac{3}{2}x$.
- Οι συντεταγμένες του σημείου τομής των δύο ευθειών είναι η λύση του συστήματος $\begin{cases} y=-\frac{3}{2}x \\ 2x-3y+6=0 \end{cases}$, που είναι το ζεύγος $\left(-\frac{12}{13}, \frac{18}{13}\right)$.

⇨ Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών $2x-5y+3=0$ και $x-3y-7=0$ και είναι κάθετη στην ευθεία $4x+y=1$.

Οι συντεταγμένες του σημείου τομής των δύο ευθειών είναι η λύση του συστήματος $\begin{cases} 2x-5y+3=0 \\ x-3y-7=0 \end{cases}$, που είναι το ζεύγος $(-44,-17)$.

Η ευθεία $4x+y=1$ έχει συντελεστή διεύθυνσης -4. Άρα, η ζητούμενη θα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\frac{1}{4}$ και, επειδή διέρχεται από το σημείο $A(-44,-17)$, θα έχει εξίσωση $y+17=\frac{1}{4}(x+44)$, δηλαδή $y=\frac{1}{4}x-6$.

⇨ Να βρείτε την οξεία γωνία την οποία σχηματίζουν οι ευθείες $y=\mu x$ και $(1+\mu)x=(1-\mu)y$.

εφαρμογή του τύπου: $$\varepsilon\varphi\theta=\varepsilon\varphi(\omega_2-\omega_1)=\frac{\varepsilon\varphi\omega_2-\varepsilon\varphi\omega_1}{1+\varepsilon\varphi\omega_1\,\varepsilon\varphi\omega_2}=\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}$$

⇨ Να βρεθούν οι εξισώσεις των διχοτόμων δύο τεμνόμενων ευθειών

$$A_1x+B_1y+\Gamma_1=0,\qquad A_2x+B_2y+\Gamma_2=0,\qquad \text{με}\quad \frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}.$$

Αν $M(x,y)$ είναι τυχαίο σημείο της διχοτόμου θ' απέχει εξίσου από τις δύο ευθείες, οπότε, από τον τύπο (2), θα έχουμε

$$\frac{|A_1x+B_1y+\Gamma|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\frac{|A_2x+B_2y+\Gamma_2|}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}. \qquad (3)$$

Από τη σχέση (3) παίρνουμε τις δύο εξισώσεις των διχοτόμων $$\frac{A_1x+B_1y+\Gamma}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\pm\frac{A_2x+B_2y+\Gamma_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$$

Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνάει από το κέντρο του κύκλου $x^2+y^2-2x+4y-1=0$ και είναι κάθετη προς την ευθεία $3x-y+2=0$.

Ως γνωστόν το κέντρο του κύκλου $x^2+y^2-2x+4y-1=0$ είναι $K(1,-2)$.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της κάθετης της ευθείας $3x-y+2=0$ είναι $\lambda=-\frac{1}{3}$, οπότε η εξίσωση της ζητούμενης ευθείας είναι

$$y+2=-\frac{1}{3}(x-1) \ \Rightarrow \ x+3y+5=0 .$$

Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

Όταν έχει κέντρο $K(0,1)$ και διέρχεται από το σημείο $A(\sqrt{3},0)$

(i) Η ακτίνα του κύκλου είναι $\rho=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$ και επομένως η εξίσωση του είναι $x^2+(y-1)^2=2^2$.

) Όταν διέρχεται από τα σημεία $A(4,0)$ και $B(8,0)$ και έχει το κέντρο του στην ευθεία $y=x$

(iv) Αν $K(x_0,y_0)$ το κέντρο του κύκλου, τότε ισχύουν:

$$y_0=x_0 \quad \text{και} \quad (x_0-4)^2+(y_0-0)^2=(x_0-8)^2+(y_0-0)^2$$

Έτσι έχουμε το σύστημα: $\begin{cases} x_0=y_0 \\ (x_0-4)^2=(x_0-8)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=6 \\ y_0=6 \end{cases}$

Επομένως, ο κύκλος έχει κέντρο το σημείο $K(6,6)$ και ακτίνα $\rho=KA=\sqrt{(6-4)^2+(6-0)^2}=\sqrt{2^2+6^2}=2\sqrt{10}$.

Άρα, η εξίσωση του κύκλου είναι : $(x-6)^2+(y-6)^2=40$.

⇨ Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y=\frac{1}{4}x^2$ σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

(i) Όταν είναι παράλληλη στην ευθεία $y=x+1$

(ii) Όταν είναι κάθετη στην ευθεία $y=-2x$

(iii) Όταν διέρχεται από το σημείο $A(0,-1)$.

Η εξίσωση της παραβολής γράφεται $x^2=2\cdot 2\cdot y$ και επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης ε στο σημείο της $M_1(x_1,y_1)$ είναι

$$xx_1=2(y+y_1),\quad \text{οπότε}\quad y=\frac{x_1}{2}\cdot x-y_1 .$$

(i) Επειδή η ε είναι παράλληλη στην ευθεία $y=x+1$, έχουμε $\frac{x_1}{2}=1$, οπότε $x_1=2$. Όμως $x_1^2=4y_1$. Επομένως $y_1=1$ και η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y=x-1$.

Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y=\frac{1}{4}x^2$ σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

(i) Όταν είναι παράλληλη στην ευθεία $y=x+1$

(ii) Όταν είναι κάθετη στην ευθεία $y=-2x$

(iii) Όταν διέρχεται από το σημείο $A(0,-1)$.

Η εξίσωση της παραβολής γράφεται $x^2=2\cdot 2\cdot y$ και επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης ε στο σημείο της $M_1(x_1,y_1)$ είναι

$$xx_1=2(y+y_1),\quad \text{οπότε}\quad y=\frac{x_1}{2}\cdot x-y_1.$$

(ii) Επειδή η ε είναι κάθετη στην ευθεία $y=-2x$, έχουμε $\frac{x_1}{2}(-2)=-1$, οπότε $x_1=1$. Όμως $x_1^2=4y_1$. Επομένως $y_1=\frac{1}{4}$ και η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$.

⇨ Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y=\frac{1}{4}x^2$ σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

(i) Όταν είναι παράλληλη στην ευθεία $y=x+1$

(ii) Όταν είναι κάθετη στην ευθεία $y=-2x$

(iii) Όταν διέρχεται από το σημείο $A(0,-1)$.

Η εξίσωση της παραβολής γράφεται $x^2=2\cdot 2\cdot y$ και επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης ε στο σημείο της $M_1(x_1,y_1)$ είναι

$$xx_1=2(y+y_1),\quad \text{οπότε}\quad y=\frac{x_1}{2}\cdot x-y_1 .$$

(iii) Επειδή η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο $A(0,-1)$, έχουμε $-1=-y_1$, οπότε $y_1=1$. Όμως $x_1^2=4y_1$. Επομένως $x_1^2=4$, οπότε $x_1=2$ ή $x_1=-2$. Άρα υπάρχουν δύο σημεία επαφής, τα $M_1(2,1)$ και $M_2(-2,1)$, και οι αντίστοιχες εφαπτόμενες έχουν εξισώσεις $y=x-1$ και $y=-x-1$ αντιστοίχως.

Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου:
που περνά από τα σημεία $M_1(2, 3, 1)$, $M_2(-1, 0, 2)$, $M_3(3, 1, 1)$

η εξίσωση του επιπέδου είναι

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad x\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 2x + y + 9z - 16 = 0 .$$

Να βρεθούν οι εξισώσεις των επιπέδων τα οποία διέρχονται από τα σημεία $M_1(1,\ 3,\ 0)$, $M_2(4,\ 0,\ 0)$ και σχηματίζουν γωνία $\theta = 30^\circ$ με το επίπεδο $x + y + z - 1 = 0$.

Αν είναι $Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$ ένα τέτοιο επίπεδο, επειδή περνάει από τα σημεία $M_1(1,\ 3,\ 0)$, $M_2(4,\ 0,\ 0)$ θα έχουμε

$$
\begin{aligned}
A\cdot 1 + B\cdot 3 + \Gamma\cdot 0 + \Delta = 0 \quad &\Rightarrow \quad A + 3B + \Delta = 0 \\
A\cdot 4 + B\cdot 0 + \Gamma\cdot 0 + \Delta = 0 \quad &\Rightarrow \quad 4A + \Delta = 0
\end{aligned}
\quad \Rightarrow \quad A = -\frac{\Delta}{4}, \qquad B = -\frac{\Delta}{4}
$$

Τα διανύσματα $\overline{n}_1(A,\ B,\ \Gamma)$ και $\overline{n}_2(1,\ 1,\ 1)$ είναι κάθετα προς τα επίπεδα $Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$, $x + y + z - 1 = 0$, αντίστοιχα.

Από τον τύπο της γωνίας δύο επιπέδων έχουμε

$$
\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{A\cdot 1 + B\cdot 1 + \Gamma\cdot 1}{\sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2}\,\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{A + B + \Gamma}{\sqrt{3}\,\sqrt{A^2 + B^2 + \Gamma^2}}
$$

και επειδή $\theta = (\widehat{\overline{n}_1, \overline{n}_0}) = 30^\circ$, παίρνουμε

$$
(\sigma\upsilon\nu 30^\circ)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{(A + B + \Gamma)^2}{3(A^2 + B^2 + \Gamma^2)} \qquad \Gamma = \frac{(-2 \pm \sqrt{27})}{5}\Delta
$$

Να βρεθούν οι εξισώσεις των επιπέδων τα οποία διέρχονται από τα σημεία $M_1(1, 3, 0)$, $M_2(4, 0, 0)$ και σχηματίζουν γωνία $\theta = 30^\circ$ με το επίπεδο $x + y + z - 1 = 0$.

Επομένως, οι εξισώσεις των ζητούμενων επιπέδων είναι

$$-\frac{\Delta}{4}x - \frac{\Delta}{4}y + \frac{(-2 \pm \sqrt{27})}{5}\Delta z + \Delta = 0$$

$$\Rightarrow \quad [5x + 5y - 4(-2 \pm \sqrt{27})z - 20]\,\Delta = 0$$

$$\Rightarrow \quad 5x + 5y - 4(-2 \pm \sqrt{27})z - 20 = 0 \,, \quad \text{επειδή} \quad \Delta \neq 0$$

για $\Delta = 0$ το επίπεδο περνάει από την αρχή $(0, 0, 0)$

$$A = -\frac{\Delta}{4} = 0\,, \quad B = -\frac{\Delta}{4} = 0\,, \quad \Gamma \neq 0\,,$$

δηλαδή η εξίσωσή του είναι $z = 0$.

Η γωνία των δύο επιπέδων $z = 0$ και $x + y + z - 1 = 0$ είναι

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{(0,\ 0,\ 1)\cdot(1,\ 1,\ 1)}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\,,$$

Να βρεθεί η εξίσωση της σφαίρας που περνάει από τα σημεία $M_1(1, 2, -4)$, $M_2(1, -3, 1)$, $M_3(2, 2, 3)$ και το κέντρο της βρίσκεται στο επίπεδο Oxy.

Επειδή τα σημεία M_1, M_2, M_3 βρίσκονται στη σφαίρα

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=\rho^2,$$

την επαληθεύουν και αφού το κέντρο K βρίσκεται πάνω στο επίπεδο Oxy είναι $\gamma=0$, άρα $K(\alpha, \beta, 0)$.

Επομένως, παίρνουμε τις εξισώσεις

$$(1-\alpha)^2+(2-\beta)^2+(-4)^2=\rho^2,$$
$$(1-\alpha)^2+(-3-\beta)^2+1^2 \quad =\rho^2,$$
$$(2-\alpha)^2+(2-\beta)+3^2 \quad =\rho^2,$$

$$(1-\alpha)^2+(2-\beta)^2+16=(1-\alpha)^2+(-3-\beta)^2+1,$$
$$(1-\alpha)^2+(2-\beta)^2+16=(2-\alpha)^2+(2-\beta)^2+9 \;,$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} (2-\beta)^2-(-3-\beta)^2=-15 \quad \Rightarrow \quad 10\beta=10 \quad \Rightarrow \quad \beta=1 \;, \\ (1-\alpha)^2-\;(2-\alpha)^2=-7 \quad \Rightarrow \quad 2\alpha=-4 \quad \Rightarrow \quad \alpha=-2. \end{array}$$

Άρα, το κέντρο της σφαίρας είναι $K(-2, 1, 0)$ και η ακτίνα της

$$\rho^2=(1-\alpha)^2+(2-\beta)^2+16=(1+2)^2+(2-1)^2+16=26 \quad \Rightarrow \quad \rho=\sqrt{26}$$

Να βρεθεί η εξίσωση της σφαίρας που έχει κέντρο $K(2, -2, 3)$ και εφάπτεται του επιπέδου Oxy.

Επειδή η σφαίρα εφάπτεται του επιπέδου Oxy η απόσταση του κέντρου της $K(2, -2, 3)$ από το επίπεδο $z = 0$ είναι $\delta = 3$, ίση με την ακτίνα ρ της σφαίρας.

Άρα, η εξίσωση της σφαίρας είναι $(x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 3^2$.

Αναλυτική Γεωμετρία