Μάθημα 2

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Στο Μάθημα αυτό θα δοθούν οι κυριότερες έννοιες της Αναλυτικής Γεωμετρίας, που θεωρούνται απαραίτητες για τα επόμενα. Ο αναγνώστης, για μια εκτενέστερη μελέτη, παραπέμπεται στη βιβλιογραφία [1, 2, 3, 4].

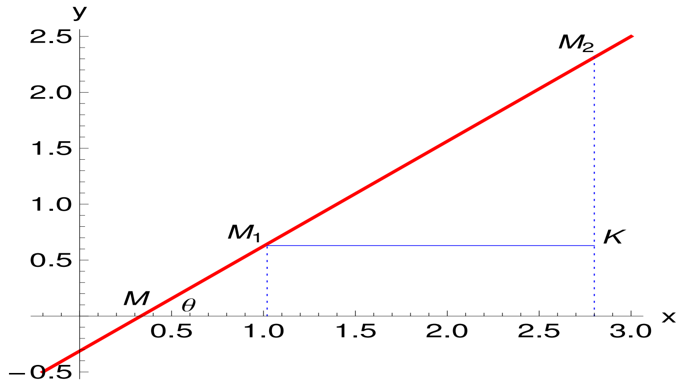
2.1 Ευθεία

2.1.1 Συντελεστής διεύθυνσης ευθείας

Ορισμός 2.1.1 - 1. *Έστω το ορθογώνιο σύστημα αξόνων Oxy και μία ευθεία ε. Αν θ είναι η γωνία που διαγράφει ο άξονας Ox, όταν περιστραφεί γύρω από το σημείο M κατά τη δεξιόστροφη φορά, έως ότου συμπέσει με την ε, τότε η εφαπτομένη της γωνίας θ ορίζει τον* **συντελεστή διεύθυνσης** *της ε, έστω λ, δηλαδή $\lambda = \tan\theta$ (Σχ. 2.1.1 - 1).*

Πρόταση 2.1.1 - 1. *Αν $M_1\,(x_1, y_1)$, $M_2\,(x_2, y_2)$ είναι δύο τυχόντα σημεία μιας μη παράλληλης προς τους άξονες ευθείας, τότε ο συντελεστής διεύθυνσης λ της ευθείας ισούται με*

$$\lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\,. \tag{2.1.1 - 1}$$



Σχήμα 2.1.1 - 1: ο συντελεστής διεύθυνσης $\lambda = \tan\theta$ της ευθείας M_1M_2.

Απόδειξη. Από το ορθογώνιο τρίγωνο KM_1M_2 (Σχ. 2.1.1 - 1) έχουμε

$$\lambda = \tan\theta = \frac{|KM_2|}{|M_1K|} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

δηλαδή η αποδεικτέα. ■

Παρατήρηση 2.1.1 - 1

Αν η ευθεία είναι παράλληλη προς τον

i) x-άξονα, τότε

$$\lambda = 0, \tag{2.1.1 - 2}$$

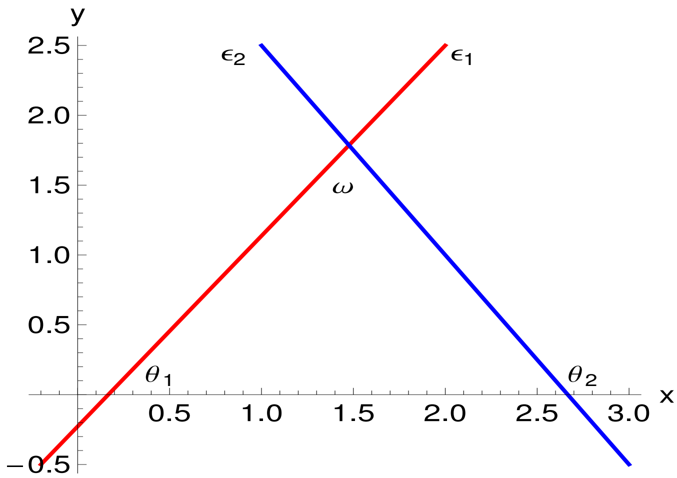
ii) y-άξονα, είναι

$$\lambda = \lim_{\theta \to \frac{\pi}{2}} \tan\theta = \infty. \tag{2.1.1 - 3}$$

2.1.2 Γωνία δύο ευθειών

Πρόταση 2.1.2 - 1. *Έστω οι ευθείες ε_1, ε_2 με συντελεστές διεύθυνσης λ_1, λ_2 αντίστοιχα. Τότε, αν ω είναι η κυρτή γωνία των, ισχύει ότι (Σχ. 2.1.2 - 1)*

$$\tan\omega = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{1 + \lambda_1\lambda_2}. \tag{2.1.2 - 1}$$



Σχήμα 2.1.2 - 1: η γωνία ω των ευθειών ε_1 και ε_2.

Σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση αποδεικνύεται ότι:

Πόρισμα 2.1.2 - 1. *Έστω ε_1 και ε_2 δύο ευθείες με συντελεστές διεύθυνσης λ_1, λ_2 αντίστοιχα. Τότε ικανή και αναγκαία συνθήκη, έτσι ώστε οι ευθείες αυτές να είναι*

- *παράλληλες είναι*

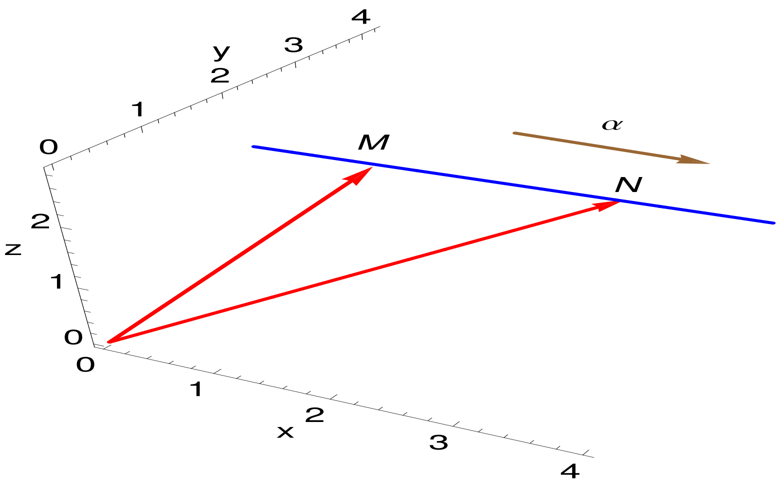
$$\lambda_1 = \lambda_2, \quad (\textbf{συνθήκη παραλληλίας}) \tag{2.1.2 - 2}$$

- *κάθετες είναι*

$$\lambda_1 \, \lambda_2 = -1. \quad (\textbf{συνθήκη καθετότητας}) \tag{2.1.2 - 3}$$

Ορισμός 2.1.2 - 1. *Ορίζεται ως* **συντελεστής διεύθυνσης** *ενός διανύσματος ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που ορίζει.*

Δίνονται στη συνέχεια οι κυριότερες μορφές της εξίσωσης μίας ευθείας στο επίπεδο, αντίστοιχα στον χώρο. Σημειώνεται ότι στο εξής οι όροι διανυσματική, αντίστοιχα παραμετρική εξίσωση, όταν χρησιμοποιούνται, είναι ισοδύναμοι.



Σχήμα 2.1.3 - 1: η ευθεία MN που διέρχεται από σημείο M και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\boldsymbol{\alpha}$ όπου $\mathbf{r} = \mathbf{ON}$ και $\mathbf{r}_1 = \mathbf{OM}$.

2.1.3 Ευθεία από σημείο παράλληλη προς διάνυσμα

Διανυσματική εξίσωση

Έστω ότι ζητείται η εξίσωση μιας ευθείας, που διέρχεται από ένα σημείο, έστω M και είναι παράλληλη προς ένα διάνυσμα, έστω $\boldsymbol{\alpha}$ (Σχ. 2.1.3 - 1). Αν $\mathbf{r}_1$ το ακτινικό διάνυσμα του σημείου M και N ένα άλλο τυχόν σημείο της ευθείας με ακτινικό διάνυσμα $\mathbf{r}$, τότε, επειδή τα διανύσματα $\mathbf{MN}$ και $\boldsymbol{\alpha}$ είναι παράλληλα, θα πρέπει σύμφωνα με την Πρόταση 2.1.1 - 1 να υπάρχει πραγματικός αριθμός t (παράμετρος), έτσι ώστε $\mathbf{MN} = t\boldsymbol{\alpha}$. Αλλά $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{MN}$, οπότε έχουμε την παρακάτω **διανυσματική εξίσωση** της ευθείας στην περίπτωση αυτή

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\boldsymbol{\alpha}, \tag{2.1.3 - 1}$$

όταν η παράμετρος $t \in \mathbb{R}$.

Αναλυτική εξίσωση στον χώρο

Έστω $\boldsymbol{\alpha} = \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$ και $M\,(x_1, y_1, z_1)$. Τότε η $(2.1.3 - 1)$ γράφεται

$$\begin{aligned}(x - x_1)\,\mathbf{i} \quad + \quad & (y - y_1)\,\mathbf{j} + (z - z_1)\,\mathbf{k} \\ = t\alpha_1\mathbf{i} \quad + \quad & t\alpha_2\mathbf{j} + t\alpha_3\mathbf{k},\end{aligned}$$

οπότε εξισώνοντας τους συντελεστές των $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ και στη συνέχεια απαλείφοντας το t, τελικά προκύπτει ότι η **αναλυτική εξίσωση** των σημείων της ευθείας στον χώρο είναι η

$$\frac{x - x_1}{\alpha_1} = \frac{y - y_1}{\alpha_2} = \frac{z - z_1}{\alpha_3}\,. \tag{2.1.3 - 2}$$

Αναλυτική εξίσωση στο επίπεδο

Η $(2.1.3 - 1)$ στην περίπτωση αυτή γράφεται

$$(x - x_1)\,\mathbf{i} + (y - y_1)\,\mathbf{j} = t\alpha_1\mathbf{i} + t\alpha_2\mathbf{j},$$

οπότε όμοια τελικά αποδεικνύεται ότι η **αναλυτική εξίσωση** των σημείων της ευθείας στην περίπτωση αυτή είναι η

$$\frac{x - x_1}{\alpha_1} = \frac{y - y_1}{\alpha_2} \quad \text{ή} \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{2.1.3 - 3}$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω αποδεικνύεται ότι:

Πρόταση 2.1.3 - 1. *Αν ένα διάνυσμα $\boldsymbol{\alpha} = \langle a_1, a_2 \rangle$ είναι παράλληλο προς μία ευθεία ε, που δεν είναι παράλληλη προς τον άξονα Oy, τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της ε είναι*

$$\lambda = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\,.$$

Με το MATHEMATICA η γραφική παράσταση της παραπάνω ευθείας γίνεται με τις εντολές:

Πρόγραμμα 2.1.3 - 1 (ευθείας παράλληλης σε διάνυσμα)

```
L1 = Arrow[{{0.0, 0, 0}, {1.5, 1.5, 2.5}}];
f1 = Graphics3D[{Red, Thick, L1}];
L2 = Arrow[{{0.0, 0, 0}, {2.5, 3.7, 0.95}}];
f2 = Graphics3D[{Red, Thick, L2}];
L3 = Line[{{0.5, 1.5, 2.5}, {4, 3, 1.5}}];
f3 = Graphics3D[{Blue, Thick, L3}];
L4 = Arrow[{{2, 2.7, 2.5}, {3, 4.2, 1.45}}];
f4 = Graphics3D[{Brown, Thick, L4}];
f5 = Show[{Graphics3D[Text[\[Alpha], {2.75, 2.75, 2.85}]],
    Graphics3D[Text[M, {1.5, 1.5, 2.85}]],
    Graphics3D[Text[N, {2.5, 3.7, 1.2}]]}];
fgr = Show[f1, f2, f3, f4, f5, Boxed -> False,
  Axes -> {True, True, True}, AxesLabel -> {"x", "y", "z"},
  BaseStyle -> {FontFamily -> "Arial", FontSize -> 14}]
```

2.1.4 Ευθεία από δύο σημεία

Διανυσματική εξίσωση

Έστω M_1, M_2 δύο τυχόντα σημεία της ευθείας με διανυσματικές ακτίνες $\mathbf{r}_1 = \langle x_1, y_1, z_1\rangle$, $\mathbf{r}_2 = \langle x_2, y_2, z_2\rangle$ αντίστοιχα και M τυχόν άλλο σημείο της με ακτινικό διάνυσμα, έστω $\mathbf{r} = \langle x, y, z\rangle$. Τότε η περίπτωση αυτή ανάγεται στην αντίστοιχη της Παραγράφου 2.1.3 θέτοντας $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, οπότε η **διανυσματική εξίσωση** θα είναι

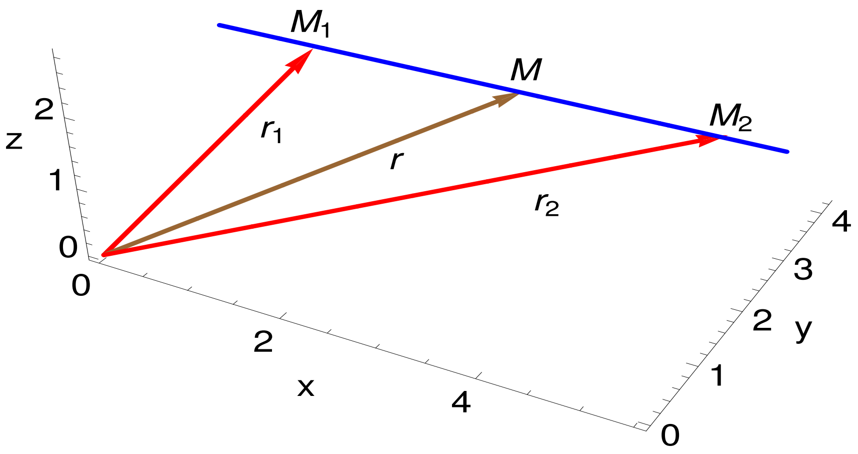
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\left(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\right), \tag{2.1.4 - 1}$$

όταν η παράμετρος $t \in \mathbb{R}$.

Η $(2.1.4 - 1)$ χρησιμοποιώντας τις αναλυτικές εκφράσεις $\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$ και $\mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$, τελικά γράφεται

$$\begin{aligned} x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} &= \left[tx_2 + (1-t)x_1\right]\mathbf{i} + \left[ty_2 + (1-t)y_1\right]\mathbf{j} \\ &\quad + \left[tz_2 + (1-t)z_1\right]\mathbf{k}, \end{aligned} \tag{2.1.4 - 2}$$

όταν η παράμετρος $t \in \mathbb{R}$. Η $(2.1.4 - 2)$ είναι γνωστή και ως η **παραμετρική εξίσωση της ευθείας** στον χώρο.



Σχήμα 2.1.4 - 1: παραμετρική παράσταση ευθείας από δύο σημεία M_1 και M_2.

Σημείωση 2.1.4 - 1

- Όταν $\mathbf{t} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$, η $(2.1.4-2)$ ορίζει την **παραμετρική εξίσωση του ευθύγραμμου τμήματος** M_1M_2 (Σχ. 2.1.4 - 1).
- Η $(2.1.4-2)$ στο επίπεδο γράφεται

$$\begin{aligned} x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} &= [tx_2 + (1-t)x_1]\,\mathbf{i} \\ &\quad + [ty_2 + (1-t)y_1]\,\mathbf{j}, \qquad (2.1.4 \text{ - } 3) \end{aligned}$$

  όταν επίσης η παράμετρος $t \in \mathbb{R}$, που είναι γνωστή ως η **παραμετρική εξίσωση της ευθείας** στο επίπεδο.

Αναλυτική εξίσωση στον χώρο

Έστω $M_1\,(x_1, y_1, z_1)$, $M_2\,(x_2, y_2, z_2)$. Τότε η $(2.1.4-2)$ γράφεται

$$\begin{aligned} (x-x_1)\,\mathbf{i} \;&+\; (y-y_1)\,\mathbf{j} + (z-z_1)\,\mathbf{k} \\ = t\,(x_2-x_1)\,\mathbf{i} \;&+\; t\,(y_2-y_1)\,\mathbf{j} + t\,(z-z_1)\,\mathbf{k}, \end{aligned}$$

οπότε εξισώνοντας τους συντελεστές των $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ και στη συνέχεια απαλείφοντας το t, τελικά προκύπτει ότι η **αναλυτική εξίσωση** των σημείων της ευθείας στον χώρο είναι η

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}\,. \tag{2.1.4 - 4}$$

Αναλυτική εξίσωση στο επίπεδο

Όμοια από την $(2.1.4 - 3)$ προκύπτει ότι η **αναλυτική εξίσωση** των σημείων της ευθείας στο επίπεδο είναι η

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad \text{ή} \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{2.1.4 - 5}$$

Όμοια σύμφωνα με τα παραπάνω αποδεικνύεται ότι:

Πρόταση 2.1.4 - 1 *Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $M(x_0, y_0)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης λ δίνεται από την εξίσωση*

$$y - y_0 = \lambda\,(x - x_0)\,. \tag{2.1.4 - 6}$$

Με το MATHEMATICA η γραφική παράσταση της παραπάνω ευθείας γίνεται με τις εντολές:

Πρόγραμμα 2.1.4 - 1 (ευθείας από 2 σημεία)

```
L1 = Arrow[{{0.0, 0, 0}, {1.5, 1.5, 2.5}}];
f1 = Graphics3D[{Red, Thick, L1}];
L2 = Arrow[{{0.0, 0, 0}, {2.5, 3.7, 0.9}}];
f2 = Graphics3D[{Brown, Thick, L2}];
L3 = Line[{{0.5, 1.5, 2.5}, {5.5, 3, 1.5}}];
f3 = Graphics3D[{Blue, Thick, L3}];
L4 = Arrow[{{0, 0, 0}, {4.5, 4.2, 0.6}}];
f4 = Graphics3D[{Red, Thick, L4}];
f5 = Show[{Graphics3D[Text[Subscript[r, 1], {1.2, 1.2, 1.5}]],
    Graphics3D[Text[Subscript[r, 2], {4.0, 1.2, 1.5}]],
    Graphics3D[Text[r, {2.5, 1.2, 1.5}]],
    Graphics3D[Text[Subscript[M, 1], {1.5, 1.5, 2.85}]],
    Graphics3D[Text[M, {2.5, 3.7, 1.2}]],
```

```
   Graphics3D[Text[Subscript[M, 2], {4.5, 4.2, 0.9}]]}];
fgr = Show[f1, f2, f3, f4, f5, Boxed -> False,
  Axes -> {True, True, True}, AxesLabel -> {"x", "y", "z"},
  BaseStyle -> {FontFamily -> "Arial", FontSize -> 14}]
```

2.1.5 Γενική μορφή εξίσωσης ευθείας στο επίπεδο

Αποδεικνύεται ότι:

Πρόταση 2.1.5 - 1. *Η γενική μορφή της αναλυτικής εξίσωσης της ευθείας στο επίπεδο είναι*

$$Ax + By + \Gamma = 0, \qquad (2.1.5 - 1)$$

όταν $|A| + |B| \neq 0$ *και αντίστροφα.*

Απόδειξη. *Ευθύ.* Από την $(2.1.4-5)$ - όμοια αποδεικνύεται από την $(2.1.3-3)$ - αναπτύσσοντας την ορίζουσα προκύπτει ότι η εξίσωση της ευθείας διαδοχικά γράφεται

$$x \begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

ή

$$x\,(y_1 - y_2) - y\,(x_1 - x_2) + (x_1 y_2 - x_2 y_1) = 0,$$

δηλαδή η αποδεικτέα με

$$A = y_1 - y_2, \quad B = x_2 - x_1 \quad \text{και} \quad \Gamma = x_1 y_2 - x_2 y_1. \qquad (2.1.5 - 2)$$

Το *αντίστροφο* είναι προφανές. ■

Από τις $(2.1.5-2)$ και $(2.1.1-1)$ προκύπτει ότι:

Πόρισμα 2.1.5 - 1. *Ο συντελεστής διεύθυνσης* λ *της ευθείας* $Ax+By+\Gamma = 0$ *ισούται με*

$$\lambda = -\frac{A}{B}. \qquad (2.1.5 - 3)$$

Διερεύνηση της εξίσωσης $Ax + By + \Gamma = 0$, όταν $|A| + |B| \neq 0$

Διακρίνονται οι παρακάτω περιπτώσεις:

i) $A \neq 0, \quad B = 0$

Τότε από την $(2.1.5-1)$ προκύπτει ότι $x = -\Gamma/A$, που παριστάνει ευθεία, η οποία διέρχεται από το σημείο $(-\Gamma/A,\, y)$ και είναι παράλληλη προς τον άξονα Oy. Αν και $\Gamma = 0$, τότε η ευθεία συμπίπτει με τον άξονα Oy.

ii) $A = 0, \quad B \neq 0$

Τότε από την $(2.1.5-1)$ προκύπτει ότι $y = -\Gamma/B$, που παριστάνει ευθεία, η οποία διέρχεται από το σημείο $(x,\, -\Gamma/B)$ και είναι παράλληλη προς τον άξονα Ox. Αν και $\Gamma = 0$, τότε η ευθεία συμπίπτει με τον άξονα Ox.

iii) $\Gamma = 0$

Η $(2.1.5-1)$ παριστάνει ευθεία, που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

iv) $A,\, B,\, \Gamma \neq 0$

Η $(2.1.5-1)$ γράφεται

$$-\frac{x}{\Gamma/A} - \frac{y}{\Gamma/B} = 1,$$

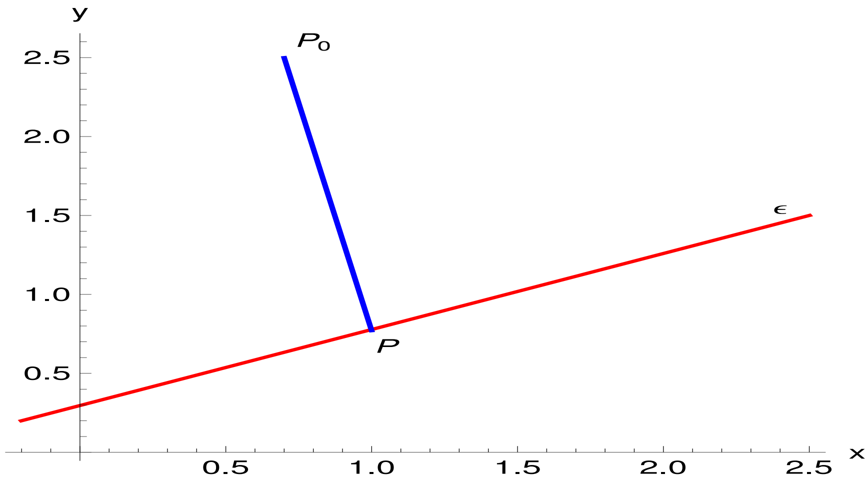
δηλαδή

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad (2.1.5 - 4)$$

όπου τα $a = -\Gamma/A$ και $b = -\Gamma/B$ λέγονται και **συντεταγμένες επί την αρχή** της $(2.1.5-1)$.

Πρόταση 2.1.5 - 2. *Έστω οι ευθείες ε_1, ε_2 και ε_3 με αντίστοιχες εξισώσεις*

$$A_1x + B_1y + \Gamma_1 = 0, \;\; A_2x + B_2y + \Gamma_2 = 0 \;\; \textit{και} \;\; A_3x + B_3y + \Gamma_3 = 0.$$



Σχήμα 2.1.6 - 1: η απόσταση $d\,(P_0, \varepsilon) = P_0P$ του σημείου $P_0\,(x_0, y_0)$ από την ευθεία $\varepsilon: \ Ax + By + \Gamma = 0$.

Τότε ικανή και αναγκαία συνθήκη έτσι ώστε οι ευθείες να διέρχονται από το ίδιο σημείο, είναι

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & \Gamma_1 \\ A_2 & B_2 & \Gamma_2 \\ A_3 & B_3 & \Gamma_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{2.1.5 - 5}$$

2.1.6 Απόσταση σημείου από ευθεία

Έστω η ευθεία ε με εξίσωση

$$\varepsilon: \quad Ax + By + \Gamma = 0$$

και τυχόν σημείο της $P_0\,(x_0, y_0)$. Τότε αποδεικνύεται ότι η απόσταση P_0P του σημείου P_0 από την ε δίνεται από τον τύπο (Σχ. 2.1.6 - 1)

$$d\,(P_0, \varepsilon) = \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2}}\,. \tag{2.1.6 - 1}$$

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί η εξίσωση της ευθείας στις παρακάτω περιπτώσεις:

i) έχει συντεταγμένες επί την αρχή 3 και -5,

ii) έχει τετμημένη επί την αρχή 4 και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\mathbf{a} = (1, -3)$,

iii) διέρχεται από το σημείο τομής των ευθειών $x - y = 7$, $x + 2y = 5$ και είναι κάθετη στην ευθεία $2x - 5y + 3 = 0$,

iv) διέρχεται από το σημείο $(1, 1)$ και σχηματίζει γωνία $\pi/4$ με την ευθεία $x - 7y + 5 = 0$.

2. Να υπολογιστεί η γωνία των ευθειών $2x - y = 4$ και $3x + y = 1$.

3. Έστω το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $(1, 2)$, $(3, 4)$ και $(-2, -3)$. Να υπολογιστούν:

i) οι εξισώσεις των διαγωνίων, των υψών και των διχοτόμων του,

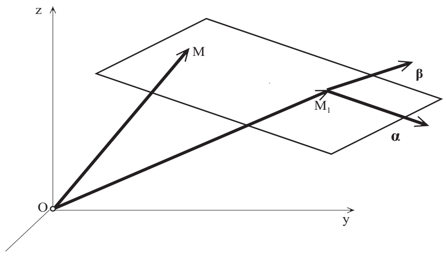
ii) οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους.

4. Να υπολογιστεί η τιμή της παραμέτρου λ, έτσι ώστε η ευθεία $\lambda x + y + 1 = 0$ να διέρχεται από το κοινό σημείο τομής των ευθειών $2x - y + 1 = 0$ και $x - y + 5 = 0$.

Απαντήσεις

1. (i) Τύπος $(2.1.5 - 4)$ όπου $a = 3$ και $b = -5$. (ii) Όμοια με (i).
(iii) Από τη λύση του συστήματος $x - y = 7$, $x + 2y = 5$ προκύπτει ότι το κοινό σημείο των ευθειών είναι το $P_0\,(x_0, y_0) = (19/3, -2/3)$. Ο συντελεστής διεύθυνσης της $2x - 5y + 3 = 0$ είναι $\lambda = 5/2$, οπότε σύμφωνα με τη συνθήκη καθετότητας $(2.1.2 - 3)$ ο συντελεστής διεύθυνσης της ζητούμενης ευθείας θα είναι $\lambda_1 = -5/2$. Άρα από την $(2.1.4 - 6)$ προκύπτει τελικά ότι η εξίσωση είναι η $6y + 15x = 91$.
(iv) Έστω λ ο συντελεστής διεύθυνσης της ζητούμενης ευθείας, λ_1 της ευθείας $x - 7y + 5 = 0$ και ω η κυρτή γωνία των. Τότε σύμφωνα με την $(2.1.5 - 3)$ είναι $\lambda_1 = \frac{1}{7}$, οπότε από την $(2.1.5 - 3)$ προκύπτει τότε ότι

$$\tan\frac{\pi}{4} = \frac{\lambda - \frac{1}{7}}{1 + \frac{\lambda}{7}} \quad \text{δηλαδή} \quad \lambda = \frac{4}{3}\,.$$



Σχήμα 2.2.1 - 1: επίπεδο από σημείο M παράλληλο προς τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$.

Αν $(x_0, y_0) = (1, 1)$, τότε από την $(2.1.4 - 6)$ προκύπτει ότι η εξίσωση της ζητούμενης ευθείας είναι $4x - 3y - 1 = 0$.

2. Όμοια, αν ω η κυρτή γωνία των, τότε για τις ευθείες $2x - y = 4$ και $3x + y = 1$ σύμφωνα με την $(2.1.5 - 3)$ είναι $\lambda_1 = 2$ και $\lambda_2 = -3$, οπότε τελικά $\omega = \tan^{-1}(-1) = \frac{3\pi}{4}$. Όμοια και οι υπόλοιπες ασκήσεις.

2.2 Επίπεδο

2.2.1 Επίπεδο από σημείο και παράλληλο προς 2 διανύσματα

Έστω ένα επίπεδο που διέρχεται από το σημείο $M\,(x_1, y_1, z_1)$ και είναι παράλληλο προς τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha} = \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$ και $\boldsymbol{\beta} = \langle \beta_1, \beta_2, \beta_3 \rangle$, όταν τα $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ υποτίθεται ότι δεν είναι παράλληλα μεταξύ τους (Σχ. 2.2.1 - 1).

Διανυσματική εξίσωση

Επειδή τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$ δεν είναι παράλληλα μεταξύ τους, θα πρέπει να τέμνονται σε ένα σημείο, έστω M_1. Τότε, επειδή τα διανύσματα $\mathbf{MM}_1$ και $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ είναι συνεπίπεδα, θα υπάρχουν παράμετροι u, $v \in \mathbb{R}$, έτσι ώστε[1]

$$\mathbf{MM}_1 = u\,\boldsymbol{\alpha} + v\,\boldsymbol{\beta}. \tag{2.2.1 - 1}$$

Έστω $\mathbf{r} = \mathbf{OM}$ και $\mathbf{r}_1 = \mathbf{OM}_1$ οι διανυσματικές ακτίνες των σημείων M και M_1 αντίστοιχα. Τότε προφανώς ισχύει ότι

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{MM}_1. \tag{2.2.1 - 2}$$

Από τις $(2.2.1-1)$ και $(2.2.1-2)$ προκύπτει τότε η παρακάτω **διανυσματική εξίσωση** του επιπέδου

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + u\,\boldsymbol{\alpha} + v\,\boldsymbol{\beta}, \tag{2.2.1 - 3}$$

όταν u, $v \in \mathbb{R}$.

Αναλυτική εξίσωση

Η $(2.2.1-3)$ γράφεται

$$\begin{aligned} x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} &= (x_1 + u\alpha_1 + v\beta_1)\,\mathbf{i} \\ &\quad + (y_1 + u\alpha_2 + v\beta_2)\,\mathbf{j} + (z_1 + u\alpha_3 + v\beta_3)\,\mathbf{k}, \end{aligned}$$

οπότε εξισώνοντας τις αντίστοιχες συντεταγμένες των $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ και $\mathbf{k}$ έχουμε

$$x = x_1 + u\alpha_1 + v\beta_1\,, \quad y = y_1 + u\alpha_2 + v\beta_2\,, \quad z = z_1 + u\alpha_3 + v\beta_3,$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} \alpha_1\,u + \beta_1\,v &= x_1 - x \\ \alpha_2\,u + \beta_2\,v &= y_1 - y \\ \alpha_3\,u + \beta_3\,v &= z_1 - z, \end{aligned} \tag{2.2.1 - 4}$$

[1] Βλέπε βιβλιογραφία και Α. Μπράτσος [2] Κεφ. 1.

που ορίζει ένα σύστημα 3 εξισώσεων με 2 αγνώστους τα u, v. Είναι γνωστό ότι η λύση των συστημάτων στην περίπτωση αυτή απαιτεί η λύση των 2 εξισώσεων να επαληθεύει και την 3η εξίσωση ή όπως διαφορετικά λέγεται το σύστημα να είναι **συμβιβαστό**.[2] Παρατηρούμε ότι στην $(2.2.1-4)$, επειδή τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}$ και $\boldsymbol{\beta}$ έχει υποτεθεί ότι δεν είναι παράλληλα μεταξύ τους, θα πρέπει για να είναι το σύστημα συμβιβαστό, μια τουλάχιστον από τις ποσότητες

$$\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1, \quad \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2, \quad \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3$$

να είναι διάφορη του μηδενός.

Επομένως το σύστημα $(2.2.1-4)$ θα είναι συμβιβαστό, τότε και μόνον όταν:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (2.2.1 - 5)$$

που ορίζει τελικά και την **αναλυτική εξίσωση** του επιπέδου στην περίπτωση αυτή.

2.2.2 Επίπεδο από δύο σημεία και παράλληλο προς διάνυσμα

Έστω ένα επίπεδο που διέρχεται από τα σημεία $M_1\,(x_1, y_1, z_1)$, $M_2\,(x_2, y_2, z_2)$ και είναι παράλληλο προς το διάνυσμα $\boldsymbol{\alpha} = \langle \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \rangle$.

Διανυσματική εξίσωση

Η περίπτωση αυτή ανάγεται στην αντίστοιχη της Παραγράφου 2.2.1 θέτοντας

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{M}_1\mathbf{M}_2 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1,$$

όταν $\mathbf{r}_1$ και $\mathbf{r}_2$ είναι οι διανυσματικές ακτίνες των σημείων M_1 και M_2 αντίστοιχα. Άρα η **διανυσματική εξίσωση** του επιπέδου είναι

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + u\,(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + v\boldsymbol{\alpha}, \qquad (2.2.2 - 1)$$

όταν u, $v \in \mathbb{R}$.

[2] Όμοια βλέπε βιβλιογραφία και Α. Μπράτσος [2] Κεφ. 3.

Αναλυτική εξίσωση

Όμοια από την (2.2.2 − 1) για τις συντεταγμένες του τυχόντος σημείου $M(x, y, z)$ του επιπέδου Π έχουμε:

$$\begin{aligned} u\,(x_2 - x_1) + v\,\alpha_1 &= x_1 - x, \\ u\,(y_2 - y_1) + v\,\alpha_2 &= y_1 - y, \\ u\,(z_2 - z_1) + v\,\alpha_3 &= z_1 - z \end{aligned}$$

που τελικά δίνει ως **αναλυτική εξίσωση** την

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.2.2 \text{ - } 2)$$

2.2.3 Επίπεδο από τρία σημεία

Έστω ένα επίπεδο που διέρχεται από τρία μη συνευθειακά σημεία $M_1\,(x_1, y_1, z_1)$, $M_2\,(x_2, y_2, z_2)$ και $M_3\,(x_3, y_3, z_3)$.

Διανυσματική εξίσωση

Όμοια η περίπτωση αυτή ανάγεται στην αντίστοιχη της Παραγράφου 2.2.1 θέτοντας

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{M_1M_2} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \quad \boldsymbol{\beta} = \mathbf{M_1M_3} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1,$$

όταν $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ και $\mathbf{r}_3$ είναι οι διανυσματικές ακτίνες των σημείων M_1, M_2 και M_3 αντίστοιχα. Άρα η **διανυσματική εξίσωση** στην περίπτωση αυτή είναι

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + u\,(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + v\,(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)\,. \qquad (2.2.3 \text{ - } 1)$$

Αναλυτική εξίσωση

Όμοια για τις συντεταγμένες του τυχόντος σημείου $M(x, y, z)$ του επιπέδου έχουμε

$$\begin{aligned} x &= x_1 + u\,(x_2 - x_1) + v\,(x_3 - x_1)\,, \\ y &= y_1 + u\,(y_2 - y_1) + v\,(y_3 - y_1)\,, \\ z &= z_1 + u\,(z_2 - z_1) + v\,(z_3 - z_1) \end{aligned}$$

που τελικά δίνει ως **αναλυτική εξίσωση** την

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2.2.3 - 2)$$

2.2.4 Γενική μορφή εξίσωσης επιπέδου

Αποδεικνύεται ότι:

Πρόταση 2.2.4 - 1. *Η γενική μορφή της αναλυτικής εξίσωσης του επιπέδου είναι*

$$Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0 \qquad (2.2.4 - 1)$$

και αντίστροφα.

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $(1, 1)$ και τέμνει κάθετα την τομή των επιπέδων $3x - 5y + 2 = 0$ και $2x + 3z + 1 = 0$.
2. Έστω τα επίπεδα $2x + 3y + 4z - 6 = 0$ και $4x + 6y + 8z + 24 = 0$. Ζητείται

i) να δειχθεί ότι είναι παράλληλα,

ii) να υπολογιστεί η εξίσωση του επιπέδου που τέμνει τα επίπεδα αυτά κάθετα.

2.3 Κωνικές τομές

2.3.1 Κύκλος

Ορισμός 2.3.1 - 1. *Ορίζεται ως* **περιφέρεια κύκλου** *(circle) ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου, που απέχουν ίση απόσταση, έστω R, από ένα σημείο του επιπέδου, έστω K.*

Η απόσταση R λέγεται **ακτίνα**, ενώ το σημείο O **κέντρο** του κύκλου.

Σχετικά με τις θέσεις του κέντρου K ως προς την αρχή των συντεταγμένων ενός ορθογωνίου συστήματος Oxy διακρίνονται οι παρακάτω δύο περιπτώσεις:

- το K συμπίπτει με το O. Τότε, αν $M(x, y)$ είναι τυχόν σημείο της περιφέρειας, η **αναλυτική εξίσωση** των σημείων της περιφέρειας είναι

$$x^2 + y^2 = R^2, \tag{2.3.1 - 1}$$

ενώ, όταν

- το κέντρο είναι στο σημείο (α, β), τότε

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2. \tag{2.3.1 - 2}$$

Εξίσωση εφαπτομένης

Η εξίσωση της εφαπτομένης της περιφέρειας σε ένα σημείο της, έστω $M(x_0, y_0)$, αποδεικνύεται ότι δίνεται από τη σχέση:

$$(x - x_0)(x - \alpha) + (y - y_0)(y - \beta) = R^2. \tag{2.3.1 - 3}$$

Από τις $(2.3.1 - 1)$ και $(2.3.1 - 2)$ προκύπτει ότι η γενική μορφή της αναλυτικής εξίσωσης των σημείων της περιφέρειας του κύκλου είναι

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \varGamma = 0 \tag{2.3.1 - 4}$$

όπου το κέντρο ορίζεται στην περίπτωση αυτή από τις συντεταγμένες:

$$K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$$

και η ακτίνα από τη σχέση

$$R = \left(A^2 + B^2 - 4\mathit{\Gamma}\right)^{1/2}.$$

Αντίστροφα, κάθε εξίσωση της μορφής $(2.3.1-4)$ παριστάνει περιφέρεια κύκλου. Πράγματι η $(2.3.1-4)$ γράφεται

$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 = \frac{A^2 + B^2 - 4\Gamma}{4}. \qquad (2.3.1 - 5)$$

Τότε η $(2.3.1-5)$:

- αν $A^2 + B^2 - 4\mathit{\Gamma} \geq 0$, παριστάνει εξίσωση κύκλου με κέντρο, έστω $K\left(-A/2, -B/2\right)$ και ακτίνα $R = \sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}/2$. Ειδικά, όταν ισχύει η ισότητα, η ακτίνα του κύκλου είναι μηδέν (σημείο).
- Αν $A^2 + B^2 - 4\mathit{\Gamma} < 0$, τότε δεν υπάρχουν x, $y \in \mathbb{R}$ που να την επαληθεύουν, οπότε στην περίπτωση αυτή δεν υπάρχει περιφέρεια κύκλου.

Επομένως έχει αποδειχθεί η παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 2.3.1 - 1. *Η $x^2 + y^2 + Ax + By + \mathit{\Gamma} = 0$ παριστάνει εξίσωση περιφέρειας κύκλου τότε και μόνον, όταν $A^2 + B^2 - 4\mathit{\Gamma} > 0$.*

Διανυσματική εξίσωση

Έστω ότι το O συμπίπτει με την αρχή ενός ορθογωνίου συστήματος συντεταγμένων. Τότε, αν $M(x, y)$ είναι τυχόν σημείο της περιφέρειας, η διανυσματική εξίσωση είναι της μορφής

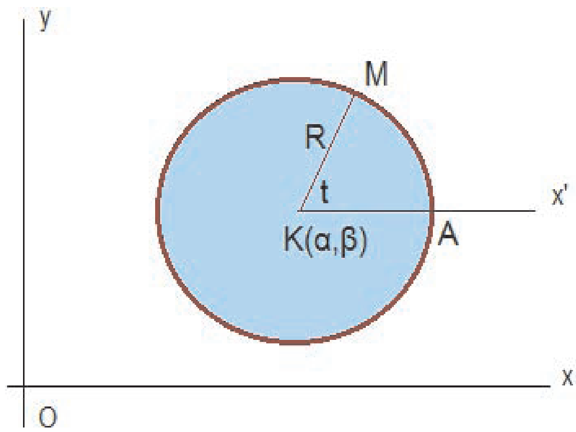
$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} = \langle x, y\rangle \qquad (2.3.1 - 6)$$

όπου

$$\begin{aligned} x = x(t) &= R\cos t, \\ y = y(t) &= R\sin t, \qquad \text{όταν} \quad t \in [0, 2\pi), \end{aligned} \qquad (2.3.1 - 7)$$

ενώ στην περίπτωση που το κέντρο του είναι το σημείο $K(\alpha, \beta)$ έχουμε (Σχ. 2.3.1 - 1)

$$\begin{aligned} x = x(t) &= \alpha + R\cos t, \\ y = y(t) &= \beta + R\sin t, \qquad \text{όταν} \quad t \in [0, 2\pi). \end{aligned} \qquad (2.3.1 - 8)$$



Σχήμα 2.3.1 - 1: παραμετρική παράσταση κύκλου με κέντρο το σημείο $K(\alpha, \beta)$ και ακτίνα R.

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί η ακτίνα και το κέντρο των παρακάτω περιφερειών:

i) $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 9 = 0$,

ii) $x^2 + y^2 - 6x + 10y = 0$.

2. Να υπολογιστεί η εξίσωση της περιφέρειας κύκλου, όταν

i) έχει κέντρο το σημείο $(1, -2)$ και εφάπτεται στην ευθεία $x - 2y + 5 = 0$,

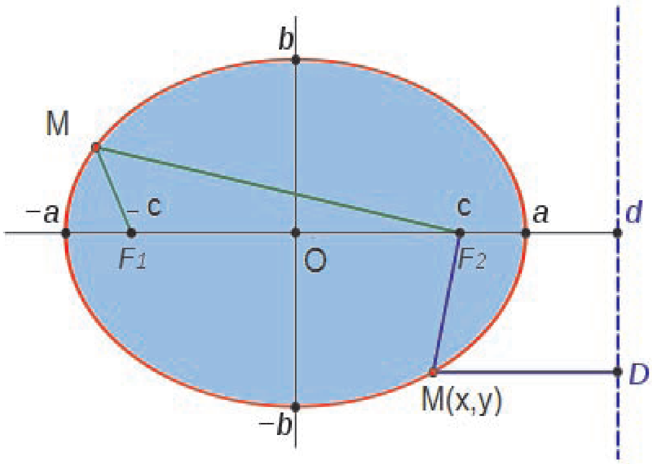
ii) διέρχεται από τα σημεία $(3, -2)$, $(1, 2)$ και $(-1, -2)$,

iii) διέρχεται από τα σημεία $(3, 1)$, $(-1, 3)$ και έχει κέντρο στην ευθεία $3x - 2y - 2 = 0$,

iv) είναι εγγεγραμμένη στο τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $(1, -2)$, $(2, 3)$ και $(4, 1)$.

2.3.2 Έλλειψη

Ορισμός **2.3.2 - 1.** *Ορίζεται ως* **έλλειψη** *(ellipse) ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων τυχόντος*



Σχήμα 2.3.2 - 1: η έλλειψη με εστίες στα σημεία $F_1(-c,0)$ και $F_2(c,0)$.

σημείου της, έστω M, από δύο σταθερά σημεία F_1 και F_2 είναι σταθερό (Σχ. 2.3.2 - 1).

Τα σημεία $F_1(-c,0)$ και $F_2(c,0)$ λέγονται **εστίες** (focus).

Σύμφωνα με τον Ορισμό 2.3.2 - 1 είναι $F_1M+F_2M=2a$ σταθερά. Τότε για να προσδιοριστεί η εξίσωση των σημείων της έλλειψης, θεωρούμε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων Oxy στο οποίο η αρχή O διχοτομεί την απόσταση F_1F_2, ως άξονα των x την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία F_1 και F_2 και ως άξονα των y την κάθετη στην F_1F_2 που διέρχεται από το O.

Έστω $|F_1F_2|=2c$. Η βασική ιδιότητα των σημείων της έλλειψης εκφράζεται για τις συντεταγμένες του τυχόντος σημείου $M(x,y)$ με τη σχέση $|MF_1|+|MF_2|=2a$, δηλαδή

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a. \qquad (2.3.2 - 1)$$

Από τη σχέση αυτή με τετραγωνισμό και των δύο μελών προκύπτει τελικά ότι η **αναλυτική εξίσωση** των σημείων της έλλειψης είναι

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \text{όταν} \quad b^2=a^2-c^2. \qquad (2.3.2 - 2)$$

Ιδιότητες

i) Η (2.3.2−2) δεν μεταβάλλεται, όταν τεθεί στη θέση του (x, y) το $(-x, y)$ ή το $(x, -y)$ ή το $(-x, -y)$, δηλαδή η έλλειψη είναι συμμετρική ως προς τους άξονες Ox, Oy και την αρχή των αξόνων O.

ii) Από την (2.3.2 − 2) προκύπτει ότι $y^2/b^2 = 1 - x^2/a^2 \geq 0$, δηλαδή $-a \leq x \leq a$. Όμοια αποδεικνύεται ότι $-b \leq y \leq b$. Άρα η έλλειψη περιλαμβάνεται στο ορθογώνιο με πλευρές $x = \pm a$ και $y = \pm b$.

Βασικά στοιχεία

- Η ευθεία που ενώνει τις εστίες της έλλειψης, λέγεται **κύριος άξονας**. Ο κύριος άξονας τέμνει την έλλειψη στα σημεία $A(a, 0)$ και $A'(-a, 0)$, που ορίζουν τις κύριες κορυφές της. Τότε το ευθύγραμμο τμήμα AA' ορίζει τον **μεγάλο άξονα** (major axis) της έλλειψης, που έχει μήκος $2a$. Ο άξονας των συντεταγμένων Ox έχει τη διεύθυνση AA', ενώ το σημείο O είναι στο μέσον του AA'. Ο άξονας Oy τέμνει την έλλειψη στα σημεία $B(0, b)$ και $B'(0, -b)$, που λέγονται και δευτερεύουσες κορυφές της έλλειψης. Το ευθύγραμμο τμήμα BB' ορίζει τον **μικρό άξονα** (minor axis) της έλλειψης με μήκος $2b$. Τότε τα $|OA| = a$ και $|OB| = b$ ορίζουν τα μήκη του μεγάλου αντίστοιχα του μικρού ημιάξονα της έλλειψης.

- **Εκκεντρότητα** (eccentricity) της έλλειψης ορίζεται ο λόγος $e = c/a$ και προφανώς είναι $e < 1$.

Εξίσωση εφαπτομένης

Αποδεικνύεται ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης στο σημείο της $M\,(x_0, y_0)$ δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} = 1\,. \tag{2.3.2 - 3}$$

Διανυσματική εξίσωση

Όμοια είναι της μορφής (2.3.1 − 6), δηλαδή

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} = \langle x, y\rangle$$

όπου

$$\begin{aligned} x = x(t) &= a\cos t, \\ y = y(t) &= b\sin t, \qquad \text{όταν} \quad t \in [0, 2\pi). \end{aligned} \qquad (2.3.2 - 4)$$

Η εντολή που σχηματίζει μία έλλειψη με το MATHEMATICA είναι

```
Show[Graphics[Circle[{x_0,y_0},r]]]
```

όπου (x_0, y_0) το κέντρο και r η ακτίνα, ενώ για την έλλειψη

```
Show[Graphics[Circle[{x_0,y_0},{a,b}]]]
```

όπου a ο μεγάλος και b ο μικρός ημιάξονάς της.

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί η εξίσωση της έλλειψης στις παρακάτω περιπτώσεις:

i) η εστιακή απόσταση είναι ίση με 6 και η εκκεντρότητα $\varepsilon = 3/5$,

ii) ο μικρός άξονας είναι ίσος με 6 και η εκκεντρότητα $\varepsilon = 4/5$.

2. Να υπολογιστούν οι εξισώσεις των εφαπτόμενων από το σημείο $(2, -1)$ στην έλλειψη $x^2 + 9y^2 = 9$. Στη συνέχεια να προσδιοριστεί η γωνία των εφαπτόμενων και το μήκος της χορδής της έλλειψης, που διέρχεται από τα σημεία επαφής των εφαπτόμενων.

3. Έστω η έλλειψη

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

Τότε οι ευθείες με εξισώσεις [3]

$$d: \quad x = \pm\frac{a^2}{c}$$

ορίζουν τις **διευθετούσες** (directrices) της. Δείξτε ότι

[3]Βλέπε Σχ. 2.3.2 - 1 όπου η διευθετούσα d έχει εξίσωση $x = \frac{a^2}{c}$.

i) οι διευθετούσες είναι κάθετες στον μεγάλο άξονα της έλλειψης,

ii) ο λόγος των αποστάσεων τυχόντος σημείου της έλλειψης από την εστία και τη διευθετούσα είναι σταθερός και ισούται με την εκκεντρότητα της έλλειψης.[4]

Απαντήσεις

1. (i) Είναι $F_1F_2 = 2c = 6$, οπότε $c = 3$, ενώ $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$. Άρα $a = 5$, οπότε από τη σχέση $b^2 = a^2 - c^2$ προκύπτει ότι $b^2 = 16$. Επομένως η εξίσωση είναι:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

(ii) Είναι $2b = 6$, οπότε $b = 3$, ενώ $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{4}{5}$, δηλαδή $c = \frac{4a}{5}$. Αντικαθιστώντας στην $b^2 = a^2 - c^2$ έχουμε $9 = \alpha^2 - \frac{16a^2}{25}$, οπότε $a^2 = 25$. Άρα η εξίσωση είναι:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

2. Η εξίσωση της έλλειψης γράφεται

$$\frac{x^2}{9} + y^2 = 1. \qquad (2.3.2 - 1)$$

Άρα $a^2 = 9$ και $b^2 = 1$. Τότε σύμφωνα με την $(2.3.2 - 3)$ η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης στο σημείο της (x_0, y_0) γράφεται

$$\frac{x\,x_0}{9} + y\,y_0 = 1. \qquad (2.3.2 - 2)$$

Επειδή η ευθεία $(2.3.2{-}2)$ διέρχεται από το σημείο $(x, y) = (2, -1)$, θα πρέπει οι συντεταγμένες του να την επαληθεύουν, δηλαδή $\frac{2\,x_0}{9} - y_0 = 1$, από την οποία τελικά προκύπτει ότι:

$$y_0 = \frac{2x_0}{9} - 1. \qquad (2.3.2 - 3)$$

΄Ομοια επειδή το σημείο (x_0, y_0) ανήκει στην έλλειψη, η $(2.3.2 - 1)$ γράφεται $\frac{x_0^2}{9} + y_0^2 = 1$, οπότε αντικαθιστώντας σε αυτή την $(2.3.2 - 3)$ τελικά προκύπτει ότι τα σημεία επαφής των εφαπτόμενων ε_1 και ε_2 με την έλλειψη είναι:

$$P_1: \quad (x_1, y_1) = (0, -1) \quad \text{και} \quad P_2: \quad (x_2, y_2) = \left(\frac{36}{13}, \frac{59}{13}\right).$$

Τότε η απόσταση είναι: $|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \frac{36\sqrt{5}}{13} \approx 6.192\,188$, ενώ η γωνία ω υπολογίζεται σύμφωνα με την $(2.1.1 - 1)$ από τη σχέση $\tan\omega = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{1 + \lambda_1\lambda_2}$ όπου

$$\lambda_1 = \frac{y - y_1}{x - x_1} = 0 \quad \text{και} \quad \lambda_1 = \frac{y - y_2}{x - x_2} = \frac{36}{5}.$$

[4] ΄Ομοια βλέπε Σχ. 2.3.2 - 1 όπου $|MF_2| = |MD|$.

Άρα $\tan\omega = -\frac{36}{5}$, οπότε $\omega \approx --1.432\,79\,\text{rad}$.

3. (i) Προφανής, επειδή κάθε εξίσωση της μορφής $x = x_0$ παριστάνει εξίσωση ευθείας κάθετης στον x-άξονα στο σημείο x_0.

(ii) Θα δειχθεί ότι

$$\frac{|MF_2|}{|MD|} = \varepsilon. \tag{2.3.2 - 4}$$

Σύμφωνα με το Σχ. 2.3.2 - 1 και τις $(2.3.2-1)$ - $(2.3.2-2)$ έχουμε ότι η απόσταση $|MF_2|$ είναι

$$|MF_2|^2 = (x-c)^2 + y^2 = (x-c)^2 + b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right), \tag{2.3.2 - 5}$$

ενώ από τον τύπο προκύπτει ότι η απόσταση $|MD|$ από τη διευθετούσα με εξίσωση $x - \frac{a^2}{c} = 0$ είναι

$$|MD| = \left|x - \frac{a^2}{c}\right|. \tag{2.3.2 - 6}$$

Αντικαθιστώντας τις $(2.3.2-5)$ και $(2.3.2-6)$ στην $(2.3.2-4)$ μετά από τετραγωνισμό και των δύο μελών προκύπτει τελικά η αποδεικτέα.

2.3.3 Υπερβολή

Ορισμός 2.3.3 - 1. *Ορίζεται ως* **υπερβολή** *(hyperbola) ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου των οποίων η διαφορά των αποστάσεων τυχόντος σημείου της, έστω M, από δύο σταθερά σημεία F_1 και F_2, που λέγονται εστίες, είναι σταθερή (Σχ. 2.3.3 - 1).*

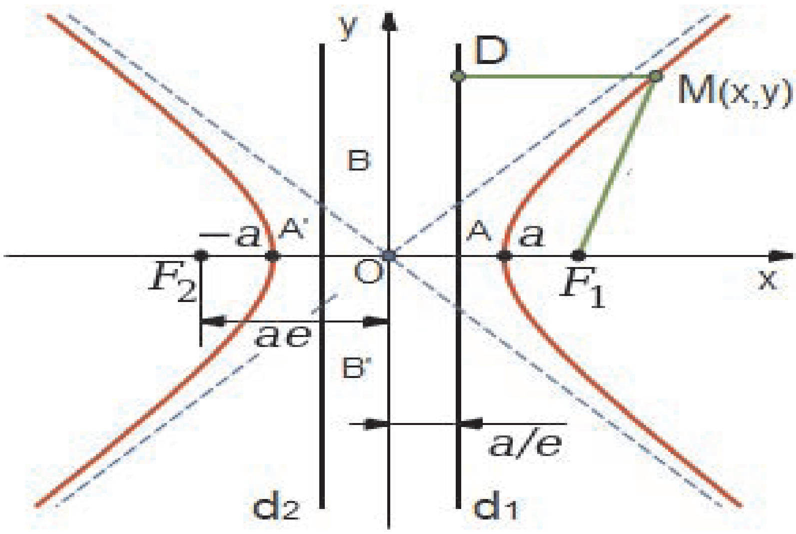
Τα σημεία F_1 και F_2 λέγονται **εστίες** (focus).

Έστω ότι $F_2M - F_1M = 2a$ σταθερά. Όμοια, όπως στην έλλειψη, θεωρώντας ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων Oxy στο οποίο το O διχοτομεί την απόσταση F_1F_2, ως άξονα των x την ευθεία που διέρχεται από τις εστίες, σύμφωνα και με τη βασική ιδιότητα των σημείων της υπερβολής έχουμε για τις συντεταγμένες του τυχόντος σημείου $M(x,y)$ τη σχέση

$$\sqrt{(c+x)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a.$$

Τότε με τετραγωνισμό και των δύο μελών προκύπτει τελικά, ότι η **αναλυτική εξίσωση** των σημείων της υπερβολής είναι

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{όταν} \quad b^2 = c^2 - a^2. \tag{2.3.3 - 1}$$



Σχήμα 2.3.3 - 1: η υπερβολή με εστίες στα σημεία $F_1(c,0)$ και $F_2(-c,0)$.

Ιδιότητες

i) Η $(2.3.3-1)$ δεν μεταβάλλεται, όταν θέσουμε στη θέση του το $(-x,y)$ ή το $(x,-y)$ ή το $(-x,-y)$, δηλαδή η υπερβολή είναι συμμετρική (congruent) ως προς τους άξονες Ox, Oy και την αρχή των αξόνων.

ii) Από την $(2.3.3-1)$ προκύπτει ότι

$$\frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}-1\geq 0, \quad \text{δηλαδή} \quad |x|\geq a.$$

Άρα η υπερβολή βρίσκεται στα δεξιά της ευθείας με εξίσωση $x=a$ και αριστερά της ευθείας με εξίσωση $x=-a$. Είναι προφανές ότι μεταξύ των ευθειών $x=a$ και $x=-a$ δεν υπάρχουν σημεία της υπερβολής.

Βασικά στοιχεία

- Ο άξονας Ox λέγεται **πρωτεύων άξονας** (major axis). Ο πρωτεύων άξονας τέμνει την υπερβολή στα σημεία A και A'. Τότε η (AA') ορίζει το μήκος του πρωτεύοντα άξονα. Ο άξονας Oy λέγεται δευτερεύων άξονας (minor axis), ενώ το O ορίζει το **κέντρο** της υπερβολής. Αν επί του άξονα Oy θεωρήσουμε τα σημεία $B(0, b)$ και $B'(0, -b)$, τότε η (BB') ορίζει το μήκος του **δευτερεύοντα άξονα**.

- **Εκκεντρότητα** της υπερβολής ορίζεται ο λόγος $e = c/a$, όπου προφανώς $e > 1$.

Εξίσωση εφαπτομένης

Αποδεικνύεται ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής στο σημείο της $M\,(x_0, y_0)$ δίνεται από τη σχέση

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1\,. \qquad (2.3.3 - 2)$$

Συζυγείς υπερβολές

Έστω η υπερβολή με πρωτεύοντα άξονα τον Ox και εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (2.3.3 - 3)$$

Αν στην $(2.3.3 - 3)$ θεωρηθεί ως πρωτεύων άξονας ο Oy έχουμε (Σχ. 2.3.3 - 2)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1. \qquad (2.3.3 - 4)$$

Οι υπερβολές $(2.3.3-3)$ και $(2.3.3-4)$, που ο πρωτεύων άξονας της μιας είναι δευτερεύων άξονας της άλλης, λέγονται **συζυγείς** (conjugate hyperbolae).

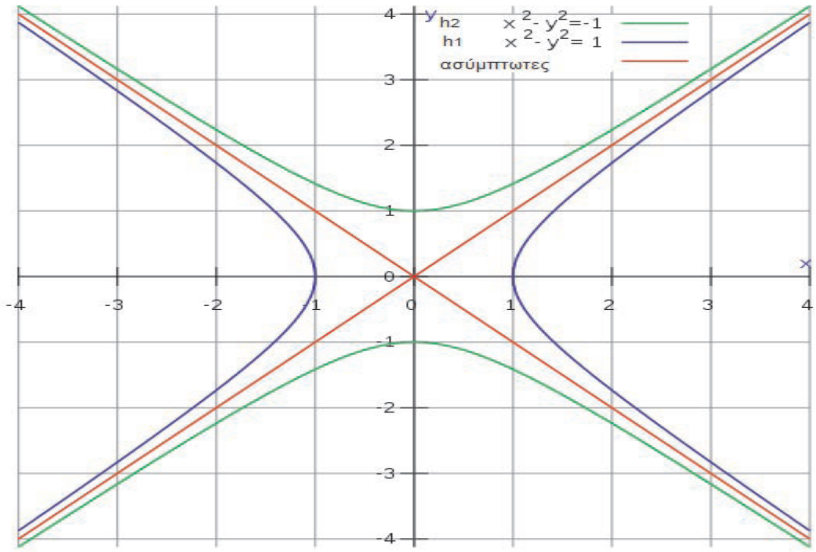
Ασύμπτωτες υπερβολής

Από την $(2.3.3 - 1)$ προκύπτει

$$y = \pm\frac{b}{a}\,x\,\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$$

Άρα, όταν το x τείνει στο άπειρο κατά απόλυτη τιμή, το y τείνει επίσης στο άπειρο, ενώ ο λόγος y/x είναι πεπερασμένος αριθμός και συγκεκριμένα ισούται με

$$y = \frac{b}{a}x \quad \text{και} \quad y = -\frac{b}{a}\,x\,. \qquad (2.3.3 - 5)$$



Σχήμα 2.3.3 - 2: η υπερβολή h_1 με εξίσωση $x^2 - y^2 = 1$ και η συζυγής της h_2 με εξίσωση $x^2 - y^2 = -1$.

Η $(2.3.3 - 5)$ παριστάνει τότε δύο ευθείες προς τις οποίες, σύμφωνα με τα παραπάνω, τείνει η υπερβολή όταν το $x \to \pm\infty$. Οι ευθείες αυτές λέγονται **ασύμπτωτες** (asymptotes)της υπερβολής.[5]

Ισοσκελής υπερβολή

Ορισμός 2.3.3 - 2. *Αν σε μία υπερβολή το μήκος του πρωτεύοντα και του δευτερεύοντα άξονα είναι ίσα, τότε η υπερβολή λέγεται ισοσκελής και η εξίσωσή της γράφεται*

$$x^2 - y^2 = a^2. \qquad (2.3.3 - 6)$$

Στην περίπτωση αυτή οι ασύμπτωτες είναι οι διχοτόμοι των γωνιών που σχηματίζουν οι άξονες.

[5]Βλέπε διακεκομμένες ευθείες στο Σχ. 2.3.3 - 1 και κόκκινες ευθείες στο Σχ. 2.3.3 - 2.

Διανυσματική εξίσωση

Αποδεικνύεται ότι είναι της μορφής $(2.3.1-6)$, δηλαδή

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} = \langle x, y\rangle$$

όπου

$$\begin{aligned} x = x(t) &= a\cosh t, \\ y = y(t) &= b\sinh t \end{aligned} \qquad (2.3.3 - 7)$$

όπου η παράμετρος $t \in \mathbb{R}$.

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί η εξίσωση της υπερβολής στις παρακάτω περιπτώσεις:

i) η εστιακή απόσταση είναι ίση με 8 και η εκκεντρότητα $\varepsilon = 5/4$,

ii) οι εξισώσεις των ασύμπτωτων είναι $y = \pm 4x/3$ και η εστιακή απόσταση είναι ίση με 20.

2. Να υπολογιστεί η γωνία των ασύμπτωτων της υπερβολής που έχει εκκεντρότητα $\varepsilon = 1.5$.

3. Έστω η υπερβολή $9x^2 - 4y^2 = 36$. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του τριγώνου, που σχηματίζεται από τις ασύμπτωτές της και την ευθεία $9x + 2y - 24 = 0$.

4. Να δειχθεί ότι κάθε εφαπτομένη υπερβολής σχηματίζει με τις ασύμπτωτές της τρίγωνο σταθερού εμβαδού.

5. Έστω η υπερβολή

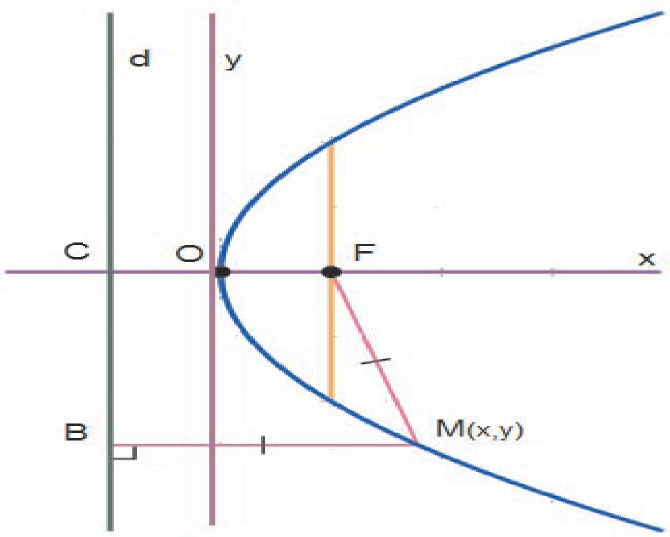
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\,.$$

Τότε οι ευθείες

$$x = \pm\frac{a^2}{c}$$

λέγονται **διευθετούσες** της υπερβολής. Δείξτε ότι:

i) οι διευθετούσες είναι κάθετες στον μεγάλο άξονα της υπερβολής,



Σχήμα 2.3.4 - 1: η παραβολή με εστία στο σημείο F και διευθετούσα την ευθεία $d:\ BC$.

ii) οι διευθετούσες δεν τέμνουν την υπερβολή,

iii) ο λόγος των αποστάσεων τυχόντος σημείου της υπερβολής από την εστία και τη διευθετούσα είναι σταθερός και ισούται με την εκκεντρότητα της υπερβολής.

2.3.4 Παραβολή

Ορισμός 2.3.4 - 1. *Ορίζεται ως* **παραβολή** *(parabola) ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου των οποίων η απόσταση από σταθερό σημείο, έστω F και σταθερή ευθεία d είναι σταθερή (Σχ. 2.3.4 - 1).*

Το σημείο F λέγεται **εστία** (focus), ενώ η ευθεία d **διευθετούσα** (directrix).

Για να προσδιοριστεί η αναλυτική εξίσωση των σημείων της παραβολής, θεωρούμε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων Oxy στο οποίο το O είναι επί της κάθετης ευθείας, που φέρεται από την εστία, έστω F, στη διευθετούσα d και στο μέσο της, ενώ ως άξονας των x ορίζεται η κάθετη αυτή ευθεία.

Τότε, σύμφωνα με τη βασική ιδιότητα των σημείων της παραβολής, για το τυχόν σημείο $M(x, y)$ είναι $|MB| = |MF|$, οπότε, αν $p = |CF|$, έχουμε

$$x + \frac{1}{2}p = |MF|. \tag{1}$$

Αλλά

$$|MF|^2 = y^2 + \left(x - \frac{1}{2}p\right)^2. \tag{2}$$

Αντικαθιστώντας τη (2) στην (1) προκύπτει τελικά ότι η **αναλυτική εξίσωση** των σημείων της παραβολής είναι

$$y^2 = 2px. \tag{2.3.4 - 1}$$

Ιδιότητες

i) Η $(2.3.4 - 1)$ δεν μεταβάλλεται, όταν θέσουμε στη θέση του (x, y) το $(x, -y)$, δηλαδή η παραβολή είναι συμμετρική ως προς τον άξονα Ox.

ii) Από την $(2.3.4 - 1)$ προκύπτει ότι $y^2 = 2px \geq 0$, δηλαδή $x \geq 0$. Άρα η παραβολή βρίσκεται στο δεξιό μέρος του άξονα Oy.

Βασικά στοιχεία

Ο άξονας Ox τέμνει την παραβολή στο σημείο O, που λέγεται **κορυφή**, ενώ το p λέγεται **ημιπαράμετρος**.

Εξίσωση εφαπτομένης

Αποδεικνύεται ότι η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο της $M(x_0, y_0)$ δίνεται από τη σχέση

$$-yy_0 = p(x + x_0). \tag{2.3.4 - 2}$$

Διανυσματική εξίσωση

Όμοια αποδεικνύεται ότι είναι της μορφής $(2.3.1 - 6)$, δηλαδή

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} = \langle x, y \rangle$$

όπου

$$\begin{aligned} x(t) &= t, \\ y^2(t) &= 2\,p\,t \end{aligned} \qquad (2.3.4 - 3)$$

όπου η παράμετρος $t \in \mathbb{R}$.

Ασκήσεις

1. Να υπολογιστεί η εξίσωση της παραβολής στις παρακάτω περιπτώσεις:

i) έχει εστία στο σημείο και διευθετούσα $y + 3 = 0$,

ii) διέρχεται από το σημείο $(5, 7)$, είναι συμμετρική ως προς τον άξονα των y και έχει κορυφή το σημείο $(0, 0)$.

2. Να υπολογιστούν οι εφαπτόμενες της παραβολής $y^2 = 2x$, που διέρχονται από το σημείο $(-4, -1)$.

3. Έστω η παραβολή $y^2 = 2px$. Να προσδιοριστεί η ικανή και αναγκαία συνθήκη, έτσι ώστε η ευθεία $y = \kappa x + \lambda$ να εφάπτεται της παραβολής.

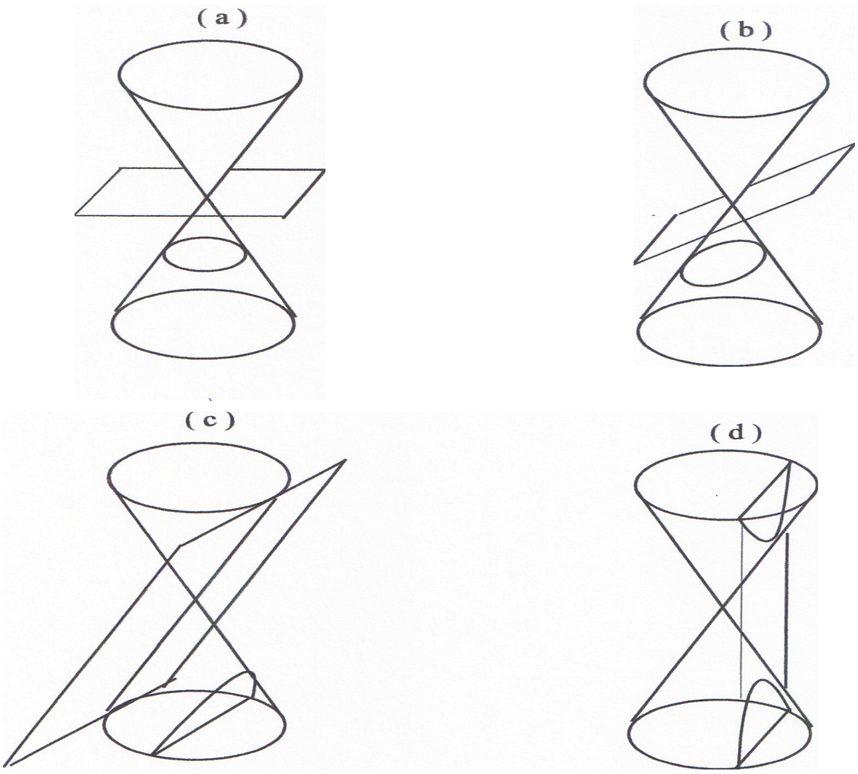
2.3.5 Γενικό πρόβλημα κωνικών τομών

Η έλλειψη, η υπερβολή και η παραβολή λέγονται και **κωνικές τομές** (conic sections), επειδή είναι δυνατόν να προκύψουν από την τομή ενός κυκλικού κώνου εκ περιστροφής, έστω K, με ένα επίπεδο (Σχ. 2.3.5 - 1). Ειδικότερα έχουμε:

i) αν το επίπεδο, έστω Π, δεν είναι παράλληλο προς καμιά από τις γενέτειρες του κώνου, τότε η τομή του επιπέδου με τον κώνο θα δώσει μία έλλειψη (Σχ. 2.3.5 - 1 b), ενώ στην ειδική περίπτωση που είναι κάθετο στον άξονα του κώνου, η τομή είναι **κύκλος** (Σχ. 2.3.5 - 1 a),

ii) αν το επίπεδο είναι παράλληλο προς δύο γενέτειρες, η τομή είναι **υπερβολή** (Σχ. 2.3.5 - 1 c) και,

iii) αν είναι παράλληλο προς ένα εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας του κώνου, η τομή είναι **παραβολή** (Σχ. 2.3.5 - 1 d).



Σχήμα 2.3.5 - 1: γενικό πρόβλημα κωνικών τομών.

Ειδικά όταν το επίπεδο διέρχεται από το σημείο O, η τομή συμπίπτει με μία ή δύο γενέτειρες του κώνου ή περιορίζεται στο σημείο O.

Πρόταση 2.3.5 - 1. *Η γενική εξίσωση των κωνικών τομών, όταν το σύστημα των συντεταγμένων δεν έχει μετατοπιστεί παράλληλα ή στραφεί, είναι της μορφής*

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0, \quad \textit{όταν} \quad |A| + |B| \neq 0 \qquad (2.3.5 - 1)$$

και αντίστροφα.

Απόδειξη. Επειδή το ευθύ προκύπτει άμεσα μετά τις πράξεις στις $(2.3.2-2)$, $(2.3.3-1)$ και $(2.3.4-1)$, αρκεί να δειχθεί το αντίστροφο.

Διακρίνονται οι παρακάτω περιπτώσεις:

1. $AB \neq 0$. Τότε η $(2.3.5-1)$ γράφεται

$$A\left(x^2 + \frac{C}{A}\,x\right) + B\left(y^2 + \frac{D}{B}\,y\right) + E = 0$$

και τελικά μετά τις πράξεις

$$\frac{1}{B}\left(x + \frac{C}{2A}\right)^2 + \frac{1}{A}\left(y + \frac{D}{2B}\right)^2 = \frac{BC^2 + AD^2 - 4ABE}{4A^2B^2} = k, \qquad (2.3.5 - 2)$$

όπου k σταθερά. Τότε:

1-I. Αν $k \neq 0$, η $(2.3.5-2)$ γράφεται

$$\frac{1}{kB}\left(x + \frac{C}{2A}\right)^2 + \frac{1}{kA}\left(y + \frac{D}{2B}\right)^2 = 1. \qquad (2.3.5 - 3)$$

1-Ia. Αν $AB > 0$, από την $(2.3.5-3)$ έχουμε

1-Ia.i. αν k ομόσημο προς τα A και B, η $(2.3.5-3)$ και κατά συνέπεια η $(2.3.5-1)$ παριστάνει **έλλειψη**, ενώ στην ειδική περίπτωση όπου $A = B > 0$ **κύκλο**.

1-Ia.ii. Αν k ετερόσημο προς τα A και B, η $(2.3.5-3)$ είναι **αδύνατη**.

1-Ib. Αν $AB < 0$, η $(2.3.5-3)$ και κατά συνέπεια η $(2.3.5-1)$ παριστάνει **υπερβολή**.

1-II. Αν $k = 0$, η $(2.3.5-3)$ γράφεται

$$A\left(x+\frac{C}{2A}\right)^2 + B\left(y+\frac{D}{2B}\right)^2 = 0. \tag{2.3.5 - 4}$$

1-IIa. Αν $AB > 0$, η $(2.3.5-4)$ επαληθεύεται για

$$x = -\frac{C}{2A} \quad \text{και} \quad y = -\frac{D}{2B}\,.$$

1-IIb. Αν $AB < 0$, το πρώτο μέλος της $(2.3.5-4)$ αναλύεται σε γινόμενο δύο πρωτοβάθμιων όρων ως προς x και y, οπότε η $(2.3.5-4)$ παριστάνει **δύο ευθείες**.

2. Αν $AB = 0$. Τότε:

2-I. Αν $A = 0$ και $B \neq 0$, η $(2.3.5-1)$ γράφεται

$$B\left(y+\frac{D}{2B}\right)^2 = -Cx - E + \frac{D^2}{4B}. \tag{2.3.5 - 5}$$

Τότε

2-Ia. Αν $C \neq 0$, η $(2.3.5-5)$ τελικά γράφεται

$$\left(y+\frac{D}{2B}\right)^2 = -\frac{C}{B}\left(x+\frac{D^2-4BE}{4BC}\right), \tag{2.3.5 - 6}$$

δηλαδή παριστάνει **παραβολή**.

2-Ib. Αν $C = 0$, η $(2.3.5-6)$ γράφεται

$$\left(y+\frac{D}{2B}\right)^2 = \frac{D^2-4BE}{4B}\,, \tag{2.3.5 - 7}$$

οπότε, αν

2-Ib.i. $D^2-4BE > 0$, η $(2.3.5-7)$ και κατά συνέπεια η $(2.3.5-1)$ παριστάνει δύο **ευθείες παράλληλες** προς τον x-άξονα,

2-Ib.ii. $D^2-4BE = 0$, η $(2.3.5-7)$ παριστάνει μια **ευθεία παράλληλη** στον x-άξονα, και

2-Ib.iii. $D^2 - 4BE < 0$, η $(2.3.5 - 7)$ είναι **αδύνατη**.

2-II. Αν $A \neq 0$ και $B = 0$, τότε η $(2.3.5 - 1)$ γράφεται

$$A\left(x + \frac{C}{2A}\right)^2 = -Dy - E + \frac{C^2}{4A}. \qquad (2.3.5 - 8)$$

Όμοια τότε η $(2.3.5 - 8)$, αν

- $D \neq 0$ παριστάνει **παραβολή**, ενώ όταν
- $D = 0$, παριστάνει δύο ή μία ευθείες παράλληλες προς τον y-άξονα ή τελικά είναι **αδύνατη**.

■

Αποδεικνύεται ότι:

Πρόταση 2.3.5 - 2. *Η γενικότερη μορφή των κωνικών τομών, όταν το σύστημα συντεταγμένων έχει μετατοπιστεί ή έχει στραφεί ή και τα δύο, είναι*

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + K = 0 \qquad (2.3.5 - 9)$$

και αντίστροφα κάθε εξίσωση της μορφής $(2.3.5-9)$, *δεν δύναται να παριστάνει πέραν των κωνικών τομών, τίποτε άλλο εκτός από φανταστικές ευθείες και ελλείψεις.*

Η $(2.3.5-9)$ χαρακτηρίζει τότε τη γενική εξίσωση των καμπυλών 2ου βαθμού.

Το πρόβλημα που προκύπτει τώρα είναι ο τρόπος προσδιορισμού του είδους της κωνικής τομής από την $(2.3.5 - 9)$. Αρχικά εξετάζεται το πρόσημο της παράστασης

$$\Delta = B^2 - 4AC.$$

Τότε, αν:

i) $\Delta > 0$ η καμπύλη είναι **υπερβολή**, ενώ, αν $\Delta < 0$ **έλλειψη**.

Στη συνέχεια, θέτουμε στην $(2.3.5-9)$ τους τύπους $(1.2.2-2)$ αλλαγής συντεταγμένων με παράλληλη μετατόπιση στο σημείο (a, b), δηλαδή τους

$$x = x' + a \quad \text{και} \quad y = y' + b$$

και προσδιορίζουμε τα a, b.

Στη συνέχεια, αντικαθιστώντας τις τιμές των a και b στην (2.3.5−9) προκύπτει μία εξίσωση της μορφής

$$A\left(x'\right)^2 + Bx'y' + C\left(y'\right)^2 + D = 0, \qquad (2.3.5 - 10)$$

οπότε από τον τύπο

$$\tan\theta = \frac{B}{A-C} \qquad (2.3.5 - 11)$$

προσδιορίζεται η γωνία στροφής των αξόνων.

ii) $\Delta = 0$ η καμπύλη είναι **παραβολή**. Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιείται μόνον ο τύπος $(2.3.5 - 11)$.

Παράδειγμα 2.3.5 - 1

Να προσδιοριστεί το είδος της καμπύλης

$$xy - 2y - 4x = 0. \qquad (1)$$

Λύση. Είναι

$$B^2 - 4AC = 1 > 0,$$

οπότε πρόκειται για υπερβολή.

Θέτοντας στην (1) τους τύπους

$$x = x' + a \quad \text{και} \quad y = y' + b$$

έχουμε

$$x'y' + (b-4)x' + (a-2)y' + ab - 2b - 4a = 0$$

από την οποία προκύπτει ότι $b - 4 = 0$ και $a - 2 = 0$.

Άρα

$$b = 4 \quad \text{και} \quad a = 2,$$

οπότε οι αρχικοί άξονες έχουν μετατοπιστεί στο σημείο $(2, 4)$.

Τότε η (1) γράφεται

$$x'y' = 8, \qquad (2)$$

οπότε η υπερβολή έχει ασύμπτωτες τους άξονες $O'x'$ και $O'y'$.

Από την $(2.3.5-11)$ προκύπτει τότε ότι

$$\tan 2\theta \to +\infty, \quad \text{δηλαδή} \quad \theta = \frac{\pi}{4}\,.$$

Θέτοντας την τιμή αυτή στους τύπους $(1.2.2-4)$ της στροφής των αξόνων κατά ορισμένη γωνία, δηλαδή στους

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y &= -x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{aligned}$$

προκύπτει ότι

$$x' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x'' - y''\right) \quad \text{και} \quad y' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x'' + y''\right), \tag{3}$$

όπου $O'x''y''$ οι άξονες συντεταγμένων μετά τη μετατόπιση και τη στροφή.

Τότε η (2) σύμφωνα με την (3) γράφεται

$$\left(x''\right)^2 - \left(y''\right)^2 = 16$$

δηλαδή πρόκειται για ισοσκελή υπερβολή.

Παράδειγμα 2.3.5 - 2

Όμοια το είδος της καμπύλης

$$x^2 + 2xy + y^2 + 4x - 10y + 5 = 0. \tag{4}$$

Λύση. Είναι

$$B^2 - 4AC = 0,$$

οπότε πρόκειται για παραβολή.

Τότε από την $(2.3.5-11)$ προκύπτει ότι

$$\tan 2\theta \to +\infty, \quad \text{οπότε} \quad \theta = \frac{\pi}{4}\,.$$

Όμοια θέτοντας την τιμή αυτή στους τύπους $(1.2.2-4)$ της στροφής των αξόνων κατά ορισμένη γωνία, δηλαδή στους

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y &= -x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{aligned}$$

προκύπτει ότι

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x' - y'\right) \quad \text{και} \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x' + y'\right),$$

όπου $Ox'y'$ οι άξονες συντεταγμένων μετά τη στροφή.

Άρα η (4) γράφεται

$$\left(x' - \frac{3}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{7}{\sqrt{2}}\left(y' - \frac{11}{28\sqrt{2}}\right),$$

δηλαδή πρόκειται για παραβολή με κορυφή το σημείο $\left(3/2\sqrt{2},\, 11/28\sqrt{2}\right)$ και παράλληλη στον άξονα Oy'.

Ασκήσεις

1. Να προσδιοριστεί το είδος των παρακάτω κωνικών τομών:

i) $y^2 + 3x - 4y + 9 = 0$,

ii) $y^2 + 4xy + 4x^2 + 2y + 4x - 36 = 0$,

iii) $8y^2 + 4xy + 5x^2 + 16y + 4x - 28 = 0$,

iv) $3xy + 5x + 10y = 0$.

2. Δίνεται η καμπύλη $4x^2 - 4xy + y^2 + 6x + 1 = 0$. Ζητείται να προσδιοριστεί η θέση της ευθείας $y = \lambda x$ ως προς την καμπύλη για τις διάφορες τιμές του λ.

Απαντήσεις

1. i) $\Delta = 0$ παραβολή, ii) $\Delta = 16 > 0$ υπερβολή, iii) $\Delta = -144$ έλλειψη, iv) $\Delta = 9 > 0$ υπερβολή.

2.4 Βιβλιογραφία

[1] Καδιανάκης, Ν. & Καρανάσιος, Σ. (2008). *Γραμμική Άλγεβρα*. Αναλυτική Γεωμετρία και Εφαρμογές. ISBN: 960–917–250–4.

[2] Μπράτσος, Α. (2002). *Ανώτερα Μαθηματικά*. Εκδόσεις Α. Σταμούλη. ISBN 960–351–453–5/978–960–351–453–4.

[3] Ξένος, Θ. (2004), *Αναλυτική Γεωμετρία*. Εκδόσεις Ζήτη. ISBN 960–431–915–9.

[4] Φούντας, Γρ. (2009). *Αναλυτική* & *Διανυσματική Γεωμετρία*. Εκδόσεις Γρηγ. Φούντα. ISBN 960–330–517–0.

Μαθηματικές βάσεις δεδομένων

- http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
- http://eqworld.ipmnet.ru/index.htm
- http://mathworld.wolfram.com/
- http://eom.springer.de/