ΠΡΟΟΔΟΙ

Οι πρόοδοι αποτελούν μια ειδική κατηγορία των ακολουθιών και είναι τριών ειδών : αριθμητικές, αρμονικές και γεωμετρικές.

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΠΡΟΟΔΟΙ (ΘΕΩΡΙΑ)

Ορισμός

Μια ακολουθία αριθμών α_1, α_2, ..., α_ν, $\alpha_{\nu+1}$, ... θα λέμε ότι αποτελεί αριθμητική πρόοδο τότε και μόνο τότε αν υπάρχει ένας αριθμός ω, ώστε να ισχύει :

$$\boxed{\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \omega,\ \forall\, \nu = 1, 2, ...}$$

Ο αριθμός ω αποκαλείται ***λόγος*** ή ***διαφορά*** της αριθμητικής προόδου.

Η αριθμητική πρόοδος αποκαλείται και ***πρόοδος κατά διαφορά***, γιατί εύκολα μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η διαφορά δύο διαδοχικών όρων της είναι σταθερή και ίση με ω.

Παρατηρούμε επίσης ότι αν $\omega > 0$, τότε η αριθμητική πρόοδος είναι γνησίως αύξουσα, γιατί $\alpha_{\nu+1} > \alpha_\nu$, ενώ αν αν $\omega < 0$, τότε η αριθμητική πρόοδος είναι γνησίως φθίνουσα, γιατί $\alpha_{\nu+1} < \alpha_\nu$, και τέλος αν $\omega = 0$, τότε η αριθμητική πρόοδος είναι μια σταθερή ακολουθία.

Ο τύπος για να υπολογίσουμε τον νιοστό όρο α_ν μιας αριθμητικής προόδου συναρτήσει του πρώτου όρου της α_1, της διαφοράς της ω και του ν, είναι ο εξής :

$$\boxed{\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu-1)\omega,\ \forall\, \nu \in \mathrm{N}}$$

Αποδεικνύεται ότι για μια αριθμητική πρόοδο α_ν με διαφορά ω και για τους φυσικούς αριθμούς ν και μ, με $\mu<\nu$, ισχύει :

$$\boxed{\alpha_{1+\mu} + \alpha_{\nu-\mu} = \alpha_1 + \alpha_\nu}$$

Αυτό σημαίνει πρακτικά ότι το άθροισμα δύο όρων μιας αριθμητικής προόδου που απέχουν εξ ίσου από τους άκρους όρους είναι ίσο με το άθροισμα των άκρων όρων. Στην περίπτωση που το πλήθος των ν πρώτων όρων μιας αριθμητικής προόδου είναι άρτιο σε πλήθος δεν υπάρχει μεσαίος όρος, ενώ στην περίπτωση που το πλήθος των ν πρώτων όρων μιας αριθμητικής προόδου είναι περιττό, τότε υπάρχει μεσαίος όρος και το άθροισμα των άκρων όρων είναι ίσο με το διπλάσιο του μεσαίου όρου.

Ένας άλλος ορισμός για μια αριθμητική πρόοδο είναι ο εξής :

Μια ακολουθία α_ν, ν = 1, 2, ..., θα λέμε ότι αποτελεί αριθμητική πρόοδο τότε και μόνο τότε όταν ισχύει :

$$\boxed{2\alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} + \alpha_{\nu+1},\ \forall\, \nu = 2, 3, \ldots}$$

Αριθμητικός Μέσος

Τρεις αριθμοί α, β, γ αποτελούν διαδοχικούς όρους μιας αριθμητικής προόδου, όταν και μόνο όταν ισχύει :

$$\boxed{2\beta = \alpha + \gamma}$$

Στην περίπτωση αυτή, ο $\beta = \dfrac{a+g}{2}$ αποκαλείται ***αριθμητικός μέσος*** των α και γ.

Σαν γενικό ορισμό, αποκαλούμε αριθμητικό μέσο των ν αριθμών α_1, α_2, ..., α_ν, τον πραγματικό αριθμό :

$$M_A = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

Άθροισμα Όρων Αριθμητικής Προόδου

Το άθροισμα Σ_ν των ν πρώτων όρων μιας αριθμητικής προόδου είναι ίσο με :

$$\boxed{\Sigma_\nu = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}}$$

$$\boxed{\Sigma_\nu = \frac{[2a_1 + (n-1)w]n}{2}}$$

Παρεμβολή Αριθμητικών Ενδιαμέσων

Το πρόβλημα της αριθμητικής παρεμβολής, όταν μας δίνονται δύο αριθμοί α και β και ο φυσικός αριθμός μ, έγκειται στο να προσδιορίσουμε τους μ αριθμούς x_1, x_2, ..., x_μ, ώστε οι αριθμοί α, x_1, x_2, ..., x_μ, β να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

Για να λύσουμε το πρόβλημα της αριθμητικής παρεμβολής, αρκεί να υπολογίσουμε τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδους που θέλουμε να σχηματισθεί. Αποδεικνύεται εύκολα ότι :

$$\boxed{\omega = \frac{b-a}{m+1}}$$

Ο παραπάνω τύπος αποκαλείται ***τύπος της αριθμητικής παρεμβολής*** και οι ζητούμενοι αριθμοί είναι οι εξής :

$$x_1 = \alpha+\omega,\ x_2 = \alpha+2\omega,\ \ldots,\ x_\mu = \alpha+\mu\omega$$

Παράσταση των Όρων μιας Αριθμητικής Προόδου

Όταν γνωρίζουμε το άθροισμα των διαδοχικών όρων μιας αριθμητικής προόδου, τότε αν το πλήθος των όρων είναι περιττό, θα πρέπει να συμβολίσουμε τους όρους ως εξής :

$$x - \nu\omega, \ldots, x - 2\omega, x - \omega, x, x + \omega, x + 2\omega, \ldots, x + \nu\omega$$

όπου το x είναι ο μεσαίος όρος της αριθμητικής προόδου και το ω ο λόγος (διαφορά) της. Από το άθροισμα των παραπάνω όρων απαλείφονται οι όροι με το ω και έτσι εύκολα υπολογίζουμε το x.

Στην περίπτωση τώρα που το πλήθος των όρων είναι άρτιο, θα πρέπει να συμβολίσουμε τους όρους ως εξής :

$$x - (2\nu-1)\omega, \ldots, x - 3\omega, x - \omega, x + \omega, x + 3\omega, \ldots, x + (2\nu-1)\omega$$

όπου έχουμε δύο μεσαίους όρους, τους $x - \omega$ και $x + \omega$, η διαφορά της προόδου είναι ίση με 2ω και το x δεν αποτελεί όρο της προόδου.

Χρήσιμα Αθροίσματα

Θα δούμε μερικά χρήσιμα αθροίσματα των k ($k \in N$) δυνάμεων των ν πρώτων φυσικών αριθμών.

$$\Sigma_1 = 1+2+3+\ldots+\nu = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\Sigma_2 = 1^2+2^2+3^2+\ldots+\nu^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\Sigma_3 = 1^3+2^3+3^3+\ldots+\nu^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \Sigma_1^2$$

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΠΡΟΟΔΟΙ (ΑΣΚΗΣΕΙΣ)

1. Να βρεθεί ο $21^{ος}$ όρος της αριθμητικής προόδου 10, 13, 16, ... (Απ. 70).
2. Να βρεθεί ο αριθμός α ώστε οι αριθμοί 4α+5, 61 και 8α – 3 να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου (Απ. α=10).
3. Ο πρώτος όρος μιας αριθμητικής προόδου είναι ίσος με 4 και ο $13^{ος}$ είναι ίσος με 40. Να βρεθεί η πρόοδος καθώς και το άθροισμα των 31 πρώτων όρων της (Απ. ω=3, Σ=1.519).
4. Να παρεμβληθούν 10 αριθμητικοί ενδιάμεσοι ανάμεσα στους αριθμούς 6 και 72 (Απ. ω=6).
5. Να βρεθούν τρεις αριθμοί που να αποτελούν διαδοχικούς όρους μιας αριθμητικής προόδου όταν το άθροισμά τους είναι ίσο με 30 και το γινόμενό τους είναι ίσο με 910 (Απ. 7, 10, 13 και 13, 10, 7).
6. Να βρεθούν τέσσερις αριθμοί που να αποτελούν διαδοχικούς όρους μιας αριθμητικής προόδου όταν το άθροισμά τους είναι ίσο με 36 και το γινόμενό τους είναι ίσο με 5.760 (Απ. 6, 8, 10, 12 και 12, 10, 8, 6).
7. Να αποδειχθεί ότι το άθροισμα των ν πρώτων περιττών αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο του πλήθους τους.
8. Να βρεθεί ο τετραψήφιος αριθμός του οποίου τα ψηφία αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου και το τελευταίο ψηφίο είναι τετραπλάσιο του πρώτου (Απ. 1234 και 2468).
9. Αν οι αριθμοί α, β και γ βρίσκονται στις θέσεις β, γ και α σε μια αριθμητική πρόοδο, να αποδειχθεί ότι α=β=γ.
10. Αν ο νιοστός όρος μιας ακολουθίας δίνεται από τον τύπο $\alpha_\nu = 3\nu+4$, να αποδειχθεί ότι η ακολουθία αυτή αποτελεί αριθμητική πρόοδο και να βρεθούν ο πρώτος όρος της και η διαφορά της (Απ. $\alpha_1=7$, ω=3).
11. Να υπολογισθεί το άθροισμα $\frac{2n+1}{n}+\frac{2n+2}{n}+\frac{2n+3}{n}+\ldots+\frac{2n+n}{n}$ (Απ. $\frac{5n+1}{2}$).

ΑΡΜΟΝΙΚΕΣ ΠΡΟΟΔΟΙ (ΘΕΩΡΙΑ)

Ορισμός

Μια ακολουθία αριθμών $α_1$, $α_2$, ..., $α_ν$, $α_{ν+1}$, ... θα λέμε ότι αποτελεί αρμονική πρόοδο τότε και μόνο τότε αν $α_ν \neq 0 \ \forall ν \in \mathbb{N}$ και υπάρχει ένας αριθμός ω, ώστε να ισχύει :

$$\boxed{\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + ω, \ \forall ν = 1, 2, ...}$$

Παρατηρούμε ότι σε μια αρμονική πρόοδο, οι αντίστροφοι των όρων της με την ίδια τάξη αποτελούν όρους μιας αριθμητικής προόδου και έτσι η μελέτη μιας αρμονικής προόδου ανάγεται στη μελέτη της αντίστοιχης αριθμητικής προόδου.

Ο τύπος για να υπολογίσουμε τον νιοστό όρο $α_ν$ μιας αρμονικής προόδου συναρτήσει του πρώτου όρου της $α_1$, της διαφοράς της ω και του ν, είναι ο εξής :

$$\boxed{α_ν = \frac{a_1}{1+(n-1)wa_1}, \ \forall ν \in \mathbb{N}}$$

Αρμονικός Μέσος

Τρεις αριθμοί α, β, γ αποτελούν διαδοχικούς όρους μιας αρμονικής προόδου, όταν και μόνο όταν ισχύει :

$$\boxed{β = \frac{2ag}{a+g}}$$

Στην περίπτωση αυτή, ο β αποκαλείται ***αρμονικός μέσος*** των α και γ.

Σαν γενικό ορισμό, αποκαλούμε αρμονικό μέσο των ν αριθμών $α_1$, $α_2$, ..., $α_ν \neq 0$, τον πραγματικό αριθμό :

$$M_H = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}}$$

Πρέπει να έχουμε υπόψη μας ότι δεν υπάρχει τύπος που να δίνει το άθροισμα $Σ_ν$ των ν πρώτων όρων μιας αρμονικής προόδου.

Παρεμβολή Αρμονικών Ενδιαμέσων

Το πρόβλημα της αρμονικής παρεμβολής, όταν μας δίνονται δύο αριθμοί α και β και ο φυσικός αριθμός μ, έγκειται στο να προσδιορίσουμε τους μ αριθμούς $x_1, x_2, ..., x_\mu$, ώστε οι αριθμοί α, $x_1, x_2, ..., x_\mu$, β να αποτελούν διαδοχικούς όρους αρμονικής προόδου.

Για να λύσουμε το πρόβλημα της αρμονικής παρεμβολής, αρκεί να παρεμβάλουμε μ αριθμητικούς ενδιαμέσους ανάμεσα στους αριθμούς $\frac{1}{a}$ και $\frac{1}{b}$.

Αποδεικνύεται εύκολα ότι :

$$\boxed{\omega = \frac{a-b}{(m+1)ab}}$$

Ο παραπάνω τύπος αποκαλείται ***τύπος της αρμονικής παρεμβολής***.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΠΡΟΟΔΟΙ (ΘΕΩΡΙΑ)

Ορισμός

Μια ακολουθία αριθμών α_1, α_2, ..., α_ν, $\alpha_{\nu+1}$, ... θα λέμε ότι αποτελεί γεωμετρική πρόοδο τότε και μόνο τότε αν υπάρχει ένας αριθμός λ, ώστε να ισχύει :

$$\boxed{\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu \,.\, \lambda,\ \forall\, \nu = 1, 2, \ldots}$$

Ο αριθμός λ αποκαλείται ***λόγος*** της γεωμετρικής προόδου.

Η γεωμετρική πρόοδος αποκαλείται και ***πρόοδος κατά πηλίκο***, γιατί εύκολα μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το πηλίκο δύο διαδοχικών όρων της είναι σταθερό και ίσο με λ.

Παρατηρούμε επίσης ότι αν $|l| > 1$, τότε η γεωμετρική πρόοδος είναι απολύτως γνησίως αύξουσα, γιατί $|a_{n+1}| > |a_n|$, ενώ αν αν $|l| < 1$, τότε η γεωμετρική πρόοδος είναι απολύτως γνησίως φθίνουσα, γιατί $|a_{n+1}| < |a_n|$, και τέλος αν $|l| = 1$, τότε η γεωμετρική πρόοδος είναι μια απολύτως σταθερή ακολουθία.

Ο τύπος για να υπολογίσουμε τον νιοστό όρο α_ν μιας γεωμετρικής προόδου συναρτήσει του πρώτου όρου της α_1, του λόγου της λ και του ν, είναι ο εξής :

$$\boxed{\alpha_\nu = \alpha_1 \,.\, \lambda^{\nu-1},\ \forall\, \nu \in \mathrm{N}}$$

Αποδεικνύεται ότι για μια γεωμετρική πρόοδο α_ν με λόγο $\lambda \neq 0$ και για τους φυσικούς αριθμούς ν και μ, με $\mu < \nu$, ισχύει :

$$\boxed{\alpha_{1+\mu} \,.\, \alpha_{\nu-\mu} = \alpha_1 \,.\, \alpha_\nu}$$

Αυτό σημαίνει πρακτικά ότι το γινόμενο δύο όρων μιας γεωμετρικής προόδου που απέχουν εξ ίσου από τους άκρους όρους είναι ίσο με το γινόμενο των άκρων όρων. Στην περίπτωση που το πλήθος των ν πρώτων όρων μιας γεωμετρικής προόδου είναι άρτιο σε πλήθος δεν υπάρχει μεσαίος όρος, ενώ στην περίπτωση που το πλήθος των ν πρώτων όρων μιας γεωμετρικής προόδου είναι περιττό, τότε υπάρχει μεσαίος όρος και το γινόμενο των άκρων όρων είναι ίσο με το τετράγωνο του μεσαίου όρου.

Ένας άλλος ορισμός για μια γεωμετρική πρόοδο είναι ο εξής :

Μια ακολουθία $\alpha_\nu \neq 0$, ν = 1, 2, ..., θα λέμε ότι αποτελεί γεωμετρική πρόοδο τότε και μόνο τότε όταν ισχύει :

$$\boxed{\alpha_\nu^2 = \alpha_{\nu-1} \cdot \alpha_{\nu+1}, \ \forall \nu = 2, 3, \ldots}$$

Γεωμετρικός Μέσος

Τρεις αριθμοί α, β, γ αποτελούν διαδοχικούς όρους μιας γεωμετρικής προόδου, όταν και μόνο όταν ισχύει :

$$\boxed{\beta^2 = \alpha \cdot \gamma}$$

Στην περίπτωση αυτή, ο $\beta = \sqrt{a.g}$ αποκαλείται ***γεωμετρικός μέσος*** ή ***μέσος ανάλογος*** των α και γ.

Σαν γενικό ορισμό, αποκαλούμε γεωμετρικό μέσο των ν αριθμών α_1, α_2, ..., α_ν, τον πραγματικό αριθμό :

$$M_\Gamma = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

Άθροισμα Όρων Γεωμετρικής Προόδου

Το άθροισμα Σ_ν των ν πρώτων όρων μιας γεωμετρικής προόδου είναι ίσο με :

$$\boxed{\Sigma_\nu = \frac{a_n l - a_1}{l - 1}}$$

$$\boxed{\Sigma_\nu = \frac{a_1 (l^n - 1)}{l - 1}}$$

Παρεμβολή Γεωμετρικών Ενδιαμέσων

Το πρόβλημα της γεωμετρικής παρεμβολής, όταν μας δίνονται δύο αριθμοί α και $\beta \neq 0$ και ο φυσικός αριθμός μ, έγκειται στο να προσδιορίσουμε τους μ αριθμούς x_1, x_2, ..., x_μ, ώστε οι αριθμοί α, x_1, x_2, ..., x_μ, β να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου.

Για να λύσουμε το πρόβλημα της γεωμετρικής παρεμβολής, αρκεί να υπολογίσουμε το λόγο λ της γεωμετρικής προόδους που θέλουμε να σχηματισθεί. Αποδεικνύεται εύκολα ότι :

$$\boxed{\lambda = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}}$$

Ο παραπάνω τύπος αποκαλείται ***τύπος της γεωμετρικής παρεμβολής*** και οι ζητούμενοι αριθμοί είναι οι εξής :

$$x_1 = α.λ,\ x_2 = α.λ^2, ...,\ x_μ = α.λ^μ$$

Στην γεωμετρική παρεμβολή διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

1. Αν το μ είναι άρτιος φυσικός αριθμός, οπότε το μ+1 είναι περιττός φυσικός αριθμός, τότε θα έχουμε μία μόνο πραγματική λύση για το λ με βάση τον παραπάνω τύπο και μάλιστα θα ισχύει λ>0 αν α.β>0 και λ<0 αν α.β<0.
2. Αν το μ είναι περιττός φυσικός αριθμός, οπότε το μ+1 είναι άρτιος φυσικός αριθμός, και α.β>0 τότε θα έχουμε δύο ετερόσημες πραγματικές λύσεις για το λ.
3. Αν το μ είναι περιττός φυσικός αριθμός, οπότε το μ+1 είναι άρτιος φυσικός αριθμός, και α.β<0 τότε δεν θα έχουμε πραγματικές λύσεις για το λ.

Παράσταση των Όρων μιας Γεωμετρικής Προόδου

Όταν γνωρίζουμε το γινόμενο των διαδοχικών όρων μιας γεωμετρικής προόδου, τότε αν το πλήθος των όρων είναι περιττό, θα πρέπει να συμβολίσουμε τους όρους ως εξής :

$$\frac{x}{l^n}, ..., \frac{x}{l^2}, \frac{x}{l}, x, x.λ, x.λ^2, ..., x.λ^ν$$

όπου το x είναι ο μεσαίος όρος της γεωμετρικής προόδου και το λ ο λόγος της. Από το γινόμενο των παραπάνω όρων απαλείφονται οι όροι με το λ και έτσι εύκολα υπολογίζουμε το x.

Στην περίπτωση τώρα που το πλήθος των όρων είναι άρτιο, θα πρέπει να συμβολίσουμε τους όρους ως εξής :

$$..., \frac{x}{l^5}, \frac{x}{l^3}, \frac{x}{l}, x.λ, x.λ^3, x.λ^5, ...$$

όπου έχουμε δύο μεσαίους όρους, ο λόγος της προόδου είναι ίσος με $λ^2$ και το x δεν αποτελεί όρο της προόδου.

Άθροισμα Άπειρων Όρων Απολύτως Φθίνουσας Γεωμετρικής Προόδου

Το άθροισμα Σ των άπειρων όρων μιας απολύτως φθίνουσας γεωμετρικής προόδου, με πρώτο όρο $α_1$ και λόγο λ, όπου $|l|<1$, είναι ίσο με : $\frac{a_1}{1-l}$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΠΡΟΟΔΟΙ (ΑΣΚΗΣΕΙΣ)

1. Να βρεθεί ο $8^{ος}$ όρος της γεωμετρικής προόδου 1, 2, 4, ... (Απ. 128).
2. Να βρεθεί ο αριθμός α ώστε οι αριθμοί α, 6 και 9 να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου (Απ. α=4).
3. Ο πρώτος όρος μιας γεωμετρικής προόδου είναι ίσος με 2 και ο $7^{ος}$ είναι ίσος με $\frac{1}{32}$. Να βρεθεί η πρόοδος καθώς και το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της (Απ. $\lambda=\frac{1}{2}$, $\Sigma=4-\frac{1}{2^{18}}$).
4. Να παρεμβληθούν 4 γεωμετρικοί ενδιάμεσοι ανάμεσα στους αριθμούς 2 και 64 (Απ. λ=2).
5. Να βρεθούν τρεις αριθμοί που να αποτελούν διαδοχικούς όρους μιας γεωμετρικής προόδου όταν το άθροισμά τους είναι ίσο με 21 και το γινόμενό τους είναι ίσο με 216 (Απ. 3, 6, 12 και 12, 6, 3).
6. Να υπολογισθεί το άθροισμα των άπειρων όρων 2, $\frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{32}, \ldots$ (Απ. $\frac{8}{3}$).
7. Να βρεθεί ο ρητός αριθμός που ισούται με τον περιοδικό δεκαδικό αριθμό 2,151515... (Απ. $\frac{213}{99}$).
8. Να αποδειχθεί ότι οι διαφορές των διαδοχικών όρων μιας γεωμετρικής προόδου δημιουργούν επίσης μια γεωμετρική πρόοδο. Ποιος είναι ο λόγος αυτής της γεωμετρικής προόδου; (Απ. λ).
9. Να αποδειχθεί ότι τα τετράγωνα των διαδοχικών όρων μιας γεωμετρικής προόδου δημιουργούν επίσης μια γεωμετρική πρόοδο. Ποιος είναι ο λόγος αυτής της γεωμετρικής προόδου; (Απ. λ^2).
10. Να βρεθεί η απολύτως φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος της οποίας ο πρώτος όρος είναι ίσος με τα $\frac{6}{15}$ του αθροίσματος των άπειρων όρων της και το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της είναι ίσο με $\frac{147}{25}$ (Απ. $\alpha_1=3$, $\lambda=\frac{3}{5}$).
11. Να βρεθεί η απολύτως φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος της οποίας το άθροισμα των άπειρων όρων της είναι ίσο με 6 και το άθροισμα των τετραγώνων των άπειρων όρων της είναι ίσο με 18 (Απ. $\alpha_1=4$, $\lambda=\frac{1}{3}$).
12. Αν το άθροισμα των ν όρων μιας ακολουθίας δίνεται από τον τύπο $\Sigma_\nu = 4^\nu-1$, να αποδειχθεί ότι η ακολουθία αυτή αποτελεί γεωμετρική πρόοδο και να βρεθούν ο πρώτος όρος και ο λόγος της (Απ. $\alpha_1=3$, $\lambda=4$).