Σημειώσεις για το Μάθημα
Γραμμική Άλγεβρα Ι

Χρήστος Κουρουνιώτης

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Κρήτης
Ηράκλειο, Κρήτη

Κεφάλαιο 1

Διανυσματικοί Χώροι

Αριθμοί και Διανύσματα

Αλγεβρικά σώματα

Αξιώματα Διανυσματικού Χώρου

Θεωρούμε ένα αλγεβρικό σώμα $\mathbb{K}$. Ένα σύνολο V, με δύο πράξεις

$$\alpha : V \times V \to V \qquad \alpha(v, w) = v \dotplus w$$

και

$$\mu : \mathbb{K} \times V \to V \qquad \mu(a, v) = a \cdot v$$

ονομάζεται ***διανυσματικός χώρος πάνω από το*** $\mathbb{K}$ εάν ικανοποιούνται τα ακόλουθα αξιώματα.

ΔΧ1. Για κάθε $v, w \in V, \quad v \dotplus w = w \dotplus v$.

ΔΧ2. Για κάθε $v, w, u \in V, \quad (v \dotplus w) \dotplus u = v \dotplus (w \dotplus u)$.

ΔΧ3. Υπάρχει στοιχείο $\bar{0} \in V$ τέτοιο ώστε, για κάθε $v \in V, \quad v \dotplus \bar{0} = v$.

ΔΧ4. Για κάθε $v \in V$ υπάρχει $w \in V$ τέτοιο ώστε $u \dotplus w = 0$.

ΔΧ5. Για κάθε $a, b \in \mathbb{K}$ και $v \in V, \quad a \cdot (b \cdot v) = (ab) \cdot v$.

ΔΧ6. Για κάθε $v \in V$ ισχύει $1 \cdot v = v$.

ΔΧ7. Για κάθε $a \in \mathbb{K}$ και $v, w \in V, \quad a \cdot (v \dotplus w) = a \cdot v \dotplus a \cdot w$.

ΔΧ8. Για κάθε $a, b \in \mathbb{K}$ και $v, \in V, \quad (a + b) \cdot v = a \cdot v \dotplus b \cdot v$.

Τα στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου ονομάζονται ***διανύσματα***.

Πρώτα αποτελέσματα από τα αξιώματα.

Λήμμα 1.1 *Θεωρούμε ένα διανυσματικό χώρο V πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, με πράξεις $\dot{+}$ και $\cdot$.*

1. *Το γινόμενο ενός αριθμού $a \in \mathbb{K}$, και ενός διανύσματος $v \in V$, είναι το μηδενικό διάνυσμα εάν και μόνον εάν $a = 0$ ή $v = 0$.*

   Πιο αναλυτικά, για κάθε $v \in V$, $\quad 0 \cdot v = \bar{0}$, και για κάθε $a \in \mathbb{K}$, $\quad a \cdot \bar{0} = \bar{0}$, και αντιστροφα, για κάθε $a \in \mathbb{K}$ και για κάθε $v \in V$, εάν $a \cdot v = \bar{0}$, τότε $a = 0$ ή $v = \bar{0}$.

2. *Το αντίθετο ενός διανύσματος $v \in V$ είναι μοναδικό, και ίσο με $(-1) \cdot v$.*

Απόδειξη. Για το 1, θεωρούμε ένα διάνυσμα $v \in V$, και τον αριθμό μηδέν, $0 \in \mathbb{K}$. Θα δείξουμε οτι $0 \cdot v = \bar{0}$. Έχουμε

$$\begin{aligned} 0 \cdot v &= (0 + 0) \cdot v \\ &= 0 \cdot v \dot{+} 0 \cdot v \end{aligned}$$

Έστω w ένα αντίθετο του διανύσματος $0 \cdot v$, δηλαδή $0 \cdot v + w = \bar{0}$. Τότε

$$\begin{aligned} \bar{0} &= 0 \cdot v \dot{+} w \\ &= (0 \cdot v \dot{+} 0 \cdot v) \dot{+} w \\ &= 0 \cdot v \dot{+} (0 \cdot v \dot{+} w) \\ &= 0 \cdot v \dot{+} \bar{0} \\ &= 0 \cdot v \end{aligned}$$

Θεωρούμε έναν αριθμό $a \in \mathbb{K}$, και το μηδενικό διάνυσμα $\bar{0} \in V$. Θα δείξουμε οτι $a \cdot \bar{0} = \bar{0}$. Έχουμε

$$\begin{aligned} a \cdot \bar{0} &= a \cdot (\bar{0} \dot{+} \bar{0}) \\ &= a \cdot \bar{0} \dot{+} a \cdot \bar{0} \end{aligned}$$

Έστω u ένα αντίθετο του διανύσματος $a \cdot \bar{0}$, δηλαδή $a \cdot \bar{0} + u = \bar{0}$. Τότε

$$\begin{aligned} \bar{0} &= a \cdot \bar{0} \dot{+} u \\ &= (a \cdot \bar{0} \dot{+} a \cdot \bar{0}) \dot{+} u \\ &= a \cdot \bar{0} \dot{+} (a \cdot \bar{0} \dot{+} u) \\ &= a \cdot \bar{0} \dot{+} \bar{0} \\ &= a \cdot \bar{0} \end{aligned}$$

Αντίστροφα, εάν $a \neq 0$ και $a \cdot v = \bar{0}$, τότε

$$v = 1 \cdot v = (a^{-1}a) \cdot v = a^{-1} \cdot (a \cdot v) = a^{-1} \cdot \bar{0} = \bar{0}\,.$$

Για το 2, υποθέτουμε ότι w και w' είναι αντίθετα του $v \in V$, και θα δείξουμε ότι $w = w'$. Έχουμε ότι $v \dot{+} w = \bar{0} = v \dot{+} w'$. Συνεπώς

$$\begin{aligned} w &= w \dot{+} \bar{0} \\ &= w \dot{+} (v \dot{+} w') \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (w \dotplus v) \dotplus w' \\
&= (v \dotplus w) \dotplus w' \\
&= \bar{0} \dotplus w' \\
&= w' \dotplus \bar{0} \\
&= w'
\end{aligned}
$$

Τώρα δείχνουμε ότι το γινόμενο $(-1) \cdot v$ είναι αντίθετο του v:

$$
\begin{aligned}
v \dotplus ((-1) \cdot v) &= (1 \cdot v) \dotplus ((-1) \cdot v) \\
&= (1 + (-1)) \cdot v \\
&= 0 \cdot v \\
&= \bar{0}
\end{aligned}
$$

Το μοναδικό αντίθετο του v συμβολίζουμε $-v$.

□

Γενικά παραδείγματα διανυσματικών χώρων πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$.

Παράδειγμα 1.1 Διατεταγμένες $n-$άδες στοιχείων του σώματος $\mathbb{K}$, ή ενός διανυσματικού χώρου V πάνω από το $\mathbb{K}$.

Θεωρούμε το σύνολο των διατεταγμένων n-άδων στοιχείων του $\mathbb{K}$,

$$\mathbb{K}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{K},\, i = 1, \ldots, n\}.$$

Οι πράξεις ορίζονται κατά συνιστώσα, δηλαδή εάν $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ Και $a \in \mathbb{K}$,

$$x \dotplus y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

και

$$a \cdot x = (ax_1, \ldots, ax_n)$$

Μηδενικό διάνυσμα είναι το $\bar{0} = (0, \ldots, 0)$. Η ισχύς των αξιωμάτων του διανυσματικού χώρου αποδεικνύεται εύκολα με χρήση των αντίστοιχων αξιωμάτων ενός σώματος. Τα στοιχεία του $\mathbb{K}^n$ θα τα λέμε *αριθμητικά διανύσματα*.

Παρόμοια, εάν V είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{K}$,

$$V^n = \{(v_1, \ldots, v_n) \mid v_i \in V, i = 1, \ldots n\}$$

είναι επίσης διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{K}$.

Παράδειγμα 1.2 Ακολουθίες με όρους στο σώμα $\mathbb{K}$ ή σε ένα διανυσματικό χώρο V πάνω από το $\mathbb{K}$.

Θεωρούμε το σύνολο

$$\mathbb{K}^\infty = \{(x_1,\, x_2, \ldots) \mid x_i \in \mathbb{K},\, i \in \mathbb{N}\}.$$

Οι πράξεις ορίζονται *κατά συνιστώσα*: εάν $(x) = (x_1,\, x_2, \ldots)$ και $(y) = (y_1,\, y_2, \ldots)$, και $a \in \mathbb{K}$, τότε

$$(x) \dotplus (y) = (x_1 + y_1,\, x_2 + y_2, \ldots)$$

και

$$a(x) = (ax_1,\, ax_2, \ldots).$$

Μηδενικό διάνυσμα είναι η ακολουθία $\bar{0} = (0,\, 0, \ldots)$. Παρόμοια,

$$V^\infty = \left\{(v_1,\, v_2, \ldots) \mid v_i \in V,\, i \in \mathbb{N}\right\},$$

με πράξεις κατά συνιστώσα, είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{K}$.

Παράδειγμα 1.3 Απεικονίσεις από ένα σύνολο A στο σώμα $\mathbb{K}$, ή σε ένα διανυσματικό χώρο V πάνω από το $\mathbb{K}$.

Το σύνολο όλων των απεικονίσεων από το A στο $\mathbb{K}$ συμβολίζεται $\mathbb{K}^A$. Εάν $f,\, g \in \mathbb{K}^A$ και $a \in \mathbb{K}$, ορίζουμε τις απεικονίσεις $f \dot{+} g$ και $a \cdot f$ οι οποίες, για κάθε $x \in A$, ικανοποιούν

$$\begin{aligned} (f \dot{+} g)(x) &= f(x) + g(x) \\ (a \cdot f)(x) &= af(x) \end{aligned}$$

Αυτές τις πράξεις ονομάζουμε *πρόσθεση* και *πολλαπλασιασμό κατά σημείο.* Μηδενικό διάνυσμα είναι η σταθερή απεικόνιση $\bar{0} : A \to \mathbb{K}$, για την οποία $\bar{0}(x) = 0$ για κάθε $x \in A$.

Παράδειγμα 1.4 Πολυώνυμα με συντελεστές στο $\mathbb{K}$, με μία ή περισσότερες μεταβλητές.

Ένα πολυώνυμο μίας μεταβλητής x με συντελεστές στο $\mathbb{K}$ είναι ένα τυπικό άθροισμα

$$p = a_0x^0 + a_1x^1 + \ldots + a_nx^n, \quad a_i \in \mathbb{K},\, i = 1,\, \ldots, n, \text{και } a_n \neq 0.$$

Το σύνολο όλων των πολυωνύμων μίας μεταβλητής x με συντελεστές στο $\mathbb{K}$ συμβολίζεται $\mathbb{K}\,[x]$. Θα χρησιμοποιήσουμε επίσης το συμβολισμό $\mathbf{P}_n$ για τα πολυώνυμα μίας μεταβλητής x βαθμού ίσου ή μικρότερου από n.

Η πρόσθεση πολυωνύμων και ο πολλαπλασιασμός με αριθμό ορίζονται όπως συνήθως. Όταν μελετάμε το σύνολο των πολυωνύμων ως διανυσματικό χώρο, δεν μας απασχολεί ο πολλαπλασιασμός πολυωνύμων. Το μηδενικό διάνυσμα του $\mathbb{K}\,[x]$ είναι το πολυώνυμο $\bar{0}$, στο οποίο όλοι οι συντελεστές είναι 0.

Ανάλογα ορίζονται χώροι πολυωνύμων με περισσότερες μεταβλητές,

$$p(x, y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n-j} a_{ij}x^iy^j\,.$$

Παράδειγμα 1.5 Τυπικές δυναμοσειρές, με μία ή περισσότερες μεταβλητές και συντελεστές στο $\mathbb{K}$.

Μία δυναμοσειρά μίας μεταβλητής t, με συντελεστές στο $\mathbb{K}$ είναι ένα τυπικό άθροισμα

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_it^i\,, \qquad a_i \in \mathbb{K}\,, \quad i \in \mathbb{N}_0.$$

Το σύνολο όλων των δυναμοσειρών μίας μεταβλητής t με συντελεστές στο $\mathbb{K}$ συμβολίζεται $\mathbb{K}(t)$.

Η πρόσθεση δυναμοσειρών και ο πολλαπλασιασμός με αριθμό $c \in \mathbb{K}$, ορίζονται ως εξής

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i\right) \dot{+} \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j t^j\right) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) t^k$$

$$c \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i\right) = \sum_{j=0}^{\infty} (c a_j) t^j.$$

Μηδενικό διάνυσμα είναι η δυναμοσειρά

$$\sum_{i=0}^{\infty} 0 t^i.$$

Παράδειγμα 1.6 Τυπικά αθροίσματα στοιχείων ενός συνόλου X με συντελεστές στο $\mathbb{K}$, ή σε ένα διανυσματικό χώρο V πάνω από το $\mathbb{K}$.
Θεωρούμε ένα σύνολο X και τα τυπικά αθροίσματα

$$\sum_{x \in X} a_x x\,, \qquad a_x \in \mathbb{K}$$

Η πρόσθεση ορίζεται μέσω της πρόσθεσης των συντελεστών ομοίων όρων :

$$\sum_{x \in X} a_x x \dot{+} \sum_{x \in X} b_x x = \sum_{x \in X} (a_x + b_x) x,$$

ενώ ο πολλαπλασιασμός με τον αριθμό $c \in \mathbb{K}$, μέσω του πολλαπλασιασμού των συντελεστών:

$$c \cdot \sum_{x \in X} a_x x = \sum_{x \in X} (c a_x) x.$$

Το μηδενικό διάνυσμα είναι το τυπικό άθροισμα με όλους τους συντελεστές ίσους με 0,

$$\bar{0} = \sum_{x \in X} 0 x.$$

Γραμμικοί υπόχωροι

Ορισμός. Θεωρούμε ένα διανυσματικό χώρο V πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, και ένα μη κενό υποσύνολο X του V. Το X λέγεται ***γραμμικός υπόχωρος*** του V εάν

1. Το X είναι κλειστό ως πρός την πρόθεση διανυσμάτων,

$$v,\, w \in X \Rightarrow v + w \in X$$

2. Το X είναι κλειστό ως πρός τον πολλαπλασιασμό διανύσματος με αριθμό,

$$v \in X,\, a \in \mathbb{K} \Rightarrow av \in X.$$

Λήμμα 1.2 *Εάν X είναι γραμμικός υπόχωρος του V, τότε το X, με τους περιορισμούς των πράξεων του V,*

$$\begin{aligned} \alpha|_{X\times X} &: X \times X \to X \\ \mu|_{\mathbb{K}\times X} &: \mathbb{K} \times X \to X \end{aligned}$$

είναι διανυσματικός χώρος.

Απόδειξη. Ελέγχουμε οτι, εάν το υποσύνολο X είναι κλειστό ως προς τις πράξεις του V, τότε ικανοποιούνται τα αξιώματα του διανυσματικού χώρου. □

Παράδειγμα 1.7 Στο $\mathbb{R}^2$, ταυτισμένο με το καρτεσιανό επίπεδο, γραμμικοί υπόχωροι είναι το σύνολο $\{(0,\,))\}$ (ο μηδενικός υπόχωρος), όλες οι ευθείες που περιέχουν το $(0,\, 0)$, δηλαδή υποσύνολα της μορφής

$$X = \left\{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = 0\right\} \ ,$$

και ολόκληρο το επίπεδο $\mathbb{R}^2$.

Παράδειγμα 1.8 Σε ένα διανυσματικό χώρο V, για κάθε $v \in V$ το σύνολο $\{a\,v \mid a \in \mathbb{K}\}$ είναι γραμμικός υπόχωρος.

Παράδειγμα 1.9 Στο διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^\infty$ των ακολουθιών στους πραγματκούς αριθμούς, το υποσύνολο των ακολουθιών που είναι τελικά ίσες με μηδέν είναι γραμμικός υπόχωρος, (η ακολουθία $(x_1,\, x_2, \ldots)$ είναι τελικά ίση με μηδέν εάν υπάρχει $M \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $n > M \Rightarrow x_n = 0$).

Εάν X και Y είναι δύο γραμμικοί υπόχωροι του διανυσματικού χώρου V, είναι τα σύνολα $X \cup Y$ και $X \cap Y$ γραμμικοί υπόχωροι; Ας εξετάσουμε κάποια παραδείγματα.

Εάν V είναι ο χώρος $\mathbb{R}^3$, και X, Y είναι δύο διαφορετικές ευθείες που περιέχουν το 0, είναι η ένωση $X \cup Y$ γραμμικός υπόχωρος;

Εάν X αποτελείται από το διάνυσμα $(1,\, 1,\, 2)$ και όλα τα πολλαπλάσιά του, $X = \{a(1,\, 1,\, 2) \mid a \in \mathbb{R}\}$, και Y αποτελείται από όλα τα πολλαπλάσια του $(1,\, 1,\, 0)$, $Y = \{a(1,\, 1,\, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$, τότε $(1,\, 1,\, 2)+(1,\, 1,\, 0) = (2,\, 2,\, 2)$. Αλλά το διάνυσμα $(2,\, 2,\, 2)$ δεν ανήκει ούτε στο X, ούτε στο Y. Συμπεραίνουμε ότι $X \cup Y$ δεν είναι υποχρεωτικά γραμμικός υπόχωρος.

Εάν τώρα U και W είναι δύο διαφορετικά επίπεδα στο $\mathbb{R}^3$, τα οποία περιέχουν το 0, είναι η τομή $U \cap W$ γραμμικός υπόχωρος;

Υποθέτουμε ότι

$$U = \left\{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\right\} \ ,$$

και

$$W = \left\{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3y = 0\right\} \ .$$

Τότε η τομή των δύο επιπέδων $U \cap W = \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0,\, 2x + 3y = 0\}$ είναι μία ευθεία. Εύκολα βλέπουμε ότι αποτελείται από τα σημεία για τα οποία $x = 0$ και $y = 0$, δηλαδή αποτελείται από τα πολλαπλάσια του διανύσματος $(0,\, 0,\, 1)$, και είναι υπόχωρος του V.

Λήμμα 1.3 *Εάν X, Y είναι γραμμικοί υπόχωροι του V, τότε $X \cap Y$ είναι γραμμικός υπόχωρος.*

Απόδειξη. Εάν v, $w \in X \cap Y$, τότε v, $w \in X$ και αφού X είναι γραμμικός υπόχωρος, $v + w \in X$, και για κάθε $a \in \mathbb{K}$, $a\, v \in X$. Παρόμοια, v, $w \in Y$ και συνεπώς $v + w \in Y$ και $a\, v \in X$ για κάθε $a \in \mathbb{K}$. Συμπεραίνουμε ότι $v + w \in X \cap Y$, και $a\, v \in X \cap Y$ για κάθε $a \in \mathbb{K}$, δηλαδή ότι $X \cap Y$ είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό με αριθμό, και συνεπώς είναι γραμμικός υπόχωρος του V.

□

Γραμμικοί Συνδυασμοί

Εάν $v_1, \ldots, v_k$ είναι διανύσματα του V, ένας ***γραμμικός συνδυασμός*** των $v_1, \ldots, v_k$ είναι ένα άθροισμα της μορφής $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_k v_k$, όπου οι συντελεστές a_1, $a_2, \ldots, a_k$ ανήκουν στο σώμα $\mathbb{K}$ πάνω από το οποίο ορίζεται ο V.

Παράδειγμα 1.10 Κάθε διάνυσμα $(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$, εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $e_1 = (1,\, 0,\, 0)$, $e_2 = (0,\, 1,\, 0)$ και $e_3 = (0,\, 0,\, 1)$:

$$(x,\, y,\, z) = x(1,\, 0,\, 0) + y(0,\, 1,\, 0) + z(0,\, 0,\, 1)\,.$$

Παράδειγμα 1.11 Κάθε πολυώνυμο βαθμού n στο $\mathbb{K}[x]$ εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των $n+1$ μονωνύμων $p_0(x) = x^0$, $p_1(x) = x^1$,…,$p_n(x) = x^n$,

$$p(x) = a_0 x^0 + a_1 x^1 + \ldots + a_n x^n.$$

Παράδειγμα 1.12 Εάν $\vec{OA}$, $\vec{OB}$ είναι δύο μη συγγραμμικά γεωμετρικά διανύσματα στο επίπεδο E^2, κάθε διάνυσμα με αρχή στο O εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{OA}$ και $\vec{OB}$,

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}\,.$$

Γενικότερα, εάν S είναι οποιοδήποτε υποσύνολο (πεπερασμένο ή άπειρο) ενός διανυσματικού χώρου V, ένας ***γραμμικός συνδυασμός*** στοιχείων του S είναι ένα *πεπερασμένο* άθροισμα: $a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k$, όπου, για $i = 1, \ldots, k$, $v_i \in S$ και $a_i \in \mathbb{K}$.

Χώρος που παράγεται από σύνολο διανυσμάτων.

Εάν $S = \{v_1,\, \ldots,\, v_k\}$ είναι ένα σύνολο διανυσμάτων του διανυσματικού χώρου V, θέλουμε να εξετάσουμε το *μικρότερο* γραμμικό υποχώρο του V που περιέχει τα στοιχεία του S.

Είναι προφανές ότι ο ίδιος ο χώρος V περιέχει τα στοιχεία του S. Γενικεύοντας το Λήμμα **;;**, μπορούμε να δείξουμε ότι η τομή κάθε μη κενής συλλογής γραμμικών υπόχωρων του V είναι γραμμικός υπόχωρος του V. Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{T}$ όλων των γραμμικών υπόχωρων του V οι οποίοι περιέχουν τα στοιχεία του S. Αυτό το σύνολο περιέχει το ίδιο το V, και συνεπώς δεν είναι κενό. Η τομή του $\mathcal{T}$, $X = \bigcap_{Z\in\mathcal{T}} Z$, είναι γραμμικός υπόχωρος του V, και είναι υπόχωρος κάθε γραμμικού υπόχωρου του V που περιέχει τα στοιχεία του S. Με αυτή την έννοια X είναι ο μικρότερος γραμμικός υπόχωρος του V ο οποίος περιέχει τα στοιχεία του S.

Θα δείξουμε οτι ο γραμμικός υπόχωρος X είναι ίσος με το σύνολο Y όλων των γραμμικών συνδυασμών στοιχείων του S. Πρώτα παρατηρούμε οτι αφού X είναι κλειστό ως προς τις πράξεις του διανυσματικού χώρου και περιέχει τα στοιχεία του S, περιέχει επίσης κάθε γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων του S, δηλαδή $Y \subseteq X$.

Κατόπιν δείχνουμε οτι Y είναι γραμμικός υπόχωρος. Εάν $x = a_1v_1 + \cdots + a_kv_k$ και $y = b_1v_1 + \cdots + b_kv_k$, για a_i, $b_i \in \mathbb{K}$, τότε $x + y$ εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του S,

$$x + y = (a_1 + b_1)v_1 + \cdots + (a_k + b_k)v_k\,,$$

και εάν $c \in \mathbb{K}$, cx επίσης εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του S,

$$cx = ca_1v_1 + \cdots + ca_kv_k\,.$$

Άρα Y είναι κλειστό ως προς τις πράξεις του V, και συνεπώς είναι υπόχωρος του V.

Εφόσον Y είναι γραμμικός υπόχωρος του V, και περιέχει τα στοιχεία του S, ο X είναι υποσύνολο του Y, $X \subseteq X$. Συμπεραίνουμε ότι $X = Y$, δηλαδή ότι ο μικρότερος γραμμικός υπόχωρος του V που περιέχει τα στοιχεία του S είναι το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών στοιχείων του S.

Το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών των διανυσμάτων $v_1, \ldots, v_k$, το συμβολίζουμε $\langle v_1, \ldots, v_k\rangle$. Λέμε ότι ο γραμμικός υπόχωρος $\langle v_1, \ldots, v_k\rangle$ ***παράγεται*** από τα $v_1, \ldots, v_k$.

Γενικότερα, εάν S είναι οποιοδήποτε υποσύνολο του V, το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών στοιχείων του S είναι ο μικρότερος γραμμικός υπόχωρος του V ο οποίος περιέχει το S, και συμβολίζεται $\langle S\rangle$. Λέμε ότι ο γραμμικός υπόχωρος $\langle S\rangle$ ***παράγεται*** από το S, και το S ονομάζεται ***παράγον σύνολο*** του $\langle S\rangle$. Εάν υπάρχει πεπερασμένο σύνολο $\{v_1, \ldots, v_k\} \subseteq V$ το οποίο παράγει το διανυσματικό χώρο V, λέμε ότι ο V είναι ***πεπερασμένα παραγόμενος***.

Παράδειγμα 1.13 Ο γραμμικός υπόχωρος $U\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x+y = 0\}$ είναι ο υπόχωρος που παράγεται από το διάνυσμα $(1, -2)$. Πράγματι, κάθε στοιχείο του U είναι πολλαπλάσιο του $(1, -2)$.

Παράδειγμα 1.14 Το επίπεδο $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax+by+cz = 0\}$, $a \neq 0$, παράγεται από τα διανύσματα $(b, -a, 0)$ και $(c, 0, -a)$:

$$E = \langle (b, -a, 0), (c, 0, -a)\rangle$$

Πράγματι, όπως ελέγχουμε εύκολα, εάν αντικαταστήσουμε το διάνυσμα $(b, -a, 0)$ ή το διάνυσμα $(c, 0, -a)$ για το (x, y, z) στην εξίσωση $ax + by + cz = 0$, βλέπουμε ότι αυτή ικανοποιείται. Συμπεραίνουμε ότι $\langle (b, -a, 0), (c, 0, -a)\rangle \subseteq E$.

Αντίστροφα, κάθε λύση της εξίσωσης $ax+by+cz = 0$, μπορεί να εκφραστεί στη μορφή

$$s(b, -a, 0) + t(c, 0, -a)$$

για κατάλληλα $s,\, t \in \mathbb{R}$. Συνεπώς $E \subseteq \langle (b,\, -a,\, 0),\, (c,\, 0,\, -a) \rangle$.

Παράδειγμα 1.15 Ο μηδενικός υπόχωρος $\{0\}$ παράγεται από το κενό σύνολο, $\langle \varnothing \rangle = \{0\}$.

Θεωρούμε τους υπόχωρους X και Y του V που παράγονται από τα στοιχεία $x_1,\, x_2$ και $y_1,\, y_2$ αντίστοιχα $X = \langle x_1,\, x_2 \rangle, Y = \langle y_1,\, y_2 \rangle$. Πώς μπορούμε να προσδιορίσουμε τα στοιχεία του γραμμικού υπόχωρου $X \cap Y$;

Εάν $u \in X \cap Y$, τότε $u \in X$ και μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των $x_1,\, x_2$: υπάρχουν αριθμοί $a_1,\, a_2 \in \mathbb{K}$, τέτοιος ώστε $u = a_1x_1 + a_2x_2$. Επίσης $u \in Y$, και εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των $y_1,\, y_2$, με συντελεστές $b_1,\, b_2 \in \mathbb{K} : u = b_1y_1 + b_2y_2$. Συμπεραίνουμε ότι η τομή $X \cap Y$ αποτελείται από τα διανύσματα της μορφής $a_1x_1 + a_2x_2$, όπου τα $a_1,\, a_2$ αποτελούν μέρος μιας λύσης $(a_1,\, a_2,\, b_1,\, b_2)$ της διανυσματικής εξίσωσης

$$a_1x_1 + a_2x_2 = b_1y_1 + b_2y_2 \qquad a_1,\, a_2,\, b_1,\, b_2 \in \mathbb{K}$$

Παράδειγμα 1.16 Θεωρούμε τους υπόχωρους X και Y του $\mathbb{R}^3$, $X = \langle x_1,\, x_2 \rangle$, $Y = \langle y_1,\, y_2 \rangle$, όπου $x_1 = (1,\, 1,\, 0)$, $x_2 = (-1,\, 0,\, 1)$, $y_1 = (1,\, -1,\, 1)$ και $y_2 = (1,\, 0,\, 3)$. Για να βρούμε τον υπόχωρο $X \cap Y$, προσδιορίζουμε τα $a_1,\, a_2$ τα οποία αποτελούν μέρος μίας λύσης του συστήματος

$$a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = b_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

το οποίο γράφουμε σε μορφή πίνακα

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = 0$$

και εφαρμόζουμε απαλοιφή Gauss:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = 0$$

δηλαδή $a_1 = \frac{4}{5}a_2$, και ο υπόχωρος $X \cap Y$ παράγεται από το διάνυσμα $\frac{4}{5}(1,\, 1,\, 0) + (-1,\, 0,\, 1) = \left(-\frac{1}{5},\, \frac{4}{5},\, 1\right)$,

$$X \cap Y = \left\langle \left(-\frac{1}{5},\, \frac{4}{5},\, 1\right) \right\rangle$$

Αθροίσματα γραμμικών υπόχωρων

Είδαμε ότι, εάν $X,\, Y$ είναι γραμμικοί υπόχωροι του V, $X \cap Y$ είναι επίσης γραμμικός υπόχωρος, αλλά $X \cup Y$ δεν είναι, εν γένει, γραμμικός υπόχωρος.

Θα ορίσουμε ένα υποσύνολο του V, που είναι γραμμικός υπόχωρος, και θα δείξουμε ότι είναι ο *μικρότερος* γραμμικός υπόχωρος που περιέχει το $X \cup Y$.

Ορισμός. Εάν V είναι διανυσματικός χώρος, και X, Y είναι γραμμικοί υπόχωροι του V, το σύνολο

$$X + Y = \{v \in V \mid \exists x \in X, \exists y \in Y : v = x + y\}$$

είναι γραμμικός υπόχωρος του V, και ονομάζεται ***άθροισμα*** των X και Y.

Λήμμα 1.4 *Το άθροισμα των γραμμικών υπόχωρων $X + Y$ είναι γραμμικός υπόχωρος του V, και παράγεται από την ένωση $X \cup Y$,*

$$X + Y = \langle X \cup Y \rangle.$$

Απόδειξη. Για κάθε $x \in X$, $y \in Y$ ισχύει $x + y \in \langle X \cup Y \rangle$. Συμπεραίνουμε ότι $X + Y \subseteq \langle X \cup Y \rangle$.

Για την αντίθετη κατεύθυνση, είναι προφανές ότι $X \subseteq X + Y$, $Y \subseteq X + Y$, και συνεπώς $X \cup Y \subseteq X + Y$. Εύκολα ελέγχουμε ότι το σύνολο $X + Y$ είναι κλειστό ως προς τις πράξεις του διανυσματικού χώρου V, και συνεπώς είναι γραμμικός υπόχωρος. Άρα

$$\langle X \cup Y \rangle \subseteq X + Y$$

□

Παράδειγμα 1.17 Θεωρούμε του υποχώρους του $\mathbb{K}^3$,

$$X = \{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{K}\}$$

και

$$Y = \{(0, y, 0) \mid y \in \mathbb{K}\}.$$

Τότε

$$X + Y = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{K}\}.$$

Θεωρούμε ένα τρίτο υπόχωρο του $\mathbb{K}^3$, $Z = \{(y, y, 0) \mid y \in \mathbb{K}\}$. Είναι τα $X + Y$, $X + Z$ διαφορετικά ή ίσα; Εύκολα ελέγχουμε ότι κάθε στοιχείο του $X + Y$ ανήκει στο $X + Z$,

$$\begin{aligned}(x, y, 0) &= ((x - y) + y, y, 0)\\ &= (x - y, 0, 0) + (y, y, 0) \in X + Z.\end{aligned}$$

και αντίστροφα, ότι $X + Z \subseteq X + Y$. Συμπεραίνουμε ότι τα δύο αθροίσματα είναι ίσα.

Όταν $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, η γεωμετρική ερμηνεία του συμπεράσματος είναι ότι το επίπεδο που ορίζουν οι ευθείες $\{(x, 0, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ και $\{(y, y,)) \mid y \in \mathbb{R}\}$, είναι το ίδιο με το επίπεδο που περιέχει τους x και y άξονες.

Παράδειγμα 1.18 Στο σύνολο $C^0(\mathbb{R})$ όλων των συνεχών συναρτήσεων στους πραγματικούς αριθμούς, ονομάζουμε μία συνάρτηση ***άρτια*** εάν $f(x) = f(-x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και ***περιττή*** εάν $f(x) = -f(-x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ελέγξτε ότι τα σύνολα C^0_+ των άρτιων συναρτήσεων και C^0_-των περιττών συναρτήσεων είναι γραμμικοί υπόχωροι του $C^0(\mathbb{R})$.

Θα δείξουμε ότι $C^0(\mathbb{R}) = C^0_+ + C^0_-$. Θεωρούμε μια συνάρτηση $f \in C^0$, και ορίζουμε

$$\begin{aligned} f^+(x) &= \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right) \\ f^-(x) &= \frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right) \end{aligned}$$

Ελέγχουμε ότι η f^+ είναι άρτια, η f^- περιττή, και ότι $f = f^+ + f^-$.

Παράδειγμα 1.19 Θεωρούμε τους υπόχωρους του $\mathbb{R}^3$, $Y = \{(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$ και $Z = \{(u,\, v,\, w) \in \mathbb{R}^3 \mid u + v + w = 0\}$. Το άθροισμα $Y + Z$ είναι όλος ο χώρος $\mathbb{R}^3$. Για οποιοδήποτε διάνυσμα $(a,\, b,\, c) \in \mathbb{R}^3$, έχουμε:

$$\begin{aligned} (a,\, b,\, c) &= (a,\, (b+c) - c,\, c) \\ &= (a,\, b+c,\, 0) + (0,\, -c,\, c) \end{aligned}$$

με $(a,\, b+c,\, 0) \in Y$, $(0,\, -c,\, c) \in Z$, και επίσης

$$\begin{aligned} (a,\, b,\, c) &= ((a+c) - c,\, b,\, c) \\ &= (a+c,\, b,\, 0) + (-c,\, 0,\, c) \end{aligned}$$

με $(a+c,\, b,\, 0)) \in Y$, $(-c,\, 0\, c) \in Z$. Παρατηρούμε ότι κάθε στοιχείο του $\mathbb{R}^3$ γράφεται με περισσότερους από ένα διαφορετικούς τρόπους ως άθροισμα στοιχείων των Y και Z.

Υποθέτουμε ότι έχουμε γραμμικούς υπόχωρους Y και Z του διανυσματικού χώρου V, και οτι στο άθροισμα $X = Y + Z$, το στοιχείο $x \in X$ γράφεται ως $x = y_1 + z_1$ και ως $x = y_2 + z_2$, με $y_1,\, y_2 \in Y$, $z_1,\, z_2 \in Z$. Τότε

$$\begin{aligned} 0 \,=\, x - x &= (y_1 + z_1) - (y_2 + z_2) \\ &= (y_1 - y_2) + (z_1 - z_2)\,. \end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε ότι

$$y_1 - y_2 = z_2 - z_1\,.$$

Αλλά το $y_1 - y_2$ ανήκει στο Y ενώ το $z_2 - z_1$ ανήκει στο Z, και εφ' όσον είναι ίσα, ανήκουν στην τομή $Y \cap Z$. Βλέπουμε ότι εάν υπάρχουν δύο διαφορετικοί τρόποι να εκφραστεί το x ως άθροισμα στοιχείων των Y και Z, τότε $Y \cap Z \neq \{0\}$.

Συμπεραίνουμε ότι εάν $Y \cap Z = \{0\}$, τότε κάθε στοιχείο του $Y + Z$ εκφράζεται με μοναδικό τρόπο ως άθροισμα στοιχείων του Y και του Z.

Ορισμός. Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V και γραμμικούς υπόχωρους Y, Z. Εάν $Y \cap Z = \{0\}$, τότε το άθροισμα $Y + Z$ ονομάζεται (***εσωτερικό***) ***ευθύ άθροισμα***, και συμβολίζεται $Y \oplus Z$.

Παράδειγμα 1.20

Κεφάλαιο 2

Γραμμική ανεξαρτησία, βάσεις, διάσταση

Γραμμική εξάρτηση

Στο χώρο $T_O E^2$ των γεωμετρικών διανυσμάτων στο επίπεδο με σημείο εφαρμογής στο O, θεωρούμε δύο μη συγγραμμικά διανύσματα, $\vec{u}$ και $\vec{v}$. Εάν $\vec{w}$ είναι οποιοδήποτε άλλο διάνυσμα του $T_O E^2$, γνωρίζουμε ότι μπορούμε να εκφράσουμε το $\vec{w}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{u}$ και $\vec{v}$,

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}. \tag{2.1}$$

Συμπεραίνουμε ότι ο χώρος $T_O E^2$ παράγεται από τα $\vec{u}$ και $\vec{v}$,

$$T_O E^2 = \langle \vec{u},\, \vec{v} \rangle\,.$$

Ποιο σύνολο παράγουν τα διανύσματα $\vec{u}$, $\vec{v}$ και $\vec{w}$; Ένα διάνυσμα $\vec{z} \in \langle \vec{u},\, \vec{v},\, \vec{w} \rangle$, εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός

$$\vec{z} = c\vec{u} + d\vec{v} + f\vec{w}, \quad \text{για } c,\, d,\, f \in \mathbb{R}$$

αλλά, αντικαθιστώντας το $\vec{w}$ από την **;;**, έχουμε

$$\begin{aligned} \vec{z} &= c\vec{u} + d\vec{v} + f(a\vec{u} + b\vec{v}) \\ &= (c + fa)\vec{u} + (d + fb)\vec{v}, \end{aligned}$$

δηλαδή $\vec{z} \in \langle \vec{u},\, \vec{v} \rangle$. Συνεπώς ο χώρος που παράγεται από τα $\vec{u}$, $\vec{v}$ και $\vec{w}$ είναι ο ίδιος με αυτόν που παράγεται από τα $\vec{u}$ και $\vec{v}$. Το $\vec{w}$ δεν προσφέρει κάτι περισσότερο. Με αυτή την έννοια είναι *περιττό*.

Θεωρούμε το σύστημα γραμμικών εξισώσεων,

$$\begin{aligned} 3x + 5y + 2z &= 0 \\ 2x + y - z &= 0 \\ x + 4y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

το οποίο μπορούμε να λύσουμε, και να βρούμε το σύνολο των λύσεων

$$U = \{(t,\, -t,\, t),\, t \in \mathbb{R}\}$$

Εάν τώρα θεωρήσουμε μόνο τις δύο πρώτες εξισώσεις, θα δούμε ότι και αυτό το σύστημα έχει ώς σύνολο λύσεων το U. Η τρίτη εξίσωση είναι η διαφορά της δεύτερης από την πρώτη, και έτσι δεν βάζει κάποιον επί πλέον περιορισμό στο σύνολο λύσεων. Με αυτή την έννοια, η τρίτη εξίσωση είναι *περιττή*.

Αυτή η έννοια του *περιττού*, διανυσμάτων τα οποία δεν προσφέρουν περισσότερες δυνατότητες παραγωγής, ή εξισώσεων οι οποίες δεν θέτουν περισσότερους περιορισμούς, αποτελεί μία βασική έννοια της Γραμμικής Άλγεβρας, την οποία ονομάζουμε *γραμμική εξάρτηση*. Μια συλλογή διανυσμάτων είναι *γραμμικά εξαρτημένη* όταν περιέχει *περιττά* διανύσματα. Ένα σύστημα εξισώσεων είναι γραμμικό εξαρτημένο όταν περιέχει *περιττές* εξισώσεις.

Ορισμός. Η *πεπερασμένη* συλλογή διανυσμάτων $v_1, v_2, \ldots, v_n$, $n \geq 2$, είναι ***γραμμικά εξαρτημένη*** εάν κάποιο από τα v_i μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Δηλαδή υπάρχει κάποιο j, $1 \leq j \leq n$, και αριθμοί $a_i \in \mathbb{K}$ για κάθε i, με $1 \leq i \leq n$, $i \neq j$, τέτοιοι ώστε

$$v_j = a_1 v_1 + \cdots + a_{j-1} v_{j-1} + a_{j+1} v_{j+1} + \cdots + a_n v_n \,.$$

Παράδειγμα 2.1 Στο $\mathbb{K}^2$, τα διανύσματα $(1,\, 0)$, $(0,\, 1)$ και $(a,\, b)$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, αφού

$$(a,\, b) = a\,(1,\, 0) + b\,(0,\, 1)\,.$$

Παράδειγμα 2.2 Τα πολυώνυμα $p(x) = 1 - x$, $q(x) = x(1 - x)$ και $r(x) = 1 - x^2$, είναι γραμμικά εξαρτημένα, αφού

$$r(x) = p(x) + q(x)\,.$$

Παράδειγμα 2.3 Θεωρούμε τα διανύσματα $x_1 = (2,\, 0,\, 1)$, $x_2 = (0,\, 2,\, -1)$ και $x_3 = (0,\, -4,\, 2)$ στο $\mathbb{R}^3$. Είναι προφανές ότι δεν υπάρχουν αριθμοί a_2 και a_3 τέτοιοι ώστε

$$(2,\, 0,\, 1) = a_2(0,\, 2,\, -1) + a_3(0,\, -4,\, 2),$$

γιατί $a_2 0 + a_3 0 = 0 \neq 2$. Όμως

$$(0,\, 2,\, -1) = 0 \cdot (2,\, 0,\, 1) - \frac{1}{2}(0,\, -4,\, 2)$$

και συνεπώς η συλλογή x_1, x_2, x_3 είναι γραμμικά εξαρτημένη.

Η έννοια της γραμμικής εξάρτησης εμπλέκει με ουσιαστικό τρόπο το σώμα πάνω από το οποίο ορίζεται ο διανυσματικός χώρος V, όπως φαίνεται στο ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.4 Θεωρούμε το $\mathbb{C}^2$ ως διανυσματικό χώρο πάνω από το σώμα $\mathbb{C}$. Τα διανύσματα $(1,\, i)$ και $(i,\, -1)$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, αφού $(i,\, -1) = i\,(1,\, i)$. Εάν θεωρήσουμε το $\mathbb{C}^2$ ως διανυσματικό χώρο πάνω από το $\mathbb{R}$, τα διανύσματα $(1,\, i)$ και $(i,\, -1)$ δεν είναι γραμμικά εξαρτημένα: δεν υπάρχουν *πραγματικοί* αριθμοί a, b τέτοιοι ώστε $(1,\, i) = a(i,\, -1)$ ή $(i,\, -1) = b(1,\, i)$.

Στα προηγούμενα παραδείγματα ήταν εύκολο να βρούμε κάποιο διάνυσμα της συλλογής το οποίο μπορούσαμε να εκφράσουμε ως γραμμικό συνδυασμό των υπολοίπων. Εάν όμως είχαμε μία μεγαλύτερη συλλογή δεν θα ήταν πρακτικό να εξετάσουμε κάθε διάνυσμα, μέχρι να βρούμε κάποιο το οποίο να μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

Γι΄ αυτό το λόγο είναι χρήσιμο να έχουμε ένα χαρακτηρισμό της γραμμικής εξάρτησης που δεν διακρίνει κάποιο από τα στοιχεία. Παρατηρούμε ότι εάν

$$v_j = a_1v_1 + \cdots + a_{j-1}v_{j-1} + a_{j+1}v_{j+1} + \cdots + a_nv_n$$

τότε

$$a_1v_1 + \cdots + a_{j-1}v_{j-1} - v_j + a_{j+1}v_{j+1} + \cdots + a_nv_n = 0\,.$$

Δηλαδή, εάν η συλλογή $v_1, \ldots, v_n$ είναι γραμμικά εξαρτημένη, τότε το μηδενικό διάνυσμα μπορεί να εκφράστει ως γραμμικός συνδυασμός των $v_1, \ldots, v_n$, με τουλάχιστον ένα συντελεστή διαφορετικό από 0 (στην παραπάνω περίπτωση αυτόν του v_j, ο οποίος είναι -1). Θα δείξουμε ότι ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή εάν υπάρχει γραμμικός συνδυασμός των $v_1, \ldots, v_n$ ο οποίος να είναι ίσος με το μηδενικό διάνυσμα, ενώ τουλάχιστον ένας συντελεστής είναι διαφορετικός από το 0, τότε κάποιο από τα v_i μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

Λήμμα 2.1 *Η συλλογή διανυσμάτων $v_1, \ldots v_n$, $n \geq 2$, είναι γραμμικά εξαρτημένη εάν και μόνον εάν το μηδενικό διάνυσμα μπορεί να εκφραστεί ώς γραμμικός συνδυασμός των $v_1, \ldots, v_n$, με τουλάχιστον ένα συντελεστή διαφορετικό από το 0.*

Απόδειξη. Έχουμε ήδη δείξει τη μία κατεύθυνση. Αντίστροφα, εάν υπάρχει ένας γραμμικός συνδυασμός

$$a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = 0$$

και $a_j \neq 0$, τότε

$$v_j = \frac{-a_1}{a_j}v_1 + \cdots + \frac{-a_{j-1}}{a_j} + \frac{-a_{j+1}}{a_j}v_{j+1} + \cdots + \frac{-a_n}{a_j}v_n\,.$$

$\square$

Στο ακόλουθο αποτέλεσμα διατυπώνουμε με πιο συγκεκριμένο τρόπο την έννοια υπο την οποία ένα γραμμικά εξαρτημένο σύνολο περιέχει περιττά στοιχεία.

Λήμμα 2.2 *(Λήμμα Γραμμικής Εξάρτησης) Θεωρούμε τη γραμμικά εξαρτημένη συλλογή διανυσμάτων $v_1, \ldots, v_n$. Εάν υπάρχει μία σχέση*

$$a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = 0$$

στην οποία ο συντελεστής του v_j δεν είναι ίσος με 0, τότε ο υπόχωρος που παράγεται από το σύνολο $\{v_1, \ldots, v_n\}$ είναι ίσος με τον υπόχωρο που παράγεται από το σύνολο $\{v_1, \ldots, v_n\} \setminus \{v_j\}$.

Απόδειξη. Από την απόδειξη του Λήμματος **;;** γνωρίζουμε ότι μπορούμε να εκφράσουμε το v_j ως γραμμικό συνδυασμό των υπολοίπων διανυσμάτων, έστω

$$v_j = \sum_{i \neq j} b_i v_i \, .$$

Εάν $w = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$, μπορούμε να αντικαταστήσουμε το v_j, και να πάρουμε

$$w = \sum_{i \neq j} (a_i + a_j b_i) v_i \, ,$$

που σημαίνει ότι το w βρίσκεται στον υπόχωρο που παράγεται από το

$$\{v_1, \dots, v_n\} \setminus \{v_j\} \, .$$

□

Επεκτείνουμε τον ορισμό της γραμμικής εξάρτησης σε αυθαίρετες συλλογές διανυσμάτων με τον ακόλουθο τρόπο. Η *κενή* συλλογή διανυσμάτων, δηλαδή η συλλογή που δεν περιέχει κανένα διάνυσμα, δεν είναι γραμμικά εξαρτημένη. Η συλλογή που περιέχει μόνον ένα διάνυσμα είναι γραμμικά εξαρτημένη μόνον εάν αυτό είναι το μηδενικό διάνυσμα. Μια *άπειρη* συλλογή διανυσμάτων είναι γραμμικά εξαρτημένη εάν περιέχει κάποια πεπερασμένη συλλογή διανυσμάτων η οποία είναι γραμμικά εξαρτημένη.

Γραμμική ανεξαρτησία

Μία συλλογή διανυσμάτων είναι ***γραμμικά ανεξάρτητη*** εάν δεν είναι γραμμικά εξαρτημένη. Για μία πεπερασμένη συλλογή $v_1, \dots, v_n$, $n \geq 2$, αυτό σημαίνει ότι κανένα στοιχείο της συλλογής δεν μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων.

Παράδειγμα 2.5 Δυο μη συγγραμμικά γεωμετρικά διανύσματα του επιπέδου, $\vec{u}, \vec{v} \in T_O E^2$, είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Εφ΄ όσον τα $\vec{u}, \vec{v}$ δεν είναι συγγραμμικά, το ένα δεν είναι πολλαπλάσιο του άλλου.

Παράδειγμα 2.6 Στο $\mathbb{K}^2$, τα διανύσματα $(1, 0)$, $(0, 1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Δεν υπάρχει στοιχείο a του $\mathbb{K}$ τέτοιο ώστε $(1, 0) = a(0, 1)$ ή $(0, 1) = a(1, 0)$, γιατί σε ένα σώμα $a0 = 0$.

Παράδειγμα 2.7 Τα πολυώνυμα $p(x) = 1 - x$, $q(x) = x(1 - x)$ και $s(x) = x^3 - 1$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Εάν οι αριθμοί a, b, c ικανοποιούν τη σχέση

$$a\,(1 - x) + b\,x(1 - x) + c\,(x^3 - 1) = 0$$

τότε

$$c\,x^3 - b\,x^2 + (b - 1)\,x + (a - c)$$

είναι το μηδενικό πολυώνυμο, και συνεπώς $c = 0$, $b = 0$, $b - a = 0$, και άρα $a = 0$. Συμπεραίνουμε ότι ο μόνος τρόπος να εκφραστεί το μηδενικό πολυώνυμο ως γραμμικός συνδυασμός των $p(x)$, $q(x)$ και $s(x)$, είναι ο τετριμμένος,

$$0\,p(x) + 0\,q(x) + 0\,s(x) = 0 \, .$$

Άρα τα πολυώνυμα $p(x)$, $q(x)$, $s(x)$ δεν είναι γραμμικά εξαρτημένα.

Σύμφωνα με την επέκταση της έννοιας της γραμμικής εξάρτησης σε αυθαίρετες συλλογές, η κενή συλλογή διανυσμάτων είναι γραμμικά ανεξάρτητη, ενώ η συλλογή με ένα διάνυσμα είναι γραμμικά ανεξάρτητη εκτός εάν αυτό είναι το μηδενικό διάνυσμα. Μία άπειρη συλλογή διανυσμάτων είναι γραμμικά ανεξάρτητη εάν κάθε πεπερασμένη συλλογή διανυσμάτων που περιέχεται σε αυτήν είναι γραμμικά ανεξάρτητη.

Ο *συμμετρικός* χαρακτηρισμός της γραμμικής εξάρτησης στο Λήμμα **;;** επιτρέπει να χαρακτηρίσουμε και τη γραμμική ανεξαρτησία με *συμμετρικό* τρόπο.

Λήμμα 2.3 *Η συλλογή διανυσμάτων $v_1, \ldots, v_n$, $n \geq 1$, είναι γραμμικά ανεξάρτητη εάν και μόνον εάν ο μοναδικός τρόπος να εκφραστεί το μηδενικό διάνυσμα ως γραμμικός συνδυασμός των $v_1, \ldots, v_n$ είναι ο τετριμμένος γραμμικός συνδυασμός, με όλους τους συντελεστές ίσους με 0.*

Απόδειξη. Η πρόταση είναι αντιστροφοαντίθετη, και συνεπώς λογικά ισοδύναμη, με το Λήμμα **;;**.

□

Παράδειγμα 2.8 Στο χώρο $C^0(\mathbb{R})$, θεωρούμε τις συναρτήσεις sin και cos. Εάν η μηδενική συνάρτηση εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός

$$a(\sin) + b(\cos) = 0$$

τότε για κάθε $x \in \mathbb{K}$ ισχύει η ισότητα

$$a \sin x + b \cos x = 0\,.$$

Ειδικότερα εάν $x = 0$ έχουμε $a \sin 0 + b \cos 0 = 0$, δηλαδή $b = 0$ και εάν $x = \frac{\pi}{2}$ έχουμε $a \sin \frac{\pi}{2} + b \cos \frac{\pi}{2} = 0$, δηλαδή $a = 0$. Συμπεραίνουμε ότι ο μόνος τρόπος να εκφραστεί η μηδενική συνάρτηση ως γραμμικός συνδυασμός των sin και cos είναι με όλους τους συντελεστές ίσους με 0. Συνεπώς sin και cos είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Πρόταση 2.4 *Εάν μία συλλογή διανυσμάτων είναι γραμμικά εξαρτημένη, τότε κάθε συλλογή που την περιέχει είναι επίσης γραμμικά εξαρτημένη. Εάν μία συλλογή διανυσμάτων είναι γραμμικά ανεξάρτητη, τότε κάθε συλλογή που περιέχεται σε αυτήν είναι επίσης γραμμικά ανεξάρτητη.*

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συλλογή διανυσμάτων $v_1, \ldots, v_n$, $w_1, \ldots, w_m$. Εάν τα διανύσματα $v_1, \ldots, v_n$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, υπάρχουν αριθμοί, $a_1, \ldots, a_n$, οι οποίοι δεν είναι όλοι ίσοι με 0, τέτοιοι ώστε

$$a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = 0\,.$$

Σχηματίζουμε το γραμμικό συνδυασμό

$$a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n + 0 w_1 + \cdots + 0 w_m$$

ο οποίος είναι ίσος με το μηδενικό διάνυσμα, αλλά τουλάχιστον ένας από τους συντελεστές δεν είναι 0. Άρα η συλλογή $v_1, \ldots, v_n$, $w_1, \ldots, w_m$ είναι γραμμικά εξαρτημένη.

Θεωρούμε μια γραμμικά ανεξάρτητη συλλογή διανυσμάτων $v_1, \ldots, v_n$, και τη συλλογή $v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}$, όπου $k \leq n$ και i_j είναι διαφορετικοί φυσικοί αριθμοί μεταξύ 1 και n. Θέλουμε να δείξουμε ότι η συλλογή $v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητη. Έστω ένας γραμμικός συνδυασμός των $v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}$, ο οποίος είναι ίσος με το μηδενικό διάνυσμα,

$$a_1 v_{i_1} + \cdots + a_k v_{i_k} = 0\,.$$

Σχηματίζουμε το γραμμικό συνδυασμό

$$b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n$$

όπου $b_{i_j} = a_j$ για $j = 1, \ldots k$, και $b_i = 0$ εάν i δεν είναι ίσο με κάποιο i_j, $1 \leq j \leq k$. Τότε

$$b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n = a_1 v_{i_1} + \cdots + a_k v_{i_k} = 0$$

Αφού η συλλογή $v_1, \ldots, v_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητη, όλοι οι συντελεστές b_i, $1 \leq i \leq n$ είναι ίσοι με 0. Συνεπώς και οι $a_j = b_{i_j}$ είναι ίσοι με 0. Άρα η συλλογή $v_{i_1}, \ldots, v_{i_k}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητη.

□

Παράδειγμα 2.9 Στο χώρο $\mathbb{K}[x]$ των πολυωνύμων μίας μεταβλητής με συντελεστές στο σώμα $\mathbb{K}$, το σύνολο

$$\mathcal{B} = \left\{ p_k(x) = x^k \mid k \in \mathbb{N}_0 \right\} = \{p_0(x),\, p_1(x),\, p_2(x), \ldots\}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Πρέπει να δείξουμε ότι κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathcal{B}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Από την Πρόταση **;;**, κάθε υποσύνολο ενός γραμμικά ανεξάρτητου συνόλου είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Αφού κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathcal{B}$ περιέχεται σε ένα υποσύνολο της μορφής $\{p_0(x),\, p_1(x),\, p_2(x), \ldots,\, p_n(x)\}$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$, αρκεί να αποδείξουμε ότι σύνολα αυτής της μορφής είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Θεωρούμε ένα γραμμικό συνδυασμό που εκφράζει το μηδενικό πολυώνυμο:

$$a_0\, p_0(x) + a_1\, p_1(x) + a_2\, p_2(x) + \cdots + a_n p_n(x) = 0$$

δηλαδή $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο και συνεπώς $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$.

Ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα ότι το μηδενικό διάνυσμα εκφράζεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του συνόλου. Θα δούμε ότι το ίδιο ισχύει και για κάθε άλλο διάνυσμα που βρίσκεται στο χώρο που παράγει το σύνολο.

Πρόταση 2.5 *Το σύνολο διανυσμάτων $\{v_1, \ldots, v_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο εάν και μόνον εάν κάθε διάνυσμα $w \in \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ εκφράζεται κατά ένα και μόνο τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των $v_1, \ldots, v_n$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι το σύνολο $\{v_1, \ldots, v_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Θεωρούμε διάνυσμα $w \in \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$, και γραμμικούς συνδυασμούς που εκφράζουν το w,

$$w = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \quad \text{και} \quad w = b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n$$

Τότε $a_1 v_1 + \cdots a_n v_n - (b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n) = 0$, και συνεπώς

$$(a_1 - b_1)v_1 + \cdots + (a_n - b_n)v_n = 0\,.$$

Αφού το σύνολο $\{v_1, \ldots, v_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο,

$$a_1 - b_1 = 0,\ a_2 - b_2 = 0, \ldots,\ a_n - b_n = 0\,,$$

και συνεπώς $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2, \ldots, a_n = b_n$. Συμπεραίνουμε ότι το w εκφράζεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του $\{v_1, \ldots, v_n\}$.

Αντιστρόφως, υποθέτουμε ότι κάθε διάνυσμα $w \in \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ εκφράζεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των $v_1, \ldots, v_n$. Το μηδενικό διάνυσμα ανήκει στο $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$, και προφανώς $0 = 0\,v_1 + \cdots + 0\,v_n$. Από την υπόθεση της μοναδικότητας δεν υπάρχει γραμμικός συνδυασμός με τουλάχιστον ένα συντελεστή διαφορετικό από 0 που να εκφράζει το μηδενικό διάνυσμα, και συνεπώς το σύνολο $\{v_1, \ldots, v_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

□

Εάν ένα υποσύνολο S του διανυσματικού χώρου V παράγει το V, τότε κάθε στοιχείο του V εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του S. Εάν επί πλέον το σύνολο S είναι γραμμικά ανεξάρτητο, τότε αυτός ο γραμμικός συνδυασμός είναι μοναδικός για κάθε στοιχείο του V. Γι' αυτό το λόγο ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο που παράγει ένα χώρο V έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Ένα τέτοιο σύνολο ονομάζεται βάση του V.

Ορισμός. Ένα υποσύνολο $\mathcal{B}$ του διανυσματικού χώρου V λέγεται ***βάση*** του V εάν το $\mathcal{B}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και παράγει το διανυσματικό χώρο V.

Παράδειγμα 2.10 Στο $\mathbb{K}^2$, τα διανύσματα $(1,\,0)$ και $(0,\,1)$ αποτελούν μία βάση του χώρου, γιατί είναι γραμμικά ανεξάρτητα και παράγουν το χώρο $\mathbb{K}^2$: εάν $(a,\,b) \in \mathbb{K}^2$, τότε $(a,\,b) = a\,(1,\,0) + b\,(0,1)\,.$

Παράδειγμα 2.11 Το σύνολο

$$\mathcal{B} \;=\; \{p_k(x) = x^k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$$

αποτελεί βάση του χώρου πολυωνύμων $\mathbb{K}[x]$. Είδαμε στο Παράδειγμα **;;** ότι είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Κάθε πολυώνυμο γράφεται στη μορφή $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$, με $a_n \neq 0$, και συνεπώς εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του $\mathcal{B}$:

$$p(x) = a_0 p_0(x) + a_1 p_1(x) + \ldots + a_n p_n(x)\,.$$

Μία βάση ενός διανυσματικού χώρου V χαρακτηρίζεται ως ένα μέγιστο γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του V, και επίσης ως ένα ελάχιστο παράγον σύνολο του V.

Πρόταση 2.6 *Θεωρούμε το διανυσματικό χώρο V, και ένα σύνολο $\{v_1, \ldots v_n\} \subseteq V$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*

1. *$\{v_1, \ldots, v_n\}$ είναι βάση του V, δηλαδή είναι γραμμικά ανεξάρτητο παράγον σύνολο του V.*

2. *Κάθε διάνυσμα $w \in V$ εκφράζεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός $v_1, \ldots, v_n$.*

3. *$\{v_1, \ldots, v_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, αλλά για κάθε $w \in V \backslash \{v_1, \ldots, v_n\}$, το σύνολο $\{v_1, \ldots, v_n\} \cup \{w\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο.*

4. *$\{v_1, \ldots, v_n\}$ είναι παράγον σύνολο V, ενώ για κάθε $i = 1, \ldots, n$, το σύνολο $\{v_1, \ldots, v_n\} \setminus \{v_i\}$ δεν παράγει το V.*

Απόδειξη. Η ισοδυναμία των 1 και 2 είναι συνέπεια της Πρότασης **;;**.

Για να δείξουμε ότι το 1 συνεπάγεται το 3, παρατηρούμε ότι εάν $\{v_1, \ldots, v_n\}$ είναι βάση και $w \in V \setminus \{v_1, \ldots, v_n\}$, τότε το w εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των $v_1, \ldots, v_n$, και συνεπώς $\{v_1, \ldots, v_n\} \cup \{w\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο. Αντιστρόφως, εάν ισχύει το 3, τότε κάθε στοιχείο $w \in V$ εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των $v_1, \ldots, v_n$, και συνεπώς $\{v_1, \ldots, v_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο παράγον σύνολο.

Για να δείξουμε ότι το 1 συνεπάγεται το 4, παρατηρούμε οτι εάν για κάποιο $j = 1, \ldots, k$, το σύνολο $\{v_1, \ldots, v_n\} \setminus \{v_j\}$ παράγει το V, τότε το v_j εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων στοιχείων του $\{v_1, \ldots, v_n\}$, το οποίο συνεπώς δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Αντιστρόφως, εάν το σύνολο $\{v_1, \ldots, v_n\}$ παράγει το V, αλλά δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητο, τότε, από το Λήμμα Γραμμικής Εξάρτησης, Λήμμα **;;**, υπάρχει γνήσιο υποσύνολο του $\{v_1, \ldots, v_n\}$ το οποίο παράγει το V.

□

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι κάπως τεχνικό, αλλά θεμελιώδες για τη θεωρία των πεπερασμένα παραγόμενων διανυσματικών χώρων. Λέει ότι ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο δεν μπορεί να έχει περισσότερα στοιχεία από ένα σύνολο που παράγει το χώρο, και ότι μπορούμε να αντικαταστήσουμε κάποια από τα στοιχεία του παράγοντος συνόλου με στοιχεία του γραμμικά ανεξάρτητου συνόλου ώστε να έχουμε ένα νέο παράγον σύνολο που περιέχει το γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο.

Θεώρημα 2.7 *(Θεώρημα Αντικατάστασης). Εάν το πεπερασμένο σύνολο $\{v_1, \ldots, v_n\}$ παράγει το γραμμικό χώρο V, και $\{w_1, \ldots, w_k\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του V, τότε $k \leq n$ και υπάρχουν $n - k$ στοιχεία v_{i_j}, για $j = 1, \ldots, n - k$ τέτοια ώστε*

$$\{w_1, \ldots, w_k, v_{i_j}, \cdots, v_{i_{n-k}}\}$$

παράγουν το V.

Απόδειξη. Αφού το σύνολο $\{v_1, \ldots, v_n\}$ παράγει το διανυσματικό χώρο V, το w_1 γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός

$$w_1 = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n \,,$$

και εφόσον $w_1 \neq 0$, υπάρχει κάποιο $j = 1, \ldots, n$ για το οποίο $a_j \neq 0$. Αντικαθιστούμε το v_j με το w_1, και έχουμε το σύνολο

$$S_1 = (\{v_1, \ldots, v_n\} \setminus \{v_j\}) \cup \{w_1\} \,.$$

Από το Λήμμα Γραμμικής Εξάρτησης, Λήμμα ;;, το S_1 παράγει το χώρο V. Αν χρειάζεται αλλάζουμε την αρίθμηση των στοιχείων του S_1 ώστε να έχουμε

$$S_1 = \{w_1,\, v_2, \ldots, v_n\}\,.$$

Κατόπιν θεωρούμε το διάνυσμα w_2. Αφού το S_1 παράγει το V, το w_2 γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του S_1,

$$w_2 = a_1 w_1 + a_2 v_2 + \ldots + a_n v_n\,.$$

Αφού τα w_1, w_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητα, $w_2 - a_1 w_1 \neq 0$, και συνεπώς υπάρχει κάποιο $j = 2, \ldots, n$ για το οποίο $a_j \neq 0$. Θέτουμε $S_2 = (S_1 \setminus \{v_j\}) \cup \{w_2\}$, και υποθέτουμε ότι

$$S_2 = \{w_1,\, w_2,\, v_3, \ldots, v_n\}\,.$$

Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο υποθέτουμε ότι, για $m < k$, έχουμε κατασκευάσει το σύνολο $S_m = \{w_1, \ldots, w_m,\, v_{m+1}, \ldots, v_n\}$, το οποίο παράγει το V. Θεωρούμε το διάνυσμα w_{m+1} ως γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων του S_m, και έχουμε

$$w_{m+1} - (a_1 w_1 + \ldots + a_m w_m) = a_{m+1} v_{m+1} + \ldots + a_n v_n\,.$$

Αφού τα $w_1, \ldots, w_{m+1}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, η δεξιά πλευρά δεν είναι ίση με το μηδενικό διάνυσμα. Συνεπώς $m < n$ και υπάρχει $j = m+1, \ldots, n$ τέτοιο ώστε $a_j \neq 0$. Συμπεραίνουμε ότι το σύνολο $S_{m+1} = (S_m \setminus \{v_j\}) \cup \{w_{m+1}\}$ παράγει το V.

Αυτή η διαδικασία μπορεί να συνεχιστεί μέχρι να κατασκευάσουμε το σύνολο

$$S_k = \{w_1, \ldots, w_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}\,,$$

το οποίο παράγει το διανυσματικό χώρο V.

□

Πόρισμα 2.8 *Ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο σε ένα διανυσματικό χώρο δεν μπορεί να έχει περισσότερα στοιχεία από ένα σύνολο που παράγει το χώρο.*

□

Πόρισμα 2.9 *Εάν $\mathcal{B}$ και $\mathcal{B}'$ είναι βάσεις ενός πεπερασμένα παραγόμενου διανυσματικού χώρου, τότε $\mathcal{B}$ και $\mathcal{B}'$ έχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα Αντικατάστασης, Θεώρημα ;;, και οι δύο βάσεις έχουν πεπερασμένο πλήθος στοιχείων. Υποθέτουμε ότι $\mathcal{B}$ έχει n στοιχεία και η $\mathcal{B}'$ έχει n' στοιχεία. Αφού το σύνολο $\mathcal{B}'$ παράγει το διανυσματικό χώρο, και $\mathcal{B}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, $n \leq n'$. Παρόμοια το $\mathcal{B}$ παράγει το χώρο και το $\mathcal{B}'$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, άρα $n' \leq n$. Συνεπώς $n = n'$.

□

Πρόταση 2.10 *Εάν ο διανυσματικός χώρος V παράγεται από το πεπερασμένο σύνολο S, και F είναι γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του S, τότε υπάρχει μία βάση $\mathcal{B}$ του V τέτοια ώστε*

$$F \subseteq \mathcal{B} \subseteq S\,.$$

Απόδειξη. Έστω $\{v_1, \ldots, v_k\}$ το γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο F, και $S = \{v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_m\}$. Εάν το S είναι γραμμικά ανεξάρτητο, τότε S είναι βάση του V, και θέτουμε $\mathcal{B} = S$. Εάν το S δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητο, τότε μπορούμε να εκφράσουμε το μηδενικό διάνυσμα ως γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων του S, με τουλάχιστον ένα συντελεστή διαφορετικό από το 0:

$$a_1v_1 + \cdots + a_kv_k + b_1w_1 + \cdots + b_mw_m = 0\,.$$

Εάν για όλα τα $i = 1, \ldots, k, \quad a_i = 0$, τότε υπάρχει κάποιο $j = 1, \ldots, m$ για το οποίο $b_j \neq 0$. Εάν για κάποιο $i = 1, \ldots, k, \quad a_i \neq 0$, τότε, από την γραμμική ανεξαρτησία των $v_1, \ldots, v_n$, συμπεραίνουμε ότι $a_1v_1 + \ldots + a_kv_k \neq 0$, και συνεπώς πάλι υπάρχει κάποιο $j = 1, \ldots, m$ για το οποίο $b_j \neq 0$. Σε κάθε περίπτωση, υπάρχει κάποιο $j = 1, \ldots, m$ τέτοιο ώστε w_j έχει μη μηδενικό συντελεστή, και από το Λήμμα Γραμμικής Εξάρτησης **;;**, το σύνολο $S_1 = S \setminus \{w_j\}$ παράγει όλο το χώρο V. Εάν S_1 είναι γραμμικά ανεξάρτητο, θέτουμε $\mathcal{B} = S_1$. Διαφορετικά, επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία και διαγράφουμε κάποιο άλλο από τα περιττά w_j. Η διαδικασία αυτή μπορεί να επαναληφθεί το πολύ m φορές, και καταλήγει σε ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο που παράγει το V, δηλαδή τη ζητούμενη βάση $\mathcal{B}$.

□

Το επόμενο αποτέλεσμα ισχύει σε κάθε διανυσματικό χώρο, αλλά εδώ θα το αποδείξουμε μόνο για πεπερασμένα παραγόμενους διανυσματικούς χώρους. Στην περίπτωση μη πεπερασμένα παραγόμενων χώρων, η ύπαρξη βάσης είναι συνέπεια του Αξιώματος Επιλογής (δες Θεμέλια των Μαθηματικών, Επίλογος).

Θεώρημα 2.11 *Κάθε διανυσματικός χώρος V περιέχει μία βάση. Ειδικότερα, κάθε γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο του V μπορεί να επεκταθεί σε μία βάση του χώρου V, και κάθε σύνολο που παράγει το διανυσματικό χώρο V περιέχει μία βάση του V.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι ο διανυσματικός χώρος V παράγεται από το πεπερασμένο σύνολο S.

Θεωρούμε ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο F στο V (το οποίο μπορεί να είναι και το κενό σύνολο) και εφαρμόζουμε την Πρόταση **;;** στο πεπερασμένο παράγον σύνολο $S \cup F$ και στο γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο F, για να κατασκευάσουμε μία βάση $\mathcal{B}$ του V, με $F \subseteq \mathcal{B}$.

□

Ορισμός. Έστω διανυσματικός χώρος V. Η ***διάσταση*** του V συμβολίζεται $\dim V$ και ορίζεται ως εξής:

$$\dim V = \begin{cases} 0 & \text{εάν } V = \{0\} \\ n & \text{εάν υπάρχει βάση του } V \text{ με } n \text{ στοιχεία} \\ \infty & \begin{array}{l}\text{εάν για κάθε } m \in \mathbb{N}, \text{ υπάρχει γραμμικά} \\ \text{ανεξάρτητο υποσύνολο του } V \text{ με } m \text{ στοιχεία}\end{array} \end{cases}$$

Λέμε ότι ο διανυσματατικός χώρος V έχει ***πεπερασμένη διάσταση*** εάν $\dim V \in \mathbb{N}_0$, ενώ ονομάζουμε ***απειροδιάστατο*** ένα χώρο για τον οποίο $\dim V = \infty$.

Είναι φανερό ότι ένας χώρος είναι πεπερασμένα παραγόμενος εάν και μόνον εάν έχει πεπερασμένη διάσταση. Γι΄ αυτό το λόγο, ο όρος πεπερασμένα παραγόμενος δεν χρησιμοποιείται για διανυσματικούς χώρους, και αντικαθίσταται από τον όρο χώρος πεπερασμένης διάστασης.

Η ακόλουθη Πρόταση είναι άμεση συνέπεια του ορισμού της διάστασης και της Πρότασης ;;.

Πρόταση 2.12 *Έστω διανυσματικός χώρος V διάστασης n. Τότε*

1. *Κανένα σύνολο με περισσότερα από n στοιχεία δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητο στο V.*
2. *Κανένα σύνολο με λιγότερα από n στοιχεία δεν παράγει το V.*

□

Θεώρημα 2.13 *Έστω διανυσματικός χώρος V διάστασης n, και S υποσύνολο του V με n στοιχεία. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

1. *S είναι γραμμικά ανεξάρτητο στο V.*
2. *S παράγει το διανυσματικό χώρο V.*
3. *S είναι βάση του V.*

Απόδειξη. Σε ένα διανυσματικό χώρο διάστασης n, ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο με n στοιχεία είναι μέγιστο, και συνεπώς είναι μία βάση , ενώ ένα παράγον σύνολο με n στοιχεία είναι ελάχιστο, και συνεπώς είναι μία βάση. □

Πρόταση 2.14 *Έστω διανυσματικός χώρος V διάστασης n, και $\{v_1, \ldots, v_n\}$ βάση του V. Εάν $\{w_1, \ldots, w_k\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του V, τότε υπάρχουν $n-k$ στοιχεία v_{i_j}, για $j = 1, \ldots, n-k$, τέτοια ώστε*

$$\{w_1, \ldots, w_k, v_{i_1}, \ldots, v_{i_{n-k}}\}$$

είναι βάση του V.

Απόδειξη. Απο το Θεώρημα Αντικατάστασης, Θεώρημα ;;, υπάρχουν v_{i_j} τέτοια ώστε $\{w_1, \ldots, w_k, v_{i_1}, \ldots, v_{i_{n-k}}\}$ παράγει το V. Από το Θεώρημα ;;, ένα παράγον σύνολο του V με n στοιχεία είναι βάση του V.

□

Πρόταση 2.15 *Κάθε γραμμικός υπόχωρος X ενός διανυσματικού χώρου V πεπερασμένης διάστασης έχει πεπερασμένη διάσταση και $\dim X \leq \dim V$. Εάν $\dim X = \dim V$, τότε $X = V$.*

Απόδειξη. Δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση ;; για να κατασκευάσουμε βάση του X, καθώς δεν είναι προφανές ότι ένας υπόχωρος ενός πεπερασμένα παραγόμενου χώρου είναι πεπερασμένα παραγόμενος. Θα κατασκευάσουμε μία βάση του X ως ένα μέγιστο γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο, βασιζόμενοι στην ιδιότητα οτι κάθε γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του X

είναι επίσης γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του V, και συνεπώς έχει το πολύ $\dim V$ στοιχεία.

Εάν $X = \{0\}$, τότε $\dim X = 0 \leq \dim V$. Υποθέτουμε ότι $X \neq \{0\}$, και θεωρούμε μη μηδενικό διάνυσμα $x_1 \in X$. Θέτουμε $Y_1 = \langle x_1 \rangle$.

Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο $\{x_1, \ldots, x_k\}$ του X, και $Y_k = \langle x_1, \ldots, x_k \rangle$. Εάν $X = Y_k$, τότε $\dim X = k \leq \dim V$. Διαφορετικά, θεωρούμε διάνυσμα $x_{k+1} \in X \setminus Y_k$. Θα δείξουμε ότι $\{x_1, \ldots, x_{k+1}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Θεωρούμε γραμμικό συνδυασμό των $x_1, \ldots, x_{k+1}$ που εκφράζει το μηδενικό διάνυσμα,

$$a_1 x_1 + \ldots + a_{k+1} x_{k+1} = 0 .$$

Εάν $a_{k+1} \neq 0$, τότε $x_{k+1} \in Y_k$, που αντιφάσκει προς τις υποθέσεις μας. Άρα $a_{k+1} = 0$, και

$$a_1 x_1 + \ldots + a_k x_k = 0 ,$$

αλλά $\{x_1, \ldots, x_k\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, και συνεπώς $a_1 = \cdots + a_k = 0$. Με αυτό τον τρόπο μπορούμε να κατασκευάσουμε διαδοχικά μεγαλύτερα γραμμικά ανεξάρτητα υποσύνολα του X. Αφού δεν υπάρχουν γραμμικά ανεξάρτητα υποσύνολα του V με περισσότερα από $\dim V$ στοιχεία, η διαδικασία τερματίζεται, και $X = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ για κάποιο $n \leq \dim V$. Συνεπώς $\dim X = n \leq \dim V$.

Εάν $\dim X = \dim V$, τότε μία βάση του X είναι γραμμικά ανεξάρτητο υποσύνολο του V με $\dim V$ στοιχεία, και συνεπώς παράγει το V.

□

Πρόταση 2.16 *Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V πεπερασμένης διάστασης, και γραμμικούς υπόχωρους X και Y. Τότε ισχύει η σχέση*

$$\dim(X + Y) = \dim X + \dim Y - \dim(X \cap Y).$$

Απόδειξη. Θεωρούμε πρώτα την περίπτωση όπου $X \cap Y \neq \{0\}$. Διαλέγουμε μία βάση $\{z_1, \ldots, z_n\}$ του $X \cap Y$. Τότε υπάρχουν $x_1, \ldots, x_\ell \in X$ τέτοια ώστε το σύνολο $\{z_1, \ldots, z_n, x_1, \ldots, x_\ell\}$ να αποτελεί βάση του X, και $y_1, \ldots, y_m \in Y$ τέτοια ώστε το σύνολο $\{z_1, \ldots, z_n, y_1, \ldots, y_m\}$ να αποτελεί βάση του Y.

Θα αποδείξουμε ότι το σύνολο

$$\mathcal{B} = \{z_1, \ldots, z_n, x_1, \ldots, x_\ell, y_1, \ldots, y_m\}$$

είναι βάση του $X + Y$.

Είναι εύκολο να δούμε ότι το $\mathcal{B}$ παράγει το $X + Y$. Για να δείξουμε ότι το B είναι γραμμικά ανεξάρτητο, θεωρούμε ένα γραμμικό συνδυασμό

$$a_1 z_1 + \cdots + a_n z_n + b_1 x_1 + \cdots + b_\ell y_\ell + c_1 y_1 + \cdots c_m y_m = 0.$$

Θέτουμε $v = a_1 z_1 + cldots + a_n z_n + b_1 x_1 + \cdots b_\ell x_\ell \in X$, και έχουμε $v = -(c_1 y_1 + \cdots + c_m y_m) \in Y$. Συμπεραίνουμε οτι το $v \in X \cap Y$ και συνεπώς υπάρχουν $d_1, \ldots, d_n \in \mathbb{K}$, τέτοια ώστε $v = d_1 z_1 + \cdots + d_n z_n$.

Από τη γραμμική ανεξαρτησία των $z_1, \ldots, z_n, x_1, \ldots, x_\ell$, η έκφραση του v ως γραμμικού συνδυασμού είναι μοναδική, και η ισότητα

$$a_1 z_1 + \cdots + a_n z_n + b_1 x_1 + \cdots + b_l x_l = d_1 z_1 + \cdots + d_n z_n$$

συνεπάγεται ότι, για κάθε $i = 1, \ldots, n$, $a_i = d_i$, και για κάθε $j = 1, \ldots, \ell$, $b_j = 0$.

Παρόμοια, η γραμμική ανεξαρτησία των $z_1, \ldots, z_n$, $y_1, \ldots, y_m$ και η ισότητα

$$d_1 z_1 + \cdots + d_n z_n = -(c_1 y_1 + \cdots + c_m y_m)$$

συνεπάγεται ότι, για κάθε $i = 1, \ldots, n$, $d_i = 0$, και για κάθε $j = 1, \ldots, m$, $c_j = 0$. Καταλήγουμε ότι όλοι οι συντελεστές είναι 0, συνεπώς το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Η περίπτωση $X \cap Y = \{0\}$ αποδεικνύεται με ανάλογο τρόπο.

$\square$

Πόρισμα 2.17 *Το άθροισμα των γραμμικών υπόχωρων $X + Y$ είναι ευθύ εάν και μόνον εάν*

$$\dim X + Y = \dim X + \dim Y\,.$$

$\square$

Πρόταση 2.18 *Έστω διανυσματικός χώρος V πεπερασμένης διάστασης. Εάν X είναι υπόχωρος του V, υπάρχει υπόχωρος Y του V, τέτοιος ώστε*

$$V = X \oplus Y\,.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $\dim V = n$, $\dim X = m$, και θεωρούμε βάση $\{x_1, \ldots, x_m\}$ του X. Από την Πρόταση **;;**, υπάρχουν διανύσματα $y_1, \ldots, y_{n-m}$ του V τέτοια ώστε $\{x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_{n-m}\}$ είναι βάση του V. Θέτουμε $Y = \langle y_1, \ldots, y_{n-m} \rangle$. Προφανώς $X + Y = \langle x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_{n-m} \rangle = V$, και από τη γραμμική ανεξαρτησία του $\{x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_{n-m}\}$ δείχνουμε ότι $X \cup Y = \{0\}$.

$\square$

Κεφάλαιο 3

Γραμμικές Απεικονίσεις

Θα εξετάσουμε απεικονίσεις από ένα διανυσματικό χώρο σε έναν άλλο. Από τη σκοπιά της γραμμικής άλγεβρας, μας ενδιαφέρουν οι απεικονίσεις που διατηρούν κάποια στοιχεία της δομής του διανυσματικού χώρου: αυτές που απεικονίζουν αθροίσματα σε αθροίσματα, και γινόμενα σε γινόμενα.

Γνωρίζουμε ήδη απεικονίσεις με αυτές τις ιδιότητες:

Παράδειγμα 3.1 Εάν A είναι ένας $m \times n$ πίνακας, ο πολλαπλασιασμός ενός $x \in \mathbb{R}^n$, με τον πίνακα από τα αριστερά, δίδει ένα στοιχείο $Ax \in \mathbb{R}^m$ και, για x, $y \in \mathbb{R}^n$ και $a \in \mathbb{R}$, ικανοποιεί τις σχέσεις

$$\begin{aligned} A(x+y) &= Ax + Ay \\ A(ax) &= a\,Ax. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.2 Έστω $C^1(\mathbb{R})$ ο χώρος των συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής, που είναι παραγωγίσιμες σε όλο το $\mathbb{R}$, και έχουν συνεχή παράγωγο. Εάν $f \in C^1(\mathbb{R})$, η παραγώγιση D, που απεικονίζει την f στην παράγωγό της $D(f) = f'$, είναι απεικόνιση από το $C^1(\mathbb{R})$ στο $C^0(\mathbb{R})$, και έχει τις ιδιότητες, για f, $g \in C^1(\mathbb{R})$ και $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} D(f+g) &= Df + Dg \\ D(af) &= a\,Df \end{aligned}$$

Ορισμός. Θεωρούμε δύο διανυσματικούς χώρους V και U πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$. Η απεικόνιση $L : V \to U$ ονομάζεται ***γραμμική*** εάν για κάθε v, $w \in V$ και $a \in \mathbb{K}$, ισχύει

$$\begin{aligned} L(v+w) &= L(v) + L(w) \\ L(av) &= a\,L(v) \end{aligned}$$

Το επόμενο αποτέλεσμα λέει ότι μπορούμε να συνδυάσουμε τον έλεγχο των δύο συνθηκών σε μία. Η απόδειξη του βασίζεται στην επιλογή κατάλληλων τιμών του a και του w.

Λήμμα 3.1 *Η απεικόνιση L είναι γραμμική εάν και μόνον εάν , για κάθε $v,\, w \in V$ και $a \in \mathbb{K}$,*

$$L(av + w) = aL(v) + L(w)\,.$$

***Άσκηση* 3.1** Γράψτε την απόδειξη του Λήμματος.

Παράδειγμα 3.3 Η ***μηδενική*** απεικόνιση $\mathbf{0} : V \to W$, η οποία απεικονίζει κάθε διάνυσμα του V στο μηδενικό διάνυσμα του W, $\mathbf{0}(v) = 0$, είναι γραμμική.

Παράδειγμα 3.4 Η ***ταυτοτική*** απεικόνιση $\mathbf{I}_V : V \to V$, η οποία απείκονίζει κάθε διάνυσμα του V στον εαυτό του, $\mathbf{I}(v) = v$, είναι γραμμική.

Παράδειγμα 3.5 Για κάθε $a \in \mathbb{K}$, η απεικόνιση $T_a : V \to V$, η οποία πολλαπλασιάζει κάθε διάνυσμα με τον αριθμό a, $T_a(v) = a\,v$, είναι γραμμική. Παρατηρούμε ότι η απεικόνιση $\mathbf{0} : V \to V$ είναι ίση με την $T_0 : V \to V$, ενώ η $\mathbf{I} : V \to V$ είναι ίση με την $T_1 : V \to V$.

Παράδειγμα 3.6 Για κάθε $m \times n$ πίνακα A, η απεικόνιση $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, η οποία πολλαπλασιάζει κάθε διάνυσμα στο $\mathbb{R}^n$ με τον πίνακα A από τα αριστερά, $T_A(x) = Ax$, είναι γραμμική.

Παράδειγμα 3.7 Η παραγώγιση, $D : C^1(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R})$, η οποία απεικονίζει κάθε διαφορίσιμη απεικόνιση με συνεχή παράλληλο στο $\mathbb{R}$, στην παράγωγο της, $D(f) = f'$, είναι γραμμική απεικόνιση.

Παράδειγμα 3.8 Η ολοκλήρωση, $I : C^0\left([0,\, 1]\right) \to \mathbb{R}$, η οποία απεικονίζει κάθε συνεχή απεικόνιση στο διάστημα $[0,\, 1]$, στο ολοκλήρωμα της στο $[0,\, 1]$,

$$I(f) = \int_0^1 f(t)dt\,,$$

είναι γραμμική απεικόνιση. Πράγματι, για κάθε $f,\, g \in C^0[0,\, 1]$ και κάθε $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} I(af + g) &= \int_0^1 \left(af(t) + g(t)\right) dt \\ &= a\int_0^1 f(t)dt + \int_0^1 g(t)dt \\ &= aI(f) + I(g) \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.9 Στο χώρο των πολυωνύμων, ο πολλαπλασιασμός με ένα σταθερό μονώνυμο είναι γραμμική απεικόνιση. Θεωρούμε το μονώνυμο $p(x) = bx^m$, και ορίζουμε την απεικόνιση $T_{p(x)} : \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x]$ με

$$T_{p(x)}\left(q(x)\right) = p(x)\,q(x)$$

Εάν $q(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, τότε

$$T_{p(x)}\left(q(x)\right) = ba_0x^m + \cdots + ba_nx^{m+n}\,,$$

και μπορείτε εύκολα να ελέγξετε ότι $T_{p(x)}$ είναι γραμμική απεικόνιση.

Παράδειγμα 3.10 Στο χώρο $\mathbb{K}^\infty$ των ακολουθιών με όρους στο $\mathbb{K}$, ορίζουμε την απεικόνιση shift, $s : \mathbb{K}^\infty \to \mathbb{K}^\infty$, με

$$(a_1, a_2, a3, \ldots) = (a_2, a_3, a_4, \ldots),$$

ή , πιο αυστηρά, $s((a_n)) = (b_n)$, όπου $b_n = a_{n+1}$. Η απεικόνιση shift είναι γραμμική.

Θα εξετάσουμε παραδείγματα απεικονίσεων που δεν είναι γραμμικές.

Παράδειγμα 3.11 Η απεικόνιση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto ax + b$ ***δεν είναι γραμμική***, παρ΄ όλο που το γράφημα της είναι μία ευθεία. Γενικότερα, οι μόνες πολυωνυμικές συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ οι οποίες είναι γραμμικές είναι τα μονώνυμα βαθμού 1. Έτσι η: $f(x) = 3x$ είναι γραμμική, αλλά οι $g(x) = 3x+2$ και $h(x)2x^2$, δεν είναι γραμμικές.

Παράδειγμα 3.12 Εάν A είναι $m \times n$ πίνακα, και $b \in \mathbb{R}^m$, η απεικόνιση $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m : x \mapsto Ax + b$ δεν είναι γραμμική.

Μπορούμε να βρούμε συναρτήσεις που ικανοποιούν τη μία από τις δύο συνθήκες αλλά όχι την άλλη.

Παράδειγμα 3.13 Στο $\mathbb{R}^2$ ορίζουμε

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1}{x_2}(x_1, x_2) & \text{εάν } x_2 \neq 0 \\ (0, 0) & \text{εάν } x_2 = 0. \end{cases}$$

Η $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ικανοποιεί τη ιδιότητα $f(ax) = af(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^2$, $a \in \mathbb{R}$, αλλά δεν ικανοποιεί προσθετική ιδιότητα.

Η γραμμικότητα μιας απεικόνισης εξαρτάται με ουσιαστικό τρόπο από το σώμα πάνω από το οποίο ορίζονται οι διανυσματικοί χώροι. Στο επόμενο παράδειγμα, η απεικόνιση ικανοποιεί την προσθετική ιδιότητα, αλλά η επαλήθευση της πολλαπλασιαστικής ιδιότητας εξαρτάται από το σώμα ορισμού.

Παράδειγμα 3.14 Θεωρούμε το μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C}$ ως διανυσματικό χώρο πάνω από $\mathbb{C}$. Γράφουμε $z = x + iy$ για ένα στοιχείο $z \in \mathbb{C}$ όταν το θεωρούμε ως διάνυσμα, και w για ένα στοιχείο $w \in \mathbb{C}$ όταν το θεωρούμε ως αριθμό. Ορίζουμε την απεικόνιση

$$L : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : z \mapsto \bar{z} = x - iy\,.$$

Η προσθετική ιδιότητα ισχύει. $L(z_1 + z_2) = \overline{(z_1 + z_2)} = \bar{z_1} + \bar{z_2}$. Η πολλαπλασιαστική ιδιότητα δεν ισχύει:$L(wz) = \overline{(wz)} = \bar{w}\bar{z}$, το οποίο δεν είναι ίσο με $wL(z) = w\bar{z}$, εάν $IM(w) \neq 0$.

Βλέπουμε ότι η L δεν είναι γραμμική απεικόνιση όταν θεωρούμε το $\mathbb{C}$ ως διανυσματικό χώρο πάνω από τους μιγαδικούς αριθμούς. Εάν όμως θεωρούμε το $\mathbb{C}$ ως διανυσματικό χώρο $\mathbb{C}_\mathbb{R}$ πάνω από τους πραγματικούς αριθμούς, ώστε για κάθε $a \in \mathbb{R}$,

$$L(az) = a\bar{z} = aL(z)$$

και η $L : \mathbb{C}_\mathbb{R} \to \mathbb{C}_\mathbb{R}$ είναι γραμμική.

Παράδειγμα 3.15 Εάν $L : V \to W$ και $M : V \to W$ είναι γραμμικές απεικονίσεις και $a \in \mathbb{K}$, τότε οι απεικονίσεις

$$L + M : V \to W : v \mapsto L(v) + M(v)$$

και

$$aL : V \to W : v \mapsto aL(v)$$

είναι επίσης γραμμικές. Το σύνολο όλων των γραμμικών απεικονίσεων από το διανυσματικό χώρο V στο W συμβολίζεται $\mathcal{L}(V, W)$ ή Hom (V, W) με τις παραπάνω πράξεις $\mathcal{L}(V, W)$ είναι διανυσματικός χώρος.

Άσκηση 3.2 Δείξτε ότι $L + M$ και aL είναι γραμμικές απεικονίσεις, και ότι $\mathcal{L}(V, W)$ είναι διανυσματικός χώρος.

Άσκηση 3.3 Χρησιμοποιήστε τη δομή διανυσματικού χώρου του $\mathcal{L}(\mathbb{K}[x], \mathbb{K}[x])$, για να δείξετε ότι ο πολλαπλασιασμός με σταθερό πολυώνυμο, $p(x) \in \mathbb{K}[x]$,

$$T_{p(x)} : \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}[x] : q(x) \mapsto p(x)q(x)\,,$$

είναι γραμμική απεικόνιση.

Στα επόμενα αποτελέσματα αποδεικνύουμε ορισμένες βασικές ιδιότητες των γραμμικών απεικονίσεων. Ειδικότερα στο Λήμμα ;;, 2 και 3 δείχνουμε ότι μια γραμμική απεικόνιση μπορεί να χαλάσει τη γραμμική ανεξαρτησία μιας συλλογής διανυσμάτων, αλλά δεν μπορεί μια γραμμική εξαρτημένη συλλογή να την κάνει γραμμικά ανεξάρτητα.

Λήμμα 3.2 *Θεωρούμε διανυσματικούς χώρους V και W, και γραμμική απεικόνιση $L : V \to W$.*

1. $L(0) = 0$.
2. *Εάν τα διανύσματα $v_1, \ldots, v_n$ είναι γραμμικά εξαρτημένα, τότε τα $L(v_1), \ldots, L(v_n)$ είναι γραμμικά εξαρτημένα.*
3. *Εάν $L(v_1), \ldots, L(v_n)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε τα $v_1, \ldots, v_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.*

Απόδειξη. Εάν $v \in V$, τότε $0v = 0$ και $L(0) = L(0v) = 0L(v) = 0$.

Θεωρούμε το γραμμικό συνδυασμό $a_1v_1 + \ldots + a_nv_n$. Εάν αυτός είναι ίσος με το μηδενικό διάνυσμα, τότε

$$a_1L(v_1) + \cdots + a_nL(v_n) = L(a_1v_1 + \cdots + a_nv_n) = L(0) = 0\,.$$

Συνεπώς εάν υπάρχει μη τετριμμένος γραμμικός συνδυασμός των $v_1, \ldots, v_n$ που εκφράζει το 0, τότε το ίδιο ισχύει και για τα $L(v_1), \ldots, L(v_n)$.

Αντιθέτως, εάν το μηδενικό διάνυσμα δεν εκφράζεται ως μη τετριμμένος γραμμικός συνδυασμός των $L(v_1), \ldots, L(v_n)$, τότε το ίδιο ισχύει και για τα $v_1, \ldots, v_n$.

□

Λήμμα 3.3 *Θεωρούμε διανυσματικούς χώρους V, W, γραμμική απεικόνιση $L : V \to W$, και γραμμικούς υπόχωρους $X \subseteq V$ και $Y \subseteq W$.*

1. *$L(X)$ είναι γραμμικός υπόχωρος του W, και $L^{-1}(Y)$ είναι γραμμικός υπόχωρος του V.*

2. *$\dim(L(X)) \leq \dim X$.*

Απόδειξη. Εάν y_1, $y_2 \in L(X)$, υπάρχουν διανύσματα x_1, $x_2 \in X$ τέτοια ώστε $L(x_1) = y_1$ και $L(x_2) = y_2$. Από τη γραμμικότητα της L, $y_1 + y_2 = L(x_1 + x_2) \in L(X)$ και $ay_1 = L(ax_1) \in L(X)$. Συμπεραίνουμε ότι $L(X)$ είναι κλειστό ως προς τις πράξεις του διανυσματικού χώρου W, και συνεπώς $L(X)$ είναι γραμμικός υπόχωρος. Παρόμοια, εάν x_1, $x_2 \in L^{-1}(Y)$, τότε $L(x_1 + x_2) = L(x_1) + L(x_2) \in Y$ και $L(ax_1) = aL(x_1) \in Y$ και συνεπώς $L(Y)$ είναι γραμμικός υπόχωρος του X.

Από το 1 γνωρίζουμε ότι $L(X)$ είναι γραμμικός υπόχωρος. Εάν $X = \{0\}$, τότε $L(X) = \{0\}$, και $\dim L(X) = 0 = \dim X$. Κατόπιν υποθέτουμε ότι $0 < \dim X < \infty$. Θεωρούμε ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο $\{y_1, \ldots, y_n\}$ στο $L(X)$, και διανύσματα $x_1, \ldots, x_n$ στο X τέτοια ώστε $L(x_i) = y_i$, για $i = 1, \ldots, n$. Από το Λήμμα **;;**, 3, τα $x_1, \ldots, x_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, και συνεπώς $n \leq \dim X$. Αυτό ισχύει για κάθε γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο στο $L(X)$, άρα το $L(X)$ έχει πεπερασμένη διάσταση και $\dim L(X) \leq \dim X$.

□

Εάν $L : V \to W$ είναι γραμμική απεικόνιση, ο υπόχωρος $L(V) \subseteq W$ ονομάζεται ***εικόνα*** της L, και συμβολίζεται $\operatorname{im} L$. Ο υπόχωρος $L^{-1}(\{0\}) \subseteq V$ ονομάζεται ***πυρήνας*** της L, και συμβολίζεται $\ker L$.

Πρόταση 3.4 *Η γραμμική απεικόνιση $L : V \to W$ είναι $1-1$ εάν και μόνον εάν $\ker(L) = \{0\}$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η L είναι $1-1$. Εάν $v \in \ker(L)$, τότε $L(v) = 0 = L(0)$, και συνεπώς $v = 0$. Άρα $\ker(L) = \{0\}$. Υποθέτουμε ότι $\ker(L) = \{0\}$. Εάν $L(v) = L(u)$, τότε $L(v - u) = 0$, άρα $v - u \in \ker(L) = \{0\}$, και συνεπώς $v = u$. Άρα η L είναι $1-1$

□

Παράδειγμα 3.16 Ο πυρήνας της μηδενικής απεικόνισης $\mathbf{0} : V \to W$ είναι όλο το πεδίο ορισμού, $\ker \mathbf{0} = V$. Η εικόνα της είναι ο μηδενικός υπόχωρος του W, $\operatorname{im} \mathbf{0} = \{0\} \subseteq W$.

Παράδειγμα 3.17 Ο πυρήνας της απεικόνισης παραγώγισης $D : C^1(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R})$ είναι το σύνολο όλων των σταθερών συναρτήσεων,

$$\ker D = \{f \in C^1(\mathbb{R}) \mid \exists c \in \mathbb{R} \forall t \in \mathbb{R} f(t) = c\}.$$

Η εικόνα της είναι όλο το σύνολο $C^0(\mathbb{R})$, αφού για κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, υπάρχει αντιπαράγωγος

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

Συνεπώς $\operatorname{im} D = C^0(\mathbb{R})$.

Παράδειγμα 3.18 Θεωρούμε τον $m \times n$ πίνακα A, και τη γραμμική απεικόνιση $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $L(x) = Ax$. Ο πυρήνας της L είναι το σύνολο των διανυσμάτων x του $\mathbb{R}^n$ για τα οποία $Ax = 0$, δηλαδή ο μηδενόχωρος του πίνακα A,

$$\ker L = \mathcal{N}(A)\,.$$

Η εικόνα του L είναι ο χώρος όλων των διανυσμάτων $y \in \mathbb{R}^m$ για τα οποία υπάρχει $x \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $Ax = y$, δηλαδή ο χώρος στηλών του A,

$$\operatorname{im} L = \mathcal{R}(A)\,.$$

Η απεικόνιση L είναι $1-1$ εάν και μόνον εάν $\mathcal{N}(A) = \{0\}$, δηλαδή όταν ο πίνακας A έχει τάξη n. Η απεικόνιση L είναι επί εάν και μόνον εάν $\mathcal{R}(A) = \mathbb{R}^m$, δηλαδή όταν ο πίνακας A έχει τάξη m.

Παράδειγμα 3.19 Η απεικόνιση shift, $s : \mathbb{K}^\infty \to \mathbb{K}^\infty$ δεν είναι $1-1$. Ο πυρήνας της είναι ο υπόχωρος όλων των ακολουθιών (a_n) για τις οποίες $a_n = 0$ για $n \geq 2$. Η εικόνα της είναι όλος ο χώρος $\mathbb{K}^\infty$, και η απεικόνιση είναι επί.

Γνωρίζουμε ότι η διάσταση του μηδενόχωρου και η διάσταση του χώρου στηλών ενός $m \times n$ πίνακα ικανοποιούν τη σχέση

$$n = \dim \mathcal{N}(A) + \dim \mathcal{R}(A)\,.$$

Συνεπώς για την απεικόνιση $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $L(x) = AX$, ισχύει

$$\dim \mathbb{R}^n = \dim \ker L + \dim \operatorname{im} L\,.$$

Θα δείξουμε ότι η ανάλογη σχέση ισχύει για κάθε γραμμική απεικόνιση με πεδίο ορισμού πεπερασμένης διάστασης.

Θεώρημα 3.5 *Εάν $L : V \to W$, είναι γραμμική απεικόνιση, και $\dim V < \infty$, τότε η σχέση*

$$\dim V = \dim \ker K + \dim \operatorname{im} L\,.$$

Απόδειξη. Ο πυρήνας $\ker L$ είναι υπόχωρος του V, και από την Πρόταση **;;**, $\dim \ker L < \infty$. Έχουμε ήδη δείξει, στο Λήμμα **;;**, 2, ότι $\dim L(V) \leq \dim V$, συνεπώς $\dim \operatorname{im} L < \infty$. Θεωρούμε βάση $\{w_1, \ldots, w_m\}$ της $\operatorname{im} L$, και βάση $\{v_1, \ldots, v_n\}$ του $\ker L$, και διανύσματα $v_{n+1}, \ldots, v_{n+m}$ τέτοια ώστε, για κάθε $i = 1, \ldots, m$, $L(v_{n+i} = w_i$. Θα δείξουμε ότι το σύνολο $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}, \ldots, v_{n+m}\}$ είναι βάση του V.

Πρώτα δείχνουμε ότι το $\mathcal{B}$ παράγει το V. Έστω $v \in V$. Τότε $L(v) \in \operatorname{im} L$, και συνεπώς εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των $w_1, \ldots, w_m$.

$$\begin{aligned}
L(v) &= a_1 w_1 + \cdots + a_m w_m \\
&= a_1 L_1(v_{n+1}) + \cdots + a_m L_m(v_{n+m}) \\
&= L(a_1 v_{n+1} + \cdots + a_m v_{n+m})\,.
\end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε ότι $v-(a_1 v_{n+1}+\cdots+a_m v_{n+m}) \in \ker L$, και συνεπώς εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των $v_1, \ldots, v_n$, $v - (a_1 v_{n+1} + \cdots + a_m v_{n+m}) = b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n$. Άρα $v = b_1 v_1 + \cdots + b_n v_n + a_1 v_{n+1} + \cdots + a_m v_{n+m}$, και $v \in \langle v_1, \ldots, v_{n+m} \rangle$. Συνεπώς $V = \langle v_1, \ldots, v_{n+m} \rangle$. Για να δείξουμε ότι $\mathcal{B}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, υποθέτουμε ότι $a_1 v_1 + \cdots + a_{n+m} v_{n+m} = 0$.Άλλα τότε

$$a_{n+1} v_{n+1} + \cdots + a_{n+m} v_{n+m} = -(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n)\,.$$

Εφαρμόζοντας την απεικόνιση L στις δύο πλευρές έχουμε

$$a_{n+1}w_1 + \cdots + a_{n+m}w_m = 0\,.$$

Άλλα $\{w_1, \ldots, w_m\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, και συνεπώς $a_{n+1} = \cdots = a_{n+m} = 0$. Αλλά τότε $a_1v_1 + \cdots a_nv_n = 0$, και από τη γραμμική ανεξαρτησία του $\{v-1, \ldots, v_n\}$ έχουμε $a_1 = \cdots = a_n = 0$.

Συμπεραίνουμε ότι το σύνολο $\mathcal{B}$ είναι βάση του V, και συνεπώς

$$\dim V = n + m = \dim\ker L + \dim\operatorname{im} L\,.$$

□

Πόρισμα 3.6 *Εάν* $\dim V > \dim W$, *τότε δεν υπάρχει γραμμική απεικόνιση από το* V *στο* W *που είναι* $1-1$.

Απόδειξη. Θεωρούμε γραμμική απεικόνιση $L : V \to W$. Εάν $\dim V < \infty$, τότε από το Θεώρημα **;;**, $\dim\ker L > 0$, και από την Πρόταση **;;** η L δεν είναι $1-1$.

Εάν $\dim V = \infty$ και $\dim W < \infty$, υπάρχει υπόχωρος X του V, τέτοιος ώστε $\infty > \dim X > \dim W$. Ο περιορισμός της L στον υπόχωρο X δεν είναι $1-1$, και συνεπώς η L δεν είναι $1-1$

□

Πόρισμα 3.7 *Εάν* $\dim V < \dim W$, *τότε δεν υπάρχει γραμμική απεικόνιση από το* V *στο* W *που να είναι επί.*

□

Πόρισμα 3.8 *Εάν* $L : V \to W$ *και* $M : W \to U$ *είναι γραμμικές απεικονίσεις, τότε η σύνθεση* $M \circ L$ *είναι επίσης γραμμική απεικόνιση.*

Απόδειξη. Για κάθε v_1, $v_2 \in V$ και $a \in \mathbb{K}$, έχουμε

$$\begin{aligned} M \circ L(a\,v_1 + v_2) &= M\left(a\,L(v_1) + L(v_2)\right) \\ &= a\,M\left(L(v_1)\right) + M\left(L(v_2)\right) \\ &= a\,M \circ L(v_1) + M \circ L(v_2)\,. \end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε ότι $M \circ L$ είναι γραμμική απεικόνιση.

□

Πρόταση 3.9 *Θεωρούμε διανυσματικούς χώρους* V *και* W *πάνω από το σώμα* $\mathbb{K}$. *Εάν* $\mathcal{B}$ *είναι βάση του* V *και* $f : \mathcal{B} \to W$ *είναι απεικόνιση, τότε υπάρχει ακριβώς μία γραμμική απεικόνιση* $L : V \to W$ *τέτοια ώστε για κάθε* $v \in \mathcal{B}$, $L(v) = f(v)$.

Απόδειξη. Αφού $\mathcal{B}$ είναι βάση του V, κάθε διάνυσμα $u \in V$ εκφράζεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός στοιχείων του $\mathcal{B}$,

$$u = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \,. \tag{3.1}$$

Ορίζουμε $L(u) = a_1 f(v_1) + \cdots + a_n f(v_n)$. Από τη μοναδικότητα του γραμμικού συνδυασμού **;;**, η L ορίζεται με μοναδικό τρόπο για κάθε $u \in V$, και συνεπώς είναι απεικόνιση. Εύκολα ελέγχουμε ότι είναι γραμμική.

Για να δείξουμε ότι είναι μοναδική, θεωρούμε μία γραμμική απεικόνιση $M : V \to W$ τέτοια ώστε $M(v) = f(v)$ για κάθε $v \in \mathcal{B}$. Έαν $u \in V$, και $u = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$ για $v_i \in \mathcal{B}$, έχουμε

$$\begin{aligned} M(u) &= M(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) \\ &= a_1 M(v_1) + \cdots + a_n M(v_n) \\ &= a_1 f(v_1) + \cdots + a_n f(v_n) \\ &= L(u) \,. \end{aligned}$$

Συνεπώς $M = L$.

□

Πρόταση 3.10 *Με τις υποθέσεις της Πρότασης* **;;**,

1. *Η εικόνα της γραμμικής απεικόνισης $L : V \to W$ είναι υπόχωρος του W που παράγεται από το σύνολο $f(\mathcal{B}$,*

2. *Η L είναι $1-1$ εάν και μόνον εάν η συλλογή $f(v)$ για $v \in \mathcal{B}$, είναι γραμμικά ανεξάρτητη* [1].

Απόδειξη. Προφανώς $\operatorname{im} L \subseteq \langle f(\mathcal{B}) \rangle$. Αντίθετα, εάν $w \in \langle f(\mathcal{B}) \rangle$, τότε $w = a_1 f(v_1) + \cdots + a_n f(v_n)$, για κατάλληλα $v_i \in \mathcal{B}$ και $a_i \in \mathbb{K}$, και συνεπώς $w = a_1 L(v_1) + \cdots + a_n L(v_n) = L(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) \in \operatorname{im} L$.

Για να δείξουμε το 2, παρατηρούμε ότι στην περίπτωση που $\mathcal{B}$ είναι άπειρο σύνολο, το L να είναι η συλλογή $f(v)$ για $v \in \mathcal{B}$ γραμμικά ανεξάρτητη, σημαίνει ότι για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $\{v_1, \ldots, v_n\}$ του $\mathcal{B}$, η συλλογή $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητη.

Πρώτα δείχνουμε ότι η L είναι $1-1$ μόνον εάν η συλλογή $f(v)$, $v \in \mathcal{B}$, είναι γραμμικά ανεξάρτητη. Υποθέτουμε ότι υπάρχει πεπερασμένο σύνολο $\{v_1, \ldots, v_n\}$ και $a_i \in \mathbb{K}, 1 \leq i \leq n$, με $a_1 \neq 0$, τέτοια ώστε

$$a_1 f(v_1) + \cdots + a_n f(v_n) = 0 \,.$$

Αφού $a_i \neq 0$ και $v_1, \ldots, v_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, $v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \neq 0$. Αλλά $L(v) = a_1 f(v_1) + \cdots + a_n f(v_n) = 0$. Συνεπώς η L δεν είναι $1-1$.

Αντίστροφα, δείχνουμε ότι η συλλογή $f(v)$, $v \in \mathcal{B}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητη μόνον εάν η L είναι $1-1$. Θεωρούμε $v, u \in V$, με $v \neq u$, και έστω $v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$ και $u = b_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$ για κάποιο πεπερασμένο σύνολο $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq \mathcal{B}$ και a_1, $b_1 \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq n$. Έστω ότι η L δεν είναι $1-1$, και $L(v) = L(u)$. Τότε $0 = L(v-u) = (a_1 - b_1) f(v_1) + \cdots + (a_n - b_n) f(v_n)$,

[1] Αυτό σημαίνει ότι η $f : \mathcal{B} \to W$ είναι $1-1$ και το σύνολο $f(\mathcal{B}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο στο W

αλλά τα $(a_i - b_i)$ δεν είναι όλα μηδέν, και συνεπώς η συλλογή $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ είναι γραμμικά εξαρτημένη.

□

Αξίζει να διατυπώσουμε τις παραπάνω Προτάσεις στη ειδικότερη περίπτωση που θα μας απασχολήσει στη συνέχεια, αυτή των χώρων πεπερασμένης διάστασης. Τότε μία βάση του V είναι πεπερασμένο σύνολο $\{v_1, \ldots, v_n\}$ και η Πρόταση **;;** λέει ότι μπορούμε να επιλέξουμε οποιαδήποτε συλλογή διανυσμάτων $w_1, \ldots, w_n$, και τότε υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση για την οποία $L(v_i) = w_i$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Η εικόνα της L είναι ο υπόχωρος $\langle w_1, \ldots, w_n \rangle \in W$, και η L είναι $1-1$ εάν και μόνον εάν η συλλογή $w_1, \ldots, w_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητη.

Ισομορφισμοί

Μια γραμμική απεικόνιση $L : V \to W$ ονομάζεται ***ισομορφισμός*** εάν η L είναι $1-1$ και επί, και η αντίστροφη αεπικόνιση είναι επίσης γραμμική. Δηλαδή εάν υπάρχει $L^{-1} : W \to V$ τέτοια ώστε $L \circ L^{1} = \mathbf{I}_W$, $L^{1} \circ L = \mathbf{I}_V$, και για κάθε $v_1, v_2 \in V$ και $a \in \mathbb{K}$,

$$L^{-1}(a\, v_1 + v_2) = a\, L^{-1}(v_1) + l^{-1}(v_2)\,.$$

Εάν υπάρχει ισομορφισμός μεταξύ των διανυσματικών χώρων V και W, λέμε ότι οι χώροι V και W είναι ***ισομορφικοί***, και το συμβολίζουμε $V \cong W$.

Το ακόλουθο αποτέλεσμα δείχνει ότι η υπόθεση ότι L^{-1} είναι γραμμική είναι περιττή. Η αντίστροφη συνάρτηση κάθε γραμμικής συνάρτησης είναι γραμμική.

Λήμμα 3.11 *Η γραμμική απεικόνιση $L : V \to W$ είναι ισομορφισμός εάν και μόνον εάν είναι $1-1$ και επί.*

Απόδειξη. Αφού η L είναι $1-1$ και επί, υπάρχει η αντίστροφη απεικόνιση L^{-1}, και $L \circ L^{-1} = \mathbf{I}_W$.

Θεωρούμε $w_1, w_2 \in W$ και $a \in \mathbb{K}$. Τότε

$$L \circ L^{-1}(a\, w_1 + w_2) = \mathbf{I}_W(a\, w_1 + w_2) = a\, w_1 + w_2\,.$$

Επίσης, αφού η L είναι γραμμική,

$$\begin{aligned} L\left(a\, L^{-1}(w_1) + L^{-1}(w_2)\right) &= a\, L\left(l^{-1}(w_1)\right) + L\left(l^{-1}(w_2)\right) \\ &= a\, w_1 + w_2\,. \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$L\left(L^{-1}(a\, w_1 + w_2)\right) = L\left(a\, L^{-1}(w_1) + L^{-1}(w_2)\right)$$

και αφού η L είναι $1-1$,

$$L^{-1}(a\, w_1 + w_2) = a\, L^{-1}(w_1) + L^{-1}(w_2)\,.$$

□

Από την άποψη της Γραμμικής Άλγεβρας, δύο ισομορφικοί χώροι είναι πανομοιότυποι. Οποιαδήποτε ιδιότητα έχει ένα υποσύνολο X του V η οποία εκφράζεται αποκλειστικά μέσω γραμμικών συνδυασμών των στοιχείων του, την ίδια ιδιότητα έχει και η εικόνα Y του υποσυνόλου X στο W μέσω του ισομορφισμού L.

Θεωρούμε ένα διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης V πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, $\dim V = n$, και μία βάση $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ του V. Κάθε στοιχείο $v \in V$ εκφράζεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης $\mathcal{B}$,

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \,.$$

Συνεπώς σε κάθε διάνυσμα $v \in V$ αντιστοιχεί το διατεταγμένο σύνολο των n αριθμών του $\mathbb{K}$, $(a_1, \ldots, a_n)$.

Το αριθμητικό διάνυσμα $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ ονομάζεται ***διάνυσμα συντεταγμένων*** του v ως προς την βάση $\mathcal{B}$. Η αντιστοιχία $v \mapsto (a_1, \ldots, a_n)$ είναι αμφιμονοσήμαντη: σε κάθε διάνυσμα του V αντιστοιχεί μοναδικό διάνυσμα συντεταγμένων στο $\mathbb{K}^n$, και σε κάθε αριθμητικό διάνυσμα στο $\mathbb{K}^n$ αντιστοιχεί μοναδικό διάνυσμα στο V. Αυτή η αντιστοιχία είναι πολύ σημαντική, γιατί μας επιτρέπει, αφού επιλέξουμε μία βάση σε ένα διανυσματικό χώρο πεπερασμένης διάστασης V, να μεταφέρουμε ερωτήματα σχετικά με τα διανύσματα του V, σε ερωτήματα σχετικά με αριθμητικά διανύσματα του $\mathbb{K}^n$, όπου μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις υπολογιστικές μεθόδους της άλγεβρας πινάκων.

Λήμμα 3.12 *Η απεικόνιση $\iota_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{K}^n$ που ορίζει η παραπάνω αντιστοιχία είναι ισομορφισμός.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την κανονική βάση $\{e_1, \ldots, e_n\}$ του $\mathbb{K}^n$. Θα δείξουμε ότι η απεικόνιση $\iota_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{K}^n$ είναι η μοναδική γραμμική απεικόνιση που ορίζεται σύμφωνα με την Πρόταση **;;** και απεικονίζει, για κάθε $i = 1, \ldots, n$, το διάνυσμα v_i της βάσης $\mathcal{B}$ στο διάνυσμα $e_i \in \mathbb{K}^n$. Πράγματι, εάν $v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$,

$$\iota_{\mathcal{B}}(v) = (a_1, \ldots, a_n) = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n \,.$$

Σύμφωνα με την Πρόταση **;;**, η απεικόνιση $\iota_{\mathcal{B}}$ είναι επί, εφ' όσον $\{e_1, \ldots, e_n\}$ παράγουν τον $\mathbb{K}^n$, και είναι $1-1$ εφ'οσον $\{e_1, \ldots, e_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο στο $\mathbb{K}^n$. Άρα $\iota_{\mathcal{B}}$ είναι ισομορφισμός

□

Διατυπώνουμε το επόμενο συμπέρασμα ως ένα Θεώρημα Δομής δηλαδή ένα θεώρημα που ταξινομεί μία κατηγορία μαθηματικών αντικειμένων συγκρίνοντας τα με συγκεκριμένα αντικείμενα, τη δομή των οποίων καταλαβαίνουμε αρκετά ικανοποιητικά.

Θεώρημα 3.13 *(Θεώρημα Δομής Διανυσματικών Χώρων Πεπερασμένης Διάστασης) Έστω V διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, και $\dim V = n$. Τότε ο V είναι ισομορφικός με το χώρο $\mathbb{K}^n$,*

$$V \cong \mathbb{K}^n \,.$$

□

Κεφάλαιο 4

Κατασκευή νέων διανυσματικών χώρων

Ευθύ Αθροισμα

Θα εξετάσουμε τρόπους να κατασκευάζουμε νέους διανυσματικούς χώρους.

Θεωρούμε V και W διανυσματικούς χώρους πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$. Στο καρτεσιανό γινόμενο $V \times W = \{(v, w) \,|\, v \in V, \, w \in W\}$ ορίζουμε τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού με στοιχεία του $\mathbb{K}$ ως εξής: για (v, w), $(x, y) \in V \times W$ και $a \in \mathbb{K}$,

$$(v, w) + (x, y) = (v + x, w + y) \qquad \text{και} \qquad a\,(v, w) = (a\,v, a\,w)\,.$$

Με αυτές τις πράξεις το σύνολο $V \times W$είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, τον οποίο ονομάζουμε ***(εξωτερικό) ευθύ άθροισμα*** των V και W, και συμβολίζουμε $V \oplus W$.

Λήμμα 4.1 *Εάν X και Y είναι γραμμικοί υπόχωροι του V, και $X \cap Y = \{0\}$, τότε το (εσωτερικό ευθύ) άθροισμα των X και Y είναι ισομορφικό με το (εξωτερικό) ευθύ άθροισμα:*

$$X + Y \cong X \oplus Y\,.$$

Απόδειξη. Εάν $v \in X + Y \subseteq V$, υπάρχουν μοναδικά $x \in X$ και $y \in Y$ τέτοια ώστε $v = x + y$. Ορίζουμε την απεικόνιση $L : X + Y \to X \oplus Y$ με $L(v) = (x, y)$. Ελέγχουμε οτι είναι 1 προς 1, επί και γραμμική.

$\square$

Προσέξτε τη διαφορά μεταξύ του ισομορφισμού στο Λήμμα **;;** και του ισομορφισμού $V \cong \mathbb{K}^{\dim V}$ στο Θεώρημα **;;**. Ο ισομορφισμός $X+Y \cong X \oplus Y$ δεν βασίζεται σε κάποια επιλογή: τα x και y είναι μοναδικά καθορισμένα από τα δεδομένα του προβλήματος. Λέμε οτι αυτός είναι ένας ***κανονικός ισομορφισμός***, ενώ ο ισομορφισμός $V \cong \mathbb{K}^{\dim V}$ δεν είναι κανονικός, αφού εξαρτάται από την επιλογή μίας βάσης του V.

Παράδειγμα 4.1 Το ευθύ άθροισμα $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ είναι ο διανυσματικός χώρος που συνήθως συμβολίζουμε $\mathbb{R}^2$.

Λήμμα 4.2 *Εάν $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ και $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα σύνολα (παράγοντα σύνολα, βάσεις) στους διανυσματικούς χώρους V και W αντίστοιχα, τότε*

$$\{(v_1, 0), (v_2, 0), \ldots, (v_k, 0), (0, w_1), (0, w_2), \ldots, (0, w_m)\}$$

είναι γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο (αντίστοιχα, παράγον σύνολο, βάση) του $V \oplus W$.

□

Θεώρημα 4.3 *Εάν V και W είναι διανυσματικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, τότε*

$$\dim V \oplus W = \dim V + \dim W\,.$$

4.1 Χώρος πηλίκο

Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, και υπόχωρο X του V. Στο V ορίζουμε τη σχέση ισοδυναμίας

$$v \sim w \quad \text{εάν και μόνον εάν} \quad v - w \in X\,.$$

Το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας αυτής της σχέσης το ονομάζουμε ***πηλίκο*** του V με το X, και το συμβολίζουμε

$$V/\,X\,.$$

Την κλάση ισοδυναμίας του $v \in V$ ως προς αυτή τη σχέση τη συμβολίζουμε

$$v + X, \quad \text{ή} \quad \tilde{v}\,.$$

Παράδειγμα 4.2 Στο $\mathbb{R}^3$, θεωρούμε τον υπόχωρο $X = \{(t,\, t,\, 2t)\,|\, t \in \mathbb{R}\}$. X είναι η ευθεία που περνάει από τα σημεία $(0,\, 0,\, 0)$ και $(1,\, 1,\, 2)$. Η κλάση ισοδυναμίας του σημείου $(x,\, y,\, z)$ είναι το σύνολο των διανυσμάτων της μορφής

$$(x,\, y,\, z) + (t,\, t,\, 2t) \quad t \in \mathbb{R},$$

δηλαδή είναι η ευθεία που περνάει από το $(x,\, y,\, z)$ και είναι παράλληλη προς το Q. Ο χώρος πηλίκο $\mathbb{R}^3/Q$ είναι το σύνολο όλων των ευθειών στο $\mathbb{R}^3$ που είναι ίσες ή παράλληλες με την Q.

Στο πηλίκο $V/\,X$ ορίζουμε τις πράξεις, για $v + X,\, y + X \in V/\,X$, $a \in \mathbb{K}$.

$$(v + X) + (w + X) = (v + w) + X$$

$$a\,(v + X) = a\,v + X\,.$$

Λήμμα 4.4 *Με αυτές τις πράξεις $V/\,X$ είναι διανυσματικός χώρος πάνω απο το $\mathbb{K}$, ο* **χώρος πηλίκο** *του V $\operatorname{mod} X$.*

Απόδειξη. Μηδέν είναι η κλάση του $X = 0 + X$ και το αντίθετο είναι $-(v + X) = (-v) + X$. Εύκολα ελέγχουμε τα υπόλοιπα αξιώματα.

□

Θεώρημα 4.5 *Θεωρούμε διανυσματικό χώρο V πεπερασμένης διάστασης και υπόχωρο X του V. Εάν $\{x_1, \ldots, x_k\}$ είναι βάση του X, και $\{x_1, \ldots, x_k, v_1, \ldots, v_m\}$ βάση του V, τότε $\{v_1 + X, \ldots, v_m + X\}$ αποτελεί βάση του V/X, και συνεπώς*

$$\dim(V/X) = \dim V - \dim X\,.$$

Απόδειξη. Εστω $v \in V$. Υπάρχουν $a_1, \ldots, a_k$ και $b_1, \ldots, b_m$ τέτοια ώστε $v = a_1x_1 + \cdots + a_kx_k + b_1v_1 + \cdots + b_mv_m$. Τότε $v - (b_1v_1 + \cdots + b_mv_m) \in X$, άρα

$$\begin{aligned} v + X &= (b_1v_1 + \cdots + b_mv_m) + X \\ &= b_1(v_1 + X) + \cdots + b_m(v_m + X) \end{aligned}$$

άρα $\{v_1 + X, \cdots, v_m + X\}$ παράγουν το V/X.

Έστω $b_1(v_1 + X) + \cdots + b_m(v_m + X) = 0$. Τότε $b_1v_1 + \cdots + b_mv_m \in X$, άρα υπάρχουν $a_1, \cdots, a_k$ τέτοια ώστε $b_1v_1 + \cdots + b_mv_m = a_1x_1 + \cdots + a_kx_k$. Αλλά απο γραμμική ανεξαρτησία των $\{x_1, \cdots, x_k, v_1, \cdots, v_m\}$ έχουμε $a_1 = \cdots = a_k = b_1 = \cdots = b_m = 0$. Άρα το σύνολο $\{v_1 + X, \cdots, v_m + X\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και αποτελεί βάση του V/X.

□

Παράδειγμα 4.3 Θεωρούμε το 'πολύεδρο' του σχήματος, με μία έδρα σ, πέντε ακμές α, β, γ, δ, ε και τέσσερεις κορυφές A, B, C, D.

Ορίζουμε τους διανυσματικούς χώρους

$$C_0 = \{a_1A + a_2B + a_3C + a_4D \,|\, a_i \in \mathbb{R}\}$$

$$C_1 = \{b_1\alpha + b_2\beta + \cdots + b_5\varepsilon \,|\, b_i \in \mathbb{R}\}$$

$$C_2 = \{s\sigma \,|\, s \in \mathbb{R}\}\,.$$

και τις γραμμικές απεικονίσεις

$$\partial_2 : C_2 \to C_1, \qquad \partial_1 : C_1 \to C_0$$

με

$$\begin{aligned} \partial_2(\sigma) &= \alpha + \delta - \varepsilon \\ \partial_1(b_1\alpha + \cdots + b_5\varepsilon) &= b_1(B - A) + b_2(C - B) + b_3(D - C) + b_4(A - D) + b_5(B - D) \\ &= (b_4 - b_1)A + (b_1 - b_2 + b_5)B + (b_2 - b_3)C + (b_3 - b_4 - b_5)D\,. \end{aligned}$$

Λήμμα 4.6 (Λήμμα Poincaré)

$$\partial_1 \partial_2 = 0\,.$$

Απόδειξη. $\partial_1\partial_2(\sigma) = \partial_1(\alpha + \delta - \varepsilon) = (B - A) + (A - D) + (B - D) = 0.$ □

Συνεπώς $\operatorname{im}\partial_2 \subseteq \ker\partial_1$ και ορίζεται ο διανυσματικός χώρος πηλίκο

$$H_1 = \ker\partial_1 / \operatorname{im}\partial_2\,.$$

Θα προσδιορίσουμε μία βάση του H_1. Πρώτα λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων που ορίζουν το $\ker\partial_1$, και βρίσκουμε οτι τα διανύσματα $\beta + \gamma + \varepsilon$ και $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ αποτελούν μία βάση του χώρου $\ker\partial_1$. Το διάνυσμα $\alpha + \delta - \varepsilon$ αποτελεί μία βάση του $\operatorname{im}\partial_2$. Από το Θεώρημα ;;, για να προσδιορίσουμε μία βάση του πηλίκου $\ker\partial_1/\operatorname{im}\partial_2$, πρέπει να βρούμε μία βάση του $\ker\partial_1$ η οποία να περιέχει το διάνυσμα $\alpha + \delta - \varepsilon$ της βάσης του $\operatorname{im}\partial_2$. Παρατηρούμε οτι $\alpha+\beta+\gamma+\delta = (\alpha+\delta-\varepsilon)+(\beta+\gamma+\varepsilon)$ και συνεπώς $\{\alpha+\delta-\varepsilon,\, \beta+\gamma+\varepsilon\}$ είναι βάση του $\ker\partial_1$. Συμπεραίνουμε οτι το διάνυσμα $(\beta + \gamma + \varepsilon) + \operatorname{im}\partial_2$ αποτελεί βάση του H_1.

Η διάσταση του H_1 μετράει τις 'τρύπες' στο πολύεδρο. Το στοιχείο της συγκεκριμένης βάσης που βρήκαμε διαγράφει έναν 'κύκλο' γύρω από την τρύπα του πολυέδρου.

Θεώρημα 4.7 *Θεωρούμε διανυσματικούς χώρους V και W πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, και γραμμική απεικόνιση $L : V \to W$. Υπάρχει κανονικός ισομορφισμός*

$$\operatorname{im} L \cong V/\ker L\,.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την κλάση ισοδυναμίας του v στο $V/\ker L$, δηλαδή $v + \ker L = \{u \in V \,|\, u - v \in \ker L\}$. Τότε $L(u) = L(v)$. Αρα η απεικόνιση $\tilde{L} : V/\ker L \to W$, $\tilde{L}(v + \ker L) = L(v)$ είναι καλά ορισμένη. Η $\tilde{L}$ είναι $1-1$, εφ' όσον εάν $L(v) = L(u)$, τότε $v - u \in \ker L$ και $v + \ker L = u + \ker L$. Η $\tilde{L}$ είναι επί της εικόνας της L, γιατί εάν $w = L(v)$, τότε $w = \tilde{L}(v)$. Τέλος η $\tilde{L}$ είναι γραμμική:

$$\begin{aligned}
\tilde{L}\,(a\,)v + \ker L) + (u + \ker L)) &= \tilde{L}\,((a\,v + u) + \ker L) \\
&= L(a\,v + u) = a\,L(v) + L(u) \\
&= a\,\tilde{L}(v + \ker L) + \tilde{L}(u + \ker L)\,.
\end{aligned}$$

□

Υπάρχει επίσης ισομορφισμός $V \cong \ker L \oplus \operatorname{im} L$, αλλά αυτός δεν είναι κανονικός. Εάν επιλέξουμε μία βάση $\{w_1, \ldots, w_m\}$ του $\operatorname{im} L$, και $v_1, \ldots, v_m$ τέτοια ώστε $L(v_i) = w_i$, τότε τα $v_1, \ldots, v_m$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, και ορίζεται γραμμική απεικόνιση $1-1$, $M_2 : \operatorname{im} L \to V : w_i \mapsto v_i$. Η απεικόνιση $M : \ker L \oplus \operatorname{im} L \to V : (v, w) \mapsto v + M_2(w)$ είναι ισομορφισμός.

4.2 Δυϊκοί χώροι

Εχουμε δεί οτι το σύνολο των γραμμικών απεικονίσεων από ένα διανυσματικό χώρο V σε ένα διανυσματικό χώρο W είναι επίσης διανυσματικός χώρος, ο $\mathcal{L}(U, V)$. Στην περίπτωση που W είναι ο μονοδιάστατος χώρος $\mathbb{K}$, ονομάζουμε τον $\mathcal{L}(V, \mathbb{K})$ ***δυϊκό χώρο*** του V, και τον συμβολίζουμε

$$V' .$$

Παράδειγμα 4.4 Στο διανυσματικό χώρο $\mathbb{K}^n$ ορίζονται οι *συναρτήσεις συντεταγμένων* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. Εάν $x = (x_1, \ldots, x_n)$, τότε $\varphi_k(x) = x_k$.

Εάν $\{e_1, \ldots, e_n\}$ είναι η κανονική βάση του $\mathbb{K}^n$, έχουμε $\varphi_i(e_j) = \delta_{ij}$. Εάν $\psi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ είναι οποιαδήποτε γραμμική συνάρτηση, η ψ καθορίζεται από τις τιμές της στα στοιχεία της βάσης: εάν $\psi(e_i) = a_i \in \mathbb{K}$, τότε για κάθε $x = (x_1, \ldots, x_n)$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= \psi(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n) \\
&= x_1 \psi(e_1) + \cdots + x_n \psi(e_n) \\
&= x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n ,
\end{aligned}$$

δηλαδή κάθε γραμμική συνάρτηση $\psi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των συντεταγμένων $x_i = \varphi_i(x)$ του x, και

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n \\
&= \varphi_1(x) a_1 + \cdots + \varphi_n(x) a_n ,
\end{aligned}$$

αλλά καθώς ο παλλαπλασιασμός στο $\mathbb{K}$ είναι μεταθετικός,

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= a_1 \varphi_1(x) + \cdots + a_n \varphi_n(x) \\
&= (a_1 \varphi_1 + \cdots + a_n \varphi_n)(x) .
\end{aligned}$$

Καθώς αυτό ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{K}^n$, έχουμε $\psi = a_1\varphi_1 + \cdots + a_n\varphi_n$, και οι συναρτήσεις συντεταγμένων φ_i παράγουν το δυϊκό χώρο $(\mathbb{K}^n)'$.

Συμβολισμός. Εκτός από το συνηθισμένο συμβολισμό των συναρτήσεων, $\varphi(x) = a$, για στοιχεία του δυϊκού χώρου χρησιμοποιείται και ο συμβολισμός

$$\langle x, \varphi \rangle = a .$$

Παράδειγμα 4.5 Στο χώρο $\mathbb{K}[x]$ των πολυωνύμων μίας μεταβλητής, η απεικόνιση $\varphi : \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}$ για την οποία $\varphi(p(x)) = \langle p(x), \varphi \rangle = p(0)$ είναι ένα στοιχείο του δυϊκού χώρου $(\mathbb{K}[x])'$. Γενικότερα, εάν $t_1, \ldots, t_k$ και $a_1, \ldots, a_k$ είναι στοιχεία του $\mathbb{K}$, τότε η συνάρτηση $\psi : \mathbb{K}[x] \to \mathbb{K}$, για την οποία $\psi(p(x)) = \langle p(x), \psi \rangle = a_1 p(t_1) + \cdots + a_k p(t_k)$, είναι στοιχείο του δυϊκού χώρου $(\mathbb{K}[x])'$.

Παράδειγμα 4.6 Στο χώρο $C^0[0, 1]$ των συνεχών συναρτήσεων στο κλειστό διάστημα $[0, 1]$, εάν $0 \leq a < b \leq 1$, και $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, η συνάρτηση $\psi : C^0[0, 1] \to \mathbb{R}$, για την οποία

$$\psi(f) = \langle f, \psi \rangle = \int_a^b \alpha(t)\, f(t)\, dt$$

είναι στοιχείο του δυϊκού χώρου $(C^0[0,\, 1])'$.

Υπενθυμίζουμε οτι εάν V είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, $\{v_1,\, \ldots,\, v_n\}$ είναι βάση του V, και $a_1,\, \ldots,\, a_n \in \mathbb{K}$, τότε υπάρχει μοναδική γραμμική απεικόνιση $\varphi \in \mathcal{L}(V,\, \mathbb{K})$ τέτοια ώστε $\varphi(v_i) = a_i$ για κάθε $i = 1,\, \ldots,\, n$. Δηλαδή υπάρχει μοναδικό στοιχείο $\varphi \in V'$ τέτοιο ώστε $\langle v_i,\, \varphi\rangle = a_i$.

Θεώρημα 4.8 *Εάν V είναι διανυσματικός χώρος και $\{v_1,\, \ldots,\, v_n\}$ είναι βάση του V, τότε υπάρχει βάση του V', $\{\varphi_1,\, \ldots,\, \varphi_n\}$, τέτοια ώστε*

$$\langle v_i,\, \varphi_j\rangle = \delta_{ij}$$

και άρα

$$\dim V' = \dim V\,.$$

Η βάση $\{\varphi_1,\, \ldots,\, \varphi_n\}$ ονομάζεται ***δυϊκή βάση*** της $\{v_1,\, \ldots,\, v_n\}$.

Απόδειξη. Πρώτα δείχνουμε οτι το $\{\varphi_1,\, \ldots,\, \varphi_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Ο γραμμικός συνδυασμός $\psi = a_1\varphi_1 + \cdots + a_n\varphi_n$ είναι 0 εάν και μόνον εάν $\psi(v) = 0$ για κάθε $v \in V$. Ειδικότερα, για κάθε $i = 1,\, \ldots,\, n$, έχουμε

$$\begin{aligned} 0 = \psi(v_i) &= \langle v_i,\, a_1\varphi_1 + \cdots + a_n\varphi_n\rangle \\ &= a_1\langle v_i,\, \varphi_1\rangle + \cdots + a_n\langle v_i,\, \varphi_n\rangle \\ &= a_1\delta_{i1} + \cdots + a_n\delta_{in} \\ &= a_i \end{aligned}$$

και συμπεραίνουμε οτι $\{\varphi_1,\, \ldots,\, \varphi_n\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Για να δείξουμε οτι τα $\varphi_1,\, \ldots,\, \varphi_n$ παράγουν το δυϊκό χώρο V', θεωρούμε $\psi \in V'$ με $\langle v_i,\, \psi\rangle = c_i$ για κάθε $i = 1,\, \ldots,\, n$, και $u = b_1v_1 + \cdots + b_nv_n$. Τότε

$$\begin{aligned} \langle u,\, \psi\rangle &= \langle b_1v_1 + \cdots + b_nv_n,\, \psi\rangle \\ &= b_1\langle v_1,\, \psi\rangle + \cdots + \langle b_n,\, \psi\rangle \\ &= b_1c_1 + \cdots + b_nc_n \\ &= \langle u,\, \varphi_1\rangle c_1 + \cdots + \langle u,\, \varphi_n\rangle c_n \\ &= \langle u,\, c_1\varphi_1 + \cdots + c_n\varphi_n\rangle \end{aligned}$$

άρα $\psi = c_1\varphi_1 + \cdots + c_n\varphi_n$.

□

Θεώρημα 4.9 *Εάν $v,\, w \in V$ και $v \neq w$, τότε υπάρχει $\psi \in V'$ τέτοιο ώστε $\langle v,\, \psi\rangle \neq \langle w,\, \psi\rangle$.*

Απόδειξη. Εάν $\langle v,\, \psi\rangle = \langle w,\, \psi\rangle$ για όλα τα $\psi \in V'$, τότε, για κάθε φ_i της δυϊκής βάσης, έχουμε $\langle v - w,\, \varphi_i\rangle = 0$, και $v - w = \langle u - w,\, \varphi_1\rangle v_1 + \cdots + \langle v - w,\, \varphi_n\rangle v_n = 0$.

□

Αφού ο δυϊκός χώρος V' είναι διανυσματικός χώρος πάνω από το σώμα $\mathbb{K}$, μπορούμε να θεωρήσουμε το δυϊκό του χώρο, $(V')'$, ο οποίος συμβολίζεται V''. Ένα στοιχείο χ του χώρου V'' είναι μία γραμμική συνάρτηση στο χώρο V',

$$\chi\,:\, V' \to \mathbb{K}\,:\, \psi \mapsto \chi(\psi)\,.$$

Παράδειγμα 4.7 Εάν $v \in V$, τότε η απεικόνιση $\eta : \psi \mapsto \langle v, \psi \rangle$ είναι γραμμική ως προς το ψ, (Ασκηση: Τί ακριβώς σημαίνει αυτό;). Συνεπώς για κάθε $v \in V$ ορίζεται, με φυσικό τρόπο, ένα $\eta \in V''$. Θα δούμε οτι, για χώρους πεπερασμένης διάστασης, αυτή η αντιστοιχία είναι ένας ισομορφισμός.

Θεώρημα 4.10 *Εάν V είναι διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης, τότε η απεικόνιση*

$$\nu \,:\, V \longrightarrow V'' \,:\, v \longmapsto (\eta \,:\, \psi \mapsto \langle v,\, \psi \rangle)$$

είναι (κανονικός) ισομορφισμός.

Απόδειξη. Η ν είναι γραμμική:

$$\begin{aligned} \nu(a\,v + w)(\psi) &= \langle a\,v + w,\, \psi \rangle \\ &= a\,\langle v,\, \psi \rangle + \langle w,\, \psi \rangle \\ &= a\,\nu(v)(\psi) + \nu(w)(\psi)\,. \end{aligned}$$

Για να δείξουμε οτι η ν είναι $1-1$, θεωρούμε $v,\, w \in V$. Εάν $\nu(v) = \nu(w)$ τότε, για κάθε $\psi \in V'$, $\psi(v) = \psi(w)$, και από το Θεώρημα **;;**, $v = w$.

Από το Θεώρημα **;;**, $\dim V'' = \dim V' = \dim V$, και συνεπώς η ν είναι επί.

□

Εάν $L : V \to W$ είναι γραμμική απεικόνιση, μπορούμε να ορίσουμε τη ***δυϊκή απεικόνιση*** L' (ή ανάστροφη απεικόνιση L^T) ανάμεσα στους δυϊκούς χώρους:

$$L' : W' \to V' \quad , \quad L'(\psi) = \psi \circ L\,.$$

Προσέξτε οτι η L' έχει φορά αντίθετη από την L, και ικανοποιεί τη σχέση $\langle v,\, L'\psi \rangle = \langle Lv,\, \psi \rangle$.

Παρατηρούμε οτι η αντιστοιχία $L \mapsto L'$ είναι γραμμική απεικόνιση από το $\mathcal{L}(V, W)$ στο $\mathcal{L}(W', V')$: $(a\,L + M)' = a\,L' + M'$.

Λήμμα 4.11 *Θεωρούμε τις γραμμικές απεικονίσεις $L : U \to V$ και $M : V \to W$. Τότε*

1. *$(M \circ L)' = L' \circ M'$.*

2. *Εάν η $L : U \to V$ είναι αντιστρέψιμη, τότε η $L' : V' \to U'$ είναι επίσης αντιστρέψιμη και $(L^{-1})' = (L')^{-1}$.*

3. *Εάν U και V είναι χώροι πεπερασμένης διάστασης, και $L : U \to V$, τότε το ακόλουθο διάγραμμα γραμμικών απεικονίσεων μετατίθεται:*

$$\begin{array}{ccccc} & U & \longrightarrow & V & \\ \nu_U & \downarrow & & \downarrow & \nu_V \quad , \\ & U'' & \longrightarrow & V'' & \end{array}$$

δηλαδή

$$\nu_V \circ L = L'' \circ \nu_U\,,$$

όπου $L'' = (L')'$ και ν_U, ν_V είναι οι κανονικοί ισομορφισμοί.

Απόδειξη. Εάν $\zeta \in W'$, τότε

$$\begin{aligned} (M \circ L)'(\zeta) &= \zeta \circ (M \circ L) \\ &= (\zeta \circ M) \circ L \\ &= L'(\zeta \circ M) \\ &= L'(M'(\zeta)) \\ &= L' \circ M'(\zeta) \end{aligned}$$

Εάν η L είναι αντιστρέψιμη, τότε

$$\left(L^{-1}\right)' \circ L' = \left(L \circ L^{-1}\right)' = (\mathbf{I}_V)' = \mathbf{I}_{V'}$$

και

$$L' \circ \left(L^{-1}\right)' = \left(L^{-1} \circ L\right)' = (\mathbf{I}_U)' = \mathbf{I}_{U'}\,.$$

Εάν $u \in U$ και $\varphi \in U'$, έχουμε $\nu_U(u)(\varphi) = \langle u,\, \varphi\rangle$. Εάν $\psi \in V'$, έχουμε

$$\begin{aligned} L''\nu_U(u)(\psi) &= \nu_U(u)(L'\psi) \\ &= \langle u,\, L'\psi\rangle \\ &= \langle Lu,\, \psi\rangle \\ &= \nu_V(Lu)(\psi) \\ &= \nu_V \circ L(u)(\psi)\,. \end{aligned}$$

□