ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΘΩΜΑΣ Κ. ΧΑΣΑΝΗΣ

Καθηγητής

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ και ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2011

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ

ΘΩΜΑΣ Κ. ΧΑΣΑΝΗΣ

Καθηγητής

ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ και ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

ΙΩΑΝΝΙΝΑ 2011

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Η έννοια της λέξης "Γεωμετρία" αλλάζει με το χρόνο. Κατά τον Ευκλείδη η Γεωμετρία είναι λογικά συμπεράσματα, που πηγάζουν από σύνολο αξιωμάτων. 'Ομως, από τότε οι ορίζοντες της Γεωμετρίας διευρύνονται συνεχώς. Ο R.Descartes ήταν αυτός που τον δέκατο έβδομο αιώνα έκανε επανάσταση στη Γεωμετρία, χρησιμοποιώντας τις λεγόμενες Καρτεσιανές Συντεταγμένες. Στο επίπεδο, για παράδειγμα, σε κάθε σημείο αντιστοιχεί ένα διατεταγμένο ζευγάρι αριθμών. 'Ετσι η ευθεία περιγράφεται με μια γραμμική εξίσωση και η μετάβαση από τη Γεωμετρία στην 'Αλγεβρα, ήταν πια γεγονός. Αυτό στάθηκε και η αρχή της Αναλυτικής Γεωμετρίας, που στόχο έχει την αλγεβροποίηση των γεωμετρικών προβλημάτων και η αντιμετώπισή τους με αλγεβρικές μεθόδους. Σήμερα οι βασικές έννοιες της Αναλυτικής Γεωμετρίας, διδάσκονται συνήθως σε μαθήματα Λογισμού ή Γραμμικής 'Αλγεβρας.

Οι σημειώσεις που ακολουθούν έχουν πρωταρχικό στόχο να καλύψουν τις ανάγκες του μαθήματος "Αναλυτική Γεωμετρία και Διανυσματικός Λογισμός", που προσφέρεται στους πρωτοετείς φοιτητές του Μαθηματικού Τμήματος Ιωαννίνων. 'Ενας δεύτερος στόχος είναι να εφοδιάσουν τους φοιτητές με τα απαραίτητα εργαλεία για αντιμετώπιση γεωμετρικών προβλημάτων, που θα συναντούν ιδιαίτερα στα μαθήματα Απειροστικού Λογισμού και Γραμμικής 'Αλγεβρας. Ο δεύτερος αυτός στόχος δικαιολογεί και τον τρόπο παρουσίασης του κειμένου των σημειώσεων αυτών.

Θεωρώ υποχρέωσή μου να ευχαριστήσω και εδώ την κ. Αθηναΐδα Δούβλη, για

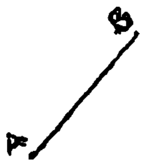
τη προσεκτική δακτυλογράφηση αυτών των σημειώσεων.

Γιάννενα 1989 Θωμάς Χασάνης

ΚΕΦΑΛΑΙΟ Ι : ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ - ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

1 . Ορισμοί

Θεωρούμε στο συνηθισμένο χώρο όλα τα προσανατολισμένα ευθύγραμμα τμήματα . Με τον όρο προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα εννοούμε ένα ευθύγραμμο τμήμα με καθορισμένη διάταξη για τα άκρα του . Έτσι στο διπλανό σχήμα το προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ (το Α είναι η αρχή και το Β το τέλος του τμήματος) είναι διαφορετικό από το προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα ΒΑ (Β είναι η αρχή και Α το τέλος) .



Ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ καθορίζει μια φορά στην ευθεία (το φορέα του τμήματος) πάνω στην οποία κείται, τη φορά από το Α προς το Β . Επίσης δύο προσανατολισμένα ευθύγραμμα τμήματα , που είναι σε παράλληλους φορείς (παράλληλες ευθείες) , θα λέμε ότι έχουν την ίδια διεύθυνση . Τέλος το μήκος του τμήματος ΑΒ θα λέγεται μήκος του προσανατολισμένου τμήματος ΑΒ . Έτσι τα προσανατολισμένα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΒΑ έχουν ίδιο μήκος , ίδια διεύθυνση , αλλά ορίζουν αντίθετες φορές .

Σημειώνουμε , ότι το προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα ΑΑ (δηλαδή , ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα του οποίου τα άκρα συμπίπτουν) έχει μήκος μηδέν και δεν έχει καθορισμένη φορά και διεύθυνση .

Στο σύνολο των προσανατολισμένων ευθύγραμμων τμημάτων ορίζουμε μία σχέση ισότητας ως εξής : Δύο προσανατολισμένα ευθύγραμμα τμήματα θα λέγονται ίσα , αν έχουν :

(i) ίδιο μήκος

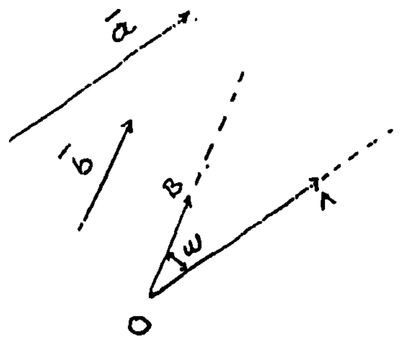
(ii) ίδια διεύθυνση (είναι παράλληλα)

(iii) ίδια φορά .

Η παραπάνω σχέση χωρίζει το σύνολο των προσανατολισμένων ευθυγράμμων τμημάτων σε κλάσεις . Κάθε κλάση λέγεται <u>διάνυσμα</u> και περιέχει ως στοιχεία ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα και τα ίσα του . Συνήθως , όταν μιλάμε για διάνυσμα παίρνουμε μόνο ένα στοιχείο της κλάσης , ας πούμε το AB , και το συμβολίζουμε με $\overline{AB}$ ή με ένα μικρό γράμμα και επιγραμμή . Το διάνυσμα $\overline{AA}$ θα το συμβολίζουμε με $\bar{o}$ ή απλά με o και θα το λέμε <u>μηδενικό διάνυσμα</u> .

<u>Μέτρο ή μήκος του διανύσματος</u> $\overline{AB}$ (αντίστοιχα $\bar{a}$) , θα λέγεται το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος που ορίζουν τα άκρα του και συμβολίζεται με $|\overline{AB}|$ (αντίστοιχα $|\bar{a}|$) . Όταν το μήκος ενός διανύσματος είναι η μονάδα , τότε το διάνυσμα λέγεται <u>μοναδιαίο διάνυσμα</u> . Ειδικώτερα , αν $\bar{a}$ είναι ένα μη μηδενικό διάνυσμα τότε καθορίζεται ένα μοναδικό μοναδιαίο διάνυσμα με την ίδια διεύθυνση και φορά όπως το $\bar{a}$. Το διάνυσμα αυτό λέγεται <u>μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση και φορά του $\bar{a}$</u> και συμβολίζεται με $\bar{a}_0$. Επίσης καθορίζεται ένα μοναδικό διάνυσμα , που έχει ίδιο μήκος με το $\bar{a}$, ίδια διεύθυνση αλλά αντίθετη φορά . Το διάνυσμα αυτό συμβολίζεται με $-\bar{a}$ και λέγεται <u>διάνυσμα αντίθετο του $\bar{a}$</u> .

Παίρνουμε τώρα δύο μη μηδενικά διανύσματα $\bar{a}$ και $\bar{b}$. Σκοπεύουμε να ορίσουμε γωνία των διανυσμάτων $\bar{a},\bar{b}$. Για το σκοπό αυτό ας είναι O ένα σημείο του χώρου . Φέρνουμε δύο διανύσματα $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ ίσα με τα $\bar{a},\bar{b}$ αντίστοιχα (σχήμα 1) . Ονομάζουμε <u>γωνία</u> (όχι προσανατολισμένη γωνία !) τη κυρτή γωνία των ημιευθειών που ορίζονται από τα $\overline{OA}$ και $\overline{OB}$. Θα συμβολίζεται με $\sphericalangle(\bar{a},\bar{b})$ ή $(\widehat{\bar{a},\bar{b}})$. Σημειώνουμε ότι σύμφωνα με τον ορισμό μας έχουμε $\sphericalangle(\bar{a},\bar{b}) = \sphericalangle(\bar{b},\bar{a})$. Είναι φανερό επίσης ότι ο ορισμός της γωνίας δεν εξαρτάται από την επιλογή του σημείου O (γιατί;) . Αν τα διανύσματα $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ είναι πάνω στην ίδια ευθεία τότε η γωνία των $\bar{a},\bar{b}$ είναι 0 (μηδέν) , οπότε τα διανύσματα λέγονται <u>ομόρροπα</u> ή είναι π , οπότε τα διανύσματα λέγονται <u>αντίρροπα</u> . Παρατηρούμε ότι για τη γωνία ω δύο διανυσμάτων ισχύει, $0 \leq \omega \leq \pi$. Αν ένα από τα $\bar{a},\bar{b}$ είναι μηδενικό δεν καθορίζεται συγκεκριμένη γωνία . Αν $\omega = \frac{\pi}{2}$ τα διανύσματα $\bar{a},\bar{b}$ λέγονται <u>ορθογώνια</u> (orthogonal) . <u>Το μηδενικό διάνυσμα θεωρείται ορθογώνιο σε κάθε άλλο διάνυσμα</u> .

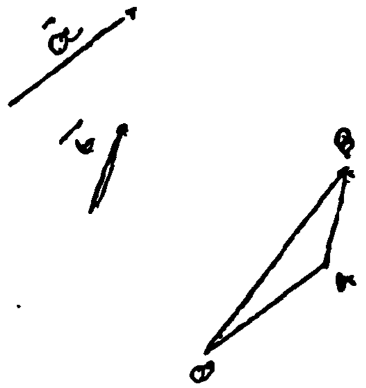


σχήμα 1

<u>Συμβολισμός</u> : Το σύνολο των διανυσμάτων του συνηθισμένου χώρου , που μόλις επεξεργαστήκαμε θα συμβολίζουμε με V_3 . Είναι φανερό ότι , δουλεύοντας κατά τον ίδιο τρόπο σε ένα επίπεδο , μπορούμε να ορίσουμε ένα σύνολο διανυσμάτων , που θα συμβολίζουμε με V_2 . Τέλος αν δουλέψουμε πάνω σε μια ευθεία , το σύνολο των διανυσμάτων που παράγουμε θα συμβολίσουμε με V_1 .

2. <u>Πράξεις στα διανύσματα</u> .

(i) <u>Πρόσθεση διανυσμάτων</u> : Παίρνουμε δύο διανύσματα $\bar{a},\bar{b}$. Σκοπεύουμε να ορίσουμε άθροισμα των $\bar{a}$ και $\bar{b}$. Για το σκοπό αυτό παίρνουμε ένα τυχαίο σημείο O και κατασκευάζουμε ένα διάνυσμα ίσο με το $\bar{a}$, που έχει αρχή το O και τέλος ας έχει το A . Στη συνέχεια κατασκευάζουμε ένα διάνυσμα ίσο με το $\bar{b}$, με αρχή το A και τέλος ας είναι το B (σχήμα 2) . Το διάνυσμα με αρχή το 0 και τέλος το B , δηλαδή το διάνυσμα $\overline{0B}$ λέγεται <u>αθροισμα των $\bar{a}$ και</u> $\bar{b}$ και γράφουμε :



σχήμα 2

$$\bar{a}+\bar{b}=\overline{0B} .$$

Είναι φανερό (γιατί;)ότι το άθροισμα δεν εξαρτάται από την επιλογή του 0. Έτσι ορίζουμε μια πρόσθεση στο σύνολο των διανυσμάτων , που είναι ένας νόμος εσωτερικής σύνθεσης στο σύνολο V_3 (ανάλογα στο V_2 ή το V_1) . Αυτή η πρόσθεση ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες :

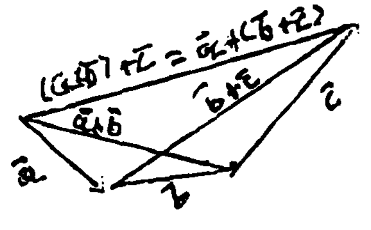
A_1 : $(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}=\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})$ (προσεταιριστικότητα)

A_2 : $\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}$ (αντιμεταθετικότητα)

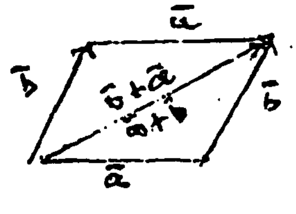
A_3 : $\bar{a}+0=\bar{a}$

A_4 : $\bar{a}+(-\bar{a})=0$

Οι παραπάνω ιδιότητες μπορούν να επαληθευτούν χωρίς δυσκολία , χρησιμοποιώντας τους ορισμούς μας και στοιχειώδη γεωμετρία . Για παράδειγμα οι ιδιότητες A_3 και A_4 προκύπτουν από τους ορισμούς του μηδενικού και του αντίθετου διανύσματος . Τα σχήματα 3 και 4 επαληθεύουν τις ιδιότητες A_1 και A_2



σχήμα 3



σχήμα 4

Από τη προσεταιριστικότητα και αντιμεταθετικότητα (ιδιότητες A_1 και A_2) συμπεραίνουμε πως, όταν γράφουμε αθροίσματα πολλών διανυσμάτων, δεν είναι ανάγκη να βάλουμε παρενθέσεις, ούτε έχει σημασία η σειρά των διανυσμάτων.

Τέλος συμπεραίνουμε ότι η δυάδα $(V_3,+)$, (ανάλογα οι $(V_2,+)$, $(V_1,+)$) είναι μια Αβελιανή ομάδα.

(ii) <u>Πολλαπλασιασμός διανύσματος με πραγματικό αριθμό</u> : Σκοπεύουμε να ορίσουμε το γινόμενο ενός διανύσματος $\bar{a}$ με ένα πραγματικό αριθμό λ. <u>Γινόμενο</u> του λ με το $\bar{a}$ θα λέμε ένα διάνυσμα που θα το συμβολίζουμε με $\lambda\bar{a}$, και το οποίο ορίζεται ως εξής : (I) <u>Για $\lambda=0$</u> : ορίζουμε $0\cdot\bar{a}=0$ (II) <u>Για $\lambda\neq0$</u> : Το διάνυσμα $\lambda\bar{a}$ έχει μήκος το $|\lambda|\cdot$(μήκος του $\bar{a}$)$=|\lambda|\cdot|\bar{a}|$, διεύθυνση τη διεύθυνση του $\bar{a}$ και φορά τη φορά του $\bar{a}$ για $\lambda>0$ και τη φορά του $-\bar{a}$ για $\lambda<0$. ($|\lambda|$ είναι η απόλυτη τιμή του αριθμού λ). Από τον ορισμό του γινομένου και στοιχειώδεις γεωμετρικές κατασκευές συμπεραίνουμε ότι ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες για τον πολλαπλασιασμό που ορίσαμε (αρκετές φορές αυτός ο πολλαπλασιασμός λέγεται και <u>βαθμωτός πολλαπλασιασμός</u>):

π_1 : $\lambda(\bar{a}+\bar{b}) = \lambda\bar{a}+\lambda\bar{b}$

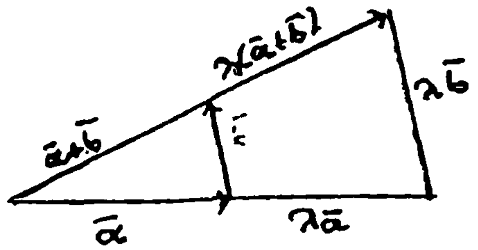
π_2 : $(\lambda+\mu)\bar{a} = \lambda\bar{a}+\mu\bar{a}$

π_3 : $(\lambda\mu)\bar{a} = \lambda(\mu\bar{a})$

π_4 : $1\bar{a} = \bar{a}$

<u>Παρατηρήσεις</u>: 1) Έχουμε συμβολίσει με το ίδιο σύμβολο + τη πρόσθεση στο V_3 και τη πρόσθεση στους πραγματικούς αριθμούς. 2) Από τον ορισμό του πολλαπλασιασμού προκύπτει εύκολα ότι ισχύουν : $(-1)\bar{a}=-\bar{a}$, $\lambda\cdot\bar{0}=\bar{0}$ και $\bar{a}=|\bar{a}|\bar{a}_0$, αν $\bar{a}$ είναι μη μηδενικό.

Το σχήμα 5 δίνει απόδειξη της π_1 στη περίπτωση , που το $\lambda>0$.



σχήμα 5

Σημειώνουμε ότι ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός δεν είναι πράξη εσωτερικής σύνθεσης στο V_3 . Το σύνολο V_3 (ανάλογα το V_2,V_1) μαζί με τη πρόσθεση και το βαθμωτό πολλαπλασιασμό που ορίσαμε λέγεται διανυσματικός χώρος των συνηθισμένων διανυσμάτων του χώρου (ανάλογα του επιπέδου,ευθείας) και συμβολίζεται πάλι με V_3 (ανάλογα V_2,V_1) . Αυτός ο διανυσματικός χώρος αποτέλεσε το εποπτικό μοντέλο για ένα αφηρημένο ορισμό του διανυσματικού χώρου . Έτσι στα μαθηματικά όταν λέμε Διανυσματικός χώρος θα εννοούμε ένα σύνολο V μαζί με μια πράξη (+) εσωτερικής σύνθεσης και ένα βαθμωτό πολλαπλασιασμό με συντελεστές από ένα σώμα,ώστε να ισχύουν οι ιδιότητες (A_1,A_2,A_3,A_4) και $(\pi_1,\pi_2,\pi_3,\pi_4)$.

3. Βάσεις στο V_3 - Διάσταση του V_3 .

Από ένα σύνολο διανυσμάτων $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\dots,\bar{a}_k$ του V_3 μπορούνε να σχηματίσουμε προσθέτοντας και πολλαπλασιάζοντας με αριθμούς άλλα διανύσματα του V_3 . Έτσι μπορούμε να σχηματίσουμε διανύσματα της μορφής : $\lambda_1\bar{a}_1+\lambda_2\bar{a}_2+\dots+\lambda_k\bar{a}_k \;\; \overset{\text{σύντομη}}{\underset{\text{γραφή}}{=\!=}} \;\; \sum_{i=1}^{k}\lambda_i\bar{a}_i$, όπου $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ είναι πραγματικοί αριθμοί . Όταν ένα διάνυσμα $\bar{b}$

μπορεί να γραφεί ως : $\bar{b}=\lambda_1\bar{a}_1+\ldots+\lambda_k\bar{a}_k=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\bar{a}_i$ θα λέμε ότι το $\bar{b}$ είναι <u>γραμμικός συνδυασμός</u> των $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\ldots,\bar{a}_k$ ή ότι το $\bar{b}$ <u>εξαρτάται γραμμικά από τα</u> $\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_k$. Έτσι το διάνυσμα $2\bar{a}+\bar{b}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $\bar{a},\bar{b}$. Το μηδενικό διάνυσμα είναι γραμμικός συνδυασμός κάθε συνόλου διανυσμάτων από το V_3 (γιατί;) .

<u>Ορισμός</u> : Τα διανύσματα $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\ldots,\bar{a}_k$ λέγονται <u>γραμμικά εξαρτημένα</u> αν υπάρχουν αριθμοί $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ ΟΧΙ ΟΛΟΙ ΜΗΔΕΝ , έτσι ώστε : $\lambda_1\bar{a}_1+\lambda_2\bar{a}_2+\ldots+\lambda_k\bar{a}_k=0$ (σύντομα $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\bar{a}_i=0$) . Λέγονται <u>γραμμικά ανεξάρτητα</u> αν δεν είναι γραμμικά εξαρτημένα , δηλαδή αν η ισότητα $\lambda_1\bar{a}_1+\lambda_2\bar{a}_2+\ldots+\lambda_k\bar{a}_k=0$ ισχύει μόνο για $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_k=0$.

<u>Ένας ισοδύναμος ορισμός</u> : Τα διανύσματα $\bar{a}_1,\bar{a}_2,\ldots,\bar{a}_k$ λέγονται γραμμικά εξαρτημένα αν <u>ένα τουλάχιστον</u> από τα $\bar{a}_1,\ldots,\bar{a}_k$ είναι γραμμικός συνδυασμός των υπόλοιπων ή εξαρτάται γραμμικά από τα υπόλοιπα .

<u>Άσκηση</u> : Να αποδειχτεί η ισοδυναμία των παραπάνω ορισμών .

Σκοπεύουμε να βρούμε στο V_3 σύνολα από γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα . Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε τη παρακάτω ορολογία : (I) Δύο ή περισσότερα διανύσματα του V_3 λέγονται <u>συγγραμμικά</u> αν έχουν την ίδια διεύθυνση (είναι παράλληλα) . (II) Τρία ή περισσότερα διανύσματα του V_3 λέγονται <u>συνεπίπεδα</u> , αν μεταφέροντας τα ώστε να έχουν κοινή αρχή 0 , βρίσκονται πάνω σε ένα επίπεδο . Σημειώνουμε πως το μηδενικό διάνυσμα θεωρείται συγγραμμικό με οποιοδήποτε διάνυσμα του V_3 και ότι οποιαδήποτε δύο μη συγγραμμικά διανύσματα του V_3 μαζί με το μηδενικό θεωρούνται συνεπίπεδα . Δείχνουμε τώρα τις παρακάτω τρεις προτάσεις .

<u>Πρόταση 1</u> : Δύο διανύσματα του V_3 είναι γραμμικά εξαρτημένα αν και μόνο αν , είναι συγγραμμικά (δηλαδή παράλληλα) .

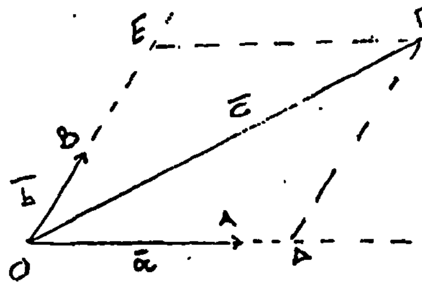
<u>Απόδειξη</u> . Ας είναι $\bar{a}$ και $\bar{b}$ δύο γραμμικά εξαρτημένα διανύσματα . Τότε σύμφωνα με τον ορισμό υπάρχουν δύο αριθμοί λ_1, λ_2 όχι και οι δύο μηδέν έτσι ώστε : $\lambda_1\bar{a} + \lambda_2\bar{b} = 0$. Αν υποθέσουμε ότι $\lambda_1 \neq 0$, τότε $\bar{a} = (-\frac{\lambda_2}{\lambda_1})\,\bar{b}$, έτσι τα $\bar{a},\bar{b}$ έχουν ίδια διεύθυνση , είναι δηλαδή συγγραμμικά . Όμοια αν $\lambda_2 \neq 0$. Ας είναι τώρα τα $\bar{a},\bar{b}$ συγγραμμικά . Θα δείξουμε πως είναι γραμμικά εξαρτημένα . Αν ένα τουλάχιστον από τα $\bar{a},\bar{b}$ είναι μηδενικό (έστω το $\bar{a}$) τότε $1\cdot\bar{a}+0\cdot\bar{b}=0$ και συνεπώς τα $\bar{a},\bar{b}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα με τον ορισμό (για $\lambda_1=1$, $\lambda_2=0$) . Έστω $\bar{a}\neq 0$ και $\bar{b}\neq 0$. Αφού είναι παράλληλα θα ισχύει $\bar{a}_0=\pm\bar{b}_0$ ή $\frac{\bar{a}}{|\bar{a}|} = \pm\frac{\bar{b}}{|\bar{b}|}$ και συνεπώς $\bar{a}=k\bar{b}$ με $k = \pm\frac{|\bar{a}|}{|\bar{b}|}$. Έτσι $1\cdot\bar{a}+(-k)\bar{b}=0$ και συνεπώς τα $\bar{a},\bar{b}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα .

Σαν συνέπεια έχουμε και το εξής συμπέρασμα : <u>Δύο διανύσματα του V_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα , αν και μόνον αν, δεν είναι παράλληλα</u> .

<u>Πρόταση 2</u> : Τρία διανύσματα $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ του V_3 είναι γραμμικά εξαρτημένα , αν και μόνοαν είναι συνεπίπεδα .

<u>Απόδειξη</u> . Ας είναι τα διανύσματα $\bar{a},\bar{b}$ και $\bar{c}$ γραμμικά εξαρτημένα . Σύμφωνα με τον ορισμό υπάρχουν τρείς αριθμοί $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ όχι όλοι μηδέν έτσι ώστε , $\lambda_1\bar{a}+\lambda_2\bar{b}+\lambda_3\bar{c}=0$. Αν υποθέσουμε ότι $\lambda_1\neq 0$, τότε $\bar{a} = (-\frac{\lambda_2}{\lambda_1})\,\bar{b} + (-\frac{\lambda_3}{\lambda_1})\,\bar{c}$. Έτσι το $\bar{a}$ είναι στο επίπεδο που σχηματίζουν τα $\bar{b},\bar{c}$ (από τον ορισμό πρόσθεσης των διανυσμάτων) . Έτσι τα $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ είναι συνεπίπεδα . Υποθέτουμε ότι τα $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ είναι συνεπίπεδα και θέλουμε να δείξουμε ότι είναι γραμμικά εξαρτημένα .

Αν ένα τουλάχιστον είναι μηδενικό ή δύο τουλάχιστον συγγραμμικά , τότε τα $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ είναι πραγματικά γραμμικά εξαρτημένα (γιατί;). Υποθέτουμε λοιπόν ότι τα $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ δεν είναι μηδενικά και ανά δύο μη συγγραμμικά . Τα μεταφέρουμε να έχουν κοινή αρχή O (σχήμα 6) . Τότε τα σημεία O,A,B και Γ είναι συνεπίπεδα.



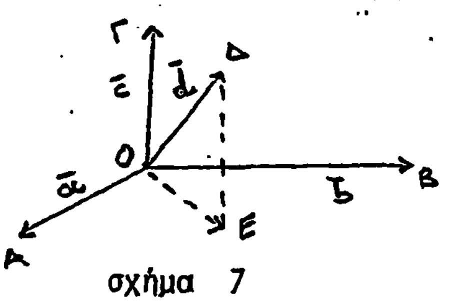
σχήμα 6

Από το Γ φέρνουμε παράλληλες προς τους φορείς των $\bar{a}$ και $\bar{b}$ αντίστοιχα , όπως φαίνεται στο σχήμα . Τότε $\bar{c}=\overline{O\Gamma}=\overline{O\Delta}+\overline{\Delta\Gamma}=\overline{O\Delta}+\overline{OE}=\lambda\bar{a}+\mu\bar{b}$, για κάποιους πραγματικούς λ και μ . Έτσι $1\cdot\bar{c}+(-\lambda)\bar{a}+(-\mu)\bar{b}=0$ που δείχνει ότι τα $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα .

Σαν συνέπεια έχουμε και το εξής συμπέρασμα : <u>Τρία διανύσματα του V_3 είναι γραμμικά ανεξάρτητα , αν και μόνο αν δεν είναι συνεπίπεδα</u> .

<u>Πρόταση 3</u> : Τέσσερα οποιαδήποτε διανύσματα $\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d}$ του V_3 είναι πάντα γραμμικά εξαρτημένα .

<u>Απόδειξη</u> . Αν ένα τουλάχιστον είναι μηδενικό , ή δύο τουλάχιστον είναι συγγραμμικά , ή τρία τουλάχιστον είναι συνεπίπεδα , τότε τα διανύσματα $\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα . Ας είναι λοιπόν τα $\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d}$ μη μηδενικά , ανα δύο μη συγγραμμικά και ανά τρία μη συνεπίπεδα . Τα μεταφέρουμε να έχουν κοινή αρχή O (σχήμα 7) . Από το Δ φέρνουμε ευθεία παράλληλη προς τον φορέα του $\bar{c}$, που τέμνει το επίπεδο των $\overline{OA},\overline{OB}$ στο E . Τότε έχουμε:



σχήμα 7

$\bar{d}=\overline{OA}=\overline{OE}+\overline{E\Delta}=\lambda\bar{a}+\mu\bar{b}+\nu\bar{c}$, αφού το $\overline{E\Delta}$ είναι συγγραμμικό με το $\bar{c}$ και το $\overline{OE}$ είναι συνεπίπεδο με τα $\bar{a},\bar{b}$. Έτσι : $1\cdot\bar{d}+(-\lambda)\bar{a}+(-\mu)\bar{b}+(-\nu)\bar{c}=0$ και συνεπώς τα $\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα .

Θα κάνουμε τώρα τρείς σημαντικές παρατηρήσεις .

<u>Παρατηρήσεις</u> : 1. Αν τα διανύσματα $\bar{a}_1,\dots,\bar{a}_k$ είναι γραμμικά εξαρτημένα και τα διανύσματα $\bar{b}_1,\dots,\bar{b}_m$ είναι τυχόντα , τότε τα διανύσματα $\bar{a}_1,\dots,\bar{a}_k,\bar{b}_1,\dots,\bar{b}_m$ είναι γραμμικά εξαρτημένα . Πραγματικά , αφού τα $\bar{a}_1,\dots,\bar{a}_k$ είναι γραμμικά εξαρτημένα θα υπάρχουν αριθμοί $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ όχι όλοι μηδέν ώστε να ισχύει : $\lambda_1\bar{a}_1+\lambda_2\bar{a}_2+\dots+\lambda_k\bar{a}_k=0$. Τότε όμως θα έχουμε και : $\lambda_1\bar{a}+\lambda_2\bar{a}_2+\dots+\lambda_k\bar{a}_k+0\cdot\bar{b}_1+\dots+0\cdot\bar{b}_m=0$, που δείχνει αυτό που θέλουμε .

2. Αν από ένα σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων αφαιρέσουμε μερικά , τότε αυτά που μένουν είναι πάλι γραμμικά ανεξάρτητα . Πραγματικά , αν αυτά που μένουν είναι γραμμικά εξαρτημένα , τότε με την παραπάνω παρατήρηση θα συμπεραίνουμε ότι όλα μαζί θα ήταν γραμμικά εξαρτημένα . Άτοπο !

3. Το μηδενικό διάνυσμα είναι γραμμικά εξαρτημένο αφού $\lambda\bar{0}=\bar{0}$ για κάθε λ . Επίσης κάθε μη μηδενικό διάνυσμα $\bar{a}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο , αφού $\lambda\bar{a}=0$ μας δίνει $\lambda=0$, για $\bar{a}\neq 0$.

Μετά από τα παραπάνω μπορούμε να πούμε πως στο V_3 , μπορούμε να βρούμε μέχρι 3 σε πλήθος γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα (αρκεί να πάρουμε τρία μη συνεπίπεδα διανύσματα). Ο αριθμός αυτός που χαρακτηρίζει το μέγιστο πλήθος γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων λέγεται <u>διάσταση του V_3</u> και συμβολίζεται με $\dim V_3$. Έτσι $\dim V_3=3$. Όμοια $\dim V_2=2$ και $\dim V_1=1$.

<u>Ορισμός</u> : Στο διανυσματικό χώρο $V(=V_3$ ή V_2 ή $V_1)$ ένα σύνολο γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων σε πλήθος όσο η διάσταση λέγεται <u>βάση του V</u> $(=V_3$ ή V_2 ή $V_1)$. <u>Έτσι στο V_3 μια βάση αποτελείται από τρία μη συνεπίπεδα διανύσματα</u> , στο V_2 <u>μια βάση αποτελείται από δύο μη συγγραμμικά διανύσματα</u> και στο V_1 <u>μια βάση αποτελείται από ένα μη μηδενικό διάνυσμα</u> .

'Οπως είδαμε παραπάνω μια βάση του V_3 αποτελείται από τρία μη συνεπίπεδα διανύσματα . Θεωρούμε μια τέτοια βάση , που αποτελείται από τα διανύσματα $\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3$, και την οποία σύντομα θα γράφουμε $(\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3)$. Ας είναι τώρα $\bar{a}$ ένα τυχαίο διάνυσμα του V_3 . Τότε,όπως έχουμε δείξει (πρόταση 3 , σελίδα 9) τα τέσσερα διανύσματα $\bar{a},\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3$ είναι γραμμικά εξαρτημένα . 'Ετσι υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\lambda,\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$, όχι όλοι μηδέν , ώστε να ισχύει

(1) $$\lambda\bar{a}+\lambda_1\bar{e}_1+\lambda_2\bar{e}_2+\lambda_3\bar{e}_3=0 \quad .$$

Ο συντελεστής λ δεν μπορεί να είναι μηδέν , γιατί τότε η (1) γίνεται

$$\lambda_1\bar{e}_1+\lambda_2\bar{e}_2+\lambda_3\bar{e}_3=0$$

και ένα τουλάχιστον από τα $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ δεν είναι μηδενικό , που δείχνει ότι τα $\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3$ είναι γραμμικά εξαρτημένα . 'Ατοπο ! 'Αρα $\lambda\neq0$. Τότε από την (1) παίρνουμε :

$$\bar{a}=\left(-\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)\bar{e}_1+\left(-\frac{\lambda_2}{\lambda}\right)\bar{e}_2+\left(-\frac{\lambda_3}{\lambda}\right)\bar{e}_3$$

ή

(2) $$\bar{a}=a_1\bar{e}_1+a_2\bar{e}_2+a_3\bar{e}_3 \quad , \text{ με } \quad a_i=-\frac{\lambda_i}{\lambda} \text{ για } i=1,2,3 \quad .$$

Οι συντελεστές στην (2) είναι μοναδικοί . Πραγματικά , αν είχαμε

(3) $\bar{\alpha} = \beta_1\bar{e}_1 + \beta_2\bar{e}_2 + \beta_3\bar{e}_3$,

τότε αφαιρώντας τις (2) και (3) έχουμε

$$(\alpha_1-\beta_1)\bar{e}_1 + (\alpha_2-\beta_2)\bar{e}_2 + (\alpha_3-\beta_3)\bar{e}_3 = 0 \quad ,$$

από την οποία , επειδή τα $\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα , παίρνουμε : $\alpha_1=\beta_1$, $\alpha_2=\beta_2$ και $\alpha_3=\beta_3$.

'Ετσι έχουμε δείξει τη πρόταση

Πρόταση 4 : Ας είναι $(\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3)$ μια βάση του V_3 . Κάθε διάνυσμα $\bar{\alpha}$ του V_3 γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των $\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3$ και μάλιστα με μοναδικό τρόπο .

Ανάλογη πρόταση ισχύει και για V_2 και V_1 .

'Οπως είδαμε όταν δοθεί μια βάση $(\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3)$ του V_3 , τότε κάθε $\bar{\alpha}$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως , $\bar{\alpha}=\alpha_1\bar{e}_1+\alpha_2\bar{e}_2+\alpha_3\bar{e}_3$. Οι συντελεστές $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ λέγονται <u>συντεταγμένες του $\bar{\alpha}$ ως προς τη βάση $(\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3)$</u>. Είναι φανερό ότι αλλάζοντας τη βάση $(\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3)$ αλλάζουν και οι συντεταγμένες του $\bar{\alpha}$. Υπάρχει όμως ένα $\bar{\alpha}$. που έχει τις ίδιες συντεταγμένες ως προς κάθε βάση του V_3 (ποιό;) .

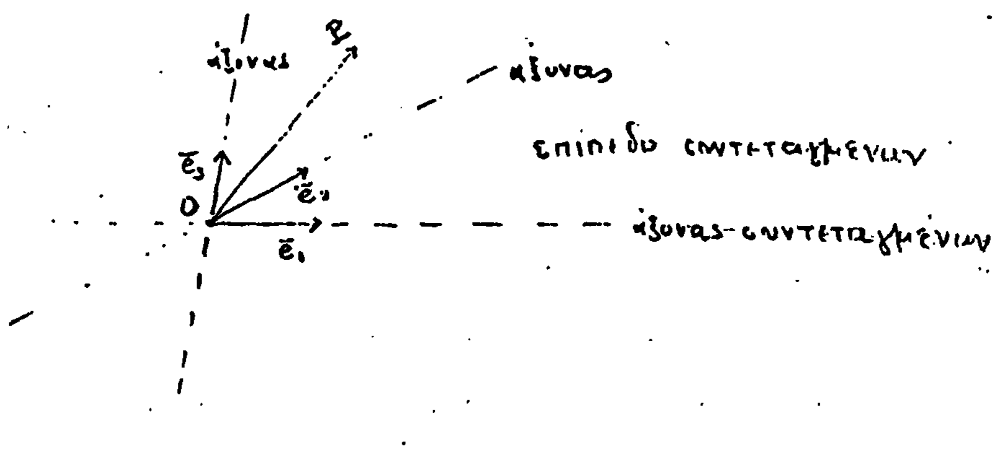
Μετά από αυτά που είπαμε,είμαστε πλέον στη θέση να εισάγουμε συστήματα συντεταγμένων στο χώρο . Αυτό γίνεται στη παρακάτω παράγραφο .

4. Συστήματα συντεταγμένων .

Στο συνηθισμένο χώρο παίρνουμε ένα τυχαίο σημείο 0 , το οποίο θα λέμε αρχή του χώρου και από το οποίο θα θεωρούμε ότι αρχίζουν όλα τα διανύσματα του V_3 . Παίρνουμε μια βάση $(\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3)$ του V_3 , δηλαδή τρία μη συνεπίπεδα διανύσματα . Αν P είναι ένα τυχαίο σημείο του χώρου , τότε το διάνυσμα $\overline{OP}$, που λέγεται διάνυσμα θέσης του σημείου P ως προς το O, μπορεί να γραφεί σαν γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης και μάλιστα κατά μοναδικό τρόπο (πρόταση 4,σελίδα 12) ως :

$$\overline{OP} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3 \ .$$

Οι συντεταγμένες x_1,x_2,x_3 του $\overline{OP}$ ως προς τη βάση $(\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3)$ λέγονται και συντεταγμένες του σημείου P ως προς τη βάση $(\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3)$ και αρχή το O . Έτσι όταν δοθεί βάση και αρχή σε κάθε σημείο του χώρου αντιστοιχεί μια διατεταγμένη τριάδα αριθμών που αλλάζει , καθώς αλλάζει η βάση και η αρχή . Επίσης σε κάθε διατεταγμένη τριάδα $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ από αριθμούς αντιστοιχεί ένα σημείο P του χώρου , το σημείο με διάνυσμα θέσης $\overline{OP}=\alpha_1\bar{e}_1+\alpha_2\bar{e}_2+\alpha_3\bar{e}_3$.
Οι ευθείες που περνούν από το O και στη διεύθυνση των διανυσμάτων της βάσης



Σχήμα 8

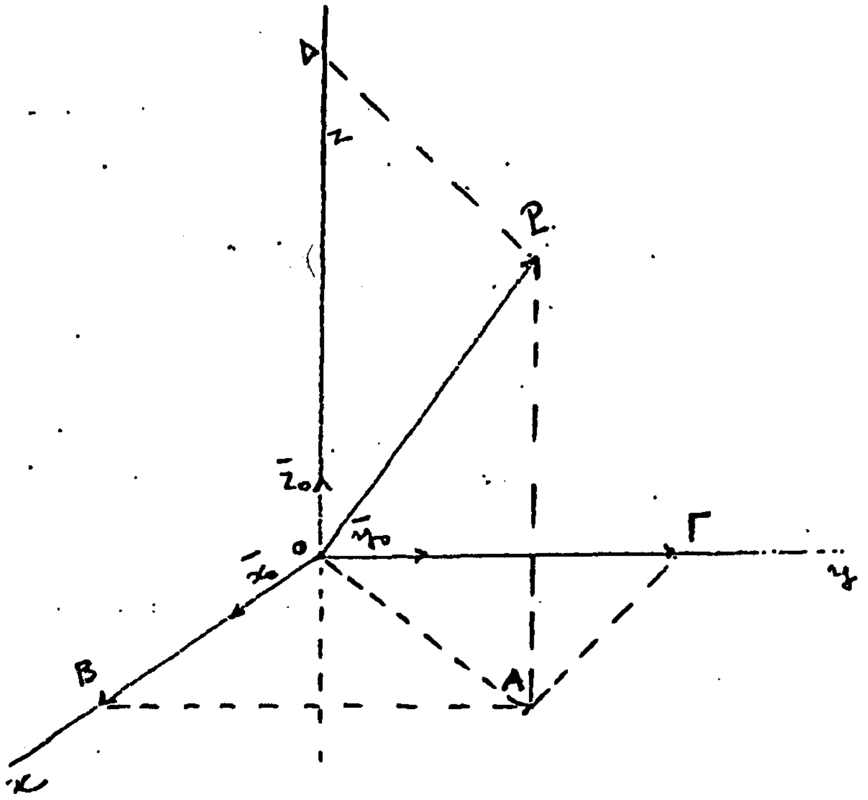
λέγονται <u>άξονες συντεταγμένων</u> , ενώ τα επίπεδα που γίνονται από τους ά-ξονες λέγονται <u>επίπεδα συντεταγμένων</u> και όλο μαζί το σύστημα (αρχή-βάση--άξονες-επίπεδα) λέγεται <u>σύστημα συντεταγμένων</u> ή <u>σύστημα αναφοράς</u> . Το σύστημα συντεταγμένων το γνωρίζουμε πλήρως όταν ξέρουμε την αρχή 0 και τη βάση $(\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3)$, γι'αυτό συμβολίζεται απλά ως :

$$\{0\,;\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\} \quad .$$

Όταν θέλουμε να λύσουμε ένα πρόβλημα , τότε η κατάλληλη επιλογή του συ-στήματος συντεταγμένων μπορεί να απλοποιήσει τη λύση του προβλήματος . Υπάρχει όμως ένας τύπος συστήματος συντεταγμένων ευρείας χρήσης. Είναι το σύστημα που λέγεται <u>Ορθογώνιο (Καρτεσιανό) σύστημα συντεταγμένων</u> , το οποίο θα περιγράψουμε τώρα . Θεωρούμε τρία μοναδιαία διανύσματα $\bar{x}_0,\bar{y}_0,\bar{z}_0$, που είναι κάθετα ανά δύο και έχουν κοινή αρχή 0 . Έχουμε λοιπόν μια βάση $(\bar{x}_0,\bar{y}_0,\bar{z}_0)$, που λέγεται <u>ορθοκανονική βάση</u> (ΟΚΒ) . Το σύστημα $\{0\,;\bar{x}_0,\bar{y}_0,\bar{z}_0\}$ λέγεται Ορθογώνιο(Καρτεσιανό) σύστημα συντεταγμένων .

Παρακάτω θα χρησιμοποιήσουμε ορθογώνια συστήματα συντεταγμένων , που έχουν μια παραπάνω ιδιότητα , είναι <u>δεξιόστροφο</u> . Αυτό σημαίνει ότι αν ο αντίχει-ρας του δεξιού χεριού δείχνει το $\bar{x}_0$ και ο δείκτης το $\bar{y}_0$, τότε ο μέσος δά-χτυλος να δείχνει το $\bar{z}_0$. Αν ο μέσος δάχτυλος δείχνει το $-\bar{z}_0$, τότε το σύ-στημα λέγεται <u>αριστερόστροφο</u> . Είναι φανερό πως στο σύστημα $\{0\,;\bar{x}_0,\bar{y}_0,\bar{z}_0\}$ κάποια αλλαγή της σειράς των διανυσμάτων της βάσης μπορεί να αλλάξει και το σύστημα , από δεξιόστροφο (αριστερόστροφο) να γίνει αριστερόστροφο (δεξιόστρο-φο) .

Ας μελετήσουμε περισσότερο ένα τέτοιο σύστημα (ορθογώνιο και δεξιόστροφο).



σχήμα 9

Ο άξονας στη διεύθυνση του	$\bar{x}_0$	λέγεται άξονας των	x
"	$\bar{y}_0$	"	y
"	$\bar{z}_0$	"	z

Το επίπεδο από τους άξονες	x και y	λέγεται	Oxy	- επίπεδο
"	y και z	"	Oyz	"
"	x και z	"	Oxz	"

Έστω P ένα σημείο του χώρου που έχει συντεταγμένες ως προς το σύστημα $\{0;\bar{x}_0,\bar{y}_0,\bar{z}_0\}$ τις (x,y,z). Τότε

(1) $\qquad \overline{OP} = x\bar{x}_0 + y\bar{y}_0 + z\bar{z}_0 \quad .$

Τα διανύσματα $x\bar{x}_0$, $y\bar{y}_0$, $z\bar{z}_0$ (όλα αρχίζουν από το O) έχουν πέρατα που είναι οι πόδες των καθέτων από το P στους άξονες συντεταγμένων (σχήμα 9). Πραγματικά, από το P φέρουμε κάθετη PΔ στον άξονα z και κάθετη PA στο επίπεδο Oxy. Επίσης από το A φέρουμε καθέτους AB,AΓ στους άξονες των x και y αντίστοιχα. Τότε (θεώρημα τριών καθέτων) η PB και η PΓ είναι κάθετες αντίστοιχα στους άξονες των x και y. Έχουμε τώρα:

$$\overline{OP} = \overline{OA} + \overline{AP} = (\overline{OB}+\overline{BA}) + \overline{O\Delta}$$

$$= \overline{OB} + \overline{O\Gamma} + \overline{O\Delta} \quad , \quad \text{αφού} \quad \overline{AP} = \overline{O\Delta} \; , \; \overline{BA} = \overline{O\Gamma} \quad ,$$

δηλαδή

(2) $$\overline{OP} = \overline{OB} + \overline{O\Gamma} + \overline{O\Delta} \quad .$$

Τώρα έχουμε : $\overline{OB} = \alpha\bar{x}_0$, $\overline{O\Gamma} = \beta\bar{y}_0$, $\overline{O\Delta} = \gamma\bar{z}_0$ για κάποιους αριθμούς α,β,γ και συνεπώς

(3) $$\overline{OP} = \alpha\bar{x}_0 + \beta\bar{y}_0 + \gamma\bar{z}_0 \quad .$$

Επειδή όμως το $\overline{OP}$ γράφεται μονοσήμαντα ως προς τη βάση $(\bar{x}_0,\bar{y}_0,\bar{z}_0)$ συμπεραίνουμε από τις (1),(3) ότι : $\alpha=x$, $\beta=y$, $\gamma=z$ και συνεπώς $\overline{OB}=\alpha\bar{x}_0 = x\bar{x}_0$, $\overline{O\Gamma}=\beta\bar{y}_0 = y\bar{x}_0$, $\overline{O\Delta} = \gamma\bar{z}_0 = z\bar{z}_0$ αυτό που θέλαμε. Η παραπάνω διαδικασία μας δείχνει πως να βρίσκουμε τις συντεταγμένες του P στο σύστημα $\{O\,;\bar{x}_0,\bar{y}_0,\bar{z}_0\}$. Φέρνουμε καθέτους από το P στους άξονες, βρίσκουμε τα $\overline{OB},\overline{O\Gamma},\overline{O\Delta}$ και μετά γράφουμε αυτά σαν πολλαπλάσια των $\bar{x}_0,\bar{y}_0,\bar{z}_0$ αντίστοιχα. Αν $\overline{OB}=x\bar{x}_0$, $\overline{O\Gamma}=y\bar{y}_0$, $\overline{O\Delta}=z\bar{z}_0$, τότε τα x,y,z είναι οι συντεταγμένες του P και μάλιστα το x λέγεται <u>τετμημένη</u>, το y <u>τεταγμένη</u> και το z <u>κατηγμένη</u> του σημείου P.

Παρατηρούμε , ότι η τετμημένη ενός σημείου P είναι θετική αν το $\overline{OB}$ έχει τη φορά του $\bar{x}_0$, αρνητική αν έχει τη φορά του $-\bar{x}_0$ και μηδέν αν το σημείο P είναι στο Oyz επίπεδο. (Ανάλογα ισχύουν για τις συντεταγμένες y και z).

<u>Συμπερασματικά</u> : Όταν δοθεί το σύστημα $\{0 ; \bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0\}$, σε κάθε σημείο του χώρου αντιστοιχεί μια διατεταγμένη τριάδα αριθμών (x,y,z) και αντίστροφα σε κάθε διατεταγμένη τριάδα αριθμών (x,y,z) αντιστοιχεί ένα σημείο P, το σημείο με διάνυσμα θέσης ως προς O το , $x\bar{x}_0 + y\bar{y}_0 + z\bar{z}_0$. Έτσι το σύνολο των σημείων του συνηθισμένου χώρου είναι σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία με το σύνολο των διανυσμάτων που αρχίζουν από ένα σημείο O και αυτό είναι σε αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία με το σύνολο R^3 , των τριάδων από πραγματικούς αριθμούς . Έτσι τον συνηθισμένο χώρο παριστάνουμε πολλές φορές με το σύμβολο R^3 . Τέλος η τριάδα (x,y,z) θα παριστάνει ή ένα σημείο με συντεταγμένες x,y,z και θα γράφουμε $P(x,y,z)$ ή ένα διάνυσμα $\bar{a}$ με αρχή το O και συντεταγμένες x,y,z και θα γράφουμε $\bar{a}=(x,y,z)$.

Ξέρουμε ότι το μήκος $|\bar{a}|$ ενός διανύσματος $\bar{a}$ είναι θετικός αριθμός εκτός αν το διάνυσμα είναι μηδενικό οπότε το μήκος του είναι μηδέν . Επίσης

(4) μήκος $\lambda\bar{a} = |\lambda\bar{a}| = |\lambda||\bar{a}|$

και συνεπώς

(5) $|\lambda\bar{a}|^2 = \lambda^2|\bar{a}|^2$.

Τώρα αν έχουμε το διάνυσμα $\bar{a} = a_1\bar{x}_0 + a_2\bar{y}_0 + a_3\bar{z}_0$, τότε από το σχήμα 9 , παίρνουμε για $\bar{a} = \overline{OP}$ ότι :

$$|\bar{a}|^2 = |\overline{OP}|^2 = |\overline{OA}|^2 + |\overline{AP}|^2 = |\overline{OB}|^2 + |\overline{O\Gamma}|^2 + |\overline{O\Delta}|^2 \quad ,$$

$$= |a_1\bar{x}_0|^2 + |a_2\bar{y}_0|^2 + |a_3\bar{z}_0|^2 \overset{(5)}{=\!=} a_1^2|\bar{x}_0|^2 + a_2^2|\bar{y}_0|^2 + a_3^2|\bar{z}_0|^2 =$$

$= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$, αφού $|\bar{x}_0| = |\bar{y}_0| = |\bar{z}_0| = 1$ (εφαρμόζουμε Πυθαγόρειο Θεώρημα) .

Έτσι για το διάνυσμα $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ισχύει :

(6) $$|\bar{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \quad .$$

Αξίζει να σημειώσουμε εδώ , ότι η σχέση (6) μας δίνει το τετράγωνο του μήκους ενός διανύσματος σε συνάρτηση των συντεταγμένων του ως προς ΟΚΒ $(\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$. Ίσως παρακάτω σε κάποιο σχόλιο να δώσουμε ανάλογη σχέση , όταν έχουμε μια οποιαδήποτε βάση $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$.

<u>Παρατήρηση</u> : Αν $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\bar{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ είναι δύο διανύσματα τότε έχουμε : $\bar{a}+\bar{b} = (a_1+\beta_1 , a_2+\beta_2 , a_3+\beta_3)$ και $\lambda\bar{a} = (\lambda a_1 , \lambda a_2 , \lambda a_3)$. Πραγματικά : $\bar{a} = a_1\bar{x}_0 + a_2\bar{y}_0 + a_3\bar{z}_0$ και $\bar{\beta} = \beta_1\bar{x}_0 + \beta_2\bar{y}_0 + \beta_3\bar{z}_0$. Άρα , $\bar{a}+\bar{b} = (a_1+\beta_1)\bar{x}_0 + (a_2+\beta_2)\bar{y}_0 + (a_3+\beta_3)\bar{z}_0$ και $\lambda\bar{a} = (\lambda a_1)\bar{x}_0 + (\lambda a_2)\bar{y}_0 + (\lambda a_3)\bar{z}_0$.
<u>Επίσης</u> , αν $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ είναι δύο σημεία του χώρου τότε $\overline{P_1P_2} = (x_2-x_1 , y_2-y_1 , z_2-z_1)$. Πραγματικά : $\overline{OP_1} = x_1\bar{x}_0 + y_1\bar{y}_0 + z_1\bar{z}_0$, $\overline{OP_2} = x_2\bar{x}_0 + y_2\bar{y}_0 + z_2\bar{z}_0$ και $\overline{OP_2} = \overline{OP_1} + \overline{P_1P_2}$. Άρα

$\overline{P_1P_2} = \overline{OP_2} - \overline{OP_1}$ = (διάνυσμα θέσης του πέρατος) –

(διάνυσμα πέρατος αρχής) $= (x_2-x_1)\bar{x}_0 + (y_2-y_1)\bar{y}_0 + (z_2-z_1)\bar{z}_0$.

Μετά από αυτά δίνουμε τον ορισμό :

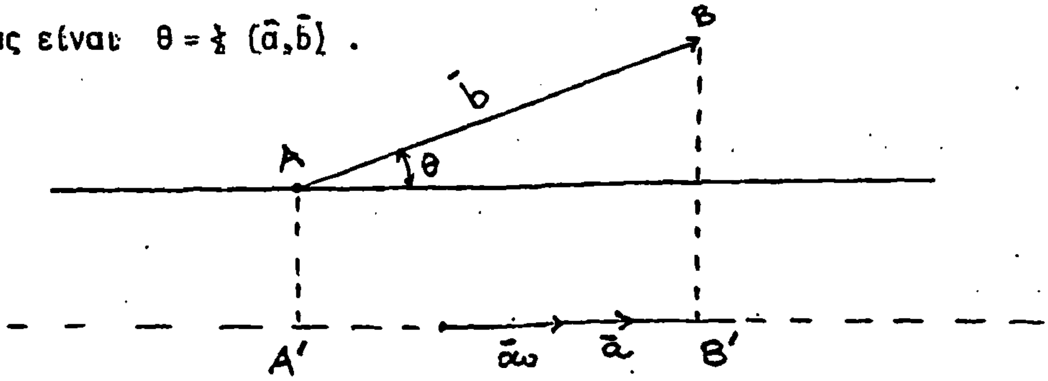
<u>Ορισμός</u> : Αν $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ είναι δύο σημεία του χώρου

R^3 , το μήκος του διανύσματος $\overline{P_1P_2}$ λέγεται απόσταση των σημείων P_1, P_2 και συμβολίζεται με $d(P_1,P_2)$. Έτσι έχουμε

$$(*) \qquad d(P_1P_2) = |\overline{P_1P_2}| \overset{(6)}{=\!=} \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \quad .$$

5. Εσωτερικό ή βαθμωτό γινόμενο διανυσμάτων .

Θεωρούμε ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\bar{a}$. Τότε $\bar{a}=|\bar{a}|\bar{a}_0$, όπου $\bar{a}_0$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στη φορά και διεύθυνση του $\bar{a}$ (κοίταξε σελίδα 2) . Θεωρούμε τώρα ένα άλλο διάνυσμα $\bar{b}$ με αρχή το A και τέλος το B (σχήμα 10) και ας είναι $\theta = \measuredangle(\bar{a},\bar{b})$.



σχήμα 10

Από τα σημεία A,B φέρνουμε κάθετες στον φορέα του $\bar{a}$ και ας είναι A',B' οι πόδες των καθέτων αντίστοιχα . Το διάνυσμα $\overline{A'B'}$ λέγεται διανυσματική ορθή προβολή του $\bar{b}$ πάνω στο $\bar{a}$. Το διάνυσμα $\overline{A'B'}$ έχει μέτρο $|\bar{b}||\cos\theta|$, τη διεύθυνση του $\bar{a}_0$, τη φορά του $\bar{a}_0$, αν $\cos\theta>0$ (δηλ. $0\leq\theta<\frac{\pi}{2}$) και τη φορά του $-\bar{a}_0$, αν $\cos\theta<0$ (δηλ. $\frac{\pi}{2}<\theta\leq\pi$) . Τέλος είναι το μηδενικό διάνυσμα αν $\cos\theta=0$ (δηλ. $\theta=\frac{\pi}{2}$) . Έτσι $\overline{A'B'}=|\bar{b}|\cos\theta\,\bar{a}_0$. Το διάνυσμα $\overline{A'B'}$ είναι γνωστό , όταν είναι γνωστό το $|\bar{b}|\cos\theta$. Ορίζουμε λοιπόν προβολή του $\bar{b}$ πάνω στο $\bar{a}$ και συμβολίζουμε με $b_{\bar{a}}$ τον αριθμό $|\bar{b}|\cos\theta$. Δηλαδή

$\bar{b}_{\bar{a}} \xlongequal{\text{ορισμός}} |\bar{b}|\cos\theta$.

<u>Ορισμός</u> : Δίνονται δύο διανύσματα $\bar{a},\bar{b}$. Ο αριθμός

$$\frac{1}{2}(|\bar{a}+\bar{b}|^2-|\bar{a}|^2-|\bar{b}|^2)$$

λέγεται <u>εσωτερικό ή βαθμωτό γινόμενο</u> των διανυσμάτων $\bar{a},\bar{b}$ και συμβολίζεται $\bar{a}\cdot\bar{b}$ (ή πολλές φορές $\bar{a}\bar{b}$) . Έτσι :

(2) $$\bar{a}\cdot\bar{b} \xlongequal{\text{ορισμός}} \frac{1}{2}(|\bar{a}+\bar{b}|^2-|\bar{a}|^2-|\bar{b}|^2) \quad .$$

Ο τύπος (2) δεν είναι αρκετά βολικός στους λογαριασμούς θα αποδείξουμε ένα τύπο πιό βολικό στους υπολογισμούς (θυμίζουμε πάλι ότι αναφερόμαστε σε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων $(0\,;\bar{x}_0,\bar{y}_0,\bar{z}_0)$) . Έτσι έχουμε :

<u>Πρόταση 1</u> : Αν $\bar{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\bar{b}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ είναι δύο διανύσματα , τότε

(3) $$\bar{a}\bar{b}=a_1\beta_1+a_2\beta_2+a_3\beta_3 \quad .$$

<u>Απόδειξη</u> . Έχουμε : $\bar{a}+\bar{b}=(a_1+\beta_1\ ,\ a_2+\beta_2\ ,\ a_3+\beta_3)$ και συνεπώς $|a+b|^2 = (a_1+\beta_1)^2+(a_2+\beta_2)^2+(a_3+\beta_3)^2$, σύμφωνα με σχέση 6 της σελίδας 18

$$= a_1^2+a_2^2+a_3^2+\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2+2(a_1\beta_1+a_2\beta_2+a_3\beta_3)$$

$$= |\bar{a}|^2+|\bar{b}|^2+2(a_1\beta_1+a_2\beta_2+a_3\beta_3) \quad .$$

Άρα

(4) $$|\bar{a}+\bar{b}|^2-|\bar{a}|^2-|\bar{b}|^2=2(a_1\beta_1+a_2\beta_2+a_3\beta_3)$$

Έτσι :

$$\bar{a}\bar{b} \overset{\text{ορισμός}}{=\!=\!=} \frac{1}{2}(|\bar{a}+\bar{b}|^2-|\bar{a}|^2-|\bar{b}|^2) \overset{(4)}{=\!=} a_1\beta_1+a_2\beta_2+a_3\beta_3 \quad .$$

Πριν δούμε μερικές ακόμη εκφράσεις για το εσωτερικό γινόμενο θα δούμε μερικές ιδιότητές του .

<u>Πρόταση 2</u> . Έστω $\bar{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\bar{b}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, $\bar{c}=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$ είναι τρία διανύσματα και λ,μ πραγματικοί αριθμοί . Τότε ισχύουν

(i) $(\lambda\bar{a}+\mu\bar{b})\cdot\bar{c} = \lambda\,\bar{a}\,\bar{c}+\mu\,\bar{b}\,\bar{c}$

(ii) $\bar{a}\cdot(\lambda\,\bar{b}+\mu\,\bar{c}) = \lambda\,\bar{a}\,\bar{b}+\mu\,\bar{a}\,\bar{c}$

(iii) $\bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a}$

(iv) $|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}\cdot\bar{a}}$

<u>Απόδειξη</u> . Αποδεικνύονται εύκολα αν χρησιμοποιήσουμε τη πρόταση 1 και παρατηρήσουμε ότι $\lambda\,\bar{a}+\mu\,\bar{b}=(\lambda\,a_1+\mu\,\beta_1\,,\ \lambda\,a_2+\mu\,\beta_2\,,\ \lambda\,a_3+\mu\,\beta_3)$.

'<u>Ασκηση</u> : Αποδείξτε την πρόταση 2 , χρησιμοποιώντας τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου και όχι τη πρόταση 1 .

<u>Πρόταση 3</u> . Αν $\bar{a},\bar{b}$ είναι δύο διανύσματα και $\theta=\sphericalangle(\bar{a},\bar{b})$ τότε :

(5) $$\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\theta = |\bar{a}|b_{\bar{a}} = |\bar{b}|a_{\bar{b}} \quad .$$

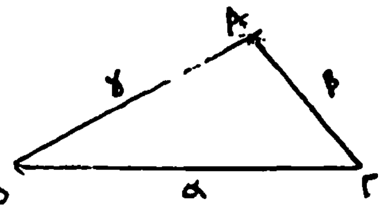
<u>Απόδειξη</u> . 'Εχουμε : $\bar{a}=|\bar{a}|\bar{a}_0$ (Αν $\bar{a}=0$, τότε οι σχέσεις (5) ισχύουν). Διαλέγουμε μια ΟΚΒ $(\bar{x}_0,\bar{y}_0,\bar{z}_0)$ ώστε $\bar{x}_0=\bar{a}_0$. Ως προς αυτή τη βάση έχουμε : $\bar{a}=(|\bar{a}|,0,0)$ και $\bar{b}=(|\bar{b}|\cos\theta,\text{κάτι},\text{κάτι})$. Τώρα , με τη πρόταση 1 θα έχουμε: $\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}||\bar{b}|\cos\theta$. Επίσης από αυτή τη σχέση και τον ορισμό της προβολής του $\bar{b}$ πάνω στο $\bar{a}$ (ή του $\bar{a}$ πάνω στο $\bar{b}$) παίρνουμε και τις άλλες ισότητες .

<u>Παρατήρηση</u> . Σημειώνουμε ότι το γινόμενο $\bar{a}\bar{b}$ δύο μη μηδενικών διανυσμάτων είναι θετικό , αν η γωνία των $\bar{a},\bar{b}$ είναι οξεία , αρνητικό αν η γωνία είναι αμβλεία . Ιδιαίτερα $\bar{a}\bar{b}=0$, αν και μόνο αν , $\bar{a}=0$ ή $\bar{b}=0$ ή τα $\bar{a},\bar{b}$ σχηματίζουν ορθή γωνία . Σε διαφορά με το γινόμενο πραγματικών αριθμών , το $\bar{a}\bar{b}$ μπορεί να είναι μηδέν , χωρίς κανένα από τα $\bar{a},\bar{b}$ να είναι μηδέν . Επίσης το γινόμενο $\bar{a}\bar{b}$ είναι αριθμός και όχι διάνυσμα , δηλαδή το εσωτερικό γινόμενο δεν είναι πράξη εσωτερικής σύνθεσης στο V_3 .

<u>Εφαρμογές του εσωτερικού γινομένου στη λύση γεωμετρικών προβλημάτων</u> .

Το εσωτερικό γινόμενο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να λύσουμε μερικά στοιχειώδη γεωμετρικά προβλήματα.Παρακάτω θα δώσουμε μερικά τέτοια χαρακτηριστικά παραδείγματα .

<u>Παράδειγμα</u> 1 . Νόμος συνημιτόνου σε τρίγωνο ΑΒΓ .



$$\gamma^2 = \alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta \,\text{συν}\, \hat{\Gamma}$$, νόμος συνημίτονου .

θεωρούμε σαν αρχή του χώρου το σημείο Γ . Τότε : $\overline{BA}=\overline{\Gamma A}-\overline{\Gamma B}$ και

συνεπώς : $|\overline{BA}|^2 = \overline{BA}\cdot\overline{BA} = (\overline{\Gamma A}-\overline{\Gamma B})\cdot(\overline{\Gamma A}-\overline{\Gamma B})$

$$= \overline{\Gamma A}\cdot\overline{\Gamma A}-2\overline{\Gamma A}\cdot\overline{\Gamma B}+\overline{\Gamma B}\cdot\overline{\Gamma B}$$

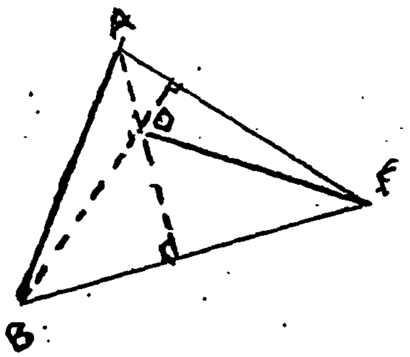
$$= |\overline{\Gamma A}|^2+|\overline{\Gamma B}|^2-2|\overline{\Gamma A}|\,|\overline{\Gamma B}|\cos \sphericalangle(\overline{\Gamma A},\overline{\Gamma B})$$.

'Αρα

$$\gamma^2 = \alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\cos\hat{\Gamma} \quad , \text{ αφού } \quad |\overline{\Gamma B}|=\alpha \ , \ |\overline{\Gamma A}|=\beta \ , \ |\overline{AB}|=\gamma$$

και $\quad \measuredangle\,(\overline{\Gamma A},\overline{\Gamma B})=\hat{\Gamma}$.

<u>Παράδειγμα 2</u> . Τα ύψη τριγώνου τέμνονται σε κοινό σημείο .



'Εστω O το σημείο τομής των υψών από τις κορυφές A και B . Αρκεί να δείξουμε ότι το $\overline{O\Gamma}$ διάνυσμα είναι κάθετο στο $\overline{AB}$, και συνεπώς το $\overline{\Gamma O}$ θα είναι ύψος.

'Εχουμε :

$$\overline{OA}\cdot\overline{B\Gamma}=0 \Rightarrow \overline{OA}\cdot(\overline{O\Gamma}-\overline{OB})=0 \Rightarrow \overline{OA}\cdot\overline{O\Gamma}-\overline{OA}\cdot\overline{OB}=0$$

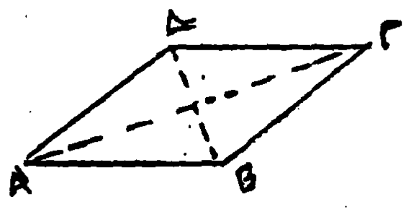
$$\overline{OB}\cdot\overline{A\Gamma}=0 \Rightarrow \overline{OB}\cdot(\overline{O\Gamma}-\overline{OA})=0 \Rightarrow \overline{OB}\cdot\overline{O\Gamma}-\overline{OB}\cdot\overline{OA}=0$$

Αφαιρούμε τις δύο τελευταίες και παίρνουμε :

$$\overline{OA}\cdot\overline{O\Gamma}-\overline{OB}\cdot\overline{O\Gamma}=0 \Rightarrow (\overline{OA}-\overline{OB})\cdot\overline{O\Gamma}=0$$

$$\Rightarrow \overline{BA}\cdot\overline{O\Gamma}=0$$, αυτό που θέλαμε .

<u>Παράδειγμα 3</u> . Οι διαγώνιοι ρόμβου τέμνονται κάθετα .



Αρκεί να δείξουμε ότι : $\overline{A\Gamma}\cdot\overline{\Delta B}=0$.

'Εχουμε :

$\overline{A\Delta}=\overline{B\Gamma}$, $\overline{AB}=\overline{\Delta\Gamma}$ και $|\overline{A\Delta}|=|\overline{B\Gamma}|=|\overline{AB}|=|\overline{\Delta\Gamma}|$.

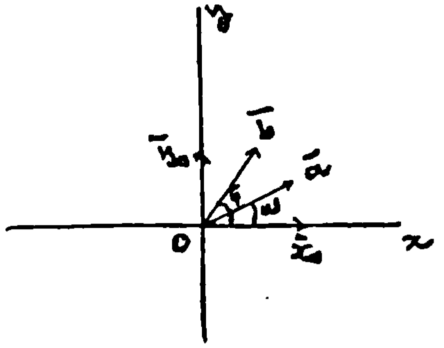
Τώρα : $\overline{A\Gamma}=\overline{A\Delta}+\overline{\Delta\Gamma}=\overline{A\Delta}+\overline{AB}$

$\overline{\Delta B}=\overline{AB}-\overline{A\Delta}$.

'Αρα : $\overline{A\Gamma}\cdot\overline{\Delta B}=(\overline{AB}+\overline{A\Delta})\cdot(\overline{AB}-\overline{A\Delta})=|\overline{AB}|^2-|\overline{A\Delta}|^2=0$

Παράδειγμα 4 . Θα δείξουμε ότι : $\cos(\varphi-\omega)=\cos\varphi\cdot\cos\omega+\sin\varphi\cdot\sin\omega$.

Θα δουλέψουμε στο επίπεδο έτσι δεν θα χρησιμοποιήσουμε καθόλου τον άξονα z .



Θεωρούμε δύο διανύσματα μοναδιαία τα $\bar{a},\bar{b}$ που σχηματίζουν με το $\bar{x}_0$ γωνίες ω,φ αντίστοιχα .

Τότε : $\bar{a}=(\cos\omega,\sin\omega)$

$\bar{b}=(\cos\varphi,\sin\varphi)$ (γιατί;) .

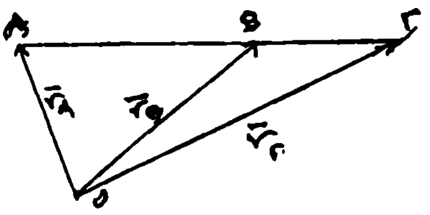
Άρα : $\bar{a}\cdot\bar{b}=\cos\omega\cdot\cos\varphi+\sin\omega\cdot\sin\varphi$.

Αλλά : $\bar{a}\cdot\bar{b}=|a||b|\cos(\varphi-\omega)=\cos(\varphi-\omega)$ αφού $|\bar{a}|=|\bar{b}|=1$.

Έτσι : $\cos(\varphi-\omega)=\cos\omega\cdot\cos\varphi+\sin\omega\cdot\sin\varphi$.

Βάζοντας στη θέση του ω το $-\omega$ έχουμε και $\cos(\varphi+\omega)=\cos\omega\cdot\cos\varphi-\sin\omega\cdot\sin\varphi$.

Παράδειγμα 5 . Θεωρούμε τα σημεία Α,Β,Γ με διανύσματα θέσης $\bar{r}_A,\bar{r}_B$ και $\bar{r}_\Gamma$ αντίστοιχα ως προς αρχή Ο . Θα δούμε , ότι τα σημεία Α,Β,Γ είναι



συνευθειακά (κείνται στην ίδια ευθεία) , αν και μόνο αν υπάρχουν τρείς αριθμοί $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ όχι όλοι μηδέν,με άθροισμα μηδέν ώστε να ισχύει :

$$(*)\quad \lambda_1\bar{r}_A+\lambda_2\bar{r}_B+\lambda_3\bar{r}_\Gamma=0 .$$

Δεχόμαστε ότι τα τρία σημεία Α,Β και Γ είναι συνευθειακά . Τότε τα διανύσματα $\overline{AB}$, $\overline{A\Gamma}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα . Έτσι υπάρχουν $(\lambda,\mu)\neq(0,0)$ ώστε να ισχύει : $\lambda\overline{AB}+\mu\overline{A\Gamma}=0$ ή $\lambda(\bar{r}_B-\bar{r}_A)+\mu(\bar{r}_\Gamma-\bar{r}_A)=0$ ή $(-\lambda-\mu)\bar{r}_A+\lambda\bar{r}_B+\mu\bar{r}_\Gamma=0$.

Παρατηρούμε λοιπόν ότι υπάρχουν τρείς αριθμοί $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ όχι όλοι μηδέν

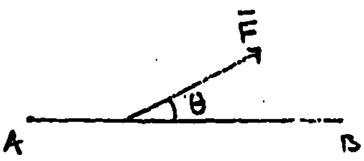
$(\lambda_1=-\lambda-\mu\ ,\ \lambda_2=\lambda\ ,\ \lambda_3=\mu)$ με άθροισμα $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0$ και ισχύει η (*) .

Αντίστροφα , αν δεχτούμε ότι υπάρχουν οι $\lambda_1\neq 0\ ,\lambda_2\ ,\lambda_3$ με $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0$, ώστε να ισχύει η $\lambda_1\bar{r}_A+\lambda_2\bar{r}_B+\lambda_3\bar{r}_\Gamma=0$ έχουμε $\lambda_1\bar{r}_A+\lambda_2\bar{r}_B+(-\lambda_2-\lambda_1)\bar{r}_\Gamma=0$ ή $\lambda_1(\bar{r}_A-\bar{r}_\Gamma)+\lambda_2(\bar{r}_B-\bar{r}_\Gamma)=0$ ή $\lambda_1\overline{\Gamma A}+\lambda_2\overline{\Gamma B}=0$.

Η τελευταία σχέση μας λέγει (αφού $\lambda_1\neq 0$) ότι τα διανύσματα $\overline{A\Gamma}$, $\overline{\Gamma B}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα και συνεπώς τα σημεία A,B,Γ είναι συνευθειακά .

<u>Ένα παράδειγμα από τη Φυσική</u> . Όταν μια δύναμη $\bar{F}$ μετατοπίζει ένα σημείο κατά ένα διάνυσμα $\overline{AB}$, ώστε $\sphericalangle(\overline{AB},\bar{F})=\theta$, τότε το έργο της $\bar{F}$ είναι ως γνωστό : Έργο $\underset{\text{Φυσικής}}{\overset{\text{ορισμός}}{=}}$ $|\overline{AB}|\cdot$(προβολή της $\bar{F}$ πάνω στο $\overline{AB}$) =

$$= |\overline{AB}|\cdot \bar{F}_{\overline{AB}} = \overline{AB}\cdot\bar{F}\ .$$



Έτσι το έργο είναι ένα εσωτερικό γινόμενο .

<u>ΒΑΣΙΚΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ</u> . Αν $(\bar{x}_0,\bar{y}_0,\bar{z}_0)$ είναι μια ορθοκανονική βάση (ΟΚΒ) και $\bar{\alpha}$ τυχαίο διάνυσμα τότε :

(*) $$\bar{\alpha}=(\bar{\alpha}\bar{x}_0)\,\bar{x}_0+(\bar{\alpha}\,\bar{y}_0)\bar{y}_0+(\bar{\alpha}\,\bar{z}_0)\bar{z}_0\ .$$

Πραγματικά , το $\bar{\alpha}$ γράφεται μονοσήμαντα ως προς τη βάση $(\bar{x}_0,\bar{y}_0,\bar{z}_0)$ ως : $\bar{\alpha}=\alpha_1\bar{x}_0+\alpha_2\bar{y}_0+\alpha_3\bar{z}_0$.

Λαμβάνουμε υπόψη ότι : $|\bar{x}_0|^2=|\bar{y}_0|^2=|\bar{z}_0|^2=1$, $\bar{x}_0\cdot\bar{y}_0=\bar{x}_0\cdot\bar{z}_0=\bar{y}_0\cdot\bar{z}_0=0$ και έχουμε :

$$\bar{\alpha}\cdot\bar{x}_0=(\alpha_1\bar{x}_0+\alpha_2\bar{y}_0+\alpha_3\bar{z}_0)\cdot\bar{x}_0=\alpha_1\ ,\ \text{όμοια}\ \alpha_2=(\bar{\alpha}\bar{y}_0)\ ,\ \alpha_3=(\bar{\alpha}\bar{z}_0)$$

και έτσι έχουμε αυτό που θέλουμε .

Τώρα αν το διάνυσμα $\bar{a}$ κάνει γωνίες φ,θ,ψ με τα $\bar{x}_0,\bar{y}_0,\bar{z}_0$ αντίστοιχα θα έχουμε :

$$\begin{aligned} \bar{a}\cdot\bar{x}_0 &= |\bar{a}||\bar{x}_0|\cos\varphi = |\bar{a}|\cos\varphi = \text{προβολή του } \bar{a} \text{ πάνω στο } \bar{x}_0 \\ \bar{a}\cdot\bar{y}_0 &= \quad \ldots \quad = |\bar{a}|\cos\theta = \quad '' \qquad '' \quad \bar{y}_0 \\ \bar{a}\cdot\bar{z}_0 &= \quad \ldots \quad = |\bar{a}|\cos\psi = \quad '' \qquad '' \quad \bar{z}_0 \end{aligned}$$

Έτσι : $\bar{a} = |\bar{a}|\cos\varphi\,\bar{x}_0 + |\bar{a}|\cos\theta\,\bar{y}_0 + |\bar{a}|\cos\psi\,\bar{z}_0 = (|\bar{a}|\cos\varphi, |\bar{a}|\cos\theta, |\bar{a}|\cos\psi)$

$= |\bar{a}|(\cos\varphi,\cos\theta,\cos\psi)$. Έτσι το μοναδιαίο στη φορά και διεύθυνση του $\bar{a}$ είναι το $\bar{a}_0 = (\cos\varphi,\cos\theta,\cos\psi)$, όπου φ,θ,ψ οι γωνίες με τα $\bar{x}_0$, $\bar{y}_0,\bar{z}_0$ αντίστοιχα και τα $\cos\varphi,\cos\theta,\cos\psi$ λέγονται <u>συνημίτονα κατευθύνσης του $\bar{a}$</u> .

Τέλος από τη πρόταση 3 , σελίδα 21 παίρνουμε για το συνημίτονο της γωνίας θ δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\bar{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\bar{b}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$

$$(**) \qquad \cos\theta = \frac{a_1\beta_1+a_2\beta_2+a_3\beta_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\;\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2}} \quad .$$

Από την (**) παίρνουμε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε δύο διανύσματα να είναι κάθετα . Δηλαδή : <u>Τα $\bar{a},\bar{b}$ κάθετα , αν και μόνο αν το άθροισμα των γινομένων των ομωνύμων συντεταγμένων είναι μηδέν</u> .

<u>Σχόλιο</u> . Έστω $(\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3)$ μια τυχαία βάση του V_3 (όχι αναγκαστικά ΟΚΒ) . Για ένα διάνυσμα $\bar{a}$ θα έχουμε : $\bar{a} = a_1\bar{e}_1+a_2\bar{e}_2+a_3\bar{e}_3$. Θέλουμε να βρούμε το μέτρο του $\bar{a}$, το $|\bar{a}|$. Θέτουμε $\bar{e}_i\cdot\bar{e}_j = \gamma_{ij}$ $(i,j=1,2,3)$.

Έχουμε :

$$|\bar{a}|^2 = (a_1\bar{e}_1+a_2\bar{e}_2+a_3\bar{e}_3)\cdot(a_1\bar{e}_1+a_2\bar{e}_2+a_3\bar{e}_3)$$
$$= \gamma_{11}a_1^2+\gamma_{22}a_2^2+\gamma_{33}a_3^2 + 2\gamma_{12}a_1a_2+2\gamma_{13}a_1a_3+2\gamma_{23}a_2a_3$$

Από αυτή τη σχέση μπορούμε να βρούμε το $|\bar{a}|^2$ (και συνεπώς το $|\bar{a}|$) με τη προϋπόθεση ότι ξέρουμε τους 9 αριθμούς γ_{ij} , δηλαδή τα εσωτερικά γινόμενα των διανυσμάτων της βάσης ανά δύο . Ειδικά αν η βάση είναι ΟΚΒ τότε έχουμε :

$$\gamma_{ij} = \bar{e}_i\cdot\bar{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$$

. Τα σύμβολα δ_{ij} με αυτή την ιδιότητα λέγονται <u>δέλτα του Kronecker</u> . Έτσι θα έχουμε $|\bar{a}|^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2$, όπως αποδείξαμε στη σελίδα 18 .

<u>Ασκήσεις</u> .

1. Για δύο διανύσματα $\bar{a},\bar{b}$ δείξτε ότι ισχύει

$$||\bar{a}|-|\bar{b}|| \leq |\bar{a}-\bar{b}| \quad .$$

2. Δείξτε ότι ισχύει

$$|\bar{a}\cdot\bar{b}| \leq |\bar{a}||\bar{b}|$$

Η ισότητα ισχύει , αν και μόνο τα $\bar{a}$ και $\bar{b}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα .

3. Τι μπορείτε να πείτε για τα διανύσματα $\bar{a}$ και $\bar{b}$, αν τα διανύσματα $\lambda\bar{a}+\mu\bar{b}$ και $\mu\bar{a}-\lambda\bar{b}$ είναι ορθογώνια για κάθε ζευγάρι πραγματικών αριθμών λ και μ .

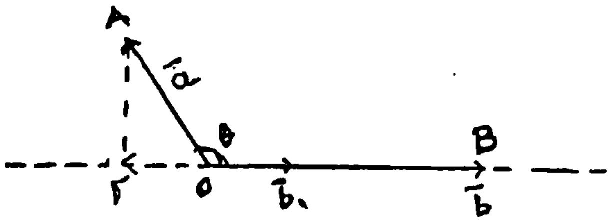
4. Αν το διάνυσμα $\bar{v}$ είναι κάθετο σε τρία μη συνεπίπεδα διανύσματα τότε $\bar{v}=0$.

5. Δίνονται δύο διανύσματα $\bar{a}$ και $\bar{b}$. Τότε το $\bar{a}$ μπορεί να γραφεί σαν άθροισμα ενός διανύσματος $\bar{a}_1$, που είναι παράλληλο στο $\bar{b}$ και ενός διανύσματος $\bar{a}_2$ που είναι ορθογώνιο στο $\bar{b}$ (ανάλογα ισχύουν για το $\bar{b}$) . Αν επί πλέον $\bar{b} \neq 0$, τότε ισχύει ότι

$$\bar{a}_1 = (\bar{a}\cdot\bar{b}_0)\bar{b}_0 \quad .$$

<u>Σύντομη λύση</u> . Αν $\bar{b}=0$ έχουμε τη προφανή λύση $\bar{a} = 0+a$, με $\bar{a}_1 = 0$ και $\bar{a}_2 = \bar{a}$.

Αν $\bar{b} \neq 0$ έχουμε (κοίταξε σχήμα) $\bar{a}=\overline{O\Gamma}+\overline{\Gamma A}$ με $\overline{O\Gamma}$ παράλληλο στο $\bar{b}$ και $\overline{\Gamma A}$ κάθετο στο $\bar{b}$. Δηλαδή $\bar{a}_1 = \overline{O\Gamma}$ και $\bar{a}_2 = \overline{\Gamma A}$. Τώρα $|\bar{a}_1| = |\overline{O\Gamma}| = |\bar{a}|\,|\cos\theta| = |\,|\bar{a}|\cdot 1\cdot\cos\theta| = |\bar{a}\cdot\bar{b}_0|$. Άρα $\bar{a}_1 = (\bar{a}\cdot\bar{b}_0)\bar{b}_0$.



$$\bar{b}_0 = \frac{\bar{b}}{|\bar{b}|}$$

6. Τα διανύσματα $\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3$ είναι μοναδιαία και γραμμικά ανεξάρτητα . Αν ισχύει $|\bar{e}_1+\bar{e}_2+\bar{e}_3|=1$, να αποδείξετε ότι τα διανύσματα $\bar{e}_1+\bar{e}_2$, $\bar{e}_2+\bar{e}_3$, $\bar{e}_3+\bar{e}_1$ είναι ανά δύο κάθετα και μη μηδενικά .

7. Δίνονται τέσσερα σημεία Α,Β,Γ,Δ του χώρου με διανύσματα θέσης $\bar{r}_A,\bar{r}_B,\bar{r}_\Gamma$ και $\bar{r}_\Delta$ αντίστοιχα , ως προς αρχή 0 . Τα σημεία είναι συνεπίπεδα (βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο) , αν και μόνο αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ με (i) $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)\neq(0,0,0,0)$, (ii) $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=0$ και (iii) $\lambda_1\bar{r}_A+\lambda_2\bar{r}_B+\lambda_3\bar{r}_\Gamma+\lambda_4\bar{r}_\Delta = 0$.

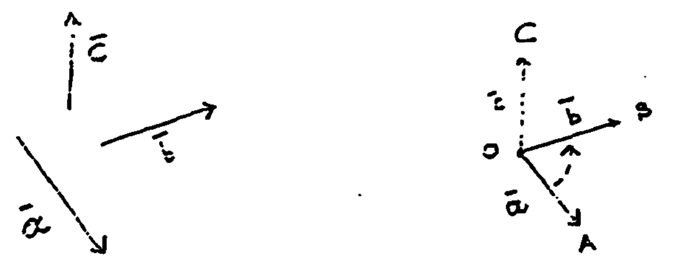
8. Τα σημεία $A(3,1,1)$, $B(1,1,1)$ και $\Gamma(1,3,5)$ ορίζουν ορθογώνιο τρίγωνο , του οποίου να βρείτε τις γωνίες και τα μήκη των πλευρών .

6. Εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων .

Στον V_3 υπάρχει και ένα άλλο γινόμενο διανυσμάτων . Λέγεται εξωτερικό ή διανυσματικό γινόμενο διανυσμάτων και είναι χρήσιμο σε πολλές εφαρμογές .

Πριν προχωρήσουμε στον ορισμό του εξωτερικού γινομένου διανυσμάτων θα κάνουμε κάποια σχόλια για τις δεξιόστροφες βάσεις .

Θεωρούμε μια βάση $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$. Μεταφέρουμε τα διανύσματα της βάσης , ώστε να έχουν κοινή αρχή O και πέρατα τα σημεία A,B,C αντίστοιχα (όπως στο σχήμα 11) .



σχήμα 11

'Ενας παρατηρητής έχει τα πόδια του στο O , το κεφάλι του στο C και κοιτάζει προς το επίπεδο των O,A,B . Στρέφουμε το $\overline{OA}$ διαγράφοντας τη γωνία $\measuredangle(\bar{a},\bar{b})$ μέχρι να πέσει πάνω στο $\overline{OB}$. Αν ο παρατηρητής βλέπει να γίνεται αυτή η στροφή αντίθετα από τη κίνηση των δεικτών του ρολογιού τότε η βάση $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$ λέγεται δεξιόστροφη βάση . Σε αντίθετη περίπτωση η βάση λέγεται αριστερόστροφη βάση . Για παράδειγμα η κανονική βάση $(\bar{x}_0,\bar{y}_0,\bar{z}_0)$ του

R^3 είναι δεξιόστροφη .

Είναι εύκολο να δεί κάποιος ότι αν η βάση $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$ είναι δεξιόστροφη τότε οι βάσεις $(\bar{b},\bar{c},\bar{a})$, $(\bar{c},\bar{a},\bar{b})$ είναι δεξιόστροφες , ενώ οι βάσεις $(\bar{a},\bar{c},\bar{b})$, $(\bar{c},\bar{b},\bar{a})$, $(\bar{b},\bar{a},\bar{c})$ είναι αριστερόστροφες .

Παρατήρηση . Η ονομασία "δεξιόστροφη βάση" οφείλεται στο γεγονός ότι , όταν πάρουμε μια δεξιόστροφη βάση $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$ τότε μπορούμε να τεντώσουμε το μεγάλο δάχτυλο , το δείχτη και το μέσο δάχτυλο του δεξιού χεριού , όπως δείχνουν τα $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ αντίστοιχα .

Ορισμός . Θεωρούμε δύο διανύσματα $\bar{a},\bar{b}$ με $\varphi = \sphericalangle(\bar{a},\bar{b})$. Το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\bar{a},\bar{b}$ (με αυτή τη σειρά) είναι ένα διάνυσμα , που συμβολίζεται με $\bar{a}\times\bar{b}$ και έχει τα παρακάτω στοιχεία :

(i) Το $\bar{a}\times\bar{b}$ είναι κάθετο στα $\bar{a},\bar{b}$

(ii) $|\bar{a}\times\bar{b}|$ = μέτρο του $\bar{a}\times\bar{b} = |\bar{a}|\,|\bar{b}|\sin\varphi$

(iii) Η βάση $(\bar{a},\bar{b},\bar{a}\times\bar{b})$, όταν είναι βάση , είναι δεξιόστροφη .

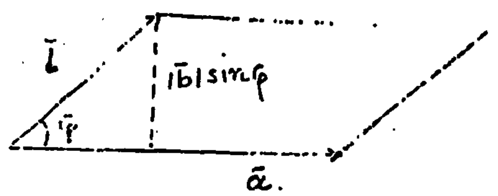
Παρατηρήσεις . (1) Το διάνυσμα $\bar{a}\times\bar{b}$ είναι καλά ορισμένο από τις ιδιότητες (i),(ii) και (iii) , αφού καθορίζεται το μέτρο του , η διεύθυνσή του (κάθετο στο $\bar{a},\bar{b}$) και η φορά του (από των (iii)) .

(2) Το $\bar{a}\times\bar{b}$ είναι μηδέν , αν και μόνο αν , τα $\bar{a},\bar{b}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα (γιατί;) .

(3) Σε αντίθεση με το εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων το εξωτερικό γινόμενο είναι μια πράξη εσωτερικής σύνθεσης στο V_3 .

Πρόταση 1 . Το μέτρο του $\bar{a}\times\bar{b}$ είναι ίσο με το εμβαδό του παραλληλογράμμου , που σχηματίζεται με πλευρές τα $\bar{a},\bar{b}$.

<u>Απόδειξη</u> . Είναι άμεση κοιτάζοντας το παρακάτω σχήμα και το γεγονός ότι : $|\bar{a}\times\bar{b}|=|\bar{a}||\bar{b}|\sin\varphi$.



Πριν προχωρήσουμε σε άλλες ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου θα προσπαθήσουμε να βρούμε τις συντεταγμένες του $\bar{a}\times\bar{b}$ συναρτήσει των συντεταγμένων των $\bar{a}$ και $\bar{b}$, επειδή για τους υπολογισμούς μας η χρήση του ορισμού του εξωτερικού δεν είναι βολική . Έχουμε λοιπόν τη παρακάτω πρόταση .

<u>Πρόταση 2</u> . Δίνεται η ΟΚΒ $(\bar{x}_0,\bar{y}_0,\bar{z}_0)$ και τα διανύσματα $\bar{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\bar{b}=(b_1,b_2,b_3)$. Τότε : $\bar{a}\times\bar{b}=(a_2b_3-a_3b_2\ ,\ a_3b_1-a_1b_3\ ,\ a_1b_2-a_2b_1)$.

<u>Απόδειξη</u> . Ας είναι $\bar{a}\times\bar{b}=\bar{c}=(c_1,c_2,c_3)$. Από την ιδιότητα (i) του ορισμού του εξωτερικού γινομένου έχουμε :

$$a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3=0 \quad \text{και} \quad b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3=0 \quad .$$

Από τις δύο αυτές σχέσεις έχουμε :

$$\frac{c_1}{a_2b_3-a_3b_2}=\frac{c_2}{a_3b_1-a_1b_3}=\frac{c_3}{a_1b_2-a_2b_1}=k=\text{η τιμή των λόγων} \ ,$$

και συνεπώς :

$$(*) \qquad \{\,c_1=k(a_2b_3-a_3b_2)\ ,\ c_2=k(a_3b_1-a_1b_3)\ ,\ c_3=k(a_1b_2-a_2b_1)\}$$

'Ετσι :

$$|\bar{c}|^2=c_1^2+c_2^2+c_3^2 = k^2\{(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_3b_1-a_1b_3)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2\}$$

$$=k^2\{a_1^2(b_2^2+b_3^2)+a_2^2(b_3^2+b_1^2)+a_3^2(b_2^2+b_1^2)-2(a_2a_3b_2b_3+a_3a_1b_1b_3+a_1b_2a_2b_1)\}$$

$$=k^2\{a_1^2(|\bar{b}|^2-b_1^2)+a_2^2(|\bar{b}|^2-b_2^2)+a_3^2(|\bar{b}|^2-b_3^2)-2(a_1b_1a_3b_3+a_1b_1a_2b_2+a_3b_3a_2b_2)\}$$

$$=k^2\{|\bar{b}|^2(a_1^2+a_2^2+a_3^2)-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2\}$$

$$=k^2\{|\bar{a}|^2|\bar{b}|^2-(a\cdot b)^2\}=k^2\{|\bar{a}|^2|\bar{b}|^2-|\bar{a}|^2|\bar{b}|^2\cos^2\varphi\}=k^2|\bar{a}|^2|\bar{b}|^2\sin^2\varphi \quad .$$

'Αρα $|\bar{c}|=|k|\,|\bar{a}|\,|\bar{b}|\sin\varphi$ και λόγω της ιδιότητας (ii) του ορισμού έχουμε , ότι $k=\pm 1$. Από τις (*) για $k=1$ και $k=-1$ παίρνουμε δύο αντίθετα διανύσματα που ικανοποιούν τις ιδιότητες (i),(ii) του ορισμού του εξωτερικού γινομένου . 'Ομως μόνο ένα από αυτά ικανοποιεί και την ιδιότητα (iii) του ορισμού . Οι τιμές $k=1$ και $k=-1$ είναι ανεξάρτητες από τα $\bar{a}$ και $\bar{b}$. 'Ετσι η ιδιότητα (iii) θα ικανοποιείται για την ίδια τιμή του k όποια διανύσματα και να πάρουμε . Παίρνουμε λοιπόν $\bar{a}=\bar{x}_0$, $\bar{b}=\bar{y}_0$ και βρίσκουμε $k=1$. 'Αρα

$$a\times b=(a_2b_3-a_3b_2\ ,\ a_3b_1-a_1b_3\ ,\ a_1b_2-a_2b_1) \quad .$$

<u>Μνημονικός κανόνας για το $\bar{a}\times\bar{b}$</u> :

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{x}_0 & \bar{y}_0 & \bar{z}_0\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=(a_2b_3-a_3b_2)\bar{x}_0+(a_3b_1-a_1b_3)\bar{y}_0+(a_1b_2-a_2b_1)\bar{z}_0$$

<u>Πρόταση 3</u> . Ισχύουν :

(i) $\bar{a}\times\bar{b} = -\bar{b}\times\bar{a}$, δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα

(ii) $(\lambda\bar{a})\times\bar{b} = \lambda(\bar{a}\times\bar{b}) = \bar{a}\times(\lambda\bar{b})$, $\lambda\in R$

(iii) $\left.\begin{array}{l}\bar{a}\times(\bar{b}+\bar{c}) = \bar{a}\times\bar{b}+\bar{a}\times\bar{c} \\ (\bar{a}+\bar{b})\times\bar{c} = \bar{a}\times\bar{c}+\bar{b}\times\bar{c}\end{array}\right\}$ επιμεριστικοί νόμοι .

<u>Απόδειξη</u> : Είναι υπολογιστική και στηρίζεται στη πρόταση 2 (Να γίνει σαν άσκηση) .

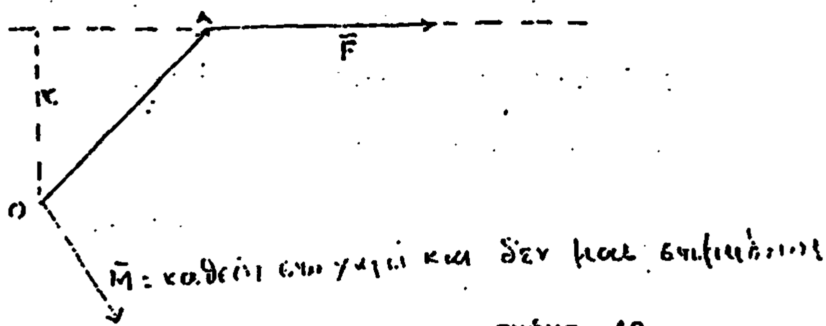
<u>Παρατήρηση</u> . Τα παρακάτω είναι φανερά και χρήσιμα στους υπολογισμούς μας . Αν $(\bar{x}_0,\bar{y}_0,\bar{z}_0)$ είναι ΟΚΒ τότε ισχύουν :

$$\bar{x}_0\times\bar{x}_0 = \bar{y}_0\times\bar{y}_0 = \bar{z}_0\times\bar{z}_0 = 0$$

$$\bar{x}_0\times\bar{y}_0 = \bar{z}_0 \ , \ \bar{y}_0\times\bar{z}_0 = \bar{x}_0 \ , \ \bar{z}_0\times\bar{x}_0 = \bar{y}_0 \ .$$

Θα συνεχίσουμε με μερικά παραδείγματα .

<u>Ένα παράδειγμα από τη Φυσική</u> . Ξέρουμε ότι η ροπή $\bar{M}$ μιας δύναμης $\bar{F}$ ως προς ένα σημείο 0 είναι μια δύναμη κάθετη στο επίπεδο που ορίζουν το 0 και η $\bar{F}$ και με μέτρο ίσο με $|\bar{F}|$.(απόσταση του 0 από το φορέα



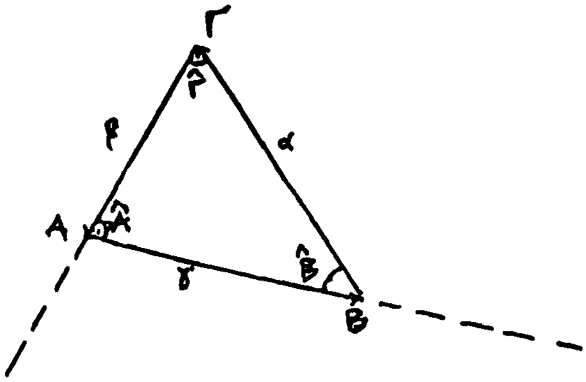
σχήμα 12

της $\bar{F}) = |F|\cdot r$ (κοίταξε σχήμα 12) . Αυτό όμως δεν είναι τίποτε άλλο παρά το $\overline{OA}\times\bar{F}$. 'Ετσι $\bar{M}=\overline{OA}\times\bar{F}$, δηλαδή η ροπή είναι ένα εξωτερικό γινόμενο .

<u>Παράδειγμα 1</u> . Ο νόμος των ημιτόνων : $\dfrac{\sin\hat{A}}{\alpha}=\dfrac{\sin\hat{B}}{\beta}=\dfrac{\sin\hat{\Gamma}}{\gamma}$

$|\overline{AB}|=\gamma$, $|\overline{B\Gamma}|=\alpha$, $|\overline{\Gamma A}|=\beta$. 'Εχουμε : $\overline{AB}+\overline{B\Gamma}+\overline{\Gamma A}=0$ (*) .
Πολλαπλασιάζοντας εξωτερικά με $\overline{AB}$ παίρνουμε :

$(\overline{AB}+\overline{B\Gamma}+\overline{\Gamma A})\times\overline{AB}=0$ ή $\overline{B\Gamma}\times\overline{AB}+\overline{\Gamma A}\times\overline{AB}=0$ ή $\overline{\Gamma A}\times\overline{AB}=-\overline{B\Gamma}\times\overline{AB}=\overline{AB}\times\overline{B\Gamma}$. 'Ετσι



σχήμα 13

$\overline{\Gamma A}\times\overline{AB}=\overline{AB}\times\overline{B\Gamma}$. 'Αρα για τα μέτρα $|\overline{\Gamma A}||\overline{AB}|\sin\hat{A}=|\overline{AB}||\overline{B\Gamma}|\sin\hat{B} \Longrightarrow$

$\beta\sin\hat{A}=\alpha\sin\hat{B} \Longrightarrow \dfrac{\sin\hat{A}}{\alpha}=\dfrac{\sin\hat{B}}{\beta}$. Πολλαπλασιάζοντας την (*) με $\overline{B\Gamma}$ μπορούμε να συμπληρώσουμε την αναλογία .

<u>Παράδειγμα 2</u> . Θα δείξουμε ότι $\sin(\varphi-\omega)=\sin\varphi\cos\omega-\sin\omega\cos\varphi$.

Θεωρούμε τα διανύσματα $\bar{a}=(\cos\omega, \sin\omega, 0)$, $\bar{b}=(\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$ όπως στο παράδειγμα 4 της σελίδας 24 . Τότε

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{x}_0 & \bar{y}_0 & \bar{z}_0\\ \cos\omega & \sin\omega & 0\\ \cos\varphi & \sin\varphi & 0\end{vmatrix}=(\cos\omega\ \sin\varphi-\cos\varphi\ \sin\omega)\bar{z}_0$$

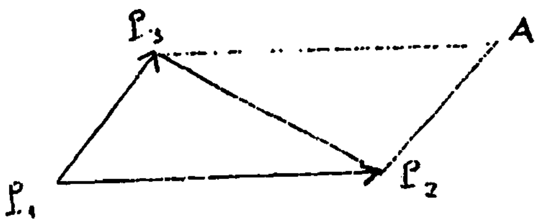
Όμως το $\bar{a}\times\bar{b}$ έχει την ίδια φορά με το $\bar{z}_0$ και μέτρο $|\bar{a}||\bar{b}|\sin(\varphi-\omega)=\sin(\varphi-\omega)$.
Άρα $\bar{a}\times\bar{b}=\sin(\varphi-\omega)\bar{z}_0$. Έτσι θα έχουμε $\sin(\varphi-\omega)\bar{z}_0=(\cos\omega\sin\varphi-\cos\varphi\sin\omega)\bar{z}_0$.
Η τελευταία σχέση μας δίνει το ζητούμενο.

<u>Παράδειγμα 3</u>. Η σχέση $|\bar{a}\times\bar{b}|=|\bar{a}||\bar{b}|\sin\sphericalangle(\bar{a},\bar{b})$ μπορεί να μας δώσει το ημίτονο της γωνίας δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\bar{a}$ και $\bar{b}$ ως :

$$(*)\quad \sin^2(\widehat{\bar{a},\bar{b}})=\frac{|\bar{a}\times\bar{b}|^2}{|\bar{a}|^2|\bar{b}|^2}=\frac{(a_2\beta_3-a_3\beta_2)^2+(a_3\beta_1-a_1\beta_3)^2+(a_1\beta_2-a_2\beta_1)^2}{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2)}$$

όπου $\bar{a}=(a_1,a_2,a_3)$ και $\bar{b}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$.

<u>Παράδειγμα 4</u>. Η πρόταση 1 της σελίδας 30 μπορεί να χρησιμοποιείτε για να υπολογίζουμε εμβαδά τριγώνων. Έτσι αν P_1,P_2,P_3 είναι τρία σημεία του χώρου, τότε όπως ξέρουμε το $|\overline{P_1P_2}\times\overline{P_1P_3}|$ μας δίνει το εμβαδόν του παραλληλο-



γράμμου με πλευρές τα $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_1P_3}$. Έτσι το εμβαδόν του τριγώνου $P_1\overset{\triangle}{P_2}P_3$ θα είναι :

$$\text{εμβαδόν}\ (P_1\overset{\triangle}{P_2}P_3)=\frac{1}{2}\,|\overline{P_1P_2}\times\overline{P_1P_3}|\ .$$

Υπολογίζουμε λοιπόν τα διανύσματα $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_1P_3}$ μετά το $\overline{P_1P_2}\times\overline{P_1P_3}$ και μετά παίρνουμε το μισό του μήκους του. Ειδικά αν τα σημεία είναι στο Oxy επίπεδο , δηλαδή : $P_1(x_1,y_1,0)$, $P_2(x_2,y_2,0)$ και $P_3(x_3,y_3,0)$. Τότε , $\overline{P_1P_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,0)$, $\overline{P_1P_3}=(x_3-x_1,y_3-y_1,0)$ και

$$\overline{P_1P_2}\times\overline{P_1P_3} = \begin{vmatrix} \bar{x}_0 & \bar{y}_0 & \bar{z}_0 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & 0 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & 0 \end{vmatrix} = \left[(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)\right]\bar{z}_0$$

'Αρα

$$\text{εμβαδόν}(\overset{\triangle}{P_1P_2P_3}) = \frac{1}{2}\left|\left[(x_2-x_1)(y_3-y_1)-(x_3-x_1)(y_2-y_1)\right]\bar{z}_0\right|$$

$$= \frac{1}{2}\,|x_2y_3-x_2y_1-x_1y_3-x_3y_2+x_3y_1+x_1y_2|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right|$$

Συνεπώς

$$\text{εμβ.}(\overset{\triangle}{P_1P_2P_3}) = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right| .$$

Οι εξωτερικές κάθετες είναι απόλυτες τιμές και οι άλλες είναι ορίζουσα . Επειδή το εμβαδόν τριγώνου είναι μηδέν , αν και μόνο αν τα σημεία P_1,P_2,P_3 είναι συνευθειακά (κείνται πάνω σε μια ευθεία), συμπεραίνουμε το εξής αποτέλεσμα από τη τελευταίασχέση : <u>Ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε τα τρία σημεία του $0xy$, $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$, $P_3(x_3,y_3)$ είναι συνευθε</u>

ακά είναι να ισχύει :

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad .$$

Ασκήσεις .

1. Να βρείτε έκφραση για το εμβαδό τριγώνου με κορυφές τα σημεία $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$ και $P_3(x_3,y_3,z_3)$.

2. Τα διανύσματα $\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma},\bar{\delta}$ με $\bar{\delta}\neq 0$ πληρούν τις σχέσεις : $\bar{\alpha}=\bar{\beta}+\bar{\gamma}$,$\bar{\beta}\cdot\bar{\delta}=0$ και $\bar{\gamma}\times\bar{\delta}=0$. Να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση , $\bar{\alpha}-\bar{\beta}=\dfrac{\bar{\alpha}\cdot\bar{\delta}}{|\bar{\delta}|^2}\,\bar{\delta}$.

7. Άλλα γινόμενα στο V_3 .

Παίρνουμε τρία διανύσματα $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ του χώρου . Η έκφραση

$$\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})$$

είναι ένας αριθμός . Επίσης η έκφραση $(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$ είναι ένας αριθμός . Αν $\bar{a}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $\bar{b}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ και $\bar{c}=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$, θα προσπαθήσουμε να βρούμε έκφραση του $\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})$ συναρτήσει των συντεταγμένων των διανυσμάτων . Πραγματικά , έχουμε :

$$\bar{b}\times\bar{c}=(\beta_2\gamma_3-\beta_3\gamma_2\ ,\ \beta_3\gamma_1-\beta_1\gamma_3\ ,\ \beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1) \quad .$$

Άρα

$$\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})=\alpha_1(\beta_2\gamma_3-\beta_3\gamma_2)+\alpha_2(\beta_3\gamma_1-\beta_1\gamma_3)+\alpha_3(\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1)$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} .$$

'Ετσι

$$(1) \qquad \bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c}) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} .$$

Κάνοντας την ίδια διαδικασία βρίσκουμε ,

$$(2) \qquad (\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} .$$

Από τις (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι αν δοθούν τρία διανύσματα $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ (με αυτή τη σειρά) τότε : $\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})=(\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c}$. Δηλαδή μπορούμε να αλλάξουμε τα σύμβολα $\cdot,\times$ χωρίς να αλλάξει το αποτέλεσμα . Τη κοινή αυτή τιμή τη συμβολίζουμε με $(\bar{a}\bar{b}\bar{c})$ ή $[\bar{a},\bar{b},\bar{c}]$ και τη λέμε <u>μικτό γινόμενο των τριών διανυσμάτων $\bar{a},\bar{b},$ και $\bar{c}$</u> (με αυτή τη σειρά) . 'Ετσι

$$(3) \qquad (\bar{a}\bar{b}\bar{c}) = \bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c}) = (\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} .$$

Με γνωστές ιδιότητες των οριζουσών συμπεραίνουμε ότι κυκλική αλλαγή των $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ δεν αλλάζει το μικτό γινόμενο , δηλαδή :

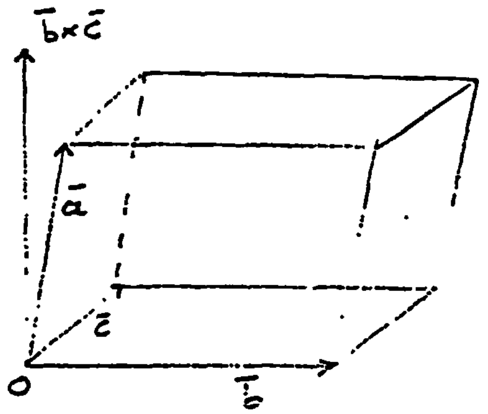
(4) $\quad (\bar{a}\bar{b}\bar{c}) = (\bar{b}\bar{c}\bar{a}) = (\bar{c}\bar{a}\bar{b})$.

Αντίθετα , όταν αλλάζουν μόνο δύο διανύσματα τότε το μικτό γινόμενο αλλάζει πρόσημο , δηλαδή

(5) $\quad (\bar{a}\bar{b}\bar{c}) = -(\bar{b}\bar{a}\bar{c}) = -(\bar{a}\bar{c}\bar{b}) = -(\bar{c}\bar{b}\bar{a})$.

<u>Γεωμετρική ερμηνεία του μικτού γινομένου</u> : θα δούμε πως ο όγκος V του παραλληλεπιπέδου με ακμές τα $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ (σχήμα 13) δίνεται από τη σχέση :

$$V = |\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})| \quad .$$



σχήμα 13

Πραγματικά :

(6) $\quad \bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c}) = |\bar{a}||\bar{b}\times\bar{c}|\cos \sphericalangle(\bar{a},\bar{b}\times\bar{c}) = |\bar{a}||\bar{b}||\bar{c}|\sin \sphericalangle(\bar{b},\bar{c})\cos \sphericalangle(\bar{a},\bar{b}\times\bar{c})$.

Έτσι

$$|\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})| = |\bar{a}||\bar{b}||\bar{c}|\sin \sphericalangle(\bar{b},\bar{c})|\cos \sphericalangle(\bar{a},\bar{b},\bar{c})| \quad .$$

Όμως : $|\bar{b}|\cdot|\bar{c}|\sin \sphericalangle(\bar{b},\bar{c})$ = εμβαδόν βάσης του παραλληλεπιπέδου .

$|\bar{a}||\cos \sphericalangle(\bar{a},\bar{b}\times\bar{c})|$ = ύψος του παραλληλεπιπέδου = απόσταση του πέρατος του $\bar{a}$ από τη βάση , διότι το $\bar{b}\times\bar{c}$ είναι κάθετο στα $\bar{b}$ και $\bar{c}$.
'Ετσι πραγματικά : V = εμβαδό βάσης · ύψος = $|\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})|$. Επειδή ο όγκος V είναι μηδέν $\Longleftrightarrow$ τα διανύσματα $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ είναι συνεπίπεδα (δηλαδή γραμμικά εξαρτημένα) συμπεραίνουμε τη πρόταση .

<u>Πρόταση 1</u> . Τα διανύσματα $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα , αν και μόνο αν $(\bar{a}\bar{b}\bar{c})=0$, δηλαδή αν και μόνο αν , ισχύει :

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0 \quad .$$

<u>Παρατήρηση</u> . Η πρόταση μας δείχνει μια μέθοδο να ελέγχουμε αν τρία διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένα ή όχι .

Παίρνουμε τώρα τρία γραμμικά ανεξάρτητα (δηλαδή μη συνεπίπεδα) διανύσματα τα $\bar{a}.\bar{b},\bar{c}$.Τότε $(\bar{a}\bar{b}\bar{c})\neq 0$. Πότε είναι $(\bar{a}\bar{b}\bar{c})>0$ και πότε $(\bar{a}\bar{b}\bar{c})<0$; Από τη σχέση (6) συμπεραίνουμε :

$$(\bar{a}\bar{b}\bar{c}) > 0 \Longleftrightarrow \cos\sphericalangle(\bar{a},\bar{b}\times\bar{c}) > 0$$

$$(\bar{a}\bar{b}\bar{c}) < 0 \Longleftrightarrow \cos\sphericalangle(\bar{a},\bar{b}\times\bar{c}) < 0 \quad .$$

Από προηγούμενη διαδικασία ξέρουμε ότι η βάση $(\bar{b},\bar{c},\bar{b}\times\bar{c})$ είναι δεξιόστροφη . Το επίπεδο των $\bar{b},\bar{c}$ χωρίζει το χώρο σε δύο ημιχώρους . 'Ετσι η συνθήκη $\cos\sphericalangle(\bar{a},\bar{b}\times\bar{c}) > 0$ σημαίνει ότι το $\bar{a}$ είναι στον ημιχώρο που είναι και το $\bar{b}\times\bar{c}$. 'Αρα η συνθήκη $\cos\sphericalangle(\bar{a},\bar{b}\times\bar{c}) > 0$ μας λέει ότι η βάση $(\bar{b},\bar{c},\bar{a})$ είναι και αυτή δεξιόστροφη . Αντίθετα η συνθήκη $\cos\measuredangle(\bar{a},\bar{b}\times\bar{c})<0$ σημαίνει ότι το $\bar{a}$ είναι στον άλλο ημιχώρο και όχι σ'αυτό που είναι το $\bar{b}\times\bar{c}$. 'Ετσι έχουμε ότι η συνθήκη $\cos\measuredangle(\bar{a},\bar{b}\times\bar{c})<0$ μας λέει ότι η βάση $(\bar{b},\bar{c},\bar{a})$ είναι αριστερόστροφη . Συνοψίζοντας : $(\bar{a}\bar{b}\bar{c})>0 \Longleftrightarrow$ ή $(\bar{b},\bar{c},\bar{a})$ άρα και η $(\bar{a},\bar{b},\bar{c},)$ είναι δεξιόστροφή . $(\bar{a}\bar{b}\bar{c})<0 \Longleftrightarrow (\bar{a},\bar{b},\bar{c})$ αριστερόστροφη .

<u>Παρατήρηση</u> . Η παραπάνω διαδικασία μας δείχνει πως ελέγχουμε αν μια βάση είναι δεξιόστροφη ή αριστερόστροφη . Υπολογίζουμε το μικτό γινόμενο . Αν είναι θετικό (αρνητικό) τότε η βάση είναι δεξιόστροφη (αριστερόστροφη) .

Αν δοθούν τρία διανύσματα $\bar{a},\bar{b}$ και $\bar{c}$. Τότε μπορούμε να σχηματίσουμε τα γινόμενα $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})$, $(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c}$. Αυτά είναι διανύσματα και λέγονται <u>δις εξωτερικά γινόμενα των διανυσμάτων $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$</u> .

Θα δείξουμε τη πρόταση .

<u>Πρόταση 2</u> . Ισχύουν οι ταυτότητες :

(i) $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})=(\bar{a}\cdot\bar{c})\bar{b}-(\bar{a}\cdot\bar{b})\bar{c}$

(ii) $(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c}=(\bar{a}\cdot\bar{c})\bar{b}-(\bar{b}\cdot\bar{c})\bar{a}$

<u>Απόδειξη</u> . (i) Αν τα $\bar{b},\bar{c}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα (δηλαδή παράλληλα) τότε κάθε μέλος της σχέσης είναι μηδέν . 'Εστω ότι τα $\bar{b},\bar{c}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα . Τότε τα $\bar{b},\bar{c}$ είναι μια βάση για τα διανύσματα του επιπέδου των $\bar{b}$ και $\bar{c}$. 'Ετσι κάθε διάνυσμα αυτού του επιπέδου θα γράφεται (κατά μοναδικό τρόπο) σαν γραμμικός συνδυασμός των $\bar{b}$ και $\bar{c}$. Τώρα το διάνυσμα $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})$ είναι κάθετο στο $\bar{b}\times\bar{c}$ άρα είναι στο επίπεδο των $\bar{b}$ και $\bar{c}$ αφού το $\bar{b}\times\bar{c}$

είναι κάθετο στα $\bar{b}$ και $\bar{c}$. 'Αρα ,

$$\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c}) = \lambda\,\bar{b} + \mu\,\bar{c} \quad .$$

Θα βρούμε τα λ και μ . 'Εστω $\bar{a} = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $\bar{b} = (\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ και $\bar{c} = (\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$.

Η τετμημένη του $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})$ είναι :

$$= \alpha_2(\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1) - \alpha_3(\beta_3\gamma_1-\beta_1\gamma_3)$$

$$= \beta_1(\alpha_2\gamma_2+\alpha_3\gamma_3) - \gamma_1(\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3)$$

$$= \beta_1(\alpha_2\gamma_2+\alpha_3\gamma_3+\alpha_1\gamma_1) - \gamma_1(\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3+\alpha_1\beta_1)$$

$$= \beta_1(\bar{a}\cdot\bar{c}) - \gamma_1(\bar{a}\cdot\bar{\beta}) = (\bar{a}.\bar{c})\beta_1 + (-(\bar{a}.\bar{\beta}))\gamma_1 \quad .$$

Η τετμημένη του $\lambda\cdot\bar{b}+\mu\cdot\bar{c}$ είναι : $\lambda\beta_1+\mu\gamma_1$.

'Αρα πρέπει(!): $\lambda = (\bar{a}\cdot\bar{c})$ και $\mu = -(\bar{a}\cdot\bar{\beta})$.

Συνεπώς : $\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c}) = (\bar{a}\cdot\bar{c})\bar{b} - (\bar{a}\cdot\bar{b})\bar{c}$.

(ii) $(\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c} = -\bar{c}\times(\bar{a}\times\bar{b}) \xrightarrow[(i)]{} \{(\bar{c}\bar{b})\bar{a}-(\bar{c}\bar{a})\bar{b}\}$

$$= (\bar{a}\bar{c})\bar{b}-(\bar{b}\bar{c})\bar{a} \quad .$$

<u>Παρατήρηση</u> . Από τη πρόταση 2 προκύπτει ότι , για το εξωτερικό γινόμενο δεν ισχύει γενικά η προσεταιριστική ιδιότητα . Δηλαδή γενικά έχουμε :

$$\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c}) \neq (\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c} \quad .$$

<u>Πόρισμα</u> . Για τρία διανύσματα $\bar{a},\bar{b}$ και $\bar{c}$ ισχύει η ταυτότητα , γνωστή σα <u>ταυτότητα του Jacobi</u> :

$$\bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c})+\bar{b}\times(\bar{c}\times\bar{a})+\bar{c}\times(\bar{a}\times\bar{b})=0 \quad .$$

<u>Απόδειξη</u> . Γράφουμε κάθε όρο του αθροίσματος όπως στο (i) της πρότασης 2 και προσθέτουμε .

Δίνονται τώρα τέσσερα διανύσματα $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$, και $\bar{d}$. Μπορούμε να κάνουμε τα παρακάτω γινόμενα :

$$(\bar{a}\times\bar{b})\cdot(\bar{c}\times\bar{d})$$

$$(\bar{a}\times\bar{b})\times(\bar{c}\times\bar{d}) \quad .$$

Τα γινόμενα αυτά λέγονται <u>τετραπλά γινόμενα</u> .

Θα κάνουμε μερικά σχόλια για αυτά τα γινόμενα . Έχουμε :

$$(\bar{a}\times\bar{b})\cdot(\bar{c}\times\bar{d}) \xrightarrow[\text{θέτουμε}]{\bar{a}\times\bar{b}=\bar{e}} \bar{e}\cdot(\bar{c}\times\bar{d}) \xrightarrow[\cdot,\times]{\text{αλλάζουμε}} (\bar{e}\times\bar{c})\cdot\bar{d}$$

$$=((\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{c})\cdot\bar{d} \xrightarrow[\text{(ii)}]{\text{πρόταση 2}} ((\bar{a}\cdot\bar{c})\bar{b}-(\bar{b}\bar{c})\bar{a})\cdot\bar{d} \quad .$$

$$=(\bar{a}\cdot\bar{c})(\bar{b}\cdot\bar{d})-(\bar{b}.\bar{c})(\bar{a}\cdot\bar{d}) = \begin{vmatrix} \bar{a}\cdot\bar{c} & \bar{a}\cdot\bar{d} \\ \bar{b}\cdot\bar{c} & \bar{b}\cdot\bar{d} \end{vmatrix}$$

Εφαρμόζοντας τη σχέση που μόλις βγάλαμε παίρνουμε

$$|\bar{a}\times\bar{b}|^2 = (\bar{a}\times\bar{b})\cdot(\bar{a}\times\bar{b}) = \begin{vmatrix} \bar{a}\cdot\bar{a} & \bar{a}\cdot\bar{b} \\ \bar{a}\cdot\bar{b} & \bar{b}\cdot\bar{b} \end{vmatrix} = |\bar{a}|^2|\bar{b}|^2-(\bar{a}\cdot\bar{b})^2 \quad .$$

Δηλαδή : $|\bar{a}\times\bar{b}|^2 = |\bar{a}|^2|\bar{b}|^2-(\bar{a}\cdot\bar{b})^2$.Την τελευταία ταυτότητα αν τη γράψουμε σε συντεταγμένες με $\bar{a}=(a_1,a_2,a_3)$ και $\bar{b}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ παίρνουμε :

$$(a_1\beta_2-a_2\beta_1)^2+(a_2\beta_3-a_3\beta_2)^2+(a_1\beta_3-a_3\beta_1)^2=(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2)-(a_1\beta_1+a_2\beta_2+a_3\beta_3)^2$$

που είναι γνωστή σαν ταυτότητα του Langrange .

Τώρα από το άλλο τετραπλό γινόμενο , αν το υπολογίσουμε με δύο διαφορετικούς τρόπους θα πάρουμε μια πολύ σημαντική ταυτότητα . Έχουμε :

$$(\bar{a}\times\bar{b})\times(\bar{c}\times\bar{d}) \xrightarrow[\text{θέτουμε}]{\bar{a}\times\bar{b}=\bar{e}} \bar{e}\times(\bar{c}\times\bar{d}) \xrightarrow[\text{(i)}]{\text{πρόταση 2}} (\bar{e}\cdot\bar{d})\bar{c}-(\bar{e}\cdot\bar{c})\bar{d}$$

$$=((\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{d})\bar{c}-((\bar{a}\times\bar{b})\cdot\bar{c})\bar{d}=(\bar{a}\bar{b}\bar{d})\bar{c}-(\bar{a}\bar{b}\bar{c})\bar{d} \quad .$$

Έτσι

$$(*) \qquad (\bar{a}\times\bar{b})\times(\bar{c}\times\bar{d})=(\bar{a}\bar{b}\bar{d})\bar{c}-(\bar{a}\bar{b}\bar{c})\bar{d} \quad .$$

Όμοια

$$(\bar{a}\times\bar{b})\times(\bar{c}\times\bar{d}) \xrightarrow[\text{θέτουμε}]{\bar{c}\times\bar{d}=\bar{e}} (\bar{a}\times\bar{b})\times\bar{e} \xrightarrow[\text{(ii)}]{\text{πρόταση 2}} (\bar{a}\cdot\bar{e})\bar{b}-(\bar{b}\cdot\bar{e})\bar{a}$$

$$=(\bar{a}\cdot(\bar{c}\times\bar{d}))\bar{b}-(\bar{b}\cdot(\bar{c}\times\bar{d}))\bar{a}=(\bar{a}\bar{c}\bar{d})\bar{b}-(\bar{b}\bar{c}\bar{d})\bar{a} \quad .$$

Έτσι ,

$$(**) \qquad (\bar{a}\times\bar{b})\times(\bar{c}\times\bar{d})=(\bar{a}\bar{c}\bar{d})\bar{b}-(\bar{b}\bar{c}\bar{d})\bar{a} \quad .$$

Από τις (*) και (**) εξισώνοντας τα δεύτερα μέλη παίρνουμε

$$(\bar{a}\bar{b}\bar{d})\bar{c}-(\bar{a}\bar{b}\bar{c})\bar{d}=(\bar{a}\bar{c}\bar{d})\bar{b}-(\bar{b}\bar{c}\bar{d})\bar{a}$$

ή

$$(\bar{a}\bar{b}\bar{c})\bar{d}=(\bar{b}\bar{c}\bar{d})\bar{a}-(\bar{a}\bar{c}\bar{d})\bar{b}+(\bar{a}\bar{b}\bar{d})\bar{c}$$

ή αλλάζοντας κυκλικά κάποιες τριάδες διανυσμάτων

$$(\bar{a}\bar{b}\bar{c})\bar{d} = (\bar{d}\bar{b}\bar{c})\bar{a} + (\bar{a}\bar{d}\bar{c})\bar{b} + (\bar{a}\bar{b}\bar{d})\bar{c} \quad .$$

Τώρα αν $(\bar{a}\bar{b}\bar{c}) \neq 0$ (δηλαδή τα $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ γραμμικά ανεξάρτητα) έχουμε :

$$\bar{d} = \frac{(\bar{d}\bar{b}\bar{c})}{(\bar{a}\bar{b}\bar{c})}\bar{a} + \frac{(\bar{a}\bar{d}\bar{c})}{(\bar{a}\bar{b}\bar{c})}\bar{b} + \frac{(\bar{a}\bar{b}\bar{d})}{(\bar{a}\bar{b}\bar{c})}\bar{c} \quad . \tag{+}$$

Αυτή είναι η ταυτότητα που ζητούσαμε και η οποία μας λέει πως αναλύεται ένα διάνυσμα $\bar{d}$ στη βάση $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$ δηλαδή μας δίνει τις συντεταγμένες του $\bar{d}$ ως προς τη βάση $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$. Αμέσως τώρα θα δώσουμε μια εφαρμογή αυτής της ταυτότητας στη θεωρία γραμμικών συστημάτων .

Θεωρούμε ένα γραμμικό σύστημα τριών εξισώσεων με τρεις αγνώστους :

$$(1) \quad \begin{aligned} \alpha_1x+\beta_1y+\gamma_1z &= \delta_1 \\ \alpha_2x+\beta_2y+\gamma_2z &= \delta_2 \\ \alpha_3x+\beta_3x+\gamma_3z &= \delta_3 \end{aligned}$$

Το σύστημα (1) μπορούμε να το γράψουμε ως :

$$\begin{aligned} (\delta_1,\delta_2,\delta_3) &= (\alpha_1x+\beta_1y+\gamma_1z,\ \alpha_2x+\beta_2y+\gamma_2z,\ \alpha_3x+\beta_3y+\gamma_3z) \\ &= x(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)+y(\beta_1,\beta_2,\beta_3)+z(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3) \end{aligned} \quad ,$$

ή θέτοντας $\bar{d} = (\delta_1,\delta_2,\delta_3)$, $\bar{a} = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $\bar{b} = (\beta_1,\beta_2,\beta_3)$, $\bar{c} = (\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$ παίρνουμε :

$$(2) \qquad \bar{d} = x\bar{a} + y\bar{b} + z\bar{c} \quad .$$

Υποθέτουμε ότι η ορίζουσα των συντελεστών των αγνώστων είναι διάφορη του μηδενός. Αυτό ισοδυναμεί με το να υποθέσουμε ότι τα $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Έτσι η λύση του συστήματος ανάγεται στο πρόβλημα να βρούμε τις συντεταγμένες του $\bar{d}$ ως προς τη βάση $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$. Αυτές οι συντεταγμένες και συνεπώς η λύση του συστήματος δίνονται από τη ταυτότητα (+) της σελίδας 45 και είναι :

$$x=\frac{(\bar{d}\bar{b}\bar{c})}{(\bar{a}\bar{b}\bar{c})}\ ,\quad y=\frac{(\bar{a}\bar{d}\bar{c})}{(\bar{a}\bar{b}\bar{c})}\quad \text{και}\quad z=\frac{(\bar{a}\bar{b}\bar{d})}{(\bar{a}\bar{b}\bar{c})}\ .$$

Αν αντικαταστήσουμε τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d}$ θα πάρουμε τη λύση του συστήματος με τη μέθοδο Cramer.

8. <u>Απλός λόγος τριών σημείων</u>.

Πάνω σε μια ευθεία (ε) δίνονται δύο διαφορετικά σημεία Α και Β. Ένα τρίτο σημείο <u>$P\neq B$ λέμε ότι χωρίζει τα Α,Β σε λόγο λ (λ πραγματικός) και γράφουμε $(ABP)=\lambda$, αν και μόνο αν, ισχύει $\overline{AP}=\lambda\overline{PB}$</u>.

Αντιμετωπίζουμε τα παρακάτω δύο προβλήματα.

<u>Πρόβλημα 1ον</u>. Να βρούμε τις συντεταγμένες του σημείου P όταν ξέρουμε τις συντεταγμένες των Α,Β και το λόγο λ.

<u>Πρόβλημα 2ον</u>. Να βρούμε το διάνυσμα θέσης, ως προς μια οποιαδήποτε αρχή, του σημείου P όταν ξέρουμε τα διανύσματα θέσης των Α,Β και το λόγο λ.

<u>Σχετικά με το πρώτο πρόβλημα</u>. Αν $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$ και

$P(x,y,z)$, παίρνουμε από τη σχέση $\overline{AP} = \lambda\overline{PB}$ ότι :

$$(x-x_1 \,,\, y-y_1 \,,\, z-z_1) = \lambda(x_2-x \,,\, y_2-y \,,\, z_2-z)$$

ή

$$x-x_1 = \lambda(x_2-x) \quad , \quad y-y_1 = \lambda(y_2-y) \quad , \quad z-z_1 = \lambda(z_2-z)$$

ή

$$(1+\lambda)x = x_1+\lambda x_2 \quad , \quad (1+\lambda)y = y_1+\lambda y_2 \quad , \quad (1+\lambda)z = z_1+\lambda z_2 \quad .$$

Όμως $\lambda \neq -1$, αφού $A \neq B$. Πραγματικά , για $\lambda=-1$ έχουμε $\overline{AP}=-\overline{PB}$ ή $\overline{AP}+\overline{PB}=0$ ή $\overline{AB}=0$ ή $A \equiv B$. Έτσι από τις τελευταίες σχέσεις έχουμε ότι οι συντεταγμένες του P δίνονται από τις σχέσεις :

$$x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda} \quad , \quad y = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda} \quad , \quad z = \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda} \quad .$$

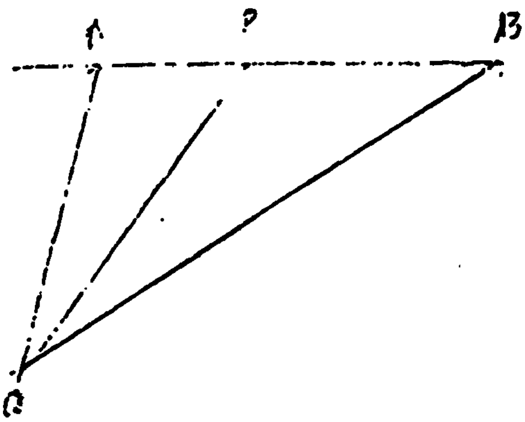
<u>Παρατηρήσεις</u> . (1) Αν το P είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB τότε $AP=PB$ και συνεπώς $(ABP)=1$. Έτσι οι συντεταγμένες του μέσου είναι τα ημιαθροίσματα των ομωνύμων συντεταγμένων των άκρων . Δηλαδή :

$$x = \frac{x_1+x_2}{2} \quad , \quad y = \frac{y_1+y_2}{2} \quad \text{και} \quad z = \frac{z_1+z_2}{2} \quad .$$

(2) Στη περίπτωση που $A \equiv B$, τότε για κάθε σημείο P του χώρου ισχύει ότι : $\overline{AB} = 0$ ή $\overline{AP}+\overline{PB}=0$ ή $\overline{AP}=-\overline{PB}$. Έτσι σ'αυτή τη περίπτωση μπορούμε να πούμε ότι : Για $A \equiv B$ και $P \neq A$ ισχύει $(ABP)=-1$.

(3) Αν $A \neq B$ και $P=B$, τότε η σχέση $\overline{AP}=\lambda\overline{PB}$ μπορούμε να δεχτούμε ότι ισχύει για $\lambda=\infty$. Έτσι για $A \neq B$ έχουμε : $(ABB)=\infty$.

<u>Σχετικά με το δεύτερο πρόβλημα</u> : Από τη σχέση $\overline{AP}=\lambda\overline{PB}$ παίρνουμε : $\overline{OP}-\overline{OA}=\lambda(\overline{OB}-\overline{OP})$ ή $(1+\lambda)\overline{OP}=\overline{OA}+\lambda\overline{OB}$. Πάλι αν $\lambda=-1$, τότε $A\equiv B$ και το



P είναι οποιοδήποτε . Αν $\lambda\neq-1$ τότε το διάνυσμα θέσης του P είναι :

$$\overline{OP}=\frac{1}{1+\lambda}\overline{OA}+\frac{\lambda}{1+\lambda}\overline{OB} \quad .$$

Παρατηρούμε ότι το άθροισμα των συντελεστών των $\overline{OA}$ και $\overline{OB}$ είναι 1 . Πραγματικά , $\frac{1}{1+\lambda}+\frac{\lambda}{1+\lambda}=1$. Αυτή η παρατήρηση μας οδηγεί να εξετάσουμε το παρακάτω πρόβλημα .

<u>Πρόβλημα</u> . Πάνω σε μια ευθεία (ε) δίνονται δύο διαφορετικά σημεία A και B . Αν για ένα σημείο P του χώρου ισχύει

$$\overline{OP}=m\,\overline{OA}+n\,\overline{OB} \quad \text{με} \quad m+n=1 \quad ,$$

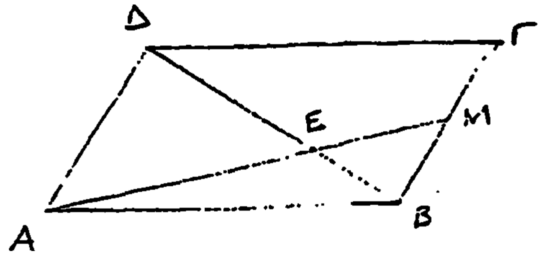
τότε το P είναι πάνω στην ευθεία που γίνεται από τα A,B και ισχύει $(ABP)=\frac{n}{m}$.

<u>Απόδειξη</u> . Από τη σχέση $\overline{OP}=m\overline{OA}+n\overline{OB}$, επειδή $m+n=1$, παίρνουμε , $(m+n)\overline{OP}=m\overline{OA}+n\overline{OB} \Longrightarrow m(\overline{OP}-\overline{OA})=n(\overline{OB}-\overline{OP}) \Longrightarrow m\overline{AP}=n\overline{PB}$. Αν $m=0$, τότε

n=1 και η αρχική σχέση γίνεται $\overline{OP}=\overline{OB} \Longrightarrow P\equiv B$, άρα το P είναι πάνω στην ευθεία που ζητάμε και επί πλέον $(ABP)=\infty=\frac{1}{0}=\frac{n}{m}$. Αν $m\neq 0$, τότε $\overline{AP}=\frac{n}{m}\overline{PB}$. Αυτό μας δείχνει ότι το P είναι πάνω στην ευθεία (ε) αφού $\overline{AP},\overline{PB}$ είναι συγγραμμικά και επί πλέον $(ABP)=\frac{n}{m}$.

Αυτά τα τρία προβλήματα είναι πολύ χρήσιμα , όταν θέλουμε να εξετάσουμε στοιχειώδη γεωμετρικά προβλήματα . Το πως δουλεύουμε θα φανεί στα παρακάτω τρία παραδείγματα .

<u>Παράδειγμα</u> 1 . Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ . Ενώνουμε με ευθεία τη κορυφή Α με το μέσο Μ της ΒΓ. Η ευθεία αυτή χωρίζει τη διαγώνιο ΒΔ σε δύο τμήματα , από τα οποία το ένα έχει διπλάσιο μήκος από το άλλο .



<u>Απόδειξη</u> . Θεωρούμε σαν αρχή των διανυσμάτων το Α και ας υποθέσουμε ότι (ΔΒΕ)=λ δηλαδή : $\overline{ΔΕ}=λ\overline{ΕΒ}$. Από το δεύτερο πρόβλημα έχουμε :

(1) $$\overline{ΑΕ}=\frac{1}{1+λ}\overline{ΑΔ}+\frac{λ}{1+λ}\overline{ΑΒ}$$.

'Ομως $\overline{ΑΕ}=μ\overline{ΑΜ}=μ(\frac{\overline{ΑΓ}+\overline{ΑΒ}}{2})=μ\frac{\overline{ΑΔ}+\overline{ΔΓ}+\overline{ΑΒ}}{2} \underline{\underline{\overline{ΔΓ}=\overline{ΑΒ}}} \frac{μ}{2}\overline{ΑΔ}+μ\overline{ΑΒ}$.

'Αρα

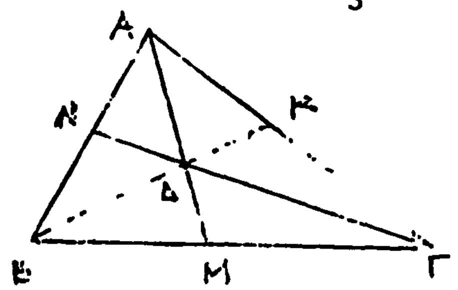
(2) $$\overline{ΑΕ}=\frac{μ}{2}\overline{ΑΔ}+μ\overline{ΑΒ}$$.

Τα διανύσματα $\overline{AB},\overline{AΔ}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα , άρα βάση για τα διανύσματα του επιπέδου του παραλληλογράμμου : Έτσι από τις (1) και (2) παίρνουμε

$$\frac{1}{1+\lambda}=\frac{\mu}{2} \quad \text{και} \quad \frac{\lambda}{1+\lambda}=\mu \quad .$$

Από τις οποίες παίρνουμε : $\lambda=2$ και $\mu=\frac{2}{3}$. Έτσι έχουμε το ζητούμενο .

<u>Παράδειγμα 2</u> . Οι διάμεσοι ενός τριγώνου ΑΒΓ τέμνονται σε κοινό σημείο που απέχει από κάθε κορυφή τα $\frac{2}{3}$ της αντίστοιχης διαμέσου .



<u>Απόδειξη</u> . Φέρνουμε τις διαμέσους ΑΜ και ΓΝ , που τέμνονται στο Δ . Θα δείξουμε ότι η ΒΔ , αν προεκταθεί περνά από το μέσο της ΑΓ . Θεωρούμε σαν αρχή των διανυσμάτων το Β . Θέτουμε : (ΑΜΔ)=λ , (ΓΝΔ)=μ . Έχουμε :

(1) $\overline{BΔ}=\frac{1}{1+\lambda}\overline{BA}+\frac{\lambda}{1+\lambda}\overline{BM}$, επειδή (ΑΜΔ)=λ

(2) $\overline{BΔ}=\frac{1}{1+\mu}\overline{BΓ}+\frac{\mu}{1+\mu}\overline{BN}$, επειδή (ΓΝΔ) = μ

Αλλά , $\overline{BA}=2\overline{BN}$, $\overline{BΓ}=2\overline{BM}$. Έτσι από τις (1) και (2) παίρνουμε :

$$\frac{1}{1+\lambda}2\overline{BN}+\frac{\lambda}{1+\lambda}\overline{BM}=\frac{1}{1+\mu}2\overline{BM}+\frac{\mu}{1+\mu}\overline{BN} \quad .$$

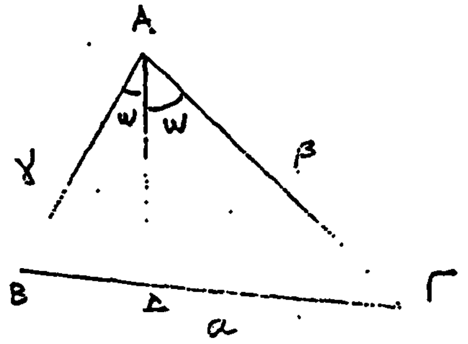
Επειδή τα $\overline{BM}$, $\overline{BN}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα από τη τελευταία σχέση έχουμε

$\frac{2}{1+\lambda} = \frac{\mu}{1+\mu}$ και $\frac{\lambda}{1+\lambda} = \frac{2}{1+\mu}$. Συνεπώς $\lambda=\mu=2$ ή

$\overline{A\Delta} = 2\overline{\Delta M}$ και $\overline{\Gamma\Delta} = 2\overline{\Delta N}$. Αυτό δείχνει αυτό που θέλουμε αφού η διάμεσος από το Β θα τέμνει την ΑΜ πάλι στο Δ .

Παράδειγμα 3. . Ας είναι ΑΔ η εσωτερική διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ . θέτουμε $|\overline{AB}|=\gamma$, $|\overline{A\Gamma}|=\beta$, $|\overline{B\Gamma}|=\alpha$. Θα δείξουμε ότι :

$$\overline{A\Delta} = \frac{1}{\beta+\gamma}\left[\beta\,\overline{AB}+\gamma\,\overline{A\Gamma}\right]$$



θέτουμε (ΒΓΔ)=λ . Θεωρούμε σαν αρχή των διανυσμάτων το Α . Έτσι , σύμφωνα με το πρόβλημα 2 της σελίδας 48 θα έχουμε :

$$(*) \qquad \overline{A\Delta} = \frac{1}{1+\lambda}\overline{AB} + \frac{\lambda}{1+\lambda}\overline{A\Gamma} \quad .$$

Όμως το διάνυσμα $\overline{A\Delta}$ είναι πολλαπλάσιο του διανύσματος

$\frac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|} + \frac{\overline{A\Gamma}}{|\overline{A\Gamma}|} = \frac{\overline{AB}}{\gamma} + \frac{\overline{A\Gamma}}{\beta}$ (άσκηση 1, σελ.52) . Έτσι θα έχουμε και

$$(**) \qquad \overline{A\Delta} = \mu\left(\frac{\overline{AB}}{\gamma} + \frac{\overline{A\Gamma}}{\beta}\right) \quad .$$

Από (*),(**) παίρνουμε , αφού τα $\overline{AB},\overline{A\Gamma}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα ότι :

$$\frac{\mu}{\gamma} = \frac{1}{1+\lambda} \quad , \quad \frac{\mu}{\beta} = \frac{\lambda}{1+\lambda} \qquad \text{ή}$$

$\lambda = \frac{\gamma}{\beta}$ και συνεπώς $\mu = \frac{\beta\gamma}{\gamma+\beta}$. Έτσι από την (**) έχουμε

$$\overline{A\Delta} = \frac{1}{\beta+\gamma}\,[\beta\,\overline{AB} + \gamma\,\overline{A\Gamma}]$$

Παρεπιπτόντως δείξαμε ότι $\lambda = \frac{\gamma}{\beta}$. Έτσι $(B\Gamma\Delta) = \frac{\gamma}{\beta}$ και συνεπώς $\overline{B\Delta} = \frac{\gamma}{\beta}\,\overline{\Delta\Gamma}$ και επειδή τα $\overline{B\Delta},\overline{\Delta\Gamma}$ είναι ομόρροπα έχουμε ότι : $\frac{|\overline{B\Delta}|}{|\overline{\Delta\Gamma}|} = \frac{\gamma}{\beta} = \frac{|\overline{AB}|}{|\overline{A\Gamma}|}$.

Η τελευταία σχέση , όπως ξέρουμε από την επιπεδομετρία του Λυκείου είναι γνωστή σαν θεώρημα της διχοτόμου .

Ασκήσεις στο Κεφάλαιο I .

1. Δίνονται τα διανύσματα $\overline{OA}=\bar{a}$ και $\overline{OB}=\bar{b}$. Να δείξετε ότι το διάνυσμα $|\bar{b}|\bar{a}+|\bar{a}|\bar{b}$ έχει τη διεύθυνση της διχοτόμου της γωνίας AOB . Να βρείτε τη διεύθυνση της διχοτόμου της παραπληρωματικής γωνίας .

2. Να αναλυθεί το διάνυσμα $\bar{a}=(1,2,3)$ σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μια είναι συγγραμμική με το $\bar{b}=(1,1,1)$.

3. Δίνεται η βάση $(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$. Να κατασκευάσετε μια ΟΚΒ $(\bar{x}_0,\bar{y}_0,\bar{z}_0)$ έτσι ώστε το $\bar{x}_0$ είναι γραμμικός συνδυασμός του $\bar{a}$ και το $\bar{y}_0$ γραμμικός συνδυασμός των $\bar{a}$ και $\bar{b}$.

4. Να αποδείξετε τον τύπο του Ήρωνα για το εμβαδό Ε τριγώνου :

$E=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$, όπου τ=ημιπερίμετρος του τριγώνου και α,β,γ τα μήκη των πλευρών του .

5. Το διάνυσμα θέσης του σημείου τομής G των διαμέσων(του κέντρου βάρους) τριγώνου ΑΒΓ , ως προς αρχή O είναι : $\overline{OG}=\frac{1}{3}(\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{O\Gamma})$.

6. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ . Αν με τις διαγώνιες κατασκευάσουμε καινούργιο παραλληλόγραμμο , τότε το εμβαδό του δεύτερου παραλληλογράμμου είναι διπλάσιο από το εμβαδό του αρχικού .

7. Δίνεται $\bar{b}=(1,2,3)$ και $\bar{c}=(7,1,-3)$. Να λυθεί η διανυσματική εξίσωση: $\bar{x}=\bar{b}+\bar{c}\times\bar{x}$.

8. Να βρείτε τις εσωτερικές γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ με κορυφές Α(2,-1,3), Β(1,1,1) και Γ(0,0,5) . Επίσης να βρείτε το εμβαδό του .

9. Δύο μοναδιαία διανύσματα $\bar{e}_1,\bar{e}_2$ σχηματίζουν γωνία 45^o . Να βρείτε το εμβαδό παραλληλογράμμου με διαγώνιες τα διανύσματα $2\bar{e}_1-\bar{e}_2$ και $4\bar{e}_1-5\bar{e}_2$.

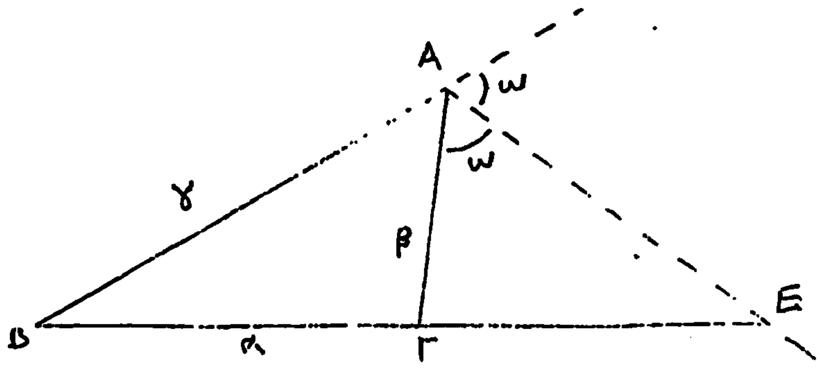
10. Μια πυραμίδα έχει κορυφές τα σημεία Α(2,0,0) , Β(0,3,0) , Γ(0,0,6) και Δ(2,3,8) . Να βρείτε τον όγκο της και το ύψος από τη κορυφή Δ .

11. Δείξτε ότι τα διανύσματα : $\bar{a}=(1,1,4)$, $\bar{b}=(1,-2,0)$ και $\bar{c}=(3,-3,4)$ είναι γραμμικά εξαρτημένα . Να βρείτε ένα από αυτά ως γραμμικό συνδυασμό των άλλων δύο .

12. Δίνεται μια βάση $(\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3)$. Δείξτε ότι υπάρχει μοναδική βάση $(\bar{b}_1,\bar{b}_2,\bar{b}_3)$ ώστε : $\bar{a}_i\cdot\bar{b}_j=\delta_{ij}$ $(i,j=1,2,3)$. Δείξτε επίσης ότι για κάθε διάνυσμα $\bar{x}$ ισχύει : $\bar{x}=\sum_{i=1}^{3}(\bar{x}\cdot\bar{b}_i)\bar{a}_i$. (Οι δύο βάσεις $(\bar{a}_1,\bar{a}_2,\bar{a}_3)$, $(\bar{b}_1,\bar{b}_2,\bar{b}_3)$

για τις οποίες ισχύει η $\bar{a}_i \cdot \bar{b}_j = \delta_{ij}$ λέγονται <u>αντίστροφες βάσεις</u>) .

13. Στο σχήμα η ΑΕ είναι διχοτόμος της εξωτερικής γωνίας Α του τρι-



γώνου ΑΒΓ . Αν $|\overline{AB}|=\gamma$, $|\overline{B\Gamma}|=\alpha$, $|\overline{A\Gamma}|=\beta$ να δείξετε ότι :

$$\overline{AE} = \frac{1}{\beta-\gamma}\,(\beta\,\overline{AB} - \gamma\,\overline{A\Gamma}) \quad .$$

14. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Δ,Ε,Ζ επί των ευθειών , που ορίζοντα από τις ΒΓ , ΓΑ , ΑΒ αντίστοιχα . Θέτουμε $(ABZ)=\lambda$, $(B\Gamma\Delta)=\mu$, $(\Gamma AE)=\nu$,

και $\omega = \dfrac{\text{εμβαδό } \Delta EZ}{\text{εμβαδό } AB\Gamma}$.

α) Να βρείτε το ω συναρτήσει των λ,μ,ν.

β) Αν $\lambda=\mu=\nu>0$, να δείξετε ότι η μικρότερη τιμή του ω είναι $\frac{1}{4}$. Πως είναι τότε το τρίγωνο ΔΕΖ ;

γ) (Θεώρημα Μενελάου). Τα Δ,Ε,Ζ κείνται επ'ευθείας , αν και μόνο αν , $\lambda\mu\nu+1=0$.

δ) Να δείξετε ότι $\overline{A\Delta}+\overline{BE}+\overline{\Gamma Z}=0$, αν και μόνο αν , $\lambda=\mu=\nu$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΙΙ : ΕΥΘΕΙΑ - ΕΠΙΠΕΔΟ - ΣΦΑΙΡΑ

1. Επιφάνειες και καμπύλες.

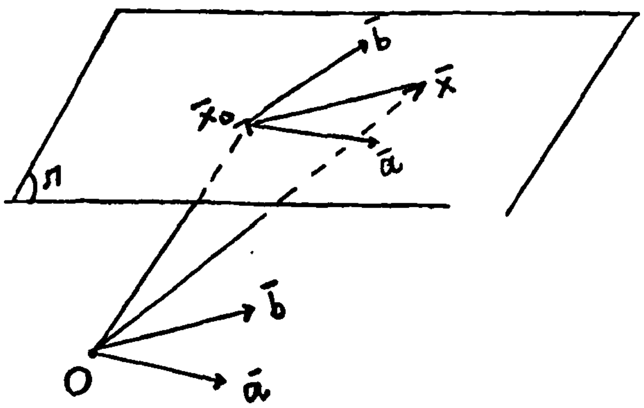
Δίνεται μια πραγματική συνάρτηση $f(x,y,z)$ με τρεις μεταβλητές. 'Ενα σημείο $P(x_1,y_1,z_1)$ του χώρου λέγεται λύση της εξίσωσης $f(x,y,z)=0$, αν $f(x_1,y_1,z_1)=0$. Μια εξίσωση μπορεί να έχει και ένα μόνο σημείο σαν λύση ή να μην έχει κανένα σημείο σαν λύση, όπως για παράδειγμα η $x^2+y^2+z^2=0$ ή η $x^2+y^2+z^2=-1$. Οπωσδήποτε όμως το σύνολο των λύσεων της $f(x,y,z)=0$, είναι ένα σύνολο σημείων (γεωμετρικός τόπος των σημείων, που ικανοποιούν την $f(x,y,z)=0$) το οποίο λέμε επιφάνεια με στοιχειώδη έννοια. Στο μάθημα "Στοιχεία διαφορικής γεωμετρίας" θα δούμε τον ακριβή ορισμό της επιφάνειας. 'Ετσι ένα πρόβλημα που γεννάται αμέσως είναι : Δίνεται η εξίσωση $f(x,y,z)=0$. Να βρεθεί το σύνολο των λύσεών της και να αναγνωρίσουμε αν είναι δυνατό το γεωμετρικό σχήμα αυτού του συνόλου. 'Ενα πρόβλημα αρκετά δύσκολο. Επειδή όμως η αναλυτική γεωμετρία στοχεύει στην αλγεβροποίηση των γεωμετρικών προβλημάτων και στην επίλυση τους με αλγεβρικές μεθόδους, το παρακάτω πρόβλημα μας ενδιαφέρει περισσότερο : Δίνεται ένα γεωμετρικό αντικείμενο (σχήμα), όπως για παράδειγμα, σφαίρα, κώνος, κύλινδρος κ.λ.π. Να βρούμε την εξίσωση $f(x,y,z)=0$, για την οποία το γεωμετρικό σχήμα που δόθηκε είναι το σύνολο των λύσεων.

Μια καμπύλη γενικά είναι τομή δύο επιφανειών. Είναι δηλαδή το σύνολο των σημείων $P(x,y,z)$ που είναι λύση του συστήματος $\{f(x,y,z)=0 \;,\; g(x,y,z)=0\}$. Για τις καμπύλες αντιμετωπίζουμε δύο ανάλογα προβλήματα όπως για τη περίπτωση των επιφανειών.

2 . Επίπεδο

Ορισμός . Δίνονται ένα σημείο P_0 του χώρου , με διάνυσμα θέσης ως προς αρχή O το $\bar{x}_0=(x_0,y_0,z_0)$, και δύο διανύσματα $\bar{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\bar{b}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ γραμμικά ανεξάρτητα . Επίπεδο π από το σημείο P_0 και παράλληλο προς τα διανύσματα $\bar{a}$ και $\bar{b}$ είναι το σύνολο των σημείων του χώρου με διάνυσμα θέσης $\bar{x}$ έτσι ώστε :

(1) $\bar{x}=\bar{x}_0+\lambda\,\bar{a}+\mu\,\bar{b}$, $-\infty<\lambda,\mu<\infty$ λ,μ πραγματικοί



Η εξίσωση (1) λέγεται διανυσματική εξίσωση επιπέδου , που καθορίζεται από σημείο P_0 και δύο διανύσματα $\bar{a}$ και $\bar{b}$.

Παρατήρηση : Αν θέλουμε να βρούμε διάφορα σημεία του επιπέδου αρκεί να δώσουμε διαφορες τιμές στα λ,μ . Βέβαια δίνοντας διαφορες τιμές στα λ και μ παίρνουμε τα διανύσματα θέσης των σημείων του επιπέδου .

Τώρα,αν $P(x,y,z)$ είναι τυχαίο σημείο του επιπέδου με διάνυσμα θέσης $\bar{x}$ παίρνουμε από την (1) ότι :

$$(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+\lambda\,(a_1,a_2,a_3)+\mu\,(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$$

ή

$$(2)\qquad \begin{cases} x = x_0 + \lambda\alpha_1 + \mu\beta_1 \\ y = y_0 + \lambda\alpha_2 + \mu\beta_2 \\ z = z_0 + \lambda\alpha_3 + \mu\beta_3 \end{cases}$$

Οι εξισώσεις (2) λέγονται <u>παραμετρικές εξισώσεις του επιπέδου , που καθορίζεται από το σημείο P_0 και τα διανύσματα $\bar{a}$ και $\bar{b}$</u> .

<u>Παρατήρηση</u> . Δίνοντας διάφορες τιμές στις παραμέτρους λ και μ παίρνουμε από τις (2) τις συντεταγμένες x,y,z των σημείων του επιπέδου .

Επειδή τα διανύσματα $\bar{a}$ και $\bar{b}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα έχουμε ότι $\bar{a}\times\bar{b}\neq 0$. Όμως $\bar{a}\times\bar{b}=(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2\ ,\ \alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3\ ,\ \alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)$. Έτσι μια τουλάχιστον από τις συντεταγμένες του $\bar{a}\times\bar{b}$ είναι διαφορετική του μηδενός . Έστω $\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\neq 0$. Τότε λύνουμε το σύστημα των δύο πρώτων εξισώσεων από τις (2) ως προς λ,μ και αντικαθιστούμε στην τρίτη [κάνουμε όπως λέμε απαλοιφή των λ,μ] . Παίρνουμε λοιπόν :

$$(3)\qquad (\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)x+(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3)y+(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)z+[(\alpha_2\beta_3-\alpha_3\beta_2)x_0$$
$$-(\alpha_3\beta_1-\alpha_1\beta_3)y_0-(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1)z_0] = 0 \quad ,$$

δηλαδή μια εξίσωση της μορφής

$$(4)\qquad Ax+By+\Gamma z+\Delta = 0 \quad \text{με} \quad (A,B,\Gamma)\neq(0,0,0) \quad .$$

Έτσι λοιπόν κάθε σημείο του επιπέδου π (ακριβέστερα οι συντεταγμένες κάθε σημείου του π) επαληθεύει μια εξίσωση της μορφής (4) (δηλαδή την (3)), που λέγεται και <u>αναλυτική εξίσωση του π</u> .

<u>Αντίστροφα</u> , θα δούμε πως τα σημεία του χώρου που επαληθεύουν μια εξίσωση της μορφής

(*) $\quad Ax+By+\Gamma z+\Delta = 0 \quad , \quad \mu\varepsilon \quad (A,B,\Gamma) \neq (0,0,0)$

ορίζουν ένα επίπεδο . Πραγματικά , ας υποθέσουμε $A\neq 0$. Θέτουμε $y=\lambda$ και $z=\mu$, οπότε : $x = -\frac{\Delta}{A} + \lambda(-\frac{B}{A}) + \mu(-\frac{\Gamma}{A})$. Δηλαδή το διάνυσμα θέσης $\bar{x}=(x,y,z)$ τυχαίου σημείου που επαληθεύει την (*) ικανοποιεί την

$$\bar{x} = (x,y,z) = (-\frac{\Delta}{A},0,0)+\lambda(-\frac{B}{A},1,0)+\mu(-\frac{\Gamma}{A},0,1)$$

ή

$$\bar{x} = \bar{x}_0 + \lambda\,\bar{a} + \mu\,\bar{b} \quad \mu\varepsilon \quad \bar{x}_0 = (-\frac{\Delta}{A},0,0) \ , \ \bar{a}=(-\frac{B}{A},1,0) \ , \ \bar{b}=(-\frac{\Gamma}{A},0,1) \ ,$$

που είναι διανυσματική εξίσωση επιπέδου από το $P_0(-\frac{\Delta}{A},0,0)$ και παράλληλο προς τα $\bar{a},\bar{b}$ (τα οποία είναι γραμμικά ανεξάρτητα . Γιατί ;) . Όμοια δουλεύουμε αν $A=0$ και $B\neq 0$ ή $\Gamma\neq 0$.

<u>Παρατήρηση</u> . Σημειώνουμε εδώ ότι η αναλυτική εξίσωση του επιπέδου π μπορεί να προκύψει και ως εξής : Από την εξίσωση (1) προκύπτει ότι τα διανύσματα : $x-x_0, \bar{a}, \bar{b}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα , έτσι το μικτό τους γινόμενο είναι μηδέν : $[x-x_0 , \bar{a} , \bar{b}] = 0$. Ή αν γράψουμε σε συντεταγμένες :

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0 \quad ,$$

που αναπτύσσοντας μας δίνει την (3) .

<u>Παράδειγμα 1</u> . Να βρείτε τις διάφορες εξισώσεις επιπέδου π από το σημείο $P_0(1,2,3)$ και παράλληλου προς τα διανύσματα $\bar{a}=(1,1,1)$ και $\bar{b}=(1,-1,1)$.

Η διανυσματική του εξίσωση είναι :

$$\bar{x}=(1,2,3)+\lambda(1,1,1)+\mu(1,-1,1) \quad .$$

Οι παραμετρικές του εξισώσεις είναι :

$$x=1+\lambda+\mu$$

$$y=2+\lambda-\mu$$

$$z=3+\lambda+\mu \quad .$$

Η αναλυτική του εξίσωση βρίσκεται ως : Οι δύο πρώτες από τις παραμετρικές αν λυθούν ως προς λ,μ δίνουν $\lambda=\frac{x+y-3}{2}$, $\mu=\frac{x-y+1}{2}$. Θέτοντας στην πρώτη έχουμε : $z=3+\frac{x+y-3}{2}+\frac{x-y+1}{2}$ ή κάνοντας πράξεις : $x-z+2=0$, που είναι η αναλυτική εξίσωσή του επιπέδου . Είναι της μορφής (4) με $A=1$, $B=0$, $\Gamma=-1$, $\Delta=2$.

Σύμφωνα με τη προηγούμενη παρατήρηση η αναλυτική εξίσωση του επιπέδου μπορεί να προκύψει και με μορφή ορίζουσας ως :

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

ή αναπτύσσοντας την ορίζουσα : $x-z+2=0$.

<u>Παράδειγμα 2</u> . Να βρείτε τις διάφορες εξισώσεις επιπέδου π από τα σημεία $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$ και ένα παράλληλο διάνυσμα $\bar{a}$,

το οποίο δεν είναι παράλληλο με το $\overline{P_1 P_2}$.

Είναι φανερό ότι το επίπεδο π ορίζεται από το P_1 και είναι παράλληλο προς τα γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα $\overline{P_1P_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$, $\bar{a}=(a_1,a_2,a_3)$. 'Ετσι η διανυσματική του εξίσωση είναι :

$$\bar{x} = \overline{OP_1}+ \lambda \overline{P_1P_2}+\mu\bar{a} = (x_1,y_1,z_1)+\lambda(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)+\mu(a_1,a_2,a_3) \quad .$$

Η αναλυτική εξίσωση και οι παραμετρικές εξισώσεις είναι αντίστοιχα :

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0 \quad , \quad \begin{aligned} x &= x_1+\lambda(x_2-x_1)+\mu a_1 \\ y &= y_1+\lambda(y_2-y_1)+\mu a_2 \\ z &= z_1+\lambda(z_2-z_1)+\mu a_3 \end{aligned}$$

Ειδικώτερα η αναλυτική εξίσωση είναι :

$$[a_3(y_2-y_1)-a_2(z_2-z_1)]x+[a_1(z_2-z_1)-a_3(x_2-x_1)]y +$$
$$+ [a_2(x_2-x_1)-a_1(y_2-y_1)]z-\{[a_3(y_2-y_1)-a_2(z_2-z_1)]x_1+[a_1(z_2-z_1)-a_3(x_2-x_1$$
$$+ [a_2(x_2-x_1)-a_1(y_2-y_1)]z_1\} = 0 \quad .$$

<u>Παράδειγμα 3</u> . Να βρείτε τις διάφορες εξισώσεις επιπέδου π από τα μη συνευθειακά σημεία $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$, $P_3(x_3,y_3,z_3)$.

Επειδή τα σημεία P_1,P_2 και P_3 δεν είναι συνευθειακά συμπεραίνουμε ότι τα διανύσματα $\overline{P_1P_2} = (x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$, $\overline{P_1P_3} = (x_3-x_1,\ y_3-y_1,\ z_3-z_1)$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα . Επίσης τα διανύσματα $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_1P_3}$ είναι παράλληλα προς το π . 'Ετσι το π καθορίζεται από το P_1 και τα παράλληλα διανύσματα $\overline{P_1P_2}$ και $\overline{P_1P_3}$. 'Εχουμε λοιπόν :

Διανυσματική εξίσωση : $\bar{x} = (x_1,y_1,z_1)+\lambda(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)+\mu(x_3-x_1,y_3-y_1,z_3-z_1)$.

Παραμετρικές εξισώσεις : $\begin{cases} x = x_1+\lambda(x_2-x_1)+\mu(x_3-x_1) \\ y = y_1+\lambda(y_2-y_1)+\mu(y_3-y_1) \\ z = z_1+\lambda(z_2-z_1)+\mu(z_3-z_1) \end{cases}$

Η αναλυτική εξίσωση βρίσκεται αναπτύσσοντας την ορίζουσα ,

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & x_3-x_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

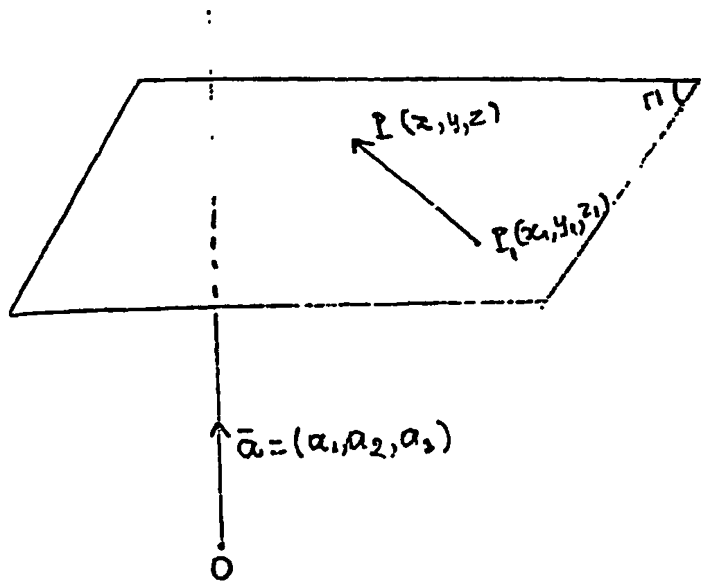
και γράφοντας την στη μορφή (4) .

Προτού κοιτάξουμε μια ειδική περίπτωση καθορισμού επιπέδου θα δώσουμε έναν ορισμό .

<u>Ορισμός</u> . Ένα διάνυσμα $\bar{a}=(a_1,a_2,a_3)$ λέγεται <u>κάθετο σε ένα επίπεδο</u> π αν είναι κάθετο σε κάθε διάνυσμα του επιπέδου .

Είναι φανερό πως όταν δοθεί ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\bar{a}=(a_1,a_2,a_3)$ και ένα σημείο $P_1(x_1,y_1,z_1)$ τότε από το P_1 υπάρχει μόνο ένα επίπεδο κάθετο στο $\bar{a}$. Αυτού του επιπέδου θα κοιτάξουμε να βρούμε την αναλυτική εξίσωση , και από αυτή μπορούμε να βρούμε τη διανυσματική εξίσωση (όπως στο αντίστροφο της σελίδας 58) και τις παραμετρικές εξισώσεις .

Αν $P(x,y,z)$ είναι τυχαίο σημείο του επιπέδου , τότε το διάνυσμα $\overline{P_1P}$ είναι κάθετο στο $\bar{a}$. Έτσι $\overline{P_1P}\cdot\bar{a}=0$ ή $(x-x_1)a_1+(y-y_1)a_2+(z-z_1)a_3=0$



ή

$$a_1x+a_2y+a_3z+(-a_1x_1-a_2y_1-a_3z_1)=0 \quad .$$

Αυτή ειναι της μορφής (4) και ειναι η αναλυτική εξίσωση του επιπέδου .

<u>Παράδειγμα 4</u> . Να βρείτε τις διάφορες εξισώσεις του π από το σημείο $P_1(-1,2,3)$ και κάθετου στο διάνυσμα $\bar{a}=(1,-1,-2)$.

Ας ειναι $P(x,y,z)$ το τυχαίο σημείο του επιπέδου που ζητάμε . Τότε το $\overline{P_1P}$ ειναι κάθετο στο $\bar{a}$. Έτσι $\overline{P_1P}\cdot\bar{a}=0$ ή $(x+1)+(y-2)(-1)+(z-3)(-2)=0$ ή $x-y-2z+9=0$, ειναι η αναλυτική εξίσωση του επιπέδου . Θέτουμε $y=\lambda$, $z=\mu$ και συνεπώς $x=-9+\lambda+2\mu$. Έτσι οι παραμετρικές εξιώσεις ειναι :

$$\begin{aligned} x &= -9+\lambda\cdot 1+\mu\cdot 2 \\ y &= 0+\lambda\cdot 1+\mu\cdot 0 \\ z &= 0+\lambda\cdot 0+\mu\cdot 1 \end{aligned} \quad .$$

Τέλος η διανυσματική εξίσωση ειναι :

$$\bar{x}=(-9,0,0)+\lambda(1,1,0)+\mu(2,0,1) \quad .$$

<u>Παρατήρηση</u> . Αν το διάνυσμα $\bar{a}$ είναι κάθετο στο επίπεδο π τότε και το $\lambda\bar{a}$ (λ πραγματικός) είναι κάθετο στο π . Έτσι το σύνολο των καθέτων διανυσμάτων είναι μονοδιάστατος υποχώρος του V_3 .

Για τους λογαριασμούς μας είναι χρήσιμο να ξέρουμε ένα μη μηδενικό διάνυσμα κάθετο σε ένα επίπεδο π . Με το πρόβλημα αυτό θα ασχοληθούμε αμέσως τώρα .

1) Αν ξέρουμε δύο διανύσματα $\bar{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\bar{b}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ γραμμικά ανεξάρτητα και παράλληλα προς το επίπεδο π τότε μπορούμε να βρούμε ένα διάνυσμα κάθετο στο π . Αυτό θα είναι το $\bar{a}\times\bar{b}$. Πραγματικά , το $\bar{a}\times\bar{b}$ είναι κάθετο στα $\bar{a},\bar{b}$ άρα και στο $\lambda\bar{a}+\mu\bar{b}$. Έτσι το $\bar{a}\times\bar{b}$ είναι κάθετο σε κάθε διάνυσμα του επιπέδου άρα είναι κάθετο στο επίπεδο .

2) Έστω τώρα ξέρουμε την αναλυτική εξίσωση του επιπέδου π και ας είναι η

(*) $\qquad Ax+By+\Gamma z+\Delta=0 \quad$ με $\quad (A,B,\Gamma)\neq(0,0,0)$.

θα κοιτάξουμε να βρούμε ένα μη μηδενικό διάνυσμα κάθετο στο π . Ας είναι $P_1(x_1,y_1,z_1)$ ένα δεδομένο σημείο του π και $P(x,y,z)$ το τυχαίο σημείο του . Τότε έχουμε $Ax_1+By_1+\Gamma z_1+\Delta=0$ και αφαιρώντας από την (*) παίρνουμε : $A(x-x_1)+B(y-y_1)+\Gamma(z-z_1)=0$ ή $(A,B,\Gamma)\cdot\overline{P_1P}=0$. Έτσι παρατηρούμε ότι το διάνυσμα (A,B,Γ) είναι κάθετο σε κάθε διάνυσμα του επιπέδου , άρα είναι κάθετο στο π . Έχουμε λοιπόν : <u>Το διάνυσμα $\bar{n}=(A,B,\Gamma)$ είναι κάθετο στο επίπεδο π με αναλυτική εξίσωση : $Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$</u> .

Αν ενδιαφερόμαστε για μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο π με εξίσωση $Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$, τότε αρκεί να μοναδοποιήσουμε το $\bar{n}=(A,B,\Gamma)$. <u>Έτσι το</u>

διάνυσμα : $\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}}, \frac{\Gamma}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}}\right)$ και το αντίθετο του είναι τα μοναδικά μοναδιαία διανύσματα τα κάθετα στο π .

Δίνονται τα επίπεδα $(\pi_1): A_1x+B_1y+\Gamma_1z+\Delta_1=0$ και $(\pi_2): A_2x+B_2y+\Gamma_2z+\Delta_2=0$. Είναι γνωστό από τη στερεομετρία ότι αυτά σχηματίζουν δύο δίεδρες παραπληρωματικές γωνίες εκτός αν είναι παράλληλα υπό ευρεία έννοια (δηλαδή μπορεί και να συμπίπτουν) . Ονομάζουμε γωνία των επιπέδων π_1 , π_2 την επίπεδη γωνία της πιο μικρής δίεδρης . Στη περίπτωση που τα επίπεδα είναι παράλληλα ή συμπίπτοντα τότε η γωνία των ορίζεται να είναι 0 .

Παρατήρηση . Είναι πολύ εύκολο να διαπιστώσουμε (πως;) ότι η γωνία θ των επιπέδων $(\pi_1): A_1x+B_1y+\Gamma_1z+\Delta_1=0$, $(\pi_2): A_2x+B_2y+\Gamma_2z+\Delta_2=0$, δίνεται από τη σχέση :

$$\cos\theta = \frac{|A_1A_2+B_1B_2+\Gamma_1\Gamma_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+\Gamma_1^2}\,\sqrt{A_2^2+B_2^2+\Gamma_2^2}} .$$

Έτσι : Τα επίπεδα (π_1),(π_2) είναι κάθετα , αν και μόνο αν , ισχύε

$$A_1A_2+B_1B_2+\Gamma_1\Gamma_2 = 0 .$$

Επίσης είναι παράλληλα υπό ευρεία έννοια αν και μόνο αν ισχύει :

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} .$$

όπου η αναλογία παίρνεται με τη προϋπόθεση ότι αν ένας παρανομαστής είναι μηδέν τότε και ο αριθμητής πρέπει να είναι μηδέν .

<u>Παρατήρηση</u> . Όταν δίνεται ένα επίπεδο (π):$Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$ και θέλουμε να βρούμε ένα παράλληλο επίπεδο τότε μπορούμε να πούμε το εξής : Το $n=(A,B,\Gamma)$ είναι κάθετο στο (π) άρα και σε κάθε παράλληλο επίπεδο . Έτσι η εξίσωση κάθε παράλληλου επιπέδου είναι της μορφής : $Ax+By+\Gamma z+\Delta_1=0$. (Γιατί;)

<u>Παράδειγμα 5</u> . Να βρείτε ένα επίπεδο από το $P_1(3,2,-6)$ και παράλληλο προς το $3x-4y+z-6=0$.

Η εξίσωση του επιπέδου που ζητάμε είναι της μορφής : $3x-4y+z+\Delta=0$. Επειδή περνά από το P_1 θα ισχύει : $3\cdot3-4\cdot2+(-6)+\Delta=0 \Longrightarrow \Delta=5$. Άρα η εξίσωση του επιπέδου που ζητάμε είναι : $3x-4y+z+5=0$.

<u>Ειδικές μορφές της αναλυτικής εξίσωσης του επιπέδου</u> . Έχουμε δει ότι η αναλυτική εξίσωση του επιπέδου (π) είναι η : $Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$ με $(A,B,\Gamma)\neq(0,0,0)$. Να δούμε πως είναι αυτό το επίπεδο όταν κάποιοι συντελεστές από τα A,B,Γ,Δ μηδενίζονται .

1 . $\Delta=0$: Τότε η εξίσωση γίνεται $Ax+By+\Gamma z=0$ και επαληθεύεται από το $(0,0,0)$. Δηλαδή κάθε επίπεδο με εξίσωση χωρίς σταθερό όρο , περνά από την αρχή των αξόνων .

2 . $A\cdot B\cdot\Gamma\cdot\Delta\neq0$: Τότε η εξίσωση γράφεται : $\dfrac{x}{-\frac{\Delta}{A}}+\dfrac{y}{-\frac{\Delta}{B}}+\dfrac{z}{-\frac{\Delta}{\Gamma}}=1$ θέτοντας

$\alpha=-\frac{\Delta}{A}$, $\beta=-\frac{\Delta}{B}$, $\gamma=-\frac{\Delta}{\Gamma}$, έχουμε : $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=1$. Τι είναι όμως τα α,β,γ ;

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση $Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$ επαληθεύεται από τα σημεία :

$P_1(-\frac{\Delta}{A},0,0)$, $P_2(0,-\frac{\Delta}{B},0)$, $P_3(0,0,-\frac{\Delta}{\Gamma})$. τα οποία είναι στους άξονες συντεταγμένων . Έτσι α,β,γ είναι οι συντεταγμένες των σημείων , που το επίπεδο συναντά τους άξονες . Για το λόγο αυτό τα α,β,γ λέγονται <u>συντεταγμένες επί την αρχή</u> . Η εξίσωση $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=1$ λέγεται και <u>κανονική εξίσωση του π</u> .

3 . $A=B=0$: Τότε $\Gamma\neq 0$ και σύνεπώς $z=-\frac{\Delta}{\Gamma}$. Είναι λοιπόν ένα επίπεδο παράλληλο , προς το Oxy επίπεδο (γιατί;) , του οποίου όλα τα σημεία έχουν ίδια κατηγμένη . Τι βρίσκουμε αν $A=\Gamma=0$ ή $B=\Gamma=0$; <u>Ειδικά</u> η εξίσωση $x=0$ είναι το Oyz επίπεδο με ένα κάθετο το $(1,0,0)$, η $y=0$ είναι το Oxz επίπεδο με ένα κάθετο το $(0,1,0)$ και η $z=0$ είναι το Oxy επίπεδο με ένα κάθετο το $(0,0,1)$.

4 . $\Gamma=0$, $A\cdot B\neq 0$. Τότε η εξίσωση του επίπεδου γίνεται : $Ax+By+\Delta=0$ και έχει κάθετο $\bar{n}=(A,B,0)$. Όμως $(A,B,0)\cdot(0,0,1)=0$ και συνεπώς το $Ax+By+\Delta=0$ είναι ένα επίπεδο κάθετο στο Oxy επίπεδο , άρα παράλληλο στον άξονα Oz . Τι βρίσκουμε αν $(A=0\ ,\ B\cdot\Gamma\neq 0)$ ή $(B=0\ ,\ A\cdot\Gamma\neq 0)$;

Θα δούμε τώρα πως ένα κλασσικό πρόβλημα της στερεομετρίας λύνεται εύκολα και μομφά χρησιμοποιώντας την κανονική εξίσωση του επιπέδου .

<u>Παράδειγμα 6</u> . Δίνεται μια τρισορθογώνια στερεά γωνία $Oxyz$. Τα σημεία A,B,Γ κινούνται στους Ox,Oy και Oz αντίστοιχα ώστε να ισχύει :
$\frac{1}{OA}+\frac{1}{OB}+\frac{1}{O\Gamma}=\frac{1}{k}$, όπου k=σταθερό . Θα δείξουμε ότι το επίπεδο που ορίζεται από τα A,B,Γ περνά από ένα σταθερό σημείο , του οποίου θα βρούμε τις συντεταγμένες .

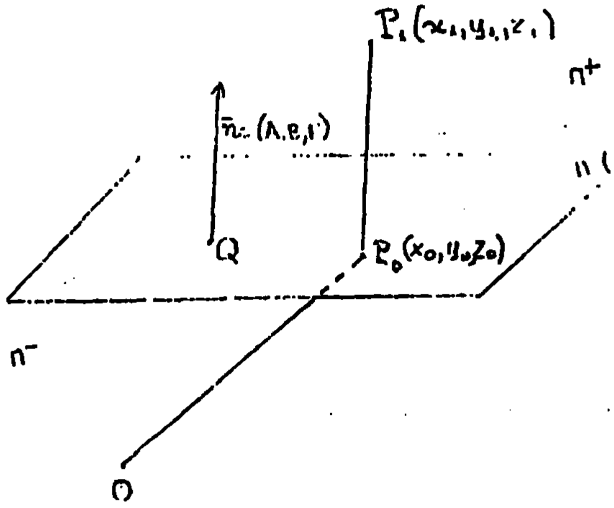
Η κανονική εξίσωση του επιπέδου είναι : $\frac{x}{OA}+\frac{y}{OB}+\frac{z}{O\Gamma}=1$. Αυτή επαληθεύεται από το σημείο $P=(k,k,k)$ διότι : $\frac{k}{OA}+\frac{k}{OB}+\frac{k}{O\Gamma}=k\left(\frac{1}{OA}+\frac{1}{OB}+\frac{1}{O\Gamma}\right)=k\cdot\frac{1}{k}=1$

'Ετσι έχουμε αποδείξει και έχουμε βρεί αυτά που θέλουμε .

Προσανατολισμός του χώρου ώς προς επίπεδο . Θεωρούμε το επίπεδο (π) με εξίσωση :

$$Ax+By+\Gamma z+\Delta=0 \quad .$$

Το επίπεδο αυτό χωρίζει το χώρο σε δύο ημιχώρους . Θεωρούμε το κάθετο διάνυσμα $\bar{n}=(A,B,\Gamma)$ να έχει αρχή ένα σημείο Q του (π) . Τότε το πέρας του $\bar{n}$ είναι σε ένα από τους δύο ημιχώρους , τον οποίο ας συμβολίσουμε με π^+ . Τον άλλο ημιχώρο ας συμβολίσουμε με π^- .



Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x,y,z)=Ax+By+\Gamma z+\Delta$. Είναι φανερό πως για σημεία του π η συνάρτηση μηδενίζεται . Θα δείξουμε πως για σημεία του π^+ η συνάρτηση είναι πάντα θετική και για σημεία του π^- είναι πάντα αρνητική . Πραγματικά ας είναι $P_1(x_1,y_1,z_1)$ ένα σημείο έξω από το επίπεδο (π) και $P_0(x_0,y_0,z_0)$ η προβολή του στο (π) . Τότε $\overline{P_0P_1}=\lambda\bar{n}$ με $\lambda>0$ αν το P_1 είναι στο π^+ και $\lambda<0$ αν το P_1 είναι στο π^- . 'Εχουμε :

$(x_1-x_0\ ,\ y_1-y_0\ ,\ z_1-z_0)=\lambda(A,B,\Gamma) \Longrightarrow x_1-x_0=\lambda A\ ,\ y_1-y_0=\lambda B$ και $z_1-z_0=\lambda\Gamma$.

Έτσι : $x_1=x_0+\lambda A$, $y_1=y_0+\lambda B$ και $z_1=z_0+\lambda\Gamma$.

Τώρα παίρνουμε :

$$f(x_1,y_1,z_1)=Ax_1+By_1+\Gamma z_1+\Delta =$$

$$= A(x_0+\lambda A)+B(y_0+\lambda B)+\Gamma(z_0+\lambda\Gamma)+\Delta$$

$$= Ax_0+By_0+\Gamma z_0+\Delta+\lambda(A^2+B^2+\Gamma^2)$$

$$= f(x_0,y_0,z_0)+\lambda(A^2+B^2+\Gamma^2)=\lambda(A^2+B^2+\Gamma^2) \quad ,$$

αφού $f(x_0,y_0,z_0)=Ax_0+By_0+\Gamma z_0+\Delta=0$. Από τη σχέση που βγάλαμε : $f(x_1,y_1,z_1)=\lambda(A^2+B^2+\Gamma^2)$ προκύπτει αυτό που θέλουμε . Τον ημιχώρο για τον οποίο ισχύει :

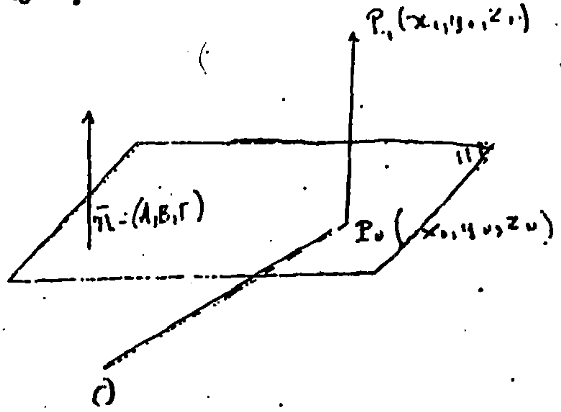
$$f(x_1,y_1,z_1) = Ax_1+By_1+\Gamma z_1+\Delta > 0 \quad ,$$

τον ονομάζουμε <u>θετικό ημιχώρο</u> και τον άλλο <u>αρνητικό ημιχώρο</u> .

<u>Παρατήρηση</u> . Όταν δίνεται ένα επίπεδο $Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$, αντί να δούμε που τελειώνει το $\bar{n}=(A,B,\Gamma)$ κάνουμε μια πιο εύκολη διαδικασία . Παίρνουμε ένα τυχαίο σημείο $P_1(x_1,y_1,z_1)$ έξω από επίπεδο και κοιτάζουμε το πρόσημο του αριθμού $Ax_1+By_1+\Gamma z_1+\Delta$. Αν είναι + τότε το P_1 είναι στο θετικό ημιχώρο . Αν είναι - τότε το P_1 είναι στον αρνητικό ημιχώρο . Σαν τέτοιο σημείο συνήθως παίρνουμε την αρχή $O(0,0,0)$ αν το επίπεδο δεν περνά από αυτό (δηλαδή αν $\Delta\neq0$).

<u>Απόσταση σημείου από επίπεδο</u> . Ας κοιτάξουμε να βρούμε την απόσταση από το επίπεδο (π) : $Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$ ενός σημείου $P_1(x_1,y_1,z_1)$, το οποίο δεν είναι πάνω στο επίπεδο . Επειδή το P_1 δεν είναι πάνω στο επίπεδο ισχύει :

$Ax_1+By_1+\Gamma z_1+\Delta\neq 0$. Ας είναι $P_0(x_0,y_0,z_0)$ η προβολή του P_1 πάνω στο (π) . Τότε $Ax_0+By_0+\Gamma z_0+\Delta=0$.



Ορίζουμε <u>ως απόσταση του P_1 από το π</u> και συμβολίζουμε με $d(P_1,\pi)$ το μέτρο του $\overline{P_0P_1}$. Έτσι $d(P_1,\pi)=|\overline{P_0P_1}|$. Είναι φανερό ότι η γωνία θ των διανυσμάτων $\bar{n}$ και $\overline{P_0P_1}$ είναι $0°$ ή $180°$. Έτσι

$$\overline{P_0P_1}\cdot\bar{n} = |\overline{P_0P_1}||\bar{n}|\cos\theta = |\overline{P_0P_1}||\bar{n}|\cdot(\pm 1) .$$

Άρα

$$|\overline{P_0P_1}\cdot\bar{n}| = |\overline{P_0P_1}||\bar{n}|$$

ή

$$|(x_1-x_0)A+(y_1-y_0)B+(z_1-z_0)\Gamma| = d(P_1,\pi)\cdot\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}$$

ή

$$|Ax_1+By_1+\Gamma z_1 - Ax_0-By_0-\Gamma z_0| = d(P_1,\pi)\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}$$

ή

$$|Ax_1+By_1+ z_1+\Delta| = d(P_1,\pi)\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2} \quad , \quad \text{διότι } Ax_0+By_0+\Gamma z_0=-\Delta .$$

Έτσι έχουμε :

$$d(P_1,\pi) = \frac{|Ax_1+By_1+\Gamma z_1+\Delta|}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}} .$$

<u>Ορισμός</u> . Ο αριθμός $\frac{Ax_1+By_1+\Gamma z_1+\Delta}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}}$ λέγεται <u>προσημασμένη απόσταση</u> του $P_1(x_1,y_1,z_1)$ από το επίπεδο $Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$. Η προσημασμένη απόσταση είναι θετική όταν το σημείο είναι στο θετικό ημιχώρο , μηδέν αν το σημείο είναι στο επίπεδο και αρνητική αν το σημείο είναι στον αρνητικό ημιχώρο.

<u>Παρατήρηση</u> . Οι εξισώσεις $Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$ και $-Ax-By-\Gamma z-\Delta=0$ παριστάνουν στο χώρο το ίδιο επίπεδο , γιατί τα ίδια σημεία $P(x,y,z)$ επαληθεύουν και τις δύο εξισώσεις . Όμως ο θετικός ημιχώρος για το ένα είναι αρνητικός για το άλλο . Αυτό σημαίνει ότι όταν μας ενδιαφέρουν προβλήματα προσανατολισμού <u>δεν πρέπει</u> να αλλάξουμε το πρόσημο της εξίσωσης του επιπέδου .

<u>Παράδειγμα 7</u> . Να βρείτε την απόσταση των επιπέδων
$(\pi_1) : 2x-y+3z-4=0$ και $(\pi_2) : 6x-3y+9z+6=0$.

Τα επίπεδα που δόθηκαν είναι παράλληλα (γιατί;) . Έτσι για να βρούμε την απόσταση που ζητάμε αρκεί να πάρουμε ένα σημείο του ενός επιπέδου και να βρούμε την απόσταση από το άλλο . Ένα σημείο στο (π_1) είναι το $P_1(1,1,1)$.
Έτσι η απόσταση που ζητάμε είναι :

$$d(P_1,\pi_2) = \frac{|6\cdot 1-3\cdot 1+9\cdot 1+6|}{\sqrt{6^2+(-3)^2+9^2}} = \frac{18}{\sqrt{126}} = \sqrt{\frac{18}{7}} .$$

Δίνονται δύο επίπεδα (π_1) : $A_1x+B_1y+\Gamma_1z+\Delta_1=0$ και (π_2) : $A_2x+B_2y+\Gamma_2z+\Delta_2=0$.

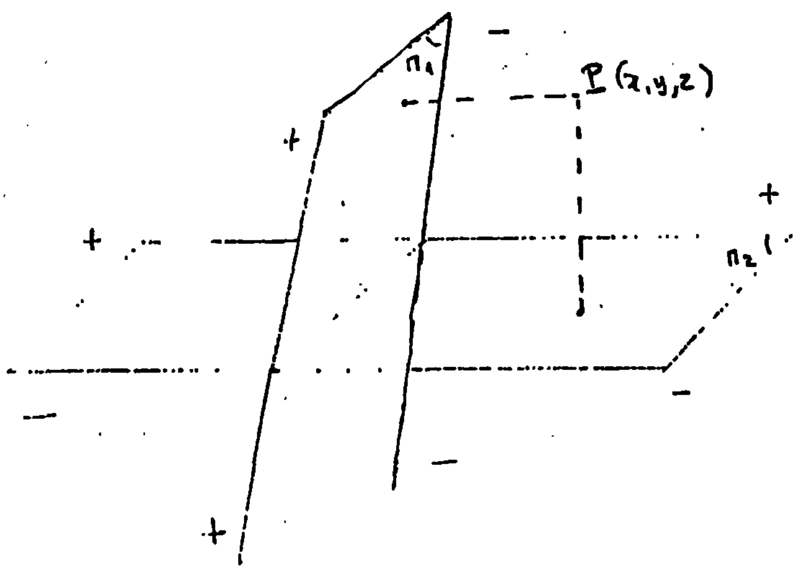
Ξέρουμε ότι αυτά είναι παράλληλα , αν και μόνο αν , $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}$. Μας απασχολεί το ερώτημα : Πότε αυτά συμπίπτουν ; Αυτά θα συμπίπτουν αν και μόνο αν ., τέμνουν τους άξονες στα ίδια σημεία . Δηλαδή :

$$-\frac{\Delta_1}{A_1}=-\frac{\Delta_2}{A_2}\ ,\quad -\frac{\Delta_1}{B_1}=-\frac{\Delta_2}{B_2}\ ,\quad -\frac{\Delta_1}{\Gamma_1}=-\frac{\Delta_2}{\Gamma_2}\ .$$

Δηλαδή τα $(\pi_1),(\pi_2)$ συμπίπτουν , αν και μόνο αν , ισχύει :

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{\Gamma_1}{\Gamma_2}=\frac{\Delta_1}{\Delta_2}\ .$$

Παίρνουμε τώρα δύο επίπεδα $(\pi_1):A_1x+B_1y+\Gamma_1z+\Delta_1=0$, και $(\pi_2):A_2x+B_2y+\Gamma_2z+\Delta_2=0$ τα οποία δεν είναι παράλληλα ούτε συμπίπτοντα . Τότε τέμνονται και κάνουν δύο δίεδρες γωνίες . Ενδιαφερόμαστε για τις εξισώσεις των επιπέδων που διχοτομούν αυτές τις δίεδρες γωνίες .



Στηριζόμαστε στην ιδιότητα ότι κάθε σημείο του διχοτομούντος επιπέδου απέχει το ίδιο από τις έδρες . Προσανατολίζουμε το χώρο ως προς τα δύο επίπεδα . Ας είναι ο προσανατολισμός όπως στο σχήμα . Αν $P(x,y,z)$ είναι τυχαίο σημείο του επιπέδου που διχοτομεί τη δίεδρη γωνία που περιέχει - για το (π_1) και + για το (π_2) . Τότε :

$$-\frac{A_1x+B_1y+\Gamma_1z+\Delta_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+\Gamma_1^2}}=\frac{A_2x+B_2y+\Gamma_2z+\Delta_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2+\Gamma_2^2}}$$

είναι η εξίσωση του επιπέδου που διχοτομεί τη δίεδρη που αναφέραμε . Το επίπεδο που διχοτομεί την άλλη δίεδρη έχει αξίσωση :

$$\frac{A_1x+B_1y+\Gamma_1z+\Delta_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+\Gamma_1^2}}=\frac{A_2x+B_2y+\Gamma_2z+\Delta_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2+\Gamma_2^2}} .$$

<u>Παράδειγμα 8</u> . Τα επίπεδα $(\pi_1):x+2y-3z-1=0$ και $(\pi_2):2x+y-z+3=0$ δεν είναι παράλληλα ούτε συμπίπτοντα . Θέλουμε να βρούμε το επίπεδο που διχοτομεί τη δίεδρη μέσα στην οποία βρίσκεται στο σημείο $P_1(1,1,1)$.

Το σημείο $P_1(1,1,1)$ είναι στον αρνητικό ημιχώρο για το (π_1) , αφού $1+2\cdot1-3\cdot1-1=-1<0$ και στο θετικό ημιχώρο για το (π_2) , αφού $2\cdot1+1-1+3=5>0$. Έτσι το τυχαίο σημείο $P(x,y,z)$ του επιπέδου που ζητάμε έχει απόσταση από το (π_1) την : $d(P,\pi_1)=-\dfrac{x+2y-3z-1}{\sqrt{14}}$ και απόσταση απόσταση από (π_2) την :

$d(P,\pi_2)=\dfrac{2x+y-z+3}{\sqrt{6}}$. Όμως $d(P,\pi_1)=d(P,\pi_2)$.

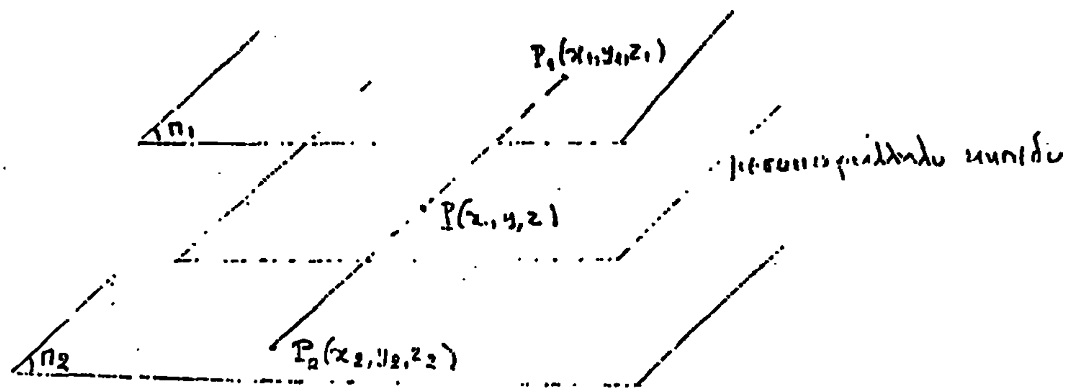
Έτσι η εξίσωση του επιπέδου που ζητάμε είναι :

$$-\frac{x+2y-3z-1}{\sqrt{14}}=\frac{2x+y-z+3}{\sqrt{6}}$$

ή

$$\left(\frac{2}{\sqrt{6}}+\frac{1}{\sqrt{14}}\right)x+\left(\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{2}{\sqrt{14}}\right)y+\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}-\frac{3}{\sqrt{14}}\right)z+\frac{3}{\sqrt{6}}-\frac{1}{\sqrt{14}}=0 .$$

<u>Εύρεση μεσοπαράλληλου επιπέδου</u> . Θεωρούμε τα δύο παράλληλα επίπεδα $(\pi_1): Ax+By+\Gamma z+\Delta_1=0$, $(\pi_2): Ax+By+\Gamma z+\Delta_2=0$. Θέλουμε να βρούμε το επίπεδο του οποίου τα σημεία απέχουν εξίσου από τα π_1 και π_2 , δηλαδή <u>το μεσοπαράλληλο</u> επίπεδο



Η εξίσωση του μεσοπαράλληλου επιπέδου είναι της μορφής (γιατί;)

$$Ax+By+\Gamma z+\Delta=0 .$$

Αρκεί να βρούμε το Δ . Είναι φανερό ότι αν το $P_1(x_1,y_1,z_1)$ είναι σημείο του (π_1) και $P_2(x_2,y_2,z_2)$ είναι σημείο του π_2 , τότε το

$P\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$ είναι σημείο του μεσοπαράλληλου επιπέδου . Έτσι θα έχουμε :

$$A\frac{x_1+x_2}{2} + B\frac{y_1+y_2}{2} + \Gamma\frac{z_1+z_2}{2} + \Delta = 0$$

ή

$$(Ax_1+By_1+\Gamma z_1)+(Ax_2+By_2+\Gamma z_2)+2\Delta = 0$$

Όμως : $Ax_1+By_1+\Gamma z_1+\Delta_1 = 0$, $Ax_2+By_2+\Gamma z_2+\Delta_2 = 0$

και έτσι : $-\Delta_1-\Delta_2+2\Delta = 0$ ή $\Delta = \frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}$.

Άρα η εξίσωση του μεσοπαραλλήλου επιπέδου είναι :

$$Ax+By+\Gamma z+\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2} = 0 \quad .$$

Ασκήσεις .

1. Να βρεθεί η εξίσωση επιπέδου από το σημείο $P(2,1,-1)$ και καθέτου στα επίπεδα : $(\pi_1): 2x+y-3=0$ και $(\pi_2): x+2y+z=2$.

2. Δίνονται τα παράλληλα επίπεδα : $(\pi_1): 2x-y+3z-4=0$ και $(\pi_2): 6x-3y+9z+6=0$. Να βρείτε την εξίσωση του μεσοπαραλλήλου επιπέδου , αφού πρώτα δείξτε ότι αυτά είναι παράλληλα .

3. Να εξετάσετε αν τα επίπεδα : $5x+3y-11z+72=0$, $4x-5y+7z=0$ και $6x+11y-3z+66=0$ έχουν κοινό σημείο ή όχι .

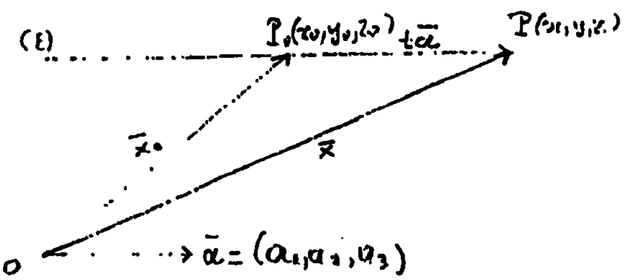
4. Να βρεθεί η εξίσωση επιπέδου που ορίζεται από τα σημεία $P_1(8,-3,1)$, $P_2(4,7,2)$ και είναι κάθετο στο επίπεδο $3x+y+2z-23=0$.

5. 'Ενα επίπεδο (π) έχει συντεταγμένες επί την αρχή α,β,γ . Αν η αρχή των συντεταγμένων έχει απόσταση d από το (π) , δείξτε ότι ισχύει :
$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}=\frac{1}{d^2}$.

3. Ευθεία στο χώρο .

Ορισμός . Δίνονται ένα σημείο $P_0(x_0,y_0,z_0)$ του χώρου , με διάνυσμα θέσης ως προς αρχή O το $\bar{x}_0$ και ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\bar{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$. Ευθεία (ε) από το P_0 και παράλληλη προς το διάνυσμα $\bar{\alpha}$ είναι το σύνολο των σημείων του χώρου με διάνυσμα θέσης $\bar{x}$ έτσι ώστε :

(1) $\bar{x}=\bar{x}_0+t\bar{\alpha}$, $-\infty<t<\infty$, t πραγματικός



Η εξίσωση (1) λέγεται διανυσματική εξίσωση ευθείας , που καθορίζεται από σημείο P_0 και το παράλληλο διάνυσμα $\bar{\alpha}$. Για να πάρουμε τα διανύσματα θέσης διαφόρων σημείων της ευθείας δίνουμε τιμές στη παράμετρο t .

Από την εξίσωση (1) παίρνουμε : $\overline{x} = (x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+t(a_1,a_2,a_3)$

ή

$$(2) \qquad \begin{cases} x = x_0 + t\,a_1 \\ y = y_0 + t\,a_2 \\ z = z_0 + t\,a_3 \end{cases} .$$

Οι εξισώσεις (2) λέγονται <u>παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας που καθορίζεται από το σημείο P_0 και το παράλληλο διάνυσμα $\bar{a}$</u>. Για διάφορες τιμές της παραμέτρου t οι (2) μας δίνουν τις συντεταγμένες των σημείων της ευθείας .

Από τις εξισώσεις (2) παίρνουμε με απαλοιφή του t τις εξισώσεις :

$$(3) \qquad \frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3} .$$

Οι εξισώσεις (3) επαληθεύονται από τις συντεταγμένες των σημείων της ευθείας και μόνο αυτά [Η αναλογία γράφεται με τη συμφωνία ότι αν ένας παρανομαστής είναι μηδέν τότε και ο αριθμητής να είναι μηδέν] . Οι (3) λέγονται <u>συμμετρικές εξισώσεις ευθείας που καθορίζεται από σημείο P_0 και παράλληλο διάνυσμα $\bar{a}$</u> .

Η αναλογία (3) μας δίνει στην ουσία δύο εξισώσεις τις :

$$\frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} \quad \text{και} \quad \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}$$

ή μετά από πράξεις

$$(4) \qquad \begin{cases} a_2x-a_1y-a_2x_0+a_1y_0 = 0 \\ a_3y-a_2z-a_3y_0+a_2z_0 = 0 \end{cases} ,$$

που είναι της μορφής

$$(5) \quad \begin{cases} A_1x+B_1y+\Gamma_1z+\Delta_1=0 \\ A_2x+B_2y+\Gamma_2z+\Delta_2=0 \end{cases}$$

Οι εξισώσεις (5) λέγονται <u>αναλυτικές εξισώσεις της ευθείας (1)</u> και η κάθε μία από αυτές εκφράζει ένα επίπεδο. Η πρώτη από τις (4) είναι ένα επίπεδο κάθετο στο Oxy επίπεδο (όπως είδαμε στη σελίδα 66, περίπτωση 4) και η δεύτερη είναι ένα επίπεδο κάθετο στο Oyz επίπεδο. Αυτά τα δύο επίπεδα προβάλλουν την (1) στα Oxy και Oyz επίπεδα. Η ευθεία δίνεται σαν τομή αυτών των προβαλλόντων επιπέδων. Όμοια υπάρχει ένα επίπεδο που την προβάλλει στο Oxz επίπεδο (ποιό είναι αυτό;). Είδαμε λοιπόν ότι μια ευθεία (ε) στο χώρο παριστάνεται σαν τομή δύο επιπέδων (προβαλλόντων επιπέδων). Θα δούμε αμέσως τώρα ότι δύο επίπεδα που τέμνονται παριστάνουν μια ευθεία. Ας πάρουμε τα επίπεδα:

$$(\pi_1): \ A_1x+B_1y+\Gamma_1z+\Delta_1=0$$

$$(\pi_2): \ A_2x+B_2x+\Gamma_2z+\Delta_2=0$$

τα οποία τέμνονται. Θα δείξουμε ότι τα σημεία του χώρου που επαληθεύουν και τις δύο εξισώσεις είναι (<u>μόνο</u>) όλα τα σημεία μιας ευθείας. Έτσι δύο τεμνόμενα επίπεδα στο χώρο μας καθορίζουν μια ευθεία (την τομή τους). Παίρνουμε τα διανύσματα $\bar{n}_1=(A_1,B_1,\Gamma_1)$ και $\bar{n}_2=(A_2,B_2,\Gamma_2)$ που είναι κάθετα στα (π_1) και (π_2) αντίστοιχα. Αφού τα (π_1) και (π_2) τέμνονται θα ισχύει:
$\bar{n}_1\times\bar{n}_2=(B_1\Gamma_2-B_2\Gamma_1 \ , \ A_2\Gamma_1-A_1\Gamma_2 \ , \ A_1B_2-A_2B_1)\neq 0$. Έτσι μια τουλάχιστον από τις συντεταγμένες του $\bar{n}_1\times\bar{n}_2$ δεν είναι μηδέν. <u>Ας υποθέσουμε ότι: $A_1B_2-A_2B_1\neq 0$.</u>

θέτουμε $z=t$ και λύνοντας το σύστημα των (π_1) , (π_2) ως προς x,y παίρνουμε :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} B_1 & \Gamma_1 \\ B_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} t + \frac{\begin{vmatrix} B_1 & \Delta_1 \\ B_2 & \Delta_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} \quad \text{και} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} \Gamma_1 & A_1 \\ \Gamma_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} t + \frac{\begin{vmatrix} \Delta_1 & A_1 \\ \Delta_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$$

'Ετσι λοιπόν τα σημεία που επαληθεύουν το σύστημα των $(\pi_1),(\pi_2)$ και μόνο αυτά επαληθεύουν και το σύστημα :

$$(6) \quad \begin{cases} x = \dfrac{\begin{vmatrix} B_1 & \Delta_1 \\ B_2 & \Delta_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} + t \dfrac{\begin{vmatrix} B_1 & \Gamma_1 \\ B_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} \\[2ex] y = \dfrac{\begin{vmatrix} \Delta_1 & A_1 \\ \Delta_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} + t \dfrac{\begin{vmatrix} \Gamma_1 & A_1 \\ \Gamma_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} \\[2ex] z = 0 \cdot + t \cdot 1 \end{cases} .$$

'Ομως τα σημεία που επαληθεύουν το σύστημα (6) και μόνο αυτά επαληθεύουν και τ·

διανυσματική εξίσωση

$$(7) \quad \bar{x}=(x,y,z) = \left(\frac{\begin{vmatrix} B_1 & \Delta_1 \\ B_2 & \Delta_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \frac{\begin{vmatrix} \Delta_1 & A_1 \\ \Delta_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, 0 \right) + t \left(\frac{\begin{vmatrix} B_1 & \Gamma_1 \\ B_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & \Delta_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \frac{\begin{vmatrix} \Gamma_1 & A_1 \\ \Gamma_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, 1 \right)$$

Τα σημεία όμως που επαληθεύουν την (7) είναι μόνο όλα τα σημεία μιας ευθείας

(ε) που καθορίζεται από το σημείο $P_0\left(\frac{B_1\Delta_2-B_2\Delta_1}{A_1B_2-A_2B_1}, \frac{A_2\Delta_1-A_1\Delta_2}{A_1B_2-A_2B_1}, 0 \right)$

και είναι παράλληλη με το διάνυσμα :

$$(8) \qquad \bar{\alpha} = \left(\frac{\begin{vmatrix} B_1 & \Gamma_1 \\ B_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, \frac{\begin{vmatrix} \Gamma_1 & A_1 \\ \Gamma_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, 1 \right) .$$

Η παραπάνω διαδικασία μας δείχνει ότι δύο τεμνόμενα επίπεδα $A_1x+B_1y+\Gamma_1z+\Delta_1=0$ και $A_2x+B_2y+\Gamma_2z+\Delta_2=0$ ορίζουν μια ευθεία , της οποίας η διανυσματική εξίσωση είναι η (7) και οι παραμετρικές είναι οι (6) . 'Ενα διάνυσμα παράλληλο σ'αυτή την ευθεία είναι το (8) . Τότε όμως και το διάνυσμα

$$(9) \qquad \left(\begin{vmatrix} B_1 & \Gamma_1 \\ B_2 & \Gamma_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \Gamma_1 & A_1 \\ \Gamma_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right) = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2$$

είναι παράλληλο προς την ευθεία (ε) . Δουλεύοντας ανάλογα όταν $B_1\Gamma_2-B_2\Gamma_1\neq0$ ή $A_2\Gamma_1-A_1\Gamma_2\neq0$, βρίσκουμε πάντα το ίδιο διάνυσμα (9) .

<u>Συμπέρασμα</u> : Ένα παράλληλο διάνυσμα προς την ευθεία

$$(\varepsilon): \left\{ \begin{array}{l} A_1x + B_1y + \Gamma_1z+\Delta_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + \Gamma_2z+\Delta_2 = 0 \end{array} \right\}$$ είναι το διάνυσμα $(B_1\Gamma_2-B_2\Gamma_1, \Gamma_1A_2-\Gamma_2A_1, A_1B_2-A_2B$

Για να βρούμε ένα σημείο αυτής της ευθείας , αρκεί να βρούμε ένα σημείο πόυ να επαληθεύει και τα δύο επίπεδα .

<u>Παρατήρηση</u> . Μια ευθεία στο χώρο παριστάνεται από δύο επίπεδα . Αντίθετα όταν δουλεύουμε στο επίπεδο Oxy (κάνουμε αναλυτική γεωμετρία του επιπέδου) η ευθεία παριστάνεται , όπως ξέρουμε από το Λύκειο , με μια μόνο εξίσωση της μορφής $Ax+By+\Gamma=0$. Αυτό συμβαίνει γιατί το άλλο επίπεδο (άλλη εξίσωση) είναι πάντα $z=0$.

<u>Παρατήρηση</u> . Δεν θα μιλήσουμε για διάνυσμα κάθετο σε μια ευθεία (ε) του χώρου και αυτό γιατί υπάρχει ένα ολόκληρο επίπεδο από κάθετα διανύσματα .

<u>Παράδειγμα 1</u> . Δίνεται η ευθεία

$$(\varepsilon): \left\{ \begin{array}{l} 2x-3y+z-2=0 \\ 3x-y+2z+4=0 \end{array} \right\} .$$

Να βρείτε τις διάφορες εξισώσεις αυτής .

Οι αναλυτικές εξισώσεις είναι αυτές που μας δόθηκαν . Τα κάθετα στα επίπεδα που καθορίζουν την ευθεία (ε) είναι : $\bar{n}_1=(2,-3,1)$ και $\bar{n}_2=(3,-1,2)$. Έχουμε : $\bar{n}_1\times\bar{n}_2=(-5,-1,7)\neq 0$. Άρα τα επίπεδα πραγματικά τέμνονται . Το διάνυσμα $\bar{a}=\bar{n}_1\times\bar{n}_2=(-5,-1,7)$ όπως είδαμε στη προηγούμενη διαδικασία είναι παράλληλο προς την (ε) . Βρίσκουμε ένα σημείο της (ε) . Βάζουμε $z=0$ και βρίσκουμε τα x και y από το σύστημα $(2x-3y-2=0\ ,\ 3x-y+4=0)$. Έτσι έχουμε ότι το σημείο $P_0(-2,-2,0)$ είναι σημείο της (ε) .

Έτσι η διανυσματική εξίσωση της (ε) είναι :

$$\overline{x}=(x,y,z)=(-2,-2,0)+t(-5,-1,7)\ .$$

Οι παραμετρικές εξισώσεις είναι :

$$\left\{\begin{array}{l} x=-2-5t \\ y=-2-t \\ z=\ \ 7t \end{array}\right\}.$$

Οι συμμετρικές εξισώσεις της (ε) είναι :

$$\frac{x+2}{-5}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-0}{7}\ .$$

$\Rightarrow$ $\frac{x+2}{-5}=\frac{y+2}{-1}\Rightarrow -x-2=-5y-10$ $\Rightarrow -x+5y+8=0$

$\Rightarrow$ $\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{7}\Rightarrow 7y+14+z=0.$

Οι αναλυτικές εξισώσεις της (ε) με προβάλλοντα επίπεδα στα Oxy και Oyz επίπεδα είναι :

$$(\varepsilon):\ \left\{\begin{array}{l} -x+5y+8=0 \\ 7y+z+14=0 \end{array}\right\}.$$

<u>Παρατήρηση</u> . Είδαμε στο παράδειγμα 1 ότι η ίδια ευθεία (ε) παριστάνεται με δύο διαφορετικά ζευγάρια επιπέδων . Στη πραγματικότητα από μια ευθεία (ε) περνούν άπειρα επίπεδα και κάθε ζευγάρι από αυτά καθορίζει την ίδια ευθεία (ε) .

<u>Ορισμός</u> . Δίνεται μια ευθεία

$$(\varepsilon):\ \left\{\begin{array}{l} A_1x+B_1y+\Gamma_1z+\Delta_1=0 \\ A_2x+B_2y+\Gamma_2z+\Delta_2=0 \end{array}\right\}.$$

Το σύνολο των επιπέδων που περιέχουν την (ε) λέγεται <u>αξονική δέσμη επιπέδων με άξονα την (ε)</u> .

Η παρακάτω πρόταση μας δίνει την εξίσωση του τυχαίου επιπέδου της αξονικής δέσμης .

<u>Πρόταση 1</u> . Τα επίπεδα $(\pi_1):A_1x+B_1y+\Gamma_1z+\Delta_1=0$ και $(\pi_2):A_2x+B_2y+\Gamma_2z+\Delta_2=0$ τέμνονται σε μια ευθεία (ε) . Ένα επίπεδο (π) ανήκει στην αξονική δέσμη επιπέδων με άξονα την (ε) , αν και μόνο αν , η εξίσωση του (π) είναι της μορφής :

$$(*) \qquad \lambda_1(A_1x+B_1y+\Gamma_1z+\Delta_1)+\lambda_2(A_2x+B_2y+\Gamma_2z+\Delta_2)=0 \quad ,$$

όπου λ_1,λ_2 είναι σταθερές με $(\lambda_1,\lambda_2)\neq(0,0)$.

<u>Απόδειξη</u> . Πραγματικά η (*) παριστάνει επίπεδο . Η (*) επαληθεύεται από κάθε σημείο της (ε) άρα το επίπεδο (*) ανήκει στη δέσμη επιπέδων με άξονα την (ε) . Αντίστροφα , ας είναι (π) ένα επίπεδο της δέσμης θα δείξουμε ότι η εξίσωση του είναι της μορφής (*) . Πραγματικά , αν $P_1(x_1,y_1,z_1)$ είναι ένα σημείο του (π) που δεν ανήκει στην (ε) , τότε η εξίσωση :

$$(**) \; -(A_2x_1+B_2y_1+\Gamma_2z_1+\Delta_1)(A_1x+B_1y+\Gamma_1z+\Delta_1)+(A_1x_1+B_1y_1+\Gamma_1z_1+\Delta_1)(A_2x+B_2y+\Gamma_2z+\Delta_2)=0$$

παριστάνει επίπεδο , επαληθεύεται από τα σημεία της ε και από το σημείο P_1. Τέτοιο επίπεδο όμως είναι μόνο ένα . Άρα η εξίσωση του π είναι η (**) που είναι της μορφής (*) (ποιά είναι τα λ_1,λ_2 ;) .

<u>Παράδειγμα 2</u> . Να βρείτε την εξίσωση επιπέδου , που ενήκει στην αξονική δέσμη των $(\pi_1):3x-2y+6z-6=0$ και $(\pi_2):x-y+z+4=0$ και που περνά από το σημείο

$P_1(-1,3,2)$.

Η εξίσωση του επιπέδου θα είναι της μορφής :

$$\lambda_1(3x-2y+6z-6)+\lambda_2(x-y+z+4)=0$$

Αφού περνά από το P_1 θα ισχύει : $\lambda_1(-3-6+12-6)+\lambda_2(-1-3+2+4)=0$ ή $-3\lambda_1+2\lambda_2=0$ ή $\lambda_1=\frac{2}{3}\lambda_2$. Άρα η εξίσωση του ζητουμένου επιπέδου θα είναι :

$$\lambda_2\left[\frac{2}{3}(3x-2y+6z-6)+(x-y+z+4)\right]=0$$

ή αφού $\lambda_2\neq 0$

$$9x-7y+15z=0$$

<u>Ευθεία από δύο σημεία</u> . Δύο διαφορετικά σημεία $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$ του χώρου καθορίζουν πλήρως μια ευθεία (ε) . Θέλουμε να βρούμε τις διάφορες εξισώσεις αυτής της ευθείας .

Αφού τα P_1,P_2 είναι διαφορετικά έχουμε $\overline{P_1P_2}\neq 0$. Η ευθεία ορίζεται από το σημείο P_1 και το διάνυσμα $\overline{P_1P_2}$. Έτσι η διανυσματική της εξίσωση είναι :

$$\bar{x}=(x,y,z)=(x_1,y_1,z_1)+t(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$$

Οι παραμετρικές εξισώσεις είναι :

$$\begin{cases} x=x_1+t(x_2-x_1) \\ y=y_1+t(y_2-y_1) \\ z=z_1+t(z_2-z_1) \end{cases}$$

Οι συμμετρικές εξισώσεις είναι :

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

Οι αναλυτικές εξισώσεις είναι :

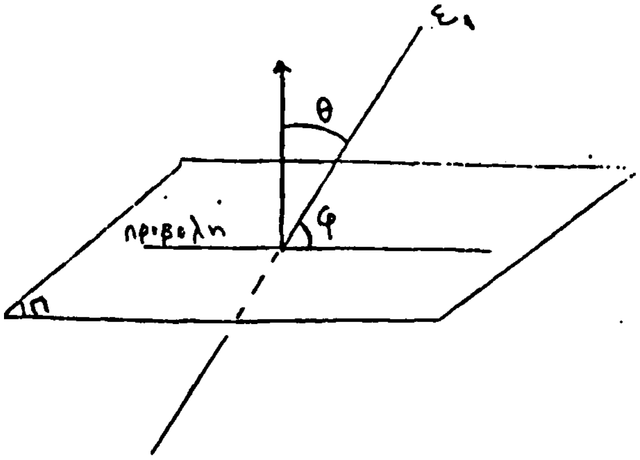
$$(y_2-y_1)x-(x_2-x_1)y-x_1(y_2-y_1)+y_1(x_2-x_1)=0$$
$$(z_2-z_1)y-(y_2-y_1)z-y_1(z_2-z_1)+z_1(y_2-y_1)=0$$

<u>Ορισμός</u> . Δίνονται δύο τεμνόμενες ευθείες (ε_1): $\bar{x}=\bar{x}_0+t\bar{a}$ και (ε_2): $\bar{x}=\bar{x}_1+t\bar{b}$ με $\bar{a}=(a_1,a_2,a_3)\neq 0$, $\bar{b}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\neq 0$. Ονομάζουμε <u>γωνία θ των $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ και συμβολίζουμε με $\theta=\sphericalangle(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ τη μικρότερη κυρτή γωνία που σχηματίζουν οι $\varepsilon_1,\varepsilon_2$</u> . Έτσι το συνημίτονο της γωνίας δίνεται από τη σχέση , όπως μπορεί κανείς να δείξει εύκολα ,

$$\cos\theta=\frac{|a_1\beta_1+a_2\beta_2+a_3\beta_3|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\ \sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2}}\ ,\qquad 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$$

<u>Επίσης ονομάζουμε γωνία φ της (ε_1) με το επίπεδο (π): $Ax+By+\Gamma z$ και συμβολίζουμε με $\varphi=\sphericalangle(\varepsilon_1,\pi)$ τη γωνία της ε_1 με τη προβολή της πάνω στο π</u> . Έτσι η φ είναι οξεία γωνία που δίνεται από τη σχέση $\varphi=\frac{\pi}{2}-($

όπου $$\cos\theta=\frac{|Aa_1+Ba_2+\Gamma a_3|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\ \sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}}\qquad \text{και}\quad \varphi=\frac{\pi}{2}-\theta$$

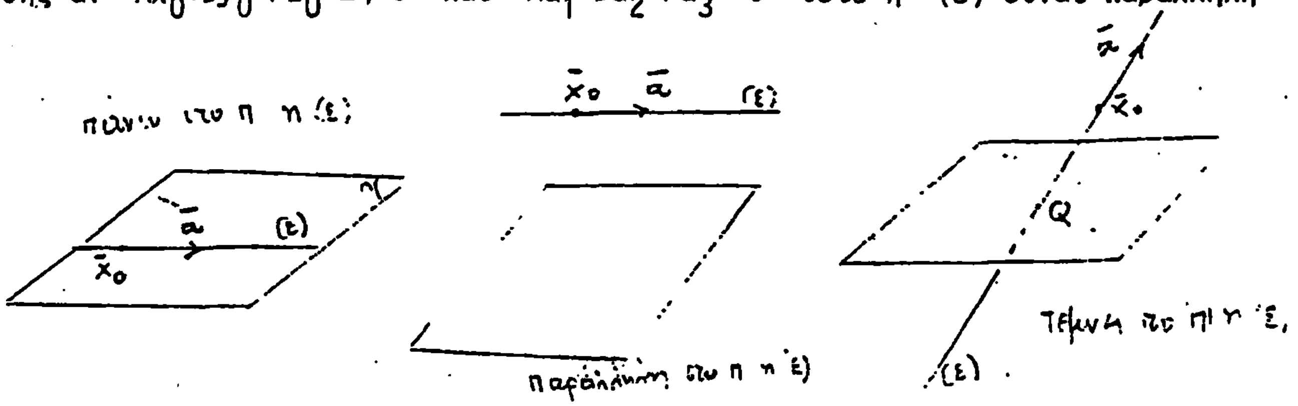


<u>Συμπέρασμα</u> . Το επίπεδο (π): $Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$ και η ευθεία (ε):$\bar{x}=\bar{x}_0+t\bar{a}$ είναι παράλληλα , αν και μόνο αν , ισχύει : $A a_1+B a_2+\Gamma a_3=0$. Είναι δε κάθετα , αν και μόνο αν , $\frac{A}{a_1}=\frac{B}{a_2}=\frac{\Gamma}{a_3}$ (γιατί;) .

<u>Τομή ευθείας και επιπέδου</u> . Δίνεται η ευθεία (ε): $\bar{x}=\bar{x}_0+t\bar{a}$ και το επίπεδο (π): $Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$. Θέλουμε να βρούμε τις συντεταγμένες του σημείου τομής , όταν υπάρχει . Ας είναι $\bar{x}_0=(x_0,y_0,z_0)$ και $\bar{a}=(a_1,a_2,a_3)$. Η ευθεία (ε) μπορεί να περιέχεται στο επίπεδο (π) . Για να συμβαίνει αυτό , πρέπει και αρκεί, το (x_0,y_0,z_0) να ανήκει στο π και επί πλέον τα $\bar{a}$ και $\bar{n}=(A,B,\Gamma)$ να είναι κάθετα . Δηλαδή για να περιέχεται η (ε) στο (π) πρέπει να αρκεί να ισχύουν :

$$Ax_0+By_0+\Gamma z_0+\Delta=0 \quad \text{και} \quad A a_1+B a_2+\Gamma a_3=0 \quad .$$

Επίσης αν $Ax_0+By_0+\Gamma z_0+\Delta\neq 0$ και $A a_1+B a_2+\Gamma a_3=0$ τότε η (ε) είναι παράλληλη



και δεν περιέχεται στο (π) . <u>Υποθέτουμε ότι $A a_1+B a_2+\Gamma a_3\neq 0$</u> . Τότε η (ε) τέμνει το (π).Θα βρούμε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Q.Ξέρουμε ότι παίρνουμε τις συντεταγμένες των σημείων της (ε) δίνοντας τιμές στο t στις παραμετρικές της εξισώσεις :

(*) $\{x=x_0+t\alpha_1 \quad , \quad y=y_0+t\alpha_2 \quad , \quad z=z_0+t\alpha_3\}$.

Τι t πρέπει να βάλουμε ώστε το σημείο να είναι στο (π) ; Τη τιμή του t θα πάρουμε από το γεγονός ότι το σημείο θα πρέπει να επαληθεύει την εξίσωση του επιπέδου . Δηλαδή :

$$A(x_0+t\alpha_1)+B(y_0+t\alpha_2)+\Gamma(z_0+t\alpha_3)+\Delta=0$$

ή

$$t=-\frac{Ax_0+By_0+\Gamma z_0+\Delta}{A\alpha_1+B\alpha_2+\Gamma\alpha_3} .$$

Βάζοντας αυτό το t στις (*) παίρνουμε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Q .

<u>Παράδειγμα 3</u> . Να βρεθεί το σημείο τομής του επιπέδου (π): x+2y-z=0 και της κάθετης προς αυτό ευθείας(ε) από το σημείο P(1,2,1) .

Η ευθεία (ε) ορίζεται από το σημείο P(1,2,1) και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $\bar{n}=(1,2,-1)$, που είναι κάθετο στο (π) . 'Ετσι οι συμμετρικές εξισώσεις της (ε) είναι :

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-1}{-1} .$$

Θέτοντας τους λόγους ίσους με t παίρνουμε τις παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας

(**) $\{x=1+t \quad , \quad y=2+2t \quad , \quad z=1-t\}$.

Βρίσκουμε το κατάλληλο t ώστε το σημείο της ευθείας να είναι στο (π) .

'Εχουμε :

$\cancel{1} + t + 4t + 4 - \cancel{1} + t = 0 \Rightarrow 6t = -4$.

!!

$1+t+2(2+2t)-(1-t)=0 \implies t=-\frac{1}{2}$

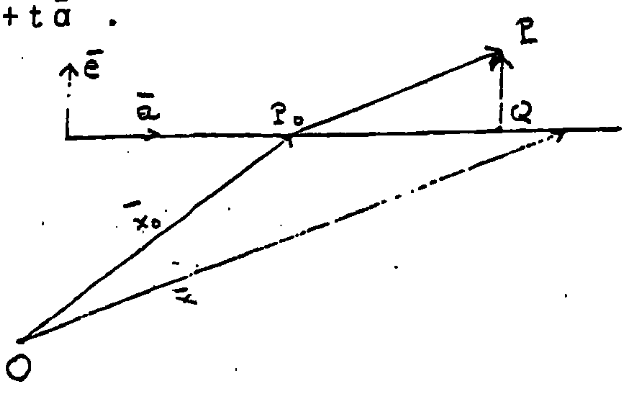
Τώρα το σημείο τομής Q έχει συντεταγμένες $Q(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2})$ που βρίσκουμε θέτοντας στις (**) $t=-\frac{1}{2}$.

<u>Παρατήρηση</u> . Στο παράδειγμα , που μόλις είδαμε είναι φανερό ότι $d(P,\pi)=d(P,Q)$. 'Ετσι αυτή η διαδικασία μας δείχνει άλλο ένα τρόπο πως να βρίσκουμε την απόσταση σημείου P από επίπεδο (π) . Βρίσκουμε τον πόδα Q και μετά την $d(P,Q)$ σύμφωνα με τον τύπο (*) στη σελίδα 19 .

<u>Απόσταση σημείου από ευθεία στο χώρο</u> . Δίνεται ευθεία (ε) και ένα σημείο P έξω από την ευθεία . Φέρνουμε από το P κάθετη στην (ε) και ας είναι Q ο πόδας της κάθετης . <u>Λέμε απόσταση του P από την (ε) και γράφουμε d(P,ε)</u> την απόσταση των P,Q . Δηλαδή :

$$d(P,\varepsilon) \overset{\text{ορισμός}}{=\!=\!=} d(P,Q) \; .$$

Θα εξετάσουμε θεωρητικά το πρόβλημα εύρεσης της απόστασης του P από την ευθεία $(\varepsilon): \bar{x}=\bar{x}_0+t\,\bar{a}$.



'Εχουμε $d=|\overline{QP}|$

Το σημείο P και η (ε) ορίζουν ένα επίπεδο (π) . Αν σ'αυτό το επίπεδο βρούμε ένα διάνυσμα $\bar{e}$ κάθετο στην (ε) τότε είναι φανερό πως :

$d = \dfrac{|\bar{e}\cdot\overline{P_0P}|}{|\bar{e}|} = |\overline{QP}|$. Αρκεί να βρούμε το $\bar{e}$. Το διάνυσμα $\bar{a}\times\overline{P_0P}$ είναι κάθετο σ'αυτό το επίπεδο που λέγαμε . Έτσι το διάνυσμα : $\bar{e}=\bar{a}\times(\bar{a}\times\overline{P_0P})$ είναι αυτό που ζητάμε (γιατί;) . Τώρα

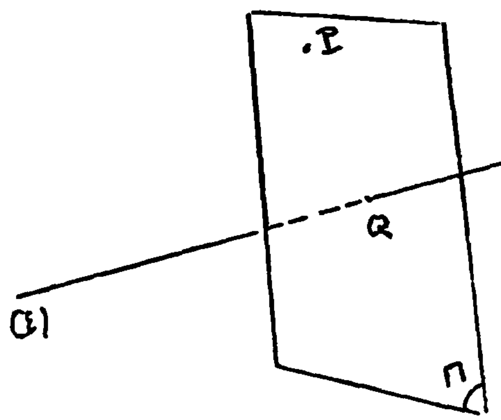
$$d = \frac{|\bar{e}\cdot\overline{P_0P}|}{|\bar{e}|} = \frac{|(\bar{a}\times(\bar{a}\times\overline{P_0P})\cdot\overline{P_0P}|}{|\bar{a}\times(\bar{a}\times\overline{P_0P})|} = \frac{|\bar{a}\times\overline{P_0P}|^2}{|\bar{a}|\,|\bar{a}\times\overline{P_0P}|} = \frac{|\bar{a}\times\overline{P_0P}|}{|\bar{a}|} .$$

'Αρα :

$$d = \frac{|\bar{a}\times\overline{P_0P}|}{|\bar{a}|} .$$

Στη πράξη όμως ακολουθούμε μια πιο κατανοητή μέθοδο . Την εξηγούμε με ένα παράδειγμα .

<u>Παράδειγμα 4</u> . Ζητάμε να βρούμε την απόσταση του σημείου P(2,-3,-1)



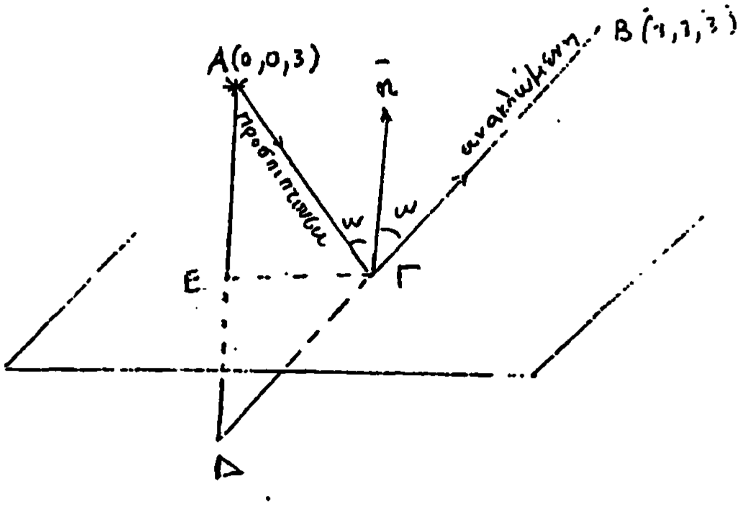
από την ευθεία (ε): $\frac{x-7}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z-5}{2}$.

Από το P φέρνουμε ένα επίπεδο (π) κάθετο στην (ε) . Βρίσκουμε το σημείο τομής Q του (π) με την (ε) . Η απόσταση που ζητάμε είναι η d(P,Q) . Το επίπεδο (π) έχει κάθετο το $\bar{n}=(1,2,2)$ αφού είναι κάθετο στην (ε) . Η εξίσωση του (π) είναι της μορφής : $x+2y+2z+\Delta=0$. Επειδή περνά από το P(2,-3,-1) θα ισχύει : $2+2(-3)+2(-1)+\Delta=0$ ή $\Delta=6$. Έτσι η εξίσωση του (π) είναι : $x+2y+2z+6=0$. Το σημείο τομής της (ε) με το (π) βρίσκεται όπως στο παράδειγμα 3 , σελίδα 86 και είναι το $Q(\frac{34}{9}, -\frac{31}{9}, -\frac{13}{9})$. Έτσι

$$d(P,\varepsilon)=d(P,Q)=\sqrt{(2-\frac{34}{9})^2+(-3+\frac{31}{9})^2+(-1+\frac{13}{9})^2}\ .$$

Στο επόμενο παράδειγμα θα εξετάσουμε ένα πρόβλημα από τη γεωμετρική οπτική .

Παράδειγμα 5 . Θεωρούμε το επίπεδο (π): $x+y+z-1=0$ σαν καθρέπτη και το σημείο A(0,0,3) σαν φωτεινή πηγή . Θέλουμε να δούμε που θα χτυπήσει μια φωτεινή αχτίνα το π ώστε ανακλώμενη να περάσει από το σημείο B(3,3,3) .



Λύση 1 . Αν βρούμε το συμμετρικό Δ του Α ως προς το π , τότε η ευθεία , που ορίζεται από τα Δ,Β τέμνει το π σε ένα σημείο Γ , που είναι το ζητούμενο , διότι τότε η προσπίπτουσα και η ανακλώμενη σχηματίζουν ίδια γωνία με την κάθετη $\bar{n}$ στο επίπεδο (νόμος ανάκλασης) .

Λύση 2 . Ξέρουμε πως το φως για να φθάσει από το Α στο Β αφού χτυπήσει το π , πρέπει να ακολουθήσει την ελάχιστη διαδρομή . Δηλαδή $|\overline{ΑΓ}|+|\overline{ΓΒ}|$=ελάχιστο . Για να βρούμε αυτό το Γ πρέπει να κάνουμε τη κατασκευή της λύσης 1 .

Λύση 3 . Το σημείο Γ μπορούμε να το βρούμε από τις εξής δύο συνθήκες :

α) $Γ \in π$, άρα το Γ επαληθεύει την εξίσωση του π

β) $\sphericalangle(\bar{n},\overline{ΓΑ}) = \sphericalangle(\bar{n},\overline{ΓΒ})$ (νόμος ανάκλασης)

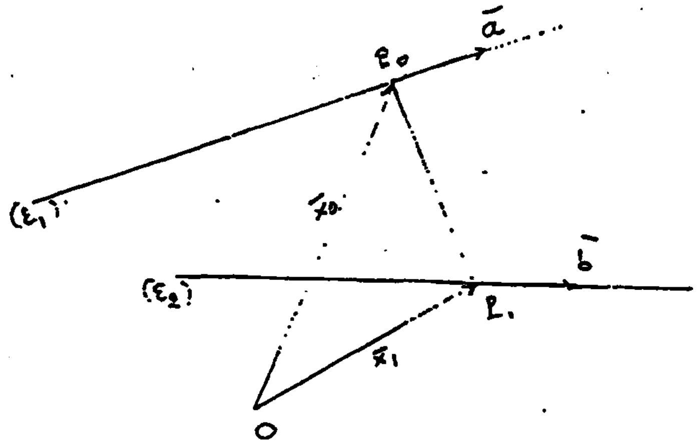
γ) $\overline{ΑΓ},\bar{n},\overline{ΓΒ}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα .

Βάζοντας συντεταγμένες στο Γ και λύνοντας τις εξισώσεις που θα βγούν , θα βρούμε τη λύση που θέλουμε . Προσοχή θα βγουν δύο λύσεις , το σημείο που θέλουμε καθώς και το σημείο τομής το π με την ΑΒ (γιατί;) .

Συμβατές και ασύμβατες ευθείες . Όταν δοθούν δύο ευθείες $(ε_1)$ και $(ε_2)$ τότε παρατηρούμε τα παρακάτω : Μπορεί να υπάρχει επίπεδο (π) , που περιέχει και τις δύο (συμβατές ευθείες) ή δεν υπάρχει επίπεδο που να τις περιέχει (ασύμβατες ευθείες) . Σκοπεύουμε παρακάτω να βρούμε ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε δύο ευθείες να είναι συμβατές . Δίνονται οι ευθείες :

$$(ε_1): \bar{x}=\bar{x}_0+t\bar{a} \quad \text{και} \quad (ε_2): \bar{x}=\bar{x}_1+t\,\bar{b} \quad \text{με} \quad \bar{x}_0=(x_0,y_0,z_0) \quad , \quad \bar{x}_1=(x_1,y_1,z_1)$$

και $\bar{a}=(a_1,a_2,a_3)\neq 0$, $\bar{b}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\neq 0$.



Βλέπουμε ότι οι (ε_1) , (ε_2) είναι συμβατές , αν και μόνο αν , τα διανύσματα $\overline{P_0P_1}$, $\bar{a}$ και $\bar{b}$ είναι συνεπίπεδα (γραμμικά εξαρτημένα) ενώ ασύμβατες αν είναι γραμμικά ανεξάρτητα .

'Ετσι :

$$(\varepsilon_1),(\varepsilon_2) \text{ συμβατές } \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$(\varepsilon_1),(\varepsilon_2) \text{ ασύμβατες } \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \neq 0 \quad .$$

<u>Κοινή κάθετη ασυμβάτων ευθειών</u> : θεωρούμε τις δύο ασύμβατες ευθείες : (ε_1): $\bar{x}=\bar{x}_0+t\,\bar{a}$

(ε_2): $\bar{x}=\bar{x}_1+t\,\bar{b}$

με $\bar{x}_0=(x_0,y_0,z_0)$, $\bar{a}=(a_1,a_2,a_3)\neq 0$ και $\bar{x}_1=(x_1,y_1,z_1)$, $\bar{b}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)\neq 0$.

Όπως ξέρουμε από τη στερεομετρία υπάρχει μια ευθεία (ε) που τέμνει τις $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ και είναι κάθετη σ'αυτές. Η ευθεία (ε) λέγεται <u>κοινή κάθετη των $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$</u>. Σκοπεύουμε να βρούμε αυτή τη κοινή κάθετη.

Ένα διάνυσμα παράλληλο στη κοινή κάθετη είναι το $\bar{a}\times\bar{b}$. Αρκεί να βρούμε ένα σημείο της κοινής κάθετης. Το σημείο το βρίσκουμε ως εξής. Το επίπεδο (π_1) που ορίζεται από την (ε_1) και τη κοινή κάθετη τέμνει την (ε_2) σε ένα σημείο $P_2=(x_2,y_2,z_2)$, που είναι σημείο της κοινής κάθετης. Το επίπεδο π_1 έχει εξίσωση

$$(\pi_1):\ \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2\beta_3-a_3\beta_2 & a_3\beta_1-a_1\beta_3 & a_1\beta_2-a_2\beta_1 \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Το (π_1) και η (ε_2) τέμνονται σε ένα σημείο P_2, του οποίου οι συντεταγμένες βρίσκονται από την $\bar{x}=\bar{x}_1+t\bar{b}$, αν βάλουμε το t που επαληθεύει την

$$\begin{vmatrix} x_1-x_0+t\beta_1 & y_1-y_0+t\beta_2 & z_1-z_0+t\beta_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2\beta_3-a_3\beta_2 & a_3\beta_1-a_1\beta_3 & a_1\beta_2-a_2\beta_1 \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Έτσι αφού έχουμε ένα σημείο $P_2(x_2,y_2,z_2)$ της κοινής καθέτου και ένα διάνυσμα παράλληλο το $\bar{a}\times\bar{b}$, μπορούμε να γράψουμε τις εξισώσεις της κοινής καθέτου.

<u>Παρατήρηση</u>. Αν η κοινή κάθετος (ε) τέμνει την (ε_1) στο A και την (ε_2) στο B, τότε το μήκος $|\overline{AB}|$ λέγεται <u>ελάχιστη απόσταση</u> των $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$.

Ασκήσεις .

1. Να βρεθεί το συμμετρικό του σημείου $P(-1,2,0)$ ως προς το επίπεδο $x+2y-z+1=0$.

2. Να βρεθεί η απόσταση του σημείου $P(1,1,-2)$ από την ευθεία (ε): $(2x-4z-3=0\ ,\ y-2z+5=0)$.

3. Να δείξετε πώς οι ευθείες (ε_1): $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-1}{2}$ και (ε_2): $\frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-1}{1}$ είναι συμβατές και να βρείτε το επίπεδο , που τις περιέχει .

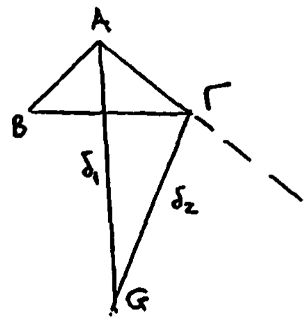
4. Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου $P(1,1,1)$ ως προς την ευθεία (ε): $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{8}=\frac{z-3}{1}$.

5. Να βρεθεί ευθεία (ε) που περνά από το $P(-3,5,-9)$ και συναντά τις (ε_1): $(3x-y+5=0\ ,\ 2x-z-3=0)$, (ε_2): $x=\frac{y+7}{4}=\frac{z-10}{5}$

6. Να βρεθεί το σημείο τομής των (ε_1): $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+2}{3}$, (ε_2): $\frac{x+2}{2}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z+3}{2}$. Μετά να βρείτε ευθεία από αυτό το σημείο και κάθετη στις (ε_1) και (ε_2) .

7. Να βρείτε επίπεδο που περιέχει την (ε_1): $\frac{x-3}{-1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+3}{1}$ και παράλληλο στην (ε_2): $\frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-4}{-1}$.

8. Δίνεται τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $A(2,2,3)$, $B(6,2,3)$, $\Gamma(2,2,6)$ και οι διχοτόμοι δ_1,δ_2 όπως στο σχήμα . Να βρείτε τις συντεταγμένες του ση-



μείου G καθώς και τις συμμετρικές εξισώσεις της δ_2 . Επίσης να βρείτε τις ακτίνες της εγγεγραμμένης και περιγεγραμμένης στο τρίγωνο ΑΒΓ περιφέρειας .

9. Δίνονται τα σημεία $A(1,1,2)$ και $B(2,0,-1)$. Να βρείτε ένα σημείο M στην ευθεία (ε): $(x=y=z)$, έτσι ώστε η γωνία $\widehat{AMB}$ να είναι ορθή .

10. Δίνονται οι ευθείες : (ε_1): $\frac{1-x}{\lambda} = \frac{y+2}{5} = \frac{z-1}{5}$, (ε_2): $\frac{x-3}{5} = \frac{7+y}{3} = \frac{z-8}{5}$. Να βρείτε το λ ώστε οι ορθές προβολές των $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ στο Oxy επίπεδο να είναι κάθετες μεταξύ τους .

4. Σφαίρα .

Η σφαίρα είναι το απλούστερο παράδειγμα επιφάνειας μετά το επίπεδο . Η επιφάνεια της σφαίρας είναι το σύνολο των σημείων του χώρου σε σταθερή απόσταση R από σταθερό σημείο K . Η σταθερή απόσταση R λέγεται ακτίνα της σφαίρας και το σταθερό σημείο K λέγεται κέντρο της σφαίρας . Αυτή η χαρακτηριστική ιδιότητα της σφαίρας θα μας βοηθήσει να βρούμε την εξίσωση της σφαίρας . Δηλαδή , να βρούμε εξίσωση της μορφής $f(x,y,z)=0$, όπου το σύνολο των λύσεων της είναι τα σημεία της σφαίρας .

Μας είναι εύκολο να γράψουμε την εξίσωση της σφαίρας . Αν $\bar{x}_K=(\alpha,\beta,\gamma)$ είναι το διάνυσμα θέσης του κέντρου της σφαίρας ως προς κάποια αρχή O και $\bar{x}=(x,y,z)$ το διάνυσμα θέσης του τυχαίου σημείου της σφαίρας τότε :

(1) $$|\bar{x}-\bar{x}_K| = R \quad .$$

Η εξίσωση (1) λέγεται <u>διανυσματική εξίσωση</u> της σφαίρας . Από την (1) παίρνουμε αμέσως την <u>κανονική εξίσωση</u> σφαίρας κέντρου $K(\alpha,\beta,\gamma)$ και ακτίνας R :

(2) $$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2 = R^2 \quad .$$

Ειδικώτερα , αν το κέντρο της σφαίρας είναι η αρχή των αξόνων τότε η κανονική εξίσωση της σφαίρας παίρνει τη μορφή :

$$x^2+y^2+z^2 = R^2 \quad .$$

Εκτελώντας τις πράξεις στην (2) παίρνουμε :

(3) $$x^2+y^2+z^2-2\alpha x-2\beta y-2\gamma z+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-R^2 = 0 \quad ,$$

η οποία είναι της γενικής μορφής

(4) $$x^2+y^2+z^2+Ax+By+\Gamma z+\Delta = 0 \quad .$$

Έτσι οι συντεταγμένες των σημείων της σφαίρας επαληθεύουν μια εξίσωση την (3) που είναι της μορφής (4) και που λέγεται <u>αναλυτική εξίσωση σφαίρας</u> .

Θα δείξουμε στη συνέχεια , ότι τα σημεία του χώρου που επαληθεύουν μια εξίσωση της μορφής (4) είναι μόνο όλα τα σημεία μιας σφαίρας . Πραγματικά , η (4) μετατρέπεται στην ισοδύναμη

$$(5)\qquad (x+\frac{A}{2})^2+(y+\frac{B}{2})^2+(z+\frac{\Gamma}{2})^2=\frac{A^2+B^2+\Gamma^2-4\Delta}{4}\quad .$$

'Ομως η (5) είναι η κανονική εξίσωση σφαίρας με κέντρο $K(-\frac{A}{2},-\frac{B}{2},-\frac{\Gamma}{2})$ και αχτίνα $R=\frac{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2-4\Delta}}{2}$. Είναι φανερό πως αυτή η σφαίρα είναι πραγματική (δηλαδή το σύνολο των λύσεων της (5) είναι μη κενό) αν $A^2+B^2+\Gamma^2-4\Delta>0$, φανταστική(σύνολο λύσεων κενό) αν $A^2+B^2+\Gamma^2-4\Delta<0$ και εκφυλίζεται σε ένα σημείο , το κέντρο της αν $A^2+B^2+\Gamma^2-4\Delta=0$.

Παρατήρηση . Πολλές φορές η αναλυτική εξίσωση της σφαίρας αναφέρεται και ως :

$$(6)\qquad E(x^2+y^2+z^2)+Ax+By+\Gamma z+\Delta=0 \quad \text{με} \quad E\neq 0 \quad .$$

Πραγματικά η (6) είναι ισοδύναμη με μια εξίσωση της μορφής (4) , αν διαιρέσουμε με E . Αξίζει να σημειώσουμε εδώ ότι η (6) για $E=0$ παριστάνει επίπεδο , δηλαδή εκφυλισμένη σφαίρα με κέντρο στο άπειρο .

Παράδειγμα 1 . Δίνονται τέσσερα σημεία του χώρου τα , $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$, $P_3(x_3,y_3,z_3)$ και $P_4(x_4,y_4,z_4)$ τα οποία δεν είναι συνεπίπεδα. Τότε υπάρχει μόνο μια σφαίρα , που περνά και από τα τέσσερα σημεία , με εξίσωση :

$$(7)\qquad \begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2+z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ z_4^2+y_4^2+z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Πραγματικά , αν αναπτύξουμε την ορίζουσα στην (7) τότε προκύπτει μια εξίσωση της μορφής (5) με :

$$E = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1-x_4 & y_1-y_4 & z_1-z_4 & 0 \\ x_2-x_4 & y_2-y_4 & z_2-z_4 & 0 \\ x_3-x_4 & y_3-y_4 & z_3-z_4 & 0 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_1-x_4 & y_1-y_4 & z_1-z_4 \\ x_2-x_4 & y_2-y_4 & z_2-z_4 \\ x_3-x_4 & y_3-y_4 & z_3-z_4 \end{vmatrix} = [\overline{P_4P_1}, \overline{P_4P_2}, \overline{P_4P_3}] \quad ,$$

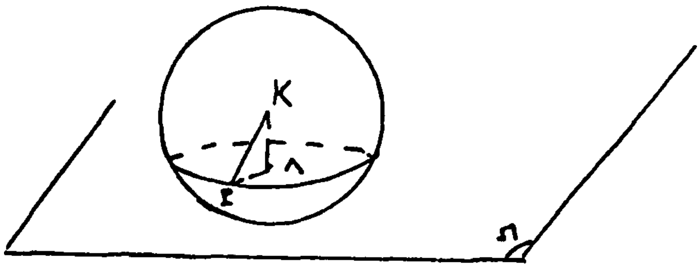
όπου η πρώτη ισότητα παίρνεται με αφαίρεση της τέταρτης γραμμής από τις άλλες.

Είναι φανερό ότι $E = [\overline{P_4P_1}, \overline{P_4P_2}, \overline{P_4P_3}] \neq 0$, αφού σε αντίθετη περίπτωση τα διανύσματα $\overline{P_4P_1}$, $\overline{P_4P_2}$, $\overline{P_4P_3}$ θα ήταν συνεπίπεδα και συνεπώς τα σημεία P_1 , P_2 , P_3 , P_4 θα ήταν συνεπίπεδα . Έτσι η (7) παριστάνει μια σφαίρα . Η σφαίρα αυτή περνά από τα P_1, P_2, P_3, P_4 αφού επαληθεύεται από τις συντεταγμένες αυτών των σημείων . Εύκολα προκύπτει ότι η σφαίρα αυτή είναι μοναδική (Μια απόδειξη θα δούμε παρακάτω) .

Τομή σφαίρας και επιπέδου . Θεωρούμε μια σφαίρα S κέντρου $K(\alpha,\beta,\gamma)$, ακτίνας R . Η κανονική της εξίσωση είναι :

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=R^2 \quad .$$

Παίρνουμε επί πλέον ένα επίπεδο (π): $Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$.



Η απόσταση του κέντρου K από το (π) είναι :

$$d=\frac{|A\alpha+B\beta+\Gamma\gamma+\Delta|}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}} \quad .$$

Είναι φανερό ότι η σφαίρα και το επίπεδο έχουν κοινά σημεία αν $d\leq R$. Αν $d>R$ δεν έχουν κοινά σημεία . Θέλουμε να βρούμε τι είναι η τομή (κοινά σημεία) της σφαίρας και του επιπέδου όταν υπάρχει ; Σύμφωνα με όσα είπαμε στην αρχή αυτού του κεφαλαίου , η τομή είναι μια καμπύλη . Τι καμπύλη όμως ;
Ας είναι Λ η προβολή του K στο (π) τότε το Λ είναι ένα σταθερό σημείο θέτουμε $|\overline{K\Lambda}|=d(K,\pi)=d$. Αν P είναι ένα κοινό σημείο σφαίρας και επιπέδου τότε : $|\overline{\Lambda P}|^2=|\overline{KP}|^2-|\overline{K\Lambda}|^2$, από το ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\triangle}{K\Lambda P}$. Έτσι: $|\overline{\Lambda P}|^2=R^2-d^2$.

Βλέπουμε λοιπόν ότι τα κοινά σημεία σφαίρας και επιπέδου , ανήκουν στο (π) και απέχουν από το Λ σταθερά απόσταση ίση με $\sqrt{R^2-d^2}$. Έτσι τα κοινά σημεία είναι μια περιφέρεια κύκλου στο επίπεδο π με κέντρο Λ , αχτίνα $\rho=\sqrt{R^2-d^2}$. Βλέπουμε ότι για $d>R$ η περιφέρεια είναι φανταστική (δεν υπάρχουν κοινά σημεία) . Αν $d=R$ τότε η περιφέρεια εκφυλίζεται σε ένα σημείο , δηλαδή σφαίρα και επίπεδο έχουν ένα μόνο κοινό σημείο . <u>Σ'αυτή τη περίπτωση λέμε ότι το (π) εφάπτεται της σφαίρας στο μόνο κοινό σημείο , το οποίο λέγεται σημείο επαφής του (π)</u> . Παρατηρούμε ότι όταν το (π) εφάπτεται της S στο P τότε το $\overline{KP}$ διάνυσμα είναι κάθετο στο επίπεδο . Τέλος αν $d<R$ τότε η σφαίρα και το επίπεδο έχουν τομή μια περιφέρεια κύκλου με αχτίνα $\rho=\sqrt{R^2-d^2}$. Για να βρούμε τις συντεταγμένες του κέντρου Λ αυτής της περιφέρειας αρκεί να βρούμε τη τομή του (π) με την ευθεία (ε) από το Κ που είναι κάθετη στο (π) δηλαδή την :

$$(\varepsilon) : \frac{x-\alpha}{A} = \frac{y-\beta}{B} = \frac{z-\gamma}{\Gamma} \quad .$$

Στη συνέχεια θα βρούμε την εξίσωση του επιπέδου , που εφάπτεται της σφαίρας με εξίσωση :

(8) $$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=R^2 \quad ,$$

στο σημείο της $P_0(x_0,y_0,z_0)$.

<u>Εφαπτόμενο επίπεδο σφαίρας</u> . Αν $K(\alpha,\beta,\gamma)$ είναι το κέντρο της σφαίρας και (π) το εφαπτόμενο επίπεδο στο $P_0(x_0,y_0,z_0)$, τότε το (π) περνά από το P_0 και είναι κάθετο στο $\overline{KP_0}$. Η εξίσωση του (π) , σύμφωνα με

όσα εκθέσαμε στη σελίδα 61 είναι :

(9) $(x-x_0)(x_0-\alpha)+(y-y_0)(y_0-\beta)+(z-z_0)(z_0-\gamma)=0$,

όπου $P(x,y,z)$ είναι τυχαίο σημείο του (π) . Αυτό συμπεραίνεται από την : $\overline{P_0P}\cdot\overline{KP_0}=0$.

Από την (9) παίρνουμε θέτοντας : $x-x_0=(x-\alpha)-(x_0-\alpha)$, $y-y_0=(y-\beta)-(y_0-\beta)$ και $z-z_0=(z-\gamma)-(z_0-\gamma)$ ότι :

$$(x-\alpha)(x_0-\alpha)-(x_0-\alpha)^2+(y-\beta)(y_0-\beta)-(y_0-\beta)^2+(z-\gamma)(z_0-\gamma)-(z_0-\gamma)^2=0$$ ή

(10) $(x-\alpha)(x_0-\alpha)+(y-\beta)(y_0-\beta)+(z-\gamma)(z_0-\gamma)=R^2$,

αφού $(x_0-\alpha)^2+(y_0-\beta)^2+(z_0-\gamma)^2=R^2$. Έτσι η (10) είναι το επίπεδο που εφάπτεται της (7) στο $P_0(x_0,y_0,z_0)$.

<u>Όταν η σφαίρα S δίνεται με την αναλυτική της εξίσωσης</u>

(11) $x^2+y^2+z^2+Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$,

<u>ποιά είναι η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στο $P_0(x_0,y_0,z_0)$;</u>

Η κανονική εξίσωση της σφαίρας είναι σ'αυτή τη περίπτωση ,

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2+\left(z+\frac{\Gamma}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2+\Gamma^2-4\Delta}{4} .$$

Εφαρμόζοντας την (10) έχουμε για την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου :

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)\left(x_0+\frac{A}{2}\right)+\left(y+\frac{B}{2}\right)\left(y_0+\frac{B}{2}\right)+\left(z+\frac{\Gamma}{2}\right)\left(z_0+\frac{\Gamma}{2}\right)=\frac{A^2+B^2+\Gamma^2-4\Delta}{4}$$

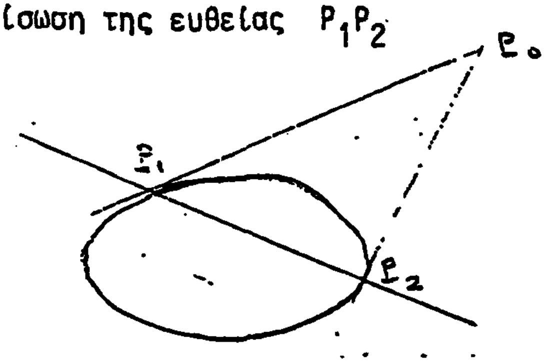
ή κάνοντας πράξεις

$$(12)\qquad xx_0+yy_0+zz_0+\frac{A}{2}(x+x_0)+\frac{B}{2}(y+y_0)+\frac{\Gamma}{2}(z+z_0)+\Delta=0 \quad .$$

Η (12) είναι η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στη σφαίρα με εξίσωση την (11).

Πριν προχωρήσουμε σε ένα ενδιαφέρον πρόβλημα, ας θυμηθούμε μια ενδιαφέρουσα διαδικασία από τα μαθηματικά του Λυκείου (κοίταξε και πρόβλημα 4.1.2.).

Κατάσταση : Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ και ένα σημείο $P_0(x_0;y_0)$ στο εξωτερικό μέρος της έλλειψης. Από το P_0 φέρνουμε τις δύο εφαπτόμενες της έλλειψης, οι οποίες εφάπτονται στα σημεία $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$. Ζητάμε να βρούμε την εξίσωση της ευθείας P_1P_2



Η εξίσωση της ευθείας P_1P_0, αφού είναι εφαπτόμενη στο P_1, είναι η

$$(i)\qquad P_1P_0 :\ \frac{xx_1}{\alpha^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1 \quad .$$

Η (i) επαληθεύεται από το σημείο P_0 . 'Ετσι έχουμε

(ii) $$\frac{x_0x_1}{a^2}+\frac{y_0y_1}{b^2}=1 \quad .$$

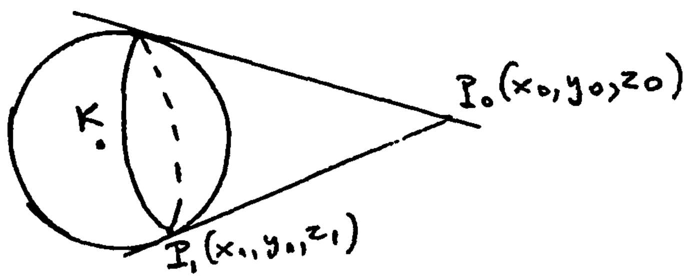
'Ομως η (ii) δηλώνει ότι το σημείο P_1 βρίσκεται πάνω στην ευθεία (ε) με εξίσωση την :

(ε) $$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}=1 \quad .$$

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο δείχνουμε ότι και το σημείο P_2 βρίσκεται πάνω στην (ε) . 'Ετσι η εξίσωση της P_1P_2 είναι η εξίσωση (ε) .

Ανάλογο πρόβλημα έχουμε και για τη περίπτωση της σφαίρας .

Πρόβλημα . Δίνεται μια σφαίρα S με εξίσωση : $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=R^2$ και ένα σημείο $P_0(x_0,y_0,z_0)$ στο εξωτερικό της . Από το σημείο P_0 μπορούμε να φέρουμε πολλά επίπεδα που εφάπτονται της σφαίρας . Θα δείξουμε ότι τα σημεία επαφής αυτών των επιπέδων είναι πάνω σε ένα επίπεδο και μάλιστα σχηματίζουν μια περιφέρεια κύκλου .



Ας είναι $P_1(x_1,y_1,z_1)$ το σημείο επαφής ενός επιπέδου (π) από το $P_0(x_0,y_0,z_0)$

Η εξίσωση αυτού του επιπέδου , σύμφωνα με την (10) είναι η :

(13) : $(x-\alpha)(x_1-\alpha)+(y-\beta)(y_1-\beta)+(z-\gamma)(z_1-\gamma)=R^2$.

'Ομως το (π) περνά και από το σημείο P_0 , άρα θα έχουμε :

(14) : $(x_0-\alpha)(x_1-\alpha)+(y_0-\beta)(y_1-\beta)+(z_0-\gamma)(z_1-\gamma)=R^2$.

Η (14) μας λέγει ότι το σημείο $P_1(x_1,y_1,z_1)$ είναι πάνω στο επίπεδο με εξίσωση :

(15) : $(x_0-\alpha)(x-\alpha)+(y_0-\beta)(y-\beta)+(z_0-\gamma)(z-\gamma)=R^2$.

'Ετσι όλα τα σημεία επαφής είναι πάνω στο επίπεδο με εξίσωση την (15) . 'Ολα λοιπόν τα σημεία επαφής είναι η τομή της σφαίρας με το επίπεδο (14) , είναι δηλαδή μια περιφέρεια κύκλου .

<u>Ορισμός</u> : 'Οταν δοθεί μια σφαίρα S με εξίσωση: $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=R^2$ και ένα σημείο $P_0(x_0,y_0,z_0)$ όχι αναγκαστικά πάνω στην S τότε το επίπεδο με εξίσωση την

$$(x_0-\alpha)(x-\alpha)+(y_0-\beta)(y-\beta)+(z_0-\gamma)(z-\gamma)=R^2$$

λέγεται <u>πολικό επίπεδο</u> του P_0 ως προς την S .

<u>Παρατήρηση</u> . Αν το σημείο P_0 είναι πάνω στην S τότε το πολικό επίπεδο του P_0 ως προς την S είναι το εφαπτόμενο επίπεδο της S στο P_0 . Αν το P_0 είναι στο εξωτερικό της σφαίρας , τότε το πολικό επίπεδο του P_0 έχει τη γεωμετρική σημασία που μόλις εκθέσαμε στο προηγούμενο πρόβλημα . Αν το σημείο P_0 είναι στο εσωτερικό της σφαίρας , τότε το πολικό επίπεδο του

P_0 δεν μπορούμε να το ερμηνεύσουμε γεωμετρικά , όπως προηγούμενα .

Δύναμη σημείου ως προς σφαίρα . Θεωρούμε τη σφαίρα S με εξίσωση : $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=R^2$, κέντρου $K(\alpha,\beta,\gamma)$ και αχτίνας R . Για τυχαίο σημείο $P_0(x_0,y_0,z_0)$ του χώρου ορίζουμε :

$$(16) \qquad \Delta(P_0,S)=(x_0-\alpha)^2+(y_0-\beta)^2+(z_0-\gamma)^2-R^2 \quad .$$

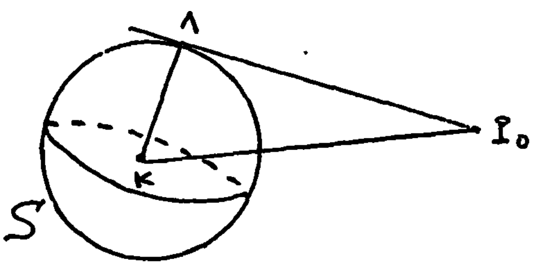
Η ποσότητα $\Delta(P_0,S)$ λέγεται δύναμη του σημείου P_0 ως προς τη σφαίρα S .

Παρατηρούμε ότι : $\Delta(P_0,S)=|\overline{P_0K}|^2-R^2$. Έτσι η δύναμη είναι θετική , αν η απόσταση του P_0 από το K είναι μεγαλύτερη του R (δηλαδή το P_0 είναι στο εξωτερικό της σφαίρας) , αρνητική αν η απόσταση του P_0 από το K είναι μικρότερη του R (δηλαδή το P_0 είναι στο εσωτερικό της σφαίρας) και είναι μηδέν αν το P_0 είναι πάνω στη σφαίρα .

Ειδικά αν $S: x^2+y^2+z^2+Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$, τότε :

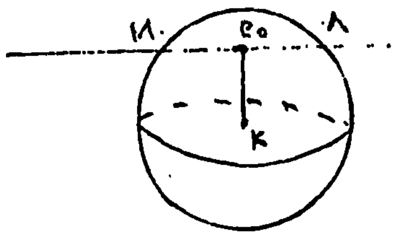
$$\Delta(P_0,S)=(x_0+\tfrac{A}{2})^2+(y_0+\tfrac{B}{2})^2+(z_0+\tfrac{\Gamma}{2})^2-\frac{A^2+B^2+\Gamma^2-4\Delta}{4}=x_0^2+y_0^2+z_0^2+Ax_0+By_0+\Gamma z_0+\Delta \;.$$

Γεωμετρική ερμηνεία της δύναμης : Ξέρουμε ότι : $\Delta(P_0,S)=|\overline{P_0K}|^2-R^2$.



σχήμα 1

'Οταν το σημείο είναι στο εξωτερικό (σχήμα 1) τότε από το ορθογώνιο τρίγωνο $\overset{\triangle}{P_0\Lambda K}$ έχουμε : $\Delta(P_0,S) = |\overline{P_0\Lambda}|^2$.



σχήμα 2

'Οταν το σημείο είναι στο εσωτερικό (σχήμα 2) τότε $\Delta(P_0,S)=-|\overline{P_0\Lambda}|^2=-|\frac{\overline{M\Lambda}}{2}|^2=$

$= -\frac{|\overline{M\Lambda}|^2}{4}$, όπου $\overline{M\Lambda}$ είναι μια χορδή κάθετη στο $\overline{P_0K}$.

<u>Ορισμός</u> . Δίνονται δύο σφαίρες S_1 και S_2 . Λέγεται <u>ριζικό επίπεδο</u> των S_1,S_2 το σύνολο των σημείων (ο γεωμετρικός τόπος) που έχουν ίδια δύναμη ως προς τις δύο σφαίρες .

Παίρνουμε δύο σφαίρες : $S_1: x^2+y^2+z^2+A_1x+B_1y+\Gamma_1z+\Delta_1=0$

$$S_2: x^2+y^2+z^2+A_2x+B_2y+\Gamma_2z+\Delta_2=0 \quad .$$

Ας είναι $P_0(x_0,y_0,z_0)$ ένα σημείο του χώρου , έτσι ώστε

$$\Delta(P_0,S_1)=\Delta(P_0,S_2) \quad .$$

Τότε : $x_0^2+y_0^2+z_0^2+A_1x_0+B_1y_0+\Gamma_1z_0+\Delta_1=x_0^2+y_0^2+z_0^2+A_2x_0+B_2y_0+\Gamma_2z_0+\Delta_2$

ή

$$(A_1-A_2)x_0+(B_1-B_2)y_0+(\Gamma_1-\Gamma_2)z_0+\Delta_1-\Delta_2=0 \quad .$$

'Ετσι κάθε σημείο $P(x,y,z)$ του χώρου,που έχει ίδια δύναμη ως προς τις S_1 και S_2 ικανοποιεί την εξίσωση :

$$(A_1-A_2)x+(B_1-B_2)y+(\Gamma_1-\Gamma_2)z+(\Delta_1-\Delta_2)=0 \qquad (17)$$

Υποθέτουμε ότι $(A_1,B_1,\Gamma_1)\neq(A_2,B_2,\Gamma_2)$, δηλαδή ότι οι S_1,S_2 δεν είναι ομόκεντρες . Τότε η εξίσωση (17) παριστάνει ένα επίπεδο , το οποίο ονομάσαμε ριζικό επίπεδο .

Πάνω στο ριζικό επίπεδο βρίσκονται και τα σημεία που έχουν δύναμη μηδέν και ως προς τις δύο σφαίρες S_1,S_2 . Τα σημεία όμως που έχουν δύναμη μηδέν και ως προς τις δύο σφαίρες είναι τα σημεία τομής των S_1 και S_2 . 'Ετσι τα σημεία τομής των S_1 και S_2 είναι πάνω στο ριζικό επίπεδο . Επειδή όμως η τομή σφαίρας και επιπέδου είναι περιφέρεια κύκλου , συμπεραίνουμε ότι : Αν δύο σφαίρες S_1 και S_2 τέμνονται τότε η τομή τους είναι περιφέρεια κύκλου .

Είμαστε τώρα σε θέση να δείξουμε τη μοναδικότητα της σφαίρας (7) στο παράδειγμα 1 , σελίδα 96. Πραγματικά αν υπάρχουν δύο σφαίρες S_1 και S_2 που περνούν από τα P_1,P_2,P_3,P_4 τότε αυτές θα τέμνονται σε μια περιφέρεια κύκλου και τα P_1,P_2,P_3,P_4 θα ήταν σημεία αυτής της περιφέρειας , σαν κοινά σημεία των S_1,S_2 . Τότε όμως τα P_1,P_2,P_3,P_4 θα ήταν συνεπίπεδα σημεία , που είναι άτοπο !

Παρατήρηση . 'Εχουμε δει ότι μια ευθεία στο χώρο περιγράφεται με δύο εξισώσεις (τομή δύο επιπέδων) . Το ίδιο μια περιφέρεια στο χώρο παριστάνεται με δύο εξισώσεις (τομή σφαίρας και επιπέδου) ή (τομή δύο σφαιρών) .

<u>Δέσμη σφαιρών</u> : Θεωρούμε δύο σφαίρες S_1, S_2 με εξισώσεις :

$$S_1 : (1) \quad \Sigma_1(x,y,z) = E_1(x^2+y^2+z^2)+A_1x+B_1y+\Gamma_1z+\Delta_1 = 0$$

$$S_2 : (2) \quad \Sigma_2(x,y,z) = E_2(x^2+y^2+z^2)+A_2x+B_2y+\Gamma_2z \ \Delta_2 = 0 \quad ,$$

όπου $\Sigma_1(x,y,z)$, $\Sigma_2(x,y,z)$ είναι τα πρώτα μέλη των (1) και (2) αντίστοιχα . Οι S_1, S_2 μπορούν να είναι και επίπεδα (δηλαδή σφαίρες με κέντρα στο άπειρο) για $E_1=0$ ή $E_2=0$.

Θεωρούμε την εξίσωση :

$$(3) \qquad \lambda_1\Sigma_1(x,y,z)+\lambda_2\Sigma_2(x,y,z) = 0 \quad \text{με} \quad (\lambda_1,\lambda_2)\neq(0,0) \quad .$$

Η (3) γράφεται ως :

$$(\lambda_1E_1+\lambda_2E_2)(x^2+y^2+z^2)+(\lambda_1A_1+\lambda_2A_2)x+(\lambda_1B_1+\lambda_2B_2)y+(\lambda_1\Gamma_1+\lambda_2\Gamma_2)z+\lambda_1\Delta_1+\lambda_2\Delta_2 = 0$$

και παριστάνει σφαίρα.(Αν $\lambda_1E_1+\lambda_2E_2=0$, παριστάνει επίπεδο : δηλαδή σφαίρα με κέντρο στο άπειρο) . Έτσι η (3) παριστάνει σφαίρα , που περνά από τη τομή των S_1,S_2 . Πραγματικά η (3) επαληθεύεται από τα κοινά σημεία των S_1,S_2 , αφού για τέτοια σημεία ισχύει $\Sigma_1(x,y,z)=\Sigma_2(x,y,z)=0$.

Θα δείξουμε τώρα ότι κάθε σφαίρα S που περνά από τη τομή των S_1,S_2 έχει εξίσωση της μορφής (3) . Πραγματικά , ας είναι $P_0(x_0,y_0,z_0)$ ένα σημείο της S που δεν ανήκει στη τομή των S_1 και S_2 . Τότε η εξίσωση

$$(4) \qquad -\Sigma_2(x_0,y_0,z_0)\Sigma_1(x,y,z)+\Sigma_1(x_0,y_0,z_0)\Sigma_2(x,y,z) = 0$$

είναι της μορφής (3) και συνεπώς περιστάνει σφαίρα (<u>Προσοχή</u> : Τα $\Sigma_1(x_0,y_0,z_0)$, $\Sigma_2(x_0,y_0,z_0)$ είναι αριθμοί όχι και οι δύο μηδέν , αφού το (x_0,y_0,z_0) δεν είναι σημείο στη τομή των S_1,S_2) . Η σφαίρα με εξίσωση την (4) περνά από το

$P_0(x_0,y_0,z_0)$ (γιατί;) καθώς και από τη τομή των S_1,S_2 (γιατί;) . 'Ετσι η σφαίρα με εξίσωση την (4) πρέπει να είναι η S .

<u>Συμπέρασμα</u> : <u>Η εξίσωση $\lambda_1\Sigma_1(x,y,z)+\lambda_2\Sigma_2(x,y,z)=0$ με $(\lambda_1,\lambda_2)\neq(0,0)$ μας δίνει όλες τις σφαίρες που περνούν από τη τομή των S_1,S_2 και μόνο αυτές. Το σύνολο αυτών των σφαιρών λέγεται δέσμη σφαι</u>

Το παραπάνω συμπέρασμα μας βοηθάει , όταν θέλουμε να αντιμετωπίσουμε προβλήματα σε σφαίρες . Για μεγαλύτερη διευκρίνηση δίνουμε ένα παράδειγμα .

<u>Παράδειγμα</u> : Παίρνουμε τις σφαίρες S_1,S_2 ως :

$$S_1 : x^2+y^2+z^2-2y-4z-40=0$$

$$S_2 , x^2+y^2+z^2-4x-2y-20=0 \quad .$$

Θέλουμε να βρούμε μια σφαίρα που περνά από τη τομή των S_1,S_2 καθώς και από σημείο $O(0,0,0)$. Η εξίσωση της σφαίρας που ζητάμε θα είναι της μορφής :

$$(*) \qquad \lambda_1(x^2+y^2+z^2-2y-4z-40)+\lambda_2(x^2+y^2+z^2-4x-2y-20)=0 \quad .$$

Επειδή θέλουμε να περνά και από το $O(0,0,0)$ θα πρέπει να ισχύει :

$\lambda_1(-40)+\lambda_2(-20)=0$ ή $2\lambda_1+\lambda_2=0$. Θέτοντας στην (*) συμπεραίνουμε ότι η σφαίρα που ζητάμε έχει εξίσωση την

$$x^2+y^2+z^2-8x-2y-4z=0 \quad .$$

<u>Ερώτημα</u> : Αν δεν ξέραμε τη διαδικασία της δέσμης σφαιρών , πως θα αντιμετωπίζαμε το παραπάνω πρόβλημα ; (κοίταξε σελίδα 95, παράδειγμα 1) .

Ασκήσεις στη σφαίρα .

1. Να βρεθεί εξίσωση σφαίρας που περνά από τη τομή των σφαιρών : S_1 : $x^2+y^2+z^2-x+y-z-1=0$, S_2 : $x^2+y^2+z^2-2x-y+z-2=0$ και το σημείο $P_0(1,1,1)$.

2. Να βρείτε την εξίσωση σφαίρας που έχει το τμήμα ΑΒ διάμετρο , όπου $A(5,2,-1)$ και $B(-3,4,7)$.

3. Μια σφαίρα εφάπτεται του επιπέδου $2x-y+2z+3=0$ και έχει κέντρο το $K(3,1,5)$. Να βρείτε την αναλυτική της εξίσωση .

4. Να βρείτε τη σφαίρα που περνά από τη τομή τη σφαίρας S_1 : $x^2+y^2+z^2-4x-6y-8z-30=0$ και του επιπέδου (π) : $x+y+z=1$ και από το σημείο $(4,3,3)$.

5. Δίνεται η σφαίρα S_1 : $x^2+y^2+z^2-4x-6y+8z-21=0$ και η ευθεία (ε) : $\bar{x}=(2,3,2)+t(1,0,-1)$. Να βρείτε τα σημεία τομής καθώς και τα εφαπτόμενα επίπεδα της σφαίρας σε αυτά τα σημεία .

6. Να βρεθεί η σφαίρα , που περνά από το σημείο $A(0,0,2)$ και τέμνει το επίπεδο $0xy$ κατά κύκλο με κέντρο την αρχή των αξόνων και αχτίνα 1 .

7. Δίνεται η περιφέρεια (c) : $(z=\frac{1}{2}\ ,\ x^2+y^2+z^2=1)$. Στα σημεία της c φέρνουμε τα εφαπτόμενα επίπεδα της $x^2+y^2+z^2=1$. Να δείξετε ότι όλα αυτά τα επίπεδα τέμνονται σε ένα σημείο , του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες .

8. Δίνονται οι σφαίρες S_1, S_2 ως :

$$S_1:\ \Sigma_1(x,y,z) = E_1(x^2+y^2+z^2)+A_1x+B_1y+\Gamma_1z+\Delta_1 = 0 \quad , \quad E_1\neq 0$$

$$S_2:\ \Sigma_2(x,y,z) = E_2(x^2+y^2+z^2)+A_2x+B_2y+\Gamma_2z+\Delta_2 = 0 \quad , \quad E_2\neq 0 \quad .$$

Όταν αυτές τέμνονται τότε η τομή τους είναι κύκλος πάνω σε ένα επίπεδο , το οποίο λέγεται ριζικό επίπεδο . Το ριζικό επίπεδο είναι λοιπόν μια σφαίρα (με κέντρο στο άπειρο) , που περνά από τη τομή των S_1,S_2 . Πως θα γράψουμε την εξίσωση του ριζικού επιπέδου με τη μορφή :

$$\lambda_1\Sigma_1(x,y,z)+\lambda_2\Sigma_2(x,y,z) = 0 \quad ;$$

(Υπόδειξη : Δοκιμάστε για $\lambda_1=E_2$ και $\lambda_2=-E_1$) .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ III : ΑΛΛΑΓΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ - ΕΙΔΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ .

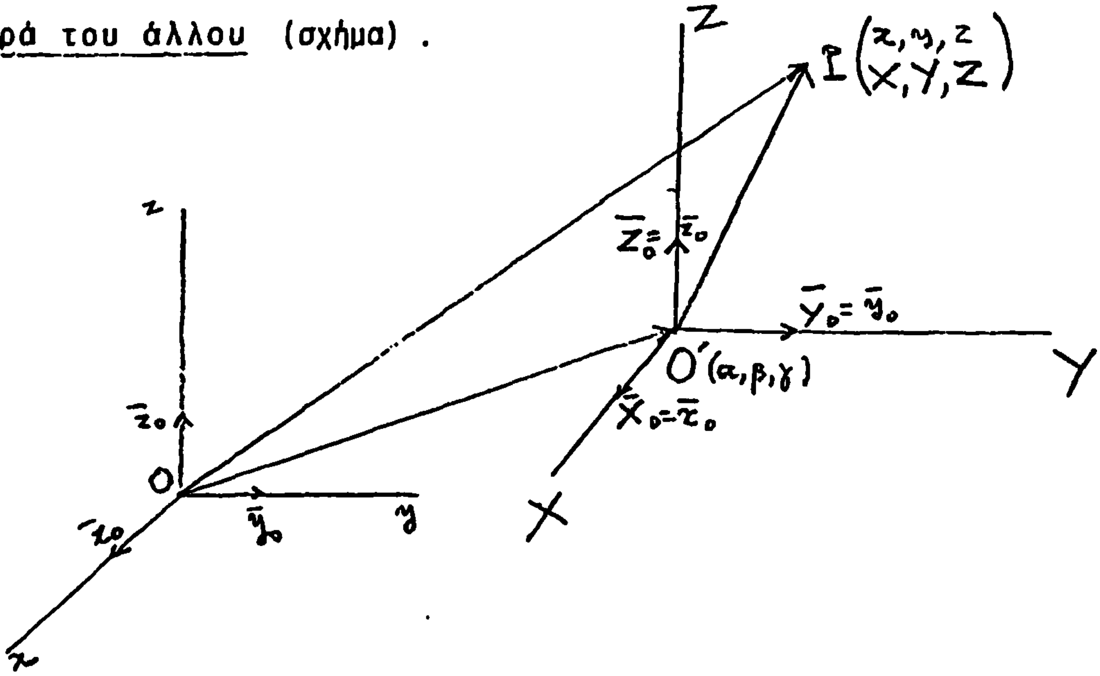
1. Αλλαγή συστήματος συντεταγμένων .

Πολλές φορές στην αναλυτική γεωμετρία είναι σκόπιμο να μεταβαίνουμε από ένα σύστημα συντεταγμένων σε άλλο . Έτσι για να μεταφέρουμε ένα πρόβλημα από ένα σύστημα συντεταγμένων σε άλλο ένα , πρέπει να ξέρουμε πως σχετίζονται οι συντεταγμένες ενός σημείου P ως προς το ένα σύστημα , με τις συντεταγμένες του ίδιου σημείου ως προς το άλλο σύστημα . Οι εξισώσεις με τις οποίες βρίσκουμε τις συντεταγμένες ενός σημείου ως προς ένα σύστημα , όταν ξέρουμε τις συντεταγμένες του ως προς άλλο ένα σύστημα λέγονται <u>μετασχηματισμοί των συντεταγμένων</u> . Η αναγκαιότητα μετάβασης από ένα σύστημα συντεταγμένων σε άλλο , βασίζεται στο γεγονός ότι σε κάποιο σύστημα συντεταγμένων η εξίσωση που περιγράφει ένα πρόβλημα ή γεωμετρικό σχήμα κ.λ.π. μπορεί να είναι απλούστερη . Για παράδειγμα , όταν ένα σχήμα έχει κέντρο συμμετρίας ή άξονα συμμετρίας η μελέτη του γίνεται απλούστερη αν διαλέξουμε για αρχή το κέντρο συμμετρίας και για έναν από τους άξονες συντεταγμένων , τον άξονα συμμετρίας . (Πόσο απλή είναι η εξίσωση σφαίρας με κέντρο την αρχή των συντεταγμένων !) .

2. Μετασχηματισμοί συντεταγμένων .

Θα κοιτάξουμε μετασχηματισμούς συντεταγμένων για ορθογώνια συστήματα μιας και χρησιμοποιούνται περισσότερο .

α) <u>Παράλληλη μεταφορά</u> . Παίρνουμε δύο συστήματα συντεταγμένων $\{O;\bar{x}_0,\bar{y}_0,\bar{z}_0\}$ και $\{O';\bar{X}_0,\bar{Y}_0,\bar{Z}_0\}$ έτσι ώστε : $\bar{X}_0=\bar{x}_0$, $\bar{Y}_0=\bar{y}_0$ και $\bar{Z}_0=\bar{z}_0$. Δύο τέτοια συστήματα λέγονται <u>παράλληλα</u> και το ένα λέγεται <u>παράλληλη μεταφορά του άλλου</u> (σχήμα) .



Το σημείο P έχει συντεταγμένες (x,y,z) στο πρώτο σύστημα και (X,Y,Z) ως προς το δεύτερο . Το δεύτερο σύστημα $\{O';\bar{X}_0,\bar{Y}_0,\bar{Z}_0\}$ είναι τελείως καθορισμένο όταν ξέρουμε τις συντεταγμένες του O'. Ας είναι $O'(\alpha,\beta,\gamma)$. Έχουμε :

$$\overline{OP}=\overline{OO'}+\overline{O'P}$$

ή

$$x\bar{x}_0+y\bar{y}_0+z\bar{z}_0=\alpha\,\bar{x}_0+\beta\,\bar{y}_0+\gamma\,\bar{z}_0+X\,\bar{X}_0+Y\,\bar{Y}_0+Z\,\bar{Z}_0$$

ή λόγω της παραλληλίας $(\bar{X}_0=\bar{x}_0 ,\ \bar{Y}_0=\bar{y}_0 ,\ \bar{Z}_0=\bar{z}_0)$

$$x\bar{x}_0+y\bar{y}_0+z\bar{z}_0=(\alpha+X)\bar{x}_0+(\beta+Y)\bar{y}_0+(\gamma+Z)\bar{z}_0$$

ή

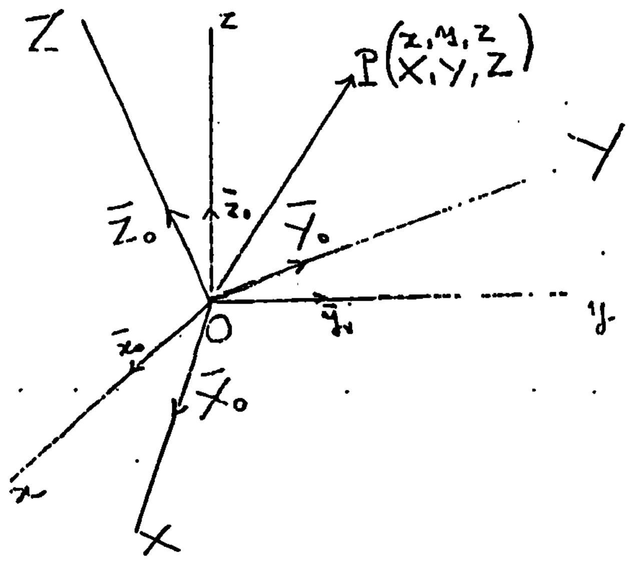
(1) $\{ x = X+\alpha \ , \ y = Y+\beta \ , \ z = Z+\gamma \}$

Όμοια έχουμε :

(2) $\{ X = x-\alpha \ , \ Y = y-\beta \ , \ Z = z-\gamma \}$

Οι (1) και (2) είναι οι μετασχηματισμοί συντεταγμένων στη παράλληλη μεταφορά. Μας δίνουν τις συντεταγμένες ενός σημείου στο ένα σύστημα όταν ξέρουμε τις συντεταγμένες του σημείου στο άλλο σύστημα .

β) <u>Στροφή</u> . Όταν δύο συστήματα έχουν κοινή αρχή λέμε ότι το <u>ένα σύστημα είναι στροφή του άλλου</u> (συνήθως μιλάμε για στροφή , όταν είναι και τα δύο δεξιόστροφα ή αριστερόστροφα) . Θα βρούμε τους μετασχηματισμούς



συντεταγμένων με μόνη τη προϋπόθεση ότι τα συστήματα έχουν κοινή αρχή . Αν ξέρουμε τις γωνίες που κάνουν τα $\bar{X}_0, \bar{Y}_0, \bar{Z}_0$ με τα $\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0$ τότε το σύστημα $\{0;\bar{X}_0,\bar{Y}_0,\bar{Z}_0\}$ είναι τελείως καθορισμένο . Επειδή η τριάδα $(\bar{x}_0,\bar{y}_0,\bar{z}_0)$ είναι βάση έχουμε :

$$(3)\quad \begin{cases} \bar{X}_0 = \alpha_1\bar{x}_0+\alpha_2\bar{y}_0+\alpha_3\bar{z}_0 \\ \bar{Y}_0 = \beta_1\bar{x}_0 + \beta_2\bar{y}_0+\beta_3\bar{z}_0 \\ \bar{Z}_0 = \gamma_1\bar{x}_0+ \gamma_2\bar{y}_0+\gamma_3\bar{z}_0 \end{cases}$$

κατά μονοσήμαντο τρόπο , όπου $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ τα συνημίτονα κατευθύνσεως του $\bar{X}_0$, $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ τα συνημίτονα κατευθύνσεως του $\bar{Y}_0$ και $(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$ τα συνημίτονα κατευθύνσεως του $\bar{Z}_0$ (κοίταξε σελίδα 26) . Πραγματικά , αν $\varphi = \sphericalangle(\bar{x}_0,\bar{X}_0)$ τότε από τη πρώτη των (3) παίρνουμε : $\bar{X}_0\cdot\bar{x}_0 = \alpha_1$ ή $|\bar{X}_0||\bar{x}_0|\cos\varphi = \alpha_1$ ή $\cos\varphi = \alpha_1$. 'Ομοια για τους υπόλοιπους συντελεστές . 'Ετσι η γνώση των $\alpha_i,\beta_i,\gamma_i$ $(i=1,2,3)$ μας καθορίζει πλήρως το σύστημα $\{0;\bar{X}_0,\bar{Y}_0,\bar{Z}_0\}$. Τώρα το τυχαίο σημείο P έχει συντεταγμένες (x,y,z) στο ένα σύστημα και (X,Y,Z) στο άλλο . 'Ετσι παίρνουμε :

$$\overline{OP} = \overline{OP}$$

ή

$$x\,\bar{x}_0+y\,\bar{y}_0+z\,\bar{z}_0 = X\,\bar{X}_0+Y\,\bar{Y}_0+Z\,\bar{Z}_0$$

$$\overset{(3)}{=} X(\alpha_1\bar{x}_0+\alpha_2\bar{y}_0+\alpha_3\bar{z}_0)+Y(\beta_1\bar{x}_0+\beta_2\bar{y}_0+\beta_3\bar{z}_0)+Z(\gamma_1\bar{x}_0+\gamma_2\bar{y}_0+\gamma_3\bar{z}_0)$$

$$= (\alpha_1X+\beta_1Y+\gamma_1Z)\bar{x}_0+(\alpha_2X+\beta_2Y+\gamma_2Z)\bar{y}_0+(\alpha_3X+\beta_3Y+\gamma_3Z)\bar{z}_0 \quad .$$

'Αρα

$$(4)\quad \begin{cases} x = \alpha_1X+\beta_1Y+\gamma_1Z \\ y = \alpha_2X+\beta_2Y+\gamma_2Z \\ z = \alpha_3X+\beta_3Y+\gamma_3Z \end{cases}$$

'Ομοια επειδή (γιατί ;)

$$
(5) \qquad \begin{cases} \bar{x}_0 = \alpha_1\bar{X}_0+\beta_1\bar{Y}_0+\gamma_1\bar{Z}_0 \\ \bar{y}_0 = \alpha_2\bar{X}_0+\beta_2\bar{Y}_0+\gamma_2\bar{Z}_0 \\ \bar{z}_0 = \alpha_3\bar{X}_0+\beta_3\bar{Y}_0+\gamma_3\bar{Z}_0 \end{cases}
$$

παίρνουμε

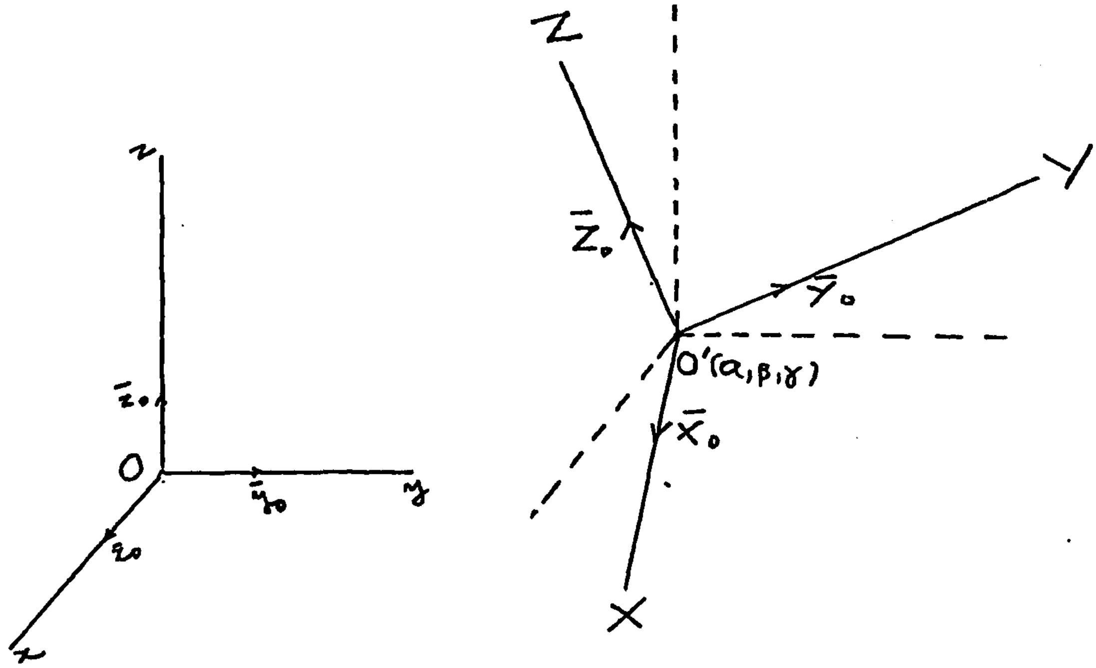
$$
(6) \qquad \begin{cases} X = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z \\ Y = \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z \\ Z = \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z \end{cases}
$$

Οι (4) και (6) είναι οι μετασχηματισμοί συντεταγμένων . Ο παρακάτω πίνακας

	x	y	z
X	α_1	α_2	α_3
Y	β_1	β_2	β_3
Z	γ_1	γ_2	γ_3

βοηθάει την απομνημόνευση . Στη πρώτη γραμμή βάζουμε τα συνημίτονα κατεύθυνσης του $\bar{X}_0$, στη δεύτερη του $\bar{Y}_0$ και στη τρίτη του $\bar{Z}_0$. Τότε στη πρώτη στήλη είναι τα συνημίτονα κατεύθυνσης του $\bar{x}_0$ στο $\{0;\bar{X}_0,\bar{Y}_0,\bar{Z}_0\}$, στη δεύτερη στήλη του $\bar{y}_0$ και στη τρίτη του $\bar{z}_0$. Μια ματιά στις (4),(6) και το πίνακα μας δίνει το μνημονικό κανόνα .

γ) <u>Γενική περίπτωση</u> . Συνδυάζοντας τις (α) και (β) μπορούμε να βρούμε τους μετασχηματισμούς συντεταγμένων στη γενική περίπτωση (σχήμα) , όπου το σύστημα με τους διακεκομμένους άξονες είναι ένα ενδιάμεσο σύστημα παράλληλο προς το $\{0;\bar{x}_0,\bar{y}_0,\bar{z}_0\}$.



'Ετσι με βάσει τα προηγούμενα αν $O'(\alpha,\beta,\gamma)$ και $\bar{X}_0=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $\bar{Y}_0=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ $\bar{Z}_0=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$ έχουμε ότι :

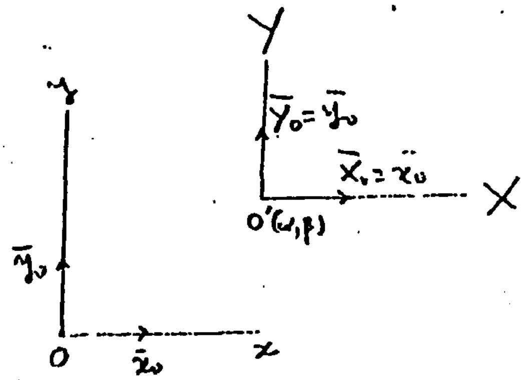
$$(7) \qquad \begin{cases} x = \alpha + \alpha_1 X + \beta_1 Y + \gamma_1 Z \\ y = \beta + \alpha_2 X + \beta_2 Y + \gamma_2 Z \\ z = \gamma + \alpha_3 X + \beta_3 Y + \gamma_3 Z \end{cases}$$

και

$$(8) \qquad \begin{cases} X = \alpha_1(x-\alpha)+\alpha_2(y-\beta)+\alpha_3(z-\gamma) \\ Y = \beta_1(x-\alpha)+\beta_2(y-\beta)+\beta_3(z-\gamma) \\ Z = \gamma_1(x-\alpha)+\gamma_2(y-\beta)+\gamma_3(z-\gamma) \end{cases}$$

<u>Εφαρμογή στο επίπεδο</u> .

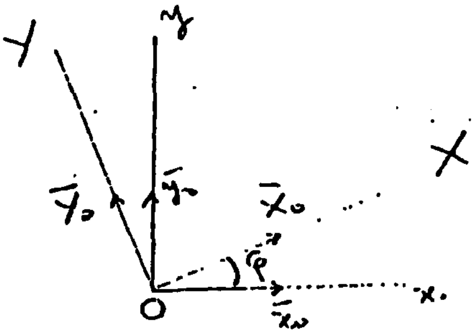
α) <u>Παράλληλη μεταφορά</u>



(9) $\begin{cases} x = X+\alpha \\ y = Y+\beta \end{cases}$

(10) $\begin{cases} X = x-\alpha \\ Y = y-\beta \end{cases}$

β) <u>Στροφή</u>



$$\bar{X}_0 = \cos\varphi\,\bar{x}_0 + \sin\varphi\,\bar{y}_0$$

$$\bar{Y}_0 = -\sin\varphi\,\bar{x}_0 + \cos\varphi\,\bar{z}_0 \quad .$$

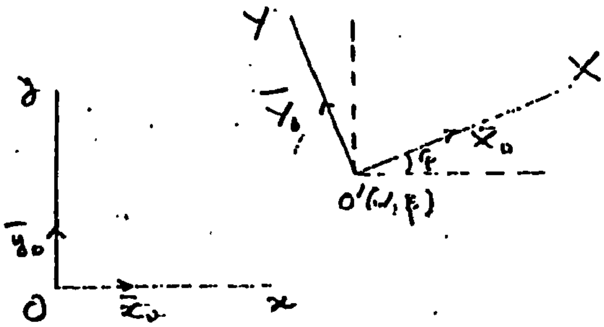
'Αρα :

(11) $\begin{cases} x = X\cos\varphi - Y\sin\varphi \\ y = X\sin\varphi + Y\cos\varphi \end{cases}$

και

(12) $\begin{cases} X = x\cos\varphi + y\sin\varphi \\ Y = -x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases}$

γ) <u>Γενική περίπτωση</u>



(13) $\begin{cases} x = \alpha + X\cos\varphi - Y\sin\varphi \\ y = \beta + X\sin\varphi + Y\cos\varphi \end{cases}$

και

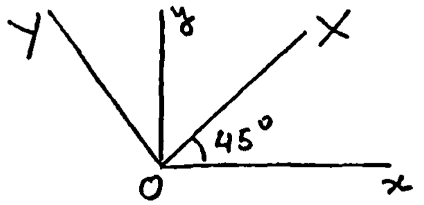
(14) $\begin{cases} X = (x-\alpha)\cos\varphi + (y-\beta)\sin\varphi \\ Y = -(x-\alpha)\sin\varphi + (y-\beta)\cos\varphi \end{cases}$

<u>Ασκήσεις</u> .

1. Να αποδειχτούν οι σχέσεις (7),(8),(11),(12),(13) και (14) .

2. Στο σύστημα $\{0;\bar{x}_0,\bar{y}_0,\bar{z}_0\}$ δίνεται η ευθεία $(\varepsilon):x=y=z$. Να βρείτε τις συμμετρικές εξισώσεις της ευθείας στο σύστημα $\{0;\bar{X}_0,\bar{Y}_0,\bar{Z}_0\}$ με :
$\bar{X}_0=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$, $\bar{Y}_0=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$, $\bar{Z}_0=(0,0,1)$.

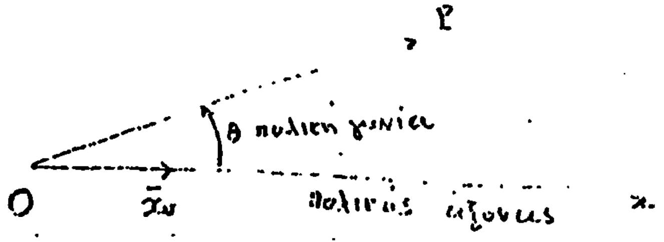
3. Να βρεθεί η εξίσωση $-x+y=1$ στο σύστημα ΟΧΥ .



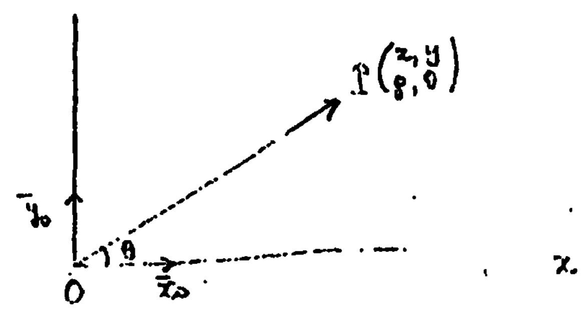
4. Δίνονται δύο συστήματα Oxyz , OXYZ με κοινή αρχή . Υπάρχουν σημεία του R^3 που έχουν ίδιες συντεταγμένες και ως προς τα δύο συστήματα ; Κοιτάξτε ειδικώτερα την περίπτωση όπου $\bar{X}_0=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\bar{Y}_0=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$, $\bar{Z}_0=\left(\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{-1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}}\right)$

3 . Ειδικές συντεταγμένες .

α) Πολικές συντεταγμένες στο επίπεδο . Ξέρουμε ότι τα σημεία του επιπέδου είναι σε αμφιμονότιμη αντιστοιχία με τα διατεταγμένα ζεύγη πραγματικών αριθμών . Αυτή η αντιστοιχία πετυχαίνεται με τη βοήθεια ενός συστήματος καρτεσιανών συντεταγμένων $\{0;\bar{x}_0,\bar{y}_0\}$ στο επίπεδο . Θα δούμε εδώ άλλο ένα τρόπο προσδιορισμού της θέσης ενός σημείου στο επίπεδο . Παίρνουμε μια αρχή O και μια ημιευθεία Ox από το O (σχήμα) με μοναδιαίο διάνυσμα πάνω σ' αυτή το $\bar{x}_0$. Στο τυχαίο σημείο P του επιπέδου αντιστοιχούμε τη διατεταγ-



μένη δυάδα πραγματικών αριθμών (ρ,θ) με $\rho=|\overline{OP}|$ και $\theta=\sphericalangle(\bar{x}_0,\overline{OP})$. Η γωνία θ μετράται εδώ πάντα κατά τη θετική φορά (αντίθετη της κίνησης των δεικτών του ρολογιού) και $0\leq\theta<2\pi$. Επίσης $0\leq\rho<\infty$. Στην αρχή O έχουμε $\rho=0$ αλλά η γωνία θ είναι απροσδιόριστη . Το διατεταγμένο ζευγάρι (ρ,θ) πραγματικών αριθμών λέγεται <u>πολικές συντεταγμένες του P</u> , το ρ λέγεται <u>πολική αχτίνα</u> του P και το θ λέγεται <u>πολική γωνία ή όρισμα</u> του P . Το σημείο O λέγεται <u>πόλος</u> και η ημιευθεία Ox λέγεται <u>πολικός άξονας</u> . Αντίστροφα , σε κάθε διατεταγμένο ζευγάρι (ρ,θ) με $\rho\neq0$ και $0\leq\theta<2\pi$ αντιστοιχεί ένα μόνο σημείο του επιπέδου με πολική αχτίνα το ρ και πολική γωνία το θ . Θεωρούμε τώρα και ένα σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων $\{O;\bar{x}_0,\bar{y}_0\}$ (σχήμα) . Το σημείο P έχει (x,y) καρτεσιανές συντεταγμένες και



(ρ,θ) πολικές συντεταγμένες . Θα βρούμε τους μετασχηματισμούς συντεταγμένων

Από το σχήμα συμπεραίνουμε αμέσως :

(1) $$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}.$$

Από τις (1) λύνοντας ως προς θ παίρνουμε

(2) $$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \text{τοξ εφ}\,\frac{y}{x} \end{cases}.$$

Οι σχέσεις (1) και (2) είναι οι μετασχηματισμοί συντεταγμένων . Οι (1) δίνουν τις καρτεσιανές συντεταγμένες ενός σημείου όταν ξέρουμε τις πολικές του συντεταγμένες . Αντίθετα οι (2) δίνουν τις πολικές συντεταγμένες αν ξέρουμε τις καρτεσιανές . Οι σχέσεις (1) και (2) είναι χρήσιμες στη μεταφορά ενός προβλήματος από πολικές σε καρτεσιανές συντεταγμένες και αντίστροφα . Θα εξηγήσουμε με ένα παράδειγμα .

<u>Παρατήρηση</u> : Στις σχέσεις (2) πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή . Αυτό,επειδή υπάρχουν σημεία που μας δίνουν με τις (2) ίδιες πολικές συντεταγμένες . Για παράδειγμα τα σημεία (x,y) και $(-x,-y)$ από τις (2) φαίνεται να έχουν ίδιες πολικές συντεταγμένες . Αυτό συμβαίνει λόγω της ιδιομορφίας της συνάρτησης τοξ εφ $\frac{y}{x}$. Έτσι πρέπει να προσέχουμε από τα πρόσημα των x,y ποιά γωνία μέσα στο $[0,2\pi)$ πρέπει να πάρουμε .

<u>Παράδειγμα 1</u> . Ποιά είναι η εξίσωση της καμπύλης $x^2+y^2=\alpha^2$ σε πολικές συντεταγμένες ; Επίσης ποιά είναι η εξίσωση της καμπύλης $\rho=\frac{4}{2-\sin\theta}$ σε καρτεσιανές συντεταγμένες ;

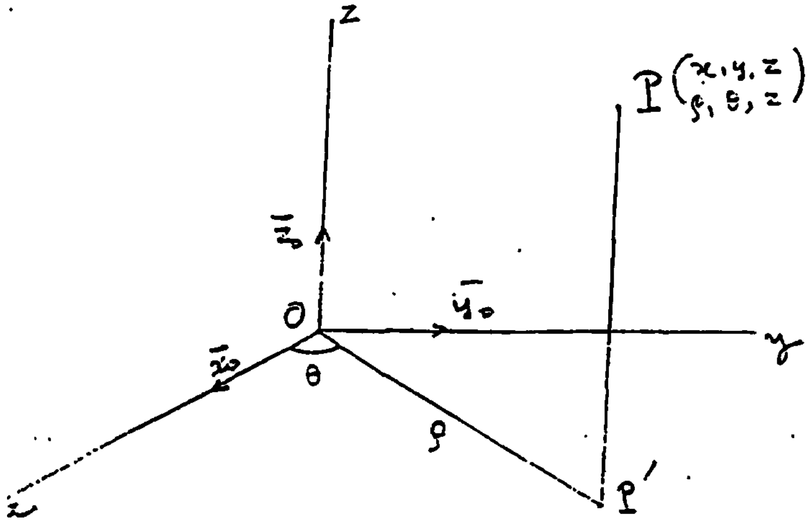
Από τις (1) παίρνουμε : $x^2+y^2=a^2 \Longrightarrow \rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta=a^2 \Longrightarrow \rho=|a|$

'Ετσι σε πολικές συντεταγμένες , η εξίσωση $x^2+y^2=a^2$ παίρνει την απλή μορφή $\rho=|a|$ (τι παριστάνει ;) .

Από την $\rho=\dfrac{4}{2-\sin\theta} \Longrightarrow 2\rho-\rho\sin\theta=4 \xrightarrow{(1)} 2\rho-y=4 \xrightarrow{(2)} 2\sqrt{x^2+y^2}-y=4$

$\Longrightarrow 2\sqrt{x^2+y^2}=y+4 \Longrightarrow 4x^2+3y^2-8y-16=0$. 'Ετσι η καμπύλη $\rho=\dfrac{4}{2-\sin\theta}$, σε καρτεσιανές συντεταγμένες έχει εξίσωση την : $4x^2+3y^2-8y-16=0$.

β) <u>Κυλινδρικές συντεταγμένες</u> . Θεωρούμε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων $\{O;\bar{x}_0,\bar{y}_0,\bar{z}_0\}$ (όπως στο σχήμα) ώστε στο Oxy επίπεδο , το O να είναι ο πόλος και ο άξονας Ox να είναι ο πολικός άξονας . 'Ετσι σε ένα σημείο P του χώρου αντιστοιχούν οι καρτεσιανές συντεταγμένες . Αντιστοιχεί



όμως και μια άλλη διατεταγμένη τριάδα αριθμών (ρ,θ,z) ως εξής : (ρ,θ) είναι οι πολικές συντεταγμένες της προβολής P' του P στο Oxy επίπεδο και z είναι η κατηγμένη του P . Οι συντεταγμένες (ρ,θ,z) λέγονται <u>κυλινδρικές συντεταγμένες του σημείου P</u> . Οι μετασχηματισμοί συντεταγμένων δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις (3) και (4) :

$$(3)\quad \begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad\qquad (4)\quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta = \text{τοξ εφ}\,\dfrac{y}{x} \\ z = z \end{cases} .$$

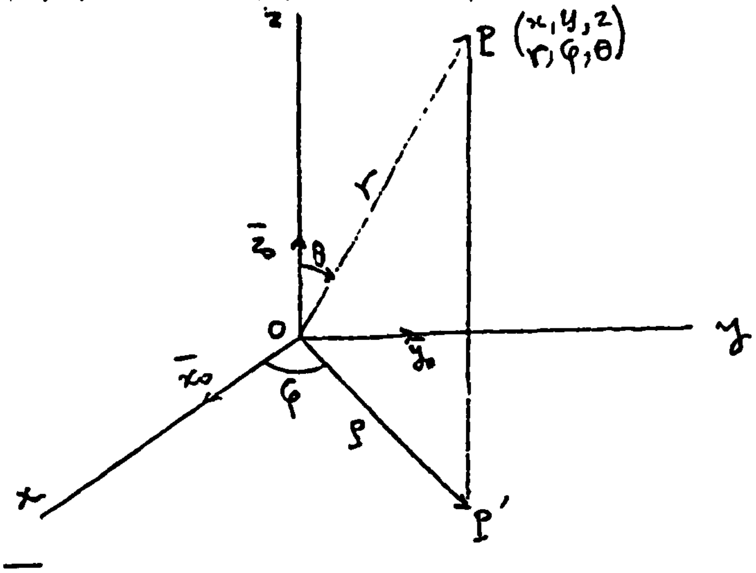
<u>Παράδειγμα 2</u> . Μια σφαίρα με κέντρο την αρχή και αχτίνα R έχει εξίσωση την : $x^2+y^2+z^2=R^2$. Ζητάμε να βρούμε την εξίσωση αυτής της σφαίρας σε κυλινδρικές συντεταγμένες .

Η $x^2+y^2+z^2=R^2$, χρησιμοποιώντας τις (3) γίνεται :

$$\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta+z^2=R^2 \quad \text{ή} \quad \rho^2+z^2=R^2 .$$

'Ετσι η $\rho^2+z^2=R^2$ είναι η εξίσωση σφαίρας σε κυλινδρικές συντεταγμένες .

γ) <u>Σφαιρικές συντεταγμένες</u> . Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται πως σε ένα σημείο $P(x,y,z)$ αντιστοιχούμε μια άλλη διατεταγμένη τριάδα αριθμών . 'Οπου $r=|\overline{OP}|$, φ η πολική γωνία της προβολής P' του P στο Oxy επίπεδο



και $\theta = \sphericalangle(\bar{z}_0,\overline{OP})$. 'Εχουμε :

$0 \leq r < \infty$

$0 \leq \varphi < 2\pi$

$0 \leq \theta \leq \pi$.

Η τριάδα (r,φ,θ) λέγονται σφαιρικές συντεταγμένες του σημείου P . Οι μετασχηματισμοί συντεταγμένων δίνονται από τις σχέσεις (5) και (6) παρακάτω :

$$(5) \qquad \begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$(6) \qquad \begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \varphi = \text{τοξ εφ.}\dfrac{y}{x} \\ \theta = \text{τοξ}\cos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{cases}$$

Παρατήρηση . Από τις (5) για $r = R =$ σταθερό, παίρνουμε $x^2+y^2+z^2 = R^2$. Δηλαδή τα σημεία του χώρου με $r = R =$ σταθερό είναι όλα τα σημεία της σφαίρας με κέντρο την αρχή και αχτίνα R . Τότε οι (5) δίνουν :

$$(7) \qquad \begin{cases} x = R\sin\theta\cos\varphi \\ y = R\sin\theta\sin\varphi \\ z = R\cos\theta . \end{cases} \qquad R = \text{σταθερό} ,$$

από τις οποίες δίνοντας τιμές στα φ και θ παίρνουμε τις καρτεσιανές συντεταγμένες των σημείων τής σφαίρας . Για το λόγο αυτό οι (7) λέγονται και παραμετρικές εξισώσεις της σφαίρας αχτίνας R με κέντρο την αρχή .

Ασκήσεις .

1. Να βρείτε τις εξισώσεις των κωνικών τομών σε πολικές συντεταγμένες .

2. Ένα σύνολο σημείων περιγράφεται σε κυλινδρικές συντεταγμένες με την εξίσωση: $2\rho\cos\theta - 3\rho\sin\theta + 3z = 4$. Αφού βρείτε την εξίσωσή του σε καρτεσιανές συντεταγμένες , να πείτε τι είναι αυτό το σημειοσύνολο .

3. Να δείξετε ότι τα σημεία που ικανοποιούν το σύστημα ($x^2+y^2=1$, $y=z$) είναι τα σημεία μιας έλλειψης . (Υπόδειξη . Πως γίνεται το σύστημα σε ένα ορθογώνιο σύστημα OXYZ , όπου το επίπεδο OXY είναι το επίπεδο $y=z$;).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ IV : ΕΠΙΠΕΔΕΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΒΑΘΜΟΥ

Θεωρούμε στο επίπεδο ένα σταθερό ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων Oxy και ζητάμε να βρούμε τα σημεία $P(x,y)$ τα οποία επαληθεύουν την εξίσωση :

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \quad .$$

Αυτά τα σημεία θέλουμε να τα σχεδιάσουμε στο επίπεδο και να πούμε κάτι για το γεωμετρικό σχήμα , που προκύπτει . Πριν προχωρήσουμε σ'αυτή τη μελέτη θα αναφερθούμε σύντομα στη στοιχειώδη θεωρία των κωνικών τομών (κύκλος-έλλειψη-υπερβολή-παραβολή), ένα αντικείμενο γνωστό από το Λύκειο .

4.1. Κύκλος.

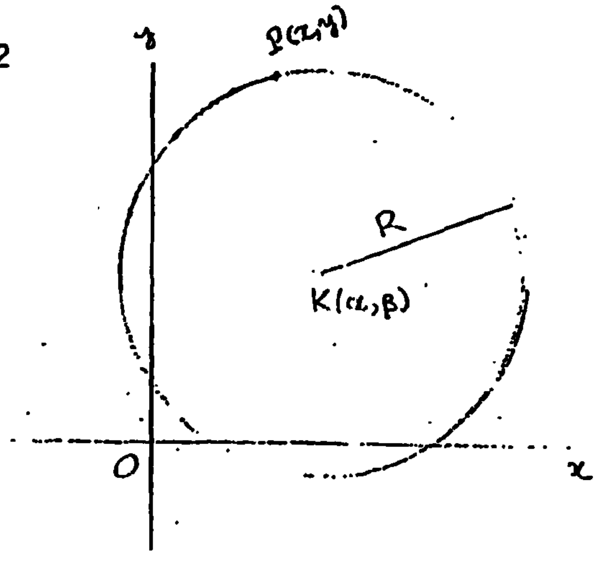
Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $P(x,y)$ του επιπέδου , που έχουν απόσταση R από το σταθερό σημείο $K(\alpha,\beta)$ είναι μια καμπύλη, που ονομάζεται <u>κύκλος</u> με <u>κέντρο</u> K και <u>ακτίνα</u> R .

Από την $d(P,K)=R$ παίρνουμε :

$$\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}=R$$

ή

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 \qquad (1)$$



Έτσι τα σημεία $P(x,y)$ του επιπέδου που επαληθεύουν την εξίσωση (1) είναι τα σημεία κύκλου με κέντρο το $K(\alpha,\beta)$ και ακτίνα R. Ειδικά για $R=0$ ο κύκλος εκφυλίζεται στο σημείο $K(\alpha,\beta)$.

Από την (1) αναπτύσσοντας παίρνουμε :

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\alpha^2+\beta^2-R^2=0 .$$

Έτσι τα σημεία κύκλου επαληθεύουν μια εξίσωση της μορφής :

$$x^2+y^2+Ax+By+\Gamma=0 . \tag{2}$$

Επειδή όμως κάθε εξίσωση τής μορφής (2), συμπληρώνοντας τα τετράγωνα, γράφεται και ως :

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2-4\Gamma}{4} ,$$

συμπεραίνουμε ότι : Μια εξίσωση της μορφής (2) παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $K\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ και ακτίνα $R=\frac{\sqrt{A^2+B^2-4\Gamma}}{2}$, εφόσον $A^2+B^2\geq 4\Gamma$. Ειδικά για $A^2+B^2<4\Gamma$ ο κύκλος είναι φανταστικός (δεν υπάρχουν σημεία του επιπέδου, που επαληθεύουν την (2)).

Παράδειγμα 4.1.1. Η εξίσωση $x^2+y^2-8x+4y-5=0$ γράφεται και ως : $(x-4)^2+(y+2)^2=25$. Έτσι λοιπόν είναι κύκλος με κέντρο το $K(4,-2)$ και ακτίνα $R=5$.

Παρατήρηση 4.1.1. Τα σημεία $P(x,y)$ που επαληθεύουν την ανισότητα : $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2<R^2$ είναι όλα τα σημεία που βρίσκονται στο εσωτερικό του κύκλου $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$, αφού η απόστασή τους από το $K(\alpha,\beta)$ είναι μικρό-

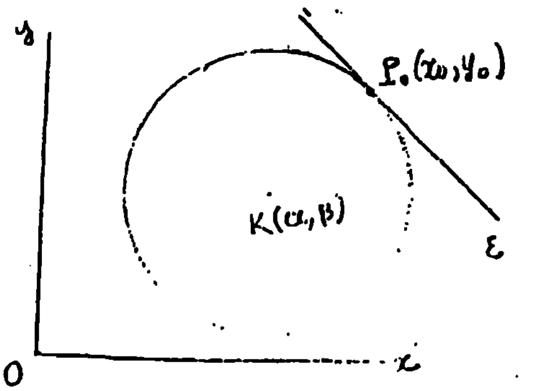
τερη από το R . Ανάλογα τα σημεία $P(x,y)$ στο εξωτερικό του κύκλου $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$ ικανοποιούν την ανισότητα $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2>R^2$.

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με δύο απλά προβλήματα σχετικά με τον κύκλο.

Πρόβλημα 4.1.1. Ας είναι $P_0(x_0,y_0)$ ένα σημείο του κύκλου :

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2 \ .$$

Θέλουμε να βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) του κύκλου στο σημείο P_0 . Η εφαπτομένη (ε) περνά από το σημείο $P_0(x_0,y_0)$ και είναι κάθετη στο διάνυσμα $\bar{a}=(x_0-\alpha,y_0-\beta)$. Έτσι η εξίσωση της εφαπτομένης είναι η :



$$(x-x_0)(x_0-\alpha)+(y-y_0)(y_0-\beta)=0$$

ή

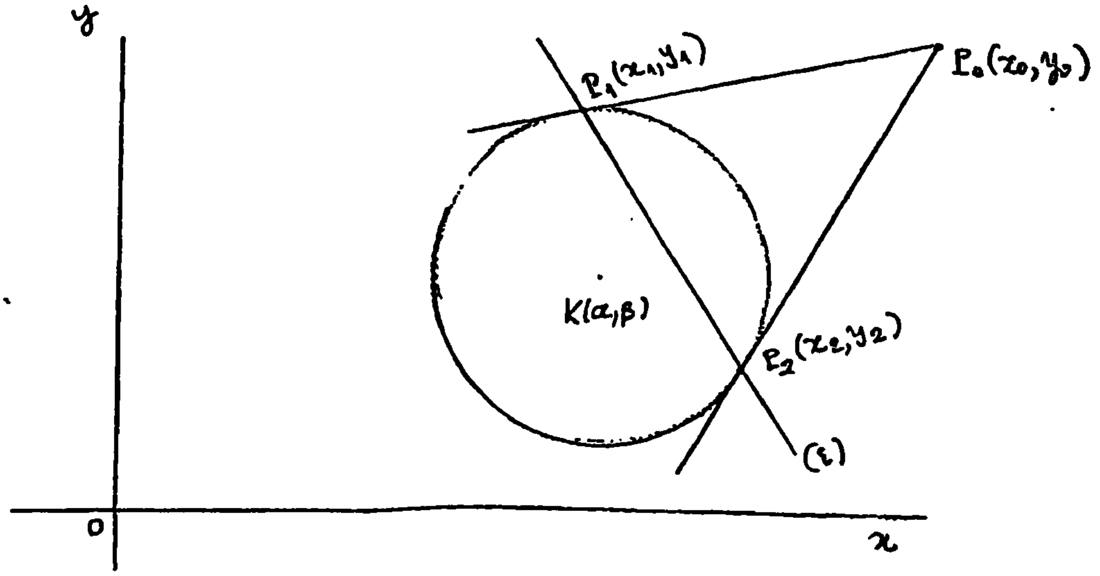
$$[(x-\alpha)-(x_0-\alpha)](x_0-\alpha)+[(y-\beta)-(y_0-\beta)](y_0-\beta)=0$$

ή

(3) $$(x-\alpha)(x_0-\alpha)+(y-\beta)(y_0-\beta)=R^2 \ ,$$

αφού $(x_0-\alpha)^2+(y_0-\beta)^2=R^2$. Έτσι η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$ στο σημείο $P_0(x_0,y_0)$ είναι η (3) .

Πρόβλημα 4.1.2. Θεωρούμε ένα σημείο $P_0(x_0,y_0)$ στο εξωτερικό του κύκλου : $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$. Κατασκευάζουμε τις δύο εφαπτόμενες του κύκλου από το P_0 . Ας είναι $P_1(x_1,y_1)$ και $P_2(x_2,y_2)$ τα σημεία επαφής.



Θέλουμε να βρούμε την εξίσωση της ευθείας (ε) που ορίζεται από τα P_1 και P_2, καθώς και το μήκος του διανύσματος $\overline{P_0P_1}$, αν ξέρουμε το P_0 και τον κύκλο.

Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε_1) στο $P_1(x_1,y_1)$ είναι σύμφωνα με την (3) :

(*) $\quad (x-\alpha)(x_1-\alpha)+(y-\beta)(y_1-\beta) = R^2$.

'Ομως η (*) επαληθεύεται και από το σημείο $P_0(x_0,y_0)$ αφού η (ε_1) περνά από το P_0. 'Ετσι θα έχουμε :

(**) $\quad (x_0-\alpha)(x_1-\alpha)+(y_0-\beta)(y_1-\beta) = R^2$.

'Ομως η (**) δείχνει ότι το σημείο $P_1(x_1,y_1)$ είναι πάνω στην ευθεία (ε) με εξίσωση την :

(4) $\quad (x_0-\alpha)(x-\alpha)+(y_0-\beta)(y-\beta) = R^2$.

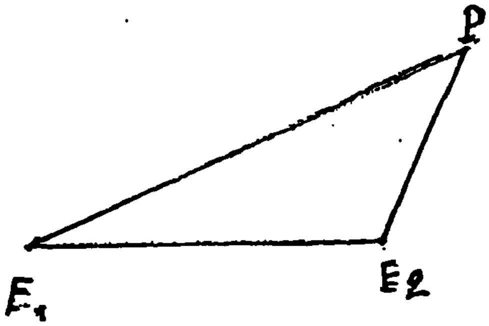
'Ομοια δείχνουμε ότι το σημείο $P_2(x_2,y_2)$ είναι πάνω στην ευθεία (4). 'Αρα η ευθεία που ορίζεται από τα P_1,P_2 έχει εξίσωση την (4).

Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο $\overset{\triangle}{P_1P_0K}$ συμπεραίνουμε ότι:

$$|\overline{P_0P_1}| = d(P_0,P_1) = \sqrt{|\overline{P_0K}|^2-|\overline{KP_1}|^2}$$
$$= \sqrt{(x_0-\alpha)^2+(y_0-\beta)^2-R^2} \ .$$

4.2. Έλλειψη .

Δίνονται δύο σημεία E_1 , E_2 στο επίπεδο σε απόσταση $2c$ $(c \geq 0)$. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων P του επιπέδου , έτσι ώστε το άθροισμα των αποστάσεων του P από τα E_1 , E_2 να είναι σταθερό 2α , λέγεται έλλειψη με εστίες τα σημεία E_1 και E_2 .

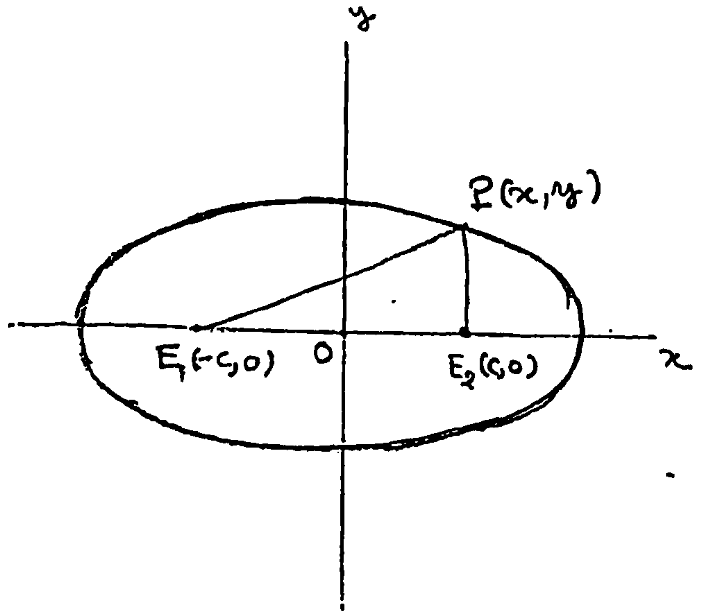


$$|\overline{E_1E_2}| = 2c$$
$$|\overline{PE_1}|+|\overline{PE_2}| = 2\alpha$$

Παρατήρηση 4.2.1. Επειδή , $2\alpha=d(P,E_1)+d(P,E_2) \geq d(E_1,E_2)=2c$ συμπεραίνουμε ότι : $\alpha \geq c$. Η περίπτωση $\alpha=c$ δίνει εκφυλισμένη έλλειψη , το ευθύγραμμο τμήμα E_1E_2 . Η περίπτωση $c=0$ δίνει $E_1 \equiv E_2 \equiv K$ και έτσι η έλλειψη είναι κύκλος με κέντρο το K και ακτίνα α .

Έτσι στη συνέχεια θα υποθέσουμε πως $\alpha > c > 0$.

Θα βρούμε την εξίσωση , που ικανοποιούν τα σημεία της έλλειψης σε ένα ειδικό ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένως Oxy . Σαν αρχή O παίρνουμε το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος E_1E_2 και σαν άξονα των x την E_1E_2 .



$|\overline{PE_1}|+|\overline{PE_2}| = 2a$

$|\overline{E_1E_2}| = 2c$

Από την $|\overline{PE_1}|+|\overline{PE_2}| = 2a$ έχουμε :

$$(*) \qquad \sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a$$

ή τετραγωνίζοντας την (*) και απλοποιώντας παίρνουμε

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = a + \frac{c}{a}x \quad ,$$

από όπου και πάλι τετραγωνίζοντας και απλοποιώντας έχουμε ,

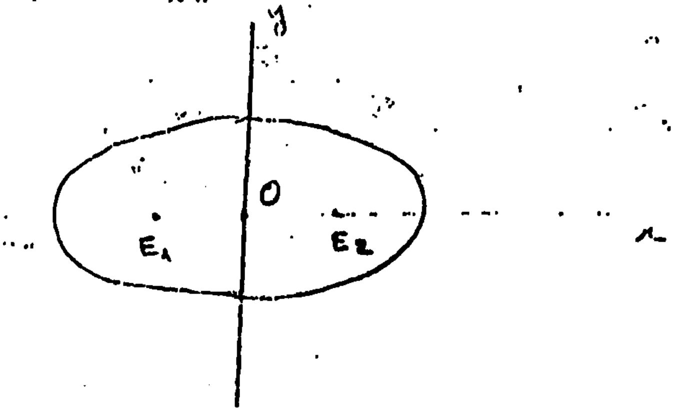
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1 \ .$$

Θέτουμε τώρα $a^2-c^2=b^2$ $(b>0)$ ή $a^2-b^2=c^2$ παίρνουμε

$$(5) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ .$$

Η (5) είναι η εξίσωση έλλειψης σε κανονική θέση ως προς το σύστημα συντεταγμένων (δηλαδή στο ειδικό σύστημα που διαλέξαμε παραπάνω) και λέγεται <u>κανονική εξίσωση</u> της έλλειψης. Οι ποσότητες a,b λέγονται αντίστοιχα <u>μεγάλος ημιάξονας</u> και <u>μικρός ημιάξονας</u> της έλλειψης. Η ποσότητα $e = \frac{c}{a}$ ονομάζεται εκκεντρότητα (eccentricity) της έλλειψης .

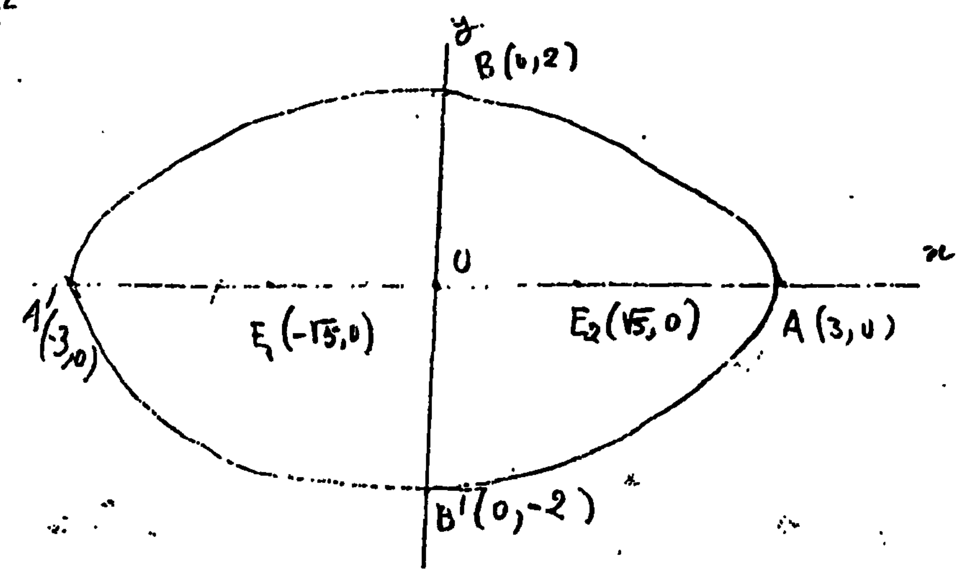
Τα σημεία $P(x,y)$ που επαληθεύουν την (5) αν τα παραστήσουμε στο Oxy σύστημα δίνουν το παρακάτω σχήμα



Παρατήρηση 4.2.2. Η εξίσωση της έλλειψης σε σύστημα συντεταγμένων διαφορετικό από αυτό που διαλέξαμε θα είναι διαφορετικό και όχι της μορφής (5) . Θα το δούμε αργότερα .

Παράδειγμα 4.2.1. Τα σημεία $P(x,y)$ του επιπέδου , που επαληθεύουν την εξίσωση $4x^2+9y^2=36$ είναι έλλειψη της οποίας η κανονική εξίσωση είναι η :

$\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{2^2}=1$. Έχουμε δε $a=3$, $b=2$ και $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{5}$.

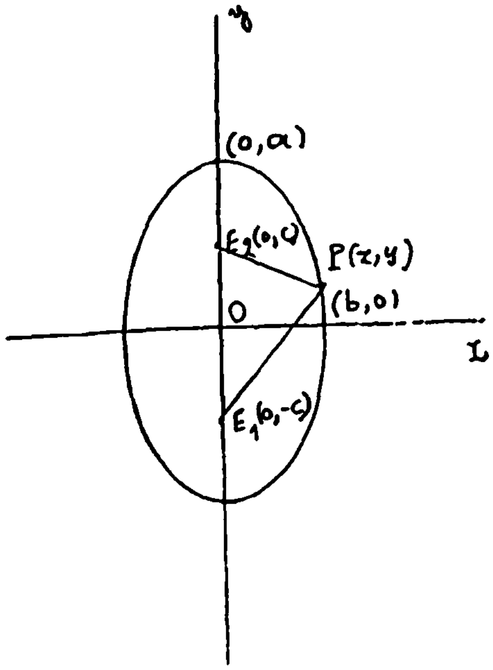


<u>Παρατήρηση 4.2.3.</u> Είναι φανερό ότι $0<e<1$. Επίσης καθώς το $c\to 0$, τότε $e\to 0$ και η έλλειψη τείνει να γίνει κύκλος αφού οι εστίες πλησιάζουν μεταξύ τους. Επίσης $e\to 1$ καθώς $c\to a$ και η έλλειψη τείνει να γίνει το ευθύγραμμο τμήμα E_1E_2.

<u>Σημείωση 1.</u> Από την κανονική εξίσωση (5) της έλλειψης συμπεραίνουμε ότι, αν το σημείο (x,y) επαληθεύει την (5) τότε και τα σημεία $(-x,y)$, $(x,-y)$, $(-x,-y)$ επαληθεύουν την (5). Έτσι η έλλειψη είναι ένα σημειοσύνολο, που έχει δύο άξονες συμμετρίας (τους άξονες x και y, όταν είναι σε κανονική θέση) και ένα κέντρο συμμετρίας (την αρχή O, όταν είναι σε κανονική θέση), που λέγεται και κέντρο έλλειψης. Επίσης από την (5) προκύπτει (πως;) ότι η έλλειψη είναι φραγμένο σύνολο (τα σημεία της μπορούμε να τα κλείσουμε σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο).

<u>Σημείωση 2.</u> Η κανονική εξίσωση (5) της έλλειψης έχει $a>b$ και ο μεγάλος ημιάξονας της είναι πάνω στον άξονα των x. Αν παίρναμε τις εστίες στον άξονα των y, δηλαδή ο μεγάλος ημιάξονας να είναι στον άξονα των y τότε η κανονική εξίσωση της έλλειψης θα ήταν

$$(5')\qquad \frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \quad \text{με} \quad a^2-b^2=c^2 \ , \quad a>b$$



Θεωρούμε τώρα μια έλλειψη σε κανονική θέση και με κανονική εξίσωση την :

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, όπου $a^2-b^2=c^2$. Οι εστίες της είναι τα σημεία $E_1(-c,0)$, $E_2(c,0)$.

Οι ευθείες :

$$d_1 : x=-\frac{a^2}{c} \quad \text{και} \quad d_2 : x=\frac{a^2}{c}$$

λέγονται <u>διευθετούσες</u> της έλλειψης.

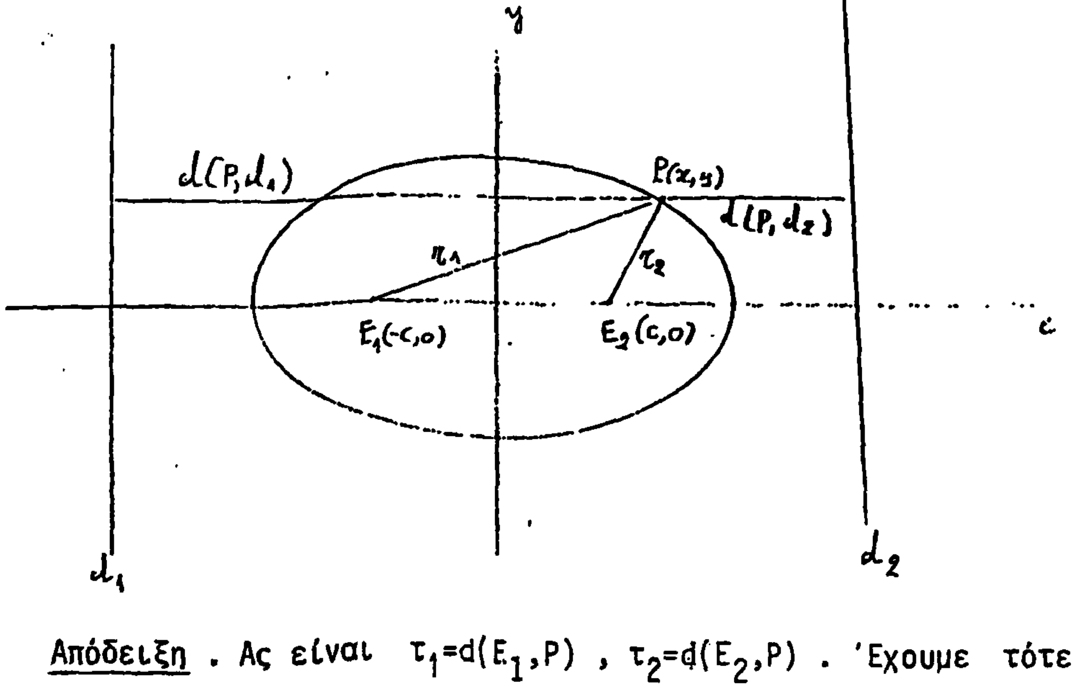
Τα ευθύγραμμα τμήματα E_1P , E_2P , όπου P σημείο της έλλειψης λέγονται <u>εστιακές ακτίνες</u> του σημείου P .

Μια ενδιαφέρουσα ιδιότητα της έλλειψης δίνεται από το παρακάτω θεώρημα.

<u>Θεώρημα 4.2.1</u>. Ο λόγος των αποστάσεων τυχόντος σημείου της έλλειψης από την εστία $E_1(-c,0)$ και από τη διευθετούσα d_1 (ή από την εστία E_2 και τη διευθετούσα d_2) είναι σταθερός και ίσος με την εκκεντρότητα της έλλειψης . Δηλαδή :

$$\frac{d(P,E_1)}{d(P,d_1)} = \frac{d(P,E_2)}{d(P,d_2)} = e ,$$

για κάθε σημείο P της έλλειψης.



<u>Απόδειξη</u> . Ας είναι $\tau_1=d(E_1,P)$, $\tau_2=d(E_2,P)$. 'Εχουμε τότε : $\tau_1^2=(x+c)^2+y^2$ και $\tau_2^2=(x-c)^2+y^2$. Συνεπώς $\tau_1^2-\tau_2^2=4cx$ ή $(\tau_1+\tau_2)(\tau_1-\tau_2)=4cx$. Επειδή όπως $\tau_1+\tau_2=2a$ έχουμε :

$$\tau_1-\tau_2 = \frac{2cx}{a} \quad .$$

'Ετσι από τις $\tau_1+\tau_2=2a$, $\tau_1-\tau_2 = \frac{2cx}{a}$ συμπεραίνουμε ότι :

(7) $$\tau_1 = a+\frac{cx}{a} = \frac{c}{a}\left(\frac{a^2}{c}+x\right) = e\left(\frac{a^2}{c}+x\right)$$

και

(8) $$\tau_2 = a-\frac{cx}{a} = \frac{c}{a}\left(\frac{a^2}{c}-x\right) = e\left(\frac{a^2}{c}-x\right)$$

'Ομως : $d(P,d_1) = \frac{a^2}{c}+x$ και $\frac{a^2}{c}-x = d(P,d_2)$. 'Αρα από τις (7) και (8) έχουμε :

$$\frac{\tau_1}{d(P,d_1)} = \frac{\tau_2}{d(P,d_2)} = e \quad .$$

<u>Πρόβλημα 4.2.1.</u> Θεωρούμε μια έλλειψη σε κανονική θέση και με κανονική εξίσωση την :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad .$$

Αν $P_1(x_1,y_1)$ είναι ένα σημείο της έλλειψης , τότε η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης στο σημείο $P_1(x_1,y_1)$ είναι η :

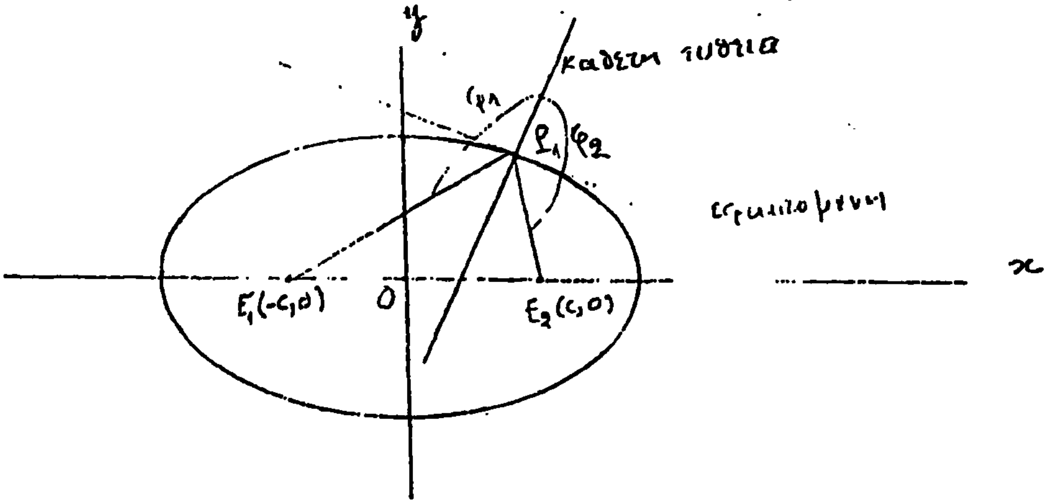
(9) $$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}-1=0 \quad .$$

<u>Λύση</u> . Στο βιβλίο του Λυκείου .

Αφού έχουμε την εφαπτομένη της έλλειψης σε κάθε σημείο της μπορούμε να μιλάμε και για τη <u>κάθετη ευθεία</u> της έλλειψης σε κάθε σημείο $P_1(x_1,y_1)$ της και θα εννοούμε βέβαια την ευθεία από το P_1 , που είναι κάθετη στην εφαπτομένη της έλλειψης στο P_1 .

Το παρακάτω θεώρημα μας δίνει μια ακόμη ενδιαφέρουσα ιδιότητα της έλλειψης .

<u>Θεώρημα 4.2.2.</u> Η κάθετη έλλειψης με εστίες E_1,E_2 στο τυχαίο σημείο της $P_1(x_1,y_1)$ διχοτομεί την γωνία $\widehat{E_1P_1E_2}$.



<u>Απόδειξη</u> . Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε την έλλειψη σε κανονική θέση και με κανονική εξίσωση την : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Η εφαπτομένη της στο $P_1(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση την $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$. 'Ετσι το διάνυσμα $\bar{n}=(\frac{x_1}{a^2},\frac{y_1}{b^2})$ είναι κάθετο της εφαπτομένης,δηλαδή παράλληλο στη κάθετη της έλλειψης στο P_1 . Τώρα η γωνία φ_1 που σχηματίζει το $\bar{n}$ με το διάνυσμα $\overline{E_1P_1}$ έχει συνημίτονο :

$$\cos\varphi_1 = \frac{\bar{n}\cdot\overline{E_1P_1}}{|\bar{n}|\,|\overline{E_1P_1}|} = \frac{\left(\frac{x_1}{a^2}, \frac{y_1}{b^2}\right)\cdot(-c-x_1,-y_1)}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4}+\frac{y_1^2}{b^4}}\cdot|\overline{E_1P_1}|} =$$

$$= -\frac{\frac{(c+x_1)x_1}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4}+\frac{y_1^2}{b^4}}\cdot|\overline{E_1P_1}|} = -\frac{\frac{cx_1}{a^2}+1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}}\cdot|\overline{E_1P_1}|}$$

αφού $\quad \frac{(c+x_1)x_1}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2} = \frac{cx_1}{a^2}+\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2} = \frac{cx_1}{a^2}+1$.

'Ομως $\quad |\overline{E_1P_1}| = \tau_1 = e\left(\frac{a^2}{c}+x_1\right)$ σύμφωνα με την (7) και συνεπώς

$$|\overline{E_1P_1}| = \frac{c}{a}\left(\frac{a^2}{c}+x_1\right) = a+\frac{c}{a}x_1 = a\left(1+\frac{c}{a^2}x_1\right) \;\therefore$$

'Ετσι

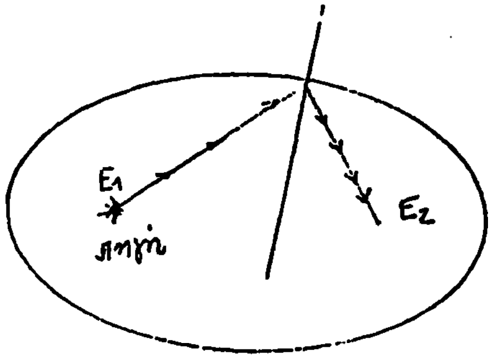
$$\cos\varphi_1 = -\frac{1}{a\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4}+\frac{y_1^2}{b^4}}} \;.$$

Ανάλογα βρίσκουμε ότι :

$$\cos\varphi_2 = \frac{-1}{\alpha\sqrt{\frac{x_1^2}{\alpha^4}+\frac{y_1^2}{b^4}}} .$$

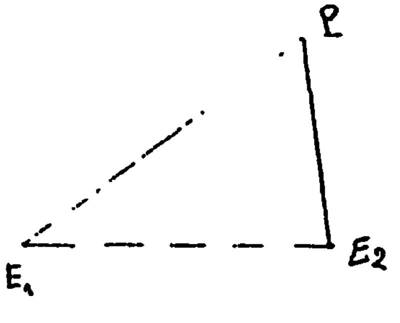
Όμως, επειδή $0 \leqq \varphi_1, \varphi_2 \leqq \pi$ και $\cos\varphi_1 = \cos\varphi_2$ έχουμε ότι $\varphi_1 = \varphi_2$.

<u>Φυσική ερμηνεία του παραπάνω θεωρήματος</u> . Αν η έλλειψη θεωρηθεί ως κάτοπτρο και τοποθετήσουμε μια φωτεινή πηγή στη μια εστία της έλλειψης , τότε κάθε φωτεινή ακτίνα ανακλώμενη στην έλλειψη , θα περάσει από την άλλη εστία.



4.3. <u>Υπερβολή</u> .

Δίνονται δύο σημεία E_1, E_2 στο επίπεδο σε απόσταση $2c$ $(c>0)$. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων P του επιπέδου , έτσι ώστε $||\overline{PE_1}|-|\overline{PE_2}||=2\alpha$, όπου α σταθερός θετικός αριθμός , λέγεται <u>υπερβολή</u> με <u>εστίες</u> τα σημεία E_1 και E_2 .



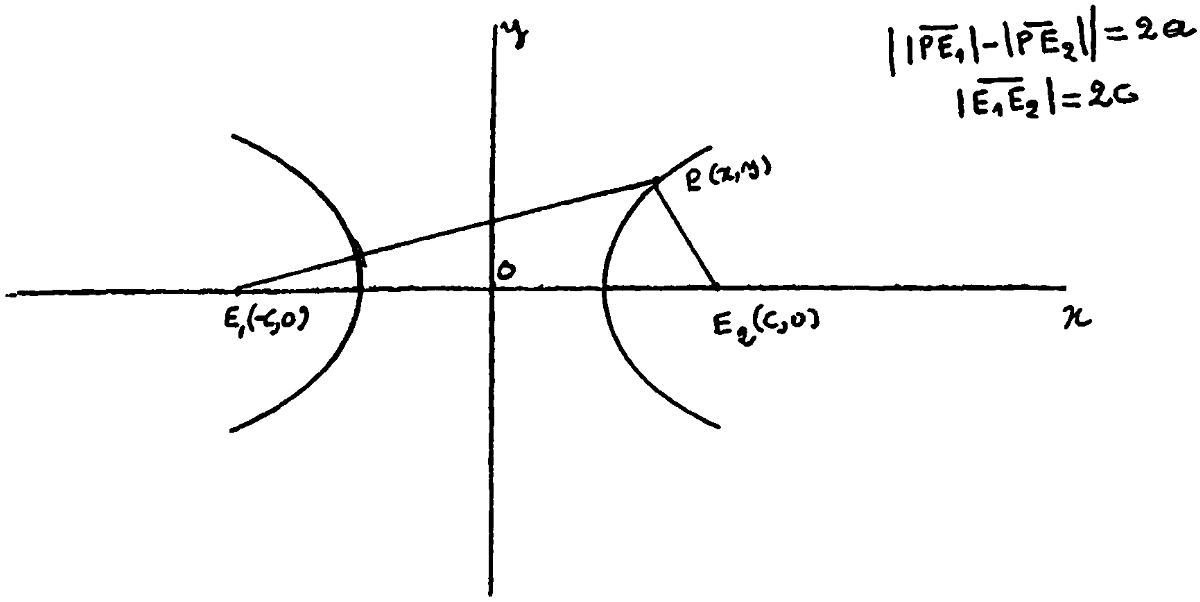
$|\overline{E_1E_2}| = 2c$.

Από τη τριγωνική ανισότητα έχουμε ότι :

$$||\overline{PE_1}|-|\overline{PE_2}|| \leq |\overline{E_1E_2}| \quad \text{ή} \quad 2a \leq 2c\ .$$

Συνεπώς για να μην είναι κενός ο γεωμετρικός τόπος θα πρέπει να ισχύει $a \leq c$. Είναι φανερό πως για $a = c$ ο γεωμετρικός τόπος (δηλαδή η υπερβολή) είναι οι ημιευθείες που σχεδιάζονται παρακάτω (εκφυλισμένη υπερβολή) .

'Ετσι στη συνέχεια θα υποθέσουμε πως $a < c$. Θα βρούμε τώρα την εξίσωση που ικανοποιούν τα σημεία της υπερβολής σε ένα ειδικό ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων Oxy . Σαν αρχή O διαλέγουμε το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος E_1E_2 και τις εστίες πάνω στον άξονα του x .



Το ειδικό αυτό σύστημα συντεταγμένων Oxy λέγεται <u>κανονικό σύστημα συντεταγμένων</u> για τη συγκεκριμένη υπερβολή και η εξίσωση της σ'αυτό το σύστημα λέγεται κανονική εξίσωση της υπερβολής .

Η κανονική εξίσωση της υπερβολής βρίσκεται με ανάλογο τρόπο , όπως η κανονική εξίσωση της έλλειψης . Δηλαδή, από την $||\overline{PE_1}|-|\overline{PE_2}||=2\alpha$ παίρνουμε:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2\alpha$$

ή τετραγωνίζοντας , απλοποιώντας , κ.λ.π. έχουμε :

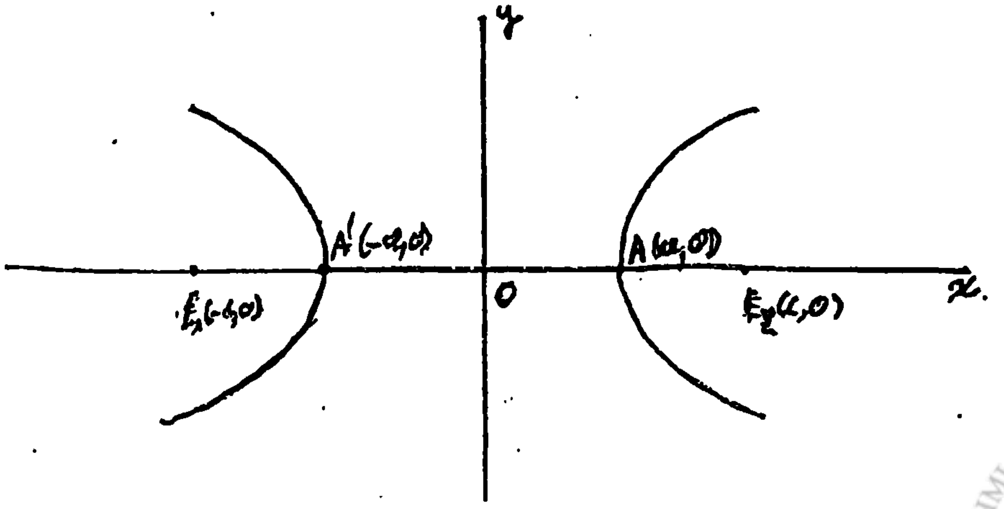
$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\alpha^2-c^2}=1$$

ή θέτοντας $\alpha^2-c^2=-b^2$ $(b>0)$, αφού $\alpha<c$ θα πάρουμε :

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad . \tag{10}$$

<u>Σημείωση 1</u> . 'Οπως και στην περίπτωση της έλλειψης προκύπτει από την εξίσωση (10) ότι η υπερβολή είναι συμμετρική ως προς τους άξονες συντεταγμένων και έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή του κανονικού συστήματος συντεταγμένων , το οποίο λέγεται και <u>κέντρο της υπερβολή</u> .

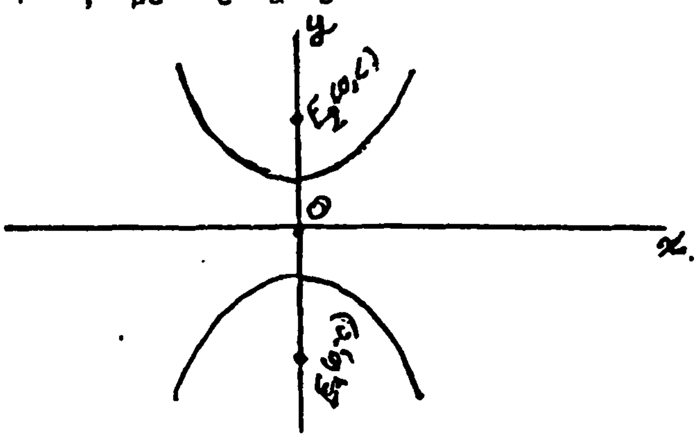
Παριστάνοντας τα σημεία που επαληθεύουν την (10) παίρνουμε :



Τα σημεία A,A' λέγονται κορυφές της υπερβολής και η ποσότητα $e=\frac{c}{a}$ λέγεται και εδώ εκκεντρότητα της υπερβολής και μάλιστα , αφού $a<c$, έχουμε πάντα $e>1$.

Παρατήρηση 4.3.1. Αν παρουμε την ευθεία , που ορίζουν οι εστίες E_1, E_2 σαν άξονα των y , τότε η εξίσωση της υπερβολής σ'αυτό το κανονικό σύστημα θα ήταν :

$$(10') \qquad \frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1 \quad , \text{ με } \quad c^2-a^2=b^2$$



'Ασκηση . Να διερευνηθεί η εξίσωση (10) και να δείτε ότι η υπερβολή δεν είναι φραγμένο σύνολο , δηλαδή έχει σημεία όσο μακριά θέλουμε από την αρχή O .

'Οπως και στην περίπτωση της έλλειψης οι ευθείες $d_1: x=-\frac{a^2}{c}$ και $d_2: x=\frac{a^2}{c}$ λέγονται διευθετούσες της υπερβολής και ισχύει ανάλογο θεώρημα όπως το θεώρημα 4.2.1. (Διατυπώστε το και αποδείξτε για άσκηση) .

Πρόβλημα 4.3.1. θεωρούμε μια υπερβολή με κανονική εξίσωση την :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ .$$

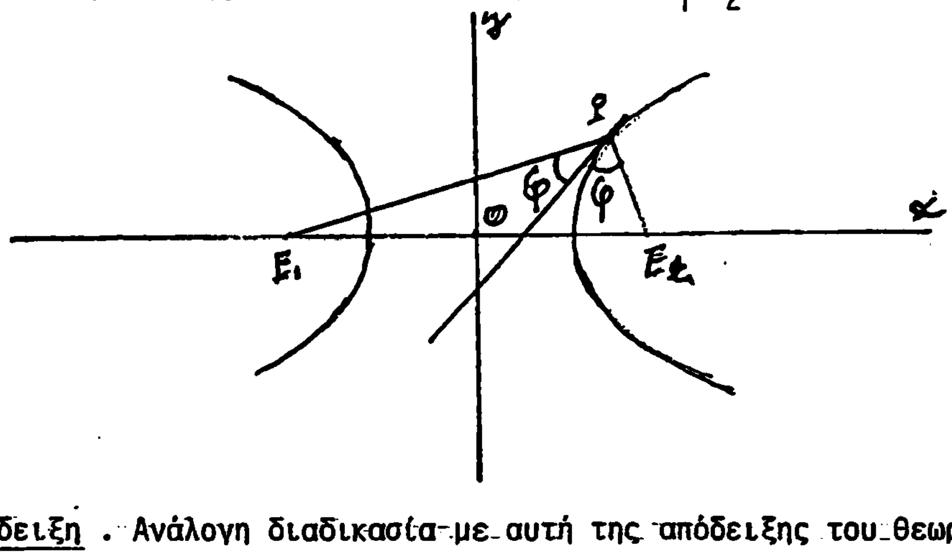
Η εφαπτόμενη ευθεία (ε) στο σημείο $P_1(x_1,y_1)$ της υπερβολής έχει εξίσωση την :

$$(11) \qquad (\varepsilon) : \frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} - 1 = 0 \ .$$

Απόδειξη . Στο βιβλίο του Λυκείου .

Το παρακάτω θεώρημα μπορεί να θεωρηθεί ανάλογο του θεωρήματος 4.2.2.

Θεώρημα 4.3.1. Η εφαπτομένη μιας υπερβολής , με εστίες τις E_1 και E_2 , στο τυχαίο σημείο της P διχοτομεί τη γωνία $E_1\widehat{P}E_2$.



Απόδειξη . Ανάλογη διαδικασία με αυτή της απόδειξης του θεωρήματος 4.2.2.

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με μια έννοια , που όμοια της δεν ορίζεται για την έλλειψη . Είναι η έννοια της ασύμπτωτης (των ασυμπτώτων) της υπερβολής . Δεν θα δόσουμε γενικό ορισμό της ασύμπτωτης ευθείας μιας καμπύλης , αλλά θα περιοριστούμε μόνο στη περίπτωση της καμπύλης(υπερβολής) , που μας ενδιαφέρει . Έτσι θεωρούμε υπερβολή με κανονική εξίσωση την :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$

Οι δύο ευθείες που δίνονται από την εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 ,$$

δηλαδή οι ευθείες :

(12) $$y = \pm \frac{b}{a} x$$

λέγονται <u>ασύμπτωτες ευθείες</u> της υπερβολής . Η ονομασία οφείλεται στο γεγονός ότι , λύνοντας την εξίσωση (10) της υπερβολής ως προς y έχουμε :

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

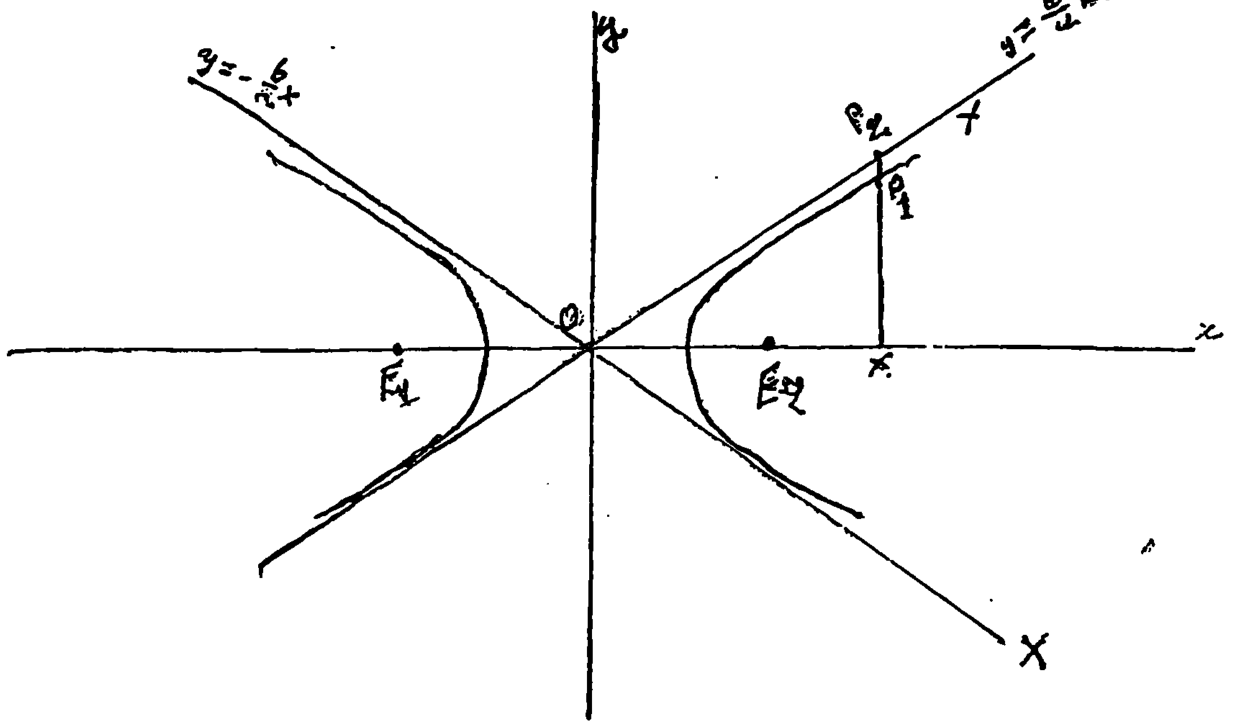
ή

$$y = \pm \frac{bx}{a} \sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}$$

ή

$$\frac{y}{x} = \pm \frac{b}{a} \sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}} .$$

Επομένως $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{y}{x} = \pm \frac{b}{a}$. Με άλλα λόγια το σημείο (x,y) της υπερβολής (10) τείνει προς το σημείο (x,y) της ευθείας $y = \frac{b}{a} x$ ή της ευθείας $y = -\frac{b}{a} x$ όταν το x τείνει στο άπειρο .



'Ετσι στο παραπάνω σχήμα μπορούμε να δείξουμε (δείξτε το για άσκηση) ότι

$$\lim_{x\to\infty} d(P_1,P_2)=0 \quad .$$

Ειδικά μια υπερβολή με $a=b$, έχει κανονική εξίσωση την $x^2-y^2=a^2$ και λέγεται <u>ισοσκελής υπερβολή</u>. Οι ασύμπτωτοι σ'αυτή την ειδική περίπτωση είναι οι : $y=\pm x$, δηλαδή οι διχοτόμοι των κανονικών αξόνων . 'Ετσι στην ισοκελή υπερβολή οι ασύμπτωτοι σχηματίζουν ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων OXY με την ίδια αρχή το κέντρο της ισοσκελούς υπερβολής . Να βρούμε την εξίσωση της υπερβολής στο ορθογώνιο σύστημα OXY των ασυμπτώτων . Αυτό το σύστημα είναι στροφή του Oxy κατά γωνία $-\frac{\pi}{4}$. Σύμφωνα με τους τύπους (11) της σελίδας 117) θα έχουμε :

$$x = X\cos(-\tfrac{\pi}{4})-Y\sin(-\tfrac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y) \quad .$$

$$y = X\sin(-\tfrac{\pi}{4})+Y\cos(-\tfrac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-X+Y) \quad .$$

ή θέτοντας στην εξίσωση της ισοσκελούς υπερβολής

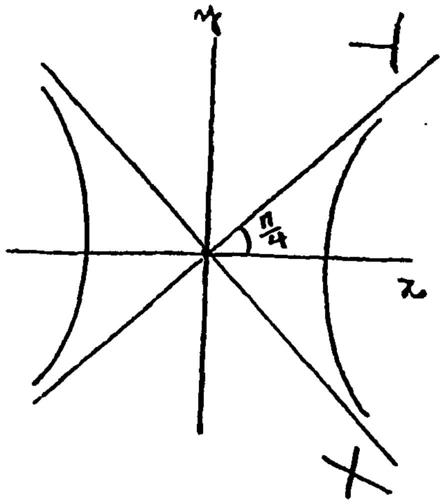
$$\frac{1}{2}(X+Y)^2 - \frac{1}{2}(-X+Y)^2 = a^2$$

ή

$$2XY = a^2$$

ή τέλος

$$XY = \frac{a^2}{2} \; .$$

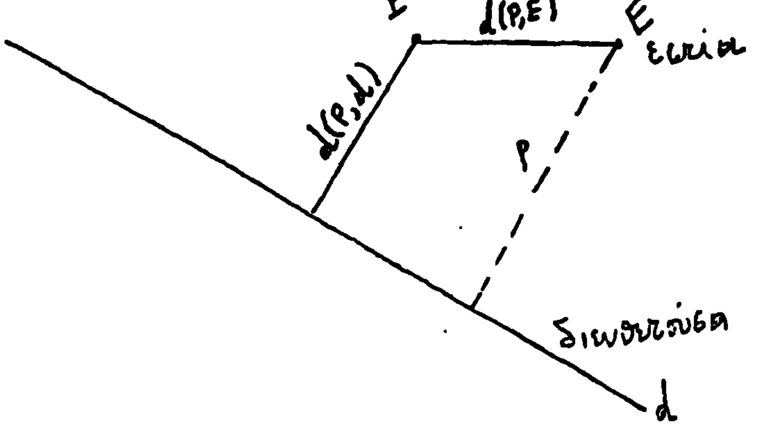


'Ετσι συμπερασματικά μπορούμε να πούμε ότι η εξίσωση $xy = C$ παριστάνει ισοσκελή υπερβολή με άξονες συντεταγμένων τις ασυμπτώτους .

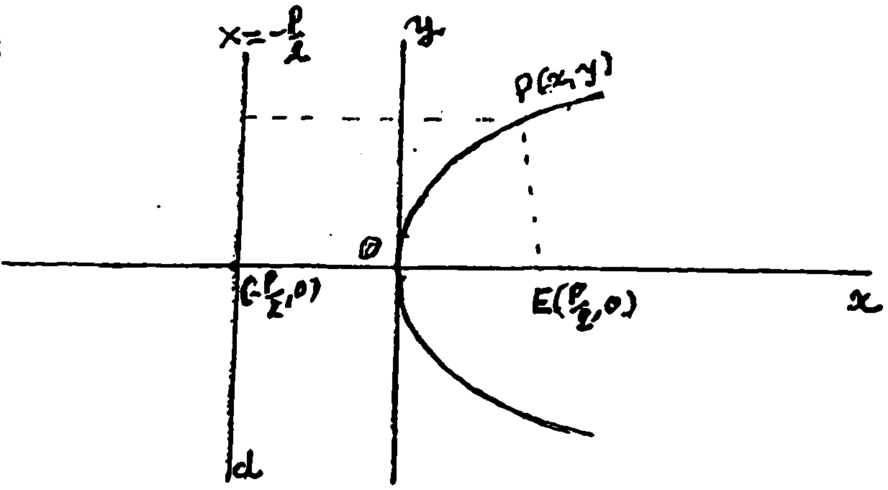
4.4. Παραβολή .

Δίνεται ένα σημείο E και μια ευθεία d , που δεν περνάει από το E . O γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου , που ορίζεται από το σημείο E και την ευθεία d , και τα οποία σημεία έχουν ίση απόσταση από το σημείο E και την ευθεία d , είναι μια καμπύλη που ονομάζεται παραβολή με εστία το E κα.. ευθετούσα την d .

$d(P,d) = d(P,E)$



Ανάλογα με τη θέση του σημείου E σε σχέση με τη διευθετούσα d , μπορούμε να βρούμε τέσσερες κανονικές θέσεις για την παραβολή . Η πιο συνηθισμένη κατάσταση είναι αυτή που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα , όπου p είναι η απόσταση



της εστίας E από τη διευθετούσα , δηλαδή $p=d(E,d)>0$. Για αυτή τη κανονική θέση της παραβολής η κανονική εξίσωσή της βρίσκεται αμέσως και είναι :

$$d(P,E)=d(P,d)$$

ή

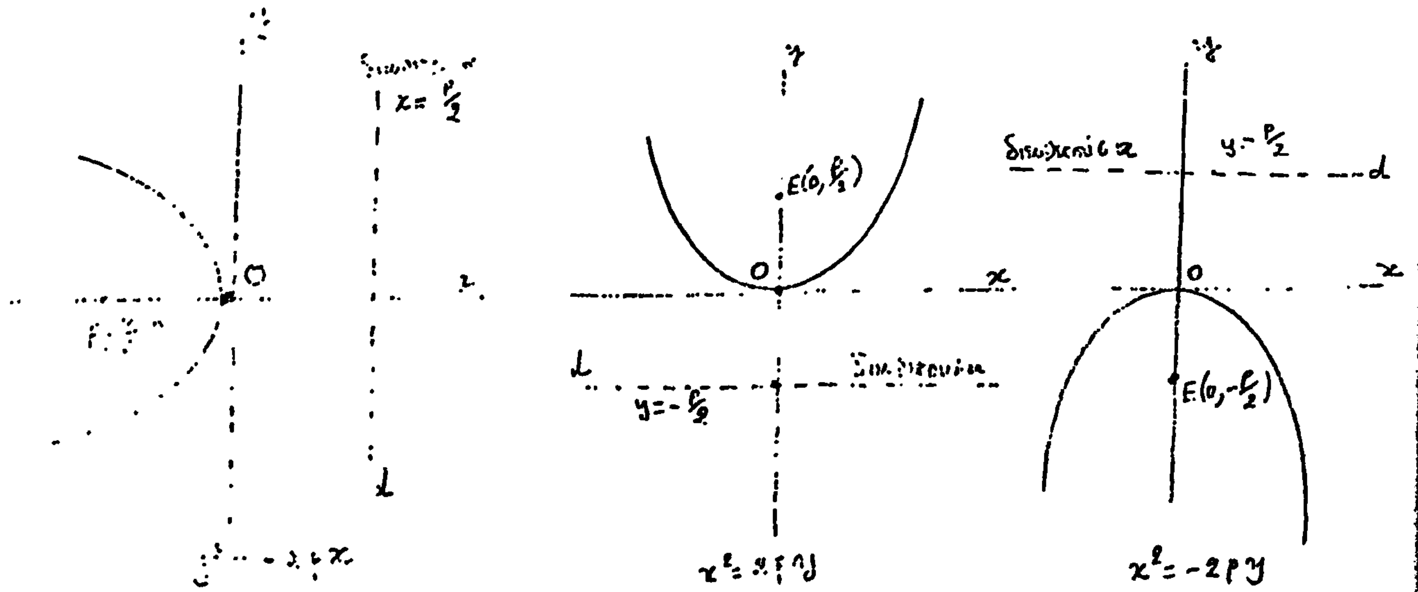
$$\sqrt{(x-\frac{p}{2})^2+y^2}=|x+\frac{p}{2}|$$

ή μετά από πράξεις

(13) $$y^2=2px \quad .$$

Από τη διερεύνηση της (13) , δηλαδή όταν έχουμε παραβολή στη κανονική θέση που συζητάμε , προκύπτει ότι ο άξονας των x είναι άξονας συμμετρίας της παραβολής και μάλιστα λέγεται <u>άξονας της παραβολής</u> . Η αρχή O είναι σημείο της παραβολής και λεγεται <u>κορυφή της παραβολής</u> .

Άλλες κανονικές θέσεις , οι αντίστοιχες κανονικές εξισώσεις και οι αντίστοιχοι άξονες φαίνονται στα παρακάτω σχήματα :



Είναι σχεδόν φανερό μελετώντας την (13) ότι η παραβολή δεν είναι σύνολο φραγμένο , δηλαδή έχει σημεία όσο μακριά θέλουμε από την αρχή .

<u>Πρόβλημα 4.4.1.</u> Παίρνουμε τη παραβολή με κανονική εξίσωση την $y^2=2px$. Τότε η εφαπτομένη της (ε) στο σημείο $P_1(x_1,y_1)$ έχει εξίσωση

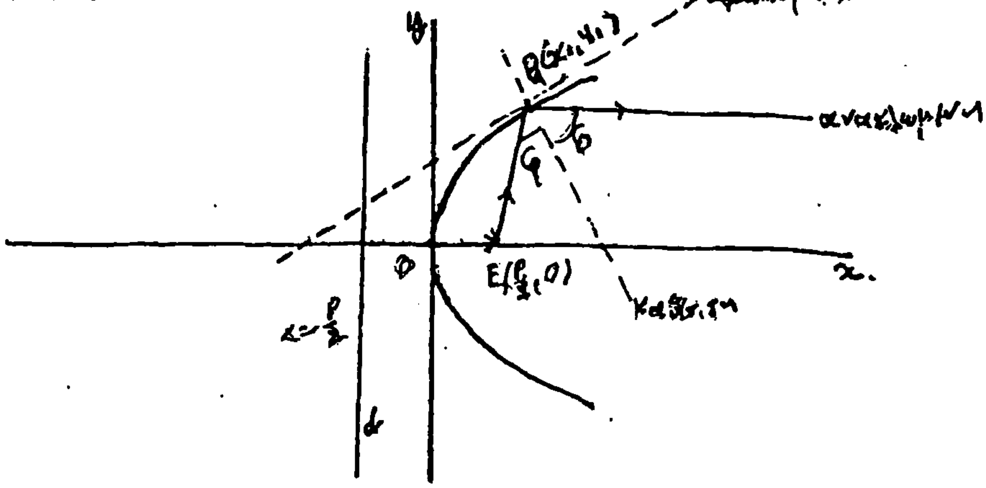
(14) $$yy_1 = p(x+x_1) \quad .$$

<u>Απόδειξη</u> . Στο βιβλίο του Λυκείου .

Μια ενδιαφέρουσα ιδιότητα της παραβολής η οποία εξηγεί και τη κατασκευή των φαναριών των αυτοκινήτων δίνεται από το παρακάτω θεώρημα .

<u>Θεώρημα 4.4.1.</u> Η κάθετη σε τυχόν σημείο P_1 της παραβολής με εστία Ε , διχοτομεί τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\overline{P_1E}$ και η ευθεία από το P_1

παράλληλη προς τον άξονα της παραβολής .



Απόδειξη . Με την ίδια διαδικασία όπως για την απόδειξη του θεωρήματος 4.2.2.

Φυσική ερμηνεία του θεωρήματος 4.4.1. Σύμφωνα με το θεώρημα 4.4.1 , αν στην εστία Ε της παραβολής βάλουμε μια φωτεινή πηγή , τότε κάθε φωτεινή ακτίνα ανακλώμενη πάνω στην παραβολή θα συνεχίσει παράλληλα προς τον άξονα της παραβολής ◆

4.5. Καμπύλες δευτέρου βαθμού στο επίπεδο .

Η γενική εξίσωση δευτέρου βαθμού στο επίπεδο είναι η :

$$(*) \qquad Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \quad ,$$

όπου A,B,C,D,E,F σταθεροί συντελεστές και P(x,y) ένα σημείο του επιπέδου το οποίο αναφέρεται σε γνωστό ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων . Ερώτημα : Μπορούμε να βρούμε όλες τις λύσεις της (*) (όλα τα σημεία P(x,y) που επαληθεύουν την (*)) ; Αν τις σχεδιάσουμε αυτές τις λύσεις στο επίπεδο , ποιά τα γεωμετρικά σχήματα που προκύπτουν ; Στη περίπτωση που A=B=C=0 η απάντηση στο ερώτημα μας είναι γνωστή , αφού η (*) είναι ισοδύναμη με την :

$$2Dx+2Ey+F=0 \quad ,$$

η οποία όπως ξέρουμε εκφράζει μια ευθεία στο επίπεδο . 'Ετσι στη συνέχεια θα μελετήσουμε την

$$(1) \qquad Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \quad , \quad (A,B,C)\neq(0,0,0) \; .$$

Η εξίσωση (1) παριστάνει στο επίπεδο μια καμπύλη , που λέγεται <u>καμπύλη δευτέρου βαθμού</u> . 'Ετσι οι καμπύλες έλλειψη, υπερβολή, παραβολή είναι καμπύλες δευτέρου βαθμού . Αν το πρώτο μέλος της εξίσωσης (1) μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο δύο πρωτοβάθμιων πολυωνύμων ως προς x και y , για παράδειγμα αν η (1) γράφεται ως :

$$(A_1x+B_1y+\Gamma_1)(A_2x+B_2y+\Gamma_2)=0 \quad ,$$

όπου κάποιο από τα A_i, B_i, Γ_i $(i=1,2)$ μπορεί να είναι μιγαδικός αριθμός , τότε η (1) παριστάνει δύο ευθείες πραγματικές ή φανταστικές (ποιές;) .

<u>Παράδειγμα 4.5.1.</u> Η $x^2-y^2=0$, γράφεται $(x+y)(x-y)=0$ και έτσι παριστάνει δύο πραγματικές ευθείες τις : (ε_1) : $x+y=0$ και (ε_2) : $x-y=0$. Αντίθετα η $x^2+4y^2=0$, γράφεται $(x+2iy)(x-2iy)=0$ και παριστάνει δύο φανταστικές ευθείες , που τέμνονται σε πραγματικό σημείο το $(0,0)$.

Παρακάτω θα δούμε πως η εξίσωση (1) μπορεί να παριστάνει <u>μόνο</u> (πραγματική ή φανταστική) έλλειψη, υπερβολή, παραβολή, ή ζευγάρι ευθειών.

Δεν θα επιδοθούμε σε ένα τυπολόγιο όπως γίνεται συνήθως , αλλά θα παραθέσουμε μια τεχνική μελέτης της (1) .

Μελέτη της εξίσωσης $Ax^2+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$.

Θεωρούμε την εξίσωση

(2) $$Ax^2+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \quad .$$

Σκοπεύουμε να δούμε τι καμπύλη παριστάνει η (2) , που είναι μια ειδική περίπτωση της (1) (έχει $B=0$) . Πρέπει να παρατηρήσουμε , ότι η καμπύλη που παριστάνει η (2) ή η (1) δεν αλλάζει αν αλλάξουμε το σύστημα αναφοράς . Αυτό που αλλάζει είναι μόνο η εξίσωση της καμπύλης . 'Ετσι θα επιδιώξουμε να βρούμε ένα καινούργιο σύστημα αναφοράς , ως προς το οποίο η εξίσωση (2) να γίνει πιό απλή, για να τη μελετήσουμε ευκολώτερα . Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις .

Περίπτωση 1 . $AC\neq 0$. Υποθέτουμε ότι η (2) αναφέρεται στο σύστημα αναφοράς Oxy . Θεωρούμε ένα καινούργιο σύστημα $O'XY$, παράλληλη μεταφορά του Oxy στο $O'(\alpha,\beta)$. Θα κοιτάξουμε να βρούμε πως γίνεται η εξίσωση (2) στο καινούργιο σύστημα . Οι εξισώσεις που μας δίνουν τα (x,y) από τα (X,Y) είναι οι (9) της σελίδας 117. Δηλαδή : $x=X+\alpha$, $y=Y+\beta$. 'Ετσι η (2) στο καινούργιο σύστημα γίνεται :

$$A(X+\alpha)^2+C(Y+\beta)^2+2D(X+\alpha)+2E(Y+\beta)+F=0$$

ή μετά από πράξεις

(2') $$AX^2+CY^2+2(\alpha A+D)X+2(\beta C+E)Y+A\alpha^2+C\beta^2+2D\alpha+2E\beta+F=0 \quad .$$

Διαλέγοντας $\alpha=-\frac{D}{A}$, $\beta=-\frac{E}{C}$ τότε στο καινούργιο σύστημα $O'XY$ η (2) γίνεται:

(3) $$AX^2+CY^2+\bar{F}=0 \quad ,$$

όπου $\quad \bar{F} = A\alpha^2+C\beta^2+2D\alpha+2E\beta+F \quad$ με $\quad \alpha = -\frac{D}{A}$ και $\beta = -\frac{E}{C}$.

Η εξίσωση (3) είναι τώρα εύκολο να μελετηθεί . Όπως ξέρουμε η (3) παριστάνει έλλειψη (πραγματική ή φανταστική) αν $AC>0$ ή υπερβολή αν $AC<0$, για $\bar{F}\neq 0$, αφού γράφεται

$$\frac{X^2}{-\frac{\bar{F}}{A}} + \frac{Y^2}{-\frac{\bar{F}}{C}} = 1 \quad .$$

Η (3) παριστάνει ζευγάρι ευθειών αν $\bar{F}=0$, αφού γράφεται

$$AX^2+CY^2=0 \quad .$$

<u>Συμπέρασμα</u> . Η εξίσωση (2) στη περίπτωση που εξετάζουμε ($AC\neq 0$) παριστάνει μόνο έλλειψη , υπερβολή ή ζευγάρι ευθειών .

<u>Περίπτωση 2</u> . Ένα από τα A,C είναι μηδέν . Έστω $A=0$ και $C\neq 0$ (ανάλογα θα ισχύουν , αν $A\neq 0$ και $C=0$). Σ'αυτή τη περίπτωση η εξίσωση (2) γίνεται : $Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$ και η (2') αν κάνουμε τις ίδιες διαδικασίες όπως στη περίπτωση 1 θα γίνει :

$$CY^2+2DX+2(\beta C+E)Y+C\beta^2+2D\alpha+2E\beta+F=0 \quad .$$

Διαλέγοντας $\beta = -\frac{E}{C}$ τότε η εξίσωση θα γίνει στο καινούργιο σύστημα $O'XY$ ως εξής :

$$(4) \qquad CY^2+2DX+2D\alpha+\frac{FC-E^2}{C}=0 \quad .$$

Η τελευταία εξίσωση που εκφράζει την ίδια καμπύλη αλλά στο σύστημα $O'XY$ μπορεί εύκολα να μελετηθεί . Πραγματικά , για $D=0$, η (4) γίνεται :

$$Y^2 = \frac{E^2-FC}{C^2} \quad ,$$

που παριστάνει δύο ευθείες πραγματικές ή φανταστικές (ανάλογα με το πρόσημο του E^2-FC) , που είναι παράλληλες . Για $D\neq 0$, διαλέγουμε $\alpha=\frac{E^2-FC}{2DC}$, οπότε στο καινούργιο σύστημα $O'XY$ η (2) γίνεται :

$$CY^2+2DX=0 \quad ,$$

που όπως ξέρουμε είναι παραβολή .

<u>ΓΕΝΙΚΟ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ</u> . <u>Η εξίσωση (2) παριστάνει μόνο έλλειψη, υπερβολή, παραβολή ή δύο ευθείες</u> .

<u>Παράδειγμα 4.5.2</u>. Θέλουμε να δούμε τι παριστάνει η εξίσωση :

$$x^2+4y^2+2x+16y+13=0 \;;$$

Είμαστε εδώ στη πρώτη περίπτωση . Στο καινούργιο σύστημα $O'XY$ με $O'(-1,-2)$ θα γίνει , αφού $x=X-1$, $y=Y-2$:

$$(X-1)^2+4(Y-2)^2+2(X-1)+16(Y-2)+13=0$$

ή

$$X^2+4Y^2-4=0$$

ή

$$\frac{X^2}{4}+Y^2=1 \text{ , που είναι όπως ξέρουμε μια έλλειψη .}$$

<u>Παράδειγμα 4.5.3</u>. Να δούμε τι παριστάνει η εξίσωση :

$$9x^2-4y^2+24y-18x+45=0 \;;$$

Είμαστε πάλι στη πρώτη περίπτωση . 'Ετσι η εξίσωση σε παράλληλο σύστημα με $O'(1,3)$ θα γίνει αφού $x=X+1$, $y=Y+3$:

$$9(X+1)^2-4(Y+3)^2+24(Y+3)-18(X+1)+45=0$$

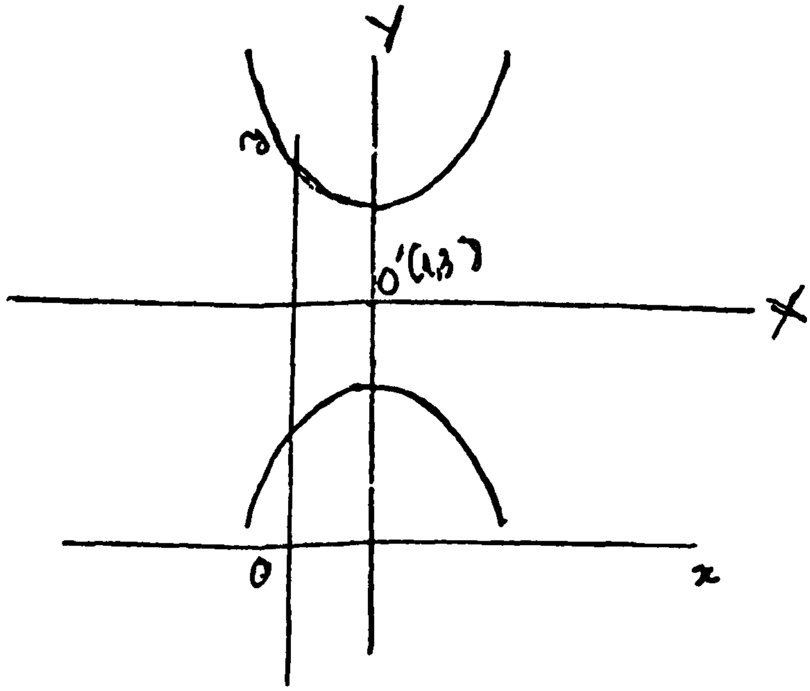
ή

$$9X^2-4Y^2+72=0$$

ή

$$\frac{Y^2}{18}-\frac{X^2}{8}=1$$, που είναι όπως ξέρουμε μια υπερβολή .

'Ενα σχέδιο δίνει το παρακάτω σχήμα .



Παράδειγμα 4.5.4. Να δούμε τι παριστάνει η εξίσωση :

$$x^2+4y-6x+1=0$$;

Είμαστε εδώ στη περίπτωση 2 με $A\neq0$ και $C=0$. Η Εξίσωση στο παράλληλο σύστημα $O'XY$ με $O'(\alpha,\beta)$ γίνεται ;

$$(X+\alpha)^2+4(Y+\beta)-6(X+\alpha)+1=0$$

ή

$$X^2+2(\alpha-3)X+4Y+\alpha^2+4\beta-6\alpha+1=0$$

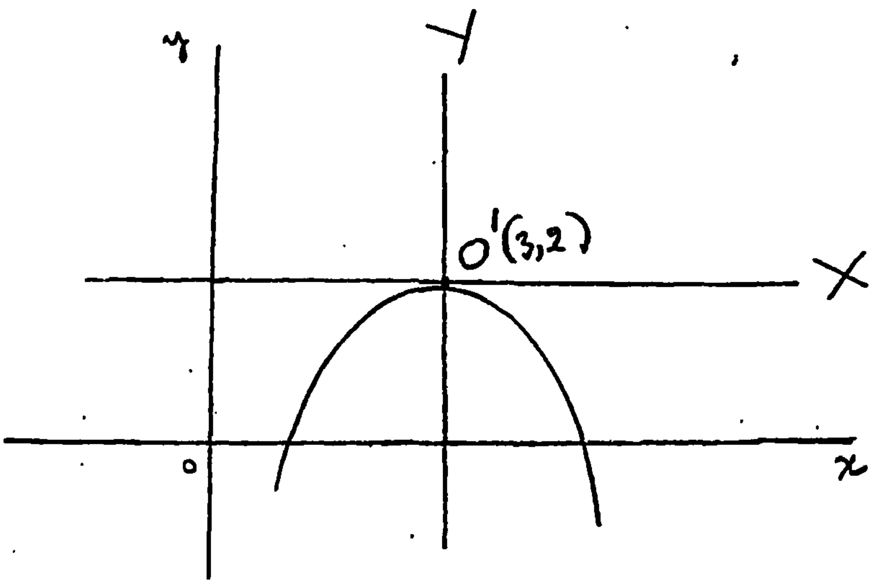
ή διαλέγοντας $\alpha=3$

$$X^2+4Y+4\beta-8=0 .$$

ή διαλέγοντας και $\beta=2$

$$X^2+4Y=0 ,$$

που όπως ξέρουμε είναι μια παραβολή . Ένα σχέδιο στο παρακάτω σχήμα..



Μελέτη της εξίσωσης $Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0$.

Γνωρίζουμε από τη προηγούμενη παράγραφο τι περιστάνει η εξίσωση (1) γία $B=0$. Έτσι εδώ θα υποθέσουμε ότι $B\neq 0$. Όπως και στη προηγούμενη παράγραφο, έτσι και εδώ θα επιδιώξουμε να βρούμε ένα καινούργιο σύστημα συντεταγμένων , ως προς το οποίο η εξίσωση μας να γίνει πιο απλή , για να μελετηθεί ευκολώτερα.

Θεωρούμε λοιπόν Oxy ένα σύστημα συντεταγμένων , ως προς το οποίο μια καμπύλη έχει εξίσωση την :

$$(5) \qquad Ax^2+Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \quad \text{με} \quad B\neq 0 \ .$$

Θα κοιτάξουμε να δούμε πως γίνεται η (5) σε ένα σύστημα OXY , που είναι στροφή του Oxy κατά γωνία φ . Οι εξισώσεις που μας δίνουν τα (x,y) από τα (X,Y) είναι οι (11) της σελίδας 117. Δηλαδή :

$$(6) \qquad \begin{aligned} x &= X\cos\varphi - Y\sin\varphi \\ y &= X\sin\varphi + Y\cos\varphi \ . \end{aligned}$$

Η (5) στο καινούργιο σύστημα συντεταγμένων γίνεται (αντικαθιστάμε τις (6) στη (5)) :

$$A(X\cos\varphi-Y\sin\varphi)^2+2B(X\cos\varphi-Y\sin\varphi)(X\sin\varphi+Y\cos\varphi)+C(X\sin\varphi+Y\cos\varphi)^2$$
$$+2D(X\cos\varphi-Y\sin\varphi)+2E(X\sin\varphi+Y\cos\varphi)+F=0$$

ή μετά από εκτέλεση των πράξεων

$$(7) \quad (A\cos^2\varphi+2B\cos\varphi\sin\varphi+C\sin^2\varphi)X^2+(-2A\cos\varphi\sin\varphi+2B\cos^2\varphi-2B\sin^2\varphi+2\cos\varphi\sin\varphi)XY$$
$$+(A\sin^2\varphi-2B\sin\varphi\cos\varphi+C\cos^2\varphi)Y^2+2(D\cos\varphi+E\sin\varphi)X+2(-D\sin\varphi+E\cos\varphi)Y+2C=0 \ .$$

Ο συντελεστής του XY στην (7) είναι :

$$-2A\cos\varphi\sin\varphi+2B\cos^2\varphi-2B\sin^2\varphi+2C\cos\varphi\sin\varphi =$$
$$= 2B(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)-(A-C)2\cos\varphi\sin\varphi$$
$$= 2B\cos 2\varphi-(A-C)\sin 2\varphi \ .$$

Βλέπουμε λοιπόν ότι μπορούμε να βρούμε γωνία φ έτσι ώστε

$$2B\cos 2\varphi-(A-C)\sin 2\varphi=0 \ .$$

Πραγματικά αφού $B \neq 0$, συμπεραίνουμε πως $\sin 2\varphi \neq 0$. Έτσι αρκεί να πάρουμε :

(8) $\qquad \tan 2\varphi = \dfrac{2B}{A-C} \quad$ και $\quad 0 \leqq 2\varphi < \pi$.

Διαλέγοντας λοιπόν το φ από τη σχέση (8) τότε η εξίσωση της καμπύλης στο σύστημα OXY θα είναι της μορφής

$$A'X^2+C'Y^2+2D'X+2E'Y+F=0$$

που όπως ξέρουμε από τη προηγούμενη παράγραφο παριστάνει μόνο έλλειψη, υπερβολή, παραβολή ή ζευγάρι ευθειών .

<u>ΤΕΛΙΚΟ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ</u>. <u>Η ΕΞΙΣΩΣΗ (1) ΠΑΡΙΣΤΑΝΕΙ : ΕΛΛΕΙΨΗ,ΥΠΕΡΒΟΛΗ,ΠΑΡΑΒΟΛΗ, ΖΕΥΓΑΡΙ ΕΥΘΕΙΩΝ ΚΑΙ ΜΟΝΟ</u> .

<u>Παράδειγμα 4.5.5.</u> Να σχεδιάσουμε τη καμπύλη , που στο σύστημα Oxy έχει εξίσωση της μορφής : $5x^2-6\sqrt{3}xy-y^2+16=0$; Θα βρούμε την εξίσωση της καμπύλης σε ένα σύστημα OXY , που είναι στροφή του Oxy κατά γωνία φ , η οποία δίνεται από τη σχέση :

$$\tan 2\varphi = \frac{2B}{A-C} = \frac{-6\sqrt{3}}{5-(-1)} = -\sqrt{3} .$$

Έτσι για $2\varphi=120$, δηλαδή $\varphi=60^\circ$ βρίσκουμε :

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{και} \quad \cos\varphi = \frac{1}{2} .$$

Έτσι έχουμε :

$$x = \frac{X}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}Y \quad \text{και} \quad y = \frac{\sqrt{3}}{2}X + \frac{1}{2}Y \quad .$$

Τώρα η εξίσωση της καμπύλης στο σύστημα OXY θα είναι :

$$5\left(\frac{X-\sqrt{3}Y}{2}\right)^2-6\sqrt{3}\left(\frac{X-\sqrt{3}Y}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}X+Y}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt{3}X+Y}{2}\right)^2+16=0$$

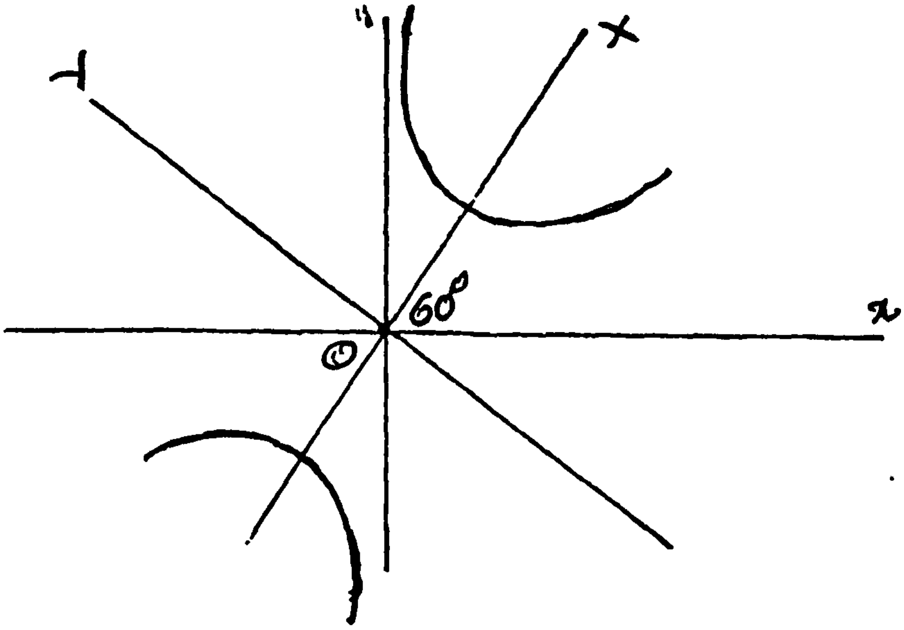
ή μετά από πράξεις

$$-4X^2+8Y^2+16=0$$

ή

$$\frac{X^2}{4}-\frac{Y^2}{2}=1\ ,$$

που όπως ξέρουμε είναι μια υπερβολή . Ένα σχέδιο είναι το παρακάτω :



Παράδειγμα 4.5.6.

Θέλουμε να σχεδιάσουμε μια καμπύλη , που σε ένα σύστημα αναφοράς Oxy έχει εξίσωση την : $x^2-4xy+y^2+10x-8y+7=0$. Πρώτα θα φέρουμε την εξίσωση μας στη μορφή (2) (της σελίδας 149). Έτσι αρκεί να βρούμε την εξίσωση της καμπύλης μας σε ένα σύστημα OXY , που είναι στροφή του Oxy κατά γωνία φ , η οποία δίνεται από τη σχέση :

$$\tan 2\varphi = \frac{2B}{A-C} = \frac{-4}{1-1} = \infty \quad .$$

Έτσι $2\varphi=90$ και συνεπώς $\varphi=45^0$. Άρα οι εξισώσεις μετασχηματισμού θα είναι :

$$x = X\cos 45^0 - Y\sin 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(X-Y)$$

$$y = X\sin 45^0 + Y\cos 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y) \quad .$$

Η εξίσωση λοιπόν στο καινούργιο σύστημα θα γίνει :

$$\frac{1}{2}(X-Y)^2-2(X-Y)(X+Y)+\frac{1}{2}(X+Y)^2+5\sqrt{2}(X-Y)-4\sqrt{2}(X+Y)+7=0$$

ή

(*) $$-X^2+3Y^2+\sqrt{2}X-9\sqrt{2}Y+7=0 \quad .$$

Τώρα η (*) είναι της μορφής (2) (και μάλιστα με $AC=-3\neq 0$) και ξέρουμε να την επεξεργαστούμε . Θεωρούμε ένα καινούργιο σύστημα συντεταγμένων $O'\bar{X}\bar{Y}$ παράλληλη μεταφορά του OXY στο $O'(\alpha,\beta)$ με :

$$\alpha = -\frac{D}{A} = -\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{και} \quad \beta = -\frac{E}{C} = -\frac{-\frac{9\sqrt{2}}{2}}{3} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \quad .$$

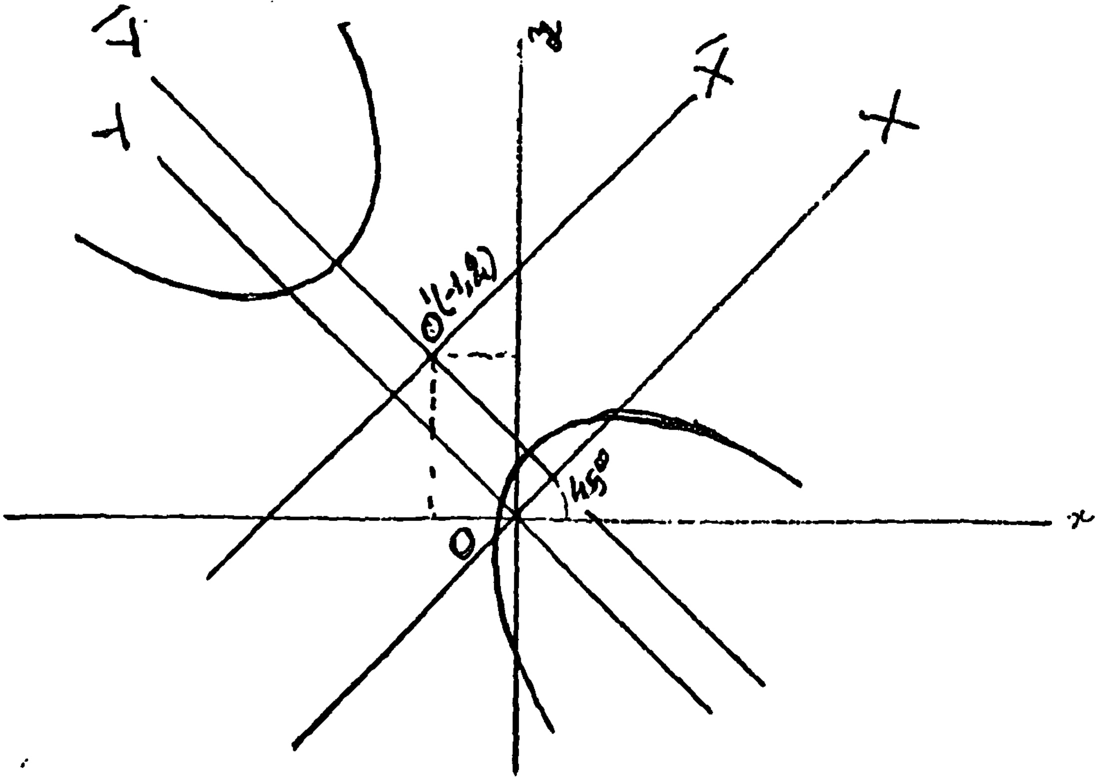
Θέτοντας λοιπόν : $X=\bar{X}+\frac{\sqrt{2}}{2}$ και $Y=\bar{Y}+\frac{3\sqrt{2}}{2}$ στην (*) βρίσκουμε την εξίσωση της καμπύλης στο σύστημα $O'\bar{X}\bar{Y}$ που είναι η :

$$-(\bar{X}+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+3(\bar{Y}+\frac{3\sqrt{2}}{2})^2+\sqrt{2}(\bar{X}+\frac{\sqrt{2}}{2})-9\sqrt{2}(\bar{Y}+\frac{3\sqrt{2}}{2})+7=0 \quad .$$

ή μετά από πράξεις

(**) $$-\bar{X}^2+3\bar{Y}^2-6=0 \quad .$$

Η (**) όπως ξέρουμε είναι υπερβολή με άξονα κύριο τον $\bar{Y}$, αφού γράφεται : $\frac{\bar{Y}^2}{3}-\frac{\bar{X}^2}{6}=1$. Το σχέδιο της καμπύλης μας φαίνεται στο παρακάτω σχήμα :



Το O' έχει ως προς το σύστημα OXY συντεταγμένες $\frac{\sqrt{2}}{2}$ και $\frac{3\sqrt{2}}{2}$, ενώ ως προς το Oxy έχει συντεταγμένες τις $(-1,2)$ (γιατί;) .

Παράδειγμα 4.5.7. Θέλουμε να σχεδιάσουμε τη καμπύλη, που σε ένα σύστημα συντεταγμένων Oxy έχει εξίσωση την : $y = \alpha x^2+\beta x+\gamma$ (με $\alpha\neq 0$) . Είναι ήδη γνωστό από το Λύκειο ότι το γράφημα αυτής είναι μια παραβολή (γραφική παράσταση δευτεροβάθμιου τριωνύμου) . Η εξίσωση της καμπύλης γράφεται $\alpha x^2+\beta x-y+\gamma = 0$ και είναι της μορφής 2 (σελίδα 149) με $c=0$. Η εξίσωση αυτής της καμπύλης σε ένα σύστημα $O'XY$ παράλληλο προς το Oxy με $O'(x_0,y_0)$ θα είναι, αφού $x = X+x_0$, $y = Y+y_0$:

$$\alpha(X+x_0)^2+\beta(X+x_0)-(Y+y_0)+\gamma = 0$$

ή

$$(*) \qquad \alpha X^2+(2\alpha x_0+\beta)X-Y+\alpha x_0^2+\beta x_0-y_0+\gamma = 0 \quad .$$

Διαλέγοντας $x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha}$ η $(*)$ θα γίνει :

$$\alpha X^2 - Y + \alpha \frac{\beta^2}{4\alpha^2} - \frac{\beta^2}{2\alpha} - y_0 + \gamma = 0$$

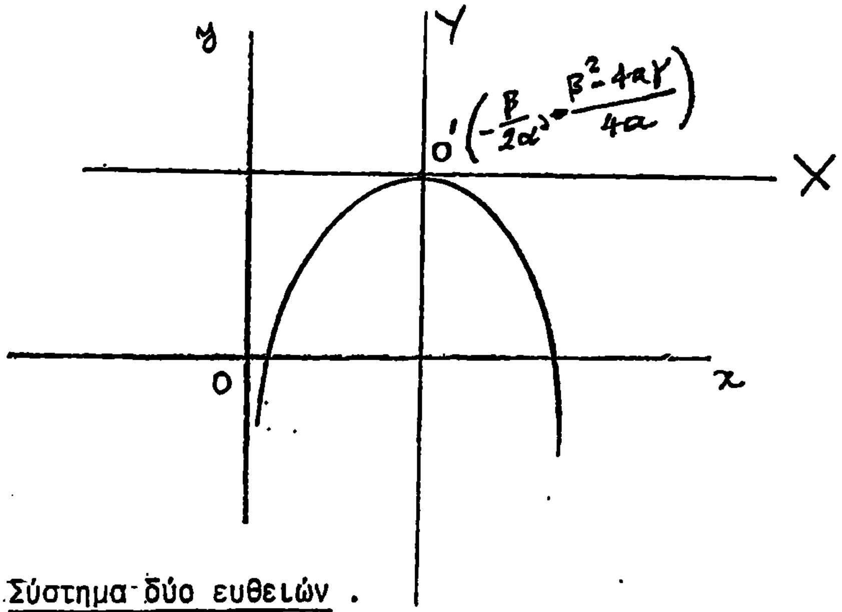
ή

$$\alpha X^2 - Y - \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha} - y_0 = 0$$

ή διαλέγοντας και $y_0 = -\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha}$ θα γίνει

$$\alpha X^2 - Y = 0 \quad ,$$

που όπως ξέρουμε είναι μια παραβολή. Έτσι η $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ παριστάνει μια παραβολή με κορυφή το σημείο $O'(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha})$. Ένα σχέδιο φαίνεται στο παρακάτω σχήμα (για $\alpha<0$ και $\beta^2-4\alpha\gamma>0$).



4.6. Σύστημα δύο ευθειών.

Σ'αυτή τη παράγραφο θα δώσουμε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε η εξίσωση

(9) $\qquad Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \qquad (A,B,C)\neq(0,0,0)$

να παριστάνει ζευγάρι ευθειών. Θα αποδείξουμε λοιπόν την παρακάτω πρόταση .

Πρόταση 4.6.1. Η εξίσωση (9) παριστάνει ζευγάρι ευθειών (πραγματικών ή φανταστικών) , αν και μόνο αν ισχύει ,

$$(*) \qquad J_3 = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = 0 \quad .$$

Προτού κάνουμε την απόδειξη της πρότασης , ας δούμε ένα παράδειγμα που θα μας κατευθύνει και στην απόδειξη της πρότασης .

Παράδειγμα 4.6.1. Αφού διαπιστώσουμε ότι η εξίσωση :

$$x^2+xy-2y^2-x+4y-2=0$$

παριστάνει ζευγάρι ευθειών , να βρούμε αυτές τις ευθείες .

Παρατηρούμε ότι : $A=1$, $B=\frac{1}{2}$, $C=-2$, $D=-\frac{1}{2}$, $E=2$ και $F=-2$.

'Ετσι έχουμε :

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -2 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad ,$$

δηλαδή ισχύει η σχέση (*) της πρότασης . Τώρα παίρνουμε της εξίσωση της καμπύλης και τη διατάσσουμε ως προς x :

$$(**) \qquad x^2+(y-1)x-2y^2+4y-2=0 \quad .$$

Θεωρούμε σαν δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς x και κοιτάζουμε να βρούμε τις ρίζες της . Η διακρίνουσά της είναι :

$$(y-1)^2-4(-2y^2+4y-2)=9y^2-18y+9=(3y-3)^2$$

δηλαδή είναι τέλειο τετράγωνο . Τώρα οι λύσεις της είναι :

$$\frac{-(y-1)\pm(3y-3)}{2}=y-1 \quad \text{και} \quad -2(y-1) \ .$$

'Ετσι η εξίσωση που μας δόθηκε γράφεται ως :

$$(x-y+1)(x+2y-2)=0 \ ,$$

που παριστάνει τις δύο πραγματικές ευθείες

$$(\varepsilon_1): x-y+1=0 \quad \text{και} \quad (\varepsilon_2): x+2y-2=0 \ .$$

Το κλειδί στην όλη υπόθεση είναι ότι η διακρίνουσα είναι τέλειο τετράγωνο και συνεπώς οι ρίζες είναι πολυώνυμα πρώτου (το πολύ) βαθμού ως προς y .

<u>Απόδειξη της πρότασης 4.6.1</u>. Χωρίζουμε την απόδειξη σε δύο περιπτώσεις.

<u>Περίπτωση 1</u>. 'Εστω $(A,C)\neq(0,0)$. Ας είναι $A\neq0$. Η εξίσωση (9) γράφεται :

(10) $$Ax^2+2(By+D)x+Cy^2+2Ey+F=0 \ .$$

Θεωρούμε την (10) σαν δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς x και βρίσκουμε τις ρίζες της που είναι :

$$x=\frac{-(By+D)\pm\sqrt{(By+D)^2-A(Cy^2+2Ey+F)}}{A} \ .$$

Για να παριστάνει η (9) δύο ευθείες , πρέπει και αρκεί να αναλύεται σε γινόμενο πρωτοβάθμιων πολυωνύμων ως προς x και y . Με άλλα λόγια , πρέπει και αρκεί η (10) να έχει λύσεις πρωτοβάθμια (το πολύ) πολυώνυμα του y . Για να γίνει αυτό πρέπει και αρκεί η διακρίνουσα

$$(11) \qquad \Delta = (By+D)^2 - A(Cy^2+2Ey+F)$$

$$= (B^2-AC)y^2 + 2(BD-AE)y + D^2 - AF$$

να είναι τέλειο τετράγωνο . Αυτό όμως γίνεται αν και μόνο αν , ισχύει :

$$(12) \qquad (BD-AE)^2 - (B^2-AC)(D^2-AF) = 0 \quad .$$

Το πρώτο μέλος της (12)είναι ίσο με : $-AJ_3$.
'Ετσι η (12) ισχύει (αφού $A \neq 0$) , αν και μόνο αν, $J_3=0$. 'Εχουμε λοιπόν σ'αυτή τη περίπτωση ότι η (9) παριστάνει ζευγάρι ευθειών , αν και μόνο αν , ισχύει η (*) .

Περίπτωση 2. 'Εστω $A=C=0$. 'Εχουμε εδώ $B \neq 0$, αφού $(A,B,C) \neq (0,0,0)$. Η (9) γράφεται τότε :

$$(13) \qquad 2Bxy + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

και η (*) γίνεται

$$J_3 = 2BED - B^2F = B(2ED-BF) = 0$$

ή (αφού $B \neq 0$)

$$(14) \qquad 2ED - BF = 0 \quad .$$

'Ετσι λοιπόν θέλουμε να δείξουμε πως η (13) παριστάνει ζευγάρι ευθειών , αν και μόνο αν , ισχύει η (14) :
Η εξίσωση (13) γράφεται :

$$2x(By+D) + \frac{2E}{B}(By+D) + F - \frac{2ED}{B} = 0$$

ή

(15) $$(2x+\frac{2E}{B})\,(By+D)+\frac{BF-2ED}{B}=0 \quad .$$

Έτσι αν ισχύει η (14) τότε η (13) και συνεπώς η (15) γράφεται

$$(2x+2\,\frac{E}{B})\,(By+D)=0 \quad ,$$

που παριστάνει δύο ευθείες (ποιές;) . Αντίστροφα αν η (13) παριστάνει ζευγάρι ευθειών θα είναι ισοδύναμη με μια εξίσωση της μορφής : $(x+\alpha)(y+\beta)=0$, δηλαδή :

(16) $$xy+\alpha x+\beta y+\alpha\beta=0 \quad .$$

Όμως οι (13) και (14) είναι ισοδύναμες , αν και μόνο αν , ισχύει :

$$\frac{1}{2B}=\frac{\beta}{2D}=\frac{\alpha}{2E}=\frac{\alpha\beta}{F}$$

από όπου παίρνουμε με απαλοιφή των α,β την $2ED-EF=0$ δηλαδή την (14) .

<u>Παράδειγμα 4.6.2.</u> Στο Oxy επίπεδο θεωρούμε την εξίσωση

$$x^2+6xy+y^2+6x+2y+\lambda=0 \quad .$$

Για να παριστάνει αυτή ζευγάρι ευθειών , πρέπει και αρκεί να ισχύει :

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & \lambda \end{vmatrix}=0 \quad ,$$

δηλαδή $\lambda=1$. Οι ευθείες που παριστάνει για $\lambda=1$ βρίσκονται ως εξής :

Έχουμε $x^2+6xy+y^2+6x+2y+1=0$ ή διατάσσοντας ως προς x :

(*) $$x^2+6(y+1)x+y^2+2y+1=0 \quad .$$

θεωρώντας αυτή ως δευτεροβάθμια εξίσωση ως προς x , βρίσκουμε τις λύσεις που είναι :

$$\frac{-3(y+1)\pm\sqrt{9(y+1)^2-(y^2+2y+1)}}{1}=-3(y+1)\pm 2\sqrt{2}\,(y+1)$$

$$=\begin{cases}(2\sqrt{2}-3)(y+1)\\ -(3+2\sqrt{2})(y+1)\end{cases}.$$

'Ετσι η (*) είναι ισοδύναμη με την

$$\{x-(2\sqrt{2}-3)(y+1)\}\cdot\{x+(3+2\sqrt{2})(y+1)\}=0$$

και παριστάνει τις ευθείες :

$$(\varepsilon_1):x-(2\sqrt{2}-3)(y+1)=0 \quad \text{και} \quad (\varepsilon_2):x+(3+2\sqrt{2})(y+1)=0 \ .$$

Παράδειγμα 4.6.3. Στο επίπεδο Oxy δίνεται η εξίσωση :

$$x^2+2xy-y^2+2\lambda x+2\mu y=0 \ ,$$

όπου λ,μ παράμετροι . Για τις διάφορες τιμές των λ,μ η εξίσωση παριστάνει μια κωνική τομή (έλλειψη, υπερβολή, παραβολή, ζευγάρι ευθειών) . Θέλουμε να δούμε για ποιές τιμές των λ,μ παριστάνει ζευγάρι ευθειών . Σύμφωνα με την πρόταση μας για να παριστάνει η εξίσωση ζευγάρι ευθειών,πρέπει και αρκεί να ισχύει:

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & \lambda\\ 1 & -1 & \mu\\ \lambda & \mu & 0\end{vmatrix}=0$$

ή

$$\lambda^2-\mu^2+2\lambda\mu=0 \ .$$

Έτσι βλέπουμε πως η εξίσωση παριστάνει ζευγάρι ευθειών για πολλά ζευγάρια (λ,μ) των παραμέτρων. Έχουμε ισοδύναμα $\{\lambda+(1-\sqrt{2})\mu\}\{\lambda+(1+\sqrt{2})\mu\}=0$. Συνεπώς τα ζευγάρια (λ,μ), για τα οποία η εξίσωση παριστάνει ζευγάρι ευθειών, βρίσκονται πάνω στις ευθείες :

$$(\varepsilon_1) : \lambda+(1-\sqrt{2})\mu=0$$

$$(\varepsilon_2) : \lambda+(1+\sqrt{2})\mu=0 \quad ,$$

σε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων με άξονες λ και μ. Επί πλέον οι (ε_1) και (ε_2) είναι κάθετες (γιατί;).

4.7. Αναλλοίωτοι καμπύλης 2ου βαθμού.

Θεωρούμε τη γενική εξίσωση δευτέρου βαθμού στο επίπεδο Oxy με $(A,B,C)\neq(0,0,0)$

$$(1) \qquad Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \quad .$$

Όπως μέχρι τώρα έχουμε αναφέρει η (1) παριστάνει μια κωνική τομή. Επίσης έχουμε εκθέσει μια τεχνική να βρούμε τι ακριβώς παριστάνει. Θεωρούμε τώρα ένα καινούργιο σύστημα συντεταγμένων το OXY που προκύπτει μετά από στροφή κατά γωνία φ του Oxy και παράλληλη μεταφορά στο σημείο $O'(\alpha,\beta)$. Σύμφωνα με τις σχέσεις (13) της σελίδας 117 οι συντεταγμένες ενός σημείου ως προς το σύστημα Oxy και οι συντεταγμένες του ιδίου σημείου ως προς το σύστημα $O'XY$ συνδέονται με τις σχέσεις :

$$(2) \qquad \begin{aligned} x &= \alpha + X\cos\varphi - Y\sin\varphi \\ y &= \beta + X\sin\varphi + Y\cos\varphi \quad . \end{aligned}$$

θέτοντας τις (2) στην (1) βρίσκουμε την εξίσωση

(3) $A'X^2+2B'XY+C'Y^2+2D'X+2E'Y+F'=0$.

Η (3) μας δίνει την εξίσωση της καμπύλης στο σύστημα $O'XY$. Επίσης θα έχουμε :

$$
(4)\quad \begin{cases}
A'=A\cos^2\varphi+2B\cos\varphi\sin\varphi+C\sin^2\varphi \\
B'=-A\cos\varphi\sin\varphi+B\cos2\varphi+C\sin\varphi\cos\varphi \\
C'=A\sin^2\varphi-2B\sin\varphi\cos\varphi+C\cos^2\varphi \\
D'=(A\alpha+B\beta+D)\cos\varphi+(B\alpha+C\beta+E)\sin\varphi \\
E'=-(A\alpha+B\beta+D)\sin\varphi+(B\alpha+C\beta+E)\cos\varphi \\
F'=(A\alpha+B\beta+D)\alpha+(B\alpha+C\beta+E)\beta+D\alpha+E\beta+F
\end{cases}
$$

Ύστερα από αρκετές πράξεις μπορούμε να δείξουμε πως ισχύουν :

(5) $A+C=A'+C'$

(6) $AC-B^2=A'C'-B'^2$

(7) $\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A' & B' & D' \\ B' & C' & E' \\ D' & E' & F' \end{vmatrix}$.

Οι σχέσεις (5), (6) και (7) δείχνουν ότι αν δοθεί μια καμπύλη 2ου βαθμού με εξίσωση την (1) τότε οι ποσότητες :

$$J_1=A+C \quad , \quad J_2=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} \quad , \quad J_3=\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

δεν αλλάζουν αν γράψουμε την εξίσωση της καμπύλης σε άλλο σύστημα συντεταγμένων που είναι στροφή και παράλληλη μεταφορά του πρώτου .

<u>Ορισμός</u> . Οι ποσότητες J_1 , J_2 , J_3 λέγονται <u>αναλλοίωτοι</u> της δευτεροβάθμιας καμπύλης:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \quad , \quad (A,B,C)\neq(0,0,0) \quad .$$

<u>Παρατηρήσεις</u> : 1. Όπως φαίνεται από τις σχέσεις (4) οι συντελεστές A', B', C' δεν επηρεάζονται από την παράλληλη μεταφορά .

2. Σύμφωνα με γνωστή μας πρόταση η δευτεροβάθμια καμπύλη είναι ζευγάρι ευθειών , αν και μόνο αν , η τρίτη αναλλοίωτος είναι μηδέν , δηλαδή $J_3=0$.

Συνήθως η δεύτερη αναλλοίωτος J_2 λέγεται και <u>διακρίνουσα της καμπύλης</u>, επειδή από το πρόσημο της J_2 μπορούμε να πούμε αμέσως αν η καμπύλη είναι έλλειψη, υπερβολή ή παραβολή . Πραγματικά αν η καμπύλη (1) δεν είναι ζευγάρι ευθειών $(J_3\neq0)$ τότε θα είναι έλλειψη, υπερβολή ή παραβολή . Όμως κάνοντας μια στροφή του συστήματος συντεταγμένων κατά γωνία φ ώστε $\tan2\varphi=\frac{2B}{A-C}$ τότε θα έχουμε στο καινούργιο σύστημα ότι $B'=0$ και $J_2=A'C'$. Όμως σύμφωνα με τη περίπτωση 1 της σελίδας 149 η καμπύλη είναι έλλειψη (πραγματική ή φανταστική) αν $J_2=A'C'>0$ και υπερβολή αν $J_2=A'C'<0$. Τέλος σύμφωνα με τη περίπτωση 2 της σελίδας 150 η καμπύλη είναι παραβολή αν $J_2=A'C'=0$.

<u>Παράδειγμα 4.7.1</u>. Η δευτεροβάθμια καμπύλη με εξίσωση την : $x^2-4xy+y^2+10x-8y+7=0$ είναι μια υπερβολή . Πραγματικά , αφού $J_2=AC-B^2=1\cdot1-2^2=-3<0$. Για να τη βρούμε και να τη σχεδιάσουμε πρέπει να κάνουμε τη διαδικασία , που κάναμε στο παράδειγμα 4.5.1 , της σελίδας 156 . .

<u>'Ασκηση</u> . Να βρείτε τις ασύμπτωτους της υπερβολής

$$x^2-4xy+y^2+10x-8y+7=0 \quad .$$

(<u>Υπόδειξη</u> . Μετά από στροφή και παράλληλη μεταφορά να βρείτε την εξίσωση της υπερβολής στο κανονικό σύστημα συντεταγμένων . Να βρείτε τις εξισώσεις των ασύμπτωτων στο κανονικό σύστημα και μετά να τις μετατρέψετε στο αρχικό σύστημα) .

4.8. <u>Εφαπτομένη μιας δευτεροβάθμιας καμπύλης</u> .

Σε αυτή τη παράγραφο θα κοιτάξουμε να βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης σε ένα σημείο της δευτεροβάθμιας καμπύλης ,

$$(1) \qquad Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \quad , \quad (A,B,C)\neq(0,0,0) \quad .$$

<u>Σχόλιο</u> . Θα μπορούσαμε να αντιμετωπίσουμε το παρακάτω πρόβλημα ως εξής: Σύμφωνα με τη παράγραφο 4.5. μπορούμε να βρούμε (μετά από στροφή και παράλληλη μεταφορά) τη κανονική εξίσωση της καμπύλης (1) στο κανονικό σύστημα συντεταγμένων . Να βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης (πρόβλημα 4.2.1 , πρόβλημα 4.3.1 και πρόβλημα 4.4.1) στο κανονικό σύστημα συντεταγμένων και έπειτα να μετατρέψουμε αυτές τις εξισώσεις στο αρχικό σύστημα .

'Ομως η παραπάνω διαδικασία θα απαιτεί κάθε φορά αρκετούς λογαριασμούς. 'Ετσι θα προσπαθήσουμε να βρούμε ένα τύπο για την εφαπτομένη της (1) , ο οποίος μπορεί να εφαρμοστεί και στα προβλήματα 4.2.1., 4.3.1. και 4.4.1.

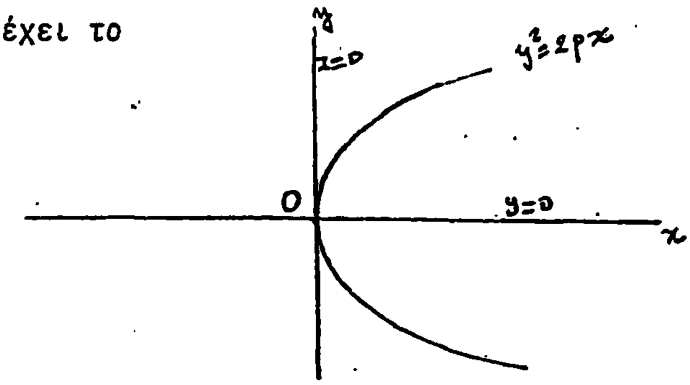
Πριν όμως θα πρέπει να πούμε τι σημαίνει εφαπτομένη της καμπύλης (1) σε ένα σημείο της $P_1(x_1,y_1)$; Ο ορισμός που θα δώσουμε αναφέρεται μόνο για δευτεροβάθμιες καμπύλες . Εξ άλλου θα αντιμετωπίσουμε αυτό το πρόβλημα για τη περίπτωση , που η (1) δεν παριστάνει ζευγάρι ευθειών, αφού όταν η (1) παριστάνει ζεύγος ευθειών, αυτές οι ευθείες μας δίνουν ανάλογα και την εφαπτομένη .

<u>Ορισμός</u> . Δίνεται η δευτεροβάθμια καμπύλη (1) και ένα σημείο της το $P_1(x_1,y_1)$. Μια ευθεία (ε) από το P_1 με εξίσωση την $\alpha x+\beta y+\gamma=0$ ονομάζεται <u>εφαπτομένη</u> της καμπύλης (1) στο P_1 , αν το σύστημα :

$$(2)\qquad \begin{cases} Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \\ \alpha x+\beta y+\gamma=0 \end{cases}$$

έχει το P_1 <u>ως διπλή λύση</u> .

<u>Παρατήρηση 4.8.1</u>. Πρέπει να δόσουμε σημασία σ'αυτό τον ορισμό για να αποφύγουμε <u>λάθη</u> της μορφής : Η ευθεία (ε) λέγεται εφαπτομένη της κωνικής τομής (1) στο P_1 , αν τέμνονται μόνο στο P_1 . Αυτό είναι λάθος , αφού για παράδειγμα ο άξονας $y=0$ και η παραβολή $y^2=2px$, έχουν το (0,0) ως μόνο σημείο τομής , αλλά ο άξονας $y=0$ δεν είναι εφαπτομένη . Το σύστημα $(y=0$, $y^2=2px)$ δεν έχει το



(0,0) ως διπλή λύση . Αντίθετα το σύστημα $(x=0$, $y^2=2px)$ έχει το (0,0) ως διπλή λύση . Έτσι η ευθεία $x=0$ είναι εφαπτομένη της παραβολής $y^2=2px$ στο σημείο (0,0) .

<u>Σχόλιο πριν από τη λύση του προβλήματος</u> . Επειδή το σημείο $P_1(x_1,y_1)$ είναι πάνω στην καμπύλη (1) θα έχουμε :

(3) $$Ax_1^2+2Bx_1y_1+Cy_1^2+2Dx_1+2Ey_1+F=0$$

ή

(4) $$(Ax_1+By_1+D)x_1+(Bx_1+Cy_1+E)y_1+Dx_1+Ey_1+F=0 \quad .$$

<u>Παρατήρηση 4.8.2.</u> Δεν μπορεί στο σημείο $P_1(x_1,y_1)$ να ισχύουν συγχρόνως : $Ax_1+By_1+D=0$, $Bx_1+Cy_1+E=0$, αφού από την (4) θα έχουμε και $Dx_1+Ey_1+F=0$. Όμως οι τρείς σχέσεις :

$$Ax_1+By_1+D=0$$
$$Bx_1+Cy_1+E=0$$
$$Dx_1+Ey_1+F=0$$

ισχύουν συγχρόνως , αν και μόνο αν ,

$$\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}=0$$

δηλαδή , αν και μόνο αν , η (1) παριστάνει ζευγάρι ευθειών , σύμφωνα με τη πρόταση 4.6.1. Αυτή όμως η περίπτωση συμφωνήσαμε να μη την εξετάσουμε στο πρόβλημα εύρεσης εφαπτομένης .

Έχουμε λοιπόν την παρακάτω πρόταση .

<u>Πρόταση 4.8.1.</u> Δίνεται δευτεροβάθμια καμπύλη (όχι ζευγάρι ευθειών) με εξίσωση την :

(5) $$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \quad , \quad (A,B,C)\neq(0,0,0) \quad .$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $P_1(x_1,y_1)$ είναι :

(6) $$Axx_1+B(xy_1+x_1y)+Cyy_1+D(x+x_1)+E(y+y_1)+F=0$$

ή ισοδύναμα

(7) $$(Ax_1+By_1+D)x+(Bx_1+Cy_1+E)y+Dx_1+Ey_1+F=0 \quad .$$

<u>Απόδειξη</u> : Όλες οι ευθείες του επιπέδου που περνούν από το σημείο $P_1(x_1,y_1)$ είναι οι : $\{x=x_1$ και $y-y_1=\lambda(x-x_1)$ για $\lambda\in R\}$. Θα ψάξουμε να δούμε αν μεταξύ αυτών υπάρχει μια (και ποιά;) , η οποία τέμνει την (5) στο σημείο $P_1(x_1,y_1)$ δύο φορές . Κοιτάζουμε αν υπάρχει λ έτσι ώστε το σύστημα :

(8) $$\begin{cases} Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \\ y-y_1=\lambda(x-x_1) \end{cases}$$

να έχει το $P_1(x_1,y_1)$ ως διπλή λύση .

Αντικαθιστώντας το $y=y_1+\lambda(x-x_1)$ στη πρώτη των (8) έχουμε μετά από πράξεις :

$$Ax^2+2Bxy_1+Cy_1^2+2Dx+2Ey_1+F+2\lambda Bx(x-x_1)+C\lambda^2(x-x_1)^2$$
$$+2C\lambda y_1(x-x_1)+2E\lambda(x-x_1)=0 \quad ,$$

ή επειδή $Cy_1^2+2Ey_1+F=-Ax_1^2-2Bx_1y_1-2Dx_1$ από την (3) ,

$$Ax^2+2Bxy_1+2Dx-Ax_1^2-2Bx_1y_1-2Dx_1+2\lambda Bx(x-x_1)+C\lambda^2(x-x_1)^2$$

$$+2C\lambda y_1(x-x_1)+2E\lambda(x-x_1)=0$$

ή

$$(*)\qquad (x-x_1)\left[A(x+x_1)+2By_1+2D+2\lambda Bx+C\lambda^2(x-x_1)+2C\lambda y_1+2E\lambda\right]=0 \quad .$$

Η (*) είναι δευτεροβάθμια ως προς x και πρέπει να έχει το x_1 ως διπλή λύση . Αυτό σημαίνει ότι η αγκύλη θα πρέπει να μηδενίζεται θέτοντας $x=x_1$. Πρέπει λοιπόν να έχουμε :

$$(9)\qquad Ax_1+By_1+D+\lambda(Bx_1+Cy_1+E)=0 \quad .$$

<u>Περίπτωση 1</u>. Για $Bx_1+Cy_1+E\neq 0$, η ευθεία $y-y_1=-\dfrac{Ax_1+By_1+D}{Bx_1+Cy_1+E}(x-x_1)$ είναι εφαπτομένη της καμπύλης (5) στο σημείο $P_1(x_1,y_1)$ αφού το σύστημα (8) έχει το $P_1(x_1,y_1)$ ως διπλή λύση . Όμως η

$$y-y_1=-\frac{Ax_1+By_1+D}{Bx_1+Cy_1+E}(x-x_1)$$

μετά από πράξεις γίνεται :

$$(Ax_1+By_1+D)x+(Bx_1+Cy_1+E)y-(Ax_1+By_1+D)x_1-(Bx_1+Cy_1+E)y_1=0$$

ή λόγω της (4)

$$(Ax_1+By_1+D)x+(Bx_1+Cy_1+E)y+Dx_1+Ey_1+F=0 \quad ,$$

που είναι η (7) ή ισοδύναμα η (6) . Έτσι στη περίπτωση που $Bx_1+Cy_1+E\neq 0$, δείξαμε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης δίνεται από την (6) ή ισοδύναμα την (7).

<u>Παρίπτωση 2</u> . Για $Bx_1+Cy_1+E=0$, θα δούμε πως το σύστημα :

$$(10)\qquad \begin{cases} Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0 \\ x=x_1 \end{cases}$$

έχει το $P_1(x_1,y_1)$ ως διπλή λύση και συνεπώς η ευθεία $x=x_1$ είναι η εφαπτομένη. Τότε όμως από την (4) θα έχουμε πως η εφαπτομένη είναι η :

$$x=x_1=-\frac{Dx_1+Ey_1+F}{Ax_1+By_1+D}$$

ή ισοδύναμα

$$(Ax_1+By_1+D)x+Dx_1+Ey_1+F=0$$

ή επειδή $Bx_1+Cy_1+E=0$

$$(Ax_1+By_1+D)x+(Bx_1+Cy_1+E)y+Dx+Ey_1+F=0 \quad ,$$

η οποία είναι ακριβώς η (7). Έτσι και σ'αυτή τη περίπτωση η εφαπτομένη θα δίνεται από την (7) ή ισοδύναμα τη (6). Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι το σύστημα (10) έχει το $P_1(x_1,y_1)$ ως διπλή λύση με τη υπόθεση $Bx_1+Cy_1+F=0$. (Κάντε το σαν άσκηση).

<u>Άσκηση</u>. Εφαρμόστε τη πρόταση 4.8.1. για να λύσετε τα προβλήματα 4.2.1., 4.3.1 και 4.4.1.

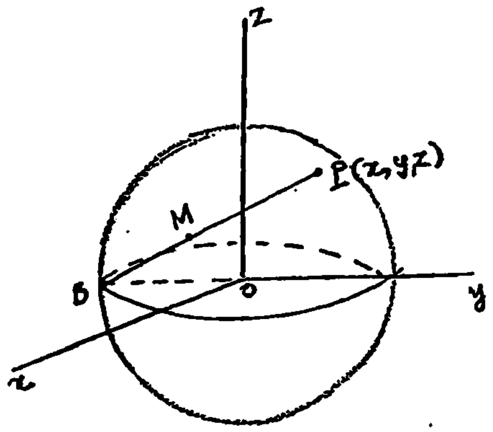
ΚΕΦΑΛΑΙΟ V: ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ

'Οπως είδαμε στη σελίδα 55 , επιφάνεια με τη στοιχειώδη έννοια λέγεται ο γεωμετρικός τόπος (το σύνολο) των σημείων του χώρου , των οποίων οι συντεταγμένες ικανοποιούν μια εξίσωση της μορφής $f(x,y,z)=0$, που λέγεται <u>εξίσωση της επιφάνειας</u> . Μέχρι τώρα έχουμε μελετήσει δύο απλές επιφάνειες . Την επιφάνεια επίπεδο , της οποίας τα σημεία επαληθεύουν μια εξίσωση της μορφής : $Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$. Επίσης την επιφάνεια σφαίρας , της οποίας τα σημεία επαληθεύουν μια εξίσωση της μορφής : $x^2+y^2+z^2+Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$. Οι επιφάνειες μπορούν να θεωρηθούν και ως ο γεωμετρικός τόπος των σημείων τα οποία έχουν μια γεωμετρική ιδιότητα. Για παράδειγμα η επιφάνεια της σφαίρας ορίσθηκε με τη χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων (απέχουν σταθερή απόσταση από σταθερό σημείο) και μετά βρέθηκε η εξίσωση της . Πολλές φορές (ίσως τις περισσότερες) μια επιφάνεια ορίζεται δίνοντας ένα τρόπο κατασκευής των σημείων της .

Θα δόσουμε στη συνέχεια δύο χαρακτηριστικά παραδείγματα .

<u>Παράδειγμα 1</u>. Θεωρούμε μια σφαίρα με κέντρο το σημείο $O(0,0,0)$ και ακτίνα R . Από το σημείο $B(0,-R,0)$ φέρνουμε όλες τις χορδές BP της σφαίρας . Πάνω στη χορδή BP παίρνουμε σημείο M , έτσι ώστε $(BPM)=\lambda$, όπου λ σταθερός αριθμός . Θέλουμε να βρούμε τον γεωμετρικό τόπο (σύνολο των σημείων) M , όταν το P κινείται πάνω στη σφαίρα .

'Εστω $M(x_0,y_0,z_0)$ τυχαίο σημείο του τόπου . Τότε έχουμε :



$$x_0=\frac{0+\lambda x}{1+\lambda}\ ,\quad y_0=\frac{-R+\lambda y}{1+\lambda}\ ,\quad z_0=\frac{0+\lambda z}{1+\lambda}$$

και συνεπώς

$$x=\frac{(1+\lambda)x_0}{\lambda}\ ,\quad y=\frac{(1+\lambda)y_0+R}{\lambda}\ ,\quad z=\frac{(1+\lambda)z_0}{\lambda}\ .$$

Επειδή όμως το σημείο $P(x,y,z)$ είναι σημείο της σφαίρας θα έχουμε :

$$x^2+y^2+z^2=R^2 \quad ή \quad \frac{(1+\lambda)^2}{\lambda^2}x_0^2+\frac{1}{\lambda^2}\left[(1+\lambda)y_0+R\right]^2+\frac{(1+\lambda)^2}{\lambda^2}z_0^2=R^2$$

ή μετά από πράξεις :

$$x_0^2+\left(y_0+\frac{R}{1+\lambda}\right)^2+z_0^2=\frac{R^2\lambda^2}{(1+\lambda)^2}\ .$$

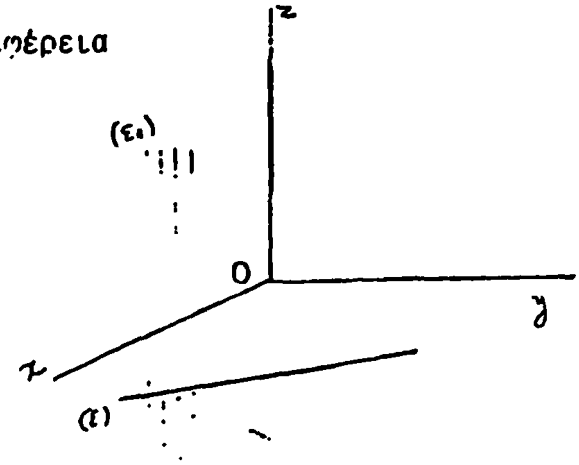
Έτσι το τυχαίο σημείο $M(x_0,y_0,z_0)$ του τόπου επαληθεύει την εξίσωση :

$$x^2+\left(y+\frac{R}{1+\lambda}\right)^2+z^2=\frac{R^2\lambda^2}{(1+\lambda)^2}$$

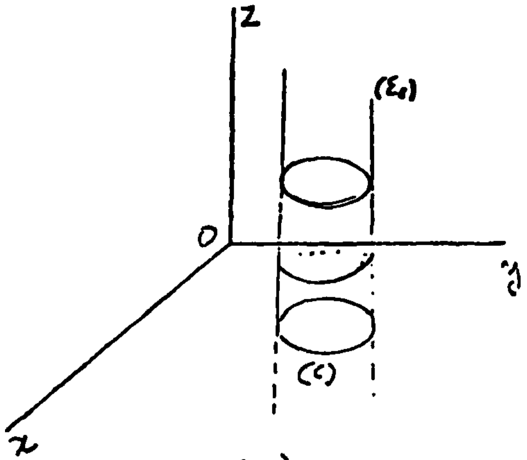
και συνεπώς ο τόπος είναι σφαίρα με κέντρο το σημείο $(0,-\frac{R}{1+\lambda},0)$ και ακτίνα $R\left|\frac{\lambda}{1+\lambda}\right|$.

Παράδειγμα 2. Στο Oxy επίπεδο παίρνουμε μια ευθεία (ε) . Μια άλλη ευθεία (ε_1) κάθετη στο Oxy επίπεδο περπατάει (κινείται) πάνω στην (ε) . Τα σημεία που σκουπίζει η (ε_1) είναι μια επιφάνεια . Είναι φανερό ότι αυτή η επιφάνεια είναι ένα επίπεδο (σχήμα α) . Αν στη θέση της (ε) πάρουμε μια πε-

ριφέρεια



(α)



(β)

φάνεια (c) (σχήμα β) , τότε η (ε_1) σαρώνει άλλη επιφάνεια , ένα βαρέλι (κύλινδρος) .

Έτσι αρκετές φορές μια επιφάνεια μπορεί να θεωρηθεί ότι παράγεται από τα σημεία μιας καμπύλης , που κινείται σύμφωνα με κάποιο νόμο . Στο παράδειγμα 2 η καμπύλη που κινείται είναι η (ε_1) , ενώ ο νόμος κίνησης περιγράφεται με την έκφραση : <u>Η (ε_1) κινείται κάθετα στο Oxy και συναντά την ε (ή c αντίστοιχα)</u>.

5.1. <u>Επιφάνειες που γίνονται με συνεχή κίνηση καμπύλης</u> .

Όπως ξέρουμε (σελίδα 55) μια καμπύλη στο χώρο παριστάνεται σαν τομή δύο επιφανειών . Έτσι τα σημεία του χώρου που επαληθεύουν τις $f(x,y,z)=0$ και $g(x,y,z)=0$ είναι γενικά μια καμπύλη (c) που περιστάνεται ως :

(1) $\quad (c) : (f(x,y,z)=0 \; , \; g(x,y,z)=0)$.

Η καμπύλη (1) έχει συγκεκριμένη θέση στο χώρο . Αντίθετα η καμπύλη :

(2) $\quad (f(x,y,z\ ,\ \lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)=0\ \ ,\ \ g(x,y,z\ ,\ \lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)=0)$,

όπου $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ είναι παράμετροι,δεν έχει συγκεκριμμένη θέση στο χώρο. Η θέση της γίνεται συγκεκριμμένη αν δόσουμε κάποιες τιμές στις παραμέτρους. 'Ετσι αλλάζοντας τις τιμές στις παραμέτρους αλλάζει και η θέση της καμπύλης στο χώρο , δηλαδή κινείται η καμπύλη στο χώρο . Το πως κινείται η καμπύλη στο χώρο εξαρτάται από το πως μεταβάλλονται οι παράμετροι . Για να δίνει η καμπύλη με τη κίνησή της μια επιφάνεια πρέπει οι παράμετροι $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ να συνδέονται με $(n-1)$-σχέσεις :

(3) $\quad \varphi_1(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)=0\ ,\ldots,\ \varphi_{n-1}(\lambda_1,\lambda_2,\ldots\lambda_n)=0$.

Οι σχέσεις (3) μας λένε πως μεταβάλλονται οι παράμετροι , δηλαδή πως κινείται η καμπύλη . Η καμπύλη (2) λέγεται <u>κινούμενη καμπύλη</u> οι δε σχέσεις (3) λένονται <u>νόμοι κίνησης της καμπύλης</u> .

Για τη κατανόηση αυτής της διαδικασίας θα κάνουμε ένα παράδειγμα .

<u>Παράδειγμα 5.1.1.</u> Μια ευθεία (ε_1) είναι κάθετη στο επίπεδο Oxy και κινείται ώστε να συναντά την ευθεία $(\varepsilon):(Ax+By+\Gamma=0\ ,\ z=0)$. Αν (x_0,y_0,z_0) είναι τυχαίο σημείο του Oxy επιπέδου , τότε η ευθεία από αυτό το σημείο και κάθετη στο Oxy επίπεδο έχει συμμετρική εξίσωση : $\frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{0}=\frac{z-z_0}{1}$ ή αναλυτικές εξισώσεις :

(*) $\quad (\varepsilon_1):(x-x_0=0\ ,\ y-y_0=0)$.

Η (*) είναι η κινούμενη καμπύλη , όπου x_0,y_0 είναι οι παράμετροι $(\lambda_1=x_0\ ,\ \lambda_2=y_0)$. Η (ε_1) κινείται ώστε να συναντά την (ε) δηλαδή το σημείο

$(x_0,y_0,0)$ να ανήκει στην (ε) . Έτσι έχουμε :

$(**)$ $\qquad Ax_0+By_0+\Gamma=0$.

Η (**) είναι ο νόμος κίνησης της (ε_1) .

Ξαναγυρίζουμε τώρα στη γενική θεωρία . Αν μεταξύ των εξισώσεων (2) και (3) (που είναι σε πλήθος $n+1$) κάνουμε απαλοιφή των παραμέτρων $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ παίρνουμε μια εξίσωση της μορφής :

(4) $\qquad F(x,y,z)=0$.

Η εξίσωση (4) είναι η εξίσωση της επιφάνειας που παράγεται με τη κίνηση της καμπύλης (2) , σύμφωνα με τους νόμους (3) . Πραγματικά , κάθε σημείο της επιφάνειας που παράγεται από τη κίνηση της καμπύλης επαληθεύει την (4) . Επίσης κάθε σημείο που επαληθεύει την (4) ικανοποιεί τις (2) για κάποιες τιμές των $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ που ικανοποιούν τις (3) . Αυτό συμβαίνει γιατί η (4) προέκυψε από τις (2) και (3) κάνοντας απαλοιφή .

Έτσι για το παράδειγμα 5.1.1 η εξίσωση της επιφάνειας που παράγεται με τη κίνηση της (ε_1) βρίσκεται από τις (*) και (**) με απαλοιφή των παραμέτρων x_0,y_0 και είναι :

$$Ax+By+\Gamma=0 ,$$

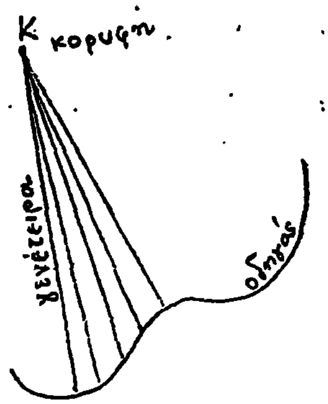
που είναι ένα επίπεδο κάθετο στο Oxy επίπεδο , όπως περιμέναμε .

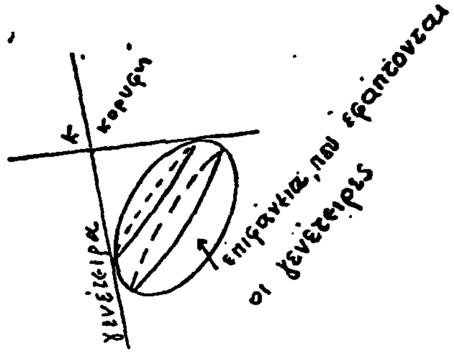
Στις παρακάτω παραγράφους θα κοιτάξουμε μερικές επιφάνειες που γίνονται με κίνηση μιας καμπύλης .

5.2. Κωνικές επιφάνειες .

Ορισμός 5.2.1. Μια επιφάνεια λέγεται κωνική όταν παράγεται από μια ευθεία η οποία κινείται έτσι ώστε να περνά από ένα σταθερό σημείο και να συναντά μια σταθερή καμπύλη ή να εφάπτεται μιας σταθερής επιφάνειας .

Το σταθερό σημείο λέγεται κορυφή της κωνικής επιφάνειας, η σταθερή καμπύλη λέγεται οδηγός της επιφάνειας και η ευθεία που κινείται λέγεται γενέτειρα (αφού παράγει την επιφάνεια) της επιφάνειας .





Θα κοιτάξουμε να βρούμε την εξίσωση της κωνικής επιφάνειας όταν ξέρουμε τη κορυφή , την οδηγό ή την επιφάνεια στην οποία εφάπτονται οι γενέτειρες . Προτού όμως γίνει αυτό θα δώσουμε ένα ορισμό χρήσιμο .

Ορισμός 5.2.2. Μια συνάρτηση $F(x,y,z)$ λέγεται ομογενής βαθμού k ως προς x,y,z αν για κάθε $t \geq 0$ ισχύει :

$$F(tx,ty,tz) = t^k F(x,y,z) \quad .$$

Πρόβλημα 5.2.1. Να βρούμε την εξίσωση της κωνικής επιφάνειας με κορυφή το σημείο $k(x_0,y_0,z_0)$ και οδηγό τη καμπύλη

(5) $\quad (c) : (f(x,y,z)=0\ ,\ g(x,y,z)=0)$.

Αφού η γενέτειρα περνά από τη κορυφή $K(x_0,y_0,z_0)$ έχει συμμετρική εξίσωση την :

(6) $$\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}=\frac{z-z_0}{\gamma}$$.

'Ετσι η (6) είναι η κινούμενη καμπύλη με παραμέτρους α,β και γ . Οι νόμοι κίνησης (σχέσεις μεταξύ των παραμέτρων) θα βρεθούν από το γεγονός ότι η (6) συναντά την (5) . Αφού η (6) και (5) έχουν κοινή λύση , αν κάνουμε απαλοιφή των x,y,z θα βρούμε τη σχέση που επαληθεύουν οι παράμετροι . Αυτή είναι μια σχέση της μορφής :

(7) $$\varphi\left(\frac{\beta}{\alpha},\frac{\gamma}{\alpha}\right)=0$$

ή ακόμη

(8) $$F(\alpha,\beta,\gamma)=0$$.

Παρατήρηση . 'Εχουμε βρει μόνο ένα νόμο κίνησης ενώ έπρεπε να έχουμε δύο , αφού οι παράμετροι είναι τρείς ! (γιατί;) .

Η $F(\alpha,\beta,\gamma)$ όπως φαίνεται από την (7) είναι ομογενής ως προς α,β,γ, ας πούμε βαθμού k . Η εξίσωση της επιφάνειας που ζητάμε θα προκύψει με απαλοιφή των α,β και γ από τις (6) και (8) . 'Ετσι θέτοντας τους λόγους στην (6) ίσους με t παίρνουμε :

$$x-x_0=t\alpha\ ,\quad y-y_0=t\beta \text{ και } z-z_0=t\gamma$$.

'Ετσι θα έχουμε :

$$F(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=F(t\alpha,t\beta,t\gamma)\ \underset{}{\overset{F\ \text{ομογενής}}{=\!=\!=\!=}}\ t^kF(\alpha,\beta,\gamma)\ \overset{(8)}{=\!=}\ 0\ .$$

'Αρα η εξίσωση της επιφάνειας που ζητάμε είναι της μορφής :

$$(9)\qquad F(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=0\ ,$$

όπου η $F(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$ είναι ομογενής ως προς τις διαφορές $x-x_0$, $y-y_0$ και $z-z_0$ με $K(x_0,y_0,z_0)$ τη κορυφή της κωνικής επιφάνειας .

Παράδειγμα 5.2.1. Να βρούμε την εξίσωση κωνικής επιφάνειας με κορυφή το $K(0,0,1)$ και οδηγό τη καμπύλη $(c):\{x^2+y^2=1\ ,\ z=0\}$.

Η γενέτειρα έχει εξίσωση :

$$(*)\qquad \frac{x-0}{\alpha}=\frac{y-0}{\beta}=\frac{z-1}{\gamma}\quad .$$

Η απαλοιφή των x,y,z από τις (*) και τις εξισώσεις της (c) μας δίνει τη σχέση μεταξύ των παραμέτρων α,β και γ . Από τις (*) έχουμε : $x=\alpha t$, $y=\beta t$, $z=1+\gamma t$. Θέτουμε στις εξισώσεις της (c) και παίρνουμε : $t^2(\alpha^2+\beta^2)=1$ και $1+\gamma t=0$. Συνεπώς $t=-\frac{1}{\gamma}$ και άρα : $\frac{1}{\gamma^2}(\alpha^2+\beta^2)=1$ ή

$$(**)\qquad \alpha^2+\beta^2-\gamma^2=0\ .$$

Η (**) είναι η (8) και $F(\alpha,\beta,\gamma)=\alpha^2+\beta^2-\gamma^2$, που είναι ομογενής ως προς α,β,γ βαθμού 2 . Η εξίσωση της επιφάνειας θα προκύψει από τις (*) και (**) με απαλοιφή των α,β,γ . Από τη (*) έχουμε : $x=\alpha t$, $y=\beta t$ και $z-1=\gamma t$.

'Ετσι παίρνουμε :

$$x^2+y^2-(z-1)^2=\alpha^2t^2+\beta^2t^2-\gamma^2t^2=t^2(\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)\ \overset{**}{=\!=}\ 0\ .$$

'Αρα η εξίσωση της επιφάνειας είναι η :

$$x^2+y^2-(z-1)^2=0 \quad ,$$

που είναι ομογενής ως προς : $x=x-0$, $y=y-0$ και $z-1$.

<u>Εύλογο είναι το ερώτημα</u> : Αν έχουμε μια εξίσωση $F(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=0$, όπου η $F(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$ είναι ομογενής ως προς $x-x_0$, $y-y_0$ και $z-z_0$, παριστάνει αυτή κωνική επιφάνεια με κορυφή το σημείο $K(x_0,y_0,z_0)$;
Η απάντηση είναι ναι και θα δούμε αμέσως γιατί .

Πραγματικά , ας είναι $P_1(x_1,y_1,z_1)\neq K(x_0,y_0,z_0)$ ένα σημείο της επιφάνειας με εξίσωση :

$$F(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=0 \quad ,$$

δηλαδή :

$$F(x_1-x_0,y_1-y_0,z_1-z_0)=0 \quad , \tag{10}$$

όπου $P_1\neq K$. Θα δείξουμε πως κάθε σημείο της ευθείας P_1K είναι σημείο της επιφάνειας , οπότε η επιφάνεια θα είναι κωνική . Ας είναι $P_2(x_2,y_2,z_2)$ ένα τυχαίο σημείο της ευθείας P_1K . Τότε :

$$x_2=x_0+t(x_1-x_0) \quad , \quad y_2=y_0+t(y_1-y_0) \quad , \quad z_2=z_0+t(z_1-z_0) \quad .$$

Συνεπώς :

$$F(x_2-x_0,y_2-y_0,z_2-z_0)=F(t(x_1-x_0),t(y_1-y_0),t(z_1-z_0))$$

$$\underset{F\ \text{ομογενής}}{=\!=\!=\!=} t^kF(x_1-x_0,y_1-y_0,z_1-z_0) \overset{(10)}{=\!=} 0 \quad .$$

'Αρα

$$F(x_2-x_0,y_2-y_0,z_2-z_0)=0 \quad ,$$

που σημαίνει ότι το τυχαίο σημείο P_2 της ευθείας P_1K είναι σημείο της επιφάνειας , αυτό που θέλαμε να αποδείξουμε .

Τώρα αν θέλουμε να βρούμε μια οδηγό καμπύλη αρκεί να κόψουμε την επιφάνεια με ένα επίπεδο $Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$ που δεν περνά από τη κορυφή K . Έτσι μια οδηγός καμπύλη είναι η :

$$(c) : (Ax+By+\Gamma z+\Delta=0 \ , \ F(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=0) \ .$$

με $Ax_0+By_0+\Gamma z_0+\Delta \neq 0$.

Παράδειγμα 5.2.2. Η εξίσωση , $3x^2+5y^2-(z-1)^2=0$ παριστάνει κωνική επιφάνεια με κορυφή το σημείο $K(0,0,1)$. Πραγματικά , αφού η $3x^2+5y^2-(z-1)^2$ είναι ομογενής ως προς , $x-0$, $y-0$, $z-1$. Μια οδηγός καμπύλη βρίσκεται αν κόψουμε την επιφάνεια με ένα επίπεδο που δεν περνά από το K , ας πούμε το $z=0$. Έτσι μια οδηγός καμπύλη είναι η $(c) : (z=0 \ , \ 3x^2+5y^2-1=0)$ που είναι μια έλλειψη στο επίπεδο Oxy .

Πρόβλημα 5.2.2. Να βρούμε την εξίσωση κωνικής επιφάνειας με κορυφή το σημείο $K(x_0,y_0,z_0)$ και της οποίας οι γενέτειρες εφάπτονται της επιφάνειας με εξίσωση :

$$(11) \qquad f(x,y,z)=0 \ .$$

Η εξίσωση της γενέτειρας όπως στο πρώτο πρόβλημα είναι :

$$(12) \qquad \frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}=\frac{z-z_0}{\gamma} \ .$$

Οι νόμοι κίνησης θα βρεθούν από το γεγονός ότι : Οι γενέτειρες εφάπτονται της (11) . Τα κοινά σημεία γενέτειρας και επιφάνειας (11) δίνονται από τις τιμές του t που είναι λύσεις της

(13) $f(x_0+\alpha t, y_0+\beta t, z_0+\gamma t)=0$.

Για να είναι εφαπτόμενη η γενέτειρα στην (11) πρέπει η (13) να έχει τουλάχιστο διπλή ρίζα ως προς t . Η (13) είναι μια εξίσωση του t . Για να έχει διπλή λύση πρέπει και αρκεί να ισχύει μια σχέση της μορφής :

(14) $F(\alpha,\beta,\gamma)=0$.

Η (14) έχει την ιδιότητα ότι : (*) $F(\lambda\alpha,\lambda\beta,\lambda\gamma)=0$. Πραγματικά , αν στη θέση των α,β,γ της (12) είχαμε αντίστοιχα τα $\lambda\alpha,\lambda\beta,\lambda\gamma$ τότε η (14) θα ήταν : $F(\lambda\alpha,\lambda\beta,\lambda\gamma)=0$. Τώρα η εξίσωση της ζητούμενης επιφάνειας θα προκύψει από την απαλοιφή των α,β,γ στις (12) και (14) . Έτσι έχουμε :

$$F(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=F(t\alpha,t\beta,t\gamma)\overset{(*)}{=\!=}0 ,$$

δηλαδή

$$F(x-x_0,y-y_0,z-z_0)=0 .$$

Παράδειγμα 5.2.3. Να βρούμε την εξίσωση της κωνικής επιφάνειας με κορυφή το σημείο $K(6,9,12)$ και της οποίας οι γενέτειρες εφάπτονται της επιφάνειας : $x^2+2y^2+3z^2=5$.

Η γενέτειρα έχει παραμετρικές εξισώσεις : $x=6+\alpha t$, $y=9+\beta t$, $z=12+\gamma t$. Τα κοινά σημεία της γενέτειρας και της δοσμένης επιφάνειας βρίσκονται από τις τιμές του t που είναι λύσεις της :

$$(6+\alpha t)^2+2(9+\beta t)^2+3(12+\gamma t)^2=5$$

ή της

$$(*) \qquad (\alpha^2+2\beta^2+3\gamma^2)t^2+2(6\alpha+18\beta+36\gamma)t+625=0 \quad .$$

Για να έχει διπλή λύση η (*) πρέπει και αρκεί η διακρίνουσα της (είναι 2ου βαθμού ως προς t) να είναι μηδέν. Δηλαδή :

$$(**) \qquad (6\alpha+18\beta+36\gamma)^2-625(\alpha^2+2\beta^2+\gamma^2)=0 \quad .$$

Η (**) είναι για τη γενική περίπτωση η (14) . Η εξίσωση της επιφάνειας που ζητάμε θα προκύψει με απαλοιφή των α,β,γ από τις (**) και τις εξισώσεις της γενέτειρας . Είναι δε η :

$$\left[6\,\frac{(x-6)}{t}+18\,\frac{(y-9)}{t}+36\,\frac{(z-12)}{t}\right]^2-625\left[\frac{(x-6)^2}{t^2}+2\,\frac{(y-9)^2}{t^2}+3\,\frac{(z-12)^2}{t^2}\right]=0$$

ή

$$[6(x-6)+18(y-9)+36(z-12)]^2-625\,[(x-6)^2+2(y-9)^2+3(z-12)^2]=0 \quad ,$$

(αν θέλουμε κάνουμε και τις πράξεις) που είναι ομογενής ως προς $x-6$, $y-9$, $z-12$.

<u>Βασικές Παρατηρήσεις</u> . (i) Αν η κορυφή μιας κωνικής επιφάνειας είναι η αρχή $O(0,0,0)$ τότε η εξίσωση της κωνικής επιφάνειας είναι της μορφής $F(x,y,z)=0$ και είναι ομογενής ως προς x,y,z . Επίσης κάθε ομογενής εξίσωση της μορφής $F(x,y,z)=0$ παριστάνει κωνική επιφάνεια με κορυφή την αρχή των συντεταγμένων .

(ii) Για το πρόβλημα 5.2.2 , η μεγάλη δυσκολία είναι στην εύρεση της εξίσωσης (14). Αυτό είναι πολύ εύκολο μόνο αν η εξίσωση (13) είναι δευτεροβάθμια ως προς t , δηλαδή η (11) είναι δευτέρου βαθμού ως προς τις μεταβλητές x,y και z . Γι'αυτό στις εφαρμογές μας ασχολούμαστε συνήθως με προβλήματα που η (11) είναι δευτέρου βαθμού , όπως στο παράδειγμα 5.2.3.

(iii) Για μια κωνική επιφάνεια , ενώ η κορυφή είναι μοναδικό σημείο η οδηγός δεν είναι μοναδική καμπύλη . Στο επόμενο παράδειγμα εξηγούμε περισσότερα .

<u>Παράδειγμα 5.2.4</u>. Θέλουμε να βρούμε τη κωνική επιφάνεια με κορυφή το σημείο $O(0,0,0)$ και οδηγό τη καμπύλη $(c):(z=1\ ,\ x^2+y^2=1)$.

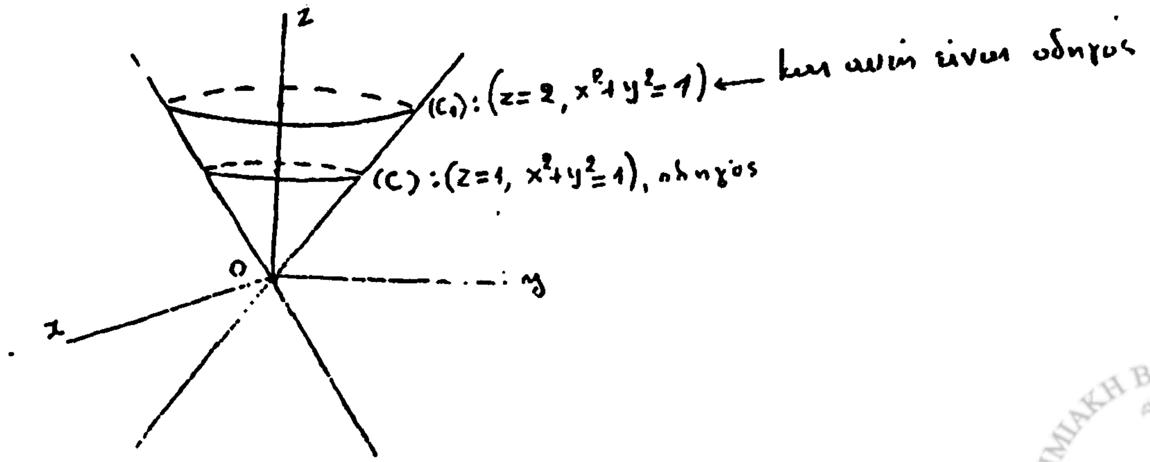
Η εξίσωση της γενέτειρας είναι η :

$$(*)\qquad \frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma}\ .$$

Με απαλοιφή των x,y,z από τις εξισώσεις της (c) και τις (*) βρίσκουμε τον νόμο κίνησης , που είναι η :

$$(**)\qquad \alpha^2+\beta^2-\gamma^2=0\ .$$

Τώρα με απαλοιφή των α,β,γ από (*),(**) βρίσκουμε την εξίσωση της κωνικής επιφάνειας που είναι η : $x^2+y^2-z^2=0$.



Είναι φανερό πως με την ίδια κορυφή και με οδηγό την $(c_1):(z=2\ ,\ x^2+y^2=4)$ κατασκευάζουμε την ίδια κωνική επιφάνεια .

Ασκήσεις για τις κωνικές επιφάνειες .

1. Να βρεθεί η εξίσωση της κωνικής επιφάνειας με κορυφή το σημείο (0,0,0) και οδηγό τη καμπύλη $(c):\{x^2+y^2=x\ ,\ z=1\}$.

2. Να δείτε ότι η επιφάνεια με εξίσωση ; $z^2+4xy=0$ είναι κωνική . Να βρείτε τη κορυφή της και μια οδηγό καμπύλη . Να εξετάσετε το ίδιο πρόβλημα για την επιφάνεια με εξίσωση : $xy+z^2-2x-y+2=0$.

3. Δίνεται η ευθεία

$$\varepsilon_\lambda : \left(\begin{array}{l} 3\lambda x+y-2\lambda z=0 \\ \\ x-2y+\lambda z=0 \end{array} \right) .$$

Να δείξουμε ότι η (ε_λ) με την κίνηση της παράγει κωνική επιφάνεια της οποίας να βρούμε τη κορυφή .

4. Να δείξετε ότι μια εξίσωση της μορφής :

$$F\left(\frac{A_1x+B_1y+\Gamma_1z+\Delta_1}{A_3x+B_3y+\Gamma_3z+\Delta_3}\ ,\ \frac{A_2x+B_2y+\Gamma_2z+\Delta_2}{A_3x+B_3y+\Gamma_3z+\Delta_3} \right) =0$$

χαρακτηρίζει τις κωνικές επιφάνειες με κορυφή το σημείο τομής των επιπέδων

$$A_1x+B_1y+\Gamma_1z+\Delta_1=0$$
$$A_2x+B_2y+\Gamma_2z+\Delta_2=0$$
$$A_3x+B_3y+\Gamma_3z+\Delta_3=0 .$$

5. Να δείξετε ότι η εξίσωση :

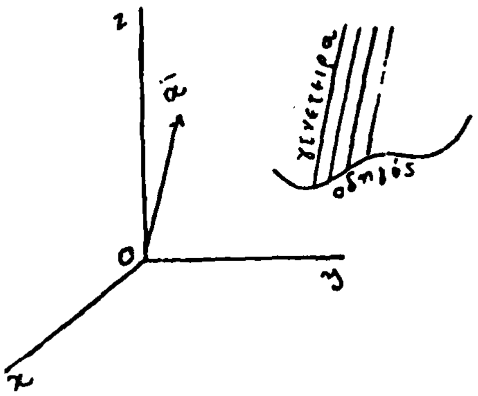
$$4\left(\frac{x-3}{y}\right)^2+9\left(\frac{y+z-1}{y}\right)^2=36$$

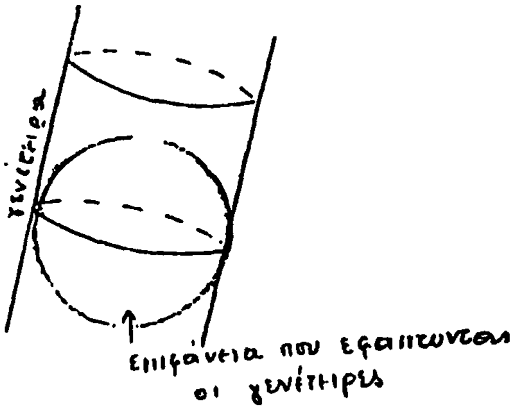
παριστάνει κωνική επιφάνεια της οποίας να βρείτε τη κορυφή και μια οδηγό .

5.3. Κυλινδρικές επιφάνειες .

Ορισμός 5.3.1. Μια επιφάνεια λέγεται κυλινδρική όταν παράγεται από μια ευθεία η οποία κινείται έτσι ώστε να είναι συνέχεια παράλληλη προς ένα σταθερό διάνυσμα $\bar{a}=(\alpha,\beta,\gamma)$ και να συναντά μια σταθερή καμπύλη ή να εφάπτεται μιας σταθερής επιφάνειας .

Η ευθεία που κινείται και παράγει την επιφάνεια λέγεται γενέτειρα της κυλινδρικής επιφάνειας , ενώ η σταθερή καμπύλη που συναντά η γενέτειρα λέγεται οδηγός της κυλινδρικής επιφάνειας .





Θα κοιτάξουμε να βρούμε την εξίσωση της κυλινδρικής επιφάνειας όταν ξέρουμε το διάνυσμα $\bar{a}$ και την οδηγό ή την επιφάνεια στην οποία εφάπτονται οι γενέτειρες . Θα διακρίνουμε και εδώ δύο προβλήματα .

<u>Πρόβλημα 5.3.1.</u> Να βρούμε την εξίσωση κυλινδρικής επιφάνειας με γενέτειρες παράλληλες προς το διάνυσμα $\bar{a}=(\alpha,\beta,\gamma)$ και οδηγό τη καμπύλη :

(15) $(c):(f(x,y,z)=0\ ,\ g(x,y,z)=0)$.

Ας είναι (x_1,y_1,z_1) ένα τυχαίο σημείο της οδηγού . Τότε η εξίσωση της γενέτειρας από αυτό το σημείο είναι η :

(16) $\dfrac{x-x_1}{\alpha}=\dfrac{y-y_1}{\beta}=\dfrac{z-z_1}{\gamma}$.

Η (16) είναι η εξίσωση της κινούμενης καμπύλης και x_1,y_1,z_1 είναι οι παράμετροι . Επειδή το σημείο (x_1,y_1,z_1) ανήκει στην οδηγό θα ισχύουν :

(17) $f(x_1,y_1,z_1)=0$ και $g(x_1,y_1,z_1)=0$.

Οι (17) είναι οι νόμοι κίνησης . Η εξίσωση της επιφάνειας που ζητάμε θα προκύψει από τις (16) και (17) με απαλοιφή των παραμέτρων x_1,y_1,z_1 . Έτσι από τις (16) εξισώνοντας με $-t$ παίρνουμε $x_1=x+\alpha t$, $y_1=y+\beta t$ και $z_1=z+\gamma t$. Θέτοντας στις (17) έχουμε :

(18) $f(x+\alpha t\ ,\ y+\beta t\ ,\ z+\gamma t)=0$ και $g(x+\alpha t\ ,\ y+\beta t\ ,\ z+\gamma t)=0$,

από τις οποίες με απαλοιφή του t παίρνουμε μια εξίσωση της μορφής $F(x,y,z)=0$, που είναι η εξίσωση της επιφάνειας που ζητάμε .

<u>Παράδειγμα 5.3.1.</u> Να βρούμε την εξίσωση της κυλινδρικής επιφάνειας , της οποίας οι γενέτειρες είναι παράλληλες προς το διάνυσμα $\bar{a}=(1,2,-1)$ και έχει οδηγό την καμπύλη :

$(c):(3x^2+5y^2=1\ ,\ z=0)$.

Η εξίσωση της γενέτειρας είναι :

(*) $$\frac{x-x_1}{1}=\frac{y-y_1}{2}=\frac{z-z_1}{-1} \ ,$$

όπου (x_1,y_1,z_1) είναι τυχαίο σημείο της οδηγού και συνεπώς

(**) $$3x_1^2+5y_1^2=1 \ , \ z_1=0 \ .$$

Η απαλοιφή των x_1,y_1,z_1 από τις (*) και (**) θα μας δώσει σε πρώτο βήμα :

$$3(x+t)^2+5(y+2t)^2=1 \ , \ z-t=0 \ ,$$

από όπου με απαλοιφή του t παίρνουμε την εξίσωση της επιφάνειας και η οποία είναι :

$$3(x+z)^2+5(y+2z)^2=1 \ .$$

<u>Ενδιαφέρουσα περίπτωση</u> : Θα εξετάσουμε τη περίπτωση , που οι γενέτειρες είναι παράλληλες προς το διάνυσμα $\bar{a}=(0,0,1)$, δηλαδή οι γενέτειρες είναι παράλληλες προς τον άξονα Oz . Τότε οι εξισώσεις (18) του προβλήματος 5.3.1. γίνονται :

$$f(x,y,z+t)=0 \ , \ g(x,y,z+t)=0 \ .$$

Η απαλοιφή του t μεταξύ αυτών θα απαλείψει ταυτόχρονα και το z , έτσι η εξίσωση της κυλινδρικής επιφάνειας θα είναι της μορφής :

(19) $$F(x,y)=0 \ ,$$

δηλαδή θα λείπει η μεταβλητή z (δηλαδή ο άξονας προς τον οποίο είναι παράλληλες οι γενέτειρες).

Ισχύει όμως και το <u>αντίστροφο</u> , δηλαδή μια επιφάνεια με εξίσωση της μορφής (19) είναι κυλινδρική με γενέτειρες παράλληλες προς τον άξονα οz . Πραγματικά , αν κατασκευάσουμε τη κυλινδρική επιφάνεια με οδηγό την (c):$\{F(x,y)=0 \ , z=0\}$ και γενέτειρες παράλληλες προς το $\bar{a}=(0,0,1)$ βλέπουμε ότι η εξίσωση της είναι η : $F(x,y)=0$.

'Ομοια συμπεράσματα έχουμε για κυλινδρικές επιφάνειες που η γενέτειρα είναι παράλληλη προς τον άξονα Oy ή Ox . 'Ετσι έχουμε το παρακάτω συμπέρασμα: <u>Κάθε εξίωση στην οποία δεν εμφανίζεται ο ένας από τους αγνώστους π.χ. ο x (ή y ή z) παριστάνει κυλινδρική επιφάνεια με γενέτειρες παράλληλες προς τον άξονα Ox (ή Oy ή Oz αντίστοιχα)</u>.

<u>Παράδειγμα 5.3.2</u>. Η εξίσωση $x^2+y^2=R^2$ παριστάνει κυλινδρική επιφάνεια με γενέτειρες παράλληλες προς τον άξονα οz . Η τομή αυτής της επιφάνειας με το επίπεδο Oxy επίπεδο είναι μια περιφέρεια κύκλου αχτίνας R και κέντρου το σημείο (0,0,0) . Η επιφάνεια αυτή είναι γνωστή σαν <u>ορθός κυκλικός κύλινδρος αχτίνας R</u> .

Η ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι ειδική περίπτωση μιας γενικώτερης κατάστασης που αντιμετωπίζουμε στις κυλινδρικές επιφάνειες και θα εξετάσουμε αμέσως τώρα .

<u>Πρόβλημα 5.3.2</u>. Θέλουμε να βρούμε την εξίσωση κυλινδρικής επιφάνειας με οδηγό την καμπύλη

(20) $\qquad (c): \ (f(x,y,z)=0 \ , \ g(x,y,z)=0)$

και της οποίας οι γενέτειρες είναι παράλληλες προς την ευθεία

(21) $(\varepsilon):(A_1x+B_1y+\Gamma_1z+\Delta_1=0\ ,\ A_2x+By_2+\Gamma_2z+\Delta_2=0)$.

Η γενέτειρα (κινούμενη καμπύλη) είναι η :

(22) $\varepsilon(\lambda,\mu)\ :(A_1x+B_1y+\Gamma_1z+\Delta_1=\lambda\ ,\ A_2x+B_2y+\Gamma_2z+\Delta_2=\mu)$,

αφού για τις διάφορες τιμές των λ,μ η (22) δίνει ευθεία παράλληλη προς την (ε) .

Ο νόμος κίνησης (σχέση μεταξύ των λ,μ) θα βρεθεί από το γεγονός ότι η (22) συνατά την (c) . Έτσι απαλοιφή των x,y,z από τις (20),(22) δίνει το νόμο κίνησης :

(23) $F(\lambda,\mu)=0$.

Τώρα, απαλοιφή των λ,μ από τις (22),(23) δίνει την εξίσωση της κυλινδρικής επιφάνειας , που είναι η :

(24) $F(A_1x+B_1y+\Gamma_1z+\Delta_1\ ,\ A_2x+B_2y+\Gamma_2z+\Delta_2)=0$.

Στη συνέχεια θα δείξουμε , πως κάθε επιφάνεια με εξίσωση της μορφής (24) είναι κυλινδρική επιφάνεια με γενέτειρες παράλληλες προς την ευθεία (21) . Πραγματικά , τέμνοντας την (24) με το επίπεδο $z=0$ παίρνουμε τη καμπύλη :

(25) $(c_1):(z=0\ ,\ F(A_1x+B_1y+\Gamma_1z+\Delta_1\ ,\ A_2x+B_2y+\Gamma_2z+\Delta_2)=0)$.

Τώρα με οδηγό την (25) και γενέτειρες παράλληλες προς την (21) κατασκευάζουμε μια κυλινδρική επιφάνεια της οποίας η εξίσωση (ακολουθώντας την διαδικασία του πρώτου μέρους) είναι η

$$F(A_1x+B_1y+\Gamma_1z+\Delta_1\ ,\ A_2x+B_2y+\Gamma_2z+\Delta_2)=0\ ,$$

δηλαδή η (24) .

<u>Παρατηρήσεις</u>. (i) Η $f(x,y)=0$, θα παριστάνει λοιπόν κυλινδρική επιφάνεια με γενέτειρες παράλληλες προς την ευθεία (ε): $(x=0\ ,\ y=0)$, δηλαδή προς τον άξονα oz . Αυτό το περιμέναμε σύμφωνα με την ενδιαφέρουσα περίπτωση .

(ii) Και στις κυλινδρικές επιφάνειες (όπως στις κωνικές) η οδηγός δεν είναι μοναδική . Κάθε τομή της επιφάνειας με επίπεδο κάθετο στις γενέτειρες , δίνει οδηγό για αυτή την κυλινδρική επιφάνεια . Επίσης κάθε τομή με επίπεδο που δεν είναι παράλληλο της γενέτειρας δίνει οδηγό της επιφάνειας . Έτσι προηγουμένως , τέμνοντας την (24) με το $z=0$, υποθέσαμε σιωπηρά πως η (21) δεν είναι παράλληλη προς το επίπεδο $z=0$.

<u>Παράδειγμα 5.3.3.</u> Θεωρούμε την εξίσωση :

$$y^2+(z-x)^2-4(z-x)=0 \quad .$$

Η εξίσωση αυτή παριστάνει μια επιφάνεια . Επειδή είναι της μορφής , $F(y,z-x)=0$, θα είναι μια κυλινδρική επιφάνεια με γενέτειρες παράλληλες προς την ευθεία (ε): $(y=0\ ,\ z-x=0)$, δηλαδή παράλληλες προς το διάνυσμα $\bar{\alpha}=(1,0,1)$. Τέλος μια οδηγός αυτής θα προκύψει αν κόψουμε την επιφάνεια $y^2+(z-x)^2-4(z-x)=0$ με ένα επίπεδο , που δεν είναι παράλληλο προς το $\bar{\alpha}=(1,0,1)$. Ένα τέτοιο επίπεδο είναι το $z=0$, για παράδειγμα . Άρα η καμπύλη :

$$(z=0\ ,\ y^2+x^2+4x=0)$$

είναι μια οδηγός καμπύλη της κυλινδρικής επιφάνειας $y^2+(z-x)^2-4(z-x)=0$.

Πρόβλημα 5.3.3. Να βρούμε την εξίσωση κυλινδρικής επιφάνειας με γενέτειρα παράλληλη προς το διάνυσμα $\bar{a}=(\alpha,\beta,\gamma)$ και της οποίας οι γενέτειρες εφάπτονται της επιφάνειας με εξίσωση :

(26) $\quad f(x,y,z)=0$.

Ας είναι (x_0,y_0,z_0) ένα τυχαίο σημείο της επιφάνειας που ζητάμε . Η γενέτειρα (ε) , που περνά από αυτό το σημείο έχει παραμετρικές εξισώσεις :

(27) $\quad (\varepsilon)$: $\{x=x_0+\alpha t \ , \ y=y_0+\beta t \ , \ z=z_0+\gamma t\}$.

Τα σημεία τομής της (26) και της (27) βρίσκονται λύνοντας ως προς t την εξίσωση :

(28) $\quad f(x_0+\alpha t \ , \ y_0+\beta t \ , \ z_0+\gamma t)=0$.

Για να είναι η (27) εφαπτόμενη της (26) πρέπει η (28) να έχει διπλή λύση . Αυτό συμβαίνει , αν και μόνο αν , ισχύει μια σχέση της μορφής :

$$F(x_0,y_0,z_0)=0 \ .$$

'Ετσι το τυχαίο σημείο της ζητούμενης επιφάνειας ικανοποιεί την εξίσωση $F(x,y,z)=0$ και συνεπώς αυτή είναι η εξίσωση της επιφάνειας που ζητάμε .

Παράδειγμα 5.3.4. Να βρούμε την εξίσωση της κυλινδρικής επιφάνειας με γενέτειρες παράλληλες προς το διάνυσμα $\bar{a}=(1,2,3)$ και εφαπτόμενες στην επιφάνεια : $x^2+y^2+z^2=1$. Ας είναι (x_0,y_0,z_0) τυχαίο σημείο της ζητούμενης επιφάνειας . Τότε η (28) γίνεται

$$(x_0+t)^2+(y_0+2t)^2+(z_0+3t)^2-1=0 \ .$$

ή

$$14t^2+2(x_0+2y_0+3z_0)t+x_0^2+y_0^2+z_0^2-1=0 \quad ,$$

η οποία για να έχει διπλή λύση πρέπει να ισχύει :

$$(x_0+2y_0+3z_0)^2-14(x_0^2+y_0^2+z_0^2-1)=0 \quad .$$

'Ετσι η εξίσωση της ζητούμενης επιφάνειας είναι η

$$(x+2y+3z)^2-14(x^2+y^2+z^2-1)=0 \quad .$$

<u>Παρατήρηση</u> . Ισχύουν και εδώ ότι είπαμε στη παρατήρηση (ii) της σελίδας 185 .

<u>Ασκήσεις για κυλινδρικές επιφάνειες</u> .

1. Η σφαίρα με εξίσωση την $x^2+y^2+z^2=4z$ φωτίζεται με μια δέσμη φωτεινών αχτίνων παράλληλων προς την ευθεία (ε): $(x=0 , y=z)$. Να βρείτε την εξίσωση του περιγράμματος της σκιάς στο επίπεδο Oxy .

2. Να βρείτε την εξίσωση κυλινδρικής επιφάνειας με γενέτειρες παράλληλες προς το διάνυσμα $\bar{\alpha}=(1,-1,2)$ και οδηγό την καμπύλη :

$$\{xy=1 \ , \ z=0\} \quad .$$

3. Να διαπιστώσετε ότι η εξίσωση $17x^2+2y^2+z^2-8xy-6xz-2=0$ παριστάνει κυλινδρική επιφάνεια . Να βρείτε μια οδηγό της και τη διεύθυνση προς την οποία οι γενέτειρες είναι παράλληλες (Γράψτε την εξίσωση ως : $2(2x-y)^2+(3x-z)^2-2=0$).

4. Να βρείτε την ορθή προβολή της καμπύλης

$$(c):(x^2+y^2+z^2=4 \ , \ x+3y+z-2=0)$$

πάνω στο επίπεδο : $x-y+z=0$.

5. Να βρείτε την ακτίνα της περιφέρειας

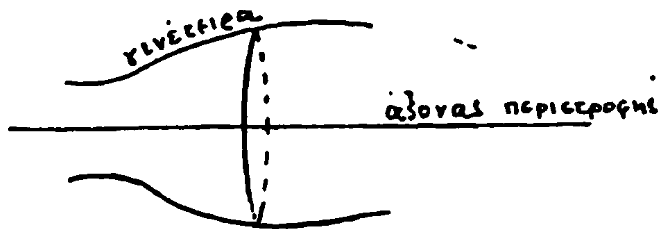
$$(c):(2x-y-2z+13=0 \ , \ x^2+y^2+z^2-2x-4y-4z-1=0)$$

καθώς και την εξίσωση του ορθού κυκλικού κυλίνδρου , που έχει σαν κάθετη τομή την περιφέρεια (c) .

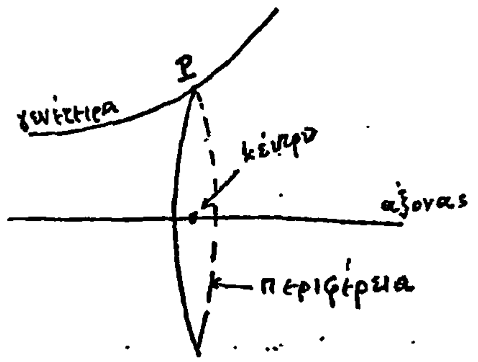
5.4. Επιφάνειες εκ περιστροφής .

Ορισμός 5.4.1. Μια επιφάνεια λέγεται επιφάνεια εκ περιστροφής όταν παράγεται με περιστροφή μιας καμπύλης γύρω από μια ευθεία .

Η καμπύλη που περιστρέφεται λέγεται γενέτειρα της επιφάνειας ενώ η ευθεία γύρω από την οποία γίνεται η περιστροφή λέγεται άξονας περιστροφής .



Σπουδαία παρατήρηση . Είναι φανερό , πως κάθε σημείο της γενέτειρας κατα τη περιστροφή γράφει μια περιφέρεια κύκλου με κέντρο πάνω στον άξονα περιστροφής και της οποίας το επίπεδο είναι κάθετο στον άξονα περιστροφής .
Έτσι μπορούμε να πούμε ότι μια επιφάνεια εκ περιστροφής γίνεται από μια περιφέρεια



κύκλου,η οποία έχει κέντρο στον άξονα περιστροφής,το επίπεδο της είναι κάθετο στον άξονα περιστροφής , και η οποία κινείται έτσι ώστε (δηλαδή μικραίνει ή μεγαλώνει η αχτίνα της) να συναντά μια καμπύλη .

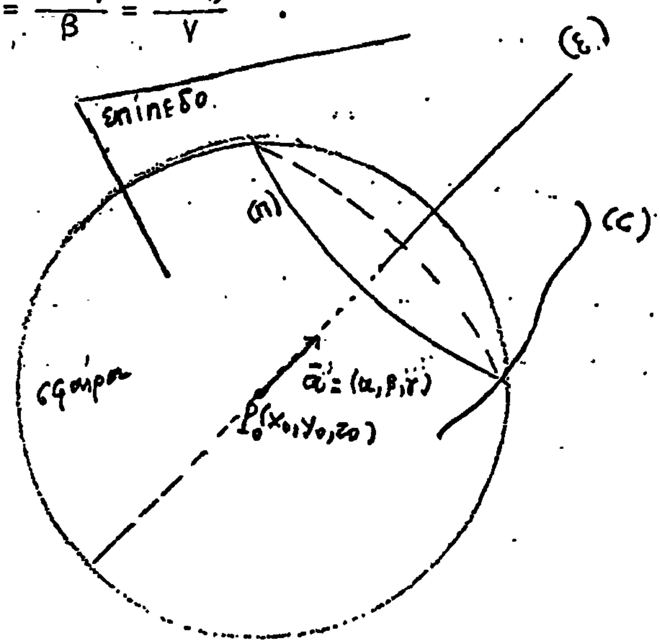
Η παρατήρηση αυτή μας βοηθάει για να βρούμε την εξίσωση μιας επιφάνειας εκ περιστροφής .

<u>Πρόβλημα 5.4.1.</u> Να βρούμε την εξίσωση της εκ περιστροφής επιφάνειας , η οποία παράγεται με περιστροφή της καμπύλης:

(29) $\quad (c) : \{f(x,y,z)=0 \ , \ g(z,y,z)=0\}$

γύρω από την ευθεία :

(30) $\quad (\varepsilon) : \dfrac{x-x_0}{\alpha} = \dfrac{y-y_0}{\beta} = \dfrac{z-z_0}{\gamma}$.



θα βρούμε πρώτα τις εξισώσεις της κινούμενης καμπύλης (κινούμενης περιφέρειας εδώ) με βάση όσα είπαμε στη παρατήρηση . 'Ενα επίπεδο κάθετο στην (ε) (τον άξονα) έχει εξίσωση : $\alpha x+\beta y+\gamma z=\lambda$, όπου λ κάποια παράμετρος . Επίσης μια σφαίρα με κέντρο το (x_0,y_0,z_0) και αχτίνα ρ έχει εξίσωση : $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=\rho^2$, όπου το ρ είναι κάποια παράμετρος . Τώρα μια περιφέρεια π με κέντρο πάνω στην (ε) και επίπεδο κάθετο στην (ε) δίνεται με τις παρακάτω εξισώσεις :

(31) $\quad (\pi): \{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=\rho^2 \quad , \quad \alpha x+\beta y+\gamma z=\lambda\}$.

Η (31) είναι η κινούμενη περιφέρεια με παραμέτρους τα ρ^2,λ . Οι νόμοι κίνησης (σχέσεις μεταξύ των παραμέτρων) βρίσκονται από το γεγονός ότι η (31) συναντά την (c) με εξισώσεις τις (29) . 'Ετσι με απαλοιφή των x,y,z από τις (29) και (30) βρίσκουμε μια σχέση μεταξύ των παραμέτρων της μορφής :

(32) $\quad \Phi(\rho^2,\lambda)=0$.

Τώρα η εξίσωση της επιφάνειας που ζητάμε θα προκύψει από τις (31) και (32) με απαλοιφή των παραμέτρων ρ^2,λ και είναι μια εξίσωση της μορφής :

(33) $\quad \Phi((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 \quad , \quad \alpha x+\beta v+\gamma z)=0$.

<u>Παράδειγμα 5.4.1.</u> Να βρούμε την εξίσωση επιφάνειας εκ περιστροφής που παράγεται με περιστροφή της καμπύλης

(*) $\quad (c) : \{y=x^3 \; , \; z=0\}$

γύρω από την ευθεία

(**) $\quad (\varepsilon) : (y=0 \ , \ z=2)$.

Οι εξισώσεις του άξονα περιστροφής γράφονται και ως :

$$\frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{0} = \frac{z-2}{0} \ .$$

Έτσι η κινούμενη περιφέρεια έχει εξισώσεις (εξισώσεις (31) της γενικής θεωρίας)

(***) $\quad (\pi) : \{x^2+y^2+(z-2)^2=\rho^2 \ , \ x=\lambda\}$.

Με απαλοιφή των x,y,z από τις (*) και (***) βρίσκουμε τη σχέση μεταξύ των παραμέτρων (σχέση (32) της γενικής θεωρίας) :

$$\lambda^2+\lambda^6+4=\rho^2$$

ή

(****) $\quad \lambda^2+\lambda^6+4-\rho^2=0$.

Με απαλοιφή των παραμέτρων από τις (***) και (****) βρίσκουμε την εξίσωση της επιφάνειας που ζητάμε :

$$x^2+x^6+4-\left[x^2+y^2+(z-2)^2\right]=0$$

ή

$$x^6-y^2-(z-2)^2+4=0 \ .$$

<u>Ενδιαφέρουσα περίπτωση</u> .Θα κοιτάξουμε να βρούμε την εξίσωση επιφάνειας εκ περιστροφής που παράγεται με περιστροφή της καμπύλης : $\{f(x,y)=0 \ , \ z=0\}$ γύρω από την ευθεία $\varepsilon:\{y=z=0\}$. Δηλαδή έχουμε μια καμπύλη που βρίσκεται σε ένα επίπεδο συντεταγμένων (το Oxy στη προκειμένη περίπτωση) και περιστρέ-

φεται γύρω από ένα άξονα συντεταγμένων του επιπέδου της (τον άξονα Ox στη προκειμένη περίπτωση). Σ'αυτή τη περίπτωση οι εξισώσεις (31) γίνονται :

$$\{x^2+y^2+z^2=\rho^2 \ , \ x=\lambda\} \ .$$

Η εξίσωση (32) γίνεται :

$$f(\lambda,\pm\sqrt{\rho^2-\lambda^2})=0 \ .$$

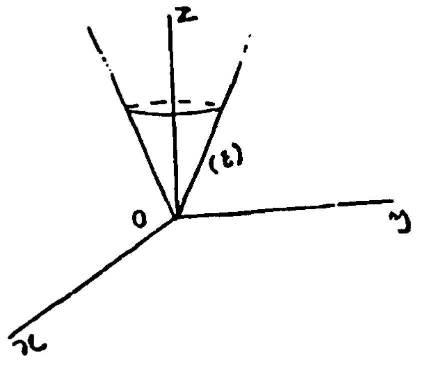
Και η εξίσωση (33) της εν λόγω επιφάνειας γίνεται :

$$f(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0 \ .$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι για να βρούμε την εξίσωση της επιφάνειας δουλεύουμε ως εξής : <u>Παίρνουμε την εξίσωση της καμπύλης (όχι εκείνη που μας δίνει το επίπεδο συντεταγμένων) και αντικαθιστάμε σ'αυτή , τη μεταβλητή που δεν μετρά στον άξονα περιστροφής με ± τη τετραγωνική ρίζα του αθροίσματος των τετραγώνων των μεταβλητών που δεν μετράνε στον άξονα περιστροφής</u> .

Έτσι η εξίσωση της επιφάνειας που παράγεται με περιστροφή της (y=1 , x=0) γύρω από τον άξονα Oz είναι σύμφωνα με αυτό τον κανόνα η : $\pm\sqrt{y^2+x^2}=1$ ή $x^2+y^2=1$, δηλαδή ένας ορθός κυκλικός κύλινδρος .

<u>Παράδειγμα 5.4.2.</u> Δίνεται η ευθεία (ε) : {y=αz , x=0} . Την περιστρέφουμε γύρω από τον άξονα oz . Σύμφωνα με τον παραπάνω κανόνα η εξίσωση της επιφάνειας που παράγεται είναι η :



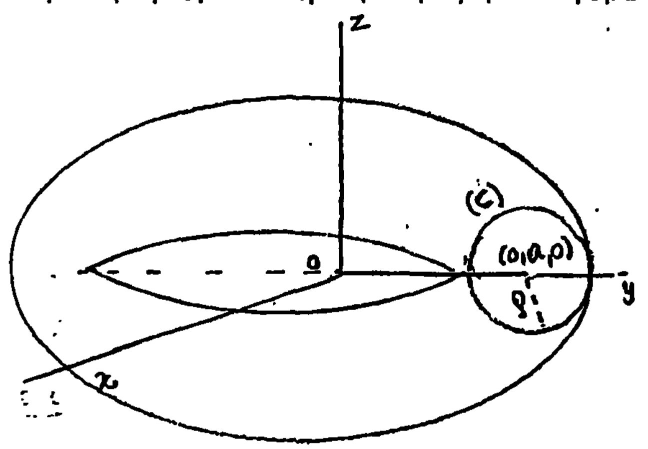
$$\pm\sqrt{x^2+y^2}=\alpha z \quad ή \quad x^2+y^2-\alpha^2z^2=0 \ ,$$

η οποία είναι ομογενής ως προς x, y, z και συνεπώς είναι και κωνική επιφάνεια. Αυτή η επιφάνεια λέγεται και κώνος εκ περιστροφής .

<u>Παράδειγμα 5.4.3</u>. Στο Oyz επίπεδο με κέντρο το σημείο $(0,\alpha,0)$ και αχτίνα ρ (ώστε $\rho<\alpha$) έχουμε μια περιφέρεια κύκλου (c) με εξισώσεις

$$(c) : \{x=0 \ , \ (y-\alpha)^2+z^2=\rho^2\} \ .$$

Περιστρέφουμε αυτή τη περιφέρεια γύρω από τον άξονα Oz . Τότε η εξίσωση της



επιφάνειας που παράγεται , σύμφωνα με τον κανόνα που αναφέραμε είναι η :

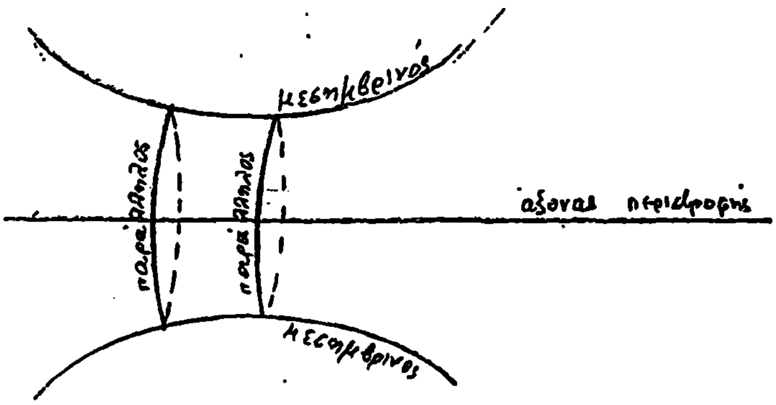
$$(\pm\sqrt{x^2+y^2}-\alpha)^2+z^2=\rho^2$$

ή μετά από πράξεις :

$$(x^2+y^2+z^2+\alpha^2-\rho^2)^2=4\alpha^2(x^2+y^2) \ .$$

Η επιφάνεια αυτή λέγεται <u>Σπείρα (τόρος) εκ περιστροφής</u> .

<u>Ονομασία</u> . Στις επιφάνειες εκ περιστροφής οι περιφέρειες που γράφουν τα



σημεία της γενέτειρας λέγονται παράλληλοι της εκ περιστροφής επιφάνειας. Επίσης οι τομές μιας εκ περιστροφής επιφάνειας με επίπεδα που περιέχουν τον άξονα περιστροφής λέγονται μεσημβρινοί της εκ περιστροφής επιφάνειας.

Είδαμε πως μια επιφάνεια εκ περιστροφής έχει εξίσωση της μορφής (33). Θα εξετάσουμε στη συνέχεια το αντίστροφο πρόβλημα.

Πρόβλημα 5.4.2. Θεωρούμε μια επιφάνεια με εξίσωση της μορφής :

$$\Phi((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\ ,\ \alpha x+\beta y+\gamma z)=0 \quad . \tag{34}$$

Θα δείξουμε, πως η (34) παριστάνει επιφάνεια εκ περιστροφής με άξονα την ευθεία (ε) που περνά από το σημείο $A(x_0,y_0,z_0)$ και κάθετη στο επίπεδο $\alpha x+\beta y+\gamma z=0$, δηλαδή :

$$(\varepsilon) : \frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta} = \frac{z-z_0}{\gamma} \quad . \tag{35}$$

Πραγματικά, έστω ένα επίπεδο $Ax+By+\Gamma z+\Delta=0$ που περνά από την ευθεία (ε). Τότε θεωρούμε τη καμπύλη :

$$(c_1):(Ax+By+\Gamma z+\Delta=0\ ,\ \Phi((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2,\alpha x+\beta y+\gamma z)=0) \quad . \tag{36}$$

Θα βρούμε την εξίσωση της επιφάνειας, που παράγεται με περιστροφή της καμπύλης (c_1) γύρω από την ευθεία (ε).

Η κινούμενη περιφέρεια είναι η :

$$(c) : ((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=\rho^2\ ,\ \alpha x+\beta y+\gamma z=\lambda) \quad . \tag{37}$$

Με απαλοιφή των x,y,z από τις (36) και (37) έχουμε τον νόμο κίνησης :

(38) $\Phi(\rho^2,\lambda)=0$.

Έτσι η εξίσωση της επιφάνειας θα προκύψει με απαλοιφή των ρ,λ από τις (37) και (38) και είναι η

$$\Phi((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\ ,\ \alpha x+\beta y+\gamma z)=0 \quad ,$$

που είναι η εξίσωση της επιφάνειας με την οποία είχαμε ξεκινήσει . Έτσι η (34) παριστάνει εκ περιστροφής επιφάνεια με άξονα την ευθεία (ε) που δίνεται από τις (35) .

Παράδειγμα 5.4.4. Η εξίσωση :

$$(x-4)^2+y^2+(z-3)^2-(y+z+14)^2+\left(\frac{5(y+z)-15}{14}\right)^{12}+\left(\frac{3-(y+z)}{4}\right)^2=0$$

είναι της μορφής :

$$\Phi((x-4)^2+y^2+(z-3)^2\ ,\ y+z)=0 \quad .$$

Έτσι αυτή η εξίσωση παριστάνει εκ περιστροφής επιφάνεια με άξονα την ευθεία

$$\frac{x-4}{0}=\frac{y-0}{1}=\frac{z-3}{1} \quad .$$

Παρατήρηση . Για να βρούμε γενέτειρα μιας επιφάνειας εκ περιστροφής πρέπει να κόψουμε την επιφάνεια με ένα επίπεδο , που περνά από τον άξονα περιστροφής .

Ασκήσεις στις επιφάνειες εκ περιστροφής .

1. Η ευθεία (ε_1): $\begin{pmatrix} 2x+3y+7z+5=0 \\ x+y+z+10=0 \end{pmatrix}$ στρέφεται περί την ευθεία

ευθεία (ε_2) : $\begin{pmatrix} x-y+z-7=0 \\ 2x+y-z-5=0 \end{pmatrix}$.

Να βρεθεί η εξίσωση της εκ περιστροφής επιφάνειας .

2. Να βρεθεί η επιφάνεια , που παράγεται με περιστροφή της

$$(c) : \{x^2+(y-2)^2+z^2=1 \ , \ y=2x\}$$

γύρω από τον άξονα Oz .

3. Δίνεται μια επιφάνεια με εξίσωση την :

$$x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=1 \ ,$$

α) Να δείξετε ότι είναι εκ περιστροφής .

β) Να βρείτε τον άξονα περιστροφής και τις εξισώσεις μιας γενέτειρας .

5.5. Επιφάνειες δευτέρου βαθμού .

Η γενική δευτεροβάθμια εξίσωση στο χώρο έχει τη μορφή :

$$(1) \qquad a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0 \ .$$

Το σύνολο των σημείων του χώρου που επαληθεύουν μια εξίσωση της μορφής (1) λέγεται επιφάνεια δευτέρου βαθμού . Έτσι για παράδειγμα η σφαίρα είναι μια επιφάνεια δευτέρου βαθμού . Ένα σημαντικό πρόβλημα είναι η ταξινόμηση των επιφανειών δευτέρου βαθμού , δηλαδή να δούμε ποιές είναι όλες οι επιφάνειες δευτέρου βαθμού .

'Ενα άλλο σημαντικό πρόβλημα , με το οποίο θα ασχοληθούμε εν μέρει παρακάτω , είναι το εξής :

Αν δοθεί μια επιφάνεια δευτέρου βαθμού (δηλαδή μια εξίσωση της μορφής (1)) να πάρουμε μια ιδέα του γεωμετρικού της σχήματος . Για μια τέτοιου είδους μελέτη εξετάζουμε συνήθως τα παρακάτω ερωτήματα :

(i) Κατά πόσο η επιφάνεια είναι συμμετρική ως προς επίπεδα συντεταγμένων , άξονες συντεταγμένων , αρχή συντεταγμένων .

(ii) Ποιά είναι τα σημεία τομής της επιφάνειας με τους άξονες συντεταγμένων ;

(iii) Τι είναι οι τομές της επιφάνειας με τα επίπεδα συντεταγμένων καθώς και με επίπεδα παράλληλα προς τα επίπεδα συντεταγμένων ;

(iv) Κατά πόσο μπορούμε να οριοθετήσουμε την επιφάνεια .

Θα κάνουμε αυτή τη μελέτη για ειδικές μορφές της εξίσωσης (1) .

Ελλειψοειδές . Μια επιφάνεια,που σε κάποιο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων έχει εξίσωση της μορφής :

(2) $$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1 \quad , \quad \text{με} \quad \alpha,\beta,\gamma>0 \quad ,$$

λέγεται ελλειψοειδές .

Από την εξίσωση της επιφάνειας γίνεται αμέσως φανερό ότι η αρχή των συντεταγμένων είναι κέντρο συμμετρίας για την επιφάνεια (αν επαληθεύεται η (2) από τη σημείο (x,y,z) τότε επαληθεύεται και από το σημείο $(-x,-y,-z)$). Επίσης οι άξονες συντεταγμένων και τα επίπεδα συντεταγμένων είναι αντίστοιχα άξονες συμμετρίας και επίπεδα συμμετρίας .

Βλέπουμε επίσης ότι ο άξονας των x τέμνει την επιφάνεια στα σημεία $A(\alpha,0,0)$ και $A'(-\alpha,0,0)$. Ο άξονας των y στα σημεία $B(0,\beta,0)$, $B'(0,-\beta,0)$ και ο άξονας των z στα σημεία $\Gamma(0,0,\gamma)$ και $\Gamma'(0,0,-\gamma)$.

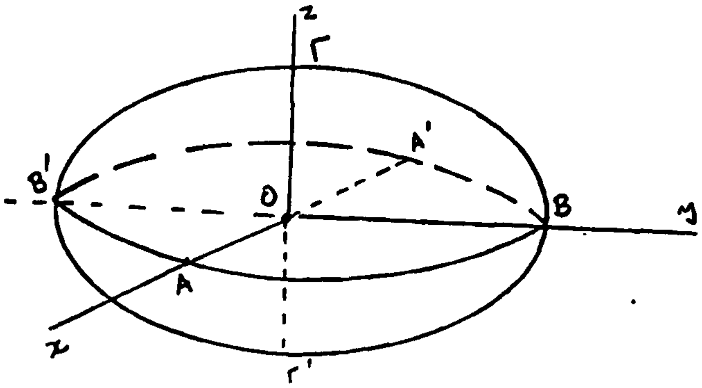
Από την εξίσωση αυτής της επιφάνειας βλέπουμε ότι $\frac{x^2}{\alpha^2}\leq 1$ δηλαδή $|x|\leq\alpha$. Όμοια $|y|\leq\beta$ και $|z|\leq\gamma$. Δηλαδή η επιφάνεια είναι μέσα σε ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με έδρες τα επίπεδα $x=\pm\alpha$, $y=\pm\beta$ και $z=\pm\gamma$.

Εξετάζουμε τώρα τις τομές της επιφάνειας με τα επίπεδα συντεταγμένων καθώς και με επίπεδα παράλληλα προς τα επίπεδα συντεταγμένων :

Τομή με το Oxy επίπεδο : Είναι η καμπύλη $\left(z=0\ ,\ \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1\right)$, που είναι μια έλλειψη .

Τομή με επίπεδο $z=\lambda$: Είναι η καμπύλη $\left(z=\lambda\ ,\ \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{\lambda^2}{\gamma^2}\right.$, η οποία είναι μια έλλειψη για $|\lambda|<\gamma$, ένα σημείο για $|\lambda|=\gamma$ και το κενό σύνολο για $|\lambda|>\gamma$. Όμοια δουλεύουμε για τομές με τα άλλα επίπεδα συντεταγμένων .

Η παραπάνω μελέτη μας βοηθάει να κατασκευάσουμε χοντρικά το γεωμετρικό σχήμα επιφάνειας , ελλειψοειδές, που είναι το παρακάτω :



<u>Μονόχωνο υπερβολοειδές</u> . Μια επιφάνεια που σε κάποιο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων έχει εξίσωση της μορφής :

$$(3) \qquad \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=1 \quad , \quad \text{με } \alpha,\beta,\gamma>0$$

$$\left(\text{ή} \quad -\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1 \quad \text{ή} \quad \frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1\right)$$

λέγεται <u>μονόχωνο υπερβολοειδές</u> με άξονα τον Oz (ή Ox ή Oy , αντίστοιχα) . Ο άξονας καθορίζεται από το ποια μεταβλητή έχει το πρόσημο -.Τα παρακάτω αναφέρονται για τη μελέτη της εξίσωσης με - στη μεταβλητή z . Όμοια μελετάμε τις άλλες περιπτώσεις .

Η εξίσωση της επιφάνειας δείχνει ότι το μόνοχωνο υπερβολοειδές είναι συμμετρικό ως προς τα επίπεδα συντεταγμένων , άξονες συντεταγμένων και αρχή συντεταγμένων .

Επίσης από την εξίσωση (3) φαίνεται ότι ο άξονας των x τέμνει την επιφάνεια στα σημεία $A(\alpha,0,0)$, $A'(-\alpha,0,0)$ και ο άξονας των y στα σημεία $B(0,\beta,0)$ και $B'(0,-\beta,0)$. Τέλος ο άξονας των z δεν τέμνει την επιφάνεια , γιατί βάζοντας $x=y=0$ έχουμε $-\frac{z^2}{\gamma^2}=1$, που δεν έχει λύση ως προς z .

<u>Τομή με το επίπεδο $z=0$</u> : Είναι η καμπύλη $\left(z=0 \; , \; \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1\right)$, που είναι μια έλλειψη .

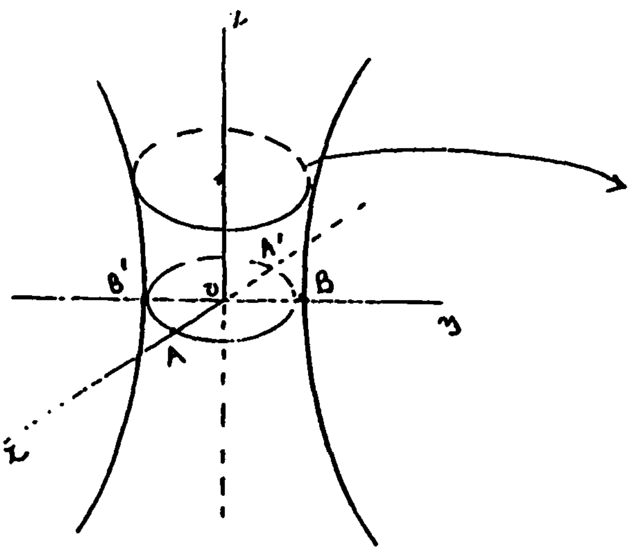
<u>Τομή με το επίπεδο $z=\lambda$</u> : Είναι η καμπύλη $\left(z=\lambda \; , \; \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1+\frac{\lambda^2}{\gamma^2}\right)$, που είναι πάλι μιά έλλειψη για οποιαδήποτε τιμή του λ .

Τομή με το επίπεδο $x=0$: Είναι η καμπύλη $(x=0\ ,\ \frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=1)$ που είναι μια υπερβολή . Έτσι η επιφάνεια έχει σημεία στο άπειρο . Η υπερβολή αυτή έχει κύριο άξονα τον Oy .

Τομή με το επίπεδο $x=\lambda$: Είναι η καμπύλη $(x=\lambda\ ,\ \frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=1-\frac{\lambda^2}{\alpha^2})$. Η καμπύλη αυτή είναι υπερβολή με κύριο άξονα παράλληλο του Oy για $|\lambda|<\alpha$, μια υπερβολή με κύριο άξονα παράλληλο του Oz για $|\lambda|>\alpha$ και για $\lambda=\alpha$ ή $-\alpha$ είναι δύο ευθείες κάθε φορά (ποιές;) .

Όμοια αποτελέσματα έχουμε για τομές με επίπεδα $y=0$ ή $y=\lambda$.

Ένα χονδρικό σχήμα για το μονόχωνο υπερβολοειδές είναι το παρακάτω :



ή έλλειψη : $(z=\lambda\ ,\ \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1+\frac{\lambda^2}{\gamma^2})$.

Δίχωνο υπερβολοειδές . Έτσι λέγεται μια επιφάνεια που σε κάποιο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων έχει εξίσωση της μορφής :

(4) $$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=1\ ,\quad \text{με}\quad \alpha,\beta,\gamma>0$$

$$(\text{ή}\quad -\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=1 \quad \text{ή} \quad -\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1)\ .$$

Λεπτομερέστερα λέγεται δίχωνο υπερβολοειδές με άξονα Ox (ή Oy ή Oz αντίστοιχα) . Εδώ ο άξονας καθορίζεται από τη μεταβλητή με το πρόσημο + . Τα παρακάτω αναφέρονται για τη μελέτη της εξίσωσης με το + στη μεταβλητή x . Όμοια μελετάμε τις άλλες περιπτώσεις .

Και αυτή η επιφάνεια είναι συμμετρική ως προς τα επίπεδα συντεταγμένων , τους άξονες συντεταγμένων και την αρχή των συντεταγμένων .

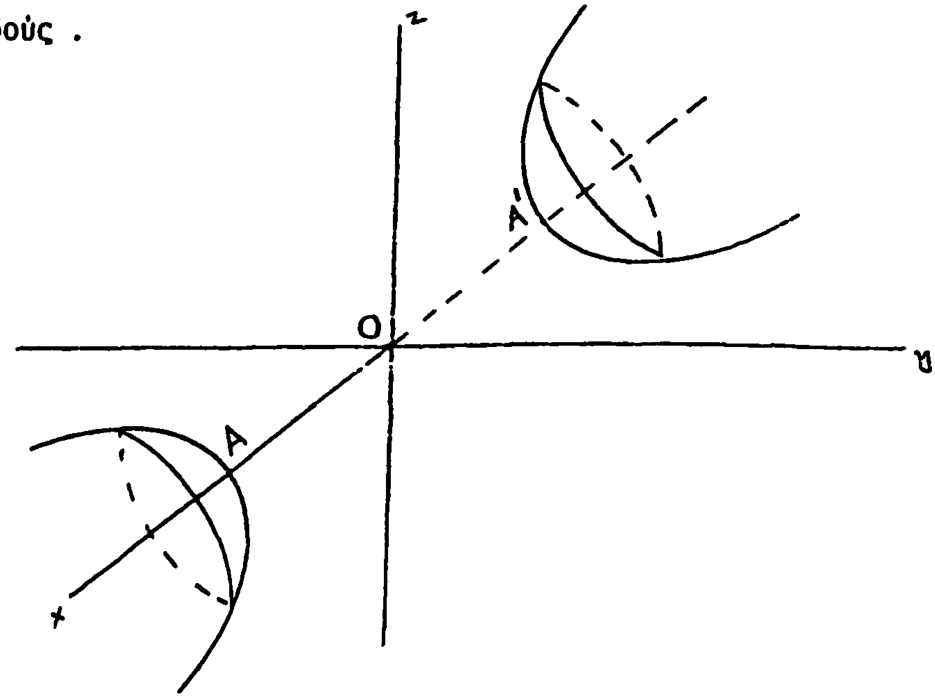
Είναι φανερό ότι μόνο ο άξονας των x τέμνει την επιφάνεια στα σημεία $A(\alpha,0,0)$ και $A'(-\alpha,0,0)$.

<u>Τομές με επίπεδα συντεταγμένων</u> : Το επίπεδο $x=0$ δεν τέμνει την επιφάνεια , γιατί η εξίσωση γίνεται $-\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=1$, που δεν έχει λύση . Το επίπεδο $y=0$ τέμνει την επιφάνεια στη καμπύλη $\{y=0\ ,\ \frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=1\}$ που είναι μια υπερβολή με κύριο άξονα τον Ox . Όμοια το $z=0$ τέμνει την επιφάνεια σε μια υπερβολή πάλι με κύριο άξονα τον Ox .

<u>Τομές με επίπεδα παράλληλα προς τα επίπεδα συντεταγμένων</u> . Το επίπεδο $x=\lambda$ τέμνει την επιφάνεια στη καμπύλη $\{x=\lambda\ ,\ \frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=\frac{\lambda^2}{\alpha^2}-1\}$. Αυτή είναι το κενό σύνολο για $|\lambda|<\alpha$. Έλλειψη για $|\lambda|>\alpha$ και εκφυλίζεται στα σημεία A και A' για $\lambda=\alpha$, $\lambda=-\alpha$ αντίστοιχα . Βλέπουμε εδώ ότι η επιφάνεια δεν έχει σημεία ανάμεσα από τα δύο επίπεδα $x=\alpha$ και $x=-\alpha$. Έτσι η επιφάνεια αποτε-

λείται από δύο καμμάτια (δύο χωνιά) , από όπου και η ονομασία δίχωνο . Το επίπεδο $y=\lambda$ τέμνει την επιφάνεια κατά τη καμπύλη $\{y=\lambda\ ,\ \frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=1+\frac{\lambda^2}{\beta^2}\}$ που είναι πάντα υπερβολή . Όμοια η τομή με επίπεδο $z=\lambda$ δίνει υπερβολή .

Το παρακάτω σχήμα δίνει μια χοντρή προσέγγιση στο σχήμα του δίχωνου υπερβολοειδούς .



<u>Ελλειπτικό παραβολοειδές</u> . Έτσι λέγεται μια επιφάνεια που σε κάποιο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων έχει εξίσωση της μορφής :

(5) $\qquad \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=2\gamma z \quad , \quad \text{με} \quad \alpha,\beta>0\ ,\ \gamma\neq 0$

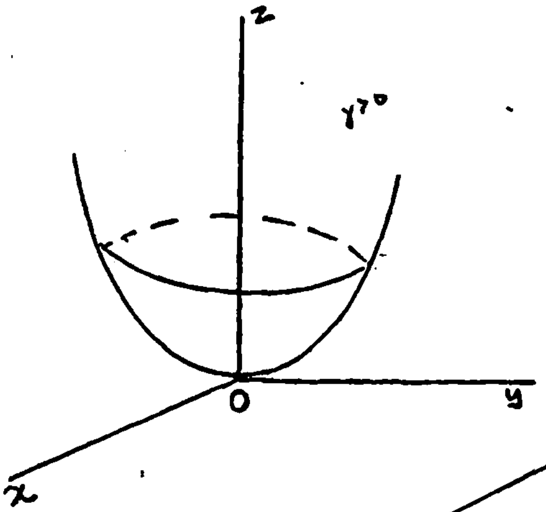
$\left(\text{ή}\ \frac{y^2}{\alpha^2}+\frac{z^2}{\beta^2}=2\gamma x \quad \text{ή} \quad \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{z^2}{\beta^2}=2\gamma y\right)$.

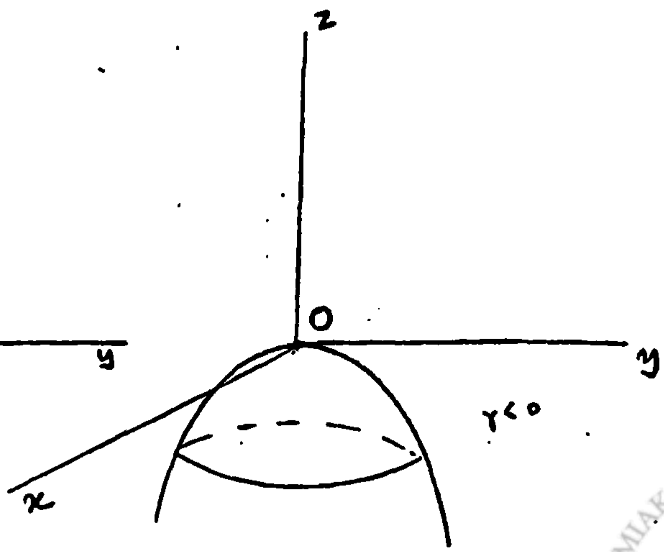
Θα μελετήσουμε μόνο τη (5) . Η μελέτη των άλλων γίνεται όμοια . Η επιφάνεια αυτή είναι συμμετρική ως προς τα επίπεδα Oxz και Oyz καθώς και προς τον άξονα Oz. Επίσης περνά από την αρχή των αξόνων γιατί επαληθεύεται από το σημείο $(0,0,0)$. Για $\gamma>0$ έχουμε πάντα $z\geq 0$, έτσι σ'αυτή τη περίπτωση δεν έχει σημεία κάτω από το επίπεδο Oxy. Αντίθετα για $\gamma<0$, έχουμε πάντα $z\leq 0$ και η επιφάνεια έχει σημεία μόνο κάτω από το επίπεδο Oxy.

<u>Τομές με επίπεδα συντεταγμένων</u>. Το επίπεδο $z=0$ τέμνει την επιφάνεια μόνο στην αρχή των συντεταγμένων. Τα επίπεδα $x=0$ και $y=0$ τέμνουν την επιφάνεια σε παραβολές.

<u>Τομές με επίπεδα παράλληλα προς τα επίπεδα συντεταγμένων</u>. Το $z=\lambda\neq 0$ τέμνει την επιφάνεια στη καμπύλη $\{z=\lambda\ ,\ \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=2\gamma\lambda\}$, που είναι έλλειψη για $\gamma\lambda>0$ και κενό σύνολο για $\gamma\lambda<0$. Τα επίπεδα $x=\lambda$ ή $y=\lambda$ είναι εύκολο να διαπιστωθεί πως κόβουν την επιφάνεια σε παραβολές.

Τα παρακάτω σχήματα μας δείχνουν το ελλειπτικό παραβαλοειδές για $\gamma>0$ και για $\gamma<0$





<u>Υπερβολικό παραβολοειδές</u> . Μια επιφάνεια που σε κάποιο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων έχει εξίσωση της μορφής :

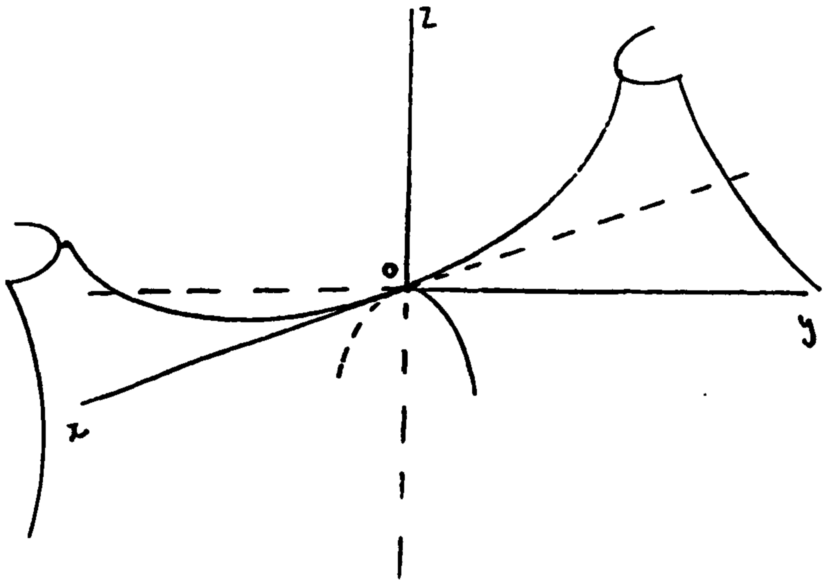
$$(6) \qquad \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 2\gamma z \quad , \quad \text{με} \quad \alpha,\beta > 0 \quad , \quad \gamma \neq 0$$

λέγεται <u>υπερβολικό παραβολοειδές</u> . Είναι φανερό πως η (6) για $\gamma=0$ παριστάνει δύο επίπεδα (ποιά;) .

Και αυτή η επιφάνεια περνά από την αρχή των συντεταγμένων και είναι συμμετρική ως προς τα επίπεδα Oxz , Oyz και τον άξονα Oz .

Το επίπεδο $z=0$ τέμνει την επιφάνεια στις δύο ευθείες: $\left(\frac{x}{\alpha} \pm \frac{y}{\beta} = 0 \right.$, $\left. z=0\right)$. Τα επίπεδα $x=0$ και $y=0$ τέμνουν την επιφάνεια σε παραβολές . Κάθε επίπεδο $z=\lambda$ τέμνει την επιφάνεια στην υπερβολή $\left(z=\lambda \, , \, \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} = 2\gamma\lambda\right)$ με κύριο άξονα παράλληλο του Ox για $\gamma\lambda > 0$ και παράλληλο του Oy για $\gamma\lambda < 0$. Αντίθετα τα επίπεδα $x=\lambda$ τέμνουν την επιφάνεια σε παραβολές .

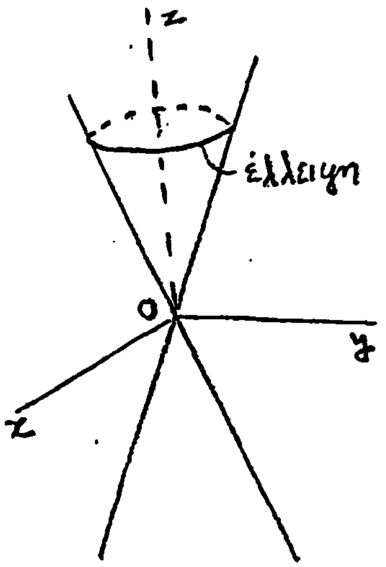
Μια χοντρική παράσταση του υπερβολικού παραβολοειδούς δίνει το παρακάτω σχήμα στη περίπτωση που το $\gamma > 0$.



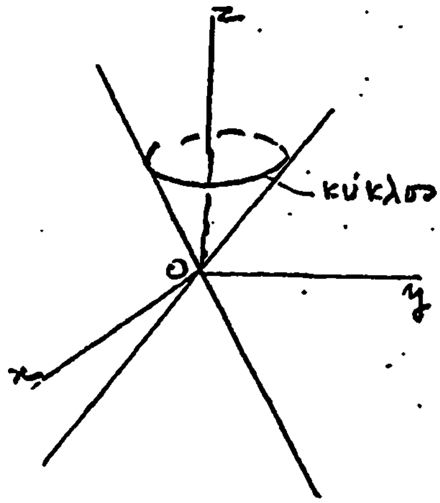
<u>Κώνοι-Κύλινδροι</u>. Μια επιφάνεια , η οποία σε κάποιο σύστημα συντεταγμένων έχει εξίσωση της μορφής :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \qquad (7)$$

λέγεται <u>ελλειπτικός κώνος</u>. Οι τομές αυτής της επιφάνειας με επίπεδα $z=k\neq0$ είναι ελλείψεις (σχήμα 1). Η τομή με το επίπεδο $z=0$ είναι ένα μόνο σημείο, η αρχή $O(0,0,0)$ των συντεταγμένων.



σχήμα 1



σχήμα 2

Ειδικά, για $a=b$, η επιφάνεια είναι ο <u>κυκλικός κώνος</u> (σχήμα 2). <u>Παρατήρηση</u> : Η εξίσωση (7) είναι ομογενής ως προς x,y,z και έτσι η επιφάνεια με εξίσωση την (7) είναι κωνική επιφάνεια (κοίταξε σελίδα 182) .

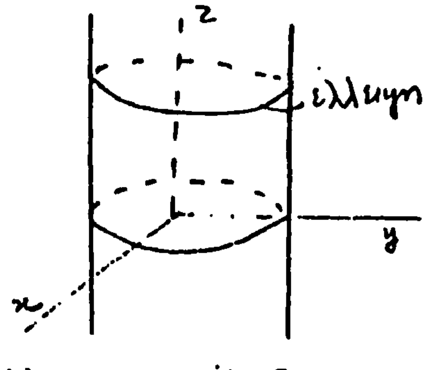
Επιφάνειες που σε κάποιο σύστημα συντεταγμένων έχουν εξίσωση μιας των παρακάτω μορφών :

$$(8) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

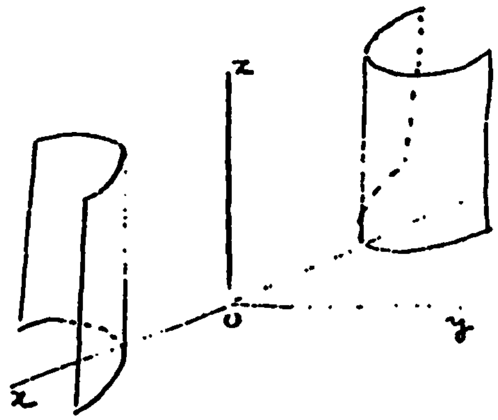
$$(9) \qquad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

$$(10) \qquad \frac{x^2}{a^2}-2my=0$$

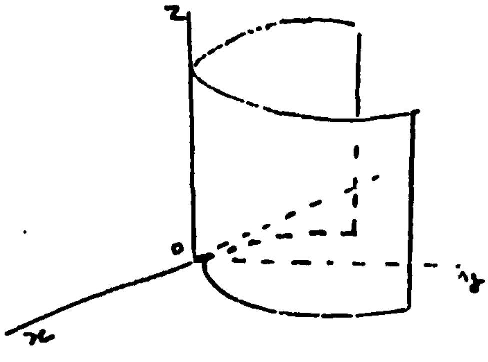
λέγονται <u>κύλινδροι</u> . Ειδικώτερα , <u>ελλειπτικός κύλινδρος</u> , <u>υπερβολικός κύλινδρος</u> , <u>παραβολικός κύλινδρος</u> αν η επιφάνεια έχει εξίσωση της μορφής (8), (9), (10) αντίστοιχα. Σημειώνουμε πως η (8) για $a=b$ παριστάνει τον ορθό κυκλικό κύλινδρο (κοίταξε παράδειγμα 5.3.2) .



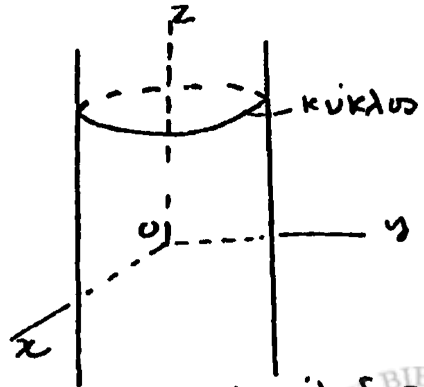
ελλειπτικος κύλινδρος



Υπερβολικός κύλινδρος



Παραβολικός κύλινδρος



ορθός κυκλικός κύλινδρος

'Άσκηση .

Η εξίσωση : $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{(\lambda-3)^2}+\frac{z^2}{9}=1$ για κάθε πραγματικό αριθμό $\lambda \in \mathbb{R}-\{3\}$ παριστάνει ελλειψοειδές . Για ποιές τιμές του λ η επιφάνεια είναι εκ περιστροφής ; (ελλειψοειδές εκ περιστροφής) .

5.6. Ευθειογενείς επιφάνειες .

'Ετσι λέγονται οι επιφάνειες που παράγονται από τη κίνηση ευθείας γραμμής . Τέτοιες επιφάνειες είναι οι κωνικές , οι κυλινδρικές . Δεν είναι οι μόνες . Αξίζει το κόπο να πούμε και να δείξουμε , όσο και αν φαίνεται παράξενο , ότι το μονόχωνο υπερβολοειδές και το υπερβολικό παραβολοειδές είναι και αυτές ευθειογενείς (δύο σπουδαία παραδείγματα επιφανειών για το μάθημα "Στοιχεία Διαφορικής Γεωμετρίας") .

Το μονόχωνο υπερβολοειδές είναι ευθειογενής επιφάνεια . Πραγματικά από την εξίσωση του μονόχωνου υπερβολοειδούς παίρνουμε διαδοχικά :

(7) $$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}=1$$

ή ισοδύναμα

(8) $$\left(\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}\right)\left(\frac{y}{\beta}-\frac{z}{\gamma}\right)=\left(1+\frac{x}{\alpha}\right)\left(1-\frac{x}{\alpha}\right) .$$

Θεωρούμε τώρα την ευθεία (ε_λ) με αναλυτικές εξισώσεις :

(9) $$(\varepsilon_\lambda): \left(\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=\lambda\left(1+\frac{x}{\alpha}\right) , \frac{y}{\beta}-\frac{z}{\gamma}=\frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\right) .$$

Είναι φανερό πως κάθε σημείο της (7) είναι και σημείο μιας (ε_λ) για κάποιο λ, καθώς επίσης κάθε σημείο της (ε_λ) είναι και σημείο της (7). Εξάλλου με απαλοιφή του λ από τις εξισώσεις της (ε_λ) παίρνουμε την (7), που σημαίνει ότι το μονόχωνο υπερβολοειδές παράγεται με τη κίνηση της (ε_λ). Για τις διάφορες τιμές του λ από την (9) παίρνουμε ένα σύνολο (σύστημα) ευθειών, που όλες είναι πάνω στο μονόχωνο υπερβολοειδές, και το οποίο λέγεται <u>σύστημα την ευθειών λ</u>.

Τα ίδια μπορούμε να πούμε και για την ευθεία (ε_μ) με αναλυτικές εξισώσεις :

(10) $$(\varepsilon_\mu):\ \left(\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=\mu\left(1-\frac{x}{\alpha}\right),\ \frac{y}{\beta}-\frac{z}{\gamma}=\frac{1}{\mu}\left(1+\frac{x}{\alpha}\right)\right).$$

'Ετσι έχουμε και ένα <u>σύστημα ευθειών μ</u> πάνω στο μονόχωνο υπερβολοειδές. Με απλή άλγεβρα διαπιστώνουμε(πως;), ότι δύο ευθείες του ίδιου συστήματος δεν τέμνονται. Επίσης κάθε ευθεία του ενός συστήματος τέμνει όλες τις ευθείες του άλλου συστήματος.

<u>Το υπερβολικό παραβολοειδές είναι ευθειογενής επιφάνεια</u> : Γράφουμε και εδώ την εξίσωση :

(11) $$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=2\gamma z$$

ώς

(12) $$\left(\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}\right)\left(\frac{x}{\alpha}-\frac{y}{\beta}\right)=2\gamma z\ .$$

'Οπως για τη προηγούμενη περίπτωση παίρνουμε και εδώ δύο συστήματα ευθειών :

(13) $$(\varepsilon_\lambda):\ \left(\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=2\gamma\lambda z\ ,\ \frac{x}{\alpha}-\frac{y}{\beta}=\frac{1}{\lambda}\right)$$

και

(14) $\quad (\varepsilon_\mu): \left(\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = \frac{1}{\mu} \;,\; \frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta} = 2\gamma\mu z \right)$.

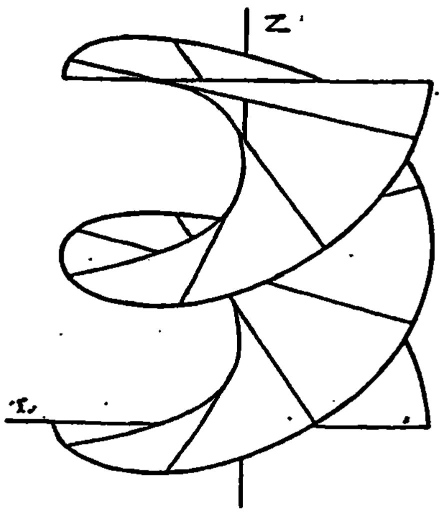
<u>Παράδειγμα άλλης ευθειογενούς επιφάνειας</u> : Στο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων Oxyz , θεωρούμε τα σημεία P των οποίων οι συντεταγμένες εξαρτώνται από δύο παραμέτρους u,v (u,v∈R) . Ας είναι P(u,v)=(vcosu,vsinu,u) . Είναι φανερό πως αλλάζοντας τις τιμές των παραμέτρων αλλάζει και η θέση του σημείου στο χώρο . 'Ολα αυτά τα σημεία για τις διάφορες τιμές των u,v συνιστούν μια ευθειογενή επιφάνεια . Πραγματικά , το διάνυσμα θέσης του σημείου P(u,v) είναι :

$$\bar{r}(u,v) = \bar{r}(P(u,v)) = (v\cos u, v\sin u, u)$$
$$= (0,0,u)+v(\cos u,\sin u,0) \;.$$

'Ετσι :

$$\bar{r}(u,v) = (0,0,u)+v(\cos u,\sin u,0) \;.$$

Η τελευταία εξίσωση είναι η διανυσματική εξίσωση ευθείας ε(u,v) που περνά από το σημείο (0,0,u) και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\bar{a} = (\cos u,\sin u,0)$.



'Ετσι η επιφάνεια παράγεται από την κίνηση μιας ευθείας έτσι ώστε να συναντά κάθετα τον άξονα Oz στο $(0,0,u)$ και να είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{a}$. 'Ενα σχήμα για την επιφάνεια αυτή είναι η ελικοειδής τσουλήθρα του παραπάνω σχήματος .

5.7. Εφαπτόμενο επίπεδο μιας επιφάνειας δευτέρου βαθμού .

Θα κλείσουμε αυτό το κεφάλαιο βρίσκοντας την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου σε ένα σημείο μιας επιφάνειας δευτέρου βαθμού . Θα αντιμετωπίσουμε το πρόβλημα γενικά . Παίρνουμε την επιφάνεια με εξίσωση την :

$$(15)\qquad f(x,y,z)=a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y+$$
$$+2a_{34}z+a_{44}=0 \quad .$$

Ας είναι $P_0(x_0,y_0,z_0)$ ένα σημείο της (15) . Δηλαδή

$$(16)\qquad f(x_0,y_0,z_0)=0 \quad .$$

Για ένα τυχαίο σημείο $P_1(x_1,y_1,z_1)$ του χώρου διαφορετικό από το P_0 , θεωρούμε την ευθεία (ε) από τα P_0,P_1 η οποία έχει παραμετρικές εξισώσεις τις :

$$(17)\qquad (\varepsilon):\ x=x_0+t(x_1-x_0)\ ,\ y=y_0+t(y_1-y_0)\ ,\ z=z_0+t(z_1-z_0) \quad .$$

Για να βρούμε τα κοινά σημεία της (15) με την (17) αρκεί να βρούμε τις τιμές του t για τις οποίες ισχύει

$$(18)\qquad f(x_0+t(x_1-x_0)\ ,\ y_0+t(y_1-y_0)\ ,\ z_0+t(z_1-z_0))=0 \quad .$$

Μετά θέτοντας αυτές τις τιμές του t στην (17) παίρνουμε τις συντεταγμένες των κοινών σημείων . Η (18) είναι δευτέρου βαθμού ως προς t , άρα η (17) με την (15) έχει το πολύ δύο κοινά σημεία , γιατί υπάρχουν το πολύ δύο λύσεις του t . Από τη κατασκευή μας ξέρουμε πως το P_0 είναι ένα σημείο τομής , δηλαδή το $t=0$ είναι λύση της (18) . Αν το $t=0$ είναι διπλή λύση τότε το P_0 είναι διπλό κοινό σημείο των (15) και (17) και συνεπώς η P_1P_0 εφάπτεται της (15) στο P_0 . Ποιά είναι όμως η ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε η (18) να έχει το $t=0$ σαν διπλή λύση ;

θέτουμε : $\alpha=x_1-x_0$, $\beta=y_1-y_0$ και $\gamma=z_1-z_0$. Τότε η (18) , λαμβάνοντας υπόψη την (15) γίνεται :

$$\alpha_{11}(x_0+t\alpha)^2+\alpha_{22}(y_0+t\beta)^2+\alpha_{33}(z_0+t\gamma)^2+2\alpha_{12}(x_0+t\alpha)(y_0+t\beta)$$
$$+2\alpha_{13}(x_0+t\alpha)(z_0+t\gamma)+2\alpha_{23}(y_0+t\beta)(z_0+t\gamma)+2\alpha_{14}(x_0+t\alpha)$$
$$+2\alpha_{24}(y_0+t\beta)+2\alpha_{34}(z_0+t\gamma)+\alpha_{44}=0$$

ή κάνοντας πράξεις και διατάσσοντας ως προς t

$$\left(\alpha_{11}\alpha^2+\alpha_{22}\beta^2+\alpha_{33}\gamma^2+2\alpha_{12}\alpha\beta+2\alpha_{13}\alpha\gamma+2\alpha_{23}\beta\gamma\right)t^2$$
$$+2\Big[\alpha_{11}\alpha x_0+\alpha_{22}\beta y_0+\alpha_{33}\gamma z_0+\alpha_{12}(\alpha y_0+\beta x_0)+\alpha_{13}(\alpha z_0+\gamma x_0)$$
$$+\alpha_{23}(\gamma y_0+\beta z_0)+\alpha_{14}\alpha+\alpha_{24}\beta+\alpha_{34}\gamma\Big]\,t$$
$$+\alpha_{11}x_0^2+\alpha_{22}y_0^2+\alpha_{33}z_0^2+2\alpha_{12}x_0y_0+2\alpha_{13}x_0z_0+2\alpha_{23}y_0z_0$$
$$+2\alpha_{14}x_0+2\alpha_{24}y_0+2\alpha_{34}z_0+\alpha_{44}=0$$

ή λαμβάνοντας υπόψη ότι $f(x_0,y_0,z_0)=0$ (δηλαδή ο σταθερός όρος στη δευτεροβάθμια ως προς t εξίσωση είναι μηδέν) έχουμε :

(19) $$\left(a_{11}\alpha^2+a_{22}\beta^2+a_{33}\gamma^2+2a_{12}\alpha\beta+2a_{13}\alpha\gamma+2a_{23}\beta\gamma\right)t^2$$
$$+2\left[a_{11}\alpha x_0+a_{22}\beta y_0+a_{33}\gamma z_0+a_{12}(\alpha y_0+\beta x_0)+a_{13}(\alpha z_0+\gamma x_0)\right.$$
$$\left.+a_{23}(\gamma y_0+\beta z_0)+a_{14}\alpha+a_{24}\beta+a_{34}\gamma\right]t=0 \quad .$$

Η (19) για να έχει το $t=0$ διπλή λύση πρέπει και αρκεί :

(20) $$a_{11}\alpha x_0+a_{22}\beta y_0+a_{33}\gamma z_0+a_{12}(\alpha y_0+\beta x_0)+a_{13}(\alpha z_0+\gamma x_0)$$
$$+a_{23}(\gamma y_0+\beta z_0)+a_{14}\alpha+a_{24}\beta+a_{34}\gamma=0$$

ή

$$(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}z_0+a_{14})\alpha+(a_{22}y_0+a_{12}x_0+a_{23}z_0+a_{24})\beta$$
$$+(a_{33}z_0+a_{13}x_0+a_{23}y_0+a_{34})\gamma=0$$

ή αντικαθιστώντας : $\alpha=x_1-x_0$, $\beta=y_1-y_0$, $\gamma=z_1-z_0$

(21) $$(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}z_0+a_{14})(x_1-x_0)+(a_{22}y_0+a_{12}x_0+a_{23}z_0+a_{24})(y_1-y_0)$$
$$+(a_{33}z_0+a_{13}x_0+a_{23}y_0+a_{34})(z_1-z_0)=0 \quad .$$

Η (21) μας λέγει ότι : <u>Αν $P_0(x_0,y_0,z_0)$ είναι σημείο της (15) τότε η P_1P_0 εφάπτεται της (15) στο P_0 , αν και μόνο αν , το $P_1(x_1,y_1,z_1)$ ικανοποιεί την :</u>

(22) $$(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}z_0+a_{14})(x-x_0)+(a_{22}y_0+a_{12}x_0+a_{23}z_0+a_{24})(y-y_0)$$

$$+(\alpha_{33}z_0+\alpha_{13}x_0+\alpha_{23}y_0+\alpha_{34})(z-z_0)=0 \quad ,$$

που είναι η εξίσωση ενός επιπέδου . Αυτό το επίπεδο λέγεται <u>εφαπτόμενο επίπεδο της (15) στο σημείο $P_0(x_0,y_0,z_0)$.</u>

Θα δόσουμε στην συνέχεια μια άλλη έκφραση για την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου σε ένα σημείο μιας επιφάνειας δευτέρου βαθμού .

Κάνοντας πράξεις στην (22) έχουμε :

$$\begin{aligned}&\alpha_{11}x_0x+\alpha_{22}y_0y+\alpha_{33}z_0z+\alpha_{12}(x_0y+y_0x)+\alpha_{13}(x_0z+z_0x)\\&\quad+\alpha_{23}(y_0z+z_0y)+\alpha_{14}(x+x_0)+\alpha_{24}(y+y_0)+\alpha_{34}(z+z_0)+\alpha_{44}\\&\quad-\alpha_{11}x_0^2-\alpha_{22}y_0^2-\alpha_{33}z_0^2-2\alpha_{12}x_0y_0-2\alpha_{13}x_0z_0-2\alpha_{23}y_0z_0\\&\quad-2\alpha_{14}x_0-2\alpha_{24}y_0-2\alpha_{34}z_0-\alpha_{44}=0 \quad .\end{aligned}$$

'Ομως από την (16) παίρνουμε ότι :

$$\begin{aligned}&\alpha_{11}x_0^2+\alpha_{22}y_0^2+\alpha_{33}z_0^2+2\alpha_{12}x_0y_0+2\alpha_{13}x_0z_0+2\alpha_{23}y_0z_0\\&\quad+2\alpha_{14}x_0+2\alpha_{24}y_0+2\alpha_{34}z_0+\alpha_{44}=0\end{aligned}$$

'Ετσι το εφαπτόμενο επίπεδο της (15) στο σημείο $P_0(x_0,y_0,z_0)$ δίνεται και με τη μορφή :

$$\begin{aligned}(23)\qquad&\alpha_{11}x_0x+\alpha_{22}y_0y+\alpha_{33}z_0z+\alpha_{12}(y_0x+x_0y)+\alpha_{13}(z_0x+x_0z)\\&+\alpha_{23}(z_0y+y_0z)+\alpha_{14}(x+x_0)+\alpha_{24}(y+y_0)+\alpha_{34}(z+z_0)+\alpha_{44}=0 \quad .\end{aligned}$$

Παρατήρηση : Συγκρίνετε την εξίσωση (23) με την εξίσωση (12) της σελίδας 101 για το εφαπτόμενο επίπεδο σφαίρας και προσπαθείστε να συμπεράνετε ένα μνημονικό κανόνα για την (23) .

Θα τελειώσουμε με ένα ορισμό .

Ορισμός . Έστω $P_0(x_0,y_0,z_0)$ ένα σημείο μιας επιφάνειας S . Η ευθεία που περνά από το P_0 και είναι κάθετη στο εφαπτόμενο επίπεδο της S στο P_0 , λέγεται κάθετη ευθεία της S στο P_0 .

Ασκήσεις .

1. Να βρείτε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου σε ένα σημείο των παρακάτω επιφανειών : Ελλειψοειδές - Μονόχωνο και δίχωνο υπερβολοειδές - Ελλειπτικό και Υπερβολικό παραβολοειδές .

2. Θεωρούμε επιφάνεια με εξίσωση την $x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=1$. Οι προβολές (ορθές) του σημείου $(0,0,\sqrt{3})$ στα εφαπτόμενα επίπεδα της επιφάνειας είναι πάνω σε σφαίρα με κέντρο το σημείο $O(0,0,0)$ και ακτίνα 2 .

3. Δίνεται η έλλειψη $(c):(x=0\ ,\ y^2+2z^2-2=0)$. Ας είναι S η επιφάνεια, που παράγεται με περιστροφή της (c) γύρω από τον άξονα Oy και $P_0(x_0,y_0,z_0)$ τυχαίο σημείο της S .

(i) Να βρείτε το συμμετρικό $P_1(x_1,y_1,z_1)$ του σημείου $A(0,-1,0)$ ως προς το εφαπτόμενο επίπεδο της S στο P_0 και να δείξετε ότι η ευθεία P_1P_0 περνά από το σημείο $B(0,1,0)$.

(ii) Να δείξετε,ότι η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{AP_0B}$ είναι ευθεία κάθετη στην επιφάνεια S στο σημείο P_0 .

(iii) Να δείξετε ότι αν το P_0 κινείται στην S , τότε το P_1 κινείται (βρίσκεται) πάνω σε σφαίρα με κέντρο το B .

5.8. <u>Μελέτη γενικής εξίσωσης δεύτερου βαθμού στο χώρο</u>.

Η γενική εξίσωση δεύτερου βαθμού στο χώρο είναι η

$$(1)\quad \alpha_{11}x^2+\alpha_{22}y^2+\alpha_{33}z^2+2\alpha_{12}xy+2\alpha_{13}xz+2\alpha_{23}yz+2\alpha_{14}x+2\alpha_{24}y+2\alpha_{34}z+\alpha_{44}=0 \quad ,$$

όπου $\alpha_{ij}(i,j=1,2,3,4)$ είναι σταθεροί συντελεστές και $P(x,y,z)$ σημείο του χώρου , που αναφέρεται σε γνωστό τρισορθογώνιο δεξιόστροφο σύστημα συντεταγμένων Oxyz . <u>Ερώτημα</u> : Μπορούμε να βρούμε όλες τις λύσεις της (1)(όλα τα σημεία $P(x,y,z)$ που επαληθεύουν την (1)); Αν όλες τις λύσεις της (1) τις σχεδιάσουμε στο χώρο , ποιό είναι το γεωμετρικό σχήμα που προκύπτει ;

Σκοπεύουμε σ'αυτή τη παράγραφο να αντιμετωπίσουμε το παραπάνω ερώτημα .

Για $\alpha_{11}=\alpha_{22}=\alpha_{33}=\alpha_{12}=\alpha_{13}=\alpha_{23}=0$ και $(\alpha_{14},\alpha_{24},\alpha_{34})\neq(0,0,0)$ η απάντηση στο ερώτημα είναι γνωστή , αφού η (1) γίνεται τότε

$$\alpha_{14}x+\alpha_{24}y+\alpha_{34}z+\frac{\alpha_{44}}{2}=0 \quad ,$$

η οποία όπως γνωρίζουμε παριστάνει ένα επίπεδο στο χώρο .

Οι επιφάνειες που παριστάνει η (1) για τις διάφορες τιμές των σταθερών συντελεστών α_{ij} λέγονται <u>επιφάνειες δευτέρου βαθμού</u> ή <u>τετραγωνικές επιφάνειες</u> .

Θα αρχίσουμε τη μελέτη μας με ένα παράδειγμα .

Παράδειγμα 5.8.1. Η επιφάνεια με εξίσωση , στο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων Oxyz , την :

$$x^2+2y^2-3z^2-2x-8y+18z-24=0$$

είναι ένα μονόχωνο υπερβολοειδές . Πραγματικά , η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα ως :

$$(x-1)^2+2(y-2)^2-3(z-3)^2=6$$

ή

$$\frac{(x-1)^2}{(\sqrt{6})^2}+\frac{(y-2)^2}{(\sqrt{3})^2}-\frac{(z-3)^2}{(\sqrt{2})^2}=1 \quad .$$

'Ετσι στο σύστημα O'XYZ , που είναι παράλληλη μεταφορά του Oxyz στο σημείο O'(1,2,3) , η επιφάνεια έχει εξίσωση την :

$$\frac{X^2}{(\sqrt{6})^2}+\frac{Y^2}{(\sqrt{3})^2}-\frac{Z^2}{(\sqrt{2})^2}=1 \quad ,$$

που είναι της μορφής (3) με $\alpha=\sqrt{6}$, $\beta=\sqrt{3}$ και $\gamma=\sqrt{2}$.

Μετά το παραπάνω παράδειγμα είναι σχεδόν φανερό κατά ποιο τρόπο μπορούμε να μελετήσουμε (να δούμε τι επιφάνεια παριστάνει;) μια εξίσωση της μορφής (1) όταν $a_{12}=a_{13}=a_{23}=0$.

Μελέτη της εξίσωσης :

(2) $$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0 \quad .$$

Για αυτή τη μελέτη θα διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις .

Περίπτωση 1 . Οι τρεις συντελεστές a_{11}, a_{22}, a_{33} είναι μη μηδενικοί .

Τότε η εξίσωση (2) γράφεται ως :

$$(3) \quad a_{11}\left(x+\frac{a_{14}}{a_{11}}\right)^2+a_{22}\left(y+\frac{a_{24}}{a_{22}}\right)^2+a_{33}\left(z+\frac{a_{34}}{a_{33}}\right)^2+a_{44}-\frac{a_{14}^2}{a_{11}}-\frac{a_{24}^2}{a_{22}}-\frac{a_{34}^2}{a_{33}}=0 \quad .$$

Θεωρούμε ένα σύστημα συντεταγμένων $O'XYZ$ παράλληλο προς το $Oxyz$ με

$O'\left(-\frac{a_{14}}{a_{11}}, -\frac{a_{24}}{a_{22}}, -\frac{a_{34}}{a_{33}}\right)$. Στο σύστημα $O'XYZ$ η (3) γράφεται , θέτοντας

$$a=a_{44}-\frac{a_{14}^2}{a_{11}}-\frac{a_{24}^2}{a_{22}}-\frac{a_{34}^2}{a_{33}} \quad , \text{ ως :}$$

$$(4) \qquad a_{11}X^2+a_{22}Y^2+a_{33}Z^2+a=0 \quad .$$

Η (4) για $a=0$ παριστάνει , ανάλογα με τα πρόσημα των a_{11}, a_{22}, a_{33}, ένα σημείο (την αρχή των συντεταγμένων) ή ένα κώνο .

Η (4) για $a\neq 0$ γράφεται

$$\frac{X^2}{-\frac{a}{a_{11}}}+\frac{Y^2}{-\frac{a}{a_{22}}}+\frac{Z^2}{-\frac{a}{a_{33}}}=1$$

και παριστάνει , ανάλογα με τα πρόσημα των $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a$, ελλειψοειδές (πραγματικό ή φανταστικό) , μονόχωνο υπερβολοειδές ή δίχωνο υπερβολοειδές .

<u>Περίπτωση 2</u> . <u>Δύο από τους συντελεστές a_{11}, a_{22}, a_{33} είναι μη μηδενικοί και ο άλλος είναι μηδενικός</u> .

Θα εξετάσουμε μόνο τη περίπτωση $a_{11}\neq 0$, $a_{22}\neq 0$ και $a_{33}=0$. Οι άλλες περιπτώσεις δίνουν όμοια συμπεράσματα . Η (2) σ'αυτή τη περίπτωση γράφεται ως :

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0$$

ή

$$a_{11}\left(x+\frac{a_{14}}{a_{11}}\right)^2+a_{22}\left(y+\frac{a_{24}}{a_{22}}\right)^2+2a_{34}z+a=0 \qquad (5)$$

όπου θέσαμε $a=a_{44}-\dfrac{a_{14}^2}{a_{11}}-\dfrac{a_{24}^2}{a_{22}}$.

Η (5) για $a_{34}=0$, στο σύστημα O'XYZ που είναι παράλληλο στο Oxyz με $O'\left(-\dfrac{a_{14}}{a_{11}},-\dfrac{a_{24}}{a_{22}},0\right)$, γράφεται ως :

$$a_{11}X^2+a_{22}Y^2+a=0 ,$$

που παριστάνει , ανάλογα με τα πρόσημα των a_{11}, a_{22}, a , ελλειπτικό κύλινδρο (πραγματικό ή φανταστικό) , ένα μόνο σημείο , δύο επίπεδα ή υπερβολικό κύλινδρο. (Εξετάστε για ποιά πρόσημα των a_{11}, a_{22}, a έχουμε τις παραπάνω καταστάσεις;) .

Η (5) για $\alpha_{34}\neq 0$, στο σύστημα ΟΧΥΖ που είναι παράλληλο στο Oxyz με

$O'(-\frac{\alpha_{14}}{\alpha_{11}}, -\frac{\alpha_{24}}{\alpha_{22}}, -\frac{\alpha}{2\alpha_{34}})$, γίνεται :

$$\alpha_{11}X^2+\alpha_{22}Y^2+2\alpha_{34}Z=0 \quad ,$$

που παριστάνει ανάλογα με τα πρόσημα των α_{11}, α_{22}, α_{34} , ένα ελλειπτικό ή υπερβολικό παραβολοειδές (κοίταξε σελίδα 210 και 212) .

<u>Περίπτωση 3</u> . <u>Δύο από τους συντελεστές α_{11}, α_{22}, α_{33} είναι μηδενικοί και ο άλλος μη μηδενικός.</u>

Θα εξετάσουμε μόνο τη περίπτωση $\alpha_{11}\neq 0$ και $\alpha_{22}=\alpha_{33}=0$. Οι άλλες περιπτώσεις αντιμετωπίζονται όμοια και δίνουν ανάλογα συμπεράσματα. Η (2) σ'αυτή τη περίπτωση γραφέται ως :

$$\alpha_{11}x^2+2\alpha_{14}x+2\alpha_{24}y+2\alpha_{34}z+\alpha_{44}=0$$

ή

$$(6) \qquad \alpha_{11}(x+\frac{\alpha_{14}}{\alpha_{11}})^2+2\alpha_{24}y+2\alpha_{34}z+\alpha=0 \quad ,$$

όπου θέσαμε $\alpha=\alpha_{44}-\frac{\alpha_{14}^2}{\alpha_{11}}$.

Η (6) για $\alpha_{24}=\alpha_{34}=0$, στο σύστημα Ο'ΧΥΖ που είναι παράλληλο προς το Oxyz

με $O'(-\frac{\alpha_{14}}{\alpha_{11}}, 0, 0)$ γίνεται :

$$\alpha_{11}X^2+\alpha=0 \quad ,$$

που παριστάνει δύο επίπεδα (πραγματικά ή φανταστικά) ανάλογα με τα πρόσημα των α_{11}, α.

Αν ένας τουλάχιστον από τους συντελεστές α_{24}, α_{34} είναι μη μηδενικός, θέτουμε $\vartheta_0 = \text{τοξ εφ}\frac{\alpha_{34}}{\alpha_{24}}$ οπότε $\text{εφ}\vartheta_0 = \frac{\sin\vartheta_0}{\cos\vartheta_0} = \frac{\alpha_{34}}{\alpha_{24}}$ ή

$$(*) \qquad \alpha_{24}\sin\vartheta_0 - \alpha_{34}\cos\vartheta_0 = 0 \quad .$$

Θεωρούμε το σύστημα $O'XYZ$, που είναι συγχρόνως στροφή και παράλληλη μεταφορά του $Oxyz$, με $O'(-\frac{\alpha_{14}}{\alpha_{11}}, 0, 0)$ και $\bar{X}_0 = (1,0,0)$, $\bar{Y}_0 = (0, \cos\vartheta_0, \sin\vartheta_0)$, $\bar{Z}_0 = (0, -\sin\vartheta_0, \cos\vartheta_0)$. Έχουμε τότε (κοίταξε περίπτωση γ στη σελίδα 115)

$$x = -\frac{\alpha_{14}}{\alpha_{11}} + X$$

$$y = 0 + Y\cos\vartheta_0 - Z\sin\vartheta_0$$

$$z = 0 + Y\sin\vartheta_0 + Z\cos\vartheta_0 \quad .$$

Έτσι η (6) στο $O'XYZ$ σύστημα γίνεται :

$$\alpha_{11}X^2 + 2\alpha_{24}(Y\cos\vartheta_0 - Z\sin\vartheta_0) + 2\alpha_{34}(Y\sin\vartheta_0 + Z\cos\vartheta_0) + \alpha = 0$$

ή

$$\alpha_{11}X^2 + 2(\alpha_{24}\cos\vartheta_0 + \alpha_{34}\sin\vartheta_0)Y + 2(-\alpha_{24}\sin\vartheta_0 + \alpha_{34}\cos\vartheta_0)Z + \alpha = 0$$

ή λόγω της (*) και θέτοντας $\beta=2(\alpha_{24}\cos\vartheta_0+\alpha_{34}\sin\vartheta_0)$

(7) $$\alpha_{11}X^2+\beta Y+\alpha=0 \quad .$$

Είναι φανερό ότι $\beta\neq 0$ (γιατί;) . Έτσι η (7) γράφεται :

(8) $$\alpha_{11}X^2+\beta\left(Y+\frac{\alpha}{\beta}\right)=0 \quad .$$

Η (8) στο σύστημα $O''\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$, που είναι παράλληλο προς το $O'XYZ$ με $(0,-\frac{\alpha}{\beta},0)$, γίνεται

$$\alpha_{11}\bar{X}^2+\beta\bar{Y}=0 \quad ,$$

που παριστάνει ένα παραβολικό κύλινδρο .

Συμπέρασμα . Η εξίσωση (2) για τις διάφορες τιμές των συντελεστών παριστάνει , εκτός από τετριμμένες περιπτώσεις , μια από τις επιφάνειες δεύτερου βαθμού που εξετάσαμε στη παράγραφο 5.5 .

Παράδειγμα 5.8.2 . Στο σύστημα $Oxyz$ δίνεται η εξίσωση

$$y^2+x+2y+\sqrt{3}\,z-1=0 \quad .$$

Θέλουμε να δούμε τι παριστάνει αυτή η εξίσωση . Έχουμε εδώ τη περίπτωση 3 με $\alpha_{11}=\alpha_{33}=0$, $\alpha_{22}=1\neq 0$. Έτσι η εξίσωση γράφεται :

$$(y+1)^2+x+\sqrt{3}z-2=0 \quad .$$

Θέτουμε $\varepsilon\varphi\vartheta_0=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$. Άρα $\vartheta_0=60^o$. Θεωρούμε το σύστημα $O'XYZ$ με με $O'(o,-1,0)$ και $\bar{X}_0=(\cos60^o, 0, \sin60^o)$., $\bar{Y}_0=(0,1,0)$,

$\bar{Z}_0=(-\sin60^o, 0, \cos60^o)$. Τότε

$$x = X\cos60^o - Z\sin60^o = \frac{1}{2}X - \frac{\sqrt{3}}{2}Z$$

$$y = -1+X \qquad\qquad = -1+Y$$

$$z = X\sin60^o + Z\cos60^o = \frac{\sqrt{3}}{2}X + \frac{1}{2}Z \quad .$$

'Ετσι στο σύστημα $O'XYZ$ η εξίσωση της επιφάνειας γίνεται :

$$Y^2 + \frac{1}{2}X - \frac{\sqrt{3}}{2}Z + \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}X + \frac{1}{2}Z\right) - 2 = 0$$

ή

$$Y^2 + 2X - 2 = 0$$

ή

(*) $$Y^2 + 2(X-1) = 0 \quad .$$

Στο σύστημα $O''\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$, παράλληλα του $O'XYZ$ με $O''(1,0,0)$, η (*) γίνεται

$$\bar{Y}^2 + 2\bar{X} = 0 \quad ,$$

που παριστάνει ένα παραβολικό κύλινδρο .

<u>'Ασκηση</u> . Πως δίνεται το σύστημα $O''\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$ ως προς το αρχικό σύστημα $Oxyz$;

<u>Μελέτη της εξίσωσης (1).</u>

Η εξίσωση (1) αναφέρεται σε ένα σύστημα συντεταγμένων $Oxyz$. Θεωρούμε ένα σύστημα $OXYZ$, που είναι στροφή του $Oxyz$ (κοίταξε σελίδα 113) , με

$\bar{X}_0=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, $\bar{Y}_0=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ και $\bar{Z}_0=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$. Τότε έχουμε , αφού η βάση $\{\bar{X}_0,\bar{Y}_0,\bar{Z}_0\}$ είναι ορθοκανονική , ότι :

$$(9)\quad \begin{cases} \alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2 = 1 \\ \beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2 = 1 \\ \gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_\beta^2 = 1 \\ \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3=0 \\ \alpha_1\gamma_1+\alpha_2\gamma_2+\alpha_3\gamma_3=0 \\ \beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2+\beta_3\gamma_3=0 \end{cases}$$

Επίσης έχουμε (σελίδα 114, σχέσεις (4)) ότι :

$$(10)\quad \begin{cases} x=\alpha_1X+\beta_1Y+\gamma_1Z \\ y=\alpha_2X+\beta_2Y+\gamma_2Z \\ z=\alpha_3X+\beta_3Y+\gamma_3Z \end{cases}$$

Θέτοντας τις (10) στην (1) , παίρνουμε την εξίσωση της επιφάνειας , στο σύστημα OXYZ , που είναι της μορφής :

$$(11)\qquad s_1X^2+s_2Y^2+s_3Z^2+$$

$$+2\{\alpha_{11}\alpha_1\beta_1+\alpha_{22}\alpha_2\beta_2+\alpha_{33}\alpha_3\beta_3+\alpha_{12}(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)+\alpha_{13}(\alpha_1\beta_3+\alpha_3\beta_1)+\alpha_{23}(\alpha_2\beta_3+\alpha_3\beta_2)\}XY$$

$$+2\{\alpha_{11}\alpha_1\gamma_1+\alpha_{22}\alpha_2\gamma_2+\alpha_{33}\alpha_3\gamma_3+\alpha_{12}(\alpha_1\gamma_2+\alpha_2\gamma_1)+\alpha_{13}(\alpha_1\gamma_3+\alpha_3\gamma_1)+\alpha_{23}(\alpha_2\gamma_3+\alpha_3\gamma_2)\}XZ$$

$$+2\{\alpha_{11}\beta_1\gamma_1+\alpha_{22}\beta_2\gamma_2+\alpha_{33}\beta_3\gamma_3+\alpha_{12}(\beta_1\gamma_2+\beta_2\gamma_1)+\alpha_{13}(\beta_1\gamma_2+\beta_3\gamma_1)+\alpha_{23}(\beta_2\gamma_3+\beta_3\gamma_2)\}YZ$$

$$+2(\alpha_{14}\alpha_1+\alpha_{24}\alpha_2+\alpha_{34}\alpha_3)X+2(\alpha_{14}\beta_1+\alpha_{24}\beta_2+\alpha_{34}\beta_3)Y+(\alpha_{14}\gamma_1+\alpha_{24}\gamma_2+\alpha_{34}\gamma_3)Z+\alpha_{44}=0 \quad ,$$

όπου

$$s_1=\alpha_{11}\alpha_1^2+\alpha_{22}\alpha_2^2+\alpha_{33}\alpha_3^2+2\alpha_{12}\alpha_1\alpha_2+2\alpha_{13}\alpha_1\alpha_3+2\alpha_{23}\alpha_2\alpha_3$$

$$s_2=\alpha_{11}\beta_1^2+\alpha_{22}\beta_2^2+\alpha_{33}\beta_3^2+2\alpha_{12}\beta_1\beta_2+2\alpha_{13}\beta_1\beta_3+2\alpha_{23}\beta_2\beta_3$$

$$s_3=\alpha_{11}\gamma_1+\alpha_{22}\gamma_2+\alpha_{33}\gamma_3+2\alpha_{12}\gamma_1\gamma_2+2\alpha_{13}\gamma_1\gamma_3+2\alpha_{23}\gamma_2\gamma_3 \quad .$$

Θέτουμε το ερώτημα : Υπάρχει σύστημα OXYZ , ως προς το οποίο η (11) έχει μηδενικούς συντελεστές των όρων XY , XZ , YZ ; Η απάντηση στο ερώτημα είναι καταφατική αν το σύστημα των εξισώσεων (9) και των

$$(12)\quad \begin{cases} \alpha_{11}\alpha_1\beta_1+\alpha_{22}\alpha_2\beta_2+\alpha_{33}\alpha_3\beta_3+\alpha_{12}(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)+\alpha_{13}(\alpha_1\beta_3+\alpha_3\beta_1)+\alpha_{23}(\alpha_2\beta_3+\alpha_3\beta_2)= \\ \alpha_{11}\alpha_1\gamma_1+\alpha_{22}\alpha_2\gamma_2+\alpha_{33}\alpha_3\gamma_3+\alpha_{12}(\alpha_1\gamma_2+\alpha_2\gamma_1)+\alpha_{23}(\alpha_2\gamma_3+\alpha_3\gamma_1)+\alpha_{23}(\alpha_2\gamma_3+\alpha_3\gamma_2)= \\ \alpha_{11}\beta_1\gamma_1+\alpha_{22}\beta_2\gamma_2+\alpha_{33}\beta_3\gamma_3+\alpha_{12}(\beta_1\gamma_2+\beta_2\gamma_1)+\alpha_{13}(\beta_1\gamma_3+\beta_3\gamma_1)+\alpha_{23}(\beta_2\gamma_3+\beta_3\gamma_2)= \end{cases}$$

έχει λύση με αγνώστους τα α_i, β_i, γ_i $(i=1,2,3)$. Με πολλή μεγάλη διαδικασία μπορεί κάποιος να δείξει ότι το σύστημα των εξισώσεων (9) και (12) έχει πάντοτε λύση . Έτσι πάντα υπάρχει σύστημα OXYZ ως προς το οποίο η εξίσωση (1) γίνεται της μορφής :

$$(13).\qquad s_1X^2+s_2Y^2+s_3Z^2+2\beta_{14}X+2\beta_{24}Y+2\beta_{34}Z+\beta_{44}=0 \quad .$$

Όμως η εξίσωση (την οποία μελετήσαμε προηγουμένως) παριστάνει μια από τις επιφάνειες της παραγράφου 5.5 . Έτσι έχουμε :

<u>Τελικό συμπέρασμα</u> : Η εξίσωση (1) για τις διάφορες τιμές των συντελεστών παριστάνει , εκτός από τετριμμένες περιπτώσεις , μια από τις επιφάνειες δευτέρου βαθμού που εξετάσαμε στη παράγραφο 5.5 .

<u>Παρατήρηση</u> . Η αναγωγή της εξίσωσης(1) στη μορφή (13) με μεθόδους της Γραμμικής Άλγεβρας , όπου δίνεται και μια ερμηνεία των συντελεστών s_1 , s_2 , s_3 και των διανυσμάτων $\bar{X}_0$, $\bar{Y}_0$, $\bar{Z}_0$, είναι απλούστερη και κομψότερη . Έτσι στη Γραμμική Άλγεβρα θα δει κανείς ότι τα s_1 , s_2 , s_3 και $\bar{X}_0$, $\bar{Y}_0$, $\bar{Z}_0$ είναι αντίστοιχα οι ιδιοτιμές και ορθοκανονική βάση ιδιοδιανυσμάτων του συμμετρικού πίνακα

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{22} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$$

<u>Παράδειγμα 5.8.3</u> . Στο σύστημα Oxyz δίνεται η εξίσωση

$$3x^2+3y^2+2z^2+3xy-2=0 \quad .$$

Θέλουμε να δούμε , τι επιφάνεια παριστάνει αυτή η εξίσωση .

Το σύστημα των εξισώσεων (12) αφού ,

$$\alpha_{11}=3 \ , \ \alpha_{22}=3 \ , \ \alpha_{33}=2 \ , \ \alpha_{12}=\frac{3}{2} \ , \ \alpha_{13}=0 \ , \ \alpha_{23}=0$$

γίνεται

$$(*)\quad \begin{cases} 3\alpha_1\beta_1 + 3\alpha_2\beta_2+2\alpha_3\beta_3+ \frac{3}{2}\,(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)=0 \\ 3\alpha_1\gamma_1+3\alpha_2\gamma_2+2\alpha_3\gamma_3+ \frac{3}{2}\,(\beta_1\gamma_2+\beta_2\gamma_1)=0 \\ 3\beta_1\gamma_1+3\beta_2\gamma_2+2\beta_3\gamma_3+ \frac{3}{2}\,(\beta_1\gamma_2+\beta_2\gamma_1)=0 \end{cases} .$$

Το σύστημα των εξισώσεων (*) και των (9) έχει λύση $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)$, $(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0)$ και $(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=(0,0,1)$ (επαληθεύστε το !) .

'Ετσι η εξίσωσή μας στο σύστημα OXYZ με $\bar{X}_0=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)$, $\bar{Y}_0=(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0)$, $\bar{Z}_0=(0,0,1)$, αφού $x=\frac{1}{\sqrt{2}}\,(X+Y)$, $y=\frac{1}{\sqrt{2}}\,(X-Y)$, $z=Z$ γίνεται :

$$3\cdot\frac{1}{2}(X+Y)^2+3\cdot\frac{1}{2}(X-Y)^2+2Z^2+3\cdot\frac{1}{2}(X+Y)(X-Y)-2=0$$

ή

$$9X^2+3Y^2+4Z^2-4=0$$

ή

$$\frac{X^2}{\frac{4}{9}}+\frac{Y^2}{\frac{4}{3}}+\frac{Z^2}{1}=0 ,$$

που όπως ξέρουμε είναι ένα ελλειψοειδές .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ VI : ΙΣΟΜΕΤΡΙΕΣ ΤΟΥ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΚΑΙ ΤΟΥ ΧΩΡΟΥ

Στη Στοιχειώδη Γεωμετρία ονομάζουμε , ως γνωστόν , δύο γεωμετρικά σχήματα "ίσα" (congruent) , αν μπορούμε να μετατοπίσουμε το ένα , έτσι ώστε να συμπέσει με το άλλο . Η μετατόπιση αυτή σημαίνει εποπτικά , ότι μετακινούμε το σχήμα χωρίς να το παραμορφώσουμε ή αλλιώς , χωρίς να μεταβάλλουμε τις αποστάσεις μεταξύ τυχόντων σημείων του . Σ'αυτό το Κεφάλαιο σκοπεύουμε να περιγράψουμε μαθηματικά αυτή τη μετατόπιση (μετακίνηση) . Θα προσπαθήσουμε να κάνουμε αυτή τη μελέτη , με τα μέχρι τώρα διαθέσιμα εργαλεία και να αποφύγουμε την Γραμμική Άλγεβρα . Πρέπει όμως , να σημειώσουμε ότι η μελέτη με τον μηχανισμό της Γραμμικής Άλγεβρας είναι περισσότερο κομψή και απλή .

6.1. Γεωμετρικοί Μετασχηματισμοί.

Σημειώνουμε με E^3 , E^2 και E το σύνολο των σημείων του περιβάλλοντα χώρου , του επιπέδου και της ευθείας , αντίστοιχα . Μια απεικόνιση $f : E^3 \to E^3$, $P \to f(P) = P'$, λέγεται γεωμετρικός μετασχηματισμός των σημείων του χώρου . Αντίστοιχα , απεικονίσεις $f : E^2 \to E^2$, $P \to f(P) = P'$ και $f : E \to E$, $P \to f(P) = P'$, λέγονται γεωμετρικοί μετασχηματισμοί του επιπέδου και της ευθείας . Στη συνέχεια αν $P(x,y,z)$ είναι ένα σημείο του χώρου , ως προς κάποιο σύστημα συντεταγμένων $Oxyz$, τότε την εικόνα του θα συμβολίζουμε με $f(P) = P'(x',y',z')$, ως προς το ίδιο σύστημα συντεταγμένων . Αντίστοιχους συμβολισμούς έχουμε για γεωμετρικούς μετασχηματισμούς επιπέδου ή ευθείας . Έτσι, αν $f : E^3 \to E^3$, $P \to f(P) = P'$ είναι ένας γεωμετρικός μετασχηματισμός του χώρου και $Oxyz$ ένα σταθερό ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων , τότε έχουμε :

$$(1)\qquad \begin{cases} x' = \varphi_1(x,y,z) \\ y' = \varphi_2(x,y,z) \\ z' = \varphi_3(x,y,z) \end{cases} ,$$

όπου $P(x,y,z)$, $P'(x',y',z')$ και $f(P)=P'$.

Οι σχέσεις (1) λέγονται <u>αναλυτικές εξισώσεις</u> του γεωμετρικού μετασχηματισμού , ως προς το σύστημα $Oxyz$. Αντίστροφα , σχέσεις της μορφής (1) περιγράφουν ένα γεωμετρικό μετασχηματισμό , ως προς κάποιο σύστημα συντεταγμένων .

Ανάλογα , ισχύουν για το επίπεδο και την ευθεία . Έτσι οι αναλυτικές εξισώσεις ενός γεωμετρικού μετασχηματισμού του επιπέδου , ως προς κάποιο σύστημα συντεταγμένων $Oxyz$, είναι :

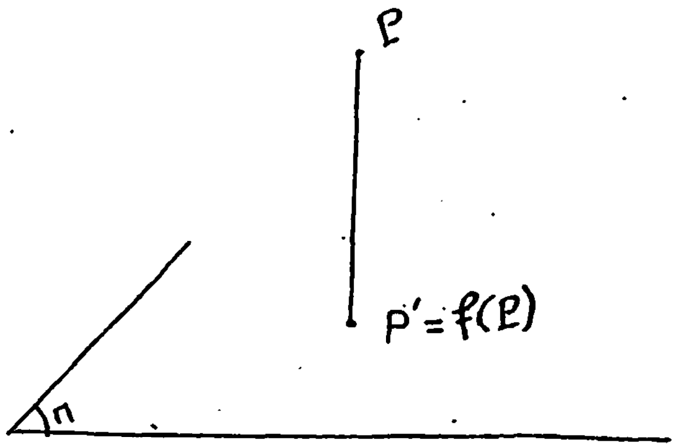
$$(2)\qquad \begin{cases} x' = \varphi_1(x,y) \\ y' = \varphi_2(x,y) \end{cases} , \text{ όπου } P(x,y) , P'(x',y')$$

και ενός γεωμετρικού μετασχηματισμού της ευθείας είναι :

(3) $\qquad x' = \varphi(x)$, όπου $P(x)$, $P'(x')$.

<u>Παρατήρηση</u> . Οι αναλυτικές εξισώσεις ενός γεωμετρικού μετασχηματισμού αλλάζουν , καθώς αλλάζει το σύστημα συντεταγμένων .

<u>Παράδειγμα</u> 6.1.1. Στον περιβάλλοντα χώρο θεωρούμε ένα επίπεδο π . Θεωρούμε τον γεωμετρικό μετασχηματισμό $f : E^3 \to E^3$, $P \to f(P) = P'$ = ορθογώνια προβολή του P πάνω στο π .



Θεωρούμε ένα σύστημα συντεταγμένων Oxyz , ως προς το οποίο , το επίπεδο π έχει εξίσωση την

$$Ax+By+\Gamma z+\Delta=0 \quad .$$

Θέλουμε να βρούμε τις αναλυτικές εξισώσεις του γεωμετρικού μετασχηματισμού , ως προς το σύστημα Oxyz . Ας είναι $P_1(x_1,y_1,z_1)$ ένα σημείο του E^3 . Το $f(P_1)=P_1'$ είναι η τομή του επιπέδου π και της ευθείας από το P_1 κάθετης στο π . Οι παραμετρικές εξισώσεις αυτής της ευθείας είναι :

$$\{x=x_1+tA \quad , \quad y=y_1+tB \quad , \quad z=z_1+t\Gamma\} \quad .$$

Η τομή ευθείας και επιπέδου δίνεται από τις παραμετρικές εξισώσεις με $t=t_0$, όπου t_0 είναι λύση της

$$A(x_1+tA)+B(y_1+tB)+\Gamma(z_1+t\Gamma)+\Delta=0 \quad .$$

Έτσι $$t_0=-\frac{Ax_1+By_1+\Gamma z_1+\Delta}{A^2+B^2+\Gamma^2} \quad .$$

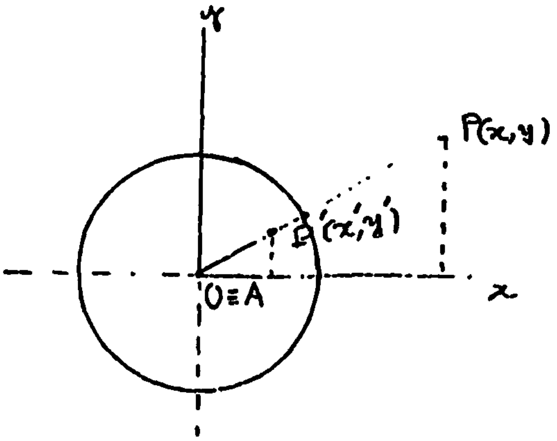
'Αρα το P_1' έχει συντεταγμένες :

$$P_1'\left(x_1-\frac{Ax_1+By_1+\Gamma z_1+\Delta}{A^2+B^2+\Gamma^2}A\ ,\ y_1-\frac{Ax_1+By_1+\Gamma z_1+\Delta}{A^2+B^2+\Gamma^2}B\ ,\ z_1-\frac{Ax_1+By_1+\Gamma z_1+\Delta}{A^2+B^2+\Gamma^2}\Gamma\right) .$$

Συνεπώς οι αναλυτικές εξισώσεις του γεωμετρικού μετασχηματισμού είναι :

$$\begin{cases} x'=\dfrac{B^2+\Gamma^2}{A^2+B^2+\Gamma^2}x-\dfrac{AB}{A^2+B^2+\Gamma^2}y-\dfrac{A\Gamma}{A^2+B^2+\Gamma^2}z-\dfrac{A\Delta}{A^2+B^2+\Gamma^2} \\[2ex] y'=-\dfrac{AB}{A^2+B^2+\Gamma^2}x+\dfrac{A^2+\Gamma^2}{A^2+B^2+\Gamma^2}y-\dfrac{B\Gamma}{A^2+B^2+\Gamma^2}z-\dfrac{B\Delta}{A^2+B^2+\Gamma^2} \\[2ex] z'=-\dfrac{A\Gamma}{A^2+B^2+\Gamma^2}x-\dfrac{B\Gamma}{A^2+B^2+\Gamma^2}y+\dfrac{A^2+B^2}{A^2+B^2+\Gamma^2}z-\dfrac{\Gamma\Delta}{A^2+B^2+\Gamma^2} \end{cases} .$$

Παράδειγμα 6.1.2. Στο επίπεδο θεωρούμε κύκλο κέντρου A και ακτίνας R . Θεωρούμε τον γεωμετρικό μετασχηματισμό σημείων $f: E^2 \to E^2$, $P \to f(P)=P'$, όπου P' είναι το μοναδικό σημείο της ημιευθείας από το A προς το P , έτσι ώστε να ισχύει : $\overline{AP}\cdot\overline{AP'}=R^2$



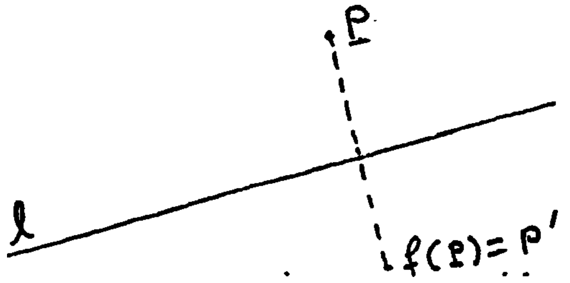
Να βρούμε τις αναλυτικές εξισώσεις αυτού του μετασχηματισμού , ως προς ένα σύστημα συντεταγμένων Oxy με O≡A (δηλαδή , η αρχή συμπίπτει με το κέντρο του κύκλου) . Είναι φανερό , ότι ο μετασχηματισμός ορίζεται για όλα τα σημεία του επιπέδου , εκτός από το σημείο A . Επίσης : $(x',y')=(\lambda x,\lambda y)$ με $\lambda>0$. Από $\overline{AP}\cdot\overline{AP'}=R^2$ έχουμε : $\lambda\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}=R^2$ ή $\lambda=\dfrac{R^2}{x^2+y^2}$.

'Ετσι οι αναλυτικές εξισώσεις είναι οι :

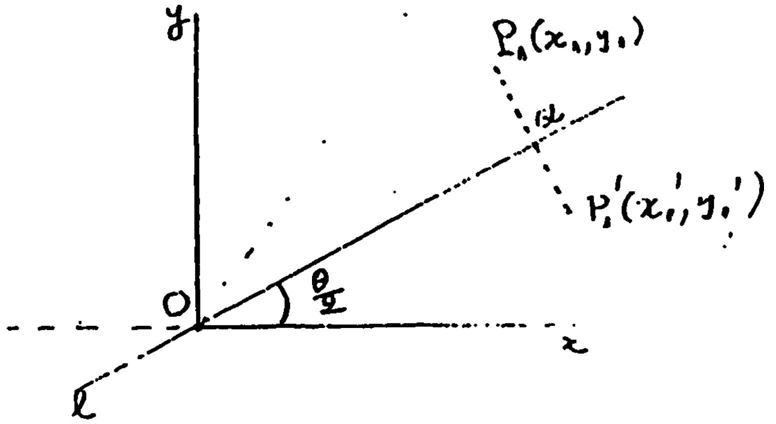
$$\begin{cases} x'=\dfrac{R^2x}{x^2+y^2} \\ y'=\dfrac{R^2y}{x^2+y^2} \end{cases} .$$

Ο παραπάνω μετασχηματισμός λέγεται <u>αντιστροφή</u> (inversion) του επιπέδου ως προς τον κύκλο K(A,R) , και είναι βασικός μετασχηματισμός για τη μελέτη της Υπερβολικής Γεωμετρίας .

<u>Παράδειγμα 6.1.3.</u> Στο επίπεδο θεωρούμε μια ευθεία ℓ . Ορίζουμε τον γεωμετρικό μετασχηματισμό : $f:E^2\to E^2$, $P\to f(P)=P'$ = συμμετρικό του P , ως προς την ευθεία ℓ . Θα βρούμε τις αναλυτικές εξισώσεις αυτού του μετασχηματισμού ,



ως προς ένα σύστημα συντεταγμένων Oxy , το οποίο έχει αρχή O πάνω στην ℓ και η ℓ κάνει γωνία $\theta/2$ με τον άξονα Ox .



Η ευθεία έχει εξίσωση : $y = x\varepsilon\varphi\,\frac{\theta}{2}$. Η ευθεία P_1P_1' έχει εξίσωση : $y-y_1 = -\frac{1}{\varepsilon\varphi\,\theta/2}(x-x_1)$. Οι δύο ευθείες τέμνονται στο σημείο

$$Q(x_1\cos^2\theta/2 + \frac{y_1}{2}\sin\theta\ ,\ \frac{x_1}{2}\sin\theta + y_1\sin^2\theta/2)\ .$$

'Ετσι το σημείο P_1' έχει συντεταγμένες $P_1'(x_1\cos\theta + y_1\sin\theta, x_1\sin\theta - y_1\cos\theta)$. Συνεπώς οι αναλυτικές εξισώσεις αυτού του γεωμετρικού μετασχηματισμού , ως προς το συγκεκριμμένο σύστημα συντεταγμένων Oxy , είναι οι

$$\text{(4)}\qquad \begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta - y\cos\theta \end{cases}\ .$$

Στις επόμενες παραγράφους , θα εξετάσουμε ειδικές κατηγορίες γεωμετρικών μετασχηματισμών .

Τελειώνουμε την παράγραφο αυτή με έναν ορισμό .

<u>Ορισμός 6.1.1</u>. Θεωρούμε τον γεωμετρικό μετασχηματισμό σημείων $f: E^3 \to E^3$, $P \to f(P) = P'$. Ένα σημείο $P_0 \in E^3$, λέγεται <u>σταθερό σημείο</u> ως προς τον μετασχηματισμό f ή <u>σταθερό σημείο του f</u> , αν $f(P_0) = P_0$, δηλαδή $P_0' = P_0$.

<u>Παρατηρήσεις</u> : 1. Ανάλογους ορισμούς έχουμε για γεωμετρικούς μετασχηματισμούς σημείων επιπέδου και ευθείας .

2. Ένας γεωμετρικός μετασχηματισμός σημείων μπορεί να μην έχει σταθερό σημείο ή μπορεί να έχει πολλά σταθερά σημεία . Στο παράδειγμα 6.1.1. , όλα τα σημεία του επιπέδου π , είναι σταθερά σημεία . Επίσης στο παράδειγμα 6.1.2 τα σημεία του κύκλου είναι σταθερα σημεία του μετασχηματισμού .

6.2. <u>Γραμμικοί Μετασχηματισμοί στο επίπεδο</u> .

<u>Ορισμός 6.2.1</u>. Έστω $L: E^2 \to E^2$, $P \to L(P) = P'$, ένας γεωμετρικός μετασχηματισμός σημείων επιπέδου και A ένα σταθερό σημείο ως προς L . O L λέγεται <u>Γραμμικός Μετασχηματισμός</u> (σύντομα Γ.Μ.) <u>ως προς Α</u> , αν ως προς ένα ορθογώνιο σύστημα Axy , έχει αναλυτικές εξισώσεις της μορφής :

$$(1) \qquad \begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y \\ y' = a_{21}x + a_{22}y \end{cases} .$$

Οι σχέσεις (1) γράφονται σύντομα με μορφή πινάκων :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ,$$

όπου ο πίνακας $L = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ (χρησιμοποιούμε ίδιο σύμβολο , όπως για του Γ.Μ. L) λέγεται <u>πίνακας του Γ.Μ. L ως προς το σύστημα Axy</u> .

<u>Παρατηρήσεις</u> . 1. Ένας γεωμετρικός μετασχηματισμός του επιπέδου χωρίς σταθερά σημεία δεν μπορεί να είναι γραμμικός (από τον ορισμό) . Όμως και στη περίπτωση , που έχει σταθερό σημείο , πάλι μπορεί να μην είναι γραμμικός .

2. Αν ένας γεωμετρικός μετασχηματισμός L έχει , ως προς ένα σύστημα συντεταγμένων Oxy , αναλυτικές εξισώσεις της μορφής (1) , τότε το O είναι σταθερό σημείο και ο L είναι γραμμικός μετασχηματισμός ως προς O (γιατί;) .

<u>Πρόταση 6.2.1</u>. Έστω ο L είναι Γ.Μ. ως προς A και Axy το ορθογώνιο σύστημα , ως προς το οποίο οι αναλυτικές εξισώσεις του L είναι οι (1) . Τότε,ως προς κάθε ορθογώνιο σύστημα AXY , οι αναλυτικές εξισώσεις του L είναι της μορφής (1) .

<u>Απόδειξη</u> . Επειδή το σύστημα AXY , θα είναι στροφή του Axy κατά γωνία φ θα έχουμε (σελίδα 117 , σχέσεις (11))

$$\begin{aligned} x &= X\cos\varphi - Y\sin\varphi \\ y &= X\sin\varphi + Y\cos\varphi \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} x' &= X'\cos\varphi - Y'\sin\varphi \\ y' &= X'\sin\varphi + Y'\cos\varphi \end{aligned} ,$$

όπου $P\begin{pmatrix} x,y \\ X,Y \end{pmatrix}$ και $P'\begin{pmatrix} x',y' \\ X',Y' \end{pmatrix}$.

θέτοντας στις (1) έχουμε :

$$\begin{cases} X'\cos\varphi - Y'\sin\varphi = \alpha_{11}(X\cos\varphi - Y\sin\varphi) + \alpha_{12}(X\sin\varphi + Y\cos\varphi) \\ X'\sin\varphi + Y'\cos\varphi = \alpha_{12}(X\cos\varphi - Y\sin\varphi) + \alpha_{22}(X\sin\varphi + Y\cos\varphi) \end{cases}$$

ή

$$(2) \quad \begin{cases} X'\cos\varphi - Y'\sin\varphi = (\alpha_{11}\cos\varphi + \alpha_{12}\sin\varphi)X + (\alpha_{12}\cos\varphi - \alpha_{11}\sin\varphi)Y \\ X'\sin\varphi + Y'\cos\varphi = (\alpha_{21}\cos\varphi + \alpha_{22}\sin\varphi)X + (\alpha_{22}\cos\varphi - \alpha_{21}\sin\varphi)Y \end{cases} .$$

Λύνοντας το σύστημα (2) ως προς X', Y' παίρνουμε

$$(3) \quad \begin{cases} X' = A_{11}X + A_{12}Y \\ Y' = A_{21}X + A_{22}Y \end{cases} ,$$

όπου τα A_{ij} $(i,j=1,2)$ εξαρτώνται από τα α_{ij} $(i,j=1,2)$, $\cos\varphi$ και $\sin\varphi$. Οι (3) είναι οι αναλυτικές εξισώσεις του L , ως προς το AXY και είναι της μορφής (1) .

<u>Παρατήρηση</u> . Η παραπάνω πρόταση διευκρινίζει ότι το σύστημα Axy στον ορισμό 6.2.1 δεν παίζει σημαντικό ρόλο . . .

Θα δούμε μια σημαντική πρόταση .

<u>Πρόταση 6.2.2.</u> Δίνεται ο γεωμετρικός μετασχηματισμός $f:E^2 \to E^2, P \to f(P)=P'$, που έχει δύο σταθερά σημεία A και B . Αν ο f είναι Γ.Μ., ως προς A , τότε ,

1) Όλα τα σημεία της ευθείας ℓ , που ορίζεται από τα A,B είναι σταθε-

ρά ως προς f .

2) Ο f είναι Γ.Μ. ως προς κάθε σημείο της ℓ .

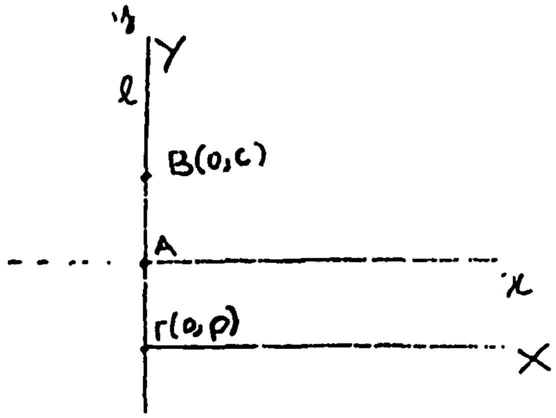
3) Οι αναλυτικές εξισώσεις του f ως προς ένα σύστημα ΓΧΥ με $\Gamma \in \ell$ και άξονα ΓΥ την ℓ είναι της μορφής :

$$X' = a_{11}X$$

$$Y' = a_{21}X+Y \quad .$$

Απόδειξη . Αφού f είναι Γ.Μ ως προς Α , τότε οι αναλυτικές του εξισώσεις , ως προς ένα σύστημα Αxy (άρα ως προς κάθε σύστημα ΑΧΥ) με άξονα Αy την ℓ , θα είναι της μορφής :

$$(4) \qquad \begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y \\ y' = a_{21}x + a_{22}y \end{cases} \quad .$$



Σε αυτό το σύστημα το Β θα έχει συντεταγμένες (0,c) με $c \neq 0$, αφού $B \neq A$. Επειδή όμως το Β είναι σταθερό θα είναι Β'(0,c) . Έτσι από τις (4) παίρνουμε :

$$0 = \alpha_{11}\cdot 0 + \alpha_{12}\cdot c$$

$$c = \alpha_{21}\cdot 0 + \alpha_{22}\cdot c$$

ή, αφού $c \neq 0$, $\alpha_{12} = 0$ και $\alpha_{22} = 1$. Συνεπώς οι αναλυτικές εξισώσεις θα είναι της μορφής :

$$(5) \quad \begin{cases} x' = \alpha_{11}x \\ y' = \alpha_{21}x + y \end{cases} .$$

'Εστω τώρα $\Gamma(0,m)$ ένα σημείο της ℓ . Οι συντεταγμένες x', y' του Γ' θα είναι :

$$x' = \alpha_{11}\cdot 0 = 0$$

$$y' = \alpha_{21}\cdot 0 + m = m \quad ,$$

δηλαδή $\Gamma'(0,m)$. 'Αρα κάθε σημείο Γ της ℓ είναι σταθερό ως προς f . Οι αναλυτικές εξισώσεις του f ως προς το Axy είναι οι (5) . Ποιές οι αναλυτικές εξισώσεις , ως προς ένα σύστημα ΓXY παράλληλο προς το Axy στο $\Gamma(0,\rho)$; Ισχύουν

$$\begin{Bmatrix} x = X + 0 \\ y = Y + \rho \end{Bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{Bmatrix} x' = X' + 0 \\ y' = Y' + \rho \end{Bmatrix} ,$$

οπότε θέτοντας στις (5) παίρνουμε :

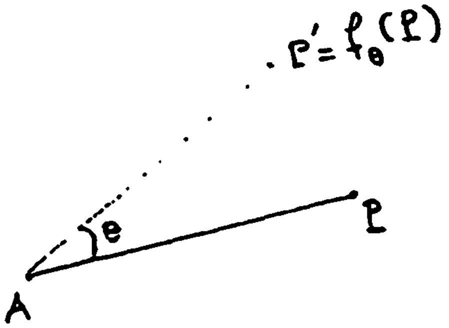
$$X' = a_{11}X$$

$$Y' = a_{21}X + Y \quad .$$

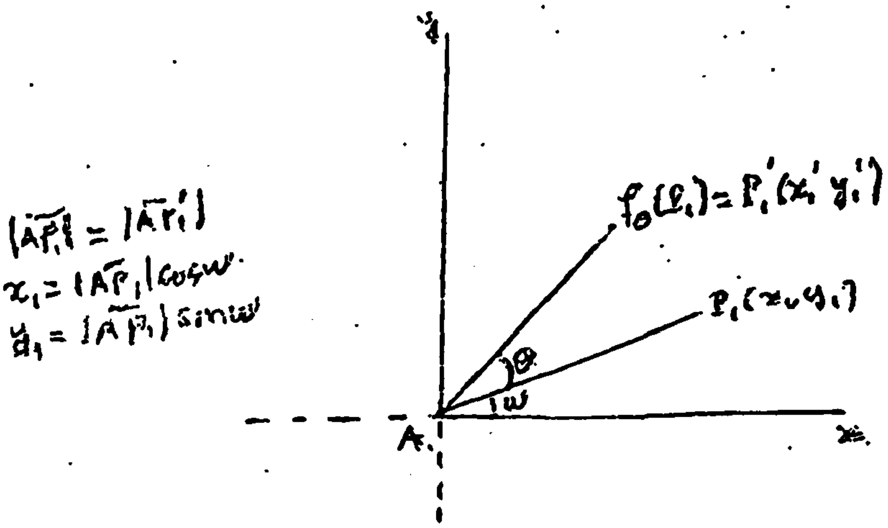
Έτσι ο f είναι Γ.Μ. ως προς Γ για κάθε $\Gamma \in \ell$ και έχει αναλυτικές εξισώσεις της μορφής , που θέλαμε να δείξουμε .

<u>Παρατήρηση</u> . Αν οι αναλυτικές εξισώσεις ενός γεωμετρικού μετασχηματισμού $f: E^2 \to E^2$, ως προς ένα σύστημα συντεταγμένων είναι της μορφής (5) , τότε όλα τα σημεία του άξονα των y είναι σταθερά σημεία για τον μετασχηματισμό και ο f είναι Γ.Μ. ως προς κάθε σημείο του άξονα των y .

<u>Παράδειγμα 6.2.1</u>. Έστω A ένα σημείο του επιπέδου E^2 . Θεωρούμε τον γεωμετρικό μετασχηματισμό $f_\theta: E^2 \to E^2, P \to f_\theta(P) = P' =$ στροφή του P περί το A (κατά τη θετική φορά) κατά γωνία θ . Θέλουμε



να μελετήσουμε αυτόν το γεωμετρικό μετασχηματισμό . Είναι φανερό ότι $f_\theta(A) = A$. Έτσι το σημείο A είναι σταθερό σημείο,ως προς το f_θ . Θεωρούμε ένα ορθογώνιο σύστημα Axy . Θα βρούμε τις αναλυτικές εξισώσεις του f_θ , ως προς αυτό το σύστημα .



'Εχουμε : $x_1' = |\overline{AP}_1'|\cos(\theta+\omega) = |\overline{AP}_1|\cos(\theta+\omega) = |\overline{AP}_1|\cos\theta\cos\omega - |\overline{AP}_1|\sin\theta\sin\omega$

$= x_1\cos\theta - y_1\sin\theta$

$y_1' = |\overline{AP}_1'|\sin(\theta+\omega) = |\overline{AP}_1|\sin(\theta+\omega) = |\overline{AP}_1|\sin\theta\cos\omega + |\overline{AP}_1|\cos\theta\sin\omega$

$= x_1\sin\theta + y_1\cos\theta$.

'Ετσι οι αναλυτικές εξισώσεις του f_θ ως προς το Axy (όπου A είναι σταθερό σημείο του f_θ) είναι οι :

$$(6) \qquad \begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases} .$$

Ο μετασχηματισμός f_θ είναι λοιπόν Γ.Μ. ως προς A συμβολίζεται με $R_\theta(A)$ και λέγεται <u>στροφή κατά γωνία θ περί το Α</u> .

Με όμοιο τρόπο βρίσκουμε , ότι οι αναλυτικές εξισώσεις της στροφής $R_{-\theta}(A)$ είναι οι :

$$x' = x\cos\theta + y\sin\theta$$

$$y' = -x\sin\theta + y\cos\theta \quad ,$$

που δίνονται από τις (6) θέτοντας αντί θ το $-\theta$.

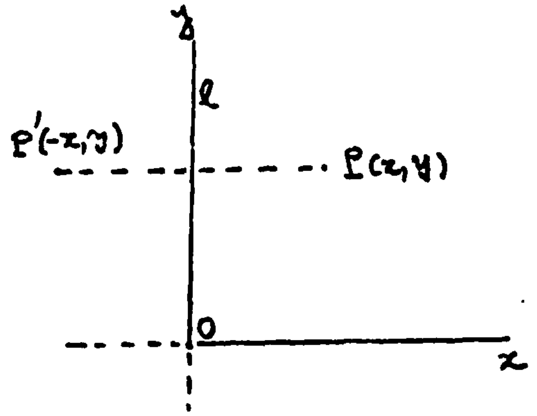
Παράδειγμα 6.2.2. Στο παράδειγμα 6.1.3. τα σημεία της ℓ είναι σταθερά σημεία , ως προς τον γεωμετρικό μετασχηματισμό $f: E^2 \to E^2$, $P \to f(P) = P' =$ συμμετρικό του P ως προς την ℓ . Οι αναλυτικές εξισώσεις αυτού του μετασχηματισμού ως προς ένα σύστημα Oxy με $O \in \ell$ και $\measuredangle(\vec{x}_0, \ell) = \theta/2$ είναι οι :

$$(7) \qquad \begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta - y\cos\theta \end{cases} .$$

'Ετσι αυτός ο γεωμετρικός μετασχηματισμός είναι Γ.Μ. ως προς κάθε σημείο της ℓ , συμβολίζεται με K_ℓ και λέγεται κατοπτρισμός του επιπέδου ως προς ℓ . Ειδικά , όταν ο άξονας Oy συμπίπτει με την ℓ , τότε οι αναλυτικές εξισώσεις είναι (γιατί;)

$$x' = -x$$

$$y' = y$$



Είναι της μορφής (5) με $\alpha_{11}=-1$ και $\alpha_{12}=0$.

Με όμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι αν $\sphericalangle(\bar{x}_0,\ell)=-\theta/2$, τότε οι αναλυτικές εξισώσεις του Γ.Μ. είναι οι

$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$$

$$y' = -x\sin\theta - y\cos\theta \quad ,$$

οι οποίες προκύπτουν από τις (7) βάζοντας αντί θ το $-\theta$.

Στη συνέχεια θα δούμε ιδιότητες και εφαρμογές των Γ.Μ του επιπέδου . Ας είναι λοιπόν L ένας Γ.Μ ως προς το σημείο 0 , με αναλυτικές εξισώσεις ως προς το σύστημα Οxy, τις :

$$x' = \alpha_{11}x+\alpha_{12}y$$

$$y' = \alpha_{21}x+\alpha_{22}y \quad ,$$

Θεωρούμε τρία σημεία $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$, $P_3(x_3,y_3)$ του επιπέδου . Τότε για τις εικόνες $P_1'(x_1',y_1')$, $P_2(x_2',y_2')$, $P_3(x_3',y_3')$, αφού

$$\left.\begin{aligned} x_i' &= \alpha_{11}x_i+\alpha_{12}y_i \\ y_i' &= \alpha_{21}x_i+\alpha_{22}y_i \end{aligned}\right\} \text{ για } i=1,2,3$$

θα έχουμε :

$$\begin{vmatrix} x_1' & y_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & 1 \\ x_3' & y_3' & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11}x_1+\alpha_{12}y_1 & \alpha_{21}x_1+\alpha_{22}y_1 & 1 \\ \alpha_{11}x_2+\alpha_{12}y_2 & \alpha_{21}x_2+\alpha_{22}y_2 & 1 \\ \alpha_{11}x_3+\alpha_{22}y_3 & \alpha_{21}x_3+\alpha_{23}y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

ή

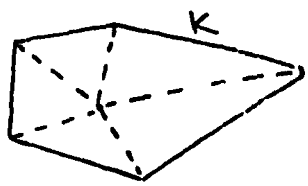
$$(8) \qquad \begin{vmatrix} x_1' & y_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & 1 \\ x_3' & y_3' & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} .$$

<u>Παρατήρηση</u> . Από την (8) συμπεραίνουμε ότι : Αν τα σημεία P_1, P_2, P_3 είναι συγγραμμικά , τότε και οι εικόνες των P_1', P_2', P_3' είναι συγγραμμικά σημεία. 'Ετσι οι Γ.Μ απεικονίζουν ευθείες σε ευθείες . Μπορεί όμως μη συγγραμμικά σημεία να απεικονίζονται σε ευθεία αν $\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = 0$.

Από την (8) παίρνουμε ότι :

$$(9) \qquad \text{εμβαδόν } (\overset{\triangle}{P_1' P_2' P_3'}) = \left\| \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{matrix} \right\| \cdot \text{εμβαδόν } (\overset{\triangle}{P_1 P_2 P_3}) .$$

Επειδή , κάθε κλειστό πολύγωνο K χωρίζεται σε τρίγωνα

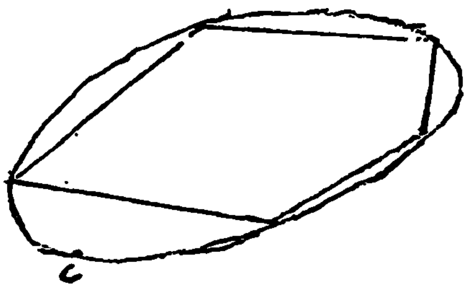


από την (9) έχουμε ότι :

$$(10) \qquad \text{εμβαδόν } K'= \left\| \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{matrix} \right\| \text{ εμβαδόν } K \quad ,$$

όπου K' είναι η εικόνα του K με τον L .

Τέλος , δοθέντος ότι το εμβαδόν κάθε κλειστής καμπύλης του επιπέδου είναι το όριο του εμβαδού ενός εγγεγραμμένου πολυγώνου



c

έχουμε ότι :

$$(11) \qquad E'= \left\| \begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{matrix} \right\| E \quad ,$$

όπου E είναι το περικλειόμενο εμβαδόν από την c και E' το περικλειόμενο εμβαδό υπό της c'=L(c) .

<u>Εφαρμογή της (11)</u> . Στο επίπεδο Oxy θεωρούμε την έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.
Θεωρούμε τον γεωμετρικό μετασχηματισμό $f: E^2 \to E^2$, $P(x,y) \to P'(x',y')$, ο οποίος έχει αναλυτικές εξισώσεις , ως προς το σύστημα Oxy , τις :

$$x' = \frac{x}{a}$$

$$y' = \frac{y}{b} \quad .$$

Είναι φανερό ότι , αυτός είναι Γ.Μ ως προς το 0 με πίνακα , ως προς το Oxy , τον

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix} \quad .$$

Επειδή $(x')^2+(y')^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, η εικόνα της έλλειψης είναι κύκλος ακτίνας 1 . 'Ετσι σύμφωνα με την (11) έχουμε :

$$\pi = \left\| \begin{matrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{matrix} \right\| \cdot \text{εμβαδόν έλλειψης} \quad ,$$

άρα

$$\text{εμβαδόν έλλειψης} = \pi ab \quad .$$

'<u>Ασκηση</u> . Στο Oxy επίπεδο δίνεται η έλλειψη : $x^2+4y^2+2x+16y+13=0$. Να βρείτε το εμβαδόν , που περικλείει .

<u>Ορισμός 6.2.2.</u> 'Ενας Γ.Μ L λέγεται <u>κανονικός</u> , αν είναι αμφιμονοσήμαντος (1-1) .

'Ετσι , όταν δοθεί ένας κανονικός Γ.Μ , $L : E^2 \to E^2$, $P \to L(P) = P'$, μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα νέο γεωμετρικό μετασχηματισμό , τον <u>αντίστροφο</u> , ως εξής : $L^{-1} : E^2 \to E^2$, $P' \to L^{-1}(P') = P$, όπου $L(P) = P'$. Σκοπεύουμε στη συνέχεια να μελετήσουμε αυτόν τον γεωμετρικό μετασχηματισμό . Προς τούτο δείχνουμε πρώτα την ακόλουθη πρόταση .

<u>Πρόταση 6.2.3.</u> Ο L είναι Γ.Μ ως προς το σημείο O με πίνακα , ως προς ένα σύστημα Oxy , τον :

$$L = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} .$$

Ο L είναι κανονικός , αν και μόνο αν , $\det L \neq 0$, όπου $\det L$ είναι η ορίζουσα του πίνακα L .

<u>Απόδειξη</u> . Έστω $\det L \neq 0$. Οι αναλυτικές εξισώσεις του L , ως προς το Oxy , είναι :

$$(12) \qquad \begin{cases} x' = a_{11}x+a_{12}y \\ y' = a_{21}x+a_{22}y \end{cases} .$$

Για τα σημεία $P_1(x_1,y_1)$, $P_2(x_2,y_2)$ θα έχουμε :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1' = a_{11}x_1+a_{12}y_1 \\ y_1' = a_{21}x_1+a_{22}y_1 \end{array} \right\} \quad \text{και} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_2' = a_{11}x_2+a_{21}y_2 \\ y_2' = a_{21}x_2+a_{22}y_2 \end{array} \right\}$$

ή

$$x_1'-x_2' = a_{11}(x_1-x_2)+a_{12}(y_1-y_2)$$

$$y_2'-y_2' = a_{21}(x_1-x_2)+a_{22}(y_1-y_2) .$$

Ειδικά , για $P_1'=L(P_1)=L(P_2)=P_2'$ θα έχουμε :

$$(*)\qquad \begin{cases} \alpha_{11}(x_1-x_2)+\alpha_{12}(y_1-y_2) = 0 \\ \alpha_{21}(x_1-x_2)+\alpha_{22}(y_1-y_2) = 0 \end{cases} .$$

Επειδή $\det L \neq 0$, το ομογενές , ως προς x_1-x_2 , y_1-y_2 , σύστημα (*) έχει μόνο μια λύση την $x_1-x_2=0$ και $y_1-y_2=0$. Έτσι $P_1=P_2$ και συνεπώς ο L είναι 1-1 , δηλαδή κανονικός . Αντίστροφα,έστω ο L είναι κανονικός , θα δείξουμε ότι $\det L \neq 0$. Ας είναι $\det L=0$, τότε το ομογενές σύστημα :

$$\begin{aligned} \alpha_{11}x + \alpha_{12}y &= 0 \\ \alpha_{21}x + \alpha_{22}y &= 0 \end{aligned} ,$$

έχει και άλλη λύση $(x_0,y_0) \neq (0,0)$ εκτός από την $(0,0)$. Τότε όμως $L(P_0)=L(0)=0$, όπου $P_0(x_0,y_0)$, που δείχνει ότι ο L δεν είναι 1-1 , δηλαδή όχι κανονικός . Άτοπο ! Έτσι πρέπει $\det L \neq 0$.

<u>Παρατηρήσεις</u>. 1. Από την (8),στη σελίδα 250,συμπεραίνουμε ότι ένας κανονικός Γ.Μ στέλνει ευθείες σε ευθείες και μη συγγραμμικά σημεία σε μη συγγραμμικά σημεία .

2. Ένας κανονικός Γ.Μ , $L: E^2 \to E^2$ είναι μια απεικόνιση επί , αφού το σύστημα (12) έχει πάντα μία λύση (x,y) για δοθέντα (x',y') .

Τώρα , αν ο L είναι Γ.Μ ως προς O και κανονικός , με λύση των (12) ως προς x,y βρίσκουμε τις αναλυτικές εξισώσεις του $L^{-1}: E^2 \to E^2$, $P' \to L^{-1}(P')=P$, ως προς το σύστημα Oxy . Αυτές είναι :

$$(13)\quad \begin{cases} x = \dfrac{a_{22}}{\det L}x' - \dfrac{a_{12}}{\det L}y' \\ y = -\dfrac{a_{21}}{\det L}x' + \dfrac{a_{11}}{\det L}y' \end{cases} .$$

Επειδή $L^{-1}(0)=0$, το 0 είναι σταθερό σημείο και ως προς τον L^{-1} . Έτσι οι (13) μας δείχνουν (γιατί;) ότι και ο L^{-1} είναι Γ.Μ ως προς το 0 . Ο πίνακας του L^{-1} ως προς το σύστημα $0xy$ είναι ο

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{a_{22}}{\det L} & -\dfrac{a_{12}}{\det L} \\ -\dfrac{a_{21}}{\det L} & \dfrac{a_{11}}{\det L} \end{pmatrix} .$$

Ο πίνακας L^{-1} λέγεται <u>αντίστροφος</u> (επειδή ακριβώς είναι πίνακας του αντίστροφου Γ.Μ του L) του πίνακα

$$L = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} .$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι για το γινόμενο των πινάκων L , L^{-1} ισχύει

$$L \cdot L^{-1} = L^{-1} \cdot L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 = \text{ο μοναδιαίος } 2\times 2 \text{ πίνακας} .$$

<u>Ορισμός 6.2.3.</u> Ο γεωμετρικός μετασχηματισμός $I_2 : E^2 \to E^2, P \to I_2(P) = P$ λέγεται <u>ταυτοτικός μετασχηματισμός</u> του επιπέδου .

Όλα τα σημεία του E^2 είναι σταθερά ως προς τον I_2 . Οι αναλυτικές εξισώσεις του I_2 ως προς κάθε σύστημα Oxy είναι οι : $x' = x$ και $y' = y$. Έτσι ο I_2 είναι Γ.Μ ως προς κάθε σημείο του E^2 και ο πίνακας του ως προς κάθε σύστημα Oxy είναι ο μοναδιαίος πίνακας I_2 . Επίσης ο Γ.Μ I_2 είναι κανονικός .

Συμβολίζουμε τώρα με $L(E^2,O)$ το σύνολο των Γ.Μ του E^2 ως προς ένα σημείο O . Στο σύνολο $L(E^2,O)$ θεωρούμε μια πράξη την σύνθεση απεικονίσεων , την οποία συμβολίζουμε με $\circ$. Έτσι αν $L_1, L_2 \in L(E^2,O)$, τότε $(L_2 \circ L_1)(P) = L_2(L_1(P))$. Ας είναι :

$$L_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} , \quad L_2 = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix}$$

οι πίνακες των L_1 , L_2 ως προς ένα σύστημα Oxy . Είναι φανερό ότι ο γεωμετρικός μετασχηματισμός $L_2 \circ L_1$ εχει επίσης το O ως σταθερό σημείο . Ποιές όμως είναι οι αναλυτικές εξισώσεις του $L_2 \circ L_1$ ως προς το σύστημα Oxy ; Ας είναι $L_1(P) = P'(x',y')$. Τότε :

$$x' = \alpha_{11}x + \alpha_{12}y$$

$$y' = \alpha_{21}x + \alpha_{22}y \quad .$$

Αν είναι επιπλέον $L(P') = P''(x'',y'')$. Τότε :

$$x'' = \beta_{11}x' + \beta_{12}y' = \beta_{11}(\alpha_{11}x + \alpha_{12}y) + \beta_{12}(\alpha_{21}x + \alpha_{22}y)$$

$$y'' = \beta_{21}x' + \beta_{22}y' = \beta_{21}(\alpha_{11}x + \alpha_{12}y) + \beta_{22}(\alpha_{21}x + \alpha_{22}y)$$

ή

$$(14)\quad \begin{cases} x'' = (\beta_{11}\alpha_{11}+\beta_{12}\alpha_{21})x + (\beta_{11}\alpha_{12}+\beta_{12}\alpha_{22})y \\ y'' = (\beta_{21}\alpha_{11}+\beta_{22}\alpha_{21})x + (\beta_{21}\alpha_{12}+\beta_{22}\alpha_{22})y \end{cases}$$

'Ετσι από τις (14) προκύπτει ότι ο $L_2 \circ L_1$ είναι επίσης Γ.Μ ως προς 0 και $L_2 \circ L_1 \in L(E^2,0)$ με πίνακα ως προς το σύστημα Οxy τον

$$\begin{pmatrix} \beta_{11}\alpha_{11}+\beta_{12}\alpha_{21} & \beta_{11}\alpha_{12}+\beta_{12}\alpha_{22} \\ \beta_{21}\alpha_{11}+\beta_{22}\alpha_{21} & \beta_{21}\alpha_{12}+\beta_{22}\alpha_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} \\ \beta_{21} & \beta_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = L_2 \cdot L_1 .$$

'Ετσι πίνακας του $(L_2 \circ L_1) = L_2 \cdot L_1$.

Επειδή όμως $\det(L_2 \cdot L_1) = \det L_2 \cdot \det L_1 \neq 0$, συμπεραίνουμε ότι ο $L_2 \circ L_1$ είναι κανονικός Γ.Μ όταν οι L_1, L_2 είναι κανονικοί . Συμβολίζουμε με $GL(E^2,0)$ το σύνολο των Γ.Μ ως προς 0 , που είναι κανονικοί .

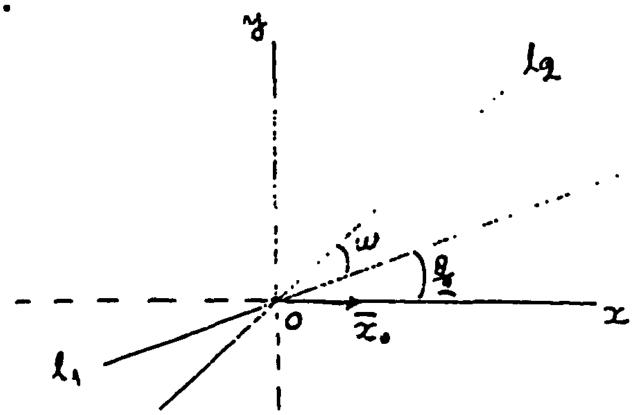
Η παρακάτω πρόταση μας διευκρινίζει τη δομή του συνόλου $GL(E^2,0)$ ως προς την πράξη $\circ$.

Πρόταση 6.2.4. Το σύνολο $GL(E^2,0)$ με πράξη εσωτερικής σύνθεσης , την σύνθεση $\circ$, είναι ομάδα .

Απόδειξη . Να γίνει σαν άσκηση . .

Θεωρούμε στη συνέχεια δύο ευθείες ℓ_1 , ℓ_2 του E^2 που τέμνονται στο σημείο 0 . Επειδή οι κατοπτρισμοί K_{ℓ_1} , K_{ℓ_2} είναι Γ.Μ ως προς 0 (παράδειγμα 6.2.2) , συμπεραίνουμε ότι και ο $K_{\ell_2} \circ K_{\ell_1}$ είναι Γ.Μ ως προς 0 .

Θεωρούμε ένα σύστημα Oxy έτσι ώστε $\sphericalangle(\bar{x}_0, \ell_1) = \frac{\theta}{2}$ και υποθέτουμε ότι $\sphericalangle(\ell_1, \ell_2) = \omega$.



Είναι γνωστό από τα παραπάνω ότι ο πίνακας του K_{ℓ_1} , ως προς το σύστημα Oxy είναι :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} .$$

Αντίστοιχα ο πίνακας του K_{ℓ_2} θα είναι :

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta+2\omega) & \sin(\theta+2\omega) \\ \sin(\theta+2\omega) & -\cos(\theta+2\omega) \end{pmatrix} .$$

Έτσι ο πίνακας του Γ.Μ $K_{\ell_2} \circ K_{\ell_1}$, ως προς το σύστημα Oxy , θα είναι ο :

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta+2\omega) & \sin(\theta+2\omega) \\ \sin(\theta+2\omega) & -\cos(\theta+2\omega) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta+2\omega)\cos\theta+\sin(\theta+2\omega)\sin\theta & \cos(\theta+2\omega)\sin\theta-\sin(\theta+2\omega)\cos\theta \\ \sin(\theta+2\omega)\cos\theta-\cos(\theta+2\omega)\sin\theta & \sin(\theta+2\omega)\sin\theta+\cos(\theta+2\omega)\cos\theta \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos 2\omega & -\sin 2\omega \\ \sin 2\omega & \cos 2\omega \end{pmatrix} .$$

Έτσι οι αναλυτικές εξισώσεις του $K_{\ell_2} \circ K_{\ell_1}$ ως προς το Oxy είναι :

$$x' = \cos 2\omega\, x - \sin 2\omega\, y$$

$$y' = \sin 2\omega\, x + \cos 2\omega\, y \quad .$$

Συγκρίνοντας με τις (6)(παράδειγμα 6.2.1) συμπεραίνουμε ότι $K_{\ell_2} \circ K_{\ell_1} = R_{2\omega}(0)$, δηλαδή αυτή η σύνθεση είναι μία στροφή περί το 0 κατά γωνία 2ω .

Άσκηση .

α) Βρείτε τι Γ.Μ είναι η σύνθεση $R_{\theta_2}(0) \circ R_{\theta_1}(0)$;

β) Βρείτε τι Γ.Μ είναι η σύνθεση $K_{\ell_1} \circ K_{\ell_2}$, των κατοπτρισμών που μελετήσαμε παραπάνω ;

γ) Δείξετε , ότι το σύνολο των στροφών $R_\theta(0)$ για $0 \leq \theta < 2\pi$, με πράξη την σύνθεση , είναι αβελιανή ομάδα .

6.3. Γραμμικοί Μετασχηματισμοί στο Χώρο .

Σ'αυτή τη παράγραφο θα εξετάσουμε θέματα , ανάλογα με αυτά της παραγράφου 6.2. Έτσι σε πολλά σημεία θα παραλείπουμε σχόλια και αποδείξεις .

<u>Ορισμός 6.3.1</u>. 'Εστω $L : E^3 \to E^3$, $P \to L(P) = P'$ ένας γεωμετρικός μετασχηματισμός σημείων του χώρου και A ένα σταθερό σημείο του L . O L λέγεται <u>Γραμμικός Μετασχηματισμός</u> (σύντομα Γ.Μ) ως προς A , αν ως προς ένα ορθογώνιο σύστημα Axyz , έχει αναλυτικές εξισώσεις της μορφής :

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{aligned} \right. .$$

Οι σχέσεις (1) γράφονται σύντομα με μορφή πινάκων

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ,$$

όπου ο πίνακας

$$L = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} ,$$

λέγεται <u>πίνακας του Γ.Μ L ως προς το σύστημα Axyz</u> .

<u>Παρατήρηση</u> . Με όμοιο τρόπο , όπως στη περίπτωση Γ.Μ στο επίπεδο , δείχνουμε ότι ένας Γ.Μ , ως προς A , στο χώρο έχει αναλυτικές εξισώσεις της μορφής (1) , ως προς κάθε σύστημα AXYZ (Να γίνει σαν άσκηση) .

<u>Παράδειγμα 6.3.1</u>. Στο παράδειγμα 6.1.1 τα σημεία του επιπέδου π είναι σταθερά σημεία του γεωμετρικού μετασχηματισμού $f : E^3 \to E^3$, $P \to f(P) = P'$ = ορθογώνια προβολή του P πάνω στο π . Οι αναλυτικές εξισώσεις αυτού του μετασχηματισμού , ως προς ένα σύστημα $Oxyz$ με $O \in \pi$ (το O είναι σταθερό σημείο του f) είναι :

$$\left\{\begin{aligned} x' &= \frac{B^2+\Gamma^2}{A^2+B^2+\Gamma^2}x - \frac{AB}{A^2+B^2+\Gamma^2}y - \frac{A\Gamma}{A^2+B^2+\Gamma^2}z \\ y' &= -\frac{AB}{A^2+B^2+\Gamma^2}x + \frac{A^2+\Gamma^2}{A^2+B^2+\Gamma^2}y - \frac{B\Gamma}{A^2+B^2+\Gamma^2}z \\ z' &= -\frac{A\Gamma}{A^2+B^2+\Gamma^2}x - \frac{B\Gamma}{A^2+B^2+\Gamma^2}y + \frac{A^2+B^2}{A^2+B^2+\Gamma^2}z \end{aligned}\right.$$

Οι εξισώσεις αυτές προκύπτουν (γιατί;) , βάζοντας στις τελικές εξισώσεις του παραδείγματος 6.1.1 $\Delta = 0$.

Έτσι,αυτός ο γεωμετρικός μετασχηματισμός είναι Γ.Μ ως προς κάθε σημείο του επιπέδου π . Ειδικά , οι αναλυτικές εξισώσεις αυτού του Γ.Μ , ως προς ένα σύστημα $Oxyz$ με $O \in \pi$ και άξονα Oz κάθετο στο επίπεδο π , είναι (γιατί;) οι :

$$x' = x$$
$$y' = y$$
$$z' = 0 \quad .$$

<u>Ορισμός 6.3.2</u>. Ο γεωμετρικός μετασχηματισμός $I_3 : E^3 \to E^3$, $P \to I_3(P) = P$ λέγεται <u>ταυτοτικός μετασχηματισμός</u> του E^3 .

<u>Παρατήρηση</u> . Ο ταυτοτικός μετασχηματισμός I_3 έχει σταθερά σημεία , όλα τα σημεία του E^3 . Οι αναλυτικές του εξισώσεις ως προς κάθε σύστημα $Oxyz$ είναι $x'=x$, $y'=y$, $z'=z$. Έτσι ο I_3 είναι Γ.Μ ως προς κάθε σημείο του E^3 και ο πίνακας του I_3 ως προς κάθε σύστημα $Oxyz$ είναι ο μοναδιαίος πίνακας

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

<u>Πρόταση 6.3.1</u>. Έστω $L : E^3 \to E^3$ ένας Γ.Μ ως προς το σημείο O (το O είναι συνεπώς σταθερό σημείο του L) . Αν ένα σημείο $A \neq O$ είναι σταθερό σημείο του L , τότε η ευθεία ℓ που ορίζεται από τα O,A αποτελείται από σταθερά σημεία του L και ο L είναι Γ.Μ ως προς κάθε σημείο της ℓ . Επίσης οι αναλυτικές εξισώσεις του L , ως προς ένα σύστημα $BXYZ$ με $B \in \ell$ και άξονα BZ την ℓ είναι της μορφής :

$$(2) \qquad \begin{cases} X' = a_{11}X + a_{12}Y \\ Y' = a_{21}X + a_{22}Y \\ Z' = a_{31}X + a_{32}Y + Z \end{cases} .$$

<u>Απόδειξη</u> . Οι αναλυτικές εξισώσεις του L ως προς ένα σύστημα $Oxyz$ με άξονα Oz την ℓ θα είναι της μορφής (γιατί;)

$$(*)\qquad \begin{cases} x' = a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z \\ y' = a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z \\ z' = a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z \end{cases} .$$

Το σταθερό σημείο A έχει ως προς αυτό το σύστημα συντεταγμένες $(0,0,c)$ με $c\neq 0$. Επειδή το A είναι σταθερό σημείο , θα είναι και $A'(0,0,c)$. Έτσι οι (*) γίνονται για τα A,A'.

$$0 = a_{11}\cdot 0+a_{12}\cdot 0+a_{13}c$$

$$0 = a_{21}\cdot 0+a_{22}\cdot 0+a_{23}c$$

$$c = a_{31}\cdot 0+a_{32}\cdot 0+a_{33}c \quad ,$$

από όπου παίρνουμε (αφού $c\neq 0$) ότι : $a_{13}=a_{23}=0$ και $a_{33}=1$. Έτσι οι αναλυτικές εξισώσεις του L ως προς το σύστημα $Oxyz$ είναι οι :

$$(**)\qquad \begin{cases} x' = a_{11}x+a_{12}y \\ y' = a_{21}x+a_{22}y \\ z' = a_{31}x+a_{32}y+z \end{cases} .$$

Ένα τυχαίο σημείο Γ της ℓ έχει συντεταγμένες , ως προς το $Oxyz$, τις $(0,0,\lambda)$. Από τις (**) βρίσκουμε ότι $\Gamma'(0,0,\lambda)$. Άρα όλα τα σημεία της ℓ είναι σταθερά σημεία του L . Ας είναι τώρα $B(0,0,a)$ ένα τυχαίο σημείο της ℓ . Θεωρούμε ένα σύστημα $BXYZ$ παράλληλο προς το $Oxyz$. Τότε έχουμε :

$$x = X \quad , \quad y = Y \quad , \quad z = Z+a$$

και

$$x' = X' \ , \quad y' = Y' \ , \quad z' = Z' + a \quad .$$

Από τις (**) συμπεραίνουμε ότι οι αναλυτικές εξισώσεις του L, ως προς το σύστημα $BXYZ$ με άξονα BZ την ℓ, είναι της μορφής :

$$X' = a_{11}X + a_{12}Y$$

$$Y' = a_{21}X + a_{22}Y$$

$$Z' = a_{31}X + a_{32}Y + Z \quad ,$$

από όπου προκύπτει ότι ο L είναι Γ.Μ ως προς το τυχαίο σημείο B της ℓ.

<u>Πρόταση 6.3.2.</u> Έστω $L : E^3 \to E^3$ ένας Γ.Μ ως προς το σημείο O (το O είναι συνεπώς σταθερό σημείο του L). Αν ένα επίπεδο π δια του O αποτελείται από σταθερά σημεία του L, τότε ο L είναι Γ.Μ ως προς κάθε σημείο του π και οι αναλυτικές εξισώσεις του L, ως προς ένα σύστημα $AXYZ$ με $A \in \pi$ και AXY επίπεδο το π, είναι της μορφής :

$$(3) \qquad \begin{cases} X' = X + a_{13}Z \\ Y' = Y + a_{23}Z \\ Z' = a_{33}Z \quad . \end{cases}$$

<u>Απόδειξη</u>. Θεωρούμε ένα σύστημα $Oxyz$ με Oxy επίπεδο το π. Οι αναλυτικές εξισώσεις του L ως προς το $Oxyz$ είναι (γιατί;) της μορφής :

$$(4) \qquad \begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \quad . \end{cases}$$

Τα σημεία του π είναι σταθερά σημεία του L. Έτσι τα σημεία $A(1,0,0)$ και $B(0,1,0)$ ως προς το $Oxyz$ είναι σταθερά σημεία του L, άρα $A'(1,0,0)$ και $B'(0,1,0)$. Έχουμε λοιπόν :

$$1 = \alpha_{11}\cdot 1+\alpha_{12}\cdot 0+\alpha_{13}\cdot 0$$

$$0 = \alpha_{21}\cdot 1+\alpha_{22}\cdot 0+\alpha_{23}\cdot 0$$

$$0 = \alpha_{31}\cdot 1+\alpha_{32}\cdot 0+\alpha_{33}\cdot 0$$

και

$$0 = \alpha_{11}\cdot 0+\alpha_{12}\cdot 1+\alpha_{13}\cdot 0$$

$$1 = \alpha_{21}\cdot 0+\alpha_{22}\cdot 1+\alpha_{23}\cdot 0$$

$$0 = \alpha_{31}\cdot 0+\alpha_{32}\cdot 1+\alpha_{33}\cdot 0 \quad .$$

Άρα, $\alpha_{11}=\alpha_{22}=1$ και $\alpha_{21}=\alpha_{31}=\alpha_{12}=\alpha_{32}=0$. Συνεπώς οι εξισώσεις του L ως προς το $Oxyz$ είναι της μορφής :

$$(5) \qquad \begin{cases} x'= x+\alpha_{13}z \\ y'= y+\alpha_{23}z \\ z'= \alpha_{33}z \end{cases} \quad .$$

Ας είναι τώρα $AXYZ$ ένα σύστημα παράλληλο προς το $Oxyz$ με $A\in\pi$. Τότε το AXY επίπεδο είναι το π και ισχύουν :

$$\begin{aligned} x &= X+\alpha \\ y &= Y+\beta \\ z &= Z \end{aligned} \qquad \text{και} \qquad \begin{aligned} x' &= X'+\alpha \\ y' &= Y'+\beta \\ z' &= Z' \end{aligned} \quad .$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις (5) συμπεραίνουμε ότι , οι αναλυτικές εξισώσεις του L ως προς το AXYZ είναι της μορφής :

$$X' = X + a_{13}Z$$

$$Y' = Y + a_{23}Z$$

$$Z' = a_{33}Z \quad ,$$

από όπου προκύπτει ότι ο L είναι Γ.Μ ως προς το τυχαίο σημείο A του π.

Πρόταση 6.3.3. Έστω $L : E^3 \to E^3$, $P \to L(P) = P'$ ένας Γ.Μ ως προς το σημείο O. Δίνεται ένα σημείο $P_0 \in E^3$, διαφορετικό του O. Αν το P_0' είναι το συμμετρικό του P_0 ως προς το O , τότε οι αναλυτικές εξισώσεις του L , ως προς ένα σύστημα Oxyz με άξονα Oz την ευθεία που ορίζεται από τα O , P_0 , είναι της μορφής :

$$(6) \qquad \left\{ \begin{aligned} x' &= a_{11}x + a_{12}y \\ y' &= a_{21}x + a_{22}y \\ z' &= a_{31}x + a_{32}y - z \end{aligned} \right. \quad .$$

Απόδειξη . Οι αναλυτικές εξισώσεις του L , ως προς αυτό το σύστημα συντεταγμένων, είναι της μορφής :

$$x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z$$

$$y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z$$

$$z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z$$

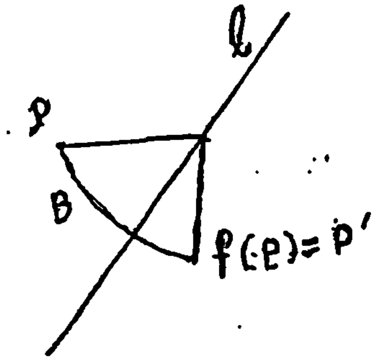
'Εστω $P_0(0,0,z_0)$ με $z_0\neq 0$, ως προς το $Oxyz$. Σύμφωνα με την υπόθεση θα είναι $P_0'(0,0,-z_0)$. Θέτοντας στις αναλυτικές εξισώσεις έχουμε :

$$0 = a_{11}\cdot 0+a_{12}\cdot 0+a_{13}z_0$$
$$0 = a_{21}\cdot 0+a_{22}\cdot 0+a_{23}z_0$$
$$-z_0= a_{31}\cdot 0+a_{32}\cdot 0+a_{33}z_0$$

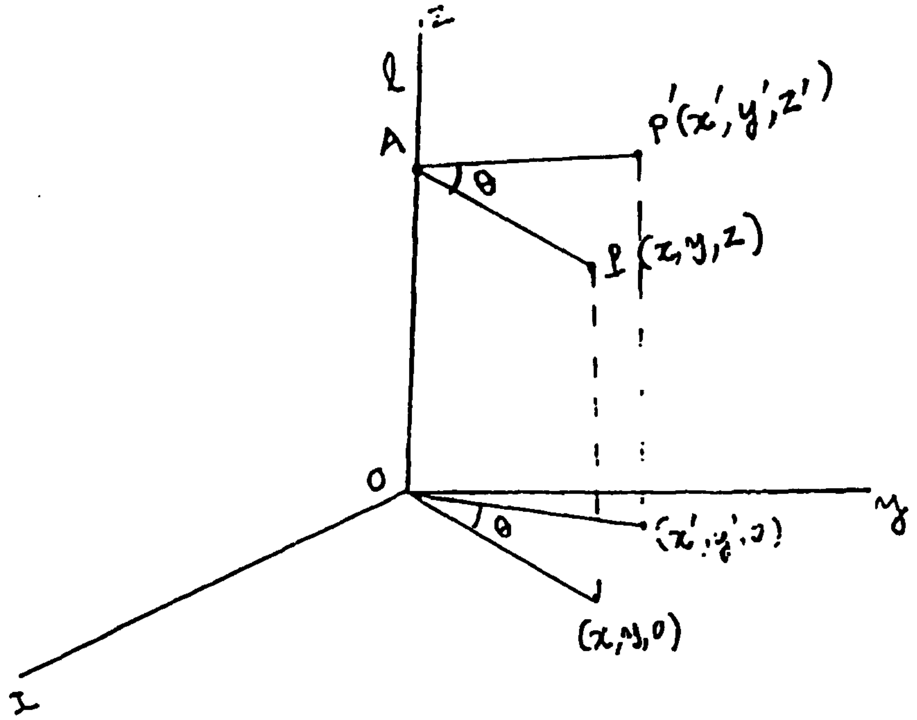
ή , αφού $z_0\neq 0$, θα έχουμε : $a_{13}=a_{23}=0$ και $a_{33}=-1$. 'Ετσι οι αναλυτικές εξισώσεις είναι της μορφής

$$x'= a_{11}x+a_{12}y$$
$$y'= a_{21}x+a_{22}y$$
$$z'= a_{31}x+a_{32}y-z \quad .$$

<u>Παράδειγμα 6.3.2</u>. 'Εστω ℓ μία ευθεία του E^3 . Θεωρούμε το γεωμετρικό μετασχηματισμό $f : E^3 \to E^3$, $P\to f(P)=P'=$ στροφή του P περί την ℓ κατά γωνία θ . Θέλουμε να μελετήσουμε αυτόν



το γεωμετρικό μετασχηματισμό . Είναι φανερό ότι τα σημεία της ℓ είναι σταθερά σημεία του f . Οι αναλυτικές εξισώσεις αυτού του γεωμετρικού μετασχηματισμού ως προς ένα σύστημα $Oxyz$ με $O\in\ell$ και άξονα Oz την ℓ είναι (γιατί;)

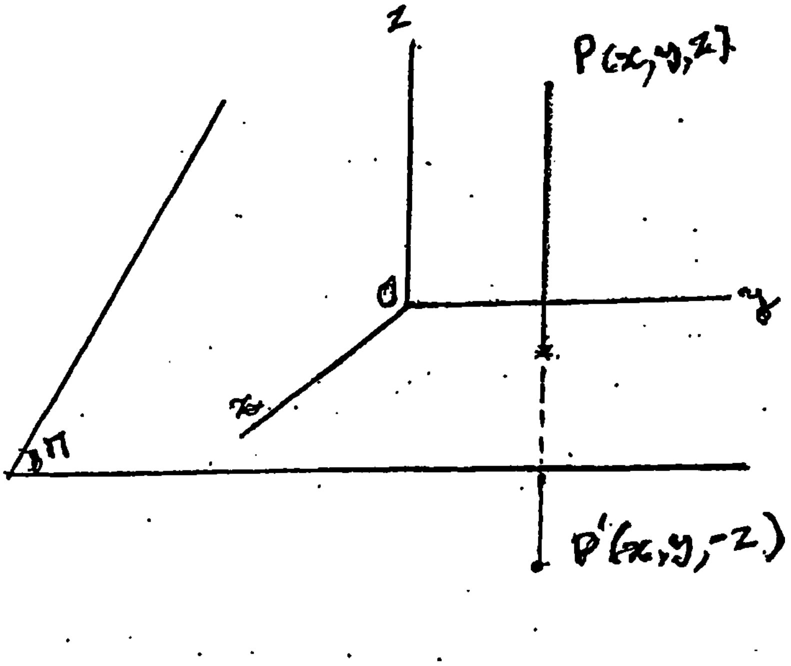


$$(7) \qquad \begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \\ z' = z \end{cases}$$

Έτσι αυτός ο γεωμετρικός μετασχηματισμός είναι Γ.Μ ως προς κάθε σημείο της ℓ , συμβολίζεται με $R(\ell,\theta)$ και λέγεται <u>στροφή του E^3 περί την ℓ κατά γωνία θ</u> .

<u>Παρατήρηση</u> . Συγκρίνετε τις (7) με τις (2) (σελίδα 262) και σχολιάστε.

<u>Παράδειγμα 6.3.3</u>. Έστω π ένα επίπεδο του E^3 . Θεωρούμε τον γεωμετρικό μετασχηματισμό $f : E^3 \to E^3$, $P \to f(P) = P'$ = συμμετρικό του P ως προς το π . Είναι φανερό ότι όλα τα σημεία του π είναι σταθερά σημεία του f . Οι αναλυτικές εξισώσεις αυτού του μετασχηματισμού , ως προς ένα σύστημα $Oxyz$ με $O \in \pi$ και επίπεδο Oxy το π είναι οι :



(8) $(x' = x\ ,\ y' = y\ ,\ z' = -z)$.

Έτσι αυτός ο μετασχηματισμός είναι Γ.Μ , ως προς κάθε σημείο του επιπέδου π , συμβολίζεται με K_π και λέγεται <u>κατοπτρισμός του E^3 ως προς το επίπεδο π</u> .

<u>Παρατήρηση</u> . Συγκρίνετε τις (8) με τις (3) και σχολιάστε .

Έστω τώρα $L : E^3 \to E^3$ ένας Γ.Μ ως προς το O . Υποθέτουμε ότι οι αναλυτικές εξισώσεις του L ως προς ένα σύστημα Oxyz είναι οι :

$$(9)\qquad \begin{cases} x' = a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z \\ y' = a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z \\ z' = a_{31}x+a_{32}y+a_{32}z \end{cases}$$

Είναι εύκολο να δει κάποιος πως αν $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$, $P_3(x_3,y_3,z_3)$, $P_4(x_4,y_4,z_4)$ είναι τέσσερα σημεία του E^3 και $P_1'(x_1',y_1',z_1')$, $P_2'(x_2',y_2',z_2')$,

$P_3'(x_3',y_3',z_3')$, $P_4'(x_4',y_4',z_4')$ είναι οι εικόνες των μέσω του L , τότε ισχύει :

$$\begin{vmatrix} x_1' & y_1' & z_1' & 1 \\ x_2' & y_2' & z_2' & 1 \\ x_3' & y_3' & z_3' & 1 \\ x_4' & y_4' & z_4' & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

ή

$$\begin{vmatrix} x_2'-x_1' & y_2'-y_1' & z_2'-z_1' \\ x_3'-x_1' & y_3'-y_1' & z_3'-z_1' \\ x_4'-x_1' & y_4'-y_1' & z_4'-z_1' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}$$

ή

$$(10) \qquad \left[\overline{P_1'P_2'}\,,\ \overline{P_1'P_3'}\,,\ \overline{P_1'P_4'}\right] = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \left[\overline{P_1P_2}\,,\ \overline{P_1P_3}\,,\ \overline{P_1P_4}\right]$$

όπου [, ,] σημαίνει μικτό γινόμενο διανυσμάτων .

Η (10) δείχνει ότι , εάν τα σημεία P_1 , P_2 , P_3 , P_4 είναι συνεπίπεδα τότε και τα P_1' , P_2' , P_3' , P_4' είναι συνεπίπεδα . Έτσι,ένας Γ.Μ του E^3 στέλνει επίπεδα σε επίπεδα . Επίσης από την (10) λαμβάνοντας υπόψη ότι το μικτό γινόμενο τριών διανυσμάτων εκφράζει τον όγκο παραλληλεπιπέδου με ακμές αυτά τα διανύσματα συμπεραίνουμε ότι :

V'(όγκος παραλληλεπιπέδου με ακμές $\overline{P_1'P_2'}$, $\overline{P_1'P_3'}$, $\overline{P_1'P_4'}$) =

$$\left|\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}\right| V(\text{όγκος παραλληλεπιπέδου με ακμές } \overline{P_1P_2}\ ,\ \overline{P_1P_3}\ ,\ \overline{P_1P_4}) \ .$$

<u>Άσκηση</u> . Δουλεύοντας όπως στις κλειστές καμπύλες του επιπέδου βρείτε πως αλλάζει ο όγκος που περικλείει μια κλειστή επιφάνεια του E^3 .

<u>Άσκηση</u> . Δείξετε ότι ο όγκος που περικλείεται από ένα ελλειψοειδές $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ είναι $V=\frac{4}{3}\pi a b c$.

<u>Ορισμός 6.3.3</u>. Ένας Γ.Μ λέγεται <u>κανονικός</u>,αν είναι αμφιμονοσήμαντος (1-1) .

Η παρακάτω πρόταση δείχνεται όπως ακριβώς στη περίπτωση του επιπέδου (πρόταση 6.2.3) .

<u>Πρόταση 6.3.4</u>. Ο L είναι Γ.Μ ως προς το σημείο Ο με πίνακα , ως προς το σύστημα Οxyz τον

$$L=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} .$$

Ο L είναι κανονικός , αν και μόνο αν , $\det L\neq 0$, όπου $\det L$ είναι η ορίζουσα του πίνακα L .

Σημειώνουμε με $GL(E^3,0)$ το σύνολο των κανονικών Γ.Μ του E^3 ως προς το σημείο 0. Είναι φανερό ότι $I_3 \in GL(E^3,0)$. Ας είναι $L \in GL(E^3,0)$, ο οποίος,ως προς το σύστημα $Oxyz$, έχει αναλυτικές εξισώσεις τις :

$$(11)\qquad \begin{cases} x' = a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z \\ y' = a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z \\ z' = a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z \end{cases} .$$

Επειδή ο L είναι κανονικός, ορίζεται τότε ένας γεωμετρικός μετασχηματισμός σημείων του E^3, ο $L^{-1}:E^3 \to E^3$, $P' \to L^{-1}(P')=P$, όπου $L(P)=P'$. Είναι φανερό (γιατί;) ο L^{-1} έχει το 0 σταθερό σημείο. Οι αναλυτικές εξισώσεις του L^{-1}, ως προς το σύστημα $Oxyz$, βρίσκονται με λύση του συστήματος (11) ως προς x,y,z και είναι :

$$(12)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{a_{22}a_{33}-a_{32}a_{23}}{\det A}x' + \dfrac{a_{32}a_{13}-a_{12}a_{33}}{\det A}y' + \dfrac{a_{12}a_{23}-a_{22}a_{13}}{\det A}z' \\[2ex] y = \dfrac{a_{31}a_{23}-a_{21}a_{33}}{\det A}x' + \dfrac{a_{11}a_{33}-a_{31}a_{13}}{\det A}y' + \dfrac{a_{21}a_{13}-a_{11}a_{23}}{\det A}z' \\[2ex] z = \dfrac{a_{21}a_{32}-a_{31}a_{22}}{\det A}x' + \dfrac{a_{31}a_{12}-a_{11}a_{32}}{\det A}y' + \dfrac{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}}{\det A}z' \end{cases} ,$$

όπου

$$\det A = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Λόγω της μορφής (12) των αναλυτικών εξισώσεων του L^{-1} ως προς το σύστημα $Oxyz$, συμπεραίνουμε ότι ο L^{-1} είναι Γ.Μ ως προς το O και μάλιστα κανονικός αφού είναι αμφιμονοσήμαντος. Έτσι, αν $L \in GL(E^3, O)$, τότε $L^{-1} \in GL(E^3, O)$. Ο L^{-1} λέγεται <u>αντίστροφος</u> του L και ο πίνακας του ως προς το σύστημα $Oxyz$ είναι ο:

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{\alpha_{22}\alpha_{33}-\alpha_{32}\alpha_{23}}{\det A} & \dfrac{\alpha_{32}\alpha_{13}-\alpha_{12}\alpha_{33}}{\det A} & \dfrac{\alpha_{12}\alpha_{23}-\alpha_{22}\alpha_{13}}{\det A} \\[2ex] \dfrac{\alpha_{31}\alpha_{23}-\alpha_{21}\alpha_{33}}{\det A} & \dfrac{\alpha_{11}\alpha_{33}-\alpha_{31}\alpha_{13}}{\det A} & \dfrac{\alpha_{21}\alpha_{13}-\alpha_{11}\alpha_{23}}{\det A} \\[2ex] \dfrac{\alpha_{21}\alpha_{32}-\alpha_{31}\alpha_{22}}{\det A} & \dfrac{\alpha_{31}\alpha_{12}-\alpha_{11}\alpha_{32}}{\det A} & \dfrac{\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{21}\alpha_{22}}{\det A} \end{pmatrix}$$

ο οποίος λέγεται <u>αντίστροφος</u> του

$$L = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}.$$

<u>Άσκηση</u>. Να γίνει επαλήθευση ότι $L \cdot L^{-1} = L^{-1} \cdot L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

<u>Άσκηση</u>. Αν L_1, L_2 είναι Γ.Μ του E^3 ως προς O με πίνακες, ως προς το σύστημα $Oxyz$, τους

$$L_1 = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} , \quad L_2 = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{pmatrix} .$$

Να δειχθεί ότι η σύνθεση $L_2 \circ L_1$ είναι Γ.Μ του E^3 ως προς 0 με πίνακα ως προς το σύστημα Oxyz το γινόμενο των πινάκων $L_2 \cdot L_1$.

6.4. Παράλληλη Μεταφορά..

Θεωρούμε ένα ελεύθερο διάνυσμα $\bar{a}$ στο E^3 . Δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό .

Ορισμός 6.4.1. Ο γεωμετρικός μετασχηματισμός $f : E^3 \to E^3$, $P \to f(P)=P'$, έτσι ώστε $\overline{PP'}=\bar{a}$ λέγεται παράλληλη μεταφορά στο χώρο κατά διάνυσμα $\bar{a}$ και συμβολίζεται με $T_{\bar{a}}$.

Παρατηρήσεις . 1. Θεωρούμε ένα αυθαίρετο σημείο A του E^3 . Αν $\overline{AP}$ είναι το διάνυσμα θέσης του P ως προς A , τότε το διάνυσμα θέσης του $P'=T_{\bar{a}}(P)$ ως προς A είναι : $\overline{AP'}=\overline{AP}+\bar{a}$. Πραγματικά , αφού $\overline{PP'}=\bar{a}$, τότε $\overline{AP'}-\overline{AP}=\bar{a}$ ή $\overline{AP'}=\overline{AP}+\bar{a}$.

2. Κάθε παράλληλη μεταφορά $T_{\bar{a}}$ είναι αμφιμονοσήμαντος (1-1) γεωμετρικός μετασχηματισμός . Πραγματικά , αν $P'=T_{\bar{a}}(P)=T_{\bar{a}}(Q)=Q'$, τότε $\overline{PP'}=\bar{a}=\overline{QQ'}=\overline{QP'}$ ή $\overline{PP'}+\overline{P'Q}=0$ ή $\overline{PQ}=0$ ή $P=Q$.

3. Κάθε παράλληλη μεταφορά $T_{\bar{a}}$ είναι μια απεικόνιση επί . Πραγματικά , αν $P \in E^3$, τότε $T_{\bar{a}}(T_{-\bar{a}}(P)) = P$.

Στη συνέχεια θα βρούμε τις αναλυτικές εξισώσεις μιας παράλληλης μεταφοράς $T_{\bar{a}}$ του E^3, ως προς ένα τυχαίο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων $\{O,\bar{x}_0,\bar{y}_0,\bar{z}_0\}$. Ας είναι $\bar{a}=a\bar{x}_0+b\bar{y}_0+c\bar{z}_0$, τότε επειδή $\overline{OP'}=\overline{OP}+\bar{a}$ θα έχουμε :

$$(1)\qquad \begin{cases} x'=x+a \\ y'=y+b \\ z'=z+c \end{cases}$$

όπου $P(x,y,z)$, $P'(x',y',z')$, ως προς το $Oxyz$. Έτσι οι (1) είναι οι αναλυτικές εξισώσεις της παράλληλης μεταφοράς $T_{\bar{a}}$ ως προς το σύστημα $Oxyz$.

Αντίστροφα, αν οι αναλυτικές εξισώσεις ενός γεωμετρικού μετασχηματισμού σημείων $f: E^3 \to E^3$, $P \to f(P)=P'$, ως προς ένα σύστημα συντεταγμένων $Oxyz$, δίνονται από τις (1) τότε ο f είναι μια παράλληλη μεταφορά $T_{\bar{a}}$, όπου $\bar{a}=a\bar{x}_0+b\bar{y}_0+c\bar{z}_0$. Πραγματικά, αφού από τις (1) θα έχουμε : $\overline{OP'}=\overline{OP}+(a,b,c)$ ή $\overline{OP'}-\overline{OP}=(a,b,c)=\bar{a}$ ή $\overline{PP'}=\bar{a}$.

Μια παράλληλη μεταφορά $T_{\bar{a}}$ δεν έχει σταθερό σημείο, εκτός αν $\bar{a}=0$, οπότε η παράλληλη μεταφορά είναι ο ταυτοτικός μετασχηματισμός του E^3. Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα ότι η $T_{\bar{a}}$ έχει σταθερό σημείο το A, τότε $A'=T_{\bar{a}}(A)=A$. Έτσι $\overline{AA'}=0$. Όμως $\overline{AA'}=\bar{a}$, από τον ορισμό της παράλληλης μεταφοράς. Συνεπώς $\bar{a}=0$. Όμως τότε $\overline{PP'}=\bar{a}=0$, δηλαδή $P'=P$ και συνεπώς πρόκειται για τον ταυτοτικό μετασχηματισμό του E^3.

Επίσης συμπεραίνουμε ότι η παράλληλη μεταφορά $T_{\bar{a}}$ με $\bar{a}\neq 0$, δεν μπορεί να είναι Γ.Μ του E^3 ως προς κανένα σημείο (πραγματικά αφού δεν υπάρχει σταθερό σημείο). Μπορείτε να το συμπεράνετε αυτό από τις αναλυτικές εξισώσεις (1) ;

<u>Παρατήρηση</u> . Ανάλογα ισχύουν για παράλληλες μεταφορές του επιπέδου . Έτσι για παράδειγμα , οι αναλυτικές εξισώσεις μιας παράλληλης μεταφοράς $T_{\bar{a}}$ του επιπέδου , ως προς το σύστημα Oxy είναι οι

$$(2) \qquad \begin{cases} x' = x+a \\ y' = y+b \end{cases} ,$$

όπου $\bar{a}=(a,b)$ ως προς το Oxy .

Ας θεωρήσουμε τώρα δύο παράλληλες μεταφορές $T_{\bar{a}}$ και $T_{\bar{b}}$. Τότε η σύνθεση $T_{\bar{a}} \circ T_{\bar{b}}$ είναι πάλι παράλληλη μεταφορά η $T_{\bar{a}+\bar{b}}$. Πραγματικά , ας είναι $T_{\bar{b}}(P)=P'$ και $T_{\bar{a}}(P')=P''$. Τότε , από τον ορισμό παράλληλης μεταφοράς έχουμε : $\overline{PP'}=\bar{b}$ και $\overline{P'P''}=\bar{a}$. Όμως , $\overline{PP''}=\overline{PP'}+\overline{P'P''}=\bar{b}+\bar{a}=\bar{a}+\bar{b}$. Έτσι , πάλι από τον ορισμό της παράλληλης μεταφοράς ο γεωμετρικός μετασχηματισμός $E^3 \to E^3$, $P \to P''$ είναι η $T_{\bar{b}+\bar{a}}$. Δηλαδή $T_{\bar{a}} \circ T_{\bar{b}} = T_{\bar{a}+\bar{b}}$. Επειδή $\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}$ συμπεραίνουμε ότι $T_{\bar{a}+\bar{b}}=T_{\bar{b}+\bar{a}}$. Επίσης $T_{\bar{a}} \circ T_{-\bar{a}} = I_3$, δηλαδή $(T_{\bar{a}})^{-1}=T_{-\bar{a}}$, όπου $(T_{\bar{a}})^{-1}$ είναι η αντίστροφη απεικόνιση της $T_{\bar{a}}$. Επί πλέον , επειδή η πρόσθεση διανυσμάτων είναι προσεταιριστική πράξη , συμπεραίνουμε ότι η σύνθεση παράλληλων μεταφορών είναι προσεταιριστική πράξη . Σαν συμπέρασμα των παραπάνω έχουμε τη παρακάτω πρόταση .

<u>Πρόταση 6.4.1.</u> Έστω T το σύνολο των παραλλήλων μεταφορών στο E^3 . Το σύνολο T με πράξη τη σύνθεση $\circ$ είναι αβελιανή ομάδα .

<u>Παρατήρηση</u> . Ανάλογα ισχύουν για παράλληλες μεταφορές του επιπέδου .

6.5. Ομοπαραλληλικοί Μετασχηματισμοί.

Ορισμός 6.5.1. Ένας γεωμετρικός μετασχηματισμός $f:E^3\to E^3$, $P\to f(P)=P'$ λέγεται ομοπαραλληλικός μετασχηματισμός (σύντομα γράφουμε Ο.Μ),αν έχει τις παρακάτω ιδιότητες :

(α) Στέλνει ευθείες σε ευθείες .

(β) Διατηρεί τον απλό λόγο κάθε τριάδας συγγραμμικών σημείων . Δηλαδή , αν P_1,P_2,P_3 είναι τρία συγγραμμικά σημεία με $(P_1\ P_2\ P_3)=\lambda$, τότε $(P_1'\ P_2'\ P_3')=\lambda$, όπου $P_i'=f(P_i)$ $(i=1,2,3)$.

Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να βρούμε τις αναλυτικές εξισώσεις ενός Ο.Μ , ως προς ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων $Oxyz$. Για τα επόμενα , αν $P(x,y,z)$ είναι ένα σημείο με τις συντεταγμένες του , ως προς το $Oxyz$ θα συμβολίζουμε με $P'(x',y',z')$ το σημείο $P'=f(P)$, ως προς το ίδιο σύστημα συντεταγμένων $Oxyz$.

Θεωρούμε τα σημεία $O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $\Gamma(0,0,1)$ και ας είναι : $O'(\alpha,\beta,\gamma)$, $A'(\alpha_{11},\alpha_{12},\alpha_{13})$, $B'(\alpha_{21},\alpha_{22},\alpha_{23})$ και $\Gamma'(\alpha_{31},\alpha_{32},\alpha_{33})$.

Η εύρεση των αναλυτικών εξισώσεων,ως προς το $Oxyz$, θα γίνει σε τρία βήματα .

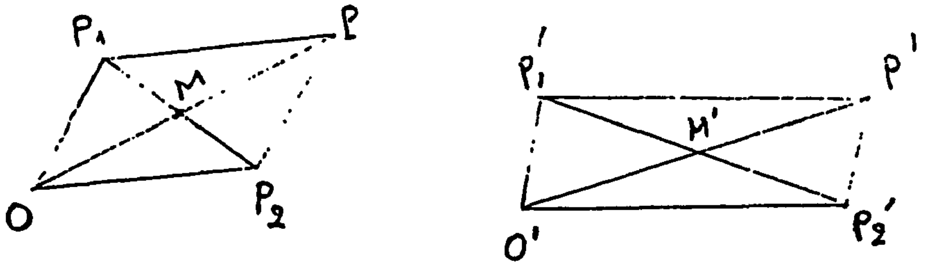
1ο βήμα . Ας είναι $\overline{OP}=\lambda\overline{OP_1}$. Τότε , τα σημεία O,P,P_1 είναι συγγραμμικά . Συνεπώς , λόγω της ιδιότητας (α) και οι εικόνες των , δηλαδή τα σημεία O',P',P_1' είναι συγγραμμικά . Επίσης , λόγω της ιδιότητας (β) θα έχουμε :

$$\overline{O'P'}=\lambda\overline{O'P_1'} \quad \text{ή} \quad \overline{O'O}+\overline{OP'}=\lambda(\overline{O'O}+\overline{OP_1'})$$

ή

(1) $\overline{OP'}=\lambda\overline{OP_1'}+(1-\lambda)\overline{OO'}$.

<u>2ο βήμα</u> . Ας είναι $\overline{OP}=\overline{OP_1}+\overline{OP_2}$. Τότε , από τις ιδιότητες (α) και (β) συμπεραίνουμε ότι : $\overline{O'P'}=\overline{O'P_1'}+\overline{O'P_2'}$ (σχήμα)



ή $\overline{O'O}+\overline{OP'}=\overline{O'O}+\overline{OP_1'}+\overline{O'O}+\overline{OP_2'}$

ή

(2) $\overline{OP'}=\overline{OP_1'}+\overline{OP_2'}-\overline{OO'}$.

<u>3ο βήμα</u> . Έστω τέλος , $\overline{OP}=\overline{OP_1}+\overline{OP_2}+\overline{OP_3}=\overline{OQ}+\overline{OP_3}$, όπου θέσαμε $\overline{OQ}=\overline{OP_1}+\overline{OP_2}$. Τότε με τη βοήθεια της (2) έχουμε :

$$\overline{OP'}=\overline{OQ'}+\overline{OP_3'}-\overline{OO'}$$

ή επειδή (με τη βοήθεια της (2)) $\overline{OQ'}=\overline{OP_1'}+\overline{OP_2'}-\overline{OO'}$ έχουμε :

$$\overline{OP'}=\overline{OP_1'}+\overline{OP_2'}-\overline{OO'}+\overline{OP_3'}-\overline{OO'}$$

ή

(3) $\overline{OP'}=\overline{OP_1'}+\overline{OP_2'}+\overline{OP_3'}-2\overline{OO'}$.

Ας είναι τώρα , ως προς το σύστημα Oxyz , P(x,y,z) . Τότε ,

$$\overline{OP} = x\,\overline{OA}+y\,\overline{OB}+z\,\overline{O\Gamma}$$

ή θέτοντας $\overline{OP_1}=x\,\overline{OA}$, $\overline{OP_2}=y\,\overline{OB}$, $\overline{OP_3}=z\,\overline{O\Gamma}$

$$\overline{OP}=\overline{OP_1}+\overline{OP_2}+\overline{OP_3} \quad .$$

Με την (3) παίρνουμε :

$$(4) \qquad \overline{OP'}=\overline{OP_1'}+\overline{OP_2'}+\overline{OP_3'}-2\overline{OO'} \quad .$$

Όμως,από τις (1) έχουμε :

$$(5) \qquad \begin{cases} \overline{OP_1'}=x\,\overline{OA'}+(1-x)\,\overline{OO'} \\ \overline{OP_2'}=y\,\overline{OB'}+(1-y)\,\overline{OO'} \\ \overline{OP_3'}=z\,\overline{O\Gamma'}+(1-z)\,\overline{OO'} \end{cases} .$$

Αντικαθιστώντας τις (5) στην (4) έχουμε :

$$\overline{OP'}=x\,\overline{OA'}+y\,\overline{OB'}+z\,\overline{O\Gamma'}+(1-x-y-z)\overline{OO'}$$

ή σε συντεταγμένες

$$(x',y',z')=x(\alpha_{11},\alpha_{12},\alpha_{13})+y(\alpha_{21},\alpha_{22}\alpha_{23})+z(\alpha_{31},\alpha_{32},\alpha_{33})+(1-x-y-z)(\alpha,\beta,\gamma)$$

ή

$$(6) \qquad \begin{cases} x'=(\alpha_{11}-\alpha)x+(\alpha_{21}-\alpha)y+(\alpha_{31}-\alpha)z+\alpha \\ y'=(\alpha_{12}-\beta)x+(\alpha_{22}-\beta)y+(\alpha_{32}-\beta)z+\beta \\ z'=(\alpha_{13}-\gamma)x+(\alpha_{23}-\gamma)y+(\alpha_{33}-\gamma)z+\gamma \end{cases} .$$

Έτσι ένας "Ο.Μ", $f:E^3\to E^3$, $P\to f(P)=P'$ έχει,ως προς τυχαίο σύστημα συντεταγμένων $Oxyz$, αναλυτικές εξισώσεις της μορφής :

$$(7)\qquad \begin{cases} x'=A_{11}x+A_{12}y+A_{13}z+\alpha \\ y'=A_{21}x+A_{22}y+A_{23}z+\beta \\ z'=A_{31}x+A_{32}y+A_{33}z+\gamma \end{cases},$$

όπου βέβαια : $f(0)=0'(\alpha,\beta,\gamma)$ και συνεπώς $\overline{00'}=(\alpha,\beta,\gamma)$, $A'(A_{11}+\alpha,A_{21}+\beta,A_{31}+\gamma)$ $B'(A_{12}+\alpha,A_{22}+\beta,A_{32}+\gamma)$, $\Gamma'(A_{13}+\alpha,A_{23}+\beta,A_{33}+\gamma)$ με $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ και $\Gamma(0,0,1)$ ως προς το σύστημα $Oxyz$.

Αντίστροφα , θα δούμε πως αν οι αναλυτικές εξισώσεις ενός γεωμετρικού μετασχηματισμού $f:E^3\to E^3$, $P\to f(P)=P'$, ως προς ένα σύστημα συντεταγμένων $Oxyz$, είναι της μορφής (7) , τότε ο γεωμετρικός μετασχηματισμός f είναι Ο.Μ. Ας είναι , προς τούτο , $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$ και $P(x,y,z)$ έτσι ώστε

$$(8)\qquad \overline{OP}=m\,\overline{OP_1}+n\,\overline{OP_2}\ ,\quad \text{με}\quad m+n=1\ .$$

Τότε

$$(9)\qquad \begin{cases} x=mx_1+nx_2 \\ y=my_1+ny_2 \\ z=mz_1+nz_2 \end{cases}.$$

Επίσης ,

$$\overline{OP}'=(x';y';z')\overset{(7)}{=\!=}(A_{11}x+A_{12}y+A_{13}z+\alpha\ ,\ A_{21}x+A_{22}y+A_{23}z+\beta\ ,\ A_{31}x+A_{32}y+A_{33}z+\gamma)$$

$$\overset{(9)}{=\!=}m(A_{11}x_1+A_{12}y_1+A_{13}z_1+\alpha\ ,\ A_{21}x_1+A_{22}y_1+A_{23}z_1+\beta\ ,\ A_{31}x_1+A_{32}y_1+A_{33}z_1+\gamma)$$

$$+n(A_{11}x_2+A_{12}y_2+A_{13}z_2+\alpha\ ,\ A_{21}x_2+A_{22}y_2+A_{23}z_2+\beta\ ,\ A_{31}x_2+A_{32}y_2+A_{33}z_2+\gamma)$$

$$= m(x_1',y_1',z_1')+n(x_2',y_2',z_2')$$

$$= m\overline{OP_1'}+n\overline{OP_2'} \quad .$$

'Αρα

$$(10) \qquad \overline{OP'}=m\overline{OP_1'}+n\overline{OP_2'} \quad , \text{ με } \; m+n=1 \quad .$$

Βλέπουμε έτσι , ότι η (9) , η οποία σημαίνει ότι τα P_1,P_2,P είναι συγγραμμικά και $(P_1P_2P)=n/m$, συνεπάγεται την (10), που σημαίνει ότι , τα P_1',P_2',P' είναι συγγραμμικά και $(P_1'P_2'P')=\frac{n}{m}$. Συμπερασματικά , οι (7) είναι αναλυτικές εξισώσεις ενός Ο.Μ , ως προς το σύστημα Oxyz , αφού στέλνει ευθείες σε ευθείες και διατηρεί τον απλό λόγο .

<u>Συμπέρασμα</u> . Κάθε Ο.Μ έχει αναλυτικές εξισώσεις της μορφής (7) σε κάθε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων Oxyz και αντίστροφα σχέσεις της μορφής (7) σε κάποιο σύστημα συντεταγμένων Oxyz , είναι αναλυτικές εξισώσεις ενός Ο.Μ .

<u>Παρατήρηση</u> . Κοιτάζοντας τις αναλυτικές εξισώσεις παράλληλης μεταφοράς και Γ.Μ , συμπεραίνουμε ότι , οι παράλληλες μεταφορές και οι Γ.Μ είναι Ο.Μ .

Η παρακάτω πρόταση είναι σημαντική .

<u>Πρόταση 6.5.1</u>. Δίνεται ένα σημείο O του E^3 . Κάθε Ο.Μ $f:E^3\to E^3$, $P\to f(P)=P'$ είναι σύνθεση ενός Γ.Μ $L:E^3\to E^3$, ως προς το δοθέν σημείο O , και μιας παράλληλης μεταφοράς , $T_{\overline{OO'}}:E^3\to E^3$. Δηλαδή ,

$$f = T_{\overline{OO'}}\circ L \quad ,$$

όπου L είναι Γ.Μ ως προς το σημείο O και $O'=f(O)$.

<u>Απόδειξη</u> . Θεωρούμε τον γεωμετρικό μετασχηματισμό $T_{\overline{O'O}}\circ f : E^3 \to E^3$. Αυτός ο γεωμετρικός μετασχηματισμός έχει το O , ως σταθερό σημείο . Πραγματικά , ας είναι $T_{\overline{O'O}}(O')=B$. Τότε $\overline{O'B}=\overline{O'O}$, άρα $O=B$. Έτσι , $O=T_{\overline{O'O}}(O')=T_{\overline{O'O}}(f(O))=(T_{\overline{O'O}}\circ f)(O)$. Θα βρούμε τις αναλυτικές εξισώσεις του $T_{\overline{O'O}}\circ f$, ως προς ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων $Oxyz$. Ας είναι , $P(x,y,z)$, $P'(x',y',z')=f(P)$, $P''(x'',y'',z'')=T_{\overline{O'O}}(P')$ και $\overline{OO'}=(\alpha,\beta,\gamma)$ ως προς το $Oxyz$. Από τις (7) συμπεραίνουμε ότι :

$$(11)\qquad \begin{cases} x'=A_{11}x+A_{12}y+A_{13}z+\alpha \\ y'=A_{21}x+A_{22}y+A_{23}z+\beta \\ z'=A_{31}x+A_{32}y+A_{33}z+\gamma \end{cases}$$

Επίσης , λόγω παράλληλης μεταφοράς έχουμε :

$$(12)\qquad \begin{cases} x''=x'-\alpha \\ y''=y'-\beta \\ z''=z'-\gamma \end{cases} .$$

Συνδυάζοντας τις (11),(12) παίρνουμε

$$(13)\qquad \begin{cases} x''=A_{11}x+A_{12}y+A_{13}z \\ y''=A_{21}x+A_{22}y+A_{23}z \\ z''=A_{31}x+A_{32}y+A_{33}z \end{cases} .$$

Οι (13) είναι οι αναλυτικές εξισώσεις του $T_{\overline{O'O}} \circ f$ ως προς το σύστημα Oxyz . Επειδή όμως το O είναι σταθερό σημείο αυτού του μετασχηματισμού συμπεραίνουμε ότι ο γεωμετρικός μετασχηματισμός $T_{\overline{O'O}} \circ f$ είναι Γ.Μ ως προς το O . Συμβολίζουμε $L = T_{\overline{O'O}} \circ f$. Άρα

$$f = T^{-1}_{\overline{O'O}} \circ L = T_{-\overline{O'O}} \circ L = T_{\overline{OO'}} \circ L \quad ,$$

ότι θέλαμε να δείξουμε .

<u>Παρατήρηση</u> . Ανάλογα , ισχύουν για Ο.Μ του επιπέδου . Έτσι οι αναλυτικές εξισώσεις ενός Ο.Μ , $f : E^2 \to E^2$ του επιπέδου, ως προς ένα σύστημα συντεταγμένων Oxy , είναι της μορφής :

$$(14) \qquad \begin{cases} x' = A_{11}x + A_{12}y + \alpha \\ y' = A_{21}x + A_{22}y + \beta \end{cases} ,$$

όπου $O' = f(O)$ και $\overline{OO'} = (\alpha, \beta)$, ως προς το Oxy .

<u>Άσκηση</u> . Η σύνθεση Ο.Μ είναι επίσης Ο.Μ .

6.6. <u>Ισομετρίες του επιπέδου ή του χώρου</u> .

<u>Ορισμός 6.6.1</u>. <u>Ισομετρία ή ευκλείδειος μετασχηματισμός του επιπέδου ή του χώρου</u> λέγεται ένας γεωμετρικός μετασχηματισμός του επιπέδου ή του χώρου , ο οποίος διατηρεί τις αποστάσεις μεταξύ των σημείων . Δηλαδή , αν $f(P) = P'$, $f(Q) = Q'$ τότε $d(P,Q) = |\overline{PQ}| = |\overline{P'Q'}| = d(P',Q')$.

<u>Παράδειγμα 6.6.1</u>. Θεωρούμε μια τυχαία παράλληλη μεταφορά $T_{\bar{\alpha}}$. Αν $T_{\bar{\alpha}}(P) = P'$ και $T_{\alpha}(Q) = Q'$, τότε $\overline{PP'}=\overline{QQ'} = \bar{\alpha}$, από τον ορισμό της παράλληλης μεταφοράς . Έτσι , το $PP'QQ'$ είναι παραλληλόγραμμο και συνεπώς $\overline{PQ} = \overline{P'Q'}$, δηλαδή $|\overline{PQ}|=|\overline{P'Q'}|$. Άρα κάθε παράλληλη μεταφορά είναι ισομετρία .

Συμβολίζουμε με $I(E^2)$ το σύνολο των ισομετριών του επιπέδου και με $I(E^3)$ το σύνολο των ισομετριών του χώρου . Σ'αυτή τη παράγραφο θα ασχοληθούμε με τη δομή των συνόλων $I(E^2)$, $I(E^3)$ με πράξη , τη σύνθεση απεικονίσεων .

Θα αποδείξουμε τη παρακάτω πρόταση .

<u>Πρόταση 6.6.1</u>. Κάθε ισομετρία του επιπέδου ή του χώρου είναι Ο.Μ (ομοπαραλληλικός μετασχηματισμός) . Επί πλέον κάθε ισομετρία είναι αμφιμονοσήμαντη (1-1) απεικόνιση .

<u>Απόδειξη</u> . Έστω P_1,P_2,P_3 τρία συγγραμμικά σημεία , έτσι ώστε το P_2 να κείται μεταξύ των P_1,P_3 . Τότε , $|\overline{P_1P_3}|=|\overline{P_1P_2}|+|\overline{P_2P_3}|$. Θα ισχύει , $|\overline{P_1'P_3'}|=|\overline{P_1'P_2'}|+|\overline{P_2'P_3'}|$, αφού η ισομετρία διατηρεί τις αποστάσεις . Έτσι θα έχουμε ότι τα σημεία P_1',P_2',P_3' είναι συγγραμμικά και $(P_1P_2P_3)=(P_1'P_2'P_3')$, δηλαδή η ισομετρία στέλνει ευθείες σε ευθείες και διατηρεί τους απλούς λόγους . Σύμφωνα με τον ορισμό του Ο.Μ , κάθε ισομετρία θα είναι Ο.Μ . Έστω τώρα $P \to P'$ και $Q \to Q'$ με $P'=Q'$. Τότε $|\overline{PQ}|=|\overline{P'Q'}|=0$ και συνεπώς $P = Q$, δηλαδή κάθε ισομετρία είναι και αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση .

Θεωρούμε τώρα μια ισομετρία f του επιπέδου ή του χώρου , η οποία μόλις είδαμε είναι και Ο.Μ . Σύμφωνα με τη Πρόταση 6.5.1 θα έχουμε :

(1) $f = T_{\overline{OO'}} \circ L$,

όπου O τυχαίο σημείο , $O'=f(O)$, $T_{\overline{OO'}}$ είναι παράλληλη μεταφορά και L είναι Γ.Μ , ως προς το O . 'Ετσι από την (1) παίρνουμε :

(2) $L = T^{-1}_{\overline{OO'}} \circ f = T_{-\overline{OO'}} \circ f = T_{\overline{O'O}} \circ f$

και συνεπώς ο Γ.Μ L είναι 1-1 , δηλαδή κανονικός , σαν σύνθεση των 1-1 απεικονίσεων $T_{\overline{O'O}}$ και f . Γνωρίζουμε ότι κανονικοί Γ.Μ και παράλληλες μεταφορές είναι απεικονίσεις επί . 'Ετσι από την (1) συμπεραίνουμε ότι κάθε ισομετρία είναι απεικόνιση επί .

Κάθε ισομετρία f , είναι απεικόνιση 1-1 και επί . Ορίζεται έτσι η αντίστροφη απεικόνιση f^{-1} , που είναι γεωμετρικός μετασχηματισμός του επιπέδου ή του χώρου . Εύκολα διαπιστώνουμε (πως;) ότι και η f^{-1} είναι ισομετρία . Επίσης η σύνθεση ισομετριών είναι πάλι ισομετρία . Από την άλλη πλευρά ο ταυτοτικός μετασχηματισμός του επιπέδου ή του χώρου είναι ισομετρία .

Με όσα αναφέραμε παραπάνω συμπεραίνουμε τη πρόταση .

<u>Πρόταση 6.6.2.</u> Με πράξη τη σύνθεση απεικονίσεων , τα σύνολα $I(E^2)$ και $I(E^3)$ είναι ομάδες .

<u>Ορισμός 6.6.2.</u> Η ομάδα $I(E^2)$ λέγεται <u>ομάδα ισομετριών του επιπέδου</u> και η ομάδα $I(E^3)$ λέγεται <u>ομάδα ισομετριών του χώρου</u> .

'Εστω τώρα , $T_{\bar{a}}$ μια τυχαία παράλληλη μεταφορά . Επειδή η $T_{\bar{a}}$ είναι ισομετρία σύμφωνα με το παράδειγμα 6.6.1 , από την (2) συμπεραίνουμε ότι ο Γ.Μ L είναι και αυτός ισομετρία , σαν σύνθεση ισομετριών . Από την (1) λοιπόν προκύπτει ότι : <u>Κάθε ισομετρία f προκύπτει , από ένα Γ.Μ L , ο οποίος είναι ισομετρία και μια παράλληλη μεταφορά</u> . Για να βρούμε λοιπόν όλες τις ισομετρίες του επιπέδου ή του χώρου , αρκεί να βρούμε όλους τους Γ.Μ ως προς O , που είναι συγχρόνως και ισομετρίες .

Θα δείξουμε στη συνέχεια δύο σημαντικές προτάσεις .

<u>Πρόταση 6.6.3.</u> Έστω $L : E^3 \to E^3$ ένας Γ.Μ του χώρου,ως προς το σημείο O , με πίνακα ως προς ένα σύστημα συντεταγμένων τον :

$$L = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} .$$

O Γ.Μ είναι ισομετρία του χώρου , αν και μόνο αν , ισχύουν :

$$(3) \quad \begin{cases} a_{11}^2+a_{21}^2+a_{31}^2 = 1 \\ a_{12}^2+a_{22}^2+a_{32}^2 = 1 \\ a_{13}^2+a_{23}^2+a_{33}^2 = 1 \\ a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}+a_{31}a_{32} = 0 \\ a_{11}a_{13}+a_{21}a_{23}+a_{31}a_{33} = 0 \\ a_{12}a_{13}+a_{22}a_{23}+a_{32}a_{33} = 0 \end{cases} .$$

<u>Απόδειξη</u> . Οι αναλυτικές εξισώσεις του L ως προς το σύστημα Oxyz είναι οι :

$$(4)\qquad \begin{cases} x' = \alpha_{11}x+\alpha_{12}y+\alpha_{13}z \\ y' = \alpha_{21}x+\alpha_{22}y+\alpha_{23}z \\ z' = \alpha_{31}x+\alpha_{32}y+\alpha_{33}z \end{cases}.$$

Έστω $O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$ και $\Gamma(0,0,1)$ ως προς το $Oxyz$. Από τις (4) συμπεραίνουμε : $O'(0,0,0)$, $A'(\alpha_{11},\alpha_{21},\alpha_{31})$, $B'(\alpha_{12},\alpha_{22},\alpha_{32})$ και $\Gamma'(\alpha_{13},\alpha_{23},\alpha_{33})$. Αν ο Γ.Μ L είναι ισομετρία τότε πρέπει : $|\overline{OA}|=|\overline{O'A'}|$, $|\overline{OB}|=|\overline{O'B'}|$, $|\overline{O\Gamma}|=|\overline{O'\Gamma'}|$, $|\overline{AB}|=|\overline{A'B'}|$, $|\overline{A\Gamma}|=|\overline{A'\Gamma'}|$ και $|\overline{B\Gamma}|=|\overline{B'\Gamma'}|$.
Σε συντεταγμένες αυτές οι σχέσεις μας δίνουν ακριβώς τις (3) .
Αντίστροφα , ας υποθέσουμε πως ισχύουν οι (3) . Τότε για $P_1(x_1,y_1,z_1)$, $P_2(x_2,y_2,z_2)$, $P_1'(x_1',y_1',z_1')$ και $P_2'(x_2',y_2',z_2')$ έχουμε :

$$|\overline{P_1'P_2'}|^2 = (x_2'-x_1')^2+(y_2'-y_1')^2+(z_2'-z_1')^2 \overset{(4)}{=\!=}$$

$$= [\alpha_{11}(x_2-x_1)+\alpha_{12}(y_2-y_1)+\alpha_{13}(z_2-z_1)]^2+[\alpha_{21}(x_2-x_1)+\alpha_{22}(y_2-y_1)+\alpha_{23}(z_2-z_1)]^2+$$

$$+ [\alpha_{31}(x_2-x_1)+\alpha_{32}(y_2-y_1)+\alpha_{33}(z_2-z_1)]^2$$

$$= (\alpha_{11}^2+\alpha_{11}^2+\alpha_{31}^2)(x_2-x_1)^2+(\alpha_{12}^2+\alpha_{22}^2+\alpha_{32}^2)(y_2-y_1)^2+(\alpha_{13}^2+\alpha_{23}^2+\alpha_{33}^2)(z_2-z_1)^2 +$$

$$+2(\alpha_{11}\alpha_{12}+\alpha_{21}\alpha_{22}+\alpha_{31}\alpha_{32})(x_2-x_1)(y_2-y_1)$$

$$+2(\alpha_{11}\alpha_{13}+\alpha_{21}\alpha_{23}+\alpha_{31}\alpha_{33})(x_2-x_1)(z_2-z_1)$$

$$+2(\alpha_{12}\alpha_{13}+\alpha_{22}\alpha_{23}+\alpha_{32}\alpha_{33})(y_2-y_1)(z_2-z_1)$$

$$\overset{(3)}{=\!=} (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2 = |\overline{P_1P_2}|^2 .$$

'Ετσι , $|\overline{P_1P_2}|=|\overline{P_1'P_2'}|$ και συνεπώς ο Γ.Μ L είναι ισομετρία , αν ισχύουν οι (3) .

Πρόταση 6.6.4. 'Εστω $L : E^2 \to E^2$ ένας Γ.Μ του επιπέδου,ως προς το σημείο 0 , με πίνακα ως προς ένα σύστημα συντεταγμένων τον

$$L = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} .$$

Ο Γ.Μ L είναι ισομετρία του επιπέδου , αν και μόνο αν , ισχύει :

$$(5) \qquad \begin{cases} \alpha_{11}^2+\alpha_{21}^2 = 1 \\ \alpha_{12}^2+\alpha_{22}^2 = 1 \\ \alpha_{11}\alpha_{12}+\alpha_{21}\alpha_{22} = 0 \end{cases} .$$

Απόδειξη . Αποδεικνύεται , όπως η πρόταση 6.6.3 , παίρνοντας 0(0,0) , A(1,0) και B(0,1) .

Παρατήρηση . 'Εστω ο πίνακας $L=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$. Τότε ο πίνακας

$L^T = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{pmatrix}$, που προκύπτει από τον L κάνοντας τις γραμμές του στήλες , λέγεται <u>ανάστροφος</u> του πίνακα L . Με απλές πράξεις διαπιστώνει κανείς ότι $\det L = \det L^T$. Όμοια αν :

$$L = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \text{, τότε } L^T = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{pmatrix} \text{ και } \det L = \det L^T .$$

<u>Παρατήρηση</u> . Όταν ο Γ.Μ L είναι ισομετρία τότε οι σχέσεις (3) ή οι (5) συνεπάγονται ότι :

$L^T \cdot L = I =$ ο μοναδιαίος πίνακας του επιπέδου ή του χώρου . Έτσι ο L^T είναι ο αντίστροφος πίνακας του L , δηλαδή $L^T = L^{-1}$. Επί πλέον , αφού $\det L^T = \det L$, θα έχουμε :

$$(\det L)^2 = 1$$

ή

(6) $$|\det L| = 1 .$$

<u>Ορισμός 6.6.3</u>. Ένας Γ.Μ ως προς O , που είναι συγχρόνως και ισομετρία , λέγεται <u>κανονική στροφή</u> στο O , αν $\det L = 1$ και <u>ψευδοστροφή στο O</u> αν $\det L = -1$.

Συμπερασματικά έχουμε : <u>Κάθε ισομετρία του επιπέδου ή του χώρου είναι μια κανονική στροφή ή μια ψευδοστροφή σε κάποιο σημείο , που ακολουθείται από μια παράλληλη μεταφορά</u> .

Θα κλείσουμε την παράγραφο με έναν ακόμη ορισμό .

<u>Ορισμός 6.6.4</u>. Δύο γεωμετρικά σχήματα K , K' του επιπέδου ή του χώρου λέγονται <u>ίσα</u> (congruent), αν υπάρχει μια ισομετρία f του επιπέδου ή του χώρου , έτσι ώστε $f(K) = K'$.

'Εστω τώρα K ένα γεωμετρικό σχήμα του επιπέδου ή του χώρου . Συμβολίζουμε με I(K) τις ισομετρίες του επιπέδου ή του χώρου που στέλνουν το K στον εαυτό του . Είναι εύκολο να δει κάποιος (πως;) ότι το σύνολο I(K) με πράξη τη σύνθεση απεικονίσεων είναι ομάδα και λέγεται ομάδα ισομετριών του K .

6.7. Ταξινόμηση των ισομετριών του επιπέδου .

Γνωρίζουμε , παράδειγμα 6.6.1 , ότι κάθε παράλληλη μεταφορά είναι ισομετρία του επιπέδου . Θα δόσουμε ακόμη δύο παραδείγματα .

Παράδειγμα 6.7.1. 'Εστω $A \in E^2$. Τότε για κάθε θ η στροφή $R_\theta(A)$ του επιπέδου είναι ισομετρία του επιπέδου . Πραγματικά , ως προς ένα σύστημα Axy , ο πίνακας της $R_\theta(A)$ είναι ο :

$$R_\theta(A) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} .$$

'Ετσι σύμφωνα με τη πρόταση 6.6.4 η $R_\theta(A)$ είναι ισομετρία , αφού ικανοποιούνται οι (5) . Επίσης

$$\det R_\theta(A) = 1 ,$$

δηλαδή η στροφή $R_\theta(A)$ είναι μια κανονική στροφή σύμφωνα με τον ορισμό 6.6.3 .

Παράδειγμα 6.7.2. Ο κατοπτρισμός K_ℓ του E^2 , ως προς μια ευθεία ℓ είναι επίσης ισομετρία , αφού ο πίνακας του K_ℓ , ως προς ένα σύστημα Oxy με $O \in \ell$, είναι ο :

$$K_\ell = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} ,$$

όπου $\theta/2$ είναι η γωνία που σχηματίζει ο άξονας Ox με την ℓ. Ικανοποιούνται λοιπόν οι (5) της πρότασης 6.6.4 και απί πλέον $\det K_\ell = -1$. Άρα ο κατοπτρισμός K_ℓ είναι μια ψευδοστροφή.

Σκοπεύουμε στη συνέχεια να βρούμε τις κανονικές στροφές και ψευδοστροφές στο $O\in E^2$. Αν

$$L = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

είναι ο πίνακας μιας κανονικής στροφής ή ψευδοστροφής στο $O\in E^2$ τότε έχουμε:

(1) $\qquad \alpha_{11}^2+\alpha_{21}^2 = 1$

(2) $\qquad \alpha_{12}^2+\alpha_{22}^2 = 1$

(3) $\qquad \alpha_{11}\alpha_{12}+\alpha_{21}\alpha_{22} = 0$

(4) $\qquad \det L = \alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{21}\alpha_{12} = \pm 1$

και

$$L^T = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{pmatrix} = L^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{\alpha_{22}}{\det L} & -\dfrac{\alpha_{12}}{\det L} \\ -\dfrac{\alpha_{21}}{\det L} & \dfrac{\alpha_{11}}{\det L} \end{pmatrix}$$

ή

$$(5) \qquad \begin{cases} \alpha_{11} = \dfrac{\alpha_{22}}{\det L}, & \alpha_{22} = \dfrac{\alpha_{11}}{\det L} \\ \alpha_{12} = -\dfrac{\alpha_{21}}{\det L}, & \alpha_{21} = -\dfrac{\alpha_{12}}{\det L} \end{cases}.$$

Περίπτωση 1 . detL=1 . Λόγω της (1) θέτουμε $\alpha_{11}=\cos\theta$, οπότε $\alpha_{21}=\pm\sin\theta$. Τότε από τις (5) έχουμε : $\alpha_{22}=\cos\theta$ και $\alpha_{12}=\pm\sin\theta$. Έτσι για κανονικές στροφές στο $O\in E^2$ οι δυνατοί πίνακες είναι οι

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} .$$

Η δεύτερη περίπτωση προκύπτει από την πρώτη βάζοντας στη θέση του θ το $-\theta$. Έτσι κάθε κανονική στροφή στο O έχει πίνακα της μορφής

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix} .$$

Συγκρίνοντας με το παράδειγμα 6.2.1 , συμπεραίνουμε ότι : κάθε κανονική στροφή στο $O\in E^2$ είναι μια στροφή $R_\theta(O)$.

Περίπτωση 2 . detL=-1 . Πάλι , λόγω της (1) θέτουμε $\alpha_{11}=\cos\theta$, οπότε $\alpha_{21}=\pm\sin\theta$. Τότε από τις (5) έχουμε : $\alpha_{22}=-\cos\theta$ και $\alpha_{12}=\pm\sin\theta$. Εδώ οι δυνατές περιπτώσεις είναι :

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ -\sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix} ,$$

όπου και πάλι η δεύτερη περίπτωση προκύπτει από την πρώτη βάζοντας όπου θ το $-\theta$. Έτσι κάθε ψευδοστροφή στο O έχει πίνακα της μορφής :

$$\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix} .$$

Συγκρίνοντας με το παράδειγμα 6.2.2 , συμπεραίνουμε ότι : κάθε ψευδοστροφή στο $O\in E^2$ είναι ένας κατοπτρισμός πάνω σε μια ευθεία ℓ δια του O .

<u>Συμπέρασμα</u> . <u>Κάθε ισομετρία $f : E^2 \to E^2$ έχει αναλυτικές εξισώσεις , ως προς κάθε σύστημα Οxy , της μορφής</u> :

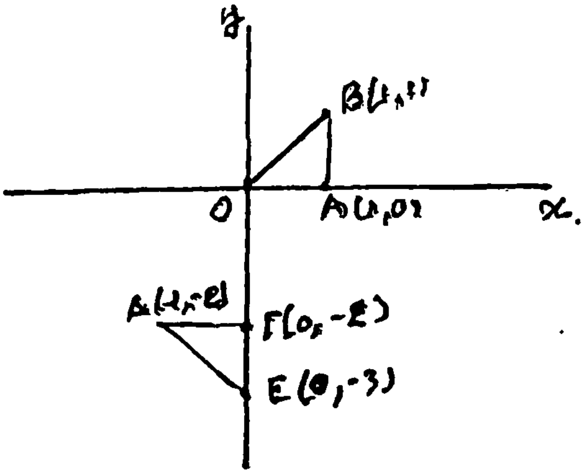
$$(6) \qquad \begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta + a \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta + b \end{cases} ,$$

ή

$$(7) \qquad \begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta + a \\ y' = x\sin\theta - y\cos\theta + b \end{cases} ,$$

όπου $f(O) = O'(a,b)$.

<u>'Ασκηση</u> . Στο παρακάτω σχήμα , δίνονται δύο τρίγωνα . Να



εξετάστε , αν είναι ίσα .

<u>'Ασκηση</u> . Να βρείτε την ομάδα ισομετριών ενός τετραγώνου, ισοπλεύρου τριγώνου , ορθογωνίου παραλληλογράμμου και κύκλου στο επίπεδο .

6.8. <u>Ταξινόμηση των ισομετριών του χώρου</u> .

Σκοπεύουμε να βρούμε πρώτα , ποιές είναι οι κανονικές στροφές ή ψευδοστροφές στο $O \in E^3$. Έστω λοιπόν $O \in E^3$ και $L:E^3 \to E^3$ ένας Γ.Μ ως προς O , με αναλυτικές εξισώσεις ως προς το σύστημα $Oxyz$, τις :

$$(1) \qquad \begin{cases} x' = \alpha_{11}x+\alpha_{12}y+\alpha_{13}z \\ y' = \alpha_{21}x+\alpha_{22}y+\alpha_{23}z \\ z' = \alpha_{31}x+\alpha_{32}y+\alpha_{33}z \end{cases} .$$

Ο πίνακας του L , ως προς το σύστημα $Oxyz$, είναι ο :

$$L = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} .$$

Υποθέτουμε πως ο L είναι επί πλέον και ισομετρία . Τότε όπως ξέρουμε θα ισχύουν :

$$(2) \qquad \begin{cases} \alpha_{11}^2+\alpha_{21}^2+\alpha_{22}^2 = 1 \\ \alpha_{12}^2+\alpha_{22}^2+\alpha_{32}^2 = 1 \\ \alpha_{13}^2+\alpha_{23}^2+\alpha_{33}^2 = 1 \\ \alpha_{11}\alpha_{12}+\alpha_{21}\alpha_{22}+\alpha_{31}\alpha_{32} = 0 \\ \alpha_{11}\alpha_{13}+\alpha_{21}\alpha_{23}+\alpha_{31}\alpha_{33} = 0 \\ \alpha_{12}\alpha_{13}+\alpha_{22}\alpha_{23}+\alpha_{32}\alpha_{33} = 0 \end{cases}$$

και

$$(3) \qquad \det L = \pm 1 .$$

'Ετσι για μια κανονική στροφή ή ψευδοστροφή ισχύουν οι (2) και (3) , ως προς οποιοδήποτε σύστημα Oxyz .

Θέτουμε το ερώτημα : Υπάρχει σημείο P(x,y,z) , έτσι ώστε P'(λx,λy,λz) με $\lambda \in R$; Προς τούτο , πρέπει και αρκεί , να υπάρχει μη τετριμμένη λύση στο ομογενές σύστημα :

$$(4) \qquad \begin{cases} (a_{11}-\lambda)x+a_{12}y+a_{13}z=0 \\ a_{21}x+(a_{12}-\lambda)y+a_{23}z=0 \\ a_{31}x+a_{32}y+(a_{33}-\lambda)z=0 \end{cases}$$

Το ομογενές σύστημα (4) έχει μη τετριμμένη λύση , αν και μόνον αν , έχει πραγματική λύση η εξίσωση :

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Η εξίσωση (5) είναι τρίτου βαθμού και συνεπώς έχει τουλάχιστον μια πραγματική λύση , έστω λ_0 . 'Εστω $P_0(x_0,y_0,z_0)$ μια μη τετριμμένη λύση του (4) για $\lambda=\lambda_0$. 'Ετσι για το $P_0(x_0,y_0,z_0)$ θα έχουμε $P_0'(\lambda_0x_0,\lambda_0y_0,\lambda_0z_0)$. Επειδή όμως πρέπει $|\overline{OP_0}|=|\overline{OP_0'}|$, αφού η L ισομετρία , θα έχουμε :

$$x_0^2+y_0^2+z_0^2=|\overline{OP_0}|^2=|\overline{OP_0'}|^2=\lambda_0^2(x_0^2+y_0^2+z_0^2)$$

και συνεπώς $|\lambda_0|=1$. Ειδικότερα , για $\lambda_0=1$ έχουμε $P_0'(x_0,y_0,z_0)=P_0$ και για $\lambda_0=-1$ έχουμε $P_0'(-x_0,-y_0,-z_0)$=συμμετρικό του P_0 , ως προς το O .

'Εχουμε λοιπόν την πρόταση .

<u>Πρόταση 6.8.1</u>. Έστω L μια κανονική στροφή ή ψευδοστροφή στο $O \in E^3$. Υπάρχει τότε ένα σημείο $P_0 \in E^3$, διαφορετικό του O, έτσι ώστε $P_0' = P_0$ ή P_0' = συμμετρικό του P_0 ως προς το O.

Θεωρούμε στη συνέχεια ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων OXYZ με άξονα OZ την ευθεία ℓ_0, που ορίζεται από τα σημεία O και P_0. Θα διακρίνουμε τις παρακάτω δύο περιπτώσεις.

<u>Περίπτωση 1η</u>. Έστω $\lambda_0=1$. Τότε $P_0'=P_0$, δηλαδή το P_0 είναι σταθερό σημείο του L. Σύμφωνα με τη πρόταση 6.3.1, όλα τα σημεία της ℓ_0 είναι σταθερά σημεία του L και οι αναλυτικές εξισώσεις του L ως προς το σύστημα OXYZ είναι της μορφής:

$$(6) \qquad \begin{cases} X' = A_{11}X + A_{12}Y \\ Y' = A_{21}X + A_{22}Y \\ Z' = A_{31}X + A_{32}Y + Z \end{cases} .$$

Επειδή η L είναι κανονική στροφή ή ψευδοστροφή θα έχουμε γράφοντας τις (2)

$$A_{11}^2 + A_{21}^2 + A_{31}^2 = 1$$

$$A_{12}^2 + A_{22}^2 + A_{32}^2 = 1$$

$$0 + 0 + 1 = 1$$

$$A_{11}A_{12} + A_{21}A_{22} + A_{31}A_{32} = 0$$

$$A_{11} \cdot 0 + A_{21} \cdot 0 + A_{31} \cdot 1 = 0 \rightarrow A_{31} = 0$$

$$A_{12} \cdot 0 + A_{22} \cdot 0 + A_{32} \cdot 1 = 0 \rightarrow A_{32} = 0$$

ή

$$(7)\quad \begin{cases} A_{11}^2+A_{21}^2=1 \\ A_{12}^2+A_{22}^2=1 \\ A_{11}A_{12}+A_{21}A_{22}=0 \end{cases}$$

και οι αναλυτικές εξισώσεις του L ως προς το $OXYZ$ είναι της μορφής :

$$(8)\quad \begin{cases} X'=A_{11}X+A_{12}Y \\ Y'=A_{21}X+A_{22}Y \\ Z'=\qquad\qquad Z \end{cases}$$

και ο πίνακας του L ως προς το $OXYZ$ είναι ο

$$L=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Συνεπώς έχουμε και

$$A_{11}A_{22}-A_{21}A_{12}=\det L=\pm 1 .$$

Τώρα , για τον πίνακα $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ έχουμε ακριβώς τις ίδιες σχέσεις , όπως στη περίπτωση ισομετριών του επιπέδου , και συνεπώς οι μόνες δυνατές περιπτώσεις για αυτό το πίνακα είναι :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

'Αρα λοιπόν , οι αναλυτικές εξισώσεις του L ως προς το σύστημα ΟΧΥΖ είναι μιας των παρακάτω μορφών :

$$(9)\qquad \begin{cases} X' = X\cos\theta - Y\sin\theta \\ Y' = X\sin\theta + Y\cos\theta \\ Z' = Z \end{cases}$$

$$(10)\qquad \begin{cases} X' = X\cos\theta + Y\sin\theta \\ Y' = X\sin\theta - Y\cos\theta \\ Z' = Z \end{cases} .$$

Είναι φανερό ότι οι (9) ισχύουν αν πρόκειται για κανονική στροφή και οι (10) αν πρόκειται για ψευδοστροφή .

<u>Περίπτωση 2η</u> . 'Εστω $\lambda_0=-1$. Τότε P_0' = συμμετρικό του P_0 ως προς το O . Σύμφωνα με τη πρόταση 6.3.3 , ως προς το σύστημα ΟΧΥΖ , οι αναλυτικές εξισώσεις του L είναι της μορφής :

$$(11)\qquad \begin{cases} X' = A_{11}X+A_{12}Y \\ Y' = A_{21}X+A_{22}Y \\ Z' = A_{31}X+A_{32}Y-Z \end{cases} .$$

Επειδή η L είναι κανονική στροφή ή ψευδοστροφή , εφαρμόζοντας για τις (11) τις (2) , όπως στη προηγούμενη περίπτωση παίρνουμε ότι οι αναλυτικές εξισώσεις του L ως προς το ΟΧΥΖ είναι μιας των παρακάτω μορφών :

$$
(12) \qquad \begin{cases} X' = X\cos\theta - Y\sin\theta \\ Y' = X\sin\theta + Y\cos\theta \\ Z' = \quad -Z \end{cases}
$$

$$
(13) \qquad \begin{cases} X' = X\cos\theta + Y\sin\theta \\ Y' = X\sin\theta - Y\cos\theta \\ Z' = \quad -Z \end{cases}
$$

Είναι φανερό ότι οι (12) ισχύουν αν ο L είναι ψευδοστροφή και οι (13) ισχύουν αν ο L είναι κανονική στροφή.

<u>Συμπέρασμα</u>. Έστω $f : E^3 \to E^3$, $P \to P'$ μια ισομετρία του χώρου και $O \in E^3$. Υπάρχει ένα κατάλληλο σύστημα $OXYZ$, έτσι ώστε οι αναλυτικές εξισώσεις της f είναι μιας των παρακάτω μορφών :

$$
(14) \qquad \begin{cases} X' = X\cos\theta - Y\sin\theta + \alpha \\ Y' = X\sin\theta + Y\cos\theta + \beta \\ Z' = \quad Z + \gamma \end{cases}
$$

$$
(15) \qquad \begin{cases} X' = X\cos\theta + Y\sin\theta + \alpha \\ Y' = X\sin\theta - Y\cos\theta + \beta \\ Z' = \quad Z + \gamma \end{cases}
$$

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} X' &= X\cos\theta - Y\sin\theta + \alpha \\ Y' &= X\sin\theta + Y\cos\theta + \beta \\ Z' &= \quad -Z + \gamma \end{aligned}\right.$$

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} X' &= X\cos\theta + Y\sin\theta + \alpha \\ Y' &= X\sin\theta - Y\cos\theta + \beta \\ Z' &= \quad -Z + \gamma \end{aligned}\right. ,$$

όπου $\overline{OO'}=(\alpha,\beta,\gamma)$ και $O'=f(O)$.

<u>'Ασκηση</u> . Οι (14) για $\theta=0$ ή 2π γίνονται :

$$\left.\begin{aligned} X' &= X+\alpha \\ Y' &= Y+\beta \\ Z' &= Z+\gamma \end{aligned}\right\} \quad \text{πρόκειται για μεταφορά .}$$

Για $\theta\neq 0$ ή 2π και $\gamma=0$, να δείξετε ότι υπάρχει σύστημα συντεταγμένων $A\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$, ως προς το οποίο οι (14) γίνονται :

$$\begin{aligned} \bar{X}' &= \bar{X}\cos\theta - \bar{Y}\sin\theta \\ \bar{Y}' &= \bar{X}\sin\theta + \bar{Y}\sin\theta \\ \bar{Z}' &= \bar{Z} \end{aligned} .$$

'Ετσι συγκρίνοντας με το παράδειγμα 6.3.2 , πρόκειται για μια στροφή του E^3 περί τον άξονα $A\bar{Z}$.

Για $\theta\neq 0$ ή 2π και $\gamma\neq 0$, να δείξετε ότι υπάρχει σύστημα συντεταγμένων $A\bar{X}\bar{Y}\bar{Z}$, ως προς το οποίο οι (14) γίνονται :

$$(*)\quad \begin{cases} \bar{X}' = \bar{X}\cos\theta - \bar{Y}\sin\theta \\ \bar{Y}' = \bar{X}\sin\theta + \bar{Y}\cos\theta \\ \bar{Z}' = \bar{Z}+\gamma \end{cases}$$

Μια ισομετρία της οποίας οι αναλυτικές εξισώσεις ως προς κάποιο σύστημα συντεταγμένων είναι της μορφής (*) λέγεται <u>ελικοειδής κίνηση</u> (helicoidal motion) .

Τυπώθηκε στο Πανεπιστημιακό Τυπογραφείο
με δαπάνη του Πανεπιστημίου Ιωαννίνων.
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ ΤυπογραφείΟ
Διανέμεται Δωρεάν στους φοιτητές.

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΟ
Τυπογραφειο
ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ