Τμήμα Μαθηματικών Πανεπιστήμιο Πατρών

Βοηθητικές Σημειώσεις
για το μάθημα

Αναλυτική Γεωμετρία

Σοφία Ζαφειρίδου
Αναπληρώτρια Καθηγήτρια

Πάτρα 2011

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Διανυσματικοί χώροι

Εστω E^3 ο τριδιάστατος Ευκλείδειος χώρος στον οποίο έχει οριστεί μία μονάδα μήκους.

Θεωρούμε δύο σημεία A και B του χώρου. Συμβολίζουμε με

AB – το ευθύγραμμο τμήμα με άκρα A και B
$|AB|$ – το μήκος του AB
$[AB)$ – την ημιευθεία με αρχή το A η οποία διέρχεται από το B
(AB) – την ευθεία που διέρχεται απο τα σημεία A και B

1.1 Εφαρμοστά διανύσματα του χώρου.

Ορισμός 1.1.1. Κάθε διατεταγμένο ζεύγος (A, B) σημείων A και B του χώρου (A το πρώτο σημείο του ζεύγος και B το δεύτερο σημείο του ζεύγος) καλείται *εφαρμοστό διάνυσμα* με αρχή το A και πέρας το B και συμβολίζεται με $\overrightarrow{AB}$.

Ορισμός 1.1.2. Τα εφαρμοστά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{CD}$ λέγεται ότι έχουν την ίδια διέυθυνση αν και μόνον αν είτε $(AB) = (CD)$ είτε $(AB) \parallel (CD)$. Γράφουμε τότε $\overrightarrow{AB} \| \overrightarrow{CD}$.

Ορισμός 1.1.3. Δύο εφαρμοστά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{CD}$ που έχουν την ίδια διεύθυνση καλούνται *ομόρροπα* ή λέγεται ότι έχουν την φόρα (γράφουμε τότε $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$) αν και μόνον αν

- (i) είτε τα σημεία A, B, C, D ανήκουν σε μία ευθεία και οι ημιευθείες $[AB)$ και $[CD)$ τέμνονται κατά μία ημιευθεία,
- (ii) είτε οι ευθείες (AB) και (CD) είναι παράλληλες και οι ημιευθείες $[AB)$ και $[CD)$ περιέχονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία (AC).

Ορισμός 1.1.4. Δύο εφαρμοστα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{CD}$ που έχουν την ίδια διεύθυνση και δεν είναι ομόρροπα καλούνται *αντίρροπα* (γράφουμε $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$).

Ορισμός 1.1.5. Τα εφαρμοστά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{CD}$ καλούνται ίσα (γραφουμε $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$) όταν $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$ και $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$.

Πρόταση 1.1.6. *Για κάθε εφαρμοστό διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ και για κάθε σημείο C υπάρχει μοναδικό σημείο D τέτοιο ώστε $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.*

Ορισμός 1.1.7. Εστω $\overrightarrow{AB}$ ένα εφαρμοστό διάνυσμα, d μια ευθεία και π ένα επίπεδο.

- (a) $\overrightarrow{AB} \| d$ ($\overrightarrow{AB}$ είναι παράλληλο στη d) $\Longleftrightarrow (AB) \| d$ ή $(AB) = d$.
- (b) $\overrightarrow{AB} \| \pi$ ($\overrightarrow{AB}$ είναι παράλληλο στο π) $\Longleftrightarrow (AB) \| \pi$ ή $(AB) \subseteq \pi$.

1.2 Ελεύθερα διανύσματα.

Πρόταση 1.2.1. *Η ισότητα των εφαρμοστών διανυσμάτων είναι σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο όλων των εφαρμοστών διανυσμάτων του χώρου, δηλαδή ικανοποιεί τα ακόλουθα αξιώματα:*

(i) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ *ανακλαστική ιδιότητα*

(ii) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Longrightarrow \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$ *συμμετρική ιδιότητα*

(iii) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ *και* $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EZ} \Longrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EZ}$ *μεταβατική ιδιότητα*

Ορισμός 1.2.2. Κάθε κλάση ισοδυναμίας ως προς τη σχέση ισοδυναμίας "$=$" στο σύνολο των εφαρμοστών διανυσμάτων του χώρου καλείται ελεύθερο διάνυσμα.

Τα ελεύθερα διανύσματα συμβολίζουμε με $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{u}, \ldots$ κ.τ.λ..
Συμβολίζουμε με $\vec{0}$ το ελεύθερο διάνυσμα που περιέχει τα εφαρμοστά διανύσματα: $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$, $\overrightarrow{CC}, \ldots$ κ.τ.λ..

Πρόταση 1.2.3. *Για κάθε διάνυσμα* $\vec{u}$ *και για κάθε σημείο* A *υπάρχει μοναδικό σημείο* B *τέτοιο ώστε* $\overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{u}$.

Ορισμός 1.2.4. Εστω $\vec{u}$ και $\vec{v}$ δύο ελεύθερα διανύσματα, d μια ευθεία του χώρου και π ένα επίπεδο του χώρου.

(a) $\vec{u} \| \vec{v}$ ($\vec{u}$ και $\vec{v}$ είναι παράλληλα) $\Longleftrightarrow \overrightarrow{AB} \| \overrightarrow{CD}$, όπου $\overrightarrow{AB} \in \vec{u}$ και $\overrightarrow{CD} \in \vec{v}$.

(b) $\vec{u} \| d$ ($\vec{u}$ είναι παράλληλο στη d) $\Longleftrightarrow \overrightarrow{AB} \| d$, όπου $\overrightarrow{AB} \in \vec{u}$.

(c) $\vec{u} \| \pi$ ($\vec{u}$ είναι παράλληλο στο π) $\Longleftrightarrow \overrightarrow{AB} \| \pi$, όπου $\overrightarrow{AB} \in \vec{u}$.

(d) $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ είναι συνεπίπεδα $\Longleftrightarrow$ αν υπάρχει επίπεδο π τέτοιο ώστε $\vec{u} \| \pi$, $\vec{v} \| \pi$ και $\vec{w} \| \pi$.

Θεωρούμε ότι $\vec{0} \| \vec{u}$, $\vec{0} \| d$ και $\vec{0} \| \pi$.

Παρατήρηση 1.2.5. Για οποιαδήποτε ελεύθερα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ υπάρχει επίπεδο π τέτοιο ώστε $\vec{u} \| \pi$ και $\vec{v} \| \pi$.

Άθροισμα δυο ελεύθερων διανυσμάτων

Το άθροισμα δυο ελεύθερων διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$ ορίζεται ως εξής:

(i) Παίρνουμε ένα τυχαίο σημείο A του χώρου.

(ii) Υπάρχει μοναδικό σημείο B τέτοιο ώστε $\overrightarrow{AB} \in \vec{u}$.

(iii) Υπάρχει μοναδικό σημείο C τέτοιο ώστε $\overrightarrow{BC} \in \vec{v}$.

Το ελεύθερο διάνυσμα που περιέχει το $\overrightarrow{AC}$ καλείται άθροισμα των $\vec{u}$ και $\vec{v}$ και συμβολίζεται με $\vec{u} + \vec{v}$.

Γινόμενο πραγματικού αριθμού επί ελεύθερο διάνυσμα

Το γινόμενο ενός ελεύθερου διανύσματος $\vec{u} \neq \vec{0}$ επί $\lambda \in \mathbb{R}$ ορίζεται ως εξής:
θεωρούμε $\overrightarrow{AB} \in \vec{u}$ και ένα σημείο C της ευθείας (AB) τέτοιο ώστε

(i) $|\overrightarrow{AC}| = |\lambda| |\overrightarrow{AB}|$

(ii) $\overrightarrow{AC} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB}$, αν $\lambda > 0$,

(iii) $\overrightarrow{AC} \uparrow\downarrow \overrightarrow{AB}$, αν $\lambda < 0$,

(iv) $C = A$, αν $\lambda = 0$

Το ελεύθερο διάνυσμα που περιέχει το $\overrightarrow{AC}$ καλείται γινόμενο του λ επί του $\vec{u}$ και συμβολίζεται $\lambda \vec{u}$ ή με $\lambda \cdot \vec{u}$.
Ορίζουμε $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

1.3 Η έννοια του διανυσματικού χώρου.

Ορισμός 1.3.1. Έστω V ένα σύνολο και έστω ότι για κάθε $\vec{u}, \vec{v} \in V$ έχει οριστεί στοιχείο $\vec{u} + \vec{v} \in V$ και για κάθε $\vec{u} \in V,\ \lambda \in \mathbb{R}$ έχει οριστεί στοιχείο $\lambda \cdot \vec{u} \in V$. Το σύνολο V μαζί με τις πράξεις $+$ και $\cdot$ καλείται διανυσματικός χώρος πάνω στο $\mathbb{R}$, αν

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
2. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
3. $\exists \vec{0} \in V$, τέτοιο ώστε $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u},\ \forall \vec{u} \in V$,
4. $\forall \vec{u} \in V,\ \exists - \vec{u} \in V$, τέτοιο ώστε $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$,
5. $(\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u},\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall \vec{u} \in V$,
6. $\lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u},\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall \vec{u} \in V$,
7. $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$,
8. $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$.

Θεώρημα 1.3.2. *Το σύνολο V_3 όλων των ελεύθερων διανυσμάτων του Ευκλείδιου χώρου είναι διανυσματικός χώρος πάνω στο $\mathbb{R}$.*

Θεώρημα 1.3.3. *Το σύνολο V_π όλων των ελεύθερων διανυσμάτων παράλληλων σ΄ ένα επίπεδο π είναι διανυσματικός χώρος πάνω στο $\mathbb{R}$.*

Θεώρημα 1.3.4. *Το σύνολο V_ε όλων των ελεύθερων διανυσμάτων παράληλων σε μια ευθεία ε είναι διανυσματικός χώρος πάνω στο $\mathbb{R}$.*

1.4 Γραμμική εξάρτηση στοιχείων διανυσματικού χώρου.

Η προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης των στοιχείων ενός διανυσματικού χώρου μας επιτρέπει να μιλάμε για το άθροισμα των τριών διανυσμάτων:

$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$$

Με επαγωγή ορίζεται το άθροισμα οποιουδήποτε αριθμού διανυσμάτων:

$$\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + ... + \vec{u}_n = (\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + ... + \vec{u}_{n-1}) + \vec{u}_n$$

Από τις ιδιότητες του διανυσματικού χώρου προκύπτει ότι για κάθε $\vec{u} \in V$ και για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

$$0 \cdot \vec{u} = \vec{0},\ \lambda \cdot \vec{0} = \vec{0},\ -\vec{u} = (-1)\vec{u}$$

Άρα, μπορούμε να απλοποιούμε τις εξισώσεις και της παραστάσεις που περιέχουν διανύσματα όπως και τις εξισώσεις και τις παραστάσεις που περιέχουν μόνο αροιθμούς: να τοποθετούμε παρενθέσεις, να ανετιμεταθέτουμε τους όρους ενός αθροίσματος, να μεταφέρουμε τους όρους από ένα μέλος μιας ισότητας στο άλλο αλλάζοντας πρόσημο.

Ορισμός 1.4.1. Έστω ότι $\vec{u}, \vec{u}_1, ..., \vec{u}_n, \vec{u}_{n+1}$ είναι στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου πάνω στο $\mathbb{R}$.
Το άθροισμα

$$\lambda_1\vec{u}_1 + ... + \lambda_n\vec{u}_n$$

καλείται γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n$ με συντελεστές $\lambda_1, ..., \lambda_n$.

Προφανώς κάθε γραμμικός συνδυασμός ελεύθερων διανυσμάτων είναι ελεύθερο διάνυσμα. Για κάθε πεπερασμένο σύνολο διανυσμάτων $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n$ υπάρχουν $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $\lambda_1\vec{u}_1 + ... + \lambda_n\vec{u}_n = \vec{0}$. Πράγματι, αρκεί να θέσουμε $\lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$.

Ο γραμμικός συνδυασμός $0 \cdot \vec{u}_1 + ... + 0 \cdot \vec{u}_n$ καλείται τετριμμένος γραμμικός συνδυασμός των $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n$.

Ορισμός 1.4.2. Το διανύσματα $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n$ καλούνται γραμμικώς εξαρτημένα, αν υπάρχει μη τετριμμένος γραμμικός συνδυασμός αυτών ίσος με το διάνυσμα $\vec{0}$.

Δηλαδή αν υπάρχουν $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε:

$$(i)\ \lambda_1\vec{u}_1 + ... + \lambda_n\vec{u}_n = \vec{0},\ (ii)\ |\lambda_1| + ... + |\lambda_n| \neq 0$$

Ορισμός 1.4.3. Το διανύσματα $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n$ καλούνται γραμμικώς ανεξάρτητα, αν ο μόνος γραμμικός συνδυασμός αυτών ίσος με το διάνυσμα $\vec{0}$ είναι ο τετριμμένος. Δηλαδή

$$\lambda_1\vec{u}_1 + ... + \lambda_n\vec{u}_n = \vec{0} \Longleftrightarrow \lambda_1 = ... = \lambda_n = 0$$

Παραδείγματα 1.4.1.

1. Αν $\vec{u} \neq \vec{0}$, τότε $\vec{u}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.

   Πράγματι, αν $\lambda\vec{u} = \vec{0}$, τότε επειδή $\vec{u} \neq \vec{0}$ είναι $\lambda = 0$.

2. Αν $\vec{u} \parallel \vec{v}$, τότε $\vec{u}, \vec{v}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

   Πράγματι,

   (i) Αν $\vec{u} = \vec{0}$, τότε $1 \cdot \vec{u} + 0 \cdot \vec{v}$ είναι μη τετριμμένος γραμμικός συνδυασμός των $\vec{u}$ και $\vec{u}$ ίσος με το $\vec{0}$.

   (ii)Αν $\vec{v} = \vec{0}$, τότε $0 \cdot \vec{u} + 1 \cdot \vec{v}$ είναι μη τετριμμένος γραμμικός συνδυασμός των $\vec{u}$ και $\vec{u}$ ίσος με το $\vec{0}$.

   (iii) Αν $\vec{u}$ και $\vec{v}$ είναι δύο μη μηδενικά παράλληλα διανύσματα, τότε $\vec{u} = \lambda\vec{v}$. Άρα, $1 \cdot \vec{u} - \lambda\vec{v}$ είναι μη τετριμμένος γραμμικός συνδυασμός των $\vec{u}$ και $\vec{u}$ ίσος με το $\vec{0}$.

1.5 Βασικές προτάσεις για την γραμμική εξάρτηση.

Έστω ότι $\vec{u}, \vec{u}_1, ..., \vec{u}_n, \vec{u}_{n+1}$ είναι στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου πάνω στο $\mathbb{R}$.

Πρόταση 1.5.1. *Αν ένα από τα διανύσματα $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n$ είναι $\vec{0}$, τότε τα $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.*

Απόδειξη. Έστω π.χ. $\vec{u}_1 = \vec{0}$, τότε

$$1 \cdot \vec{u}_1 + 0 \cdot \vec{u}_2 + ... + 0 \cdot \vec{u}_n = \vec{0},$$

όπου ο γραμμικός συνδυασμός $1 \cdot \vec{u}_1 + 0 \cdot \vec{u}_2 + ... + 0 \cdot \vec{u}_n$ είναι μη τετριμμένος.

Πρόταση 1.5.2. *Τα διανύσματα $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα τότε και μόνον τότε, όταν ένα από τα διανύσματα $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n$ είναι γραμμικός συνδυασμός των άλλων.*

Πρόταση 1.5.3. *Αν $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n, \vec{u}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα, τότε $\vec{u}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n$.*

Πρόταση 1.5.4. *Αν τα $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και*

$$\vec{u} = \lambda_1\vec{u}_1 + ... + \lambda_n\vec{u}_n,$$

τότε οι αριθμοί $\lambda_1, ..., \lambda_n$ είναι μοναδικοί.

Πρόταση 1.5.5. *Αν $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n, \vec{u}_{n+1}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, τότε $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.*

Πρόταση 1.5.6. *Αν $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα, τότε $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n, \vec{u}_{n+1}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.*

1.6 Γεωμετρική ερμηνεία της γραμμικής εξάρτησης

Πρόταση 1.6.1. *Ένα ελεύθερο διάνυσμα $\vec{u}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένο, τότε και μόνο τότε όταν $\vec{u} = \vec{0}$.*

Πρόταση 1.6.2. *Δύο ελεύθερα διανύσματα $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα, τότε και μόνο τότε όταν $\vec{u}_1 \| \vec{u}_2$.*

Πρόταση 1.6.3. *Τρία ελεύθερα διανύσματα $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα, τότε και μόνον τότε όταν τα διανύσματα $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ είναι συνεπίπεδα.*

Πρόταση 1.6.4. *Τέσσερα ελεύθερα διανύσματα του χώρου είναι πάντα γραμμικώς εξαρτημένα.*

1.7 Βαση διανυσματικού χώρου

Ορισμός 1.7.1. Το σύνολο $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n$ στοιχείων ενός διανυσματικού χώρου V καλείται βάση του V, αν:
(1) $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα,
(2) $\vec{u} = \lambda_1 \vec{e}_1 + ... + \lambda_n \vec{e}_n$, για κάθε $\vec{u} \in V$.

Πόρισμα 1.7.2. *Οποιαδήποτε τρία μη συνεπίπεδα ελεύθερα διανύσματα του συνόλου V_3 όλων των ελεύθερων διανυσμάτων του χώρου αποτελούν μία βάση του V_3.*

Πόρισμα 1.7.3. *Οποιαδήποτε δύο μη παράλληλα ελεύθερα διανύσματα του συνόλου V_π όλων των ελεύθερων διανυσμάτων ενός επιπέδου π αποτελούν μία βάση του V_π.*

Πόρισμα 1.7.4. *Οποιοδήποτε μη μηδενικό διάνυσμα του συνόλου V_ε όλων των ελεύθερων διανυσμάτων μιας ευθείας ε αποτελούν μία βάση του V_ε.*

Ορισμός 1.7.5. Αν $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n$ είναι μία βάση ενός διανυσματικού χώρου V, $\vec{u} = a_1 \vec{e}_1 + ... + a_n \vec{e}_n \in V$, τότε $a_1, ..., a_n$ καλούνται συντεταγνένες του $\vec{u}$ ως προς $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n$.

Γράφουμε τότε $\vec{u} = \{a_1, ..., a_n\}$.

Θεώρημα 1.7.6. *Αν $\vec{u} = \{a_1, ..., a_n\}$ και $\vec{v} = \{b_1, ..., b_n\}$ ως προς μία βάση $\{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$, τότε $\vec{u} + \vec{v} = \{a_1 + b_1, ..., a_n + b_n\}$ και $\lambda \vec{u} = \{\lambda a_1, ..., \lambda a_n\}$*

Πρόταση 1.7.7. *Τα διανύσματα $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ και $\vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα αν και μόνον αν*

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (*)$$

Πρόταση 1.7.8. *Τα διανύσματα $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ και $\vec{c} = \{c_1, c_2, c_3\}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα αν και μόνον αν*

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

1.8 Ασκήσεις.

1. Έστω $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OA}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OB}$, $\vec{e}_3 = \overrightarrow{OC}$ μη συνεπίπεδα διανύσματα του χώρου και P το παραλληλεπίπεδο πάνω στα διανύσματα αυτά. Να βρεθούν ως προς βάση $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ οι συντεταγμένες των διανυσμάτων που έχουν ως αρχή το σημείο C και συμπίπτουν με τις ακμές του P, με τις διαγωνίους των εδρών, με τη διαγώνιο του P.

2. Έστω $OABC$ ένα τετράεδρο, $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OA}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OB}$, $\vec{e}_3 = \overrightarrow{OC}$. Να βρεθούν ως προς βάση $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ οι συντεταγμένες των διανυσμάτων:

(α) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$

(β) $\overrightarrow{DE}$, όπου D είναι το μέσο του OA και E είναι το μέσο του BC,

(γ) $\overrightarrow{DF}$, όπου F είναι το σημείο τομής των διαμέσων της έδρας BOC,

(δ) $\overrightarrow{AE}$, όπου E είναι το μέσο του BC,

(ε) $\overrightarrow{OM}$, όπου M είναι η τομή των διαμέσων της έδρας ABC.

3. Έστω $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ και $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$. Να βρεθεί ένα διάνυσμα παράλληλο στη διχοτόμο της γωνίας AOB, το οποίο να είναι γραμμικός συνδυασμός των $\vec{a}$ και $\vec{b}$.

4. Να αποδειχθεί ότι τα διανύσματα $x\vec{a} - y\vec{b}, z\vec{b} - x\vec{c}, y\vec{c} - z\vec{a}$ είναι συνεπίπεδα για κάθε τριάδα διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ και για κάθε τριάδα αριθμών x, y, z.

5. Έστω $\vec{a} = \{1, 5, 3\}$, $\vec{b} = \{6, -4, -2\}$, $\vec{c} = \{0, -5, 7\}$, $\vec{d} = \{-20, 27, -35\}$.

Να προσδιοριστούν οι αριθμοί x, y, z έτσι ώστε τα διανύσματα $x\vec{a}, y\vec{b}, z\vec{c}, \vec{d}$ να σχηματίζουν κλειστή τεθλασμένη γραμμή αν κάθε επόμενο διάνυσμα έχει ως αρχή το πέρας του προηγούμενου.

6. Να προσδιοριστεί σε ποιές από τις παρακάτω περιπτώσεις τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα και στην περίπτωση που αυτό είναι δυνατό να εκφραστεί το $\vec{c}$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{a}$ και $\vec{b}$.

(i) $\vec{a} = \{5, 2, 1\}, \vec{b} = \{-1, 4, 2\}, \vec{c} = \{-1, -1, 6\}$

(ii) $\vec{a} = \{6, 4, 2\}, \vec{b} = \{-9, 6, 3\}, \vec{c} = \{-3, 6, 3\}$

(iii) $\vec{a} = \{6, -18, 12\}, \vec{b} = \{-8, 24, -16\}, \vec{c} = \{8, 7, 3\}$

(iv) $\vec{a} = \{1, 2, 3\}, \vec{b} = \{4, 5, 6\}, \vec{c} = \{2, 4, 6\}$

Κεφάλαιο 2

Συστήματα συντεταγμένων

2.1 Προβολές.

Από τον αλγεβρικό ορισμό των συντεταγμένων ενός διανύσματος θα περάσουμε στην γεωμετρική περιγραφή, ο συνδετικός κρίκος είναι η έννοια της προβολής.

Προβολή σημείου στην ευθεία.

Έστω ε_1 και ε_2 δύο μη παράλληλες ευθείες ενός επιπέδου π και M ένα σημείο του π .

Άπο το M φερνουμε μια ευθεία ε_2' παράλληλη στην ε_2. Η ε_2' τέμνει την ε_1 σε ένα σημείο M_1. Το M_1 καλείται προβολή του M στην ε_1 παράλληλα στην ε_2, γράφουμε $M_1 = \text{πρ}_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} M$.

Αν $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$, τότε το σημείο M_1 καλείται ορθογώνια προβολή του M στην ε_1.

Προβολή διανύσματος στην ευθεία.

Έστω $\overrightarrow{MN}$ ένα εφαρμοστό διάνυσμα του επιπέδου και M_1 και N_1 είναι οι προβολές των M και N, αντίστοιχα, στην ε_1 παράλληλα στην ε_2. Το διάνυσμα $\overrightarrow{M_1N_1}$ καλείται προβολή του $\overrightarrow{MN}$ στην ε_1 παράλληλα στην ε_2. Γράφουμε $\overrightarrow{M_1N_1} = \text{πρ}_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \overrightarrow{MN}$

Πρόταση 2.1.1. *Αν $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, τότε $\text{πρ}_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \overrightarrow{AB} = \text{πρ}_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \overrightarrow{CD}$*

Έστω $\vec{u}$ ένα ελεύθερο διάνυσμα του επιπέδου και $\vec{u} = \overrightarrow{MN}$. Αν $\overrightarrow{M_1N_1} = \text{πρ}_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \overrightarrow{MN}$, τότε το ελεύθερο διάνυσμα $\vec{u}_1 = \overrightarrow{M_1N_1}$ καλείται προβολή του $\vec{u}$ στην ε_1 παράλληλα στην ε_2. Γράφουμε $\vec{u}_1 = \text{πρ}_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \vec{u}$.

Από την προηγούμενη πρόταση προκύπτει ότι το διάνυσμα $\text{πρ}_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \vec{u}$ είναι ανεξάρτητο από την επιλογή του $\overrightarrow{MN} \in \vec{u}$.

Από τον ορισμό της προβολής ενός ελεύθερου διανύσματος πάνω σε μια ευθεία παράλληλα σε μια άλλη ευθεία συμπεραίνουμε ότι:

1. $\vec{u} = \text{πρ}_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \vec{u} + \text{πρ}_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} \vec{u}$

2. $\text{πρ}_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} (\vec{u} + \vec{v}) = \text{πρ}_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \vec{u} + \text{πρ}_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \vec{v}$

3. $\text{πρ}_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} (\lambda \vec{u}) = \lambda \text{πρ}_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \vec{u}$

Προβολή σημείου στο επίπεδο.

Έστω π ένα επίπεδο και ε μια ευθεία μη παράλληλη στο π. Από ένα σημείο M του χώρου φέρνουμε μια ευθεία $\varepsilon' \parallel \varepsilon$ και ένα επίπεδο $\pi' \parallel \pi$. Θεωρούμε τα σημεία $M_\varepsilon = \varepsilon \cap \pi'$ και $M_\pi = \pi \cap \varepsilon'$.

Το M_ε καλείται προβολή του M στην ε παράλληλα στο π και M_π καλείται προβολή του M στο π παράλληλα στην ε.

Αν $\varepsilon \perp \Pi$, τότε M_Π καλείται ορθογώνια προβολή του M στο Π.

Προβολή διανύσματος στο επίπεδο.

Η προβολή του $\overrightarrow{MN}$ στην ε παράλληλα στο π είναι το διάνυσμα $\overrightarrow{M_\varepsilon N_\varepsilon}$. Γράφουμε $\overrightarrow{M_\varepsilon N_\varepsilon} = \text{πρ}_\varepsilon^\pi \overrightarrow{MN}$.

Η προβολή του $\overrightarrow{MN}$ στο π παράλληλα στην ε είναι το διάνυσμα $\overrightarrow{M_\pi N_\pi}$. Γράφουμε $\overrightarrow{M_\pi N_\pi} = \text{πρ}_\pi^\varepsilon \overrightarrow{MN}$.

Έστω $\vec{u} = \overrightarrow{MN}$ και $\overrightarrow{M_\varepsilon N_\varepsilon} = \text{πρ}_\varepsilon^\pi \overrightarrow{MN}$, τότε $\vec{u}_\varepsilon = \overrightarrow{M_\varepsilon N_\varepsilon}$ καλείται προβολή του $\vec{u}$ στην ε παράλληλα στο π. Γράφουμε $\vec{u}_\varepsilon = \text{πρ}_\varepsilon^\pi \vec{u}$.

Αν $\overrightarrow{M_\pi N_\pi} = \text{πρ}_\pi^\varepsilon \overrightarrow{MN}$, τότε $\vec{u}_\pi = \overrightarrow{M_\pi N_\pi}$ καλείται προβολή του $\vec{u}$ στην π παράλληλα στην ε. Γράφουμε $\vec{u}_\pi = \text{πρ}_\pi^\varepsilon \vec{u}$.

Οι προβολές των ελεύθερων διανυσμάτων έχουν τις παρακάτω ιδιότητες:

1. $\text{πρ}_\varepsilon^\pi(\vec{u}+\vec{v}) = \text{πρ}_\varepsilon^\pi \vec{u} + \text{πρ}_\varepsilon^\pi \vec{v}$ και $\text{πρ}_\varepsilon^\pi(\lambda\vec{u}) = \lambda \text{πρ}_\varepsilon^\pi \vec{u}$

2. $\text{πρ}_\pi^\varepsilon(\vec{u}+\vec{v}) = \text{πρ}_\pi^\varepsilon \vec{u} + \text{πρ}_\pi^\varepsilon \vec{v}$ και $\text{πρ}_\pi^\varepsilon(\lambda\vec{u}) = \lambda \text{πρ}_\pi^\varepsilon \vec{u}$

3. Αν ε_1, ε_2, ε_3 είναι μη παράλληλες ανά δύο ευθείες που τέμνονται στο σημείο O και π_1, π_2, π_3 είναι τα επίπεδα που ορίζονται από τα ζεύγη ευθειών $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, $(\varepsilon_2, \varepsilon_3)$, $(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$ αντίστοιχα, τότε για κάθε διάνυσμα $\vec{u}$ ισχύει
$$\vec{u} = \text{πρ}_{\varepsilon_1}^{\pi_2}\vec{u} + \text{πρ}_{\varepsilon_2}^{\pi_3}\vec{u} + \text{πρ}_{\varepsilon_3}^{\pi_1}\vec{u}$$

Παράδειγμα 2.1.1. Έστω $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ μη συνεπίπεδα διανύσματα του χώρου.

Έστω $\vec{u}_1 = \overrightarrow{OA}$, $\vec{u}_2 = \overrightarrow{OB}$, $\vec{u}_3 = \overrightarrow{OC}$. Τα σημεία A, B, C ορίζουν ένα παραλληλεπίπεδο. Έστω O' είναι η κορυφή απέναντι της O. Για $\vec{u} = \overrightarrow{OO'}$ ισχύει $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3$.

Στο παράδειγμα αυτό βασίζεται η απόδειξη της ιδιότητας 3 παραπάνω.

2.2 Γενικά συστήματα συντεταγμένων

Στην ευθεία

Έστω ϵ μια ευθεία, $O \in \epsilon$ και $\vec{e}_1 \neq \vec{0}$ ένα διάνυσμα παράλληλο στην ϵ.

Το ζεύγος $\{O, \vec{e}_1\}$ καλείται γενικό σύστημα συντεταγμένων της ϵ και συμβολίζεται και με $O\vec{e}_1$.

Το ζεύγος $\{\epsilon, O\vec{e}_1\}$ καλείται άξονας συντεταγμένων .

Ένας άξονας συντεταγμένων συμβολίζεται με Ox, ή Oy, ή Oz κ.τ.λ..

Επειδή $\{\vec{e}_1\}$ είναι βάση του διανυσματικού χώρου της ϵ, για κάθε $M \in \epsilon$ υπάρχει αριθμός x_M τέτοιος ώστε $\overrightarrow{OM} = x_M\vec{e}_1$. Ο αριθμός x_M καλείται συντεταγμένη του M ως προς $O\vec{e}_1$. Γράφουμε $M = (x_M)$.

Πρόταση 2.2.1. *Αν $M = (x_M)$ και $N = (x_N)$ ως προς το σύστημα $O\vec{e}_1$, τότε*
$$\overrightarrow{MN} = \{x_N - x_M\} \text{ και } |\overrightarrow{MN}| = |x_N - x_M||e_1|.$$

Πρόταση 2.2.2. *Αν $M = (x_M)$ και $N = (x_N)$ ως προς το σύστημα $O\vec{e}_1$ και $|\vec{e}_1| = 1$, τότε*
$$|\overrightarrow{MN}| = |x_N - x_M|.$$

Στο επίπεδο.

Έστω π ένα επίπεδο, $O \in \pi$ και $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ δύο μη παράλληλα διανύσματα του π.

Η τριάδα $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ καλείται γενικό σύστημα συντεταγμένων του π και συμβολίζεται και με $O\vec{e}_1\vec{e}_2$.

Επειδή $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ είναι βάση του διανυσματικού χώρου του π, για κάθε σημείο $M \in \pi$ υπάρχουν αριθμοί x_M, y_M, τέτοιοι ώστε
$$\overrightarrow{OM} = x_M\vec{e}_1 + y_M\vec{e}_2.$$

Οι αριθμοί x_M, y_M καλούνται συντεταγμένες (πρώτη και δεύτερη, αντίστοιχα) του M ως προς $O\vec{e}_1\vec{e}_2$. Γράφουμε $M = (x_M, y_M)$.

Έστω O_1 και O_2 σημεία του π τέτοια ώστε $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OO_1}$ και $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OO_2}$. Οι άξονες συντεταγμένων $\{(OO_1), O\vec{e}_1\}$ και $\{(OO_2), O\vec{e}_2\}$ συμβολίζονται με Ox και Oy, αντίστοιχα.

Έστω $M_x = \text{πρ}_{Ox}^{Oy} M$ και $M_y = \text{πρ}_{Oy}^{Ox} M$. Αν x είναι οι συντεταγμένη του M_x ως προς τον Ox και y είναι η συντεταγμένη του M_y ως προς τον Oy, τότε $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_x} + \overrightarrow{OM_y} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$. Συνεπώς x και y είναι οι συντεταγμένες του M ως προς $O\vec{e}_1\vec{e}_2$.

Πρόταση 2.2.3. *Αν $M = (x_M, y_M)$ και $N = (x_N, y_N)$ ως προς το σύστημα $O\vec{e}_1\vec{e}_2$, τότε*

$$\overrightarrow{MN} = \{x_N - x_M, y_N - y_M\}.$$

Ορισμός 2.2.4. Αν $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$ και $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$, τότε το $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ καλείται ορθοκανονικό.

Πρόταση 2.2.5. *Αν $M = (x_M, y_M)$ και $N = (x_N, y_N)$ ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα $O\vec{e}_1\vec{e}_2$, τότε*

$$|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}.$$

Στο χώρο.

Η τετράδα $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, όπου O ένα σημείο του χώρου και $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ μη συνεπίπεδα διανύσματα, καλείται γενικό σύστημα συντεταγμένων του χώρου και συμβολίζεται και με $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$.

Επειδή $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ είναι βάση του διανυσματικού χώρου όλων των ελεύθερων διανυσμάτων του χώρου, για κάθε σημείο M του E^3 υπάρχουν αριθμοί x_M, y_M, z_M, τέτοιοι ώστε

$$\overrightarrow{OM} = x_M\vec{e}_1 + y_M\vec{e}_2 + z\vec{e}_3.$$

Οι αριθμοί x_M, y_M, z_M καλούνται συντεταγμένες (τετμημένη, τεταγμένη και κατηγμένη, αντίστοιχα) ως προς $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{u}_3$. Γράφουμε $M = (x_M, y_M, z_M)$.

Υπάρχουν σημεία O_1, O_2, O_3 τέτοια ώστε $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OO_1}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OO_2}$ και $\vec{e}_3 = \overrightarrow{OO_3}$. Οι άξονες συντεταγμένων $\{(OO_1), O\vec{e}_1\}$, $\{(OO_2), O\vec{e}_2\}$ και $\{(OO_3), O\vec{e}_3\}$ συμβολίζονται με Ox, Oy και Oz, αντίστοιχα. Τα επίπεδα των αξόνων Ox και Oy, Oy και Oz, Ox και Oz Συμβολίζονται με Oxy, Oyz, Oxz, αντίστοιχα.

Έστω M_x, M_y, M_z οι προβολές του M στους άξονες Ox, Oy, Oz, αντίστοιχα, παράλληλα στα επίπεδα Oyz, Oxz, Oxy, αντίστοιχα.

Έστω x, y, z είναι οι συντεταγμένες των M_x, M_y, M_z, αντίστοιχα, στους άξονες Ox, Oy, Oz, αντίστοιχα. Τότε

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_x} + \overrightarrow{OM_y} + \overrightarrow{OM_z} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

Συνεπώς x, y, z είναι οι συντεταγμένες του M ως προς $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$.

Πρόταση 2.2.6. *Αν $M = (x_M, y_M, z_M)$ και $N = (x_N, y_N, z_n)$ ως προς το σύστημα $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$, τότε*

$$\overrightarrow{MN} = \{x_N - x_M, y_N - y_M, z_N - z_M\}.$$

Ορισμός 2.2.7. Αν $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1$, $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$, $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_3$ και $\vec{e}_3 \perp \vec{e}_2$, τότε το $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ καλείται ορθοκανονικό.

Πρόταση 2.2.8. *Αν $M = (x_M, y_M, z_M)$ και $N = (x_N, y_N, z_N)$ ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$, τότε*

$$|\overrightarrow{MN}| = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2 + (z_N - z_M)^2}$$

Ορισμός. Θα λέμε ότι το σημείο M της ευθείας (AB), $M \neq B$, διαιρεί το εφαρμοστό διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ σε λόγο λ, αν $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}$.

Πρόταση 2.2.9. *Αν $A = (x_A, y_A, z_A)$, $B = (x_B, y_B, z_B)$ και $M = (x, y, z)$, $M \neq B$, διαιρεί το εφαρμοστό διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ σε λόγο λ, τότε*

$$x = \frac{x_A + \lambda x_B}{1 + \lambda}, \; y = \frac{y_A + \lambda y_B}{1 + \lambda} \; z = \frac{z_A + \lambda z_B}{1 + \lambda}$$

2.3 Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

Γωνία μεταξύ δύο ελέυθερων διανυσμάτων.

Εστω $\vec{u}$ και $\vec{v}$ δύο μη μηδενικά ελέυθερα διανύσματα του χώρου. Εφαρμόζουμε τα διανύσματα αυτά σε ένα τυχαίο σημείο O του χώρου. Εστω $\overrightarrow{OM} \in \vec{u}$ και $\overrightarrow{ON} \in \vec{v}$.

Η γωνία εκείνη μεταξύ των ημιευθειών $[OM]$ και $[ON]$ που είναι $\leq \pi$ καλείται γωνία μεταξύ των $\vec{u}$ και $\vec{v}$.

Αν $\vec{u} = \vec{0}$ ή $\vec{v} = \vec{0}$,τότε θεωρούμε ότι η γωνία μεταξύ των $\vec{u}$ και $\vec{v}$ δεν ορίζεται.

Προβολή ενός διανύσματος πάνω στο άλλο.

Εστω $\vec{u}$ και $\vec{v}$ μη μηδενικά διανύσματα. Συμβολίζουμε με $\text{πρ}_{\vec{v}}\vec{u}$ την ορθογώνια προβολή του $\vec{u}$ πάνω στην ευθεία (ON). Εχουμε $\text{πρ}_{\vec{v}}\vec{u} = \lambda\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$. Ο αριθμος λ καλείται αλγεβρική τιμή της προβολής $\vec{u}$ πάνω στο $\vec{v}$ και συμβολίζεται με $\text{ατ}(\text{πρ}_{\vec{v}}\vec{u})$.

Προφανώς

1. $\text{πρ}_{\vec{v}}(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = \text{πρ}_{\vec{v}}\vec{u}_1 + \text{πρ}_{\vec{v}}\vec{u}_2$
2. $\text{ατ}(\text{πρ}_{\vec{v}}(\vec{u}_1 + \vec{u}_2)) = \text{ατ}(\text{πρ}_{\vec{v}}\vec{u}_1) + \text{ατ}(\text{πρ}_{\vec{v}}\vec{u}_2)$
3. $\text{ατ}(\text{πρ}_{\vec{v}}(\lambda\vec{u})) = \lambda\text{ατ}(\text{πρ}_{\vec{v}}\vec{u})$

Ορισμός του εσωτερικού γινομένου.

Εσωτερικό γινόμενο δύο ελέυθερων διανυσμάτων $\vec{u} \neq \vec{0}$ και $\vec{v} \neq \vec{0}$ είναι ο αριθμός $(\vec{u}, \vec{v}) = |\vec{u}||\vec{v}|\cos(\vec{u}, \vec{v})$. Αν $\vec{u} = \vec{0}$ ή $\vec{v} = \vec{0}$, τότε ορίζουμε $(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Το εσωτερικό γινόμενο θα το συμβολίζουμε και με $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Απο τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου προκύπτει ότι, αν $\vec{u} \neq 0$ και $\vec{v} \neq 0$, τότε

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

Ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου.

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
2. $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$
3. $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{v}|\text{ατ}(\text{πρ}_{\vec{v}}\vec{u})$, αν $\vec{u} \neq 0$ και $\vec{v} \neq 0$
4. $(\lambda\vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$
5. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Longleftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$ ή $\vec{u} = \vec{0}$ ή $\vec{v} = \vec{0}$
6. $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$
7. $-|\vec{u}||\vec{v}| \leq (\vec{u}, \vec{v}) \leq |\vec{u}||\vec{v}|$

Θεώρημα 2.3.1. *Εστω $\vec{u} = \{u_1, u_2, u_3\}$ και $\vec{v} = \{v_1, v_2, v_3\}$ ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$, τότε*

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$
2. $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$

2.4 Πολικό σύστημα συντεταγμένων στο επίπεδο.

Το πολικό σύστημα συντεταγμένων μας προσφέρει έναν ακόμα τρόπο να προσδιορίζουμε την θέση των σημείων στο επίπεδο με την βοήθεια αριθμών.

Για να οριστεί ένα πολικό σύστημα συντεταγμένων αρκεί να δοθούν:

1. μια ημιευθεία Ox (η οποία καλείται πολικός άξονας και η αρχή της O-αρχή πολικού συστήματος,
2. μια μονάδα μήκους (έστω $E_1 \in Ox$ και $|OE_1| = 1$)
3. μια θετική φορά περιστροφής(συνήθως η αντίθετη με την φορά της περιστροφής των δεικτών του ρολογιού)

Έστω M ένα σημείο του επιπέδου. Στο M αντιστοιχούμε δύο αριθμούς $r_M = |\overrightarrow{OM}|$ και ϕ_M που είναι η γωνία εκ του $\overrightarrow{OE_1}$ προς το $\overrightarrow{OM}$, $0 \leq \phi_M < 2\pi$. Οι αριθμοί αυτοί καλούνται πολικές συντεταγμένες του M, πολική ακτίνα και πολική γωνία αντίστοιχα. Γράφουμε $M = \langle r_M, \phi_M \rangle$. Για την πολική αρχή O η πολική ακτίνα ισούται με μηδέν ενώ η πολική γωνία είναι απροσδιόριστη.

Σε πολικό σύστημα $Or\phi$ συντεταγμένων αντιστοιχούμε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy ως εξής

1. η αρχή του Oxy είναι η αρχή του πολικού $Or\phi$,
2. $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OE_1}$, όπου $E_1 = \langle 1, 0 \rangle$ στο $Or\phi$,
3. $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OE_2}$, όπου $E_2 = \langle 1, \frac{\pi}{2} \rangle$ στο $Or\phi$.

Γνωρίζοντας τις πολικές συντεταγμένες $\langle r_M, \phi_M \rangle$ ενός σημείου M στο $Or\phi$ μπορούμε να βρούμε τις καρτεσιανές του συντεταγμένες (x_M, y_M) στο Oxy από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} x_M &= r_M \cos \phi_M \\ y_M &= r_M \sin \phi_M \end{aligned}$$

Αντίστροφα, γνωρίζοντας τις καρτεσιανές συντεταγμένες (x_M, y_M) ενός σημείου M στο Oxy μπορούμε να βρούμε τις πολικές του συντεταγμένες $\langle r_M, \phi_M \rangle$ στο $Or\phi$ από τις σχέσεις

$$r_M = \sqrt{x_M^2 + y_M^2}$$

$$\sin \phi_M = \frac{y_M}{r_M}\ ,\ \cos \phi_M = \frac{x_M}{r_M},\ \phi_M \in [0, 2\pi).$$

2.5 Πολικό σύστημα συντεταγμένων στο χώρο.

Για να οριστεί ένα πολικό ή ένα κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων στο χώρο αρκεί να δοθούν:

1. ένα επίπεδο π με πολικό σύστημα συντεταγμένων $Or\phi$ (αρχή O, πολικός άξονας Ox, μονάδα μήκους και θετική φορά περιστοφής,
2. μια ημιευθεία Oz κάθετη στο π.

Έστω M ένα σημείο του χώρου για το οποίο $\overrightarrow{OM} \not\parallel Oz$ και M' η ορθογώνια προβολή του M στο π. Συμβολίζουμε με ω την γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\overrightarrow{OM}$ και$\overrightarrow{OM'}$.

Οι πολικές (ή σφαιρικές) συντεταγμένες του M είναι η τριάδα αριθμών (r, ϕ, ψ), όπου

$r = |\overrightarrow{OM}|$-πολική ακτίνα του M

ϕ-πολική γωνία του M' (ϕ-μήκος του M)

$\psi = \omega$ αν $\overrightarrow{MM'} \uparrow\uparrow Oz$, $\psi = -\omega$ αν $\overrightarrow{MM'} \uparrow\downarrow Oz$, $\psi = 0$ αν $M \in \pi$ (ψ-πλάτος του M).

Οι πολικές συντεταγμένες δεν ορίζονται για τα σημεία του άξονα Oz.

Σε κάθε πολικό σύστημα συντεταγμένων του χώρου $Or\phi\psi$ μπορούμε να αντιστοιχήσουμε ένα ορθοκνονικό σύστημα συντεταγμένων $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ ως εξής:

1. Η αρχη O συμπίπτει με την αρχή του πολικού συστήματος,
2. $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OE_1}$, όπου $E_1 \in \pi$ και $E_1 = (1, 0)$ στο $Or\phi$,
3. $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OE_2}$, όπου $E_2 \in \pi$ και $E_2 = (1, \frac{\pi}{2})$ στο $Or\phi$,
4. $\vec{e}_3 = \overrightarrow{OE_3}$, όπου $E_3 \in Oz$ και $|\overrightarrow{OE_3}| = 1$.

Γνωρίζοντας τις πολικές συντεταγμένες (r, ϕ, ψ) ενός σημείου μπορούμε να βρούμε τις καρτεσιανές του συντεταγμένες (x, y, z) από τις σχέσεις (παρατηρούμε ότι $M' = \langle r\cos\psi, \phi\rangle$ στο $Or\phi$ του π.)

$$\begin{aligned} x &= r\cos\psi\cos\phi \\ y &= r\cos\psi\sin\phi \\ z &= r\sin\psi \end{aligned}$$

και αντίστροφα από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \cos\phi &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \sin\phi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \phi \in [0, 2\pi) \\ \sin\psi &= \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\ \psi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \end{aligned}$$

Οι κυλινδρικές συντεταγμένες του M είναι η τριάδα αριθμών (r, ϕ, h), όπου $\langle r, \phi\rangle$ είναι οι πολικές συντεταγμένες της προβολής M' ως προς το πολικό σύστημα $Or\phi$ του π.

$h = |\overrightarrow{MM'}|$, αν $\overrightarrow{MM'} \uparrow\uparrow Oz$

$h = -|\overrightarrow{MM'}|$, αν $\overrightarrow{MM'} \uparrow\downarrow Oz$

Οι κυλινδρικές συντεταγμένες δεν ορίζονται για τα σημεία του άξονα Oz.

Γνωρίζοντας τις κυλινδρικές συντεταγμένες (r, ϕ, h) ενός σημείου μπορούμε να βρούμε τις καρτεσιανές του συντεταγμένες (x, y, z) από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} x &= r\cos\phi \\ y &= r\sin\phi \\ z &= h \end{aligned}$$

και αντίστροφα από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \cos\phi &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \sin\phi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \phi \in [0, 2\pi) \\ h &= z \end{aligned}$$

Παραδείγματα 2.5.1.

1. Έστω $A = \langle 8, \frac{2\pi}{3} \rangle$ και $B = \langle 6, \frac{\pi}{3} \rangle$. Θα βρούμε τις πολικές συντεταγμένες του μέσου $M = (x_M, y_M)$ και το $|AB|$.

$$\begin{aligned}
x_A &= r_A \cos\phi_A = 8\cos\frac{2\pi}{3} = -4, \quad y_A = r_A \sin\phi_A = 8\sin\frac{2\pi}{3} = 4\sqrt{3} \\
x_B &= r_B \cos\phi_B = 6\cos\frac{\pi}{3} = 3, \qquad y_B = r_B \sin\phi_B = 6\sin\frac{\pi}{3} = 3\sqrt{3} \\
x_M &= \frac{x_A + x_B}{2} = -\frac{1}{2} \\
y_M &= \frac{y_A + y_B}{2} = -\frac{7\sqrt{3}}{2} \\
|AB| &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = 2 \\
r_M &= \sqrt{x_M^2 + y_M^2} = \frac{\sqrt{148}}{2} \\
\sin\phi_M &= \frac{y_M}{r_M} = \frac{7\sqrt{3}}{\sqrt{148}}, \ \cos\phi_M = \frac{x_M}{r_M} = -\frac{1}{\sqrt{148}}
\end{aligned}$$

2. Έστω $Oxyz$ ένα ορθοκανινικό σύστημα συντεταγμένων. Θα βρούμε τις σφαιρικές συντεταγμένες του σημείου $A = (x_A, y_A, z_A)$, αν $z_A = -1$ και οι γωνίες μεταξύ του $\overrightarrow{OA}$ και των $\vec{e}_1$ και $\vec{e}_2$ είναι $\frac{\pi}{4}$ και $\frac{\pi}{3}$, αντίστοιχα.

$$\begin{aligned}
x_A &= \overrightarrow{OA} \cdot \vec{e}_1 = r_A \cos\frac{\pi}{4} = \frac{r_A\sqrt{2}}{2} \\
y_A &= \overrightarrow{OA} \cdot \vec{e}_2 = r_A \cos\frac{\pi}{3} = \frac{r_A}{2} \\
r_A^2 &= x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 = \frac{r_A^2}{2} + \frac{r_A^2}{4} + 1 \Rightarrow r_A = 2 \\
x_A &= \sqrt{2}, \ y_A = 1, \ z_A = -1 \\
\sin\phi_A &= \frac{y_A}{\sqrt{x_A^2 + y_A^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \ \cos\phi_A = \frac{x_A}{\sqrt{x_A^2 + y_A^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\
\sin\psi_A &= \frac{z_A}{r_A} = -\frac{1}{2}, \ \psi_A \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \psi_A = -\frac{\pi}{6}
\end{aligned}$$

3. Ο ορθός κύλινδρος που έχει ως οδηγό τον κύκλο $x^2 + y^2 = 3$ του Oxy-επιπέδου έχει καρτεσιανή εξίσωση $x^2 + y^2 = 3$ και κυλινδρική εξίσωση $r = 3$.

2.6 Ασκήσεις.

Συστήματα συντεταγμένων στο επίπεδο και στο χώρο.

7. Έστω $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OA}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OB}$, $\vec{e}_3 = \overrightarrow{OC}$ γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα του χώρου. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών του παραλληλεπιπέδου με ακμές OA, OB, OC ως προς το σύστημα $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$.

8. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των σημείων τομής των διαμέσων των εδρών του τετραέδρου $OABC$ ως προς το σύστημα συντεταγμένων $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, όπου $\vec{e}_1 = \overrightarrow{OA}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{OB}$, $\vec{e}_3 = \overrightarrow{OC}$.

9. Έστω $\overrightarrow{OA} = \{-3, 0, 4\}$ και $\overrightarrow{OB} = \{5, -2, 14\}$ ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$. Να βρεθουν οι συντεταγμένες του μοναδιαίου διανύσματος $\overrightarrow{OM}$ παράλληλου στη διχοτόμο της AOB ως προς $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$.

10. Έστω $M = (x_M, y_M, z_M)$, $x_M \neq 0$, $y_M \neq 0$, $z_M \neq 0$, ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$. Να βρεθούν οι συντεταγμένες των ορθογώνιων προβολών του M στα επίπεδα συντεταγμάνων Oxy, Oyz, Oxz και στους άξονες συντεταγμένων Ox, Oy, Oz.

11. Έστω $M = (x_M, y_M, z_M)$, $x_M \neq 0$, $y_M \neq 0$, $z_M \neq 0$, ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου συμμετρικού του M ως προς:

(i) την αρχή του συστήματος,

(ii) το επίπεδο $Oxy(Oyz,\ Oxz)$,

(iii) τον άξονα $Ox(Oy,\ Oz)$

12. Έστω $M = (x_M, y_M, z_M)$, $x_M \neq 0$, $y_M \neq 0$, $z_M \neq 0$, ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$. Να βρεθούν οι αποστάσεις του M από τους άξονες συντεταγμένων.

13. Έστω $Oxyz$ ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων. Να βρεθεί το σημείο M με θετικές συντεταγμένες, του οποίου οι αποστάσεις από τους άξονες
Ox, Oy, Oz είναι 5, $3\sqrt{5}$, $2\sqrt{13}$, αντίστοιχα.

14. Να βρεθούν οι συντεταγμένες του συμείου P ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$, αν είναι γνωστό ότι το $|OP| = \rho$ και η γωνία μεταξύ των διανυσνάτων $\overrightarrow{OP}$ και $\vec{e}_i$ είναι ϕ_i, $i = 1, 2, 3$.

15. Έστω $A = (1, 2, 3)$ και $B = (7, 2, 5)$ ως προς ένα γενικό σύστημα συντεταγμένων. Στην ευθεία (AB) να βρεθεί το σημείο M, τέτοιο ώστε το A να βρίσκεται μεταξύ των M και B και το μήκος του τμήματος AM να είναι διπλάσιο από το μήκος του τμήματος AB.

16. Να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα της σφαίρας που περιέχει τα σημεία
$A = (1, 2, 3)$, $B = (5, 2, 3)$, $C = (2, 5, 3)$ και $D = (1, 2, -1)$.

17. Να βρεθεί η συνθήκη που πρέπει να ικανοποιούν οι συντεταγμένες των σημείων M_1 και M_2 ως προς ένα γενικό σύστημα συντεταγμένων $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ ώστε η ευθεία (M_1M_2) να τέμνει και τα τρία επίπεδα συντεταγμένων χωρίς να περιέχεται σε κανένα από αυτά. Να βρεθεί ο λόγος στον οποίο το σημείο τομής της (M_1M_2) με το Oxy-επίπεδο διαιρεί το διάνυσμα $\overrightarrow{M_1M_2}$.

Κεφάλαιο 3

Μετασχηματισμοι συστημάτων συντεταγμένων.

3.1 Μετασχηματισμός γενικού συστήματος συντεταγμένων

Έστω $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ και $O'\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'\vec{e}_3{}'$ δύο γενικά συστήματα συντεταγμένων του χώρου.

Ανακύπτει το εξής πρόβλημα: γνωρίζοντας τις συντεταγμένες ενός συμείου του χώρου ως προς το «νέο σύστημα» $O'\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'\vec{e}_3{}'$, να βρούμε τις συντεταγμένες του ως προς «παλιό σύστημα» $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$.

Το καθένα από τα διανύσματα του $O'\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'\vec{e}_3{}'$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων της βάσης $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$:

$$\begin{aligned}
\vec{e}_1{}' &= a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + a_{31}\vec{e}_3 \\
\vec{e}_2{}' &= a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{32}\vec{e}_3 \\
\vec{e}_3{}' &= a_{13}\vec{e}_1 + a_{23}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Ο πίνακας

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

καλείται *πίνακας μετάσχηματισμού των συντεταγμένων από τη βάση* $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ *προς τη βάση* $\{\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'\vec{e}_3{}'\}$ *όπως και πίνακας μετάσχηματισμού των συντεταγμένων από το σύστημα* $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ *προς το σύστημα* $O'\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'\vec{e}_3{}'$.

Οι ισότητες (3.1) με την βοήθεια των πινάκων μπορούν να γραφούν σε μία:

$$(\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}') = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) \cdot A$$

Θεώρημα 3.1.1. *Αν A είναι ο πίνακας μετάσχηματισμού των συντεταγμένων από τη βάση $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ προς τη βάση $\{\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'\vec{e}_3{}'\}$ και ο B είναι ο πίνακας μετάσχηματισμού των συντεταγμένων από τη βάση $\{\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'\vec{e}_3{}'\}$ προς τη βάση $\{\vec{e}_1{}''\vec{e}_2{}''\vec{e}_3{}''\}$, τότε $A \cdot B$ είναι ο πίνακας μετάσχηματισμού των συντεταγμένων από τη βάση $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ προς τη βάση $\{\vec{e}_1{}''\vec{e}_2{}''\vec{e}_3{}''\}$.*

Θεώρημα 3.1.2. *Αν A είναι ο πίνακας μετάσχηματισμού των συντεταγμένων από τη βάση $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ προς τη βάση $\{\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'\vec{e}_3{}'\}$, τότε ο πίνακας μετάσχηματισμού των συντεταγμένων από τη βάση $\{\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'\vec{e}_3{}'\}$ προς τη βάση $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ είναι ο A^{-1}.*

Θεώρημα 3.1.3. *Ένας πίνακας A είναι πίνακας μετάσχηματισμού των συντεταγμένων από ένα σύστημα συντεταγμένων προς ένα άλλο αν και μόνο αν $|A| \neq 0$.*

Θεώρημα 3.1.4. *Έστω ένα διάνυσμα $\vec{u}$ έχει συντεταγμένες $\{u_1, u_2, u_3\}$ ως προς τη βάση $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ και $\{u_1', u_2', u_3'\}$ ως προς τη βάση $\{\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}'\}$.*

Αν ο πίνακας μετάσχηματισμού των συντεταγμένων από τη $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ προς τη $\{\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}'\}$ είναι ο

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

τότε

$$\begin{aligned}u_1 &= a_{11}u_1' + a_{12}u_2' + a_{13}u_3' \\ u_2 &= a_{21}u_1' + a_{22}u_2' + a_{23}u_3' \\ u_3 &= a_{31}u_1' + a_{32}u_2' + a_{33}u_3'\end{aligned} \tag{3.2}$$

Παρατήρηση 3.1.4. Στην περίπτωση του διανυσματίκου χώρου ενός επιπέδου ισχύουν ανάλογα θεωρήματα.

3.2 Τύποι αλλαγής των συντεταγμένων.

Θεώρημα 3.2.1. *Έστω ένα σημείο M έχει συντεταγμένες (x,y,z) ως προς το $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ και (x',y',z') ως προς το $O'\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'\vec{e}_3{}'$.*

Αν $O' = (x_0,y_0,z_0)$ ως προς το $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ και ο πίνακας μετάσχηματισμού των συντεταγμένων από το $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ προς το $O'\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'\vec{e}_3{}'$ είναι ο

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

τότε

$$\begin{aligned}x &= a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + x_0 \\ y &= a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + y_0 \\ z &= a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' + z_0\end{aligned} \tag{3.3}$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 \\ \overrightarrow{OO'} &= x_0\vec{e}_1 + y_0\vec{e}_2 + z_0\vec{e}_3 \\ \overrightarrow{O'M} &= x'\vec{e}_1{}' + y'\vec{e}_2{}' + z'\vec{e}_3{}'\end{aligned} \tag{3.4}$$

Η διανυσματική ισότητα $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$ γράφεται

$$x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = (x_0\vec{e}_1 + y_0\vec{e}_2 + z_0\vec{e}_3) + (x'\vec{e}_1{}' + y'\vec{e}_2{}' + z'\vec{e}_3{}') \tag{3.5}$$

Αντικαθιστώντας τα $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}'$ από τις (3.1) στην (3.5) παίρνουμε
$x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = (x_0\vec{e}_1 + y_0\vec{e}_2 + z_0\vec{e}_3) + x'(a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + a_{31}\vec{e}_3) + y'(a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{32}\vec{e}_3) + z'(a_{13}\vec{e}_1 + a_{23}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3) = (x'a_{11} + y'a_{12} + z'a_{13} + x_0)\vec{e}_1 + (x'a_{21} + y'a_{22} + z'a_{23} + y_0)\vec{e}_2 + (x'a_{31} + y'a_{32} + z'a_{33} + z_0)\vec{e}_3$

Εξισώνοντας τους συντέλεστες των $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ παίρνουμε τους τύπους (3.3).

Ορισμός 3.2.2. Οι (3.3) καλούνται *τύποι αλλαγής (ή μετασχηματισμού) των συντεταγμένων από το σύστημα $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ προς το σύστημα $O'\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'\vec{e}_3{}'$.*

Με τη βοήθεια των πινάκων οι (3.3) γράφονται

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Πόρισμα 3.2.3. *Οι τύποι αλλαγής των συντεταγμένων από το $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ προς το $O\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'\vec{e}_3{}'$ (σταθερή αρχή) είναι*

$$\begin{aligned}x &= a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' \\ y &= a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' \\ z &= a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z'\end{aligned} \tag{3.6}$$

Πόρισμα 3.2.4. *Οι τύποι αλλαγής των συντεταγμένων από το $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ προς το $O'\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ (σταθερά διανύσματα της βάσης) είναι*

$$\begin{aligned} x &= x' + x_0 \\ y &= x' + y_0 \\ z &= x' + z_0 \end{aligned} \tag{3.7}$$

3.3 Τύποι αλλαγής των συντεταγμένων στο επίπεδο

Θεώρημα 3.3.1. *Έστω ένα διάνυσμα $\vec{u}$ έχει συντεταγμένες $\{u_1, u_2\}$ ως προς τη βάση $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ και $\{u_1', u_2'\}$ ως προς τη βάση $\{\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}'\}$.*

Αν ο πίνακας μετάσχηματισμού των συντεταγμένων από τη $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ προς τη $\{\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}'\}$ είναι ο

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

τότε

$$\begin{aligned} u_1 &= a_{11}u_1' + a_{12}u_2' \\ u_2 &= a_{21}u_1' + a_{22}u_2' \end{aligned} \tag{3.8}$$

Θεώρημα 3.3.2. *Έστω ένα σημείο M έχει συντεταγμένες (x, y) ως προς το $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ και (x', y') ως προς το $O'\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$.*

Αν $O' = (x_0, y_0)$ ως προς το $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ και ο πίνακας μετάσχηματισμού των συντεταγμένων από το $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ προς το $O'\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$ είναι ο

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

τότε

$$\begin{aligned} x &= a_{11}x' + a_{12}y' + x_0 \\ y &= a_{21}x' + a_{22}y' + y_0 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Ορισμός 3.3.3. Οι (3.9) καλούνται *τύποι αλλαγής (ή μετασχηματισμού) των συντεταγμένων από το σύστημα $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ προς το $O'\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$*. Με την βοήθεια των πινάκων οι (2.2) γράφονται

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Πόρισμα 3.3.4. *Οι τύποι αλλαγής των συντεταγμένων από το σύστημα $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ προς το $O\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$ είναι*

$$\begin{aligned} x &= a_{11}x' + a_{12}y' \\ y &= a_{21}x' + a_{22}y' \end{aligned} \tag{3.10}$$

Πόρισμα 3.3.5. *Οι τύποι αλλαγής των συντεταγμένων από το σύστημα $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ προς το $O'\vec{e}_1\vec{e}_2$ είναι*

$$\begin{aligned} x &= x' + x_0 \\ y &= x' + y_0 \end{aligned} \tag{3.11}$$

3.4 Αλλαγή ορθοκανονικού συστήματος.

Εστω $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ και $O\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$ δύο ορθοκανονικά συστήματα συντεταγμένων του επιπέδου και $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ είναι ο πίνακας μετάσχηματισμού των συντεταγμένων από το $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ προς το $O\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$. Τότε

$$\begin{array}{rcl} \vec{e}_1{}' & = & c_{11}\vec{e}_1 + c_{21}\vec{e}_2 \\ \vec{e}_2{}' & = & c_{12}\vec{e}_1 + c_{22}\vec{e}_2 \end{array}$$

Εχουμε

$$|\vec{e}_1{}'| = 1 \Longrightarrow c_{11}^2 + c_{21}^2 = 1$$

$$|\vec{e}_2{}'| = 1 \Longrightarrow c_{12}^2 + c_{22}^2 = 1$$

$$\vec{e}_1{}' \cdot \vec{e}_2{}' = 0 \Longrightarrow c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22} = 0$$

Ορισμός 3.4.1. Ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} c_{11} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

καλείται ορθογώνιος αν:
(1) $c_{1k}^2 + c_{2k}^2 + \ldots + c_{nk}^2 = 1$ για κάθε $k = 1, ..., n$
(2) $c_{1k}c_{1j} + c_{2k}c_{2j} + \ldots + c_{nk}c_{nj} = 0$, αν $k \neq j$, $k, j = 1, ..., n$.

Θεώρημα 3.4.2. *Οι ακόλουθες συνθήκες είναι ισοδύναμες:*
(1) C είναι ορθογώνιος
(2) $C^T A = E$
(3) $C^T = C^{-1}$
(4) C^T είναι ορθογώνιος

Θεώρημα 3.4.3. *Η ορίζουσα ενός ορθογώνιου πίνακα ισούται με ± 1.*

Θεώρημα 3.4.4. *Το γινόμενο δύο ορθογώνιων πινάκων είναι ορθογώνιος πίνακας και ο αντίστροφος ενός ορθογώνιου πίνακα είναι ορθογώνιος πίνακας.*

Θεώρημα 3.4.5. *Ο πίνακας*

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

μετασχηματισμού των συντεταγμένων από ένα ορθοκανονικό σύστημα $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ προς ένα σύστημα $O\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$ είναι ορθογώνιος τότε και μόνον τότε όταν το $O\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$ είναι ορθοκανονικό.

Θεώρημα 3.4.6. *Αν ο πίνακας $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ είναι ορθογώνιος, τότε έχει μία από τις μορφές:*

$$\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \text{ ή } \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix} \text{ όπου } \phi \in [0, 2\pi]$$

Πόρισμα 3.4.7. *Αν C είναι ο πίνακας μετάσχηματισμού των συντεταγμένων από ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων σε ένα άλλο ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, τότε*

$$C = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \text{ ή } C = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix}, \text{ όπου } \phi \in [0, 2\pi]$$

και, συνεπώς, $|C| = \pm 1$.

Παρατήρηση 3.4.8.

1. Αν ο πίνακας μετάσχηματισμού των συντεταγμένων από ένα ορθοκανονικό σύστημα $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ προς ένα σύστημα $O\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$ είναι ο
$$\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$
τότε
$$\begin{aligned} \vec{e}_1{}' &= \cos\phi\vec{e}_1 + \sin\phi\vec{e}_2 \\ \vec{e}_2{}' &= -\sin\phi\vec{e}_1 + \cos\phi\vec{e}_2 \end{aligned}$$
δηλαδη το $O\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$ προκύπτει με περιστροφή του $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ γύρο από το O κατά την γωνία ϕ.

   Οι τύποι μετάσχηματισμού των συντεταγμένων στη περίπτωση αυτή είναι
$$\begin{aligned} x &= x\,'\cos\phi - y\,'\sin\phi \\ y &= x\,'\sin\phi + y\,'\cos\phi \end{aligned}$$

2. Αν ο πίνακας μετάσχηματισμού των συντεταγμένων από ένα ορθοκανονικό σύστημα $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ προς ένα σύστημα $O\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$ είναι ο
$$\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ \sin\phi & -\cos\phi \end{pmatrix}$$
τότε
$$\begin{aligned} \vec{e}_1{}' &= \cos\phi\vec{e}_1 + \sin\phi\vec{e}_2 \\ \vec{e}_2{}' &= -(-\sin\phi\vec{e}_1 + \cos\phi\vec{e}_2) \end{aligned}$$
δηλαδή το $O\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$ προκύπτει με περιστροφή του $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ γύρο από το O κατά την γωνία ϕ και μετέπειτα ανάκλαση του δεύτερου διανύσματος του συστήματος από το πρώτο.

   Οι τύποι αλλαγής των συντεταγμένων στη περίπτωση αυτή είναι
$$\begin{aligned} x &= x\,'\cos\phi + y\,'\sin\phi \\ y &= x\,'\sin\phi - y\,'\cos\phi \end{aligned}$$

Παραδείγματα 3.4.1.

1. Έστω η έλλειψη Γ έχει εξίσωση
$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$
στο σύτημα $O\vec{e}_1\vec{e}_2$. Θα βρούμε την εξίσωση της Γ στο σύστημα $O\vec{e}_1'\vec{e}_2'$ που προκύπτει με την περιστροφή του $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ γύρω από το O κατά την γωνία $\phi = \frac{\pi}{4}$.

   Ο πίνακας μετάσχηματισμού των συντεταγμένων είναι
$$\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$
Οι τύποι αλλαγής των συντεταγμένων είναι
$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y' \\ y &= \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' \end{aligned}$$
Αρα, η εξίσωση της Γ στο σύστημα $O\vec{e}_1'\vec{e}_2'$ είναι
$$\frac{(\frac{\sqrt{2}}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y')^2}{4} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y'\right)^2 = 1$$
μετά από πράξεις παίρνουμε
$$\frac{5}{8}x'^2 + \frac{3}{4}x'y' + \frac{5}{8}y'^2 = 1.$$

2. Έστω η έλλειψη Γ έχει εξίσωση
$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$
στο σύτημα $O\vec{e}_1\vec{e}_2$. Θα βρούμε την εξίσωση της Γ στο σύστημα $O'\vec{e}_1\vec{e}_2$, όπου $O' = (1,2)$ στο $O\vec{e}_1\vec{e}_2$. Οι τύποι αλλαγής των συντεταγμένων είναι
$$\begin{aligned} x &= x' + 1 \\ y &= y' + 2 \end{aligned}$$
Αρα, η εξίσωση της Γ στο σύστημα $O'\vec{e}_1\vec{e}_2$ είναι
$$\frac{(x'+1)^2}{4} + (y'+2)^2 - 1 = 0$$
μετά από πράξεις παίρνουμε
$$\frac{x'^2}{4} + y'^2 + \frac{1}{2}x' + 4y' + \frac{13}{4} = 0$$

Κεφάλαιο 4

Εξωτερικό γινόμενο και μικτό γινόμενο διανυσμάτων

4.1 Προσανατολισμός του επιπέδου και του χώρου.

Για να προσανατολίσουμε μια ευθεία αρκεί να ορίσουμε μια κατεύθυνση κίνησης πάνω στην ευθεία. Μια ευθεία ε μαζί με ένα γενικό σύστημα συντεταγμένων $O\vec{e}$ είναι προσανατολισμένη.

Προσανατολισμός του επιπέδου.

Ένα επίπεδο π είναι προσανατολισμένο αν πάνω σε αυτό έχει οριστεί μια θετική φορά περιστροφής (η φορά της κίνησης των δεικτών του ρολογιού ή η αντίθετη φορά).

Ορισμός 4.1.1. Θα λέμε ότι το γενικό σύστημα συντεταγμένων $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ ενός προσανατολισμένου επιπέδου π είναι θετικώς (αρνητικώς) προσανατολισμένο αν η γωνία ϕ κατά την οποία πρέπει να περιστραφεί το πρώτο διάνυσμα $\vec{e}_1$ γύρω από το O κατά την θετική φορά περιστροφής για να συμπέσει με το δεύτερο διάνυσμα $\vec{e}_2$ ικανοποιεί την συνθήκη: $0 < \phi < \pi$ ($\phi > \pi$).

Για να προσανατολιστεί ένα επίπεδο π αρκεί να δοθεί πάνω σε αυτό ένα γενικό σύστημα συντεταγμένων $O\vec{e}_1\vec{e}_2$. Οπότε θετική φορά περιστροφής είναι εκείνη κατά την οποία πρέπει να περιστραφεί το $\vec{e}_1$ για να συμπέσει με το $\vec{e}_2$ έτσι ώστε η γωνία της περιστροφής ϕ να ικανοποιεί τη συνθήκη: $0 < \phi < \pi$. Θετικώς προσανατολισμένα θα είναι όλα εκείνα τα γενικά συστήματα συντεταγμένων που έχουν τον ίδιο προσανατολισμό με το $O\vec{e}_1\vec{e}_2$.

Σε ένα γενικό σύστημα συντεταγμένων ενός προσανατολισμένου επιπέδου η αντιμετάθεση δύο διανυσμάτων όπως και η αντικατάσταση ενός διανύσματος με το αντίθετο διάνυσμα οδηγεί σε γενικό σύστημα συντεταγμένων αντίθετου προσανατολισμού.

Επομένως

1. Το ίδιο προσανατολισμό με το $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ έχουν τα συστήματα: $O\vec{e}_2 - \vec{e}_1$, $O - \vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $O - \vec{e}_2\vec{e}_1$.

2. Αντίθετο προσανατολισμό από το $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ έχουν τα συστήματα: $O\vec{e}_2\vec{e}_1$, $O - \vec{e}_1\vec{e}_2$, $O\vec{e}_1 - \vec{e}_2$.

Προσανατολισμός του χώρου.

Ορισμός 4.1.2. Θα λέμε ότι ένα γενικό σύστημα συντεταγμένων του χώρου $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ είναι δεξιόστροφο (αριστερόστροφο), αν παρατηρώντας από το πέρας του τρίτου διανύσματος $\vec{e}_3$ προς το επίπεδο Oxy, η γωνία ϕ κατά την οποία πρέπει να περιστραφεί το πρώτο διάνυσμα $\vec{e}_1$ γύρω από το O κατά την φορά αντίθετη της κίνησης των δεικτών του ρολογιού για να συμπέσει με το δεύτερο διάνυσμα $\vec{e}_2$ ικανοποιεί την συνθήκη: $0 < \phi < \pi$ ($\pi < \phi < 2\phi$).

Το σύνολο όλων των γενικών συστημάτων συντεταγμένων του χώρου χρίζεται σε δύο κλάσεις: η μία κλάση αποτελείται από όλα τα δεξιόστροφα γενικά συστήματα συντεταγμένων και η άλλη από όλα τα αριστερόστροφα γενικά συστήματα συντεταγμένων.

Ορισμός 4.1.2. Θα λέμε ότι ο χώρος είναι προσανατολισμένος, αν τα συστήματα συντεταγμένων της μιας οικογένειας (π.χ. τα δεξιόστροφα) δηλωθούν ως θετικώς προσανατολισμένα.

Για να προσανατολιστεί ο χώρος αρκεί ωα δοθεί ένα γενικό σύστημα συντεταγμένων $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$. Οπότε, θεωρώντας όλα τα συστήματα συντεταγμένων της κλάσης που περιέχει το $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ ως θετικώς προσανατολισμένα ορίζουμε προσανατολισμό του χώρου.

Σε ένα γενικό σύστημα συντεταγμένων του χώρου:

1. Η αντιμετάθεση δύο διανυσμάτων όπως και η αντικατάσταση ενός διανύσματος με το αντίθετο διάνυσμα οδηγεί σε γενικό σύστημα συντεταγμένων αντίθετου προσανατολισμού.
2. Η κυκλική αντιμετάθεση διανυσμάτων ενός γενικού συστήματος συντεταγμένων του χώρου οδηγεί σε σύστημα συντεταγμένων ίδιου προσανατολισμού.

Επομένως

1. Το ίδιο προσανατολισμό με το $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ έχουν τα συστήματα:
$O\vec{e}_2\vec{e}_3\vec{e}_1$, $O\vec{e}_3\vec{e}_1\vec{e}_2$, $O-\vec{e}_1-\vec{e}_2\vec{e}_3$, $O\vec{e}_1-\vec{e}_2-\vec{e}_3$, $O-\vec{e}_1\vec{e}_2-\vec{e}_3$ κ.λ.π.
2. Αντίθετο προσανατολισμό από το $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ έχουν τα συστήματα:
$O\vec{e}_2\vec{e}_1\vec{e}_3$, $O\vec{e}_3\vec{e}_2\vec{e}_1$, $O\vec{e}_1\vec{e}_3\vec{e}_2$, $O-\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$, $O\vec{e}_1-\vec{e}_2\vec{e}_3$ κ.λ.π.

Θα λέμε ότι μια διατεταγμένη τριάδα μη συνεπίπεδων διανυσμάτων $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ είναι θετικώς (αρνητικώς) προσανατολισμένη αν για κάθε σημείο O του χώρου το γενικό σύστημα συντεταγμένων $O\vec{u}\vec{v}\vec{w}$ είναι θετικώς (αρνητικώς) προσανατολισμένο.

1. Αν $\lambda>0$, τότε οι τριάδες $\{\lambda\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$, $\{\vec{e}_1,\lambda\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ και $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\lambda\vec{e}_3\}$ έχουν τον ίδιο προσανατολισμό με την $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$.
2. Αν $\lambda<0$, τότε οι τριάδες $\{\lambda\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$, $\{\vec{e}_1,\lambda\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ και $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\lambda\vec{e}_3\}$ έχουν αντίθετο προσανατολισμό από την $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$.

4.2 Εξωτερικό γινόμενο και μικτό γινόμενο διανυσμάτων.

Θεωρούμε ότι ο χώρος είναι προσανατολισμένος (π.χ. ας θεωρηθούν ως θετικώς προσανατολισμένα τα δεξιόστροφα συστήματα.)

Ορισμός 4.2.1. Εξωτερικό (ή διανυσματικό) γινόμενο δύο γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$ ενός προσανατολισμένου χώρου καλείται το διάνυσμα $\vec{w}$ τέτοιο ώστε:

1. $|\vec{w}|=|\vec{u}||\vec{v}|\sin(\vec{u}.\vec{v})$
2. $\vec{w}\perp\vec{u}$ και $\vec{w}\perp\vec{v}$
3. $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ είναι θετικώς προσανατολισμένο.

Ως εξωτερικό γινόμενο δύο γραμμικώς εξαρτημένων διανυσμάτων ορίζεται το διάνυσμα $\vec{0}$.
Γράφουμε $\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}$ ή $\vec{w}=[\vec{u},\vec{v}]$.

Ορισμός 4.2.2. Μικτό γινόμενο τριών διανυσμάτων $\vec{u},\vec{v}.\vec{w}$ καλείται ο αριθμός

$$([\vec{u},\vec{v}],\vec{w}),$$

δηλαδή το εσωτερικό γινόμενο του $[\vec{u},\vec{v}]$ επί το $\vec{w}$.

Συμβολίζουμε $\langle\vec{u},\vec{v},\vec{w}\rangle=([\vec{u},\vec{v}],\vec{w})$.

Θεώρημα 4.2.3. *Εστω AOB ενα τρίγωνο $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ και $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$ τότε*

$$S_{OAB}=\frac{1}{2}|\vec{u}\times\vec{v}|$$

Πόρισμα 4.2.4. *Το εμβαδό του παραλληλόγραμμου πανω στα γραμμικώς ανεξάρτητα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ ισούται με $|\vec{u} \times \vec{v}|$.*

Θεώρημα 4.2.5. *Εστω $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$ μη συνεπίπεδα διανύσματα και V ο όγκος του παραλληλεπιπέδου με ακμές OA, OB, OC. Αν $\{\vec{u}, \vec{v}.\vec{w}\}$ είναι θετικώς προσανατολισμένα, τότε $\langle \vec{u}, \vec{v}.\vec{w} \rangle = V$. Αν $\{\vec{u}, \vec{v}.\vec{w}\}$ είναι αρνητικώς προσανατπλισμένα, τότε $\langle \vec{u}, \vec{v}.\vec{w} \rangle = -V$.*

Θεώρημα 4.2.6. *$\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0$ τότε και μόνο τότε, όταν τα διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ είναι συνεπίπεδα*

Ιδιότητες του μικτού γινομένου.

1. $\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{w}, \vec{u} \rangle = \langle \vec{w}, \vec{u}, \vec{v} \rangle = -\langle \vec{v}, \vec{u}, \vec{w} \rangle = -\langle \vec{w}, \vec{v}, \vec{u} \rangle = -\langle \vec{u}, \vec{w}, \vec{v} \rangle$

2. $\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$

3. $\lambda \langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \lambda\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \lambda\vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v}, \lambda\vec{w} \rangle$.

4. $\langle \vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}_1, \vec{v}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{u}_2, \vec{v}, \vec{w} \rangle$,

   $\langle \vec{u}, \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v}_1, \vec{w} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{v}_2, \vec{w} \rangle$,

   $\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}_1 + \vec{w}_2 \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}_1 \rangle + \langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}_2 \rangle$

Ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου.

1. $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$

2. $(\lambda\vec{u}) \times \vec{v} = \lambda(\vec{u} \times \vec{v})$

3. $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$ και $\vec{w} \times (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{w} \times \vec{u} + \vec{w} \times \vec{v}$

4.3 Εξωτερικό και μικτό γινόμενα στο χώρο με ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων

Θεώρημα 4.3.1. *Έστω $\vec{u} = \{u_1, u_2, u_3\}$, $\vec{v} = \{v_1, v_2, v_3\}$, $\vec{w} = \{w_1, w_2, w_3\}$ ως προς ένα θετικώς προσανατολισμένο ορθοκανονικό σύστημα $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$, τότε*

1. $$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right\}$$

2. $$\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Πόρισμα 4.3.2. *Έστω ABC ένα τρίγωνο του επιπέδου π και $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων του π. Αν $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$, $C = (x_C, y_C)$ ως προς το $O\vec{e}_1\vec{e}_2$, τότε*

$$E_{ABC} = \frac{1}{2} \left\| \begin{matrix} x_A & y_A & 1 \\ x_B & y_B & 1 \\ x_C & y_C & 1 \end{matrix} \right\|$$

4.4 Ασκήσεις.

18. Δίδονται τα διανύσματα $\vec{u} = \{3, 1, 2\}$, $\vec{v} = \{2, 7, 4\}$, $\vec{w} = \{1, 2, 1\}$.

Να βρεθούν τα διανύσματα $\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$ και $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$.

Λύση. Εφαρμόζοντας τους τύπους 1 και 2 του Θεωρήματος 4.3.1 βρίσκουμε

$$\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle = -7, \ \ \vec{u} \times \vec{v} = \{-10, -8, 19\}, \quad (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w} = \{-46, 29, -12\}$$

19. Να αποδειχθεί ότι αν $\vec{u} \times \vec{v} + \vec{v} \times \vec{w} + \vec{w} \times \vec{u} = \vec{0}$, τότε τα διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ είναι συνεπίπεδα.

Λύση.

$$\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v} + \vec{v} \times \vec{w} + \vec{w} \times \vec{u}) = \vec{u} \cdot \vec{0} \Rightarrow$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) + \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) + \vec{u} \cdot (\vec{w} \times \vec{u}) = 0 \Rightarrow$$

$$\langle \vec{u}, \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w}, \vec{u} \rangle = 0 \Rightarrow$$

$$\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0 \Rightarrow$$

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ είναι συνεπίπεδα.

20. Εστω $A = (3, -1, 0)$, $B = (0, -7, 3)$, $C = (-2, 1, -1)$, $D = (3, 2, 6)$. Να βρεθεί το εμβαδό της τομης του τετραέδρου $ABCD$ με το επίπεδο που διέρχεται από τα μέσα των ακμών $AB, \ AD, \ CD, \ ,CB$.

Λύση.

$$L = (3, \tfrac{1}{2}, 3)$$
$$M = (\tfrac{3}{2}, -4, \tfrac{3}{2})$$
$$N = (-1, -3, 1)$$

$$S_{LMNK} = |\vec{ML} \times \vec{MN}| = \sqrt{(\vec{ML})^2 (\vec{MN})^2 - (\vec{ML} \cdot \vec{MN})^2}$$

$$\vec{ML} = \{\frac{3}{2}, -\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\}, \quad \vec{MN} = \{\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\}$$

$$\vec{ML}^2 = \frac{67}{4}, \ (\vec{MN})^2 = \frac{6}{4}$$

$$(\vec{ML} \cdot \vec{MN})^2 = \frac{49}{4}, \quad S_{LMNK} = \frac{453}{4}$$

21. Να αποδειχθεί ότι

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{\vec{a}^2 \cdot \vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$$

22. Εστω τα διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ είναι μη μηδενικά και μη παράλληλα ανά δύο. Να αποδειχθεί ότι

$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0} \Longleftrightarrow \vec{u} \times \vec{v} = \vec{v} \times \vec{w} = \vec{w} \times \vec{u}$$

Λύση. $(\Longrightarrow)$ $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{u}\times(\vec{u}+\vec{v}+w) = \vec{u}\times\vec{0} \Longrightarrow \vec{u}\times\vec{u}+\vec{u}\times\vec{v}+\vec{u}\times\vec{w} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{u}\times\vec{v} = -\vec{u}\times\vec{w} = \vec{w}\times\vec{u}$. Ομοια από την $\vec{w} \times (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) = \vec{0}$ συμπεραίνουμε ότι $\vec{w} \times \vec{u} = \vec{v} \times \vec{w}$.

$(\Longleftarrow)$ Ας υποθέσουμε ότι $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{v} \times \vec{w} = \vec{w} \times \vec{u}$. Τότε

$$\vec{u} \times (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) =$$

$$\vec{u} \times \vec{u} + \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w} =$$

$$\vec{u} \times \vec{v} - \vec{w} \times \vec{u} = \vec{0}$$

Αρα τα $\vec{u} \parallel (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})$. Ομοια αποδεικνύεται ότι $\vec{v} \parallel (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})$ και $\vec{w} \parallel (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w})$.

Από τα παραπάνω έπεται ότι αν $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} \neq \vec{0}$, τότε $\vec{u} \| \vec{v} \| \vec{w}$, που είναι άτοπο.

23. Αν $\vec{u} = \{u_1, u_2\}$, $\vec{v} = \{v_1, v_2\}$ ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα $O\vec{e}_1\vec{e}_2$, τότε το εμβαδό E του παραλληλογράμμου πάνω στα διανύσματα $\vec{u}_1$ και $\vec{u}_2$ υπολογίζεται από τον τύπο:

$$E = \left\| \begin{matrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{matrix} \right\|$$

Λύση. Συμπληρώνοντας το $O\vec{e}_1 e_2$ με το διάυσμα $\vec{e}_3$, τέτοιο ώστε $\vec{e}_3 \perp \vec{e}_1$, $\vec{e}_3 \perp \vec{e}_2$ και $|\vec{e}_3| = 1$ παίρνουμε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντετεγμένων του χώρου $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ ως προς το οποίο $\vec{u} = \{u_1, u_2, 0\}$ και $\vec{v} = \{v_1, v_2, 0\}$.

$$E = |\vec{u} \times \vec{v}| = \left\| \begin{matrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ u_1 & u_2 & 0 \\ v_1 & v_2 & 0 \end{matrix} \right\| = \left| \left\{ 0, 0, \left| \begin{matrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{matrix} \right| \right\} \right| = \sqrt{\left| \begin{matrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{matrix} \right|^2} = \left\| \begin{matrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{matrix} \right\|$$

24. Αν $\vec{u} = \{8, 4, 1\}$ και $\vec{v} = \{2, -2, 1\}$, να βρεθεί το διάνυσμα $\vec{w}$ τέτοιο ώστε $\vec{w} \perp \vec{u}$, $|\vec{w}| = |\vec{u}|$, η γωνία μεταξύ των $\vec{w}$ και $\vec{v}$ να είναι οξεία και τα διανύσματα $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ να είναι συνεπίπεδα.

Λύση. Έστω $\vec{w} = \{w_1, w_2, w_3\}$.
$\vec{w} \perp \vec{u} \Longrightarrow \vec{u} \cdot \vec{w} = 0 \Longrightarrow 8w_1 + 4w_2 + w_3 = 0$
$|\vec{w}| = |\vec{u}| \Longrightarrow w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = 8^2 + 4^2 + 1^2 = 81$
Τα διανύσματα $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ να είναι συνεπίπεδα, άρα

$$\left| \begin{matrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ 2 & -2 & 1 \\ 8 & 4 & 1 \end{matrix} \right| = 0 \Longrightarrow w_1 - w_2 - 4w_3 = 0$$

Λύνοντας το σύστημα

$$\begin{aligned} 8w_1 + 4w_2 + w_3 &= 0 \\ w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 &= 81 \\ w_1 - w_2 - 4w_3 &= 0 \end{aligned}$$

βρίσκουμε δύο λύσεις: $\vec{w}_1 = \{-\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{11\sqrt{2}}{2}, -2\sqrt{2}\}$ και $\vec{w}_2 = \{\frac{5\sqrt{2}}{2}, -\frac{11\sqrt{2}}{2}, 2\sqrt{2}\}$.

Επειδή η γωνία φ μεταξύ των $\vec{w}$ και $\vec{v}$ ν είναι οξεία, ισχύει: $\vec{w} \cdot \vec{v} = |\vec{w}||\vec{v}| \cos\varphi > 0$.

Έχουμε $\vec{w}_2 \cdot \vec{v} = 5\sqrt{2} + 11\sqrt{2} + 2\sqrt{2} > 0$, άρα, $\vec{w} = \{\frac{5\sqrt{2}}{2}, -\frac{11\sqrt{2}}{2}, 2\sqrt{2}\}$

25. Να βρεθεί ο όγκος του παραλληλεπιπέδου με ακμές $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, αν $O = (x_0, y_0, z_0)$ $A = (x_A, y_A, z_A)$, $B = (x_B, y_B, z_B)$ και $C = (x_C, y_C, z_C)$ ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων.

26. Να αποδειχθεί ότι αν στο τετράεδρο $ABCD$ οι δύο ακμές είναι κάθετες προς τις αντίστοιχες απέναντι ακμές, τότε και οι υπόλοιπες δύο ακμές είναι κάθετες.

Λύση. Έστω ότι $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ είναι ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων και ως προς το σύστημα αυτό: $A = (x_A, y_A, z_A)$, $B = (x_B, y_B, z_B)$, $C = (x_C, y_C, z_C)$, $D = (x_D, y_D, z_D)$.

Έστω ότι στο τετράεδρο $ABCD$ είναι $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$ και $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AD}$.
Τότε $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.
$\overrightarrow{AB} = \{x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A\}$, $\overrightarrow{BC} = \{x_C - x_B, y_C - y_B, z_C - z_B\}$
$\overrightarrow{CD} = \{x_D - x_C, y_D - y_C, z_D - z_C\}$, $\overrightarrow{AD} = \{x_D - x_A, y_D - y_A, z_D - z_A\}$

Από τα παραπάνω
$(x_B - x_A)(x_D - x_C) + (y_B - y_A)(y_D - y_C) + (z_B - z_A)(z_D - z_C) = 0$
$(x_C - x_B)(x_D - x_A) + (y_C - y_B)(y_D - y_A) + (z_C - z_B)(z_D - z_A) = 0$

Προσθέτοντας τις δύο τελευταίες ισότητες παίρνουμε
$(x_D - x_B)(x_C - x_A) + (y_D - y_B)(y_C - y_A) + (z_D - z_B)(z_C - z_A) = 0 \Longleftrightarrow$
$\{x_D - x_B, y_D - y_B, z_D - z_B\} \cdot \{x_C - x_A, y_C - y_A, z_C - z_A\} = 0 \Longleftrightarrow \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Longleftrightarrow \overrightarrow{BD} \perp \overrightarrow{AC}$

27. Μια ευθεία ε σχηματίζει ίσες γωνίες με τις ακμές μιας ορθής τρίεδρης γωνίας. Να βρεθούν οι γωνίες αυτές.

Λύση. Έστω O η κορυφή της τριεδρης γωνίας και A, B, C τα σημεία των ακμών της τέτοια ώστε

$$|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = 1.$$

Παίρνουμε ένα σημείο $M \in \varepsilon$, τότε $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$.

Άρα, $\overrightarrow{OM} = \{x, y, z\}$, $\overrightarrow{OA} = \{1, 0, 0\}$, $\overrightarrow{OB} = \{0, 1, 0\}$, $\overrightarrow{OC} = \{0, 0, 1\}$ ως προς το οριοκανονικό σύστημα $\{O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\}$.

Έστω $\varphi_A, \varphi_B, \varphi_C$ οι γωνίες μεταξύ του $\overrightarrow{OM}$ και $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$, αντίστοιχα. Έχουμε

$$\cos\varphi_A = \frac{\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OM}|\cdot|\overrightarrow{OA}|} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$
$$\cos\varphi_B = \frac{\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OM}|\cdot|\overrightarrow{OB}|} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$
$$\cos\varphi_C = \frac{\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OM}|\cdot|\overrightarrow{OC}|} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Επειδή $\varphi_A = \varphi_B = \varphi_C$, έπειται ότι $\cos\varphi_A = \cos\varphi_B = \cos\varphi_C$ και συνεπώς $x = y = z$.

Οπότε $\cos\varphi_A = \frac{x}{\sqrt{3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, από όπου $\varphi_A = \varphi_B = \varphi_C = \arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$.

28. Να αποδειχθεί ότι

$$\langle\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\rangle\langle\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\rangle = \begin{vmatrix} \vec{u}\cdot\vec{a} & \vec{u}\cdot\vec{b} & \vec{u}\cdot\vec{c} \\ \vec{v}\cdot\vec{a} & \vec{v}\cdot\vec{b} & \vec{v}\cdot\vec{c} \\ \vec{w}\cdot\vec{a} & \vec{w}\cdot\vec{b} & \vec{w}\cdot\vec{c} \end{vmatrix}$$

Λύση. Έστω
$\vec{u} = \{u_1, u_2, u_3\}$, $\vec{v} = \{v_1, v_2, v_3\}$, $\vec{w} = \{w_1, w_2, w_3\}$,
$\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$, $\vec{c} = \{c_1, c_2, c_3\}$.
ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων. Τότε

$$\langle\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\rangle\langle\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\rangle = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \left|\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} \vec{u}\cdot\vec{a} & \vec{u}\cdot\vec{b} & \vec{u}\cdot\vec{c} \\ \vec{v}\cdot\vec{a} & \vec{v}\cdot\vec{b} & \vec{v}\cdot\vec{c} \\ \vec{w}\cdot\vec{a} & \vec{w}\cdot\vec{b} & \vec{w}\cdot\vec{c} \end{vmatrix}$$

29. Αν $\vec{u}_1 = \{2, 1, -1\}$, $\vec{u}_2 = \{-3, 0, 2\}$ και $\vec{u}_3 = \{5, 1, -2\}$ ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων, να βρεθούν τα διανύσματα $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ τέτοια ώστε

$$\vec{u}_i\cdot\vec{v}_j = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

30. Έστω τα διανύσματα $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ είναι μη συνεπίπεδα και $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ είναι τέτοια ώστε

$$\vec{u}_i\cdot\vec{v}_j = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

να εκφραστούν τα διανύσματα $\vec{v}_j$ ως συναρτήσεις των $\vec{u}_i$.

Κεφάλαιο 5

Ευθείες και επίπεδα στο χώρο

Το σημείο εκκίνησης για την μελέτη των σχημάτων στο χώρο είναι τα αξιώματα που εκφράζουν της ιδιότητες των ποιο απλών σχημάτων του χώρου, τα οποία είναι: σημείο, ευθεία και επίπεδο. Τα αξιώματα αυτά είναι:

$\mathbf{A_1}$: Σε κάθε επίπεδο ανήκουν τουλάχιστον τρία μη συνευθειακά σημεία.

$\mathbf{A_2}$: Υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο, που δεν ανήκει σε ένα δεδομένο επίπεδο.

$\mathbf{A_3}$: Τρία μη συνευθειακά σημεία ανήκουν σε ένα μοναδικό επίπεδο.

$\mathbf{A_4}$: Αν δυο διαφορετικά επίπεδα έχουν κοινό σημείο, τότε τέμνονται κατά ευθεία στην οποία ανήκει το σημείο αυτό.

$\mathbf{A_5}$: Η ευθεία που διέρχεται από δυο σημεία ενός επιπέδου κείται εξ ολοκλήρου στο επίπεδο αυτό.

$\mathbf{A_6}$: Κάθε επίπεδο χωρίζει τα σημεία του χώρου, που δεν ανήκουν σε αυτό, σε δυο περιοχές ξένες μεταξύ τους.

Βασικά θεωρήματα της στερεομετρίας.

1. Δυο διαφορετικες ευθείες που έχουν κοινό σημείο περιέχονται σε ένα μοναδικό επίπεδο.

2. Αν μια ευθεία είναι παράλληλη στο καθένα από τα δυο διαφορετικά τεμνόμενα επίπεδα, τότε είναι παράλληλη στην ευθεία τομής των επιπέδων αυτών.

3. Αν το επίπεδο π_1 είναι παράλληλο σε δυο τεμνόμενες σε ένα σημείο ευθείες του επιπέδου π_2, τότε $\pi_1 \parallel \pi_2$.

4. Αν η ευθεία ε είναι κάθετη σε δυο τεμνόμενες σε ένα σημείο ευθείες του επιπέδου π, τότε $\varepsilon \perp \pi$.

5.1 Εξίσωση επιπέδου.

Έστω επίπεδο π και M_0, M_1, M_2 τριά μη συνευθειακά σημεία του.

Θα εκφράσουμε την ικανή και αναγκαία συνθήκη ένα σημείο του χώρου να ανήκει στο π.

Θέτουμε $\vec{a} = \overrightarrow{M_0M_1}$ και $\vec{b} = \overrightarrow{M_0M_2}$, τότε $\vec{a} \nparallel \vec{b}$. Ένα σημείο M του χώρου ανήκει στο π αν και μόνον αν τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{M_0M}$ είναι συνεπίπεδα, δηλαδή

$$\overrightarrow{M_0M} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}, \text{ όπου } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Διανυσματικοπαραμετρική εξίσωση επιπέδου

Έστω $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ ένα γενικό σύστημα συντεταγμένων του χώρου. Για κάθε σημείο N του χώρου συμβολίζουμε με $\vec{N}$ το διάνυσμα θέσης $\overrightarrow{ON}$ του N.

Τότε $\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{M_0O} + \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0} = \vec{M} - \vec{M_0}$. Άρα, ένα σημείο M του χώρου ανήκει στο π αν και μόνον αν

$$\vec{M} = \vec{M_0} + \lambda\vec{a} + \mu\vec{b}, \text{ όπου } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \tag{5.1}$$

Η εξίσωση (1.1) καλείται διανυσματικοπαραμετρική εξίσωση επιπέδου που διέρχεται από το σημείο M_0 και είναι παράλληλο στα δυο μη παράλληλα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$.

Παραμετρικες εξισώσεις επιπέδου

Έστω $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ και $\vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ και $M = (x, y, z)$ ως προς το γενικό σύστημα συντεταγμένων $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$. Η εξίσωση (1.1) γράφεται

$$\{x, y, z\} = \{x_0, y_0, z_0\} + \lambda\{a_1, a_2, a_3\} + \mu\{b_1, b_2, b_3\}$$

Άρα, ένα σημείο $M = (x, y, z)$ του χώρου ανήκει στο π αν και μόνο αν

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \lambda a_1 + \mu b_1 \\ y &= y_0 + \lambda a_2 + \mu b_2 \\ x &= z_0 + \lambda a_3 + \mu b_3 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Οι εξισώσεις (1.2) καλούνται παραμετρικές εξισώσεις του επιπέδου που διέρχεται από το σημείο $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ και είναι παράλληλο στα δυο μη παράλληλα διανύσματα $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ και $\vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$.

Καρτεσιανή εξίσωση επιπέδου

Θεώρημα 5.1.1. *Κάθε επίπεδο του χώρου έχει εξίσωση της μορφής*

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad |A| + |B| + |C| \neq 0 \tag{5.3}$$

ως προς γενικό σύστημα συντεταγμένων του χώρου και κάθε εξίσωση της μορφής (5.3) είναι εξίσωση επιπέδου.

5.2 Σχετική θέση επιπέδων.

Θεώρημα 5.2.1. *Ενα διάνυσμα $\vec{u} = \{a, b, c\}$ είναι παράλληλο στο επίπεδο $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ αν και μόνον αν $Aa + Bb + Cc = 0$.*

Θεώρημα 5.2.2. *Έστω ότι τα επίπεδα π_1 και π_2 έχουν εξισώσεις*

$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \tag{5.4}$$
$$\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \tag{5.5}$$

1. $\pi_1 = \pi_2 \iff A_2 = \lambda A_1,\ B_2 = \lambda B_1,\ C_2 = \lambda C_1$ *και* $D_2 = \lambda D_1$ *όπου* $\lambda \neq 0$

2. $\pi_1 \parallel \pi_2 \iff A_2 = \lambda A_1,\ B_2 = \lambda B_1,\ C_2 = \lambda C_1$ *και* $D_2 \neq \lambda D_1$ *όπου* $\lambda \neq 0$

3. π_1 *και* π_2 *τέμνονται κατά μια ευθεία* $\iff$ *δεν υπάρχει* $\lambda \neq 0$ *τέτοιος ώστε* $A_2 = \lambda A_1,\ B_2 = \lambda B_1,\ C_2 = \lambda C_1$.

Θεώρημα 5.2.3. *Δύο σημεία $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$ και $M_2 = (x_2, y_2, z_2)$ ανήκουν σε διφορετικούς ημιχώρους ως προς το επίπεδο $Ax + By + Cz + D = 0$, αν και μόνον αν*

$$(Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D)(Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D) < 0$$

Πόρισμα 5.2.1. *Το επίπεδο $\pi : Ax+By+Cz+D=0$ χωρίζει το χώρο σε δύο ημιχώρους π^- και π^+, όπου*
$\pi^- = \{M=(x,y,z) : Ax+By+Cz+D<0\}$
$\pi^+ = \{M=(x,y,z) : Ax+By+Cz+D>0\}$

Θεώρημα 5.2.4. *Αν M_0 είναι ένα σημείο του επιπέδου*

$$\pi : Ax+By+Cz+D=0$$

και $\overrightarrow{M_0M} = \{A,B,C\}$, τότε $M \in \pi^+$.

5.3 Ευθεία στο χώρο.

Έστω ε μία ευθεία, $M_0 \in \varepsilon$ και $\vec{a}$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα παράλληλο στην ε. Ένα σημείο M του χώρου ανήκει στην ε αν και μόνον αν

$$\overrightarrow{M_0M} = t\vec{a}, \text{ όπου } t \in \mathbb{R} \tag{5.6}$$

Διανυσματικοπαραμετρική εξίσωση της ευθείας.

Έστω $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ ένα γενικό σύστημα συντεταγμένων του χώρου. Τότε $\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{M} - \overrightarrow{M_0}$. Οπότε η εξίσωση (5.9) γράφεται

$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{M_0} + t\vec{a}, \text{ όπου } t \in \mathbb{R} \tag{5.7}$$

Η εξίσωση (5.10) καλείται διανυσματικοπαραμετρική εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο M_0 και είναι παράλληλη στο μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{a}$.

Παραμετρικες εξισώσεις ευθείας

Έστω $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ και $M = (x, y, z)$ ως προς το γενικό σύστημα συντεταγμένων $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$. Η εξίσωση (5.10) γράφεται

$$\{x, y, z\} = \{x_0, y_0, z_0\} + t\{a_1, a_2, a_3\}$$

Άρα, ένα σημείο $M = (x, y, z)$ του χώρου ανήκει στην ε αν και μόνο αν

$$\begin{aligned} x &= x_0 + ta_1 \\ y &= y_0 + ta_2 \\ x &= z_0 + ta_3 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Οι εξισώσεις (1.13) καλούνται παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ και είναι παράλληλη στο μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$.

Κανονικές εξισώσεις ευθείας.

Αν οι συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{a}$ είναι διάφορες του μηδενός, δηλαδή $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$ και $a_3 \neq 0$, τότε η ε γράφεται ως τομή επιπέδων ως εξής:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{x-x_0}{a_1} = \dfrac{y-y_0}{a_2} \\ \dfrac{x-x_0}{a_1} = \dfrac{z-z_0}{a_3} \end{array} \right.$$

Αν μία συντεταγμένη του $\vec{a}$ είναι μηδέν και δύο είναι διάφορες του μηδένός, π.χ. $a_1 = 0$, $a_2 \neq 0$ και $a_3 \neq 0$, τότε η ε γράφεται ως τομή επιπέδων ως εξής:

$$\left\{ \begin{array}{l} x - x_0 = 0 \\ \dfrac{y-y_0}{a_2} = \dfrac{z-z_0}{a_3} \end{array} \right.$$

Αν δύο συντεταγμένες του $\vec{a}$ είναι μηδέν και μία είναι διάφορη του μηδενός, π.χ. $a_1 = a_2 = 0$ και $a_3 \neq 0$, τότε η ε γράφεται ως τομή επιπέδων ως εξής:

$$\begin{cases} x - x_0 = 0 \\ y - y_0 = 0 \end{cases}$$

Σε καθεμιά από τις παραπάνω τρεις περιπτώσεις οι δύο εξισώσεις γράφονται συμβολικά σε μία εξίσωση:

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3} \tag{5.9}$$

η οποία καλείται *κανονική εξίσωση* της ε.

Θεώρημα 5.3.1. *Αν η ευθεία ε είναι ευθεία τομής των επιπέδων π_1 και π_2, όπου*

$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \tag{5.10}$$

$$\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \tag{5.11}$$

τότε το διάνυσμα

$$\vec{a} = \left\{ \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right\}$$

είναι μη μηδενικό και παράλληλο στην ε.

Θεώρημα 5.3.2. *Ένα επίπεδο π διέρχεται από την ευθεία τομής ε των επιπέδων*

$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \tag{5.12}$$

$$\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \tag{5.13}$$

αν και μόνον αν υπάρχουν $k, m \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $k^2 + m^2 \neq 0$ και

$$\pi : k(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + m(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0. \tag{5.14}$$

5.4 Σχετική θέση δύο ευθειών στο χώρο.

Έστω $\varepsilon_1 : \vec{M} = \vec{M}_1 + t\vec{a}_1$ και $\varepsilon_2 : \vec{M} = \vec{M}_2 + t\vec{a}_2$ δύο ευθείες του χώρου.

1. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 \Longleftrightarrow \vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2 \parallel \overrightarrow{M_1M_2}$

2. $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \Longleftrightarrow \vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2 \nparallel \overrightarrow{M_1M_2}$

3. ε_1 και ε_2 τέμνονται σε ένα σημείο $\Longleftrightarrow \vec{a}_1 \nparallel \vec{a}_2$ και τα διανύσματα $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ και $\overrightarrow{M_1M_2}$ είναι συνεπίπεδα.

4. ε_1 και ε_2 είναι ασύμβατες $\Longleftrightarrow$ τα διανύσματα $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ και $\overrightarrow{M_1M_2}$ είναι μη συνεπίπεδα.

5.5 Απόσταση σημείου από την ευθεία και επίπεδο.

Ορισμός 5.5.1. Συμβολίζουμε με $\rho(M, N)$ την απόσταση μεταξύ των σημειων M και N του χώρου.

Η απόσταση $\rho(\Phi, \Phi')$ μεταξύ των δυο συνόλων Φ και Φ' του χώρου ορίζεται ως εξής

$$\rho(\Phi, \Phi') = \inf\{\rho(M, M') | M \in \Phi, M' \in \Phi'\}$$

Θεώρημα 5.5.1. *Η απόσταση του σημείου N από την ευθεία ε υπολογίζεται από τον τύπο:*

$$\rho(N, \varepsilon) = \frac{|\overrightarrow{M_0N} \times \vec{a}|}{|\vec{a}|}, \text{ όπου } M_0 \in \varepsilon \text{ και } \vec{a} \parallel \varepsilon.$$

Θεώρημα 5.5.2. *Η απόσταση του σημείου N από το επίπεδο Π υπολογίζεται από τον τύπο:*

$$\rho(N, \Pi) = \frac{|\langle \overrightarrow{M_0N}, \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle|}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|}, \text{ όπου } M_0 \in \Pi,\ \vec{a}_1 \parallel \Pi, \vec{a}_2 \parallel \Pi \text{ και } \vec{a}_1 \nparallel \vec{a}_2.$$

5.6 Απόσταση μεταξύ των ευθειών.

Θεώρημα 5.6.1. *Η απόσταση μεταξύ των παράλληλων ευθειών ε_1 και ε_2 υπολογίζεται από τον τύπο:*

$$\rho(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{|\overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{a}|}{|\vec{a}|}, \text{ όπου } M_1 \in \varepsilon_1,\ M_2 \in \varepsilon_2 \text{ και } \vec{a} \parallel \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2.$$

Θεώρημα 5.6.2. *Η απόσταση μεταξύ των ασύμβατων ευθειών ε_1 και ε_2 υπολογίζεται από τον τύπο:*

$$\rho(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \frac{|\langle \overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle|}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|}\ , \text{ όπου } M_1 \in \varepsilon_1,\ M_2 \in \varepsilon_2,\ \vec{a}_1 \parallel \varepsilon_1,\ \vec{a}_2 \parallel \varepsilon_2.$$

5.7 Επίπεδο στο χώρο με ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων.

Θεώρημα 5.7.1. *Αν ένα επίπεδο Π έχει εξίσωση $Ax+By+Cz+D=0$ ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$, τότε το διάνυσμα $\vec{n} = \{A, B, C\}$ είναι κάθετο στο Π.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι το διάνυσμα $\vec{n}$ είναι κάθετο σε κάθε διάνυσμα παράλληλο στο επίπεδο Π.

Έστω $\vec{u} = \{a, b, c\} \parallel \Pi$, τότε $Aa + Bb + Cc = 0$. Όμως $Aa + Bb + Cc = \vec{n} \cdot \vec{u}$, άρα $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$, συνεπώς $\vec{n} \perp \vec{u}$.

Θεώρημα 5.7.2. *Αν ένα επίπεδο Π έχει εξίσωση $Ax+By+Cz+D=0$ και ένα σημείο N έχει συντεταγμένες (x_0, y_0, z_0) ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$, τότε η απόσταση του N από το Π υπολογίζεατι από τον τύπο*

$$\rho(N, \Pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

5.8 Ευθεία στο επίπεδο

Έστω π ένα επίπεδο και ε μια ευθεία του π.

Αν $M_0 \in \varepsilon$ και $\vec{a}$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα παράλληλο στην ε, τότε ένα σημείο M του π ανήκει στην ε αν και μόνον αν

$$\overrightarrow{M_0M} = t\vec{a},\ \text{όπου } t \in \mathbb{R} \tag{5.15}$$

Διανυσματικοπαραμετρική εξίσωση της ευθείας.

Έστω $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ ένα γενικό σύστημα συντεταγμένων του π.

Τότε $\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{M} - \overrightarrow{M_0}$. Οπότε η εξίσωση (1.17) γράφεται

$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{M_0} + t\vec{a},\ \text{όπου } t \in \mathbb{R} \tag{5.16}$$

Η εξίσωση (1.18) καλείται διανυσματικοπαραμετρική εξίσωση της ευθείας ε που διέρχεται από το σημείο M_0 και είναι παράλληλη στο μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{a}$.

Παραμετρικες εξισώσεις ευθείας

Έστω $M_0 = (x_0, y_0)$, $\vec{a} = \{a_1, a_2\}$ και $M = (x, y)$ ως προς το γενικό σύστημα συντεταγμένων $O\vec{e}_1\vec{e}_2$. Η εξίσωση (1.18) γράφεται

$$\{x, y\} = \{x_0, y_0\} + t\{a_1, a_2\}$$

Άρα, ένα σημείο $M = (x, y, z)$ του χώρου ανήκει στην ε αν και μόνο αν

$$\begin{aligned} x &= x_0 + ta_1 \\ y &= y_0 + ta_2 \end{aligned} \tag{5.17}$$

Οι εξισώσεις (1.19) καλούνται παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $M_0 = (x_0, y_0)$ και είναι παράλληλη στο μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{a} = \{a_1, a_2\}$.

Κανονικές εξισώσεις ευθείας.

Εκφράζοντας το t από τις (1.19) παίρνουμε:

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2} \tag{5.18}$$

Η εξίσωση (1.20) καλείται *κανονική εξίσωση* της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $x_0, y_0)$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\{a_1, a_2\} \neq \vec{0}$.

Αν $a_1 = 0$, τότε η ε έχει εξίσωση: $x = x_0$.

Αν $a_2 = 0$, τότε η ε έχει εξίσωση: $y = y_0$.

Γενική εξίσωση ευθείας.

Θεώρημα 5.8.1. *Κάθε ευθεία του επιπέδου ενος επιπέδου π ως προς ένα γενικό συστημα συντεταγμένων $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ του π έχει εξίσωση της μορφής*

$$Ax+By+C=0,\ \text{όπου } A^2+B^2\neq 0 \tag{5.19}$$

και κάθε εξίσωση της μορφής 1.21 ως προς το σύστημα συντεταγμένων $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ του π είναι εξίσωση μιας ευθείας του π.

Παρατήρηση 5.8.1. Αν μια ευθεία ε ενός επιπέδου π έχει ως προς ένα γενικό σύστημα συντεταγμένων $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ του π εξίσωση $Ax+By+C=0$ και $\vec{e}_3$ ένα διάνυσμα του χώρου μη παράλληλο στο π, τότε στο σύστημα συντεταγμένων $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ του χώρου η ε ορίζεται από τις εξισώσεις: $\begin{cases} Ax+By+C=0, \\ \qquad\qquad z=0 \end{cases}$

Θεώρημα 5.8.2. *Μια ευθεία ε με εξίσωση $Ax+By+C=0$ διέρχεται από το σημείο τομής ε των ευθειών*

$$\varepsilon_1 : A_1x+B_1y+C_1=0 \tag{5.20}$$
$$\varepsilon_2 : A_2x+B_2y+C_2=0 \tag{5.21}$$

αν και μόνον αν υπάρχουν $k, m \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $k^2+m^2\neq 0$ και

$$Ax+By+C=k(A_1x+B_1y+C_1)+m(A_2x+B_2y+C_2). \tag{5.22}$$

Θεώρημα 5.8.3. *Ενα διάνυσμα $\vec{u}=\{a,b\}$ είναι παράλληλο στην ευθεία $Ax+By+C=0$ αν και μόνον αν $Aa+Bb=0$.*

Πόρισμα 5.8.1. *Αν η ευθεία ε ενός επιπέδου π έχει εξίσωση $Ax+By+C=0$ ως προς ένα γενικό σύστημα συντεταγμένων $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ του π , τότε το διάνυσμα $\{-B, A\}$ είναι παράλληλο στην ε.*

Θεώρημα 5.8.4. *Έστω ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 ενός επιπέδου έχουν εξισώσεις*

$$\varepsilon_1 : A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$
$$\varepsilon_2 : A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

1. $\pi_1=\pi_2 \Longleftrightarrow A_2=\lambda A_1,\ B_2=\lambda B_1$ *και* $C_2=\lambda C_1$ *όπου* $\lambda\neq 0$

2. $\pi_1 \parallel \pi_2 \Longleftrightarrow A_2=\lambda A_1,\ B_2=\lambda B_1$ *και* $C_2\neq\lambda C_1$ *όπου* $\lambda\neq 0$

3. ε_1 *και* ε_2 *τέμνονται σε ένα σημείο* $\Longleftrightarrow$ *δεν υπάρχει* $\lambda\neq 0$ *τέτοιος ώστε* $A_2=\lambda A_1$ *και* $B_2=\lambda B_1$.

Θεώρημα 5.8.5. *Έστω π ένα επίπεδο και $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ ένα γενικό σύστημα συντεταγμένων του π. Θεωρούμε τα σύνολα*

$$\varepsilon^- = \{M=(x,y)\in\pi : Ax+By+c<0\}$$
$$\varepsilon^+ = \{M=(x,y)\in\pi : Ax+By+c<0\}$$

Τα σύνολα ε^- και ε^+ είναι τα δύο ημιεπίπεδα στα οποία η ευθεία $\varepsilon : Ax+By+C=0$ χωρίζει το επίπεδο π.

Ευθεία στο επίπεδο με ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων.

Έστω π ένα επίπεδο με ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων $O\vec{e}_1\vec{e}_2$.

Αν η ευθεία ε έχει εξίσωση $Ax + By + C = 0$ ως προς το $O\vec{e}_1\vec{e}_2$, τότε ο αριθμός $k = -\frac{A}{B}$ καλείται συντελιστής διεύθυνσης της ε.

Θεώρημα 5.8.6. *Αν η ευθεία ε έχει εξίσωση $Ax + By + C = 0$ ως προς το ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων $O\vec{e}_1\vec{e}_2$, τότε το διάνυσμα $\vec{n} = \{A, B\}$ είναι κάθετο στην ε.*

Θεώρημα 5.8.7. *Αν φ είανι η γωνία μεταξύ των ευθειών*

$$\varepsilon_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ και } \varepsilon_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

τότε

$$\cos\varphi = \pm\frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

Πόρισμα 5.8.2. *Οι ευθείες*

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 :& A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ \varepsilon_2 :& A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{aligned}$$

είναι κάθετες αν και μόνον αν $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$

Θεώρημα 5.8.8. *Η απόσταση του σημείο $M = (x_M, y_M)$ του π από την ευθεία $\varepsilon : Ax + By + C = 0$ υπολογίζεται από τον τύπο*

$$\rho(M, \varepsilon) = \frac{|Ax_M + By_M + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

5.9 Ασκήσεις.

5.9.1 Ευθεία και επίπεδο στον χώρο με γενικό σύστημα συντεταγμένων

31. Να βρεθούν οι παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας

$$\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ x + y - z + 4 = 0 \end{cases}$$

32. Η ευθεία ε να γραφεί ως τομή επιπέδων

$$\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 2 - 5t \\ z = -1 + 8t \end{cases}$$

33. Να βρεθεί η καρτεσιανή εξίσωση του επιπέδου

$$\begin{cases} x = -1 + 2\lambda + 3\mu \\ y = 5 + 4\mu \\ z = 7 + \lambda \end{cases}$$

34. Να βρεθούν οι παραμετρικές εξισώσεις του επιπέδου $x - 2y + z - 4 = 0$.

35. Να βρεθούν οι παραμετρικές εξισώσεις και η καρτεσιανή εξίσωση του επιπέδου Π αν

(α) $M_0 = (2, 3, -5) \in \Pi,\ \{-5, 6, 4\} \parallel \Pi$ και $\{2, -1, 0\} \parallel \Pi$

(β) $M_1 = (2, 1, 3) \in \Pi,\ M_2 = (2, 4, 0) \in \Pi$ και $\{-5, -4, 4\} \parallel \Pi$.

(γ) $M_1 = (3, 5, -1),\ M_2 = (7, 5, 3),\ M_3 = (5, 3, -3) \in \Pi$.

36. Να βρεθεί ένα διάνυσμα παράλληλο στην ευθεία $d : \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = 5$.

37. Να προσδιοριστεί η σχετική θέση των ευθειών d_1 και d_2, αν

(α) $d_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 7 + t \\ z = 3 + 4t \end{cases} \quad d_2 : \begin{cases} x = 6 + 3t \\ y = -1 - 2t \\ z = -2 + t \end{cases}$

(β) $d_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = -t \end{cases} \quad d_2 : \begin{cases} x = -2t \\ y = -5 + 3t \\ z = 4 \end{cases}$

(γ) $d_1 : \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -6t \\ z = -1 - 8t \end{cases} \quad d_2 : \begin{cases} x = 7 - 6t \\ y = 2 + 9t \\ z = 12t \end{cases}$

(δ) $d_1 : \begin{cases} x = 1 + 9t \\ y = 2 + 6t \\ z = 3 + 3t \end{cases} \quad d_2 : \begin{cases} x = 7 + 6t \\ y = 6 + 4t \\ z = 5 + 2t \end{cases}$

Λύση. (α) $M_1=(1,7,3)\in d_1$, $\vec{a}_1=\{2,1,4\}\parallel d_1$,
$M_2=(6,-1,-2)\in d_2$, $\vec{a}_1=\{3,-2,1\}\parallel d_2$.
$\vec{a}_1\neq\lambda\vec{a}_2\Longrightarrow\vec{a}_1\nparallel\vec{a}_2\Longrightarrow d_1$ και d_2 ή τέμνονται ή είναι ασύμβατες.
$\overrightarrow{M_1M_2}=\{5,-8,-5\}$, συνεπώς

$$\det(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\overrightarrow{M_1M_2}\}=\begin{vmatrix}2&1&4\\3&-2&1\\5&-8&-5\end{vmatrix}=0$$

Δηλαδή τα διανύσματα $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\overrightarrow{M_1M_2}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Συνεπώς οι ευθείες τέμνονται.
(β) $M_1=(1,2,0)\in d_1$, $\vec{a}_1=\{2,-2,-1\}\parallel d_1$,
$M_2=(0,-5,4)\in d_2$, $\vec{a}_1=\{-2,3,0\}\parallel d_2$.
$\vec{a}_1\nparallel\vec{a}_2\Longrightarrow d_1$, d_2 ή τέμνονται σε ένα σημείο ή είναι ασύμβατες.
Θα εξετάσουμε αν τα διανύσματα $\vec{a}_1,\ \vec{a}_2,\ \overrightarrow{M_1M_2}$ είναι συνεπίπεδα.

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\{-1,-7,4\}\Longrightarrow\det\begin{vmatrix}2&-2&-1\\-2&3&0\\-1&-7&4\end{vmatrix}=-9\neq0,$$

Άρα, οι ευθείες είναι ασύμβατες.
(γ) $M_1=(2,0-1)\in d_1$, $\vec{a}_1=\{4,-6,-8\}\parallel d_1$,
$M_2=(7,2,0)\in d_2$, $\vec{a}_1=\{-6,9,12\}\parallel d_2$.
$\vec{a}_1=-\frac{2}{3}\vec{a}_2\Longrightarrow\vec{a}_1\parallel\vec{a}_2\Longrightarrow d_1$, d_2 ή είναι παράλληλες ή συμπίπτουν.
Επειδή $\overrightarrow{M_1M_2}\nparallel\vec{a}_1\Longrightarrow d_1\neq d_2$. Άρα, οι ευθείες είναι παράλληλες.
(δ) $M_1=(1,2,3)\in d_1$, $\vec{a}_1=\{9,6,3\}\parallel d_1$,
$M_2=(7,6,5)\in d_2$, $\vec{a}_1=\{6,4,2\}\parallel d_2$.
$\vec{a}_1=\frac{3}{2}\vec{a}_2\Longrightarrow\vec{a}_1\parallel\vec{a}_2\Longrightarrow d_1$, d_2 ή είναι παράλληλες ή συμπίπτουν. Επειδή $\overrightarrow{M_1M_2}\parallel\vec{a}_1\Longrightarrow d_1=d_2$.

38. Να αποδειχθεί ότι οι ευθείες d_1 και d_2 τέμνονται, να βρεθεί το σημείο τομής τους και η εξίσωση του επιπέδου τους.

$$d_1:\begin{cases}x=1+2t\\y=7+t\\z=3+4t\end{cases}\qquad d_2:\begin{cases}x=6+3t\\y=-1-2t\\z=-2+t\end{cases}$$

39. Να βρεθούν οι εξισώσεις της ευθείας ε η οποία διέρχεται από την αρχή των αξώνων και τέμνει καθεμιά από τις ευθείες ε_1, ε_2 σε ένα σημείο, αν

$$\varepsilon_1:\begin{cases}x=t\\y=1-t\\z=3+t\end{cases}\qquad \varepsilon_2:\begin{cases}x=2+2t\\y=3-t\\z=4+3t\end{cases}$$

40. Να βρεθούν οι εξισώσεις της ευθείας ε, αν είναι γνωστό ότι $\varepsilon\parallel\varepsilon_1$ και τέμνει καθεμιά από τις ευθείες ε_2 και ε_3 σε ένα σημείο, αν

$$\varepsilon_1:\begin{cases}x-3y+z=0\\x+y-z+4=0\end{cases}\qquad \varepsilon_2:\begin{cases}x=3+t\\y=-1+2t\\z=4t\end{cases}\qquad \varepsilon_3:\begin{cases}x=-2+3t\\y=-1\\z=4-t\end{cases}$$

41. Να γραφεί η εξίσωση του επιπέδου Π_0 που είναι παράλληλο στο επίπεδο $\Pi:Ax+By+Cz+D=0$ και διέρχεται από το σημείο $M_0=(x_0,y_0,z_0)$.

Λύση. $\Pi_0\parallel\Pi\Longrightarrow\Pi_0:Ax+By+Cz+D_0=0$
$M_0=(x_0,y_0,z_0)\in\Pi_0\Longrightarrow Ax_0+By_0+Cz_0+D_0=0.\Longrightarrow D_0=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$.
Από τα παραπάνω: $\Pi_0:Ax+By+Cz-(Ax_0+By_0+Cz_0)=0$.

42. Έστω $\Pi : x+y+z-10=0$ και

$$\varepsilon : \begin{cases} x = t \\ y = 1-t \\ z = 3+t \end{cases}$$

Να μελετηθεί αν η ε περιέχεται στο Π, είναι παράλληλη στο Π, ή τέμνει το Π σε ένα σημείο.

43. Να γραφεί η εξίσωση του επιπέδου Π που είναι παράλληλο στον άξονα Ox και περιέχει την ευθεία

$$\varepsilon : \begin{cases} 6x - y + z = 0 \\ 5x + 3z - 10 = 0 \end{cases}$$

Λύση.
$\Pi : \kappa(6x-y+z)+\mu(5x+3z-10)=0 \iff (6\kappa+5\mu)x-\kappa y+(\kappa+3\mu)z-10\mu=0 \Longrightarrow$
$A=6\kappa+5\mu$, $B=-\kappa$, $C=\kappa+3\mu$.
$Ox \parallel \Pi \Longrightarrow \{1,0,0\} \parallel \Pi \Longrightarrow A\cdot 1+B\cdot 0+C\cdot 0=0$
$\Longrightarrow 6\kappa+5\mu=0 \Longrightarrow \frac{\mu}{\kappa}=-\frac{6}{5}$. Για $\mu=-6, \kappa=5$ παίρνουμε

$$\Pi : 5(6x-y+z)-6(5x+3z-10)=0 \iff \Pi : -5y-13z+60=0$$

44. Να βρεθεί η ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε το σημείο $F=(x_F,y_F,z_F)$ να βρίσκεται μεταξύ των επιπέδων

$$\Pi_1 : Ax+By+Cz+D_1=0$$
$$\Pi_2 : Ax+By+Cz+D_2=0$$

Λύση. Έστω $\Pi : Ax+By+Cz+D=0$ το επίπεδο που διέρχεται από το F και είναι παράλληλο στο Π_1 . Τότε $Ax_F+By_F+Cz_F+D=0$ και συνεπώς

$$Ax_F+By_F+Cz_F=-D.$$

Έστω $F_1=(x_1,y_2,z_1)$ και $F_1=(x_1,y_2,z_1)$ οι ορθογώνιες προβολές του F στα επίπεδα Π_1 και Π_2, αντίστοιχα. Τότε $Ax_1+By_1+Cz_1+D_1=0$ και $Ax_2+By_2+Cz_2+D_2=0$, συνεπώς

$$Ax_1+By_1+Cz_1=-D_1$$
$$Ax_2+By_2+Cz_2=-D_2$$

F βρίσκεται μεταξύ των Π_1 και $\Pi_2 \iff F_1$ και F_2 είναι σε διαφορετικούς ημιχώρους ως προς το $\Pi \iff (Ax_1+By_1+Cz_1+D)(Ax_2+By_2+Cz_2+D)<0 \iff (D-D_1)(D-D_2)<0 \iff (D_1-D)(D_2-D)<0 \iff (Ax_F+By_F+Cz_F+D_1)(Ax_F+By_F+Cz_F+D_2)<0$.

45. Να προσδιοριστεί αν το σημείο $F=(5,6,1)$ βρίσκεται στο χώρο μεταξύ των επιπέδων

$$\Pi_1 : 3x+4y+2z-10=0$$
$$\Pi_2 : 3x+4y+2z+5=0$$

46. Να βρεθεί η γωνία μεταξύ των επιπέδων

$$\Pi_1 : 8x+4y+z+1=0$$
$$\Pi_2 : 2x-2y+z+1=0$$

εντός της οποίας βρίσκεται το σημείο $F=(1,1,1)$.

47. Δίδονται το επίπεδο $\Pi : 2x-4y+z+14=0$ και τα σημεία $A=(-3,1,5)$, $B=(5,4,2)$.

Να μελετηθεί αν το Π τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα AB, ή την προέκτασή του AB πέρα από το A, ή την προέκτασή του AB πέρα από το B.

48. Δίδονται οι εξισώσεις τριών εδρών ενός παραλληλεπιπέδου
$\Pi_1 : 2x+3y+4z-12=0$, $\Pi_2 : x+3y-6=0$, $\Pi_3 : z+5=0$ και μία κορυφή $A=(6,-5,1)$. Να βρεθούν οι εξισώσεις των άλλων τριών εδρών του παραλληλεπιπέδου.

5.9.2 Ευθεία και επίπεδο στον χώρο με ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων

Στις ασκήσεις που ακολουθούν το σύστημα συντεταγμένων είναι ορθοκανονικό.

49. Έστω $A = (1, 2, 3)$ ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων. Να γραφούν οι εξισώσεις:
(α) Της ευθείας που διέρχεται από το A και είναι παράλληλη προς τον άξονα Ox.
(β) Της ευθείας που διέρχεται από το A και είναι κάθετη στο επίπεδο Oxy.
(γ) Της ευθείας που διέρχεται από το A και είναι κάθετη στον άξονα Ox.

50. Να βρεθεί η απόσταση μεταξύ των ασύμβατων ευθειών d_1 και d_2, αν

$$(\alpha)\;\; d_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = -t \end{cases} \quad d_2 : \begin{cases} x = -2t \\ y = -5 + 3t \\ z = 4 \end{cases}$$

$$(\beta)\;\; d_1 : \begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ x + y - z + 4 = 0 \end{cases} \quad d_2 : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 4 \end{cases}$$

Λύση.

(α) $M_1 = (1, 2, 0) \in d_1$, $\vec{a}_1 = \{2, -2, -1\} \parallel d_1$,
$M_2 = (0, -5, 4) \in d_2$, $\vec{a}_1 = \{-2, 3, 0\} \parallel d_2$.
Η απόσταση μεταξύ $\rho(d_1, d_2)$ των ασύμβατων ευθειών d_1 και d_2 υπολογίζεται από τον τύπο

$$\rho(d_1, d_2) = \frac{|\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \overrightarrow{M_1M_2} \rangle|}{|\ \vec{a}_1 \times \vec{a}_2|}$$

Έχουμε $\overrightarrow{M_1M_2} = \{-1, -7, 4\}$ Επειδή το σύστημα συντεταγμένων είναι ορθοκανονικό, βρίσκουμε:

$$\langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \overrightarrow{M_1M_2} \rangle = \det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \overrightarrow{M_1M_2}) = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ -1 & -7 & 4 \end{vmatrix} = -9$$

$$\vec{a}_1 \times \vec{a}_2 = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \{3, 2, 2\}$$

$$|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{17}$$

Οπότε $\rho(d_1, d_2) = \dfrac{9}{\sqrt{17}}$.

(β) $M_1 = (3, -1, 4) \in d_2$, $\vec{a}_1 = \{1, 2, 0\} \parallel d_2$.

$$\vec{a}_1 = \left\{ \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right\} = \{2, 2, 4\} \parallel d_1$$

Θέτοντας $z = 0$ στο σύστημα των εξισώσεων από τις οποίες ορίζεται η d_1, παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{cases} x - 3y = 0 \\ x + y + 4 = 0 \end{cases}$$

η μοναδική λύση του οποίου είναι η $(-3, -1)$. Άρα, $M_2 = (-3, -1, 0) \in d_2$.

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{6, 0, 4\} \Longrightarrow \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2, \overrightarrow{M_1M_2} \rangle = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 6 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -40.$$

Συνεχίζουμε όπως στην άσκηση (α).

51. Να βρεθεί η απόσταση μεταξύ των παράλληλων ευθειών d_1 και d_2, αν

$$(\alpha)\ \ d_1 : \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = -6t \\ z = -1 - 8t \end{cases} \qquad d_2 : \begin{cases} x = 7 - 6t \\ y = 2 + 9t \\ z = 12t \end{cases}$$

$$(\beta)\ \ d_1 : \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ y + 4z = 0 \end{cases} \qquad d_2 : \begin{cases} 2x + 3y + 6z - 6 = 0 \\ 3x + 4y + 7z = 0 \end{cases}$$

Λύση. (α) Αν $M_1 \in d_1$, $M_2 \in d_2$ και $\vec{a} \parallel d_1(\parallel d_2)$, τότε

$$\rho(d_1, d_2) = \rho(M_1, d_2) = \frac{|\overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{a}|}{|\vec{a}|}.$$

Βρίσκουμε $M_1 = (2, 0 - 1) \in d_1$, $M_2 = (7, 2, 0) \in d_2$ και $\vec{a} = \{4, -6, -8\} \parallel d_1$.

$\overrightarrow{M_1M_2} = \{5, 2, 1\} \Longrightarrow |\overrightarrow{M_1M_2} \times \vec{a}| = \sqrt{(\vec{a})^2 \cdot (\overrightarrow{M_1M_2})^2 - (\vec{a} \cdot \overrightarrow{M_1M_2})^2} = \sqrt{116 \cdot 30 - 0^2}$,

$|\vec{a}| = \sqrt{116}$, άρα $\rho(d_1, d_2) = \sqrt{30}$

(β) Έχουμε $M_1 = (1, 0, 0) \in d_1$, $M_2 = (0, -24, 18) \in d_2$ και

$$\vec{a} = \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right\} = \{3, -4, 1\} \parallel d_1.$$

Η απόσταση μεταξύ των ευθειών βρίσκεται όπως στην (α).

52. Να βρεθεί η ορθογώνια προβολή του σημείου $F(1, 3, 5)$ στην ευθεία

$$d : \begin{cases} 2x + y + z - 1 = 0 \\ 3x + y + 2z - 3 = 0 \end{cases}$$

Λύση. Έστω $F_1 = (x_1, y_1, z_1)$ είναι η ορθογώνια προβολή του F στην d. Βρίσκουμε ένα διάνυσμα $\vec{a} \| d$.

$$\vec{a} = \left\{ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \right\} = \{1, -1, -1\}$$

$\overrightarrow{FF_1} = \{x_1 - 1, y_1 - 3, z_1 - 5\}$ και $\overrightarrow{FF_1} \perp \vec{a}$, συνεπώς

$$\begin{aligned} \overrightarrow{FF_1} \cdot \vec{a} = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad (x_1 - 1) \cdot 1 + (y_1 - 3) \cdot (-1) + (z_1 - 5) \cdot (-1) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad x_1 + y_1 + z_1 + 7 = 0 \end{aligned}$$

Επειδή $F_1 \in d$, F_1 είναι λύση του συστήματος

$$\begin{cases} 2x_1 + y_1 + z_1 - 1 = 0 \\ 3x_1 + y_1 + 2z_1 - 3 = 0 \\ x_1 + y_1 + z_1 + 7 = 0 \end{cases} \Longrightarrow F_1 = (-2, 1, 4).$$

53. Δείξτε ότι η ορθογώνια προβολη του σημείο $F = (x_F, y_F, z_F)$ πάνω στην ευθεία

$$\varepsilon : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

είναι λύση ως προς (x, y, z) του συστήματος

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \\ a(x - x_F) + b(y - y_F) + c(z - z_F) = 0 \end{cases}$$

54. Να βρεθεί το σημείο συμμετρικό του $M = (4, 3, 10)$ ως προς την ευθεία

$$d : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 4t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

55. Δείξτε ότι το σημείο συμμετρικό του $F = (x_F, y_F, z_F)$ ως προς την ευθεία

$$\varepsilon : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

είναι λύση ως προς (x, y, z) του συστήματος

$$\begin{cases} \frac{x+x_F}{2} = x_0 + at \\ \frac{y+y_F}{2} = y_0 + bt \\ \frac{z+z_F}{2} = z_0 + ct \\ a(x - x_F) + b(y - y_F) + c(z - z_F) = 0 \end{cases}$$

56. Να βρεθεί η ορθογώνια προβολή της ευθείας ε στο επίπεδο $\Pi_0 : 2x + 3y + 4z - 5 = 0$, αν

$$\varepsilon : \begin{cases} x = -2 + 7t \\ y = 3 + 5t \\ z = 7 + 3t \end{cases}$$

57. Να βρεθεί η ορθογώνια προβολή της ευθείας ε στο Oxy-επίπεδο, αν

$$\varepsilon : \begin{cases} 5x + 8y - 3z + 9 = 0 \\ 2x - 4y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

58. Να βρεθεί η ορθογώνια προβολή της ευθείας

$$\varepsilon : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

στο επίπεδο $\Pi_0 : Ax + By + Cz + D = 0$, αν $\varepsilon \not\perp \Pi_0$.

Λύση. Αν $\varepsilon \not\perp \Pi_0$ η ορθογώνια προβολή της ε είναι ευθεία, την συμβολίζουμε με ε'.

Έστω Π το επίπεδο που περιέχει την ε και είναι κάθετο στο Π_0, τότε

$$\Pi : \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a & b & c \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0$$

Επειδή $\varepsilon' = \Pi_0 \cap \Pi$, βρίσκουμε:

$$\varepsilon' : \begin{cases} \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a & b & c \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0 \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

59. Να βρεθεί η ορθογώνια προβολή του σημείου $A = (1, 0, 1)$ στο επίπεδο $\Pi : 2x + 3y + 4z + 5 = 0$.

60. Να βρεθεί η ορθογώνια προβολή του σημείου $A = (3, 5, 8)$ στο επίπεδο

$$\Pi : 2x + 3y + 4z + 5 = 0.$$

61. Δείξτε ότι η ορθογώνια προβολη του σημείου $F = (x_F, y_F, z_F)$ πάνω στο επίπεδο $Ax + By + Cz + D = 0$ είναι λύση ως προς (x, y, z) του συστήματος

$$\begin{cases} x = x_F + At \\ y = y_F + Bt \\ z = z_F + Ct \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

62. Να βρεθεί το συμμετρικό σημείο του $A = (1, 3, 4)$ ως προς το επίπεδο $\Pi : 3x + y - 2z = 0$.

63. Να βρεθεί η απόσταση μεταξύ των επιπέδων

$$\Pi_1 : Ax + By + Cz + D_1 = 0$$
$$\Pi_2 : Ax + By + Cz + D_2 = 0$$

Λύση. Έστω $M_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Pi_1 \Longrightarrow Ax_0 + By_0 + Cz_0 = -D_1 \Longrightarrow$

$$\rho(\Pi_1, \Pi_2) = \rho(M_0, \Pi_2) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

64. Να γραφεί η εξίσωση του επιπέδου Π^* που είναι παράλληλο προς το επίπεδο

$$\Pi : 2x + y - 4z + 5 = 0$$

και απέχει απόσταση $\sqrt{21}$ από το σημείο $F = (1, 2, 0)$.

65. Να γραφούν οι εξισώσεις των επιπέδων που διχοτομούν τις δίεδρες γωνίες που σχηματίζουν τα επίπεδα:

$$\Pi_1 : \ 7x + y - 6 = 0$$

$$\Pi_2 : \ 3x + 5y - 4z + 1 = 0$$

66. Να γραφεί η εξίσωση του επιπέδου που περιέχει τον άξονα Oy και ισαπέχει από τα σημεία $M_1 = (2, 7, 3)$ και $M_2 = (-1, 1, 0)$.

67. Να αποδειχθεί ότι αν ένα επίπεδο Π τέμνει τους άξονες Ox, Oy και Oz ενός ορθοκανονικού συστήματος στα σημεία $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$ και $(0, 0, c)$, αντίστοιχα, τότε

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{\rho^2}$$

όπου ρ είναι η απόσταση του Π από την αρχή των αξόνων.

68. Να βρεθεί η κοινή κάθετος των ασύμβατων ευθειών d_1 και d_2, αν

$$d_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = -t \end{cases} \quad d_2 : \begin{cases} x = -2t \\ y = -5 + 3t \\ z = 4 \end{cases}$$

Κεφάλαιο 6

Καμπύλες δευτέρου βαθμου

6.1 Αλγεβρικές καμπύλες του επιπέδου.

Ορισμός 6.1.1. Ενα σύνολο Γ σημείων ενός επιπέδου καλείται αλγεβρική καμπύλη, αν σε κάποιο γενικό σύστημα συντεταγμένων του επιπέδου το Γ συμπίπτει με το σύνολο όλων των λύσεων (x, y) μιας εξίσωσης $F(x, y) = 0$, όπου $F(x, y)$ είναι πολυώνυμο δύο μετεβλητών.

Ο μικρότερος φυσικός n για τον οποίο υπάρχει πολυώνυμο $F(x, y)$ βαθμού n, τέτοιο ώστε $F(x, y) = 0$ να είναι εξίσωση του Γ, καλείται βαθμός της αλγεβρικής καμπύλης Γ.

Θεώρημα 6.1.2. *Εστω μια αλγεβρική καμπύλη Γ έχει εξίσωση $F(x, y) = 0$ ως προς σύστημα $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ και*

$$\begin{aligned} x &= c_{11}x' + c_{12}y' + x_0 \\ y &= c_{21}x' + c_{22}y' + y_0 \end{aligned}$$

τύποι μετασχηματισμού των συντεταγμένων από το $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ προς το $O'\vec{e}_1'\vec{e}_2'$. Ο βαθμός του πολυωνύμου

$$G(x', y') = F(c_{11}x' + c_{12}y' + x_0, c_{21}x' + c_{22}y' + y_0)$$

συμπίπτει με τον βαθμό του $F(x, y)$.

Πόρισμα 6.1.3. *Ο βαθμός μιάς αλγεβρικής καμπύλης δεν εξαρτάται από την επιλογή του συστήματος συντεταγμένων.*

6.2 Έλλειψη

Θεωρούμε την έλλειψη $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1,\ a \geq b > 0$.
Τα σημεία $F_1 = (-c, o)$ και $F_2 = (c, o)$ καλούνται εστίες της έλλειψης.
Για τον κύκλο $F_1 = F_2 = (0, 0)$.
Ο αριθμός $e = \dfrac{c}{a}$ καλείται εκκεντρότητα της έλλειψης.
Η εκκεντρότητα του κύκλου είναι μηδέν. Για κάθε έλλειψη $0 \leq e < 1$.
Οι ευθείες $d_1 : x = -\dfrac{a}{e}$ και $d_2 : x = \dfrac{a}{e}$ καλούνται διευθετούσες της έλλειψης.
Επειδή $0 \leq e < 1$ οι διευθετούσες της έλλειψης έχουν απόσταση $> a$ από το κέντρο της έλλειψης.
Ο κύκλος δεν έχει διευθετούσες.

Θεώρημα 6.2.1. *Η έλλειψη $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ είναι το σύνολο όλων των σημείων M του επιπέδου για τα οποία*

$$\rho(M, F_1) + \rho(M, F_2) = 2a,$$

όπου $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

Θεώρημα 6.2.2. *Η έλλειψη $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ είναι το σύνολο όλων των σημείων M του επιπέδου για τα οποία*

$$\frac{\rho(M,F_1)}{\rho(M,d_1)}=e\ \left(\ \text{αντίστοιχα, } \frac{\rho(M,F_2)}{\rho(M,d_2)}=e\right)$$

όπου $F_1=(-c,0)$, $F_2=(c,0)$, $c=\sqrt{a^2-b^2}$, $e=\dfrac{c}{a}$,
$d_1: x=-\dfrac{a}{e}$ *και* $d_2: x=\dfrac{a}{e}$.

6.3 Υπερβολή

Θεωρούμε την υπερβολή $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$.
Έστω $c=\sqrt{a^2+b^2}$.
Τα σημεία $F_1=(-c,o)$ και $F_2=(c,o)$ καλούνται εστίες της υπερβολής.
Ο αριθμός $e=\dfrac{c}{a}$ καλείται εκκεντρότητα της υπερβολής και είναι πάντα >1.
Οι ευθείες $d_1: x=-\dfrac{a}{e}$ και $d_2: x=\dfrac{a}{e}$ καλούνται διευθετούσες της υπερβολής και έχουν απόσταση από το κέντρο της υπερβολής $<a$.
Οι ευθείες $\varepsilon_1: y=-\dfrac{b}{a}x$ και $\varepsilon_2: x=\dfrac{b}{a}x$ καλούνται ασύμπτωτες της υπερβολής.

Θεώρημα 6.3.1. *Η υπερβολή $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ είναι το σύνολο όλων των σημείων M του επιπέδου για τα οποία*

$$|\rho(M,F_1)-\rho(M,F_2)|=2a,$$

όπου $F_1=(-c,0)$, $F_2=(c,0)$, $c=\sqrt{a^2+b^2}$.

Θεώρημα 6.3.2. *Η υπερβολή $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ είναι το σύνολο όλων των σημείων M του επιπέδου για τα οποία*

$$\frac{\rho(M,F_1)}{\rho(M,d_1)}=e\ \left(\ \text{αντίστοιχα, } \frac{\rho(M,F_2)}{\rho(M,d_2)}=e\right)$$

όπου $F_1=(-c,0)$, $F_2=(c,0)$, $c=\sqrt{a^2+b^2}$, $e=\dfrac{c}{a}$,
$d_1: x=-\dfrac{a}{e}$ *και* $d_2: x=\dfrac{a}{e}$.

6.4 Παραβολή

Θεωρούμε την παραβολή $y^2=2px$.
Το σημείο $F=(\dfrac{p}{2},0)$ καλείται εστία της παραβολής.
Η ευθεία $d: x=-\dfrac{p}{2}$ καλείται διευθετούσα της παραβολής.
Ο αριθμος p καλείται εστιακή παράμετρος της παραβολής και έχει την εξής γεωμετρική ερμηνεία: ισούται με την απόσταση μεταξύ της εστίας και της διευθετούσας της παραβολής.

Θεώρημα 6.4.1. *Η παραβολή $y^2=2px$ είναι το σύνολο των σημείων M του επιπέδου για τα οποία*

$$\rho(M,F)=\rho(M,d),$$

όπου $F=\left(\dfrac{p}{2},0\right)$ και $d: x=-\dfrac{p}{2}$

6.5 Μετασχηματισμός πολυωνύμου δευτέρου βαθμού

Κάθε πολυώνυμο δευτέρου βαθμού έχει την μορφή

$$F(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0$$

Το πολυώνυμο $\phi(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ καλείται τετραγωνικό μέρος του $F(x,y)$ και το $l(x,y) = a_1x + a_2y$ καλείται γραμμικό μέρος του $F(x,y)$.

Εχουμε

$$\phi(x,y) = (x,y)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x,y)A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

όπου $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ καλείται πίνακας της $\phi(x,y)$.

Επίσης

$$F(x,y) = (x,y,1)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = (x,y,1)B\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

όπου $B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{pmatrix}$ καλειται πινακας του $F(x,y)$.

Πρόταση 6.5.1. *Η μεταφορά της αρχής του συστήματος συντεταγμένων δεν μεταβάλλει τον πίνακα του τετραγωνικού μέρους του πολυωνύμου.*

Απόδειξη. Πράγματι, αν

$$\begin{aligned} x &= x' + x_0 \\ y &= y' + y_0 \end{aligned}$$

τότε $F'(x',y') = F(x'+x_0, y'+y_0) =$
$= a_{11}(x'+x_0)^2 + 2a_{12}(x'+x_0)(y'+y_0) + a_{22}(y'+y_0)^2 + 2a_1(x'+x_0) + 2a_2(y'+y_0) + a_0 =$
$= a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + 2(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_1)x' + 2(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_2)y' + F(x_0,y_0).$

Αρα, $A = A'$.

Πρόταση 6.5.2. *Αν $F(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0$, το ζεύγος (x_0,y_0) είναι λύση του συστήματος*

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_1 &= 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_2 &= 0 \end{aligned} \tag{6.1}$$

και $F'(x',y') = F(x'+x_0, y'+y_0) = a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_1x' + 2a'_2y' + a'_0$, τότε $a'_1 = a'_2 = 0$ (η μεταφορά της αρχής O στο σημείο $O' = (x_0,y_0)$ που είναι λύση του συστήματος (1.1) εξαλείφει το γραμμικό μέρος $2a_1x + 2a_2y$).

6.6 Ορθογώνιες αναλλοίωτες πολυωνύμου 2ου βαθμου

Ορισμός 6.6.1. Εστω $F(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0$ και

$$\begin{aligned} F'(x',y') &\equiv F(c_{11}x' + c_{12}y' + x_0, c_{21}x' + c_{22}y' + y_0) = \\ &= a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_1x' + 2a'_2y' + a'_0. \end{aligned}$$

Ένα πολυώνυμο $G(a_{11},a_{12},a_{22},a_1,a_2,a_0)$ με μεταβλητές $a_{11},a_{12},a_{22},a_1,a_2,a_0$ καλείται ορθογώνια αναλλοίωτη του $F(x,y)$, αν

$$G(a_{11},a_{12},a_{22},a_1,a_2,a_0) = G(a'_{11},a'_{12},a'_{22},a'_1,a'_2,a'_0)$$

για οποιοδήποτε ορθογώνιο πίνακα $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$.

Θεώρημα 6.6.2. *Τα πολυώνυμα*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}, \ \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \ S = a_{11} + a_{22}$$

είναι ορθογώνιες αναλλοίωτες του $F(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0$.

Θεώρημα 6.6.3. *Αν για το πολυώνυμο* $F(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0$*, ισχύει* $\Delta = \delta = 0$*, τότε και το πολυώνυμο*

$$K = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix}$$

είναι ορθογώνια αναλλοίωτη του $F(x,y)$.

6.7 Προσδιορισμός της κανονικής εξίσωσης μιας καμπύλης $2^{ου}$ βαθμού.

Πρόταση 6.7.1. *Αν* $F(x,y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0$*, τότε* a_{11} *και* a_{22} *είναι ρίζες της εξίσωσης* $\lambda^2 - S\lambda + \delta = 0$.

Απόδειξη.

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22}$$

και $S = a_{11} + a_{22}$. Αρα, a_{11} και a_{22} είναι ρίζες της εξίσωσης $\lambda^2 - S\lambda + \delta = 0$.

Ορισμός 6.7.2. Η εξίσωση $\lambda^2 - S\lambda + \delta = 0$ καλείται χαρακτηριστική εξίσωση του $F(x,y)$.

Θεώρημα 6.7.3. *Εστω* λ_1, λ_2 *είναι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης του* $F(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0$*, όπου* $a_{12} \neq 0$.

Αν $F(x'\cos\phi - y'\sin\phi, x'\sin\phi + y'\cos\phi) = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a_1'x' + 2a_2'y' + a_0'$*, τότε*

$$\tan\phi = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}}.$$

Θεώρημα 6.7.4. *Εστω* λ_1, λ_2 *είναι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης του* $F(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0$*, όπου* $a_{12} \neq 0$.

Αν $F(x'\cos\phi - y'\sin\phi, x'\sin\phi + y'\cos\phi) = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a_1'x' + 2a_2'y' + a_0'$*, τότε*

$$\cot 2\phi = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}$$

Θεώρημα 6.7.5. *Εστω* λ_1, λ_2 *είναι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης του πολυωνύμου*

$$F(x,y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0, \tag{6.2}$$

όπου $a_{12} \neq 0$.

Αν $\tan\phi = \dfrac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}}$*, τότε με αντικατάσταση των* x *και* y *στο πολυώνυμο (6.2) από τους τύπους*

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\phi - y'\sin\phi \\ y &= x'\sin\phi + y'\cos\phi \end{aligned}$$

προκύπτει πολυώνυμο της μορφής

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a_1'x' + 2a_2'y' + a_0'.$$

Παράδειγμα 6.7.1. Θα προσδιορίσουμε το είδος της καμπύλης

$$x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 3y - 7 = 0$$

$S = a_{11} + a_{22} = 1 + 4 = 5$, $\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$

$\lambda^2 - S\lambda + \delta = 0 \Longleftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda = 0 \Longleftrightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 5$

$\tan\varphi = \dfrac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} = \dfrac{1}{2}$

$\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\varphi = \tan\varphi \cdot \cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$\vec{e}_1{}' = \{\cos\varphi, \sin\varphi\} = \{\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\}$

$\vec{e}_2{}' = \{-\sin\varphi, \cos\varphi\} = \{-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\}$

Οι τύποι μετασχηματισμού των συντεταγμένων είναι

$$\begin{aligned} x &= \frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{5}}y' \\ y &= \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y' \end{aligned} \tag{6.3}$$

Αντικαθεστώντας τα x και y στην αρχική εξίσωση παίρνουμε την εξίσωση της καμπύλης στο $O\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$:

$5y'^2 - \dfrac{10}{\sqrt{5}}\ y' + \dfrac{5}{\sqrt{5}}\ x' - 7 = 0 \Longleftrightarrow y'^2 - \dfrac{2}{\sqrt{5}}\ y' + \dfrac{1}{\sqrt{5}}\ x' - \dfrac{7}{5} = 0 \Longleftrightarrow$

$(y' - \dfrac{1}{\sqrt{5}})^2 + \dfrac{1}{\sqrt{5}}\ x' - \dfrac{8}{5} = 0 \Longleftrightarrow (y' - \dfrac{1}{\sqrt{5}})^2 + \dfrac{1}{\sqrt{5}}(x' - \dfrac{8}{\sqrt{5}}) = 0$

Αντικαθεστώντας τα x και y άπο τους τύπους μετασχηματισμού των συντεταγμένων

$$\begin{aligned} x' &= x'' + \frac{8}{\sqrt{5}} \\ y' &= y'' + \frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned} \tag{6.4}$$

οι οποίοι αντιστοιχούν στην μεταφορά της αρχής O σε άλλο σημείο O', παίρνουμε την εξίσωση της παραβολής $y''^2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}x''$ στο $O'\vec{e}_1'\vec{e}_2'$.

Πρόταση 6.7.4. *Το σύστημα*

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x + a_{12}y + a_1 = 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_2 = 0 \end{array}\right\} \tag{6.5}$$

έχει άπειρες λύσεις αν και μόνο αν $\delta = \Delta = 0$.

Θεώρημα 6.7.5. *Εστω μια καμπύλη* Γ *έχει εξίσωση*

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1 + 2a_2 + a_0 = 0$$

ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμέμων $O\vec{e}_1\vec{e}_2$.

Υπάρχει ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμέμων $O'\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$ *ως προς το οποίο η* Γ *έχει μία από τις μορφές:*

I $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \dfrac{\Delta}{\delta} = 0$, *αν* $\delta \neq 0$

II $y'^2 = -\dfrac{K}{S^2}$, *αν* $\delta = 0$ *και* $\Delta = 0$

III $y'^2 = 2\sqrt{\dfrac{-\Delta}{S^3}}x'$, *αν* $\delta = 0$ *και* $\Delta \neq 0$

Θεώρημα 6.7.6. *Για κάθε καμπύλη 2ου βαθμού* Γ *υπάρχει ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμέμων* $O'\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$ *ως προς το οποίο η* Γ *έχει μία από τις μορφές:*

1. $\dfrac{x'^2}{a^2} + \dfrac{y'^2}{b^2} = 1$, *έλλειψη, αν* $\delta > 0$ *και* $S \cdot \Delta < 0$.

2. $\dfrac{x'^2}{a^2} + \dfrac{y'^2}{b^2} = -1$, *φανταστική έλλειψη, αν* $\delta > 0$ *και* $S \cdot \Delta > 0$

3. $\dfrac{x'^2}{a^2} + \dfrac{y'^2}{b^2} = 0$, *ζεύγος τεμνομένων φανταστικών ευθειών, αν* $\delta > 0$ *και* $\Delta = 0$.

4. $\dfrac{x'^2}{a^2} - \dfrac{y'^2}{b^2} = 1$, *υπερβολή, αν* $\delta < 0$ *και* $\Delta \neq 0$.

5. $\dfrac{x'^2}{a^2} - \dfrac{y'^2}{b^2} = 0$, *ζεύγος τεμνομένων πραγματικών ευθειών, αν* $\delta < 0$, $\Delta = 0$.

6. $y'^2 = a^2$ *ζεύγος παραλλήλων πραγματικών ευθειών, αν* $\delta = \Delta = 0$ *και* $K < 0$

7. $y'^2 = -a^2$, *ζεύγος παραλλήλων φανταστικών ευθειών, αν* $\delta = \Delta = 0$ *και* $K > 0$.

8. $y'^2 = 0$, *ζεύγος συμπιπτουσών ευθειών, αν* $\delta = \Delta = 0$ *και* $K = 0$.

9. $y'^2 = 2px'$, *παραβολή, αν* $\delta = 0$ *και* $\Delta \neq 0$.

6.8 Ασκήσεις.

Στις ασκήσεις της παραγράφου αυτής οι αρχικές εξισώσεις καμπυλών 2ου βαθμού δίνονται ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων $O\vec{e}_1\vec{e}_2$.

69. Να προσδιοριστεί το είδος της καμπύλης:

$$6x^2 + 6y^2 + 6x + 30y - 11 = 0$$

Λύση. Η εξίσωση γράφεται

$$6\left(x^2 + x\right) + 6\left(y^2 + 5y\right) - 11 = 0$$
$$6\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 6\left(y + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{6}{4} - \frac{150}{4} - 11 = 0 \tag{6.6}$$

Αντικαθιστώντας τα x, y στην τελευταία εξίσωση από τους τύπους

$$x = x' - \frac{1}{2}$$
$$y = y' - \frac{5}{2}$$

οι οποίοι αντιστοιχούν στην μεταφορά της αρχής O του συστήματος συντεταγμένων $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ στο σημείο $O' = (-\frac{1}{2}, -\frac{5}{2})$, παίρνουμε την εξίσωση της καμπύλης στο σύστημα $O'\vec{e}_1\vec{e}_2$

$$6x'^2 + 6y'^2 - 50 = 0 \Longleftrightarrow \frac{x'^2}{\frac{50}{6}} + \frac{y'^2}{\frac{50}{6}} = 1$$

που είναι εξίσωση της έλλειψης.

70. Να προσδιοριστεί το είδος της καμπύλης: $3x^2 - 18x + 10y = 0$.

Λύση. Η εξίσωση γράφεται

$$3\left(x^2 - 6x\right) + 10y = 0$$
$$3\left(x - 3\right)^2 + 10y - 27 = 0$$
$$3\left(x - 3\right)^2 + 10\left(y - \frac{27}{10}\right) = 0$$

Αντικαθιστώντας τα x, y στην τελευταία εξίσωση από τους τύπους

$$x = x' + 3$$
$$y = y' + \frac{27}{10}$$

οι οποίοι αντιστοιχούν στην μεταφορά της αρχής O του συστήματος συντεταγμένων $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ στο σημείο $O' = \left(3, \frac{27}{10}\right)$, παίρνουμε την εξίσωση της καμπύλης στο σύστημα $O'\vec{e}_1\vec{e}_2$

$$3x'^2 + 10y' = 0 \Longleftrightarrow x'^2 = -\frac{10}{3}\ y'$$

που είναι εξίσωση της παραβολής.

71. Να βρεθεί η κανονική εξίσωση και το κανονικό σύστημα της καμπύλης:

$$5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0.$$

Λύση.

$\cot 2\phi = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}} = \frac{5}{12} \Longrightarrow \cos 2\phi = \frac{\cot 2\phi}{\sqrt{1 + \cot^2 2\phi}} = \frac{5}{13} \Longrightarrow$

$\cos\phi = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\phi}{2}} = \frac{3}{13}$ και $\sin\phi = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\phi}{2}} = \frac{2}{13}$

Με την περιστροφή του $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ γύρω από το O κατά τη γωνία ϕ προκύπτει το ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων $O\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$, όπου

$\vec{e}_1' = \{\cos\phi, \sin\phi\} = \{\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\}$ και

$\vec{e}_2' = \{-\sin\phi, \cos\phi\} = \{-\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\}$

Οι τύποι αλλαγής των συντεταγμένων από το $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ προς το $O\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$ είναι

$$\left.\begin{array}{l} x = x\,'\cos\phi - y\,'\sin\phi \\ y = x\,'\sin\phi + y\,'\cos\phi \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{l} x = \frac{3}{\sqrt{13}}x\,' - \frac{2}{\sqrt{13}}y\,' \\ y = \frac{2}{\sqrt{13}}x\,' + \frac{3}{\sqrt{13}}y\,' \end{array}\right\} \tag{6.7}$$

Αντικαθιστώντας το x και το y από τους (6.7) στην αρχική εξίσωση της καμπύλης παίρνουμε την εξίσωση της καμπήλης στο $O\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$:

$9x'^2 - 4y'^2 - \dfrac{90}{\sqrt{13}}x' + \dfrac{8}{\sqrt{13}}y' - 19 = 0 \Longleftrightarrow$

$9\left(x'^2 - \dfrac{10}{\sqrt{13}}x'\right) - 4\left(y'^2 - \dfrac{2}{\sqrt{13}}y'\right) - 19 = 0 \Longleftrightarrow$

$9\left(x'^2 - \dfrac{10}{\sqrt{13}}x' + \dfrac{25}{13}\right) - 4\left(y'^2 - \dfrac{2}{\sqrt{13}}y' + \dfrac{1}{13}\right) - 19 - 9\cdot\dfrac{25}{13} + 4\cdot\dfrac{1}{13} = 0 \Longleftrightarrow$

$$9\left(x' - \frac{5}{\sqrt{13}}\right)^2 - 4\left(y' - \frac{1}{\sqrt{13}}\right)^2 - 36 = 0 \tag{6.8}$$

Αντικαθιστώντας τα x', y' στην (6.8) από τους τύπους

$$x' = x'' + \frac{5}{\sqrt{13}}$$
$$y' = y'' + \frac{1}{\sqrt{13}}$$

οι οποίοι αντιστοιχούν στην μεταφορά της αρχής O του συστήματος συντεταγμένων $O\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$ στο σημείο $O' = (x_0', y_0') = \left(\frac{5}{\sqrt{13}}, \frac{1}{\sqrt{13}}\right)$, παίρνουμε την εξίσωση της καμπύλης στο σύστημα $O'\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$:

$$\begin{aligned} 9x''^2 - 4y''^2 - 36 = 0 \Longleftrightarrow \\ \frac{x''^2}{4} - \frac{y''^2}{9} = 1 \end{aligned} \tag{6.9}$$

Η (6.9) είναι η κανονική εξίσωση της καμπύλης (η οποία είναι υπερβολή).
Το κανονικό σύστημα της καμπύλης είναι το $O'\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$.
Από τους τύπους (6.7) βρίσκουμε ότι $O' = (1, 1)$ ως προς το αρχικό σύστημα $O\vec{e}_1\vec{e}_2$.

72. βρεθεί η κανονική εξίσωση και το κανονικό σύστημα της καμπύλης:

$$5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$$

Λύση. Θα βρούμε τις αναλλοίωτες της καμπήλης

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -16 \\ 2 & 8 & -28 \\ -16 & -28 & 80 \end{vmatrix} = -1296,$$

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 36,$$

$$S = a_{11} + a_{22} = 5 + 8 = 13$$

Παρατηρούμε ότι $\delta > 0$ και $S \cdot \Delta < 0 \Longrightarrow$ η καμπύλη είναι έλλειψη.

Κανονική εξίσωση καμπύλης.

Επειδή $\delta \neq 0$ η κανονιλή εξίσωση της καμπύλης είναι ισοδύναμη με την εξίσωση:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0 \tag{6.10}$$

Θα βρούμε της χαρακτηριστικές ρίσες λ_1 και λ_2 από την χαρακτηριστική εξίσωση

$$\lambda^2 - S\lambda + \delta = 0 \Longleftrightarrow \lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 4 \text{ ή } \lambda - 9.$$

Για την έλλειψη επιλέγουμε $|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \Longleftrightarrow \lambda_1 = 4$ και $\lambda_2 = 9$.
Η εξίσωση (6.10) γράφεται

$$4x'^2 + 9\lambda_2 y'^2 - \frac{1296}{36} = 0 \Longleftrightarrow 4x'^2 + 9\lambda_2 y'^2 - 36 = 0 \Longleftrightarrow \frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{9} = 1$$

Κανονικό σύστημα $O'\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$ της καμπύλης.

$\vec{e}_1{}' = \{\cos\phi, \sin\phi\}$ και $\vec{e}_2{}' = \{-\sin\phi, \cos\phi\}$, όπου $\tan\phi = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{4-5}{2} = -\frac{1}{2}$.
Βρίσκουμε $\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\phi}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ και $\sin\phi = \tan\phi \cdot \cos\phi = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Άρα, $\vec{e}_1{}' = \{\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\}$ και $\vec{e}_2{}' = \{\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\}$.

Οι συντεταγμένες της αρχής $O' = (x_0, y_o)$ του κανονικού συστήματος είναι λύσεις ως προς x και y του συστήματος

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_1 = 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_2 = 0 \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{aligned} 5x + 2y - 16 = 0 \\ 2x + 8y - 28 = 0 \end{aligned}\right\} \Longleftrightarrow x = 2,\ y = 3$$

Άρα, $O' = (2, 3)$.

73. Να βρεθεί η κανονική εξίσωση και το κανονικό σύστημα της καμπύλης:

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 3y - 4 = 0.$$

Θα βρούμε τις αναλλοίωτες της καμπήλης

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -2 & 1 & \frac{3}{2} \\ -3 & \frac{3}{2} & -4 \end{vmatrix} = 0$$

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$S = a_{11} + a_{22} = 4 + 1 = 5$$

Θα βρούμε τις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης:

$$\lambda^2 - S\lambda + \delta = 0 \Longleftrightarrow \lambda^2 - 5\lambda = 0 \Longleftrightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 5$$

Επειδή $\delta = 0$ και $\Delta = 0$, για να προσδιορίσουμε το είδος της καμπύλης πρέπει να βρούμε την τιμή της αναλλοίωτης K.

$$K = \begin{vmatrix} a_{11} & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_2 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -4 \end{vmatrix} = -\frac{125}{4}$$

$K > 0 \Longrightarrow$ η καμπύλη είναι ζεύγος παράλληλων πραγματικών ευθειών.

Κανονική εξίσωση καμπύλης.

Επειδή $\delta = \Delta = 0$ η κανονική εξίσωση της καμπύλης είναι

$$y'^2 = -\frac{K}{S^2} \Longleftrightarrow y'^2 = \frac{5}{4}$$

Κανονικό σύστημα $O'\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$ της καμπύλης.

$\vec{e}_1{}' = \{\cos\phi, \sin\phi\}$, $\vec{e}_2{}' = \{-\sin\phi, \cos\phi\}$, όπου $\tan\phi = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{-4}{-2} = 2$,

Βρίσκουμε $\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\phi}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ και $\sin\phi = \tan\phi \cdot \cos\phi = \frac{2}{\sqrt{5}}$

Άρα, $\vec{e}_1{}' = \{\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\}$ και $\vec{e}_2{}' = \{-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\}$.

Οι συντεταγμένες της αρχής $O' = (x_0, y_o)$ του κανονικού συστήματος είναι λύσεις ως προς x και y του συστήματος

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x + a_{12}y + a_1 = 0 \\ a_{12}x + a_{22}y + a_2 = 0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left.\begin{array}{c} 4x - 2y - 3 = 0 \\ -2x + y + \frac{3}{2} = 0 \end{array}\right\} \Longleftrightarrow y = 2x - \frac{3}{2}$$

Οποιοδήποτε σημείο της ευθείας $y = 2x - \frac{3}{2}$ μπορεί να είναι αρχή του κανονικού συστήματος. Επιλέγουμε τυχαία ένα από τα σημεία αυτά:

$$O' = \left(0, -\frac{3}{2}\right).$$

74. Να βρεθεί η κανονική εξίσωση και το κανονικό σύστημα της καμπύλης:

$$x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 3y - 7 = 0 \tag{6.11}$$

Λύση. Θα βρούμε τις αναλλοίωτες της καμπήλης:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -\frac{3}{2} \\ 2 & -\frac{3}{2} & -7 \end{vmatrix} = -\frac{25}{4}, \quad \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

Επειδή $\delta = 0$ και $\Delta \neq 0$, η καμπύλη είναι παραβολή.

Θα βρούμε τα διανύσματα του κανονικού συστήματος.

$\vec{e}_1{}' = \{\cos\phi, \sin\phi\}$, $\vec{e}_2{}' = \{-\sin\phi, \cos\phi\}$, όπου $\tan\phi = \frac{-a_{11}}{a_{12}} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$.

$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin\varphi = \tan\varphi \cdot \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Άρα, $\vec{e}_1{}' = \{\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\}$ και $\vec{e}_2{}' = \{-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\}$.

Οι τύποι μετασχηματισμού των συντεταγμένων από το $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ στο $O\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$ είναι:

$$\begin{aligned} x &= \frac{2}{\sqrt{5}}x' - \frac{1}{\sqrt{5}}y' \\ y &= \frac{1}{\sqrt{5}}x' + \frac{2}{\sqrt{5}}y' \end{aligned} \tag{6.12}$$

Αντικαθεστώντας τα x και y από τους (6.12) στην (6.11) παίρνουμε την εξίσωση της παραβολής στο $O\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$:

$$y'^2 - \frac{2}{\sqrt{5}}\ y' + \frac{1}{\sqrt{5}}\ x' - \frac{7}{5} = 0 \Longleftrightarrow (y' - \frac{1}{\sqrt{5}})^2 + \frac{1}{\sqrt{5}}\ x' - \frac{8}{5} = 0 \Longleftrightarrow$$

$$(y' - \frac{1}{\sqrt{5}})^2 + \frac{1}{\sqrt{5}}(x' - \frac{8}{\sqrt{5}}) = 0 \tag{6.13}$$

Αντικαθεστώντας τα x' και y' στην (6.13) άπο τους τύπους

$$\begin{aligned} x' &= x'' + \frac{8}{\sqrt{5}} \\ y' &= y'' + \frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned} \tag{6.14}$$

οι οποίοι αντιστοιχούν στην μεταφορά της αρχής O σε άλλο σημείο O', παίρνουμε την εξίσωση της παραβολής στο $O'\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$:

$$y''^2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}x'' \tag{6.15}$$

Αντικαθιστώντας τα x'' και y'' στην (6.15) από τους τύπους

$$\begin{aligned} x'' &= -x''' \\ y'' &= y''' \end{aligned} \tag{6.16}$$

παίρνουμε την κανονική εξίσωση $y''^2 = \frac{1}{\sqrt{5}}x''$ της παραβολής στο κανονικό σύστημα O'-$\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$.

Μένει να βρούμε τις συντεταγμένες του O' ως προς το αρχικό σύστημα συντεταγμένων:

$O' = (x_0''', y_0''') = (0, 0)$ στο O'-$\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$

$O' = (x_0'', y_0'') = (0, 0)$ στο $O'\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$ από τους (6.16),

$O' = (x_0', y_0') = (\frac{8}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$ στο $O\vec{e}_1{}'\vec{e}_2{}'$ από τους (6.14),

$O' = (x_0, y_0) = (3, 2)$ στο $O\vec{e}_1\vec{e}_2$ από τους (6.12).

Σημείωση 6.8.1. Η κανονική εξίσωση της παραβολής μπορεί να βρεθεί και από τον τύπο

$$y'^2 = 2\sqrt{\frac{-\Delta}{S^3}}x'$$

Κεφάλαιο 7

Επιφάνειες 2ου βαθμού

7.1 Κυλινδρικές επιφάνειες

Έστω π ένα επίπεδο και ε μια ευθεία που τέμνει το π σε ένα σημείο. Θεωρούμε μια καμπύλη γ του π. Η ένωση όλων των ευθειών που είναι παράλληλες στη ε και τέμνουν την γ καλείται κυλινδρική επιφάνεια με διευθύνουσα την γ και γενέτειρες παράλληλες στην ϵ.

Θεώρημα 7.1.1. *Έστω ότι $Oxyz$ είναι ένα γενικό σύστημα συντεταγμένων του χώρου και γ είναι μια καμπύλη του Oxy επιπέδου.*

Αν η γ έχει εξίσωση $F(x,y)=0$ ως προς Oxy, τότε η κυλινδρική επιφάνεια E_γ με διευθύνουσα τη γ και γενέτειρες παράλληλες στον άξονα Oz έχει εξίσωση $F(x,y)=0$ ως προς $Oxyz$.

Απόδειξη. Έστω $M=(x,y,z)$ ένα σημείο του χώρου και $M'=(x,y,0)$ η προβολή του M στο π παράλληλα στον Oz. Το σημείο M ανήκει στην E αν και μόνον αν $M'=(x,y,0)\in\gamma$, δηλαδή αν και μόνον αν $F(x,y)=0$.

Άρα, $F(x,y)=0$ είναι η εξίσωση της κυλινδρικής επιφάνειας E στο $Oxyz$.

Παραδείγματα 7.1.1. Στα παραδείγματα που ακολουθούν το σύστημα συντεταγμένων $Oxyz$ είναι ορθοκανονικό.

1. Η κυλινδρική επιφάνεια με διευθύνουσα την έλλειψη $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ του Oxy-επιπέδου και γενέτειρες παράλληλες στον Oz έχει στο σύστημα $Oxyz$ εξίσωση $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ και καλείται ελλειπτικός κύλινδρος.

2. Η κυλινδρική επιφάνεια με διευθύνουσα την έλλειψη $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ του Oxy-επιπέδου και γενέτειρες παράλληλες στον Oz έχει στο σύστημα $Oxyz$ εξίσωση $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ και καλείται υπερβολικός κύλινδρος.

3. Η κυλινδρική επιφάνεια με διευθύνουσα την παραβολή $y^2=2px$ του Oxy-επιπέδου και γενέτειρες παράλληλες στον Oz έχει στο σύστημα $Oxyz$ εξίσωση $y^2=2px$ και καλείται παραβολικός κύλινδρος

7.2 Κωνικές επιφάνειες.

Έστω π ένα επίπεδο και O ένα σημείο που δεν ανήκει στο π. Θεωρούμε μια καμπύλη γ στο π. Η ένωση όλων των ευθειών οι οποίες διέρχονται από το O και τέμνουν την γ καλείται κωνική επιφάνεια με διευθύνουσα την γ και κορυφή το O. Οι ευθείες που διέρχονται από το O και τέμνουν την γ καλούνται γενέτειρες της κωνικής επιφάνειας.

Παράδειγμα 7.2.1. Θα βρούμε την εξίσωση της κωνικής επιφάνειας K που έχει ως κορυφή την αρχή O ενός ορθοκανονικού συστήματος $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ και οδηγό την έλλειψη

$$\gamma : \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = c, \; c \neq 0 \end{cases}$$

Έστω $M = (x, y, z) \neq O$ ένα σημείο του χώρου και M' το σημείο τομής της ευθείας (OM) με το επίπεδο $z = c$. Τότε $M' = (x', y', c)$ στο σύστημα $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$.

$M' \in (OM) \Longrightarrow \overrightarrow{OM'} = t\overrightarrow{OM} \Longrightarrow \{x', y', c\} = t\{x, y, c\}$

$\Longrightarrow x' = tx, \; y' = ty, \; c = tz$

$\Longrightarrow t = \frac{c}{z}, \; x' = \frac{c}{z}x, \; y' = \frac{c}{z}y,$ αν $z \neq 0$

$M \in K \Longleftrightarrow M' \in \gamma \Longleftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, όπου $x' = \frac{c}{z}x$, $y' = \frac{c}{z}y \Longleftrightarrow$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

Η συντεταγμένες τις κορυφής $O = (0, 0, 0)$ ικανοποιούν επίσης την παραπάνω εξίσωση.

7.3 Επιφάνειες εκ περιστροφής.

Σε ένα επίπεδο π θεωρούμε μια ευθεία ε και μια καμπύλη γ. Η επιφάνεια E που παράγεται όταν η γ περιστρέφεται γύρω από την ε καλείται επιφάνεια εκ περιστροφής.

Έστω $Oxyz$ ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων του χώρου. Θεωρούμε μια καμπύλη γ του Oxy-επιπέδου με εξίσωση $F(x, y) = 0$ ως προς το σύστημα Oxy. Υποθέτουμε ότι η γ είτε είναι συμμετρική ως προς τον άξονα Oy είτε βρίσκεται σε ένα απο τα ημιεπίπεδα στα οποία ο Oy χωρίζει το επίπεδο Oxy. Θα βρούμε την εξίσωση της κυλινδρικής επιφάνειας E που παράγεται όταν η γ περιστρέφεται γύρο από τον άξονα Oy.

Συμβολίζουμε με Π_ϕ το επίπεδο που διέρχεται από τον άξονα Oy και σχηματίζει γωνία ϕ με το επίπεδο Oxy.

$M(x, y, z) \in E$ αν και μόνον αν υπάρχει επίπεδο Π_ϕ τέτοιο ώστε $M \in E \cap \Pi_\phi$. Στο Π_ϕ θεωρούμε το ορθοκανονικό σύστημα $Ox_\phi y$, όπου $Ox_\phi \perp Oy$. Στο $Ox_\phi y$ η καμπύλη $\gamma_\phi = \Pi_\phi \cap E$ έχει εξίσωση $F(x_\phi, y) = 0$. Αν $M = (x, y, z) \in \gamma_\phi$, τότε $x_\phi = \sqrt{x^2 + z^2}$. Συνεπώς η εξίσωση της E είναι

$$F(\sqrt{x^2 + z^2}, y) = 0.$$

Σημείωση 7.3.1. Με περιστροφή της καμπύλης $F(x, z) = 0$ του Oxz-επιπέδου γύρω από τον άξονα Ox παράγεται επιφάνεια με εξίσωση $F(x, \sqrt{y^2 + z^2})$.

Η επιφάνεια που παράγεται όταν η καμπύλη $F(x, y) = 0$ του Oxy-επιπέδου περιστρέφεται γύρω από τον άξονα Ox έχει εξίσωση $F(x, \sqrt{y^2 + z^2}) = 0$

Παραδείγματα 7.3.1.

1. Θεωρούμε την έλλειψη $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ του Oxy- επιπέδου. Θέτουμε $F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$.

   Η επιφάνεια που παράγεται όταν η έλλειψη περιστρέφεται γύρω από τον άξονα Ox έχει εξίσωση $F(x, \sqrt{y^2 + z^2}) = 0$, που ισοδυναμεί με

   $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(\sqrt{y^2 + z^2})^2}{b^2} = 1 \Longleftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

2. Θεωρούμε την υπερβολή $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ του Oxz- επιπέδου. Θέτουμε $F(x,z) = \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1$. Η επιφάνεια που παράγεται όταν η υπερβολή περιστρέφεται γύρω από τον άξονα Oz έχει εξίσωση $F(\sqrt{x^2+y^2}, z) = 0$, που ισοδυναμεί με

$$\frac{(\sqrt{x^2+y^2})^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \Longleftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

7.4 Ελλειψοειδές

Με την περιστροφή της έλλειψης $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ γύρω από τον άξονα Ox παράγεται επιφάνεια με εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

Ορισμός 7.4.1. Η επιφάνεια που παράγεται με περιστροφή της έλλειψης γύρω από τον άξονα της καλείται ελλειψοειδές εκ περιστροφής.

Θεωρούμε την απεικόνιση $f : R^3 \to R^3$, που ορίζεται ως εξής

$$(x,y,z) \to (x,y,kz).$$

Το ελλειψοειδές εκ περιστροφής απεικονίζεται στην επιφάνεια η οποία καλείται ελλειψοειδές και έχει εξίσωση:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{k^2b^2} = 1.$$

Θέτουμε $k^2b^2 = c^2$, οπότε η παραπάνω εξίσωση γράφεται

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

7.5 Τα υπερβολοειδή.

Με την περιστροφή της υπερβολής $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ γύρω από τον άξονα Ox παράγεται επιφάνεια με εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

Ορισμός 7.5.1. Η επιφάνεια που παράγεται με περιστροφή της υπερβολής γύρω από τον πραγματικό άξονα της καλείται δίχωνο υπερβολοειδές εκ περιστροφής.

Θεωρούμε την απεικόνιση $f : R^3 \to R^3$, που ορίζεται ως εξής

$$(x,y,z) \to (x,y,kz).$$

Το δίχωνο υπερβολοειδές εκ περιστροφής απεικονίζεται στην επιφάνεια η οποία καλείται δίχωνο υπερβολοειδές και έχει έξίσωση:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{k^2b^2} = 1.$$

Θέτουμε $k^2b^2 = c^2$, οπότε η παραπάνω εξίσωση γράφεται

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Με την περιστροφή της υπερβολής $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ γύρω από τον άξονα Oy παράγεται επιφάνεια με εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1.$$

Ορισμός 7.5.2. Η επιφάνεια που παράγεται με περιστροφή της υπερβολής γύρω από τον φανταστικό άξονα της καλείται μονόχωνο υπερβολοειδές εκ περιστροφής.

Θεωρούμε την απεικόνιση $f : R^3 \to R^3$, που ορίζεται ως εξής

$$(x, y, z) \to (x, y, kz).$$

Το μονόχωνο υπερβολοειδές εκ περιστροφής απεικονίζεται στην επιφάνεια η οποία καλείται μονόχωνο υπερβολοειδές και έχει έξίσωση:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{k^2a^2} = 1.$$

Θέτουμε $k^2a^2 = c^2$, οπότε η παραπάνω εξίσωση γράφεται

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

7.6 Τα παραβολοειδή.

Με την περιστροφή της παραβολής $x^2 = 2pz$, $p > 0$, γύρω από τον άξονα της Oz παράγεται επιφάνεια με εξίσωση

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{p} = 2z.$$

Ορισμός 7.6.1. Η επιφάνεια που παράγεται με περιστροφή της παραβολής γύρω από τον άξονα της καλείται παραβολοειδές εκ περιστροφής.

Θεωρούμε την απεικόνιση $f : R^3 \to R^3$, που ορίζεται ως εξής

$$(x, y, z) \to (x, ky, z).$$

Το παραβολοειδές εκ περιστροφής απεικονίζεται στην επιφάνεια η οποία καλείται ελλειπτικό παραβολοειδές και έχει έξίσωση:

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{k^2p} = 2z.$$

Θέτουμε $k^2p = q$, οπότε η παραπάνω εξίσωση γράφεται

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z.$$

Ορισμός 7.6.2. Η επιφάνεια σε ένα ορθοκανονικό συστημα συντεταγμένων έχει εξίσωση

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \quad p \geq q > 0$$

καλείται ελλειπτικό παραβολοειδές.

Ορισμός 7.6.3. Η επιφάνεια σε ένα ορθοκανονικό συστημα συντεταγμένων έχει εξίσωση

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \quad p > 0, q > 0$$

καλείται υπερβολικό παραβολοειδές.

Σημείωση 7.6.1. Θεωρούμε δύο παραβολές γ_1 και γ_2 με κοινή κορυφή O και κοινό άξονα συμμετρίας Oz, οι οποίες βρίσκονται σε κάθετα επίπεδα και έχουν διαφορετική "κατεύθυνση":

η γ_1 βρίσκεται στο Oxz-επίπεδο και έχει σάυτο εξίσωση $x^2 = 2pz,\ p > 0$,

η γ_2 βρίσκεται στο Oyz-επίπεδο και έχει σάυτο εξίσωση $y^2 = -2qz,\ q > 0$.

Το υπερβολικό παραβολοειδές παράγεται όταν η κορυφή της παραβολής γ_2 κινείται κατά μήκος της παραβολής γ_1.

7.7 Επιφάνειες δευτέρου βαθμού

Έστω $Oxyz$ ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων του χώρου. Ένα σύνολο E σημείων του χώρου καλείται επιφάνεια δευτέρου βαθμού αν συμπίπτει με το σύνολο όλων των σημείων του χώρου οι συντεταγμένες (x, y, z) των οποίων είναι λύσεις μιας εξίσωσης της μορφής

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0$$

Θεώρημα. Για κάθε επιφάνεια δευτέρου βαθμού υπάρχει ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων $Oxyz$ στο οποίο η επιφάνεια έχει μία από τις μορφές:

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ελλειψοειδές $(a \geq b \geq c > 0)$
2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$ φανταστικό ελλειψοειδές $(a \geq b \geq c > 0)$
3. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ μονόχωνο υπερβολοειδές $(a \geq b > 0, c > 0)$
4. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ δίχωνο υπερβολοειδές $(a \geq b > 0, c > 0)$
5. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$ φανταστικός κώνος $(a \geq b \geq c > 0)$
6. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ κώνος $(a \geq b > 0, c > 0)$
7. $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$ ελειπτικό παραβολοειδές $(p \geq q > 0)$
8. $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$ υπερβολικό παραβολοειδές $(p > 0, q > 0)$
9. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ελειπτικός κύλινδρος $(a \geq b > 0)$
10. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ φανταστικός κύλινδρος$(a \geq b > 0)$
11. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ υπερβολικός κύλινδρος $(a > 0, b > 0)$
12. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ ζεύγος φανταστικων τεμνόμενων επιπέδων με τομή τον άξονα Oz $(a \geq b > 0)$
13. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ ζεύγος πραγματικών τεμνόμενων επιπέδων
14. $y^2 = 2px$ παραβολικός κύλινδρος $(p > 0)$
15. $x^2 - a^2 = 0$, $a \neq 0$, ζεύγος παράλληλων πραγματικών επιπέδων $x = a,\ x = -a$
16. $x^2 + a^2 = 0$, $a \neq 0$, ζεύγος παράλληλων φανταστικών επιπέδων
17. $x^2 = 0$ ζεύγος συμπιπτόντων επιπέδων $x = 0$.

7.8 Ασκήσεις.

75. Να προσδιοριστεί το είδος της επιφάνειας: $x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 6x + 8y - 36z = 0$.

Λύση. Η εξίσωση γράφεται

$$\begin{aligned} (x^2 - 6x + 9) + 4(y^2 + 2y + 1) + 9(z^2 - 4z + 4) - 0 - 4 - 36 &= 0 \\ (x-3)^2 + 4(y+1)^2 + 9(z-2)^2 - 49 &= 0 \end{aligned} \tag{7.1}$$

Αντικαθιστώντας τα x, y, z στην (7.1) από τους τύπους αλλαγής των συντεταγμένων

$$\begin{aligned} x &= x' + 3 \\ y &= y' - 1 \\ z &= z' + 2 \end{aligned}$$

οι οποίοι αντιστοιχούν στην μεταφορά της αρχής O του συστήματος συντεταγμένων $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ στο σημείο $O' = (3,-1,2)$, παίρνουμε την εξίσωση της επιφάνειας στο σύστημα $O'\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$

$$x'^2 + 4y'^2 + 9z'^2 = 49 \Longleftrightarrow \frac{x'^2}{49} + \frac{y'^2}{\frac{49}{4}} + \frac{z'^2}{\frac{49}{9}} = 1$$

που είναι εξίσωση του ελλεψοειδούς. Άρα, η επιφάνεια είναι ελλειψοειδές.

76. Να προσδιοριστεί το είδος της επιφάνειας: $4x^2 - y^2 - z^2 + 32x - 12z + 44 = 0$.

Λύση. Η εξίσωση γράφεται

$$\begin{aligned} 4(x^2+8x+16) - y^2 - (z^2+12z+36) + 44 - 64 + 36 &= 0 \\ 4(x+4)^2 - y^2 - (z+6)^2 &= -16 \qquad (7.2) \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τα x, y, z στην (7.2) από τους τύπους αλλαγής των συντεταγμένων

$$\begin{aligned} x &= x' - 4 \\ y &= y' \\ z &= z' - 6 \end{aligned}$$

οι οποίοι αντιστοιχούν στην μεταφορά της αρχής O του συστήματος συντεταγμένων $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ στο σημείο $O' = (-4,0,-6)$, παίρνουμε την εξίσωση της επιφάνειας στο σύστημα $O'\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$

$$4x'^2 - y'^2 - z'^2 = -16 \Longleftrightarrow -\frac{x'^2}{\frac{16}{4}} + \frac{y'^2}{16} + \frac{z'^2}{16} = 11$$

που είναι εξίσωση του μονόχωνου υπερβολοειδούς.

77. Να προσδιοριστεί το είδος της επιφάνειας: $6y^2 + 6z^2 + 5x + 6y + 30z - 11 = 0$.

Λύση. Η εξίσωση γράφεται

$$\begin{aligned} 6\left(y^2 + y + \frac{1}{4}\right) + 6\left(z^2 + 5z + \frac{25}{4}\right) + 5x - 11 - \frac{6}{4} - \frac{150}{4} &= 0 \\ 6\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + 6\left(z + \frac{5}{2}\right)^2 + 5x - 25 &= 0 \\ 6\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + 6\left(z + \frac{5}{2}\right)^2 + 5(x-5) &= 0 \qquad (7.3) \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τα x, y, z στην (7.3) από τους τύπους αλλαγής των συντεταγμένων

$$\begin{aligned} x &= x' + 5 \\ y &= y' - \frac{1}{2} \\ z &= z' - \frac{5}{2} \end{aligned}$$

οι οποίοι αντιστοιχούν στην μεταφορά της αρχής O του συστήματος συντεταγμένων $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ στο σημείο $O' = (5, -\frac{1}{2}, -\frac{5}{2})$, παίρνουμε την εξίσωση της επιφάνειας στο σύστημα $O'\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$

$$6y'^2 + 6z'^2 + 5x' = 0 \Longleftrightarrow \frac{y'^2}{\frac{5}{12}} + \frac{z'^2}{\frac{5}{12}} = -2x'$$

που είναι εξίσωση του ελλειπτικού παραβολοειδούς.

78. Να προσδιοριστεί το είδος της επιφάνειας: $6y^2 + 6z^2 + 6y + 30z - 11 = 0$.

Λύση. Η εξίσωση γράφεται

$$\begin{aligned} 6\left(y^2 + y\right) + 6\left(z^2 + 5z\right) - 11 &= 0 \\ 6\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + 6\left(z + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{6}{4} - \frac{150}{4} - 11 &= 0 \qquad (7.4) \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τα x, y, z στην (7.4) από τους τύπους αλλαγής των συντεταγμένων

$$\begin{aligned} x &= x' \\ y &= y' - \frac{1}{2} \\ z &= z' - \frac{5}{2} \end{aligned}$$

οι οποίοι αντιστοιχούν στην μεταφορά της αρχής O του συστήματος συντεταγμένων $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ στο σημείο $O' = (0, -\frac{1}{2}, -\frac{5}{2})$, παίρνουμε την εξίσωση της επιφάνειας στο σύστημα $O'\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$

$$6y'^2 + 6z'^2 - 50 = 0 \Longleftrightarrow \frac{y'^2}{\frac{50}{6}} + \frac{z'^2}{\frac{50}{6}} = 1$$

που είναι εξίσωση του ελλειπτικού κυλίνδρου.

79. Να προσδιοριστεί το είδος της επιφάνειας: $3x^2 - 18x + 10y = 0$.

Λύση. Η εξίσωση γράφεται

$$\begin{aligned} 3\left(x^2 - 6x\right) + 10y &= 0 \\ 3\left(x - 3\right)^2 + 10y - 27 &= 0 \\ 3\left(x - 3\right)^2 + 10\left(y - \frac{27}{10}\right) &= 0 \qquad (7.5) \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τα x, y, z στην (7.5) από τους τύπους αλλαγής των συντεταγμένων

$$\begin{aligned} x &= x' + 3 \\ y &= y' + \frac{27}{10} \\ z &= z' \end{aligned}$$

οι οποίοι αντιστοιχούν στην μεταφορά της αρχής O του συστήματος συντεταγμένων $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ στο σημείο $O' = \left(3, \frac{27}{10}, 0\right)$, παίρνουμε την εξίσωση της επιφάνειας στο σύστημα $O'\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$

$$3x'^2 + 10y' = 0 \Longleftrightarrow x'^2 = -\frac{10}{3}\, y'$$

που είναι εξίσωση του παραβολικού κυλίνδρου.

80. Να προσδιοριστεί το είδος της επιφάνειας: $3x^2 - 18x + 14 = 0$.

Λύση. Η εξίσωση γράφεται

$$\begin{aligned} 3\left(x^2 + y - 6x\right) + 14 &= 0 \\ 3\left(x - 3\right)^2 - 27 + 14 &= 0 \qquad (7.6) \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τα x, y, z στην (7.6) από τους τύπους αλλαγής των συντεταγμένων

$$\begin{aligned} x &= x' + 3 \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned}$$

οι οποίοι αντιστοιχούν στην μεταφορά της αρχής O του συστήματος συντεταγμένων $O\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$ στο σημείο $O' = (3, 0, 0)$, παίρνουμε την εξίσωση της επιφάνειας στο σύστημα $O'\vec{e}_1\vec{e}_2\vec{e}_3$

$$3x'^2 - 13 = 0 \Longleftrightarrow x'^2 = \frac{13}{3}$$

που είναι εξίσωση του ζεύγους παράλληλων επιπέδων $x' = \sqrt{\frac{13}{3}}$ και $x' = -\sqrt{\frac{13}{3}}$.