Σημειωσεις
Αναλυτικης Γεωμετριας

Θ. Κεχαγιας

Σεπτεμβρης 2009, υ.0.95

Περιεχόμενα

Προλογος

Το παρον τευχος περιεχει συντομη θεωρια, λυμενες και αλυτες ασκησεις Αναλυτικης Γεωμετριας. Κατα τη γνωμη μου, για τους περισσοτερους ανθρωπους, *ο μονος τροπος εξοικειωσης με τα μαθηματικα ειναι η επιλυση ασκησεων* - **οσο περισσοτερες ασκησεις λυσει ο αναγνωστης, τοσο καλυτερα θα κατανοησει το αντικειμενο**. Συμφωνα με αυτη την αποψη, στο παρον τευχος η θεωρια παρουσιαζεται σε μεγαλη συντομια, αλλα υπαρχει μεγαλος αριθμος λυμενων και αλυτων ασκησεων. Ο αναγνωστης πρεπει να χρησιμοποιησει τις λυμενες ασκησεις ως ενα ενδιαμεσο βοηθημα για την επιλυση των αλυτων ασκησεων. Με αλλα λογια, *αν ο αναγνωστης δεν λυσει **ο ιδιος** μεγαλο αριθμο των αλυτων ασκησεων δεν θα ωφεληθει ιδιαιτερα* **(δεν αρκει δηλ. να μελετησει τις ηδη λυμενες ασκησεις)**.

Σχετικα με τις προαπαιτουμενες γνωσεις και τον συμβολισμο που χρησιμοποιειται, σημειωνω τα παρακατω.

1. Τα σημεια του τριδιαστατου χωρου συμβολιζονται ως εξης: $M(x,y,z)$ ειναι το σημειο M με συντεταγμενες (x,y,z). Ομοια το σημειο $M_1(x_1,y_1,z_1)$ κτλ.

2. Το συνολο των πραγματικων αριθμων συμβολιζεται με $\mathbb{R}$. Το συμβολο $\mathbb{R}^3$ δηλωνει το συνολο των τριαδων πραγματικων αριθμων:

$$\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) : x,y,z \in \mathbb{R}\}$$

   και επισης τον τριδιαστατο χωρο, δηλ. το συνολο ολων των σημειων $M(x,y,z)$ με τυχουσες πραγματικε συντεταγμενες $x,y,z \in \mathbb{R}$.

3. Τα διανυσματα συμβολιζονται με εντονους, μικρους Λατινικους χαρακτηρες. Π.χ. $\mathbf{p},\mathbf{q}$ κ.τ.λ.

4. Θεωρουνται γνωστα τα βασικα περι διανυσματων. Ειναι πολυ σημαντικο οτι χρησιμοποιουμε σχεδον αποκλειστικα *ελευθερα* διανυσματα. Δηλ. καθε διανυσμα εχει δεδομενο μετρο, φορα και κατευθυνση αλλα η αρχη του **δεν** θεωρειται σταθερη. Για την ακριβεια δυο διανυσματα με ιδιο μετρο, φορα και κατευθυνση θεωρουνται το **ιδιο** διανυσμα.

   (α') Για να γινει το παραπανω σαφεστερα αντιληπτο, θεωρειστε το διανυσμα $\mathbf{p} = (a,b,c)$. Αυτο μπορει μα θεωρηθει οτι εχει την αρχη του στην αρχη των αξονων, δηλ. το σημειο $A(0,0,0)$ και το περας του στο σημειο $B(a,b,c)$. Ομως το $\mathbf{p}$ ειναι *το ιδιο διανυσμα* (στις παρουσες σημειωσεις) με αυτο που εχει αρχη στο σημειο $C\,(1,4,2)$ και περας στο $D\,(1+a,4+b,2+c)$, οπως και με το διανυσμα που εχει αρχη στο σημειο $E\,(-1,0,3)$ και περας στο $D\,(-1+a,b,3+c)$ κτλ.

5. Το συνολο των ελευθερων διανυσματων ειναι σε 1-προς-1 αντιστοιχια με τα σημεια του τριδιαστατου χωρου. Η αντιστοιχια ειναι η εξης: αν θεωρησουμε οτι το διανυσμα $\mathbf{r}=(x,y,z)$ τοποθετειται ετσι ωστε η αρχη του να ειναι η αρχη των αξονων, τοτε το αντιστοιχο σημειο ειναι το περας του διανυσματος, δηλ. το σημειο $M\,(x,y,z)$.

6. Ωστοσο αρκετες φορες θα ορισουμε ενα διανυσμα απο την αρχη και το περας του. Π.χ. θα μιλαμε για το διανυσμα με αρχη το σημειο $M_1\,(x_1,y_1,z_1)$ και περας το $M_2\,(x_2,y_2,z_2)$. Αυτο το διανυσμα ειναι το $(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$ και μερικες φορες θα το συμβολιζουμε ως $\overrightarrow{M_1M_2}$. Τονιζουμε ομως οτι και σε αυτην περιπτωση το $\overrightarrow{M_1M_2}$ ειναι ενα *ελευθερο* διανυσμα.

7. Το μετρο ενος διανυσματος $\mathbf{p}$ συμβολιζεται με $\|\mathbf{p}\|$.

8. Το εσωτερικο γινομενο δυο διανυσματων $\mathbf{p},\mathbf{q}$ συμβολιζεται με $\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}$ και το εξωτερικο με $\mathbf{p}\times\mathbf{q}$.

9. Η λεξη «ανν» σημανει «αν και μονον αν».

Η παρουσα μορφη των σημειωσεων απεχει πολυ απο το να ειναι τελικη. Υπαρχουν ακομη λαθη (ελπιζω λιγα). Ιδιαιτερως, τα σχηματα χρειαζονται μεγαλη βελτιωση. Ζητω συγγνωμη για τις υπαρχουσες ατελειες και ελπιζω οτι μια βελτιωμενη εκδοση θα ειναι διαθεσιμη συντομα.

Θανασης Κεχαγιας

Θεσσαλονικη, Σεπτεμβρης 2009

Εισαγωγη

Κεφάλαιο 1

Επιπεδα στον Τρισδιαστατο Χωρο

1.1 Θεωρια

1.1.1. Εστω τρια σημεια M_1, M_2, M_3 που δεν ανηκουν σε μια ευθεια και εχουν συντεταγμενες (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) και αντιστοιχα διανυσματα $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$. Το επιπεδο E που καθοριζεται απο τα σημεια M_1, M_2, M_3 **οριζεται** να ειναι το συνολο των διανυσματων $\mathbf{r}$ / σημειων (x, y, z) που ικανοποιουν την *διανυσματικη* εξισωση

$$\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{r}_1 + u \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + v \cdot (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) \qquad \text{οπου } u, v \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

1.1.2. Η (1.1) ειναι ισοδυναμη με την εξισωση

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{1.2}$$

Δηλ. ενα σημειο $M(x, y, z)$ ικανοποιει την (1.2) ανν ανηκει στο επιπεδο E που οριζουν τα σημεια (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3).

1.1.3. Επισης η (1.1) ειναι ισοδυναμη με την *παραμετρικη* εξισωση

$$\begin{aligned} x(u,v) &= x_1 + u \cdot (x_2 - x_1) + v \cdot (x_3 - x_1), \\ y(u,v) &= y_1 + u \cdot (y_2 - y_1) + v \cdot (y_3 - y_1), \\ z(u,v) &= z_1 + u \cdot (z_2 - z_1) + v \cdot (z_3 - z_1). \end{aligned} \tag{1.3}$$

1.1.4. Τελος, καθε επιπεδο E στον τριδιαστατο χωρο μπορει να περιγραφει απο μια εξισωση της μορφης

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{1.4}$$

οπου A, B, C, D πραγματικοι αριθμοι. Επισης, σε καθε εξισωση της μορφης (1.4) αντιστοιχει ενα επιπεδο. Η εξισωση της μορφης (1.4) λεγεται *κανονικη* εξισωση του επιπεδου.

1.1.5. Η εξισωση επιπεδου που διερχεται απο δυο σημεια (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) και ειναι παραλληλο στο διανυσμα $\mathbf{p} = (a, b, c)$ ειναι

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0. \tag{1.5}$$

Η διανυσματικη εξισωση του ιδιου επιπεδου ειναι

$$\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{r}_1 + u \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + v \cdot \mathbf{p}.$$

1.1.6. Η εξισωση επιπεδου που διερχεται απο σημειο (x_1, y_1, z_1) και ειναι παραλληλο στα (μη συγγραμικα) διανυσματα $\mathbf{p} = (a, b, c)$, $\mathbf{q} = (d, e, f)$ ειναι

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0. \tag{1.6}$$

Η διανυσματικη εξισωση του ιδιου επιπεδου ειναι

$$\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{r}_1 + u \cdot \mathbf{p} + v \cdot \mathbf{q}.$$

1.1.7. Ενα διανυσμα $\mathbf{p} = (a, b, c)$ ειναι καθετο στο επιπεδο $Ax + By + Cz + D = 0$ ανν

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}. \tag{1.7}$$

1.1.8. Η εξισωση επιπεδου που διερχεται απο σημειο (x_1, y_1, z_1) και ειναι καθετο στο διανυσμα $\mathbf{p} = (a, b, c)$ ειναι

$$a \cdot (x - x_1) + b \cdot (y - y_1) + c \cdot (z - z_1) = 0. \tag{1.8}$$

1.1.9. Ενα διανυσμα $\mathbf{p} = (a, b, c)$ ειναι παραλληλο στο επιπεδο $Ax + By + Cz + D = 0$ ανν

$$a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C = 0. \tag{1.9}$$

1.1.10. Δυο επιπεδα $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ ειναι *παραλληλα* ανν

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \tag{1.10}$$

1.1.11. Δυο επιπεδα $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ ειναι καθετα μεταξυ τους ανν

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \tag{1.11}$$

1.1.12. Η *διεδρη γωνια* θ μεταξυ δυο επιπεδων προσδιοριζεται απο τη σχεση

$$\cos\theta = \left| \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \right|. \tag{1.12}$$

1.1.13. Εστω τρια επιπεδα

$$\begin{aligned} E_1 &: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ E_2 &: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \\ E_3 &: A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0. \end{aligned}$$

Για να μελετησουμε την *σχετικη θεση* των E_1, E_2, E_3 οριζουμε τους πινακες

$$P = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{bmatrix}, \qquad Q = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{bmatrix}$$

και διακρινουμε τις ακολουθες περιπτωσεις.

1. Αν $rank\,(P) = rank\,(Q) = 3$, τα τρια επιπεδα τεμνονται σε ενα σημειο.
2. Αν $rank\,(P) = 2$ και $rank\,(Q) = 3$, δυο απο τα επιπεδα τεμνονται κατα μια ευθεια παραλληλη στο τριτο επιπεδο.
3. Αν $rank\,(P) = rank\,(Q) = 2$, τα τρια επιπεδα περνουν απο μια ευθεια.
4. Αν $rank\,(P) = 1$ και $rank\,(Q) = 2$, τα τρια επιπεδα ειναι παραλληλα (και ενδεχομενως δυο εξ αυτων συμπιπτουν).
5. Αν $rank\,(P) = rank\,(Q) = 1$, τα τρια επιπεδα συμπιπτουν.

1.1.14. Δινονται δυο επιπεδα

$$\begin{aligned} E_1 &: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ E_2 &: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{aligned}$$

τα οποια τεμονται κατα μια ευθεια l. Η *αξονικη δεσμη* των επιπεδων που περνουν απο την l ειναι το συνολο ολων των επιπεδων που περνουν απο αυτη την ευθεια. Καθε τετοιο επιπεδο εχει εξισωση

$$\kappa \cdot (A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + (1 - \kappa) \cdot (A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \tag{1.13}$$

οπου $\kappa \in (-\infty, \infty)$ ειναι μια *παραμετρος*: για καθε τιμη του κ προκυπτει ενα επιπεδο της αξονικης δεσμης (παρατηρειστε οτι, οταν $\kappa = 1$ παιρνουμε το επιπεδο E_1 και οταν $\kappa = 0$ παιρνουμε το επιπεδο E_2).

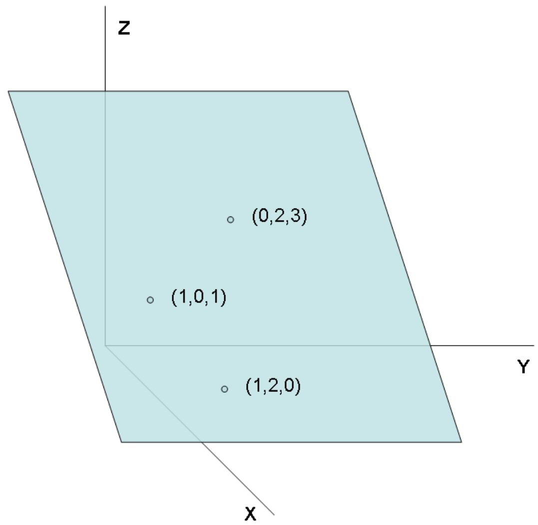
1.1.15. Εστω επιπεδο $E : Ax + By + Cz + D = 0$ και σημειο $M\,(x_1, y_1, z_1)$. Η αποσταση του σημειου απο το επιπεδο ειναι

$$d\,(M, E) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{1.14}$$

1.2 Λυμενες Ασκησεις

1.2.1. Βρειτε την εξισωση του επιπεδου που διερχεται απο τα σημεια $(1,2,0)$, $(0,1,3)$ και $(1,0,1)$.

Λυση. Το επιπεδο απεικονιζεται στο Σχ. 14.1.



Σχ.14.1

Χρησιμοποιωντας την (1.2) βλεπουμε οτι η ζητουμενη εξισωση ειναι

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-0 \\ 0-1 & 1-2 & 3-0 \\ 1-1 & 0-2 & 1-0 \end{vmatrix} = 5x+y+2z-7=0$$

1.2.2. Βρειτε την διανυσματικη και την παραμετρικη εξισωση του παραπανω επιπεδου

Λυση. Εχουμε τα διανυσματα

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= (1,2,0) \\ \mathbf{r}_2 &= (0,1,3) \\ \mathbf{r}3 &= (1,0,1) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 &= (0-1, 1-2, 3-0) = (-1,-1,3) \\ \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1 &= (1-1, 0-2, 1-0) = (0,-2,1) \end{aligned}$$

οποτε η διανυσματικη εξισωση ειναι

$$\mathbf{r}(u,v) = (1,2,0) + u \cdot (-1,-1,3) + v \cdot (0,-2,1)$$

και η παραμετρικη εξισωση ειναι

$$\mathbf{r}(u,v) = \begin{bmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-u \\ 2-u-2v \\ 3u+v \end{bmatrix}.$$

1.2.3. Να βρεθει η εξισωση του επιπεδου που διερχεται απο τα σημεια $(1,1,1)$, $(1,2,3)$, $(3,3,3)$.

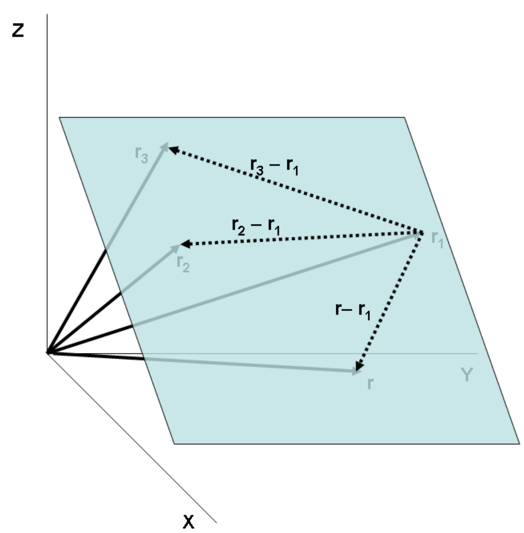
Λυση. Συμφωνα με την (1.2), η ζητουμενη εξισωση ειναι

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1-1 & 2-1 & 3-1 \\ 3-1 & 3-1 & 3-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4y-2x-2z=0.$$

1.2.4. Δικαιολογειστε την **1.1.2**, δηλ. οτι το επιπεδο που καθοριζεται απο τα σημεια $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$ ικανοποιει την εξισωση

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Λυση. Δειτε το Σχ.14.2. Απεικονιζονται τα σημεια M_1, M_2, M_3 , το επιπεδο E που αυτα καθοριζουν και ενα τυχον σημειο $M(x,y,z)$. Στα M, M_1, M_2, M_3 αντιστοιχουν τα διανυσματα $\mathbf{r}, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$.



Σχ.14.2

Τα διανυσματα

$$\begin{aligned} \mathbf{r}-\mathbf{r}_1 &= (x-x_1, y-y_1, z-z_1) \\ \mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1 &= (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1) \\ \mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1 &= (x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1) \end{aligned}$$

ειναι συνεπιπεδα, δηλ. το συνολο $\{\mathbf{r}-\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1\}$ ειναι γραμμικα εξαρτημενο, και αρα πρεπει να ικανοποιουν την (1.2).

1.2.5. Αποδειξτε οτι (α) καθε επιπεδο εχει *κανονικη εξισωση* της μορφης $Ax+By+Cz+D=0$ και (β) σε καθε τετοια εξισωση αντιστοιχει ενα επιπεδο.

Λυση. Εστω οτι το επιπεδο οριζεται απο τα σημεια (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3). Τοτε ικανοποιει την εξισωση

$$\left| \begin{array}{ccc} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{array} \right| = 0$$

δηλ.

$$(x - x_1) \cdot \left| \begin{array}{cc} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{array} \right| - (y - y_1) \cdot \left| \begin{array}{cc} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{array} \right| + (z - z_1) \cdot \left| \begin{array}{cc} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{array} \right| = 0$$

η οποια ειναι της μορφης $Ax + By + Cz + D = 0$ με

$$A = \left| \begin{array}{cc} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{array} \right|, \quad B = \left| \begin{array}{cc} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{array} \right|, \quad C = \left| \begin{array}{cc} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{array} \right|,$$

$$D = -x_1 \cdot \left| \begin{array}{cc} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{array} \right| + y_1 \cdot \left| \begin{array}{cc} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{array} \right| - z_1 \cdot \left| \begin{array}{cc} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{array} \right|.$$

Αντιστροφα, εστω E το συνολο των σημειων (x, y, z) που ικανοποιουν την εξισωση

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{1.15}$$

Ας υποθεσουμε προς το παρον οτι τα A, B, C, D ειναι ολα διαφορα του μηδενος. Τρια σημεια που ικανοποιουν την (1.15) ειναι τα $(-D/A, 0, 0)$, $(0, -B/A, 0)$, $(0, 0, -D/C)$. Το επιπεδο που οριζεται απο αυτα τα τρια σημεια ειναι αυτο που ικανοποιει την

$$\left| \begin{array}{ccc} x + D/A & y - 0 & z - 0 \\ 0 + D/A & -D/B - 0 & 0 - 0 \\ 0 + D/A & 0 - 0 & -D/C - 0 \end{array} \right| = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{D^3 + AxD^2 + ByD^2 + CzD^2}{ABC} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{D^2}{ABC} \cdot (D + Ax + By + Cz) = 0.$$

Η τελευταια εξισωση ειναι η (1.15), δηλ. το συνολο των σημειων που ικανοποιουν την (1.15) ειναι το επιπεδο που διερχεται απο τα σημεια $(-D/A, 0, 0)$, $(0, -B/A, 0)$, $(0, 0, -D/C)$.

Οι περιπτωσεις στις οποιες καποια απο τα A, B, C, D ειναι μηδενικα αφηνονται στον αναγνωστη.

1.2.6. Βρειτε την κανονικη εξισωση του επιπεδου που διερχεται απο τα σημεια $(-6, 0, 0)$, $(0, -3, 0)$ και $(0, 0, -1)$.

Λυση. Η ζητουμενη εξισωση εχει την μορφη

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

και πρεπει να ικανοποιει

$$\begin{aligned} -6A + 0B + 0C + D &= 0 \\ 0A - 3B + 0C + D &= 0 \\ 0A + 0B - C + D &= 0 \end{aligned}$$

Λυνοντας το συστημα παιρνουμε $A = D/6$, $B = D/3$, $C = D$. Αρα η εξισωση του επιπεδου ειναι

$$\frac{D}{6}x + \frac{D}{3}y + Dz + D = 0$$

η πιο απλα

$$x + 2y + 6z + 6 = 0$$

1.2.7. Βρειτε το σημειο τομης των επιπεδων

$$\begin{aligned} &E_1 : x + y + z - 1 = 0 \\ &E_2 : x + 2y + z + 1 = 0 \\ &E_3 : 3x + y + 4z = 0 \end{aligned}$$

Λυση. Αρκει να λυσουμε το συστημα

$$\begin{aligned} x + y + z - 1 &= 0 \\ x + 2y + z + 1 &= 0 \\ 3x + y + 4z &= 0. \end{aligned}$$

Με απαλοιφη $Gauss$ βρισκουμε οτι αυτο εχει λυση $x = 10, y = -2, z = -7$. Δηλ. το σημειο τομης ειναι το $(10, -2, 7)$.

1.2.8. Βρειτε το σημειο τομης των επιπεδων

$$\begin{aligned} &E_1 : x + y + z - 1 = 0 \\ &E_2 : x + 2y + z + 1 = 0 \\ &E_3 : 2x + 3y + 2z = 0 \end{aligned}$$

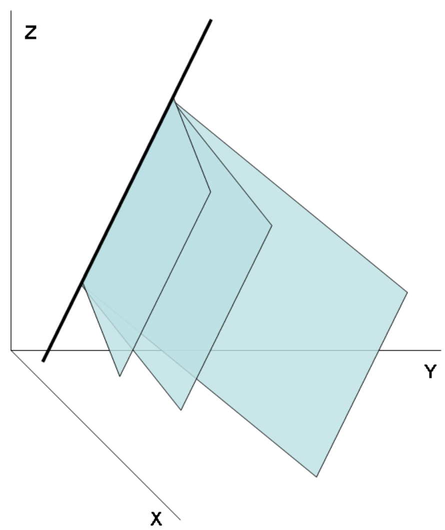
Λυση. Αρκει να λυσουμε το συστημα

$$\begin{aligned} x + y + z - 1 &= 0 \\ x + 2y + z + 1 &= 0 \\ 2x + 3y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

Με απαλοιφη $Gauss$ βρισκουμε οτι αυτο εχει απειρια λυσεων της μορφησ:

$$x = 3 - t, y = -2, z = t, \qquad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{1.16}$$

Η γεωμετρικη εξηγηση ειναι οτι τα τρια επιπεδα διερχονται απο μια ευθεια. Δες και το Σχ.14.3. Πραγματι, η (1.16) ειναι εξισωση ευθειας, οπως θα δουμε στο Κεφαλαιο 2.



Σχ.14.3

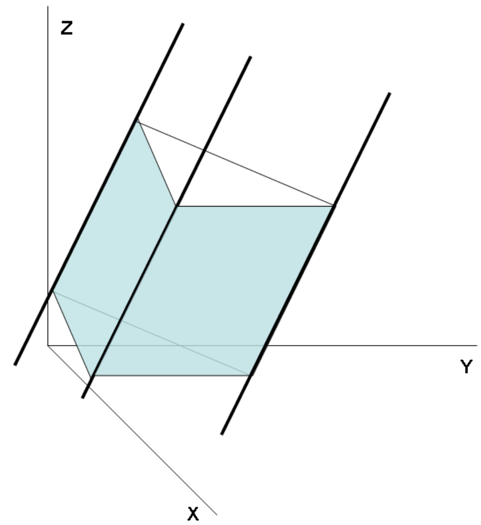
1.2.9. Βρειτε το σημειο τομης των επιπεδων

$$\begin{aligned} E_1 &: x+y+z-1=0 \\ E_2 &: x+2y+z+1=0 \\ E_3 &: 2x+3y+2z+3=0 \end{aligned}$$

Λυση. Αρκει να λυσουμε το συστημα

$$\begin{aligned} x+y+z-1&=0 \\ x+2y+z+1&=0 \\ 2x+3y+2z&=0 \end{aligned}$$

Ευκολα βρισκουμε οτι το συστημα δεν εχει καμμια λυση. Η γεωμετρικη εξηγηση ειναι οτι τα επιπεδα δεν τεμνονται, οπως φαινεται και στο Σχ.14.4.



Σχ.14.4

1.2.10. Βρειτε την εξισωση του επιπεδου που διερχεται απο τα σημεια $(1,2,0)$, $(0,1,3)$ και ειναι παραλληλο στο διανυσμα $\mathbf{p}=(1,1,1)$

Λυση. Συμφωνα με την εξ.(1.5) ειναι

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-0 \\ 0-1 & 1-2 & 3-0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4y-4x-4=0$$

και σε παραμετρικη μορφη

$$\mathbf{r}(u,v)=\begin{bmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}+u\cdot\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}+v\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1.2.11. Να βρεθει η εξισωση του επιπεδου που διερχεται απο τα σημεια $(1,1,1)$, $(1,2,3)$ και ειναι παραλληλο στο διανυσμα $\mathbf{p}=(3,3,3)$.

Λυση. Συμφωνα με την εξ.(1.5) ειναι

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1-1 & 2-1 & 3-1 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 6y-3x-3z=0$$

1.2.12. Να βρεθει η εξισωση του επιπεδου που διερχεται απο τα σημεια $A(1,1,1)$, $B(1,2,3)$ και ειναι παραλληλο στο διανυσμα $\mathbf{p}=(0,1,2)$.

Λυση. Συμφωνα με την εξ.(1.5) ειναι

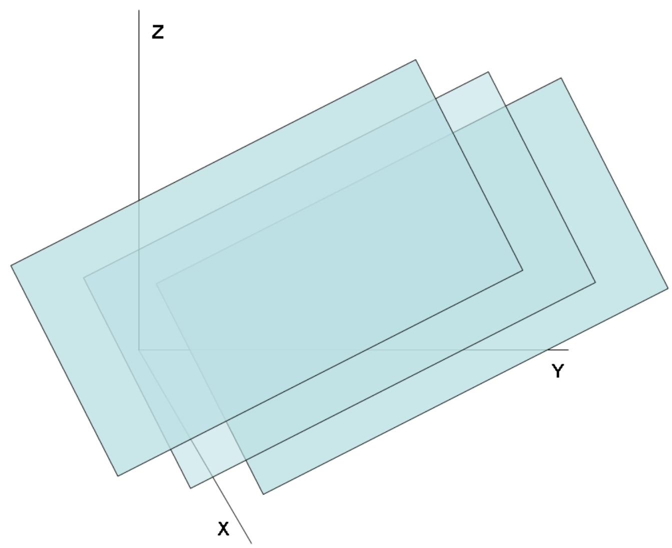
$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1-1 & 2-1 & 3-1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Ομως η οριζουσα εχει δυο ιδιες γραμμες, και αρα θα ειναι ταυτοτικα ιση με μηδεν, οποτε δεν μπορουμε να βρουμε την ζητουμενη εξισωση του επιπεδου. Αυτο ειναι αναμενομενο, διοτι τα διανυσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\mathbf{p}$ ειναι παραλληλα και ετσι απο τα A, B διερχεται απειρια επιπεδων παραλληλων στο $\mathbf{p}$.

1.2.13. Αποδειξτε την **1.1.5**, δηλ. οτι η εξισωση επιπεδου που διερχεται απο δυο σημεια (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) και ειναι παραλληλο σε δοθεν διανυσμα $\mathbf{p}$. ειναι

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0.$$

Λυση. Στο Σχ.14.5 απεικονιζονται τα δοθεντα σημεια (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), το δοθεν διανυσμα $\mathbf{p}$ και τυχον σημειο του επιπεδου (x, y, z). Σχηματιζουμε τα διανυσματα $\mathbf{r}_1 = (x-x_1, y-y_1, z-z_1)$, $\mathbf{r}_2 = (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$ τα οποια ειναι συνεπιπεδα με το $\mathbf{p}$.



Σχ.14.5

Ετσι το συνολο $\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}\}$ ειναι γραμμικα εξαρτημενο και η οριζουσα

$$\begin{vmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{p} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

θα πρεπει να ισουται με 0, που ειναι το ζητουμενο.

1.2.14. Να βρεθει η εξισωση του επιπεδου που διερχεται απο το σημειο $(1, 1, 1)$ και ειναι παραλληλο στα διανυσματα $\mathbf{p} = (1, 2, 3)$ και $\mathbf{q} = (3, 3, 3)$.

Λυση. Συμφωνα με την εξ.(1.6) ειναι

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 6y - 3x - 3z = 0.$$

1.2.15. Βρειτε την εξισωση του επιπεδου που διερχεται απο το σημειο $(1, 2, 0)$ και ειναι παραλληλο στα διανυσματα $\mathbf{p} = (1, 2, 3)$ και $\mathbf{q} = (1, 1, 1)$.

Λυση.Συμφωνα με την εξ.(1.6) ειναι

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2y - x - z - 3 = 0.$$

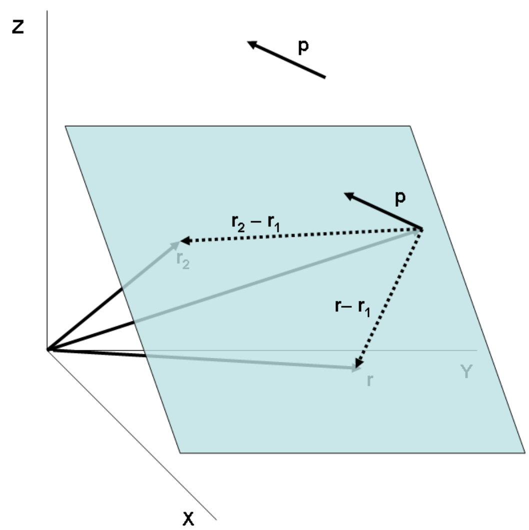
και σε διανυσματικη μορφη

$$\mathbf{r}(u, v) = \begin{bmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} + u \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + v \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1.2.16. Αποδειξτε την **1.1.6**, δηλ. οτι η εξισωση επιπεδου που διερχεται απο σημειο (x_1, y_1, z_1) και ειναι παραλληλο στα δοθεντα διανυσμα $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ ειναι

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = 0.$$

Λυση. Στο Σχ.14.6 απεικονιζεται το δοθεν σημειο (x_1, y_1, z_1), τα δοθεντα διανυσματα $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ και τυχον σημειο του επιπεδου (x, y, z). Εχουμε μετακινησει τα ελευθερα διανυσματα $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ ετσι ωστε να κεινται επι του επιπεδου. Σχηματιζουμε το διανυσμα $\mathbf{r} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$ το οποια ειναι συνεπιπεδο με τα $\mathbf{p}, \mathbf{q}$.



Σχ.14.6

Ετσι το συνολο $\{\mathbf{r}, \mathbf{p}, \mathbf{q}\}$ ειναι γραμμικα εξαρτημενο, οποτε η οριζουσα

$$\begin{vmatrix} \mathbf{r} \\ \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

θα πρεπει να ισουται με 0, και αυτη ειναι ακριβως η ζητουμενη εξισωση.

1.2.17. Δειξτε οτι το διανυσμα $\mathbf{p} = (1, 2, 1)$ ειναι καθετο στο επιπεδο $x + 2y + z + 10 = 0$.

Λυση. Το επιπεδο εχει $A = 1$, $B = 2$, $C = 1$ και $D = 10$. Αφου

$$\frac{1}{1} = \frac{2}{2} = \frac{1}{1}$$

το ζητουμενο προκυπτει αμεσα απο την (1.7)

1.2.18. Αποδειξτε οτι το διανυσμα $\mathbf{p} = (1, 2, 1)$ ειναι καθετο στο επιπεδο $2x+4y+2z+3 = 0$.

Λυση. Το επιπεδο εχει $A = 2$, $B = 4$, $C = 2$ και $D = 3$. Αφου

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

το ζητουμενο προκυπτει αμεσα απο την (1.7).

1.2.19. Να βρεθει η εξισωση του επιπεδου που διερχεται απο το σημειο $(3, -2, 4)$ και ειναι καθετο στο διανυσμα $\mathbf{p} = (2, 2, -3)$.

Λυση. Εστω οτι η ζητουμενη εξισωση ειναι $Ax + By + Cz + D$. Για να διερχεται το επιπεδο απο το $(3, -2, 4)$ θα ισχυει

$$3A - 2B + 4C + D = 0 \tag{1.17}$$

Επισης, απο την συνθηκη καθετοτητας, θα ισχυει

$$\frac{A}{2} = \frac{B}{2} = \frac{C}{-3}. \tag{1.18}$$

Οποτε, λυνοντας τις (1.17) και (1.18) παιρνουμε $A = \frac{1}{5}D$, $B = \frac{1}{5}D$, $C = -\frac{3}{10}D$, δηλ. η ζητουμενη εξισωση ειναι

$$\frac{D}{5}x + \frac{D}{5}y - \frac{3D}{10}z + D = 0$$

και το D μπορει να παρει αυθαιρετη τιμη. Θετοντας $D = 10$, τελικα παιρνουμε

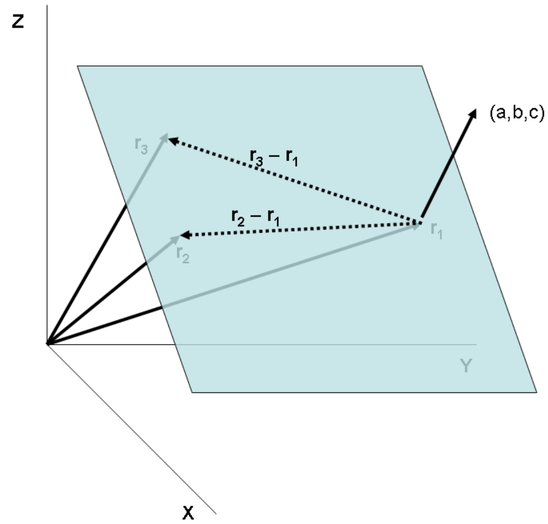
$$2x + 2y - 3z + 10 = 0.$$

1.2.20. Αποδειξτε την **1.1.9**, δηλ. οτι ενα διανυσμα $\mathbf{p} = (a, b, c)$ ειναι καθετο στο επιπεδο $E : Ax + By + Cz + D = 0$ ανν

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}.$$

Λυση. Στο Σχ.14.7 απεικονιζουμε τρια σημεια $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$

του επιπεδου E και τα αντιστοιχα διανυσματα $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$.



Σχ.14.7

Τα διανυσματα

$$\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$
$$\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1 = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$$

ανηκουν στο E. Ενα διανυσμα $\mathbf{q}$ ειναι καθετο στο E ανν ειναι καθετο στα $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1$. Ενα τετοιο διανυσμα ειναι το (A, B, C). Πραγματι, αφου τα (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) ανηκουν στο E, εχουμε

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$$
$$Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0$$

και με αφαιρεση κατα μελη εχουμε

$$A \cdot (x_2 - x_1) + B \cdot (y_2 - y_1) + C \cdot (z_2 - z_1) = 0$$

δηλ. $(A, B, C) \perp (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$. Με ομοιο τροπο δειχνουμε οτι $(A, B, C) \perp (\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1)$. Αρα $(A, B, C) \perp E$ και το $\mathbf{p}$ ειναι καθετο στο E ανν $\mathbf{p} \| (A, B, C)$ δηλ. ανν

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}.$$

1.2.21. Βρειτε την εξισωση του επιπεδου που διερχεται απο το σημειο $(1, 2, 0)$ και ειναι καθετο στο διανυσμα $\mathbf{p} = (1, 2, 3)$

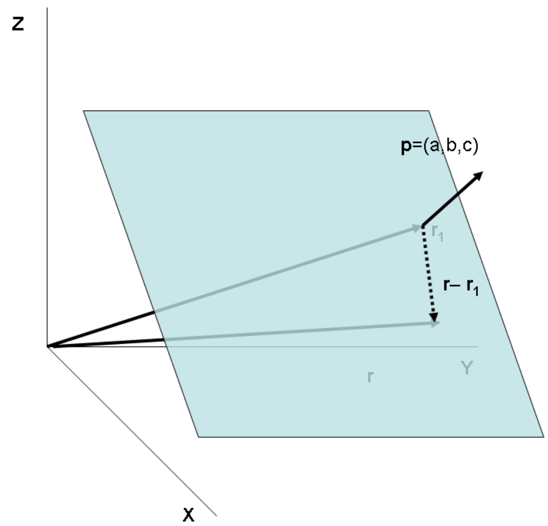
Λυση. Συμφωνα με την (1.8), η ζητουμενη εξισωση ειναι

$$1 \cdot (x - 1) + 2 \cdot (y - 2) + 3 \cdot (z - 3) = x + 2y + 3z - 14 = 0.$$

1.2.22. Αποδειξτε την **1.1.8**, δηλ. οτι το επιπεδο που διερχεται απο δοθεν σημειο (x_1, y_1, z_1) και ειναι καθετο σε δοθεν διανυσμα $\mathbf{p} = (a, b, c)$ ειναι

$$a \cdot (x - x_1) + b \cdot (y - y_1) + c \cdot (z - z_1) = 0$$

Λυση. Στο Σχ.14.8 απεικονιζεται το δοθεν σημειο (x_1, y_1, z_1), το δοθεν διανυσμα $\mathbf{p}$, και τυχον σημειο του επιπεδου (x, y, z). Σχηματιζουμε το διανυσμα $\mathbf{r} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$ το οποιο ειναι καθετο στο $\mathbf{p}$.



Σχ.14.8

Οποτε θα εχουμε $\mathbf{p} \cdot \mathbf{r} = 0$, δηλ.

$$a \cdot (x - x_1) + b \cdot (y - y_1) + c \cdot (z - z_1) = 0$$

που ειναι η ζητουμενη σχεση.

1.2.23. Αποδειξτε οτι το διανυσμα $\mathbf{p} = (1, 2, 1)$ ειναι παραλληλο στο επιπεδο $x + 2y - 5z + 3 = 0$.

Λυση. Αποδεικνυεται αμεσα απο την (1.10), αφου $1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-5) = 0$.

1.2.24. Αποδειξτε την **1.1.9**, δηλ. οτι το επιπεδο $E : Ax + By + Cz + D = 0$ ειναι παραλληλο στο διανυσμα $\mathbf{p} = (a, b, c)$ ανν

$$a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C = 0.$$

Λυση. Καθε διανυσμα παραλληλο στο E θα ειναι καθετο στο διανυσμα $\mathbf{q} = (A, B, C)$. Αν λοιπον το $\mathbf{p}$ ειναι παραλληλο στο E θα εχουμε

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{p} = Aa + Bb + Cc = 0$$

1.2.25. Δειξτε οτι τα επιπεδα $E_1 : 5x + 2y + z + 6 = 0$ και $E_2 : 10x + 4y + 2z = 0$ ειναι παραλληλα.

Λυση. Αυτο ισχυει, βασει της (1.10), διοτι

$$\frac{5}{10} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

1.2.26. Αποδειξτε οτι τα επιπεδα $x + 2y + z + 1 = 0$ και $2x + 4y + 2z - 5 = 0$ ειναι παραλληλα

Λυση. Αποδεικνυεται αμεσα απο την εξ.(1.10), αφου

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

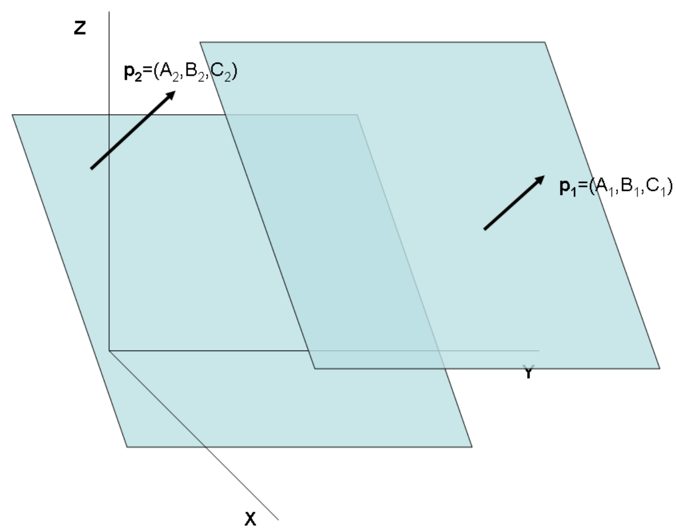
1.2.27. Αποδειξτε την **1.1.10**, δηλ. οτι δυο επιπεδα $E_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $E_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ ειναι *παραλληλα* ανν

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Λυση. Το E_1 ειναι καθετο στο $\mathbf{p}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ και το E_2 ειναι καθετο στο $\mathbf{p}_2 = (A_2, B_2, C_2)$. Εχουμε δε

$$E_1 \| E_2 \Leftrightarrow \mathbf{p}_1 \| \mathbf{p}_2$$

και $\mathbf{p}_1 \| \mathbf{p}_2$ ανν $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$. Δες και το Σχ.14.9.



Σχ.14.9

1.2.28. Αποδειξτε οτι τα επιπεδα $x + y + z + 1 = 0$ και $2x + y - 3z - 5 = 0$ ειναι καθετα.

Λυση. Αποδεικνυεται αμεσα απο την (1.11), αφου $1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) = 0$.

1.2.29. Αποδειξτε οτι τα επιπεδα $5x + 2y + z + 6 = 0$ και $x - y - 3z = 0$ ειναι καθετα μεταξυ τους.

Λυση. Αποδεικνυεται αμεσα απο την (1.11), αφου $5 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot (-3) = 0$.

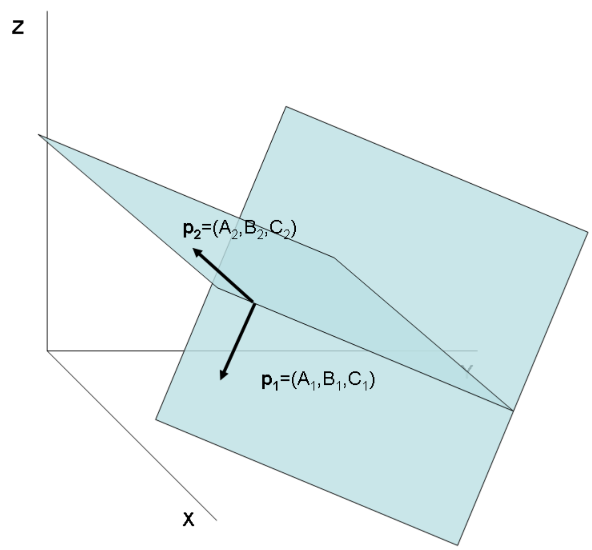
1.2.30. Αποδειξτε την **1.1.11**, δηλ. οτι δυο επιπεδα $E_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $E_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ ειναι καθετα μεταξυ τους ανν

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Λυση. Το E_1 ειναι καθετο στο $\mathbf{p}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ και το E_2 ειναι καθετο στο $\mathbf{p}_2 = (A_2, B_2, C_2)$. Εχουμε δε

$$E_1 \perp E_2 \Leftrightarrow \mathbf{p}_1 \perp \mathbf{p}_2$$

και $\mathbf{p}_1 \perp \mathbf{p}_2$ ανν $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$. Δες και το Σχ.14.1.10.



Σχ.14.10

1.2.31. Βρειτε την γωνια των επιπεδων $x + y - 4 = 0$ και $x - y = 0$.

Λυση . Η γωνια θ ικανοποιει

$$\cos\theta = \left| \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0}{\sqrt{1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2}} \right| = 0$$

δηλ. $\theta = \pi/2$ - τα επιπεδα ειναι καθετα μεταξυ τους.

1.2.32. Βρειτε την γωνια των επιπεδων $x + y + z = 0$ και $x - y + z - 5 = 0$.

Λυση. Η γωνια θ ικανοποιει

$$\cos\theta = \left| \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} \right| = \frac{1}{3}$$

οποτε $\arccos\left(\frac{1}{3}\right) = 1.2310$ ακτινια (περιπου $\frac{1.2310}{3.14159} \cdot 180 \approx 70^0$).

1.2.33. Βρειτε την γωνια μεταξυ των $5x - 2y + z + 1 = 0$ και $10x - 4y + 2z = 0$.

Λυση. Η ζητουμενη γωνια θ εχει συνημιτονο

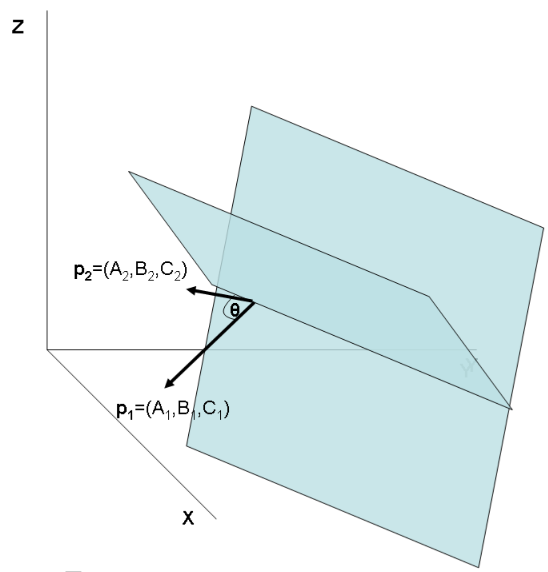
$$\cos\theta = \left| \frac{5 \cdot 10 + (-2) \cdot (-4) + 1 \cdot 2}{\sqrt{5^2 + 2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{10^2 + (-4)^2 + 2^2}} \right| = 1$$

δηλ. $\theta = 0$ και τα επιπεδα ειναι παραλληλα.

1.2.34. Αποδειξτε την **1.1.12**, δηλ. οτι η γωνια μεταξυ δυο επιπεδων E_1, E_2 δινεται απο την σχεση

$$\cos\theta = \left| \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \right|.$$

Λυση. Δειτε το Σχ.14.11. Η γωνια θ μεταξυ των δυο επιπεδων ειναι ιση με την γωνια των καθετων σε αυτα διανυσματων $\mathbf{p}_1 = (A_1, B_1, C_1)$, $\mathbf{p}_2 = (A_2, B_2, C_2)$.



Σχ.14.11

Αρα η θ δινεται απο την σχεση

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2}{||\mathbf{p}_1|| \cdot ||\mathbf{p}_2||} = \left| \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \right|$$

1.2.35. Βρειτε την εξισωση του επιπεδου που διερχεται απο το σημειο $(2, -3, 6)$ και ειναι παραλληλο στο επιπεδο $2x - 5y + 7 = 0$.

Λυση. Το ζητουμενο επιπεδο, λογω της συνθηκης παραλληλιας, θα εχει εξισωση

$$2x - 5y + D = 0.$$

Για να διερχεται δε απο το σημειο $(2, -3, 6)$ θα πρεπει να εχουμε

$$2 \cdot 2 - 5 \cdot (-3) + D = 0 \Rightarrow D = -19.$$

Δηλ. η ζητουμενη εξισωση ειναι $2x - 5y - 19 = 0$.

1.2.36. Βρειτε την εξισωση του επιπεδου που περναει απο το σημειο $(1, -2, 3)$ και ειναι παραλληλο στο επιπεδο $2x - 3y + 2z = 0$.

Λυση. Το ζητουμενο επιπεδο θα εχει εξισωση $2x - 3y + 2z + D = 0$ και θα πρεπει να ικανοποιει

$$2 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 + D = 0 \Rightarrow D = -14$$

οποτε η ζητουμενη εξισωση θα ειναι $2x - 3y + 2z - 14 = 0$.

1.2.37. Να βρεθει η εξισωση του επιπεδου που διερχεται απο τα σημεια $(1, 2, 3)$, $(3, 2, 1)$ και ειναι καθετο στο επιπεδο $4x - y + 2z - 7 = 0$.

Λυση. Το διανυσμα $\mathbf{p} = (4, -1, 2)$ θα ειναι παραλληλο στο ζητουμενο επιπεδο. Οποτε η ζητουμενη εξισωση ειναι

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1-3 & 2-2 & 3-1 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

δηλ. $2x + 12y + 2z - 32 = 0$.

1.2.38. Να βρεθει η εξισωση του επιπεδου που διερχεται απο το σημειο $(1, 2, -3)$ και ειναι καθετο στα επιπεδα

$$x + 3y - z = 0 \qquad \text{και} \qquad 3x - 2y + z - 5 = 0.$$

Λυση. Εστω οτι το ζητουμενο επιπεδο εχει εξισωση

$$Ax + By + Cz + 1 = 0.$$

(Πηραμε, χωρις βλαβη της γενικοτητας, $D = 1$). Απο τις συνθηκες καθετοτητας εχουμε

$$\begin{aligned} A + 3B - C &= 0 \\ 3A - 2B + C &= 0. \end{aligned}$$

Και επειδη το επιπεδο διερχεται απο το $(1, 2, -3)$ εχουμε επισης

$$A + 2B - 3C + 1 = 0.$$

Οι τρεις εξισωσεις δινουν το συστημα

$$\begin{aligned} A + 3B - C &= 0 \\ 3A - 2B + C &= 0 \\ A + 2B - 3C + 1 &= 0 \end{aligned}$$

το οποιο εχει λυση $A = -\frac{1}{26}, B = \frac{2}{13}, C = \frac{11}{26}$, δηλ. το ζητουμενο επιπεδο εχει εξισωση

$$-\frac{1}{26}x + \frac{2}{13}y + \frac{11}{26}z + 1 = 0$$

και πιο απλα

$$-x + 2y + 11z + 26 = 0.$$

1.2.39. Να βρεθει η τομη των επιπεδων

$$\begin{aligned} E_1 &: 5x + 3y - 11z + 72 = 0 \\ E_2 &: 4x - 5y + 7z + 26 = 0 \\ E_3 &: 6x + 11y - 3z + 66 = 0 \end{aligned}$$

Λυση. Λυνοντας το παραπανω συστημα βλεπουμε οτι τα επιπεδα τεμνονται στο σημειο $(-10, 0, 2)$. Αυτα θα μπορουσαμε να το καταλαβουμε και απο το γεγονος οτι

$$rank\left(\begin{bmatrix} 5 & 3 & -11 \\ 4 & -5 & 7 \\ 6 & 11 & 11 \end{bmatrix}\right) = rank\begin{pmatrix} 5 & 3 & -11 & 72 \\ 4 & -5 & 7 & 26 \\ 6 & 11 & 11 & 66 \end{pmatrix} = 3.$$

1.2.40. Να βρεθει η τομη των επιπεδων

$$\begin{aligned} E_1 &: 5x + 3y - 11z + 72 = 0 \\ E_2 &: 4x - 5y + 7z + 26 = 0 \\ E_3 &: 6x + 11y - 3z + 66 = 0 \end{aligned}$$

Λυση. Λυνοντας το παραπανω συστημα βλεπουμε οτι τα επιπεδα τεμνονται στο σημειο $(-10, 0, 2)$. Αυτα θα μπορουσαμε να το καταλαβουμε και απο το γεγονος οτι

$$rank\left(\begin{bmatrix} 5 & 3 & -11 \\ 4 & -5 & 7 \\ 6 & 11 & 11 \end{bmatrix}\right) = rank\begin{pmatrix} 5 & 3 & -11 & 72 \\ 4 & -5 & 7 & 26 \\ 6 & 11 & 11 & 66 \end{pmatrix} = 3.$$

1.2.41. Να βρεθει η τομη των επιπεδων

$$\begin{aligned} E_1 &: 5x + 3y - 11z + 72 = 0 \\ E_2 &: 4x - 5y + 7z + 26 = 0 \\ E_3 &: 6x + 11y - 3z + 66 = 0 \\ E_4 &: x + 2y + z + 8 = 0 \end{aligned}$$

Λυση. Λυνοντας το συστημα των τριων πρωτων εξισωσεων βλεπουμε οτι εχει μοναδικη λυση την $(x, y, z) = (-10, 0, 2)$. Κατοπιν παρατηρουμε οτι αυτη ικανοποιει και την τεταρτη εξισωση. Αρα τα τεσσερα επιπεδα διερχονται απο το σημειο $(-10, 0, 2)$.

1.2.42. Δινονται τα επιπεδα $E_1 : 5x + 2y + z + 1 = 0$ και $E_2 : x - y - 3z = 0$. Να βρεθει η αξονικη δεσμη αυτων.

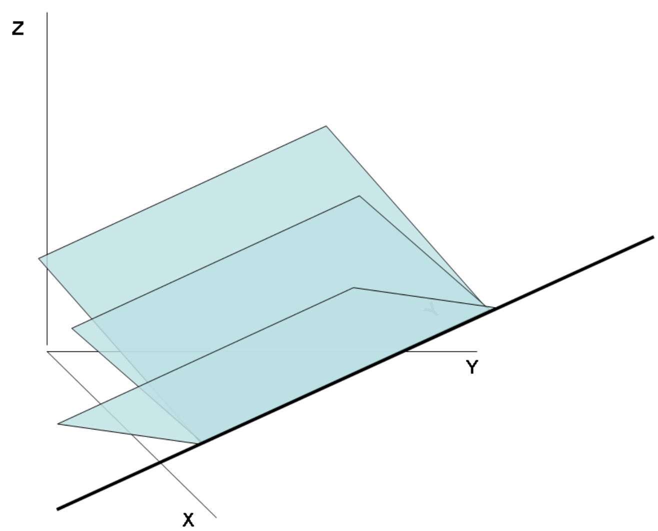
Λυση. Η αξονικη δεσμη περιεχει ολα τα επιπεδα με εξισωση

$$\begin{aligned} &\kappa \cdot (5x + 2y + z + 1) + (1 - \kappa) \cdot (x - y - 3z) = \\ &(4\kappa + 1) \cdot x + (3\kappa - 1) \cdot y + (4\kappa - 3) \cdot z + \kappa = 0. \end{aligned}$$

Π.χ., για $\kappa = 1/2$ παιρνουμε το επιπεδο

$$\left(4 \cdot \frac{1}{2} + 1\right) \cdot x + \left(3 \cdot \frac{1}{2} - 1\right) \cdot y + \left(4 \cdot \frac{1}{2} - 3\right) \cdot z + \kappa = 3x + \frac{1}{2}y - z + \kappa = 0$$

το οποιο τεμνεται με τα E_1 και E_2 κατα μια ευθεια. Για $\kappa = 1$ παιρνουμε το E_1 και για $\kappa = 0$ παιρνουμε το E_2 (δες και το Σχ.14.12).



Σχ.14.12

1.2.43. Βρειτε την εξισωση του επιπεδου που περναει απο την τομη των επιπεδων

$$E_1 : 2x - 7y + 4z - 3 = 0,$$
$$E_2 : 3x - 5y + 4z + 11 = 0$$

και απο το σημειο $(-2, 1, 3)$.

Λυση. Το ζητουμενο επιπεδο ανηκει στην αξονικη δεσμη των δυο αλλων και αρα εχει εξισωση

$$\kappa \cdot (2x - 7y + 4z - 3) + (1 - \kappa) \cdot (3x - 5y + 4z + 11) = 0 \Rightarrow$$
$$(3 - \kappa) \cdot x + (-5 - 2\kappa) \cdot y + 4 \cdot z + (11 - 14\kappa) = 0.$$

Για να περναει απο το $(-2, 1, 3)$ πρεπει να εχουμε

$$(3 - \kappa) \cdot (-2) + (-5 - 2\kappa) \cdot 1 + 4 \cdot 3 + (11 - 14\kappa) = 0 \tag{1.19}$$

απο το οποιο προκυπτει οτι $\kappa = \frac{6}{7}$. Αντικαθιστωντας στην (1.19) βλεπουμε οτι το ζητουμενο επιπεδο εχει εξισωση

$$\left(3 - \frac{6}{7}\right) \cdot x + \left(-5 - 2 \cdot \frac{6}{7}\right) \cdot y + 4z + \left(11 - 14 \cdot \frac{6}{7}\right) = 0$$

και απλουστερα

$$15x - 47y + 28z - 7 = 0.$$

1.2.44. Να βρεθει η εξισωση του επιπεδου που διερχεται απο την τομη των επιπεδων

$$E_1 : 3x - 4y + z - 12 = 0$$
$$E_2 : 4x - 7y + 3z + 4 = 0$$

και ειναι καθετο στο επιπεδο

$$5x + 2y - z + 30 = 0.$$

Λυση. Το ζητουμενο επιπεδο ανηκει στην αξονικη δεσμη των δυο αλλων και αρα εχει εξισωση

$$\kappa \cdot (3x - 4y + z - 12) + (1 - \kappa) \cdot (4x - 7y + 3z + 4) = 0 \Rightarrow$$
$$(4 - \kappa) \cdot x + (-7 + 3\kappa) \cdot y + (3 - 2\kappa) \cdot z + (4 - 16\kappa) = 0.$$

Για να ειναι δε καθετο στο τελευταιο επιπεδο, πρεπει να εχουμε

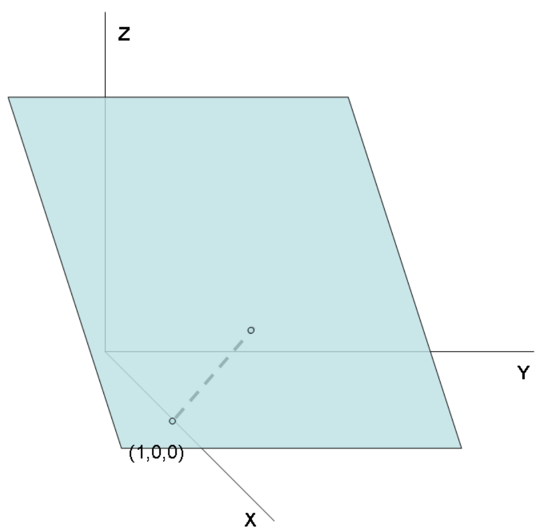
$$(4 - \kappa) \cdot 5 + (-7 + 3\kappa) \cdot 2 + (3 - 2\kappa) \cdot (-1) = 0 \tag{1.20}$$

απο το οποιο προκυπτει οτι $\kappa = -1$. Αντικαθιστωντας στην (1.20) βλεπουμε οτι το ζητουμενο επιπεδο εχει εξισωση

$$5x - 10y + 5z + 20 = 0.$$

1.2.45. Να βρεθει η αποσταση του επιπεδου $E : 5x + 2y + z + 1 = 0$ απο το σημειο $M\,(1, 0, 0)$

Λυση. Δες και το Σχ.14.13.



Σχ.14.13

Εφαρμοζοντας την εξ.(1.14) παιρνουμε

$$d\,(M, E) = \frac{|5 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1|}{\sqrt{5^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{30}} = \sqrt{\frac{6}{5}}.$$

1.2.46. Βρειτε την αποσταση του σημειου $M\,(-2, 2, 3)$ απο το επιπεδο $E : 8x - 4y - z - 8 = 0$.

Λυση. Εφαρμοζοντας την εξ.(1.14) παιρνουμε

$$d\,(M, E) = \frac{|8 \cdot (-2) - 4 \cdot 2 - 1 \cdot 3 - 8|}{\sqrt{8^2 + 4^2 + 1^2}} = \frac{35}{9}.$$

1.2.47. Βρειτε την αποσταση των επιπεδων $E_1 : 2x - 3y - 6z - 14 = 0$ και $E_2 : 2x - 3y - 6z + 7 = 0$.

Λυση. Παρατηρουμε οτι τα επιπεδα ειναι παραλληλα. Οποτε $d(E_1, E_2) = d(M, E_2)$ οπου M ειναι τυχον σημειο του E_1. Μπορουμε να παρουμε ενα τετοιο σημειο θετοντας $x = 0, y = 0$ και υπολογιζοντας

$$z = \frac{2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 - 14}{6} = -\frac{14}{6}.$$

Τοτε

$$d(E_1, E_2) = d(M, E_2) = \frac{\left|2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 - 6 \cdot \frac{-14}{6} + 7\right|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}} = 3$$

1.2.48. Βρειτε την εξισωση των επιπεδων που ειναι παραλληλα στο $E_1 : 2x - 3y - 6z - 14 = 0$ και εχουν αποσταση 5 απο την αρχη των αξονων.

Λυση. Το ζητουμενο επιπεδο θα ειναι (λογω της συνθηκης παραλληλιας) $E_2 : 2x - 3y - 6z + D = 0$. Απο την συνηκη αποστασης θα εχουμε

$$d(0, E_2) = \frac{|2 \cdot 0 - 3 \cdot 0 - 6 \cdot 0 + D|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}} = 5 \Rightarrow D = \pm 35$$

Αρα υπαρχουν *δυο* ζητουμενα επιπεδα, τα

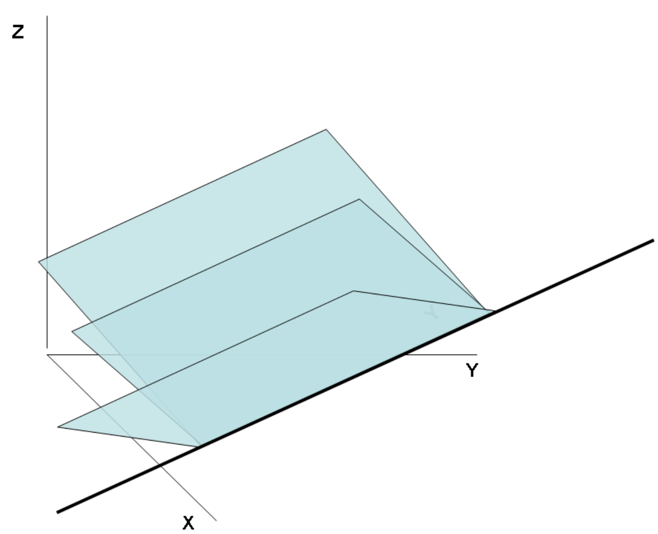
$$E_{21} : 2x - 3y - 6z + 35 = 0 \qquad \text{και} \qquad E_{21} : 2x - 3y - 6z - 35 = 0$$

1.2.49. Βρειτε την εξισωση του επιπεδου που ειναι παραλληλο στο επιπεδο xy και απεχει 3 μοναδες απο αυτο.

Λυση. Το επιπεδο xy ειναι το $E_1 : z = 0$. Απο την συνθηκη παραλληλιας, το ζητουμενο επιπεδο E_2 θα εχει εξισωση $z + D = 0$ και ενα σημειο αυτου θα ειναι το $(0, 0, -D)$. Απο την συνθηκη αποστασης

$$d(E_1, E_2) = \frac{|0 \cdot 0 - 0 \cdot 0 - 0 \cdot 0 + D|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = 3 \Rightarrow D = \pm 3$$

Αρα υπαρχουν *δυο* ζητουμενα επιπεδα, τα $E_{21} : z + 3 = 0$ και $E_{22} : z - 3 = 0$ (δες και το Σχ.14.14).



Σχ.14.14

1.2.50. Βρειτε την εξισωση των επιπεδων που ειναι παραλληλα στο $E_1 : 4x-4y+7z-3=0$ και απεχουν 4 μοναδες απο το σημειο $M\,(4,1,-2)$.

Λυση. Το ζητουμενο επιπεδο E_1 θα ειναι (λογω της συνθηκης παραλληλιας) $E_2 : 4x-4y+7z+D=0$. Απο την συνηκη αποστασης θα εχουμε

$$
\begin{aligned}
d\,(M,E) &= \frac{|4\cdot 4-4\cdot 1+7\cdot(-2)+D|}{\sqrt{4^2+4^2+7^2}} = 4 \Rightarrow \\
\frac{|D-2|}{9} &= 4 \Rightarrow (D-2=36 \text{ η } -D+2=36) \Rightarrow \\
D &= 38 \text{ η } D=-34
\end{aligned}
$$

Τελικα υπαρχουν *δυο* ζητουμενα επιπεδα, τα

$$E_{21} : 4x-4y+7z+38=0 \qquad \text{και} \qquad E_{22} : 4x-4y+7z-34=0$$

1.2.51. Βρειτε ενα σημειο M το οποιο κειται στον αξονα των y και απεχει ισες αποστασεις απο τα επιπεδα $E_1 : 2x+3y+6z-6=0$ και $E_2 : 8x+9y-72z+73=0$.

Λυση. Το ζητουμενο M ειναι της μορφης $(0,y,0)$ και πρεπει να ικανοποιει

$$
\begin{aligned}
d\,(M,E_1) &= d\,(M,E_2) \Rightarrow \\
\frac{|2\cdot 0+3\cdot y+6\cdot 0-6|}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}} &= \frac{|8\cdot 0+9\cdot y+72\cdot 0+73|}{\sqrt{8^2+9^2+72^2}} \Rightarrow \\
\frac{|3\cdot y-6|}{7} &= \frac{|9\cdot y+73|}{73}
\end{aligned}
$$

Η τελευταια εξισωση εχει δυο λυσεις: απο την

$$\frac{3\cdot y-6}{7} = \frac{9\cdot y+73}{73}$$

παιρνουμε $y=\frac{73}{12}$ και απο την

$$\frac{3\cdot y-6}{7} = -\frac{9\cdot y+73}{73}$$

παιρνουμε $y=-\frac{73}{282}$. Τελικα υπαρχουν δυο τετοια σημεια: το $M_1\,(0,73/12,0)$ και το $M_2\,(0,-73/282,0)$.

1.2.52. Εστω σημειο A επι του αξονα των x, B επι του αξονα των y και C επι του αξονα των z. Η θεση των A,B,C μεταβαλλεται, αλλα με τετοιο τροπο ωστε να ισχυει παντα

$$\frac{1}{OA}+\frac{1}{OB}+\frac{1}{OC}=1. \tag{1.21}$$

Να δειχτει οτι το επιπεδο που οριζουν τα A,B,C διερχεται απο σταθερο σημειο.

Λυση. Η εξισωση του επιπεδου που οριζουν τα A,B,C ειναι

$$\frac{x}{OA}+\frac{y}{OB}+\frac{z}{OC}=1. \tag{1.22}$$

Επισης, απο τα δεδομενα εχουμε

$$\frac{1}{OA}+\frac{1}{OB}+\frac{1}{OC}=1.$$

Αφαιρωντας την (1.21) απο την (1.22) παιρνουμε (για τα σημεια που ανηκουν στο επιπεδο)

$$\frac{x-1}{OA}+\frac{y-1}{OB}+\frac{z-1}{OC}=0$$

και αυτη εξισωση επαληθευεται απο το σημειο $(x,y,z)=(1,1,1)$. Αρα, για οποιαδηποτε θεση των A,B,C το επιπεδο που αυτα οριζουν διερχεται απο το $(1,1,1)$.

1.2.53. Αποδειξτε την **1.1.15**, δηλ. οτι η αποσταση του επιπεδου $E: Ax+By+Cz+D=0$ απο το σημειο (x_1,y_1,z_1) ειναι

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Λυση. (Αυτη η ασκηση απαιτει την εξισωση ευθειας, η οποια δινεται στο Κεφαλαιο 2.) Εστω επιπεδο $E_1: Ax+By+Cz+D=0$ και σημειο $M_1:(x_1,y_1,z_1)$. Το διανυσμα το καθετο στο E_1 ειναι το $\mathbf{p}=(A,B,C)$. Η ευθεια l_1 η οποια διερχεται απο το M_1 και ειναι παραλληλη στο $\mathbf{p}$ ειναι η

$$\frac{x-x_1}{A}=\frac{y-y_1}{B}=\frac{z-z_1}{C}$$

και το σημειο τομης αυτης με το επιπεδο ειναι το (x_2,y_2,z_2) που ειναι η λυση του συστηματος

$$\begin{aligned} Ax+By+Cz+D&=0\\ \frac{x-x_1}{A}&=\frac{y-y_1}{B}\\ \frac{y-y_1}{B}&=\frac{z-z_1}{C}\end{aligned}$$

Λυνοντας το συστημα παιρνουμε

$$\begin{aligned} x_2&=-\frac{1}{A^2+B^2+C^2}\left(AD-B^2x_1-C^2x_1+ABy_1+ACz_1\right)\\ y_2&=-\frac{1}{A^2+B^2+C^2}\left(BD-A^2y_1-C^2y_1+ABx_1+BCz_1\right)\\ z_2&=-\frac{1}{A^2+B^2+C^2}\left(CD-A^2z_1-B^2z_1+ACx_1+BCy_1\right)\end{aligned}$$

και υπολογιζοντας την αποσταση $d(M_1,M_2)$ εχουμε

$$d(M_1,M_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}.$$

Μετα απο επιπονους αλλα προφανεις υπολογισμους προκυπτει οντως

$$d(M_1,E_1)=d(M_1,M_2)=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

1.3 Αλυτες Ασκησεις

1.3.1. Βρειτε την εξισωση του επιπεδου που διερχεται απο τα σημεια $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$. Σχεδιαστε το επιπεδο.
Απ. $x+y+z-1=0$.

1.3.2. Βρειτε την εξισωση του επιπεδου που διερχεται απο τα σημεια $(1,2,3)$, $(3,1,-1)$, $(1,1,1)$. Σχεδιαστε το επιπεδο.
Απ. $4y-2x-2z=0$.

1.3.3. Βρειτε την εξισωση του επιπεδου που διερχεται απο τα σημεια $(1,1,-1)$, $(-2,-2,2)$, $(1,-1,2)$. Σχεδιαστε το επιπεδο.
Απ. $9y-3x+6z=0$.

1.3.4. Να βρεθει η εξισωση του επιπεδου που διερχεται απο τα σημεια $(2,4,8)$, $(-3,1,5)$, $(6,-2,7)$. Σχεδιαστε το επιπεδο.
Απ. $42z-17y-15x-238=0$.

1.3.5. Σχεδιαστε τα επιπεδα και βρειτε το σημειο τομης αυτων.

$$\begin{aligned} x+2y+z-1&=0\\ 4x+2y+z+1&=0\\ x+y+4z-2&=0 \end{aligned}$$

Απ. $x=-\frac{2}{3}, y=\frac{4}{7}, z=\frac{11}{21}$.

1.3.6. Σχεδιαστε τα επιπεδα και βρειτε το σημειο τομης αυτων.

$$\begin{aligned} x+2y+2z-2&=0\\ 3x+2y+4z-1&=0\\ x+2y+4z+1&=0 \end{aligned}$$

Απ. $x=1, y=2, z=-\frac{3}{2}$.

1.3.7. Σχεδιαστε τα επιπεδα και βρειτε το σημειο τομης αυτων.

$$\begin{aligned} x+2y+2z-2&=0\\ 3x+2y+4z-1&=0\\ 4x+4y+6z-5&=0 \end{aligned}$$

Απ. Τα επιπεδα δεν τεμνονται.

1.3.8. Βρειτε την εξισωση του επιπεδου που διερχεται απο τα σημεια $(1,2,3)$, $(3,1,-1)$ και ειναι παραλληλο στο διανυσμα $\mathbf{p}=(1,2,1)$. Σχεδιαστε το επιπεδο.
Απ. $7x-6y+5z-10=0$.

1.3.9. Βρειτε την εξισωση του επιπεδου που διερχεται απο τα σημεια $(2,2,3)$, $(1,1,2)$ και ειναι παραλληλο στο διανυσμα $\mathbf{p}=(1,1,1)$. Σχεδιαστε το επιπεδο.
Απ. $z-y-1=0$.

1.3.10. Βρειτε την εξισωση του επιπεδου που διερχεται απο τα σημεια $(2,2,3)$, $(2,1,2)$ και ειναι παραλληλο στον αξονα των y. Σχεδιαστε το επιπεδο.

Απ. $x+z-5=0$.

1.3.11. Βρειτε την εξισωση του επιπεδου που διερχεται απο το σημειο $(2,2,3)$ και ειναι παραλληλο στα διανυσματα $(2,1,2)$ και $(1,1,0)$. Σχεδιαστε το επιπεδο.

Απ. $2y-2x+z-3=0$.

1.3.12. Βρειτε την εξισωση του επιπεδου που διερχεται απο το σημειο $(1,1,3)$ και ειναι παραλληλο στα διανυσματα $(2,1,2)$ και $(1,1,0)$. Σχεδιαστε το επιπεδο.

Απ. $2y-2x+z-3=0$.

1.3.13. Βρειτε την εξισωση του επιπεδου που διερχεται απο το σημειο $(1,0,1)$ και ειναι παραλληλο στα διανυσματα $(2,1,2)$ και $(1,1,0)$. Σχεδιαστε το επιπεδο.

Απ. $2y-2x+z+1=0$.

1.3.14. Βρειτε την εξισωση του επιπεδου που διερχεται απο το σημειο $(1,-5,4)$ και ειναι παραλληλο στο επιπεδο $4x-7z+6=0$. Σχεδιαστε το επιπεδο.

Απ. $2y-2x+z+1=0$.

1.3.15. Δειξτε οτι το επιπεδο $2x-2y+z+1=0$ ειναι καθετο στο διανυσμα $(2,-2,1)$.

1.3.16. Δειξτε οτι το επιπεδο $x+y+3z+10=0$ ειναι καθετο στο διανυσμα $(1,1,3)$.Υπαρχει αλλο διανυσμα καθετο στο ιδιο επιπεδο;

1.3.17. Δειξτε οτι το επιπεδο $x+y+z-3=0$ ειναι παραλληλο στο διανυσμα $(1,1,-2)$. Σχεδιαστε το επιπεδο.

1.3.18. Δειξτε οτι το επιπεδο $x+y+z-3=0$ ειναι παραλληλο στο διανυσμα $(2,1,-3)$. Σχεδιαστε το επιπεδο.

1.3.19. Δειξτε οτι το επιπεδο $2x-y+z+1=0$ ειναι παραλληλο στο διανυσμα $(2,-1,-5)$.Βρειτε ενα αλλο διανυσμα παραλληλο στο ιδιο επιπεδο.

1.3.20. Δειξτε οτι το επιπεδο $x+y+z-3=0$ ειναι καθετο στο επιπεδο $x+y-2z=0$. Σχεδιαστε τα επιπεδα.

1.3.21. Δειξτε οτι το επιπεδο $x+y+z-3=0$ ειναι καθετο στο διανυσμα $2x+y-3z+12=0$. Σχεδιαστε τα επιπεδα.

1.3.22. Βρειτε την εξισωση του επιπεδου που διερχεται απο το σημειο $(2,-3,6)$ και ειναι παραλληλο στο επιπεδο $2x-5y+7=0$. Σχεδιαστε το επιπεδο.

Απ. $2x-5y-19=0$.

1.3.23. Βρειτε την εξισωση του επιπεδου που περναει απο το σημειο $(3,4,-11)$ και ειναι παραλληλο στο επιπεδο $z=0$. Σχεδιαστε το επιπεδο.

Απ. $z+11=0$.

1.3.24. Βρειτε την εξισωση του επιπεδου που περναει απο το σημειο $(-1,2,4)$ και ειναι παραλληλο στο επιπεδο $2x-3y-5z+6=0$. Σχεδιαστε το επιπεδο.

Απ. $2x-3y-5z+28=0$.

1.3.25. Βρειτε την εξισωση του επιπεδου που διερχεται απο το σημειο $(4, -2, 1)$ και ειναι καθετο στο διανυσμα $\mathbf{p} = (7, 2, -3)$. Σχεδιαστε το επιπεδο.
Απ. $7x + 2y - 3z - 21 = 0$.

1.3.26. Να βρεθει η εξισωση του επιπεδου που διερχεται απο το σημειο $(3, -2, 4)$ και ειναι καθετο στο διανυσμα $\mathbf{p} = (2, 2, -3)$. Σχεδιαστε το επιπεδο.
Απ. $2x + 2y - 3z + 10 = 0$.

1.3.27. Βρειτε την εξισωση του επιπεδου που διερχεται απο το σημειο $(2, 3, 5)$ και ειναι καθετο στο διανυσμα $(4, 6, 0)$. Σχεδιαστε το επιπεδο.
Απ. $2x + 4y - 13 = 0$.

1.3.28. Βρειτε την εξισωση του επιπεδου που διερχεται απο το σημειο $(3, -5, -2)$ και ειναι καθετο στο διανυσμα $(4, -6, 1)$. Σχεδιαστε το επιπεδο.
Απ. $4x - 6y + z - 40 = 0$.

1.3.29. Βρειτε την εξισωση του επιπεδου που διερχεται απο τα σημεια $(1, -2, 2)$, $(-3, 1, -2)$ και ειναι καθετο στο επιπεδο $2x + y - z + 6 = 0$. Σχεδιαστε τα επιπεδα.
Απ. $x - 12y - 10z - 5 = 0$.

1.3.30. Βρειτε την εξισωση του επιπεδου που περναει απο τα σημεια $(2, 2, 2)$ και $(0, -2, 0)$ ειναι καθετο στο επιπεδο $x - 2y + 3z - 7 = 0$. Σχεδιαστε τα επιπεδα.
Απ. $7x - 6y - z - 7 = 0$.

1.3.31. Βρειτε την εξισωση του επιπεδου που περναει απο τα σημεια $(2, 2, 2)$ και $(0, -2, 0)$ και ειναι καθετο στο επιπεδο $x - 2y + 3z - 7 = 0$. Σχεδιαστε τα επιπεδα.
Απ. $4x - y - 2z - 2 = 0$.

1.3.32. Βρειτε την εξισωση του επιπεδου που περναει απο τα σημεια $(2, 1, 1)$ και $(3, 2, 2)$ και ειναι καθετο στο επιπεδο $x + 2y - 5z - 3 = 0$. Σχεδιαστε τα επιπεδα.
Απ. $7x - 6y - z - 7 = 0$.

1.3.33. Βρειτε την εξισωση του επιπεδου που περναει απο τα σημεια $(2, -1, 6)$ και $(1, -2, 4)$ και ειναι καθετο στο επιπεδο $x - 2y - 2z + 9 = 0$. Σχεδιαστε τα επιπεδα.
Απ. $2x + 4y - 3z + 18 = 0$.

1.3.34. Βρειτε την εξισωση του επιπεδου που περναει απο το σημειο $(3, -2, 4)$ και ειναι καθετο στα επιπεδα $7x - 3y + z - 5 = 0$ και $4x - y - z + 9 = 0$. Σχεδιαστε τα επιπεδα.
Απ. $4x + 11y + 5z - 10 = 0$.

1.3.35. Βρειτε την εξισωση του επιπεδου που περναει απο το σημειο $(1, -4, 2)$ και ειναι καθετο στα επιπεδα $2x + 5y - z - 5 = 0$ και $4x - 7y + 3z + 9 = 0$. Σχεδιαστε τα επιπεδα.
Απ. $4x - 5y - 17z + 10 = 0$.

1.3.36. Βρειτε την εξισωση του επιπεδου που περναει απο το σημειο $(3, -2, 1)$ και ειναι καθετο στα επιπεδα $3y - 5z + 1 = 0$ και $x = 0$. Σχεδιαστε τα επιπεδα.
Απ. $5y + 3z + 7 = 0$.

1.3.37. Βρειτε την εξισωση του επιπεδου που περναει απο το σημειο $(1,1,2)$ και ειναι καθετο στα επιπεδα $2x-2y-4z-6=0$ και $3x+y+6z-4=0$. Σχεδιαστε τα επιπεδα.
Απ. $x+3y-z-2=0$.

1.3.38. Βρειτε την γωνια των επιπεδων $6x+3y-2z=0$ και $x+2y+6z-12=0$.
Απ. 90^o.

1.3.39. Βρειτε την γωνια των επιπεδων $2x+5y+7z-1=0$ και $3x-4y+2z=0$.
Απ. 90^o.

1.3.40. Βρειτε την γωνια των επιπεδων $3x+2y+5z+6=0$ και $x+4y+3z-8=0$.
Απ. $\arccos\theta=\sqrt{\frac{13}{19}}$.

1.3.41. Βρειτε την γωνια των επιπεδων $3x+4y-z+1=0$ και $x-2y-5z+3=0$.
Απ. 90^o

1.3.42. Για ποια τιμη του κ ειναι τα επιπεδα $3x+4y+\kappa z-26=0$ και $4x-3y+4z+1=0$ καθετα μεταξυ τους;
Απ. $\kappa=0$.

1.3.43. Να εξεταστει η φυση της τομης των επιπεδων

$$\begin{aligned} 5x+3y-11z+72&=0\\ 4x-5y+7z+26&=0\\ 6x+11y-3z&=-66 \end{aligned}$$

Απ. Αυτα τεμνονται στο σημειο $(-10,0,2)$.

1.3.44. Να εξεταστει η φυση της τομης των επιπεδων

$$\begin{aligned} 5x+3y-11z+72&=0\\ 4x-5y+7z+26&=0\\ 6x+11y-3z&=-66\\ x+2y+z+8&=0 \end{aligned}$$

Απ. Αυτα τεμνονται στο σημειο $(-10,0,2)$.

1.3.45. Να εξεταστει η φυση της τομης των επιπεδων

$$\begin{aligned} x+y-3z+5&=0\\ 4x-5y+z+2&=0\\ 3x-6y+4z-3&=0 \end{aligned}$$

Απ. Αυτα τεμνονται στην ευθεια $x(t)=\frac{14}{9}t-3, y(t)=\frac{13}{9}t-2, z(t)=t$.

1.3.46. Βρειτε την εξισωση του επιπεδου που ειναι παραλληλο στο $4x-4y+7z-3=0$ και απεχει 4 μοναδες απο το σημειο $(4,1,-2)$. Σχεδιαστε τα επιπεδα.
Απ. $4x-4y+7z+38=0$, $4x-4y+7z-34=0$.

1.3.47. Βρειτε την εξισωση του επιπεδου που περναει απο την ευθεια τομης των $2x - 7y + 4z - 3 = 0$, $3x - 5y + 4z + 11 = 0$ και απο το σημειο $(-2, 1, 3)$. Σχεδιαστε τα επιπεδα.
Απ. $15x - 47y + 28z - 7 = 0$.

1.3.48. Βρειτε την εξισωση του επιπεδου που περναει απο την ευθεια τομης των $3x - 4y + 2z - 6 = 0$, $2x + 4y - 2z + 7 = 0$ και απο το σημειο $(1, 2, 3)$. Σχεδιαστε τα επιπεδα.
Απ. $43x - 24y + 12z - 31 = 0$.

1.3.49. Βρειτε την εξισωση του επιπεδου που περναει απο την ευθεια τομης των $2x - y + 2z - 6 = 0$, $3x - 6y + 2z - 12 = 0$ και τεμνει τον αξονα των x στο σημειο $(6, 0, 0)$. Σχεδιαστε τα επιπεδα.
Απ. $x - 5y - z = 0$.

1.3.50. Βρειτε την εξισωση του επιπεδου που περναει απο το σημειο $(1, -2, 3)$ και απο την ευθεια

$$\begin{aligned} 2x - 3y + z - 3 &= 0 \\ x + 3y + 2z + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Σχεδιαστε το επιπεδο και την ευθεια.
Απ. $2x + 15y + 7z + 7 = 0$.

1.3.51. Βρειτε την αποσταση του σημειου $(-2, 2, 3)$ απο το επιπεδο $8x - 4y - z - 8 = 0$.
Απ. $35/9$.

1.3.52. Υπολογιστε την αποσταση του επιπεδου $2x + y - 2z - 12 = 0$ απο το σημειο $(-2, 2, 3)$.
Απ. $20/3$.

1.3.53. Υπολογιστε την αποσταση του επιπεδου $2x + 2y - z - 11 = 0$ απο το σημειο $(1, 2, 4)$.
Απ. $6/\sqrt{29}$.

1.3.54. Υπολογιστε την αποσταση του επιπεδου $6x - 3y + 2z - 13 = 0$ απο το σημειο $(7, 3, 4)$.
Απ. 4.

1.3.55. Υπολογιστε την αποσταση του σημειου $(0, 1, -3)$ απο το επιπεδο που οριζεται απο τα σημεια $(3, 1, -5)$, $(8, 3, 3)$, $(-2, -1, 4)$
Απ. $6/\sqrt{29}$.

1.3.56. Βρειτε την αποσταση των επιπεδων $2x - 3y - 6z - 14 = 0$ και $2x - 3y - 6z + 7 = 0$. Σχεδιαστε τα επιπεδα.
Απ. 3.

1.3.57. Να βρεθει η αποσταση των επιπεδων $3x + 2y - 6z - 35$ και $3x + 2y - 6z + 14 = 0$.
Απ. $d = 7$.

1.3.58. Βρειτε την αποσταση των επιπεδων $x + y + z = 0$ και $x - y + z = 1$. Σχεδιαστε τα επιπεδα.

Απ. 0.

1.3.59. Βρειτε την εξισωση των επιπεδων που ειναι παραλληλα στο $2x - 3y - 6z - 14 = 0$ και εχουν αποσταση 5 απο την αρχη των αξονων. Σχεδιαστε τα επιπεδα.

Απ. $2x - 3y - 6z \pm 35 = 0$.

1.3.60. Βρειτε την εξισωση του επιπεδου που ειναι παραλληλο στο επιπεδο xy και απεχει 3 μοναδες απο αυτο.

Απ. $z + 3 = 0$.

1.3.61. Βρειτε ενα σημειο το οποιο κειται στον αξονα των y και απεχει ισες αποστασεις απο τα επιπεδα $2x + 3y + 6z - 6 = 0$ και $8x + 9y - 72z + 73 = 0$.

Απ. Υπαρχουν δυο τετοια σημεια: $(0, 73/12, 0)$ και $(0, -73/282, 0)$.

1.3.62. Να βρεθει η εξισωση του επιπεδου που απεχει 3 μοναδες μηκους απο την αρχη των αξονων και ειναι παραλληλο στο επιπεδο $3x - 6y - 2z - 4 = 0$.

Απ. $3x - 6y - 2z + 21 = 0$.

Κεφάλαιο 2

Ευθειες στον Τρισδιαστατο Χωρο

2.1 Θεωρια

2.1.1. Οι ευθεια που διερχεται απο σημειο (x_1, y_1, z_1) και ειναι παραλληλη στο διανυσμα $\mathbf{p} = (a, b, c)$ (δηλ. εχει την διευθυνση του $\mathbf{p}$) *οριζεται* να ειναι το συνολο των σημειων (x, y, z) που ικανοποιουν τις **δυο** εξισωσεις

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{x - x_1}{b} = \frac{x - x_1}{c}, \tag{2.1}$$

Λεμε οτι οι (2.1) ειναι οι εξισωσεις της ευθειας σε *συμμετρικη μορφη*. Ισοδυναμες με την (2.1) ειναι και οι μορφες

$$\text{παραμετρικη :} \quad x(t) = x_1 + t \cdot a, y(t) = y_1 + t \cdot b, z(t) = z_1 + t \cdot c, \tag{2.2}$$

$$\text{διανυσματικη :} \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_1 + t \cdot \mathbf{p}. \tag{2.3}$$

(οπου $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ και $\mathbf{p} = (a, b, c)$).

2.1.2. Οι εξισωσεις (2.1) - (2.3) εχουν την εξης *φυσικη* ερμηνεια: περιγραφουν την τροχια ενος κινητου το οποιο κινειται στον χωρο με **σταθερη** *διανυσματικη ταχυτητα* $\mathbf{p}$ και η μεταβλητη t ειναι ο *χρονος*. Προφανως η τροχια του κινητου ειναι ευθεια γραμμη και την χρονικη στιγμη $t = 0$, το κινητο βρισκεται στο σημειο (x_1, y_1, z_1).

2.1.3. Οι εξισωσεις ευθειας που διερχεται απο δυο σημεια (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) εχουν τις εξης ισοδυναμες μορφες

$$\text{συμμετρικη :} \quad \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \tag{2.4}$$

$$\text{παραμετρικη :} \quad x = x_1 + t \cdot (x_2 - x_1), y = y_1 + t \cdot (y_2 - y_1), z = z_1 + t \cdot (z_2 - z_1), \tag{2.5}$$

$$\text{διανυσματικη :} \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_1 + t \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \tag{2.6}$$

(οπου $\mathbf{r} = (x, y, z)$ και $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$).

2.1.4. Μια ευθεια μπορει επισης να περιγραφει και ως τομη δυο επιπεδων:

$$
\begin{aligned}
A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \\
A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0.
\end{aligned}
$$

2.1.5. Εστω δυο ευθειες με εξισωσεις $x = x_1 + t \cdot a_1, y = y_1 + t \cdot b_1, z = z_1 + t \cdot c_1$ και $x = x_1 + t \cdot a_2, y = y_1 + t \cdot b_2, z = z_1 + t \cdot c_2$. Η *γωνια* θ μεταξυ των δυο ευθειων προσδιοριζεται απο

$$\cos\theta = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}. \tag{2.7}$$

Προσεξτε οτι οι ευθειες δεν ειναι απαραιτητο να τεμνονται.

2.1.6. Δυο ευθειες λεγονται *ασυμβατες* αν δεν ειναι παραλληλες και δεν τεμονται.

2.1.7. Εστω δυο ευθειες με εξισωσεις

$$
\begin{aligned}
x = x_1 + t \cdot a_1, \quad y = y_1 + t \cdot b_1, \quad z = z_1 + t \cdot c_1, \\
x = x_2 + t \cdot a_2, \quad y = y_2 + t \cdot b_2, \quad z = z_2 + t \cdot c_2
\end{aligned}
$$

οπου $(a_1, b_1, c_1) \nparallel (a_2, b_2, c_2)$. Οι ευθειες ειναι *ασυμβατες* (δηλ. δεν τεμνονται) ανν

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{2.8}$$

2.1.8. Εστω δυο ασυμβατες ευθειες με εξισωσεις

$$
\begin{aligned}
x = x_1 + t \cdot a_1, \quad y = y_1 + t \cdot b_1, \quad z = z_1 + t \cdot c_1, \\
x = x_2 + t \cdot a_2, \quad y = y_2 + t \cdot b_2, \quad z = z_2 + t \cdot c_2
\end{aligned}
$$

Η αποσταση των δυο ευθειων ειναι το ελαχιστο μηκος ευθυγραμμου τμηματος που εχει ενα ακρο σε καθε ευθεια. Αυτο ειναι ισο με

$$d = \left| \frac{\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}}{\sqrt{(bf - ec)^2 + (af - dc)^2 + (ae - bd)^2}} \right|. \tag{2.9}$$

2.1.9. Εστω επιπεδο $Ax + By + Cz + D = 0$ και ευθεια $\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$. Το σημειο τομης της ευθειας με το επιπεδο μπορει να υπολογιστει λυνοντας το συστημα

$$
\begin{aligned}
Ax + By + Cz + D = 0 \\
\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} \\
\frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}.
\end{aligned}
$$

Αν το συστημα εχει απειρες λυσεις, η ευθεια ανηκει στο επιπεδο. Αν το συστημα δεν εχει καμμια λυση η ευθεια ειναι παραλληλη στο επιπεδο.

2.1.10. Εστω επιπεδο $Ax + By + Cz + D = 0$ και ευθεια $x = x_1 + t \cdot a, y = y_1 + t \cdot b, z = z_1 + t \cdot c$. Αν η ευθεια τεμνει το επιπεδο τοτε το σημειο τομης ειναι η λυση του συστηματος

$$\begin{aligned} Ax + By + Cz + D = 0 \\ \frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} \\ \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Το ιδιο σημειο τομης μπορει να περιγραφει και ως $(x_1 + at_0, y_1 + bt_0, z_1 + ct_0)$,οπου

$$t_0 = -\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D_1}{aA + bB + cC}. \tag{2.11}$$

2.1.11. Εστω επιπεδο $Ax + By + Cz + D = 0$ και ευθεια $x = x_1 + t \cdot a, y = y_1 + t \cdot b, z = z_1 + t \cdot c$. Η *γωνια* θ μεταξυ της ευθειας και του επιπεδου προσδιοριζεται απο

$$\sin\theta = \frac{aA + bB + cC}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{2.12}$$

Ως ειδικες περιπτωσεις εχουμε οτι η ευθεια ειναι παραλληλη στο επιπεδο ανν

$$aA + bB + cC = 0 \tag{2.13}$$

και ειναι καθετη στο επιπεδο ανν

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}. \tag{2.14}$$

2.2 Λυμενες Ασκησεις

2.2.1. Να βρεθουν οι εξισωσεις της ευθειας που διερχεται απο το σημειο $(1,2,0)$ και ειναι παραλληλη στο διανυσμα $\mathbf{p}=(2,1,3)$

Λυση. Συμφωνα με την (2.1) η ευθεια εχει εξισωσεις

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-0}{3} \Rightarrow$$
$$\frac{x-1}{2}=y-2=\frac{z}{3}$$

και σε παραμετρικη μορφη

$$\mathbf{r}(t)=\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}+t\cdot\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(δηλ. $x(t)=1+2t$, $y(t)=2+t$, $z(t)=3t$

2.2.2. Να βρεθουν οι εξισωσεις της ευθειας που διερχεται απο το σημειο $(1,2,0)$ και ειναι παραλληλη στο διανυσμα $\mathbf{p}=(2,1,3)$

Λυση. Συμφωνα με την (2.1) η ευθεια εχει εξισωσεις

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-0}{3} \text{ δηλ.}$$
$$\frac{x-1}{2}=y-2=\frac{z}{3}$$

2.2.3. Γραψτε τις εξισωσεις της ευθειας που διερχεται απο το $(0,2,-1)$ και ειναι παραλληλη στο διανυσμα $\mathbf{p}=(1,0,4)$.

Λυση. Συμφωνα με την εξ.(2.3), οι παραμετρικες εξισωσεις της ευθειας ειναι

$$x=t, \qquad y=2-0\cdot t=2, \qquad z=-1+4t. \tag{2.15}$$

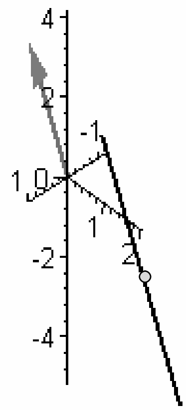
Για την συμμετρικη μορφη, η (2.1) δινει

$$\frac{x}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+1}{4}. \tag{2.16}$$

Ποιο ειναι το νοημα του κλασματος $\frac{y-2}{0}$; Μπορουμε να εξισωσουμε τα κλασματα της (2.16) με μια πραγματικη μεταβλητη t και να παρουμε

$$\frac{x}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z+1}{4}=t. \tag{2.17}$$

Ο μονος τροπος ωστε $\frac{y-2}{0}=t$, οπου το t μπορει να παιρνει μονο πραγματικες τιμες, ειναι να εχουμε $y-2=0$, δηλ. $y=2$. Αυτη ειναι ακριβως και η τιμη που δινουν οι παραμετρικες εξισωσεις (2.15). Με αλλα λογια, η ευθεια ειναι παραλληλη στο επιπεδο xy (δες και το Σχ.15.1).



Σχ.15.1

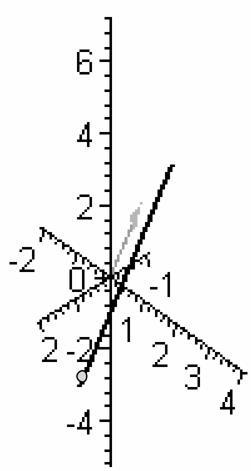
2.2.4. Αποδειξτε την **2.1.1**, δηλ. οτι η ευθεια που διερχεται απο δοθεν σημειο (x_1, y_1, z_1) και ειναι παραλληλη σε δοθεν διανυσμα $\mathbf{p} = (a, b, c)$ εχει εξισωσεις

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{x - x_1}{b} = \frac{x - x_1}{c}, \tag{2.18}$$

$$x(t) = x_1 + t \cdot a, y(t) = y_1 + t \cdot b, z(t) = z_1 + t \cdot c, \tag{2.19}$$

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_1 + t \cdot \mathbf{p}. \tag{2.20}$$

Λυση. Στο Σχ.15.2 απεικονιζεται το δοθεν σημειο (x_1, y_1, z_1), το δοθεν διανυσμα $\mathbf{p}$, και τυχον σημειο (x, y, z) της ευθειας. Σχηματιζουμε το διανυσμα $\mathbf{r} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$ το οποιο ειναι επι της ευθειας και αρα παραληλο στο $\mathbf{p}$.



Σχ.15.2

Οποτε θα εχουμε $\mathbf{r} = t\cdot\mathbf{p}$, δηλ.

$$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c} = t$$

που ειναι οι εξισωσεις της (2.18). Απο αυτες προκυπτουν

$$\begin{aligned}\frac{x-x_1}{a} &= t \Rightarrow x = x_1 + at\\ \frac{y-y_1}{b} &= t \Rightarrow y = y_1 + bt\\ \frac{z-z_1}{c} &= t \Rightarrow z = z_1 + ct\end{aligned}$$

που ειναι οι εξισωσεις της (2.19). Απο αυτες προκυπτουν και τις $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ προκυπτει οι (2.20).

2.2.5. Να βρεθουν οι εξισωσεις της ευθειας που διερχεται απο τα σημεια $(1, 2, 0)$, $(0, 1, 3)$.

Λυση. Οι εξισωσεις σε συμμετρικη μορφη ειναι

$$\begin{aligned}\frac{x-1}{0-1} &= \frac{y-2}{1-2} = \frac{z-0}{3-0} \text{ δηλ.}\\ 1-x &= 2-y = \frac{z}{3}\end{aligned}$$

και σε παραμετρικη μορφη

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t)\\ y(t)\\ z(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} + t\cdot\begin{bmatrix}0-1\\1-2\\3-0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} + t\cdot\begin{bmatrix}-1\\-1\\3\end{bmatrix}$$

(δηλ. $x(t) = 1-t$, $y(t) = 2-t$, $z(t) = 3t$).

2.2.6. Βρειτε τις εξισωσεις της ευθειας που διερχεται απο τα σημεια $(-2, 1, 3)$ και $(4, 2, -2)$.

Λυση. Συμφωνα με την εξ.(2.4) οι ζητουμενες εξισωσεις ειναι

$$\frac{x+2}{4+2} = \frac{y-1}{2-1} = \frac{z-3}{-2-3}$$

δηλ.

$$\frac{x+2}{6} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{-5}$$

και σε παραμετρικη μορφη

$$x(t) = -2+6t, \qquad y(t) = 1+t, \qquad z(t) = 3-5t.$$

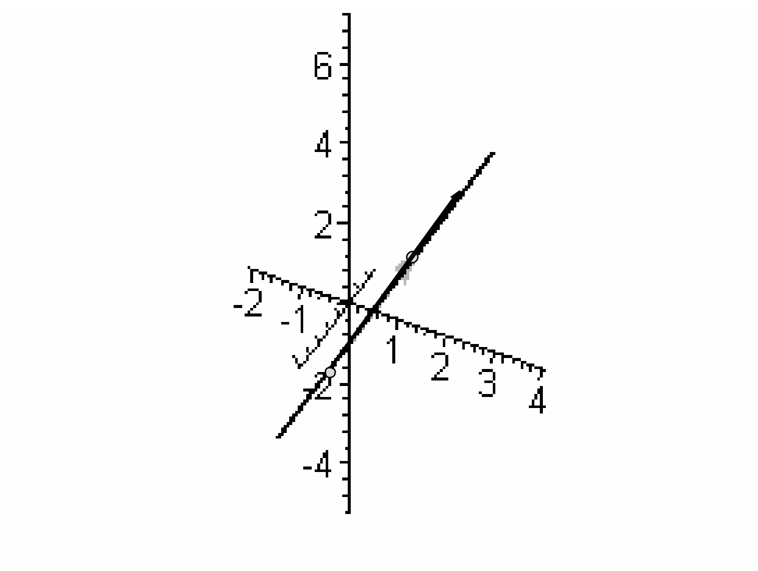
2.2.7. Αποδειξτε την **2.1.2**, δηλ. οτι η ευθεια που διερχεται απο τα σημεια (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) εχει εξισωσεις

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}, \tag{2.21}$$

$$x(t) = x_1 + t\cdot(x_2-x_1), y(t) = y_1 + t\cdot(y_2-y_1), z(t) = z_1 + t\cdot(z_2-z_1), \tag{2.22}$$

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_1 + t\cdot(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1). \tag{2.23}$$

Λυση. Στο Σχ.15.3 απεικονιζεται η ευθεια και τα δοθεντα σημεια (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2). Αυτα οριζουν ενα διανυσμα $\mathbf{p} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ το οποιο ειναι παραλληλο στην ευθεια.



Σχ.15.3

Αφου η ευθεια ειναι παραλληλη στο $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, οι συμμετρικες εξισωσεις αυτης ειναι

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \tag{2.24}$$

και αν θεσουμε καθε κλασμα στην (2.24) ισο με t, προκυπτουν και οι (2.22), 2.23).

2.2.8. Δινεται η ευθεια

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 2}{2} = \frac{z - 3}{3}.$$

Να βρεθουν οι παραμετρικες εξισωσεις αυτης.

Λυση. Θετουμε

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 2}{2} = \frac{z - 3}{3} = t$$

και, λυνοντας ως προς t παιρνουμε

$$x = 1 + t, \qquad y = 2 + 2t, \qquad z = 3 + 3t.$$

2.2.9. Δινεται η ευθεια

$$x(t) = 1 + t, \qquad y(t) = 2 - t, \qquad z(t) = 1 + 2t.$$

Να βρεθουν οι συμμετρικες εξισωσεις αυτης.

Λυση. Εχουμε

$$x - 1 = t, \qquad y - 2 = -t, \qquad z - 1 = 2t$$

και αρα

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 2}{-1} = \frac{z - 1}{2} = t.$$

2.2.10. Δειξτε οτι τα $(2,-3,1)$, $(5,4,-4)$, $(8,11,-9)$ κεινται πανω σε μια ευθεια.

Λυση. Σχηματιζουμε τις εξισωσεις της ευθειας που διερχεται απο τα $(2,-3,1)$, $(5,4,-4)$. Αυτες ειναι

$$\frac{x-2}{5-2}=\frac{y+3}{4+3}=\frac{z-1}{-4-1}$$

και παρατηρουμε οτι αυτες ικανοποιουνται απο το $(8,11,-9)$:

$$\frac{8-2}{5-2}=\frac{11+3}{4+3}=\frac{-9-1}{-4-1}=2.$$

2.2.11. Δινεται η ευθεια

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3}. \tag{2.25}$$

Να βρεθει το σημειο αυτης το οποιο εχει συντεταγμενη $z=1$.

Λυση. Θετοντας στην (2.25) $z=1$ παιρνουμε

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{1-3}{3}=-\frac{2}{3}.$$

Αρα

$$x-1=1\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\Rightarrow x=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$
$$y-2=2\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\Rightarrow y=2+\frac{4}{3}=\frac{10}{3}.$$

Αρα το ζητουμενο σημειο ειναι το $\left(\frac{1}{3},\frac{10}{3},1\right)$.

2.2.12. Δινεται η ευθεια

$$x(t)=1+t,\qquad y(t)=2-t,\qquad z(t)=1+2t. \tag{2.26}$$

Να βρεθει το σημειο αυτης το οποιο εχει συντεταγμενη $z=2$.

Λυση. Για να εχουμε $z=2$ θα πρεπει στην (2.26) να εχουμε

$$2=1+2t\Rightarrow t=\frac{1}{2}$$

οποτε

$$x=1+t=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$
$$y=2-t=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

Αρα το ζητουμενο σημειο ειναι το $\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},2\right)$.

2.2.13. Βρειτε τις συμμετρικες και παραμετρικες εξισωσεις της ευθειας που περιγραφεται ως τομη των επιπεδων

$$2x - 3y + 3z - 4 = 0 \tag{2.27}$$
$$x + 2y - z + 3 = 0 \tag{2.28}$$

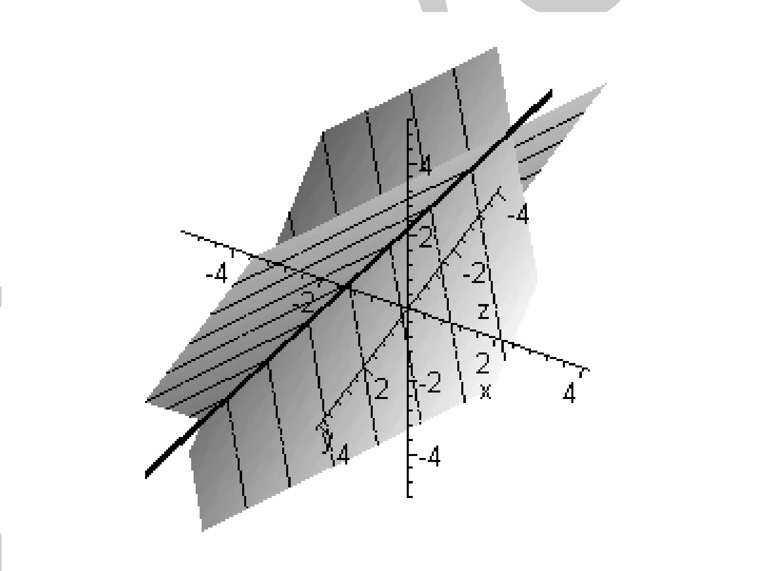
Λυση. Λυνοντας το συστημα (2.27) - (2.28) παιρνουμε $x = -\frac{3}{7}z - \frac{1}{7}$, $y = \frac{5}{7}z - \frac{10}{7}$. Θετοντας $t = z$ εχουμε

$$x = -\frac{3}{7}t - \frac{1}{7}, \qquad y = \frac{5}{7}t - \frac{10}{7}, \qquad z = t$$

και αυτες ειναι οι παραμετρικες εξισωσεις της ευθειας. Απαλοιφοντας το t απο τις παραπανω παιρνουμε τις συμμετρικες εξισωσεις

$$\frac{x + 1/7}{-3/7} = \frac{y + 10/7}{5/7} = \frac{z}{1} = t.$$

Δες και το Σχ.15.4.



Σχ.15.4

2.2.14. Να βρεθουν οι παραμετρικες εξισωσεις της ευθειας που οριζεται ως τομη των επιπεδων

$$x + 2y + z + 1 = 0$$
$$2x + y + 3z + 2 = 0$$

Λυση. Οι ζητουμενες εξισωσεις μπορουν να βρεθουν λυνοντας το παραπανω συστημα. Πραγματι, αυτο εχει λυσεις της μορφης

$$x(t) = -\frac{5}{3}t - 1, \qquad y(t) = \frac{1}{3}t, \qquad z(t) = t.$$

και σε παραμετρικη διανυσματικη μορφη

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -5/3 \\ 1/3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

2.2.15. Δειξτε οτι οι ευθειες

$$l_1 : \frac{x+5}{2} = \frac{y-5}{1} = \frac{z-5}{4}$$
$$l_2 : \frac{x+2}{-3} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-3}{2}.$$

τεμνονται.

Λυση. Οι ευθειες τεμνονται στο σημειο $(-5, 5, 5)$, επειδη αυτο ειναι η λυση του συστηματος

$$\frac{x+5}{2} = y-5$$
$$y-5 = \frac{z-5}{4}$$
$$\frac{x+2}{-3} = y-4$$
$$y-4 = \frac{z-3}{2}$$

2.2.16. Δειξτε οτι οι ευθειες

$$l_1 : \frac{x+1}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-7}{-1} \qquad \text{και} \qquad l_2 : \frac{x+4}{4} = \frac{y-1}{6}\frac{z-3}{-2}$$

ειναι παραλληλες.

Λυση. Η l_1 ειναι παραλληλη στο διανυσμα $\mathbf{p}_1 = (2, 3, -1)$ και η l_2 ειναι παραλληλη στο διανυσμα $\mathbf{p}_2 = (4, 6, -2)$. Αλλα $\mathbf{p}_1 \| \mathbf{p}_2$ οποτε και $l_1 \| l_2$.

2.2.17. Δειξτε οτι οι ευθειες

$$l_1 : \frac{7x-15}{2} = \frac{7y+34}{-4} = \frac{z}{1} \qquad \text{και} \qquad l_2 : \frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{2}$$

ειναι καθετες μεταξυ τους.

Λυση. Η l_1 ειναι παραλληλη στο διανυσμα $\mathbf{p} = (2, -4, 1)$ και η l_2 ειναι παραλληλη στο διανυσμα $\mathbf{q} = (1, 1, 2)$. Επειδη $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = 0$ τα διανυσματα $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ ειναι καθετα μεταξυ τους και αρα το ιδιο ισχυει και για τις l_1, l_2.

2.2.18. Γραψτε τις εξισωσεις της ευθειας l_1 που διερχεται απο το $(-2, 4, 3)$ και ειναι παραλληλη στην ευθεια l_2 που διερχεται απο τα $(1, 3, 4)$ και $(-2, 2, 3)$.

Λυση. Οι εξισωσεις της l_2 ειναι

$$\frac{x-1}{-2-1} = \frac{y-3}{2-3} = \frac{z-4}{3-4}.$$

Δηλ. η l_2 ειναι παραλληλη στο διανυσμα $\mathbf{p} = (-3, -1, -1)$. Αρα η l_1 εχει εξισωσεις

$$\frac{x+2}{-3} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-3}{-1}.$$

2.2.19. Βρειτε την γωνια μεταξυ των ευθειων

$$\frac{x-1}{6}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-4}{6} \qquad \text{και} \qquad \frac{x+2}{3}=\frac{y-3}{6}=\frac{z+4}{-2}.$$

Λυση. Η ζητουμενη γωνια ειναι η ιδια με αυτη των διανυσματων $\mathbf{p}=(6,-3,6)$, $\mathbf{q}=(3,6,-2)$. Αυτα σχηματιζουν γωνια θ με

$$\cos\theta=\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}}{||\mathbf{p}||\cdot||\mathbf{q}||}=\frac{6\cdot3-3\cdot6+6\cdot(-2)}{\sqrt{6^2+3^2+6^2}\sqrt{3^2+6^2+2^2}}=-\frac{4}{21}$$

Δηλ. $\theta=\arccos(-4/21)=1.7624\approx180^o\frac{1.7624}{3.14159}=101^o$.

2.2.20. Βρειτε την γωνια μεταξυ των ευθειων

$$\begin{aligned}l_1 &: 2x-y+3z-4=0, \quad 3x+2y-z+7=0\\ l_2 &: x+y-2z+3=0, \quad 4x-y+3z+7=0.\end{aligned}$$

Λυση. Καταρχην βρισκουμε τις συμμετρικες εξισωσεις των ευθειων. Για την l_1, το συστημα

$$\begin{aligned}2x-y+3z-4&=0\\3x+2y-z+7&=0\end{aligned}$$

εχει λυση $x=\frac{1}{7}-\frac{5}{7}z$, $y=\frac{11}{7}z-\frac{26}{7}$ αρα οι συμμετρικες εξισωσεις ειναι

$$\frac{x-1/7}{-5/7}=\frac{y+26/7}{11/7}=\frac{z}{1}$$

και αρα η l_1 ειναι παραλληλη στο $\mathbf{p}=(-5,11,7)$. Για την l_2, το συστημα

$$\begin{aligned}x+y-2z+3&=0\\4x-y+3z+7&=0\end{aligned}$$

εχει λυση $x=-\frac{1}{5}z-2, y=\frac{11}{5}z-1$ αρα οι συμμετρικες εξισωσεις ειναι

$$\frac{x+2}{-1/5}=\frac{y+1}{11/5}=\frac{z}{1}$$

και αρα η l_2 ειναι παραλληλη στο $\mathbf{q}=(-1,11,5)$. Τελος η γωνια των $\mathbf{p},\mathbf{q}$ ειναι

$$\cos\theta=\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}}{||\mathbf{p}||\cdot||\mathbf{q}||}=\frac{-5\cdot(-1)+11\cdot11+7\cdot5}{\sqrt{5^2+11^2+7^2}\sqrt{1^2+11^2+5^2}}=\frac{23}{195}\sqrt{65}\simeq0.95093$$

οποτε $\theta\simeq\arccos0.95093=0.31457\simeq18^o$.

2.2.21. Αποδειξτε την **2.1.5**, δηλ. οτι δυο ευθειες με εξισωσεις

$$l_1 : x = x_1 + t \cdot a_1, y = y_1 + t \cdot b_1, z = z_1 + t \cdot c_1$$
$$l_2 : x = x_1 + t \cdot a_2, y = y_1 + t \cdot b_2, z = z_1 + t \cdot c_2$$

σχηματιζουν γωνια θ που προσδιοριζεται απο

$$\cos\theta = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}. \tag{2.29}$$

Λυση. Η l_1 ειναι παραλληλη στο $\mathbf{p}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ και η l_2 ειναι παραλληλη στο $\mathbf{p}_2 = (a_2, b_2, c_2)$. Η γωνια λοιπον μεταξυ των l_1 λαι l_2 ειναι ιση με αυτη μεταξυ των $\mathbf{p}_1$ και $\mathbf{p}_2$ η οποια ικανοποιει την (2.29).

2.2.22. Γραψτε τις εξισωσεις της ευθειας l_1 που διερχεται απο το $(3, -1, 4)$ και ειναι καθετη στις ευθειες

$$l_2 : \frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-4} \qquad \text{και} \qquad l_3 : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-2}{2}.$$

Λυση. Η l_1 θα εχει εξισωσεις

$$\frac{x-3}{a} = \frac{y+1}{b} = \frac{z-4}{c}.$$

Τα δε a, b, c πρεπει να ικανοποιουν (λογω καθετοτητας)

$$3a + 2b - 4c = 0$$
$$2a - 3b + 2c = 0$$

Η λυση του παραπανω συστηματος ειναι $a = \frac{8}{13}c$, $b = \frac{14}{13}c$ οποτε οι εξισωσεις της l_1 ειναι

$$\frac{x-3}{8c/13} = \frac{y+1}{14c/13} = \frac{z-4}{c}$$

και παιρνοντας $c = 13$ εχουμε τις ζητουμες εξισωσεις:

$$\frac{x-3}{8} = \frac{y+1}{14} = \frac{z-4}{13}.$$

2.2.23. Να βρεθουν οι εξισωσεις της ευθειας που διερχεται απο το σημειο $(2, 2, -1)$ και τεμνει καθετα την ευθεια $x = y = z$.

Λυση. Εστω οτι οι ζητουμενες εξισωσεις ειναι

$$\frac{x-2}{a} = \frac{y-2}{b} = \frac{z+1}{c}. \tag{2.30}$$

Πρεπει να ισχυει

$$a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 1 = 0$$

Ακομη, εστω (x_0, y_0, z_0) το σημειο τομης των δυο ευθειων. Επειδη αυτο ανηκει στην $x = y = z$, θα ειναι (x_0, x_0, x_0) και θα πρεπει να ικανοποιει την (2.30). Δηλ.εχουμε τις εξισωσεις

$$\frac{x_0 - 2}{a} = \frac{x_0 - 2}{b}$$
$$\frac{x_0 - 2}{b} = \frac{x_0 + 1}{c}$$
$$a + b + c = 0.$$

Απο την πρωτη εξισωση βλεπουμε οτι $a = b$, οποτε απο την τριτη παιρνουμε $c = -2b$. Αρα καθε λυση ικανοποιει $(a, b, c) = (a, a, -2a)$ (δεν χρειαζεται να λυσουμε την δευτερη εξισωση αν δεν μας ενδιαφερει η τιμη του x_0). Ετσι οι ζητουμενες εξισωσεις της ευθειας ειναι

$$\frac{x - 2}{a} = \frac{y - 2}{a} = \frac{z + 1}{-2a}$$

και πιο απλα

$$\frac{x - 2}{1} = \frac{y - 2}{1} = \frac{z + 1}{-2}.$$

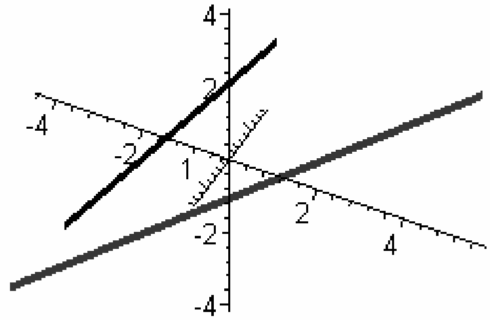
2.2.24. Δειξτε την **2.1.7**, δηλ. οτι δυο ευθειες με εξισωσεις

$$l_1 : x = x_1 + t \cdot a_1, y = y_1 + t \cdot b_1, z = z_1 + t \cdot c_1,$$
$$l_2 : x = x_2 + t \cdot a_2, y = y_2 + t \cdot b_2, z = z_2 + t \cdot c_2.$$

ειναι ασυμβατες ανν

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (2.31)$$

Λυση. Ας υποθεσουμε το αντιθετο, δηλ. οτι οι ευθειες τεμνονται. Δειτε το Σχ.15.5.



Σχ.15.5

Η l_1 διερχεται απο το (x_1, y_1, z_1) και εχει διευθυνση αυτη του $\mathbf{p}_1 = (a_1, b_1, c_1)$. Η l_2 διερχεται απο το (x_2, y_2, z_2) και εχει διευθυνση αυτη του $\mathbf{p}_2 = (a_2, b_2, c_2)$. Τα $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ και $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ ειναι συνεπιπεδα, αρα η οριζουσα που εχει αυτα ως γραμμες ειναι μηδενικη. Με αλλα λογια

$$\text{οι } l_1, l_2 \text{ τεμνονται } \Rightarrow \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{2.32}$$

Αρα ισχυει και το αντιστροφο

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{ οι } l_1, l_2 \text{ δεν τεμνονται}$$

δηλ. ειναι ασυμβατες.

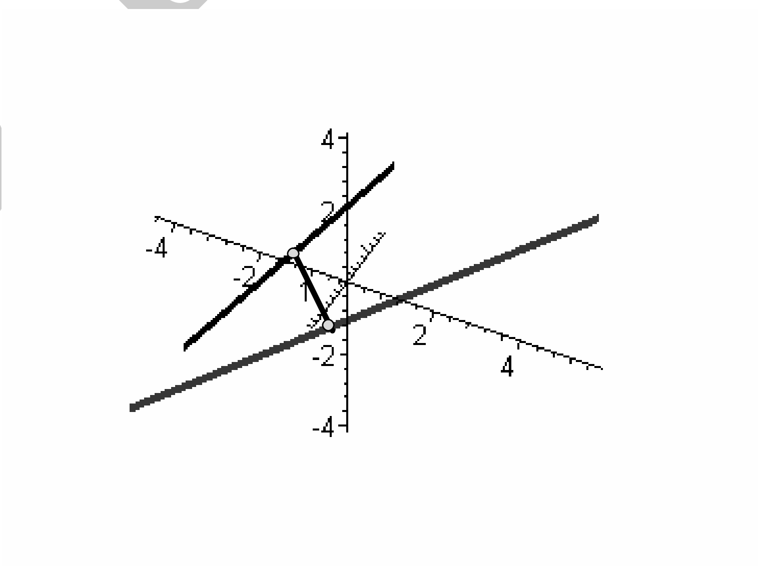
2.2.25. Υπολογιστε την αποσταση των ευθειων

$$x = 1 + t, \quad y = 1 + t, \quad z = 2 + t,$$
$$x = 2t, \quad y = 1 + t, \quad z = 0.$$

Λυση. Αυτες εχουν αποσταση

$$d = \left| \frac{\begin{vmatrix} 0-1 & 1-1 & 0-1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}^2}} \right| = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

και αρα ειναι ασυμβατες (δες και το Σχ.15.6)



Σχ.15.6

2.2.26. Να βρεθει η αποσταση των ευθειων

$$\begin{aligned} &x = 2 + 2t, \qquad y = 1 + t, \qquad z = 1 - t, \\ &x = 3t, \qquad y = 1 + 2t, \qquad z = 1. \end{aligned}$$

Λυση. Οι ευθειες εχουν αποσταση

$$d = \left| \frac{\begin{vmatrix} 0-2 & 1-1 & 1-1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} 1-1 & 1-1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}^2}} \right| = \frac{2}{5}.$$

και αρα ειναι ασυμβατες.

2.2.27. Να βρεθει η αποσταση των ευθειων

$$\begin{aligned} &l_1 : \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{3} \\ &l_2 : x = y = z \end{aligned}$$

Λυση. Οι δυο ευθειες εχουν παραμετρικες εξισωσεις

$$\begin{aligned} &l_1 : x = -1 + t \qquad y = 2 + 2t \qquad z = -3 + 3t \\ &l_2 : x = t \qquad y = t \qquad z = t. \end{aligned}$$

Οποτε η αποσταση τους ειναι

$$d = \left| \frac{\begin{vmatrix} 0+1 & 0-2 & 0+3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}^2}} \right| = \frac{4}{3}\sqrt{6}.$$

2.2.28. Να βρεθει η αποσταση του σημειου $A(1, 1, -2)$ απο την ευθεια

$$l_1 : \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{2} = \frac{z}{1}.$$

Λυση. Η ευθεια l_1 εχει παραμετρικες εξισωσεις

$$x = 1 + 2t \qquad y = -5 + 2t \qquad z = t.$$

Εστω τυχον σημειο $M(1 + 2t, -5 + 2t, t)$ της ευθειας Το *τετραγωνο* της αποστασης απο το M στο A εινα

$$f(t) = (1 - 1 - 2t)^2 + (1 + 5 - 2t)^2 + (-2 - t)^2 = 9t^2 - 20t + 40$$

Η συναρτηση $f(t)$ ελαχιστοποιειται οταν $f'(t) = 0$, δηλ. για $t = 10/9$. Οποτε το σημειο M με ελαχιστη αποσταση απο το A ειναι το $\left(1 + 2 \cdot \frac{10}{9}, -5 + 2 \cdot \frac{10}{9}, \frac{10}{9}\right)$= $(29/9, -25/9, 10/9)$ και τοτε η ελαχιστη αποσταση των $d(A, M) = \sqrt{f(10/9)} = \sqrt{\frac{260}{9}} \simeq 5.3748$ που ειναι η ζητουμενη αποσταση του σημειου απο την ευθεια.

2.2.29. Να βρεθει η αποσταση του σημειου $A(1,1,1)$ απο την ευθεια

$$l_1 : x = y - 1 = z.$$

Λυση. Η ευθεια l_1 εχει παραμετρικες εξισωσεις

$$x = t \qquad y = 1 + t \qquad z = t.$$

Εστω τυχον σημειο $M(t, 1+t, t)$ της ευθειας Το *τετραγωνο* της αποστασης απο το M στο A ειναι

$$f(t) = (1-t)^2 + (1-1-t)^2 + (1-t)^2 = 3t^2 - 4t + 2$$

Η συναρτηση $f(t)$ ελαχιστοποιειται οταν $f'(t) = 0$, δηλ. για $t = 3/2$. Οποτε το σημειο M με ελαχιστη αποσταση απο το A ειναι το $(3/2, 5/2, 3/2)$ και τοτε η ελαχιστη αποσταση των $d(A, M) = \sqrt{f(3/2)} = \frac{\sqrt{11}}{2} = 1.658\,3$ που ειναι η ζητουμενη αποσταση του σημειου απο την ευθεια.

2.2.30. Να βρεθει η αποσταση του σημειου $A(1,1,1)$ απο την ευθεια

$$l_1 : x = y, \quad z = 0.$$

Λυση. Η ευθεια l_1 εχει παραμετρικες εξισωσεις

$$x = t \qquad y = t \qquad z = 0.$$

Εστω τυχον σημειο $M(t, t, 0)$ της ευθειας Το *τετραγωνο* της αποστασης απο το M στο A ειναι

$$f(t) = (1-t)^2 + (1-t)^2 + (1-0)^2 = 2t^2 - 4t + 3$$

Η συναρτηση $f(t)$ ελαχιστοποιειται οταν $f'(t) = 0$, δηλ. για $t = 1$. Οποτε το σημειο M με ελαχιστη αποσταση απο το A ειναι το $(1, 1, 0)$ και τοτε η ελαχιστη αποσταση των $d(A, M) = \sqrt{f(1)} = 1$ που ειναι η ζητουμενη αποσταση του σημειου απο την ευθεια.

2.2.31. Βρειτε το σημειο τομης της ευθειας

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-7}{-1}$$

με το επιπεδο $x + y + z = 0$.

Λυση. Το ζητουμενο προκυπτει απο την επιλυση του συστηματος

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{2} &= \frac{y-5}{3} \\ \frac{y-5}{3} &= \frac{z-7}{-1} \\ x + y + z &= 0 \end{aligned}$$

το οποιο εχει λυση $(x, y, z) = \left(-\frac{13}{2}, -\frac{13}{4}, \frac{39}{4}\right)$.

2.2.32. Βρειτε το σημειο στο οποιο η ευθεια

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-6}{-1}$$

τεμνει το επιπεδο xy .

Λυση. Το επιπεδο xy εχει $z=0$. Αρα το ζητουμενο σημειο δινεται απο τις εξισωσεις

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+3}{1}=\frac{0-6}{-1}$$

και ειναι $(x,y,z)=(13,3,0)$.

2.2.33. Δειξτε οτι η ευθεια

$$\frac{x-2}{10}=\frac{2y-2}{11}=\frac{z-5}{7} \tag{2.33}$$

ανηκει στο επιπεδο $3x-8y+2z-8=0$.

Λυση. Λυνοντας τις εξ.(2.33) ως προς x βρισκουμε

$$y=\frac{11}{20}x-\frac{1}{10} \qquad \text{και} \qquad z=\frac{7}{10}x+\frac{18}{5}.$$

Δηλ. τυχον σημειο της ευθειας εχει συντεταγμενες $\left(x,\frac{11}{20}x-\frac{1}{10},\frac{7}{10}x+\frac{18}{5}\right)$. Αντικαθιστωντας αυτα στην εξισωση του επιπεδου βλεπουμε οτι

$$3x-8\cdot\left(\frac{11}{20}x-\frac{1}{10}\right)+2\cdot\left(\frac{7}{10}x+\frac{18}{5}\right)-8$$

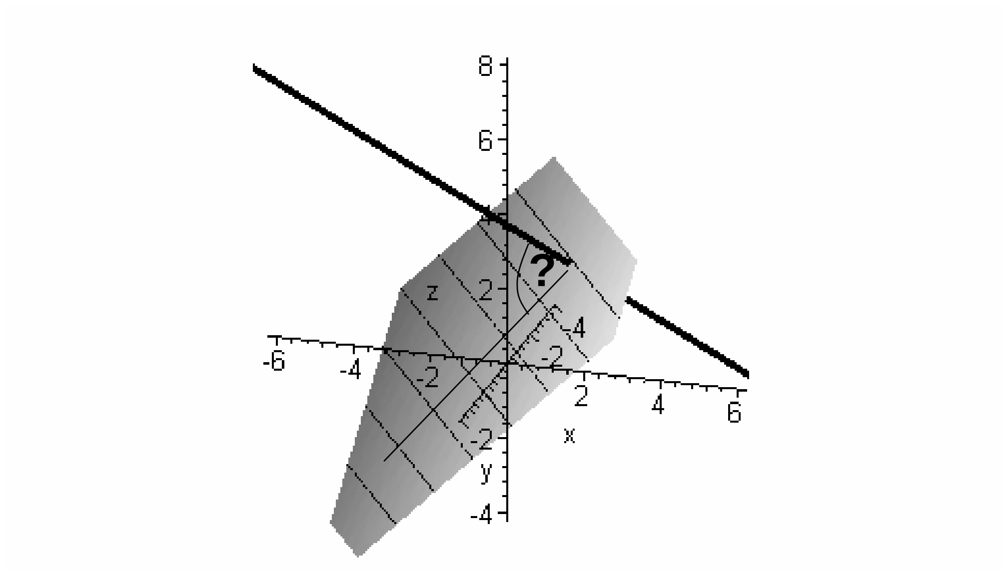
ειναι ταυτοτικα ισο με 0. Δηλ. *καθε* σημειο της ευθειας ικανοποιει την εξισωση του επιπεδου, αρα η ευθεια ανηκει στο επιπεδο.

2.2.34. Να βρεθει η γωνια της ευθειας $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{\sqrt{2}}=\frac{z}{1}$ με το επιπεδο $z=0$

Λυση. Απο την (2.12) η ζητουμενη γωνια ικανοποιει

$$\sin\theta=\frac{1\cdot 0+\sqrt{2}\cdot 0+1\cdot 1}{\sqrt{1^2+\sqrt{2}^2+1^2}\cdot\sqrt{0^2+0^2+1^2}}=\frac{1}{2}$$

δηλ. $\theta = \pi/6$ (δες και το Σχ.15.7).



Σχ.15.7

2.2.35. Δειξτε οτι η ευθεια $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = z$ ειναι παραλληλη στο επιπεδο $x + y - 5z = 0$
Λυση. Αυτο προκυπτει αμεσα αφου

$$aA + bB + cC = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot (-5) = 0.$$

2.2.36. Δειξτε οτι η ευθεια

$$l_1 : \frac{x-1}{6} = \frac{y+2}{-10} = \frac{z-3}{4}$$

ειναι καθετη στο επιπεδο $E : 3x - 5y + 2z + 4 = 0$.
Λυση. Αυτο προκυπτει αμεσα αφου

$$\frac{a}{A} = \frac{6}{3} = 2, \quad \frac{b}{B} = \frac{-10}{-5} = 2, \quad \frac{c}{C} = \frac{4}{2} = 2.$$

2.2.37. Αποδειξτε την **2.1.11,** δηλ. οτι η γωνια θ μεταξυ επιπεδου

$$E : Ax + By + Cz + D = 0$$

και ευθειας

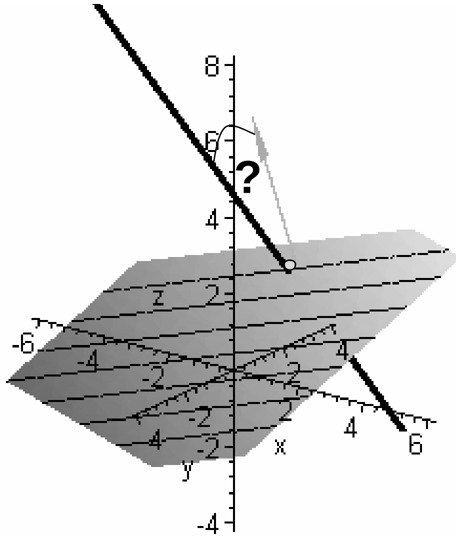
$$l : x = x_1 + t \cdot a, y = y_1 + t \cdot b, z = z_1 + t \cdot c.$$

προσδιοριζεται απο την

$$\sin\theta = \frac{aA + bB + cC}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (2.34)$$

Δειξτε οτι η συνθηκη παραλληλιας (2.13) και καθετοτητας (2.14) ειναι ειδικες περιπτωσεις της (2.34).

Λυση. Δειτε το Σχ.15.8.



Σχ.15.8

Το $\mathbf{p}=(A,B,C)$ ειναι το διανυσμα καθετο στο επιπεδο E. Αυτο σχηματιζει γωνια ϕ με την l και εχουμε $\theta+\phi=\pi/2$. Αρα $\cos\theta=\sin\phi$ και η (2.34) προκυπτει απο την σχεση (2.7) για την γωνια μεταξυ ευθειας και διανυσματος. Για να ειναι $l\|E$ θα πρεπει $\theta=0$ οποτε προκυπτει η συνθηκη παραλληλιας

$$aA+bB+cC=0. \tag{2.35}$$

Για να ειναι $l\perp E$ θα πρεπει $\phi=0$ οποτε προκυπτει η συνθηκη καθετοτητας

$$\frac{a}{A}=\frac{b}{B}=\frac{c}{C}. \tag{2.36}$$

2.2.38. Γραψτε τις εξισωσεις της ευθειας l_1 που διερχεται απο το $(1,-2,3)$ και ειναι παραλληλη στα επιπεδα $E_1: 2x-4y+z-3=0$ και $E_2: x+2y-6z+4=0$.

Λυση. Εστω οτι η ευθεια εχει εξισωσεις

$$\frac{x-1}{a}=\frac{y+2}{b}=\frac{z-3}{c}$$

δηλ. ειναι παραλληλη στο διανυσμα $\mathbf{p}=(a,b,c)$. Αυτο το διανυσμα πρεπει να ειναι καθετο στα καθετα διανυσματα των επιπεδων E_1 και E_2, δηλ. στα

$$\mathbf{p}_1=(2,-4,1) \qquad \text{και} \qquad \mathbf{p}_2=(1,2,-6)\,.$$

Δηλ. πρεπει να εχουμε

$$\begin{aligned} 2a-4b+c&=0\\ a+2b-6c&=0 \end{aligned}$$

που εχει λυση $a = \frac{11}{4}c$, $b = \frac{13}{8}c$. Οποτε η l_1 εχει εξισωσεις

$$\frac{x-1}{11c/4} = \frac{y+2}{13c/8} = \frac{z-3}{c}$$

και παιρνοντας $c = 8$

$$\frac{x-1}{22} = \frac{y+2}{13} = \frac{z-3}{8}.$$

2.2.39. Να βρεθουν οι εξισωσεις της ευθειας που διερχεται απο το $(1,2,1)$ και ειναι καθετη στο επιπεδο $x + 2y - z = 0$.

Λυση. Το διανυσμα $\mathbf{p} = (1,2,-1)$ ειναι καθετο στο δοθεν επιπεδο και αρα παραλληλο στη ζητουμενη ευθεια. Οποτε η ευθεια εχει εξισωσεις

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{-1}.$$

2.2.40. Γραψτε τις εξισωσεις της ευθειας που περναει απο το $(-6,4,1)$ και ειναι καθετη στο επιπεδο $3x - 2y + 5z + 8 = 0$.

Λυση. Η ευθεια εχει εξισωσεις

$$\frac{x+6}{a} = \frac{y-4}{b} = \frac{z-1}{c}$$

και μπορουμε να παρουμε το διανυσμα $\mathbf{p} = (a,b,c)$ ισο με το καθετο διανυσμα του επιπεδου δηλ. $\mathbf{p} = (3,-2,5)$. Οποτε τελικα η ευθεια εχει εξισωσεις

$$l_1 : \frac{x+6}{3} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-1}{5}$$

2.2.41. Βρειτε τις εξισωσεις του επιπεδου που περιεχει τις ευθειες

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{3} \qquad \text{και} \qquad \frac{x-1}{5} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{3}.$$

Λυση. Λυνοντας το συστημα

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{4} &= \frac{y+1}{2} \\ \frac{y+1}{2} &= \frac{z-2}{3} \\ \frac{x-1}{5} &= \frac{y+1}{4} \\ \frac{y+1}{4} &= \frac{z-2}{3} \end{aligned}$$

βρισκουμε οτι εχει μοναδικη λυση $x = 1$, $y = -1$, $z = 2$. Αρα οι δυο ευθειες τεμονται στο $(1,-1,2)$ το οποιο ανηκει στο ζητουμενο επιπεδο. Το δε επιπεδο ειναι παραλληλο στα διανυσματα $\mathbf{p} = (4,2,3)$ και $\mathbf{q} = (5,4,3)$ οποτε εχει εξισωση

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 4 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 3y - 6x + 6z - 3 = 0.$$

2.3 Αλυτες Ασκησεις

2.3.1. Γραψτε τις εξισωσεις της ευθειας που διερχεται απο το $(0, 2, -1)$ και ειναι παραλληλη στο διανυσμα $\mathbf{p} = (1, -3, 4)$. Σχεδιαστε την ευθεια.
Απ. $x = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+1}{4}$.

2.3.2. Γραψτε τις εξισωσεις της ευθειας που διερχεται απο το $(0, 0, 0)$ και ειναι παραλληλη στο διανυσμα $\mathbf{p} = (1, 1, 1)$. Σχεδιαστε την ευθεια.
Απ. $x = y = z$.

2.3.3. Γραψτε τις εξισωσεις της ευθειας που διερχεται απο το $(-2, 4, 3)$ και ειναι παραλληλη στην ευθεια που διερχεται απο τα $(1, 3, 4)$ και $(-2, 2, 3)$. Σχεδιαστε τις ευθειες.
Απ. $x - 3y + 14 = 0, y - z - 1 = 0$.

2.3.4. Βρειτε τις συμμετρικες και παραμετρικες εξισωσεις της ευθειας που διερχεται απο τα σημεια $(-2, 1, 3)$ και $(4, 2, -2)$. Σχεδιαστε την ευθεια.
Απ. $\frac{x+2}{6} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{-5}$.

2.3.5. Βρειτε τις συμμετρικες και παραμετρικες εξισωσεις της ευθειας που διερχεται απο τα σημεια $(4, 1, 3)$ και $(4, 2, -2)$. Σχεδιαστε την ευθεια.
Απ. $\frac{x-4}{0} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{5}$ η $x = 4$, $y = 1 - t$, $z = 3 + 5t$.

2.3.6. Βρειτε τις παραμετρικες εξισωσεις της ευθειας $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-4}{8}$. Σχεδιαστε την ευθεια.
Απ. $x = 1 + t$, $y = 2 + 3t$, $z = 4 + 8t$.

2.3.7. Βρειτε τις συμμετρικες εξισωσεις της ευθειας $x = 2 + 3t$, $y = 1 - 3t$, $z = -4 + 8t$.Σχεδιαστε την ευθεια.
Απ. $\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+4}{8}$.

2.3.8. Δινεται η ευθεια

$$\begin{aligned} 2x - y + t - 6 &= 0 \\ x + 4y - 2t - 8 &= 0. \end{aligned}$$

Να βρεθουν οι συμμετρικες και οι παραμετρικες εξισωσεις αυτης, καθως και το σημειο αυτης το οποιο εχει συντεταγμενη $z = 1$. Σχεδιαστε τα επιπεδα και την ευθεια.
Απ. $x = \frac{32}{9} - \frac{2}{9}t$, $y = \frac{5}{9}t + \frac{10}{9}$, $z = t$ και $\frac{x-32/9}{-2} = \frac{y-10/9}{5} = \frac{z}{9}$. Το σημειο ειναι $x = \frac{10}{3}$, $y = \frac{5}{3}$, $z = 1$.

2.3.9. Βρειτε τις συμμετρικες και παραμετρικες εξισωσεις της ευθειας που περιγραφεται ως τομη των επιπεδων

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 3z - 4 &= 0 \\ x + 2y - z + 3 &= 0. \end{aligned}$$

Σχεδιαστε τα επιπεδα και την ευθεια.
Απ. $x = -\frac{3}{7}t - \frac{1}{7}, y = \frac{5}{7}t - \frac{10}{7}$, $z = t$ και $\frac{x+1/7}{-3} = \frac{y+10/7}{5} = \frac{z}{7}$.

2.3.10. Μπορειτε για την παραπανω ασκηση να βρειτε παραμετρικες εξισωσεις της ευθειας αλλες απο αυτες που δινονται στην απαντηση; Αν ναι, πως το εξηγειτε;

Απ. Μια πιθανοτητα ειναι $x = -\frac{3}{5}t - 1$, $y = t$, $z = \frac{7}{5}t + 2$

2.3.11. Δειξτε οτι τα $(2, -3, 1)$, $(5, 4, -4)$, $(8, 11, -9)$ κεινται πανω σε μια ευθεια. Σχεδιαστε την ευθεια.

2.3.12. Βρειτε τις συντεταγμενες y, z του σημειου που ανηκει στην

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-1}{2}$$

και εχει $x = 3$. Σχεδιαστε την ευθεια.

Απ. $(3, -14/3, 5/3)$.

2.3.13. Δινεται η ευθεια

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{3}.$$

Να βρεθει το σημειο αυτης το οποιο εχει συντεταγμενη $z = 6$. Σχεδιαστε την ευθεια.

Απ. $x = 1$, $y = 4$, $z = 6$.

2.3.14. Δινεται η ευθεια

$$x(t) = 2 + t, \qquad y(t) = 2 - t, \qquad z(t) = 1 + t.$$

Να βρεθει το σημειο αυτης το οποιο εχει συντεταγμενη $z = 2$. Σχεδιαστε την ευθεια.

Απ. $x = 3, y = 1, z = 2$.

2.3.15. Βρειτε τις συντεταγμενες y, z του σημειου που ανηκει στην

$$x = 4 - 3t, \qquad y = -1 + 4t, \qquad z = 2t - 3$$

και εχει $z = -5$. Σχεδιαστε την ευθεια.

Απ. $x = 7, y = -5, z = -5$.

2.3.16. Δειξτε οτι οι ευθειες

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-7}{-1} \qquad \text{και} \qquad \frac{x+4}{5} = \frac{y-1}{-3}\frac{z-3}{1}$$

ειναι καθετες μεταξυ τους. Σχεδιαστε τις ευθειες.

2.3.17. Δειξτε οτι οι ευθειες

$$\frac{7x-15}{2} = \frac{7y+34}{-5} = \frac{z}{1} \qquad \text{και} \qquad \frac{x+3}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1}$$

ειναι καθετες μεταξυ τους. Σχεδιαστε τις ευθειες.

2.3.18. Δειξτε οτι η ευθεια

$$\begin{aligned} 2x - 3y + 3z - 4 &= 0 \\ x + 2y - z + 3 &= 0 \end{aligned}$$

ειναι καθετη στην ευθεια $x = t, y = 2t, z = -t$. Σχεδιαστε τις ευθειες.

2.3.19. Γραψτε τις εξισωσεις δυο επιπεδων των οποιων η τομη ειναι η ευθεια που περναει απο το $(-2, 4, 3)$ και ειναι παραλληλη στο διανυσμα $(3, 1, 1)$ Σχεδιαστε την ευθεια και τα επιπεδα.

Απ. $x - 3y + 14 = 0$, $y - z - 1 = 0$.

2.3.20. Εξεταστε αν οι ευθειες

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{2} &= \frac{y-7}{1} = \frac{z-3}{4} \\ \frac{x-6}{3} &= \frac{y+1}{-2} = \frac{z+2}{1} \end{aligned}$$

τεμνονται. Σχεδιαστε τις ευθειες.

Απ. Ναι.

2.3.21. Εξεταστε αν οι ευθειες

$$\begin{aligned} \frac{x-2}{2} &= \frac{y}{-3} = \frac{z+1}{-4} \\ \frac{x-7}{-6} &= \frac{y-2}{9} = \frac{z}{12} \end{aligned}$$

ειναι παραλληλες. Σχεδιαστε τις ευθειες.

Απ. Ναι.

2.3.22. Εξεταστε αν οι ευθειες

$$x = t, y = 2t + 3, z = -t + 2 \text{ και } x = 2t + 1, y = 4t, z = -2t + 766$$

ειναι παραλληλες. Σχεδιαστε τις ευθειες.

Απ. Ναι.

2.3.23. Εξεταστε αν οι ευθειες

$$\begin{aligned} x + y + z + 1 &= 0 \\ x + 2y + 3z &= 0 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} 2x + 3y - 4z - 1 &= 0 \\ 4x + 6y &= 0 \end{aligned}$$

τεμνονται. Σχεδιαστε τις ευθειες.

Απ. Ναι.

2.3.24. Εξεταστε αν οι ευθειες

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{-1}$$
$$\frac{x}{-2} = \frac{y+5}{3} = \frac{z-4}{1}$$

ειναι ασυμβατες. Σχεδιαστε τις ευθειες.

Απ. Ναι.

2.3.25. Εξεταστε αν οι ευθειες

$$x + 2y - 5z - 1 = 0$$
$$x - 2y + 3z - 9 = 0$$

και

$$x + y - 3z + 1 = 0$$
$$x - y + z + 3 = 0$$

ειναι ασυμβατες. Σχεδιαστε τις ευθειες.

Απ. Οχι.

2.3.26. Γραψτε τις εξισωσεις της ευθειας που διερχεται απο το $(3, -1, 4)$ και ειναι καθετη στις ευθειες

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-4} \quad \text{και} \quad \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-2}{2}.$$

Σχεδιαστε τις ευθειες.

Απ. $\frac{x-3}{8} = \frac{y+1}{14} = \frac{z-4}{13}$.

2.3.27. Εξεταστε αν οι ευθειες

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-2} \text{ και } \frac{x-7}{5} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-3}{1}$$

ειναι καθετες μεταξυ τους. Σχεδιαστε τις ευθειες.

Απ. Ναι.

2.3.28. Για ποιες τιμες του κ ειναι οι ευθειες

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{4} \text{ και } \frac{x-3}{a} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-7}{2}$$

καθετες μεταξυ τους; Σχεδιαστε τις ευθειες.

Απ. $\kappa = 2$.

2.3.29. Βρειτε την γωνια μεταξυ των ευθειων

$$\frac{x-1}{6} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-4}{6} \quad \text{και} \quad \frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{6} = \frac{z+4}{-2}.$$

Σχεδιαστε τις ευθειες.

Απ. 79^o

2.3.30. Βρειτε την γωνια μεταξυ των ευθειων

$$\begin{aligned} 2x + 2y + z - 4 &= 0 \\ x - 3y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

και

$$\frac{x-2}{7} = \frac{y+2}{6} = \frac{z-4}{-6}.$$

Σχεδιαστε τις ευθειες.

Απ. 49^o

2.3.31. Βρειτε την γωνια μεταξυ των ευθειων

$$\begin{aligned} l_1 &: 2x - y + 3z - 4 = 0, \quad 3x + 2y - z + 7 = 0 \\ l_2 &: x + y - 2z + 3 = 0, \quad 4x - y + 3z + 7 = 0. \end{aligned}$$

Σχεδιαστε τις ευθειες.

Απ. 18^o

2.3.32. Ειναι οι ευθειες

$$x = \frac{2}{7}t + \frac{15}{7}, \quad y = -\frac{5}{7}t - \frac{34}{7}, \quad z = t$$

και

$$\begin{aligned} x - y - z - 7 &= 0 \\ 3x - 4y - 11 &= 0 \end{aligned}$$

καθετες μεταξυ τους;

Απ. Ναι

2.3.33. Γραψτε την εξισωση της ευθειας που περναει απο το $(3, -1, 4)$ και ειναι καθετη στα διανυσματα $\mathbf{p} = (3, 2, -4)$ και $\mathbf{q} = (2, -3, 2)$. Σχεδιαστε τις ευθειες.

Απ. $x = 8t + 3, y = 14t - 1, z = 13t + 4$.

2.3.34. Γραψτε την εξισωση της ευθειας που περναει απο το $(2, 2, -3)$ και ειναι καθετη στα διανυσματα $\mathbf{p} = (2, -1, 3)$ και $\mathbf{q} = (-1, 2, 0)$. Σχεδιαστε τις ευθειες.

Απ. $x = -2t - 4, y = -t - 1, z = t$

2.3.35. Δειξτε οτι οι ευθειες

$$\begin{aligned} x - y - z + 8 &= 0 \\ 5x + y + z + 10 &= 0 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} x + y + z - 2 &= 0 \\ 2x + y - 3z + 9 &= 0 \end{aligned}$$

τεμνονται και βρειτε το σημειο τομης αυτων. Σχεδιαστε τις ευθειες.

Απ. $x = -3, y = 3, z = 2$.

2.3.36. Δειξτε οτι οι ευθειες

$$\frac{x-1}{2} = y-1 = \frac{z-2}{1} \text{ και } x-3 = y-2 = z-3$$

τεμνονται και βρειτε το σημειο τομης αυτων. Σχεδιαστε τις ευθειες.

Απ. $x=3, y=2, z=3$.

2.3.37. Να βρεθει η αποσταση των ευθειων

$$x = 2y = z \text{ και } x-1 = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{3}$$

Σχεδιαστε τις ευθειες.

2.3.38. Να βρεθει η αποσταση των ευθειων

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{4} = \frac{z-6}{7} \text{ και } x-1 = \frac{y-1}{2} = \frac{z-6}{3}$$

Σχεδιαστε τις ευθειες.

Απ. $4/\sqrt{3}$.

2.3.39. Να βρεθει η αποσταση της ευθειας $x-1 = y+1 = z-2$ απο τον αξονα των x. Σχεδιαστε την ευθεια.

Απ. $3/\sqrt{2}$.

2.3.40. Να βρεθουν οι εξισωσεις της ευθειας η οποια διερχεται απο το $(-3,5,-9)$ και τεμνει τις ευθειες

$$\frac{x}{1} = \frac{y-5}{3} = \frac{z+3}{2} \qquad \text{και} \qquad \frac{x}{1} = \frac{y+7}{4} = \frac{z-10}{5}.$$

Σχεδιαστε τις ευθειες.

Απ. $\frac{x}{1} = \frac{y-71}{22} = \frac{z+3}{2}$.

2.3.41. Να βρεθουν οι εξισωσεις της ευθειας η οποια περναει απο το $(2,-3,-1)$, σχηματιζει γωνια $\pi/3$ με τον αξονα των z και γωνια $\pi/4$ με τον αξονα των x. Σχεδιαστε τις ευθειες.

Απ. $\sqrt{2}\cdot(x-2) = \pm 2\cdot(x+3) = 2\cdot(z+1)$ (δυο ευθειες).

2.3.42. Να βρεθει η αποσταση της αρχης των αξονων απο την ευθεια

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-2}{-5}.$$

Σχεδιαστε την ευθεια.

Απ. 3.

2.3.43. Να βρεθει η αποσταση του σημειου $(1,1,-2)$ απο την ευθεια. Σχεδιαστε το σημειο και την ευθεια

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{2} = \frac{z}{1}.$$

Απ. $d=2$.

2.3.44. Βρειτε το σημειο τομης της ευθειας

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-7}{-1}$$

με το επιπεδο $x + y + z = 0$. Σχεδιαστε το επιπεδο και την ευθεια.

Απ. $x = -\frac{13}{2}, y = -\frac{13}{4}, z = \frac{39}{4}$.

2.3.45. Βρειτε το σημειο στο οποιο η ευθεια

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-6}{-1}$$

τεμνει το επιπεδο xy . Σχεδιαστε το επιπεδο και την ευθεια.

Απ. $(13, 3, 0)$.

2.3.46. Βρειτε το σημειο στο οποιο η ευθεια

$$\frac{x}{1} = \frac{2y-3}{1} = \frac{2z-1}{5}$$

τεμνει το επιπεδο $4x - 2y + z - 3 = 0$.Σχεδιαστε το επιπεδο και την ευθεια.

Απ. $(1, 2, 3)$

2.3.47. Να βρεθει η γωνια μεταξυ της ευθειας

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{6} = \frac{z-3}{-6}$$

και του επιπεδου $2x - 2y + z - 3$. Σχεδιαστε το επιπεδο και την ευθεια.

Απ. 26^o.

2.3.48. Δειξτε οτι η ευθεια

$$\frac{x-2}{10} = \frac{y-1}{11/2} = \frac{z-5}{7}$$

ανηκει στο επιπεδο $3x - 8y + 2z - 8 = 0$. Σχεδιαστε το επιπεδο και την ευθεια.

2.3.49. Δειξτε οτι η ευθεια

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{4}$$

ανηκει στο επιπεδο $2x + 3y - 2z + 10 = 0$. Σχεδιαστε το επιπεδο και την ευθεια.

2.3.50. Δειξτε οτι η ευθεια

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{4}$$

ειναι παραλληλη στο επιπεδο $6x + 7y - 5z - 8 = 0$. Σχεδιαστε το επιπεδο και την ευθεια.

2.3.51. Δειξτε οτι η ευθεια

$$x - 1 = \frac{y+2}{-3} = \frac{z+3}{2}$$

ειναι καθετη στο επιπεδο $x - 3y + 2z + 4 = 0$. Σχεδιαστε το επιπεδο και την ευθεια.

2.3.52. Γραψτε τις εξισωσεις της ευθειας που διερχεται απο το $(1,-2,3)$ και ειναι παραλληλη στα επιπεδα $2x-4y+z-3=0$ και $x+2y-6z+4=0$. Σχεδιαστε τα επιπεδα και την ευθεια.

Απ. $\frac{x-1}{22}=\frac{y+2}{13}=\frac{z-3}{8}$.

2.3.53. Γραψτε τις εξισωσεις της ευθειας που διερχεται απο το $(1,4,-2)$ και ειναι παραλληλη στα επιπεδα $6x+2y+2z+3=0$ και $3x-5y-2z-1=0$. Σχεδιαστε τα επιπεδα και την ευθεια.

Απ. $x-1=\frac{y-4}{3}=\frac{z+2}{-6}$

2.3.54. Γραψτε τις εξισωσεις της ευθειας που περναει απο το $(-6,4,1)$ και ειναι καθετη στο επιπεδο $3x-2y+5z+8=0$.

Απ. $x=\frac{3}{5}t-\frac{33}{5}, y=\frac{22}{5}-\frac{2}{5}t, z=t$.

2.3.55. Γραψτε τις εξισωσεις της ευθειας που περναει απο το $(2,0,-3)$ και ειναι καθετη στο επιπεδο $2x-3y+6=0$. Σχεδιαστε το επιπεδο και την ευθεια.

Απ. $x=2-\frac{2}{3}t, y=t, z=-3$.

2.3.56. Βρειτε τις εξισωσεις της ευθειας που διερχεται απο το σημειο $(1,-3,4)$ και ειναι καθετη στο επιπεδο $x-3y+2z=4$.

Απ. $x-1=\frac{y+3}{-3}=\frac{z-4}{2}$.

2.3.57. Βρειτε τις εξισωσεις του επιπεδου που περιεχει τις ευθειες

$$\frac{x-1}{4}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-2}{3} \qquad \text{και} \qquad \frac{x-1}{5}=\frac{y+1}{4}=\frac{z-2}{3}.$$

Σχεδιαστε το επιπεδο και τις ευθειες.

Απ. $2x-y-2z+1=0$.

2.3.58. Να βρεθει η αποσταση της ευθειας

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{4}$$

απο το επιπεδο $6x+7y-5z-8=0$. Σχεδιαστε το επιπεδο και την ευθεια.

Απ. 5.

2.3.59. Να βρεθει η αποσταση της ευθειας

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y-5}{3}=\frac{z-7}{-1}$$

και του επιπεδου $x+y+z=0$. Σχεδιαστε το επιπεδο και την ευθεια.

Απ. 0.

2.3.60. Βρειτε την εξισωση της ευθειας της οποιας καθε σημειο ισαπεχει απο τα τρια σημεια $(3,-1,2)$, $(4,-6,-5)$, $(0,0,-3)$. Σχεδιαστε τα σημεια και την ευθεια.

Απ. $\frac{x}{16}=\frac{y+175/32}{13}=\frac{z+19/32}{-7}$.

2.3.61. Βρειτε τις εξισωσεις της ευθειας που περναει απο το $(2,-3,4)$ και ειναι καθετη στις ευθειες

$$x=y=z+5 \text{ και } \frac{x-8}{3}=\frac{y+4}{-2}=z-2.$$

Απ. $\frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{5}=z-4.$

2.3.62. Ποια ειναι η σχετικη θεση των ευθειων

$$x=-3+2t, y=-1+2t, z=4t \text{ και } x=3+t, y=-1+2t, z=4.$$

Απ. Ειναι ασυμβατες.

2.3.63. Ποιος ειναι ο γεωμετρικος τοπος των σημειων τα οποια ισαπεχουν απο τα $(3,-2,4)$, $(5,3,-2)$ και $(0,4,2)$. Σχεδιαστε τον γεωμετρικο τοπο.

Απ. Ειναι ευθεια με εξισωσεις $\frac{x-18/11}{26}=\frac{y}{22}=\frac{z+9/44}{27}$.

Κεφάλαιο 3

Δευτεροβαθμιες Επιφανειες στον Τρισδιαστατο Χωρο

3.1 Θεωρια

3.1.1. Οπως ειδαμε στο Κεφαλαιο 1, ενα επιπεδο μπορει να παρασταθει ως το συνολο των σημειων (x, y, z) τα οποια ικανοποιουν την εξισωση

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

3.1.2. Γενικευοντας το παραπανω, μια *επιφανεια* οριζεται να ειναι το συνολο των σημειων (x, y, z) τα οποια ικανοποιουν μια εξισωση

$$F(x, y, z) = c \tag{3.1}$$

(οπου c μια σταθερα). Η (3.1) λεγεται *πεπλεγμενη* αναπαρασταση της επιφανειας.

3.1.3. Π.χ. μια σφαιρα ειναι το συνολο των σημειων τα οποια απεχουν σταθερη αποσταση R απο ενα δοθεν σημειο (x_0, y_0, z_0). Αυτη η ιδιοτητα περιγραφεται απο την εξισωση της σφαιρας με κεντρο (x_0, y_0, z_0) και ακτινα R, η οποια ειναι

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

(δηλ. σε αυτη την περιπτωση $F(x, y, z) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$, $c = R^2$).

3.1.4. Στο παρον κεφαλαιο θα ασχοληθουμε με τις *δευτεροβαθμιες επιφανειες*, δηλ. αυτες για τις οποιες οι $F(x, y, z)$ εχει την μορφη

$$A'x^2 + B'y^2 + C'z^2 + D'xy + E'yz + F'zx + G'x + H'y + J'z + K' = 0$$

δηλ. ειναι πολυωνυμο το πολυ δευτερου βαθμου ως προς τις μεταβλητες x, y, z.

3.1.5. Καθε δευτεροβαθμια επιφανεια, με καταλληλη *μετατοπιση* της αρχης των αξονων και *αντιμεταθεση* των μεταβλητων x, y, z μπορει να αναχθει σε μια απο τις εξης δυο βασικες μορφες

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = D, \tag{3.2}$$
$$Ax^2 + By^2 + Cz = 0. \tag{3.3}$$

3.1.6. Αν η επιφανεια ειναι της μορφης (3.2) μπορει να αναχθει περαιτερω σε μια απο τις παρακατω μορφες

	Επιφανεια
Ελλειψοειδες	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$
Μονοχωνο Υπερβολοειδες	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
Διχωνο Υπερβολοειδες	$\frac{z^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{c^2}=1$
Κωνος	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=\frac{y^2}{c^2}$
Ελλειπτικος Κυλινδρος	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
Υπερβολικος Κυλινδρος	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

με καταλληλη επιλογη των a,b,c (εξαρτωμενη απο τις τιμες των A,B,C,D).

3.1.7. Αν η επιφανεια ειναι της μορφης (3.3) μπορει να αναχθει σε μια απο τις παρακατω μορφες

Ελλειπτικο Παραβολοειδες	$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$
Υπερβολικο Παραβολοειδες	$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$
Ελλειπτικος Κυλινδρος	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

με καταλληλη επιλογη των a,b (εξαρτωμενη απο τις τιμες των A,B,C).

3.1.8. Μια ειδικη κατηγορια επιφανειων ειναι οι *επιφανειες εκ περιστροφης*. Εστω οτι στο επιπεδο yz δινεται μια καμπυλη C με εξισωση $z=f(y)$. Αν περιστρεψουμε την C γυρω απο τον αξονα των x, παιρνουμε μια επιφανεια S με εξισωση

$$x^2+z^2=(f(y))^2. \tag{3.4}$$

3.1.9. Αναλογες επιφανειες προκυπτουν απο την περιστροφη μιας καμπυλης του επιπεδου zx γυρω απο τον αξονα των y κτλ.

3.1.10. Ειδικες κατηγοριες των δευτεροβαθμιων επιφανειων προκυπτουν απο την περιστροφη καμπυλων ειναι οι εξης.

	Καμπυλη	Αξονας Περιστροφης	Επιφανεια
Ελλειψοειδες	$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	Oy	$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+\frac{x^2}{c^2}=1$
Μονοχωνο Υπερβολοειδες	$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	Oz	$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$
Διχωνο Υπερβολοειδες	$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	Oy	$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{c^2}=1$
Κωνος	$z=ay$	Oy	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{a^2}=y^2$
Ελλειπτικος Κυλινδρος	$z=a$	Oy	$x^2+z^2=a^2$
Ελλειπτικο Παραβολοειδες	$y=z^2$	Oy	$y=x^2+z^2$

3.1.11. Εκτος απο την πεπλεγμενη μορφη, μια επιφανεια μπορει επισης να παρασταθει σε *παραμετρικη μορφη*, απο τρεις εξισωσεις της μορφης

$$x(u,v)=f(u,v), \qquad y(u,v)=g(u,v), \qquad z(u,v)=h(u,v)$$

και ισοδυναμα σε *διανυσματικη μορφη*

$$\mathbf{r}(u,v)=(f(u,v),g(u,v),h(u,v)).$$

Οι μεταβλητες u,v ειναι οι παραμετροι, και παιρνουν τιμες σε καταλληλα συνολα.

3.1.12. Το ελλειψοειδες

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

εχει παραμετρικη εξισωση

$$\mathbf{r}(u,v) = (x_0 + a\cos u\cos v, y_0 + b\sin u\cos v, z_0 + c\sin v)$$

οπου $u \in [0, 2\pi]$ και $v \in [0, \pi]$.

3.1.13. Η επιφανεια που περιγραφεται απο την διανυσματικη εξισωση

$$\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{r}_0 + v \cdot (\mathbf{r}_1(u) - \mathbf{r}_0) \tag{3.5}$$

λεγεται *κωνικη επιφανεια* με *κορυφη* το σημειο $\mathbf{r}_0$ και *οδηγο καμπυλη* την $\mathbf{r}_1(u)$. Εαν η $\mathbf{r}_1(u)$ ειναι ενας κυκλος, τοτε η (3.5) δινει τον «κλασικο» κωνο.

3.1.14. Η επιφανεια που περιγραφεται απο την διανυσματικη εξισωση

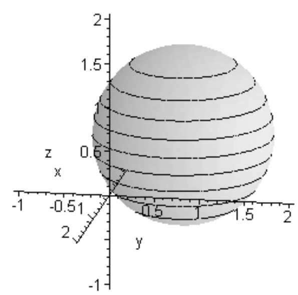
$$\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{r}_1(u) + v \cdot \mathbf{r}_2$$

λεγεται *κυλινδρικη επιφανεια* με *γενετειρα* το διανυσμα $\mathbf{r}_2$ και *οδηγο καμπυλη* την $\mathbf{r}_1(u)$. Εαν η $\mathbf{r}_1(u)$ ειναι ενας κυκλος και το $\mathbf{r}_2$ παραλληλο σε ενα απο τους αξονες Ox, Oy, Oz τοτε η (3.5) δινει τον «κλασικο» κυλινδρο.

3.2 Λυμενες Ασκησεις

3.2.1. Γραψτε την εξισωση της σφαιρας με κεντρο $(1, 1, 1)$ και ακτινα 4.

Λυση. Ειναι $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 4^2$. Δες και το Σχ.16.1.



Σχ.16.1

3.2.2. Βρειτε την εξισωση της σφαιρας με κεντρο $A(1, 2, 3)$ και διερχομενη απο το σημειο $B(2, 3, 4)$.

Λυση. Η ζητουμενη σφαιρα εχει ακτινα ιση με την αποσταση

$$d(A, B) = \sqrt{(2-1)^2 + (3-2)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{3}.$$

Οποτε η ζητουμενη εξισωση θα ειναι

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 3.$$

3.2.3. Δειξτε οτι η επιφανεια με εξισωση

$$x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 - 6z + 13 = 0$$

ειναι μια σφαιρα.

Λυση. Θα βρουμε την εξισωση με *συμπληρωση του τετραγωνου*. Εχουμε

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 - 6z + 13 = 0 \Rightarrow \\ x^2 + 2 \cdot 1 \cdot x + 1^2 + y^2 - 2 \cdot 2 \cdot y + 2^2 + z^2 - 2 \cdot 3 \cdot z + 3^3 + 13 - 1^2 - 2^2 - 3^2 = 0 \Rightarrow \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 1. \end{aligned}$$

Αρα η ζητουμενη σφαιρα εχει κεντρο $(1, 2, 3)$ και ακτινα 1.

3.2.4. Δειξτε οτι η επιφανεια με εξισωση

$$x^2 - 4x + y^2 - 2y + z^2 - 4 = 0$$

ειναι μια σφαιρα.

Λυση. Παρομοια με την προηγουμενη ασκηση, με συμπληρωση του τετραγωνου η εξισωση μπορει να ξαναγραφτει ως εξης:

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 - 4x + y^2 - 2y + z^2 - 4 \\ &= x - 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2 - 2^2 + y^2 - 2 \cdot y \cdot 1 + 1^2 - 1^2 + z^2 - 4 \\ &= (x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 - 3^2 \end{aligned}$$

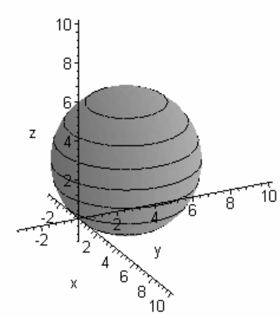
που ειναι η εξισωση σφαιρας:

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 3^2$$

με κεντρο το $(2, 1, 0)$ και ακτινα 3.

3.2.5. Βρειτε την εξισωση της σφαιρας με κεντρο $(1, 2, 3)$ και εφαπτομενης στον αξονα των x.

Λυση. Η αποσταση τυχοντος σημειου (x_0, y_0, z_0) απο τον αξονα των x ειναι $d = \sqrt{y_0^2 + z_0^2}$. Δες και το Σχ.16.2.



Σχ.16.2

Οποτε η ζητουμενη σφαιρα θα εχει ακτινα

$$R = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

και η εξισωση της θα ειναι

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 13.$$

3.2.6. Βρειτε την εξισωση της σφαιρας που εχει κεντρο το $(3, 6, -4)$ και εφαπτεται στο επιπεδο $E : 2x - 2y - z - 10 = 0$.

Λυση. Η αποσταση απο το κεντρο ως το επιπεδο E ειναι

$$d = \frac{|3 \cdot 2 - 6 \cdot 2 + 4 \cdot 1 - 10|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = 4$$

Αρα η εξισωση της σφαιρας ειναι $(x - 3)^2 + (y - 6)^2 + (z + 4)^2 = 4^2$.

3.2.7. Βρειτε την σφαιρα που διερχεται απο τα σημεια $(1, 1, 1)$, $(2, 0, 2)$, $(1, 0, 1)$ και $(0, 1, 1)$.

Λυση. Αν η εξισωση τη σφαιρας εχει την μορφη

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$$

τοτε η συγκεκριμενη σφαιρα πρεπει να ικανοποιει

$$\begin{aligned}
1^2 + 1^2 + 1^2 + A \cdot 1 + B \cdot 1 + C \cdot 1 + D = 0 \\
2^2 + 0^2 + 2^2 + A \cdot 2 + B \cdot 0 + C \cdot 2 + D = 0 \\
1^2 + 0^2 + 1^2 + A \cdot 1 + B \cdot 0 + C \cdot 1 + D = 0 \\
0^2 + 1^2 + 1^2 + A \cdot 0 + B \cdot 1 + C \cdot 1 + D = 0.
\end{aligned}$$

δηλ.

$$\begin{aligned}
A + B + C + D &= -3 \\
2A + 2C + D &= -8 \\
A + C + D &= -2 \\
B + C + D &= -2
\end{aligned}$$

που εχει λυση $A = -1$, $B = -1$, $C = -5$, $D = 4$. Αρα η ζητουμενη εξισωση ειναι

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 + z^2 - x - y - 5z + 4 = 0 \Rightarrow \\
x^2 - 2\frac{1}{2}x + \frac{1}{2^2} + y^2 - 2\frac{1}{2}y + \frac{1}{2^2} + z^2 - 2\frac{5}{2}z + \frac{5^2}{2^2} + 4 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{25}{4} = 0 \Rightarrow \\
\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2.
\end{aligned}$$

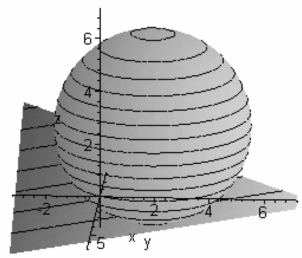
Δηλ. η ζητουμενη σφαιρα εχει κεντρο $(1/2, 1/2, 5/2)$ και ακτινα $3/2$.

3.2.8. Στο επιπεδο xy δινεται ο κυκλος με κεντρο $(5, 4, 0)$ και ακτινα 6. Να βρεθει η σφαιρα που διερχεται απο αυτο τον κυκλο και εφαπτεται στο επιπεδο $E : 3x+2y+6z-1 = 0$.

Λυση. Ο δοθεις κυκλος ειναι τομη της σφαιρας

$$S : (x - 5)^2 + (y - 4)^2 + z^2 = 6^2$$

και του επιπεδου $z = 0$. Δες και το Σχ.16.3.



Σχ.16.3

Καθε σφαιρα που διερχεται απο αυτο τον κυκλο θα εχει εξισωση

$$S'(\kappa) : x^2 + y^2 + z^2 - 10x - 8y + 5 - \kappa z = 0$$

Πρεπει να βρουμε κ τετοιο ωστε η $S'(\kappa)$ να εφαπτεται στο E. Δηλ. πρεπει το κεντρο της $S'(\kappa)$ να εχει αποσταση d απο το E ιση με την ακτινα $R(\kappa)$ της $S'(\kappa)$. Χρησιμοποιωντας τον τυπο για την αποσταση σημειου απο επιπεδο και βρισκοντας την ακτινα της $S'(\kappa)$ με συμπληρωση τετραγωνου παιρνουμε την εξισωση

$$\left| \frac{3 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 6 \cdot \frac{\kappa}{2} - 1}{\sqrt{3^2 + 2^2 + 6^2}} \right| = \sqrt{\frac{100 + 64 + \kappa^2}{4} - 5}$$

η οποια ειναι ισοδυναμη με την εξισωση

$$\left(\frac{22 + 3\kappa}{7} \right)^2 = \frac{164 + \kappa^2}{4} - 5$$

η οποια εχει δυο λυσεις: $\kappa = \frac{320}{13}$ και $\kappa = 16$. Οποτε υπαρχουν δυο σφαιρες που ικανοποιουν τα ζητουμενα:

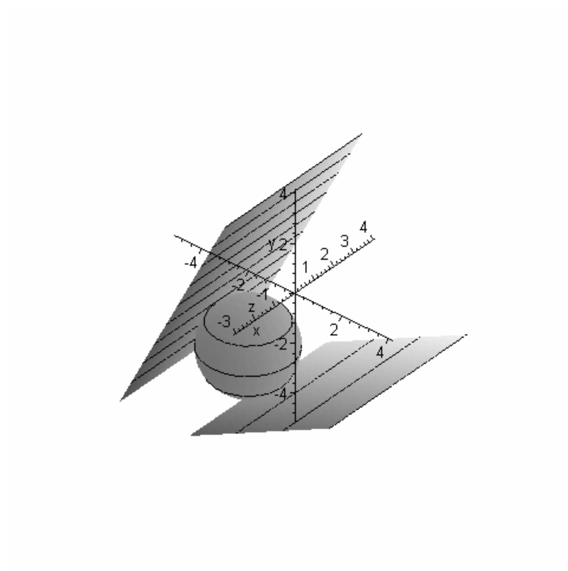
$$S_1 : x^2 + y^2 + z^2 - 10x - 8y + 5 + \frac{320}{13} z = 0$$
$$S_2 : x^2 + y^2 + z^2 - 10x - 8y + 5 + 16z = 0$$

Τελικα, με συμπληρωση του τετραγωνο βρισκουμε οτι οι σφαιρες αυτες ειναι

$$S_1 : (x-5)^2 + (y-4)^2 + \left(z - \frac{160}{3} \right)^2 = \left(\frac{178}{13} \right)^2$$
$$S_2 : (x-5)^2 + (y-4)^2 + (z-8)^2 = 10^2.$$

3.2.9. Βρειτε την εξισωση της σφαιρας που εφαπτεται στα επιπεδα $E_1 : x - 2z - 8 = 0$, $E_2 : 2x - z + 5 = 0$ και εχει κεντρο επι της ευθειας $l_1 : x = -2,\ y = 0$.

Λυση. Το κεντρο της σφαιρας θα βρισκεται στο *διχοτομουν επιπεδο* E_3 των E_1 και E_2 (δες Σχ.16.4)



Σχ.16.4

Το E_3 εχει εξισωση

$$E_3 : \frac{1}{2} \cdot (x - 2z - 8) + \frac{1}{2} \cdot (2x - z + 5) = 0$$

δηλ.

$$E_3 : x - z - 1 = 0$$

Αφου το κεντρο της σφαιρας βρισκεται επισης πανω στην l_1 θα εχουμε

$$x = -2, \quad y = 0, \quad z = (-2 - 1) = -3.$$

Η ακτινα της σφαιρας θα ειναι η αποσταση του $(-2, 0, -3)$ απο το επιπεδο E_1:

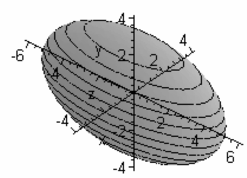
$$d = \frac{|1 \cdot (-2) + 0 \cdot 0 + (-2) \cdot (-3) - 8|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 2^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

Οποτε η σφαιρα θα εχει εξισωση

$$(x + 2)^2 + y^2 + (z + 3)^2 = \frac{16}{5}$$

3.2.10. Σχεδιαστε και περιγραψτε το *ελλειψοειδες* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Λυση. Η γραφικη παρασταση του ελλειψοειδους δινεται στο Σχ.16.5.



Σχ.16.5

Παρατηρουμε οτι καθε επιπεδο $z = c_1 \in [-c, c]$ (παραλληλο στο επιπεδο xy) τεμνει το ελλειψοειδες κατα μια ελλειψη. Πραγματι επι της τομης θα εχουμε

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{c_1^2}{c^2}$$

που ειναι η εξισωση ελλειψης. Το ιδιο ισχυει και για τομες απο επιπεδα παραλληλα ειτε στο επιπ. yz ειτε στο zx.

3.2.11. Εξηγειστε γιατι η σφαιρα (με κεντρο $(0, 0, 0)$ και ακτινα R) ειναι μια ειδικη περιπτωση ελλειψοειδους, με $a = b = c = R$.

Λυση. Πραγματι, αν στην εξισωση του ελλειψοειδους θεσουμε $a = b = c = R$ παιρνουμε

$$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} + \frac{z^2}{R^2} = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

3.2.12. Αναγνωριστε την επιφανεια

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$$

Λυση. Η επιφανεια ειναι ελλειψοειδες με $a = 4$, $b = 3$, $c = 2$.

3.2.13. Δειξτε οτι η επιφανεια

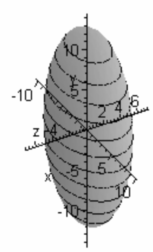
$$2x^2 + 3y^2 + z^2 - 8x + 6y - 4z - 3 = 0$$

ειναι ενα ελλειψοειδες.

Λυση. Χρησιμοποιουμε και παλι συμπληρωση τετραγωνου.

$$2x^2 + 3y^2 + z^2 - 8x + 6y - 4z - 3 = 0 \Rightarrow$$
$$2 \cdot \left(x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2\right) + 3 \cdot \left(y^2 + 2 \cdot y \cdot 1 + 1^2\right) + \left(z^2 - 2 \cdot 2 \cdot z + 2^2\right) - 4 - 1 - 4 - 3 = 0 \Rightarrow$$
$$2 \cdot (x-2)^2 + 3 \cdot (y+1)^2 + (z-2)^2 = 12 \Rightarrow$$
$$\frac{(x-2)^2}{\sqrt{6}^2} + \frac{(y+1)^2}{2^2} + \frac{(z-2)^2}{\left(2\sqrt{3}\right)^2} = 1$$

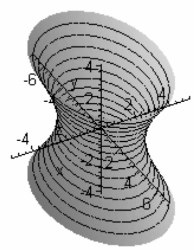
που αναγνωριζεται ως εξισωση ελλειψοειδους με κεντρο το $(2, -1, 2)$ και $a = \sqrt{6}$, $b = 2$, $c = 2\sqrt{3}$. Δες και το σχημα 16.6, οπου φαινεται η μετατοπιση του κεντρου του ελλειψοειδους.



Σχ.16.6

3.2.14. Σχεδιαστε και περιγραψτε το *μονοχωνο υπερβολοειδες* $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Λυση. Η γραφικη παρασταση του μονοχωνου υπερβολοειδους δινεται στο Σχ.16.7.



Σχ.16.7

Παρατηρουμε οτι καθε επιπεδο $z = c_1 \in \mathbb{R}$ (παραλληλο στο επιπεδο xy) τεμνει το μονοχωνο υπερβολοειδες κατα μια ελλειψη. Πραγματι επι της τομης θα εχουμε

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{c_1^2}{c^2}$$

που ειναι η εξισωση ελλειψης. Καθε επιπεδο $x = a_1 \in \mathbb{R}$ (παραλληλο στο επιπεδο yz) τεμνει το μονοχωνο υπερβολοειδες κατα μια υπερβολη. Πραγματι επι της τομης θα εχουμε

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{a_1^2}{a^2}$$

που ειναι η εξισωση υπερβολης. Το ιδιο ισχυει και για τομες απο επιπεδα παραλληλα στο επιπεδο zx.

3.2.15. Αναγνωριστε την επιφανεια

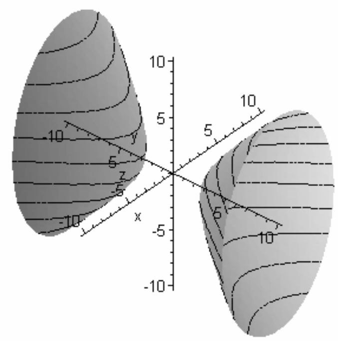
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$$

Λυση. Αυτη αναγνωριζεται ως μονοχωνο υπερβολοειδες με $a = 2$, $b = 2$, $c = 3$.

3.2.16. Σχεδιαστε και αναγνωριστε την επιφανεια

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1 \tag{3.6}$$

Λυση. Η γραφικη παρασταση της (3.6) δινεται στο Σχ. Σχ.16.8.



Σχ.16.8

Βλεπουμε οτι ειναι μονοχωνο υπερβολοειδες, αλλα ο κυριος αξονας του ειναι ο Oy και οχι ο Oz (οπως ηταν π.χ. στο Σχ. 16.7). Με αλλα λογια εγινε *αντιμεταθεση* των μεταβλητων y, z (και αντιστοιχα των αξονων Oy και Oz). Αυτος ο μετασχηματισμος μπορει να εφαρμοστει και σε πολλες αλλες δευτεροποβαθμιες επιφανειες, οπως θα δουμε παρακατω.

3.2.17. Αναγνωριστε την επιφανεια

$$\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + y^2 - 6y - \frac{1}{9}z^2 + \frac{33}{4} = 0. \tag{3.7}$$

Λυση. Με συμπληρωση τετραγωνου η (3.7) μετασχηματιζεται στην

$$\frac{(x-1)^2}{4} + (y-3)^2 - \frac{z^2}{9} = 1$$

που αναγνωριζεται ως εξισωση μονοχωνου υπερβολοειδους, με κεντρο $(1, 3, 0)$ και $a = 2$, $b = 1$, $c = 3$.

3.2.18. Σχεδιαστε και περιγραψτε το *διχωνο υπερβολοειδες*

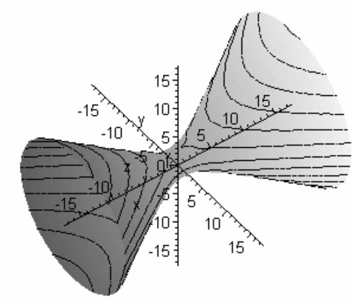
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Λυση. Η γραφικη παρασταση δινεται στο Σχ.16.8. Παρατηρουμε οτι οι τομες του διχωνου υπερβολοειδους απο επιπεδα παραλληλα στο xy και στο zx ειναι υπερβολες, ενω οι τομες απο επιπεδα παραλληλα στο yz ειναι ελλειψεις.

3.2.19. Αναγνωριστε την επιφανεια

$$-\frac{(x-1)^2}{2^2}-\frac{(y+1)^2}{3^2}+\frac{(z-2)^2}{2^2}=1$$

Λυση. Εινα διχωνο υπερβολοειδες με αντιμεταθεση των αξονων $0x$ και $0z$ και το κεντρο μετατοπισμενο στο $(1,-1,2)$. Δειτε και το Σχ. 16.9



Σχ.16.9

3.2.20. Αναγνωριστε την επιφανεια

$$\frac{1}{9}x^2-\frac{2}{9}x-y^2-z^2-\frac{8}{9}=0.$$

Λυση. Με συμπληρωση τετραγωνων η εξισωση της επιφανειας γινεται

$$\frac{(x-1)^2}{3^2}-y^2-z^2=1$$

δηλ. αυτη ειναι διχωνο υπερβολοειδες.

3.2.21. Αναγνωριστε την επιφανεια

$$-\frac{1}{4}x^2+y^2-\frac{1}{9}z^2+\frac{2}{9}z-\frac{1}{9}-1=0$$

Λυση. Με συμπληρωση τετραγωνων η εξισωση της επιφανειας γινεται

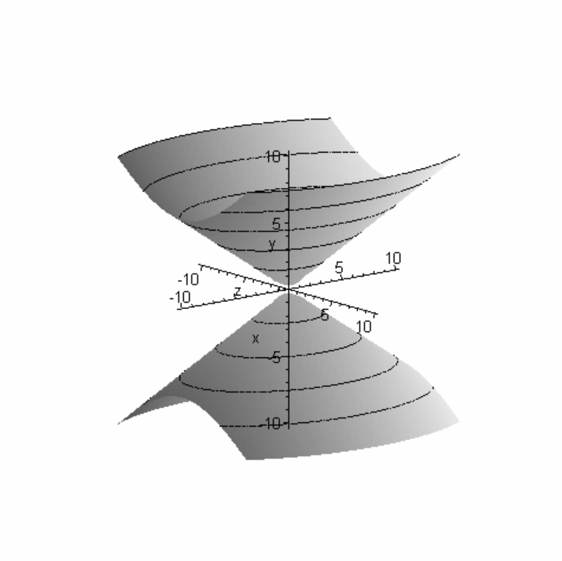
$$y^2-\frac{x^2}{4}-\frac{(z-1)^2}{9}=1$$

δηλ. αυτη ειναι διχωνο υπερβολοειδες.

3.2.22. Σχεδιαστε και περιγραψτε τον *ελλειπτικο κωνο*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}. \tag{3.8}$$

Λυση. Η γραφικη παρασταση δινεται στο Σχ.16.10. Παρατηρουμε οτι οι τομες του κωνου υπερβολοειδους απο επιπεδα παραλληλα στο xy ειναι ελλειψεις, επειδη για $z = c_1$ η (3.8) γινεται $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{c_1^2}{c^2}$. Οι τομες απο επιπεδα παραλληλα στο yz ειναι υπερβολες, επειδη για $y = b_1$ η (3.8) γινεται $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = \frac{b_1^2}{b^2}$ (παρομοια και για τις τομες απο επιπεδα παραλληλα στο zx).



Σχ.16.10

3.2.23. Αναγνωριστε την επιφανεια

$$y^2 + 4z^2 - x^2 = 0 \tag{3.9}$$

Λυση. Η (3.9) μπορει να ξαναγραφει ως

$$\frac{y^2}{2^2} + \frac{z^2}{1^2} = \frac{x^2}{2^2}$$

που αναγνωριζεται ως εξισωση ελλειπτικου κωνου με αντιμεταθεση των αξονων Ox και Oz.

3.2.24. Αναγνωριστε την επιφανεια

$$x^2 - 2x + y^2 - 4y - z^2 - 2z + 4 = 0$$

Λυση. Με συμπληρωση των τετραγωνων η εξισωση ξαναγραφεται ως

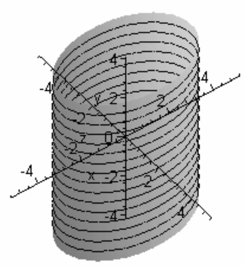
$$(x-1)^2 + (y-2)^2 - (z+1)^2 = 0$$

και αναγνωριζεται ως ελλειπτικος κωνος με $a = b = c = 1$ και την *κορυφη* του κωνου μετατοπισμενη στο $(1, 2, -1)$.

3.2.25. Σχεδιαστε και περιγραψτε τον *ελλειπτικο κυλινδρο*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{3.10}$$

Λυση. Η γραφικη παρασταση δινεται στο Σχ.16.11.



Σχ.16.11

Προσεξτε οτι η (3.10) ειναι η εξισωση μιας *επιφανειας* στον χωρο και δεν πρεπει να συγχεεται με την ιδια εξισωση στο επιπεδο (η οποια περιγραφει μια ελλειψη). Με αλλα λογια, ο ελλειπτικος κυλινδρος ειναι το συνολο των σημειων (x, y, z) (μια επιφανεια) που ικανοποιουν την (3.10). Αν το σημειο $(x_1, y_1, 0)$ ανηκει στην επιφανεια το ιδιο ισχυει και για καθε σημειο (x_1, y_1, z). Αυτο συμβανει *επειδη η συντεταγμενη* z *δεν εμφανιζεται στην* (3.10). Οι τομες του υπερβολικου κυλινδρου απο επιπεδα παραλληλα στο xy ειναι ελλειψεις.

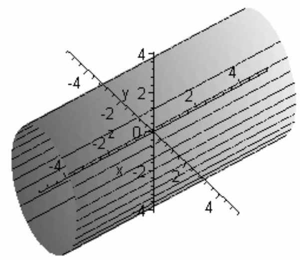
3.2.26. Σχεδιαστε και αναγνωριστε την επιφανεια $4x^2 + 9z^2 = 36$.

Λυση. Η εξισωση γραφεται ως

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{z^2}{2^2} = 1$$

και αναγνωριζεται ως ελλειπτικος κυλινδρος με αντιμεταθεση των αξονων Oy και Oz

εναλαγμενους. Δες και το Σχ.16.12.

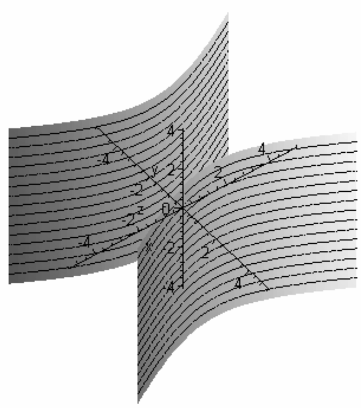


Σχ.16.12

3.2.27. Σχεδιαστε και περιγραψτε τον *υπερβολικο κυλινδρο*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Λυση. Η γραφικη παρασταση δινεται στο Σχ.16.13. Οι τομες απο επιπεδα παραλληλα στο xy ειναι υπερβολες.



Σχ.16.13

3.2.28. Σχεδιαστε και αναγνωριστε την επιφανεια

$$\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{9}z^2 + \frac{2}{3}z - \frac{7}{4} = 0$$

Λυση. Με συμπληρωση των τετραγωνων, η εξισωση μπορει να ξαναγραφει ως

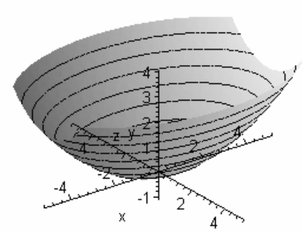
$$\frac{(x-1)^2}{2^2} - \frac{(z-3)^2}{3^2} = 1$$

και αναγνωριζεται ως υπερβολικος κυλινδρος.

3.2.29. Σχεδιαστε και περιγραψτε το *ελλειπτικο παραβολοειδες*

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

Λυση. Η γραφικη παρασταση δινεται στο Σχ.16.14.



Σχ.16.14

Οι τομες απο επιπεδα $z = c_1$ ειναι ελλειψεις. Οι τομες απο επιπεδα $x = a_1$ και $y = b_1$ ειναι παραβολες.

3.2.30. Αναγνωριστε την επιφανεια

$$4x^2 + 9y^2 = 36z$$

Λυση. Η εξισωση μπορει να ξαναγραφει

$$z = \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2}$$

που αναγνωριζεται ως εξισωση ελλειπτικου παραβολοειδους.

3.2.31. Αναγνωριστε την επιφανεια

$$x - \frac{1}{16}y^2 + \frac{1}{8}y - \frac{1}{9}z^2 - \frac{2}{9}z - \frac{25}{144} = 0$$

Λυση. Με συμπληρωση του τετραγωνου βρισκουμε οτι η εξισωση ειναι ισοδυναμη με την

$$x = \frac{(y-1)^2}{4^2} + \frac{(z+1)^2}{3^2}$$

δηλ. η επιφανεια ειναι ενα ελλειπτικο παραβολοειδες με κορυφη στο $(0, 1, -1)$

3.2.32. Αναγνωριστε την επιφανεια

$$\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + y^2 - 6y - z + \frac{37}{4}$$

Λυση. Με συμπληρωση τετραγωνων η εξισωση της επιφανειας ξαναγραφεται ως εξης

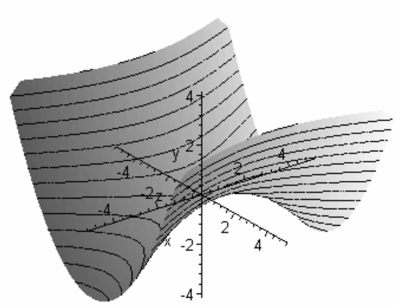
$$z = \frac{1}{4}(x+1)^2 + (y-3)^2$$

και αναγνωριζουμε οτι ειναι ελλειπτικο παραβολοειδες.

3.2.33. Σχεδιαστε και περιγραψτε το *υπερβολικο παραβολοειδες*

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

Λυση. Η γραφικη παρασταση δινεται στο Σχ.16.15.



Σχ.16.15

Οι τομες απο επιπεδα $z = c_1$ ειναι υπερβολες. Οι τομες απο επιπεδα $x = a_1$ και $y = b_1$ ειναι παραβολες.

3.2.34. Αναγνωριστε την επιφανεια

$$9x^2 - 4y^2 = 36z$$

Λυση. Η εξισωση μπορει να ξανγραφτει ως

$$z = \frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{3^2}$$

που αναγνωριζεται ως εξισωση υπερβολικου παραβολοειδους.

3.2.35. Βρειτε την εξισωση του παραβολοειδους με κορυφη το $(0, 0, 0)$, αξονα τον Oy, και διερχομενο απο τα σημεια $(1, 1, 1)$ και $(1, 2, 3)$.

Λυση. Αφου η κορυφη ειναι το $(0, 0, 0)$ και αξονας συμμετριας ο αξονας των Oy, ηεξισωση του παραβολοειδους θα ειναι

$$y = Ax^2 + Cz^2.$$

Για να διερχεται δε το παραβολοειδες απο τα $(1, 1, 1)$ και $(1, 2, 3)$ θα πρεπει να ισχυει

$$1 = A \cdot 1^2 + C \cdot 1^2$$
$$1 = A \cdot 2^2 + C \cdot 3^2$$

που εχει λυση $A = \frac{8}{5}, C = -\frac{3}{5}$. Δηλ. η ζητουμενη εξισωση ειναι

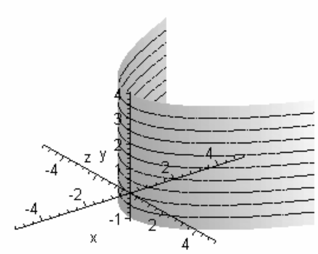
$$y = \frac{8}{5}x^2 - \frac{3}{5}z^2$$

και το παραβολοειδες ειναι ελλειπτικο.

3.2.36. Σχεδιαστε και περιγραψτε τον *παραβολικο κυλινδρο*

$$y = \frac{x^2}{a^2}$$

Λυση. Η γραφικη παρασταση δινεται στο Σχ.16.16.



Σχ.16.16

Οι τομες απο επιπεδα $z = c_1$ ειναι παραβολες.

3.2.37. Βρειτε τον γεωμετρικο τοπο των σημειων M για τα οποια $\frac{AM}{BM} = \frac{2}{3}$, οπου το σημειο A ειναι $(-2, 2, -2)$ και το B ειναι $(3, -3, 3)$.

Λυση. Εστω τυχον $M(x, y, z)$. Αυτο θα πρεπει να ικανοποιει

$$\frac{\sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2}}{\sqrt{(x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-3)^2}} = \frac{2}{3} \Rightarrow$$
$$9 \cdot \left((x+2)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2\right) = 4 \cdot \left((x-3)^2 + (y+3)^2 + (z-3)^2\right) \Rightarrow$$
$$5x^2 + 60x + 5y^2 - 60y + 5z^2 + 60z = 0 \Rightarrow$$
$$5 \cdot \left((x+6)^2 + (y-6)^2 + (z+6)^2 - 108\right) = 0.$$

(Στο τελευταιο βημα χρησιμοποιησαμε συμπληρωση του τετραγωνου). Οποτε ο ζητουμενος γεωμετρικος τοπος ειναι σφαιρα με κεντρο το $(-6, 6, -6)$ και ακτινα $6\sqrt{3}$.

3.2.38. Βρειτε τον γεωμετρικο τοπο των σημειων των οποιων η αποσταση απο τον αξονα των y ειναι τριπλασια απο την αποσταση απο τον αξονα των z.

Λυση. Θυμιζουμε οτι η αποσταση σημειου (x, y, z) απο τον αξονα των y ειναι $\sqrt{x^2 + z^2}$ και απο τον αξονα των z ειναι $\sqrt{x^2 + y^2}$ Οποτε τα δεδομενα του προβληματος εκφραζονται απο την εξισωση

$$\sqrt{x^2 + z^2} = 3\sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow$$
$$8x^2 + 9y^2 - z^2 = 0$$

που αναγνωριζεται ως εξισωση ελλειπτικου κωνου.

3.2.39. Βρειτε τον γεωμετρικο τοπο των σημειων που το τετραγωνο της αποστασης τους απο τον αξονα των y ειναι τετραπλασιο απο την αποσταση απο το επιπεδο xz.

Λυση. Θυμιζουμε οτι η αποσταση σημειου (x, y, z) απο τον αξονα των y ειναι $\sqrt{x^2 + z^2}$, απο δε το επιπεδο xz ειναι, φυσικα, y. Αρα τα δεδομενα του προβληματος εκφραζονται απο την εξισωση $4y = x^2 + z^2$ δηλ.

$$y = \frac{x^2}{2^2} + \frac{z^2}{2^2}$$

που αναγνωριζεται ως εξισωση ελλειπτικου παραβολοειδους.

3.2.40. Βρειτε τον γεωμετρικο τοπο των σημειων M για τα οποια $AM + BM = 8$, οπου το σημειο A ειναι $(2, 3, 4)$ και το B ειναι $(2, -3, 4)$.

Λυση. Εστω τυχον $M(x, y, z)$. Αυτο θα πρεπει να ικανοποιει

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2} + \sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-4)^2} = 8$$

δηλ.

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2} &= 8-\sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2+(z-4)^2} \Rightarrow \\
3y+16 &= 4\sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2+(z-4)^2} \Rightarrow \\
9y^2+96y+256 &= 16\cdot\left((x-2)^2+(y+3)^2+(z-4)^2\right) \Rightarrow \\
16x^2+7y^2+16z^2-64x-128z+208 &= 0 \Rightarrow \\
\frac{(x-2)^2}{7}+\frac{y^2}{16}+\frac{(z-4)^2}{7} &= 1
\end{aligned}$$

που αναγνωριζεται ως εξισωση ελλειψοειδους με κεντρο το $(2,0,4)$.

3.2.41. Βρειτε τον γεωμετρικο τοπο των σημειων M για τα οποια η αποσταση απο το σημειο $(2,-1,3)$ ειναι δυο φορες η αποσταση απο τον αξονα των x.

Λυση. Θα ειναι

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2} &= 2\sqrt{y^2+z^2} \Rightarrow \\
x^2-4x-3y^2+2y-3z^2-6z+14 &= 0 \Rightarrow \\
(x-2)^2-3\cdot(y-1/3)^2-3\cdot(z+1)^2 &= -\frac{40}{3}
\end{aligned}$$

που μπορει να γραφτει και ως

$$\frac{(y-1/3)^2}{\frac{40}{9}}+\frac{(z+1)^2}{\frac{40}{9}}-\frac{(x-2)^2}{\frac{40}{3}}=1$$

και αναγνωριζεται ως εξισωση μονοχωνου υπερβολοειδους με κεντρο το $(1/3,-1,2)$.

3.2.42. Βρειτε τον γεωμετρικο τοπο των σημειων M για τα οποια $AM-BM=6$, οπου το σημειο A ειναι $(-4,3,1)$ και το B ειναι $(4,3,1)$.

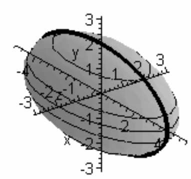
Λυση. Θα πρεπει να εχουμε

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{(x+4)^2+(y-3)^2+(z-1)^2}\right)^2 &= \left(6+\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2+(z-1)^2}\right)^2 \Rightarrow \\
4x-9 &= 3\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2+(z-1)^2} \Rightarrow \\
16x^2-72x+81 &= 9\cdot\left((x-4)^2+(y-3)^2+(z-1)^2\right) \Rightarrow \\
7x^2-9y^2-9z^2+54y+18z &= 153 \Rightarrow \\
\frac{x^2}{9}-\frac{(y-3)^2}{7}-\frac{(z-1)^2}{7} &= 1
\end{aligned}$$

που αναγνωριζουμε ως εξισωση διχωνου υπερβολοειδους.

3.2.43. Βρειτε την εξισωση της επιφανειας που δημιουργειται απο την περιστροφη της ελλειψης $x^2+4z^2=16$ (η οποια κειται στο επιπεδο xz) γυρω απο τον Ox.

Λυση. Δειτε το Σχ.16.17.



Σχ.16.17

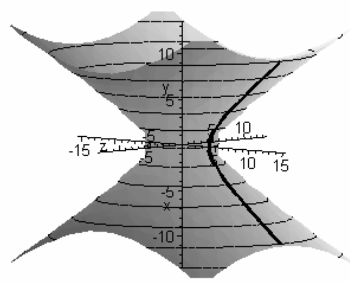
Εστω M τυχον σημειο της επιφανειας και MB καθετο στο επιπεδο xy. Τοτε το τριγωνο ABM ειναι ορθογωνιο και $AB = y$, $BM = z$, $AP^2 = y^2 + z^2$. Επισης, απο την εξισωση της ελλειψης, $x^2 = 16 - 4AP^2 = 16 - 4 \cdot (y^2 + z^2)$ δηλ.

$$x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 16 \tag{3.11}$$

δηλ. η επιφανεια ειναι ενα ελλειψοειδες. Φυσικα η εξισωση (3.11) ειναι ακριβως αυτη που θα περναμε και με εφαρμογη της (3.4).

3.2.44. Βρειτε την εξισωση της επιφανειας που δημιουργειται απο την περιστροφη της υπερβολης $x^2 - 2z^2 = 16$ (η οποια κειται στο επιπεδο xz) γυρω απο τον Oz.

Λυση. Δειτε το Σχ.18.



Σχ.16.18

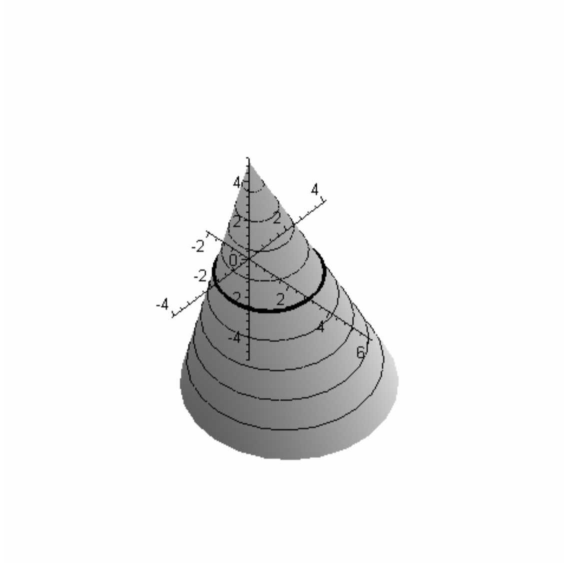
Εστω $M_1\left(x_1, 0, z\right)$ τυχον σημειο της υπερβολης και $M'\left(0, 0, z\right)$ η προβολη του M_1 στον Oz. Καθως το M_1 περιστρεφεται γυρω απο τον Oz, η εικονα του ειναι ενας κυκλος. Εστω $M\left(x, y, z\right)$ τυχον σημειο του κυκλου. Θα εχουμε $x_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$ και στην περιστραμμενη υπερβολη

$$x_1^2 - 2z^2 = 16 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2z^2 = 16. \tag{3.12}$$

Δηλ. η επιφανεια ειναι ενα μονοχωνο υπερβολοειδες. Φυσικα η εξισωση (3.12) ειναι ακριβως αυτη που θα περναμε και με εφαρμογη της (3.4).

3.2.45. Βρειτε την εξισωση της επιφανειας που δημιουργειται απο την περιστροφη της ευθειας $2x + 3y = 6$ (η οποια κειται στο επιπεδο xy) γυρω απο τον Oy.

Λυση. Δειτε το Σχ.16.19.



Σχ.16.19

Η εξισωση της επιφανειας προκυπτει αντικαθιστωντας το x στην εξισωση της ελλειψης με το $\sqrt{x^2+z^2}$ οποτε η επιφανεια εχει εξισωση

$$2\sqrt{x^2+y^2=3\cdot(2-y)} \Rightarrow 4\cdot\left(x^2+z^2\right)=9\cdot(2-y)^2$$

που ειναι ενας κωνος με κορυφη στο $(0,2,0)$.

3.2.46. Δειξτε οτι η επιφανεια με παραμετρικες εξισωσεις

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(u,v) &= (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \\ &= (R\cos u\cos v, R\sin u\cos v, R\sin v), \qquad 0\le u\le 2\pi, 0\le v\le \pi.\end{aligned} \tag{3.13}$$

ειναι η σφαιρα

$$x^2+y^2+z^2=R^2. \tag{3.14}$$

Κατοπιν βρειτε μια *διαφορετικη* παραμετρικη εξισωση της ιδιας σφαιρας.

Λυση. Αυτο μπορει να δειχτει με απαλοιφη των u,v απο την (3.13). Εχουμε

$$\left.\begin{aligned} x=R\cos u\cos v \\ y=R\sin u\cos v\end{aligned}\right\} \Rightarrow x^2+y^2=R^2\cdot\left(\cos^2 u\cos^2 v+\sin^2 u\cos^2 v\right)=R^2\cos^2 v$$

και μαζι με την $z^2=\sin^2 v$ παιρνουμε

$$x^2+y^2+z^2=R^2\cos^2 v+R^2\sin^2 v=R^2.$$

Μια διαφορετικη παραμετροποιηση ειναι η

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(u,v) &= (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \\ &= (R\sin u\sin v, R\cos v, R\sin u\cos v), \qquad 0\le u\le 2\pi, 0\le v\le \pi\end{aligned} \tag{3.15}$$

η οποια επισης δινει $x^2+y^2+z^2=R^2$ (οπως μπορει να αποδεχτει με απαλοιφη των u,v).

3.2.47. Βρειτε μια παραμετροποιηση της σφαιρας

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2.$$

Λυση. Μια δυνατη παραμετροποιηση ειναι

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(u,v)&=(x(u,v),y(u,v),z(u,v)) \\ &=(x_0+R\cos u\cos v,y_0+R\sin u\cos v,z_0+R\sin v), \qquad 0\le u\le 2\pi, 0\le v\le\pi.\end{aligned} \tag{3.16}$$

Πραγματι, απο την (3.16) παιρνουμε

$$\begin{aligned}x-x_0&=R\cos u\cos v\\ y-y_0&=R\sin u\cos v\\ z-z_0&=R\sin v\end{aligned}$$

και απο τις παραπανω, οπως και στην προηγουμενη ασκηση, παιρνουμε $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$.

3.2.48. Βρειτε μια παραμετροποιηση του ημισφαιριου

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2, \qquad z\ge 0.$$

Λυση. Μια δυνατη παραμετροποιηση ειναι η

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(u,v)&=(x(u,v),y(u,v),z(u,v)) \\ &=(x_0+R\cos u\cos v,y_0+R\sin u\cos v,z_0+R\sin v), \qquad 0\le u\le 2\pi, 0\le v\le\pi/2.\end{aligned} \tag{3.17}$$

Η μονη διαφορα απο την (3.16) ειναι οτι $v\in[0,\pi/2]$ αντι του $[0,\pi]$.

3.2.49. Βρειτε μια παραμετροποιηση του ελλειψοειδους

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=R^2.$$

Λυση. Μια δυνατη παραμετροποιηση ειναι

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(u,v)&=(x(u,v),y(u,v),z(u,v)) \\ &=(x_0+a\cos u\cos v,y_0+b\sin u\cos v,z_0+c\sin v), \qquad 0\le u\le 2\pi, 0\le v\le\pi.\end{aligned} \tag{3.18}$$

οπως μπορει να ελεγχθει με απαλοιφη των u,v απο την (3.18).

3.2.50. Ποια επιφανεια περιγραφουν οι παραμετρικες εξισωσεις

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(u,v)&=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))=\left(a\sqrt{1+u^2}\sin v,a\sqrt{1+u^2}\cos v,cu\right), \\ &u\in\mathbb{R},v\in[0,2\pi].\end{aligned} \tag{3.19}$$

Λυση. Εχουμε

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=\frac{a^2\cdot(1+u^2)}{a^2}\cdot\left(\sin^2 v+\cos^2 v\right)=1+u^2=1+\frac{z^2}{c^2}$$

αρα η (3.19) ειναι η παραμετρικη εξισωση ενος μονοχωνου υπερβολοειδους.

3.2.51. Ποια επιφανεια περιγραφουν οι παραμετρικες εξισωσεις

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(u,v) &= (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \\ &= (\sinh u \cos v, a \sinh u \sin v, c \cosh \mathrm{u}), \quad u \in \mathbb{R}, v \in [0, 2\pi]. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Λυση. Εχουμε

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} &= \frac{a^2 \cdot \left(\cos^2 v + \sin^2 v\right)}{a^2} \cdot \sinh^2 u - \frac{c^2 \cosh^2 u}{c^2} \\ &= \sinh^2 u - \cosh^2 u = -1 \end{aligned}$$

δηλ.

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$$

που ειναι η εξισωση ενος διχωνου υπερβολοειδους.

3.2.52. Γραψτε τις παραμετρικες εξισωσεις του παραβολοειδους $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$.

Λυση. Θελουμε να εκφρασουμε τα x, y, z ως συναρτησεις $x(u,v)$, $y(u,v)$ τετοιες ωστε

$$z = \frac{x^2(u,v)}{a^2} + \frac{y^2(u,v)}{b^2}.$$

Μια προφανης επιλογη ειναι

$$x(u,v) = a\sqrt{u}\cos v, \qquad y(u,v) = b\sqrt{u}\sin v, \qquad z(u,v) = u.$$

3.2.53. Ποια επιφανεια περιγραφει η

$$\mathbf{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = (av\cos u, bv\sin u, v), \qquad u \in [0, 2\pi]. \tag{3.21}$$

Λυση. Εχουμε

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = v^2 \cdot \left(\cos^2 u + \sin^2 u\right) = z^2$$

οποτε η (3.21) ειναι η εξισωση ενος ελλειπτικου κωνου.

3.2.54. Βρειτε μια παραμετροποιηση του ελλειπτικου κυλινδρου

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Λυση. Θελουμε να εκφρασουμε τα x, y, z ως συμαρτησεις $x(u,v)$, $y(u,v)$ τετοιες ωστε

$$\frac{x^2(u,v)}{a^2} + \frac{y^2(u,v)}{b^2} = 1$$

και το πεδιο τιμων της $z(u,v)$ να ειναι ολο το $\mathbb{R}$. Μια προφανης επιλογη ειναι

$$x(u,v) = a\cos u, \qquad y(u,v) = b\sin u, \qquad z(u,v) = v.$$

3.2.55. Δειξτε οτι η παραμετρικη εξισωση

$$\mathbf{r}(u,v) = (v + 2v\cos u, 2v\sin u, 5 - v) \tag{3.22}$$

περιγραφει μια κωνικη επιφανεια με κορυφη το σημειο $(0,0,5)$ και *οδηγο καμπυλη* τον κυκλο $(3 + 4\cos u, 4\sin u, 0)$, δηλ. τον κυκλο που ανηκει στο xy επιπεδο, εχει κεντρο το $(1,0)$ και ακτινα 2.

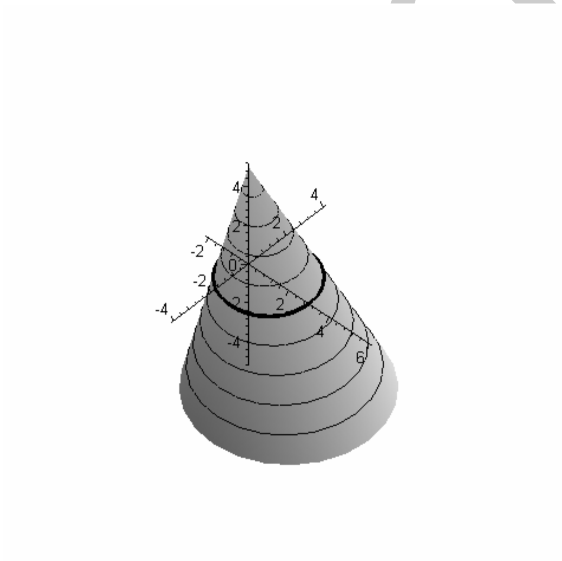
Λυση. Η (3.22) μπορει να ξαναγραφει ως εξησ:

$$\mathbf{r}(u,v) = (0,0,5) + v \cdot ((1 + 2\cos u, 2\sin u, 0) - (0,0,1)) = \mathbf{r}_0 + v \cdot (\mathbf{r}_1(u) - \mathbf{r}_0) \tag{3.23}$$

με

$$\mathbf{r}_0 = (0,0,5), \qquad \mathbf{r}_1(u) = (1 + 2\cos u, 2\sin u, 0).$$

Το Σχ.16.19 απεικονιζει την (3.23).



Σχ.16.19

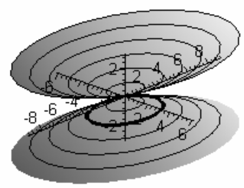
Το $\mathbf{r}_1(u) = (4 + 4\cos u, 4\sin u, 0)$ ειναι η παραμετρικη εξισωση του κυκλου στο επιπεδο xy με ακτινα 2 και κεντρο το $(3,0,0)$. Το δε $\mathbf{r}_1(u) - \mathbf{r}_0$ ειναι ο ιδιος κυκλος μετατοπισμενος κατα $\mathbf{r}_0 = (0,0,1)$, δηλ. ανυψωμενος στο επιπεδο $z = 1$. Τωρα, η επιφανεια της (3.23) κατασκευαζεται προσθετοντας στο σταθερο διανυσμα $\mathbf{r}_0 = (0,0,1)$ διανυσματα συγγραμικα με το $\mathbf{r}_1(u) - \mathbf{r}_0$. Με αλλα λογια, η επιφανεια αποτελειται απο ευθειες οι οποιες περνουν απο το σταθερο σημειο $(0,0,1)$ (κορυφη) και τα σημεια του κυκλου (γενετειρα). Ετσι δημιουργειται ενας «κεκλιμενος» κωνος, ενα παραδειγμα κωνικης επιφανειας.

3.2.56. Γραψτε τον «ορθο» κωνο της (3.21) στην μορφη $\mathbf{r}_0 + v \cdot (\mathbf{r}_1(u) - \mathbf{r}_0)$

Λυση. Η εξισωση του κωνου ειναι

$$(av\cos u, bv\sin u, v) = (0,0,0) + v \cdot (a\cos u, b\sin u, 1).$$

Δηλ. $\mathbf{r}_0 = (0, 0, 0)$, $\mathbf{r}_1(u) = (a\cos u, b\sin u, 1)$, μια ελλειψη στο επιπεδο $z = 1$. Πραγματι, ο κωνος του Σχ.16.20



Σχ.16.20

δημιουργειται απο τις ευθειες οι οποιες οριζονται απο την κορυφη $(0, 0, 0)$ και τα σημεια της γενετειρας ελλειψης.

3.2.57. Γραψτε τις παραμετρικες εξισωσεις του ελλειπτικου κυλινδρου $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ στην μορφη

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}_1(u) + v \cdot \mathbf{r}_2 \tag{3.24}$$

Λυση. Αν θεσουμε

$$\mathbf{r}_1(u) = (a\cos u, b\sin u, 0), \qquad \mathbf{r}_2 = (0, 0, 1)$$

η (3.24) γινεται

$$\mathbf{r}(u, v) = (a\cos u, b\sin u, 0) + v \cdot (0, 0, 1) = (a\cos u, b\sin u, v) \Rightarrow$$

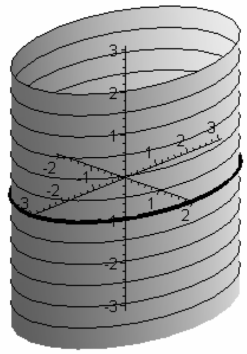
$$x(u, v) = a\cos u, \qquad y(u, v) = b\sin u, \qquad z(u, v) = v$$

οι οποιες ικανοποιουν

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ και } z \in \mathbb{R}.$$

Με αλλα λογια, ο κυλινδρος σχηματιζεται φερνοντας απο καθε σημειο της ελλειψης

$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, z=0\right)$ ευθειες παραλληλες στο διανυσμα $(0,0,1)$ Δες και το Σχ.16.21



Σχ.16.21

3.2.58. Γραψτε τις παραμετρικες εξισωσεις της κυλινδρικης επιφανειας με με γενετειρα το διανυσμα $(0,1,1)$ και οδηγο καμπυλη τον κυκλο $x^2+z^2=1$ στο επιπεδο xz. Σχεδιαστε την κυλινδρικη επιφανεια.

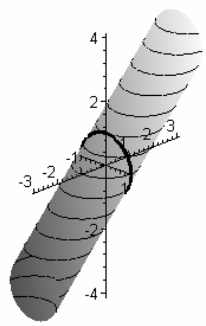
Λυση. Οι ζητουμενες ειναι

$$\mathbf{r}(u,v)=(\cos u,0,\sin u)+v\cdot(0,1,1)=(\cos u,v,v+\sin u).$$

Δηλ.

$$\mathbf{r}_1(u)=(\cos u,0,\sin u) \text{ και } \mathbf{r}_2=(0,1,1).$$

Με αλλα λογια η κυλινδρικη επιφανεια σχηματιζεται φερνοντας απο καθε σημειο της παραβολης $(z = x^2, y = 0)$ ευθειες παραλληλες στο διανυσμα $(0, 1, 1)$. Δες και το Σχ.16.22.



Σχ.16.22

3.3 Αλυτες Ασκησεις

3.3.1. Βρειτε την εξισωση της σφαιρας με κεντρο $(-2, 3, 1)$ και ακτινα 4.
Απ. $(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 = 16$.

3.3.2. Βρειτε την εξισωση της σφαιρας με κεντρο $(1, 0, 4)$ και ακτινα 1.
Απ. $(x-1)^2 + y^2 + (z-4)^2 = 1$.

3.3.3. Βρειτε την εξισωση της σφαιρας με κεντρο $(1, 1, 1)$ και διερχομενης απο το σημειο $(1, 1, 2)$.
Απ. $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1$.

3.3.4. Βρειτε το κεντρο και την ακτινα της σφαιρας $x^2+6x+y^2-4y+z^2-10z-11 = 0$.
Απ. $(-3, 2, 5)$ και 7.

3.3.5. Βρειτε το κεντρο και την ακτινα της σφαιρας $x^2+2x+y^2+8y+z^2-6z+22 = 0$.
Απ. $(-1, -4, 3)$ και 2.

3.3.6. Βρειτε την εξισωση της σφαιρας με κεντρο το $(3, 6, -4)$ και εφαπτομενης στο επιπεδο $2x - 2y - z - 10 = 0$.
Απ. $(x-3)^2 + (y-6)^2 + (z+4)^2 = 16$.

3.3.7. Βρειτε την εξισωση της σφαιρας που μια διαμετρος της εχει ακρα τα σημεια $(3, -5, 6)$ και $(5, 7, -1)$.
Απ. $(x-3)^2 + (y-6)^2 + (z+4)^2 = 16$.

3.3.8. Βρειτε την εξισωση της σφαιρας που διερχεται απο τα σημεια $(7, 9, 1)$, $(-2, -3, 2)$, $(1, 5, 5)$ και $(-6, 2, 5)$.
Απ. $x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 14y + 18z - 79 = 0$.

3.3.9. Βρειτε την εξισωση της σφαιρας που διερχεται απο τα σημεια $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 1)$, $(1, 1, 2)$, $(2, 1, 1)$
Απ. $x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 3y - 3z + 6 = 0$.

3.3.10. Βρειτε την εξισωση της σφαιρας που διερχεται απο τα σημεια $(2, 1, 3)$, $(3, -2, 1)$, $(-4, 1, 1)$, $(1, 1, -3)$.
Απ. $51x^2 + 51y^2 + 51z^2 + 45x + 37y - 33z - 742 = 0$.

3.3.11. Βρειτε την εξισωση της σφαιρας που διερχεται απο τα σημεια $(2, -5, 8)$, $(8, -2, 5)$, $(5, -8, 2)$ και $(-2, -8, -5)$.
Απ. $x^2 + y^2 + z^2 = 93$.

3.3.12. Βρειτε την εξισωση της σφαιρας με κεντρο $(-4, 2, 3)$ και εφαπτομενης στο επιπεδο $2x - y - 2z + 7 = 0$.
Απ. $x^2 + y^2 + z^2 + 8x - 4y - 6z + 20$.

3.3.13. Βρειτε την εξισωση της σφαιρας με κεντρο $(2, 3, -4)$ και εφαπτομενης στην σφαιρα $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 6$.
Απ. $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+4)^2 = 9 \pm \sqrt{6}$.

3.3.14. Βρειτε την εξισωση της σφαιρας S εφαπτομενης στις σφαιρες

$$S_1 : (x-5)^2 + (y+2)^2 + (z-6)^2 = 16,$$
$$S_2 : (x-5)^2 + (y+2)^2 + (z+4)^2 = 9,$$

αν ειναι γνωστο οτι το κεντρο της S βρισκεται επι του ευθυγραμμου τμηματος που οριζουν τα κεντρα των S_1 και S_2.

Απ. Υπαρχουν *τεσσερις* λυσεισ: $(x-5)^2 + (y+2)^2 + (z-4.5)^2 = R^2$ οπου $R^2 \in \{2.25, 72.25, 30.25, 20.25\}$.

3.3.15. Βρειτε την εξισωση της σφαιρας με κεντρο $(6, 3, -4)$ και εφαπτομενης στον αξονα των x.

Απ. $x^2 + y^2 + z^2 - 12x - 6y + 8z + 36 = 0$.

3.3.16. Βρειτε την εξισωση της σφαιρας με κεντρο $(-4, -2, 3)$ και εφαπτομενης στο επιπεδο yz.

Απ. $x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 4y - 6z + 13 = 0$.

3.3.17. Βρειτε την εξισωση της σφαιρας με κεντρο $(2, -3, 2)$ και εφαπτομενης στο επιπεδο $6x - 3 + 2z - 8 = 0$.

Απ. $49x^2 + 49y^2 + 49z^2 - 196x + 294y - 196z + 544 = 0$.

3.3.18. Βρειτε την εξισωση της σφαιρας με κεντρο $(1, 2, 4)$ και εφαπτομενης στο επιπεδο $3x - 2y + 4z - 7 = 0$.

Απ. $29x^2 + 29y^2 + 29z^2 - 58x - 118y - 232z + 545 = 0$.

3.3.19. Βρειτε την εξισωση της σφαιρας με κεντρο $(0, 0, 0)$ και εφαπτομενης στο επιπεδο $9x - 2y + 6z + 11 = 0$.

Απ. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

3.3.20. Τα σημεια $(7, -2, 4)$ και $(9, -8, 6)$ βρισκονται στην επιφανεια μιας σφαιρας S και ανηκουν σε μια ευθεια που περναει απο το κεντρο της S. Βρειτε την εξισωση της S.

Απ. $(x-8)^2 + (y+5)^2 + (z-5)^2 = 11$.

3.3.21. Βρειτε την εξισωση της σφαιρας που εφαπτεται στα επιπεδα $x - 2z - 8 = 0$, $2x - z + 5 = 0$ και εχει κεντρο επι της ευθειας $x = -2$, $y = 0$.

Απ. Δυο σφαιρες: $x^2+y^2+z^2+4x+6z+49/5 = 0$ και $x^2+y^2+z^2+4x+22z+481/5 = 0$.

3.3.22. Βρειτε την εξισωση της σφαιρας που διερχεται απο τα σημεια $(1, -3, 4)$, $(1, -5, 2)$, $(1, -3, 0)$ και εχει το κεντρο στο επιπεδο $x + y + z = 0$.

Απ. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z + 10 = 0$.

3.3.23. Εφαπτετατι η ευθεια που οριζουν τα σημεια $(11, 6, 5)$ και $(-16, -3, 8)$ στην σφαιρα $x^2 + y^2 + z^2 = 49$;

Απ. Ναι, στο σημειο $(2, 3, 6)$

3.3.24. Να βρεθει η εξισωση της σφαιρας που διερχεται απο το $(8, 15, 10)$ και τεμνει το επιπεδο xy σε κυκλο κεντρου 0 και ακτινας 7.

Απ. $x^2 + y^2 + (z-17)^2 = 338$.

3.3.25. Σχεδιαστε και αναγνωριστε την επιφανεια

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$$

Απ. Ειναι ελλειψοειδες.

3.3.26. Σχεδιαστε την επιφανεια

$$2x^2 + 3y^2 + z^2 - 8x + 6y - 4z - 3 = 0$$

και δειξτε οτι ειναι ενα ελλειψοειδες.

3.3.27. Σχεδιαστε την επιφανεια

$$2x^2 + 3y^2 + z^2 - 8x + 6y - 4z - 3 = 0$$

και δειξτε οτι ειναι ενα ελλειψοειδες.

3.3.28. Να βρεθει η εξισωση του επιπεδου το οποιο ειναι παραλληλο στο $2x-3y+5z=0$ και εφαπτεται στο ελλειψοειδες

$$x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1.$$

Απ. Δυο λυσεις: $2x - 3y + 5z \pm \sqrt{265}$.

3.3.29. Σχεδιαστε την επιφανεια $x^2 - y^2 + 2y + z^2 - 6z + 7 = 0$ και δειξτε οτι ειναι ενα μονοχωνο υπερβολοειδες.

3.3.30. Σχεδιαστε την επιφανεια $x^2 - 2x - y^2 + 2y + z^2 - 1 = 0$ και δειξτε οτι ειναι ενα μονοχωνο υπερβολοειδες.

3.3.31. Σχεδιαστε την επιφανεια $x^2 + y^2 - 8y - z^2 + 6z + 6 = 0$ και δειξτε οτι ειναι ενα μονοχωνο υπερβολοειδες.

3.3.32. Σχεδιαστε την επιφανεια $x^2 - y^2 + 2y - z^2 + 6z - 11 = 0$ και δειξτε οτι ειναι ενα διχωνο υπερβολοειδες.

3.3.33. Σχεδιαστε την επιφανεια $-x^2 - y^2 + 2y + z^2 - 6z + 7 = 0$ και δειξτε οτι ειναι ενα διχωνο υπερβολοειδες.

3.3.34. Σχεδιαστε την επιφανεια $x^2 - y^2 + 2y - z^2 + 6z - 10 = 0$ και δειξτε οτι ειναι ενας κωνος.

3.3.35. Σχεδιαστε την επιφανεια $x^2 + y^2 - 2y - z^2 + 6z - 8 = 0$ και δειξτε οτι ειναι ενας κωνος.

3.3.36. Σχεδιαστε την επιφανεια $y^2 - 2y + z^2 - 6z + 6 = 0$ και δειξτε οτι ειναι ενας ελλειπτικος κυλινδρος.

3.3.37. Σχεδιαστε την επιφανεια $-y^2+2y+z^2-6z+12=0$ και δειξτε οτι ειναι ενας υπερβολικος κυλινδρος.

3.3.38. Σχεδιαστε την επιφανεια $y^2-2y+z^2-6z-x+10=0$ και δειξτε οτι ειναι ενα ελλειπτικο παραβολοειδες.

3.3.39. Σχεδιαστε την επιφανεια $-y^2+2y+z^2-6z+x+8=0$ και δειξτε οτι ειναι ενα υπερβολικο παραβολοειδες.

3.3.40. Σχεδιαστε την επιφανεια $-x^2+8x-z^2-2z+y-17=0$ και δειξτε οτι ειναι ενα ελλειπτικο παραβολοειδες.

3.3.41. Βρειτε την εξισωση του παραβολοειδους με κορυφη το $(0,0,0)$, αξονα αυτο τον z, και διερχομενο απο τα σημεια $(3,0,1)$ και $(3,2,2)$.
Απ. $z=\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}$.

3.3.42. Βρειτε την εξισωση του παραβολοειδους με κορυφη στο $(0,0,0)$, κυριο αξονα τον Oz και διερχομενο απο τα $(2,0,3)$ και $(1,2,3)$.
Απ. $12x^2+9y^2-16z=0$.

3.3.43. Βρειτε την εξισωση του παραβολοειδους με κορυφη στο $(0,0,0)$, κυριο αξονα τον Oz και διερχομενο απο τα $(1,0,1)$ και $(0,2,1)$.
Απ. $4x^2+y^2=4z$.

3.3.44. Βρειτε την εξισωση του παραβολοειδους με κορυφη στο $(0,0,0)$, κυριο αξονα τον Ox και διερχομενο απο τα $(1,2,2)$ και $(2,6,8)$.
Απ. $z^2-2y^2+4x=0$.

3.3.45. Σχεδιαστε την επιφανεια $-x^2+2x+y-2=0$ και δειξτε οτι ειναι ενας παραβολικος κυλινδρος

3.3.46. Σχεδιαστε την επιφανεια $-z^2+6z+x-7=0$ και δειξτε οτι ειναι ενας παραβολικος κυλινδρος.

3.3.47. Γραψτε την εξισωση της επιφανειας που δημιουργειται απο την περιστροφη της ελλειψης $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{14}=1$ οταν αυτη περιστραφει γυρω απο τον αξονα Oy. Σχεδιαστε την επιφανεια.
Απ. $\frac{x^2}{25}+\frac{z^2}{25}+\frac{y^2}{14}=1$.

3.3.48. Γραψτε την εξισωση της επιφανειας που δημιουργειται απο την περιστροφη της ελλειψης $\frac{x^2}{36}+\frac{z^2}{16}=1$ οταν αυτη περιστραφει γυρω απο τον αξονα Oz. Σχεδιαστε την επιφανεια.
Απ. $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{36}+\frac{z^2}{16}=1$

3.3.49. Γραψτε την εξισωση της επιφανειας που δημιουργειται απο την περιστροφη της υπερβολης $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$ οταν αυτη περιστραφει γυρω απο τον αξονα Ox. Σχεδιαστε την επιφανεια.
Απ. $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}-\frac{z^2}{36}=1$

3.3.50. Γραψτε την εξισωση της επιφανειας που δημιουργειται απο την περιστροφη της παραβολης $x = y^2/2$ οταν αυτη περιστραφει γυρω απο τον αξονα Ox. Σχεδιαστε την επιφανεια.

Απ. $x = \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2}$.

3.3.51. Γραψτε την εξισωση της επιφανειας που δημιουργειται απο την περιστροφη της ευθειας $2x = 3z$ οταν αυτη περιστραφει γυρω απο τον αξονα Ox. Σχεδιαστε την επιφανεια.

Απ. $x^2 = \frac{9}{4} \cdot (y^2 + z^2)$.

3.3.52. Γραψτε την εξισωση της επιφανειας που δημιουργειται απο την περιστροφη της υπερβολης $\frac{x^2}{9} - \frac{z^2}{4} = 1$ οταν αυτη περιστραφει γυρω απο τον αξονα Oz. Σχεδιαστε την επιφανεια.

Απ. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{4} = 1$.

3.3.53. Γραψτε την εξισωση της επιφανειας που δημιουργειται απο την περιστροφη της ευθειας $x = 3$ οταν αυτη περιστραφει γυρω απο τον αξονα Oz. Σχεδιαστε την επιφανεια.

Απ. $x^2 + y^2 = 9$.

3.3.54. Βρειτε την εξισωση και σχεδιαστε τον γεωμετρικο τοπο των σημειων που το αθροισμα των αποστασεων του απο τα $(0, 3, 0)$ και $(0, -3, 0)$ ειναι 8.

Απ. $16x^2 + 7y^2 + 16z^2 = 112$, ενα ελλειψοειδες.

3.3.55. Βρειτε την εξισωση και σχεδιαστε τον γεωμετρικο τοπο των σημειων που οι αποστασεις τους απο τα $(1, 1, -2)$ και $(-2, 3, 2)$ εχουν λογο $3/4$.

Απ. $7x^2 + 7y^2 + 7z^2 - 68x + 22y + 100z - 57 = 0$.

3.3.56. Ενα σημειο κινειται με τροπο τετοιο ωστε το αθροισμα των αποστασεων του απο τα σημεια $(3, 2, -4)$ και $(3, 2, 4)$ να ισουται με 10. Βρειτε την εξισωση του γεωμετρικου τοπου του σημειου και σχεδιαστε.

Απ. $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1$, ενα ελλειψοειδες.

3.3.57. Ενα σημειο κινειται με τροπο τετοιο ωστε η αποσταση του απο το επιπεδο yz ισουται με δυο φορες την αποσταση του απο το σημειο $(1, -2, 2)$. Βρειτε την εξισωση του γεωμετρικου τοπου του σημειου και σχεδιαστε.

Απ. $3x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 8x + 16y - 16z + 36 = 0$, ενα ελλειψοειδες.

3.3.58. Βρειτε τον γεωμετρικο τοπο των σημειων που η αποσταση του απο τον αξονα των x ισουται με τρεις φορες την αποσταση του απο το $(2, 3, -3)$.

Απ. $9x^2 + 8y^2 + 8z^2 - 36x - 54y + 54z + 198 = 0$.

3.3.59. Βρειτε την εξισωση και σχεδιαστε τον γεωμετρικο τοπο των σημειων που η διαφορα των αποστασεων του απο τα $(0, 0, 3)$ και $(0, 0, -3)$ ειναι 4.

Απ. $5z^2 - 4x^2 - 4y^2 = 20$, διχωνο υπερβολοειδες.

3.3.60. Ενα σημειο κινειται με τροπο τετοιο ωστε το αθροισμα των τετραγωνων αποστασεων του απο τα επιπεδα

$$\begin{aligned} x + 4y + 2z &= 0 \\ 2x - y + z &= 0 \\ 2x + y - 3z &= 0 \end{aligned}$$

να ισουται με 10. Βρειτε την εξισωση του γεωμετρικου τοπου του σημειου.

Απ. $x^2 + y^2 + z^2 = 10$, μια σφαιρα.

3.3.61. Ενα σημειο κινειται με τροπο τετοιο ωστε το αθροισμα των αποστασεων του απο τα σημεια $(3, 2, -4)$ και $(3, 2, 4)$ να ισουται με 10. Βρειτε την εξισωση του γεωμετρικου τοπου του σημειου και σχεδιαστε.

Απ. $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1$, ενα ελλειψοειδες.

3.3.62. Ενα σημειο κινειται με τροπο τετοιο ωστε το αθροισμα των αποστασεων του απο τα σημεια $(-5, 0, 2)$ και $(5, 0, 2)$ να ισουται με 12. Βρειτε την εξισωση του γεωμετρικου τοπου του σημειου και σχεδιαστε.

Απ. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{11} + \frac{(z-2)^2}{11} = 1$, ενα ελλειψοειδες.

3.3.63. Βρειτε την εξισωση και σχεδιαστε τον γεωμετρικο τοπο ενος σημειο του οποιου το τετραγωνο της αποσταση απο τον Oz ισουται με το διπλασιο της αποστασης απο το επιπεδο xy.

Απ. $2z = x^2 + y^2$, ενα ελλειπτικο παραβολοειδες.

3.3.64. Ενα σημειο κινειται με τροπο τετοιο ωστε η αποσταση του απο το επιπεδο $y = -4$ ισουται με 1/4 την αποσταση του απο το σημειο $(2, -3, 1)$. Βρειτε την εξισωση του γεωμετρικου τοπου του σημειου και σχεδιαστε.

Απ. $16x^2 + 15y^2 + 16z^2 - 64x + 88y - 33z + 208 = 0$, ενα ελλειψοειδες.

3.3.65. Γραψτε τις παραμετρικες εξισωσεις της σφαιρας $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 4$.

Απ. $\mathbf{r}(u, v) = (1 + 2\cos u \cos v, 2 + \sin u \cos v, 1 + \sin v)$.

3.3.66. Γραψτε τις παραμετρικες εξισωσεις του ελλειψοειδους $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1$

Απ. $\mathbf{r}(u, v) = (2\cos u \cos v, 3\sin u \cos v, 5\sin v)$.

3.3.67. Γραψτε τις παραμετρικες εξισωσεις του παραβολοειδους $z = x^2 + y^2$.

Απ. $\mathbf{r}(u, v) = (\sqrt{u}\cos v, \sqrt{u}\sin v, u)$.

3.3.68. Γραψτε τις παραμετρικες εξισωσεις του κωνου $x^2 = z^2 + y^2$.

Απ. $\mathbf{r}(u, v) = (u, u\cos v, u\sin v)$.

3.3.69. Γραψτε τις παραμετρικες εξισωσεις της κωνικης επιφανειας με κορυφη το σημειο $(0, 0, 1)$ και οδηγο καμπυλη τον κυκλο $x^2 + y^2 = 1$ στο επιπεδο xy. Σχεδιαστε την κωνικη επιφανεια.

Απ. $\mathbf{r}(u, v) = (0, 0, 1) + v \cdot ((\cos u, \sin u, 0) - (0, 0, 1)) = (v\cos u, v\sin u, 1 - v)$.

3.3.70. Γραψτε τις παραμετρικες εξισωσεις της κωνικης επιφανειας με κορυφη το σημειο $(0, 1, 0)$ και οδηγο καμπυλη την παραβολη $x^2 = z$ στο επιπεδο xz. Σχεδιαστε την κωνικη επιφανεια.

Απ. $\mathbf{r}(u, v) = (0, 1, 0) + v \cdot ((u, 0, u^2) - (0, 1, 0)) = (vu, 1 - v, vu^2)$.

3.3.71. Γραψτε τις παραμετρικες εξισωσεις της κυλινδρικης επιφανειας με γενετειρα το διανυσμα $(0, 1, 0)$ και οδηγο καμπυλη τον κυκλο $x^2 + z^2 = 1$ στο επιπεδο xz. Σχεδιαστε την κωνικη επιφανεια.

Απ. $\mathbf{r}(u, v) = (\cos u, 0, \sin u) + v \cdot (0, 1, 0) = (\cos u, v, \sin u)$.

3.3.72. Γραψτε τις παραμετρικες εξισωσεις της κυλινδρικης επιφανειας με με γενετειρα το διανυσμα $(1, 1, 1)$ και οδηγο καμπυλη την ελλειψη $x^2 + \frac{z^2}{4} = 1$ στο επιπεδο xz. Σχεδιαστε την κυλινδρικη επιφανεια.

Απ. $\mathbf{r}(u, v) = (\cos u, 0, 2\sin u) + v \cdot (1, 1, 1) = (v + \cos u, v, v + 2\sin u)$.