ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΚΑΜΠΥΛΕΣ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

Πολλές από τις καμπύλες του επιπέδου είναι γνωστές από τα μαθήματα του Λυκείου. Αυτές είναι οι ευθείες του επιπέδου με εξίσωση ως προς ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy της μορφής

$$\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\Gamma=0,\ (\mathrm{A},\mathrm{B})\neq(0,0)$$

καθώς και οι κωνικές τομές, υπό ευρεία έννοια, δηλαδή οι καμπύλες που προκύπτουν από την τομή ορθού κυκλικού κώνου (με δύο χοάνες) με ένα επίπεδο και έχουν πολυωνυμικές εξισώσεις δευτέρου βαθμού

$$\mathrm{A}x^2+2\mathrm{B}xy+\Gamma y^2+2\Delta x+2\mathrm{E}y+\mathrm{Z}=0,\ (\mathrm{A},\mathrm{B},\Gamma)\neq(0,0,0).$$

Η τελευταία μπορεί να είναι η εξίσωση έλλειψης (κύκλου), υπερβολής, παραβολής ή ακόμη και ζεύγους τεμνόμενων ή παράλληλων ευθειών. Μία πλήρη ταξινόμηση των καμπύλων του επιπέδου με εξίσωση πολυωνυμική δευτέρου βαθμού θα κάνουμε στο κεφάλαιο 16 με τη βοήθεια της φασματικής θεωρίας πινάκων.

Στο παρόν κεφάλαιο θα κάνουμε πρώτα μία σύντομη αναδρομή στις παραπάνω καμπύλες και στη συνέχεια θα εισάγουμε ένα καινούριο σύστημα συντεταγμένων του επιπέδου, τις ονομαζόμενες πολικές συντεταγμένες και θα μελετήσουμε ορισμένες σημαντικές καμπύλες του επιπέδου, τις οποίες ταξινομούμε στις ακόλουθες κατηγορίες:

- Καμπύλες των οποίων η εξίσωση δίνεται σε πολικές συντεταγμένες.
- Καμπύλες με πολυωνυμική εξίσωση βαθμού μεγαλύτερου του 2.
- Καμπύλες που η μελέτη τους είναι απλούστερη μέσω των παραμετρικών τους εξισώσεων.

5.1 Η ευθεία στο επίπεδο-Οι κωνικές τομές

Στην παράγραφο αυτή θα κάνουμε μία σύντομη ανασκόπηση των βασικών καμπύλων του επιπέδου.

(α) Η ευθεία στο επίπεδο.

Σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy του επιπέδου, μία ευθεία ε έχει **συντελεστή διεύθυνσης** $\lambda=\tan\omega$, όπου $\omega\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$

είναι η γωνία που πρέπει να περιστραφεί ο άξονας $x'x$, γύρω από το σημείο τομής του με την ε κατά τη θετική φορά, μέχρι να συμπέσει αυτήν.

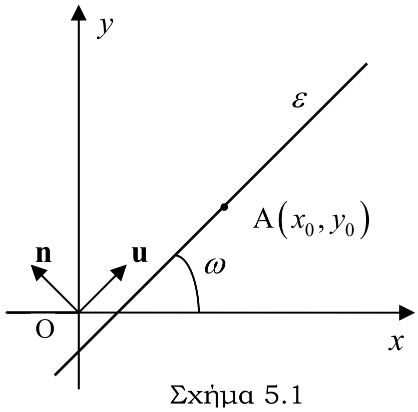
Αν είναι $\varepsilon \parallel x'x$, τότε $\lambda = 0$, ενώ, αν είναι $\varepsilon \perp x'x$, τότε δεν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης για την ε.

Αν η ευθεία ε έχει συντελεστή διεύθυνσης λ και περνάει από το σημείο $\mathrm{A}(x_0, y_0)$ του επιπέδου, τότε η εξίσωσή της είναι

$$y - y_0 = \lambda(x - x_0).$$

Αν η ευθεία ε είναι κάθετη στον άξονα των x και περνάει από το σημείο $\mathrm{A}(x_0, y_0)$, τότε έχει εξίσωση:

$$x = x_0.$$



Σχήμα 5.1

Γενικά, μία καμπύλη του επιπέδου είναι ευθεία, αν, και μόνον αν, έχει εξίσωση της μορφής

$$\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma = 0, \text{ με } (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \neq (0,0). \qquad (2)$$

Αν η ευθεία ε έχει εξίσωση $\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma = 0$, με $\mathrm{B} \neq 0$, τότε η εξίσωση της ε γίνεται

$$y = -\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}x - \frac{\Gamma}{\mathrm{B}}. \qquad (3)$$

και η ευθεία ε έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon = -\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$. Ένα διάνυσμα παράλληλο προς την ευθεία ε είναι το

$$\mathbf{u} = (\mathrm{B}, -\mathrm{A}) = \mathrm{B}\mathbf{i} - \mathrm{A}\mathbf{j},$$

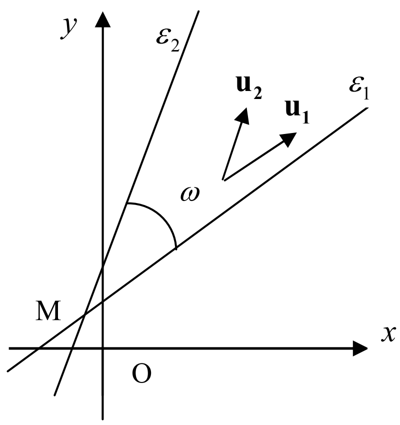
ενώ ένα διάνυσμα κάθετο προς την ε είναι το

$$\mathbf{n} = (\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \mathrm{A}\mathbf{i} + \mathrm{B}\mathbf{j}.$$

Η γωνία

$$\omega = \widehat{(\varepsilon_1, \varepsilon_2)} \in [0, \pi)$$

που σχηματίζει η ευθεία ε_2 με την ευθεία ε_1 είναι η γωνία που πρέπει να περιστραφεί η ευθεία ε_1, γύρω από το σημείο τομής τους, κατά τη θετική φορά (αντίθετη της κίνησης των δεικτών του ωρολογίου) μέχρις ότου συμπέσει με την ευθεία ε_2.



Σχήμα 5.2

Αν οι ευθείες ε_1 και ε_2 έχουν συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2, αντίστοιχα, τότε η γωνία ω που σχηματίζει η ε_2 με την ε_1 προσδιορίζεται από τις ισότητες:

$$\tan\omega = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{1 + \lambda_1\lambda_2}, \quad \text{αν } \lambda_1\lambda_2 \neq -1, \tag{4}$$

$$\omega = \frac{\pi}{2}, \qquad \text{αν } \lambda_1\lambda_2 = -1. \tag{5}$$

Στην περίπτωση που δεν ορίζεται ο συντελεστής διεύθυνσης μιας εκ των δύο ευθειών, τότε έχουμε:

$$\tan\omega = \begin{cases} -\dfrac{1}{\lambda_2}, \text{ αν } \varepsilon_1 \parallel y'y \text{ και } \lambda_2 \neq 0 \\ \dfrac{1}{\lambda_1}, \text{ αν } \varepsilon_2 \parallel y'y \text{ και } \lambda_1 \neq 0 \end{cases}, \tag{6}$$

ενώ είναι $\omega = \dfrac{\pi}{2}$, αν $\varepsilon_1 \parallel y'y$ και $\lambda_2 = 0$ ή $\varepsilon_2 \parallel y'y$ και $\lambda_1 = 0$.

Αν θεωρήσουμε τη γωνία δύο ευθειών ε_1 και ε_2 ανεξάρτητη της φοράς διαγραφής της, τότε οι ευθείες ορίζουν δύο γωνίες παραπληρωματικές ω και $\pi - \omega$ οι οποίες προσδιορίζονται από την ισότητα

$$\cos\omega = \frac{\mathbf{u_1} \cdot \mathbf{u_2}}{|\mathbf{u_1}||\mathbf{u_2}|}, \tag{7}$$

όπου $\mathbf{u_1}$ και $\mathbf{u_2}$ είναι τα παράλληλα διανύσματα των ευθειών ε_1 και ε_2, αντίστοιχα.

Σημειώνουμε ακόμα, ότι κάθε ευθεία $\varepsilon : \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma = 0$ του επιπέδου διαμερίζει το επίπεδο σε τρία υποσύνολα:

$$\varepsilon_+ = \left\{(x,y) : \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma > 0\right\},$$

(**θετικό ημιεπίπεδο**),

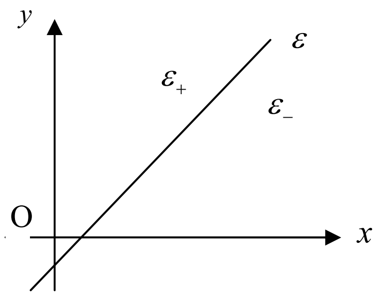
$$\varepsilon_- = \left\{(x,y) : \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma < 0\right\},$$

(**αρνητικό ημιεπίπεδο**)

$\varepsilon = \left\{(x,y) : \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma = 0\right\}$ (**ευθεία** ε)

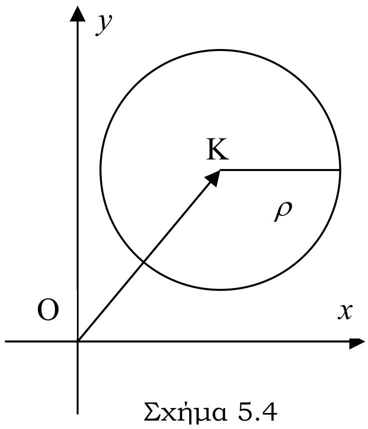
Ισχύει ότι:

$$\mathrm{O}(0,0) \in \varepsilon_+ \Leftrightarrow \Gamma > 0,$$
$$\mathrm{O}(0,0) \in \varepsilon_- \Leftrightarrow \Gamma < 0.$$



Σχήμα 5.3
$\varepsilon : \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \Gamma = 0, \Gamma > 0$

(β) Ο κύκλος



Σχήμα 5.4

Σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy του επιπέδου, **ο κύκλος** με κέντρο το σημείο $K\left(x_0, y_0\right)$ και ακτίνα $\rho > 0$ έχει εξίσωση

$$\left(x - x_0\right)^2 + \left(y - y_0\right)^2 = \rho^2 . \qquad (1)$$

Γενικότερα, μία καμπύλη του επιπέδου είναι κύκλος, αν, και μόνον αν, ως προς ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων έχει εξίσωση της μορφής

$$x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0 , \qquad (2)$$

με $A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0$ ή ισοδύναμα

$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 = \rho^2 , \qquad (3)$$

όπου $\rho = \dfrac{\sqrt{A^2 + B^2 - 4\Gamma}}{2}$.

Η εφαπτομένη του κύκλου (1) στο σημείο του $M\left(x_1, y_1\right)$ έχει εξίσωση

$$\left(x_1 - x_0\right)\left(x - x_0\right) + \left(y_1 - y_0\right)\left(y - y_0\right) = \rho^2 . \qquad (4)$$

(γ) Η παραβολή

Παραβολή είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου, τα οποία απέχουν ίσες αποστάσεις από μία σταθερή ευθεία δ **(διευθετούσα)** και από ένα σταθερό σημείο Ε **(εστία),** που δεν ανήκει στη δ.

Ας θεωρήσουμε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy που έχει:

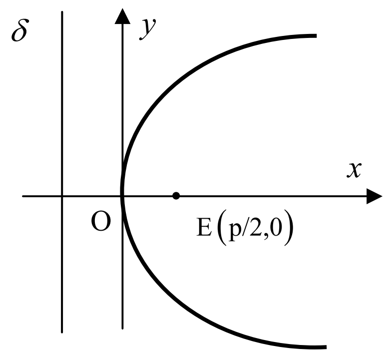
- αρχή Ο το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος ΕΚ, όπου Ε η εστία της παραβολής και Κ είναι το ίχνος της κάθετης από την εστία προς τη διευθετούσα και
- άξονα $x'x$ την κάθετη ευθεία από την εστία Ε προς τη διευθετούσα δ.

Αν, ως προς το παραπάνω ορθοκανονικό σύστημα Oxy, η εστία Ε έχει συντεταγμένες $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, τότε η διευθετούσα έχει εξίσωση $x = -\frac{p}{2}$ και η εξίσωση της παραβολής είναι

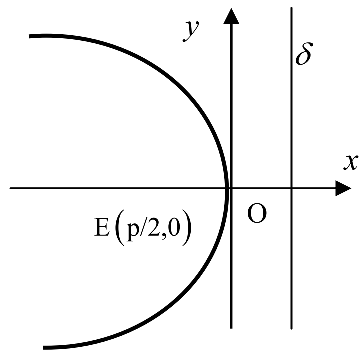
$$y^2 = 2px . \qquad (1)$$

Η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο της $\mathrm{M}(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση

$$y_1 y = p(x + x_1). \qquad (2)$$



Σχήμα 5.5 Παραβολή, $y^2 = 2px, p > 0$



Σχήμα 5.6 Παραβολή, $y^2 = 2px, p < 0$

(δ) Η έλλειψη

Έλλειψη είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία Ε και E' **(εστίες)** είναι σταθερό και μεγαλύτερο της εστιακής απόστασης EE'.

Θεωρούμε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy που έχει αρχή Ο το μέσον του EE' και άξονα $x'x$ την ευθεία που ορίζεται από τις δύο εστίες. Αν $\mathrm{E}(\gamma, 0)$, $\mathrm{E}'(-\gamma, 0)$ και για το τυχόν σημείο $\mathrm{M}(x, y)$ της έλλειψης ισχύει ότι $\mathrm{ME} + \mathrm{ME}' = 2\alpha > 2\gamma$, τότε η έλλειψη έχει εξίσωση

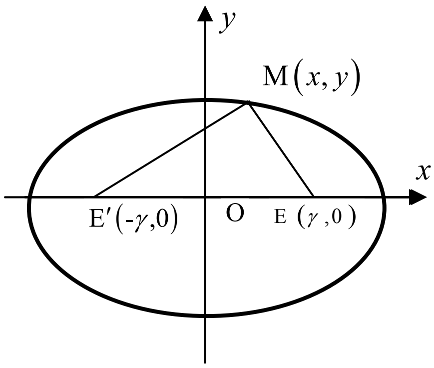
$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1, \text{ όπου } \beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2. \qquad (1)$$

Η **εφαπτομένη** της έλλειψης με την εξίσωση (1) στο σημείο της $\mathrm{N}(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση

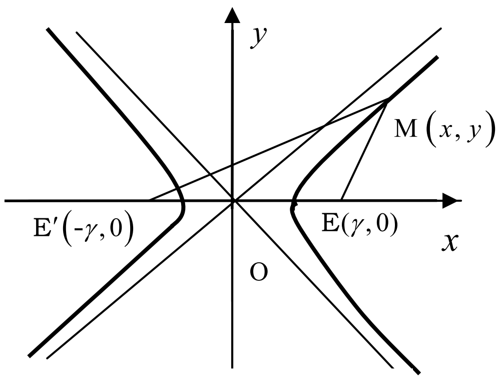
$$\frac{x_1 x}{\alpha^2} + \frac{y_1 y}{\beta^2} = 1, \qquad (2)$$

ενώ η εκκεντρότητα ε της έλλειψης με την εξίσωση (1) είναι ο αριθμός

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} < 1.$$



Σχήμα 5.7



Σχήμα 5. 8

(ε) Η υπερβολή

Υπερβολή είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου των οποίων η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων από δύο σταθερά σημεία του Ε και E' **(εστίες)** είναι σταθερή και μικρότερη της εστιακής απόστασης EE'.

Θεωρούμε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων Oxy που έχει αρχή O το μέσον του EE' και άξονα $x'x$ την ευθεία που ορίζεται από τις δύο εστίες. Αν $E(\gamma,0)$, $E'(-\gamma,0)$ και για το τυχόν σημείο $M(x,y)$ της υπερβολής ισχύει ότι $\left|ME-ME'\right|=2\alpha<2\gamma$, τότε η υπερβολή έχει εξίσωση

$$\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}=1, \text{ όπου } \beta^2=\gamma^2-\alpha^2. \qquad (1)$$

Η **εφαπτομένη** της υπερβολής με την εξίσωση (1) στο σημείο $N(x_1,y_1)$ αυτής έχει εξίσωση

$$\frac{x_1x}{\alpha^2}-\frac{y_1y}{\beta^2}=1, \qquad (2)$$

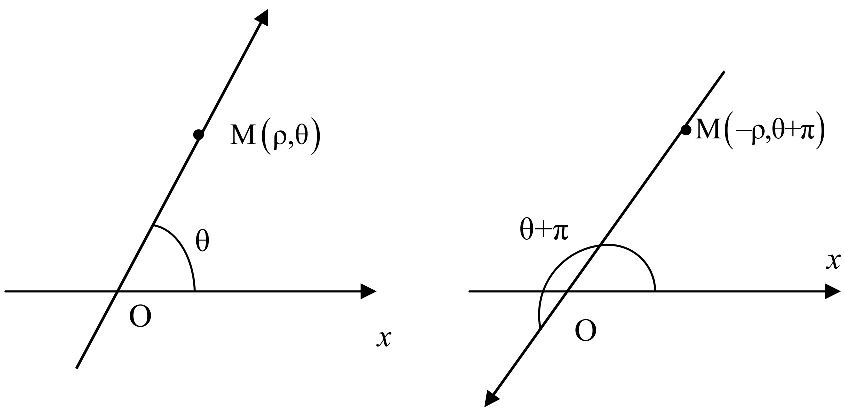
ενώ η εκκεντρότητα ε της υπερβολής με την εξίσωση (1) είναι ο αριθμός

$$\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha}>1.$$

5.2 Οι πολικές συντεταγμένες

Θεωρούμε έναν οριζόντιο άξονα $x'Ox$ με αρχή O και θετικό ημιάξονα Ox. Τον άξονα αυτόν τον ονομάζουμε **πολικό άξονα**, ενώ την αρχή O την ονομάζουμε **πόλο**. Αν M είναι ένα σημείο του επιπέδου διάφορο του πόλου O, τότε είναι δυνατόν με περιστροφή του πολικού άξονα περί το σημείο O κατά κάποια γωνία θ να επιτύχουμε το σημείο M να βρεθεί πάνω στον άξονα $x'Ox$. Αν είναι $\rho = \overline{OM}$, τότε οι αριθμοί ρ και θ λέγονται **πολικές συντεταγμένες** του σημείου M και γράφουμε $M(\rho,\theta)$.

Είναι φανερό ότι, αν το σημείο M βρεθεί πάνω στο θετικό ημιάξονα Ox, τότε είναι $\rho > 0$, ενώ, αν το σημείο M βρεθεί πάνω στον αρνητικό ημιάξονα Ox', τότε είναι $\rho<0$. Όταν $M \equiv O$, τότε $\rho=0$, ενώ δεν ορίζεται η γωνία θ για το σημείο αυτό. Η γωνία θ μπορεί να μετριέται σε οποιαδήποτε μονάδα μέτρησης γωνιών (συνήθως σε ακτίνια) και θεωρείται προσανατολισμένη. Οι περιστροφές του πολικού άξονα που είναι αντίθετες (αντ. ίδιες) προς την κίνηση των δεικτών του ωρολογίου ορίζουν θετικές (αντ. αρνητικές) γωνίες.



Σχήμα 5.9

Από τον τρόπο προσδιορισμού των πολικών συντεταγμένων (ρ,θ) του σημείου M του επιπέδου, που είναι διαφορετικό της αρχής O, προκύπτει ότι τα άπειρα ζεύγη

$$(\rho,\theta+2\kappa\pi) \quad \text{και} \quad (-\rho,\theta+\pi+2\kappa\pi) \tag{1}$$

με $\kappa \in \mathbb{Z}$, είναι επίσης πολικές συντεταγμένες του σημείου M.

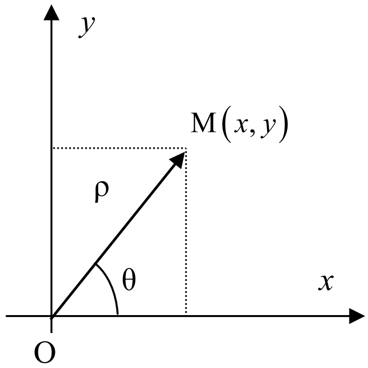
Έτσι βλέπουμε ότι η παραπάνω αντιστοιχία μεταξύ των διατεταγμένων ζευγών πραγματικών αριθμών και των σημείων του επιπέδου δεν είναι αμφιμονοσήμαντη. Για να επιτύχουμε να είναι αμφιμονοσήμαντη η παραπάνω αντιστοιχία, πρέπει να περιορίσουμε τις συντεταγμένες ρ και θ έτσι, ώστε

$$\rho > 0 \quad \text{και} \quad 0 \le \theta < 2\pi \ , \tag{2}$$

οπότε επιτυγχάνουμε μία αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ των συνόλων $\Pi - \{O\}$ και $\mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi)$, όπου Π είναι το σύνολο των σημείων του επιπέδου.

Αν θεωρήσουμε τώρα το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy έτσι, ώστε ο άξονας $x'Ox$ να είναι και ο πολικός άξονας, έχουμε την ακόλουθη σχέση μεταξύ των καρτεσιανών συντεταγμένων (x, y) του σημείου $M \neq O$ και των πολικών συντεταγμένων $(\rho,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi)$ αυτού:

$$x = \rho\cos\theta\,, \quad y = \rho\sin\theta. \tag{3}$$



Σχήμα 5. 10

Αντίστροφα ισχύουν:

$$\rho = |\mathbf{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}\ , \tag{4}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}, \ \text{αν } x \neq 0\,. \tag{5}$$

Για $x = 0, y > 0$ είναι $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, ενώ για $x = 0, y < 0$, είναι $\theta = \dfrac{3\pi}{2}$.

Αξίζει εδώ να σημειωθεί, ότι ο περιορισμός των πολικών συντεταγμένων στο σύνολο $\mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi)$ είναι αναγκαίος στην περίπτωση που θέλουμε η απεικόνιση

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (\rho,\theta) \to f(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = (x, y)$$

να είναι αντιστρέψιμη. Αυτό είναι απαραίτητη προϋπόθεση για την εγκυρότητα της λύσης προβλημάτων της Μαθηματικής Ανάλυσης στα οποία γίνεται χρήση πολικών συντεταγμένων σε αντικατάσταση των καρτεσιανών.

Όμως, όταν μελετάμε καμπύλες του επιπέδου σε πολικές συντεταγμένες με εξίσωση της μορφής

$$F(\rho,\theta) = 0 \quad \text{ή} \quad \rho = f(\theta) \tag{6}$$

το σύνολο $\mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi)$ δεν επαρκεί για την περιγραφή όλων των διατεταγμένων ζευγών (ρ,θ) που ικανοποιούν τις εξισώσεις (6). Για παράδειγμα, η εξίσωση

$$\rho = 1 + \cos\frac{\theta}{2}$$

ικανοποιείται από διαφορετικά ζεύγη (ρ,θ), για $\theta\in[0,4\pi)$,αντί $\theta\in[0,2\pi)$, ενώ η εξίσωση $\rho=2\cos\theta$, για $\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ δίνει $\rho<0$. Επίσης, η εξίσωση $\rho=\frac{3}{1+2\cos\theta}$ ικανοποιείται από το ζεύγος $(-3,\pi)$ με $\rho=-3<0$.

Όλες οι πολικές συντεταγμένες του σημείου $\mathrm{M}(x,y)\neq\mathrm{O}$ δίνονται από τις σχέσεις

$$\rho=\pm\sqrt{x^2+y^2} \quad \text{και} \quad \theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}. \tag{7}$$

Μέσω των εξισώσεων (3) και (7) μία εξίσωση καμπύλης σε καρτεσιανές συντεταγμένες μετασχηματίζεται σε εξίσωση της μορφής $F(\rho,\theta)=0$ ή $\rho=f(\theta)$ και αντίστροφα. Για παράδειγμα, η εξίσωση $x^2+y^2=a^2, a>0$, μετασχηματίζεται στην εξίσωση $\rho^2=a^2\Leftrightarrow\rho=a$ ή $\rho=-a$. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ικανοποιούν καθεμία από τις εξισώσεις αυτές είναι ο κύκλος ακτίνας a, με κέντρο τον πόλο O.

Αντίστροφα, αν θεωρήσουμε την εξίσωση

$$\rho=\frac{3}{1+2\cos\theta},$$

τότε χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (7) λαμβάνουμε

$$\pm\sqrt{x^2+y^2}=\frac{3}{1+\dfrac{2x}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}}\Leftrightarrow\pm\sqrt{x^2+y^2}+2x=3\Leftrightarrow 3x^2-y^2-12x+9=0,$$

που είναι εξίσωση υπερβολής.

5. 3 Εξισώσεις καμπύλων σε πολικές συντεταγμένες

Μία καμπύλη σε πολικές συντεταγμένες μπορεί να έχει περισσότερες από μία εξισώσεις. Επειδή το τυχόν σημείο (ρ,θ) έχει πολικές συντεταγμένες όλα τα ζεύγη της μορφής (1), η δεδομένη καμπύλη με εξίσωση

$$F(\rho,\theta)=0 \quad \text{ή} \quad \rho=f(\theta)$$

έχει και τις ακόλουθες ισοδύναμες εξισώσεις:

(I) $F(\rho,\theta+2\kappa\pi)=0$ ή $\rho=f(\theta+2\kappa\pi)$, $\kappa\in\mathbb{Z}$,

(II) $F(-\rho,\theta+\pi+2\kappa\pi)=0$ ή $-\rho=f(\theta+\pi+2\kappa\pi)$, $\kappa\in\mathbb{Z}$.

Η **(I)** για $\kappa=0$ δίνει τη δεδομένη εξίσωση, ενώ είναι δυνατόν για τις άλλες ακέραιες διαφορετικές τιμές του κ να λαμβάνουμε εξισώσεις διαφορετικές της δεδομένης, όπως επίσης και από τις εξισώσεις του τύπου **(II)**.

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με την εύρεση των εξισώσεων σε πολικές συντεταγμένες των βασικών καμπύλων του επιπέδου, όπως είναι η ευθεία, ο κύκλος και οι κωνικές τομές. Όμως, εδώ μας χρειάζεται η απόσταση δύο σημείων, έστω $M_1(\rho_1,\theta_1)$ και $M_2(\rho_2,\theta_2)$ του επιπέδου σε πολικές συντεταγμένες, Από το νόμο των συνημίτονων στο τρίγωνο OM_1M_2 (σχήμα 5. 11) έχουμε:

$$\boxed{d^2 = |\mathbf{M_1M_2}| = \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2\cos(\theta_2-\theta_1)} \tag{1}$$

(α) Η πολική εξίσωση ευθείας

Αν K είναι το ίχνος της κάθετης από τον πόλο προς την ευθεία ε και (d,ω) είναι ένα ζεύγος πολικών συντεταγμένων αυτού, τότε από το τρίγωνο OKM έχουμε

$$\rho\cos(\theta - \omega) = d \tag{2}$$

ή ισοδύναμα

$$\rho(A\cos\theta + B\sin\theta) + \Gamma = 0, \tag{3}$$

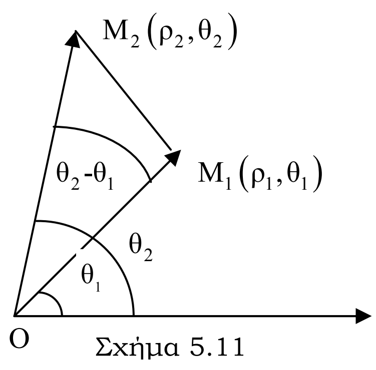
όπου $A = \cos\omega, B = \sin\omega$ και $\Gamma = -d$.

Αν είναι $\omega = 0$, τότε έχουμε **ευθεία κάθετη στον πολικό άξονα** και η εξίσωση (2) γίνεται:

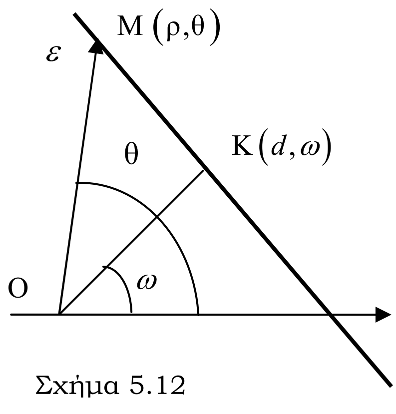
$$\rho = \frac{d}{\cos\theta}. \tag{4}$$

Αν είναι $\omega = \frac{\pi}{2}$, τότε έχουμε **ευθεία παράλληλη προς τον πολικό άξονα** και η εξίσωση (2) γίνεται

$$\rho = \frac{d}{\sin\theta}. \tag{5}$$



Σχήμα 5.11



Σχήμα 5.12

Αν η ευθεία ε περνάει από τον πόλο O, τότε η γωνία ω δεν ορίζεται μονοσήμαντα. Όλα τα σημεία της ευθείας έχουν πολικές συντεταγμένες (ρ,θ_0), όπου $\rho\in\mathbb{R}$ και $\theta_0=(\mathrm{O}x,\varepsilon)$=σταθερή. Τότε η εξίσωση της ευθείας ε είναι:

$$\theta=\theta_0 . \qquad (6)$$

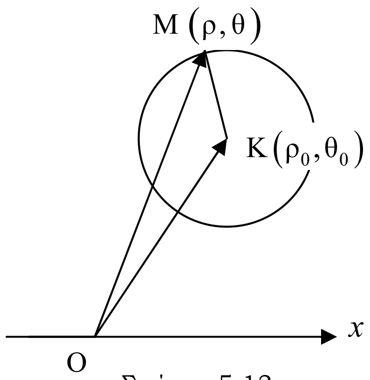
Με τον περιορισμό $\rho>0$, η εξίσωση $\theta=\theta_0$ είναι εξίσωση ημιευθείας.

(β) Η πολική εξίσωση του κύκλου

Θεωρούμε κύκλο C κέντρου $\mathrm{K}(\rho_0,\theta_0)$ και ακτίνας a. Τότε από τον τύπο (1) της απόστασης δύο σημείων του επιπέδου έχουμε:

$$\mathrm{M}(\rho,\theta)\in C \quad \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\rho^2+\rho_0^2-2\rho\rho_0\cos(\theta-\theta_0)=a^2.} \qquad (7)$$



Σχήμα 5.13

Ειδικές περιπτώσεις

(i) Αν $\mathrm{K}\equiv\mathrm{O}$**,** τότε $\rho_0=0$ και η εξίσωση (7) γίνεται $\rho^2=a^2$, οπότε μία εξίσωση του κύκλου $C(\mathrm{O},a)$ είναι:

$$\rho=a . \qquad (8)$$

(ii) Αν είναι $\mathrm{K}(a,0)$, όπου a η ακτίνα του κύκλου, τότε η εξίσωση (7) γίνεται:

$$\rho=2a\cos\theta . \qquad (9)$$

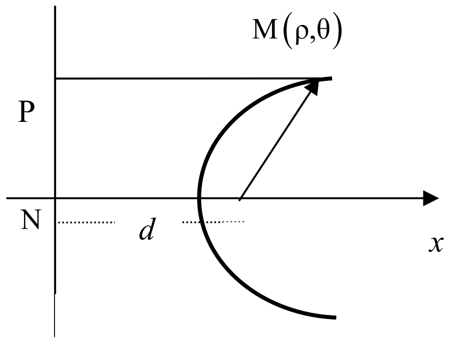
(iii) Αν είναι $\mathrm{K}\left(a,\dfrac{\pi}{2}\right)$, όπου a η ακτίνα του κύκλου, τότε η εξίσωση (7) γίνεται:

$$\rho=2a\sin\theta . \qquad (10)$$

(γ) Η πολική εξίσωση των κωνικών τομών

Υπενθυμίζουμε ότι, αν E είναι η **εστία** της κωνικής τομής και ξ είναι η **διευθετούσα ευθεία** αυτής, τότε το τυχόν σημείο M της κωνικής τομής ικανοποιεί την ισότητα

$$\frac{|\mathbf{ME}|}{|\mathbf{MP}|} = e. \qquad (11)$$



Σχήμα 5.14

Η κωνική τομή είναι

- **έλλειψη**, για $e<1$,
- **παραβολή,** για $e=1$,
- **υπερβολή**, για $e>1$.

Στη συνέχεια θεωρούμε τον πόλο O πάνω στην εστία E, ως πολικό άξονα τον κύριο άξονα της κωνικής τομής που περιέχει τις εστίες και τη διευθετούσα ξ αριστερά του πόλου, (σχήμα 5.14). Τότε από την εξίσωση (11) λαμβάνουμε:

$$\frac{\rho}{d+\rho\cos\theta} = e, \qquad (12)$$

όπου d είναι η απόσταση του πόλου O από τη διευθετούσα ξ ή με επίλυση ως προς ρ έχουμε τη **γενική εξίσωση των κωνικών τομών**:

$$\rho = \frac{ed}{1-e\cos\theta}. \qquad (13)$$

Ειδικές περιπτώσεις

(i) Αν είναι $E \equiv O$ και η διευθετούσα ξ είναι δεξιά του πόλου, τότε η εξίσωση (13) γίνεται:

$$\rho = \frac{ed}{1+e\cos\theta}. \qquad (14)$$

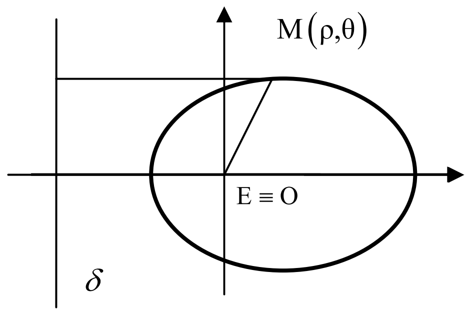
(ii) Αν είναι $E \equiv O$ και η διευθετούσα είναι παράλληλη και κάτω (αντίστ. πάνω) από τον πολικό άξονα, τότε η εξίσωση (13) γίνεται:

$$\rho = \frac{ed}{1-e\sin\theta} \quad \left(\text{αντίστοιχα, } \rho = \frac{ed}{1+e\sin\theta}\right) \qquad (15)$$

Παράδειγμα 1. Η εξίσωση $\rho = \dfrac{6}{3-\cos\theta}$ ή ισοδύναμα $\rho = \dfrac{2}{1-\frac{1}{3}\cos\theta}$, συγκρινόμενη με την εξίσωση (13) δίνει $e=\frac{1}{3}<1$ και $d=6$, οπότε είναι εξίσωση έλλειψης. Τα άκρα του κύριου άξονά της είναι πάνω στον πολικό άξονα και βρίσκονται, αν θέσουμε $\theta=0$ και $\theta=\pi$. Αυτά είναι τα σημεία

$A(3,0)$ και $B\left(\frac{3}{2},\pi\right)$.

Σε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι $A(3,0)$, $B\left(-\frac{3}{2},0\right)$ και το κέντρο της έλλειψης είναι το σημείο $C\left(\frac{3}{4},0\right)$, οπότε έχουμε $a=9/4$. Από την ισότητα $a^2e^2=a^2-b^2$ έπεται ότι $b^2=9/2$,



Σχήμα 5.15

οπότε η εξίσωση της έλλειψης σε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι

$$\frac{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2}{\left(9/4\right)^2}+\frac{y^2}{\left(3/\sqrt{2}\right)^2}=1.$$

Παράδειγμα 2. Η εξίσωση του κύκλου με κέντρο το σημείο $K\left(1,\pi/3\right)$ και ακτίνα 3, βάσει του τύπου (7), είναι:

$$\rho^2-2\rho\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=8.$$

Παράδειγμα 3. Η εξίσωση του κύκλου με κέντρο το σημείο $K\left(2,\pi/6\right)$ και ακτίνα 2 είναι:

$$\rho^2-4\rho\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=0 \Leftrightarrow \rho=4\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right).$$

Παράδειγμα 4. Να βρεθούν όλες οι εξισώσεις της καμπύλης $\rho=\cos\frac{\theta}{2}$.

Λύση. Ο τύπος Ι δίνει $\rho=\cos\left(\frac{\theta}{2}+\kappa\pi\right),\kappa\in\mathbb{Z}$ και οδηγεί στις διαφορετικές εξισώσεις:

$$\rho=\cos\frac{\theta}{2},\ \text{για}\ \kappa=0 \quad \text{και} \quad \rho=-\cos\frac{\theta}{2},\ \text{για}\ \kappa=1.$$

Ο τύπος ΙΙ δίνει $-\rho=\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2}+\kappa\pi\right)$ και οδηγεί στις εξισώσεις:

$$\rho = \sin\frac{\theta}{2}, \text{ για } \kappa{=}0 \quad \text{και} \quad \rho = -\sin\frac{\theta}{2}, \text{ για } \kappa = 1.$$

Παρατήρηση

Η πολική εξίσωση ευθείας είναι μοναδική. Πράγματι, θεωρώντας τη γενική μορφή της εξίσωσης ευθείας $\rho\left(\mathrm{A}\cos\theta + \mathrm{B}\sin\theta\right) + \Gamma = 0$*, επειδή ισχύει ότι*

$$\cos\left(\theta + 2\kappa\pi\right) = \cos\theta \quad \textit{και} \quad \sin\left(\theta + 2\kappa\pi\right) = \sin\theta,$$

όλες οι εξισώσεις τύπου Ι οδηγούν στη θεωρηθείσα εξίσωση. Επίσης, αφού

$$\cos\left(\theta + \pi + 2\kappa\pi\right) = -\cos\theta \quad \textit{και} \quad \sin\left(\theta + \pi + 2\kappa\pi\right) = -\sin\theta,$$

όλες οι εξισώσεις τύπου ΙΙ οδηγούν πάλι στη θεωρηθείσα εξίσωση.

5. 4 Σχεδίαση καμπύλων σε πολικές συντεταγμένες

Είναι χρήσιμο να ξέρουμε τις εξισώσεις τύπου Ι και ΙΙ μιας καμπύλης σε πολικές συντεταγμένες, όταν προσπαθούμε να τη σχεδιάσουμε, ενώ είναι αναγκαίο να θεωρούμε τις εξισώσεις τύπου Ι και ΙΙ, όταν θέλουμε να προσδιορίσουμε τα σημεία τομής καμπύλων σε πολικές συντεταγμένες. Γενικά για τη μελέτη και τη σχεδίαση μιας καμπύλης που η εξίσωσή της δίνεται σε πολικές συντεταγμένες εξετάζουμε τα ακόλουθα:

1. Τομές με τον πολικό άξονα με την ακόλουθη διαδικασία:

Θέτουμε στη δεδομένη εξίσωση $\theta = \kappa\pi,\ \kappa \in \mathbb{Z}$ και βρίσκουμε τις αντίστοιχες τιμές του ρ. Επίσης, οι τομές με τον άξονα $\theta = \pi/2$ βρίσκονται, αν θέσουμε στη δεδομένη εξίσωση $\theta = \kappa\pi + \dfrac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$ και προσδιορίσουμε τις αντίστοιχες τιμές του ρ.

2. Περιοδικότητα της δεδομένης εξίσωσης ως προς θ, που κυρίως οφείλεται στην ύπαρξη τριγωνομετρικών συναρτήσεων.

3. Συμμετρίες. Έστω ότι από τους τύπους Ι και ΙΙ προκύπτουν διάφορες εξισώσεις της δεδομένης καμπύλης και $f_i\left(\rho,\theta\right) = 0,\ f_j\left(\rho,\theta\right) = 0$ είναι δύο από αυτές, διαφορετικές μεταξύ τους ή ταυτιζόμενες, δηλαδή είναι δυνατόν να θεωρείται μία μόνον εξίσωση. Τότε η καμπύλη είναι συμμετρική ως προς:

(i) *τον πολικό άξονα, αν* $f_i\left(\rho,\theta\right) = f_j\left(\rho,-\theta\right)$,

(ii) *τον άξονα* $\theta=\frac{\pi}{2}$, *αν* $f_i(\rho,\theta)=f_j(\rho,\pi-\theta)$,

(iii) *τον πόλο* O, *αν* $f_i(\rho,\theta)=f_j(\rho,\pi+\theta)$ *και*

(iv) *τον άξονα* $\theta=\theta_0$, *αν* $f_i(\rho,\theta_0-\theta)=f_j(\rho,\theta_0+\theta)$.

4. Ασύμπτωτες. Ο προσδιορισμός των ασύμπτωτων είναι γενικά δύσκολος. Συχνά είναι εύκολο να προσδιοριστεί η διεύθυνση μιας ασύμπτωτης, ως εξής:

- *Αν για* $\theta=\theta_0$ *είναι* $\rho=\pm\infty$, *τότε υπάρχει ασύμπτωτη που σχηματίζει γωνία* θ_0 *με τον πολικό άξονα.*
- *Αν ισχύει ότι* $\lim\limits_{\theta\to\infty}\rho=\alpha$, *τότε ο κύκλος με εξίσωση* $\rho=\alpha$ *είναι ασύμπτωτη της καμπύλης.*

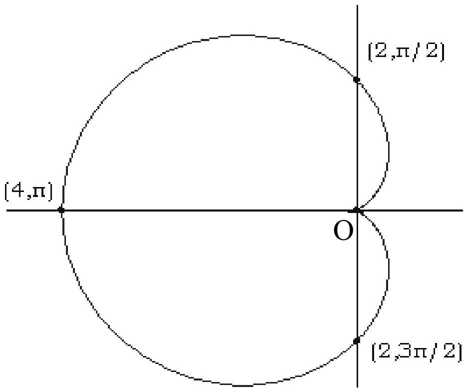
5. Εφαπτόμενες στον πόλο O. Αν ισχύει ότι $\lim\limits_{\rho\to 0}\theta=\theta_0$, όπου θ_0 σταθερά, τότε η ευθεία $\theta=\theta_0$ είναι εφαπτόμενη της καμπύλης στον πόλο. Πρακτικά οι εφαπτόμενες μιας καμπύλης στον πόλο βρίσκονται, αν θέσουμε $\rho=0$ και επιλύσουμε ως προς θ την προκύπτουσα εξίσωση.

Παράδειγμα1. Να σχεδιάσετε την καμπύλη $\rho=2(1-\cos\theta)$.

Λύση. Για $\theta=2\kappa\pi, \kappa\in\mathbb{Z}$, από τη δεδομένη εξίσωση λαμβάνουμε $\rho=0$, ενώ για $\theta=(2\kappa+1)\pi, \kappa\in\mathbb{Z}$ λαμβάνουμε $\rho=4$. Επομένως τα σημεία $(0,0)$ και $(4,\pi)$ είναι τα σημεία τομής της καμπύλης με τον πολικό άξονα. Ομοίως, για $\theta=2\kappa\pi+\frac{\pi}{2},\kappa\in\mathbb{Z}$ λαμβάνουμε $\rho=2$, ενώ για

$$\theta=(2\kappa+1)\pi+\frac{\pi}{2},\kappa\in\mathbb{Z}$$

λαμβάνουμε $\rho=2$, οπότε οι τομές της καμπύλης με τον άξονα $\theta=\frac{\pi}{2}$ είναι τα σημεία $\left(2,\frac{\pi}{2}\right)$ και $\left(2,\frac{3\pi}{2}\right)$.



Σχήμα 5. 16
$\rho=2(1-\cos\theta)$

Αν είναι $\rho = f(\theta) = 2(1-\cos\theta)$, ισχύει ότι $f(\theta) = f(-\theta)$, οπότε η καμπύλη είναι συμμετρική ως προς τον πολικό άξονα. Όλες οι εξισώσεις της καμπύλης τύπου II οδηγούν στην εξίσωση $\rho = -2(1+\cos\theta)$ και είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι η καμπύλη δεν παρουσιάζει άλλες συμμετρίες.

Για $\rho = 0$ έχουμε $\theta = 0$, οπότε ο πολικός άξονας εφάπτεται της καμπύλης στον πόλο O.

Από τα παραπάνω και τον πίνακα

θ	$\cos\theta$	ρ
$0 \to \pi/2$	$1 \to 0$	$0 \to 2$
$\pi/2 \to \pi$	$0 \to -1$	$2 \to 4$
$\pi \to 3\pi/2$	$-1 \to 0$	$4 \to 2$
$3\pi/2 \to 2\pi$	$0 \to 1$	$2 \to 0$

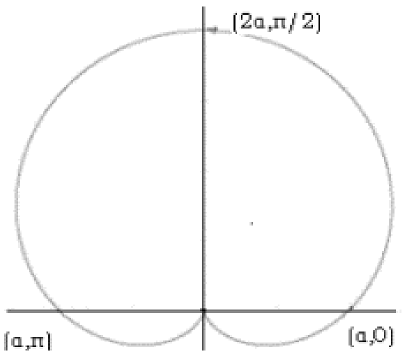
εύκολα μπορούμε να σχεδιάσουμε τη δεδομένη καμπύλη, η οποία λέγεται **καρδιοειδής** και αποτελεί μια ειδική περίπτωση της γενικής εξίσωσης

$$\rho = \alpha(1 \pm \cos\theta), \alpha > 0.$$

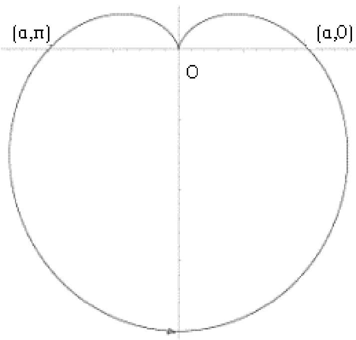
Επίσης και οι εξισώσεις

$$\rho = \alpha(1 \pm \sin\theta), \alpha > 0,$$

παριστούν καρδιοειδείς καμπύλες με άξονα συμμετρίας την ευθεία $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.



Σχήμα 5. 17, $\rho = \alpha(1+\sin\theta)$



Σχήμα 5. 18, $\rho = \alpha(1-\sin\theta)$

Παράδειγμα 2. Να σχεδιάσετε την καμπύλη $\rho = \alpha \sin 2\theta$.

Λύση. Για $\theta = \kappa\pi$ ή $\theta = \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$ είναι $\rho = 0$, οπότε ο πόλος είναι το μοναδικό σημείο τομής της καμπύλης με τον πολικό άξονα και τον άξονα που είναι κάθετος στον πολικό άξονα στον πόλο O .

Επιπλέον οι ευθείες $\theta = 0$ και $\theta = \pi/2$ είναι εφαπτόμενες της καμπύλης στον πόλο O , ενώ από την ισότητα

$$\rho = f(\theta) = \alpha \sin 2\theta = \alpha \sin 2(\theta + \pi) = f(\pi + \theta)$$

προκύπτει ότι η καμπύλη είναι συμμετρική ως προς τον πόλο. Επίσης για τη δεδομένη εξίσωση ισχύουν

$$f\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = f\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) \quad \text{και} \quad f\left(\frac{3\pi}{4} - \theta\right) = f\left(\frac{3\pi}{4} + \theta\right),$$

οπότε η καμπύλη είναι συμμετρική ως προς τις ευθείες $\theta = \frac{\pi}{4}$ και $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

Μία διαφορετική εξίσωση της δεδομένης καμπύλης προκύπτει από τον τύπο ΙΙ και είναι η $\rho = -\alpha \sin 2\theta$. Έτσι έχουμε τις εξισώσεις

$$f_1(\rho, \theta) = \rho - \alpha \sin 2\theta = 0 \quad \text{και} \quad f_2(\rho, \theta) = \rho + \alpha \sin 2\theta = 0 .$$

Ισχύουν

- $f_2(\rho, -\theta) = \rho - \alpha \sin 2\theta = f_1(\rho, \theta)$ (*συμμετρία ως προς τον πολικό άξονα*)
- $f_2(\rho, \pi - \theta) = \rho - \alpha \sin(2\pi - 2\theta) = \rho - \alpha \sin 2\theta = f_1(\rho, \theta)$ (*συμμετρία ως προς τον άξονα* $\theta = \pi/2$).

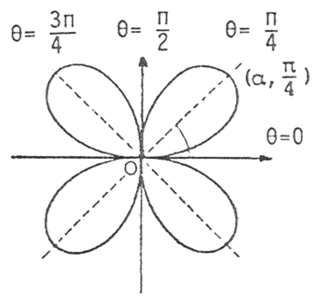
Με βάση τις παραπάνω συμμετρίες, η καμπύλη κατασκευάζεται εύκολα θεωρώντας μόνο τον κλάδο της με $\theta \in \left[0, \pi/4\right]$, όπου έχουμε ότι

$\sin 2\theta \in [0,1]$ και $\rho \in [0, \alpha]$

Η δεδομένη καμπύλη λέγεται **τετράφυλλο** (**four-leaved rose**), όπως επίσης και καμπύλη με εξίσωση

$$\rho = \alpha \cos 2\theta ,$$

της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από αυτήν της καμπύλης με εξίσωση $\rho = \alpha \sin 2\theta$ με περιστροφή γύρω από τον πόλο O κατά γωνία $\varphi = \frac{\pi}{4}$, αφού ισχύει:



Σχήμα 5.19, $\rho = \alpha \sin 2\theta$

$$\alpha\sin 2\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)=\alpha\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)=\alpha\cos 2\theta .$$

Γενικά οι εξισώσεις

$$\rho=\alpha\sin\kappa\theta \quad \text{και} \quad \rho=\alpha\cos\kappa\theta, \kappa\in\mathbb{Z},$$

όπου ο κ είναι θετικός ακέραιος μεγαλύτερος του 1, λέγονται **φύλλα (rose curves).**

Παράδειγμα 3. Να σχεδιάσετε την καμπύλη $\rho^2=\alpha^2\cos 2\theta, \alpha>0$.

Λύση. Η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με τις εξισώσεις

$$\rho=f(\theta)=\alpha\sqrt{\cos 2\theta} \qquad (\mathrm{A}) \quad \text{ή} \quad \rho=g(\theta)=-\alpha\sqrt{\cos 2\theta} \qquad (\mathrm{B}).$$

Για την εξίσωση (Α) η μεταβλητή θ πρέπει να ικανοποιεί την ανίσωση

$$\cos 2\theta\geq 0 \Leftrightarrow \theta\in\left[\kappa\pi-\frac{\pi}{4},\kappa\pi+\frac{\pi}{4}\right], \kappa\in\mathbb{Z}.$$

Για $\rho=0$ λαμβάνουμε $\cos 2\theta=0 \Leftrightarrow \theta=\kappa\pi\pm\frac{\pi}{4}, \kappa\in\mathbb{Z}$, οπότε οι ευθείες $\theta=\frac{\pi}{4}$ και $\theta=\frac{3\pi}{4}$ είναι εφαπτόμενες της καμπύλης στον πόλο.

Παρατηρούμε ακόμη ότι:

$$f(-\theta)=\alpha\sqrt{\cos(-2\theta)}=\alpha\sqrt{\cos 2\theta}=f(\theta),$$

$$f(\theta+\pi)=\alpha\sqrt{\cos(2\pi+2\theta)}=\alpha\sqrt{\cos 2\theta}=f(\theta),$$

$$f(\pi-\theta)=\alpha\sqrt{\cos(2\pi-2\theta)}=\alpha\sqrt{\cos 2\theta}=f(\theta),$$

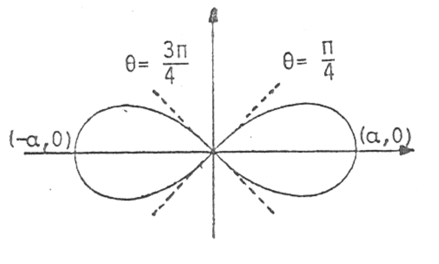
οπότε η καμπύλη (Α) είναι συμμετρική ως προς τον πολικό άξονα, ως προς τον άξονα $\theta={}^{\pi}\!/_{2}$ και ως προς τον πόλο. Επομένως αρκεί να τη σχεδιάσουμε για $\theta\in\left[0,{}^{\pi}\!/_{4}\right]$, οπότε το υπόλοιπο γράφημα θα ορίζεται από τις παραπάνω συμμετρίες. Σχετικά έχουμε τον πίνακα:

θ	$\cos 2\theta$	ρ
$\theta\to{}^{\pi}\!/_{4}$	$1\to 0$	$\alpha\to 0$

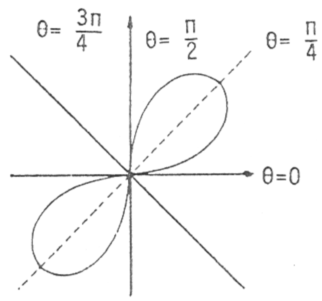
Σχετικά με την καμπύλη (Β), παρατηρούμε ότι το τυχόν σημείο του γραφήματός της είναι το

$$(\rho,\theta)=(g(\theta),\theta)=(-f(\theta),\theta)$$

και ως εκ τούτου ταυτίζεται με το σημείο $\left(f(\theta), \theta+\pi\right)$ που είναι και σημείο του γραφήματος της (A). Έτσι η εξίσωση (B) έχει το ίδιο γράφημα με την εξίσωση (A). Διαφορετικά θα μπορούσαμε να καταλήξουμε στο ίδιο συμπέρασμα παρατηρώντας ότι η εξίσωση (B) είναι μία εξίσωση τύπου II για την καμπύλη με εξίσωση (A).



Σχήμα 5.20 $\rho^2 = \alpha^2 \cos 2\theta$



Σχήμα 5.21 $\rho^2 = \alpha^2 \sin 2\theta$

Οι καμπύλες με εξισώσεις

$$\rho^2 = \alpha^2 \cos 2\theta \quad \text{και} \quad \rho^2 = \alpha^2 \sin 2\theta$$

λέγονται **Λημνίσκοι του Bernoulli** ή απλά **Λημνίσκοι.** Η καρτεσιανή μορφή των παραπάνω εξισώσεων είναι

$$\left(x^2+y^2\right)^2 = \alpha^2\left(x^2-y^2\right) \quad \text{και} \quad \left(x^2+y^2\right)^2 = 2\alpha^2 xy,$$

αντίστοιχα.

Παράδειγμα 4. Να σχεδιάσετε την καμπύλη $\rho = 1 - \dfrac{1}{1+\theta}$.

Λύση. Για $\theta = \kappa\pi$, $\kappa \in \mathbb{Z}$, είναι $\rho = 1 - \dfrac{1}{1+\kappa\pi}$, οπότε υπάρχουν άπειρες τομές της καμπύλης με τον πολικό άξονα, δηλαδή τα σημεία

$$\left(1 - \frac{1}{1+\kappa\pi}, \kappa\pi\right), \quad \kappa \in \mathbb{Z}.$$

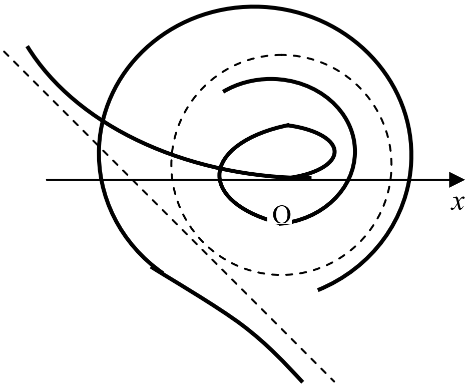
Ειδικότερα, για $\kappa = 0$ είναι $\rho = 0$, οπότε η καμπύλη περνάει από τον πόλο. Υπάρχει απειρία εξισώσεων τύπου I και II, αλλά δεν υπάρχει συμμετρία. Στο διάστημα $\left(0, +\infty\right)$ η συνάρτηση $\rho = \rho(\theta) = 1 - \dfrac{1}{1+\theta}$ είναι γνησίως αύξουσα και ισχύει:

$$\lim_{\theta \to \infty} \rho = 1,$$

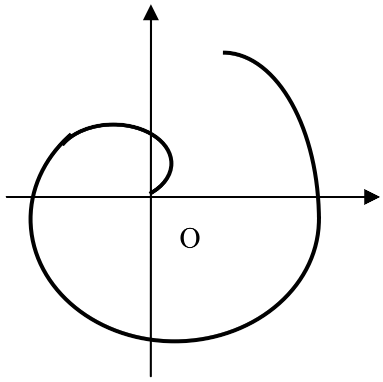
οπότε η δεδομένη καμπύλη προσεγγίζει τον κύκλο $\rho = 1$ ασυμπτωτικά από το εσωτερικό του, σχήμα 5.22.

Για $\theta<0$, η καμπύλη $\rho=\rho(\theta)=1-\dfrac{1}{1+\theta}$ δεν είναι συνεχής για $\theta=-1$ και επειδή για $\theta\to -1\pm 0$ είναι $\rho\to\pm\infty$, η καμπύλη έχει μία ασύμπτωτη ευθεία ε που σχηματίζει γωνία -1 ακτινίων με τον πολικό άξονα.

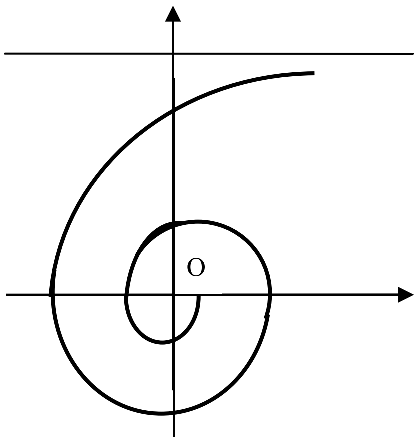
Επιπλέον ισχύει ότι $\lim\rho=1$, όταν $\theta\to-\infty$, οπότε η δεδομένη καμπύλη προσεγγίζει ασυμπτωτικά από έξω τον κύκλο με εξίσωση $\rho=1$.



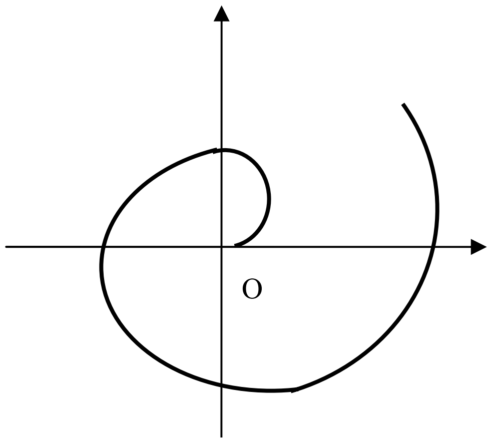
Σχήμα 5.22, $\rho=1-{}^{1}\!/_{(1+\theta)}$



Σχήμα 5.23, $\rho=2\theta$



Σχήμα 5.24, $\rho\theta=\alpha$
Υπερβολική έλικα



Σχήμα 5.25 , $\rho=e^{\alpha\theta}$
Λογαριθμική έλικα

Η παραπάνω καμπύλη μπορεί να θεωρηθεί ότι ανήκει στην ομάδα των **ελίκων** ή **σπειρών (spirals),** που έχουν γενικά εξισώσεις της μορφής:

$\rho=\alpha\theta^{\kappa}$, $\alpha,\kappa\in\mathbb{R}$, **Αρχιμήδειες έλικες ή σπείρες.**

Για $\kappa=1$ η εξίσωση $\rho=\alpha\theta$ ορίζει την **έλικα του Αρχιμήδη,** για $\kappa=-1$ η εξίσωση $\rho\theta=\alpha$ ορίζει την **υπερβολική έλικα,** για $\kappa=\frac{1}{2}$ η εξίσωση $\rho=\sqrt{\theta}$ ορίζει την **έλικα του Fermat**, ενώ για $\kappa=-1/2$ η εξίσωση $\rho=1/\sqrt{\theta}$ ορίζει την καμπύλη που ονομάζεται **lituus.**

Επιπλέον η εξίσωση $\rho=e^{\alpha\theta}$**,** ορίζει τη **λογαριθμική έλικα.**

5. 5 Τομές καμπύλων σε πολικές συντεταγμένες

Όπως ξέρουμε για τις καμπύλες με εξίσωση σε καρτεσιανές συντεταγμένες, κάθε πραγματική λύση του συστήματος των εξισώσεων τους δίνει ένα σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των δύο καμπύλων και αντίστροφα. Αυτό ακριβώς το αντίστροφο, δεν ισχύει όταν οι καμπύλες δίνονται σε πολικές συντεταγμένες. Αυτό οφείλεται στο ότι κάθε σημείο έχει περισσότερα από ένα ζεύγη πολικών συντεταγμένων.

Για παράδειγμα, τα ζεύγη $(2,0)$ και $(-2,\pi)$ αντιστοιχούν στο ίδιο σημείο του επιπέδου και ικανοποιούν, το πρώτο από αυτά την εξίσωση του κύκλου $\rho=2$, ενώ το δεύτερο ικανοποιεί την εξίσωση της καρδιοειδούς καμπύλης $\rho=-(1-\cos\theta)$. Κανένα όμως από αυτά τα ζεύγη δεν ικανοποιεί και τις δύο δεδομένες εξισώσεις. Έτσι, παρατηρούμε ότι ένα σημείο $M(\rho,\theta)$ του επιπέδου είναι δυνατόν να είναι κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων δύο καμπύλων, χωρίς κάποιο ζεύγος από τις πολικές συντεταγμένες του να ικανοποιεί και τις δύο εξισώσεις των καμπύλων.

Το πρόβλημα αυτό αίρεται, αν θεωρήσουμε τις διάφορες εξισώσεις των καμπύλων τύπου Ι και ΙΙ και επιλύσουμε όλα τα δυνατά συστήματα με πρώτη εξίσωση ενός μόνου τύπου για την πρώτη καμπύλη και δεύτερη εξίσωση ενός τύπου για τη δεύτερη καμπύλη. Για παράδειγμα, αν δίνονται οι καμπύλες με εξισώσεις $\rho=f(\theta)$ και $\rho=g(\theta)$, αρκεί να βρούμε τις λύσεις των συστημάτων

$$\left\{\begin{matrix}\rho=f(\theta+2\kappa\pi)\\ \rho=g(\theta+2\lambda\pi)\end{matrix}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{matrix}\rho=f(\theta+2\kappa\pi)\\ -\rho=g(\theta+\pi+2\lambda\pi)\end{matrix}\right\},$$

για όλους τους ακεραίους κ,λ που δίνουν διαφορετικά συστήματα. Η παραπάνω διαδικασία είναι δυνατόν να οδηγήσει και σε ταυτιζόμενες λύσεις.

Ο πόλος πρέπει να ελέγχεται χωριστά, αν είναι κοινό σημείο των δύο καμπύλων.

Παράδειγμα 1. Να βρεθούν τα κοινά σημεία των καμπύλων με εξισώσεις

$$\rho\cos\theta = 2 \quad \text{και} \quad \rho = 2 + 4\cos\theta .$$

Λύση. Η πρώτη καμπύλη έχει μοναδική εξίσωση τύπου I και II

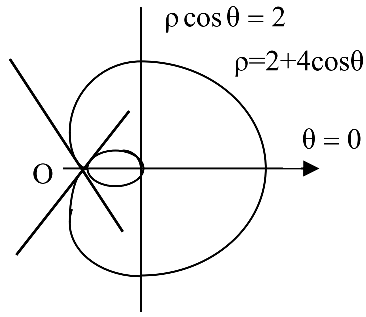
$$\rho\cos\theta = 2$$

Η δεύτερη καμπύλη έχει εξίσωση τύπου I τη δεδομένη και επιπλέον έχει μία ακόμη εξίσωση τύπου II :

$$\rho = -2 + 4\cos\theta .$$

Για την εύρεση των σημείων τομής, αρκεί να λύσουμε τα συστήματα

$$\left.\begin{cases}\rho\cos\theta = 2\\ \rho=2+4\cos\theta\end{cases}\right\}\left(\Sigma_1\right) \text{και} \left.\begin{cases}\rho\cos\theta = 2\\ \rho = -2+4\cos\theta\end{cases}\right\}\left(\Sigma_2\right).$$



Σχήμα 5.26

Από το $\left(\Sigma_1\right)$ με απαλοιφή του ρ λαμβάνουμε

$$2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(2\cos\theta - 1\right)\left(\cos\theta + 1\right) = 0 \Leftrightarrow \theta \in \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \pi\right\}.$$

Οι αντίστοιχες τιμές του ρ είναι $\rho = 4, \rho = 4$ και $\rho = -2$, οπότε προκύπτουν τα σημεία τομής $\left(4, \pi/3\right), \left(4, 5\pi/3\right)$ και $\left(-2, \pi\right)$. Το τελευταίο μπορεί να παρασταθεί και ως $\left(2, 0\right)$. Το σύστημα $\left(\Sigma_2\right)$ δεν δίνει σημεία τομής διαφορετικά από αυτά που βρήκαμε παραπάνω.

Παράδειγμα 2. Να βρεθούν τα σημεία τομής των καμπύλων με εξισώσεις

$$\rho = \cos\theta \qquad \text{και} \qquad \rho = \sin\theta .$$

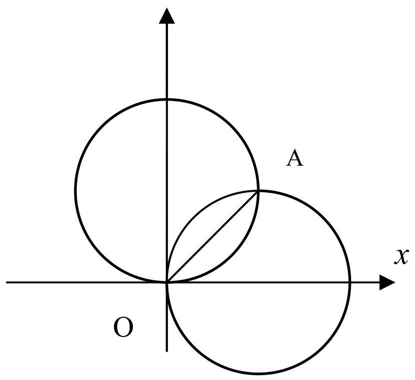
Λύση. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι οι δεδομένες εξισώσεις είναι μοναδικές για τις καμπύλες που παριστούν. Από το σύστημα των δύο εξισώσεων έχουμε:

$$\cos\theta = \sin\theta \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \text{ ή } \theta = \frac{5\pi}{4},$$

οπότε προκύπτουν τα ζεύγη

$$\left(\rho,\theta\right) = \left(\sqrt{2}/2, \pi/4\right) \text{ ή } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{5\pi}{4}\right)$$

που είναι οι πολικές συντεταγμένες του ιδίου σημείου A του επιπέδου.



Σχήμα 5. 27

Ο πόλος O είναι σημείο τομής των δύο καμπύλων, αφού η πρώτη εξίσωση δίνει $\rho = 0$ για $\theta = \pi/2$, ενώ η δεύτερη εξίσωση δίνει $\rho = 0$ για $\theta = 0$.

5. 6 Γεωμετρικοί τόποι σε πολικές συντεταγμένες

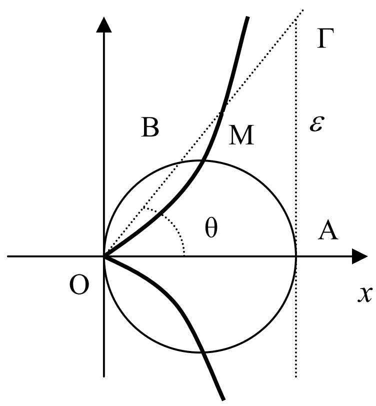
Πολλές φορές σε προβλήματα γεωμετρικών τόπων είναι πιο εύκολο να θεωρήσουμε ένα πολικό σύστημα συντεταγμένων και ως προς αυτό να βρούμε την εξίσωση του ζητούμενου τόπου στη μορφή $f(\rho,\theta) = 0$ ή $\rho = f(\theta)$. Η εκλογή του πόλου και του πολικού άξονα παίζει πρωτεύοντα ρόλο στην απλούστευση του προβλήματος.

Παράδειγμα 1. Θεωρούμε κύκλο διαμέτρου $\mathrm{OA} = \alpha$ και την εφαπτομένη του ε στο Α. Μεταβλητή ημιευθεία $\mathrm{O}t$ τέμνει τον κύκλο στο B και την ευθεία ε στο Γ. Πάνω στην ημιευθεία $\mathrm{O}t$ ορίζουμε σημείο M έτσι , ώστε $\mathrm{OM} = \mathrm{B}\Gamma$. Να βρεθεί η εξίσωση του γεωμετρικού τόπου του σημείου M.

Λύση. Θεωρούμε το σημείο O ως πόλο και την ευθεία που ορίζεται από τα O και A ως πολικό άξονα. Τότε η εξίσωση του κύκλου με διάμετρο την $\mathrm{OA} = \alpha$ είναι $\rho = \alpha\cos\theta$, ενώ η εξίσωση της ευθείας ε είναι

$$\rho = \frac{\alpha}{\cos\theta}.$$

Αν το τυχόν σημείο M του γεωμετρικού τόπου έχει πολικές συντεταγμένες (ρ,θ), τότε τα σημεία B και Γ θα έχουν πολικές συντεταγμένες $(\alpha\cos\theta,\theta)$ και $\left(\alpha/\cos\theta,\theta\right)$, αντίστοιχα. Από την ισότητα $\mathrm{OM} = \mathrm{B}\Gamma$ λαμβάνουμε



Σχήμα 5. 28, Κισσοειδής

$$\rho = \mathrm{O}\Gamma - \mathrm{OB} = \frac{\alpha}{\cos\theta} - \alpha\cos\theta \Leftrightarrow \rho = \alpha\left(\frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta\right).$$

Η προκύπτουσα καμπύλη λέγεται **κισσοειδής** και η καρτεσιανή εξίσωση αυτής είναι της μορφής

$$y^2 = \frac{x^3}{\alpha - x}.$$

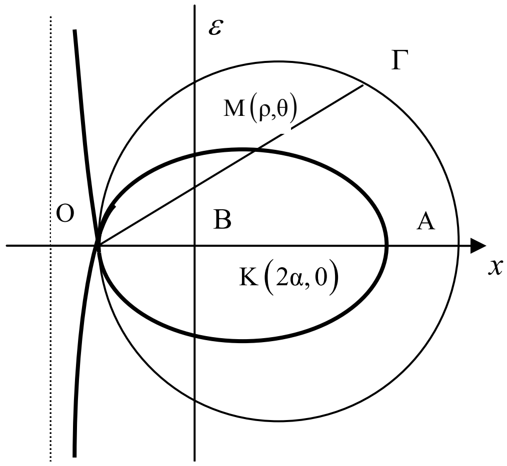
Παράδειγμα 2. Θεωρούμε κύκλο κέντρου K, ακτίνας 2α και μία διάμετρο OKA αυτού. Θεωρούμε ακόμη την κάθετη ευθεία ε στο μέσον της ακτίνας OK. Μία μεταβλητή ημιευθεία Ot τέμνει την ε στο B και τον κύκλο στο Γ. Πάνω στην ημιευθεία Ot παίρνουμε σημείο M, έτσι ώστε $OM = B\Gamma$. Να βρεθεί η εξίσωση του γεωμετρικού τόπου του σημείου M.

Λύση. Θεωρούμε το σημείο O ως πόλο και την ευθεία που ορίζεται από τα σημεία O και A ως πολικό άξονα. Τότε η εξίσωση του κύκλου $(K, 2\alpha)$ είναι $\rho = 4\alpha\cos\theta$, ενώ η εξίσωση της ευθείας ε είναι

$$\rho = \frac{\alpha}{\cos\theta}.$$

Αν το τυχόν σημείο M του γεωμετρικού τόπου έχει πολικές συντεταγμένες (ρ,θ), τότε τα σημεία B και Γ έχουν πολικές συντεταγμένες

$$\left(\frac{\alpha}{\cos\theta},\theta\right) \quad \text{και} \quad \left(4\alpha\cos\theta,\theta\right),$$



Σχήμα 5.29, Τριχοτόμος

αντίστοιχα, οπότε η εξίσωση $OM = B\Gamma$ γίνεται

$$\rho = 4\alpha\cos\theta - \frac{\alpha}{\cos\theta} \Leftrightarrow \rho = \alpha\left(4\cos\theta - \frac{1}{\cos\theta}\right).$$

Η προκύπτουσα καμπύλη λέγεται **τριχοτόμος** και η καρτεσιανή της εξίσωση είναι

$$y^2 = \frac{x^2(3\alpha - x)}{\alpha + x}.$$

Παρατηρούμε ότι η παραπάνω εξίσωση, όπως και η εξίσωση της κισσοειδούς, μπορούν να γραφούν στη μορφή $f(x,y) = 0$, όπου το πρώτο μέλος είναι πολυώνυμο ως προς x, y βαθμού 3, δηλαδή βαθμού μεγαλύτερου του 2. Και οι δύο αυτές καμπύλες ανήκουν στις ανώτερες αλγεβρικές καμπύλες που θα εξετάσουμε παρακάτω.

5. 7 Ανώτερες αλγεβρικές καμπύλες

Μία καμπύλη λέγεται **αλγεβρική**, αν η εξίσωσή της είναι της μορφής $f(x,y)=0$, όπου $f(x,y)$ είναι πολυώνυμο ως προς x,y. Κάθε άλλη καμπύλη του επιπέδου λέγεται **υπερβατική**. Παραδείγματα αλγεβρικών καμπύλων είναι οι ευθείες και οι κωνικές τομές, ενώ οι τριγωνομετρικές, οι λογαριθμικές και οι εκθετικές καμπύλες είναι υπερβατικές. Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε μερικές αλγεβρικές καμπύλες του επιπέδου βαθμού μεγαλύτερου του 2, οι οποίες μαζί με τις υπερβατικές καμπύλες αναφέρονται ως **ανώτερες καμπύλες του επιπέδου.** Στην προηγούμενη παράγραφο συναντήσαμε μερικές τέτοιες καμπύλες, όπως τις εξισώσεις των λημνίσκων, την κισσοειδή και την τριχοτόμο. Η μελέτη αυτών των καμπύλων ήταν σχετικά απλή με χρήση πολικών συντεταγμένων. Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε κάποιες από τις ανώτερες καμπύλες του επιπέδου σε καρτεσιανές συντεταγμένες.

Παράδειγμα 1. Κογχοειδής του Νικομήδη.
Μεταβλητή ευθεία ε που περνάει από την αρχή O καρτεσιανού συστήματος αξόνων Oxy τέμνει τη σταθερή ευθεία $x=\mathrm{a}$ στο σημείο A. Πάνω στην ευθεία ε και γύρω από το A παίρνουμε τα σημεία M και M′ έτσι, ώστε:

$$\mathrm{AM}=\mathrm{AM}'=\mathrm{b}.$$

Να βρεθεί η εξίσωση του γεωμετρικού τόπου των σημείων M και M′.

Λύση. Από τα δεδομένα του προβλήματος και τα όμοια τρίγωνα OAB, OMK και AMN (σχήμα 5.30) έχουμε

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{OB}}=\frac{\mathrm{MK}}{\mathrm{AK}}=\frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{AN}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{a}}=\frac{y}{x}=\frac{\mathrm{MN}}{x-\mathrm{a}},$$

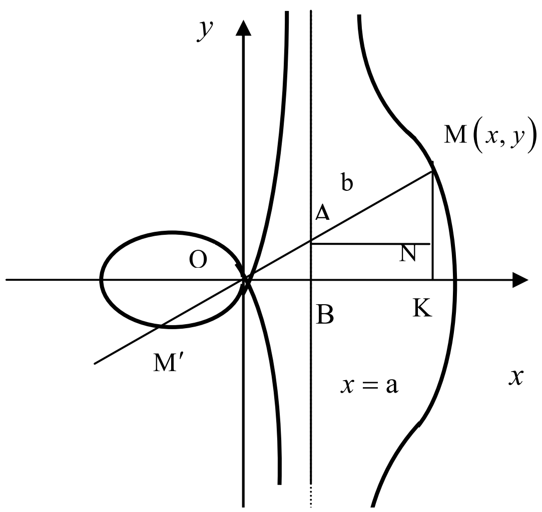
από τις οποίες λαμβάνουμε

$$\mathrm{AB}=\frac{\mathrm{a}y}{x} \quad \text{και} \quad \mathrm{MN}=\frac{y(x-\mathrm{a})}{x}.$$

Έτσι από το τρίγωνο AMN λαμβάνουμε

$$(x-\mathrm{a})^2+\frac{y^2(x-\mathrm{a})^2}{x^2}=\mathrm{b}^2$$

$$\Leftrightarrow (x^2+y^2)(x-\mathrm{a})^2=\mathrm{b}^2x^2.$$



Κογχοειδής του Νικομήδη
Σχήμα 5. 30

Εργαζόμενοι όμοια για το σημείο M' βρίσκουμε την ίδια εξίσωση του γεωμετρικού τόπου με αυτήν του σημείου M, θεωρώντας ότι:

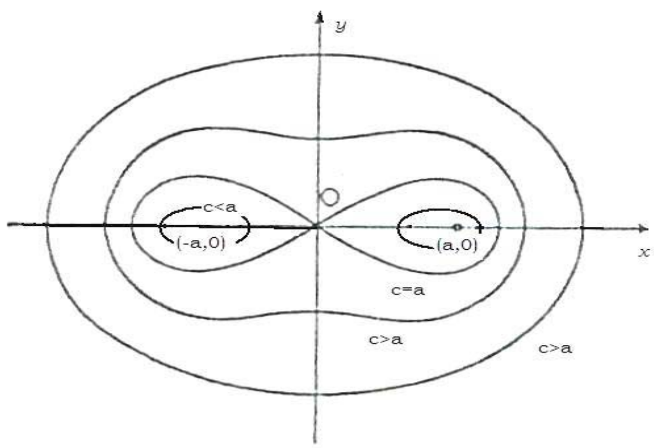
$$\mathrm{OM}' = -x \text{ και } \mathrm{M}'\mathrm{N}' = -y .$$

Το πρόβλημα αυτό μπορούσε να λυθεί ευκολότερα με χρήση πολικών συντεταγμένων με πόλο O και πολικό άξονα τον $x'\mathrm{O}x$. Τότε προκύπτουν οι εξισώσεις

$$\rho = \frac{\mathrm{a}}{\cos\theta} \pm \mathrm{b} .$$

Παράδειγμα 2. Ωοειδής (oval) του Cassini

Να βρεθεί η εξίσωση του γεωμετρικού τόπου σημείου M του επιπέδου που κινείται έτσι, ώστε το γινόμενο των αποστάσεων του από δύο σταθερά σημεία A και B να είναι σταθερό, έστω c^2.



Σχήμα 5. 31

Λύση. Θεωρούμε καρτεσιανό σύστημα αναφοράς $\mathrm{O}xy$ τέτοιο, ώστε το σημείο O να είναι μέσον του AB και $\mathrm{A}(\mathrm{a},0),\mathrm{B}(-\mathrm{a},0)$, $\mathrm{a} =$ σταθερά.

Αν $\mathrm{M}(x,y)$ είναι τυχόν σημείο του γεωμετρικού τόπου, τότε θα έχουμε

$$|\mathbf{MA}||\mathbf{MB}| = c^2 \Leftrightarrow |\mathbf{MA}|^2 |\mathbf{MB}|^2 = c^4$$

$$\Leftrightarrow \left[(x+a)^2 + y^2\right]\left[(x-a)^2 + y^2\right] = c^4 \Leftrightarrow \left(x^2 + y^2 + \mathrm{a}^2\right)^2 - 4\mathrm{a}^2 x^2 = c^4.$$

Για $c = \mathrm{a}$, η καμπύλη γίνεται λημνίσκος του Bernoulli με εξίσωση

$$\left(x^2+y^2\right)^2=2\mathrm{a}^2\left(x^2-y^2\right).$$

Για $c<\mathrm{a}$, η καμπύλη αποτελείται από δύο κλειστές καμπύλες που στο σχήμα 5.31 είναι στο εσωτερικό του λημνίσκου.

5. 8 Παραμετρικές εξισώσεις καμπύλων του επιπέδου

Πολλές φορές είναι χρήσιμο να χρησιμοποιούμε δύο εξισώσεις για να παραστήσουμε μία καμπύλη του επιπέδου, από μία για κάθε συντεταγμένη του σημείου $\mathrm{M}(x,y)$ της καμπύλης. Έτσι έχουμε τις **παραμετρικές εξι-- σώσεις** της καμπύλης, αν κάθε συντεταγμένη σημείου $\mathrm{M}(x,y)$ εκφράζεται σε όρους μιας μεταβλητής (παραμέτρου) t, δηλαδή οι παραμετρικές εξισώσεις είναι της μορφής

$$x=x(t),\ y=y(t),\ t\in\mathrm{I}\subseteq\mathbb{R}. \tag{1}$$

Από τις εξισώσεις (1) με απαλοιφή της μεταβλητής t λαμβάνουμε την καρτεσιανή εξίσωση της καμπύλης.

Όμοια, αν (ρ,θ) είναι οι συντεταγμένες του τυχόντος σημείου M της καμπύλης, τότε οι εξισώσεις

$$\rho=\rho(t),\ \theta=\theta(t),\ t\in\mathrm{I}\subseteq\mathbb{R} \tag{2}$$

ορίζουν επίσης μια παραμετρική παράσταση της καμπύλης. Η απαλοιφή του t από τις (2) οδηγεί στην εξίσωση της καμπύλης σε πολικές συντεταγμένες.

Γενικά η παράμετρος t μπορεί να οριστεί με διάφορους τρόπους και έτσι οι παραμετρικές εξισώσεις δεν είναι συνήθως μοναδικές.

Οι παραμετρικές εξισώσεις ευθείας του επιπέδου που περνάει από τα σημεία $\mathrm{M}_1(x_1,y_1)$ και $\mathrm{M}_2(x_2,y_2)$ μπορούν να προκύψουν από την εξίσωση

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1},$$

αν εξισώσουμε τους δύο λόγους με την παράμετρο t και λύσουμε τις εξισώσεις που προκύπτουν ως προς x και y, οπότε λαμβάνουμε τις εξισώσεις

$$x=x_1+t(x_2-x_1),\ y=y_1+t(y_2-y_1),\ t\in\mathbb{R}.$$

Μια παραμετρική παράσταση του κύκλου με εξίσωση

$$x^2+y^2=a^2 \quad (\text{αντίστοιχα, } (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=a^2),$$

είναι η

$$\left\{\begin{array}{l} x=a\cos t \\ y=a\sin t \end{array}\right\}, t\in[0,2\pi] \quad (\text{αντίστοιχα, } \left\{\begin{array}{l} x=x_0+a\cos t \\ y=y_0+a\sin t \end{array}\right\}, t\in[0,2\pi].$$

Μια παραμετρική παράσταση της έλλειψης

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

ορίζεται από τις εξισώσεις

$$\left.\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases}\right\}, t\in[0,2\pi],$$

ενώ η υπερβολή με εξίσωση

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

έχει παραμετρικές εξισώσεις

$$\left.\begin{cases} x={}^{a}\!/_{\cos t} \\ y=b\tan t \end{cases}\right\}, t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right).$$

Αν μία καμπύλη έχει καρτεσιανή εξίσωση $y=f(x), x\in \mathrm{I}\subseteq\mathbb{R}$, τότε μία παραμετρική παράσταση αυτής είναι η

$$\left.\begin{cases} x=t \\ y=f(t) \end{cases}\right\}, t\in \mathrm{I}.$$

Για παράδειγμα, οι παραβολές με εξισώσεις $x^2=4ay$ και $y^2=4ax$ έχουν παραμετρικές παραστάσεις, αντίστοιχα,

$$\left.\begin{cases} x=t \\ y=\dfrac{t^2}{4a} \end{cases}\right\}, t\in\mathbb{R} \quad \text{και} \quad \left.\begin{cases} x=\dfrac{t^2}{4a} \\ y=t \end{cases}\right\}, t\in\mathbb{R}.$$

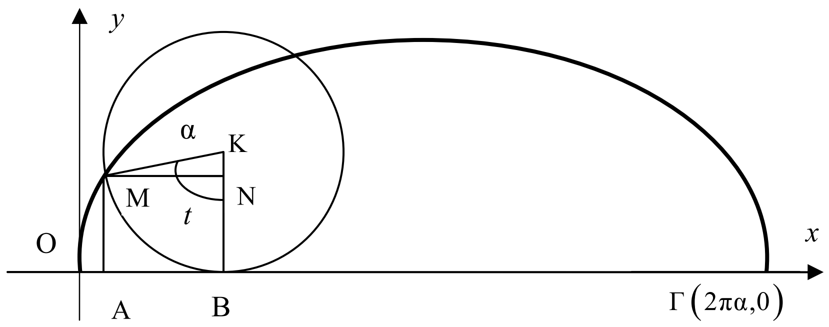
Στη συνέχεια θα μελετήσουμε μερικές χαρακτηριστικές καμπύλες του επιπέδου που ορίζονται απλούστερα με τις παραμετρικές εξισώσεις, αντί της καρτεσιανής εξίσωσης ή της εξίσωσης σε πολικές συντεταγμένες.

Παράδειγμα 1. Κυκλοειδής.
Να βρεθεί η εξίσωση της καμπύλης που διαγράφεται από ένα σημείο κύκλου ακτίνας α που κυλίεται πάνω σε μία δεδομένη ευθεία ε.

Λύση. Θεωρούμε καρτεσιανό σύστημα αξόνων $\mathrm{O}xy$ του οποίου ο οριζόντιος άξονας $x'\mathrm{O}x$ συμπίπτει με την ευθεία ε, ενώ η αρχή του O συμπίπτει με το σημείο M του κύκλου που διαγράφει τη ζητούμενη καμπύλη, στην αρχική του θέση. Στο σχήμα 5.32 ο κύκλος είναι σε τυχούσα θέση, όπου το σημείο M έχει μετακινηθεί από την αρχή O. Αν K είναι το κέντρο του κύκλου, θα χρησιμοποιήσουμε ως παράμετρο τη γωνία $(\mathbf{KB},\mathbf{KM})=t\in\mathbb{R}$.

Από την περιγραφή του προβλήματος έχουμε $\mathrm{OB}=\left|\overset{\frown}{\mathrm{MB}}\right|=\alpha t$ και

$$\left.\begin{cases} x = \overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{OB}} + \overline{\mathrm{BA}} = \alpha t - \alpha \sin t \\ y = \mathrm{AM} = \overline{\mathrm{BK}} - \overline{\mathrm{NK}} = \alpha - \alpha \cos t \end{cases}\right\}, t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} x = \alpha\left(t - \sin t\right) \\ y = \alpha\left(1 - \cos t\right) \end{cases}\right\}, t \in \mathbb{R}.$$



Σχήμα 5. 32, Κυκλοειδής

Για $t \in [0, 2\pi]$ ορίζεται το τόξο ΟΜΓ της καμπύλης, το οποίο στη συνέχεια, για $t > 2\pi$, επαναλαμβάνεται περιοδικά.

Από τη δεύτερη των παραμετρικών εξισώσεων εκφράζουμε την παράμετρο t ως συνάρτηση του y και με αντικατάσταση στην πρώτη εξίσωση λαμβάνουμε την καρτεσιανή εξίσωση της κυκλοειδούς καμπύλης

$$x = \alpha \cos^{-1}\left(\frac{\alpha - y}{\alpha}\right) \pm \sqrt{2\alpha y - y^2}.$$

Όταν ο κύκλος κυλίεται στο αντίθετο ημιεπίπεδο της ευθείας ε, η διαγραφόμενη από το σημείο Μ καμπύλη είναι πολύ σημαντική για τη Φυσική και λέγεται **καμπύλη ελάχιστου χρόνου (brachistochrone),** αφού είναι η καμπύλη της πιο απότομης κατηφοριάς, υπό την έννοια ότι ένα κινητό ολισθαίνει μεταξύ δύο σημείων της καμπύλης στον ελάχιστο δυνατό χρόνο.

Παράδειγμα 2. Υποκυκλοειδής.

Ένας κύκλος ακτίνας b κυλίεται στο εσωτερικό κύκλου ακτίνας a. Να βρεθεί η εξίσωση της καμπύλης που διαγράφεται από το σημείο Μ του κυλιόμενου κύκλου.

Λύση. Θεωρούμε καρτεσιανό σύστημα αξόνων $\mathrm{O}xy$, όπως στο σχήμα 5.33 και έστω $\theta = (\mathrm{OA}, \mathrm{OK}) \in [0, \infty)$, $\varphi = (\mathrm{KM}, \mathrm{K\Gamma})$ και $\omega = (\mathrm{KN}, \mathrm{KM})$, όπου Κ είναι το κέντρο του κυλιόμενου κύκλου. Τότε από την ισότητα των μηκών των τόξων ΑΓ και ΜΓ έχουμε

$$a\,\theta = b\varphi \Leftrightarrow \varphi = \left(\frac{a}{b}\right)\theta .$$

Επιπλέον, από την ισότητα

$$\omega = \frac{\pi}{2} + \theta - \varphi = \frac{\pi}{2} + \theta - \frac{a}{b}\theta = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{a-b}{b}\right)\theta$$

έπεται ότι

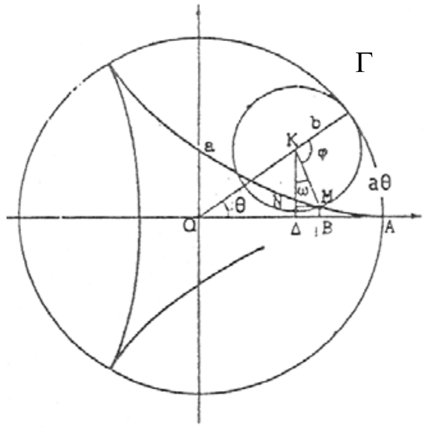
$$\sin\omega = \cos\left(\frac{a-b}{b}\right)\theta ,$$

οπότε τελικά λαμβάνουμε:

$$x = \overline{OB} = \overline{O\Delta} + \overline{\Delta B}$$

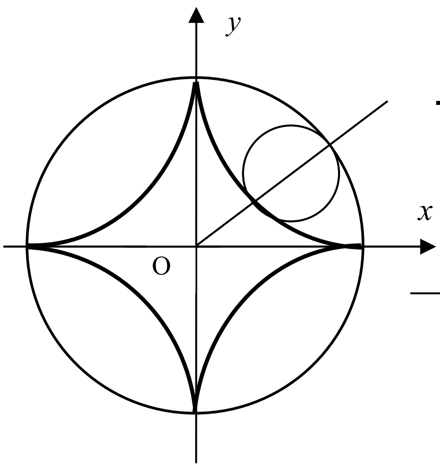
$$= (a-b)\cos\theta + b\cos\left(\frac{a-b}{b}\right)\theta ,$$

$$y = \overline{BM} = \overline{\Delta K} - \overline{\Delta N} = (a-b)\sin\theta\text{-}b\sin\left(\frac{a\text{-}b}{b}\right)\theta .$$

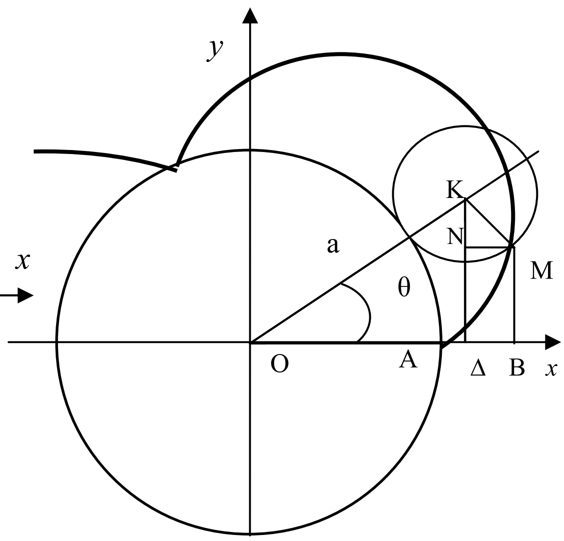


Σχήμα 5. 33

Η διαγραφόμενη καμπύλη λέγεται **υποκυκλοειδής** και αν ο λόγος των ακτίνων a/b είναι θετικός ακέραιος, τότε το σημείο M που διαγράφει την



Σχήμα 5. 34



Σχήμα 5. 35

καμπύλη περνάει ξανά από το σημείο A που ξεκίνησε και η παραγόμενη καμπύλη είναι κλειστή. Γενικά, αν ο αριθμός a/b είναι ρητός, τότε το σημείο M κάποτε θα περάσει ξανά από τη θέση του A, ενώ αυτό δεν θα συμβεί, αν ο αριθμός a/b είναι άρρητος.

Στην ειδική περίπτωση που είναι $a = 4b$, η παραγόμενη καμπύλη λέγεται **υποκυκλοειδής των τεσσάρων ανακάμψεων ή αστεροειδής** (σχήμα 5.34). Τότε οι παραμετρικές εξισώσεις γίνονται

$$\{x = a\cos^3\theta, y = a\sin^3\theta\}, \theta \in [0, 2\pi],$$

ενώ η καρτεσιανή εξίσωση είναι

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

Όταν ο κύκλος ακτίνας b κυλίεται στο εξωτερικό του κύκλου ακτίνας a, τότε η παραγόμενη καμπύλη λέγεται **επικυκλοειδής** και οι παραμετρικές εξισώσεις αυτής λαμβάνονται από αυτές της υποκυκλοειδούς με αντικατάσταση του $-b$ από το b, δηλαδή είναι

$$x = (a+b)\cos\theta - b\cos\left(\frac{a+b}{b}\right)\theta$$

$$y = (a+b)\sin\theta - b\sin\left(\frac{a+b}{b}\right)\theta.$$

Στην περίπτωση της επικυκλοειδούς ισχύουν τα ίδια, όπως και στην περίπτωση της υποκυκλοειδούς, ανάλογα με το αν ο αριθμός a/b είναι ακέραιος, ρητός ή άρρητος.

Στην ειδική περίπτωση που είναι $b = a$, τότε η παραγόμενη καμπύλη είναι μία καρδιοειδής και οι παραμετρικές εξισώσεις γίνονται:

$$\left.\begin{cases} x = a(2\cos\theta - \cos 2\theta) \\ y = a(2\sin\theta - \sin 2\theta) \end{cases}\right\}, \theta \in [0, 2\pi].$$

Παράδειγμα 3. Να σχεδιάσετε την καμπύλη: $x = \dfrac{3at}{1+t^3}, y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}, t \in \mathbb{R}$.

Λύση. Η καμπύλη αυτή λέγεται **φύλλο του Καρτεσίου** και η γραφική της παράσταση (σχήμα 5.36), γίνεται με τη βοήθεια του παρακάτω πίνακα:

t	0	0,5	1	2	$+\infty$	-0,5	$-1^{\pm}$	-2
x	0	$4a/3$	$3a/2$	$2a/3$	0	$-12a/7$	$\pm\infty$	$6a/7$
y	0	$2a/3$	$3a/2$	$4a/3$	0	$6a/7$	$\mp\infty$	$-12a/7$

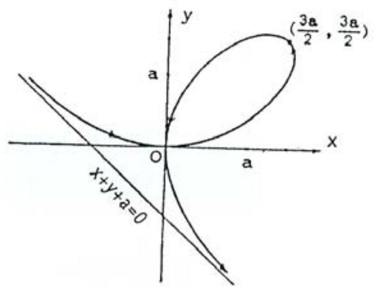
Κατά τα γνωστά από την Ανάλυση, η ευθεία

$$x+y+a=0$$

είναι ασύμπτωτη της καμπύλης αφού ισχύουν:

$$\lim_{t\to -1^{\pm}} x(t)=\mp\infty$$

$$\lim_{t\to -1^{\pm}} y(t)=\pm\infty .$$



Σχήμα 5.36

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρεθούν όλες οι δυνατές πολικές συντεταγμένες του σημείου A που έχει καρτεσιανές συντεταγμένες $(1,-1)$.

2. Να υπολογιστεί η απόσταση των σημείων $A\left(1,\pi/3\right)$ και $B(2,\pi)$.

Στη συνέχεια, να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτόμενων των κύκλων με εξισώσεις $\rho=1$ και $\rho=2$ στα σημεία A και B, αντίστοιχα.

3. Να βρεθεί η πολική εξίσωση κύκλου με κέντρο $K\left(4,\dfrac{\pi}{3}\right)$ και ακτίνα 4.

Στη συνέχεια, βρείτε την εξίσωση του κύκλου σε καρτεσιανές συντεταγμένες.

4. Να προσδιορίσετε το είδος των καμπύλων:

(i) $\rho=\dfrac{2}{1-\cos\theta}$, **(ii)** $\rho=\dfrac{2}{2-\sin\theta}$, **(iii)** $\rho=\dfrac{4}{1+2\cos\theta}$.

Στη συνέχεια, να σχεδιάσετε τις παραπάνω καμπύλες και να μετασχηματίσετε τις εξισώσεις τους σε καρτεσιανές συντεταγμένες.

5. Να μετασχηματιστούν από τις πολικές σε καρτεσιανές συντεταγμένες οι παρακάτω εξισώσεις:

(i) $\rho=\alpha\left(\dfrac{1}{\cos\theta}-\cos\theta\right)$ **(ii)** $\rho=\alpha(1+\cos\theta)$

(iii) $\rho=\dfrac{2\alpha}{\sin 2\theta}$ **(iv)** $\rho=\alpha\left(4\cos\theta-\dfrac{1}{\cos\theta}\right)$.

6. Να βρεθούν όλες οι δυνατές εξισώσεις σε πολικές συντεταγμένες της καμπύλης $\rho = \sin\dfrac{\theta}{2}$, την οποία στη συνέχεια να σχεδιάσετε.

7. Να σχεδιάσετε τις καμπύλες:

(i) $\rho = a\cos 3\theta$ **(ii)** $\rho^2\theta = a^2$ **(iii)** $\rho = b - a\cos\theta$

(iv) $\rho = \dfrac{2a}{\sin 2\theta}$ **(v)** $\rho = a\left(4\cos\theta - \dfrac{1}{\cos\theta}\right)$.

8. Να βρεθούν τα σημεία τομής των καμπύλων:

(i) $\rho = \cos\theta$ και $\rho = 1 - \cos\theta$ **(ii)** $\rho\theta = 1$ και $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

(iii) $\rho = -\cos\theta$ και $\rho = \cos 2\theta$.

9. Θεωρούμε κύκλο κέντρου K και ακτίνας 2α, μία διάμετρο OA και ευθεία ε κάθετη στο μέσον της OK. Μεταβλητή ευθεία που περνάει από το O τέμνει την ε στο B και τον κύκλο στο Δ.

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων P που είναι τέτοια, ώστε $\mathbf{OP} = \mathbf{B\Delta}$, **(τριχοτόμος).**

10. Μεταβλητή ευθεία ε που περνάει από τον πόλο O τέμνει τη σταθερή ευθεία $\rho = \dfrac{\alpha}{\cos\theta}$ στο A. Πάνω στην ευθεία ε και γύρω από το A λαμβάνουμε σημεία M και M' τέτοια, ώστε $|\mathbf{AM}| = |\mathbf{AM}'| = \beta$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M και M', **(κογχοειδής).**

11. Μεταβλητή ευθεία ε που περνάει από τον πόλο O τέμνει τη σταθερή ευθεία $\rho = \dfrac{\alpha}{\cos\theta}$ στο A. Αν η προβολή του A πάνω στον πολικό άξονα είναι το σημείο B, τότε πάνω στην ευθεία ε και γύρω από το A λαμβάνουμε σημεία M και M' τέτοια, ώστε $|\mathbf{AM}| = |\mathbf{AM}'| = |\mathbf{AB}|$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων M και M', **(στροφοειδής).**

12. Στο καρτεσιανό σύστημα αναφοράς $\mathrm{O}xy$ θεωρούμε τον κύκλο με εξίσωση $x^2 + y^2 - 2ay = 0$, τη διάμετρο OKA και την εφαπτόμενη ε του κύκλου στο A. Μεταβλητή ευθεία που περνάει από το O τέμνει τον κύκλο στο B και την ε στο Γ. Οι παράλληλες από τα B και Γ προς τις ε και OA, αντίστοιχα, τέμνονται στο M. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του σημείου Μ .

13. Η **πρώτη ποδική καμπύλη** μιας δεδομένης καμπύλης ως προς κάποιο σταθερό σημείο, είναι ο γεωμετρικός τόπος του ίχνους της κάθετης από το σταθερό σημείο προς μία μεταβλητή εφαπτόμενη της καμπύλης. Να αποδείξετε ότι:

(i) Η πρώτη ποδική καμπύλη ενός κύκλου ως προς κάποιο σημείο του, είναι μία καρδιοειδής.

(ii) Η πρώτη ποδική καμπύλη της παραβολής $y^2 = -4ax, a > 0$, ως προς το σημείο τομής της διευθετούσας με τον άξονά της, είναι η στροφοειδής καμπύλη με εξίσωση

$$x^3 + x\left(a^2 + y^2\right) = 2a\left(x^2 + y^2\right).$$

(iii) Η πρώτη ποδική καμπύλη της παραβολής $y^2 = -4ax, a > 0$, ως προς την κορυφή της $\mathrm{O}(0,0)$, είναι η κισσοειδής

$$y^2 = \frac{x^3}{a - x}.$$

(iv) Η πρώτη ποδική καμπύλη της υπερβολής $x^2 - y^2 = a^2$ ως προς το κέντρο της είναι ο λημνίσκος

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(x^2 - y^2\right).$$

14. Να βρεθούν οι παραμετρικές εξισώσεις του γεωμετρικού τόπου του σημείου Μ της άσκησης 12, αν θεωρήσουμε ως παράμετρο $t = \mathrm{A\hat{O}\Gamma}$.

15. Όταν μια χορδή, που είναι περιτυλιγμένη γύρω από ένα κύκλο, ξετυλίγεται ενώ κρατιέται τεντωμένη, τότε το ένα άκρο της διαγράφει μία καμπύλη που λέγεται **εξειλιγμένη (involute)** του κύκλου. Να αποδείξετε ότι οι παραμετρικές εξισώσεις της εξειλιγμένης του κύκλου με εξίσωση $\rho = \alpha$ είναι οι

$$x = \alpha\left(\cos\theta + \theta\sin\theta\right), \; y = \alpha\left(\sin\theta - \theta\cos\theta\right).$$