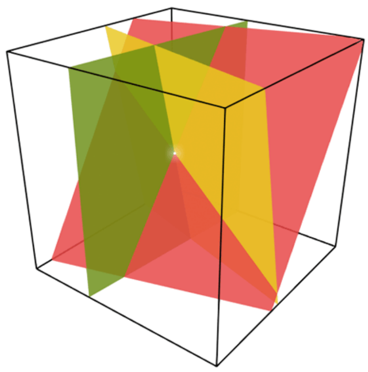
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ



Χρήστος Α. Αλεξόπουλος

Τμήμα Μηχ. Η/Υ και Πληροφορικής
Πανεπιστήμιο Πατρών

Σεπτ. 2012

Αντί Προλόγου

Η Γραμμική Άλγεβρα παρέχει ένα ενδιαφέρον, θεμελιώδες και εκτενές πεδίο μελέτης και βρίσκει πολλές και σημαντικές εφαρμογές σε πολλές και κρίσιμες περιοχές των Μαθηματικών, της Φυσικής και της Μηχανικής.

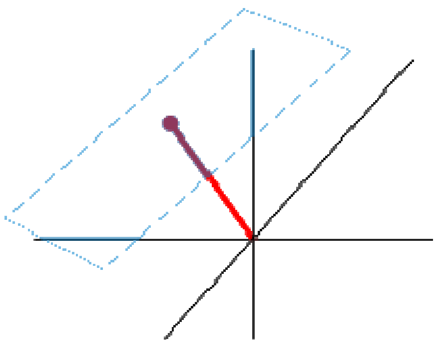
Το παρόν βοήθημα γράφτηκε για να συμπληρώσει θεωρητικά και πρακτικά θέματα της διδασκόμενης ύλης του αντίστοιχου μαθήματος που διδάσκεται στο Τμήμα Μηχ. Η/Υ και Πληροφορικής, δίνοντας υποδειγματικές απαντήσεις σε ένα σύνολο επιλεγμένων ασκήσεων. Βασικός σκοπός του είναι να βοηθήσει τους αποδέκτες του, τους φοιτητές του Τμήματος Μηχ. Η/Υ και Πληροφορικής, στην εμπέδωση και κατανόηση των βασικών εννοιών, μεθοδολογιών και εφαρμογών. Αποσκοπεί επίσης να προσδώσει τον απαραίτητο μαθηματικό φορμαλισμό, υπόβαθρο και λιτότητα στις μαθηματικές αποδείξεις και υπολογιστικές διατυπώσεις και να συστηματοποιήσει και διασαφηνίσει βασικά θεωρητικά σημεία και πρακτικά συμπεράσματα, που συχνά είναι αντικείμενα λαθών, παρερμηνειών ή σύγχυσης.

Οι στοιχειώδεις γνώσεις και οι εισαγωγικές έννοιες της τρισδιάστατης Γεωμετρίας, του λογισμού διανυσμάτων και του Απειροστικού Λογισμού θεωρούνται γνωστές και αποτελούν προϋπόθεση για τη μελέτη. Οι ασκήσεις συνοδεύεται από παρατηρήσεις και σχόλια, ενώ παρατίθενται συχνές παραπομπές στο διδακτικό βιβλίο (*G. Strang*) για εκτενέστερη μελέτη. Τέλος, σε ένα μεγάλο μέρος περιλαμβάνονται ασκήσεις και εφαρμογές που έχουν παρουσιασθεί και συζητηθεί στις διαλέξεις του μαθήματος είτε έχουν τεθεί ως θέματα στις γραπτές εξετάσεις και τις προόδους του μαθήματος.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον συνάδελφο Καθηγητή Θόδωρο Παπαθεοδώρου για την ενθάρρυνση και συνδρομή.

Καλή ανάγνωση και μελέτη…

Χ. Α. Α.



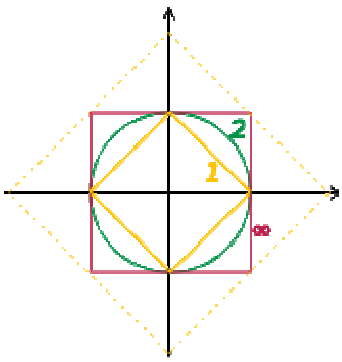
Αφιερώνεται

Στον αλησμόνητο Θόδωρο

και σ' όλους αυτούς

που με τον τρόπο ζωής τους συνεχίζουν

ν' αντιστέκονται και να εμπνέουν…



Περιεχόμενα

Συντομογραφίες

Με [*] *σημειώνονται στο κείμενο τα κύρια θεωρητικά σημεία.*

[xxx]: Υποδείξεις παραπομπών στη βιβλιογραφία ή στις Ασκήσεις.

[*Βασικό*]: αντικείμενο ειδικής προσοχής ή επισταμένης μελέτης.

[*Άσκηση*]: Ο αναγνώστης καλείται να δώσει μόνος του την απάντηση/απόδειξη.

◘ Ένδειξη Παραδείγματος

♠ Ένδειξη Εφαρμογής

◙ Ένδειξη συμβολισμού (σημειολογία)

♣ Ένδειξη ένθεσης παραδείγματος στο Matlab.

Συντμήσεις

δ.χ.: Διανυσματικός χώρος

γ.σ.: γραμμικός συνδυασμός διανυσμάτων.

σ.μ.γ.: στοιχειώδης μετασχηματισμός γραμμών.

σ.μ.σ.: στοιχειώδης μετασχηματισμός στηλών.

γ.μ.: γραμμικός μετασχηματισμός ή γραμμική απεικόνιση.

γ.α.: γραμμική ανεξαρτησία ή γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα.

γ.ε.: γραμμική εξάρτηση ή γραμμικά εξαρτημένα διανύσματα.

α.κ.μ.: αναγμένη κλιμακωτή μορφή, αναγμένο κλιμακωτό μητρώο

α.πολ.: αλγεβρική πολλαπλότητα ιδιοτιμής.

γ.πολ.: γεωμετρική πολλαπλότητα ιδιοτιμής

α.τ.μ.: άνω τριγωνικό μητρώο

κ.τ.μ.: κάτω τριγωνικό μητρώο

α.κ.υ.: αριθμητική κινητής υποδιαστολής

Συμβολισμοί

- R^n: Ο Ευκλείδιος δ.χ. R^n πάνω στο σώμα R.
- C^n : Ο δ.χ. C^n ορισμένος πάνω στο σώμα C.
- K^n : Ο δ.χ. K^n ορισμένος πάνω στο σώμα K.
- K-χώρος: δ.χ.ορισμένος πάνω στο σώμα K.
- V:K: K-χώρος V.
- $R^{m\times n}$: Ο δ.χ. όλων των μητρώων $m\times n$ με πραγματικά στοιχεία (ενίοτε και $M_{m,n}(\mathbf{R})$.
- $C^{m\times n}$: Ο δ.χ. όλων των μητρώων $m\times n$ με μιγαδικά στοιχεία, ορισμένος πάνω στο σώμα C (ενίοτε και $M_{m,n}(C)$.
- $K^{m\times n}$: Ο δ.χ. όλων των μητρώων $m\times n$ με στοιχεία από το σώμα K (ενίοτε και $M_{m,n}(K)$.
- $P_n(K)$: δ.χ. συνόλου πολυωνύμων έως βαθμού n, με συντελεστές από το σώμα K.
- $C[a, \beta]$: ο δ.χ. των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων ορισμένων στο διάστημα $[a, \beta]$
- $\boldsymbol{e}_i$: i στοιχείο της τυπικής βάσης του δ.χ. K^n.
- $\boldsymbol{v}$: σε έντονη κεκλιμένη γραφή: διάνυσμα-στήλη
- $\boldsymbol{v}^T$: διάνυσμα-γραμμή.
- $\boldsymbol{x}_{i:k}$: τμήμα του διανύσματος $\boldsymbol{x}$ από τη θέση i έως τη θέση k.
- I_n: Ταυτοτικό μητρώο $n\times n$.
- $[a_1, \beta_1, \ldots ; a_2, \beta_2,\ldots ; \ldots ; a_m, \beta_m,\ldots]$: μητρώο σε αναπαράσταση γραμμών χωριζόμενων με «;».
- $A(i, 1{:}n)$: γραμμή i μητρώου A $m\times n$ (διάνυσμα-γραμμή)
- $A(1{:}m\ i)$: στήλη i μητρώου A $m\times n$ (διάνυσμα-στήλη)
- $A(i_1{:}i_2; j_1{:}j_2)$: Υπομητρώο του A με γραμμές και στήλες στο διάστημα γραμμών $i_1{:}i_2$ και στηλών $j_1{:}j_2$.
- $\mathrm{diag}(A)=(a_{11}, a_{22},\ldots, a_{nn})^T$: διάνυσμα με τα διαγώνια στοιχεία του A.,
- $\mathrm{diag}(A)$: το διάνυσμα των διαγώνιων στοιχείων ενός μητρώου A.
- $\mathrm{diag}(\boldsymbol{d})$: διαγώνιο μητρώο με διαγώνιο ίσο με το διάνυσμα $\boldsymbol{d}$.
- $\mathrm{trace}(A)$ = ίχνος μητρώου A = άθροισμα διαγώνιων στοιχείων του A.
- $A\boldsymbol{x}$: ένας ή περισσότεροι γ.σ. των διανυσμάτων-στηλών του μητρώου A.
- $<\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2,\ldots \boldsymbol{v}_n>$: το σύνολο όλων των γ.σ. των διανυσμάτων $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2,\ldots \boldsymbol{v}_n$.
- $<S>$: το σύνολο των γ.σ. των διανυσμάτων του συνόλου S.
- $span(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2,\ldots \boldsymbol{v}_n)$: το σύνολο των γ.σ. των διανυσμάτων $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2,\ldots \boldsymbol{v}_n$.
- $\boldsymbol{x}=span(<\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2,\ldots \boldsymbol{v}_n)$: Κάποιος γ.σ. των διανυσμάτων $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2,\ldots \boldsymbol{v}_n$ που δίνει το διάνυσμα $\boldsymbol{x}$.
- $N(A)$: Μηδενοχώρος μητρώου A = Χώρος λύσεων του ομογενούς $A\boldsymbol{x}=0$.
- $null(A)$: Μητρώο με τα διανύσματα της βάσης του μηδενοχώρου του μητρώου A.
- $R(A)$: Χώρος γραμμών μητρώου A.
- $C(A)$: Χώρος στηλών μητρώου A.
- $N(A^T)$: Αριστερός Μηδενοχώρος μητρώου A = Χώρος λύσεων του ομογενούς $A^T\boldsymbol{x}=0$
- $\dim(V)$: διάσταση του δ.χ. V ως προς ένα σαφώς υπονοούμενο σώμα.
- $\dim(V{:}K)$: διάσταση του δ.χ. V ορισμένου πάνω στο σώμα K.
- $Rank(A)$: τάξη μητρώου.
- $\det(A)$: ορίζουσα μητρώου A.
- $<\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}>$: εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$.

- $\|\boldsymbol{v}\|$: μέτρο διανύσματος $\boldsymbol{v}$.
- ${}_{B}(T)_{C}$: μητρώο γραμμικού μετασχηματισμού T: $V \rightarrow W$ ως προς βάσεις B, C.
- $(T)_{B}$: μητρώο γ.μ. T ορισμένου επί ενός δ.χ. V ως προς τη βάση B.
- $V \perp W$: δ.χ. V ορθογώνιος με το χώρο W
- $\boldsymbol{v} \perp S$: διάνυσμα ορθογώνιο (κάθετο) σε ένα σύνολο S.
- $V^{\perp}$: ορθογώνιο συμπλήρωμα του συνόλου ή του υποχώρου V.
- V(λ): ιδιοχώρος που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ ενός μητρώου $V(\lambda) = N(A-\lambda I)$.
- U: συνήθως ένα άνω τριγωνικό μητρώο.
- L: συνήθως ένα κάτω τριγωνικό μητρώο.
- Q: συνήθως ένα ορθογώνιο μητρώο ($Q^{T}Q=I$)
- $\boldsymbol{q}$: συνήθως διάνυσμα μιας ορθοκανονικής ή ορθογώνιας βάσης διανυσμάτων.
- ~ : σύμβολο ισοδυναμίας: π.χ. $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \sim B\boldsymbol{x}=\boldsymbol{d}$: ισοδύναμα συστήματα.

0 ΑΛΓΕΒΡΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΜΗΤΡΩΩΝ

0.1 Γεωμετρία τριών Διαστάσεων και Λογισμός Διανυσμάτων

Άσκηση 0.1-1

(α) Να εκφρασθεί ένα διάνυσμα του $\mathbf{R}^n$ ως γραμμικός συνδυασμός μοναδιαίων και ορθογωνίων διανυσμάτων.
(β) Να εκφρασθεί το διάνυσμα $(x, y, z)\in\mathbf{R}^3$ ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων (1, 0, 1), (2, 1, 0), (1, 0, -1).

Απ. Θεωρούμε τα διανύσματα

$$\boldsymbol{e}_1=(1, 0, \ldots, 0),\ \ \boldsymbol{e}_2=(0, 1, \ldots, 0), \ldots , \boldsymbol{e}_n=(0, 0, \ldots, 1)$$

όπου για κάθε $\boldsymbol{e}_i$ η i-συντεταγμένη ισούται με 1 και οι υπόλοιπες με 0. Προφανώς τα $\boldsymbol{e}_i$ είναι μοναδιαία και ανά δύο ορθογώνια μεταξύ τους. Κάθε διάνυσμα $\boldsymbol{\alpha}=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ του $\mathbf{R}^n$ είναι γ.σ. των $\boldsymbol{e}_i$.

$$\boldsymbol{\alpha} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + a_n\boldsymbol{e}_n$$
$$= a_1(1,0\ldots,0) + a_2(0,1,\ldots,0) + \ldots + a_n(0,0,\ldots,1) = \sum_{i=1}^{n} a_i\boldsymbol{e}_i$$

(β) Αναζητούμε κατάλληλα $a, \beta, \gamma\in\mathbf{R}$ (x, y, z) τέτοια ώστε:

$$(x, y, z) = a(1,0,1) + \beta(2,1,0) + \gamma(1,0,-1)$$
$$= (a + 2\beta + \gamma, \beta, a - \gamma)$$

δηλ. πρέπει να ισχύουν οι εξισώσεις:

$$a + 2\beta + \gamma = x,\ \ y = \beta,\ z = a - \gamma$$

που αποτελούν σύστημα 3 εξισώσεων με 3 αγνώστους (a, β, γ). Βρίσκουμε αντικαθιστώντας:

$$x = a + 2y + (a - z) \Rightarrow 2a = x - 2y + z \Rightarrow a = (x - 2y + z)/2$$
$$\beta = y$$
$$\gamma = (x - 2y + z)/2 - z = (x - 2y - z)/2$$

οπότε το (x, y, z) εκφράζεται:

$$(x, y, z) = (x - 2y + z)/2\ (1,0,1) + y(2,1,0) + (x - 2y - z)/2\ (1,0,-1)$$

□

Άσκηση 0.1-2

Αν $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\in \mathbf{R}^n$, να δειχτεί οτι η απεικόνιση d που ορίζει την απόσταση $d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ δύο διανυσμάτων ικανοποιεί:

(i) $d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \geq 0$,

(ii) $d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = d(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})$ και

(iii) $d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0$, αν και μόνο αν $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{v}$.

Απ.

i) Αν $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2,\ldots, u_n)\in\mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2,\ldots, v_n)\in\mathbf{R}^n$, τότε είναι $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u} = (v_1 - u_1, v_2 - u_2,\ldots, v_n - u_n)$ και

$$d(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v}) = \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\| = \sqrt{(v_1-u_1)^2+(v_2-u_2)^2+\cdots+(v_n-u_n)^2} \geq 0$$

ii) Είναι :

$$d(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) = \|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}\| = \sqrt{(v_1\text{-}u_1)^2+\cdots+(v_n\text{-}u_n)^2} = \sqrt{(u_1\text{-}v_1)^2+\cdots+(u_n\text{-}v_n)^2} = \|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}\| = d(\boldsymbol{v},\boldsymbol{u})$$

iii) Αν $d(\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v})=0$, τότε

$$\|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}\| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{(v_1 - u_1)^2+\cdots+(v_n - u_n)^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$(v_1 - u_1)^2+\cdots+(v_n - u_n)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{u}_i = 0,\ i=1,\ldots,n$$

0.2 Μητρώα, Πράξεις και Ιδιότητες

Άσκηση 0.2-1

Αν $A\in\mathbf{R}^{n\times n}$ με $A^2 = 0$, τότε το I - A είναι μη-ιδιάζον.

Απ.

Είναι (I-T)(I+T) = I^2-T^2= I – 0 = I, άρα το I-T είναι αντιστρέψιμο, με αντίστροφο το I+T.

0.3 Αλγεβρικές Δομές και Διανυσματικοί Χώροι

Άσκηση 0.3-1

Να δειχθεί ότι το σύνολο όλων των ακολουθιών *Cauchy*:

$$C = \{ \{\alpha_n\} \ / \text{ για κάθε } \varepsilon>0 \text{ υπάρχει } n(\varepsilon)\in\mathbf{N} \text{ τέτοιος ώστε } |a_m-a_n| < \varepsilon \text{ για } m, n > n(\varepsilon) \}$$

έχει τη δομή διανυσματικών χώρου πάνω στο **R**.

Απ.

Αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο C είναι κλειστό ως προς τις πράξης πρόσθεση ακουλουθιών και πολλαπλασιασμό ακολουθίας επί βαθμωτό. Οι υπόλοιπες ιδιότητες του δ.χ. πληρούνται από τις γνωστές ιδιότητες των ακολουθιών. Δείχνουμε πρώτα ότι αν $\{a_n\}$, $\{\beta_n\}$ είναι ακολουθίες Cauchy, τότε και η $(a_n+ \beta_n)$ είναι ακολουθία Cauchy. Επειδή a_n, β_n είναι ακολουθίες Cauchy ισχύει ότι:

$$\forall\varepsilon_1>0\ \exists\ n_1\in\mathbf{N} \text{ ώστε : } \forall n, m > n_1\ |a_n - a_m| < \varepsilon_1$$
$$\forall\varepsilon_2>0\ \exists\ n_2\in\mathbf{N} \text{ ώστε : } \forall n, m > n_2\ |\beta_n - \beta_m| < \varepsilon_2$$

Αρκεί να δειχθεί ότι :

$$\forall\ \varepsilon>0\ \exists\ \mathrm{N}\in\mathbf{N} \text{ ώστε : } \forall\ n, m > \mathrm{N}\ \ |(a_n + \beta_n) - (a_m + \beta_m)| < \varepsilon$$

Για τις ακολουθίες (a_n) και (β_n) ισχύει :

$$\forall\ \varepsilon/2\ \ \exists\ \mathrm{N}_1\in\mathbf{N} \text{ ώστε : } \forall\ n, m > \mathrm{N}_1\ |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{1}$$

$$\forall\ \varepsilon/2\ \exists\ \mathrm{N}_2\in\mathbf{N} \text{ ώστε : } \forall\ n, m > \mathrm{N}_2\ |\beta_n - \beta_m| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2}$$

Έστω τώρα $\mathrm{N}=\max(\mathrm{N}_1, \mathrm{N}_2)$. Τότε $\forall\ n, m > \mathrm{N}$ ισχύουν ταυτόχρονα οι (1), (2), δηλαδή

$$|a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{2}, |\beta_n - \beta_m| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$$
$$|a_n - a_m| + |\beta_n - \beta_m| < \varepsilon\ \ \forall\ n, m > \mathrm{N}$$

Όμως σύμφωνα με ιδιότητα των απολύτων τιμών ισχύει:

$$|(a_n - a_m) + (\beta_n - \beta_m)| \le |a_n - a_m| + |\beta_n - \beta_m| < \varepsilon, \text{ ή}$$
$$|(a_n + \beta_n) - (a_m + \beta_m)| < \varepsilon\ \ \forall\ n, m > \mathrm{N}$$

Δείχνουμε τώρα την κλειστότητα ως προς τον πολλαπλασιασμό. Αν (α_n) ακολουθία Cauchy και $\lambda\in\mathbf{R}$, τότε

$$\forall\ \frac{\varepsilon}{|\lambda|} > 0\ \ \exists\ \mathrm{N}\in\mathbf{N} \text{ ώστε } \forall\ n, m > \mathrm{N}\ |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|} \Rightarrow$$
$$|\lambda|\,|a_n - a_m| < \varepsilon \text{ και } |\lambda a_n - \lambda a_m| < \varepsilon\ \forall\ n, m > \mathrm{N}$$

Άρα και η $\{\lambda a_n\}$ είναι ακολουθία Cauchy.

Άσκηση 0.3-2

Ποια από τα επόμενα σύνολα πραγματικών συναρτήσεων f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ είναι **R**-χώροι;

1) Το σύνολο όλων των πραγματικών πολυωνύμων βαθμού ακριβώς n.
2) Το σύνολο όλων των πραγματικών πολυωνύμων βαθμού $> n$.
3) Το σύνολο των περιττών συναρτήσεων (δηλαδή $f(-x)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$)

Απ.

1) Το σύνολο των πραγματικών πολυωνύμων δεν είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση. Πράγματι, αν επιλέξουμε δύο πολυώνυμα με αντίθετους συντελεστές του μεγιστοβάθμιου όρου, τότε το άθροισμά τους θα

είναι n-1 βαθμού και ως εκ τούτου δεν ανήκει στο σύνολο αυτό. Επομένως, το σύνολο των πραγματικών πολυωνύμων δεν είναι **R**-χώρος.

2) Το μηδενικό πολυώνυμο p=0 είναι το ουδέτερο στοιχείο για την πρόσθεση πολυωνύμων και επειδή είναι βαθμού 0 δεν μπορεί να ανήκει στο σύνολο αυτό. Συνεπώς το σύνολο όλων των πραγματικών πολυωνύμων βαθμού > n δεν είναι **R**-χώρος.

3) Το άθροισμα δύο περιττών συναρτήσεων και το γινόμενο περιττής συνάρτησης επί βαθμωτό είναι ομοίως περιττές συναρτήσεις. Πράγματι, αν f, g δύο περιττές συναρτήσεις, τότε:

$$(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -(f(x) + g(x)) = -(f+g)(x)$$
$$(af)(-x) = af(-x) = -af(x) = -(af)(x)$$

Άρα το σύνολο των περιττών συναρτήσεων είναι κλειστό ως προς τις πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού. Επιπλέον, αφού η αντιμεταθετικότητα, η προσεταιριστικότητα, η ύπαρξη μηδενικού και αντίθετου στοιχείου ισχύουν για την πρόσθεση στο σύνολο όλων των πραγματικών συναρτήσεων, θα ισχύουν και για το σύνολο των περιττών συναρτήσεων. Επίσης, αφού η επιμεριστικότητα της πράξης «·» ως προς την πρόσθεση πραγματικών αριθμών, η επιμεριστικότητα ως προς την πρόσθεση συναρτήσεων, η ύπαρξη μοναδιαίας συνάρτησης και η προσεταιριστικότητα του βαθμωτού πολλαπλασιασμού ισχύουν για το βαθμωτό πολλαπλασιασμό στο σύνολο των πραγματικών συναρτήσεων, θα ισχύουν και για το σύνολο όλων των περιττών συναρτήσεων. Από τα παραπάνω συνάγεται ότι το σύνολο των περιττών συναρτήσεων είναι **R**-χώρος.

Άσκηση 0.3-3

Ποιά από τα επόμενα υποσύνολα του C[0, 1] είναι **R**-χώροι;

α) $C_1 = \{f \in C[0,1] \mid f(1) = 0\}$
β) $C_2 = \{f \in C[0,1] \mid f(1) = 1\}$
γ) $C_3 = \{f \in C[0,1] \mid f(0) = f(1)\}$

Απ.

Τα στοιχεία των συνόλων C_1, C_2, C_3 έχουν ως στοιχεία του δ.χ. C[0, 1] όλες τις ιδιότητες του δ.χ. Αρκεί λοιπόν να εξετάσουμε την κλειστότητα των C_1, C_2, C_3 ως προς τις πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού.

α) Αν $f_1, f_2 \in C_1$, τότε

$$(f_1+f_2)(1) = f_1(1) + f_2(1) = 0 \text{ και}$$
$$(\lambda \cdot f_1)(1) = \lambda(f_1(1)) = \lambda \cdot 0 = 0$$

δηλαδή το C_3 είναι κλειστό ως προς τις δυο πράξεις. Άρα είναι **R**-χώρος.

β) Αν $f_1, f_2 \in C_2$, τότε έχουμε :

$$f_1(1) + f_2(1) = 2 \neq 1$$

Άρα $f_1 + f_2 \notin C_2$ και επομένως το C_2 δεν είναι **R**-χώρος.

γ) Αν $f_1, f_2 \in C_3$, τότε :

$$f_1(0) + f_2(0) = f_1(1) + f_2(1) \text{ ή } (f_1+f_2)(0) = (f_1+f_2)(1)$$

Επίσης, αφού $f(0) = f(1)$ είναι και $\lambda \cdot f(0) = \lambda \cdot f(1)$, ή $(\lambda \cdot f)(0) = (\lambda \cdot f)(1)$. Άρα το C_3 είναι κλειστό ως προς τις παραπάνω πράξεις και συνεπώς είναι **R**-χώρος.

Άσκηση 0.3-4

Να δειχθεί ότι τα επόμενα σύνολα έχουν τη δομή διανυσματικών χώρων πάνω στο **R**.

α) Το σύνολο όλων των αριθμητικών προόδων:

$$P = \{\{a_n\} \mid a_{n+1} - a_n = a_{n+2} - a_{n+1}\},\ a_n \in \mathbf{R}$$

β) Το σύνολο όλων των ακολουθιών του *Fibonacci*:

$$F = \{\{a_n\} \mid a_{n+2} = a_{n+1} + a_n\},\ n \geq 0,\ a_n \in \mathbf{R}$$

Απ.

α) Αν $\{a_n\}$, $\{b_n\}\in$Ρ, θεωρούμε την εσωτερική πράξη της πρόσθεσης ακολουθιών, δηλ. $\{a_n\}+\{b_n\}=\{a_n+b_n\}$. Επίσης, την εξωτερική πράξη «·» πολλαπλασιασμού ακολουθίας επί βαθμωτό του **R**: $\forall\{a_n\}\in$Ρ και $\forall a\in\mathbf{R}$ $a\cdot\{a_n\}=\{aa_n\}$. Αν και αρκεί μόνον να εξετάσουμε κατά πόσον το Ρ είναι κλειστό ως προς τις παραπάνω πράξεις (αφού το σύνολο των ακολουθιών είναι δ.χ.), δείχνουμε ενδελεχώς ότι ικανοποιεί όλες τις ιδιότητες του δ.χ. Εξετάζουμε λοιπόν κατ' αρχήν το Ρ ως προς την πράξη «+».

(i) $\forall n\geq 1$ και a_n, $b_n\in\mathbf{R}$ είναι :

$$\begin{aligned}(a_{n+1}+b_{n+1})-(a_n+b_n) &= (a_{n+1}-a_n)+(b_{n+1}-b_n)\\ &= (a_{n+2}-a_{n+1})+(b_{n+2}-b_{n+1})\\ &= (a_{n+2}+b_{n+2})-(a_n+b_n)\end{aligned}$$

άρα η προκύπτουσα ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος με βήμα $\lambda+\omega$, όπου $\lambda=a_{n+1}-a_n$ και $\omega=b_{n+1}-b_n$, επομένως το Ρ είναι κλειστό ως προς την πράξη «+».

(ii) Αν $\{a_n\},\{b_n\}\in$Ρ, προφανώς ισχύει $\{a_n\}+\{b_n\}=\{b_n\}+\{a_n\}$, άρα η πράξη «+» είναι αντιμεταθετική.

(iii) Έστω η ακολουθία $O_n=\{a_n\}$ με $a_n=0$, $\forall n$ (μηδενική ακολουθία), δηλ. $a_{n+1}-a_n=0$, $\forall n$ (βήμα 0). Άρα $O_n\in$Ρ. Επιπλέον $\forall a_n\in$Ρ προφανώς ισχύει $O_n+\{a_n\}=\{a_n\}+O_n=\{a_n\}$. Άρα η ακολουθία O_n είναι το ουδέτερο στοιχείο του Ρ ως προς την πράξη «+».

(iv) Έστω $\{a_n\}\in$Ρ. Επιλέγουμε $-\{a_n\}=\{-a_n\}=\{-a_0, -a_1, \ldots, -a_n\}\in$Ρ με αντίθετο βήμα. Ισχύει προφανώς $\{a_n\}+(-\{a_n\})=O_n=(-\{a_n\})+\{a_n\}$. Άρα η «αντίθετη» πρόοδος της προόδου $\{a_n\}$ είναι η $-\{a_n\}$.

(v) Αν $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}\in$Ρ, ισχύει

$$\{a_n\}+(\{b_n\}+\{c_n\})=(\{a_n\}+\{b_n\})+\{c_n\}$$

Άρα ισχύει το αξίωμα της προσεταιριστικότητας ως προς την πράξη "+".

Εξετάζουμε τώρα το σύνολο Ρ ως προς τη πράξη «·».

(i) Προφανώς είναι :

$$a\cdot a_{n+1}-a\cdot a_n=a(a_{n+1}-a_n)=a(a_{n+2}-a_{n+1})=a\cdot a_{n+2}-a\cdot a_{n+1}\in\text{Ρ},$$

άρα το Ρ είναι κλειστό ως προς την πράξη «·».

(ii) Αν $\{a_n\}$, $\{b_n\}\in$Ρ και $a\in\mathbf{R}$ τότε $\forall n$ είναι $a\cdot(a_n+b_n)=a\cdot a_n+a\cdot b_n$, οπότε $a\cdot(\{a_n\}+\{b_n\})=a\cdot\{a_n\}+a\cdot\{b_n\}$.

(iii) Αν $a, \beta\in\mathbf{R}$ και $\{a_n\}\in$Ρ τότε

$$\begin{aligned}(a+\beta)\cdot\{a_n\} = \{(a+\beta)\cdot a_n\} &= \{\, a\cdot a_n+\beta\cdot a_n\,\}\\ &= \{a\cdot a_n\}+\{\beta\cdot a_n\}\\ &= a\cdot\{a_n\}+\beta\cdot\{a_n\}\end{aligned}$$

(iv) Αν $a, \beta\in\mathbf{R}$ και $\{a_n\}\in$Ρ τότε

$$a\cdot(\beta\cdot\{a_n\})=a\cdot\{\beta\cdot a_n\}=\{a\cdot\beta\cdot a_n\}=\{(a\cdot\beta)\cdot a_n\}=(a\beta)\cdot\{a_n\}$$

(v) Προφανώς $\forall$ $\{a_n\}\in$Ρ ισχύει: $1\cdot\{a_n\}=\{1\cdot a_n\}=\{a_n\}$

Άρα το Ρ, εφοδιασμένο με τις παραπάνω πράξεις, πληροί τις ιδιότητες του δ.χ., οπότε είναι δ.χ. πάνω στο **R**.

β) Για το σύνολο F των ακολουθιών *Fibonacci*, εξετάζουμε την κλειστότητα ως προς τις πράξεις της πρόσθεσης ακολουθιών και βαθμωτού πολλαπλασιασμού επί πραγματικό αριθμό. Αν $\{a_n\}$, $\{b_n\}\in$F, τότε

$$\begin{aligned}a_{n+2}+b_{n+2} &= (a_{n+1}+a_n)+(b_{n+1}+b_n)\\ &= (a_{n+1}+b_{n+1})+(a_n+b_n)\end{aligned}$$

Άρα $a_n+b_n\in$ F, συνεπώς το F είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση. Αν $a\in\mathbf{R}$, τότε είναι

$$a\cdot a_{n+2}=a\cdot(a_{n+1}+a_n)=a\cdot a_{n+1}+a\cdot a_n$$

δηλ. $\{a\cdot a_n\}\in$F, συνεπώς το F είναι κλειστό ως προς το βαθμωτό πολλαπλασιασμό. Άρα το σύνολο F, εφοδιασμένο με τις πράξεις «+», και «·», πληροί τις ιδιότητες του δ.χ. Επομένως είναι **R**-χώρος.

Άσκηση 0.3-4

Να εξεταστεί αν το υποσύνολο S={A∈$M_2(\Re)$ | det$A$ =0 } είναι υπόχωρος του $M_2(\Re)$.

Απ.

Για να είναι το S διανυσματικός υπόχωρος του $M_2(\Re)$ θα πρέπει, δοθέντων δύο μητρώων A, B∈S, να είναι και $A + B$∈S, δηλ. det($A + B$)=0, ή, ισοδύναμα, το $A + B$ να είναι ιδιάζον. Αυτό όμως δεν αληθεύει, π.χ. τα παρακάτω μητρώα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

είναι ιδιάζοντα – άρα ανήκουν στο S –, αλλά το άθροισμα

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

είναι αντιστρέψιμο, δηλ. det(A)≠0, άρα A+B∉S. Συνεπώς το S δεν είναι διανυσματικός υπόχωρος του $M_2(\Re)$.

Άσκηση 0.3-5

Να εξετάσετε αν το σύνολο M={A ∈ $M_2(\Re)$ | A^2=A } είναι υπόχωρος του $M_2(\Re)$.

Απ.

Είναι προφανώς I_2∈ $M_2(\Re)$, ενώ $2I_2$ = [2, 0; 0 2] ≠ I_2^2 =I_2, επομένως το M δεν είναι υπόχωρος του $M_2(\Re)$.

Άσκηση 0.3-6

Να εξετάσετε αν το σύνολο S = { A ∈ $M_3(\Re)$ | $\sum_{i=1}^{3} a_{ii} = 0$ } είναι υπόχωρος του $M_3(\Re)$.

Απ.

Για να είναι το σύνολο A διανυσματικός υπόχωρος του $M_2(\Re)$ θα πρέπει κάθε γ.σ. δύο στοιχείων A, B∈S να ανήκει στο S. Αν A =(a_{ij}) και B=(b_{ij}) (i, j=1,2,3), τότε ∀c, d∈$\Re$ είναι

$$c(a_{11}+a_{22}+a_{33}) + d(b_{11}+b_{22}+b_{33}) = c\,0 + d\,0 = 0$$

δηλ. cA+dB∈S, συνεπώς το S είναι διανυσματικός υπόχωρος του $M_2(\Re)$.

Άσκηση 0.3-7

Εξετάστε αν το παρακάτω σύνολο είναι διανυσματικός υπόχωρος του $M_2(\Re)$:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a + b = 1 \right\}$$

Απ.

Αν A, B∈S και C=A+B, τότε C(1,1)+C(1,2)=a_{11}+a_{12}+b_{11}+b_{12}=2≠1, δηλ. A+B∉S, επομένως το S δεν είναι διανυσματικός υπόχωρος του $M_2(\Re)$. [1]

[1] Εναλλακτικά: Το S είναι ο χώρος λύσεων ενός μη ομογενούς συστήματος. Άρα δεν είναι δ.χ. Ισοδύναμα: τα στοιχεία του S προφανώς δεν είναι γ.σ. διανυσμάτων του $\mathbf{R}^2$, συνεπώς δεν αποτελούν δ.χ.

1 ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ, ΑΠΑΛΟΙΦΗ & ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΧΩΡΟΙ

1.1 Θεμελιώδεις Χώροι

Άσκηση 1-Θ1

Έστω τα μητρώα $D=diag([3,0,1,0]^T)\in R^{4\times 4}$,$Ones(4,3)$, A=[2 1; 4 5] και B=[2 1; 4 2]. Να δοδούν οι θεμελιώδεις υποχώροι του D.

Απ. Για κάθε μητρώο οι θεμελιώδεις υποχώροι R(X), C(X), N(X) και N(D) δίνονται συνοπτικά ως εξής:

$R(D)=C(D)=\{x_1(1,0,0,0)^T + x_3(0,0,1,0)^T \mid x\in R\}=<e_1, e_3>\subset R^4$
$N(D)=N(D^T)=\{x_1(0,1,0,0)^T + x_3(0,0,0,1)^T \mid x\in R\}=<e_2, e_4>\subset R^4$

$R(Ones(4,3))=\{x(1, 1, 1)^T \mid x\in R\}=<(1,1,1)^T>\subseteq R^4$: ευθεία στον R^3
$C(Ones(4,3))=\{x(1,1,1,1)^T \mid x\in R\}=<(1,1,1,1)^T>\subseteq R^4$: ευθεία στον R^4
$N(Ones(4,3))=\{x_1(-1,1,0,0)^T+x_2(-1,0,1,0)^T+x_2(-1,0,0,1)^T \mid x_1, x_2, x_2 \in R^2\}=$
$= <(-1,1,0,0)^T, (-1,0,1,0)^T, (-1,0,0,1)^T>\subset R^4$

$C(A) = \{ x_1(2, 4)^T+ x_2(1, 5)^T \mid x_1, x_2\in R^2\}= R^2$: ολόκληρος ο R^2
$R(A) = C(A^T) = \{ x_1(2, 1)^T+ x_2(4, 5)^T \mid x_1, x_2\in R^2\}= R^2$: ολόκληρος ο R^2
$N(A) = N(A^T) = \{0\}$: αρχή των αξόνων, υποχώρος του R^2

$C(B^T) = \{c(2, 1)^T \mid c\in R^2\}=<(2, 1)^T>$: ευθεία στον R^2, υποχώρος του R^2
$C(B) = \{c(1, 2)^T \mid c\in R^2\} = <(1, 2)^T >$: ευθεία στον R^2, υποχώρος του R^2
$N(B) = \{c(-1/2, 1)^T \mid c\in R^2\}=<(-1/2, 1)^T >$: ευθεία στον R^2, υποχώρος του R^2
$N(B^T) = \{c(-2, 1)^T \mid c\in R^2\}=<(-1/2, 1)^T>$: ευθεία στον R^2, υποχώρος του R^2

Άσκηση 1-Θ2

Αν $A\in \mathbf{R}^{m\times n}$, τότε δείξτε ότι ο μηδενοχώρος του A ισούται με τον μηδενοχώρο του A^TA.

Απ.

Έστω N(A)=μηδενοχώρος του A. Δείχνουμε πρώτα ότι $N(A)\subseteq N(A^TA)$ (). Αν $\boldsymbol{x}\in N(A)$, τότε $A\boldsymbol{x}=0$ ή ισοδύναμα $A^TA\boldsymbol{x}=A^T0=0$, δηλαδή $\boldsymbol{x}\in N(A^TA)$.
Στη συνέχεια δείχνουμε $N(A^TA)\subseteq N(A)$. Αν $\boldsymbol{x}\in N(A^TA)$, τότε $A^TA\boldsymbol{x}=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x}^TA^TA\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^T0=0 \Leftrightarrow$ $(A\boldsymbol{x})^TA\boldsymbol{x}=0 \Leftrightarrow \|Ax\|^2=0 \Leftrightarrow A\boldsymbol{x}=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x}\in N(A)$. Συνεπώς $N(A)=N(A^TA)$.

Άσκηση 1-Θ3

Αν $A\in R^{m\times n}$ και το σύστημα $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ έχει για κάθε $\boldsymbol{b}$ μια τουλάχιστον λύση, τότε ποιος είναι ο $N(A^T)$;

Απ.

Για να έχει λύση το $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ για κάθε $\boldsymbol{b}$ θα πρέπει $m=r$ (=rank(A)) και $m<=n$. Θεωρώντας τώρα το $A^T\boldsymbol{y}=0$, είναι $\dim(N(A^T)) = m-r=0$, οπότε $N(A^T)=\{\mathbf{0}\}$.

Άσκηση 1-Θ4

Εξετάστε αν υπάρχει πίνακας A του οποίου ο C(A) έχει βάση το $\{[2,1,1]^T\}$ και ο N(A) το $\{[1,1,0]^T\}$.

Απ.

Θα πρέπει $\dim(C(A)) + \dim(N(A)) = n =3$. Αλλά εδώ έχουμε dim(C($A$)) + dim(N(A)) 1+1<> 3, άρα δεν υπάρχει τέτοιο μητρώο.

Άσκηση 1-Θ5

Αν ισχύει $AB=0$ ($A\in R^{m\times n}$ και $B\in R^{n\times k}$), τότε δείξτε ότι $C(B)\subseteq N(A)$ και $R(A)\subseteq N(B^T)$.

Απ.

Έστω $\boldsymbol{x}\in C(B)$. Επομένως το $\boldsymbol{x}$ γράφεται: $\boldsymbol{x}=B\boldsymbol{y}$, για κάποιο $\boldsymbol{y}\in R^{k\times 1}$. Άρα $\boldsymbol{x}=B\boldsymbol{y} \Rightarrow A\boldsymbol{x}=AB\boldsymbol{y}=0\boldsymbol{y}=0 \Rightarrow \boldsymbol{x}\in N(A)$.

Εξ' άλλου, αν $\boldsymbol{x}\in R(A) \Rightarrow \boldsymbol{x}=A^T\boldsymbol{y}$ για κάποιο $\boldsymbol{y}\in R^{m\times 1} \Rightarrow B^T\boldsymbol{x}=B^TA^T\boldsymbol{y}=(AB)\boldsymbol{y}=0\boldsymbol{y}=0 \Rightarrow \boldsymbol{x}\in N(B^T)$.

1.2 Μετασχηματισμοί

Άσκηση 1-M1

Δίνεται το μητρώο

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

α) Να εφαρμοσθούν με τη βοήθεια στοιχειωδών μητρώων οι εξής στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών πάνω στο A:

(1) Αφαίρεση του πενταπλασίου της 1ης γραμμής από την 3η.

(2) Πρόσθεση του τριπλάσιου της 2ης στην 1η γραμμή.

(3) Πολ/σμός της 3ης γραμμής επί -2.

(4) Εναλλαγή 1ης και 2ης γραμμής

β) Να εφαρμοσθούν οι παραπάνω μετασχηματισμοί διαδοχικά πάνω στο A. Ο τελικός μετασχηματισμός να διατυπωθεί ως γινόμενο στοιχειωδών μητρώων.

Απ.

(α) Για την εφαρμογή των σ.μ.γ. (1)-(4) θεωρούμε τα εξής στοιχειώδη μητρώα:

$$E_{31}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ E_{12}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ M_3(-2)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix},\ P_{12}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Για κάθε περίπτωση παίρνουνε τους εξής μετασχηματισμούς γραμμών:

(1) $E_{31}A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \\ 4 & -11 & -3 \end{bmatrix}$,

(2) $E_{12}A=\begin{bmatrix} 3 & -4 & 13 \\ 1 & -2 & 4 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$,

(3) $M_2(-2)A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & -8 \\ 4 & -11 & -3 \end{bmatrix}$,

(4) $P_{21}A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

(β) Ο τελικός μετασχηματισμός μπορεί να διατυπωθεί ως το γινόμενο:

$$P_{21}M_2(-2)E_{12}E_{31}A = \begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-5&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&2&1\\1&-2&4\\4&-1&2\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&2&1\\1&-2&4\\4&-11&-3\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&4&13\\1&-2&4\\-8&22&6\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1&-2&4\\3&4&13\\-8&22&6\end{bmatrix}$$

□

Άσκηση 1-M2

Αν A είναι ένα οποιοδήποτε συμμετρικό μητρώο και αφαιρεθεί 3 φορές η 2η στήλη από την 3η στήλη και στο μητρώο που προκύψει αφαιρεθεί 3 φορές η 2η γραμμή από την 3η γραμμή, τότε το μητρώο που προκύπτει είναι και αυτό συμμετρικό.

Απ.

Οι δύο γραμμοπράξεις μπορούν να γραφτούν ως στοιχειώδεις μετασχηματισμοί πάνω στο A: $A \to EAE^T$, όπου $E=I-3\boldsymbol{e}_3\boldsymbol{e}_2^T$ ($\boldsymbol{e}_j$ είναι το διάνυσμα της τυπικής βάσης). Το EAE^T είναι φυσικά το μητρώο που προκύπτει. Όμως, αφού το A είναι συμμετρικό, ομοίως θα είναι και το EAE^T ως γινόμενο συμμετρικών μητρώων, δηλ. $(EAE^T)^T= EAE^T$.

Άσκηση 1-M3

Αν $A\in\mathbf{R}^{m\times n}$ και U το κλιμακωτό μητρώο που προκύπτει από το A με απαλοιφή, τότε $C(A^T)=C(U^T)$,όπου $C(A^T)$ και $C(U^T)$ είναι οι χώροι γραμμών των A και U αντίστοιχα.

Απ.

Το βασικό αποτέλεσμα της απαλοιφής είναι ότι για κάθε μητρώο A υπάρχει αντιστρέψιμο μητρώο E τέτοιο ώστε $U=EA$, όπου U ένα κλιμακωτό μητρώο. Από τη σχέση αυτή και την αντιστρεψιμότητα του A έπεται άμεσα: χώρος γραμμών του $U=C(U^T)=$χώρος γραμμών του $A=C(A^T)$.

Άσκηση 1-M4

α) (Σ/Λ) Να εξετάσετε αν είναι αληθής η εξής πρόταση: Αν $A\in\mathrm{R}^{m\times n}$ και U *το* κλιμακωτό μητρώο που προκύπτει από το A με απαλοιφή, τότε *C(A)=C(U). Τα* $C(A)$),όπου $C(A)$ και $C(U)$ είναι οι χώροι στηλών των A και U αντίστοιχα.

Απ.

Το βασικό αποτέλεσμα της απαλοιφής είναι ότι για κάθε μητρώο A υπάρχει αντιστρέψιμο μητρώο E τέτοιο ώστε $U=EA$, όπου U ένα κλιμακωτό μητρώο. Αυτή είναι και η <u>μόνη σχέση</u> που συνδέει τα A και U. Άμεσα προκύπτει: *χώρος γραμμών του* U = $C(U^T)$ = *χώρος γραμμών του* A = $C(A^T)$ *και όχι* $C(A)=C(U)$, αφού τότε θα έπρεπε: $U=AE$ που δεν ισχύει στην απαλοιφή με μετασχηματισμούς γραμμών. Άρα <u>ψευδής</u>.
Ισοδύναμη απάντηση: Στη γενική περίπτωση οι ανεξάρτητες στήλες του κλιμακωτού U που προκύπτει από το A περιέχουν 0 στις τελευταίες m-rank(A) γραμμές. Όμως οι αντίστοιχες (ανεξάρτητες) στήλες του A δεν περιέχουν κατ' ανάγκη μηδενικά στις αντίστοιχες θέσεις και άρα δεν μπορούν να παραχθούν από τις ανεξάρτητες στήλες του U, δηλ. $C(A)\neq C(U)$.

Άσκηση 1-M5 [*]

Δίνεται το μητρώο A=[2 -1 0 1 ; 1 2 1 -1 ; 2 9 4 -5]. Υπολογίστε με συστηματικό τρόπο αντιστρέψιμο μητρώο P, τέτοιο ώστε $R=PA$, όπου R η αναγμένη κλιμακωτή μορφή του A.

Απ.

Το P υπολογίζεται από το μετασχηματισμό $[\,A\,|\,\mathrm{I}_3] \to [\,R\,|\,P]$ ή $P[\,A\,|\,\mathrm{I}_3] = [\,R\,|\,P]$, δηλ. εκτελώντας πάνω στο I_3 *τους ίδιους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών* που πρέπει να εφαρμοσθούν στο A για να μετασχηματισθεί στην α.κ.μ. R. Έτσι έχουμε:

$$[\mathbf{A}\,|\,\mathrm{I}_3] = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 9 & 4 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[r3=r_3-2r_2]{r_1=r_1-2r_2} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 5 & -2 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & -3 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r1=-\frac{1}{5}r_1]{r_1=r_3+2r_1} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 1 & 2/5 & -3/5 & -1/5 & 2/5 & -3/5 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2/5 & -3/5 & -1/5 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r3=r_3-2r_2]{r_1=r_1-2r_2} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 1/5 & 1/5 & 2/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 1 & 2/5 & -3/5 & -1/5 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -4 & 1 \end{array}\right] = [R\,|\,P]$$

1.3 Παραγοντοποίηση LU

Άσκηση 1-Π1

Αν $A\in\mathbf{R}^{n\times n}$, τότε ισχύει $\det(A)=(-1)^k u_1u_2\ldots u_n$, όπου τα u_i είναι τα στοιχεία της διαγωνίου του άνω τριγωνικού μητρώου U που προέκυψε από την απαλοιφή. Αποδείξτε τη σχέση αυτή.

Απ.

Αν $A\in\mathrm{R}^{n\times n}$ ιδιάζον, τότε $\det(A)=0$ και η σχέση ισχύει, αφού ένα από τα u_i θα είναι υποχρεωτικά 0. Αν A αντιστρέψιμο, τότε υπάρχουν P μεταθετικό, U άνω τριγωνικό και L κάτω τριγωνικό με $\mathrm{diag}(A)=(1,\ldots,1)^{\mathrm{T}}$ ώστε $PA=LU$, απ' όπου προκύπτει:

$$\det(PA)=\det(LU) \Rightarrow$$
$$\det(P)\det(A)=\det(L)\det(U) \Rightarrow$$
$$(-1)^k\det(A)= 1\times u_1u_2\ldots u_n \Rightarrow$$
$$\det(A)=(-1)^k u_1u_2\ldots u_n.$$

Άσκηση 1-Π2

Δίνεται το γραμμικό σύστημα

$$\{\ 2x+3y+z = -5\ ,\ -y-z+ 2x = 5,\ z-y+x = 2\ \}$$

α) Να το ξαναγράψετε με μητρώα και διανύσματα, $A\in\mathrm{R}^{3\times 3}$ και $g,h\in\mathrm{R}^3$, ως $Ag=h$. Ποια θα είναι τα A, g, h;
β) Να βρείτε κάτω τριγωνικά μητρώα L_1, L_2 με μονάδες στη διαγώνιο, τέτοια ώστε το $L_2L_1A = U$ να είναι άνω τριγωνικό.
γ) Να βρείτε τα διανύσματα $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ τέτοια ώστε $L_2 = I - \boldsymbol{u}\,\boldsymbol{v}^T$.

Απαντήσεις

α) Είναι

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix},\ \text{με } A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{g}=\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{h}=\begin{bmatrix} -5 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

β) Ο μηδενισμός της πρώτης στήλης του A κατά την απαλοιφή ισοδυναμεί με:

$$\mathbf{L_1 A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & -5/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$, με πολλαπλασιαστές m_{21}= 1 και m_{31}=1/2,

Άρα:

$$\mathbf{L_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -m_{21} & 1 & 0 \\ -m_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Για το μηδενισμό της δεύτερης στήλης είναι m_{32}=5/8, έτσι ώστε:

$$L_2 L_1 A = U \text{ και } \mathbf{L_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -m_{32} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5/8 & 1 \end{bmatrix}$$

γ) Είναι

$$L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5/8 & 1 \end{bmatrix} = I - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5/8 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5/8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

□

Άσκηση 1-Π3

Δίνεται το τρισδιαγώνιο μητρώο $A \in \mathbf{R}^{4\times 4}$:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

α) Να εκφρασθεί το A ως $A=LU$, όπου L, U κάτω και άνω τριγωνικός αντίστοιχα, και να δοθούν τα L, U.
β) Με βάση το (α) να βρεθεί η ορίζουσα det(A). Μπορείτε να συμπεράνετε ποια θα είναι ή τιμή της βάσει του μεγέθους n του A;

Απαντήσεις

α) Εκτελούμε απαλοιφή υπολογίζοντας τους πολλαπλασιαστές $l_{i,i+1}$. Σε κάθε βήμα, λόγω της ειδικής μορφής του A, είναι $l_{i,i+1}=-1/u_{ii}$, όπου u_{ii} ο οδηγός.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[r2=r2+\frac{1}{2}r1]{l_{21}=-1/2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[r3=r3+\frac{2}{3}r2]{l_{32}=-2/3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r4=r4+\frac{3}{4}r3]{l_{43}=-3/4} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5/4 \end{bmatrix}$$

Λαμβάνουμε:

$$U = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5/4 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3/4 & 1 \end{bmatrix}$$

β) (i) Είναι det(A)=det(U)=2×(3/2)×(4/3)×(5/4)=5.

(ii) Παρατηρούμε ότι αν $A\in\mathbf{R}^{n\times n}$, θα είναι $\det(A) = 2\times(3/2)\times\ldots\times(n+1)/n = n+1$. □

1.4 Επίλυση Συστημάτων

Άσκηση 1-Σ1

Δίνονται

$$A=\begin{bmatrix}1&3&1\\2&a&1\\3&7&2\end{bmatrix}$$ και $\boldsymbol{c}=(a, b, 2)^T$, όπου a, b πραγματικές παράμετροι.

α) Για ποιες τιμές των a, b έχει το σύστημα $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}$ (i) άπειρες λύσεις, (ii) καμία και (iii) μια μοναδική λύση;
β) Στην περίπτωση (i) να βρεθεί ο χώρος γραμμών, ο χώρος στηλών και ο μηδενοχώρος του A.
γ) Στην ίδια περίπτωση, να υπολογισθεί η γενική (πλήρης) λύση του συστήματος.

Απαντήσεις

α) Εκτελώντας απαλοιφή στον επαυξημένο $[A\,|\,\boldsymbol{b}]$ έχουμε:

$$[A\,|\,b]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&3&1&a\\2&a&1&b\\3&7&2&2\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&3&1&a\\0&a-6&-1&b-2a\\0&-2&-1&2-3a\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&3&1&a\\0&-2&-1&2-3a\\0&a-6&-1&b-2a\end{array}\right]\to$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc|c}1&3&1&a\\0&-2&-1&2-3a\\0&0&-1-\dfrac{a-6}{2}&b-2a-\dfrac{a-6}{-2}(2-3a)\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&3&1&a\\0&-2&-1&2-3a\\0&0&\dfrac{-a+4}{2}&b-2a+\dfrac{a-6}{2}(2-3a)\end{array}\right]=[U\,|\,d]$$

Είναι προφανώς $2\le\text{rank}(A)\le3$, συνεπώς:

(iii) Θα υπάρχει μια μοναδική λύση αν $\text{rank}(A)=3\Leftrightarrow\dfrac{-a+4}{2}\neq0\Leftrightarrow a\neq4$.

(i) Θα υπάρχουν άπειρες λύσεις όταν $\text{rank}(A\,|\,\boldsymbol{b})=\text{rank}(A)=2$, δηλαδή για $a=4$ και:

$$d_3=b-2a+\frac{a-6}{2}(2-3a)=0\Rightarrow d_3=b-2=0\Leftrightarrow b=2$$

(ii) Δεν θα υπάρχει καμία λύση για $a=4$ και $b\neq2$ (δηλ. όταν $\text{rank}(A)=2$ και $\text{rank}(A\,|\,\boldsymbol{b})=3$).

β) Είναι:

Χώρος γραμμών $R(A) = \langle A(1,:), A(2,:)\rangle = \langle U(1,1{:}3, U(2,1{:}3)\rangle$,
Χώρος στηλών $C(A)=\langle A(:,1), A(:,2)\rangle$

Ο μηδενοχώρος $N(A)$ περιλαμβάνει τις λύσεις του ομογενούς συστήματος $U\boldsymbol{x}=0$, όπου (για $a=4$):

$U=[1, 3, 1; 0, -2, -1; 0, 0, 0]$

Προφανώς $\dim(N(A))=3-\text{rank}(A)=1$. Μια βάση του $N(A)$ δίνεται από την ειδική λύση $\boldsymbol{s}$ του $U\boldsymbol{x}=0$ που προκύπτει θέτοντας $x_3=1$: $\{-2x_2-1=0,\ x_1+3x_2+1=0\}\Rightarrow\{x_2=-1/2,\ x_1=1/2\}$.

Επομένως $\boldsymbol{s}=(1/2, -1/2, 1)^T$ και $N(A)=\{\mu\boldsymbol{s}\ /\ \mu\in\mathbf{R}\}=\langle\boldsymbol{s}\rangle$

γ) Για την εύρεση της γενικής λύσης, βρίσκουμε τη μερική λύση $\boldsymbol{x}_\mu$ του $U\boldsymbol{x}=\boldsymbol{d}$, όπου είναι $\boldsymbol{d}=(4, 2\text{-}3\times 4, 0)^T = (4, -10, 0)^T$. Θέτουμε $x_3=0$ και λαμβάνουμε: $x_2=5$, $x_1=-11$, δηλ. είναι $\boldsymbol{x}_\mu=(-11, 5, 0)^T$. Άρα η γενική λύση $\boldsymbol{x}_\pi$ δίνεται:

$$\boldsymbol{x}_\pi= (-11, 5, 0)^T + \mu(1/2, -1/2, 1)^T, \ \mu\in\mathbf{R}$$

Άσκηση 1-Σ2

Δίνεται το γραμμικό σύστημα $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$, όπου

$A=[3\ \ 2\ \ 1\ \text{-}1;\ 5\ \ 10\ \text{-}5\ \text{-}3;\ 1\ \text{-}1\ 2\ 0]$ και $\boldsymbol{b}=[1, 1, \gamma]^T$.

α) Να υπολογίσετε το κλιμακωτό μητρώο U που αντιστοιχεί στο A, μετά την εφαρμογή απαλοιφής. Ποια είναι η τάξη r του A;

β) Βρείτε μια βάση για το μηδενοχώρο του A.

γ) Βρείτε για ποια τιμή του γ υπάρχει λύση. Στη συνέχεια υπολογίστε συστηματικά τη γενική λύση του συστήματος.

Απαντήσεις

α) Εφαρμόζοντας απαλοιφή στον επαυξημένο [A | $\boldsymbol{b}$] έχουμε (με r_i υποδηλώνεται η γραμμή i) :

$$\begin{bmatrix} A & | & b \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & 10 & -5 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & \gamma \end{array}\right] \xrightarrow[r_3=r3-(1/3)r_1]{r_2=r2-(5/3)r_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 20/3 & -20/3 & -4/3 & -2/3 \\ 0 & -5/3 & 5/3 & 1/3 & (3\gamma-1)/3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[r_3=(3)r_3]{r_2=(3/4)r_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & -1 & -1/2 \\ 0 & -5 & 5 & 1 & 3\gamma-1 \end{array}\right] \xrightarrow{r3=r_3+r_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3\gamma-3/2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} U & | & c \end{bmatrix}$$

Συνεπώς rank(A)=rank(U)=2.

β) Αν N(A) ο μηδενοχώρος του A, είναι dim(N(A))=n-rank(A)=4-2=2. Οι ελεύθερες μεταβλητές (στήλες) είναι οι x_3, x_4. Θέτοντας τώρα στο σύστημα $U\boldsymbol{x}=0$ $x_3=1$ και $x_4=0$, λαμβάνουμε με πίσω αντικατάσταση: $5x_2\text{-}5\text{-}0=0 \Rightarrow x_2=1$ και $3x_1+2+1\text{-}0=0 \Rightarrow x_1=-1$. Επομένως μια ειδική λύση είναι η $\boldsymbol{s}_1=(-1,1,1,0)^T$. Για $x_4=1$, $x_3=0$ παίρνουμε: $5x_2\text{-}0\text{-}1=0 \Rightarrow x_2=1/5$ και $3x_1+2\times 1/5+0\text{-}1=0 \Rightarrow x_1=1/5$. Η δεύτερη ειδική λύση είναι $\boldsymbol{s}_2=(1/5,1/5,0,1)^T$. Συνεπώς μια βάση του N(A) είναι το σύνολο $\{\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2\}$.

γ) Για να έχει λύση το $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$, αρκεί να έχει λύση το γραμμοϊσοδύναμό του $U\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}$, δηλαδή $\boldsymbol{c}\in C(U)$. Συνεπώς (από ερώτημα (α)) θα πρέπει $3\gamma\text{-}3/2=0$, δηλαδή $\boldsymbol{\gamma=1/2}$.
Υπολογίζουμε τώρα τη μερική λύση $\boldsymbol{x}_\mu$ του $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ θέτοντας $x_3=x_4=0$ στο $U\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}$: $5x_2=-1/2 \Rightarrow x_2=-1/10$ και $3\boldsymbol{x}_1\text{-}2/10=1 \Rightarrow x_1=2/5$. Άρα $\boldsymbol{x}_\mu=(2/5,-1/10,0,0)^T$. Η λύση $\boldsymbol{x}_\varepsilon$ του ομογενούς $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ (ειδική λύση) υπολογίσθηκε στο ερ. (β). Συνεπώς η γενική (πλήρης) λύση $\boldsymbol{x}_\pi$ δίδεται:

$$\boldsymbol{x}_\pi = \boldsymbol{x}_\mu + \boldsymbol{x}_\varepsilon = (2/5,-1/10,0,0)^T + c_1(-1,1,1,0)^T + c_2(1/5,1/5,0,1)^T, \text{ για } c_1, c_2\in R.$$

Άσκηση 1-Σ3

Δίνεται το μητρώο $A=[4\ \ 2\ \ 6\ 18;\ 3\ \text{-}2\ \ 8\ \ 3;\ 2\ \ 1\ \ 3\ \ 9]$

α) Βρείτε την αναγμένη κλιμακωτή μορφή R και την τάξη του A.

β) Ποιος είναι ο χώρος γραμμών και ποιος ο χώρος στηλών του A;

γ) Με τη βοήθεια του R διασπάστε κατάλληλα το A σε άθροισμα μητρώων τάξης 1: $\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{v}_1^T + \boldsymbol{u}_2\boldsymbol{v}_2^T + \ldots$.

δ) Ποιος είναι ο μηδενοχώρος του A; (βρείτε τη διάσταση και μια βάση του).

ε) Θεωρούμε τώρα το γραμμικό σύστημα $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ με $\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, b_3)^T$. Δέχεται το σύστημα πάντοτε λύση; Αν όχι, βρείτε συγκεκριμένη συνθήκη για την ύπαρξη λύσεων.

στ) Αν δοθεί $\boldsymbol{b}=(2, 5, 1)^T$, βρείτε την πλήρη λύση το συστήματος.

Απαντήσεις

α) Μετατρέπουμε συστηματικά το A σε αναγμένη κλιμακωτή μορφή:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 & 18 \\ 3 & -2 & 8 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 & 18 \\ 0 & -7/2 & 7/2 & -21/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 & 18 \\ 0 & -7/2 & 7/2 & -21/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to$$

$$(p_1 = 4, \quad m_{21} = 3/4, m_{31} = 1/2, \quad p_2 = -7/2)$$

$$\to \begin{bmatrix} 4 & 0 & 8 & 12 \\ 0 & -7/2 & 7/2 & -21/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -7/2 & 7/2 & -21/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$$

$$(m_{12} = -4/7)$$

Επομένως rank(A)= rank(R)=2.

β) Είναι:

- Χώρος στηλών= C(A) = $span\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right)$ (όλοι οι γρ. συνδ. των 2 διανυσμάτων)

  Βάση του C(A) = $\left\{\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

- Χώρος γραμμών=R(A) = span$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$ = span$\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \\ 18 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$

  Βάση του R(A))= $\left\{\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \\ 18 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 8 \\ 3 \end{bmatrix}\right\}$

γ) Γνωρίζουμε ότι το A μπορεί να γραφτεί ως γινόμενο του μητρώου των *στηλών οδηγών του A* και του μητρώου των *μη μηδενικών γραμμών του R*:

$$A = C_A\, R_R = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Διασπώντας το γινόμενο με τον κανόνα «στήλες ×γραμμές»:

$$A = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

δ) Είναι dim(N(A))=n-rank(A)=4-2=2. Ο μηδενοχώρος N(A) δίνεται από τη λύση του συστήματος $R\boldsymbol{x}$=0. Δίνοντας εναλλάξ τιμές 1 και 0 στις ελεύθερες μεταβλητές x_3 και x_4 παίρνουμε:

$$\boldsymbol{s}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{s}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

που αποτελούν μια βάση του N(A), δηλ. τις ειδικές λύσεις του $R\boldsymbol{x}$=0. Αυτό γράφεται και null(A)=[$\boldsymbol{s}_1$ $\boldsymbol{s}_2$].

ε) Το σύστημα $A\mathbf{x}=\boldsymbol{b}$ είναι ισοδύναμο με το $\boldsymbol{Rx}=\boldsymbol{d}$, όπου $\boldsymbol{d}$ η αναγωγή του $\boldsymbol{b}$ με εφαρμογή των ίδιων μετασχηματισμών που έγιναν στο A.
Το $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ (και το ισοδύναμό του $R\mathbf{x}=\boldsymbol{d}$) δεν δέχεται πάντοτε λύση: είναι *rank(A)<m* και δεν δέχεται λύση αν επιλέξουμε $\boldsymbol{b}\in\mathbf{R}^3$-C($A$). Στο $R\boldsymbol{x}=\boldsymbol{d}$ θα πρέπει οι τελευταίες m-rank(A)=1 συνιστώσες του $\boldsymbol{d}$ να είναι *μηδενικές*. Δηλ. η συνθήκη είναι η τρίτη συνιστώσα του $\boldsymbol{d}$: $d_3=0$. [* *βλ. και θεωρητικό σχόλιο στο τέλος*].

Για τις ανάγκες του ερ. (στ) εκτελούμε από τώρα απαλοιφή για ολόκληρο το $\boldsymbol{b}$: [2]

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_1 \\ b_3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 - 3/4b_1 \\ b_3 - 1/2b_1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} b_1 + 2/7(b_2 - \frac{3}{4}b_1) \\ b_2 - \frac{3}{4}b_1 \\ b_3 - \frac{1}{2}2b_1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1/4(b_1 + \frac{4}{7}(b_2 - \frac{3}{4}b_1)) \\ -\frac{2}{7}(b_2 - \frac{3}{4}b_1) \\ b_3 - \frac{1}{2}b_1 \end{bmatrix} = \mathbf{d}$$

Επομένως η συνθήκη είναι b_3-1/2b_1=0, ή $b_1=2b_3$.

στ) Για $\boldsymbol{b}=(2,5,1)^T$ είναι $d_3=0$ (όπως αναμενόταν), d_2=-2/7*(2/7)=-1, d_1=1/4(2+2*1)=1, άρα $\boldsymbol{d}=(1,-1,0)^T$. Το σύστημα, με την αναγμένη κλιμακωτή μορφή γίνεται:

$$Rx = d \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Βρίσκουμε άμεσα τη μερική λύση (*λύση στο χώρο γραμμών*) θέτοντας $x_3=x_4=0$:

$$\mathbf{x}_\mu=(1,-1\ ,0)^T$$

Η πλήρης λύση είναι: $\boldsymbol{x}_\pi = \boldsymbol{x}_\mu + \boldsymbol{x}_\varepsilon = \boldsymbol{x}_\mu + a\,\boldsymbol{s}_1 + b\,\boldsymbol{s}_2$, $a, b\in$R, με $\boldsymbol{s}_1$ και $\boldsymbol{s}_2$ όπως βρέθηκαν στο ερ. (δ).

Παρατήρηση: Θεωρητικό Σχόλιο πάνω στην επιλυσιμότητα

Μπορούμε και τυπικά να διαπιστώσουμε τι συμβαίνει όταν rank(A)<m<n («κοντό και πλατύ μητρώο»). Δουλεύοντας με σύνθετα μητρώα, διασπάμε τα $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{x}$ και $\boldsymbol{d}$ σε συμβατά μητρώα με αναφορά το rank(A)=r, όπως φαίνεται από τους δείκτες των συμβόλων στην παρακάτω ταυτότητα:

$$\mathbf{Rx} = \mathbf{d} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{r\times r} & \mathbf{E}_{r\times(n-r)} \\ \mathbf{0}_{(m-r)\times r} & \mathbf{0}_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{r\times 1} \\ \mathbf{x}_{(n-r)\times 1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{r\times 1} \\ \mathbf{d}_{(m-r)\times 1} \end{bmatrix}$$

Αναπτύσσουμε στη συνέχεια το αριστερό μέλος:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\mathbf{r\times r}} & \mathbf{E}_{\mathbf{r\times(n-r)}} \\ \mathbf{0}_{\mathbf{(m-r)\times r}} & \mathbf{0}_{\mathbf{(m-r)\times(n-r)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{\mathbf{r\times 1}} \\ \mathbf{x}_{\mathbf{(n-r)\times 1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{\mathbf{r\times 1}} \\ \mathbf{d}_{\mathbf{(m-r)\times 1}} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{\mathbf{r\times r}} \times \mathbf{x}_{\mathbf{r\times 1}} + \mathbf{E}_{\mathbf{r\times(n-r)}} \times \mathbf{x}_{\mathbf{(n-r)\times 1}} \\ \mathbf{0}_{\mathbf{(m-r)\times r}} \times \mathbf{x}_{\mathbf{r\times 1}} + \mathbf{0}_{\mathbf{(m-r)\times(n-r)}} \times \mathbf{x}_{\mathbf{(n-r)\times 1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{\mathbf{r\times 1}} + \mathbf{E}_{\mathbf{r\times(n-r)}} \times \mathbf{x}_{\mathbf{(n-r)\times 1}} \\ \mathbf{0}_{\mathbf{(m-r)\times 1}} + \mathbf{0}_{\mathbf{(m-r)\times 1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{\mathbf{r\times 1}} \\ \mathbf{d}_{\mathbf{(m-r)\times 1}} \end{bmatrix} \quad (1)$$

απ' όπου εξισώνοντας τις δεύτερες γραμμές έπεται το ζητούμενο:

$$\mathbf{d}_{(m-r)\times 1} = \mathbf{0} \quad (2)$$

2 [ ] **Σημ.** Θα μπορούσε να γίνει εδώ απαλοιφή μόνον για το **b₃**, ενώ για τις υπόλοιπες συνιστώσες του να γίνει στο ερ. (στ), με τις συγκεκριμένες τιμές που δόθηκαν.

Η συνθήκη (2) είναι ισοδύναμη με την

rank(A)=rank(A|**b**) (το ***b*** δεν επηρεάζει την τάξη του A) (3)

Ακολουθεί η απόδειξη. Το ***b*** προκύπτει από το ***d*** μέσω του αντίστροφου μετασχηματισμού $\boldsymbol{E}^{-1}$ (του ίδιου που μετασχηματίζει τον R σε A: $A=E^{-1}R$). Επομένως:

$$\mathbf{b}=\begin{bmatrix}\mathbf{b}_{r\times 1}\\ \mathbf{b}_{(m-r)\times 1}\end{bmatrix}=\mathbf{E}^{-1}\mathbf{d}=\mathbf{E_{m\times m}}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{d}_{r\times 1}\\ \mathbf{d}_{(m-r)\times 1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{C}_{r\times r} & \mathbf{F}_{m\times(m-r)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{d}_{r\times 1}\\ 0_{(m-r)\times 1}\end{bmatrix}=\mathbf{Cd}_{r\times 1}+\mathbf{F}_{m\times(m-r)}\mathbf{0}_{(m-r)\times 1}\Rightarrow$$

$$\mathbf{b}=\mathbf{Cd}_{r\times 1}+\mathbf{F}_{m\times(m-r)}\mathbf{0}_{(m-r)\times 1}=\mathbf{Cd}_{r\times 1} \tag{4}$$

Στην τοποθέτηση των μπλοκς (όλα είναι συμβατά), το C είναι το μητρώο που περιέχει τις ανξάρτητες στήλες του A, όπως δείχνεται. Η (4) επομένως δηλώνει ότι το ***b*** είναι γ.σ. των στηλών οδηγών του C, άρα και του A. Αυτό σημαίνει ακριβώς ότι *rank*(A)=*dim*(C(A))=*rank*(A|***b***).

Αν δεν ισχύει η συνθήκη (3) (ή ισοδύναμα η (2)), το σύστημα είναι αδύνατο, διαφορετικά δέχεται άπειρες λύσεις, ενώ ισχύει dim(N(A))=n-r.

Ανάλογη αιτιολόγηση μπορεί να δοθεί και για τις υπόλοιπες περιπτώσεις.

Άσκηση 1-Σ4

Δίνεται το γραμμικό σύστημα $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{d}$, όπου

$$A=\begin{pmatrix}2a & 3 & -2\\ 1 & -5b & 1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{d}=(a,\, c+1)^{\mathrm{T}}$$

και a b και c πραγματικές παράμετροι.

α) Για ποιες τιμές των a και b ελαχιστοποιείται η τάξη r του A και για ποιες τιμές μεγιστοποιείται?

β) Στην πρώτη περίπτωση δώστε το μηδενοχώρο N(A), το χώρο γραμμών και το χώρο στηλών του A.

γ) Στην ίδια περίπτωση, (i) δώστε συνθήκη για τη συμβατότητα του συστήματος και (ii) κατόπιν αυτού, υπολογίστε επακριβώς και με τυπικό τρόπο την πλήρη λύση του.

Απαντήσεις

α) Αφού $A\in\mathbf{R}^{2\times 3}$ θα είναι r≤2. Εξ' άλλου, αφού το A περιέχει μη μηδενικά στοιχεία, είναι rank(A)≠0, δηλ. θα ισχύει 1≤r≤2. Εφαρμόζοντας τώρα απαλοιφή στον επαυξημένο [A|***d***], λαμβάνουμε:

$$A=\left[\begin{array}{ccc|c}2a & 3 & -2 & a\\ 1 & -5b & 1 & c+1\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -5b & 1 & c+1\\ 2a & 3 & -2 & a\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -5b & 1 & c+1\\ 0 & 3+10ba & -2-2a & a-2a(c+1)\end{array}\right]=$$

$$=\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -5b & 1 & c+1\\ 0 & 3+10ba & -2(a+1) & -a(2c+1)\end{array}\right]$$

Η τάξη r ελαχιστοποιείται (r=1) όταν $3+10ba=0$ και $-2(a+1)=0$, δηλ. για $a=-1$ και $b=3/10$.

Η r μεγιστοποιείται (r=2) όταν $3+10ba\neq 0\Leftrightarrow ba\neq -3/10$ ή όταν $-2(a+1)\neq 0\Leftrightarrow a\neq -1, \forall b\in R$.

β) Προφανώς dim(N(A))=3-1=2. Για a=-1, b=3/10 έχουμε το ομογενές σύστημα

$$\begin{bmatrix}1 & -3/2 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=0$$

όπου x_2, x_3 είναι οι ελεύθερες μεταβλητές. Θέτοντας $x_2=1$, $x_3=0$ λαμβάνουμε $x_1=3/2$. Ομοίως, για $x_2=0$, $x_3=1$ είναι $x_1=-1$. Συνεπώς μια βάση του N(A) είναι η $\{\boldsymbol{s}_1=(3/2,1,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{s}_2=(-1,0,1)^{\mathrm{T}}\}$ (*ειδική λύση* $\boldsymbol{x}_\varepsilon$).

Για το χώρο γραμμών R(A) και το χώρο στηλών C(A), είναι dim(C(A))=dim(R(A))=r=1 (ευθείες), και R(A)=$\{\lambda(1, -3/2, 1)^{\mathrm{T}}/\ \lambda\in \mathrm{R}\}$ και C(A)= $\{\lambda(-2, 1)^{\mathrm{T}}/\ \lambda\in \mathrm{R}\}$.

γ) Στην περίπτωση της ελάχιστης τάξης r=1, το σύστημα $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{d}$ έχει λύση, δηλ. ισχύει rank(A)=rank(A|***d***)=1, όταν $-a(2c+1)=2c+1=0\Rightarrow c=-1/2$. Έτσι, το σύστημα διαμορφώνεται:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Η μερική λύση $\boldsymbol{x}_\mu$ προκύπτει για $x_2=0$, $x_3=0$. Παίρνουμε $x_1=1/2$, οπότε $\boldsymbol{x}_\mu=(1/2,0,0)^T$. Η πλήρης λύση $\boldsymbol{x}_\pi$ λαμβάνεται από την $\boldsymbol{x}_\mu$ και την ειδική λύση $\boldsymbol{x}_\varepsilon$:

$\boldsymbol{x}_\pi = (1/2,0,0)^T + c_1(3/2,1,0)^T + c_2(-1,0,1)^T$, για $c_1, c_2 \in$ R.

Άσκηση 1.6-Σ5

Δίνεται το μητρώο A = [1 2 2 1; 2 3 0 1 ; 1 2 1 c], όπου c πραγματική παράμετρος.

α) Βρείτε τη μορφή αναγμένων γραμμών R (συναρτήσει της c) και την τάξη r του A την οποία πρέπει να προσδιορίσετε. Στα επόμενα ερωτήματα να βασισθείτε απαραίτητα στη μορφή R.
β) Εκφράστε το R ως γινόμενο στοιχειωδών μητρώων επί το A, και δώστε τα μητρώα αυτά.
γ) Βρείτε (i) το χώρο στηλών του A (ii) μια βάση του και (iii) μια βάση του χώρου γραμμών.
δ) Αποφανθείτε για την επιλυσιμότητα του συστήματος $A\mathbf{x}=\boldsymbol{b}$ για τις διάφορες τιμές των c και $\boldsymbol{b}$.
ε) Βρείτε μια βάση του μηδενοχώρου του A
ζ) Δίδεται c=0 και $\boldsymbol{b}=(1, 2, -1)^T$. Βρείτε τώρα με συστηματικό τρόπο και με βάση τα παραπάνω τη γενική λύση του $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$.

Απαντήσεις

α) Εφαρμόζουμε σε δύο βήματα απαλοιφή των 2 πρώτων αγνώστων. Ο 1[ος] οδηγός $p_1=1$, οπότε εφαρμόζουμε 2[η] γρ.=2[η] γρ.–2*(1[η] γρ.), 3[η] γρ.=3[η] γρ. –1*(1[η] γρ.), άρα $p_2=-1$. Προχωρώντας στην απαλοιφή του 3[ου] αγνώστου διαπιστώνουμε 0 κάτω από τον οδηγό -1 οπότε το μητρώο έχει τεθεί σε κλιμακωτή μορφή με 3[ο] οδηγό $p_3=-1$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & c \end{bmatrix} \xrightarrow[\gamma 3=\gamma 3-\gamma 1]{\gamma 2=\gamma 2-2\gamma 1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & c-1 \end{bmatrix} = U$$

Επομένως είναι rank(A)=3, και το c δεν επηρεάζει την τάξη.

Για να φέρουμε το μητρώο σε αναγμένη κλιμακωτή μορφή R, απαλείφουμε συστηματικά τα μη μηδενικά στοιχεία στις στήλες των οδηγών και τέλος διαιρούμε τις γραμμές δια των συντελεστών των οδηγών (-1):

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & c-1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma 2=\gamma 2-4*\gamma 3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -4c+3 \\ 0 & 0 & -1 & c-1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma 1=\gamma 1+2*\gamma 2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -8c+7 \\ 0 & -1 & 0 & -4c+3 \\ 0 & 0 & -1 & c-1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\gamma 1=\gamma 2+2*\gamma 3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -6c+5 \\ 0 & -1 & 0 & -4c+3 \\ 0 & 0 & -1 & c-1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\gamma 2=-\gamma 2]{\gamma 3=-\gamma 3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -6c+5 \\ 0 & 1 & 0 & 4c-3 \\ 0 & 0 & 1 & -c+1 \end{bmatrix} = R$$

β) Είναι $R=EA$. Βάσει του παραπάνω τρόπου υπολογισμού [3] του R, το E [4] δίνεται από το γινόμενο στοιχειωδών μητρώων:

$E=D_2D_3E_{12}E_{13}E_{23}E_{31}E_{21}$

όπου E_{ij} μητρώο απαλοιφής (αφαίρεση πολ/σίου γραμμής j από γραμμή i) και D_i μητρώο διαίρεσης γραμμής i δια του οδηγού της, για να δημιουργηθούν μονάδες στους οδηγούς. Τα στοιχειώδη μητρώα είναι:

E_{21} = [1 0 0 ; -2 1 0 ; 0 0 1]

3 [] Υπάρχουν ασφαλώς διαφορετικοί τρόποι με τους οποίους μπορούν να εφαρμοσθούν τα στοιχειώδη μητρώα, ο προκύπτουσα όμως κλιμακωτή μορφή R είναι μοναδική (βλ. θεωρητική απόδειξη στις διαλέξεις).

4 [] Προσοχή, το Ε <u>δεν είναι</u> (πλέον) κάτω τριγωνικό! Υπεύθυνες γι' αυτό είναι οι απαλοιφές των μη μηδενικών στοιχείων πάνω από τους οδηγούς!

$E_{31} = [1\ 0\ 0\ ;\ 0\ 1\ 0\ ;\ -1\ 0\ 1]$
$E_{23} = [1\ 0\ 0\ ;\ 0\ 1\ -4\ ;\ 0\ 0\ 1]$
$E_{13} = [1\ 2\ 0\ ;\ 0\ 1\ 0\ ;\ 0\ 0\ 1]$
$E_{12} = [1\ 0\ 2\ ;\ 0\ 1\ 0\ ;\ 0\ 0\ 1]$
$D_3 = [1\ 0\ 0\ ;\ 0\ 1\ 0\ ;\ 0\ 0\ -1]$
$D_2 = [1\ 0\ 0\ ;\ 0\ -1\ 0\ ;\ 0\ 0\ 1]$

γ) Βάσεις χώρων στηλών C(A) και γραμμών R(A). (α) Προφανώς εδώ έχουμε $C(A) = R^3 = R(A)$. (β) Μια βάση του $C(A)$ αποτελούν οι 3 πρώτες στήλες του A (στήλες οδηγών). Ομοίως βάση αποτελούν και οι 3 στήλες οδηγών του R, αλλά αυτό <u>δεν</u> συμβαίνει γενικά! (γ) Οι τρεις γραμμές του A (που ας σημειωθεί συμπίπτουν με τις 3 πρώτες γραμμές του E^{-1}) αποτελούν μια βάση του $R(A)$. Ομοίως και οι 3 γραμμές οδηγών του R. <u>Αυτό βεβαίως ισχύει πάντα</u>!

δ) Επιλυσιμότητα. Αφού $r=3=m<n=4$ για κάθε c, το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, για κάθε $\boldsymbol{c}$ και $\boldsymbol{b}$. Εναλλακτική διατύπωση: ο χώρος στηλών του $A\mathbf{x}=\boldsymbol{b}$ είναι ολόκληρο το R^3 ανεξαρτήτως του c. Συνεπώς υπάρχει πάντα λύση και επειδή $m=3<n=4$, υπάρχουν άπειρες λύσεις, με ένα «βαθμό ελευθερίας»: $\dim(N(A))=1=n-r=4-3$. [5]

ε) Βάση μηδενοχώρου (εύρεση ειδικών λύσεων) Είναι $\dim(N(A))=4-3=1$. Άρα το μοναδικό διάνυσμα $\boldsymbol{s}$ της βάσης (ειδική λύση) βρίσκεται θέτοντας $x_4=1$ στο $R\mathbf{x}=\mathbf{0}$ και υπολογίζοντας άμεσα τα υπόλοιπα x_i. [6]

$$\boldsymbol{s}=[-R(:,4)^T;\ 1] = (6c-5,\ 3-4c,\ c-1,\ 1)^T$$

ζ) Επίλυση Για την επίλυση του $A\mathbf{x}=\boldsymbol{b}$ για δοθέν c, υπολογίζουμε στο προκύπτον σύστημα $R\mathbf{x}=\boldsymbol{d}$ το διάνυσμα $\boldsymbol{d}=E\boldsymbol{b}$, εκτελώντας τους ίδιους μετασχηματισμούς με αυτούς με τους οποίους πήραμε το R (μπορούσε το βήμα αυτό να είχε γίνει στην αρχή, στο ερ. (α)). Έτσι, για c=0 παίρνουμε:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

και

$$\boldsymbol{b} = (1, 2, -1)^T \rightarrow (1, 0, -2) \rightarrow (5, 8, -2) \rightarrow (16, 8, -2) \rightarrow \boldsymbol{d}=(13, -8, 2)^T$$

Βρίσκουμε τώρα τη μερική λύση του $R\mathbf{x}=\boldsymbol{d}$, θέτοντας $x_4=0$ [7]:

$\boldsymbol{x}_\mu = [\boldsymbol{d}\,;\,0]^T$ (λόγω της ειδικής μορφής του R) $= (13, -8, 2, 0)^T$

Στο ερ. (ε) βρήκαμε την ειδική λύση (βάση) του μηδενοχώρου:

$$\boldsymbol{x}_\varepsilon = \lambda(-5, 3, -1, 1)^T,\ \lambda\in R$$

Συνεπώς η πλήρης λύση δίνεται:

$$\boxed{\boldsymbol{x}_\pi = \boldsymbol{x}_\mu + \boldsymbol{x}_\varepsilon = (13, -8, 2, 0)^T + \lambda(-5, 3, -1, 1)^T,\ \lambda\in\mathbf{R}}$$

---

5 [] Η ύπαρξη και το πλήθος λύσεων ενός γραμμικού συστήματος προϋποθέτει να είναι γνωστή η τάξη του A. Αν η ύπαρξη λύσης εξαρτάται από την τιμή του b (περίπτωση rank(A)<m, δηλαδή όταν υπάρχουν m-r μηδενικές γραμμές), τότε από το Ux=d ή το Rx=d καταλήγουμε εύκολα στο συμπέρασμα ότι για να υπάρχει λύση, το ***b*** πρέπει να ικανοποιεί m-r συνθήκες.

6 [] **Σημείωση:** Η εύρεση της ειδικής λύσης απλουστεύεται όταν χρησιμοποιείται η αναγμένη κλιμακωτή μορφή (μητρώο) R (μονάδες στη «διαγώνιο» και 0 στις στήλες των οδηγών): οι r **θέσεις οδηγών** στο διάνυσμα μιας ειδικής λύσης που αντιστοιχεί στην ελεύθερη μεταβλητή (στήλη) k (θέτοντας $x_k=1$), συμπληρώνονται από τα αντίθετα των αντίστοιχων στοιχείων της ελεύθερης στήλης αυτής (της 4ης στήλης στην περίπτωσή μας). Πράγματι, αν στο Rx=0 θεωρήσουμε την ελεύθερη στήλη x_k και θέσουμε $x_k=1$ και $x_i=0$ για τις υπόλοιπες n-r-1 ελεύθερες μεταβλητές, παίρνουμε:

i-γραμμή του R * **x** = R[i,:] * **x** = $1{*}x_i+R(i,k) = 0$, ή $x_i=-R(i,k)$ (k=4 στην άσκηση)

7 [] **Σημείωση:** Λόγω της α.κ.μ. του R δεν χρειάστηκε κανένας υπολογισμός κατά την εμπρός αντικατάσταση! Απλούστατα, οι τιμές για τους αγνώστους (μεταβλητές οδηγών) x_1, x_2, x_3 δίνονται απ' ευθείας από τα τις αντίστοιχες συνιστώσες του d.

Άσκηση 1-Σ6

Δίνεται το παρακάτω «αραιό» μητρώο A.

$$A=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1\\0&2&0&-2&0\\0&0&0&3&-2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&1&-1\end{bmatrix}$$

α) Βρείτε το γραμμοϊσοδύναμό του α.κ. μητρώο R και την τάξη του A.
β) Υπολογίστε τους τέσσαρες θεμελιώδεις χώρους.
γ) Αν δοθεί $\boldsymbol{b}$ = $[-1, 2, 5, 0, 2]^{\mathrm{T}}$, να λυθεί το σύστημα $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$.
δ) Αν δοθεί $\boldsymbol{c}$ = $[0, -10, 0, 20, -6]^{\mathrm{T}}$, να λυθεί το σύστημα $A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{c}$.
δ) Ποια συνθήκη πρέπει να ικανοποιούν οι συνιστώσες του $\boldsymbol{b}$ για να έχει λύση το $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$;

Απαντήσεις

α) Εκτελούμε τους παρακάτω μετασχηματισμούς γραμμών:

$$A\to\begin{bmatrix}0&\boxed{2}&0&-2&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&3&-2\\0&0&0&0&0\\0&0&0&1&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&\boxed{2}&0&-2&0\\0&0&0&\boxed{3}&-2\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&1&-1\end{bmatrix}\to$$

$$\to\begin{bmatrix}0&\boxed{2}&0&-2&0\\0&0&0&\boxed{3}&-2\\0&0&0&0&\boxed{1}\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&-1/3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&\boxed{2}&0&-2&0\\0&0&0&\boxed{3}&-2\\0&0&0&0&\boxed{1}\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}0&\boxed{1}&0&0&0\\0&0&0&\boxed{1}&0\\0&0&0&0&\boxed{1}\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}=R$$

Προφανώς είναι: rank(A)=3.

β) Οι στήλες οδηγών είναι οι 2, 4, 5. Είναι λοιπόν:

C(A)=< $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_4$, $\boldsymbol{\alpha}_5$> και R(A)=<R(1,1:5), R(2,1:5), R(3,1:5)>

Οι ελεύθερες στήλες είναι οι 1 και 3. Θα πρέπει dim(N(A)=n-rank(A)=5-3=2. Από την α.κ.μ. R παίρνουμε άμεσα μια βάση του N(A):

$\boldsymbol{s}_1=[1\ 0\ 0\ 0\ 0\ ]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{s}_2=[0\ 0\ 1\ 0\ 0\ ]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{e}_3$

Οπότε N(A)=<$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_3$>.
Ομοίως αναμένεται dim(N(A^{T}) =m-rank(A)=2. Εκτελούμε απαλοιφή στο A^{T}:

$$A^T=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&2&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&-2&3&0&1\\1&0&-2&0&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}\boxed{1}&0&-2&0&-1\\0&\boxed{2}&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&-2&3&0&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}\boxed{1}&0&-2&0&-1\\0&\boxed{2}&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&3&0&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}\boxed{1}&0&-2&0&-1\\0&\boxed{2}&0&0&0\\0&0&\boxed{3}&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\to$$

$$\to\begin{bmatrix}\boxed{1}&0&0&0&-1+2/3\\0&\boxed{2}&0&0&0\\0&0&\boxed{3}&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}\boxed{1}&0&0&0&-1/3\\0&\boxed{2}&0&0&0\\0&0&\boxed{3}&0&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}\boxed{1}&0&0&0&-1/3\\0&\boxed{1}&0&0&0\\0&0&\boxed{1}&0&1/3\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}=R'$$

Οι στήλες οδηγών είναι οι 1, 2, 3. Είναι λοιπόν:

$C(A^T)=R(A)=<\alpha_1, \alpha_2\ \alpha_3>$ και $R(A^T)=C(A)=<R'(1,1:5), R'(2,1:5), R'(3,1:5)>$.

[*Παρατήρηση: οι βάσεις που βρήκαμε συμπίπτουν για το R(A), ενώ είναι διαφορετικές για το C(A)*]

Οι ελεύθερες στήλες είναι οι 2 και 3. Παίρνουμε τώρα μια βάση του $N(A^T)$:

$\boldsymbol{y}_1=[0\ 0\ 0\ 1\ 0\ ]^T=\boldsymbol{e}_4$, $\boldsymbol{y}_2=[1/3\ 0\ -1/3\ 0\ 1\ ]^T=1/3[1\ 0\ -1\ 0\ 1\ ]^T$

Οπότε $N(A^T)=<\boldsymbol{e}_4, \boldsymbol{y}_2>$.

γ) Πρέπει να εκτελεσθεί απαλοιφή και στο $\boldsymbol{b}$. Εκτελούμε λοιπόν τους ίδιους μετασχηματισμούς και στο $\boldsymbol{b}$ και παίρνουμε:

$\boldsymbol{b} = [-1, 2, 5, 0, 2]^T \rightarrow \ldots \rightarrow \boldsymbol{d} = [2, 1, -1, 0, 0]^T$

Το σύστημα έχει λύση, αφού rank($[A\ \boldsymbol{d}]$)=rank(A). Από το $R\boldsymbol{x}=\boldsymbol{d}$ υπολογίζουμε άμεσα τη μερική λύση του $A\mathbf{x}=\boldsymbol{b}$:

$\boldsymbol{x}_\mu = [0, 2, 0, 1, -1]^T$

Άρα η πλήρης λύση είναι:

$\boldsymbol{x}_\pi = \boldsymbol{x}_\mu + \boldsymbol{x}_\varepsilon = [0, 2, 0, 1, -1]^T + c_1\boldsymbol{e}_1 + c_2\boldsymbol{e}_3$, $c_1, c_2 \in R$

δ) Εκτελώντας τώρα τους ίδιους μετασχηματισμούς και στο $\boldsymbol{c}$ παίρνουμε:

$\boldsymbol{c} = [-1, 2, 5, 0, 2]^T \rightarrow \ldots \rightarrow \boldsymbol{h} = [2/3, -5, 1/3, 0, 0]^T$

Από το $R\boldsymbol{x}=\boldsymbol{h}$ υπολογίζουμε άμεσα τη μερική λύση του $A\mathbf{x}=\boldsymbol{c}$:

$\boldsymbol{x}_\mu = [2/3, -5, 10/3, 0, 0]^T$

Οπότε η πλήρης λύση είναι:

$\boldsymbol{x}_\pi = \boldsymbol{x}_\mu + \boldsymbol{x}_\varepsilon = [2/3, -5, 1/3, 0, 0]^T + c_1\boldsymbol{e}_4 + c_2\boldsymbol{y}_2$, $c_1, c_2 \in R$

ε) Εφαρμόζουμε στο $\boldsymbol{b} = [b_1, b_2, b_3, b_4, b_5]^T$ τους ίδιους μετασχηματισμούς με τους οποίους πήραμε το R. Λαμβάνουμε:

$\boldsymbol{b} = [b_1, b_2, b_3, b_4, b_5]^T \rightarrow [b_2, b_1, b_3, b_4, b_5]^T \rightarrow [b_2, b_3, b_1, b_4, b_5]^T \rightarrow [b_2, b_3, b_1, b_4, b_5-(1/3)b_3]^T$
$\rightarrow [b_2, b_3, b_1, b_4, b_5-(1/3)b_3+(1/3)b_1]^{T\alpha}$
$\rightarrow \boldsymbol{d} = [(1/2)b_2, (1/3)b_3, b_1, b_4, -(1/3)b_3+(1/3)b_1]^T$

Για να υπάρχουν λύσεις πρέπει rank($[A\ \boldsymbol{b}]$)=rank(A) ή rank($[R\ \boldsymbol{d}]$)=rank(R) που σημαίνει ότι πρέπει:

$d_4=0$, $d_5=0$ ή: $b_4 = 0$, $b_5-(1/3)b_3+(1/3)b_1 = 0$
ή: $b_4 = 0$, $3b_5-b_3+b_1 = 0$

□

Άσκηση 1.6-Σ7

Για το μητρώο B:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

α) Να βρεθεί η *ανηγμένη κλιμακωτή μορφή* R του B μετά από εφαρμογή απαλοιφής.

β) Βάσει της παραπάνω μορφής R, να εκφρασθεί κατάλληλα το B ως άθροισμα εξωτερικών γινομένων $\boldsymbol{c}_i\boldsymbol{y}_i^T$, προσδιορίζοντας επακριβώς τα διανύσματα $\boldsymbol{c}_i$ και $\boldsymbol{y}_i$.

γ) Να βρεθεί ο μηδενοχώρος $N(B)$ (βάση και διάσταση).

δ) Θεωρούμε τώρα το σύστημα $B\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$. Για ποια $\boldsymbol{\beta}$ υπάρχει λύση; Να υπολογισθεί συστηματικά η πλήρης λύση για $\boldsymbol{\beta}=(1,0,1,0)^T$.

Απαντήσεις

α) Υπολογίζουμε το B:

$$B=[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \mathbf{0}]A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Εύκολα βρίσκουμε την αναγμένη κλιμακωτή μορφή R. Ταυτόχρονα εκτελούμε απαλοιφή και στο διάνυσμα $\boldsymbol{\beta}$ του β' μέλους.

$$[B\,|\,\beta]=\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 0 & 0 & \beta_1 \\ -2 & -2 & 4 & 0 & \beta_2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & \beta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 0 & 0 & \beta_1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & \beta_1+\beta_2 \\ 0 & 1/2 & 2 & 0 & \beta_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 0 & 0 & \beta_1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & \beta_1+\beta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_3-\beta_1-\beta_2/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_4 \end{array}\right] \xrightarrow[r1=r1/2]{r1=r1-3r2}$$

$$\xrightarrow[r1=r1/2]{r1=r1-3r2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -6 & 0 & -(2\beta_1+3\beta_2)/2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & \beta_1+\beta_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_3-\beta_1-\beta_2/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_4 \end{array}\right]=[R\,|\,d] \qquad (1)$$

Προφανώς είναι rank(B)=rank(R)=2.

β) Από τη γνωστή διάσπαση $B = CL$ (C με τις ανεξάρτητες στήλες του B και L με τις μη μηδενικές γραμμές του R) βρίσκουμε άμεσα:

$$B = (2,-2, 1, 0)^{\mathrm{T}}(1, 0, -6, 0) + (3,-2, 2, 0)^{\mathrm{T}}(0, 1, 4, 0)$$

γ) Είναι dim($N(B)$)=n-rank(B)=4-2=2. Βρίσκουμε τώρα μια βάση από τις ειδικές λύσεις $\boldsymbol{s}_1$, $\boldsymbol{s}_2$ του ομογενούς συστήματος $B\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ ή του ισοδύναμου $R\boldsymbol{x}=0$:

Για $x_3=1$, $x_4=0 \Rightarrow x_2=-4$, $x_1=6 \Rightarrow s_1=[6, -4, 1, 0]^{\mathrm{T}}$
Για $x_3=0$, $x_4=1 \Rightarrow x_2=0$, $x_1=0 \Rightarrow s_2=[0, 0, 0, 1]^{\mathrm{T}}$

Δηλαδή μια βάση του $N(B)$ είναι η **S**:

$$\mathrm{S} = \{ [6, -4, 1, 0]^{\mathrm{T}}, [0, 0, 0, 1]^{\mathrm{T}} \}$$

δ) Για να υπάρχει λύση πρέπει rank($B\,|\,\boldsymbol{\beta}$)=rank($R\,|\,\boldsymbol{d}$)=rank($\boldsymbol{d}$), ή ισοδύναμα, λόγω της (1), πρέπει:

$$\beta_3-\beta_1+\beta_2/2 = 0, \quad \beta_4 = 0$$

Για $\boldsymbol{\beta}=(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$ παίρνουμε $\boldsymbol{d}=(-1,1,0,0)^{\mathrm{T}}$, οπότε το προς επίλυση σύστημα είναι το $R\boldsymbol{x}=\boldsymbol{d}$. Η *μερική λύση του* λαμβάνεται για $x_3=x_4=0$: $\boldsymbol{x}_\mu=(-1,1,0,0)^{\mathrm{T}}$.

Οι άπειρες λύσεις του (πλήρης λύση), όπως και οι λύσεις δίνονται:

$$\boxed{x_\pi= (-1,1,0,0)^{\mathrm{T}} + c_1\,(6, -4, 1, 0)^{\mathrm{T}}+ c_2\,(0, 0, 0, 1)^{\mathrm{T}}, \ \forall\, c_1,c_2\in\mathbf{R}}$$

1.5 Εφαρμογές στην Τάξη Μητρώου

Άσκηση 1-Τ1

Αν $A\in\mathbf{R}^{m\times n}$ και το σύστημα $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ έχει για κάθε $\boldsymbol{b}$ μια τουλάχιστον λύση, τότε ποιος είναι ο N(A^{T}) ;

Απ.

Για να έχει λύση το $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ για κάθε $\boldsymbol{b}$ θα πρέπει $m=r$ (=rank(A)) και $m<=n$. Θεωρώντας τώρα την $A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}=0$, είναι dim(N($A^{\mathrm{T}}$)) = m-r = 0, οπότε N(A^{T})={$\mathbf{0}$}.

Άσκηση 1-Τ2

Έστω $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$. Αν η $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ είναι μοναδική λύση του $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, τότε ποια είναι η τάξη του A;

Απ.

Είναι $\dim(N(A))=n-\text{rank}(A) = n-0 = n$, αφού $\dim(\{\mathbf{0}\})=0$.

Άσκηση 1-Τ3

Αν $\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{y}_i \in \mathbf{R}^3$, $i=1,2$, να εξετάσετε αν το $C=\boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_2^{\mathrm{T}}$ είναι ιδιάζον.

Απ.

Το C γράφεται ως γινόμενο δύο μητρώων:

$$C= \boldsymbol{x}_1\boldsymbol{y}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{x}_2\boldsymbol{y}_2^{\mathrm{T}} =[\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2]\ [\boldsymbol{y}_1^{\mathrm{T}}; \boldsymbol{y}_2^{\mathrm{T}}]$$

Είναι $C\in\mathbf{R}^{3\times 3}$ και παρατηρούμε ότι για τους παράγοντες του C ισχύει $rank([\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2])\le 2$, $rank([\boldsymbol{y}_1^{\mathrm{T}}; \boldsymbol{y}_2^{\mathrm{T}}])\le 2$. Άρα για την τάξη του γινομένου C ισχύει:

$$rank(C)\le\min(rank([\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2]), rank([\boldsymbol{y}_1^{\mathrm{T}}; \boldsymbol{y}_2^{\mathrm{T}}])) = 2 < 3$$

Συνεπώς το C έχει τάξη μικρότερη του μεγέθους του (3), επομένως είναι ιδιάζον.

Άσκηση 1-Τ4

(Σ/Λ) Εξετάστε την ορθότητα της πρότασης: «*Αν τα διανύσματα $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2\in\boldsymbol{R}^3$ είναι ορθογώνια μεταξύ τους, τότε το μητρώο $C= \boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_2^{\mathrm{T}}$ είναι ιδιάζον*». Σε κάθε περίπτωση να βρεθεί η τάξη του C.

Απ.

Το μητρώο C είναι προφανώς μητρώο ορθογώνιας προβολής τάξης 2 και γράφεται:

$$C = \boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_2^{\mathrm{T}} = [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2]\ [\boldsymbol{u}_1^{\mathrm{T}}; \boldsymbol{u}_2^{\mathrm{T}}] = QQ^{\mathrm{T}}$$

όπου $Q\in\mathbf{R}^{3\times 2}$. Συνεπώς, αφού $C\in\mathbf{R}^{3\times 3}$, το C είναι ιδιάζον και η πρόταση είναι ορθή.

Εναλλακτική Απόδειξη: Όμοια με αυτήν της Άσκησης 1.6-Τ3: η ορθογωνιότητα των διανυσμάτων δεν επηρεάζει εδώ την αντιστρεψιμότητα του C. Συγκεκριμένα το $C\in\mathbf{R}^{3\times 3}$ γράφεται:

$$C = \boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_2^{\mathrm{T}} = [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2]\ [\boldsymbol{u}_1^{\mathrm{T}}; \boldsymbol{u}_2^{\mathrm{T}}]$$

Τα $\boldsymbol{u}_1$ και $\boldsymbol{u}_2$ ως ορθογώνια είναι και γ.α. Συνεπώς είναι $\text{rank}([\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2])=2$ και $\text{rank}([\boldsymbol{u}_1^{\mathrm{T}}; \boldsymbol{u}_2^{\mathrm{T}}])=2$. Επομένως, για το γινόμενο C είναι $\text{rank}(C)=2<3$, άρα το C είναι ιδιάζον.

Άσκηση 1-Τ5

Δείξτε ότι αν τα διανύσματα $\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{u}_3\in\mathbf{R}^4$ είναι ορθογώνια μεταξύ τους, τότε το μητρώο $\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_1^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_2^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{u}_3\boldsymbol{u}_3^{\mathrm{T}}$ είναι ιδιάζον.

Απ. Όμοια με την απάντηση της Άσκησης 1.6-Τ4.

Άσκηση 1-Τ6

Να δειχθεί ότι η τάξη του παρακάτω μητρώου A είναι 4, εκτός αν $a + b = 0$ ή $b = 3a$. Επίσης, να βρεθεί για τις περιπτώσεις αυτές η τάξη του A.

$$A=\begin{pmatrix} a & b & b & a \\ b & a & -a & -b \\ a+b & a+b & 2a & -2a \\ -2a & 2a & a+b & a+b \end{pmatrix}$$

Απ.

Πραγματοποιούμε απαλοιφή εφαρμόζοντας σ.μ.σ. και ελέγχοντας ταυτόχρονα τις τιμές των παραμέτρων:

$$A=\begin{pmatrix} a & b & b & a \\ b & a & -a & -b \\ a+b & a+b & 2a & -2a \\ -2a & 2a & a+b & a+b \end{pmatrix} \xrightarrow[c_4\to c_4+c_3]{c_1\to c_1+c_2} \begin{pmatrix} a+b & b & b & a+b \\ b+a & a & -a & -b-a \\ 2(a+b) & a+b & 2a & 0 \\ 0 & 2a & a+b & 2(a+b) \end{pmatrix} = A_1$$

Αν $a+b=0$, τότε

$$A_1 \to \begin{pmatrix} 0 & b & b & 0 \\ 0 & -b & b & 0 \\ 0 & 0 & -2b & 0 \\ 0 & -2b & 0 & 0 \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{c_1 \leftrightarrow c_2 \\ c_2 \to c_2 - c_1}]{b \neq 0:} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

οπότε είναι rank(A)=0 όταν $a=b=0$ και rank(A)=2 όταν $a=-b\neq 0$.

Αν $a+b\neq 0$, εφαρμόζοντας σ.μ.γ. έχουμε:

$$A_1 \to \begin{pmatrix} 1 & b & b & 1 \\ 1 & a & -a & -1 \\ 2 & a+b & 2a & 0 \\ 0 & 2a & a+b & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2 \to r_2 - r_1 \\ r_3 \to r_3 - 2r_1}} \begin{pmatrix} 1 & b & b & 1 \\ 0 & a-b & -a-b & -2 \\ 0 & a-b & 2a-2b & -2 \\ 0 & 2a & a+b & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{r_3 \to r_3 - r_2 \\ r_4 \to r_4 - r_2}} \begin{pmatrix} 1 & b & b & 1 \\ 0 & a-b & -a-b & -2 \\ 0 & 0 & 3a-b & 0 \\ 0 & 3a-b & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_2$$

Αν $3a-b\neq 0$, τότε

$$A_2 \to \begin{pmatrix} 1 & b & b & 1 \\ 0 & a-b & -a-b & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2 \leftrightarrow c_4} \begin{pmatrix} 1 & b & b & 1 \\ 0 & -2 & -a-b & a-b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Άρα rank(A)=4 όταν $a+b\neq 0$ και $3a-b\neq 0$.

Αν $3a-b=0$, τότε

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & b & b & 1 \\ 0 & a-b & -a-b & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{c_2 \leftrightarrow c_4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & b & 1 \\ 0 & -2 & -a-b & a-b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Άρα rank(A)=2 όταν $3a-b=0$.

Άσκηση 1-Τ7

Να βρεθεί για όλες τις τιμές του a η τάξη των εξής μητρώων

$$\text{(i)}\ A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 6+a \\ 2 & 3 & 4-a & 2 \\ 1 & 1-a & -2 & -5 \\ 1 & 6 & 12 & 19 \end{pmatrix} \qquad \text{(ii)}\ B=\begin{pmatrix} 1 & 1-2a & 1 & 1-2a \\ 1+2a & -1-a & -1+2a & 1-a \\ 2-a & 3a & 2a & 2-a \\ 5a & 1-a & 1+3a & 0 \end{pmatrix}$$

Απ.

(i) Έχουμε τις γραμμοϊσοδυναμίες:

$$A=\begin{bmatrix}1&3&5&6+a\\2&3&4-a&2\\1&1-a&-2&-5\\1&6&12&19\end{bmatrix}\xrightarrow[r_4\to r_4-r_1]{\substack{r_2\to r_2-2r_1\\ r_3\to r_3-r_1}}\begin{bmatrix}1&3&5&6+a\\0&-3&-6-a&-10-2a\\0&-2-a&-7&-11-a\\0&3&7&13-a\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{r_2\to r_2+r_4\\ r_3\to r_3+r_4}}$$

$$\begin{bmatrix}1&3&5&6+a\\0&0&1-a&3(1-a)\\0&1-a&0&2(1-a)\\0&3&7&13-a\end{bmatrix}\xrightarrow{\substack{r_2\to r_2+r_4\\ r_3\to r_3+r_4}}\begin{bmatrix}1&3&5&6+a\\0&3&7&13-a\\0&1-a&0&2(1-a)\\0&0&1-a&3(1-a)\end{bmatrix}=A_1$$

Αν a=1, προφανώς rank(A)=2. Αν $a\neq 1$, τότε:

$$A_1\to\begin{bmatrix}1&3&5&6+a\\0&3&7&13-a\\0&1&0&2\\0&0&1&3\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3\to 3r_3-r_2}\begin{bmatrix}1&3&5&6+a\\0&3&7&13-a\\0&0&-7&-7+a\\0&0&1&3\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3\to 3r_3-r_2}\begin{bmatrix}1&3&5&6+a\\0&3&7&13-a\\0&0&-7&-7+a\\0&0&0&\frac{14+a}{7}\end{bmatrix}$$

Επομένως είναι rank(A)=3 όταν a=-14 και rank(A)=4 όταν $a\neq$-14.

(ii) Λαμβάνουμε τους παρακάτω μετασχηματισμούς γραμμών και στηλών:

$$B=\begin{bmatrix}1&1-2a&1&1-2a\\1+2a&-1-a&-1+2a&1-a\\2-a&3a&2a&2-a\\5a&1-a&1+3a&0\end{bmatrix}\xrightarrow{c_1\to c_1-c_4}\begin{bmatrix}2a&1-2a&1&1-2a\\3a&-1-a&-1+2a&1-a\\0&3a&2a&2-a\\5a&1-a&1+3a&0\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4\to r_4-r_2}\begin{bmatrix}2a&1-2a&1&1-2a\\3a&-1-a&-1+2a&1-a\\0&3a&2a&2-a\\2a&2&2+a&a-1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_4\to r_4-r_1}\begin{vmatrix}2a&1-2a&1&1-2a\\3a&-1-a&-1+2a&1-a\\0&3a&2a&2-a\\0&1+2a&1+a&3a-2\end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{r_1\to 3r_1\\ r_2\to 2r_2}}\begin{bmatrix}6a&3-6a&3&3-6a\\6a&-2-2a&-2+4a&2-2a\\0&3a&2a&2-a\\0&1+2a&1+a&3a-2\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\to r_2-r_1}\begin{bmatrix}6a&3-6a&3&3-6a\\0&-5+4a&-5+4a&-1+4a\\0&3a&2a&2-a\\0&1+2a&1+a&3a-2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{bmatrix}6a&3-6a&3&3-6a\\0&3a&2a&2-a\\0&-5+4a&-5+4a&-1+4a\\0&1+2a&1+a&3a-2\end{bmatrix}\xrightarrow{c_2\to c_2-c_3}\begin{bmatrix}6a&-6a&3&3-6a\\0&a&2a&2-a\\0&0&-5+4a&-1+4a\\0&a&1+a&3a-2\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4\to r_4-r_2}\begin{bmatrix}6a&-6a&3&3-6a\\0&a&2a&2-a\\0&0&-5+4a&-1+4a\\0&0&1-a&4(a-1)\end{bmatrix}=A_1$$

Αν a=0 υπάρχουν δύο μηδενικές στήλες και είναι rank(A)=2:

$$A_1=\begin{bmatrix}0&0&3&3\\0&0&0&2\\0&0&-5&-1\\0&0&1&-4\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

Αν a=1, τότε η τελευταία γραμμή είναι 0, ενώ στην τρίτη ορίζεται ο οδηγός -1. Επομένως είναι rank(A)=3.

Αν $a\neq 0$ και $a\neq 1$:

$$A_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 6a & -6a & 3 & 3-6a \\ 0 & a & 2a & 2-a \\ 0 & 0 & 1-a & 4(a-1) \\ 0 & 0 & -5+4a & -1+4a \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 \to \frac{1}{1-a} r_3} \begin{bmatrix} 6a & -6a & 3 & 3-6a \\ 0 & a & 2a & 2-a \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -5+4a & -1+4a \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4 \to r_4 + 4(-5+4a)} \begin{bmatrix} 6a & -6a & 3 & 3-6a \\ 0 & a & 2a & 2-a \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 20a-21 \end{bmatrix}$$

Επειδή $20a-21\neq 0$ όταν $a\neq 0$ και $a\neq 1$, έπεται $\mathrm{rank}(A)=4$.

Άσκηση 1-Τ8

Να διασπασθεί το μητρώο

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

στη μορφή αθροίσματος μητρώων τάξης 1, $\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\beta}_1+\ldots+\boldsymbol{\alpha}_r\boldsymbol{\beta}_r$, όπου τα $\boldsymbol{\alpha}_i$ και $\boldsymbol{b}_i$ είναι ανεξάρτητα.

Απ.

Εφαρμόζοντας απαλοιφή στο A παίρνουμε:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & 4 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \ldots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -9/2 \\ 0 & 0 & 1 & 5/2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = R$$

Συνεπώς είναι:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & 4 & 1 \end{bmatrix} = CL = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -9/2 \\ 0 & 0 & 1 & 5/2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 9/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 5/2 \end{bmatrix}$$

1.6 Κανονικές Μορφές

Άσκηση 1-ΚΜ1

Καθορίστε ποιά από τα ακόλουθα μητρώα είναι ισοδύναμα :

(α) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ (β) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

(γ) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & -4 \end{bmatrix}$ (δ) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

(ε) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Απ.
Δύο ή περισσότερα μητρώα του αυτού μεγέθους και της ίδιας τάξης είναι ισοδύναμα, αφού παρέχουν τις ίδιες κανονικές μορφές. Αρκεί λοιπόν να βρούμε τις τάξεις των παραπάνω μητρώων και να τις συγκρίνουμε. Έχουμε διαδοχικά:

α)

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 - r_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 \to r_3 - r_2]{r_1 \to r_1 + r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Το μητρώο είναι τάξης 2.

β)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 \to r_3 - 2r_1]{r_2 \to r_2 + r_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Το μητρώο είναι τάξης 1.

γ)

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 \to r_3 + r_2]{r_1 \to r_1 + r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2 + r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 - 2r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Το μητρώο είναι τάξης 2.

(δ)

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 \to r_3 + r_1]{r_2 \to r_2 + 2r_1} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 - r_2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2 + r_3}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \to (1/2) r_2} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_1 \to -r_1]{r_1 \to r_1 - r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Το μητρώο είναι τάξης 3.

(ε)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2 + r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 \to r_3 - r_2]{r_1 \to r_1 + r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2 \to r_2 + 2r_3]{r_1 \to r_1 + 3r_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 \to -r_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Το μητρώο είναι τάξης 3.

Σύμφωνα με τις κανονικές μορφές που προέκυψαν, ισοδύναμα μητρώα είναι τα (α), (γ) και τα (δ), (ε).

Άσκηση 1-ΚΜ2

Δίνεται το μητρώο

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Ορίζουμε ένα μητρώο $B\in\mathbf{R}^{4\times4}$ τέτοιο ώστε $B=[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \mathbf{0}]A$, όπου $\boldsymbol{e}_i\in\mathbf{R}^4$. Να υπολογισθούν συστηματικά δύο αντιστρέψιμα μητρώα Q και P τέτοια ώστε: $QBP=N=[\ I_r, \mathbf{0}; \mathbf{0}\ \ \mathbf{0}]$, όπου $N\in\mathbf{R}^{4\times4}$ και $r=\mathrm{rank}(B)$.

Απ.

Είναι:

$$B=[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \mathbf{0}]A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η τάξη του B είναι $r=\mathrm{rank}(B)=2$. *Από τη θεωρία της απαλοιφής* γνωρίζουμε ότι το $N=[I_2, \mathbf{0}; \mathbf{0}\ \mathbf{0}]\in\mathbf{R}^{4\times4}$ είναι η **κανονική μορφή** του B ως προς την *τάξη* και προκύπτει από το *μετασχηματισμό γραμμών* στο B: $R=PB$ (όπου R η αναγμένη κλιμακωτή μορφή) και το *μετασχηματισμό στηλών στο* R: $N=RQ=PBQ$. Τα P, Q είναι τα ζητούμενα μητρώα, των οποίων η ύπαρξη και αντιστρεψιμότητα εξασφαλίζεται από την απαλοιφή. Το P υπολογίζεται από το *μετ/σμό γραμμών*:

$$\mathrm{P}[\mathrm{B}\,|\,I_4] = [R\,|\,P],$$

ενώ το Q από το <u>μετ/σμό στηλών</u>

$$[\mathrm{R}\,|\,I_4]\mathrm{Q} = [N\,|\,Q\,]$$

Παίρνουμε λοιπόν [8]:

$[\mathbf{B}\,|\,\boldsymbol{I_4}] \rightarrow [\boldsymbol{R}\,|\,\boldsymbol{P}]$:

$$[B\,|\,I_4]=\left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 2 & 0 & -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r1=r1-3r2} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & -12 & 0 & -2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -6 & 0 & -1 & -3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = [R\,|\,P]$$

$[\boldsymbol{P}\,|\,\boldsymbol{I_4}] \rightarrow [\boldsymbol{N}\,|\,\boldsymbol{Q}]$:

[8] [ ] **Σημείωση:** Τα *P* και *Q* θα μπορούσαν ισοδύναμα να υπολογισθούν από τα γινόμενα στοιχειωδών μητρώων απαλοιφής γραμμών και στηλών αντίστοιχα.

$$[R \mid \mathrm{I}_4] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[c3=c3-4c2]{c3=c3+6c1} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = [N \mid Q]$$

Τα P και Q, όπως υπολογίσθηκαν, ικανοποιούν την $N = PBQ$, όπως μπορούμε εύκολα να επαληθεύσουμε.

Άσκηση 1-ΚΜ3

Να βρεθούν αντιστρέψιμα μητρώα P και Q τέτοιοι ώστε το PAQ να είναι η κανονική μορφή για το μητρώο

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Απ.

Αναζητώντας κατάλληλα μητρώα $P_{n\times n}$ και $Q_{m\times m}$ τέτοια ώστε PAQ =N, όπου N η κανονική μορφή του $A_{m\times n}$, δημιουργούμε το επαυξημένο $(A|\mathrm{I}_n)$ και με γραμμοπράξεις το μετασχηματίζουμε στο $[R|P]$, όπου R είναι η α.κ.μ. του A. Στη συνέχεια δημιουργούμε το επαυξημένο $[R|\mathrm{I}_m]$ και με γραμμικούς μετασχηματισμούς στηλών το φέρνουμε στη μορφή $(N|Q)$ όπου $N= PAQ$. Εχουμε λοιπόν:

$$[A|I_3] \rightarrow [R|P] = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[r_2 \rightarrow r_2+r_3]{r_1 \rightarrow r_1+2r_3} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3 \rightarrow r_3-2r_1]{r_2 \rightarrow r_2-2r_1}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 1 & 4 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -7 & -1 & -2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -2 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3 \rightarrow r_3-\frac{2}{7}r_2]{r_1 \rightarrow r_1+\frac{4}{7}r_1} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 3/7 & -1/7 & 4/7 & 2/7 \\ 0 & 0 & -7 & -1 & -2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 0 & -5/7 & -3/7 & -2/7 & -1/7 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3 \rightarrow -r_3]{r_2 \rightarrow -\frac{1}{7} r_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 3/7 & -1/7 & 4/7 & 2/7 \\ 0 & 0 & 1 & 1/7 & 2/7 & -1/7 & 3/7 \\ 1 & 0 & 0 & 5/7 & 3/7 & 2/7 & 1/7 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5/7 & 3/7 & 2/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 & 3/7 & -1/7 & 4/7 & 2/7 \\ 0 & 0 & 1 & 1/7 & 2/7 & -1/7 & 3/7 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$P = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Για την εύρεση του Q έχουμε:

$$[R|\mathrm{I}_m] = \left[\begin{array}{cccc|} 1 & 0 & 0 & 5/7 \\ 0 & 1 & 0 & 3/7 \\ 0 & 0 & 1 & 1/7 \end{array}\right. \left.\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{c_4 \rightarrow c_4 - \frac{5}{7} c_3 \\ c_4 \rightarrow c_4 - \frac{3}{7} c_3 \\ c_4 \rightarrow c_4 - \frac{1}{7} c_3}} \left[\begin{array}{cccc|} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right. \left.\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & -5/7 \\ 0 & 1 & 0 & -3/7 \\ 0 & 0 & 1 & -1/7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = [\, \mathrm{I}_4 \mid Q \,]$$

Επομένως το μητρώο Q είναι:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -5/7 \\ 0 & 1 & 0 & -3/7 \\ 0 & 0 & 1 & -1/7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Εύκολα επαληθεύουμε ότι $PAQ = N = [\mathrm{I}_2, \mathbf{0}_{2\times 2} \,;\, \mathbf{0}_{2\times 2}, \mathbf{0}_{2\times 2}]$, όπου N η κανονική μορφή του A.

2 ΒΑΣΗ, ΔΙΑΣΤΑΣΗ ΚΑΙ ΕΙΔΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

2.1 Γραμμική Ανεξαρτησία και Τάξη

Άσκηση 2-ΑΤ1

Το { (3+√2, 1+√2), (7, 1+2√2) } είναι γ.ε. πάνω στο **R**, αλλά γ.α. πάνω στο **Q**=σώμα ρητών.

Απ.

(i) Το αντίστοιχο μητρώο

A=[3+√2, 1+√2; 7, 1+2√2] → [3+√2, 1+√2; 0, 1+2√2-(7/(3+√2) (1+2√2)]
= [3+√2, 1+√2; 0, 0] ⇒
⇒{(3+√2, 1+√2), (7, 1+2√2)} είναι γ.ε. πάνω στο **R**.

(ii) Αν p, q∈**Q**, υποθέτουμε:

p(3+√2, 1+√2)+q(7, 1+2√2)=0 ⇔
p(3+√2)+7q=0, p(1+√2)+q(1+2√2)=0 ⇔
p(3+√2)+7q = 0, p+q+p√2+2q√2=0 ⇔
3p+7q+p√2 =0, p+q+√2(p+2q)=0 ⇔
3p+7q=0, p=0, p+q=0, p+2q=0 ⇔
p = q = 0 ⇔ {(3+√2, 1+√2), (7, 1+2√2) } είναι γ.α. πάνω στο **Q**.

Άσκηση 2-ΑΤ2

Το { (1+i, i), (2, -1+i) } είναι γ.ε. πάνω στο **C**, αλλά γ.α. πάνω στο **R**.

Απ.

(i) Αν a, b∈**C** υποθέτουμε:

a(1-i, i)+b(2, -1+i)=0 ⇔
a(1-i)+2b=0, ai+b(-1+i)=0 ⇔
b=-a(1-i)/2, ai+(1/2)(-1+i)(-1+i)=0 ⇔
b=-a(1-i)/2, ai+(1-1-2i)/2) = 0 ⇔
b=-a(1-i)/2, i(a-1) = 0 ⇒ b=i-1/2, a=1 ⇔
{ (1+i, i), (2, -1+i) } είναι γ.ε. πάνω στο **C**.

(ii) Αν a, b∈**R** υποθέτουμε:

a(1-i, i)+b(2, -1+i)=0 ⇔
(a-ai+2b, -b+ai+bi)=0 ⇔
a+2b=0, a=0, a+b=0, b=0 ⇔
a=0, b=0 ⇔ { (1+i, i), (2, -1+i) } είναι γ.α. πάνω στο **R**.

Άσκηση 2-ΑΤ3

Δίνονται ο υποχώρος V που παράγεται από τα διανύσματα $\boldsymbol{u}_1=(1, 1, 1)^T$ και $\boldsymbol{u}_2=(2, -1, 1)^T$. Για ποια βαθμωτά a το διάνυσμα $\boldsymbol{w}=(1, a, 3)^T$, ανήκει στον V?

Απ.

Διαμορφώνουμε το $A=[\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{w}]$. Τότε είναι $C(A)=V$ και $\boldsymbol{w}\in V \Leftrightarrow \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{w}$ γ.ε. $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{w}$ εξαρτημένη στήλη του A, δηλ. ελεύθερη στήλη του γραμμοϊσοδύναμού του α.τ.μ. U. Μετασχηματίζουμε το A λοιπόν στο U και απαιτούμε $U(3, 3)=0$, απ' όπου εξάγουμε τη ζητούμενη συνθήκη.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & a-1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & a-1 \\ 0 & 0 & 2-(1/3)(a-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & a-1 \\ 0 & 0 & \dfrac{7-a}{3} \end{bmatrix}$$

Άρα $\boldsymbol{w}\in V \Leftrightarrow a=7$.

Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε με χρήση ορίζουσας: για να είναι τα $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{w}$ γ.ε., πρέπει $\det([\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{w}])=0$, δηλ.

$$\begin{aligned} \det([\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_2,\boldsymbol{w}]) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & a \\ 0 & 2 & 3-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & a-1 \\ 0 & 2 & 3-a \end{vmatrix} \\ &= -3(3-a)-2(a-1) \\ &= a-7=0 \end{aligned}$$

δηλ. πρέπει $a=7$.

Άσκηση 2-ΑΤ4

Αν $\{\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n\}$ γ.α. με $\boldsymbol{v}_i\in K^n$ (ή το $\{\boldsymbol{v}_1,\ldots,\boldsymbol{v}_n\}$ είναι βάση του $\mathbf{R}^n$) και $A\in\mathbf{R}^{n\times n}$ μη ιδιάζον, τότε το $\{A\boldsymbol{v}_1,\ldots,A\mathbf{v}_n\}$ είναι γ.α. (ή αποτελεί βάση του $\mathbf{R}^n$)

Απ. Το μητρώο $[\boldsymbol{v}_1\ldots\mathbf{v}_n]$ είναι αντ/μο, αφού έχει γ.α. στήλες. Ομοίως και το A. Άρα και το $[A\boldsymbol{v}_1\ldots A\mathbf{v}_n]=A[\boldsymbol{v}_1\ldots\mathbf{v}_n]$, ως γινόμενο αντ/μων. Επομένως τα $A\mathbf{v}_i$ είναι γ.α. Επειδή μάλιστα είναι στο πλήθος $n = \dim\mathbf{R}^n$, ορίζουν μια βάση του $\mathbf{R}^n$.

***Εναλλακτικές διατυπώσεις απαντήσεων*:**

Απ 2. Έστω ότι ένας γραμμικός συνδυασμός των $A\boldsymbol{v}_i$ είναι $\mathbf{0}$:

$$[A\boldsymbol{v}_1, A\boldsymbol{v}_2,\ldots, A\boldsymbol{v}_n]\boldsymbol{x}= x_1A\boldsymbol{v}_1 + x_2A\boldsymbol{v}_2 + \ldots + x_nA\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}$$

Θα δείξουμε ότι $\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$. Η παραπάνω σχέση γράφεται (ιδιότητα γινομένου μητρώων):

$$A[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots \boldsymbol{v}_n]\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \tag{1}$$

Επειδή το A είναι αντιστρέψιμο, η (1) θα ισχύει μόνον αν

$$[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots \boldsymbol{v}_n]\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \tag{2}$$

Επειδή όμως τα $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots \boldsymbol{v}_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, η (2) έχει ως μοναδική λύση την $\boldsymbol{x}=0$. Άρα τα $A\boldsymbol{v}_i$ είναι γ.α.

Απ 3. (*Με εις άτοπο απαγωγή*) Έστω ότι είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Συνεπώς $\exists\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$ ώστε $[A\mathbf{v}_1\ldots A\boldsymbol{v}_n]\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ ή ισοδύναμα $A[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots \boldsymbol{v}_n]\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Αλλά επειδή $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots \boldsymbol{v}_n$ είναι γ.α., ισχύει $[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots \boldsymbol{v}_n]\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$, για $\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$. Αυτό σημαίνει ότι $\exists\boldsymbol{y}\neq\mathbf{0}$ ώστε $A\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$, που όμως αντιβαίνει με την αντιστρεψιμότητα του A. Συνεπώς τα $A\boldsymbol{v}_1,\ldots,A\boldsymbol{v}_n$ είναι γ.α.

Απ 4. (*Με εις άτοπο απαγωγή*) Αν τα $A\boldsymbol{v}_i$ είναι γ.ε., τότε υπάρχει διάνυσμα $A\boldsymbol{v}_i$ που εκφράζεται ως γ.σ. των προηγουμένων του:

$$\begin{aligned} &A\boldsymbol{v}_i = c_1A\boldsymbol{v}_1 + c_2A\boldsymbol{v}_2 + \ldots + c_{i-1}A\boldsymbol{v}_{i-1} \Rightarrow \\ &A\boldsymbol{v}_i - c_1A\boldsymbol{v}_1 - c_2A\boldsymbol{v}_2 - \ldots - c_{i-1}A\boldsymbol{v}_{i-1} = \mathbf{0} \Rightarrow \\ &A(-c_1\boldsymbol{v}_1 - c_2\boldsymbol{v}_2 - \ldots - c_{i-1}\boldsymbol{v}_{i-1} + \boldsymbol{v}_i) = \mathbf{0} \Rightarrow \\ &-c_1\boldsymbol{v}_1 - c_2\boldsymbol{v}_2 - \ldots - c_{i-1}\boldsymbol{v}_{i-1} + \boldsymbol{v}_i = 0 \text{ (επειδή } A \text{ αντιστρέψιμο)} \Rightarrow \\ &\boldsymbol{v}_i = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \ldots + c_{i-1}\boldsymbol{v}_{i-1}, \end{aligned}$$

δηλαδή υπάρχει ένα v_i που είναι γ.σ. των προηγουμένων του, άτοπο γιατί τα v_i είναι γ.α. Άρα τα $Av_1,\ldots,Av_n$ είναι γ.α.

Άσκηση 2-ΑΤ5 [Γενίκευση της ΑΤ4]

Αν $\{v_1,\ldots,v_m\}$, $v_i\in\mathbf{R}^n$, είναι γ.α. και $A\in\mathbf{R}^{n\times n}$ μη ιδιάζον, τότε το σύνολο $\{Av_1,\ldots,Av_m\}$ είναι γ.α.

Απ.

Είναι $[Av_1\ldots Av_m]=A[v_1\ldots v_m]$. Έστω ότι ο γ.σ. $A[v_1\ldots v_m]x=0$. Τότε $[v_1\ldots v_m]x=0$ (αφού το A είναι αντ/μο) $\Rightarrow x=0$ (αφού τα $v_1,\ldots,v_m$ είναι γ.α.)

Εναλλακτική διατύπωση: Αν μορφώσουμε το μητρώο $C=[Av_1\ldots Av_n]$ τότε: $C=[Av_1\ldots Av_n]= A[v_1\ldots v_n]$. Το A δίδεται αντιστρέψιμο, ενώ το ίδιο συμβαίνει και για το $[v_1\ldots v_n]$, αφού τα $v_1,\ldots,v_n$ είναι ανεξάρτητα. Επομένως και το C θα είναι αντιστρέψιμο, ως γινόμενο αντιστρέψιμων μητρώων. Άρα οι στήλες του θα είναι ανεξάρτητες και επειδή είναι $n=\dim(\mathbf{R}^n)$ στο πλήθος, θα αποτελούν βάση του $\mathbf{R}^n$.

Σημείωση. Αναδιατύπωση της πρότασης:

Έστω $\{v_1,\ldots,v_n\}$ μια βάση του $\mathbf{R}^n$ και ένα αντιστρέψιμο μητρώο $A\in\mathrm{R}^{n\times n}$. Τότε και το $\{Av_1,\ldots,Av_n\}$ είναι βάση του $\mathbf{R}^n$.

Άσκηση 2-ΑΤ6 [Γενίκευση της ΑΤ5]

Έστω $A\in\mathbf{R}^{m\times n}$ με *$rank(A)=n$* και $u_1,u_2,\ldots,u_n\in\mathrm{R}^n$ γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα. Τότε ομοίως είναι και τα $Au_1, Au_2,\ldots, Au_n$.

Απ.

Σύντομα: $A[u_1\ldots u_n]x=A[u_1\ldots u_n]x=0 \Rightarrow [u_1\ldots u_n]x=0$ (επειδή $\mathrm{rank}(A)=n$) $\Rightarrow x=0$ (αφού $v_1,\ldots,v_k$ γ.α.)

Λεπτομερής διατύπωση: Αρκεί να δείξουμε ότι η παρακάτω πρόταση είναι αληθής:

$$[Au_1, Au_2, \ldots, Au_n]x = \mathbf{0} \Rightarrow x=\mathbf{0}$$

Είναι

$$[Au_1, Au_2, \ldots, Au_n]x = A[u_1, u_2, \ldots, u_n]x = 0$$

Επειδή $\mathrm{rank}(A)=n$, έπεται:

$$[u_1, u_2, \ldots, u_n]x = \mathbf{0}$$

Τα $u_1,u_2,\ldots,u_n$ είναι όμως γ.α., άρα $x=\mathbf{0}$.

Εναλλακτική διατύπωση: Επειδή $\mathrm{rank}(A)=n$, οι στήλες του A είναι γ.α., άρα πρέπει $n\le m$. Επίσης ισχύει

$$[Au_1, Au_2, \ldots, Au_n] = A[u_1, u_2, \ldots, u_n]$$

Άρα

$$\mathrm{rank}([Au_1, Au_2, \ldots, Au_n]) = \mathrm{rank}(A[u_1, u_2, \ldots, u_n]) \le \mathrm{rank}([u_1, u_2, \ldots, u_n]) = n \le m,$$

απ' όπου προκύπτει $\mathrm{rank}([Au_1, Au_2, \ldots, Au_n]) = n$, δηλ. τα Au_i είναι γ.α.

Άσκηση 2-ΑΤ7

Να δειχθούν οι προτάσεις:

α) Αν $A\in\mathbf{R}^{m\times n}$ με $\mathrm{rank}(A)=n$ και $B\in\mathbf{R}^{n\times k}$, τότε $\mathrm{rank}(AB)=\mathrm{rank}(B)$.

β) Αν $A\in\mathbf{R}^{m\times n}$ και $B\in\mathbf{R}^{n\times k}$ με $\mathrm{rank}(B)=n$, τότε $\mathrm{rank}(AB)=\mathrm{rank}(A)$.

Απ.

α) Θέτουμε $r=\mathrm{rank}(B)$. Έστω τώρα $i_1,i_2,\ldots,i_r$ οι r ανεξάρτητες στήλες του B. Τότε το γινόμενο AB γράφεται:

$$AB=A[b_1\ldots b_k]= [\ldots Ab_{i_1}\ldots Ab_{i_2}\ldots Ab_{i_r}]$$

Τα $Ab_{i_1},\ldots Ab_{i_2},\ldots Ab_{i_r}$ είναι γ.α, όπως διαπιστώσαμε σε προηγούμενη Άσκηση, ενώ οι υπόλοιπες στήλες Ab_j είναι συνδυασμοί τους. Συνεπώς $\mathrm{rank}(AB) = r = \mathrm{rank}(B)$.

Στην περίπτωση αυτή ισχύει προφανώς: Αν $\mathrm{rank}(B)=n$ τότε είναι: $C(AB)=C(A)$. Συνεπώς ισχύει το αποτέλεσμα:

Αν $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ με rank(A)=n και $B \in \mathbf{R}^{n\times k}$ με rank(B) = n, τότε τα μητρώα AB και B έχουν τον ίδιο χώρο στηλών: C(AB) = C(B)

β) Αν εφαρμόσουμε το αποτέλεσμα του ερωτήματος (α) στο μητρώο B^TA^T παίρνουμε:

$$\text{rank}(AB) = \text{rank}(AB)^T = \text{rank}(B^TA^T) = \text{rank}(A^T) = \text{rank}(A)$$

Στην περίπτωση αυτή, αν rank(A^T) = m = rank(A) τότε:

$$C(B^TA^T)=R(AB)=C(B^T)=R(B)$$

Συνεπώς ισχύει το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Αν $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ με rank(A) = m και $B \in \mathbf{R}^{n\times k}$ με rank(B)=n, τότε τα μητρώα AB και B έχουν τον ίδιο χώρο γραμμών: R(AB) = R(B)

Άσκηση 2-ΑΤ9

Ένα μητρώο $A \in \mathbf{R}^{m\times n}$ έχει ανεξάρτητες στήλες τότε και μόνον τότε όταν το A^TA είναι αντιστρέψιμο.

Απ.

(i)Ευθύ: Έστω ότι το A έχει ανεξάρτητες στήλες. Αρκεί να δείξουμε τη συνεπαγωγή: $A^TA\mathbf{x}=\mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x}=\mathbf{0}$. Αν $\mathbf{x}$ τέτοιο ώστε $A^TA\mathbf{x}=\mathbf{0}$, τότε ισχύει και $\mathbf{x}^TA^TA\mathbf{x}=(A\mathbf{x})^TA\mathbf{x}=\|A\mathbf{x}\|^2=0 \Rightarrow A\mathbf{x}=\mathbf{0}$. Όμως το A έχει ανεξάρτητες στήλες, δηλ. είναι rank(A)=n, επομένως $\mathbf{x}=\mathbf{0}$.
(ii) Έστω A^TA αντιστρέψιμο. Τότε $A\mathbf{x}=\mathbf{0} \Rightarrow A^TA\mathbf{x}=\mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x}=\mathbf{0}$, δηλ. rank($A$)=$n$, άρα οι στήλες του A είναι ανεξάρτητες.

2.2 Βάση και Διάσταση Δ.χ.

Άσκηση 2-Β1

α) Το σύνολο T_n των άνω (ή κάτω) τριγωνικών μητρώων $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ αποτελεί διανυσματικό υποχώρο.
β) Δίνεται το σύνολο Τ={$A \in K^{n\times n}$| trace(A)=0}, όπου K ένα σώμα. Είναι το Τ δ.χ.; Αν ναι, να ευρεθεί μια βάση και η διάστασή του.

Απαντήσεις

α) Το ουδέτερο στοιχείο $\mathbf{0} \in R^{n\times n}$ προφανώς είναι άνω (κάτω) τριγωνικό μητρώο, συνεπώς $\mathbf{0} \in T_n$, άρα το T_n είναι μη κενό. Αν τώρα $A,B \in T_n$ και $c \in R$, τότε $A+B$ και cA προφανώς είναι ομοίως τριγωνικοί, δηλαδή $A+B \in T_n$ και $cA \in T_n$. Επομένως το T_n συνιστά υποχώρο του $\mathbf{R}^{n\times n}$.

β) Προφανώς $0 \in T$, άρα $T \neq \varnothing$. Εξ' άλλου, αν C, D$\in K^{n\times n}$, $a \in K$, τότε: $trace(C+aD)= trace(C)+trace(aD)= trace(C)+a\times trace(D)=0+0=0$. Άρα $C+aD \in T$, δηλ. ο Τ είναι K-υποχώρος του $K^{n\times n}$ (και συνεπώς δ.χ.). Βρίσκουμε τώρα μια βάση του Τ. Ως γνωστόν μια βάση για τον δ.χ. $K^{n\times n}$ είναι το σύνολο B={$\mathbf{e}_i\,\mathbf{e}_j^T$| $\mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}_j \in K^{n\times n}$, i,j =1,2,…n} και dim($K^{n\times n}$)=n^2. Τώρα, τα στοιχεία του Τ ορίζονται από τη συνθήκη trace(A)= $a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn}=0$. Θέτοντας διαδοχικά 1 σε κάθε a_{ii}, για $i\neq 1$, και 0 στα υπόλοιπα, έχουμε a_{11}=-1. Συνεπώς για τα στοιχεία της διαγωνίου χρειαζόμαστε πλέον n-1 (αντί n) μητρώα-στοιχεία για τη βάση. Το αντίστοιχο σύνολο είναι:

$$D=\{\text{diag}(-1,1,0,\ldots,0), \ldots, \text{diag}(-1,0,\ldots0,1)\}$$

Αν B_1={$\mathbf{e}_i\,\mathbf{e}_j^T$| $\mathbf{e}_i$, $\mathbf{e}_j \in K^{n\times n}$, $i\neq j$} και $S=B_1 \cup D$, τότε εύκολα φαίνεται ότι το S γεννά το T. Επιπλέον, τα στοιχεία του S είναι γ.α. Επομένως αποτελούν βάση. Προφανώς είναι dim(T)=n^2-1.

Άσκηση 2-Β2

α) Ένας υποχώρος παράγεται από τα διανύσματα $\mathbf{v}_1=(2, 1)^T$, $\mathbf{v}_2=(6, -1)^T$, $\mathbf{v}_3=(2, 8)^T$, $\mathbf{v}_4=(1, 1)^T$. Βρείτε μια βάση του.
β) Δίνονται ο υποχώρος V που παράγεται από τα διανύσματα $\mathbf{u}_1=(1, 1, 1)^T$, $\mathbf{u}_2=(2, 1, 1)^T$, $\mathbf{u}_3=(6, 5, 5)^T$. Για ποια $\mathbf{w}=(a, b, c)^T$, ισχύει $\mathbf{w} \notin V$?

Απαντήσεις

α) Ο παραγόμενος χώρος είναι ο $\mathbf{R}^2$. Αρκεί να τοποθετηθούν οποιαδήποτε δύο από τα δοθέντα διανύσματα για να τον παράγουν. Δηλ. κάθε ζεύγος από τα δοθέντα διανύσματα είναι γ.α., π.χ.:

$$\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Μια βάση του $\mathbf{R}^2$ είναι η $\{(1, 0)^T, (0, 1)^T\}$, ή και η $\{(2, 1)^T, (6, 1)^T\}$ κλπ.

β) Διαμορφώνουμε το μητρώο $A=[\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{w}]$. Για να είναι $\boldsymbol{w}\notin V=<\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3>$, πρέπει να είναι ανεξάρτητη στήλη του A. Αρκεί γι' αυτό το $\boldsymbol{w}$ να αντιστοιχεί σε στήλη οδηγού. Πραγματοποιούμε λοιπόν απαλοιφή στο A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & a \\ 1 & 1 & 5 & b \\ 1 & 1 & 5 & c \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & a \\ 0 & -1 & -1 & b-a \\ 0 & -1 & -1 & c-a \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & a \\ 0 & -1 & -1 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & c-b \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι τα $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ είναι γ.ε. και τα $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$, γ.α. Συνεπώς $V=<\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2>$. Για να είναι η (4η) στήλη του $\boldsymbol{w}$ στήλη οδηγού πρέπει $U(3,4)=c-b\neq 0$, ή $c\neq b$. Άρα είναι $\boldsymbol{w}\notin V$ για $c\neq b$ και $\forall a\in\mathbf{R}$.

Σημείωση Θα μπορούσαμε βέβαια από την αρχή, να διαπιστώσουμε άμεσα ότι οι δύο τελευταίες γραμμές του μητρώου $[\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3]$ είναι γ.ε. και οι δύο πρώτες γ.α. Εκτελώντας στη συνέχεια απαλοιφή στο μητρώο $[\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{w}]$ θα φθάναμε στο ίδιο αποτέλεσμα. Αντί της απαλοιφής, μπορεί ισοδύναμα να γίνει χρήση ορίζουσας. Η απαίτηση είναι $\det([\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{w}])\neq 0$ που οδηγεί στο ίδιο αποτέλεσμα.

Άσκηση 2-B3

Να βρεθεί μια βάση του χώρου λύσεων της x-$2y$+z-$3t$=0. Εναλλακτική διατύπωση: Βρείτε μια βάση του «επιπέδου» x-$2y$+z-$3t$=0 ή του μηδενοχώρου N([1, -2, 1, -3]).

Απ.

Ζητείται μια βάση του μηδενοχώρου N([1, -2, 1, -3]). Προφανώς υπάρχουν 3 ελεύθερες μεταβλητές, x_2, x_3, x_4 και dim(N([1, -2, 1, -3]))=4-1=3. Βρίσκουμε τις ειδικές λύσεις S_1, S_2, S_3 οι οποίες αποτελούν τη ζητούμενη βάση:

$$S_1=(2,1,0,0)^T,\ S_2=(-1,0,1,0)^T,\ S_3=(3,0,0,1)^T$$

Άσκηση 2-B4

Να εξετάσετε και να δικαιολογήσετε αν τα επόμενα σύνολα είναι στην υποχώροι. Στις θετικές περιπτώσεις να δώσετε για κάθε έναν από αυτούς τη διάσταση και μια βάση του.

α) Το υποσύνολο X του $\mathbf{R}^n$ που περιέχει όλες τις λύσεις ενός γραμμικού συστήματος $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$, όπου $A\in\mathbf{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{b}\in\mathrm{R}^n$ και $\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0}$.
β) Το υποσύνολο Τ των άνω (ή κάτω) τριγωνικών μητρώων του διανυσματικού χώρου $\mathbf{R}^{n\times n}$.
γ) Το σύνολο των ιδιαζόντων μητρώων του $\mathbf{R}^{m\times n}$.
δ) Το σύνολο όλων των διανυσμάτων $[\beta_1, \beta_2, \beta_3]^T\in\mathbf{R}^3$ που πληρούν τη σχέση $3\beta_1 + 2\beta_2 + \beta_3 = 0$.

Απαντήσεις

α) Για να είναι το X υποχώρος του $\mathbf{R}^n$, θα πρέπει το διάνυσμα $\mathbf{0}$ να ανήκει στο X, που σημαίνει $A\,\mathbf{0} = \mathbf{0} = \boldsymbol{b}$, που αντίκειται στην $\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0}$. Άρα το X δεν είναι υποχώρος του $\mathbf{R}^n$.

β) Το μηδενικό μητρώο είναι προφανώς άνω (κάτω) τριγωνικό. Συνεπώς το T είναι μη κενό. Αν A, B τυχαία στοιχεία του T και $c\in\mathbf{R}$, τότε προφανώς τα $A+B$ και cA είναι άνω (κάτω) τριγωνικά. Άρα ο T είναι διανυσματικός υποχώρος του $\mathbf{R}^{n\times n}$. [9]
Θεωρούμε το υποσύνολο S της τυπικής βάσης του $\mathbf{R}^{n\times n}$ που περιέχει όλα τα άνω τριγωνικά μητρώα με 1 στην (i,j) θέση. Το πλήθος τους προφανώς είναι $(n^2-n)/2$.

$$S = \{S_{ij}\in\mathrm{R}^{n\times} \ /\ S_{ij} = \boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j^T,\ 1\leq i\leq j\leq n\}$$

---

9 [ ] Αν το T ληφθεί ως ένωση των άνω και κάτω τριγωνικών μητρώων του $\mathrm{R}^{n\times n}$, τότε δεν είναι υποχώρος, αφού το άθροισμα A+B γενικά δεν δίνει τριγωνικό μητρώο.

Ένα τυχαίο (άνω τριγωνικό) μητρώο $G\in T$ είναι φανερό ότι γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των S_{ij}:

$$G = g_{11} S_{11} + g_{12} S_{12} + \dots + g_{nn} S_{nn}$$

Επομένως τα S_{ij} γεννούν το T. Επιπλέον τα S_{ij} είναι γ.α. κι αυτό οφείλεται στη διακεκριμένη θέση που κατέχει το 1 σε κάθε S_{ij}. Άρα αποτελούν μια βάση του T και $\dim(T)=(n^2-n)/2$.
Ομοίως συμβαίνει και αν το X είναι κάτω τριγωνικό. Τότε μια βάση του T θα είναι η

$$S = \{S_{ij}\in \mathbf{R}^{n\times n} \mid S_{ij} = \boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j^T,\ 1 \le j \le i \le n\}$$

γ) Το άθροισμα δύο ιδιαζόντων μητρώων A και B δεν είναι γενικά ιδιάζον. Επαληθεύουμε με ένα αντιπαράδειγμα. Τα A=(4 2; 2 1), B=(1 1; 2 2) είναι προφανώς ιδιάζοντα, ενώ $A+B$=[5 3; 4 3] = μη ιδιάζον. Άρα το παραπάνω σύνολο δεν είναι υποχώρος του $\mathbf{R}^{n\times n}$.
Εναλλακτικά: Θεωρούμε τα ιδιάζοντα μητρώα A = [a b; c d] με a, b, $d \neq 0$ και B=[0, 0 ; $-c$ 0]. Για το A η απαλοιφή *Gauss* θα δώσει μια μηδενική γραμμή στο U: U = (a b ; 0 d-bc/a) = (a b; 0 0) και θα ισχύει ad-bc=0. Τότε το μητρώο $A+B$ = [a, b ; 0 d] είναι αντιστρέψιμο αφού οι οδηγοί a και d είναι μη μηδενικοί. Επομένως το εν λόγω υποσύνολο δεν είναι υποχώρος.

δ) Το εν λόγω σύνολο είναι ο μηδενοχώρος N(A) του μητρώου A = [3 2 1]. Άρα αποτελεί υποχώρο του $\mathbf{R}^3$. Επειδή υπάρχει ένας οδηγός (3), είναι dim(N(A))=3-1=2. Ο N(A) προκύπτει ως λύση του ομογενούς συστήματος [3 2 1]$(\beta_1, \beta_2, \beta_3)^T = \mathbf{0}$. Μια βάση του N($A$) μπορεί να ληφθεί από τις ειδικές λύσεις του ομογενούς. Για να τις υπολογίσουμε, θέτουμε τιμές για τις ελεύθερες μεταβλητές β_2 και β_3:
Για β_2=1, β_3=0 έχουμε β_1=-2/3, ενώ για β_3=1, β_2=0, παίρνουμε β_1=-1/3. Συνεπώς τα $\mathbf{s_1}=(-2/3, 1, 0)^T$, $\mathbf{s_2}=(-1/3, 0, 1)^T$ αποτελούν ειδικές λύσεις, όπως και μια βάση του N(A), ο οποίος δίνεται από το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών $\beta_2\mathbf{s_1}+\beta_3\mathbf{s_2}$, με $\beta_2, \beta_3\in\mathbf{R}$: N($A$)=< $\mathbf{s_1}$, $\mathbf{s_2}$>.

Άσκηση 2-Β6

Να επεκταθούν τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1=[1, 2, -1\ 2]^T$, $\boldsymbol{v}_2=[1, 2\ , 0, 3]^T$ σε μια βάση του $\mathbf{R}^4$.

Απ. Για να επεκτείνουμε τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1$ και $\boldsymbol{v}_2$ σε μια βάση του $\mathbf{R}^4$ προσαρτούμε σε αυτά την τυπική βάση του $\mathbf{R}^4$ και στο προκύπτον μητρώο εφαρμόζουμε απαλοιφή:

$$A=[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, I_4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \dots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2/3 & -2/3 \end{bmatrix} = R$$

Επομένως τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ είναι γ.α. και άρα συνιστούν βάση του $\mathbf{R}^4$. Τα $\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_4$ παράγονται από αυτά. Αν η απαλοιφή γινόταν με διαφορετική διάταξη των διανυσμάτων της τυπικής βάσης, τότε η βάση που θα παίρναμε θα ήταν διαφορετική. Π.χ. η διάταξη $\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_4$, $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, θα έδινε ως επεκταμένη βάση την $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4\}$.

♣ Για την εξακρίβωση της γ.α. στο Matlab προσφέρεται η υποστηριζόμενη συνάρτηση rref, που υπολογίζει την α.κ.μ. R ενός μητρώου. Από αυτήν προκύπτουν άμεσα τα γ.α. διανύσματα.

```
v1=[1, 2, -1 2]' ; v2=[1, 2 , 0, 3]' ;

R=rref([v1, v2, eye(4,4)])
   R =
   1.0000        0        0        0  -1.0000        0
        0   1.0000        0        0   0.6667   0.3333
        0        0   1.0000        0   0.3333  -0.3333
        0        0        0   1.0000   0.6667  -0.6667
```

Άσκηση 2-Β7

Θεωρούμε τα διανύσματα $\boldsymbol{u}_1 = (1,-1,0)^T$, $\boldsymbol{u}_2= (1,1,0)^T$, $\boldsymbol{u}_3 = (2,1,0)^T$, $\boldsymbol{u}= (5,-7,0)^T$.
(i) Να αποδειχθεί ότι $\boldsymbol{u}\in<\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3>$
(ii) Να εκφρασθεί το $\boldsymbol{u}$ ως γραμμικός συνδυασμός των $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$

Απ. (i) Για να είναι $\boldsymbol{u} \in<\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3>$ πρέπει να υπάρχουν πραγματικοί $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\in\mathbf{R}$ τέτοιοι ώστε $\boldsymbol{u} =\lambda_1\boldsymbol{u}_1+\lambda_2\boldsymbol{u}_2+\lambda_3\boldsymbol{u}_3$, δηλ. το παρακάτω γραμμικό σύστημα να είναι συμβατό:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Θεωρούμε λοιπόν το επαυξημένο μητρώο του γραμμικού συστήματος και εφαρμόζουμε απαλοιφή.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/2 & 6 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = [U \mid c]$$

Το α.κ.μ. που προέκυψε είναι το επαυξημένο μητρώο του συστήματος $U\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{c}$ που είναι ισοδύναμο με το αρχικό σύστημα. Είναι rank($[U\ \mathbf{c}]$)=2=rank(U), επομένως το $U\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{c}$ είναι συμβιβαστό, άρα ομοίως και το αρχικό σύστημα. Συνεπώς επαληθεύεται ότι $(5,-7,0)\in<(1,-1,0)^T, (1,1,0)^T, (2,1,0)^T>$.

(ii) Διαπιστώνουμε ότι τα $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ είναι γ.ε. και τα $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, γ.α., άρα είναι $<\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3>=<\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2>$ και ο υποχώρος που παράγεται έχει βάση το σύνολο $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$. Συνεπώς το $\boldsymbol{u}_3$ θα δίνεται από άπειρους γ.σ. των $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$. Βρίσκουμε τώρα έναν από αυτούς υπολογίζοντας μια από τις άπειρες λύσεις του συστήματος $U\mathbf{x}=\mathbf{c}$. Η ελεύθερη μεταβλητή είναι η x_3, επομένως η γενική λύση είναι:

$$\boldsymbol{x} = \left(6,\ -1,\ 0\right)^T + \lambda\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2},\ 1\right)^T$$

Για $\lambda=2$ παίρνουμε $\boldsymbol{x} = (5, -4, 2)^T$. Άρα

$$(5,-7,0) = 5\,(1,-1,0)^T + -4\,(1,1,0)^T + 2(2,1,0)^T \qquad \square$$

Άσκηση 2-Β8

(α) Να δειχθεί ότι το σύνολο {(1,0,3), (5,2,1), (0,1,6)} είναι μία **R**-βάση του $\mathbf{R}^3$.
(β) Αν t είναι ένας σταθερός πραγματικός αριθμός και $g_1(x)=1$, $g_2(x) = x + t$, $g_3(x) = (x + t)^2$, να δειχθεί ότι το σύνολο $\{g_1, g_2, g_3\}$ είναι μία **R**-βάση του $P_2(\mathbf{R})$.

Απ.

α) Ως γνωστόν η διάσταση του $\mathbf{R}^3$ είναι ίση με 3. Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι τα δοθέντα διανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Πράγματι, ισχύει ότι:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -14 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -14 \\ 0 & 0 & 13 \end{bmatrix}$$

Άρα το σύνολο {(1,0,3), (5,2,1), (0,1,6)} είναι γ.α., συνεπώς αποτελεί μία βάση του $\mathbf{R}^3$.[10]

β) Το σύνολο $P_2(\mathbf{R})$ περιέχει διανύσματα-τριώνυμα της μορφής:

$$g(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Προσδιορίζουμε τους συντελεστές a_i των τριωνύμων g_1, g_2 και g_3, οπότε αυτά γράφονται ως διανύσματα ως εξής:

$g_1 = (0, 0, 1)^T$
$g_2 = (0, 1, t)^T$
$g_3 = (1, 2t, t^2)^T$ ($g_3(x) = (x + t)^2 = x^2 + 2tx + t^2$)

Είναι $\dim(P_2(\mathbf{R}))=3$, συνεπώς αρκεί να δειχθεί ότι τα διανύσματα g_1, g_2, g_3 είναι γ.α. Το μητρώο των διανυσμάτων είναι

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & t \\ 1 & 2t & t^2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2t & t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[10] Ισοδύναμα θα μπορούσαμε να εξετάσουμε την ορίζουσα του μητρώου A των διανυσμάτων. Είναι $\det(A)=26\neq 0$ και άρα τα διανύσματα είναι γ.α.

Συνεπώς τα g_1, g_2, g_3 είναι γ.α. και άρα αποτελούν **R**-βάση του $P_2(\mathbf{R})$. [11]

Άσκηση 2-Β9

Να αποδειχτεί ότι το σύνολο { $(1, 1, 0, -1)^T$, $(4, -2, 1, 0)^T$ } είναι γραμμικά ανεξάρτητο πάνω στο **Q** και να βρεθεί μιά **Q**-βάση του $\mathbf{Q}^4$, η οποία να περιέχει αυτά τα δύο διανύσματα.

Απ.

Θέτουμε $\boldsymbol{u}_1 = (1, 1, 0, -1)^T$, $\boldsymbol{u}_2 = (4, -2, 1, 0)^T$. Λαμβάνουμε ένα μηδενικό γ.σ. των $\boldsymbol{u}_1$ και $\boldsymbol{u}_2$:

$$a(1, 1, 0, -1)^T + b(4, -2, 1, 0)^T = \mathbf{0} \Rightarrow$$
$$(a+4b, a-2b, b, -a) = \mathbf{0} \Rightarrow a = b = 0$$

Επομένως το δοθέν σύνολο είναι γραμμικά ανεξάρτητο πάνω στο **Q**.
Έστω τώρα το σύνολο S={$\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_4$}, όπου {$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{e}_4$} η τυπική βάση του $\mathbf{Q}^4$. Εκτελώντας απαλοιφή βρίσκουμε τα γ.α. διανύσματα:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/6 & 1/6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 & 1 \end{bmatrix} \to$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/6 & 1/6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

Συνεπώς το σύνολο S={$\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$} αποτελεί μιά **Q**-βάση του $\mathbf{Q}^4$, η οποία περιέχει τα διανύσματα $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$.

Άσκηση 2-Β10

Να εξετασθεί αν τα επόμενα σύνολα αποτελούν **R**-βάσεις του $P_n(\mathbf{R})$.

(i) $\{1, 1+t, 1+t+t^2, \dots, 1+t+\dots+t^n\}$,
(ii) $\{1+t, t+t^2, \dots, t^{n-1}+t^n\}$,
(iii) $\{1, 1-t, \dots, (1-t)^n\}$.

Απ.

(i) Τα στοιχεία του συνόλου $\{1, 1+t, 1+t+t^2, \dots, 1+t+\dots+t^n\}$, γράφονται:

$$p_1=(1, 0, \dots, 0)^T,\ p_2=(1, 1, 0, \dots, 0)^T,\ p_3=(1, 1, 1, 0, \dots, 0)^T, \dots, p_{n+1}=(1, 1, \dots, 1)^T$$

Το μητρώο A με στήλες τα παραπάνω διανύσματα:

$$A = [p_1, p_2, \dots, p_{n+1}]$$

είναι άνω τριγωνικό και προφανώς rank$(A)=n+1$. Άρα τα p_i είναι ανεξάρτητα. Επειδή $\dim(P_n(\mathbf{R}))=n+1$ και το σύνολο έχει $n+1$ στοιχεία, έπεται ότι αποτελεί **R**-βάση του χώρου $P_n(\mathbf{R})$.

(ii). Το πλήθος των στοιχείων του συνόλου $\{1+t, t+t^2, \dots t^{n-1}+t^n\}$ είναι n ενώ είναι $\dim(P_n(\mathbf{R}))=n+1$. Συνεπώς, το σύνολο είναι γραμμικά εξαρτημένο και δεν αποτελεί **R**-βάση του $P_n(\mathbf{R})$.

(iii). Για $k=1,2,\dots,n+1$ θέτουμε $p_k=(1-t)^{k-1}$. Το διωνυμικό ανάπτυγμα του $p_{n+1}=(1-t)^n$ είναι:

$$(1-t)^n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{n-i} t^i$$

Επομένως για το στοιχείο p_k ($k=1,2,\dots,n+1$) του συνόλου είναι $p_k(k) = (-1)^{k-1}$, δηλ. το μητρώο $A \in \mathbf{R}^{(k+1)\times(k+1)}$ με στήλες τα διανύσματα p_k είναι α.τ. με diag$(A) = (1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^k)^T$. Επομένως τα p_k είναι γ.α. Επειδή είναι $n+1$ στο πλήθος και $\dim(P_n(\mathbf{R}))=n+1$, έπεται ότι αποτελούν **R**-βάση του χώρου $P_n(\mathbf{R})$.

---

11 Ισοδύναμα είναι $\det([g_1, g_2, g_3])=1\neq 0$.

Άσκηση 2-Β11

Έστω W ο χώρος που παράγεται από τα πολυώνυμα:

$p_1 = t^3 - 2t^2 + 4t + 1$
$p_2 = 2t^3 - 3t^2 + 9t - 1$
$p_3 = t^3 + 6t - 5$
$p_4 = 2t^3 - 5t^2 + 7t + 5$

Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση του W.

Απ.

Έστω $P_3(\mathbf{R})$ το σύνολο των πολυωνύμων βαθμού ≤ 3. Το σύνολο $B=\{1, t, t^2, t^3\}$ είναι μία βάση του $P_3(\mathbf{R})$, ενώ προφανώς $p_i \in P_3(\mathbf{R})$, $i = 1,\ldots,4$. Οι συντεταγμένες των p_1, p_2, p_3, p_4 ως προς τη βάση B είναι:

$[p_1]_B = (1, -2, 4, 1)^T$
$[p_2]_B = (2, -3, 9, -1)^T$
$[p_3]_B = (1, 0, 6, -5)^T$
$[p_4]_B = (2, -5, 7, 5)^T$

Σχηματίζουμε το μητρώο με γραμμές τα παραπάνω διανύσματα συντεταγμένων και με διαδοχικούς γραμμικούς μετασχηματισμούς τον ανάγουμε στην κλιμακωτή μορφή:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 0 & -5 \\ 4 & 9 & 6 & 7 \\ 1 & -1 & -5 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_4=r_4+r_1]{\substack{r_2=r_2-2r_1 \\ r_3=r_3+4r_1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_4=r_4-3r_2]{r_3=r_3+r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Επομένως τα διανύσματα $(1,-2,4,1)^T$, $(2,-3,9,-1)^T$ είναι γ.α. και σχηματίζουν μια βάση του $W=<[p_1]_B, [p_2]_B, [p_3]_B, [p_4]_B>$. Δηλ. τα αντίστοιχα πολυώνυμα:

$p_1=t^3 - 2t^2 + 4t + 1$, $\qquad p_2 = 2t^3 - 3t^2 + 9t - 1$,

αποτελούν μία βάση του W. Επομένως $\dim(W)=2$.

Σημείωση: Μια άλλη βάση του W είναι η $\{p_1, 2p_1 - p_2\}=\{ p_1, t^2 + t - 3\}$

Άσκηση 2-Β12

Να εξετασθεί αν τα διανύσματα $\boldsymbol{u}=(3,-1,0,-1)^T$ και $\boldsymbol{v}=(1,0,4,-1)^T$ ανήκουν στον υποχώρο W του $\mathbf{R}^4$:

$W=<(2,-1,3,2)^T, (-1,1,1,-3)^T, (1,1,9,-5)^T>$

Στη συνέχεια να καθοριστούν δύο $\mathbf{R}$-βάσεις του $\mathbf{R}^4$, εκ των οποίων η μια να περιέχει το $\boldsymbol{u}$ και η άλλη το $\boldsymbol{v}$.

Απ.

Για να αποφανθούμε αν τα $\boldsymbol{u}$ και $\boldsymbol{v}$ ανήκουν στον W, εξετάζουμε τη γ.α. των $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_2$, $\boldsymbol{w}_3$, όπου $\boldsymbol{w}_i$ (i=1,2,3) οι γεννήτορες του W:

$$D = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 9 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & -5 & -1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ένα πρώτο συμπέρασμα είναι ότι τα $\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_2$, $\boldsymbol{w}_3$ είναι γ.ε., δηλ. το $\boldsymbol{w}_3$ εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των $\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_2$. Άρα $W=<\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2>$. Επίσης συνάγουμε ότι τα $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_2$ είναι γ.α., άρα $\boldsymbol{u}\notin W$, και ότι τα $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_2$ είναι γ.ε., άρα $\boldsymbol{v}\in W$.

Το γ.α. σύνολο $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2\}$ μπορεί τώρα να επεκταθεί για να δώσει μια βάση του $\mathbf{R}^4$. Πράγματι αν το συμπληρώσουμε με το διάνυσμα $\boldsymbol{e}_1$, παίρνουμε:

$$[\boldsymbol{w}_1\ \boldsymbol{w}_2\ \boldsymbol{u}\ \boldsymbol{e}_1]=\begin{bmatrix}2 & -1 & 3 & 1\\ -1 & 1 & -1 & 0\\ 3 & 1 & 0 & 0\\ 2 & -3 & -1 & 0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 4 & -3 & 0\\ 0 & -1 & -3 & 0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -7 & -4\\ 0 & 0 & -2 & 0\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}-1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & -7 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 6/7\end{bmatrix}$$

Επομένως το $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{e}_1\}$ είναι γ.α. και άρα αποτελεί $\mathbf{R}$-βάση του $\mathbf{R}^4$ η οποία περιέχει το $\boldsymbol{u}$. Από τα παραπάνω προκύπτει ότι αν αντικαταστήσουμε το $\boldsymbol{w}_2$ με το $\boldsymbol{v}$, τότε και το $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_1\}$ είναι γ.α. και άρα αποτελεί $\mathbf{R}$-βάση του $\mathbf{R}^4$ η οποία περιέχει το $\boldsymbol{v}$.

Σημείωση 1: Μια άλλη βάση η οποία περιέχει $\boldsymbol{v}$ το λαμβάνεται συμπληρώνοντας το $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{v}\}$ με τα διανύσματα $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ της τυπικής βάσης:

$$[\boldsymbol{w}_1\ \boldsymbol{v}\ \boldsymbol{e}_1\ \boldsymbol{e}_2]=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 0 & 1\\ 3 & 4 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 0 & 0\end{bmatrix}\rightarrow \mathrm{I}_4$$

Συνεπώς και το σύνολο $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ αποτελεί βάση του $\mathbf{R}^4$ που περιέχει το $\boldsymbol{v}$.

Σημείωση 2: Η διαπίστωση του εάν ένα σύνολο n διανυσμάτων του $\mathbf{R}^n$ αποτελεί βάση μπορεί επίσης να βασισθεί στην ορίζουσα του μητρώου των διανυσμάτων. Έτσι, εδώ μπορούμε να εξακριβώσουμε ότι τα $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_1\}$ και $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ είναι $\mathbf{R}$-βάσεις του $\mathbf{R}^4$ υπολογίζοντας

$\det([\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_1]) = -15 \neq 0$

$\det([\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2]) = -11 \neq 0$

Αντίθετα, η χρήση οριζουσών δεν προσφέρεται για την ομαδοποίηση και εντοπισμό των γ.α. και γ.ε. διανυσμάτων. Έτσι, αν και οι ορίζουσες $\det([\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3, \boldsymbol{u}])=0$, $\det([\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3, \boldsymbol{v}])=0$ μαρτυρούν την γ.ε. των αντίστοιχων διανυσμάτων, δεν παρέχουν πληροφορία σε ποια διανύσματα αυτή οφείλεται. Στην πρώτη περίπτωση είναι $\mathrm{rank}([\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3, \boldsymbol{u}])=3$, ενώ στη δεύτερη, $\mathrm{rank}([\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3, \boldsymbol{v}])=2$.

Άσκηση 2-Β13

Αν S είναι ένα γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο διανυσμάτων ενός K-χώρου V και $\boldsymbol{u} \in V$, τότε:

(α) Να δειχτεί ότι $\boldsymbol{u} \notin \langle S\rangle$ αν και μόνο αν το $S\cup\{\boldsymbol{u}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

(β) *Εφαρμογή*: Να δειχτεί ότι το σύνολο $S = \{(1, 0, -1, 1)^T, (2, -1, 0, 1)^T, (1, 1, 2, 1)^T\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο πάνω στο $\mathbf{R}$ και ότι το $\boldsymbol{x} = (1, 3, 3, 2)^T \in \langle S\rangle$ και το $\boldsymbol{y} = (0, 1, 1, -1)^T \notin \langle S\rangle$. Να βρεθεί μιά $\mathbf{R}$-βάση του $\langle S\rangle$ η οποία περιέχει το $\boldsymbol{x}$ και μια $\mathbf{R}$-Βάση του $\mathbf{R}^4$ η οποία περιέχει το $\boldsymbol{y}$.

Απ.

α) Έστω $S = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \dots, \boldsymbol{u}_k\}$. Αρκεί να δειχτεί ότι $\boldsymbol{u}\in\langle S\rangle \Leftrightarrow S\cup\{\boldsymbol{u}\}$ γραμμικά εξαρτημένο. Αν $\boldsymbol{u}\in\langle S\rangle$, τότε υπάρχουν $\lambda_i\in$K τέτοια ώστε

$$\boldsymbol{u} = \lambda_1\boldsymbol{u}_1 + \lambda_2\boldsymbol{u}_2 + \dots + \lambda_k\boldsymbol{u}_k \Leftrightarrow \lambda_1\boldsymbol{u}_1 + \lambda_2\boldsymbol{u}_2 + \dots + \lambda_k\boldsymbol{u} + (-1)\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$$

οπότε το $S\cup\{\boldsymbol{u}\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο γιατί ένας τουλάχιστον συντελεστής (-1) είναι $\neq 0$.
Αντιστρόφως, αν $S\cup\{\boldsymbol{u}\}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένο, τότε υπάρχουν $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ όχι όλα 0, τέτοια ώστε :

$$\lambda_1\boldsymbol{u}_1 + \lambda_2\boldsymbol{u}_2 + \dots + \lambda_k\boldsymbol{u}_k + \lambda\boldsymbol{u} = \mathbf{0} \qquad (1)$$

Αν $\lambda=0$ τότε η (1) γίνεται $\lambda_1\boldsymbol{u}_1 + \lambda_2\boldsymbol{u}_2 + \dots + \lambda_k\boldsymbol{u}_k = \mathbf{0}$ με $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) \neq \mathbf{0}$, που είναι άτοπο αφού το S είναι γραμμικώς ανεξάρτητο. Επομένως είναι $\lambda \neq 0$ και άρα το $\boldsymbol{u}$ μπορεί να γραφτεί:

$$\boldsymbol{u} = \frac{-\lambda_1}{\lambda}\boldsymbol{u}_1 + \frac{-\lambda_2}{\lambda}\boldsymbol{u}_2 + \dots + \frac{-\lambda_k}{\lambda}\boldsymbol{u}_k$$

δηλ. $\boldsymbol{u}\in<S>$

β) Θέτουμε $\boldsymbol{s}_i$, i=1,2,3, τα στοιχεία του S και εφαρμόζουμε απαλοιφή:

$$S=[\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2,\boldsymbol{s}_3]=\begin{bmatrix}1&2&1\\0&-1&1\\-1&0&2\\1&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1\\0&-1&1\\0&2&3\\0&-1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1\\0&-1&1\\0&0&5\\0&0&-1\end{bmatrix}$$

Άρα είναι rank(S)=3, συνεπώς το S είναι γραμμικά ανεξάρτητο.

Επιπλέον, εξετάζοντας τη γ.α. για τα διανύσματα $\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2,\boldsymbol{s}_3,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$, έχουμε :

$$[\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2,\boldsymbol{s}_3,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]=\begin{bmatrix}1&2&1&1&0\\0&-1&1&3&1\\-1&0&2&3&1\\1&1&1&2&-1\end{bmatrix}\to\cdots\to\begin{bmatrix}1&0&0&1&0\\0&1&0&-1&0\\0&0&1&2&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι το $S\cup\{\boldsymbol{x}\}=\{\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \boldsymbol{s}_3, \boldsymbol{x}\}$ είναι γ.ε., επομένως σύμφωνα με το (α), $\boldsymbol{x}\in$ <S>. Επίσης το $S\cup\{\boldsymbol{y}\}=\{\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \boldsymbol{s}_3, \boldsymbol{y}\}$ είναι γ.α, οπότε, σύμφωνα με το (α), προκύπτει $\boldsymbol{y}\notin$<S>.

Επομένως, μια **R**-βάση του <S> που περιέχει το $\boldsymbol{x}$ είναι

$\{\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \boldsymbol{s}_3, \boldsymbol{x}\} = \{(1, 0, -1, 1)^T, (2, -1, 0, 1)^T, (1, 3, 3, 2)^T\}$

και μια **R**-Βάση του $\mathbf{R}^4$ που περιέχει το $\boldsymbol{y}$ είναι

$\{\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2, \boldsymbol{s}_3, \boldsymbol{y}\} = \{(1, 0, -1, 1)^T, (2, -1, 0, 1)^T, (1, 3, 3, 2)^T, (0, 1, 1, -1)^T\}$.

Άσκηση 2-Β14

Ως γνωστόν το σύνολο $\mathbf{C}^{2\times2}$ μπορεί να θεωρηθεί ως **C**-χώρος και ως **R**-χώρος.

(α) Να καθοριστούν ευκρινώς οι αντίστοιχες βάσεις και διαστάσεις του και στις δύο περιπτώσεις.

(β) Επίσης, σε κάθε περίπτωση να καθορισθεί η διάσταση του υποχώρου που παράγεται από το σύνολο

$$\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&\mathrm{i}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\mathrm{i}&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\mathrm{i}&0\\0&\mathrm{i}\end{pmatrix}\right\}$$

Απαντήσεις

α) (i) Κάθε στοιχείο **z** του συνόλου

$$\mathbf{C}^{2\times2}=\left\{\boldsymbol{z}=\begin{pmatrix}z_1&z_2\\z_3&z_4\end{pmatrix}|z_i\in\mathbf{C}\right\}$$

θεωρούμενου ως **C**-χώρου γράφεται ως γ.σ. των μητρώων $E_{ij}=\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j^T$, ($i,j$=1,2), με $\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j\in\mathbf{R}^2$:

$$\boldsymbol{z}=\begin{pmatrix}z_1&z_2\\z_3&z_4\end{pmatrix}=z_1\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+z_2\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+z_3\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+z_4\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

Τα μητρώα E_{ij} είναι γ.α., αφού:

$$z_1\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+z_2\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+z_3\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+z_4\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\mathbf{0}\Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix}z_1&z_2\\z_3&z_4\end{pmatrix}=\mathbf{0}\Rightarrow z_1=z_2=z_3=z_4=0$$

Άρα τα E_{ij} αποτελούν **C**-βάση του **C**-χώρου $\mathbf{C}^{2\times2}$ (τυπική βάση). Είναι $\dim(\mathbf{C}^{2\times2}:\mathbf{C})=4$.

(ii) Κάθε στοιχείο $\boldsymbol{z}\in\mathbf{C}^{2\times 2}$ εκφράζεται ως γ.σ. με πραγματικούς συντελεστές ως εξής (συμβολίζουμε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος ενός μιγαδικού με *re* και *im* αντίστοιχα):

$$\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} re(z_{11}) & re(z_{12}) \\ re(z_{21}) & re(z_{22}) \end{pmatrix} + \mathrm{i}\begin{pmatrix} im(z_{11}) & im(z_{12}) \\ im(z_{21}) & im(z_{22}) \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{i=1,\, j=1}^{2} re(z_{ij})E_{ij} + \mathrm{i} \sum_{i=1,\, j=1}^{2} re(z_{ij})E_{ij} = \sum_{i=1,\, j=1}^{2} re(z_{ij})E_{ij} + \sum_{i=1,\, j=1}^{2} re(z_{ij})(\mathrm{i}E_{ij})$$

Είναι φανερό τώρα, ότι αν $a_{ij}, \beta_{ij} \in \mathbf{R}$ $(i, j = 1,2)$, τέτοια ώστε

$$\sum_{i=1,\, j=1}^{2} a_{ij}E_{ij} + \sum_{i=1,\, j=1}^{2} \beta_{ij}(\mathrm{i}E_{ij}) = \mathbf{0} \Rightarrow a_{ij} = 0,\ \beta_{ij} = 0\ (i,\ j = 1,2)$$

Άρα τα διανύσματα-μητρώα E_{ij}, $\mathrm{i}E_{ij}$ $(i, j = 1,2)$ είναι γ.α. και συνεπώς συνιστούν βάση **R**-βάση του **R**-χώρου $\mathbf{C}^{2\times 2}$ (τυπική βάση). Είναι $\dim(\mathbf{C}^{2\times 2}:\mathbf{R})=8$.

και ως **R**-χώρος.

β) (i) Έστω W ο δοθείς υποχώρος και $\boldsymbol{w}_i$ $(i=1,\dots,4)$ οι γεννήτορές του.

Αρχικά θεωρούμε τον W ως **R**-χώρο. Διαπιστώνουμε ότι οι γεννήτορες γράφονται ως γ.σ. των διανυσμάτων της τυπικής βάσης $\{E_{ij}, \mathrm{i}E_{ij}\}$, $(i, j = 1,2)$:

$\boldsymbol{w}_1 = E_{11}+E_{22}$, $\boldsymbol{w}_2 = E_{11}+\mathrm{i}E_{22}$, $\boldsymbol{w}_3 = E_{22}+\mathrm{i}E_{11}$, $\boldsymbol{w}_4 = \mathrm{i}E_{11}+\mathrm{i}E_{22}$

Το μητρώο D με στήλες τα $\boldsymbol{w}_i$ είναι:

$$D = [\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3, \boldsymbol{w}_4] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Είναι προφανώς $\mathrm{rank}(D)=4$, δηλ. τα $\boldsymbol{w}_i$ είναι γ.α. και άρα αποτελούν βάση του **R**-χώρου W, με $\dim(W: \mathbf{R})=4$.

(ii) Θεωρούμε το Wως **C**-χώρο. Εστω $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbf{C}$ τέτοια ώστε:

$$z_1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + z_2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} + z_3\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + z_4\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$z_1+z_2+iz_3+iz_4 = 0$$
$$z_1+iz_2+z_3+iz_4 = 0$$

Το μητρώο συντελεστών A του παραπάνω ομογενούς συστήματος είναι

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \mathrm{i} & \mathrm{i} \\ 1 & \mathrm{i} & 1 & \mathrm{i} \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2 - r_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \mathrm{i} & \mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i}\text{-}1 & 1\text{-}\mathrm{i} & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \to \frac{1}{\mathrm{i}-1} r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \mathrm{i} & \mathrm{i} \\ 0 & 1 & \text{-}1 & 0 \end{bmatrix}$$

Επομένως $\mathrm{rank}(A)=2$ και $\dim(\mathrm{N}(A))=4\text{-}2=2=\dim(W: \mathbf{C})$.

Άσκηση 2-Β15

Έστω V ο υποχώρος του $\mathrm{P}_3(\mathbf{R})$ που παράγεται από τα πολυώνυμα $1 - t^2 + t^3$, $2 + t - t^2 + t^3$, $1 + 2t + t^2 - t^3$.

α) Να δειχτεί ότι το $f(t) = t + t^2 - t^3 \in V$, αλλά το $g(t) = 1 + t - t^2 + t^3 \notin V$.

β) Να βρεθεί μια **R**-βάση του V που να περιέχει το $f(t)$ και μια **R**-βάση του $\mathrm{P}_3(\mathbf{R})$ που να περιέχει το $g(t)$.

Απαντήσεις

α) Οι γεννήτορες του V αναπαρίστανται ως προς την τυπική βάση του $\mathbf{P}_3(\mathbf{R})$ από τα διανύσματα

$\boldsymbol{p}_1=(1, 0, -1, 1)^T$, $\boldsymbol{p}_2=(2, 1, -1, 1)^T$, $\boldsymbol{p}_3=(1, 2, 1, -1)^T$

ενώ τα πολυώνυμα $f(t)$ και $g(t)$ από τα διανύσματα

$\boldsymbol{f}=(0, 1, 1, -1)^T$, $\boldsymbol{g}= (1, 1, -1, -1)^T$

Θέτουμε $P = [\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3]$. Για να εξετάσουμε την γ.α. για τα παραπάνω διανύσματα, υπολογίζουμε την α.κ.μ. του μητρώου $[P\ \boldsymbol{f}\ \boldsymbol{g}]$:

$$[P\ \boldsymbol{f}\ \boldsymbol{g}]=\begin{bmatrix}1&2&1&0&1\\0&1&2&1&1\\-1&-1&1&1&-1\\1&1&-1&-1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1&0&1\\0&1&2&1&1\\0&1&2&1&0\\0&-1&-2&-1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1&0&1\\0&1&2&1&1\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι τα $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{p}_3$ είναι γ.ε. και $V=<\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2>$. Επίσης τα $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{f}$ είναι γ.ε., επομένως $\boldsymbol{f}\in V$. Τέλος, τα $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{g}$ είναι γ.α., επομένως $\boldsymbol{f}\notin V$.

β) Τα $\boldsymbol{p}_1$ και $\boldsymbol{f}$ είναι ομοίως γ.α. και παράγουν τον V, συνεπώς συνιστούν μια $\mathbf{R}$-βάση του V που περιέχει το $\boldsymbol{f}$, άρα και το $f(t)$. Δηλ. το σύνολο $\{ 1 - t^2 + t^3, t + t^2 - t^3 \}$ αποτελεί μια $\mathbf{R}$-βάση του V.

Για να βρούμε μια $\mathbf{R}$-βάση του $P_3(\mathbf{R})$ που περιέχει το $g(t)$, συμπληρώνουμε το γ.α. σύνολο $\{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{g}\}$ με το στοιχείο (πολυώνυμο) $\boldsymbol{e}_4$, της τυπικής βάσης:

$$[\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2\ \boldsymbol{g}\ \boldsymbol{e}_4]=\begin{bmatrix}1&2&1&0\\0&1&1&0\\-1&-1&-1&0\\1&1&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1&0\\0&1&1&0\\0&1&0&0\\0&-1&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1&0\\0&1&1&0\\0&0&-1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&1&0\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

Επομένως το σύνολο $\{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{e}_4\}$ είναι γ.α. και άρα αποτελεί $\mathbf{R}$-βάση του $P_3(\mathbf{R})$ που περιέχει το $g(t)$. Δηλ. η ζητούμενη βάση είναι το σύνολο:

$\{1 - t^2 + t^3, 2 + t - t^2 + t^3, 1 + t - t^2 + t^3, t^3 \}$

Σημείωση Ομοίως δείχνεται ότι και τα $\{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{e}_3\}$ είναι γ.α., δηλ. μια άλλη $\mathbf{R}$-βάση του $P_3(\mathbf{R})$ είναι η

$\{1 - t^2 + t^3, 2 + t - t^2 + t^3, 1 + t - t^2 + t^3, t^2 \}$

Άσκηση 2-Β16

Έστω $S=<\boldsymbol{u}_1=(1, 2, 3), \boldsymbol{u}_2=(3, -5, 1)>$. Να εξετασθεί αν τα διανύσματα $\boldsymbol{\alpha}=(1,0,0)^T$, $\boldsymbol{\beta}=(5,-23,-9)^T$ ανήκουν στον S. Να εκφραστεί το $\boldsymbol{\beta}$ ως γ.σ. των $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$.

Απ.

Διαμορφώνουμε το μητρώο A και εκτελούμε απαλοιφή:

$$A=\begin{bmatrix}u_1\ u_2\ a\ \beta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3&1&5\\2&-5&0&-23\\3&1&0&-9\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&1&5\\0&-11&-2&-33\\0&-8&-3&-24\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&3&1&5\\0&-11&-2&-33\\0&0&-17/11&0\end{bmatrix}=U$$

Συνεπώς $U(:,3)\notin S$ και $U(:,4)\in S$ και άρα $\boldsymbol{\alpha}\notin S$ και $\boldsymbol{\beta}\in S$.
Στη συνέχεια λύνουμε το σύστημα $[\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2]\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$, το οποίο έχει λύση διότι rank($[\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2]$)=rank($[\boldsymbol{u}_1\ \boldsymbol{u}_2\ \boldsymbol{b}]$)=2. Εκτελούμε απαλοιφή και βρίσκουμε: $x_2=-33/-11=3$, $x_1+3\times3=5\Rightarrow x_1=5-9=-4$, δηλ. $\boldsymbol{\beta}=[\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2]\ (4, -2)^T$.

Άσκηση 2-Β17

Να δειχθεί ότι το σύνολο $\{\boldsymbol{v}_1=(1,0,1,1)^T, \boldsymbol{v}_2=(1,0,2,4)^T\}$ είναι γ.α. πάνω στο $\mathbf{R}$ και να επεκταθεί σε μια βάση του $\mathbf{R}^4$.

Απ.

Προφανώς rank($[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]$)=2, δηλ. $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ γ.α. Θεωρούμε τώρα το $A=[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4]$ και εκτελούμε απαλοιφή. Εντοπίζουμε ποιες εκ των 4 τελευταίων στηλών είναι στήλες οδηγών (θα είναι απαραίτητα 4-2=2). Αυτές μαζί με τα $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ θα αποτελούν βάση (συνεχίστε!).

Άσκηση 2-B18

Δίνονται οι χώροι V=<(2,-1,2,2)^T, (1,0,2,4)^T, (11,-8,6,-4)^T> και W=<(12,-3,18,30)^T, (5,-4,2,-4)^T>.

α) Είναι διανυσματικοί χώροι και γιατί?
β) Να εξετασθεί αν είναι ίσοι
γ) Βρείτε ορθοκανονικές βάσεις γι' αυτούς (μια ή δύο).

Απαντήσεις

α) Οι V, W είναι δ.χ. αφού παράγονται από γ.σ. διανυσμάτων.

β) Μορφώνουμε το μητρώο με τα διανύσματα που παράγουν τους δύο χώρους και εκτελούμε απαλοιφή:

$$A = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2] =$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 11 & 12 & 5 \\ -1 & 0 & -8 & -3 & -4 \\ 2 & 2 & 6 & 18 & 2 \\ 2 & 4 & -4 & 30 & -4 \end{bmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -5 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Οι στήλες 3, 4, 5 είναι ελεύθερες. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι:

- το $\mathbf{v}_3$ είναι γ.ε. από τα $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, συνεπώς V=<$\mathbf{v}_1$,$\mathbf{v}_2$> και dim$V$=2.
- Οι στήλες 4 και 5 είναι γ.σ. των προηγούμενων γ.α. στηλών 1 και 2 και επιπλέον είναι γ.α. Συνεπώς W=<$\mathbf{v}_1$,$\mathbf{v}_2$> = V (δηλ. παράγονται από τα ίδια διανύσματα).

γ) Βρίσκουμε μια ορθοκανονική βάση για το V (=W), εφαρμόζοντας το Θεώρημα των *Gram-Schmidt*: [βλ. Κεφ. 3]

$\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1 = (2,-1,2,2)^T$

$\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 - (<\mathbf{u}_1,\mathbf{v}_2>/<\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_1>)\mathbf{u}_1 = (1,0,2,4)^T - (2,-1,2,2)^T\,[(2,-1,2,2)(1,0,2,4)^T]/[(2,-1,2,2)(2,-1,2,2)^T]=$
$= (1,0,2,4)^T - (2,-1,2,2)^T[14/13] =$
$= (-1.1538, 1.0769, -0.1538, 1.8462)^T$

Συνεπώς μια ορθοκανονική βάση του V (μετά από πράξεις) είναι η

$$\{\mathbf{u}_1/\|\mathbf{u}_1\|, \mathbf{u}_2/\|\mathbf{u}_2\|\} = \{(0.5547, -0.2774, 0.5547, 0.5547)^T, (-0.4741, 0.4425, -0.0632, 0.7586)^T\}$$

Άσκηση 2-B19

Έστω ο υποχώρος V που παράγεται από τα διανύσματα $\mathbf{v}_1=(1, 1, 2)^T$, $\mathbf{v}_2=(1, 2, 1)^T$, $\mathbf{v}_3=(1, 0, 3)^T$. Αν δοθεί $\mathbf{x}=(a, 0, b)^T$, τότε ποια σχέση πρέπει να πληρούν οι παράμετροι a και b, ώστε $\mathbf{x}\in V$;

Απ.

Κατ' αρχάς παρατηρούμε ότι τα $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ είναι εξαρτημένα (αυτό φαίνεται εύκολα και εκ πρώτης όψεως: $\mathbf{v}_3=2\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2$):

$$C = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

δηλ. $rank(C)=rank(U)=2$. Συνεπώς V=span($\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$) και dim(V)=2. Τώρα, για να είναι $\mathbf{x}\in V$, αρκεί τα $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{x}$ να είναι εξαρτημένα, δηλ. rank([$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{x}$])=2. Εφαρμόζοντας απαλοιφή λαμβάνουμε:

$$\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & b \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & -1 & b-2a \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & b-3a \end{bmatrix}$$

και συνεπώς θα πρέπει b-3a=0 ή b=3a.

Σημείωση: Το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει άμεσα με χρήση ορίζουσας στο δεύτερο βήμα. Για να είναι τα $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{x}$, εξαρτημένα πρέπει det([$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{x}$]) =0. Υπολογίζουμε: det([$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{x}$]) = b-3a =0.

2.3 Αλλαγή Βάσης

Άσκηση 2-ΑΒ1

Έστω ο χώρος K^n δ.χ., όπου K=**R** ή **C**, και $\{\boldsymbol{e}_i\}$, i=1,…,n, ή προκαθορισμένη βάση του. Θεωρούμε το διάνυσμα $\boldsymbol{y}=(y_1, y_2, \ldots, y_n)=\Sigma y_i\boldsymbol{e}_i\in K^n, y_i\in K$. Δίνεται επίσης μια άλλη βάση $U=\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2,\ldots,\boldsymbol{u}_n\}$ του K^n.

α) Πως μπορείτε να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του $\boldsymbol{y}$ ως προς τη βάση U.

β) Να γίνει εφαρμογή για: K=R, n=3, $\boldsymbol{y}=(1,3,1)^T$ και $U=\{(1,2,1)^T, (3,-1,0)^T, (1,-1,1)^T\}$

γ) Να γίνει εφαρμογή για: K=C, n=3, $\boldsymbol{y}=(1\text{-}5i,2,1)^T$ και $U=\{(1,2,1\text{-}i)^T, (3,-1,0)^T, (-i,-1,1)^T\}$

Απαντήσεις

α) Ζητείται να εκφρασθεί το $\boldsymbol{y}$ ως προς τη βάση U, δηλαδή να βρεθεί ποιος γ.σ. $U\boldsymbol{x}$ δίνει το $\boldsymbol{y}$: Αρκεί λοιπόν να λυθεί ως προς $\boldsymbol{x}$ (n άγνωστοι) το σύστημα $U\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$. Οι συντελεστές είναι πραγματικοί ή μιγαδικοί και το σύστημα μπορεί να λυθεί κανονικά με τη μέθοδο της απαλοιφής.

β) Εκτελούμε απαλοιφή στο $[\,U \mid \boldsymbol{y}\,]$ και υπολογίζουμε μετά από πράξεις το αναγμένο κλιμακωτό μητρώο:

$$[\,U \mid \boldsymbol{y}\,] \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 \end{bmatrix}$$

Συνεπώς: $\boldsymbol{y}_U=\boldsymbol{x}=(4/3, 0, -1/3)^T$.

γ) Εκτελούμε απαλοιφή στο $[U|\boldsymbol{y}]$ και υπολογίζουμε το αναγμένο κλιμακωτό μητρώο (πράξεις με μιγαδικούς):

$$[\,U \mid \boldsymbol{y}\,] \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.944-0.192i \\ 0 & 1 & 0 & -0.36-1.52i \\ 0 & 0 & 1 & 0.248+1.136i \end{bmatrix}$$

δηλ. $\boldsymbol{y}_U=(0.944\text{-}0.192i, -0.36\text{-}1.52i, 0.248+1.136i)^T$.

Άσκηση 2-ΑΒ2

Δίνονται τα σύνολα

$X=\{\boldsymbol{x}_1=(1, 1, 1)^T, \boldsymbol{x}_2=(1, 2, -1)^T, \boldsymbol{x}_3=(1, 1, 0)^T\}$,

$Y=\{\boldsymbol{y}_1=(2, 1, 1)^T, \boldsymbol{y}_2=(1, -1, 0)^T, \boldsymbol{y}_3=(0, 1, 1)^T\}$

α) Αποτελούν τα X, Y βάσεις του R^3 και γιατί?

β) Δίνεται το διάνυσμα $\boldsymbol{\upsilon}_X=(a, b, c)^T$ ως προς τη βάση X. Βρείτε με συστηματικό τρόπο τις συντεταγμένες του ως προς τη βάση Y συναρτήσει των a,b,c.

Απαντήσεις

α) Για τα στοιχεία των δύο βάσεων θεωρούμε τα μητρώα $B_1=[\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3]\in R^{3x3}$ και $B_2=[\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3]\in \mathbf{R}^{3\times3}$ αντίστοιχα. Βρίσκουμε εύκολα: rank(B_1)=rank(B_2)=3, και συνεπώς X και Y γ.α., άρα X, Y είναι βάσεις του $\mathbf{R}^3$.

β) Το μητρώο $A=[\boldsymbol{\alpha}_1\ \boldsymbol{\alpha}_2\ \boldsymbol{\alpha}_3]\in\mathbf{R}^{3\times3}$ αλλαγής βάσης (από την X στην Y) δίνεται από τη σχέση:

$$\boldsymbol{x}_1=B_2\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{x}_2=B_2\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{x}_3=B_2\boldsymbol{\alpha}_3 \Rightarrow$$

$$B_1=B_2A \Rightarrow A = B_2^{-1}B_1$$

Εδώ μπορούμε προφανώς να αντιστρέψουμε: το A υπολογίζεται ως $A=B_2^{-1}B_1$. Το B_2^{-1} μπορεί φυσικά να υπολογισθεί με τη μέθοδο *Gauss-Jordan*. Μπορούμε όμως να το υπολογίσουμε απ' ευθείας, εφαρμόζοντας διαδικασία απαλοιφής ανάλογη με αυτήν της *Gauss-Jordan*. Η διαδικασία αυτή υπαγορεύεται από τη σχέση:

$$\boldsymbol{B}_2^{-1}\,[\boldsymbol{B}_2 \mid \boldsymbol{B}_1] = [\,\mathbf{I} \mid \boldsymbol{A}\,]$$

Εφαρμόζοντας λοιπόν κατάλληλους σ.μ.γ., λαμβάνουμε:

$$\left[B_2 \mid B_1\right]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -3/2 & 1 & 1/2 & 3/2 & 1/2\\ 0 & -1/2 & 1 & 1/2 & -3/2 & -1/2\end{array}\right]\to$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -3/2 & 1 & 1/2 & 3/2 & 1/2\\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & -2 & -2/3\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 1/2\\ 0 & 1 & -2/3 & -1/3 & -1 & -1/3\\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -3 & -1\end{array}\right]\to$$

$$\cdots\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1/2 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & -3 & -1\end{array}\right]$$

Συνεπώς:

$$A=\begin{bmatrix}1/2 & 2 & 1\\ 0 & -3 & -1\\ 1/2 & -3 & -1\end{bmatrix}$$

και:

$$v_Y = Av_X = \begin{bmatrix}1/2 & 2 & 1\\ 0 & -3 & -1\\ 1/2 & -3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}=\ldots=(a/2+2b+c,\ -3b-c,\ a/2-2b-c)^T$$

Άσκηση 2-ΑΒ3 [Εδώ δουλεύουμε με υποχώρους]

Δίνεται ο υποχώρος V του $\mathbf{R}^4$ με βάση $B_1=\{(2, -1, 2, 2)^T, (1, 0, 2, 4)^T\}$. Δίνεται επίσης και μια άλλη βάση του: $B_2=\{(12, -3, 18, 30)^T, (5, -4, 2, -4)^T\}$.

α) Διαπιστώστε ότι η B_2 αποτελεί όντως βάση.

β) Εξετάστε αν το διάνυσμα $\mathbf{y}=(29, -10, 38, 56)^T\in V$. Αν ναι, εκφράστε το $\boldsymbol{y}$ ως προς τις βάσεις B_1 και B_2.

γ) Δίνεται το διάνυσμα $\boldsymbol{\upsilon}_{B1}=(a, b)^T$ ως προς τη βάση B_1. Να βρεθούν με συστηματικό τρόπο οι συντεταγμένες του ως προς τη βάση B_2 συναρτήσει των a, b (δηλαδή να βρεθεί το $\boldsymbol{\upsilon}_{B2}$).

Απαντήσεις

α) Το ερώτημα έχει ήδη απαντηθεί στην Άσκηση 18.

β) Συμβολίζουμε με τα ίδια σύμβολα B_1, B_2 τα μητρώα των βάσεων. Προφανώς $\boldsymbol{y}\in V\Leftrightarrow \boldsymbol{y}\in C(B_1)\Leftrightarrow$ το σύστημα $B_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$ δέχεται λύση $\Leftrightarrow$ rank($[B_1\,|\,\boldsymbol{y}]$)=2. Έχουμε λοιπόν:

$$\left[B_1 \mid y\right]=\left[\begin{array}{cc|c}2 & 1 & 29\\ -1 & 0 & -10\\ 2 & 2 & 38\\ 2 & 4 & 56\end{array}\right]\to\cdots\to\left[\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 10\\ 0 & 1 & 9\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

Επομένως rank($[B_1\,|\,\boldsymbol{y}]$)=2 και άρα $\mathbf{y}\in V$. Προφανώς η λύση είναι $\boldsymbol{x}=(10, 9)^T$. Συνεπώς $\boldsymbol{y}=B_1\boldsymbol{x}$, δηλ. $\mathbf{y}_{B1}=\boldsymbol{x}=(10, 9)^T$. Αντίστοιχα λαμβάνουμε:

$$\left[B_1 \mid y\right]=\left[\begin{array}{cc|c}2 & 1 & 29\\ -1 & 0 & -10\\ 2 & 2 & 38\\ 2 & 4 & 56\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

Επομένως $\boldsymbol{x}=(10, 9)^T$. Συνεπώς $\mathbf{y}=B_2\boldsymbol{x}$, δηλ. $\mathbf{y}_{B2}=\boldsymbol{x}=(2, 1)^T$.

γ) Το μητρώο A μετάβασης (αλλαγής βάσης) από τη βάση B_1 στην B_2 ($B_1=B_2A$) είναι διαστάσεων 2×2. Το υπολογίζουμε με ανάλογο τρόπο όπως στην Άσκηση 20:

$$\left[B_2 \mid B_1\right]=\left[\begin{array}{cc|cc}12 & 5 & 2 & 1\\ -3 & -4 & -1 & 0\\ 18 & 2 & 2 & 2\\ 30 & -4 & 2 & 4\end{array}\right]\to\cdots\to\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 0.0909 & 1.1212\\ 0 & 1 & 0.1818 & -0.0909\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

Συνεπώς: $A=\begin{bmatrix}0.0909 & 1.1212\\ 0.1818 & -0.0909\end{bmatrix}$

και άρα: $\upsilon_{B2}=A\upsilon_{B1}=\begin{bmatrix}0.0909 & 1.1212\\ 0.1818 & -0.0909\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.0909a+1.1212b\\ 0.1818a-0.090b\end{bmatrix}$

Σημ. Αν $A=[\alpha_1\ \alpha_2]$ θα μπορούσαμε ισοδύναμα να λύσουμε τα παρακάτω συστήματα ως προς α_1 και α_2 αντίστοιχα (προφανώς έχουν μοναδική λύση):

$B_1=B_2\alpha_1$, $B_1=B_2\alpha_2$

Τελικά, καταλήγουμε φυσικά στο ίδιο A:

$$A=\begin{bmatrix}0.0909 & 1.1212\\ 0.1818 & -0.0909\end{bmatrix}$$

Άσκηση 2-ΑΒ4

Αν το σύνολο $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο πάνω στο **C** σε έναν **C**-χώρο V, να αποδειχτεί ότι

α) Το σύνολο $\{\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}+\boldsymbol{u}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο πάνω στο **C**,

β) Το σύνολο $\{\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}-3\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}+3\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο πάνω στο **C**.

Απαντήσεις

α) Τα διανύσματα $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{w}+\boldsymbol{u}$ είναι γ.σ. των γ.α. διανυσμάτων $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ και εκφράζονται σε σχέση με τα τελευταία ως εξής:

$$[\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}+\boldsymbol{u}] = [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

Το μητρώο συντελεστών είναι αντιστρέψιμο, αφού η τάξη του είναι 3:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

Επομένως, σύμφωνα με γνωστή πρόταση τα διανύσματα $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{w}+\boldsymbol{u}$ είναι γ.α. πάνω στο **C**.

β) Ομοίως, τα διανύσματα $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}-3\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{u}+3\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ εκφράζονται ως γ.σ. των γ.α. διανυσμάτων $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ ως εξής:

$$[\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}-3\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}+3\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}] = [\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}]\, B$$

όπου B το μητρώο:

$$B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 1\\ -3 & -1 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Είναι rank(B)=2, δηλ. το B είναι ιδιάζον. Άρα σύμφωνα με την Εφαρμογή 2.2.1(II) τα δοθέντα διανύσματα είναι γ.ε. πάνω στο **C**.

Εναλλακτική διατύπωση:
Θεωρούμε το γ.α. σύνολο $S=\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ ως βάση ενός υποχώρου W δ.χ. V. Οι συντεταγμένες των διανυσμάτων $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{w}+\boldsymbol{u}$ ως προς αυτήν είναι :

$(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})_S = (1, 1, 0)^T$
$(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})_S = (0, 1, 1)^T$
$(\boldsymbol{w}+\boldsymbol{u})_S = (1, 0, 1)^T$

Είναι $\det([(1, 1, 0)^T, (0, 1, 1)^T, (1, 0, 1)^T]) = 2 \neq 0$ και άρα το δοθέν σύνολο είναι γ.α. Ομοίως τα διανύσματα $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}-3\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{u}+3\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ αναπαρίστανται ως προς τη βάση S του υποχώρου W:

$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}-3\boldsymbol{w} = (1, 1, -3)^T$
$\boldsymbol{u}+3\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w} = (1, 3, -1)^T$
$\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w} = (0, 1, 1)^T$

Είναι $\det([(1, 1, -3)^T, (1, 3, -1)^T, (0, 1, 1)^T]) = 0$ και άρα το δοθέν σύνολο είναι γ.ε.

2.4 Ειδικοί Υποχώροι ($W_1 \cap W_2$ και W_1+W_2)

Άσκηση 2-Υ1

Αν V_1, V_2 διδιάστατοι υποχώροι του $\mathbf{R}^3$, τότε ισχύει $\dim(V_1 \cap V_2)>0$.

Απ.

Ισχύει η γνωστή σχέση:

$$\dim(V_1)+\dim(V_2)=\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1 \cap V_2)$$

απ' όπου προκύπτει:

$$\dim(V_1 \cap V_2) = 4 - \dim(V_1+V_2) \geq 4-3 = 1$$

Άσκηση 2-Υ2

Δίνονται οι υποχώροι $W_1=\{(x, y, z, t)^T \mid x=y\}$, $W_2=\{(x, y, z, t)^T \mid 2y=t, x+y=z\}$ του $\mathbf{R}^4$. Να βρεθούν $\mathbf{R}$-βάσεις και να προσδιορισθούν οι διαστάσεις των W_1, W_1, $W_1 \cap W_2$, W_1+W_2.

Απαντήσεις

Οι υποχώροι W_1, W_2 ορίζονται από ομογενή συστήματα και έτσι είναι ίσοι με τους αντίστοιχους μηδενοχώρους. Προσδιορίζουμε εύκολα τα αντίστοιχα μητρώα:

$W_1=\mathrm{N}(A)$, με $A=[1, -1, 0, 0] \in \mathbf{R}^{1\times 4}$

$W_2=\mathrm{N}(B)$, με $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{2\times 4}$

Βρίσκουμε τους μηδενοχώρους και στη συνέχεια τους υπολοίπους υποχώρους:

- Προφανώς $\mathrm{rank}(A)=1$ και $\dim(\mathrm{N}(A))=4-1=3=\dim W_1$.
  Θέτοντας $y=1$, $z=0$, $t=0$ βρίσκουμε: $\boldsymbol{v}_1=(1, 1, 0, 0)^T$. Θέτοντας $y=0$, $z=1$, $t=0$: $\boldsymbol{v}_2=(0, 0, 1, 0)^T$. Τέλος, θέτοντας $y=0$, $z=0$, $t=1$ βρίσκουμε: $\boldsymbol{v}_3=(0, 0, 0, 1)^T$. Συνεπώς μια βάση του W_1 είναι η $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ και $W_1=span(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3)=\{[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3]\boldsymbol{x} / \boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^3\}$.
- Προφανώς $\mathrm{rank}(B)=2$ και $\dim(\mathrm{N}(B))=4-2=2=\dim W_2$. Για $z=1$, $t=0$ βρίσκουμε: $\boldsymbol{u}_1=(1, 0, 1, 0)^T$ και για $z=0$, $t=1$: $\boldsymbol{u}_2=(-1/2, 1/2, 0, 1)^T$. Συνεπώς μια βάση του W_2 είναι η $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$ και $W_2=span(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2)=\{[\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2]\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^2\}$.
- Είναι $W_1 \cap W_2 = \mathrm{N}(C) = \mathrm{N}([A; B])$. Βρίσκουμε το μηδενοχώρο με απαλοιφή:

$$C=\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&2&0&-1\\1&1&-1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&2&0&-1\\0&0&-1&1\end{pmatrix}$$

Ισχύει dim(N(C))=4-rank(C)=4-3=1=dim($W_1 \cap W_2$) και υπολογίζουμε την ειδική λύση $\mathbf{s}=(1, 1, 2, 2)^T$ που αποτελεί **R**-βάση του $W_1 \cap W_2$.

- Είναι $W_1+W_2 = <\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2>$. Μορφώνουμε το μητρώο D=[$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$] και εκτελώντας απαλοιφή εύκολα βρίσκουμε ότι τα 4 πρώτα διανύσματα αντιστοιχούν σε στήλες οδηγών, δηλ. είναι γ.α. Συνεπώς μια **R**-βάση του W_1+W_2 είναι το σύνολο $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{u}_1\}$ και dim(W_1+W_2)=4.

Τέλος επαληθεύουμε:

$$\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1+V_2) + \dim(V_1 \cap V_2),\text{ δηλ. } 3+2=4+1.$$

Άσκηση 2-Υ3

Έστω U και W υποχώροι του $\mathbf{R}^4$:

$$U = \{(a, b, c, d) : b + c + d = 0\},\ W=\{(a, b, c, d) : a + b = 0, c = 2d\}$$

Να βρεθεί η διάσταση και μια βάση των (α) U και W και (β) $U \cap W$.

Απαντήσεις

α) Για τα δύο συστήματα διαμορφώνουμε τα αντίστοιχα μητρώα:

$A = [0\ 1\ 1\ 1]$,

$$B=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&-2\end{bmatrix}$$

Είναι dim(U)=dim(N(A))=3 και dim(W)=dim(N(B))=2. Η βάση του U περιέχει τις ειδικές λύσεις του N(A):

null(A) = [$(1, 0, 0, 0)^T$, $(0, -1, 1, 0)^T$, $(0, -1, 0, 1)^T$]

Η βάση του W περιέχει τις ειδικές λύσεις του N(B):

null(B) = [$(-1, 1, 0, 0)^T$, $(0, 0, 2, 1)^T$]

β) Είναι $U \cap W$ = N([B ; A]), όπου:

$$[B;A]=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&-2\\0&1&1&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&1\\0&0&1&-2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&0&-3\\0&1&0&3\\0&0&1&-2\end{bmatrix}$$

Είναι dim($U \cap W$) = dim(N([B ; A])) = 3-rank([B ; A]) = 4 - 3 = 1. Η βάση του $U \cap W$ περιέχει την ειδική λύση του N([B ; A]):

null([B ; A]) = [$(3, -3, 2, 1)^T$]

Σημείωση: Εναλλακτικά εργαζόμαστε ως εξής. Ισχύει:

$$U \cap W = \{ (a, b, c, d) : b + c + d = 0, a + b = 0, c = 2d \} =$$
$$= \{ (a, b, c, d) : b = -3d, a = 3d, c = 2d \} \Rightarrow$$
$$(a, b, c, d) = (3d, -3d, 2d, d) = d(3, -3, 2, 1)^T$$

δηλ. καταλήγουμε και πάλι στο ότι το $\{(3, -3, 2, 1)^T\}$ είναι μια βάση του $U \cap W$ και dim($U \cap W$) = 1.

Άσκηση 2-Υ4

Αν $S = \{(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \mid \alpha + \beta + \gamma = 0\}$ και $T = \{(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \mid \gamma = -\delta\}$ είναι υποχώροι του $\mathbf{R}^4$, να βρεθούν **R**-βάσεις για τα σύνολα $S+T$ και $S \cap T$.

Απ.

α) Οι υποχώροι S, T είναι ίσοι με τους αντίστοιχους μηδενοχώρους. Τα αντίστοιχα μητρώα είναι:

S=N(A), με A=[1, 1, 1, 0]$\in\mathbf{R}^{1\times 4}$

T=N(B), με B=[0, 0, 1, 1]$\in\mathbf{R}^{1\times 4}$

Βρίσκουμε αρχικά τους μηδενοχώρους:

- Προφανώς rank(A)=1 και dim(N(A))=4-1=3. Για β=1, γ=0, δ=0 βρίσκουμε $\boldsymbol{v}_1$=(-1, 1, 0, 0)^T. Για β=0, γ=1, δ=0 είναι $\boldsymbol{v}_2$=(-1, 0, 1, 0)^T. Για β=0, γ=0, δ=1 είναι $\boldsymbol{v}_3$=(0, 0, 0, 1)^T. Άρα μια βάση του S είναι η {$\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$} και dim$S$=3.
- Είναι πάλι rank(B)=1 και dim(N(B))=3. Για a=1, β=0, δ=0 είναι $\boldsymbol{u}_1$=(1, 0, 0, 0)^T. Για a=0, β=1, δ=0: $\boldsymbol{u}_2$=(0, 1, 0, 0)^T. Για a=0, β=0, δ=1: $\boldsymbol{u}_3$=(0, 0, -1, 1)^T. Άρα μια βάση του T είναι η {$\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$} και dim$T$=3.
- Είναι $S\cap T$= N([A; B]). Βρίσκουμε το μηδενοχώρο με απαλοιφή:

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Είναι dim(N([A; B]))=2=dim($S\cap T$). Οι ελεύθερες μεταβλητές είναι οι x_2, x_4. Υπολογίζουμε εύκολα τις ειδικές λύσεις: $\mathbf{s}_1$=(-1, 1, 0, 0)^T, $\mathbf{s}_2$=(1, 0, -1, 1)^T. Άρα το σύνολο {$\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$} αποτελεί $\mathbf{R}$-βάση του υποχώρου $S\cap T$.

- Είναι $S+T$ = <$\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$, $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$>. Για να εντοπίσουμε τα γ.α. διανύσματα, μορφώνουμε το μητρώο D=[$\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$, $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$] και εκτελούμε απαλοιφή:

$$D = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Συνεπώς τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$, $\boldsymbol{u}_1$ είναι γ.α. και άρα συνιστούν μια $\mathbf{R}$-βάση του $S+T$.

Τέλος επαληθεύουμε: dim$S$ + dim$T$ = 3+3 = dim($S+T$) + dim($T\cap S$) = 4+2 = 6.

Άσκηση 2-Υ5

Θεωρούμε τους υποχώρους S και T του $\mathbf{C}^3$:

S = <(1, 1, 0)^T, (i, 1+i, 1)^T, (1+i, 1+i, 0)^T>,

T = <(1, 0, 1)^T, (i, -i, 0)^T, (0, i, i)^T>

α) Να βρεθούν **C**-Βάσεις των S+T και S$\cap$T.

β) Θεωρώντας τους πιο πάνω χώρους ως **R**-χώρους να δειχτεί ότι αν S'και T' είναι οι **R**-υποχώροι που παράγονται από τα παραπάνω σύνολα, τότε S'$\cap$T' = {**0**}.

Απαντήσεις

α) Έστω $\boldsymbol{x}_i$ (i=1,2,3) και $\boldsymbol{y}_i$ (i=1,2,3) τα στοιχεία των S και T αντίστοιχα. Εξετάζουμε τη γ.α. των γεννητόρων του S:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ 1 & 1+i & 1+i \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3=r_3-r_2]{r_2=r_2-r_1} \begin{bmatrix} 1 & i & 1+i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1+i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Άρα τα $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$ είναι γ.ε., ενώ τα $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ είναι γ.α. Επομένως

S = <$\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$>= <$\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$>=<(1, 1, 0)^T, (i, i+1, 1)^T>

Όμοια, για τον υποχώρο T:

$$B=\begin{bmatrix}1&\mathrm{i}&0\\0&-\mathrm{i}&\mathrm{i}\\1&0&\mathrm{i}\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3=r_3-r_1}\begin{bmatrix}1&\mathrm{i}&0\\0&-\mathrm{i}&\mathrm{i}\\0&-\mathrm{i}&\mathrm{i}\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3=r_3-r_2}\begin{bmatrix}1&\mathrm{i}&0\\0&-\mathrm{i}&\mathrm{i}\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow[r_2=\mathrm{i}r_2]{r_1=r_1+r_2}\begin{bmatrix}1&0&\mathrm{i}\\0&1&-1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

Συνεπώς είναι:

$$\mathrm{T} = <\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \boldsymbol{y}_3> = <\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2> = <\boldsymbol{y}_1, \mathrm{i}(1, -1, 0)^{\mathrm{T}}> = <(1, 0, 1)^{\mathrm{T}}, (1, -1, 0)^{\mathrm{T}}>$$

Θέτουμε $D=[\,\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_1, (1, -1, 0)^{\mathrm{T}}]$. Είναι

$$\mathrm{S}\cap\mathrm{T} = \mathrm{N}(D) \text{ και } \mathrm{S}+\mathrm{T} = <\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_1, (1, -1, 0)^{\mathrm{T}}>$$

Εξετάζουμε τη γ.α. των γεννητόρων του S+T βρίσκοντας την κλιμακωτή μορφή του D:

$$D=\begin{bmatrix}1&\mathrm{i}&1&1\\1&1+\mathrm{i}&0&-1\\0&1&1&0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2=r_2-r_1}\begin{bmatrix}1&\mathrm{i}&1&1\\0&1&-1&-2\\0&1&1&0\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3=r_3/2]{r_3=r_3-r_2}\begin{bmatrix}1&\mathrm{i}&1&1\\0&1&-1&-2\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_1=r_1-r_3]{r_2=r_2+r_3}\begin{bmatrix}1&\mathrm{i}&0&0\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1=r_1-\mathrm{i}\,r_2}\begin{bmatrix}1&0&0&\mathrm{i}\\0&1&0&-1\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

Επομένως τα $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_1$ είναι γ.α. Ομοίως γ.α. είναι και τα $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1, (1, -1, 0)^{\mathrm{T}}$. Άρα τα σύνολα $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}_1\}$, $\{\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}_1, (1, -1, 0)^{\mathrm{T}}\}$ αποτελούν **C**-βάσεις του υποχώρου S+T. Είναι dim(S+T : **C**)=3.

Η διάσταση του υποχώρου S$\cap$T είναι ήδη γνωστή:

$$\dim(\mathrm{S}\cap\mathrm{T}) = \dim\mathrm{S} + \dim\mathrm{T} - \dim(\mathrm{S}+\mathrm{T}) = 2+2-3 = 1$$

Αν $\boldsymbol{x}=(x, y, z)^{\mathrm{T}} \in \mathrm{S}\cap\mathrm{T}$, τότε εκφράζεται ως γ.σ. των διανυσμάτων των βάσεων των S και T :

$$\boldsymbol{x} = (x, y, z)^{\mathrm{T}} = a_1(1, 1, 0)^{\mathrm{T}} + a_2(1, 1+\mathrm{i}, 1)^{\mathrm{T}},\ a_1, a_2\in\mathbf{C} \quad (1)$$

$$\boldsymbol{x} = (x, y, z)^{\mathrm{T}} = b_1(1, 0, 1)^{\mathrm{T}} + b_2(1, -1, 0)^{\mathrm{T}},\ b_1, b_2\in\mathbf{C} \quad (2)$$

Η (1) αληθεύει όταν $x = a_1+a_2$, $y=a_1+a_2(1+\mathrm{i})$, $z=a_2$, δηλ. όταν $y = x - z + z(1+\mathrm{i}) = x + \mathrm{i}z$ ή

$$x - y + \mathrm{i}z = 0 \quad (3)$$

Η (2) αληθεύει όταν $x = b_1+b_2$, $y=-b_2$, $z=b_1$, δηλ. όταν $x = z - y$ ή

$$x + y - z = 0 \quad (4)$$

Το S$\cap$T ισούται με το μηδενοχώρο του συστήματος των εξισώσεων (1) και (2). Η z είναι προφανώς ελεύθερη μεταβλητή, οπότε $x=(1/2)(z - \mathrm{i}z)$, $y=(1/2)(z+\mathrm{i}z)$. Θέτοντας $z=1$ λαμβάνουμε την ειδική λύση:

$$\boldsymbol{x} = (1-\mathrm{i}, 1+\mathrm{i}, 2)^{\mathrm{T}}$$

που αποτελεί τη ζητούμενη **C**-βάση του υποχώρου S$\cap$T.

β) Θεωρούμε τώρα τους **R**-χώρους S' και T'. Εύκολα διαπιστώνεται ότι rank(real(A))=2, rank(imag(A))=1. Άρα τα $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$ είναι γ.α. πάνω στο **R** και αποτελούν **R**-βάση του **R**-χώρου S'. Ομοίως προκύπτει ότι τα $\boldsymbol{y}_1$, $\boldsymbol{y}_2$, $\boldsymbol{y}_3$ είναι γ.α. πάνω στο **R** και αποτελούν βάση του **R**-χώρου T'. Άρα είναι dimS'=dimT'=3.

Εύκολα επίσης διαπιστώνεται ότι rank(real([A B]))+rank(imag([A B]))=3+3=6=dim(S'+ T'). Επομένως:

$$\dim(\mathrm{S}'\cap\mathrm{T}') = \dim(\mathrm{S}') + \dim(\mathrm{T}') - \dim(U + W) = 3 + 3 - 6 = 0$$

Άρα S'$\cap$T'=**0**.

Δεύτερη απόδειξη:

Έστω $\boldsymbol{v} \in \mathrm{S}'\cap\mathrm{T}'$. Τότε υπάρχουν $a, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta \in \mathbf{R}$ τέτοια ώστε :

$$\left.\begin{array}{r}\boldsymbol{v}=a(1,\ 1\ ,0)+\beta(\mathrm{i},\ 1+\mathrm{i},\ 1)+\gamma(1+\mathrm{i},\ 1+\mathrm{i},\ 0)\\ \boldsymbol{v}=\varepsilon(1,\ 0\ ,1)+\delta(\mathrm{i},\ -\mathrm{i},\ 0)+\zeta(0,\ \mathrm{i},\ \mathrm{i})\end{array}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r}\boldsymbol{v}=(\alpha+\beta\,\mathrm{i}+\gamma+\gamma\,\mathrm{i},\alpha+\beta+\beta\,\mathrm{i}+\gamma+\gamma\,\mathrm{i},\beta)\\ \boldsymbol{v}=(\delta+\varepsilon\,\mathrm{i},-\varepsilon\,\mathrm{i}+\zeta\,\mathrm{i},\delta+\zeta\,\mathrm{i})\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r}\alpha+\gamma+(\beta+\gamma)\mathrm{i}=\delta+\varepsilon\,\mathrm{i}\\ \alpha+\beta+\gamma+(\beta+\gamma)\mathrm{i}=(-\varepsilon+\zeta)\mathrm{i}\\ \beta=\delta+\zeta\,\mathrm{i}\end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{array}{l}\alpha+\gamma=\delta,\quad \beta+\gamma=\varepsilon,\quad \alpha+\beta+\gamma=0\\ \beta+\gamma=-\varepsilon+\zeta,\quad \beta=\delta,\quad \zeta=0\end{array}$$

Το αντίστοιχο μητρώο του παραπάνω συστήματος είναι προφανώς τάξης 5<6, άρα υπάρχει μόνον η τετριμένη λύση, δηλ $\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$. Επομένως $S'\cap T'=\{\mathbf{0}\}$.

Άσκηση 2-Υ6

Έστω U και W οι παρακάτω υποχώροι του $\mathbf{R}^4$

$U = <(1, 1, 0, -1)^T, (1 ,2, 3, 0)^T, (2, 3, 3, -1)^T>$

$W = <1, 2, 2, -2)^T, (2, 3, 2, -3)^T, (1, 3, 4, -3)^T>$

Να βρεθούν οι διαστάσεις και οι **R**-βάσεις των (α) $U+W$ και (β) $U\cap W$.

Απαντήσεις

α) Αν $\boldsymbol{u}_i$, $\boldsymbol{w}_i$ (i=1,2,3) είναι οι γεννήτορες των U και W αντίστοιχα, τότε $U+W=<\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3>$. Εξετάζουμε τη γ.α. διαμορφώνοντας το μητρώο A με στήλες τα δοθέντα διανύσματα και εφαρμόζοντας απαλοιφή:

$$A=\begin{bmatrix}1&1&2&1&2&1\\1&2&3&2&3&3\\0&3&3&2&2&4\\-1&0&-1&-2&-3&-3\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&2&1&2&1\\0&1&1&1&1&2\\0&3&3&2&2&4\\0&1&1&-1&-1&-2\end{bmatrix}\rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}1&1&2&1&2&1\\0&1&1&1&1&2\\0&0&0&-1&-1&-2\\0&0&0&-2&-2&-4\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&1&2&1&2&1\\0&1&1&1&1&2\\0&0&0&1&1&2\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&1&0&1&-1\\0&1&1&0&0&0\\0&0&0&1&1&2\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

Είναι $\dim(U+W)=\mathrm{rank}(A)=3$ και μια **R**-βάση του $U+W$ είναι η $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{w}_1\}$.

β) Βρίσκουμε πρώτα τις διαστάσεις των U και V. Σχηματίζουμε δύο μητρώα με στήλες τους γεννήτορες των U και W αντίστοιχα και στη συνέχεια υπολογίζουμε τα αντίστοιχα κλιμακωτά μητρώα :

$$U=\begin{pmatrix}1&1&0&-1\\1&2&3&0\\2&3&3&-1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&0&-1\\0&1&3&1\\0&1&3&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&0&-1\\0&1&3&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$W=\begin{pmatrix}1&2&2&-2\\2&3&2&-3\\1&3&4&-3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&2&-2\\0&-1&-2&1\\0&1&2&-1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&2&-2\\0&-1&-2&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Συνεπώς $\mathrm{rank}(U)=2$ και $\mathrm{rank}(W)=2$, άρα $\dim U=\dim W=2$. Επίσης είναι:

$$\dim(U\cap W) = \dim U + \dim W - \dim(U + W) = 2 + 2 - 3 = 1$$

Για την εύρεση της βάσης εργαζόμαστε όπως στην Άσκηση 2-Υ5.

3 ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΚΑΙ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΤΗΤΑ

3.1 Ιδιότητες Εσωτερικού Γινομένου

Άσκηση 3-Ι1

Να βρεθεί η γωνία μεταξύ των εξής ζευγών διανυσμάτων (i) (3, -2, 1) και (1, -1, 1), (ii) (2, 1, -1) και (1, 0, 2)

Απ.

i) Έστω $\boldsymbol{v}=(3, -2, 1)^T$, $\boldsymbol{w}=(1, -1, 1)^T$ και θ η γωνία που σχηματίζουν τα $\boldsymbol{v}$ και $\boldsymbol{w}$. Σύμφωνα με τον τύπο του συνημιτόνου ισχύει

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{v}\|\,\|\boldsymbol{w}\|} = \frac{\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3}{\|\boldsymbol{v}\|\,\|\boldsymbol{w}\|}$$

Εφαρμόζοντας έχουμε

$$\cos\theta = \frac{3\times1+(-2)(-1)+1\times1}{\sqrt{14}\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{42}} = \frac{6\sqrt{42}}{42} = \frac{\sqrt{42}}{7} \Rightarrow \theta = 22.21^0 .$$

ii) Όμοια ισχύει

$$\cos\theta = \frac{2+0-2}{\sqrt{6}\sqrt{5}} = 0 \;\Rightarrow\; \theta = \frac{\pi}{2}.$$

Άσκηση 3-Ι2

Αν $\boldsymbol{u} = (a_1, a_2, a_3)$, $\boldsymbol{v} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)\in\mathbf{R}^3$, ποιές από τις επόμενες απεικονίσεις ορίζουν εσωτερικά γινόμενα επί του $\mathbf{R}^3$;

(α) $<\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}> = a_1\beta_1 + 2a_2\beta_2 + 3a_3\beta_3 + a_1\beta_2 + a_2\beta_1 + a_1\beta_3 + a_3\beta_1 + 2a_2\beta_3 + 2a_3\beta_2$

(β) $<\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}> = a_1\beta_1 + 2a_2\beta_2 + 3a_3\beta_3 + 2a_1\beta_2 + 2a_1\beta_3 + 4a_2\beta_3$

(γ) $<\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}> = a_1\beta_1 + a_3\beta_3 - a_1\beta_2 - a_2\beta_1 - a_1\beta_3 - a_3\beta_1 + a_2\beta_3 + a_3\beta_2$

Απ.

Για κάθε περίπτωση εξετάζουμε αν ικανοποιούνται οι αξιωματικές ιδιότητες (i)-(iv) του εσωτερικού γινομένου.

α) Αν είναι και $\boldsymbol{w} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)\in\mathbf{R}^3$, τότε:

i) $<\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}> = (a_1+\gamma_1)\beta_1 + 2(a_2+\gamma_2)\beta_2 + 3(a_3+\gamma_3)\beta_3 + (a_1+\gamma_1)\beta_2 + (a_2+\gamma_2)\beta_1 + (a_1+\gamma_1)\beta_3 + (a_3+\gamma_3)\beta_1 + 2(a_2+\gamma_2)\beta_3 + 2(a_3+\gamma_3)\beta_2$

$= a_1\beta_1 + \gamma_1\beta_1 + 2a_2\beta_2 + 2\gamma_2\beta_2 + 3a_3\beta_3 + 3\gamma_3\beta_3 + a_1\beta_2 + \gamma_1\beta_2 + a_2\beta_1 + \gamma_2\beta_1 + a_1\beta_3 + \gamma_1\beta_3 + a_3\beta_1 + \gamma_3\beta_1 + 2a_2\beta_3 + 2\gamma_2\beta_3 + 2a_3\beta_2 + 2\gamma_3\beta_2$

$= <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}> + <\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}>$

ii) Αν $a\in\mathbf{R}$, τότε

$$<a\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}> = aa_1\beta_1 + 2aa_2\beta_2 + 3aa_3\beta_3 + aa_1\beta_2 + aa_2\beta_1 + aa_1\beta_3 + aa_3\beta_1 + 2aa_2\beta_3 + 2aa_3\beta_2 = a<\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}>$$

iii) Προφανώς η απεικόνιση είναι συμμετρική ως προς τις παραμέτρους $a_1, a_2, a_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$. Άρα

$<\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}> = <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}> \Rightarrow \overline{<\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}>} = <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}>$.

iv) Για κάθε $\boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^3$ είναι :

$$\begin{aligned} <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}> &= a_1^2 + 2a_2^2 + 3a_3^2 + a_1a_2 + a_2a_1 + a_1a_3 + a_3a_1 + 2a_2a_3 + 2a_3a_2 \\ &= a_1^2 + a_2^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_3^2 + a_3^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + 2a_2a_3 + 2\alpha_2\alpha_3 \\ &= (a_1 + a_2 + a_3)^2 + (a_2 + a_3)^2 + a_3^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Άρα $\forall \boldsymbol{u} \neq 0$ $<\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}> >0$, ενώ $<\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}> =0 \Leftrightarrow a_1=a_2=a_3=0$. Άρα η απεικόνιση ορίζει εσωτερικό γινόμενο.

β) Η δοθείσα απεικόνιση προφανώς δεν είναι συμμετρική ως προς τα ορίσματά της. Για παράδειγμα αν λάβουμε $\boldsymbol{v} =(1, 0, 0)$ και $\boldsymbol{u}=(1, 1, 1)$, είναι $<\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}>=1$ και $< \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} >=5$, δηλ. $\overline{<\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}>} \neq <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}>$, άρα δεν ικανοποιείται η ιδιότητα (iii), επομένως δεν ορίζει εσωτερικό γινόμενο.

γ) Για την $<\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}> = a_1\beta_1 + a_3\beta_3 - a_1\beta_2 - a_2\beta_1 - a_1\beta_3 - a_3\beta_1 + a_2\beta_3 + a_3\beta_3$ είναι:

$$\begin{aligned} <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}> &= a_1^2 + a_3^2 - a_1a_2 - a_2a_1 - a_1a_3 - a_3a_1 + a_2a_3 + a_3a_2 \\ &= a_1^2 + a_3^2 - 2a_1a_2 - 2a_1a_3 + 2a_2a_3 = (a_1 - a_3)^2 - 2a_1a_2 + 2a_2a_3 \\ &= (a_1 - a_3)(a_1 - a_3 - 2a_2) \end{aligned}$$

Είναι φανερό ότι για $a_1<a_3$ και $a_2>(a_1 - a_3)/2$ είναι $<\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}> < 0$, συνεπώς δεν ικανοποιείται η ιδιότητα (iv) και άρα η απεικόνιση δεν ορίζει εσωτερικό γινόμενο.

Άσκηση 3-Ι3

Να εξετασθεί ποια από τα επόμενα βαθμωτά μεγέθη ορίζουν εσωτερικά γινόμενα επί του διανυσματικού χώρου C[1, -1] των πραγματικών συνεχών συναρτήσεων που ορίζονται επί του [1, -1] , όπου $f, g \in$ C[1, -1].

(α) $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$

(β) $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} (1-x^2) f(x)g(x)dx$

(γ) $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} x^2 f(x)g(x)dx$

Απ.

Εξετάζουμε αν ισχύουν οι ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου, μια προς μια.

α) Αν $f, g, h \in$ C[1, -1] και $a \in \mathbf{R}$, τότε :

- Ιδιότητα (i):

$$\begin{aligned} \langle f+h, g \rangle &= \int_{-1}^{1} (f(x)+h(x))g(x)dx = \int_{-1}^{1} (f(x)g(x)+h(x)g(x))dx \\ &= \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx + \int_{-1}^{1} h(x)g(x)dx \\ &= \langle f, g \rangle + \langle h, g \rangle \end{aligned}$$

- Ιδιότητα (ii):

$$\langle af, g \rangle = \int_{-1}^{1} af(x)g(x)dx = a\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx = a\langle f, g \rangle$$

- Ιδιότητα (iii):

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx = \int_{-1}^{1} g(x)f(x)dx = \langle g, f \rangle$$

- Ιδιότητα (iv): Αν $f\neq 0$, τότε ως γνωστόν ισχύει:

$$\langle f, f \rangle = \int_{-1}^{1} \left(f(x)\right)^2 dx > 0$$

β) Ομοίως έχουμε:

- Ιδιότητα (i):

$$\begin{aligned} (f+h, g) &= \int_{-1}^{1} (1-x^2)\left(f(x)+h(x)\right)g(x)dx \\ &= \int_{-1}^{1} (1-x^2)\left(f(x)g(x)+h(x)g(x)\right)dx \end{aligned}$$

$$= \int_{-1}^{1} (1-x^2) f(x) g(x) dx + \int_{-1}^{1} (1-x^2) h(x) g(x) dx$$
$$= \langle f, g \rangle + \langle f, g \rangle$$

- Ιδιότητα (ii):

$$\langle af, g \rangle = \int_{-1}^{1} (1-x^2) af(x) g(x) dx = a \int_{-1}^{1} (1-x^2) f(x) g(x) dx = a \langle f, g \rangle$$

- Ιδιότητα (iii):

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} (1-x^2) f(x) g(x) dx = \int_{-1}^{1} (1-x^2) g(x) f(x) dx = \langle g, f \rangle$$

- Ιδιότητα (iv):

$$\langle f, f \rangle = \int_{-1}^{1} (1-x^2) \big(f(x)\big)^2 dx$$

Αλλά είναι $(f(x))^2(1 - x)^2 \geq 0$, $\forall x \in [-1, 1]$ και $(f(x))^2(1 - x)^2 = 0$ όταν $f=0$. Άρα για $f \neq 0$ είναι $\langle f, f \rangle > 0$ και επομένως ορίζει εσωτερικό γινόμενο.

γ) Ομοίως:

Ιδιότητα (i):

$$\langle f + h, g \rangle = \int_{-1}^{1} x^2 \big(f(x) + h(x)\big) g(x) dx$$
$$= \int_{-1}^{1} \big(x^2 f(x) g(x) + x^2 h(x) g(x)\big) dx$$
$$= \int_{-1}^{1} x^2 f(x) g(x) dx + \int_{-1}^{1} x^2 h(x) g(x) dx$$
$$= \langle f, g \rangle + \langle f, g \rangle$$

Ιδιότητα (ii):

$$\langle af, g \rangle = \int_{-1}^{1} x^2 af(x) g(x) dx \; = a \int_{-1}^{1} x^2 f(x) g(x) dx \; = a \langle f, g \rangle$$

Ιδιότητα (iii):

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} x^2 f(x) g(x) dx = \int_{-1}^{1} x^2 g(x) f(x) dx = \langle g, f \rangle$$

Ιδιότητα (iv):

$$\langle f, f \rangle = \int_{-1}^{1} x^2 (f(x))^2 dx = \int_{-1}^{1} \big(xf(x)\big)^2 dx \geq 0$$

Προφανώς όταν $f \neq 0$ είναι $x^2(f(x))^2 > 0$, $\forall x \in [-1, 1]$. Συνεπώς είναι $\langle f, f \rangle > 0$ για $f \neq 0$ και επομένως το δοθέν μέγεθος ορίζει εσωτερικό γινόμενο.

Άσκηση 3-Ι4

Να υπολογισθούν τα μήκη $\|\boldsymbol{u}\|$, $\|\boldsymbol{v}\|$, $\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|$, η τιμή $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$ και η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\boldsymbol{u}$ και $\boldsymbol{v}$ και να διαπιστωθεί ότι ισχύει η ανισότητα των *Cauchy-Schwarz* και η τριγωνική ανισότητα όπου

(α) $\boldsymbol{u} = (1, 0, 2, -2)^T$ και $\boldsymbol{v} = (2, 1, -2, 0)^T$ είναι στοιχεία του $\mathbf{R}^4$ εφοδιασμένου με το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο.

(β) $\boldsymbol{u} = (1, 0, 2)^T$ και $\boldsymbol{v} = (2, 1, 2)^T$ είναι στοιχεία του $\mathbf{R}^3$ εφοδιασμένου με τα εσωτερικά γινόμενα που ορίζονται στην Άσκηση Γ-2.

(γ) $\boldsymbol{u}=x$ και $\boldsymbol{v}=\cos \pi x$ είναι στοιχεία του C[0, 1] εφοδιασμένου με το τυπικό εσωτερικό γινόμενο.

Απαντήσεις

α) Υπολογίζουμε τα μέτρα των $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ και $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$:

$$\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3$$
$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2 + 0^2} = 3$$

$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (3, 1, 0, -2) \Rightarrow \|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\| = \sqrt{3^2+0+(-2)^2} = \sqrt{14}$

Επίσης είναι :

$<\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}> = \boldsymbol{u}^T\boldsymbol{v} = 2 + 0 - 4 + 0 = -2$, άρα :

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|} = \frac{-2}{3\times 3} = -\frac{2}{9}$$

Άρα η γωνία των $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ είναι θ = arcos(-2/9)*(180/π) = 102.8396^0.

Εξετάζουμε την ισχύ της ανισότητας *Cauchy-Schwarz*:

$$|\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle| = |-2| = 2 \le \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\| = 3\times 3 = 9$$

Για την ισχύ της τριγωνικής ανισότητας έχουμε:

$$\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\| = \sqrt{14} \le \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\| = 3+3=6$$

β) Εφαρμόζοντας το εσωτερικό γινόμενο

$<\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}> = a_1\beta_1 + 2a_2\beta_2 + 3a_3\beta_3 + a_1\beta_2 + a_2\beta_1 + a_1\beta_3 + a_3\beta_1 + 2a_2\beta_3 + 2a_3\beta_2$

υπολογίζουμε τα ζητούμενα μεγέθη για τα $\boldsymbol{u} = (1, 0, 2)^T$, $\boldsymbol{v} = (2, 1, 2)^T$:

$<\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}> = 1^2 + 2\times0^2 + 3\times2^2 + 1\times0 + 0\times1 + 1\times2 + 2\times1 + 2\times0\times2 + 2\times0 = 17 \Rightarrow$

$\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{17}$

$<\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}> = 2^2 + 2\times1^2 + 3\times2^2 + 2\times1 + 1\times2 + 2\times2 + 2\times2 + 2\times1\times2 + 2\times2\times1 = 38 \Rightarrow$

$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{38}$

$\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 = \langle \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\rangle = 3^2 + 2\times1^2 + 3\times4^2 + 3\times1 + 1\times3 + 3\times4 + 4\times3 + 2\times4 + 2\times4\times1 =$

$= 9 + 2 + 48 + 3 + 3 + 12 + 12 + 8 + 8 = 105 \Rightarrow$

$\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\| = \sqrt{105}$

Για τον υπολογισμό της γωνίας έχουμε:

$<\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}> = 1\times2 + 2\times0\times1 + 3\times2\times2 + 1\times1 + 0\times2 + 1\times2 + 2\times2 + 2\times0\times2 + 2\times2\times1 =$

$= 2 + 12 + 1 + 2 + 4 + 4 = 25 \Rightarrow$

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|} = \frac{25}{\sqrt{17}\sqrt{38}} = \frac{25}{\sqrt{646}} \cong 0.9836$$

Άρα η γωνία των $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ είναι θ = arcos(0.9836)*(180/π) = 10.3909^0.

Εξετάζουμε την ανισότητα *Cauchy-Schwarz* :

$$|\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle| = 25 \le \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{17}\times\sqrt{38} \cong 25.4165$$

Κατόπιν την ισχύ της τριγωνικής ανισότητας:

$$\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\| = \sqrt{105} \cong 10.247 \le \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{17}+\sqrt{38} \cong 10.2875$$

γ) Είναι $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ με $f, g \in C[0, 1]$ και θεωρούμε $\boldsymbol{u} = x$ και $\boldsymbol{v} = \cos \pi x$.

Υπολογίζουμε τα μέτρα $\|\boldsymbol{u}\|$, $\|\boldsymbol{v}\|$ και $\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|$:

$$\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{u}\rangle = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{v}\rangle = \int_0^1 cos^2 \pi x dx = \int_0^1 \frac{1-cos2\pi x}{2} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 dx + \frac{1}{2}\int_0^1 cos\pi x dx$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{sin2\pi x}{2\pi}\right]_0^1 = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Είναι $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} = x + cos\ \pi x$. Υπολογίζουμε το μέτρο:

$$\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\|^2 = \langle \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\rangle = \int_0^1 (x+\cos\pi x)^2 dx =$$

$$= \int_0^1 (x^2 + 2xcos^2\pi x)dx = \int_0^1 x^2 + 2\int_0^1 xcos\pi x dx \int_0^1 cos\pi x dx$$

$$= \frac{1}{3} + 2\int_0^1 x\left(\frac{sin\pi x}{\pi}\right)' dx + \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2\left\{\left[x\frac{sin\pi x}{\pi}\right]_0^1 - \int_0^1 (x)' \frac{sin\pi x}{\pi} dx\right\}$$

$$= \frac{5}{6} + 2\left\{1\frac{sin\pi}{2} - 0\frac{sin0}{2} - \frac{1}{\pi}\int_0^1 sin\pi x dx\right\} = \frac{5}{6} + \frac{2}{\pi}\int_0^1 \left(\frac{cos\pi x}{\pi}\right)' dx$$

$$= \frac{5}{6} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{cos\pi}{\pi} - \frac{cos0}{\pi}\right) = \frac{5}{6} + \frac{2}{\pi} \times \frac{-2}{\pi} = \frac{5}{6} - \frac{4}{\pi^2} \Rightarrow$$

$$\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\frac{5}{6} - \frac{4}{\pi^2}}$$

Προχωράμε τώρα στον υπολογισμό της γωνίας:

$$\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle = \int_0^1 xcos\pi x dx = \int_0^1 x\left(\frac{sin\pi x}{\pi}\right)' dx = \left[x\frac{sin\pi x}{\pi}\right]_0^1 - \int_0^1 (x)' \frac{sin\pi x}{\pi} dx$$

$$= 1\frac{sin\pi}{\pi} - 0\frac{sin0}{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_0^1 sin\pi x dx = -\frac{1}{\pi}\int_0^1 sin\pi x dx = -\frac{1}{\pi}\left[-\frac{sin\pi x}{\pi}\right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left(-\frac{cos\pi}{\pi} + \frac{cos0}{\pi}\right) = -\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi}\right) = -\frac{2}{\pi^2} \Rightarrow$$

$$cos\theta = \frac{\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle}{\|\boldsymbol{u}\| \cdot \|\boldsymbol{v}\|} = \frac{-\frac{2}{\pi^2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-\frac{2}{\pi^2}}{\frac{1}{\sqrt{6}}} = -\frac{2\sqrt{6}}{\pi^2}$$

Άρα η γωνία των $\boldsymbol{u}$ και $\boldsymbol{v}$ είναι $\theta \in (\pi/2, \pi)$ τέτοια ώστε συν $\theta = -\frac{2\sqrt{6}}{\pi^2}$. Υπολογίζουμε:

$$\theta = \text{arcos}(-\frac{2\sqrt{6}}{\pi^2})*(180/\pi) = 119.7602^0$$

Επίσης είναι:

$$|\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle| = \left|-\frac{2}{\pi^2}\right| \le \|\boldsymbol{u}\| \times \|\boldsymbol{v}\| = \frac{\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{6} \Leftrightarrow 2\sqrt{6} \le \pi^2$$

Άρα αληθεύει η ανισότητα *Cauchy-Schwarz*.

Τέλος υπολογίζουμε:

$$\|\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\frac{5}{6}-\frac{4}{\pi^2}} \le \|\boldsymbol{u}\|+\|\boldsymbol{v}\| = \frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow -\frac{4}{\pi^2} \le \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Συνεπώς αληθεύει και η τριγωνική ανισότητα.

3.2 Ορθογώνια Διανύσματα

Άσκηση 3-ΟΔ1

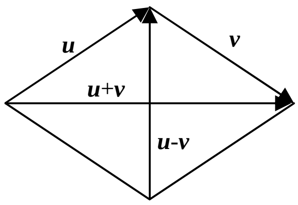
Αν V είναι ένας Ευκλείδιος χώρος και $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in V$ είναι διανύσματα τέτοια ώστε $\|\boldsymbol{u}\| = \|\boldsymbol{v}\|$, να δειχτεί ότι το διάνυσμα $\boldsymbol{u}$-$\boldsymbol{v}$ είναι ορθογώνιο προς το $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$. Τι σημαίνει αυτό για τις διαγωνίους ενός ρόμβου;

Απ.

Για τα διανύσματα $\boldsymbol{u}$-$\boldsymbol{v}$ και $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ σύμφωνα με τις γνωστές ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου έχουμε:

$$\begin{aligned} <\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}> &= <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}> - <\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}> \\ &= <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}> + <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}> - <\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}> - <\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}> \\ &= \|\boldsymbol{u}\|^2 - \|\boldsymbol{u}\|^2 = 0 \end{aligned}$$

Άρα το $\boldsymbol{u}$-$\boldsymbol{v}$ είναι ορθογώνιο προς το $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$. Τα διανύσματα $\boldsymbol{u}$ και $\boldsymbol{v}$, ως έχοντα ίσα μέτρα, ορίζουν τις πλευρές ενός ρόμβου. Τα διανύσματα $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ και $\boldsymbol{u}$-$\boldsymbol{v}$ εκφράζουν τις διαγωνίους του οι οποίες είναι ορθογώνιες. (*Σχήμα* 3.5.1)



Σχήμα 3.5.1 Ορθογωνιότητα διαγωνίων ρόμβου

Άσκηση 3-ΟΔ2

Έστω $S=\{\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_m\}$ είναι ορθογώνιο σύνολο μη μηδενικών διανυσμάτων σε ένα χώρο V εφοδιασμένο με εσωτερικό γινόμενο. Τότε το S είναι γ.α.

Παρακάτω δίνονται μερικές αποδείξεις της πρότασης.

Εναλλακτικές αποδείξεις

● **Διατύπωση 1.** Έστω ότι ένας γ.σ. των $\boldsymbol{x}_i$ είναι $\mathbf{0}$: $c_1\boldsymbol{x}_1+ \ldots +c_m\boldsymbol{x}_m=0$. Πολλαπλασιάζοντας αριστερά με ένα τυχαίο $\boldsymbol{x}_j$ (από ιδιότητα του εσ. γιν.), παίρνουμε για $j=1,\ldots,k$:

$$c_1<\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{x}_1>+\ldots+c_j<\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{x}_j>+\ldots+c_k<\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{x}_m>=0,$$

απ' όπου προκύπτει: $c_j<\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{x}_j>=0$ (ισχύει από την υπόθεση $<\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{x}_m>=0$ όταν $j\neq m$). Επειδή δίνεται $\boldsymbol{x}_j\neq\mathbf{0}$, είναι $<\boldsymbol{x}_j, \boldsymbol{x}_j>\neq 0$. Συνεπώς $c_j=0$. Δηλ. για $j=1,\ldots,m$, είναι $c_j=0$ και επομένως τα $\boldsymbol{x}_i$ είναι γ. α.

● **Διατύπωση 2: Ειδικά για τον Ευκλείδιο χώρο $\mathbf{R}^n$ (με το σύνηθες ευκλείδιο εσωτερικό γινόμενο).**

Έστω ένας γ.σ. $[\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2\ldots\boldsymbol{x}_m]\mathbf{c}=\mathbf{0}$, $\mathbf{c}\in\mathbf{R}^{1\times n}$. Πολλαπλασιάζουμε επί ένα τυχαίο $\boldsymbol{x}_j^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^{1\times n}$, $j=1,\ldots,m$.

$$\boldsymbol{x}_j^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2\ \ldots\ \boldsymbol{x}_m]\mathbf{c}=\boldsymbol{x}_j^{\mathrm{T}}\,\mathbf{0} = 0 \Rightarrow \text{(από ιδιότητα πολλαπλασιασμού μητρώων)}$$

$$[\boldsymbol{x}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_2\ \ldots\ \boldsymbol{x}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_m]\mathbf{c} = [\ 0\ \ldots\|\boldsymbol{x}_j\|^2\ldots 0\ ]\mathbf{c}=0 \Rightarrow$$

$$c_j\|\boldsymbol{x}_j\|^2=0 \Rightarrow c_j=0$$

Επομένως για κάθε j=1,…,m είναι c_j=0 και άρα τα $\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_m$ είναι γ.α.

• **Διατύπωση 3.** Έστω ότι είναι γ. ε. δηλ. υπάρχει διάνυσμα $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$ ώστε $[\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2\ \ldots\ \boldsymbol{x}_m]\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$. Τότε, λόγω της καθετότητας, ισχύει για i=1,…m :

$$\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2\ \ldots\ \boldsymbol{x}_m]\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\ \mathbf{0} = 0$$

δηλ. $[\mathbf{0}\ \ldots\ \boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_i\ \ldots\ \mathbf{0}]\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{x}_i^{T}\boldsymbol{x}_i\, a_i = 0$. Επειδή $\boldsymbol{x}_i\neq\mathbf{0}$, είναι και $\boldsymbol{x}_i^{T}\boldsymbol{x}_i\neq 0$ και άρα $a_i=0$, i=1,…m. Επομένως $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$, που αντίκειται στην υπόθεση $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$. Άρα τα $\boldsymbol{x}_i$ (j=1,…,m) είναι γ. α.

3.3 Ορθοκανονικές Βάσεις - Ορθοκανονικοποίηση

Άσκηση 3-ΟΒ1

α) Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του χώρου $\mathbf{R}^3$ με το εσωτερικό γινόμενο που ορίζεται:

$$<\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}> = a_1\beta_1 + 2a_2\beta_2 + 3a_3\beta_3 + a_1\beta_2 + a_2\beta_1 + a_1\beta_3 + a_3\beta_1 + 2a_2\beta_3 + 2a_3\beta_2$$

όπου $\boldsymbol{u} = (a_1, a_2, a_3)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{v} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)^{\mathrm{T}}$.

β) Να βρεθεί το ορθογώνιο συμπλήρωμα του άξονα των x.

Απ.

Για το παραπάνω εσωτερικό γινόμενο, εφαρμόζουμε τη μέθοδο τη μέθοδο *Gram-Schmidt* στην τυπική βάση $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ του $\mathbf{R}^3$.

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{e}_1 = (1,0,0)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{e}_2 - \frac{\langle \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{u}_1\rangle}{\|\boldsymbol{u}_1\|^2}\boldsymbol{u}_1$$

$$= (0,1,0)^{\mathrm{T}} - \left\langle (0,1,0)^{\mathrm{T}}, (1,0,0)^{\mathrm{T}}\right\rangle (1,0,0)^{\mathrm{T}} = (0,1,0)^{\mathrm{T}} - \frac{1}{1}(1,0,0)^{\mathrm{T}} = (-1,1,0)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{e}_3 - \frac{\langle \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{u}_2\rangle}{\|\boldsymbol{u}_2\|^2}\boldsymbol{u}_2 - \frac{\langle \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{u}_1\rangle}{\|\boldsymbol{u}_1\|^2}\boldsymbol{u}_1$$

$$= (0,0,1)^{\mathrm{T}} - \frac{\left\langle (0,0,1)^{\mathrm{T}}, (-1,1,0)^{\mathrm{T}}\right\rangle}{\left\langle (-1,1,0)^{\mathrm{T}}, (-1,1,0)^{\mathrm{T}}\right\rangle}(-1,1,0)^{\mathrm{T}} - \frac{\left\langle (0,0,1)^{\mathrm{T}}, (1,0,0)^{\mathrm{T}}\right\rangle}{1}(1,0,0)^{\mathrm{T}}$$

$$= (0,0,1)^{\mathrm{T}} - \frac{1}{1}(-1,1,0)^{\mathrm{T}} - \frac{1}{1}(1,0,0)^{\mathrm{T}} = (0,-1,1)^{\mathrm{T}}$$

Τα διανύσματα $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$ είναι ορθογώνια. Υπολογίζουμε επίσης:

$$\|\boldsymbol{u}_3\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_3\rangle} = \sqrt{1} = 1$$

Και τα τρία διανύσματα έχουν μέτρο 1. Επομένως μια ορθοκανονική βάση του χώρου $\mathbf{R}^3$ εφοδιασμένου με το δοθέν εσ. γιν. είναι το σύνολο:

$$\left\{ (1,0,0)^{\mathrm{T}},\ (-1,1,0)^{\mathrm{T}},\ (0,-1,1)^{\mathrm{T}} \right\}$$

β) Αν $\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, a_3)^{\mathrm{T}}$, είναι

$$\begin{aligned} <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_1> &= a_1\times 1 + 2a_2\times 0 + 3a_3\times 0 + a_1\times 0 + a_2\times 1 + a_1\times 0 + a_3\times 1 + 2a_2\times 0 + 2a_3\times 0 \\ &= a_1 + a_2 + a_3 \end{aligned}$$

Επομένως το ζητούμενο ορθογώνιο συμπλήρωμα έχει προφανώς διάσταση 2 και είναι:

$$\mathrm{S} = <\boldsymbol{e}_1>^{\perp} = \{\ \boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, a_3)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^3 \mid\ <\boldsymbol{u}, \boldsymbol{e}_1> = 0\ \} = \{\ \boldsymbol{u} \in \mathbf{R}^3 \mid\ a_1 + a_2 + a_3 = 0\ \}$$

$= <(-1, 0, 1)^T, (-1, 1, 0)^T>$

Παρατήρηση: Αν θεωρήσουμε το γ. α. σύνολο (βάση) $\{(1, 0, 0), (1, 0, -1)^T, (0, 1, -1)^T\}$, τότε καταλήγουμε στη εξής ορθοκανονική βάση:

$$\left\{ (1,0,0)^T, \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T, \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T \right\}$$

αποτελούν ορθοκανονική βάση του $\mathbf{R}^3$.

Άσκηση 3-ΟΒ2

Έστω V ο υποχώρος του C[0, 1] που περιέχει τα πολυώνυμα βαθμού το πολύ 3. Να εφαρμοσθεί η μέθοδος των *Gram-Schmidt* στην **R**-βάση $\{1, x, x^2, x^3\}$ του V.

Απ.

Θέτουμε αρχικά $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{v}_1 = 1$, και στη συνέχεια υπολογίζουμε:

$$\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \frac{\langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{u}_1 \rangle}{\|\boldsymbol{u}_1\|^2}\boldsymbol{u}_1 = x - \int_0^1 x dx = x - \frac{1}{2}$$

$$\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{v}_3 - \frac{\langle \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{u}_2 \rangle}{\langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_2 \rangle}\boldsymbol{u}_2 - \frac{\langle \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{u}_1 \rangle}{\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_1 \rangle}\boldsymbol{u}_1$$

$$= x^2 - \frac{\left\langle x^2, x - \frac{1}{2} \right\rangle}{\left\langle x - \frac{1}{2}, x - \frac{1}{2} \right\rangle}\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{\langle x^2, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} \times 1 \tag{1}$$

Υπολογίζουμε τα εσωτερικά γινόμενα:

$$\langle \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{u}_2 \rangle = \left\langle x^2, x - \frac{1}{2} \right\rangle = \int_0^1 x^2\left(x - \frac{1}{2}\right)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{12}$$

$$\langle \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_2 \rangle = \left\langle x - \frac{1}{2}, x - \frac{1}{2} \right\rangle = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx = \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right)dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$\langle \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{u}_1 \rangle = \langle x^2, 1 \rangle = \int_0^1 x^2 1 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_1 \rangle = \langle 1, 1 \rangle = \int_0^1 1 \times 1 dx = [x]_0^1 = 1$$

Η (1) γίνεται:

$$\boldsymbol{u}_3 = x^2 - \frac{1/12}{1/12}\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{1/3}{1} \times 1 = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

Στο τελευταίο βήμα της υπολογιστικής διαδικασίας λαμβάνουμε:

$$\boldsymbol{u}_4 = \boldsymbol{v}_4 - \frac{\langle \boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{u}_3 \rangle}{\langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_3 \rangle}\boldsymbol{u}_3 - \frac{\langle \boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{u}_2 \rangle}{\langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_3 \rangle}\boldsymbol{u}_2 - \frac{\langle \boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{u}_1 \rangle}{\langle \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_3 \rangle}\boldsymbol{u}_1$$

$$= x^3 - \frac{\left\langle x^3, x^2 - x + \frac{1}{6} \right\rangle}{\left\langle x^2 - x + \frac{1}{6}, x^2 - x + \frac{1}{6} \right\rangle}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) - \frac{\left\langle x^3, x - \frac{1}{2} \right\rangle}{\left\langle x - \frac{1}{2}, x - \frac{1}{2} \right\rangle}\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{\langle x^3, 1 \rangle}{\langle 1, 1 \rangle} \times 1 \tag{2}$$

Τώρα για την (2) υπολογίζουμε :

$$\langle \boldsymbol{v}_4,\boldsymbol{u}_3\rangle = \left\langle x^3,\ x^2 - x + \frac{1}{6}\right\rangle = \int_0^1 x^3\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)dx = \int_0^1 \left(x^5 - x^4 + \frac{1}{6}x^3\right)dx =$$
$$= \left[\frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{24}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{5} + \frac{1}{24} = \frac{1}{120} \tag{3}$$

$$\langle \boldsymbol{v}_4,\boldsymbol{u}_2\rangle = \left\langle x^3,\ x - \frac{1}{2}\right\rangle = \int_0^1 \left(x^4 - \frac{1}{2}x^3\right)dx = \left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{8}\right]_0^1 = \frac{3}{40} \tag{4}$$

$$\langle \boldsymbol{u}_3,\boldsymbol{u}_3\rangle = \left\langle x^2 - x + \frac{1}{6},\ x^2 - x + \frac{1}{6}\right\rangle = \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)^2 dx = \frac{1}{180} \tag{5}$$

$$\langle \boldsymbol{v}_4,\boldsymbol{u}_1\rangle = \langle x^3,\ 1\rangle = \int_0^1 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4} \tag{6}$$

Από τις (3),(4),(5),(6) η (2) γίνεται:

$$\boldsymbol{u}_4 = x^3 - \frac{1/120}{1/180}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) - \frac{3/40}{1/12}\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{1/4}{1}\times 1 =$$
$$= x^3 + \frac{3}{2}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) - \frac{9}{10}\left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} =$$
$$= x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{6}{10}x - \frac{1}{20}$$

Το σύνολο $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4\}$ είναι ορθογώνιο, με μήκη

$$\|\boldsymbol{u}_1\| = \sqrt{\langle 1, 1\rangle} = 1,$$
$$\|\boldsymbol{u}_2\| = \sqrt{\left\langle x - \frac{1}{2}, x - \frac{1}{2}\right\rangle} = \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{1}{2\sqrt{3}},$$
$$\|\boldsymbol{u}_3\| = \sqrt{\frac{1}{180}} = \frac{1}{6\sqrt{5}},$$
$$\|\boldsymbol{u}_4\|^2 = \langle \boldsymbol{u}_4,\boldsymbol{u}_4\rangle = \int_0^1 \left(x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{6}{10}x - \frac{1}{20}\right)^2 dx$$
$$= \left[x^7/7 + 3x^6/2 + 429x^5/100 + 53x^4/40 - 3x^3/100 - 3x^2/100 + x/400\right]_0^1$$
$$= \frac{20161}{2800} \Rightarrow$$
$$\|\boldsymbol{u}_4\| = \sqrt{\frac{20161}{2800}} = \sqrt{7.2004} \cong 2.6833$$

Άρα η ζητούμενη ορθοκανονική βάση είναι:

$$\left\{\boldsymbol{u}_1,\ 2\sqrt{3}\boldsymbol{u}_2,\ 6\sqrt{5}\boldsymbol{u}_3,\ 0.3727\boldsymbol{u}_4\right\}$$

Άσκηση 3-ΟΒ3

(α) Αν το σύνολο $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση για ένα χώρο V με εσωτερικό γινόμενο, να δειχτεί ότι κάθε διάνυσμα $\boldsymbol{v}\in V$ μπορεί να εκφραστεί ως προς τη βάση αυτή ως ο γ.σ.

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} \langle \boldsymbol{v},\boldsymbol{v}_i\rangle \boldsymbol{v}_i$$

Με τη βοήθεια της παραπάνω έκφρασης

(β) Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση του $\mathbf{C}^3$ και να ορισθούν ως προς αυτή τη βάση οι συντεταγμένες του διανύσματος $(1, \mathrm{i}, -\mathrm{i})^{\mathrm{T}}$.

(γ) Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση για τον υποχώρο του C[0, 1] που περιέχει τα πολυώνυμα βαθμού το πολύ 2 και να ορισθούν ως προς αυτή τη βάση οι συντεταγμένες των πολυωνύμων $x^2 + 1$ και $x^2 - x + 1$.

Απαντήσεις

α) Έστων $\boldsymbol{v} \in V$. Τότε το $\boldsymbol{v}$ γράφεται $\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i \boldsymbol{v}_i$. Τα εσωτερικά γινόμενα $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_i \rangle$ (i=1,…,n) γράφονται:

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_i \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} a_j \boldsymbol{v}_j , \boldsymbol{v}_i \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} a_j \langle \boldsymbol{v}_j , \boldsymbol{v}_i \rangle = \sum_{j=1}^{n} a_j \delta_{ij} = a_i$$

και συνεπώς:

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_i \rangle \boldsymbol{v}_i \qquad (1)$$

Διατυπώνουμε λοιπόν το βασικό συμπέρασμα:

Τα εσωτερικά γινόμενα $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}_i \rangle$ *(i=1,…,n) εκφράζουν τις συντεταγμένες κάθε διανύσματος* $\boldsymbol{v}$ *του χώρου* V *ως προς μια ορθοκανονική βάση* $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$.

α) Η τυπική βάση $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ του $\mathbf{C}^3$ είναι προφανώς ορθοκανονική. Σύμφωνα με την (1) οι συντεταγμένες του $(1, \mathrm{i}, -\mathrm{i})^{\mathrm{T}}$ ως προς τη βάση αυτή δίνονται από τα εσωτερικά γινόμενα:

$a_1 = \langle (1, \mathrm{i}, -\mathrm{i}), \boldsymbol{e}_1 \rangle = 1$
$a_2 = \langle (1, \mathrm{i}, -\mathrm{i}), \boldsymbol{e}_2 \rangle = \mathrm{i}$
$a_3 = \langle (1, \mathrm{i}, -\mathrm{i}), \boldsymbol{e}_3 \rangle = -\mathrm{i}$

β) Το σύνολο $\{ \boldsymbol{p}_0 = 1, \boldsymbol{p}_1 = x, \boldsymbol{p}_2 = x^2 \}$ είναι μια $\mathbf{R}$-βάση του υποχώρου $\mathrm{P}_n(\mathbf{R})$ των πολυωνύμων βαθμού ≤ 2. Για τον καθορισμό μιας ορθοκανονικής βάσης του $\mathrm{P}_n(\mathbf{R})$ εφαρμόζουμε τη μέθοδο *Gram-Schmidt*:

$\boldsymbol{g}_0 = \boldsymbol{p}_0 = 1$

$$\boldsymbol{g}_1 = \boldsymbol{p}_1 - \frac{(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_0)}{\|\boldsymbol{p}_o\|^2} \boldsymbol{p}_0 = x - \frac{\int_0^1 x dx}{\int_0^1 dx} \cdot 1 = x - \frac{\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1}{[x]_0^1} = x - \frac{\frac{1}{2}}{1} = x - \frac{1}{2}$$

$$\boldsymbol{g}_2 = \boldsymbol{p}_2 - \frac{(\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{g}_1)}{\|\boldsymbol{g}_1\|^2} \boldsymbol{g}_1 - \frac{(\boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{g}_0)}{\|\boldsymbol{g}_0\|^2} \boldsymbol{g}_0 =$$

$$= x^2 - \frac{\int_0^1 x^2 \left(x - \frac{1}{2}\right) dx}{\int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx} \boldsymbol{g}_1 - \frac{\int_0^1 x^2 dx}{\int_0^1 1 dx} \boldsymbol{g}_0 = x^2 - \frac{\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{6}\right]_0^1}{\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1} \boldsymbol{g}_{11} - \frac{\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1}{[x]_0^1} =$$

$$= x^2 - \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{6}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}} \left(x - \frac{1}{2}\right) - \frac{\frac{1}{3}}{1} = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

Άρα το σύνολο

$$\left\{1, \left(x - \frac{1}{2}\right), \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)\right\}$$

είναι ορθογώνιο. Ήδη έχουμε υπολογίσει τα μέτρα:

$$\|g_0\|^2 = \int_0^1 1dx = [x]_0^1 = 1$$

$$\|g_1\|^2 = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{12}$$

Ακόμη είναι

$$\|g_2\|^2 = \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)^2 dx = \int_0^1 \left(x^4 - 2x^3 + \frac{8}{6}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{36}\right)dx =$$

$$= \left[\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{4}x^4 + \frac{8}{18}x^3 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{36}x\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{4}{9} - \frac{1}{6} + \frac{1}{36} = \frac{1}{180}$$

Άρα η ζητούμενη ορθοκανονική βάση είναι :

$$B = \left\{1,\ \sqrt{12}\left(x - \frac{1}{2}\right),\ \sqrt{180}\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)\right\}$$

Οι συντεταγμένες του x^2+1 ως προς τη βάση B είναι :

$$[x^2 + 1]_B = \left(\left\langle x^2 + 1,\ \boldsymbol{g}_0\right\rangle,\ \left\langle x^2 + 1,\ \boldsymbol{g}_1\right\rangle,\ \left\langle x^2 + 1,\ \boldsymbol{g}_2\right\rangle\right)$$

όπου:

$$\left\langle x^2 + 1,\ \boldsymbol{g}_0\right\rangle = \int_0^1 \left(x^2 + 1\right) \times 1dx = \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_0^1 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$$

$$\left\langle x^2 + 1,\ \boldsymbol{g}_1\right\rangle = \int_0^1 \left(x^2 + 1\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)dx = \frac{1}{12}$$

$$\left\langle x^2 + 1,\ \boldsymbol{g}_2\right\rangle = \int_0^1 \left(x^2 + 1\right)\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)dx = \frac{1}{180}$$

δηλ.

$$[x^2 + 1]_B = \left(\frac{4}{3}, \frac{1}{12}, \frac{1}{180}\right)$$

Για το πολυώνυμο $x^2 - x + 1$ δουλεύουμε με ανάλογο τρόπο:

$$[x^2 - x + 1]_B = (\langle x^2 - x + 1, \boldsymbol{g}_0\rangle, \langle x^2 - x + 1, \boldsymbol{g}_1\rangle, \langle x^2 - x + 1, \boldsymbol{g}_2\rangle)$$

$$= \left(\int_0^1 \left(x^2 - x + 1\right)dx,\ \int_0^1 \left(x^2 - x + 1\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)dx,\ \int_0^1 \left(x^2 - x + 1\right)\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)dx \right)$$

Υπολογίζοντας διαδοχικά τα παραπάνω ολοκληρώματα, βρίσκουμε:

$$\int_0^1 \left(x^2 - x + 1\right)dx = \frac{5}{6}$$

$$\int_0^1 \left(x^2 - x + 1\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) dx = 0$$

$$\int_0^1 \left(x^2 - x + 1\right)\left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) dx = \frac{1}{180}$$

Συνεπώς οι συντεταγμένες του πολυωνύμου $x^2 - x + 1$ ως προς τη βάση B είναι:

$$[x^2 - x + 1]_B = \left(\frac{5}{6},\ 0,\ \frac{1}{180}\right)$$

Άσκηση 3-ΟΒ4

Να δειχθεί ότι τα διανύσματα ημπx, ημ$2\pi x$, … , ημ$n\pi x$ του C[0,1] είναι ορθογώνια μεταξύ τους. Να ορισθεί από τα διανύσματα αυτά ένα ορθοκανονικό σύνολο συναρτήσεων.

Απ.

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f_1(x)$=ημ$k_1\pi x$ και $f_2(x)$=ημ$k_2\pi x$ για k_1, $k_2 \in \mathrm{N}^*$ με $k_1 \neq k_2$. Θα δείξουμε ότι είναι ορθογώνιες δηλ. ότι το εσωτερικό τους γινόμενο είναι μηδέν. Θεωρούμε το τυπικό εσωτερικό γινόμενο που ορίζεται στο χώρο C[0, 1]:

$$\langle \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2 \rangle = \int_0^1 f_1(x)\, f_2(x)\mathrm{dx}$$

Εφαρμόζοντας έχουμε:

$$\langle \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2 \rangle = \int_0^1 \text{ημ}(k_1\pi x)\text{ημ}(k_2\pi x)dx = \frac{1}{2}\int_0^1 2\text{ημ}(k_1\pi x)\ \text{ημ}(k_2\pi x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\text{συν}(k_1\pi x\text{-}k_2\pi x) - \text{συν}(k_1\pi x\text{-}k_2\pi x)\right]dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \text{συν}(k_1 - k_2)\pi x\, dx - \frac{1}{2}\int_0^1 \text{συν}(k_1 + k_2)\pi x\, dx$$

$$= \frac{1}{2\pi(k_1 - k_2)}\int_0^1 \text{συν}(k_1 - k_2)\pi x\, d[(k_1 - k_2)\pi x] - \frac{1}{2\pi(k_1 + k_2)}\int_0^1 \text{συν}(k_1 + k_2)\pi x\, d[(k_1 + k_2)\pi x]$$

$$= \left[\frac{1}{2\pi(k_1 - k_2)}\text{ημ}(k_1 - k_2)\pi x\right]_0^1 - \left[\frac{1}{2\pi(k_1 + k_2)}\text{ημ}(k_1 + k_2)\pi x\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2\pi(k_1 - k_2)}\text{ημ}(k_1 - k_2)\pi - \frac{1}{2\pi(k_1 - k_2)}\text{ημ}\,0 - \frac{1}{2\pi(k_1 + k_2)}\text{ημ}(k_1 - k_2)\pi + \frac{1}{2\pi(k_1 + k_2)}\text{ημ}\,0$$

Παρατηρούμε επίσης ότι προφανώς είναι $k_1 + k_2 \neq 0$.

Επειδή είναι

$$\frac{1}{2\pi(k_1 + k_2)}\text{ημ}(k_1 + k_2)\pi = \frac{1}{2\pi(k_1 - k_2)}\text{ημ}(k_1 - k_2)\pi = 0$$

προκύπτει $\langle \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2 \rangle = 0$, συνεπώς το σύνολο { ημ$\pi x$, ημ$2\pi x$, … , ημ$n\pi x$ }, $n \in \mathrm{N}^*$, είναι ορθογώνιο.

Τέλος, κανονικοποιούμε:

$$\langle \text{ημ}(n\pi x), \text{ημ}(n\pi x) \rangle = \int_0^1 \text{ημ}^2(n\pi x)dx = \int_0^1 \frac{1 - \text{συν}(2n\pi x)}{2}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 dx - \frac{1}{2}\int_0^1 \text{συν}(2n\pi x)dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2n\pi}\text{ημ}(2n\pi x)\right]_0^0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4n\pi}[\text{ηημ}2n\pi) - \text{ημ}\,0] = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\|\text{ημ}(n\pi x)\| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Άρα το ζητούμενο ορθοκανονικό σύνολο είναι :

$$\left\{\frac{2}{\sqrt{2}}\eta\mu(\pi x), \frac{2}{\sqrt{2}}\eta\mu(2\pi x), \ldots, \frac{2}{\sqrt{2}}\eta\mu(n\pi x)\right\},\ n \in \mathrm{N}^*$$

Άσκηση 3-ΟΒ5

Να εφαρμοσθεί η μέθοδος των *Gram-Schmidt* για να ορθοκανονικοποιηθούν τα εξής σύνολα:

α) { (1, -1, 1), (2, 1, 1), (1, 0, 1) } στον $\mathbf{R}^3$ ($V_3(\mathbf{R})$)

β) { (1, -1, 1, 1), (0, 1, 0, 1), (2, -1, 1, 1) } στον $\mathbf{R}^4$ ($V_4(\mathbf{R})$)

γ) { (1, -1, i), (i, 1, 2) } στον $V_3(\mathbf{C})$

Απ.

α) Τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1$=(1, -1, 1), $\boldsymbol{v}_2$=(2, 1, 1), $\boldsymbol{v}_3$=(1, 0, 1), αποτελούν βάση του χώρου $\mathbf{R}^3$, αφού είναι γ.α. :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο *Gram-Schmidt* για τη βάση αυτή έχουμε:

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{v}_1 = (1,-1,1)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \frac{\langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{u}_1 \rangle}{\|\boldsymbol{u}_1\|^2}\boldsymbol{u}_1$$

$$\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{v}_3 - \frac{\langle \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{u}_2 \rangle}{\|\boldsymbol{u}_2\|^2}\boldsymbol{u}_2 - \frac{\langle \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{u}_1 \rangle}{\|\boldsymbol{u}_1\|^2}\boldsymbol{u}_1$$

Υπολογίζουμε διαδοχικά τα εμπλεκόμενα μεγέθη:

$$\|\boldsymbol{u}_1\|^2 = 3$$

$$\langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{u}_1 \rangle = \boldsymbol{v}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_1 = [2,1,1][1,-1,1]^{\mathrm{T}} = 2$$

$$\boldsymbol{u}_2 = [2,1,1]^{\mathrm{T}} - \frac{2}{3}[1,-1,1]^{\mathrm{T}} = \frac{1}{3}[4,5,1]^{\mathrm{T}}$$

$$\|\boldsymbol{u}_2\|^2 = \frac{1}{9}(16+25+1) = \frac{14}{3}$$

$$\langle \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{u}_2 \rangle = \frac{1}{3}(1,0,1)\,(4,5,1)^{\mathrm{T}} = \frac{5}{3}$$

$$\langle \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{u}_1 \rangle = (1,0,1)\,(1,-1,1)^{\mathrm{T}} = 2$$

$$\boldsymbol{u}_3 = [1,0,1]^{\mathrm{T}} - \frac{5/3}{14/3}\times\frac{1}{3}(4,5,1)^{\mathrm{T}} - \frac{2}{3}(1,-1,1)^{\mathrm{T}} = \frac{1}{14}(-2,1,3)^{\mathrm{T}}$$

Επομένως το σύνολο

$$\left\{ \boldsymbol{u}_1 = (1,-1,1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{3}(4,5,1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{u}_3 = \frac{1}{14}(-2,1,3)^{\mathrm{T}} \right\}$$

είναι ορθογώνιο. Στη συνέχεια κανονικοποιούμε διαιρώντας με τα μέτρα:

$$\|\boldsymbol{u}_1\| = \sqrt{3},\ \ \|\boldsymbol{u}_2\| = \frac{\sqrt{42}}{3},\ \ \|\boldsymbol{u}_3\| = \frac{\sqrt{14}}{14}$$

Συνεπώς το ζητούμενο σύνολο

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^T, \frac{1}{\sqrt{42}}(4,5,1)^T, \frac{1}{\sqrt{14}}(-2,1,3)^T \right\}$$

αποτελεί ορθοκανονική βάση **R**-βάση του $\mathbf{R}^3$.

β) Εύκολα διαπιστώνουμε ότι τα διανύσματα

$\boldsymbol{v}_1 = (1, -1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{v}_2 = (0, 1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{v}_3 = (2, -1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$

είναι γ. α. Το ζητούμενο ορθοκανονικό σύνολο $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ θα αποτελεί ορθοκανονική βάση του παραγόμενου υποχώρου $V=<\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3>$ του $\mathbf{R}^4$. Παρατηρούμε άμεσα ότι $\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_2=0$ και $\boldsymbol{v}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_3=0$, άρα τα ζεύγη των διανυσμάτων $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ και $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ είναι ορθογώνια μεταξύ τους. Τα $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_3$ δεν είναι ορθογώνια, αφού $\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_3\neq 0$. Συνεπώς, τα δύο πρώτα διανύσματα αποτελούν στοιχεία του ζητούμενου ορθογωνίου συνόλου:

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{v}_1 = (1, -1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{v}_2 = (0, 1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$$

ενώ το τρίτο προκύπτει από τη σχέση:

$$u_3 = \boldsymbol{v}_3 - \frac{\langle \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{u}_2 \rangle}{\|\boldsymbol{u}_2\|^2}\boldsymbol{u}_2 - \frac{\langle \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{u}_1 \rangle}{\|\boldsymbol{u}_1\|^2}\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{v}_3 - \frac{\langle \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{u}_1 \rangle}{\|\boldsymbol{u}_1\|^2}\boldsymbol{u}_1$$

Υπολογίζουμε:

$$\langle \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{u}_1 \rangle = \boldsymbol{v}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_1 = (2, -1, 1, 1)(1, -1, 1, 1)^{\mathrm{T}} = 5$$
$$\|\boldsymbol{u}_1\|^2 = \boldsymbol{u}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_1 = 4$$

Συνεπώς είναι:

$$\boldsymbol{u}_3 = (2, -1, 1, 1)^{\mathrm{T}} - \frac{5}{4}(1, -1, 1, 1)^{\mathrm{T}} = \frac{1}{4}(3, 1, -1, -1)^{\mathrm{T}}.$$

Το ορθογώνιο σύνολο λοιπόν είναι

$$\{\boldsymbol{u}_1 = (1, -1, 1, 1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{u}_2 = (0, 1, 0, 1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{u}_3 = \frac{1}{4}(3, 1, -1, -1)^{\mathrm{T}}\}$$

Τα μήκη των διανυσμάτων που υπολογίσθηκαν είναι

$$\|\boldsymbol{u}_1\| = 2,\ \|\boldsymbol{u}_2\| = \sqrt{2},\ \|\boldsymbol{u}_3\| = \frac{\sqrt{12}}{4}.$$

Άρα το ζητούμενο ορθοκανονικό σύνολο του $V_4(\mathbf{R})$ είναι

$$\left\{\frac{1}{2}(1, -1, 1, 1),\ \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 0, 1),\ \frac{4}{\sqrt{12}}(3, 1, -1, -1)\right\}$$

γ) Τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1 = (1, -1, \mathrm{i})^{\mathrm{T}}$ και $\boldsymbol{v}_2 = (\mathrm{i}, 1, 2)^{\mathrm{T}}$ είναι γ. α. αφού το αντίστοιχο μητρώο έχει τάξη 2:

$$\begin{bmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ -1 & 1 \\ \mathrm{i} & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ 0 & 1-\mathrm{i} \\ 0 & 2+1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ 0 & 1-\mathrm{i} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Εφαρμόζουμε τη μέθοδο *Gram-Schmidt*, καθορίζοντας ορθογώνια διανύσματα $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$:

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{v}_1 = (1, -1, \mathrm{i})^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \frac{\langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{u}_1 \rangle}{\|\boldsymbol{u}_1\|^2}\boldsymbol{u}_1$$

Υπολογίζουμε τα απαιτούμενα μεγέθη εφαρμόζοντας το τυπικό εσωτερικό γινόμενο για το χώρο C-χώρο $V_3(\mathbf{C})$:

$$\langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{u}_1 \rangle = \boldsymbol{u}_1^* \boldsymbol{v}_2 = [1, \text{-}1, \mathrm{i}]^* \begin{bmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = [1, -1, -\mathrm{i}][\mathrm{i}, 1, 2]^{\mathrm{T}} = \mathrm{i} - 1 - 2\mathrm{i} = -1 - \mathrm{i}$$

$$\|\boldsymbol{u}_1\|^2 = \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_1 \rangle = \boldsymbol{u}_1^* \boldsymbol{u}_1 = [1, \text{-}1, \text{-}\mathrm{i}][1, \text{-}1, \mathrm{i}]^{\mathrm{T}} = 1 + 1 + 1 = 3$$

Αντικαθιστώντας βρίσκουμε:

$$\boldsymbol{u}_2 = (\mathrm{i}, 1, 2)^{\mathrm{T}} + \frac{1+\mathrm{i}}{3}(1, \text{-}1, \mathrm{i})^{\mathrm{T}} = \frac{1}{3}(1 + 4\mathrm{i}, 2 - \mathrm{i}, 5 + i)^{\mathrm{T}}$$

Το σύνολο

$$\{ \boldsymbol{u}_1 = (1, \text{-}1, \mathrm{i})^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{3}(1 + 4\mathrm{i}, 2 - \mathrm{i}, 5 + i)^{\mathrm{T}} \}$$

είναι ορθογώνιο. Κανονικοποιώντας τα παραπάνω διανύσματα έχουμε

$$\|\boldsymbol{u}_1\| = \sqrt{3},$$

$$\|\boldsymbol{u}_2\| = \frac{1}{3}\sqrt{17 + 5 + 26} = \frac{1}{3}\sqrt{48} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

Άρα το ζητούμενο ορθοκανονικό σύνολο είναι :

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, \ \mathrm{i}), \ \frac{1}{4\sqrt{3}}(1 + 4\mathrm{i}, 2 - \mathrm{i}, 5 + i)^{\mathrm{T}} \right\}.$$

Το σύνολο αυτό αποτελεί ορθοκανονική βάση του υπόχωρου $V = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$ του $V_3(\mathbf{C})$.

Άσκηση 3-ΟΒ6

Να εφαρμοστεί η μέθοδος των *Gram-Schmidt* για την $\mathbf{R}$-βάση $\{1, x, x^2, x^3\}$ όπου το εσωτερικό γινόμενο ορίζεται ως $\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \rangle = \int_{-1}^{1} (1 - x^2) f(x) g(x) dx$

Απ.

Το σύνολο $\{\boldsymbol{f}_0 = 1, \ \boldsymbol{f}_1 = x, \ \boldsymbol{f}_2 = x^2, \ \boldsymbol{f}_3 = x^3\}$ είναι η τυπική $\mathbf{R}$-βάση του V. Με τη μέθοδο των *Gram-Schmidt* υπολογίζουμε το ορθογώνιο σύνολο διανυσμάτων $\{\boldsymbol{g}_0, \boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3\}$ ως εξής :

$$\boldsymbol{g}_0 = \boldsymbol{f}_0 = 1$$

$$\boldsymbol{g}_1 = \boldsymbol{f}_1 - \frac{\langle \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{g}_0 \rangle}{\langle \boldsymbol{g}_0, \boldsymbol{g}_0 \rangle} \boldsymbol{g}_0 \tag{1}$$

$$\boldsymbol{g}_2 = \boldsymbol{f}_2 - \frac{\langle \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{g}_1 \rangle}{\langle \boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_1 \rangle} \boldsymbol{g}_1 - \frac{\langle \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{g}_0 \rangle}{\langle \boldsymbol{g}_0, \boldsymbol{g}_0 \rangle} \boldsymbol{g}_0 \tag{2}$$

$$\boldsymbol{g}_3 = \boldsymbol{f}_3 - \frac{\langle \boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{g}_2 \rangle}{\langle \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_2 \rangle} \boldsymbol{g}_2 - \frac{\langle \boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{g}_1 \rangle}{\langle \boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_1 \rangle} \boldsymbol{g}_1 - \frac{\langle \boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{g}_0 \rangle}{\langle \boldsymbol{g}_0, \boldsymbol{g}_0 \rangle} \boldsymbol{g}_0 \tag{3}$$

Εφαρμόζοντας τώρα το δοθέν εσωτερικό γινόμενο

$$\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{g} \rangle = \int_{-1}^{1} (1 - x^2) f(x) g(x) dx$$

υπολογίζουμε:

$$\langle \boldsymbol{f}_0, \boldsymbol{f}_0 \rangle = \int_{-1}^{1}(1-x^2) f_0^2(x) dx = \int_{-1}^{1}(1-x^2) dx = \frac{4}{3}$$

$$\langle \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_0 \rangle = \int_{-1}^{1}(1-x^2) f_1(x) f_0(x) dx = \int_{-1}^{1}(1-x^2) x dx = 0$$

Αντικαθιστούμε στην (1) και :

$$\boldsymbol{g}_1 = x - 0 = x \Rightarrow \boldsymbol{g}_1 = x$$

$$\langle \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{g}_1 \rangle = \int_{-1}^{1}(1-x^2) f_2(x) g_1(x) dx = \int_{-1}^{1}(1-x^2) x^2 x dx = 0$$

$$\langle \boldsymbol{f}_2, \boldsymbol{g}_0 \rangle = \int_{-1}^{1}(1-x^2) f_2(x) g_0(x) dx = \int_{-1}^{1}(1-x^2) x^2 dx = \frac{4}{15}$$

$$\langle \boldsymbol{g}_0, \boldsymbol{g}_0 \rangle = \int_{-1}^{1}(1-x^2) g_0^2(x) dx = \int_{-1}^{1}(1-x^2) dx = \frac{4}{3}$$

$$\langle \boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_1 \rangle = \int_{-1}^{1}(1-x^2) g_1(x) g_1(x) dx = \int_{-1}^{1}(1-x^2) x^2 dx = \frac{4}{15}$$

Η (2) έτσι γίνεται:

$$g_2(x) = x^2 - 0 - \frac{4}{15} \times \frac{3}{4} \times 1 = x^2 - \frac{1}{5}$$

Υπολογίζουμε στη συνέχεια τα εσωτερικά γινόμενα:

$$\langle \boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{g}_2 \rangle = \int_{-1}^{1}(1-x^2) f_3(x) g_2(x) dx = \int_{-1}^{1}(1-x^2) x^3 \left(x^2 - \frac{1}{15}\right) dx = 0$$

$$\langle \boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{g}_1 \rangle = \int_{-1}^{1}(1-x^2) f_3(x) g_1(x) dx = \int_{-1}^{1}(1-x^2) x^3 x \, dx = \frac{4}{35}$$

$$\langle \boldsymbol{f}_3, \boldsymbol{g}_0 \rangle = \int_{-1}^{1}(1-x^2) f_3(x) g_0(x) dx = \int_{-1}^{1}(1-x^2) x^3 dx = 0$$

$$\langle \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_2 \rangle = \int_{-1}^{1}(1-x^2) g_2^2(x) dx = \int_{-1}^{1}(1-x^2)\left(x^2 - \frac{1}{5}\right)^2 dx = \frac{32}{525}$$

Αντικαθιστώντας στην (3) λαμβάνουμε:

$$\boldsymbol{g}_3(x) = x^3 - \frac{3}{7}$$

Κανονικοποιούμε τέλος το ορθογώνιο σύνολο $\{\boldsymbol{g}_0, \boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3\}$ που προέκυψε, υπολογίζοντας και το μέτρο του $\boldsymbol{g}_3$.

$$\langle \boldsymbol{g}_0, \boldsymbol{g}_0 \rangle = \frac{4}{3},$$

$$\langle \boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_1 \rangle = \frac{4}{15},$$

$$\langle \boldsymbol{g}_3, \boldsymbol{g}_3 \rangle = \int_{-1}^{1}(1-x^2) g_3^2(x) dx = \int_{-1}^{1}(1-x^2)\left(x^3 - \frac{3}{7}\right)^2 dx = \frac{952}{3087}$$

Συνεπώς η ζητούμενη ορθοκανονική βάση είναι :

$$\left\{\sqrt{\frac{3}{4}},\ \sqrt{\frac{15}{4}}x,\ \sqrt{\frac{525}{32}}\left(x^2-\frac{1}{5}\right),\ \sqrt{\frac{3087}{952}}\left(x^3-\frac{3}{7}\right)\right\}$$

Άσκηση 3-ΟΒ7

Να επεκταθούν σε μια ορθοκανονική βάση τα εξής σύνολα

(α) $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), (0,1,0)\right\}$ για τον $\mathbf{R}^3$

(β) $\left\{\frac{1}{2}(1, \mathrm{i}, 1, \mathrm{i}),\ \frac{1}{2}(\mathrm{i}, 1, \mathrm{i}, 1)\right\}$ για τον $V_4(\mathbf{C})$.

Απ.

α) Το δοθέν σύνολο δείχνεται εύκολα ότι είναι γ.α., συνεπώς μπορεί να επεκταθεί για να δώσει μια R-βάση του $\mathbf{R}^3$. Πράγματι αν προσθέσουμε σ' αυτό το στοιχείο $\boldsymbol{v}_3=\boldsymbol{e}_3$ της τυπικής βάσης του $\mathbf{R}^3$

$$\left\{\boldsymbol{v}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{v}_2=(0,1,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{v}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}\right\}$$

δείχνουμε εύκολα ότι το νέο σύνολο είναι γ. α. Άρα αποτελεί $\mathbf{R}$-βάση του $\mathbf{R}^3$. Τα $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ και τα $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ είναι προφανώς ορθογώνια. Θέτουμε

$$\boldsymbol{u}_1=\boldsymbol{v}_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{u}_2=\boldsymbol{v}_2=(0, 1, 0)^{\mathrm{T}}$$

Κατασκευάζουμε διάνυσμα $\boldsymbol{u}_3$ ορθογώνιο στο $\boldsymbol{u}_1$:

$$\boldsymbol{u}_3=\boldsymbol{v}_3-\frac{\langle\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{u}_2\rangle}{\|\boldsymbol{u}_2\|^2}\boldsymbol{u}_2-\frac{\langle\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{u}_1\rangle}{\|\boldsymbol{u}_1\|^2}\boldsymbol{u}_1=\boldsymbol{v}_3-\frac{\langle\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{u}_1\rangle}{\|\boldsymbol{u}_1\|^2}\boldsymbol{u}_1$$

όπου:

$$\|\boldsymbol{u}_1\|^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

$$\|\boldsymbol{u}_2\|^2=1$$

$$\langle\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{u}_1\rangle=(0,0,1)\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Αντικαθιστούμε:

$$\boldsymbol{u}_3=(0,0,1)^{\mathrm{T}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}}=\left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}}$$

Το σύνολο { $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$} είναι ορθογώνιο. Πράγματι είναι:

$<\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2> = 0$, $<\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3> = 0$ και $\langle\boldsymbol{u}_1,\boldsymbol{u}_3\rangle=-\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}=0$

Τέλος, κανονικοποιούμε διαιρώντας με τα μήκη των παραπάνω διανυσμάτων:

$$\|\boldsymbol{u}_1\| = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1$$

$$\|\boldsymbol{u}_2\| = 1$$

$$\|\boldsymbol{u}_3\| = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Συνεπώς η ζητούμενη ορθοκανονική βάση του $\mathbf{R}^3$ είναι το σύνολο

$$\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\mathrm{T}}, (0,1,0)^{\mathrm{T}}, \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^{\mathrm{T}}\right\}$$

β) Το δοθέν σύνολο είναι γ.α. και συνεπώς μπορεί να επεκταθεί για να δώσει μια $\mathbf{C}$-βάση του $\mathbf{C}^4$. Επεκτείνουμε το σύνολο αυτό με τα διανύσματα $\boldsymbol{e}_1$ και $\boldsymbol{e}_4$ της τυπικής βάσης του $\mathbf{C}^4$:

$$\left\{\boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{2}(1,\mathrm{i},1,\mathrm{i})^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{v}_2 = \frac{1}{2}(\mathrm{i},1,\mathrm{i},1)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{v}_3 = (1,0,0,0)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{v}_4 = (0,0,0,1)^{\mathrm{T}}\right\}$$

και δείχνουμε ότι το προκύπτον σύνολο είναι μια $\mathbf{C}$-βάση του $\mathbf{C}^4$. Θεωρούμε το μητρώο A με στήλες τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$, $\boldsymbol{v}_4$:

$$A = \begin{bmatrix} 1/2 & \mathrm{i}/2 & 1 & 0 \\ \mathrm{i}/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & \mathrm{i}/2 & 0 & 0 \\ \mathrm{i}/2 & 1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1/2 & \mathrm{i}/2 & 1 & 0 \\ -1/2 & \mathrm{i}/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & \mathrm{i}/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & \mathrm{i}/2 & 0 & i \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1/2 & \mathrm{i}/2 & 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 & \mathrm{i} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1/2 & \mathrm{i}/2 & 1 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{i} \end{bmatrix}$$

Άρα, τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$, $\boldsymbol{v}_4$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, συνεπώς αποτελούν μια βάση του χώρου $\mathbf{C}^4$[12]. Συνεπώς μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο *Gram-Schmidt* για να υπολογίσουμε ένα ορθογώνιο σύνολο $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4\}$. Θέτουμε αρχικά και στη συνέχεια υπολογίζουμε:

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{v}_1 = \frac{1}{2}(1,\mathrm{i},1,\mathrm{i})^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{v}_2 - \frac{\langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{u}_1\rangle}{\|\boldsymbol{u}_1\|^2}\boldsymbol{u}_1 \tag{1}$$

$$\langle \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{u}_1\rangle = \left(\frac{1}{2}\mathrm{i}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\mathrm{i}, \frac{1}{2}\right)^{*}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\mathrm{i}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^{\mathrm{T}} = \frac{1}{4}(-\mathrm{i},1,-\mathrm{i},1)(1,\mathrm{i},1,\mathrm{i})^{\mathrm{T}} = \frac{1}{4}(-\mathrm{i}+\mathrm{i}-\mathrm{i}+\mathrm{i}) = 0$$

$$\|\boldsymbol{u}_1\|^2 = \frac{1}{4}\left(1^2+|\mathrm{i}|^2+1^2+|\mathrm{i}|^2\right) = 1$$

Αντικαθιστώντας στην (1) παίρνουμε :

$$\boldsymbol{u}_2 = \left(\frac{1}{2}\mathrm{i}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\mathrm{i}, \frac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}(\mathrm{i},1,\mathrm{i},1)^{\mathrm{T}}$$

Για το διάνυσμα $\boldsymbol{u}_3$ έχουμε :

$$\boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{v}_3 - \frac{\langle \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{u}_2\rangle}{\|\boldsymbol{u}_2\|^2}\boldsymbol{u}_2 - \frac{\langle \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{u}_1\rangle}{\|\boldsymbol{u}_1\|^2}\boldsymbol{u}_1 \tag{2}$$

και υπολογίζουμε:

[12] Εναλλακτικά υπολογίζουμε την ορίζουσα det([$\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$, $\boldsymbol{v}_4$])=-1/2≠0.

$$\langle \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{u}_2 \rangle = (1, 0, 0, 0)\left(\frac{\mathrm{i}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\mathrm{i}}{2}, 1\right)^{\mathrm{T}} = \frac{\mathrm{i}}{2}$$

$$\langle \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{u}_1 \rangle = (1, 0, 0, 0)\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\mathrm{i}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}$$

$$\|\boldsymbol{u}_2\|^2 = \frac{1}{4}\left(|\mathrm{i}|^2 + 1^2 + |\mathrm{i}|^2 + 1^2\right)^{\mathrm{T}} = 1$$

Αντικαθιστώντας στην (2) παίρνουμε :

$$\boldsymbol{u}_3 = (1, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}} - \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{\mathrm{i}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\mathrm{i}}{2}, \frac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\mathrm{i}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^{\mathrm{T}} = \left(1, -\frac{\mathrm{i}}{2}, 0, -\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^{\mathrm{T}}$$

Υπολογίζουμε το τελευταίο ορθογώνιο διάνυσμα:

$$\boldsymbol{u}_4 = \boldsymbol{v}_4 - \frac{\langle \boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{u}_3 \rangle}{\|\boldsymbol{u}_3\|^2}\boldsymbol{u}_3 - \frac{\langle \boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{u}_2 \rangle}{\|\boldsymbol{u}_2\|^2}\boldsymbol{u}_2 - \frac{\langle \boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{u}_1 \rangle}{\|\boldsymbol{u}_1\|^2}\boldsymbol{u}_1 \qquad (3)$$

όπου

$$\langle \boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{u}_3 \rangle = (0,0,0,1)\left(1, -\frac{1}{2}\mathrm{i}, 0, -\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^{\mathrm{T}} = -\frac{1}{2}\mathrm{i}$$

$$\|\boldsymbol{u}_3\|^2 = |1|^2 + \left|-\frac{1}{2}\mathrm{i}\right|^2 + |0|^2 + \left|-\frac{1}{2}\mathrm{i}\right|^2 = \frac{3}{2}$$

$$\langle \boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{u}_2 \rangle = (0,0,0,1)\left(\frac{\mathrm{i}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\mathrm{i}}{2}, \frac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}$$

$$\|\boldsymbol{u}_2\|^2 = 1$$

$$\langle \boldsymbol{v}_4, \boldsymbol{u}_1 \rangle = (0,0,0,1)\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\mathrm{i}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^{\mathrm{T}} = \frac{1}{2}\mathrm{i}$$

Αντικαθιστώντας στην (3) παίρνουμε :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}_4 &= (0, 0, 0, 1)^{\mathrm{T}} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\mathrm{i}\left(1, -\frac{1}{2}\mathrm{i}, 0, -\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)^{\mathrm{T}} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}(\mathrm{i}, 1, \mathrm{i}, 1)^{\mathrm{T}} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\mathrm{i}(1, \mathrm{i}, 1, \mathrm{i})^{\mathrm{T}} \\ &= (0, 0, 0, 1)^{\mathrm{T}} + \frac{1}{3}\left(\mathrm{i}, \frac{1}{2}, 0, +\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{T}} - \frac{1}{4}(\mathrm{i}, 1, \mathrm{i}, 1)^{\mathrm{T}} - \frac{1}{4}(\mathrm{i}, -1, \mathrm{i}, -1)^{\mathrm{T}} \\ &= \left(-\frac{1}{6}\mathrm{i}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{2}\mathrm{i}, \frac{7}{6}\mathrm{i}\right)^{\mathrm{T}} = \frac{1}{6}(-\mathrm{i}, 1, -3\mathrm{i}, 7\mathrm{i})^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

Τέλος υπολογίζουμε το μέτρο:

$$\|\boldsymbol{u}_4\|^2 = \left\|\frac{1}{6}(-\mathrm{i}, 1, -3\mathrm{i}, 7\mathrm{i})^{\mathrm{T}}\right\|^2 = \frac{1}{36}(|-\mathrm{i}|^2 + 1^2 + |-3\mathrm{i}|^2 + 7^2) = \frac{1}{36}(1 + 1 + 9 + 49) = \frac{5}{3}$$

Τα κανονικοποιημένα διανύσματα

$$\left\{\frac{1}{2}(1, \mathrm{i}, 1, \mathrm{i})^{\mathrm{T}}, \frac{1}{2}(\mathrm{i}, 1, \mathrm{i}, 1)^{\mathrm{T}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\left(1, -\frac{\mathrm{i}}{2}, 0, -\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^{\mathrm{T}}, \frac{1}{2\sqrt{15}}(-\mathrm{i}, 1, -3\mathrm{i}, 7\mathrm{i})^{\mathrm{T}}\right\}$$

συνιστούν την ζητούμενη ορθοκανονική βάση του $\mathbf{C}^4$.

Άσκηση 3-ΟΒ8

Έστω V ένας υποχώρος του R^3, ο οποίος παράγεται από τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1=[1,1,2]^T$ και $\boldsymbol{v}_2=[1,-2,0]^T$.

α) Ποια είναι η ορθογώνια προβολή του $\boldsymbol{e}_1=(1,0,0)^T$ επί του V;
β) Να υπολογισθεί μια ορθοκανονική βάση B του V.
γ) Ποια συνθήκη ικανοποιεί το μητρώο των διανυσμάτων της βάσης B;
δ) Έστω ένα τυχαίο διάνυσμα $\boldsymbol{x}$ του V. Πως δίνονται τώρα οι (νέες) συνιστώσες του ως προς την B και εξηγείστε τι ακριβώς εκφράζουν. Γράψτε την ή τις απαιτούμενες σχέσεις
ε) Εφαρμόστε το (δ) για τα διανύσματα: $\boldsymbol{x}=(2, 1, 2)^T$, $\boldsymbol{y}=(-8,-4, 6)^T$ και $\boldsymbol{e}_1=(1,0,0)^T$. Ποια συμπεράσματα μπορούν να εξαχθούν;

Απαντήσεις

α) Το σύνολο $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ προφανώς αποτελεί βάση του V. Αν συμβολίσουμε με $A=[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]$ το μητρώο της βάσης, τότε η προβολή $P\boldsymbol{e}_1$ του $\boldsymbol{e}_1=(1,0,0)^T$ επί του V δίνεται από το $A\boldsymbol{s}$, όπου s είναι η λύση του συστήματος:

$$A^T A\,\boldsymbol{s}=A^T \boldsymbol{e}_1$$

ή: $$\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & -2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\\ 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s_1\\ s_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & -2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}6 & -1\\ -1 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s_1\\ s_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{s}_1=\frac{7}{29}, \boldsymbol{s}_2=\frac{6}{29}$$

Άρα: $$Pe_1 = As = \frac{1}{29}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\\ 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7\\ 6\end{bmatrix}=\frac{1}{29}\begin{bmatrix}13\\ -5\\ 14\end{bmatrix}$$

β) Κατασκευάζουμε μια ορθοκανονική βάση του V από τα $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$:

$$\boldsymbol{u}_1=\boldsymbol{v}_1=(1,1,2)^T$$
$$\boldsymbol{u}_2=\boldsymbol{v}_2-\frac{\boldsymbol{v}_2^T\boldsymbol{u}_1}{\boldsymbol{u}_1^T\boldsymbol{u}_1}\boldsymbol{u}_1$$

Υπολογίζουμε:

$\boldsymbol{u}_1^T\boldsymbol{u}_1=\|\boldsymbol{u}_1\|^2=6$ και $\boldsymbol{v}_2^T\boldsymbol{u}_1=1\text{-}2=-1$.

Άρα:

$$\boldsymbol{u}_2=(1,-2,2)^T+\frac{1}{6}(1,1,2)^T=\frac{1}{6}(7,-11,2)^T$$

Τα $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ συνιστούν μια ορθογώνια βάση του V. Υπολογίζουμε επίσης:

$$\|\boldsymbol{u}_2\| = \left\|\frac{1}{6}(7,-11,2)^T\right\| = \frac{1}{6}\left\|(7,-11,2)^T\right\| = \frac{1}{6}(1,1,2) = \frac{1}{6}\sqrt{7^2+11^2+2^2} = \frac{1}{6}\sqrt{174}$$

Κανονικοποιούμε:

$$\boldsymbol{q}_1=\frac{\boldsymbol{u}_1}{\|\boldsymbol{u}_1\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)^T$$
$$\boldsymbol{q}_2=\frac{\boldsymbol{u}_2}{\|\boldsymbol{u}_2\|}=\frac{1}{\sqrt{174}}(7,-11,2)^T$$

H { $\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$ } είναι η ζητούμενη ορθοκανονική βάση.

γ) Το μητρώο Q=[$\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$]

$$Q = \left[\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \frac{1}{\sqrt{174}} \begin{bmatrix} 7 \\ -11 \\ 2 \end{bmatrix} \right]$$

είναι προφανώς ορθογώνιο δηλ. ικανοποιεί την $Q^TQ=I_2$.

δ) Οι συνιστώσες του $\boldsymbol{x}$ ως προς τη βάση Β δίνονται από τον τύπο την προβολής P$\boldsymbol{x}$ του $\boldsymbol{x}$ επί του V ως προς αυτήν την ορθοκανονική βάση:

$$\mathrm{P}\boldsymbol{x} = \mathrm{QQ}^T\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{q}_1 \quad \boldsymbol{q}_2] \begin{bmatrix} \boldsymbol{q}_1^T \\ \boldsymbol{q}_1^T \end{bmatrix} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_1^T\boldsymbol{x} + \boldsymbol{q}_2\boldsymbol{q}_2^T\boldsymbol{x} = \left(\boldsymbol{q}_1^T x\right)\boldsymbol{q}_1 + \left(\boldsymbol{q}_2^T \boldsymbol{x}\right)\boldsymbol{q}_2$$

Το $P=QQ^T$ είναι το μητρώο προβολής. Οι συνιστώσες του $\boldsymbol{x}$ ως προς την Β είναι οι $\boldsymbol{q}_1\boldsymbol{q}_1^T$ και $\boldsymbol{q}_2\boldsymbol{q}_2^T$ που είναι οι προβολές του $\boldsymbol{x}$ επί των ορθοκανονικών διανυσμάτων $\boldsymbol{q}_1$ και $\boldsymbol{q}_2$ αντίστοιχα ($\|\boldsymbol{q}_1\|=\|\boldsymbol{q}_2\|=1$).

ε) Υπολογίζουμε διαδοχικά:

- Για $\boldsymbol{x}=(2, 1, 2)^T$:

$$\boldsymbol{q}_1^T\boldsymbol{x} = \frac{5}{\sqrt{6}}, \ \boldsymbol{q}_1^T\boldsymbol{x} = \frac{29}{\sqrt{174}} \quad \text{και}$$

$$Px = \left(\boldsymbol{q}_1^T\boldsymbol{x}\right)\boldsymbol{q}_1 + \left(\boldsymbol{q}_2^T\boldsymbol{x}\right)\boldsymbol{q}_2 = \frac{5}{\sqrt{6}} \times \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)^T + \frac{29}{\sqrt{174}} \times \frac{1}{\sqrt{174}}(7,-11,2)^T =$$

$$= \frac{5}{6}(1,1,2)^T + \frac{5}{6}(7,-11,2)^T = (2,-1,2)^T = \boldsymbol{x}$$

Αυτό ακριβώς σημαίνει ότι $\boldsymbol{x}\in V$. Επιβεβαιώνουμε: όντως τα $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ είναι εξαρτημένα αφού ισχύει $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{v}_1+\mathbf{v}_2$, επομένως ανήκουν στον ίδιο χώρο V.

- Για $\boldsymbol{y}=(-8,-4, 6)^T$:

$$\boldsymbol{q}_1^T\boldsymbol{y} = 0, \ \boldsymbol{q}_1^T\boldsymbol{y} = 0 \quad (\text{ή και } \boldsymbol{v}_1^T\boldsymbol{y} = 0, \ \boldsymbol{v}_1^T\boldsymbol{y} = 0 \ )$$

δηλ. $\boldsymbol{y}\perp V$. Πράγματι $\boldsymbol{y}\in N(A^T)$, αφού εύκολα διαπιστώνουμε ότι το $\boldsymbol{y}$ επαληθεύει το σύστημα:

$A^T\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$ (ή και το $Q^T\boldsymbol{y}=\mathbf{0}$)

- Για $\boldsymbol{x}_3=\boldsymbol{e}_1=(1, 0, 0)^T$:

$$q_1^T e_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}, \ q_1^T x = \frac{7}{\sqrt{174}} \quad \text{και υπολογίζουμε:}$$

$$Px = \left(q_1^T x\right)q_1 + \left(q_2^T x\right)q_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,2)^T + \frac{7}{\sqrt{174}}\frac{1}{\sqrt{174}}(7,-11,2)^T =$$

$$= \frac{1}{6}(1,1,2)^T + \frac{7}{174}(7,-11,2)^T \simeq (0.4483, \ -0.2759, \ 0.4138)^T$$

□

3.4 Ορθογωνιότητα Θεμελιωδών χώρων

Άσκηση 3-ΟΘ1

Να εξετάσετε αν υπάρχει μητρώο A για το οποίο $(1,1,3)^T\in R(A)$ και $(1,3,-1)^T\in N(A)$.

Απ.

Είναι $R(A)\perp N(A)$, ενώ $(1,1,3)\,(1,3,-1)^T = 1 \neq 0$. Άρα δεν υπάρχει τέτοιο μητρώο.

Άσκηση 3-ΟΘ2

Εξετάστε αν μητρώο A για το οποίο $(1,0,0)^T \in R(A) \cap N(A)$.

Απ.

Αφού $R(A) \perp N(A)$, θα έπρεπε να είναι $(1,0,0)\ (1,0,0)^T=0$, που δεν ισχύει, άρα δεν υπάρχει τέτοιο μητρώο.

Άσκηση 3-ΟΘ3

Δίνεται το διάνυσμα $\boldsymbol{x}=(5, 7, 8, 10)^T$ και το μητρώο:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & 7 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

α) Ανήκει το $\boldsymbol{x}$ στο χώρο γραμμών $R(A)$ του A;

β) Να θέσετε το $\boldsymbol{x}$ ως άθροισμα $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_r+\boldsymbol{x}_N$, όπου $\boldsymbol{x}\in R(A)$, $\boldsymbol{x}\in N(A)$. Είναι τα $\boldsymbol{x}_r$, $\boldsymbol{x}_N$ μοναδικά;

Απαντήσεις

α) Για να είναι $\boldsymbol{x}\in R(A) \Leftrightarrow \text{rank}([A; \boldsymbol{x}^T])=\text{rank}(A)$. Λαμβάνουμε:

$$\left[A; x^T\right] = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & 7 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 7 & 8 & 10 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_4$$

Προφανώς $\text{rank}([A;\ \boldsymbol{x}^T])=4\neq\text{rank}(A)=3$, δηλ. $\boldsymbol{x}\notin R(A)$. Θα μπορούσαμε βέβαια να σταματήσουμε στην κλιμακωτή μορφή U, διαπιστώνοντας ότι $u_{ii}\neq 0$, $i=1,\ldots,4$.

β) Ως γνωστόν ισχύει $N(A)=C(A^T)^{\perp}$, με $N(A)\cap C(A^T)=\{0\}$, και $R^4=N(A)\oplus C(A^T)$. Η τελευταία σχέση σημαίνει ότι το $\boldsymbol{x}\in R^4$ διασπάται με **μοναδικό τρόπο** ως $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_r+\boldsymbol{x}_N$, με $\boldsymbol{x}_r\in C(A^T)$, $\boldsymbol{x}_N\in N(A)$. Επίσης σημαίνει ότι **μια βάση του $\mathbf{R}^4$ δίνεται από την ένωση της βάσης B_r του $C(A^T)$ και της βάσης B_N του $N(A)$, δηλ. το $B=B_r\cup B_N$ είναι βάση του $\mathbf{R}^4$**. [* *Θεμελιώδες Θ. Γρ. Άλγεβρας-μέρος 2, Θ.3.4.1*]

[**Σημ.** Το ανάλογο συμβαίνει ως γνωστόν και για το χώρο R^3: ισχύει $N(A^T)=C(A)^{\perp}$, $R^3=N(A^T)\oplus C(A)$ και $\forall \boldsymbol{y}\in R^3$: $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}_c+\boldsymbol{y}_N$ με $\boldsymbol{x}_c\in C(A)$, $\boldsymbol{y}_N\in N(A^T)$. Επιπλέον, αν C_c, C_N βάσεις του $C(A)$ και $N(A^T)$ αντίστοιχα, τότε το $C=C_c\cup C_N$ είναι βάση του R^3]

Το τελευταίο σημείο υπαγορεύει και τον τρόπο υπολογισμού των $\boldsymbol{x}_r$, $\boldsymbol{x}_N$ ως: (εδώ διατηρούμε τα ίδια σύμβολα για τα μητρώα των διανυσμάτων των βάσεων):

$$\boldsymbol{x}=B\boldsymbol{y} = B_r\boldsymbol{y}_r+B_N\boldsymbol{y}_N = \boldsymbol{x}_r+\boldsymbol{x}_N \qquad (1)$$

όπου $\boldsymbol{y}=[\boldsymbol{y}_r; \boldsymbol{y}_N]$ και $\boldsymbol{y}_r$, $\boldsymbol{y}_N$ οι συνιστώσες του $\boldsymbol{x}$ επί των δύο βάσεων. Βρίσκουμε λοιπόν τις βάσεις B_r και B_N. Η απαλοιφή στο A δίνει:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & 7 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 & 1 \\ 0 & -3 & -15 & -1 \\ 0 & 0 & -20 & 1 \end{bmatrix} \to \cdots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -97/60 \\ 0 & 1 & 0 & 7/12 \\ 0 & 0 & 1 & -1/20 \end{bmatrix}$$

Συνεπώς

$B_r=[(1,5,6,1)^T, (0,-3,-15,-1)^T, (0,0,-20,1)^T]$
$B_N=[(97/15, -7/3, 1/5 ,0)^T]$

δηλαδή:

$B = [B_r\ B_N] = [\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \boldsymbol{v}_3\ \boldsymbol{w}] = [(1,5,6,1)^T, (0,-3,-15,-1)^T, (0,0,-20,1)^T, (97/15, -7/3, 1/5 ,0)^T]$

Οι συνιστώσες ενός διανύσματος $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^4$ ως προς τη βάση B, προκύπτουν από την λύση $\boldsymbol{y}$ του συστήματος $B\boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}$. Για το δοθέν $\boldsymbol{x}$ και τη βάση Β που υπολογίσθηκε πιο πάνω, λαμβάνουμε εφαρμόζοντας απαλοιφή:

$$[B\,|\,x]\rightarrow\left[\begin{array}{cccc|c}1&-5/2&-10/3&-1/30&4/3\\0&19/2&50/3&5/2&1/3\\0&5/2&10/3&-193/30&11/3\\0&3/2&13/3&1/30&26/3\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&20/19&178/285&27/19\\0&1&50/3&5/19&2/57\\0&0&-20/19&-2021/285&68/19\\0&0&97/57&-103/285&491/57\end{array}\right]\rightarrow$$

$$\rightarrow\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&1234/1455&-379/97\\0&1&0&185/291&-858/97\\0&0&1&-103/485&491/97\\0&0&0&-3416/467&864/97\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&-2038/709\\0&1&0&0&-2720/337\\0&0&1&0&2954/615\\0&0&0&1&-1706/1401\end{array}\right]=[I_4\,|\,y]$$

Η (1) δίνει:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x} &= B_r\boldsymbol{y}_r+B_N\boldsymbol{y}_N\\ &= [(-2038/709)\boldsymbol{v}_1+(-2720/337)\boldsymbol{v}_2+(2954/615)\boldsymbol{v}_3] + [(-1706/1401)\boldsymbol{w}]\\ &= \boldsymbol{x}_r+\boldsymbol{x}_N\end{aligned}$$

και συνεπώς τα $\boldsymbol{x}_r$, $\boldsymbol{x}_N$ έχουν πλήρως καθορισθεί.

Άσκηση 3-ΟΘ4

Δίνεται το μητρώο A=[1 2 4 3; 2 3 8 5; 0 -4 -8 -4] και τα διανύσματα $\boldsymbol{y}=(-8, -12, 16)^T$ και $\boldsymbol{\omega}=(16, -7, 6)^T$.

(α) Ανήκουν τα $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{\omega}$ στο χώρο στηλών του A;

(β) Να βρεθούν όλοι οι θεμελιώδεις χώρους του A.

(γ) Θεωρούμε την απεικόνιση T_A: R(A) → C(A), με $T_A(\boldsymbol{u})=A\boldsymbol{u}$, όπου $\boldsymbol{u}\in$R(A). Η T_A είναι όπως είδαμε αμφιμονοσήμαντη και επί. Να βρεθεί ένα διάνυσμα $\boldsymbol{v}\in$R(A) τέτοιο ώστε $T_A(\boldsymbol{v})=\boldsymbol{y}$.

(δ) Να εκφρασθούν τα διανύσματα $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{\omega}$ ως αθροίσματα $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}_c+\boldsymbol{y}_N$ και $\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{y}_c+\boldsymbol{y}_N$, αντίστοιχα, όπου $\boldsymbol{y}_c\in$C(A) και $\boldsymbol{y}_N\in$N(A^T).

(ε) Να βρεθούν τα ορθογώνια συμπληρώματα των χώρων C(A) και R(A) και των στηλών του A.

Απαντήσεις

(α) Μετατρέπουμε το [A $\boldsymbol{y}$] σε κλιμακωτή μορφή (παραλείπουμε τα ενδιάμεσα στάδια και τις πράξεις της απαλοιφής):

$$[\mathrm{A}\ \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{\omega}]\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&1&1&0&0\\0&1&2&1&-4&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}\qquad(1)$$

Είναι φανερό ότι η 5η στήλη είναι ελεύθερη και η 6η ανεξάρτητη, συνεπώς $\boldsymbol{y}\in$C(A), $\boldsymbol{\omega}\notin$C($A$).

(β) Από την κλιμακωτή μορφή (1) προκύπτουν άμεσα οι εξής βάσεις για τους χώρους C(A), R(A) και N(A).

R ={ $(1, 2, 5, 3)^T$, $(2, 3, 8, 5)^T$}
C ={ $(1, 2, 0)^T$, $(2, 3, -4)^T$}
N ={ $(-1, -2, 1, 0)^T$, $(-1, -1, 0, 1)^T$}

Τέλος για τον N(A^T) λαμβάνουμε:

$$[A^T]\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&-8\\0&1&4\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

απ' όπου προκύπτει άμεσα μια ειδική λύση: $\boldsymbol{s}=(8, -4, 1)^T$, δηλ. S={$\boldsymbol{s}$}.

(γ) Στη γενική λύση $\boldsymbol{x}_\pi=\boldsymbol{x}_\mu+\boldsymbol{x}_\varepsilon$ ενός συστήματος, είναι $\boldsymbol{x}_\mu\in$R(A) και $\boldsymbol{x}_\varepsilon\in$N($A$). Συνεπώς, το ζητούμενο $\boldsymbol{v}\in$R(A) είναι η μερική λύση $\boldsymbol{x}_\mu$ του συστήματος $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$. Η κλιμακωτή μορφή του [A $\boldsymbol{y}$] βρέθηκε στο ερώτημα (α), σχέση (1):

$$[A\ \boldsymbol{y}] \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Συνεπώς: $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{x}_\mu=(0, -4, 0, 0)^T$.

(δ) Αρκεί να λύσουμε τα συστήματα $[C\ S]\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$, $[C\ S]\boldsymbol{z}=\boldsymbol{\omega}$. Τα συστήματα έχουν κοινό μητρώο συντελεστών, επομένως εκτελούμε απαλοιφή στο επαυξημένο μητρώο $[C\ S\ \boldsymbol{y}\ \boldsymbol{\omega}]$. Μεταβαίνουμε έτσι στο αναγμένο κλιμακωτό μητρώο:

$$[C\ S\ \boldsymbol{y}] \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Άμεσα λαμβάνουμε τις λύσεις $\boldsymbol{x}=(0, -4, 0)^T$ και $\boldsymbol{z}=(2, -1, 2)^T$. Συνεπώς, τα $\boldsymbol{y}$ και $\boldsymbol{\omega}$ εκφράζονται ως προς τη βάση $[C\ S]$ του $\mathbf{R}^3$ ως εξής:

$$\boldsymbol{y} = [C\ S](0, -4, 0)^T = -4(2, 3, -4)^T = \boldsymbol{y}_c$$
$$\boldsymbol{\omega} = [C\ S](2, -1, 2)^T = [2(1, 2, 0)^T - (2, 3, -4)^T] + [2(8, -4, 1)^T] = \boldsymbol{y}_c + \boldsymbol{y}_N$$

Για το $\boldsymbol{y}$ θα μπορούσαμε να φθάσουμε πιο γρήγορα στο ίδιο συμπέρασμα: αφού από το ερώτημα (α) είναι $\boldsymbol{y}\in C(A)$, έπεται $\boldsymbol{y}_N=0$, δηλ. $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}_c$. Αρκεί επομένως να λύσουμε το σύστημα $C\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$:

$$[C\ \boldsymbol{y}] \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

απ' όπου: $\boldsymbol{x}=(0, -4)^T$, δηλ. $\boldsymbol{y}=-4(2, 3, -4)^T$.

(ε) Τα ορθογώνια συμπληρώματα $C(A)^\perp$ και $N(A)^\perp$ προφανώς δίνονται:

$C(A)^\perp = \langle S\rangle$ (ευθεία στον $\mathbf{R}^3$)
$R(A)^\perp = \langle N\rangle$ (επίπεδο στον $\mathbf{R}^3$, διάστασης 2)
(στήλες του $A)^\perp = \langle S\rangle$

Άσκηση 3-ΟΘ5

α) (i) Ανήκει το διάνυσμα $\boldsymbol{x}=(3,-1,0,1)^T$ στον υποχώρο V του $\mathbf{R}^4$, που παράγεται από τα $\boldsymbol{v}_1 = (1,2,-1,2)^T$, $\boldsymbol{v}_2=(3, 1,-1,4)^T$ και $\boldsymbol{v}_3=(4,-2,0,4)^T$; **(ii)** Βρείτε στη συνέχεια μια βάση του V. **(iii)** Βρείτε τέλος μια βάση του R^4, η οποία να περιέχει τη βάση αυτή.

β) (i) Πως βρίσκεται το ορθογώνιο συμπλήρωμα ($V^\perp$) του V; Να βρεθεί η διάσταση και μια βάση του, και **(ii)** Να υπολογισθεί μια ορθοκανονική βάση του $V^\perp$.

Απαντήσεις

α) (i)-(ii) Για να ανήκει το $\boldsymbol{x}$ στο V, πρέπει και αρκεί να παράγεται από τους γεννήτορες του V ή ισοδύναμα το σύνολο $V=[\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2\ \boldsymbol{v}_3\ \boldsymbol{x}]$ να είναι γ.ε. Εξετάζουμε λοιπόν το ενδεχόμενο αυτό εκτελώντας απαλοιφή. Ταυτόχρονα εξετάζουμε κα το αν τα $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ αποτελούν βάση. Έχουμε λοιπόν τους μετασχηματισμούς:

$$[V\ x] \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 4 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & -5 & -10 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & -4 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & -5 & -10 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Επομένως τα $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3$ είναι γ.ε. και τα $\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2$ γ.α., άρα το σύνολο $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ είναι βάση του V.
Εξ' άλλου, τα $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{x}$ είναι προφανώς γ.α., επομένως το $\boldsymbol{x}$ δεν ανήκει στο V.

(iii) Για να βρούμε μια βάση του $\mathbf{R}^4$ που περιέχει τη βάση $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2\}$ του V, αρκεί να προσαρτήσουμε διανύσματα της τυπικής βάσης του $\mathbf{R}^4$ και να εξετάσουμε τη γρ. ανεξαρτησία. Πράγματι, παρατηρούμε εύκολα ότι το $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3,\boldsymbol{v}_2\}$ είναι γ.α. και συνεπώς αποτελεί βάση του $\mathbf{R}^4$.

β) (i) Το ορθογώνιο συμπλήρωμα $V^{\perp}$ του V είναι ο αριστερός μηδενοχώρος του $[\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2]$:

$$V^{\perp} = <\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2>^{\perp} = C([\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2])^{\perp} = N([\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2]^T)$$

Από το Θεμελιώδες Θεώρημα 3.4.1 γνωρίζουμε:

$$\dim(V^{\perp}) = n - \dim(C([\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2])) = 4 - \text{rank}([\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2]) = 4 - 2 = 2$$

Το $N([\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2]^T)$ βρίσκεται από την επίλυση του συστήματος $[\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2]^T\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{v}_1^T; \boldsymbol{v}_2^T]\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, δηλ. του:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

Βρίσκουμε το μηδενοχώρο:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 2 & -2 \end{bmatrix} \to \dots \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/5 & 6/5 \\ 0 & 1 & -2/5 & 2/5 \end{bmatrix}$$

Επομένως μια βάση του $N([\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2]^T)$ - άρα και του $V^{\perp}$ - είναι η

$$B = \{\boldsymbol{u}_1 = (1/5, 2/5, 1, 0)^T, \boldsymbol{u}_2 = (-6/5, -2/5, 0, 1)^T\}$$

Είναι $\dim N([\boldsymbol{v}_1\ \boldsymbol{v}_2]^T)=2$ και επιβεβαιώνουμε $\dim(V^{\perp}) = 2$, όπως διαπιστώσαμε πιο πάνω.

(ii) Από τη βάση B του $V^{\perp}$ που βρέθηκε πιο πάνω, κατασκευάζουμε τώρα μια ορθοκανονική βάση Q με τη μέθοδο *Ορθοκανονικοποίησης Gram-Schmidt*:

$$\boldsymbol{g}_1 = \boldsymbol{u}_1 = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 1, 0\right)^T$$

$$\boldsymbol{g}_2 = \boldsymbol{u}_2 - \frac{\boldsymbol{u}_2^T\boldsymbol{g}_1}{\boldsymbol{g}_1^T\boldsymbol{g}_1}\boldsymbol{g}_1$$

Υπολογίζουμε:

$$\boldsymbol{g}_1^T\boldsymbol{g}_1 = \|\boldsymbol{g}_1\|^2 = 1/25 + 4/25 + 1 = 6/5$$
$$\boldsymbol{u}_2^T\boldsymbol{g}_1 = -6/25 - 4/25 = -2/5$$

Άρα:

$$g_2 = (-\frac{6}{5}, -\frac{2}{5}, 0, 1)^T - \frac{5}{6}\times\frac{-2}{5}\times\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 1, 0\right)^T = (-\frac{6}{5}, -\frac{2}{5}, 0, 1)^T + \frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 1, 0\right)^T =$$

$$\left(-\frac{6}{5}+\frac{1}{15}, -\frac{2}{5}+\frac{2}{15}, \frac{1}{3}, 1\right)^T = \left(-\frac{17}{15}, -\frac{4}{15}, \frac{1}{3}, 1\right)^T = \frac{1}{15}\times(-17, -4, 5, 15)^T$$

Τα $\boldsymbol{g}_1$, $\boldsymbol{g}_1$ αποτελούν ορθογώνια βάση του $V^{\perp}$.
Υπολογίζουμε επίσης:

$$\|\boldsymbol{g}_2\| = \left\|\left(-\frac{17}{15}, -\frac{4}{15}, \frac{1}{3}, 1\right)^T\right\| = \frac{1}{15}\left\|(-17, -4, 5, 15)^T\right\| = \frac{1}{15}\sqrt{17^2 + 4^2 + 5^2 + 15^2} =$$

$$\frac{1}{15}\sqrt{555} = \sqrt{\frac{37}{15}}$$

Τέλος, κανονικοποιούμε:

$$\boldsymbol{q}_1 = \frac{\boldsymbol{g}_1}{\|\boldsymbol{g}_1\|} = \sqrt{\frac{5}{6}}\times\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 1, 0\right)^T = \sqrt{\frac{1}{30}}\times(1, 2, 5, 0)^T$$

$$\boldsymbol{q}_2 = \frac{\boldsymbol{g}_2}{\|\boldsymbol{g}_2\|} = \sqrt{\frac{15}{37}}\times\frac{1}{15}(-17, -4, 5, 15)^T = \frac{1}{\sqrt{37}\sqrt{15}}\times(-17, -4, 5, 15)^T$$

Η $\{\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2\}$ είναι η ζητούμενη ορθοκανονική βάση του $V^{\perp}$.

4 ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ

4.1 Υπολογισμός Οριζουσών και Ιδιότητες

Άσκηση 4-Υ1

Να υπολογιστεί η παρακάτω ορίζουσα:

$$\begin{vmatrix} a^2 & (b+c)^2 & bc \\ b^2 & (c+a)^2 & ca \\ c^2 & (a+b)^2 & ab \end{vmatrix}$$

Απ.

Εφαρμόζοντας τις ιδιότητες γραμμικότητας των οριζουσών έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{vmatrix} a^2 & (b+c)^2 & bc \\ b^2 & (c+a)^2 & ca \\ c^2 & (a+b)^2 & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & b^2+c^2+2bc & bc \\ b^2 & c^2+a^2+2ca & ca \\ c^2 & a^2+b^2+2ab & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & b^2+c^2 & bc \\ b^2 & c^2+a^2 & ca \\ c^2 & a^2+b^2 & ab \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} a^2 & 2bc & bc \\ b^2 & 2ca & ca \\ c^2 & 2ab & ab \end{vmatrix}}_{0}$$

$$= \begin{vmatrix} a^2 & a^2+b^2+c^2 & bc \\ b^2 & b^2+c^2+a^2 & ca \\ c^2 & c^2+a^2+b^2 & ab \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2)\begin{vmatrix} a^2 & 1 & bc \\ b^2 & 1 & ca \\ c^2 & 1 & ab \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2)\begin{vmatrix} a^2 & 1 & bc \\ b^2-a^2 & 0 & ca-bc \\ c^2-a^2 & 0 & ab-bc \end{vmatrix}$$

$$= -(a^2+b^2+c^2)\begin{vmatrix} b^2-a^2 & ca-bc \\ c^2-a^2 & ab-bc \end{vmatrix} = -(a^2+b^2+c^2)\begin{vmatrix} (b+a)(b-a) & -c(b-a) \\ (c+a)(c-a) & -b(c-a) \end{vmatrix}$$

$$= -(a^2+b^2+c^2)\,(b-a)(c-a)\begin{vmatrix} b+a & -c \\ c+a & -b \end{vmatrix} = -(a^2+b^2+c^2)\,(b-a)(c-a)\begin{vmatrix} b+a+c & -c \\ c+a+b & -b \end{vmatrix}$$

$$= -(a^2+b^2+c^2)\,(a+b+c)(b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & -c \\ 1 & -b \end{vmatrix} = -(a^2+b^2+c^2)(\alpha+\mathrm{b}+\mathrm{c})(b-a)(c-a)(c-b)$$

$$= -(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$$

Άσκηση 4-Υ2

Να βρεθεί η γενική τιμή του θ η οποία ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\begin{vmatrix} 1+\sin^2\theta & \cos^2\theta & 4\sin 2\theta \\ \sin^2\theta & 1+\cos^2\theta & 4\sin 2\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 1+4\sin 2\theta \end{vmatrix} = 0$$

Απ.

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα και εφαρμόζοντας τις ιδιότητες της γραμμικότητας, έχουμε:

$$\begin{vmatrix} 1+\sin^2\theta & \cos^2\theta & 4\sin 2\theta \\ \sin^2\theta & 1+\cos^2\theta & 4\sin 2\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 1+4\sin 2\theta \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1+\sin^2\theta+\cos^2\theta+4\sin 2\theta & \cos^2\theta & 4\sin 2\theta \\ \sin^2\theta+1+\cos^2\theta+4\sin 2\theta & 1+\cos^2\theta & 4\sin 2\theta \\ \sin^2\theta+\cos^2\theta+1+4\sin 2\theta & \cos^2\theta & 1+4\sin 2\theta \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2+4\sin 2\theta & \cos^2\theta & 4\sin 2\theta \\ 2+4\sin 2\theta & 1+\cos^2\theta & 4\sin 2\theta \\ 2+4\sin 2\theta & \cos^2\theta & 1+4\sin 2\theta \end{vmatrix}$$

$$= (2 + 4\sin 2\theta) \begin{vmatrix} 1 & \cos^2\theta & 4\sin 2\theta \\ 1 & 1+\cos^2\theta & 4\sin 2\theta \\ 1 & \cos^2\theta & 1+4\sin 2\theta \end{vmatrix} =$$

$$= 2(1 + 2\sin 2\theta) \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & \cos^2\theta & 4\sin 2\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{1} = 2(1 + 2\sin 2\theta)$$

Άρα η αρχική εξίσωση γίνεται:

$$2(1 + 2\sin 2\theta) = 0 \Rightarrow 1 + 2\sin 2\theta = 0 \Rightarrow$$

$$\sin 2\theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sin 2\theta = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2\theta = -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ 2\theta = \pi - \left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + 2k\pi \end{cases}, \ k = 0, \pm1, \pm2, \ldots \Rightarrow \begin{cases} \theta = -\dfrac{\pi}{12} + k\pi \\ \theta = \dfrac{7\pi}{12} + k\pi \end{cases}, \ k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

Άσκηση 4-Υ3

Έστω το μητρώο V:

$$V_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{bmatrix}$$

Να δειχθεί ότι $\det(V) = \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j)$

Απ.

Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή ως προς n. Για $n=2$ είναι:

$$D_2 = \det(V_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$$

και προφανώς ισχύει.

Αν από κάθε γραμμή $i=n,\ldots,2$ αφαιρέσουμε την προηγούμενη της επί x_1 (δηλ. εφαρμόσουμε τους σ.μ.γ. $r_i = r_i - x_1 r_{i-1}$), παίρνουμε

$$D_n = \det(V_{n-1}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & \dots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & \dots & x_n(x_n - x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & \dots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{bmatrix} \tag{4.2.5}$$
$$= (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\dots(x_n - x_1)D_{n-1}$$

Αν υποθέσουμε ότι η ζητούμενη σχέση ισχύει για $n=k$-1, τότε, λόγω της (1), ισχύει προφανώς και για $n=k$. Η D_n λέγεται *ορίζουσα του Vandermonde.*

Άσκηση 4-Υ4

Να δειχτούν οι ακόλουθες ισότητες για τις παρακάτω $n \times n$ ορίζουσες:

(i) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2^{n-1}$ (ii) $\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \cdots & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+x^2 \end{vmatrix} = 1 + x^2 + \ldots + x^{2n}$

Απ.

(i) Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της επαγωγής. Εξετάζουμε αρχικά αν ισχύει η σχέση για n=1. Είναι $|1|=1=2^{1-1}$, άρα ισχύει. Έστω ότι η σχέση ισχύει για $n=k$, δηλαδή

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix}}_{k} = 2^{k-1} \tag{1}$$

Θα δείξουμε ότι ισχύει για $n=k+1$, δηλαδή

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}_{k+1} = 2^{k-1+1} = 2^k$$

Έχουμε:

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}_{k+1} = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}}_{k+1} = \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix}}_{k}$$

$= 2 \cdot 2^{k-1} = 2^k$

Επομένως η ισότητα ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Εξετάζουμε αν η σχέση ισχύει για n=1. Για n=1 είναι $|1+x^2| = 1+x^2$, άρα ισχύει. Έστω ότι ισχύει για $n=k$, δηλαδή

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \cdots & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+x^2 \end{vmatrix}}_{k+1} = 1 + x^2 + \ldots + x^{2n} \qquad (2)$$

Θα δείξουμε ότι η σχέση ισχύει για n=k+1, δηλαδή

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 1+x^2 \end{vmatrix}}_{k+1} = 1 + x^2 + \ldots + x^{2(k+1)}$$

Έχουμε

$$\underbrace{\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & 1+x^2 \end{vmatrix}}_{k+1}$$

$$=(1 + x^2)\underbrace{\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \cdots & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+x^2 \end{vmatrix}}_{k} - x\underbrace{\begin{vmatrix} x & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1+x^2 & x & \cdots & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+x^2 \end{vmatrix}}_{k}$$

$$= (1 + x^2)\underbrace{\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \cdots & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+x^2 \end{vmatrix}}_{k} -x^2\underbrace{\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \cdots & \vdots \\ 0 & x & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & x \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1+x^2 \end{vmatrix}}_{k-1}$$

$$= (1 + x^2)(1 + x^2 + \ldots + x^{2k}) - x^2(1 + x^2 + \ldots + x^{2k\text{-}2})$$
$$= 1 + x^2 + x^2 + x^4 + \ldots +x^{2k}+x^{2k+2} - x^2 - x^4 - \ldots x^{2k}$$
$$= 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \ldots + x^{2k} + x^{2k+2} =1+ x^2 + \ldots + x^{2(k+1)}$$

Επομένως η ισότητα ισχύει για κάθε $n\in\mathrm{N}$.

Άσκηση 4-Υ5

Έστω A_n το $n\times n$ μητρώο

$$A_n = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Να δειχθεί ότι (α) $\det A_n=0$ όταν $n=3k-1$ και (β) να υπολογισθεί η $\det A_n$ όταν $n=3k$.

Απ.

Αναλύοντας την $\det A_n$ ως προς την πρώτη γραμμή και στη συνέχεια ως προς την πρώτη στήλη, λαμβάνουμε:

$$\det A_n = -2\begin{vmatrix} -2 & 4 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$=-2|A_{n-1}|-4\begin{vmatrix} -2 & 4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = -2|A_{n-1}|-4|A_{n-2}| \Rightarrow$$

$$|A_n| = -2|A_{n-1}|-4|A_{n-2}| \qquad (1)$$

Από την (1) υπολογίζουμε την $\det A_n$ για τις παρακάτω τιμές του n:

- $n = 3$: $\det A_3 = -2\det A_2 - 4\det A_1 = 0 + 8 = 8$
- $n = 4$: $\det A_4 = -2\det A_3 - 4\det A_2 = 4\det A_2 + 8\det A_1 - 4\det A_2 = 8\det A_1 = -16$
- $n = 5$: $\det A_5 = -2\det A_4 - 4\det A_3 = -164\det A_1 + 8\det A_2 + 16\det A_1 = 0$

α) Εφαρμόζοντας επαγωγή, για $n=5$ λαμβάνουμε:

$$\det A_5 = -2\det A_4 - 4\det A_3 = 32 - 32 = 0$$

Θεωρώντας ότι ισχύει η σχέση για $n=k$, δηλ. $\det A_{3k-1} = 0$, δείχνουμε ότι ισχύει και για $n=k+1$:

$$\det A_{3k+2} = -2\det A_{3k+1} - 4\det A_{3k} = -2(-2\det A_{3k} - 4\det A_{3k-1}) - 4\det A_{3k}$$
$$= 4\det A_{3k} + 8\det A_{3k-1} - 4\det A_{3k} = 8\det A_{3k-1} = 0$$

Συνεπώς ισχύει $\det A_n = 0$ για $n=3k-1$.

β) Εχουμε:

$$\det A_{3k} = -2\det A_{3k-1} - 4\det A_{3k-2} =$$

$$= -2(-2\det A_{3k-2} - 4\det A_{3k-3}) - 4\det A_{3k-2} = \ldots = 8\det A_{3k-3}$$

Από την σχέση $\det A_{3k} = 8\det A_{3k-3}$, για διαδοχικές τιμές του k παίρνουμε τις παρακάτω σχέσεις :

$$\det A_6 = 8\det A_3,\ \det A_9 = 8\det A_6,\ \det A_{3k-3} = 8\det A_{3k-6},\ \ldots,\ \det A_{3k} = 8\det A_{3k-3}$$

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη:

$$\det A_6 \det A_9 \ldots \det A_{3k-3} \det A_{3k-2} = 8\det A_3\, 8\det A_6 \ldots 8\det A_{3k-6}\, 8\det A_{3k-3} \Rightarrow$$
$$\det A_{3k} = 8^{k-1}\det A_3 = 8^{k-1}8 \Rightarrow \det A_{3k} = 8^k$$

Άσκηση 4-Υ6

Έστω ότι η απεικόνιση D: $M_n(\mathbf{R})\to\mathbf{R}$ είναι τέτοια ώστε $D(A)D(B) = D(AB)$, για όλα τα μητρώα A, $B\in M_n(\mathbf{R})$.

(α) Να δειχθεί ότι είτε $D(A)=0$ για όλα τα $A\in M_n(\mathbf{R})$ ή $D(I_n)=1$. Στη δεύτερη περίπτωση, να δειχθεί ότι $D(A)\neq 0$ όταν το A είναι αντιστρέψιμο.

(β) Επίσης, αν n=2, και υποθέσουμε επιπλέον ότι $D\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq D\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, να δειχθούν τα εξής:

(i) D(**0**)=0, (ii) D(A)=0 αν A^2=0, (iii) D(B)=-D(A) αν το B προκύπτει με εναλλαγή των γραμμών (ή στηλών) του A.

Απ.

α) Η σχέση D(A)D(B) = D(AB), ισχύει για όλα τα A,B∈M_n(**R**), άρα ισχύει και για B=I_n αφού I_n∈M_n(**R**). Επομένως:

$$D(A)D(I_n) = D(AI_n) = D(A) \Rightarrow$$
$$D(A)D(I_n) - D(A) = 0 \Rightarrow D(A)(D(I_n)-1) = 0$$

και άρα είτε D(A)=0 για κάθε A∈M_n(**R**), είτε D(I_n)=1. Αν D(I_n) = 1 και το A είναι αντιστρέψιμο, έχουμε :

$$D(AA^{-1}) = 1 \;\Rightarrow\; D(A)\, D(A^{-1}) = 1 \;\Rightarrow\; D(A) \neq 0.$$

β) (i) Οπως δείξαμε παραπάνω, αν το A είναι αντιστρέψιμο τότε D(A) ≠ 0, επομένως αν ένα μητρώο B δεν είναι αντιστρέψιμο, ισχύει D(B) = 0. Ομως, επειδή δεν υπάρχει μητρώο C∈M_n(**R**) τέτοιο ώστε C**0** = **0**C = I_n, έπεται ότι το 2×2 μηδενικό μητρώο **0** δεν είναι αντιστρέψιμο. Αρα η ορίζουσά του είναι ίση με 0, δηλαδή D(**0**)=0.

(ii) Θέτοντας B=A στη σχέση D(A)D(B)=D(AB) έχουμε

$$D(A)\, D(A) = D(AA) \Rightarrow (D(A))^2 = D(A^2) \qquad (1)$$

Επειδή όμως $A^2 = 0$, λόγω του (i) είναι $D(A^2) = 0$. Επομένως από την (1) προκύπτει

$$(D(A))^2 = 0 \Rightarrow D(A) = 0$$

(iii) Έστω $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix}$, που προκύπτει με εναλλαγή των γραμμών του A. Εχουμε τότε

$$D(B)=\begin{vmatrix} a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_3a_2 - a_4a_1 = -(a_1a_4 - a_2a_3) = -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} = -D(A)$$

Όμοια δείχνουμε ότι D(B)=-D(A) και στην περίπτωση που το μητρώο B προκύπτει με εναλλαγή στηλών του A.

Άσκηση 4-Υ7

Έστω A_n το μητρώο με a_{ij}=$|\,i-j\,|$. Να δειχθεί ότι detA_n=$(-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$.

Απ.

Το μητρώο A είνα:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & \ldots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & n-2 \\ & & \ldots & & \\ n-1 & n-2 & n-3 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

Αφαιρούμε κάθε στήλη από την προηγούμενή της και έχουμε:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \ldots & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & n-2 \\ & & \ldots & & \\ n-1 & n-2 & n-3 & \ldots & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & \ldots & -1 & n-1 \\ 1 & -1 & -1 & \ldots & -1 & n-2 \\ 1 & 1 & -1 & \ldots & -1 & n-3 \\ & & & \ldots & & \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Προσθέτουμε την πρώτη σειρά σε όλες τις επόμενες, οπότε προκύπτει τριγωνικό μητρώο :

$$= \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & \dots & -1 & n-1 \\ 0 & -2 & -2 & \dots & -2 & 2n-3 \\ 0 & 0 & -2 & \dots & -2 & 2n-4 \\ & & & \dots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n-1 \end{vmatrix}$$

$= (-1)(-2)^{n-2}(n-1) = (-1)[(-1)2]^{n-2}(n-1) = (-1)^{n-1}2^{n-2}(n-1)$

Άσκηση 4-Υ8

Να δείξετε ότι:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & x \end{vmatrix} = (x-1)\ \{(x-1)^{n-2} + x^{n-1} + x^{n-3}\}$$

Απ.

Φέρνουμε την ορίζουσα σε απλούστερη μορφή εφαρμόζοντας μετασχηματισμούς γραμμών:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1-x \\ 1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & x \end{vmatrix}$$

$$= (x-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & x \end{vmatrix} = (x-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1+1 \\ 1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0+1 \\ 1 & 1 & x & \cdots & 0 & 0+1 \\ 1 & \vdots & \vdots & & x & 1+1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & x+1 \end{vmatrix}$$

$$= (x-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & x & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & x & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \vdots & \vdots & & x & 2 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & x+1 \end{vmatrix} = (x-1)\begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & x & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & x & 2 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & x+1 \end{vmatrix}$$

$$= (x-1)\left[\begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & x & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & x & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & x & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & x \end{vmatrix}\right]$$

$$= (x-1)\left[\begin{vmatrix} x-1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & x & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & x & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & x \end{vmatrix}\right]$$

$= (x-1)\{(x-1)^{n-2} + x^{n-1}(x^2-1)\}$

$= (x-1)\ \{(x-1)^{n-2} + x^{n-1} + x^{n-3}\}$

Άσκηση 4-Υ9

Δίνεται το μητρώο

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Να υπολογισθεί η ορίζουσα του A, χωρίς χρήση αλγεβρικών συμπληρωμάτων.

Απ.

Μετατρέπουμε το A σε κάτω τριγωνικό (αφού δεν απέχει πολύ από το να είναι) και έχουμε:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ -4 & -6 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = L$$

Είναι $\det(A)=\det(L)=0$, διότι το κάτω τριγωνικό L έχει ένα μηδενικό διαγώνιο στοιχείο.

4.2 Αντιστρεψιμότητα και Προσαρτημένα Μητρώα

Άσκηση 4-Α1

Να καθοριστούν ποιά από τα επόμενα μητρώα είναι αντιστρέψιμα:

(i) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Απ.

Για να είναι ένα μητρώο αντιστρέψιμο πρέπει να έχει ορίζουσα διάφορη του 0. Εφαρμόζουμε:

(i) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \\ 9 & 0 & 8 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = -(24-35) = 21 \neq 0$

Άρα το μητρώο είναι αντιστρέψιμο.

(ii) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -(4-4) = 0$

Άρα το μητρώο είναι ιδιάζον.

(iii) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$

Άρα το μητρώο είναι ιδιάζον.

Άσκηση 4-Α2

Καθορίστε αν τα επόμενα συστήματα ομογενών εξισώσεων έχουν μη-τετριμένες λύσεις.

(i) $\begin{aligned} x + 2y - z &= 0 \\ -2x + y + 2z &= 0 \\ x - y + z &= 0 \end{aligned}$ (ii) $\begin{aligned} x - 2y - z &= 0 \\ -2x + y + 2z &= 0 \\ x - y - z &= 0 \end{aligned}$

Απ.

(i) Η ορίζουσα του μητρώου συντελεστών είναι

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 10 \neq 0.$$

Άρα το σύστημα έχει μόνον την τετριμένη λύση.

(ii) $$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 1+2\cdot 0-1=0.$$

Άρα το σύστημα έχει μη τετριμένη λύση (άπειρες λύσεις).

Άσκηση 4-A3

Με χρήση οριζουσών, δείξτε ότι αν $k \neq 1$ υπάρχει πάντα μία λύση του συστήματος

$$\begin{aligned} 2x - y - z &= 6 \\ x - 2y + z &= p \\ x + ky - 2z &= p^2 \end{aligned}$$

για οποιεσδήποτε τιμές του p και για σταθερό p η λύση είναι μοναδική. Να βρεθεί η λύση όταν $k=2$, $p=1$. Δείξτε ότι αν $k=1$, υπάρχουν ακριβώς 2 τιμές του p για τις οποίες το σύστημα έχει λύσεις. Στη συνέχεια, να βρεθούν αυτές οι τιμές και να λυθεί το σύστημα πλήρως σε κάθε περίπτωση.

Απ.

Λαμβάνουμε την ορίζουσα των συντελεστών:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & k & -2 \end{vmatrix} = 2(4-k)+(-2-1)-(k+2)=8-2k-3-k-2 = -3k+3 = -3(k-1).$$

Για $k\neq 1$ είναι $D\neq 0$, και το σύστημα έχει μοναδική λύση. Για $k=2$, $p=1$ το σύστημα γίνεται

$$\begin{aligned} 2x - y - z &= 6 \\ x - 2y + z &= 1 \\ x + 2y - 2z &= 1 \end{aligned}$$

Λαμβάνουμε τις ορίζουσες:

$$D = \det(A) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -3,$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 6 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 5, \quad D_y = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 12, \quad D_z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 16$$

Συνεπώς η λύση του συστήματος είναι: $x = D_x/D = -5/3$, $y = x = D_y/D = -4$, $z = D_z/D = -16/3$.

Αν $k=1$, το σύστημα γίνεται

$$\begin{aligned} 2x - y - z &= 6 \\ x - 2y + z &= p \\ x + y - 2z &= p^2 \end{aligned}$$

Είναι ήδη $D=0$. Για να υπάρχει λύση (άπειρες λύσεις), θα πρέπει $D_x=D_y=D_z=0$. Υπολογίζουμε τις ορίζουσες:

$$D_x = \begin{vmatrix} 6 & -1 & -1 \\ p & -2 & 1 \\ p^2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 6(4 - 1) + (-2p - p^2) - (p + 2p^2)$$

$= 18 - 2p - p^2 - p - 2p^2 = -3p^2 - 3p + 18$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 1 & p & 1 \\ 1 & p^2 & -2 \end{vmatrix} = 2(-2p - p^2) - 6(-2 - 1) - (p^2 - p)$$

$= -4p - 2p^2 + 18 - p^2 + p = -3p^2 - 3p + 18$

$$D_z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 1 & -2 & p \\ 1 & 1 & p^2 \end{vmatrix} = 2(-2p^2 - p) + (p^2 - p) + 6(1+2)$$

$= -3p^2 - 3p + 18$

Οι ρίζες του τριωνύμου $3p^2 + 3p - 18 = 0$ είναι $p_1 = -3$ και $p_2 = 2$. Άρα για $k=1$ και $p = -3$ ή 2, το δοθέν σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

Λύνουμε τώρα το σύστημα για $k=1$ και $p=-3$ εφαρμόζοντας απαλοιφή:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 6 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & 9 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 6 \\ 0 & -3/2 & 3/2 & -6 \\ 0 & 3/2 & -3/2 & 6 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 6 \\ 0 & -3/2 & 3/2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Η λύση του μηδενοχώρου είναι $\boldsymbol{x}_\varepsilon = (1, 1, 1)^T$ και η μερική λύση $\boldsymbol{x}_\mu = (5, 4, 0)^T$. Άρα η πλήρης λύση είναι:

$$\boldsymbol{x}_\pi = (5, 4, 0)^T + a(1, 1, 1)^T, \ a \in \mathbf{R}$$

Για $p=2$ η απαλοιφή δίνει για το διάνυσμα του β' μέλους:

$(6, 2, 4) \to (6, -1, 1) \to (6, -1, 0) \to (6, 2/3, 0) \to (10/3, 2/3, 0)$

Η μερική λύση τώρ είναι $\boldsymbol{x}_\mu = (10/3, 2/3, 0)^T$ και η πλήρης λύση:

$$\boldsymbol{x}_\pi = (10/3, 2/3, 0)^T + a(1, 1, 1)^T, \ a \in \mathbf{R}$$

Άσκηση 4-Α4

Για ποιές τιμές του k το επόμενο σύστημα έχει (i) καμιά λύση, (ii) μια μοναδική λύση και (iii) περισσότερες από μια λύσεις;

$$\begin{aligned} &x + (k+2)y + 2z = 2 \\ &(k^2+1)x + 2(k+2)y + 4z = 4k \\ &3x + 9y + 3(k+1)z = 6k \end{aligned}$$

Απ.

Εφαρμόζοντας τις ιδιότητες της γραμμικότητας έχουμε:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & k+2 & 2 \\ k^2+1 & 2(k+2) & 4 \\ 3 & 9 & 3(k+1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & k+2 & 2 \\ k^2 & k+2 & 2 \\ 3 & 9 & 3(k+1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-k^2 & 0 & 0 \\ k^2 & k+2 & 2 \\ 3 & 9 & 3(k+1) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-k^2 & 0 & 0 \\ k^2 & k & 2 \\ 3 & 3(2-3k) & 3(k+1) \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1-k^2 & 0 & 0 \\ k^2 & k & 2 \\ 1 & 2-3k & k+1 \end{vmatrix} = 3(1-k^2)[k(k+1)-4+6k]$$
$$= 3(1-k^2)(k^2+7k-4)$$

Επομένως D=0 όταν k=1, k=-1 και k=(-7±√65)/2. Υπολογίζουμε και τις ορίζουσες:

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & k+2 & 2 \\ 4k & 2\,(k+2) & 4 \\ 6k & 9 & 3\,(k+1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-2k & 0 & 0 \\ 4k & 2\,(k+2) & 4 \\ 6k & 9 & 3\,(k+1) \end{vmatrix} = 12\begin{vmatrix} 1-k & 0 & 0 \\ 2k & k+2 & 2 \\ 2k & 3 & k+1 \end{vmatrix}$$
$$= 12(1-k)[k^2+3k+2-6] = 12(1-k)(k^2+3k-4)$$

Είναι D_x=0 όταν k=1 και k=(-3+5)/2=1, k=(-3-5)/2=-4, δηλ. για k=1 και k=-4.

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ k^2 & 4k & 4 \\ 3 & 6k & 3\,(k+1) \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ k^2 & 4k & 4 \\ 1 & 2 & k+1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ k^2 & 4k & 4 \\ 0 & 0 & k+1 \end{vmatrix}$$
$$= 3(k+1)(4k-2k^2) = 6k(k+1)(2-k)$$

Είναι D_y=0 όταν k=-1 και k=2.

$$D_z = \begin{vmatrix} 1 & k+2 & 2 \\ k^2+1 & 2\,(k+2) & 4k \\ 3 & 9 & 6k \end{vmatrix} = 3\times 2\begin{vmatrix} 1 & k+2 & 1 \\ k^2+1 & 2\,(k+2) & 2k \\ 1 & 3 & k \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 0 & k-1 & 1-k \\ k^2-1 & 2\,(k-1) & 0 \\ 1 & 3 & k \end{vmatrix}$$
$$= 6(k-1)^2\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ k+1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & k \end{vmatrix} = 6(k-1)^2\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ k+1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3+k \end{vmatrix} = -6(k-1)^2[(k+1)(3+k)-2]$$
$$= -6(k-1)^2(k^2+4k+1) = -6(k-1)^2(k^2+4k+1)$$

Επομένως D=0 όταν k=1, k=-1 και k=(-7±√65)/2. Υπολογίζουμε και τις ορίζουσες:

Είναι D_x=0 όταν k=1 και k=(-3+5)/2=1, k=(-3-5)/2=-4, δηλ. όταν k=1 και k=-4.
Είναι D_y=0 όταν k=-1 και k=2.
Είναι D_z=0 όταν k=1 και k=(-4±√12)/2, ή k=(-2±2√3)/2=-1±√3.

Συνεπώς:

- Όταν k=1 είναι D=D=D_y=D_z=0, άρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.
- Όταν k=-1 είναι D=D_y=0 και D_x,D_z≠0. Επίσης, όταν k=(-7±√65)/2 είναι D_x, D_y, D_z ≠ 0. Επομένως για k=-1 και k=(-7±√65)/2, δεν υπάρχει καμία λύση.
- Για όλες τις υπόλοιπες τιμές του k το σύστημα έχει μία μοναδική λύση.

Άσκηση 4-A5

Για ποιές τιμές του t το παρακάτω μητρώο είναι ιδιάζον; Για όλες τις άλλες τιμές του t, ποιό είναι το αντίστροφο;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ t & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Απ.

Το μητρώο είναι ιδιάζον όταν det(A)=0. Είναι:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ t & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - t^2$$

Συνεπώς για τις τιμές $t = \pm 1$ το A είναι ιδιάζον. Για όλες τις άλλες τιμές του t το A έχει αντίστροφο. Το υπολογίζουμε με τη μέθοδο του προσαρτημένου:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A)$$

$$adj(A) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} t & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ t & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ t & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -t & -t \\ -t & 1 & 1 \\ -t & t^2 & 1 \end{bmatrix}$$

Άρα για $t \in \mathbf{R}$-$\{1, -1\}$ ισχύει :

$$A^{-1} = \frac{1}{1 - t^2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -t & -t \\ -t & 1 & 1 \\ -t & t^2 & 1 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 4-Α6

Αφού δείξετε ότι οι παρακάτω πίνακες είναι αντιστρέψιμοι, βρείτε στη συνέχεια τους αντίστροφους των.

$$\text{(i)} \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 6 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{(ii)} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{pmatrix}$$

Απ.

(i) Εξετάζουμε την ορίζουσα του A. Είναι

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 6 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 6 & -3 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = +3(12+12) = 72 \neq 0$$

άρα το A είναι αντιστρέψιμο. Υπολογίζουμε στη συνέχεια το A^{-1} με τη μέθοδο του προσαρτημένου:

$$adjA = C^T = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Από τη σχέση $A^{-1} = \dfrac{adjA}{\det A}$ έχουμε:

$$A^{-1} = \frac{1}{72}\begin{pmatrix} -3 & 5 & 9 \\ 18 & -6 & 18 \\ 6 & 14 & -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/24 & 5/72 & 1/8 \\ 1/4 & -1/12 & 1/4 \\ 1/12 & 7/36 & -1/4 \end{pmatrix}$$

(ii) Οπως και παραπάνω βρίσκουμε την ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

Άρα υπάρχει το αντίστροφο του B. Βρίσκουμε το προσαρτημένο μητρώο:

$$adjB = C^T = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 12 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -9 & 1 \\ -7 & 9 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Τελικά υπολογίζουμε:

$$B^{-1} = \frac{adjB}{\det B} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 11 & -9 & 1 \\ -7 & 9 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11/3 & -3 & 1/3 \\ -7/3 & 3 & -2/3 \\ 2/3 & -1 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 4-Α7

Να επιλυθούν τα επόμενα συστήματα, με χρήση της μεθόδου *Cramer*. Να επαληθεύσετε στη συνέχεια τα αποτελέσματα υπολογίζοντας το αντιστρόφο του μητρώου συντελεστών του συστήματος μέσω του προσηρτημένου μητρώου.

(α) $x - y + 2z = 1$, $2x + y + z = 2$, $x - 3y + z = 1$

(β) $2x + 3y - 5z = 4$, $x + 7y - 2z = 1$, $5x - 11y + 2z = -2$

Απ.

Με τη μέθοδο *Cramer* η λύση ενός γραμμικού συστήματος $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ συστήματος υπολογίζεται από τους τύπους:

$$\boldsymbol{x}_i = \frac{detA_i}{detA},\ i = 1,2, \ldots, n$$

όπου το A_i προκύπτει με αντικατάσταση της i στήλης του A από το διάνυσμα $\boldsymbol{b}$.

α) Το σύστημα σε μορφή μητρώων γράφεται:

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \text{ ή } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Η ορίζουσα του A είναι

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$$

Το A είναι αντιστρέψιμο, συνεπώς το σύστημα έχει μια μοναδική λύση. Εφαρμόζουμε τους τύπους του *Cramer*:

$$x = -\frac{1}{9}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$y = -\frac{1}{9}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$z = -\frac{1}{9}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Επαληθεύουμε, βρίσκοντας το αντίστροφο μητρώο A^{-1}, οπότε η λύση του συστήματος υπολογίζεται από τη σχέση $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$. Υπολογίζουμε το προσαρτημένο μητρώο του A:

$$adjA = C^T = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & -3 \\ -1 & -1 & 3 \\ -7 & +2 & 3 \end{pmatrix}$$

Εφαρμόζοντας τη σχέση $A^{-1} = \dfrac{adjA}{\det A}$ έχουμε

$$A^{-1} = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -5 & -3 \\ -1 & -1 & 3 \\ -7 & +2 & 3 \end{pmatrix}$$

Αντικαθιστώντας έχουμε

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & -5 & -3 \\ -1 & -1 & 3 \\ -7 & +2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

β) Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία έχουμε:

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & 7 & -2 \\ 5 & -11 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Η ορίζουσα του A είναι $\det(A) = 178 \neq 0$, οπότε το A είναι αντιστρέψιμο, και άρα το σύστημα έχει μια μοναδική λύση. Εφαρμόζοντας τους τύπους του *Cramer*:

$$x = \frac{1}{178}\det\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 1 & 7 & -2 \\ -2 & -11 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{178}(56 + 12 + 55 - 70 - 88 - 6) = -\frac{41}{178}$$

$$y = \frac{1}{178}\det\begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{178}(4 - 40 + 10 + 25 - 8 - 8) = -\frac{17}{178}$$

$$z = \frac{1}{178}\det\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & 1 \\ 5 & -11 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{178}(-28 + 15 - 44 - 140 + 22 + 6) = -\frac{169}{178}$$

Επαληθεύοντας, υπολογίζουμε το προσαρτημένο μητρώο του A:

$$adjA = \mathrm{C}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -11 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -11 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -11 & 2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} & -5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 5 & 11 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -11 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & +49 & 29 \\ -12 & 29 & -1 \\ -46 & 37 & 11 \end{pmatrix}$$

Από την $A^{-1} = \dfrac{adjA}{\det A}$ βρίσκουμε:

$$A^{-1} = \frac{1}{178}\begin{pmatrix} -8 & 49 & 29 \\ -12 & 29 & -1 \\ -46 & 37 & 11 \end{pmatrix}$$

Αντικαθιστώντας παίρνουμε:

$$\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{178}\begin{pmatrix} -8 & 49 & 29 \\ -12 & 29 & -11 \\ -46 & 37 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{178}\begin{pmatrix} -41 \\ -17 \\ -169 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 4-Α8

Αν A είναι ένα $n\times n$ μητρώο, να δειχθεί ότι $\det(adjA)=(\det A)^{n-1}$.

Απ.

Από τον τύπο των αλγεβρικών συμπληρωμάτων, για $j=1, 2,\ldots,n$ η ορίζουσα του A δίνεται:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}c_{ik} = \det A\,,$$

όπου c_{ik} το αλγεβρικό συμπλήρωμα του στοιχείου a_{ik}. Επιπλέον, για κάθε $k\neq j$ ισχύει:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}c_{ik} = \begin{vmatrix} a_{11}\ldots a_{1j}\ldots a_{1j}\ldots a_{1n} \\ a_{21}\ldots a_{2j}\ldots a_{2j}\ldots a_{2n} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}\ldots a_{nj}\ldots a_{nj}\ldots a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω λαμβάνουμε

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}c_{ik} = \delta_{jk}\det A, \tag{1}$$

όπου $\delta_{jk}=1$ όταν $j=k$ και $\delta_{jk}=0$ όταν $j\neq k$. Επίσης γνωρίζουμε ότι το προσαρτημένο μητρώο του A ορίζεται:

$$adjA= (c_{ij})^{\mathrm{T}}$$

δηλ. το $n\times n$ μητρώο που προκύπτει θέτοντας το αλγεβρικό συμπλήρωμα c_{ji} στη θέση (i, j). Έτσι, από την (1) έχουμε

$$(adjA)\,A = (c_{ij})(a_{ij}) = \left(\sum_{k=1}^{n} c_{ki}a_{kj}\right) = \begin{pmatrix} \det A & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \det A \end{pmatrix} \tag{2}$$

Παίρνοντας τις ορίζουσες αριστερού και του δεξιού και μέλους της (2) έχουμε:

$$\det((adjA)\,A) = \det(adjA)\cdot\det A \tag{3}$$

και

$$\begin{vmatrix} \det A & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \det A \end{vmatrix} = \det A\ \det A \dots \det A = (\det A)^n \tag{4}$$

Από τις (2), (3) και (4) έχουμε:

$$\det(adjA)\ \det A = (\det A)^n$$

οπότε αν $\det A \neq 0$:

$$\det(adjA) = \frac{(\det A)^n}{\det A} \Rightarrow \det(adjA) = (\det A)^{n-1}$$

Άσκηση 4-A9

α) Να βρεθεί το προσαρτημένο μητρώο του μητρώου A

$$A=\begin{pmatrix} x+1 & 0 & -1 \\ 0 & x+1 & -2 \\ 1 & 1 & x-2 \end{pmatrix}$$

β) Αν είναι $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & x-1 \end{pmatrix}$, για ποιές μιγαδικές τιμές του x το γινόμενο του $(adjA)B$ είναι ιδιάζον;

Απ.

Αρχικά βρίσκουμε το προσαρτημένο μητρώο του A.

$$adjA = (c_{ij})^T = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} x+1 & -2 \\ 1 & x-2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & x-2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ x+1 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & x-2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} x+1 & -1 \\ 1 & x-2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} x+1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & x+1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} x+1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} x+1 & 0 \\ 0 & x+1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (x+1)(x-2)+2 & -1 & x+1 \\ -2 & (x+1)(x-2)+1 & 2(x+1) \\ -(x+1) & -(x+1) & (x+1)^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x^2-x & -1 & (x+1) \\ -2 & x^2-x-1 & 2(x+1) \\ -(x+1) & -(x+1) & (x+1)^2 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Ένα μητρώο είναι ιδιάζον όταν η ορίζουσά του είναι 0. Άρα αρκεί να εξισώσουμε την ορίζουσα του γινομένου $(adjA)B$ με το μηδέν. Δηλαδή:

$$\det((adjA)B)=0 \tag{2}$$

Λύνοντας την εξίσωση βρίσκουμε τις μιγαδικές ρίζες που επαληθεύουν την παραπάνω συνθήκη. Από τις ιδιότητες των οριζουσών έχουμε

$$\det((adjA)B) = \det(adj\,A)\det B$$

Επομένως υπολογίζουμε ξεχωριστά τις ορίζουσες

$$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & x-1 \end{vmatrix} = x - 1 \qquad (3)$$

$$\det(adjA) = \begin{vmatrix} x^2-x & -1 & x+1 \\ -2 & x^2-x-1 & 2(x+1) \\ -(x+1) & -(x+1) & (x+1)^2 \end{vmatrix}$$

Από την τελευταία γραμμή βγάζουμε το x+1 έξω από την ορίζουσα και έχουμε

$$\det(adjA)=(x+1)\begin{vmatrix} x^2-x & -1 & x+1 \\ -2 & x^2-x-1 & 2(x+1) \\ -1 & -1 & x+1 \end{vmatrix}$$

Πολλαπλασιάζουμε την 3η γραμμή με -2 και την προσθέτουμε στη 2η γραμμή. Επίσης πολλαπλασιάζουμε την 3η γραμμή με -1 και την προσθέτουμε στην πρώτη και έχουμε:

$$\det(adjA)=(x+1)\begin{vmatrix} x^2-x+1 & 0 & 0 \\ 0 & x^2-x+1 & 0 \\ -1 & -1 & x+1 \end{vmatrix} = (x+1)^2\,(x^2-x+1)^2 \qquad (4)$$

Απο τις (2), (3) και (4) προκύπτει:

$$(x-1)(x+1)^2\,(x^2-x+1)^2 = 0$$

Βρίσκουμε τις ρίζες x_1=1 και $x_{2,3}$=-1 που είναι πραγματικές. Από την

$$x^2 - x + 1=0, \quad \Delta=1-4=-3$$

τις μιγαδικές ρίζες :

$$x_{4,5} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$$

$$x_{6,7} = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$$

4.3 Ορίζουσες και Τάξη

Άσκηση 4-Τ1 [Άσκηση 1.6-Τ6 με ορίζουσες]

Δείχνουμε εδώ με χρήση οριζουσών το ζητούμενο της Άσκησης 1.6-Τ6: Η τάξη του μητρώου

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b & a \\ b & a & -a & -b \\ a+b & a+b & 2a & -2a \\ -2a & 2a & a+b & a+b \end{pmatrix}$$

είναι 4 όταν $a + b = 0$ και $b = 3a$. Επίσης, υπολογίζουμε την τάξη του A για τις υπόλοιπες περιπτώσεις.

Απ.

Είναι rank(A)=4 όταν ορίζονται 4 οδηγοί ή ισοδύναμα όταν det$A \neq 0$. Υπολογίζουμε λοιπόν την ορίζουσα:

$$\det A=\begin{vmatrix} a & b & b & a\\ b & a & -a & -b\\ a+b & a+b & 2a & -2a\\ -2a & 2a & a+b & a+b\end{vmatrix}\overset{\substack{c_1\to c_1+c_2\\ c_4\to c_4+c_3}}{=}\begin{vmatrix} a+b & b & b & a+b\\ a+b & a & -a & -a-b\\ 2a+2b & a+b & 2a & 0\\ 0 & 2a & a+b & 2a+2b\end{vmatrix}=$$

$$=(a+b)^2\begin{vmatrix} 1 & b & b & 1\\ 1 & a & -a & -1\\ 2 & a+b & 2a & 0\\ 0 & 2a & a+b & 2\end{vmatrix}\overset{\substack{r_2\to r_2-r_1\\ r_3\to r_3-2r_1}}{=}(a+b)^2\begin{vmatrix} 1 & b & b & 1\\ 0 & a-b & -a-b & -2\\ 0 & a-b & 2a-2b & -2\\ 0 & 2a & a+b & 2\end{vmatrix}$$

$$=(a+b)^2\begin{vmatrix} a-b & -a-b & -2\\ a-b & 2a-2b & -2\\ 2a & a+b & 2\end{vmatrix}\overset{r_3\to r_3+r_1}{=}(a+b)^2\begin{vmatrix} a-b & -a-b & -2\\ a-b & 2a-2b & -2\\ 3a-b & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$=-(a+b)^2(3a-b)\begin{vmatrix} -a-b & -2\\ 2a-2b & -2\end{vmatrix}=-(a+b)^2(3a-b)\begin{vmatrix} -a-b & -2\\ 3a-b & 0\end{vmatrix}$$

$$=2(a+b)^2(3a-b)^2$$

Άρα rank(A)=4, όταν $a+b\neq 0$ και $b\neq 3a$.

Αν $a+b=0$ τότε

$$A=\begin{pmatrix} a & -a & -a & a\\ -a & a & -a & a\\ 0 & 0 & 2a & -2a\\ -2a & 2a & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4\to r_4+2r_1]{r_2\to r_2+r_1}\begin{pmatrix} a & -a & -a & a\\ 0 & 0 & -2a & 2a\\ 0 & 0 & 2a & -2a\\ 0 & 0 & -2a & 2a\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4\to r_4-r_2]{r_3\to r_3+r_2}a\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Άρα rank(A)=2 όταν $b=-a\neq 0$ και rank(A)=0 όταν $a=b=0$.

Αν $b=3a$ και $a\neq 0$:

$$A\to\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1\\ 3 & 1 & -1 & -3\\ 4 & 4 & 2 & -2\\ -2 & 2 & 4 & 4\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3\to r_3-4r_1\\ r_4\to r_4+2r_1}]{r_2\to r_2-3r_1}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1\\ 0 & -8 & -10 & -6\\ 0 & -8 & -10 & -6\\ 0 & 8 & 10 & 6\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4\to r_4+r_2]{r_3\to r_3-r_2}a\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1\\ 1 & -8 & -10 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Άρα rank(A)=2 όταν $b=3a\neq 0$.

Άσκηση 4-Τ2 [Άσκηση 1.6-Τ7 με ορίζουσες]

Να βρεθεί για όλες τις τιμές του a η τάξη του μητρώου

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 6+a\\ 2 & 3 & 4-a & 2\\ 1 & 1-a & -2 & -5\\ 1 & 6 & 12 & 19\end{pmatrix}$$

Θεωρώντας ορίζουσες, έχουμε rank(A)=4 αν και μόνο αν $\det A\neq 0$. Υπολογίζουμε λοιπόν:

$$\det A=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 6+a\\ 2 & 3 & 4-a & 2\\ 1 & 1-a & -2 & -5\\ 1 & 6 & 12 & 19\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 6+a\\ 0 & -3 & -6-a & -10-2a\\ 0 & -2-a & -7 & -11-a\\ 0 & 3 & 7 & 13-a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -3 & -6-a & -10-2a\\ -2-a & -7 & -11-a\\ 3 & 7 & 13-a\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1-a & 3-3a \\ -2-a & -7 & -11-a \\ 3 & 7 & 13-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1-a & 3-3a \\ 1-a & 0 & 2-2a \\ 3 & 7 & 13-a \end{vmatrix} = (1-a)^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 13-a \end{vmatrix}$$

$$= (1-a)^2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 7 & 7-a \end{vmatrix} = (1-a)^2 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 7-a \end{vmatrix} = -(1-a)^2(a+14)$$

Συνεπώς rank(A)=4, εκτός εαν a=1 ή a=-14. Δουλεύοντας στη συνέχεια με τον κλασσικό τρόπο βρίσκουμε εύκολα τις αντίστοιχες τάξεις.

Άσκηση 4-Τ3

Να βρεθούν όλες οι τιμές του t για τις οποίες το μητρώο

$$A = \begin{pmatrix} (1+t)t & t-1 & -t \\ 0 & 2 & -1 \\ -2t & 4-2t & t-2 \end{pmatrix}$$

είναι τάξης μικρότερης του 3 και να καθοριστεί η αντίστοιχη τάξη. Σε κάθε περίπτωση να εκφραστεί μια απ' τις στήλες ως γραμμικός συνδυασμός των άλλων.

Απ.

Υπολογίζουμε την ορίζουσα:

$$\det A = \begin{vmatrix} (1+t)t & t-1 & -t \\ 0 & 2 & -1 \\ -2t & 4-2t & t-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+t^2 & -t-1 & -t \\ 0 & 0 & -1 \\ -2t & 0 & t-2 \end{vmatrix} = 0-(-2t)(-t-1) = -2t(t+1)$$

Για να είναι rank(A)<3 πρέπει det(A)=0. Άρα det(A)=0 $\Leftrightarrow$ t=0 ή t=-1.
Για t=0:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Επομένως rank(A)=2. Οι στήλες 2 και 3 είναι γ.α. και προφανώς

$$\boldsymbol{c}_1 = (0, 0, 0)^T = 0(-1, 2, 4)^T + 0(0, -1, 2)^T = 0\ \boldsymbol{c}_2 + 0\ \boldsymbol{c}_2$$

Για t=-1:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 6 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Επομένως rank(A)=2. Οι στήλες 1, 2 και 3 είναι γ.ε. και προφανώς

$$\boldsymbol{c}_3 = (1, -1, -3)^T = 0(0, 0, 2)^T + \frac{1}{2}(-2, 2, 6)^T + = 0\ \boldsymbol{c}_1 + \frac{1}{2}\ \boldsymbol{c}_2$$

4.4 Οδηγοί από Ορίζουσες

Άσκηση 4.6-Ο1

Σε ένα μητρώο $A\in\mathbf{R}^{4\times4}$ οι κύριες (αριστερές) υπο-ορίζουσες D_k=det(A(1:k; 1:k), k=1,…,4, είναι D_1=2, D_2=-10, D_3=25, D_4=40. Θεωρούμε ότι κατά την απαλοιφή στο A δεν έγινε καμιά εναλλαγή γραμμών. Τότε, να υπολογισθούν οι οδηγοί.

Απ.

Με την υπόθεση ότι δεν γίνονται εναλλαγές γραμμών, για τους οδηγούς u_i ισχύει:

u_1=D$_1$

και για i>1 u_i=D$_i$/D$_{i-1}$, δηλ.

u_1=D$_1$=2,
u_2=D$_2$/D$_1$=-10/2=-5,
u_3=D$_3$/D$_2$=25/(-10)=-2.5,
u_4=D$_4$/D$_3$=40/25=8/5.

5 ΓΡΑΜΜΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

5.1 Ιδιότητες

Άσκηση 5.4-ΓΜ1

Να εξετασθεί αν οι επόμενες απεικονίσεις T: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί:

(i) $T(a, \beta, \gamma) = (a+1, a+2\beta-\gamma)$,
(ii) $T(a, \beta, \gamma) = (a\beta, \beta\gamma)$,
(iii) $T(a, \beta, \gamma) = (|a|, 0)$

Απ.

(i) Η πρώτη συνιστώσα $a+1$ της εικόνας της T προφανώς δεν είναι γ.σ. των a, β, γ, άρα η T δεν είναι γ.μ.

(ii) Το ίδιο συμβαίνει για την απεικόνιση $T(a, \beta, \gamma)=(a\beta, \beta\gamma)$. Τα $a\beta$ και $\beta\gamma$ δεν προκύπτουν ως γ.σ. των των a, β, γ, άρα η T δεν είναι γ.μ.

(iii) Η απεικόνιση $T(x, y, z) = (|x|, 0)$ δεν είναι γ.μ., αφού για (a_1, β_1, γ_1), $(a_1, \beta_1, \gamma_1) \in \mathbf{R}^3$, $\lambda \in \mathbf{R}$:

$$\begin{aligned} T(\lambda(a_1, \beta_1, \gamma_1) + (a_2, \beta_2, \gamma_2)) = (|\lambda a_1 + a_2|, 0) \neq \lambda T(a_1, \beta_1, \gamma_1) + T(a_2, \beta_2, \gamma_2) \\ = \lambda(|a_1|, 0) + (|a_2|, 0) \\ = (\lambda|a_1|+|a_2|, 0) \end{aligned}$$

Άσκηση 5.4-ΓΜ2

Να εξετασθεί αν οι επόμενες απεικονίσεις είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί.

(i) $T(A) = AS - SA$, $S \in K^{n\times n}$, με $T : K^{n\times n} \to K^{n\times n}$.
(ii) $T(A) = A^n$, με $T : K^{n\times n} \to K^{n\times n}$.
(iii) $T(f(x)) = f'(x)$, με $T : P_n(\mathbf{R}) \to P_n(\mathbf{R})$.
(iv) $T(f(x)) = f(x)f'(x)$, με $T : P_n(\mathbf{R}) \to P_n(\mathbf{R})$.
(v) $T(f(x)) = xf(x)$, με $T : P_n(\mathbf{R}) \to P_n(\mathbf{R})$.

Απ.

(i) Έστω A, $B \in K^n$ τότε είναι :

$$\begin{aligned} T(aA+B) &= (aA + B)S - S(aA + B) = aAS - \alpha SA + BS - SB \\ &= \alpha(AS-SA) +(BS - SB) = aT(A) + T(B) \end{aligned}$$

Άρα η T είναι γ.μ.

(ii) Για την $T(A)=A^n$. Αν A, $B \in K^n$ και $a \in K$ τότε για $n>1$ είναι:

$$T(aA+B)=(aA+B)^n \neq aA^n +B^n = aT(A)+T(B)$$

Άρα η T δεν είναι γ. μ.

(iii) Αν $f, g \in P_n(\mathbf{R})$, $a \in \mathbf{R}$, τότε

$$T(af(x) + g(x)) = [af(x) + g(x)]' = af'(x) + g'(x) = aT(f(x)) + T(g(x))$$

Άρα η T είναι γ.μ.

(iv) Αν $f, g \in P_n(\mathbf{R})$, $a \in \mathbf{R}$, τότε

$$T(af(x) + g(x)) = [af(x) + g(x)][af(x) + g(x)]' = [af(x) + g(x)][af'(x) + g'(x)] =$$

$= a^2f(x)f'(x) + g(x)g'(x) + af(x)g'(x) + af'(x)g(x)$

ενώ: $a\mathrm{T}(f(x)) + \mathrm{T}(g(x)) = af(x)f'(x) + g(x)g'(x)$, δηλ. $\mathrm{T}(af(x) + g(x)) \neq a\mathrm{T}(f(x)) + \mathrm{T}(g(x))$, δηλ. η Τ δεν είναι γ.μ.

(v) Έστω $f, g \in \mathrm{P}_n(\mathbf{R})$

$$\mathrm{T}(af(x) + g(x)) = x(af(x) + g(x)) = axf(x) + xg(x) = a(xf(x)) + xg(x) = a\mathrm{T}(f(x)) + \mathrm{T}(g(x))$$

Άρα η Τ είναι γ. μ.

Άσκηση 5.4-ΓΜ3

Να καθορισθεί αν οι επόμενες απεικονίσεις Τ: $\mathrm{P}_n(\mathbf{R})\to\mathrm{P}_n(\mathbf{R})$ είναι γραμμικοί μετασχηματισμοί

(i) $\mathrm{T}(f(x))=\int_0^x f(t)dt$

(ii) $\mathrm{T}(f(x))=f(x+1)$

Απ.

(i) Έστω $f(x), g(x)\in\mathrm{P}_n(\mathbf{R})$ και $a\in\mathbf{R}$**.** Τότε

$$\mathrm{T}(af(x) + g(x)) = \int_0^x(\alpha f(t)+g(t))dt=\alpha\int_0^x f(t)dt+\int_0^x g(t)dt = a\mathrm{T}(f(x)) + \mathrm{T}(g(x))$$

Άρα η Τ είναι γ. μ.

(ii) Θεωρώντας την απεικόνιση $\mathrm{T}(f(x))=f(x+1)$, έστω $a\in\mathbf{R}$ και $f, g \in\mathrm{P}_n(\mathbf{R})$, με

$$f(x)=a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n\,,$$
$$g(x)= \beta_0 + \beta_1x + \ldots + \beta_nx^n$$

Τότε είναι:

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}(af(x) + g(x)) &= \mathrm{T}(aa_0 + aa_1x + \ldots + aa_nx^n + \beta_0 + \beta_1x + \ldots + \beta_nx^n)=\\
&= \mathrm{T}(aa_0+ \beta_0 + (aa_1\beta_1)x + \ldots + (aa_n + \beta_n)x^n)=\\
&= aa_0 + \beta_0 + (aa_1 + \beta_1)(x+1) + \ldots + (aa_n+ \beta_n)(x+1)^n\\
&= aa_0 + \beta_0 + aa_1(x+1)+ \beta_1(x+1) + \ldots + aa_n(x+1)^n + \beta_n(x+1)^n\\
&= a[a_0 + a_1(x+1) + \ldots + a_n(x+1)^n] + \beta_0+ \beta_1(x+1) + \ldots + \beta_n(x+1)^n\\
&= a\,f(x+1) + g(x+1) = a\mathrm{T}(f(x)) + \mathrm{T}(g(x)
\end{aligned}$$

Άρα η Τ είναι γ. μ.

Άσκηση 5.4-ΓΜ4

Έστω V ο **R**-χώρος όλων των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων μιας πραγματικής μεταβλητής t οι οποίες είναι δύο φορές διαφορίσιμες.

(i) Ορίζουμε την απεικόνιση Τ: $V \to \mathrm{C}[-\infty, \infty]$ με $\mathrm{T}(f(t)) = f''(t) - 2f'(t) + 3$. Να δειχθεί ότι η Τ δεν είναι γραμμικός μετασχηματισμός.

(ii) Αν $a(t), b(t) \in\mathrm{C}[-a, a]$, ορίζουμε την απεικόνιση Τ: $V \to \mathrm{C}[-\infty, \infty]$ με $\mathrm{T}(f(t)) = f''(x) - a(t)f'(t) + b(t)f(t)$. Δείξτε ότι η Τ είναι γραμμικός μετασχηματισμός.

Απ.

(i) Αν $f(t), g(t) \in V$ και $a\in\mathbf{R}$, τότε

$$\begin{aligned}
\mathrm{T}(af(t) + g(t)) &= [a(f(t) + g(t)]'' - 2[af(\mathrm{t}) + g(t)]' + 3\\
&= af''(t) + g''(t) - 2af'(t) - 2g'(t) + 3
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
a\mathrm{T}(f(t)) + \mathrm{T}(g(t)) &= a(f''(t) - 2f''(t) + 3) + g''(t) - 2g'(\mathrm{t}) + 3\\
&= af''(t) - 2af''(t) + 3a + g''(t) - 2g'(t) + 3\\
&= a\mathrm{T}(f(t)) + \mathrm{T}(g(t)) - 3a \neq \mathrm{T}(af(t) + g(t)) \text{ για } a\neq 0.
\end{aligned}$$

Άρα η Τ δεν είναι γ.μ.

(ii) Έστω $f(t), g(t)\in V$ και $a\in\mathbf{R}$ τότε :

$$\mathrm{T}(cf(t) + g(t)) = (cf(t) + g(t)'' + a(t)(cf(t) + g(t) + b(t)(cf(t) + g(t))$$

$$= cf''(t) + g''(t) + a(t)(cf'(t) + g'(t)) + b(t)cf(t) + b(t)g(t)$$
$$= cf''(t) + g''(t) + ca(t)f'(t) + a(t)g'(t) + cb(t)f(t) + b(t)g(t)$$
$$= c\mathrm{T}(f(t)) + \mathrm{T}(g(t))$$

Άρα η T είναι γ.μ.

5.4.1 Μητρώα και Γραμμικοί Μετασχηματισμοί

Άσκηση 5.4-M1

Έστω ότι το μητρώο ενός γραμμικού μετασχηματισμού T επί του $\mathbf{R}^3$ ως προς την τυπική βάση είναι:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Να βρεθεί το μητρώο του T ως προς τη βάση $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ όπου $\boldsymbol{u}_1 = (1, 0, 1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{u}_2 = (-2, 1, 1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{u}_1 = (1, -1, 1)^{\mathrm{T}}$.

Απ.

Αφού το μητρώο του T ως προς την τυπική βάση είναι γνωστό, η απεικόνιση δίνεται από

$$\mathrm{T}(x, y, z) = A(x, y, z)^{\mathrm{T}} = (y+z, x+z, x+y)^{\mathrm{T}}, \text{ για κάθε } x, y, z \in \mathbf{R}^3$$

Για τα $\mathrm{T}\boldsymbol{u}_1$, $\mathrm{T}\boldsymbol{u}_2$ και $\mathrm{T}\boldsymbol{u}_3$ ισχύει :

$$\mathrm{T}\boldsymbol{u}_1 = \mathrm{T}(1, 0, 1) = (1, 2, 1)$$
$$\mathrm{T}\boldsymbol{u}_2 = \mathrm{T}(-2, 1, 1) = (2, -1, -1)$$
$$\mathrm{T}\boldsymbol{u}_3 = \mathrm{T}(1, -1, 1) = (0, 2, 0)$$

Άρα το μητρώο του γ.μ. είναι :

$$[\mathrm{T}\boldsymbol{u}_1\ \mathrm{T}\boldsymbol{u}_1\ \mathrm{T}\boldsymbol{u}_1] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 5.4-M2

Έστω T ένας γραμμικός μετασχηματισμός επί του $\mathbf{R}^3$:

$$\mathrm{T}(x, y, z) = (x - y,\ x + 2y - z,\ 2x + y + z)$$

Να βρεθεί το μητρώο του T ως προς την (i) τυπική βάση του $\mathbf{R}^3$ (ii) την $\mathbf{R}$-βάση $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ του $\mathbf{R}^3$, όπου $\boldsymbol{v}_1 = (1, 0, 1)$, $\boldsymbol{v}_2 = (-2, 1, 1)$, $\boldsymbol{v}_3 = (1, -1, 1)$.

Απ.

(i) Κάθε γραμμή του μητρώου του γ.μ. περιέχει τους συντελεστές της αντίστοιχης συνιστώσας του T. Επομένως το μητρώο είναι

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii) Είναι

$$\mathrm{T}\boldsymbol{v}_1 = (1, 0, 3)^{\mathrm{T}}, \mathrm{T}\boldsymbol{v}_2 = (-3, -1, -2)^{\mathrm{T}}, \mathrm{T}\boldsymbol{v}_2 = (2, -2, 2)^{\mathrm{T}}$$

Τα $\mathrm{T}\boldsymbol{v}_1$, $\mathrm{T}\boldsymbol{v}_2$ και $\mathrm{T}\boldsymbol{v}_3$ εκφράζονται ως προς τη βάση $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ ως εξής :

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} [\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2\ \boldsymbol{x}_3] = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Προσδιορίζουμε τα διανύσματα x_1, x_2, x_3 συνολικά. Αν B το μητρώο με τα διανύσματα της νέας βάσης, διαμορφώνουμε το επαυξημένο μητρώο $[\mathrm{B}\,|\,\mathrm{T}\boldsymbol{\upsilon}_1, \mathrm{T}\boldsymbol{\upsilon}_2, \mathrm{T}\boldsymbol{\upsilon}_3]$:

$$[\mathrm{B}\,|\,\mathrm{T}\boldsymbol{\upsilon}_1, \mathrm{T}\boldsymbol{\upsilon}_2, \mathrm{T}\boldsymbol{\upsilon}_3] =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 4 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{r_3 \to \frac{1}{3} r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -5 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 4/3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2 \to r_2 + r_3]{r_1 \to r_1 + r_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5/3 & -11/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2/3 & 4/3 & 2 \end{array}\right) = [\,\mathrm{I}\,|\,[\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3]\,]$$

Επομένως το αντίστοιχο μητρώο του T ως προς τη βάση $\{\boldsymbol{\upsilon}_1, \boldsymbol{\upsilon}_2, \boldsymbol{\upsilon}_3\}$ είναι:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{-11}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 2 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 5.4-M3

Να βρεθούν τα μητρώα του γραμμικού μετασχηματισμού $\mathrm{D}(f(x)) = f'(x)$ του $\mathrm{P}_n(\mathbf{R})$ ως προς τις εξής **R**-βάσεις του:

(i) $\{ 1, x, x^2, \dots, x^n \}$,
(ii) $\{ 1, (x-1), (x-1)^2, \dots, (x-1)^n \}$,
(iii) $\{ 1, 1+x, 1+x+x^2, \dots, 1+x+\dots+x^n \}$.

Απ.

Η μορφή του μετασχηματισμού $\mathrm{T}(f(x)) = f'(x)$ είναι:

$$\mathrm{D}(a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n) = a_1 + 2a_2 x + \dots + n a_n x^{n-1}$$

(i) Οι εικόνες των διανυσμάτων της βάσης $\boldsymbol{p}_k = x^k$ $(k=0,1,\dots,n)$ είναι:

$$\mathrm{D}(1)=0,\ \mathrm{D}(x)=1,\ \mathrm{D}(x^2)=2x,\ \dots,\ \mathrm{D}(x^n) = nx^{n-1}$$

Άρα το μητρώο του γ.μ. $\mathrm{D} \in \mathbf{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ ως προς τη βάση $\{ 1, x, x^2, \dots, x^n \}$ είναι:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

(ii) Οι εικόνες των διανυσμάτων $\boldsymbol{p}_k = (x-1)^k$ $(k=0,1,\dots,n)$ της βάσης είναι:

$$\mathrm{D}(1)=0,\ \mathrm{D}(x-1)=1,\ \mathrm{D}(x-1)^2=2(x-1),\ \dots,\ \mathrm{D}(x-1)^n=n(x-1)^{n-1}$$

Άρα το μητρώο του D είναι ίσο με το A και ως προς αυτή τη βάση.

(iii) Οι εικόνες των διανυσμάτων $\boldsymbol{p}_k = 1+x+\dots+x^k$ $(k=0,1,\dots,n)$ της βάσης είναι:

$$\mathrm{D}(1) = 0,$$
$$\mathrm{D}(1+x) = 1,$$
$$\mathrm{D}(1+x+x^2) = 1+2x = -1+2(1+x),$$
$$\mathrm{T}(1+x+x^2+x^3) = 1+2x+3x^2 = -1-(1+x)+3(1+x+x^2),$$

……

$D(1+x+\ldots+x^n) = 1+2x+\ldots+nx^{n-1} =$

$= -1-(1+x)-\ldots-(1+x+\ldots+x^{n-2}) + n(1+x+\ldots+x^{n-1})$

Άρα το μητρώο του γ.μ. D ως προς τη δοθείσα βάση είναι:

$$B=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & n \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 5.4-Μ4

Αν $S\in\mathbf{R}^{2\times 2}$, να υπολογισθούν τα μητρώα των εξής γραμμικών μετασχηματισμών επί του $\mathbf{R}^{2\times 2}$ ως προς την τυπική $\mathbf{R}$-βάση $\{\boldsymbol{e}_{ij} \mid i,j=1,2\}$ (i) $T(A)=AS$, (ii) $R(A)=SA-AS$.

Απ.

Έστω $S=[s_{11}, s_{12}; s_{21}, s_{22}]$. Προσδιορίζουμε τις εικόνες $T(E_{ij})=T(\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j^T)=S\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j^T$ ως γ.σ. των διανυσμάτων της βάσης E:

$$T(E_{11})= \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1^T S=\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = s_{11}E_{11}+ s_{12} E_{12}+0\, E_{21}+0\, E_{22} = [s_{11}, s_{12}, 0, 0]^T$$

$$T(E_{12})= \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2^T S=\begin{bmatrix} s_{21} & s_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = s_{21} E_{11}+s_{22}E_{12}+0\, E_{21}+0\, E_{22} = [s_{21}, s_{22}, 0, 0]^T$$

$$T(E_{21})= \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1^T S=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ s_{11} & s_{12} \end{bmatrix} = 0\, E_{11}+0\, E_{12}+ s_{11}E_{21}+ s_{12}E_{22} = [0, 0, s_{11}, s_{12}]^T$$

$$T(E_{22})= \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2^T S=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ s_{21} & s_{22} \end{bmatrix} = 0\, E_{11}+0\, E_{12}+ s_{21}E_{21}+s_{22}E_{22} = [0, 0, s_{21}, s_{22}]^T$$

Το μητρώο του $T(A)=AS$ δίνεται:

$$(T)_E= [\, T(E_{11})\;\; T(E_{12})\;\; T(E_{21})\;\; T(E_{22})\,] = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{21} & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_{11} & s_{21} \\ 0 & 0 & s_{12} & s_{22} \end{bmatrix}$$

(ii) Με όμοιο τρόπο βρίσκουμε το μητρώο του γ.μ. $T_1(A)=SA$:

$$(T_1)_E = \begin{bmatrix} s_{11} & 0 & s_{12} & 0 \\ 0 & s_{11} & 0 & s_{12} \\ s_{21} & 0 & s_{22} & 0 \\ 0 & s_{21} & 0 & s_{22} \end{bmatrix}$$

Το μητρώο του γ.μ. $R=SA-AS$ ως προς την τυπική βάση E δίνεται ως η διαφορά των μητρώων:

$$(R)_E = (T_1)_E - (T)_E = \begin{bmatrix} 0 & -s_{21} & s_{12} & 0 \\ -s_{12} & s_{11}-s_{22} & 0 & s_{12} \\ s_{21} & 0 & s_{22}-s_{11} & -s_{21} \\ 0 & s_{21} & -s_{12} & 0 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 5.4-Μ5

Έστω U και V K-χώροι διάστασης 3, με βάσεις $\mathcal{M} = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$, $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ αντίστοιχα. Έστω επίσης ένας γ.μ. $T: U \rightarrow V$ με αντίστοιχο μητρώο:

$$\mathcal{M}(\mathrm{T})_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \mu \\ 1 & \lambda^2 & \mu^2 \end{bmatrix}$$

(α) Να υπολογισθεί το μητρώο $_{\mathcal{S}}(\mathrm{T})_{\mathcal{B}}$, όπου

$$\mathcal{S} = \{\ \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3,\ \boldsymbol{u}_2 + (\lambda+1)\boldsymbol{u}_3,\ \boldsymbol{u}_3\ \}$$

(β) Σε εφαρμογή, να υπολογισθούν οι τιμές των λ και μ για τις οποίες το σύστημα των γραμμικών εξισώσεων

$$\{\ x + y + z = 1,\ \ x + \lambda y + \mu z = 2,\ \ x + \lambda^2 y + \mu^2 z = 4\ \}$$

έχει (i) μια μοναδική λύση και (ii) περισσότερες από μια λύσεις.

Απ.

α) Το μητρώο D^{-1} της βάσης $\mathcal{S}$ ως προς τη βάση $\mathcal{M}$ είναι:

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \lambda & \lambda+1 & 1 \end{bmatrix}$$

Προφανώς είναι κάτω τριγωνικό και αντιστρέψιμο ως και με $\mathrm{diag}(D)=(1,\ 1,\ 1)^{\mathrm{T}}$. Υπολογίζουμε εύκολα το αντίστροφο:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \lambda & -(\lambda+1) & 1 \end{bmatrix}$$

Είναι $_{\mathcal{S}}(\mathrm{T})_{\mathcal{B}} = D\ _{\mathcal{M}}(\mathrm{T})_{\mathcal{B}}\ \mathrm{I}_3$, οπότε αντικαθιστώντας βρίσκουμε:

$$_{\mathcal{S}}(\mathrm{T})_{\mathcal{B}} = D\ _{\mathcal{M}}(\mathrm{T})_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ \lambda & -(\lambda+1) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \mu \\ 1 & \lambda^2 & \mu^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & \mu-1 \\ 0 & 0 & (\lambda-\mu)(1-\mu) \end{bmatrix} \qquad (1)$$

β) Το μητρώο συντελεστών του συστήματος είναι ίσο με $_{\mathcal{M}}(\mathrm{T})_{\mathcal{B}}$. Η (1) εκφράζει το μετασχηματισμό του ως προς τη νέα βάση σε ένα άνω τριγωνικό μητρώο. Επομένως το σύστημα έχει μοναδική λύση όταν $\lambda \neq 1$ και $\lambda \neq \mu$, $\mu \neq 1$. Περισσότερες από μια λύσεις (άπειρες λύσεις) υπάρχουν όταν $\lambda=1$ ή $\lambda=\mu$ ή $\mu=1$.

Άσκηση 5.4-Μ6

Να βρεθεί μια **R**-βάση του δ.χ. όλων των ομογενών πραγματικών διτετραγώνων πολυωνύμων τριών μεταβλητών x, y, z. Να δειχτεί ότι η απεικόνιση που απεικονίζει κάθε τέτοιο πολυώνυμο $f(x, y, z)$ στο $f(ax+y+z, \beta y+\gamma z, 0)$, όπου $a, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ σταθερές παράμετροι, είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός. Κατόπιν, αφού καθορισθεί μια **R**-βάση για την εικόνα του γ.μ., να βρεθεί το μητρώο του ως προς τις παραπάνω βάσεις.

Απ.

Έστω V ο χώρος των ομογενών διτετράγωνων πολυωνύμων τριών μεταβλητών. Τότε κάθε πολυώνυμο $f \in V$ γράφεται:

$$f(x, y, z) = c_1 x^4 + c_2 y^4 + c_3 z^4 + c_4 x^2 y^2 + c_5 x^2 z^2 + c_6 y^2 z^2$$

Τα πολυώνυμα:

$$p_1 = x^4,\ p_2 = y^4,\ p_3 = z^4,\ \ p_4 = x^2 y^2,\ p_5 = x^2 z^2,\ p_6 = y^2 z^2$$

παράγουν το V. Επίσης είναι προφανώς γραμμικά ανεξάρτητα. Άρα τα p_i ($i=1,\ldots,6$) αποτελούν **R**-βάση του V. Αν συμβολίσουμε με G τον δοθέντα μετασχηματισμό, έχουμε :

$$\mathrm{G}(f) = c_1(ax + y + z)^4 + c_2(\beta y + \gamma z)^4 + c_4(ax + y + z)^2(\beta y + \gamma z)^2$$

ή θέτοντας $q_1 = ax + y + z$ και $q_2 = \beta y + \gamma z$:

$$\mathrm{G}(f) = c_1 q_1^4 + c_2 q_2^4 + c_4 q_1^2 q_2^2 \qquad (1)$$

Θεωρούμε ένα δεύτερο πολυώνυμο του V: $g = \sum_{i=1}^{6} b_i p_i$. Αν $\lambda \in \mathbf{R}$, τότε:

$$\lambda f + g = \sum_{i=1}^{6} (\lambda c_i + b_i) p_i$$

οπότε:

$$\begin{aligned} G(\lambda f + g) &= G\left(\sum_{i=1}^{6} (\lambda c_i + b_i) p_i\right) = (\lambda c_1 + b_1) q_1^4 + (\lambda c_2 + b_2) q_2^4 + (\lambda c_4 + b_4) q_1^2 q_2^2 \\ &= \lambda (c_1 q_1^4 + c_2 q_2^4 + c_4 q_1^2 q_2^2) + (b_1 q_1^4 + b_2 q_2^4 + b_4 q_1^2 q_2^2) \\ &= \lambda G(f) + g \end{aligned}$$

Άρα ο G είναι γραμμικός μετασχηματισμός.
Είναι φανερό ότι η εικόνα *Im* G του G περιέχει μη ομογενή πραγματικά διτετράγωνα πολυώνυμα, αφού στα επιμέρους αναπτύγματα του δεύτερου μέλους της (1) εμφανίζονται όλοι οι όροι $x^i y^j z^k$, με $i+j+k=4$. Επομένως το *Im* G δεν είναι ίσο με το V. Μπορεί όμως να θεωρηθεί ότι παράγεται από τα πολυώνυμα q_1^4, q_2^4, $q_1^2 q_2^2$, τα οποία εύκολα δείχνεται ότι είναι γ.α., συνεπώς αποτελούν μια **R**-βάση της.

Τα στοιχεία p_i (i=1,…,6) βάσης του V εκφράζονται σε σχέση με τα στοιχειώδη πολυώνυμα q_1^4, q_2^4, $q_1^2 q_2^2$ ως εξής:

$$\begin{aligned} &T(p_1) = p_1(\alpha x+y+z, \beta y+\gamma z, 0) = 1\, q_1^4 + 0\, q_2^4 + 0\, q_1^2 q_2^2 \\ &T(p_2) = p_2(\alpha x+y+z, \beta y+\gamma z, 0) = 0\, q_1^4 + 1\, q_2^4 + 0\, q_1^2 q_2^2 \\ &T(p_3) = 0 \\ &T(p_4) = 0\, q_1^4 + 0\, q_2^4 + 1\, q_1^2 q_2^2 \\ &T(p_5) = 0 \\ &T(p_6) = 0 \end{aligned}$$

Άρα το μητρώο του γ.μ. G είναι : $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Άσκηση 5.4-M7

Έστω $T : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ με $T(a,b,c) = (a+b-c, a-b+2c)$ για κάθε $a,b,c \in \mathbf{R}^3$. Ο T είναι προφανώς γ.μ., αφού οι συντεταγμένες είναι συνδυασμοί των *a*, *b* και *c*. Το μητρώο του ως προς τις τυπικές βάσεις των $\mathbf{R}^3$ και $\mathbf{R}^2$ είναι

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Θεωρούμε τώρα τα σύνολα

$$B_1 = \{\boldsymbol{u}_1 = (1,\ 1,\ 1),\ \boldsymbol{u}_2 = (1,\ 0,\ \text{-}1),\ \boldsymbol{u}_3 = (1,\ -1,\ 0)\} \text{ και}$$
$$B_2 = \{\boldsymbol{w}_1 = (1,\ 2),\ \boldsymbol{w}_2 = (2,\ \text{-}1)\}$$

που είναι βάσεις των $\mathbf{R}^3$ και $\mathbf{R}^2$ αντίστοιχα, αφού det[$\boldsymbol{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$]=-3≠0, det[$\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{w}_2$]=3≠0. Για να καθορίσουμε το μητρώο του T ως προς τις B_1 και B_2, εκφράζουμε τα T$\boldsymbol{u}_i$ ως γ.σ. των $\boldsymbol{w}_i$. Αν $\boldsymbol{x}_i \in \mathbf{R}^2$ (i=1,2,3), είναι

$$\begin{aligned} T\boldsymbol{u}_1 &= T(0,\ 1,\ -1) = (1,\ 2)^T = [\boldsymbol{w}_1\ \ \boldsymbol{w}_2]\boldsymbol{x}_1 \\ T\boldsymbol{u}_2 &= T(1,\ 1,\ 1) = (2,\ -1)^T = [\boldsymbol{w}_1\ \ \boldsymbol{w}_2]\boldsymbol{x}_2 \\ T\boldsymbol{u}_3 &= T(0,\ 0,\ 1) = (0,\ 2)^T = [\boldsymbol{w}_1\ \ \boldsymbol{w}_2]\boldsymbol{x}_3 \end{aligned}$$

ή:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \boldsymbol{x}_2 & \boldsymbol{x}_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Υπολογίζουμε κατ' ευθείαν τα $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$, $\boldsymbol{x}_3$:

$$\left[\begin{array}{cc|ccc}1 & 2 & 1 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 2 & -1 & 2\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|ccc}1 & 2 & 1 & 2 & 0\\ 0 & -5 & 0 & -5 & 2\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|ccc}1 & 2 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2/5\end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|ccc}1 & 0 & 1 & 0 & 4/5\\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2/5\end{array}\right]$$

απ' όπου εξάγεται άμεσα το μητρώο του T ως προς τις βάσεις B_1 και B_2:

$${}_{B_1}(\mathrm{T})_{B_2} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 4/5\\ 0 & 1 & -2/5\end{bmatrix}$$

□

Άσκηση 5.4-Μ8

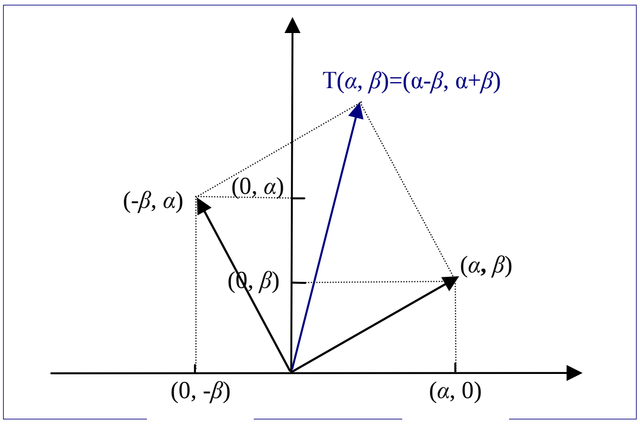
Θεωρούμε τον γ.μ T επί του $\mathbf{R}^2$: $\mathrm{T}(a, \beta) = (a-\beta, a+\beta)$, όπου $(a, \beta) \in \mathbf{R}^2$. Βρίσκουμε το μητρώο του T ως προς την τυπική βάση $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$. Είναι

$\mathrm{T}\boldsymbol{e}_1 = (1, 1)^{\mathrm{T}}$, $\mathrm{T}\boldsymbol{e}_2 = (-1, 1)^{\mathrm{T}}$

Επομένως το μητρώο του T είναι:

$$A = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \text{ και}$$

$$\mathrm{T}(\boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a-\beta\\ a+\beta\end{pmatrix}$$



Σχήμα 5.2 Γραφική απεικόνιση του γ.μ $\mathrm{T}(a, \beta) = (a-\beta, a+\beta)$

Εξετάζουμε τώρα αν ο T είναι ισομορφισμός. Είναι $\det(A) = 2 \neq 0$, άρα $Ker\,\mathrm{T} = \{\mathbf{0}\}$. Συνεπώς ο T είναι μη ιδιάζων και άρα ισομορφισμός επί του $\mathbf{R}^2$.

Τέλος δίνουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό του T. Ο αντίστροφος $\mathrm{T}^{-1}(\boldsymbol{v})$ δίνεται:

$$\mathrm{T}^{-1}(\boldsymbol{v}) = A^{-1}\boldsymbol{v}$$

Επειδή

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix},$$

είναι

$$\mathrm{T}^{-1}(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\alpha+\beta\\ -\alpha+\beta\end{pmatrix}$$

Ο T γράφεται $\mathrm{T}(\boldsymbol{v}) = \mathrm{T}(a, \beta) = (a - \beta, a + \beta) = (a, \beta) + (-\beta, a)$, απ' όπου προκύπτει άμεσα το γράφημά του, όπως απεικονίζεται στο *Σχήμα* 5.2. □

Άσκηση 5.4-Μ9

Έστω T: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ και $T(\boldsymbol{x})=(x_1 + x_3, 2x_2, x_1+ x_2 - x_3)^T$. Προφανώς ο T είναι γ.μ. αφού έχει τη μορφή (5.2.4). Αναλυτικά έχουμε:

$$T\boldsymbol{e}_1 = T(\boldsymbol{e}_1) = (1, 0, 1)^T = 1\boldsymbol{e}_1 + 0\boldsymbol{e}_2 + 1\boldsymbol{e}_3,$$
$$T\boldsymbol{e}_2 = T(\boldsymbol{e}_2) = (0, 2, 1)^T = 0\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + 1\boldsymbol{e}_3,$$
$$T\boldsymbol{e}_3 = T(\boldsymbol{e}_3) = (1, 0, -1)^T = 1\boldsymbol{e}_1 + 0\boldsymbol{e}_2 - 1\boldsymbol{e}_3$$

Επομένως το μητρώο $A=(T)_E$ ως προς την τυπική βάση $E=\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ είναι:

$$A=(T)_E=\begin{bmatrix} Te_1 & Te_2 & Te_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Φυσικά, το A προσδιορίζεται άμεσα βάσει της (5.2.4), δηλ. οι συντελεστές στις συνιστώσες του $T(\boldsymbol{x})$ μεταφέρονται στις γραμμές του A.

Είναι $Ker(T)=N(A)=\{\mathbf{0}\}$, συνεπώς ο T είναι μη ιδιάζων. Επίσης $Im(T)=C(A)=\mathbf{R}^3$. Ο αντίστροφος γ.μ. δίνεται:

$$T^{-1}(\boldsymbol{x})=A^{-1}\boldsymbol{x}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1/2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Η μορφή του $T^{-1}(\boldsymbol{x})$ προκύπτει άμεσα:

$$T^{-1}(\boldsymbol{x})= (0.5x_1+0.5x_3, -0.25x_1+0.5x_2+0.25x_3, 0.5x_1-0.5x_3)^T$$

Θεωρούμε τώρα δύο διαφορετικές βάσεις του $\mathbf{R}^3$:

$$B_1=\{\boldsymbol{v}_1=(1, 1, 1)^T, \boldsymbol{v}_2=(1, 1, 0)^T, \boldsymbol{v}_3=(0, 1, 1)^T \}$$
$$B_2=\{\boldsymbol{w}_1=(1, 2, 0)^T, \boldsymbol{w}_2=(1, 0, -1)^T, \boldsymbol{w}_3=(-1, 1, 1)^T\}$$

Καθορίζουμε το μητρώο του T ως προς την B_1 εκφράζοντας τα $T\boldsymbol{v}_i$ ως γ.σ. των $\boldsymbol{v}_i$.

$$T\boldsymbol{v}_1 = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3]\, \boldsymbol{x}_1$$
$$T\boldsymbol{v}_2 = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3]\, \boldsymbol{x}_2$$
$$T\boldsymbol{v}_2 = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3]\, \boldsymbol{x}_3$$

όπου $\boldsymbol{x}_i \in \mathbf{R}^3$ (i=1,2,3). Οι παραπάνω σχέσεις γράφονται:

$$[T\boldsymbol{v}_1, T\boldsymbol{v}_2, T\boldsymbol{v}_3] = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3]\, [\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3] = B_1(T)_{B_1} \Rightarrow$$
$$A\, [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3] = AB_1 = B_1(T)_{B_1} \Rightarrow$$
$$(T)_{B_1} = B_1^{-1}AB_1 =$$
$$=\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Σημειώνουμε ότι το ίδιο αποτέλεσμα θα παίρναμε και αν δουλεύαμε απ' ευθείας:

$$[B_1 |\, AB_1] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία υπολογίζουμε το μητρώο του T ως προς τη βάση B_2:

$$(\mathrm{T})_{\mathrm{B}_2} = \mathrm{B}_2^{-1} A \mathrm{B}_2 =$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -7 & -6 & 5 \\ -4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Τα μητρώα B_1, B_2 είναι μητρώα αλλαγής βάσης από τις βάσεις B_1, B_2 στην τυπική βάση (με μητρώο I_3), ενώ τα B_1^{-1}, B_2^{-1} μητρώα αλλαγής βάσης από την τυπική βάση I στις βάσεις B_1, B_2.

Στο ίδιο μητρώο $(\mathrm{T})_{\mathrm{B}_2}$ καταλήγουμε Εκφράζοντας τα $\boldsymbol{v}_i$ ως προς τα $\boldsymbol{w}_i$, δηλαδή την βάση B_1 ως προς την B_2. Ακολουθούμε ανάλογη διαδικασία με αυτήν της Άσκησης 1.20 [*αλλαγή βάσης σε δ.χ.*]. Το μητρώο X με τις συντεταγμένες των $\boldsymbol{v}_i$ ως προς τα $\boldsymbol{w}_i$ είναι:

$$X = \mathrm{B}_2^{-1}\mathrm{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -4 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Υπολογίζουμε επίσης:

$$X^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

οπότε το μητρώο του γ.μ. T ως προς την βάση B_2 υπολογίζεται σε σχέση με το μητρώο $(\mathrm{T})_{\mathrm{B}_1}$:

$$(\mathrm{T})_{\mathrm{B}_2} = X(\mathrm{T})_{\mathrm{B}_1} X^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -7 & -6 & 5 \\ -4 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

□

Άσκηση 5.4-Μ10 Ορθογώνια Προβολή επί ευθείας

Θεωρούμε την απεικόνιση P: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, P($\boldsymbol{x}$)=P$\boldsymbol{x}$, της ορθογώνιας προβολής διανύσματος επί ευθείας που σχηματίζει γωνία φ με τον άξονα των x. Εναλλακτικά δεχόμαστε ότι η ευθεία ορίζεται από ένα διάνυσμα $\boldsymbol{\alpha}$. Εύκολα δείχνουμε γεωμετρικά ότι η απεικόνιση P είναι γραμμικός μετασχηματισμός:

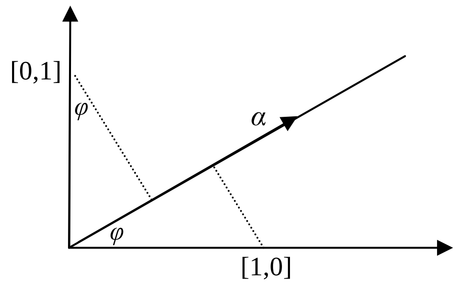
P($\boldsymbol{u}$+λ$\boldsymbol{v}$)=P($\boldsymbol{u}$)+λP($\boldsymbol{v}$) (προβολή γ.σ. διανυσμάτων = γ.σ. προβολών)

Καθορίζουμε στη συνέχει το μητρώο του γ.μ. για την τυπική βάση $\boldsymbol{e}_1=(1, 0)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{e}_2=(0, 1)^{\mathrm{T}}$. Από το *Σχήμα* 5.3 παίρνουμε άμεσα:

P$\boldsymbol{e}_1$= $(\sigma\upsilon\nu^2\varphi,\ \eta\mu\varphi\ \sigma\upsilon\nu\varphi)$,
P$\boldsymbol{e}_2$= $(\eta\mu\varphi\ \sigma\upsilon\nu\varphi,\ \eta\mu^2\varphi)$

Συνεπώς το μητρώο του P είναι:

$$(P) = \begin{pmatrix} \sigma\upsilon\nu^2\varphi & \eta\mu\varphi\ \sigma\upsilon\nu\varphi \\ \eta\mu\varphi\ \sigma\upsilon\nu\varphi & \eta\mu^2\varphi \end{pmatrix} = (\sigma\upsilon\nu\varphi,\ \eta\mu\varphi)^{\mathrm{T}}\ (\sigma\upsilon\nu\varphi,\ \eta\mu\varphi) \qquad (5.2.5)$$



Σχήμα 5.3. Ορθογώνια προβολή σε ευθεία

Η (5.2.5) δείχνει άμεσα ότι το (P) είναι ιδιάζον και συμμετρικό. Ομοίως είναι και ο P. Επίσης είναι Ker(P)=$<\boldsymbol{\alpha}>^{\perp}=\{\boldsymbol{p}\in\mathbf{R}^2 \mid \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}=0\}$, dim($Ker$(P))=1, Im(P)=$<\boldsymbol{\alpha}>$, dim(Im(P))=1.
Επιπλέον διαπιστώνουμε $P^2=P^n=P$ και $P^n\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}$. Μπορούμε να επαληθεύσουμε και στις ιδιοτιμές: είναι 0 και trace(P)=$\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x=1$.
Η (5.2.5)συμπίπτει με το γνωστό τύπο του μητρώου προβολής. Αν $\boldsymbol{\alpha}=(a_1, a_2)^{\mathrm{T}}$, τότε $\sigma\upsilon\nu\varphi=a_1/\|\boldsymbol{\alpha}\|$, $\eta\mu\varphi=a_2/\|\boldsymbol{\alpha}\|$, επομένως $(\sigma\upsilon\nu\varphi, \eta\mu\varphi)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\alpha}/\|\boldsymbol{\alpha}\|$. Αντικαθιστώντας στην (5.2.5) λαμβάνουμε:

$$(P)=\frac{\alpha\alpha^{\mathrm{T}}}{\alpha^{\mathrm{T}}\alpha} \tag{5.2.6}$$

□

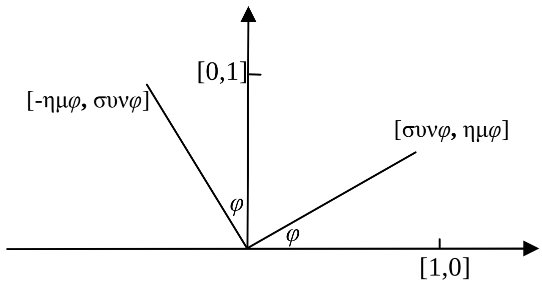
Άσκηση 5.4-Μ11 Περιστροφή

Η απεικόνιση R_φ: $\mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$, $R_\varphi(\boldsymbol{x})=R\boldsymbol{x}$, που ορίζει την περιστροφή διανύσματος κατά γωνία φ είναι ομοίως γ.μ. Και αυτό δείχνεται εύκολα γεωμετρικά. Κατασκευάζουμε το μητρώο του R_φ προσδιορίζοντας τα $R_\varphi\boldsymbol{e}_1$, $R_\varphi\boldsymbol{e}_2$ σε σχέση με την τυπική βάση $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ (Σχήμα 5.4).

$R_\varphi\boldsymbol{e}_1= (\sigma\upsilon\nu\varphi, \eta\mu\varphi)$, $R_\varphi\boldsymbol{e}_2= (-\eta\mu\varphi, \sigma\upsilon\nu\varphi)$

Συνεπώς το μητρώο του R_φ είναι:

$$(R_\varphi)=\begin{pmatrix}\sigma\upsilon\nu\varphi & -\eta\mu\varphi\\ \eta\mu\varphi & \sigma\upsilon\nu\varphi\end{pmatrix} \tag{5.2.6}$$



Σχήμα 5.4 Περιστροφή διανύσματος κατά γωνία φ.

Επειδή det(R)=$\sigma\upsilon\nu^2\varphi+\eta\mu^2\varphi=1\neq 0$, το ($R_\varphi$) είναι μη ιδιάζον, συνεπώς και ο R_φ (ως αναμενόταν). Είναι Ker(R)={0} και Im(R)=$\mathbf{R}^2$.
Για φ=π/2 ορίζεται η περιστροφή κατά 90°. Είναι $R_{90}\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_2$ και $R_{90}\boldsymbol{e}_2=-\boldsymbol{e}_1$. Το μητρώο του R είναι:

$$(R_{90})=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός R_φ^{-1} δίνεται από το μητρώο $(R_\varphi)^{-1}$:

$$(R_\varphi)^{-1}=\begin{pmatrix}\sigma\upsilon\nu\varphi & -\eta\mu\varphi\\ \eta\mu\varphi & \sigma\upsilon\nu\varphi\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\varphi+\eta\mu^2\varphi}\begin{pmatrix}\sigma\upsilon\nu\varphi & \eta\mu\varphi\\ -\eta\mu\varphi & \sigma\upsilon\nu\varphi\end{pmatrix}=$$

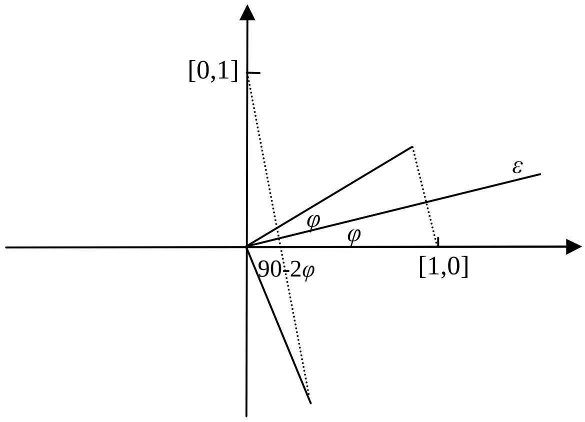
$$=\begin{pmatrix}\sigma\upsilon\nu(-\varphi) & -\eta\mu(-\varphi)\\ \eta\mu(-\varphi) & \sigma\upsilon\nu(-\varphi)\end{pmatrix}=(R_{-\varphi})$$

Ο γ.μ. R^{-1} δίνει – όπως αναμενόταν – την περιστροφή κατά γωνία -φ, δηλ. τον $R_{-\varphi}$. □

Άσκηση 5.4-Μ11 Συμμετρία ως προς ευθεία

Έστω η απεικόνιση S: R→R που ορίζει το συμμετρικό διανύσματος ως προς ευθεία (ε) διερχόμενη από την αρχή των αξόνων και που σχηματίζει γωνία φ με τον άξονα Ox. Εύκολα δείχνεται γεωμετρικά ότι η S είναι γ.μ. Με τη βοήθεια του *Σχήματος* 5.5 εκφράζουμε τα T$\boldsymbol{e}_1$, T$\boldsymbol{e}_2$ ως προς την τυπική βάση {$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$}:

$S\boldsymbol{e}_1= (\sigma\upsilon\nu 2\varphi, \eta\mu 2\varphi)^{\mathrm{T}}$
$S\boldsymbol{e}_2=(\eta\mu 2\varphi, -\sigma\upsilon\nu 2\varphi)^{\mathrm{T}}$



Σχήμα 5.5 Συμμετρία ως προς ευθεία (ε).

Το μητρώο του S είναι:

$$\left(S\right)=\begin{pmatrix} \sigma\upsilon\nu 2\phi & \eta\mu 2\phi \\ \eta\mu 2\phi & -\sigma\upsilon\nu 2\phi \end{pmatrix} \tag{5.2.7}$$

Η (5.2.7) να συμπίπτει με τον τύπο του μητρώου προβολής $S=2\dfrac{aa^T}{a^Ta}-I$. Πράγματι αν αντικαταστήσουμε στην (5.2.7):

$\eta\mu 2\varphi=2\eta\mu\varphi\sigma\upsilon\nu\varphi$, $\sigma\upsilon\nu 2\varphi=2\sigma\upsilon\nu^2\varphi-1$, $-\sigma\upsilon\nu 2\varphi=1-2\sigma\upsilon\nu^2\varphi=2\eta\mu^2\varphi-1$

και τέλος θέσουμε $(\sigma\upsilon\nu\varphi, \eta\mu\varphi)=\boldsymbol{\alpha}/\|\boldsymbol{\alpha}\|$, παίρνουμε:

$$\left(S\right)=\begin{pmatrix} \sigma\upsilon\nu 2\varphi & \eta\mu 2\varphi \\ \eta\mu 2\varphi & -\sigma\upsilon\nu 2\varphi \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\sigma\upsilon\nu^2 2\varphi-1 & 2\eta\mu\varphi\,\sigma\upsilon\nu\varphi \\ 2\eta\mu\varphi\,\sigma\upsilon\nu\varphi & 2\eta\mu^2 2\varphi-1 \end{pmatrix}=$$

$$=2\begin{pmatrix} \sigma\upsilon\nu^2 2\varphi & \eta\mu\varphi\,\sigma\upsilon\nu\varphi \\ \eta\mu\varphi\,\sigma\upsilon\nu\varphi & \eta\mu^2 2\varphi \end{pmatrix}-\mathrm{I}=2\begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu\varphi \\ \eta\mu\varphi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sigma\upsilon\nu\varphi & \eta\mu\varphi \end{bmatrix}-\mathrm{I}=$$

$$=2\frac{\alpha}{\|\alpha\|}\frac{\alpha^{\mathrm{T}}}{\|\alpha\|}-\mathrm{I}=2\frac{\alpha\alpha^{\mathrm{T}}}{\|\alpha\|^2}-\mathrm{I}=2\frac{\alpha\alpha^{\mathrm{T}}}{\alpha^{\mathrm{T}}\alpha}-\mathrm{I}$$

□

Άσκηση 5.4-Μ12 Διαφόριση Πολυωνύμου

Στον γ.μ. που ορίζεται από την απεικόνιση της διαφόρισης πολυωνύμου D: $P_n(\mathbf{R}) \rightarrow P_n(\mathbf{R})$:

$D(a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n) = a_1+2a_2x+\ldots+na_nx^{n-1}$

αντιστοιχούμε το μητρώο $A=(D)\in R^{(n+1)\times(n+1)}$ ως προς την τυπική βάση $\{t^0, t^1, t^2,\ldots,t^n\}$ του δ.χ. $P_n(\mathbf{R})$ των πολυωνύμων βαθμού ≤4. Εκφράζουμε τις εικόνες των διανυσμάτων της βάσης ως προς τη βάση αυτή:

$D(t^0)=0 = 0t^0+0t^1+0t^2+\ldots+0t^n$
$D(t^1)=1 = 0t^0+1t^1+0t^2+\ldots+0t^n$
$D(t^2)=2t^1 = 0t^0+2t^1+0t^2+\ldots+0t^n$
……

$D(t^n)=nt^{n-1} = 0t^0+t^1+0t^2+\ldots+nt^{n-1}+0t^n$

Επομένως το μητρώο A είναι:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Ειδικότερα, το μητρώο του γ.μ. D: $P_4(\mathbf{R}) \rightarrow P_4(\mathbf{R})$ είναι:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Αν δοθεί ένα πολυώνυμο $\boldsymbol{p}\in P_4(\mathbf{R})$, $\boldsymbol{p}=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3+a_4t^4$, τότε:

$$D(\boldsymbol{p})=(t^0, t^1, t^2, t^3, t^4)A(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)^T=(t^0, t^1, t^2, t^3, t^4)\,(a_1, 2a_2, 3a_3, 4a_4, 0)^T$$
$$=a_1+2a_2t+3a_2t^2+4a_4t^3$$

Για παράδειγμα, το πολυώνυμο $p(t)=1+5t^2-4t^3+t^4$ αναπαρίσταται με το διάνυσμα των συνιστωσών του ως προς την τυπική βάση ως $\boldsymbol{p}=[1, 0, 5, -4, 1]$. Τότε η παράγωγος του p, $D(\boldsymbol{p})=10t-12t^2+4t^3$, δίνεται από το γινόμενο

$A\boldsymbol{p} = [0, 10, -12, 4, 0]$

Το μητρώο A αναπαριστά το *μετασχηματισμό διαφόρισης* πολυωνύμου βαθμού ≤4. □

Άσκηση 5.4-Μ13

Βρίσκουμε το μητρώο του γ.μ. $T(A)=SA$ που ορίζεται επί του $\mathbf{R}^{2\times 2}$ (Παρ.5.1.5[1]) ως προς την τυπική βάση $E=\{E_{ij}=\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j^T \mid i,j=1,2\}$ του $\mathbf{R}^{2\times 2}$. Έστω $S=[s_{11}, s_{12}; s_{21}, s_{22}]$. Προσδιορίζουμε τις εικόνες $T(E_{ij})=T(\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j^T)=S\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j^T$ σε σχέση με τη βάση E:

$$T(E_{11})=S\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_1^T=\begin{bmatrix} s_{11} & 0 \\ s_{21} & 0 \end{bmatrix} = s_{11}E_{11}+0\,E_{12}+s_{21}E_{21}+0\,E_{22} = [s_{11}, 0, s_{21}, 0]^T$$

$$T(E_{12})=S\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2^T=\begin{bmatrix} 0 & s_{11} \\ 0 & s_{21} \end{bmatrix} = 0\,E_{11}+s_{11}E_{12}+0\,E_{21}+s_{21}E_{22} = [0, s_{11}, 0, s_{21}]^T$$

$$T(E_{21})=S\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1^T=\begin{bmatrix} s_{12} & 0 \\ s_{22} & 0 \end{bmatrix} = s_{12}E_{11}+0\,E_{12}+ s_{22}E_{21}+0\,E_{22} = [s_{12}, 0, s_{22}, 0]^T$$

$$T(E_{22})=S\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_2^T=\begin{bmatrix} 0 & s_{12} \\ 0 & s_{22} \end{bmatrix} = 0\,E_{11}+s_{12}E_{12}+0\,E_{21}+s_{22}E_{22} = [0, s_{12}, 0, s_{22}]^T$$

Συνεπώς:

$$(T)_E= [\,T(E_{11})\;\; T(E_{12})\;\; T(E_{21})\;\; T(E_{22})\,] = \begin{bmatrix} s_{11} & 0 & s_{12} & 0 \\ 0 & s_{11} & 0 & s_{12} \\ s_{21} & 0 & s_{22} & 0 \\ 0 & s_{21} & 0 & s_{22} \end{bmatrix}$$

□

Άσκηση 5.4-Μ14

Θεωρούμε την τυπική βάση $E=\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ του $\mathbf{R}^2$, μια άλλη βάση $B=\{(1, 1)^T, (-1, 2)^T\}$και το γραμμικό μετασχηματισμό $T(\boldsymbol{v}) = T(a, \beta)=(a-\beta, a+\beta)$ επί του R^2 με αντίστοιχο μητρώο:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

Το μητρώο μετασχηματισμού (μετάβασης) απο τη βάση Ε στην Β είναι (η δεύτερη βάση εκφράζεται ως προς την πρώτη):

$$C^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

Ο μετασχηματισμός αλλαγής βάσης γράφεται σύντομα:

$$\boldsymbol{y} = C^{-1}\boldsymbol{v}$$

Ισχύει $C^{-1}\boldsymbol{e}_1 = (1, 1)^T$ και $C^{-1}\boldsymbol{e}_2 = (-1, 2)^T$.
Το μητρώο μετασχηματισμού απο τη βάση Β στην Ε είναι το αντίστροφο του παραπάνω (η πρώτη βάση εκφράζεται ως προς τη δεύτερη):

$$C=(C^{-1})^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

Ο μετασχηματισμός αλλαγής βάσης γράφεται σύντομα:

$$\boldsymbol{y} = C\boldsymbol{v}$$

Ισχύει $C\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{e}_1$ και $C^{-1}\boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{e}_2$.
Εφαρμόζοντας τώρα το μετασχηματισμό ομοιότητας, βρίσκουμε το μητρώο D του Τ ως προς τη νέα βάση B:

$$D = CAC^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & -5\\ 2 & 4\end{pmatrix}$$

□

Άσκηση 5.4-Μ15

Θεωρούμε τις βάσεις $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$και $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ του $\mathbf{R}^2$ και $\mathbf{R}^3$ αντίστοιχα και ένα γ.μ. $T:V\rightarrow W$ που ορίζεται:

$$T\boldsymbol{u}_1= \boldsymbol{v}_1 +2\boldsymbol{v}_2 -\boldsymbol{v}_3$$
$$T\boldsymbol{u}_2= \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2$$

α) Να βρεθεί το μητρώο του Τ ως προς τις παραπάνω βάσεις.
β) Να βρεθεί το μητρώο του Τ ως προς τις βάσεις $\{-\boldsymbol{u}_1 +\boldsymbol{u}_2, 2\boldsymbol{u}_1 -\boldsymbol{u}_2\}$ και $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2+\boldsymbol{v}_3\}$ του R^2 και R^3 αντίστοιχα.

Απ. Ονομάζουμε με B_1, B_2 τις αρχικές βάσεις αντίστοιχα. Ομοίως με B_1', B_2', τις νέες βάσεις αντίστοιχα. Το μητρώο του Τ ως προς τις αρχικές βάσεις είναι:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$$

Το μητρώο ως προς τις νέες βάσεις είναι όμοιο του A:

$$B = D\,A\,C^{-1}$$

Το μητρώο C^{-1} δίνει τη B_1' ως προς την B_1:

$$C^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

Υπολογίζουμε και το D ως το μητρώο που δίνει την B_2 από την B_2'. Εδώ έχουμε άμεσα το αντίστροφό του:

$$D^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Απ' όπου αντιστρέφοντας:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Αντικαθιστώντας λαμβάνουμε:

$$B=DAC^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

□

Άσκηση 5.4-M16

Έστω ότι το μητρώο ενός γ.μ. $T:V\rightarrow V$ με $\dim(V)=3$ ως προς μια βάση $B=\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ είναι :

$$T_B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Θεωρούμε μια νέα βάση του V: $B' = \{\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} - 2\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}\}$. Να βρεθεί το μητρώο του T ως προς τις βάση αυτή.

Απ. Το μητρώο $T_{B'}$ του T ως προς τη βάση B' θα είναι όμοιο του T_B:

$$T_{B'} = C\ T_B\, C^{-1}$$

Εδώ εκφράζεται η δεύτερη βάση ως προς την πρώτη [13], δηλ. δίνεται άμεσα το μητρώο C^{-1}:

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Αντιστρέφουμε:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Αντικαθιστούμε:

$$\begin{aligned} T_{B'} = C\ T_B\, C^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -2 & 10 & 7 \\ 4 & -12 & -8 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

□

---

13 [] Δηλ. αν $\{\boldsymbol{v}_i\}$ $\{\boldsymbol{v}_i'\}$ βάσεις, εδώ έχουμε έκφραση του αντίστροφου $R^{-1}\boldsymbol{v}_j = \boldsymbol{v}_j'$ του γ.μ. $R\boldsymbol{v}_j' = \boldsymbol{v}_i$.

5.3 Πυρήνας και Εικόνα

Άσκηση 5.4-ΠΕ1

Έστω T : $\mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ η απεικόνιση:

$$T(a_1, a_2, a_3, a_4) = (a_1 - a_2 + a_3 + a_4,\ a_1 + 2a_2 - a_3 + a_4,\ 3a_2 - 2a_3)$$

Να δειχθεί ότι ο T είναι γραμμικός μετασχηματισμός και να βρεθούν οι **R**-βάσεις για το *Ker* T και το *Im* T.

Απ.

Ο T είναι γ.μ., αφού είναι της μορφής της (5.2.4). Για το *Ker* T πρέπει να ισχύει :

$$T(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 - a_2 + a_3 + a_4 = 0 \\ a_1 + 2a_2 - a_3 + a_4 = 0 \\ 3a_2 - 2a_3 = 0 \end{cases} \text{ ή:}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2 - r_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \to \frac{1}{3} r_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 \to r_3 - 3r_2]{r_1 \to r_1 + r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 1 \\ 0 & 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Μια **R**-βάση του *Ker* T είναι η βάση του μηδενοχώρου N(*A*) (ειδικές λύσεις):

$$\{\ \boldsymbol{s}_1 = (-1/3, 2/3, 1, 0)^T,\ \boldsymbol{s}_2 = (-1, 0, 0, 1)^T\ \}$$

Επίσης είναι

$$Im\,T = C(A) = \langle (1, 1, 0)^T, (-1, 2, 3) \rangle$$

δηλ. το σύνολο $\{\boldsymbol{v}_1 = (1, 1, 0)^T,\ \boldsymbol{v}_2 = (-1, 2, 3)^T\}$ είναι μια **R**-βάση του *Im* T.

Άσκηση 5.4-ΠΕ2

Να βρεθούν το μητρώο, ο πυρήνας και η εικόνα των γραμμικών μετασχηματισμών T, G: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ που ορίζονται από τις σχέσεις:

(α) $T(x, y, z) = (x + y - z,\ 2x + y)$

(β) $T(x, y, z) = (|x|, 0)$

Απ.

α) Είναι $A = (T) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Ορίζουμε **R**-βάσεις για το *Ker* T και το *Im* T. Έχουμε τις γραμμοϊσοδυναμίες:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2 - 2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \to r_1 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

απ' όπου:

$$Im\,T = \langle (1, 2, 0)^T, (1, 1, 0)^T \rangle$$

Τα παραπάνω διανύσματα αποτελούν **R**-βάση του *Im* T. Επομένως είναι:

$$rank(T) = 2 \text{ και } Nullity(T) = \dim\mathbf{R}^3 - 2 = 1.$$

Επίσης είναι:

$$Ker\,T = N(A) = \langle (1, -2, 0)^T \rangle$$

δηλ. το $(1, -2, 0)^T$ αποτελεί **R**-βάση του *Ker* T.

Άσκηση 5.4-ΠΕ3

Να δοθεί ή μορφή και να βρεθεί ο βαθμός και η μηδενικότητα του γραμμικού μετασχηματισμού απο τον $\mathbf{R}^4$ στον $\mathbf{R}^3$ του οποίου το μητρώο ως προς τις τυπικές βάσεις είναι το

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 2\\ 2 & 6 & 3 & -3\\ 0 & 2 & 5 & -7\end{pmatrix}$$

Απ.

Ο γ.μ. Τ δίνεται:

$T(a_1, a_2, a_3, a_4) = A(a_1, a_2, a_3, a_4)^T = (a_1 + 2a_2 - a_3 + 2a_4 , 2a_1 + 6a_2 + 3a_3 - 3a_4 , 2a_2 + 5a_3 -7a_4)^T$

Από τη γραμμοϊσοδυναμία:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 2\\ 2 & 6 & 3 & -3\\ 0 & 2 & 5 & -7\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\to r_2-2r_1}\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 2\\ 0 & 2 & 5 & -7\\ 0 & 2 & 5 & -7\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\to \frac{1}{2}r_2}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 2\\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & -\frac{7}{2}\\ 0 & 2 & 5 & -7\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3\to r_3-2r_2]{r_1\to r_1-2r_2}\begin{pmatrix}1 & 0 & -6 & -9\\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & -\frac{7}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

συμπεραίνουμε ότι τα $(1,2,0)^T$, $(2,6,2)^T$ είναι γ.α. και συνεπώς αποτελούν βάση του *Im* Τ. Συνεπώς

$$Im\,T = \langle(1, 2, 0)^T, (2, 6, 2)^T\rangle \text{ και } rank(T) = \dim(Im\,T : \mathbf{R}) = 2$$

Σημείωση: Στο ίδιο αποτέλεσμα θα φτάναμε αν θεωρούσαμε ορίζουσες, αν και η ελάττωση του μητρώου συντελεστών σε κλιμακωτή μορφή είναι η πιο ενδεδειγμένη προσέγγιση.

Επίσης, είναι $Ker\,T = N(A)$, οπότε η πιο πάνω κλιμακωτή μορφή δίνει άμεσα:

$$Ker\,T = \langle(6, -\frac{5}{2}, 1, 0)^T, (9, \frac{7}{2}, 0, 1)^T\rangle \text{ και } Nullity(T) = \dim(Ker\,T : \mathbf{R}) = 2$$

Οι διαστάσεις των *Im* Τ και *Ker* Τ επιβεβαιώνονται από τη σχέση:

$$\dim(Ker\,T : K) + \dim(Im\,T : K) = \dim(\mathbf{R}^4 : K) = 4.$$

Άσκηση 5.4-ΠΕ4

α) Να βρεθεί ο βαθμός και η μηδενικότητα ενός γραμμικού μετασχηματισμού Τ από τον $\mathbf{R}^4$ στον $\mathbf{R}^3$ που ορίζεται από τη σχέση :

$$T(a_1, a_2, a_3, a_4) = (a_1 - a_3 + 2a_4, - 2a_1 + a_2 + 2a_3, a_2 + 4a_4)$$

β) Να δειχθεί ότι $(1, 3, \lambda)^T \in Im\,T$ αν και μόνο αν $\lambda = 5$. Επίσης, να καθορισθεί η συνθήκη που ορίζει ότι το διάνυσμα $(1, x, 1, y)^T$ ανήκει στο *Ker* Τ.

Απαντήσεις

α) Το μητρώο του Τ ως προς την τυπική βάση είναι:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\ -2 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

Είναι $Ker\,T = N(A)$. Ανάγουμε το A στην κλιμακωτή μορφή:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\ -2 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 4\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\to r_2+2r_1}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 0 & 4\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3\to r_3-r_2}\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Άρα μια **R**-βάση του $Ker\,\mathrm{T}$ είναι το σύνολο $\{(1, 0, 1, 0)^{\mathrm{T}}, (-2, -4, 0, 1)^{\mathrm{T}}\}$ και

$$Ker\,\mathrm{T} = <(1, 0, 1, 0)^{\mathrm{T}}, (-2, -4, 0, 1)^{\mathrm{T}}> \text{ και } Nullity(\mathrm{T}) = \dim(Ker\,\mathrm{T} : \mathbf{R}) = 2$$

Για την εικόνα του Τ έχουμε :

$$Im\,\mathrm{T} = \mathrm{C}(A) = \langle (1, -2, 0)^{\mathrm{T}}, (0, 1, 1)^{\mathrm{T}} \rangle \text{ και } rank(\mathrm{T}) = \dim(Im\,\mathrm{T} : \mathbf{R}) = 2$$

δηλ. το $\{(1,-2, 0)^{\mathrm{T}}, (0, 1, 1)^{\mathrm{T}}\}$ είναι μια **R**-βάση του $Im\,\mathrm{T}$.

β) Είναι $(1, 3, \lambda)^{\mathrm{T}} \in Im\,\mathrm{T} = \mathrm{C}(A)$ αν και μόνο αν τα $(1, 3, \lambda)^{\mathrm{T}}$, $(1, -2, 0)^{\mathrm{T}}$, $(0, 1, 1)^{\mathrm{T}}$ είναι γ.ε., ή, ισοδύναμα, αν το γραμμοϊσοδύναμο του $(1, 3, \lambda)^{\mathrm{T}}$ έχει την τρίτη συνιστώσα μηδενική:

$$(1, 3, \lambda)^{\mathrm{T}} \xrightarrow{r_2 \to r_2 + 2r_1} (1, 5, \lambda)^{\mathrm{T}} \xrightarrow{r_3 \to r_3 - r_2} (1, 5, \lambda - 5)^{\mathrm{T}}$$

Συνεπώς πρέπει $\lambda=5$.

Εξ' άλλου είναι $(1, x, 1, y)^{\mathrm{T}} \in Ker\,\mathrm{T} = \mathrm{N}(A)$ αν και μόνο αν τα διανύσματα $(1, 0, 1, 0)^{\mathrm{T}}$, $(-2, -4, 0, 1)^{\mathrm{T}}$, $(1, x, 1, y)^{\mathrm{T}}$ είναι γ.ε., ή, ισοδύναμα, αν το γραμμοϊσοδύναμο κλιμακωτό μητρώο B με στήλες τα παραπάνω διανύσματα έχει τάξη 2:

$$B=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & x \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & y \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 - r_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & x \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & y \end{bmatrix} \xrightarrow[r_4 \to r_2 + \frac{r_1}{4}]{r_3 \to r_2 + \frac{r_1}{2}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -4 & x \\ 0 & 0 & x/2 \\ 0 & 0 & y + x/4 \end{bmatrix}$$

Είναι $\mathrm{rank}(B)=2$ όταν $x/2=0$ και $y+x/4=0$, δηλ. όταν $x=y=0$, η οποία είναι η ζητούμενη συνθήκη.

Άσκηση 5.4-ΠΕ5

Αν Τ είναι ένας γ.μ. από ένα δ.χ. V σε ένα δ.χ. W, να δειχτεί ότι τα στοιχεία του V που απεικονίζονται σε ένα δοσμένο υπόχωρο U του W, αποτελούν έναν υπόχωρο X του V. Αν οι διαστάσεις των V, W, U, X είναι m, n, p, q αντίστοιχα και αν η τάξη του Τ είναι n, να βρεθεί μια σχέση μεταξύ των m, n, p, q.

Απ.

Είναι $\mathrm{T}(\mathbf{0})=\mathbf{0}\in W$. Αφού U υποχώρος του W, είναι $\mathrm{T}(\mathbf{0})\in U$, συνεπώς $\mathbf{0}\in X$, δηλ. $X \neq \varnothing$. Έστω τώρα $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2 \in X$, δηλ. τέτοια ώστε $\mathrm{T}(\boldsymbol{v}_1)$, $\mathrm{T}(\boldsymbol{v}_2)\in U$. Τότε, αφού ο U είναι υποχώρος του V, για κάθε $\lambda\in \mathrm{K}$ θα είναι $\lambda\mathrm{T}(\boldsymbol{v}_1)+\mathrm{T}(\boldsymbol{v}_2)=\mathrm{T}(\lambda\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2)\in U$, που σημαίνει $\lambda\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2\in X$, συνεπώς ο X είναι υποχώρος του V.

Θεωρούμε τον γ.μ. G: $X \to U$ με $\mathrm{G}(\boldsymbol{v})=\mathrm{T}(\boldsymbol{v})$ $\forall \boldsymbol{v}\in X$. Εκ κατασκευής είναι $Im\,\mathrm{G} = U$. Για τον γ.μ. Τ ισχύει:

$$rank(\mathrm{T}) + \dim(Ker\,\mathrm{T}) = \dim(V) = m \text{ ή:}$$
$$Nullity(\mathrm{T}) = m - n$$

Για τον γ.μ. G ισχύει:

$$rank(\mathrm{G}) + \dim(Ker\,\mathrm{G}) = \dim \mathrm{X} = q \text{ ή:}$$
$$Nullity(\mathrm{G}) = q - p$$

Αλλά $Ker\,\mathrm{G} \subseteq Ker\,\mathrm{T}$, συνεπώς $Nullity(\mathrm{G}) \leq Nullity(\mathrm{T})$, δηλ.

$$q - p \leq m - n$$

Άσκηση 5.4-ΠΕ6

Να βρεθεί ένας γραμμικός μετασχηματισμός Τ επί κάποιου δ.χ. V έτσι ώστε $Ker\,\mathrm{T} = Im\,\mathrm{T}$. Μπορεί αυτό να γίνει για όλους τους διανυσματικούς χώρους;

Απ.

Έστω ο γραμμικός μετασχηματισμός Τ: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ με

$$\mathrm{T}(a, \beta) = (a+\beta, -a-\beta)$$

Είναι $\mathrm{T}(a, \beta)=(0, 0) \Leftrightarrow (a+\beta, -a-\beta)=(0, 0) \Leftrightarrow a+\beta = 0 \Leftrightarrow \beta = -a$, άρα

$Ker\,\mathrm{T} = <(1, -1)>$

Επίσης είναι $\mathrm{T}(a, \beta) = (a + \beta)(1, -1)$, δηλ. το $Im\mathrm{T}$ παράγεται από το διάνυσμα (1, -1):

$Im\,\mathrm{T} = <(1, -1)>$

Επομένως $Ker\,\mathrm{T} = Im\,\mathrm{T}$.

Αν θεωρήσουμε ένα δ.χ. V με περιττή διάσταση, δηλ. $\dim(V)=2k+1$, $k\in\mathrm{N}$, τότε δεν μπορεί να βρεθεί γ.μ. Τ τέτοιος ώστε $Ker\,\mathrm{T} = Im\,\mathrm{T}$, γιατί τότε θα έπρεπε

$$\dim(Ker\,\mathrm{T}) + \dim(Im\,\mathrm{T}) = \dim(V) \Rightarrow 2\dim(Ker\,\mathrm{T}) = 2k + 1$$

'Αρα δεν μπορεί να βρεθεί τέτοιος γ.μ. για όλους τους δ.χ.

Άσκηση 5.4-ΠΕ7

Αν V ένας Κ-χώρος με $\dim(V)=n$ και S και T δύο γ.μ. επί του V, τότε να αποδειχθεί ότι

$$Nullity(\mathrm{ST}) \leq Nullity(\mathrm{S}) + Nullity(\mathrm{T})$$

Αν είναι $\mathrm{S}^n = 0$, αλλά $\mathrm{S}^{n-1} \neq 0$, να καθορισθεί η μηδενικότητα του S.

Απ.

Θεωρούμε $\boldsymbol{v}\in Ker\,\mathrm{T}$, άρα $\mathrm{T}(\boldsymbol{v})=0$, συνεπώς $\mathrm{ST}(\boldsymbol{v})=\mathrm{ST}(\mathbf{0})=\mathbf{0}$, δηλ. $\boldsymbol{v}\in Ker\,\mathrm{ST}$. Άρα είναι $Ker\,\mathrm{T} \subseteq Ker\,\mathrm{ST}$. Ο πυρήνας του ST δίνεται

$$Ker\,\mathrm{ST} = Ker\,\mathrm{T} + \{\, \boldsymbol{v}\in Im\,\mathrm{T} \mid \mathrm{S}(\boldsymbol{v})=\mathbf{0} \,\} \subseteq Ker\,\mathrm{T} + Ker\,\mathrm{S} \Rightarrow$$
$$\dim(Ker\,\mathrm{ST}) \leq \dim(Ker\,\mathrm{T}) + \dim(Ker\,\mathrm{S}) \Rightarrow$$
$$Nullity(\mathrm{ST}) \leq Nullity(\mathrm{S}) + Nullity(\mathrm{T}) \qquad (1)$$

Εφαρμόζουμε την (1) για τους γ.μ. S^{n-1} και S:

$$Nullity(\mathrm{S}^n) = n = Nullity(\mathrm{S}^{n-1}\mathrm{S}) \leq Nullity(\mathrm{S}^{n-1}) + Nullity(\mathrm{S}) \Rightarrow$$
$$Nullity(\mathrm{S}) \geq n - Nullity(\mathrm{S}^{n-1})$$

Επειδή $\mathrm{S}^{n-1}\neq 0$ είναι $\dim(Im\,\mathrm{S}^{n-1}) = rank(\mathrm{S}^{n-1})>1$ και $Nullity(\mathrm{S}^{n-1})\leq n-1$, άρα

$$Nullity(\mathrm{S}) \geq n - n + 1 > 0 \Rightarrow Nullity(\mathrm{S}) \geq 1$$

Άσκηση 5.4-ΠΕ8

Αν V είναι ένας Κ-χώρος, να αποδειχθεί ότι ισχύει $Im\,\mathrm{T} \cap Ker\,\mathrm{T} = \{\mathbf{0}\}$ τότε και μόνον τότε όταν η σχέση $\mathrm{T}(\mathrm{T}(\boldsymbol{v}))=\mathbf{0}$ συνεπάγεται $\mathrm{T}(\boldsymbol{v})=\mathbf{0}$, όπου $\boldsymbol{v} \in V$.

Απ.

Θα δείξουμε ότι αν ισχύει $Im\,\mathrm{T}\cap Ker\,\mathrm{T} = \{\mathbf{0}\}$, τότε $\mathrm{T}(\mathrm{T}(\boldsymbol{v})) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathrm{T}(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$.

Έστω $\mathrm{T}(\mathrm{T}(\boldsymbol{v}))=\mathbf{0}$ για κάποιο $\boldsymbol{v} \in V$. Τότε είναι $\mathrm{T}(\boldsymbol{v})\in Ker\,\mathrm{T}$ και $\mathrm{T}(\boldsymbol{v})\in Im\,\mathrm{T}$, άρα $\mathrm{T}(\boldsymbol{v})\in Ker\,\mathrm{T}\cap Im\,\mathrm{T}$ και επειδή εξ' υποθέσεως $Ker\,\mathrm{T}\cap Im\,\mathrm{T} = \{\mathbf{0}\}$, έπεται $\mathrm{T}(\boldsymbol{v})=\mathbf{0}$.

Αντιστρόφως, δεχόμαστε ότι $\mathrm{T}(\mathrm{T}(\boldsymbol{v})) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathrm{T}(\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$, $\forall\ \boldsymbol{v} \in V$. Έστω $\boldsymbol{w}\in Im\,\mathrm{T}\cap Ker\,\mathrm{T}$. Επειδή $\boldsymbol{w}\in Im\,\mathrm{T}$, υπάρχει $\boldsymbol{v}\in V$ ώστε $\boldsymbol{w}=\mathrm{T}(\boldsymbol{v})$. Επειδή $\boldsymbol{w}\in Ker\,\mathrm{T}$ είναι $\mathrm{T}(\boldsymbol{w})=\mathbf{0}= \mathrm{T}(\mathrm{T}(\boldsymbol{v}))$, άρα $\mathrm{T}(\boldsymbol{v})=\mathbf{0}=\boldsymbol{w}$. Επομένως $Im\mathrm{T}\cap Ker\mathrm{T}=\{\mathbf{0}\}$, δηλ. ισχύει και το αντίστροφο.

Άσκηση 5.4-ΠΕ9

Αν $\mathrm{S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, να βρεθούν **R**-βάσεις για τα σύνολα $Ker\,\mathrm{T}$ και $Im\,\mathrm{T}$ για τους γραμμικούς μετασχηματισμούς:

(α) $\mathrm{T}(A) = SA$
(β) $\mathrm{T}(A) = AS$
(γ) $\mathrm{T}(A) = SA - AS$

Απ.

α) Για τον $\mathrm{T}(A) = SA$, έστω

$$A=\begin{pmatrix} x & y \\ \varphi & \omega \end{pmatrix}$$

όπου $x, y, \varphi, \omega \in \mathbf{R}$. Τότε θα είναι :

$$\mathrm{T}(A)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ \varphi & \omega \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+\varphi & y+\omega \\ x+2\varphi & y+2\omega \end{pmatrix}=x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\varphi\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}+\omega\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
$$=xA_1+yA_2+\varphi A_3+\omega A_4$$

Το μητρώο των συντελεστών, αναγόμενο σε κλιμακωτή μορφή, δίνει το I_4:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\to\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\to \mathrm{I}_4$$

(ή ισοδύναμα $\det(A)=1\neq 0$). Επομένως τα μητρώα A_1, A_2, A_3, A_4 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, οπότε αποτελούν **R**-βάση του *Im*T. Επειδή *rank*(T)=4 και $\dim(R^{2\times 2})=4$, έπεται *Nullity*(T)=**0**, άρα η βάση του *Ker*T είναι το $\{\mathbf{0}\}$.

β) Για τον γ.μ. $\mathrm{T}(A) = AS$, θεωρούμε το ίδιο μητρώο $A=[x, y, ; \varphi, \omega]$, οπότε:

$$\mathrm{T}(A)=\begin{pmatrix} x & y \\ \varphi & \omega \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+y & x+2y \\ \varphi+\omega & \varphi+2\omega \end{pmatrix}=x\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}+\varphi\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}+\omega\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$=xA_1+yA_2+\varphi A_3+\omega A_4$$

Για τον ίδιο λόγο όπως στο (α), εύκολα προκύπτει ότι τα μητρώα A_1, A_2, A_3, A_4 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, συνεπώς αποτελούν **R**-βάση του *Im*T. Όπως και στο (α), η βάση για το *ker* T είναι το $\{\mathbf{0}\}$.

γ) Θεωρώντας το μητρώο $A=[x, y, ; \varphi, \omega]$, από τα (α) και (β) προκύπτει:

$$\mathrm{T}(A)=SA\text{-}AS=\begin{pmatrix} x+\varphi & y+\omega \\ x+2\varphi & y+2\omega \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} x+y & x+2y \\ \varphi+\omega & \varphi+2\omega \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \varphi\text{-}y & \omega\text{-}x\text{-}y \\ x+\varphi+\varphi & y\text{-}\varphi \end{pmatrix}$$
$$=x\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\varphi\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}+\omega\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$=(x\text{-}\omega)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\varphi\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}=(x\text{-}\omega)B+yC+\varphi D$$

Εφαρμόζοντας απαλοιφή :

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\to r_2+r_1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\to r_3-r_2}$$
$$\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Άρα τα μητρώα B, C, D είναι γραμμικώς εξαρτημένα, ενώ τα B, C είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, οπότε αποτελούν μια **R**-βάση του *Im* T.

Μια **R**-βάση του *Ker* T προκύπτει από το χώρο λύσεων του συστήματος:

$$\mathrm{T}(A)=\mathbf{0}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix} \phi-y=0 \\ x+\phi-\omega=0 \\ \text{-}x\text{-}y+\omega=0 \\ y-\phi=0 \end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix} x+\varphi\text{ - }\omega=0 \\ y\text{-}\varphi=0 \\ \text{-}x\text{-}y+\omega=0 \end{matrix}\right\}$$

$$B=\begin{pmatrix}1&0&1&-1\\0&1&-1&0\\-1&-1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3\to r_3+r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&0&1&-1\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Οι φ και ω είναι ελεύθερες μεταβλητές, οπότε η λύση είναι $(x, y, \varphi, \omega) = (-\varphi+\omega, \varphi, \varphi, \omega)$. Οι ειδικές λύσεις $\boldsymbol{s}_1=(-1, 1, 1, 0)^T$ και $\boldsymbol{s}_2=(1, 0, 0, 1)^T$ αποτελούν μια **R**-βάση του $N(B)=Ker\,T$:

$$KerT=\left\langle \begin{pmatrix}-1&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\rangle.$$

Άσκηση 5.4-ΠΕ10

Αν το σύνολο $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4\}$ είναι μια **R**-βάση για το δ.χ. $\mathbf{R}^4$, να προσδιορισθεί για ποιες τιμές του λ είναι μη-ιδιάζων ο γραμμικός μετασχηματισμός T που ορίζεται από τη σχέση

$$T(\boldsymbol{u}_1) = \boldsymbol{u}_1 + \lambda\boldsymbol{u}_4$$
$$T(\boldsymbol{u}_i) = 2\boldsymbol{u}_{i-1} + \boldsymbol{u}_i \quad (i = 2, 3, 4)$$

Απ.

Για να είναι ο T μη-ιδιάζων πρέπει το $\{T\boldsymbol{u}_1, T\boldsymbol{u}_2, T\boldsymbol{u}_3, T\boldsymbol{u}_4\}$ να αποτελεί βάση του $\mathbf{R}^4$, δηλαδή πρέπει $Ker T=\{\mathbf{0}\}$. Από τον ορισμό του T είναι :

$$T(\boldsymbol{u}_1) = \boldsymbol{u}_1 + \lambda\, \boldsymbol{u}_4,\ T(\boldsymbol{u}_2) = 2\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2$$
$$T(\boldsymbol{u}_3) = 2\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3,\ T(\boldsymbol{u}_4) = 2\boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{u}_4$$

Έστω

$$a(\boldsymbol{u}_1 + \lambda\boldsymbol{u}_4) + \beta(2\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) + \gamma\,(2\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3) + \delta(2\boldsymbol{u}_3 + \boldsymbol{u}_4) = \mathbf{0} \Leftrightarrow$$

$$\{\,\alpha+2\beta=0,\ \beta+2\gamma=0,\ \gamma+2\delta=0,\ \lambda\alpha+\delta=0\,\}$$

Το παραπάνω ομογενές σύστημα πρέπει να έχει μόνο τη μηδενική λύση, δηλ. θα πρέπει rank(A)=4 :

$$A=\begin{bmatrix}1&2&0&0\\0&1&2&0\\0&0&1&2\\\lambda&0&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&0&0\\0&1&2&0\\0&0&1&2\\0&-2\lambda&0&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&0&0\\0&1&2&0\\0&0&1&2\\0&0&4\lambda&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&0&0\\0&1&2&0\\0&0&1&2\\0&0&0&1-8\lambda\end{bmatrix}$$

Άρα πρέπει $1 - 8\lambda \neq 0$ ή $\lambda \neq \frac{1}{8}$.

Σημείωση: Ισοδύναμα, πρέπει $\det(A)=1-8\lambda\neq 0$ ή $\lambda \neq \frac{1}{8}$.

Άσκηση 5.4-ΠΕ11

Αν T είναι ο γραμμικός μετασχηματισμός επί του $\mathbf{R}^3$ που ορίζεται από τη σχέση

$$T(a_1, a_2, a_3) = (3a_1 - a_2,\ a_1 - a_2 + a_3,\ -a_1 + 2a_2 - a_3)$$

τότε να δειχτεί ότι ο T είναι μη ιδιάζων. Να δοθεί μια σχέση για τον T^{-1} όπως εκείνη που ορίζει τον T.

Απ.

Είναι:

$$A=(T)=\begin{bmatrix}3&-1&0\\1&-1&1\\-1&2&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}3&-1&0\\0&-2/3&1\\0&5/3&-1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}3&-1&0\\0&-2/3&1\\0&0&3/2\end{bmatrix}$$

Άρα rank(A)=3, άρα το A είναι μη ιδιάζον, συνεπώς και ο T είναι μη ιδιάζων (ισοδύναμα είναι $\det A=-3\neq 0$). Ο T^{-1} δίνεται από τη σχέση:

$T^{-1}(x, y, z) = A^{-1}(x, y, z)^T$

Το A^{-1} υπολογίζεται:

$$[A\,|\,I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \cdots \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 5/3 & 2/3 \end{array}\right] = [I_3\,|\,A^{-1}]$$

Επομένως

$$(T^{-1}) = A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1/3 & 5/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

και

$$T^{-1}(x, y, z) = (\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z,\ y + z,\ -\frac{1}{3}z + \frac{5}{3}y + \frac{2}{3}x)$$

Άσκηση 5.4-ΠΕ12

Ενας γραμμικός μετασχηματισμός επί του **R**-χώρου **C** ορίζεται από τη σχέση $T(z) = (1 - i)z$, $\forall\ z \in \mathbf{C}$. Να δειχθεί ότι ο T είναι μη-ιδιάζων.

Απ.

Θεωρούμε $\boldsymbol{z} = x + yi$ ($x, y \in \mathbf{R}$). Τότε είναι

$$T(\boldsymbol{z}) = (i-1)(x + yi) = x + yi - xi + y = x + y + (y - x)i$$

Αν $T(z) = \mathbf{0}$, τότε :

$$T(z) = \mathbf{0} \Leftrightarrow x + y + (y - x)i = 0 \Leftrightarrow \{x + y = 0,\ y - x = 0\} \Leftrightarrow y = x = \mathbf{0}$$

Άρα $z=\mathbf{0}$, οπότε $Ker\ T = \{\mathbf{0}\}$, άρα T μη-ιδιάζων.

Άσκηση 5.4-ΠΕ13

Αν T είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός τέτοιος ώστε $T^2 = 0$, δείξτε ότι ο I - T είναι μη ιδιάζων.

Απ.

Είναι $(I+T)((I-T)(\boldsymbol{v})) = (I-T)\boldsymbol{v} + T(I-T)\boldsymbol{v} = I^2\boldsymbol{v} - T\boldsymbol{v} + T\boldsymbol{v} - T^2\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \mathbf{0} = \boldsymbol{v}$, δηλ. ο I-T είναι αντιστρέψιμος. Συνεπώς ο I-T είναι μη ιδιάζων.

Άσκηση 5.4-ΠΕ14

Να δειχθεί ότι ο μετασχηματισμός D που ορίζει τη διαφόριση επί του $P_n(\mathbf{R})$ είναι ιδιάζων. Τι σημαίνει αυτό για τον πυρήνα του D;

Απ.

Έστω το πολυώνυμο

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

Τότε έχουμε ότι :

$$D(p(x)) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + 2a_2 x + a_1$$

δηλ.

$$Im\ D = P_{n-1}(\mathbf{R}) \text{ και } rank(D) = \dim(Im\ D) = n$$

Είναι $D(p(x)) = 0 \Leftrightarrow a_n = a_{n-1} = \ldots = a_1 = 0\ \ \forall a_0 \in \mathbf{R}$. Επομένως

$$Ker\ D = \{p(x) = a \,|\, a \in \mathbf{R}\} = P_1(\mathbf{R}) \text{ και}$$
$$Nullity(T) = 1 = \dim(P_n(\mathbf{R})) - rank(D)$$

Συνεπώς ο D είναι ιδιάζων και ο πυρήνας του D περιέχει όλα τα σταθερά πολυώνυμα, περιλαμβανομένου και του μηδενικού.

Άσκηση 5.4-ΠΕ15

Έστω L: $\mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ ένας γραμμικός μετασχηματισμός και έστω ότι οι εικόνες της τυπικής βάσης $\mathbf{e}_1=[1, 0, 0]^T$, $\mathbf{e}_2=[0, 1, 0]^T$, $\mathbf{e}_3=[0, 0, 1]^T$ είναι $L\mathbf{e}_1=[37, 33, 30]^T$, $L\mathbf{e}_2=[3, 18, -3]^T$ και $L\mathbf{e}_3=[-4, 8, 15]^T$ αντίστοιχα.

α) Ποιο είναι το μητρώο εκπρόσωπος του L για την τυπική βάση;

β) Ποια η εικόνα του $\boldsymbol{v}=[1, -1, 2]^T$;

γ) Προσδιορίστε τα Ker(L), Im(L).

δ) Είναι ο L ισομορφισμός;

ε) Υπάρχει ο L^{-1}; Αν ναι, είναι γ.μ. ; Προσδιορίστε τον.

ζ) Θεωρούμε τώρα μια νέα βάση του R^3: $\{\boldsymbol{\mu}_1=[1,-1,1]^T, \boldsymbol{\mu}_2=[1,2,1]^T, \boldsymbol{\mu}_3=[1,-1,0]^T\}$. Ποιο είναι το μητρώο του L ως προς τη βάση αυτή;

Απαντήσεις

α) $L = L[e_1,e_2,e_3] = L\,I = [Le_1, Le_2, Le_3] = \begin{bmatrix} 37 & 3 & -4 \\ 33 & 18 & 8 \\ 30 & -3 & 15 \end{bmatrix}$

β) $L\boldsymbol{v} = (26, 31, 63)^T$

γ) Το L είναι αντιστρέψιμο όπως μπορεί να διαπιστωθεί από την ορίζουσα det(A)=12669≠0 ή την απαλοιφή:

$$L \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -32/189 \\ 0 & 1 & 428/567 \\ 0 & 0 & 4223/189 \end{bmatrix} \rightarrow I$$

Επομένως $Ker(L)=N(L)=\{0\}$. Επίσης είναι προφανώς $Im(L)=C(L)=\mathbf{R}^3$.

δ) Επειδή $Ker(L)=\{0\}$ ο L είναι ισομορφισμός.

ε) Αφού ο L είναι μη ιδιάζον (ή ισομορφισμός), υπάρχει ο L^{-1} και είναι και αυτός ισομορφισμός, άρα και γ.μ. Για να προσδιορισθεί, αρκεί να υπολογισθεί μητρώο του, δηλ. το L^{-1}. Με τη μέθοδο *Gauss-Jordan* [14] υπολογίζουμε τελικά:

$$L^{-1} = \begin{bmatrix} 0.0232 & -0.0026 & 0.0076 \\ -0.0201 & 0.0533 & -0.0338 \\ -0.0504 & 0.0159 & 0.0448 \end{bmatrix}$$

ζ) Το μητρώο B του L ως προς τη νέα βάση είναι όμοιο με το L:

$$B = C\,L\,C^{-1}$$

Το C^{-1} είναι το μητρώο (του γ.μ.) της νέας βάσης ως προς την τυπική:

$$C^{-1} = C^{-1}\,I = [C^{-1}\mathbf{e}_1, C^{-1}\mathbf{e}_2, C^{-1}\mathbf{e}_2] = [\boldsymbol{\mu}_1, \boldsymbol{\mu}_2, \boldsymbol{\mu}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Υπολογίζουμε τώρα το $C=(C^{-1})^{-1}$, δηλ. το μητρώο της τυπικής βάσης ως προς τη νέα βάση:

$$C = \begin{bmatrix} -1/3 & -1/3 & 1 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

και τελικά:

14 Βλ. σελ. 92 , [G. Strang: «Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα»]

$$B = CAC^{-1} = \begin{bmatrix} -1/3 & -1/3 & 1 \\ 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 37 & 3 & -4 \\ 33 & 18 & 8 \\ 30 & -3 & 15 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30\frac{1}{3} & 1/3 & 16\frac{2}{3} \\ 17\frac{2}{3} & 38\frac{2}{3} & 16\frac{1}{3} \\ -18 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 5.4-ΠΕ16

Έστω S∈$K^{n\times n}$ ένα σταθερό μητρώο και T ο γραμμικός μετασχηματισμός επί του $K^{n\times n}$ που ορίζεται από την ιδιότητα T(A)=AS. Αν το S είναι αντιστρέψιμο, τότε να δειχτεί ότι $Rank$(T)=n^2. Γενικά, να αποδειχτεί ότι ισχύει $Rank$(T)=n × $Rank$(S).

Απ.

Είναι

$$Ker\,T = \{ A\in K^{n\times n}: T(A)=\mathbf{0} \} = \{ A\in K^{n\times n}: AS=0 \}$$

Αφού το S αντιστρέψιμο, είναι $AS = \mathbf{0} \Rightarrow (AS)S^{-1} = \mathbf{0}\, S^{-1} \Rightarrow A=\mathbf{0} \Rightarrow Ker\,T=\{\mathbf{0}\}$. Άρα

$$Nullity(T)=0$$

και επειδή $\dim(K^{n\times n})=n^2$:

$$Rank(T) = \dim(K^{n\times n}) - Nullity(T) = n^2$$

Γενίκευση: Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις :

(α) Εάν το S είναι αντιστρέψιμο, τότε $Rank(T) = n^2 = n\times n = n\times Rank(S)$.
(β) Εάν S=0, τότε προφανώς $Rank$(S)=0, $Ker\,T = K^{n\times n}$, $Im\,T=\{\mathbf{0}\}$, άρα $Rank(T) = 0 = n\times 0 = n\times Rank(S)$.
(γ) Εάν S≠0 και ιδιάζον, τότε είναι $rank(S)<n$. Δείχνουμε ότι ισχύει Nullity(T) = n dim(N(S)).

$$Rank(T) = \dim(Im\,T) = n^2 - \dim(Ker\,T) = n^2 - n\dim(N(S)) =$$
$$= n\,(n - \dim(N(S)) = n\, rank(S)$$

Άσκηση 5.4-ΠΕ17

Να δειχθεί ότι ο γ.μ. D που ορίζει τη διαφόριση επί του $P_n(\mathbf{R})$ είναι ιδιάζων. Να βρεθεί το Ker(D) και Im(D).

Απ.

Στο Παρ.5.2.5 βρήκαμε ότι το μητρώο του D ως προς την τυπική βάση είναι:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Η τελευταία γραμμή του A είναι 0, επομένως ο D είναι ιδιάζων. Είναι $Ker(D)=N(A)=\{a(1,0,\ldots,0)/a\in\mathbf{R}\}=P_0$, δηλ. το σύνολο των πολυωνύμων μηδενικού βαθμού.

Επίσης είναι φανερό ότι $Im(D) = C(A) = \langle(A(:, 2{:}n+1)\rangle = P_{n-1}(D)$.

Άσκηση 5.4-ΠΕ18

Δίνεται ο γ.μ. T του $\mathbf{R}^3$ που ορίζεται από τη σχέση:

$$T(x_1, x_2, x_3)=(3x_1 - x_2, x_1 - x_2 + x_3, -x_1 + 2x_2 - x_3)$$

α) Να δειχθεί ότι ο T είναι μη ιδιάζων.
β) Να βρεθεί η εικόνα του T, Im(T).
γ) Να δοθεί μια σχέση για τον γ.μ. T^{-1}.

Απαντήσεις

α) Το μητρώο του T είναι:

$$A=\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\\ 0 & -2/3 & 5/3\\ 0 & 1 & -1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\\ 0 & -2/3 & 5/3\\ 0 & 0 & -1+5/2\end{bmatrix}$$

Προφανώς N(A)={**0**}, δηλ. το A είναι μη ιδιάζον, άρα ομοίως και ο T, δηλ. *μηδενικότητα*(T)=dim(N(A)=0.

β) Είναι Im(T) = C(A) = <(3 -1 0)^T, (1, -1, 1)^T, (-1, 2, -1)^T> και *τάξη*(T)=rank(A)=3.

γ) Με τη μέθοδο *Gauss-Jordan* υπολογίζουμε το A^{-1}:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1/3 & 0 & -1/3\\ 1/3 & 1 & 5/3\\ 1/3 & 1 & 2/3\end{bmatrix}$$

Επομένως:

$$T(x_1, x_2, x_3) = 1/3(x_1 + x_2 + x_2,\ x_2 + x_3, -x_1 + 5x_2 + 2x_3)$$

Άσκηση 5.4-ΠΕ19

4. Έστω V_n ο δ.χ. των πολυωνύμων $f(x, y)$ με πραγματικούς συντελεστές βαθμού το πολύ n. Να δειχθεί ότι η απεικόνιση S που ορίζεται από τη σχέση $S(f(x,y))=x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}$ είναι γ.μ. Να βρεθεί ο πυρήνας και η εικόνα του S. Να βρεθεί μια βάση του S και το μητρώο του S ως προς τη βάση αυτή.

Απ.

Ότι ο V_n είναι δ.χ., δείχνεται με όμοιο τρόπο όπως για το χώρο των πολυωνύμων $P_n(\mathbf{R})$.

Αν $f, g \in V$ και $a\in\mathbf{R}$, είναι:

$$S(af(x,y)+g(x,y))=x\frac{\partial(af+g)}{\partial x}+y\frac{\partial f(af+g)}{\partial y}=x\frac{a\partial f+\partial g}{\partial x}+y\frac{a\partial f+\partial g}{\partial y}$$

$$=ax\frac{\partial f}{\partial x}+x\frac{\partial g}{\partial x}+ay\frac{\partial f}{\partial y}+y\frac{\partial g}{\partial y}=a\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)+x\frac{\partial g}{\partial x}+y\frac{\partial g}{\partial y}=aS(f(x,y))+S(g(x,y))$$

Άρα ο S είναι γ.μ.

Η γενική μορφή ενός πολυωνύμου $f\in V$ βαθμού n είναι:

$$f(x,y)=\sum_{0\le i+j\le n}a_{ij}x^iy^j = a_{00}+a_{10}x+a_{01}y+a_{11}xy+a_{20}x^2+a_{02}y^2+\ldots+a_{0,n}y^n,\ a_{ij}\in\mathbf{R} \qquad (1)$$

Στο πολυώνυμο $f(x,y)$ υπάρχουν k+1 όροι βαθμού k, δηλ. συνολικά r=1+2+…+(n+1)=(n+1)(n+2)/2 όροι.

Προσδιορίζουμε τώρα την εικόνα Sf:

$$Sf=x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=\sum_{0\le i+j\le n}\left(x\frac{\partial\left(a_{ij}x^iy^j\right)}{\partial x}+y\frac{\partial\left(a_{ij}x^iy^j\right)}{\partial y}\right)=$$

$$\sum_{0\le i+j\le n}\left(xa_{ij}\times i\times x^{i-1}y^j+ya_{ij}x^i\times j\times y^{j-1}\right)=\sum_{0\le i+j\le n}a_{ij}(i+j)x^iy^j=$$

$$= a_{10}x+a_{01}y+2a_{11}xy+2a_{20}x^2+2a_{02}y^2+\ldots+na_{0,n}y^n \qquad (2)$$

Ο πυρήνας του S ορίζεται:

$$Ker(V)=\{f\in V \mid Sf=0\}=\{f\in V \mid Tf=x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=0\}$$

Λόγω της ειδικής μορφής του πολυωνύμου Sf (λείπει ο σταθερός όρος), παρατηρούμε ότι:

$$Ker(V)=\{f \mid f=c\ (\text{σταθερά})\}=V_1$$

Από την (1), η εικόνα Im(S) είναι ο υποχώρος του V_n των πολυωνύμων χωρίς σταθερό όρο.

Κατ' αναλογία με το χώρο $P_n(\mathbf{R})$, μια βάση για το V_n είναι η :

$$E = \{ \Phi_{ij}=x^i y^j \mid 0 \le i,\ j \le r,\ i+j \le r \}$$

Διατάσσουμε τα r διανύσματά της ως προς το βαθμό:

$$[\Phi_{00}, \Phi_{01}, \Phi_{10}, \Phi_{11}, \Phi_{20}, \Phi_{02}, \Phi_{03}, \Phi_{12}, \Phi_{21}, \Phi_{30}, \ldots ,\Phi_{n0}\}$$

Οι εικόνες $S(\Phi_{ij})$ εκφράζονται σε σχέση με τα διανύσματα Φ_i της βάσης ως εξής:

$$S(\Phi_{ij}) = 0 + 0 + \ldots + (i+j)\ \Phi_{ij} + 0 + \ldots + 0$$

Άρα το μητρώο A του S ως προς τη βάση E είναι:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & & & & & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & & & & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \ldots & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & \ldots & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & \ldots & 0 \\ \ldots & & \ldots & & & & \ddots & \\ 0 & & \ldots & & & & & n \end{bmatrix}$$

6 ΟΡΘΟΓΩΝΙΕΣ ΠΡΟΒΟΛΕΣ & ΕΛΑΧΙΣΤΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ

6.1 Ορθογώνιες Προβολές

Άσκηση 6-Π1

Ποια η προβολή του $\boldsymbol{u}=(3,3,1)^{\mathrm{T}}$ στο $\boldsymbol{w}=(1,1,2)^{\mathrm{T}}$;

Απ.

Εφαρμόζουμε τον τύπο της προβολής:

$$\mathrm{Pu} = (\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}/\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{w})\boldsymbol{u} = Pu = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 16 \end{bmatrix}$$

Άσκηση 6-Π2

Δίνεται το μητρώο:

$$A = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Να δείξετε ότι είναι μητρώο ορθογώνιας προβολής και να βρείτε το χώρο επί του οποίου εφαρμόζεται.

Απ. Το μητρώο είναι προφανώς συμμετρικό και τάξης 1, άρα είναι μητρώο ορθογώνιας προβολής. Το A γράφεται:

$$A = \boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

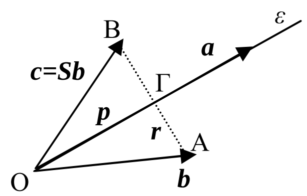
Επομένως το A είναι μητρώο προβολής επί της ευθείας S=<(1, -1, -2)$^{\mathrm{T}}$ >. Προφανώς ισχύει

$$A^n = A^2 = A$$

□

Άσκηση – Εφαρμογή 6-Π3: Μετασχηματισμός και Μητρώα Ανάκλασης

Η ανάκλαση ή συμμετρία σε ένα Κ-χώρο, όπως ο $\mathbf{R}^n$, ή ένας υποχώρος του, είναι συχνά μια πολύ επιθυμητή ιδιότητα. Συχνά ορίζεται ως προς ευθεία με δοθείσα διεύθυνση. Ο αντίστοιχος γραμμικός μετασχηματισμός $S : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ είναι *ισομορφισμός* επί του $\mathbf{R}^n$ με την ιδιότητα $S(S(\boldsymbol{v}))=\boldsymbol{v}$, δηλ. $S^2=\mathrm{I}=$*ταυτοτικός μετασχηματισμός*. Ο S μπορεί να αναπαρασταθεί με μητρώα, τα **μητρώα ανάκλασης**. Δείχνουμε πως μπορούν αυτά να προσδιορισθούν στο χώρο $\mathbf{R}^n$.



Σχήμα 1 Ανάκλαση ως προς ευθεία

Εκφράζουμε στο χώρο $\mathbf{R}^n$ το συμμετρικό ενός διανύσματος $\boldsymbol{b}$ ως προς την ευθεία (ε) που ορίζεται από ένα διάνυσμα $\boldsymbol{\alpha}$ (μονοδιάστατος χώρος). Αυτό περιγράφεται με τη βοήθεια των ορθογώνιων προβολών (*Σχήμα* 1). Έστω $\boldsymbol{p}$ η προβολή του $\boldsymbol{b}$ επί της (ε), $\mathbf{r}$=ΓΑ το διάνυσμα $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{p}$ και $\boldsymbol{c}$=ΟΒ το συμμετρικό του $\boldsymbol{b}$. Είναι γνωστό ότι η προβολή του $\boldsymbol{b}$ είναι $\boldsymbol{p}=(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}/\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{b}$. Από το τρίγωνο ΟΑΒ παίρνουμε:

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} - \overrightarrow{BA} = \boldsymbol{b} - 2\mathbf{r} = \boldsymbol{b} - 2(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{p}) = 2(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}/\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{c} = S\boldsymbol{b} = \left(2\frac{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}} - I\right)\boldsymbol{b} \qquad (1)$$

Η (1) δίνει το συμμετρικό δοθέντος διανύσματος $\boldsymbol{b}$. Το μητρώο

$$S = 2\frac{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}} - \mathrm{I} \qquad (2)$$

εκφράζει το *μετασχηματισμό συμμετρίας* ή *ανάκλασης* και λέγεται **μητρώο ανάκλασης**.

Επαληθεύουμε την (2) για τις ακραίες περιπτώσεις: αν το $\boldsymbol{b}$ είναι κάθετο στην (ε), είναι $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=0$ και η (1) δίνει $\mathrm{S}\boldsymbol{b}=-\mathrm{I}\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}$ (αναμενόμενο). Αν πάλι το $\boldsymbol{b}$ ανήκει στην ευθεία (ε), δηλ. είναι $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$ ($\lambda\in$R), τότε συμπίπτει με συμμετρικό του $\mathrm{S}\boldsymbol{b}$:

$$Sb = \left(2\frac{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}} - I\right)\lambda\boldsymbol{a} = 2\lambda\frac{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}} - \lambda\boldsymbol{a} = 2\lambda\boldsymbol{a} - \lambda\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$$

Το S είναι συμμετρικό:

$$S^{\mathrm{T}} = \left(2\frac{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}} - \mathrm{I}\right)^{\mathrm{T}} = \left(2\frac{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}}\right)^{\mathrm{T}} - \mathrm{I}^{\mathrm{T}} = 2\frac{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}} - \mathrm{I} = S$$

Επίσης είναι και ορθογώνιο. Πράγματι :

$$S^2 = \left(2\frac{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}} - \mathrm{I}\right)^2 = 4\frac{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}}{\left(\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}\right)^2} - 2\times 2\frac{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}} + \mathrm{I}^2 = 4\frac{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}} - 4\frac{\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}} + \mathrm{I}^2 = \mathrm{I}$$

Άρα διπλή εφαρμογή ανάκλασης $SS\boldsymbol{b}=S^2\boldsymbol{b}$ δίνει το αρχικό διάνυσμα $\boldsymbol{b}$:

$$SS\boldsymbol{b} = S^2\boldsymbol{b} = S\boldsymbol{c} = \mathrm{I}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}$$

Γενικά είναι $S^{2k+1}=S$ και $S^{2k}=\mathrm{I}$ (k=0,1,…), δηλ. $S^{2k+1}\boldsymbol{b}=S\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$ και $\mathrm{S}^{2k}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}$ (περιττή εφαρμογή οδηγεί στο συμμετρικό σημείο, ενώ άρτια στο αρχικό).
Ο μετασχηματισμός ανάκλασης διατηρεί τα μήκη των διανυσμάτων. Αυτό οφείλεται στη γενική αυτή ιδιότητα των ορθογωνίων μητρώων. Εδώ έχουμε:

$$\|\boldsymbol{c}\|^2 = \|S\boldsymbol{b}\|^2 = (S\boldsymbol{b})^{\mathrm{T}}S\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}SS\boldsymbol{b} = \|\boldsymbol{b}\|^2$$

Γενικά αν $Q\in\mathbf{R}^{m\times n}$ ορθογώνιο μητρώο και $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$, τότε:

$$\|Q\boldsymbol{x}\|^2 = (Q\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}(Q\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}Q^{\mathrm{T}})\,Q\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(Q^{\mathrm{T}}Q)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\mathrm{I}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \|\boldsymbol{x}\|^2 \qquad (3)$$

Αν αντί του $\boldsymbol{\alpha}$ χρησιμοποιήσουμε το μοναδιαίο διάνυσμα $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}/\|\boldsymbol{v}\|$, τότε το μητρώο ανάκλασης (2) είναι:

$$S = 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} - \mathrm{I}_n \qquad (4)$$

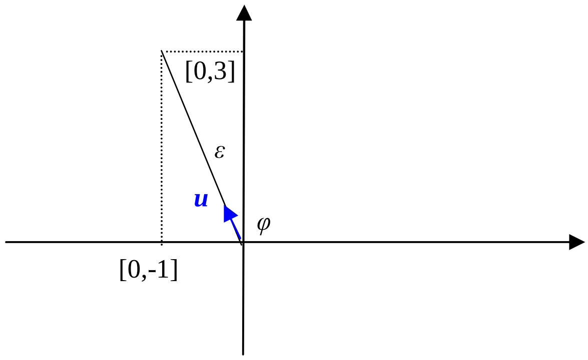
Εδώ γενικεύουμε: Η σχέση (4) δίνει τη **γενική μορφή των μητρώων ανάκλασης**, όπου $\boldsymbol{u}\in\mathrm{R}^n$ με $\|\boldsymbol{u}\|=1$ και $\mathrm{I}_n\in\mathrm{R}^n$.

◘ Παραδείγματα

Η πιο απλή ανάκλαση στον $\mathbf{R}^2$ ορίζεται ως προς τη διεύθυνση του «άξονα *x*», δηλ. αυτή του διανύσματος $\boldsymbol{e}_1=[1,0]^{\mathrm{T}}$ της τυπικής βάσης. Το αντίστοιχο μητρώο προκύπτει άμεσα:

$$S_e=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

Οι στήλες του μητρώου του μετασχηματισμού ανάκλασης περιέχουν τις εικόνες της βάσης: το $\boldsymbol{e}_1$ απεικονίζεται στο $S_e\boldsymbol{e}_1=[1,\,0]^{\mathrm{T}}$ (στον εαυτό του) και $\boldsymbol{e}_2$ στο $S_e\boldsymbol{e}_2=[0,\,-1]^{\mathrm{T}}$.



Σχήμα 2 Ανάκλαση κατά τη διεύθυνση του $\boldsymbol{v}=[-1,3]^{\mathrm{T}}$

Ο μετασχηματισμός ανάκλασης ως προς τη διεύθυνση του $\boldsymbol{v}=[-1,3]^{\mathrm{T}}$ ή του αντίστοιχου μοναδιαίου $\boldsymbol{u}$:

$$\boldsymbol{u}=\frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}=\frac{1}{\sqrt{1+3^2}}\begin{bmatrix}-1\\ 3\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix}-1\\ 3\end{bmatrix}$$

έχει αντίστοιχο μητρώο (συμμετρικό και ορθογώνιο):

$$S_v=2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}-I=\begin{bmatrix}-0.8 & -0.6\\ -0.6 & 0.8\end{bmatrix}$$

Επί πλέον είναι:

$$S_v^2=\begin{bmatrix}-0.8 & -0.6\\ -0.6 & 0.8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-0.8 & -0.6\\ -0.6 & 0.8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

Αν λάβουμε τώρα το διάνυσμα $\boldsymbol{x}=[1,\,2]^{\mathrm{T}}$ του $\mathbf{R}^2$, αυτό «ανακλάται» ως προς την ευθεία με διεύθυνση $\boldsymbol{v}$ (ή ως προς το μονοδιάστατο χώρο $<\boldsymbol{v}>$) ως εξής:

$$S_v\boldsymbol{x}=(2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}-I)\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}-0.8 & -0.6\\ -0.6 & 0.8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}$$

Άσκηση 6-Π4

Δίνονται τα διανύσματα $\boldsymbol{a}=[1;-2;1]$, $\boldsymbol{b}=[1;0;1]$.

α) Να βρείτε μητρώο *P* τέτοιο ώστε αν $\boldsymbol{x}$ είναι οποιαδήποτε διάνυσμα στον $\mathbf{R}^3$, το $P\boldsymbol{x}$ να είναι η ορθογώνια προβολή του $\boldsymbol{x}$ στον υπόχωρο που παράγεται από το διάνυσμα [1,2,-1].

β) Αν θέσουμε $\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{b}$ όπου τα $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, *P* είναι όπως παραπάνω, να υπολογίσετε το $\boldsymbol{x}$.

γ) Να υπολογίσετε το συνημίτονο της γωνίας μεταξύ των διανυσμάτων $\boldsymbol{b}$-$P\boldsymbol{b}$ και $\boldsymbol{a}$ και να εξηγήσετε το αποτέλεσμα γεωμετρικά.

Απαντήσεις

α) Είναι $P = aa^{T} / (a^{T} a)$, επομένως : $P = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

β) $\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{b} = 1/3\ [1,-2,1]$

γ) Το $P\boldsymbol{b}$ είναι η ορθογώνια προβολή του $\boldsymbol{b}$ επί του $\boldsymbol{a}$ επομένως αν το αφαιρέσουμε από το $\boldsymbol{b}$ αναμένουμε ότι το διάνυσμα που προκύπτει θα είναι κάθετο στο $\boldsymbol{a}$ και επομένως το συνημίτονο θα είναι 0. Επιβεβαιώνουμε.

Άσκηση 6-Π5

Δίνονται τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1=(1,2,1,2)^{T}$ και $\boldsymbol{v}_2=(1,-1,0,1)^{T}$ και θεωρούμε τον υποχώρο $V=<\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2>$. Να βρεθούν οι ορθογώνιες προβολές των διανυσμάτων $\boldsymbol{\beta}=(2,3,4,1)^{T}$ $\boldsymbol{\gamma}=(1,11,4,5)^{T}$ και $\boldsymbol{\delta}=(-6,-3,6,3)^{T}$ επί του V.

Απαντήσεις

Ο χώρος V είναι ο χώρος στηλών C(A) του μητρώου A:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Συμβολίζουμε με $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, $\boldsymbol{p}_3$ τις τρεις προβολές.

(α) Η προβολή $\boldsymbol{p}_1$ του $\boldsymbol{\beta}$ επί του V είναι $\boldsymbol{p}_1=A\boldsymbol{y}$, όπου $\boldsymbol{y}$ η λύση του συστήματος $A^{T}A\boldsymbol{y}_1=A^{T}\boldsymbol{\alpha}$. Συνεπώς λαμβάνουμε:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 14 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow y = \left[\ 42/29,\ \ -14/29\right]^{T}$$

Και τελικά: $\boldsymbol{p}_1=A\boldsymbol{y} = [0.9655, 3.3793, 1.4483, 2.4138]^{T}$.

(β) Για το $\boldsymbol{\gamma}=(1,11,4,5)^{T}$ παρατηρούμε ότι:

$$[A\,b]=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 11 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Επομένως $\boldsymbol{\gamma}\in$C(A)=V, οπότε συνάγουμε άμεσα ότι $\boldsymbol{p}_2=\boldsymbol{\gamma}$ (η προβολή συμπίπτει με το $\boldsymbol{\gamma}$). Φυσικά θα καταλήγαμε στο ίδιο αποτέλεσμα αν εφαρμόζαμε τα συνήθη υπολογισμό όπως παραπάνω.

(γ) Για το $\boldsymbol{\delta}=(-6, -3,6,3)^{T}$, παρατηρούμε ότι $A^{T}\boldsymbol{\delta}=0$, άρα $\boldsymbol{\delta}\in N(A^{T})=C(A)^{\perp}=V^{\perp}$, δηλ. το $\boldsymbol{\delta}$ είναι κάθετο στο V. Επομένως θα πρέπει $\boldsymbol{p}_3=0$ (μπορούμε να επαληθεύσουμε λύνοντας το σύστημα).

Άσκηση 6-Π6

Θεωρούμε τον υποχώρο V που παράγεται από τα διανύσματα $\boldsymbol{v}_1=(1,2,1)^{T}$ και $\boldsymbol{v}_2=(1,-1,0)^{T}$.

α) Να βρεθεί το ορθογώνιο συμπλήρωμα $V^{\perp}$ του V (να δοθούν διάσταση και βάση).

β) Να βρεθεί μια ορθοκανονική βάση B του V.

γ) Να επεκταθεί η παραπάνω βάση B σε μια ορθοκανονική βάση B' του $\mathbf{R}^3$.

δ) Θεωρούμε το διάνυσμα $\boldsymbol{v}=(1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$. (i) Να βρεθεί η προβολή $\boldsymbol{p}_1$ του $\boldsymbol{v}$ στο $V^{\perp}$. (ii) Να βρεθεί η προβολή p_2 του v στο V. (iii) Πως μπορεί τώρα να εκφρασθεί το v;

Απαντήσεις

α) Προφανώς είναι $\dim(V)+\dim(V^{\perp})=3 \Rightarrow \dim(V^{\perp})=3\text{-}2=1$. Το $V^{\perp}$ είναι η ευθεία που είναι ορθογώνια στον V και που προσδιορίζεται από τον αριστερό μηδενοχώρο $\mathrm{N}(A^{\mathrm{T}})$ του μητρώου $A=[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]$:

$$A^{\mathrm{T}}x=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=0 \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & -3 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=0$$

Θέτοντας 1 την ελεύθερη μεταβλητή x_3, παίρνουμε:

$-3x_2-1=0 \Rightarrow x_2=-1/3$ και
$x_1+2x_2+1=0 \Rightarrow x_1=2/3-1=-1/3$,

οπότε $V^{\perp}=\mathrm{N}(C)=\{c(-1/3, -1/3, 1)^{\mathrm{T}} \,/\, c\in\mathbf{R}\}$

β) Μια ορθοκανονική βάση του V, λαμβάνεται εφαρμόζοντας τον αλγόριθμο *Gram-Schmidt*:

$\mathbf{u}_1=\mathbf{v}_1=(1, 2, 1)^{\mathrm{T}}$

$$\mathbf{u}_2=\mathbf{v}_2-\frac{\mathbf{v}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1=(1,-1,0)^{\mathrm{T}}-\frac{(1,-1,0)(1,2,1)^{\mathrm{T}}}{1+4+1}(1,2,1)^{\mathrm{T}}=(1,-1,0)^{\mathrm{T}}+\frac{1}{6}(1,2,1)^{\mathrm{T}}=\frac{1}{6}(7,-4,1)^{\mathrm{T}}$$

Κανονικοποιώντας, βρίσκουμε την ορθοκανονική βάση $\{\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2\}$:

$$\mathbf{q}_1=\frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^{\mathrm{T}},$$

$$\mathbf{q}_2=\frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|}=\frac{1/6\,(7,-4,1)^T}{1/6\sqrt{49+16+1}}=\frac{1}{\sqrt{66}}(7,-4,1)^{\mathrm{T}}$$

γ) Προφανώς τα διανύσματα $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$ και $\boldsymbol{\alpha}=(-1/3, -1/3, 1)^{\mathrm{T}}$ είναι ορθογώνια. Άρα, για να ληφθεί μια ορθοκανονική βάση B' του $\mathbf{R}^3$, αρκεί μόνον να κανονικοποιήσουμε το $\boldsymbol{\alpha}$:

$$\mathbf{q}_3=\frac{a}{\|a\|}=\frac{1}{\sqrt{1/9+1/9+1}}(-1/3,-1/3,1)^T=\frac{3}{\sqrt{11}}(-1/3,-1/3,1)^T$$

Επομένως $\mathrm{B}'=\{\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3\}$.

δ(i): Το $V^{\perp}$ είναι η ευθεία που ορίζεται από το διάνυσμα $\boldsymbol{\alpha}$. Άρα η προβολή $\boldsymbol{p}_1$ του $\boldsymbol{v}$ στο $V^{\perp}$ δίνεται:

$$p_1=\frac{a^{\mathrm{T}}v}{a^{\mathrm{T}}a}a=\frac{(-1/3,-1/3,1)(1,1,1)^{\mathrm{T}}}{11/9}(-1/3,-1/3,1)^{\mathrm{T}}=\frac{3}{11}(-1/3,-1/3,1)^{\mathrm{T}}$$

δ(ii): Είναι $V=\mathrm{C}(A)$, όπου A είναι το μητρώο:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

Η προβολή $\boldsymbol{p}_2$ του $\boldsymbol{v}$ επί του υποχώρου V είναι $\boldsymbol{p}_2=A\boldsymbol{y}$, όπου $\boldsymbol{y}$ η λύση του συστήματος $A^TA\boldsymbol{y}=A^T\boldsymbol{v}$, δηλαδή του:

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}y=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 1\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix}6 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}y=\begin{bmatrix}4\\ 0\end{bmatrix}\Rightarrow y=\left[8/11,\ 4/11\right]^{\mathrm{T}}=\frac{4}{11}\left[2,\ 1\right]^{\mathrm{T}}$$

Συνεπώς $\boldsymbol{p}_2=A\boldsymbol{y}=(4/11)\ [3, 3, 2]^{\mathrm{T}}$.

2ος τρόπος: Με χρήση ορθοκανονικής βάσης (*προτεινόμενος*).
Θεωρούμε την ορθοκανονική βάση $Q=[\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2]$ του V που βρέθηκε στο ερώτημα (β). Το μητρώο προβολής P επί του V είναι $P = QQ^{\mathrm{T}}$ και η προβολή $\boldsymbol{p}_2$ του $\boldsymbol{v}$ θα δίνεται:

$$\boldsymbol{p}_2 = \mathrm{QQ}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{q}_1(\boldsymbol{q}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}) + \boldsymbol{q}_2(\boldsymbol{q}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}) = 4/11\ [3, 3, 2]^{\mathrm{T}}$$

δ(iii): Προφανώς θα είναι $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2$. Επαληθεύουμε:

$$\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2=\frac{3}{11}(-1/3,-1/3,1)^{\mathrm{T}}+\frac{4}{11}\left(3,\ 3,\ 2\right)^{\mathrm{T}}=\left(1,1,1\right)^{\mathrm{T}}$$

Άσκηση 6-Π7

Δίνονται στον χώρο $\mathbf{R}^3$ το διάνυσμα $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,0)^{\mathrm{T}}$ και η ευθεία (E) που ορίζεται από το $\boldsymbol{u}=(1,2,1)^{\mathrm{T}}$. Θεωρούμε τώρα επίπεδο V ορθογώνιο στο $\boldsymbol{u}$.

α) Να υπολογισθεί η ορθογώνια προβολή του $\boldsymbol{\alpha}$ *επί της* (E).

β) Από ποια εξίσωση ορίζεται το V; Προσδιορίστε μια ορθοκανονική βάση B για το V.

γ) Με βάση την Β, να υπολογισθεί η ορθογώνια προβολή $P\boldsymbol{u}$ του $\boldsymbol{u}$ επί του V.

δ) Πώς εκφράζεται τώρα το $\boldsymbol{u}$ βάσει των προβολών των (*α*) *και* (*γ*);

Απαντήσεις

(α) Αν $\boldsymbol{p}$ προβολή του $\boldsymbol{\alpha}$ επί της ευθείας (E) και P το μητρώο προβολής:

$$p=P\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}/(\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}))\boldsymbol{\alpha}=$$
$$=1/6\times(1,2,1)^{\mathrm{T}}(1,2,1)(1,1,0)^{\mathrm{T}}=1/6(1,2,1)^{\mathrm{T}}\times 3=1/2\times(1,2,1)^{\mathrm{T}}=$$
$$=\mathbf{(0.5,\ 1,\ 0.5)^{T}}$$

(β) Είναι $A=[1,\ 2,\ 1]^{\mathrm{T}}$ και $V = <\boldsymbol{\alpha}>^{\perp}$, δηλ. το V ορίζεται από το μηδενοχώρο του A^{T} (αριστερός μηδενοχώρος $V=N(A^{\mathrm{T}})$):

$$[1,\ 2,\ 1]\ [x, y, z]^{\mathrm{T}}=0 \Rightarrow x+2y+z=0$$

Προφανώς είναι $\dim(V)=2$. Βρίσκουμε τώρα *μία οποιαδήποτε βάση* S του V:

για $y=1$, $z=0 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow \boldsymbol{s}_1=[-2,1,0]^{\mathrm{T}}$ και
για $y=0$, $z=1 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow \boldsymbol{s}_2=[-1,0,1]^{\mathrm{T}}$

Επομένως μία βάση του V είναι η $S=\{[-2,\ 1,\ 0]^{\mathrm{T}},\ [-1,\ 0,\ 1]^{\mathrm{T}}\}$. Από αυτήν μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε μία ορθοκανονική βάση B. Βρίσκουμε πρώτα δύο ορθογώνια διανύσματα:

$\boldsymbol{u}_1=\boldsymbol{s}_1=[-2,\ 1,\ 0]^{\mathrm{T}}$
$\boldsymbol{u}_2=\boldsymbol{s}_2-(\boldsymbol{s}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_1/\boldsymbol{u}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_1)\boldsymbol{u}_1=\ldots=1/5\ [-1,\ -2,\ 5]^{\mathrm{T}}$

και στη συνέχεια κανονικοποιούμε: $\boldsymbol{q}_1=\boldsymbol{u}_1/\|\boldsymbol{u}_1\|$, $\boldsymbol{q}_2=\boldsymbol{u}_1/\|\boldsymbol{u}_1\|$. Τα μέτρα είναι $\|\boldsymbol{u}_1\|=\sqrt{5}$ και $\|\boldsymbol{u}_2\|=\sqrt{30}/5$.
Συνεπώς η ορθοκανονική βάση είναι η $B=\{\ \boldsymbol{q}_1,\ \boldsymbol{q}_2\ \}$, με:

$\boldsymbol{q}_1=\boldsymbol{u}_1/\|\boldsymbol{u}_1\|=\mathbf{1/\sqrt{5}\ [-2,\ 1,\ 0]^{T}}$
$\boldsymbol{q}_2=\boldsymbol{u}_2/\|\boldsymbol{u}_2\|=\mathbf{1/\sqrt{30}\ [-1,\ -2,\ 5]^{T}}$

και το μητρώο της είναι $Q=[\boldsymbol{q}_1,\ \boldsymbol{q}_2]$

(γ) Το $\boldsymbol{u}$ είναι προφανώς κάθετο στο V, επομένως: $P\boldsymbol{u}=Q\cdot Q^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{u}=0$

(δ) Προφανώς το $\boldsymbol{u}$ είναι *συγγραμμικό* με την προβολή $P\boldsymbol{a}$: $\boldsymbol{u}=[1,\ 2,\ 1]^{\mathrm{T}}=2P\boldsymbol{\alpha}+0=2P\boldsymbol{\alpha}$

6.2 Ελάχιστα Τετράγωνα

Άσκηση 6-ET1

Έστω ότι πειραματικές μετρήσεις έδωσαν τα ακόλουθα ζεύγη τιμών $(x_i, y_i=f(x_i))$, $i=1,2,\ldots,5$:

(-1, 4), (-0, 8), (1, 10), (2, 12), (3, 16)

Επιθυμούμε να προσεγγίσουμε τα ληφθέντα σημεία – δηλ. την άγνωστη πραγματική συνάρτηση f - με ένα πολυώνυμο 2[ου] βαθμού: $y=p_2(x)=c_1+c_2x+c_3x^2$.

α) Ποιο είναι το αρχικό σύστημα που θα έπρεπε να λυθεί για τον υπολογισμό της καμπύλης; Δώστε το υπό τη μορφή μητρώων. Δέχεται αυτό λύση και γιατί?

β) Για τον υπολογισμό των c_i εφαρμόζουμε τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων. Να δώσετε αναλυτικά τη συνάρτηση που πρέπει να ελαχιστοποιηθεί.

γ) Κατόπιν του (β), ποιο σύστημα πρέπει να λυθεί για τον υπολογισμό των c_i με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων? Γράψτε υπό τη μορφή μητρώων.

δ) Υπολογίστε μεθοδικά τα c_i.

Απαντήσεις

α) Αντικαθιστώντας διαδοχικά στην $y=c_1+c_2x+c_3x^2$ τα δοθέντα ζεύγη τιμών (x_i, y_i), λαμβάνουμε το προς επίλυση σύστημα:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4\\ 1 & 3 & 9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\\ c_3\end{bmatrix}=b=\begin{bmatrix}4\\ 8\\ 10\\ 12\\ 16\end{bmatrix} \tag{1}$$

Προφανώς $m=5>n=3$. Εκτελούμε απαλοιφή:

$$[A\,|\,b]=\left[\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 1 & 4\\ 1 & 0 & 0 & 8\\ 1 & 1 & 1 & 10\\ 1 & 2 & 4 & 12\\ 1 & 3 & 9 & 16\end{array}\right]\rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

Παρατηρούμε ότι rank(A)=3≠rank([$A\,|\,\boldsymbol{b}$])=4, δηλ. το σύστημα είναι αδύνατο.

β) Η μέθοδος ελ. τετρ. απαιτεί ελαχιστοποίηση του μέτρου του *σφάλματος* $\boldsymbol{e}$ που είναι συνάρτηση των c_1, c_2, c_3: $\|e\|^2=\|Ac-b\|^2$**.** Να υπενθυμίσουμε ότι το **e** είναι η συνιστώσα του $\boldsymbol{b}$ στον αριστερό μηδενοχώρο N(A^T), ενώ είναι κάθετο στο χώρο στηλών C(A). Ως εκ τούτου εκφράζει την ελάχιστη «απόσταση» του $\boldsymbol{b}$ από το C(A). Επίσης, ότι η λύση ελαχίστων τετραγώνων $\boldsymbol{c}$ προκύπτει από την προβολή του $\boldsymbol{b}$ στο χώρο C(A). [*]

Η ποσότητα E($\boldsymbol{c}$) που πρέπει να ελαχιστοποιηθεί εδώ είναι η πραγματική συνάρτηση 3 μεταβλητών c_1, c_2, c_3:

$$\begin{aligned}E(c)&=\|e\|^2=\|Ac-b\|^2=\sum_{i=1}^{4}\|e_i\|^2=\\ &=\left(c_1-c_2+c_3-4\right)^2+\left(c_1-8\right)^2+\left(c_1+c_2+c_3-10\right)^2+\left(c_1+2c_2+4c_3-12\right)^2+\left(c_1+3c_2+9c_3-16\right)^2\end{aligned} \tag{2}$$

γ) Η συνάρτηση E($\boldsymbol{c}$) της (2) ελαχιστοποιείται όταν: [*]

$$\frac{\partial E(c)}{\partial c_i}=0,\ i=1,2,3. \tag{3}$$

Οι εξισώσεις (3) αποτελούν σύστημα 3×3 ως προς $\boldsymbol{c}$, το οποίο όπως γνωρίζουμε μετά τις παραγωγίσεις ανάγεται στο σύστημα *κανονικών εξισώσεων*: [*]

$$A^T A\boldsymbol{c}=A^T\boldsymbol{b} \tag{4}$$

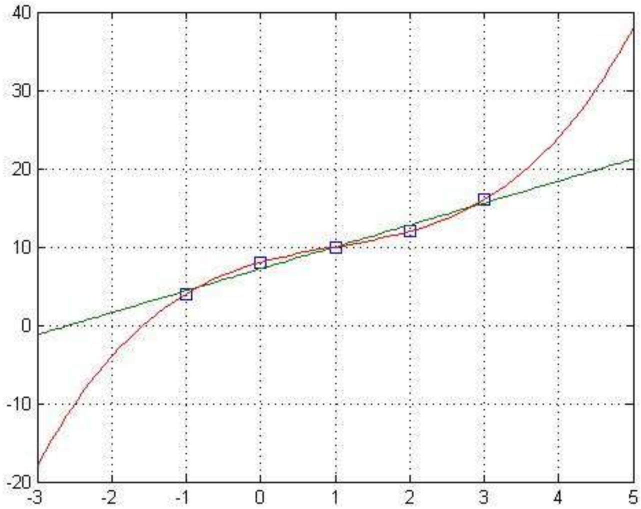
Το (4) είναι το σύστημα που πρέπει να λυθεί. Υπολογίζουμε:

$$A^T A=\begin{bmatrix}5 & 5 & 15\\ 5 & 15 & 35\\ 15 & 35 & 99\end{bmatrix},\quad A^T b=\begin{bmatrix}50\\ 78\\ 206\end{bmatrix}$$

δ) Λύνουμε το σύστημα (4) με απαλοιφή Gauss:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}5 & 5 & 15 & 50\\ 5 & 15 & 35 & 78\\ 15 & 35 & 99 & 206\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}5 & 5 & 15 & 50\\ 0 & 10 & 20 & 28\\ 0 & 20 & 54 & 56\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|c}5 & 5 & 15 & 50\\ 0 & 10 & 20 & 28\\ 0 & 0 & 14 & 0\end{array}\right]\Rightarrow\begin{cases}c_3=0\\ c_2=2.8\\ c_1=7.2\end{cases}$$

Επομένως το ζητούμενο πολυώνυμο είναι $p_1(x)=7.2+2.8x$. Βρήκαμε εδώ $c_3=0$, δηλ. για τα δεδομένα που δόθηκαν η f προσεγγίζεται από *ευθεία ελαχίστων τετραγώνων* (βλ. *Σχήμα* 1).



Σχήμα 1: Γραφήματα Πολυωνύμων Ελαχίστων Τετραγώνων 1ου και 3ου βαθμού
Εντολές Matlab για τη σχεδίαση:

```
X =[-1,0,1,2,3]          %αρχικά σημεία
Y =[4,8,10,12,16]
x = -3:0.1:5; y=2.8*x+7.2;
z=8+(8/3)*x-x.^2+(1/3)*x.^3;
plot(X,Y,'s', x,y,x,z);grid
```

Άσκηση 6-ΕΤ2 [Επέκταση της Άσκησης 6-ΕΤ1]

Αν αναζητήσουμε για τα ίδια δεδομένα της Άσκησης 6 το πολυώνυμο ελαχίστων τετραγώνων 3ου βαθμού, δηλ. την $y=c_1+c_2x+c_3x^2+c_4x^3$, τότε το A αλλάζει σε A_1 με μια επιπλέον στήλη $\boldsymbol{d}=(-1,0,1,8,27)^T$:

$$A_1=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 4 & 8\\ 1 & 3 & 9 & 27\end{bmatrix}\acute{\eta}: A_1=\begin{bmatrix}A & d\end{bmatrix}$$

ενώ τα A_1^TA, $A_1^T\boldsymbol{b}$ υπολογίζονται κρατώντας τα προηγούμενα αποτελέσματα στα A^TA και $A^T\boldsymbol{b}$:

$$A_1^T A_1 = \begin{bmatrix} A^T \\ d^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & d \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} A^T A & A^T d \\ d^T A & d^T d \end{pmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 5 & 15 & 35 \\ 5 & 15 & 35 & 99 \\ 15 & 35 & 99 & 275 \\ \hline 35 & 99 & 275 & 795 \end{array}\right],$$

$$A_1^T b = \begin{bmatrix} A^T \\ d^T \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} A^T b \\ d^T b \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} 50 \\ 78 \\ 206 \\ \hline 795 \end{array}\right] \tag{5}$$

Επιλύουμε το νέο σύστημα $A^T A\boldsymbol{c}=A^T\boldsymbol{b}$ και τελικά υπολογίζουμε: $\boldsymbol{c}=(8, 8/3, -1, 1/3)^T$, δηλ. το ζητούμενο πολυώνυμο ελαχίστων τετραγώνων είναι $p_3(x)=8+(8/3)x-x^2+(1/3)x^3$. Στο *Σχήμα* 1 δίνεται γράφημα με τα δοθέντα σημεία και τις δύο καμπύλες ελαχίστων τετραγώνων που υπολογίσθηκαν.

▸ **Παρατήρηση:** Από τις (5) είναι φανερό, ότι αν $B_k\boldsymbol{c}=\boldsymbol{\beta}_k$, είναι το κανονικό σύστημα που αντιστοιχεί στο προσεγγίζον πολυώνυμο ελαχ. τετρ. βαθμού k (με $B_k=A_k^T A_k$ και $B_k\in R^{(k+1)\times(k+1)}$), τότε είναι $B_k(1:k, 1:k)=B_{k-1}$ και $\boldsymbol{\beta}_k(1:k)= \boldsymbol{\beta}_{k-1}$.

Άσκηση 6-ΕΤ3

Σε μια πραγματική συνάρτηση $y=f(x)$ έγιναν μετρήσεις από τις οποίες προέκυψαν οι τιμές f_i που φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

i	1	2	3	4
t_i	-2	-1	0	2
f_i	1	1.2	1.4	2

Υποθέτουμε ότι γνωρίζουμε ότι τα παραπάνω σημεία προσεγγίζουν την καμπύλη $f(t)=c_1+c_2t^2+c_3t^4$. Για την εύρεση των c_1, c_2, c_3 εφαρμόζουμε τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων.

α) Να δοθεί και να εκφρασθεί <u>αναλυτικά</u> ως προς τα πιο πάνω δεδομένα η ποσότητα που πρέπει να ελαχιστοποιηθεί.

β) Ποιες είναι οι εξισώσεις με αγνώστους τα c_1, c_2, c_3 που προκύπτουν από την ελαχιστοποίηση της παραπάνω ποσότητας;

γ) Να λυθεί το προκύπτον σύστημα με απαλοιφή Gauss και να υπολογισθούν τα c_1, c_2, c_3.

δ) Τι θα συμπεραίνατε αν βρίσκατε το c_3 πολύ κοντά στο 0;

Απαντήσεις

α) Το πρόβλημα περιγράφεται από το μη επιλύσιμο γραμμικό σύστημα $A\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}$, όπου $\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,c_3)^T$ και

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 16 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.2 \\ 1.4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Για την προσεγγιστική επίλυση με τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων, αρκεί να ελαχιστοποιηθεί η ποσότητα $E=\|r\|^2=\|A\boldsymbol{c}-\boldsymbol{b}\|^2$ που αναπαριστά το μέσο σφάλμα, όπου $\|.\|$ η ευκλείδεια νόρμα. Αναλυτικά είναι:

$$\|r\|^2 = (c_1 + 4c_2 + 16c_3 - 1)^2 + (c_1 + c_2 + c_3 - 1.2)^2 + (c_1 - 1.4)^2 + (c_1 + 4c_2 + 16c_3 - 2)^2$$

β) Από τη συνθήκη ελαχιστοποίησης, προκύπτουν 3 κανονικές εξισώσεις ως προς c_1, c_2, c_3:

$$\frac{\partial r}{\partial c_1} = 0, \frac{\partial r}{\partial c_2} = 0, \frac{\partial r}{\partial c_3} = 0$$

οι οποίες ταυτίζονται με τις εξισώσεις του συστήματος $A^T A\boldsymbol{c}=A^T\boldsymbol{b}$:

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\4&1&0&4\\16&1&0&16\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&4&16\\1&1&1\\1&0&0\\1&4&16\end{bmatrix}c=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\4&1&0&4\\16&1&0&16\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1.2\\1.4\\2\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}4&9&33\\9&33&129\\33&129&513\end{bmatrix}c=\begin{bmatrix}5.6\\13.2\\49.2\end{bmatrix}$$

γ) Λύνοντας το παραπάνω σύστημα με απαλοιφή, παίρνουμε τελικά:

$$\mathrm{c}=[1.4,\ \text{-}0.275,\ 0.075]^T$$

δ) Αν βρίσκαμε $c_3 \cong 0$, θα συμπεραίναμε ότι οι πειραματικές μετρήσεις προσεγγίζουν τη δευτεροβάθμια καμπύλη (παραβολή) $f(t)=c_1+c_2t^2$ αντί της τεταρτοβάθμιας, οπότε θα αναθεωρούσαμε την παραδοχή μας (στην πράξη βεβαίως, θα έπρεπε ο αριθμός n των μετρήσεων να ήταν μεγάλος)

Άσκηση 6-ET4

Έστω

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\\1&0\\0&1\end{pmatrix},\ c=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\\b_4\end{pmatrix}$$

α) Ποιες σχέσεις πρέπει να ισχύουν μεταξύ των b_1, b_2, b_3,b_4 για να έχει λύση το σύστημα $A\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}$;

β) Έστω ότι το σύστημα δεν έχει λύση. Για να βρούμε μία προσεγγιστική λύση θα ελαχιστοποιήσουμε την ποσότητα $\|r\|^2$ όπου (συναρτήσει των A, c, b) $r=$……. και όπου $\|.\|$ είναι το Ευκλείδειο μέτρο. Για να βρεθούν οι τιμές των c_1, c_2, με ελαχιστοποίηση της ποσότητας $\|r\|^2$, θα χρησιμοποιηθούν 2 εξισώσεις. Πώς θα βρεθούν οι εξισώσεις αυτές?

γ) Έστω ότι $\boldsymbol{b}=[2\ 3\ 4\ 5]^T$. Εφαρμόστε τη μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων και δώστε τις τιμές των c_1, και c_2,.

Απαντήσεις

α) Το σύστημα $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ είναι γενικά ασυμβίβαστο ($m>n$). Το ανάγουμε σε κλιμακωτή μορφή:

$$[\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}]=\left[\begin{array}{cc|c}1&1&b_1\\1&2&b_2\\1&0&b_3\\0&1&b_4\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc|c}1&1&b_1\\0&1&b_2-b_1\\0&-1&b_3-b_1\\0&1&b_4\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc|c}1&1&b_1\\0&1&b_2-b_1\\0&0&b_3-b_1+b_2-b_1\\0&0&b_4-b_2+b_1\end{array}\right]$$

Άρα οι ζητούμενες συνθήκες είναι:

$$b_3+b_2-2b_1=0 \text{ και } b_4-b_2+b=0$$

β) Αρκεί να ελαχιστοποιηθεί η ποσότητα: $\|r\|$, με

$$r=A\boldsymbol{c}\text{-}\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\\1&0\\0&1\end{bmatrix}\mathbf{c}-\mathbf{b}=\begin{bmatrix}c_1+c_2-b_1\\c_1+2c_2-b_2\\c_1-b_3\\c_2-b_4\end{bmatrix}$$

Το $\boldsymbol{c}$ είναι η *προσεγγιστική λύση*. Η συνθήκη ελαχιστοποίησης δίνει δύο κανονικές εξισώσεις ως προς c:

$$\frac{\partial r}{\partial c_1} = 0, \frac{\partial r}{\partial c_2} = 0$$

οι οποίες συμπίπτουν με τις εξισώσεις του συστήματος $A^T A\boldsymbol{c}=A^T \boldsymbol{b}$.

γ) Εφαρμόζοντας τη μέθοδο παίρνουμε:

$$A^T Ac = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_3 \end{bmatrix} = A^T b = \begin{bmatrix} b_1 + b_2 + b_3 \\ b_1 + 2b_2 + b_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 13 \end{bmatrix}$$

Απ' όπου λύνοντας προκύπτει η λύση: $c= (5/3, 4/3)^T$.

Άσκηση 6-ΕΤ5

Θεωρούμε ότι για την προσέγγιση του γραφήματος μιας πραγματικής συνάρτησης $y=f(x)$ γνωρίζουμε τα σημεία $(x_i, f_i(x_i))$ (i=1,…,4): (0, 1.0), (1, 1.8), (2, 2.4), (3, 3.2). Για την προσέγγιση χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση $g(t)=c_1+c_2t^2+c_3t^3$, όπου οι συντελεστές c_i προσδιορίζονται με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων.
α) Να δοθεί συναρτήσει των c_i η ποσότητα που πρέπει να ελαχιστοποιηθεί.
β) Να δοθεί το γραμμικό σύστημα που προκύπτει από την ελαχιστοποίηση.

Απαντήσεις

α) Το αρχικό (ασυμβίβαστο) σύστημα που προκύπτει από τα δεδομένα του προβλήματος είναι το $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$, με:

A=[1 0 0; 1 1 1; 1 4 8 ; 1 9 27], $\boldsymbol{b}$=[1.0, 1.8, 2.4, 3.2]^T

Η ποσότητα που πρέπει να ελαχιστοποιηθεί είναι το μέτρο $\|A\mathbf{c}-\boldsymbol{b}\|$ της *απόκλισης* του A από το $\boldsymbol{b}$. Η απόκλιση είναι συνάρτηση 3 μεταβλητών, των c_1, c_2, c_3, και δίνεται ως εξής:

$$\|A\mathbf{c}-\boldsymbol{b}\|^2 = 1 + (c_1+c_2+c_3-1.8)^2 + (c_1+4c_2+8c_3-2.4)^2 + (c_1+9c_2+27c_3-3.2)^2$$

β) Το σύστημα που προκύπτει από την ελαχιστοποίηση της παραπάνω ποσότητας $\|A\mathbf{c}-\boldsymbol{b}\|^2$ είναι το:

$$A^T A\boldsymbol{c} = A^T\boldsymbol{b},$$

Τα A^TA και $A^T\boldsymbol{b}$ είναι:

$$A^TA = \begin{bmatrix} 4 & 14 & 36 \\ 14 & 98 & 276 \\ 36 & 276 & 794 \end{bmatrix} \qquad A^T\boldsymbol{b} = [8.4, 40.2, 107.4]$$

Λύνοντας το πιο πάνω σύστημα με απαλοιφή υπολογίζουμε:

$$\mathbf{c} = (1.1287, 0.5774, -0.1166)^T$$

7 ΙΔΙΟΠΟΣΑ ΚΑΙ ΔΙΑΓΩΝΙΟΠΟΙΗΣΗ

7.1 Εισαγωγικές Έννοιες και Βασικές Ιδιότητες

Άσκηση 7.1.1

Υπολογίζουμε τα ιδιοποσά του ακόλουθου μητρώου:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 8 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

Είναι :

$$\varphi_A(\lambda)=\det(\lambda I\text{-}A)=\begin{vmatrix}\lambda\text{-}1 & 2 & 0\\ 8 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-3\end{vmatrix}=$$

$$=(\lambda\text{-}3)\ [(\lambda\text{-}1)^2\ \text{-}16]=(\lambda\text{-}3)(\lambda\text{-}1\text{-}4)(\lambda\text{-}1+4)=\text{-}(\lambda\text{-}3)(\lambda\text{-}5)(\lambda+3)$$

Οι ιδιοτιμές είναι οι ρίζες του $\varphi_A(\lambda)$ και είναι απλές: 3, 5, -3. Αφού είναι μη μηδενικές, το A είναι αντιστρέψιμο. Βρίσκουμε τώρα τα ιδιοδιανύσματα:
Για λ=3 βρίσκουμε τον αντίστοιχο ιδιοχώρο V(3)=$N(A\text{-}3I)$: λύνουμε το σύστημα $(A\text{-}3I)\boldsymbol{x}=0$ και βρίσκουμε εύκολα την ειδική λύση $\boldsymbol{v}=(0,0,1)^T$ που είναι το ιδιοδιάνυσμα για την λ=3.
Ομοίως για λ=-3 και λ=5 είναι dim(V(-3))=dim($N(A+3I)$)= dim(V(5))=dim($N(A\text{-}5I)$)=1 και παίρνουμε τις λύσεις $\boldsymbol{w}=(1,\text{-}2,1)^T$ και $\boldsymbol{u}=(1,2,1)^T$, αντίστοιχα. Άρα, καθορίσαμε για το A ένα πλήρες σύνολο ιδιοδιανυσμάτων $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$, έκαστο των οποίων αντιστοιχεί στις ιδιοτιμές 5, 3 και -3.
Το σύνολο αυτό αποτελεί βάση του χώρου $\mathbf{R}^3$. Από τις σχέσεις $A\boldsymbol{u}=5\boldsymbol{u}$, $A\boldsymbol{v}=3\boldsymbol{v}$, $A\boldsymbol{w}=\text{-}3\boldsymbol{u}$, λαμβάνουμε:

$$A\left[u,\ v,\ w\right]=\left[u,\ v,\ w\right]\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}$$

που γράφεται και:

$$AV=V\Lambda \ \text{ή}\ A=V\Lambda V^{-1}$$

□

Άσκηση 7.1.2

Έστω το μητρώο A=[3 2 1; 0 -2 0;-2 -4 0]. Από την χαρακτηριστική εξίσωση βρίσκουμε τις ιδιοτιμές του C:

$$\det(C-\lambda\mathrm{I})=\begin{vmatrix}3-\lambda & 2 & 1\\ 0 & -2-\lambda & 0\\ -2 & 4 & -\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -2-\lambda\\ -2 & 4\end{vmatrix}+(-\lambda)\begin{vmatrix}3-\lambda & 2\\ 0 & -2-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$-2(\lambda+2)+\lambda(3-\lambda)(\lambda+2)=(\lambda+2)[-2+\lambda(3-\lambda)]=$$

$$=(\lambda+2)(-\lambda^2+3\lambda-2)=(\lambda+2)(\lambda-2)(\lambda-1)=0$$

Το φάσμα είναι σ(A)={2, 1, -2}. Από τους ιδιοχώρους V(λ)=N(A-λI) βρίσκουμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα διαιρώντας με το μέτρο τους (κανονικοποίηση):

$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)^T$, $v_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, 0, 2)^T$, $v_3 = (-0.3714, 0.5571, 0.7428)^T$. □

Παρατήρηση 5.1.3 Βασικό πρόβλημα στις ιδιοτιμές είναι η ύπαρξη n γραμμικά ανεξάρτητων ιδιοδιαδιανυσμάτων για ένα μητρώο $n \times n$. Αν υπάρχουν n διακριτές ιδιοτιμές, η απάντηση όπως θα δούμε είναι καταφατική: *τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι γραμμικά ανεξάρτητα.* Αν υπάρχουν πολλαπλές ιδιοτιμές, η απάντηση εξαρτάται από τους ιδιοχώρους τους: αν για κάθε ιδιοτιμή λ_i πολλαπλότητας n_i είναι $\dim V(\lambda_i) = n_i$, δηλαδή αν γεωμετρική πολλαπλότητα(λ_i)=αλγεβρική πολλαπλότητα(λ_i), τότε μπορούν να καθορισθούν συνολικά n ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα. Διαφορετικά, υπάρχει *έλλειμμα ιδιοδιανυσμάτων*.
Πράγματι, υπάρχουν μητρώα για τα οποία δεν μπορούν να καθορισθούν n ιδιοδιανύσματα. Π.χ. ένα τέτοιο μητρώο είναι το:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Είναι

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2$$

και για $\lambda=0$ είναι $\dim(V(0)) = N(A-0I) = \dim N(A) = n - \text{rank}(A) = 2-1 = 1$. Άρα υπάρχει μόνον μια ειδική λύση, δηλ. μόνον ένα ιδιοδιάνυσμα, το $v=(1,0)^T$. Άρα αλγεβρική πολλαπλότητα(λ)=2>γεωμετρική πολλαπλότητα(λ)=1.

Βασικές Ιδιότητες Ιδιοποσών

Παρουσιάζονται πιο κάτω μερικές σημαντικές ιδιότητες των ιδιοποσών.

1. Τα μητρώα A και A^T έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.

Απόδειξη: Είναι: $\varphi(A^T) = \det(A^t - \lambda I) = \det(A^t - (\lambda I)^t) = \det(A - \lambda I)^t = \det(A - \lambda I) = \varphi(A)$.
Άρα τα A και A^T έχουν τα ίδια χαρακτηριστικά πολυώνυμα και επομένως τις ίδιες ιδιοτιμές.

1. Αν λ και v είναι ιδιοποσά ενός μητρώου $A \in K^{n\times n}$, τότε τα αντίστοιχα ιδιοποσά του μητρώου $A+cI$ ($c \in K$) είναι $\lambda+c$ και v.

Απόδειξη: Είναι $Av=\lambda v$ και $cIv=cv$ και προσθέτοντας κατά μέλη: $Av+cIv=\lambda v+cv \Rightarrow (A+cI)v=(\lambda+c)v$, δηλ. $\lambda+c$ ιδιοτιμή και v ιδιοδιάνυσμα του $(A+cI)$.

2. Αν λ και v είναι ιδιοποσά ενός μητρώου $A \in K^{n\times n}$, τότε τα αντίστοιχα ιδιοποσά του μητρώου A^k ($k \in Z^+$) είναι λ^k και v.

3. Αν λ και v είναι ιδιοποσά ενός αντιστρέψιμου μητρώου $A \in K^{n\times n}$ και $k \in Z^+$, τότε τα αντίστοιχα ιδιοποσά του μητρώου A^{-k} ($k \in Z^+$) είναι λ^{-k} και v.

4. Αν λ και v είναι ιδιοποσά ενός μητρώου $A \in K^{n\times n}$, τότε τα αντίστοιχα ιδιοποσά του μητρώου $pA+qI$, όπου p, $q \in K$, είναι $p\lambda+q$ και v.

5. Αν λ είναι ιδιοτιμή του $A \in K^{n\times n}$ και $P(x)$ ένα πολυώνυμο με πραγματικούς ή μιγαδικούς συντελεστές, τότε το $P(\lambda)$ είναι ιδιοτιμή του $P(A)$.

6. Αν στην πρόταση της ιδιότητας (5) θέσουμε $P(x)=\varphi_A(x)$, τότε προκύπτει η διατύπωση του ***Θεωρήματος Caley-Hamilton***:

«Κάθε μητρώο ικανοποιεί την χαρακτηριστική του εξίσωση: $\varphi_A(A)=0$»

Το αποτέλεσμα αυτό είναι ιδιαίτερα χρήσιμο για οικονομικό υπολογισμό δυνάμεων ενός μητρώου A, όπως και του αντιστρόφου του A^{-1}.

7. Από το Θ. *Caley-Hamilton* προκύπτουν άμεσα τα εξής χρήσιμα συμπεράσματα:

Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ένα μητρώο αντιστρέψιμο είναι ο σταθερός όρος του χαρακτηριστικού του πολυωνύμου να είναι διάφορος του 0.

Διαφορετικά:

Ένα μητρώο είναι ιδιάζον όταν και μόνο όταν ο σταθερός όρος του χαρακτηριστικού του πολυωνύμου είναι 0.

8. Οι ιδιοτιμές ενός διαγώνιου μητρώου είναι τα στοιχεία της διαγωνίου του.

Απόδειξη: Αν D=diag(d_1, …,d_n)

9. Το γινόμενο των ιδιοτιμών ενός μητρώου A ισούται με την ορίζουσά του:

$$\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n = \det(A)$$

10. Το άθροισμα των ιδιοτιμών ενός μητρώου ισούται με το *ίχνος* του, δηλ. το άθροιμα των στοιχείων της διαγωνίου:

$$\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_n = \mathrm{trace}(A)=a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn}$$

Δίνουμε συνέχεια μερικά παραδείγματα που δείχνουν τη χρήση και την εφαρμογή των παραπάνω ιδιοτήτων.

◘ Παράδειγμα 5.1.3

Αν A το μητρώο του Παρ. 5.1.1, οι ιδιοτιμές του $A+3I$ είναι οι $\lambda_1=3+3=6$, $\lambda_2=5+3=8$, $\lambda_3=-3+3=0$.

◘ Παράδειγμα 5.1.4

Έστω A το μητρώο του Παρ. 5.1.2. Το φάσμα του C^3 είναι $\sigma(C^3)=\{2^3=8,\ 1^3=1,\ 2^3=8\}$ και τα ιδιοδιανύσματα τα ίδια με αυτά του A.

◘ Παράδειγμα 5.1.5

Έστω το μητρώο D=[0 -3 -2; 0 -5 0; 1 2 3]. Η $\lambda_1=1$ είναι προφανής ιδιοτιμή (γιατί;). Από την χαρακτηριστική εξίσωση det(D-λI)=0 βρίσκουμε τις υπόλοιπες ιδιοτιμές: $\lambda_2=2$, $\lambda_3=-5$. Από τους ιδιοχώρους L(λ)=N(D-λI) υπολογίζουμε τα ιδιοδιανύσματα με κανονικοποίηση:

$$\boldsymbol{u}_1=(-0.8944,\ 0,\ 0.4472)^T,\ \boldsymbol{u}_2=(0.7071,\ 0,\ -0.7071)^T,\ \boldsymbol{u}_3=(0.4141,\ 0.8695,\ -0.2691)^T.$$

Τώρα, το φάσμα του D^{-2} είναι $\sigma(D^{-2})=\{1, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\}$. Τα ιδιοδιανύσματα παραμένουν τα ίδια.

◘ Παράδειγμα 5.1.6

Αν λ είναι ιδιοτιμή ενός όχι απαραίτητα διαγωνοποιήσιμου μητρώου A, τότε από τις ιδιότητες (1) και (2) προκύπτει ότι το $1+\lambda^8$ θα είναι ιδιοτιμή του $I+A^8$.

◘ Παράδειγμα 5.1.7

Έστω το μητρώο B=[2 1;0 4]. Το B είναι τριγωνικό και οι ιδιοτιμές είναι τα διαγώνια στοιχεία: $\lambda_1=2$, $\lambda_2=4$. Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα εξάγονται ως ειδικές λύσεις των ομογενών συστημάτων:

$$[0\ 1;0\ 2]\,\boldsymbol{v}=\mathbf{0},\ B=[-2\ 1;0\ 0]\,\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$$

αντίστοιχα. Με εφαρμογή κανονικοποίησης βρίσκουμε τελικά: $\boldsymbol{v}_1=(1, 0)^T$, $\boldsymbol{v}_2=(0.4472, 0.8944)^T$.
Υπολογίζουμε τώρα το μητρώο C=3B+4I=[10 3;0 4]. Το C έχει φάσμα $\sigma(C)=\{3^*\lambda_1+4=10,\ 3^*\lambda_2+4=16\}$. Τα ιδιοδιανύσματα είναι τα ίδια.

◘ Παράδειγμα 5.1.8

Έστω το μητρώο B=[2 1;0 4], με προφανείς ιδιοτιμές $\lambda_1=2$ και $\lambda_2=4$. Αν θεωρήσουμε το πολυώνυμο $P(\lambda)=2\lambda^3-2\lambda^2+4\lambda-3$, τότε το $P(B)=2B^3-2B^2+4B-3I$, θα έχει ιδιοτιμές:

$$P(\lambda_1)=P(2)=13 \text{ και } P(\lambda_2)=P(4)=109)$$

◘ Παράδειγμα 5.1.9

Έστω το μητρώο A=[1 2 0; 8 1 0; 0 0 3]. Είναι:

$$\varphi_A(\lambda)=\det(\lambda I\text{-}A)=\begin{vmatrix}\lambda\text{-}1 & 2 & 0\\ 8 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-3\end{vmatrix}=$$

$$= (\lambda\text{-}3)\ [(\lambda\text{-}1)^2\ \text{-}16] = (\lambda\text{-}3)(\lambda\text{-}1\text{-}4)(\lambda\text{-}1+4) = \text{-}(\lambda\text{-}3)(\lambda\text{-}5)(\lambda+3) =$$

$$= \text{-}(\lambda^2\text{-}9)(\lambda\text{-}5)=\text{-}\lambda^3+5\lambda^2+9\lambda\text{-}45 = 0$$

Τότε το A ικανοποιεί τη χαρακτηριστική εξίσωση $P(\lambda)=\varphi_A(\lambda)=0$, δηλ. ισχύει

$\varphi_A(A)$ = $-A^3+5A^2+9A-45$I = 0

Παρατηρούμε ότι υπάρχει ο σταθερός όρος -45I του πολυωνύμου, γεγονός που δείχνει την αντιστρεψιμότητα του A (αυτό συμφωνεί βέβαια και με το ό,τι οι ιδιοτιμές που βρήκαμε είναι μη μηδενικές). Από την παραπάνω εξίσωση μπορούμε να υπολογίσουμε μια δύναμη ή και τον αντίστροφο του A, μειώνοντας κατά 1 τις δυνάμεις των πολυωνυμικών όρων, άρα και τον αριθμό των απαιτούμενων πράξεων. Έτσι για τον υπολογισμό του A^3 έχουμε

$$-A^3+5A^2+9A-45\mathrm{I} = 0 \Rightarrow A^3 = 5A^2 + 9A - 45\mathrm{I}$$

Για τον υπολογισμό του A^5:

$$A^2(-A^3+5A^2+9A-45\mathrm{I}) = -A^5+5A^4+9A^3-45A^2 = 0 \Rightarrow$$
$$A^5 = 5A^4 + 9A^3 - 45\,A^2$$

Τέλος, για τον υπολογισμό του αντιστρόφου A^{-1} πολλαπλασιάζουμε επί A^{-1}:

$$-A^{-1}A^3+5\,A^{-1}A^2+9\,A^{-1}A-45\,A^{-1}\mathrm{I} = -A^2+5A+9\mathrm{I} -45\,A^{-1} = 0 \Rightarrow$$

$$A^{-1} = (1/45)\,(\,A^2 - 5A\,\, - 9\mathrm{I}) \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \frac{1}{45}\left(\begin{bmatrix}17 & 4 & 0\\16 & 17 & 0\\0 & 0 & 9\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}5 & 10 & 0\\40 & 5 & 0\\0 & 0 & 15\end{bmatrix} - 9\times\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{45}\begin{bmatrix}-3 & 6 & 0\\24 & -3 & 0\\0 & 0 & 15\end{bmatrix}$$

□

◘ Παράδειγμα 5.1.10 – Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα στο σώμα C.
Να διαγωνιοποιηθεί ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}$$

εφ' όσον αυτό είναι δυνατό. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα και να διατυπωθεί ο μετασχηματισμός διαγωνιοποίησης. Να βρεθούν οι ιδιοχώροι του A και οι διαστάσεις τους.

Απ. Υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του A.

$$(A-\lambda\mathrm{I})\boldsymbol{x} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix}1-\lambda & -1\\1 & 1-\lambda\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = 0$$

Πρέπει

$$\varphi_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix}1-\lambda & -1\\1 & 1-\lambda\end{pmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)^2+1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1\pm i$$

Για λ=1+i είναι:

$$(A-\lambda\mathrm{I})\,\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}1-1-i & -1\\1 & 1-1-i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-i & -1\\1 & -i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

απ' όπου εξάγουμε το ιδιοδιάνυσμα $\boldsymbol{v}_1 = (i,\ 1)^{\mathrm{T}}$. Για λ=1-i είναι:

$$(A-\lambda\mathrm{I})\,\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix}i & -1\\1 & i\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \mathbf{0} \Rightarrow ix_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = ix_1$$

Το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα είναι $\boldsymbol{v}_2 = (1,\ i)^T$. Το μητρώο των ιδιοδιανυσμάτων είναι:

$$D=\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

$$D^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & -1 \\ -1 & i \end{pmatrix}$$

Άρα

$$D^{-1}AD=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} i & -1 \\ -1 & i \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}=diag\left(\lambda_1,\lambda_2\right)$$

Οι ιδιοχώροι δίνονται

$V(1 + i) = \langle (i, 1)^T \rangle, V(1 - i) = \langle (1, i)^T \rangle$

Πρόταση

Αν A, $B \in K^{n\times n}$, τότε τα μητρώα AB και BA έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.

Απόδειξη Έστω $\varphi_{AB}(\lambda)$ και $\varphi_{BA}(\lambda)$ τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα του AB και του BA αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι το A είναι αντιστρέψιμο, οπότε υπάρχει ο A^{-1} με $AA^{-1} = AA^{-1} = I_n$. Έχουμε λοιπόν :

$$\begin{aligned}\varphi_{AB}(\lambda) &= \det(AB - \lambda I_n)\\ &= \det(AB - \lambda AA^{-1})\\ &= \det(A(B - \lambda A^{-1}))\\ &= \det(A)\det(B - \lambda A^{-1}))\\ &= \det(B - \lambda A^{-1})\det(A)\\ &= \det((B - \lambda A^{-1})A) = \det(BA - \lambda A^{-1}A) = \det(BA - \lambda I_n)\\ &= \varphi_{AB}(\lambda)\end{aligned}$$

Αφού τα μητρώα AB και BA έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο, θα έχουν και τις ίδιες ιδιοτιμές. ■

Ομοιότητα

Ο μετασχηματισμός $\Lambda = VAV^{-1}$ είναι μετασχηματισμός ομοιότητας. Συγκεκριμένα ισχύει:

Πρόταση

(i) Όμοια μητρώα έχουν το ίδιο χαρακτηριστικό πολυώνυμο (και άρα τις ίδιες ιδιοτιμές).
(ii) Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα δεν είναι ίσα. Αν M και N όμοια με $N=PMP^{-1}$, όπου P αντιστρέψιμο, τότε αν $\boldsymbol{v}$ ιδιοδιάνυσμα του M που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ, τότε το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα του N είναι $P\mathbf{v}$.
Απόδειξη.
(i) Αν M, $N \in \mathbf{R}^n$ είναι όμοια, τότε υπάρχει αντιστρέψιμο μητρώο P τέτοιο ώστε $N=PMP^{-1}$. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του N είναι:

$$\begin{aligned}\varphi_N(\lambda) &= \det(N-\lambda I)\\ &= \det(PMP^{-1}-\lambda I)\\ &= \det(P(M-\lambda I)P^{-1})\\ &= \det(P)\det(M-\lambda I)\det(P^{-1})\\ &= \det(P)(\det(P))^{-1}\det(M-\lambda I)\\ &= \varphi_M(\lambda)\end{aligned}$$

(ii) Η $N=PMP^{-1}$ γράφεται $NP = PM$, η οποία δίνει:

$$M\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}$$

$$\Rightarrow PM\boldsymbol{v} = N(P\boldsymbol{v}) = \lambda(P\mathbf{v})$$

δηλ. το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα του N για την λ είναι $P\mathbf{v}$.

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός γ.μ. επί του V, είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του μητρώου του ως προς μια τυχαία βάση.

Εφαρμογή

Τα μητρώα *AB* και *BA* έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.

Απόδειξη.

(i) Υποθέτουμε ότι το *A* είναι αντιστρέψιμο. Τότε είναι $AB \approx BA$ αφού $AB = A(BA)A^{-1}$. Άρα τα *AB* και *BA* έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές.

(ii) Αν τα A, B είναι τυχαία, τότε

Παράδειγμα

Στην $??$ συζητήθηκε το μητρώο ανάκλασης στον $\mathbf{R}^2$ ως προς μια ευθεία οριζόμενη από ένα διάνυσμα. Στην $??$ παρουσιάσθηκε η ισοδύναμη μορφή του ως μητρώο του αντίστοιχου γ.μ. στον $\mathbf{R}^2$:

S = $2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T$-I, όπου $\boldsymbol{u}$ μοναδιαίο, ή $S = \begin{bmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{bmatrix}$

Τα μητρώα ανάκλασης *S* ως προς ευθεία είναι όλα τα συμμετρικά και ορθογώνια μητρώα. Οι στήλες του S αποτελούν ορθοκανονική βάση του $\mathbf{R}^2$. Στην δεύτερη μορφή αυτό φαίνεται πιο άμεσα. Είναι

$[\cos\varphi, \sin\varphi]^T[-\sin\varphi, \cos\varphi]=-\cos\varphi\sin\varphi-\sin\varphi\cos\varphi=0$, και
$\|S(1:2,1)\|^2 = \cos^2\varphi+\sin^2\varphi = \|S(1:2,1)\|^2=(-\sin\varphi)^2+ \cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1$

Υπολογίζουμε εδώ τα ιδιοποσά του S. Σύμφωνα με το φασματικό θεώρημα το S διαγωνοποιείται και δέχεται ορθοκανονική βάση ιδιοδιανυσμάτων. Από την χαρακτηριστική εξίσωση βρίσκουμε γρήγορα τις ιδιοτιμές:

$$\det(S-\lambda \mathrm{I}) = \begin{vmatrix} \cos 2\varphi - \lambda & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi - \lambda \end{vmatrix} = (\cos 2\varphi - \lambda)(-\cos 2\varphi - \lambda) - \sin^2 2\varphi =$$
$$= (\cos 2\varphi - \lambda)(-\cos 2\varphi - \lambda) - \sin^2 2\varphi = 0$$
$$= -\cos^2 2\varphi + \lambda^2 - \sin^2 2\varphi = \lambda^2 - 1 = 0$$

Επομένως οι δυο ιδιοτιμές είναι οι -1 και 1. Το διαγώνιο μητρώο Λ τις περιλαμβάνει:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 1 υπολογίζεται από τον ιδιοχώρο V(1)=N(*A*-I):

$$\left(A-\lambda \mathrm{I}\right)\boldsymbol{x} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \cos 2\varphi - 1 & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi - 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} (\cos 2\varphi - 1)x_1 + x_2 \sin 2\varphi = 0 \\ x_1 \sin 2\varphi - x_2(\cos 2\varphi + 1) = 0 \end{cases}$$

Απ' όπου:

$$x_1 = \frac{\cos 2\varphi + 1}{\sin 2\varphi} x_2$$

και θέτοντας $\boldsymbol{x}_2$=1 λαμβάνουμε το ιδιοδιάνυσμα:

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{\cos 2\varphi + 1}{\sin 2\varphi} \\ 1 \end{bmatrix}$$

Το ιδιοδιάνυσμα $\boldsymbol{u}_2$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή -1 επιλέγεται ορθογώνιο στο $\boldsymbol{u}_1$:

$$\boldsymbol{u}_1^T \boldsymbol{u}_2 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \dfrac{\cos 2\varphi + 1}{\sin 2\varphi}, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\dfrac{\cos 2\varphi + 1}{\sin 2\varphi} \end{bmatrix} = 0$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\dfrac{\cos 2\varphi + 1}{\sin 2\varphi} \end{bmatrix}$$

Η βάση [$\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$] είναι ορθογώνια. Την κανονικοποιούμε σε μια ορθοκανονική βάση Q=[$\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$] :

$$\|\boldsymbol{u}_1\|^2 = \|\boldsymbol{u}_2\|^2 = 1 + \left(\frac{\cos 2\varphi + 1}{\sin 2\varphi}\right)^2 = 2\frac{1+\cos^2 2\varphi}{\sin^2 2\varphi} \Rightarrow$$

$$\|\boldsymbol{u}_1\| = \frac{\sqrt{2}}{\sin 2\varphi}\sqrt{1+\cos^2 2\varphi}$$

οπότε:

$$Q = \frac{\sin 2\varphi}{\sqrt{2}\sqrt{1+\cos^2 2\varphi}} \begin{bmatrix} \dfrac{\cos 2\varphi + 1}{\sin 2\varphi} & 1 \\ 1 & -\dfrac{\cos 2\varphi + 1}{\sin 2\varphi} \end{bmatrix}$$

Για παράδειγμα, υπολογίζουμε παρακάτω τα ιδιοδιανύσματα για τη γωνία $\varphi = 30^0$ (ανάκλαση ως προς ευθεία γωνίας 30^0):

$$\boldsymbol{u}_1 = \begin{bmatrix} \dfrac{\cos 2\varphi + 1}{\sin 2\varphi} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\cos \frac{\pi}{3} + 1}{\sin \frac{\pi}{3}} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{3/2}{\sqrt{3}/2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\dfrac{\cos 2\varphi + 1}{\sin 2\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\dfrac{\cos \frac{\pi}{3} + 1}{\sin \frac{\pi}{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\dfrac{3/2}{\sqrt{3}/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Κανονικοποιούμε τα $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ ($\|\boldsymbol{u}_1\|=\|\boldsymbol{u}_2\|=1$) και διατάσσουμε τα ιδιοδιανύσματα ως προς αύξουσα διάταξη των ιδιοτιμών. Λαμβάνουμε την ορθοκανονική βάση:

$$Q = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$$

Ο μετασχηματισμός διαγωνιοποίησης του S εκφράζεται από τη σχέση:

$$S = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$$

Ασκήσεις

Άσκηση 1

Έστω ένα διαγωνιοποιήσιμο μητρώο $A\in\mathbf{R}^{n\times n}$ με πραγματικές ιδιοτιμές [15]. Τότε αν ισχύει $\forall \boldsymbol{x}\neq 0\ \boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}>0$, όλες οι ιδιοτιμές του A είναι θετικές.

Απ. Αν λ ιδιοτιμή του A, τότε υπάρχει αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{v}\neq\mathbf{0}$, τέτοιο ώστε $A\boldsymbol{v}=\lambda\boldsymbol{v}$. Άρα:

$$\boldsymbol{v}^T A\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^T\lambda\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{v} = \lambda\|\boldsymbol{v}\|^2 > 0 \Rightarrow \lambda > 0$$

□

Άσκηση 2

Αν $A\in\mathbf{R}^{2\times 2}$ είναι συμμετρικό και με ιδιοτιμές 1 και 0, τότε θα είναι μητρώο ορθογώνιας προβολής .

Απ. Αρκεί να δείξουμε ότι $A^2=A$. Αφού A είναι συμμετρικό, ισχύει το φασματικό θεώρημα:

$$A = Q\Lambda Q^T \text{ , όπου } \Lambda = \mathrm{diag}(0, 1)$$

Τετραγωνίζοντας έχουμε: $A^2 = Q\,[\mathrm{diag}(0,1)]^2 Q^T = Q(\mathrm{diag}(0,1))Q^T = A$.

□

Άσκηση 3

Δείξτε ότι αν λ είναι ιδιοτιμή ενός διαγωνιοποιήσιμου μητρώου A, τότε το $\lambda+\lambda^4$ είναι ιδιοτιμή του $A+A^4$.

Απ.

Το ζητούμενο είναι εφαρμογή της ιδιότητας (5) των ιδιοποσών η οποία ισχύει για διαγωνοποιήσιμα και μη μητρώα. Έτσι, το πολυώνυμο $P(A)=A+A^4$ θα έχει ιδιοτιμή την $P(\lambda)=\lambda+\lambda^4$. Παρ' όλα αυτά, αποδεικνύουμε την πρόταση. Αν A διαγωνοποιήσιμο, τότε υπάρχει αντιστρέψιμο V τέτοιο ώστε $A=VSV^{-1}$, όπου $S=\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ και λ_i ιδιοτιμή του A. Για τη δοθείσα δύναμη του A λαμβάνουμε άμεσα:

$$\begin{aligned} &A^4=VS^4V^{-1}\Rightarrow \\ &A^4+A=VS^4V^{-1}+VSV^{-1}= \\ &=V(S^4+S)V^{-1}=V(\mathrm{diag}(\lambda_1+\lambda_1^4,\ldots,\lambda_n+\lambda_n^4))V^{-1}, \end{aligned}$$

δηλ. οι $\lambda_i+\lambda_i^4$ είναι ιδιοτιμές του A^4+A.

Σημείωση: Η πρόταση ισχύει και για *μη διαγωνοποιήσιμα* μητρώα: Αν A μη διαγωνοποιήσιμο και λ μια ιδιοτιμή του, τότε ισχύει

$$A\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{v}, \text{ με } \boldsymbol{v}\neq 0.$$

Πολλαπλασιάζοντας αριστερά με A παίρνουμε:

$$AA\boldsymbol{v} = A\lambda\boldsymbol{v} = \lambda A\boldsymbol{v} = \lambda^2\boldsymbol{v},\ \ldots,\ A^4\boldsymbol{v} = \lambda^4\boldsymbol{v}$$

Συνδυάζοντας τώρα τις παραπάνω σχέσεις παίρνουμε:

$$A^4\boldsymbol{v}+A\boldsymbol{v} = \lambda^4\boldsymbol{v}+\lambda\boldsymbol{v} \text{ ή } (A^4+A)\boldsymbol{v} = (\lambda^4+\lambda)\boldsymbol{v}$$

δηλ. *το* $\lambda+\lambda^4$ είναι ιδιοτιμή του $A+A^4$.

□

Άσκηση 4

Δείξτε αν είναι αληθείς ή ψευδείς οι παρακάτω προτάσεις:

α) *Όλα τα αντιστρέψιμα μητρώα διαγωνιοποιούνται.*
β) *Αν $AB=BA$, τότε θα είναι trace(A)=trace(B).*

---

15 [ ] Σημείωση: Αν $\lambda\in C$, τότε η συνθήκη $\lambda\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{v}>0$ δεν εξασφαλίζει ότι $\lambda>0$, αφού το $\boldsymbol{v}$, άρα και το $\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{v}$, είναι γενικά μιγαδικό. Επίσης, στο χώρο $\mathbf{C}^n$ το μέτρο ορίζεται ως $||\boldsymbol{v}||=(v^*v)^{1/2}$, όπου $\mathbf{v}^*$ συζυγές ανάστροφο, και όχι από το $\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{v}$ που γενικά είναι μιγαδικός.

Απ:

α)Λάθος και μάλιστα σοβαρό! Διαγωνιοποίηση και αντιστρεψιμότητα δεν συσχετίζονται. Αυτό οφείλεται στο ό,τι η αλγεβρική πολλαπλότητα μιας ιδιοτιμής μπορεί να είναι διαφορετική της γεωμετρικής της πολλαπλότητας. Αυτό μπορεί να συμβαίνει και στα αντιστρέψιμα μητρώα. Για τη διαγωνιοποίηση ισχύουν δύο βασικά θεωρήματα, που δίνουν μια ικανή και μια ικανή και αναγκαία συνθήκη, (βλ. §5.2) καθώς και η μορφή *Jordan*.

β) Αν λάβουμε $A=I_n$, τότε για τυχαίο B είναι $B\, I_n = I_n\, B=B$. Όμως γενικά ισχύει trace(B)≠trace(I_n) = n. Άρα <u>λάθος</u>.

□

Άσκηση 5

Δίνεται $A\in\mathbf{R}^{3\times 3}$ με diag(A)=(1, 1, 1)^T. Αν είναι γνωστό ότι το A έχει μια διπλή ιδιοτιμή μ=2, τότε να βρεθούν όλες οι ιδιοτιμές του μητρώου $(A+5I)^{-1}$.

Απ.

Αν λ ιδιοτιμή του A, τότε η $\lambda+p$ είναι ιδιοτιμή του $A+pI$ και η $1/(\lambda+p)$ ιδιοτιμή του $(A+pI)^{-1}$. Αφού μ $(=\mu_1=\mu_2)$ διπλή, τότε ή τρίτη ιδιοτιμή του A είναι: μ_3 = trace(A)-2μ = 3-2μ. Επομένως όλες οι ιδιοτιμές του $(A+5I)^{-1}$ είναι: $\lambda_{1,2} = 1/(\mu+p)=1/(2+5)=1/7$ (διπλή) και $\lambda_3 = 1/(3-2\mu+p)=1/(3-4+5)=1/4$.

□

Άσκηση 6

(Σ/Λ) Να εξεταστεί αν η ακόλουθη πρόταση είναι αληθής: «*Όλα τα ιδιάζοντα μητρώα* $A\in\mathbf{R}^{2\times 2}$ *με diag(A)≠**0** διαγωνιοποιούνται*».

Απ.

Αφού A ιδιάζον η μια ιδιοτιμή, έστω λ_1, είναι 0. Η συνθήκη diag(A)≠$\mathbf{0}$ ⇔ $a_{11}\neq 0$, $a_{22}\neq 0$ δεν εξασφαλίζει ότι η άλλη ιδιοτιμή λ_2 είναι ≠0 (τότε το A θα ήταν διαγωνοποιήσιμο, ως έχον δύο διαφορετικές ιδιοτιμές). Πράγματι είναι λ_2=trace(A)=$a_{11}+a_{22}$. Αν $a_{11}\neq -a_{22}$, τότε $\lambda_2\neq 0$ και το A διαγωνοποιήσιμο. Αν $a_{11}=-a_{22}$, τότε $\lambda_2=0$ με rank(A)=1 (rank(A)≠0, αφού είναι $a_{11}\neq 0$, $a_{22}\neq 0$). Αυτό σημαίνει ότι στη διπλή ιδιοτιμή 0 αντιστοιχεί ο ιδιοχώρος V(0) με dim(V(0))=dim($N(A)$)=2-rank(A)=1, δηλ. θα υπάρχει *μόνον ένα* ιδιοδιάνυσμα. Άρα το A μη διαγωνιοποιήσιμο. Επομένως <u>λάθος</u>.

2η Απάντηση (*με αντιπαράδειγμα*): Το μητρώο A=[2,-4; 1,-2] είναι ιδιάζον και έχει diag(A)=[2,-2]≠$\mathbf{0}$, και ιδιοτιμές $\lambda_1=\lambda_2=0$. Υπάρχει όμως μόνον ένα ιδιοδιάνυσμα, το $\boldsymbol{v}=(2, 1)^T$, δηλ. το A δεν είναι διαγωνοποιήσιμο.

□

Άσκηση 7

Έστω ότι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο ενός μητρώου A είναι $\varphi(\lambda)=(\lambda-1)(\lambda-2)^4-2\lambda^2-3\lambda+16$. Να εξετάσετε αν το A είναι αντιστρέψιμο.

Απ.

Ο σταθερός όρος του $\varphi(\lambda)$ είναι $-2^4+16=0$. Συνεπώς $\varphi(0)=0$, δηλ. το 0 είναι διοτιμή του A. Άρα το A είναι ιδιάζον.

□

Άσκηση 8

Εξετάστε αν το μητρώο A=[2, -4; 1, -2] διαγωνιοποιείται και τεκμηριώστε γιατί.

Απ. Το A είναι προφανώς τάξης 1 και γράφεται $A=[2, 1]^T[1,-2]$. Η μια του ιδιοτιμή είναι το 0 (ιδιάζον) και η άλλη ισούται με trace(A)=0. Επομένως η αλ. πολ. της ιδιοτιμής 0 είναι 2. Η γ. πολ. προκύπτει από τον ιδιοχώρο V(0)=N(A) που έχει διάσταση 1 αφού rank(A)=1. Άρα το A δεν διαγωνιοποιείται.
Πιο σύντομα: από την ειδική μορφή του A άμεσα διαπιστώνουμε ότι το $[2, 1]^T$ είναι ιδιοδιάνυσμα συγχρόνως και του χώρου στηλών και του μηδενοχώρου, αφού $[2, 1]^T[1,-2]=0$. Συνεπώς δεν υπάρχει άλλο ιδιοδιάνυσμα και το A δεν διαγωνιοποιείται.

□

Άσκηση 8

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές των παρακάτω μητρώων (α) στους ρητούς, (β) στους πραγματικούς, (γ) στους μιγαδικούς. Έπειτα να γίνει σύντομη επαλήθευση.

(α) $\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 \end{bmatrix}$ (β). $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ (γ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

Απαντήσεις

Για να βρούμε τις ιδιοτιμές υπολογίζουμε τις ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου $\varphi(\lambda)$=det(A-λI). Στη συνέχεια, επιβεβαιώνουμε ότι οι ιδιοτιμές βρίσκονται εντός των κύκλων *Gerschgorin*. Τέλος επαληθεύουμε παραθέτοντας στο περιβάλλον Matlab.

α)

$$\det(A\text{-}\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)^2 - (\sqrt{2})(-\sqrt{2}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 1-\sqrt{2}\,\mathrm{i} \\ \lambda_2 = 1+\sqrt{2}\,\mathrm{i} \end{cases}$$

Οπότε οι ιδιοτιμές είναι:

- $\lambda_1 = 1/1$, $\lambda_2 = 1/1$ (στο σώμα των ρητών **Q**).
- $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$ (στο σώμα των πραγματικών **R**).
- $\lambda_1 = 1-\sqrt{2}\,\mathrm{i}$, $\lambda_2 = 1+\sqrt{2}\,\mathrm{i}$ (στο σώμα των μιγαδικών **C**).

Με εφαρμογή του θεωρήματος *Gerschgorin* έχουμε:

$|z-1| \le \sqrt{2}$.

Όντως οι ιδιοτιμές λ_1, λ_2 είναι επί του κύκλου με κέντρο το (1,0) και ακτίνα $\sqrt{2}$.

β) $$\det(A\text{-}\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$1(-1\times 0 - (-1)(-1-\lambda)) + (-1-\lambda)((1-\lambda)(-1-\lambda) - (-1)\times 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \\ \lambda_2 = i \\ \lambda_3 = -i \end{cases}$$

Οι ιδιοτιμές είναι:

- $\lambda_1 = -1/1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$ στο σώμα των ρητών **Q**.
- $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$ στο σώμα των πραγματικών **R**.
- $\lambda_1 = -1+0\times i$, $\lambda_2 = i$, $\lambda_3 = -i$ στο σώμα των μιγαδικών **C**.

Με εφαρμογή του θεωρήματος *Gerschgorin* έχουμε:

$|z-1| \le 2$ *και* $|z+1| \le 1$

Όντως διαπιστώνουμε ότι οι ιδιοτιμές $\pm i$ ανήκουν στον κύκλο με κέντρο το (1, 0) και ακτίνα 2, ενώ η ιδιοτιμή -1 θα είναι το κέντρο (-1, 0) του κύκλου με ακτίνα 1.

γ) Η λ=1 είναι προφανώς μια ιδιοτιμή. Βρίσκουμε τις υπόλοιπες:

det(A-λI) =

$$= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\left((1-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix}\right)$$

Οπότε:

$$\varphi(\lambda) = (1-\lambda)[(1-\lambda)(-1-\lambda)[(1-\lambda)(-1-\lambda)+2] - [(1-\lambda)(-1-\lambda)^2] = 0 \Rightarrow$$
$$\lambda_1 = -i, \quad \lambda_2 = i, \quad \lambda_3 = \sqrt{2}, \quad \lambda_4 = -\sqrt{2}, \quad \lambda_5 = 1$$

Οι ιδιοτιμές είναι:

- $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = 0, \lambda_5 = 1/1$ (στο σώμα των ρητών **Q**).
- $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = \sqrt{2}$, $\lambda_4 = -\sqrt{2}$, $\lambda_5 = 1$ (στο σώμα **R** των πραγματικών).
- $\lambda_1 = -i, \lambda_2 = i$, $\lambda_3 = \sqrt{2} + 0\times i$, $\lambda_4 = -\sqrt{2} + 0\times i$, $\lambda_5 = 1 + 0\times i$ (στο σώμα των μιγαδικών **C**).

Με εφαρμογή του θεωρήματος Gerschgorin έχουμε τους κύκλους:

$$|z-1| \le 0, \quad |z-1| \le 1, \quad |z+1| \le 1, \quad |z-1| \le 2$$

Όντως οι ιδιοτιμές $\pm i$, $\sqrt{2}$ ανήκουν στον κύκλο με κέντρο (1, 0) και ακτίνα 2, η ιδιοτιμή $-\sqrt{2}$ στον κύκλο με κέντρο (-1, 0) και ακτίνα 1, ενώ η ιδιοτιμή 1 αποτελεί το κέντρο (1, 0) του κύκλου ακτίνας 1.

♣ [Matlab] Παραθέτουμε εδώ κώδικα Matlab για επαλήθευση των παραπάνω αποτελεσμάτων.

```
A=[1 sqrt(2); -sqrt(2) 1];
idiotimes_A = eig(A);
idiotimes_A =
1,0000 + 1,4142i
1,0000 - 1,4142i
B=[1 -1 -1; 1 -1 0; 1 0 -1];
idiotimes_B = eig(B);
idiotimes_B =
4,1633e-17 + 1,0000i
4,16333e-17 - 1,0000i
-1,0000 + 0,0000i

C=[1 0 0 0 0; 0 1 1 0 0; 0 1 -1 0 0; 0 0 0 1 2; 0 0 0 -1 -1];
idiotimes_C = eig(C);
idiotimes_C =
9,7144e-17 + 1,0000i
9,7144e-17 - 1,0000i
-1,4142 + 0,0000i
1,4142 + 0,0000i
1,0000 + 0,0000i
```

□

Άσκηση 9

Για τα παρακάτω μητρώα να βρεθεί ένα αντιστρέψιμο μητρώο P, αν αυτό είναι δυνατόν, τέτοιο ώστε το $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιο. Σε κάθε περίπτωση να υπολογισθούν οι ιδιοτιμές:

$$(\alpha)\ \begin{bmatrix} -2 & -8 & -12 \\ 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (\beta)\ \begin{bmatrix} -1 & -1 & -6 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

Απ.

Αρκεί να δείξουμε ότι τα παραπάνω μητρώα διαγωνιοποιούνται, δηλ. ότι υπάρχει μια πλήρης βάση ιδιοδιανυσμάτων. Εξετάζουμε λοιπόν αν ικανοποιείται μια από τις εξής συνθήκες:

- (ικανή) οι ιδιοτιμές είναι διακεκριμένες. Τότε (από γνωστό θεώρημα) υπάρχει πλήρες σύνολο ιδιοδιανυσμάτων που αποτελούν τις στήλες του *P*.
- (ικανή και αναγκαία) κάθε ιδιοτιμή έχει γεωμετρική=αλγεβρική πολλαπλότητα, δηλ., αν υπάρχουν πολλαπλές ιδιοτιμές, τότε: dim($V(\lambda)$) = αλγεβρική πολλαπλότητα του λ, όπου $V(\lambda)$ ο ιδιοχώρος της λ ($V(\lambda)=N(A-\lambda I)$).

(α) Η λ=1 είναι προφανής ιδιοτιμή. Βρίσκουμε τις υπόλοιπες από τη χαρακτηριστική εξίσωση του μπλοκ $A(1{:}2,1{:}2)$.

$$A(1{:}2,1{:}2)=\begin{vmatrix}-2-\lambda & -8\\ 1 & 4-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow(-2-\lambda)(4-\lambda)-(-8)=0\Rightarrow\begin{cases}\lambda_1=1\\ \lambda_2=0\\ \lambda_3=2\end{cases}$$

Οι ιδιοτιμές είναι διακεκριμένες, άρα το A διαγωνιοποιείται. Βρίσκουμε τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα από τους ιδιοχώρους $V(\lambda)=N(A-\lambda I)$.

Για λ = 1 είναι:

$$A-\lambda I=\begin{bmatrix}-3 & -8 & -12\\ 1 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\to r_3+\frac{1}{3}r_3}\begin{bmatrix}-3 & -8 & -12\\ 0 & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

οπότε:

$$\begin{bmatrix}-3 & -8 & -12\\ 0 & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=0\Rightarrow\begin{cases}-3x_1-8x_2-12x_3=0\\ \frac{1}{3}x_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-4x_3\\ x_2=0\end{cases}$$

και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα: $\boldsymbol{u}_1=\begin{bmatrix}-4\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$.

Για λ = 0:

$$A-\lambda I=\begin{bmatrix}-2 & -8 & -12\\ 1 & 4 & 4\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\to r_2+\frac{1}{2}r_1}\begin{bmatrix}-2 & -8 & -12\\ 0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3\to r_3+\frac{1}{2}r_2}\begin{bmatrix}-2 & -8 & -12\\ 0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-2 & -8 & -12\\ 0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=0\Rightarrow\begin{cases}-2x_1-8x_2-12x_3=0\\ -2x_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-4x_2\\ x_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-4\\ x_2=1\\ x_3=0\end{cases}$$

και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα: $\boldsymbol{u}_2=\begin{bmatrix}-4\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$.

Για λ = 2:

$$A-\lambda I=\begin{bmatrix}-4 & -8 & -12\\ 1 & 2 & 4\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\to r_2+\frac{1}{4}r_1}\begin{bmatrix}-4 & -8 & -12\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3\to r_3+r_2}\begin{bmatrix}-4 & -8 & -12\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 & -8 & -12 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -4x_1 - 8x_2 - 12x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα: $\boldsymbol{u}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Το μητρώο P που διαγωνιοποιεί το A, δίνεται από το μετασχηματισμό $P^{-1}AP = \Lambda$, όπου Λ διαγώνιο με τις ιδιοτιμές του A:

$$P = [\boldsymbol{u}_1 \quad \boldsymbol{u}_2 \quad \boldsymbol{u}_3] = \begin{bmatrix} -4 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(β) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι:

$$\varphi(\lambda) = \det(A\text{-}\lambda \mathrm{I}) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 & -6 & 3 \\ 1 & -2-\lambda & -3 & 0 \\ -1 & 1 & -\lambda & 1 \\ -1 & -1 & -5 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(-1-\lambda)\begin{vmatrix} -2-\lambda & -3 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ -1 & -5 & 3-\lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ -1 & -5 & 3-\lambda \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 1 & -2-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & -2-\lambda & -3 \\ -1 & 1 & -\lambda \\ -1 & -1 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= (-1-\lambda)(\lambda-1)(-\lambda^2-2) + (\lambda^2-1) - 6\lambda(\lambda-1) - 3(-(\lambda-1)^2) = \\
&= (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda^2+2) + (\lambda+1)(\lambda-1) - 6\lambda(\lambda-1) + 3(\lambda-1)^2 = \\
&= (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda^2+2+1) - 3(\lambda-1)(2\lambda-\lambda+1) = (\lambda+1)(\lambda-1))(\lambda^2+3) - 3(\lambda-1)(\lambda+1)) = \\
&= (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda^2+3-3)
\end{aligned}$$

Οι ρίζες $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_{3,4} = 0$ (διπλή) είναι οι ιδιοτιμές του A. Για τη διπλή ιδιοτιμή λ=0 εξετάζουμε λοιπόν αν συμβαίνει dim(N(A-λI)=dim(A)=2, ή rank(A)=4-2=2:

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -6 & 3 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -5 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{r_3 \to r_3 - r_1 \\ r_4 \to r_4 - r_1}]{r_2 \to r_2 + r_1} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -6 & 3 \\ 0 & -3 & -9 & 3 \\ 0 & 2 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 + \frac{2}{3}r_2} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -6 & 3 \\ 0 & -3 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι rank(A)=3, συνεπώς το A δεν διαγωνοποιείται. Άρα δεν υπάρχει μητρώο P που να διαγωνοποιεί το A. Μπορούν να υπολογισθούν συνολικά μόνον 2 ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, που δεν συνιστούν πλήρες σύνολο ιδιοδιανυσμάτων, ούτε φυσικά βάση.

♣ **[Matlab]** Επαληθεύουμε στο περιβάλλον Matlab ό,τι υπολογίσαμε πιο πάνω:

```
A = [-2 -8 -12; 1 4 4; 0 0 1];
[P1, S1] = eig(A);
B = [-1 -1 -6 3; 1 -2 -3 0; -1 1 0 1; -1 -1 -5 3];
[P2,S2] = eig(B);
```

Τα αποτελέσματα επαληθεύουν τους παραπάνω υπολογισμούς. Τα ιδιοδιανύσματα υπολογίζονται με κανονικοποίηση ως προς το Ευκλείδειο μέτρο (norm(v,2):

$$S1=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Το A όντως έχει τις ιδιοτιμές 0, 2, 1.

$$P1=\begin{bmatrix}-0.9701 & 0.8944 & -0.9701\\ 0.2425 & -0.4472 & 0\\ 0 & 0 & 0.2425\end{bmatrix}$$

Το μητρώο P του ερ. (α) είναι το ίδιο αν κανονικοποιήσουμε και διατάξουμε κατάλληλα τις στήλες του.

$$S2=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Το B έχει πράγματι 4 ιδιοτιμές: -1, 1 και 0 (διπλή).

$$P2=\begin{bmatrix}0.8018 & -0.8165 & 0.8165 & 0.5883\\ 0 & -0.4082 & 0.4082 & 0\\ 0.2673 & 0 & 0 & 0.1961\\ 0.5345 & -0.4082 & 0.4082 & 0.7845\end{bmatrix}$$

Είναι φανερό τέλος, ότι το B δεν έχει πλήρη βάση ιδιοδιανυσμάτων, αφού ένα ιδιοδιάνυσμα αναπαράγεται. Προφανώς το P2 δεν είναι αντιστρέψιμο.

□

Άσκηση 10

Δίνεται το μητρώο

$$A=\begin{bmatrix}1.0000 & 1.0010 & 0\\ 1.0000 & 1.0000 & 0\\ 0 & 0 & 0.2\end{bmatrix}$$

Να υπολογισθούν τα ιδιοποσά (α) του A. (β) του A^{-1} (γ) του A^TA.

Απ.

α) Είναι :

$$\varphi_A(\lambda)=\det(A\text{-}\lambda I)=\begin{vmatrix}1\text{-}\lambda & 1.001 & 0\\ 1 & 1\text{-}\lambda & 0\\ 0 & 0 & 0.2\text{-}\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=(0.2\text{-}\lambda)(\,(1\text{-}\lambda)^2\text{-}1.001)=(0.2\text{-}\lambda)(\lambda^2\text{-}2\lambda\text{-}0.001)$$

Κάνουμε τους υπολογισμούς δουλεύοντας σε α.κ.υ. με 4 σημαντικά ψηφία. Λόγω της δομής του A σε μορφή διαγώνιων μπλοκ, οι δύο πρώτες ιδιοτιμές είναι ιδιοτιμές του μπλοκ A[1:2, 1:2]. Είναι ρίζες του τριωνύμου λ^2-2λ-0.001 και εμπεριέχουν σφάλμα: $\lambda_1\approx 2.0005$, $\lambda_2\approx -0.0005$. Η λ_3 προκύπτει άμεσα, $\lambda_3=0.2$, αφού αντιστοιχεί σε στήλη πολλαπλάσια του $\boldsymbol{e}_3$. Βρίσκουμε τώρα τα ιδιοδιανύσματα.

Για λ=0.2 υπολογίζουμε άμεσα την ειδική λύση $\boldsymbol{v}=(0,0,1)^T$, αφού η 3η στήλη είναι πολλαπλάσιο του μοναδιαίου $\boldsymbol{e}_3$.

$$A\text{-}\lambda I=\begin{bmatrix}1\text{-}\lambda & 1.001 & 0\\ 1 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 0.2-\lambda\end{bmatrix}=$$

- Για λ=-0.0005, από τον αντίστοιχο ιδιοχώρο $N(A+0.0005I)$ υπολογίζουμε την ειδική λύση $\boldsymbol{u}\approx(-1,1,0)^T$.

- Για λ=2.0005 από τον αντίστοιχο ιδιοχώρο $N(A-2.0005I)$ υπολογίζουμε την $\boldsymbol{w}\approx(1,1,0)^T$.

Άρα, καθορίσαμε για το A ένα πλήρες σύνολο ιδιοδιανυσμάτων $\{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\}$ (βάση) για το A. Το σύνολο αυτό αποτελεί βάση του χώρου στηλών $C(A)$ και του R^3.

β) Το A είναι αντιστρέψιμο αφού οι ιδιοτιμές του είναι διάφορες του 0. Οι ιδιοτιμές του A^{-1} είναι προφανώς τα αντίστροφα των ιδιοτιμών του A: $\lambda_1=0.499$, $\lambda_2=-2000$, $\lambda_3=5$. Τα ιδιοδιανύσματα του A^{-1} συμπίπτουν με αυτά του A.

γ) Υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές του A^TA:

$$A^TA=\begin{bmatrix} 2 & 2.001 & 0 \\ 2.001 & 2.002 & 0 \\ 0 & 0 & 0.04 \end{bmatrix}$$

Προφανώς είναι $\lambda_1=0.04$ και οι άλλες δύο είναι προφανώς οι ιδιοτιμές του μπλοκ [2, 2.001; 2.001, 2.002] και είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$\varphi(\lambda)=\det(\mathrm{A^TA\text{-}\lambda I})=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2.001 \\ 2.001 & 2.002-\lambda \end{vmatrix}=$$

$$=(\lambda-2.002)(\lambda-2)-2.001^2=\lambda^2-4.002\lambda-0.000001$$

Υπολογίζουμε σε α.κ.υ. με 4 σ.ψ.: $\lambda_1=2.4988e\text{-}7$, $\lambda_2=4.002$.
Βρίσκουμε τώρα τα ιδιοδιανύσματα από τους αντίστοιχους ιδιοχώρους $\mathrm{N}(A^TA\text{-}\lambda\mathrm{I})$).

- Για $\lambda_1=0.04$ βρίσκουμε άμεσα $\boldsymbol{v}=(0,0,1)^T$.
- Για $\lambda_2=2.498e\text{-}7$ βρίσκουμε το ιδιοδιάνυσμα $\boldsymbol{u}=(-0.7073, 0.7069,0)^T$.
- Για $\lambda_3=4.002$ και βρίσκουμε το ιδιοδιάνυσμα $\boldsymbol{w}=(0.7069, 0.7073,0)^T$.

Οι τιμές των ιδιοδιανυσμάτων (υπολογίσθηκαν στο Matab) και είναι κανονικοποιημένες.

□

Άσκηση 11 [Υπολογισμός δυνάμεων μητρώου]

Δίνονται τα μητρώα (α) X=[0.4, 0.5 ; 1, 0.1], (β) Y=[2, 1 ; -4, -2]. Για το καθένα, να εξετάσετε τυπικά εάν και σε ποιο μητρώο συγκλίνουν οι ακολουθίες δυνάμεων $\{X^k\}$, $\{Y^k\}$, $k\in Z^+$, καθώς αυξάνεται ο εκθέτης k.

Απαντήσεις

α) Υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές του X:

$$\varphi_X(x)=\det(X\text{-}\lambda\mathrm{I})=\begin{vmatrix} 0.4-\lambda & 0.5 \\ 1 & 0.1-\lambda \end{vmatrix}=\lambda^2-0.5\lambda+0.04-0.5=$$

$$=\lambda^2-0.5\lambda-0.46=0$$

απ' όπου: $\lambda_1=0.9728<1$, $\lambda_2=-0.4728<1$. Από τον τύπο της διαγωνιοποίησης έχουμε:

$$X^k=V\Lambda^k V^{-1}=V\mathrm{diag}(0.9728, -0.4728)^k V^{-1}\rightarrow V\,\mathbf{0}\,V=\mathbf{0} \text{ του } k \text{ τείνοντος στο } \infty.$$

β) Εύκολα διαπιστώνουμε: Y^2=[2, 1 ; -4, -2] [2, 1 ; -4, -2] = $\mathbf{0}_{1:2,1:2}$, δηλ. $\mathrm{Y}^k=\mathbf{0}$, για $k\geq 2$.

Πιο αυστηρή αιτιολόγηση: Και οι δύο ιδιοτιμές του Y είναι 0: $\lambda_1=\lambda_2=0$. Πράγματι, το A είναι προφανώς ιδιάζον ($\lambda_1=0$) και ισχύει $\lambda_2=\mathrm{trace}(A)\text{-}0=2\text{-}2=0$. Άρα είναι $\Lambda=0$ και επομένως:

$$\mathrm{Y}^k=\mathrm{V}\Lambda^k\mathrm{V}=0, \text{ για } k\geq 2$$

□

Άσκηση 12 [Διαγωνιοποίηση συμμετρικού μητρώου]

Δίνεται το μητρώο A=[2, 1, 0; 1, 3, -1 ; 0, -1, 2].

α) Να εξηγήσετε αν το Α διαγωνιοποιείται και γιατί, δίνοντας τον ισχύοντα μετασχηματισμό διαγωνιοποίησης.
β) Να υπολογίσετε όλες τις ιδιοτιμές του A.
γ) Να βρείτε μια πλήρη βάση ορθοκανονικών ιδιοδιανυσμάτων του A.

δ) Εκφράστε τέλος στην τελική του μορφή το μετασχηματισμό διαγωνιοποίησης.

Απαντήσεις

α) Το μητρώο Α είναι συμμετρικό και επομένως ισχύει γι' αυτό το *φασματικό θεώρημα για τα συμμετρικά μητρώα*: υπάρχουν μια *πλήρης ορθοκανονική βάση ιδιοδιανυσμάτων* και Λ=diag(λ_1, λ_2, λ_3) διαγώνιο μητρώο με τις ιδιοτιμές λ_1, λ_2, λ_3 του A (οι οποίες για συμμετρικά μητρώα είναι πραγματικές), τέτοια ώστε να ισχύει ο μετασχηματισμός $A=Q\Lambda Q^T$. Το Q περιέχει την ορθοκανονική βάση των ιδιοδιανυσμάτων.

β) Βρίσκουμε τώρα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A:

$$\phi(\lambda)=\det(A-\lambda I)=$$

$$=\begin{vmatrix}2-\lambda & 1 & 0\\ 1 & 3-\lambda & -1\\ 0 & -1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2-\lambda & 0 & 2-\lambda\\ 1 & 3-\lambda & -1\\ 0 & -1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 3-\lambda & -1\\ 0 & -1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=(2-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 3-\lambda & -2\\ 0 & -1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 3-\lambda & -2\\ 0 & -1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 4-\lambda & -4+\lambda\\ 0 & -1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=(2-\lambda)(4-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(4-\lambda)(1-\lambda)$$

Οι ιδιοτιμές είναι οι ρίζες του $\varphi(\lambda)$: $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=4$ (πραγματικές, όπως αναμενόταν).

(γ) Βρίσκουμε τους ιδιοχώρους $V(\lambda_i)=N(A-\lambda_i I)$, $i=1,2,3$, λύνοντας τα αντίστοιχα ομογενή συστήματα, και κανονικοποιούμε. Για την εύρεση του κάθε μηδενοχώρου μετατρέπεται το A σε ένα κλιμακωτό U και αμέσως μετά να τίθενται τιμές στις ελεύθερες μεταβλητές, μία κάθε φορά:

Για $\lambda_1=1$: $(A-I)\boldsymbol{x}=0 \Rightarrow \boldsymbol{u}_1=(-1,1,1)^T \Rightarrow \boldsymbol{q}_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)^T$

Για $\lambda_2=2$: $(A-2I)\boldsymbol{x}=0 \Rightarrow \boldsymbol{u}_2=(1,0,1)^T \Rightarrow \boldsymbol{q}_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)^T$

Για $\lambda_3=4$: $(A-4I)\boldsymbol{x}=0 \Rightarrow \boldsymbol{u}_3=(-1,-2,1)^T \Rightarrow \boldsymbol{q}_3=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(-1,-2,1)^T$

(δ) Από τα παραπάνω λαμβάνουμε $Q=[\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3]$ και $Q^T=[\boldsymbol{q}_1^T; \boldsymbol{q}_2^T; \boldsymbol{q}_3^T]$, δηλ.:

$$Q=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\end{pmatrix}\Rightarrow Q^T=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2}\\ -1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6}\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$A=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6}\\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2}\\ -1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6}\end{pmatrix}$$

□

Άσκηση 13 [Εφαρμογή Θεωρήματος *Cayley-Hamilton*]

Να υπολογίσετε το αντίστροφο του μητρώου A της Άσκησης 9 χρησιμοποιώντας το θεώρημα *Cayley-Hamilton*.

Απ.

Σύμφωνα με το Θ. το θεώρημα *Cayley-Hamilton*, *κάθε μητρώο A επαληθεύει το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο*. Το εφαρμόζουμε:

$$\varphi(\lambda) = (2-\lambda)(4-\lambda)(1-\lambda) = (8-2\lambda-4\lambda+\lambda^2)(1-\lambda) = (\lambda^2-6\lambda+8)(1-\lambda) = \lambda^2-6\lambda+8-\lambda^3+6\lambda^2-8\lambda$$

$$= -\lambda^3+6\lambda^2-14\lambda+8$$

Επομένως ισχύει:

$\varphi(A)= -A^3+6A^2-14A+8 =0$,

απ' όπου διαιρώντας με A:

$-A^2+6A-14I+8A^{-1}=0 \Rightarrow A^{-1}=1/8(A^2-6A+14I)$

Υπολογίζουμε:

$A^2 = [5, 5, -1 ; 5, 11, -5 ; -1, -5, 5]$

και τελικά:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} 1.25 & -0.125 & 0.125 \\ -0.125 & 1 & -0.125 \\ 0.125 & -0.125 & 1.25 \end{bmatrix}$$

□

Άσκηση 14 – Περιστροφή κατά γωνία φ

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του μητρώου περιστροφής στο R^2 (ως προς γωνία) πάνω στο R:

$$A=\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

Απ.

Η κύρια ιδιότητα του μητρώου περιστροφής είναι ότι είναι ορθογώνιο. Αυτό είναι φανερό για το A: οι στήλες του A είναι ορθοκανονικές αφού $(\cos\varphi, \sin\varphi)^T(-\sin\varphi, \cos\varphi)=0$ και $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$. Επίσης, το μητρώο περιστροφής αποτελεί κλασσικό παράδειγμα μητρώου με μιγαδικά ιδιοποσά. Υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα:

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} \cos\varphi-\lambda & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi-\lambda \end{vmatrix} = (\cos\varphi-\lambda)(\cos\varphi-\lambda)+\sin^2\varphi=0 \Rightarrow$$

$$\cos^2\varphi-2\lambda\cos\varphi+\lambda^2+\sin^2\varphi=0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1=\cos\varphi+i\sin\varphi=e^{i\varphi} \\ \lambda_2=\cos\varphi-i\sin\varphi=e^{-i\varphi} \end{cases}$$

Το μητρώο είναι πραγματικό και έχει μιγαδικές συζυγείς ιδιοτιμές ($\lambda_1=\overline{\lambda_2}$). Συνεπώς αναμένεται τα ιδιοδιανύσματα να είναι και αυτά μιγαδικά συζυγή. Τα υπολογίζουμε:

- Για $\lambda=\cos\varphi+j\sin\varphi=e^{i\varphi}$:

$$A-\lambda I=\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -i\sin\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & -i\sin\varphi \end{bmatrix}$$

Βρίσκουμε τον αντίστοιχο ιδιοχώρο:

$$\begin{bmatrix} -i\sin\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & -i\sin\varphi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=0 \Rightarrow -ix_1\sin\varphi-x_2\sin\varphi=0 \Rightarrow$$

$$x_1=-\frac{\sin\varphi}{i\sin\varphi}x_2 \quad (x_2=1) \Rightarrow$$

$$u_1=\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

- Για $\lambda=\cos\varphi-i\sin\varphi=e^{-i\varphi}$ το ιδιοδιάνυσμα είναι το μιγαδικό συζυγές ιδιοδιάνυσμα του $\boldsymbol{u}_0$, οπότε:

$$u_2 = u_1^* = \overline{u_1} = \overline{\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

Κανονικοποούμε τα ιδιοδιανύσματα:

$$q_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}i \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix},\ q_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2}i \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$$

οπότε το μητρώο τους είναι:

$$V = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}j & \frac{\sqrt{2}}{2}j \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι τα ιδιοδιανύσματα είναι ανεξάρτητα της γωνίας φ. Οι ιδιοτιμές είναι αυτές που καθορίζουν το είδος της περιστροφής. Για $\varphi = 30^0$ οι ιδιοτιμές είναι:

$$\lambda_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,\ \lambda_2 = \overline{\lambda_1} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

και το αντίστοιχο διαγώνιο μητρώο τους:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}j & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}j \end{bmatrix}$$

□

Άσκηση 15

Να υπολογισθούν οι ιδιάζουσες τιμές και τα ιδιάζοντα διανύσματα του μητρώου A=[1, 3; -1 -3]. Τα τελευταία θα πρέπει να κανονικοποιηθούν. Με βάση τα ιδιάζοντα διανύσματα να καθορισθούν ορθοκανονικές βάσεις για όλους τους θεμελιώδεις χώρους. Τέλος, να δοθεί το A στη μορφή $A=U\ \Sigma\ V^T$, όπου Σ διαγώνιο με τις ιδιάζουσες τιμές και U και V κατάλληλα ορθοκανονικά μητρώα.

Απ.

Είναι A^TA=[2, 6; 6, 18] με rank(A^TA)=1. Επομένως $\lambda_1=0$ και λ_2=trace(A^TA)=20, δηλ. $\sigma_1=\sqrt{20}=4.4721$ και $\sigma_2=0$. Το A ως μητρώο τάξης 1, γράφεται $A=\alpha\beta^T$=[1, -1]^T[1, 3]. Το A^TA γράφεται:

$$A^TA = (\alpha\beta^T)^T(\alpha\beta^T) = \beta\alpha^T\alpha\beta^T = (\alpha^T\alpha)\ \beta\beta^T$$

Το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 0 είναι διάνυσμα v_2 κάθετο στο β, αφού:

$$A^TAv_1 = (\alpha^T\alpha)\ \beta\beta^Tv_2 = (\alpha^T\alpha)\ \beta(\beta^Tv_2) = 0$$

Επιλέγουμε το (-3, 1)^T και κανονικοποιούμε: $v_2=(1/\sqrt{10})(-3, 1)^T$. Το δεύτερο ιδιάζον διάνυσμα είναι κάθετο στο v_2. Άρα θέτουμε κατ' ευθείαν $v_1=(1/\sqrt{10})(-1, -3)^T$. Το $\{v_1\}$ αποτελεί βάση του χώρου γραμμών, ενώ το $\{v_2\}$βάση του μηδενοχώρου.

Ομοίως και για το AA^T είναι

$$AA^T = \alpha\beta^T(\alpha\beta^T)^T = \beta\alpha^T\beta\alpha^T = (\alpha^T\beta)\ \beta\alpha^T$$

Το $(1, 1)^T\perp\alpha$ και προφανώς είναι ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή 0. Επιλέγουμε λοιπόν $u_2=(1/\sqrt{2})(1, 1)^T$ και το ορθογώνιο προς αυτό $u_1=(1/\sqrt{2})\ (-1\ 1)^T$. Το $\{u_1\}$ αποτελεί βάση του χώρου στηλών, ενώ το $\{u_2\}$βάση του N(A^T).

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η ανάλυση ιδιαζουσών τιμών για το μητρώο A δίνει:

$$A=\begin{bmatrix}1&3\\-1&3\end{bmatrix}=U\Sigma V=[u_1\ u_2]\begin{bmatrix}\sqrt{20}&0\\0&0\end{bmatrix}[v_1\ v_2]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{20}&0\\0&0\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1&-3\\-3&1\end{bmatrix}$$

□

Άσκηση 16

Να γίνει ανάλυση SVD για το μητρώο

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$$

Συγκεκριμένα να υπολογισθούν οι ιδιάζουσες τιμές του *A* και να βρεθούν όλα τα αριστερά και δεξιά ιδιοδιανύσματά του. Να τεθεί το *A* στη μορφή *A* =*U* Σ *V*, όπου Σ διαγώνιο με τις ιδιάζουσες τιμές και *U* και *V* κατάλληλα ορθοκανονικά μητρώα.

Απ.

Υπολογίζουμε πρώτα τις ιδιάζουσες τιμές και τα δεξιά ιδιοδιανύσματα του *A* από το μητρώο $A^{T}A$:

$$A^TA=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&2&1\\0&1&1\end{bmatrix}.$$

Οι ιδιοτιμές του A^TA είναι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης:

$$\det(A^TA-\lambda I)=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&0\\1&2-\lambda&1\\0&1&1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}2-\lambda&1\\1&1-\lambda\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&1\\0&1-\lambda\end{vmatrix}=$$

$$=(1-\lambda)[(2-\lambda)(1-\lambda)-1)]-(1-\lambda)$$

$$=(1-\lambda)(\lambda^2-3\lambda)=0$$

Επομένως οι ιδιοτιμές του A^TA είναι: $\lambda_1=3,\ \lambda_2=1,\ \lambda_1=0$.

Οι ιδιάζουσες τιμές του *A* λαμβάνονται κατά φθίνουσα διάταξη:

$$\sigma_3=\sqrt{\lambda_3}=\sqrt{3},\quad \sigma_2=\sqrt{\lambda_2}=1,\quad \sigma_3=\sqrt{\lambda_3}=0$$

Το μητρώο Σ είναι 2×3 με τις ιδιάζουσες τιμές στη διαγώνιό του:

$$\Sigma=\begin{bmatrix}\sigma_1&0&0\\0&\sigma_2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{3}&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}$$

Από το A^TA: Τα δεξιά ιδιοδιανύσματα του *A* αντιστοιχούν στα ιδιοδιανύσματα του A^TA κατά φθίνουσα διάταξη ιδιοτιμής. Υπολογίζονται από τους ιδιοχώρους V(λ)=N(A^TA-λI:

• Για λ = 3:

$$(A^TA-3I)v_1=\begin{bmatrix}-2&1&0\\1&-1&1\\0&1&-2\end{bmatrix}v_1=\mathbf{0}\Rightarrow v_1=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$$

• Για λ = 1:

$$(A^TA-I)v_2=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&1&1\\0&1&0\end{bmatrix}v_2=\mathbf{0}\Rightarrow v_2=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}$$

• Για λ = 0:

$$A^T A v_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} v_3 = \mathbf{0} \Rightarrow v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Κανονικοποιούμε τα ιδιοδιανύσματα:

$$\|v_1\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6} \Rightarrow q_1 = \left[\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right]^T$$

$$\|v_2\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \Rightarrow q_2 = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]^T$$

$$\|v_3\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3} \Rightarrow q_3 = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]^T$$

Τα ιδιοδιανύσματα $\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$, $\boldsymbol{q}_3$ αποτελούν ορθοκανονική βάση του R^3 και είναι στήλες του V:

$$V = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 2 & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

Το V περιέχει μια ορθοκανονική βάση $\{\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2\}$ του χώρου γραμμών και μια ορθοκανονική βάση $\{\boldsymbol{q}_3\}$ του μηδενοχώρου N(A).

Υπολογίζουμε τώρα το AA^T :

$$AA^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Αναμένουμε να έχει τις ίδιες ιδιοτιμές με το A^TA , εκτός φυσικά από το 0. Επαληθεύουμε:

$$\det(AA^T - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 3,\ \lambda_2 = 1$$

Από το AA^T: Βρίσκουμε τα δεξιά ιδιοδιανύσματα του A^TA από τους ιδιοχώρους V(λ)=N(AA^T-λI):

• Για λ = 3:

$$(AA^T - \lambda_2 I)u_1 = 0 => \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} u_1 = \mathbf{0} \Rightarrow u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

• Επιλέγουμε διάνυσμα $\boldsymbol{u}_2$ ορθογώνιο με το ιδιοδιάνυσμα $\boldsymbol{u}_1$:

$$u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Εφ' όσον το AA^T είναι συμμετρικό, το $\boldsymbol{u}_2$ θα είναι οπωσδήποτε ιδιοδιάνυσμα για τη δεύτερη ιδιοτιμή. Στη συνέχεια κανονικοποιούμε τα $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$:

$$\|u_1\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \Rightarrow q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\|u_2\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \Rightarrow q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Το μητρώο U περιέχει την ορθοκανονική βάση του R^2 που κατασκευάστηκε:

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Πρόκειται για μια ορθοκανονική βάση του χώρου στηλών C(A). Ο αριστερός μηδενοχώρος έχει διάσταση 0 (N(A^T)={**0**}), αφού dim(N(A^T))=2-dim(C(A)=2-2=0. Συνεπώς δεν απεικονίζεται στην ανάλυση ιδιαζουσών τιμών, παρά μόνον με την …απουσία του, που υποδηλώνεται από τα μεγέθη στηλών και γραμμών των μητρώων U (2×2) και Σ (2×3) αντίστοιχα.

Μπορούμε τώρα να γράψουμε το A ως $A = U\Sigma V^T$, με τα U, V και **Σ** όπως υπολογίσθηκαν πιο πάνω:

$$U\Sigma V^T = \frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 2 & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \end{bmatrix}^T$$

♣ **[Matlab]** Η συνάρτηση SVD στο Matlab υλοποιεί την ανάλυση ιδιαζουσών τιμών. Επαληθεύουμε για την πιο πάνω διάσπαση:

```
A = [1 1 0; 0 1 1];
[U,S,V] = svd(A);
```

Τα U, S, V στην έξοδο απεικονίζονται σε αριθμητική κινητής ή σταθερής υποδιαστολής. Τα αποτελέσματα αντιστοιχούν στις παρακάτω τιμές:

$$U = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{V} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

Να παρατηρήσουμε ότι η διαφοροποίηση των προσήμων οφείλεται στις αναθέσεις που έγιναν κατά τον υπολογισμό των ορθογωνίων ιδιοδιανυσμάτων.

Άσκηση 3.

Δίνονται τα μητρώα

α) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ **β)** $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Να εξετασθεί αν είναι διαγωνιοποιήσιμα. Κατόπιν, να υπολογισθούν τα κανονικοποιημένα ιδιοδιανύσματα και να διατυπωθεί ο μετασχηματισμός διαγωνιοποίησης $A = P\Lambda P^{-1}$. Επίσης, να υπολογισθεί το P^{-1}.

Απαντήσεις

α) Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι :

$$\varphi_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathrm{I})$$

$$=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & -1\\ 1 & 2-\lambda & 1\\ 2 & 2 & 3-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & -1\\ 2-\lambda & 2-\lambda & 0\\ 2 & 2 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 3-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(2-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(3-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & -1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=(2-\lambda)(3-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

$$=(2-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda)$$

Οι ιδιοτιμές του A είναι οι ρίζες του $\varphi_A(\lambda)$: 2, 3, 1. Είναι διακεκριμένες και άρα υπάρχει ένα πλήρες σύνολο ιδιοδιανυσμάτων, δηλ. το A διαγωνιοποιείται. Υπολογίζουμε στη συνέχεια τα ιδιοδιανύσματα:

• Για $\lambda=1$ ο ιδιοχώρος $V(1) = N(A - I)$ είναι :

$$A-I=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Δηλαδή είναι $V(1) = \langle (-1, 1,0)^T \rangle$ και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\boldsymbol{v}_1=(-1, 1,0)^T$. Κανονικοποιούμε:

$$\boldsymbol{u}_1=\frac{\boldsymbol{v}_1}{\|\boldsymbol{v}_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^T$$

• Για λ=3 . Όμοια δουλεύοντας έχουμε:

$$A-3I=\begin{bmatrix}-2 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & 2 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -2 & 0 & -1\\ 2 & 2 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 4 & -2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 1/2\\ 0 & 1 & -1/2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Δηλαδή $V(3) = \langle (-1, 1, 2)^T \rangle$ και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\boldsymbol{v}_2=(-1, 1, 2)^T$. Υπολογίζουμε το μοναδιαίο διάνυσμα:

$$\|\boldsymbol{v}_2\|=\sqrt{1+1+4}=\sqrt{6}$$

$$\|\boldsymbol{u}_2\|=\frac{\boldsymbol{v}_2}{\|\boldsymbol{v}_2\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)^T$$

• Για λ=2:

$$A-2I=\begin{bmatrix}-1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1/2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Είναι $V(2) = \langle (-1, 1/2, 1)^T \rangle$ και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα $\boldsymbol{v}_3=(-2, 1, 2)^T$. Το μοναδιαίο διάνυσμα είναι:

$$\|\boldsymbol{v}_3\|=\sqrt{4+1+4}=\sqrt{9}=3$$

$$\|\boldsymbol{u}_3\|=\frac{\boldsymbol{v}_3}{\|\boldsymbol{v}_3\|}=\frac{1}{3}(-2,1,2)^T$$

Ο μετασχηματισμός διαγωνιοποίησης εκφράζεται:

$$A = P\Lambda P^{-1}$$

όπου:

$$\Lambda=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&3&0\\0&0&2\end{bmatrix},\quad P=\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}&\frac{-2}{3}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{3}\\ 0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-\sqrt{3}&-1&\frac{-2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\\ \sqrt{3}&1&\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\\ 0&2&\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\end{bmatrix},$$

$$P=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{2}{3}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{3}\\ 0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}-\sqrt{3}&-1&-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\\ \sqrt{3}&1&\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\\ 0&2&\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$$

Αντιστρέφουμε το P εφαρμόζοντας τη μέθοδο *Gauss-Jordan*:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}-\sqrt{3}&-1&\frac{-2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}&1&0&0\\ \sqrt{3}&1&\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}&0&1&0\\ 0&2&\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}-\sqrt{3}&-1&-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}&1&0&0\\ 0&0&-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}&1&1&0\\ 0&2&\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}&0&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}\sqrt{3}&1&\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}&-1&0&0\\ 0&2&\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}&0&0&1\\ 0&0&\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}&-1&-1&0\end{array}\right]\to$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}\sqrt{3}&0&\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}&-1&0&-\frac{1}{2}\\ 0&1&\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}&0&0&\frac{1}{2}\\ 0&0&\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}&-1&-1&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}\sqrt{3}&0&0&0&1&-\frac{1}{2}\\ 0&1&0&1&1&\frac{1}{2}\\ 0&0&\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}&-1&-1&0\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{-1}{2\sqrt{3}}\\ 0&1&0&1&1&\frac{1}{2}\\ 0&0&1&-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}&-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}&0\end{array}\right]$$

Επομένως:

$$P^{-1}=\sqrt{6}\begin{bmatrix}0&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{-1}{2\sqrt{3}}\\ 1&1&\frac{1}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}&-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&\sqrt{2}&\frac{-\sqrt{2}}{2}\\ \sqrt{6}&\sqrt{6}&\frac{\sqrt{6}}{2}\\ -3&-3&0\end{bmatrix}$$

β) Το μητρώο A είναι συμμετρικό, συνεπώς διαγωνιοποιείται και δέχεται μια πλήρη ορθοκανονική βάση ιδιοδιανυσμάτων. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι:

$\varphi_A(\lambda)=\det(A-\lambda\mathrm{I})=$

$$=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&1&0\\1&1-\lambda&0&1\\1&0&1-\lambda&1\\0&1&1&1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\lambda&1&1&0\\1&1-\lambda&0&1\\0&-(1-\lambda)&1-\lambda&0\\0&1&1&1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&0&-(1-\lambda)\\1&1-\lambda&0&1\\0&-(1-\lambda)&1-\lambda&0\\0&1&1&1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)^2[(1-\lambda)^2 - 4] = (1-\lambda)^2 (1-\lambda+2)(1-\lambda-2) = (1-\lambda)^2 (3-\lambda)(-\lambda-1)$$

Συνεπώς οι ιδιοτιμές του A είναι: 1 (διπλή), -1, 3. Υπολογίζουμε τη συνέχεια τα ιδιοδιανύσματα:

- Για την ιδιοτιμή λ = -1 έχουμε:

$$A+\mathrm{I} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Επομένως είναι:

$V(-1) = \langle(1, -1, -1, 1)^T\rangle$ και $\boldsymbol{v}_1 = (1, -1, -1, 1)^T$

και το μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα:

$$\boldsymbol{u}_1 = \frac{\boldsymbol{v}_1}{\|\boldsymbol{v}_1\|} = \frac{1}{2}(1,\ -1,\ -1,\ 1)^T$$

- Για τη διπλή ιδιοτιμή λ = 1:

$$A-\mathrm{I} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Είναι $\dim(V(1)) = \dim(A - \mathrm{I}) = 4 - \mathrm{rank}(A - \mathrm{I}) = 2$. Ο ιδιοχώρος δίνεται

$V(1) = \langle(0, -1, 1, 0)^T, (-1, 0, 0, 1)^T\rangle$

Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι ορθογώνια:

$\boldsymbol{v}_2 = (0, -1, 1, 0)^T$, $\boldsymbol{v}_3 = (-1, 0, 0, 1)^T$

Υπολογίζουμε τα μοναδιαία ιδιοδιανύσματα:

$$\boldsymbol{u}_2 = \frac{\boldsymbol{v}_2}{\|\boldsymbol{v}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 1, 0)^T, \quad \boldsymbol{u}_3 = \frac{\boldsymbol{v}_3}{\|\boldsymbol{v}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 0, 1)^T$$

- Για την ιδιοτιμή $\lambda = 3$:

$$A-3\mathrm{I}=\begin{bmatrix}-2&1&1&0\\1&-2&0&1\\1&0&-2&1\\0&1&1&-2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}0&-3&1&2\\1&-2&0&1\\0&2&-2&0\\0&1&1&-2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}0&-3&1&2\\1&-2&0&1\\0&2&-2&0\\0&3&-1&-2\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&-2&0&1\\0&-3&1&2\\0&2&-2&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{bmatrix}1&-2&0&1\\0&-3&1&2\\0&0&-4/3&4/3\\0&0&0&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&-2&0&1\\0&-3&1&2\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&-3&0&3\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

Επομένως:

$V(3) = <(1, 1, 1, 1)^T>$

$\boldsymbol{v}_4 = (1, 1, 1, 1)^T$

και το μοναδιαίο ιδιοδιάνυσμα:

$$\boldsymbol{u}_4 = \frac{\boldsymbol{v}_4}{\|\boldsymbol{v}_4\|} = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)^T$$

.

Τα $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{u}_3$, $\boldsymbol{u}_4$ συνιστούν μια πλήρη ορθοκανονική βάση ιδιοδιανυσμάτων του $\mathbf{R}^4$. Ο μετασχηματισμός διαγωνιοποίησης είναι $A = P\,\Lambda\,P^T$ όπου $P = [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{u}_4]$ ορθογώνιο μητρώο. Προφανώς είναι $P^{-1}=P^T$.

Άσκηση 3.

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα για το καθένα από τα εξής μητρώα

$$A=\begin{bmatrix}6&-3\\5&-2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}3&1\\-1&1\end{bmatrix}$$

πάνω στο σώμα **Q**. Να δειχθεί ότι το A είναι όμοιο προς ένα διαγώνιο μητρώο και να εξηγηθεί γιατί το B δεν είναι. Να βρεθεί ένα αντιστρέψιμο μητρώο P τέτοιο ώστε το $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιο.

Απ.

Αρχικά υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα για τα A και B.

$$\det(A-\lambda\mathrm{I})=\begin{vmatrix}6-\lambda&-3\\5&-2-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\lambda&-1+\lambda\\5&-2-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)\begin{vmatrix}1&-1\\5&-2-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-3)(\lambda-1)$$

Συνεπώς οι ιδιοτιμές του A είναι 3 και 1. Αφού το A έχει διαφορετικές ιδιοτιμές, διαγωνιοποιείται και είναι όμοιο με το διαγώνιο μητρώο που περιέχει τις ιδιοτιμές, [3 0; 0 1].

Αντίστοιχα για το B είναι:

$$|B-\lambda\mathrm{I}|=\begin{vmatrix}3-\lambda&1\\-1&1-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2-\lambda&2-\lambda\\-1&1-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)\begin{vmatrix}1&1\\-1&1-\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2$$

Άρα το B έχει διπλή ιδιοτιμή το 2. Επειδή dim(V(2))=1 υπάρχει μόνον ένα ιδιοδιάνυσμα και άρα το B δεν διαγωνιοποιείται. Συνεπώς δεν είναι όμοιο προς ένα διαγώνιο μητρώο.

Βρίσκουμε τα χαρακτηριστικά διανύσματα του A. Για λ=1 είναι

$$[A-\mathrm{I}]=\begin{bmatrix}5&-3\\5&-3\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}5&-3\\0&0\end{bmatrix}$$

Άρα $V(1)=<(3/5, 1)^T>$ και ένα ιδιοδιάνυσμα είναι $\boldsymbol{v}_1=(3/5, 1)^T$. Για λ=3:

$$[A-\mathrm{I}]=\begin{bmatrix}3&-3\\5&-5\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}3&-3\\0&0\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&-1\\0&0\end{bmatrix}$$

Άρα $V(3)=<(3/5, 1)^T>$ και ένα ιδιοδιάνυσμα είναι $\boldsymbol{v}_2=(1, 1)^T$. Συνεπώς είναι :

$P = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2]$ και

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3/5 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/5 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5/2 & 5/2 \\ 5/2 & -3/2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3/5 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Τέλος δίνεται το χαρακτηριστικό διάνυσμα $\mathbf{w}$ του B:

$$[B-2\mathrm{I}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

δηλ. $\mathbf{w} = (-1, 1)^T$.

Άσκηση 3.

Να βρεθεί ένα ορθογώνιο μητρώο Q τέτοιο ώστε το $Q^T AQ$ να είναι διαγώνιο, για τα εξής μητρώα A :

α) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & 4 \\ -4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ **β)** $\begin{bmatrix} 11 & 0 & 6 \\ 0 & 5 & 6 \\ 6 & 6 & -2 \end{bmatrix}$ **γ)** $\begin{bmatrix} 7 & -1 & -2 \\ -1 & 7 & 2 \\ -2 & 2 & 10 \end{bmatrix}$

Απ.

Όλα τα μητρώα είναι συμμετερικά, επομένως διαγωνιοποιούνται από ένα ορθογώνιο μητρώο Q που περιέχει την ορθοκανονική βάση ιδιοδιανυσμάτων. Σε κάθε περίπτωση υπολογίζουμε:

α) Βρίσκουμε τις ιδιοτιμές του A.

$$\det(A-\lambda\mathrm{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -4 \\ 0 & 5-\lambda & 4 \\ -4 & 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 5-\lambda & 4 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-9)(3-\lambda)(3+\lambda)$$

Για λ=9 είναι

$$A-9\mathrm{I} = \begin{bmatrix} -8 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \\ -4 & 4 & -6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & -8 & 8 \\ 0 & -4 & 4 \\ -4 & 4 & -6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -4 & 4 & -6 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Οπότε $V(9) = \langle(-1, 2, 2)^T\rangle$. Το κανονικοποιημένο το ιδιοδιάνυσμα είναι $\mathbf{v}_1=1/3(1, -2, -2)^T$.

Για λ=3:

$$A-3\mathrm{I} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Είναι $V(3) = \langle(2, 2, -1)^T\rangle$. Το κανονικοποιημένο ιδιοδιάνυσμα είναι $\mathbf{v}_2=1/3(1, -2, -2)^T$.

Για λ=-3:

$$A+3\mathrm{I} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 8 & 4 \\ -4 & 4 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Είναι $V(-3) = \langle(2, -1, 2)^T\rangle$ και το κανονικοποιημένο ιδιοδιάνυσμα $\mathbf{v}_3=1/3(2, -1, 2)^T$.

Τα $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_1$ είναι ορθογώνια μεταξύ τους, όπως αναμενόταν. Άρα αποτελούν ορθοκανονική βάση ιδιοδιανυσμάτων. Το ζητούμενο ορθογώνιο μητρώο Q συνεπώς είναι

$$Q=[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\boldsymbol{v}_3]=\begin{bmatrix}1/3 & 2/3 & 2/3\\ -2/3 & 2/3 & -1/3\\ -2/3 & -1/3 & 2/3\end{bmatrix}$$

β) Όμοια υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές του A. Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι

$$\det(A\text{-}\lambda\mathrm{I})=\begin{vmatrix}11-\lambda & 0 & 6\\ 0 & 5-\lambda & 6\\ 6 & 6 & -2-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5-\lambda & 6\\ 6 & -2-\lambda\end{vmatrix}+6\begin{vmatrix}0 & 6\\ 5-\lambda & 6\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+7)(\lambda-7)(\lambda-14)$$

Υπολογίζουμε τα κανονικοποιημένα ιδιοδιανύσματα $\boldsymbol{v}_i$.

Για λ=-7:

$$A+7\mathrm{I}=\begin{bmatrix}18 & 0 & 6\\ 0 & 12 & 6\\ 6 & 6 & 5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}18 & 0 & 6\\ 0 & 12 & 6\\ 0 & 6 & 3\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 1/3\\ 0 & 1 & 1/2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Άρα

V(-7) = <(-1/3, -1/2, 1)$^{\mathrm{T}}$>,

$$\left\|(-1/3,\ -1/2,\ 1)^{\mathrm{T}}\right\|=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{4}+1}=\sqrt{\frac{49}{36}}=\frac{7}{6}$$

$\boldsymbol{v}_1$ = 6/7(-1/3, -1/2, 1)$^{\mathrm{T}}$

Για λ=7 :

$$A-7\mathrm{I}=\begin{bmatrix}4 & 0 & 6\\ 0 & -2 & 6\\ 6 & 6 & -9\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}4 & 0 & 6\\ 0 & -2 & 6\\ 0 & 6 & -9-6\times3/2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}4 & 0 & 6\\ 0 & -2 & 6\\ 0 & 6 & -18\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 3/2\\ 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Άρα

V(7) = <(3/2, 3, 1)$^{\mathrm{T}}$>,

$$\left\|(-3/2,\ 3,\ 1)^{\mathrm{T}}\right\|=\sqrt{\frac{9}{4}+9+1}=\sqrt{\frac{49}{4}}=\frac{7}{2}$$

$\boldsymbol{v}_2$ = 2/7(-3/2, 3, 1)$^{\mathrm{T}}$

Για λ=14 :

$$A-14\mathrm{I}=\begin{bmatrix}-3 & 0 & 6\\ 0 & -9 & 6\\ 6 & 6 & -16\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-3 & 0 & 6\\ 0 & -9 & 6\\ 0 & 6 & -16+6\times2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-3 & 0 & 6\\ 0 & -9 & 6\\ 0 & 6 & -4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & -2/3\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Άρα

V(14) = <(2, 2/3, 1)$^{\mathrm{T}}$>,

$$\left\|(2,\ 2/3,\ 1)^{\mathrm{T}}\right\|=\sqrt{4+\frac{4}{9}+1}=\sqrt{\frac{49}{9}}=\frac{7}{3}$$

$\boldsymbol{v}_3$ = 3/7(2, 2/3, 1)$^{\mathrm{T}}$

Τα $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_1$ είναι ορθογώνια μεταξύ τους, συνεπώς αποτελούν ορθοκανονική βάση ιδιοδιανυσμάτων. Το ζητούμενο ορθογώνιο μητρώο Q είναι

$$Q=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}-2 & -3 & 6\\ -3 & 6 & 2\\ 6 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

γ) Βρίσκουμε τις ιδιοτιμές του *A*:

$$\det(A-\lambda \mathrm{I})=\begin{vmatrix}7-\lambda & -1 & -2\\ -1 & 7-\lambda & 2\\ -2 & 2 & 10-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6-\lambda & 6-\lambda & 0\\ -1 & 7-\lambda & 2\\ -2 & 2 & 10-\lambda\end{vmatrix}=(6-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 7-\lambda & 2\\ -2 & 2 & 10-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(6-\lambda)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 8-\lambda & 2\\ -2 & 4 & 10-\lambda\end{vmatrix}=(6-\lambda)\begin{vmatrix}8-\lambda & 2\\ 4 & 10-\lambda\end{vmatrix}=(6-\lambda)\begin{vmatrix}12-\lambda & 12-\lambda\\ 4 & 10-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(6-\lambda)^2(12-\lambda)$$

Άρα οι ιδιοτιμές είναι οι 6 (διπλή) και 12. Υπολογίζουμε στη συνέχεια τα ιδιοδιανύσματα $\boldsymbol{v}_i$ (i=1,2,3) τα οποία κανονικοποιούμε στα $\boldsymbol{q}_i$ (i=1,2,3).

Για λ=12:

$$A-12\mathrm{I}=\begin{bmatrix}-5 & -1 & -2\\ -1 & -5 & 2\\ -2 & 2 & -2\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-5 & -1 & -2\\ 0 & -24/5 & 12/5\\ 0 & 12/5 & -6/5\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 0 & 1/2\\ 0 & 1 & -1/2\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Άρα $\boldsymbol{v}_1$ = $(-1, 1, 2)^T$, με $\|\boldsymbol{v}_1\|^2$= 6, άρα $\boldsymbol{q}_1=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)^T$:

Για λ=6:

$$A-6\mathrm{I}=\begin{bmatrix}1 & -1 & -2\\ -1 & 1 & 2\\ -2 & 2 & 4\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

Είναι V(6) = <$(1, 1, 0)^T$, $(2, 0, 1)^T$> και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι $\boldsymbol{v}_2$ = $(1, 1, 0)^T$ και $\boldsymbol{v}_3$ = $(2, 0, 1)^T$, τα οποία δεν είναι ορθογώνια μεταξύ τους. Επομένως τα ορθοκανονικοποιούμε:

$$\boldsymbol{u}_2=\boldsymbol{v}_2=(1,1,0)^T$$

$$\boldsymbol{u}_3=\boldsymbol{v}_3-\frac{\boldsymbol{v}_3^T\boldsymbol{u}_2}{\|\boldsymbol{u}_2\|^2}\boldsymbol{u}_2=(2,0,1)^T-\frac{1}{2}(2,0,1)^T(1,1,0)=(2,0,1)^T-(1,1,0)^T$$

$$=(1,-1,1)^T$$

Κανονικοποιούμε:

$$\boldsymbol{q}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T$$

$$\boldsymbol{q}_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^T$$

Τα $\boldsymbol{q}_1$, $\boldsymbol{q}_2$, $\boldsymbol{q}_3$ συνιστούν ορθοκανονική βάση ιδιοδιανυσμάτων. Το ζητούμενο ορθογώνιο μητρώο περιέχει τη βάση αυτή:

$$Q=[\boldsymbol{q}_1,\boldsymbol{q}_2,\boldsymbol{q}_3]=\begin{bmatrix}-1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3}\\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3}\\ 2/\sqrt{6} & 0 & 1/\sqrt{3}\end{bmatrix}$$

7.2 Ελάχιστα Πολυώνυμα

Άσκηση ΕΠ-1

Να βρεθεί το *minimum πολυώνυμο* των εξής μητρώων:

α) $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ **β)** $B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$

Απαντήσεις

α) Βρίσκουμε πρώτα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A. Αρχικά υπολογίζουμε τις ιδιοτιμές του:

$$\varphi_A(\lambda) = \begin{vmatrix}1-\lambda & -1\\ -1 & 1-\lambda\end{vmatrix} = (1 - \lambda)^2 - 1 = (1 - \lambda -1)(1 - \lambda + 1) = -\lambda(-\lambda + 2)$$

Άρα οι ιδιοτιμές είναι οι $\lambda_1=0$ και $\lambda_2=2$. Επειδή $A\in\mathbf{R}^{2\times 2}$ και οι ιδιοτιμές είναι δύο διακριτές, το ελάχιστο πολυώνυμο του A είναι το $\lambda(\lambda - 2)$. Άρα έχουμε:

$$(\mathrm{I} - A)(2\mathrm{I} - A) = \left(\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}\right) =$$

$$=\begin{bmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

ii) Βρίσκουμε πρώτα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο υπολογίζοντας τις ιδιοτιμές του A.

$$\varphi_B(\lambda) = \begin{bmatrix}1-\lambda & 1 & 0\\ 0 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 0 & 2-\lambda\end{bmatrix} = (1 - \lambda)^2 (2 - \lambda) = 0$$

Αφού οι διακριτοί γραμμικοί παράγοντες του ελάχιστου πολυωνύμου συμπίπτουν με τους αυτούς του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, το ελάχιστο πολυώνυμο πρέπει να είναι ένα από τα πολυώνυμα

$f_1(x) = (1 - x)(2 - x)$ και $f_2(x) = (1 - x)^2(2 - x)$.

Επιλέγουμε ως ελάχιστο πολυώνυμο αυτό που δίνει το μηδενικό μητρώο. Είναι

$$f_2(A) = (\mathrm{I} - A)^2(2\mathrm{I} - A) = \begin{bmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&-1&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

Άρα το ελάχιστο πολυώνυμο είναι το $f_1(x)$.

Άσκηση ΕΠ-2

Υπολογίζοντας το ελάχιστο πολυώνυμο, να καθορίσετε ποια από τα επόμενα μητρώα είναι διαγωνιοποιήσιμα.

α) $A=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&3&2\\0&-1&0\end{bmatrix}$, **β)** $B=\begin{bmatrix}1&4&-2&-4\\0&1&0&-2\\0&4&-1&-4\\0&0&0&-1\end{bmatrix}$

Απαντήσεις

α) Βρίσκουμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο:

$$\begin{vmatrix}1-\lambda&-1&-1\\0&3-\lambda&2\\0&-1&-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2-3\lambda+2) = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$$

Το ελάχιστο πολυώνυμο θα είναι ένα από τα $f_1(x) = (1-x)(2-x)$ και $f_2(x) = (1-x)^2(2-x)$.

Για το $f_1(A)$ έχουμε:

$$f_1(A) = (I-A)(2I-A) = \left(\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&3&2\\0&-1&0\end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&-1&-1\\0&3&2\\0&-1&0\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}0&1&1\\0&-2&-2\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&-1&-2\\0&1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

Συνεπώς το ελάχιστο πολυώνυμο είναι το $f_1(x) = (1-x)(2-x)$. Επειδή έχει δύο διακεκριμένες ρίζες, το A διαγωνιοποιείται.

β) Βρίσκουμε πρώτα το χαρακτηριστικό πολυώνυμο

$$\varphi_B(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda&4&-2&-4\\0&1-\lambda&0&-2\\0&4&-1-\lambda&-4\\0&0&0&-1-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda&0&-2\\4&-1-\lambda&-4\\0&0&-1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)(-1-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda&0\\4&-1-\lambda\end{vmatrix} = (\lambda+1)^2(\lambda-1)^2$$

Συνεπώς το ελάχιστο πολυώνυμο του B μπορεί να είναι ένα από τα $(\lambda+1)^2(\lambda-1)^2$, $(\lambda+1)(\lambda-1)$, $(\lambda+1)(\lambda-1)^2$, $(\lambda+1)^2(\lambda-1)$.

Εξετάζουμε το $(\lambda+1)(\lambda-1)$:

$$(B+I)(B-I) = \begin{bmatrix}2&4&-2&-4\\0&2&0&-2\\0&4&0&-4\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&4&-2&-4\\0&0&0&-2\\0&4&-2&-4\\0&0&0&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

Άρα, το ελάχιστο πολυώνυμο είναι το $(\lambda+1)(\lambda-1)$ και επειδή έχει διακεκριμένες ρίζες, το B διαγωνιοποιείται.

◘ Εφαρμογή - Ιδιοποσά Μετασχηματισμού Ανάκλασης

[* *Περαιτέρω συζήτηση με ιδιοτιμές*]

Αν επιλέξουμε το $\boldsymbol{u}$ να είναι μοναδιαίο ($\|\boldsymbol{u}\|=1$), τότε το μητρώο ανάκλασης είναι:

$$S = 2\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}} - \mathrm{I}_n$$

Οι ιδιοτιμές του S προκύπτουν εύκολα: αν μ είναι ιδιοτιμή του του $\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}$, τότε από γνωστή ιδιότητα η 2μ -1 είναι ιδιοτιμή του S. Αφού $\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}$ ιδιάζον, είναι $\mu_1=0$. Η άλλη ιδιοτιμή προκύπτει άμεσα: $\mu_2=\mathrm{trace}(\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}=1$. Συνεπώς οι ιδιοτιμές του S είναι $\lambda_1=0-1=-1$ και $\lambda_1=2-1=1$.

Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ συμπίπτουν με αυτά του $\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}$. από τις ταυτότητες (έστω $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2)^{\mathrm{T}}$):

$$(\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}})(-a_2, a_1)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\alpha}\,(a_1, a_2)(-a_2, a_1)^{\mathrm{T}} = 0\boldsymbol{\alpha} = \mu_1(-a_2, a_1)^{\mathrm{T}} \Rightarrow \boldsymbol{v}_1 = (-a_2, a_1)^{\mathrm{T}}$$ (διάνυσμα κάθετο στο $\boldsymbol{\alpha}$)

$$(\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{u} = (\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u})\boldsymbol{u} = \mu_2(\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}) \Rightarrow \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{u}$$

Επί πλέον είναι $\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}_2=0$. Το μητρώο $U=[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]$ των ιδιοδιανυσμάτων είναι συμμετρικό και ορθογώνιο. Το φασματικό θεώρημα για το συμμετρικό μητρώο S δίνει την διαγωνιοποίηση:

$$S = U\Lambda U^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -a_2 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -a_2 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -a_2 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -a_2 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}$$

Η βασική ιδιότητα της ανάκλασης μπορεί τώρα να τεκμηριωθεί άμεσα από την παραπάνω διάσπαση. Λαμβάνοντας τη δύναμη S^k, έχουμει:

$$S^k = U\Lambda^k U = U\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^k U$$

και επειδή:

$$\Lambda^k = \begin{cases} \Lambda, k=2n+1 \\ \mathrm{I}, k=2n \end{cases},$$

προκύπτει:

$$S^k = U\Lambda^k U = \begin{cases} U\Lambda U = S, k=2n+1 \\ U\mathrm{I}U = UU = \mathrm{I}, k=2n \end{cases}$$

Η Γραμμική Άλγεβρα σε αδρές γραμμές (αντί «τυπολογίου»)

♦ Πράξεις με Μητρώα

Μορφές Πολ/σμού μητρώων:

– *Αν* $A\in R^{m\times n}$, $B\in R^{n\times k}$ και $\boldsymbol{a}_i$, $\boldsymbol{b}_j$ στήλες των A, B αντίστοιχα, $\boldsymbol{r}_i$ γραμμές του A τότε

– $AB=(\boldsymbol{a}_i^T\boldsymbol{b}_j)_{ij} = A[\boldsymbol{b}_1 \ldots \boldsymbol{b}_n] = [A\boldsymbol{b}_1 \ldots A\boldsymbol{b}_n] = [\boldsymbol{r}_1^T;\ldots;\boldsymbol{r}_m^T]B = [\boldsymbol{r}_1^T B;\ldots;\boldsymbol{r}_m^T B]$ = *άθροισμα γινομένων (στήλη A)×(στήλη B).*

– *Ο πολ/σμός από αριστερά επιδρά στις γραμμές, από δεξιά στις στήλες.*

***Λοιπές ιδιότητες*:**

– Αν $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\in\mathbf{R}^n$, $A,B\in R^{m\times n}$, $\lambda,\mu\in R$: $(A\pm B)^T=A^T\pm B^T$, $(A\pm B)\boldsymbol{v}=A\boldsymbol{v}\pm B\boldsymbol{v}$, $A(\mu\boldsymbol{v}\pm\lambda\boldsymbol{w})=\mu A\boldsymbol{v}\pm\lambda A\boldsymbol{w}$,

– Αν $A,B,C\in\mathbf{R}^{n\times n}$ $(A+B)^2=A^2+B^2\pm BA\pm AB$, $(A+B)C=AC+BC$, $C(A+B)=CA+CB$, Γενικά $AB\neq BA$

– Αν $\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}\in R^n$, $A\in\mathbf{R}^{m\times n}$: $(A\boldsymbol{v})^T=\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{v}^T$, $(\boldsymbol{v}\boldsymbol{w}^T)^T=\boldsymbol{w}\boldsymbol{v}^T$, $(\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{w})^T=\boldsymbol{w}^T\boldsymbol{v}$

– Αν $\boldsymbol{d}\in R^m$, $A\in\mathbf{R}^{n\times n}$: $IA=AI=A$, $A\mathrm{diag}(\boldsymbol{d})=[d_1\boldsymbol{a}_1 \ldots d_n\boldsymbol{a}_n]$, *αν* $\boldsymbol{d}\in R^n$: $\mathrm{diag}(\boldsymbol{d})A=[d_1\boldsymbol{r}_1^T;\ldots;d_n\boldsymbol{r}_n^T]$

– ***Αντίστροφος***. Αν $A\in\mathbf{R}^{n\times n}$, $\exists X\in R^{n\times n}$: $AX=XA=I$, τότε X ▷ *αντίστροφος* του A, ▷ $X=A^{-1}$. –Αν $AX=I \Rightarrow XA=I \Rightarrow X=A^{-1}$. $-(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$. $-A^{-1}=[\boldsymbol{x}_1,\ldots,\boldsymbol{x}_n]$ υπολογίζεται από n συστήματα $A\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{e}_i$. $-(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$. αν $A=\mathrm{diag}(d_1,d_2,\ldots,d_n)$, $d_i\neq\mathbf{0}$ $\Rightarrow A^{-1}=\mathrm{diag}(1/d_1,1/d_2,\ldots,1/d_n)$. –Αν P στοιχ. μεταθετικό: $P^{-1}=P$, αν P μεταθετικό: $P^{-1}=P^T$.

♦ Στοιχειώδεις Μετασχηματισμοί

Αν $A\in R^{m\times n}$ και r_i γραμμή iτου A:

– Ο σ.μ.γ. $r_i\rightarrow r_i\pm ar_j$ ισοδυναμεί με πολ/σμό *από αριστερά* με $E_{ij}=I\pm a\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j^T$: $A\xrightarrow{r_i=r\pm ar_j}B \Leftrightarrow B=E_{ij}A$.

– Ο αντίστοιχος σ.μ.σ. ισοδυναμεί με πολ/σμό *από δεξιά* με $E_{ji}=I\pm a\boldsymbol{e}_j\boldsymbol{e}_i^T$: $B=AE_{ji}$.

– Αντ/ση γραμμών i, $j \Leftrightarrow B=P_{ji}A$, P_{ji}: σ. μεταθετικό.

– Αντ/ση στηλών i, $j \Leftrightarrow B=P_{ji}A$, P_{ji}: σ. μεταθετικό.

– *Όλοι οι σ.μ.γ. είναι αντιστρεπτοί*: $(E_{ij}(\alpha))^{-1}=E_{ij}(-\alpha)$, $P^2=I$.

♦ Απαλοιφή και Γραμμικά Συστήματα

– ***Βασική αρχή:*** Για κάθε $A\in R^{m\times n}$ $\exists$ κλιμακωτό U και αντ/μο E τέτοια ώστε $U=EA$, όπου E γινόμενο *μητρώων απαλοιφής* και *μετάθεσης*. Ομοίως υπάρχει *ένα μοναδικό R σε α.κ.μ.*: $R=HA$. Το σύστημα $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \sim U\boldsymbol{x}=U\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c} \sim R\boldsymbol{x}=R\boldsymbol{b}=\boldsymbol{d}$ (*γραμμοϊσοδυναμία*).

– ***Διαδικασία απαλοιφής με σ.μ.γ.*: [*A* b] → [*U* c].** *Με μετασχηματισμούς με μητρώα απαλοιφής*:

$$(\ldots E_{32}P_2E_{m1}\ldots E_{31}E_{21}P_1)A\boldsymbol{x}=(\ldots E_{32}P_2E_{m1}\ldots E_{31}E_{21}P_1)\boldsymbol{b}.$$
$$U=(\ldots E_{32}P_2E_{m1}\ldots E_{31}E_{21}P_1)A,\ \boldsymbol{c}=(\ldots E_{32}P_2E_{m1}\ldots E_{31}E_{21}P_1)\boldsymbol{b}$$

– ***Παραγοντοποίηση LU***: Αν δεν υπάρχουν εναλλαγές γραμμών *και A* αντ/μο, τότε *το A ανακτάται από το U*: $A=(E_{21}^{-1}E_{31}^{-1}\ldots E_{m1}^{-1}E_{32}^{-1}\ldots)U=LU$, L=κ.τ.μ., ισοδύναμη μορφή : $A=LDU$, όπου $D=\mathrm{diag}(\boldsymbol{u}_1,\ldots\boldsymbol{u}_n)$. Αν *A συμμετρικό*: *παραγοντοποίηση* $A=LDU$. Γενική μορφή με εναλλαγές γραμμών: $PA=LU$.

– ***Διαδιακασία αντιστροφής Gauss-Jordan*** *με μετασχηματισμούς*: $[I|A]\rightarrow[A^{-1}|I]$.

– ***Μητρώα τάξης* 1**: γενική μορφή: $\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T$. Συμμετρικά: $\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T$ ή $-\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^T$.

– ***Μηδενοχώρος* N(*A*)** (*ομογενές*: $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$): $N(A)=\langle\boldsymbol{s}_1,\ldots,\boldsymbol{s}_{n-r}\rangle$, $r=\mathrm{rank}(A)$ = αριθμός οδηγών. $\boldsymbol{s}_i$ *ειδική λύση-διάνυσμα βάσης* του $N(A)$ = λύση του $A\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ με πίσω αντ/ση θέτοντας $\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{e}_i\in\mathbf{R}^{n-r}$, για $i=1,\ldots,n-r$.
$-n>m \Rightarrow N(A)\neq\mathbf{0}$ (άπειρες λύσεις).

– ***Λύση συστήματος*** $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$: $\boldsymbol{x}_\pi=\boldsymbol{x}_\mu+c_1\boldsymbol{s}_1+\ldots+c_{n-r}\boldsymbol{s}_{n-r}$, όπου: $\boldsymbol{x}_\mu$ λύση της $U\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ για $\boldsymbol{x}_F=0$, $\boldsymbol{s}_i$: στοιχείο της βάσης του $N(A)$ (*ειδική λύση*), $r=\mathrm{rank}(A)$, $c_i\in\mathbf{R}$. *Συνθήκη επιλυσιμότητας*: $\mathrm{rank}(A)=\mathrm{rank}([A\ \boldsymbol{b}])$.

– *Ιδιότητα*: $A=CL$ (*ανεξ. στήλες A × μη μηδενικές γραμμές του R*)

– ***Γραμμική ανεξαρτησία:*** m διανύσματα $\boldsymbol{a}_i\in\mathbf{R}^n$ είναι γ.α. $\Leftrightarrow$ $(\Sigma\boldsymbol{a}_ix_i=\mathbf{0} \Rightarrow x_i=\mathbf{0}) \Leftrightarrow N(A)=\{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow \mathrm{rank}(A)=n$.– Αν $A\in\mathbf{R}^{n\times n}$ τότε A αντιστρέψιμο $\Leftrightarrow$ $(\mathrm{rank}(A)=n) \Leftrightarrow$ (στήλες $\boldsymbol{a}_i$ γ.α.) $\Leftrightarrow$ (γραμμές $\boldsymbol{r}_i$ γ.α.) $\Leftrightarrow$ $(\det(A)\neq 0)$

–

♦ Διανυσματικοί Χώροι – Βάση και Διάσταση

– W υποχώρος του K-χώρου V ⇔ ($\forall \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in W$, $\lambda\in$K: $\boldsymbol{u}+\lambda\boldsymbol{v}\in W$). Αν $\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_k\in V \Rightarrow W=<\boldsymbol{u}_1,\ldots,\boldsymbol{u}_k>$ υποχώρος του V.
– **Βάση και Διάσταση:** $S=\{\boldsymbol{v}_1\ldots,\boldsymbol{v}_n\}$ *βάση* K-χώρου V ⇔ ($V=<S>$) ∧ (S *γ.α.*). Τότε $\dim(V)=n$, μοναδικό.
– Αν $\dim(V)=n$: τότε n γ.α. διανύσματα, ή n *γεννήτορες* του V, αποτελούν βάση.
– m γ.α διανύσματα με $m<n$ μπορούν πάντα να επεκταθούν σε βάση.
– Από ένα σύνολο γεννητόρων του V μπορεί πάντα να εξαχθεί μια βάση.
– **Θεμ.Θεώρημα ΓΑ-1**: $\dim(\mathrm{N}(A))+\mathrm{rank}(A)=n$, $\dim(\mathrm{C}(A)=\dim(\mathrm{R}(A))=\mathrm{rank}(A)$.
– Αν W, U υποχώροι του V : $\dim(U)+\dim(W) = \dim(W+U)+\dim(W\cap U)$. Αν $V=W+V$ και $W\cap U=\varnothing \Rightarrow V=U\oplus W$ (*ευθύ άθροισμα*).Αν W υποχ. τουV, ∃ U υποχ. του V: $V=U\oplus W$.

♦ Ορίζουσες

– **Ιδιότητες.** Αν $A\in\mathrm{R}^{n\times n}$: αν P απλή μετάθεση γραμμής/στήλης: $\det(PA)=\det(AP)=-\det(A)$, αν P σύνθετη μετάθεση: $\det(PA)=\det(AP)=(-1)^k\det(A)$, $\det(\mathrm{I})=1$, $\det(A)=\det(A^{\mathrm{T}})$, αν $c\in\mathbf{R}$: $\det(cA)=c^n\det(A)$.
– ***Γραμμικότητα.*** Αν E, D μητρώα μετασχ. γραμμών και στηλών αντίστοιχα: $\det(EA)=\det(AD)=\det(A)$, $\det(AB)=\det(A)\det(B)$,
– ***Υπολογισμός.*** (α) $\det(A)=\det(U)=(-1)^k\det(L)$, U: γραμμοϊσοδύναμο α.τ.μ. ή κ.τ.μ. του A, k=αριθμός εναλλαγών γραμμών. (β) $\det(A)=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}C_{ik}$, C_{ik}=*αλγεβρικό συμπλήρωμα* = $(-1)^{i+j}\det(A_{ij})$.
(γ) *Μεγάλος Τύπος*: det(A)= $\det(A)=\sum \pm a_{1\alpha}a_{2\beta}\ldots a_{2\omega}$ (άθροισμα ως προς όλες τις $n!$ μεταθέσεις στηλών (δ) με συστηματική χρήση *τέλειας επαγωγής*.

-***Εφαρμογές***. (α) *Αντίστροφος από ορίζουσα*: $(A^{-1})_{ij}=\dfrac{C_{ji}}{\det(A)}, A^{-1}=\dfrac{C^T}{\det(A)}$, (C: μ. *αλγεβρικών συμπληρωμάτων*).

(β)*Μέθοδος Cramer – λύση του* $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$: Αν $A_i=[\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots\boldsymbol{a}_{i-1},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}_{i+1},\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n]$, τότε $x_i=\dfrac{\det(A_i)}{\det(A)}, i=1,\ldots,n$.

♦ Εσωτ. Γινόμενο – Ορθογωνιότητα

– Συνθήκη ορθογωνιότητας για διαν/τα: $<\boldsymbol{x},\boldsymbol{v}>=0$. Στον $\mathbf{R}^n$: $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}=0$. *Μήκος*: $\|\boldsymbol{v}\|=(<\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}>)^{1/2}$, *μοναδιαίο διάνυσμα*: $\boldsymbol{v}/\|\boldsymbol{v}\|$.
– ***Διάνυσμα ορθογώνιο σε χώρο V:*** αν $\boldsymbol{x}\in\mathrm{N}(A^{\mathrm{T}})$:ή $A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0$, όπου το A περιέχει μια βάση του V.
– ***Ορθογώνιο Συμπλήρωμα.*** Αν $S\subseteq V$, $S^{\perp}=\{\boldsymbol{v}\in V \mid <\boldsymbol{v}, \boldsymbol{s}>=0, \forall \boldsymbol{s}\in S\}$: *ορθογώνιο συμπλήρωμα* του S.
– ***Ορθ/ση Gram-Schmidt.*** *Για κάθε δ.χ. μορεί να κατασκευασθεί μια αρθοκανονική βάση*: Αν $\{\boldsymbol{v}_i\}$ ($i=1,\ldots,n$) μια βάση, τότε μια *ορθογώνια βάση* δίνεται:

$$\boldsymbol{u}_1=\boldsymbol{v}_1,\ \boldsymbol{u}_2=\boldsymbol{v}_2-(<\boldsymbol{v}_2\text{-}\boldsymbol{u}_1>/\|\boldsymbol{u}_1\|^2)\boldsymbol{u}_1,\ \boldsymbol{u}_3=\boldsymbol{v}_3-(<\boldsymbol{v}_3\text{-}\boldsymbol{u}_2>/\|\boldsymbol{u}_2\|^2)\boldsymbol{u}_2\text{-}\ (<\boldsymbol{v}_3\text{-}\boldsymbol{u}_1>/\|\boldsymbol{u}_1\|^2)\boldsymbol{u}_1,\ldots$$

– ***Θεμ. Θεώρημα ΓΑ-2:***

$$\mathrm{N}(A)\perp\mathrm{R}(A),\ \mathrm{N}(A^{\mathrm{T}})\perp\mathrm{C}(A),\ \mathrm{N}(A)=\mathrm{R}(A)^{\perp},\ \mathrm{N}(A^{\mathrm{T}})=\mathrm{C}(A)^{\perp}\ \text{και}$$
$$\mathrm{R}^n=\mathrm{C}(A^{\mathrm{T}})\oplus\mathrm{C}(A^{\mathrm{T}})^{\perp}=\mathrm{C}(A^{\mathrm{T}})\oplus\mathrm{N}(A),\ \mathrm{R}^m=\mathrm{C}(A)\oplus\mathrm{C}(A)^{\perp}=\mathrm{C}(A)\oplus\mathrm{N}(A^{\mathrm{T}})$$

– ***Θεμελίωση προβολών***:

$$\forall\boldsymbol{x}\in\mathrm{R}^n\text{: } \boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_r+\boldsymbol{x}_N,\ \textit{με μοναδικό τρόπο,}\ \text{όπου}\ \boldsymbol{x}_r\in\mathrm{R}(A),\ \boldsymbol{x}_N\in\mathrm{N}(A)$$
$$\forall\boldsymbol{x}\in\mathrm{R}^m\text{: } \boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}_c+\boldsymbol{y}_N,\ \textit{με μοναδικό τρόπο,}\ \text{όπου}\ \boldsymbol{y}_c\in\mathrm{C}(A),\ \boldsymbol{y}_N\in\mathrm{N}(A^{\mathrm{T}})$$

– ***Ορθογώνια μητρώα***: $Q^{\mathrm{T}}Q=\mathrm{I}$, *Ορθοκανονική βάση*: ορθογώνια με μοναδιαία διανύσματα, $Q^TQ=\mathrm{I}$. *Ορθογώνια βάση*: $Q^TQ=\mathrm{diag}(\boldsymbol{d})$.

♦ Ορθογώνιες Προβολές

– ***Προβολή επί ευθείας*** Προβολή p διανύσματος $\boldsymbol{b}$ σε ευθεία $S=<\boldsymbol{a}>$: $p=P\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}/\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}$ (P=μητρώο προβολής). Μητρώα προβολής επί ευθείας S: όλα τα συμμετρικά μητρώα τάξης 1 $P=\boldsymbol{u}\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}$, με $\|\boldsymbol{u}\|=1$.
– ***Προβολή επί Δ.χ.*** Αν $V=<\boldsymbol{\alpha}_1,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_n>$ και $A=[\boldsymbol{\alpha}_1\ldots\boldsymbol{\alpha}_n]$, τότε η προβολή του $\boldsymbol{\beta}$ επί του V είναι: $\boldsymbol{p}=A\boldsymbol{c}$, όπου $\boldsymbol{c}$ λύση του συστήματος $A^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{c}=A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$. Μητρώο προβολής: $P=A(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}A^{\mathrm{T}}$. Ιδιότητες μητρώων προβολής P: $P^2=P$, $P^{\mathrm{T}}=P$. Με χρήση ορθ/κής βάσης Q είναι $P=QQ^{\mathrm{T}}$.
– ***Μεθ. Ελαχ. Τετραγώνων*** Γενικός τύπος: αν $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ μη επιλύσιμο, επιλύεται η $A^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{c}=A^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}$, συνθήκη: ελαχιστοποίηση σφάλματος $E^2=\|A\boldsymbol{c}\text{-}\boldsymbol{b}\|^2$.

♦ Ιδιοποσά και Διαγωνιοποίηση

– ***Ορισμός***: Αν $A \in R^{n\times n}$: $A\boldsymbol{v}=\lambda\boldsymbol{v}$ με $\boldsymbol{v}\neq 0 \Rightarrow \lambda$: ιδιοτιμή, $\boldsymbol{v}$: ιδιοδιάνυσμα. Υπολογισμός λ: $\varphi_A(\lambda)=\det(A-\lambda I)=0$. Υπολογισμός $\boldsymbol{v}$: στοιχείο βάσης του $N(A-\lambda I)$.

– ***Βασικές ιδιότητες***: (α) Αν $(\lambda, \boldsymbol{v})$ ιδιοποσά του A: $(\lambda p+q, \boldsymbol{v})$ ιδιοποσά του $pA+qI$, $(\lambda^k, \boldsymbol{v})$ ιδιοποσά του A^k, $(P(\lambda), \boldsymbol{v})$ ιδιοποσά του $P(A)$, όπου P=πολυώνυμο. (β) $trace(A)=\lambda_1+\ldots+\lambda_n$, (γ) $\det(A)= \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n$. (δ) λ ιδιοτιμή $A \Leftrightarrow \lambda$ ιδιοτιμή A^T. (γ) Θ. *Caley-Hamilton*: $\varphi_A(A)=0$.

– ***Διαγωνιοποίηση.*** Μετασχηματισμός: $A=V\Lambda V^{-1}$, V=βάση ιδιοδιανυσμάτων, Λ: διαγώνιο με τις ιδιοτιμές. *Α διαγωνοποιήσιμο*: ∃ *πλήρης βάση ιδιοδιανυσμάτων*. Τότε ισχύει: $A=V\Lambda V^{-1}$. Ιδιότητα: $A^k=V\Lambda^k V^{-1}$ (*μέθοδος υπολογισμού* του A^k). *Ομοιότητα: Α, Β όμοια* ⇔ υπάρχει αντ/μος Μ: $B=M^{-1}AM$. Αν A, B όμοια, έχουν ίδιες ιδιοτιμές. $A=V\Lambda V^{-1}$: *μετασχηματισμός ομοιότητας*.

– ***Βασικά Θεωρήματα.*** (α) Αν A έχει διακεκριμένες ιδιοτιμές, τότε διαγωνιοποιείται. (β) Αν A έχει k ιδιοτιμές $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ με πολλαπλότητες $n_1,\ldots,n_k$ ($n_1+\ldots+n_k=n$), τότε διαγωνιοποιείται αν $\dim(V(\lambda_i)) = N(A-\lambda_i I)=n_i$.

– ***Συμμετρικά Μητρώα-Φασματικό Θεώρημα*** Αν Q συμμετρικό, έχει πραγματικές ιδιοτιμές και δέχεται πλήρες σύνολο ορθογώνιων ιδιοδιανυσμάτων. Μετασχηματισμός: $A=Q\Lambda Q^T$. Σε διαφορετικές ιδιοτιμές αντιστοιχούν ορθογώνια ιδιοδιανύσματα.

– ***Ανάλυση Ιδιαζουσών Τιμών***: Αν $A \in R^{m\times n}$: $A=U\Sigma V^T$, U, V μητρώα ορθοκανονικών βάσεων των χώρων $C(A)$, $N(A^T)$ και $R(A)$, $N(A)$ αντίστοιχα, $\Sigma \in R^{m\times n}$ διαγώνιο με τις ιδιοτιμές του A^TA (AA^T) κατά φθίνουσα διάταξη. Συνοπτικά: οι βάσεις του U και V λαμβάνονται από τα ορθογώνια ιδιοδιανύσματα του AA^T και A^TA αντίστοιχα, με κανονικοποίηση.

Χρήσιμοι Σύνδεσμοι

- G. Strang, σελίδα Γραμμικής Άλγεβρας, http://web.mit.edu/18.06/www/
- G. Strang , video-παρουσιάσεις-διαλέξεις , http://web.mit.edu/18.06/www/videos.shtml
- G. Strang , κώδικες διδασκαλίας - MATLAB , http://web.mit.edu/18.06/www/matlab.shtml
- Σελίδα Γραμμικής Άλγεβρας, Παν.Πατρών - ΤΜΗΥΠ , Ε. Γαλλόπουλος , http://scgroup.hpclab.ceid.upatras.gr/class/laa.html
- Πηγές από σελίδα καθηγητή Παν.Πατρών - ΤΜΗΥΠ , Ε.Γαλλόπουλου ,

Matrix Analysis and Applied Linear Algebra , http://www.matrixanalysis.com/

Γραμμική Άλγεβρα από Wikipedia , http://en.wikipedia.org/wiki/Linear_algebra

1ο Κεφάλαιο του βιβλίου Μαθηματικών Β' Λυκείου Τεχνολογικής Κατεύθυνσης , http://www.pi-schools.gr/content/index.php?lesson_id=12&ep=93

- Σελίδα Γραμμικής Άλγεβρας, Παν.Πατρών - ΤΜΗΥΠ , Χ. Α. Αλεξόπουλος,

http://arcadia.ceid.upatras.gr/ceid/courses/LinearAlg/edumat.htm

- Βιβλία Γραμμικής Άλγεβρας από Ελληνικά Πανεπιστήμια:
  1. *Γραμμική Άλγεβρα ,* Δημήτρης Σουρλάς. Αναπλ. Καθηγητής. ΠΑΤΡΑ, 2012 , pdf
  2. Γραμμική Άλγεβρα , Ιωάννης Μαρουλάς ,Καθηγητής ΣΕΜΦΕ-ΕΜΠ **,** pdf
  3. *Γραμμική Άλγεβρα* , Απόστολος Μπεληγιάννης. Πανεπιστήμιο Αιγαίου. Τμήμα Μαθηματικών , pdf

- Automatically Tuned Linear Algebra Software (ATLAS), **(**Ανοιχτό Λογισμικό) http://math-atlas.sourceforge.net/
- Μαθήματα από το Τμήμα Μαθηματικών του Ινστιτούτου τεχνολογίας της Μασσαχουσσέτης http://www-math.mit.edu/~goemans
- Παρόμοια από το Πανεπιστήμιο του Queensland http://www.numbertheory.org/
- Online textbook με έμφαση στην Γραμμική Άλγεβρα , http://www.math.miami.edu/~ec/book/
- Ανοιχτό λογισμικό (Απρίλιος 2003): http://web.archive.org/web/20040812083343/http://www.nhse.org/ http://www.netlib.org/utk/papers/iterative-survey/
- Εργαλείο εκμάθησης : http://www.math.odu.edu/~bogacki/cgi-bin/lat.cgi
- Σημειώσεις του καθηγητή Lee Lady πανεπιστήμιο Χαβάης (pdf text ghostscript) : http://www.math.hawaii.edu/~lee/linear/index.html
- Java εφαρμογές , http://www.mkaz.com/math/line_alg.html
- Online βιβλιοθήκη μαθηματικών & forum: http://mathforum.org/library/topics/algebra/
- Γλωσσάρι : Το Λεξικό της Γραμμικής Άλγεβρας , MIT , pdf

Σύντομες Ερωτήσεις και Απαντήσεις

1. Αν V είναι δ.χ., $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ μια βάση του και $\boldsymbol{u} \in V$, τότε το $\boldsymbol{u}$ μπορεί να παραχθεί από διαφορετικούς γραμμικούς συνδυασμούς των στοιχείων της;

Απ. Όχι: Το $\boldsymbol{u}$ δίνεται από *ένα μοναδικό γραμμικό συνδυασμό* $[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n]\boldsymbol{x}$ των διανυσμάτων της βάσης: το σύστημα $\boldsymbol{u}=[\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n]\boldsymbol{x}$ έχει μοναδική λύση $\boldsymbol{x}$ αφού τα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (βλ. $??$ Π1.2.1.)

2. Δίνεται ένα μητρώο πραγματικών 3×3 με μηδενική διαγώνιο και μη μηδενικά τα υπόλοιπα στοιχεία. Είναι ιδιάζον;

Απ. Εξαρτάται: Η μηδενική διαγώνιος δεν επηρεάζει την αντιστρεψιμότα. Για να είναι ιδιάζον πρέπει οι στήλες ή γραμμές να είναι γ.ε., οπότε η απαλοιφή να δώσει ένα α.τ.μ. U με ένα $u_i=0$, κλπ.

3. Αν ένα τετραγωνικό πραγματικό μητρώο A πολλαπλασιασθεί με ένα αριθμό d, τότε διαφοροποιείται και πως η ορίζουσα;

Απ. Η ορίζουσα διαφοροποιείται: αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, τότε $\det(dA)= d^n \det(A)$.

4. *Αν A, $B \in \mathbf{R}^{n\times n}$ είναι συμμετρικά, τότε είναι και το AB συμμετρικό;*

Απ. Λ. Είναι $(AB)^T=B^TA^T=BA$ και γενικά ισχύει $BA\neq AB$. Επομένως γενικά το AB δεν είναι συμμετρικό (άλλωστε δεν προκύπτει από τις γνωστές ιδιότητες των πράξεων με μητρώα τέτοια ιδιότητα…).
Αντιπαράδειγμα: για τα συμμετρικά μητρώα $A=[1\ 1;\ 1\ 0]$ και $B=[0\ 0;\ 0\ 1]$ είναι $AB=[0\ 1;\ 0\ 0]$, που είναι μη συμμετρικό. Άρα η πρόταση είναι ψευδής.

5. *Αν A, $B \in \mathbf{R}^{n\times n}$ είναι συμμετρικά, τότε πότε είναι και το AB συμμετρικό;*

Απ. Είναι $(AB)^T=B^TA^T=BA$. Γενικά ισχύει $BA\neq AB$. Ασφαλώς είναι συμετρικό όταν $A=B$: $(AB)^T=(A^2)^T=A^TA^T=AA=A^2$. Γενικότερα όμως, ισχύει όταν $AB=BA$. Πότε συμβάνει αυτό; Αν ανατρέξουμε στις ιδιότητες των ιδιοδιανυσμάτων, έχουμε $AB=BA$ όταν τα A και B έχουν τα ίδια ιδιοδιανύσματα.

6. (Σ/Λ) *Αν $A \in \mathbf{R}^{n\times n}$ είναι συμμετρικό και αντιστρέψιμο, τότε και το A^{-1} είναι συμμετρικό.*

Απ. Από την ιδιότητα $(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$ έχουμε $(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}=(A)^{-1}=A^{-1}$, δηλ. το A είναι συμμετρικό. Άρα η πρόταση είναι αληθής.

7. (Σ/Λ) Η βάση του χώρου στηλών ενός μητρώου $A \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ περιλαμβάνει τις ανεξάρτητες στήλες της α.κ.μ. R., ή ενός γραμμοϊσοδυνάμου του κλιμακωτού U.

Απ. Λ. Η βάση του χώρου στηλών ενός μητρώου περιλαμβάνει <u>τις στήλες του A που αντιστοιχούν</u> στις ανεξάρτητες στήλες της α.κ.μ. R ή ενός γραμμοϊσοδυνάμου του κλιμακωτού U.

8. (Σ/Λ) Σε κάθε μητρώο $A \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$ αντιστοιχεί ένα μοναδικό σύνολο οδηγών.

Απ. Λ. Τα σύνολα οδηγών είναι άπειρα. Εξαρτώνται από το είδος και τη σειρά των σ.μ.γ. που θα εκτελεθούν κατά την απαλοιφή. Επίσης, αν $\{u_1,\ldots,u_n\}$ ένα σύνολο οδηγών, τότε και κάθε $\{a_1u_1,\ldots,a_1u_n\}$, με $a_i\neq 0$, ομοίως είναι σύνολο οδηγών.

9. (Σ/Λ) Αν οι γραμμές ενός τετραγωνικού μητρώου είναι ανεξάρτητες, το ίδιο συμβάινει και με τις στήλες του.

Απ. Σ. Ως γνωστόν για κάθε μητρώο A ισχύει *αριθμός ανεξαρτήτων στηλών* = *αριθμός ανεξαρτήτων γραμμών* = $\mathrm{rank}(A)$. Αυτό σημαίνει ότι αν το A είναι τετραγωνικό μεγέθους n, στην περίπτωση αυτή θα είναι $\mathrm{rank}(A)=n$.

10. (Σ/Λ) Δύο γραμμοισοδύναμα (ή στηλοϊσοδύναμα) μητρώα έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές .

Απ. Λ. Η απαλοιφή δεν προσδιορίζει τις ιδιοτιμές. Αντιπαράδειγμα: Το α.τ.μ. U που προκύπτει κατά την απαλοιφή είναι γραμμοϊδύναμο με το αρχικό μητρώο A και έχει ιδιοτιμές τα διαγώνια στοιχεία u_i, δηλ. τους οδηγούς. Όμως οδηγοί και ιδιοτιμές δεν ταυτίζονται.
Η διαφορετικά: Αν B γραμμοϊσοδύναμο του A, τότε γράφεται $B=EA$, όπου E αντιστρέψιμος, γινόμενο μητρώων απαλοιφής. Τα αντίστοιχα χαρακτηριστικά πολυώνυνα $\varphi(\lambda)=(-1)^n\det(EA-\lambda I)$ και $(-1)^n\det(A-\lambda I)$ όμως, ούτε συμπίπτουν, ούτε έχουν τις ίδιες ρίζες.

11 (Σ/Λ) Για ένα μητρώο $A\in\boldsymbol{R}^{m\times n}$ μπορούν να προσδιορισθούν κατά την απαλοιφή περισσότερες της μιας α. κ. μορφές.

Απ. Λ. Οι κλιμακωτές μορφές είναι άπειρες, αλλά η α.κ.μ. είναι μοναδική και ανεξάρτητη της σειράς με την οποία θα εκτελεσθούν οι μετασχηματισμοί γραμμών. [*Για τυπική απόδειξη βλ. διαλέξεις*]

12 (Σ/Λ) Όλα τα αντιστρέψιμα (μη αντιστρέψιμα) μητρώα είναι (μη) διαγωνιοποιήσιμα.

Απ. Λ. Το είπαμε ήδη. Η αντιστρεψιμότητα δεν καθορίζει τη διαγωνιοποίηση. Η αλγεβρική πολλαπλότητα κάθε ιδιοτιμής πρέπει να είναι ίση με τη γεωμετρική. Π.χ. το ιδιάζον μητρώο[1 -2; 2 -4] διαγωνιοποιείται (πως?). Ενώ ένα 3×3 μητρώο (βρείτε ένα!) μπορεί να έχει διπλή ιδιοτιμή με αντίστοιχο ιδιοχώρο διάστασης 1.

13 Εξετάστε αν το μητρώο $A=[2,\ -4;\ 1,\ -2]$ διαγωνιοποιείται και τεκμηριώστε γιατί.

Απ. Από την ειδική μορφή του A (τάξης 1) διαπιστώνουμε ότι έχει διπλή ιδιοτιμή (0) και ότι το $[2,\ 1]^T$ είναι συγχρόνως ιδιοδιάνυσμα και του χώρου στηλών και του μηδενοχώρου αφού $[2,\ 1]^T[1,-2]=0$. Συνεπώς δεν υπάρχει δεύτερο ιδιοδιάνυσμα και το A δεν διαγωνιοποιείται.

14 Τα ιδιοποσά ενός μητρώου A συμπίπτουν με αυτά του A^T.

Απ. Λ. Οι ιδιοτιμές ταυτίζονται αφού τα χαρακτηριστικά πολυώνυμα συμπίπτουν $\det(A-\lambda I)=\det((A-\lambda I)^T)=\det(A^T-\lambda I)$. Τα ιδιοδιανύσματα όμως όχι αφού οι ιδιοχώροι $N(A-\lambda I)$, $N(A^T-\lambda I)$ είναι διαφορετικοί.

15 Αν ένα $AB=0$, τότε τουλάχιστον ένα από τα δύο μητρώα είναι 0.

Απ. Λ. Προφανώς λάθος. Αντιπαράδειγμα: $A=[1, 1, 2]$, $B= [-2, 1, 1]^T$.

16 Αν οι γραμμές ενός τετραγωνικού μητρώου είναι ανεξάρτητες, το ίδιο είναι και οι στήλες.

Απ. Σ. Αποτέλεσμα του θεμελιώδους θεωρήματος: τάξη γραμμών = τάξη στηλών = rank(A) = αριθμός οδηγών = n = dim(C(A))=dim(R(A)).

Βιβλιογραφία

Στη βιβλιογραφία που παρατίθεται μπορούν να αναζητηθούν εκτενέστερες πηγές και υλικό σχετικά με τα θέματα που παρουσιάστηκαν εδώ.

Οι πλέον βασικές αναφορές είναι οι [1], [2] και [3], ενώ πολύ χρήσιμες είναι και οι [4], [6]. Για θέματα που αναφέρονται στην Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα και στις συναφείς αριθμητικές υπολογιστικές μεθόδους, χρήσιμες είναι οι [14]-[17], [22] και [23].

Τέλος, οι [22] και [24]-[26] προτείνονται σε όσους επιθυμούν να ασχοληθούν με προβλήματα της Γραμμικής Άλγεβρας και αριθμητικών υπολογιστικών μεθόδων στο Matlab.

[1] G. Strang: «*Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα*» (μετάφραση Π. Πάμφιλου), Εκδ. Πανεπιστημίου Πατρών.

[2] G. Strang, «*Γραμμική Άλγεβρα και Εφαρμογές*», Παν/κές Εκδόσεις Κρήτης, 1996, Ηράκλειο.

[3] Γ. Δονάτος, Μ. Αδάμ, «*Γραμμική Άλγεβρα, Θεωρία και Εφαρμογές*», Gutenberg.

[4] J. H. Hubbard, Barbara Burke Hubbard, «*Διανυσματικός Λογισμός, Γραμμική Άλγεβρα και Διαφορικές Μορφές*», Εκδόσεις Πανεπιστημίου Πατρών, 2006.

[5] Saunders MacLane, Garrett Birkhoff, "*Algebra*", Macmillan, London, 1967

[6] D. S. Lay, "Linear Algebra and its Applications", Addison-Wesley, P. Co., 1994.

[7] J. L. Goldeberg, "*Matrix Theory with Applications*", McGraw Hill, 1991

[8] R. Bronson, "*Matrix Methods*", Academic Press, New York, 1971.

[9] S. Barnet, "*Matrices Methods and Applications*", Clarendon Press, Oxford, 1990.

[10] P. Halmos, "*Linear Algebra Problem Book*", American Mathematical Society, 1995.

[11] D. S. Lay, "Linear Algebra and its Applications", Addison-Wesley, P. Co., 1994

[12] S. J. Leon, "*Linear Algebra with Applications*", MacMillan, 1990.

[13] V.V. Prasolov, "*Problems and Theorems in Linear Algebra*", American Mathematical Society, 1994.

[14] B. N. Datta, "*A first course in Numerical Linear Algebra*", Brooks Cole, 1995.

[15] A. Kurosh, "*Cours d'Algebre Superieure*", Editions de Moscou

[16] O. Morris, «*Μια Εισαγωγή στη Γραμμική Άλγεβρα*», Αθήνα, Έκδοση Γ. Πνευματικού, 1980.

[17] Γ. Αβδελάς, Θ. Σίμος, «*Αριθμητική Γραμμική Άλγεβρα*», Εκδόσεις Συμεών, 2001.

[18] Γ. Αβδελάς, «*Γραμμική Άλγεβρα (Θεωρία Πινάκων)*», Χανιά, 1986.

[19] Δ. Δερμάνης, «*Γραμμική Άλγεβρα και Θεωρία Πινάκων*, Θεσσαλονίκη, 1985.

[20] Ιωάννης Β. Μαρουλάς, «*Γραμμική Άλγεβρα*», Αθήνα

[21] Γ. Παντελίδης Δ. Κραβαρίτης, Β. Νασόπουλος, Δ, Τσεκρέκος, «*Γραμμική Άλγεβρα*», Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα, 1992.

[22] Χ. Αλεξόπουλος, «*Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση και Περιβάλλοντα Υλοποίησης*», Πανεπιστημιακές Σημειώσεις, Πανεπιστήμιο Πατρών, 2007.

[23] Θ. Παπαθεοδώρου «*Εισαγωγή στην Αριθμητική Ανάλυση*», Πανεπιστημιακές Σημειώσεις, Πανεπιστήμιο Πατρών, 2010

[24] Χ. Αλεξόπουλος, «*Εισαγωγή στο Matlab*», Πανεπιστημιακές Σημειώσεις, 2004.

[25] "*Matlab, The Language of Thechnical Computing, Getting started with Matlab*", The Mathworks, 2002.

[26] Duane Hanselman, Bruce Littlefield, «*Μάθετε το Matlab 7*», Εκδόσεις Κλειδάριθμος, 2006, τόμος Α και Β.